THESE

présentée à

L'Université des Sciences et Techniques de Lille

pour obtenir le grade de

Docteur en Physique

par

Koffi ANIFRANI

Ingénieur ISEN

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE STRUCTURES PIEZOELECTRIQUES A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Soutenue le 15 Janvier 1988 devant la commission d'examen

Président	M. FOURET
Rapporteurs	M. DAMIEN
	M. GAGNEPAIN
Examinateurs	M. BOUCHER
	M. DEBUS
	M. DECARPIGNY

A ma mère,

à mes Frères,

à Hubert,

à Danièlle

et à tous mes amis.

Les bontés de l'Eternel se renouvellent chaque matin.
(La. 3:23)

Cette thèse a été préparée dans le Laboratoire d'Acoustique de l'ISEN (Institut Supérieur d'Electronique du Nord) et à SINAPTEC. Le code Eléments finis ATILA qui a permis cette étude a été conçu pour le GERDSM (Groupe d'Etude et de Recherche en Détection Sous-marine) et son développement a été financé par la DCAN (Direction des Constructions et Armes Navales) de Toulon.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur R. FOURET qui a accepté la présidence de ce Jury.

Je remercie Monsieur J.C. DAMIEN pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui, pour les suggestions qu'il m'a faites et pour sa participation au Jury.

Je remercie également Monsieur J.J. GAGNEPAIN pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour sa participation au Jury.

Monsieur D.BOUCHER, Chef du groupe Techniques d'Emission du GERDSM, a permis la réalisation de ce travail de recherche et je l'en remercie chaleureusement.

J'exprime ma très grande reconnaissance et mon très sincère attachement à Messieurs J.C. DEBUS et J.N. DECARPIGNY à qui je dois ma formation en Acoustique et à la technique des Eléments Finis. Ils ont participé à toutes les phases de ce travail, m'aidant dans les moindres détails et m'assurant de leur soutien constant et amical. Je les en remercie du fond du coeur.

Ma reconnaissance va également à Monsieur P. TIERCE pour la confiance qu'il me témoigne. L'aide qu'il a apportée et les conseils qu'il a formulés au cours de cette thèse m'ont été très précieux et je l'en remercie vivement.

Je remercie l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord et la société SINAPTEC qui m'ont permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions. Je remercie Messieurs P. ASTIER et G. VANDECANDELAERE qui favorisent le travail de recherche au sein de l'ISEN.

Je remercie Messieurs B. HAMONIC et R. BOSSUT pour leur aide amicale et efficace. Mes remerciements vont également à Messieurs J.P. CHABROL, C. GRANGER et H. TOURNEUR pour la qualité des résultats expérimentaux qu'ils m'ont fournis.

Je tiens à remercier vivement mes amis et frères, qui m'ont été d'un précieux concours lors de la réalisation des figures.

Enfin, je remercie sincèrement Mademoiselle V. LAMARCQ qui a réalisé avec une remarquable rapidité une partie de la frappe de ce rapport.

NOTATIONS

$[B_u]$: matrice des dérivées des fonctions d'interpolation N par rapport aux coordonnées d'espace reliant les déformations aux valeurs nodales du déplacement,

$[B_\phi]$: matrice des dérivées des fonctions d'interpolation N par rapport aux cordonnées d'espace reliant le champ électrique aux valeurs nodales du potentiel,

$[C^D]$: tenseur des constantes de rigidité à induction électrique constante,

$[C^E]$: tenseur des constantes de rigidité à champ électrique constant,

$[D]$: matrice de rigidité de la plaque piézoélectrique,

$\underset{\sim}{D}$: vecteur induction électrique,

$[d]$: tenseur des constantes piézoélectriques,

E : module d'YOUNG,

$\underset{\sim}{E}$: vecteur champ électrique,

$[e]$: tenseur des constantes piézoélectriques,

$\underset{\sim}{f}$: vecteur force de surface imposée,

$\underset{\sim}{F}$: vecteur force de surface,

F_A : fréquence d'antirésonance,

F_R : fréquence de résonance,

$[g]$: tenseur des constantes piézoélectriques,

h : épaisseur de la plaque piézoélectrique,

$[h]$: tenseur des constantes piézoélectriques,

$[J]$: matrice de Jacobi du changement de système de coordonnées,

k : coefficient de couplage électromécanique d'un mode,

$[K_{uu}]$: matrice de rigidité mécanique,

$[K_{u\phi}]$: matrice de rigidité piézoélectrique,

$[K_{\phi\phi}]$: matrice de rigidité diélectrique,

L : quantité variationnelle associée au problème électromécanique,

ℓ : plus petite dimension latérale de la plaque piézoélectrique,

$\underset{\sim}{M}$: vecteur des moments de flexion et de torsion de plaque piézoélectrique,

[M] : matrice de masse cohérente,

N^e : fonctions d'interpolation associées à un élément de maillage du domaine,

$\underset{\sim}{n}$: vecteur normal à une surface orienté vers l'extérieur,

Q_p : charge électrique de l'électrode p,

$\underset{\sim}{Q}$: vecteur des valeurs nodales des charges électriques,

R : distance d'un point à l'axe de symétrie,

[R] : matrice de rotation associée à un changement de repère orthonormé,

S : entropie,

S_p : surface de l'électrode p,

S_u : surface sur laquelle est imposé le déplacement u',

S_σ : surface sur laquelle est appliquée la force $\underset{\sim}{f}$,

$\underset{\sim}{s}$: tenseur des déformations,

$[S^D]$: tenseur des constantes élastiques à induction électrique constante,

$[S^E]$: tenseur des constantes élastiques à champ électrique constant,

T : température,

U : énergie interne,

$\underset{\sim}{u}$: champ de déplacement autour d'une position de repos,

$\underset{\sim}{U}^e$: vecteur des valeurs nodales du champ de déplacement de l'élément,

$\underset{\sim}{u}'$: vecteur déplacement imposé,

w : déplacement normal au plan de la plaque piézoélectrique (flèche),

$\underset{\sim}{W}^e$: vecteur des valeurs nodales de la flèche,

x,y,z: système de coordonnées locales,

X,Y,Z: système de coordonnées globales,

α,β,γ: angles de rotation,

$[\alpha]$: matrice de rigidité de la plaque piézoélectrique,

$[\beta]$: matrice piézoélectrique de la plaque,

$[\beta^s]$: tenseur des constantes diélectriques à déformation constante,

$[\beta^\sigma]$: tenseur des constantes diélectriques à contrainte nulle,

θ : coordonnée angulaire,

δ_{ij} : symbole de **KRONECKER**,

∂ : symbole de dérivation partielle,

$[\varepsilon^s]$: tenseur des constantes diélectriques à déformation constante,

$[\varepsilon^\sigma]$: tenseur des constantes diélectriques à contrainte nulle,

γ : coefficient diélectrique du trilame piézoélectrique,

$\underset{\sim}{\kappa}$: vecteur des courbures de la plaque piézoélectrique,

φ : coordonnée angulaire,

Φ : potentiel électrique appliqué à la structure,

$\underset{\sim}{\Phi}$: vecteur des valeurs nodales du potentiel sur le domaine,

ω : pulsation du système,

Ω : domaine électromécanique modélisé par éléments finis,

ξ,η,ζ: système de coordonnées réduites,

ν : coefficient de Poisson,

ρ : masse volumique.

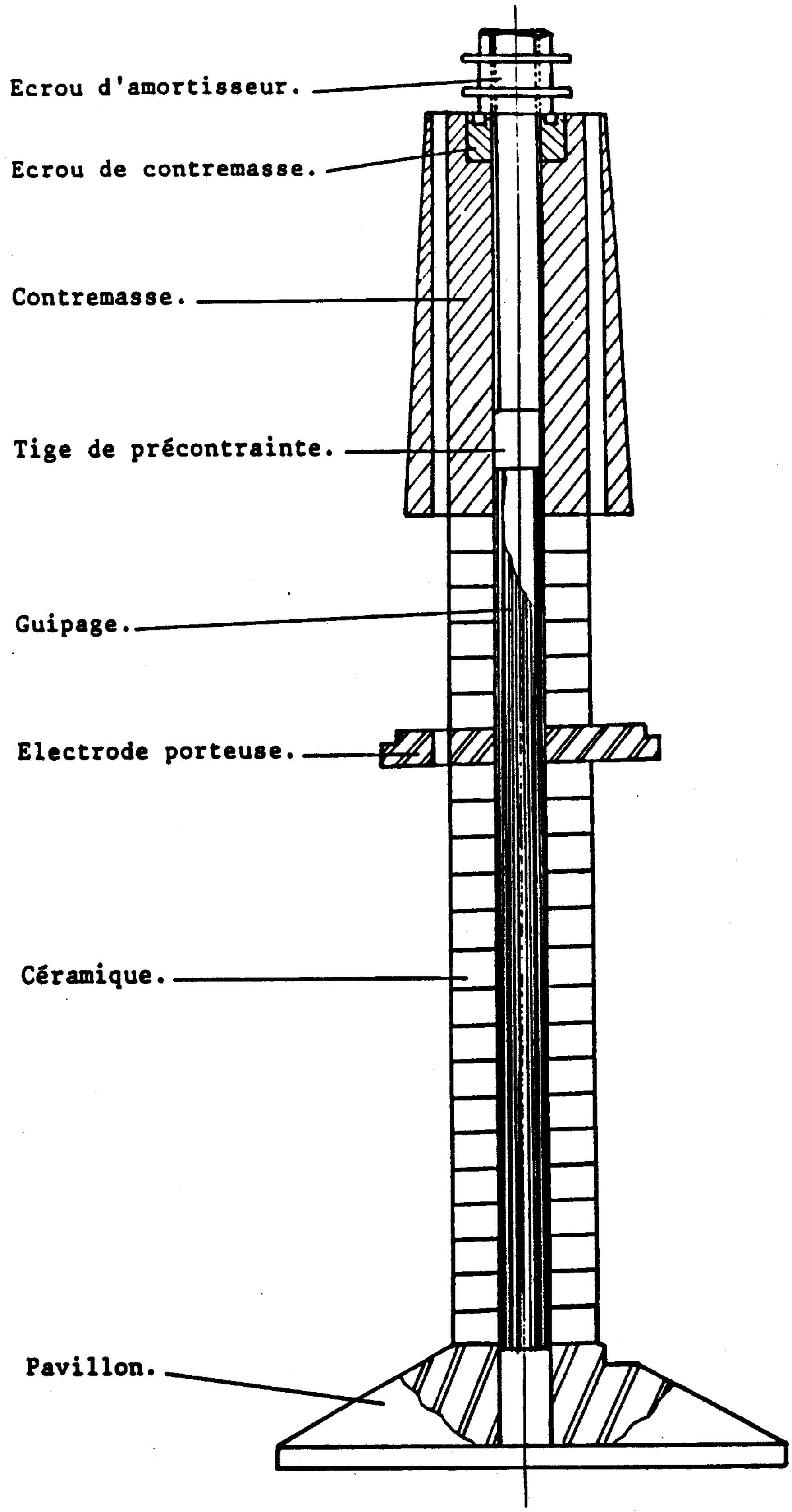
INTRODUCTION

La conception de transducteurs piézoélectriques nouveaux pour l'acoustique sous-marine requiert notamment le développement de modèles et d'outils de simulation permettant d'analyser le comportement de structures tridimensionnelles hétérogènes, anisotropes et de formes complexes [1-3]. Cet objectif implique l'usage de méthodes numériques élaborées, et généralement celui de la méthode des éléments finis sur laquelle reposent plusieurs codes de calcul spécialisés [4-6] dont le code **ATILA** [2,3,7,8].

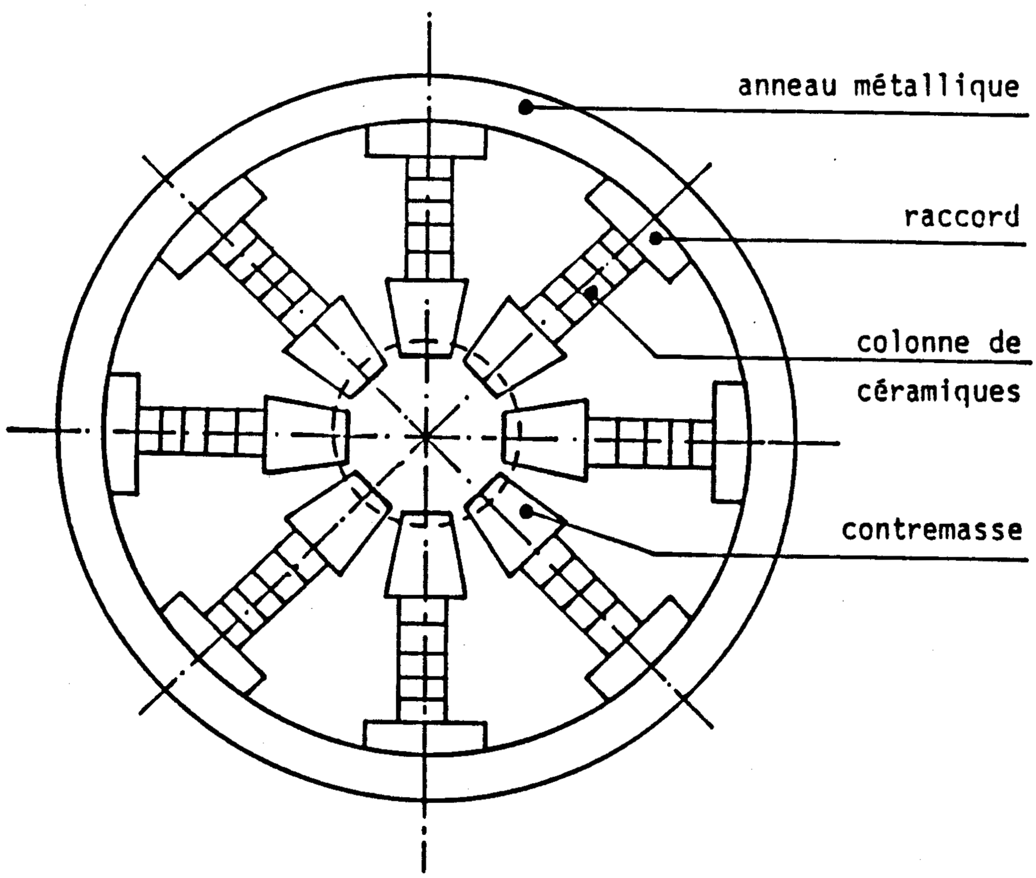
Le code de calcul par éléments finis **ATILA** permet, dans un domaine borné à deux ou trois dimensions comportant des parties élastique, piézoélectrique et fluide, l'intégration de l'équation du mouvement, de l'équation de **POISSON** et de l'équation de **HELMHOLTZ**, compte tenu de diverses conditions aux interfaces et sur les frontières externes. Il autorise ainsi la description précise de la conversion d'une énergie électrique en énergie mécanique, via l'effet piézoélectrique, puis de la conversion de l'énergie mécanique en énergie acoustique, suivant les conditions de continuité cinématique et dynamique à l'interface fluide-structure, et enfin du rayonnement vers l'infini de cette énergie acoustique, grâce à une condition de non réflexion appropriée imposée sur la surface externe de la partie fluide du domaine étudié. Ce code a été essentiellement utilisé pour analyser le comportement de projecteurs sonar: transducteurs Tonpilz [7,9] (figure 1), transducteurs annulaires à moteurs radiaux de type Isabelle [10,11] (figure 2), transducteurs annulaires à immersion libre [12,13] (figure 3), transducteurs flextensionnels [2,14,15] (figure 4). Dans ces différents cas, le matériau actif décrit était la céramique piézoélectrique, à polarisation uniforme. De plus, hormis le cas de la coque des transducteurs flextensionnels pour lequel trois éléments finis particuliers ont été conçus [14,15], tous les éléments finis de structure utilisés reposaient sur les théories générales de l'élasticité et de la piézoélectricité, exploitées sans approximation et formulées pour des problèmes tridimensionnels ou à symétrie de révolution.

L'objet de cette thèse a été la généralisation de l'application des éléments finis à d'autres problèmes liés à la modélisation des matériaux piézoélectriques: matériaux différents de la céramique, matériaux ferroélectriques à polarisation non uniforme, structures piézoélectriques longues soumises à des conditions de déformation plane, structures piézoélectriques planes composites, soumises à des déformations de plaque. Le premier point a ainsi nécessité, à l'intérieur du code, la généralisation des opérations tensorielles. Sa solution permet maintenant aussi bien la description des céramiques piézoélectriques que du quartz, du niobate de lithium ou des piézoplastiques. Le second point, résolu en exploitant de façon particulière l'intégration numérique lors de la description des éléments, permet la prise en compte d'une céramique ou d'un piézoplastique dont la direction de polarisation n'est pas uniforme: polarisations cylindrique et sphérique, ou polarisation plus complexe telle qu'elle existe dans des structures dégradées partiellement dépolarisées [16,17]. Le troisième point, spécifique des barrettes piézoélectriques, permet l'analyse de transducteurs haute fréquence, utilisés notamment en imagerie acoustique [18]. Enfin, le quatrième point concerne la modélisation des trilames piézoélectriques qui sont les éléments sensibles de nombreux capteurs, notamment d'hydrophones à directivité intrinsèque. Ce point a nécessité de compléter les hypothèses de **KIRCHHOFF** typiques de la théorie des plaques en élasticité [19] par des conditions mécaniques liées à l'aspect composite de ces structures et par des conditions électriques liées à leur nature piézoélectrique. Ces développements ont conduit à l'élaboration de deux éléments finis surfaciques qui sont, à notre connaissance, originaux dans leur formulation et leur domaine d'application. Dans chaque cas traité, une validation précise des résultats acquis a été conduite, par rapport à d'autres résultats analytiques ou numériques, ou par rapport à des mesures. L'ensemble de cette contribution permet maintenant la modélisation, à l'aide du code **ATILA**, de plusieurs familles nouvelles de transducteurs: hydrophones, transducteurs haute fréquence, transducteurs utilisant de nouveaux matériaux actifs, et a déjà permis diverses optimisations.

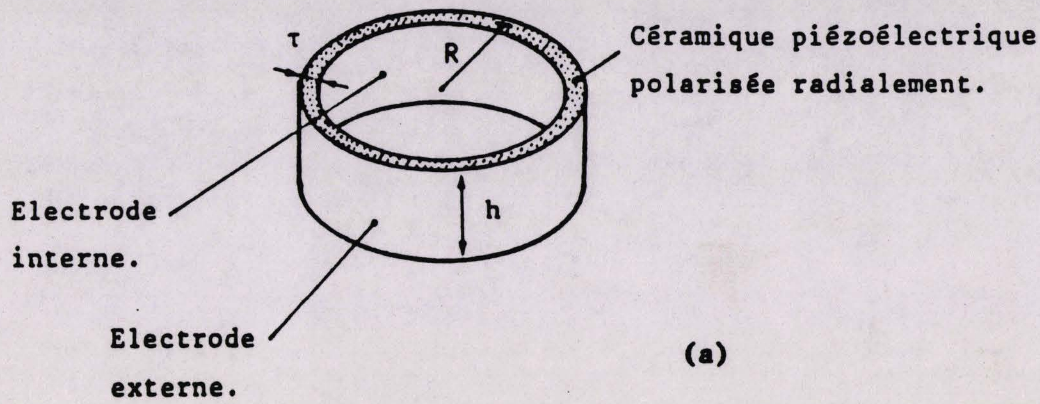
Ce rapport est divisé en quatre chapitres. Le premier contient un bref rappel des équations de la piézoélectricité, de la formulation variationnelle du problème de vibration d'une structure piézoélectrique et de sa résolution par éléments finis. Ces notions fondamentales sont illustrées par la description d'éléments piézoélectriques à déformation plane et de leur application à des barettes haute fréquence, puis par la description d'un élément particulier, le triangle piézoélectrique isoparamétrique à six noeuds pour structures à symétrie de révolution. Le second chapitre précise la généralisation des opérations tensorielles permettant la prise en compte de tout matériau piézoélectrique. Il analyse ensuite la description par éléments finis d'une polarisation variable, qu'il valide dans les cas particuliers des polarisations cylindrique et sphérique. Le troisième chapitre présente le problème de la plaque piézoélectrique et a un caractère essentiellement didactique puisque, de fait, les modes de flexion d'une telle plaque ne sont pas couplés et ne pourraient être excités électriquement. Toutefois, il permet l'association des hypothèses de **KIRCHHOFF** et des équations décrivant les vibrations d'une structure piézoélectrique et débouche sur l'écriture de termes essentiels au problème du trilame. Enfin, le quatrième chapitre exploite les résultats précédents, obtenus pour la plaque piézoélectrique, dans le cas d'un trilame. Après la formulation des éléments, il décrit plusieurs applications. Il s'achève par une étude paramétrée du couplage piézoélectrique d'un trilame et l'analyse des limites des modèles, associées notamment au caractère composite d'une telle structure.



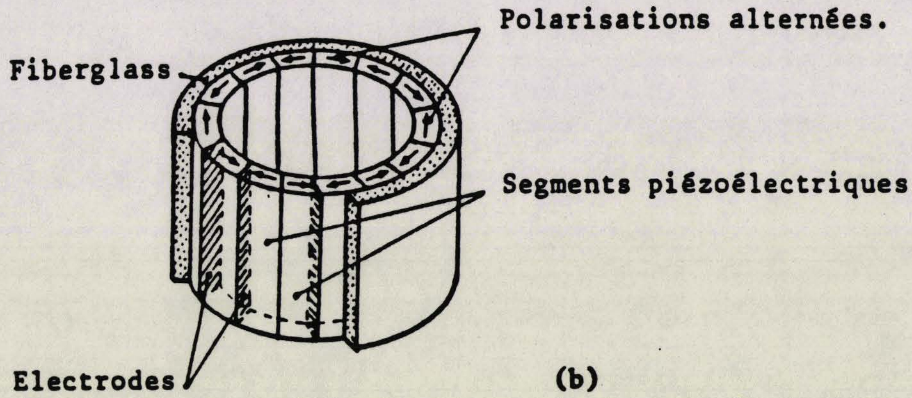
<u>figure 1</u>: transducteur de type Tonpilz



<u>figure 2</u>: transducteur annulaire à moteurs radiaux

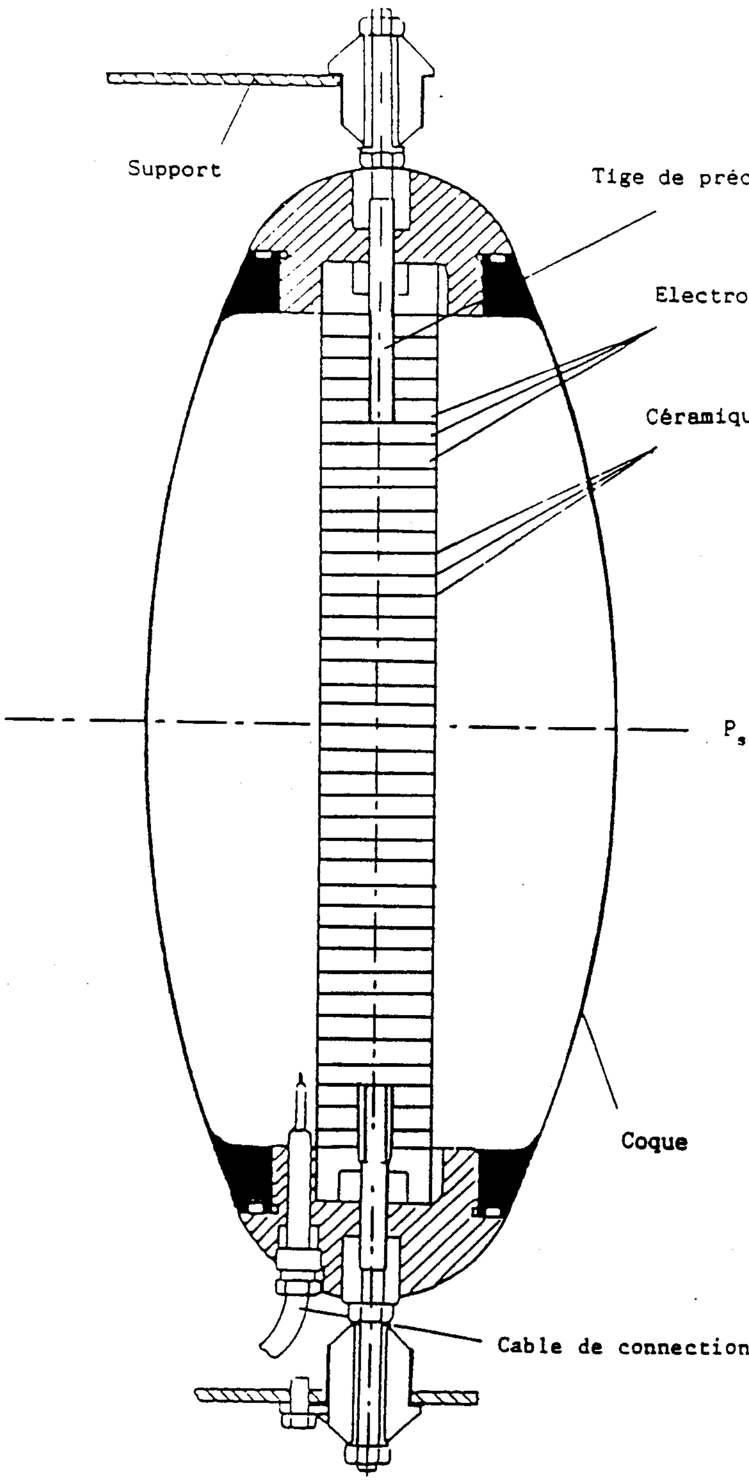


(a)



(b)

figure 3: transducteur annulaire à immersion libre
polarisations radiale (a) et tangentielle (b)



<u>figure 4</u>: transducteur flextensionnel de type I

CHAPITRE I

DEVELOPPEMENT DE QUELQUES ELEMENTS PIEZOELECTRIQUES BIDIMENSIONNELS

Après un bref rappel des équations fondamentales de la piézoélectricité, ce chapitre présente les règles générales de la formation et de la condensation des différents tenseurs d'un matériau piézoélectrique, indépendamment de sa classe de symétrie. Les équations décrivant le comportement linéaire d'une structure électromécanique mue par l'effet piézoélectrique sont alors posées, puis leur formulation variationnelle est étudiée ainsi que leur résolution à l'aide de la méthode des éléments finis. Ensuite, le développement d'éléments finis piézoélectriques plans est proposé (éléments rectangulaire et triangulaire de déformation plane, élément triangulaire à symétrie axiale), pour illustrer la formulation. Enfin ces éléments sont validés à l'aide de plusieurs exemples tests.

I- 1 ANALYSE THEORIQUE D'UN PROBLEME ELECTROMECANIQUE

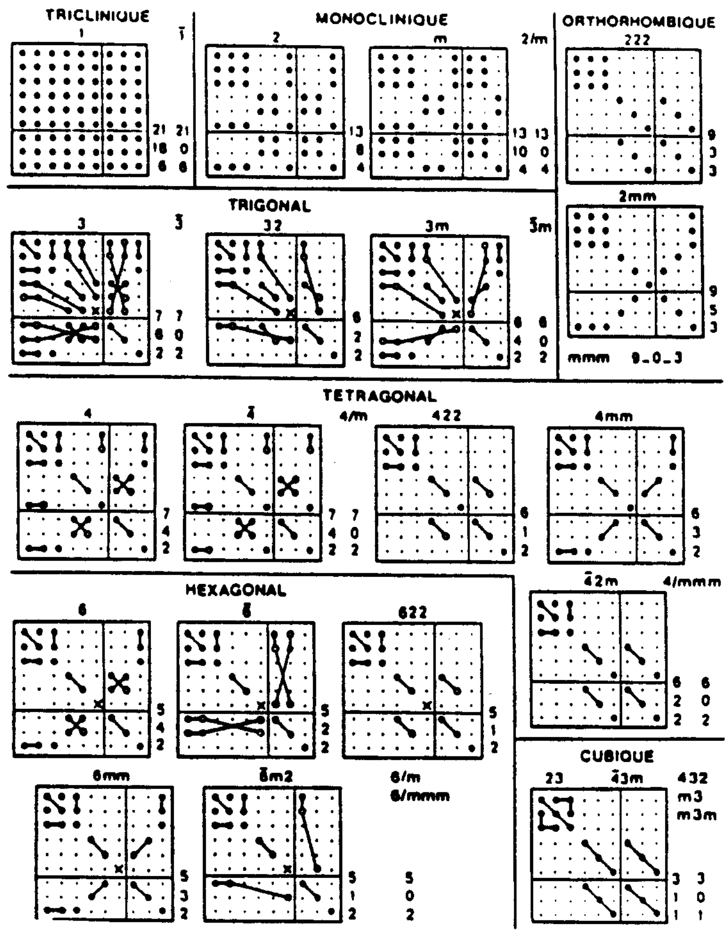
I- 1.1 Expressions tensorielles de la piézoélectricité

I- *1.1.1 Généralités*

Une structure cristalline peut être décrite par une reproduction dans l'espace d'un motif ou groupe d'atomes, suivant des translations définies par trois vecteurs élémentaires. Cet édifice, triplement périodique, possède des éléments de symétrie ponctuelle dont le dénombrement aboutit à distribuer en 32 classes les différents cristaux [20]. Les cristaux de même symétrie ponctuelle ont un comportement semblable vis à vis d'actions physiques de même orientation. La notion de tenseur apparait dès que l'on cherche à établir des relations linéaires entre effets et causes dans les milieux cristallins. L'analyse tensorielle permet le classement des grandeurs physiques d'après les lois de transformation de leurs composantes lors d'un changement d'axes de référence. Les propriétés physiques des cristaux peuvent ainsi être décrites par des tenseurs de rang zéro, comme la chaleur spécifique, de rang un, comme la pyroélectricité, de rang deux, comme la permittivité diélectrique, de rang trois, comme la piézoélectricité, de rang quatre, comme l'élasticité. Lorsqu'un changement d'axes de référence correspond à une opération de symétrie du cristal, il résulte de l'identité des propriétés physiques du cristal dans les deux repères des relations entre les composantes des tenseurs caractérisant ces propriétés, et donc une réduction du nombre des composantes indépendantes. Pour les matériaux piézoélectriques qui nous intéressent plus particulièrement dans ce rapport, trois tenseurs sont nécessaires pour les caractériser complètement: le tenseur des permittivités diélectriques, le tenseur des constantes piézoélectriques et le tenseur des constantes élastiques. Le tableau I-1 [21] présente la représentation des tenseurs associés aux différentes classes de symétrie ponctuelle des cristaux piézoélectriques.

I- *1.1.2 Rappel historique*

L'effet piézoélectrique fut découvert expérimentalement en 1880 par **Pierre et Jacques CURIE** qui observèrent, en exerçant une pression sur la surface de certains cristaux comme le quartz ou le sel de rochelle, l'apparition d'une charge électrique de surface proportionnelle à cette pression. L'effet inverse, à savoir que l'application d'une tension électrique sur les faces du cristal produit une dilatation ou une contraction de ce dernier, fut prédit en 1881 par **LIPPMAN**. Ce phénomène fut, par la suite, décrit par **DUHEM** puis par **VOIGT**. Cependant, l'effet piézoélectrique resta une curiosité scientifique jusqu'au début de la première guerre mondiale. A cette époque, **LANGEVIN** utilisa les cristaux piézoélectriques à des fins de détection sous-marine. Cette application, suivie de beaucoup d'autres, s'est largement développée à partir de 1950 avec l'apparition du titanate de baryum, puis, plus récemment, de céramiques piézoélectriques en titanate de baryum ou en titano-zirconate de plomb. Ces composés, obtenus par frittage d'oxydes ou de sels de Plomb, de Zirconium et de Titane [22], peuvent avoir des formes géométriques très



Notation:

- o Module nul.
- • Module différent de zéro.
- •—• Modules égaux.
- •—o Modules égaux en valeurs absolues, mais de signes contraires.
- x $\frac{1}{2}\cdot\left(C^E_{11} - C^E_{12}\right)$

Tableau I-1: table des symétries des matrices de constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques dans le système des axes cristallographiques [21]. La symétrie par rapport à la diagonale principale n'est pas mentionnée. Le nombre de constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques indépendantes est indiqué à droite de chaque matrice. Les matrices des classes dénuées de piézoélectricité ne sont pas représentées. *(1)*

(1): Cette table est donnée pour les tenseurs C^E_{ijkl}, e_{ijk} et ε^S_{ij}. D'autres auteurs la donnent pour les tenseurs S^E_{ijkl}, d_{ijk} et ε^σ_{ij}. Dans ce cas, certains coefficients de la table sont multipliés par 2.

variées (anneau, disque, sphère, etc...). Ils sont ferroélectriques. Après polarisation, réalisée en soumettant la céramique à un champ électrique élevé (quelques dizaines de kV par centimètre), généralement à une température proche de la température de CURIE, apparait un effet piézoélectrique. La symétrie des tenseurs caractéristiques de la céramique est celle de la classe 6mm [23].

I- *1.1.3 Equations fondamentales*

Dans un solide élastique, la variation de l'énergie interne U est une différentielle totale exacte exprimée par la relation:

$$dU = \sigma_{ij} ds_{ij} + TdS \tag{I.1}$$

où σ_{ij} est une composante du tenseur des contraintes, s_{ij} une composante du tenseur des déformations, T la température et S l'entropie avec:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial s_{ij}}\right)_S \tag{I.2}$$

Les indices i et j varient de 1 à 3 et repèrent les axes de coordonnées. La notation d'EINSTEIN est adoptée et systématiquement utilisée. En écrivant, pour une transformation adiabatique, la différentielle totale de σ_{ij}:

$$d\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s_{kl}}\right)_S . ds_{kl} \tag{I.3}$$

on peut établir, dans l'hypothèse d'un comportement linéaire du matériau, la relation suivante:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} s_{kl} \tag{I.4}$$

où:

$$C_{ijkl} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s_{kl}}\right)_S \tag{I.5}$$

C_{ijkl} est une composante du tenseur des constantes élastiques. Cette loi de proportionnalité entre contraintes et déformations a été énoncée pour la première fois au XVII^e siècle par HOOKE. Dans le cas d'un solide piézoélectrique, l'énergie interne doit être augmentée de l'énergie électrique. Ainsi, la variation de l'énergie interne U s'écrit:

$$dU = \sigma_{ij} ds_{ij} + E_i dD_i + TdS \tag{I.6}$$

où:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial s_{ij}}\right)_{S,D} \tag{I.7}$$

et:

$$E_i = \left(\frac{\partial U}{\partial D_i}\right)_{s,S} \tag{I.8}$$

σ_{ij} est une composante du tenseur des contraintes et E_i une composante du champ électrique. En différenciant σ_{ij} pour une transformation adiabatique:

$$d\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s_{kl}}\right)_{S,D} .ds_{kl} + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_k}\right)_{s,S} .dD_k \tag{I.9}$$

on établit, avec la même hypothèse de linéarité, que:

$$\sigma_{ij} = C^D_{ijkl} s_{kl} - h_{kij} D_k \tag{I.10}$$

où:

$$C^D_{ijkl} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s_{kl}}\right)_{S,D} \tag{I.11}$$

et:

$$h_{kij} = -\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_k}\right)_{s,S} \tag{I.12}$$

C^D_{ijkl} est une composante du tenseur d'ordre quatre des constantes élastiques à induction électrique constante et h_{kij} une composante du tenseur d'ordre trois des constantes piézoélectriques. La relation (I.10) traduit l'effet piézoélectrique inverse. De même, en différenciant E_i on établit:

$$dE_i = \left(\frac{\partial E_i}{\partial s_{kl}}\right)_{S,D} .ds_{kl} + \left(\frac{\partial E_i}{\partial D_j}\right)_{s,S} .dD_j \tag{I.13}$$

En remarquant alors que:

$$\left(\frac{\partial E_i}{\partial s_{kl}}\right)_{D,S} = \frac{\partial}{\partial s_{kl}}\left(\frac{\partial U}{\partial D_i}\right) = \frac{\partial}{\partial D_i}\left(\frac{\partial U}{\partial s_{kl}}\right) = \left(\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial D_i}\right)_{s,S} = -\ h_{ikl}$$

on peut écrire:

$$E_i = - h_{ikl}s_{kl} + \beta^s_{ij}D_j \qquad (I.14)$$

où:

$$\beta^s_{ij} = \left(\frac{\partial E_i}{\partial D_j}\right)_{s,S} \qquad (I.15)$$

β^s_{ij} est une composante du tenseur d'ordre deux des constantes diélectriques à déformation constante. La relation (I.14) exprime l'effet piézoélectrique direct. Le couple de relations (I.10) et (I.14) constitue les équations d'état de la piézoélectricité. D'autres systèmes d'équations d'état équivalents peuvent être établis en choisissant d'autres couples de variables indépendantes. Ainsi, on obtient en choisissant:

-le couple s et E:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C^E_{ijkl}s_{kl} - e_{kij}E_k \\ D_i &= e_{ikl}\, s_{kl} + \varepsilon^s_{ij}\, E_j \end{aligned} \qquad (I.16)$$

-le couple σ et E:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= S^E_{ijkl}\sigma_{kl} + d_{kij}E_k \\ D_i &= d_{ikl}\, \sigma_{kl} + \varepsilon^\sigma_{ij}\, E_j \end{aligned} \qquad (I.17)$$

-le couple σ et D:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= S^D_{ijkl}\sigma_{kl} + g_{kij}D_k \\ E_i &= -g_{ikl}\, \sigma_{kl} + \beta^\sigma_{ij}\, D_j \end{aligned} \qquad (I.18)$$

I- 1.2 Règles de condensation des tenseurs

I- *1.2.1 Notation de VOIGT*

Un tenseur de rang quatre possède $3^4 = 81$ composantes, un tenseur de rang trois, 27 et un tenseur de rang deux, 9. Les tenseurs σ_{ij} et s_{ij} étant symétriques, le nombre de constantes élastiques indépendantes est réduit de 81 à 36 et le nombre de constantes piézoélectriques de 27 à 18. Un couple non ordonné d'indices (i,j) ne peut ainsi prendre que six valeurs distinctes, numérotées de 1 à 6 de la manière suivante [24]:

$$\begin{array}{ccc} (11) \Leftrightarrow 1 & (22) \Leftrightarrow 2 & (33) \Leftrightarrow 3 \\ (23)=(32) \Leftrightarrow 4 & (13)=(31) \Leftrightarrow 5 & (12)=(21) \Leftrightarrow 6 \end{array} \qquad (I.19)$$

L'opération de passage d'une paire d'indices (i,j) à l'indice α correspondant, conformément à la relation (I.19), constitue la contraction des indices.

I- 1.2.2 *Application aux équations de la piézoélectricité*

En adoptant cette notation, dite de **VOIGT**, les modules élastiques indépendants peuvent être repérés par seulement deux indices α et β variant de 1 à 6. Ces coefficients se rangent dans un tableau carré 6x6 à 36 éléments:

$$C^D_{\alpha\beta} = C^D_{ijkl} \qquad (I.20)$$

De même, les modules piézoélectriques indépendants se rangent dans un tableau à trois lignes et six colonnes:

$$h_{k\alpha} = h_{kij} \qquad (I.21)$$

Le passage des tenseurs aux tableaux constitue l'opération de condensation des tenseurs. Cette notation peut être étendue aux tenseurs des contraintes et déformations afin d'écrire plus simplement les équations d'état. Ainsi, par exemple, les relations (I.16) se mettent sous la forme:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= C^E_{\alpha\beta}.s_\beta - e_{j\alpha}.E_j \\ D_i &= e_{i\beta}.s_\beta + \varepsilon^s_{ij}.E_j \end{aligned} \qquad (I.22)$$

Si la convention (I.19) est adoptée pour les contraintes, c'est à dire:

$$\sigma_\alpha = \sigma_{ij} \qquad (I.23)$$

avec $\alpha \leftrightarrow (i,j)$, alors il faut poser:

$$\begin{aligned} s_1 &= s_{11} & s_2 &= s_{22} & s_3 &= s_{33} \\ s_4 &= 2s_{23} & s_5 &= 2s_{13} & s_6 &= 2s_{12} \end{aligned} \qquad (I.24)$$

pour que la relation (I.22) soit effectivement équivalente à la relation (I.16). Le système d'équations (I.17) peut également être transposé en notation matricielle de **VOIGT**:

$$\begin{aligned} s_\alpha &= S^E_{\alpha\beta}.\sigma_\beta + d_{j\alpha}.E_j \\ D_i &= d_{i\beta}.\sigma_\beta + \varepsilon^\sigma_{ij}.E_j \end{aligned} \qquad (I.25)$$

mais, pour satisfaire aux définitions de σ_α et de s_α données dans les relations (I.23) et (I.24) il faut alors poser:

$$S^E_{\alpha\beta} = 2^p . S^E_{ijkl}$$

$$d_{i\alpha} = 2^q . d_{ijk} \qquad \text{(I.26)}$$

où p est le nombre d'indices supérieurs à 3 dans le couple (α,β), q vaut 1 pour α inférieur ou égal à 3 et 2 pour α supérieur à 3. Enfin, le système formé par les équations (I.10) et (I.14) d'une part et le système d'équations (I.18) deviennent:

$$\sigma_\alpha = C^D_{\alpha\beta} . s_\beta - h_{j\alpha} . D_j$$

$$E_i = -h_{i\beta} . s_\beta + \beta^s_{ij} . D_j \qquad \text{(I.27)}$$

et:

$$s_\alpha = S^D_{\alpha\beta} . \sigma_\beta + g_{j\alpha} . D_j$$

$$E_i = -g_{i\beta} . \sigma_\beta + \beta^\sigma_{ij} . D_j \qquad \text{(I.28)}$$

De plus, sachant que:

$$C^D_{ijkl} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}}\right)_{D,S} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s_{kl} \partial s_{ij}}\right)_{D,S} = C^D_{klij} \qquad \text{(I.29)}$$

on déduit que le tableau 6x6 des coefficients $C^D_{\alpha\beta}$ est symétrique par rapport à la diagonale principale, ramenant ainsi de 36 à 21 le nombre des composantes indépendantes dans le cas le plus général. De même ayant:

$$\beta^s_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial D_j}\right)_{s,S} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial D_j \partial D_i}\right)_{s,S} = \beta^s_{ji} \qquad \text{(I.30)}$$

il résulte que le tenseur des constantes diélectriques β^s_{ij} est également symétrique, réduisant ainsi à 6 le nombre de constantes diélectriques indépendantes.

I- 1.3 Formulation d'un problème électromécanique

I- *1.3.1 Equations*

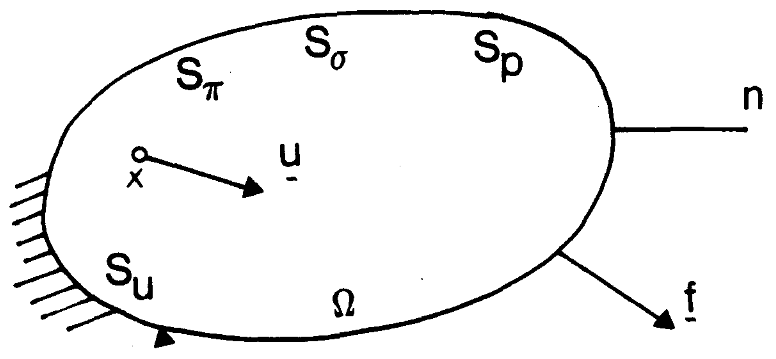


figure I-1: domaine piézoélectrique Ω

Dans l'hypothèse des petits déplacements, les équations d'état d'un système piézoélectrique peuvent être complétées par les relations suivantes:

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (I.31)$$

$$E_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \qquad (I.32)$$

où u_i est une composante du champ de déplacement et Φ le potentiel électrique. Dans le domaine piézoélectrique Ω (figure I-1), sont vérifiées l' équation de **NEWTON** ou équation du mouvement:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad (I.33)$$

et l'équation de **POISSON**:

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (I.34)$$

ρ est la masse volumique du matériau piézoélectrique. En régime harmonique, à la pulsation ω, le couplage des relations (I.16) aux équations (I.33) et (I.34) conduit à:

$$-\rho\omega^2 u_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C^E_{ijkl}.s_{kl} - e_{kij}.E_k\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e_{ikl}.s_{kl} + \varepsilon^s_{ij}.E_j\right) = 0 \qquad (I.35)$$

I- 1.3.2 Conditions aux limites

Deux types de conditions aux limites sont associés à ces équations, les conditions aux limites ***mécaniques*** et ***électriques***. Les conditions aux limites mécaniques sont:

- des conditions du type **DIRICHLET**, correspondant à un champ de déplacement imposé:

$$u_i = u_i' \qquad (I.36)$$

où u_i' est une quantité connue. On note S_u la surface correspondante.

- des conditions du type **NEUMANN** correspondant à un champ de contrainte imposé:

$$\sigma_{ij}.n_j = f_i \qquad (I.37)$$

où $\underset{\sim}{n}$ est le vecteur normal à la surface et $\underset{\sim}{f}$ un vecteur de force imposée par unité de surface. On note S_σ la surface correspondante.

Les conditions aux limites électriques sont:

- des conditions sur l'excitation du champ électrique. Toute partie de la surface dénuée d'électrode ne porte pas de charge superficielle et:

$$D_i.n_i = 0 \qquad (I.38)$$

où $\underset{\sim}{n}$ est le vecteur normal à la surface. On note S_π la surface correspondante. Cette condition suppose que le champ électrique est nul à l'extérieur du domaine Ω, ce qui revient à considérer la permittivité diélectrique du milieu extérieur comme négligeable devant celle du domaine. Cette hypothèse est largement vérifiée pour les matériaux piézoélectriques étudiés.

- des conditions sur le potentiel et l'excitation du champ électrique valables sur les électrodes. Chaque électrode, de surface S_p , est portée au potentiel Φ_p. Sa charge Q_p est obtenue par:

$$-\iint_{S_p} D_i.n_i dS_p = Q_p \tag{I.39}$$

Suivant les cas, le potentiel Φ_p ou la charge Q_p est imposé. L'origine des potentiels est définie en imposant sur l'une des électrodes, par exemple l'électrode p = 0, un potentiel nul (Φ_0 = 0).

I- 1.4 Application de la méthode des éléments finis

I- *1.4.1 Principe variationnel*

La formulation variationnelle d'un problème consiste à définir une quantité stationnaire L dont la minimisation, suivant le théorème d'**EULER** [25], fournit les équations différentielles de ce problème et l'ensemble de ses conditions aux limites. Dans le cas des équations (I.35) et de l'ensemble des conditions aux limites (I.36) à (I.39), une quantité stationnaire L proposée par **J.A. LEWIS** [26], **R. HOLLAND** et **E.P. EER NISSE** [27], puis justifiée à l'aide du principe des travaux virtuels par **H. ALLIK** et **T.J.R. HUGHES** [28], est donnée par:

$$\begin{aligned} L = & \iiint_\Omega \frac{1}{2}.\left(s_{ij}.C^E_{ijkl}.s_{kl} - \rho\omega^2 u_i^2 \right).d\Omega \\ & - \iint_{S_u} \left(u_i - u_i'\right).n_j.\left(C^E_{ijkl}.s_{kl} - e_{kij}.E_k\right).dS_u \\ & - \iint_{S_\sigma} f_i.u_i.dS_\sigma \\ & + \iiint_\Omega \frac{1}{2}.\left(2S_{kl}.e_{ikl}.E_i + E_i.\varepsilon^s_{ij}.E_j\right).d\Omega \\ & - \sum_{p=0}^{M} \iint_{S_p} (\Phi - \Phi_p).n_i.\left(e_{ikl}.s_{kl} + \varepsilon^s_{ij}.E_j\right).dS_p \\ & + \sum_{p=0}^{M} \Phi_p.Q_p \end{aligned} \tag{I.40}$$

La première intégrale est le lagrangien du problème mécanique. La seconde correspond aux déplacements imposés. La troisième est le travail des forces extérieures appliquées. La quatrième contient l'énergie électrique et l'énergie du couplage piézoélectrique. La cinquième corresponde aux potentiels imposés. Enfin, la sixième est associée aux électrodes.

Dans le cas de domaines aux formes géométriques simples, la minimisation de cette fonctionnelle L peut être réalisée à l'aide de la méthode de **RAYLEIGH-RITZ** [25]. Toutefois, cette technique devient inutilisable si les formes géométriques sont complexes ou si la structure est hétérogène.

I- *1.4.2 Méthode des éléments finis*

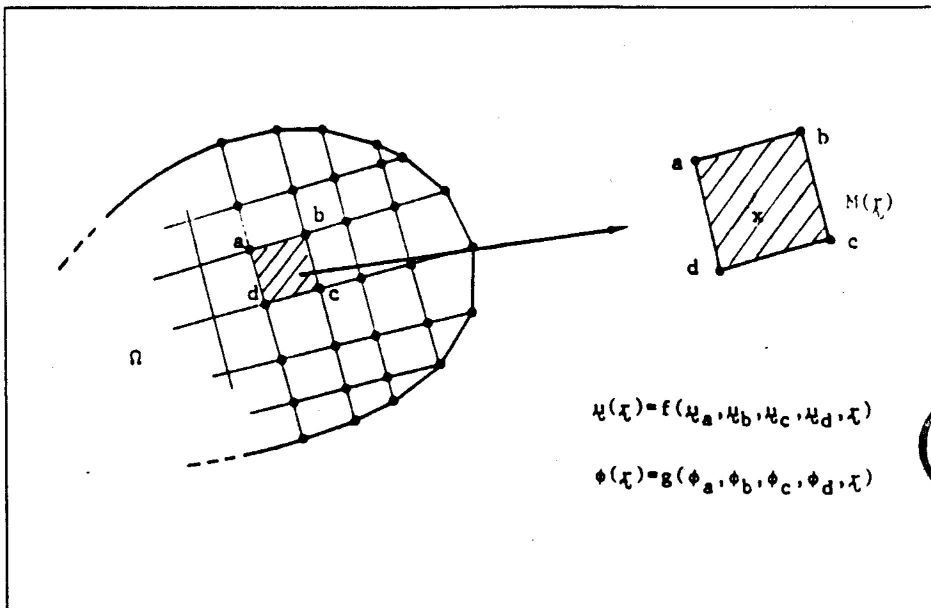


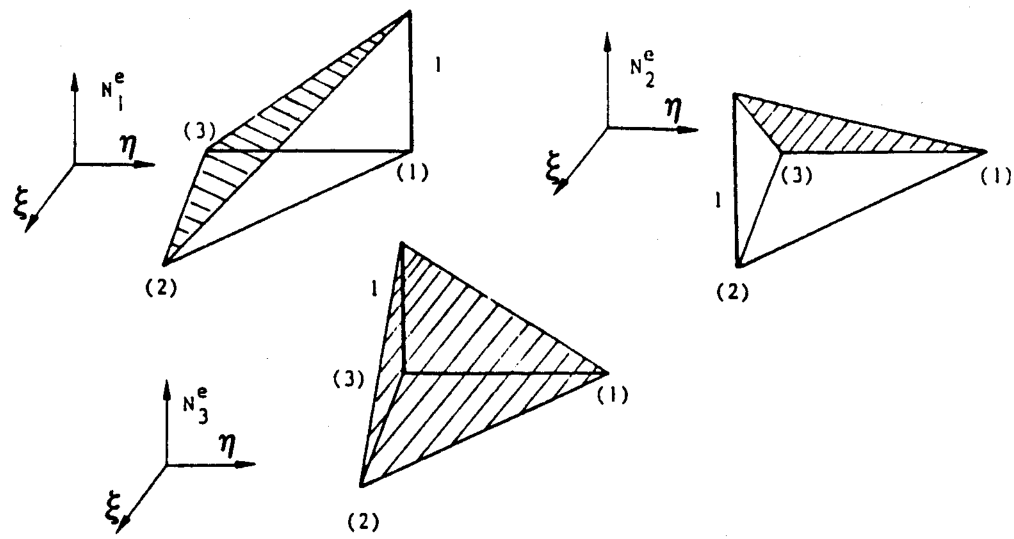
figure I-2: discrétisation du domaine Ω

La méthode des éléments finis, qui exploite souvent une formulation variationnelle, est très connue dans le domaine de la mécanique et largement décrite dans de nombreux ouvrages et publications [29 - 32]. Seuls les principaux points de la méthode sont donc brièvement rappelés dans ce rapport. Le domaine dans lequel le champ de déplacement et le potentiel sont recherchés est découpé par des lignes et des surfaces fictives en **éléments** (figure I-2). Ces éléments, de formes géométriques simples, sont interconnectés en un nombre fini de points appelés **noeuds**. Les **déplacements** et les potentiels aux noeuds constituent les inconnues du **problème**. A l'intérieur de chaque élément, les composantes u_α du champ de **déplacement** $\underset{\sim}{u}$ et le potentiel Φ sont définis de manière unique à partir de leurs valeurs nodales et grâce à l'utilisation de **fonctions d'interpolation** ou **de forme**. Sous forme matricielle, ces relations d'interpolation s'écrivent:

$$u_\alpha = [N^e].\underset{\sim}{U}^e_\alpha \qquad (I.41)$$

$$\Phi = [N^e].\underset{\sim}{\Phi}^e \qquad (I.42)$$

$\underset{\sim}{U}^e_\alpha$ et $\underset{\sim}{\Phi}^e$ sont les vecteurs formés respectivement par les valeurs nodales de la composante α du champ de déplacement et du potentiel. $[N^e]$ est la matrice ligne des fonctions de forme. Dans un élément, le nombre de fonctions de forme est égal au nombre de noeuds. Ces fonctions de forme sont des fonctions polynômiales des coordonnées réduites ξ, η, ζ de l'élément et sont, par exemple, illustrées en figure I-3. Algébriquement,



<u>figure I-3</u>: définition des fonctions de formes d'un élément triangulaire à trois noeuds.

elles sont définies par la relation:

$$N_i^e(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \delta_{ij} \tag{I.43}$$

où δ_{ij} est le symbole de **KRONECKER** et i et j décrivent tous les noeuds de l'élément. En utilisant les relations (I.31) et (I.41), l'état de déformation de l'élément e représenté par le vecteur $\underset{\sim}{s}$ peut s'écrire, en fonction des déplacements nodaux de cet élément:

$$\underset{\sim}{s} = \left[B_u^e\right].\underset{\sim}{U}^e \tag{I.44}$$

où $\left[B_u^e\right]$ est la matrice de transformation formée par les dérivées des fonctions de forme par rapport aux variables x, y, z et $\underset{\sim}{U}^e$ le vecteur des valeurs nodales de $\underset{\sim}{u}$. De même, la combinaison des relations (I.32) et (I.42) permet d'écrire:

$$\underset{\sim}{E} = - \left[B_\Phi^e\right].\underset{\sim}{\Phi}^e \tag{I.45}$$

En tenant compte des relations (I.44) et (I.45), les équations (I.22) peuvent se mettre alors sous la forme matricielle:

$$\underset{\sim}{\sigma} = [C^E]\left[B_u^e\right].\underset{\sim}{U}^e + [e\ ]^T\left[B_\Phi^e\right].\underset{\sim}{\Phi}^e$$
$$\underset{\sim}{D} = [e\ ]\left[B_u^e\right].\underset{\sim}{U}^e - [\varepsilon^s]\left[B_\Phi^e\right].\underset{\sim}{\Phi}^e \qquad (I.46)$$

Dans ces relations, la matrice $[C^E]$ est la matrice 6x6 obtenue par condensation du tenseur C^E_{ijkl} et $[e]$ est la matrice 3x6 obtenue par condensation du tenseur e_{ijk}. Compte tenu des relations (I.46), la fonctionnelle définie dans la relation (I.40) peut être décomposée en une somme sur tous les éléments du domaine [7]:

$$L = \sum_e \left\{ \frac{1}{2}.\underset{\sim}{U}^{eT}\left[K^e_{uu}\right]\underset{\sim}{U}^e - \frac{1}{2}.\omega^2\underset{\sim}{U}^{eT}[M^e]\,\underset{\sim}{U}^e \right.$$
$$+ \underset{\sim}{U}^{eT}\left[K^e_{u\Phi}\right]\underset{\sim}{\Phi}^e + \frac{1}{2}.\underset{\sim}{\Phi}^{eT}\left[K^e_{\Phi\Phi}\right]\underset{\sim}{\Phi}^e \qquad (I.47)$$
$$\left. - \underset{\sim}{U}^{eT}\underset{\sim}{F}^e \right\} + \sum_j \Phi_j Q_j$$

où:

$$\left[K^e_{uu}\right] = \iiint_{\Omega_e} \left[B^e_u\right]^T[C^E]\left[B^e_u\right].d\Omega_e$$
$$\left[K^e_{u\Phi}\right] = \iiint_{\Omega_e} \left[B^e_u\right]^T[e\ ]\left[B^e_\Phi\right].d\Omega_e \qquad (I.48)$$
$$\left[K^e_{\Phi\Phi}\right] = -\iiint_{\Omega_e} \left[B^e_\Phi\right]^T[\varepsilon^s]\left[B^e_\Phi\right].d\Omega_e$$

et:

$$F^e_\alpha = \iint_{S^e_\sigma} [N^e]^T f_\alpha dS^e_\sigma \qquad (I.49)$$

Les matrices $\left[K^e_{uu}\right]$, $\left[K^e_{u\Phi}\right]$ et $\left[K^e_{\Phi\Phi}\right]$ sont respectivement les matrices élémentaires de rigidité mécanique, piézoélectrique et diélectrique. $\underset{\sim}{Q}$ est le vecteur des valeurs nodales Q_j de la charge telles que, si les noeuds m sont les noeuds d'une électrode p dont le potentiel est égal à Φ_p, alors la somme des charges Q_m est égale à Q_p, sinon Q_j est nulle. L'application du principe variationnel consiste à écrire:

$$\frac{\partial L}{\partial U_i} = 0 \qquad \forall i$$

et:

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_i} = 0 \qquad (I.50)$$

Il conduit au système d'équations suivant [11]:

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2[M] & [K_{u\phi}] \\ & \\ [K_{u\phi}]^T & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \\ \underset{\sim}{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{F} \\ \\ -\underset{\sim}{Q} \end{bmatrix} \qquad (I.51)$$

où $[K_{uu}]$, $[K_{u\phi}]$ et $[K_{\phi\phi}]$ sont les matrices de rigidité obtenues à partir des matrices élémentaires de rigidité en les regroupant en un tableau unique pour toute la structure. Cette opération, qui implique de sommer les termes associés à des noeuds communs à plusieurs éléments, porte le nom d'**assemblage**. $\underset{\sim}{U}$, $\underset{\sim}{\Phi}$ et $\underset{\sim}{F}$ sont alors les vecteurs formés par les valeurs nodales des déplacements, du potentiel et des forces sur tout le domaine.

I- *1.4.3 Equations à résoudre*

La résolution du système d'équations (I.51), dont la matrice associée est réelle et symétrique, peut être conduite dans plusieurs cas:

a) Analyse statique

Le système à résoudre est obtenu en posant $\omega = 0$. Deux éventualités sont à considérer:

- la structure est isolée électriquement et une force statique $\underset{\sim}{F}$ est imposée sur sa frontière extérieure. La condition d'isolement électrique implique alors que la somme des valeurs nodales de la charge sur chaque électrode soit nulle et permet ainsi la condensation des lignes correspondantes. La résolution du système obtenu fournit le champ de déplacement et les potentiels induits par effet piézoélectrique direct en tout point de la structure.

- la structure est mécaniquement libre ($\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0}$) et soumise à des tensions excitatrices. Le champ de déplacement induit par effet piézoélectrique inverse et les valeurs nodales de la charge peuvent être directement calculés.

b) Analyse modale en court-circuit

Toutes les électrodes sont portées au potentiel zéro et la force $\underset{\sim}{F}$ est nulle. Par condensation des lignes correspondant aux noeuds d'électrodes, le système à résoudre se réduit à:

$$\left[\left[\bar{K}_{uu}\right] - \omega^2[M]\right].\underset{\sim}{U} = 0 \tag{I.52}$$

Cette équation admet des solutions non identiquement nulles si:

$$\left|\left[\bar{K}_{uu}\right] - \omega^2[M]\right| = 0 \tag{I.53}$$

Les pulsations propres ω_i, racines de l'équation (I.53), sont appelées pulsations de **résonance**. Les modes propres correspondants sont obtenus en résolvant l'équation (I.52) pour chaque valeur de ω_i. La seconde équation, donnée par:

$$\underset{\sim}{Q} = - \left[\bar{K}_{u\phi}\right]^T.\underset{\sim}{U} \tag{I.54}$$

permet de calculer les valeurs nodales de la charge.

c) Analyse modale en circuit ouvert

Dans ce cas, la somme des valeurs nodales des charges sur chaque électrode est nulle. Par condensation des lignes correspondantes, l'équation à résoudre peut se ramener à une forme identique à celle de la relation (I.52). Les pulsations propres obtenues sont alors dites pulsations d'**antirésonance**.

d) Analyse harmonique

Dans ce cas, deux éventualités principales peuvent être considérées:

- la structure est isolée électriquement et une force sinusoïdale $\underset{\sim}{F}$, de pulsation ω, est imposée sur sa frontière extérieure. La résolution du système ainsi obtenu fournit le champ de déplacement et les potentiels induits par effet piézoélectrique direct en tout point de la structure.

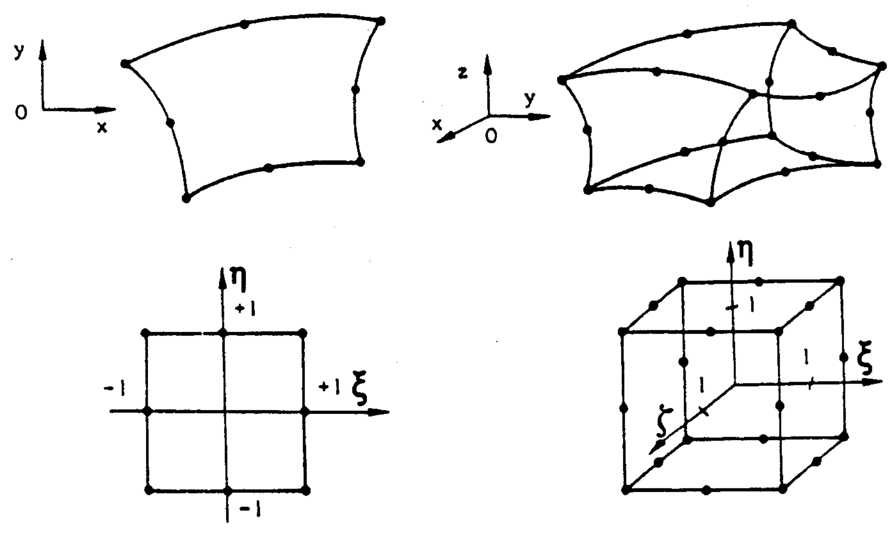
- la structure est mécaniquement libre et soumise à des tensions excitatrices sinusoïdales. Le champ de déplacement induit par effet piézoélectrique inverse et l'impédance électrique de la structure peuvent être calculés.

Le détail de ces différentes analyses peut être trouvé dans les thèses de **D. BOUCHER** [30] et de **J.N. DECARPIGNY** [7]. D'autres types d'analyse sont possibles et correspondent à des conditions aux limites plus complexes.

I- 2 FORMULATION DES ELEMENTS PIEZOELECTRIQUES BIDIMENSIONNELS DU CODE ATILA

I- 2.1 Description sommaire de la bibliothèque du code ATILA

Le code d' éléments finis **ATILA** permet l'étude de transducteurs piézoélectriques à symétrie axiale ou complètement tridimensionnels: analyse modale en résonance ou antirésonance, analyse harmonique dans l'air, analyse harmonique dans l'eau en condition de rayonnement [7]. Conçu pour la modélisation de projecteurs sonar, il a été validé par l'analyse de plusieurs dizaines de structures différentes et utilisé également pour des hydrophones, des transducteurs basse fréquence, des résonateurs et capteurs, etc... Les éléments du code **ATILA** sont des éléments isoparamétriques à interpolation quadratique, susceptibles de décrire des lignes, des surfaces ou des volumes dont les frontières sont courbes. La construction de ces éléments est faite à l'aide de coordonnées réduites ξ, η, ζ (figure I-4). Le passage de ces coordonnées réduites aux coordonnées réelles x, y, z du **repère local** est effectué à l'aide des fonctions de forme. Le maillage de la structure est réalisé dans un repère fixe et unique, OXYZ, appelé **repère global**. Le passage du repère local, lié à chaque élément, au repère global se fait par rotation. Le calcul des différentes matrices et vecteurs définis dans les relations (I.48) et (I.49) est conduit en coordonnées réduites, la transformation de



<u>figure I-4</u>: transformation des coordonnées

coordonnées étant assurée par le jacobien du changement de coordonnées. L'évaluation des intégrales est faite par une technique numérique dite de quadrature de **GAUSS** [31].

Le code **ATILA** contenait, à l'origine de ce travail, des éléments mécaniques et piézoélectriques à deux et trois dimensions (2D et 3D), des éléments fluides à deux et trois dimensions, des éléments interfaces fluide-structure et des éléments rayonnants. Les éléments mécaniques, construits suivant les équations (I.4) et (I.31), sont un hexaèdre à vingt noeuds, un prisme à base triangulaire à quinze noeuds, un rectangle à huit noeuds et un triangle à six noeuds pour structures en contrainte plane, déformation plane ou symétrie axiale, un élément à deux noeuds, divers éléments plaques et coques. Les éléments piézoélectriques, construits suivant les équations (I.16), (I.33) et (I.34), sont l'hexaèdre à vingt noeuds, le prisme à base triangulaire à quinze noeuds, le rectangle à huit noeuds pour structures à symétrie axiale. Par ailleurs, pour décrire les conditions de rayonnement imposées à certains transducteurs, les éléments nécessaires sont des éléments fluides, utilisant la variable de pression, des éléments d'interface, assurant les continuités cinématique et dynamique aux interfaces fluide-structure, des éléments rayonnants, assurant une condition de non-réflexion sur la surface externe des maillages des domaines fluides. Toutefois, ces derniers éléments ne sont pas exploités dans ce rapport, dont l'objectif concerne des structures non immergées.

L'examen de la liste précédente montre l'absence d'éléments piézoélectriques plans, utilisant l'hypothèse de déformation plane ou de contrainte plane, et d'un élément triangulaire à six noeuds à symétrie axiale. Les premiers résultats décrits ci-après concernent le développement d'un triangle et d'un rectangle en déformation plane ainsi que d'un triangle à symétrie axiale destinés à compléter la bibliothèque du code. Ils vont permettre, en outre, de préciser sur des exemples la formulation d'un élément.

I- 2.2 Détermination des matrices élémentaires des éléments piézoélectriques 2D

Dans un problème de déformation plane, le champ de déplacement est défini uniquement par les deux déplacements u_1 et u_2, parallèles aux axes orthogonaux x et y du repère cartésien associé au plan. En symétrie axiale, les déplacements dans n'importe quelle section plane contenant l'axe de symétrie suffisent également à définir l'état de déformation et de contrainte.

I- 2.2.1 Fonctions de forme

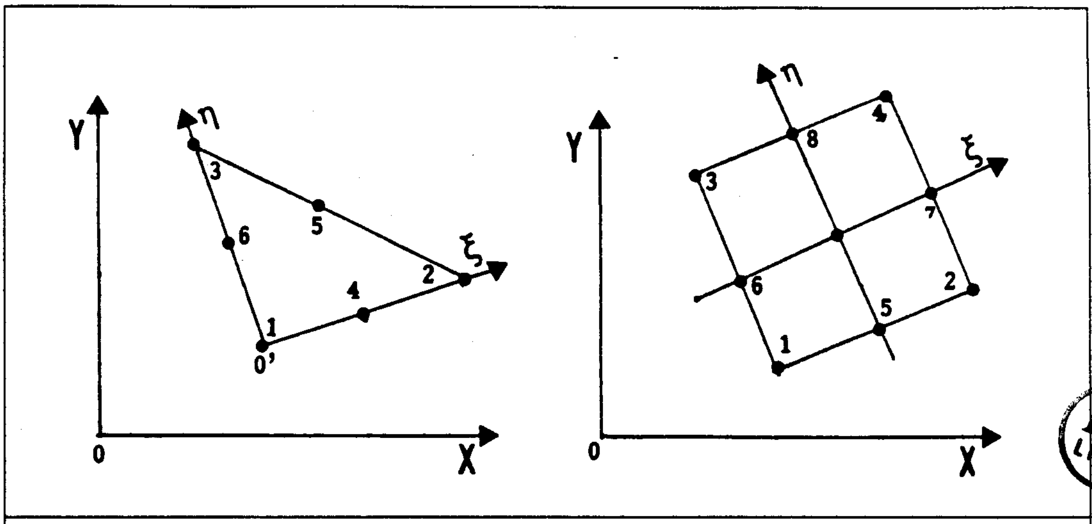


figure I-5: géométrie des éléments 2D

En utilisant la relation (I.43) et en choisissant, pour l'élément triangulaire à six noeuds (figure I-5a), les coordonnées réduites suivantes:

noeud	1	2	3	4	5	6
ξ	0	1	0	0.5	0.5	0
η	0	0	1	0	0.5	0.5

on peut établir les expressions des six fonctions de forme données par:

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= 1-\xi-\eta - \frac{1}{2}.N_4(\xi,\eta) - \frac{1}{2}.N_6(\xi,\eta) \\
N_2(\xi,\eta) &= \xi - \frac{1}{2}.N_4(\xi,\eta) - \frac{1}{2}.N_5(\xi,\eta) \\
N_3(\xi,\eta) &= \eta - \frac{1}{2}.N_5(\xi,\eta) - \frac{1}{2}.N_6(\xi,\eta) \\
N_4(\xi,\eta) &= 4\xi(1-\xi-\eta) \\
N_5(\xi,\eta) &= 4\xi\eta \\
N_6(\xi,\eta) &= 4\eta(1-\xi-\eta)
\end{aligned}
\tag{I.55}
$$

En procédant de même pour l'élément quadrilatère à huit noeuds (figure I-5b), avec le choix des coordonnées réduites suivant:

noeud	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ	-1	1	-1	1	0	-1	1	0
η	-1	-1	1	1	-1	0	0	1

les huit fonctions de forme obtenues sont:

$$\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}.(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}.N_5(\xi,\eta) - \frac{1}{2}.N_6(\xi,\eta)\\
N_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}.(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}.N_5(\xi,\eta) - \frac{1}{2}.N_7(\xi,\eta)\\
N_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}.(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}.N_6(\xi,\eta) - \frac{1}{2}.N_8(\xi,\eta)\\
N_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}.(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}.N_7(\xi,\eta) - \frac{1}{2}.N_8(\xi,\eta)\\
N_5(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}.(1-\xi^2)(1-\eta)\\
N_6(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}.(1-\eta^2)(1-\xi)\\
N_7(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}.(1-\eta^2)(1+\xi)\\
N_8(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}.(1-\xi^2)(1+\eta)
\end{aligned} \qquad (I.56)$$

Dans les différents calculs intervenant dans la construction des matrices de rigidité, il est nécessaire de dériver les fonctions de forme par rapport aux variables x et y. Ces fonctions de forme étant définies à l'aide de variables réduites ξ et η, les expressions de leurs dérivées par rapport aux variables x et y s'écrivent:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} &= \left(\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right).\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right).\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} &= \left(\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right).\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right).\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)
\end{aligned} \qquad (I.57)$$

Cette relation peut se mettre sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1}. \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (I.58)$$

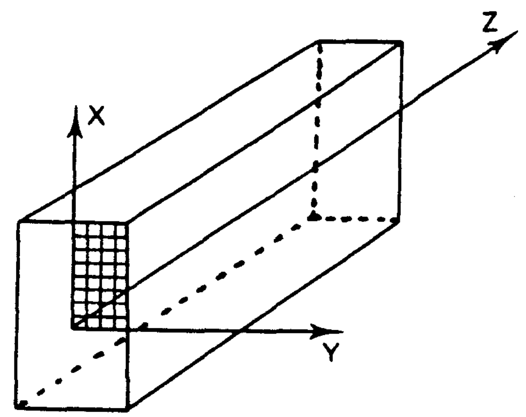
où:

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{I.59}$$

[J] est la matrice jacobienne de changement de repères (passage du repère Oxy au repère $O\xi\eta$).

I- *2.2.2 Eléments de déformation plane*

Dans une analyse en déformation plane, le tenseur des déformations ne garde que ses trois composantes s_1 , s_2 et s_6 relatives au plan Oxy de l'élément (figure I-6). Par définition la composante s_3 est nulle, de même que les composantes s_4 et s_5. De plus, les seules composantes de la contrainte à prendre en compte sont également les trois composantes σ_1 , σ_2 et σ_6, relatives au plan. Les autres composantes ne sont pas nulles mais ne contribuent pas au travail des forces intérieures [14]. De même, pour les grandeurs électriques couplées aux grandeurs élastiques par l'effet piézoélectrique, on ne conserve que les composantes dans le plan: E_1 et E_2 pour le champ électrique, D_1 et D_2 pour l'induction électrique.



<u>figure I-6</u>: déformation d'un barreau long

L'ensemble de ces hypothèses correspond, par exemple, à un barreau piézoélectrique long, portant des électrodes sur des faces latérales longues, se déformant dans sa section droite (figure I-6). Les équations de la piézoélectricité données par les relations (I.22) se réduisent alors à:

$$\sigma_1 = C^E_{11}.s_1 + C^E_{12}.s_2 + C^E_{16}.s_6 - e_{11}.E_1 - e_{21}.E_2$$

$$\sigma_2 = C^E_{21}.s_1 + C^E_{22}.s_2 + C^E_{26}.s_6 - e_{12}.E_1 - e_{22}.E_2 \qquad (I.60)$$

$$\sigma_6 = C^E_{61}.s_1 + C^E_{62}.s_2 + C^E_{66}.s_6 - e_{16}.E_1 - e_{26}.E_2$$

et:

$$D_1 = e_{11}.s_1 + e_{12}.s_2 + e_{16}.s_6 + \varepsilon^s_{11}.E_1 + \varepsilon^s_{12}.E_2$$

$$D_2 = e_{21}.s_1 + e_{22}.s_2 + e_{26}.s_6 + \varepsilon^s_{21}.E_1 + \varepsilon^s_{22}.E_2 \qquad (I.61)$$

Définissant par:

$$\underset{\sim}{s}^T = (s_1, s_2, s_6)$$

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6)$$

$$\underset{\sim}{E}^T = (E_1, E_2) \qquad (I.62)$$

$$\underset{\sim}{D}^T = (D_1, D_2)$$

les vecteurs formés respectivement par les composantes utiles des tenseurs des déformations et des contraintes, du champ et de l'induction électriques, l'exposant T signifiant une transposition, les équations (I.60) et (I.61) peuvent se mettre sous la forme matricielle:

$$\underset{\sim}{\sigma} = [C^E].\underset{\sim}{s} - [e]^T.\underset{\sim}{E}$$

$$\underset{\sim}{D} = [e] .\underset{\sim}{s} + [\varepsilon^s].\underset{\sim}{E} \qquad (I.63)$$

où :

$$[C^E] = \begin{bmatrix} C^E_{11} & C^E_{12} & C^E_{61} \\ C^E_{21} & C^E_{22} & C^E_{62} \\ C^E_{61} & C^E_{62} & C^E_{66} \end{bmatrix} \qquad (I.64)$$

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \end{bmatrix} \qquad (I.65)$$

$$[\varepsilon^s] = \begin{bmatrix} \varepsilon^s_{11} & \varepsilon^s_{12} \\ \varepsilon^s_{21} & \varepsilon^s_{22} \end{bmatrix} \qquad (I.66)$$

$[C^E]$, $[e]$ et $[\varepsilon^s]$ sont respectivement les matrices des constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques utilisées en déformation plane. Compte tenu de la relation (I.41), les déplacements u_1 et u_2 en un point quelconque de l'élément e s'écrivent:

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} N_i^e(\xi,\eta).U^e_{1i}$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{n} N_i^e(\xi,\eta).U^e_{2i} \qquad (I.67)$$

U^e_{1i} et U^e_{2i} sont les déplacements dans les directions x et y au noeud i. n est le nombre de noeuds de l'élément. De même, de part la relation (I.42), le potentiel en tout point de l'élément s'écrit:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} N_i^e(\xi,\eta).\Phi_i^e \qquad (I.68)$$

où Φ_i^e est le potentiel du noeud i. De plus définissant par:

$$\underset{\sim}{U}^{eT} = \left(U^e_{11}, U^e_{21}, U^e_{12}, U^e_{22}, \dots , U^e_{1n}, U^e_{2n} \right) \qquad (I.69)$$

$$\underset{\sim}{\Phi}^{eT} = \left(\Phi^e_1, \Phi^e_2, \dots , \Phi^e_n \right) \qquad (I.70)$$

les vecteurs formés respectivement par les valeurs nodales du champ de déplacement et du potentiel, les relations (I.44) et (I.45) permettent d'établir l'expression des matrices de transformation:

$$[B_u] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \cdots & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial y} & \cdots & 0 & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (I.71)$$

et:

$$[B_\phi] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial N_n^1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (I.72)$$

Les matrices élémentaires de rigidité se calculent alors d'après les relations (I.48) appliquées à un problème bidimensionnel, les intégrales de volume se transformant en intégrales de surface:

$$\left[K_{uu}^e\right] = \iint_S \left[B_u^e\right]^T [C^E] \left[B_u^e\right].dS$$

$$\left[K_{u\phi}^e\right] = \iint_S \left[B_u^e\right]^T [e\ ] \left[B_\phi^e\right].dS \qquad (I.73)$$

$$\left[K_{\phi\phi}^e\right] = \iint_S \left[B_\phi^e\right]^T [\varepsilon^s] \left[B_\phi^e\right].dS$$

Dans le cas particulier des éléments de déformation plane développés, ces matrices sont respectivement de dimension 2nx2n, 2nxn et nxn. Dès lors, l'application du principe variationnel conduit au système d'équations (I.51) dont la résolution fournit toutes les grandeurs physiques du problème électromécanique étudié.

I- *2.2.3 Elément à symétrie axiale*

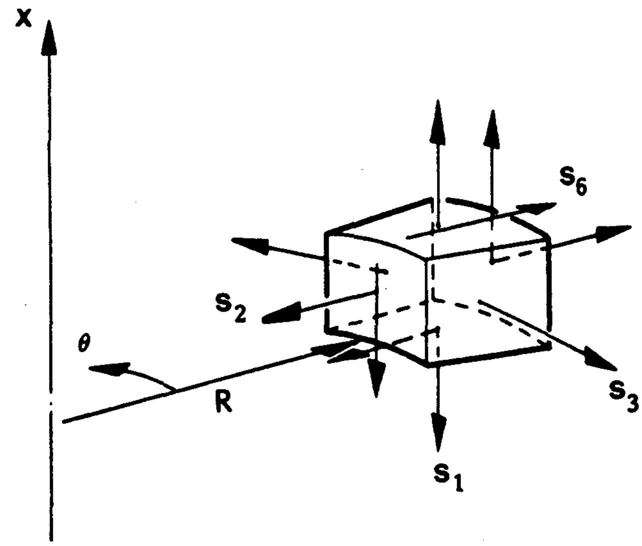


figure I-7: déformation d'un solide de révolution

Dans le cas de la symétrie de révolution, qui s'apparente à celui de la déformation plane, tout déplacement radial provoque automatiquement une déformation dans la direction tangentielle. Cette composante de la déformation doit être prise en compte, ainsi que la composante de la contrainte qui lui est associée. De façon évidente, si l'axe x est l'axe de révolution du solide, la composante tangentielle de la déformation s'exprime en fonction du déplacement radial u_2 par [32]:

$$s_{tangentiel} = \frac{u_2}{R} \tag{I.74}$$

où R est la distance du point considéré à l'axe de symétrie. Par la suite, on note s_3 cette dernière composante de la déformation car elle fait intervenir les constantes de rigidité suivant l'axe z, normal au plan. En tenant compte de la relation (I.41), l'expression complète de s_3 est:

$$s_3 = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i(\xi,\eta)}{R} .U^e_{2i} \tag{I.75}$$

En notant:

$$\underset{\sim}{s}^T = (s_1, s_2, s_3, s_6) \tag{I.76}$$

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_6) \tag{I.77}$$

les vecteurs formés respectivement par les composantes utiles de la déformation et de la contrainte, le système d'équations (I.63) permet d'exprimer la matrice des constantes élastiques en symétrie axiale sous la forme:

$$[C^E] = \begin{bmatrix} C^E_{11} & C^E_{12} & C^E_{13} & C^E_{16} \\ C^E_{21} & C^E_{22} & C^E_{23} & C^E_{26} \\ C^E_{31} & C^E_{32} & C^E_{33} & C^E_{36} \\ C^E_{61} & C^E_{62} & C^E_{63} & C^E_{66} \end{bmatrix} \tag{I.78}$$

Les matrices [e] et $[\varepsilon^s]$ ont les mêmes expressions que celles données dans les relations (I.65) et (I.66). La matrice de transformation pour un corps à symétrie de révolution s'écrit, d'après les relations (I.44), (I.75) et (I.76):

$$\left[B^e_u\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^e_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N^e_2}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N^e_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^e_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N^e_2}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N^e_n}{\partial y} \\ 0 & \frac{N^e_1}{R} & 0 & \frac{N^e_2}{R} & \cdots & 0 & \frac{N^e_n}{R} \\ \frac{\partial N^e_1}{\partial y} & \frac{\partial N^e_1}{\partial x} & \frac{\partial N^e_2}{\partial y} & \frac{\partial N^e_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N^e_n}{\partial y} & \frac{\partial N^e_n}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{I.79}$$

L'expression de la matrice $\left[B^e_\Phi\right]$ établie dans la relation (I.73) reste valable en symétrie axiale également. Le volume de matière associé à l'élément est, quant à lui, celui du corps de révolution décrit en faisant tourner l'élément autour de l'axe de symétrie. Ainsi, les expressions des matrices élémentaires de rigidité sont:

$$\begin{aligned} \left[K^e_{uu}\right] &= 2\pi.\iint_S \left[B^e_u\right]^T [C^E] \left[B^e_u\right].R.dS \\ \left[K^e_{u\Phi}\right] &= 2\pi.\iint_S \left[B^e_u\right]^T [e\ ] \left[B^e_\Phi\right].R.dS \\ \left[K^e_{\Phi\Phi}\right] &= -2\pi.\iint_S \left[B^e_\Phi\right]^T [\varepsilon^s] \left[B^e_\Phi\right].R.dS \end{aligned} \tag{I.80}$$

Dans le cas particulier de l'élément triangulaire à six noeuds, ces matrices élémentaires de rigidité sont respectivement de dimension 12x12, 12x6 et 6x6. L'assemblage de ces matrices et l'application du principe variationnel conduisent également au système d'équations (I.51) dont la résolution peut être menée dans les différents cas précédemment décrits.

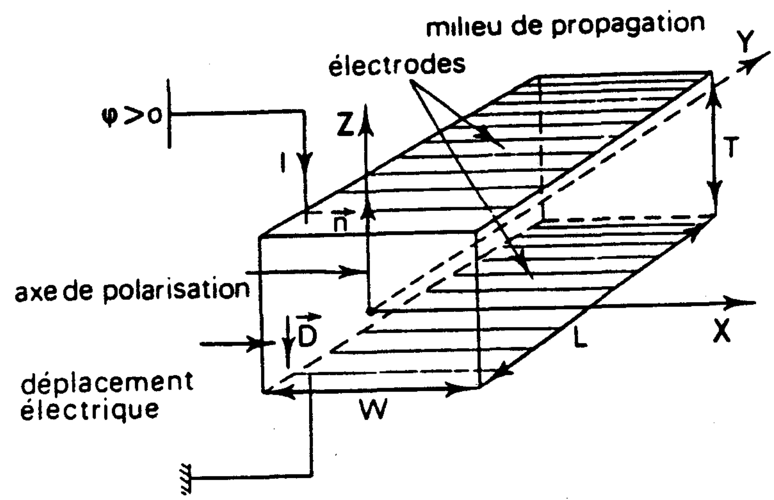
I- 3 TESTS DES ELEMENTS PIEZOELECTRIQUES BIDIMENSIONNELS DEVELOPPES

I- 3.1 Tests des éléments de déformation plane

Pour valider les éléments de déformation plane développés dans ce chapitre, deux types de test sont effectués. Dans un premier temps, nous avons comparé les résultats de l'analyse modale d'un barreau piézoélectrique parallélépipédique long réalisée avec un maillage tridimensionnel aux résultats obtenus sur le même barreau avec un maillage plan, utilisant des éléments de déformation plane. Dans un second temps, nous avons calculé les courbes de dispersion en fréquence d'une barrette, servant à la réalisation de sondes ultrasonores multi-éléments utilisées en échographie médicale, et les avons comparées aux mesures effectuées par R.H. COURSANT [18].

I- *3.1.1 Comparaison à un modèle tridimensionnel*

Le barreau piézoélectrique modélisé est en céramique de type X9 (variété Pons-Alcatel), de section carrée égale à 1 cm^2 et de grande longueur (figure I-8). Les faces parallèles au plan OXY sont métallisées et constituent les électrodes. La direction de polarisation est



<u>figure I-8</u>: schéma d'un barreau piézoélectrique long

perpendiculaire aux électrodes. Le maillage tridimensionnel est réalisé à l'aide d'une couche unique d'éléments héxaèdriques à vingt noeuds (figure I-9), d'épaisseur 0.25cm. Pour favoriser la condition de déformation plane, seules les composantes du champ de déplacement parallèles au plan de la couche (plan Oxz) sont conservées. Par ailleurs pour des raisons de symétrie, un quart de la section du barreau est modélisé. Les conditions aux limites appliquées imposent la même symétrie au champ de déplacement. Le maillage bidimensionnel est, lui, réalisé à l'aide d'éléments quadrilatères à huit noeuds (figure I-10). Il représente un quart de la section et tient également compte de cette symétrie.

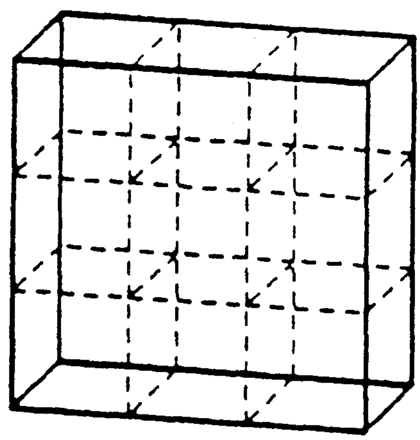


figure I-9: maillage du barreau test avec des éléments hexaèdres

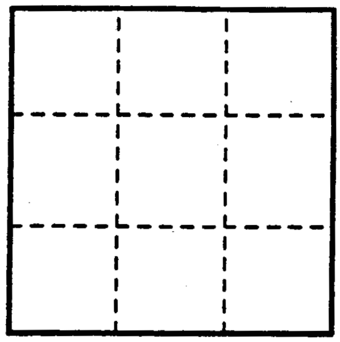


figure I-10: maillage avec des éléments de déformation plane

L'analyse modale en circuit fermé et en circuit ouvert conduit, pour chaque modèle, aux fréquences de résonance et d'antirésonance présentées dans les tableaux I-4 et I-5. Le tableau I-6 donne, pour chaque mode, le **coefficient de couplage** électromécanique dont la définition est précisée dans l'annexe 1. Les tirets (-), apparaissant dans ces tableaux, correspondent aux modes du modèle tridimensionnel qui ne sont pas obtenus avec le modèle bidimensionnel de déformation plane.

Mode	**Modèle 2D**	**Modèle 3D**
1	213.0	213.0
2	248.6	248.6
3	303.5	303.5
4	398.1	398.1
5	480.6	480.6
6	578.9	578.9
7	654.5	654.5
8	-	654.9
9	-	675.9
10	-	744.2
11	-	767.9
12	777.8	777.8
13	-	802.4
14	811.7	811.7
15	828.6	828.6

Tableau I-4: Fréquences de résonance en kHz

Mode	Modèle 2D	Modèle 3D
1	223.8	223.8
2	254.1	254.1
3	307.8	307.8
4	398.5	398.5
5	480.6	480.6
6	578.9	578.9
7	654.8	654.8
8	-	654.9
9	-	675.9
10	-	744.2
11	-	767.9
12	778.2	778.2
13	-	802.4
14	812.1	812.1
15	830.1	830.1

Tableau I-5: Fréquences d'antirésonance en kHz

Mode	Modèle 2D	Modèle 3D
1	30.7	30.7
2	20.6	20.6
3	16.7	16.7
4	4.6	4.6
5	0.8	0.9
6	0.5	0.5
7	3.1	3.1
8	-	0.0
9	-	0.2
10	-	0.0
11	-	0.0
12	3.1	3.1
13	-	0.0
14	2.8	2.8
15	5.9	5.9

Tableau I-6: Coefficients de couplage en %

Ces différents résultats montrent un très bon accord entre les deux modélisations. Par ailleurs, les quatre premiers modes du quart de la section droite du barreau piézoélectrique sont représentés sur les figures I-11 à I-14. L'identité des champs de déplacement obtenus avec les deux maillages prouve également la qualité des résultats fournis par les éléments de déformation plane.

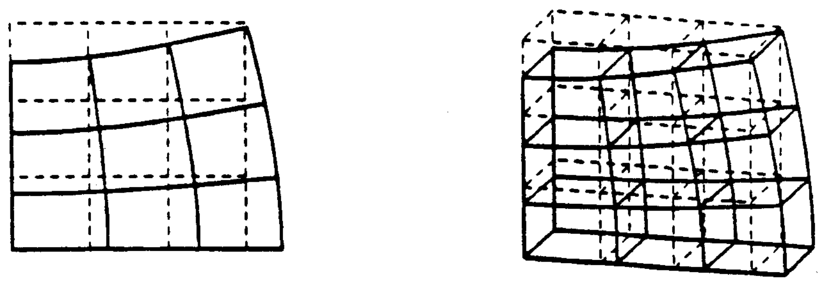


figure I-11: champ de déplacement du premier mode du barreau

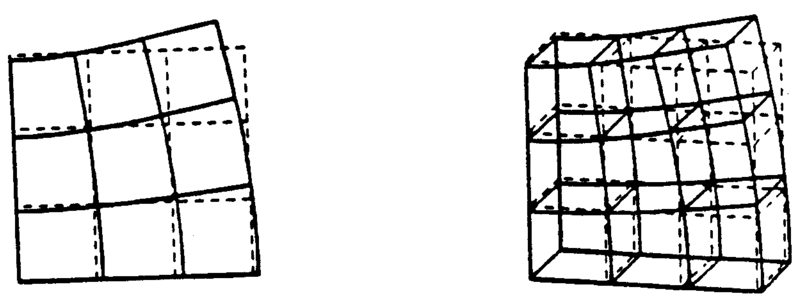


figure I-12: champ de déplacement du second mode du barreau

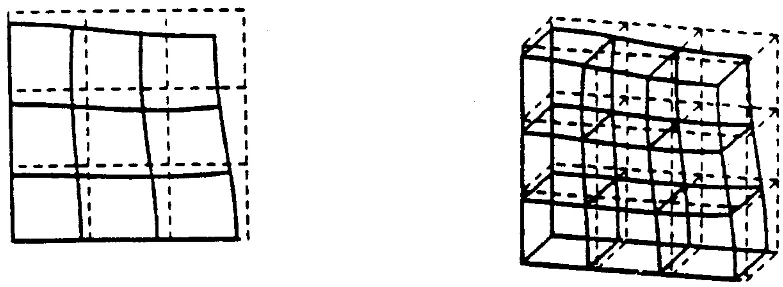


figure I-13: champ de déplacement du troisième mode du barreau

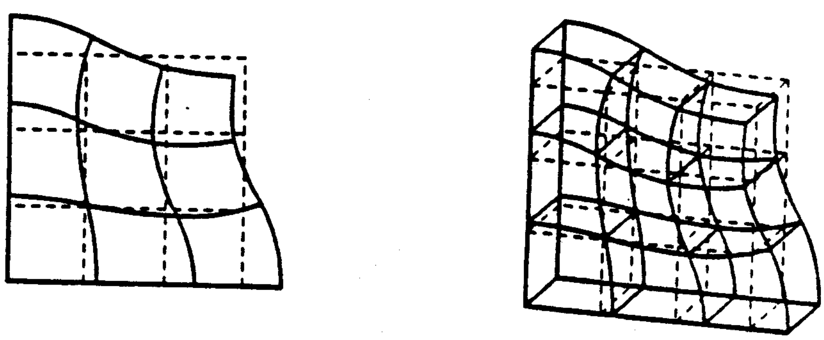


figure I-14: champ de déplacement du quatrième mode du barreau

I- 3.1.2 *Modélisation des barrettes piézoélectriques d'un transducteur d'imagerie médicale*

Les émetteurs-récepteurs d'échographie médicale utilisent le plus souvent des réseaux de transducteurs piézoélectriques. Ces transducteurs, dont les fréquences de fonctionnement sont de quelques Mégahertz, sont essentiellement constitués d'une barrette piézoélectrique linéaire rainurée et correctement adaptée par une ou plusieurs lames quart d'onde (figure I-15). La cellule de base d'une telle barrette est constituée d'un

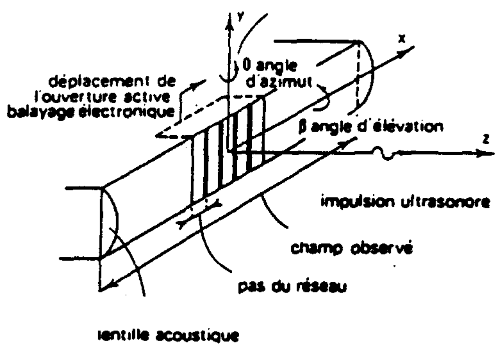


figure I-15: définition d'une barrette linéaire piézoélectrique [18]

long et mince parallélépipède piézoélectrique dont la largeur W et l'épaisseur T sont petites devant la longueur. L'état vibratoire de ces barrettes présente une dispersion des modes qui dépend du rapport (W/T). Les courbes expérimentales sont obtenues par la mesure de l'impédance électrique dans l'air de nombreux échantillons découpés (figure I-16).

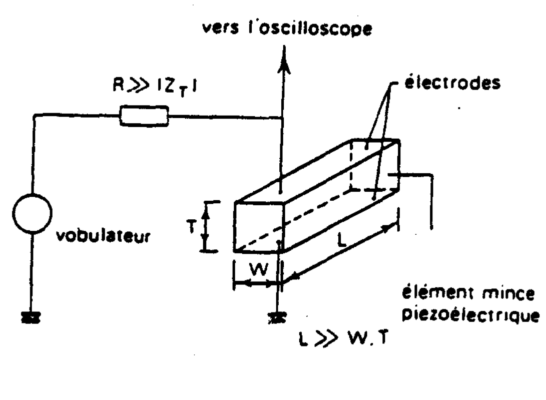


figure I-16: dispositif expérimental de mesure d'impédance [18]

L'ensemble de ces mesures, particulièrement fastidieuses à réaliser à cause de la découpe des échantillons, peut être remplacé par une modélisation par éléments finis. Considérant la longueur comme très grande devant les dimensions transversales, les fréquences de résonance ne dépendent alors que de W et de T. Le maillage défini utilise donc des éléments de déformation plane. En faisant varier le rapport (W/T), on peut alors construire le réseau de courbes de dispersion des modes. Les courbes de dispersion en fréquence des six premiers modes de vibration sont représentées sur la figure I-17, pour une valeur initiale de T égale à 1 cm. Les points expérimentaux placés sur ces courbes permettent d'apprécier l'accord très satisfaisant entre les mesures et la simulation.

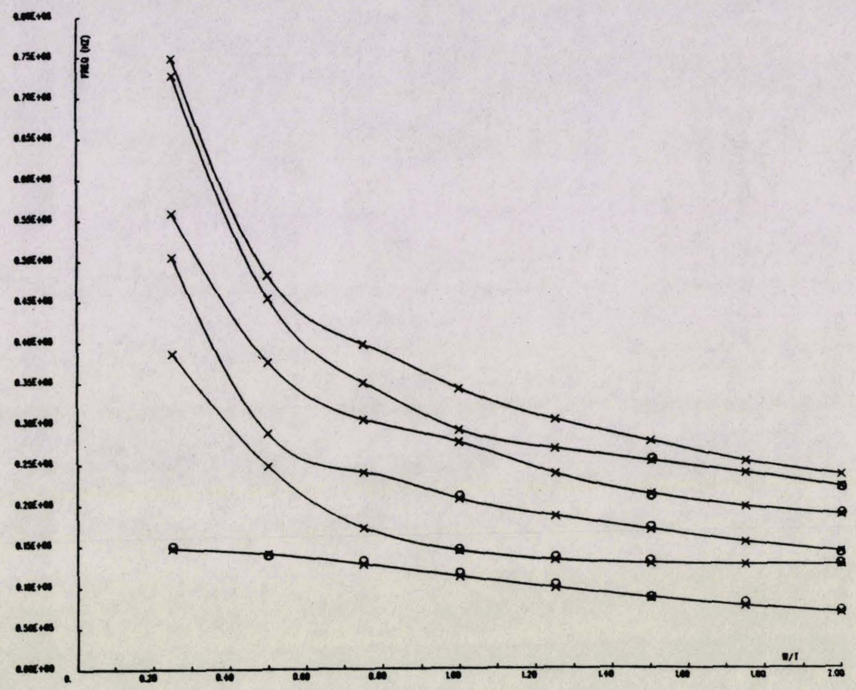


figure I-17: courbes de dispersion de modes d'une barrette

Les mêmes exemples tests ont été traités en utilisant un maillage fait à l'aide des éléments triangulaires à six noeuds et ont fourni des résultats rigoureusement identiques.

I- 3.2 Tests de l'élément à symétrie axiale

Pour effectuer les différents tests de validation de l'élément triangulaire piézoélectrique à symétrie axiale et à six noeuds, un disque de céramique du type P762 (variété Quartz et Silice), d'épaisseur 1cm et de diamètre 2cm, portant des électrodes sur ses faces normales à l'axe de révolution et polarisé uniformément parallèlement à cet axe, a été modélisé. Compte tenu de la géométrie, des électrodes et de la polarisation, un maillage plan avec des éléments prenant en compte la symétrie de révolution est suffisant pour décrire le comportement dynamique du disque.

I- *3.2.1 Analyse modale d'un disque piézoélectrique*

Quatre maillages différents sont proposés: trois sont réalisés à l'aide d' éléments triangulaires ayant diverses orientations (figures I-18 à I-20) et un à l'aide d'éléments quadrilatères à huit noeuds (figure I-21). Ce dernier type de maillage sert de référence à toute l'étude car l'élément quadrilatère a déjà été validé par comparaison à des mesures [33]. L'analyse modale du disque dans l'air a été conduite et les fréquences de résonance et d'antirésonance calculées avec les différents maillages sont présentées dans les tableaux I-7 et I-8. Ces résultats

Mode	**Maillage 1**	**Maillage 2**	**Maillage 3**	**Maillage référence**
1	88.7	88.8	88.7	88.8
2	97.6	97.5	97.6	97.6
3	145.0	145.0	144.8	144.9
4	157.3	157.3	157.3	157.3
5	188.9	188.9	188.4	188.5
6	212.6	212.6	211.6	211.6
7	221.1	221.1	220.5	220.4
8	263.4	263.4	261.2	261.3
9	267.1	267.1	266.6	266.2
10	272.7	272.7	272.3	271.4

Tableau I-7: Fréquences de résonance en kHz

Mode	**Maillage 1**	**Maillage 2**	**Maillage 3**	**Maillage référence**
1	88.7	88.8	88.8	88.8
2	115.0	114.9	115.0	115.0
3	151.8	151.9	151.6	151.7
4	157.3	157.3	157.3	157.3
5	193.7	193.7	193.1	193.1
6	212.6	212.6	211.6	211.6
7	229.1	229.1	228.6	228.5
8	263.4	263.4	261.2	261.3
9	268.2	268.2	267.8	267.3
10	272.7	272.7	272.3	271.4

Tableau I-8: Fréquences d'antiresonance en kHz

montrent un très bon accord entre toutes les modélisations. Les coefficients de couplage électromécanique du disque dans l'air, donnés dans le tableau I-9, montrent le même accord.

Mode	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage référence
1	3	2	3	2
2	53	53	53	53
3	30	30	30	30
4	0	0	0	0
5	22	22	22	22
6	0	0	0	0
7	26	26	26	26
8	0	0	0	0
9	9	9	9	9
10	0	0	0	0

Tableau I-9: Coefficients de couplage en %

Sur les figures I-22 à I-26 sont représentés les cinq premiers modes propres trouvés avec chaque type de maillage. Ces déformées montrent l'identité des champs de déplacement obtenus dans chaque cas.

I- *3.2.2 Analyse harmonique d'un disque piézoélectrique dans l'air*

La réponse du disque précédent à une excitation électrique sinusoïdale a été analysée. Cette étude harmonique, faite entre 50 et 150 kHz, a également conduit à des résultats identiques entre toutes les simulations. La figure I-27 donne l'allure de la courbe d'admittance dans la bande de fréquence étudiée. Cette courbe d'admittance est obtenue avec le premier type de maillage. Les points de calcul fournis par les autres maillages n'ont pas été utilisés afin de l'alléger, ces points se confondant pratiquement avec ceux du premier maillage.

I- 4 CONCLUSION

Ce chapitre a présenté l'application de la méthode des éléments finis à l'étude de structures piézoélectriques et a permis le développement de quelques éléments piézoélectriques de déformation plane (triangle et rectangle isoparamétriques à six et huit noeuds) et à symétrie axiale (triangle isoparamétrique à six noeuds). Les exemples tests traités dans ce chapitre ont conduit à d'excellents résultats, validant ainsi les éléments développés. Par ailleurs, les techniques de base qui vont permettre la prise en compte de tout type de matériau piézoélectrique, ont été mises en place dans les éléments et vont être complétées dans le second chapitre.

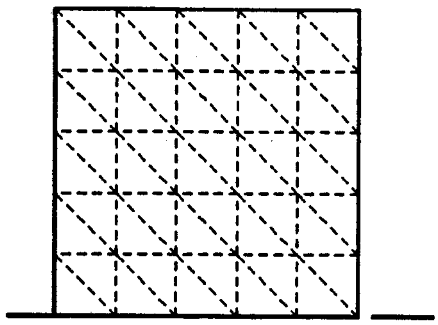


figure I.18 : maillage du type 1

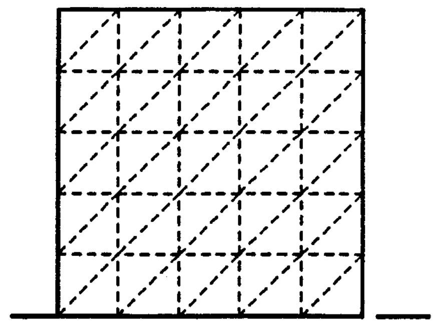


figure I.19 : maillage du type 2

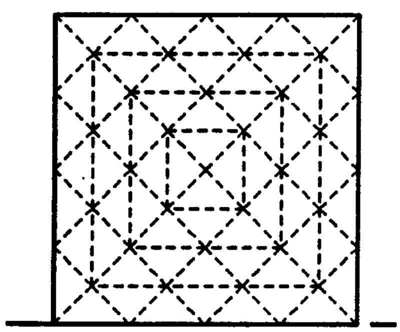


figure I.20 : maillage du type 3

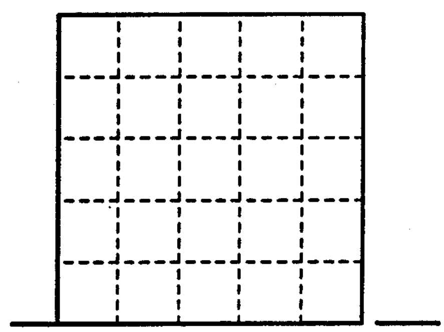


figure I.21 : maillage de référence

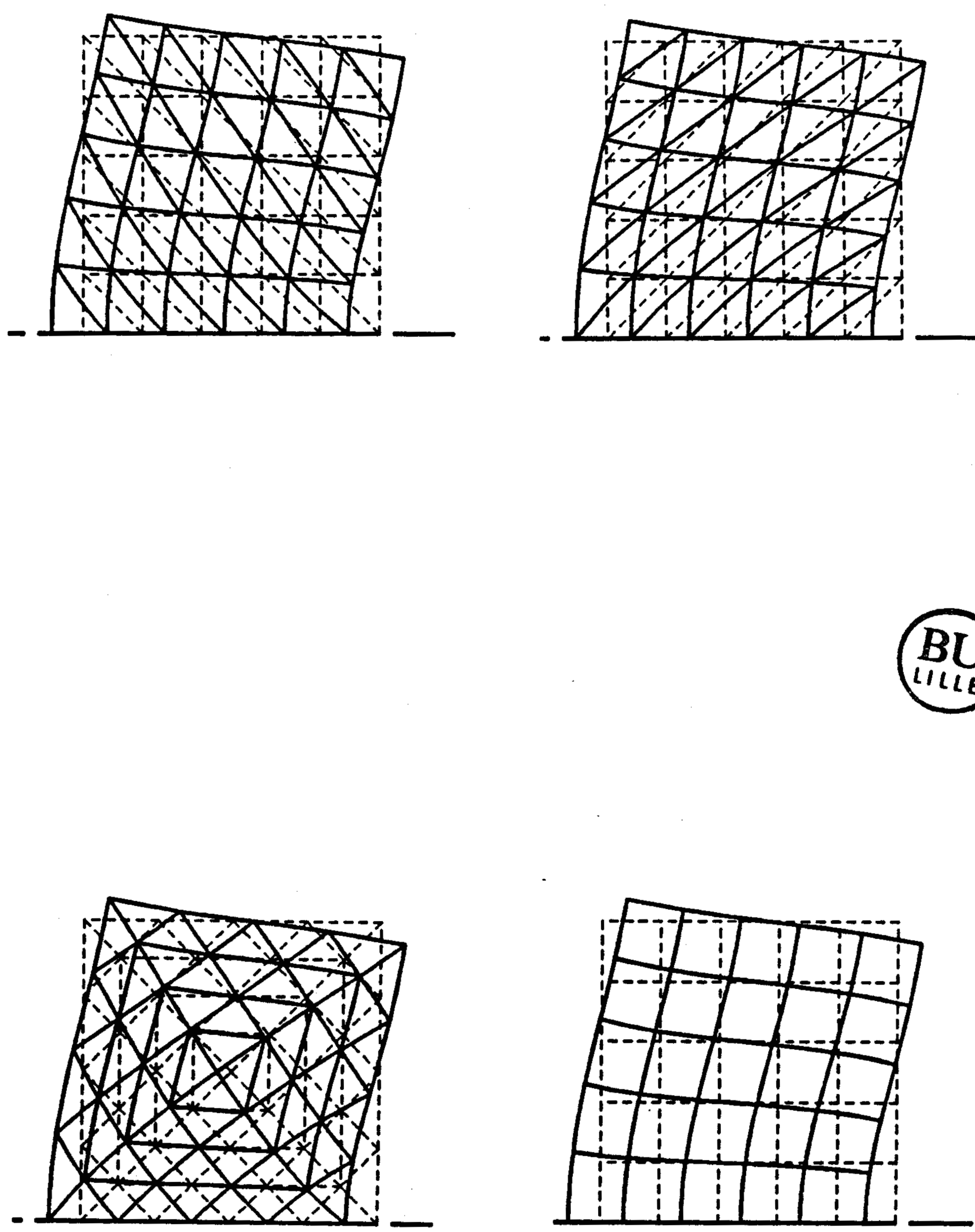


figure I-22: premier mode propre du disque piézoélectrique

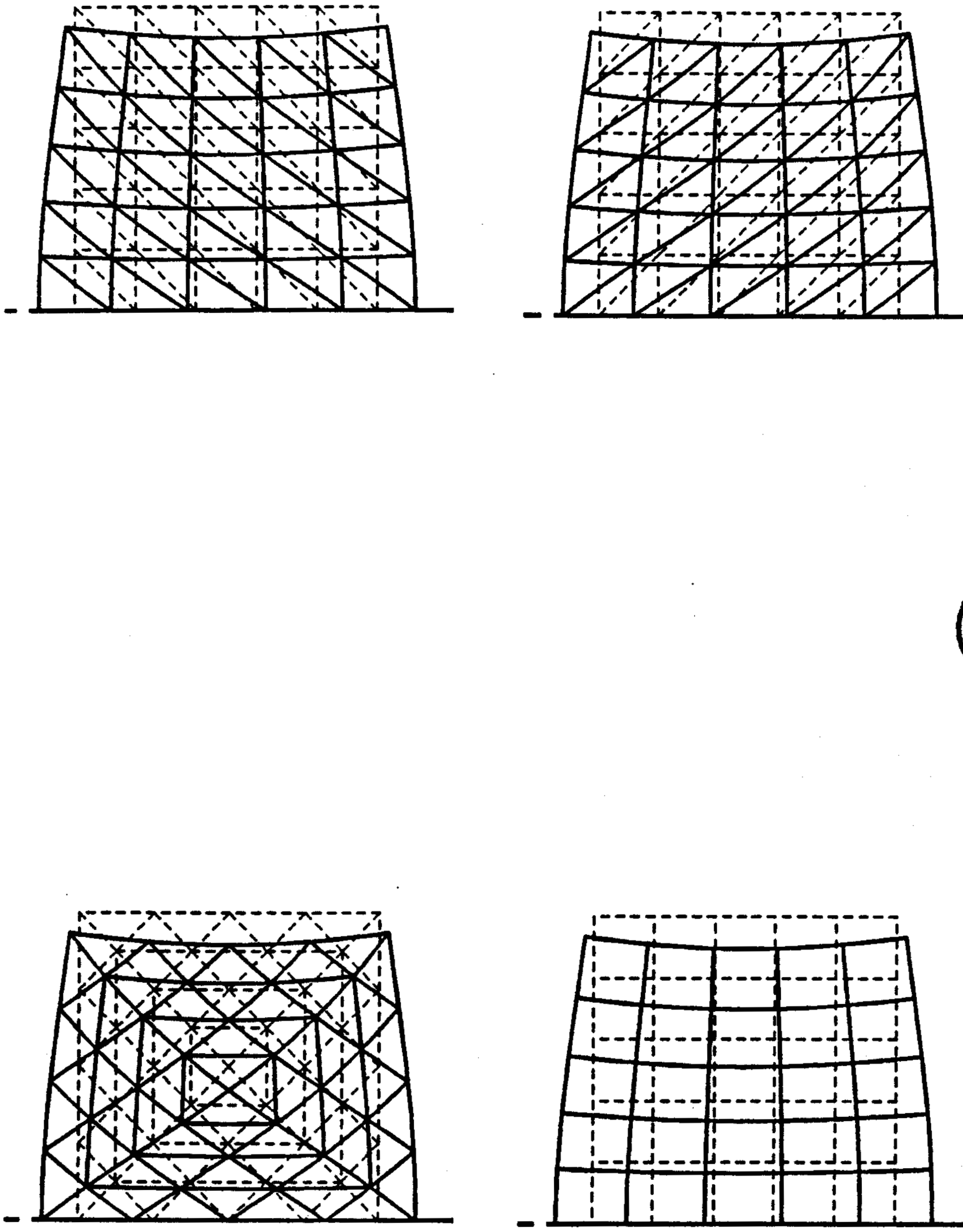


figure I-23: second mode propre du disque piézoélectrique

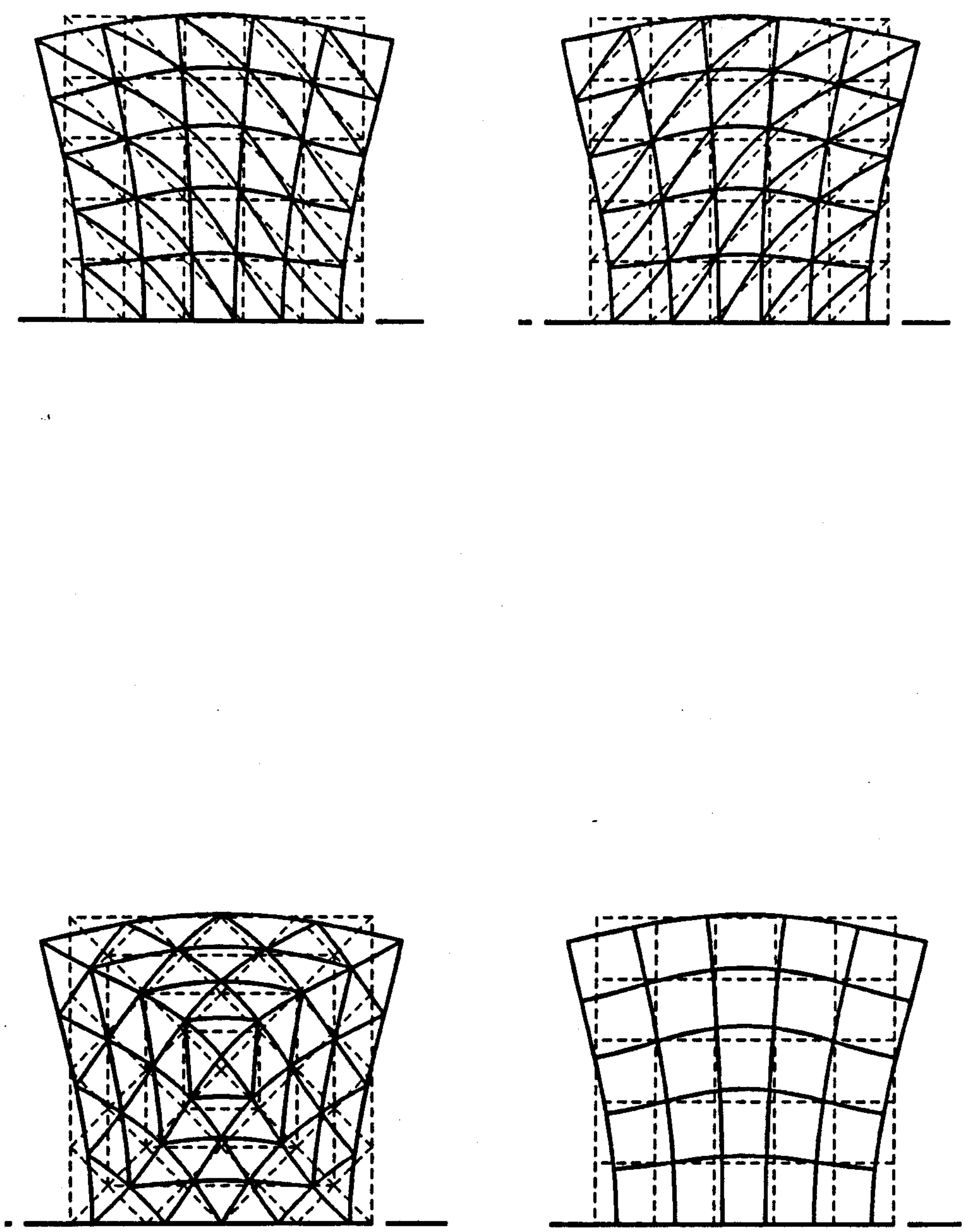


figure I-24: troisième mode propre du disque piézoélectrique

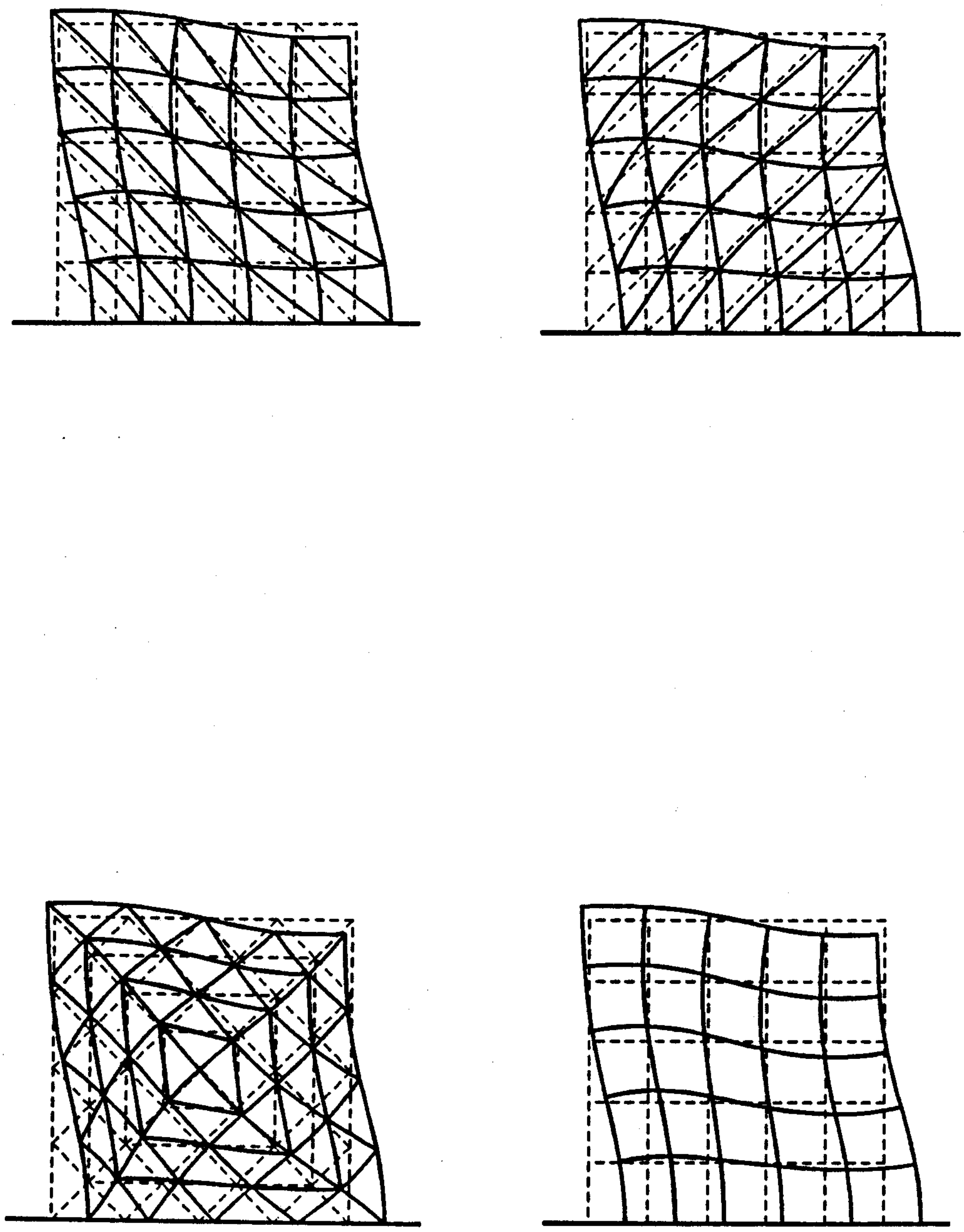
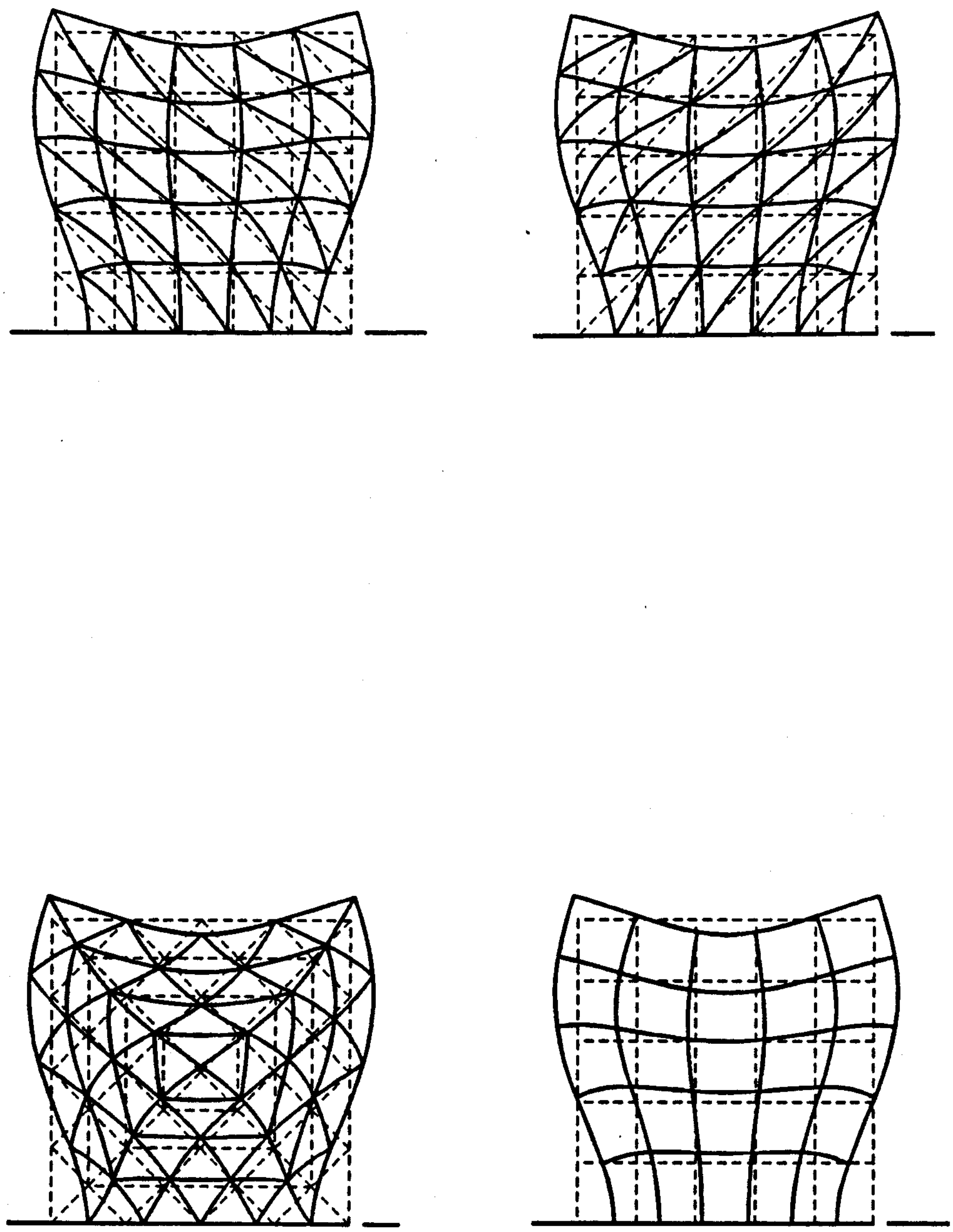


figure I-25: quatrième mode propre du disque piézoélectrique



<u>figure I-26</u>: cinquième mode propre du disque piézoélectrique

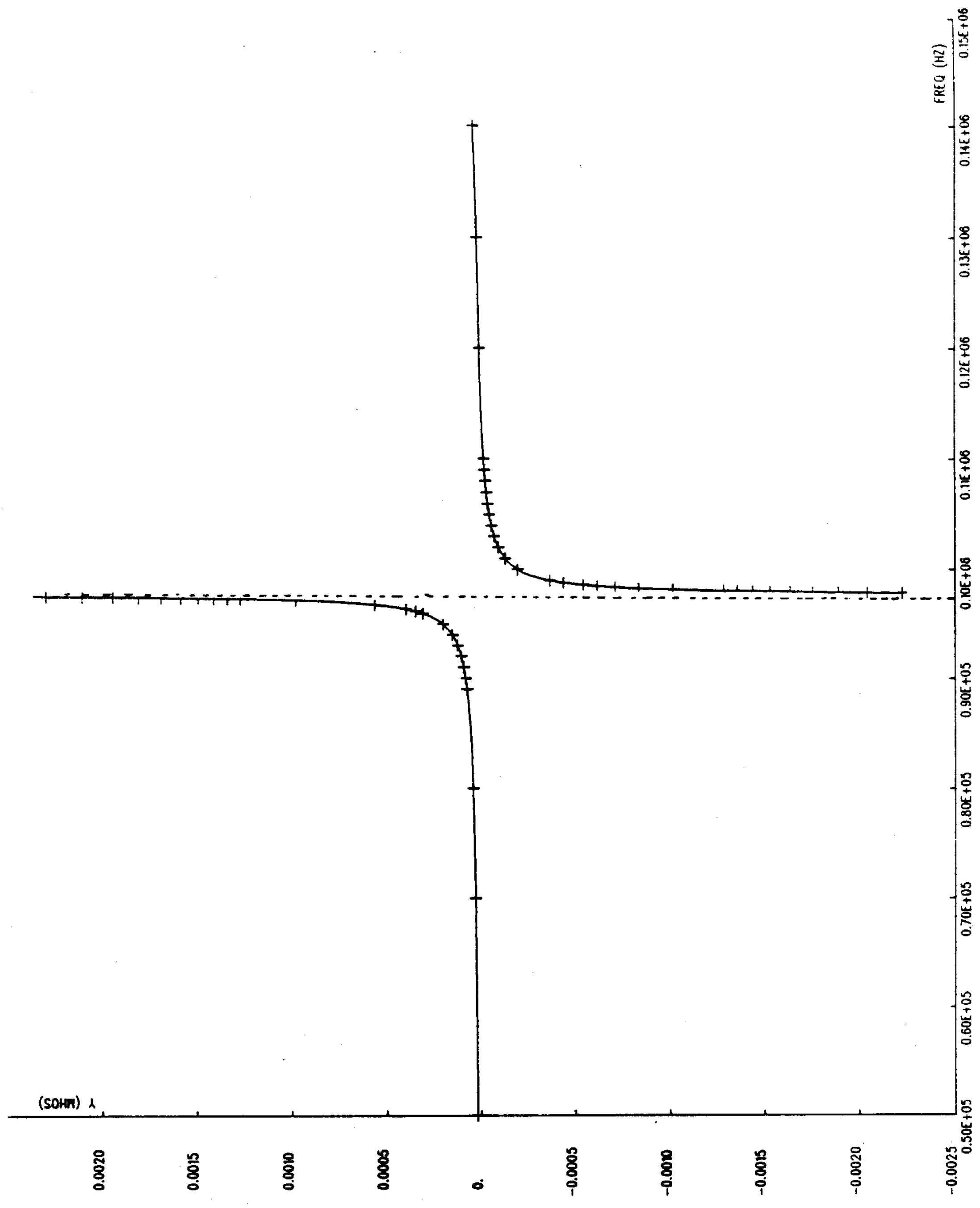


figure I-27: courbe d'admittance d'un disque piézoélectrique

CHAPITRE II

DESCRIPTION DE LA POLARISATION VARIABLE DANS UNE STRUCTURE PIEZOELECTRIQUE

A l'origine de ce travail, le code ATILA permettait la prise en compte d'un seul matériau piézoélectrique, la céramique, dont les tenseurs caractéristiques correspondent à la classe 6mm. Par ailleurs, la polarisation à l'intérieur d'un élément devait être uniforme et sa direction devait pouvoir être obtenue à partir de l'axe OX par une rotation autour de OY ou une rotation autour de OZ. Dans la première partie de ce chapitre, la détermination des directions des axes principaux du matériau piézoélectrique est généralisée et permet la prise en compte de tout matériau piézoélectrique, qu'il soit orthotrope, comme la céramique, ou totalement anisotrope, comme le quartz. Dans la seconde partie, le cas particulier d'une polarisation variable, non uniforme à l'intérieur d'un élément, est analysé. Ce cas correspond à des structures intéressantes dans la technologie actuelle des transducteurs. Il est illustré par trois exemples tests.

II- 1 DEFINITIONS LIEES A UN CHANGEMENT DE REPERE ORTHONORME

II- 1.1 Choix des angles de rotation

Les propriétés physiques d'un matériau piézoélectrique étant orientées, leur description nécessite la définition d'un repère, appelé **repère principal** du matériau et noté $Ox_1x_2x_3$. En tout point de la structure à modéliser, ce repère doit être défini à partir du repère global du maillage, noté OXYZ. Par ailleurs, pour permettre le calcul des matrices élémentaires, ce repère doit aussi être défini à partir du repère local de chaque élément. L'ensemble des opérations de changement de repère est donc complexe et suppose un choix unique des angles de rotation.

II- *1.1.1 Définition des angles d'EULER*

Les angles de rotation les plus couramment utilisés pour passer, par exemple, d'un repère Oxyz au repère Ox"y"z", sont les trois angles d'EULER α, β et γ. Ils sont définis comme suit [34]:

- α est l'angle de rotation autour de l'axe Oz faisant passer du repère Oxyz au repère Ox'y'z, tel que l'axe Ox" appartienne au plan Oy'z,

- β est l'angle de rotation autour de l'axe Oy' faisant passer du repère Ox'y'z au repère Ox"y'z',

- γ est l'angle de rotation autour de l'axe Ox" faisant passer du repère Ox"y'z' au repère Ox"y"z".

Les angles d'EULER sont définis algébriquement, une rotation étant positive quand elle orientée autour de son axe dans le sens trigonométrique direct.

II- *1.1.2 Définition des angles utilisés*

Dans le code ATILA, compte tenu d'une permutation initiale des composantes des différents tenseurs, les axes principaux Ox_1, Ox_2 et Ox_3 du matériau sont, par défaut, supposés confondus avec les axes OY, OZ et OX. En conséquence, les angles de rotation, également notés α, β et γ, ont une définition légèrement différente de celle des angles d'EULER. Les rotations successives sont:

- une rotation d'angle α autour de OZ faisant passer du repère OXYZ au repère Ox'y'Z, tel que l'axe Ox_3 appartienne au plan Ox'Z (figure II-1a),

- une rotation d'angle β autour de l'axe Oy' faisant passer du repère Ox'y'Z au repère $Ox_3y'z'$ (figure II-1b),

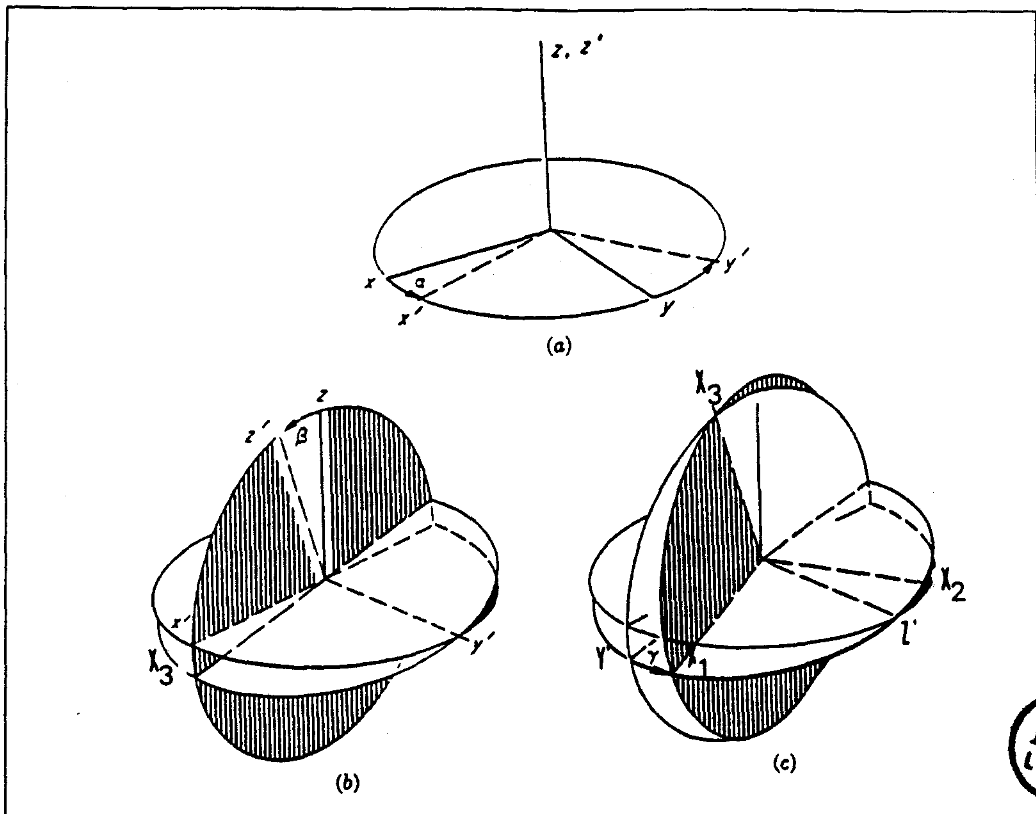


figure II-1: définition des angles de rotation α, β, γ décrivant le passage du repère OXYZ au repère $Ox_3x_1x_2$ [34]

- une rotation d'angle γ autour de l'axe Ox_3 faisant passer du repère $Ox_3y'z'$ au repère $Ox_3x_1x_2$ (figure II-1c).

II- 1.2 Matrices de changement de repère

II- *1.2.1 Matrices des rotations élémentaires*

La matrice d'une rotation élémentaire d'angle α est la matrice liant les coordonnées (x',y',z') d'un point M dans le nouveau repère à ses coordonnées (x,y,z) dans l'ancien repère. La relation correspondante:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \text{(II.1)}$$

peut se mettre sous la forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = [R_\alpha] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{(II.2)}$$

où:

$$[R_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II.3}$$

$[R_\alpha]$ est alors la matrice unitaire caractérisant cette rotation d'angle α. Par un raisonnement similaire, les expressions des autres matrices de rotation d'angles β et γ peuvent être établies:

$$[R_\beta] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{II.4}$$

$$[R_\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \tag{II.5}$$

II- *1.2.2 Calcul de la matrice produit*

La matrice [R] caractérisant la succession des rotations est obtenue par produit des matrices élémentaires $[R_\alpha]$, $[R_\beta]$ et $[R_\gamma]$:

$$[R] = [R_\gamma][R_\beta][R_\alpha] \tag{II.6}$$

On obtient, après développement:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha & \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta \\ \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha & \sin\gamma\sin\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha & \sin\gamma\cos\beta \\ \cos\gamma\sin\beta\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\sin\beta\sin\alpha - \sin\gamma\cos\alpha & \cos\gamma\cos\beta \end{bmatrix} \tag{II.7}$$

II- 2 TRANSFORMATION DES TENSEURS LIEE AU CHANGEMENT DE REPERE

II- 2.1 Relation de changement de base

Soient $(\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3)$ la base orthonormée liée au repère OXYZ et $(\underset{\sim}{e}'_1, \underset{\sim}{e}'_2, \underset{\sim}{e}'_3)$ la base orthonormée attachée au repère $Ox_1x_2x_3$. On peut montrer que les vecteurs de base $\underset{\sim}{e}'_1$, $\underset{\sim}{e}'_2$ et $\underset{\sim}{e}'_3$ s'expriment en fonction de $\underset{\sim}{e}_1$, $\underset{\sim}{e}_2$ et $\underset{\sim}{e}_3$ par la relation:

$$\underset{\sim}{e}'_i = R_{ij} \cdot \underset{\sim}{e}_j \tag{II.8}$$

où [R] est la matrice de rotation définie au (II.7). La relation (II.8) exprime le changement de base orthonormée.

II- 2.2 Changement de base d'un vecteur

Soit $\underset{\sim}{V}$ un vecteur de composantes x_1, x_2 et x_3 défini dans l'espace vectoriel sous-tendu par la base ($\underset{\sim}{e}_1$, $\underset{\sim}{e}_2$, $\underset{\sim}{e}_3$). Soient x'_1, x'_2 et x'_3 les composantes de $\underset{\sim}{V}$ dans le nouvel espace vectoriel sous-tendu par la base ($\underset{\sim}{e}'_1$, $\underset{\sim}{e}'_2$, $\underset{\sim}{e}'_3$). Par définition on a:

$$\underset{\sim}{V} = x'_i . \underset{\sim}{e}'_i \qquad (\text{II}.9)$$

En utilisant la relation (II.8), on écrit:

$$\underset{\sim}{V} = x'_i . R_{ij} . \underset{\sim}{e}_j \qquad (\text{II}.10)$$

d'où se déduit la relation entre nouvelles et anciennes composantes d'un vecteur lors d'un changement de base:

$$x'_i = R_{ij} . x_j \qquad (\text{II}.11)$$

II- 2.3 Généralisation aux tenseurs

L'opération de rotation ne peut se faire que sur la forme générale du tenseur, jamais sur sa forme condensée. Ainsi, pour les différents tenseurs d'un matériau piézoélectrique, les relations suivantes expriment les nouvelles composantes en fonction des anciennes.

II- *2.3.1 Application au tenseur élastique*

La relation de changement de base d'un tenseur élastique, donnée ici pour le tenseur C^E_{ijkl}, est:

$$C^E_{ijkl} = R_{im} . R_{jn} . R_{ko} . R_{lp} . C^E_{mnop} \qquad (\text{II}.12)$$

Cette relation est valable pour tous les tenseurs de rang quatre.

II- *2.3.2 Application au tenseur piézoélectrique*

La relation de changement de base d'un tenseur piézoélectrique, donnée ici pour le tenseur e_{ijk}, est:

$$e_{ijk} = R_{im} . R_{jn} . R_{ko} . e_{mno} \qquad (\text{II}.13)$$

Cette relation est valable pour tous les tenseurs de rang trois.

II- *2.3.3 Application au tenseur diélectrique*

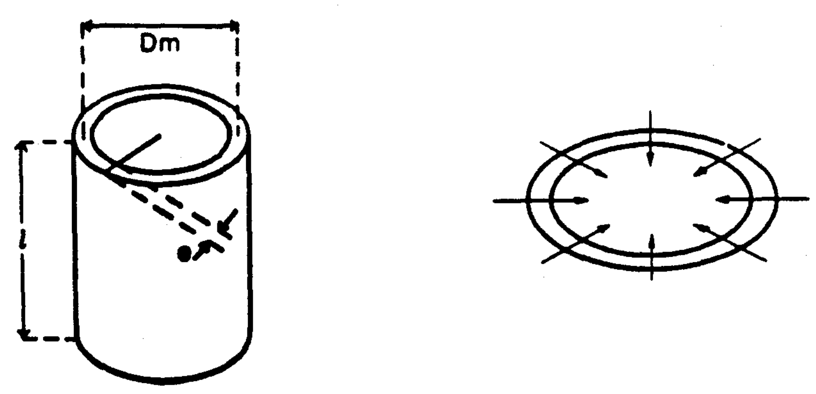
La relation de changement de base d'un tenseur diélectrique, donnée ici pour le tenseur ε^s_{ij}, est:

$$\varepsilon^s_{ij} = R_{im}.R_{jn}.\varepsilon^s_{mn} \tag{II.14}$$

Cette relation est valable pour tous les tenseurs de rang deux.

II- 3 ANALYSE DU CAS DE LA POLARISATION VARIABLE

Lors d'une analyse par éléments finis d'une structure piézoélectrique à l'aide de code **ATILA**, les axes principaux du matériau sont définis à partir des axes globaux par la donnée de trois angles de rotation. Dès lors, les composantes des tenseurs élastique, piézoélectrique et diélectrique sont modifiées d'après les relation (II.12) à (II.14). Toutefois, ce calcul étant fait élément par élément, il implique dans chaque élément des propriétés homogènes et, dans le cas particulier d'une céramique, une polarisation uniforme. Cette condition est souvent restrictive puisque, dans une céramique, la direction de polarisation est fixée par l'orientation du champ électrique polarisant au cours de la fabrication et peut donc être rendue variable. C'est par exemple le cas d'un cylindre de céramique polarisé radialement, comme indiqué sur la figure II-2. La direction de polarisation ne peut alors être décrite qu'en



<u>figure II-2</u>: cylindre de céramique à polarisation radiale

moyenne dans chaque élément. Pour pouvoir décrire des polarisations variables, la détermination de la direction de polarisation, et donc l'orientation du repère principal, doit se faire ponctuellement et non globalement sur l'élément.

II- 3.1 Remarque sur le calcul des matrices de rigidité

Le calcul des intégrales définies par les relations (I.48) est toujours effectué à l'aide des variables réduites ξ, η et ζ. Toute intégrale du type:

$$[K^e] = \iiint_{\Omega_e} [B^e]^T[G][B^e].d\Omega_e \qquad (II.15)$$

où $[K^e]$ est l'une des matrices élémentaires de rigidité $\left[K^e_{uu}\right]$, $\left[K^e_{u\phi}\right]$ ou $\left[K^e_{\phi\phi}\right]$, $[B^e]$ l'une des matrice de transformation $\left[B^e_u\right]$ ou $\left[B^e_\phi\right]$ et $[G]$ l'un des tenseurs élastique, piézoélectrique ou diélectrique, devient:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [\bar{B}^e(\xi,\eta,\zeta)]^T[G][\bar{B}^e(\xi,\eta,\zeta)].det[J].d\xi.d\eta.d\zeta \qquad (II.16)$$

où $[J]$ représente la matrice jacobienne de changement de coordonnées. Dans cette expression, seule la matrice $[\bar{B}^e]$ dépend des variables réduites ξ, η et ζ par l'intermédiaire des relations du type (I.71) ou (I.72). Elle est donc réévaluée à chaque point d'intégration et permet de décrire précisément les contours courbes de l'élément. La matrice $[G]$, exprimant les propriétés physiques de l'élément, est, quant à elle, constante lors de l'intégration. Elle ne dépend que de l'orientation globale de l'élément.

II- 3.2 Evaluation des tenseurs point par point

Le principe d'analyse de la polarisation variable consiste à calculer également la matrice $[G]$ à chaque point d'intégration. L'orientation du repère principal est déterminée point par point et, à l'aide des relations (II.12) à (II.14), les composantes de la matrice $[G]$ sont modifiées. L'intégrale de la relation (II.16) prend alors la forme finale suivante:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [\bar{B}^e(\xi,\eta,\zeta)]^T[G(\xi,\eta,\zeta)][\bar{B}^e(\xi,\eta,\zeta)] \times$$

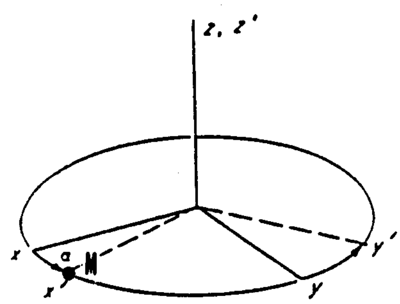
$$\times\ det[J].d\xi.d\eta.d\zeta \qquad (II.17)$$

Cette technique permet, lorsque la polarisation varie dans l'élément, un calcul plus précis des différentes matrices de rigidité, qui tiennent alors compte de formes géométriques complexes et d'une direction de polarisation variable.

II- 3.3 Calcul des angles de rotation en polarisation radiale

Les points d'intégration n'étant pas directement accessibles, la procédure de calcul des angles de rotation a été automatisée. Les deux sections suivantes présentent le calcul des angles de rotation dans le cas des polarisations cylindrique et sphérique. Ces polarisations sont définies principalement pour des matériaux uniaxiaux. L'angle de rotation γ est alors indifférent. Dans le cas d'utilisation d'autres matériaux, l'angle γ doit être précisé.

II- *3.3.1 Cas de la polarisation cylindrique*



<u>figure II-3</u>: définition de l'angle α pour la polarisation cylindrique

Connaissant les coordonnées réduites ξ, η et ζ d'un point M, ses coordonnées globales X, Y et Z peuvent être calculées compte tenu de la bijection entre l'espace des coordonnées réduites et celui des coordonnées globales. L'angle α est alors l'angle entre l'axe OX et l'axe OM (figure II-3) donné par:

$$\alpha = \mathrm{Arctg}\left(\frac{Y}{X}\right) + (1-k).\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad k = \frac{X}{|X|} \qquad (\text{II}.18)$$

L' angle β est nul et la valeur de l'angle γ est indifférente.

II- 3.3.2 *Cas de la polarisation sphérique*

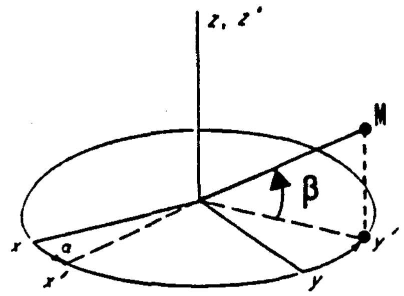


figure II-4: définition des angles α et β pour la polarisation sphérique

Comme dans le cas de la polarisation cylindrique, les angles α et β sont calculés à partir des coordonnées globales du point M (figure II-4) par:

$$\alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{X}{a}\right).k \qquad \text{et} \qquad k = \frac{Y}{|Y|}$$

$$\beta = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{Z}{b}\right) + (1-k').\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad k' = \frac{Z}{|Z|} \qquad (\text{II}.19)$$

$$a = \sqrt{X^2 + Y^2} \qquad\qquad b = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

La valeur de l'angle γ est indifférente ici également.

II- 4 ANALYSE DE QUELQUES EXEMPLES TESTS

Dans cette partie, trois exemples tests correspondant à une polarisation variable sont traités:

- l'analyse tridimensionnelle du comportement dynamique d'un cylindre piézoélectrique. Les résultats sont comparés, pour les modes présentant la symétrie de révolution, aux résultats obtenus avec une modélisation plane utilisant des éléments à symétrie axiale.

- l'étude du mode radial d'une sphère piézoélectrique. Les résultats sont comparés aux résultats analytiques.

- l'analyse modale, en déformation plane, d'une section d'un tube piézoélectrique. L'attention est portée sur la levée de dégénérescence de certains modes lorsque la description de la polarisation est insuffisamment précise.

II- 4.1 Modélisation d'un cylindre piézoélectrique

Pour valider la prise en compte de la polarisation cylindrique, un cylindre piézoélectrique creux est modélisé. Ce cylindre a un rayon interne de 9cm, un rayon externe de 9.5cm et une hauteur de 1cm. Pour simplifier le maillage du cylindre, seul un secteur angulaire est maillé. Sur les faces du dièdre définissant ce secteur, des conditions de symétrie sont imposées au champ de déplacement. Les maillages utilisés sont:

- trois maillages tridimensionnels représentant respectivement des secteurs angulaires de 2 (figure II-5), 6 (figure II-6) et 45 dégrés (figure II-7).

- un maillage plan, avec des éléments prenant en compte la symétrie de révolution (figure II-8), dont les résultats associés servent de référence.

L'analyse modale en circuit fermé et en circuit ouvert est conduite pour chaque type de maillage. Pour les maillages tridimensionnels, seuls les modes ayant la symétrie de révolution sont retenus et comparés aux résultats fournis par le maillage plan. Les fréquences de résonance et d'antirésonance obtenues avec les différentes simulations sont données dans les tableaux II-1 et II-2. Les coefficients de couplage électromécaniques sont également calculés et donnés dans le tableau II-3. Avec le maillage tridimensionnel d'un secteur de 45 dégrés, la densité des modes n'ayant pas la symétrie de révolution est élevée. Dans la liste des vingt premiers modes propres donnée par le code ATILA, seuls trois modes à symétrie de révolution sont relevés. Les fréquences des autres modes à symétrie de révolution n'ont pas été déterminées et sont donc remplacées, dans les tableaux, par des étoiles (*).

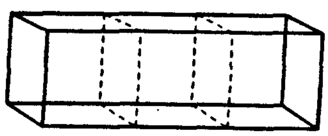


figure II-5: maillage d'un secteur de 2° du cylindre

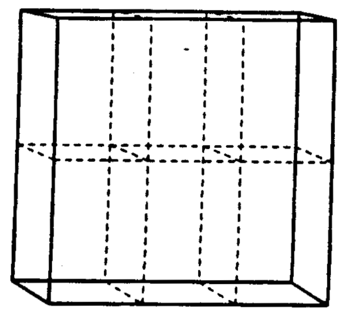


figure II-6: maillage d'un secteur de 6° du cylindre

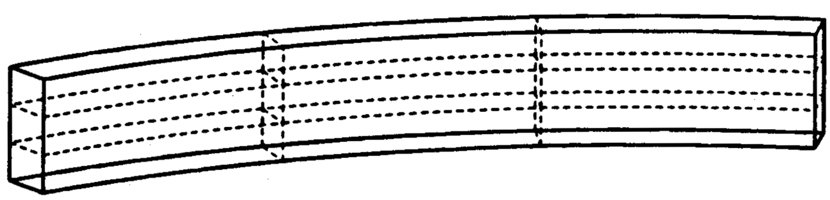


figure II-7: maillage d'un secteur de 45° du cylindre

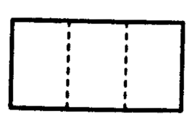


figure II-8: maillage plan à symétrie axiale

mode	symétrie axiale	ouverture de 2°	ouverture de 6°	ouverture de 45°
1	5.57	5.57	5.60	5.55
2	41.41	41.42	41.42	41.47
3	83.82	83.85	83.84	84.93
4	147.32	147.56	147.35	*
5	230.27	230.30	232.02	*
6	234.88	234.90	235.44	*
7	302.32	302.40	303.31	*
8	309.75	309.76	309.86	*

Tableau II-1: fréquences de résonance en kHz

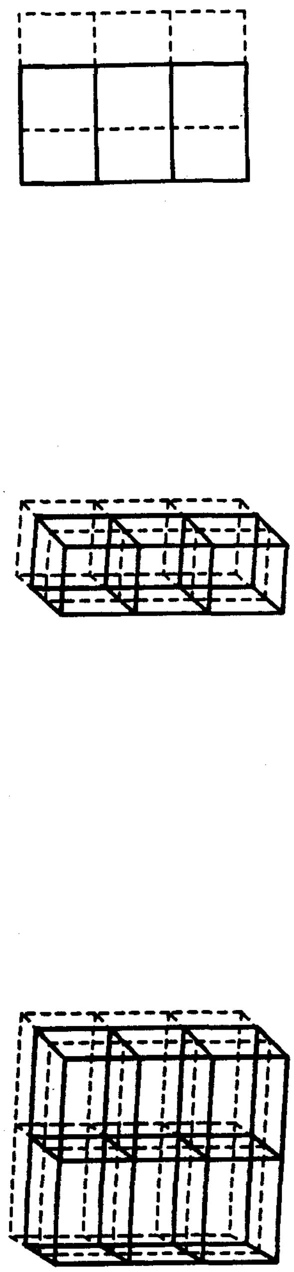
mode	symétrie axiale	ouverture de 2°	ouverture de 6°	ouverture de 45°
1	5.89	5.88	5.91	5.86
2	41.41	41.42	41.42	41.47
3	92.34	92.34	92.37	89.46
4	147.32	147.56	147.35	*
5	234.27	234.27	235.44	*
6	234.88	234.90	235.44	*
7	302.32	302.40	303.31	*
8	314.14	314.15	314.85	*

Tableau II-2: fréquences d'antirésonance en kHz

k	symétrie axiale	ouverture de 2°	ouverture de 6°	ouverture de 45°
1	32	32	32	32
2	0	0	0	0
3	42	42	42	32
4	0	0	0	*
5	18	18	17	*
6	0	0	0	*
7	0	0	0	*
8	17	17	18	*

Tableau II-3: coefficients de couplage en %

Ces tableaux montrent une bonne concordance des différents résultats. Malgré le nombre restreint d'éléments utilisés pour le maillage du secteur de 45°, l'erreur reste relativement faible sur les trois premiers modes. Les trois premiers modes propres à symétrie de révolution sont représentés figures II-8 à II-10, pour le maillage plan et deux maillages tridimensionnels (secteurs de 2 et 6 dégrés). L'identité des



<u>figure II-9</u>: premier mode à symétrie de révolution du cylindre

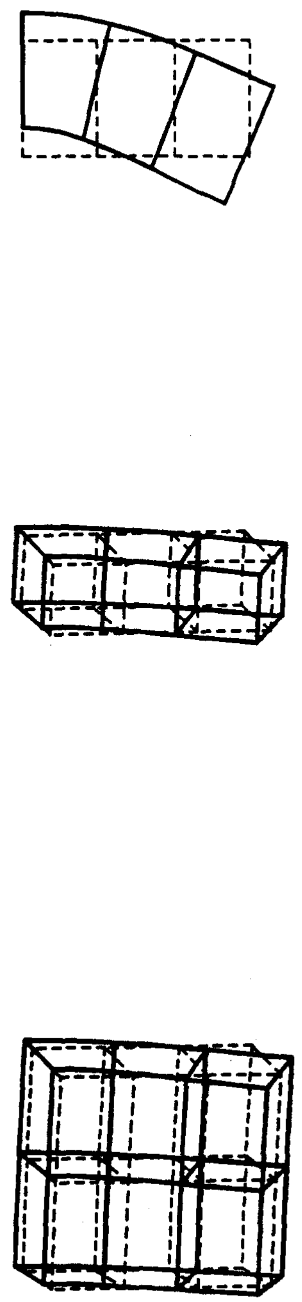
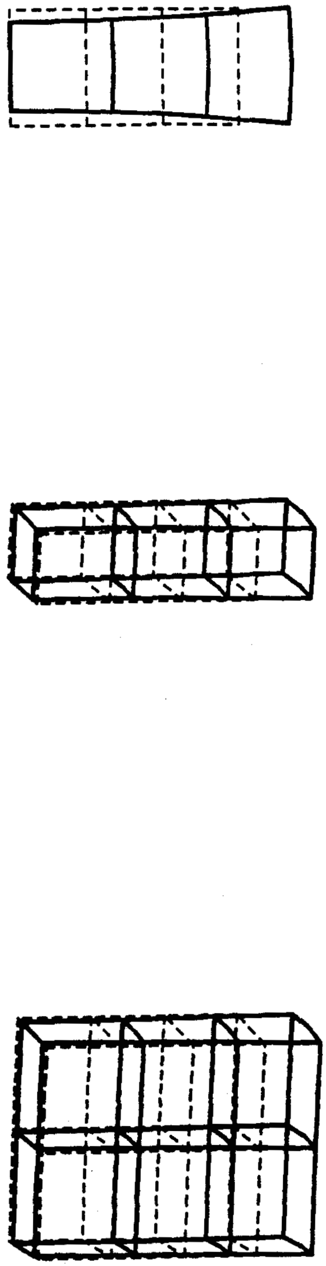


figure II-10: second mode à symétrie de révolution du cylindre

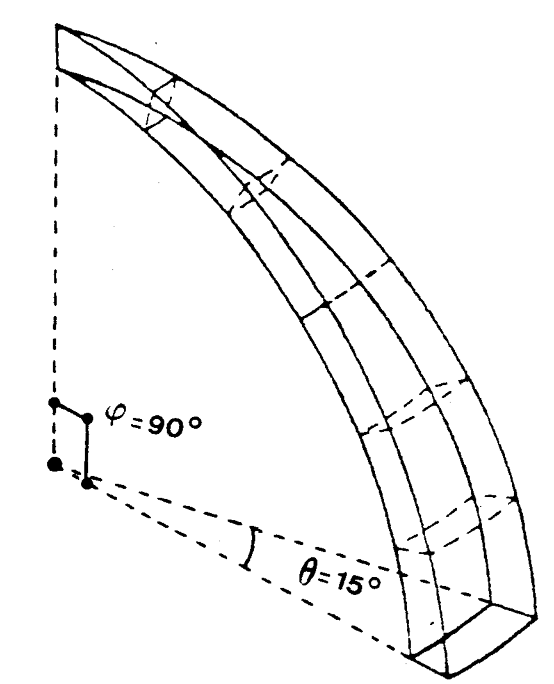


<u>figure II-11</u>: troisième mode à symétrie de révolution du cylindre

fréquences et des champs de déplacement obtenus démontre la précision du modèle utilisé pour décrire la polarisation cylindrique.

II- 4.2 Modélisation d'une sphère piézoélectrique

Le second type de polarisation variable à valider est la polarisation sphérique. Celle-ci présente un degré de complexité supérieur à celui de l'exemple précédent, dans la mesure où la direction radiale n'est plus contenue dans un des plans de base du système de coordonnées mais varie dans l'espace suivant le vecteur qui joint le centre d'une sphère à un point quelconque de sa surface. Pour décrire cette polarisation, une sphère creuse de 9cm de rayon interne et de 9.5cm de rayon externe a été modélisée. Cette sphère porte des électrodes sur ses faces interne et externe. Un secteur de 15 degrés dans le plan horizontal et de 90 degrés dans le plan vertical a été maillé. Ce maillage est réalisé à l'aide d'éléments hexaèdres à vingt noeuds et d'un élément prismatique à base triangulaire à quinze noeuds (figure II-12). Des conditions de symétrie sont imposées au champ de déplacement sur les faces du dièdre délimitant ce



<u>figure II-12</u>: maillage d'un secteur d'une sphère piézoélectrique

secteur. Les fréquences de résonance et d'antirésonance du premier mode radial de cette sphère mince peuvent se calculer analytiquement, comme rappelé dans l'annexe 2. Les résultats de la simulation et du calcul analytique sont présentés dans le tableau II-4.

mode radial	F_r (kHz)	F_a (kHz)	k (%)
modélisation	9.15	10.86	53.8
analytique	9.12	10.82	53.8

Tableau II-4: fréquences de résonance et d'antirésonance et coefficient de couplage du mode radial

Ces résultats prouvent un bon accord entre la simulation et le calcul analytique. Ils permettent de valider la prise en compte de la polarisation sphérique.

II- 4.3 Etude des modes d'un tube piézoélectrique infini

Pour décrire une polarisation variable du type cylindrique ou sphérique sans recourir à la technique décrite dans ce chapitre, il faut sélectionner pour chaque élément piézoélectrique du maillage, une direction de polarisation unique correspondant à la moyenne des directions radiales passant par l'élément. Cette façon de procéder se traduit, lors de certaines simulations, comme celle étudiée dans cette section, par une levée anormale des dégénérescences de modes. Les modes dits dégénérés sont des modes de mêmes fréquences dont les champs de déplacement sont identiques à une rotation de la structure entière près. L'exemple traité est celui d'un tube de 9cm de rayon interne, de 10cm de rayon externe et de hauteur infinie. Ce cylindre ne présente que des modes de vibration transversale qui sont parfaitement décrits par un maillage plan utilisant des éléments de déformation plane (figure II-13). L'analyse modale du tube

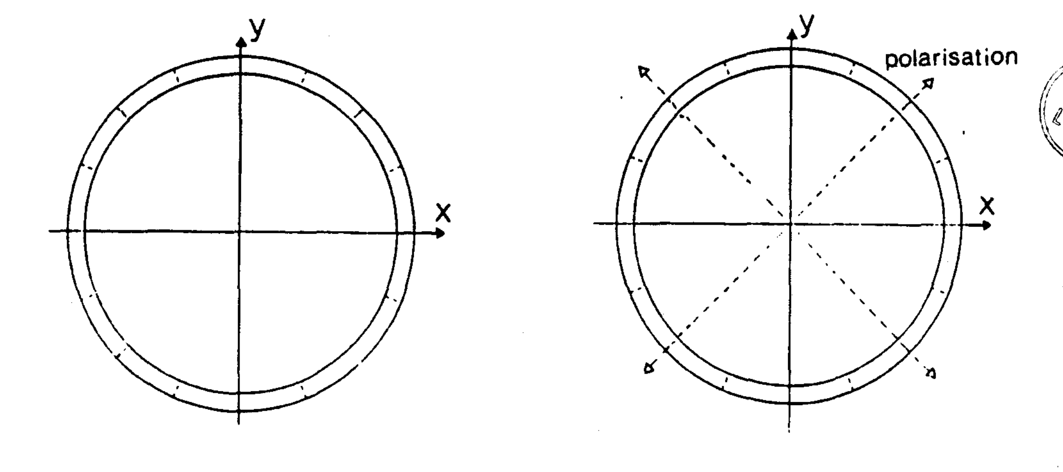


figure II-13: maillage d'un tube infini

en circuit fermé est conduite dans deux cas pour lesquels le maillage de la structure est identique:

- dans le premier cas, une direction de polarisation moyenne suivant les bissectrices principales (figure II-13) est fixée pour chaque élément du maillage. Ce cas, qui est un cas extrême, est choisi pour accentuer les lévées de dégénérescence.

- dans le second, la direction de polarisation est calculée sur tous les points d'intégration de chaque élément, comme décrit dans ce chapitre.

Les fréquences de résonance obtenues, dans les deux cas, sont données dans le tableau II-5. Dans ce tableau, plusieurs modes sont dégénérés, comme le

mode	polarisation fixe	polarisation variable
1	0.47	0.51
2	0.51	0.51
3	1.45	1.57
4	1.46	1.57
5	2.82	3.03
6	2.87	3.10
7	4.67	5.05
8	4.75	5.05
9	5.53	5.68
10	6.85	7.54
11	7.38	7.54
12	7.66	8.02
13	7.92	8.02
14	10.04	10.52
15	10.21	10.52
16	12.26	12.67
17	12.43	12.67

Tableau II-5: fréquences de résonance du tube infini en kHz

premier et le second ou le troisième et le quatrième etc... Toutes ces dégénérescences sont bien obtenues avec le maillage utilisant la polarisation variable. Par contre, avec le maillage à polarisation fixe, on observe quelques levées de dégénérescence. Les champs de déplacement associés aux six premiers modes sont présentés sur les figure II-14 à II-19. Il faut noter que, si dans un cas réel traité avec une modélisation plus fine, les écarts ne sont qu'un effet secondaire lors d'une analyse modale, ils peuvent cependant impliquer une réponse harmonique plus complexe ou présentant des pics de largeur erronée, ce qui rend alors la qualité de la modélisation à polarisation variable indispensable.

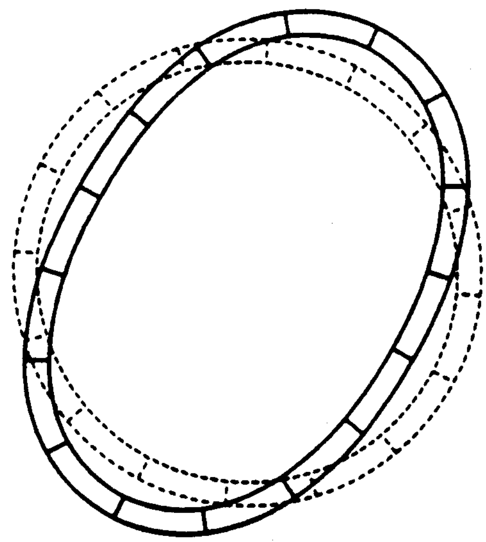


figure II.14: premier mode propre du tube infini

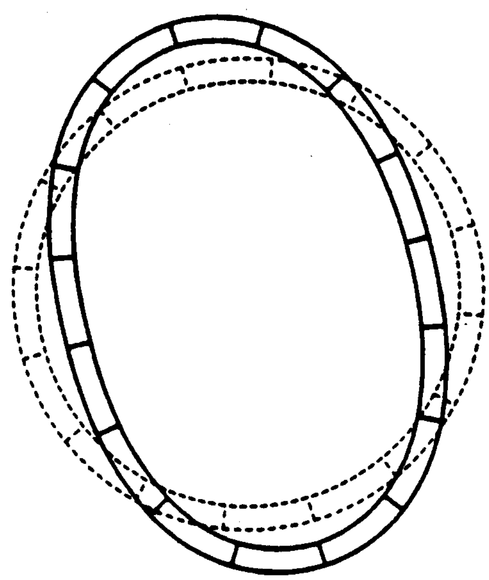


figure II.15: second mode propre du tube infini

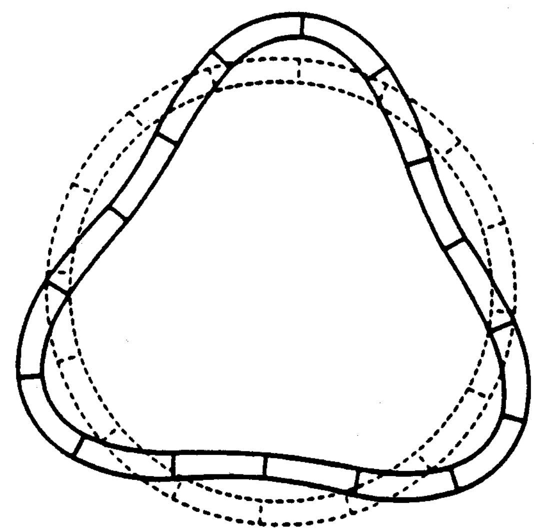


figure II.16: troisième mode propre du tube infini

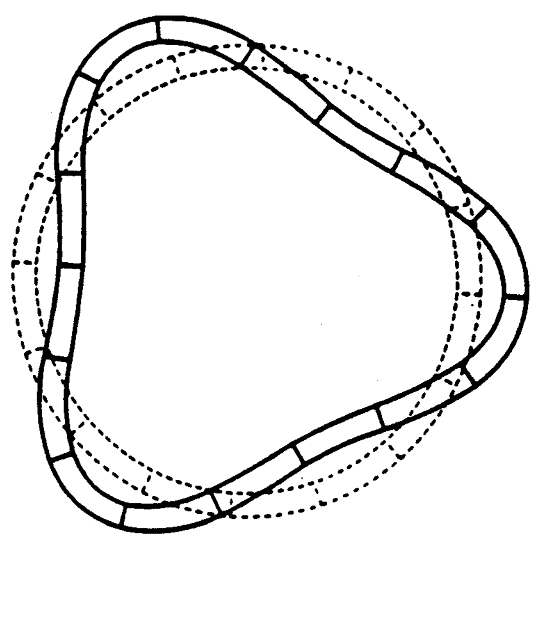


figure II.17: quatrième mode propre du tube infini

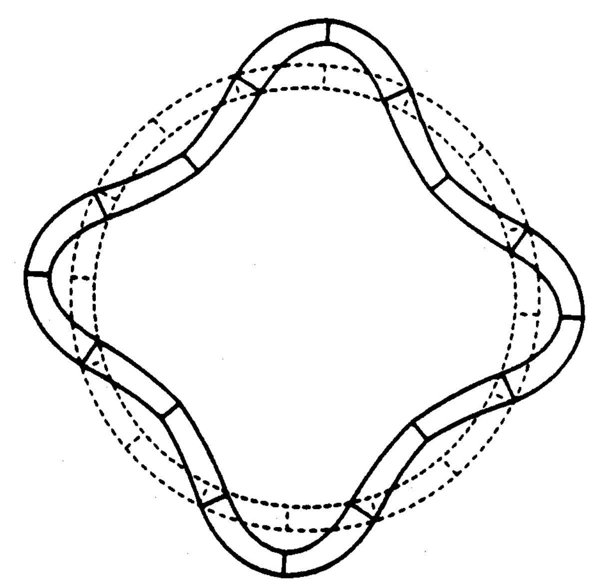


figure II.18: cinquième mode propre du tube infini

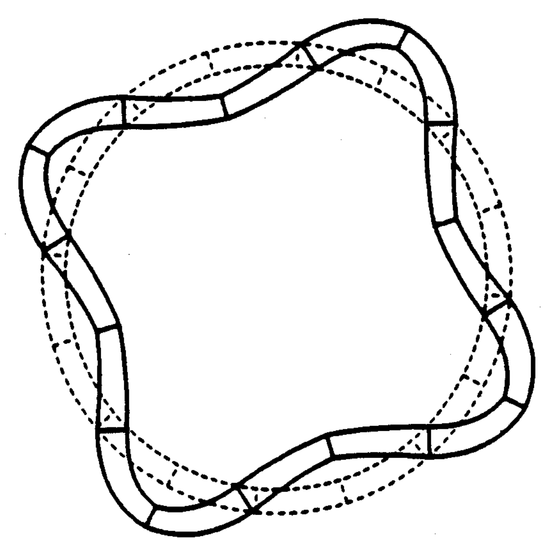


figure II.19: sixième mode propre du tube infini

II- 4.4 Modélisation de résonateurs piézoélectriques

Dans cette partie, on se propose de modéliser deux sortes de résonateurs piézoélectriques. Le premier est un transducteur *sandwich* formé d'une ou deux plaques piézoélectriques en niobate de lithium collées sur une plaque métallique en *Thermelast*. Le second est une lame de quartz présentant des modes d'épaisseur à énergie piégée. Les éléments actifs de ces transducteurs étant des matériaux piézoélectriques dont les tenseurs représentatifs n'appartiennent pas à la classe cristallographique de la céramique, la modélisation de ces résonateurs permet de valider la prise en compte, par le code **ATILA**, de tout type de matériau piézoélectrique.

II- *4.4.1 Résonateur au niobate de lithium*

Trois configurations différentes du résonateur au niobate de lithium sont étudiées. Dans la première configuration (figure II-20a), le transducteur est formé de deux plaques piézoélectriques collées de part et d'autre d'une lame métallique. Dans la deuxième configuration (figure II-20b), le transducteur se compose d'une plaque piézoélectrique comprise entre deux plaques métalliques. Enfin, dans la troisième configuration (figure II-20c), le transducteur est formé simplement d'une plaque piézoélectrique collée sur une plaque métallique. Dans les trois cas, le matériau piézoélectrique est le niobate de lithium. Le métal est du *Thermelast*, de module d'**YOUNG** 1.839 10^{11} Pa et de coefficient de **POISSON** 0.44 . Les dimensions, exprimées en mm, sont portées sur la figure II-20

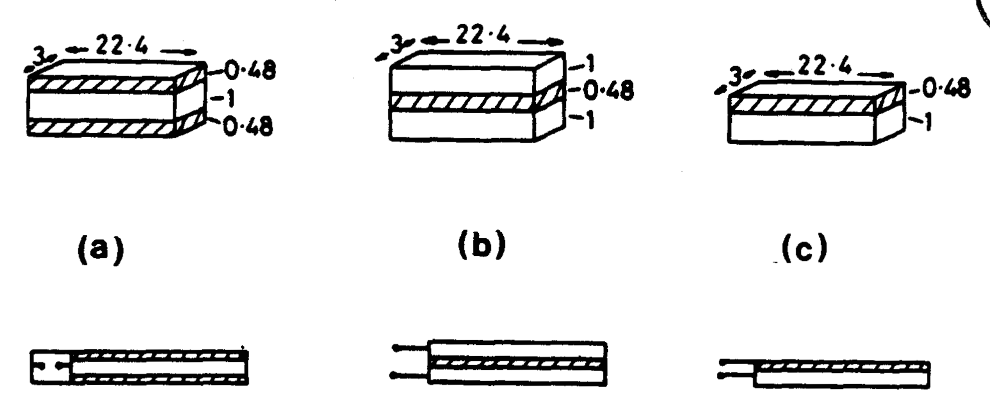


figure II-20: les différentes configurations du résonateur [35]

pour chaque transducteur. La modélisation a été conduite dans les trois cas. Les valeurs calculées de la fréquence de résonance et du coefficient de couplage du mode longitudinal sont comparées aux valeurs expérimentales obtenues par C. **DUCHET** [35] dans le tableau II-6. L'accord est très bon et

type de résonateur	F_r (kHz) calculée	F_r (kHz) mesurée	k (%) calculé	k (%) mesuré
a	113.3	112.2	31	30
b	108.1	106.6	19	19
c	110.0	108.9	26	25

Tableau II-6: fréquences de résonance et coefficients de couplage

valide la prise en compte de ce matériau.

II- *4.4.2 Résonateur à quartz*

Le deuxième type de résonateur modélisé est le résonateur à lame de quartz présentant des modes d'épaisseur à énergie piégée. Ces modes, qui correspondent à une onde de volume se propageant suivant la direction normale à la plaque de quartz, présentent une dispersion provoquée par la lente variation de l'épaisseur du cristal. Deux coupes différentes de la plaque de quartz ont été étudiées: une coupe en simple rotation (type AT) et une coupe en double rotation (type SC). Ces coupes correspondent à des orientations différentes de la plaque par rapport au repère cristallographique du matériau (figure II-21). Les valeurs calculées des

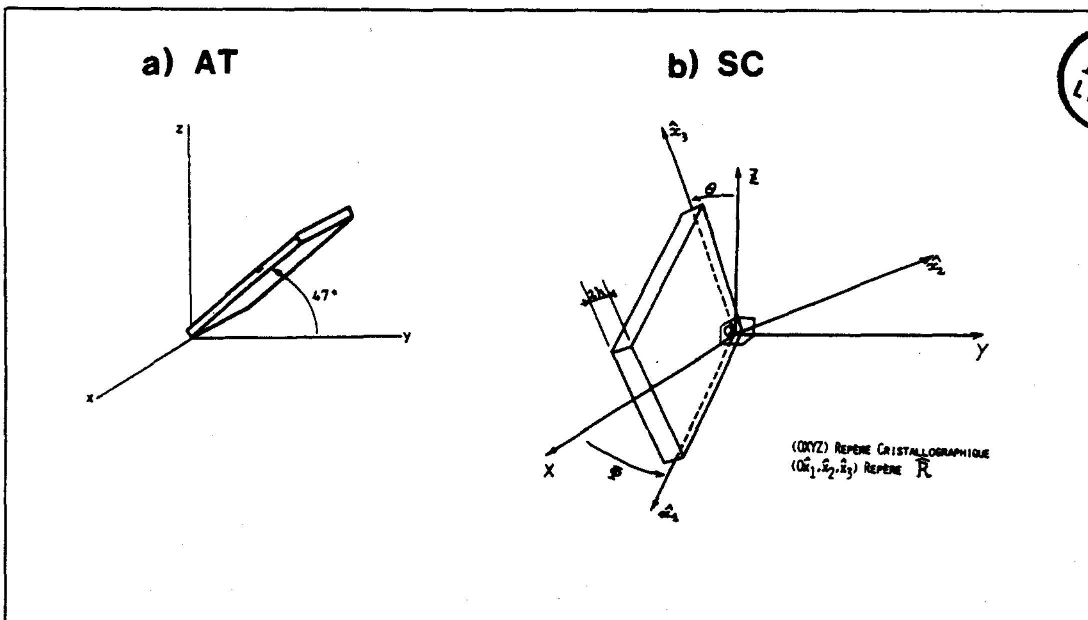


figure II-21: différentes coupes de la lame de quartz [36]

fréquences de résonance des six premiers modes sont comparées, pour les deux cas, aux valeurs expérimentales obtenues par B. DULMET [36]. Les tableaux II-7 et II-8 présentent les résultats obtenus avec les deux

mode	F_r (MHz) calculée	F_r (MHz) mesurée
1	5.02	5.00
2	5.12	5.08
3	5.12	5.09
4	8.33	-
5	8.42	8.40
6	8.42	8.40

Tableau II-7: fréquences de résonance de la coupe AT

mode	F_r (MHz) calculée	F_r (MHz) mesurée
1	5.00	5.00
2	5.12	5.10
3	5.12	5.11
4	6.98	6.90
5	7.10	7.01
6	7.10	7.02

Tableau II-8: fréquences de résonance de la coupe SC

modélisations et les mesures correspondantes. Le tiret dans le premier tableau remplace une valeur expérimentale manquante. La qualité des résultats obtenus permet de valider également la prise en compte du quartz. Toutes ces modélisations montrent la capacité du code ATILA à décrire maintenant tout type de matériau piézoélectrique, indépendamment de la classe de symétrie de leurs tenseurs caractéristiques.

II- 5 CONCLUSION

Dans ce second chapitre, la généralisation des opérations tensorielles intervenant dans le calcul des différentes matrices de rigidité des éléments piézoélectriques, entamée dans le premier chapitre, est complétée. Elle permet alors la prise en compte, par le code ATILA, de tout type de matériau piézoélectrique (céramiques, quartz, CdS, piézoplastiques) à polarisation uniforme. Des modélisations de résonateurs à quartz présentant des modes d'épaisseurs à énergie piégée et de transducteurs *sandwich* formés de deux plaques rectangulaires piézoélectriques au niobate de lithium collées de part et d'autre d'une lame métallique en *Thermelast* ont été effectuées. Les résultats de ces modélisations ont permis de valider complètement ce premier aspect de la généralisation.

Le second aspect, entièrement développé dans ce chapitre, concerne la modification, dans les éléments piézoélectriques de la bibliothèque du code **ATILA**, de la procédure d'intégration numérique. Il permet alors la prise en compte, dans l'élément, d'une polarisation variable du type cylindrique ou sphérique. Les nombreux exemples tests de polarisation variable traités dans ce chapitre ont fourni des résultats particulièrement précis et ont permis la validation de ce dernier aspect de la généralisation. Les éléments piézoélectriques ainsi développés peuvent, dès lors, être constitués de tout matériau piézoélectrique à polarisation uniforme ou variable.

CHAPITRE III

ANALYSE DES PLAQUES PIEZOELECTRIQUES

Dans les problèmes traités aux chapitres I *et* II, *les relations fondamentales entre contraintes et déformations ont été exploitées sous leur forme exacte, les approximations n'étant liées qu'à la méthode des éléments finis. Dans la théorie classique des plaques élastiques, certaines hypothèses simplificatrices sont introduites dès le début, permettant de ramener l'étude d'une structure tridimensionnelle d'épaisseur faible à un problème bidimensionnel. Ces hypothèses simplificatrices, qui supposent une variation linéaire des contraintes et des déformations le long d'une normale au plan moyen de la plaque, ne sont valables que dans la mesure où la plaque est mince et a de petits déplacements. Ce chapitre a pour objet d'appliquer ces hypothèses de la théorie des plaques minces à des plaques piézoélectriques et d'en déduire la formulation équivalente. Il constitue un préambule à l'étude des trilames piézoélectriques qui est l'objet du chapitre* IV, *et n'a pas d'application directe.*

III- 1 PRESENTATION DU PROBLEME DE LA PLAQUE PIEZOELECTRIQUE

III- 1.1 Description

Une plaque piézoélectrique est une structure tridimensionnelle sollicitée en flexion dont une des dimensions, l'épaisseur, est très petite comparée aux deux autres (figure III-1). Cette structure, supposée en **céramique piézoélectrique**, est métallisée sur ses deux grandes faces qui sont parallèles entre elles . La direction de polarisation est orthogonale aux électrodes formées par les faces métallisées.

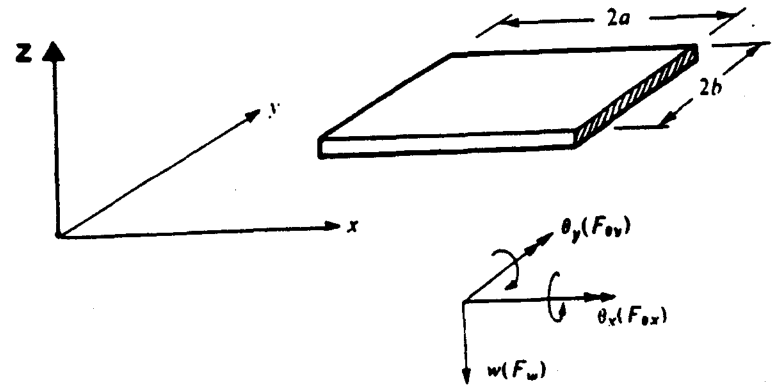


figure III-1: schéma d'une plaque piézoélectrique

III- 1.2 Hypothèses

Les propriétés de flexion d'une plaque dépendent, en grande partie, du rapport des dimensions latérales à l'épaisseur. Dans la théorie des plaques minces, les hypothèses classiquement admises, appelées hypothèses de **KIRCHHOFF** [19], sont les suivantes:

a - il n'y a pas de déformation dans le plan moyen d'une plaque: ce plan reste neutre pendant la flexion,

b - les points de la plaque situés initialement sur une normale au plan moyen demeurent sur celle-ci après la flexion,

c - les contraintes normales suivant une direction transversale à la plaque peuvent être négligées.

Par ailleurs, du point de vue électrique, les lignes de champ électrique sont considérées normales aux électrodes. En général, l'erreur faite, en utilisant ces hypothèses, est de l'ordre de h/l [14], h étant l'épaisseur de la plaque et l la plus petite des dimensions latérales de la plaque. Quantitativement, si l'erreur maximale admise est de 5%, les hypothèses ne sont utilisables que pour les rapports vérifiant:

$$\frac{h}{l} < \frac{1}{20} \qquad \text{(III.1)}$$

Pour des rapports plus grands, l'utilisation d'éléments plaques épaisses ou d'éléments solides tridimensionnels doit être envisagée. La figure III-2 [37] indique le domaine de validité des éléments plaques minces (1), plaques épaisses (2) et d'éléments solides tridimensionnels (3) en fonction du rapport h/l. L'épaisseur du trait est fonction de la qualité des résultats généralement obtenus avec chaque type d'élément.

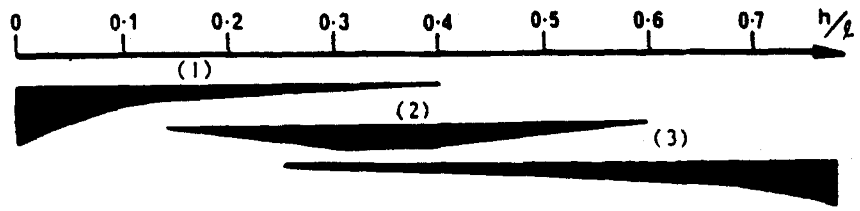


figure III-2: domaine d'utilisation des plaques

III- 1.3 Equations

En tenant compte de ces hypothèses, l'analyse tridimensionnelle peut être ramenée à un problème plan. Les équations d'état de la piézoélectricité données par les relations (I.25) se réduisent à:

$$\begin{aligned} s_1 &= S^E_{11}.\sigma_1 + S^E_{12}.\sigma_2 + d_{31}.E_3 \\ s_2 &= S^E_{12}.\sigma_1 + S^E_{11}.\sigma_2 + d_{31}.E_3 \end{aligned} \qquad \text{(III.2)}$$

$$s_6 = S^E_{66}.\sigma_6 \qquad \text{(III.3)}$$

$$D_3 = d_{31}.\sigma_1 + d_{31}.\sigma_2 + \varepsilon^{\sigma}_{33}.E_3 \qquad \text{(III.4)}$$

La relation (III.4) permet d'écrire:

$$E_3 = \frac{1}{\varepsilon^{\sigma}_{33}}.(D_3 - d_{31}.\sigma_1 - d_{31}.\sigma_2) \qquad \text{(III.5)}$$

Le couplage de cette équation avec les relations (III.2) fournit le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} s_1 = \left(S^E_{11} - \dfrac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}\right).\sigma_1 + \left(S^E_{12} - \dfrac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}\right).\sigma_2 + \dfrac{d_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}.D_3 \\ \\ s_2 = \left(S^E_{12} - \dfrac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}\right).\sigma_1 + \left(S^E_{11} - \dfrac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}\right).\sigma_2 + \dfrac{d_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}.D_3 \end{array}\right. \qquad (\text{III}.6)$$

En définissant par $\underset{\sim}{\sigma}^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6)$ et $\underset{\sim}{s}^T = (s_1, s_2, s_6)$ les vecteurs $\underset{\sim}{\sigma}$ et $\underset{\sim}{s}$ des contraintes et déformations du plan moyen, les relations (III.3) et (III.6) peuvent alors se mettre sous forme matricielle:

$$\underset{\sim}{\sigma} = [\alpha].\underset{\sim}{s} - [\beta].D_3 \qquad (\text{III}.7)$$

où:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \dfrac{S^E_{11} - \dfrac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}}{d} & -\dfrac{S^E_{12} - \dfrac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}}{d} & 0 \\ -\dfrac{S^E_{12} - \dfrac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}}{d} & \dfrac{S^E_{11} - \dfrac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}}{d} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{S^\sigma_{66}} \end{bmatrix} \qquad (\text{III}.8)$$

et:

$$[\beta]^T = \begin{bmatrix} \dfrac{S^E_{11} - S^E_{12}}{d} . \dfrac{d_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}} & \dfrac{S^E_{11} - S^E_{12}}{d} . \dfrac{d_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}} & 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{III}.9)$$

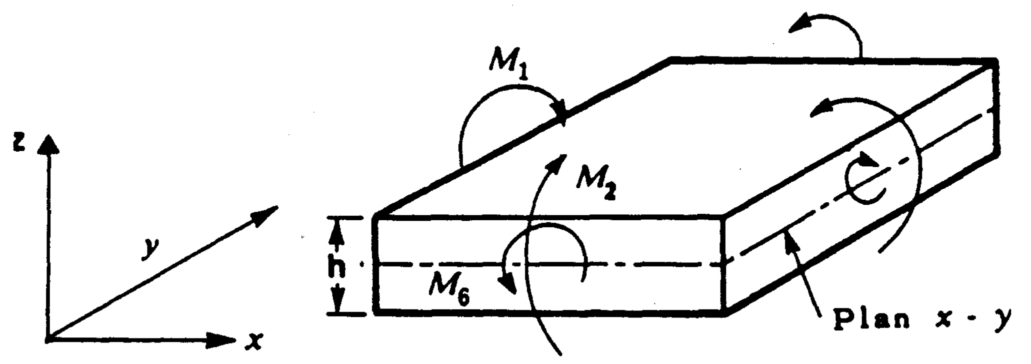
avec:

$$d = \left(S^E_{11} - \dfrac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}\right)^2 - \left(S^E_{12} - \dfrac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}\right)^2 \qquad (\text{III}.10)$$

III- 2 MATRICE DE RIGIDITE D'UNE PLAQUE PIEZOELECTRIQUE

III- 2.1 Définition des moments

L'état de déformation et de contrainte d'une plaque peut être entièrement décrit par la flèche w qui est le déplacement transversal du plan moyen de la plaque. Toutes les composantes de la contrainte peuvent notamment s'exprimer en fonction de cette flèche. En dehors du plan moyen, compte tenu de la seconde hypothèse de **KIRCHHOFF**, les contraintes et les déformations varient linéairement dans l'épaisseur de la plaque. Les moments de flexion et de torsion par unité de longueur, décrits à la



<u>figure III-3</u>: moments de flexion et de torsion d'une plaque piézoélectrique

figure III-3, sont [23]:

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 . zdz$$

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 . zdz \qquad (III.11)$$

$$M_6 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_6 . zdz$$

III- 2.2 Définition des déformations généralisées

Les déformations généralisées sont définies de telle sorte que leur produit scalaire avec les moments de flexion et de torsion, aussi appelés contraintes généralisées, s'identifie au travail des forces intérieures. On peut donc donner de la déformation généralisée la définition suivante [38]:

$$\underset{\sim}{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r_1} \\ \dfrac{1}{r_2} \\ \dfrac{1}{r_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2.\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{III.12}$$

où r_1 et r_2 sont les rayons de courbure, respectivement dans les plans xOz et yOz, et r_6 la torsion de surface. $\underset{\sim}{\kappa}$ et $\underset{\sim}{s}$ se relient aisément. Ainsi, soit $d\Omega$ une section élémentaire de la plaque obtenue par une coupe dans le plan xOz (figure III-4). En notant dx la longueur de la fibre moyenne de $d\Omega$,

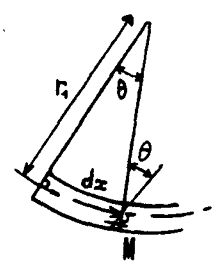


figure III-4: flexion d'un domaine élémentaire

on peut, par construction de triangles semblables sur la section fléchie, écrire:

$$\frac{dx}{r_1} = \frac{s_1 dx}{z} \tag{III.13}$$

où z est la distance du point M à la fibre moyenne. En appliquant cette démarche avec les autres composantes, la relation entre la déformation $\underset{\sim}{s}$ et la déformation généralisée $\underset{\sim}{\kappa}$ peut alors s'écrire:

$$\underset{\sim}{s} = z.\underset{\sim}{\kappa} \tag{III.14}$$

Cette relation, qui vérifie les deux premières hypothèses de KIRCHHOFF, montre que la déformation $\underset{\sim}{s}$ varie linéairement dans l'épaisseur de la plaque.

III- 2.3 Matrice de rigidité de la plaque piézoélectrique

En développant l'expression de la contrainte généralisée M_1 donnée par la première équation de (III.11), on obtient:

$$M_1 = \alpha_{11}.\int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2}{r_1}.dz + \alpha_{12}.\int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2}{r_2}.dz - \beta_1.\int_{-h/2}^{h/2} D_3.zdz \qquad (III.15)$$

Sachant de plus qu'il n'y a pas de charges libres dans le volume du matériau, l'équation de **POISSON** s'écrit:

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0 \qquad (III.16)$$

Alors:

$$\int_{-h/2}^{h/2} D_3.zdz = 0 \qquad (III.17)$$

d'où:

$$M_1 = \alpha_{11}.\frac{h^3}{12r_1} + \alpha_{12}.\frac{h^3}{12r_2} \qquad (III.18)$$

De la même façon, on trouve:

$$M_2 = \alpha_{21}.\frac{h^3}{12r_1} + \alpha_{22}.\frac{h^3}{12r_2} \qquad (III.19)$$

et:

$$M_6 = \alpha_{33}.\frac{h^3}{12r_6} \qquad (III.20)$$

Ces relations sont indépendantes de l'excitation électrique. Le comportement de la plaque doit donc être indifférent aux conditions aux limites électriques.

Définissant par $\underset{\sim}{M}^T = \{M_1, M_2, M_6\}$ le vecteur $\underset{\sim}{M}$ formé par les moments de flexion et de torsion, les équations (III.18), (III.19) et (III.20) se regroupent sous la forme matricielle suivante, liant les contraintes généralisées aux déformations généralisées:

$$\underset{\sim}{M} = [D].\underset{\sim}{\kappa} \qquad (III.21)$$

où:

$$[D] = \frac{h^3}{12d} \cdot \begin{bmatrix} \left(S^E_{11} - \frac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}\right) & -\left(S^E_{12} - \frac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}\right) & 0 \\ -\left(S^E_{12} - \frac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}\right) & \left(S^E_{11} - \frac{d^2_{31}}{\varepsilon^\sigma_{33}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{S^6_{66}} \end{bmatrix} \qquad (\text{III}.22)$$

La matrice [D] est appelée **matrice de rigidité** de la plaque piézoélectrique. A l'évidence, compte tenu de l'expression de **d** donnée par la relation (III.10), l'effet des termes piézoélectriques se traduit donc simplement par un raidissement de la plaque.

III- 3 APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

III- 3.1 Expression du principe variationnel

Comme indiqué dans la section précédente, le problème d'une plaque piézoélectrique en flexion se réduit au problème d'une plaque élastique isotrope dont les constantes élastiques sont raidies par l'effet piézoélectrique. Dès lors, les modes de flexion de la plaque piézoélectrique ne peuvent pas être excités électriquement. La fonctionnelle L associée aux équations de la plaque est purement mécanique et donnée par [31]:

$$L = \frac{1}{2}\cdot\iint_S \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\kappa}.dS \; - \; \frac{1}{2}\cdot\iiint_V \rho\omega^2 w^2.dV \; - \; \iint_S fw.dS \qquad (\text{III}.23)$$

où ω est la pulsation, w la flèche, ρ la masse volumique, S la surface de la plaque, V son volume et f une force par unité de surface provenant de conditions aux limites mécaniques appliquées.

III- 3.2 Expressions des matrices élémentaires

La méthode des éléments finis, décrite au premier chapitre, peut alors être appliquée au cas de la plaque piézoélectrique. On définit respectivement par:

$$w = [N^e].\underset{\sim}{W}^e \qquad \underset{\sim}{\kappa} = [B^e].\underset{\sim}{W}^e \tag{III.24}$$

la flèche et le vecteur des déformations en un point d'un élément e, où $\underset{\sim}{W}^e$ est le vecteur formé par les valeurs nodales de la flèche aux différents noeuds de l'élément, $[N^e]$ est la matrice des fonctions de forme décrites en annexe 3 et $[B^e]$ est donnée par:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2[N^e]}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2[N^e]}{\partial y^2} \\ -2.\dfrac{\partial^2[N^e]}{\partial x\,\partial y} \end{bmatrix} \tag{III.25}$$

La fonctionnelle L de la relation (III.23) peut alors se décomposer en une somme sur tous les éléments de maillage [7]:

$$L = \sum_e \left\{ \frac{1}{2}.\iint_{S_e} \underset{\sim}{W}^{eT}.[B^e]^T[D][B^e].\underset{\sim}{W}^e.dS_e - \frac{1}{2}.\rho\omega^2.\iiint_{V_e} \underset{\sim}{W}^{eT}.[N^e]^T[N^e].\underset{\sim}{W}^e.dV_e - \iint_{S_e} f.[N^e].\underset{\sim}{W}^e.dS_e \right\} \tag{III.26}$$

soit:

$$L = \sum_e \left\{ \frac{1}{2}.\underset{\sim}{W}^{eT}.[K^e].\underset{\sim}{W}^e - \frac{1}{2}.\omega^2.\underset{\sim}{W}^{eT}.[M^e].\underset{\sim}{W}^e - \underset{\sim}{W}^{eT}.\underset{\sim}{F}^e \right\} \tag{III.27}$$

où:

$$[K^e] = \iint_{S_e} [B^e]^T[D][B^e].dS_e \tag{III.28}$$

$$[M^e] = \rho.\iiint_{V_e} [N^e]^T[N^e].dV_e \tag{III.29}$$

$$\underset{\sim}{F}^e = \iint_{S_e} [N^e]^T f . dS_e \qquad (\text{III}.30)$$

$[K^e]$ est la matrice élémentaire de rigidité. $[M^e]$ est la matrice élémentaire de masse cohérente et $\underset{\sim}{F}^e$ le vecteur élémentaire des forces appliquées. Définissant alors par $\underset{\sim}{W}$ le vecteur des valeurs nodales de w sur tout le domaine, l'expression (III.27) peut se réarranger sous la forme:

$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2} . W_i . \left(K_{i,j} - \omega^2 M_{i,j}\right) . W_j - \sum_i W_i . F_i \qquad (\text{III}.31)$$

Dans cette équation, i et j décrivent tous les noeuds du domaine et on a posé:

$$K_{i,j} = \sum_{e(i,j)} [K^e]_{i,j}$$

$$M_{i,j} = \sum_{e(i,j)} [M^e]_{i,j} \qquad (\text{III}.32)$$

$$F_i = \sum_{e(i)} F_i^e$$

où e(i,j) représente un élément e contenant les noeuds i,j et e(i) un élément contenant le noeud i. Cette opération de réarrangement, donnée par les relations (III.32), constitue l'assemblage, comme indiqué au paragraphe I-1.4.2. L'application du principe variationnel conduit alors à minimiser L par rapport aux valeurs nodales de W:

$$\frac{\partial L}{\partial W_i} = 0 \quad , \quad \forall_i \qquad (\text{III}.33)$$

soit:

$$\sum_i \left[K_{i,j} - \omega^2 M_{i,j}\right] . W_j - F_i = 0 \qquad (\text{III}.34)$$

Cette équation peut se réécrire sous la forme matricielle:

$$\left[[K] - \omega^2 [M]\right] . \underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{F} \qquad (\text{III}.35)$$

La résolution de ce système correspond au cas purement élastique du système (I.51). Elle peut être conduite en analyse statique ($\underset{\sim}{F}$ est une force statique appliquée à la structure), en analyse modale pour une structure mécaniquement libre ($\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0}$) ou en analyse harmonique ($\underset{\sim}{F}$ est une force dépendant sinusoïdalement du temps à la fréquence ω) et fournit, dans tous les cas, le champ de déplacement de la structure.

III- 4 ETUDE D'UN EXEMPLE TEST

Les fréquences propres d'un disque métallique sollicité en flexion peuvent se calculer analytiquement par l'utilisation d'une formule empirique proposée par **R.D. BLEVINS** [39] et **A.W. LEISSA** [40]:

$$f_j = \frac{\lambda_j^2}{2\pi R^2}\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \qquad (\text{III}.36)$$

Dans cette expression, l'indice j correspond au nombre de cercles nodaux, λ_j est un paramètre dimensionnel dépendant de j, R et h sont le rayon et l'épaisseur du disque, E le module d'**YOUNG**, ν le coefficient de **POISSON** et ρ la masse volumique du matériau constitutif du disque. En définissant par:

$$E = \frac{1}{S_{33}^E} \qquad \nu = -\frac{S_{12}^E}{S_{33}^E} \qquad (\text{III}.37)$$

le module d'**YOUNG** et le coefficient de **POISSON** équivalents pour une plaque piézoélectrique mince polarisée suivant l'axe 3, cette formule peut être utilisée pour déterminer les fréquences propres des modes de flexion des plaques piézoélectriques. Pour un disque de céramique du type P762 (variété Quartz et Silice) de 10cm de rayon et de 0.5cm d'épaisseur, les différents paramètres sont:

$$E = 0.629\ 10^{11}\ \text{Pa}$$

$$\nu = 0.359$$

$$\rho = 7500\ \text{kg/m}^3$$

Le tableau III-1 présente, pour les trois premiers modes, les résultats obtenus soit analytiquement, soit par une modélisation à l'aide des éléments plaques développés . Ce test ne permet pas de valider

j	calcul	modélisation	écart en %
1	648	697	7
2	2749	2838	3
3	6260	6167	1

Tableau III-1: fréquences de résonance en Hz

complètement l'élément plaque développé car, dans une plaque piézoélectrique, plusieurs coefficients de **POISSON** et plusieurs modules d'**YOUNG** peuvent être définis et chacun de ces paramètres apporte une contribution à la valeur des fréquences obtenues. Des tests plus approfondis n'ont pas été conduits, par absence de résultats expérimentaux servant de comparaison.

III- 5 CONCLUSION

La formulation des plaques piézoélectriques développée dans ce chapitre a permis, bien que n'ayant pas d'application directe, l'écriture de deux éléments plaques piézoélectriques à six et huit noeuds. Ces éléments peuvent fournir les modes propres de flexion des plaques piézoélectriques. Des analyses modales de plaques piézoélectriques sollicitées en flexion ont ainsi pu être effectuées et les résultats obtenus ont autorisé une validation partielle de la formulation. Cette formulation est reprise au chapitre suivant et appliquée à l'étude de structures composites.

CHAPITRE IV

ANALYSE DES TRILAMES PIEZOELECTRIQUES

Ce chapitre a pour objet le développement d'une formulation adaptée à l'étude des trilames piézoélectriques, en exploitant l'étude des plaques minces décrite dans le chapitre précedent. Les trilames sont des structures composites qui servent à la réalisation d'hydrophones. Ils sont un élément essentiel pour la conception de capteurs. Après avoir établi le formalisme, nous présentons une comparaison des résultats numériques à des résultats expérimentaux obtenus notamment par interférométrie, comparaison qui valide la méthode et définit ses limites d'application.

IV- 1 DESCRIPTION

Un trilame piézoélectrique est une structure **composite** formée de deux plaques fines de céramique piézoélectrique, généralement circulaires, collées de part et d'autre d'une âme métallique, fine également, de même forme que les plaques piézoélectriques et de dimensions latérales souvent supérieures (figures IV-1 et IV-2). Cette âme métallique est encastrée à sa périphérie dans un support. Les faces des céramiques portent des électrodes et les polarisations sont normales aux faces, de même sens (figure IV-3a) ou de sens opposés (figure IV-3b) suivant le mode de connexion électrique (parallèle ou série). Soumis à une différence de pression ΔP entre ses deux faces, le trilame subit une déformation de flexion (figure IV-4), la surface neutre étant la surface médiane de l'âme métallique. Le couplage électrique apparaît alors via les termes piézoélectriques du type "31".

Le trilame piézoélectrique est l'élément essentiel de nombreux hydrophones auxquels il confère une directivité intrinsèque, même en basse fréquence (i.e lorsque la longueur d'onde est grande par rapport aux dimensions de l'hydrophone). Dans un hydrophone de type "dipôle" (figure IV-5), le trilame, dont le diamètre est de quelques centimètres, est monté dans un flasque métallique annulaire (figure IV-6), l'ensemble étant enrobé de polyuréthane. La directivité est alors décrite par une fonction cosinus, les maxima étant sur l'axe de symétrie. Dans un hydrophone de type "cardioïde" [41-42], le trilame ferme une cavité cylindrique remplie d'huile (figures IV-7 et IV-8). A l'autre extrémité de la cavité, l'huile interne est mise en contact avec le fluide externe grâce à une fente mince, quasi annulaire. L'ensemble de la cavité et de la fente constitue un réseau déphaseur qui, s'il est juducieusement ajusté, donne à l'hydrophone une directivité cardioïde présentant son maximum sur l'axe de symétrie, côté trilame. Dans d'autres structures, le trilame peut être également monté devant une cavité cylindrique remplie d'air, ce qui augmente la sollicitation de pression ΔP mais supprime la compensation hydrostatique.

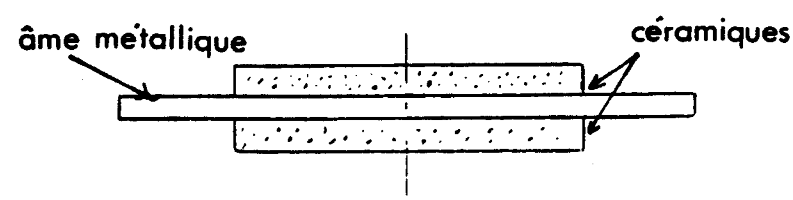


figure IV-1: schéma descriptif d'un trilame piézoélectrique

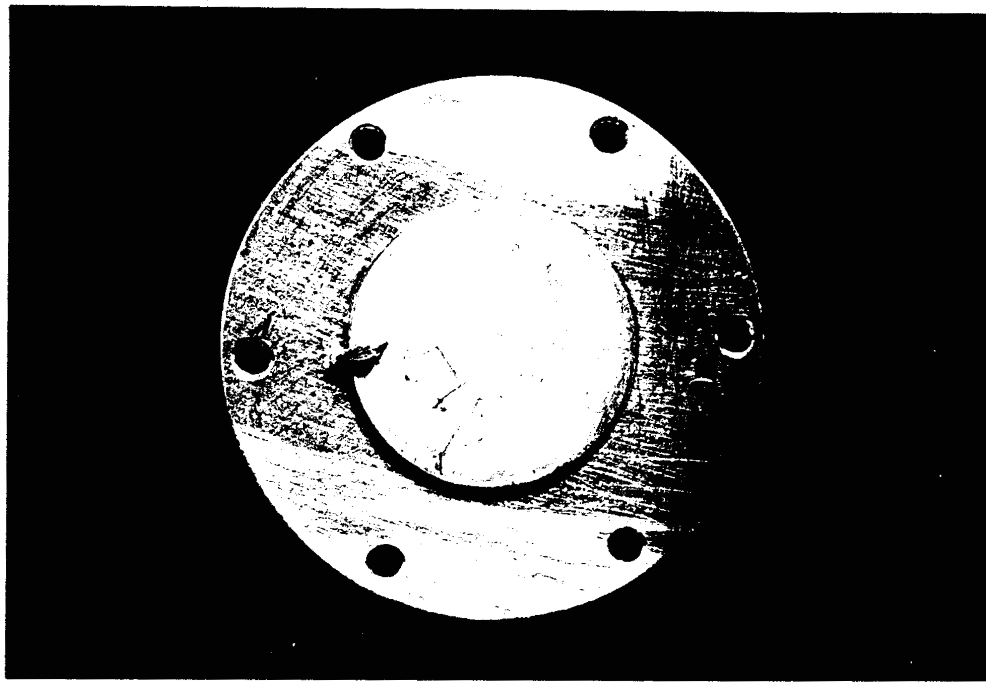
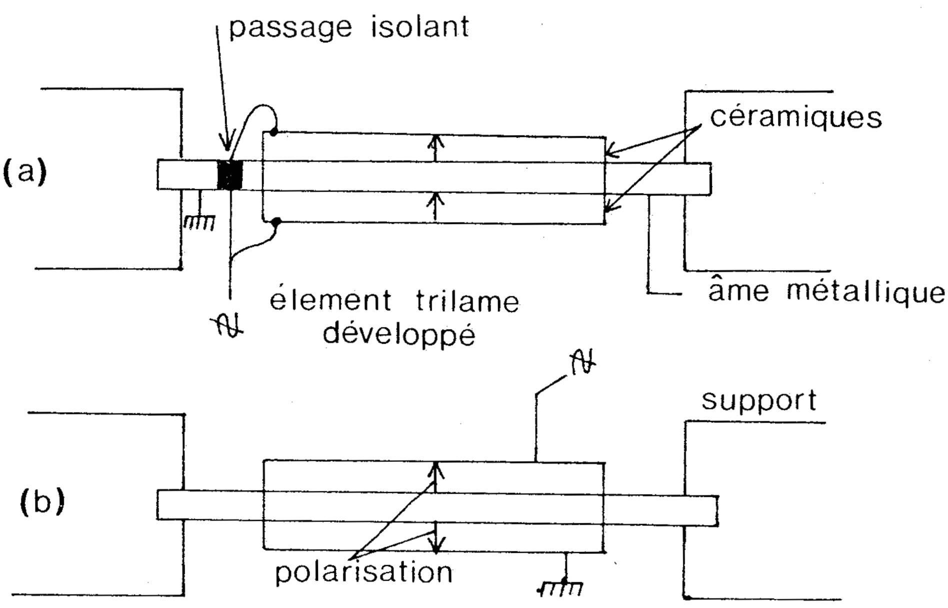


figure IV-2: présentation d'un trilame piézoélectrique



figures IV-3: schéma de principe d'un trilame piézoélectrique avec montage parallèle (a) ou série (b) des plaques actives

BU LILLE

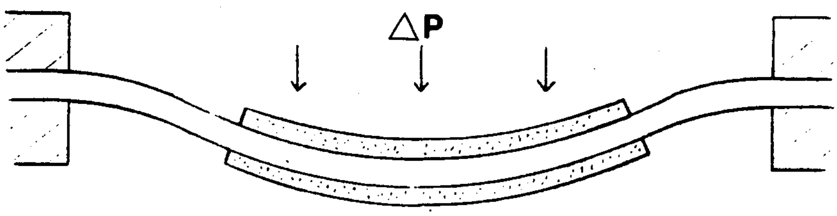


figure IV-4: flexion d'un trilame piézoélectrique

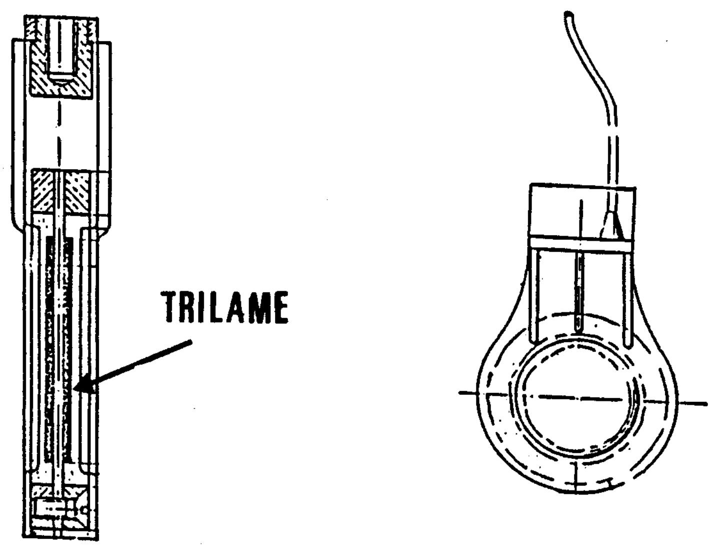
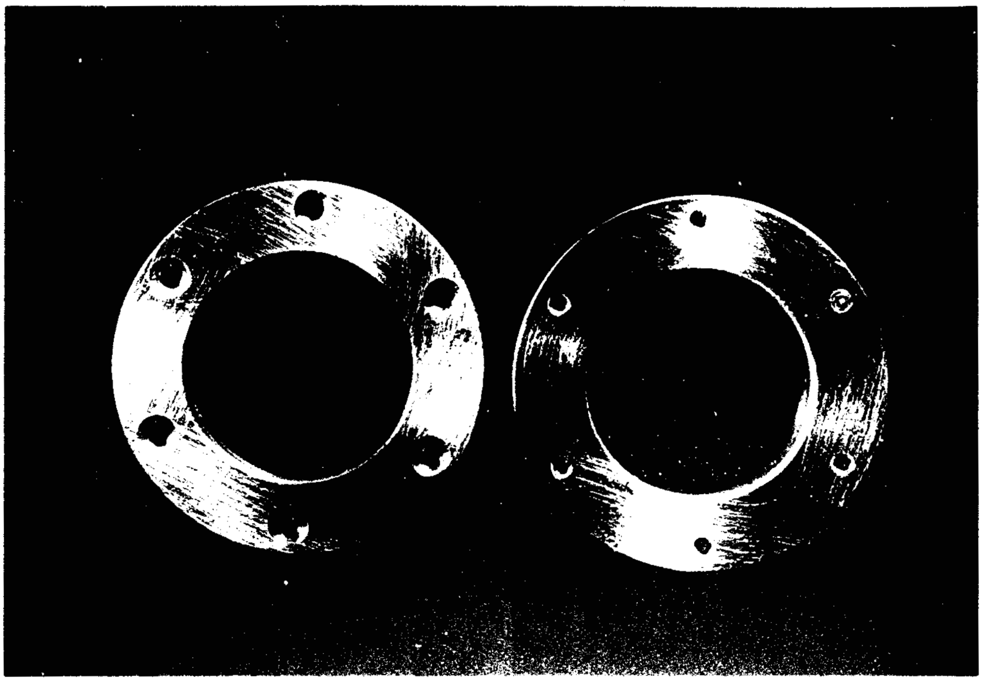
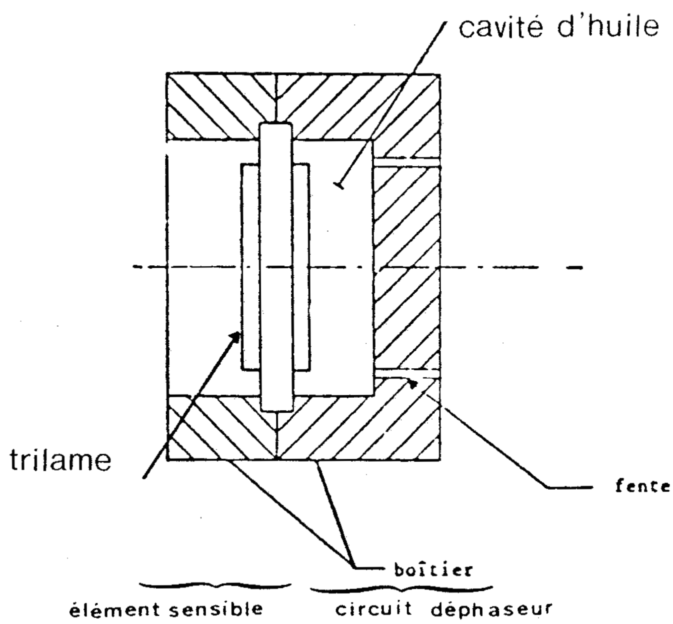


figure IV-5: schéma descriptif d'un hydrophone de type dipôle



<u>figure IV-6</u>: présentation des flasques métalliques



<u>figure IV-7</u>: schéma descriptif d'un hydrophone de type cardioide

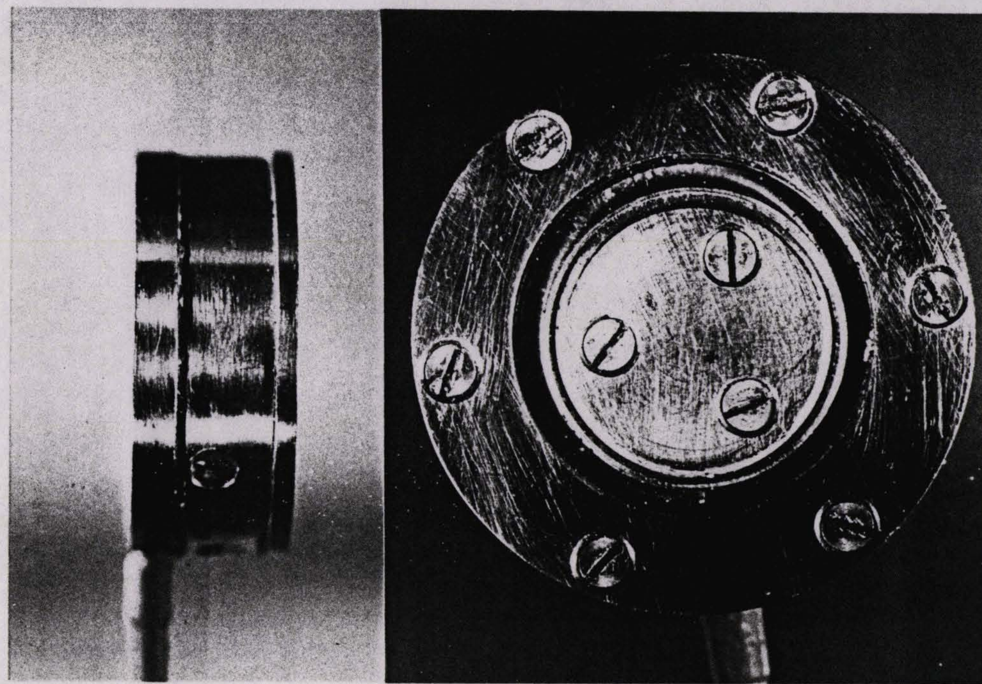


figure IV-8a: présentation d'un hydrophone cardioide monté

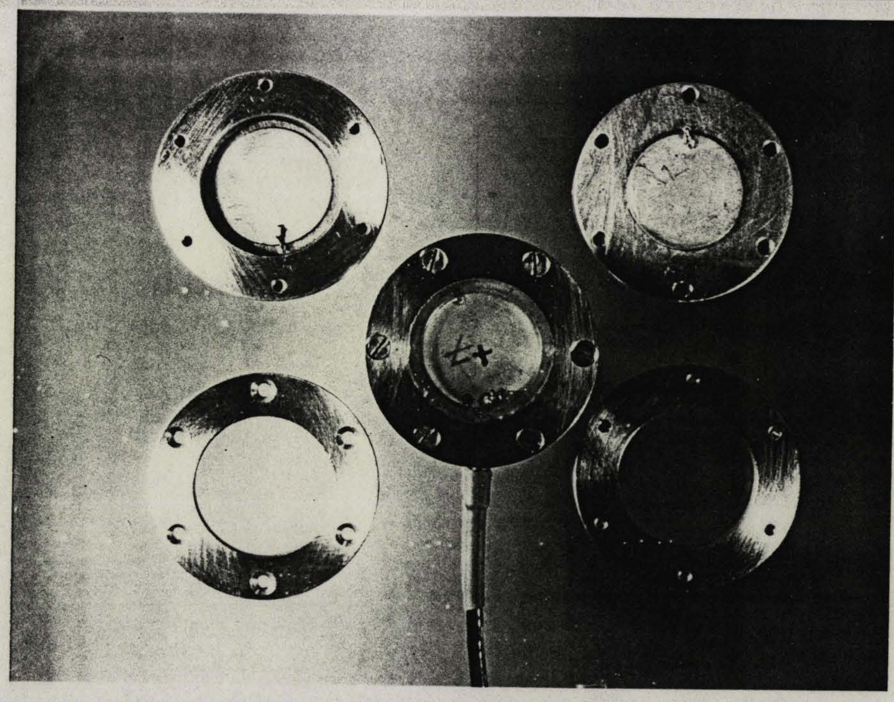


figure IV-8b: présentation éclatée d'un hydrophone cardioide

IV- 2 FORMULATION DU PROBLEME DU TRILAME PIEZOELECTRIQUE

IV- 2.1 Hypothèses et équations

Le trilame piézoélectrique à étudier est formé de deux couches de **céramique piézoélectrique** entre lesquelles est intercalée une couche de matériau métallique. Les épaisseurs des couches piézoélectriques sont identiques et indépendantes de l'épaisseur de la couche métallique. Les autres dimensions latérales sont prises identiques pour les trois couches de l'élément (figure IV-9). Cette dernière restriction est sans importance

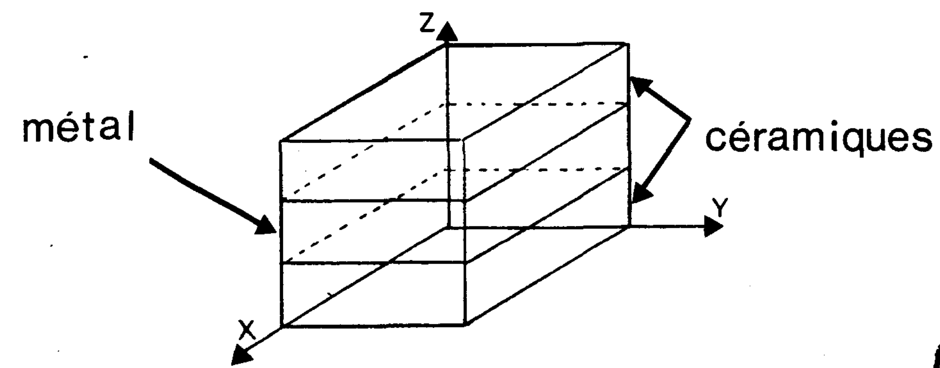


figure IV-9: schéma d'un trilame piézoélectrique

pratique puisque la structure réelle, pour laquelle l'âme métallique a des dimensions latérales plus grandes que celles des céramiques, pourra être décrite en reliant des éléments trilames et des éléments de plaques élastiques. L'élément trilame est conçu comme un élément unique **composite**, intégrant dans sa formulation les paramètres physiques des trois couches qui le constituent. Les faces supérieure et inférieure de chaque couche de céramique sont métallisées et constituent les électrodes, connectées électriquement comme indiqué sur la figure IV-10. Le vecteur de

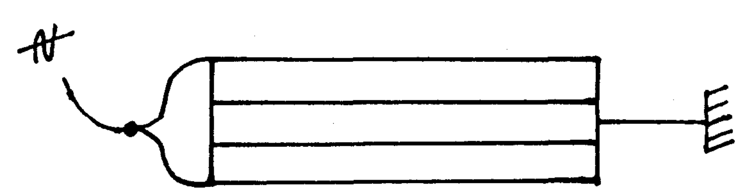


figure IV-10: schéma électrique du trilame polarisation est dirigé suivant l'axe Oz, dans le même sens pour les deux céramiques. En considérant que le rapport de la plus petite des dimensions latérales à l'épaisseur totale est supérieur à 20, les hypothèses de plaque mince peuvent être utilisées. Toutefois, ceci constitue une approximation de moins bonne qualité que pour les plaques homogènes car les effets de cisaillement aux interfaces entre couches et les rotations de la normale dans les plans xOz et yOz sont négligés. Compte tenu de ces hypothèses, et avec les notations du chapitre précedent, les équations du trilame sont:

- *dans les domaines piézoélectriques:*

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^p \\ \sigma_2^p \\ \sigma_6^p \end{bmatrix} = [\alpha].\begin{bmatrix} s_1^p \\ s_2^p \\ s_6^p \end{bmatrix} - [\beta].D_3 \qquad (\text{IV}.1)$$

$$E_3 = \frac{1}{\varepsilon_{33}^{\sigma}}.\left(D_3 - d_{31}.\sigma_1^p - d_{31}.\sigma_2^p \right) \qquad (\text{IV}.2)$$

- *dans le domaine mécanique:*

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^m \\ \sigma_2^m \\ \sigma_6^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{1-\nu^2} & \dfrac{E.\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \dfrac{E.\nu}{1-\nu^2} & \dfrac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_1^m \\ s_2^m \\ s_6^m \end{bmatrix} \qquad (\text{IV}.3)$$

où E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du métal. Les exposants p et m désignent respectivement les domaines piézoélectriques et mécanique. $[\alpha]$ et $[\beta]$ ont les mêmes expressions que celles définies dans les relations (III.8) et (III.9).

IV- 2.2 Définitions des moments de flexion et de torsion

En admettant pour le trilame les mêmes approximations que pour les plaques piézoélectriques, les contraintes et déformations varient linéairement dans chaque couche. En supposant alors un collage parfait entre couches, la déformation varie de façon continue d'une couche à l'autre. La contrainte est, quant à elle, discontinue aux interfaces entre couches et varie différemment dans les différents matériaux (figure IV-11). Les moments de flexion et de torsion s'obtiennent donc en intégrant

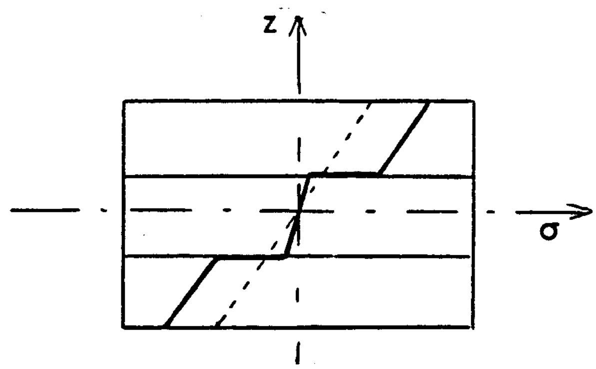


figure IV-11: variation de la contrainte dans le trilame

séparément, dans chaque couche, la variation des contraintes correspondantes [23]:

$$M_1 = \int_{-h_2}^{-h_1} \sigma_1^p.zdz + \int_{-h_1}^{h_1} \sigma_1^m.zdz + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_1^p.zdz \qquad (\text{IV}.4)$$

$$M_2 = \int_{-h_2}^{-h_1} \sigma_2^p.zdz + \int_{-h_1}^{h_1} \sigma_2^m.zdz + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_2^p.zdz \qquad (\text{IV}.5)$$

$$M_6 = \int_{-h_2}^{-h_1} \sigma_6^p.zdz + \int_{-h_1}^{h_1} \sigma_6^m.zdz + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_6^p.zdz \qquad (\text{IV}.6)$$

IV- 2.3 Expressions des inductions électriques

Soient respectivement D_3^+ et D_3^- les inductions électriques dans les couches piézoélectriques supérieure et inférieure du trilame. La différence de potentiel Φ aux bornes de la céramique supérieure est donnée par:

$$\Phi = - \int_{h_1}^{h_2} E_3.dz \qquad (\text{IV}.7)$$

Compte tenu de la relation (IV.2):

$$\Phi = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\varepsilon_{33}^{\sigma}}.\left(D_3^+ - d_{31}.\sigma_1^p - d_{31}.\sigma_2^p \right).dz \qquad (\text{IV}.7)$$

En remplaçant σ_1^p et σ_2^p par leurs expressions données dans les relations (IV.1) et remarquant que $\beta_1 = \beta_2$, cette équation (IV.7) devient:

$$\Phi = -\int_{h_1}^{h_2} \left\{ \left(\frac{1 + 2.\beta_1 d_{31}}{\varepsilon_{33}^{\sigma}} \right).D_3^{+} - \beta_1.s_1 - \beta_1.s_2 \right\}.dz \qquad (\text{IV}.8)$$

$$\Phi = -\left(\frac{1 + 2.\beta_1 d_{31}}{\varepsilon_{33}^{\sigma}} \right).(h_2 - h_1).D_3^{+} + \frac{\left(h_2^2 - h_1^2\right)}{2}.\left(\frac{\beta_1}{r_1} + \frac{\beta_1}{r_2} \right) \qquad (\text{IV}.9)$$

Φ étant connu, l'équation (IV.9) permet de calculer D_3^{+}:

$$D_3^{+} = \frac{\varepsilon_{33}^{\sigma}}{1 + 2.\beta_1 d_{31}} \left\{ \left(\frac{h_2 + h_1}{2} \right).\left(\frac{\beta_1}{r_1} + \frac{\beta_1}{r_2} \right) - \frac{\Phi}{h_2 - h_1} \right\} \qquad (\text{IV}.10)$$

De la même manière, sur la céramique inférieure, en écrivant:

$$-\Phi = -\int_{-h_2}^{-h_1} -E_3.dz = \int_{-h_2}^{-h_1} \frac{1}{\varepsilon_{33}^{\sigma}}.\left(D_3^{-} - d_{31}.\sigma_1^p - d_{31}.\sigma_2^p \right).dz \qquad (\text{IV}.11)$$

on trouve:

$$D_3^{-} = -D_3^{+} \qquad (\text{IV}.12)$$

IV- 3 MATRICES CARACTERISTIQUES DU TRILAME

IV- 3.1 Equations d'état du trilame

En utilisant les relations (IV.1) et (IV.3), l'expression du moment de flexion de la relation (IV.4) peut se développer sous la forme:

$$M_1 = \alpha_{11}.\int_{-h_2}^{-h_1} \frac{z^2}{r_1}.dz + \alpha_{12}.\int_{-h_2}^{-h_1} \frac{z^2}{r_2}.dz - \beta_1.D_3^{-}.\int_{-h_2}^{-h_1} zdz$$

$$+ \frac{E}{1 - \nu^2}.\int_{-h_1}^{h_1} \frac{z^2}{r_1}.dz + \frac{E.\nu}{1 - \nu^2}.\int_{-h_1}^{h_1} \frac{z^2}{r_2}.dz$$

$$+ \alpha_{11}.\int_{h_1}^{h_2} \frac{z^2}{r_1}.dz + \alpha_{12}.\int_{h_1}^{h_2} \frac{z^2}{r_2}.dz - \beta_1.D_3^{+}.\int_{h_1}^{h_2} zdz \qquad (\text{IV}.13)$$

Après intégration, cette équation devient:

$$M_1 = \frac{2}{3}.\alpha_{11}.\frac{\left(h_2^3 - h_1^3\right)}{r_1} + \frac{2}{3}.\alpha_{12}.\frac{\left(h_2^3 - h_1^3\right)}{r_2}$$

$$+ \frac{2}{3}.\frac{E}{1-\nu^2}.\frac{h_1^3}{r_1} + \frac{2}{3}.\frac{E.\nu}{1-\nu^2}.\frac{h_1^3}{r_2}$$

$$- \frac{1}{2}.\beta_1.\left(D_3^+ - D_3^-\right).\left(h_2^2-h_1^2\right) \qquad (\text{IV}.14)$$

De la même façon, en développant les expressions (IV.5) et (IV.6) des autres moments, on obtient:

$$M_2 = \frac{2}{3}.\alpha_{21}.\frac{\left(h_2^3 - h_1^3\right)}{r_1} + \frac{2}{3}.\alpha_{22}.\frac{\left(h_2^3 - h_1^3\right)}{r_2}$$

$$+ \frac{2}{3}.\frac{E.\nu}{1-\nu^2}.\frac{h_1^3}{r_1} + \frac{2}{3}.\frac{E}{1-\nu^2}.\frac{h_1^3}{r_2}$$

$$- \frac{1}{2}.\beta_2.\left(D_3^+ - D_3^-\right).\left(h_2^2-h_1^2\right) \qquad (\text{IV}.15)$$

et:

$$M_6 = \frac{2}{3}.\alpha_{33}.\frac{\left(h_2^3 - h_1^3\right)}{r_6} + \frac{E}{2(1+\nu)}.\frac{h_1^3}{r_6} \qquad (\text{IV}.16)$$

Dès lors, définissant par:

$$D_3 = D_3^+ - D_3^- \qquad (\text{IV}.17)$$

l'induction électrique globale du trilame, les équations (IV.14) à (IV.17) peuvent se regrouper sous la forme:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{M} = [D_t].\underset{\sim}{\kappa} + \underset{\sim}{e}.\Phi \\ D_3 = \underset{\sim}{e}^T.\underset{\sim}{\kappa} + \gamma.\Phi \end{cases} \qquad (\text{IV}.18)$$

Ces relations constituent les équations d'état du trilame.

IV- 3.2 Matrice de rigidité

La matrice $[D_t]$ de la relation (IV.18) est définie par:

$$[D_t] = \frac{2}{3}\cdot\begin{bmatrix} \alpha_{11}\cdot\left(h_2^3-h_1^3\right)+\dfrac{Eh_1^3}{1-\nu^2}-\chi & \alpha_{12}\cdot\left(h_2^3-h_1^3\right)+\dfrac{E\nu h_1^3}{1-\nu^2}-\chi & 0 \\ \alpha_{21}\cdot\left(h_2^3-h_1^3\right)+\dfrac{E\nu h_1^3}{1-\nu^2}-\chi & \alpha_{22}\cdot\left(h_2^3-h_1^3\right)+\dfrac{Eh_1^3}{1-\nu^2}-\chi & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}\cdot\left(h_2^3-h_1^3\right)+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{Eh_1^3}{1+\nu} \end{bmatrix} \quad (\text{IV}.19)$$

C'est la matrice de rigidité du trilame piézoélectrique. Le coefficient χ y est donné par:

$$\chi = \frac{3.\beta_1^2.\varepsilon_{33}^{\sigma}}{1+2.\beta_1 d_{31}}\cdot\frac{\left(h_2^2-h_1^2\right)(h_2+h_1)}{4} \quad (\text{IV}.20)$$

IV- 3.3 Vecteur piézoélectrique

Le vecteur $\underset{\sim}{e}$ de la relation (IV.18) est définie par:

$$\underset{\sim}{e} = \frac{\varepsilon_{33}^{\sigma}\ (h_1+h_2)}{1+2.\beta_1 d_{31}}\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_1\\ 0\end{bmatrix} \quad (\text{IV}.21)$$

C'est le vecteur piézoélectrique du trilame piézoélectrique.

IV- 3.4 Coefficient diélectrique

Le coefficient Υ de la relation (IV.18) est défini par:

$$\Upsilon = -\frac{\varepsilon_{33}^{\sigma}}{1+2.\beta_1 d_{31}}\cdot\frac{2}{h_2-h_1} \quad (\text{IV}.22)$$

Il caractérise la permittivité diélectrique du trilame piézoélectrique.

IV- 4 APPLICATION DU PRINCIPE VARIATIONNEL

En adoptant les mêmes définitions et notations que celles de (III.24), les équations d'état du trilame s'écrivent pour l'élément e:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{M} = [D_t][B^e].\underset{\sim}{W}^e + \underset{\sim}{e}.\Phi \\ D_3 = \underset{\sim}{e}^T\ [B^e].\underset{\sim}{W}^e + \gamma.\Phi \end{cases} \qquad (\text{IV}.23)$$

Ce système d'équations est analogue au système d'équations associé à un matériau piézoélectrique classique, les matrices des constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques étant simplement remplacées par des matrices dont les termes prennent en compte à la fois les caractéristiques physiques des différents matériaux du trilame et les différentes épaisseurs des couches. Dès lors, la formulation variationnelle du trilame est la même que celle des éléments piézoélectriques ordinaires.

IV- 4.1 Formulation variationnelle

La fonctionnelle associée à ces équations est:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}.\iint_S \underset{\sim}{\kappa}^T\underset{\sim}{M}dS - \frac{1}{2}.\iiint_{V_p} E_3D_3dV \\ -\iint_S fwdS - \frac{1}{2}.\iiint_V \rho\omega^2w^2dV + Q.\Phi \end{aligned} \qquad (\text{IV}.24)$$

où S et V représentent la surface et le volume du trilame. V_p est le volume de la couche piézoélectrique supérieure, la contribution de la couche inférieure étant automatiquement incorporée compte tenu de la définition de D_3. ρ est la masse volumique équivalente donnée par:

$$\rho = \frac{\rho_pV_p + \rho_mV_m}{V} \qquad (\text{IV}.25)$$

où ρ_p et ρ_m sont respectivement les masses volumiques de la céramique et du métal et V_m le volume de la partie mécanique. ω est une pulsation, Q la charge des électrodes. En développant l'expression de L, on obtient:

$$L = \frac{1}{2}.\iint_S \underset{\sim}{\kappa}^T\underset{\sim}{M}dS - \frac{1}{2}.\int_{h_1}^{h_2}E_3dz.\iint_S D_3dS - \frac{1}{2}.\rho\omega^2.\iiint_V w^2dV - \iint_S fwdS + Q\Phi$$

$$= \frac{1}{2}.\iint_S \underset{\sim}{\kappa}^T\underset{\sim}{M}dS + \frac{1}{2}.\Phi.\iint_S D_3dS - \frac{1}{2}.\rho\omega^2.\iiint_V w^2dV - \iint_S fwdS + Q\Phi \qquad (\text{IV}.27)$$

IV- 4.2 Matrices élémentaires de rigidité

Comme dans les chapitres précédents, la fonctionnelle L est alors décomposée sur tous les éléments du maillage:

$$L = \sum_e \left\{ \frac{1}{2}.\iint_{S_e} \underset{\sim}{W}^{eT}[B^e]^T[D_t][B^e]\underset{\sim}{W}^e dS_e + \frac{1}{2}.\iint_{S_e} \underset{\sim}{W}^{eT}[B^e]^T \underset{\sim}{e}\Phi dS_e \right.$$

$$+ \frac{1}{2}.\Phi.\iint_{S_e} \underset{\sim}{e}^T[B^e]\underset{\sim}{W}^e dS_e - \frac{1}{2}.\rho\omega^2.\iiint_{V_e} \underset{\sim}{W}^{eT}[N^e]^T[N^e]\underset{\sim}{W}^e dV_e$$

$$\left. + \frac{1}{2}.\Phi.\iint_{S_e} \gamma\Phi dS_e - \iint_{S_e} f[N^e]\underset{\sim}{W}^e dS_e \right\} + Q\Phi \qquad (\text{IV}.28)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme:

$$L = \sum_e \left\{ \frac{1}{2}.\underset{\sim}{W}^{eT}\left[K^e_{uu}\right]\underset{\sim}{W}^e + \underset{\sim}{W}^{eT}\underset{\sim}{K}^e_{u\phi}\Phi \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}.\Phi^2.K_{\phi\phi} - \frac{1}{2}.\omega^2\underset{\sim}{W}^{eT}[M^e]\underset{\sim}{W}^e - \underset{\sim}{W}^{eT}\underset{\sim}{F}^e \right\} + Q\Phi \qquad (\text{IV}.29)$$

où:

$$\left[K^e_{uu}\right] = \iint_{S_e} [B^e]^T[D_t][B^e]dS_e \qquad (\text{IV}.30)$$

$$\underset{\sim}{K}^e_{u\phi} = \iint_{S_e} [B^e]^T[e]dS_e \qquad (\text{IV}.31)$$

$$K^e_{\phi\phi} = \iint_{S_e} \gamma dS_e \qquad (\text{IV}.32)$$

$$[M^e] = \rho.\iiint_{V_e} [N^e]^T[N^e]dV_e \qquad (\text{IV}.33)$$

$$\underset{\sim}{F}^e = \iint_{S_e} [N^e]^T f dS_e \qquad (\text{IV}.34)$$

La première intégrale définit la matrice élémentaire de rigidité mécanique et la seconde, le vecteur élémentaire de rigidité piézoélectrique. La troisième est le coefficient diélectrique élémentaire. La quatrième définit la matrice élémentaire de masse cohérente et la dernière est le vecteur des forces nodales appliquées à l'élément.

IV- 4.3 Equations à résoudre

En définissant par:

$$[K_{uu}]_{ij} = \sum_{e(i,j)} \left[K^e_{uu}\right]_{ij}$$

$$\underset{\sim}{K}_{u\Phi_i} = \sum_{e(i)} \underset{\sim}{K}^e_{u\Phi_i}$$

$$K_{\Phi\Phi} = \sum_{e} K^e_{\Phi\Phi} \qquad (\text{IV}.35)$$

$$[M]_{ij} = \sum_{e(i,j)} [M^e]_{ij}$$

$$F_i = \sum_{e(i)} F^e_i$$

les termes des matrices de rigidité mécanique, piézoélectrique et diélectrique, de la matrice de masse et du vecteur de force appliquée après assemblage, tel que décrit au paragraphe III.3.2, l'expression (IV.29) peut alors être réécrite sous la forme:

$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2}.W_i.\left([K_{uu}]_{ij} - \omega^2[M]_{ij}\right).W_j$$

$$+ \sum_{i} W_i.\underset{\sim}{K}_{u\Phi_i}.\Phi + K_{\Phi\Phi}\Phi^2 \qquad (\text{IV}.36)$$

$$- \sum_{i} W_i F_i + Q\Phi$$

où i et j décrivent tous les noeuds du maillage. Dès lors, l'application du principe variationnel conduit à minimiser L par rapport à Φ et aux valeurs nodales de $\underset{\sim}{W}$:

$$\frac{\partial L}{\partial W_i} = 0 \qquad \forall i$$

$$\qquad (\text{IV}.37)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi} = 0$$

On obtient, en développant ce système:

$$\sum_j \left([K_{uu}]_{ij} - \omega^2 [M]_{ij}\right).W_j + \underset{\sim}{K}_{u\Phi_i}\Phi = F_i \qquad (\text{IV}.38)$$

et:

$$\sum_i \underset{\sim}{K}_{u\Phi_i} W_i + K_{\Phi\Phi}\Phi = -Q \qquad (\text{IV}.39)$$

Ces deux équations peuvent se regrouper sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2[M] & \underset{\sim}{K}_{u\Phi} \\ \underset{\sim}{K}^T_{u\Phi} & K_{\Phi\Phi} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \underset{\sim}{W} \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{F} \\ -Q \end{bmatrix} \qquad (\text{IV}.40)$$

Ce système d'équations est identique à celui de (I.51). Il se résout de la même manière et avec les mêmes conditions aux limites mécaniques et électriques. En particulier, les modes de flexion étant couplés électriquement, un trilame peut donc, contrairement à la plaque piézoélectrique, présenter des résonances et antirésonances.

IV- 5 ANALYSE D'EXEMPLES TESTS

Deux éléments trilames piézoélectriques ont été développés: l'élément trilame quadrilatère à huit noeuds et l'élément trilame triangulaire à six noeuds. Ces éléments ont permis la modélisation de structures réelles présentant la symétrie de révolution à l'aide de maillages tridimensionnels. Les résultats de la simulation sont comparés d'une part aux résultats de mesure et d'autre part à des modélisations réalisées à l'aide d'éléments prenant en compte la symétrie de révolution.

IV- 5.1 Etude du trilame seul

La structure à étudier est formée d'un disque métallique en alliage d'aluminium (type AG5) d'un diamètre de 38mm sur lequel sont collés, de part et d'autre, deux disques de céramique (type X31 de Pons-Alcatel) d'un diamètre de 20mm. Les trois disques sont coaxiaux (figure IV-12). L'épaisseur de chaque disque de céramique est de 0.5mm. Suivant les cas, l'épaisseur du disque métallique est 0.5, 0.8 ou de 1.2mm. La structure

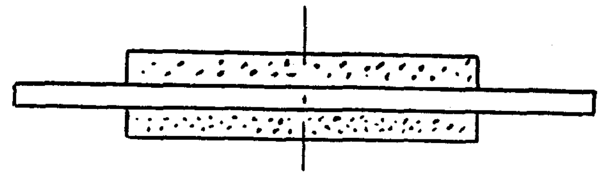


figure IV-12: structure trilame seule

complète est libre. Le maillage réalisé à l'aide des éléments trilames représente un vingt-quatrième de la structure réelle (figure IV-13). Des

figure IV-13: maillage avec des éléments trilames

conditions de symétrie sont imposées au champ de déplacement sur les faces du dièdre délimitant le secteur maillé. Le maillage réalisé à l'aide des éléments à symétrie axiale est représenté en figure IV-14. L'analyse

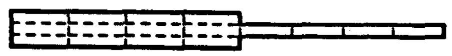


figure IV-14: maillage avec des éléments à symétrie axiale

modale de la structure est conduite en circuit fermé (résonance) et en circuit ouvert (antirésonance). Les tableaux IV-1 à IV-6 présentent les résultats obtenus pour les fréquences de résonance et d'antirésonance et les coefficients de couplage dans chaque cas. Seuls les deux premiers modes ayant la symétrie axiale permettent une comparaison et sont retenus. Ils correspondent de plus aux seules valeurs expérimentales obtenues.

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	5160	5089	5222
e=0.8mm	7657	7714	7271
e=1.2mm	10512	10345	9808

Tableau IV-1: fréquence de résonance du premier mode (en Hz)

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	5265	5209	5310
e=0.8mm	7949	8023	7480
e=1.2mm	11072	10868	10156

Tableau IV-2: fréquence d'antirésonance du premier mode (en Hz)

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	20	21	18
e=0.8mm	27	27	23
e=1.2mm	31	32	26

Tableau IV-3: coefficient de couplage du premier mode (en %)

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	20876	20719	21253
e=0.8mm	27586	27078	26596
e=1.2mm	37402	35738	34283

Tableau IV-4: fréquence de résonance du second mode (en Hz)

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	22120	21885	22261
e=0.8mm	28880	28240	27676
e=1.2mm	38593	36734	35324

Tableau IV-5: fréquence d'antirésonance du second mode (en Hz)

figure IV-15: champ de déplacement du premier mode couplé

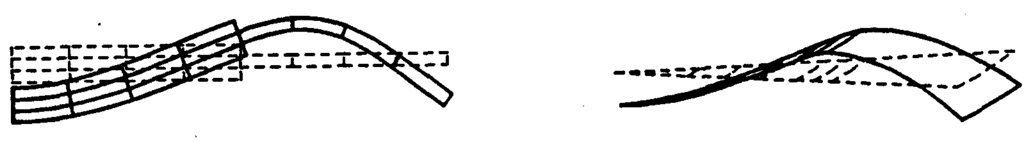


figure IV-16: champ de déplacement du second mode couplé

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	33	32	30
e=0.8mm	30	28	28
e=1.2mm	25	23	24

Tableau IV-6: coefficient de couplage du second mode (en %)

Les figures IV-15 et IV-16 représentent les champs de déplacement obtenus. Tous ces résultats montrent un bon accord entre les deux simulations et entre les simulations et la mesure. Toutefois, les résultats expérimentaux étant toujours inférieurs aux résultats de calcul, il est possible que le collage ne soit pas parfait et que la structure réelle soit donc moins rigide que celle modélisée. L'identité des champs de déplacement entre le maillage utilisant des éléments trilames et le maillage utilisant des élément à symétrie axiale constitue, elle aussi, une première validation de ces éléments trilames.

IV- 5.2 Etude du trilame dans son flasque

Dans les conditions normales d'utilisation, le trilame est toujours encastré dans un support appelé **flasque** (figure IV-17). Dans le cas traité

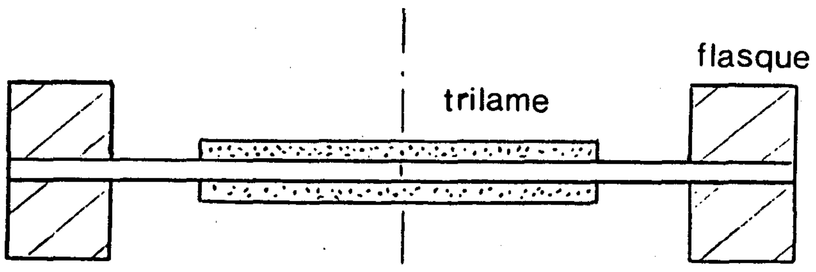


figure IV-17: structure trilame avec flasque

ici, le flasque est en laiton. Il a un diamètre intérieur de 24mm, un diamètre extérieur de 38mm et une épaisseur de 8mm. Les maillages utilisés sont donnés sur les figures IV-18 et IV-19. Le maillage avec des éléments

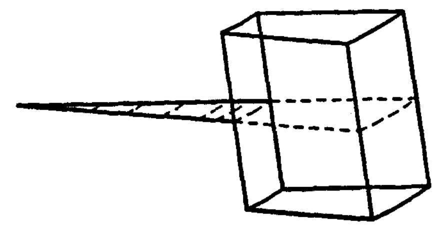


figure IV-18: maillage avec des éléments trilames et hexaèdres

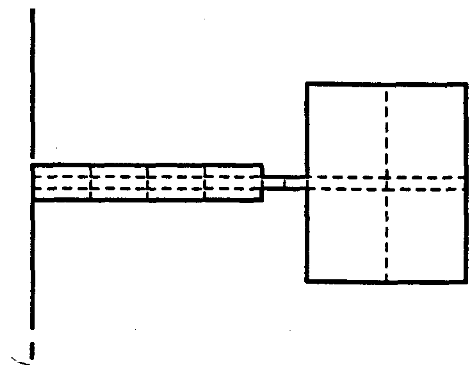


figure IV-19: maillage avec des éléments à symétrie axiale

trilames représente, comme dans l'exemple précédent, un huitième de la structure et des conditions de symétrie sont imposées au champ de déplacement sur les faces du dièdre délimitant le secteur angulaire maillé. Les fréquences de résonance et d'antirésonance et les coefficients de couplage sont donnés dans les tableaux IV-7 à IV-12. Ici également, et pour les mêmes raisons, seuls les deux premiers modes couplés sont conservés.

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	9550	10881	9775
e=0.8mm	13540	14346	13348
e=1.2mm	17221	18473	16892

Tableau IV-7: fréquence de résonance du premier mode (en Hz)

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	10253	11768	10556
e=0.8mm	14389	15269	14069
e=1.2mm	18177	19279	17613

Tableau IV-8: fréquence d'antirésonance du premier mode (en Hz)

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	36	38	38
e=0.8mm	34	34	32
e=1.2mm	32	29	28

Tableau IV-9: coefficient de couplage du premier mode (en %)

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	27078	27584	26171
e=0.8mm	27539	28601	26952
e=1.2mm	29184	30647	28904

Tableau IV-10: fréquence de résonance du second mode (en Hz)

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	27134	27639	26261
e=0.8mm	27637	28705	27042
e=1.2mm	29517	30873	29084

Tableau IV-11: fréquence d'antirésonance du second mode (en Hz)

épaisseur	trilame	symétrie axiale	mesure
e=0.5mm	6	6	8
e=0.8mm	9	9	8
e=1.2mm	15	12	11

Tableau IV-12: coefficient de couplage du second mode (en %)

Ces tableaux montrent une bonne cohérence des résultats. Les figures IV-20 à IV-23 montrent les champs de déplacement des quatre premiers modes ayant la symétrie de révolution. Le champ de déplacement absolu a été mesuré pour le premier mode par interférométrie [43], par **J.P. CHABROL** [44], à l'aide du dispositif de la figure IV-24. La comparaison des courbes représentant,

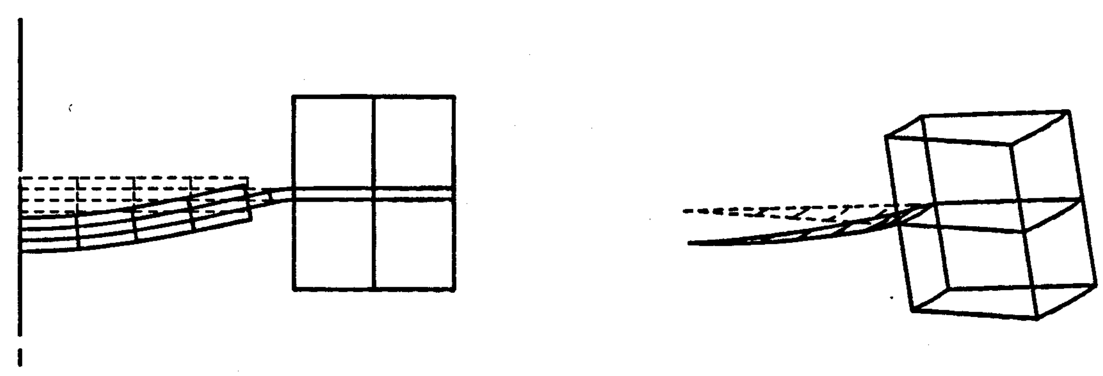


figure IV-20: champ de déplacement du premier mode couplé

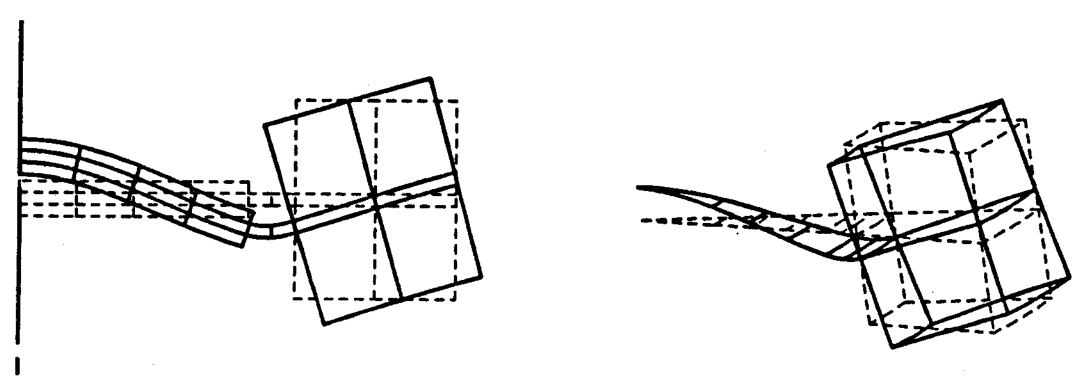


figure IV-21: champ de déplacement du second mode couplé

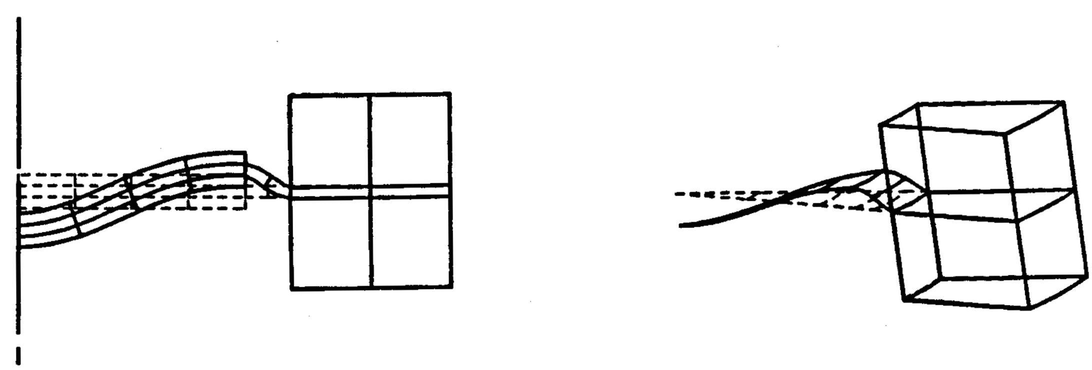


figure IV-22: champ de déplacement du troisième mode couplé

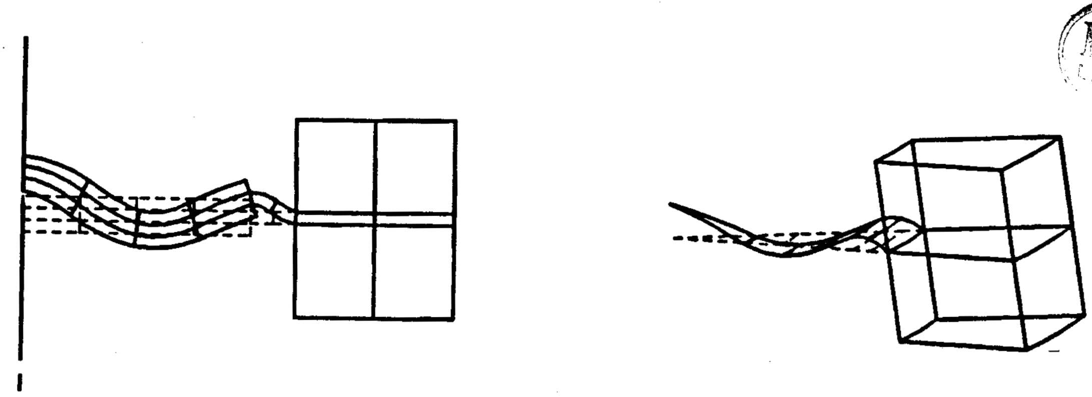


figure IV-23: champ de déplacement du quatrième mode couplé

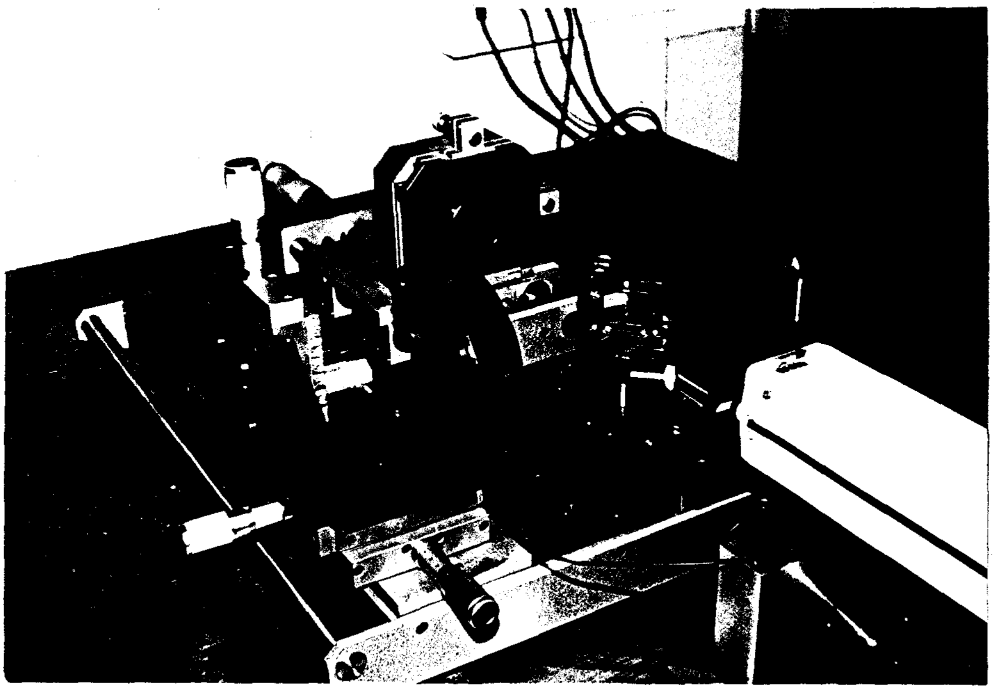


figure IV-24: présentation du banc de mesure par interférométrie

pour les trois structures et suivant un diamètre, les déplacements normaux obtenus par calcul (trait pointillé) et par interférométrie (trait continu) est proposée en figure IV-25. L'accord est excellent.

IV- 5.3 Courbes de dispersion de modes

Pour un encombrement donné de l'hydrophone et sans changer la nature des matériaux, deux paramètres importants permettent de réaliser une optimisation: il s'agit du diamètre du disque de céramique et de l'épaisseur de l'âme métallique du trilame. En faisant varier séparément ces paramètres, on peut établir des réseaux de coubes décrivant l'évolution des fréquences et des coefficients de couplage. Cette étude a été faite sur les deux premiers modes du trilame encastré. Les figures IV-26 à IV-29 présentent les résultats obtenus. La fréquence du premier mode est une fonction croissante de l'épaisseur du disque métallique et du diamètre du disque piézoélectrique. Quant au coefficient de couplage, il présente un maximum pour un diamètre du disque de céramique de 20mm, maximum plus ou moins marqué suivant l'épaisseur de l'âme métallique. L'existence de ce maximum peut être interprété par la présence sur la ligne neutre d'un point d'inflexion séparant deux zones de courbure opposées. Tant que le diamètre des céramiques est faible, la courbure de chaque céramique a un signe constant, de même que la densité de charge, et le couplage croît avec le diamètre. Par contre, si le diamètre devient trop grand, la courbure d'une céramique peut changer de signe et la densité superficielle de charge sur

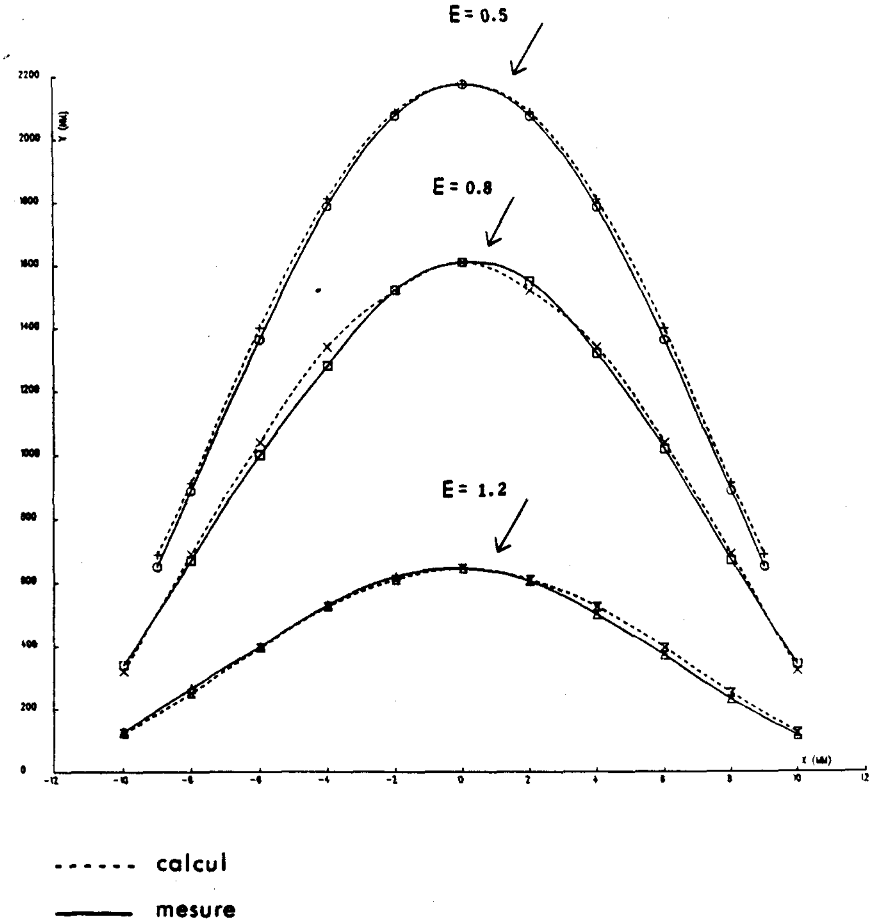


figure IV-25: comparaison entre les déplacements obtenus par interférométrie et par calcul le long d'un diamètre pour une tension d'excitation de un volt.

chaque électrode n'est plus de signe constant. Alors, le couplage décroît quand le diamètre augmente. La fréquence du second mode est à peu près constante jusqu'à un diamètre de céramique d'environ 20mm, sa variation étant à peine 5% de la fréquence centrale (27.8 kHz). Au delà de ce diamètre, la fréquence devient très sensible à l'épaisseur de l'âme métallique et croît rapidement avec elle. Ce mode, avec une fréquence de résonance constante et un faible coefficient de couplage, est un "mode de flasque". La perturbation du trilame sur ce mode ne devient notable qu'au delà d'un certain diamètre. Sur des modélisations faites en imposant une condition d'encastrement parfaite sur la périphérie de l'âme métallique du

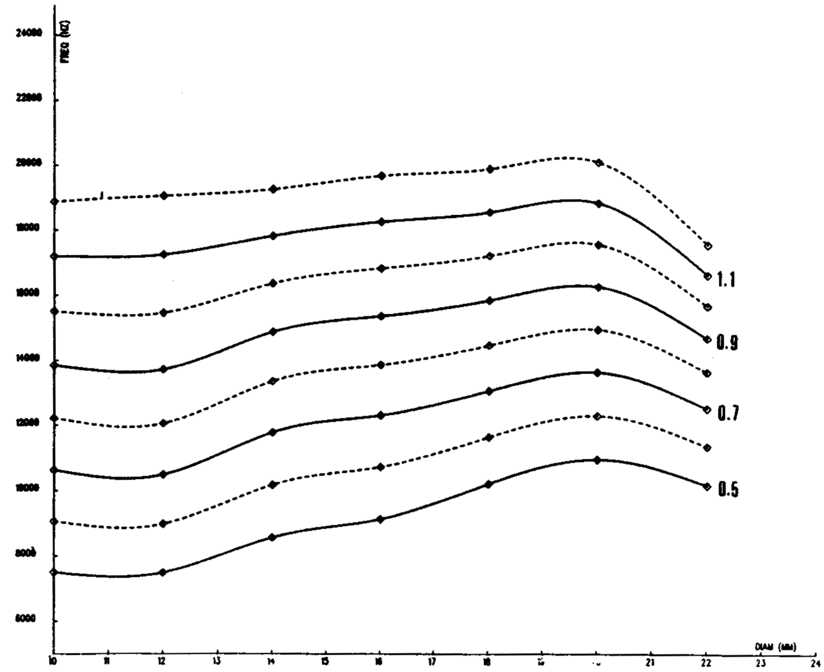


figure IV-26: courbe de variation de la fréquence du premier mode couplé

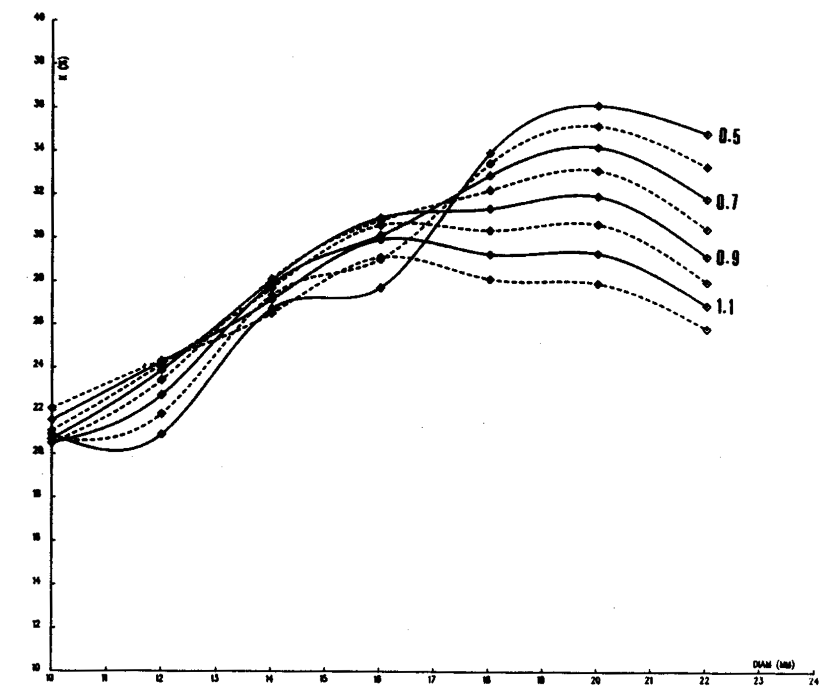
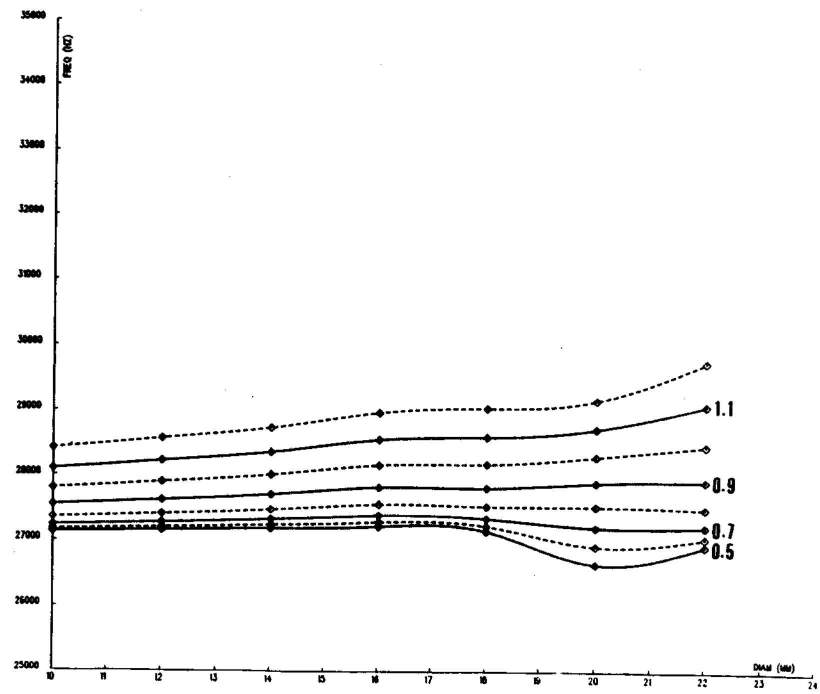
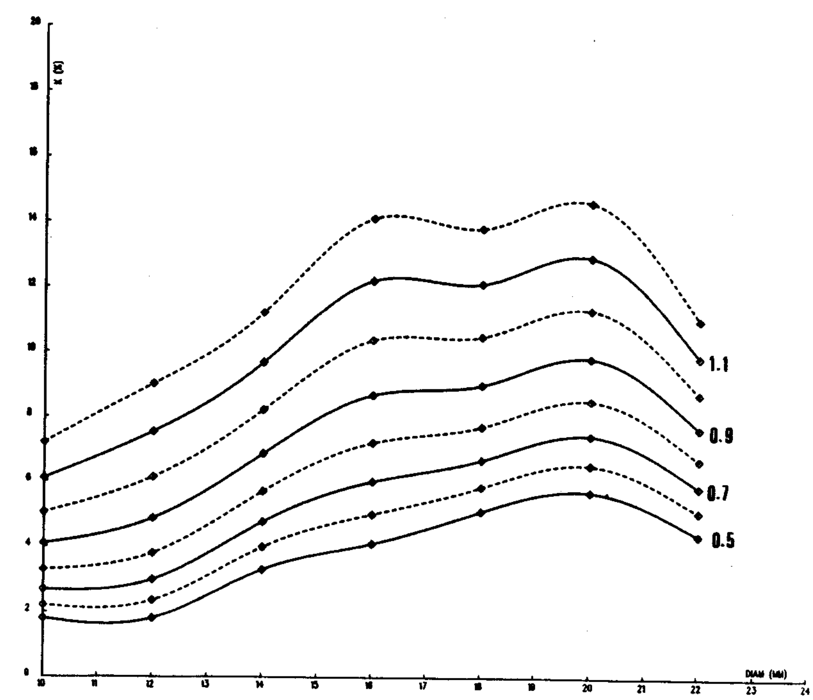


figure IV-27: courbe de variation du coefficient de couplage du premier mode couplé



<u>figure IV-28</u>: courbe de variation de la fréquence du second mode couplé



<u>figure IV-29</u>: courbe de variation du coefficient de couplage du second mode couplé

trilame (sans maillage du flasque), ce mode disparaît, justifiant ainsi sa dénomination. Par ailleurs, il faut noter que le coefficient de couplage de ce mode est faiblement croissant. Les faibles oscillations présentes sur les courbes sont partiellement liées à l'algorithme d'interpolation utilisé pour le tracé.

IV-5.4 Limites de validité du modèle trilame

Pour déterminer la limite de validité du modèle trilame, des études comparatives ont été menées sur des modes de rang supérieur à deux. La modélisation d'un trilame réalisée avec un maillage utilisant des éléments trilames est comparée à une modélisation utilisant des éléments à symétrie de révolution. De ce fait, seuls les modes présentant une symétrie de révolution peuvent être comparés. Le tableau IV-13 présente les résultats obtenus et les écarts observés entre les deux simulations pour les dix premières fréquences de résonance. Ce tableau montre que les cinq premières fréquences sont obtenues avec suffisamment de précision, l'écart maximum ne

mode	symétrie axiale	trilame	écart
1	10.8	10.9	1
2	27.6	27.1	-2
3	40.9	43.6	6
4	104.4	105.8	1
5	158.3	155.8	-2
6	192.2	231.1	17
7	228.7	278.9	18
8	307.6	400.3	23
9	354.9	440.0	19
10	430.7	562.3	24

Tableau IV-13: fréquence de résonance en kHz

dépassant pas 6%. Au delà de ce rang, les écarts augmentent assez rapidement et le modèle trilame devient inadapté pour décrire le comportement dynamique de la structure étudiée. Cette dégradation des résultats est prévisible [45]. En effet, le modèle développé dans ce rapport ne prend pas en compte les cisaillements transversaux aux interfaces entre couches. Or ces contraintes de cisaillement, responsables du décollement des couches observé expérimentalement [46], peuvent prendre des valeurs assez importantes comparées à celles des autres contraintes retenues dans le modèle trilame. Négliger ces contraintes se traduit par une rigidification anormale de la structure, entrainant des valeurs de fréquences de résonance trop élevées. D'autres formulations, notamment la formulation variationnelle en variables mixtes (déplacements et contraintes) [47], permettent de prendre en compte tous ces effets. Le modèle de trilame présenté ne fournit donc des résultats satisfaisants que sur les premiers modes de flexion des structures trilames étudiées. Le nombre de ces modes de flexion correctement décrits dépend aussi étroitement de la densité du maillage réalisé.

IV- 6 CONCLUSION

Les différents exemples tests traités dans ce chapitre ont permis de valider la formulation des éléments trilames développés. Sur les premiers modes des structures tests étudiées, les résultats obtenus sont de bonne qualité. Toutefois, des comparaisons faites avec les modélisations utilisant des éléments à symétrie axiale sur des modes supérieurs ont donné des écarts plus importants, mais pas systématiquement. La modélisation numérique des trilames, comme celle des plaques élastiques, souffre d'une convergence qui n'est pas monotone. Néanmoins, la possibilité nouvelle d'analyser l'effet des paramètres physiques de la conception d'un trilame sur ses fréquences propres et ses coefficients de couplage est un résultat important qui devrait aider le développement de nouveaux hydrophones et a déjà été exploité dans des travaux d'optimisation.

CONCLUSION

Les résultats obtenus lors de cette thèse, principalement focalisée sur le développement d'éléments piézoélectriques, ont permis la généralisation de l'application des éléments finis à l'étude de structures utilisant des matériaux piézoélectriques quelconques, à polarisation uniforme ou variable, de structures longues soumises à des conditions de déformation plane et de structures piézoélectriques composites, soumises à des déformations de flexion.

Les développements présentés dans la première partie de cette thèse ont conduit à l'écriture d'éléments piézoélectriques *complets*. Ces éléments, basés sur une formulation tensorielle générale, permettent maintenant aussi bien la description des céramiques piézoélectriques que du quartz, du niobate de lithium ou des piézoplastiques, indépendamment de la classe de symétrie de leurs tenseurs caractéristiques. De plus, la généralisation des opérations de changement de base orthonormée et la modification de la procédure d'intégration numérique du code **ATILA** autorisent la prise en compte d'une direction de polarisation variable dans un élément. Les nombreux exemples tests traités ont validé ces différents aspects. Notamment, les exemples de polarisation variable ont particulièrement mis en évidence l'importance d'une description correcte de ce type de polarisation [48].

L'étude des structures planes composites présentée dans la seconde partie de cette thèse a conduit au développement d'éléments originaux que sont les trilames piézoélectriques. Ces éléments surfaciques, basés sur les hypothèses classiques de **KIRCHHOFF** utilisées pour les plaques minces élastiques, ont été largement validés par rapport à des mesures réalisées sur des structures réelles. Ils permettent maintenant la modélisation de plusieurs familles nouvelles de transducteurs et ont déjà autorisé l'optimisation de quelques hydrophones. Cependant, l'optimisation n'a pu se faire que sur les premiers modes de la structure. En effet, la formulation des éléments trilames présente des limitations liées aux contraintes de cisaillement aux interfaces qui ne sont pas prises en compte. Par ailleurs, le seul matériau piézoélectrique pris en compte actuellement par les modèles plaques et trilames est la céramique piézoélectrique. D'autres extensions des modèles peuvent donc d'ores et déjà être envisagées: la prise en compte des contraintes de cisaillement et la possibilité d'utiliser un matériau piézoélectrique autre que la céramique.

REFERENCES

1. **D. BOUCHER**
"Power sonic and ultrasonic transducers design", Ed. B. Hamonic and J.N. Decarpigny, Springer Verlag, (1988).

2. **B. HAMONIC**
"Power sonic and ultrasonic transducers design", Ed. B. Hamonic and J.N. Decarpigny, Springer Verlag, (1988).

3. **J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, B. HAMONIC, R. BOSSUT, P. TIERCE, D. MOREL, D. BOUCHER, B; TOCQUET**
"Finite element analysis of low frequency sonar transducer", Two-day Conference on sonar transducers, Birmingham Procedings, Ed. Institute of Acoustics, Vol. 9 (2), p.42, (1987).

4. **J.T. HUNT, R.R. SMITH, D. BARACH, I.E.E.E.**
Region six conference proceedings, p.100, (1972).

5. **H. ALLIK, K.M. WEBMAN, J.T. HUNT**
J. Acous. Soc. Am, 56, 1782, (1974).

6. **R.R. SMITH, J.T. HUNT, D. BARACH**
J. Acous. Soc. Am, 54, 1277, (1973).

7. **J.N. DECARPIGNY**
"Application de la méthode des éléments finis à l'étude des transducteurs piézoélectriques", Thèse de Doctorat d'état, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1984).

8. **J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, B. TOCQUET, D. BOUCHER**
"In air analysis of piezoelectric Tonpilz transducers in a wide frequency band using a mixed finite element-plane wave method", J. Acous. Soc. Am., 78, pp 1499-1507, (1985).

9. **D. BOUCHER, B. TOCQUET, J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, P. TIERCE**
"Effect of a voltage shading of the ceramic stack on the bandwidth of a radiating Tonpilz transducer", Communication L9, 112th ASA Meeting, Anaheim, (1986).

10. **P.TIERCE**
"Modélisation du transducteur Isabelle par la méthode des éléments finis", Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, (1985).

11. **J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, P. TIERCE, B. TOCQUET, D. BOUCHER**
"Application of the finite element method to the characterization of piezoelectric ceramics", Communication WW6, 106th ASA Meeting, San Diego, (1983).

12. **R. BOSSUT**
"Modélisation de transducteurs piézoélectriques annulaires immergés par la méthode des éléments finis", Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, (1985).

13. **R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY**
"An improvement of the finite radiating element formulation. Application to the modeling of a radiating free flouded transducer", Communication M4, 106th ASA Meeting, San Diego, (1983).

14. **B. HAMONIC**
"Contribution à l'étude du rayonnement de tansducteurs utilisant les vibrations de coque mince", Thèse de Docteur Ingénieur, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1987).

15. **D. BOUCHER, B. TOCQUET, J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, P. TIERCE**
"Analysis of radiating flexural shell sonar transducers using the finite element method", Communication L4, 112th ASA Meeting, Anaheim (1986).

16. **J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, O.B. WILSON**
"Finite element analysis of the DT276 hydrophone using the ATILA code", Naval Postgraduate School, Monterey, Ca, Report N° 61.86.001, (1986).

17. **P. TIERCE, K. ANIFRANI, J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, D. BOUCHER**
"Modélisation de structures piézoélectriques par la méthode des éléments finis", Congrès SEE, Nancy, (1987).

18. **M. NAILLON, R.H. COURSANT, F. BESNIER**
Acta Electronica, 25, 4, (1983).

19. **S. TIMOSHENKO**
"Theory of Plates and Shells", Ed. McGraw-Hill, (1961).

20. **C.S. HURLBUT, Jr**
"DANA's manuel of mineralogy", p30, Ed. J Wiley and Sons, (1952).

21. **E. DIEULESAINT, D. ROYER**
"Ondes élastiques dans les solides", Ed. Masson et Cie, (1974).

22. **D.A. BERLINCOURT**
J. Acous. Soc. Am., 70, 1586, (1981).

23. **D.A. BERLINCOURT, D.R. CURRAN, H. JAFFE**
"Physical acoustics, principles and methods" Vol. 1, Ed. par W.P. MASON, Academic Press, (1964).

24. **J.F. NYE**
"Physical properties of cristals", Ed. Clarendon Press, Oxford Univ. Press., (1957).

25. **P.N. BERG**
"Calculus of variations", Handbook of Eng. mechanics, Ch 16, Ed. N.Flügge, McGraw-Hill, (1962).

26. **J.A. LEWIS**
B.S.T.J., 60, 1259, (1961).

27. **E.P. EER NISSE**
I.E.E.E., Trans. Sonics. Ultrasonics, SU 14, 153, (1967).

28. **R. HOLLAND, E.P. EER NISSE**
I.E.E.E., Trans. Sonics. Ultrasonics., SU 15, 119, (1968).

29. **D.R.J. ODEN**
"Mechanics of Elastic Structures", Ed. McGraw-Hill, (1967).

30. **D.BOUCHER**
"Calcul des modes de vibration de transducteurs piézoélectriques par une méthode de perturbation appliquée à l'analyse par éléments finis", Thèse, Université de Maine, (1979).

31. **K.J. BATHE**
"Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Ed. Prentice Hall (1982).

32. **O.C. ZIENKIEWICZ**
"The Finite Element Method in Engineering Science", Ed. McGraw-Hill, (1977).

33. **J.L. CARTON**
"Application de la méthode des éléments finis à la piézoélectricité", Rapport de D.E.A., Sciences et Techniques de Lille, (1980).

34. **M.E. ROSE**
"Elementary theorie of angular momentum", John Wiley & Sons, Inc., (1957).

35. **C. DUCHET**
"Length-expander composite transducer and resonator excited by a perpendicular electric field", Elec. Let., Vol 14, 21, (1978).

36. **B. DULMET**
"Application d'une méthode de perturbation à l'étude de résonateurs à quartz présentant des modes d'épaisseurs à énergie piégée", Rev. Phys. Appl. 19,p 839-849, (1984).

37. **PAFEC 75**
Data Preparation Manual.

38. **E. HINTON, D.R.J. OWEN**
"finite Element Software for Plates and Shells", Pitman Publishing, (1985).

39. **R.D BLEVINS**
"Formulas for natural fréquencies and mode shape", Ed. Van Nostrand, (1979).

40. **A.W. LEISSA**
"Vibration of shells", NASA, S.P. 288 (1973).

41. **M. RICHARD**
"Etude de la faisabilité d'un hydrophone unidirectionnel", Thèse de 3^{e} cycle, Université de Provence Aix Marseille, (1979).

42. **C. GRANGER**
"Etude et réalisation d'hydrophones miniatures directifs", Diplôme d'Ingénieur C.N.A.M., Lille, (1983).

43. **H.A.DEFERRARI, R.A. DARBY, F.A. ANDREWS**
"Vibrational displacement and mode-shape measurement by a laser interferometer", J. Acous. Soc. Am., Vol 42, p982-990, (1967).

44. **J.P. CHABROL**
Communication privée

45. **PHAM DANG TUAN, G. VERCHERY**
"Théorie des plaques sandwiches assurant les continuités du déplacement et de la contrainte aux interfaces", C.R. Acad. Sc., Paris, (1976).

46. **E. REISSNER**
"The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", J. of App. Mech., Vol 12, A. 69-A., 77, (1945).

47. **G. VERCHERY**
"Application aux structures minces élastiques de principe variationnel mixte. Exemple de la poutre à cisaillement transversal", C.R. Acad. Sc., Paris, t. 278, Série A, (1974).

48. **P. TIERCE, K. ANIFRANI**
"Spherical and cylindrical polarization for three dimensional piezoelectric finite elements", 114th ASA Meeting, Miami-Florida, Nov 16-20, (1987).

49. **W.P. MASON**
"Electromechanical Transducers and Wave Filters", Ed. Van Nostrand, (1948).

50. **O.B. WILSON**
"An introduction to the theory and design of sonar transducers", US Governement Printing Office, (1985).

51. **D.A. BERLINCOURT, D.R. CURRAN, H. JAFFE**
"Piezoelectric and piezomagnetic Materials and their Function in Transducers", Chap-3 in Phys. Acous., Vol. 1A, W. P. Mason, Ed. Academic Press., New York, (1964).

52. **W.P. MASON**
"Piezoelectric crystal and their application to ultrasonics", Van Nostrand, Inc., New York, 486, 5th Ed. (1950).

53. **PAFEC 70**
Data Preparation Manual

ANNEXE 1: DEFINITION DU COEFFICIENT DE COUPLAGE D'UN MODE

A- 1.1 Définition

Le coefficient de couplage électromécanique k est la racine carrée du rapport de l'énergie emmagasinée sous forme mécanique à l'énergie totale appliquée, pour une fréquence nulle [49]. On distingue les coefficients de couplage suivants, dans les céramiques particulièrement:

- *longitudinal*
- *transversal*
- *radial*

Plus généralement, on définit le coefficient de couplage électromécanique *dynamique* comme:

$$k = \sqrt{\frac{U_{12}^2}{U_1 U_2}} \tag{A.1.1}$$

où U_1 est la densité d'énergie élastique, U_2 la densité d'énergie électrique et U_{12} la densité d'énergie piézoélectrique. Dans l'hypothèse d'un comportement linéaire du matériau piézoélectrique, la densité totale d'énergie U est donnée par [50]:

$$U = \frac{1}{2}.s_i\sigma_i + \frac{1}{2}.D_j E_j \tag{A.1.2}$$

où s_i et σ_i sont respectivement les composantes des tenseurs des déformations et des contraintes, E_j et D_j les composantes du champ et de l'induction électriques.

A- 1.2 Expressions de la densité d'énergie

En utilisant alors les équations de la piézoélectricité (I.17) dans lesquelles σ et E sont les variables indépendantes, l'expression (A.1.2) de la densité d'énergie devient:

$$U = \frac{1}{2}.\sigma_i S_{ij}^E \sigma_j + \frac{1}{2}.\sigma_i d_{ji} E_j + \frac{1}{2}.E_i d_{ij}\sigma_j + \frac{1}{2}.E_i \varepsilon_{ij}^{\sigma} E_j \tag{A.1.3}$$

Or, par définition:

$$U = U_1 + 2U_{12} + U_2 \tag{A.1.4}$$

alors on en déduit que:

$$U_1 = \frac{1}{2}.\sigma_i S^E_{ij} \sigma_j \tag{A.1.5}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}.E_i \varepsilon^{\sigma}_{ij} E_j \tag{A.1.6}$$

$$U_{12} = \frac{1}{2}.\sigma_i d_{ji} E_j \tag{A.1.7}$$

A- 1.3 Expression du coefficient de couplage

Pour un système électromécanique fini, où contraintes, déformations, champs et inductions électriques sont connus, le coefficient de couplage s'obtient en fonction d'intégrales de volume des densités d'énergie. On peut montrer que ce coefficient s'exprime en fonction des fréquences de résonance F_R et d'antirésonance F_A par [51]:

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{F_R}{F_A}\right)^2} \tag{A.1.8}$$

Le coefficient de couplage est la mesure, dans un mécanisme de transduction piézoélectrique, du rapport de conversion d'une forme d'énergie à l'autre.

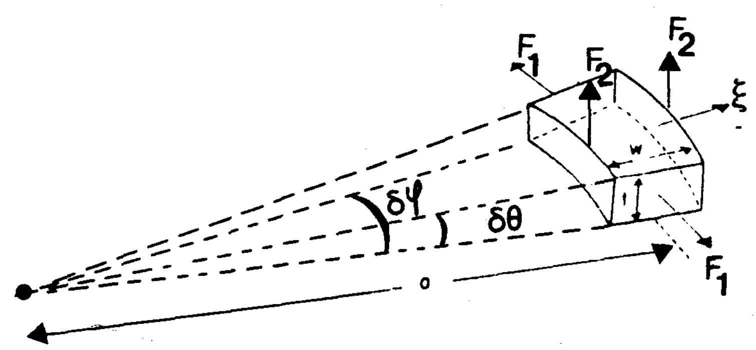
ANNEXE 2: ETUDE ANALYTIQUE DU MODE RADIAL D'UNE SPHERE MINCE PIEZOELECTRIQUE [52]

A- 2.1 Equation du mouvement

La détermination du mode de vibration radiale d'une sphère mince piézoélectrique peut se faire analytiquement. La sphère est considérée comme mince lorsque son épaisseur est négligeable devant son diamètre. Les contraintes suivant cette épaisseur peuvent alors être négligées. On suppose de plus que la sphère est polarisée radialement. En notant ξ le déplacement radial d'un point de la sphère, l'équation de **NEWTON** peut s'écrire:

$$dm.\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = dF \tag{A.2.1}$$

où dm et dF sont respectivement la masse et la force de l'élément de sphère (figure A-1.1) au point considéré. Compte tenu des notations de la



<u>figure A-1.1</u>: élément d'une sphère polarisée radialement

figure A-1.1, cette équation devient:

$$\rho a^2 \tau \cos\theta d\theta d\varphi.\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\ (\sigma_1 + \sigma_2)\tau a \cos\theta d\theta d\varphi \tag{A.2.2}$$

où ρ est la masse volumique, a le rayon et τ l'épaisseur de la sphère. Cette équation peut se réécrire sous la forme:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\ \frac{1}{\rho a}.(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{A.2.3}$$

Les équations de la piézoélectricité (I.17), appliquées à la céramique permettent d'écrire:

$$s_1 + s_2 = \left(S^E_{11} + S^E_{12}\right)(\sigma_1 + \sigma_1) + 2d_{31}E_3 \qquad (A.2.4)$$

Sachant que les déformations s_1 et s_2 sont identiques pour la sphère et s'expriment en fonction du déplacement radial ξ par:

$$s_1 = s_2 = \frac{\xi}{a} \qquad (A.2.5)$$

le couplage des relations (A.2.4) et (A.2.5) à l'équation (A.2.3) donne:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{2}{\rho a\left(S^E_{11} + S^E_{12}\right)} \cdot \left(\frac{\xi}{a} - d_{31}E_3\right) \qquad (A.2.6)$$

En régime harmonique de pulsation ω, cette équation devient:

$$\omega^2 \xi = - \frac{2}{\rho a\left(S^E_{11} + S^E_{12}\right)} \cdot \left(\frac{\xi}{a} - d_{31}E_3\right) \qquad (A.2.7)$$

Posant:

$$S^E_c = \frac{S^E_{11} + S^E_{12}}{2} \qquad (A.2.8)$$

$$\omega_R^2 = \frac{1}{\rho a^2 S^E_c} \qquad (A.2.9)$$

alors le déplacement s'écrit:

$$\xi = \frac{a d_{31} E_3}{\rho a^2 S^E_c \left(\omega_R^2 - \omega^2\right)} \qquad (A.2.10)$$

A- 2.2 Calcul de l'admittance électrique

L'intensité du courant électrique I, entrant dans la sphère piézoélectrique est donnée par:

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (A.2.11)$$

où Q est la charge apparaissant sur les électrodes. Elle est donnée par:

$$Q = 4\pi a^2 D_3 \qquad (A.2.12)$$

D_3 est l'induction électrique qui s'écrit pour cette sphère:

$$D_3 = d_{31}(\sigma_1 + \sigma_2) + \varepsilon^\sigma_{33}E_3 \qquad (A.2.13)$$

Dès lors, le développement de l'équation (A.2.11) conduit à:

$$I = j\omega.4\pi a^2\left(d_{31}(\sigma_1+\sigma_2) + \varepsilon^{\sigma}_{33}E_3\right) \tag{A.2.14}$$

Le couplage de cette équation avec les relations (A.2.4) et (A.2.5) d'une part, les définitions (A.2.8) et (A.2.9) d'autre part, permet d'écrire:

$$I = j\omega.4\pi a^2\left(\frac{d_{31}^2E_3}{\rho a^2\left(S_c^E\right)^2\left(\omega_R^2-\omega^2\right)} + E_3\left(\varepsilon^{\sigma}_{33} - \frac{d_{31}^2}{S_c^E}\right)\right) \tag{A.2.15}$$

Or, compte tenu des hypothèses admises pour la sphère mince, le champ électrique E_3 est donné par:

$$E_3 = \frac{V}{\tau} \tag{A.2.16}$$

où V est la différence de potentiel appliquée. L'équation (A.2.15) peut alors se réécrire sous la forme:

$$I = \frac{j\omega.4\pi a^2.\varepsilon^{\sigma}_{33}V}{\tau}.\left(\frac{d_{31}^2}{\varepsilon^{\sigma}_{33}\rho a^2\left(S_c^E\right)^2\left(\omega_R^2-\omega^2\right)} + 1 - \frac{d_{31}^2}{\varepsilon^{\sigma}_{33}S_c^E}\right) \tag{A.2.17}$$

d'où l'expression de l'admittance électrique de la sphère:

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{j\omega.4\pi a^2.\varepsilon^{\sigma}_{33}}{\tau}.\left(\frac{k_p^2\omega_R^2}{\omega_R^2-\omega^2} + 1 - k_p^2\right) \tag{A.2.18}$$

où l'on a posé:

$$k_p^2 = \frac{d_{31}^2}{\varepsilon^{\sigma}_{33}S_c^E} \tag{A.2.19}$$

A- 2.3 Détermination des fréquences de résonance et d'antirésonance

A la résonance, les électrodes sont court-circuitées. La différence de potentiel est alors nulle, entrainant une admittance électrique infinie. L'expression (A.2.18) permet donc de calculer la fréquence de résonance qui est donnée par:

$$F_R = \frac{\omega_R}{2\pi} \tag{A.2.20}$$

A l'antiresonance, les électrodes sont en circuit ouvert. L'intensité du courant électrique est alors nulle, entrainant une admittance électrique nulle. La fréquence d'antirésonance est alors donnée

ANNEXE 3: RAPPEL DE LA FORMULATION DES PLAQUES ELASTIQUES ET DES FONCTIONS DE FORME UTILISEES

A- 3.1 Formulation [32]

Selon la théorie classique des plaques minces, le comportement dynamique d'une plaque est décrit sans ambiguïté dès que l'on connait la flèche, w, en tout point. La formule générale sur l'élément peut s'écrire:

$$w = [N^e].\{\delta^e\} \tag{A.3.1}$$

où $[N^e]$ est la matrice des fonctions de forme et $\{\delta^e\}$ le vecteur formé par les déplacements généralisés de l'élément. Ces déplacements généralisés sont la flèche et les deux rotations définies aux différents noeuds de l'élément. Soit pour un noeud i:

$$\left\{\delta_i^e\right\}^T = \{w_i\,,\ \theta_{xi}\,,\ \theta_{yi}\} \tag{A.3.2}$$

avec:

$$\begin{aligned} \theta_{xi} &= -\left\{\frac{\partial w}{\partial y}\right\}_i \\ \theta_{yi} &= \left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\}_i \end{aligned} \tag{A.3.3}$$

Définissant par:

$$\{M\}^T = \{M_1\,,\ M_2\,,\ M_6\} \tag{A.3.4}$$

et par:

$$\{\epsilon\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \tag{A.3.5}$$

les contraintes et déformations généralisées, alors on peut établir, pour une plaque isotrope, la relation:

$$\{M\} = [D]\{\epsilon\} \tag{A.3.6}$$

où [D] est la matrice de rigidité définie par:

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.3.7)}$$

où h est l'épaisseur de la plaque, E et ν le module d'**YOUNG** et le coefficient de **POISSON** du matériau.

A- 3.2 Fonctions de forme [53]

Les termes du polynôme d'interpolation sont:

$1,\ \xi,\ \eta,\ \xi\eta,\ \xi^2,\ \eta^2,\ \xi^3,\ \eta^3,\ \xi\eta^2,\ \xi^2\eta,\ \xi^3\eta,\ \xi\eta^3, \xi^4, \eta^4$

$\xi^5,\ \eta^5,\ \xi^4\eta,\ \xi\eta^4,\ \xi^3\eta^2,\ \xi^3\eta^2,\ \xi^4\eta^2,\ \xi^2\eta^4,\ \xi^5\eta,\ \xi\eta^5$

Les 18 premiers servent pour un élément triangulaire à six noeuds et les 24 termes au total servent pour un élément quadrilatère à huit noeuds.

Dès lors, la matrice de transformation peut s'écrire:

$$\{B_{xy}\}^T = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \qquad \text{(A.3.8)}$$

w étant défini à partir du polynôme d'interpolation qui est une fonction des variables ξ et η, cette expression peut se réécrire sous forme:

$$\{B_{xy}\} = [Q]^{-1}.\{B_{\xi\eta}\} \qquad \text{(A.3.9)}$$

avec:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & \frac{\partial x \partial y}{\partial \xi \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & \frac{\partial x \partial y}{\partial \eta \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial x \partial x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial y \partial y}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial x \partial y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial y \partial x}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.3.10)}$$

L'expression de la matrice de rigidité d'une plaque s'obtient par:

$$[K] = h.\iint_S \{B_{xy}\}^T [D] \{B_{xy}\}.dxdy \qquad \text{(A.3.11)}$$

par:

$$F_A = \frac{\omega_R}{2\pi\sqrt{1 - k_p^2}} \qquad (A.2.21)$$

A- 2.4 **Schéma électrique équivalent**

Le circuit électrique équivalent à ce mode de vibration est donnée en figure A-1.2 [52]. La capacité C_0 correspond à la capacité de la sphère

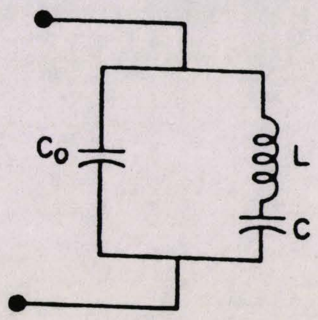


figure A-1.2: schéma électrique équivalent de la sphère

en haute fréquence ($\omega = \infty$), dite capacité bloquée, et est donnée par:

$$C_0 = \frac{4\pi a^2 \varepsilon_{33}^{\sigma}}{\tau}\left(1 - k_p^2\right) \qquad (A.2.22)$$

La capacité C s'exprime par:

$$C = \frac{4\pi a^2 \varepsilon_{33}^{\sigma} k_p^2}{\tau} \qquad (A.2.23)$$

et l'inductance L par:

$$L = \frac{\rho\tau\left(S_c^E\right)^2}{4\pi d_{31}^2} \qquad (A.2.24)$$

Résumé de thèse

La conception de transducteurs nouveaux pour l'acoustique sous-marine implique le développement de modèles et d'outils de simulation numérique permettant l'analyse de structures tridimensionnelles hétérogènes, anisotropes et de formes complexes. Cet objectif a été atteint à l'aide de la méthode des éléments finis qui est mise en oeuvre dans plusieurs codes spécialisés, notamment le code **ATILA**.

Ce travail porte essentiellement sur trois aspects de la modélisation par éléments finis de transducteurs. Le premier concerne la généralisation des opérations tensorielles incluses dans le code **ATILA** pour permettre la prise en compte de tout matériau piézoélectrique uniforme (céramiques, piézoplastiques, quartz, CdS, ...). Le second, lié à une procédure d'intégration numérique dans l'élément, permet la description d'une polarisation variable, notamment cylindrique ou sphérique, dans les céramiques et les piézoplastiques. Enfin, le troisième est associé à la modélisation des trilames piézoélectriques qui sont les parties actives de nombreux hydrophones et capteurs. Ces trilames, formés de deux plaques fines de matériau piézoélectrique collées sur une âme métallique, sont essentiellement soumis, de la part du champ acoustique à détecter, à des efforts de flexion. Leur modélisation par des éléments finis classiques est compliquée du fait de leur nature composite et du rapport des dimensions latérales à l'épaisseur. Les éléments originaux décrits dans cette thèse reposent sur deux hypothèses essentielles: l'hypothèse de **KIRCHHOFF**, classique en théorie des plaques minces élastiques, et l'hypothèse d'uniformité du champ électrique.

Tous ces aspects, qui ont conduit au développement de nombreux éléments dans la bibliothèque du code **ATILA**, ont fait l'objet d'une validation détaillée, soit par rapport à d'autres modèles numériques ou analytiques, soit par rapport aux résultats de mesures électriques ou optiques (interférométrie) conduites sur des structures réelles. Ils ont déjà autorisé l'optimisation de certaines structures.

Mots-clés

Acoustique sous-marine
Underwater acoustic

Matériau composite
Composite material

Transducteur piézoélectrique
Piezoelectric transducer

Théorie des plaques
Plates theory

Méthode des éléments finis
Finite element method

Piézoélectricité
Piezoelectricity

Capteur trilame
Trilaminar sensor