THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

François BERTELOOT

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES ET KAHLERIENNITE DES VARIETES HOMOGENES SEMI-SIMPLES

Membres du Jury : Président : Ph. ANTOINE, Université de LILLE I

Rapporteurs : J. DETRAZ, Université de AIX-MARSEILLE
A.T. HUCKLEBERRY, Université de BOCHUM (RFA)
H. SKODA, Université de PARIS VI

Examinateurs : G. CŒURE, Université de LILLE I
J.J. LOEB, Université de LILLE I

Soutenue le 20 Mars 1987

N° d'ordre : 95

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

François BERTELOOT

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES ET KAHLERIENNITE DES VARIETES HOMOGENES SEMI-SIMPLES

Membres du Jury : Président : Ph. ANTOINE, Université de LILLE I

Rapporteurs : J. DETRAZ, Université de AIX-MARSEILLE
A.T. HUCKLEBERRY, Université de BOCHUM (RFA)
H. SKODA, Université de PARIS VI

Examinateurs : G. CŒURE, Université de LILLE I
J.J. LOEB, Université de LILLE I

Soutenue le 20 Mars 1987

Je remercie vivement Philippe Antoine d'avoir accepté la présidence du jury.

Gérard Coeuré a dirigé ma thèse. Sa très grande disponibilité m'a permis de bénéficier constamment de ses conseils et encouragements. Bien plus, son aide fut pour moi un véritable apprentissage ainsi qu'un exemple permanent de dynamisme. Je me permets de lui exprimer toute ma reconnaissance.

La présence de Jean-Jacques Loeb au jury de cette thèse me fait grand plaisir, il a suivi mon travail avec intérêt et je lui dois plusieurs remarques déterminantes ; je suis heureux de pouvoir le remercier.

En m'invitant aux Journées Complexes du Sud de la France en 1986, Madame Jacqueline Détraz m'a permis d'exposer la première partie de ce travail. Il m'est aujourd'hui agréable de la remercier pour sa participation au jury.

Henri Skoda, Pierre Dolbeault et Pierre Lelong ont montré l'intérêt qu'ils portent à mon travail en me faisant l'honneur de m'inviter à leur séminaire. Je remercie particulièrement Henri Skoda d'avoir accepté de faire partie du jury.

A.T. Huckleberry dont les travaux ont fortement motivé cette thèse a bien voulu rapporter sur mes résultats. Je lui exprime ma gratitude.

Soutenir une thèse suppose aussi de la commencer : je tiens à évoquer l'influence des discussions avec Etienne Ghys, Mathieu Meyer, Alain Pajor et Vlad Sergiescu sur la nature de mes choix. Je tiens aussi à remercier les étudiants, enseignants et chercheurs de l'U.F.R. et, particulièrement, Daniel Boichu, Bernard Callenaere et Aziz El Kacimi-Alaoui pour la sympathie qu'ils m'ont témoignée.

C'est avec beaucoup de gentillesse et de dévouement que Madame Raymonde Bérat a dactylographié le manuscrit. Je la remercie chaleureusement.

Je remercie également le personnel de reprographie de l'U.F.R. de Mathématiques.

INTRODUCTION

Les objets rigides des variétés homogènes complexes ont fait l'objet de nombreux travaux. En particulier, W. Barth et M. Otte ont étudié les fonctions holomorphes invariantes d'un groupe de Lie complexe réductif linéaire, (Voir [BO]). Ils montrent que pour un tel groupe G :

Si f *est une fonction holomorphe invariante par l'action d'un sous-groupe* H *alors* f *est également invariante par l'action de la clôture de Zariski de* H.

A.T. Huckleberry et G.A. Margulis mènent une étude analogue des objets souples. Pour ce qui concerne les hypersurfaces invariantes, ils démontrent le théorème suivant, (Voir [HM]).

Soit G *un groupe de Lie complexe semi-simple et* I *un sous-groupe de* G. *Alors, il n'existe aucune hypersurface de* G *invariante par* I *si et seulement si* I *est Zariski dense.*

D.N. Ahiezer obtient un résultat analogue par une méthode différente (Voir [AH]).

Leur conjecture générale est la suivante :

<u>Conjecture</u> : *Soit* G *un groupe de Lie complexe et* H *un sous-groupe de* G *tels que :* H *ne soit pas contenu dans un sous-groupe parabolique propre de* G *et que les seules fonctions holomorphes invariantes par* H *soient les constantes.*

Alors toute hypersurface invariante par H *l'est aussi par le premier groupe dérivé de* G.

Elle est démontrée par K. Oeljeklaus et W. Richtofer dans le cas résoluble, (Voir [OR]).

J.J. Loeb a remarqué que la connaissance du comportement des fonctions plurisousharmoniques invariantes pouvait éclairer ces questions. Aussi l'essentiel de notre travail consiste à étudier les fonctions plurisousharmoniques d'un groupe de Lie complexe réductif linéaire. Notre résultat de base est le suivant :

Soit ϕ *une fonction plurisousharmonique d'un groupe de Lie complexe réductif linéaire invariante par l'action d'un sous-groupe discret infini. Alors* ϕ *est également invariante par l'action d'un sous-groupe complexe à un paramètre. En particulier, une telle fonction ne peut être strictement plurisousharmonique.*

Sa démonstration nécessite de consacrer une attention particulière au "modèle" : $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$.

La kählериennité d'une variété complexe homogène n'est en général pas élucidée. Les cas compacts sont entièrement connus, dans un cadre plus général J.J. Loeb établit :

Soit G *un groupe de Lie complexe et* Γ *un sous-groupe discret de* G *inclus dans une forme réelle* $G_{\mathbb{R}}$ *de* G *à spectre non imaginaire pur tel que* $G_{\mathbb{R}}/\Gamma$ *soit compact. Alors* G/Γ *n'est pas kählerien.*

Dans le cas où G est semi-simple, un théorème de A.T. Huckleberry permet de ramener l'étude des formes faiblement kähleriennes invariantes à une question de fonctions plurisousharmoniques. Grâce à nos résultats antérieurs, nous obtenons alors le théorème suivant :

Soit G *un groupe de Lie complexe semi-simple dont* Γ *est un sous-groupe discret. Alors* G/Γ *est faiblement kählerien si et seulement si* Γ *est fini.*

En s'appuyant sur une technique originale déjà élaborée dans [OR], et sur le théorème de A.T. Huckleberry mentionné ci-dessus, K. Oeljeklaus ramène l'étude des hypersurfaces d'une variété complexe homogène semi-simple à celle de leurs fonctions plurisousharmoniques. En utilisant nos résultats, il généralise le théorème de Huckleberry-Margulis de la façon suivante, (Voir [BEO]).

Soit G *un groupe de Lie complexe semi-simple dont* H *est un sous-groupe quelconque. Alors toute hypersurface de* G *invariante par l'action de* H *l'est aussi par celle de la clôture de Zariski de* H.

CHAPITRE I

QUELQUES PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES.

Dans ce chapitre, nous formulons quelques propriétés algébriques des sous-groupes cycliques d'un groupe de Lie complexe réductif linéaire.

Si G est un groupe algébrique linéaire alors tout $\gamma \in G$ admet la décomposition suivante : $\gamma = \gamma_s \gamma_u$ où γ_s et γ_u commutent, γ_s étant diagonalisable et γ_u unipotent.

De plus, si $G(\gamma)$ désigne le sous-groupe engendré par γ et $\overline{G(\gamma)}$ sa clôture de Zariski, on a : $\overline{G(\gamma)} = \overline{G(\gamma_s)} \times \overline{G(\gamma_u)}$. De plus, $\overline{G(\gamma_s)}$ est isomorphe à un groupe abélien $\mathbb{C}^{*q}$, à moins que γ_s soit d'ordre fini, et $\overline{G(\gamma_u)}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Ces résultats sont établis dans [BOR], ils s'appliquent au cas des groupes réductifs qui sont toujours algébriques. Dans ce cas, W. Barth et M. Otte font les remarques suivantes : le centralisateur $C_G[G(\gamma_s)]$ est réductif et contient $\overline{G(\gamma_u)}$, il existe un sous-groupe de Lie fermé S de G isomorphe à $SL(2,\mathbb{C})$ tel que $\overline{G(\gamma_u)} \subset S \subset C_G\left[\overline{G(\gamma_s)}\right]$.

Ces propriétés permettent de classifier les sous-groupes cycliques d'un groupe de Lie complexe réductif linéaire. Cette classification est précisée par le théorème suivant :

Théorème 1.1 - *Soit* G *un groupe de Lie complexe réductif linéaire.*

Par tout $\gamma \in G$, *notons* $G(\gamma)$ *le sous-groupe engendré par* γ *et* $\overline{G(\gamma)}$ *sa clôture de Zariski. Nous avons alors la classification suivante :*

Cas 0 : $G(\gamma)$ *est fini et* $\overline{G(\gamma)} = G(\gamma)$.

Cas 1 : $G(\gamma)$ *est infini et il existe un sous-groupe* A *de* G *tel que :*

i) $A \cong \mathbb{C}^{*q}$

ii) $\overline{G(\gamma)} = A$.

Cas 2 : $G(\gamma)$ *est infini et il existe un sous-groupe* S *de* G *tel que :*

i) $S \cong SL(2,\mathbb{C})$

ii) $\overline{G(\gamma)} \cong T_{\mathbb{C}} = \{\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}, u \in \mathbb{C}\} \subset S$.

Cas 3 : $G(\gamma)$ *est infini et il existe un sous-groupe* $\tilde{S}$ *de* G *tel que :*

i) $\tilde{S} \cong SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$

ii) $\overline{G(\gamma)} \cong T_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{*q} \subset \tilde{S}$.

Remarques :

a) Les isomorphismes évoqués dans le théorème 1.1 sont biholomorphes.

a) On notera respectivement $\gamma = (e^{a_1},\ldots,e^{a_q})$; $\gamma = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\gamma = \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},(e^{a_1},\ldots,e^{a_q})\right]$ dans chacun des cas 1, 2 et 3.

Démonstration (*cf.* [BO], *page 107*).

W. Barth et M. Otte utilisent le théorème 1.1 ainsi que le théorème suivant pour étudier les fonctions holomorphes invariantes d'un groupe de Lie complexe réductif linéaire.

Théorème 1.2 - *Tout sous-groupe discret infini de* $GL(n,\mathbb{C})$ *contient au moins un élément d'ordre infini.*

Démonstration (cf. [BO], page 105).

Des théorèmes 1.1 et 1.2, nous tirons la proposition suivante que nous utiliserons dans l'étude des fonctions p.s.h. et des formes kählériennes invariantes.

Proposition 1.3 - *Soit* G *un groupe de Lie complexe réductif linéaire dont* Γ *est un sous-groupe discret infini. Alors il existe un élément* γ *de* Γ *d'ordre infini et un sous-groupe* G_0 *de* G *tels que :*

i) $G(\gamma) \subset G_0$.

ii) Il existe une involution $\sigma : G_0 \to G_0$ *vérifiant :* $\sigma(\gamma . g) = \gamma^{-1} . \sigma(g), \ \forall g \in G_0$.

En outre G_0 *satisfait à l'un des isomorphismes suivants :*

Cas 1 : $G_0 \xrightarrow[\cong]{\Psi} \mathbb{C}^{*q}, \quad \Psi(\gamma) = (e^{a_1}, \ldots, e^{a_q})$.

Cas 2 : $G_0 \xrightarrow[\cong]{\Psi} SL(2,\mathbb{C}), \quad \Psi(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cas 3 : $G_0 \xrightarrow[\cong]{\Psi} SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}, \quad \Psi(\gamma) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (e^{a_1}, \ldots, e^{a_q}) \right]$.

Démonstration : L'existence de γ, G_0 et Ψ résulte immédiatement des théorèmes 1.1 et 1.2.

Celle de l'involution découle de l'exhibition suivante dans chacun des trois cas d'isomorphisme :

Cas 1 : $\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}(z_1, \ldots, z_q) = (z_1^{-1}, \ldots, z_q^{-1})$;

Cas 2 : $\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}(A) = DAD^{-1}$ où $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$;

Cas 3 : $\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}(A,z) = (DAD^{-1}, z^{-1})$.

Il est facile de vérifier que σ ainsi définie satisfait la propriété annoncée. □

Nous avons également besoin de la caractérisation suivante d'algébricité d'un sous-groupe de Lie complexe d'un groupe algébrique linéaire complexe.

Lemme 1.4 - *Soit* G *un groupe algébrique linéaire complexe dont* H *est un sous-groupe de Lie complexe. Alors* H *est algébrique si et seulement si* $\overline{G(h)} \subset H$ *pour tout* $h \in H$.

Démonstration (*cf.* [BO], *page 105*).

CHAPITRE II

FONCTIONS HOLOMORPHES ET FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES INVARIANTES D'UN GROUPE DE LIE COMPLEXE REDUCTIF.

§ 1 - *Fonctions holomorphes invariantes.*

L'objet de ce paragraphe est de rappeler le théorème suivant dû à W. Barth et M. Otte.

On considèrera que l'action des sous-groupes a toujours lieu à gauche.

Théorème 2.1 - *Soit* G *un groupe de Lie complexe linéaire réductif dont* H *est un sous-groupe quelconque. Alors, toute fonction holomorphe de* G *invariante pour* H *l'est aussi par la clôture de Zariski* $\bar{H}$ *de* H.

Autrement dit, si $\mathcal{O}(G)^H$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes de G invariantes par H alors on a : $\mathcal{O}(G)^H = \mathcal{O}(G)^{\bar{H}}$ (cf. [BO]).

L'essentiel de la démonstration du théorème 2.1 consiste à étudier les cas particuliers suivants :

Cas (1) : $G = \mathbb{C}^{*q}$ et $H = \{(e^{a_1 n}, \dots, e^{a_q n}); n \in \mathbb{Z}\}$ tel que $\bar{H} = \mathbb{C}^{*q}$.

Cas (2) : $G = SL(2,\mathbb{C})$ et $H = T_{\mathbb{Z}} = \{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; n \in \mathbb{Z}\}$;

$\bar{H} = T_{\mathbb{C}} = \{\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; u \in \mathbb{C}\}$.

Cas (3) : $G = SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$ et $H = T_{\mathbb{Z}} \times \{(e^{a_1 n},\ldots,e^{a_q n});n\in\mathbb{Z}\}$
tel que $\bar{H} = T_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{*q}$.

Le théorème 2.1 étant satisfait dans chacun de ces trois cas (cf. [BO]), l'application du théorème 1.1 montre immédiatement que f est constante sur $\overline{G(g)}$ dès que f est invariante par $G(g)$. En particulier, l'utilisation de cette remarque pour les translatées à droite de f : $f^{g_1} = f(\cdot g_1)$ entraîne que f est $\overline{G(g)}$ invariante dès lors qu'elle est $G(g)$ invariante. Soit $\tilde{H} = \{g \in H / \forall f \in \mathcal{O}(G)^H, f(g\cdot) = f\}$. $\tilde{H}$ est le plus grand sous-groupe de G sous l'action duquel tous les éléments de $\mathcal{O}(G)^H$ sont invariants. Ainsi, compte tenu de ce qui précède, $\overline{G(h)} \subset \tilde{H}$ pour tout $h \in \tilde{H}$. Alors $\tilde{H}$ est de Lie complexe et contient H, on a, en vertu du lemme 1.4, $\bar{H} \subset \tilde{H}$. D'où $\mathcal{O}(G)^H \subset \mathcal{O}(G)^{\bar{H}}$.

Remarques :

1) La démonstration de W. Barth et M. Otte utilise explicitement l'analycité des fonctions holomorphes et ne peut donc être adaptée au cas des fonctions plurisousharmoniques.

2) Dans le cas où $G = SL(2,\mathbb{C})$ et $H = T_{\mathbb{Z}}$ le théorème 2.1 stipule que $\mathcal{O}(SL(2,\mathbb{C}))^{T_{\mathbb{Z}}} = \mathcal{O}(SL(2,\mathbb{C}))^{T_{\mathbb{C}}}$.

Nous utiliserons ce résultat dans la suite.

La suite de ce chapitre est consacrée à l'étude des fonctions plurisousharmoniques d'un groupe de Lie complexe réductif linéaire invariantes par un sous-groupe monogène. Les paragraphes 2, 3 et 4 traitent des cas typiques discutés dans le théorème 1.1.

Les sous-groupes seront toujours supposés agir à gauche.

§ 2 - *Fonctions plurisousharmoniques invariantes. Le cas abélien* : $G = \mathbb{C}^{*q}$.

Nous démontrons, ici, le théorème suivant :

Théorème 2.2 - *Soit* φ *une fonction p.s.h. sur* $\mathbb{C}^{*q}$ *invariante par* $\Gamma = \{(e^{a_1 n},\dots,e^{a_q n});n\in\mathbb{Z}\}$. *Alors* φ *est aussi invariante par* $\Gamma_{\mathbb{C}} = \{(e^{\alpha_1 u},\dots,e^{\alpha_q u});u\in\mathbb{C}\}$ où $\alpha_j = \mathrm{Re}\, a_j$.

La démonstration du théorème 2.2 ne pose aucune difficulté réelle. Elle fait néanmoins appel à quelques propriétés simples des fonctions plurisousharmoniques, ou sous-harmoniques, que nous commençons par rappeler. Ces propriétés seront également utiles dans les paragraphes suivants.

Lemme 2.3 -

i) L'inf. d'une famille de fonctions p.s.h. est p.s.h. Le sup également pourvu qu'il soit s.c.s.

ii) Soit G *un groupe de Lie complexe dont* K *est un sous-groupe compact.*
Soit μ *une mesure de Haar sur* K. *Soit* φ *une fonction p.s.h. sur* G *alors la fonction* $\tilde{\varphi}$ *définie par* $\tilde{\varphi}(g) = \int_K \varphi(gk)d\mu(k)$ *est p.s.h. sur* G *et invariante par l'action de* K *à droite.*

iii) Une fonction sous-harmonique de $\mathbb{C}$ *ne dépendant que de* $\mathrm{Re}\, u = x$ *est une fonction convexe de* x.

iv) Toute fonction sous-harmonique majorée sur $\mathbb{C}$ *est constante.*

<u>*Démonstration du théorème*</u> *2.2* : Soit ψ p.s.h. sur $\mathbb{C}^{*q}$ et invariante par Γ. Posons $\tilde{\psi}(z_1,\ldots,z_q) = \sup_{\theta_j \in [0,2\pi]} \psi(e^{i\theta_1}z_1,\ldots,e^{i\theta_q}z_q)$.

$\tilde{\psi}$ est encore p.s.h. en vertu du lemme 2.3, i). (C'est la compacité de $[0,2\pi]^q$ qui assure la semi-continuité supérieure de $\tilde{\psi}$). La fonction $u \mapsto \tilde{\psi}(e^{\alpha_1 u} z_1,\ldots,e^{\alpha_q u} z_q)$ est sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ et ne dépend que de Re u, c'est donc une fonction convexe de $x = \text{Re } u$ (cf. Lemme 2.3, iii)). En outre, cette fonction convexe est périodique donc constante.
On a donc $\psi(e^{\alpha_1 u} z_1,\ldots,e^{\alpha_q u} z_q) \leq \tilde{\psi}(e^{\alpha_1 u} z_1,\ldots,e^{\alpha_q u} z_q) = \tilde{\psi}(z) \quad \forall u \in \mathbb{C}$.
Ce qui donne l'invariance cherchée par le lemme 2.3, iv). □

§ 3 - <u>*Fonctions plurisousharmoniques invariantes*</u>. <u>*Le cas semi-simple typique*</u> : $G = SL(2,\mathbb{C})$.

Nous allons démontrer le théorème suivant qui généralise le cas particulier correspondant du théorème 2.1.

<u>Théorème</u> 2.4 - *Toute fonction plurisousharmonique de* $SL(2,\mathbb{C})$ *invariante par* $T_{\mathbb{Z}}$ *l'est aussi par* $T_{\mathbb{C}}$.

Notre démonstration repose sur l'utilisation du théorème 2.1(*).

(*) A.T. Huckleberry a établi simultanément une démonstration du théorème 2.4 ne faisant pas appel au théorème 2.1.

Notations : $T_A = \{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} = T_a ; a\in A\}$, $A = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

σ désigne l'involution de $SL(2,\mathbb{C})$ définie par $\sigma(A) = DAD^{-1}$ où $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{bmatrix}$.

Pour toute fonction ψ de $SL(2,\mathbb{C})$, on note F_ψ la fonction de la variable réelle définie par $F_\psi(y) = \psi(T_{iy})$.

P désignera le cône des fonctions p.s.h. de $SL(2,\mathbb{C})$ invariantes par $T_\mathbb{R}$ et P_∞ le sous-cône des éléments réguliers de P.

Remarque :

En vertu du lemme 2.3, iii), F_ψ est une fonction convexe pour tout $\psi \in P$.

Cette remarque motive le lemme suivant :

Lemme 2.5 - *Si pour toute fonction* $\psi \in P_\infty$ *la fonction convexe associée* F_ψ *est monotone alors le théorème 2.4 est vrai.*

Démonstration : Soit ψ p.s.h. sur $SL(2,\mathbb{C})$ et invariante par $T_\mathbb{Z}$.

Posons $\psi_1(A) = \sup_{x\in[0,1]} \psi_1(T_x A)$, il est facile de voir que $\psi_1 \in P$.

Posons également $\psi_2 = \mathrm{Max}\{\psi_1, \psi_1\circ\sigma\}$, comme $\sigma(T_x A) = T_{-x}\sigma(A)$, ψ_2 reste dans P mais, en outre, est invariante par σ : $\psi_2 \circ \sigma = \psi_2$.

Soit pour finir $\psi_2^* \in P_\infty$ une majorante de ψ_2 que l'on obtiendra par un procédé classique de convolution.

On a par construction : $F_{\psi_2}(y) = \psi_2(T_{iy}) \leq \psi_2^*(T_{iy}) = F_{\psi_2^*}(y)$.

$F_{\psi_2^*}(y)$ étant (convexe) monotone par hypothèse, $F_{\psi_2}(y)$ l'est également.

Mais F_{ψ_2} est paire car $\psi_2 \circ \sigma = \psi_2$ et $\sigma(T_{iy}) = T_{-iy}$, donc F_{ψ_2} est constante.

Finalement, comme $F_{\psi_1}(y) \leq F_{\psi_2}(y) = F_{\psi_2}(0)$ la fonction convexe F_{ψ_1} est aussi constante, c'est-à-dire que $\psi_1(T_{iy}) = \psi_1(I)$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$. D'où $\psi_1(T_u) = \psi_1(I)$, $\forall\, u \in \mathbb{C}$.

La fonction $u \to \psi(T_u)$ est sous-harmonique, majorée par $\psi_1(T_u) = \psi_1(I)$, donc constante. En appliquant le même raisonnement aux translatées $\psi^A(X) = \psi(XA)$ de ψ on a bien l'invariance de ψ par $T_{\mathbb{C}}$. $\square$

Le lemme 2.5 permet d'entamer la démonstration du théorème 2.4 en raisonnant par l'absurde.

Supposons à cet effet qu'il existe $\psi \in P_\infty$ telle que F_ψ soit non monotone.

Il est facile de voir que les fonctions $y \to F_{\psi A}(y) = \psi(T_{iy}A)$ sont, elles aussi, convexes non monotones pour A pris dans un voisinage compact V assez petit de I.

Montrons qu'il est possible de trouver $\psi_0 \in P_\infty$ telle que : $\forall (A,y) \in V \times \mathbb{R}$, $F''_{\psi A}(y) \geq \alpha > 0$.

Observons pour cela que $\{y \in \mathbb{R} / F''_{\psi A}(y) = F'_{\psi A}(y) = 0\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on pourra supposer inclus dans $[-k,k]$ pour tout $A \in V$.

Donnons-nous χ une fonction plateau de $\mathbb{R}$ identique à 1 sur

$[-2k,2k]$ et définissons $\tilde{\vartheta}$ par $\tilde{\vartheta}(A) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\vartheta}(T_{iu}A)\chi(u)du$. Il est alors facile de constater que $F''_{\tilde{\vartheta}A} = F''_{\vartheta A} * \chi$ et $F'_{\tilde{\vartheta}A} = F'_{\vartheta A} * \chi$ ne sont jamais simultanément nulles pour tout $A \in V$.

Posons, pour finir, $\vartheta_0 = \exp(\tilde{\vartheta})$, comme $F''_{\vartheta_0 A}(y) = \exp\left[F_{\tilde{\vartheta}A}(y)\right] \cdot \left[F'^2_{\tilde{\vartheta}A}(y) + F''_{\tilde{\vartheta}A}(y)\right]$, on voit aisément que ϑ_0 est un bon candidat.

La suite de la démonstration nécessite l'emploi du lemme suivant dont la démonstration, essentiellement basée sur les techniques L^2 de L. Hörmander est donnée dans l'Appendice B.

<u>Lemme</u> 2.6 - *Soit* Ω *un ouvert pseudo-convexe de* $\mathbb{C}^{N+1}$. *Notons* ω *la projection de* Ω *sur la droite* $z_1 = \ldots = z_N = 0$ *et notons* $\Omega_M = \{(z_1,\ldots,z_N,z_{N+1}) = (\tilde{z},z_{N+1}) \in \Omega/|\tilde{z}| < M\}$ *avec* $M > 0$.

Soit f *une fonction holomorphe sur* ω *telle qu'il existe* $M > 0$ *pour lequel* $\int_{\Omega_M} |f(z_{N+1})|^2 \frac{e^{-\vartheta}}{c} d\lambda < +\infty$, *où* $d\lambda$ *désigne la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{C}^{N+1}$, ϑ *est une fonction p.s.h. régulière sur* Ω *et* c *un minorant de plurisousharmonicité pour* ϑ, *que l'on pourra supposer inférieur à* 1.

Alors, il existe F *analytique sur* Ω *identique à* f *sur* ω *et telle que* $\int_{\Omega} |F|^2 \exp - \left[\vartheta + \sum_{i=1}^{N} |z_i|^2\right] d\lambda < +\infty$.

$SL(2,\mathbb{C})/_{T_{\mathbb{Z}}}$ n'est pas holomorphiquement séparé (cf. théorème 2.1) donc n'est pas de Stein. En revanche, l'ouvert $\tilde{\Omega} = \{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}^{\sim} \in SL(2,\mathbb{C})/_{T_{\mathbb{Z}}} / d \neq 0\}$

l'est comme le montre l'isomorphisme suivant :

$$\tilde{\Omega} \xrightarrow{\eta} \Omega = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^\sim \longrightarrow \left[e^{2i\pi \frac{c}{d}}, b, d\right] .$$

En appliquant le lemme 2.6 sur Ω avec un poids induit par ϑ_0, nous fabriquons une fonction holomorphe F non constante sur l'image d'une $T_{\mathbb{C}}$-orbite par η. L'estimation à laquelle cette fonction sera soumise mettra en évidence l'existence d'un prolongement analytique de $f = F \circ \eta$ à $SL(2,\mathbb{C})/T_{\mathbb{Z}}$.

La proposition suivante nous fournit une condition suffisante pour qu'une fonction $F \circ \eta$, où F est holomorphe sur Ω, soit analytiquement prolongeable à $SL(2,\mathbb{C})/T_{\mathbb{Z}}$. Sa démonstration repose sur un lemme dont on trouvera une démonstration dans [SK].

<u>Lemme</u> 2.7 - *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}^n$, X *une hypersurface de* Ω *et* f *une fonction holomorphe dans* $\Omega \backslash X$ *localement de carré intégrable sur* Ω. *Alors* f *se prolonge holomorphiquement à* Ω.

<u>Proposition</u> 2.8 - *Soit* F *une fonction holomorphe sur* Ω. *Si pour tout* $A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ b_0 & d_0 \end{pmatrix}$ *tel que* $b_0 c_0 \neq 0$ *et tout compact*

$K_\varepsilon = \{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^\sim \in \tilde{\Omega} \,/\, |d| \leq \varepsilon,\ |c-c_0| \leq \varepsilon,\ |b-b_0| \leq \varepsilon\}$, *on a* :

$$\int_{\eta(K_\varepsilon)} |F(z_1,z_2,z_3)|^2 \frac{1}{|z_1|^2}\, d\lambda < +\infty$$

alors la fonction $f = F \circ \eta$ *se prolonge holomorphiquement à* $SL(2,\mathbb{C})_{/T_{\mathbb{Z}}}$.

<u>*Démonstration*</u> : Soit F une fonction holomorphe sur Ω. Le lemme 2.7 montre que pour que $f = F \circ \eta$ se prolonge analytiquement à $SL(2,\mathbb{C})_{/T_{\mathbb{Z}}}$ il suffit que les intégrales :

$$\int_{(u,b,d)\in\Psi_1(K_\varepsilon)} |F(e^{2i\pi u},b,d)|^2 d\lambda(u,b,d) \quad \text{soient finies}$$

pour tout compact $K_\varepsilon = \{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}^\sim \in \tilde{\Omega} \ / \ |d| \leqslant \varepsilon, \ |c-c_o| \leqslant \varepsilon, \ |b-b_o| \leqslant \varepsilon\}$

avec $A_o = \begin{pmatrix} a_o & c_o \\ b_o & d_o \end{pmatrix}$ tel que : $b_o c_o \neq 0$. Ψ_1 désignant le paramétrage suivant de K_ε : $\Psi_1(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d\end{bmatrix}^\sim) = (u,b,d) = (\frac{c}{d},b,d)$.

Observons que $\operatorname{Re} u + \operatorname{Re} \frac{1}{bd} - \operatorname{Re} \frac{a_o}{b_o} = \operatorname{Re} \frac{a}{b} - \operatorname{Re} \frac{a_o}{b_o}$, si bien que pour ε pris assez petit, on a $\left|\operatorname{Re} u + \operatorname{Re} \frac{1}{bd} - \operatorname{Re} \frac{a_o}{b_o}\right| < \frac{1}{2}$.

Alors l'application $\Psi_2 : \Psi_1(K_\varepsilon) \to \Psi_2 \circ \Psi_1(K_\varepsilon) = \eta(K_\varepsilon)$ définie par $\Psi_2(u,b,d) = (e^{2i\pi u},b,d) = (z_1,z_2,z_3)$ est injective.

La formule de changement de variable nous donne alors :

$$\int_{\Psi_1(K_\varepsilon)} |F(e^{2i\pi u},b,d)|^2 d\lambda(u,b,d) = \int_{\Psi_2\circ\Psi_1(K_\varepsilon)} |F(z_1,z_2,z_3)|^2 \frac{1}{|z_1|^2}\, d\lambda(z_1,z_2,z_3).$$

Ce qui démontre la propostion 2.8. $\square$

Considérons la fonction p.s.h. Φ définie sur Ω par $\Phi \circ \eta = \dot{\phi}_o$.

Les conditions portant sur ψ_0 se traduisent par le fait que $\Phi(z_1,z_2,z_3)$ est une fonction convexe non monotone de $\mathrm{Log}|z_1|$ dont la dérivée seconde est uniformément minorée pour (z_2,z_3) pris dans un voisinage compact bien choisi de $(0,1)$.

Posons $\Psi(z_1,z_2,z_3) = \Phi(z_1,z_2,z_3) + |z_2|^2 + |z_3|^2$. Remarquons que $\Psi(z).X > c(z_1) > 0$ pour $Z = (z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^* \times K_1$ et $||X||^2 = 1$.

En effet, dans le cas contraire, il existerait une suite $((z_1,z_2^n,z_3^n),X^n)$ telle que $\Phi(z^n).X^n$ et (X_2^n,X_3^n) tendent vers 0. En extrayant au besoin une sous-suite, on obtiendrait $(z_2^0,z_3^0) \in K_1$ et X_1^0 de module 1 tels que $\Phi(z_1,z_2^0,z_3^0).(X_1^0,0) = 0$. Ceci contredirait la stricte positivité de $\Phi''_{\mathrm{Log}|z_1|}$ sur $\mathbb{C}^* \times K_1$.

En outre, en remarquant que $\lim\limits_{|z_1|\to+\infty} \Phi(z_1,z_2,z_3) = +\infty$ uniformément sur K_1, et en composant Ψ par une fonction convexe χ assez croissante, on peut disposer d'une fonction $\tilde{\Phi} = \chi\left[\Phi + |z_2|^2 + |z_3|^2\right]$ dont le minorant de plurisousharmonicité est minoré par $c_0 > 0$ sur $\mathbb{C}^* \times K_1$ et telle que $\Phi(z_1,z_2,z_3) \geqslant |\mathrm{Log}|z_1||$ sur $\mathbb{C}^* \times K_1$.

On utilise maintenant le lemme 2.6 sur Ω en prenant pour coordonnées de $\mathbb{C}^3$:

$z' = (z_1',z_2',z_3') = (z_2,z_3-1,z_1)$. On notera $z = (z_1,z_2,z_3)$.

On considère la fonction $f(z_3') = z_3'$ et le poids $2\tilde{\Phi} + 2\mathrm{Log}|z_3'|$.

Nous avons : $\displaystyle\int_{\mathbb{C}^*\times K_1} |z_1|^2 e^{-2\tilde{\Phi}-2\mathrm{Log}|z_1|} \frac{1}{c}\, d\lambda(z) \leqslant \frac{1}{c_0} \int_{\mathbb{C}^*\times K_1} e^{-2\tilde{\Phi}} d\lambda(z) < +\infty.$

donc ainsi $\displaystyle\int_{\substack{(z'_1,z'_2)\in K'_1 \\ z'_3\in\mathbb{C}^*}} |f(z'_3)|^2 e^{-2\tilde{\Phi}-2\mathrm{Log}|z'_3|} \frac{1}{c}\, d\lambda(z') < +\infty$ ce qui, en vertu du lemme 2.6 assure l'existence d'un prolongement holomorphe F de f à Ω tel que :

$$\int_{\Omega} |F(z')|^2 e^{-2\tilde{\Phi}-|z'|^2-2\mathrm{Log}|z'_3|}\, d\lambda(z') < +\infty .$$

Mais alors, si K_ε est un compact du type introduit à la proposition 2.8, on a la majoration :

$$\int_{\eta(K_\varepsilon)} \frac{|F(z)|^2}{|z_1|^2}\, d\lambda(z) = \int_{\eta(K_\varepsilon)'} \frac{|F(z')|^2}{|z'_3|^2}\, d\lambda(z')$$

$$\leq \sup_{\eta(K_\varepsilon)'} \left(e^{2\chi\left[\Phi+|z'|^2\right]+|z'|^2}\right) . \int_{\Omega} |F(z')|^2 e^{-2\tilde{\Phi}-|z'|^2-2\mathrm{Log}|z'_3|}\, d\lambda(z').$$

Et donc, Φ étant bornée sur $\eta(K_\varepsilon)$ puisque ψ_0 est continue sur $SL(2,\mathbb{C})$, on a bien :

$$\int_{\eta(K_\varepsilon)} \frac{|F(z)|^2}{|z_1|^2}\, d\lambda(z) < +\infty.$$

D'après la proposition 2.8, $F \circ \eta$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $SL(2,\mathbb{C})$, invariante par $T_{\mathbb{Z}}$ mais identique à $\exp 2i\pi z$ sur $\{T_z . I, z \in \mathbb{C}\}$. Compte tenu du théorème 2.1, nous obtenons ainsi la contradiction cherchée.

§ 4 - *Fonctions plurisousharmoniques invariantes ; le cas réductif typique :* $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$.

L'objet de ce paragraphe est d'obtenir la généralisation suivante du théorème 2.4.

Théorème 2.9 - *Soit* ψ *une fonction plurisousharmonique sur* $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$ *invariante par* $\Gamma = \{(\begin{bmatrix}1 & n\\0 & 1\end{bmatrix},(e^{a_1 n},\dots,e^{a_q n}));n\in\mathbb{Z}\}$ *alors* ψ *est invariante par* $\Gamma_{\mathbb{C}} = \{(\begin{bmatrix}1 & u\\0 & 1\end{bmatrix},(e^{\alpha_1 u},\dots,e^{\alpha_q u}));u\in\mathbb{C}\}$ où $\alpha_j = \mathrm{Re}\, a_j$.

Notations :

- L'action de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ sur $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$ est donnée par :

  $\alpha.(A,z) = (T_\alpha A,\alpha.z)$ où $(\alpha.z) = (e^{a_1\alpha}z_1,\dots,e^{a_q\alpha}z_q)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

- L'action de $\mathbb{C}$ est définie par :

  $u.(A,z) = (T_u A,u.z)$ où $(u.z) = (e^{\alpha_1 u},\dots,e^{\alpha_q u})$ pour $u \in \mathbb{C}$.

  (On note $\alpha_j = \mathrm{Re}\, a_j$).

- L'involution σ de $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$ est définie par

  $\sigma(A,z) = (DAD^{-1},z^{-1})$ où $D = \begin{pmatrix}i & 0\\0 & -i\end{pmatrix}$.

- P désignera le cône des fonctions p.s.h. sur $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$, invariantes par l'action de $\mathbb{R}$ et ne dépendant que de $(A,|z|)$. P_∞ sera le sous-cône des éléments réguliers de P.

Remarques :

Pour tout $\psi \in P$ la fonction $F_\psi(x)$ définie par $\psi(T_x,1)$ est une fonction convexe de la variable réelle. En effet $F_\psi(x) = \psi(T_x,1) =$

$= \psi(I,(-x).1)$ et $u \to \psi(I,u.1)$ est une fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ ne dépendant que de $\mathrm{Re}\,u$.

Cette remarque conduit au lemme suivant :

Lemme 2.10 - *Si pour toute fonction $\psi \in P_\infty$ la fonction convexe associée F_ψ est monotone alors le théorème 2.9 est vrai.*

Démonstration : Considérons d'abord $\psi_1 \in P$ et posons $\psi_2 = \mathrm{Max}\{\psi_1, \psi_1 \circ \sigma\}$.

Comme $\sigma[x.(A,z)] = (-x).[\sigma(A,z)]$, ψ_2 reste dans P mais en outre est invariante par σ : $\psi_2 = \psi_2 \circ \sigma$.

Soit aussi $\psi_2^* \in P_\infty$ une majorante de ψ_2 obtenue par convolution. On a $F_{\psi_2}(x) = \psi_2(T_x,1) \leq \psi_2^*(T_x,1) = F_{\psi_2^*}(x)$, $F_{\psi_2^*}$ étant (convexe) monotone par hypothèse, F_{ψ_2} l'est aussi.

Mais F_{ψ_2} est paire car $\psi_2 = \psi_2 \circ \sigma$ et $\sigma(T_x,1) = (T_{-x},1)$ donc F_{ψ_2} est constante. Ainsi, comme $F_{\psi_1}(x) \leq F_{\psi_2}(x) = F_{\psi_2}(0)$ la fonction convexe F_{ψ_1} est elle aussi constante, autrement dit : $\psi_1(T_x,1) = \psi_1(I,1)$.

Il suffit d'appliquer ce raisonnement aux translatées $\psi_1^{(A_0,z_0)}(X,z) = \psi_1(XA_0, z\times z_0)$ de ψ_1 pour obtenir l'invariance de $A \to \psi_1(A,z_0)$ par $T_{\mathbb{R}}$, donc par $T_{\mathbb{C}}$ en vertu du théorème 2.4. L'invariance de ψ_1 par l'action de $\mathbb{C}$ découle alors immédiatement du calcul suivant :

$$\psi_1[u.(A_0,z_0)] = \psi_1(T_uA_0,u.z_0) = \psi_1(T_uA_0,x.z_0) = \psi_1(T_{iy}A_0,z_0) = \psi_1(A_0,z_0)$$

pour tout $u = x + iy \in \mathbb{C}$.

Le lemme sera démontré si nous exhibons une majorante $\psi_1 \in P$ d'une fonction p.s.h. ψ invariante par $\mathbb{Z}$ sur $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$. Une telle majorante est donnée par :

$$\psi_1(A,z) = \sup_{\substack{x\in[0,1] \\ \theta_j\in[0,2\pi]}} \psi(T_x A, x.(e^{i\theta_1}z_1,\dots,e^{i\theta_q}z_q)).$$

□

Grâce au lemme 2.10, nous sommes en mesure de démontrer le théorème 2.9 en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $\psi_o \in P_\infty$ telle que F_{ψ_o} soit non monotone.

En procédant comme dans le paragraphe précédent, on pourra supposer que $x \to \psi_o(T_{x+iy},1)$ est strictement convexe, non monotone, dès que $|y|$ est assez petit. En outre, on s'arrangera pour que $\inf_{\mathbb{R}} F_{\psi_o}(x) = F_{\psi_o}(o)$.

Le lemme technique suivant, démontré dans l'appendice C, nous conduira à la conclusion.

<u>Lemme</u> 2.11 - *Soit* L *un cône convexe de fonctions de* $\mathbb{C}$ *à valeurs réelles tel que :*

a) L *est réticulé supérieurement et contient les constantes.*

b) $g \in L \Longrightarrow g \circ t_z \in L, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (t_z(u) = z+u)$.

c) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall g \in L, \quad x \to g(x+z)$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$.

d) $\exists\, g_o \in L$ *et* $\exists\, \varepsilon_o > 0$ *tels que :*

i) $|\mathrm{Im}\, z| < \varepsilon_o \Longrightarrow \{x \to g_o(x+z)$ *strictement convexe non monotone*$\}$

ii) $\inf_{\mathbb{R}} g_0(x) = g_0(o)$;

iii) g_0 *est continue.*

e) $\forall g \in L,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \inf_{\mathbb{R}} g(x+z) = \inf_{\mathbb{R}} g(x)\ \ (= \inf_{\mathbb{C}} g).$

Alors, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall g \in L,$ $g[(\gamma+i)y + z] = g(z).$

Montrons que $\{u \to \mathcal{V}(T_u A,1)\}_{\substack{A\in SL(2,\mathbb{C})\\ \mathcal{V}\in P_\infty}}$ est un cône remplissant les conditions du lemme 2.11.

La vérification des propriétés (a), (b), (c), (d) ne présente aucune difficulté, en particulier, on choisira $g_0(u) = \mathcal{V}_0(T_u,1)$. Seule (e) exige un peu de travail.

Soit $\mathcal{V} \in P_\infty$, posons $\mathcal{V}' : SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.
$$(A,u) \longrightarrow \mathcal{V}(A,u.1)$$

$\mathcal{V}'$ est p.s.h. et ne dépend pas de $\operatorname{Im} u$. Le principe du minimum de C.O. Kiselman (cf. Appendice A) fournit alors une fonction p.s.h. $\mathcal{V}_m$ sur $SL(2,\mathbb{C})$ définie par : $\mathcal{V}_m(A) = \inf_{\mathbb{C}} \mathcal{V}'(A,u)$. $\mathcal{V}_m$ étant de toute évidence invariante par $T_{\mathbb{R}}$, l'est aussi par $T_{\mathbb{C}}$ en vertu du théorème 2.4. C'est là, la propriété cherchée :

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \mathcal{V}(T_x T_z A,1) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \mathcal{V}(T_z A,(-x).1) = \mathcal{V}_m(T_z A) = \mathcal{V}_m(A) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \mathcal{V}(T_x A,1).$$

De l'application du lemme 2.11, nous déduisons l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathcal{V}(T_{(\gamma+i)y} A,1) = \mathcal{V}(A,1) \qquad \forall \mathcal{V} \in P_\infty,\ \forall A \in SL(2,\mathbb{C}),\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Il est alors facile d'utiliser le théorème 2.4 pour obtenir l'invariance de $A \to \mathcal{V}(A,1)$ par $T_{\mathbb{C}}$. Mais $\mathcal{V}_0(T_x,1)$ est non monotone : c'est la contradiction attendue.

Le théorème est démontré.

Pour terminer ce paragraphe, nous donnons une version plus forte du théorème 2.9.

Théorème 2.12 - *Soit* $\mathcal{V}$ *p.s.h. sur* $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$ *et invariante par* $\Gamma = \{\left[\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix},(e^{a_1 n},\ldots,e^{a_q n})\right];n\in\mathbb{Z}\}$ *alors* $\mathcal{V}$ *est invariante par* $T_{\mathbb{C}} \times \{(e^{\alpha_1 u},\ldots,e^{\alpha_q u});u\in\mathbb{C}\}$, où $\alpha_j = \mathrm{Re}\,a_j$.

Démonstration : Soit $\mathcal{V}$ p.s.h. sur $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$ et invariante par Γ. Comme nous l'avons vu à la fin de la démonstration du lemme 2.10, il existe une majorante $\mathcal{V}_1 \in P$ de $\mathcal{V}$.

D'après le théorème 2.9, $\mathcal{V}_1$ est invariante par $\mathbb{C}$.
Ainsi, $\mathcal{V}_1(T_{iy}A,z) = \mathcal{V}_1(A,(iy).z) = \mathcal{V}_1(A,z)$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$. D'où en appliquant le théorème 2.4 à $A \mapsto \mathcal{V}_1(A,z)$:

$$\mathcal{V}_1(T_u A,z) = \mathcal{V}_1(A,z) \quad \forall\, u \in \mathbb{C}.$$

Donc $\mathcal{V}_1(T_{u_1}A,u_2.z) = \mathcal{V}_1(T_{u_1-u_2}A,z) = \mathcal{V}_1(A,z)$.

D'où la conclusion puisque $\mathcal{V} \leq \mathcal{V}_1$. □

§ 5 - *Fonctions plurisousharmoniques d'un groupe de Lie réductif linéaire invariantes par un sous-groupe discret.*

La proposition suivante synthétise les résultats obtenus dans les trois paragraphes précédents.

Proposition 2.13 - *Soit* G *un groupe de Lie complexe réductif linéaire dont* Γ *est un sous-groupe discret et infini. Alors il existe un sous-groupe de Lie* G_0 *de* G *muni d'une involution* σ *et un sous-groupe à un paramètre* $\beta : \mathbb{C} \to G_0$ *tels que :*

1) $\beta(\mathbb{Z}) \subset \Gamma$ *;*

2) la courbe $\beta : \mathbb{C} \to G_0$, $u \mapsto \beta(u)$ *est non dégénérée ;*

3) $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\sigma \circ \beta(n) = \beta(-n)$ *;*

4) Pour toute fonction φ *p.s.h. sur* G *constante sur* $\beta(\mathbb{Z})$, $\varphi \circ \beta$ *est constante sur* $\mathbb{C}$. *En particulier, si* φ *est invariante par* Γ *alors* φ *est invariante par* $\beta(\mathbb{C})$.

Démonstration : L'existence de G_0 et de σ a été discutée dans la proposition 1.3.

L'existence de β et la propriété 4) découlent clairement des différents cas d'isomorphisme auquel est soumis G_0 et de l'étude des modèles effectuée dans les paragraphes 2, 3 et 4. □

Pour terminer ce chapitre, nous signalons le corollaire suivant :

Corollaire 2.14 - *Soit* G *un groupe de Lie complexe réductif linéaire et* Γ *un sous-groupe discret de* G. *Alors* $G/_{\Gamma}$ *n'admet de fonctions s.p.s.h. que si* Γ *est fini.*

Démonstration : Si Γ est fini une telle fonction s'obtient facilement en moyennisant une fonction s.p.s.h. de G. Si Γ est infini, alors la proposition 2.13 montre que toute fonction p.s.h. de G invariante par Γ est constante sur des courbes complexes non dégénérées de G et ne peut de ce fait être strictement p.s.h. $\square$

CHAPITRE III

STRUCTURE KAHLERIENNE ET HYPERSURFACES INVARIANTES D'UN GROUPE DE LIE COMPLEXE SEMI-SIMPLE.

Dans ce chapitre, nous utilisons les résultats obtenus sur les fonctions plurisousharmoniques invariantes pour étudier l'existence d'une structure kählérienne invariante par l'action d'un sous-groupe discret sur un groupe de Lie complexe semi-simple.

Le principal théorème est le suivant :

Théorème 3.1 - *Soit* G *un groupe de Lie complexe semi-simple dont* Γ *est un sous-groupe discret. Alors* G/Γ *est kählérien si et seulement si* Γ *est fini.*

En outre, nous évoquons la façon dont K. Oeljeklaus utilise ces mêmes résultats pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 3.2 - *Soit* G *un groupe de Lie complexe semi-simple dont* H *est un sous-groupe arbitraire. Alors toute hypersurface de* G *invariante par l'action de* H *l'est aussi par celle de la clôture de Zariski* $\bar{H}$ *de* H *(Voir* [BEO]*).*

§ 1 - *Formes kählériennes invariantes d'un groupe de Lie complexe semi-simple et fonctions plurisousharmoniques.*

Nous démontrons un théorème de A.T. Huckleberry permettant de ramener l'étude des structures kählériennes invariantes à une question de fonctions plurisousharmoniques.

Théorème 3.3 - *Soit* G *un groupe de Lie complexe semi-simple,* K *un sous-groupe compact maximal et* H *un sous-groupe arbitraire de* G.

Soit ω *une forme fermée de type (1,1) sur* G. *Alors :*

(1) $\omega = \bar{\partial}\partial\psi$.

(2) *Si* ω *est positive (strictement positive) alors* ψ *est p.s.h. (S.p.s.h.).*

(3) *Si, en outre,* ω *est invariante par l'action de* K *à droite et par celle de* H *à gauche alors on peut choisir* ψ *invariante par l'action de* K *à droite et satisfaisant :*

$$\psi(h.g) = \psi(g) + C(h) \;;\; \forall g \in G,\ \forall h \in H,$$

où C *est un caractère additif de* H.

Démonstration :

• Commençons par rappeler que G est de Stein et que $H^1(G,\mathbb{R}) = 0$, $H^2(G,\mathbb{R}) = 0$ car G est semi-simple.

Démontrons (1).

• Soit β une forme fermée de type (2,0) sur G alors β peut s'écrire $\beta = \partial\alpha$ où α est une forme $\bar{\partial}$-fermée de type (1,0).

En effet, comme $H^2(G,\mathbb{R}) = 0$, on peut écrire $\beta = d\rho$ où ρ est une 1-forme.

Ecrivons $\rho = \rho_{0,1} + \rho_{1,0}$ où $\rho_{0,1}$ et $\rho_{1,0}$ sont respectivement de type (0,1) et (1,0).

On a alors : $\beta = \partial\rho_{1,0} + (\partial\rho_{0,1} + \bar{\partial}\rho_{1,0}) + \bar{\partial}\rho_{0,1}$, d'où puisque β est de type (2,0) :

(i) $\partial\rho_{0,1} + \bar{\partial}\rho_{1,0} = 0$

(ii) $\bar{\partial}\rho_{0,1} = 0$

(iii) $\beta = \partial\rho_{1,0}$.

G étant Stein, on peut écrire, grâce à (ii) : $\rho_{0,1} = \bar{\partial}u$.
D'où en remplaçant dans (i) :

(iv) $0 = \partial\bar{\partial}u + \bar{\partial}\rho_{1,0} = \bar{\partial}[\rho_{1,0} - \partial u]$.

Finalement (iii) et (iv) montrent que $\beta = \partial\alpha$ où $\alpha = \rho_{1,0} - \partial u$ est bien $\bar{\partial}$ fermée.

• Considérons maintenant ω une forme fermée de type (1,1). ω étant de type (1,1) est en fait ∂ et $\bar{\partial}$ fermée. G étant Stein, on a alors :

(i) $\omega = \bar{\partial}\gamma$ où γ est une forme de type (1,0).

On a aussi $0 = \partial\omega = \partial\bar{\partial}\gamma = -\bar{\partial}\partial\gamma$ d'où en appliquant la remarque ci-dessus à la (2,0) forme fermée $\partial\gamma$:

(ii) $\partial\gamma = \partial\alpha$ où α est une (1,0) forme $\bar{\partial}$ fermée.

Ainsi : (iii) $\omega = \bar{\partial}(\gamma-\alpha)$ avec $\partial(\gamma-\alpha) = 0$.

Comme G est Stein, on peut écrire $\gamma-\alpha = \partial\varphi$ et donc $\omega = \bar{\partial}\partial\varphi$.

(1) est démontrée.

Voyons le point (2).

Si ω est hermitienne alors $\partial\bar{\partial}\bar{\varphi} = \partial\bar{\partial}\varphi$. Ainsi quitte à substituer $\frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})$ à φ, on pourra supposer φ à valeurs réelles. Que φ soit alors p.s.h. ou S.p.s.h. résulte immédiatement des définitions.

Passons au point (3).

Nous notons $g_0^*.\omega$ pour $T_{g_0}^*.\omega$ où T_{g_0} désigne suivant les cas la translation à gauche ou à droite par g_0. Soit μ une mesure de Haar normalisée sur K. ω étant K-invariante, on a :

$$\omega = \int_K k^*.\omega \, d\mu(k)$$

d'où :

$$\omega = \int_K k^*.\bar{\partial}\partial\varphi . d\mu(k) \; .$$

Par analycité de T_k et dérivation sous le signe somme, il vient :

$$\omega = \bar{\partial}\partial\int_K k^*.\varphi \, d\mu(k).$$

Ceci nous autorise à supposer φ invariante à droite par K.

Soit maintenant $h \in H$. On a $h^*\omega = h^*.\bar{\partial}\partial\varphi = \bar{\partial}\partial \, h^*.\varphi$ et $h^*.\omega = \omega$ d'où :

$$\bar{\partial}\partial(h^*.\varphi - \varphi) = 0.$$

Admettons un instant le lemme suivant :

Lemme.- *Toute fonction pluriharmonique de* G *invariante par* K *à droite est constante.*

Appliquons le à $h^*\emptyset - \emptyset$, alors à l'évidence $h \mapsto C(h) = h^*\emptyset - \emptyset = \emptyset(h) - \emptyset(1)$ définira un caractère sur H.

Terminons en démontrant le lemme :

Soit Ψ une fonction pluriharmonique de G. G étant simplement connexe, écrivons :

(1) $\Psi = \mathrm{Re}\, F$ où F est holomorphe sur G.

Ψ étant supposée K-invariante, on a : $k^*.\mathrm{Re}\, F - \mathrm{Re}\, F = 0$ d'où :

(2) $k^*F - F = i[k^* \mathrm{Im}\, F - \mathrm{Im}\, F]$, $\forall k \in K$.

$k^*F - F$ étant holomorphe (2) montre qu'elle est constante. Ainsi :

(3) $k^*F - F = F(k) - F(1)$, $\forall k \in K$.

G étant semi-simple K est une forme réelle de G alors (3) s'étend par prolongement analytique :

(4) $g^*.F - F = F(g) - F(1), \forall g \in G$.

De (4), on tire immédiatement que $\tilde{F} = F - F(1)$ est un caractère holomorphe de G.

Pour terminer, il nous suffit de montrer que $\tilde{F}$ est constant.

$\tilde{F}$ étant un morphisme de groupe de Lie de G sur $\mathbb{C}$, on a :

(5) $\tilde{F}_*[X,Y] = [\tilde{F}_*(X),\tilde{F}_*(Y)] = 0 \quad \forall (X,Y) \in \mathrm{Lie}(G) \times \mathrm{Lie}(G)$.

Finalement, G étant semi-simple, on a $\mathrm{Lie}(G) = [\mathrm{Lie}(G),\mathrm{Lie}(G)]$ donc, d'après (4), $\tilde{F}_* = 0$.

$\tilde{F}$ est donc constant et le théorème 3.3 est démontré. □

§ 2 - *Structure kählérienne invariante d'un groupe de Lie complexe semi-simple.*

Le principal objet de ce paragraphe est de donner une démonstration du théorème 3.1.

Théorème 3.1 - *Soit* G *un groupe de Lie complexe semi-simple dont* Γ *est un sous-groupe discret. Alors :* G/Γ *kählérien* $\Longleftrightarrow$ Γ *est fini.*

Démonstration : Si Γ est fini, il suffit de moyenniser une forme kählérienne de G (qui est Stein donc muni d'une telle forme) pour en obtenir une sur G/Γ.

Si Γ est infini, nous raisonnons par l'absurde. Supposons G/Γ kählerien, alors il existe une (1,1) forme fermée strictement positive ω sur G, invariante par l'action de Γ (à gauche). Quitte à moyenniser ω, on pourra en outre la supposer invariante par l'action de K à droite. Alors d'après le théorème 3.3, ω peut s'écrire : $\omega = \bar{\partial}\partial\varphi$ où φ est S.p.s.h. sur G et vérifie :

$$\varphi(\gamma.g) = \varphi(g) + C(\gamma) \quad \forall\, g \in G, \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

C étant un caractère de Γ.

Utilisons maintenant la proposition 2.13 dont nous conservons les notations. Notons encore ψ la fonction S.p.s.h. induite par ψ sur G_0 et introduisons $\tilde{\psi} = \psi + \psi \circ \sigma$. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{Z} : \tilde{\psi} \circ \beta(n) &= \psi[\beta(n)] + \psi[\sigma \circ \beta(n)] \\ &= \psi[\beta(n)] + \psi[\beta(-n)] \\ &= \psi(1) + C \circ \beta(n) + \psi(1) + C \circ \beta(-n) \\ &= \tilde{\psi} \circ \beta(0).\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la proposition 2.13, $\tilde{\psi}$ est constante sur la courbe non dégénérée : $\beta : \mathbb{C} \to G_0$. Mais $\tilde{\psi}$ est S.p.s.h. tout comme ψ donc $\tilde{\psi} \circ \beta$ est strictement sous-harmonique sur $\mathbb{C}$. C'est là, la contradiction attendue. $\square$

Nous terminons ce paragraphe par deux remarques.

Remarque 3.4 : La démonstration donnée du théorème 3.1 permet en fait d'affirmer que toute forme fermée positive de type (1,1) sur G, invariante par Γ ne peut être strictement positive à l'origine 1 de G que si Γ est fini.

On dira que G/Γ est faiblement kählerien si il existe une (1,1) forme fermée positive sur G, invariante par Γ, et au moins strictement positive en un point. La remarque ci-dessus permet d'affirmer que G/Γ ne peut être faiblement kählerien que si Γ est fini.

Remarque 3.5 : Sur $SL(2,\mathbb{C})$ on a un résultat un peu plus précis : toute forme (1,1) fermée positive invariante par $T_{\mathbb{Z}}$ à gauche et $SU(2,\mathbb{C})$ à droite est invariante par $T_{\mathbb{C}}$. D'après les théorèmes 3.3 et 2.4, il suffit pour cela de montrer que si φ est p.s.h. sur $SL(2,\mathbb{C})$ invariante par l'action de $SU(2,\mathbb{C})$ à droite et telle que $\varphi(T_n A) = \varphi(A) + c.n, \forall n \in \mathbb{Z}$ alors $c = 0$.

Nous allons démontrer succintement cette assertion.

Pour cela introduisons pour tout $z_o \in \mathbb{C}^*$ la transformation σ_{z_o} de $SL(2,\mathbb{C})$ définie par : $\sigma_{z_o}(A) = D_{z_o}^{-1} A D_{z_o}$ où $D_{z_o} = \begin{bmatrix} iu_o & 0 \\ 0 & -iu_o^{-1} \end{bmatrix}$ et $u_o^2 = z_o$.

Remarquons que pour $z_o = 1$, on retrouve l'involution σ déjà utilisée. On remarquera aussi que $\sigma_{z_o}(T_z A) = T_{-zz_o} \sigma_{z_o}(A)$.

Soit φ p.s.h. sur $SL(2,\mathbb{C})$ invariante par $SU(2,\mathbb{C})$ à droite et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \varphi(T_n A) = \varphi(A) + c.n.$$

Posons $\varphi_1 = \varphi + \varphi \circ \sigma$, φ_1 est $T_{\mathbb{Z}}$-invariante donc $T_{\mathbb{C}}$-invariante en vertu du théorème 2.4. Cela donne :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad [\varphi(T_z A) - \varphi(A)] + [\varphi \circ \sigma(T_z A) - \varphi \circ \sigma(A)] = 0.$$

Ainsi les deux fonctions sous-harmoniques entre crochets sont en réalité harmoniques et en particulier continues.

Posons $F_A(x) = \vartheta(T_x A) - \vartheta(A) - c.x$, d'après ce qui précède, F_A est continue, en outre elle est clairement périodique de période 1.

Considérons $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^{+*}$ et posons $\vartheta_\lambda = \lambda\vartheta + \vartheta \circ \sigma_\lambda$. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\vartheta_\lambda(T_{pn}A) = \vartheta_\lambda(A)$ d'où par le théorème 2.4 :

$$\vartheta_\lambda(T_u A) = \vartheta_\lambda(A) \quad \forall u \in \mathbb{C}.$$

En particulier, en faisant $u = -\lambda^{-1}$ on trouve :
$\vartheta(T_{-\lambda^{-1}}A) = \vartheta(A) - c/\lambda$.

Ainsi F_A est nulle sur $\mathbb{Q}^{-*}$ donc sur $\mathbb{R}$ par continuité et périodicité. On a donc en fait : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\vartheta(T_x A) = \vartheta(A) + c.x$.

Notons $z = x+iy$ alors $\vartheta(T_z A) = c.x + \vartheta(T_{iy}A)$, $\vartheta(T_z A)$ étant harmonique en z ainsi que $\vartheta(T_{-z}A)$, on a nécessairement

$$\text{d'où} \qquad \begin{aligned} \vartheta(T_{iy}A) &= c'(A)y + \vartheta(A) \\ \vartheta(T_z A) &= \vartheta(A) + c.x + c'(A)y \end{aligned}$$

avec bien sûr $c'(T_z A) = c'(A)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ et $c'(AK) = c'(A)$, $\forall K \in SU(2,\mathbb{C})$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\vartheta_\lambda(T_z A) = \vartheta_\lambda(A) + \lambda[c'(A) - c' \circ \sigma_\lambda(A)]y$ d'où, d'après le théorème 2.4, $c' \circ \sigma_\lambda = c'$.

En utilisant la décomposition d'Iwasawa, il est alors facile de voir que c' est constante.

On a donc :

$$\vartheta(T_z A) = \vartheta(A) + cx + c'y.$$

On va montrer que $c = c' = 0$ en raisonnant par l'absurde. Supposons $cc' \neq 0$.

Considérons $\vartheta_{z_0} = \vartheta + \vartheta \circ \sigma_{z_0}$ où z_0 sera choisi plus tard.

On vérifie que :

$$\vartheta_{z_0}(T_z A) = \vartheta_{z_0}(A) + x(c-cx_0-c'y_0) + y(c'-c'x_0+cy_0) \quad \text{où} \quad z_0 = x_0+iy_0.$$

Choisissons z_0 pour que $c(1-x_0) = c'y_0$ alors d'après le théorème 2.4, on a aussi $c'(1-x_0) = -cy_0$ d'où $c^2 + c'^2 = 0$, ce qui est absurde.

§ 3 - *Hypersurfaces invariantes d'un groupe de Lie complexe semi-simple.*

Commençons par rappeler un résultat obtenu par A.T. Huckleberry et G.A. Margulis :

Théorème 3.6 - *Soit* G *un groupe de Lie complexe semi-simple dont* I *est un sous-groupe arbitraire. Alors il n'y a pas d'hypersurface de* G *invariante par* I *si et seulement si* I *est Zariski dense.*

Démonstration (*Voir* [HM]) :

En utilisant nos résultats sur les fonctions plurisousharmoniques invariantes K. Oeljeklaus établit la généralisation suivante (Voir [BEO]).

Théorème 3.2 - *Soit* G *un groupe de Lie complexe semi-simple et* H *un sous-groupe arbitraire de* G. *Alors toute hypersurface de* G *invariante par* H *l'est aussi par la clôture de Zariski* $\bar{H}$ *de* H.

Compte tenu du théorème 2.1, le théorème 3.2 répond à la conjecture de A.T. Huckleberry et G.A. Margulis pour le cas semi-simple (cf. Introduction).

Pour terminer, nous donnons les grandes lignes de la démonstration du théorème 3.2.

En s'appuyant notamment sur le lemme 1.4, on montre qu'il suffit d'établir le théorème pour le cas où $H = G(\gamma)$ est un sous-groupe monogène infini de G.

La discussion s'organise alors suivant la classification rappelée au théorème 1.1.

Le cas 1 est justiciable d'une technique qui est expliquée dans [BEO].

Dans le cas 2 et 3, on montre que l'existence d'une hypersurface $G(\gamma)$ invariante mais non $\overline{G(\gamma)}$ invariante engendre une forme kählérienne faible invariante par $G(\gamma)$. En utilisant le théorème 3.3 et en raisonnant comme nous l'avons fait pour le théorème 3.1, on obtient une contradiction.

APPENDICE A

PRINCIPE DU MINIMUM POUR LES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES.

Le principe du minimum de C.O. Kiselman peut s'énoncer de la façon suivante :

Théorème - *Soit* V *une variété complexe et* Ω *un ouvert de Stein dans* $V \times \mathbb{C}^m$ *invariant par* $\mathbb{R}^m$. *On suppose que les fibres* $\pi^{-1}(a)$ *au-dessus de* $a \in V$ *sont connexes. Alors pour toute fonction p.s.h.* ϕ *invariante par* $\mathbb{R}^m$ *la fonction* $\hat{\phi}$ *définie par :* $\hat{\phi}(a) = \operatorname*{Inf}_{z \in \pi^{-1}(a)} \phi(a,z)$ *est p.s.h. sur la projection de* Ω *sur* V *(Voir* [KI]*).*

Nous démontrons une version affaiblie de ce théorème, suffisante dans notre utilisation.

Proposition - *Soit* G *un groupe de Lie complexe et* ϕ *une fonction p.s.h. sur* $G \times \mathbb{C}$ *ne dépendant pas de* Im z *pour* $z \in \mathbb{C}$. *Alors la fonction* $\hat{\phi}$ *définie par* $\hat{\phi}(g) = \operatorname*{Inf}_{z \in \mathbb{C}} \phi(g,z)$ *est p.s.h. sur* G.

Démonstration : Commençons par observer que pour tout $g \in G$ fixé la fonction $\phi_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_g(x) = \phi(g,x)$ est convexe.

Nous procédons en trois étapes successives.

1ère étape : On suppose φ de classe C^∞ et les fonctions φ_g strictement convexes non monotones.

Dans ces conditions, pour tout $g \in G$ la fonction φ_g atteint son minimum en un unique point $\omega(g)$ et la fonction ω ainsi définie est régulière.

Il s'agit d'établir que pour tout $g_0 \in G$ et toute fonction holomorphe $F : V_0 \to G$ définie sur un voisinage V_0 de 0 dans $\mathbb{C}$ et telle que $F(0) = g_0$, la fonction $\hat{\varphi} \circ F$ est sous-harmonique en 0.

Soit $r > 0$ pris assez petit pour que $D_r = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq r\} \subset V_0$.

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité D_1 de $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est une solution d'un problème de Dirichlet pour la donnée au bord : $\theta \mapsto \omega \circ F(re^{i\theta})$

$$\mathrm{Re}\, f(e^{i\theta}) = \omega \circ F(re^{i\theta}).$$

Ecrivons l'inégalité de moyenne en $z = 0$ pour la fonction sous-harmonique de $\bar{D} : z \to \varphi[F(rz), f(z)]$. Il vient :

$$\hat{\varphi} \circ F(0) \leq \varphi(g_0, f(0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi[F(re^{i\theta}), f(e^{i\theta})] d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi[F(re^{i\theta}), \omega \circ F(re^{i\theta})] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\varphi} \circ F(re^{i\theta}) d\theta.$$

Et donc $\hat{\varphi} \circ F$ est sous-harmonique en $z = 0$.

<u>2ème étape</u> : On suppose simplement que les fonctions convexes ψ_g sont non monotones.

Par un procédé classique de convolution sur le groupe $G \times \mathbb{C}$, on fabrique une suite de fonctions ψ^*_ε p.s.h. et C^∞ sur $G \times \mathbb{C}$, tendant en décroissant avec $\varepsilon > 0$ vers ψ.

En outre, on peut s'arranger pour que ces fonctions ne dépendent que de $(g,\mathrm{Re}z)$. Ainsi les fonctions convexes $\psi^*_{\varepsilon g}$ sont non monotones puisque :

$$\psi^*_{\varepsilon g}(x) \geq \psi_g(x), \ \forall\, g \in G.$$

Ainsi, en posant $\psi_\varepsilon(g,z) = \psi^*_\varepsilon(g,z) + \varepsilon|\mathrm{Re}z|^2$, on dispose d'une suite de fonctions p.s.h. sur $G \times \mathbb{C}$ satisfaisants aux conditions de la première étape. En outre, ψ_ε tend en décroissant avec $\varepsilon > 0$ vers ψ.

Les fonctions $\hat{\psi}_\varepsilon$ sont p.s.h. sur G et tendent en décroissant avec $\varepsilon > 0$ vers $\hat{\psi}$.

$\hat{\psi}$ est donc p.s.h. sur G.

<u>3ème étape</u> : On suppose ψ quelconque.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ posons $\psi_k(g,z) = \mathrm{Sup}\{-k,\psi(g,z)\} + \frac{1}{k}\,|\mathrm{Re}z|^2$, les fonctions ψ_k satisfont aux conditions de l'étape 2 et tendent en décroissant vers ψ pour $k \to +\infty$. Donc pour tout k, $\hat{\psi}_k$ est p.s.h. sur G, d'où en raisonnant comme ci-dessus, la plurisousharmonicité de $\hat{\psi}$. $\square$

APPENDICE B

DEMONSTRATION DU LEMME 2.6

Nous démontrons, dans cet appendice, le lemme 2.6 dont l'énoncé figure à la page 11.

Nous commençons par établir le résultat intermédiaire suivant. Il répond à une question technique déjà étudiée par des moyens divers à l'occasion de nombreux travaux.

Nous nous appuyons sur une méthode voisine de celle utilisée par G. Coeuré dans [CO].

Soit Ω *un ouvert pseudo-convexe de* $\mathbb{C}^{N+1}$, φ *p.s.h. sur* Ω *et* c *un minorant de plurisousharmonicité pour* φ.

Soit $g_1,\dots,g_N$ N *fonctions holomorphes sur* Ω. *Nous notons* $|g|^2 = \sum_{i=1}^{N} |g_i|^2$. *Pour toute* $(0,1)$*-forme* ω *sur* Ω *telle que* $\int_\Omega |\omega|^2 \frac{e^{-\varphi}}{c|g|^4} d\lambda < +\infty$, *il existe* $u = (u_1,\dots,u_N) \in L^2_0(\Omega,\varphi)^N$ *tel que* $\sum_{i=1}^{N} g_i \bar\partial u_i = \omega$ *et* $\int_\Omega |u|^2 \frac{e^{-\varphi}}{|g|^2} d\lambda \leq \int_\Omega |\omega|^2 \frac{e^{-\varphi}}{c|g|^4} d\lambda$.

Nous utilisons la méthode des 3 poids de Hörmander.

Soit Ψ p.s.h. sur Ω comme en 4.2.1 de [HO].

On considère, comme Hörmander, les espaces hilbertiens $(L^2_o)_{\varphi_1}, (L^2_1)_{\varphi_2}, (L^2_2)_{\varphi_3}$ où $\varphi_i = \varphi - (3-i)\Psi$, et les opérateurs fermés à domaines denses T et S induits par le $\bar\partial$:

$$(L^2_o)_{\varphi_1} \xrightarrow{T} (L^2_1)_{\varphi_2} \xrightarrow{S} (L^2_2)_{\varphi_3} .$$

Introduisons deux autres opérateurs, de nature identique, T' et S'

$$(L^2_o)^N_{\varphi_1} \xrightarrow{T'} (L^2_1)^N_{\varphi_2} \xrightarrow{S'} (L^2_2)^N_{\varphi_3} .$$

définis par : $T'(u_1,\dots,u_N) = \sum_{i=1}^{N} g_i \bar\partial u_i$.

$$S'(\omega) = \{g_i \bar\partial \omega\}_{i=1}^N .$$

On veut établir l'analogue du lemme 4.4.1 de [HO] pour T' et S'.

On a d'abord facilement : $T'^*\omega = \{T^*(\bar g_i \omega)\}_{i=1}^N = (\bar g_1,\dots,\bar g_N) T^*\omega$,

d'où $||T'^*\omega||^2_{\varphi_1} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega |T^*(\bar g_i\omega)|^2 e^{-\varphi_1} = \int_\Omega |T^*\omega|^2 e^{-\varphi_1} |g|^2$.

On a aussi $||S'\omega||^2_{\varphi_3} = \int_\Omega |S\omega|^2 e^{-\varphi_3} |g|^2$.

Notons $\varphi = (\varphi + \mathrm{Log}|g|^2) - \mathrm{Log}|g|^2 = \varphi' - \mathrm{Log}|g|^2$ dans l'inégalité fondamentale de Hörmander 4.2.9 (cf. [HO], page 93), cela donne :

$$\int_\Omega \left[c - 2|\partial\Psi|^2\right] |\omega|^2 e^{-\varphi'} |g|^2 \leqslant 2\int_\Omega |T^*\omega|^2 e^{-\varphi'_1} |g|^2 + \int_\Omega |\omega|^2 e^{-\varphi'_3} |g|^2$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède :

$$(\mathrm{I}) \quad : \quad \int_\Omega \left[c - 2|\partial\Psi|^2\right]|\omega|^2 e^{-\vartheta'}|g|^2 \leq ||T'^*\omega||^2_{\vartheta'_1} + ||S'\omega||^2_{\vartheta'_3} .$$

L'inégalité (I) permet alors de transposer intégralement la démonstration du lemme 4.41 de [HO] à T' et S' en ayant soin de substituer $c|g|^2$ à c et ϑ' à ϑ. On obtient ainsi le résultat intermédiaire annoncé.

Voyons maintenant la démonstration du lemme proprement dit. Nous allons utiliser le résultat intermédiaire en prenant pour g_i les N premières fonctions coordonnées de $\mathbb{C}^{N+1}$.

Soit Ψ une fonction plateau de $\tilde{z}$, identique à 1 au voisinage de $\tilde{z} = 0$, et à support dans $\{(\tilde{z},z_{N+1}) \in \Omega \;/\; z_{N+1} = 0\}$.

Considérons la (0,1)-forme $\omega = -f(z_{N+1})\bar{\partial}\Psi(\tilde{z})$.

Notons $\Omega_\Psi = \{z \in \Omega / \tilde{z} \in \mathrm{Supp}\Psi\}$, on choisit Ψ pour que $\Omega_\Psi \subset \Omega_M$. On a :

$$\int_\Omega |\omega|^2 \frac{e^{-\vartheta}}{|\tilde{z}|^4 c} = \int_\Omega |f(z_{N+1})|^2 \frac{|\bar{\partial}\Psi(\tilde{z})|^2}{c|\tilde{z}|^4} e^{-\vartheta} \leq$$

$$\leq \sup_{\tilde{z}\in\mathrm{Supp}\bar{\partial}\Psi} \frac{|\bar{\partial}\Psi(\tilde{z})|^2}{|\tilde{z}|^4} \cdot \int_\Omega |f(z_{N+1})|^2 \frac{e^{-\vartheta}}{c} d\lambda < +\infty$$

donc d'après le résultat intermédiaire il existe $u_1,\dots,u_N$, N fonctions C^∞ sur Ω, telles que $\sum_{i=1}^{N} \bar{\partial}u_i . z_i = -f(z_{N+1})\bar{\partial}\Psi(\tilde{z})$ et

$$\int_{\Omega} |u|^2 \frac{e^{-\varphi}}{|\tilde{z}|^2} d\lambda \leq \int_{\Omega} |\omega|^2 \frac{e^{-\varphi}}{|\tilde{z}|^4 c} d\lambda < +\infty.$$

Alors la fonction $F = \sum_{i=1}^{N} u_i z_i + f(z_{N+1})\Psi(\tilde{z})$ est holomorphe sur Ω et coïncide avec f sur ω.

En outre : $\left(\int_{\Omega} |F|^2 e^{-\varphi-|\tilde{z}|^2} d\lambda\right)^{1/2} \leq$

$$\left(\int_{\Omega} |f(z_{N+1})|^2 |\Psi(\tilde{z})|^2 e^{-\varphi-|\tilde{z}|^2} d\lambda\right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} \Big|\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\Big|^2 e^{-\varphi-|\tilde{z}|^2} d\lambda\right)^{1/2}.$$

Mais $\displaystyle\int_{\Omega} |f(z_{N+1})|^2 |\Psi(\tilde{z})|^2 e^{-\varphi-|z|^2} d\lambda \leq \int_{\Omega_\Psi} |f(z_{N+1})|^2 \frac{e^{-\varphi}}{c} d\lambda < +\infty$

(car $c \leq 1$ et $|\Psi| \leq 1$).

Et $\displaystyle\int_{\Omega} \Big|\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\Big|^2 e^{-\varphi-|\tilde{z}|^2} d\lambda \leq \int_{\Omega} |u|^2 |\tilde{z}|^2 e^{-\varphi-|\tilde{z}|^2} = \int_{\Omega} |u|^2 \frac{e^{-\varphi}}{|\tilde{z}|^2} (|\tilde{z}|^2 e^{-|\tilde{z}|^2}) < +\infty$

On a donc bien $\displaystyle\int_{\Omega} |F|^2 e^{-\varphi-|\tilde{z}|^2} d\lambda < +\infty.$

APPENDICE C

DEMONSTRATION DU LEMME 2.11

• Pour tout $g \in L$ notons $m(g) = \operatorname*{Inf}_{\mathbb{C}} g$.

Introduisons $\tilde{L}_{\varepsilon_0}$ le sous-cône de L des fonctions vérifiant les conditions i) et ii) de (d).

• Nous allons établir :

1) $\exists \gamma_0 : \begin{array}{l}[-\varepsilon_0,\varepsilon_0] \to \mathbb{R} \\ y \to \gamma_0(y)\end{array} / \forall g \in \tilde{L}_{\varepsilon_0} \quad g(\gamma_0(y) + iy) = m(g)$.

Pour cela, commençons par observer qu'en vertu de i) et ii), il existe $\gamma_g : [-\varepsilon_0,\varepsilon_0] \to \mathbb{R}$ pour toute fonction g de $\tilde{L}_{\varepsilon_0}$ telle que

$$g(\gamma_g(y) + iy) = \operatorname*{Inf}_{x \in \mathbb{R}} g(x + iy).$$

D'où compte tenu de (e) $g(\gamma_g(y) + iy) = m(g)$.

En particulier, on fabrique de cette façon γ_0 associée à g_0. Soit $g \in \tilde{L}_{\varepsilon_0}$ alors $g + g_0 \in \tilde{L}_{\varepsilon_0}$ et donc :

$$g(\gamma_{g+g_0}(y) + iy) + g_0(\gamma_{g+g_0}(y) + iy) = m(g+g_0).$$

Puisque $m(g) = g(0)$ et $m(g_0) = g_0(0)$, on a $m(g+g_0) = m(g) + m(g_0)$ donc :

$$g(\gamma_{g+g_0}(y) + iy) + g_0(\gamma_{g+g_0}(y) + iy) = m(g) + m(g_0).$$

Ceci entraîne immédiatement que $g(\gamma_{g+g_0}(y) + iy) = m(g)$ donc $\gamma_{g+g_0} = \gamma_g$ et $g_0(\gamma_{g+g_0}(y) + iy) = m(g_0)$ donc $\gamma_{g+g_0} = \gamma_0$ d'où (1).

· Nous montrons maintenant (2) : $\forall g \in L \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$,

$g(iy + \gamma_0(y) + z_0) \leqslant g(z_0)$ pour $|y| \leqslant \varepsilon_0$.

Considérons pour cela $\tilde{g}$ définie par :

$$\tilde{g}(z) = \mathrm{Max}[g(z_0), g(z+z_0)] + g_0(z)$$

il est facile de voir que $\tilde{g} \in \tilde{L}_{\varepsilon_0}$ (on utilise en particulier (a) et (b)). Alors d'après (1), on a :

$$\tilde{g}(\gamma_0(y) + iy) = m(\tilde{g}) = g(z_0) + m(g_0),$$

ce qui donne immédiatement (2).

Montrons que γ_0 est additive :

(3) $|y| \leqslant \varepsilon_0/2$, $|y'| \leqslant \varepsilon_0/2 \implies \gamma_0(y+y') = \gamma_0(y) + \gamma_0(y')$.

Soit $y' \in [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]$, considérons g définie par $g(z) = g_0(z+iy' + \gamma_0(y'))$, il est facile de voir que $g \in \tilde{L}_{\varepsilon_0/2}$ Alors d'après (1), on a :

$$|y| \leqslant \varepsilon_0/2 \implies g(iy + \gamma_0(y)) = m(g).$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$|y| \leqslant \varepsilon_0/2 \Longrightarrow g_0(\gamma_0(y) + \gamma_0(y') + i(y+y')) = m(g) = m(g_0).$$

D'où l'on tire $\gamma_0(y) + \gamma_0(y') = \gamma_0(y+y')$, c'est-à-dire (3).

Supposons un instant avoir montré la continuité de γ_0 alors, compte tenu de (3), γ_0 serait linéaire sur $[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$. Alors on disposerait de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que (2) devienne

$$(2') : \forall g \in L \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \quad g(z_0+(i+\gamma)y) \leqslant g(z_0) \quad \text{pour} \quad |y| \leqslant \varepsilon_0.$$

Ce qui entraîne manifestement la conclusion du lemme.

Il nous reste donc à prouver la continuité de γ_0. Montrons d'abord que γ_0 est bornée ; si cela n'était pas alors on trouverait $y_n \to 0$ telle que $\gamma_0(y_n) \geqslant x_0 > 0$ (ou $\gamma_0(y_n) \leqslant -x_0 < 0$) alors $x \to g_0(x+iy_n) = g_n(x)$ serait convexe décroissante pour $x \leqslant \gamma_0(y_n)$ donc en particulier pour $x \leqslant x_0$. Par passage à la limite et par continuité de g_0 , $x \to g_0(x)$ aurait la même particularité ; ce qui est absurde compte tenu de i) et ii).

En raisonnant de façon analogue, on montre que si $y_n \to y_0$ dans $[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ alors $\gamma_0(y_0)$ est l'unique valeur d'adhérence de $\gamma_0(y_n)$ ce qui compte tenu de ce qui précède nous donne bien la continuité de γ_0.

$\square$

BIBLIOGRAPHIE

*****

[AH] AHIEZER D.N. - Invariant Meromorphic functions on semi-simple complex Lie groups.
Inv. Math. (65), p. 325 à 329, (1982).

[BO] BARTH W. and OTTE M. - Invariante Holomorphe Funktionen auf Reduktiven Liegruppen.
Math. Ann. (201), p. 97 à 112, (1973).

[BOR] BOREL A. - Groupes linéaires algébriques.
Ann. of Math. (64), p. 20 à 82, (1956)

[BE] BERTELOOT F. - Fonctions plurisousharmoniques sur $SL(2,\mathbb{C})$ invariantes par un sous-groupe monogène.
(A paraître au Journal d'Analyse Mathématique).

[BEO] BERTELOOT F. and OELJEKLAUS K. - Invariant plurisubharmonic functions and hypersurfaces on semi-simple complex Lie groups.
(Preprint).

[CO] COEURÉ G. - Propriété de Runge et enveloppe d'holomorphie de certaines variétés analytiques de dimension infinie.
Bull. Soc. Math. France (102), p. 281 à 288, (1974).

[GO] GOLDBERG S. - Curvature and Homology.
Ac. Press. (1962).

[HOC] HOCHSCHILD G. - La structure des groupes de Lie.
Dunod (1968).

[HO] HORMANDER L. - An introduction to complex analysis in several variables.
North Holl. Math. Library, (1973).

[HM] HUCKLEBERRY A.T. and MARGULIS G.A. - Invariant analytic hypersurfaces.
Inv. Math. (71), p. 235 à 240, (1983).

[KI] KISELMAN C.O. - The partial Legendre transform for plurisubharmonic functions.
Inv. Math. (49), p. 137 à 148, (1978).

[LE] LELONG P. - Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives.
Gordon & Breach, (1968).

[LO] LOEB J.J. - Action d'une forme de Lie réelle d'un groupe de Lie complexe sur les fonctions plurisousharmoniques.
Ann. Inst. Fourier (35), p. 59 à 97, (1985).

[OR] OELJEKLAUS K. and RICHTOFER W. - On the structure of complex Solv-Manifolds.
(Preprint).

[PO] POSTNIKOV M. - Leçons de Géométrie. Groupes et Algèbres de Lie.
Ed. Mir (1985).

[SK] SKODA H. - Applications des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids.
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e Série, t. 5, p. 545 à 579, (1972).

R E S U M E

Le principal objet de ce travail est l'étude des fonctions p.s.h. d'un groupe de Lie complexe réductif linéaire G invariantes par l'action d'un sous-groupe discret infini Γ.

Nous montrons que de telles fonctions sont aussi invariantes par l'action d'un sous-groupe complexe à un paramètre.

Ceci généralisant, partiellement, un théorème de W. Barth et M. Otte sur les fonctions holomorphes.

La démarche adoptée consiste à s'intéresser en premier lieu à certains cas typiques à savoir :

① $G = SL(2,\mathbb{C})$ et $\Gamma = \{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix} ; n \in \mathbb{Z}\}$ et

② $G = SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*q}$ et $\Gamma = \left\{\left[\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix},(e^{a_1 n},\ldots,e^{a_q n})\right] ; n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dans le premier cas, nous raisonnons par l'absurde ; grâce aux techniques L^2 de L. Hörmander, nous montrons que l'existence d'une fonction p.s.h. φ invariante par Γ mais non invariante par $T_{\mathbb{C}} = \{\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} ; u \in \mathbb{C}\}$ permet de fabriquer une fonction holomorphe ayant la même particularité, ceci étant contraire au théorème de W. Barth et M. Otte.

Dans le second cas, le principe du minimum de C.O. Kiselman nous permet de conclure en nous appuyant sur notre premier résultat.

Nous utiliserons un théorème de A.T. Huckleberry pour pouvoir appliquer nos résultats sur les fonctions p.s.h. à l'étude des formes faiblement kählériennes invariantes d'un groupe de Lie complexe semi-simple. Nous démontrons le théorème suivant :

Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple dont Γ est un sous-groupe discret. Alors : G/Γ faiblement kählérien $\Leftrightarrow$ Γ fini.

Nous terminons en évoquant la façon dont K. Oeljeklaus utilise nos résultats pour généraliser un théorème de A.T. Huckleberry et G.A. Margulis sur les hypersurfaces invariantes d'un groupe de Lie complexe semi-simple.

MOTS CLES

. FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES INVARIANTES

. KAHLERIENNITE

. VARIETES HOMOGENES SEMI-SIMPLES

. GROUPE DE LIE COMPLEXE REDUCTIF LINEAIRE