

50376
1988
109-1

50376
1988
109-1

N° d'ordre : 763

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE
LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

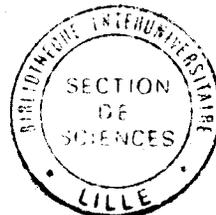
le grade de Docteur ès Sciences Physiques (Mécanique)

par

Alain MERLEN

SIMILITUDE PHYSIQUE ET MODELISATION
PAR EXPLOSION EQUIVALENTE DES PHENOMENES
AERODYNAMIQUES DE BALISTIQUE INTERMEDIAIRE

T E X T E



- Jury : Président : M. GUIRAUD, Professeur, Université de Paris VI.
Rapporteurs : M. BOIS, Professeur, Université de Lille I.
M. DYMENT, Professeur, Université de Lille I.
Membres : M. ZEYTOUNIAN, Professeur, Université de Lille I.
M. DI NICOLA, Ingénieur en Chef Armement, Chef du Groupe 6, DRET.
M. PERRIER, Chef du Dépt. Aérodynamique, AMD-BA.
M. VIVIAND, Directeur Scientifique Adjoint de l'Aérodynamique,
ONERA.

Soutenue le 27 avril 1988

Celui qui a fait la synthèse d'une recherche scientifique n'est pas, pour autant, en droit de s'attribuer la totalité du travail et des idées qui ont mené la démarche à son terme. Cette thèse, qui allie l'expérience et la théorie, doit beaucoup à un grand nombre de personnes d'horizons divers. Il m'est impossible de les citer toutes, mais je crois que ceux qui ne trouveront pas un remerciement individuel dans ces quelques lignes, sauront se reconnaître dans les propos que j'y tiens. J'ose espérer, d'ailleurs, n'avoir jamais manqué de leur exprimer ma reconnaissance quand elles m'ont apporté aide et soutien, et que, connaissant mon sentiment, elles ne se formaliseront pas de ne pas apparaître explicitement ici.

En revanche, ce serait la pire des ingratitude que de ne pas exprimer ce que ce travail et moi même devons à Monsieur DYMENT professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois. A l'origine des grands axes de ce mémoire, le professeur DYMENT n'a cessé d'être un acteur du progrès de ces travaux. Apportant l'étendue de sa culture scientifique et la qualité de sa méthode, il m'a évité de me perdre dans les dédales du chemin. A son contact, j'ai eu ce privilège que Rousseau réserve à peu d'hommes: celui de voir croître la conscience de mon ignorance en apprenant. C'est sans doute grâce à cela que je saurai continuer dans la voie que trace son exemple.

Je tiens également à témoigner à Monsieur GUIRAUD, professeur à l'Université de Paris VI, toute ma reconnaissance pour avoir bien voulu utiliser un temps précieux à l'examen de ce travail. Sachant ce que la réputation d'un travail doit à celle de ses examinateurs, je ne saurais trop le remercier d'avoir accepté la présidence du jury.

Je sais gré également à Monsieur BOIS, professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, d'avoir bien voulu faire l'analyse de ce mémoire ainsi qu'à Monsieur

ZEYTOUNIAN, professeur dans cette même Université, d'avoir accepté de participer au jury.

Toute recherche scientifique a besoin d'un support financier, celle-ci a eu la chance d'être conduite grâce au soutien fidèle, efficace et avisé de la Direction des Recherches et Etudes Techniques (DRET). Je suis sensible à l'honneur que Monsieur DINICOLA, Ingénieur en Chef de l'Armement et Directeur du groupe 6 de la DRET, fait à ce travail en participant au jury. Qu'il soit personnellement assuré de ma gratitude et qu'il veuille bien transmettre l'expression de ma reconnaissance à Monsieur VERGNE, Ingénieur Principal de l'Armement, qui a soutenu cette recherche dès l'origine, ainsi qu'à ses successeurs au groupe 6.

Je remercie Monsieur PERRIER, chef du département aérodynamique des Avions Marcel Dassault - Breguet Aviation, qui a toujours encouragé ce travail et qui, en participant au jury, rappelle l'intérêt de l'industrie aéronautique pour ces recherches même lorsqu'elles ont revêtu un caractère moins appliqué.

De la même façon, j'adresse mes remerciements à Monsieur VIVIAND, Ingénieur Général de l'Armement, et Directeur Scientifique adjoint de l'aérodynamique à l'ONERA qui a bien voulu se joindre au jury.

Qu'il me soit permis également d'exprimer ma reconnaissance aux membres actuels et passés du groupe de Monsieur DYMENT à L'IMFL, aux ingénieurs pour les conseils et encouragements qu'ils m'ont prodigués; aux techniciens pour l'aide qu'ils m'ont apportée; à tous pour l'amitié dont ils m'ont entouré.

Je réserverais une mention spéciale à Monsieur Jean Michel DESSE, ingénieur à l'IMFL, qui m'a épaulé, remplacé puis largement dépassé dans la conduite des essais de la partie expérimentale de cette étude. Ce travail lui doit la qualité des visualisations et des mesures présentées. Je tiens à lui associer Monsieur Jean

Pierre FLODROPS, ingénieur à l'IMFL, qui a initié, dans cet Institut, les études de simulation de tir et, ainsi, débroussaillé la route que j'ai suivie.

Je citerai également Monsieur Jacques PRUVOST, technicien à l'IMFL, à qui les figures de ce mémoire doivent leur minutie, ainsi que Monsieur ANDRIAMANALINA, étudiant en troisième cycle à l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, qui a achevé la tâche astreignante de vérification des formules des chapitres 3 et 4.

Dans le même esprit, j'aurais garde d'oublier l'équipe allemande de l'ISL, qui, autour de Monsieur MACH, a réalisé la mesure délicate des températures de bouche.

Que les ouvriers, techniciens et ingénieurs des ateliers, du bureau d'études et du service électronique et informatique de l'IMFL sachent que je me souviens toujours que rien n'aurait pu se faire sans eux.

Je me dois également de remercier les membres de ma famille pour leur appui indéfectible et continu; ma compagne et mes filles pour la patience qu'elles m'ont témoignée et l'affection dont elles m'ont entouré durant ces années.

Enfin, une gratitude égale m'attache à tous ceux qui m'ont apporté leur amitié et me l'ont conservée jusqu'à maintenant.

A mes parents

A Monique

A Sandra et Diana

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	2
CHAPITRE 1: APPROCHE PHENOMENOLOGIQUE	6
CHAPITRE 2: THEORIE ET REGLES DE SIMILITUDE DE TIR	36
CHAPITRE 3: MODELISATION DU TIR ET THEORIE DES EXPLOSIONS VIOLENTES ANISOTROPES	115
CHAPITRE 4: THEORIE ET CALCUL DE L'ECOLEMENT CONSECUTIF A UNE EXPLOSION VIOLENTE, PONCTUELLE ET ISOTROPE DANS UN GAZ ANIME D'UN MOUVEMENT UNIFORME	153
CHAPITRE 5: APPLICATION DE LA MODELISATION ET DE LA SIMILITUDE A LA PROPAGATION DES ONDES DE BOUCHES VIOLENTES	212
ANNEXES	
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	
FIGURES	

* *
* INTRODUCTION *
* *

Le tir des armes à feu a été à l'origine des observations de l'Autrichien MACH et du Français HUGONIOT dont la portée des travaux dépasse largement le cadre du phénomène en question. C'est sans doute parce qu'ils ont cherché avant tout à comprendre la physique du phénomène, sans poursuivre d'une façon trop précise un but utilitaire, que leurs résultats ont pu être appliqués à un grand nombre de situations concrètes. Ils ont suivi en cela les principes cartésiens: découvrir les lois de la nature par la méthode expérimentale, leur donner une forme mathématique et prédire à partir de cette dernière toutes les possibilités phénoménologiques non encore expérimentées.

Ce rappel des principes est la meilleure justification de la démarche suivie dans nos travaux et reflétée dans le plan de ce mémoire. En effet, on n'y trouvera pas un exposé in extenso de toutes les recettes technologiques destinées, par exemple, à atténuer le bruit des armes, ou une monographie des armes couramment utilisées avec des comparaisons qualitatives sur tel ou tel aspect de leurs performances respectives. Au contraire, nous procéderons à l'analyse d'un aspect particulier du tir des armes à feu que l'on appelle souvent: "balistique intermédiaire". Il s'agit, en fait, de l'aérodynamique de l'écoulement produit par le tir dans un voisinage proche de l'arme. Nous nous attacherons à discerner, par l'observation expérimentale, ce qui est commun à tous les tirs d'armes à feu de ce qui n'est qu'une variante particulière. Nous aboutirons ainsi à la notion de tir idéal (chapitre 1).

Grâce à l'application des règles de la similitude physique, nous obtiendrons la maîtrise de ce tir idéal et de son extension la plus courante dans les cas pratiques (chapitre 2). Nous en déduirons une méthode expérimentale d'essais sur modèles utilisable dans de nombreuses applications et ouvrant le champ à de nombreux thèmes de recherche appliquée.

Nous ne traiterons pas ces thèmes en détail pour plusieurs raisons. D'abord, parce que notre but est la compréhension du

phénomène et la recherche de ses lois fondamentales, mais également parce que seuls les spécialistes des problèmes pratiques pourront décider des simplifications qu'ils doivent apporter à la méthode générale pour l'adapter à leurs besoins spécifiques. Nous développerons cependant un peu plus, en guise d'exemple, le thème de l'action du tir d'un canon embarqué sur le fonctionnement des prises d'air d'un avion militaire, problème qui est à l'origine de nos recherches.

Pour tenter d'obtenir certaines propriétés du tir, comme la loi de propagation des ondes de choc, sous forme mathématique, nous démontrerons ensuite que, moyennant une schématisation réaliste, le tir n'est, lui même, qu'un aspect particulier d'une classe plus vaste de phénomènes: celle des explosions violentes. Nous établirons le lien entre un tir et une explosion équivalente que nous formulerons mathématiquement dans le cas des tirs très intenses en atmosphère infinie (chapitre 3).

De plus, partant du principe que les résultats les plus simples sont les meilleurs, nous parviendrons à obtenir sous une forme analytique certains aspects du phénomène. En particulier, nous aboutirons à l'expression analytique de la propagation d'une onde de bouche intense en atmosphère infinie en fonction des caractéristiques du tir (ou de l'explosion) et de celles du milieu extérieur. Ainsi, nous isolerons l'effet de la pression ambiante et même celle de la vitesse du courant dans le cas où le milieu extérieur est en translation uniforme. Cette expression n'est plus valable lorsque l'onde devient quasi acoustique, mais elle permet de calculer toutes les grandeurs sur le choc lorsque celui-ci est intense comme cela se présente dans nombreux cas pratiques (chapitre 4).

Enfin, pour terminer, nous avons cherché à rendre nos résultats théoriques utilisables dans les applications. Ainsi, nous avons généralisé la théorie au cas du tir en présence d'un obstacle schématique pouvant simuler, entre autres, le fuselage d'un

avion. La comparaison entre la théorie et l'expérience s'avère satisfaisante (chapitre 5).

Il reste que le cartésianisme de la démarche n'est pas, à lui seul, une garantie de la qualité du travail; laissons à ce mémoire la tâche de se défendre lui-même, mais précisons toutefois, pour inciter à l'indulgence, que son plan suit une logique adaptée à l'exposé, mais indépendante du déroulement technique des recherches. Certains essais non duplicables à cause de leur coût ont été réalisés à des moments où l'analyse du phénomène était inachevée; si la chronologie avait suivi parfaitement la logique scientifique, ils auraient été réalisés différemment. C'est pourquoi, la partie expérimentale du mémoire paraîtra peut-être, dans certains cas, mal adaptée à la démonstration. Nous avons tenté de trier parmi les essais réalisés au cours de sept années consécutives ceux qui illustrent le mieux les propos du texte sans parvenir, néanmoins, à effacer les lourdeurs de logique que des essais conçus après la compréhension complète du phénomène auraient évités.

CHAPITRE 11-1 HISTORIQUE DES ETUDES SUR LE TIR DES ARMES A FEU1-1-1 UNE BIBLIOGRAPHIE DIFFICILE1-1-2 HISTORIQUE1-2 LES MOYENS DE MESURE1-2-1 LE SYSTEME DE VISUALISATION ULTRA-RAPIDE1-2-2 LA MESURE DES PRESSIONS INSTATIONNAIRES1-3 DESCRIPTION DU PHENOMENE1-3-1 TIR EN ATMOSPHERE INFINIE AU REPOS1-3-2 LE SECOND PRECURSEUR, LA DEUXIEME ONDE DE BOUCHE1-3-3 LE PROJECTILE1-3-4 TIR A ONDE DE BOUCHE FAIBLE1-3-5 TIR EN PRESENCE D'UN OBSTACLE1-3-6 LE TIR IDEAL

1-1 HISTORIQUE DES ETUDES SUR LE TIR DES ARMES A FEU

1-1-1 UNE BIBLIOGRAPHIE DIFFICILE

Il est illusoire de vouloir établir une bibliographie complète des études sur le tir des armes à feu: d'abord, parce que la diversité des phénomènes liés au tir a entraîné une profusion de publications dans diverses spécialités scientifiques; ensuite, parce qu'une grande part des travaux est couverte par le secret militaire. Il est possible, cependant, de tirer les grandes lignes de l'évolution des recherches.

Le parallèle entre les problèmes techniques rencontrés et la mise en évidence de leurs causes phénoménologiques montre que le tir a été générateur de nombreuses sollicitations de recherche. Hélas, les contingences historiques ont souvent limité les objectifs scientifiques.

Chacun des pays ayant acquis ou maintenu sa puissance au XXème siècle a contribué à l'avancée des connaissances et des techniques liées au tir des armes; mais tous ne sont pas entrés en scène en même temps, ni de la même façon: les recherches scientifiques sur le tir fluctuent au rythme de notre histoire contemporaine. La constance ou l'inconstance des nations se révèlent plus qu'ailleurs dans ce mouvement, continu pour certains, irrégulier pour d'autres, mais souvent freiné par l'obsession de l'utilité de la science.

Nous n'avons pas multiplié les références. Certains auteurs sont cités sans un renvoi à leurs travaux, mais on peut toujours en trouver mention dans les références citées explicitement.

1-1-2 HISTORIQUE

Depuis la fin du XIXème siècle, la curiosité des scientifiques a été orientée vers le tir des canons. A l'époque, il semble que

l'effort de recherche ait été fourni essentiellement par les Allemands et les Français. Deux aspects principaux ont fixé l'attention des chercheurs: la balistique du projectile et l'acoustique du tir. C'est en 1888 que MACH réalise la première photographie d'un projectile. Dès lors et jusqu'à la fin de la grande guerre, les progrès des balisticiens, en matière d'efficacité des poudres et des formes de projectiles, ont entraîné l'apparition de nouveaux sujets de recherche dans le domaine de l'acoustique du tir.

Après 1918, une synthèse s'est avérée nécessaire: elle a été l'oeuvre du professeur E. ESCLANGON <1>. Son " Acoustique des canons et projectiles " est un point d'orgue dans les recherches françaises sur l'acoustique des armes à feu. On y trouve l'ébauche des concepts qui nous serviront dans ce mémoire car les acousticiens de l'époque se sont vite convaincus de la nécessité d'un tri dans les différentes manifestations sonores du tir. Ils distingueront ainsi: les ondes balistiques, liées au projectile; les sifflements, dus à son sillage; les ondes de chute, produites par son explosion; et enfin l'onde de bouche, provenant du canon proprement dit. Pour situer la source de ces ondes, ces chercheurs ont développé des mesures de pressions instationnaires, montrant ainsi une voie expérimentale que nous nous empresserons d'emprunter.

Cependant, trop tourné vers les applications, l'ouvrage d'ESCLANGON ne répond pas à la question de l'origine physique de toutes les ondes décrites, limitant ainsi la possibilité d'agir sur elles. Il est vrai que les exigences de l'époque expliquent facilement pourquoi la détection de la position de la source de l'onde de bouche était prioritaire devant la recherche de sa cause phénoménologique. C'était en quelque sorte une question de vie ou de mort.

Pourtant cette explication est insuffisante car, si cette origine physique n'a pas été décelée, ce n'est pas faute de l'avoir cherchée. Mais ces chercheurs du début du siècle sont des

acousticiens inconditionnels; la mécanique des fluides compressibles n'a pas encore ses lettres de noblesse. De ce fait, toutes les ondes sont considérées comme acoustiques; l'explication physique de la source en découle: c'est l'origine d'un ébranlement sonore. Sans ignorer l'existence d'écoulements supersoniques, ces chercheurs s'empressent de les supposer sporadiques ou ponctuels pour se réfugier dans le cadre de leur solide formation en acoustique géométrique. C'est ainsi que sera démentie l'existence d'un jet supersonique à la bouche de l'arme pourtant présente par HUGONIOT et désormais établie. On sait, aujourd'hui, que ce jet est à l'origine de l'onde de bouche.

Vraisemblablement parce que le souci des applications avait disparu, avec la certitude que la première guerre mondiale serait la dernière, les recherches sur l'acoustique du tir ont perdu de la vigueur. On peut le déplorer, a posteriori, d'abord parce que la poursuite des recherches en métrologie instationnaire et en visualisation rapide n'aurait pas été superflue en France, mais surtout parce que ce manque d'intérêt pour la compréhension de la nature physique des ondes, a retardé les débuts de l'aérodynamique compressible qui trouvait là une première application possible.

Outre-Rhin, les illusions sur les vertus de la guerre de position n'étant pas de mise, le problème de la localisation acoustique des batteries n'est pas non plus à l'ordre du jour.

A l'inverse, la recherche de l'efficacité engendre de grand progrès en balistique intérieure et terminale. La première se préoccupe de la combustion des poudres et de la mise en mouvement du projectile dans le tube; la seconde, de l'impact de ce projectile. Un nouveau problème apparaît alors: celui du recul que la puissance des armes accroît sensiblement. Ce phénomène est particulièrement préoccupant pour les concepteurs de blindés. L'attention se porte alors sur le jet de gaz de poudre à la bouche de l'arme. C'est le début de ce qu'OSWATITSCH <2> appellera, plus tard, la balistique intermédiaire.

En France, l'accent est mis sur les applications; RATEAU proposera, en 1932, un modèle de "frein de bouche" destiné à diminuer le recul par déviation du jet vers l'arrière.

En Allemagne, laissant la conception de ces dispositifs aux industriels, les chercheurs développent les techniques d'observation. SCHARDIN publie en 1933 les premières visualisations instantanées de l'onde de bouche et découvre l'existence d'un choc précurseur.

Les Allemands resteront après la deuxième guerre mondiale, et sont encore aujourd'hui, les plus avancés dans la métrologie spécifique aux problèmes de balistique intérieure et intermédiaire. Ce n'est donc pas un hasard si les travaux expérimentaux, réalisés au cours de notre recherche, utilisent le principe des visualisations de SCHARDIN et que c'est à une équipe allemande que nous devons la délicate mesure instantanée de la température à la bouche d'une arme.

Lors du second conflit mondial, les Européens ne sont pas les seuls à augmenter la puissance de feu de leurs armes. Le gigantisme des canons de marine américains entraîne une augmentation des effets de souffle dans le voisinage de la bouche. Les conséquences structurales du tir, d'abord sur les navires de guerre puis sur les hélicoptères de combat, orientent ainsi la curiosité vers l'écoulement dans la zone proche de la bouche. L'acoustique du tir revient à l'honneur mais c'est son aspect physiologique sur les servants qui retient l'attention.

De 1944 à 1954, de nombreux travaux expérimentaux, sur des armes de tout calibre, voient le jour aux Etats Unis; la technique des mesures de pressions instationnaires par capteurs piézo-résistifs ou piézo-capacitifs y fait ses preuves.

Parallèlement, l'effet de souffle vient au centre de la préoccupation des théoriciens après les premières explosions atomiques.

Muets sur leurs études expérimentales, tant sur l'explosion atomique que sur le tir des canons, les Soviétiques publient en

1946 la puissante modélisation de l'explosion violente instantanée de SEDOV <3>. Ce modèle d'explosion ponctuelle isotrope a été amélioré en 1954 par MELNIKOVA et, un peu plus tard, par le Japonais SAKURAI <4>.

Les balisticiens se penchent sur cette théorie mais ils pensent d'abord à l'appliquer à l'explosion du projectile. Le Britannique THORNHILL élabore, en 1957, un modèle empirico-théorique de l'explosion d'une charge en mouvement, cherchant à lier le déplacement de la charge à une anisotropie de l'explosion. Mais les informations manquent encore pour que les chercheurs se risquent à présenter un modèle de l'onde de bouche. En effet, il faut attendre 1964 pour qu'OSWATITSCH <2> donne une première description de l'onde de bouche et de son précurseur, ainsi qu'une explication des deux phénomènes.

En 1969, l'Américain WESTINE <5> publie des mesures assez complètes des pics de pression enregistrés dans le champ proche de la bouche. Il reprend l'idée, émise en 1944 par REYNOLDS de l'université de Princeton, d'appliquer des règles de similitude à l'effet de souffle du canon. Mais la méthode choisie par WESTINE relève plus de la recherche de critères expérimentaux que de l'établissement des lois de similitude issues des principes fondamentaux de la mécanique. En fait, il cherche des points homologues, pour ses mesures sur différentes armes, en choisissant empiriquement des longueurs de référence. Le Britannique HOPKINSON avait déjà eu cette idée en 1915 pour l'appliquer à l'explosion de charges.

Malgré leur caractère purement géométrique, les travaux de WESTINE ont l'immense mérite d'établir le lien entre l'effet de souffle produit par une explosion et le tir des armes à feu.

De 1970 à 1975, en Angleterre, SMITH <6><7> associe l'approche de WESTINE et celle de THORNHILL en proposant un modèle semi-empirique de l'onde de bouche à partir d'une explosion non isotrope à apport d'énergie constant. Le modèle s'applique aussi aux canons en mouvement, mais sa généralité est entâchée par la nécessité d'y ajuster des constantes en fonction de l'expérience.

Aux Etats-Unis, pendant la même période, les efforts se partagent en deux directions: la voie analytique et expérimentale d'une part et la voie numérique d'autre part.

La première est bien illustrée par les travaux de PORZEL <8> qui tente de construire une théorie unifiée des explosions, en introduisant, dans un modèle inspiré de celui de SEDOV, des lois de comportement destinées à faire coïncider théorie et expériences diverses. Il parvient ainsi à décrire certaines caractéristiques physiques par des relations analytiques. Le défaut de telles modélisations réside dans le fait que la comparaison théorie-expérience n'est plus considérée comme un verdict sur le bien fondé des hypothèses physiques mais comme un critère d'ajustement des formes analytiques de ces hypothèses physiques arbitraires. Le modèle est plus descriptif que déterministe.

La voie numérique a donné lieu à de nombreux travaux dont le mémorandum de ZOLTENI <9> en 1973 donne un aperçu. Il reste que, pour les études de balistique intermédiaire comme pour d'autres, les succès espérés étaient, vraisemblablement, disproportionnés au vu des possibilités réelles de la méthode. Pour avoir une idée de la difficulté du problème numérique, il suffit de rappeler ce qui attend le chercheur qui veut traiter, par cette voie, l'intégralité du phénomène d'effet de souffle. Il s'attaque à un écoulement compressible avec ondes de chocs multiples, instationnaire, limité par des parois dont certaines, celles du projectile, se déplacent suivant une loi qui dépend de l'écoulement. On comprend donc que les numériciens se soient intéressés à des aspects particuliers du tir et aient limité leurs ambitions. Dans cette voie, peut-être encore plus qu'ailleurs, la modélisation s'avère nécessaire pour isoler les aspects prépondérants des autres.

En 1975, WORTMAN <10> publie le premier travail connu sur le problème de l'interaction entre le tir des canons aéronautiques et les entrées d'air des avions de combat. Sa démarche préfigure

la nôtre: il parvient à la conclusion qu'il faut élaborer une méthode d'essais en soufflerie et il préconise l'utilisation de la théorie de l'explosion ponctuelle de SEDOV pour fournir un modèle analytique facilement utilisable. Il ne semble pas que ses travaux aient fait l'objet de publications ultérieures, mais il serait hâtif de conclure à un abandon de cette orientation aux USA.

Depuis 1976, les travaux expérimentaux de SCHMIDT, SHEAR, GORDNIER et FANSLER aux Etats Unis <11>, <12> ont mis en évidence l'existence occasionnelle d'un second choc précurseur, ainsi que l'influence de l'existence du précurseur sur la forme de l'onde de bouche.

En Allemagne, KLINGENBERG <13>, <14> et son compatriote MACH de l'ISL développent parallèlement la compréhension des phénomènes et la mise au point de techniques de mesure.

En Angleterre, MABBY et CAPPS <15>, <16> orientent leur recherche sur les problèmes du tir des canons embarqués sur avion.

En France, les travaux de DYMENT, FLODROPS et GRYSOY en 1977 et 1978 <17>, <18> ont été à l'origine de ce mémoire. Ils ont défini une méthode expérimentale et ont permis une excellente description du phénomène.

On l'aura remarqué, depuis 1925 il y a peu de références françaises sur le sujet, mais, paradoxalement, cela a été plutôt un avantage pour nous.

En effet, très influencées par les travaux de SMITH, les publications Anglo-saxonnes récentes sont surtout construites comme des variations sur ce modèle. Cela vient sans doute du fait que les chercheurs américains ou britanniques sont plus des balisticiens que des mécaniciens des fluides. De même, la tradition des balisticiens allemands est prolongée plutôt par des chimistes et des physiciens que par des mécaniciens; le renouveau aéronautique de l'Allemagne laisse cependant poindre une évolution dans ce domaine.

A l'inverse, coupés de toute école de pensée, nous avons observé

le phénomène avec l'oeil neuf de l'aérodynamique: les ressources de la similitude physique <19> et des modèles d'écoulements à similitude interne <20> nous étaient apparemment plus familières. C'est ainsi que nous avons pu maîtriser les lois du phénomène et atteindre un modèle analytique purement théorique de l'onde de bouche.

Pour clore cet historique, il ne nous reste plus qu'à faire le point sur l'actualité des recherches en balistique intermédiaire. Les années 1980 sont marquées par un intérêt considérable pour l'étude des perturbations engendrées par des ondes de choc dans les entrées d'air de réacteurs. Ces chocs peuvent provenir soit d'une explosion extérieure à l'avion, soit du tir des canons. Ce sujet, particulièrement tourné vers l'aérodynamique, est traité par RUTENIK et SMILEY <21> aux Etats Unis, FLODROPS <22> et DESSE <23>, sous l'impulsion de la DRET, en France et, depuis 1984, par PATZ <24> à l'ISL à l'instigation du Ministère de la Défense d'Allemagne Fédérale.

1-2 LES MOYENS DE MESURE

Dans le domaine de la balistique intermédiaire, les enseignements du passé ont consacré deux méthodes expérimentales: la visualisation des écoulements et la mesure des pressions instationnaires.

A l'IMFL, ces deux moyens, rendus complémentaires, ont permis l'analyse d'écoulements complexes, impossible sans cela <25>.

1-2-1 LE SYSTEME DE VISUALISATION ULTRA-RAPIDE

Pour qui ne dispose pas d'instruments d'observation, le tir d'une arme se résume à une source lumineuse et sonore très intense mais

très brève. La photographie classique peut donc fixer cet éclair pour peu que soit résolu le problème technique de la synchronisation.

Les obturateurs mécaniques ne pouvant s'ouvrir assez vite pour une synchronisation acceptable, la solution consiste à tirer en chambre noire afin d'utiliser un objectif ouvert en pause. La photographie obtenue est donc une intégration dans le temps des éclairs lumineux produit par le tir. On en trouve l'illustration dans l'exemple 1 de la figure 1.

Il reste que celui qui veut photographier le projectile ne peut y parvenir de cette manière. En effet, pour fixer l'image du projectile sans flou, il faut un temps de pause très court. Cela exige des films très sensibles, une synchronisation parfaite avec le tir et l'utilisation d'obturateurs électroniques. Ce genre de cliché, qui correspond à l'exemple 2 de la figure 1, est pratiquement sans intérêt scientifique car il ne contient aucune information sur l'écoulement de l'air qui environne le jet de gaz brûlés. L'exemple 3, qui procède de la même technique, révèle pourtant l'existence d'un tel écoulement mais il ne le fait qu'indirectement: l'onde de bouche ne s'y distingue que par sa réflexion sur la surface de la mer.

La lourdeur de la technique et le peu d'informations collectées élimine cette méthode comme outil d'observation expérimental.

La photographie classique n'enregistre que la lumière émise par les gaz brûlés ou réfléchi par le projectile: elle ne permet donc pas l'observation des écoulements aérodynamiques.

En balistique intermédiaire, il faut avoir recours à la méthode des ombres qui consiste à éclairer, par une source extérieure, l'objet étudié et à en photographier les ombres portées. En plus d'avantages techniques sur lesquels nous reviendrons, cette technique de visualisation à l'énorme intérêt de transformer les écoulements aérodynamiques compressibles en objets observables. En effet, les gradients de masse volumique, caractéristiques des

écoulements compressibles, ont la propriété bien connue d'être associés à des gradients d'indice de réfraction capables de dévier notablement les rayons lumineux <26>.

En éclairant, pendant une durée très brève, le voisinage de la bouche d'une arme par un faisceau de rayons lumineux parallèles, on obtient sur un écran l'image ombroscopique du tir. Si, par une optique appropriée, on amène cette image sur l'objectif d'un appareil photo, on réalise un cliché semblable à celui de l'exemple 4 de la figure 1. C'est ainsi que SCHARDIN avait procédé.

Les avantages techniques de l'ombroscopie sont considérables. Elle permet d'obtenir des clichés d'une très grande résolution, car l'énergie lumineuse ne dépend plus du phénomène lui-même comme dans le cas de l'exemple 1, ni du temps de pause comme dans l'exemple 2, mais de la source. Si l'on dispose d'un éclair suffisamment bref et puissant, on peut donc utiliser un film à haute résolution, insensible à la lueur du tir, et un objectif sans obturateur, à la seule condition de faire les essais en chambre noire.

Remarquable par sa simplicité de mise en oeuvre, cette technique permet, de plus, d'obtenir une visualisation très fine des ondes de choc, zones de gradients de masse volumique très intenses, du jet de gaz brûlés et même du projectile. Elle s'avère plus intéressante, pour l'étude du tir, que son perfectionnement, la strioscopie <26>, qui permet la visualisation de gradients moins intenses (exemple 5) mais qui, de ce fait, est trop sensible pour l'observation du tir d'arme.

On aurait garde d'oublier que le tir est un phénomène très rapidement variable. Une seule visualisation ne suffit donc pas à le décrire. C'est à une véritable méthode de cinématographie ombroscopique qu'il faut avoir recours pour parvenir à une description satisfaisante. C'est ce que permet de réaliser le système "chronoloupes" utilisé à l'IMFL <27>.

Il s'agit d'un dispositif de CRANZ-SCHARDIN à 24 éclateurs (figure 2) constitués chacun d'un condensateur et d'une source-éclair. Chaque éclair a une durée de l'ordre de 100 ns. L'intervalle de temps Δt entre deux éclairs successifs est réglable de façon continue de 100 ns à 1 seconde. Au cours d'un essai, les $23\Delta t$ sont identiques.

Une électronique de commande (figure 2) permet le réglage de Δt et le déclenchement du train d'éclairs, obtenu soit manuellement soit par une impulsion externe. Cette dernière possibilité est essentielle pour la synchronisation du tir et des visualisations car il permet la transmission aux chronoloupes d'un signal caractéristique de la mise à feu. Une ligne de retard incorporée à l'électronique de commande facilite cette synchronisation grâce à l'affichage d'un délai réglable compris entre 100 ns et 1 seconde entre l'arrivée du signal de déclenchement et le premier éclair.

En dehors des miroirs qui déterminent les trajets optiques, le système comporte encore un boîtier récepteur équipé de 24 objectifs dépourvus d'obturateurs qui constitue l'appareil photographique du système (figure 2).

La face avant de la batterie d'éclateurs est située dans le plan focal d'un miroir sphérique de 400mm de diamètre et de 3.73 m de distance focale; chaque éclair est donc transformé en un faisceau de lumière parallèle. Du fait que les éclateurs ne sont pas situés rigoureusement au foyer, chaque faisceau est légèrement incliné par rapport à l'axe optique du miroir. Après avoir traversé la zone d'expérience suivant un axe sensiblement normal aux hublots, le faisceau parallèle est focalisé sur le récepteur par un miroir identique au premier. Les faisceaux, ayant une inclinaison différente, focalisent chacun sur un objectif distinct. A chaque éclair correspond ainsi un objectif différent ce qui évite l'existence de toute pièce mobile.

En laboratoire, la valeur de la distance focale des miroirs sphériques interdit leur montage en vis-à-vis pour des raisons

d'encombrement. On a alors recours à deux miroirs plan de renvoi pour aboutir à la configuration de la figure 3.

La figure 4 montre le montage en vis-à-vis utilisé autour d'un canon de 30 mm dans un polygone d'essais suffisamment vaste.

Après réglage de la mise au point par positionnement de la face arrière du boîtier récepteur, on obtient les 24 images sur une même plaque photographique. La figure 5 montre le résultat obtenu pour le tir d'une carabine de 5.56 mm de calibre. Le champ optique est limité, dans ce cas, par les hublots de l'installation expérimentale. Par contre, avec le dispositif de la figure 4, le champ optique est conditionné par la taille des miroirs; la figure 6 montre le résultat obtenu. La forme lenticulaire des images provient de l'inclinaison des faisceaux par rapport à l'axe optique des miroirs, le second miroir coupant d'autant plus le faisceau parallèle que celui-ci est issu d'un éclateur plus éloigné du centre de la plaque.

La comparaison des champs optiques des figures 5 et 6, montre la difficulté des visualisations sur les armes de gros calibre. Seuls des miroirs de très grand diamètre, et donc de coût exorbitant, peuvent fournir une image de l'écoulement dans son ensemble. Cette remarque, à elle seule, est une justification suffisante pour l'étude de la similitude d'un tir de gros calibre avec celui d'un petit calibre.

Cependant, pour réaliser cette étude, il a bien fallu obtenir une image satisfaisante de l'écoulement consécutif au tir d'un canon. Pour l'application des règles de similitude au problème de l'interaction tir canon-entrée d'air, le choix s'est porté sur un canon aéronautique de 30mm de calibre.

Ne pouvant obtenir le champ en une fois, nous avons dû le balayer en déplaçant le dispositif sur des rails, tant verticalement qu'horizontalement. Une telle méthode n'a été rendue possible que par la remarquable répétitivité des tirs.

La figure 7 montre la position des fenêtres de visualisation

constituant le champ optique global. L'usage d'un réticule permet le recalage des positions les unes par rapport aux autres lors du dépouillement. Il est évident que la précision de celui-ci est beaucoup plus faible dans ce cas que dans les essais sur des armes de petit calibre en laboratoire. Dans le premier cas, le réticule est situé dans l'écoulement et il peut bouger légèrement sous l'effet du souffle, alors qu'en laboratoire, il est peint sur les hublots. De plus, la juxtaposition des différents champs partiels favorise l'accumulation des erreurs de parallaxe.

Cette parallaxe est l'inconvénient majeur des chronoloupes, mais il faut l'accepter en échange de la simplicité du système qui est conçu pour que les trajets optiques des différents faisceaux soient distincts. L'absence de pièce mobile et la possibilité d'utiliser une plaque photographique unique, révélable en cours d'essais, sont les avantages qui découlent de cette conception. En contre-partie, il est vrai que le phénomène est vu par chaque objectif sous un angle légèrement différent. Cette erreur est mesurable, sa correction a été prévue dans les programmes de dépouillement, mais elle est moins précise lorsque le champ optique est reconstitué comme dans le cas du canon de 30 mm.

Il convient d'attirer l'attention sur le peu d'importance que revêt l'erreur de parallaxe si l'on se limite à visualiser qualitativement le phénomène. Cette erreur n'est pas discernable sans un instrument de mesure précis, comme le prouve l'examen de la figure 5.

C'est donc parce que les visualisations sont utilisées comme méthode de mesure que la parallaxe est prise en compte. Grâce à un analyseur de film, il est possible de relever précisément la position des chocs, celle des interfaces air-gaz brûlés ou du projectile. Le caractère ultra-rapide de ces visualisations permet d'obtenir les temps et les vitesses d'évolutions des phénomènes. C'est pourquoi, le système chronoloupe doit être considéré non seulement comme un outil d'observation mais aussi comme un véritable instrument de mesure. Son rôle dans

l'exécution des recherches exposées ici est fondamentale.

1-2-2 LA MESURE DES PRESSIONS INSTATIONNAIRES

La figure 8 présente un schéma de principe de la chaîne de mesure utilisée lors des essais. On remarque que les informations recueillies par cette chaîne ont une triple origine: l'arme elle même, le champ environnant et le système de visualisation. Cela correspond à une triple finalité: la mesure des pressions instationnaires, la corrélation des visualisations avec les enregistrements de pressions et la synchronisation du tir avec les visualisations.

Sur l'arme, on place une jauge extensométrique qui détecte la dilatation du tube lors du passage du projectile. Le signal émis par cette jauge est transmis à l'électronique de commande des chronoloupes sur la ligne de déclenchement. Il suffit d'évaluer le temps que met le projectile pour parcourir la distance de la jauge à la bouche pour avoir la valeur du retard à afficher. Pour la mesure de la pression de bouche, un capteur piézo-capacitif a été placé en membrane affleurante. Nous reviendrons sur l'utilité de cette mesure et sur ses difficultés dans le chapitre 2; signalons simplement ici que le signal de ce capteur peut servir au déclenchement des chronoloupes, moyennant l'affichage d'un retard nul, et qu'il permet, au dépouillement, de détecter le moment où le culot du projectile débouche le canon.

Des capteurs de pressions instationnaires piézo-résistifs placés en membrane affleurante équipent les maquettes placées dans le champ voisin de l'arme.

Les différents capteurs ou jauges sont alimentés et conditionnés par une électronique appropriée. Les signaux qui en sont issus parviennent à un enregistreur magnétique analogique de 80 khz de

bande passante.

Le signal émis par le premier éclateur des chronoloupes est enregistré également. On obtient ainsi une synchronisation entre les ombroscopies et les enregistrements de pression .

Grâce à cette complémentarité des deux méthodes nous disposons, en premier lieu, d'une mesure redondante du temps d'arrivée des ondes sur les capteurs. Il est donc possible d'associer à une onde visualisée, ou au passage du projectile, sa "signature" dans le signal de pression. On perçoit, de ce fait, la puissance de cette utilisation parallèle des deux méthodes pour l'analyse du phénomène.

Le dépouillement des bandes magnétiques est effectué numériquement après une conversion analogique-digitale déclenchée sur le signal de la jauge extensométrique qui n'est enregistré qu'à cette fin.

1-3 DESCRIPTION DU PHENOMENE

L'écoulement consécutif au tir d'une arme dans une atmosphère infinie au repos a déjà été décrit qualitativement dans <2>, <11>, <28> mais, à notre connaissance, ce n'est qu'en 1977 que son observation a atteint la précision que permet la méthode de visualisation utilisée lors de nos recherches <17>.

Nous commencerons par exposer les grandes lignes du phénomène, puis nous signalerons quelques aspects particuliers, avant de mettre en évidence l'écoulement de base que nous appellerons tir idéal.

1-3-1 TIR EN ATMOSPHERE INFINIE AU REPOS

Dans ce paragraphe, il est fait référence aux figures 9 et 10. La

première donne une idée du déplacement du projectile et de la propagation, sur l'axe de tir, des ondes ou des surfaces de contact. La seconde montre les visualisations obtenues lors du tir d'une carabine de calibre de 5,56 mm. Ce choix ne restreint pas la généralité de la description qui reste valable pour un canon de 30 mm ou un fusil de 7.62 mm; nous en fixerons, du reste, les limites au paragraphe 1-3-4. C'est la qualité des visualisations, toujours meilleures pour les armes de petit calibre, comme nous l'avons expliqué au paragraphe 1-2-1, qui nous a déterminé à présenter ce cas en guise d'illustration.

A la suite de la mise à feu, la combustion de la poudre produit une rapide montée en pression qui met le projectile en mouvement. Celui-ci comprime l'air contenu dans le canon, qui se comporte sensiblement comme un tube à choc. Dans l'approximation du mouvement à une dimension, cette phase correspond à un écoulement par ondes simples avec formation presque instantanée d'une onde de choc (figure 9, instant t_1).

Après avoir atteint la bouche, cette onde de choc, appelée "précurseur", progresse dans l'atmosphère extérieure en devenant quasi-sphérique et en s'atténuant au fur et à mesure de sa progression (figure 10, photos 1 à 6).

Dans le tube, la vitesse de l'air comprimée qui se trouve entre le choc et le projectile peut être, en théorie, subsonique ou supersonique selon la valeur de la vitesse du piston. Pour les armes usuelles, on peut considérer que le projectile atteint une vitesse constante V_p après avoir parcouru environ 1/3 de la longueur de tube <29>, <30>, <31>. Si l'on exclut les armes de poing, à canon court, on peut admettre que V_p est toujours comprise entre 500 et 1200 m/s <32>, c'est-à-dire toujours supérieure à 1.5 fois la valeur de \bar{c} , vitesse du son de l'atmosphère extérieure. Pour le tir présenté sur la figure 10, la vitesse V_p est voisine de 940 m/s.

Grâce à la théorie monodimensionnelle du tube à choc, on peut estimer la vitesse de l'air comprimé dans le tube. Dans le cas

limite d'une mise en mouvement instantanée à la vitesse V_p constante, on a <33>:

$$\gamma^2 \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \sigma + 1 \right) V_p^2 = \bar{c}^2 \sigma^2; \quad \gamma^2 (\sigma + 1) \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \sigma + 1 \right) M_T^2 = \sigma^2$$

où M_T est le nombre de Mach de l'air comprimé dans le tube entre le choc et le projectile, et $(\sigma + 1)$ le rapport des pressions à la traversée du choc. Pour $\gamma = 1.4$, le calcul montre que M_T est supérieur à 1 si V_p est supérieure à $1.33 \bar{c}$. Etant données les valeurs usuelles de V_p et de \bar{c} , l'écoulement de l'air derrière le choc est toujours supersonique. De ce fait, il n'y a pas de réflexion à la bouche.

Dès que le précurseur est sorti du canon, l'air comprimé se détend à l'extérieur. A cause du niveau élevé de la pression dans le tube, la détente est très intense et les frontières du jet très divergentes. Les caractéristiques qui se réfléchissent sur la frontière du jet convergent et forment une onde de choc qui ne peut pas présenter de réflexion régulière sur l'axe. On observe alors un phénomène de Mach: la partie du choc, en forme de calotte sphérique, qui est normale à l'axe est appelée "disque de Mach" (figure 9, instant t_2 ; figure 10, photos 2 à 6). Autour de ce disque se développe un tourbillon torique qui est alimenté par le jet. Ce tourbillon est provoqué par l'existence d'une ligne de glissement séparant les particules fluides lentes qui ont traversé le disque de Mach et celles, plus rapides, qui ont traversé le choc latéral. Cette ligne de glissement correspond également à une forte discontinuité de rotationnel entre la zone en aval du disque de Mach (où le rotationnel est sensiblement constant) et le domaine des particules ayant traversé le choc latéral (où le rotationnel varie continûment).

Lorsque le nez du projectile arrive à la bouche, le jet disparaît mais le tourbillon persiste (figure 10, photos 5 et 6). Les premiers gaz brûlés résultant de la combustion de la poudre, jaillissent dès que le culot du projectile a franchi la bouche. Ils forment également un jet surdétendu (figure 10, photos 7 et

suivantes). On observe que la surface de contact entre l'air et les gaz brûlés progresse d'abord plus vite que le projectile et le dépasse (figure 9, instant t_3 ; figure 10 photos 8 et 9). Le déplacement de cette surface engendre une onde très intense, dite "onde de bouche" ou "onde de souffle", qui commence à se former sur les côtés du jet (photo 7). Sur l'axe de tir, le tourbillon d'air comprimé s'alimente de gaz brûlés et retarde la formation de l'onde de bouche. Ce n'est que lorsque ce tourbillon est chassé vers l'avant par le jet de gaz brûlés que l'onde de bouche se ferme sur l'axe (photos 8 et 9). Il s'ensuit que cette onde a une géométrie relativement anisotrope et que l'écoulement de l'air qui la sépare de la surface de contact air-gaz brûlés contient des ondes de choc, dites "chocs internes" (figure 10, photo 10 à 18). La forme géométrique de la surface de contact est également très anisotrope. A l'intérieur de cette surface, le jet de gaz brûlés tend à adopter la même structure que le jet d'air comprimé lié au précurseur mais, pour y parvenir, il doit d'abord absorber le tourbillon précurseur. Ce processus est relativement long (figure 10, photos 8 à 21).

L'onde de souffle, très intense au départ, rattrape le précurseur qui s'est affaibli au point de devenir une onde acoustique (figure 9, instant t_3); puis, perdant elle aussi de son intensité, elle ralentit sa progression et se fait rattraper (instant t_4) et dépasser (instant t_5) par le projectile dont la vitesse reste constante et égale à V_p (figure 10, photos 8 à 12). Peu perturbée par le sillage du projectile, l'onde de bouche tend à devenir de plus en plus sphérique au fur et à mesure qu'elle s'éloigne de la surface de contact air-gaz. Le jet de gaz brûlés se comporte de moins en moins en piston et de plus en plus comme un jet stationnaire dans une atmosphère au repos (photo 20 à 24). Les chocs internes s'atténuent et disparaissent, puis l'onde de bouche finit en onde acoustique comme le précurseur, à la différence que cela se produit à une distance de la bouche de l'ordre de 100 fois le calibre D. Si l'on convient d'appeler "voisinage de la bouche" une sphère centrée sur la bouche et de

rayon égal à $100.D$, on peut dire que la balistique intermédiaire est essentiellement l'étude du développement d'une onde de choc intense et instationnaire: l'onde de bouche.

A la fin de la vidange des gaz brûlés, il ne reste, au voisinage de la bouche que le tourbillon torique des gaz brûlés qu'avait pu photographier ESCLANGON <1>.

Bien entendu, les caractéristiques du tir en atmosphère infinie, dépendent de nombreux paramètres, mais dans tous les cas et pour le type d'armes considéré, on retrouve les phénomènes décrits précédemment. Seuls peuvent changer les intensités relatives des chocs ou les durées caractéristiques de chaque phase.

Il peut cependant venir s'y greffer quelques phénomènes parasites.

1-3-2 LE SECOND PRECURSEUR, LA DEUXIEME ONDE DE BOUCHE

La figure 11 présente succinctement une variante de la description précédente. Elle se distingue par l'existence d'un "second précurseur" qui coïncide à peu près avec le débouchage du tube. En fait, la nature physique de cette onde la rapproche plus de l'onde de bouche que du précurseur. En effet ce second précurseur ne se forme pas dans le tube mais à l'extérieur; il est engendré non par l'air comprimé mais par un jet de gaz brûlés qui précède le débouchage du canon. Ce jet de gaz provient de fuites qui se produisent entre le projectile et l'intérieur du tube. Ce phénomène survient principalement lorsque les rayures intérieures au tube sont suffisamment profondes. C'est souvent le cas des canons de très gros calibre. Cependant, nous avons pu l'obtenir avec une arme expérimentale de calibre 5.56 mm fournie par l'ETBS <34>. Les rayures de cette arme étaient plus accentuées que celles des autres carabines que nous avons utilisées.

Il convient de rappeler que les rayures forment des spirales d'axées sur l'axe de tir et destinées à communiquer au projectile

un mouvement de rotation le stabilisant par effet gyroscopique. Ainsi, ces rayures arrivent jusqu'à la bouche qui n'a donc pas exactement la forme d'un disque mais plutôt celle d'un engrenage à larges crans. Dans la plupart des cas, ces rayures constituent des canaux trop petits et trop longs pour permettre des fuites.

Lorsqu'il existe, le jet de fuite a pour effet principal, outre d'engendrer le second précurseur, de renforcer le tourbillon torique dû au jet du premier précurseur. Il influence ainsi le temps de fermeture de l'onde de bouche sur l'axe. On remarque, sur la figure 11, que l'onde de bouche a eu plus de temps que dans le cas classique de la figure 10 pour se développer latéralement avant de se fermer sur l'axe ($t=60 \mu s$). Il en résulte que, dans ce cas, l'onde de bouche effecte la forme d'une poire.

La littérature scientifique met en évidence, pour sa part, l'existence occasionnelle d'une seconde onde de bouche due, semble-t-il, au réallumage brutal des gaz de poudre dans l'atmosphère ambiante <35>, <36>. Ce phénomène a lieu vers la fin de la vidange du tube et il dépend essentiellement de la nature chimique des poudres. Nous ne l'avons jamais observé dans nos essais, mais il se rencontre parfois sur des canons de très gros calibres. La solution à ce problème étant plutôt de nature chimique que mécanique, nous ne le traiterons pas dans ce mémoire.

1-3-3 LE PROJECTILE

La description du paragraphe 1-3-1 montre que le projectile affecte peu le développement de l'onde de bouche. En effet, ce n'est pas lui qui en retarde la formation sur l'axe puisque les gaz brûlés n'ont aucune peine à le contourner. Il ne crée pas non plus de grosses perturbations à la traversée de l'onde ou par son sillage. A l'inverse, l'effet de souffle dans son ensemble

n'affecte absolument pas le comportement du projectile. Ainsi, le ballisticien négligera totalement l'effet de souffle dans son étude du comportement du projectile. Il est donc tentant, pour l'aérodynamicien, de négliger, à l'inverse, les effets du projectile sur l'effet de souffle. Mais il serait absurde de ne pas utiliser la puissance de nos moyens d'observation pour étayer cette attitude.

Dans sa traversée du système complexe d'ondes et de jets, le projectile va rencontrer des écoulements très différents. De plus, en fonction des caractéristiques des armes ou du milieu extérieur, les diverses phases du tir peuvent être plus ou moins longues et d'intensités inégales. Le tir de la figure 10 ne présente donc pas tous les cas possibles d'interaction entre le projectile et l'effet de souffle. Au cours de nos recherches nous avons été amenés à étudier de nombreux cas physiques, nous avons pu ainsi sélectionner les phases les plus caractéristiques des comportements possibles du projectile (figure 12).

La première photo présente le projectile juste après le débouchage du canon. On constate que la vitesse relative des gaz brûlés est supersonique par rapport au projectile. Cela explique la présence d'une onde de choc au culot. Dans cette phase, que nous avons observée dans tous nos essais, le projectile est encore propulsé.

La seconde photo montre l'interaction du projectile avec le disque de Mach en cours de formation. Le cas présenté est parmi les plus sévères que l'on puisse rencontrer: en effet, si le tir est moins puissant que celui de la photo, le disque de Mach se forme après le passage du projectile, souvent à partir de l'onde de culot, et dans ce cas l'établissement du jet peut être considéré comme indépendant du passage du projectile. Dans notre cas, les gaz ont contourné le projectile et formé un disque de Mach qui va être traversé par la balle encore suivie de son choc de culot. L'écoulement est, localement, très différent de celui d'un jet libre, pourtant cela n'affecte ni l'onde de bouche, ni

la frontière air-gaz.

Après la traversée du disque de Mach, la balle ou l'obus, se trouve à l'intérieur de gaz recomprimés et très chauds dont la vitesse du son est du même ordre de grandeur que V_p . L'écoulement relatif change de sens et le projectile commence donc à traîner. D'abord subsonique (photo 3), l'écoulement relatif devient transsonique avec la détente progressive des gaz au cours du temps. On distingue, sur la photo 4, les chocs caractéristiques d'un régime transsonique. Cette dernière phase ne s'observe que pour des tirs très puissants. Dans les autres cas, la densité des gaz et la brièveté du phénomène ne nous ont pas permis de la saisir. Quoi qu'il en soit, ni l'onde de bouche ni la surface de contact ne semblent en subir les effets.

Emergeant enfin des gaz brûlés, le projectile pénètre, si l'onde de bouche est déjà formée, dans l'air comprimé entre la surface de contact et l'onde de bouche. Les dimensions de cette zone à cet instant sont de l'ordre de grandeur de la longueur du projectile: on peut donc assimiler cette phase avec la traversée de l'onde de bouche illustrée par la photo 5. Le nez de la balle est nettement supersonique par rapport au milieu extérieur non perturbé, il semble que le culot le soit aussi par rapport à l'écoulement d'air intérieur à l'onde. On constate donc que le champ aérodynamique local est des plus complexes. Cependant l'interaction reste très localisée autour de l'axe de tir.

Elle est encore moins sensible, lorsque le projectile traverse l'onde de bouche juste après sa formation (photo 6).

Enfin, lorsque le projectile précède l'onde de bouche, les ondes balistiques qui lui sont attachées viennent modifier le milieu extérieur (photo 7). On observe alors un léger ralentissement de la progression de l'onde de bouche sur l'axe de tir, mais les ondes balistiques s'amortissent rapidement et le projectile s'éloigne: le ralentissement n'est donc que passager. Il sera à terme compensé par une légère modification de la forme de l'onde

de bouche au voisinage de l'axe de tir.

Si le tir a lieu en présence d'un obstacle, on peut placer un capteur de pression sur une paroi proche de l'axe de tir. On peut alors enregistrer, dans une configuration identique à celle de la photo 7, le passage du projectile puis celui de l'onde de bouche. On constate (schéma 8 de la figure 12) que la signature en N caractéristique des ondes balistiques, n'atteint pas l'intensité de celle de l'onde de bouche dont la caractéristique principale est une forte surpression suivie d'une rapide dépression dont le minimum est inférieur à la pression ambiante.

En conclusion, il apparaît que le projectile constitue pour l'onde de bouche une perturbation locale, incapable de modifier globalement et durablement l'effet de souffle. Il est donc légitime de ne pas en tenir compte dans une schématisation physique de l'aérodynamique du tir. Il est clair, d'autre part, qu'un calcul de l'effet de souffle qui voudrait tenir compte du projectile, devrait rendre compte de la multiplicité des écoulements que celui-ci traverse, et cela pour un résultat qui est négligeable. Une modélisation théorique raisonnable de l'effet de souffle peut donc faire abstraction du projectile.

1-3-4 TIR A ONDE DE BOUCHE FAIBLE

Pour mieux fixer les limites des descriptions précédentes il convient de cerner l'importance relative des différentes phases. Dans tous les cas que nous avons présentés, le phénomène prépondérant, du point de vue aérodynamique, est l'onde de bouche. Quels que soient les processus de formation de cette onde, elle parvient toujours à absorber les phénomènes précurseurs. Cela est vrai pour toutes les armes à feu classiques: canons, fusils ou carabines. Ces armes ont pour fonction de propulser, à des vitesses supersoniques, des projectiles relativement lourds. Comme on désire que la mise en vitesse soit très rapide, on doit libérer une grande énergie en

un temps minimal. Malheureusement, le rendement énergétique des armes à feu n'est pas suffisant pour transformer toute l'énergie de la munition en travail mécanique de propulsion du projectile. L'énergie restante est dissipée par l'effet de souffle; l'onde de bouche est donc d'autant plus violente que cette énergie est grande.

Supposons maintenant qu'il ne s'agisse plus de propulser une balle ou un obus à grande vitesse, mais un projectile léger et que, de plus, on s'attache plus à la précision du tir qu'à sa portée. Il est évident que l'on n'a pas besoin d'une énergie équivalente à celle du cas précédent, et, par conséquent, l'arme conçue dans ce but ne produira qu'une onde de bouche faible.

Mais qu'advient-il alors des phénomènes précurseurs qui sont principalement liés au volume d'air contenu dans le tube avant le tir ?

A volume égal, il n'y a aucune raison pour qu'ils soient atténués parce que l'énergie de l'onde de bouche est faible; tout au plus, si l'accélération initiale du projectile reste petite, il changeront de nature.

En effet, si l'on reprend le modèle des ondes simples, on sait que, si l'accélération cesse suffisamment rapidement, les caractéristiques rectilignes n'ont pas le temps de former une enveloppe avant d'avoir atteint la bouche; il ne se forme donc pas de choc. Le jet précurseur est subsonique.

Dans le processus décrit ci-dessus les temps caractéristiques des phénomènes précurseurs et de l'onde de bouche sont du même ordre. L'onde de bouche ne peut donc absorber les autres phénomènes et être considérée comme prédominante.

Pour réaliser un tel tir nous avons choisi un pistolet de précision de calibre 4 mm. Le projectile est un plomb et le gaz propulsif est du dioxyde de carbone comprimé. L'ombroscopie n'étant pas, dans ce cas, assez sensible pour une bonne observation du phénomène, nous avons eu recours à une méthode expérimentale récemment mise au point par DESSE <37>:

l'interférométrie différentielle ultra-rapide.

Sur la figure 13, on peut constater l'existence du jet précurseur subsonique et remarquer qu'il est générateur d'ondes acoustiques. L'onde de bouche apparaît après le débouchage du canon et l'interférométrie permet d'apprécier son anisotropie. Mais malgré sa plus forte intensité sur l'axe de tir, l'onde de bouche ne parvient pas à combler son retard sur les deux ondes acoustiques qui la précèdent. Le jet de gaz carbonique est à peine détendu, ce qui caractérise une faible pression de bouche, et, de ce fait, le projectile n'est jamais dépassé par les gaz propulsifs.

Il faut retenir de ce qui précède que la nature d'un tir de canon est très différente de celle du tir d'une arme du type précédent. On ne peut pas simuler à échelle réduite le tir d'une arme à feu de gros ou moyen calibre avec n'importe quelle arme de faible calibre.

Dans la suite nous nous limiterons donc aux armes à feu propulsant des balles ou des obus à des vitesses supersoniques.

1-3-5 TIR EN PRESENCE D'UN OBSTACLE

L'onde de choc de bouche est, au départ, très violente. Il en découle qu'un obstacle placé au voisinage de la bouche subit des efforts aussi intenses que brefs, et qu'il modifie profondément l'écoulement. En guise d'exemple, nous présentons, sur la figure 14, l'interaction entre le tir d'une carabine de calibre 5.56 mm et une entrée d'air bidimensionnelle placée sans incidence dans un écoulement subsonique.

La présence de l'obstacle détruit le caractère axisymétrique du tir dès que le précurseur a atteint la paroi extérieure de l'entrée d'air (photo 2). La réflexion du précurseur ne produit pas d'effet notable. Par contre, les réflexions, sur cette paroi, du choc latéral lié au jet de gaz brûlés sont importantes. Le piston que constitue la surface de contact est déformé par la

présence de la plaque: l'onde de bouche prend donc une forme qui dépend de la géométrie de l'obstacle. A cause de l'obstruction provoquée par la présence de la plaque (photo 8 et suivantes) les gaz brûlés avancent plus rapidement, mais cette accélération est atténuée par l'existence de l'écoulement extérieur qui tend au contraire à entraîner les gaz vers l'aval. L'onde de bouche contourne le bord d'attaque de la plaque et elle est bientôt suivie des gaz brûlés, ce qui donne naissance à un tourbillon.

L'onde de bouche subit une autre réflexion sur la paroi interne de l'entrée d'air qui pourrait simuler un fuselage (photo 14). Cette réflexion doit être accompagnée d'une interaction violente avec la couche limite turbulente qui existe sur cette paroi. Les gaz de poudre occupent maintenant toute la hauteur du conduit, du moins dans le plan médian (photo 18). Des réflexions successives pénètrent dans l'entrée d'air tandis que l'onde de bouche continue sa progression à l'extérieur. On remarque l'apparition de chocs entre la surface de contact et l'onde de bouche (photo 16 et suivante): il s'agit d'un phénomène parasite dû à la réflexion de l'onde de bouche sur les parois latérales transparentes de la veine d'expériences.

Si l'on observe le jet de gaz brûlés de la photo 8 à la photo 24, on constate qu'il a peu évolué, ce qui incite à penser qu'il a pendant tout le phénomène un comportement quasi-stationnaire.

Sur les dernières photos on peut remarquer que les gaz brûlés ont envahi l'entrée d'air. On observe également la réflexion de l'onde de bouche sur la paroi inférieure de la veine.

On conçoit que l'analyse d'un tel écoulement est très délicate même si l'on dispose de visualisations aussi précises. Le problème est encore plus ardu lorsqu'il s'agit de tirs de gros calibres ou d'essais en vol pour lesquels les moyens expérimentaux font défaut. Il est donc naturel d'entreprendre la recherche en comptant sur les ressources de la similitude physique. Cette démarche permet, en premier lieu, de ramener l'étude de tous les tirs à celle du tir d'armes de petits calibres, plus propices aux visualisations. D'autre part, elle

fournit une méthode à l'analyse phénoménologique. Enfin, elle aboutit à la connaissance de la forme des lois qui relient les conditions physiques au déroulement du phénomène.

Cependant, la détermination complète de ces lois ne peut venir que d'un calcul. La complexité de l'écoulement exige donc un effort de modélisation mathématique pour rendre raisonnable la taille des calculs numériques.

Qu'il s'agisse de l'étude de la similitude ou de la modélisation mathématique, elles nécessitent toutes deux un souci de schématisation de la physique du phénomène.

1-3-6 LE TIR IDEAL

Nous avons vu que l'onde de bouche est, du point de vue aérodynamique, le phénomène prépondérant du tir. Il est donc logique d'imaginer un tir idéal débarrassé de tout phénomène précurseur. Il s'agit en quelque sorte d'un tir où l'onde de souffle est pure, c'est-à-dire entièrement déterminée par le comportement du jet de gaz de poudre.

On peut réaliser un tel tir expérimentalement en éliminant les causes physiques des phénomènes précurseurs. Le premier précurseur et le jet associé étant provoqués par la vidange de l'air contenu dans le canon, il suffit, pour les supprimer, de faire le vide dans le tube avant le tir. Pour cela on ferme le canon par une membrane que le projectile détruira au passage et on aspire, avant le tir, l'air ainsi emprisonné <38>.

On assure l'absence du second précurseur en choisissant une arme pour laquelle il n'existe pas de fuites de gaz brûlés.

La figure 15 montre la visualisation du tir idéal d'une carabine de 7.62 mm de calibre placée dans des conditions de pression et de température standard en l'absence d'obstacle et d'écoulement extérieur.

Il est remarquable de constater que l'onde de bouche idéale est

quasi-sphérique malgré l'anisotropie évidente de l'écoulement qui l'engendre. C'est la confirmation que les phénomènes précurseurs sont bien à l'origine des formes anisotropes observées en atmosphère infinie sur des tirs classiques.

On voit également que le projectile n'a qu'une influence faible et localisée sur l'axe de tir.

Enfin, l'observation du jet de gaz brûlés atteste une nouvelle fois sa stabilité et son aspect quasi-stationnaire.

Avec le tir idéal, nous avons isolé le phénomène prépondérant en éliminant les causes des perturbations observables habituellement. Il s'agit bien sûr d'une schématisation de la réalité, mais le schéma est réalisable expérimentalement.

Nous sommes parvenus au stade où l'analyse phénoménologique ne peut plus être approfondie par la simple observation. Il faut désormais avoir recours aux méthodes que la théorie met à notre disposition et en premier lieu à la similitude physique.

* * * * *
* CHAPITRE 2 *
* * * * *
* THEORIE ET REGLES DE LA SIMILITUDE DE TIR *
* * * * *

CHAPITRE 2

NOTATIONS PRINCIPALES

2-1 TIR EN ATMOSPHERE INFINIE2-1-1 INVENTAIRE DES PARAMETRES PHYSIQUES

2-1-1-1 Le tir idéal

2-1-1-2 Première schématisation du phénomène

2-1-1-3 La phase de formation

2-1-2 THEORIE DE LA SIMILITUDE

2-1-2-1 Choix des grandeurs primaires

2-1-2-2 Conditions de similitude

2-1-3 INSTALLATION D'ESSAIS ET METHODES DE MESURES PARTICULIERES

2-1-3-1 Le caisson de tir

2-1-3-2 La mesure de la pression de bouche

2-1-3-3 La mesure de la température de bouche

2-1-4 VERIFICATION DE LA THEORIE

2-1-4-1 Effet du rapport des températures

2-1-4-2 Effet de la phase de formation

2-1-4-3 Effet des paramètres thermochimiques

2-1-4-4 Justification expérimentale du choix des grandeurs primaires

2-1-4-5 Extension de la similitude après la phase stationnaire

2-2 TIR EN PRESENCE D'UN OBSTACLE

2-2-1 THEORIE DE LA SIMILITUDE

2-2-2 DIFFERENTS TYPES D'INTERACTIONS TIR-OBSTACLE

2-2-2-1 Notion d'éloignement de l'obstacle et de l'arme

2-2-2-2 Obstacles liés à la bouche

2-2-2-3 Obstacles dans le voisinage immédiat de la bouche

2-2-3 EXEMPLES DE REALISATION PRATIQUE DE LA SIMILITUDE

2-2-3-1 Simulation d'un tir canon par une carabine

2-2-3-2 Cas particulier d'une prise d'air

2-2-3-3 Effet de $\frac{\bar{T}}{T_2}$

2-3 CONCLUSION

NOTATIONS PRINCIPALES

- A, B : grandeurs physiques distinctes prises dans l'ensemble (2-12)
- c : célérité du son
- Cq : coefficient de débit de la prise d'air
- D : calibre
- d : distance de la bouche de l'arme à l'obstacle
- H : longueur caractéristique de l'obstacle
- h : enthalpie
- \mathcal{J} : paramètre relatif à l'intensité du tir et défini par la formule (2-25)
- L : longueur intérieure du tube de l'arme
- L^e : longueur extérieure du tube de l'arme
- M : nombre de Mach
- n : nombre de moles spécifique
- O_f : origine des coordonnées (située au centre de la bouche de l'arme)
- O_c : position du culot du projectile dans la chambre de combustion avant la mise à feu

p : pression

\mathcal{P} : paramètre de puissance du tir défini par la formule (2-4)

Q : paramètre de masse du tir défini par la formule (2-4)

Q_m : débit dans une prise d'air

T : température

t : temps

\bar{U} : vitesse du fluide extérieur à l'infini amont

V_p : vitesse du projectile

X : position de l'onde de bouche sur l'axe de tir

X_D : position du disque de Mach sur l'axe de symétrie du jet de gaz brûlés

x_i : coordonnées cartésiennes avec l'origine en O_b
 Ox_1 est l'axe de tir

γ : rapport des chaleurs spécifiques

Δ : diamètre extérieur du canon à la bouche

δ : paramètre d'éloignement de la bouche à l'obstacle défini par la formule (2-45)

ρ : masse volumique

L'indice g est réservé aux grandeurs relatives aux gaz brûlés à la bouche

Les grandeurs relatives aux milieux non perturbés par l'onde de bouche sont surlignées. Celles qui sont affectées de l'indice T concernent l'air au repos dans le tube de l'arme avant le passage du précurseur; celles qui ne possèdent pas d'indice concernent l'écoulement extérieur initial.

Les grandeurs non surlignées affectées de l'indice T correspondent à l'écoulement d'air dans le tube de l'arme après le passage du précurseur.

L'indice p désigne le projectile et l'indice ch la chambre de combustion de l'arme

Les grandeurs relatives à l'arme à simuler sont primées

Les grandeurs étoilées (p_j^* , T_j^* , c_j^*) sont des fonctions du temps, les grandeurs correspondantes non étoilées (p_j , T_j , c_j) sont leurs valeurs pendant la phase stationnaire du tir.

Si nous faisons l'hypothèse que les effets visqueux sont négligeables, le mouvement des gaz brûlés et celui induit dans le milieu extérieur par le jet sont régis par les équations d'Euler, auxquelles il faut adjoindre celles qui expriment la conservation de la masse et de l'énergie. Les deux milieux sont supposés être

débouche le canon.

Nous plaçons l'instant $t=0$ au moment où le culot du projectile paragrache. L'écoulement est supposé axisymétrique suivant Ox. reporterà à la figure 16 pour les notations utilisées dans ce se fonde notre schématisation du phénomène. Le lecteur se apparaître clairement les hypothèses fondamentales sur lesquelles Nous allons donc suivre cette logique qui a l'avantage de faire conditions aux frontières et enfin dans les conditions initiales. équations générales qui régissent le phénomène, puis dans les grandeurs. Elle consiste à les recenser d'abord dans les Il existe une méthode systématique de détermination de ces

l'ensemble des paramètres physiques conditionnant le tir idéal. relatives au jet de gaz brûlés, on obtient du même coup grandeurs constantes qui déterminent toutes les variables poudre. Cela signifie que, si l'on sait faire l'inventaire des entièrement déterminé par le comportement du jet de gaz de Nous avons déjà indiqué au paragraphe 1-3-6, que le tir idéal est

2-1-1-1 Le tir idéal

2-1-1 INVENTAIRE DES PARAMETRES PHYSIQUES

Rappelons que nous désignons ainsi les tirs dont le voisinage de la bouche ne contient pas d'autres obstacles que le projectile et le canon de l'arme elle-même.

2-1 TIR EN ATMOSPHERE INFINIE

des gaz parfaits, non pesants; les équations précédentes ne contiennent donc que deux constantes fondamentales: γ et γ_g . Si l'on veut traiter le problème sous un aspect purement mécanique, la donnée de γ est suffisante, mais si l'on cherche également à connaître l'évolution de la température, il faut adjoindre aux lois de conservation l'équation d'état du gaz. Pour un gaz parfait, il faut donc inclure dans l'inventaire la constante du gaz ou, ce qui revient au même, le nombre de moles spécifique n .

En considérant a priori les gaz brûlés comme un gaz parfait, on s'affranchit des considérations thermodynamiques relatives à leur état physico-chimique. En fait, il s'agit d'une simplification qu'il faudra justifier par la suite. Nous pouvons cependant dès maintenant fixer le cadre du problème thermodynamique et la manière de l'aborder.

L'hypothèse précédente, selon laquelle les gaz brûlés constituent un gaz parfait, revient à les considérer comme figés dans leur composition; en d'autres termes, les temps caractéristiques des réactions chimiques à la bouche sont beaucoup plus longs que ceux des évolutions mécaniques. L'hypothèse opposée, où ce sont les réactions chimiques qui sont les plus rapides, a été étudiée dans la référence <19> sous son aspect théorique; il y est démontré que toutes les conclusions obtenues avec l'hypothèse du gaz parfait se conservent avec celle de l'équilibre chimique, envisagée ici, à la condition de remplacer γ_g par un ensemble de 5 paramètres thermochimiques $\{G\}$.

Entre les deux cas extrêmes précédents se placent, bien entendu, tous les écoulements avec relaxation où les temps caractéristiques des évolutions mécaniques et des réactions chimiques sont du même ordre de grandeur. C'est sans doute le cas des jets de gaz brûlés rencontrés dans notre étude. Nous ne disposons alors d'aucune justification théorique pour valider notre simplification.

Comme il est évidemment peu envisageable de réaliser la similitude entre ces paramètres thermochimiques qui ne sont pas toujours mesurables (cas de l'équilibre chimique) ou, pire, même pas identifiés (cas de l'écoulement relaxé), nous nous sommes limités à étudier l'influence du choix de la poudre et de ses conditions de combustion. S'il s'avère que ce choix est indifférent, le problème de la nature des gaz de poudre est résolu. En effet, cela signifie que seules les évolutions mécaniques à la bouche ont une importance pour l'effet de souffle. Si tel est le cas, on peut découpler les effets chimiques et les effets mécaniques et considérer les gaz brûlés comme barotropes. Les réactions chimiques n'interviennent plus que sur les échanges de chaleur et la composition du gaz peut être supposée figée.

Ces problèmes thermodynamiques rendraient l'étude impossible si les caractéristiques thermochimiques des poudres étudiées étaient très différentes. En fait, les observations ont montré, comme nous l'espérons plus haut et comme nous le verrons au paragraphe 2-1-4-3, que, dans la limite des cas étudiés, la nature de la poudre n'influe pas sur le phénomène, attestant par là même d'une grande identité des valeurs des paramètres thermochimiques d'une poudre à l'autre, notamment pour n , nombre de moles spécifique des gaz de poudre, grandeur indispensable pour calculer la vitesse du son c_g à partir de la mesure de la température T_g .

Dans la suite du texte nous caractériserons la poudre que par γ_g seul, en sachant que cette simplification d'écriture n'est possible que parce que le problème mécanique n'est pas influencé par les aspects thermochimiques et que les valeurs de n sont très voisines d'une poudre à l'autre.

Traisons maintenant des conditions aux frontières. Les gaz étant non visqueux, celles-ci se traduisent par des conditions de glissement sur le canon et le projectile. En supposant l'axe de tir confondu avec Ox , l'assiette et le dérapage du projectile

négligeables et en tenant compte du fait que V_p est constante, on peut définir le projectile de la manière suivante:

$$(2-1) \quad 0 < r < \frac{D}{2} \text{ pour } x = V_p t, \text{ et } r = r_p(x) \text{ pour } V_p t < x < V_p t + L_p$$

Cette condition, exprimée à $t=0$, fournira une des conditions initiales.

La condition de glissement sur le canon s'écrit sur la surface définie par:

$$(2-2) \quad \frac{D}{2} < r < \frac{\Delta}{2} \text{ pour } x=0 \quad \text{et} \quad r = r_A(x) \text{ pour } -L^e < x < 0$$

où L^e est la longueur totale du canon de l'arme en projection sur Ox . On élimine a priori l'étude de l'interaction du tir avec la partie arrière de l'arme (culasse, châssis, etc...) car il s'agit là d'un obstacle au sens de la partie 2-2 de ce chapitre et qui viendrait détruire l'axisymétrie de l'écoulement.

Il reste à définir les conditions à la bouche de l'arme définie par:

$$(2-3) \quad 0 < r < \frac{D}{2} \text{ pour } x=0$$

Il s'agit ici d'exprimer les débits de masse, de quantité de mouvement et d'énergie à la bouche. Comme les effets visqueux sont négligés, on peut considérer la vidange du canon comme monodimensionnelle et exprimer les débits de la manière suivante:

$$(2-4-1) \quad \rho_g^* c_g^* M_g^* \frac{\pi D^2}{4} = \gamma_g \frac{p_g^*}{c_g^*} M_g^* \frac{\pi D^2}{4}$$

$$(2-4-2) \quad (\rho_g^* c_g^{*2} M_g^{*2} + p_g^*) \frac{\pi D^2}{4} = (\gamma_g M_g^{*2} + 1) p_g^* \frac{\pi D^2}{4}$$

$$(2-4-3) \quad \left(h_g^* + c_g^* \frac{M_g^{*2}}{2} \right) \rho_g^* c_g^* M_g^* \frac{\pi D^2}{4} = \frac{2 + (\gamma_g + 1) M_g^{*2}}{2(\gamma_g - 1)} \gamma_g p_g^* c_g^* M_g^* \frac{\pi D^2}{4}$$

où toutes les grandeurs étoilées sont des fonctions du temps. On remarque que les débits sont caractérisés par les paramètres suivants: γ_g , M_g^* , c_g^* , $P_g^* D^2$. On peut remplacer c_g^* et $P_g^* D^2$ par $\mathcal{P}^* = c_g^* p_g^* D^2$ et $Q^* = D^2 p_g^* / c_g^*$, représentatives de la puissance et du débit masse.

Traisons maintenant des conditions initiales. Dans le cas du tir idéal, le milieu extérieur est, avant l'arrivée du projectile, un écoulement uniforme. Il est donc caractérisé par \bar{p} , $\bar{\rho}$, \bar{U} , et par γ qui a déjà été recensé lors de l'étude des équations générales. L'émergence à la bouche du nez du projectile vient perturber localement ce milieu avant l'instant $t=0$. L'état initial du milieu extérieur dépend donc en toute rigueur de la condition de glissement sur le projectile à l'instant $t=0$. Enfin rappelons que la valeur initiale des débits (2-4) est déjà prise en compte implicitement puisque ces derniers sont considérés comme fonctions du temps.

En résumé, nous avons obtenu l'ensemble suivant:

$$(2-5) \quad \gamma, \gamma_g, \bar{p}, \bar{\rho}, \bar{U}, V_p, M_g^*, A^*, B^*, D, \Delta, L^c, L_p$$

où A^* et B^* sont deux grandeurs quelconques de l'ensemble

$$(2-6) \quad c_g^*, p_g^* D^2, \mathcal{P}^*, Q^*$$

Jusqu'à présent, nous nous sommes bornés à suivre formellement une méthode générale de recensement des paramètres. Nous n'avons pas utilisé notre connaissance expérimentale du phénomène et les seules hypothèses que nous ayons faites avaient pour but de ramener l'étude du tir idéal à un problème de mécanique des fluides. Appliquer les principes de la similitude physique au tir comme fonction de l'ensemble des paramètres (2-5), c'est courir le risque d'aboutir à des règles de similitude draconiennes

rendant les essais sur modèle irréalisables. La démarche rationnelle conduit donc à chercher dans l'expérience ce qu'il est légitime de négliger sans dénaturer le phénomène principal que l'on veut étudier, en l'occurrence l'onde de bouche. C'est le but de ce qui suit.

2-1-1-2 Première schématisation du phénomène

En 1-3-1, nous avons observé que le projectile n'entraîne de modifications notables de l'écoulement que dans son voisinage immédiat. Nous avons vu aussi que l'onde de bouche n'est que très peu affectée lors de son interaction avec la balle. Nous verrons d'ailleurs au paragraphe 2-1-4-2 que la longueur et la forme de la balle n'ont aucun effet sur l'onde de bouche. Cela signifie que même l'influence du projectile sur les conditions initiales peut être négligée. De ce fait, si nous acceptons de ne pas représenter en similitude l'écoulement autour du projectile, nous pouvons en faire abstraction. Ainsi, L_p et V_p disparaissent de l'inventaire et la géométrie de la balle devient indifférente.

Etudions maintenant le cas de l'arme. Celle-ci, quoique beaucoup plus volumineuse que le projectile ne perturbe pas le jet de gaz de poudre dont elle est la source. Elle ne peut donc influencer l'onde de bouche que vers l'arrière. Mais, dans cette zone, le canon se confond pratiquement avec l'axe de symétrie de l'écoulement et ne provoque, de ce fait, aucune réflexion de l'onde. Même lorsque celle-ci est encore de dimension modeste, comme sur les photos 8 et 9 de la figure 10, on ne distingue pas de perturbations du champ aérodynamique provoquées par l'arme. On peut donc éliminer Δ et L^e de l'inventaire. Le canon se réduit donc pour nous à une source étendue de débits (2-4). Notons que nous ne pouvons pas éliminer D pour autant car cela voudrait dire que la taille de la source n'a pas d'influence sur le phénomène pourvu que les débits soient respectés. Une telle conclusion ne peut être déduite des observations faites dans le premier

chapitre. Nous reviendrons sur ce problème en 2-1-2-1.

Il reste encore une propriété du jet de gaz brûlés que nous n'avons pas mise à profit: son comportement stationnaire. Il est en effet très peu commode de caractériser notre source de gaz brûlés par les débits variables dont les lois de variations nous échappent. Mais le fait que le jet soit quasi-stationnaire permet de lever cette difficulté, car les débits (2-4) peuvent être considérés comme constants. Bien entendu, cette simplification peut sembler hardie et elle mérite d'être vérifiée expérimentalement par des mesures à la bouche de l'arme. Cela constituera une grande partie du travail expérimental de cette étude et nous y reviendrons en 2-1-3-2, 2-1-3-3 et 2-1-4-5.

On peut cependant apporter dès maintenant une justification phénoménologique. Pour simplifier l'explication, nous supposons dans un premier temps que le projectile est animé de la vitesse constante V_p dès la mise à feu, que la combustion est instantanée et qu'elle convertit la poudre en un gaz parfait au repos dans la chambre. Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un écoulement monodimensionnel qui se calcule par la méthode des caractéristiques (ref<33>). Pour suivre le déroulement du phénomène le lecteur se reportera au premier croquis et aux notations de la figure 17-A qui représente l'écoulement dans le plan (x, t) .

A l'instant initial, la mise en mouvement instantané du culot du projectile provoque une détente centrée (zone 2) comprise entre deux zones d'écoulement uniforme (1 et 4). On appellera c_0 la vitesse du son des gaz brûlés dans la zone 4. Les caractéristiques C_A^- et C_B^- ont pour pentes respectives $-c_{ch}$ et $V_p - c_0$; on en déduit que la pente de C_B^- est négative si V_p est inférieure à c_0 , c'est-à-dire si le projectile est subsonique par rapport aux gaz qui le propulsent. Dans cette hypothèse, justifiée par la suite, l'expression des invariants le long de C_A^- et C_B^- permet d'établir les relations suivantes:

$$(2-7-1) \quad c_A = c_{ch} ; \quad (2-7-2) \quad c_B = c_{ch} - (\gamma_g - 1) V_p ;$$

$$(2-7-3) \quad c_o = c_{ch} - \frac{(\gamma_g - 1)}{2} V_p ; (2-7-4) \quad c_F = c_o ; (2-7-5) \quad c_B < c_A$$

où c_A , c_B et c_F désignent les vitesses du son respectivement en A, B, E. La relation sur la caractéristique C_B^+ permet d'écrire:

$$(2-7-6) \quad c_F = c_B - \frac{\gamma_g - 1}{2} V_p$$

Justifions maintenant la représentation de l'écoulement telle qu'elle apparaît figure 17-A.

L'expression (2-7-3) montre que le projectile est subsonique dans la zone 4 si la condition suivante est réalisée:

$$(2-8-1) \quad V_p < \frac{2 c_{ch}}{\gamma_g + 1}$$

Si l'on utilise les données de <29>, on peut estimer que c_{ch} est voisine de 1100 m/s et que γ_g est égal à 1.25. On constate alors que (2-8-1) est vérifiée pour V_p inférieur à 980 m/s. Dans la plupart des cas rencontrés dans cette étude, les vitesses de projectiles sont voisines de 800 m/s. De plus, dans la réalité, la vitesse du projectile au début de son mouvement est très inférieure à la vitesse finale V_p : la représentation de la caractéristique C_B^- avec une pente négative correspond donc bien au cas réel.

La pente de C_A^+ en AB, est égale à $V_p + c_o$; elle est donc supérieure à la pente V_p de la trajectoire du projectile car c_o est positive. En effet, l'expression (2-7-3) donne bien $c_o > 0$ car on a:

$$(2-8-2) \quad V_p < \frac{2 c_{ch}}{\gamma_g - 1}$$

ce qui exprime que V_p est inférieure à la vitesse limite possible pour qu'il n'y ait pas de vide entre le gaz et le culot. Cette condition est nécessairement vérifiée puisque le projectile est mis en mouvement par les gaz brûlés; c'est pourquoi C_A^+ coupe bien la droite $x = V_p t$.

La zone 5 est une détente par ondes simples descendantes car elle est adjacente à un domaine d'écoulement uniforme avec pour frontière une caractéristique C^+ .

La pente de C_B^+ en B (égale à c_B) est inférieure à la pente de C_A^+ en AB (égale à $V_p + c_0$). La relation sur la caractéristique C_B^+ pour un point de la zone 7, par exemple F, donne (2-7-6). On peut, grâce à cela, calculer la pente de C_B^+ en F, soit:

$$V_p + c_F = c_B + \frac{3-\gamma}{2} V_p$$

valeur supérieure à c_B , pente de C_R^+ dans la zone 6.

Cette relation montre que, dans la zone 7, la pente de C_B^+ s'incurve vers la trajectoire du projectile, comme cela est représenté sur la figure 17-A. Une condition suffisante à l'existence de F est donc que c_B soit supérieure à V_p . Grâce à (2-7-2) cette condition s'écrit:

$$(2-8-3) \quad c_{ch} > \gamma V_p$$

ce qui est vérifié par les valeurs numériques précédentes.

Etudions maintenant les réflexions en E et F. Le point E appartenant à la frontière de la zone 4, les valeurs de c et u en E et en O sont égales. Par suite, la pente de C_E^- en E est égale à celle de C_B^- en O₂ et la condition (2-8-1) y est encore vérifiée, de sorte que la caractéristique C_E^- a une pente négative et le projectile est encore subsonique. Le même raisonnement appliqué à la zone d'écoulement uniforme 6 montre que la pente de C_E^- en EF est égale à celle de C_B^- en B. C_E^- va donc se réfléchir sur la culasse dans les mêmes conditions que C_B^- .

La relation (2-7-6) permet, quant à elle, de calculer la pente de C_F^- en F, égale à $V_p - c_F$. L'application des valeurs numériques fait apparaître que cette pente est nulle ! On peut donc dire, compte tenu des incertitudes sur ces valeurs numériques, que V_p est très voisine de la vitesse du son dans le domaine 10; sur la figure 17-A, nous avons tracé C_F^- en considérant un projectile

légèrement supersonique car cela correspond à la plupart des cas rencontrés. En tout état de cause, même dans le cas subsonique, la réflexion sur la culasse ne se produit que très tard car C est presque parallèle à l'axe $x=0$ pendant un temps relativement long. Les caractéristiques à pente négative du faisceau de détente 8 se réfléchissent donc en un faisceau de détente sur la culasse. La zone 10 étant une zone d'écoulement uniforme, il est facile de montrer que la condition d'existence du point I est la même que celle de F, soit (2-8-3), et que les pentes de C dans la zone 10 et C_I^- en I sont identiques. La détente dans la zone 11 est à ondes simples descendantes de la même façon que la zone 5. En désignant par u_{IJ} et u_{IK} la vitesse des gaz brûlés en IJ et IK, on peut écrire, dans la zone 11, les relations suivantes, valables sur les caractéristiques C_I^+ et C_K^+ :

$$(2-9-1) \quad \frac{2}{\gamma_j-1} c_{IJ} - u_{IJ} = \frac{2}{\gamma_j-1} c_{IK} - u_{IK}$$

$$(2-9-2) \quad \frac{2}{\gamma_j-1} c_J = \frac{2}{\gamma_j-1} c_{IJ} + u_{IJ} \quad ; \quad (2-9-3) \quad \frac{2}{\gamma_j-1} c_K = \frac{2}{\gamma_j-1} c_{IK} + u_{IK}$$

Comme $c_K > c_J$, puisque le sens de variation de c ne change pas lors d'une réflexion sur une paroi, on déduit de (2-9-1), (2-9-2) et (2-9-3):

$$(2-9-4) \quad c_{IK} > c_{IJ} \quad ; \quad (2-9-5) \quad u_{IK} > u_{IJ} \quad ; \quad (2-9-6) \quad u_{IK} + c_{IK} > u_{IJ} + c_{IJ}$$

De ces trois dernières inégalités il est facile de déduire que:

$$(2-9-7) \quad M_{IJ} < M_{IK}$$

c'est-à-dire que le nombre de Mach décroît lorsque l'on passe d'une caractéristique C^+ à une autre dans le sens croissant du temps.

Supposons que la bouche de l'arme soit à une abscisse x_0 telle que la droite $x=x_0$ coupe le faisceau de détente dans la zone 12. Lorsque le projectile débouche le tube, il ne se produit aucun changement dans la structure de l'écoulement car, puisque le

courant juste en aval du projectile est supersonique, les perturbations ne peuvent pas le remonter. Le nombre de Mach à la bouche va donc diminuer au cours du temps puisqu'on passe, dans la zone 12 d'une caractéristique C^+ à une autre dans le sens croissant du temps. On atteindra donc nécessairement la valeur $M=1$ après une durée d'autant plus courte que la vitesse du projectile est proche de la vitesse du son au moment du débouchage, c'est-à-dire que le segment SN de la figure 17-A est petit. Cependant, si la détente dans le jet extérieur n'affecte pas les caractéristiques dans l'écoulement supersonique, elle remonte l'écoulement dès que celui-ci devient subsonique. Comme l'écoulement dans le jet est supersonique, il existe nécessairement une section sonique, et comme le jet est stationnaire, cette section ne peut se trouver qu'au col que constitue la bouche en raison de l'effet de déplacement de la couche limite à l'intérieure du tube. Il existe donc à la bouche, à partir du point N du plan (x,t) , une détente telle que toutes les caractéristiques montantes aient une pente nulle en $x=x$: c'est la zone 13 de la figure 17-A.

Lorsque le projectile est subsonique par rapport aux gaz brûlés, ce qui signifie que la bouche est dans la zone 7, le processus décrit ci-dessus se produit immédiatement après le débouchage, sans qu'il existe une phase supersonique correspondant à la durée comprise entre S et N.

Supposons maintenant que le projectile n'atteint pas instantanément la vitesse limite V_p . La détente centrée de la zone 2 est donc remplacée par une détente non centrée (figure 17-B, premier schéma), mais cela ne change rien au résultat obtenu avec une mise en vitesse instantanée tant que le point AB reste à gauche de la trajectoire du culot du projectile. On constate simplement que les zones 4, 5, 6, 8, 10 sont plus petites que sur la figure 17-A.

Il reste à montrer que la bouche est nécessairement dans la zone 12 (ou éventuellement dans la zone 7, ce qui revient au même). En

fait, dans la réalité, le projectile n'acquiert pas la vitesse finale V_p aussi rapidement que le montre le premier schéma de la figure 17-B. La caractéristique C_A^+ se réfléchit donc sur le culot avant que la vitesse de celui-ci ne soit uniforme, ce qui entraîne la disparition des zones 4, 5, 6, 8, 10 comme le montre le deuxième schéma de la figure 17-B. Les conditions (2-8) sont remplies a fortiori puisque la vitesse du projectile est initialement inférieure à 800m/s, valeur atteinte après un parcours de l'ordre du tiers de la longueur du tube (ref<29>). Il doit même se produire des zones supplémentaires d'écoulement subsonique de type 7 (zone 7'), car la condition (2-8-1) est d'autant mieux remplie lorsque V_p n'a pas atteint sa valeur limite. Lorsque le projectile reste subsonique ces zones se prolongent jusqu'à la bouche (troisième schéma, figure 17-B). Dans le cas contraire on retrouve la situation de la figure 17-A (deuxième schéma, figure 17-B).

Quel que soit le cas, il existe donc à la bouche une phase instationnaire pendant laquelle s'ajustent les conditions soniques. Cette phase est d'autant plus courte que V_p est voisin de c_g , ce qui est le cas de la plupart des armes rencontrées couramment. Nous verrons sur les mesures de pression et de température à la bouche (§ 2-1-3-2 et 2-1-3-3) que la durée de cette phase ne dépasse pas quelques microsecondes, que le projectile soit subsonique ou supersonique. La masse, la quantité de mouvement et l'énergie libérées pendant cet intervalle de temps sont donc négligeables devant les valeurs de ces grandeurs qui seront injectées dans le milieu extérieur pendant le développement de l'onde de bouche. Elles ne perturbent pas le milieu extérieur plus que ne le fait le projectile, dont l'effet a déjà été négligé.

D'autre part, tant que la combustion continue dans la chambre, la pression génératrice des gaz de poudre ne diminue que très lentement par rapport aux temps caractéristiques du phénomène que nous venons de décrire. Il en résulte que les débits à la bouche, qui ne dépendent plus alors que des conditions génératrices, restent presque constants dès l'établissement des conditions

soniques. Nous appellerons cette durée de l'écoulement la phase stationnaire. Nous pouvons donc remplacer, pendant cette phase les débits variables (2-4) par:

$$(2-10-1) \quad \rho_g c_g M_g \frac{\pi D^2}{4} = \gamma_g \frac{p_g}{c_g} M_g \frac{\pi D^2}{4}$$

$$(2-10-2) \quad (\rho_g c_g^2 M_g^2 + p_g) \frac{\pi D^2}{4} = (\gamma_g M_g^2 + 1) p_g \frac{\pi D^2}{4}$$

$$(2-10-3) \quad \left(h_g + c_g \frac{M_g^2}{2} \right) \rho_g c_g M_g \frac{\pi D^2}{4} = \frac{2 + (\gamma_g + 1) M_g^2}{2(\gamma_g - 1)} \gamma_g p_g c_g M_g \frac{\pi D^2}{4}$$

où toutes les grandeurs non étoilées sont des constantes. On remplacera de même les grandeurs \mathcal{S}^* et Q^* par leurs valeurs stationnaires \mathcal{S} et Q .

De ce qui précède, il résulte que considérer le jet de gaz brûlés comme stationnaire implique nécessairement que $M_g = 1$, puisque dans l'hypothèse contraire le jet ne peut être qu'instationnaire. Cela nous fournit un excellent critère expérimental pour nous assurer de l'existence des conditions soniques à la bouche. En revanche, la réciproque n'est pas exacte, car le jet dépend de la pression dans le tube qui peut varier même si M_g reste égal à 1. C'est ce qui se produit lorsque la combustion cesse et que la pression chute dans la chambre, le désamorçage du col à la bouche n'intervenant que tout à la fin de la vidange du tube.

Il serait prématuré d'engager plus avant la schématisation. Nous garderons donc pour l'instant l'inventaire obtenu après les simplifications de ce paragraphe, soit:

$$(2-11) \quad \gamma, \gamma_g, \bar{p}, \bar{\rho}, \bar{U}, V_p, M_g, A, B, D, \Delta, L^c, L_p$$

où A et B, valeurs stationnaires, de A^* et B^* , sont à prendre dans l'ensemble suivant:

(2-12) $c_g, p_g D^2, \mathcal{P}, Q$

Nous reviendrons en 2-1-2-1 sur le choix de A et B.

Une question se pose maintenant: l'ensemble (2-11) peut-il caractériser un tir non idéal ?

2-1-1-3 La phase de formation

L'inventaire des paramètres physiques (2-11) serait complet si l'onde de bouche se propageait instantanément dans le milieu ambiant. En fait, comme nous l'avons vu en § 1-3-1, sa formation est précédée par des phénomènes précurseurs qui influent sur sa géométrie et sur le temps qu'elle met pour se former sur l'axe. Nous conviendrons désormais d'appeler ce processus "phase de formation" de l'onde de bouche.

Nous écartons le problème des fuites de gaz brûlés par les rayures du canon qui ne concerne pas les armes que nous avons expérimentées (canon de 30 mm, carabine de 5.56 mm, fusil de 7.62 mm) à l'exception du bloc aux pressions prêté par l'ETBS. Nous verrons par la suite qu'il n'est pas nécessaire de tenir compte de ces fuites.

Dans ces conditions la phase de formation en atmosphère infinie est déterminée uniquement par la vidange de l'air contenu initialement dans le tube. Celle-ci est produite par le mouvement du projectile qui est entièrement décrit par sa loi de mise en vitesse et la valeur de la vitesse finale V_p , toujours, dans notre étude, supersonique par rapport à l'écoulement extérieur (§ 1-3-4). On a déjà signalé (§ 1-3-1) que la mise en vitesse était très voisine d'une arme à l'autre (à l'exclusion des armes à canon court). Dans la suite nous la supposons instantanée comme nous l'avons déjà fait en 1-3-1. Nous vérifierons expérimentalement le bien-fondé de cette simplification supplémentaire.

Puisque le projectile atteint rapidement la vitesse V_p , l'écoulement en aval du précurseur peut donc être considéré comme un écoulement supersonique uniforme de vitesse V_p . L'émergence du précurseur à la bouche de l'arme ne vient pas modifier cette situation puisque les perturbations ne remontent pas un courant supersonique. Entre le passage du précurseur et l'arrivée du projectile les flux à la bouche sont donnés par:

$$(2-13-1) \quad \gamma p_T \frac{M_T \pi D^2}{c_T^2 4}$$

$$(2-13-2) \quad (\gamma M_T^2 + 1) p_T \frac{\pi D^2}{4}$$

$$(2-13-3) \quad \frac{2 + (\gamma - 1) M_T^2}{2(\gamma - 1)} \gamma M_T p_T c_T \frac{\pi D^2}{4}$$

où p_T , c_T et M_T sont, respectivement, la pression et la vitesse du son et le nombre de Mach dans le tube en aval du précurseur. On voit apparaître trois nouvelles grandeurs à prendre en compte: M_T , $p_T D^2$ et c_T . Soient \bar{p}_T et \bar{c}_T la pression et la vitesse du son qui règnent dans le tube avant le passage du précurseur. La pression \bar{p}_T est égale à \bar{p} si le tir a lieu dans un milieu au repos, mais si le tir s'effectue à contre courant, elle est égale à la pression génératrice de l'écoulement extérieur. La même remarque s'applique à \bar{c}_T . On peut cependant fixer \bar{p}_T indépendamment de l'écoulement extérieur en fermant le tube à l'aide d'une membrane qui est pulvérisée par le passage du précurseur. Introduisons le nombre de Mach du projectile $M_{p_T} = V_p / \bar{c}_T$. La pression p_T , la vitesse du son c_T et le nombre de Mach M_T sont reliées à la pression \bar{p}_T et à \bar{c}_T par des relations de la forme $p_T / \bar{p}_T = F(M_{p_T})$, $c_T / \bar{c}_T = H(M_{p_T})$ et $M_T = G(M_{p_T})$. Les grandeurs p_T , c_T et M_T sont donc parfaitement déterminées par \bar{p}_T , \bar{c}_T et M_{p_T} . On peut ainsi remplacer le paramètre $p_T D^2$ par $\bar{p}_T D^2$ et

éliminer \bar{c}_T puisqu'elle est liée à \bar{c} par une fonction de \bar{M} et que ces deux dernières grandeurs sont déjà prises en compte dans l'inventaire du tir idéal. On peut également, de ce fait, substituer à M_{pT} le nombre de Mach $M_p = V_p / \bar{c}$.

Mais, il ne suffit pas de reproduire l'écoulement précurseur, il faut encore en respecter la durée c'est-à-dire le temps séparant l'émergence du précurseur de l'arrivée du projectile à la bouche. Ce temps dépend de l'écoulement décrit précédemment et de la longueur intérieure L du tube de l'arme qu'il faut donc retenir dans l'inventaire. En résumé, la phase de formation en atmosphère infinie nous conduit à tenir compte de l'ensemble de paramètres suivant:

$$(2-14) \quad M_p ; \bar{P}_T D^2 ; L$$

On voit ici que deux longueurs caractéristiques de l'arme, le calibre D et la longueur L de son canon, apparaissent dans l'inventaire. Il se pose alors une question d'un grand intérêt pratique: y a-t-il un degré de liberté entre ces deux longueurs ? En d'autres termes, la similitude géométrique est elle exigée pour l'arme ?

Pour répondre à cette question, il faut utiliser les principes de la similitude physique et comparer les ordres de grandeur des paramètres sans dimensions obtenus.

2-1-2 THEORIE DE LA SIMILITUDE

2-1-2-1 Choix des grandeurs primaires

Si l'on récapitule l'ensemble des paramètres physiques mis en évidence précédemment on obtient à l'aide de (2-11), (2-12) et (2-14):

$$(2-15-1) \quad \gamma, \bar{c}, \bar{P}, \bar{U} ; \quad (2-15-2) \quad \delta_j, M_j, A, B, D$$

(2-15-3) M_p, \bar{P}_T, D, L

A et B étant choisies parmi c_g, \mathcal{S}, Q et p, D^2 .

Nous avons classé les grandeurs suivant les conditions qu'elles représentent (figure 16): (2-15-1) pour le milieu extérieur; (2-15-2) pour le jet de gaz de poudre à la bouche; (2-15-3) pour la phase de formation.

Les deux ensembles (2-15-1) et (2-15-2) réunis coïncident avec (2-11) et caractérisent le tir considéré comme idéal.

Parmi ces paramètres, il faut choisir un système de grandeurs primaires permettant d'exprimer les dimensions de toutes les autres. En mécanique, il y a trois grandeurs primaires qui doivent être équivalentes au système fondamental: longueur, masse, temps <3>.

L'idée de base de la similitude physique stipule que ce système fondamental est arbitraire et n'est pas nécessairement le plus adapté à la description des phénomènes ou au dimensionnement de leurs effets. Il est donc intéressant de le remplacer par un système de grandeurs primaires qui caractérisent le mieux le phénomène car elles interviennent effectivement et de manière prépondérante dans sa formulation. Aussi nous garderons nous de choisir nos grandeurs primaires dans (2-15-3) car ces paramètres ne caractérisent pas les effets prépondérants du phénomène. Un tel choix nous conduirait d'ailleurs à ne pas savoir dimensionner le tir idéal, qui est indépendant de (2-15-3).

D'autre part, il faut remarquer que les trois grandeurs dimensionnées de (2-15-1) ne forment pas un système de grandeurs primaires: il faut donc nécessairement choisir des grandeurs parmi (2-15-2). On peut d'ailleurs vérifier facilement que A, B, D forment un système de grandeurs primaires quels que soient A et B choisis dans (2-12). Faut-il pour autant choisir ces trois grandeurs ?

Pour répondre à cette question, il faut rappeler le but poursuivi qui est de mesurer les effets du phénomène avec les grandeurs les plus appropriées. Il convient donc de choisir des grandeurs

"étalons" mesurables avec une certaine fiabilité. Il faut convenir que cette condition est mieux remplie par les grandeurs de (2-15-1) que par les débits du jet de gaz de poudre ou la vitesse du son dans ces derniers. Nous choisirons donc nos étalons, autant que faire se peut, dans (2-15-1). Nous savons que nous ne pouvons pas en choisir plus de deux dans cet ensemble qui ne nous fournit pas un système primaire. Il est évident que la grandeur à écarter est \bar{U} , car il serait impossible d'adimensionner les vitesses dans l'écoulement si le milieu extérieur était initialement au repos. Nous prendrons donc \bar{p} et $\bar{\rho}$ qui ne sont jamais nulles.

D'un point de vue formel, le choix de la grandeur supplémentaire issue de (2-15-2) est indifférent car tous les paramètres physiques apparaissent dans l'expression des inconnues que se soit au titre de grandeur primaire ou non. Toutefois, on ne peut choisir δ_j ou M_j qui sont sans dimensions ni c_j qui, associé à \bar{p} et $\bar{\rho}$, ne constitue pas un système primaire. Le choix est donc circonscrit à D , \mathcal{S} , Q , $p_j D^2$. Par ailleurs, du point de vue de la physique, certains choix sont plus heureux que d'autres comme nous l'avons vu dans le cas de \bar{U} ou des grandeurs de (2-15-3). Il est clair que l'étalon le plus précis de (2-15-2) est D , mais il présente plusieurs inconvénients majeurs. En premier lieu, nous savons que l'onde de bouche ne se forme qu'à une distance de l'ordre de $10D$ de la bouche (figure 10) et qu'elle se propage sur une distance qui est au moins de l'ordre de $100D$. En conséquence le calibre est un étalon très petit par rapport aux longueurs caractéristiques de la propagation de l'onde. En second lieu, le choix de D revient à exclure de notre système toute grandeur caractéristique de la dynamique du jet de gaz brûlés. Or, il ne manque pas d'exemples d'écoulements pour lesquels l'existence d'un jet n'aboutit pas à la création d'une onde de souffle: citons simplement le soufflage des couches limites sur une aile. Par conséquent, la dynamique du jet de gaz brûlés est un aspect prédominant du phénomène considéré, elle en conditionne même l'existence. Cette raison physique l'emporte sur le souci de

précision qui nous poussait à prendre D . Il faut donc choisir une grandeur entre \mathcal{P} , Q , $p_j D^2$.

Sur le plan expérimental, le choix de $p_j D^2$ comme étalon est le plus précis car il n'implique que la connaissance de p_j . Mais cela ne nous dispense pourtant pas de mesurer c_j , qui intervient nécessairement dans un paramètre de similitude. Il est donc préférable de choisir la dernière grandeur primaire en fonction de considérations physiques qui permettent d'explicitier le mieux possible la forme des fonctions inconnues. Pour éclaircir cette idée prenons l'exemple suivant: soit K une inconnue dimensionnée d'un phénomène physique dépendant de cinq paramètres physiques dimensionnés J_i où $i=1$ à 5 . Supposons que J_3, J_4, J_5 forment un système de grandeurs primaires. On pourra écrire que K est fonction des J_i sous la forme adimensionnée suivante:

$$(2-16) \quad k = \mathcal{K}(j_1, j_2)$$

où k, j_1 et j_2 sont les grandeurs adimensionnées correspondant respectivement à K, J_1 et J_2 .

Si k dépend effectivement de j_1 et j_2 , l'expérience doit montrer que:

$$(2-17) \quad \left(\frac{\partial k}{\partial j_1} \right)_{j_2} \neq 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial k}{\partial j_2} \right)_{j_1} \neq 0$$

Mais les formules aux dimensions permettent de mettre (2-16) sous une forme équivalente:

$$(2-18) \quad k = \mathcal{Q}(j_1, j_0) \quad \text{où} \quad j_0 = j_1^m j_2^l,$$

ce qui revient à un nouveau choix de grandeurs primaires obtenues par combinaison de J_3, J_4 et J_5 .

Supposons alors que l'expérience montre que $\left(\frac{\partial q}{\partial j_1} \right)_{j_0} = 0$ et $\left(\frac{\partial q}{\partial j_0} \right)_{j_1} \neq 0$

Cela signifie simplement que l'on a obtenu une forme de (2-16) plus explicite:

$$(2-19) \quad k = \mathcal{G}(j_1, j_2) = \mathcal{G}(j_1, j_0) = \mathcal{G}_0(j_0)$$

Cette propriété mathématique de \mathcal{G} traduit une réalité physique à savoir que le seul paramètre déterminant est j_0 .

En pratique, on aboutit à une situation analogue quand un paramètre sans dimensions se révèle être prépondérant devant d'autres dont l'influence est très faible; c'est typiquement le cas d'application d'une similitude partielle. Il est évident que le paramètre sans dimensions j_0 est la forme adimensionnée d'une grandeur physique déterminante. Pour mettre l'inconnue K sous sa forme la plus explicite il faut donc trouver le paramètre physique prépondérant et l'utiliser comme grandeur primaire.

Dans le cas du tir, il faut choisir une des grandeurs A ou B de manière à ce que la forme adimensionnée de l'autre puisse jouer le rôle de j_1 . Cela revient à se demander si l'un des trois débits à la bouche (2-10) n'est pas à lui seul la cause prépondérante de l'onde de bouche.

Ce point sera définitivement éclairci au chapitre 3, car la connaissance empirique du phénomène exposée jusqu'ici ne permet pas de répondre à cette question. Ce n'est qu'à la suite de l'étude expérimentale de la similitude que le choix optimal des grandeurs primaires apparaîtra. C'est pourquoi nous demandons au lecteur d'admettre, à ce stade du mémoire, un choix en apparence arbitraire dont une première justification sera donnée en 2-1-4-4. Nous prendrons \mathcal{Q} comme dernière grandeur primaire.

Les explications précédentes, si elles ne peuvent justifier ce choix de \mathcal{Q} , en suggèrent néanmoins le sens physique: l'onde de bouche est déterminée principalement par le flux d'énergie issu de la bouche de l'arme.

En résumé, le système primaire retenu est:

$$(2-20) \quad \bar{e}, \bar{P}, \mathcal{Q}$$

2-1-2-2 Conditions de similitude

Toute grandeur locale de l'écoulement dépend des paramètres (2-15), des coordonnées x_i et du temps t . En appliquant les principes de la similitude physique <3>, on obtient pour toute grandeur locale, la pression par exemple, une expression de la forme suivante : (2-21)

$$\frac{p}{\bar{p}} = \mathcal{F}_D \left(\gamma, \gamma_g, M_g, \bar{M}, \frac{\bar{p}Q}{\bar{\rho}\bar{g}}, M_p, \left(\frac{\bar{p}^3}{\bar{\rho}\bar{g}^2} \right)^{1/4} L, \left(\frac{\bar{p}_T D^2}{\bar{g}} \right) \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{1/2}, \left(\frac{\bar{p}^3}{\bar{\rho}\bar{g}^2} \right)^{1/4} D, \left(\frac{\bar{p}^3}{\bar{\rho}\bar{g}^2} \right)^{1/4} x_i, \left(\frac{\bar{p}^5}{\bar{\rho}^3 \bar{g}^2} \right)^{1/4} t \right)$$

où \mathcal{F} est une fonction universelle caractéristique du tir d'arme en atmosphère infinie.

On peut simplifier l'expression des grandeurs sans dimensions en faisant apparaître des conditions ayant un sens physique plus évident. En particulier, on peut remplacer $\frac{\bar{p}Q}{\bar{\rho}\bar{g}}$ par $\frac{\bar{c}}{c_g}$.

On dira qu'il y a similitude entre deux tirs d'armes de calibre respectifs D et D' aux points et aux instants homologues définis par :

$$(2-22) \quad \left(\frac{\bar{p}^3}{\bar{\rho}\bar{g}^2} \right)^{1/4} x_i = \left(\frac{\bar{p}'^3}{\bar{\rho}'\bar{g}'^2} \right)^{1/4} x'_i \quad ; \quad \left(\frac{\bar{p}^5}{\bar{\rho}^3 \bar{g}^2} \right)^{1/4} t = \left(\frac{\bar{p}'^5}{\bar{\rho}'^3 \bar{g}'^2} \right)^{1/4} t'$$

si les conditions suivantes sont réalisées :

$$(2-23-1) \quad \gamma_g = \gamma'_g \quad (2-23-2) \quad \gamma = \gamma' \quad (2-23-3) \quad \bar{M} = \bar{M}'$$

$$(2-23-4) \quad M_g = M'_g \quad (2-23-5) \quad \frac{\bar{c}}{c_g} = \frac{\bar{c}'}{c'_g} \quad (2-23-6) \quad M_p = M'_p$$

$$(2-23-7) \quad \frac{\bar{p}_T \bar{c}}{\bar{\rho}_g c_g} = \frac{\bar{p}'_T \bar{c}'}{\bar{\rho}'_g c'_g} \quad (2-23-8) \quad \left(\frac{\bar{p}^3}{\bar{\rho}\bar{g}^2} \right)^{1/4} L = \left(\frac{\bar{p}'^3}{\bar{\rho}'\bar{g}'^2} \right)^{1/4} L' \quad (2-23-9) \quad \left(\frac{\bar{p}^3}{\bar{\rho}\bar{g}^2} \right)^{1/4} D = \left(\frac{\bar{p}'^3}{\bar{\rho}'\bar{g}'^2} \right)^{1/4} D'$$

Comme dans les cas étudiés ici le nombre de moles spécifique n

change peu d'une poudre à l'autre, et comme le fluide environnant est l'air dans tous les cas, il est possible de remplacer c_g par T_g et \bar{c} par \bar{T} qui sont directement mesurables. La condition correspondante s'écrit alors $\frac{\bar{T}}{T_g} = \frac{\bar{T}'}{T_g'}$.

De même, en remplaçant \mathcal{S} par sa valeur en fonction de p_g et c_g on peut écrire (2-22) sous la forme plus explicite:

$$(2-24-1) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{x_i}{D} = \sqrt{\frac{\bar{c}'}{c_g'}} \sqrt{\frac{\bar{p}'}{p_g'}} \frac{x_i'}{D'} \quad (2-24-2) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\partial t}{D} = \sqrt{\frac{\bar{c}'}{c_g'}} \sqrt{\frac{\bar{p}'}{p_g'}} \frac{\partial t'}{D'}$$

On ramène de la même façon (2-23-9) à la forme:

$$(2-25) \quad \mathcal{J} = \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} = \sqrt{\frac{\bar{c}'}{c_g'}} \sqrt{\frac{\bar{p}'}{p_g'}}$$

qui caractérise l'intensité du tir.

Si l'on exclut dans le cas du tir à onde de bouche faible (§ 1-3-4), le paramètre \mathcal{J} est toujours très petit devant 1 du fait des grandes valeurs de p_g et c_g . On peut donc penser que, dans les tirs étudiés ici, les valeurs de la fonction \mathcal{F}_g sont très voisines de celles qui seraient obtenues en faisant tendre asymptotiquement l'expression (2-25) vers zéro. L'expérience prouvera que cette hypothèse sur la régularité de \mathcal{F}_g est vérifiée. En conséquence, il est possible de remplacer la condition (2-23-9) par:

$$(2-26) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \ll 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{\bar{c}'}{c_g'}} \sqrt{\frac{\bar{p}'}{p_g'}} \ll 1$$

qui signifie que les deux tirs comparés sont générateurs d'ondes de bouche fortes. Ainsi lorsqu'on est dans ce cas, on peut assimiler la grandeur \mathcal{J} à zéro et la fonction \mathcal{F}_g à la fonction \mathcal{F} obtenue en faisant tendre \mathcal{J} vers zéro dans \mathcal{F}_g .

Il faut cependant remarquer que, pour que cette approximation reste cohérente, elle exige que toute grandeur adimensionnée du même ordre de grandeur que \mathcal{J} soit également assimilée à zéro. Ce cas se présente pour les coordonnées et temps

adimensionnés (2-24) lorsque x_i est de l'ordre de D et t de celui de D/\bar{c} . La fonction ζ n'est donc une approximation de ζ_D que dans le domaine défini par:

$$(2-27-1) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{x_i}{D} \gg 1 \quad ; \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{c}t}{D} \gg 1$$

ce qui s'écrit encore:

$$(2-27-2) \quad \frac{x_i}{D} \gg 1 \quad ; \quad \frac{\bar{c}t}{D} \gg 1$$

Mais cette condition n'est pas restrictive pour l'étude de l'onde de bouche puisque cette dernière n'est réellement formée qu'à des distances grandes devant D . De plus, même si la condition $t \gg D/\bar{c}$ n'est pas toujours strictement respectée à la fin de la phase de formation de l'onde de bouche, elle l'est pendant la phase la plus importante de sa propagation.

En définitive, pour des tirs à ondes de bouche fortes, on peut ramener les conditions (2-23) aux deux ensembles suivant:

$$(2-28-1) \quad \gamma_j = \gamma'_j \quad (2-28-2) \quad \gamma = \gamma' \quad (2-28-3) \quad \bar{m} = \bar{m}'$$

$$(2-28-4) \quad M_j = M'_j \quad (2-28-5) \quad \frac{\bar{T}}{T_j} = \frac{\bar{T}'}{T'_j}$$

qui correspond au tir idéal, et:

$$(2-29-1) \quad M_p = M'_p \quad (2-29-2) \quad \frac{\bar{p}_T \bar{c}}{p_g c_g} = \frac{\bar{p}'_T \bar{c}'}{p'_g c'_g} \quad (2-29-3) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{L}{D} = \sqrt{\frac{\bar{c}'}{c'_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}'}{p'_g}} \frac{L'}{D}$$

pour la phase de formation.

On constate que les conditions de similitude du tir idéal à onde de bouche forte ne dépendent pas du calibre. Toutes les armes produisant de telles ondes sont donc semblables en l'absence de phénomènes précurseurs. Cela signifie que, quelle que soit l'arme, toutes les grandeurs adimensionnées locales sont identiques aux points et temps homologues.

Si le tir n'est pas idéal, apparaît la condition (2-29-3) liant la longueur L au calibre D . On voit cependant qu'il existe un degré de liberté entre L et D puisque (2-29-3) n'est pas un simple rapport géométrique.

Signalons enfin que la condition (2-28-5) sous sa forme (2-23-5) permet de simplifier encore les expressions (2-28), (2-29) et (2-24), mais nous gardons ces formes pour les raisons exposées au paragraphe 2-1-2-1. En effet, comme nous le démontrerons au chapitre 3, effectuer la simplification reviendrait à remplacer le choix de \mathcal{G} comme grandeur primaire par celui de p, D^2 et à privilégier le flux de quantité de mouvement plutôt que le flux d'énergie à la bouche. Nous verrons au paragraphe (2-1-4-4) que la physique du phénomène justifie le maintien de la forme que nous proposons ici.

Le nombre de conditions à respecter pour obtenir la similitude peut sembler rédhibitoire à première vue. Cela n'est pas justifié car la réalisation de certaines d'entre elles ne présente pas de difficultés particulières.

Pour respecter (2-28-2) il suffit de choisir l'air comme fluide ambiant. La condition (2-28-4) est satisfaite d'elle-même puisque, comme nous l'avons expliqué au paragraphe 2-1-1-2, un col sonique s'établit à la bouche de l'arme de sorte que l'on a $M_j = M'_j = 1$.

La condition $\bar{M} = \bar{M}'$ constitue une règle classique, couramment réalisée en soufflerie.

Quant aux autres conditions à respecter, elles dépendent des caractéristiques des munitions utilisées. Elles nécessitent donc d'être étudiées en détail ainsi que la validité des hypothèses qui fondent cette théorie. C'est ce qui est fait à la section 2-1-4 de ce chapitre, mais pour y parvenir il faut définir la méthode expérimentale de vérification de la théorie, ainsi que les moyens à mettre en oeuvre.

2-1-3 INSTALLATION D'ESSAIS ET METHODES DE MESURE PARTICULIERES

2-1-3-1 Le caisson de tir

Pour vérifier la théorie de similitude il faut réaliser des tirs d'armes dans des conditions physiques différentes mais en respectant l'invariance des paramètres de similitude. On mesure alors les valeurs prises par nombre nécessaire de grandeurs physiques, puis on forme les grandeurs adimensionnées correspondantes à l'aide des grandeurs primaires. La similitude est vérifiée si les valeurs des grandeurs adimensionnées ainsi obtenues coïncident aux points homologues définis par (2-24).

Les conditions (2-28) et (2-29) dépendent des caractéristiques des munitions et de l'atmosphère extérieure. Nous avons réalisé des munitions différentes et, pour couvrir une plus grande gamme de variations des paramètres de similitude, nous avons conçu une installation d'essais permettant d'effectuer des tirs en atmosphère contrôlée. La pression \bar{p} et la température \bar{T} peuvent y être réglées pour donner aux paramètres sans dimensions (2-28) et (2-29) les valeurs souhaitées. L'étude du tir proprement dit n'exige pas que l'on représente un écoulement dans l'installation, \bar{U} y sera donc nul.

Le dispositif expérimental est constitué par un caisson cubique de 400 mm d'arête, étanche et isolé thermiquement (figure 19).

Le projectile est récupéré au bout d'un tube soudé au caisson, rempli de chiffons et obturé par une plaque d'acier. L'arme est à l'extérieur du caisson, seule l'extrémité du canon y pénètre.

La paroi supérieure du caisson supporte une douche d'azote liquide qui permet de refroidir l'intérieur du dispositif jusqu'à -55°C , de manière à reproduire les variations de \bar{T} dans l'atmosphère. Afin d'éviter toute condensation, l'azote liquide est injecté après que l'on ait fait le vide dans le caisson. L'azote se vaporise et on règle la pression \bar{p} dans le caisson à l'aide de la pompe à vide. Une entrée d'oxygène est utilisée pour

recomposer un mélange gazeux voisin de l'air. Un manomètre de haute précision permet de mesurer \bar{p} dont la valeur peut être réglée continûment entre 1 et 0,1 bar absolu. La mesure de \bar{T} est obtenue par quatre thermocouples disposés dans le champ et permettant une vérification de l'homogénéité en température du milieu .

Les grandeurs accessibles à la mesure sont les pressions sur les obstacles et la progression de l'onde de bouche au cours du temps. Pour accéder aux premières le caisson dispose de prises de mesures pour capteurs de pression instationnaire. On obtient la seconde grâce au système de visualisations ultra-rapides "chronoloupe" (§ 1-2-1). Les parois latérales du caisson sont munies de hublots qui permettent de visualiser le phénomène sur un champ de diamètre 250 mm.

2-1-3-2 La mesure de la pression de bouche

La pression de bouche intervenant dans les conditions (2-28) et (2-29), il est indispensable de la mesurer pour les différentes armes étudiées. Pour ce faire, nous avons disposé un capteur de pression instationnaire dans le tube à quelques millimètres en amont de la bouche. La figure 20 montre un exemple de dispositif utilisé sur une arme de calibre de 5.56 mm. Il faut remarquer que dans cette configuration le capteur est placé au fond d'une cavité. Ce montage a été conçu pour les armes de petit calibre dans lesquelles il est difficile de percer des trous de diamètre suffisant pour placer le capteur en membrane affleurante.

Néanmoins, il était nécessaire de valider la méthode et d'évaluer l'influence de la cavité et du canal la reliant au canon sur la précision de la mesure. La figure 21 montre les mesures obtenues avec des canaux de différents diamètres pour une même munition. On ne retrouve, d'un essai à l'autre, ni la forme du signal ni la valeur du plateau. Afin de comprendre l'origine du phénomène nous avons testé différentes cavités dans le tube à choc haute

pression du CERT (DERMES).

Les essais ont été réalisés en commun par l'IMFL et le DERMES. L'intérêt du tube à choc réside dans le fait qu'il fournit un saut de pression parfaitement connu et répétitif. La figure 22 montre la différence entre la réponse d'un capteur monté en cavité et celle d'un capteur en membrane affleurante. Il apparaît que les capteurs réagissent bien simultanément, mais que le canal introduit un retard dans l'obtention de la pression maximale et que celle-ci reste inférieure à la pression de sollicitation.

Un étalonnage de chaque cavité au tube à choc pourrait permettre de calculer le rapport entre la pression réelle et la pression plateau obtenue après un temps suffisamment long. Par contre, pour des phénomènes aussi brefs que le tir d'une arme un tel étalonnage est insuffisant car la cavité agit comme un filtre passe bas à faible bande passante qui répond mal aux impulsions. La méthode a donc été abandonnée.

La seule solution est donc de placer les capteurs en membrane affleurante. Pour un canon de 30 mm la chose est aisée, mais la taille des capteurs rend le problème plus complexe pour le calibre 5.56. La pression mesurée par un capteur de 5 mm de diamètre dans un tube de 5.56 doit être considérée comme une pression moyenne à la bouche. Cela ne pose pas de problèmes théoriques pour l'étude présente car les flux à la bouche ont été écrits comme ceux d'un écoulement monodimensionnel.

Différents capteurs ont été testés en membrane affleurante. Il s'est avéré que seuls les capteurs piézocapacitifs pouvaient résister à la température des gaz de poudre.

La figure 23 montre les mesures effectuées avec cette méthode sur la carabine 222 Remington de l'IMFL et sur un canon DEFA 554 de calibre 30 mm prêté par l'ETBS.

Les mesures sur le canon ont été réalisées par l'ISL. En éliminant les oscillations propres du capteur on peut estimer que, pour le canon, la valeur p_y de p_y^* est de 140 bars pendant environ 500 μ s.

Pour la carabine, la mesure est moins perturbée par la

raisonnance de capteur; on peut ainsi observer l'existence d'un plateau de pression d'environ 200 μ s.

Les durées précédentes sont du même ordre de grandeur que le temps que met dans chacun des cas l'onde de bouche pour sortir du voisinage de l'arme. On remarquera également le faible temps d'établissement du plateau de pression, ce qui corrobore l'explication de l'écoulement à la bouche donnée en 2-1-1-2. L'hypothèse de stationnarité du jet trouve donc ici une première validation.

C'est grâce à cette propriété que l'on peut élaborer une seconde méthode de mesure de la pression de bouche. Les problèmes rencontrés avec les capteurs nous ont incité, en effet, à rechercher des méthodes de substitution.

Puisque le jet de gaz de poudre est considéré comme stationnaire, on peut puiser dans l'abondante littérature consacrée à ce sujet pour en connaître mieux les propriétés. GIAT <39> classe un jet tel que le nôtre dans la catégorie des "jets sous-détendus continus" dont la propriété principale, à nos yeux, est d'avoir une forme entièrement déterminée par le paramètre $\bar{\omega} = \sqrt{\bar{p} / p_g}$ lorsque le milieu extérieur est au repos. Ainsi, tout rapport de longueur caractéristique du jet est une fonction de $\bar{\omega}$ seul.

On peut justifier ce résultat. Le jet est caractérisé par les paramètres γ , \mathcal{S} , Q , M_g et le diamètre de sortie D . Si on néglige la condition cinématique comme en 2-1-1-2, on peut éliminer toutes les longueurs caractéristiques de la tuyère (Δ et L^e); seule la condition dynamique à la frontière du jet introduit la constante \bar{p} . Le milieu extérieur étant au repos, les équations générales ne font apparaître aucune constante supplémentaire. Comme l'écoulement est stationnaire, il n'y a pas lieu d'adjoindre de conditions initiales. Un jet stationnaire dans un milieu au repos dépend donc des paramètres suivants:

$$(2-30) \quad \mathcal{S}, Q, D, M_g, \bar{p}, \gamma$$

En prenant \bar{p} , Q et \mathcal{S} , comme grandeurs primaires, on obtient

pour toute longueur caractéristique du jet, par exemple la position du disque de Mach X_D , la formule suivante:

$$(2-31) \quad \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_j}} \frac{X_D}{D} = \kappa_{\bar{p}}(\gamma_j, M_j, \frac{\bar{p}}{p_j})$$

Si le jet est très détendu, le rapport \bar{p} / p_j est très voisin de zéro. On peut donc substituer à la fonction $\kappa_{\bar{p}}$ son prolongement asymptotique κ_0 lorsque \bar{p} / p_j tend vers zéro, ce qui s'écrit:

$$(2-32) \quad \frac{X_D}{D} = \kappa_0(\gamma_j, M_j) \sqrt{\frac{p_j}{\bar{p}}}$$

L'expérience montre que, pour un jet cylindrique sonique à la bouche, κ_0 dépend peu de γ_j et est voisin de 0.7. C'est pourquoi la relation reste valable pour un jet contenant des particules solides dont l'effet principal peut être assimilé à celui d'une légère diminution de γ_j <40>. C'est justement le cas du jet à la bouche d'une arme qui contient de nombreuses particules de poudre en combustion que l'on voit traverser l'onde de bouche sur certaines ombroscopies (figure 6). Les balisticiens ont d'ailleurs souvent utilisé la relation (2-32) pour le jet de gaz de poudre <41>.

Si l'on connaît \bar{p} , D et X_D , la formule (2-32) permet de déterminer p_j . Or p et D sont des données du problème, seul X_D est à déterminer expérimentalement. Grâce à nos visualisations, il est possible de mesurer X_D en prenant soin de choisir un cliché pris assez longtemps après la phase de formation pour que l'onde de bouche soit suffisamment éloignée. En effet, dans le cas contraire la pression qui régnait autour du jet est très différente de \bar{p} et (2-32) n'est pas applicable. Les pressions obtenues par cette méthode, coïncident avec les mesures par capteurs, si l'on prend pour κ_0 la valeur 0.7 valable pour un jet sonique. On peut donc considérer cette mesure comme une vérification expérimentale de l'établissement des conditions soniques la bouche.

Une autre méthode a été développée par DESSE <42> grâce à

L'utilisation de poses photographiques en chambre noire donnant des clichés identiques à celui de la figure 1. Ces photographies mettent en évidence deux lueurs. La lueur primaire est une zone conique très petite contigüe à la bouche: elle est émise par les gaz très chauds qui jaillissent du tube. Ces gaz sont fortement détendus dans le jet et leur température diminue très rapidement. Dès que celle-ci est passée sous un certain seuil, l'émission lumineuse devient insuffisante pour impressionner le film. La forme conique de l'image de cette zone s'explique donc par la structure de l'écoulement et la disposition des ondes de détente. Lorsque ces gaz sont recomprimés par le disque de Mach, leur température redevient supérieure au seuil. On visualise alors une lueur secondaire, plus étendue que la première, limité en amont par le disque de Mach du jet dont la position est donc parfaitement visible sur les clichés.

Bien entendu, pour que cette méthode soit utilisable en toute rigueur, il faut que le jet soit stationnaire, sinon les déplacements du disque de Mach risquent d'entraîner une mauvaise localisation de la lueur. Cette hypothèse n'est que partiellement vérifiée dans notre cas: pourtant comme le montre la figure 24 la méthode s'avère concluante.

L'explication est la suivante. Lors de la phase de formation le disque de Mach avance, puis il se stabilise à la distance prévue par la théorie stationnaire; enfin, lors de la chute de pression à la bouche, il recule lentement. Si la lueur parvenait à impressionner instantanément la pellicule lors de la phase de formation, il est évident que l'image de la lueur secondaire commencerait plus près de la bouche que dans le cas stationnaire; mais en fait le déplacement du disque de Mach est trop rapide pour être enregistré par la pellicule. La phase stationnaire n'est sans doute pas plus lumineuse que la précédente, mais elle dure beaucoup plus longtemps: elle impressionne donc la pellicule. Quant à la phase finale, elle correspond à une baisse importante de la pression, certes, mais aussi de la température des gaz de bouche qui devient très rapidement inférieure au seuil nécessaire à la sensibilisation de la pellicule.

Pour avoir confirmation de cette explication, il faut connaître l'évolution de la température de bouche.

2-1-3-3 La mesure de la température de bouche

La température T_g est également une grandeur qui intervient dans les conditions (2-28) et (2-29) et dans les relations (2-24) par l'intermédiaire de c_g . Sa mesure nécessite la mise en oeuvre de techniques très élaborées. En effet, il n'existe pas de thermomètres dont les temps de réponse soient assez brefs pour réaliser une telle mesure. Il a fallu utiliser une technique mise au point à l'ISL et dont le principe est exposé dans la référence <43>.

Notons que cette méthode est basée sur la mesure de l'émission et de l'absorption lumineuse dans le jet de gaz brûlés. Ces propriétés optiques du jet sont liées à la température des gaz de poudre par l'intermédiaire de la loi de Planck. On effectue les mesures à quelques millimètres à l'extérieur de la bouche et on déplace le point de mesure perpendiculairement à l'axe de tir pour obtenir la répartition radiale de l'absorption et de l'émission dans la lueur primaire de bouche. Autant de tirs sont donc nécessaires que de points de mesure sur le rayon. La température obtenue est une moyenne sur plusieurs tirs, mais la répétitivité est suffisante pour que cette mesure soit d'une précision satisfaisante pour notre étude.

L'émission lumineuse est mesurée par un photomultiplicateur qui reçoit la lumière émise par la lueur de bouche au point de mesure considéré. On en déduit la température de luminence en ce point et son évolution dans le temps au cours du tir.

Pour mesurer l'absorption on emploie une source lumineuse ponctuelle intense (par exemple un laser) dont le rayon émis traverse le jet de gaz brûlés et est capté par le photomultiplicateur. On distingue la lumière émise par le tir de celle provenant de la source lumineuse en occultant périodiquement cette dernière au cours du tir. Cette mesure donne accès au

coefficient de transmission à travers le jet.

Les essais sur les armes étudiées ont été réalisés à l'ISL par l'équipe même qui a développé la méthode. Il faut noter qu'une technique nouvelle d'enregistrement des émissions lumineuses a été testée avec succès lors des essais sur le canon de 30 mm. Elle consiste à utiliser comme récepteur une caméra numérique à balayage afin de pouvoir faire les mesures en tout point d'un rayon au cours d'un seul tir. Cependant, avec cette nouvelle méthode, il faut dissocier la mesure de l'émission de celle de l'absorption, de sorte que les températures mesurées sur le canon sont obtenues à l'issue de deux tirs. Les techniques utilisées et les résultats obtenus sont détaillés en <44>.

Pour toutes les armes utilisées dans cette étude on a obtenu des températures de bouche très voisines, de l'ordre de 1400°C sur l'axe de tir. Il est vrai que cette température n'est plus que de l'ordre de 1100°K à une distance de l'axe égale au calibre, mais il ne faut pas oublier que la mesure est faite un peu en avant de la bouche et que cette variation ne fait que caractériser la détente dans le jet. Cette détente est moins sensible sur l'axe où la température est donc la plus proche de celle qui règne exactement à la bouche. La figure 25 montre les résultats des mesures.

Au dessous de 1100°K environ, la mesure de T_j^y est impossible car l'émission lumineuse est insuffisante. C'est pourquoi la mesure est interrompue après 600 μ s environ dans le cas de la carabine. Si l'on se reporte à la mesure de p_j (figure 23), on constate que cela correspond à trois fois la durée du plateau, c'est-à-dire à trois fois celle de la phase stationnaire du jet. On sait de plus <43> que les températures des lueurs primaires et secondaires sont pratiquement identiques. La lueur secondaire émet donc de la lumière, quoique d'une manière moins intense, après la phase stationnaire. C'est pourquoi il faut fermer suffisamment le diaphragme de l'appareil photographique pour éliminer cette lumière émise après la phase stationnaire. A cette condition on

obtient bien, par la technique de la pose en chambre noire, la position du disque de Mach du jet pendant la phase stationnaire. Dans le cas du canon, la mesure de la température s'arrête après 500 μ s, à une température pour laquelle l'émission lumineuse serait encore suffisante pour la continuer. La raison réside simplement dans les limites des capacités de mémorisation numérique associées à la caméra.

Sur la figure 25, on a tracé T_j^* en fonction du temps adimensionné. En effet, grâce aux mesures de p_j' et de T_j' , on a pu déterminer leurs valeurs p_j et T_j pendant la phase stationnaire. Comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe 2-1-1-1 la connaissance de T_j , n et γ_j permet de calculer c_j et de former ainsi les grandeurs adimensionnées. Dans la pratique, on considérera que toutes les poudres étudiées produisent un gaz parfait qui suit une loi polytropique d'exposant γ_j voisin de 1.25 et dont le nombre de moles par unité de masse n est de 46.6 moles/kg, valeurs communément admises pour les produits de combustions de poudre. Cela correspond à une valeur de c_j de 790m/s environ à la bouche. Un projectile à 800 m/s est donc légèrement supersonique par rapport au gaz à l'instant du débouchage. On peut constater que la température ne diminue que très lentement, ce qui consolide l'hypothèse du jet stationnaire. Ceci est d'autant plus remarquable que la mesure est faite en avant de la bouche dans une zone où la détente dépend, dans un premier temps, de la position du projectile et ensuite de celle de l'onde de bouche, avant de se stabiliser. Dans la zone de mesure la température est inférieure à la température à la bouche. La valeur de cette dernière doit être peu différente des 1400°K mesurés aux premiers instant du jet, lorsque la détente n'est pas encore bien établie. Il est évident que la mesure de T_j est moins précise que celle de p_j et qu'il conviendra d'évaluer les conséquences de cette incertitude sur l'utilisation des règles de similitude. Cela sera évoqué en 2-1-4-1 pour le tir en atmosphère infinie, et en 2-2-2-6 pour le tir en présence d'un obstacle.

Une courbe de la figure 25 diffère fortement des autres, c'est celle qui résulte des essais de cartouches de 5.56 militaires garnies avec la poudre du canon de 30 mm et tirées avec un bloc aux pressions. La différence vient du fait que cette poudre à gros grains est expulsée de la douille à la suite du projectile et s'éteint peu après son éjection du tube. Dans ce cas où la combustion est incomplète, l'hypothèse stationnaire ne s'applique plus car la pression chute trop vite dans la chambre. Mais, force est alors de constater que le fonctionnement du bloc n'est plus représentatif de celui d'une arme correctement conçue. Ces essais prouvent donc qu'il est illusoire de vouloir réaliser la condition (2-28-1) en se bornant à utiliser, dans une cartouche de faible calibre, la poudre de l'arme de gros calibre que l'on veut simuler.

2-1-4 VERIFICATION DE LA THEORIE

2-1-4-1 Effet du rapport des températures

Le paramètre \bar{T} / T_g est l'un des plus coûteux à réaliser dans une soufflerie puisqu'il nécessite un réglage de la température génératrice de l'écoulement. On a vu d'autre part que T_g varie peu d'une poudre à l'autre de sorte que la condition (2-28-5) revient pratiquement à $\bar{T} = \bar{T}'$. Cela signifie que pour simuler un tir à 11000 m d'altitude dans une soufflerie il faut une température en veine de -55°C !!! Il est donc essentiel d'évaluer si l'effet de ce paramètre ne peut pas être quantifié ou même négligé.

Pour ce faire, il faut fixer tous les paramètres sans dimensions et faire varier \bar{T}/T_g seul. Comme T_g est presque la même pour toutes les armes étudiées, cela revient à faire varier \bar{T} dans le caisson. La difficulté est que \bar{T} intervient également dans M_p : il est donc nécessaire de modifier la munition pour maintenir M_p constant tout en faisant varier \bar{T} . On peut remarquer que, selon (2-29-3), réduire \bar{T} , donc \bar{c} , équivaut à diminuer L . C'est

pourquoi la relation (2-29-3) n'a pas été strictement respectée entre les tirs car, pour ce faire, il aurait fallu rallonger le tube de quelques millimètres pour les essais à basse température. Nous savons que ce paramètre n'intervient que dans la forme de l'onde de bouche: quelques essais préliminaires nous ont permis de constater que la variation de sa valeur, de 10% environ, induite par celle de \bar{c} n'avait aucune conséquence notable sur cette forme. Les visualisations de la figure 26 illustrent ce résultat. En effet, si l'on compare une photographie de gauche, à $\bar{T} = 223^\circ\text{k}$, avec sa vis-à-vis, faite à $\bar{T} = 290^\circ\text{K}$, on constate que la forme de l'onde de bouche, prise à des instants homologues, est inchangée, abstraction faite de la perturbation sur l'axe dans le cas où $\bar{P} = 0,2$ bar et $\bar{T} = 223^\circ\text{K}$. Celle-ci est uniquement liée à un problème expérimental. Il s'avère en effet que lorsque le caisson est à basse température du givre se forme à l'intérieur du tube: c'est vraisemblablement ce givre qui produit l'ombre localisée sur l'axe autour du projectile.

Ce qui précède s'applique également à la condition (2-29-2) qui n'a pas été strictement respectée dans les essais. En effet, ceux-ci ont réalisés sans réglage indépendant de \bar{p} et \bar{p}_r . On n'a donc pas pu ajuster \bar{p}_r en fonction de \bar{c} pour maintenir, $\bar{c} \bar{p}_r / c_g p_g$ constant lorsque \bar{T} changeait. La figure 26 prouve que cela est sans conséquence. En revanche, les photos montrent bien que la vitesse V_p est plus grande pour $\bar{T} = 290^\circ\text{K}$, en conformité avec la condition $M_p = M'_p$ qu'il est plus important de respecter (§ 2-1-4-2).

L'invariance de la forme de l'onde de bouche à l'égard de \bar{T}/T_g n'est pas un résultat étonnant car ce paramètre n'est pas formé avec des grandeurs physiques relatives à la phase de formation, et donc déterminantes pour la forme géométrique de l'onde. En revanche, il est intéressant de noter que cette forme n'est pas très sensible aux conditions (2-29-2) et (2-29-3): En effet si l'on compare entre elles toutes les photos de la figure 26, on ne constate que de légères différences de forme malgré les variations simultanées importantes des paramètres correspondant à

ces conditions.

Nous avons constaté que la condition (2-28-5) n'agit pas sur la forme de l'onde, mais a-t-elle une influence sur sa propagation ? Nous avons comparé, pour une forme d'onde donnée, les progressions obtenues lors d'essais respectant toutes les règles de similitude sauf (2-28-5). La figure 27 montre que ces progressions sont identiques sur l'axe de tir mais, comme les formes d'onde sont les mêmes, on peut généraliser ce résultat à toute l'onde.

On peut donc conclure que la condition (2-28-5) n'a pas d'influence sur le phénomène dans la limite des variations que l'on a pu imposer à \bar{T} / T_j dans cette étude. Cette plage de variation est largement suffisante pour les applications qui découleraient de nos travaux. En effet, elle couvre celle qui s'impose au tir d'un canon embarqué sur un avion pouvant voler à n'importe quelle altitude dans l'atmosphère. De plus, elle couvre largement la plage des variations de \bar{T} / T_j obtenue par modification des munitions ou du calibre de l'arme embarquée, car la valeur de T_j change peu d'une arme ou d'une munition à l'autre.

Cependant, il convient de bien voir que la disparition de la condition (2-28-5) de l'ensemble des règles de similitude à respecter, ne signifie pas que \bar{T} / T_j est sans influence sur le phénomène, puisque \bar{c} / c_j intervient dans l'expression adimensionnée des coordonnées, du temps et de la position de l'onde de bouche. Cela signifie que \bar{T} / T_j joue le rôle du paramètre j_1 des formules (2-16) à (2-19).

On peut en tirer une conséquence intéressante au sujet de la répercussion des incertitudes de mesure de T_j . En effet, T_j n'intervient plus que dans la définition des points homologues (2-24) et cela à la puissance 1/4. On peut en conclure d'abord qu'une erreur de mesure sur T_j entraînera une erreur quatre fois moindre sur les coordonnées adimensionnées. On en déduit également que les courbes de progression de l'onde de bouche comme celles de la figure 27 ne sont pas affectées par l'erreur

sur T_g , puisque celle-ci ne se traduit que par une légère modification de l'échelle sur les axes, correction identique pour les deux coordonnées.

Pour en conclure que le choix de ρ comme grandeur primaire est le plus judicieux, il faut cependant montrer qu'un autre choix ne nous aurait pas permis d'éliminer (2-28-5). Expérimentalement, cette démonstration est difficile à mener à bien car les variations imposées à \bar{c} / c_g , quoique suffisantes pour les applications, restent très faibles numériquement, d'autant plus que ce rapport intervient généralement à la puissance 1/2. Au chapitre 5, l'influence exacte d'une variation de c_g sur la courbe adimensionnée de progression du choc sera explicitée et on comprendra alors pourquoi la moindre incertitude de mesure ou l'effet d'un paramètre secondaire peut la cacher.

C'est pourquoi nous reportons la justification expérimentale du choix des grandeurs primaires en 2-1-4-4, après l'étude des autres conditions de similitude et de leurs effets.

A l'issue de ce paragraphe, c'est le côté pratique de l'élimination de la condition (2-28-5) que nous retiendrons. Ecarter (2-28-5) simplifie considérablement la réalisation de la similitude, en particulier dans le cas d'essais de tirs en soufflerie, car il n'est pas nécessaire de représenter la température du vol simulé.

2-1-4-2 Effet de la phase de formation

La phase de formation introduit les trois paramètres physiques (2-14) qui influent sur la forme de l'onde de bouche et sur la durée de sa formation sur l'axe, et qui sont à l'origine des trois conditions de similitude (2-29). Nous avons vu en 2-1-4-1, qu'une erreur de l'ordre de 10% sur les conditions (2-29-2) et (2-29-3) est sans conséquence. Par contre, la figure 28 montre l'effet important du nombre de Mach M_p sur la forme de l'onde et

confirme que, si l'on respecte la condition (2-29-1) relative à M_p , il faut des variations considérables des deux autres conditions (2-29) pour modifier de manière significative cette forme.

On s'aperçoit ainsi, qu'en jouant sur ces trois conditions et principalement sur (2-29-1), il est possible de créer toute une gamme de formes d'onde. La réalisation d'une forme d'onde précise relève désormais du savoir faire et nécessite une étude exhaustive qui n'est pas l'objet direct de ce mémoire. Remarquons pourtant au passage que l'on peut, en jouant convenablement sur les paramètres (2-29), réaliser avec une arme à un seul précurseur des formes d'ondes obtenues avec des armes à deux précurseurs. On voit donc qu'il n'est pas nécessaire de réaliser la similitude sur le second précurseur et donc sur le jet de fuite de gaz brûlés qui le détermine sans pour cela limiter le champ d'application de la similitude aux armes à un seul précurseur.

Pour vérifier la théorie, il suffit de montrer que le respect des trois conditions (2-29) entraîne la similitude des formes d'onde et le respect de la durée de formation.

La figure 29 présente deux groupes de trois configurations physiquement différentes, mais en similitude entre elles. Le premier groupe (photos de gauche) est constitué d'essais avec $\bar{p} = \bar{p}_T$. On peut constater la remarquable identité de la forme des ondes. Pour les essais du second groupe (photos de droite) la pression \bar{p}_T a été ajustée à une valeur différente de \bar{p} grâce à un opercule fermant la bouche de l'arme et qui se volatilise au passage du précurseur; la conclusion est la même que précédemment.

La comparaison des ondes de gauche et de droite pourrait laisser supposer que la condition (2-29-2) a une influence plus forte qu'elle n'a en réalité. En effet, la forme obtenue dans les essais avec opercule dépend d'un paramètre supplémentaire qui caractérise la résistance à la rupture de la membrane. Là encore, il faut acquérir un certain savoir faire pour compenser cet effet

parasite dans les applications pratiques.

On peut cependant reprocher à la figure 29 de ne présenter que des configurations peu différentes physiquement car \bar{p} ne varie que de 20%. Cette limitation a une cause technologique. Si \bar{p} diminue, (2-29-3) nous impose de diminuer p_y ; or (2-29-1) exige le maintien de la vitesse du projectile, ce qui ne peut être réalisé, dans ces conditions, que par un allégement de la balle. On voit d'ailleurs, sur les visualisations de la figure 28, que la longueur de la balle est différente suivant les configurations physiques. Les projectiles tirés avec $\bar{p} = 0.83$ bar sont les plus légers que nous ayons pu trouver, ce qui explique que nous nous soyons limités à cette valeur. Notons au passage que le phénomène est indifférent aux changements de longueur de la balle. Cela confirme notre hypothèse du paragraphe 2-1-1-2 sur l'influence négligeable de L_p et de la forme du projectile.

On voit, dès à présent, que la réalisation des conditions (2-29) n'est pas toujours possible techniquement sur une large plage de variation, même en laboratoire et sur une arme unique. Lorsqu'il s'agit, en plus, d'armes différentes le problème se complique encore.

La figure 30 montre la comparaison entre la forme de l'onde du canon de 30 mm et celle obtenue avec la carabine en respectant les trois conditions (2-14). La forme de l'onde du canon a été reconstituée à partir de la partition de la figure 7. Les problèmes de parallaxe et de repérage des références laissent subsister une incertitude quant à la forme exacte de l'onde. Celle-ci se traduit d'ailleurs par des discontinuités de pente au raccordement des différentes parties du champ optique. L'onde produite par la carabine a été relevée point par point sur un cliché pris à un instant homologue à celui du canon. Si la similitude est vérifiée, l'onde produite par la carabine et celle du canon sont homothétiques dans le rapport d'échelle donné par (2-24-1). Le centre de l'homothétie a été déterminé géométriquement. En comparant l'onde du canon et l'onde homothétique à celle de la carabine dans le rapport d'échelle, on

constate que celles-ci se rapprochent mais que des différences sont encore perceptibles. Ces différences sont dues principalement à des problèmes expérimentaux: l'incertitude sur le relevé de la forme de l'onde du canon, mais aussi sur la valeur du nombre de Mach du projectile; la présence de l'opercule et de son support pour l'onde de la carabine. La réalisation de la condition (2-14-2) exige, en effet, l'emploi d'un opercule sur la carabine. Outre l'influence parasite, déjà évoquée, de ce dispositif, il faut signaler que la pièce qui supporte la membrane et qui sert à régler \bar{p}_T est assez volumineuse pour jouer le rôle d'un obstacle sur l'arrière de l'onde. Cela explique pourquoi l'onde de la carabine se développe latéralement d'une manière différente de celle du canon.

On constate que la vérification de la théorie sur ce point précis de la forme de l'onde est rendue délicate par l'étendue du champ optique relatif au canon. On peut cependant tenter de comparer directement les visualisations. En effet, puisque nous nous intéressons aux phases de formation et que celles-ci sont en similitude, on peut comparer les ondes de bouche dès le début de leur propagation, c'est-à-dire lorsqu'elles occupent un champ limité. La figure 31 illustre bien l'identité des ondes du canon et de la carabine juste à l'issue de la phase de formation lorsque les conditions (2-29) sont respectées.

La comparaison fusil-carabine de la même figure montre clairement que la similitude des formes d'onde entre ces deux armes est due principalement au respect de (2-29-1) puisque les autres conditions (2-29-2) et (2-29-3) ne sont pas satisfaites.

Toutes les conclusions tirées de la figure 29 sont donc confirmées ici. La théorie est vérifiée en ce qui concerne la forme de l'onde.

Comme nous l'avons vu en 2-1-1-3, le paramètre qui apparaît dans la condition (2-29-3) caractérise la durée de la phase de formation et, donc, l'instant à partir duquel l'onde de bouche commence à se propager dans un milieu non perturbé, défini par les conditions (2-28). Dans le cas d'une similitude partielle qui

respecte (2-28) et (2-29-1) mais pas (2-29-2) et (2-29-3), il faut donc s'attendre à trouver des progressions d'onde de bouche en similitude mais décalées dans le temps. C'est ce qu'illustre la figure 32.

Les essais correspondant à la partie supérieure de cette figure ont été effectués avec une carabine de calibre 5.56mm, en faisant varier \bar{p} . Les ondes de bouche ont bien la même pente, comme le montre la deuxième courbe de la figure, mais elles sont décalées dans le temps. Ce décalage n'a pas d'importance puisque la pente représente le nombre de Mach du choc, qui caractérise entièrement l'intensité de l'onde de bouche. L'idéal, pour notre exposé, aurait été de pouvoir déduire, de la progression de l'onde de bouche, l'évolution de son nombre de Mach en fonction du temps. On aurait pu alors comparer directement les différentes configurations indépendamment de l'existence d'un décalage initial. Malheureusement, la détermination du nombre de Mach du choc par différence des positions de l'onde mesurées à des instants successifs, voire même par lissage, est trop imprécise pour être exploitée. C'est pour cette raison que dans la suite du rapport, nous comparerons les pentes des progressions en les recalant en temps. Il suffit pour cela, de translater les courbes suivant l'axe des temps jusqu'à faire coïncider les parties qui couvrent les mêmes abscisses. C'est ce qui a été fait entre le premier et le second tracé de la figure 32.

Dans la mesure où (2-29-1) est vérifié, la forme des ondes est sensiblement la même dans tous les cas, et les résultats sur l'axe de la figure 32 se généralisent à toute l'onde. Les précurseurs ont tous, quant à eux, une même pente finale puisqu'ils deviennent des ondes acoustiques, mais leurs courbes de progression ne coïncident pas puisque la durée de la phase de formation n'est pas en similitude entre les différents cas. On remarque au passage que l'absorption du précurseur ne modifie absolument pas la vitesse de l'onde de bouche.

La même expérience a été réalisée en faisant varier D plutôt que \bar{p} . Sur les courbes correspondantes de la figure 32 nous avons

tracé la position du disque de Mach du jet de gaz brûlés. Il est facile de voir que ces jets sont en similitude alors que le décalage est bien visible au niveau de la progression des ondes de bouche. Cela confirme que le décalage en temps provient bien de la phase de formation et non du tir proprement dit. On remarquera néanmoins que dans le cas du bloc aux pressions, arme à deux précurseurs, la phase de formation est beaucoup plus longue que dans les autres cas car le second précurseur s'atténue plus lentement que le premier. Il en résulte que l'onde de bouche commence sa propagation, non dans le milieu extérieur mais dans un milieu encore en mouvement. C'est ce qui explique que sa formation plus tardive soit compensée par une pente plus forte au début du mouvement.

Enfin, la figure 33 permet de comparer la progression de l'onde produite par un canon de 30 mm avec l'onde produite par une carabine de 5.56mm en similitude complète avec le canon, puisque les conditions (2-28) et (2-29) sont respectées strictement. On constate, tout d'abord, que le décalage temporel visible sur la troisième courbe de la figure 32 a disparu sur la figure 33, attestant l'influence de la condition (2-29-3). Néanmoins, une légère différence de pente persiste au début de la progression. Elle s'explique par le fait que le tir du canon visualisé correspond à une valeur de $\bar{p}_t \bar{c} / c_p$ voisine de 3.10^{-3} , ce qui signifie que le précurseur à une intensité relativement forte par rapport aux cas usuels. Cela serait sans conséquences si le paramètre $\sqrt{\frac{\bar{c}}{c_p}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_0}} \frac{L}{D}$ était très grand devant 1, car cela indiquerait

l'existence d'un grand laps de temps entre l'apparition de précurseur et celle du jet de gaz de poudre; mais comme tel n'est pas le cas, l'onde de bouche se ferme suffisamment tôt sur l'axe pour commencer sa progression dans un milieu encore en mouvement, comme c'était le cas pour le bloc aux pressions (figure 32). Cette phase n'est pas correctement représentée dans la simulation car la réalisation de (2-29-2) nécessite l'emploi d'un opercule à la bouche de la carabine. On voit bien apparaître ici le rôle de la condition (2-29-2) dont les effets n'affectent cependant que

le début de la progression si l'onde de bouche se forme assez tôt. Une étude fine des temps de formation de l'onde de bouche en fonction de $\frac{\bar{c} \sqrt{\bar{p}}}{c_g \sqrt{p_g}} \frac{L}{D}$ et du temps d'atténuation du précurseur en

fonction de $\bar{c} \bar{p}_r / c_g p_g$ devrait permettre de définir le domaine exact où ces paramètres n'ont aucune influence sur l'onde de bouche. Cela n'est pas directement l'objet de ce mémoire qui s'attache plus à l'étude des tirs très violents capables de perturber sensiblement le voisinage de l'arme et pour lesquels, comme nous l'avons vu, ces paramètres sont peu importants.

Il convient de résumer les résultats obtenus dans ce long développement.

Le paramètre prédominant de l'ensemble (2-29) est M_p . C'est, par chance, le plus facile à réaliser techniquement. Les conditions relatives aux autres paramètres sont moins strictes. Le paramètre le moins influent est $\bar{c} \bar{p}_r / c_g p_g$ qui traduit simplement le fait que le jet de gaz brûlés est beaucoup plus puissant que le jet précurseur, mais cette hypothèse est implicite puisque nous ne nous intéressons qu'aux armes où l'onde de bouche est le phénomène prépondérant. Il suffit donc de s'assurer que $\bar{c} \bar{p}_r / c_g p_g$ est de l'ordre de 10^{-3} .

La condition (2-29-3) caractérise la durée de la phase de formation. Il ne faut donc pas la négliger si l'on s'intéresse à ce qui se passe au voisinage immédiat de la bouche (c'est-à-dire, pour fixer les idées, à une distance inférieure à $10 D$). En revanche, nous savons que la forme de l'onde de bouche après la phase de formation est peu modifiée même si ce paramètre varie du simple au double, et nous avons vu que le non respect de (2-29-3) induisait un décalage en temps qui était sans conséquences sur l'intensité de l'onde de bouche. Ces résultats sont importants car (2-29-3) est pratiquement irréalisable en dehors du caisson de similitude. On ne peut, en effet, changer la longueur du tube sans modifier M_p et p_g , ce qui risque d'empêcher la réalisation d'autres conditions de similitude.

Ces difficultés ne se posent pas dans le cas du tir idéal pour

lequel la forme géométrique de l'onde de bouche n'est conditionnée que par le comportement du jet de gaz brûlés. Ainsi, si les conditions (2-28-1) à (2-28-4) sont respectées, les ondes de bouche produites par deux tirs idéaux sont en similitude et leurs formes géométriques sont homothétiques. Malgré l'anisotropie du jet de gaz brûlés, l'onde de choc produite par un tir idéal est quasi-sphérique, comme le montre la figure 15 et comme on le démontrera théoriquement au chapitre 3 dans le cas des tirs très intenses. Cette réduction de la similitude aux conditions (2-28-1) à (2-28-4) pour le tir idéal revêt une importance pratique non négligeable dans les applications aéronautiques. En effet, le tir à haute altitude est très voisin d'un tir idéal, car les phénomènes précurseurs liés à la vidange de l'air dans le tube sont insignifiants du fait de la faible valeur de \bar{P}_r .

Dans le cas général, les problèmes techniques évoqués précédemment conduisent à préférer une similitude partielle à l'application stricte des règles (2-29). Cela pose naturellement le problème de l'erreur commise dans une similitude qui ne tient pas compte de (2-14-2) et (2-14-3). Nous savons déjà que l'onde de bouche tend à devenir sphérique lorsqu'elle est très affaiblie (§1-3-1); sa forme initiale n'a plus guère d'influence dans cette phase finale. Par contre, dans sa phase intense qui est celle qui nous intéresse en balistique intermédiaire, l'onde de bouche peut être très anisotrope si certains phénomènes précurseurs ne sont pas négligeables. Ne pas respecter parfaitement la phase de formation revient à ne pas représenter exactement cette anisotropie. La question de l'erreur commise prend alors toute son importance. Les visualisations ne peuvent à elles seules apporter la réponse. Les mesures des pressions instationnaires doivent ici prendre le relais, mais elles ne sont possibles qu'en présence d'un obstacle, problème que nous aborderons en 2-2. Dans le cas du tir en atmosphère infinie, le calcul de l'écoulement est le seul moyen d'évaluer l'influence de l'anisotropie de l'onde. Nous établirons, au chapitre suivant, les bases théoriques d'une telle approche.

2-1-4-3 Effet des paramètres thermochimiques

Depuis le début de ce chapitre, nous supposons que les gaz de poudre constituent un gaz parfait. En fait, on sait qu'il faut considérer cela comme une convention d'écriture pour limiter à γ_g l'ensemble des paramètres thermochimiques. Les grandeurs thermochimiques qui entrent dans les flux à la bouche caractérisent la composition des gaz et son évolution au cours du temps. Cet état thermochimique dépend de la nature des composants de la poudre et du processus de combustion.

Plutôt que de faire un bilan compliqué des paramètres thermochimiques et agir sur chacun d'eux, nous avons préféré agir globalement sur les conditions de chargement et de combustion de la poudre car c'est sous cet aspect que le problème va se poser dans les applications.

Lors des essais sur l'effet de \bar{T} / T_g , nous avons dû modifier la charge de poudre pour maintenir M_p constant. En conséquence P_g a été modifiée: par suite ni les conditions de combustion ni la détente des gaz dans le tube n'étaient les mêmes. Pourtant la progression de l'onde de bouche n'a pas été modifiée (figure 27).

Dans ces essais, décrits ci-dessus en 2-1-4-2, les composants de la poudre étaient invariables. Nous avons donc cherché à effectuer des tirs en similitude en respectant toutes les conditions de nature mécanique mais en faisant varier la composition de la poudre. Dans ce but, nous avons essayé, dans un bloc aux pressions de calibre 5.56 mm, des munitions garnies de la poudre du canon de 30 mm qui est une poudre simple base, alors que la poudre standard est une double base. Nous avons vu en 2-1-3-3 que cette munition s'est avérée inutilisable.

Nous avons alors pensé à comparer la progression de l'onde produite par le canon lui-même avec celle obtenue avec la

carabine en respectant toutes les conditions de similitude sauf celles concernant la poudre.

La figure 33 montre que les progressions coïncident malgré une légère différence initiale expliquée en 2-1-4-2. On peut donc affirmer que, dans la limite des variations considérées, la nature de la poudre et les conditions de chargement n'ont pas d'effet sensible sur la propagation de l'onde de bouche. En particulier, on peut simuler l'onde d'un canon DEFA 554 avec une carabine de 5.56 mm et des munitions garnies de leur poudre standard.

Les constatations précédentes expliquent pourquoi le choix de valeurs conventionnelles pour j_0 et n est possible (§ 2-1-3-3).

2-1-4-4 Justification expérimentale du choix des grandeurs primaires

En 2-1-4-1 nous avons vu que dans la représentation

$$(2-33) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_y}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_y}} \frac{\chi}{D} = \mathcal{H}_0 \left(\sqrt{\frac{\bar{c}}{c_y}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_y}} \frac{\bar{c} t}{D} \right)$$

la courbe obtenue était indépendante de la valeur de \bar{c} / c_y . La question se pose alors de savoir si ce résultat provient d'une trop faible variation numérique de \bar{c} / c_y , ou s'il correspond à la physique du phénomène. En d'autres termes, \bar{c} / c_y joue-t-il le rôle du paramètre j_1 des relations (2-16) à (2-19) et $\sqrt{\frac{\bar{c}}{c_y}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_y}} \frac{\bar{c} t}{D}$

celui de j_0 . Dans ce cas cela signifie que le choix de \mathcal{S} comme grandeur primaire est le plus adéquat et que \mathcal{S} caractérise la grandeur physique du jet déterminante pour la propagation de l'onde de bouche (§ 2-1-2-1). Dans cette hypothèse, un autre choix de grandeur primaire, comme celui de $p_y D^2$, qui aboutit à la représentation

$$(2-34) \quad \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_y}} \frac{\chi}{D} = \mathcal{H}_1 \left(\sqrt{\frac{\bar{p}}{p_y}} \frac{\bar{c} t}{D} \right)$$

ne donne pas une courbe invariante lorsque \bar{c} / c_j change. $\sqrt{\frac{\bar{p}}{p_j}} \frac{\bar{c}}{D} t$
 joue alors le rôle de j , dans la relation (2-19).

Pour trancher cette question, il suffit donc de tracer les courbes issues des deux représentations (2-33) et (2-34) pour deux valeurs de \bar{c} / c_j . Si les courbes (2-34) restent confondues comme les courbes (2-33), cela signifie soit que les variations imposées à \bar{c} / c_j sont trop faibles pour avoir un effet notable, soit que notre inventaire des paramètres physiques contient des grandeurs qui n'ont aucun effet sur l'onde de bouche. A l'inverse, si les courbes (2-34) diffèrent pour les deux valeurs de \bar{c} / c_j alors que les courbes (2-33) restent confondues, c'est que notre inventaire est correct et que le choix de \bar{p} comme grandeur primaire permet d'obtenir explicitement le rôle de \bar{c} / c_j .

En pratique, la comparaison est moins aisée qu'en théorie, comme nous l'avons signalé en 2-1-4-1. En effet, le champ optique étant limité, nous ne pouvons construire les courbes (2-33) et (2-34) que par tronçons, en faisant varier \bar{p} ; c'est ce qu'illustre la figure 27. Sur chacun de ces tronçons les différences entre les deux représentations restent minimales. C'est pourquoi nous avons représenté sur les deux premiers graphiques de la figure 34, pour les deux représentations, les essais de la figure 27 mis bout à bout. Malheureusement, la comparaison est peu concluante car, comme nous l'avons mentionné en 2-1-4-1 et sur la figure 26, les conditions (2-29-2) et surtout (2-29-3) ne sont pas respectées d'un essai à l'autre. Cela induit, conformément à ce que nous avons expliqué en 2-1-4-3, un décalage temporel entre les tronçons. Ce décalage masque les différences induites par la variation de \bar{c} / c_j .

Cependant, depuis 2-1-4-3, nous avons défini une méthode pour comparer directement les pentes des courbes, même si la condition (2-29-3) n'est pas respectée entre les tirs. Comme le paramètre

$\bar{p}_1 \bar{c} / c_j p_j$ est de l'ordre de 10^{-3} dans les essais considérés, les pentes obtenues correspondent bien au nombre de Mach de l'onde de bouche dans le milieu extérieur; le recalage en temps est donc légitime entre les différents tronçons correspondant aux mêmes conditions de similitude (2-28).

Bien que les graphiques ne soient pas entièrement convaincants du fait de la variation insuffisante de \bar{c} / c_j , on peut distinguer sur le troisième graphique de la figure 34 que la représentation (2-33) conduit à deux courbes confondues, mais qu'au contraire, sur le graphique 4 les courbes divergent progressivement et que leurs pentes finales sont légèrement différentes. Ainsi, la représentation (2-34) met en évidence la dépendance du phénomène vis-à-vis de \bar{c} / c_j et la représentation (2-33) explicite cette dépendance. Cela confirme donc que, pour le tir en atmosphère infinie, la condition (2-28-5) n'est pas nécessaire à la similitude et que la valeur de \bar{c} / c_j ne sert qu'à déterminer les points homologues à travers (2-24).

Au chapitre 3, nous pourrons trancher définitivement cette question grâce à un critère plus évident issu de la comparaison du comportement de l'onde de bouche, lorsque \bar{p} est faible, avec des modèles théoriques.

2-1-4-5 Extension de la similitude après la phase stationnaire

Lors de l'inventaire des paramètres physiques (2-1-1-1) nous avons montré que les débits instationnaires à la bouche (2-4) étaient à prendre en compte, puis par des considérations physiques nous avons limité le domaine d'application de notre théorie à la phase stationnaire du jet (2-1-1-2), en remplaçant (2-4) par (2-10). Les figures 21 et 23 montrent d'ailleurs que la pression et la température de bouche évoluent peu pendant un laps de temps qui correspond à une variation du temps adimensionné de 0 à 0,4. Cette durée est suffisante pour l'observation de

l'interaction tir canon - prise d'air en vol que l'on peut considérer comme un problème de champ proche. Il est tentant d'étendre la similitude à des durées plus longues pour l'étude des effets lointains du tir, quand l'onde de bouche tend à devenir une onde acoustique, ou pour celle du jet lui-même.

Comme nous l'avons montré en 2-1-1-2, le jet de gaz brûlés étant surdétendu, tant que la pression dans le tube est suffisante, la bouche reste un col sonique, ce qui a lieu pendant presque toute la durée de la vidange. Lors du désamorçage, les débits sont devenus si faibles qu'ils n'ont plus d'influence notable sur le milieu environnant. D'autre part, comme la température décroît au cours du temps, les gaz brûlés, déjà considérés comme figés à la bouche dans la phase stationnaire, le sont a fortiori après. Les débits à la bouche sont donc donnés par les expressions (2-4) où on pose $M_g = 1$.

Si l'on veut représenter l'évolution de ces débits au cours du temps, il faut caractériser le tir par γ_j , \mathcal{S}'' et Q'' et non plus par γ_j , \mathcal{S} et Q , valables seulement pendant la phase stationnaire. On prend comme en 2-1-2-1 le système de grandeurs primaires (2-20) dont le sens physique et l'adéquation à la phase stationnaire du phénomène ont été établis en 2-1-4-4. Il découle de l'application des lois de la similitude physique que les grandeurs sans dimensions qui caractérisent désormais le tir sont celles des ensembles (2-28) et (2-29) auxquelles il faut adjoindre, selon (2-4), les deux grandeurs supplémentaires $\frac{p_j''}{p_j}$ et $\frac{c_j''}{c_j}$.

On peut donc dire que deux tirs sont en similitude totale aux points homologues définis par (2-24) s'ils le sont pendant la phase stationnaire et si en plus ils vérifient:

$$(2-35-1) \frac{p_j''}{p_j} = \frac{p_j'''}{p_j'}$$

$$(2-35-2) \frac{c_j''}{c_j} = \frac{c_j'''}{c_j'}$$

Chacune des conditions (2-35) représente l'égalité de fonctions

adimensionnées d'un temps adimensionné. La connaissance de ces fonctions s'obtient en résolvant le problème de la vidange du tube, ce qui nécessite une étude spécifique compliquée. Notons simplement que, si l'on se borne à l'hypothèse monodimensionnelle, c'est-à-dire si l'on fait abstraction des phénomènes de frottement, la vidange est caractérisée par la capacité du réservoir, par la détente produite par le mouvement du projectile et par la nature des réactions chimiques. Si l'on exclut, comme en 2-1-1-3, la loi de mise en vitesse du projectile qui n'a que peu d'influence sur l'écoulement à la bouche comme le montre la figure 17, le phénomène peut être caractérisé par L , V_p , et les conditions de chargement de la munition, ainsi que par la nature physico-chimique de la poudre.

On constate qu'à l'exclusion de ce dernier facteur, les autres grandeurs L et V_p sont déjà incluses dans le bilan à travers leur effet sur la phase de formation. Nous avons donc comparé le tir du canon et celui de la carabine 222 Remington en respectant les conditions de similitude (2-29-3) et (2-29-1) correspondant à L et V_p . La figure 35 montre que la condition (2-35-1) est réalisée dans ce cas et la figure 25 montre qu'il en est de même pour (2-35-2). On peut en déduire que les effets de frottements à l'intérieur du tube n'ont pas d'effets sensibles sur les débits à la bouche. L'hypothèse monodimensionnelle est donc suffisante pour décrire la vidange. On voit d'autre part que les conditions thermo-chimiques sont vraisemblablement voisines pour les deux armes considérées, (dont les poudres sont des simples bases), puisque l'on ne décèle pas de différences sur $\frac{P_j^*}{P_j}$ et $\frac{T_j^*}{T_j}$.

Il serait faux, néanmoins, d'en conclure que le respect des conditions (2-29-1) et (2-29-3) équivaut à celui des conditions (2-35), car cela serait faire abstraction de l'influence de la nature de la poudre. Le respect de la condition (2-28-1) est lui-même insuffisant, car il ne traduit que le résultat de la combustion et non la combustion elle-même.

Quelques essais succincts semblent montrer que la condition (2-35-1) n'est pas respectée entre la carabine et le bloc aux pressions de calibre 5.56 mm dont la munition est à double base. Mais, l'important pour notre étude est qu'il est techniquement possible de représenter le tir d'un canon avec une arme de calibre 5.56mm, non seulement pour simuler les effets proches (interaction tir canon - prise d'air) mais aussi les effets lointains (bruits sur l'environnement, tirs d'avion à basse altitude etc...). De plus, nous avons vérifié que les modifications de chargement de la carabine nécessaires à la réalisation des conditions de similitude produisent des tirs semblables, même après la phase stationnaire (figure 36).

Il reste à prouver, mais cela n'est pas l'objet de notre travail, qu'il est bien nécessaire de représenter l'évolution des paramètres de bouche dans le temps pour simuler les effets lointains de l'onde de bouche. Il est vraisemblable que cette représentation ne s'impose pas car plus l'onde est éloignée de la surface de contact air-gaz, plus elle dépend de ses effets globaux et non instantanés. C'est la première chose que les acousticiens du tir doivent vérifier pour se libérer de la condition (2-29-3).

Si, par contre, on s'intéresse spécifiquement à l'évolution dans le temps du jet de gaz brûlés, pour l'étude du recul par exemple, les conditions (2-29-2) et (2-14-3) sont nécessaires mais notre étude ne montre pas qu'elles sont suffisantes.

2-2 TIR EN PRESENCE D'UN OBSTACLE

2-2-1 THEORIE DE LA SIMILITUDE

Un obstacle dans un champ aérodynamique se caractérise par sa forme et sa taille. Pour une forme donnée, un obstacle est donc entièrement définie par la seule donnée d'une longueur que nous appellerons H , qui est introduite par la condition de glissement sur le projectile et qui doit être incluse dans l'inventaire des

grandeurs physiques.

La présence d'un obstacle dans le champ aérodynamique ne modifie en rien les raisonnements du paragraphe 2-1-1-3 relatif à la modélisation de la phase de formation de l'onde de bouche. L'ensemble (2-14) caractérise donc toujours cette phase en présence d'un obstacle.

En revanche, la disparition de l'axisymétrie de l'écoulement ne permet plus de confondre le canon avec l'axe de symétrie pour faire disparaître Δ et L^e de l'inventaire du tir idéal (§ 2-1-1-2). En toute rigueur, si l'on admet que l'arme fait partie de l'obstacle ces grandeurs n'ont plus à apparaître dans l'inventaire puisqu'elles sont liées à H par la géométrie de l'obstacle. Pour fixer les idées, imaginons qu'il faille étudier le tir d'un canon de marine sur un bateau, (photo 2, figure 1): il est évident que la longueur du canon est une caractéristique de l'obstacle.

Cependant, il arrive, en particulier dans les applications aéronautiques, que le canon soit noyé dans la structure de l'obstacle: L^e n'a donc plus de raison d'apparaître dans l'inventaire ni même d'être considérée comme une longueur particulière de l'obstacle puisqu'il n'y a plus de condition de glissement sur l'arme elle-même. On comprend ici pourquoi nous avons choisi une notation différente pour la longueur extérieure de l'arme L' et sa longueur intérieure L qui, elle, ne disparaît pas de l'inventaire puisqu'elle n'intervient pas dans une condition de glissement mais comme mesure de la quantité d'air contenue dans le tube avant le tir.

Ce que nous venons de dire pour L^e reste vrai pour Δ , mais il est intéressant de considérer ici Δ comme un paramètre indépendant de la géométrie de l'obstacle pour le faire apparaître explicitement dans une condition de similitude et évaluer la sensibilité du phénomène à cette condition. Nous nous limiterons donc pour l'instant à rappeler que, pour toutes les armes usuelles Δ/D est de l'ordre de 1.

Les remarques précédentes permettent donc de caractériser le tir

en présence d'un obstacle, par l'ensemble (2-11) où $A = \mathcal{Q}$ et $B=Q$, auquel il faut adjoindre Δ et H et l'ensemble (2-14).

De ce fait, et avec le choix des grandeurs adimensionnées fait en 2-1-2-1, on obtient pour la pression par exemple, la formule suivante:

$$(2-36) \quad \frac{p}{\bar{p}} = \mathcal{F}_D \left(\gamma, \gamma_g, M_g, \bar{M}, \frac{\bar{c}}{c_g}, M_p, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{L}{D}, \frac{\bar{p} T \bar{c}}{p_g c_g}, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{H}{D}, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\Delta}{D}, \right. \\ \left. \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}}, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{x_i}{D}, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{ct}{D} \right)$$

où apparaît une nouvelle condition de similitude qui définit l'échelle de la maquette de l'obstacle <19>:

$$(2-37) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{H}{D} = \sqrt{\frac{\bar{c}'}{c_g'}} \sqrt{\frac{\bar{p}'}{p_g'}} \frac{H'}{D'}$$

La fonction \mathcal{F}_D n'a pas ici la même signification que dans la formule (2-21). En particulier, elle dépend de la géométrie de l'obstacle. Le nombre de Mach \bar{M} , quant à lui, doit être interprété comme le nombre de Mach uniforme, loin en amont de l'obstacle.

A ce point de l'étude la question qui se pose naturellement est la suivante: peut-on encore assimiler \mathcal{F}_D à la fonction \mathcal{F} obtenue en faisant tendre la grandeur \mathcal{J} donnée par (2-25) vers zéro? En 2-1-2-2, nous avons montré que pour être cohérente cette approximation devait s'étendre à tous les paramètres très petits, cela nous avait conduit à définir un domaine spatio-temporel d'application de la similitude (2-27-2).

En apparence, le même raisonnement peut être appliqué ici, puisque la condition (2-26) est toujours valable. Ainsi, nous voyons que si \mathcal{J} est assimilé à zéro, il en va de même de $\frac{\sqrt{\bar{c}} \sqrt{\bar{p}}}{\sqrt{c_g} \sqrt{p_g}} \frac{\Delta}{D}$ puisque Δ/D est de l'ordre de 1. Cela signifie que la

dimension du diamètre extérieur de l'arme importe peu tant qu'il reste de l'ordre de grandeur du calibre. De même si l'on compare le paramètre de la condition (2-37) à \mathcal{J} , on voit la dimension de l'obstacle ne doit être prise en compte que si:

(2-38) $H \gg D$

Cela signifie qu'il serait absurde d'étudier l'effet du tir sur un obstacle de la taille du projectile tout en négligeant le projectile lui-même. Nous aborderons en 2-2-2-2 le cas des obstacles dont les longueurs caractéristiques ne vérifient pas (2-38).

Pourtant, l'assimilation de \mathcal{F}_p à \mathcal{F} et celle de \mathcal{J} et de $\sqrt{\frac{\bar{c}}{\epsilon_p}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{p}_p}} \frac{\Delta}{D}$ à

zéro, ne dépend pas que de la condition (2-38). En effet, \mathcal{F}_p dépend de la géométrie de l'obstacle et la condition (2-27-2) n'est pas nécessairement vérifiée en tout point de la maquette. Remplacer \mathcal{F}_p par \mathcal{F} revient donc à supposer que l'interaction du tir avec les parties de l'obstacle placées très près de la bouche n'a pas d'effet sur la suite du phénomène. En d'autres termes, la question se pose donc de définir, dans le cas du tir en présence d'un obstacle, un domaine de validité de la similitude équivalent aux conditions (2-27), dans lequel l'effet des interactions initiales entre le tir et l'obstacle est nul et pour lequel la bouche peut être considérée comme ponctuelle.

Si un tel domaine n'existe pas, ou s'il est trop éloigné de la bouche pour avoir une utilité pratique, nous perdons le degré de liberté que nous avons avec le tir en atmosphère infinie car l'assimilation de la bouche à une source ponctuelle n'est plus valable. L'échelle de la maquette doit alors être égale au rapport des calibres de l'arme à simuler et de l'arme de simulation.

Malheureusement, le choix des valeurs de D est particulièrement restreint pour les petits calibres. Il se limite à 5.56 mm et 7.62 mm. Or, dans le cas des applications aéronautiques par exemple, l'échelle de la maquette est généralement déterminée en fonction de considérations étrangères au tir. Il deviendrait dans ce cas impossible d'équiper d'une arme de simulation une maquette non prévue spécifiquement pour cela.

Comme on le voit, il y a une certaine analogie entre la démarche qui s'offre pour l'étude du tir en présence d'un obstacle à celle qui a été suivie dans l'étude de la phase de formation du tir. En effet, il s'agit, maintenant comme alors, de déterminer dans quelle mesure les conditions initiales du tir ont des conséquences sur la propagation de l'onde de bouche. La difficulté spécifique à l'étude présente est qu'il ne s'agit plus d'évaluer l'influence d'un nombre fini de paramètres sans dimensions, mais de déterminer celle de la géométrie du voisinage de la bouche qui peut varier à l'infini.

Pour résoudre un tel problème, il faut établir un classement des différentes interactions tir-obstacle en un nombre restreint de types définis d'une manière simple par un paramètre sans dimensions.

2-2-2 LES DIFFERENTS TYPES D'INTERACTIONS TIR-OBSTACLE

2-2-2-1 Notion d'éloignement de l'obstacle à la bouche

Avant de définir quantitativement cette notion, il convient de lui donner un sens physique. Supposons que l'obstacle soit suffisamment éloigné de la bouche pour que le jet de gaz brûlés se développe comme en atmosphère infinie. L'onde de bouche se forme par conséquent comme si l'obstacle n'existait pas, l'écoulement reste axisymétrique au début du mouvement et aucune partie de la maquette autre que le canon de l'arme ne vient interagir avec le tir pendant le début de la propagation de l'onde de bouche. De ce fait, toutes les hypothèses simplificatrices de la section 2-1-1-2 s'appliquent et \mathcal{F}_0 peut être assimilée à \mathcal{F} dans les mêmes conditions qu'au paragraphe 2-1-2-2. La bouche de l'arme peut donc être considérée comme une source ponctuelle. Pour bien représenter l'interaction à échelle réduite, il suffit dans ce cas, de produire une onde de bouche semblable à l'onde réelle et de choisir l'échelle de la maquette

du prototype en respectant la condition (2-37). Il convient maintenant de définir quantitativement la notion d'éloignement, afin de répondre aux deux questions suivantes: qu'est-ce qu'un obstacle "suffisamment éloigné de la bouche" ? et que se passe-t-il quand l'éloignement est insuffisant pour que \mathcal{F}_D soit confondu avec \mathcal{F} ?

Dans ce qui précède, il apparaît que c'est d , distance de la bouche à l'obstacle, qu'il convient de comparer à une longueur caractéristique du début de la propagation de l'onde de bouche. Comme cette dernière se forme sur l'axe à peu près au niveau du disque de Mach du jet de gaz brûlés, il est naturel de comparer d à X_D . Bien entendu, X_D peut dépendre de la géométrie de l'obstacle comme le montrent les visualisations de la figure 14, mais ce que nous nous proposons ici est de comparer le tir en présence d'un obstacle avec le tir en atmosphère infinie; c'est donc la valeur de X_D en atmosphère infinie qui doit servir de longueur de référence. De plus, comme nous nous intéressons à ce qui se passe après la phase de formation de l'onde, c'est la valeur de X_D pendant la phase stationnaire du tir qui convient. Nous pouvons donc définir le paramètre d'éloignement par:

$$(2-39) \quad \delta_1 = \frac{d}{X_D}$$

Cependant cette définition présente l'inconvénient de ne pas être donnée à partir des constantes caractéristiques du tir qui servent à adimensionner toutes les grandeurs physiques du problème. Il faut donc expliciter X_D à l'aide de ces grandeurs. Au paragraphe 2-1-3-2, nous avons réalisé ce propos dans le cas d'un jet stationnaire dans un milieu au repos. Il faut étendre cette analyse dans l'hypothèse de l'écoulement uniforme. Les équations générales de cet écoulement extérieur introduisent γ et les conditions au loin \bar{e} et \bar{u} . Le jet est donc déterminé par l'ensemble suivant:

$$(2-40) \quad \mathcal{B}, Q, D, \Pi_D, \gamma, \bar{P}, \bar{e}, \bar{u}, \gamma$$

Ici, contrairement au cas du jet dans un milieu au repos, la présence de \bar{c} dans l'inventaire permet de prendre (2-20) comme système de grandeurs primaires. On peut ainsi écrire X_D sous la forme adimensionnée:

$$(2-41) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}} \frac{X_D}{D} = \mathcal{K}_{1\bar{P}}(\gamma_g, \gamma, M_g, \bar{M}, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}}, \frac{\bar{c}}{c_g})$$

qui, compte tenu de (2-26), peut être assimilée à:

$$(2-42) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}} \frac{X_D}{D} = \mathcal{K}_1(\gamma_g, \gamma, M_g, \bar{M}, \frac{\bar{c}}{c_g})$$

où \mathcal{K}_1 est la forme asymptotique de $\mathcal{K}_{1\bar{P}}$ lorsque \bar{P}/P_g tend vers zéro. Cette expression n'est pas contradictoire avec (2-32); elle signifie simplement que:

$$(2-43) \quad \mathcal{K}_1(\gamma_g, \gamma, M_g, \bar{M}, \frac{\bar{c}}{c_g}) = \mathcal{K}_0(\gamma_g, M_g) \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \quad \text{pour } \bar{M} = 0$$

L'expérience montre que lorsque \bar{M} reste de l'ordre de 1, la valeur de X_D n'est presque pas modifiée. (on pourra le constater sur la figure 113 relative au chapitre 5). De même, on trouve (ref<45>) qu'une variation de T_g ne modifie pas sensiblement X_D . On peut donc appliquer la relation (2-43) en première approximation pour toute valeur de \bar{M} et γ . Ainsi, compte tenu des valeurs usuelles de \bar{c}/c_g et du fait que \mathcal{K}_0 est voisin de 0.7 pour un jet sonique à la bouche, on peut écrire, selon (2-39) et (2-42):

$$(2-45) \quad \delta_1 \approx \delta = \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}} \frac{d}{\Delta}$$

C'est ce paramètre δ que nous utiliserons pour classer les interactions tir-obstacle en fonction de l'éloignement.

Nous pouvons donner dès maintenant la signification du cas introduit au début de cette section qui correspond à $\delta \gg 1$, ce qui implique, compte tenu de (2-26), que la bouche est très éloignée de l'obstacle.

Du point de vue des applications, on peut trouver l'exemple de tels tirs dans le domaine de l'artillerie terrestre ou navale (figure 1). On rappellera toutefois qu'il convient de s'assurer, dans les cas concrets, que Δ/D est de l'ordre de 1 car, après le début de l'interaction avec l'obstacle, l'écoulement n'est plus axisymétrique. Si l'interaction sur le canon lui-même devait être représentée en similitude, il faudrait alors réduire le diamètre extérieur dans le même rapport que l'obstacle.

2-2-2-2 Obstacles liés à la bouche

On désigne par ces termes les "freins de bouche" chargés de réduire le recul ou les décompresseurs destinés à atténuer l'onde de bouche (figure 37). Dans ce qui suit, on distinguera soigneusement la bouche de l'arme et la bouche du dispositif. Les dispositifs atténuateurs ne remplissent pas la condition (2-38) et ils peuvent être classés parmi les obstacles très rapprochés de la bouche de l'arme et tels que δ est très petit devant 1. Ces deux aspects réunis rendent caduque la théorie de la similitude de tir en présence d'un obstacle développée jusqu'ici. En effet, l'analyse faite en 2-2-1 est basée sur l'hypothèse implicite que la présence de l'obstacle ne modifie pas les principes fondamentaux de la schématisation du tir. Cela signifie que l'obstacle n'empêche pas la formation de l'onde de bouche, que l'écoulement à la bouche est stationnaire pendant un temps suffisant et que l'influence du projectile est toujours négligeable.

Si on considère le dispositif atténuateur comme un obstacle et si on s'intéresse à son interaction avec le jet de gaz brûlés, le schéma de base n'est plus valable. En effet, il n'y a pas d'onde de bouche à l'intérieur du dispositif et le projectile n'est plus de taille négligeable par rapport à l'obstacle. L'écoulement à l'intérieur du dispositif ne suit donc pas les règles de similitude que nous avons mises en évidence. De plus, les paramètres à la bouche de l'arme ne nous sont plus connus; le

nombre de Mach M_g , par exemple, n'est plus nécessairement égal à un.

Cependant, à la bouche d'un dispositif atténuateur, il existe un jet de gaz brûlés qui provoque une onde de bouche dans l'atmosphère extérieure (figure 37). Dans les applications usuelles, les fortes pressions intérieures imposent que le nombre de Mach à la bouche du dispositif soit égal à un. Si la longueur caractéristique Δ^e de l'extérieur du dispositif est telle que Δ^e/D n'est pas grand devant 1, nous retrouvons le problème du tir en atmosphère infinie et toutes les conclusions obtenues jusqu'ici s'appliquent à une arme munie d'un décompresseur pour peu que l'on caractérise le tir par les grandeurs correspondant au jet à la bouche du dispositif. Si l'encombrement extérieur du dispositif est grand, il faut alors le considérer comme un élément de l'obstacle. En pratique, il n'est pas rare que les décompresseurs aient plusieurs bouches et la forme de l'onde de bouche en est affectée (figure 37). On peut même considérer souvent ces bouches comme génératrices d'ondes indépendantes. La figure 38 montre que de telles ondes suivent bien les règles de similitude en atmosphère infinie à la condition de les caractériser chacune par les valeurs de p_y et c_y à la bouche qui leur correspond.

Si on fait abstraction de l'effet du décompresseur sur l'écoulement précurseur, la réalisation de la forme de l'onde revient principalement à respecter le rapport des débits entre les bouches. Cependant, puisque nous ne connaissons pas les lois particulières de l'écoulement interne au dispositif, la réalisation technique de la forme de l'onde exige des utilisateurs un savoir-faire empirique. Les études particulières aux décompresseurs <42> n'entrent pas dans notre propos qui se limite à démontrer qu'une arme munie d'un décompresseur peut être considérée comme une arme nouvelle. C'est pourquoi nous nous sommes limités ici à vérifier que l'onde suit bien les lois de similitude sur l'axe de tir, la réalisation de la forme de l'onde n'étant plus alors qu'une question technologique.

Le problème de l'interaction tir-obstacle revient désormais à

celui où la présence de l'obstacle ne modifie pas les hypothèses fondamentales de notre schématisation du tir: le jet est stationnaire et il donne naissance à une onde de bouche dont l'interaction avec le projectile est négligeable.

2-2-2-3 Obstacles dans le voisinage immédiat de la bouche

Nous nous plaçons ici dans le cas où les hypothèses fondamentales rappelées en 2-2-2-2 sont valables.

Lorsque δ est voisin ou inférieur à 1 et que la condition (2-38) est vérifiée, le jet de gaz brûlés est modifié par l'obstacle dans le voisinage immédiat de la bouche (figure 14). La forme de l'onde de bouche est donc déterminée par cette interaction. On ne peut plus, dans ce cas, considérer la bouche comme une source ponctuelle et assimiler \mathcal{F}_p à \mathcal{F} . La condition (2-25) doit donc être respectée, ce qui entraîne que (2-37) devient:

$$(2-46) \quad \frac{H}{D} = \frac{H'}{D'}$$

Nous avons déjà évoqué (§ 2-2-1), le côté pénalisant de cette contrainte, aussi est-il intéressant de déterminer dans quelle mesure il est possible de s'en affranchir, au prix d'erreurs tolérables sur les résultats des essais.

Nous avons effectué, dans ce but, des essais spécifiques.

Une plaque plane est placée dans le caisson de similitude parallèlement à l'axe de tir d'une carabine de 5.56 mm. Les dimensions de la plaque sont telles que celle-ci peut être considérée comme infinie. La seule longueur intervenant alors pour caractériser l'obstacle est la distance d de la plaque à la bouche (figure 39).

La maquette est équipée de 4 capteurs de pression instationnaire situés, comme la carabine, dans le plan de symétrie du caisson et montés en membrane affleurante.

La distance d peut être ajustée aux deux valeurs suivantes: $d=5D$ et $d=15D$ (configurations 1 et 2). Les capteurs sont disposés aux

abscisses $X_1=0$; $X_2=20\text{mm}$; $X_3=3.X_2$; $X_4=3.X_3$. L'abscisse nulle correspond à celle de la bouche de l'arme.

On peut réaliser l'égalité des paramètres de similitude entre les deux configurations lors de tirs idéaux en jouant sur \bar{p}_r . La position du capteur 1 est toujours homologue à elle même; celle du capteur 2 dans la première configuration est homologue à celle du capteur 3 dans la seconde et il en va de même entre le capteur 3 et le capteur 4.

Seule la similitude géométrique sur le calibre n'est pas respectée puisque l'arme ne change pas d'une configuration à l'autre.

Dans le cas de tirs non idéaux, on peut ajuster \bar{p}_r pour réaliser (2-29-2). Cependant (2-14-3) ne sera pas respecté pour des raisons techniques. L'ajustement de \bar{p}_r exige l'adjonction d'une pièce mécanique à la bouche de l'arme; cette pièce est représentée à l'échelle dans chaque configuration (figure 39).

Comme rien ne permet d'affirmer que la forme de l'onde de bouche ne dépend pas de la géométrie du voisinage immédiat de la bouche, nous avons représenté en similitude, dans nos essais, toutes les longueurs caractéristiques (qui sont dans un rapport de 3) sauf les calibres (qui sont identiques dans les deux configurations). Les visualisations présentées sur la figure 40, ont été agrandies trois fois plus pour la première configuration ($d/D = 5$) que pour la seconde ($d/D = 15$); ainsi, les longueurs caractéristiques (hormis le calibre) sont identiques sur les photos. La comparaison des tirs idéaux, dans ces deux configurations, montre que, dans le voisinage immédiat de la bouche, la forme de l'onde est peu affectée par le non respect du rapport des calibres. Par contre l'interaction du jet avec la plaque est très différente: dans la configuration 1, le choc latéral se réfléchit sur la plaque; dans la seconde, le jet est pratiquement identique au jet libre. Ce résultat signifie que la forme initiale de l'onde ne dépend pas directement de celle du jet mais plutôt de celle de la surface de contact air-gaz brûlés qui est quasiment identique dans les deux cas. C'est pourquoi,

lors de tirs non idéaux, la forme initiale du choc est d'autant plus modifiée que les phénomènes précurseurs sont intenses (figure 40). En effet, ceux-ci modifient la forme de la surface de contact sans perturber notablement le jet.

Sur la figure 41, on peut constater que les progressions sur l'axe de tir des ondes dans les deux configurations forment des courbes confondues (lors de tirs idéaux) ou parallèles suivant l'intensité des phénomènes précurseurs (lors de tirs non idéaux). Cette similitude sur la progression axiale ou sur sa pente pourrait être étendue à toute l'onde si la forme de celle-ci était identique d'une configuration à l'autre. Nous avons vu que cela n'est pas vérifié dans le voisinage immédiat de la bouche, si les tirs ne sont pas idéaux et si la similitude géométrique n'est pas respectée sur les calibres. Pourtant la figure 42 montre qu'à une distance suffisante de la bouche, les formes d'onde sont presque identiques et ne dépendent plus de la forme de la surface de contact. On peut donc conclure que la similitude est réalisée pour $\sqrt{\frac{\bar{c}}{c_y} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_y}}} \frac{X}{D} > 1$.

Si nous convenons de définir le voisinage immédiat de la bouche par:

$$(2-47) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_y} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_y}}} \frac{x_i}{D} < 1$$

nous pouvons conclure de l'étude des visualisations que la similitude partielle, qui consiste à ne pas respecter (2-25) et à assimiler $\bar{\mathcal{F}}_y$ à $\bar{\mathcal{F}}$, donne des résultats satisfaisants hors du voisinage immédiat de la bouche.

De même, le non respect de la phase de formation n'entraîne pas d'erreurs importantes hors de ce voisinage.

La modélisation de la bouche par une source ponctuelle s'applique donc dans le cas du tir en présence d'un obstacle et son domaine de validité est le même que pour le tir en atmosphère infinie. En effet la condition (2-26) ramène la définition de l'extérieur du voisinage immédiat à la relation (2-27-2).

Les mesures de pressions instationnaires aux points homologues confirment ces constatations. Sur la figure 43, on peut comparer ces mesures dans le voisinage immédiat de la bouche pour les tirs idéaux de chaque configuration.

Ces mesures sont tracées en grandeurs sans dimensions; elles sont filtrées par des filtres d'ordre 2 dont la bande passante est en similitude d'une configuration à l'autre. Mais la dimension des capteurs n'a pas pu être réduite en similitude pour des raisons techniques évidentes. Ainsi, la surface sensible d'un capteur équivaut, dans la configuration 1, à neuf fois la surface sensible du même capteur placé dans la configuration 2. De même, les dimensions du caisson de similitude sont restées constantes lors des essais; les réflexions de l'onde de bouche sur les parois arrivent 3 fois plus vite sur les capteurs dans la configuration 2 que dans la première; la comparaison des mesures n'est donc valable que jusqu'à l'arrivée de ces réflexions indiquées sur les figures.

Malgré ces limitations, les signaux sont exploitables.

La figure 43, confirme d'abord, qu'en absence de phénomènes précurseurs, les temps d'arrivée de l'onde sur les capteurs sont en similitude. On notera la remarquable identité des courbes pour le premier point homologue, situé hors du jet de gaz brûlés et sur le côté de l'onde. Au second point, où l'onde de bouche arrive à l'instant correspondant aux photographies de la figure 40, on voit que l'intensité de l'onde de bouche est la même dans les deux configurations, mais que l'écoulement qui la suit diffère; cela n'a rien d'étonnant puisque ce point est situé dans la zone d'interaction de l'obstacle avec le jet de gaz brûlés. Dans le cas où $d/D = 5$, la seconde surpression est provoquée par la réflexion du choc latéral du jet sur la plaque; cette réflexion n'existe pas si $d/D = 15$ (figure 40).

Du troisième point, on ne peut pas tirer de conclusions très nettes car les réflexions sur les parois du caisson arrivent trop tôt sur les capteurs (configuration 2) pour que l'on ait le temps de comparer la dépression qui suit le passage de l'onde de bouche. Signalons pourtant que les ordres de grandeur et la

tendance sont respectés. Le caisson était malheureusement trop petit pour que nous puissions obtenir des mesures hors du voisinage immédiat.

Il est bon de rappeler toutefois que si les signaux avaient été tracés en grandeurs physiques, il aurait fallu dilater trois fois l'échelle des temps pour la configuration 2 par rapport à la première et neuf fois l'échelle des pressions de cette dernière par rapport à la configuration 2. La comparaison des deux configurations était donc impossible sans l'emploi des règles de similitude.

La figure 44 apporte, quant à elle, quelques précisions dans le cas de tirs non idéaux. On distingue bien l'influence de la phase de formation sur les temps d'arrivée de l'onde de bouche. Par ailleurs, les conclusions tirées de la figure 43 s'appliquent encore ici.

Si l'on compare, maintenant, les deux tirs de la configuration 1, on peut évaluer l'effet de la phase de formation. On constate que le passage de l'onde donne lieu à des surpressions légèrement différentes puisque l'angle de réflexion dépend de la forme de l'onde; en revanche, l'écoulement en aval et en particulier la longue dépression observable au point 3, est parfaitement identique. Cela signifie que, hors de la zone d'interaction avec le jet, les pressions locales sont déterminées par la forme et la progression de l'onde de bouche; elles sont donc identiques lorsque les ondes le sont aussi, or la figure 42 montre que c'est bien le cas lorsque $\sqrt{\frac{c}{g}} \sqrt{\frac{p}{\rho}} \frac{ct}{D}$ est supérieur à 1. La phase de formation n'a donc plus d'influence hors du voisinage proche.

On peut conclure de ce qui précède que, si l'on ne s'intéresse pas au voisinage proche de la bouche, il suffit de réaliser la similitude sur le tir idéal sans tenir compte de la dimension respective de la bouche et de la maquette pour peu que D reste petit devant H .

Cette conclusion mérite cependant d'être appuyé sur des mesures

de pressions instationnaires hors du voisinage proche.

C'est ce que nous avons réalisé en faisant varier le calibre de l'arme plutôt que \bar{p} dans un cas d'intérêt pratique qui fait l'objet de la section 2-2-3-1.

2-2-3 EXEMPLES DE REALISATION PRATIQUE DE LA SIMILITUDE

2-2-3-1 Simulation d'un tir canon par une carabine

La figure 45 présente les deux configurations semblables. Les essais sur le canon de 30 mm ont été réalisés en 1980 à Cazaux en collaboration avec AMD-BA pour simuler un tir sur un fuselage d'avion.

Après avoir élaboré et vérifié les règles de similitude, nous avons décidé en 1986 de reproduire à échelle réduite les tirs de Cazaux. Nous avons choisi l'échelle de la maquette égale au rapport des calibres.

Pour que le champ optique du caisson dépasse le voisinage immédiat de la bouche, il faut, à p_g donné, que \bar{p} soit le plus grand possible, comme le prouve la relation (2-47). Le caisson n'étant pas prévu pour être mis en surpression par rapport à l'extérieur, nous avons pris: $\bar{p} = p_{atm}$. Cela entraîne que la pression de bouche des deux armes est la même. Nous avons pu confectionner des munitions pour la carabine telles que $p_g = 140$ bars et $M_p = 2.4$ comme pour le canon de 30 mm. Toutes les conditions de similitude sont donc vérifiées à l'exception de (2-29-3); la valeur du paramètre correspondant est beaucoup plus grande pour la carabine (figure 45). La similitude ne sera donc pas réalisée dans le voisinage immédiat de la bouche en particulier pour les temps d'arrivée de l'onde sur les capteurs. La position de ces derniers est donnée par la figure 46, le plan Ox_cY_c est celui de la plaque inclinée, l'axe OZ_c est vertical.

Les visualisations permettent de tracer la progression sur l'axe de tir (figure 47). On constate que l'onde produite par la

carabine se forme plus tard que celle produite par le canon: c'est l'effet du non respect de (2-29-3). On a porté sur la courbe les points obtenus à partir des mesures de pression aux capteurs 4 et 5. Le capteur 4 confirme bien les progressions obtenues par visualisation. On notera le parallélisme des deux courbes, caractéristique de la similitude sur le nombre de Mach du choc, jusqu'au capteur 4. En revanche, au niveau du capteur 5, situé hors du champ de visualisation, les deux courbes coïncident alors qu'au-delà du capteur 4 la tendance semblait être plutôt à l'éloignement. L'analyse des mesures de pression donne l'explication de ce phénomène (figure 48).

Comme dans le cas de la plaque infinie (§ 2-2-2-3), les signaux de pression ont été filtrés par des filtres d'ordre 2 en similitude, mais leur surface sensible reste la même dans les deux configurations. La mesure en caisson correspond donc à celle qu'on obtiendrait avec des capteurs de diamètre 30/5.56 fois plus grand que les capteurs réellement utilisés autour du canon. Il ne faut donc pas s'attendre à une superposition parfaite des courbes de pression instationnaire adimensionnée; c'est leur allure moyenne qu'il faut prendre en compte.

Les mesures sur les capteurs 1 et 2, situés dans le voisinage proche de la bouche, confirment simplement que la similitude n'est pas réalisée dans cette zone. On voit, sur le capteur 2, que le précurseur est assez violent dans les deux cas; il s'atténue cependant très rapidement car il est coupé de sa source, le jet d'air comprimé, par la formation de l'onde de bouche. La durée qui sépare le passage du précurseur et le débouchage du tube ($t=0$) est plus longue pour la carabine; c'est l'effet de la plus grande valeur de $\sqrt{\frac{\bar{c}}{c_0}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_0}} \frac{L}{D}$. Cependant, le

précurseur étant assez violent, la dépression qui le suit aspire les gaz brûlés; l'onde de bouche se forme donc plus tard mais plus en avant que dans le cas du canon. Dans les essais de Cazaux, la mesure a enregistré un impact sur le capteur 2; il est

possible que cela soit dû au projectile, mais nous n'avons pas pu en avoir confirmation.

Le capteur 3 est situé en dehors du voisinage proche. Abstraction faite du décalage en temps expliqué précédemment, on retrouve, entre les deux configurations, des correspondances significatives (indiquées par des flèches) qui permettent de conclure à la validité de la similitude. On arrive à la même conclusion pour le capteur 5 si l'on ne tient pas compte de l'onde liée au projectile et si on limite la comparaison aux instants antérieurs à l'arrivée sur le capteur de la réflexion sur la paroi frontale du caisson.

Il est donc surprenant, en première analyse, de ne pas retrouver un résultat de même nature sur le capteur 4. C'est l'interaction avec le projectile qui est responsable de cette particularité. En effet, l'onde de bouche ne se forme pas exactement à des instants homologues dans les deux configurations, les positions relatives du projectile et de l'onde ne sont pas semblables. De plus, pour représenter correctement M_p avec la carabine, nous avons pris un projectile léger; cela nous a conduit à choisir une balle courte d'allongement voisin de 2 alors que celui de l'obus est de l'ordre de 5. La similitude géométrique n'étant pas réalisée sur le projectile, dans un voisinage proche de celui-ci le champ de pression n'est pas le même. Il se trouve que le capteur 4 est situé précisément à l'endroit où la balle rattrape l'onde de bouche de la carabine, alors qu'au point homologue, le nez de l'obus a déjà dépassé celle du canon (figure 49). Le capteur étant à cet instant dans le champ proche du projectile, le signal de pression est très différent d'une configuration à l'autre. En revanche, aux instants ultérieurs, on peut retrouver des correspondances et une allure moyenne du signal équivalente. Cette interaction avec le projectile explique également la disparition du décalage en temps entre les ondes de bouche sur l'axe de tir. En effet le projectile crée une petite perturbation pour l'onde de bouche et celle-ci y est d'autant moins sensible

qu'elle est plus violente. Ainsi plus l'interaction aura lieu tôt dans l'existence de l'onde de bouche, moins son effet sera sensible. Ce dernier se traduit globalement par un ralentissement momentané de la progression de l'onde de bouche dans le cône délimité par les ondes balistiques; cela entraîne une légère modification de la forme de l'onde de bouche (§ 1-3-3). L'onde produite par la carabine subit cette interaction plus tard que l'onde du canon, cela explique pourquoi les courbes de progression perdent leur parallélisme (figure 47) et pourquoi le ralentissement est plus marqué pour la carabine que pour le canon. Le capteur 5 étant hors du champ, nous n'avons pu visualiser l'arrivée de l'onde que sur les capteurs 3 et 4 (figure 49); le ralentissement sur l'axe n'a donc pas pu être visualisé.

Quoiqu'il en soit, le but poursuivi est atteint: les mesures de pression nous ont confirmé la validité de la similitude hors du voisinage proche, même lorsqu'on ne la réalise pas entre les phases de formation. Néanmoins, ces mesures étant locales, elles peuvent être influencées par des phénomènes secondaires qui ne sont pas pris en compte dans notre schéma, comme l'effet du projectile, mais qui n'ont pas de conséquences globales ni durables.

Il faut remarquer, au passage, la puissance de la combinaison des deux méthodes expérimentales. Qu'aurait-on pu conclure de la mesure du capteur 4 sans les visualisations de la figure 49 ?

2-2-3-2 Cas particulier d'une prise d'air

L'importance de l'application de la similitude de tir au problème de l'interaction tir-prise d'air, exige que nous confirmions dans ce cas précis les résultats obtenus précédemment.

L'écoulement interne dans la maquette de prise d'air doit être déterminé par un paramètre de similitude. Si l'on exclut, pour simplifier, toute représentation du compresseur, il suffit de

caractériser le débit masse Q_m dans la manche. Avec le système de grandeurs primaires (2-20) on peut écrire:

$$(2-48) \quad \frac{\bar{P} Q_m}{\bar{P} \bar{S}} = \frac{C_q \bar{A} \bar{P} \bar{c}}{D^2 \bar{P}_g c_g} \bar{M}$$

où C_q est le coefficient de débit et \bar{A} la section caractéristique de la prise d'air. La géométrie étant fixée, on peut remplacer $\frac{\bar{A} \bar{P} \bar{c}}{D^2 \bar{P}_g c_g}$ par $\frac{H^2 \bar{p} \bar{c}}{D^2 \bar{P}_g c_g}$.

Or, (2-37) permet de ramener (2-48) à la condition

$$(2-49) \quad \bar{M} C_q = \bar{M}' C'_q$$

Mais, grâce à (2-28-3) cette formule se réduit encore à:

$$(2-50) \quad C_q = C'_q$$

Cependant, la formule (2-49) doit être conservée si l'on veut étudier l'influence de la condition (2-28-3) seule <23>.

Les essais de tir en soufflerie posent des problèmes particuliers. Il convient que nous les indiquions, car si nous ne traitons pas ici de l'interaction tir-prise d'air en elle-même, nous nous devons de fournir une méthode expérimentale robuste et cohérente pour l'étudier.

La première difficulté vient du confinement dans la veine de la soufflerie. Nous avons déjà rencontré cette limitation avec les réflexions de l'onde de bouche sur les parois du caisson. Le problème vient du fait que la notion de confinement n'est pas la même pour le tir et pour l'écoulement initial. Dans le premier cas, on peut dire que le tir n'est pas confiné si l'onde de bouche est devenue acoustique lorsqu'elle touche les parois. Cela correspond à une section de veine \bar{A}_v telle que:

$$(2-51) \quad \frac{\bar{c}}{c_g} \frac{\bar{P}}{\bar{P}_g} \frac{\bar{A}_v}{D^2} \gg 1$$

Dans le second cas il suffit que:

$$(2-52) \quad \mathcal{A}_v \gg H^2$$

Ces conditions sont compatibles si $\sqrt{\frac{c}{c_0}} \sqrt{\frac{p}{p_0}} \frac{H}{D}$ est de l'ordre de 1.

Nous avons étudié l'influence du confinement sur les sig press placée dans deux souffleries différentes avec $\bar{M} = 0.2$. Dans la première soufflerie (Soufflerie horizontale de l'IMFL; veine de 2.4 m de diamètre) les conditions (2-50) et (2-52) étaient vérifiées. Dans la seconde (Installation Compressible Subsonique de l'IMFL; veine rectangulaire de .2m x .15 m) aucune des deux conditions n'est remplie (figure 50).

La prise d'air a un diamètre de 80 mm qui sert de longueur caractéristique H. Des mesures de pression instationnaire sont réalisées dans le plan situé à la distance 8H de l'entrée de la manche.

Sur la figure 51, on peut évaluer l'effet du confinement sur une mesure de pression de ce plan. On s'aperçoit que le confinement donne une idée optimiste de la dépression qui suit le passage de l'onde. Dans la petite soufflerie, ce sont les reflexions sur les parois de la veine qui pénètrent dans la manche et introduisent les surpressions parasites.

Les essais dans des souffleries trop petites ne permettent donc pas l'étude du mécanisme de l'interaction; ils peuvent néanmoins être utilisés d'une manière comparative.

Ainsi, nous avons fait varier la valeur de M_p d'une quantité suffisante pour simuler la dispersion sur les vitesses initiales des obus ou un changement de munition; les essais, quoique réalisés en veine confinée, permettent de conclure à l'indifférence du phénomène vis-à-vis de cette variation (figure 51). Cela montre également qu'une légère modification de la forme de l'onde n'affecte pas le résultat à l'intérieur de la prise d'air.

Enfin, il fallait montrer que des essais sur des maquettes de petite taille étaient réalisables malgré l'impossibilité d'équiper la manche de peignes de pressions instationnaires très élaborés. La dimension d'une prise d'air à l'échelle 1/10 permet tout au plus l'installation d'un peigne sur un diamètre. Pour obtenir des cartes de pressions détaillées, il faut donc faire tourner le peigne. Cette rotation ne peut être réalisée au cours d'un tir car le phénomène est trop bref. Il faut donc procéder à plusieurs tirs, mais la méthode n'est valable que si la répétitivité est parfaite. La dernière courbe de la figure 51, montre que tel est bien le cas.

On trouvera une étude plus détaillée des questions évoquées ici dans la référence <23>.

2-2-3-3 Effet de $\frac{\bar{T}}{T_g}$

Nous avons montré en 2-1-4-1 que la condition (2-28-5) n'a pas d'influence sur le tir en atmosphère infinie. Dans nos développements sur le tir en présence d'un obstacle nous avons omis de vérifier si cette propriété se conservait. Pour la rigueur de l'exposé il faut le faire avant de clore ce chapitre. La figure 52 est assez explicite sur ce point. La similitude sur la progression axiale de l'onde de bouche est vérifiée par le parallélisme des deux courbes, les visualisations prouvent l'invariance de la forme de l'onde. A ce sujet, notons que les conditions (2-29-1) et (2-29-3) ne sont pas rigoureusement respectées entre les essais; cela explique que les courbes de progression soient légèrement décalées et confirme que la phase de formation a une influence moins forte sur la forme de l'onde que la géométrie de l'obstacle.

Les résultats ci-dessus confirment la validité de la représentation (2-33) et le choix de ϕ comme grandeur primaire. L'importance de ce résultat apparait dans la condition (2-37) où l'on voit que l'échelle de la maquette varie comme $\sqrt{p} \bar{T}^{1/4}$ et non

comme $\sqrt{\bar{P}}$. Si l'on veut simuler une variation d'altitude de tir, il faut modifier l'échelle de la maquette proportionnellement à $\sqrt{\bar{P}} T^{1/4}$, \bar{P} et \bar{T} variant suivant les lois de l'atmosphère. Cette propriété avait déjà été signalée par MABEY et CAPPS <15> mais sans justification.

On voit dans la formule (2-37) qu'une erreur sur la détermination de T_g joue sur le calcul de l'échelle de la maquette, mais, par chance, l'erreur relative sur cette échelle est quatre fois moins grande que l'erreur relative sur T_g . Les conséquences pratiques sont donc faibles.

2-3 CONCLUSION

Grâce à l'étude du phénomène par la méthode de similitude, nous avons pu comprendre le rôle des nombreux paramètres physiques du problème à travers leurs interventions dans les règles de similitude. Nous avons montré que le paramètre \bar{T} / T_g pouvait être éliminé des conditions de similitude.

De ce fait, l'application de la similitude de tir pour des essais en soufflerie s'avère possible.

Enfin nous avons montré que, si l'on ne s'intéresse pas au voisinage immédiat de la bouche, défini par (2-47), on peut se contenter d'une similitude partielle qui se résume comme suit:

- conditions nécessaires:

$$(2-53) \quad \begin{array}{l} \gamma = \gamma' \quad \bar{M} = \bar{M}' \\ \gamma_g = \gamma'_g \quad M_g = M'_g = 1 \end{array} \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}} \frac{H}{D} = \sqrt{\frac{\bar{c}'}{c'_g}} \sqrt{\frac{\bar{P}'}{P'_g}} \frac{H'}{D'}$$

- condition à respecter approximativement:

$$(2-54) \quad M_p \simeq M'_p$$

- conditions en ordre de grandeurs:

$$(2-55) \quad \frac{\bar{c}}{c_g} \frac{\bar{P}}{P_g} = O(10^{-3}), \quad \frac{\bar{c}'}{c'_g} \frac{\bar{P}'}{P'_g} = O(10^{-3}); \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}} \frac{L}{D} = O(1), \quad \sqrt{\frac{\bar{c}'}{c'_g}} \sqrt{\frac{\bar{P}'}{P'_g}} \frac{L'}{D'} = O(1)$$

- condition particulière aux prises d'air:

$$(2-56) \quad C_q = C'_q$$

Si l'on respecte les règles (2-53) à (2-56), toute grandeur locale, en dehors du voisinage proche de la bouche, est donnée, à l'instar de la pression, par une formule de la forme:

$$(2-57) \quad \frac{p}{\bar{p}} = \mathcal{F} \left(\gamma, \gamma_g, M_g, \bar{M}, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\rho_g}} \frac{H}{D}, C_q, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\rho_g}} \frac{x_i}{D}, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\rho_g}} \frac{\bar{c}t}{D} \right)$$

et, de la même façon, la progression de l'onde de bouche sur l'axe par:

$$(2-58) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\rho_g}} \frac{x}{D} = \mathcal{G} \left(\gamma, \gamma_g, M_g, \bar{M}, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\rho_g}} \frac{H}{D}, C_q, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\rho_g}} \frac{\bar{c}t}{D} \right)$$

\mathcal{F} et \mathcal{G} ne sont fonctions que de la géométrie de l'obstacle pourvu que $H \gg D$.

Pour appliquer ces formules en absence de prises d'air, il suffit d'y remplacer C_q par zéro, de même le cas du tir en atmosphère infinie s'obtient en remplaçant H par zéro.

Il reste que l'étude de la similitude ne nous permet pas toujours de dissocier les influences respectives de paramètres importants comme \bar{M} , ou \bar{p} , ni de connaître celle de l'anisotropie générale du phénomène. Seule l'approche théorique des équations qui régissent le phénomène permet d'avancer sur ce plan.

* * * * *
* CHAPITRE 3 *
* * * * *
* MODELISATION DU TIR ET *
* * * * *
* THEORIE DES EXPLOSIONS VIOLENTES ANISOTROPES *
* * * * *

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS PRINCIPALES

3-1 FONDEMENTS DE LA MODELISATION

3-1-1 SENS DE LA DISPARITION DE LA CONDITION DE SIMILITUDE
RELATIVE A \bar{c} / c_g

3-1-2 LE CAS DES TIRS VIOLENTS

3-1-3 MISE EN EVIDENCE EXPERIMENTALE DE L'EQUIVALENCE ENTRE
UNE EXPLOSION ET UN TIR VIOLENT

3-2 FORMULATION DU PROBLEME DES EXPLOSIONS VIOLENTES ANISOTROPES

3-2-1 EQUATIONS NON CONSERVATIVES DU MOUVEMENT

3-2-2 CONDITIONS SUR LE CHOC

3-2-3 ANALYSE MATHEMATIQUE DU PROBLEME

3-2-4 FORMULATION CONSERVATIVE

3-2-5 CONDITIONS SUR LES CHOCS INTERNES

3-2-6 CONDITIONS A LA FRONTIERE DU VIDE

3-2-7 EQUATION GLOBALE DE L'ENERGIE

3-3 CONCLUSION

NOTATIONS PRINCIPALES

- B_j, C_j, D_j : notations symboliques définies par la formule (3-52)
 c : vitesse du son
 E : intensité de l'apport d'énergie
 H : enthalpie d'arrêt
 m : $m = \cotg \lambda$
 O : lieu de l'explosion, origine des coordonnées
 P : pression
 r, θ : Coordonnées polaires dans le plan méridien
 $R(t, \theta)$: position de l'onde de choc
 $R'(t, \theta)$: position de la frontière du vide
 $R_i(t, \theta)$: position d'une onde de choc interne
 t : temps
 u : composante radiale de la vitesse
 v : composante tangentielle de la vitesse
 x : coordonnée adimensionnée associée à r
 $x'(t)$: " " " " à R'
 $x_i(t)$: " " " " à R_i

- d : constante positive
 γ : rapport des chaleurs spécifiques
 $\mathcal{E}(\theta)$: répartition azimutale de l'énergie
 λ : angle défini figure 55
 ρ : masse volumique
 ω : module de la vitesse de l'onde de choc
 ω' : module de la vitesse de la limite du vide
 Σ : surface constituée par le choc externe
 Σ' : surface constituée par la frontière du vide

Les grandeurs correspondant au milieu non perturbé sont représentées par des symboles surlignés ($\bar{\rho}$, \bar{p} , \bar{c}).

Les grandeurs sans dimensions correspondant aux grandeurs physiques (c , ρ , ρ , u , v , R) dans le milieu perturbé sont affectées de l'indice zéro (c_0 , ρ_0 , ρ_0 , u_0 , v_0 , R_0).

La dérivée d'une fonction f par rapport à une variable quelconque ν est notée f_{ν} .

Les grandeurs accentuées se réfèrent à la frontière du vide.

Notations du chapitre 2 réemployées: \mathcal{G} , Q , D , \bar{p}_T .

L'indice g concerne les gaz brûlés à la bouche.

3-1 FONDEMENTS DE LA MODELISATION

3-1-1 SENS DE LA DISPARITION DE LA CONDITION DE SIMILITUDE
RELATIVE A \bar{c} / c_g

Reprenons l'analyse ébauchée en 2-1-1-4, à partir de la figure 34, qui tentait de justifier expérimentalement le choix de \mathcal{Q} comme grandeur primaire. On peut adopter deux attitudes vis-à-vis des graphiques 3 et 4 de cette figure.

Dans le premier cas, on est convaincu que la précision des mesures et celle du recalage temporel des divers tronçons constitutifs de ces courbes sont suffisantes. Les différences de pentes qui apparaissent entre les courbes du graphique 4 sont significatives et il faut conclure que la représentation (2-33) et le choix de \mathcal{Q} comme grandeur primaire permettent d'éliminer la condition (2-28-5) et d'obtenir explicitement l'influence de \bar{c} / c_g .

Dans le second cas, on considère que ces différences ne sont pas significatives mais on conclut, par conséquent, que \bar{c} / c_g n'a pas d'influence notable sur le phénomène. Ce paramètre doit donc disparaître de l'expression de X comme le traduit la représentation (2-34).

Ainsi, dans les deux attitudes, on est conduit à faire disparaître la condition (2-28-5) de l'ensemble des règles de similitude. Or, cette condition découle directement du fait que l'existence du jet de gaz de poudre introduit dans l'inventaire (2-15-2) deux grandeurs dimensionnées A et B , choisies dans (2-12). En effet, quel que soit le choix de A et B , on a montré (§ 2-1-2-1) qu'il fallait nécessairement prendre l'une des deux grandeurs comme grandeur primaire, par exemple A pour fixer les idées. La présence de B dans l'inventaire aboutit donc à une condition de similitude qui, avec le choix de grandeurs primaires (2-20), n'est autre que (2-28-5). Mais, on est amené à constater expérimentalement que l'onde de bouche est identique que l'on respecte ou non (2-28-5), on en conclut donc que cette condition

est inutile à la similitude et que le paramètre B n'avait pas lieu d'être retenu dans l'ensemble (2-15-2). De ce fait, l'onde de bouche est déterminée par un seul des débits (2-10).

Examinons les trois possibilités. Supposons d'abord que le jet de gaz brûlés est caractérisé par son flux de quantité de mouvement; la formule (2-10-2) montre que, sous l'hypothèse du jet stationnaire, les grandeurs à retenir dans l'inventaire à la place de (2-15-2) sont:

$$(3-1) \quad \gamma_g, M_g, P_g D^2$$

Les raisonnements du paragraphe 2-1-2-1 sur le choix des grandeurs primaires restent valables, à ceci près qu'ici nous n'avons pas le choix de la grandeur dimensionnée caractéristique du jet de gaz brûlés puisqu'il n'y en a qu'une dans (3-1): c'est $P_g D^2$.

Les règles de la similitude physique nous amènent alors à écrire la progression du choc sur l'axe sous la forme suivante:

$$(3-2) \quad \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}} \frac{X}{D} = \mathcal{F}_1 \left(\gamma, \gamma_g, M_g, \bar{M}, \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}} \frac{H}{D}, \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}} \frac{L}{D}, \frac{\bar{P}_T}{P_g}, M_p, \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}} \frac{\bar{e}t}{D} \right)$$

qui correspond, en fait, à la représentation (2-34). On constate que le paramètre \bar{c} / c_g n'apparaît pas dans (3-2), ce qui signifie non seulement que la condition (2-28-5) est inutile à la réalisation de la similitude, mais encore que l'échelle de la maquette ainsi que la définition des points et temps homologues sont indépendantes de \bar{c} / c_g . Dans cette hypothèse, les différences de pentes entre les courbes du graphique 4 de la figure 34, ne peuvent être attribuées qu'à des incertitudes de mesures.

Supposons maintenant que ce soit l'apport d'énergie (2-10-3) qui soit déterminant; un raisonnement analogue au précédent conduit à l'inventaire:

$$(3-3) \quad \gamma_g, M_g, \mathcal{B} = c_g P_g D^2$$

et à l'expression de la progression du choc sur l'axe:

$$(3-4) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_j}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_j}} \frac{X}{D} = \mathcal{F}_2(\gamma, \gamma_j, M_j, \bar{M}, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_j}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_j}} \frac{H}{D}, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_j}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_j}} \frac{L}{D}, \frac{\bar{c} \bar{P}_T}{c_j P_j}, M_P, \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_j}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_j}} \frac{ct}{D})$$

qui correspond à la représentation (2-33). Comme dans le cas précédent, l'expression (3-4) signifie que (2-28-5) n'a pas lieu d'être respectée. En revanche, ici, le paramètre \bar{c} / c_j intervient dans la définition des points et temps homologues, donnée par (2-24), et dans l'échelle de la maquette, donnée par (2-37). L'expression (3-4) correspond à la formule (2-58) que nous avons retenue dans l'étude de la similitude, en considérant que les résultats de la figure 34 étaient significatifs.

Considérons maintenant le jet comme un apport exclusif de masse en substituant à (3-3):

$$(3-5) \quad \gamma_j, M_j, Q = \frac{\rho_j D^2}{c_j}$$

Nous obtenons pour la propagation de l'onde sur l'axe l'expression:

$$(3-6) \quad \sqrt{\frac{c_j}{\bar{c}}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_j}} \frac{X}{D} = \mathcal{F}_3(\gamma, \gamma_j, M_j, \bar{M}, \sqrt{\frac{c_j}{\bar{c}}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_j}} \frac{H}{D}, \sqrt{\frac{c_j}{\bar{c}}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_j}} \frac{L}{D}, \frac{c_j \bar{P}_T}{\bar{c} P_j}, M_P, \sqrt{\frac{c_j}{\bar{c}}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_j}} \frac{ct}{D})$$

qui est encore différente des deux premières.

En fait, (3-2), (3-4) et (3-6) ne coïncident que si $c_j = \bar{c}$. Il y a donc contradiction entre ces trois expressions. Si l'on pose le problème comme en 2-1-2-1, en termes de choix des grandeurs primaires, on tire de ce qui précède le corollaire suivant: s'il existe une grandeur dimensionnée A de (2-15-2) telle que, prise comme grandeur primaire, elle permette d'éliminer la condition relative à la grandeur dimensionnée B, cette grandeur A est unique. On voit que si la représentation (2-34) est bonne, il ne peut en être de même pour (2-33).

On peut s'interroger sur la nécessité d'un tel débat dans la mesure où, dans la pratique, on n'impose à \bar{c} / c_j que de faibles

variations numériques. A cette objection, on peut opposer deux arguments.

Tout d'abord, il faut rappeler que l'absence d'influence de la condition (2-28-5) n'a pu être constatée que sur la propagation de l'onde de bouche et sur les mesures de pression instationnaire, les autres grandeurs locales n'étant pas mesurables. Cette constatation expérimentale est insuffisante pour étendre le résultat aux autres grandeurs même dans le cas simple, envisagé ici, où le gaz extérieur est parfait et en évolution adiabatique. La connaissance des variations de pression seules ne permet pas de déduire celles de la masse volumique et de la température qui pourraient dépendre de (2-28-5). Le seul moyen d'étendre le résultat est donc de montrer que le jet de gaz brûlés n'est régi que par l'un des trois ensembles (3-1), (3-3), (3-5).

D'autre part, si l'on désire modéliser le tir pour aboutir à un calcul du phénomène, il n'est pas indifférent de savoir s'il faut tenir compte des trois débits (2-10) ou s'il suffit d'en retenir un seul.

Pour trancher cette question, il faut pousser plus loin l'approche théorique du problème afin d'obtenir les propagations (3-2), (3-4) et (3-6) sous une forme mathématique explicite moyennant certaines hypothèses simplificatrices. On comparera alors la forme obtenue dans chaque cas avec la progression d'une onde de bouche visualisée dans des conditions conformes à ces hypothèses. C'est la démarche adoptée dans ce qui suit.

3-1-2 LE CAS DES TIRS VIOLENTS

Pour obtenir une forme explicite des expressions (3-2), (3-4) et (3-6) sans avoir à résoudre les équations du problème, on peut avoir recours à l'analyse dimensionnelle. Il n'est pas rare, en effet, que, lorsqu'un phénomène dépend de peu de paramètres, l'analyse dimensionnelle permette d'explicitier presque

complètement la forme des lois qui le régissent.

Ceci n'est pas, en général, le cas du tir car il y intervient un nombre important de paramètres. Pourtant, si l'on choisit une configuration simple, on peut éliminer un grand nombre d'entre eux. Dans ce but, on se limite au tir idéal dans une atmosphère infinie au repos.

Supposons d'abord que le débit d'énergie à la bouche soit le seul qu'il faille prendre en compte; l'inventaire se limite alors à:

$$(3-7) \quad \gamma, \gamma_2, M_g, \bar{p}, \bar{p}, \mathcal{G}$$

Avec le système primaire (2-20), on peut écrire la progression de l'onde de bouche sur l'axe de la manière suivante:

$$(3-8) \quad \sqrt{\frac{\bar{e}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{X}{D} = \mathcal{F}(\gamma, \gamma_2, M_g, \sqrt{\frac{\bar{e}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{e}t}{D})$$

Lorsque l'on étudie un phénomène pour établir des règles de similitude, on prend le système de grandeurs primaires parmi les constantes dimensionnées de l'inventaire car le but est d'obtenir des conditions de similitude sur les données du problème. Mais, si le but est d'établir une expression mathématique explicite entre une inconnue et une variable, il est parfois judicieux de prendre cette variable comme grandeur primaire à la place d'une constante. Dans notre cas, le remplacement de \bar{p} par t dans (2-20) conduit à un nouveau système primaire à partir duquel l'expression de X devient:

$$(3-9) \quad X = \left(\frac{c_g p_g D^2}{\bar{p}} \right)^{1/5} t^{3/5} G_{\bar{p}}(\gamma, \gamma_2, M_g, \left(\sqrt{\frac{\bar{e}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{e}t}{D} \right)^{4/5})$$

Cette expression est une autre forme de (3-8), mais elle est particulièrement adaptée à l'étude du début du mouvement. En effet, pour t suffisamment petit vérifiant la condition

$$(3-10) \quad \sqrt{\frac{\bar{e}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{e}t}{D} \ll 1$$

on peut assimiler $G_{\bar{p}}$ à son prolongement asymptotique \mathcal{G} lorsque

$\sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{c}t}{D}$ tend vers zéro, sous réserve d'une régularité suffisante de $G_{\bar{p}}$. On aboutit alors à une relation explicite entre X et t :

$$(3-11) \quad X = \left(\frac{c_g p_g D^2}{\bar{p}} \right)^{1/5} t^{3/5} G(\gamma, \gamma_g, M_g)$$

qui est une approximation du début de la progression de l'onde sur l'axe tant que (3-10) est vérifiée.

Mais il convient de rappeler que nous traitons de tirs intenses tels que le paramètre \mathcal{J} défini en (2-5) soit petit devant 1. L'expression (3-11) s'applique donc dans le domaine spatio-temporel défini en (2-27-2). De ce fait, pour que (3-10) soit respectée, il faut:

$$(3-12) \quad \mathcal{J} = \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \ll 10^{-1}$$

Comme \bar{c} ne peut être, en pratique, voisine de zéro, ce qui nous ferait d'ailleurs sortir du cadre des hypothèses du milieu continu et des mouvements macroscopiques, la condition (3-12) n'est respectée que pour des valeurs très faibles mais non nulles de \bar{p} . On dira que des tirs effectués dans ces conditions sont très intenses ou violents. En pratique, ils ne peuvent se produire qu'à très haute altitude ou dans un caisson comme celui qui a servi à l'étude de la similitude. Si on se reporte au troisième graphique de la figure 27 qui concerne des tirs effectués à $\bar{p}=0.2$ bar, on peut observer que (3-10) est vérifiée au début de la progression. Nous avons donc les moyens d'observer expérimentalement des tirs violents.

Si l'on reïtère le raisonnement ci-dessus mais en caractérisant le jet de gaz brûlés par le seul débit de quantité de mouvement, il faut remplacer \mathcal{P} par $p_g D^2$ dans (3-7). En prenant \bar{c} , $p_g D^2$ et t comme grandeurs primaires on aboutit à la forme:

$$(3-13) \quad X = \left(\frac{p_g D^2}{\bar{p}} \right)^{1/4} t^{1/2} \mathcal{H}_{\bar{p}}(\gamma, \gamma_g, M_g, \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{c}t}{D})$$

Si la condition:

$$(3-14) \quad \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \ll 10^{-1}$$

est remplie, on peut approximer (3-13) par

$$(3-15) \quad X = \left(\frac{p_g D^2}{\bar{p}} \right)^{1/4} t^{1/2} \mathcal{H}(\gamma, \gamma_g, M_g)$$

tant que t est suffisamment petit pour vérifier:

$$(3-16) \quad \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{ct}{D} \ll 1$$

Sur le graphique 4 de la figure 34 on peut constater que le début des courbes, qui correspond à $\bar{p}=0.2$ bar, remplit la condition (3-16) bien que l'arme utilisée dans ces essais ne soit pas la plus puissante des armes de petit calibre utilisées dans cette étude. Il est donc possible d'observer au caisson des tirs violents au sens de la condition (3-14).

Enfin, si on remplace \mathcal{P} par Q dans (3-7), on caractérise le jet de poudre par son débit masse. Cela conduit à la forme asymptotique:

$$(3-17) \quad X = \left(\frac{p_g D^2}{\bar{p} c_g} \right)^{1/3} t^{2/3} \mathcal{L}(\gamma, \gamma_g, M_g)$$

valable tant qu'est remplie la condition

$$(3-18) \quad \sqrt{\frac{c_g}{\bar{c}}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{ct}{D} \ll 1$$

ce qui n'est possible que pour des tirs respectant la condition

$$(3-19) \quad \sqrt{\frac{c_g}{\bar{c}}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \ll 10^{-1}$$

La comparaison de (3-11), (3-15) et (3-17) montre que les lois de propagation dépendent de la grandeur dimensionnée choisie pour caractériser le jet de gaz brûlés. La grandeur caractéristique la

plus appropriée est donc celle qui permet de prévoir une loi de propagation des tirs violents conforme à l'expérience.

A l'inverse, les trois lois de propagation en question ont en commun une propriété remarquable. En effet la grandeur \bar{p} n'apparaît plus dans leurs expressions. Cela signifie que, dans le cas des tirs violents, l'inventaire (3-7) doit être remplacé par:

$$(3-20) \quad \gamma, \gamma_0, M_0, \bar{r}, A$$

où A représente \mathcal{P} , $p_0 D^2$ ou Q suivant l'hypothèse retenue. On remarque que (3-20) n'inclut que deux constantes dimensionnées et qu'il est donc nécessaire de prendre une des variables comme grandeur primaire: c'est ce que l'on appelle communément une similitude interne. Les écoulements à similitude interne ont des propriétés d'invariance intéressantes, et en particulier dans notre cas.

Appelons X_i ($i=1$ à 3) une coordonnée quelconque du vecteur position de l'onde de bouche. Dans les trois hypothèses envisagées ici, X_i peut s'écrire sous la forme:

$$(3-21) \quad X_i = a_i t^{\nu_i}$$

où a_i et ν_i sont des constantes. ν_i est égal à $3/5$, $1/2$ et $1/3$ suivant que l'on se réfère respectivement à la loi (3-11), (3-15) ou (3-17). Il est donc évident que le rapport de deux coordonnées X_i est indépendant du temps. Cela signifie qu'une onde de bouche violente a une forme géométrique invariable au cours du temps. On dispose ainsi, pour reconnaître un tir violent, d'un critère expérimental particulièrement adapté aux méthodes de visualisation.

Avant de terminer cette section, il faut insister sur un dernier point. L'hypothèse du tir intense, et a fortiori celle du tir très intense, confond le voisinage immédiat de la bouche, dans lequel la condition (2-27-2) n'est pas vérifiée, avec l'origine

spatiale et, de la même façon, l'instant de formation définitive de l'onde de bouche avec le passage du projectile à la bouche. Dans les expressions (3-11), (3-15) et (3-17), la position de l'origine et la définition de l'instant initial sont donc entâchées d'une erreur respectivement de l'ordre de D et de D/c . Pour éliminer cette incertitude lors de la comparaison des courbes théoriques avec les progressions d'ondes de bouche violentes visualisées dans le caisson, il suffit de mettre (3-11), (3-15) et (3-17) respectivement sous les formes suivantes:

$$(3-22-1) \quad X - \tilde{x} = K(t - \tilde{t})^{3/5}$$

$$(3-22-2) \quad X - \tilde{x} = K(t - \tilde{t})^{1/2}$$

$$(3-22-3) \quad X - \tilde{x} = K(t - \tilde{t})^{1/3}$$

où \tilde{x} , \tilde{t} , K sont des constantes obtenues expérimentalement et dont les valeurs sont optimisées pour chaque courbe théorique en adoptant la même norme dans chaque cas. La fonction la plus proche des points expérimentaux au sens de la norme correspondra à la grandeur physique déterminante pour le tir dans le jet de gaz brûlés.

3-1-3 MISE EN EVIDENCE EXPERIMENTALE DE L'EQUIVALENCE ENTRE UNE EXPLOSION ET UN TIR VIOLENT

Pour réaliser un tir violent, on a réglé la pression \bar{p} dans le caisson à 0.2 bars. Pour des valeurs plus petites de \bar{p} la qualité des visualisations se détériore car les variations de masse volumique à travers le choc deviennent faibles en valeur absolue. Pour vérifier (3-12) et (3-14) avec cette valeur de \bar{p} on a adopté une arme à forte pression de bouche: $p_g = 550$ bars. Il s'agit d'un bloc aux pressions de calibre 5.56 mm qui a la particularité d'avoir un second précurseur. Cette propriété, pénalisante dans l'étude de la similitude, est, comme on va le voir, mise à profit

ici pour mettre en évidence l'invariance de la forme géométrique des ondes très intenses au cours de leur propagation. Cette propriété constitue, en effet, une preuve expérimentale de l'existence de la similitude interne.

Lorsque \bar{p} est petit le jet du premier précurseur est insignifiant, tout au moins pour $\bar{p}_T = \bar{p}$. On se trouve donc naturellement dans le cas du tir idéal où l'expérience montre que l'onde de bouche est quasi sphérique (figure 15). Comme la sphère est également la forme géométrique de l'onde de bouche suffisamment affaiblie, on peut dire que, pour un tir idéal, l'onde de bouche reste quasi sphérique au cours de sa propagation, sans être nécessairement très intense. On ne peut donc pas, dans ce cas, imputer à la seule violence de l'onde l'invariance de sa géométrie. Pour relier à coup sûr ces deux propriétés, il faut s'assurer que la forme géométrique de l'onde dans sa phase violente et dans sa phase affaiblie sont différentes; en d'autres termes, il faut que l'onde de bouche ne soit pas quasi sphérique dans sa phase violente. Cette exigence peut sembler impossible à réaliser; en effet, les conditions $\bar{p} = \bar{p}_T$ et (3-12) conduisent généralement à:

$$\frac{\bar{c}}{c_2} \frac{\bar{p}_T}{P_2} \ll 10^{-3} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_2}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{P_2}} \frac{L}{D} \ll 1,$$

ce qui signifie que la phase de formation est insignifiante et que le tir est presque idéal.

Cependant, lorsqu'il existe des fuites de gaz brûlés qui émergent de la bouche avant le projectile, il se crée, en général, un second précurseur, même pour de faibles valeurs de \bar{p} . On peut obtenir, dans ce cas, une forme d'onde non sphérique au début du mouvement, même lorsque l'onde est violente. C'est ce que concrétise la figure 53 qui présente l'onde de bouche produite par le bloc aux pressions. Comme la forme de l'onde est invariable au cours du temps, sa position à un instant quelconque se déduit à partir de sa donnée à un instant de référence en la dilatant ou en la contractant suivant une homothétie de centre situé en \tilde{x} . En fait, ici, ce sont différentes positions de l'onde

qui sont données par les visualisations et c'est le centre qui est déterminé à partir de là.

L'optimisation des coefficients de (3-22) se limite ainsi à celle de \tilde{t} et K . Par la méthode des moindres carrés on obtient les résultats présentés sur la figure 54. Les courbes, ainsi que les valeurs numériques de la distance entre les courbes théoriques et les points expérimentaux (distance prise au sens des moindres carrés), montrent que la meilleure optimisation est obtenue pour la loi (3-22-1). Cela signifie que le débit d'énergie dans le jet de gaz brûlés est le facteur prépondérant régissant la propagation de l'onde de bouche.

Lorsqu'un apport d'énergie dans un gaz compressible est localisé et suffisamment intense pour provoquer une onde de choc, le phénomène en question est une explosion. Dans l'assertion courante du terme, une explosion est associée à un apport d'énergie instantané, c'est-à-dire libéré dans un temps très bref devant un temps caractéristique de la propagation de l'onde de choc. Mais, le phénomène est de même nature lorsque cet apport n'est pas instantané pourvu qu'il soit intense; c'est le cas du tir.

Le choix de \mathcal{S} comme grandeur primaire en 2-1-2-1 était donc le plus judicieux, car il correspond à la physique du phénomène. Les différences de pentes entre les courbes du graphique 4 de la figure 34 traduisent donc bien une réalité physique et l'aspect peu convaincant de cette figure provient, non pas des incertitudes de mesure, mais de la trop faible variation numérique de \bar{c} / c_g . Cela confirme que si l'on veut représenter à échelle réduite l'onde de bouche d'un canon, on n'est pas tenu de respecter (2-28-5) à condition de choisir l'échelle de la maquette de l'obstacle conformément à la formule (2-37). Nous savons également que le non respect de (2-28-5) n'affecte pas les courbes adimensionnées relatives à la pression dans l'écoulement et à la propagation de l'onde de bouche; le fait que, pour un tir

violent, $p_g D^2$ et Q puissent être exclus du bilan, permet d'étendre ce résultat aux courbes adimensionnées relatives à la masse volumique et à la température. Cependant, seule une connaissance plus approfondie de l'écoulement peut permettre d'évaluer si cette propriété persiste lorsque l'onde de bouche s'affaiblit, mais cela ne peut être envisagé que dans une étape ultérieure de la modélisation. En effet, avant d'étudier l'affaiblissement de l'onde de bouche il faut d'abord connaître son comportement au début du mouvement, qui est celui d'une onde violente. Notons cependant que, dans les applications, les problèmes essentiels concernent surtout les ondes violentes et leurs effets néfastes sur l'environnement; la condition (2-28-5) peut donc être négligée dans la plupart des cas pratiques sans que la similitude soit invalidée.

Bien entendu, il faut rappeler que le tir n'est assimilable à une explosion que pour $x_4 \gg D$ et que, dans le voisinage immédiat de la bouche, le débit masse et le flux de quantité de mouvement jouent un rôle non négligeable, puisqu'ils déterminent, entre autres, la structure du jet de gaz brûlés. C'est pourquoi la modélisation du tir par une explosion ne permet pas de représenter le jet de poudre et le voisinage immédiat de la bouche. Mais, comme tel n'est pas notre propos, nous allons pouvoir associer à une onde de bouche violente une explosion équivalente, profiter des modélisations existant pour ces écoulements et les adapter au cas du tir.

En effet, le problème de l'explosion dans un gaz compressible a déjà fait l'objet de nombreux travaux théoriques qui ont abouti à des modèles relativement simples, en particulier lorsque l'onde de choc est très intense (ref<3>). Dans ce cas, qui est celui du tir violent, l'influence de la pression \bar{p} est si faible que le phénomène peut être considéré comme n'en dépendant pas en première approximation; c'est ce qu'il est convenu d'appeler une explosion violente. Les travaux publiés sur ces explosions violentes (ref <3>, <4>, <46>) traitent toujours le cas d'une source d'énergie isotrope. Or, il est évident que le jet de gaz brûlés possède une direction privilégiée qui est l'axe de tir:

l'apport d'énergie à la bouche est donc axisymétrique et anisotrope. Le modèle du tir violent est, en revanche, conforme à l'hypothèse d'une source ponctuelle qui se situe en $x = \tilde{x}$ par rapport à la bouche de l'arme.

La suite de ce chapitre traite donc des explosions ponctuelles violentes axisymétriques et anisotropes. Le sujet est abordé sous un aspect général; on reviendra sur le cas particulier du tir d'arme au chapitre 5. Cela nous permettra de conclure ce mémoire sur une synthèse des résultats issus de l'étude expérimentale par la méthode de la similitude et de ceux qui proviendront des différentes étapes de la modélisation des explosions (chapitres 3 et 4).

3-2 FORMULATION DU PROBLEME DES EXPLOSIONS VIOLENTES ANISOTROPES

On considère une explosion violente dans un gaz au repos occupant tout l'espace. L'énergie qui caractérise l'explosion est apportée au point 0 à partir de l'instant initial sous la forme $\xi = Et^\alpha$ où t est le temps et E et α des réels positifs. Le cas du tir d'arme correspond à $\alpha=1$, l'explosion instantanée à $\alpha=0$. Avec les notations de la figure 55, la répartition azimutale axisymétrique de l'énergie est $E \varepsilon(\theta) t^\alpha$, où $0 \leq \theta < \pi$. On doit avoir :

$$(3-23) \quad 2\pi \int_0^\pi \varepsilon(\theta) \sin \theta \, d\theta = 1$$

Il est facile de vérifier que l'inventaire des constantes physiques intervenant dans le phénomène se limite à :

$$(3-24) \quad \gamma, \bar{c}, \bar{p}, E$$

3-2-1 EQUATIONS NON CONSERVATIVES DU MOUVEMENT

L'écoulement produit par l'explosion est axisymétrique. Il est régi par les équations suivantes qui expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'entropie sur une trajectoire:

$$(3-25-1) \quad r^2 \sin \theta \rho_t + \sin \theta (r^2 \rho u)_r + r (\rho v \sin \theta)_\theta = 0$$

$$(3-25-2) \quad \rho (r u_t + r u u_r + v v_\theta - v^2) + r p_r = 0$$

$$(3-25-3) \quad \rho (r v_t + r u v_r + v v_\theta + u v) + p_\theta = 0$$

$$(3-25-4) \quad r \left(\frac{p}{\rho^{\delta}} \right)_t + r u \left(\frac{p}{\rho^{\delta}} \right)_r + v \left(\frac{p}{\rho^{\delta}} \right)_\theta = 0$$

On désigne par $r = R(t, \theta)$ l'équation de l'onde de choc qui délimite extérieurement l'écoulement consécutif à l'explosion.

λ représente l'angle du rayon polaire avec la tangente à cette onde dans un plan méridien (figure 55). $w = R_t(t, \theta) \sin \lambda$ est la vitesse de propagation de l'onde.

Comme on l'a vu en 3-1-3, la théorie des explosions violentes est basée sur l'hypothèse que \bar{p} est négligeable à l'égard des pressions produites par l'explosion (réf(3)), de sorte que \bar{p} disparaît de l'inventaire (3-24). Ainsi, le problème ne contient plus que deux données dimensionnées E et \bar{c} . Il s'ensuit qu'il présente une similitude interne. En prenant E , \bar{c} et t comme grandeurs primaires, on peut poser:

$$(3-26) \quad R = \left(\frac{E t^{\alpha+1}}{\bar{p}} \right)^{1/5} R_0(\theta)$$

$$(3-27) \quad z = \frac{r}{R}$$

$$(3-28) \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0(z, \theta) \quad p = \frac{2(\alpha+2)^2 \rho r^2}{25(\gamma+1)} p_0(z, \theta)$$

$$u = \frac{2(\alpha+2)r}{5(\gamma+1)} u_0(z, \theta) \quad v = \frac{2(\alpha+2)r}{5(\gamma+1)} v_0(z, \theta)$$

Les coefficients en α et γ qui apparaissent dans les seconds membres des relations (3-28) correspondent à la formulation du problème adoptée dans le cas de l'explosion isotrope dans un fluide au repos (ref<47>); ils sont introduits pour que les fonctions adimensionnées ρ_0 , p_0 , u_0 et v_0 prennent des valeurs simples sur le choc comme cela apparaîtra en 3-2-2.

En raison de la similitude interne, le système à trois variables (3-25) se transforme en un système aux dérivées partielles en x et θ . La formule (3-26) traduit pour sa part que, toujours du fait de la similitude interne, la forme de l'onde de choc est invariante au cours du temps. Compte tenu de (3-28) le système (3-25) devient :

$$(3-29-1) \quad x \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} - m v_0 \right) \rho_{0x} \sin \theta + x \rho_0 u_{0x} \sin \theta - x m \rho_0 v_{0x} \sin \theta + (\rho_0 v_0)_{\theta} \sin \theta = -3 \rho_0 u_0 \sin \theta - \rho_0 v_0 \cos \theta$$

$$(3-29-2) \quad x \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} - m v_0 \right) u_{0x} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{p_{0x}}{\rho_0} + v_0 u_{0\theta} = v_0^2 - u_0 \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right) - (\gamma-1) \frac{p_0}{\rho_0}$$

$$(3-29-3) \quad x \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} - m v_0 \right) v_{0x} + \frac{m(\gamma-1)}{2} \frac{p_{0x}}{\rho_0} + v_0 v_{0\theta} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{p_{0\theta}}{\rho_0} = -v_0 \left(2u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right)$$

$$(3-29-4) \quad x \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} - m v_0 \right) \left(\frac{p_{0x}}{\rho_0} - \gamma \frac{\rho_{0x}}{\rho_0} \right) + v_0 \left(\frac{p_{0\theta}}{\rho_0} - \gamma \frac{\rho_{0\theta}}{\rho_0} \right) = -2 \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right)$$

où :

$$(3-30) \quad m = \frac{R_0}{R} = \frac{R_{00}}{R_0} = \cot \theta$$

3-2-2 CONDITIONS SUR LE CHOC

Le choc créé par l'explosion, qui correspond à l'onde de bouche dans le cas du tir, sera désormais désigné sous le nom de "choc externe" pour des raisons qui apparaîtront en 3-2-3.

On formule les conditions sur ce choc en tenant compte que \bar{p} est négligeable, ce qui permet d'écrire:

$$(3-31) \quad \frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad p = \frac{2\bar{p}}{\gamma+1} \omega^2, \quad q_r = 0, \quad q_n = \frac{2}{\gamma+1} \omega, \quad \text{pour } r=R$$

$q_n = u \sin \lambda - v \cos \lambda$ et $q_r = u \cos \lambda + v \sin \lambda$ sont les composantes de la vitesse sur la normale et sur la tangente au choc externe (figure 55). Compte tenu des relations (3-28) on obtient les conditions:

$$(3-32) \quad \begin{aligned} \rho_0(1, \theta) &= 1 & u_0(1, \theta) &= \frac{1}{1+m^2} = \sin^2 \lambda \\ p_0(1, \theta) &= \frac{1}{1+m^2} = \sin^2 \lambda & v_0(1, \theta) &= -\frac{m}{1+m^2} = -\sin \lambda \cos \lambda \end{aligned}$$

Le système (3-29) associé aux conditions (3-32) permet la résolution du problème à partir de la donnée de la fonction $R_0(\theta)$.

Cependant la résolution ne sera complète qu'après le calcul de $\xi(\theta)$. Pour ce faire, il est nécessaire d'établir une relation supplémentaire. On sait que le principe de conservation de l'énergie appliqué globalement à l'ensemble de l'écoulement perturbé par une explosion isotrope fournit une équation intégrale satisfaisant au problème (ref<3>). On établira cette équation dans le cas anisotrope en 3-2-7. Mais nous verrons, en 3-2-6 que, dans le cas général, cette équation peut être

remplacée avantageusement par une relation en termes finis. Il faut noter que le problème de l'explosion violente est traité ici comme un problème inverse: c'est la connaissance de l'onde de choc externe qui nous permet de remonter à sa cause. Le problème direct, c'est-à-dire le calcul de $R_o(\theta)$ à partir de la donnée de $\varepsilon(\theta)$ est possible, mais seulement comme limite d'une suite de problèmes inverses où R_o est donné comme prédicteur, puis corrigé par itérations successives. Dans la suite nous ne traiterons donc que du problème inverse qui correspond, d'ailleurs, au but fixé, à savoir la modélisation d'un tir par une explosion violente anisotrope. C'est en effet la forme de l'onde de choc externe qui nous est accessible par les visualisations au moment du tir et c'est bien la répartition d'énergie qui l'a produite qui nous est inconnue. Cette répartition sera la même pour tout tir idéal en atmosphère infinie puisque les phénomènes précurseurs sont inexistantes (§1-3-6 et 2-1-4-2). Elle détermine donc la forme de l'onde de bouche pour des tirs à haute altitude. En général, si les phénomènes précurseurs du tir ne sont pas négligeables, on pourra trouver une répartition d'énergie pour chaque forme d'onde obtenue, mais cette répartition dépendra des caractéristiques de la phase de formation de l'onde de bouche.

3-2-3 ANALYSE MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Pour étudier la nature du problème aux dérivées partielles (2-29), il faut écrire son équation caractéristique. Pour faciliter son écriture nous poserons:

$$(3-33) \quad y = \text{Log } x \quad ; \quad g = u_o - \frac{\gamma+1}{2} - m v_o \quad ; \quad f = \text{Log } p_o \quad ; \quad h = \text{Log } P_o$$

On peut écrire le système (2-29) sous la forme matricielle suivante:

$$(3-34) \quad \begin{pmatrix} g & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g & mg & \frac{\gamma-1}{2} c_0^2 \\ 0 & 0 & g & -m \frac{\gamma-1}{2} c_0^2 \\ \gamma g & 0 & 0 & -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ v_0 \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & v_0 & m v_0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & \frac{\gamma-1}{2\delta} c_0^2 \\ \gamma v_0 & 0 & 0 & -v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ v_0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

avec

$$(3-35) \quad \begin{aligned} F_1 &= -3u_0 - v_0 \cot \theta \\ F_2 &= v_0^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} c_0^2 - u_0 \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(d+2)} \right) \\ F_3 &= -v_0 \left(2u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(d+2)} \right) \\ F_4 &= -2 \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(d+2)} \right) \end{aligned}$$

et

$$(3-36) \quad c_0^2 = \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0}$$

On remarque que c_0 est relié à la vitesse du son c par:

$$(3-37) \quad c^2 = \frac{8(\gamma-1)}{25(\gamma+1)^2} \frac{z^2}{t^2} c_0^2$$

L'équation caractéristique du système (3-34) est

$$(3-38) \quad (g - v_0 z)^2 \left(\frac{\gamma-1}{2} c_0^2 (1 + (m+z)^2) - (g - v_0 z)^2 \right) = 0$$

$$\text{où } z = \frac{dy}{d\theta}$$

Cette équation a une racine double réelle:

$$(3-39) \quad z = \frac{g}{v_0}$$

Celle-ci correspond à deux familles de caractéristiques

confondues. Les courbes ainsi obtenues sont les trajectoires des particules. En effet, l'équation des trajectoires s'écrit:

$$(3-40) \quad \frac{dz}{u} = \frac{z d\theta}{v} = dt$$

et compte tenu de la relation

$$(3-41) \quad \frac{dz}{z} = \frac{2+d}{5} \frac{dt}{t} + m d\theta + \frac{dx}{x}$$

(3-28), (3-33) et (3-40) permettent d'écrire:

$$(3-42-1) \quad dy = \frac{2(d+2)}{5(\delta+1)} g \frac{dt}{t}$$

$$(3-42-2) \quad \frac{dt}{t} = \frac{z d\theta}{vt} = \frac{5(\delta+1)}{2(d+2)} \frac{d\theta}{v_0}$$

En éliminant t entre ces deux relations on retrouve (3-39).

Les autres caractéristiques sont définies par l'équation du second degré:

$$(3-43) \quad \left(\frac{\delta-1}{2} c_0^2 - v_0 \right)^2 z^2 + (2g v_0 + (\delta-1) m c_0^2) z + \frac{\delta-1}{2} c_0^2 (1+m^2) - g^2 = 0$$

Elles sont réelles lorsque le discriminant est positif ou nul, c'est-à-dire pour

$$(3-44) \quad \left(u_0 - \frac{\delta+1}{2} \right)^2 + v_0^2 - \frac{\delta-1}{2} c_0^2 \geq 0$$

Sur le choc externe, cette condition s'écrit, compte tenu de (3-32):

$$(3-45) \quad \frac{\delta+1}{2\delta} - \sin^2 \lambda \geq 0$$

On constate que le signe du premier membre ne dépend pas de α mais exclusivement de la forme du choc externe. Sur ce choc, le problème est elliptique si $\sin^2 \lambda > \frac{\delta+1}{2\delta}$ et hyperbolique dans le cas contraire.

Pour l'air et pour tous les gaz diatomiques, $\gamma = 1.4$: donc le problème change de nature pour $\lambda \approx 68^\circ$.

On voit ici que la nature du problème sur le choc externe est indépendante de la manière dont se fait l'apport d'énergie au cours du temps. Elle dépend, en revanche, de la répartition azimutale de cette énergie puisque celle-ci conditionne, comme on le verra en 3-2-6 et 3-2-7, la forme de l'onde choc externe.

Ce choc étant une surface fermée, il existe nécessairement des points où $\sin^2 \lambda = \frac{\gamma+1}{2\gamma}$. De ce fait, on peut dire qu'il existe nécessairement une zone d'écoulement elliptique dans l'écoulement intérieur au choc. Il se peut même, si la forme est peu anisotrope, qu'il n'existe pas de zone hyperbolique.

On a pu remarquer que dans de nombreuses équations du problème apparaît la quantité $u_0 - \frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{z}{t}$, c'est-à-dire la forme sans dimensions de $u - \frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{z}{t}$. Or, le terme $\frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{z}{t}$ représente la vitesse radiale dans le mouvement de dilatation qui laisse invariante la forme de l'onde au cours du temps. Introduisons le nombre de Mach des particules fluides dans leur mouvement relatif par rapport à cette dilatation. On le définit par:

$$(3-46) \quad M_{rel}^2 = \frac{\left(u - \frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{z}{t}\right)^2 + v^2}{c^2}$$

soit:

$$(3-47) \quad M_{rel}^2 = \frac{2 \left[\left(u_0 - \frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{z}{t}\right)^2 + v_0^2 \right]}{(\gamma-1) c_0^2}$$

On voit que la condition (3-44) s'écrit: $M_{rel}^2 > 1$. On a donc $M_{rel} < 1$ dans un domaine elliptique et $M_{rel} > 1$ dans un domaine hyperbolique. La frontière entre deux zones de nature différente est soit une caractéristique double le long de laquelle $M_{rel} = 1$, soit un choc interne à l'écoulement. La figure 56, présente la visualisation d'une onde de bouche violente produite par un tir où on a représenté l'origine de l'explosion équivalente \tilde{O} obtenue comme centre de l'homothétie par laquelle les différentes

positions de l'onde se déduisent l'une de l'autre. On constate l'existence de tels chocs internes au voisinage d'une zone où l'angle λ est inférieur à 68° .

L'existence possible de chocs internes conduit nécessairement à une remise en cause de la formulation initiale du problème. En effet l'équation (3-25-4) qui traduit l'invariance de l'entropie sur une trajectoire n'est pas vérifiée à la traversée d'un choc; il faut donc la remplacer par l'équation de l'énergie et trouver une formulation conservative du système qui affranchisse le calcul numérique du problème de la traversée des chocs.

3-2-4 FORMULATION CONSERVATIVE

Si on substitue l'équation de l'énergie à celle de la conservation de l'entropie, le système (3-25) devient:

$$(3-48) \quad \begin{cases} r^2 \sin \theta \rho_t + \sin \theta (r^2 \rho u)_r + r(\rho v \sin \theta)_\theta = 0 \\ \rho(ru_t + ruu_r + vu_\theta - v^2) + r p_r = 0 \\ \rho(rv_t + ruv_r + vv_\theta + uv) + p_\theta = 0 \\ r \rho H_t + r \rho u H_r + \rho v H_\theta = r p_t \end{cases} \quad \text{ou} \quad H = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2}$$

Compte tenu de l'équation de la masse (3-25-1), on peut réécrire ce système d'une manière plus propice au développement sous forme conservative qu'on se propose de résoudre:

$$(3-49) \quad \begin{cases} r^2 \sin \theta \rho_t + \sin \theta (r^2 \rho u)_r + r(\rho v \sin \theta)_\theta = 0 \\ r^2 \sin \theta (\rho u)_t + \sin \theta (r^2 \rho u^2)_r + r(\sin \theta \rho u v)_\theta - r \sin \theta \rho v^2 + r^2 \sin \theta p_r = 0 \\ r^2 \sin \theta (\rho v)_t + \sin \theta (r^2 \rho u v)_r + r(\sin \theta \rho v^2)_\theta + r \sin \theta \rho u v + r \sin \theta p_\theta = 0 \\ r^2 \sin \theta (\rho H)_t + \sin \theta (r^2 \rho u H)_r + r(\sin \theta \rho v H)_\theta = r^2 \sin \theta p_t \end{cases}$$

A l'aide des relations (3-26) à (3-28) on peut mettre (3-49) sous la forme adimensionnée:

$$(3-50-1) \quad [R_0^2 x^2 \sin \theta (\rho_0 u_0 - m \rho_0 v_0 - \frac{\gamma+1}{2} \rho_0)]_x + [R_0^2 x^2 \rho_0 v_0 \sin \theta]_\theta = -\frac{3(\gamma+1)}{2} R_0^2 x^2 \rho_0 \sin \theta$$

$$(3-50-2) \quad \left[R_0^4 x^4 \sin \theta (\rho_0 u_0^2 - m \rho_0 u_0 v_0 - \frac{\gamma+1}{2} \rho_0 u_0 + \frac{\gamma-1}{2} p_0) \right]_x + \left[R_0^4 x^3 \rho_0 u_0 v_0 \sin \theta \right]_0 = \\ \left[\rho_0 v_0^2 + (\gamma-1) p_0 - \frac{(4\alpha+3)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \rho_0 u_0 \right] R_0^4 x^3 \sin \theta$$

$$(3-50-3) \quad \left[R_0^4 x^4 \sin \theta (\rho_0 u_0 v_0 - m \rho_0 v_0^2 - \frac{\gamma+1}{2} \rho_0 v_0 - m \frac{\gamma-1}{2} p_0) \right]_x + \left[R_0^4 x^3 (\rho_0 v_0^2 + \frac{\gamma-1}{2} p_0) \sin \theta \right]_0 = \\ + \frac{\gamma-1}{2} R_0^4 x^3 p_0 \cos \theta - R_0^4 x^3 \rho_0 u_0 v_0 \sin \theta - \frac{(4\alpha+3)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} R_0^4 x^3 \rho_0 v_0 \sin \theta$$

$$(3-50-4) \quad \left[R_0^5 x^5 \sin \theta (u_0 A_0 - m v_0 A_0 - \frac{\gamma+1}{2} A_0 + \frac{\gamma^2-1}{2} p_0) \right]_x + \left[R_0^5 x^4 v_0 A_0 \sin \theta \right]_0 = \\ - \frac{5(\gamma+1)\alpha}{2(\alpha+2)} R_0^5 x^4 [A_0 - (\gamma-1)p_0] \sin \theta$$

où

$$(3-51) \quad A_0 = \gamma p_0 + \rho_0 u_0^2 + \rho_0 v_0^2$$

On remarque que les équations de (3-50) sont pseudo conservatives, c'est-à-dire qu'elles sont toutes de la forme:

$$(3-52) \quad B_j + C_j = D_j$$

en affectant respectivement les indices $j=1$ à 4 aux conditions sur la masse, sur la composante radiale de la quantité de mouvement, sur sa composante tangentielle et sur l'énergie.

Les seconds membres D_j sont constitués d'une partie des termes instationnaires des équations (3-49) réduits à une forme finie grâce à la similitude interne. On appellera (3-51) forme conservative du problème, par opposition à la forme adimensionnée initiale (3-29).

Il est utile, si l'on veut calculer numériquement la solution de (3-51), d'écrire les conditions sur le choc externe pour les grandeurs "conservatives" que nous avons appelées symboliquement B_j et C_j . En gardant cette notation, on obtient, pour $x=1$:

$$\begin{aligned}
 (3-53) \quad B_1 &= \frac{1-\gamma}{2} \sin \theta R_0^3 & C_1 &= -\frac{m}{1+m^2} \sin \theta R_0^3 \\
 B_2 &= 0 & C_2 &= -\frac{m}{(1+m^2)^2} \sin \theta R_0^4 \\
 B_3 &= 0 & C_3 &= \frac{(\gamma-1) + (\gamma+1)m^2}{2(1+m^2)^2} \sin \theta R_0^4 \\
 B_4 &= 0 & C_4 &= -\frac{(\gamma+1)m}{(1+m^2)^2} \sin \theta R_0^5
 \end{aligned}$$

Il convient maintenant de vérifier si la forme conservative du problème permet au calcul de traverser sans problèmes les chocs internes.

3-2-5 CONDITIONS SUR LES CHOCS INTERNES

Examinons le comportement des équations (3-51) sur un choc interne au domaine perturbé. En désignant par $\kappa = R_i(t, \theta)$ l'équation dimensionnée du choc interne, la propriété de similitude interne permet de poser, avec les notations de la figure 57

$$(3-54) \quad R_i(\theta, t) = \left(\frac{Et^{\alpha+2}}{\bar{p}} \right)^{1/5} R_0(\theta) z_i(\theta)$$

avec

$$(3-55) \quad m_i = \cotg \lambda_i = \frac{R_{i0}}{R_i} = \frac{z_{i0}}{z_i} + m$$

L'équation de ce choc peut ainsi prendre la forme adimensionnée implicite suivante:

$$(3-56) \quad \Gamma(z, \theta) = z - z_i(\theta) = 0$$

dont on déduit les relations:

$$(3-57) \quad \Gamma_z = 1, \quad \Gamma_\theta = -z_{i0} = (m - m_i)z_i$$

Le raisonnement qui suit s'appliquant indifféremment à toutes les

équations (3-54), nous adopterons, pour représenter l'une quelconque d'entre elles, la notation symbolique (3-52).

Dans l'espace (x, θ) , D_j est donc la divergence du vecteur $V_j = \begin{pmatrix} B_j \\ C_j \end{pmatrix}$.

Soit δv un domaine du plan méridien contenant une portion Γ d'une onde de choc interne. Le domaine est aplati sur l'onde et son épaisseur δe est infiniment petite. Désignons par les indices + et - les quantités de part et d'autre de l'onde. Ainsi, Γ^+ et Γ^- , frontières du domaine δv , tendent vers Γ lorsque δe tend vers zéro. Intégrons (3-52) sur le domaine δv . Par application du théorème de la divergence on a :

$$\int_{\delta v} (B_j + C_j) dx d\theta = \int_{\Gamma^+} \vec{V}_j^+ \vec{n}^+ d\Gamma + \int_{\Gamma^-} \vec{V}_j^- \vec{n}^- d\Gamma = \int_{\delta v} D_j dx d\theta$$

A la limite lorsque $\delta e \rightarrow 0$, on obtient, puisque D_j est borné et que δv ne contient pas de sources :

$$\int_{\Gamma} (\vec{V}_j^+ - \vec{V}_j^-) \vec{n} d\Gamma = 0$$

Cette relation étant vraie quel que soit le tronçon de Γ , on a finalement :

$$(\vec{V}_j^+ - \vec{V}_j^-) \vec{n} = (\vec{V}_j^+ - \vec{V}_j^-) \frac{\overline{\text{grad}} \Gamma}{|\overline{\text{grad}} \Gamma|} = 0$$

Dans l'espace cartésien (x, θ) , $\overline{\text{grad}} \Gamma$ a pour coordonnées Γ_x et Γ_θ . On obtient donc, compte tenu de (3-57), la condition générale :

$$(3-58) \quad (B_j^+ - B_j^-) + (C_j^+ - C_j^-)(m - m_i) x_i = 0$$

Ainsi, la grandeur $B_j + (m - m_i) C_j x_i$ se conserve au passage d'un choc interne. En appliquant ce résultat à chaque équation du système (3-51), on trouve qu'à la traversée d'un choc interne :

$$(3-59-1) \quad \rho_0 (u_0 - m_i v_0 - \frac{\gamma + 1}{2}) = \text{cste}$$

$$(3-59-2) \quad \rho_0 u_0 \left(u_0 - m_i v_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \frac{\gamma-1}{2} p_0 = \text{cste}$$

$$(3-59-3) \quad \rho_0 v_0 \left(u_0 - m_i v_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) - m_i \frac{\gamma-1}{2} p_0 = \text{cste}$$

$$(3-59-4) \quad A_0 \left(u_0 - m_i v_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \frac{\gamma^2-1}{2} p_0 = \text{cste}$$

Vérifions maintenant que les conditions (3-59), qui représentent une forme finie des équations (3-51), coïncident avec les lois de conservation au passage d'un choc.

Ces dernières s'écrivent:

$$(3-60-1) \quad \rho(q_n - \omega_i) = \text{cste}$$

$$(3-60-2) \quad \rho(q_n - \omega_i)(\vec{q} - \vec{\omega}_i) + p \vec{n} = \text{cste}$$

$$(3-60-3) \quad \rho(q_n - \omega_i) \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (q_n - \omega_i)^2 + \frac{1}{2} q_r^2 \right] = \text{cste}$$

où ω_i représente la vitesse du choc interne: $\omega_i = R_{ii} \sin \lambda_i$ et où, avec les notations de la figure 57, q_n et q_r sont ici les composantes de la vitesse sur la normale et sur la tangente au choc interne. On a:

$$(3-61) \quad q_n = u \sin \lambda_i - v \cos \lambda_i, \quad q_r = u \cos \lambda_i + v \sin \lambda_i$$

Compte tenu de la conservation de la masse (3-60-1), de celle de la quantité de mouvement (3-60-2) et de la définition de ω_i , on peut réécrire l'ensemble des conditions (3-60) sous la forme:

$$(3-62-1) \quad \rho(q_n - \omega_i) = \text{cste}$$

$$(3-62-2) \quad \rho(q_n - \omega_i) \vec{q} + p \vec{n} = \text{cste}$$

$$(3-62-3) \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} (q_n - \omega_i) p + \rho(q_n - \omega_i) \frac{q_n^2 + q_r^2}{2} + \omega_i p = \text{cste}$$

En appelant \vec{n} et $\vec{\theta}$ les vecteurs unitaires du repère polaire défini sur la figure 57, et en tenant compte de (3-61), la conservation de la quantité de mouvement devient:

$$\rho(u \sin \lambda_i - v \cos \lambda_i - \omega_i)(u \vec{r} + v \vec{\theta}) + p(\vec{r} \sin \lambda_i - \vec{\theta} \cos \lambda_i) = \text{cste}$$

En projetant cette équation sur \vec{n} et $\vec{\theta}$, et en utilisant (3-55), on aboutit à une nouvelle expression de (3-60):

$$\begin{aligned} \rho(u - m_i v - R_{it}) &= \text{cste} \\ \rho u(u - m_i v - R_{it}) + p &= \text{cste} \\ \rho v(u - m_i v - R_{it}) - m_i p &= \text{cste} \\ \rho(u - m_i v - R_{it}) \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + R_{it} p &= \text{cste} \end{aligned} \quad (3-63)$$

Il est facile, à l'aide de (3-28), de vérifier que les conditions (3-59) sont les formes adimensionnées de (3-63).

Notons qu'en éliminant p entre (3-59-2) et (3-59-3) on obtient, compte tenu de (3-59-1): $m_i u_0 + v_0 = \text{cste}$, expression adimensionnée de la conservation de la composante tangentielle q_z de la vitesse du fluide au passage du choc.

En conclusion, nous pouvons dire que les équations (3-51), expriment le transport de quantités dont les variations sont continues dans tout le domaine de calcul même en présence de chocs internes. Le but poursuivi en reformulant ainsi le problème est donc atteint.

3-2-6 CONDITIONS A LA FRONTIERE DU VIDE

Nous savons que les écoulements consécutifs à des explosions violentes isotropes ne sont continus jusqu'au centre de

l'explosion que si celle-ci est instantanée (ref<46>). Dans le cas contraire ($d \neq 0$), il se forme à l'intérieur de l'écoulement un vide. Rien ne permet de penser qu'il en sera autrement pour une explosion anisotrope pour laquelle le volume vide ne sera a priori pas sphérique. L'équation de l'enveloppe du vide Σ' sera notée $r = R'$ soit, en grandeurs adimensionnées:

$$(3-64) \quad x = x'(\theta)$$

Pour simplifier les notations nous appellerons f' une fonction quelconque $f(x', \theta)$.

La frontière du vide possède des propriétés importantes qu'il convient d'exploiter pour permettre la réalisation de l'intégration numérique du problème.

Comme on l'a vu en 3-2-2, les conditions initiales du calcul sont données sur le choc externe et l'intégration se fait du choc vers le vide. Il est donc de première importance de savoir déterminer la position de la surface Σ' (figure 57).

On pourrait penser que la meilleure façon de procéder est de détecter, pour θ donné, la valeur de x où $\rho_0 = 0$. Cette solution n'est pas adaptée pour deux raisons principales. La première, comme on le verra au chapitre 4, est que la fonction ρ_0 ne s'annule pas toujours d'une façon continue sur Σ' . L'autre raison est que, même si ρ_0 s'annule continûment, la pente est souvent infinie en $x = x'$. On verra au chapitre 4 que, dans le cas isotrope, cela se produit à la condition suivante: $\alpha > \frac{12 - 6\gamma}{3\gamma + 4}$.

Or, la recherche du zéro d'une fonction qui a une pente infinie là où elle s'annule est un problème délicat à traiter numériquement. Nous allons voir qu'une autre condition physique sur Σ' dispense d'utiliser la condition $\rho_0 = 0$.

La surface Σ' est une frontière matérielle, que nous pouvons appeler surface de contact entre le vide et le milieu continu, ce qui se traduit par la relation $q'_n = \omega'$, qui s'exprime aussi par:

$$R'_i \sin \lambda' = u' \sin \lambda' - v \cos \lambda'$$

En grandeurs sans dimensions nous obtenons:

$$(3-65) \quad u'_0 - m'v'_0 - \frac{\gamma+1}{2} = 0$$

où, avec les notations de la figure 57, on a posé

$$(3-66) \quad m' = \cot \theta' = \frac{x'_0}{x'} + m$$

Cela étant, il est possible de déduire de (3-65) une équation différentielle définissant ξ' , soit:

$$(3-67) \quad \frac{x'_0}{x'} = F(\theta) = \frac{u'_0 - m'v'_0 - \frac{\gamma+1}{2}}{v'_0}$$

On sait que cette équation se confond avec celle des trajectoires (§ 3-2-3). On en déduit que ξ' est une enveloppe de l'ensemble des trajectoires. Si $v'_0 = 0$ l'équation (3-67) n'est pas singulière car cela signifie que la particule reste sur un rayon, donc $\alpha'_0 = 0$ et $F(\theta) = 0$.

Comme l'intégration se fait du choc vers le vide, on trouve une solution au problème dès que l'on détermine une enveloppe à l'ensemble des trajectoires qui ne soit pas traversée par les particules. Si cette solution est unique, ce qui sera confirmé ci-dessous, elle correspond à ξ' .

Une condition de type (3-65) ne peut être réalisée que sur les trajectoires ou sur leur enveloppe. En effet, considérons une surface quelconque fermée ξ'' comprise entre ξ et ξ' et déterminée par une équation adimensionnée de la forme $x = x''(\theta)$. Les grandeurs relatives à ξ'' seront doublement accentuées. Si la condition suivante est vérifiée pour les points de ξ'' :

$$(3-68) \quad u_0'' - m''v_0'' - \frac{\gamma+1}{2} \geq 0$$

alors cela signifie que $q_n'' > \omega''$ et que les particules provenant du choc ne peuvent pas traverser ξ'' . Il ne peut donc pas exister

une autre surface de ce type à l'intérieur de Σ'' : ainsi Σ' et Σ'' ne sont qu'une et même surface, ce qui démontre l'unicité de Σ' .

Si, par contre, (3-68) n'est pas vérifiée sur Σ'' alors l'intégration continue jusqu'à Σ' . Si Σ'' est une ligne de noeuds d'un maillage la condition (3-68) permet de distinguer les noeuds contenus dans l'écoulement de ceux situés à l'intérieur du vide. La position de Σ' peut donc être déterminée à la précision du maillage près puis, grâce à (3-67), calculée avec plus de finesse, pour peu que u_c et v_c soient suffisamment régulières.

Appliquons maintenant le principe de la conservation de l'énergie au domaine conique V' ayant son sommet en O et limité par la frontière du vide (figure 58). En choisissant E comme grandeur caractéristique de l'écoulement nous avons fait l'hypothèse implicite que l'énergie était transmise intégralement de O vers le milieu continu. Si e désigne l'énergie interne cela se traduit par :

$$\frac{d}{dt} \int_{V'} e dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} e dv = - \int_{\Sigma'} \rho' \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

En effet, il n'y a pas de flux d'énergie à travers Σ' puisqu'aucune particule ne passe du vide vers l'écoulement et qu'il n'existe pas de transfert de chaleur. La seule variation d'énergie interne dans V' provient de la source O ; par suite la relation précédente s'écrit :

$$(3-69) \quad 2\pi\alpha E t^{\alpha-1} \int_0^\theta c(\phi) \sin \phi d\phi = 2\pi \int_0^\theta \rho' R'^2 R'_t d\phi$$

En dérivant par rapport à θ et en appliquant (6) et (25) on obtient :

$$(3-70) \quad \xi(\theta) = \frac{2(\alpha+2)^3}{125(\alpha+1)\alpha} \rho_0' R_0'^5 x'^5$$

Nous avons donc obtenu une relation en termes finis entre $\xi(\theta)$ et $R_0(\theta)$ qui ferme le problème.

D'après (3-23) on peut tirer au passage:

$$(3-71) \quad \int_0^\pi P_0' R_0^5 x'^5 \sin \theta d\theta = \frac{125 (\delta+1) \alpha}{4\pi (\alpha+2)^3}$$

On constate que la répartition azimutale d'énergie $\xi(\theta)$ est proportionnelle à R_0^5 , ce qui permet de penser que l'anisotropie de l'apport d'énergie se traduit par une anisotropie beaucoup plus faible de la géométrie du choc. C'est ce qui explique qu'un tir idéal provoque une onde quasi sphérique malgré l'anisotropie de l'apport d'énergie.

La quantité $R_0 x'$ représente la forme de ξ' qui est assimilable à un piston. On voit que les problèmes du piston et de l'explosion violente sont identiques et que la relation (3-70) permet de passer de l'un à l'autre. On constate, comme pour la forme du choc, que l'expansion d'un piston faiblement anisotrope peut néanmoins correspondre à une répartition très anisotrope de l'apport d'énergie dans l'espace.

Il convient cependant d'expliquer l'existence de la singularité de (3-70) pour $\alpha=0$. Tout ce qui précède n'est vrai, en effet, que pour $\alpha \neq 0$ et cette singularité ne fait que traduire une réalité physique: l'explosion instantanée n'engendre pas de vide. Dans ce dernier cas, seul le principe de la conservation globale de l'énergie dans le milieu continu permet de fermer le problème.

3-2-7 EQUATION GLOBALE DE L'ENERGIE

Ecrivons la conservation de l'énergie dans le domaine conique de sommet O et d'angle θ limité par une sphère et contenant l'onde de choc (figure 58).

Compte tenu des conditions sur le choc et du fait que \bar{P} est négligeable, les seuls termes intervenant dans le calcul de

l'énergie sont: l'énergie apportée en O , celle contenue dans le volume V compris entre ξ et ξ' et le flux d'énergie à travers la partie S_1 de la surface du cône comprise entre ξ et ξ' . A l'instant t , on exprime que l'énergie émise en O se retrouve d'une part dans V et d'autre part dans l'intégrale par rapport au temps du flux traversant S_1 :

$$2\pi \int_0^{\theta} E t^\alpha \epsilon(\phi) \sin \phi d\phi = \int_V \left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2+v^2}{2} \right) dv + \int_0^t \left[\int_{S_1} \left(\frac{\gamma p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2+v^2}{2} \right) v ds \right] dt$$

Sous forme adimensionnée cette équation devient:

$$(3-72) \quad \int_0^{\theta} R_0^3(\phi) \left[\int_{z'}^1 K(z, \phi) z^4 dz \right] \sin \phi d\phi + \frac{2(\alpha+2)}{5(\gamma+1)\alpha} R_0^5(\theta) \sin \theta \int_{z'}^1 G(z, \theta) z^4 dz \\ = \frac{25(\gamma^2-1)}{2(\alpha+2)^2} \int_0^{\theta} \epsilon(\phi) \sin \phi d\phi$$

où les fonctions K et G sont définies par:

$$(3-73) \quad K(z, \theta) = p_0 + \rho_0 u_0^2 + \rho_0 v_0^2 \\ G(z, \theta) = (\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2 + \rho_0 v_0^2) v_0$$

On remarque que pour $\alpha=0$ l'équation (3-72) n'a de sens que si on a:

$$(3-74) \quad \int_0^1 G(z, \theta) z^4 dz = 0$$

c'est-à-dire si le flux d'énergie à travers la surface latérale du cône est nul. Cela revient à dire que, pour une explosion instantanée, la répartition azimutale d'énergie dans l'espace reste, au cours du temps, identique à la répartition initiale. Pour démontrer cette assertion, considérons l'équation (3-50-4) dans le cas où $\alpha=0$. On constate que le second membre s'annule et donc, en reprenant les notations définies en (3-52), que dans le plan (x, θ) la divergence du vecteur $V_4 = \begin{pmatrix} b_4 \\ c_4 \end{pmatrix}$ est nulle. En

intégrant cette équation sur le volume V de la figure 58, dans le cas où $\alpha=0$ et $x'=0$, on aboutit à (3-74).

Nous pouvons donc écrire, pour l'explosion instantanée, la relation (3-72), après dérivation par rapport à θ , sous la forme particulièrement simple suivante:

$$(3-75) \quad R_0^5(\theta) \int_0^1 K(x, \theta) x^4 dx = \frac{25(\gamma^2 - 1)}{8} \epsilon(\theta); \quad x' = 0$$

Dans le cas isotrope $\epsilon(\theta) = \frac{1}{4\pi}$ on retrouve l'expression classique pour une explosion sphérique (ref<3>, <47>).

Dans le cas où $\alpha \neq 0$ l'expression (3-72) est remplacée avantageusement par (3-70) mais pour $\alpha = 0$, cette dernière n'est plus valable et c'est donc (3-75) qui permet de fermer le problème.

3-3 CONCLUSION

A ce stade de la modélisation, se pose le problème de la résolution numérique. Mais les résultats analytiques obtenus dans ce chapitre, en particulier la formule (3-70) montrent que l'écoulement est compris entre une onde de choc et une surface de contact qui sont peu anisotropes même si l'anisotropie de l'apport d'énergie est importante! Le cas du tir idéal est une bonne illustration de cette propriété, il montre que le jet de gaz de poudre ne constitue pas un apport d'énergie assez anisotrope pour provoquer un choc très différent d'une sphère. Ce sont les phénomènes précurseurs qui, en modifiant le processus de formation de l'onde de bouche, créent une anisotropie bien apparente de la forme de l'onde. Ainsi, dans le cas du tir, la répartition azimutale de l'énergie de l'explosion équivalente dépend des phénomènes précurseurs.

Si le tir est idéal, ou s'il peut être considéré comme tel (cas des tirs à haute altitude), la répartition $\xi(\theta)$ ne dépend que du

jet de gaz brûlés: elle est donc identique pour tous les tirs idéaux semblables. Que l'onde de bouche soit alors quasi-sphérique ne signifie pas que l'écoulement loin en aval du choc soit presque à symétrie sphérique, mais cela permet de penser que la propagation de l'onde dépend plus de l'intensité E de l'apport d'énergie que de sa répartition azimutale $\varepsilon(\theta)$. Il est donc concevable, si l'on s'intéresse avant tout à cette propagation, de pousser la modélisation plus loin et d'assimiler l'onde de bouche à une onde sphérique produite par un apport d'énergie d'intensité E identique à celle de l'apport de l'explosion équivalente, mais dont la répartition azimutale soit à symétrie sphérique. Le problème devient alors entièrement sphérique: le système (2-25) se transforme en un système d'équations différentielles, et les fonctions R et x' en constantes. Le calcul donne donc la progression du choc et de la surface de contact sous une forme analytique universelle, plus facilement utilisable.

Mais, l'avantage le plus important que confère ce pas de plus dans la modélisation concerne l'effet sur la propagation du choc des paramètres négligés, comme \bar{p} , dans l'hypothèse de l'explosion violente. En effet, même si on peut toujours traiter l'effet des paramètres physiques secondaires sous la forme de petites perturbations de l'écoulement de base, la difficulté des calculs, dans le cas d'un problème aux dérivées partielles, conduit souvent à préférer la résolution numérique du problème exact à celle du traitement par la méthode des petites perturbations.

Il en va autrement si l'écoulement de base est assez simple pour qu'il soit envisageable d'obtenir l'influence des paramètres secondaires sous forme analytique.

On peut alors espérer obtenir explicitement l'effet de \bar{p} sur la propagation du choc externe et même celui de la vitesse du milieu extérieur. C'est ce qui sera fait, dans le cas général, au chapitre 4. On perçoit l'intérêt que cela représente pour le problème du tir d'armes embarquées à haute altitude. On montrera, au chapitre 5, qu'il est possible de tirer du calcul numérique un modèle analytique de la progression de l'onde de bouche qui tient

compte de ces deux paramètres. La connaissance de cette progression permet d'évaluer l'ordre de grandeur de l'intensité des perturbations auxquelles il faut s'attendre dans le milieu environnant, ainsi que le sens et l'importance des variations induites par les paramètres secondaires \bar{p} et \bar{U} . La théorie de l'explosion anisotrope garde cependant tout son intérêt pour l'étude de l'écoulement compris entre Σ et Σ' , et cela, même si l'onde extérieure est quasi sphérique.

* * * * *
* *CHAPITRE 4* *
* * * * *
* *THEORIE ET CALCUL DE L'ECOULEMENT CONSECUTIF* *
* *A UNE EXPLOSION VIOLENTE, PONCTUELLE ET ISOTROPE* *
* *DANS UN GAZ ANIME D'UN MOUVEMENT UNIFORME* *
* * * * *

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS PRINCIPALES

4-1 INTRODUCTION

4-2 MODELISATION DU PHENOMENE

4-2-1 FORME DU MODELE

4-2-2 FORME CONSERVATIVE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

4-2-3 CONDITIONS SUR LE CHOC

4-2-4 CALCUL DE L'ECOULEMENT DE BASE

4-2-5 EQUATION GLOBALE DE L'ENERGIE

4-2-6 CONDITIONS A LA FRONTIERE DU VIDE

4-2-7 SEPARATION DES EFFETS ISOTROPES DE LA VITESSE
ET DE LA PRESSION

4-2-8 EXTENSION AUX CAS POLYTROPQUES

4-3 RESOLUTION NUMERIQUE

4-3-1 EFFET DE PREMIERE APPROXIMATION DE LA VITESSE

4-3-2 EFFETS DE SECONDE APPROXIMATION

4-3-3 SOLUTION ANALYTIQUE DES EFFETS DU COURANT
POUR L'EXPLOSION INSTANTANEE

4-3-4 CALCUL DES REPARTITIONS

4-4 RESULTATS NUMERIQUES

4-4-1 ECOULEMENT INTERIEUR A L'ONDE DE CHOC

4-4-2 VALEURS SUR L'ONDE DE CHOC

4-5 CONCLUSION

ANNEXES

NOTATIONS PRINCIPALES

- c : vitesse du son
- E : intensité de l'apport d'énergie
- $E_1, E_{21}, E_{22}, E_{23}$: fonctions définies respectivement par les formules (57), (58), (64), (65)
- M : nombre de Mach
- $\tilde{\sigma}$: lieu de l'explosion
- O : origine du repère mobile
- p : pression
- R : position de l'onde de choc dans le repère mobile
- R' : position de la frontière du vide dans le repère mobile
- R^+, t^+ : longueur et temps caractéristiques définis par les formules (88)
- r, θ : coordonnées polaires dans le repère mobile en translation uniforme
- $\tilde{r}, \tilde{\theta}$: coordonnées polaires dans le repère fixe lié au lieu de l'explosion
- t : temps
- \bar{U} : vitesse de l'écoulement uniforme
- u, v : composantes radiale et tangentielle de la vitesse des particules dans le repère mobile

- \tilde{X} : position de l'onde de choc par rapport au lieu de l'explosion sur l'axe de symétrie de l'écoulement.
- α : constante positive inférieure ou égale à 3
- β : rapport de la vitesse du repère mobile à \bar{U}
- γ : rapport des chaleurs spécifiques
- η : variable adimensionnée correspondant à \bar{U}
- ζ : variable adimensionnée correspondant à \bar{p}
- ω : vitesse de l'onde de choc
- ω' : vitesse de la frontière du vide
- ρ : masse volumique
- ξ : coordonnée adimensionnée correspondant à r

* Les grandeurs correspondant au milieu non perturbé sont représentées par des symboles surlignés ($\bar{\rho}$, \bar{p} , \bar{c}).

* Les grandeurs sans dimensions correspondant aux grandeurs physiques (p , ρ , c , u , v) dans le milieu perturbé sont affectées de l'indice 0 (p_0 , ρ_0 , c_0 , u_0) à l'ordre zéro, de l'indice 1 (p_1 , ρ_1 , c_1 , u_1 , v_1) à l'ordre un, de l'indice 20 pour les effets isotropes d'ordre 2, de l'indice 21 pour les effets anisotropes d'ordre 2. Les effets isotropes d'ordre 2 se décomposent en un effet de la pression statique extérieure auquel correspond l'indice 22, et un effet de la pression cinétique extérieure auquel est associé l'indice 23.

- * *La dérivée d'une fonction f par rapport à une variable quelconque μ est notée f_{μ} .*
- * *Les grandeurs physiques sur le choc du côté aval sont affectées de l'indice c .*
- * *Les symboles tirés de la référence 3 sont signalés par l'indice s*

4-1 INTRODUCTION

Le problème de l'explosion isotrope dans un milieu au repos à déjà fait l'objet de nombreux travaux (ref <3>, <4>, <46>). Des applications lui ont été trouvées pour les ondes de choc produites par des explosions atomiques <3>, <4>, ou par des décharges électriques ou par un laser puissant <46>. En astrophysique, elle a servi à la modélisation de l'explosion de supernovas <48><49>. En aérodynamique elle a débouché sur la théorie de l'hypersonique fort par le biais d'une analogie entre les équations <50>.

Dans la plupart des cas, le domaine de validité de l'écoulement à similitude interne obtenu pour un choc très intense est petit. En effet, le choc s'atténue rapidement et le rôle de \bar{p} ne peut plus être négligé comme nous l'avons fait au chapitre 3. Ce modèle à similitude interne est cependant très utile car il permet de calculer l'effet de \bar{p} sous la forme d'un développement en petites perturbations de la solution théorique de l'explosion violente. La solution du problème de perturbation ainsi obtenu est en accord avec l'expérience, en particulier en ce qui concerne la propagation du choc, ce qui est très appréciable pour un modèle théorique aussi simple.

L'onde de bouche produite par un tir n'est quasi sphérique que pour un tir idéal, ce qui correspond en pratique à un tir à haute altitude. Comme un tel tir n'est concevable que sur un avion, la théorie de l'explosion violente ne peut être utile au problème du tir d'un canon embarqué que si on l'étend au cas où le milieu extérieur se déplace et, dans une première étape, s'il est animé d'un mouvement uniforme. La première idée de modélisation qui vient à l'esprit consiste évidemment à chercher l'effet du courant \bar{U} sous la forme d'un développement asymptotique de la solution de l'explosion violente: c'est ce qui est fait dans ce chapitre dans le cas général. Les résultats seront appliqués au tir ($\alpha=1$) au chapitre 5.

Il convient de préciser que toutes les équations sont établies dans le cas de processus adiabatiques. Cependant il est démontré (§ 4-2-8) que la formulation proposée reste valable pour des transformations polytropiques. C'est pourquoi, dans les applications numériques, nous avons pu choisir des valeurs de γ autres que celles qui correspondent à l'adiabatique des gaz parfaits: $\gamma = 1.33$ pour les gaz polyatomiques, $\gamma = 1.4$ pour les gaz diatomiques et $\gamma = 1.67$ pour les gaz monoatomiques.

4-2 MODELISATION DU PHENOMENE

4-2-1 FORME DU MODELE

On se place dans le cadre de la théorie des explosions violentes (ref<3>). L'explosion est supposée ponctuelle et l'énergie est libérée de façon isotrope suivant une loi de la forme $\xi = Et^\alpha$ avec $0 < \alpha < 3$.

L'écoulement uniforme est caractérisé par la vitesse \bar{U} , la masse volumique $\bar{\rho}$, la vitesse du son \bar{c} , la pression \bar{p} et le nombre de Mach $\bar{M} = \bar{U} / \bar{c}$. Le gaz est parfait et non visqueux. L'écoulement engendré par l'explosion est axisymétrique par rapport à l'axe Ox parallèle à \bar{U} (figure 59). Le repère $Oxyz$, dans lequel est étudié l'écoulement, est en translation uniforme à la vitesse $\beta \bar{U}$ par rapport au lieu de l'explosion \tilde{O} . Les points O et \tilde{O} sont confondus à l'instant $t=0$ auquel se produit l'explosion. Les raisons pour lesquelles on introduit ce repère mobile apparaîtront plus tard.

L'écoulement étant axisymétrique, on l'étudie dans le plan méridien en désignant par r et θ les coordonnées polaires auxquelles correspondent les composantes u et v de la vitesse. On note $r=R(\theta, t)$ l'équation de l'onde de choc créée par l'explosion.

Considérons d'abord le cas où le milieu extérieur est au repos ($\bar{U}=0$); on obtient alors un mouvement à symétrie sphérique ($\frac{\delta}{\delta\theta} = 0$,

$v=0$). Si l'on suppose de plus que pour une explosion suffisamment intense \bar{p} n'a pas d'influence, les seules constantes dimensionnées intervenant dans les expressions de u , ρ et p sont E et $\bar{\rho}$. On retrouve la similitude interne mise en évidence au chapitre 3. Cela revient à résoudre implicitement le problème par rapport au temps à l'aide des équations aux dimensions. Ainsi l'équation de l'onde de choc s'écrit:

$$(4-1) \quad r = R(t) = \left(\frac{Et^{2+\alpha}}{\bar{\rho}} \right)^{1/5} \xi_0$$

où, contrairement à $R_0(\theta)$ dans la formule (3-26), ξ_0 ne dépend que de α et γ .

Les calculs montrent que ξ_0 est voisin de 1, ce qui valide a posteriori tous les raisonnements sur les ordres de grandeurs qui sont contenus dans ce rapport, puisque ceux ci sont fondés en partie sur cette hypothèse.

Pour sa part r , devenue seule variable du problème, peut s'écrire: $r = \left(\frac{Et^{2+\alpha}}{\bar{\rho}} \right)^{1/5} \xi_0 \xi$ où ξ désigne la variable adimensionnée.

On remarque que, sous cette forme, l'équation $r=R$ s'écrit $\xi = 1$.

L'écoulement consécutif à l'explosion correspond donc à $0 < \xi < 1$. A l'aide du système de grandeurs primaires ainsi choisi on peut adimensionner toutes les inconnues en les divisant par un produit adéquat de puissances de E , $\bar{\rho}$ et t ou, ce qui revient au même, de r , $\bar{\rho}$ et t . Il est commode de leur donner la forme suivante:

$$(4-2) \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \bar{\rho} \rho_0; \quad u = \frac{2(\alpha+2)r}{5(\gamma+1)t} u_0; \quad p = \frac{2(\alpha+2)^2 r^2 \bar{\rho}}{25(\gamma+1)t^2} p_0$$

de manière que ρ_0 , u_0 , p_0 , fonctions adimensionnées de ξ , prennent la valeur 1 sur l'onde de choc. On peut trouver les valeurs de ces fonctions dans la référence <3>.

Considérons maintenant le cas où le milieu extérieur est animé d'un mouvement uniforme. L'introduction de \bar{U} dans l'ensemble des

constantes adimensionnées du problème fait disparaître la similitude interne. De plus, l'effet du courant étant anisotrope, les inconnues dépendent de θ , de sorte que le problème comprend maintenant trois variables au lieu d'une seule. D'autre part, l'anisotropie de l'écoulement entraîne l'apparition d'une composante tangentielle v de la vitesse des particules fluides. Cependant, on conçoit facilement que, tant que l'onde de choc est intense, l'écoulement consécutif à l'explosion est peu différent de celui obtenu quand $\bar{U}=0$. La solution cherchée est donc voisine de la solution sphérique donnée par (4-2). Par conséquent, il est judicieux de garder le même système de grandeurs primaires que précédemment. A \bar{U} correspond alors une variable adimensionnée définie par:

$$(4-3) \quad \eta = \frac{\bar{U}}{\xi_0} \left(\frac{\bar{\rho} t^{3-\alpha}}{E} \right)^{1/5}$$

Cette variable prend des valeurs très petites devant 1 tant que l'on a : $1 \ll \left(\frac{E \xi_0^5}{\bar{\rho}} \right)^{1/(3-\alpha)}$. Cette inégalité est toujours vérifiée au début du mouvement si $\alpha < 3$. Elle reste vraie d'autant plus longtemps que E est grand et donc que l'explosion est intense. Par conséquent on peut construire un développement asymptotique par rapport à η à partir de la solution sphérique. Ce développement donne la perturbation produite par \bar{U} . Nous écrirons, de ce fait, la solution sous la forme:

$$(4-4) \quad R = \left(\frac{E t^{2+\alpha}}{\bar{\rho}} \right)^{1/5} \xi_0 R^*; \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \bar{\rho} \rho^*; \quad p = \frac{2(\alpha+2)^2 r^2 \bar{\rho}}{25(\gamma+1)t^2} p^* \\ u = \frac{2(\alpha+2)r}{5(\gamma+1)t} u^*; \quad v = \frac{2(\alpha+2)r}{5(\gamma+1)t} v^*$$

ρ^* , p^* , u^* et v^* sont des fonctions de ξ , θ et η égales respectivement à ρ_0 , p_0 , u_0 et zéro pour $\eta=0$. R^* n'est fonction que de θ et η et est égal à 1 pour $\eta=0$. Nous chercherons la solution sous la forme d'un développement asymptotique en η , les fonctions R^* , ρ^* , p^* , u^* et v^* prenant la forme de séries en η .

Pour fixer l'ordre de ce développement il faut estimer le sens physique de chacun des niveaux d'approximation. Considérons, par exemple, la fonction p^* : d'après ce qui précède, elle s'écrit : $p^* = p_0 + \eta a_1 + \eta^2 a_2 + \dots + \eta^i a_i + \dots + O(\eta^n)$ où les a_i sont des fonctions de θ et de ξ . Si le développement choisi représente une solution physiquement acceptable tous les a_i seront de l'ordre de 1: aussi seuls les premiers termes du développement seront significatifs.

On a vu que l'hypothèse de l'explosion très intense est fondée sur le fait que \bar{p} n'a pas d'influence sur l'écoulement. On sait que ce modèle ne permet pas de simuler convenablement l'atténuation de l'onde de choc (ref<3>). Il faut donc choisir un niveau d'approximation qui introduise l'effet de \bar{p} . Il peut sembler paradoxal de représenter l'influence de \bar{p} dans un développement en η qui est la variable relative à \bar{U} , alors que, avec notre système de grandeurs primaires, à \bar{p} correspond la variable adimensionnée:

$$(4-5) \quad \zeta = \frac{\bar{p}}{\xi_0^2} \left(\frac{t^{2(3-\alpha)}}{\bar{\rho}^3 E^2} \right)^{1/5}$$

Cela est parfaitement valable car on vérifie sans difficulté la relation :

$$(4-6) \quad \eta^2 = \gamma \bar{M}^2 \zeta$$

Ainsi, pour $\bar{M} \neq 0$, l'effet de \bar{p} est traduit par un terme en η^2 . Par suite c'est jusqu'à l'ordre 2 au moins qu'il faut effectuer le calcul si l'on désire prendre en compte les effets de \bar{U} et de \bar{p} . On peut d'ores et déjà évaluer l'adéquation du modèle avec

l'expérience. En effet, la relation (4-6) montre que si \bar{M} est de l'ordre de 1, sans être très petit, l'influence de \bar{p} est équivalente à l'ordre 2 du courant, dont l'effet d'ordre 1 est alors prépondérant. Supposons maintenant que \bar{M} soit petit devant 1: alors l'effet de \bar{U} ne sera prédominant qu'au début du mouvement, tant que l'on aura $\eta \ll \bar{M}^2$ c'est-à-dire $\gamma \ll \eta$. Dès que η est de l'ordre de \bar{M}^2 , γ est de l'ordre de η et les deux influences sont du même ordre. Pour $\bar{M}^2 < \eta < \bar{M}$ c'est l'effet de la pression qui l'emporte. Dans le cas limite où $\bar{M}=0$, la solution se réduit donc à un développement en γ . Le comportement du modèle que nous venons de décrire est conforme à l'expérience. Sedov a montré que l'influence de la pression \bar{p} ne devient perceptible sur la propagation du choc que lorsque le nombre de Mach du choc devient inférieur à 3.5 (ref<3>). D'autre part, nous avons pu observer, en comparant les progressions du choc lors de tirs d'armes à feu avec et sans contre-courant, que l'onde de bouche, dont le nombre de Mach à la fin de sa phase de formation est de l'ordre de 3,5, a déjà subi l'effet du courant (ref<17>). Afin de fixer la forme définitive de R^* , ρ^* , p^* , u^* et v^* il faut tirer le maximum d'informations des considérations physiques. En particulier, on remarque que l'axisymétrie de l'écoulement entraîne la parité en θ de R^* , ρ^* , p^* et u^* et implique que v^* soit impaire. Enfin, un calcul préliminaire montre que ces fonctions doivent adopter une forme particulière sur le choc.

Prenons par exemple la condition sur le choc qui impose l'égalité des composantes tangentielles; appelons q_1 et \bar{U}_2 ces composantes respectivement sur les faces interne et externe du choc. La condition s'écrit $q_1 = \bar{U}_2$, soit, dans le repère mobile, avec les notations de la figure 59: $u \cos \lambda + v \sin \lambda = (1 - \beta) \bar{U} \cos(\lambda + \theta)$.

Développons cette relation à l'ordre 1, après avoir posé :

$$R^* = 1 + \eta \xi_1^* + O(\eta^2); \quad u^* = u_0 + \eta u_1^* + O(\eta^2); \quad v^* = \eta v_1^* + O(\eta^2)$$

où ξ_1^* est une fonction de θ et u_1^* et v_1^* des fonctions de θ et

de ξ . On obtient: $u_0 \xi_0^* + v_1^* = -\frac{5(\gamma-1)(1-\beta)}{2(\alpha+2)} \sin \theta$ pour $\xi = 1$.

Sachant que $u_0(1)=1$ on en déduit que, pour $\xi = 1$, v^* et R^* s'écrivent $v^* = \eta v_1 \sin \theta + O(\eta^2)$ et $R^* = 1 + \eta \xi_2 \cos \theta + O(\eta^2)$.

Des calculs identiques pour chaque condition, poussés à l'ordre 2, donnent la forme particulière des développements en $\xi = 1$. Le modèle le plus simple remplissant toutes les conditions précédentes est celui qui généralise pour toute valeur de ξ la dépendance obtenue pour $\xi = 1$. Il permet de séparer les variables ξ et θ et de résoudre implicitement le problème en θ : d'un problème à trois variables nous revenons à une seule variable. Dans ce modèle l'équation adimensionnée du choc s'écrit donc :

$$(4-7) \quad R^* = 1 + \eta \xi_1 \cos \theta + \eta^2 (\xi_{20} + \xi_{21} \cos 2\theta) + O(\eta^3)$$

et les inconnues adimensionnées sont données par les relations:

$$(4-8-1) \quad \rho^* = \rho_0 + \eta \rho_1 \cos \theta + \eta^2 (\rho_{20} + \rho_{21} \cos 2\theta) + O(\eta^3)$$

$$(4-8-2) \quad p^* = p_0 + \eta p_1 \cos \theta + \eta^2 (p_{20} + p_{21} \cos 2\theta) + O(\eta^3)$$

$$(4-8-3) \quad u^* = u_0 + \eta u_1 \cos \theta + \eta^2 (u_{20} + u_{21} \cos 2\theta) + O(\eta^3)$$

$$(4-8-4) \quad v^* = \eta v_1 \sin \theta + \eta^2 v_2 \sin 2\theta + O(\eta^3)$$

Les fonctions $\rho_0, \rho_1, \rho_{20}, \rho_{21}; p_0, p_1, p_{20}, p_{21}; u_0, u_1, u_{20}, u_{21}; v_1, v_2$ ne dépendent que de ξ et $\xi_0, \xi_1, \xi_{20}, \xi_{21}$ sont des constantes.

4-2-2 FORME CONSERVATIVE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

Le fluide est considéré comme non visqueux. Nous écrivons les équations en coordonnées sphériques dans le repère mobile $Oxyz$. Ce repère, en translation uniforme par rapport au repère fixe lié au lieu de l'explosion O_1 , est galiléen. Du fait de

l'axisymétrie, l'écoulement est méridien et vérifie le système:

$$(4-9-1) \quad r^2 \sin \theta \rho_t + \sin \theta (r^2 \rho u)_r + r(\rho v \sin \theta)_\theta = 0$$

$$(4-9-2) \quad r^2 \sin \theta (\rho u)_t + \sin \theta (r^2 \rho u^2)_r + r(\sin \theta \rho uv)_\theta - r \sin \theta \rho v^2 + r^2 \sin \theta p_r = 0$$

$$(4-9-3) \quad r^2 \sin \theta (\rho v)_t + \sin \theta (r^2 \rho uv)_r + r(\sin \theta \rho v^2)_\theta + r \sin \theta \rho uv + r \sin \theta p_\theta = 0$$

$$(4-9-4) \quad r^2 \sin \theta \left(\frac{p}{\rho^{\gamma-1}} \right)_t + \sin \theta \left(r^2 u \frac{p}{\rho^{\gamma-1}} \right)_r + r \left(\sin \theta v \frac{p}{\rho^{\gamma-1}} \right)_\theta = 0$$

On peut écrire ces équations sous forme adimensionnée à l'aide de (4-4); on obtient le système (4-10) :

(4-10-1)

$$\begin{aligned} \sin \theta \left[\xi^3 \rho^* \left(u^* - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right]_\xi + [\xi^2 \rho^* v^* \sin \theta]_\theta + \frac{(\gamma+1)(3-\alpha)}{2(\alpha+2)} [\xi^2 \eta \rho^* \sin \theta]_\eta \\ + \frac{(4\alpha+3)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \xi^2 \rho^* \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

(4-10-2)

$$\begin{aligned} \sin \theta \left[\xi^4 \left(\rho^* u^{*2} - \frac{\gamma+1}{2} \rho^* u^* + \frac{\gamma-1}{2} p^* \right) \right]_\xi + [\xi^3 \rho^* u^* v^* \sin \theta]_\theta + \frac{5\alpha(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \xi^3 \rho^* u^* \sin \theta \\ + \frac{(3-\alpha)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} (\xi^3 \eta \rho^* u^* \sin \theta)_\eta - \xi^3 \rho^* v^{*2} \sin \theta - (\gamma-1) p^* \xi^3 \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

(4-10-3)

$$\begin{aligned} \sin \theta \left[\xi^4 \rho^* v^* \left(u^* - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right]_\xi + [\xi^3 (\rho^* v^{*2} + \frac{\gamma-1}{2} p^*) \sin \theta]_\theta + \frac{5\alpha(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \xi^3 \rho^* v^* \sin \theta \\ + \frac{(3-\alpha)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} (\xi^3 \eta \rho^* v^* \sin \theta)_\eta + \xi^2 \rho^* u^* v^* \sin \theta - \frac{\gamma-1}{2} \xi^3 p^* \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

(4-10-4)

$$\begin{aligned} & \sin \theta \left[\xi^3 \rho^* s^* \left(u^* - \frac{\gamma + 1}{2} \right) \right]_{\xi} + (\xi^2 \rho^* v^* s^* \sin \theta)_{\theta} + \frac{(3 - \alpha)(\gamma + 1)}{2(\alpha + 2)} (\xi^2 \eta \rho^* s^* \sin \theta)_{\eta} \\ & + \frac{(4\alpha + 3)(\gamma + 1)}{2(\alpha + 2)} \xi^2 \rho^* s^* \sin \theta + 2\xi^2 \rho^* \left(u^* - \frac{5(\gamma + 1)}{2(\alpha + 2)} \right) \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

Dans cette dernière équation la grandeur s^* correspond à l'entropie d'une particule et est définie par :

$$(4-11) \quad s^* = \log \left(\frac{p^*}{\rho^{*\gamma}} \right)$$

Le développement de s^* s'obtient donc à partir de ceux de p^* et de ρ^* . Il s'écrit :

$$(4-12) \quad s^* = s_0 + \eta s_1 \cos \theta + \eta^2 (s_{20} + s_{21} \cos 2\theta) \quad \text{avec:}$$

$$(4-13-1/-2) \quad s_0 = \log \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right); \quad s_1 = \frac{p_1}{p_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

$$(4-13-3/-4) \quad s_{20} = \frac{p_{20}}{p_0} - \gamma \frac{\rho_{20}}{\rho_0} - \left(\frac{p_1}{2p_0} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\rho_1}{2\rho_0} \right)^2; \quad s_{21} = \frac{p_{21}}{p_0} - \gamma \frac{\rho_{21}}{\rho_0} - \left(\frac{p_1}{2p_0} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\rho_1}{2\rho_0} \right)^2$$

Pour résoudre le système (4-10), il faut substituer aux inconnues ρ^* , p^* , u^* , v^* et s^* leurs développements (4-8) et (4-12) et identifier. Cependant le calcul montre que les fonctions qui figurent dans ces développements ne sont pas adaptées au problème car, à l'ordre 1, v présente une singularité. Par conséquent, il est nécessaire de trouver, tout au moins à l'ordre 1, un nouveau

systeme d'inconnues qui reste fini, faute de quoi les développements à l'ordre 2 n'auraient pas de sens. On atteint ce but en tirant profit de la forme pseudo-conservative des équations, soit:

à l'ordre 0

$$(4-14-1) \quad \left[\xi^3 \rho_0 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right]_{\xi} + \frac{3(\gamma+1)}{2} \xi^2 \rho_0 = 0$$

$$(4-14-2) \quad \left[\xi^4 \rho_0 u_0 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \frac{\gamma-1}{2} \rho_0 \right]_{\xi} + \frac{(4\alpha+3)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \xi^3 \rho_0 u_0 - (\gamma-1) \xi^3 \rho_0 = 0$$

$$(4-14-3) \quad \left[\xi^3 \rho_0 v_0 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right]_{\xi} + \frac{3(\gamma+1)}{2} \xi^2 \rho_0 v_0 + \xi^2 \rho_0 \left(2u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{\alpha+2} \right) = 0$$

à l'ordre 1

$$(4-15-1) \quad \left[\xi^3 \left[\rho_1 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \rho_0 u_1 \right] \right]_{\xi} + 2\xi^2 \rho_0 v_1 + \frac{(2\alpha+9)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \xi^2 \rho_1 = 0$$

$$(4-15-2) \quad \left[\xi^4 \left[(\rho_1 u_0 + \rho_0 u_1) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \rho_0 u_0 u_1 + \frac{\gamma-1}{2} \rho_1 \right] \right]_{\xi} + 2\xi^3 u_0 \rho_0 v_1 + \frac{3(\gamma+1)}{2} \xi^3 (\rho_0 u_1 + u_0 \rho_1) - (\gamma-1) \xi^3 \rho_1 = 0$$

$$(4-15-3) \quad \left[\xi^4 \rho_0 v_1 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right]_{\xi} + \frac{3(\gamma+1)}{2} \xi^3 \rho_0 v_1 + \xi^3 \rho_0 u_0 v_1 - \frac{\gamma-1}{2} \xi^3 \rho_1 = 0$$

$$(4-15-4) \quad \left[\xi^3 \left[(s_0 \rho_1 + \rho_0 s_1) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \rho_0 s_0 u_1 \right] \right]_{\xi} + \frac{2(\alpha+9)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \xi^2 (\rho_0 s_1 + s_0 \rho_1) \\ + 2\xi^2 \left[\rho_1 \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right) + \rho_0 u_1 + \rho_0 s_0 v_1 \right] = 0$$

à l'ordre 2 :

- termes isotropes (en η^2)

$$(4-16-1) \quad \left[\xi^3 \left[\rho_{20} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \rho_0 u_{20} + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right] \right]_{\xi} + \xi^2 \left(\rho_0 v_2 + \frac{\rho_1 v_1}{2} \right) + \frac{(\gamma+1)(\alpha+12)}{2(\alpha+2)} \xi^2 \rho_{20} = 0$$

$$(4-16-2) \quad \left[\xi^4 \left[u_0 \rho_{20} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + 2\rho_0 u_{20} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4} \right) + \rho_1 u_1 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4} \right) + \frac{\rho_1 u_1^2}{2} + \frac{\gamma-1}{2} \rho_{20} \right] \right]_{\xi} \\ + \xi^3 \left(\rho_0 u_0 v_2 + \frac{\rho_0 u_1 v_1}{2} + \frac{u_0 \rho_1 v_1}{2} - \frac{\rho_0 v_1^2}{2} \right) + \frac{(\gamma+1)(2\alpha+9)}{2(\alpha+2)} \xi^3 \left(\rho_{20} u_0 + \rho_0 u_{20} + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right) \\ - (\gamma-1) \xi^3 \rho_{20} = 0$$

$$(4-16-3) \quad \left[\xi^3 \left[(\rho_0 s_{20} + s_0 \rho_{20} + \frac{\rho_1 s_1}{2}) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \rho_0 s_0 u_{20} + \frac{\rho_0 s_1 u_1}{2} + \frac{s_0 \rho_1 u_1}{2} \right] \right]_{\xi} \\ + \xi^2 \left(\rho_0 s_0 v_2 + \frac{\rho_0 v_1 s_1}{2} + \frac{s_0 \rho_1 v_1}{2} \right) + \frac{(\alpha+12)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \xi^2 \left(\rho_0 s_{20} + s_0 \rho_{20} + \frac{\rho_1 s_1}{2} \right) \\ + 2\xi^2 \left[\rho_0 u_{20} + \rho_{20} \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right) + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right] = 0$$

- termes anisotropes (en $\eta^2 \cos^2 \theta$)

$$(4-17-1) \quad \left[\xi^3 \left[\rho_{21} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \rho_0 u_{21} + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right] \right]_{\xi} + 3\xi^2 \left(\rho_0 v_2 + \frac{\rho_1 v_1}{2} \right) + \frac{(\gamma+1)(\alpha+12)}{2(\alpha+2)} \xi^2 \rho_{21} = 0$$

$$(4-17-2) \quad \left[\xi^4 \left[u_0 \rho_{21} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + 2\rho_0 u_{21} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4} \right) + \rho_1 u_1 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4} \right) + \frac{\rho_1 u_1^2}{2} + \frac{\gamma-1}{2} \rho_{21} \right] \right]_{\xi} \\ + \xi^3 \left(3\rho_0 u_0 v_2 + \frac{3\rho_0 u_1 v_1}{2} + \frac{3u_0 \rho_1 v_1}{2} + \frac{\rho_0 v_1^2}{2} \right) + \frac{(\gamma+1)(2\alpha+9)}{2(\alpha+2)} \xi^3 \left(\rho_{21} u_0 + \rho_0 u_{21} + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right) \\ - (\gamma-1) \xi^3 \rho_{21} = 0$$

$$(4-17-3) \quad \left[\xi^4 \left[\left(\rho_0 v_2 + \frac{\rho_1 v_1}{2} \right) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \frac{\rho_0 u_1 v_1}{2} \right] \right]_{\xi} + \xi^3 \left(\rho_0 u_0 v_2 + \frac{\rho_0 u_1 v_1}{2} + \frac{u_0 \rho_1 v_1}{2} + \frac{3\rho_0 v_1^2}{2} \right) \\ + \frac{(\gamma+1)(2\alpha+9)}{2(\alpha+2)} \xi^3 \left(\rho_0 v_2 + \frac{\rho_1 v_1}{2} \right) - (\gamma-1) \xi^3 \rho_{21} = 0$$

$$(4-17-4) \quad \left[\xi^3 \left[\left(\rho_0 s_{21} + s_0 \rho_{21} + \frac{\rho_1 s_1}{2} \right) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \rho_0 s_0 u_{21} + \frac{\rho_0 s_1 u_1}{2} + \frac{s_0 \rho_1 u_1}{2} \right] \right]_{\xi} \\ + 3\xi^2 \left(\rho_0 s_0 v_2 + \frac{\rho_0 v_1 s_1}{2} + \frac{s_0 \rho_1 v_1}{2} \right) + \frac{(\alpha+12)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \xi^2 \left(\rho_0 s_{21} + s_0 \rho_{21} + \frac{\rho_1 s_1}{2} \right) \\ + 2\xi^2 \left[\rho_0 u_{21} + \rho_{21} \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right) + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right] = 0$$

On remarque que les équations du système (4-15) d'ordre 1 peuvent être formulées avec les inconnues p_1 , f_1 , g_1 et h_1 , avec

$$(4-18) \quad f_1 = u_0 \rho_1; \quad g_1 = \rho_0 u_1; \quad h_1 = \rho_0 v_1$$

Les calculs montrent que les fonctions f_1 , g_1 , h_1 et p_1 restent finies. Le problème a donc bien un sens à l'ordre 2.

Par analogie et dans le but de travailler toujours avec des fonctions bornées on peut reformuler les systèmes d'ordre 2 avec les inconnues suivantes:

- termes isotropes

$$(4-19-1) \quad p_{20}; \quad f_{20} = u_0 p_{20}; \quad g_{20} = \rho_0 u_{20}$$

- termes anisotropes

$$(4-19-2) \quad p_{21}; \quad f_{21} = u_0 p_{21}; \quad g_{21} = \rho_0 u_{21}; \quad h_2 = \rho_0 v_2$$

4-2-3 CONDITIONS SUR LE CHOC

Pour résoudre le problème il faut adjoindre aux systèmes différentiels précédents des conditions à la frontière constituée par l'onde de choc. Ces conditions sont:

$$(4-20-1) \quad \frac{p}{\bar{p}} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right) = \frac{(\gamma+1)\rho}{(\gamma-1)\bar{\rho}} - 1$$

$$(4-20-2) \quad \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p}{\bar{p}} - 1 \right) = \left(\frac{\omega - U_n}{\bar{c}} \right)^2 - 1$$

$$(4-20-3) \quad U_r = \bar{q}_r$$

$$(4-20-4) \quad \frac{\rho}{\bar{\rho}} (\omega - q_n) = \omega - \bar{U}_n$$

On rappelle que dans le repère mobile on a:

$$(4-21) \quad \sqrt{U_n^2 + U_r^2} = (1 - \beta)U$$

et que q_n et q_z sont les composantes normale et tangentielle de la vitesse des particules fluides sur la face interne du choc. Avec les notations de la figure 59, on a :

$$(4-22) \quad q_n = u \sin \lambda - v \cos \lambda; \quad q_r = u \cos \lambda + v \sin \lambda; \quad \cotg \lambda = \frac{R_\theta}{R} = \frac{R_\theta^*}{R^*}$$

$$(4-23) \quad \frac{R_\theta^*}{R^*} = -\eta \xi_1 \sin \theta + \eta^2 \left(\frac{\xi_1}{2} - 2\xi_{21} \right) \sin 2\theta$$

avec $\cos \lambda = \cotg \lambda + O(\eta^3); \quad \sin \lambda = 1 - \eta^2 \frac{\xi_1}{4} (1 - \cos 2\theta)$

La vitesse du choc s'écrit : $\omega = R_c \sin \lambda$, ce qui donne la relation suivante :

$$(4-24-1) \quad \omega = \frac{\alpha + 2}{5} \xi_0 \left(\frac{Et^{\alpha+2}}{\rho} \right)^{1/5} \frac{\omega^*}{l} \text{ avec:}$$

$$(4-24-2) \quad \omega^* = 1 + \eta \frac{5}{\alpha + 2} \xi_1 \cos \theta + \eta^2 \left[\left(\frac{8 - \alpha}{\alpha + 2} \xi_{20} - \frac{\xi_1^2}{4} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{8 - \alpha}{\alpha + 2} \xi_{20} + \frac{\xi_1^2}{4} \right) \right]$$

On rend sans dimensions les relations (4-20) à l'aide de (4-4), puis on explicite les développements en utilisant les formules (4-8). Enfin on ramène la condition en $\xi = R^*$ à une condition en $\xi = 1$ à l'aide de développements de Taylor des inconnues aux ordres 0 et 1. En se limitant à l'approximation du second ordre et en utilisant les inconnues (4-18) et (4-19) on obtient :

à l'ordre 0

$$(4-25) \quad \rho_0 = 1; \quad p_0 = 1; \quad u_0 = 1$$

à l'ordre 1

$$(4-26-1/-2) \quad p_1 + \rho_0 \xi_1 = \frac{2(3-\alpha)}{\alpha+2} \xi_1 - \frac{10(1-\beta)}{\alpha+2}; \quad f_1 = -\rho_0 \xi_1$$

$$(4-26-3/-4) \quad g_1 + u_0 \xi_1 = \frac{3-\alpha}{\alpha+2} \xi_1 + \frac{5(\gamma-1)(1-\beta)}{2(\alpha+2)}; \quad h_1 = \xi_1 - \frac{5(\gamma+1)(1-\beta)}{2(\alpha+2)}$$

à l'ordre 2

- termes isotropes:

$$(4-27-1) \quad p_{20} + \rho_0 \xi_{20} + p_{1\xi} \frac{\xi_1}{2} + \rho_0 \xi \frac{\xi_1^2}{4} = \frac{4(3-\alpha)}{\alpha+2} \xi_{20} - \frac{-2\alpha^2 + 12\alpha + 7}{2(\alpha+2)^2} \xi_1^2 \\ + \frac{5(3\alpha+1)(1-\beta)}{(\alpha+2)^2} \xi_1 + \frac{25(1-\beta)^2}{2(\alpha+2)^2} - \frac{25(\gamma-1)}{2\gamma(\alpha+2)^2 M^2}$$

$$(4-27-2) \quad f_{20} + \rho_0 \xi_{20} + f_{1\xi} \frac{\xi_1}{2} + \rho_0 \xi u_0 \xi \frac{\xi_1^2}{2} + \rho_0 \xi \xi \frac{\xi_1^2}{4} = -\frac{50}{(\gamma-1)(\alpha+2)^2 M^2}$$

$$(4-27-3) \quad g_{20} + u_0 \xi_{20} + g_{1\xi} \frac{\xi_1}{2} - g_{1\rho_0 \xi} \frac{\xi_1}{2} + u_0 \xi \xi \frac{\xi_1^2}{4} = \frac{2(3-\alpha)}{\alpha+2} \xi_{20} - \frac{5}{2(\alpha+2)} \xi_1^2 \\ - \frac{5(\gamma-3)(1-\beta)}{4(\alpha+2)} \xi_1 - \frac{25}{(\alpha+2)^2 M^2}$$

- termes anisotropes

$$(4-28-1) \quad p_{21} + \rho_0 \xi \xi_{21} + p_1 \xi \frac{\xi_1}{2} + \rho_0 \xi \xi \frac{\xi_1^2}{4} = \frac{4(3-\alpha)}{\alpha+2} \xi_{21} + \frac{4\alpha^2 - 4\alpha + 1}{2(\alpha+2)^2} \xi_1^2 \\ - \frac{5(3-\alpha)(1-\beta)}{(\alpha+2)^2} \xi_1 + \frac{25(1-\beta)^2}{2(\alpha+2)^2}$$

$$(4-28-2) \quad f_{21} + \rho_0 \xi \xi_{21} + f_1 \xi \frac{\xi_1}{2} + \rho_0 \xi u_0 \xi \frac{\xi_1^2}{2} + \rho_0 \xi \xi \frac{\xi_1^2}{4} = 0$$

$$(4-28-3) \quad h_2 + h_1 \xi \frac{\xi_1}{2} - h_1 \rho_0 \xi \frac{\xi_1}{2} = 2\xi_{21} - \frac{2\alpha-1}{2(\alpha+2)} \xi_1^2 + \frac{5(\gamma-1)(1-\beta)}{4(\alpha+2)} \xi_1$$

$$(4-28-4) \quad g_{21} + u_0 \xi \xi_{21} + g_1 \xi \frac{\xi_1}{2} - g_1 \rho_0 \xi \frac{\xi_1}{2} + u_0 \xi \xi \frac{\xi_1^2}{4} = \frac{2(3-\alpha)}{\alpha+2} \xi_{21} + \frac{2\alpha-1}{2(\alpha+2)} \xi_1^2 \\ - \frac{5(\gamma+1)(1-\beta)}{4(\alpha+2)} \xi_1$$

Les conditions (4-25), (4-26), (4-27) et (4-28) sont vérifiées en $\xi = 1$. Elles fournissent les conditions initiales de l'intégration des différents systèmes différentiels composant le problème.

4-2-4 CALCUL DE L'ÉCOULEMENT DE BASE

Si l'on observe les équations (4-14) associées aux conditions (4-25), on s'aperçoit que le problème est indépendant de la constante ξ_0 . On peut donc résoudre le problème différentiel sans connaître la progression du choc. Autrement dit, on peut calculer les répartitions de masse volumique, de vitesse et de pression à l'intérieur du choc avant de disposer de la position de celui-ci

à chaque instant.

Si l'on appelle ρ_c , u_c et p_c les valeurs de ρ , u et p sur le choc, ces répartitions seront données, à l'ordre 0, par les formules suivantes :

$$(4-29) \quad \frac{\rho}{\rho_c} = \rho_0; \quad \frac{u}{u_c} = \xi u_0; \quad \frac{p}{p_c} = \xi^2 p_0$$

Sous forme conservative le système différentiel devient $X_{o_i} = F_o$, où les vecteurs X_o et F_o sont donnés par:

$$(4-30) \quad X_o = \begin{cases} \xi^3(u_0 - \frac{\gamma+1}{2}), \\ \xi^4[(u_0 - \frac{\gamma+1}{2})\rho_0 u_0 + \frac{\gamma-1}{2}p_0], \\ \xi^2 \rho_0 s_0(u_0 - \frac{\gamma+1}{2}), \end{cases} \quad F_o = \begin{cases} -\frac{3(\gamma+1)}{2}\rho_0 \xi^2, \\ -\frac{(4\alpha+3)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)}\xi^3 \rho_0 u_0 + (\gamma-1)p_0 \xi^3, \\ -\frac{3(\gamma+1)}{2}\xi^2 s_0 \rho_0 - \xi^2(2u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{\alpha+2})\rho_0, \end{cases}$$

Malheureusement, les relations entre les composantes de X_o et les inconnues ρ_o , p_o , u_o ne sont pas linéaires. L'évaluation de F_o , nécessaire à chaque pas de calcul, revient donc à exprimer les relations entre ces trois inconnues. On est ainsi ramené au problème traité dans la référence <3> où l'on introduit la variable auxiliaire $z_0 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$.

On montre (ref<3>) que le problème revient à l'intégration successive de deux équations différentielles indépendantes, et que la troisième variable ρ_o est obtenue comme fonction de u_o et z_o grâce à une intégrale première qui exprime l'adiabaticité de l'écoulement. On a:

$$(4-31) \quad \frac{dz_0}{du_0} = G_1(u_0, z_0); \quad \frac{d \log \xi}{du_0} = G_2(u_0, z_0); \quad \frac{d \log \rho_0}{d \log \xi} = G_3(u_0, z_0)$$

Les fonctions G_1 à G_3 sont données en annexe 1.

La troisième équation (4-31) peut être remplacée par la formule

suivante:

$$(4-32) \quad \rho_0 = \left[\left(\frac{z_0}{\gamma} \right)^{3(\alpha+2)} \left(\frac{2}{1-\gamma} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right)^{2(3-\alpha)} \xi^{30} \right]^{1/[(3\gamma-1)(\alpha+2)-10]}$$

On obtient ensuite p_0 par $p_0 = \frac{z_0 \rho_0}{\gamma}$.

Le problème essentiel est donc l'intégration de dz_0/du_0 . Quant au calcul de ξ , il est le résultat d'une simple quadrature.

Dans le cas $\alpha = 0$, il existe une solution analytique qui est donnée en annexe 1. Celle-ci provient de l'existence d'une intégrale première de l'énergie (ref<3>). On trouvera figure 60 le tracé des répartitions (4-29) dans ce cas particulier pour trois valeurs de γ .

Dans le cas général, l'intégrale première de l'énergie n'existe plus. Il faut donc intégrer les deux équations différentielles ordinaires. Les calculs montrent que la solution n'est pas continue jusqu'en $\xi = 0$.

Pour $\alpha \neq 0$, en effet, ρ_0 s'annule pour une valeur ξ'_0 non nulle de ξ . A l'intérieur de la sphère Σ' définie par $\xi = \xi'_0$ ($\xi'_0 < 1$) on ne peut donc plus considérer le milieu comme continu. Physiquement cette situation peut se traduire par la présence dans la sphère $\xi < \xi'_0$ d'un gaz raréfié à très haute température. Un tel phénomène est observable lors de décharges électriques très puissantes (ref<46>). La zone de gaz raréfié est alors le siège des phénomènes chimiques et électromagnétiques. Il faut remarquer que l'énergie ξ émise en \tilde{O} ne peut caractériser l'écoulement continu que si elle est réellement transmise au milieu extérieur pour y être dissipée sous forme mécanique. En réalité, une part de l'énergie émise est dissipée sous d'autres formes mais, si l'on définit ξ comme la part d'énergie transmise au milieu extérieur et dissipée sous la forme d'une onde de souffle, le modèle proposé s'applique parfaitement. On peut ainsi découpler les phénomènes intérieurs à la sphère Σ' et l'écoulement lui-même. De ce fait, l'écoulement devient identique à celui que

produit un piston coïncidant avec la surface Σ' . L'énergie ξ correspond alors à celle qui est nécessaire à la dilatation du piston. Nous avons établi par ce biais l'équivalence des problèmes de l'explosion et du piston. C'est à ce titre que le phénomène du tir d'armes peut être modélisé par une explosion, le piston représentant le front des gaz de poudre en expansion. L'avantage de la théorie de l'explosion sur celle du piston, est qu'elle ne présuppose pas la connaissance de la loi d'expansion des gaz car il suffit de connaître le débit d'énergie à la bouche de l'arme. La position du front des gaz devient un résultat du calcul.

Le calcul a été effectué par une méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4.

La figure 61 montre la comparaison de l'intégration numérique de $\frac{dz_0}{du_0} = G_1(u_0, z_0)$ avec la solution analytique dans le cas $\alpha = 0$ et

$$\gamma = 1,4.$$

Les figures 62 à 66 montrent les répartitions calculées numériquement pour différentes valeurs de α et trois valeurs de γ .

Ces résultats sont à rapprocher de ceux obtenus par Freeman (ref<46>) dans le cas plan. Le cas $\alpha = 3$ est remarquable car ρ ne s'annule pas en $\xi = \xi'_0$ et la sphère Σ' se comporte donc comme un piston sphérique à vitesse de dilatation constante, ce qui n'a rien d'étonnant puisque, dans ce cas, $\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/5}$ a les dimensions d'une vitesse. On peut également remarquer le comportement des solutions en $\xi = \xi'_0$. On constate en particulier que la dérivée peut être soit nulle soit infinie. L'explication de ce phénomène est donnée en annexe 1 par une étude succincte du comportement asymptotique des solutions en $\xi = \xi'_0$.

La figure 67 montre l'évolution de ξ'_0 en fonction de α . On constate que ξ'_0 varie très peu pour α compris entre 1 et 3 mais très rapidement entre 0 et 0,1. On observe sur cette figure l'influence importante de la compressibilité du gaz.

En effet, plus γ est faible plus le gaz se comprime facilement et plus la matière se trouve condensée dans un volume étroit entre

le choc et la sphère Σ' .

4-2-5 EQUATION GLOBALE DE L'ENERGIE

Bien que le système (4-14) puisse être résolu sans connaître la constante ξ_0 , il faut néanmoins une relation supplémentaire pour en déterminer la valeur. Aux ordres supérieurs le problème est plus compliqué car les constantes ξ_1 , ξ_2 , et ξ_4 interviennent dans les conditions sur le choc; la résolution du système est donc soumise à leur détermination.

Les relations manquantes sont obtenues grâce au principe de conservation de l'énergie appliqué au domaine fluide qui occupe à l'instant t le volume $\bar{V}+V$ (figure 68). Ce volume s'inscrit dans le cône de sommet O et d'angle θ . Il est limité, à l'intérieur du choc, par la surface de séparation Σ' entre le milieu continu et le milieu raréfié créé par l'explosion. A l'extérieur du choc, le domaine a pour frontière une surface fixe constituée par une partie conique \bar{S}_1 et une partie sphérique S_2 . L'onde de choc divise ce domaine en deux parties: le volume V intérieur au choc et le volume \bar{V} où le fluide n'est pas encore perturbé par l'explosion.

En appelant e l'énergie interne spécifique du gaz et \vec{q} sa vitesse, l'expression de la dérivée matérielle de l'énergie totale est:

$$(4-33) \quad \frac{d}{dt} \int_V \left(e + \frac{q^2}{2} \right) \rho dV + \frac{d}{dt} \int_{\bar{V}} \left(\bar{e} + \frac{\bar{q}^2}{2} \right) \bar{\rho} dV = \int_V \left(e + \frac{q^2}{2} \right)_t \rho dV + \int_{\bar{V}} \left(\bar{e} + \frac{\bar{q}^2}{2} \right)_t \bar{\rho} dV \\ + \int_{\Sigma+S_1+\Sigma'} \left(e + \frac{q^2}{2} \right) \rho \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2+\bar{S}_1+\Sigma} \left(\bar{e} + \frac{\bar{q}^2}{2} \right) \bar{\rho} \vec{q} \cdot \vec{n} dS$$

où les grandeurs surlignées \bar{e} et \bar{q} correspondent au milieu non perturbé.

La normale extérieure sur les frontières de \bar{V} est notée \bar{n} . Sur Σ elle est opposée à \vec{n} , normale extérieure sur les frontières du volume V .

Comme le milieu continu est un gaz parfait on peut expliciter e et \bar{e} en fonction de la pression et de la masse volumique dans chaque volume par :

$$(4-34) \quad e = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}; \quad \bar{e} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$$

La loi de la conservation de l'énergie dans le volume fluide considéré permet d'exprimer que le premier membre de (4-33) est égal au travail des forces extérieures sur chacun des volumes V et \bar{V} . Pour \bar{V} , celles-ci sont les forces de pression sur $S_2 + \bar{S}_1 + \bar{\Sigma}$. Pour V , il s'agit des forces de pression sur $\Sigma + S_1$, et du travail $T_{\Sigma'}$ des forces provenant du milieu raréfié à travers Σ' . On peut donc écrire:

$$(4-35) \quad \frac{d}{dt} \int_V \left(e + \frac{q^2}{2} \right) \rho dV = - \int_{S_2 + \bar{S}_1 + \Sigma} p \vec{q} \cdot \vec{n} dS$$

$$(4-36) \quad \frac{d}{dt} \int_V \left(e + \frac{q^2}{2} \right) \rho dV = - \int_{\Sigma + S_1} p \vec{q} \cdot \vec{n} dS + T_{\Sigma'}$$

Le calcul précédent est basé sur l'hypothèse que l'énergie émise en \tilde{O} est transmise au milieu continu par le mouvement de Σ' , qui agit alors comme un piston. Cette propriété est justifiée par le fait que les particules fluides ne traversent pas Σ' , puisque l'intérieur de Σ' est vide. D'autres hypothèses pourraient être retenues, qui introduiraient des flux d'énergie à travers Σ' , mais la similitude interne de l'écoulement disparaîtrait dès l'ordre 0; l'étude de tels écoulements sort du cadre de la recherche entreprise ici. La surface Σ' étant infiniment mince,

le principe de l'action et de la réaction nous permet d'écrire:

$$(4-37) \quad T_{\Sigma'} = - \int_{\Sigma'} p \vec{q} \vec{n} dS$$

Cette formule ramène l'expression du travail provenant du milieu raréfié à celle du travail des forces de pression exercées par le milieu continu sur le piston que constitue Σ' .

Afin de simplifier encore l'expression de (4-33), on introduit la conservation de l'énergie à travers le choc:

$$(4-38) \quad \int_{\Sigma_{ext}} \left(e + \frac{q^2}{2} \right) \rho \vec{n} (\vec{q} - \vec{w}) dS + \int_{\Sigma_{ext}} \bar{p} \vec{q} \vec{n} dS =$$

$$\int_{\Sigma_{int}} \left(e + \frac{q^2}{2} \right) \rho \vec{n} (\vec{q} - \vec{w}) dS + \int_{\Sigma_{int}} p \vec{q} \vec{n} dS$$

Σ_{ext} et Σ_{int} étant les faces externes et interne de l'onde Σ .
Les formules (4-34) à (4-38) permettent d'écrire (4-33) sous la forme suivante qui exprime le principe de conservation de l'énergie:

$$(4-39) \quad \int \left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{q^2}{2} \right) dV + \int_{\Sigma} \left[\left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{q^2}{2} \right) - \left(\frac{\bar{p}}{\gamma-1} + \bar{\rho} \frac{\bar{q}^2}{2} \right) \right] \vec{w} \vec{n} dS$$

$$+ \int_{S_1} \left(\frac{\gamma p}{\gamma-1} + \rho \frac{q^2}{2} \right) \vec{q} \vec{n} dS + \int_{S_1+S_2} \left(\frac{\gamma \bar{p}}{\gamma-1} + \bar{\rho} \frac{\bar{q}^2}{2} \right) \vec{q} \vec{n} dS$$

$$+ \int_{\Sigma'} \left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{q^2}{2} \right) \vec{q} \vec{n} dS = - \int_{\Sigma'} p \vec{q} \vec{n} dS$$

Pour achever d'expliciter cette formule il faut exprimer la quantité $\vec{q} \vec{n}$ sur chacune des surfaces considérées. Sur S_1 , $\vec{q} \vec{n}$ est égale par définition à v . Sur S_2 , \bar{S}_1 et $\bar{\Sigma}$, \vec{q} est la vitesse de l'écoulement extérieur par rapport à O , soit: $(1-\beta) \bar{u}$. Il est facile d'en déduire que les intégrales sur \bar{S}_1 et S_2 sont respectivement d'ordre 3 et 4. Nous les négligerons donc dès à présent puisque nous nous limitons à des développements à l'ordre 2.

Il reste à exprimer $\vec{q} \vec{n}$ sur Σ' . Dans ce but, comme pour l'onde de choc, on écrit l'équation de cette surface:

$$(4-40) \quad R' = \left(\frac{Et^{\alpha+2}}{\rho} \right)^{1/5} \xi_0 R'^*; \quad R'^* = \xi'_0 + \eta \xi'_1 \cos \theta + \eta^2 (\xi'_{20} + \xi'_{21} \cos 2\theta)$$

Avec les notations de la figure 69 on a:

$$(4-41) \quad \vec{q}' \vec{n} = u \sin \lambda' - v \cos \lambda'$$

et, compte tenu de (4-40),

$$(4-42-1) \quad \cotg \lambda' = \cos \lambda' = -\eta \frac{\xi'_1}{\xi'_0} \sin \theta + \frac{\eta^2}{\xi'_0} \left(\frac{\xi'^2_1}{2\xi'_0} - 2\xi'_{21} \right) \sin 2\theta$$

$$(4-42-2) \quad \sin \lambda' = 1 - \eta^2 \frac{\xi'^2_1}{4\xi'^2_0} (1 - \cos 2\theta)$$

Cependant, comme la fonction v ne reste pas finie sur $\bar{\Sigma}'$, il n'est pas légitime de la développer autour de ξ'_0 et de ce fait, le développement de $\vec{q} \vec{n}$ en ξ'_0 ne peut être obtenu d'après la formule (4-41). En fait, le développement de $\vec{q} \vec{n}$ s'identifie à celui de $\vec{\omega}'$, vitesse de $\bar{\Sigma}'$ qui est une surface matérielle. Nous aurons donc à tenir compte par la suite des formules suivantes:

$$(4-43) \quad \omega' = \frac{\alpha+2}{2} \left(\frac{Et^{\alpha+2}}{\rho} \right)^{1/5} \frac{\xi_0}{t} \omega'^*$$

$$(4-44) \quad \omega'^* = \xi'_0 + \frac{5}{\alpha+2} \eta \xi'_1 \cos \theta + \left[\left(\frac{8-\alpha}{\alpha+2} \xi'_{21} - \frac{\xi_1'^2}{4\xi'_0} \right) + \left(\frac{8-\alpha}{\alpha+2} \xi'_{21} + \frac{\xi_1'^2}{4\xi'_0} \right) \cos 2\theta \right]$$

Grâce aux remarques précédentes on peut écrire la forme définitive, valable à l'approximation du deuxième ordre, de l'équation globale de l'énergie:

$$(4-45) \quad \int_V \left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2+v^2}{2} \right)_t dV + \int_\Sigma \left[\left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2+v^2}{2} \right) - \left(\bar{p} + \bar{\rho} \frac{(1-\beta)^2 \bar{U}^2}{2} \right) \right] \omega dS \\ + \int_{S_1} \left(\frac{\gamma p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2+v^2}{2} \right) v dS - \int_{\Sigma'} \left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2+v^2}{2} \right) \omega' dS = \int_{\Sigma'} p \omega' dS + O(\eta^3)$$

Pour trouver les relations cherchées, il faut adimensionner (4-45) à l'aide de (4-3), (4-4), (4-5), (4-24-1) et (4-43), développer par rapport à η à l'aide de (4-8), (4-24-2) et (4-44) et enfin, identifier suivant les puissances de η . En désignant par f et f' les valeurs d'une fonction f respectivement en $\xi=1$ et en $\xi=\xi'_0$, on obtient:

à l'ordre 0:

$$(4-46) \quad \alpha \int_{\xi'_0}^1 (p_0 + \rho_0 u_0^2) \xi^4 d\xi = (\gamma-1) \frac{\alpha+2}{5} \xi_0'^5 p'_0$$

à l'ordre 1:

$$(4-47) \quad \int_{\xi'_0}^1 \left[(4\alpha+3)(p_1 + \rho_1 u_0^2 + 2\rho_0 u_0 u_1) + \frac{4(\alpha+2)}{\gamma+1} v_1 (\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2) \right] \xi^4 d\xi + (4\alpha+3)(p'_0 + \rho'_0 u_0'^2) \xi_1 \\ - (4\alpha+3)(p'_0 + \rho'_0 u_0'^2) \xi_0'^4 \xi'_1 = (\gamma-1)(\alpha+2) \xi_0'^5 \left[p'_1 + p'_0 \xi'_1 + \frac{4\alpha+13}{\alpha+2} p'_0 \frac{\xi'_1}{\xi'_0} \right]$$

On constate que les expressions (4-41), (4-44) et (4-47) sont considérablement simplifiées si $\xi'_4 = 0$. Or, on peut choisir le repère mobile de façon à ce que $\xi'_4 = 0$. Cela signifie physiquement qu'on se place dans le repère où la frontière du vide est vue à l'approximation d'ordre 1 comme une sphère. Dans cette hypothèse les équations globales de l'énergie à l'ordre 2 s'écrivent:

- termes isotropes

$$(4-48) \quad \int_{\xi'_0}^1 (3p_{20} - p_{21} + 3\rho_{20}u_0^2 - \rho_{21}u_0^2 + 6\rho_0u_0u_{20} - 2\rho_0u_0u_{21} + \rho_0u_1^2 + 2\rho_1u_1u_0 + 2\rho_0v_1^2)\xi^4 d\xi \\ + (p_0^1 + \rho_0^1u_0^2)(3\xi_{20} - \xi_{21}) - (p_0' + \rho_0'u_0'^2)(3\xi'_{20} - \xi'_{21})\xi_0'^4 + [p_0 + \rho_0u_0^2]_\xi \frac{\xi_1^2}{2} \\ + \frac{5}{3}(p_0^1 + \rho_0^1u_0^2)\xi_1^2 + (p_1^1 + \rho_1^1u_0^2 + 2\rho_0^1u_0^1u_1)\xi_1 = \frac{25(\gamma+1)(2+\gamma(\gamma-1)(1-\beta)^2M^2)}{4(\alpha+2)^2\gamma M^2} \\ + (\gamma-1)\xi_0'^4 \left[\left(p'_{20} - \frac{p'_{21}}{3} \right) \xi_0' + \frac{16+3\alpha}{\alpha+2} \left(\xi'_{20} - \frac{\xi'_{21}}{3} \right) p_0' + p_0'\xi_0' \left(\xi'_{20} - \frac{\xi'_{21}}{3} \right) \right]$$

-termes anisotropes

$$(4-49) \quad \int_{\xi'_0}^1 \left[(p_{21} + \rho_{21}u_0^2 + 2\rho_0u_0u_{21} + \rho_0\frac{u_1^2}{2} + \rho_1u_1u_0 - \rho_0\frac{v_1^2}{2}) + \frac{2}{\gamma+1}(\gamma p_0 + \rho_0u_0^2)v_2 \right] \xi^4 d\xi \\ + \int_{\xi'_0}^1 \left[\frac{v_1}{\gamma+1}(\gamma p_1 + \rho_1u_0^2 + 2\rho_0u_0u_1) \right] \xi^4 d\xi + (p_0^1 + \rho_0^1u_0^2)\xi_{21} - (p_0' + \rho_0'u_0'^2)\xi_{21}'\xi_0'^4 \\ + \frac{13}{12}(p_0^1 + \rho_0^1u_0^2)\xi_1^2 + [p_0 + \rho_0u_0^2]_\xi \frac{\xi_1^2}{4} + (p_1^1 + \rho_1^1u_0^2 + 2\rho_0^1u_0^1u_1)\frac{\xi_1}{2} \\ + \frac{2v_1^1(\gamma p_0^1 + \rho_0^1u_0^2)\xi_1}{2(\gamma+1)} = \frac{\gamma-1}{3} \left(p'_{21}\xi_0'^3 + \frac{16+3\alpha}{\alpha+2} p_0'\xi_0'^4\xi_{21}' + p_0'\xi_0'^5\xi_{21}' \right)$$

On peut constater que l'expression (4-46) ne permet pas le calcul de ξ_0 , comme on l'espérait et que les formules (4-47) à (4-49) introduisent les constantes supplémentaires β , ξ'_4 , ξ'_{20} , ξ'_{21} . Le calcul de ces dernières nécessite quatre relations supplémentaires dont une seule nous est connue:

$$(4-50) \quad \xi'_1 = 0$$

Cette expression fixe le choix du repère mobile.

Pour éliminer la difficulté et faire apparaître les relations manquantes il faut relier le travail des forces de pression sur Σ' à l'énergie émise en \tilde{O} .

4-2-6 CONDITIONS A LA FRONTIERE DU VIDE

Exprimons dans le repère fixe centré en \tilde{O} , la conservation de l'énergie pour le système matériel qui coïncide avec le volume V , défini sur la figure 68. La variation de l'énergie dans ce domaine est nulle par hypothèse et il n'y a pas de consommation d'énergie à l'intérieur de V_0 . En tenant compte du déplacement du repère mobile, dans lequel sont formulés les développements des fonctions inconnues, on peut écrire:

$$(4-51) \quad \alpha \frac{E t^{\alpha-1}}{2} (1 - \cos \tilde{\theta}) - \int_{\Sigma'} p' (\vec{\omega}' + \beta \vec{U}') \vec{n}' dS = 0$$

Compte tenu de l'expression suivante, tirée de (4-42):

$$(4-52) \quad \cos \tilde{\theta} = \cos \theta + \eta \frac{\beta}{\xi'_1} \sin^2 \theta - \eta^2 \frac{\beta}{\xi'_0} \left(\frac{3\beta}{2\xi'_0} + \frac{\xi'_1}{\xi'_0} \right) \sin^2 \theta \cos \theta$$

on voit que $\tilde{\theta}$ dépend du temps et donc que S_0 est mobile; mais le flux d'énergie à travers S_0 est compensé par la diminution de $\tilde{\theta}$ résultant du déplacement de O . Le développement de (4-51) jusqu'à l'ordre 2 donne:

à l'ordre 0:

$$(4-53) \quad p'_0 = \frac{125(\gamma + 1)\alpha}{8\pi(\alpha + 2)^3 \xi_0'^3 \xi_0^5}$$

à l'ordre 1, compte tenu de (4-53) et du fait que $P_{o\xi} = 0$ en ξ'_0 (voir annexe 1):

$$(4-54) \quad p'_1 = -2p'_0 \frac{(2\alpha + 9)(\beta + \xi'_1)}{2(\alpha + 2)\xi'_0} \quad \text{en } \xi = \xi'_0$$

On remarque que le second membre comprend un terme de déplacement en β et un terme en ξ'_1 correspondant à la déformation de Σ' par rapport à la sphère $\xi = \xi'_0$ vue dans le repère mobile.

Dans le repère, où $\xi'_1 = 0$, on obtient à l'ordre 2:

- termes isotropes:

$$(4-55-1) \quad \xi'_{20} = \left(\frac{3\beta^2}{4\xi_0'^2} + \frac{5(2\alpha + 9)\beta^2}{2(\alpha + 2)^2 \xi_0'^2} - \frac{p'_{20}}{p'_0} \right) \frac{(\alpha + 2)\xi'_0}{12 + \alpha} \quad \text{en } \xi = \xi'_0$$

- termes anisotropes:

$$(4-55-2) \quad \xi'_{21} = \left(\frac{9\beta^2}{4\xi_0'^2} + \frac{5(2\alpha + 9)\beta^2}{2(\alpha + 2)^2 \xi_0'^2} - \frac{p'_{21}}{p'_0} \right) \frac{(\alpha + 2)\xi'_0}{12 + \alpha} \quad \text{en } \xi = \xi'_0$$

L'expression (4-53) relie directement ξ_0 à p_0 en $\xi = \xi'_0$. L'équation globale n'est donc pas nécessaire pour fermer le problème de l'explosion non instantanée. Remarquons cependant que, d'après (4-53), (4-46) peut s'écrire :

$$(4-56) \quad \int_{\xi'_0}^1 (p_0 + \rho_0 u_0^2) \xi^4 d\xi = \frac{25(\gamma - 1)^2}{8\pi(\alpha + 2)^2 \xi_0'^5}$$

Cette expression est valable également pour $d = 0$, cas de l'explosion instantanée, puisqu'elle est la forme particulière de (3-74) quand $\xi(\theta) = 1/4\pi$. Dans ce cas, elle remplace (4-46) qui n'a plus de sens, de même que tous les développements de ce paragraphe, puisque la surface Σ' n'existe pas.

Grâce à la formule (4-54) on peut écrire (4-47) sous la forme:

$$(4-57) \quad E_1 = \int_{\xi'_0}^1 \left[(4\alpha + 3)(p_1 + \rho_1 u_0^2 + 2\rho_0 u_0 u_1) + \frac{4(\alpha + 2)}{\gamma + 1} v_1 (\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2) \right] \xi^4 d\xi \\ + 2(4\alpha + 3)\xi_1 - (4\alpha + 3)(p'_0 + \rho'_0 u_0'^2) \xi_0'^4 \xi_1' + \frac{125(\gamma^2 - 1)\alpha(2\alpha + 9)\beta}{8\pi(\alpha + 2)^3 \xi_0' \xi_0'^3} = 0$$

Les formules (4-55) montrent que :

$$(4-58-1) \quad E_{21} = \int_{\xi'_0}^1 \left[(p_{21} + \rho_{21} u_0^2 + 2\rho_0 u_0 u_{21} + \rho_0 \frac{u_1^2}{2} + \rho_1 u_1 u_0 - \rho_0 \frac{v_1^2}{2}) + \frac{2}{\gamma + 1} (\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2) v_2 \right] \xi^4 d\xi \\ + \int_{\xi'_0}^1 \left[\frac{v_1}{\gamma + 1} (\gamma p_1 + \rho_1 u_0^2 + 2\rho_0 u_0 u_1) \right] \xi^4 d\xi + 2\xi_{21} - (p'_0 + \rho'_0 u_0'^2) \xi_{21}' \xi_0'^4 + \frac{13}{6} \xi_1^2 \\ + [p_0 + \rho_0 u_0^2] \xi \frac{\xi_1^2}{4} + (p_1^1 + \rho_1^1 + 2u_1^1 + 2v_1^1) \frac{\xi_1}{2} = \frac{(\gamma - 1)}{3} \beta^2 p'_0 \xi_0'^3 \left(\frac{9}{4} + \frac{5(2\alpha + 9)}{2(\alpha + 2)^2} \right)$$

$$(4-58-2) \quad E_{20} = \int_{\xi'_0}^1 (3p_{20} - p_{21} + 3\rho_{20} u_0^2 - \rho_{21} u_0^2 + 6\rho_0 u_0 u_{20} - 2\rho_0 u_0 u_{21} + \rho_0 u_1^2 + 2\rho_1 u_1 u_0 + 2\rho_0 v_1^2) \xi^4 d\xi \\ + 2(3\xi_{20} - \xi_{21}) - (p'_0 + \rho'_0 u_0'^2)(3\xi_{20}' - \xi_{21}') \xi_0'^4 + [p_0 + \rho_0 u_0^2] \xi \frac{\xi_1^2}{2} + \frac{10}{3} \xi_1^2 \\ + (p_1^1 + \rho_1^1 + 2u_1^1) \xi_1 - \frac{5(\gamma - 1)(2\alpha + 9)}{3(\alpha + 2)^2} \beta^2 p'_0 \xi_0'^3 = \frac{25(\gamma + 1) \left(2 + (\gamma(\gamma - 1)(1 - \beta)^2 M^2) \right)}{4(\alpha + 2)^2 \gamma M^2}$$

4-2-7 SEPARATION DES EFFETS ISOTROPES DE LA VITESSE ET DE LA PRESSION

D'après les relations (4-5) et (4-6), les termes en η^2 / \bar{M}^2 sont, en fait, caractéristiques des effets de la pression \bar{p} . Si l'on considère l'équation (4-48) et les conditions (4-27), on constate que leur second membre contient des termes en $1 / \bar{M}^2$. En ce qui concerne (4-48) cela signifie qu'une part de l'énergie globale qui correspond à l'effet isotrope est en $1 / \bar{M}^2$: elle reste finie, si \bar{M} tend vers zéro, d'après (4-5). Il en va nécessairement de même avec le premier membre de (4-48) pour que

l'équation ait un sens. Ce premier membre contient donc des termes en $1/\bar{M}^2$ qu'il faut expliciter. Comme \bar{M} n'intervient qu'à l'ordre 2, ce sont les inconnues de cet ordre qu'il faut décomposer en un terme en η^2 et un autre en η^2/\bar{M}^2 . Cette décomposition ne concerne pas les termes anisotropes : en effet, ni l'équation (4-49) ni les conditions sur le choc (4-28) ne contiennent \bar{M} .

On pose par conséquent :

$$(4-59-1) \quad \xi_{20} = \frac{\xi_{22}}{\bar{M}^2} + \xi_{23}; \quad \xi'_{20} = \frac{\xi'_{22}}{\bar{M}^2} + \xi_{23}$$

$$(4-59-2) \quad \rho_{20} = \frac{\rho_{22}}{\bar{M}^2} + \rho_{23}; \quad u_{20} = \frac{u_{22}}{\bar{M}^2} + u_{23}; \quad p_{20} = \frac{p_{22}}{\bar{M}^2} + p_{23}$$

Cela étant, il faut reformuler les équations mais, comme elles doivent être vraies quel que soit \bar{M} , on peut identifier d'une part les termes en η^2 et d'autre part les termes en η^2/\bar{M}^2 . Le système (4-16) se transforme ainsi en deux systèmes disjoints. Le premier système correspondant aux termes en $1/\bar{M}^2$ est significatif des effets de la pression \bar{p} seule. Si $\bar{U}=0$ il correspond au premier terme du développement en \bar{J} de la solution sphérique puisque, selon (4-6), $\frac{\eta^2}{\gamma \bar{M}^2} = \bar{J}$.

Le second système est indépendant de \bar{M} . Il en est de même pour les conditions initiales et l'équation globale qui lui sont associées. L'effet qu'il représente est donc le même, pour \bar{U} et \bar{q} donnés, quelle que soit la pression \bar{p} . On a en fin de compte pour l'approximation d'ordre deux :

- Effet isotrope de la pression :

$$(4-60-1) \quad \left[\xi^s \left[\rho_{22} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \rho_0 u_{22} \right] \right]_{\xi} \frac{(\gamma+1)(\alpha+12)}{2(\alpha+2)} \xi^2 \rho_{22} = 0$$

$$(4-60-2) \quad \left[\xi^4 \left[u_0 \rho_{22} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + 2\rho_0 u_{22} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4} \right) + \frac{\gamma-1}{2} p_{22} \right] \right]_{\xi} \\ + \frac{(\gamma+1)(2\alpha+9)}{2(\alpha+2)} \xi^3 (\rho_{22} u_0 + \rho_0 u_{22}) - (\gamma-1) \xi^3 p_{22} = 0$$

$$(4-60-3) \quad \left[\xi^3 \left[(\rho_0 s_{22} + s_0 \rho_{22}) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \rho_0 s_0 u_{22} \right] \right]_{\xi} + \frac{(\alpha+12)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \xi^2 (\rho_0 s_{22} + s_0 \rho_{22}) \\ + 2\xi^2 \left[\rho_0 u_{22} + \rho_{22} \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right) \right] = 0$$

-Effet isotrope de la vitesse:

$$(4-61-1) \quad \left[\xi^3 \left[\rho_{23} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \rho_0 u_{23} + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right] \right]_{\xi} + \xi^2 (\rho_0 v_2 + \frac{\rho_1 v_1}{2}) + \frac{(\gamma+1)(\alpha+12)}{2(\alpha+2)} \xi^2 \rho_{23} = 0$$

$$(4-61-2) \quad \left[\xi^4 \left[u_0 \rho_{23} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + 2\rho_0 u_{23} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4} \right) + \rho_1 u_1 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4} \right) + \frac{\rho_1 u_1^2}{2} + \frac{\gamma-1}{2} p_{23} \right] \right]_{\xi} \\ + \xi^3 \left(\rho_0 u_0 v_2 + \frac{\rho_0 u_1 v_1}{2} + \frac{u_0 \rho_1 v_1}{2} - \frac{\rho_0 v_1^2}{2} \right) + \frac{(\gamma+1)(2\alpha+9)}{2(\alpha+2)} \xi^3 (\rho_{23} u_0 + \rho_0 u_{23} + \frac{\rho_1 u_1}{2}) \\ - (\gamma-1) \xi^3 p_{23} = 0$$

$$(4-61-3) \quad \left[\xi^3 \left[(\rho_0 s_{23} + s_0 \rho_{23} + \frac{\rho_1 s_1}{2}) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \rho_0 s_0 u_{23} + \frac{\rho_0 s_1 u_1}{2} + \frac{s_0 \rho_1 u_1}{2} \right] \right]_{\xi} \\ + \xi^2 \left(\rho_0 s_0 v_2 + \frac{\rho_0 v_1 s_1}{2} + \frac{s_0 \rho_1 v_1}{2} \right) + \frac{(\alpha+12)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \xi^2 (\rho_0 s_{23} + s_0 \rho_{23} + \frac{\rho_1 s_1}{2}) \\ + 2\xi^2 \left[\rho_0 u_{23} + \rho_{23} \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right) + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right] = 0$$

A ces systèmes correspondent les conditions sur le choc tirées de (4-27). Remarquons que les variables f_{20} et g_{20} se décomposent en $f_{22}/\bar{M}^2 + f_{23}$ et $g_{22}/\bar{M}^2 + g_{23}$ du fait de (4-59), on a donc en $\xi = 1$:

- Effet isotrope de la pression:

$$(4-62-1) \quad p_{22} + p_{0\xi} \xi_{22} = \frac{4(3-\alpha)}{\alpha+2} \xi_{22} - \frac{25(\gamma-1)}{2\gamma(\alpha+2)^2}$$

$$(4-62-2) \quad f_{22} + \rho_{0\xi} \xi_{22} = -\frac{50}{(\gamma-1)(\alpha+2)^2}$$

$$(4-62-3) \quad g_{22} + u_{0\xi} \xi_{22} = \frac{2(3-\alpha)}{\alpha+2} \xi_{22} - \frac{25}{(\alpha+2)^2}$$

- Effet isotrope de la vitesse

$$(4-63-1) \quad p_{23} + p_{0\xi} \xi_{23} + p_{1\xi} \frac{\xi_1}{2} + p_{0\xi\xi} \frac{\xi_1^2}{4} = \frac{4(3-\alpha)}{\alpha+2} \xi_{23} - \frac{-2\alpha^2 + 12\alpha + 7}{2(\alpha+2)^2} \xi_1^2 \\ + \frac{5(3\alpha+1)(1-\beta)}{(\alpha+2)^2} \xi_1 + \frac{25(1-\beta)^2}{2(\alpha+2)^2}$$

$$(4-63-2) \quad f_{23} + \rho_{0\xi} \xi_{23} + f_{1\xi} \frac{\xi_1}{2} + \rho_{0\xi} u_{0\xi} \frac{\xi_1^2}{2} + \rho_{0\xi\xi} \frac{\xi_1^2}{4} = 0$$

$$(4-63-3) \quad g_{23} + u_{0\xi} \xi_{23} + g_{1\xi} \frac{\xi_1}{2} - g_{1\rho_0\xi} \frac{\xi_1}{2} + u_{0\xi\xi} \frac{\xi_1^2}{4} = \frac{2(3-\alpha)}{\alpha+2} \xi_{23} - \frac{5}{2(\alpha+2)} \xi_1^2 \\ - \frac{5(\gamma-3)(1-\beta)}{4(\alpha+2)} \xi_1$$

Il en va de même pour l'équation globale (4-48) qui, compte tenu de (4-55-1), donne:

- Effet isotrope de la pression:

$$(4-64) \quad E_{22} = \int_{\xi'_0}^1 (p_{22} + 2\rho_0 u_0 u_{22} + \rho_{22} u_0) \xi^4 d\xi = \frac{25(\gamma + 1)}{6(\alpha + 2)^2 \gamma}$$

$$\text{avec: } \xi'_{22} = \frac{p'_{22} (\alpha + 2) \xi'_0}{p'_0 (12 + \alpha)}$$

- Effet isotrope de la vitesse:

$$(4-65) \quad E_{23} = \int_{\xi'_0}^1 (3p_{23} - p_{21} + 3\rho_{23} u_0^2 - \rho_{21} u_0^2 + 6\rho_0 u_0 u_{23} - 2\rho_0 u_0 u_{21} + \rho_0 u_1^2 + 2\rho_1 u_1 u_0 + 2\rho_0 v_1^2) \xi^4 d\xi$$

$$+ 2(3\xi_{23} - \xi_{21}) - (p'_0 + \rho'_0 u_0'^2)(3\xi'_{23} - \xi'_{21}) \xi_0'^4 + [p_0 + \rho_0 u_0^2] \xi \frac{\xi_1^2}{2} + \frac{10}{3} \xi_1^2$$

$$+ (p_1^1 + \rho_1^1 + 2u_1^1) \xi_1 - \frac{5(\gamma - 1)(2\alpha + 9)}{3(\alpha + 2)^2} \beta^2 p'_0 \xi_0'^3 = \frac{25(\gamma^2 - 1)(1 - \beta)^2}{4(\alpha + 2)^2}$$

$$\text{avec: } \xi'_{23} = \left(\frac{3\beta^2}{4\xi_0'^2} + \frac{5(2\alpha + 9)\beta^2}{2(\alpha + 2)^2 \xi_0'^2} - \frac{p'_{23}}{p'_0} \right) \frac{(\alpha + 2) \xi'_0}{12 + \alpha}$$

On remarque que le problème des effets de la pression \bar{p} est découplé de ceux qui déterminent les différentes influences de la vitesse \bar{U} . Par contre, l'effet isotrope de \bar{U} ne peut être calculé qu'après l'effet anisotrope car il lui est couplé par l'équation (4-65). La réciproque n'est pas vraie: le calcul de l'effet anisotrope d'ordre 2 est indépendant de l'effet isotrope de \bar{U} .

On peut chercher à comprendre le sens physique de cette influence isotrope du courant qui est a priori surprenante. Pour ce faire, calculons le rapport de l'énergie ξ_{22} , mise en jeu en tenant compte de l'action de la pression seule, à l'énergie ξ_{23} , correspondant à l'effet isotrope du courant. On obtient ce rapport en divisant les seconds membres des équations globales de l'énergie correspondantes. Compte tenu de (4-59) on a:

$$(4-66) \quad \frac{\xi_{22}}{\xi_{23}} = \frac{2}{\gamma(\gamma - 1)M^2}$$

On vérifie facilement qu'il s'agit là du rapport de l'énergie interne d'une particule de masse unitaire du fluide extérieur \bar{p} à son énergie cinétique $\bar{U}/2$. La formule (4-66) montre donc que l'effet de \bar{p} et l'effet isotrope de \bar{U} proviennent du flux d'énergie à travers le choc. Cet effet est bien isotrope puisque l'écoulement extérieur est uniforme. Une partie de l'énergie provient de l'énergie interne, l'autre de l'énergie cinétique du fluide non perturbé. Leurs effets dépendent de l'importance relative de l'une par rapport à l'autre. Néanmoins, la forme des équations montre que les solutions des deux problèmes isotropes d'ordre 2 sont différentes et ne se déduisent pas l'une de l'autre par une règle de trois de rapport (4-66).

4-2-8 EXTENSION AUX CAS POLYTROPIQUES

Dans ce paragraphe nous supposerons que l'écoulement étudié est un processus polytropique, c'est-à-dire que la quantité de chaleur fournie aux particules est proportionnelle à la variation de leur température: $\delta Q = C dT$, C étant supposé constant. On sait qu'il existe alors une loi de la forme $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cste}$ où γ est donné par:

$$(4-67) \quad \gamma = \frac{C_p - C}{C_v - C}$$

L'équation (4-9-4) exprime de ce fait la polytropie de l'écoulement. De (4-67) on déduit l'expression de la quantité de chaleur par unité de masse fournie à chaque particule par unité de temps:

$$(4-68) \quad \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\gamma - \gamma^*}{\gamma - 1} C_v \frac{dT}{dt} = \frac{\gamma - \gamma^*}{(\gamma - 1)(\gamma^* - 1)} \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{dQ}{dt} \quad \text{avec: } \gamma^* = \frac{C_p}{C_v}$$

Au passage du choc il faut substituer à (4-68) l'expression de l'apport de chaleur par unité de masse en termes finis:

$$(4-69) \quad \Delta Q = \frac{\gamma - \gamma^*}{(\gamma - 1)(\gamma^* - 1)} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right)$$

Considérons les conditions sur le choc sous la forme suivante:

$$(4-70-1) \quad (\omega - \bar{U}_n) \bar{\rho} = (\omega - q_n) \rho$$

$$(4-70-2) \quad \bar{p} + \bar{\rho}(\omega - \bar{U}_n)^2 = p + \rho(\omega - q_n)^2$$

$$(4-70-3) \quad \bar{U}_r = q_r$$

$$(4-70-4) \quad \frac{\gamma^* \bar{p}}{(\gamma^* - 1) \bar{\rho}} + \frac{1}{2}(\omega - \bar{U}_n)^2 + \Delta Q = \frac{\gamma^* p}{(\gamma^* - 1) \rho} + \frac{1}{2}(\omega - q_n)^2$$

On constate que γ^* n'intervient que dans l'expression du flux d'énergie à travers le choc. Si l'on remplace ΔQ par sa valeur (4-69) on peut écrire (4-70-4) sous la forme:

$$(4-71) \quad \frac{\gamma \bar{p}}{(\gamma - 1) \bar{\rho}} + \frac{1}{2}(\omega - \bar{U}_n)^2 = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1) \rho} + \frac{1}{2}(\omega - q_n)^2$$

Il suffit donc de substituer γ à γ^* pour passer du cas adiabatique au cas polytropique. En éliminant ω et q_n entre (4-70-1), (4-70-2) et (4-71) on ramène les conditions (4-70) aux expressions (4-20).

Si l'on reste dans l'hypothèse d'un fluide idéal non conducteur de chaleur, l'équation globale de l'énergie s'écrit:

$$(4-72) \quad \frac{d}{dt} \int_{V+V} \left(\frac{p}{\gamma^* - 1} + \frac{\bar{q}^2}{2} \right) \rho dV = - \int_{\Sigma'+S_2+S_1+S_1} p \bar{n} dS + \frac{d}{dt} \int_{V+V} Q \rho dV$$

Il est élémentaire de montrer que la formule (4-68) permet de mettre (4-72) sous la forme:

$$(4-73) \quad \frac{d}{dt} \int_{V+V} \left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{\bar{q}^2}{2} \right) \rho dV = - \int_{\Sigma'+S_2+S_1+S_1} p \bar{n} dS$$

Cette équation s'explique sous la forme (4-33) et, puisque les conditions sur le choc s'expriment de la même façon qu'en écoulement adiabatique, on obtient la formule (4-39).

On constate donc que toutes les équations établies dans les paragraphes précédents subsistent pour le cas polytropique à condition de définir γ par la relation (4-67).

Dans le cas adiabatique on a $\gamma = \gamma^*$, ce qui limite les possibilités de choix de γ . En effet seules les valeurs correspondant à des gaz existants ont un sens physique et si l'on se borne à considérer les valeurs de γ données par la théorie cinétique, il ne reste que:

$$\gamma = 1.33 \quad \text{pour les gaz polyatomiques}$$

$$\gamma = 1.4 \quad \text{" diatomiques}$$

$$\gamma = 1.67 \quad \text{" monoatomiques}$$

Dans le cas polytropique par contre toute valeur de $\gamma > 1$ correspond à un apport de chaleur particulier. Deux cas se présentent:

soit $\gamma > \gamma^* > 1$, c'est-à-dire $\Delta Q > 0$ car $\frac{p}{\rho} > \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$, et le passage à travers le choc s'accompagne d'une production de chaleur qui est communiquée aux particules fluides: le choc avec détonation en est une illustration;

soit $1 < \gamma < \gamma^*$, cas où les particules fluides doivent fournir de la chaleur au passage du choc: c'est par exemple le cas où celui-ci provoque un changement de phase avec consommation de chaleur.

Pour illustrer ces deux cas nous avons choisi respectivement

$$\gamma = 1.8 \quad \text{et} \quad \gamma = 1.2.$$

4-3 RESOLUTION NUMERIQUE

Nous avons ramené un problème à 3 variables à une séquence de problèmes à une seule variable. La résolution numérique s'avère donc beaucoup plus aisée et nous épargne les problèmes de convergence ou de stabilité des schémas qui compliquent généralement les problèmes à plusieurs variables. Cependant, cette simplification a été obtenue au prix d'un important travail d'analyse mathématique aboutissant à des équations très complexes. Le principal souci de cette étude est donc l'exactitude des formules obtenues. Leur programmation demande beaucoup de soin et exige une mise en forme simple dans laquelle les erreurs puissent être rapidement détectées et corrigées. La structure du programme de calcul a été choisie, de ce fait, très modulaire.

Enfin, rappelons que l'effet de la pression seule a déjà été étudié (ref<3> et <4>). Cela nous a servi de test pour une grande partie du programme.

4-3-1 EFFET DE PREMIERE APPROXIMATION DE LA VITESSE

Pour modéliser le phénomène, nous nous sommes placés dans un repère en translation parallèle à l'écoulement uniforme. Considérons le cas où $\alpha=0$. Le second membre de l'équation globale de l'énergie (4-47) est nul puisque $\xi'_0=0$. L'équation (4-47) coïncide alors avec celle que l'on obtient en traitant directement le problème avec $\alpha=0$ dès le départ (ref<20>). On constate alors que la solution triviale $(\rho_1=p_1=u_1=v_1=0)$ vérifie (4-15) et (4-47) ainsi que les conditions (4-25) si l'on choisit $\beta=1$ et $\xi_1=0$. Ainsi, en se plaçant dans le repère qui est entraîné à la vitesse de l'écoulement, on trouve une solution analytique, triviale de surcroît, au problème de l'effet du premier ordre du courant sur une explosion instantanée dans un écoulement uniforme. Ce résultat signifie que, tant que l'effet

de la pression reste négligeable, l'écoulement consécutif à l'explosion instantanée est entraîné à la vitesse de l'écoulement uniforme du milieu environnant sans en être autrement affecté. Par exemple, lors de l'explosion d'une bombe qui se déplace dans une atmosphère au repos, tout se passe dans un premier temps, comme si la bombe avait été fixée sur le lieu de l'explosion. Si l'on se place dans le repère fixe centré en \tilde{O} , la translation de la solution d'ordre 0 à la vitesse $\beta \bar{U}$ s'exprime, avec les convention de la figure 70:

$$(4-74) \quad \begin{aligned} \rho_0(\xi) &= \rho_0(\tilde{\xi}) + \eta \cos \tilde{\theta} \rho_1(\tilde{\xi}); & \xi u_0(\xi) \cos(\theta - \tilde{\theta}) + \eta \frac{5(\gamma+1)\beta}{2(\alpha+2)} \cos \tilde{\theta} &= \tilde{\xi} (u_0(\tilde{\xi}) + \eta u_1(\tilde{\xi}) \cos \tilde{\theta}) \\ \xi^2 p_0(\xi) &= \tilde{\xi}^2 [p_0(\tilde{\xi}) + \eta \cos \tilde{\theta} p_1(\tilde{\xi})]; & \xi u_0(\xi) \sin(\theta - \tilde{\theta}) - \eta \frac{5(\gamma+1)\beta}{2(\alpha+2)} \sin \tilde{\theta} &= \eta \tilde{\xi} v_1(\tilde{\xi}) \sin \tilde{\theta} \end{aligned}$$

On en déduit les expressions suivantes:

$$(4-75) \quad \begin{aligned} \rho_1 &= -\rho_{0\xi} \beta; & u_1 &= \left(-\frac{u_0}{\xi} + \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)\xi} - u_{0\xi} \right) \beta \\ p_1 &= -\left(\frac{2p_0}{\xi} + p_{0\xi} \right) \beta; & v_1 &= \left(\frac{u_0}{\xi} - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)\xi} \right) \beta \end{aligned}$$

On peut montrer que les formules (4-75) vérifient (4-15). En effet, pour les trois équations (4-15-1), (4-15-2), (4-15-4), le calcul aboutit à un système d'équations qui est la dérivée en ξ de (4-14); quant à (4-15-3), elle se transforme en (4-14-2). Cependant, pour $\alpha = 0$, les conditions sur le choc (4-26) ne sont vérifiées que si $\beta = 0$ et $\xi_s = 1$; ce qui correspond à une onde entraînée à la vitesse de l'écoulement. On retombe donc bien sur la solution précédente. On peut montrer également que dans ce cas l'équation globale de l'énergie est vérifiée. Pour se faire il est nécessaire d'utiliser l'équation locale adimensionnée de l'énergie à l'ordre 0 (3-50-4) qui s'exprime, dans le cas isotrope par:

$$(4-76) \quad \xi^3 (\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) = -\frac{\gamma^2-1}{2} p_0 \xi^3 - \left[\xi^4 \left((\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \frac{\gamma^2-1}{2} p_0 \right) \right]_{\xi}$$

Comme, pour $d=0$, on a $\xi'_0 = \xi'_1 = 0$ et $\xi_1 = 1$ d'après les conditions sur le choc, les formules (4-75) permettent d'écrire (4-47) de la manière suivante:

$$(4-77) \quad \int_0^1 \left[-6(p_0 + \rho_0 u_0^2) \xi^3 - 3[p_0 + \rho_0 u_0^2]_{\xi} \xi^4 + \frac{15(\gamma+1)}{2} \rho_0 u_0 \xi^3 \right] d\xi \\ + \int_0^1 \left[\frac{8}{\gamma+1} (\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \xi^3 - 6(\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2) \xi^3 \right] d\xi + 6 = 0$$

et grâce à (4-76) et (4-14-2) on obtient:

$$(4-78) \quad \int_0^1 \left[-3[(p_0 + \rho_0 u_0^2) \xi^4]_{\xi} - 10 \left[\left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \rho_0 u_0 + \frac{\gamma-1}{2} p_0 \right] \xi^4 \right]_{\xi} d\xi \\ + \int_0^1 \left[\frac{8}{\gamma+1} \left[(\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \frac{\gamma^2-1}{2} p_0 \right]_{\xi} \right] d\xi + 6 = 0$$

L'intégration est donc évidente. De plus, les conditions (4-25) permettent de vérifier (4-78).

On a donc démontré l'unicité de la solution du problème de l'explosion instantanée dans un courant et son indépendance vis-à-vis du repère.

Dans le cas général, la solution (4-75) ne satisfait pas (4-47): c'est pourquoi il n'existe pas de repère où la solution du problème est triviale. Cela signifie que l'effet de \bar{U} ne se traduit pas seulement par une translation de l'écoulement de base, mais également par une distorsion.

Calculons le travail exercé par les forces de pression sur la frontière du vide lors d'une translation pure de la solution d'ordre 0 à la vitesse $\beta \bar{U}$. Dans le repère fixe, cette translation se caractérise par: $\xi_1 = \xi'_1 = \beta$. Une forme adimensionnée de ce travail est donné par le second membre de (4-47) où l'on substitue à p'_1 la valeur $-2 p'_0 \frac{\beta}{\xi'_0} - p'_0 \xi'_1$ donnée par (4-75). On obtient

ainsi, grâce à (4-53):

$$(4-79) \quad (\gamma-1)(\alpha+2)\xi_0'^5 \left[-\frac{2p_0'\beta}{\xi_0'} + \frac{4\alpha+13}{\alpha+2} p_0' \frac{\beta}{\xi_0'} \right] = \frac{125(\gamma^2-1)\alpha(2\alpha+9)\beta}{8\pi(\alpha+2)^3 \xi_0' \xi_0'^5}$$

Le sens physique du terme en β de l'équation (4-57) devient donc clair. Le repère mobile défini par $\xi_1'=0$, apparaît ainsi comme celui où ce terme en β exprime la totalité du travail de translation de l'écoulement de base, les autres termes caractérisant uniquement la distorsion. Nous appellerons ce repère: "repère principal".

Outre cet aspect physique des choses, nous avons vu que le choix de ce repère particulier pour exprimer la solution présentait l'énorme avantage de simplifier les équations d'ordre 2.

Sur le plan numérique, le problème d'ordre 1 consiste à trouver le couple de valeurs β et ξ_1 tel que $\xi_1'=0$ et que (4-47) soit vérifiée. La valeur de ξ_1' est liée au résultat du calcul par la relation (4-54). Le problème numérique revient donc à trouver les zéros d'une fonction vectorielle à deux inconnues (ξ_1', E_1) avec:

$$(4-80) \quad \xi_1' = \left(\frac{p_1'}{p_0'} + \frac{(2\alpha+9)\beta}{(\alpha+2)\xi_0'} \right) \frac{\alpha+2}{2\alpha+9} \xi_0'$$

Le calcul a été réalisé à partir du système d'équations non conservatives de la référence 20, généralisé au cas où α est différent de zéro, puis avec la forme conservative (4-15). Les résultats coïncident parfaitement.

Alors que le système non conservatif est de la forme $AX_{\xi} = F$ où A est une matrice 4*4 pleine, la forme proposée ici est: $X_{\xi} = F_{\xi}$. Les vecteurs X_{ξ} et F_{ξ} sont explicités en annexe 2.

Ici les inconnues p_1 , f_1 , g_1 et h_1 dépendent linéairement des composantes de X_{ξ} . On les obtient par les formules données en annexe 3 en posant: $k_1=f_1$; $k_2=g_1$; $k_3=h_1$; $k_4=p_1$ et $K1=X_{\xi}(1)$; $K2=X_{\xi}(2)$; $K3=X_{\xi}(3)$; $K4=X_{\xi}(4)$.

Enfin, on passe aux grandeurs ρ_1, p_1, u_1, v_1 , qui caractérisent la distorsion de l'écoulement sphérique sous l'effet de \bar{U} , à l'aide de (4-18).

4-3-2 EFFETS DE SECONDE APPROXIMATION

Tous les systèmes d'ordre 2 sont de la forme $X_{2i} \xi^i = F_i$ avec $i=1,2,3$. On donne les valeurs de ces vecteurs pour chaque effet d'ordre 2 dans l'annexe 4.

Les variables $p_{21}, f_{21}, g_{21}, h_2$ sont obtenues par les mêmes équations que celles qui ont permis le calcul de p_1, f_1, g_1 et h_1 (annexe 3), à la condition de poser: $k_1=f_{21}; k_2=g_{21}; k_3=h_2; k_4=p_{21}$ et

$$(4-81-1/-2) \quad K_1 = X_{21}(1) - \frac{\rho_1 u_1}{2} \xi^3; \quad K_2 = X_{21}(2) - \rho_1 u_1 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4}\right) \xi^4$$

$$(4-81-3) \quad K_3 = X_{21}(3) - \frac{\rho_0 u_1 v_1}{2} \xi^4 + \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4}\right) \rho_1 v_1 \xi^4$$

$$(4-81-4) \quad K_4 = X_{21}(4) + \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2}\right) \left\{ \rho_0 \left[\left(\frac{p_1}{2\rho_0}\right)^2 - \gamma \left(\frac{\rho_1}{2\rho_0}\right)^2 - \frac{\rho_1 \delta_1}{2} \right] \right\} \xi^3 - \left(\frac{\rho_0 \rho_1 u_1}{2} + \frac{\rho_0 u_1 \delta_1}{2}\right)$$

On obtient les valeurs de p_{23}, f_{23}, g_{23} en posant: $k_1=f_{23}; k_2=g_{23}; k_3=0; k_4=p_{23}$. $K1, K2, K4$, sont obtenus par les formules (4-81) où l'on substitue X_{23} à X_{21} pour $K1, K2, K4$ et où l'on pose $K3=0$. Pour l'effet de la pression le procédé est le même en posant $k_1=f_{22}, k_2=g_{22}, k_3=0, k_4=p_{22}, K1=X_{22}(1), K2=X_{22}(2), K3=0$ et $K4=X_{22}(4)$.

On voit que la structure du programme peut être considérablement simplifiée du fait de cette analogie entre la résolution des

problèmes d'ordre 1 et d'ordre 2. Les mêmes éléments de programme servent pour les différents effets. Les systèmes sont résolus par le même programme, une fois calculés les vecteurs X et F particuliers à chaque cas.

Seules les conditions sur le choc et les équations globales sont spécifiques à chaque problème.

Les trois problèmes numériques se réduisent donc à trouver le zéro des fonctions :

$$E_{21} - (\gamma - 1)\beta^2 p_0' \xi_0'^3 \left[\frac{9}{4} + \frac{5(2\alpha + 9)}{2(\alpha + 2)^2} \right]$$

$$E_{22} - \frac{25(\gamma + 1)}{6\gamma(\alpha + 2)^2}$$

$$E_{23} - \frac{5(\gamma - 1)(2\alpha + 9)}{3(\alpha + 2)^2} \beta^2 p_0' \xi_0'^3 - \frac{25(\gamma^2 - 1)(1 - \beta)^2}{4(\alpha + 2)^2}$$



4-3-3 SOLUTION ANALYTIQUE DES EFFETS DU COURANT POUR L'EXPLOSION INSTANTANÉE

Plaçons-nous dans le cas de l'explosion instantanée pour laquelle $\alpha = 0$. Nous savons que dans le repère lié à l'écoulement, défini par $\beta = 1$, on a $\xi_1 = 0$. Si l'on reporte les valeurs de β et de ξ_1 dans les conditions (4-28) sur le choc, on s'aperçoit que la solution triviale $\rho_1 = u_1 = v_1 = p_1 = 0$ vérifie (4-28) à condition que $\xi_1 = 0$. Cette solution vérifie également l'équation globale (4-49) puisque le second membre de celle-ci s'annule avec α . De même, la solution $\rho_3 = u_3 = p_3 = \xi_3' = \xi_3 = 0$ vérifie le système (4-61), les conditions (4-63) et l'équation globale (4-65) dont le second membre est nul pour $\beta = 1$.

Ce qui précède montre que, jusqu'à l'ordre 2, le seul effet que l'écoulement uniforme exerce sur l'explosion instantanée est un entraînement à la vitesse du courant \bar{U} .

Pour reprendre l'exemple d'une bombe lancée à grande vitesse, on peut dire que l'écoulement reste sphérique, centré sur le lieu de l'explosion et que tout se passe, à l'ordre 2, comme si la bombe était fixe.

4-3-4 CALCUL DES REPARTITIONS

L'écoulement de base de notre modèle vérifie les équations de l'explosion sphérique. Il coïncide donc avec la solution proposée par SEDOV (ref<3>) dans le cas $\alpha=0$. Cependant il faut remarquer que pour SEDOV la variable adimensionnée $\lambda_s = r/R$ est indépendante du temps du fait de la similitude interne alors qu'ici ξ varie entre $R^* = \xi_0 + \eta^2(\xi_{20}' + \xi_{21}' \cos 2\theta)$ et $R^* = 1 + \eta \xi_{10}' \cos \theta + \eta^2(\xi_{20}' + \xi_{21}' \cos 2\theta)$, ce qui lui fait subir une dilatation comme le montre la figure 71. Toutefois, cette différence n'apparaît qu'à l'ordre 1 et en fait la solution calculée à l'ordre 0 ne nous donne pas ξ mais λ_s . Les fonctions calculées ne sont donc pas $\rho_0(\xi)$, $u_0(\xi)$, $p_0(\xi)$ mais $\rho_0(\lambda_s)$, $u_0(\lambda_s)$, $p_0(\lambda_s)$.

Pour appliquer les relations (4-8) il faut par conséquent développer les fonctions de ξ en fonction de η autour de λ_s . Ce qui vient d'être dit s'applique également à la solution d'ordre 1 lorsqu'on pousse les développements à l'ordre 2.

Dans la dilatation que nous avons décrite, la relation entre ξ et λ_s est donnée par:

$$(4-82) \quad \xi = \lambda_s + \eta \cos \theta \frac{\xi_1(\lambda_s - \xi_0')}{1 - \xi_0'} + \eta^2 \cos 2\theta \frac{\xi_{21}(\lambda_s - \xi_0') + \xi_{21}'(1 - \lambda_s)}{1 - \xi_0'} \\ + \frac{\eta^2}{M^2} \frac{\xi_{22}(\lambda_s - \xi_0') + \xi_{22}'(1 - \lambda_s)}{1 - \xi_0'} + \eta^2 \frac{\xi_{23}(\lambda_s - \xi_0') + \xi_{23}'(1 - \lambda_s)}{1 - \xi_0'}$$

On peut ainsi réécrire la solution sous la forme:

$$(4-83) \quad \rho^* = \rho_0^*(\lambda_s) + \eta \rho_1^*(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 (\rho_{21}^* \cos 2\theta + \frac{\rho_{22}^*}{M^2} + \rho_{23}^*) \\ \xi^2 p^* = p_0^*(\lambda_s) + \eta p_1^*(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 (p_{21}^* \cos 2\theta + \frac{p_{22}^*}{M^2} + p_{23}^*) \\ \xi u^* = u_0^*(\lambda_s) + \eta u_1^*(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 (u_{21}^* \cos 2\theta + \frac{u_{22}^*}{M^2} + u_{23}^*) \\ \xi v^* = \eta v_1^* \sin \theta + \eta^2 v_2^* \sin 2\theta$$

où les fonctions d'ordre 1 et 2 sont données en annexe 5.
En normant ces grandeurs par leur valeurs sur le choc on obtient les répartitions sur le rayon défini par $\theta = \text{cste}$:

$$(4-84) \quad \begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_c} &= \tilde{\rho}_0(\lambda_s) + \eta \tilde{\rho}_1(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 (\tilde{\rho}_{21} \cos 2\theta + \frac{\tilde{\rho}_{22}}{M^2} + \tilde{\rho}_{23}) \\ \frac{p}{p_c} &= \tilde{p}_0(\lambda_s) + \eta \tilde{p}_1(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 (\tilde{p}_{21} \cos 2\theta + \frac{\tilde{p}_{22}}{M^2} + \tilde{p}_{23}) \\ \frac{u}{u_c} &= \tilde{u}_0(\lambda_s) + \eta \tilde{u}_1(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 (\tilde{u}_{21} \cos 2\theta + \frac{\tilde{u}_{22}}{M^2} + \tilde{u}_{23}) \\ \frac{v}{v_c} &= \eta \tilde{v}_1 \sin \theta + \eta^2 \tilde{v}_2 \sin 2\theta \end{aligned}$$

4-4 RESULTATS NUMERIQUES

4-4-1 ECOULEMENT INTERNE A L'ONDE DE CHOC

Les figures 72 à 92 montrent les répartitions (4-84) calculées pour les trois valeurs de γ et les quatre valeurs entières de α . Pour illustrer l'effet du courant nous avons choisi $\bar{M} = 0.8$. Pour les grandeurs ρ/ρ_c , u/u_c et p/p_c nous avons représenté les évolutions sur l'axe de symétrie de l'écoulement. Par contre pour v/v_c , qui est nulle sur cet axe, nous avons choisi l'axe perpendiculaire où la vitesse v est maximale. En abscisse nous avons porté le rayon polaire rapporté à la position du choc à la valeur de θ considérée. Ainsi, le choc correspond à la valeur 1 de l'abscisse. Afin de permettre une bonne observation des courbes, nous avons éliminé les valeurs de l'abscisse inférieures à 0,7 ou 0,8 suivant les configurations. En effet, ces valeurs correspondent à l'intérieur de la surface Σ' et ne présentent aucun intérêt. Fait exception à cette règle le cas de l'explosion instantanée où la surface Σ' n'existe pas.

Les répartitions sont présentées dans le repère principal, ce qui permet de caractériser l'effet de distorsion de l'écoulement sous l'effet du courant. Enfin, notons que les figures permettent d'observer l'évolution des répartitions au cours du temps; les

différentes couleurs correspondent en effet à diverses valeurs du nombre de Mach du choc $M_c = \omega / \bar{c}$, vu dans le repère principal. Dans tous les cas, sauf pour $\alpha=3$, le choc s'affaiblit au cours du temps et M_c varie de l'infini à 1. Nous reviendrons sur ce point en 4-4-2, mais il suffit de considérer la formule (4-24-1) pour comprendre que l'écoulement initial correspond à la valeur infinie de M_c et qu'au fur et à mesure que t croît η augmente et M_c décroît. C'est l'évolution de η avec t qui détermine celle des répartitions (4-84). Les formules (4-24-1) et (4-3) montrent clairement que pour $\alpha=3$, l'écoulement est indépendant du temps: les différentes couleurs correspondent donc, dans ce cas, non à des aspects successifs d'un même écoulement, mais à des écoulements correspondant à différentes conditions physiques initiales.

L'observation des figures suggère quelques remarques. Si l'on s'intéresse d'abord à l'effet de la pression \bar{p} seule ($\bar{M}=0$) on constate bien sûr que l'écoulement reste sphérique, que v est nulle, mais on s'aperçoit également que la distance du choc à la frontière du vide augmente plus vite que dans le cas de l'écoulement de base.

L'effet du courant se traduit évidemment par l'apparition d'une vitesse v et l'on peut constater, en particulier sur la répartition de masse volumique, que la matière se condense plus à contre-courant. Ce phénomène est dû au fait que le choc est plus freiné, à contre-courant, que la surface ξ' : l'écoulement interne se trouve plus comprimé entre ces deux surfaces que si \bar{M} était nul. A l'inverse, pour $\theta=0$, on observe une détente car là, le choc est entraîné plus vite que ξ' .

On remarque que si l'influence du paramètre α est surtout sensible sur l'écoulement de base, celle de γ est principalement de fixer la limite de validité de l'hypothèse de petites perturbations; en effet, plus γ est faible, c'est-à-dire plus le gaz est compressible, plus l'influence de \bar{p} et de \bar{U} est vite ressentie par l'écoulement. On peut alors remarquer que si les répartitions calculées restent des petites perturbations de l'écoulement de base pour u , v et p , cela n'est plus le cas pour

ρ . Force est de constater alors que notre modèle ne décrit pas correctement l'écoulement dès que le nombre de Mach du choc est inférieur à une valeur qui dépend de γ , mais qui reste néanmoins élevée. Dans le cas où $\alpha=1$ et $\gamma=1.4$, qui simule le tir d'arme, la limite est située autour d'une valeur de M_c égale à 3.5, ce qui restreint le champ d'application de la théorie à des tirs à très haute altitude. Nous verrons en 4-4-2 que ce constat négatif doit être tempéré.

Les considérations précédentes expliquent pourquoi les figures 72 à 78 présentent l'évolution des répartitions pour quatre valeurs de M_c , les figures 79 à 86 pour trois et les figures 86 à 92 seulement pour deux.

On remarque que la vitesse v devient infinie sur ξ' , sauf pour $\alpha=3$. Nous avons signalé que cette singularité n'enlevait rien à l'hypothèse de petites perturbations si la fonction h , restait finie; la figure 93 montre que cela est bien le cas, quelle que soit la valeur de α ou de γ .

Une autre vérification de la validité de nos calculs s'obtient en comparant ceux-ci avec ceux qu'a réalisés Sedov (ref<3>) dans le cas de l'explosion instantanée avec contre pression seule. Sedov utilise une variable de perturbation appelée q_0 et égale à l'inverse du carré du nombre de Mach M_c .

D'après les formules (4-5) et (4-24) on peut écrire:

$$(4-85) \quad M_c = \frac{\omega}{\bar{c}} = \frac{\alpha + 2\omega^*}{5\sqrt{\gamma S}}$$

On en déduit que dans le cas de l'explosion instantanée q_0 est lié à γ par la relation:

$$(4-86) \quad q_0 = \frac{25}{4}\gamma S(1 - 8\gamma\xi_{22}S)$$

Comme Sedov exprime sa solution sous la forme d'un développement du premier ordre en q de la même solution de base que nous, la

formule (4-86) montre que les termes d'indice 22 des répartitions (4-84) et les termes d'ordre 1 du développement de Sedov sont liés par les relations:

$$(4-87) \quad g_s = \frac{4}{25} \tilde{\rho}_{22}; \quad h_s = \frac{4}{25} \tilde{p}_{22}; \quad f_s = \frac{4}{25} \tilde{u}_{22}$$

La figure 94 montre la comparaison entre ces fonctions calculées par nos soins et celles publiées par Sedov (ref<3>): l'identité se passe de commentaires.

4-4-2 VALEURS SUR L'ONDE DE CHOC

Les valeurs sur le choc sont déterminées par les caractéristiques de l'écoulement extérieur et la progression de l'onde. Intéressons-nous, dans un premier temps, à cette dernière.

Pour présenter des courbes indépendantes des conditions physiques propres à chaque application, il faut choisir un système de grandeurs primaires parmi les constantes dimensionnées caractéristiques du phénomène. Un tel système existe pour $\alpha \neq 3$ et se compose des trois grandeurs suivantes: E , \bar{p} , \bar{c} .

On peut, grâce à ce système, construire une longueur R^+ et un temps t^+ caractéristiques d'une explosion donnée. On a ainsi:

$$(4-88) \quad R^+ = \left(\frac{E}{\bar{c}^\alpha \bar{p}} \right)^{1/(3-\alpha)}$$

$$t^+ = \left(\frac{E}{\bar{c}^3 \bar{p}} \right)^{1/(3-\alpha)}$$

Ces formules montrent bien que le cas $\alpha=3$ est particulier. En effet, dans ce cas, le fait que \bar{u} et \bar{p} apparaissent dans l'inventaire des constantes dimensionnées n'enlève pas au phénomène ses propriétés de similitude interne, puisque les seules grandeurs dimensionnées que l'on puisse former avec E , \bar{p} et \bar{c} sont des vitesses. Il suffit donc de se donner un nombre de

Mach caractéristique pour obtenir toutes les grandeurs adimensionnées relatives au phénomène. Il est commode de se donner le nombre de Mach ω/\bar{c} , caractéristique de la progression du piston: dès lors la valeur de η est déterminée par (4-44) et toutes les répartitions, ainsi que le nombre de Mach du choc, en découlent à travers les formules (4-3), (4-4), (4-5), (4-8) et (4-85). Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce cas dont nous n'avons pas d'exemples d'applications. Signalons simplement que Sedov a publié (ref<3>) quelques courbes caractéristiques de cet écoulement en prenant en compte la contre pression seule.

Dans le cas général, on peut écrire une forme universelle, indépendante des conditions physiques particulières, de la progression du choc par rapport au repère principal:

$$(4-89) \quad \frac{R}{R^+} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/5} \xi_0 R^* \left(\frac{t}{t^+}\right)^{\frac{\alpha+2}{5}}$$

Dans le repère fixe lié au lieu de l'explosion, il faut tenir compte de la vitesse du repère principal. Si l'on s'intéresse à la progression sur l'axe de symétrie par rapport au lieu de l'explosion, on peut écrire:

$$(4-90) \quad \frac{\tilde{X}}{R^+} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/5} \xi_0 R^* \left(\frac{t}{t^+}\right)^{\frac{\alpha+2}{5}} + \epsilon \beta M \frac{t}{t^+}$$

avec $\xi = -1$ à contre-courant et $\xi = 1$ dans le cas contraire.

La figure 95 montre la valeur de cette fonction pour $\theta=0$ et $\gamma=1.4$, suivant l'ordre d'approximation choisi pour R^* . On voit que pour t suffisamment grand l'effet de la pression \bar{p} est du même ordre que celui de \bar{U} . Il est à noter que la progression prévue par la solution de l'écoulement de base est en défaut dès que t/t^+ est supérieur à 0.05.

Les valeurs des constantes $\xi_0, \beta, \xi_1, \xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}$, intervenant dans les fonctions R^* , sont données en annexe 6.

La figure 96 présente par contre la progression sur l'axe à contre-courant pour $\gamma=1.4$, dans le repère fixe et pour différentes valeurs de \bar{M} .

De cette progression, on peut déduire M_R , nombre de Mach du choc par rapport à l'écoulement extérieur, dont l'expression est donnée par:

$$(4-91) \quad M_R = \frac{\omega - U_n}{\bar{c}} = \frac{\alpha + 2}{5} \frac{\xi_0}{\gamma^{1/5}} \left(\frac{1}{t^+} \right)^{\frac{\alpha-3}{5}} \omega^* - (1-\beta) \bar{M} \sin(\lambda + \theta)$$

C'est ce nombre de Mach qui caractérise les sauts des grandeurs physiques au passage du choc. La figure 97 présente l'évolution pour $\gamma=1.4$ de M_R en fonction de R/R^* sur l'axe de symétrie du repère principal. On peut constater que, pour l'explosion instantanée, les valeurs obtenues sont indépendantes de \bar{M} .

La figure 98 montre ces évolutions en fonction de \tilde{X}/R^* . On constate, en particulier dans le cas $\alpha=2$, que le modèle prévoit une atténuation trop brutale du choc pour $\theta=0$, puisque M_R atteint la valeur 1 d'une façon non asymptotique.

Pour déterminer les sauts des grandeurs physiques au passage du choc, deux possibilités s'offrent. Nous pouvons utiliser les conditions sur le choc (§ 4-2-3), ou directement les équations des chocs normaux en partant des valeurs de M_R précédemment calculées.

La grandeur sans dimensions caractéristique de la vitesse radiale u est le nombre de Mach M_i :

$$(4-92) \quad M_i = \frac{u_c}{c_c}$$

Les valeurs de M_i , déduites des conditions de la section 4-2-3, sont présentées sur la figure 99 en fonction de R/R^* , dans le repère principal et pour $\gamma=1.8$. On constate que M_i tend vers zéro pour une valeur relativement faible de R/R^* . Cette particularité, non conforme à la réalité, provient du fait que ξ^* tend vers zéro sur le choc pour une valeur positive de η , qui, dans le cas où $\bar{U}=0$ et compte tenu de (4-62-2), est:

$$(4-93) \quad \zeta = \frac{(\gamma-1)(\alpha+2)^2}{50\gamma}$$

Cela correspond à une valeur de M_c , égale en première approximation à:

$$(4-94) \quad M_c = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$$

Le calcul donne les valeurs suivantes: pour $\gamma=1.2$, $M_c=3.16$; pour $\gamma=1.4$, $M_c=2.24$; pour $\gamma=1.8$, $M_c=1.58$.

Il est évident que la méthode choisie ici pour la détermination de M_i , a un domaine de validité réduit puisqu'elle dépend du développement de ζ^* .

La figure 100 montre la valeur de M_i , déduite de la progression du choc pour $\gamma=1.8$ sur l'axe de symétrie de l'écoulement. En effet M_R peut être considéré comme le nombre de Mach sur l'axe de l'écoulement extérieur dans un repère lié au choc, et dans ce repère le nombre de Mach normal de l'écoulement intérieur M_{n_i} , défini par: $M_{n_i} = \frac{\omega - u_c}{c_c}$, est donné par la formule du choc normal:

$$(4-95) \quad M_{n_i} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_R^2}{\gamma M_R^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{1/2}$$

M_i peut s'exprimer par:

$$(4-96) \quad M_i = \frac{\omega \bar{c}}{\bar{c} c_c} - M_{n_i}$$

Comme nous avons d'autre part:

$$(4-97) \quad \frac{p_c}{\bar{p}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_R^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \left(\frac{2}{\gamma+1} M_R^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{-1}$$

$$\frac{\bar{c}}{c_c} = \sqrt{\frac{\rho_c \bar{p}}{\bar{\rho} p_c}}$$

il est possible de calculer toutes les valeurs sur le choc à partir de la seule donnée de M_R . La formule (4-91) montre, de ce fait, que toutes les valeurs sur le choc, peuvent se déduire du développement de ω^* .

On voit donc que, suivant la méthode choisie, les valeurs de M_R sur le choc s'obtiennent soit à partir des développements de u^* , p^* et ρ^* sur le choc; soit avec le seul développement de ω^* .

La différence entre la figure 99 et la figure 100 montre que les deux méthodes ne sont équivalentes qu'au tout début du mouvement. La raison en est que seul ce début du mouvement correspond à des valeurs de η très petites devant 1. Les courbes des figures 96 à 98 sont des extrapolations des développements asymptotiques de R^* et de M_R jusqu'à des valeurs de η de l'ordre de 1. Ces extrapolations ne sont possibles que si les termes d'ordres supérieurs à deux, dans le développement complet de la solution exacte, sont très petits. Dans le cas contraire la troncature du développement à l'ordre 2 va nécessairement entraîner une différence sensible entre la solution exacte et le modèle calculé dès que η devient suffisamment grand. Cependant, la valeur de η à partir de laquelle le modèle diffère notablement de la solution exacte dépend de la grandeur considérée, autrement dit, la solution du problème asymptotique ne converge pas uniformément sur toutes les inconnues vers la solution exacte. C'est pourquoi, en particulier, le développement de ρ^* aboutit à une absurdité si on l'extrapole. Par contre, nous verrons au chapitre 5 que l'extrapolation du développement de R^* représente correctement la progression réelle (tout au moins pour $\alpha=1$) jusqu'à des valeurs de M_R de l'ordre de 1.2, ce qui présente un intérêt pratique non négligeable. Il est donc plus judicieux de calculer les valeurs sur le choc à partir de sa loi de propagation. Afin de pouvoir comparer les résultats ainsi obtenus avec le calcul direct à partir des conditions en $\xi=1$, on a représenté sur la figure 101 l'évolution du rapport p_c / \bar{p} déduit de ces conditions. Le résultat n'est pas absurde mais nous verrons qu'il ne coïncide pas exactement avec celui que donne l'autre méthode dès que η devient supérieur à 0.1.

On présente, de la figure 102 à la figure 110, les valeurs sur le choc déduites des formules (4-96) et (4-97).

Les valeurs sont représentées dans le repère fixe.

Le nombre \tilde{M}_j des figures 105 à 107 est le nombre de Mach local sur l'axe juste en aval du choc dans le repère fixe.

Les figures 108 à 110 illustrent le saut de masse volumique, et les figures 108 à 110 les sauts de pression. On remarquera que les valeurs obtenues sont tout à fait réalistes sauf peut-être dans le cas $\alpha = 2$, où les différents rapports atteignent la valeur 1 d'une façon non asymptotique. Dans le cas de la pression, on constate que les valeurs obtenues à partir des conditions sur le choc (§ 4-2-3), figure 101, et celles déduites de la valeur du nombre de Mach normal (figure 109) ne coïncident pas, même si les tendances sont mieux respectées que dans le cas de la masse volumique. D'une manière générale, l'atténuation obtenue en extrapolant les développements d'ordre 2 propres à chaque grandeur est trop forte. C'est particulièrement vrai pour ρ^* , mais c'est parce que cet effet est beaucoup moins notable sur R^* que le modèle développé ici coïncide bien avec l'expérience en ce qui concerne le comportement au voisinage du choc.

La figure 111 représente la valeur du rapport v/u représentatif de la déviation du vecteur vitesse par rapport au rayon polaire dans le repère principal en fonction de θ . Nous n'avons représenté que le cas $\alpha = 1$, $\gamma = 1.4$; les autres cas donnent des courbes analogues que l'on peut trouver dans la référence <51>.

Il est évident que pour θ variant de π à 2π , on obtient des valeurs de v/u opposées à celles de la figure puisque l'écoulement est axisymétrique.

Comme les valeurs sur le choc sont obtenues uniquement à partir de la progression de celui-ci, il convient de montrer la validité de cette progression. Pour ce faire nous allons comparer nos résultats à ceux de Sedov dans le cas de l'explosion instantanée. Si l'on écrit la progression du choc selon Sedov, mais avec nos notations, on obtient:

$$(4-98) \quad \left(\frac{R}{R_+} \right)^3 = \frac{4}{25} \xi_0^5 \frac{q_0}{\gamma} e^{A q_0}$$

En développant l'exponentielle au premier ordre en q_0 , et en utilisant la formule (4-86), on constate que notre développement et celui de Sedov coïncident si:

$$(4-99) \quad \xi_{22} = \frac{25}{44} A$$

La valeur de A est 1.92 pour une explosion sphérique (ref<3>). Cela conduit à une valeur de ξ_{22} de 1.090. La valeur calculée ici est de 1.089 (annexe 6). Etant donné le peu de chiffres significatifs fournis par Sedov, l'identité est manifeste.

4-5 CONCLUSION

L'étude analytique du modèle mathématique de l'explosion violente ponctuelle et isotrope dans un courant a permis de simplifier très fortement le problème sans dénaturer les propriétés physiques du phénomène. La mise sous forme pseudo-conservative des systèmes différentiels a rendu les processus de leurs résolutions presque identiques à tous les ordres d'approximation et elle a écarté les inconvénients dus à la singularité située à la frontière du vide. Les solutions étant désormais connues pour les cas pratiques importants, il n'est plus nécessaire de résoudre à chaque fois le problème différentiel. C'est là l'intérêt du modèle par rapport à un calcul direct par intégration des équations d'Euler. En contrepartie, la solution construite n'est plus valable lorsque le choc est trop affaibli, c'est-à-dire pour des temps suffisamment grands. Cependant, nous avons montré, dans le cas particulier de l'explosion instantanée, que la progression du choc obtenue ici correspond bien aux

calculs de Sedov qui prédisent bien l'expérience.

Il nous reste à réaliser la comparaison avec l'expérience dans le cas du tir canon qui correspond à $\alpha=1$ et $\gamma=1.4$.

Il est vrai néanmoins que, dans le cas du tir, ϱ ne s'annule pas sur le front de gaz brûlés. Cela entraîne que le modèle de l'explosion a peu de chance de s'appliquer loin en aval de l'onde de bouche. Cela signifie que si c'est bien le débit d'énergie à la bouche qui conditionne la propagation de l'onde de bouche, il est insuffisant pour expliquer l'ensemble de l'écoulement consécutif au tir. En fait, plus on se rapproche de la surface de contact air-gaz brûlés, plus le débit masse à la bouche (ou le flux de quantité de mouvement) doit être pris en compte. On en déduit que le paramètre \bar{c} / c_g sans influence au niveau du choc, accroît son importance plus on s'approche de la surface de contact. Au chapitre 5, nous tenterons de préciser cette constatation en comparant la théorie et l'expérience.

Sur un plan plus général, il convient de rappeler que le défaut essentiel de la solution proposée est de ne pas décrire correctement les variations de ϱ à l'intérieur du choc si l'on se limite à des développements d'ordre 2. Comme les méthodes asymptotiques deviennent inextricables aux ordres supérieurs, il faut se contenter des résultats à l'ordre 2 qui sont réalistes pour la propagation du choc et pour même la répartition de pression dans l'écoulement, du moins, pour cette dernière, au début du mouvement.

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS PRINCIPALES

*5-1 CORRESPONDANCE ENTRE LES THEORIES DE L'EXPLOSION ET DE LA
SIMILITUDE*

5-2 COMPARAISON ENTRE THEORIE ET EXPERIENCE

5-3 APPLICATION AU TIR D'UNE ARME EMBARQUEE A HAUTE ALTITUDE

NOTATIONS PRINCIPALES

c : vitesse du son

D : calibre de l'arme

E : apport d'énergie de l'explosion équivalente

E_g : débit d'énergie à la bouche de l'arme

J : intensité du tir définie au chapitre 3

M : nombre de Mach

M_R : nombre de Mach du choc par rapport à l'écoulement extérieur

O : origine du repère mobile de vitesse $\beta \bar{U}$ suivant l'axe de tir

\tilde{O} : origine de l'explosion équivalente

O_b : centre de la bouche de l'arme

p : pression

\mathcal{P} : puissance du tir définie au chapitre 2

R : position de l'onde de bouche dans le repère mobile

R' : position de la surface frontière du vide dans le repère mobile

R^* : longueur caractéristique de l'explosion équivalente

R^\dagger : fonction de η défini par la formule (4-7)

- t : temps compté à partir du débouchage du canon
- t_e : temps compté à partir du début de l'explosion équivalente
- t^+ : temps caractéristique de l'explosion équivalente
- \tilde{t} : durée séparant le débouchage du canon et le début de l'explosion équivalente
- \bar{U} : vitesse de l'écoulement uniforme
- X : position de l'onde de bouche sur l'axe de tir par rapport à 0.
- \tilde{X} : position de l'onde de bouche sur l'axe de tir par rapport à \tilde{O}
- \tilde{x} : position de \tilde{O} par rapport à O_t
- α : constante positive égale à un dans ce chapitre
- β : rapport de la vitesse du repère mobile à \bar{U}
- γ : rapport des chaleurs spécifiques
- η : paramètre sans dimensions relatif à \bar{U} , défini par la formule (4-3)
- ω^* : fonction de η définie par la formule (4-24-2)
- γ : paramètre sans dimensions relatif à \bar{p} défini par la formule (4-5)

Les grandeurs surlignées correspondent au milieu extérieur non perturbé.

L'indice g correspond aux gaz brûlés à la bouche.

5-1 CORRESPONDANCES ENTRE LES THEORIES DE L'EXPLOSION ET DE LA
SIMILITUDE

Lorsque la notion d'explosion équivalente a été introduite en 3-1, on a montré que, si la condition (3-12) était vérifiée, la propagation de l'onde de bouche sur l'axe suivait une loi de la forme (3-11) au début du mouvement. Ce résultat théorique est fondé sur l'hypothèse d'un jet stationnaire à la bouche, ce qui se traduit en termes d'explosion équivalente par la relation: $d = 1$. Il est évident que l'hypothèse du tir violent et celle du jet stationnaire à la bouche ont une plage de validité temporelle commune puisqu'elles s'appliquent toutes les deux au début du mouvement. C'est pourquoi l'expérience et la théorie coïncident au début de la propagation des ondes violentes (figure 54).

En revanche, ce sont des considérations liées à la géométrie généralement quasi sphérique de l'onde de bouche qui ont justifié l'étude de l'explosion isotrope et permis de modéliser les effets de \bar{p} et \bar{U} (chapitre 4). En effet la formule (3-70) montre que l'anisotropie de l'onde est faible devant celle de la répartition azimutale de l'énergie. De plus les tirs violents réels, à l'exception de ceux qui produisent un second précurseur, donnent naissance à des ondes de bouche quasi sphériques. L'idée que la propagation de l'onde de bouche dépend plus de l'intensité E de l'apport d'énergie que de sa répartition azimutale $\xi(\theta)$ s'impose donc à l'esprit. Cela justifie l'intérêt porté à l'explosion isotrope, mais ne relie pas le domaine de validité des hypothèses de petites perturbations en η et ζ avec les aspects physiques du tir d'arme. La théorie des explosions isotropes a engendré ses propres définitions des temps et longueur caractéristiques t^+ et R^+ (4-88) sans rapport avec des grandeurs caractéristiques du tir mises en évidence dans l'étude de la similitude. Il est donc essentiel d'établir les correspondances entre les deux théories et de définir le domaine spatio-temporel où elles peuvent être comparées.

Si on se reporte aux figures 35 et 36, on constate que la

pression p_g est constante pendant un laps de temps adimensionné de l'ordre de 0.3. On peut donc considérer que dans tous les cas étudiés le jet est stationnaire si est respectée la condition

$$(5-1) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{c}t}{D} < 0,3$$

Si l'on veut exprimer cette condition pour le temps t_e , il faut rappeler que l'ordre de grandeur de l'erreur \tilde{t} commise sur l'origine des temps dans l'hypothèse du tir intense est donnée, en vertu de (2-27-2) par la relation:

$$(5-2-1) \quad \frac{\bar{c}\tilde{t}}{D} = 0(1)$$

alors que

$$(5-2-2) \quad \frac{\bar{c}t}{D} \gg 1$$

Comme par définition $t_e = t - \tilde{t}$, on peut écrire à une petite erreur près (5-1) sous la forme:

$$(5-3) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{c}t_e}{D} < 0,3$$

qui définit le domaine de validité temporel de l'hypothèse $\alpha=1$.

Plaçons-nous, maintenant dans le cas d'une explosion violente isotrope telle que $\alpha=1$, et exprimons la condition pour laquelle il est légitime de calculer les effets de \bar{p} et \bar{U} sous forme de développements asymptotiques de l'écoulement de base:

$$(5-4) \quad \text{Max}(\eta, \gamma) \ll 1$$

Pour comparer (5-3) et (5-4), il faut exprimer η et γ en fonction des grandeurs caractéristiques du tir. Les définitions (4-3) et (4-5) de η et γ montrent que le problème revient à relier E au débit d'énergie à la bouche E_g donné par (2-10-3).

En 4-2-4, on a signalé l'équivalence du problème de l'explosion avec celui du piston constitué par la frontière du vide. Ici, c'est la surface de contact air-gaz brûlés qui fait office de piston. Nous avons déjà évoqué (§ 4-5) l'inconséquence de la théorie de l'explosion violente au voisinage de cette surface de contact puisque manifestement la masse volumique ne s'y annule pas comme le prévoit la théorie. Cela provient de la trop grande schématisation du problème qui élimine l'influence de l'apport de masse à la bouche. Cependant l'expérience montre que l'influence de cet apport de masse est nulle sur la propagation du choc et que cela se traduit par la disparition de la condition de similitude (2-28-5) de l'ensemble des règles régissant le comportement de l'onde de bouche (§ 2-1-4-4 et 3-1-1). Cela signifie que, du point de vue de la propagation de l'onde de bouche, il est indifférent que le piston soit la frontière du vide ou une surface de contact pourvu que sa vitesse de dilatation soit la même.

Ce piston que constitue la surface de contact est anisotrope, mais dans le cas du tir idéal, il adopte une forme presque hémisphérique vers l'avant de la bouche (figure 15). Cela s'explique physiquement par l'existence des chocs latéraux du jet qui orientent l'écoulement de gaz brûlés vers l'avant. L'onde de bouche n'est donc violente que dans le demi-espace ayant pour origine \tilde{O} et défini par $x > 0$ (figure 112). L'explosion équivalente devant être violente dans toutes les directions, il faut la supposer symétrique par rapport au plan $\tilde{O}yz$. Elle ne coïncide donc avec le tir que pour $x > 0$ et tout se passe comme s'il existait un tir symétrique vers l'arrière de l'arme. Cette symétrisation constitue ainsi un moyen simple de tenir compte de l'anisotropie de l'apport d'énergie dans le cadre de la théorie isotrope. On a alors :

$$(5-5) \quad E = 2 E_g$$

où encore, d'après (2-10-3) et pour $M_g = 1$

$$(5-6) \quad E_g = \frac{\gamma_g + 1}{2(\gamma_g - 1)} \gamma_g \rho_g c_g \frac{\pi D^2}{4}$$

En utilisant (4-3), (4-5), en appliquant les valeurs numériques correspondant au cas $\gamma = 1.4$ et $d = 1$, et en posant $\gamma_g = 1.25$, on peut écrire (5-4) sous la forme:

$$(5-7) \quad \text{Max} \left(\bar{M}^{5/2} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{c} t_c}{D}, \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{c} t_c}{D} \right) \ll 2,6$$

Comme, dans les applications, \bar{M} est inférieur à 1, on peut réduire en pratique (5-7) à

$$(5-8) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{c} t_c}{D} \ll 3,6$$

qui est équivalente à (5-3).

On constate donc que l'hypothèse du tir violent a le même domaine de validité temporel que celle du jet stationnaire à la bouche. Dans ce cadre, la théorie donne une solution approchée du problème au voisinage du choc, mais elle devient fautive près de la surface de contact quoique la propagation de cette dernière soit assez bien prédite comme on le verra en 5-2.

La formule (5-3) semble limiter l'application de la similitude de tir à un domaine réduit puisqu'il coïncide avec celui de l'hypothèse des chocs violents. En fait, l'expérience montre qu'il n'en est rien: les pressions instationnaires mesurées et les propagations du choc visualisées au chapitre 2 montrent que la similitude s'applique jusqu'à des valeurs de $\sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_g}} \frac{\bar{c} t_c}{D}$ de

l'ordre de 1. Ce résultat signifie que, lorsque l'onde est très éloignée de la bouche, la propagation du choc n'est plus liée au débit d'énergie E_g aussi directement que le suppose la théorie de l'explosion. On peut d'ailleurs avoir une confirmation expérimentale de cette explication en remarquant que la surface de contact, très proche du choc dans la phase violente, est distancée dans la phase affaiblie car elle ne subit plus une dilatation aussi rapide que celle prévue par la théorie des explosions. On peut comparer à cette fin les photos de la figure

29.

Maintenant que les correspondances sont établies entre le tir et les explosions violentes, on peut exprimer R^+ et t^+ en fonction des grandeurs physiques du tir, à l'aide des relations (4-88), (5-5) et (5-6) où $\alpha = 1$. On obtient:

$$(5-9-1) \quad R^+ = \left(\frac{(\delta_g + 1) \delta_g \pi}{4(\delta_g - 1)} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{P_g}{\bar{P}}} \sqrt{\frac{c_g}{\bar{c}}} D.$$

$$(5-9-2) \quad t^+ = \left(\frac{(\delta_g + 1) \delta_g \pi}{4(\delta_g - 1)} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{P_g}{\bar{P}}} \sqrt{\frac{c_g}{\bar{c}}} \frac{D}{\bar{c}}.$$

d'où on tire:

$$(5-10-1) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}} \frac{R^+}{D} = \left[\frac{\pi(\delta_g + 1) \delta_g}{4(\delta_g - 1)} \right]^{1/2} \approx 3.$$

$$(5-10-2) \quad \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \sqrt{\frac{\bar{P}}{P_g}} \frac{\bar{c} t^+}{D} \approx 3$$

La condition 5-8 s'écrit donc:

$$(5-11) \quad t_c \ll t^+$$

On retrouve ainsi un critère d'interprétation des figures 96 à 98, selon lequel les courbes présentées ne sont exactes que pour $t/t^+ < 0.1$ ou, dans le cas particulier où $\alpha = 1$, $R/R^+ < 0.2$. Leur prolongement jusqu'à $t/t^+ = 0.25$ est une extrapolation à des valeurs de η de l'ordre de 0.5. La validité de cette extrapolation doit être confrontée à l'expérience, ce qui sera fait en 5-2.

La condition (5-11) montre que t^+ est un temps caractéristique de la durée nécessaire à l'onde de bouche pour s'atténuer jusqu'à devenir une onde acoustique. R^+ est l'ordre de grandeur de la distance à laquelle l'onde de bouche peut être assimilée à une onde acoustique. On a pu vérifier ces remarques pour le canon de 30 mm dans l'atmosphère au repos au niveau du sol (ref<52>). Des mesures effectuées à 1 m en avant de la bouche ont montré qu'à

cette distance M_R n'est déjà plus que de 1.1 ou 1.2. Le calcul donne $R^+ = 1.6$ m, ce qui est tout à fait cohérent avec les résultats de mesure précédents. Dans ce cas, la théorie de l'explosion violente est d'une faible utilité, puisque, même en l'extrapolant jusqu'à $t/t^+ = 0.25$, elle ne s'applique que sur une distance de 0.64 m.

En revanche, à 11000 m d'altitude, R^+ est égal à 3.5 m et la théorie peut s'appliquer en toute rigueur sur 0,7 m et, en l'extrapolant, sur 1.4 m. L'application au problème de l'interaction entre le tir et le fonctionnement d'une prise d'air est alors envisageable.

Pour les armes de petit calibre étudiées, on obtient au sol:

$R^+ = 0.4$ à 0.5 m pour les carabines de calibre 5.56 mm,

$R^+ = 0.6$ m pour le fusil de calibre 7.62 mm.

Comme à la distance R^+ l'onde de bouche du canon de 30 mm est devenue acoustique, la similitude implique qu'il en soit de même pour les armes de petit calibre. On constate que R^+ est toujours inférieure à la longueur extérieure du canon de l'arme. L'onde perçue par l'oreille du tireur est donc toujours quasi-acoustique. On voit que la valeur de R^+ peut être utilisée comme critère dans les problèmes de nuisances dues aux explosions ou aux tirs.

5-2 COMPARAISON ENTRE THEORIE ET EXPERIENCE

Si l'on choisit $\bar{\rho}$, \bar{p} et \bar{Q} comme grandeurs primaires du phénomène, comme il est d'usage dans la théorie de similitude de tir (chapitre 2), on peut écrire, d'après (4-90) la progression de l'onde sur l'axe à contre-courant, sous la forme universelle suivante:

$$(5-12) \quad \sqrt{\frac{\bar{p}}{\rho_g}} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \frac{\tilde{X}}{D} = \left(\frac{\pi \delta_g (\delta_g + 1)}{4 (\delta_g - 1) \delta} \right)^{1/5} R^* \left(\sqrt{\frac{\bar{p}}{\rho_g}} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \frac{\bar{c} t_c}{D} \right)^{3/5} - \beta \bar{M} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\rho_g}} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \frac{\bar{c} t_c}{D}$$

Sur la figure 113, cette formule est confrontée aux expériences, pour un tir de fusil de calibre 7.62mm placé dans la soufflerie I.C.S. de l'I.M.F.L. décrite en 2-2-3-2, avec $\bar{M}=0$ et $\bar{M}=0.69$.

Sur le graphique de gauche l'accord n'est pas satisfaisant pour $\bar{M}=0.69$. Cela provient de ce que, pendant la phase de formation, l'onde de bouche ne suit pas la loi de l'explosion pour l'effet du courant même en l'absence de phénomènes précurseurs, éliminés ici par la vidange préalable de l'air initialement contenu dans le tube. C'est pourquoi, dans un deuxième calcul nous n'avons introduit l'effet du contre-courant qu'à la fin de la phase de formation. On voit alors sur le graphe de droite que la coïncidence est presque parfaite. Pour obtenir la correspondance complète avec le tir, il faut donc introduire non seulement \tilde{X} et \tilde{t} mais encore le décalage temporel \tilde{t}_u tel que $\tilde{t}_u + \tilde{t}$ soit égal à la durée de la phase de formation de l'onde de bouche. Ces corrections s'appliquent à 5-12 en posant:

$$(5-13-1) \quad \begin{cases} \eta = 0 & \text{pour } t_c < \tilde{t}_u \\ \eta = \left(\frac{4(\delta_g - 1)\delta}{\pi(\delta_g + 1)\delta_g} \right)^{1/5} \frac{\bar{M}}{\xi_0} \left(\sqrt{\frac{\bar{p}}{\rho_g}} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \frac{\bar{c} t}{D} \right)^{2/5} & \text{pour } t_c > \tilde{t}_u \end{cases}$$

et

$$(5-13-2) \quad X = \tilde{X} + \tilde{x}$$

Seule une étude de la phase de formation permettrait de déterminer ces termes correctifs sans avoir recours à l'empirisme. Cependant, comme \tilde{t}_u est de l'ordre de grandeur de \tilde{t} , les relations (5-2) et (2-27-2) montrent que ces termes sont de l'ordre de grandeur des erreurs introduites dans la théorie de la similitude par l'hypothèse de tir intense (2-26). Ainsi dans le domaine spatio-temporel d'application de la similitude, la formule (5-12) peut être utilisée en confondant t_c avec t et \tilde{X}

avec X sans entraîner d'erreurs importantes sur les résultats. On peut donc déduire, dans ce cas, l'intensité du choc de la formule (4-91) qui s'écrit ici:

$$(5.14) \quad M_R = \frac{3}{5} \left(\frac{(\gamma_g + 1) \gamma_g R}{4 (\gamma_g - 1) \gamma} \right)^{1/5} \omega^* \left(\sqrt{\frac{P}{\rho_g}} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \frac{\bar{c} t}{D} \right)^{-2/5} - (1 - \beta) \bar{M} \sin(\lambda + \theta)$$

et les grandeurs sur le choc découlent de (4-97). Les courbes des figures 98 à 110 pour $\alpha=1$ et $\gamma=1.4$ s'appliquent donc directement au tir avec les définitions de R^+ et t^+ données par (5-10).

Sur la figure 113, on peut encore comparer les résultats de visualisation avec la forme d'onde calculée. Il apparaît que le volume moyen occupé par les gaz brûlés est bien prédit par le modèle malgré l'anisotropie du phénomène réel.

Il est certain que l'écoulement intérieur au choc doit être assez différent de l'écoulement calculé, en particulier pour $r=R'$, mais, si l'on s'intéresse principalement au phénomène d'interaction entre le tir canon et le fonctionnement d'une prise d'air, ce qui importe c'est essentiellement la progression du choc à contre-courant. En effet, l'intensité de ce choc est le paramètre essentiel permettant l'évaluation de cette interaction. Notre modèle remplit donc parfaitement cet usage, mais il faut l'adapter au cas où le tir se fait en présence d'un fuselage.

5-3 APPLICATION AU TIR D'UNE ARME EMBARQUEE A HAUTE ALTITUDE

En général, la présence d'un obstacle détruit l'uniformité de l'écoulement extérieur: par conséquent la théorie développée ne s'applique pas. Cependant, il peut arriver que la présence d'un obstacle soit compatible avec l'hypothèse d'un écoulement extérieur uniforme. Cela arrive lorsque l'obstacle est constitué par une surface cylindrique de génératrices parallèles à la vitesse au loin.

Deux cas peuvent se présenter.

Si l'obstacle ne contient pas le lieu de l'explosion, la théorie

s'applique jusqu'à ce que l'onde de choc atteigne l'obstacle. Si l'obstacle contient le lieu de l'explosion, ce qui signifie en pratique que le canon fait partie du fuselage, la théorie s'applique à condition que la présence de l'obstacle n'introduise aucune grandeur dimensionnée dans le bilan des grandeurs caractéristiques. Du fait qu'il est cylindrique, un tel obstacle ne peut être qu'un dièdre infini d'arête parallèle à la vitesse de l'écoulement uniforme. Enfin, pour que la distance du lieu de l'explosion à l'arête du dièdre n'intervienne pas dans le problème, il faut que l'explosion ait lieu sur cette arête.

Considérons le problème suivant: soit une explosion violente dans un milieu infini en translation uniforme suivant l'axe $\tilde{O}x$ et dont on appelle E' l'intensité de l'apport d'énergie issu de \tilde{O} lieu de l'explosion, quelle est la part E de E' qui est dissipée dans le dièdre infini W d'arête $\tilde{O}x$ et d'angle au sommet $2\pi - \varphi_0$ (figure 114) ?

Comme l'apport d'énergie est isotrope, il est évident que E' est donnée par:

$$(5-15) \quad E = \left(1 - \frac{\varphi_0}{2\pi}\right) E'$$

Le problème peut être posé autrement: soit E l'apport d'énergie d'une explosion issue d'une source \tilde{O} dans un milieu animé d'une translation uniforme d'axe $\tilde{O}x$ et occupant le dièdre W ; en sachant que cette explosion n'admet pas de direction privilégiée, quelle est l'intensité E' de l'apport d'énergie de l'explosion isotrope dans l'espace complet qui coïncide avec l'explosion donnée dans W ?

La réponse est donnée par la formule (5-15).

Appliquons cela au tir d'une arme embarquée, en assimilant le fuselage au dièdre w , complémentaire de W dans l'espace complet. La propagation du choc dans W est celle de l'explosion isotrope dans tout l'espace, d'intensité E' donnée par (5-15). Elle est donc obtenue en appliquant (4-90) à cette explosion et en

substituant E' à E dans (4-88). Comme dans la réalité, l'axe de tir est pratiquement parallèle à la vitesse au loin, on peut l'assimiler avec l'arête du dièdre et, puisqu'on s'intéresse à l'onde en avant de la bouche, on peut utiliser les formules (5-5) et (5-6) avec lesquelles on obtient:

$$(5-16-1) \quad R^+ = \left(\frac{(\delta_g + 1) \delta_g \pi}{4(\delta_g - 1) \left(1 - \frac{\phi_0}{2\pi}\right)} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_g}{\bar{p}}} \sqrt{\frac{c_g}{\bar{c}}} D.$$

$$(5-16-2) \quad t^+ = \frac{R^+}{\bar{c}}$$

et, à contre courant sur l'axe Ox ,

$$(5-17) \quad \sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{p}_g}} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \frac{\tilde{X}}{D} = \left(\frac{(\delta_g + 1) \delta_g \pi}{4(\delta_g - 1) \left(1 - \frac{\phi_0}{2\pi}\right)} \right)^{1/5} \xi_0 R^+ \left(\sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{p}_g}} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \frac{\bar{c} t_c}{D} \right)^{3/5} - \beta \bar{M} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{p}_g}} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \frac{\bar{c} t_c}{D}$$

et

$$(5-18) \quad M_R = \frac{3}{5} \left(\frac{(\delta_g + 1) \delta_g \pi}{4(\delta_g - 1) \left(1 - \frac{\phi_0}{2\pi}\right)} \right)^{1/5} \xi_0 \omega^2 \left(\sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{p}_g}} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_g}} \frac{\bar{c} t_c}{D} \right)^{2/5} + (1 - \beta) \bar{M}$$

qui généralisent les formules (5-12) et (5-14).

On voit dans (5-16) que le domaine de validité de la théorie est d'autant plus grand que ϕ_0 est grand ($0 \ll \phi_0 < 2\pi$).

Les formules (5-17) et (5-18) ne peuvent évidemment s'appliquer que si la forme réelle du fuselage est proche du dièdre w au moins dans un domaine petit devant la sphère de rayon R .

En particulier, la théorie perd toute validité dès que le choc doit contourner des obstacles et subir des réflexions importantes.

Pour les géométries d'avions militaires français récents, cette théorie peut donner une bonne approximation de l'intensité de l'onde de bouche à la lèvre extérieure des prises d'air du réacteur pour des vols à haute altitude.

Donnons en un exemple numérique, pour un avion volant à 8000m, à

Mach 0.8, et tirant avec le canon de 30mm utilisé dans nos recherches. Nous supposons que le fuselage peut être assimilé à un dièdre w d'angle $\varphi_0 = 2\pi/3$ et que l'entrée de la prise d'air est à 1 m de la bouche de l'arme.

L'application de la théorie montre que l'entrée se situe à la distance adimensionnée $\sqrt{\frac{\bar{c}}{c_0}} \sqrt{\frac{\bar{p}}{p_0}} \frac{\tilde{X}}{\bar{D}} = 1$ que l'on peut exprimer aussi

par $\tilde{X} / R^* = 0.29$, et que $M_R = 1.85$ à son niveau.

On en déduit: $p_c / \bar{p} = 3.8$

Remarquons que si l'avion vole à basse vitesse, c'est-à-dire pour $\bar{M} = 0$, on a $M_R = 1.56$ et $p_c / \bar{p} = 2.6$. On voit ainsi que l'effet de \bar{M} compte pour 40% dans la surpression obtenue à la lèvres de la prise d'air à Mach 0.8.

En atmosphère infinie on aurait obtenu: $M_R = 1.75$ pour $\bar{M} = 0.8$ et $M_R = 1.5$ pour $\bar{M} = 0$, l'entrée d'air se situant alors à $\tilde{X}/R^* = 0.34$. On peut vérifier ces résultats en utilisant la figure 97 pour $\alpha = 1$.

De même, on peut vérifier la cohérence de la théorie de l'explosion avec celle de la similitude grâce à la figure 33 qui présente la courbe expérimentale de la progression de l'onde de bouche du canon en atmosphère infinie pour $\bar{M} = 0$. A l'ordonnée 1, la pente M_R de cette courbe est voisine de 1.5 comme le prévoit la théorie de l'explosion.

L'intensité du choc au niveau de la lèvres extérieure de la prise d'air est un paramètre déterminant pour l'interaction tir-prise d'air. La théorie de l'explosion isotrope dans un courant fournit un moyen simple pour le calculer. Elle ne se substitue pas à l'utilisation expérimentale des règles de similitude qui permettent de reproduire l'interaction elle-même, mais elle peut être utilisée avec profit au niveau de la définition d'un avant-projet, lors de l'étude de l'implantation des canons.

ANNEXES

ANNEXE 1

FONCTIONS G_1, G_2, G_3

$$G_1 = \frac{dz_0}{du_0} = \frac{z_0 \left\{ \left[\left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right)^2 \left((3\gamma-1)u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{\alpha+2} \right) \right] - (\gamma-1)u_0 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right) \right\}}{\left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \left[u_0 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right) + \frac{\gamma-1}{2} z_0 \left(\frac{(3-\alpha)(\gamma+1)}{(\alpha+2)\gamma} - 3u_0 \right) \right]} - \frac{(\gamma-1)z_0^2 \left[u_0 - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\gamma + \frac{3-\alpha}{\alpha+2} \right) \right]}{\left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \left[u_0 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right) + \frac{\gamma-1}{2} z_0 \left(\frac{(3-\alpha)(\gamma+1)}{(\alpha+2)\gamma} - 3u_0 \right) \right]}$$

$$G_2 = \frac{d \log \xi}{du_0} = \frac{(\gamma-1)z_0 - 2 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right)^2}{2 \left[u_0 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \left(u_0 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right) + \frac{\gamma-1}{2} z_0 \left(\frac{(3-\alpha)(\gamma+1)}{(\alpha+2)\gamma} - 3u_0 \right) \right]}$$

$$G_3 = \frac{d \log \rho_0}{d \log \xi} = \left(-3u_0 - \frac{1}{G_2(u_0, z_0)} \right) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right)^{-1}$$

SOLUTION ANALYTIQUE POUR $\alpha = 0$

$$z_0 = u_0^2 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} - u_0 \right)^{-1} \quad \text{où: } \frac{\gamma+1}{2\gamma} \leq u_0 \leq 1$$

$$\xi = \left(\frac{5(\gamma+1)}{7-\gamma} - \frac{2(3\gamma-1)}{7-\gamma} u_0 \right)^{\nu_1} \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} u_0 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{\nu_2} u_0^{-2/5}$$

$$\rho_0 = \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} u_0 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{\nu_3} \left(\frac{5(\gamma+1)}{7-\gamma} - \frac{2(3\gamma-1)}{7-\gamma} u_0 \right)^{\nu_4} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{2u_0}{\gamma-1} \right)^{\nu_5}$$

$$\rho_0 = \rho_0 u_0^2 \left(1 - \frac{2u_0}{\gamma+1} \right) \left(\frac{2\gamma u_0}{\gamma+1} - 1 \right)^{-1}$$

avec: $\nu_1 = -\frac{(13\gamma^2 - 7\gamma + 12)}{5(3\gamma-1)(2\gamma+1)}$; $\nu_2 = \frac{\gamma-1}{2\gamma+1}$; $\nu_3 = \frac{3}{3\gamma+1}$; $\nu_4 = -\frac{5\nu_1}{2-\gamma}$; $\nu_5 = -\frac{2}{2-\gamma}$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS u_0, ρ_0, p_0 EN $\xi = \xi'_0$; POUR $\alpha \neq 0$

On sait que:
$$\begin{cases} 1 \leq u_0 < \frac{\gamma+1}{2} \\ \gamma \leq z_0 \end{cases} \text{ pour: } \xi'_0 < \xi \leq 1$$

On montre facilement que $u_0 \xi = G_2^{-1}$; donc si $\xi \rightarrow \xi'_0$, $u_0 \xi$ tend vers la valeur finie: $\left[\frac{(3-\alpha)(\gamma+1)}{\gamma(\alpha+2)} - \frac{3(\gamma+1)}{2} \right] \frac{1}{\xi'_0}$

Le calcul de $\rho_0 \xi$ pour $\xi \rightarrow \xi'_0$ donne:

$$\rho_0 \xi = \frac{G_3 \rho_0}{\xi} = \left(-3u_0 - \frac{1}{G_2} \right) \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right)^{-1} \frac{\rho_0}{\xi}$$

en remplaçant ρ_0 par son expression (32), on trouve que:

$$\rho_0 \xi \sim \left| \frac{\gamma+1}{2} - u_0 \right|^{\frac{4(3-\alpha) - 3(\alpha+2)\gamma}{3(\alpha+2)\gamma + 2(\alpha-3)}}$$

On voit alors que:

$$\begin{aligned} \rho_0 \xi \rightarrow 0 & \quad \text{pour: } \alpha < \frac{12-6\gamma}{3\gamma+4} & \quad \text{ou} & \quad \gamma < \frac{4(3-\alpha)}{3(\alpha+2)} \\ \text{et } \rho_0 \xi \rightarrow \infty & \quad \text{pour: } \alpha > \frac{12-6\gamma}{3\gamma+4} & \quad \text{ou} & \quad \gamma > \frac{4(3-\alpha)}{3(\alpha+2)} \end{aligned}$$

pour $\gamma = 1.4$ la valeur critique de α est: $\alpha = 0.44$

Enfin l'expression $p_0 = \frac{\rho_0 z_0}{\gamma}$ conduit à:

$$p_0 \xi \xi'_0 = p'_0 G'_3 + \frac{\rho'_0}{\gamma} \frac{G'_1}{G'_2} \rightarrow -2p'_0 - \frac{\gamma+1}{4\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)} \right) \rho_0 \quad \text{pour } \xi \rightarrow \xi'_0$$

On en déduit:
$$\lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} [\xi^2 p_0]_{\xi} = 0$$

ANNEXE 2

APPROXIMATION D'ORDRE 1

$$X_{1\xi} = F_1$$

$$\begin{aligned} X_1(1) &= \xi^3 \left[\left(1 - \frac{\gamma+1}{2u_0}\right) f_1 + g_1 \right] & X_1(2) &= \xi^4 \left[\left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2}\right) (f_1 + g_1) + u_0 g_1 + \frac{\gamma-1}{2} p_1 \right] \\ X_1(3) &= \xi^4 h_1 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2}\right) & X_1(4) &= \xi^5 \left[\left(1 - \frac{\gamma+1}{2u_0}\right) \left(\frac{\rho_0 u_0 p_1}{p_0} - \gamma f_1 + s_0 f_1\right) + s_0 g_1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(1) &= \left[-2h_1 - \frac{(2\alpha+9)(\gamma+1)}{2u_0(\alpha+2)} f_1 \right] \xi^2 \\ F_1(2) &= \left[(\gamma-1)p_1 - 2u_0 h_1 - \frac{3(\gamma+1)}{2} (f_1 + g_1) \right] \xi^3 \\ F_1(3) &= \left[\frac{\gamma-1}{2} p_1 - u_0 h_1 - \frac{3(\gamma+1)}{2} h_1 \right] \xi^3 \\ F_1(4) &= \left[-\frac{(2\alpha+9)(\gamma+1)}{2(\alpha+2)u_0} \left(\frac{\rho_0 u_0 p_1}{p_0} - \gamma f_1 + s_0 f_1\right) - 2 \left(\left(1 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)u_0}\right) f_1 + g_1 + s_0 h_1 \right) \right] \xi^2 \end{aligned}$$

ANNEXE 3

SYSTEME DE PASSAGE DES INCONNUES X AUX INCONNUES p, f, g, h .

$$k_1 = \frac{\frac{(\gamma-1)p_0}{2\rho_0} K_4 \xi - (u_0 - \frac{\gamma+1}{2}) K_2 + \left[(u_0 - \frac{\gamma+1}{2})(2u_0 - \frac{\gamma+1}{2}) - \frac{(\gamma-1)p_0 s_0}{2\rho_0} \right] K_1 \xi}{\left[(u_0 - \frac{\gamma+1}{2})^2 - \frac{\gamma(\gamma-1)p_0}{2\rho_0} \right] \left(1 - \frac{\gamma+1}{2u_0} \right) \xi^4}$$

$$k_2 = K_1 \xi^{-3} - \left(1 - \frac{\gamma+1}{2u_0} \right) k_1$$

$$k_3 = K_3 \xi^{-4} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right)^{-1}$$

$$k_4 = \frac{2}{\gamma-1} \left[K_2 \xi^{-4} - \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) (k_1 + k_2) - u_0 k_2 \right]$$

ANNEXE 4
APPROXIMATION D'ORDRE 2
EFFET ANISOTROPE DE LA VITESSE.

$$X_{21\xi} = F_{21}$$

$$\begin{aligned} X_{21}(1) &= \xi^3 \left[f_{21} \left(1 - \frac{\gamma+1}{2}\right) + g_{21} + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right] \\ X_{21}(2) &= \xi^4 \left[\left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2}\right) (f_{21} + g_{21}) + u_0 g_{21} + \frac{\gamma-1}{2} p_{21} + \rho_1 u_1 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4}\right) + \frac{\rho_0 u_1^2}{2} \right] \\ X_{21}(3) &= \xi^4 \left[\left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2}\right) h_2 + \frac{\rho_0 u_1 v_1}{2} + \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4}\right) \frac{\rho_0 v_1}{2} \right] \\ X_{21}(4) &= \xi^3 \left\{ \left(1 - \frac{\gamma+1}{2u_0}\right) \left(\frac{\rho_0 u_0}{2} p_{21} - \gamma f_{21} + s_0 f_{21}\right) + s_0 g_{21} - \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2}\right) \left[\left(\frac{p_1}{2p_0}\right)^2 - \gamma \left(\frac{\rho_1}{2\rho_0}\right)^2 \right] \right\} \\ &\quad + \xi^3 \left[\frac{\rho_1 s_0 u_1}{2} + \frac{\rho_0 s_1 u_1}{2} + \frac{\rho_1 s_1}{2} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{21}(1) &= -\xi^2 \left[3 \left(h_2 + \frac{\rho_1 u_1}{2}\right) + \frac{(\gamma+1)(\alpha+12)}{2(\alpha+2)u_0} f_{21} \right] \\ F_{21}(2) &= \xi^3 \left[(\gamma-1)p_{21} - \left(3u_0 h_2 + \frac{3u_0 \rho_1 v_1}{2} + \frac{3\rho_0 u_1 v_1}{2} + \frac{\rho_0 v_1^2}{2}\right) - \frac{(\gamma+1)(2\alpha+9)}{2(\alpha+2)} \left(f_{21} + g_{21} + \frac{\rho_1 u_1}{2}\right) \right] \\ F_{21}(3) &= \xi^3 \left[(\gamma-1)p_{21} - \left(u_0 h_2 + \frac{u_0 \rho_1 v_1}{2} + \frac{\rho_0 u_1 v_1}{2} + \frac{3\rho_0 v_1^2}{2}\right) - \frac{(\gamma+1)(2\alpha+9)}{2(\alpha+2)} \left(h_2 + \frac{\rho_1 v_1}{2}\right) \right] \\ F_{21}(4) &= -\frac{(\gamma+1)(\alpha+12)}{2(\alpha+2)u_0} \xi^2 \left\{ \frac{\rho_0 u_0}{p_0} p_{21} - \gamma f_{21} + s_0 f_{21} - u_0 \rho_0 \left[\left(\frac{p_1}{2p_0}\right)^2 - \gamma \left(\frac{\rho_1}{2\rho_0}\right)^2 \right] + \frac{u_0 \rho_1 s_1}{2} \right\} \\ &\quad - 2\xi^2 \left[\left(1 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)u_0}\right) f_{21} + g_{21} + \frac{3s_0 h_2}{2} + \frac{3\rho_0 s_1 v_1}{4} + \frac{3\rho_1 s_0 v_1}{4} + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right] \end{aligned}$$

On rappelle que $s_{21} = \frac{p_{21}}{p_0} - \gamma \frac{\rho_{21}}{\rho_0} - \left(\frac{p_1}{2p_0}\right)^2 + \gamma \left(\frac{\rho_1}{2\rho_0}\right)^2$

APPROXIMATION D'ORDRE 2
EFFET ISOTROPE DE LA PRESSION.

$$X_{22\xi} = F_{22}$$

$$X_{22}(1) = \xi^3 \left[f_{22} \left(1 - \frac{\gamma + 1}{2} \right) + g_{22} \right]$$

$$X_{22}(2) = \xi^4 \left[\left(u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} \right) (f_{22} + g_{22}) + u_0 g_{22} + \frac{\gamma - 1}{2} p_{22} \right]$$

$$X_{22}(3) = 0$$

$$X_{22}(4) = \xi^5 \left[\left(1 - \frac{\gamma + 1}{2u_0} \right) \left(\frac{\rho_0 u_0}{2} p_{22} - \gamma f_{22} + s_0 f_{22} \right) + s_0 g_{22} \right]$$

$$F_{22}(1) = -\xi^2 \left[\frac{(\gamma + 1)(\alpha + 12)}{2(\alpha + 2)u_0} f_{22} \right]$$

$$F_{22}(2) = \xi^3 \left[(\gamma - 1)p_{22} - \frac{(\gamma + 1)(2\alpha + 9)}{2(\alpha + 2)} (f_{22} + g_{22}) \right]$$

$$F_{22}(3) = 0$$

$$F_{22}(4) = \xi^2 \left\{ -\frac{(\gamma + 1)(\alpha + 12)}{2(\alpha + 2)u_0} \left(\frac{\rho_0 u_0}{\rho_0} p_{22} - \gamma f_{22} + s_0 f_{22} \right) - 2 \left[\left(1 - \frac{5(\gamma + 1)}{2(\alpha + 2)u_0} \right) f_{22} + g_{22} \right] \right\}$$

On rappelle que $s_{22} = \frac{p_{22}}{\rho_0} - \gamma \frac{\rho_{22}}{\rho_0}$

APPROXIMATION D'ORDRE 2
EFFET ISOTROPE DE LA VITESSE.

$$X_{23\xi} = F_{23}$$

$$X_{23}(1) = \xi^3 \left[f_{23} \left(1 - \frac{\gamma+1}{2} \right) + g_{23} + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right]$$

$$X_{23}(2) = \xi^4 \left[\left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) (f_{23} + g_{23}) + u_0 g_{23} + \frac{\gamma-1}{2} p_{23} + \rho_1 u_1 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{4} \right) + \frac{\rho_0 u_1^2}{2} \right]$$

$$X_{23}(3) = 0$$

$$X_{23}(4) = \xi^5 \left\{ \left(1 - \frac{\gamma+1}{2u_0} \right) \left(\frac{\rho_0 u_0}{2} p_{23} - \gamma f_{23} + s_0 f_{23} \right) + s_0 g_{23} - \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \left[\left(\frac{p_1}{2p_0} \right)^2 - \gamma \left(\frac{\rho_1}{2\rho_0} \right)^2 \right] \right\} \\ + \xi^3 \left[\frac{\rho_1 s_0 u_1}{2} + \frac{\rho_0 s_1 u_1}{2} + \frac{\rho_1 s_1}{2} \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right]$$

$$F_{23}(1) = -\xi^2 \left[\left(h_2 + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right) + \frac{(\gamma+1)(\alpha+12)}{2(\alpha+2)u_0} f_{23} \right]$$

$$F_{23}(2) = \xi^3 \left[(\gamma-1)p_{23} - \left(u_0 h_2 + \frac{u_0 \rho_1 v_1}{2} + \frac{\rho_0 u_1 v_1}{2} - \frac{\rho_0 v_1^2}{2} \right) - \frac{(\gamma+1)(2\alpha+9)}{2(\alpha+2)} \left(f_{23} + g_{23} + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right) \right]$$

$$F_{23}(3) = 0$$

$$F_{23}(4) = -\frac{(\gamma+1)(\alpha+12)}{2(\alpha+2)u_0} \xi^2 \left\{ \frac{\rho_0 u_0}{p_0} p_{23} - \gamma f_{23} + s_0 f_{23} - u_0 \rho_0 \left[\left(\frac{p_1}{2p_0} \right)^2 - \gamma \left(\frac{\rho_1}{2\rho_0} \right)^2 \right] + \frac{u_0 \rho_1 s_1}{2} \right\} \\ - 2\xi^2 \left[\left(1 - \frac{5(\gamma+1)}{2(\alpha+2)u_0} \right) f_{23} + g_{23} + \frac{s_0 h_2}{2} + \frac{\rho_0 s_1 v_1}{4} + \frac{\rho_1 s_0 v_1}{4} + \frac{\rho_1 u_1}{2} \right]$$

On rappelle que $s_{23} = \frac{p_{23}}{p_0} - \gamma \frac{\rho_{23}}{\rho_0} - \left(\frac{p_1}{2p_0} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\rho_1}{2\rho_0} \right)^2$

ANNEXE 5

FONCTIONS DE λ_s

ORDRE 0

$$\rho_0^* = \tilde{\rho}_0 = \rho_0; \quad p_0^* = \tilde{p}_0 = \lambda_s^2 p_0; \quad u_0^* = \tilde{u}_0 = \lambda_s u_0$$

ORDRE 1

En posant: $\Delta\xi_1 = \frac{\xi_1(\lambda_s - \xi_0')}{1 - \xi_0'}$, on a:

$$\begin{aligned} \rho_1^* &= \rho_1 + \rho_0 \xi \Delta\xi_1 \\ p_1^* &= p_1 \lambda_s^2 + (p_0 \xi \lambda_s^2 + 2p_0 \lambda_s) \Delta\xi_1 \\ u_1^* &= u_1 \lambda_s + (u_0 \xi \lambda_s + u_0) \Delta\xi_1 \\ v_1^* &= v_1 \lambda_s \end{aligned}$$

En notant f^{*1} la valeur d'une fonction quelconque f^* en $\lambda_s = 1$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1 &= \rho_1^* - \rho_0^* \rho_1^{*1} \\ \tilde{p}_1 &= p_1^* - p_0^* p_1^{*1} \\ \tilde{u}_1 &= u_1^* - u_0^* u_1^{*1} \\ \tilde{v}_1 &= \frac{v_1^*}{v_1^{*1}} \end{aligned}$$

ORDRE 2

EFFET ANISOTROPE DE LA VITESSE

On pose: $\Delta\xi_{21} = \frac{\xi_{21}(\lambda_s - \xi'_0) + \xi'_{21}(1 - \lambda_s)}{1 - \xi'_0}$. On peut écrire alors:

$$\rho_{21}^* = \rho_{21} + \frac{\rho_{1\xi}}{2} \Delta\xi_1 + \rho_{0\xi} \Delta\xi_{21} + \frac{\rho_{0\xi\xi}}{4} (\Delta\xi_1)^2$$

$$p_{21}^* = p_{21} \lambda_s^2 + p_{1\lambda_s} \Delta\xi_1 + \frac{p_{1\xi}}{2} \lambda_s^2 \Delta\xi_1 + (2p_{0\lambda_s} + p_{0\xi} \lambda_s^2) \Delta\xi_{21} + \left(\frac{p_0}{2} + \frac{p_{0\xi\xi}}{4} \right) (\lambda_s \Delta\xi_1)^2 + p_{0\xi} (\Delta\xi_1)^2$$

$$u_{21}^* = u_{21} \lambda_s + \frac{u_1}{2} \Delta\xi_1 + \frac{u_{1\xi}}{2} \lambda_s \Delta\xi_1 + (u_0 + u_{0\xi} \lambda) \Delta\xi_{21} + \frac{u_{0\xi\xi}}{4} \lambda_s (\Delta\xi_1)^2 + \frac{u_{0\xi}}{2} (\Delta\xi_1)^2$$

$$v_2^* = v_2 \lambda_s + (v_{1\xi} \lambda_s + v_1) \Delta\xi_1$$

EFFET ISOTROPE DE LA PRESSION

On pose: $\Delta\xi_{22} = \frac{\xi_{22}(\lambda_s - \xi'_0) + \xi'_{22}(1 - \lambda_s)}{1 - \xi'_0}$. On peut écrire alors:

$$\rho_{22}^* = \rho_{22} + \rho_{0\xi} \Delta\xi_{22}$$

$$p_{22}^* = p_{22} \lambda_s^2 + (2p_{0\lambda_s} + p_{0\xi} \lambda_s^2) \Delta\xi_{22}$$

$$u_{22}^* = u_{22} \lambda_s + (u_0 + u_{0\xi} \lambda) \Delta\xi_{22}$$

ORDRE 2

EFFET ISOTROPE DE LA VITESSE

On pose: $\Delta \xi_{23} = \frac{\xi_{23}(\lambda_s - \xi'_0) + \xi'_{23}(1 - \lambda_s)}{1 - \xi'_0}$. On peut écrire alors:

$$\rho_{23}^* = \rho_{23} + \frac{\rho_{1\xi}}{2} \Delta \xi_1 + \rho_{0\xi} \Delta \xi_{23} + \frac{\rho_{0\xi\xi}}{4} (\Delta \xi_1)^2$$

$$p_{23}^* = p_{23} \lambda_s^2 + p_1 \lambda_s \Delta \xi_1 + \frac{p_{1\xi}}{2} \lambda^2 \Delta \xi_1 + (2p_0 \lambda_s + p_{0\xi} \lambda_s^2) \Delta \xi_{23} + \left(\frac{p_0}{2} + \frac{p_{0\xi\xi}}{4} \right) (\lambda_s \Delta \xi_1)^2 + p_{0\xi} (\Delta \xi_1)^2$$

$$u_{23}^* = u_{23} \lambda_s + \frac{u_1}{2} \Delta \xi_1 + \frac{u_{1\xi}}{2} \lambda_s \Delta \xi_1 + (u_0 + u_{0\xi} \lambda) \Delta \xi_{23} + \frac{u_{0\xi\xi}}{4} \lambda_s (\Delta \xi_1)^2 + \frac{u_{0\xi}}{2} (\Delta \xi_1)^2$$

REPARTITIONS

Soit f_{2i} , l'une quelconque des fonctions ρ_{2i} , p_{2i} , u_{2i} , (i variant de 1 à 3), la relation entre \tilde{f} et f^* s'écrit:

$$\tilde{f}_{2i} = f_{2i}^* - f_0 f_{2i}^{*1} + \frac{f_0 (f_{2i}^{*1})^2}{2} - \frac{f_1^* f_1^{*1}}{2} \quad \text{pour } i=1 \text{ et } i=3$$

$$\tilde{f}_{22} = f_{22}^* - f_0 f_{22}^{*1}$$

Pour \tilde{v}_2 on obtient la formule suivante:

$$\tilde{v}_2 = \frac{v_2^* - v_1^* v_2^{*1}}{v_1^{*1}}$$

ANNEXE 6 PROGRESSION DU CHOC VALEURS NUMERIQUES

EXPLOSION VIOLENTE ISOTROPE DANS UN ECOULEMENT UNIFORME
GAMMA=0.1200D+01

```

*****
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*  α    *  ξ0 *  ξ0' *  β    *  ξ1 *  ξ1' *
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****
* 0.0000D+00*0.8961D+00*0.0000D+00*0.1000D+01*0.0000D+00*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.1000D+01*0.9103D+00*0.9421D+00*0.5087D+00*0.3265D-01*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.2000D+01*0.8362D+00*0.9625D+00*0.4473D+00*-.3087D-02*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.3000D+01*0.7745D+00*0.9697D+00*0.3974D+00*-.9042D-02*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****

```

```

*****
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*  α    *  ξ21 *  ξ21' *  ξ22 *  ξ22' *  ξ23 *  ξ23' *
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****
* 0.0000D+00*0.0000D+00*0.0000D+00*0.1119D+01*0.0000D+00*0.0000D+00*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.1000D+01*0.9063D-01*0.8815D-01*0.4943D+00*-.4478D+00*0.8064D-01*0.5577D-01*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.2000D+01*0.8205D-01*0.9333D-01*0.2589D+00*-.3046D+00*0.6431D-01*0.5974D-01*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.3000D+01*0.7133D-01*0.7789D-01*0.1943D+00*-.1225D+00*0.4873D-01*0.4562D-01*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****

```

EXPLOSION VIOLENTE ISOTROPE DANS UN ECOULEMENT UNIFORME
 GAMMA=0.1400D+01

```

*****
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*  α    *  ξ0 *  ξ0 *  β    *  ξ1 *  ξ1 *
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.0000D+00*0.1033D+01*0.0000D+00*0.1000D+01*0.0000D+00*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.1000D+01*0.9511D+00*0.9004D+00*0.4988D+00*0.5084D-01*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.2000D+01*0.8635D+00*0.9318D+00*0.4438D+00*-.5390D-02*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.3000D+01*0.7962D+00*0.9432D+00*0.3946D+00*-.1578D-01*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****
    
```

```

*****
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*  α    *  ξ21 *  ξ21 *  ξ22 *  ξ22 *  ξ23 *  ξ23 *
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.0000D+00*0.0000D+00*0.0000D+00*0.1089D+01*0.0000D+00*0.0000D+00*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.1000D+01*0.8884D-01*0.9314D-01*0.4905D+00*-.3996D+00*0.8935D-01*0.5319D-01*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.2000D+01*0.7546D-01*0.9324D-01*0.2711D+00*-.2632D+00*0.6984D-01*0.5954D-01*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.3000D+01*0.6670D-01*0.7938D-01*0.1502D+00*-.1514D+00*0.5387D-01*0.4805D-01*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****
    
```

EXPLOSION VIOLENTE ISOTROPE DANS UN ECOULEMENT UNIFORME
 GAMMA=0.1800D+01

```

*****
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*  a    *  xi_0 *  xi_0' *  beta *  xi_1 *  xi_1' *
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.0000D+00*0.1199D+01*0.0000D+00*0.1000D+01*0.0000D+00*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.1000D+01*0.1018D+01*0.8411D+00*0.4889D+00*0.7051D-01*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.2000D+01*0.9170D+00*0.8831D+00*0.4380D+00*-.8767D-02*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.3000D+01*0.8349D+00*0.8992D+00*0.3894D+00*-.2548D-01*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****
    
```

```

*****
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*  a    *  xi_21 *  xi_21' *  xi_22 *  xi_22' *  xi_23 *  xi_23' *
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.0000D+00*0.0000D+00*0.0000D+00*0.1859D+01*0.0000D+00*0.0000D+00*0.0000D+00*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.1000D+01*0.8706D-01*0.9683D-01*0.4913D+00*-.3254D+00*0.1026D+00*0.5252D-01*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.2000D+01*0.6705D-01*0.9663D-01*0.2841D+00*-.2184D+00*0.8089D-01*0.6253D-01*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
* 0.3000D+01*0.5822D-01*0.8138D-01*0.1602D+00*-.1248D+00*0.6254D-01*0.5202D-01*
*      *      *      *      *      *      *      *      *
*****
    
```

* *
* REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES *
* *

- <1> *ESCLANGON (E.)*
L'acoustique des canons et des projectiles
Extrait du Mémorial de l'artillerie française
Gauthier-Villars - 1925
- <2> *OSWATITSCH (K.)*
Zwischenballistik
Deutsche Luft-und Raumfahrt
DVL - Décembre 1964
- <3> *SEDOV (L.)*
Similitude et dimensions en mécanique
MIR - Ed. de Moscou - 1977
- <4> *SAKURAI (A.)*
Blast wave theory
Basic Developments in Fluid Mechanics
Ed. by Maurice HOLT Vol. 1 Academic Press - 1965
- <5> *WESTINE (P.S.)*
The blast field about the muzzle of guns.
Shock and Vibration bulletin - Mars 1969 pt 6 p 139
- <6> *SMITH (F.)*
A study of gun blast in relation to that from a moving explosion
RARDE memorandum 28/70 - 1970
- <7> *SMITH (F.)*
A theoretical model of the blast from stationary and moving guns
RARDE memorandum 17/74 - 1974
- <8> *PORZEL (F.)*
A unified theory for real explosions
Conference on blast wave phenomena - 13/15 novembre 1973

<9> ZOLTENI (C.K.)

Muzzle devices: A state of the art survey (vol 2)
Theoretical approaches to the calculation of muzzle blast
BRL Memorandum report n°2294 - Mai 1973

<10> WORTMAN (A.)

Unsteady flow phenomena causing weapons fire-aircraft engine inlet interference problems - theory and experiments
Unsteady aerodynamics: Proc of a symposium held at University of arizona, Vol 1 - 18/20 mars 1975

<11> SCHMIDT (E.) - SHEAR (D.)

Optical measurements of muzzle blast
AIAA Journal Vol.13 pp 1086/1091 - Aout 1975

<12> SCHMIDT (E.) - GORDNIER (R.) - FANSLER (K.)

AIAA Journal Vol.22, n°4 pp 516/517 - 1983

<13> KLINGENBERG (G.) - MACH (H.)

Investigation of combustion phenomena associated with the flow of hot propellant gases. I
Spectroscopic temperature measurements inside the muzzle flash of a rifle
Combustion and Flame 27, pp 163/176 - 1976

<14> KLINGENBERG (G.)

Investigation of combustion phenomena associated with the flow of hot propellant gases.III
Experimental survey of the formation and decay of muzzle flow fields and pressure measurements
Combustion and Flame 29, pp 286/309 - 1977

<15> MABEY (D.G.) - CAPPS (D.S.)

Blast from aircraft guns at subsonic and supersonic speeds
Paper B6, 3rd International Symposium on ballistics
Karlsruhe - Mars 1977

<16> MABEY (D.G.)

*Some measurements of gun blast on a Lightning aircraft
RAE Technical memorandum structures 922 - 9 mars 1978*

<17> DYMENT (A.) - FLODROPS (J.P.) - GRYSOY (P.)

*Etude des phénomènes consécutif au tir d'une arme et de
leurs effets sur l'écoulement alimentant une entrée d'air
Rapport IMFL - 14 Juin 1978*

<18> FLODROPS (J.P.) - DESSE (J.M.)

*Effet du tir d'une arme sur le fonctionnement d'une entrée
d'air en incidence
Rapport IMFL 82/14 30 Juin 1982*

<19> DYMENT (A.) - MERLEN (A.)

*Gun firing similarity for aircraft interference problems
Journal of Aircraft Vol.18, Numb.5 p 415 - Mai 1981*

<20> DYMENT (A.) - MERLEN (A.)

*Ecoulement consécutif à une explosion violente ponctuelle
dans un gaz animé initialement d'un mouvement uniforme
C.R. Acad. Sc. Paris, t.294 - 22 février 1982*

<21> RUETENIK (J.) - SMILEY (R.)

*Wind tunnel shock-tube simulation and evaluation of blast
effets on an engine inlet
Rapport DNA 4590F - 15 mars 1978*

<22> FLODROPS (J.P.)

*Effets du tir d'une arme munie ou non d'un décompresseur sur
le fonctionnement d'une entrée d'air en incidence
Rapport IMFL 83/89 - 28 décembre 1983*

- <23> DESSE (J.M.) - HUCK (J.)
Premières applications de la similitude de tir au problème de l'interaction prise d'air - tir canon
Rapport IMFL 87/09 - 25 février 1987
- <24> PATZ (G.)
Ondes de choc agissant sur l'entrée de réacteurs voisins
Rapport ISL 104/84 - 22 Février 1984
- <25> RODRIGUEZ (O.)
The circular cylinder in subsonic and transonic flow
AIAA journal Vol. 22, Numb. 12, pp 1713/1717 - Décembre 1984
- <26> BRUN (E.A.) - MARTINOT-LAGARDE (A.) - MATHIEU (J.)
Mécanique des fluides - tome 1
Dunod -1968
- <27> GRYSON (P.)
Note relative à la mise en place d'un appareillage de visualisation ultra-rapide de type "chronoloupe" dans la soufflerie I.C.S. de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille
Rapport IMFL 84/35 - 5 juillet 1984
- <28> ERDOS (J.)-DEL GUIDICE
Calculation of muzzle blast flowfields
AIAA Journal Vol.13,N°8 pp 1048/1055 - Août 1975
- <29> MACH (H.), KLINGENBERG (G.), MASUR (H.), WERNER (U.), WIELAND (O.)
Mesure spectroscopique de la température des produits de combustion dans le tube et à la sortie de la bouche d'un canon automatique de 20 mm de calibre
Rapport ISL 106/77 - Mai 1977

- <30> FULLER (P.)
Measurement of bore Yaw of projectiles
Ballistics branch RARDE - foort Halstread - England
5ème symposium international de ballistique
Toulouse - Avril 1980
- <31> MERLEN (A.) - DESSE (J.M.)
Similitude de tir. Effet de la phase de formation.
Influence d'un obstacle
Rapport IMFL n°83/64 - Décembre 1983
- <32> MALFATI (R.)
Manuel de rechargement N°3
Editeur Crépin-Leblond - 1973
- <33> DYMENT (A.)
Ecoulement à une dimension d'un gaz barotrope
Cours de DEA- UER de Mathématiques pures et appliquées - USTL
- <34> Etablissement Technique de Bourges
Matériels pressions-vitesses pour cartouches d'armes légères
ETBS - 1976
- <35> KELLER (G.)
Secondary muzzle flash and blast of the british 81 mm,
L16A2 mortar
Memorandum report ARBRL-MR_03117 - Juillet 1981
- <36> CAROFANO (G.)
Secondary waves from nozzle blast
Technical report ARLCB_TR_84028 - Octobre 1984
- <37> DESSE (J.M.)
Etude de faisabilité d'un montage d'interférométrie
différentielle ultra-rapide
Rapport IMFL 86/11 - Mars 1986

- <38> SCHMIDT (E.), GION (E.), FANSLER (K.)
Analysis of weapon parameters controlling the muzzle blast
flow field
5ème symposium international de balistique
Toulouse - Avril 1980
- <39> GIAT (M.)
Contribution à l'étude des jets sous-détendus en atmosphère
raréfiée
Thèse de doctorat d'état és sciences Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) -
- <40> LEWIS (C.) - CARLSON (D.)
Normal shock location in underexpanded gas and particules
jets
AIAA journal vol.2 n°4 - avril 1964
- <41> SCHMIDT (E.) - KAHL (G.) - SHEAR (D.)
Gun blast its propagation and control ballistic research
AIAA-80/1060 Hartford connecticut - juin 1980
- <42> DESSE (J.M.)
Influence des obstacles liés à la bouche de l'arme sur la
similitude de tir
Mémoire CNAM - 1985
- <43> MACH (H.)
mesure de la température et de la vitesse des gaz de
combustion dans le tube et à la bouche d'une arme
Rapport ISL C0206/78 - 1978
- <44> EICHHORN (A.) - WERNER (U.) - MACH (H.) - MASUR (H.)
Mesure des variations de la température en fonction du temps
dans des écoulements à symétrie de révolution
Rapport ISL 132/84 - décembre 1984

- <45> CRIST (S.) - SHERMAN (P.M.) - GLASS (D.R.)
Study of the hight underexpanded sonic jet
AIAA Journal vol. 4 p.68 - Janvier 1966
- <46> FREEMAN (R.A.)
Variable energy blast waves
Brit. J. Appl. Phys. - 1968
- <47> LANDAU (L.) - LIFCHITZ (E.)
Mécanique des fluides
M.I.R - 1971
- <48> GAFFET (B.)
Stability of self similar flow: correct form of basic equations and the shock boundary conditions
The astrophysical Journal 279, pp 419-420 - Avril 1984
- <49> ZEL'DOVICH (Y.) - RAIZER (Y.)
Physics of shock waves and hight-temperature hydrodynamic phenomena. Vol II
Academic Press - 1967
- <50> GUIRAUD (J.P.) - VALLEE (D.) - ZOLVER (R.)
Bluntness effects in hypersonic small disturbance theory
Basic Developments in fluid dynamics. Vol I
Academic Press - 1965
- <51> MERLEN (A.)
Théorie et calcul de l'écoulement consécutif à une explosion violente, ponctuelle et isotrope dans un gaz animé d'un mouvement uniforme
Rapport I.M.F.L. 87/13 - Mars 1987

(52) MERLEN (A.) - HEID (G.) - FLODROPS (J.P) - DESSE (J.M)

*Interaction du tir canon sur le fonctionnement des entrées
d'air du Mirage 2000*

Rapport I.M.F.L 80/36 - Septembre 1980



MOTS CLES

BALISTIQUE INTERMEDIAIRE

TIR D'ARMES

ONDES DE CHOC

EXPLOSIONS VIOLENTES

SIMILITUDE PHYSIQUE

SIMILITUDE INTERNE

RESUME

L'écoulement consécutif au tir des armes à feu est étudié expérimentalement à l'aide de visualisations ultra-rapides et de mesures de pressions instationnaires. La prépondérance de l'effet de l'onde de bouche (ou onde de souffle) est mise en évidence. Les principes de la similitude physique sont appliqués à l'étude de l'onde de bouche: les paramètres sans dimensions régissant le phénomène sont obtenus et leur influence analysée. On aboutit ainsi à la définition d'une méthode expérimentale d'essais sur modèles pour l'étude de l'effet du tir sur le milieu environnant. Une modélisation réaliste dans le cas du tir très intense permet d'assimiler celui-ci à l'écoulement causé par une explosion violente anisotrope. L'étude mathématique des équations générales de l'explosion violente décele une similitude interne mise à profit pour simplifier le problème. On démontre que l'anisotropie de la forme géométrique de l'onde de choc produite par l'explosion est beaucoup moins accentuée que celle de l'apport d'énergie. De ce fait, et si on se borne à représenter la propagation du choc, on peut considérer l'onde comme issue d'une explosion isotrope. A partir du développement asymptotique de la solution bien connue du problème de l'explosion violente isotrope dans un milieu infini au repos, on obtient les effets de la vitesse et de la pression du milieu extérieur lorsqu'il est en translation uniforme. La solution, traitée par une méthode de petites perturbations permet de mettre la loi de propagation de l'onde de choc sous une forme analytique universelle. Le calcul numérique de cet écoulement a été réalisé. Les résultats théoriques ont été confrontés avec succès à l'expérience dans le cas du tir d'arme. Le mémoire se termine par l'application de la théorie de l'explosion au problème de l'interaction du tir d'un canon embarqué sur le fonctionnement des prises d'air d'un avion militaire.