50376 165 UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FLANDRES ARTOIS

Nº d'ordre : 258



DE LILLE FLANDRES ARTOIS

50376

1988

-165

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Jalel TABKA

SPLINES D'INTERPOLATION POLYNOMIALES DE REGULARITE MAXIMUM CONSERVANT LES FORMES ET CONCEPTION DE LA FORME D'UNE MACHINE VOLUMETRIQUE A PALETTES

Soutenue le 4 Juillet 1988 devant la Commission d'Examen

P.

A.

Président : **Rapporteurs**:

Examinateurs:

SABLONNIERE P.J. LAURENT LE MEHAUTE J.C. FIOROT DUPIN J.C. J.M. FLAMME

1 1 1121 5

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

D

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

M. A. DUBRULLE.

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène M. FOURET René M. GABILLARD Robert M. MONTREUIL Jean M. PARREAU Michel M. TRIDOT Gabriel

Electronique Physique du solide Electronique Biochimie Analyse Chimie appliquée

PROFESSEURS - lère CLASSE

M. BACCHUS Pierre **M. BIAYS Pierre** M. BILLARD Jean M. BOILLY Bénoni M. BONNELLE Jean Pierre M. BOSCQ Denis M. BOUGHON Pierre M. BOURIQUET Robert M. BREZINSKI Claude M. BRIDOUX Michel N. CARREZ Christian M. CELET Paul M. CHANLEY Hervé M. COEURE Gérard M. CORDONNIER Vincent M. DEBOURSE Jean Pierre M. DHAINAUT André M. DOUKHAN Jean Claude M. DYMENT Arthur N. ESCAIG Bertrand M. FAURE Robert M. FOCT Jacques M. FRONTIER Serge M. GRANELLE Jean jacques M. GRUSON Laurent N. GUILLAUME Jean N. HECTOR Joseph M. LABLACHE-COMBIER Alain M. LACOSTE Louis M. LAVEINE Jean Pierre M. LEHMANN Daniel Mme LENOBLE Jacqueline M. LEROY Jean Marie M. LHOME Jean M. LOMBARD Jacques M. LOUCHEUX Claude M. LUCQUIN Michel M. MACKE Bruno M. MIGEON Michel M. PAQUET Jacques M. PETIT Francis M. POUZET Pierre M. PROUVOST Jean M. RACZY Ladislas M. SALMER Georges M. SCHAMPS Joel M. SEGUIER Guy M. SIMON Michel Mle SPIK Geneviève M. STANKIEWICZ François M. TILLIEU Jacques M. TOULOTTE Jean Marc M. VIDAL Pierre M. ZEYTOUNIAN Radyadour

Astronomie Céographie Physique du solide Biologie Chimie-Physique Probabilités Algèbre Biologie végétale Analyse numérique Chimie-Physique Informatique Géologie générale Géotechnique Analyse Informatique Gestion des entreprises Biologie animale Physique du solide Mécanique Physique du solide Mécanique Métallurgie Ecologie numérique Sciences Economiques Algèbre Microbiologie Géométrie Chimie organique Biologie végétale Paléontologie Géométrie Physique atomique et moléculaire Spectrochimie Chimie organique biologique Sociologie Chimie physique Chimie physique Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques E.U.D.1.L. Géologie générale Chimie organique Modélisation - Calcul scientifique Minéralogie Electronique Electronique Spectroscopie moléculaire Electrotechnique Sociologie Biochimie Sciences Economiques Physique théorique Automatique Automatique Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ALLAMANDO Etienne M. ANDRIES Jean Claude M. ANTOINE Philippe M. BART André M. BASSERY Louis Mme BATTIAU Yvonne M. BEGUIN Paul M. BELLET Jean M. BERTRAND Hugues M. BERZIN Robert N. BKOUCHE Rudolphe M. BODARD Marcel M. BOIS Pierre M. BOISSIER Daniel M. BOIVIN Jean Claude M. BOUQUELET Stéphane M. BOUQUIN Henri M. BRASSELET Jean Paul M. BRUYELLE Pierre M. CAPURON Alfred M. CATTEAU Jean pierre M. CAYATTE Jean Louis M. CHAPOTON Alain M. CHARET Pierre M. CHIVE Maurice N. CONYN Gérard M. COQUERY Jean Marie M. CORIAT Benjamin Mme CORSIN Paule M. CORTOIS Jean M. COUTURIER Daniel M. CRAMPON Norbert M. CROSNIER Yves M. CURGY Jean jacques Mle DACHARRY Monique N. DAUCHET Max M. DEBRABANT Pierre M. DEGAUQUE Pierre M. DEJAEGER Roger M. DELORME Pierre M. DELORME Robert M. DEMUNTER Paul M. DENEL Jacques M. DE PARIS Jean Claude M. DEPREZ Gilbert M. DERIEUX Jean Claude Mle DESSAUX Odile M. DEVRAINNE Pierre Mme DHAINAUT Nicole M. DHAMELINCOURT Paul M. DORMARD Serge M. DUBOIS Henri M. DUERULLE Alain M. DUBUS Jean Paul

Composants électroniques Eiologie des organismes Analyse Biologie animale Génie des procédés et réactions chimiques Géographie Mécanique Physique atomique et moléculaire Sciences Economiques et Sociales Analyse Algèbre Biologie végétale Mécanique Génie civil Spectrochimie Biologie appliquée aux enzymes Gestion Géométrie et topologie Géographie **Biologie** animale Chimie organique Sciences Economiques Electronique Biochimie structurale Composants électroniques optiques Informatique théorique Psychophysiologie Sciences Economiques et Sociales Paléontologie Physique nucléaire et corpusculaire Chimie organique Tectolique Géodynamique Electronique Biologie Géographie Informatique Géologie appliquée Electronique Electrochimie et Cinétique Physiologie animale Sciences Economiques Sociologie Informatique Analyse Physique du solide - Cristallographie Microbiologie Spectroscopie de la réactivité chimique Chimie minérale Biologie animale Chimie physique Sciences Economiques Spectroscopie hertzienne Spectroscopie hertzienne Spectrométrie des solides

M. DUPONT Christophe Mme EVRARD Micheline M. FAKIR Sabah M. FAUQUEMBERGUE Renaud M. FONTAINE Hubert M. FOUQUART Yves M. FOURNET Bernard M. GAMBLIN André M. GLORIEUX Pierre M. GOBLOT Rémi M. GOSSELIN Cabriel M. GOUDMAND Pierre M. GOURIEROUX Christian M. GREGORY Pierre N. GREMY Jean Paul M. GREVET Patrice 'N. GRIMBLOT Jean M. GUILBAULT Pierre M. HENRY Jean Pierre M. HERMAN Maurice M. HOUDART René M. JACOB Gérard M. JACOB Pierre M. JEAN Raymond M. JOFFRE Patrick M. JOURNEL Gérard M. KREMBEL Jean M. LANCRAND Claude M. LATTEUX Michel Mme LECLERCQ Ginette M. LEFEBVRE Jacques M. LEFEVRE Christian Mle LEGRAND Denise Mle LEGRAND Solange M. LEGRAND Pierre Mme LEHMANN Josiane M. LEMAIRE Jean M. LE MAROIS Henri M. LEROY Yves M. LESENNE Jacques M. LHENAFF René M. LOCQUENEUX Robert M. LOSFELD Joseph M. LOUAGE Francis M. MAHIEU Jean Marie M. MAIZIERES Christian M. MAURISSON Patrick M. MESMACQUE Gérard M. MESSELYN Jean M. MONTEL Marc M. MORCELLET Michel M. MORTREUX André Mme MOUNIER Yvonne M. NICOLE Jacques M. NOTELET Francis M. PARSY Fernand M. PECQUE Marcel M. PERROT Pierre

Vie de la firme (I.A.E.) Génie des procédés et réactions chimiques Algèbre Composants électroniques Dynamique des cristaux Optique atmosphérique Biochimie structurale Géographie urbaine, industrielle et démographie Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques Algèbre Sociologie Chimie physique Probabilités et statistiques I.A.E. Sociologie Sciences Economiques Chimie organique Physiologie animale Génie mécanique Physique spatiale Physique atomique Informatique Probabilités et statistiques Biologie des populations végétales Vie de la firme (I.A.E.) Spectroscopie hertzienne Biochimie Probabilités et statistiques Informatique Catalyse Physique Pétrologie Algèbre Algèbre Chimie Analyse Spectroscopie hertzienne Vie de la firme (I.A.E.) Composants électroniques Systèmes electroniques Géographie Physique théorique Informatique Electronique Optique - Physique atomique Automatique Sciences Economiques et Sociales Génie Mécanique Physique atomique et moléculaire Physique du solide Chimie organique Chimie organique Physiologie des structures contractiles Spectrochimie Systèmes électroniques Mécanique Chimie organique Chimie appliquée

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement Monsieur le Professeur P. SABLONNIÈRE, de l' I.N.S.A. de Rennes, qui me fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

Ce travail a été effectué sous la direction de Monsieur le Professeur J.C. FIOROT, de l'E.N.S.I. de Mécanique et Énergétique de Valenciennes. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J.M. FLAMME, de l'E.N.S.I. de Mécanique et Énergétique de Valenciennes, Monsieur le Professeur P.J. LAURENT, de l'Université de Grenoble, Monsieur le Professeur A. LE MÉHAUTÉ, de l'Université de Lille et Monsieur J.C. DUPIN, Maître de Conférences à l'Université de Valenciennes, qui se sont intéressés à mon travail et qui ont bien voulu le juger.

TABLE DES MATIÈRES

Pa	36
Introduction générale	
Première partie: Splines polynomiales d'interpolation	
de régularité maximum conservant les formes	
Introduction	
Chapitre I: Approche de résolution des problèmes de détermination	
de splines d'interpolation avec conditions de forme 5	
I.1. Le problème traité	
I.1.1. Notations	
I.1.2. Définitions.	
I.1.3. Le problème (Pb (m.j))	
I.2. Opérateur de Bernstein - Base de Bernstein	
I.2.1. Définitions	
I.2.2. Propriétés de l'opérateur de Bernstein.	
I.3. Fonctions splines polynomiales conservant la forme 9	
I.3.1. Principe de la méthode proposée pour la détermination	
de ces fonctions.	
I.3.2. Méthode proposée	l
I.3.3. Splines de régularité maximum	3
<u>Chapitre I</u> : Splines quadratiques d'interpolation de classe C^1	
conservant la forme	,
I.1. Résolution du problème (P 2)	I
I.2. Condition nécessaire et suffisante d'existence de solution	

e

	pour le problème (P 2).	16
	I.3. Algorithme	17
	I .4. Exemple	19
<u>Cha</u>	pitre II : Splines cubiques d'interpolation de classe C^2	
	conservant la forme.	2 2
	II.1. Résolution du problème (P 3).	2 2
	II .1.1. Méthode proposée pour la résolution de (P 3).	22
	I .1.2. Étude du système (S)	2 4
	II.1.3. Étude du système (E)	2 6
	I .2. Exemples	2 9
	I .2.1. 1^{er} Exemple.	2 9
	II .2.2. 2^{me} Exemple.	3 0
	II .2.3. 3^{me} Exemple.	3 6
	II .2.4. 4 ^{me} Exemple.	3 8
	II.3. Programme de résolution du problème (P 3)	46
	Conclusions	54
<u>Deu</u>	<u>xième partie</u> : Étude d'un problème de conception de forme	
	d'une machine volumétrique à palettes	
	avec une contrainte mécanique	56
	Introduction.	57
<u>Cha</u>	pitre N: Le problème traité	58
	W.1. Description d'une pompe.	58
	N.2. Formulation du problème.	58
	N.2.1. Les conditions à satisfaire.	58
	N.2.2. La condition C_1 .	61

I V.2	.3. La co	onditio	n C	2 • [•]	•	•	•	٠	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	64
IV.2	.4. La co	onditio	n C	3.	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	٠	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	64
N .2	.5. Récaj	pitulat	ion	et	do	nne	ées	טמ	mé	éric	lne	s .	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	65
Chapitre	V: Solu	tions 1	prop	080	ées		•	•		•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	6 6
V.1 .	1 ^{ere} Sol	lution.	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	6 6
V .1.	1. Défini	ition.	• •	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	67
V .1.	2. Vérifi	cation	des	co	ndi	itic	ons	(C	: 1.	.1),	(C	21	.2)	, (0	C 1	.3)	, ((CI	l. 4]),				
	(C 1.5), (C :	1.6)	et	(C	1.	7).	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	٠	•		6 8
V .1.	3. Vérifi	cation	des	co	ndi	itic	ons	(C	2.	1)	et	(C	2.	2).	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	6 8
V .1.	4. Vérifi	cation	de 1	la c	con	dit	ior	n ((C 3	3.1)).	•	•	٠	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	6 9
V.2 .	2 ^{me} Sol	ution.	•	٠	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	72
V.2 .	1. Princi	ipe et	défi	niti	ion	de	e la	2"	se	Sol	luti	on	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	72
V.2 .	2. Prései	rvatior	n de	la	ré	gul	ari	té	C^3	•	•	•	•	٠	•	٠	•	•	٠	•	•	•	•	76
V.2 .	3. Étude	du ch	noix	de	£1	et	de	€2	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	77
V.3 .	3 ^{me} Sol	ution.	•	•	•	•	•	•	•	٠	٠	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	8 6
V.4 .	4 ^{me} Sol	ution.	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	8 9
V.5 .	Autres	solutic	ons.	-	•	•	.•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• ,	92
V.5 .	1. 5 ^{me} S	olutio	n.	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	92
V.5 .	2. 6 ^{me} S	olutio	n.	٠	٠	•	٠	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	9 5
Con	clusions.	••	• •	٠	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	96
Réf	érences.	L		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		97

. •.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans de nombreux problèmes on est amené à déterminer des courbes, ayant un certain degré de régularité, permettant soit d'interpoler plusieurs points donnés soit de relier deux points donnés sous certaines contraintes. Dans ces problèmes la forme de la courbe recherchée peut être d'une importance cruciale, en particulier pour les pièces mécaniques.

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à deux problèmes.

Dans la première partie, nous avons traité le problème d'interpolation de données convexes et/ou monotones par des splines polynomiales de régularité maximale conservant ces propriétés de forme - problème (P m) -. Dans le cas général nous avons montré simplement que ce problème se ramène à la résolution d'un système d'inéquations linéaires. En revanche, nous avons poussé l'étude plus loin dans le cas des splines d'interpolation quadratiques de classe C^1 - problème (P 2) - et des splines d'interpolation cubiques de classe C^2 - problème (P 3) - conservant les formes (convexité et/ou monotonie) et nous avons donné une méthode qui permet l'étude de l'existence et la détermination explicite de ces splines.

Dans la deuxième partie, nous avons traité un problème de conception de forme en mécanique avec plusieurs contraintes dont une plus spécifiquement mécanique.

Première partie

SPLINES POLYNOMIALES D' INTERPOLATION

DE RÉGULARITÉ MAXIMUM

CONSERVANT LES FORMES

INTRODUCTION

Dans de nombreux problèmes d'interpolation, il est important que la solution préserve certaines propriétés de forme comme la convexité et la monotonie.

Les interpolants classiques et en particulier les splines polynomiales, ne conservent pas en général de telles propriétés. Ils présentent souvent des inflexions et des oscillations indésirables.

C'est pour ces raisons que se sont developpés de nombreux travaux étudiant les splines polynomiales, ou d'autres types de splines, qui ont l'avantage d'avoir une forme conforme à celle des données.

Mc Allister et Roulier [1], ainsi que Schumaker [2], ont étudié les splines quadratiques qui préservent la monotonie et la convexité. Fritsch et Carlson [3] ont étudié les splines cubiques préservant la monotonie et Constantini et Morandi ([4] et [5]) celles préservant à la fois la monotonie et la convexité. Toutes ces splines sont de classe C^1 .

D'autres auteurs (Neuman [6] et [7], Mettke [8]) ont imposé des conditions supplémentaires, sur les données monotones et convexes, qui permettent de trouver une solution monotone et convexe au problème d'interpolation; solution appartenant à une certaine classe de splines polynomiales. D'autre part Mc Allister et Roulier dans [9], ainsi que Passow et Roulier dans [10], ont montré qu'il peut être impossible de construire des splines polynomiales de degré $\leq m$ donné, convexes et monotones, d'un degré de régularité supérieur à k donné.

D'autres auteurs, ont cherché dans d'autres directions la solution aux problèmes d'interpolation avec conditions de forme. C'est ainsi, par exemple, que Gregory et Delbourgo se sont intéressés aux splines rationnelles et il montrent en particulier dans [11] comment on peut construire des splines rationnelles de classe C^2 monotones.

Medina a fait, dans sa thèse [12], une description et une étude comparative de différents types de splines (polynomiales, rationnelles, sous tension) d'interpolation avec conditions de forme.

Dans cette première partie de la thèse nous nous intéresserons aux splines polynomiales

qui conservent la forme.

Nous supposerons donné un ensemble de points à interpoler ayant une forme donnée et nous chercherons à déterminer une spline polynomiale, dont les restrictions sur chaque intervalle seront exprimées dans la base de Bernstein, interpolant les données et ayant la même forme que les données. Naturellement, le fait que les données soient par exemple convexes et croissantes ne saurait à lui seul garantir l'existence d'une solution convexe et croissante; cela dépend des données.

Nous proposerons une méthode permettant d'étudier l'existence et de déterminer - quand elles existent - des splines polynomiales d'interpolation de régularité maximale (degré \leq m, continuité C^{m-1}) qui conservent la forme.

Dans le cas général (Chapitre I), nous montrerons comment l'étude de l'existence de splines polynomiales d'interpolation de régularité maximale se ramène à un problème de résolution d'un système d'inéquations linéaires.

Nous nous limiterons, par la suite (Chapitre II et Chapitre II) aux degrés 2 et 3.

Dans le chapitre I nous donnerons, pour des données convexes et croissantes, une condition nécessaire et suffisante, portant sur les données, d'existence de splines polynomiales d'interpolation de degré ≤ 2 et de classe C^1 convexes et croissantes et nous montrerons comment fixer, si cette C.N.S. est vérifiée, le seul paramètre libre dont dépend la spline pour qu'elle soit convexe et croissante.

Dans le chapitre II nous montrerons comment, pour des données convexes et croissantes, on peut conclure à l'existence ou à l'inexistence de splines polynomiales d'interpolation de degré ≤ 3 et de classe C^2 convexes et croissantes en examinant la vacuité d'un domaine polygonal; étude que nous ferons, en pratique, graphiquement et qui permet, si ce domaine n'est pas vide, de fixer les deux paramètres libres dont dépend la spline pour qu'elle soit convexe et croissante.

Chapitre I

APPROCHE DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE DÉTERMINATION DE SPLINES D' INTERPOLATION AVEC CONDITIONS DE FORME

I.1. Le Problème traité

I.1.1. Notations

Soit [a, b] un intervalle inclus dans \mathbb{R} .

Supposons donnés: une subdivision de l'intervalle [a , b]

 $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ et n+1 réels $y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n$. Posons:

$$\begin{split} M_i &= (x_i, y_i), \ i = 0, 1, 2, ..., n - 1, n; \\ I_i &= [x_i, x_{i+1}], \ i = 0, 1, 2, ..., n - 1; \\ h_i &= x_{i+1} - x_i, \ i = 0, 1, 2, ..., n - 1; \\ \Delta_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, \ i = 0, 1, 2, ..., n - 1; \\ \text{pour } m \in \mathbb{N}^* \text{ fixe, pour } i \in \{0, 1, 2, ..., n - 2, n - 1\} \text{ et pour } k \in \{0, 1, ..., m - 1\}, \\ x_{i+\frac{k}{m}} &= x_i + \frac{k}{m}h_i. \end{split}$$

I.1.2. Définitions

Nous dirons que les données $\{M_i\}_{i=0,1,...,n}$ sont

1/a) Croissantes (resp. décroissantes) si et seulement si:

 $y_0 \le y_1 \le y_2 \le ... \le y_{n-1} \le y_n$ (resp. $y_0 \ge y_1 \ge y_2 \ge ... \ge y_{n-1} \ge y_n$).

b) Strictement croissantes (resp. strictement décroissantes) si et seulement si:

 $y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{n-1} < y_n$ (resp. $y_0 > y_1 > y_2 > ... > y_{n-1} > y_n$).

2/ Convexes (resp. concaves) si et seulement si:

 $\Delta_0 \leq \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \ldots \leq \Delta_{n-1} \text{ (resp. } \Delta_0 \geq \Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \ldots \geq \Delta_{n-1} \text{)}.$

3/ Monotones (resp. strictement monotones) si et seulement si :

Les données sont croissantes ou décroissantes (resp. strictement croissantes ou strictement décroissantes).

Ces propriétés (monotonie, large ou stricte, convexité et concavité) caractérisent ce que nous appellerons "la forme" des données.

Remarque

Si les données M_i sont des points du graphe d'une fonction monotone (resp. strictement monotone), les données M_i sont monotones (resp. strictement monotones) et si les données M_i sont des points du graphe d'une fonction convexe (resp. concave), les données M_i sont convexes (resp. concaves).

I.1.3. Le Problème (Pb (m,j))

Pour des raisons de clarté, nous supposerons que les données sont convexes et croissantes et nous chercherons à déterminer une spline polynomiale, de degré $\leq m$, notée s_m , de classe $C^j[a,b]$ - j étant un entier < m, fixé - interpolant les points M_i , i=0,1,...,n et conservant la forme (Problème Pb(m,j)).

Ces conditions s' expriment comme suit :

(i) pour i=0,1,...,n-1, $\forall x \in I_i$, $s_m(x) = P_i(x)$, où P_i est un polynôme de degré $\leq m$; (ii) pour i=0,1,...,n-1, $s_m(x_i) = y_i$; (iii) pour i=1,2,...,n-1, $P_{i-1}(x_i) = P_i(x_i)$ et pour k = 1, 2, ..., j, $P_{i-1}^{(k)}(x_i) = P_i^{(k)}(x_i)$, (iv) pour i=0,1,...,n-1, $\forall x \in I_i$, $P_i'(x) \geq 0$ et $P_i''(x) \geq 0$.

La recherche d'une solution est simplifiée dans le cas où les données sont seulement croissantes (resp. convexes) puisque, dans ce cas, seule la condition de positivité de la derivée première (resp. deuxième) est imposée dans (iv).

Naturellement, par symétrie, le cas des données concaves et décroissantes (resp. uniquement croissantes ou uniquement concaves) peut être traité de manière similaire, avec la condition (iv) remplacée par (iv)':

(iv)' pour i=0,1,...,n-1, $\forall x \in I_i$ a) $P_i'(x) \le 0$ et b) $P_i''(x) \le 0$ (resp. a) ou b)).

Nous noterons (P m) le problème (Pb (m,m-1)).

I.2. Opérateur de Bernstein - Base de Bernstein

I.2.1. Définitions

I.2.1.a. Cas d'une fonction définie sur l'intervalle [0, 1]

Soit g une application de [0, 1] dans \mathbb{R} .

Considérons l'opérateur qui, à g, associe le polynôme p de degré \leq m défini sur [0, 1] de la manière suivante:

$$\forall t \in [0,1], \quad p(t) = \sum_{k=0}^{m} g\left(\frac{k}{m}\right) b_{m,k}(t);$$

avec $b_{m,k}(t) = C_m^k (1-t)^{m-k} t^k$, où $C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}$.

1) Cet opérateur est appelé "opérateur de Bernstein" d'ordre m, et sera noté B_m ,

donc

$$\forall t \in [0,1], \quad B_m(g)(t) = p(t).$$

2).Les polynômes $b_{m,k}$, k = 0, 1, ..., m, forment la base de Bernstein de l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq m$.

I.2.1.b. Cas d'une fonction définie sur un intervalle [α, β] quelconque

Considérons une fonction f définie sur $[\alpha, \beta]$, intervalle réel, à valeurs dans *IR*. Ramenons la variable $x, x \in [\alpha, \beta]$, à l'intervalle [0, 1] en posant $t = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$. Nous pouvons alors poser g (t(x)) = f(x) et appliquer l'opérateur de Bernstein à la fonction g.

Plus précisément, considérons le polynôme P(x) ($x \in [\alpha, \beta]$)

$$P(x) = B_m(g)(t) = \sum_{k=0}^m g(\frac{k}{m}) b_{m,k}(t) = \sum_{k=0}^m C_m^k (1-t)^{m-k} t^k f(\alpha + \frac{k}{m} (\beta - \alpha)),$$
$$= \sum_{k=0}^m B_{m,k}(x) f(\alpha + \frac{k}{m} (\beta - \alpha)),$$

avec
$$B_{m,k}(x) = C_m^k \frac{(\beta-x)^{m-k}(x-\alpha)^k}{(\beta-\alpha)^m}$$

P(x) est ainsi l'image par l'opérateur de Bernstein d'une application définie sur un intervalle [α, β] quelconque inclus dans \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

I.2.2. Propriétés de l'opérateur de Bernstein

Nous allons rappeler, quelques propriétés essentielles de l'opérateur de Bernstein qui vont nous servir par la suite (Davis [13] p. 114 - 115, B. Germain-Bonne et P. Sablonnière [14]).

f est une fonction définie sur l'intervalle [α, β] réel, à valeurs réelles.

$$P_1) \ B_m(f)(\alpha) = f(\alpha)$$
$$B_m(f)(\beta) = f(\beta)$$
$$P_2) \ \forall x \in [\alpha, \beta],$$

$$\left(B_m(f)\right)'(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m}{\beta-\alpha} \left(f(\alpha+\frac{k+1}{m}(\beta-\alpha)) - f(\alpha+\frac{k}{m}(\beta-\alpha))\right) B_{m-1,k}(x);$$

 $\forall x \in [\alpha, \beta],$

$$(B_m(f))''(x) = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{m(m-1)}{(\beta-\alpha)^2} (f(\alpha + \frac{k+2}{m}(\beta-\alpha)) - 2f(\alpha + \frac{k+1}{m}(\beta-\alpha)) + f(\alpha + \frac{k}{m}(\beta-\alpha))) B_{m-2,k}(x);$$

et d'une façon plus générale, $\forall j = 1, 2, ..., m, \forall x \in [\alpha, \beta]$,

$$(B_m(f))^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{m-j} \frac{m!}{(m-j)!} \frac{1}{(\beta-\alpha)^j} \Delta^{(j)} f(\alpha + \frac{k}{m}(\beta-\alpha)) B_{m-j,k}(x)$$

où $\Delta^{(j)}f(\alpha + \frac{p}{m}(\beta - \alpha))$ est défini de la manière suivante :

$$\Delta^{(1)}f(\alpha + \frac{p}{m}(\beta - \alpha)) = f(\alpha + \frac{p+1}{m}(\beta - \alpha)) - f(\alpha + \frac{p}{m}(\beta - \alpha)),$$

$$\Delta^{(j)}f(\alpha + \frac{p}{m}(\beta - \alpha)) = \Delta^{(j-1)}f(\alpha + \frac{p+1}{m}(\beta - \alpha)) - \Delta^{(j-1)}f(\alpha + \frac{p}{m}(\beta - \alpha)).$$

Nous pouvons alors en déduire les deux résultats P₃) et P₄) suivants. P₃) $\forall j = 1, 2, ..., m$,

$$a) \left(B_m(f)\right)^{(j)}(\alpha) = \frac{m!}{(m-j)!} \frac{1}{(\beta-\alpha)^j} \Delta^{(j)} f(\alpha)$$
$$b) \left(B_m(f)\right)^{(j)}(\beta) = \frac{m!}{(m-j)!} \frac{1}{(\beta-\alpha)^j} \Delta^{(j)} f(\alpha + \frac{m-j}{m}(\beta-\alpha))$$

 P_4) a) f croissante $\implies B_m(f)$ croissante;

f décroissante $\implies B_m(f)$ décroissante.

b) f convexe $\implies B_m(f)$ convexe;

f concave $\implies B_m(f)$ concave.

Preuves

a) f croissante (resp. décroissante) \implies $\forall k = 0, 1, ..., m-1, \quad f(\alpha + \frac{k+1}{m}(\beta - \alpha)) - f(\alpha + \frac{k}{m}(\beta - \alpha)) \ge 0$ (resp. $\forall k = 0, 1, ..., m-1, \quad f(\alpha + \frac{k+1}{m}(\beta - \alpha)) - f(\alpha + \frac{k}{m}(\beta - \alpha)) \le 0$) $\implies \forall x \in [\alpha, \beta] \quad B_m(f)'(x) \ge 0 \text{ (resp. } \forall x \in [\alpha, \beta] \quad B_m(f)'(x) \le 0$). b) f convexe (resp. concave) \implies $\forall k = 0, 1, ..., m-1, \quad f(\alpha + \frac{k+2}{m}(\beta - \alpha)) - 2f(\alpha + \frac{k+1}{m}(\beta - \alpha)) + f(\alpha + \frac{k}{m}(\beta - \alpha)) \ge 0$ (resp. $\forall k = 0, 1, ..., m-1, f(\alpha + \frac{k+2}{m}(\beta - \alpha)) - 2f(\alpha + \frac{k+1}{m}(\beta - \alpha)) + f(\alpha + \frac{k}{m}(\beta - \alpha)) \ge 0$) $\implies \forall x \in [\alpha, \beta] \quad B_m(f)''(x) \ge 0 \text{ (resp. } \forall x \in [\alpha, \beta] \quad B_m(f)''(x) \le 0$).

Cette propriété P_4) peut être appelée propriété "de conservation de forme", puisque l'opérateur de Bernstein associe à f un polynôme de degré $\leq m$ qui a les mêmes caractéristiques de forme que f (monotonie, convexité, concavité).

I.3. Fonctions splines polynomiales conservant la forme

I.3.1. Principe de la méthode proposée pour la détermination de ces fonctions

Nous nous proposons dans cette étude, de développer une méthode de construction de fonctions splines polynomiales d'interpolation de degré \leq m et de classe C^{j}

(j < m), qui conservent la forme.

Cette méthode consiste à définir, sur chaque intervalle I_i , une fonction linéaire par morceau L_i , fonction dont le graphe est la ligne brisée joignant les m points:

 $M_{i+\frac{k}{m}} = (x_{i+\frac{k}{m}}, y_{i+\frac{k}{m}}), k = 0, 1, ..., m-1, m$; les ordonnées $y_{i+\frac{k}{m}}, k = 1, ..., m-1$, étant à déterminer.

Pour déterminer $y_{i+\frac{k}{m}}$, i = 0, 1, ..., n-1, k = 1, 2, ..., m-1, nous avons deux types de conditions: des conditions de forme et des conditions de continuité.

Pour les conditions de forme, il s'agit de choisir pour chaque intervalle I_i les m-1 réels $y_{i+\frac{k}{m}}$, k = 1,2,...,m-1 de façon à ce que L_i ait la même forme que les données, par exemple si les données sont convexes et/ou croissantes il faut choisir les $y_{i+\frac{k}{m}}$, k = 1, 2, ..., m-1, tels que L_i soit convexe et/ou croissante.

En appliquant l'opérateur de Bernstein d'ordre m à L_i nous obtiendrons alors, dans chaque intervalle I_i , un polynôme de degré $\leq m$, joignant M_i et M_{i+1} , ayant la même forme que les données.

Notons au passage que c'est souvent pour recourir à ce type de procédé, que la base de Bernstein est souvent utilisée pour exprimer les splines polynomiales d'interpolation quand on veut étudier la conservation des formes ([9], [15])

Les conditions de raccordement C^j au nœud x_i , se traduisent quant à elles par des équations reliant les ordonnées des points $\{M_{i+\frac{1}{m}}\}_{k=0,1,\dots,m-1}$ dans l'intervalle I_i , aux ordonnées des points $\{M_{i-1+\frac{1}{m}}\}_{k=0,1,\dots,m-1}$ dans l'intervalle voisin I_{i-1} .

Les n(m-1) inconnues du problème $(y_{i+\frac{k}{m}}, i = 0, 1, ..., n-1, k = 1, 2, ..., m-1)$ étant ainsi déterminées - quand cela est possible, naturellement - les polynômes P_i définissant la spline dans chaque intervalle sont complètement déterminés.

On peut utiliser ce procédé pour des splines de degré \leq m et de classe C^j (j < m)mais nous nous limiterons dans la suite aux splines de régularité maximale (de degré \leq m et de classe C^{m-1}). Autrement dit, nous nous intéressons au problème (P m).

I.3.2. Méthode proposée

Posons, pour i = 0, 1, ..., n-1,

$$P_i(x) = \frac{1}{h_i^m} \sum_{k=0}^m C_m^k y_{i+\frac{k}{m}} (x_{i+1} - x)^{m-k} (x - x_i)^k.$$

Supposons

$$\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\} \quad y_i \le y_{i+\frac{1}{m}} \le y_{i+\frac{2}{m}} \le ... \le y_{i+1} \tag{1},$$

$$\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\} \quad \frac{y_{i+\frac{1}{m}} - y_i}{x_{i+\frac{1}{m}} - x_i} \le \frac{y_{i+\frac{2}{m}} - y_{i+\frac{1}{m}}}{x_{i+\frac{2}{m}} - x_{i+\frac{1}{m}}} \le ... \le \frac{y_{i+1} - y_{i+\frac{m-1}{m}}}{x_{i+1} - x_{i+\frac{m-1}{m}}}$$
(2).

Si nous considérons dans chaque intervalle I_i la fonction L_i dont le graphe est la ligne brisée joignant les points $M_{i+\frac{k}{m}}, k = 0, 1, ..., m$, avec $M_{i+\frac{k}{m}} = (x_{i+\frac{k}{m}}, y_{i+\frac{k}{m}})$, alors $P_i = B_m(L_i)$. D'après la propriété P_1), $P_i(x_i) = y_i$ et $P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$.

Cette fonction L_i est croissante et convexe, d'aprés (1) et (2); par conséquent d'après la propriété P_4), $P_i = B_m(L_i)$ est un polynôme croissant et convexe.

Posons,

$$d_{i+\frac{k}{m}} = \frac{y_{i+\frac{k+1}{m}} - y_{i+\frac{k}{m}}}{x_{i+\frac{k+1}{m}} - x_{i+\frac{k}{m}}} = m\frac{y_{i+\frac{k+1}{m}} - y_{i+\frac{k}{m}}}{h_i}, \ i = 0, 1, ..., n-1, \ k = 0, 1, ..., m-1.$$

Nous avons alors la relation suivante :

$$\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}, \quad \sum_{k=0}^{m-1} d_{i+\frac{k}{m}} = m\Delta_i$$
 (3).

Les conditions (1) et (2) s'écrivent de la manière suivante, faisant intervenir $d_{i+\frac{1}{2}}$:

$$\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}, \quad d_i \ge 0, \quad d_{i+\frac{1}{m}} \ge 0, \quad ...d_{i+\frac{m-1}{m}} \ge 0$$
 (1).

$$\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}, \quad d_i \leq d_{i+\frac{1}{m}} \leq ... \leq d_{i+\frac{m-1}{m}}$$
(2).

Le problème (P m) revient donc à déterminer $\{d_{i+\frac{k}{m}}\}, i = 0, 1, ..., n-1, k = 0, 1, ..., m-1$, vérifiant les conditions (1)', (2)', et (3); et assurant la continuité des dérivées première, seconde, ..., (m-2)ième et(m-1)ième aux nœuds.

D' après P_2), pour tout i = 1, ..., n-1:

La continuité de la dérivée première au nœud $x_i \iff$

$$d_{i-1+\frac{m-1}{m}}=d_i \qquad (C^1).$$

La continuité de la dérivée seconde au nœud $x_i \iff$

$$\frac{d_{i-1+\frac{m-1}{m}}-d_{i-1+\frac{m-2}{m}}}{h_{i-1}}=\frac{d_{i+\frac{1}{m}}-d_{i}}{h_{i}}\qquad (C^{2}).$$

La continuité de la dérivée troisième au nœud $x_i \iff$

$$\frac{\frac{d_{i-1+\frac{m-1}{m}-d_{i-1+\frac{m-2}{m}}}{h_{i-1}} - \frac{d_{i-1+\frac{m-2}{m}-d_{i-1+\frac{m-3}{m}}}{h_{i-1}}}{h_{i-1}}}{h_{i}} = \frac{\frac{d_{i+\frac{2}{m}-d_{i+\frac{1}{m}}}{h_{i}} - \frac{d_{i+\frac{1}{m}-d_{i}}}{h_{i}}}{h_{i}}}{h_{i}} \iff \frac{\frac{d_{i-1+\frac{m-1}{m}-2}d_{i-1+\frac{m-2}{m}+d_{i-1+\frac{m-3}{m}}}}{h_{i}}}{h_{i}} = \frac{\frac{d_{i+\frac{2}{m}-2}d_{i+\frac{1}{m}}}{h_{i}}}{h_{i}}}{h_{i}}$$

La continuité de la dérivée (j)ième, pour j < m, au nœud $x_i \iff$

$$\frac{d_{i-1+\frac{m-1}{m}} - C_{m-1}^{1}d_{i-1+\frac{m-2}{m}} + \dots (-1)^{j-2}C_{m-1}^{1}d_{i-1+\frac{m-j-1}{m}} + (-1)^{j-1}d_{i-1+\frac{m-j}{m}}}{h_{i-1}^{j-1}} =$$

$$\frac{d_{i+\frac{j-1}{m}} - C_{m-1}^{1}d_{i+\frac{j-2}{m}} + C_{m-1}^{2}d_{i+\frac{j-3}{m}} - \dots + (-1)^{j-2}C_{m-1}^{1}d_{i+\frac{j}{m}} + (-1)^{j-1}d_{i}}{h_{i}^{j-1}} \qquad (C^{j}).$$

En vertu des conditions de raccordement (C^1) et (C^2) nous avons :

pour
$$i = 1, 2, ..., n - 1$$
, $d_{i-1+\frac{m-1}{m}} = d_i = \frac{\frac{d_{i-1+\frac{m-2}{m}}}{h_{i-1}} + \frac{d_{i+\frac{1}{m}}}{h_i}}{\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}}$.

Par conséquent l'ensemble des inégalités (1)' et (2)' est équivalent au système d'inégalités suivant:

$$0 \le d_0 \le d_{0+\frac{1}{m}} \le \dots \le d_{0+\frac{m-2}{m}} \le d_{1+\frac{1}{m}} \le d_{1+\frac{2}{m}} \le \dots \le d_{1+\frac{m-2}{m}} \le \dots \le d_{n-1+\frac{1}{m}} \le d_{n-1+\frac{1}{m}} \le \dots \le d_{n-1+\frac{m-1}{m}}$$
(I).

I.3.3. Splines de régularité maximale

Nous savons que dim $\mathbb{P}_m^{m-1} = m+n$ [16], où \mathbb{P}_m^{m-1} désigne l'espace des splines polynomiales de degré $\leq m$, relatives à la subdivision de n+1 points considérée et de classe C^{m-1} ; donc un élément de \mathbb{P}_m^{m-1} qui interpole ces points, dépend de m-1 paramètres utilisables pour exprimer les conditions de forme.

Prenons par exemple $d_0, d_{0+\frac{1}{m}}, ..., d_{0+\frac{m-2}{m}}$ comme paramètres; ce qui revient à prendre les dérivées, première, seconde, ..., (m-1)ième, de la spline au premier nœud, comme paramètres du problème (P m).

Les conditions de raccordement (C^{m-1}) aux nœuds et (3) permettent d'exprimer $d_i, d_{i+\frac{1}{m}}, ..., d_{i+\frac{m-1}{m}}$ pour i = 1, ..., n-1, en fonction de Δ_i et de $d_{i-1+\frac{1}{m}}, d_{i-1+\frac{2}{m}}, ..., d_{i-1+\frac{m-1}{m}}$, au moyen de m relations de récurrence sur m termes .

Pour ne pas alourdir inutilement la présentation, nous allons donner à m la valeur 4 pour expliciter cette récurrence.

Dans ce cas, (3) s' écrit: $d_i + d_{i+\frac{1}{4}} + d_{i+\frac{2}{4}} + d_{i+\frac{3}{4}} = 4\Delta_i$ (3.4).

Cette relation et les 3 relations exprimant la continuité de la dérivée première au nœud x_i , la continuité de la dérivée seconde au nœud x_i , et la continuité de la dérivée troisième au nœud x_i , pour i = 1, 2, ..., n-1, nous donnent les relations de récurrence (R.4) suivantes:

$$(R.4) \begin{cases} d_{0+\frac{3}{4}} = 4\Delta_{0} - d_{0} - d_{0+\frac{1}{4}} - d_{0+\frac{2}{4}} & (3.4) \text{ avec } i = 0 , \\ d_{i} = d_{i-1+\frac{3}{4}} & (C^{1}.4) , \\ d_{i+\frac{1}{4}} = (1 + \frac{h_{i}}{h_{i-1}})d_{i-1+\frac{3}{4}} - \frac{h_{i}}{h_{i-1}}d_{i-1+\frac{2}{4}} & (C^{2}.4) , \\ d_{i+\frac{2}{4}} = (1 + 2\frac{h_{i}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i}^{2}}{h_{i-1}^{2}})d_{i-1+\frac{3}{4}} + (-2\frac{h_{i}}{h_{i-1}} - 2\frac{h_{i}^{2}}{h_{i-1}^{2}})d_{i-1+\frac{2}{4}} \\ + \frac{h_{i}^{2}}{h_{i-1}^{2}}d_{i-1+\frac{1}{4}} & (C^{3}.4) , \\ d_{i+\frac{3}{4}} = 4\Delta_{i} - d_{i} - d_{i+\frac{1}{4}} - d_{i+\frac{2}{4}} & (3.4) . \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi toutes les inconnues en fonction de $d_0, d_{0+\frac{1}{3}}, ..., d_{0+\frac{m-2}{m}}$, et nous sommes ramenés à la résolution d'un système d'inéquations linéaires à m-1 inconnues.

Si ce système a des solutions, le problème (P 4) admet une solution et nous obtenons explicitement toutes les valeurs des inconnues $d_{i+\frac{k}{m}}$ pour i = 0, 1, ..., n-1, et k = 0, 1, ..., m-1; sinon, nous pouvons affirmer qu'il n'y a pas de solution pour le problème (P 4).

Nous ne pouvons pas aller plus loin dans l'étude de ce cas général; nous nous contentons donc de cette formulation qui débouche sur la résolution d'un système linéaire. Dans la suite nous donnerons, en utilisant ce procédé, une condition nécessaire et suffisante d'existence de splines d'interpolation polynomiales de degré ≤ 2 de classe C^1 , qui conservent la forme et une méthode de construction de splines d'interpolation polynomiales de degré ≤ 3 de classe C^2 , qui conservent la forme (quand cela est possible).

Chapitre II

SPLINES QUADRATIQUES D' INTERPOLATION DE CLASSE C^1 CONSERVANT LA FORME

I.1. Résolution du Problème (P 2)

Nous allons dans ce chapitre nous intéresser au problème (P 2). Nous savons que dim $\mathbb{P}_2^1 = 2+n$, où \mathbb{P}_2^1 désigne l'espace des fonctions splines polynomiales de degré \leq 2, relatives à la subdivision de n+1 points considérée et continûment dérivables; donc un élément de \mathbb{P}_2^1 qui interpole ces points dépend d' un seul paramètre en fonction duquel nous allons étudier l'existence de s_2 solution du problème (P 2). Nous nous fixons, comme paramètre du problème (P 2), d_0 autrement dit la dérivée de la spline s_2 en x_0 .

Dans ce cas, la relation (3) s' écrit de la manière suivante:

pour
$$i = 0, 1, ..., n - 1, \quad d_i + d_{i+\frac{1}{2}} = 2\Delta_i$$
 (3.2);

la condition qui exprime la continuité C^1 s' écrit comme suit:

pour
$$i = 0, 1, ..., n - 1, \quad d_i = d_{i-1+\frac{1}{2}}$$
 (C¹.2);

et l'inégalité (I) s'écrit dans ce cas, de la façon suivante:

$$0 \le d_0 \le d_{0+\frac{1}{2}} \le d_{1+\frac{1}{2}} \le \dots \le d_{n-1+\frac{1}{2}} \qquad (I.2).$$

Les relations (3.2) et (C^{1} .2) conduisent à la relation de récurrence (R.2) suivante, permettant d'exprimer $d_{i+\frac{1}{2}}$ pour i = 0,1, ...,n-1, en fonction de d_{0} :

$$(R.2) \begin{cases} d_{0+\frac{1}{2}} = 2\Delta_0 - d_0 \\ d_{i+\frac{1}{2}} = 2\Delta_i - d_{i-1+\frac{1}{2}}, \\ \text{pour } i = 1, 2, ..., n-1 \end{cases}$$

d'où pour $i = 0, 1, ..., n-1, d_{i+\frac{1}{2}} = 2\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \Delta_k + (-1)^{i-1} d_0$

et

$$\begin{cases} d_{0+\frac{1}{2}} - d_0 = 2\Delta_0 - 2d_0 \\ d_{i+\frac{1}{2}} - d_{i-1+\frac{1}{2}} = 2\Delta_i - 4\Delta_{i-1} + 4\Delta_{i-2} + \dots + 4(-1)^i \Delta_0 + 2(-1)^{i-1} d_0, \\ pour \ i = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Nous sommes donc en mesure de ramener (I.2) à un système d'inégalités à une seule inconnue d_0

$$\begin{cases} d_0 \ge 0\\ d_0 \le \Delta_0\\ (-1)^i d_0 \le (-1)^i \{2\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \Delta_k + (-1)^i \Delta_i\} \text{ pour } i = 1, 2, ..., n-1 \end{cases}$$

Posons, $z_{-1} = 0, z_0 = \Delta_0$, et pour i = 1, 2, ..., n-1,

$$z_{i} = \{2\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{k} \Delta_{k} + (-1)^{i} \Delta_{i}\};\$$

nous pouvons alors énoncer le résultat qui fait l'objet du paragraphe suivant.

I.2. Condition nécessaire et suffisante d'existence de solution pour le problème (P 2)

Proposition

Le problème (P 2) admet une ou plusieurs solutions si et seulement si:

 $\max_{i=-1,0,\ldots,n-1; i \text{ impair}} z_i \leq \min_{i=-1,0,\ldots,n-1; i \text{ pair}} z_i.$

Remarquons que les $\{z_i\}_{i=0,1,\dots,n-1}$ peuvent se calculer en utilisant les relations suivantes:

 $z_{-1} = 0, z_0 = \Delta_0$ et pour i = 1, 2, ..., n-1, la relation de récurrence

$$z_i = z_{i-1} + (-1)^i (\Delta_i - \Delta_{i-1}).$$

La condition nécessaire et suffisante nous conduit à l'algorithme suivant, permettant soit d'affirmer qu'il n'y a pas de solution pour le problème (P 2), soit, dans le cas où il y a une solution, de déterminer précisement l'intervalle auquel doit appartenir d_0 .

I.3. Algorithme

Initialisation

 $\underline{d} = z_{-1}, \, \overline{d} = z_0.$ Si $\underline{d} > \overline{d}, \longrightarrow$ Stop: "pas de solution"; Si $\underline{d} \le \overline{d}, \longrightarrow$ Faire la première itération.

(i)ième itération $(1 \le i \le n-2)$ Cas où i est impair $\underline{d} = \sup (\underline{d}, z_i).$ Si $\underline{d} > \overline{d}, \longrightarrow$ Stop: "pas de solution"; Si $\underline{d} \le \overline{d}, \longrightarrow$ Faire la (i+1)ième itération. Cas où i est pair $\overline{d} = \inf (\overline{d}, z_i).$ Si $\underline{d} > \overline{d}, \longrightarrow$ Stop: "pas de solution"; Si $\underline{d} \ge \overline{d}, \longrightarrow$ Faire la (i+1)ième itération.

(n-1)ième itération <u>Cas où n-1 est impair</u> $d = \sup (d, z_{n-1}).$ Si $d > \bar{d}, \longrightarrow$ Stop: "pas de solution"; Si $d \leq \bar{d}, \longrightarrow$ Choisir $d_0 \in [d, \bar{d}].$ <u>Cas où n-1 est pair</u> $\bar{d} = \inf (\bar{d}, z_{n-1}).$ Si $d > \bar{d}, \longrightarrow$ Stop: "pas de solution"; Si $d \leq \bar{d}, \longrightarrow$ Choisir $d_0 \in [d, \bar{d}].$

Voir l'organigramme qui illustre cet algorithme (figure 1).

Une fois d_0 déterminé, l'utilisation des relations (R.2) et ($C^{1}.2$) permet d'obtenir explicitement tous les coefficients des polynômes qui sont la restriction de s_2 dans chaque intervalle I_i .



- figure 1 -

Remarques

R₁) Si on veut traiter le cas de données convexes seulement, il suffit de poser dans l'algorithme précédent $z_{-1} = -\infty$.

R₂) Si l'algorithme s' arrête à l'étape j, j < n - 1, en affirmant "pas de solution", on peut néanmoins construire une solution croissante et convexe sur l'intervalle $[x_0, x_j]$. R₃) Si après avoir résolu le problème (P 2) pour un ensemble de données initiales, on veut ajouter d'autres points à interpoler tels que les abcisses de ces points soient supérieures à celle du dernier nœud de l'ensemble de données initiales, et tels que la réunion des deux ensembles de points forme un ensemble de données convexes et croissantes, on redémarre l'algorithme à la dernière itération relative à l'ensemble initial de données.

II.4. Exemple

Nous cherchons à résoudre le problème (P 2), pour les données suivantes:

$$x_0 = 0, y_0 = 0; x_1 = 1, y_1 = 1; x_2 = 2, y_2 = 8; x_3 = 3, y_3 = 27;$$

$$x_4 = 4, y_4 = 64; x_5 = 5, y_5 = 125; x_6 = 6, y_6 = 216; x_7 = 7, y_7 = 343.$$

Les points M_i , i = 0, 1, ..., 7, sont des points du graphe de la fonction, convexe et monotone sur \mathbb{R}^+ , $f(x) = x^3$.

Dans ce cas nous arrivons par l'algorithme, décrit ci-dessus, à la conclusion que $d_0 \in [0, 1]$; par exemple le choix de $d_0 = 0.5$ nous conduit aux résultats suivants:

$$d_0 = 0, 5 \le d_{0+\frac{1}{2}} = d_1 = 1.5 \le d_{1+\frac{1}{2}} = d_2 = 12.5 \le d_{2+\frac{1}{2}} = d_3 = 25.5 \le d_{1+\frac{1}{2}} = d_1 = 1.5 \le d_{1+\frac{1}{2}} = d_2 = 12.5 \le d_{2+\frac{1}{2}} = d_3 = 25.5 \le d_{1+\frac{1}{2}} = d_{2+\frac{1}{2}} = d_{$$

 $d_{3+\frac{1}{2}} = d_4 = 48.5 \le d_{4+\frac{1}{2}} = d_5 = 73.5 \le d_{5+\frac{1}{2}} = d_6 = 108.5 \le d_{6+\frac{1}{2}} = d_7 = 145.5.$

D'où la solution suivante:

 $\forall x \in I_0 = [0,1], s_2(x) = P_0(x),$

$$P_0(x) = 0.5(1-x)x + x^2;$$

 $\forall x \in I_1 = [1, 2], \ s_2(x) = P_1(x),$

$$P_1(x) = (2-x)^2 + 3.5(2-x)(x-1) + 8(x-1)^2;$$

 $\forall x \in I_2 = [2,3], s_2(x) = P_2(x),$

$$P_2(x) = 8(3-x)^2 + 28.5(3-x)(x-2) + 27(x-2)^2;$$

 $\forall x \in I_3 = [3,4], s_2(x) = P_3(x),$

$$P_3(x) = 27(4-x)^2 + 79.5(4-x)(x-3) + 64(x-3)^2;$$

 $\forall x \in I_4 = [4,5], s_2(x) = P_4(x),$

$$P_4(x) = 64(5-x)^2 + 176(5-x)(x-4) + 125(x-4)^2;$$

 $\forall x \in I_5 = [5,6], \ s_2(x) = P_5(x),$

$$P_5(x) = 125(6-x) + 323.5(6-x)(x-5) + 216(x-5)^2;$$

 $\forall x \in I_6 = [6,7], s_2(x) = P_6(x),$

$$P_6(x) = 216(7-x)^2 + 540.5(7-x)(x-6) + 343(x-7)^2$$

Voir la représentation graphique de cette solution (figure 2).



convexe et croissante, obtenue par la méthode exposée dans le chapitre II.

21

Chapitre II

SPLINES CUBIQUES D' INTERPOLATION DE CLASSE C^2 CONSERVANT LA FORME

Introduction

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication [17] et d'un compte rendu à l'académie des sciences [18].

Nous allons dans ce chapitre nous intéresser au problème (P 3). Nous savons que dim $\mathbb{P}_3^2 = 3+n$, où \mathbb{P}_3^2 désigne l'espace des fonctions splines polynomiales de degré ≤ 3 , relatives à la subdivision de n+1 points considérée et de classe C^2 ; donc un élément de \mathbb{P}_3^2 qui interpole ces points dépend de deux paramètres en fonction desquels nous allons étudier l'existence de s_3 solution du problème (P 3). Nous nous fixons, comme paramètres du problème (P 3), les dérivées de la spline s_3 en x_0 et en x_n .

III.1. Résolution du problème (P 3)

III.1.1. Méthode proposée pour la résolution de (P 3)

Nous allons rappeler dans ce paragraphe la méthode exposée en I.3.2, dans le cas général, en l'appliquant ici au problème (P 3).

Supposons déterminés 2n réels $y_{i+\frac{1}{3}}$, $y_{i+\frac{2}{3}}$ i=0,1,...,n-1, tels que:

pour
$$i = 0, 1, ..., n - 1, y_i \le y_{i+\frac{1}{2}} \le y_{i+\frac{2}{2}} \le y_{i+1}$$
 (1.3);

pour
$$i = 0, 1, ..., n - 1, \frac{y_{i+\frac{1}{3}} - y_i}{x_{i+\frac{1}{3}} - x_i} \le \frac{y_{i+\frac{2}{3}} - y_{i+\frac{1}{3}}}{x_{i+\frac{2}{3}} - x_{i+\frac{1}{3}}} \le \frac{y_{i+1} - y_{i+\frac{2}{3}}}{x_{i+1} - x_{i+\frac{2}{3}}}$$
 (2.3)

et définissons dans chaque intervalle I_i , pour $x \in I_i$, le polynôme suivant exprimé dans la

base de Bernstein:

$$P_{i}(x) = \frac{1}{(h_{i})^{3}} \{ y_{i}(x_{i+1} - x)^{3} + 3y_{i+\frac{1}{3}}(x_{i+1} - x)^{2}(x - x_{i}) + 3y_{i+\frac{2}{3}}(x_{i+1} - x)(x - x_{i})^{2} + y_{i+1}(x - x_{i})^{3} \}.$$

Dérivons deux fois le polynôme P_i , il vient:

$$P_{i}'(x) = \frac{1}{(h_{i})^{3}} \{ 3(y_{i+\frac{1}{3}} - y_{i})(x_{i+1} - x)^{2} + 6(y_{i+\frac{2}{3}} - y_{i+\frac{1}{3}})(x_{i+1} - x)(x - x_{i}) + 3(y_{i+1} - y_{i+\frac{2}{3}})(x - x_{i})^{2} \}$$

et $P_i''(x) = \frac{1}{(h_i)^3} \{ 6(y_{i+\frac{2}{3}} - 2y_{i+\frac{1}{3}} + y_i)(x_{i+1} - x) + 6(y_{i+1} - 2y_{i+\frac{2}{3}} + y_{i+\frac{1}{3}})(x - x_i) \}.$

Nous vérifions que $P_i(x_i) = y_i$, $P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ pour i=0,1,...,n-1 et que pour tout $x \in I_i P'_i(x) \ge 0$ (compte tenu de (1, 3)) et $P''_i(x) \ge 0$ (compte tenu de (2, 3)).

Pour des raisons de simplification posons:

pour
$$i = 0, 1, ..., n - 1, d_i = \frac{y_{i+\frac{1}{3}} - y_i}{x_{i+\frac{1}{3}} - x_i} = 3\frac{y_{i+\frac{1}{3}} - y_i}{h_i};$$

pour $i = 0, 1, ..., n - 1, d_{i+\frac{1}{3}} = \frac{y_{i+\frac{2}{3}} - y_{i+\frac{1}{3}}}{x_{i+\frac{2}{3}} - x_{i+\frac{1}{3}}} = 3\frac{y_{i+\frac{2}{3}} - y_{i+\frac{1}{3}}}{h_i};$
pour $i = 0, 1, ..., n - 1, d_{i+\frac{2}{3}} = \frac{y_{i+1} - y_{i+\frac{2}{3}}}{x_{i+1} - x_{i+\frac{2}{3}}} = 3\frac{y_{i+1} - y_{i+\frac{2}{3}}}{h_i}.$

Nous avons: $d_i + d_{i+\frac{1}{3}} + d_{i+\frac{2}{3}} = 3\Delta_i$ pour i=0,1,...,n-1 (3. 3).

Écrivons maintenant les conditions (1. 3) et (2. 3) d'une autre manière en faisant intervenir $d_i, d_{i+\frac{1}{3}}, d_{i+\frac{2}{3}}, i=0,1,...,n-1$; (1. 3) est équivalent au système d'inégalités suivant:

pour
$$i = 0, 1, ..., n - 1, d_i \ge 0, d_{i+\frac{1}{3}} \ge 0, d_{i+\frac{2}{3}} \ge 0$$
 (1.3);

et (2. 3) est équivalent au système d'inégalités suivant:

pour
$$i = 0, 1, ..., n - 1, d_i \le d_{i+\frac{1}{2}} \le d_{i+\frac{2}{3}}$$
 (2.3).

Calculons, pour i = 0, 1, ..., n-1, les dérivées de P_i en x_i et en x_{i+1} en fonction de $d_i, d_{i+\frac{1}{3}}, d_{i+\frac{2}{3}}$:

$$P_i'(x_i) = d_i , \quad P_i'(x_{i+1}) = d_{i+\frac{2}{3}};$$

$$P_i''(x_i) = \frac{2}{h_i}(d_{i+\frac{1}{3}} - d_i), \quad P_i''(x_{i+1}) = \frac{2}{h_i}(d_{i+\frac{2}{3}} - d_{i+\frac{1}{3}}).$$

Donc pour que la continuité des dérivées premières aux nœuds soit vérifiée il faut et il suffit que pour i=1,2,...,n-1, nous ayons $d_i = d_{i-1+\frac{2}{3}}$ (C¹. 3).

Convention

Nous convenons dans la suite de remplacer $d_{n-1+\frac{2}{3}}$ par d_n , bien que d_n n' ait pas été défini comme les autres d_i (i=0,1,...n-1), ce qui est légitime compte tenu de la condition $(C^1, 3)$. Cela présente l'avantage de rappeler qu'il s'agit de la dérivée de la spline solution de (P 3) au dernier nœud, d'autant plus que, comme nous le verrons ultérieurement, d_n jouera (comme d_0) un rôle priviligié dans cette méthode proposée pour la résolution de (P 3).

Pour que la continuité des dérivées secondes aux nœuds soit vérifiée il faut et il suffit que pour i=1,2,...n-1, nous ayons: $\frac{d_{i-1+\frac{2}{3}}-d_{i-1+\frac{1}{3}}}{h_{i-1}} = \frac{d_{i+\frac{1}{3}}-d_i}{h_i} (C^2. 3).$

Ainsi, résoudre le problème (P 3) revient à déterminer $\{d_i, d_{i+\frac{1}{3}}, d_{i+\frac{2}{3}}\}$, i=1,2,...,n-1, satisfaisant les 5 conditions suivantes (1.3)['], (2.3)['], (3. 3), (C¹. 3), (C². 3). Ces conditions peuvent s' écrire sous la forme du système d' équations et d' inéquations linéaires (S) suivant:

$$(S) \begin{cases} d_i \ge 0, \ d_{i+\frac{1}{3}} \ge 0, \ d_{i+\frac{2}{3}} \ge 0, \ \text{pour} \ i = 0, 1, ..., n-1 \quad (1.3)' \\ d_i \le d_{i+\frac{1}{3}} \le d_{i+\frac{2}{3}}, \ \text{pour} \ i = 0, 1, 2, ..., n-1 \quad (2.3)' \\ d_i + d_{i+\frac{1}{3}} + d_{i+\frac{2}{3}} = 3\Delta_i, \ \text{pour} \ i = 0, 1, ..., n-1 \quad (3.3) \\ d_i = d_{i-1+\frac{2}{3}}, \ \text{pour} \ i = 1, 2, ..., n-1 \quad (C^1.3) \\ \frac{d_{i+\frac{1}{3}} - d_i}{h_i} = \frac{d_{i-1+\frac{2}{3}} - d_{i-1+\frac{1}{3}}}{h_{i-1}}, \ \text{pour} \ i = 1, 2..., n-1 \quad (C^2.3) \end{cases}$$

où les inconnues sont d_i , $d_{i+\frac{1}{3}}$, $d_{i+\frac{2}{3}}$.

Une fois ce système (S) résolu, les polynômes P_i , pour i = 0, 1, ..., n-1, seront complètement déterminés et ils définiront, sur chaque intervalle I_i , les restrictions de la spline cubique, solution du problème (P 3), notée s_3 .

II.1.2. Étude du système (S)

Nous allons commencer par faire quelques transformations sur le système (S), per-

mettant de simplifier son étude.

Réécrivons le système (S) en modifiant (2.3)', (3.3) et $(C^2.3)$ compte tenu de $(C^1.3)$:

$$d_i \ge 0, d_{i+\frac{1}{3}} \ge 0, d_{i+\frac{2}{3}} \ge 0, \text{ pour } i = 0, 1, ..., n-1$$
 (1.3)'

$$d_i \le d_{i+\frac{1}{3}} \le d_{i+1}, \text{ pour } i = 0, 1, 2, ..., n-1$$
(2.3)ⁿ

$$(S) \begin{cases} d_i + d_{i+\frac{1}{3}} + d_{i+1} = 3\Delta_i, \text{ pour } i = 0, 1, 2, ..., n-1 \end{cases}$$
(3.3)'

$$d_i = d_{i-1+\frac{2}{3}}, \text{ pour } i = 1, 2, ..., n-1$$
 (C¹.3)

$$d_{i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_{i}}\right)^{-1} \left(\frac{d_{i+\frac{1}{3}}}{h_{i}} + \frac{d_{i-1+\frac{1}{3}}}{h_{i-1}}\right), \text{ pour } i = 1, 2, ..., n-1 \quad (C^{2}.3)'$$

Considérons les 3n inégalités (1.3)':

$$d_i \ge 0, d_{i+\frac{1}{2}} \ge 0, d_{i+\frac{2}{2}} \ge 0, \text{ pour } i = 0, 1, ..., n-1$$

et les 2n inégalités (2.3)":

$$d_i \leq d_{i+\frac{1}{2}} \leq d_{i+1}$$
, pour $i = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Ces 5n inégalités peuvent s'écrire, compte tenu de $(C^{1}.3)$, de la manière suivante:

$$0 \le d_0 \le d_{0+\frac{1}{3}} \le d_1 \le d_{1+\frac{1}{3}} \le d_2 \le \dots \le d_{n-1} \le d_{n-1+\frac{1}{3}} \le d_n \qquad (4).$$

Or, d'après $(C^2.3)'$:

$$d_i = \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)^{-1} \left(\frac{d_{i+\frac{1}{3}}}{h_i} + \frac{d_{i-1+\frac{1}{3}}}{h_{i-1}}\right), \text{ pour } i = 1, 2, ..., n-1;$$

et comme $d_i \ge 0, d_{i-1+\frac{1}{3}} \ge 0$ et $d_{i+\frac{1}{3}} \ge 0$, pour i = 0, 1, ..., n-1 - d' après (1.3)' -, nous avons:

$$d_{i-1+\frac{1}{3}} \leq d_{i+\frac{1}{3}} \implies d_{i-1+\frac{1}{3}} \leq d_i \leq d_{i+\frac{1}{3}}$$
, pour $i = 1, 2, ..., n-1$.

Donc le système d'inégalités (4), considéré comme sous-système de (S), se réduit au système équivalent suivant :

$$0 \le d_0 \le d_{0+\frac{1}{3}} \le d_{1+\frac{1}{3}} \dots \le d_{n-1+\frac{1}{3}} \le d_n \qquad (I.3).$$

Nous pouvons donc, écrire le système (S) sous la forme (S'), équivalente, ci-dessous:

$$(S') \begin{cases} 0 \le d_0 \le d_{0+\frac{1}{3}} \le d_{1+\frac{4}{5}} \le \dots \le d_{n-2+\frac{1}{3}} \le d_{n-1+\frac{1}{3}} \le d_n & (I.3) \\ d_i + d_{i+\frac{1}{3}} + d_{i+1} = 3\Delta_i, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, n-1 & (3.3)' \\ d_i = d_{i-1+\frac{2}{3}}, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1 & (C^1.3) \\ d_i = (\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i})^{-1} (\frac{d_{i+\frac{1}{3}}}{h_i} + \frac{d_{i-1+\frac{1}{3}}}{h_{i-1}}), \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1 & (C^2.3)' \end{cases}$$

En substituant $(C^2.3)'$ dans (3.3)', le système (S') devient le système - équivalent - (S'') suivant:

$$(S'') \begin{cases} 0 \le d_0 \le d_{0+\frac{1}{3}} \le d_{1+\frac{4}{3}} \le \dots \le d_{n-2+\frac{1}{3}} \le d_{n-1+\frac{1}{3}} \le d_n & (I.3) \\ d_i = d_{i-1+\frac{2}{3}}, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1 & (C^1.3) \\ d_i = (\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i})^{-1} (\frac{d_{i+\frac{1}{3}}}{h_i} + \frac{d_{i-1+\frac{1}{3}}}{h_{i-1}}), \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1 & (C^2.3)' \\ (E) \end{cases}$$

(E) étant le système à n équations et n inconnues suivant, où d_0 et d_n sont des paramètres dans le second membre:

$$(E):\begin{cases} \left(h_{0}+\left(\frac{1}{h_{0}}+\frac{1}{h_{1}}\right)^{-1}\right)\frac{d_{0+\frac{1}{3}}}{h_{0}}+\left(\frac{1}{h_{0}}+\frac{1}{h_{1}}\right)^{-1}\frac{d_{1+\frac{1}{3}}}{h_{1}}=3\Delta_{0}-d_{0}\\ \left(\frac{1}{h_{i}}+\frac{1}{h_{i-1}}\right)^{-1}\frac{d_{i-1+\frac{1}{3}}}{h_{i-1}}+\left(h_{i}+\left(\frac{1}{h_{i}}+\frac{1}{h_{i-1}}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{h_{i}}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)^{-1}\right)\frac{d_{i+\frac{1}{3}}}{h_{i}}\\ +\left(\frac{1}{h_{i}}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)^{-1}\frac{d_{i+1+\frac{1}{3}}}{h_{i+1}}=3\Delta_{i} \text{ pour } i=1,2,...,n-2\\ \left(\frac{1}{h_{n-2}}+\frac{1}{h_{n-1}}\right)^{-1}\frac{d_{n-2+\frac{1}{3}}}{h_{n-2}}+\left(h_{n-1}+\left(\frac{1}{h_{n-2}}+\frac{1}{h_{n-1}}\right)^{-1}\right)\frac{d_{n-1+\frac{1}{3}}}{h_{n-1}}=3\Delta_{n-1}-d_{n}\end{cases}$$

Pour étudier l'existence de solutions pour le système (S) (ou (S'')), nous adopterons une démarche qui consiste à exprimer, par la résolution de (E), $d_{i+\frac{1}{3}}$ i = 0, 1, ..., n-1, en fonction de d_0 et d_n ; puis à étudier l'existence de solutions pour le système d'inéquations linéaires à deux inconnues, d_0 et d_n , (I.3).

III.1.3. Étude du système (E)

Le système (E) est un sytème linéaire à n inconnues $d_{i+\frac{1}{3}}$; d_0 et d_n sont des paramètres situés dans le second membre.

Posons $D_i = \frac{d_{i+\frac{1}{3}}}{h_i}$, pour i = 0, 1, ..., n-1 et soit H la matrice

$$H = \begin{pmatrix} h_0 + \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} & \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} \\ \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} & h_1 + \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} + \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} & \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \\ & & \frac{h_{n-2} h_{n-1}}{h_{n-2} + h_{n-1}} \\ & & \frac{h_{n-2} h_{n-1}}{h_{n-2} + h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

La matrice H est tridiagonale, symétrique, à diagonale dominante donc inversible.

(E) peut être écrit symboliquement de la manière suivante: $H\widetilde{D} = \widetilde{\Delta} - d_0 e_1 - d_n e_n$; où $\widetilde{d}, \widetilde{\Delta}, e_1, e_n$ sont les vecteurs de \mathbb{R}^n : $\widetilde{D} = (D_0, D_1, ..., D_{n-1})^t; \widetilde{\Delta} = (3\Delta_0, 3\Delta_1, ..., 3\Delta_{n-1})^t; e_1 = (1, 0, ..., 0)^t;$ $e_n = (0, 0, ..., 1)^t.$

Pour exprimer $d_{i+\frac{1}{3}}$ (i = 0, 1, ..., n-1) en fonction de d_0 et d_n nous devons résoudre les 3 systèmes linéaires suivants de même matrice H:

$$H\widetilde{D1} = \widetilde{\Delta}, \ H\widetilde{D2} = e_1, \ H\widetilde{D3} = e_n,$$

par conséquent, $\widetilde{D} = \widetilde{D1} - d_0 \widetilde{D2} - d_n \widetilde{D3} = H^{-1} \widetilde{\Delta} - d_0 H^{-1} e_1 - d_n H^{-1} e_n$.

Variante de la méthode de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires à matrice inversible tridiagonale

Considérons le système linéaire Ax = k où A est une matrice carré de coefficients $A_{i,j}$ avec $A_{i,i} = b_i$ pour i=1 to n, $A_{i,i+1} = c_i$ pour i=1 à n-1, $A_{i,i-1} = a_i$ pour i=2 à n, et tous les autres coefficients égaux à 0; $k = (k_1, k_2, ..., k_n)^t$. Notons que si la matrice est symétrique $c_i = a_{i+1}$ pour i = 1, 2, ..., n-1.

Définissons les deux suites suivantes: $w_1 = \frac{c_1}{b_1}$, $w_i = \frac{c_i}{b_i - a_i w_{i-1}}$, $2 \le i \le n-1$ et $y_1 = \frac{k_1}{b_1}$, $y_i = \frac{k_i - a_i y_{i-1}}{b_i - a_i w_{i-1}}$, $2 \le i \le n$. La solution du système est obtenue par: $x_n = y_n$ et $x_i = y_i - w_i x_{i+1}$ $1 \le i \le n-1$ [21].

Cette méthode requiert 8n opérations (3n additions, 5n multiplications).
Subdivision uniforme

Dans ce cas: $h_0 = h_1 = h_2 = ... = h_{n-2} = h_{n-1}$ et (E) devient :

$$\begin{cases} \frac{3}{2}d_{0+\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}d_{1+\frac{1}{3}} = 3\Delta_0 - d_0\\ \frac{1}{2}d_{i-1+\frac{1}{3}} + 2d_{i+\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}d_{i+1+\frac{1}{3}} = 3\Delta_i \text{ for } i = 1, 2, ..., n-2\\ \frac{1}{2}d_{n-2+\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}d_{n-1+\frac{1}{3}} = 3\Delta_{n-1} - d_n \end{cases}$$

La matrice correspondante H est, en plus de sa symétrie par rapport à la diagonale, symétrique par rapport à l'anti-diagonale.

Par conséquent $\widetilde{D3} = H^{-1}e_n = (z_0, z_1, ..., z_{n-1})^t$ se déduit de $\widetilde{D2} = H^{-1}e_1$ = $(t_0, t_1, ..., t_{n-1})^t$ par la relation: $z_i = t_{n-1-i}$ pour i=0,1,...,n-1.

Dans ce cas $w_i = \frac{1}{4-w_{i-1}}$ pour i=2,...,n; $w_1 = \frac{1}{3}$ (a). Posons $\delta_1 = b_1$ et $\delta_i = b_i - a_i \omega_i$ pour i=2,3,...,n.

Nous pouvons prouver par récurrence que $\delta_i \neq 0$ pour i=1,2,...,n-1,n, et par conséquent w_i est défini pour i=1,2,...,n; de la même manière nous prouvons par récurrence que $w_i \neq 4$ pour i=1,2,...,n-1 et par conséquent (a) est bien définie.

Notons que la suite $\{w_i\}$ (suite de point fixe) vérifie les deux propriétés suivantes: pour i=1,2...,n-1, $0 \le w_i \le 1$ et $\{w_i\}$ décroissante. Par conséquent la suite $\{w_i\}$ converge vers une limite comprise entre 0 et 1, solution de l'équation $w^2 - 4w + 1 = 0$, i.e. $2 - \sqrt{3} = 0.2679491...$. De plus, la suite $\{w_i\}$ a une convergence linéaire.

Voici par exemple les 8 premières valeurs de $\{w_i\}$:

 $w_1 = 0.333333...; w_2 = 0.2727272...; w_3 = 0.2682926...; w_4 = 0.2679738...;$

 $w_5 = 0.2679509...; w_6 = 0.2679493...; w_7 = 0.2679492...; w_8 = 0.2679491...$

Une fois $d_{0+\frac{1}{3}}$, $d_{1+\frac{1}{3}}$, ..., $d_{n-1+\frac{1}{3}}$ exprimés en fonction de d_0 et d_n ; nous reportons ceux-ci dans (I.3); (I.3) devient un système d'inéquations linéaires à 2 inconnues (d_0, d_n) . Ces n+2 inéquations définissent un polygone de \mathbb{R}^2 que nous représenterons graphiquement; si ce polygone est vide, le problème n'a pas de solution et s' il n' est pas vide tout point (d_0, d_n) dans ce polygone convient.

Une fois d_0 et d_n déterminés, nous obtenons numériquement toutes les valeurs des inconnues $(d_{0+\frac{1}{3}}, d_{1+\frac{1}{3}}, ..., d_{n-1+\frac{1}{3}})$ permettant d'écrire tous les polynômes de degré ≤ 3 dans chaque intervalle I_i (Cf. II.1.).

Nous donnons à la fin de ce chapitre (II.3.) le listage commenté d'un programme qui met en application la méthode que nous venons de décrire.

Ce programme nous a permis de traiter de nombreux exemples, plus ou moins compliqués, dont certains sont issus de problèmes expérimentaux de physique.

II.2. Exemples

Nous allons donner 4 exemples simples, dans lesquels une solution du problème (P 3) a pu être déterminée par l'application de la méthode exposée en II.1.

II.2.1. 1^{er} Exemple:

Dans cet exemple, nous interpolons 4 points du graphe de la fonction convexe et croissante(sur \mathbb{R}^+) $f(x) = x^4$.

Les données sont les suivantes:

 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $x_1 = 2$, $y_1 = 16$; $x_2 = 3$, $y_2 = 81$, ; $x_3 = 6$, $y_3 = 1296$.

Le sy tème d'équations linéaires à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \left(2 + \frac{1}{\frac{1}{2+1}}\right)^{\frac{d_{0+\frac{1}{3}}}{2}} + \frac{d_{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{2}} = 24 - d_{0} \\ \frac{d_{0+\frac{1}{3}}}{2(\frac{1}{2}+1)} + \left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right) d_{1+\frac{1}{3}} + \frac{d_{2+\frac{1}{3}}}{3(1+\frac{1}{3})} = 195 \\ \frac{d_{1+\frac{1}{3}}}{(1+\frac{1}{3})} + \left(3 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)^{\frac{d_{2+\frac{1}{3}}}{3}} = 1215 - d_{3} \end{cases}$$

Calculons: $d_{0+\frac{1}{3}} - d_0$, $d_{1+\frac{1}{3}} - d_{0+\frac{1}{3}}$, $d_{2+\frac{1}{3}} - d_{1+\frac{1}{3}}$, $d_3 - d_{2+\frac{1}{3}}$ en fonction de d_0 et d_3 . Nous obtenons alors les expressions suivantes:

 $d_{0+\frac{1}{2}} - d_0 = 32.75410 - 1.87295d_0 - 0.04918d_3 \quad (D_0) ,$

 $d_{1+\frac{1}{3}} - d_{0+\frac{1}{3}} = -62.26230 + 1.11885d_0 + 0.14754d_3$ (D₁),

$$d_{2+\frac{1}{2}} - d_{1+\frac{1}{2}} = 1007.40984 - 0.29508d_0 - 0.91803d_3 \quad (D_2) ,$$

$$d_3 - d_{2+1} = -977,90164 + 0.04918d_0 + 1.819671d_3$$
 (D₃).

Le polygone défini par les inégalités: $d_0 \ge 0, d_{0+\frac{1}{3}} - d_0 \ge 0$,

 $d_{1+\frac{1}{3}} - d_{0+\frac{1}{3}} \ge 0, d_{2+\frac{1}{3}} - d_{1+\frac{1}{3}} \ge 0, d_3 - d_{2+\frac{1}{3}} \ge 0$ est representé sur la figure 3. Le domaine qui n'est pas hachuré est le domaine dans lequel il faut choisir (d_0, d_3) .

Nous constatons donc que (d_0, d_3) doit être choisi dans le triangle T₁ délimité par: $d_0 = 0, D_0 = 0$ et $D_3 = 0$.

Prenons $d_0 = 0$, $d_3 = 615$; $(d_0, d_3) = (0, 615) \in T_1$.

Nous avons alors $d_{0+\frac{1}{3}} = 1.5752..., d_{1+\frac{1}{3}} = 32.8571..., d_{2+\frac{1}{3}} = 460.2786...,$ et les inégalités suivantes sont vérifiées : $d_0 \le d_{0+\frac{1}{3}} \le d_{1+\frac{1}{3}} \le d_{2+\frac{1}{3}} \le d_3$.

 $d_1 = 22, 4297..., d_2 = 139, 7125...$

Dans l'intervalle $[0,2] = [x_0, x_1]$: $P_0(x) = (0.6270(2-x)x^2) + 2x^3$.

Dans l'intervalle $[2,3] = [x_1, x_2]$: $P_1(x) = 16(3-x)^3 + 69.4918(3-x)^2(x-2)$ +100.4754 $(3-x)(x-2)^2 + 81(x-2)^3$.

Dans l'intervalle $[3,6] = [x_2, x_3]$: $P_2(x) = 3(6-x)^3 + 24.7432(6-x)^2(x-3) + 77.3880(6-x)(x-3)^2 + 48(x-3)^3$.

Voir la représentation graphique de la solution (figure 4).

III.2.2. 2^{me} Exemple:

Dans ce deuxième exemple nous interpolons 5 points du graphe de la fonction convexe f définie dans [-2,2] de la manière suivante: pour $x \in [-2,0]$ $f(x)=x^4$ et pour $x \in [0,2]$ $f(x)=x^5$.

Les données sont les suivantes: $x_0 = -2$, $y_0 = 16$; $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $x_3 = 1$, $y_3 = 1$, $x_4 = 2$, $y_4 = 32$.

Dans cet exemple les nœuds sont équidistants, $h_i = 1$, pour i=0,1, 2,3.

Calculons les différences: $d_{0+\frac{1}{3}} - d_0$, $d_{1+\frac{1}{3}} - d_{0+\frac{1}{3}}$, $d_{2+\frac{1}{3}} - d_{1+\frac{1}{3}}$, $d_{3+\frac{1}{3}} - d_{2+\frac{1}{3}}$, $d_4 - d_{3+\frac{1}{3}}$ en fonction de d_0 et d_4 :

$$d_{0+\frac{1}{3}} - d_0 = -33.85714 - 1.73214d_0 + 0.01786d_4 \quad (D_0)$$

$$d_{1+\frac{1}{3}} - d_{0+\frac{1}{3}} = 45.42857 + 0.92857d_0 - 0.07143d_4 \quad (D_1)$$

$$d_{2+\frac{1}{3}} - d_{1+\frac{1}{3}} = -30 - 0.25d_0 + 0.25d_4 \quad (D_2)$$

Représentation graphique du domaine polygonal - domaine non hachuré dans lequel doit être choisi (d_0, d_3) , pour le 1^{er} exemple (Cf. **II**.2.1.).



- Figure 3 -



- Figure 4 -

+ : Points interpolés, 1^{er} exemple (Cf. II.2.1.). Représentation graphique de la spline cubique d'interpolation de classe C^2 , croissante et convexe, obtenue par la méthode exposée dans le chapitre II. 32

$$d_{3+\frac{1}{3}} - d_{2+\frac{1}{3}} = 86.57143 + 0.07143d_0 - 0.92857d_4 \quad (D_3)$$

$$d_4 - d_{3+\frac{1}{3}} = -68.1429 - 0.01786d_0 + 1.73141d_4 \quad (D_4)$$

Le polygone défini par les inégalités: $d_{0+\frac{1}{3}} - d_0 \ge 0$, $d_{1+\frac{1}{3}} - d_{0+\frac{1}{3}} \ge 0$, $d_{2+\frac{1}{3}} - d_{1+\frac{1}{3}} \ge 0$, $d_{3+\frac{1}{3}} - d_{2+\frac{1}{3}} \ge 0$, $d_4 - d_{3+\frac{1}{3}} \ge 0$ est représenté sur la figure 5.

Le domaine qui n' est pas hachuré est celui dans lequel nous pouvons choisir (d_0, d_4) ; nous pouvons voir que c' est un triangle, nommé T₂, délimité par: $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ et $D_3 = 0$. Nous prenons $(d_0, d_4) = (-30, 90)$ (\in T₂).

Avec ce choix de d_0 , d_4 ; nous obtenons une solution satisfaisant à (I.3) où nous omettons la condition $d_0 \ge 0$ (les données n'étant pas monotones dans cet exemple) :

$$d_0 = -30 \le d_{0+\frac{1}{3}} = -10.28571 \le d_{1+\frac{1}{3}} = 0.857143 \le d_{2+\frac{1}{3}} = 0.857143$$
$$\le d_{3+\frac{1}{3}} = 1.714285 \le d_4 = 90.$$

D' où: $d_1 = -4.714283$, $d_2 = 0.857143$ et $d_3 = 1.285713$. Dans l' intervalle $[x_0, x_1] = [-2, -1]$:

$$P_0(x) = -16(1+x)^3 + 18(1+x)^2(x+2) - 7.71429(1+x)(2+x)^2 + (x+2)^3.$$

Dans l'intervalle $[x_1, x_2] = [-1, 0]$:

$$P_1(x) = -x^3 - 1.71429x^2(x+1) + 0.85714x(x+1)^2.$$

Dans l'intervalle $[x_2, x_3] = [0,1]$:

$$P_2(x) = 0.85714(1-x)^2 x + 1.714284(1-x)x^2 + x^3.$$

Dans l'intervalle $[x_3, x_4] = [1,2]$:

$$P_3(x) = (2-x)^3 + 4.28571(2-x)^2(x-1) + 6(2-x)(x-1)^2 + 32(x-1)^3.$$

Voir la représentation graphique de la solution (figure 6).

Représentation graphique du domaine polygonal - domaine non hachuré dans lequel doit être choisi (d_0, d_4) , pour le 2^{me} exemple (Cf. II.2.2.).



- Figure 5 -



- Figure 6 -

+ : Points interpolés, 2^{me} exemple (Cf. II.2.2.).
Représentation graphique de la spline cubique d'interpolation de classe C², convexe, obtenue par la méthode exposée dans le chapitre II.

су С

. • •

III.2.3. 3^{me} Exemple:

Nous interpolons 6 points du graphe de la fonction croissante et convexe $f(x)=e^x$. Les données sont les suivantes: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$; $x_1 = 1$, $y_1 = 2.7183$; $x_2 = 2$, $y_2 = 7.3891$; $x_3 = 3$, $y_3 = 20.0855$; $x_4 = 4$, $y_4 = 54.5982$; $x_5 = 5$, $y_5 = 148.4132$.

Les nœuds sont équidistants pour cet exemple: $h_i = 1$, pour i=0,1,2,3,4.

La résolution du système (E) dans ce cas, donne les résultats suivants dans lesquels les différences: $d_{0+\frac{1}{3}} - d_0$, $d_{1+\frac{1}{3}} - d_{0+\frac{1}{3}}$, $d_{2+\frac{1}{3}} - d_{1+\frac{1}{3}}$, $d_{4+\frac{1}{3}} - d_{3+\frac{1}{3}}$, $d_5 - d_{4+\frac{1}{3}}$ sont données en fonction de d_0 et d_5 :

$$d_{0+\frac{1}{3}} - d_{0} = 2.89 - 1.7321d_{0} - 0.0048d_{5} \quad (D_{0})$$

$$d_{1+\frac{1}{3}} - d_{0+\frac{1}{3}} = -1.25 + 0.9282d_{0} + 0.0191d_{5} \quad (D_{1})$$

$$d_{2+\frac{2}{3}} - d_{1+\frac{1}{3}} = 16.9356 - 0.2488d_{0} - 0.067d_{5} \quad (D_{2})$$

$$d_{3+\frac{1}{3}} - d_{2+\frac{1}{3}} = -18.3381 + 0.067d_{0} + 0.2488d_{5} \quad (D_{3})$$

$$d_{4+\frac{1}{3}} - d_{3+\frac{1}{3}} = 187.3136 - 0.0191d_{0} - 0.9282d_{5} \quad (D_{4})$$

$$d_{5} - d_{4+\frac{1}{3}} = -187.5509 + 0.0048d_{0} + 1.7321d_{5} \quad (D_{5}).$$

Le polygone défini par les inégalités: $d_0 \ge 0$, $D_0 \ge 0$, $D_1 \ge 0$, $D_2 \ge 0$, $D_3 \ge 0$, $D_4 \ge 0$, $D_5 \ge 0$ est non vide et (d_0, d_5) doit être choisi dans ce polygone qui se réduit au domaine P₃ délimité par: $d_0 = 0$, $D_0 = 0$, $D_4 = 0$, $D_5 = 0$ (voir figure 7).

Par exemple $(d_0, d_5) = (f'(0), f'(5)) = (1, 148.41316)$ appartient à P₃ et ce choix de (d_0, d_5) conduit à la solution suivante :

Dans l'intervalle $[x_0, x_1] = [0,1]$: $P_0(x) = (1-x)^3 + 4(1-x)^2x + 5.44776(1-x)x^2 + 2.71828x^3$.

Dans l'intervalle $[x_1, x_2] = [1,2]$: $P_1(x) = 2.71828(2-x)^3 + 10.86192(2-x)^2(x-1)$ +14.82831(2-x)(x-1)² + 7.38906(x-1)³.

Dans l'intervalle $[x_2, x_3] = [2,3]$: $P_2(x) = 7.38906(3-x)^3 + 29.50614(3-x)^2(x-2) + 40.21767(3-x)(x-2)^2 + 20.08554(x-2)^3$.

Dans l'intervalle $[x_3, x_4] = [3,4]$: $P_3(x) = 20.08554(4-x)^3 + 80.29513(4-x)^2(x-3)$

Représentation graphique du domaine polygonal - domaine non hachuré dans lequel doit être choisi (d_0, d_5) , pour le 3^{me} exemple (Cf. II.2.3.).



- Figure 7 -

 $109.66061(4-x)(x-3)^2 + 54.59815(x-3)^3.$

Dans l'intervalle $[x_4, x_5] = [4,5]$: $P_4(x) = 54.59815(5-x)^3 + 217.92698(5-x)^2(x-4) + 296.82658(5-x)(x-3)^2 + 148.41316(x-4)^3$.

Voir la représentation graphique de la solution (figure 8).

Remarque

J.C. Dupin et A. Fréville [20], ont établi des conditions suffisantes d'existence de splines cubiques d'interpolation conservant la forme pour une subdivision uniforme [22].

Parmi ces conditions, nous pouvons citer celle-ci:

$$\begin{cases} \Delta'_i \leq \Delta'_{i+1} \leq 3\Delta'_i & i=0,1,\dots n-3, \\ \Delta'_0 \leq 2\frac{\Delta_0}{h}, \end{cases}$$

où $\Delta'_{i} = \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_{i}}{h_{i} + h_{i+1}}$ pour i = 0, 1, ..., n - 2.

Cette condition se vérifie aisément sur l'exemple précédent.

III.2.4. 4^{me} Exemple

Dans cet exemple nous interpolons 10 points du graphe de la fonction $f(t) = \frac{-9t+2}{4t+5}$ (cf. [12] p. 50). Cette fonction est décroissante et convexe dans l'intervalle [-1,8], la subdivision est uniforme $h_i = 1$ pour i=0 à 8.

ti	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
zi	11	0.4	-0.77777	-1.23077	-1.47059	-1.6190	-1.72	-1.79310	-1.84848	-1.89189

La résolution du système (E) donne dans ce cas les résultats suivants dans lesquels les différences: $d_{0+\frac{1}{3}} - d_0$, $d_{1+\frac{1}{3}} - d_{0+\frac{1}{3}}$, $d_{2+\frac{1}{3}} - d_{1+\frac{1}{3}}$, $d_{4+\frac{1}{3}} - d_{3+\frac{1}{3}}$, $d_{5+\frac{1}{3}} - d_{4+\frac{1}{3}}$, $d_{6+\frac{1}{3}} - d_{5+\frac{1}{3}}$, $d_{7+\frac{1}{3}} - d_{6+\frac{1}{3}}$, $d_{8+\frac{1}{3}} - d_{7+\frac{1}{3}}$, $d_9 - d_{8+\frac{1}{3}}$ sont données en fonction de d_0 et d_9 :

 $d_{0+\frac{1}{2}} - d_0 = -22.64886 - 1.73205d_0 - 0.00002d_5 \quad (D_0)$

$$d_{1+\frac{1}{3}} - d_{0+\frac{1}{3}} = 26.99545 + 0.92820d_0 + 0.00010d_9 \quad (D_1)$$

$$d_{2+\frac{1}{3}} - d_{1+\frac{1}{3}} = -6.15074 - 0.24871d_0 - 0.00035d_9 \quad (D_2)$$

$$d_{3+\frac{1}{3}} - d_{2+\frac{1}{3}} = 1.95624 + 0.06664d_0 + 0.00128d_9 \quad (D_3)$$



- Figure 8 -

+ : Points interpolés, 3^{me} exemple (Cf. III.2.3.).

Représentation graphique de la spline cubique d'interpolation de classe C^2 , convexe et croissante, obtenue par la méthode exposée dans le chapitre II.

39

$$\begin{aligned} d_{4+\frac{1}{3}} - d_{3+\frac{1}{3}} &= -0.39518 - 0.001786d_0 - 0.00478d_9 \quad (D_4) \\ d_{5+\frac{1}{3}} - d_{4+\frac{1}{3}} &= 0.17265 + 0.00478d_0 + 0.01786d_9 \quad (D_5) \\ d_{6+\frac{1}{3}} - d_{5+\frac{1}{3}} &= -0.01037 - 0.00128d_0 - 0.06664d_9 \quad (D_6) \\ d_{7+\frac{1}{3}} - d_{6+\frac{1}{3}} &= 0.03591 + 0.00035d_0 + 0.24871d_9 \quad (D_7) \\ d_{8+\frac{1}{3}} - d_{7+\frac{1}{3}} &= -0.02694 - 0.00010d_0 - 0.92820d_9 \quad (D_8) \\ d_9 - d_{8+\frac{1}{3}} &= 0.07184 + 0.0002d_0 + 1.73205d_9 \quad (D_9). \end{aligned}$$

Le polygone défini par les inégalités: $d_0 \ge D_0 \ge D_1 \ge 0$, $D_2 \ge 0$, $D_3 \ge 0$, $D_4 \ge 0$, $D_5 \ge 0$, $D_6 \ge 0$, $D_7 \ge 0$, $D_8 \ge 0$, $D_9 \ge 0$, est non vide et (d_0, d_9) doit être choisi dans ce polygone qui se réduit au domaine P₄ délimité par: $d_0 = 0$, $D_0 = 0$, $D_4 = 0$, $D_5 = 0$ (voir figure 9).

Par exemple $(d_0 = -27, d_9 = -0.03)$ appartient à P₄ et ce choix de (d_0, d_9) conduit à la solution suivante:

Dans $[x_0, x_1] = [-1, 0]$: $P_0(x) = 11(-x)^3 + 6(-x)^2(x+1) + 3.11651(-x)(x+1)^2 + 0.4(x+1)^3$.

Dans $[x_1, x_2] = [0,1]$: $P_1(x) = 0.4(1-x)^3 - 0.71651x(1-x)^2 - 1.66604x^2(1-x)$ -0.77777 x^3 .

Dans $[x_2, x_3] = [1,2]$: $P_2(x) = -0.77777(2-x)^3 - 3.00061(2-x)^2(x-1)$ -3.38568(2-x)(x-1)² - 1.23077(x-1)³.

Dans $[x_3, x_4] = [2,3]$: $P_3(x) = -1.23077(3-x)^3 - 3.99898(3-x)^2(x-2)$ -4.2272(3-x)(x-2)² - 1.47059(x-2)³.

Dans $[x_4, x_5] = [3,4]$: $P_4(x) = -1.47059(4-x)^3 - 4.59637(4-x)^2(x-3)$ -4.73735(4-x)(x-3)² - 1.619(x-3)³.

Dans $[x_5, x_6] = [4,5]$: $P_5(x) = -1.619(5-x)^3 - 4.97664(5-x)^2(x-4)$ -5.07493(5-x)(x-4)² - 1.72(x-4)³.

Dans $[x_6, x_7] = [5,6]$: $P_6(x) = -1.72(6-x)^3 - 5.24507(6-x)^2(x-5)$ -5.31692(6-x)(x-5)² - 1.7931(x-5)³.

Dans $[x_7, x_8] = [6,7]$: $P_7(x) = -1.7931(7-x)^3 - 5.44163(7-x)^2(x-6)$ -5.49443 $(7-x)(x-6)^2 - 1.84848(x-6)^3$. Représentation graphique du domaine polygonal - domaine non hachuré dans lequel doit être choisi (d_0, d_9) , pour le 4^{me} exemple (Cf. II.2.4.).



Dans $[x_8, x_9] = [7,8]$: $P_8(x) = -1.84848(8-x)^3 - 5.59645(8-x)^2(x-7)$ -5.64567(8-x)(x-7)² - 1.89189(x-7)³.

Voir la représentation graphique de la solution (figure 10).

Dans le tableau $n^{\circ}1$, s_3^1 désigne un interpolant spline cubique C^1 décroissant et convexe obtenu par l'algorithme donné par Constantini et Morandi dans [5] et s_3 désigne l'interpolant spline cubique C^2 décroissant et convexe obtenu par la méthode décrite dans ce chapitre en prenant $d_0=-27$, $d_9=-0,03$.



- Figure 10 -

+ : Points interpolés, 4^{me} exemple (Cf. III.2.4.).

Représentation graphique de la spline cubique d'interpolation de classe C^2 , convexe et décroissante, obtenue par la méthode exposée dans le chapitre \mathbb{II} .

- Tableau $n^{o}1$ -

4^{me} exemple (Cf. **Ⅲ**.2.4.)

x	$f(x) = \frac{-9x+2}{4x+5}$	$s_{3}^{1}(x)$	$ f(x) - s_3^{1}(x) $	\$3	$ s_3(x)-f(x) $
-1	11	11	0	11	0
-0,9	7,91429	9,0019	1,78761	8,75784	1,54355
-0,8	5,11111	7,24054	2,12943	6,50293	1,39182
-0,6	2,84615	4,13118	1,28503	3,56479	0,71864
-0,4	1,64706	2,35045	0,70339	2,06862	0,42156
-0,2	0,66666	1,05045	0,38351	0,88371	0,21704
-0,1	0,63043	0,64913	0,0187	0,60904	0,02139
0	0,4	0,4	0	0,4	0
0,1	0,25	0,22993	0,02007	0,21779	0,03221
0,2	0,03448	0,07278	0,0383	0,05355	0,01907
0,4	-0,24242	-0,2047	0,03772	-0,22649	0,01593
0,6	-0,45946	-0,43635	0,02311	-0,45109	0,00837
0,8	-0,63415	-0,62607	0,00808	-0,6312	0,00295
0,9	-0,70930	-0,70643	0,00287	-0,71444	0,00514
1	-0,77778	-0,77777	0	-0,77777	0
1,1	-0,84043	-0,84213	0,0017	-0,84175	0,00132
1,2	-0,89796	-0,90719	0,00671	-0,90048	0,00252
1,4	-1,0	-1,00606	0,00606	-1,00388	0,00388
1,6	-1,08772	-1,09416	0,00644	-1,09122	0,0035
1,8	-1,16393 -	-1,16823	0,0043	-1,16576	0,00183
1,9	-1,19841	-1,20079	0,00238	-1,19925	0,00084
2	-1,23077	-1,23077	0	-1,23077	0
2,1	-1,26119	-1,25908	0,00211	-1,26066	0,00053
2,2	-1,28986	-1,2864	0,0346	-1,28906	0,0008
2,4	-1,34247	-1,33813	0,00434	-1,34163	0,00084
2,6	-1,38961	-1,38603	0,00358	-1,38904	0,00057
2,8	-1,4321	-1,43016	0,00194	-1,43184	0,00026
2,9	-1,45181	-1,45083	0,00093	-1,45168	0,00013
3	-1,47059	-1,4706	0	-1,47059	0
3,1	-1,48851	-1,48939	0,00088	-1,48862	0,00077
3,2	-1,50562	-1,50718	0,00156	-1,50582	0,0002
3,4	-1,53763	-1,53997	0,00234	-1,53793	0,0003
3,6	-1,56701	-1,56931	0,0023	-1,56725	0,00206
3,8	-1,59406	-1,59553	0,00147	-1,59416	0,0001
3,9	-1,6068	-1,60759	0,00079	-1,60681	0,0 001
4	-1,61905	-1,619	0	-1,619	0
4,1	-1,63084	-1,63003	0,00081	-1,63075	0,00009
4,2	-1,64220	-1,6409	0,0013	-1,6421	0,0001

x	$f(x) = \frac{-9x+2}{4x+5}$	$s_3^1(x)$	$ f(x)-s_3^{1}(x) $	83	$ s_3(x)-f(x) $
4,4	-1,66372	-1,66209	0,00163	-1,66361	0,00011
4,6	-1,68376	-1,68243	0,00133	-1,68368	0,00008
4,8	-1,70248	-1,70178	0,0007	-1,70244	0,00004
4,9	-1,71138	-1,71104	0,00034	-1,71136	0,00002
5	-1,72	-1,72	0	-1,72	0
5,1	-1,72835	-1,72863	0,00028	-1,72838	0,00003
5,2	-1,73643	-1,73691	0,00048	-1,7365	0,00007
5,4	-1,75188	-1,75255	0,00067	-1,75199	0,00011
5,6	-1,76642	-1,76703	0,00061	-1,76655	0,00013
5,8	-1,78014	-1,78031	0,00017	-1,78024	0,0001
5,9	-1,78671	-1,7869	0,00019	-1,78677	0,00006
6	-1,79310	-1,7931	0	-1,7931	0
6,1	-1,79932	-1,79912	0,0002	-1,79924	0,00008
6,2	-1,80537	-1,805	0,00037	-1,80196	0,00341
6,4	-1,81699	-1,81639	0,0006	-1,81667	0,00032
6,6	-1,82803	-1,82735	0,0006	-1,82762	0,00041
6,8	-1,83851	-1,83802	0,00049	-1,83819	0,00032
6,9	-1,84356	-1,84514	0,00158	-1,84336	0,0002
7	-1,84848	-1,84848	0	-1,84848	0
7,1	-1,85329	-1,85363	0,00034	-1,85356	0,00027
7,2	-1,85799	-1,8563	0,0064	-1,85856	0,00057
7,4	-1,86705	-1,86818	0,0013	-1,86823	0,00118
7,6	-1,87571	-1,877	0,00129	-1,87719	0,00148
7,8	-1,88398	-1,88494	0,00096	-1,88517	0,00119
7,9	-1,88798 -	-1,88855	0,00059	-1,88870	0,00072
8	-1,89189	-1,89189	0	-1,89189	0

- Tableau nº1 (suite) -

45

III.3. Programme de résolution du problème (P 3)

La programmation de la méthode faisant l'objet du lII.1., s'appuie ici sur l'utilisation de représentations graphiques.

> Ce programme, en TURBO BASIC, a été exécuté sur un micro-ordinateur IBM PC.

OPTION BASE O CLS DEFINT I-J,M-N DEFDBL A-H,K-L,O-Z INPUT "N= ";N DIM X(N),Y(N),DT(N),K(N),KO(N),KN(N),H(N) DIM U(N),V(N),W(N),Y1(N),Y2(N),Y0(N),Y3(N) DIM A(N),B(N),C(N),DO(N),D1(N),D2(N),Z(N),T(11),S(N,11)

Définition de la fonction numérique de laquelle sont issus les points à interpoler, éventuellement.

A\$="O/N?" DEF FNF(x) = "definition de la fonction " .

> Lecture des données à 'nterpoler, consignées dans le fichier "F_XY.DON".

OPEN "F_XY.DON" AS #1 LEN=8 FIELD #1.4 AS X\$, 4 AS Y\$ CODE=0 FOR I=0 TO N CODE=CODE+1 GET #1,CODE Y(I)=CVS(Y\$) X(I)=CVS(Y\$) NEXT I CLOSE

Résolution du système linéaire (E), par la méthode indiquée dans le paragraphe I.3., chapitre 3. Calcul des ω_1 . W(O) = C(O) / B(O) $Z(0) = 3 \times DT(0) / B(0)$ FOR I=1 TO N-1 WCID=CCID/CBCID-ACID*WCI-100

ZCI)=C3*DTCI)-ACI)*ZCI-1))/CBCI)-ACI)*WCI-1))

A(1) = H(0)/(H(0) + H(1))C(0) = A(1)FOR I=1 TO N-2 ACI+1) = HCI)/CHCI+1)+HCI)) C(I) = A(I+1)BCID= 1+HCI-10/CHCI-10+HCID0+HCI+10/CHCI+10+HCID0 NEXT I B(N-1) = 1 + H(N-2) / (H(N-1) + H(N-2))C(N-2) = A(N-1)

Calcul de la matrice H.

LOCATE 12,17 PRINT "IMPOSSIBLE" STOP 11 FOR I=1 TO N-1 HCID = XCI + 1D - XCIDDTCID=CYCI+1D-YCIDD/HCID IF DT(I) < DT(I-1) THEN GOTO 21 NEXT I

H(O) = X(1) - X(O)

21

DT(O) = (Y(1) - Y(O)) / H(O)IF Y(1)>=Y(0) THEN GOTO 11

BCOD =1 +HC10 /CHCOD +HC100

NEXT I

Calcul des hi et des Δi . Test de la croissance et de la convexité des données. Remarque: Cette partie du programme peut être adaptée aux autres cas de forme des données, simplement en changeant le(s) test(s) .

Calcul de $H^{-1}\widetilde{\Delta}$.

K(N-1)=Z(N-1) FOR I=N-2 TO O STEP -1 K(I)=Z(I)-W(I)*K(I+1) NEXT I

Calcul de $H^{-1}e_{1}$ et $H^{-1}e_{1}$. Dans le cas où le pas est constant $H^{-1}e_{1}$ est déduit de $H^{-1}e_{1}$ par symétrie centrale.

Z(0)=1/B(0) FOR I=1 TO N-1 ZCID=-ACID*ZCI-1)/CBCID-ACID*WCI-1)) NEXT I KO(N-1) = Z(N-1)KNCOD = KOCN-1DFOR I =N-2 TO O STEP -1 KOCI)=ZCI)-WCI)*KOCI+1) KNCN-1-I)=KOCI) NEXT I FOR I=1 TO N-1 IF HCOD-HCID<>0 THEN GOTO 30 NEXT I GOTO 40 30 FOR I=0 TO N-2 Z(I) = 0NEXT I Z(N-1)= 1/CB(I)-A(I)*W(I-1)) KN(N-1) = Z(N-1)FOR I=N-2 TO O STEP -1 KNCID=ZCID-WCID*KNCI+1D NEXT I

Calcul des coefficients des droites $d_{1+1+(1/3)} - d_{1+(1/3)}$

40 PRINT "Coef. des droites Di+1/3" PRINT "------" FOR I= O TO N-1 PRINT USING "## ####. ##### ##### #####. ######"; I;K(I);-KO(I);-KN(I) NEXT

```
UC 0) =K( 0)
V(0) = -KO(0) - 1
W(O) = -KN(O)
U(N) = -K(N-1)
V(N) = KO(N-1)
W(N) = KN(N-1) + 1
FOR I=1 TO N-1
    UCID=KCID-KCI-1D
    VCID=-KOCID+KOCI-1D
    WCID=-KNCID+KNCI-1D
NEXT I
PRINT "Coef. des droites Di+1+1/3-Di+1/3"
PRINT "-----"
FOR I=0 TO N
    PRINT USING "## ####. ##### ####. ##### ##### ":
   I:UCID:VCID:WCID
NEXT I
```

Traçage des droites (avec choix de l'échelle). Notons par DPi les demi plans contenant (resp. ne contenant pas) l'origine, quand ils sont délimités par une droite traçée en continu (resp. en pointillés). Le polygone PO, dans lequel doit être choisi (d,d), est défini par l'intersection des DPi. Si cette intersection est vide il n'y a pas de solution. Ce polygone est visualisé à l'écran (ou éventuellement dessiné à l'aide d'une table traçante ou d'une imprimante graphique).

54 INPUT "X1 = ";X1 INPUT "X2= ":X2 INPUT "Y1 = "; Y1 INPUT "Y2= ":Y2 SCREEN 2,0 VIEW (20,20)-(620,180),,1 WINDOW (X1, Y1)-(X2, Y2) LINE (X1, Y1)-(X2, Y1) LINE (X1, X2)-(X1, Y2) FOR I=O TO N ON ERROR GOTO 300 Z=&HFFFF IF UCID O THEN Z=&HF000 IF WCID=0 THEN GOTO 200 IF V(I)=0 THEN GOTO 400 IF UCID=0 THEN GOTO 500 IF C-UCID/WCID-VCID/WCID*X1D <Y1 OR C-UCID/WCID-VCID/WCID*X1D >Y2 THEN GOTO 600

IF (-UCI)/WCI)-VCI)/WCI)*X2) <Y1 OR (-UCI)/WCI)-VCI)/WCI)*X2) >Y2 THEN GOTO 600 PSET CX1,-UCID/WCID-VCID/WCID*X1D FOR X=X1 TO X2 STEP (X2-X1)/10 ON ERROR GOTO SAUTX LINE -CX, -UCID/WCID-VCID/WCID*XD,, 2 SAUTX: NEXT X GOTO 300 600 ON ERROR GOTO ET1 PSET C-UCID/VCID-WCID/VCID*Y1,Y1D ET1 : FOR Y=Y1 TO Y2 STEP (Y2-Y1)/10 IF -UCID/VCID-WCID/VCID*Y<X1 OR -UCID/VCID-WCID/VCID*Y>X2 THEN GOTO SAUTY: LINE -C-UCID/VCID-WCID/VCID*Y,YD,,,Z ON ERROR GOTO SAUTY SAUTY: NEXT Y GOTO 300 200 ON ERROR GOTO 300 LINE (-UCI)/VCI), Y1)-(-UCI)/VCI), Y2),,,Z GOTO 300 400 ON ERROR GOTO 300 LINE (X1, UCID/WCIDD-CX2, UCID/WCIDD,,,Z GOTO 300 500 ON ERROR GUTO 300 LINE (0,0)-(X2,-V(I)/W(I)*X2),,,Z 300 NEXT I LOCATE 1,1 PRINT Y2 LOCATE 23,1 PRINT X1:Y1 LOCATE 23,70 PRINT X2 PRINT " POLYGONE NON VIDE ? O/N " INPUT " Oui ou Non "; B\$ IF BS="O" OR "o" THEN GOTO Suite PRINT "PAS DE SOLUTION" STOP

Choix d'un point (d,d) et verification visuelle, en le positionnant graphiquement, de son appartenance au polygone PO . Suite: GOTO 700 800 PRESET (DO.Dn) 700 LOCATE 1.10 INPUT "DO= ": DO LOCATE 1.20 INPUT "Dn= "; Dn PSET (DO, Dn) LOCATE 1,25 PRINT USING "D(#)=####. ##### "; Dn LOCATE 1,8 PRINT "DO= "; DO LOCATE 1,40 INPUT CS IF CS<>"O" THEN GOTO 800 LOCATE 1.3 PRINT" CLS SCREEN O Après un choix convenable de d et d, , considérés maintenant comme etant fixés : Calcul des d_i , $d_{i+(1/3)}$, $d_{i+(2/3)}$. Remarque: On peut, à ce niveau, revérifier, sur leurs valeurs numériques, que les d, d, $t_{1/3}$, d, sont dans un ordre garantissant la croissance et la convexité de la solution. DOCOD = DOFOR I=0 TO N-1 D1CID=KCID-KOCID*D0-KNCID*Dn NEXT FOR I=1 TO N-1 DOCID=HCI-10*HCID/CHCI-10+HCID0*CD1CID/HCID+D1CI-10/HCI-100 D2(I-1)-D0(I) NEXT FOR I =0 TO N-1 PRINT USING "## D#=####. ##### D#+1/3=####. #####"; I:I:DOCID:I:D1CID NEXT PRINT USING "D#= ####. ##### ": N: DN DELAY 3

51

Calcul des coefficients des polynômes, restriction de la spline dans chacun des intervalles I_i .

FOR I=0 TO N-1
 Y1(I)=(D0(I)*H(I)+3*Y(I))/(H(I)^3)
 Y2(I)=D1(I)/(H(I)^2)+Y1(I)
 Y0(I)=Y(I)/(H(I)^3)
 Y3(I)=Y(I+1)/(H(I)^3)
 PRINT "Pour x dans ["X(I)",";X(I+1);"]"
 PRINT
 PRINT
 PRINT
 PRINT USING "P#(x)=###.#### ###.#### ###.#### ###.####";
 I;Y0(I);Y1(I);Y2(I);Y3(I)
 PRINT
 NEXT

Calcul des valeurs de la spline, solution du problème, en plusieurs points dans chaque intervalle I_i et calcul des erreurs absolues et relatives en ces points, quand les données à interpoler sont issues du graphe d'une fonction numérique.

	SEA=0	
	FOR I=0	TO N-1
	F	OR J=0 TO 10
		TCJD=XCID+CHCID/10D*J
		S(I,J)=Y3(I)*(T(J)-X(I))^3+Y2(I)*(T(J)
		-X(Ī))^2*(X(I+1)-T(J))+Y1(I)*(T(J)-X(I))
		*CXCI+1)-TCJ))^2+YOCI)*CXCI+1)-TCJ))^3
		IF A\$="N" OR "n" THEN GOTO Saut2
		F=FNF(T(J))
		EA=ABS(F-S(I,J))
		SEA=SEA+EA
		IF EA=0 THEN GOTO 900
		IF F=0 THEN GOTO 1000
		ER=EA/ABSCF) *100
		IF ER<10000 THEN GOTO 1100
1000		ER=9999.99999
		GOTO 1100
900		ER=0
1100		PRINT USING"I=## X=##.#### F=####.#### S=####.####
		EA=###.#### ER=##.#### % "; I;T(J);F;S(I,J);EA;ER
		GOTO Saut3
Sauta	2:	
		PPINT USING"I=## X=##.#### S=####.#### "
		;I;TCJD;SCI,JD

NEXT J NEXT I 1F AS="O" OR "O" THEN PRINT "SOMME ER. ABS. = "; SEA DELAY 3 CLS Représentation graphique et sortie sur papier de la fonction spline solution du problème et des points interpolés. Eventuellement: représentation, sur le même graphique, de la fonction numérique de laquelle sont issus les points interpolés. X1 = X(O) - (X(N) - X(O)) / 10X2=X(N)+(X(N)-X(O))/10 Y1=YCO)-CYCN)-YCO))/10 Y2=Y(N)+(Y(N)-Y(O))/10 EH=(X2-X1)/150 EV=(Y2-Y1)/80 SCREEN 2.0 VIEW (20,20)-(620,180),,1 WINDOW (X1, Y1)-(X2, Y2) LINE (X1.0)-(X2.0) LINE (0, Y1)-(0, Y2) PSET (X(O), Y(O)) FOR I=0 TO N-1 IF A\$="N" OR "n" THEN GOTO Saut4 FOR J= 0 TO 30\N T=X(I)+(H(I)/5)*J S=FNF(T) LINE (T-EH, S)-(T+EH, S) LINE (T,S-EV)-(T,S+EV) NEXT J Saut4: FOR J=0 TO 50 T=X(I)+(H(I)/50)*J S=Y3(I)*(T-X(I))^3+Y2(I)*(T-X(I))^2*(X(I+1)-T) +Y1CID*CT-XCIDD*CXCI+1D-TD^2+Y0CID*CXCI+1D-TD^3 PSET (T.S) NEXT J NEXT I LOCATE 1.1 PRINT USING "#### ##### ";Y2 LOCATE 23.1 PRINT USING "##### . ####. ##### ": X1 : Y1 LOCATE 23,70 PRINT USING "#### ##### ":X2 END

53

Saut 3:

CONCLUSIONS

En conclusion de cette partie, nous retiendrons les aspects suivants:

- Pour les splines polynomiales d'interpolation de degré $\leq m$ et de classe C^{m-1} , les conditions de raccordement C^{m-1} aux nœuds permettent d'exprimer, par récurrence, toutes les inconnues du problème en fonction de m-1 paramètres choisis parmi elles.

L'étude de la solvabilité d'un système d'inéquations linéaires, à m-1 inconnues, permet de conclure à l'existence ou à l'inexistence de solutions pour le problème de conservation de forme par de telles splines.

- Pour m = 2, cette méthode nous a permis de mettre au point un algorithme permettant d'affirmer l'existence où l'inexistence, pour des données convexes et monotones, de splines quadratiques d'interpolation convexes et croissantes. Dans le cas où l'existence de telles splines est assurée, cet algorithme permet de fixer le seul paramètre libre qui détermine explicitement une solution du problème.

- Pour m = 3, la résolution de 3 systèmes linéaires (2, quand la subdivision est uniforme) de même matrice, permet d'exprimer toutes les inconnues qui définissent la spline en fonction de 2 paramètres qui sont, pour nous, les dérivées de la spline aux nœuds extrêmes. La représentation d'un polygone, dont la définition découle des conditions de forme et ne fait intervenir que ces 2 paramètres, permet, suivant la vacuité ou la non vacuité de ce polygone, de conclure à l'inexistence ou à l'existence de splines cubiques d'interpolation de classe C^2 ayant la même forme que les données.

Le fait de pouvoir déterminer, quand il n' est pas vide, tout un domaine (un intervalle de IR pour les quadratiques, un domaine polygonal de IR^2 pour les cubiques et plus généralement un convexe de IR^{m-1} pour les splines polynomiales de degré $\leq m$) dans lequel peut être choisi le point de IR^{m-1} dont les composantes sont les paramètres libres, est intéressant dans la mesure où cela permettrait éventuellement de tenir compte d'autres critères. Par exemple faire ce choix de manière à optimiser dans ce domaine une fonctionnelle donnée. Cela pourrait constituer un thème de recherche.

54

Retenons aussi, bien que ça ne soit que la confirmation d'une idée généralement exploitée, l'intérêt de l'utilisation de la base de Bernstein pour étudier les problèmes d'interpolation par des splines polynomiales préservant la forme. Deuxième partie

ÉTUDE D' UN PROBLÈME DE CONCEPTION DE FORME

D' UNE MACHINE VOLUMÉTRIQUE À PALETTES

AVEC UNE CONTRAINTE MÉCANIQUE

INTRODUCTION

Dans cette deuxième partie, nous traiterons un problème de conception de forme qui est un exemple de problèmes qu' on peut rencontrer en CMAO^{*} et CFAO^{**}. On peut, à ce propos, lire une publication de J.M Flamme [21] dans la revue Energie fluide.

Il s' agit de concevoir une machine volumétrique à palettes - ou "pompe" -.

Nous montrerons alors qu'il s'agit de relier deux points donnés par une courbe à forte régularité. Ce raccordement doit avoir une forme donnée, en particulier une concavité tournée constamment vers le centre de la pompe et doit obéir à une contrainte mécanique, relative à la force d'inertie agissant sur les palettes, établie expérimentalement.

Dans le chapitre IV nous proposerons, à partir du problème de mécanique originel, de déterminer la solution sous la forme d'une courbe en coordonnées polaires avec des conditions de régularité, des conditions de forme et avec une condition qui traduit la contrainte mécanique.

Dans le chapitre V nous proposerons une série de solutions appartenant à une certaine classe de fractions rationnelles ou de splines rationnelles. Toutes ces solutions répondent entièrement aux conditions de régularité et aux conditions de forme. En revanche, elles ne répondent que partiellement à la contrainte mécanique.

^{*:} Conception mécanique assistée par ordinateur.

^{**:} Fabrication mécanique assistée par ordinateur.

Chapitre IV

LE PROBLÈME TRAITÉ

Introduction

Le problème que nous allons formuler et tenter de résoudre est un problème de conception de forme d'une pièce mécanique.

Il s'agit de déterminer la forme d'une machine volumétrique à palettes (ou "pompe") à partir de conditions mécaniques et de conditions de forme données.

Ce type de machines intervient, par exemple, dans les systèmes de conditionnement d'air des véhicules.

IV.1. Description d' une pompe

La forme de la pompe est une forme cylindrique dont une section est representée sur la figure 11. -

- Dans toute la suite nous considérons que le problème est un problème plan.

- Les palettes se maintiennent en butée contre la paroi, grâce à la force d'inertie centrifuge quand elles sont en rotation.

- Les palettes seront supposées être très minces et de bout arrondi, assurant l'étanchéité parfaite entre les volumes qu'elles séparent (hypothèse (H)).

IV.2. Formulation du problème

IV.2.1. Les conditions à satisfaire

Le problème qui nous a été soumis est le suivant:

Comment raccorder l'arc de cercle C d'angle $\pi + 2\alpha$, joignant B et A, de rayon r_1

Machine volumétrique à palettes



- Figure 11 -

Figure précisant les notations utilisées dans IV.2



- Figure 12 -

et de centre O, et le point S distant de r_2 par rapport à l'origine - figure 12 -, de façon à satisfaire les 3 conditions C₁, C₂, et C₃ suivantes ?.

 C_1) Le centre de gravité des palettes doit avoir une vitesse et une accélération continues.

C₂) Le raccordement doit être tel que la concavité soit constamment tournée vers l'origine et le rayon soit croissant entre le point A et le point S, puis décroissant entre S et B - figure 12 -.

 C_3) L'accélération d'inertie centrifuge doit être comprise entre deux bornes dont les valeurs numériques sont déterminées expérimentalement.

IV.2.2. La condition C_1

En régime permanent, et nous nous intéresserons exclusivement à ce régime (d'ailleurs le régime de mise en marche ou d'arrêt, est supposé être de très courte durée), le centre de gravité d'une palette est supposé être animé à la fois, d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω constante, et d'un mouvement de translation sur un axe en rotation confondu avec l'axe de la palette.

L'hypothèse (H) et le fait que r_2 soit du même ordre de grandeur que r_1 (voir les données numériques en N.2.5.) conduisent à la relation suivante entre G(t), position du centre de gravité d'une palette à un instant t donné, et M(t) le point de contact à l'instant t de la palette avec la paroi de la pompe:

$$G(t) = M(t) + d\bar{N}(t) ,$$

où $\vec{N}(t)$ est le vecteur unitaire normal à la paroi au point M(t) et d est une constante qui est la mesure de la distance entre G et le bout de la palette.

 $\vec{N}(t) = \frac{\vec{n}(t)}{\|\vec{N}(t)\|}, \text{ avec } \vec{n}(t) = \vec{\Omega} \wedge \vec{t}(t) \text{ où } \vec{t}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \text{ et } \vec{\Omega} \text{ le vecteur rotation autour } de l' \text{ axe } \vec{k} \text{ normal au plan } (O, \vec{i}, \vec{j}) (\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}).$

Et comme nous voulons que G ait une vitesse et une accélération continues, il faut et il suffit que nous ayons M(t) de classe C^3 .

Éliminons le temps dans l'équation horaire M(t) pour déterminer l'équation de la

trajectoire de M en coordonnées polaires. Comme $\omega t = \theta$, la condition C₁ se ramène à la condition C'₁ suivante:

Chercher une courbe en coordonnées polaires reliant le point A et le point B en passant par S, avec $\rho(\theta)$ de classe C^3 sur $[\alpha, \pi - \alpha]$ (C₁).

Nous supposerons de plus que la forme de la pompe est symétrique par rapport à l'axe Oy, ce qui se traduit par:

$$\forall \theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}], \ \rho(\theta) = \rho(\pi - \theta) \ .$$

Calculons, en coordonnées polaires, les dérivées, première, seconde et troisième de \overrightarrow{OM} en coordonnées polaires.

Posons,
$$\vec{u_r}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

et $\vec{u_{\theta}}(\theta) = \frac{d\vec{u_r}(\theta)}{d\theta} = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$.

Nous avons alors:

$$\overrightarrow{OM} = \rho(\theta)\vec{u_r}(\theta);$$

$$-\frac{d\overline{OM}}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\vec{u_r} + \rho\vec{u_\theta};$$
$$\frac{d^2\overline{OM}}{d\theta^2} = (\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - \rho)\vec{u_r} + 2\frac{d\rho}{d\theta}\vec{u_\theta};$$
$$\frac{d^3\overline{OM}}{d\theta^3} = (\frac{d^3\rho}{d\theta^3} + 3\frac{d\rho}{d\theta})\vec{u_r} + (3\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - \rho)\vec{u_\theta}$$

Exprimons la condition C_1' en α et en $\frac{\pi}{2}$, en supposant que le raccordement est de classe C^3 sur] $\alpha, \frac{\pi}{2}$ [.

Raccordement avec l'arc de cercle en A

$$\overrightarrow{OM}(\alpha) = \rho(\alpha)\vec{u_r}(\alpha) = r_1\vec{u_r}(\alpha) \implies \rho(\alpha) = r_1 \qquad (C1.1);$$

$$\frac{d\overline{OM}}{d\theta}(\alpha) = r_1 \vec{u_{\theta}}(\alpha) \implies \frac{d\rho}{d\theta}(\alpha) = 0 \qquad (C1.2);$$

$$\frac{d^2 \overline{OM}}{d\theta^2}(\alpha) = -r_1 \vec{u_r}(\alpha) \implies \frac{d^2 \rho}{d\theta^2}(\alpha) = 0 \qquad (C1.3);$$

$$\frac{d^3\overline{OM}}{d\theta^3}(\alpha) = -r_1\vec{u_{\theta}}(\alpha) \implies \frac{d^3\rho}{d\theta^3}(\alpha) = 0 \qquad (C1.4).$$

Raccordement au point S

$$\begin{split} \overline{OM}(\frac{\pi}{2}) &= \rho(\frac{\pi}{2})\vec{u_r}(\frac{\pi}{2}) = r_2\vec{u_r}(\frac{\pi}{2}) \implies \rho(\frac{\pi}{2}) = r_2 \qquad (C1.5); \\ \frac{d\overline{OM}}{d\theta}(\frac{\pi}{2}) &= \frac{d\rho}{d\theta}(\frac{\pi}{2})\vec{u_r}(\frac{\pi}{2}) + r_2\vec{u_\theta}(\frac{\pi}{2}), \\ \frac{d\overline{OM}}{d\theta}(\frac{\pi}{2}) &= -\frac{d\rho}{d\theta}(\frac{\pi}{2})\vec{u_r}(\frac{\pi}{2}) + r_2\vec{u_\theta}(\frac{\pi}{2}), \\ \frac{d\overline{OM}}{d\theta}(\frac{\pi}{2}) &= \frac{d\overline{OM}}{d\theta}(\frac{\pi}{2}) \implies \frac{d\rho}{d\theta}(\frac{\pi}{2}) = 0 \qquad (C1.6); \\ \frac{d^2\overline{OM}}{d\theta^2}(\frac{\pi}{2}) &= \left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\frac{\pi}{2}) - r_2\right)\vec{u_r}(\frac{\pi}{2}) + 2\frac{d\rho}{d\theta}(\frac{\pi}{2})\vec{u_\theta}(\frac{\pi}{2}), \\ \frac{d^2\overline{OM}}{d\theta^2}(\frac{\pi}{2}) &= \left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\frac{\pi}{2}) - r_2\right)\vec{u_r}(\frac{\pi}{2}) + 2\frac{d\rho}{d\theta}(\frac{\pi}{2})\vec{u_\theta}(\frac{\pi}{2}), \\ \implies \frac{d^2\overline{OM}}{d\theta^2}(\frac{\pi}{2}) &= \left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\frac{\pi}{2}) - r_2\right)\vec{u_r}(\frac{\pi}{2}) + 2\frac{d\rho}{d\theta}(\frac{\pi}{2})\vec{u_\theta}(\frac{\pi}{2}), \\ \implies \frac{d^2\overline{OM}}{d\theta^2}(\frac{\pi}{2}) &= \frac{d^2\overline{OM}}{d\theta^2}(\frac{\pi}{2}) = \frac{d^2\overline{OM}}{d\theta^2}(\frac{\pi}{2}). \end{split}$$

La continuité de la dérivée seconde est donc une conséquence de la symétrie.

$$\frac{d^{3}\overline{OM}}{d\theta^{3}}(\frac{\pi}{2}^{-}) = \left(\frac{d^{3}\rho}{d\theta^{3}}(\frac{\pi}{2}^{-}) + 3\frac{d\rho}{d\theta}(\frac{\pi}{2})\right)\vec{u_{r}}(\frac{\pi}{2}) + \left(3\frac{d^{2}\rho}{d\theta^{2}}(\frac{\pi}{2}) - r_{2}\right)\vec{u_{\theta}}(\frac{\pi}{2}) ,$$

$$\frac{d^{3}\overline{OM}}{d\theta^{3}}(\frac{\pi}{2}^{+}) = \left(-\frac{d^{3}\rho}{d\theta^{3}}(\frac{\pi}{2}^{+}) + 3\frac{d\rho}{d\theta}(\frac{\pi}{2})\right)\vec{u_{r}}(\frac{\pi}{2}) + \left(3\frac{d^{2}\rho}{d\theta^{2}}(\frac{\pi}{2}) - r_{2}\right)\vec{u_{\theta}}(\frac{\pi}{2}) ,$$

$$\frac{d^{3}\overline{OM}}{d\theta^{3}}(\frac{\pi}{2}) = \frac{d^{3}\overline{OM}}{d\theta^{3}}(\frac{\pi}{2}) \implies \frac{d^{3}\rho}{d\theta^{3}}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{d^{3}\rho}{d\theta^{3}}(\frac{\pi}{2}) \implies \frac{d^{3}\rho}{d\theta^{3}}(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad (C1.7).$$
IV.2.3. La condition C_2

La condition C₂ s' exprime de la manière suivante:

$$\forall \theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{d\rho}{d\theta} \ge 0$$
 (C2.1);

$$\forall \theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{\rho}) + \frac{1}{\rho} \ge 0 \qquad (C2.2).$$

Cette dernière condition (C2.2) exprime, en coordonnées polaires, le fait que la concavité soit tournée vers l'origine.

IV.2.4. La condition C_3

Rappelons d'abord que la réaction d'inertie est la force $m\frac{d^2\overline{OM}}{dt^2}$, où *m* désigne la masse d'une palette.

La condition C_3 est une condition qui se justifie de la manière suivante:

La réaction d'inertie ne doit pas être "trop faible", car cela entraînerait que le contact entre les palettes en rotation et la paroi de la pompe est insuffisant et cela poserait, par conséquent, des problèmes d'étanchéité entre les volumes séparés par les palettes.

La réaction d'inertie ne doit pas être "trop forte", car cela entraînerait des problèmes d'usure par frottement et par conséquent raccourcirait la durée de vie de la pompe.

Les deux valeurs maximales et minimales souhaitées pour l'accélération d'inertie sont déterminées par des observations et des mesures expérimentales.

La réaction d'inertie est proportionnelle à l'accélération d'inertie $\left(\frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2}\right)$ ce qui nous permet, tout aussi bien, de traduire cette condition (C₃) en utilisant l'accélération d'inertie.

Nous écrirons cette condition de la manière suivante: $RI_{min} \leq RI \leq RI_{max}$, où RIdésigne le module de l'accélération d'inertie et RI_{min} et RI_{max} les bornes entre lesquelles on souhaite qu'il soit compris.

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = (\frac{d\theta}{dt})^2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{d\theta^2} = \omega^2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{d\theta^2},$$

$$\begin{split} \|\frac{d^{2}\overline{OM}}{dt^{2}}\| &= \omega^{2} \|\frac{d^{2}\overline{OM}}{d\theta^{2}}\| = \omega^{2} \sqrt{\left(\frac{d^{2}\rho}{d\theta^{2}} - \rho\right)^{2} + 4\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^{2}} \\ RI &= \|\frac{d^{2}\overline{OM}}{dt^{2}}\| = \omega^{2} \sqrt{\left(\frac{d^{2}\rho}{d\theta^{2}} - \rho\right)^{2} + 4\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^{2}}; \\ RI_{min} &\leq RI \leq RI_{max} \iff \\ RI_{min} &\leq \omega^{2} \sqrt{\left(\frac{d^{2}\rho}{d\theta^{2}} - \rho\right)^{2} + 4\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^{2}} \leq RI_{max} \iff \\ \frac{RI^{2}_{min}}{\omega^{4}} \leq \left(\frac{d^{2}\rho}{d\theta^{2}} - \rho\right)^{2} + 4\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^{2} \leq \frac{RI^{2}_{max}}{\omega^{4}}. \end{split}$$

En utilisant les notations suivantes, $l = \frac{RI^2 \min}{\omega^4}$, $L = \frac{RI^2 \max}{\omega^4}$ et $\Psi(\theta) = \left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - \rho\right)^2 + 4\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2$, la condition (C₃)) s' écrit:

$$\forall \theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}], \ l \le \Psi(\theta) \le L \tag{C3.1}$$

IV.2.5. Récapitulation et données numériques

Le problème initial se formule de la manière, équivalente, ci-dessous:

Trouver une fonction $\rho(\theta)$ pour $\theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]$ qui vérifie les conditions suivantes:(C 1.1), (C 1.2), (C 1.3), (C 1.4), (C 1.5), (C 1.6), (C 1.7), (C 2.1), (C 2.2), (C 3.1).

Les données numériques sont les suivantes:

 $\alpha = \frac{4\pi}{180}$ (4°) $r_1 = 30$ mm, $r_2 = 37.5$ mm, $l=400 mm^2$, L= 3600 mm².

Chapitre V

SOLUTIONS PROPOSÉES

Introduction

Dans ce chapitre nous allons exposer plusieurs propositions de solution, dans lesquelles $\rho(\theta)$ est toujours du même type, à savoir du type fractions rationnelles avec le numérateur égal à la constante 1. Le choix de ce type de solution, auquel nous sommes parvenus après avoir essayé plusieurs autres types de solutions, permet d'étudier plus simplement la condition (C 2.2), puisque pour des solutions de cette forme $\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{\rho})$ est un polynôme.

Dans les solutions proposées les conditions seront toutes vérifiées sauf (C 3.1) qui ne l'est que partiellement en ce sens que, sur une plage de points plus ou moins grande selon la solution, $\Psi(\theta)$ sort de l'intervalle [1, L].

La minimisation de la taille de cette plage peut être un critère de qualité pour juger les différentes solutions. Nous pourrons avoir une idée de cette taille en calculant numériquement Ψ , pour θ variant entre α et $\frac{\pi}{2}$ avec un pas de 1°. Nous appellerons Θ l'ensemble de ces valeurs de θ qui serviront d'échantillon.

Nos calculs et nos conclusions concerneront essentiellement les valeurs de $\theta \in \Theta$; en particulier les inégalités (C 2.1), (C 2.2) et (C 3.1) seront testées sur l'échantillon Θ .

Pour des raisons de commodité nous travaillerons toujours avec des variables réduites, variant entre 0 et 1, qui se définissent en fonction de θ par des relations linéaires simples.

Si $x, x_1, ...$ désignent ces variables réduites, nous appelerons $X, X_1, ...$ les ensembles des valeurs prises par ces variables quand θ décrit Θ .

V.1. 1ere Solution

Précisons avant de donner cette solution, que sa forme a été déterminée en partant des conditions (C 1.2), (C 1.3), (C 1.4), (C 1.6) et (C 1.7); puis par intégration en tenant compte de (C 1.1) et (C 1.5). Nous ne jugeons pas très utile de détailler ces calculs, mais nous vérifierons en détail pour cette première solution les conditions (C 1.1), (C 1.2), (C 1.3), (C 1.4), (C 1.5), (C 1.6), (C 1.7), (C 2.1) et (C 2.2).

Posons $x = \frac{\theta - \frac{4\pi}{140}}{\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{140}}$, ainsi, quand x varie entre 0 et 1, θ varie entre α et $\frac{\pi}{2}$. Nous avons alors $\frac{dx}{d\theta} = K = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{140}} \simeq 0.666$.

V.1.1. Définition

Posons:

$$\begin{split} \phi_0(x) &= 35x^3(1-x)^4 + 21x^2(1-x)^5 + 7x(1-x)^6 + (1-x)^7 ,\\ \phi_1(x) &= 35x^4(1-x)^3 + 21x^5(1-x)^2 + 7x^6(1-x) + x^7 = 1 - \phi_0(x) ,\\ Q(x) &= f_0\phi_0(x) + f_1\phi_1(x), \text{ avec } f_0 = \frac{1}{r_1} \text{ et } f_1 = \frac{1}{r_2} ,\\ \text{ et définissons } \rho_1(\theta) \text{ par }: \ \rho_1(\theta) = R(x) = \frac{1}{Q(x)} . \end{split}$$

Exprimons les dérivées de ρ par rapport à θ en fonction des dérivées de R par rapport à x, puis ces dernières en fonction des dérivées de Q par rapport à x;

$$\frac{d\rho_1}{d\theta}(\theta) = K \frac{dR}{dx}(x) ,$$
$$\frac{d^2\rho_1}{d\theta^2}(\theta) = K^2 \frac{d^2R}{dx^2}(x) ,$$
$$\frac{d^3\rho_1}{d\theta^3}(\theta) = K^3 \frac{d^3R}{dx^3}(x) .$$

Par ailleurs, nous avons:

$$\frac{dQ}{dx} = 140(f_1 - f_0)x^3(1 - x)^3$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{-\frac{dQ}{dx}}{Q^2} ,$$

et

$$\frac{d^2 R}{dx^2} = \frac{-\frac{d^2 Q}{dx^2} Q + 2(\frac{dQ}{dx})^2}{Q^3} ,$$

et $\frac{d^3 R}{dx^3} = \frac{Q(-\frac{d^3 Q}{dx^3} Q + 3\frac{d^2 Q}{dx^2}\frac{dQ}{dx}) - 3\frac{dQ}{dx}(-\frac{d^2 Q}{dx^2} Q + 2(\frac{dQ}{dx})^2)}{Q^4}$

V.1.2. Vérification des conditions (C 1.1), (C 1.2), (C 1.3), (C 1.4), (C 1.5), (C 1.6) et (C 1.7)

$$\begin{split} \rho_1(\alpha) &= \mathrm{R}(0) = \frac{1}{Q(0)} = \frac{1}{f_0} = r_1. \\ \rho_1(\frac{\pi}{2}) &= \mathrm{R}(1) = \frac{1}{Q(1)} = \frac{1}{f_1} = r_2. \\ \text{Ainsi, les conditions (C 1.1) et (C 1.5) sont vérifiées pour cette première solution.} \\ 0 \text{ et 1 sont des racines de } Q \text{ d' ordre 3, donc} \end{split}$$

$$\frac{dQ}{dx}(0) = 0, \frac{dQ}{dx}(1) = 0, \frac{d^2Q}{dx^2}(0) = 0, \frac{d^2Q}{dx^2}(1) = 0, \frac{d^3Q}{dx^3}(0) = 0, \frac{d^3Q}{dx^3}(1) = 0 \Longrightarrow$$
$$\frac{dR}{dx}(0) = 0, \frac{dR}{dx}(1) = 0, \frac{d^2R}{dx^2}(0) = 0, \frac{d^2R}{dx^2}(1) = 0, \frac{d^3R}{dx^3}(0) = 0, \frac{d^3R}{dx^3}(1) = 0 \Longrightarrow$$
$$\frac{d\rho_1}{d\theta}(\frac{4\pi}{180}) = 0, \frac{d\rho_1}{d\theta}(\frac{\pi}{2}) = 0, \frac{d^2\rho_1}{d\theta^2}(\frac{4\pi}{180}) = 0, \frac{d^2\rho_1}{d\theta^2}(\frac{\pi}{2}) = 0, \frac{d^3\rho_1}{d\theta^3}(\frac{4\pi}{180}) = 0, \frac{d^3\rho_1}{d\theta^3}(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Ainsi les conditions (C 1.2), (C 1.3) (C 1.4) (C 1.6) et (C 1.7) sont vérifiées pour cette première solution.

Notons que $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\frac{\pi}{2}) = 0$ dans cette solution, ceci n'étant pas une condition exigée à priori pour la résolution du problème.

V.1.3. Vérification des conditions (C 2.1) et (C 2.2)

D' une part nous avons

$$r_1 < r_2 \Longleftrightarrow f_0 > f_1 \Longleftrightarrow f_1 - f_0 < 0 ,$$

donc:

$$\forall x \in [0, 1], \ \frac{dQ}{dx} < 0 \ .$$

Or $\frac{d\rho_1}{d\theta}(\theta) = K \frac{dR}{dx}(x), \text{ avec } K > 0$

d' où:

$$\forall x \in [0,1], \ \frac{d\rho_1}{d\theta}(\theta) = -K \frac{dQ}{dx}(x) \ge 0 \ .$$

donc $\forall \theta \in [\alpha, \frac{\Pi}{2}], \frac{d\rho_1}{d\theta}(\theta) \ge 0$ i.e. (C.2.1) est vérifiée par cette première solution.

D' autre part nous avons,

$$\frac{1}{\rho_1}(\theta) + \left(\frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{\rho_1})\right)(\theta) = Q(x) + K^2 \frac{d^2 Q}{dx^2}(x),$$
$$\frac{d^2 Q}{dx^2}(x) = 420(f_1 - f_0)x^2(1 - x)^2(1 - 2x),$$
$$\frac{d^3 Q}{dx^3}(x) = 840(f_1 - f_0)x(1 - x)(1 - 5x - 5x^2).$$

D'après le tableau $n^{\circ}2$, nous avons:

$$\min_{x \in [0,1]} \frac{d^2 Q}{dx^2}(x) \simeq \frac{d^2 Q}{dx^2}(x)(0.276) \simeq -0.05,$$

Du fait que Q(x) est décroissante:

$$\min_{x \in [0,1]} Q(x) = Q(1) = \frac{1}{f_1} \simeq 0.026.$$

Et par conséquent, -

$$\min_{x \in [0,1]} Q(x) + K^2 \frac{d^2 Q}{dx^2}(x) \ge 0.026 - K^2 0.05 \simeq 0.026 - 0.022 \ge 0$$

Donc $\forall \theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}], \quad (\frac{1}{\rho_1})(\theta) + \frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{\rho_1})(\theta) \geq 0$.

Nous vérifions ainsi la condition (C 2.2) pour cette première solution.

Sur la figure 13, nous donnons une représentation graphique de la forme obtenue au moyen cette première solution.

V.1.4. Vérification de la condition (C 3.1)

Exprimons $\Psi_1(\theta)$, en fonction de Q(x) et de ses dérivées par rapport à x;

$$\Psi_1(\theta) = \frac{\left(Q^2 + K^2 Q \frac{d^2 Q}{dx^2} - 2K^2 \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right) + 4K^2 Q^2 \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2}{Q^6} (x) \,.$$



TABLEAU DE VARIATION DE Q

70

Représentation graphique, à l'échelle 2, de la forme de la "pompe" obtenue par la 1^{re} solution (Cf. V.1.).



- Figure 13 -

Dans la première solution proposée, nous constatons par le calcul (voir Tableau $n^{\circ}3$) que,

$$\min_{\theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]} \Psi_1(\theta) \simeq 142 , \quad \theta \in \Theta$$

et
$$\max_{\theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]} \Psi_1(\theta) \simeq 4328 , \quad \theta \in \Theta$$

 Ψ_1 sort de l'intervalle [1, L] pour $\theta \in [\frac{14\pi}{180}, \frac{38\pi}{180}] \cap \Theta$ où $\Psi_1(\theta) \leq 400$ et pour $\theta \in [\frac{60\pi}{180}, \frac{76\pi}{180}] \cap \Theta$ où $\Psi_1(\theta) \geq 3600$ (voir tableau n°3).

V.2. 2^{me} Solution

V.2.1. Principe et définition de la 2^{me} Solution

Nous avons cherché à améliorer la première solution, que nous considèrerons dans la suite comme la solution de base par rapport à la 2^{me} et la 3^{me} , en réduisant au maximum le domaine sur lequel la condition (C 3.1) est violée.

Pour cela, nous avons adopté la démarche suivante, sauvegardant "les acquits positifs" de la première solution:

- Garder dans le domaine où (C 3.1) est vérifiée, les valeurs issues de la première solution. - Construire, dans le domaine où (C 3.1) n'est pas vérifiée dans la première solution, une deuxième solution telle qu'aux points de jonction avec le domaine où l'on a gardé les valeurs de la première solution, le raccordement C^3 soit préservé, ainsi que la forme

(concavité tournée constamment vers l'origine et rayon croissant) et telle que, dans cette deuxième solution, nous puissions disposer de paramètres libres que nous ferons varier pour étudier leur influence éventuelle sur les valeurs de $\Psi_2(\theta)$ dans ce domaine.

Ainsi pourra-t-on agir sur ces paramètres pour déterminer une solution où la condition (C 3.1) soit complètement satisfaite sur $[\alpha, \frac{\pi}{2}] \cap \Theta$, ou du moins pour aller dans le sens de la minimisation du domaine sur lequel (C 3.1) sera violée.

Pour ce faire, nous avons pensé à la solution que nous allons définir ci-dessous.

1^{ère} Solution

θ en degrés	р(9) 1	$\frac{dQ}{d\vartheta}(\vartheta) = K \frac{dQ}{dx}$	$\left(\frac{1}{\frac{\rho}{1}} + \frac{d^2}{d\theta^2} z \left(\frac{1}{\frac{\rho}{1}}\right)\right) (\theta)$	Ψ_(ອ) 1
4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	30.000 30.000 30.000 30.000 30.001 30.002 30.004 30.008 30.012 30.019 30.029	$\begin{array}{c} 0.\ 00000\\ -0.\ 94390\ 10^{-6}\\ -0.\ 72878\ 10^{-5}\\ -0.\ 23728\ 10^{-4}\\ -0.\ 54237\ 10^{-4}\\ -0.\ 54237\ 10^{-4}\\ -0.\ 10210\ 10^{-9}\\ -0.\ 16998\ 10^{-3}\\ -0.\ 25992\ 10^{-9}\\ -0.\ 37344\ 10^{-9}\\ -0.\ 51153\ 10^{-9}\\ -0.\ 67470\ 10^{-9}\end{array}$	$\begin{array}{c} 0.33333 & 10^{-1} \\ 0.33173 & 10^{-1} \\ 0.32722 & 10^{-1} \\ 0.32023 & 10^{-1} \\ 0.31115 & 10^{-1} \\ 0.30038 & 10^{-1} \\ 0.28824 & 10^{-1} \\ 0.27508 & 10^{-1} \\ 0.26119 & 10^{-1} \\ 0.24684 & 10^{-1} \\ 0.23230 & 10^{-1} \end{array}$	900.00 891.36 867.29 830.64 784.31 731.04 673.37 613.57 553.59 495.04 439.23
15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 27 28 29 30 31 23 34 35 36 37	30.041 30.056 30.075 30.098 30.125 30.157 30.193 30.236 30.283 30.337 30.397 30.463 30.536 - 30.616 30.795 30.616 30.795 30.895 31.002 31.116 31.237 31.364 31.498 31.639	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	387.17 339.59 296.99 259.64 227.68 201.10 179.79 163.65 152.17 145.39 142.94 144.56 150.04 159.15 171.75 167.71 206.96 229.50 255.40 284.76 317.78 354.73 395.93
38 39 40 41 42 43 44 45 46	31.785 31.938 32.096 32.260 32.429 32.603 32.780 32.962 33.146	$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr$	$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr$	441.81 492.83 549.53 612.54 682.48 760.04 845.92 940.80 1045.30

- Tableau n°3 -

[, T	1	·····	
θ en degrés	P(.9)	$\frac{dQ}{d\vartheta}(\vartheta) = K \frac{dQ}{dx}$	$\left[\frac{1}{\frac{\rho}{i}} + \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{\frac{\rho}{i}}\right)\right] (\vartheta)$	Ψ_(9)
47	33. 333	$-0.97159 10^{-2}$	$0.30000 10^{-1}$	1160.0
48	33.523	$-0.97001 \ 10^{-2}$	0.31635 10 ⁻¹	1285.3
49	33.714	$-0.96529 10^{-2}$	0.33259 10 ⁻¹	1421.6
50	33.905	$-0.95747 10^{-2}$	$0.34860 10^{-1}$	1568.9
51	34.098	$-0.94658 10^{-2}$	$0.36429 10^{-1}$	1727.0
52	34.289	$-0.93271 10^{-2}$	0.37953 10 ⁻¹	1895.5
53	34.480	$-0.91593 10^{-2}$	$0.39423 10^{-1}$	2073.6
54	34.669	$-0.89637 10^{-2}$	$0.40828 10^{-1}$	2260.1
55	34.856	$-0.87415 10^{-2}$	$0.42158 10^{-1}$	2453.5
56	35.040	$-0.84941 \ 10^{-2}$	$0.43403 10^{-1}$	2651.8
57	35.220	$-0.82232 \ 10^{-2}$	$0.44556 10^{-1}$	2852.7
58	35.396	$-0.79305 10^{-2}$	$0.45607 10^{-1}$	3053.4
59	35.567	$-0.76180 10^{-2}$	$0.46548 10^{-1}$	3250.9
60	35.732	$-0.72878 \ 10^{-2}$	0.47373 10 ⁻¹	3441.9
61	35.891	$-0.69421 10^{-2}$	$0.48074 \ 10^{-1}$	3622.9
62	36.044	$-0.65631 10^{-2}$	$0.48647 10^{-1}$	3790.3
63	36.190	$-0.62132 \ 10^{-2}$	0.49086 10-1	3940.5
64	36.328	-0.58350 10-2	0.49387 10	4070.2
65	3 6.458	-0.54510 10-2	0.49547 10	4176.3
66	36, 581	-0.50638 10	0.49565 10	4256.0
67	36,695	$-0.46760 10^{-2}$	$0.49440 10^{-1}$	4307.2
68	36.800	-0.42902 10-2	0.49171 10	4328.4
69	36.898		0.48761 10	4318.7
70	36.986	-0.35350 10 2	0.46212 10	4278.1
71	37.066 -	$-0.31707 \ 10^{-2}$	0.47529 10	4207.4
72	37.138	-0.28185 10_	0.46716 10	4107.9
73	37.202	-0.24806 10	0.45782 10	3982.1
74	37.258	-0.21594 10	0.44735 10	3832.7
75	37.307	-0.18566 10 -	0.43585 10	3663.3
76	37.349	$-0.15742 \ 10^{-2}$	$0.42344 10^{-1}$	3477.7
77	37.384	-0.13136 10	0.41025 10	3280.1
78	37.413	-0.10762 10	$0.39645 10^{-1}$	3075.0
79	37.436	-0.86304 10	0.38220 10	2866.7
80	37.455	-0.67470 10	0.36770 10	2659.6
81	37.470	$-0.51153 \ 10^{-3}$	0.35316 10	2457.8
82	37.481	-0.3/344 10	0.33881 10	
83	37.488	-0.20992 10 0.16000 10 ⁻³	0.36496 10	2085.0
04	37.493	-0.10998 10	0.31170 10	1960.0
00	37.497		0.29902 10	1610 7
00	37.499	-0.04637 ± 0	0.20000 10	1049.7
01	37.500	-0.63/60 10	0.6/8/7 10 0.27270 40 ⁻¹	1471 6
80	37.500	-0.12010 10-0	0 26027 40-1	1/22 2
<u>a</u>	37 500	-0.94390 10	0.20027 10 0.26667 40^{-1}	1406 2
30	57.500	0.00000	0.2000/ 10	1400.3

- Tableau n°3 (suite) -

74

Définition

Pour $\theta \in \left[\frac{14\pi}{180}, \frac{38\pi}{180}\right]$, domaine où (C 3.1) n' est pas vérifiée par la première solution (voir tableau $n^{\circ}3$) - $\Psi_1(\theta)$ étant inférieure à l - posons:

$$\rho_2(\theta) = R_1(x_1) = \frac{1}{Q_1(x_1)},$$

avec $x_1 = \frac{\theta - \frac{14\pi}{180}}{\frac{36\pi}{180} - \frac{14\pi}{180}}$ et $Q_1(x_1) = Q(x) + \epsilon_1 P(x_1)$
avec $x_1 = \frac{x - \frac{10}{86}}{\frac{24}{86}}$ et $P(x_1) = (1 - x_1)^4 x_1^4.$

Pour $\theta \in \left[\frac{60\pi}{180}, \frac{76\pi}{180}\right]$, domaine où (C 3.1) n' est pas vérifiée par la première solution (voir tableau $n^{\circ}3$) - $\Psi_1(\theta)$ étant supérieur à L - posons:

$$\rho_2(\theta) = R_2(x_2) = \frac{1}{Q_2(x_2)},$$

avec
$$x_2 = \frac{\theta - \frac{60\pi}{180}}{\frac{76\pi}{180} - \frac{60\pi}{180}}$$
 et $Q_2(x_2) = Q(x) + \epsilon_2 P(x_2)$,
avec $x_2 = \frac{x - \frac{56}{86}}{\frac{16}{86}}$ et $P(x_2) = (1 - x_2)^4 x_2^4$.

Pour $\theta \in \left[\frac{4\pi}{180}, \frac{14\pi}{180}\right] \cup \left[\frac{38\pi}{180}, \frac{60\pi}{180}\right] \cup \left[\frac{76\pi}{180}, \frac{\pi}{2}\right]$, domaine où (C.3.1) n' est pas vérifiée par la première solution (voir tableau n°3), posons:

$$\rho_2(\theta) = \rho_1(\theta) = R_1(x) = \frac{1}{Q(x)} \text{ avec } x = \frac{\theta - \frac{4\pi}{180}}{\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{180}}.$$

Remarques

Nous pouvons avant d'aller plus loin, faire à propos de cette définition, les remarques suivantes:

R1) La deuxième solution proposée est une spline rationnelle.

R2) Cette deuxième solution est telle que les valeurs de ρ_2 et de ses dérivées et, par suite, de

 Ψ_2 sont les mêmes que pour la première solution pour $\theta \in \left[\frac{4\pi}{180}, \frac{14\pi}{180}\right] \cup \left[\frac{38\pi}{180}, \frac{60\pi}{180}\right] \cup \left[\frac{76\pi}{180}, \frac{\pi}{2}\right]$.

R3) Le polynôme P qui apparaît dans les termes correctifs est choisi de cette forme, naturellement, parce que 0 et 1 y sont racines d'ordre quatre; ce qui garantit, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, le raccordement C^3 aux points $\frac{14\pi}{180}$, $\frac{38\pi}{180}$, $\frac{60\pi}{180}$, $\frac{76\pi}{180}$. R4) Les termes $\epsilon_1 P(x_1)$ et $\epsilon_2 P(x_2)$, apparaissent comme des termes correctifs, dans lesquels on va étudier le choix de ϵ_1 et ϵ_2 , ϵ_1 et ϵ_2 restant "très petits".

V.2.2. Préservation de la régularité C^3

Nous allons montrer que le raccordement avec la première solution, en $\theta = \frac{14\pi}{180}$ et en $\theta = \frac{38\pi}{180}$, se fait en préservant en ces deux points la continuité, la continuité de la dérivée première, la continuité de la dérivée seconde et la continuité de la dérivée troisième. Ceci montré, nous aurons prouvé que cette deuxième solution, considérée dans sa globalité, est de classe C^3 sur [α , $\frac{\pi}{2}$].

P(0) = P(1) = 0, donc

$$\rho_2 \left(\frac{14\pi}{180}^+\right) = R_1(0) = \frac{1}{Q\left(\frac{14-4}{86}\right)} = \rho_2 \left(\frac{14\pi}{180}^-\right);$$

$$\rho_2 \left(\frac{38\pi}{180}^-\right) = R_1(1) = \frac{1}{Q\left(\frac{38-4}{86}\right)} = \rho_2 \left(\frac{38\pi}{180}^+\right);$$

$$\rho_2 \left(\frac{60\pi}{180}^+\right) = R_2(0) = \frac{1}{Q\left(\frac{60-4}{86}\right)} = \rho_2 \left(\frac{60\pi}{180}^-\right);$$

$$\rho_2 \left(\frac{76\pi}{180}^-\right) = R_2(1) = \frac{1}{Q\left(\frac{76-4}{86}\right)} = \rho_2 \left(\frac{76\pi}{180}^+\right).$$

Ainsi, la continuité est vérifiée aux deux points de liaison de la deuxième solution avec la première solution.

$$\frac{dP}{dx_1}(0) = \frac{dP}{dx_1}(1) = \frac{d^2P}{dx_1^2}(0) = \frac{d^2P}{dx_1^2}(1) = \frac{d^3P}{dx_1^3}(0) = \frac{d^3P}{dx_1^3}(1) = 0 \implies$$

$$\frac{dP}{dx}(x_1 = 0) = \frac{dP}{dx}(x_1 = 1) = \frac{d^2P}{dx^2}(x_1 = 0) = \frac{d^2P}{dx^2}(x_1 = 1) = \frac{d^3P}{dx^3}(x_1 = 0)$$

$$= \frac{d^3P}{dx^3}(x_1 = 1) = 0 \implies$$

$$\frac{dQ_1}{dx}(x_1 = 0) = \frac{dQ}{dx}(\frac{10}{86}), \quad \frac{dQ_1}{dx}(x_1 = 1) = \frac{dQ}{dx}(\frac{34}{86}),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_1}{dx^2}(x_1=0) &= \frac{d^2 Q}{dx^2}(\frac{10}{86}), \quad \frac{d^2 Q_1}{dx^2}(x_1=1) = \frac{d^2 Q}{dx^2}(\frac{34}{86}), \\ \frac{d^3 Q_1}{dx^3}(x_1=0) &= \frac{d^3 Q}{dx^3}(\frac{10}{86}), \quad \frac{d^3 Q_1}{dx^3}(x_1=1) = \frac{d^3 Q}{dx^3}(\frac{34}{86}), \\ \frac{d Q_2}{dx}(x_2=0) &= \frac{d Q}{dx}(\frac{56}{86}), \quad \frac{d Q_2}{dx}(x_2=1) = \frac{d Q}{dx}(\frac{72}{86}), \\ \frac{d^2 Q_2}{dx^2}(x_2=0) &= \frac{d^2 Q}{dx^2}(\frac{56}{86}), \quad \frac{d^2 Q_2}{dx^2}(x_2=1) = \frac{d^2 Q}{dx^2}(\frac{72}{86}), \\ \frac{d^3 Q_2}{dx^3}(x_2=0) &= \frac{d^3 Q}{dx^3}(\frac{56}{86}), \quad \frac{d^3 Q_2}{dx^3}(x_2=1) = \frac{d^3 Q}{dx^3}(\frac{72}{86}). \end{aligned}$$

D'après ces égalités et d'après les expressions des dérivées calculées en V.1.1., où il suffit de remplacer R par R_1 et Q par Q_1 , nous pouvons écrire les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_2}{d\theta} \left(\frac{14\pi}{180}^+\right) &= \frac{d\rho_2}{d\theta} \left(\frac{14\pi}{180}^-\right), \quad \frac{d\rho_2}{d\theta} \left(\frac{38\pi}{180}^-\right) &= \frac{d\rho_2}{d\theta} \left(\frac{38\pi}{180}^+\right), \\ \frac{d^2\rho_2}{d\theta^2} \left(\frac{14\pi}{180}^+\right) &= \frac{d^2\rho_2}{d\theta^2} \left(\frac{14\pi}{180}^-\right), \quad \frac{d^2\rho_2}{d\theta^2} \left(\frac{38\pi}{180}^-\right) &= \frac{d^2\rho_2}{d\theta^2} \left(\frac{38\pi}{180}^+\right), \\ \frac{d^3\rho_2}{d\theta^3} \left(\frac{14\pi}{180}^+\right) &= \frac{d^3\rho_2}{d\theta^3} \left(\frac{14\pi}{180}^-\right), \quad \frac{d^3\rho_2}{d\theta^3} \left(\frac{38\pi}{180}^-\right) &= \frac{d^3\rho_2}{d\theta^3} \left(\frac{38\pi}{180}^+\right), \\ \frac{d\rho_2}{d\theta} \left(\frac{60\pi}{180}^+\right) &= \frac{d\rho_2}{d\theta} \left(\frac{60\pi}{180}^-\right), \quad \frac{d\rho_2}{d\theta} \left(\frac{76\pi}{180}^-\right) &= \frac{d\rho_2}{d\theta} \left(\frac{76\pi}{180}^+\right), \\ \frac{d^2\rho_2}{d\theta^2} \left(\frac{60\pi}{180}^+\right) &= \frac{d^2\rho_2}{d\theta^2} \left(\frac{60\pi}{180}^-\right), \quad \frac{d^2\rho_2}{d\theta^2} \left(\frac{76\pi}{180}^-\right) &= \frac{d^2\rho_2}{d\theta^2} \left(\frac{76\pi}{180}^+\right), \\ \frac{d^3\rho_2}{d\theta^3} \left(\frac{60\pi}{180}^+\right) &= \frac{d^3\rho_2}{d\theta^3} \left(\frac{60\pi}{180}^-\right), \quad \frac{d^3\rho_2}{d\theta^3} \left(\frac{76\pi}{180}^-\right) &= \frac{d^3\rho_2}{d\theta^3} \left(\frac{76\pi}{180}^+\right). \end{aligned}$$

Donc la continuité des dérivées première, seconde et troisième est assurée aux points de raccordement entre la première et la deuxième solution.

V.2.3. Étude du choix de ϵ_1 et de ϵ_2

Nous allons maintenant étudier le choix de ϵ_1 et de ϵ_2 qui permet de préserver la forme, autrement dit la monotonie du rayon et le sens de la concavité.

Cela revient à préciser la marge avec laquelle peuvent être choisis ces deux paramètres et donc à traduire numériquement, pour ϵ_1 et ϵ_2 , l'expression: "très petits".

V.2.3.a. Étude de $P(x_1) = (1 - x_1)^4 x_1^4$

Calculons les dérivées première, seconde et troisième de P_1 . Nous obtenons:

$$\frac{dP}{dx_1}(x_1) = 4(1-x_1)^3 x_1^3(1-2x_1) ,$$

$$\frac{d^2P}{dx_1^2}(x_1) = 4(1-x_1)^2 x_1^2(14x_1^2-14x_1+3) ,$$

$$\frac{d^3P}{dx_1^3}(x_1) = 8(1-x_1)x_1(21x_1^2-21x_1+3) .$$

D'après le tableau n^0 4, nous avons le résultat suivant:

$$\max_{x_1 \in [0,1]} \frac{dP}{dx_1}(x_1) \simeq P'(0.311) \simeq 0.0148 \text{ et } \min_{x_1 \in [0,1]} \frac{dP}{dx_1}(x_1) \simeq P'(0.689) \simeq -0.0148 .$$

V.2.3.b. Choix de ϵ_1

$$\frac{d\theta}{dx_1} = K_1 = \frac{1}{\frac{38\pi}{140} - \frac{14\pi}{180}} = \frac{180}{24\pi} \simeq 2.387$$
 et $K_1^2 \simeq 5.699$.

<u>1^{er} Cas</u> $\epsilon_1 \geq 0$

Dans ce paragraphe nous allons essayer de répondre numériquement à deux questions, dont voici la première : Comment choisir ϵ_1 , $\epsilon_1 \ge 0$, pour que, R_1 soit croissante (Q_1 décroissante) quand θ varie entre $\frac{14\pi}{180}$ et $\frac{38\pi}{180}$, $\theta \in \Theta$?

Dérivons Q_1 par rapport à θ , il vient

$$\frac{dQ_1}{d\theta} = K \frac{dQ}{dx}(x) + K_1 \epsilon_1 \frac{dP}{dx_1}(x_1)$$

D'après le tableau n^0 4, nous avons:

$$\forall x_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \ \epsilon_1 \frac{dP}{dx_1}(x_1) \leq 0 \Longrightarrow$$

$$\forall x_1, \in [\frac{1}{2}, 1] \ K \frac{dQ}{dx}(x) + K_1 \epsilon_1 \frac{dP}{dx_1}(x_1) < 0.$$



TABLEAU DE VARIATION DE P

- tableau n°4 -

Par contre

$$\forall x_1 \in [0, \frac{1}{2}], \ \epsilon_1 \frac{dP}{dx_1}(x_1) \geq 0$$

cherchons donc la valeur de

$$\max_{x_1\in[0,\frac{1}{2}]} K \frac{dQ}{dx}(x_1) .$$

Pour $x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ nous avons $\theta \in [\frac{14\pi}{180}, \frac{26\pi}{180}]$

or (voir tableau n°3)
$$\max_{\theta \in \left[\frac{14}{160}\pi, \frac{26}{160}\pi\right]} K \frac{dQ}{dx}(x) < -6 \ 10^{-4}, \quad \theta \in \Theta$$

et comme, d'après le tableau $n^{\circ}4$, nous avons

$$\max_{x_1 \in [0, \frac{1}{2}]} K_1 \frac{dP}{dx_1}(x_1) \simeq 2.387 * 0.0148 \simeq 3.5327 \ 10^{-2};$$

il suffit de choisir $\epsilon_1 < \frac{6 \ 10^{-4}}{3.5327 \ 10^{-2}} = 1.698 \ 10^{-2}$ (b.1.1).

La deuxième question est celle-ci: Comment choisir ϵ_1 , $\epsilon_1 \ge 0$ pour que R_1 définisse une courbe en coordonnées polaires qui tourne sa concavité vers l'origine pour $\theta \in \left[\frac{14}{180}\pi, \frac{38}{180}\pi\right] \cap \Theta$?

Autrement dit pour quelles valeurs de ϵ_1 a-t-on: $\forall \theta \in \left[\frac{14}{180}\pi, \frac{38}{180}\pi\right] \cap \Theta$,

$$K^{2}\frac{d^{2}Q}{dx^{2}}(x(\theta))+Q(x(\theta))+K_{1}^{2}\epsilon_{1}\frac{d^{2}P}{dx_{1}^{2}}(x_{1}(\theta))+\epsilon_{1}P(x_{1}(\theta)) \leq 0?$$

D'après le tableau n°5, pour $x_1 \in [0, 0.311] \cup [0.689, 1], \epsilon_1 \frac{d^2 P}{dx_1^2}(x_1) \ge 0$

d'où: pour
$$\theta \in [\frac{14}{180}\pi, \frac{22}{180}\pi] \cup [\frac{30}{180}\pi, \frac{38}{180}\pi]$$

$$K^2 \frac{d^2 Q}{dx^2}(x(\theta)) + Q(x(\theta)) + K_1^2 \epsilon_1 \frac{d^2 P}{dx_1^2}(x_1(\theta)) + \epsilon_1 P(x_1(\theta)) \geq 0.$$

Pour $x_1 \in [0.311, 0.689] \cap X_1$ nous avons $\theta \in [\frac{22}{180}\pi, \frac{30}{180}\pi] \cap \Theta$

et d'après le tableau n°3, $\min_{\substack{\theta \in \left[\frac{22}{140}\pi, \frac{30}{160}\pi\right]}}, Q(x) + K^2 \frac{d^2 Q}{dx^2}(x(\theta)) > 10^{-2}, \quad \theta \in \Theta$

or d'après le tableau $n^{\circ}5$:

$$\min_{x_1 \in [0.311, 0.689]} \frac{d^2 P}{dx_1^2}(x_1) = \frac{d^2 P}{dx_1^2}(0.50) = -0.125,$$





- tableau nº5 -

81

D' autre part - voir tableau $n^{\circ}4$ -, nous avons:

$$\max_{x_1 \in [0.311, 0.689]} P(x_1) = P(0.5) = 0.39 \ 10^{-2}$$

et nous considèrerons cette valeur comme étant négligeable devant les autres valeurs numériques intervenant dans ce calcul.

Il suffit donc de prendre, en réponse à la deuxième question:

 $\epsilon_1 < \frac{10^{-2}}{5.699 * 0.125} \simeq 1.404 \ 10^{-2} \qquad (b.1.2).$

En conclusion nous retiendrons - en vertu de (b.1.1) et de (b.1.2) - que si $\epsilon_1 \ge 0$, il suffit de le choisir tel que $\epsilon_1 < 1.4 \ 10^{-2}$ pour préserver à la fois la monotonie et le sens de la concavité.

$\underline{2^{me} \operatorname{Cas}} \epsilon_1 \leq 0$

Dans ce paragraphe nous allons essayer, comme nous l'avons fait pour le cas $\epsilon_1 \ge 0$, de répondre numériquement à deux questions, dont voici la première : Comment choisir ϵ_1 , $\epsilon_1 \le 0$, pour que Q_1 soit décroissante quand θ varie entre $\frac{14\pi}{180}$ et $\frac{38\pi}{180}$, $\theta \in \Theta$?

D'après le tableau n^0 4, nous avons:

$$\forall x_1 \in [0, \frac{1}{2}], \ \epsilon_1 \frac{dP}{dx_1}(x_1) \le 0 \Longrightarrow$$
$$\forall x_1, \in [0, \frac{1}{2}] \ K \frac{dQ}{dx}(x) + K_1 \epsilon_1 \frac{dP}{dx_1}(x_1) < 0.$$
Par contre
$$\forall x_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \ \epsilon_1 \frac{dP}{dx_1}(x_1) \ge 0,$$

Cherchons donc la valeur de

$$\max_{x_1\in [\frac{1}{2},1]} K \frac{dQ}{dx}(x_1) .$$

Pour $x_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ nous avons $\theta \in [\frac{26\pi}{180}, \frac{38\pi}{180}]$;

or (voir tableau n°3)
$$\max_{\substack{\theta \in \left[\frac{26}{160}\pi, \frac{3\theta}{160}\pi\right]}} K \frac{dQ}{dx} < -4 \ 10^{-3}, \ \theta \in \Theta$$

et comme d'après le tableau $n^{\circ}4$ nous avons

$$\min_{x_1 \in [\frac{1}{2},1]} K_1 \frac{dP}{dx_1}(x_1) \simeq 2.387 * -0.0148 \simeq -3.5327 \ 10^{-2};$$

il suffit de prendre $\epsilon_1 \geq \frac{-4 \ 10^{-3}}{3.5327 \ 10^{-2}} \simeq -1.132 \ 10^{-1}$ (b.2.1).

La deuxième question est celle-ci: Comment choisir ϵ_1 , $\epsilon_1 \leq 0$, pour que R_1 définisse une courbe en coordonnées polaires qui tourne sa concavité vers l'origine pour $\theta \in [\frac{14}{180}\pi, \frac{38}{180}\pi]$?

Autrement dit pour quelles valeurs de $\epsilon_1, \epsilon_1 \leq 0$, a-t-on: $\forall \theta \in [\frac{14}{180}\pi, \frac{38}{180}\pi] \cap \Theta$,

$$K^{2}\frac{d^{2}Q}{dx^{2}}(x(\theta)) + Q(x(\theta)) + K_{1}^{2}\epsilon_{1}\frac{d^{2}P}{dx_{1}^{2}}(x_{1}(\theta)) + \epsilon_{1}P(x_{1}(\theta)) \geq 0?$$

D'après le tableau n°5, pour $x_1 \in [0.311, 0.689], \epsilon_1 \frac{d^2 P}{dx_1^2}(x_1) \ge 0$

d'où: pour
$$\theta \in [\frac{22}{180}\pi, \frac{30}{180}\pi]$$
,

$$K^{2}\frac{d^{2}Q}{dx^{2}}(x(\theta))+Q(x(\theta))+K_{1}^{2}\epsilon_{1}\frac{d^{2}P}{dx_{1}^{2}}(x_{1}(\theta))+\epsilon_{1}P(x_{1}(\theta))\geq 0.$$

Pour $x_1 \in [0, 0.311] \cup [0.689, 1]$ nous avons $\theta \in [\frac{14}{180}\pi, \frac{22}{180}\pi] \cup [\frac{30}{180}\pi, \frac{38}{180}\pi]$ et d'après le tableau $n^{\circ}3$,

$$\min_{\theta \in \left[\frac{14}{140}\pi, \frac{22}{140}\pi\right] \cup \left[\frac{30}{140}\pi, \frac{34}{140}\pi\right]} K^2 \frac{d^2 Q}{dx^2} (x(\theta)) + Q(x(\theta)) > 10^{-2}, \quad \theta \in \Theta$$

or $\max_{x_1 \in [0,0.311] \cup [0.689,1]} \frac{d^2 P}{dx_1^2}(x_1) = \frac{d^2 P}{dx_1^2}(0.172) = \frac{d^2 P}{dx_1^2}(0.172) \simeq 0.814 \text{ (voir tableau } n^\circ 5),$

donc
$$\max_{x_1 \in [0,0.311] \cup [0.689,1]} K_1^2 \frac{d^2 P}{dx_1^2}(x_1) \simeq 5.699 * 0.0814 \simeq 0.464$$
.

D' autre part - voir tableau $n^{\circ}4$ -, nous avons:

$$\max_{x_1 \in [0,0.311] \cup [0.689,1]} P(x_1) = P(0.311) = P(0.689) = 8.751 \ 10^{-5}$$

et nous considèrerons cette valeur comme étant négligeable devant les autres valeurs numériques intervenant dans ce calcul.

Il suffit donc de prendre, en réponse à la deuxième question:

 $\epsilon_1 > -\frac{10^{-2}}{0.464} \simeq 2.115 \ 10^{-2} \qquad (b.2.2).$

En conclusion nous retiendrons - en vertu de (b.2.1) et (b.2.2) - que si $\epsilon_1 \leq 0$, il suffit de le choisir tel que: $\epsilon_1 > -2.155 \ 10^{-2}$.

Remarque

Toutes les valeurs numériques qui nous ont servi à étudier le choix de ϵ_1 sont approximatives et nous avons, de plus, procédé par minorations et majorations. Mais cela n'est pas gênant dans la mesure où nous voulions simplement connaître approximativement la "plage" dans laquelle nous pouvons choisir ϵ_1 de façon à préserver la monotonie et la concavité; en effet nous vérifierons, à chaque fois à postériori, par le calcul la monotonie de la solution et le sens de la concavité.

Cette remarque sera valable aussi pour l'étude du choix de ϵ_2 .

Nous avons fait plusieurs essais numériques avec $\epsilon_1 \in [-2.2 \ 10^{-2}, 1.6 \ 10^{-2}]$ et nous avons pu constater à chaque fois que les conditions (C 2.1) et (C 2.2) étaient vérifiées.

Nous obtenons, et c' est le but de ces essais numériques, des résultats relativement positifs, en tous cas les meilleurs parmi différents essais - dans le sens de la minimisation du domaine où (C 3.1) est violée - pour $\epsilon_1 = 1.4 \ 10^{-2}$ (voir tableau n°6).

V.2.3.c. Choix de ϵ_2

Nous étudions ce choix par un raisonnement en tout point analogue à celui qui nous a permis d'étudier le choix de ϵ_1 . Il faut simplement noter que pour $\theta \in [\frac{60}{180}\pi, \frac{76}{180}\pi]$:

$$\frac{d\theta}{dx_2} = K_2 = \frac{1}{\frac{76\pi}{180} - \frac{60\pi}{180}} \simeq 3.58$$
 et $K_2^2 \simeq 12.82$

et d'après le tableau $n^{\circ}3$:

$$\max_{\substack{\theta \in \left[\frac{60}{160}\pi, \frac{66}{160}\pi\right]}} K \frac{dQ}{dx} < -0.47 \ 10^{-2}, \theta \in \Theta,$$

$$\min_{\substack{\theta \in \left[\frac{65}{160}\pi, \frac{71}{160}\pi\right]}} Q + K^2 \frac{d^2Q}{dx^2} > 0.47 \ 10^{-1}, \theta \in \Theta,$$

$$\max_{\substack{\theta \in \left[\frac{65}{160}\pi, \frac{76}{160}\pi\right]}} K \frac{dQ}{dx} < -0.15 \ 10^{-2}, \theta \in \Theta,$$

$$e \in \left[\frac{60}{160}\pi, \frac{60}{160}\pi, \frac{76}{160}\pi\right]} Q + K \frac{d^2Q}{dx^2} > 0.42 \ 10^{-1}; \theta \in \Theta.$$

Cela nous conduit aux résultats suivants :

2^{tème} Solution

avec $\varepsilon_1 = 1.4 \ 10^{-2}$

θ en degrés	ec or	$\frac{dQ_{1}}{d\Theta} = K_{1} \frac{dQ_{1}}{dX_{1}} (X_{1})$	$\left(\frac{1}{\frac{\rho}{2}} + \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{\frac{\rho}{2}}\right)\right) (\vartheta)$	Ψ_(ອ) 2
14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34	30.03 30.04 30.06 30.07 30.09 30.12 30.14 30.17 30.20 30.24 30.29 30.35 30.41 30.49 30.57 30.66 30.76 30.99 31.11	$\begin{array}{c} & & & & & \\ & -0.6747 & 10^{-3} \\ & -0.8552 & 10^{-3} \\ & -0.1027 & 10^{-2} \\ & -0.1182 & 10^{-2} \\ & -0.1335 & 10^{-2} \\ & -0.1507 & 10^{-2} \\ & -0.1507 & 10^{-2} \\ & -0.1999 & 10^{-2} \\ & -0.2329 & 10^{-2} \\ & -0.2329 & 10^{-2} \\ & -0.3215 & 10^{-2} \\ & -0.3739 & 10^{-2} \\ & -0.3739 & 10^{-2} \\ & -0.3739 & 10^{-2} \\ & -0.3739 & 10^{-2} \\ & -0.3215 & 10^{-2} \\ & -0.3739 & 10^{-2} \\ & -0.3739 & 10^{-2} \\ & -0.3739 & 10^{-2} \\ & -0.3739 & 10^{-2} \\ & -0.3739 & 10^{-2} \\ & -0.3215 & 10^{-2} \\ & -0.3739 & 10^{-2} \\ & -0.3215 & 10^{-2} \\ & -0.3215 & 10^{-2} \\ & -0.5881 & 10^{-2} \\ & -0.5881 & 10^{-2} \\ & -0.6704 & 10^{-2} \\ & -0.7292 & 10^{-2} \\ & -0.7527 & 10^{-2} \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.2323 & 10^{-1} \\ 0.2302 & 10^{-1} \\ 0.2395 & 10^{-1} \\ 0.2395 & 10^{-1} \\ 0.2458 & 10^{-1} \\ 0.2416 & 10^{-1} \\ 0.2242 & 10^{-1} \\ 0.1949 & 10^{-1} \\ 0.1949 & 10^{-1} \\ 0.1571 & 10^{-1} \\ 0.1571 & 10^{-1} \\ 0.1571 & 10^{-1} \\ 0.7583 & 10^{-2} \\ 0.4243 & 10^{-2} \\ 0.4243 & 10^{-2} \\ 0.9100 & 10^{-3} \\ 0.9100 & 10^{-3} \\ 0.9100 & 10^{-2} \\ 0.2890 & 10^{-2} \\ 0.2890 & 10^{-2} \\ 0.5564 & 10^{-2} \\ 0.5564 & 10^{-2} \\ 0.5564 & 10^{-1} \\ 0.1241 & 10^{-1} \\ 0.1458 & 10^{-1} \\ 0.1793 & 10^{-1} \end{array}$	439.23 432.39 469.08 495.55 480.29 416.05 317.55 211.42 123.19 67.65 45.83 48.42 63.02 81.19 102.34 132.78 180.36 247.53 226.40 399.41 446.90
35 36 37 38	31.23 31.36 31.50 31.64 31.79	$\begin{array}{r} -0.7527 & 10^{-2} \\ -0.7749 & 10^{-2} \\ -0.7980 & 10^{-2} \\ -0.8231 & 10^{-2} \\ -0.8494 & 10^{-2} \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.1913 & 10^{-1} \\ 0.1906 & 10^{-1} \\ 0.1799 & 10^{-1} \\ 0.1669 & 10^{-1} \\ 0.1660 & 10^{-1} \end{array}$	440.50 453.69 443.01 425.58 441.81

- Tableau n°6 -

- Pour $\epsilon_2 \ge 0$, il suffit de prendre $\epsilon_2 < 8.87 \ 10^{-2}$, pour que la monotonie soit conservée, et $\epsilon_2 < 2.933 \ 10^{-2}$, pour que le sens de la concavité soit conservé.

- Pour $\epsilon_2 \leq 0$, il suffit de prendre $\epsilon_2 > -2.8 \ 10^{-2}$, pour que la monotonie soit conservée, et $\epsilon_2 > -4.025 \ 10^{-2}$, pour que le sens de la concavité soit conservé.

Nous avons fait plusieurs essais numériques en prenant différentes valeurs, comprises entre $-3 \ 10^{-2}$ et $3 \ 10^{-2}$ et nous avons pu constater à chaque fois que la monotonie et le sens de la concavité sont conservés. Quant à la condition (C 3.1) nous obtenons les meilleurs résultats avec $\epsilon_2 \simeq -0.6 \ 10^{-2}$ (voir tableau n° 7).

V.3. 3^{me} Solution

Nous avons pu constater dans les tableaux qui résultent des essais numériques que nous avons fait avec la correction $\epsilon_1 P$, dans l'intervalle $\left[\frac{14}{180}\pi, \frac{38}{180}\pi\right]$, que pour des valeurs de ϵ_1 , soit positives et inférieures à 1.6 10^{-2} , soit négatives et supérieures à $-1.2 \ 10^{-2}$, l'amélioration, par rapport à la satisfaction de la condition (C 3.1), se produit pour des points de Θ situés près des bords de l'intervalle $\left[\frac{14}{180}\pi, \frac{38}{180}\pi\right]$.

Par contre pour des valeurs de ϵ_1 négatives comprises entre $-1.2 \ 10^{-2}$ et $-2.2 \ 10^{-2}$, l'amélioration se produit pour des points de Θ situés près du centre de l'intervalle. Voir le tableau n°8, avec un exemple où $\epsilon_1 = -2 \ 10^{-2}$.

Ceci nous a conduit à envisager une solution exploitant cette constatation et combinant, en somme, l'effet des ϵ_1 produisant une correction positive près du centre de l'intervalle et des valeurs de ϵ_1 produisant une correction positive près des bords de l'intervalle.

Pour cela, nous avons eu une approche identique à celle qui nous a conduit à définir la deuxième solution en se basant sur la première.

Considérons la deuxième solution, avec $\epsilon_1 = 1.4 \ 10^{-2}$ ce qui donne les résultats du tableau $n^{\circ}6$, et ajoutons y un deuxième terme correctif de la forme $\epsilon_3 P$ intervenant dans l'intervalle [$\frac{19}{180}\pi$, $\frac{34}{180}\pi$], intervalle où (C 3.1) continue à ne pas être vérifiée malgré la première correction. Ceci nous amène à donner la définition suivante de cette troisième

·····				
€ en degrés	ହୁ(୫)	$\frac{dQ_{z}}{d\vartheta} (\vartheta) = K_{z} \frac{dQ_{z}}{d\times_{z}} (\times_{z})$	$\left(\frac{1}{\frac{\rho}{2}} + \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{\frac{\rho}{2}}\right)\right) (\vartheta)$	Ψ _ (ອ)
60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75	35.73 35.89 36.05 36.19 36.34 36.48 36.61 36.72 36.82 36.93 37.01 37.08 37.15 37.21 37.26 37.31	$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr$	$\begin{array}{c} 0.4737 & 10^{-1} \\ 0.4577 & 10^{-1} \\ 0.4324 & 10^{-1} \\ 0.4289 & 10^{-1} \\ 0.4289 & 10^{-1} \\ 0.4532 & 10^{-1} \\ 0.4965 & 10^{-1} \\ 0.5430 & 10^{-1} \\ 0.5430 & 10^{-1} \\ 0.5772 & 10^{-1} \\ 0.5877 & 10^{-1} \\ 0.5877 & 10^{-1} \\ 0.5295 & 10^{-1} \\ 0.4763 & 10^{-1} \\ 0.4265 & 10^{-1} \\ 0.3959 & 10^{-1} \\ 0.3933 & 10^{-1} \\ 0.4128 & 10^{-1} \end{array}$	3441.9 3290.0 3005.6 3016.2 3425.3 4181.9 5099.5 5874.3 6001.1 5936.2 5185.2 4243.5 3436.3 2984.2 2965.5 3287.2
76	37.35	-0.1574 10	0.4234 10	3477.7

 2^{ieme} Solution avec $\epsilon_2 = -0.6 \ 10^{-1}$

- Tableau n°7 -

	·····	······································				
θ en degrés	२ ^(२)	$\frac{dQ_{2}}{d\theta} < \frac{dQ_{2}}{d\theta} = K_{2} d\theta$	$\frac{Q_{2}}{X_{2}} (X_{2})$	$\left(\frac{1}{\frac{\rho}{2}} + \frac{d^2}{d\vartheta} \right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{\varrho}\right)$	Ψ_(ອ) 2
14	30.03	-0.6747 1	0 ⁻³	0.2323	10 ⁻¹	439.23
15 16 17 18 19 20 21 22	30.04 30.06 30.08 30.10 30.14 30.18 30.23 30.28	-0.8742 10 -0.1147 10 -0.1501 10 -0.1913 10 -0.2356 10 -0.2789 10 -0.3182 10 -0.3517 10	0-3 0-2 0-2 0-2 0-2 0-2 0-2 0-2 0-2 0-2	0.2001 0.1522 0.1096 0.8365 0.7830 0.9229 0.1209 0.1574	10^{-1} 10^{-1} 10^{-2} 10^{-2} 10^{-2} 10^{-2} 10^{-1} 10^{-1}	326.94 191.34 103.28 66.53 64.68 89.46 143.72 230.44
23 24 25 26 27 28	30, 34 30, 40 30, 47 30, 54 30, 61 30, 68	-0.3785 10 -0.3992 10 -0.4153 10 -0.4290 10 -0.4432 10 -0.4607 10	0 ⁻² 0 ⁻² 0 ⁻² 0 ⁻² 0 ⁻² 0 ⁻²	0.1946 0.2257 0.2453 0.2500 0.2385 0.2121	10^{-1} 10^{-1} 10^{-1} 10^{-1} 10^{-1} 10^{-1}	341.22 452.95 534.51 559.63 519.18 426.55
29 30 31 32 33 34 35 36 37	30.76 30.84 30.93 31.03 31.13 31.24 31.37 31.50 31.64	-0.4836 10 -0.5135 10 -0.5512 10 -0.5954 10 -0.6442 10 -0.6947 10 -0.7431 10 -0.7860 10 -0.8212 10	- 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2	0.1744 0.1307 0.8783 0.5317 0.3341 0.3336 0.5438 0.9256 0.1367	10^{-1} 10^{-2} 10^{-2} 10^{-2} 10^{-2} 10^{-2} 10^{-2} 10^{-1}	312.83 213.86 154.82 140.38 156.44 184.04 217.56 271.57 358.87
38	31.79	-0.8494 10	o ⁻²	0.1660	10 ⁻¹	441.81

 2^{teme} Solution avec $\epsilon = 2.10^{2}$

88

- Tableau n°8 -

solution:

 $\begin{array}{l} \underline{\text{Définition}} \\ \text{Posons } x_3 &= \frac{\theta - \frac{19}{140}\pi}{\frac{54}{140}\pi - \frac{19}{160}\pi} \quad K_3 = \frac{d\theta}{dx_3} \simeq 3.8197; \\ &\quad \forall \theta \in [\frac{4\pi}{180}, \frac{19\pi}{180}] \cup [\frac{34\pi}{180}, \frac{\pi}{2}], \quad \rho_3(\theta) = \rho_2(\theta), \text{ avec } \epsilon_1 = 1.4\ 10^{-2} \\ &\quad \forall \theta \in [\frac{19\pi}{180}, \frac{34\pi}{180}], \quad \rho_3(\theta) = R_3(x_3) = \frac{1}{Q_3(x_3)}, \text{ où } Q_3(x_3) = Q_1(x_1) + \epsilon_3 P(x_3) . \end{array}$

Par une étude analogue à celle présentée en V.2.2 pour la deuxième solution, nous pouvons vérifier que le raccordement C^3 est assurée aux points de liaison de cette troisième solution avec la deuxième (où $\epsilon_1 = 1.4 \ 10^{-2}$), c' est à dire en $\frac{19}{180}\pi$ et en $\frac{34}{180}\pi$.

Par la même méthode utilisée pour l'étude du choix de ϵ_1 , nous arrivons à montrer qu'en prenant ϵ_3 négatif et supérieur à -1.4 10^{-2} , nous préservons la monotonie et le sens de la concavité ce que nous vérifierons à postériori, sur notre échantillon, pour tous les essais numériques que nous ferons.

Nous avons donc fait plusieurs essais numériques avec des valeurs de ϵ_3 négatives mais nous n'avons pas pu réaliser une amélioration sensible, relativement à la vérification de la condition (C 3.1) - toujours dans le sens que nous avons précisé -, de la deuxième solution; à moins que nous prenions des valeurs de ϵ_3 inferieures à -1.4 10^{-2} (voir les résultats d'un exemple où $\epsilon_3 = -2.2$ 10^{-2} (tableau n°9)); mais pour ces valeurs il y a quelques points de l'échantillon Θ pour lesquels la condition (C 2.2) n'est plus vérifiée.

Nous avons fait une étude analogue pour l'intervalle $\left[\frac{60\pi}{180}, \frac{76\pi}{180}\right]$ et nous arrivons aux mêmes conclusions.

V.4. 4^{me} Solution

Dans la première solution, ainsi que dans la deuxième et dans la troisième, nous avions $\rho''(\frac{\pi}{2}) = 0$ ce qui, comme nous l'avons déja souligné, n'est pas exigé par les conditions qui définissent le problème. Nous avons donc envisagé de chercher une solution où le dénominateur serait de degré 7, mais où la dérivée seconde en $\frac{\pi}{2}$ ne serait pas nulle. €₃= -2.2 10 ⁻²

θ en degrés	ଟୁ(୫୦	$\frac{dQ_{3}}{d\vartheta}(\vartheta) = K_{3} \frac{dQ_{3}}{dx_{3}}(x_{3})$	$\left[\frac{1}{\frac{\rho}{g}} + \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{\frac{\rho}{g}}\right)\right] (\vartheta)$	¥ુ(ઇ) 3
14 15 16 17 18 19	30.03 30.04 30.06 30.07 30.09 30.12	$\begin{array}{rrrrr} -0.6747 & 10^{-3} \\ -0.8552 & 10^{-3} \\ -0.1027 & 10^{-2} \\ -0.1182 & 10^{-2} \\ -0.1335 & 10^{-2} \\ -0.1507 & 10^{-2} \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.2323 & 10^{-1} \\ 0.2302 & 10^{-1} \\ 0.2395 & 10^{-1} \\ 0.2458 & 10^{-1} \\ 0.2416 & 10^{-2} \\ 0.2242 & 10^{-1} \end{array}$	439.23 432.39 469.08 495.54 480.29 416.05
20 21 22 23 24	30.14 30.17 30.22 30.27 30.34	$\begin{array}{rrrr} -0.1789 & 10^{-2} \\ -0.2370 & 10^{-2} \\ -0.3156 & 10^{-2} \\ -0.3913 & 10^{-2} \\ -0.4445 & 10^{-2} \end{array}$	$\begin{array}{r} 0.8907 10^{-2} \\ -0.7992 10^{-2} \\ -0.1343 10^{-1} \\ -0.5325 10^{-2} \\ 0.1123 10^{-1} \end{array}$	73.24 76.15 197.33 84.30 152.32
25 26 27 28	30, 42 30, 49 30, 57 30, 64	$\begin{array}{r} -0.4668 & 10^{-2} \\ -0.4636 & 10^{-2} \\ -0.4501 & 10^{-2} \\ -0.4454 & 10^{-2} \end{array}$	$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr$	705.89 1325.37 1326.96 771.88
29 30 31 32 33	30.71 30.79 30.88 30.99 31.11	$\begin{array}{r} -0.4652 10^{-2} \\ -0.5151 10^{-2} \\ -0.5878 10^{-2} \\ -0.6643 10^{-2} \\ -0.7222 10^{-2} \end{array}$	$\begin{array}{r} 0.1256 10^{-1} \\ -0.4011 10^{-1} \\ -0.1259 10^{-1} \\ -0.8123 10^{-2} \\ 0.7352 10^{-2} \end{array}$	169.15 124.08 322.98 271.55 211.11
34 35 36 37 38	31.23 31.36 31.50 31.64 31.79	$\begin{array}{r} -0.7527 10^{-2} \\ -0.7749 10^{-2} \\ -0.7980 10^{-2} \\ -0.8231 10^{-2} \\ -0.8494 10^{-2} \end{array}$	$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr$	446.90 458.69 443.01 425.58 441.81

- Tableau n°9 -

Posons:

$$\rho_4(\theta) = R_4(x) = \frac{1}{Q_4(x)}, \text{ avec } x = \frac{\theta - \frac{4\pi}{180}}{\frac{86\pi}{180}}.$$

Déterminons R_4 tel que:

$$R'_4(0) = R''_4(0) = R'''_4(0) = R''_4(1) = R'''_4(1) = (0)$$
.

Pour exprimer les dérivées de R_4 par rapport à x en fonction des dérivées de Q_4 par rapport à x, il suffit d'utiliser les relations entre les dérivées de R et les dérivées de Q qui sont dans V.1.1. et d'y remplacer R par R_4 et Q par Q_4 . De ces relations, nous pouvons déduire que

$$R'_{4}(0) = R''_{4}(0) = R''_{4}(0) = R''_{4}(0) = R'_{4}(1) = R''_{4}(1) = (0) \iff$$
$$Q'_{4}(0) = Q''_{4}(0) = Q''_{4}(0) = Q''_{4}(1) = Q''_{4}(1) = (0) .$$

L'utilisation de ces conditions et des deux relations: $Q_4(0) = f_0$ et $Q_4(1) = f_1$ conduisent à la solution suivante, répondant aux conditions (C 1.1), (C 1.2), (C 1.3), (C 1.4), (C 1.5), (C 1.6) et (C 1.7) :

Définition

$$\rho_4(\theta) = R_4(x) = \frac{1}{Q_4(x)}, \text{ avec } x = \frac{\theta - \frac{4\pi}{180}}{\frac{86\pi}{180}},$$

où $Q_4(x) = (f_1 - f_0)(x^7 + 7x^6(1-x)) + (\frac{a}{20} + 14(f_1 - f_0))x^5(1-x)^2 + \frac{a}{4}x^4(1-x)^3 + f_0$.

Remarque

 $Q_4^{''}(1) = \frac{a}{10} - 14(f_1 - f_0)$; par conséquent si $a = 140(f_1 - f_0)$ alors $Q_4^{''}(1) = 0$. Donc, pour $a = 140(f_1 - f_0) \simeq 0.933$, nous avons $\forall x \in [0, 1], Q_4(x) = Q(x)$ i.e. la première solution est un cas particulier de la quatrième.

Cherchons pour quelles valeurs de "a" nous aurions: $\forall x \in [0, 1], Q_4' \leq 0$? pour répondre à la condition (C 2.1) et pour quelles valeurs de "a" aurions nous: $\forall x \in [0, 1], Q(x) + K^2 \frac{d^2Q}{dx^2} \geq 0$? ($K = \frac{d\theta}{dx}$) pour répondre à la condition (C 2.2). Nous montrons que pour "a" négatif et supérieur à -0.933 ($-0.933 \simeq 140(f_1 - f_0)$), valeur de "a" pour laquelle $Q_4(x) = Q(x)$, ces deux conditions sont satisfaites.

Nous avons fait plusieurs essais avec des valeurs de $a \in [-0.933, 0]$ et nous obtenons les meilleurs résultats - par rapport à la condition (C 3.1) - avec a = -0.6 (voir tableau $n^{\circ}10$).

V.5. Autres solutions

Nous avons essayé d'autres solutions du même type que les précédentes et nous n'en citerons que les deux suivantes à titre d'exemples.

V.5.1. 5^{me} Solution

Pour le polynôme au dénominateur, le degré 6 étant suffisant - et minimal - pour répondre aux conditions (C 1.1), (C 1.2), (C 1.3), (C 1.4), (C 1.5), (C 1.6) et (C 1.7), nous avons cherché la solution où le dénominateur est de ce degré , à partir de ces 7 conditions.

Définition

$$\rho_5(\theta) = R_5(x) = \frac{1}{Q_5(x)}, \text{ avec } x = \frac{\theta - \frac{4\pi}{180}}{\frac{86\pi}{180}},$$

Dù $Q_5(x) = (f_1 - f_0)(x^6 + 6x^5(1 - x) + 10x^4(1 - x)^2) + f_0$

Nous montrons que cette solution répond à (C 2.1) et (C 2.2), mais comme pour les solutions précédentes il y a une "plage" de l'intervalle [α , $\frac{\pi}{2}$] dans laquelle (C 3.1) n' est pas satisfaite. Néanmoins cette solution peut servir, de la même manière que la première solution, comme solution de base à la définition d'autres solutions où l'on minimiserait la "plage" dans laquelle (C 3.1) ne serait pas vérifiée.

4 ^{4re}	Sol	ut	Lı	or	'ı
avec	a	=	-	Ö.	6

ອ en degrés	p(8)	$\frac{dQ}{d\theta} (\theta) = K \frac{dQ}{dx} (x)$	$\left(\frac{1}{\frac{\rho}{4}} + \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{\frac{\rho}{4}}\right)\right) (\vartheta)$	Ψ_(છ) 4
4 5 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	30.000 30.000 30.000 30.000 30.001 30.003 30.005 30.008 30.013 30.019 30.027 30.027 30.037 30.050 30.065	$\begin{array}{c} 0.00000\\ -0.60878 & 10^{-6}\\ -0.47162 & 10^{-5}\\ -0.15408 & 10^{-4}\\ -0.35343 & 10^{-4}\\ -0.66777 & 10^{-4}\\ -0.66777 & 10^{-3}\\ -0.11158 & 10^{-3}\\ -0.17128 & 10^{-3}\\ -0.24705 & 10^{-3}\\ -0.33977 & 10^{-3}\\ -0.33977 & 10^{-3}\\ -0.45001 & 10^{-3}\\ -0.57808 & 10^{-3}\\ -0.72404 & 10^{-3}\\ -0.88773 & 10^{-2}\\ -0.10688 & 10^{-2}\\ \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.33333 & 10^{-1} \\ 0.33230 & 10^{-1} \\ 0.32937 & 10^{-1} \\ 0.32937 & 10^{-1} \\ 0.32479 & 10^{-1} \\ 0.31881 & 10^{-1} \\ 0.31164 & 10^{-1} \\ 0.30349 & 10^{-1} \\ 0.29457 & 10^{-1} \\ 0.28504 & 10^{-1} \\ 0.28504 & 10^{-1} \\ 0.26487 & 10^{-1} \\ 0.25452 & 10^{-1} \\ 0.23398 & 10^{-1} \\ 0.22403 & 10^{-1} \end{array}$	900.00 894.42 878.71 854.49 823.33 786.81 746.35 703.31 658.87 614.08 569.83 526.86 485.83 447.18 411.30
19 20 21 23 24 25 26 27 29 30 31 23 34 35 37 38 39 40 41	30.084 30.105 30.131 30.160 30.193 30.230 30.272 30.318 30.369 30.426 30.426 30.487 30.553 30.625 30.702 30.785 30.785 30.966 31.065 31.170 31.279 31.394 31.515 31.640	$\begin{array}{c} -0.12665 & 10^{-2} \\ -0.14803 & 10^{-2} \\ -0.17092 & 10^{-2} \\ -0.19522 & 10^{-2} \\ -0.22080 & 10^{-2} \\ -0.24754 & 10^{-2} \\ -0.27530 & 10^{-2} \\ -0.30394 & 10^{-2} \\ -0.30394 & 10^{-2} \\ -0.36325 & 10^{-2} \\ -0.39359 & 10^{-2} \\ -0.39359 & 10^{-2} \\ -0.42418 & 10^{-2} \\ -0.42418 & 10^{-2} \\ -0.45484 & 10^{-2} \\ -0.51576 & 10^{-2} \\ -0.51576 & 10^{-2} \\ -0.57505 & 10^{-2} \\ -0.63145 & 10^{-2} \\ -0.65819 & 10^{-2} \\ -0.68378 & 10^{-2} \\ -0.70808 & 10^{-2} \\ -0.73097 & 10^{-2} \\ \end{array}$	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	378.45 348.83 322.55 263.68 280.21 264.13 251.38 241.90 235.61 232.44 232.31 235.13 240.87 249.45 260.86 275.08 292.10 311.97 334.71 360.39 389.11 420.98 455.14
42 43 44 45 46	31.770 31.905 32.044 32.188 32.336	$\begin{array}{r} -0.75233 10^{-2} \\ -0.77205 10^{-2} \\ -0.79005 10^{-2} \\ -0.80622 10^{-2} \\ -0.82049 10^{-2} \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.19697 10 \\ 0.20529 10^{-1} \\ 0.21412 10^{-1} \\ 0.22340 10^{-1} \\ 0.23307 10^{-1} \end{array}$	494.72 536.92 582.92 632.92 687.15

- Tableau nº10 -

6		100	I	
v en degrés	p(9)	$\frac{dQ}{d\theta} = \frac{dQ}{dx} = K \frac{dQ}{dx} = K \frac{dQ}{dx}$	$\left(\frac{1}{Q} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{Q}\right)\right) (\theta)$	Ψ_(8)
47	32.487	$-0.83279 10^{-2}$	0.24308 10 ⁻¹	745.81
48	32.642	$-0.84306 10^{-2}$	0.25337 10 ⁻¹	809.13
49	32.801	$-0.85127 10^{-2}$	0.26388 10 ⁻¹	877.32
50	32.962	$-0.85736 10^{-2}$	0.27456 10 ⁻¹	950.56
51	33.126	$-0.86132 10^{-2}$	0.28534 10 ⁻¹	1029.0
52	33.292	$-0.86313 10^{-2}$	$0.29616 \ 10^{-1}$	1112.8
53	33.460	$-0.86279 10^{-2}$	$0.30697 10^{-1}$	1202.1
54	33.629	$-0.86031 10^{-2}$	$0.31771 \ 10^{-1}$	1296.7
55	33.799	$-0.85570 10^{-2}$	0.32832 10 ⁻¹	1396.8
56	33.970	$-0.84999 10^{-2}$	$0.33874 \ 10^{-1}$	1502.1
57	34.141	$-0.84022 10^{-2}$	0.34893 10 ⁻¹	1612.3
58	34.312	-0.82945 10 ⁻²	0.35882 10 ⁻¹	1727.2
59	34.482	$-0.81673 \ 10^{-2}$	0.36837 10 ⁻¹	1846.3
60	34.650	$-0.80212 10^{-2}$	$0.37752 \ 10^{-1}$	1968.9
61	34.818	$-0.78571 \ 10^{-2}$	0.38624 10	2094.4
62	34.983	$-0.76758 \ 10^{-2}$	0.39448 10	2221.9
63	35.145	$-0.74783 \ 10^{-2}$	$0.40220 \ 10^{-1}$	2350.5
64	35.305	$-0.72654 10^{-2}$	0.40937 10	2479.1
65	35.461	$-0.70384 \ 10^{-2}$	$0.41595 10^{-1}$	2606.6
66	35.614	-0.67982 10-2	0.42192 10	2731.7
67	35.762	-0.65462 10	$0.42525 10^{-1}$	2853.1
68	35.906	$-0.62834 \ 10^{-2}$	$0.43192 10^{-1}$	2969.6
69	36.045	$-0.60111 \ 10^{-2}$	0.43593 10	3079.8
70	36.179	-0.57305 10	0.43926 10	3182.7
71	35.307	-0.54430 10	0.44191 10	3276.9
72	36.429 -	$-0.51498 \ 10^{-2}$	$0.44390 \ 10^{-1}$	3361.4
73	36.545	-0.48522 10	0.44522 10	3435.5
74	36.655	-0.45513 10	$0.44589 10^{-1}$	3498.5
75	36.759	-0.42484 10	$0.44595 10^{-1}$	3549.8
76	36,855	-0.39446 10-2	0.44542 10	3589.3
77	36.946	-0.36410 10 ⁻²	$0.44434 \ 10^{-1}$	3617.0
78	37.029	$-0.33387 \ 10^{-2}$	0.44276 10	3633.2
79	37.105	-0.30385 10-2	$0.44074 \ 10^{-1}$	3638.6
80	37.175	$-0.27412 \ 10^{-2}$	$0.43834 \ 10^{-1}$	3634.1
81	37.238	$-0.24476 \ 10^{-2}$	0.43563 10	3620.6
85	37.293	$-0.21581 10^{-2}$	0.43270 10-1	3599. 7
83	37.342	$-0.18733 \ 10^{-2}$	0.42964 10	3573.0
84	37.385	-0.15932 10	0.42656 10	3542.3
85	37.420	-0.13180 10	0.42356 10	3509.7
86	37.449	-0.10474 10	$0.42077 \ 10^{-1}$	3477.3
87	37.471	-0.78115 10	0.42833 10	3447.5
88	37.487	-0.51848 10	0.41639 10	3422.8
89	37.497	-0.25849 10-3	0.41509 10	3405.9
90	37.500	0.00000	0.41462 10	3399.6
1				I

- Tableau n°10 (suite) -

94

Remarque

Cette solution est, évidement, un cas particulier de la quatrième, elle s' obtient à partir de celle-ci pour la valeur de a $\simeq -0.1333$.

V.5.2. 6^{me} Solution

Voici une dernière solution pour laquelle toutes les conditions sont vérifiées sauf (C 3.1) qui ne l'est que partiellement. Dans cette solution le dénominateur est un polynôme de degré 9 et le raccordement C^4 est assuré, ce qui n'est pas exigé à priori.

Définition

$$\rho_6(\theta) = R_6(x) = \frac{1}{Q_6(x)}, \text{ avec } x = \frac{\theta - \frac{4\pi}{180}}{\frac{86\pi}{180}},$$

où

$$Q_6(x) = (f_0 - f_1)(126x^4(1-x)^5 + 84x^3(1-x)^6 + 36x^2(1-x)^7 + 9x(1-x)^8 + (1-x)^9) + f_1.$$

CONCLUSIONS

Dans ce problème de conception de forme nous avons rencontré une condition mécanique, qui s'avère être très contraignante, et qui est un exemple de contraintes qu'on peut rencontrer en CMAO.

Pour notre part nous avons cherché une réponse au problème sous la forme de fractions rationnelles, ou de splines rationnelles ayant un numérateur égal à une constante, et nous avons pu répondre dans toutes les solutions proposées à toutes les conditions sauf la contrainte mécanique à laquelle nous avons répondu d' une façon partielle.

La meilleure solution que nous ayons pu déterminer est la deuxième solution avec $\epsilon_1 = 1.4 \ 10^{-2}$ et $\epsilon_2 = -6 \ 10^{-2}$. Pour cette solution, Ψ_2 sort de l'intervalle [l, L] dans le domaine relativement réduit : [20°, 33°] \cup [65°, 71°] de l'échantillon expérimental sur lequel nous avons travaillé.

RÉFÉRENCES

D.F. Mc Allister, J.A. Roulier (1978) : Interpolation by convex quadratic splines.
 Math. Comput., 32: 1154 - 1162.

[2] L.L. Schumaker (1983) : On shape preserving quadratic spline interpolation. SIAM
 J.Numer. Anal., 20: 854 - 864.

[3] F.N. Fritsch, R.E. Carlson (1980): Monotone piecewise cubic interpolation. SIAM J.Numer. Anal., 17: 238 - 246.

[4] P. Costantini, R.Morandi (1984): Monotone and convex cubic spline interpolation. Calcolo, 21: 281 _ 294.

[5] P. Costantini, R. Morandi (1984): An algorithm for computing shape preserving cubic spline interpolation to data. Calcolo, 21: 295 - 305.

[6] E. Neuman (1980) : Convex interpolating splines of arbitrary degree. In numerical methods of approximation theory 5. (L.Collatz, G.Meinardus, H. Werner, eds.) Basel: Birkhauser, 211 _ 222.

[7] E. Neuman (1982): Convex interpolating splines of arbitrary degree, I. Bit, 22: 331 - 338.

[8] H. Mettke (1983): Convex cubic Hermite spline interpolation. J.Comput.Appl.Math.,
9: 205 - 211. And same journal (1984) 11: 377-378.

[9] D.F. Mc Allister, J.A. Roulier (1981) : An algorithm for computing a shape preserving osculatory quadratic spline. ACM Trans. Math. Software, 7: 331 - 347.

[10] E. Passow, J.A. Roulier (1977): Monotone and convex spline interpolation. SIAM

RÉFÉRENCES

D.F. Mc Allister, J.A. Roulier (1978) : Interpolation by convex quadratic splines.
 Math. Comput., 32: 1154 - 1162.

[2] L.L. Schumaker (1983) : On shape preserving quadratic spline interpolation. SIAM
 J.Numer. Anal., 20: 854 - 864.

[3] F.N. Fritsch, R.E. Carlson (1980) : Monotone piecewise cubic interpolation. SIAM J.Numer. Anal., 17: 238 - 246.

[4] P. Costantini, R. Morandi (1984): Monotone and convex cubic spline interpolation. Calcolo, 21: 281 - 294.

[5] P. Costantini, R. Morandi (1984): An algorithm for computing shape preserving cubic spline interpolation to data. Calcolo, 21: 295 - 305.

[6] E. Neuman (1980)⁻: Convex interpolating splines of arbitrary degree. In numerical methods of approximation theory 5. (L.Collatz, G.Meinardus, H. Werner, eds.) Basel: Birkhauser, 211 _ 222.

[7] E. Neuman (1982) : Convex interpolating splines of arbitrary degree, I. Bit, 22: 331 - 338.

[8] H. Mettke (1983): Convex cubic Hermite spline interpolation. J.Comput.Appl.Math.,
9: 205 _ 211. And same journal (1984) 11: 377_ 378.

[9] D.F. Mc Allister, J.A. Roulier (1981) : An algorithm for computing a shape preserving osculatory quadratic spline. ACM Trans. Math. Software, 7: 331 - 347.

[10] E. Passow, J.A. Roulier (1977): Monotone and convex spline interpolation. SIAM



J.Numer. Anal., 14: 904 _ 909.

 [11] R. Delbourgo, J.A. Gregory (1983): C² Rational quadratic spline interpolation to monotonic data. IMA J.Numer. Anal., 3: 141 - 152.

[12] J. Medina (1985) : Fonctions splines avec conditions de forme. Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées. Université de Grenoble.

[13] P.J. Davis (1975): Interpolation and approximation. New York: Dover.

 [14] B. Germain-Bonne, P. Sablonnière (1976): Comparaison des formes de courbes paramétrées et de leurs approximants spline. Publication n°76, Laboratoire de calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

[15] P. Costantini (1986) : On monotone and convex spline interpolation. Math. of Comput., 46 : 203 - 214.

[16] C. De Boor (1978) : A practical guide to splines. New York: Springer Verlag.

[17] J.C. Fiorot, J. Tabka (1988): Shape preserving C^2 cubic polynomial interpolating splines. Publications du Laboratoire M.A.C.S. de l'université de Valenciennes.

[18] J.C. Fiorot, J. Tabka (à paraître en Juillet 1988): Splines d'interpolation polynomiales de degré 3 de classe C^2 conservant la forme. Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, Série I.

[19] P.G. Ciarlet (1982): Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson.

[20] J.C. Dupin, A. Fréville (1988) : Des conditions suffisantes d'existence de splines cubiques de classe C^2 conservant la forme pour une subdivision uniforme. Publications du Laboratoire M.A.C.S. de l'université de Valenciennes
[21] J.M. Flamme (1987) : Conception des machines volumétriques à palettes. Énergie fluide, numéro spécial.