N° d'ordre : 300

année 1988

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité : Automatique

par

LITWAK Georges Robert

CONTRIBUTION A LA MODELISATION D'UN SYSTEME COMPLEXE : APPLICATION A LA GESTION D'UN PORTEFEUILLE BOURSIER

Thèse soutenue le 19 Décembre 1988 devant la Commission d'Examen

Membres du jury :			
	P.	VIDAL	Président
	L.	POVY	Directeur de recherche
	R.	LAURENT	Rapporteur
	P.	MICHAUD	Rapporteur
	J.G.	POSTAIRE	Examinateur

à Pascaline,

à Nicolas
à Héléne

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au laboratoire d'Automatique de l'Université des sciences et techniques de Lille Flandres Artois.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Pierre Vidal de m'avoir accueilli dans son laboratoire et d'avoir accepté la présidence de ce jury.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Lucien Povy pour avoir accepté de diriger mes recherches.

Que Monsieur le Professeur Robert Laurent accepte mes vifs remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour le fait d'avoir accepté d'en être rapporteur.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Pierre Michaud pour ses suggestions constructives, et pour avoir accepté d'être rapporteur dans ce jury.

Je remercie également Monsieur le Professeur Jack Gérard Postaire pour avoir eu la gentillesse d'accepter de participer à ce jury en tant qu'examinateur.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à tous mes collègues pour leur soutien permanent et notamment à Monsieur Bernard Boittiaux, Monsieur Jean-Michel Duthilleul et Madame Annie-Françoise Mouyart qui n'ont pas hésité à me donner de leur temps pour m'aider dans cette recherche.

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide de mon épouse qui fit preuve d'une grande patience.

Introduction :

I Système économique :

II Modélisation d'une valeur mobilière :

III Modélisation des préférences :

IV Modélisation décisionnelle :

INTRODUCTION

Notre équipe de recherche s'est spécialisée dans la modélisation et l'optimisation de systèmes complexes.
Suite à la proposition d'un agent de change Parisien, nous avons étudié un autre système complexe : La Bourse. Il s'agissait de modéliser ce processus économique de manière à en connaître mieux son évolution et à pouvoir classer les différents titres de ce marché.

Le premier problème rencontré fut la compréhension du monde économique. Une grosse étude bibliographique s'avéra nécessaire pour appréhender ce milieu.
Une synthèse a été réalisée dans ce rapport sur ce sujet : le chapitre I présente la bourse, il en explique l'organisation et le fonctionnement.

La présentation des différents modèles de la bourse sera abordée dans le chapitre II. Il est entendu que seuls les plus utilisés et les plus crédibles ont été détaillés.

C'est à partir de cette étude que nous avons construit notre propre modèle qui constituera la première partie du chapitre III.

Ce modèle n'étant pas parfait, les données souffrent d'un bruit important et la comparaison de deux titres s'avère difficile.

L'introduction de la notion de "nombre flou" nous a permis de proposer un modèle de préférence qui résout ce problème et donc d'effectuer un classement de l'ensemble des titres. Ce modèle est présenté dans la deuxième partie du chapitre III.

Néanmoins, un second problème apparaît : nous observons que le modèle élaboré apporte plusieurs informations sur chaque action. A chaque évaluation de ces informations correspond un classement. Ces derniers sont de plus fréquemment contradictoire.
Il a donc fallu créer un modèle de décision permettant un classement final qui soit un "bon compromis" pour l'investisseur. Ce sera le thème du chapitre IV.

Ces trois modèles (le modèle du système, le modèle de préférence, le modèle de décision) ont été testés sur la Bourse de Paris et les résultats sont présentés en fin du chapitre IV.

I SYSTEMES ECONOMIQUES :

1.1 Introduction :

La bourse est un système économique très complexe. Il ne serait pas possible d'intervenir sur ce système sans, au préalable, l'avoir compris. Pour cela nous allons vous présenter son fonctionnement. Dans un premier temps, nous décrirons son rôle et ses intervenants. Puis, dans un deuxième temps, nous expliquerons la nature, l'organisation et le fonctionnement de la bourse.

1.2 Marchés Financiers :

1.2.1 Rôles des Marchés Financiers :

Certains agents économiques investissent plus qu'ils n'épargnent (c'est le cas des entreprises), et d'autres agents épargnent plus qu'ils n'investissent (c'est le cas des investisseurs traditionnels). Le rôle des marchés financiers est de transférer les capitaux des uns aux autres.
Pour cela , ils assurent trois fonctions :

_ Le Marché Primaire.
_ Le Marché Secondaire.
_ La mutation des Structures de Production.

Le marché Primaire transforme l'épargne des ménages en ressources longues pour les collectivités publiques ou privées. Pour cela elles émettent des valeurs mobilières (Actions ou Obligations) qui matérialisent le contrat passé entre les deux parties.

Ce marché primaire serait un piège s'il n'existait pas le marché secondaire. En effet , l'acheteur serait contraint à garder ses titres une dizaine d'années pour les obligations et toute sa vie pour les actions.

Le marché secondaire va permettre la liquidité et la mobilité de l'épargne. Grâce à la Bourse, tous les jours , les valeurs mobilières seront négociées au plus juste prix.
Dans un marché efficient, le prix d'un actif est une bonne estimation de sa "valeur intrinsèque" ou "vraie valeur".

Un autre avantage est de déterminer quotidiennement la "valeur" des sociétés cotées ; indication utile pour les investisseurs et pour les entreprises.
Les premiers, qui ont une grande aversion du risque, pourront se reporter sur des actifs de moindres risques, et donc de faible rentabilité (cas du marché efficient).

Les seconds, ayant connaissance de la rentabilité exigée par les actionnaires, en déduiront le coût du capital de la société et, par là , le montant des investissements possibles.
Le marché secondaire permet la modification de la structure de l'entreprise par l'achat d'actifs d'autres sociétés (prise de contrôle).
Cet achat peut se faire sous différentes formes :

- OPA offre publique d'achat
- OPV offre publique de vente
- Négociations de blocs de titres

Il peut être payé soit en liquidités, soit en valeurs mobilières (échanges de titres).
Un des paramètres de ce système est le "comportement humain". Pour essayer de mieux le cerner, nous allons commencer par présenter les différents intervenants.

1.2.2 Intervenants:

a) Les intervenants principaux sont les ménages ; ils transforment leur épargne sous différentes formes.

_ Portefeuille de titres : certains possèdent des valeurs mobilières regroupées dans un portefeuille. Cela leur impose sa gestion.

_ SICAV (Société d'Investissement à CApital Variable)
FCP (Fond Commun de Placement)

C'est une forme collective de placement ; oë des spécialistes gèrent les fonds récoltés. Ici le particulier paiera des frais d'entrée, de sortie , et des frais de gestion.

_ Club d'investissement : c'est un ensemble d'épargnants qui se regroupent de manière à augmenter leur capital (ce qui permet de diversifier leurs portefeuilles), et d'améliorer leur gestion (information plus complète).

b) Une deuxième sorte d'intervenants : Les investisseurs traditionnels. (Compagnie d'Assurance, Caisse de dépôt et consignation, Caisse de retraite ...).

Les Institutionnels gèrent des fonds provenant de contrats tels que :

_ Assurance-vie
_ Livret d'épargne
_ Caisse de retraite
_ Etablissement bancaire

Les capitaux de ces contrats proviennent des ménages. On voit donc, que indirectement, ce sont encore les ménages qui placent leur épargne sur le marché financier. Ce qui a pour avantage de proposer des produits différents et aussi de permettre aux ménages un placement sans risques.

Il reste enfin les sociétés industrielles et commerciales qui ont une partie de leur actif en titres.
La bourse est un marché très technique ; l'utilisation optimale de celui-ci passe donc par une bonne maîtrise de ses éléments. Pour cela, nous allons vous présenter, dans la partie suivante, toutes les notions indispensables à une bonne compréhension.

1.3 Les bourses :

1.3.1 Nature des bourses dans le monde :

Tous les pays industrialisés possèdent leur Bourse. Dans chaque état, l'organisation et le fonctionnement peut être différent. Il existe en fait trois grandes catégories de bourses :

_ Les bourses publiques, dans lesquelles des institutions publiques ou des agents de change ont le monopole des négociations. Les bourses Française, Belge , Espagnole, Italienne, Grecque et certaines bourses Sud-Américaines sont de ce type.

_ Les bourses de banquiers : ce sont essentiellement les institutions bancaires qui interviennent. Quelque fois, elles cohabitent avec des agents de change mais elles ont pouvoir de négociation. Ce sont les bourses d'inspiration Germaniques : Allemagne, Suisse , Autriche, Pays Scandinaves.

_ Les bourses privées : elles ne sont contrôlées par aucun monopole. Ce sont des associations privées qui gèrent la bourse. Ce qui n'exclut pas le regard des pouvoirs publics sur son organisation et son fonctionnement. Le Canada, l'Afrique du Sud , l'Australie, le Japon , l'Angleterre et les bourses Nord-Américaines sont de ce type. (Inspiration Anglo-Américaine)

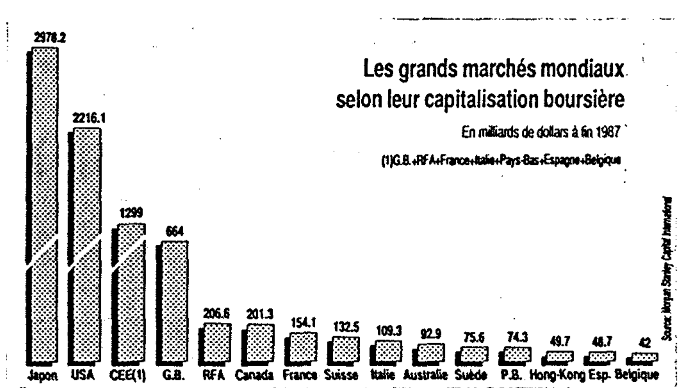


Figure 1.2 : Tableau des importances relatives en capitalisation Boursière.

1.3.2 Organisation et fonctionnement :

1.3.2.1 Institutions :

Les bourses de France sont du type "publique". L'organisation et le fonctionnement ont été confiés à des intermédiaires officiels et spécialisés : "Les Agents de Change". Ce sont des officiers ministériels ; ils sont personnellement responsables des opérations en Bourse. De plus, ils sont solidaires les uns des autres et possèdent un fond commun, appartenant à la compagnie, servant d'assurance.
Membres d'une même compagnie nationale, les agents de change appartiennent à sept Bourses ; qui sont les unités décentralisée d'un marché unique : Paris, Bordeaux, Lille , Lyon, Marseille , Nancy, Nantes.

Une valeur mobilière ne peut être cotée que sur une seule place ; elle sera négociée par les agents de change inscrits à cette bourse. Les titres des émetteurs à vocation régionale seront cotés en Province.
La compagnie des agents de change émet un règlement général. La chambre syndicale, élue annuellement parmi les agents, est chargée de la bonne application de ce règlement.
Crée en 1967, la Commission des Opérations en Bourse (C.O.B) est chargée de contrôler les publications des sociétés. Elle veille à ce que des "initiés" (de par leur fonction) ne tirent profit d'informations privilégiées.
Le ministre de l'économie nomme ou révoque les agents de change. Il crée ou supprime une bourse ; peut modifier la réglementation du marché par loi, décret ou simple homologation des régles de la compagnie d'agents de change.

1.3.2.2 Marchés de négociation :

IL existe différents marchés de négociation ; les entreprises sont réparties sur ces marchés en fonction de règles très précises.

a) Marché au comptant :
Toutes les valeurs mobilières négociées sur les bourses Françaises peuvent être achetées ou vendues au comptant. Le règlement de la transaction ayant lieu le jour même. Le marché au comptant regroupe tous les titres de la cote officielle ne pouvant se négocier à terme.

b) Certains titres sont négociés sur le marché à terme ; les conditions de la négociation ont lieu le jour même, seuls le paiement et la livraison des titres sont effectués à la fin du mois. (date de liquidation). Sur ce marché, les transactions ne se font que sur des quotités de titres fixées à l'avance ; on ne peut comme au comptant acheter ou vendre un seul titre.
Toutes les valeurs appartenant à ces deux marchés sont inscrites à la "cote officielle". Cette inscription est décidée par la Commission des Opérations en Bourse après consultation de la Compagnie des Agents de Change (C.A.C). Les sociétés ou collectivités désirant y être inscrites doivent passer un véritable examen de passage. Leur santé économique et financière, leur régularité juridique y sont vérifiées.

c) Toutes les entreprises n'ayant pas pu ou n'ayant pas voulu passer cette épreuve, peuvent néanmoins demander l'inscription au second marché. Les procédures y sont plus simples et moins contraignantes.

d) Enfin, pour ceux qui ne sont concernés ni par la cote officielle, ni par le second marché l'inscription au "hors cote" est possible.

1.3.2.3 Formation des cours :

Sur un marché efficient, toutes les informations liées à un titre sont disponibles. Aussi le cours reflète l'avis que se font, acheteurs et vendeurs, de la valeur de ce titre.
Les agents de change ont le monopole des transactions ; ils centralisent toutes les intentions de vente ou d'achat sous forme d' "ordres". Ils se réunissent au Palais de la Bourse pour confronter tous ces ordres.
Ils modifieront le cours de manière à ce que le plus grand nombre d'ordres de vente ou d'achat soit réalisé.
Il peut arriver que des variations de cours d'ampleur inhabituelle n'aient pas d'autre cause qu'un déséquilibre accidentel entre l'offre et la demande.

Pour éviter que les donneurs d'ordres "au mieux" ne soient victimes de tels accidents, la Chambre syndicale des agents de change veille à limiter l'écart entre le dernier cours de la veille et le premier du jour. Elle peut décider de coter pour cela en réduisant les offres ou les demandes. Elle peut aussi, en cas de fort déséquilibre, publier un cours purement indicatif, en indiquant que ce titre est "offert" (pas suffisamment d'acheteurs) ou "demandé" (pas suffisamment de vendeurs).

Capitalisation Boursière %

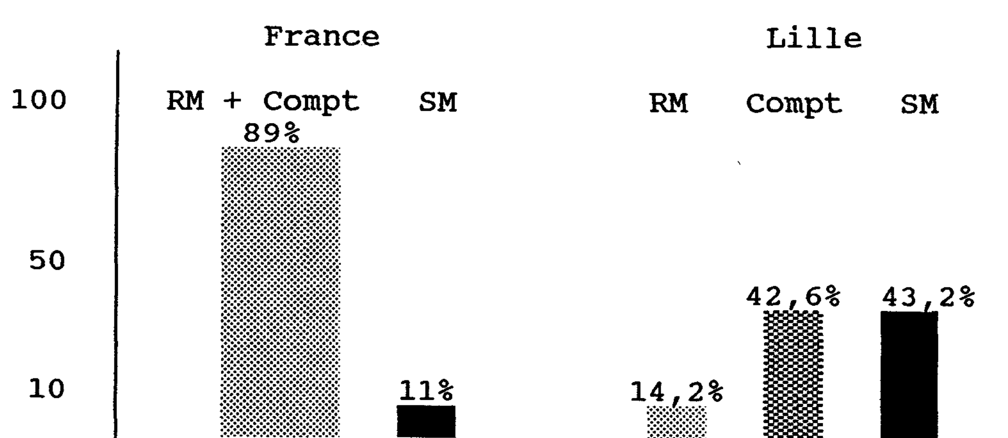


Figure 1.2 : Importance relative des différents marchés

1.3.2.4 **Ordres en Bourse :**

Ce sont les instructions données par toute personne, physique ou morale, désireuse d'acheter ou de vendre des valeurs mobilières en bourse. Ces ordres en bourse peuvent être passés par un mandataire qui aura les pouvoirs que l'on désire ; pour cela on lui donnera une procuration.
On peut adresser les ordres soit à un établissement bancaire ou financier, soit à des gérants ou remisiers, soit à des agents de change. Mais seuls ceux-ci sont habilités à les exécuter sur le marché.

La bourse est très stricte sur le libellé des ordres ; ils doivent comporter trois séries d'indications :

a) Des indications générales :
Sens de l'opération (achat ou vente), nom, nombre et nature des titres à négocier (actions, obligations, droits).
Le marché choisi (comptant, terme)

b) Des stipulations de prix :
 * Pour les opérations au comptant :

. Ordre au mieux : il ne fixe aucune borne de prix et c'est l'agent de change qui décide du "meilleur prix". Cette ordre est exécutable en premier et quelque soit le cours coté sur le marché.
. Ordre à cours limité : il fixe le prix minimum de vente et maximum d'achat.
. Ordre "environ" : il permet une variation dans une fourchette de prix.
. Ordre "à appréciation" : il laisse une grande liberté aux agents de change sur l'opportunité d'acheter ou de vendre.
. Ordre "au premier cours" : il sera exécuté au premier cours pratiqué sur la valeur, durant la séance de bourse.

* Pour les opérations à termes :

Sur le marché à terme ferme, on retrouve les mêmes ordres : "au mieux", "à cours limité", "au premier cours", "environ", et "à appréciation". Auxquels s'ajoutent l'ordre "au dernier cours" et l'ordre "stop".

. Ordre "au dernier cours" : il est exécutable au dernier cours de la séance.

. Ordre "stop" : Il limite les risques en permettant d'éviter un retournement de tendance.

Dès que le cours du titre cesse de croître (pour la vente) ou décroître (pour l'achat), et si la limite a été atteinte, l'ordre devient un ordre "au mieux".

Il existe aussi sur les deux marchés du comptant et du terme, des ordres dits "combinés".

. Ordre "lié" : l'ordre d'achat et de vente doivent être réalisés concurremment lors de la même séance.

. Ordre "d'arbitrage" : les achats et les ventes ne sont plus liés et peuvent être réalisés sur plusieurs séances de bourse.

c) Des précisions de validité :

* "à durée déterminée" : ces ordres ne peuvent être exécutés que pendant la durée pour laquelle ils ont été souscrits.

* "à révocation" : ceux-ci restent valables jusqu'à la fin du mois pour le comptant ou jusqu'à la liquidation mensuelle pour le marché à terme, sauf, révocation expresse de cet ordre. A défaut de précision, un ordre est considéré à révocation.

Après les ordres en bourse, nous allons nous intéresser à la façon dont les titres sont cotés.

1.3.2.5 Mode de cotation :

Il existe deux grandes catégories de titres : les valeurs à revenu variable (les actions) et les valeurs à revenu fixe (essentiellement les obligations).
Les actions sont cotées en Francs. Elles ont un coupon détaché le jour de mise en paiement des dividendes.

Les obligations sont cotées en pourcentage du nominal (à l'exception des indexées et des convertibles). L'intérêt que rapporte l'obligation (le coupon) est payé une fois l'an. Néanmoins, le détenteur aura un intérêt proportionnel à la durée de détention ; Ceci lui évite des problèmes fiscaux (lors du détachement du coupon).

Trois méthodes de cotation sont utilisées concurremment à la bourse pour définir le "meilleur cours" d'un titre:
_ La cotation à la criée
_ La cotation par opposition
_ La cotation par casier

1°) La cotation à la criée :
Elle consiste en une confrontation des offres et des demandes par voie d'enchères exprimées à haute voix jusqu'a ce que s'établisse un équilibre dégageant le premier cours officiel de la séance sur une valeur.
La cotation "à la criée" n'est utilisée que pour la cotation des valeurs les plus importantes et les plus achalandées ; c'est à dire des valeurs traitées à terme et des valeurs les plus actives du comptant.

2°) La cotation par opposition :
Avant chaque séance, les agents de change font parvenir à la chambre syndicale des fiches, dites "d'oppositions", indiquant le prix le plus élevé à l'achat, et le plus bas à la vente des titres. Et ce, sur tous les titres exécutables cotés selon cette méthode.

Les "coteurs" de la chambre syndicale reportent l'ensemble de ces fiches sur des "cahiers d'opposition" et y inscrivent les limites extrêmes annoncées par les charges.
Durant la séance, le commis de la charge, spécialiste d'une valeur déterminée, prend contact avec ses collègues des autres charges, porteurs d'ordres "au mieux" à exécuter sur cette valeur.

Il en tire un solde acheteur ou vendeur ; puis prend connaissance des oppositions inscrites sur le cahier du "coteur" de la chambre syndicale. Il détermine, ensuite, le cours de la valeur et le fait avaliser par le "coteur".
Utilisée presque uniquement pour la cotation au comptant des valeurs traitées à terme, cette cotation offre l'avantage, outre une relative rapidité, de conserver la trace de toutes les transactions en vue de contrôles ultérieurs.

3°) La cotation "par casiers" :
Les valeurs sont réparties d'une manière fixe et permanente entre toutes les charges d'agents de change, qui ont ainsi la responsabilité personnelle des marchés qui leur sont affectés et de la fixation des cours de ces valeurs.
En début de séance, les commis de chacune d'elles recueillent dans des "casiers" l'ensemble des fiches d'ordres de leurs confrères, pour toutes les valeurs dont ils sont "spécialistes".
Ils fixent le cours et restituent, ensuite, aux autres agents de change, ces fiches complétées par l'indication du cours de la transaction et de la contrepartie.
Cette cotation est particulièrement adaptée aux valeurs qui n'ont qu'un marché moyen : elle est employée pour la cotation des obligations Françaises et étrangères, ainsi que pour les actions à marché peu achalandé.
Nous allons maintenant décrire les différents titres utilisés sur le marché.

1.3.3 Différentes catégories de titres :

1.3.3.1 Valeurs à revenus variables :

1°) Les titres peuvent être émis de deux manières : au porteur ou au nominatif.

_ Lorsqu'ils sont émis au porteur, le nom de l'acquéreur n'y figure pas. Sur le corps du titre sont écrits des renseignements sur la société émétrice :

Le nombre d'actions émises ou, le montant de l'emprunt émis et le nombre d'obligations entre lesquelles cet emprunt est divisé.

La feuille des coupons comporte un numéro d'ordre pour les actions et une date d'échéance pour les obligations.

_ Pour les titres émis au nominatif ; la société éméttrice inscrit sur ses registres le nom et l'adresse du propriétaire du titre. Ce qui permet d'être dédommagé en cas de vol.

2°) Les actions sont des titres représentatifs d'une prise de participation dans une société de capitaux (principalement des sociétés anonymes) . Il confère à leur propriétaire la qualité d'associé, et lui donne droit à une part proportionnelle dans toute répartition de bénéfices ou d'actifs sociaux.

Les revenus des actions ne proviennent que des bénéfices réalisés par la société ; celle-ci a le droit de n'en céder qu'une partie. Ces titres sont appelés "à revenus variables".

L'action confère à son propriétaire certains droits :

_ Droit de gestion :

Les actionnaires forment l'assemblée générale, qui élit le conseil d'administration, lui-même élisant le directoire qui gère la société. Les actionnaires ont donc un droit de regard sur la gestion par l'élection du conseil d'administration. Ce droit n'est pas acquis au porteur d'actions à dividende prioritaire.

_ Droit à l'information :

Les actionnaires ont droit à la communication des documents sur l'activité et les résultats de la société.

_ Droit sur les bénéfices :

Les bénéfices de la société sont répartis entre ses réserves et les actionnaires.

_ Droit sur l'actif social ou l'actif net :

Lors d'augmentations de capital par l'attribution (émission d'actions gratuites) ou par droit de souscription (émission d'actions de numéraire) , l'actionnaire jouit d'un droit préférentiel. Ce droit peut être vendu en bourse ou utilisé à l'augmentation du capital.
Lors de la vente ou de la liquidation de la société, l'actif net (ensemble du patrimoine déduction faite des dettes) est partagé entre les actionnaires.

3°) Il existe cinq types d'actions :

_ Les actions de capital ou de numéraire : l'ensemble de ces actions forment le capital social. Elles sont payées en espèces.

_ Les actions d'apport : elles sont payées en nature (bâtiments, matériels) .

_ Les actions privilégiées ou de priorités : lors de résultats médiocres, la société, si elle désire de nouveaux capitaux, peut être amenée à lancer des titres ayant des privilèges supérieurs à une action.
Ces privilèges peuvent être sur la répartition des dividendes, ou d'une majoration de dividendes, ou de dividendes cumulatifs, ou d'une "prime de fidélité" avec privilège de vote.

_ Les actions de jouissance : lors d'un remboursement de capital, il peut y avoir substitution entre actions et actions de jouissance. Le capital du titre ayant été remboursé, il perd son droit de dividende.

_ Les actions à dividendes prioritaires : elles ont perdu leur droit de vote, mais en contre partie, elles bénéficient de dividendes prioritaires.

1.3.3.2 Valeurs à revenu fixe :

Ce sont, essentiellement, des obligations. L'obligation est un titre de créance, que la société émettrice s'engage à rembourser, à une échéance déterminée, et qui est rémunéré par un intérêt annuel fixe ; d'oë le nom de valeur à revenu fixe.
Contrairement aux actions, le risque d'une obligation est très limité. Il est très rare qu'un emprunt obligataire ne soit pas honoré.
En cas de liquidation, l'obligataire sera remboursé avant l'actionnaire. Le risque sera encore plus réduit pour les obligations garanties par l'état.
Les obligations se caractérisent par un droit à l'intérêt et un droit au remboursement.
Certaines d'entre elles procurent en plus des avantages particuliers : ce sont les obligations indexées, convertibles, participantes, à taux variables, à lots.

1°) Les obligations indexées :
Ces obligations visent à préserver l'épargnant contre la dépréciation du pouvoir d'achat de son épargne. L'indexation peut porter sur l'intérêt, sur le capital, ou sur l'un et l'autre à la fois.
Ce sera le choix judicieux de l'index qui fera l'attrait de ces obligations. Il faudra tenir compte d'un régime fiscal différent.

2°) Les obligations à taux variable :
Certaines obligations ont un intérêt annuel qui peut varier, soit en fonction du taux moyen du marché monétaire (prix de l'argent) , soit en fonction du taux moyen des émissions obligataires.
Elles sont assorties d'un taux minimum et sont très intéressantes lors d'une hausse des taux d'intérêt.

3°) Les obligations participantes :
Elles permettent de participer aux résultats financiers des entreprises. L'obligataire reçoit un intérêt majoré ou un capital majoré (ou l'un et l'autre) en fonction des bénéfices de la société.

4°) Les obligations à lots :
Ces titres sont des obligations qui ouvrent droit à une participation à une loterie. Lors du tirage au sort, certaines d'entre elles reçoivent un "lot".

5°) Les obligations convertibles :
Elles permettent à leurs détenteurs de transférer leurs obligations en actions de la société émettrice. Sont fixés à l'avance, l'intérêt versé (inférieur à une obligation courante) , la parité de transformation (nombre d'actions que l'on peut acheter avec une obligation) , le délai de conversion. Tant que la transformation n'a pas été effectuée, le régime fiscal demeure celui des obligations.
Ce titre intègre une notion nouvelle qui est "l'option". En effet, l'obligataire a le choix entre deux options : garder son obligation ou la transformer en actions.
Il existe une nouvelle famille de titres, qui se développe considérablement, c'est celle "des primes et des options".

1.3.3.3 Actifs Conditionnels :
Ils recouvrent les primes et les options. Certains titres ont malgré tout une structure d'actif conditionnel : les obligations convertibles, les obligations à bon de souscription, les warrants.

1°) les options :
Ce sont des contrats entre deux parties, par lesquels l'un accorde à l'autre le droit, mais non l'obligation, de lui acheter (option d'achat) ou de lui vendre (option de vente) l'actif support (actif de base, la plupart du temps, c'est une action) .

L'option se caractérise par trois éléments :
Sa nature, sa durée, son prix.
Nature : option d'achat ou de vente
Durée : neuf liquidations
Prix : Le prix de l'option (l'avec) est payé à la première liquidation et est définitivement acquis. Le prix d'exercice est le prix de l'action au moment de la négociation.

2°) Les primes :
Elles permettent l'achat d'actions à l'avance avec possibilité de dédit.
Elles se caractérisent par :
_ L'écart de prime, qui est la différence entre le prix actuel et le prix à l'échéance du titre.
_ le dont est le dédit à payer en cas de non-achat.
_ La durée : trois échéances possibles, la liquidation et les deux suivantes.

3°) Le stellage :
C'est la combinaison d'une option d'achat et d'une option de vente. L'acquéreur d'un stellage pense à de fortes variations du titre, mais ne sait pas dans quel sens. Le vendeur ne connaît pas non plus le sens, mais espère de faibles variations.
La volatilité ou variabilité future du titre les départagera.

4°) Les options du double :
Elles comportent une partie inconditionnelle pour un montant déterminé de titres, et une partie conditionnelle, en quantité équivalente, que l'acheteur peut lever (livrer) ou abandonner à l'échéance.

1.4 Conclusion :

La description succincte de ce marché financier nous en a montré la complexité. Il existe une grande diversité de produits permettant à l'investisseur une grande souplesse de placement.
Malheureusement cette profusion rend encore plus difficile le choix, seuls les spécialistes arrivent à connaître suffisamment le marché pour investir intelligemment. La gestion d'un compte de particulier par un spécialiste ne peut plus se concevoir que pour un gros portefeuille. La gestion collective (SICAV) est de plus en plus prépondérante au détriment de la gestion individuelle.

Nous n'avons pas traité de l'aspect fiscal des valeurs mobilières, car il diffère selon les individus et les institutions.
Après avoir présenté les principales caractéristiques de la bourse, nous allons nous intéresser au comportement des cours boursiers, et des facteurs qui le déterminent.

II MODELISATION D'UNE VALEUR MOBILIERE :

2.1 Introduction :

Comme nous venons de le voir, placer son argent sur le marché financier de la bourse n'est pas simple. Il existe un grand nombre de titres ayant chacun des caractéristiques propres.
Pour améliorer la gestion de leur portefeuille, les investisseurs ont essayé de décrire le comportement de ces titres. Pour cela, ils ont créé des modèles leur permettant une meilleure connaissance du mécanisme boursier. Chaque modèle permet de donner au gestionnaire une information supplémentaire.
Deux grandes écoles essaient d'aider l'investisseur dans son choix :
L'analyse fondamentale, qui tente de donner une image économique de la société émettrice.
L'analyse technique, qui essaie de trouver dans l'évolution des cours des titres une information susceptible d'améliorer le rendement du placement.
Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous présenterons l'analyse fondamentale qui se compose de trois parties:
La modélisation financière de la société, le modèle de Marché et le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF).
L'Analyse Technique est l'autre grande voie de recherche sur la modélisation boursière, elle sera abordée dans le deuxième paragraphe du chapitre. Les méthodes les plus connues y seront décrites.

2.2 Analyse Fondamentale :

2.2.1 Modélisation économique du titre :

2.2.1.1 Notion de valeur :

En vue d'améliorer l'information sur les sociétés, il serait intéressant de déterminer leur valeur ; cela nous permettrait de fabriquer un classement selon ce critère.
Tous les événements politico-financiers vont influer sur cette valeur et la faire varier à chaque instant. Il est impossible de calculer la valeur d'une société en intégrant tous les paramètres. C'est pourquoi, on ne peut pas parler de valeur intrinsèque ou de valeur objective.
IL n'y aura pas une valeur, mais autant de valeurs qu'il y a de critères et de moyens de les quantifier.

Quelques "valeurs de société" sont souvent utilisées :
_ La valeur de fonctionnement, basée sur le potentiel industriel et commercial, et la rentabilité de ce potentiel.
_ La valeur d'utilisation ou d'usage qui correspond au prix que l'on devrait payer pour avoir une société équivalente.
_ La valeur des actifs qui est la valeur vénale des actifs
_ La valeur de rendement qui est l'image des possibilités de bénéfices.
Dans tous les cas, il ne faut pas confondre valeur et prix. Seul dans un marché parfait, nous aurions égalité.
Il existe deux groupes de méthodes d'évaluation d'une société ; le premier se base sur les actifs, le deuxième sur le "goodwill".
Etant donné la spécificité du problème, et son utilisation dans ce sujet, nous allons vous les présenter succinctement.

2.2.1.2 Méthodes d'évaluation basées sur les actifs :

Les méthodes qui sont le plus fréquemment employées sont :
_ La valeur d'assurance, qui est intéressante pour une demande de crédit, n'intègre pas les passifs ni les changements. Elle semble peu utilisable.
_ L'actif net comptable est calculé selon des normes fiscales, utilisable lors d'une liquidation, mais peu réaliste car il n'est pas corrigé en fonction du temps. Néanmoins, lors d'une fusion, sa version revalorisée peut être prise.
_ Pour corriger le problème précédent, on peut utiliser l'actif net comptable réévalué, qui tient compte du facteur temps sur le patrimoine. Ici, les experts ne sont pas unanimes sur le choix de l'indice de pondération lié à l'ancienneté.
_ L'actif net "intrinsèque" essaye d'intégrer toutes les données économiques, mais cela ne peut se faire qu'avec le concours d'Analystes Financiers et d'Experts en patrimoine. Cette évaluation est très subjective car liée aux hommes qui la font.

2.2.1.3 Goodwill :

Le principe général repose sur l'introduction dans l'évaluation de la valeur des éléments incorporels.
Cette valeur est mise en évidence, lorsque la valeur de rendement réelle (ou corrigée) apparaît supérieure à la valeur patrimoniale révisée.
Cette différence ou "survaleur" prend en Anglais le nom de Goodwill.

2.2.1.4 Conclusion :

Les économistes n'ayant pas trouvé d'accord sur le moyen le plus sûr de quantifier la valeur d'une entreprise ; nous n'emploierons aucune de ces méthodes. Les autres méthodes d'évaluation des actions se regroupent sous deux catégories : les modèles d'équilibre et de déséquilibre.

2.2.2 Modèles d'évaluations :

2.2.2.1 Modèles de déséquilibre :

IL s'agit de trouver si le cours d'un titre est en rapport avec les résultats économiques de la société. Pour cela, on essaie de trouver une relation entre le cours et certains paramètres économiques. Il reste ensuite à le comparer au véritable cours et en déduire une sous ou une sur cote. Les modèles sont appelés "de déséquilibre", car il arrive souvent que le cours trouvé soit différent du véritable cours. Cela revient à chercher un cours intrinsèque. Il faut parier que le marché s'est trompé et qu'il modifiera son idée rapidement.
En fait, ces modèles s'intéressent au rapport cours sur bénéfice par action (BPA), ce rapport est encore appelé Price earning ratio (PER ou P/E).

Whitkek.V et Kisor.M [77] ont essayé de relier le PER à trois variables :
- Taux de croissance escompté du bénéfice par action (BPA)
- Taux de distribution escompté des bénéfices
- Ecart des bénéfices autour de leur tendance de croissance (Variabilité du BPA)

Par une régression multiple, ils ont obtenu :

PER = 8.2 + 1.5*(Taux de croissance escompté du BPA) + 0.067*(Taux de distribution des bénéfices) - 0.2*(Ecart-type des BPA)

Ils en ont déduit un comportement de placement :
Si le ratio de cours (PER réel sur PER théorique ou calculé) est inférieur à 0.85 : le titre est sous-évalué, il faut l'acheter.
S'il est supérieur à 1.15 : le titre est sur-évalué, il faut le vendre. Par la suite d'autres auteurs ont affiné ce type de modèle.

Ainsi, Bower.RS et Bower.DH [10] ont introduit des variables supplémentaires :

- La capitalisation boursière (négociabilité)
- Le coefficient Béta
- Le risque total ou variabilité des cours
- Cote d'amour ou effet firme

Ils arrivent à l'expression suivante :

log(PER) = 3.14 + 0.629*(Taux de croissance du BPA) + 0.077*log(Taux de distribution des bénéfices) +0.069*log(Capitalisation boursière) - 0.133*log(Volatilité des cours) + 0.853*log(Variabilité des cours) + 0.983*log(Effet firme)

Il serait logique de penser que le modèle Brower et Brower est supérieur à celui de Withkek et Kisor. En fait, les essais ont montré l'inverse. Ce non-sens est dû exclusivement à la qualité de l'analyse financière. Les deux modèles doivent en premier trouver des estimations de paramètres économiques (tel que le taux de croissance escompté du BPA). Meilleures seront ces estimations, meilleur sera le comportement du modèle. Withkek et Kisor ont bénéficié d'une aide d'analystes financiers nettement plus importante que Brower et Brower.
Même si ces modèles ne remplissent pas complètement leur rôle, ils permettent de mieux appréhender l'évolution des cours en fonction de l'environnement économique. De plus, par la construction d'un modèle de connaissances, on peut approcher de la valeur intrinsèque.
D'autres modèles ont été élaborés en essayant, à partir du cours, de déterminer les caractéristiques du titre : ce sont les modèles d'équilibre.

2.2.2.2 Modèles d'équilibre :

Les modèles d'équilibre considèrent qu'il y a accord entre le cours d'un titre et sa vraie valeur (le marché ne se trompe pas). Ils essaient de trouver les hypothèses implicitement faites par le marché, pour que la valeur des flux actualisés du titre, soit égale au cours. On aura donc le cours qui sera égal à la valeur des dividendes escomptés, plus la valeur du titre à la revente, le tout actualisé à un certain taux. En employant la technique de l'actualisation, on arrive à la formule suivante :

$$C_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{1+i} + \frac{P_n}{(1+i)^n} \qquad (2.1)$$

avec C_0 :cours au temps n=0

D_j :dividende au temps j

P_n :cours de revente de l'action au temps n

i :taux d'actualisation

Ce modèle est simple et logique. En effet, entre deux placements, une action ou une obligation, l'investisseur choisira une action si son rendement attendu est supérieur à celui de l'obligation (celle-ci ayant un risque presque nul). Ce type de modèle a un gros défaut : il est inapplicable. Pour calculer la formule (2.1), nous avons besoin de P_n (prix du titre au temps n), ainsi que de tous les dividendes futurs : D_j ; or ces paramètres nous sont inconnus. Il a donc été nécessaire de les remplacer par des paramètres calculables.
Dans un premier temps, on peut étendre le raisonnement qui donne la formule (2.1) pour $n \to \infty$. Cela revient a ne jamais revendre le titre, on supprime ainsi l'inconnue P_n.

Les analystes financiers arrivent à estimer les bénéfices futurs d'une entreprise et par là les bénéfices par action (BPA). Si on arrive à estimer le taux de distribution des bénéfices (le pay-out : p), on en déduira les dividendes par la formule (2.2) :

$$D_j = p_j * BPA_j \qquad (2.2)$$

Molodowsky.N [50] a calculé sur des séries historiques (1871-1938) la rentabilité moyenne des actions. Il a obtenu une rentabilité de 7% . Ce qui revient à dire que les actionnaires exigent comme rétribution de leur épargne un rendement de 7% . Il a défini des classes de risque. Etant entendu qu'une action risquée demande un plus grand rendement qu'une non-risquée. Il a pris comme hypothèse le taux de croissance des bénéfices constant (g). La formule (2.1) devient alors :

$$C_0 = p * BPA_0 * \sum_{j=1}^{n} \left((1+g)/(1+i) \right)^j$$

Si l'on désire une rentabilité i, ayant un taux de croissance espéré de g ; on peut en déduire le cours que devrait avoir ce titre. Cette formulation est bien entendu assez limitée ; les hypothèses étant trop restrictives :

- Le pay-out ou taux de distribution des bénéfices (p) doit être constant tout au long du placement.
- Le taux de croissance des bénéfices (g) doit être aussi constant.

Certains auteurs ont pris le problème de façon légèrement différente. Pour une action de croissance, ils cherchent la durée de cette croissance intégrée dans le cours du titre.

Parmi ces auteurs, Holt [34] a créé un modèle mettant en valeur les relations qui existent entre le PER d'un titre, son taux de croissance des bénéfices et la durée de cette croissance (cf formule (2.3)).

$$\ln\left(\frac{C_c/BPA_c}{C_a/BPA_a}\right) \approx T * \ln\left(\frac{1+\delta BPA_c+D_c}{1+\delta BPA_a+D_a}\right) \qquad (2.3)$$

Dans cette formule :

L'indice "c" indique l'action à forte croissance et l'indice "a" une action ordinaire.

C_x représente le cours de l'action

BPA_x représente le bénéfice par action

δBPA_x représente le pourcentage d'évolution annuel des bénéfices par action

D_x représente le pourcentage de dividendes par rapport au cours

T représente la durée de la forte croissance

On peut donc, à partir de la formule (2.3), déterminer la durée T de la croissance (démonstration dans l'article de Holts [34]). Le PER sera justifié si la période réelle de croissance est égale à "T". Dans le cas contraire le titre serait, soit sur, soit sous-évalué.
Les limitations de ce modèle proviennent de trois facteurs:

_ L'extrapolation dans le futur
_ Les BPA et δ BPA doivent rester contants
_ On ne connait pas le gain en capital

Pour cela, ce type de modèle ne peut servir qu'à titre indicatif.
D'autres modèles sont apparus pour la classification des titres ; notammement, les modèles de marché et d'équilibre des actifs financiers. Nous allons commencer par la présentation du modèle de marché.

2.2.3 Le Modèle de marché :

2.2.3.1 Introduction :

Il est souvent utile, pour la gestion d'un portefeuille, de regarder l'évolution d'un marché financier, tel que la Bourse de Paris.
Pour cela, il a été créé un certain nombre d'indices, servant ainsi à quantifier son mouvement.

Les plus utilisés sont :
_ Indice C.A.C (compagnie d'agents de change)
_ Indice INSEE
Ayant cet outil, il peut être intéressant de le comparer à l'évolution du titre que l'on convoite.
De façon intuitive, si le marché à tendance a baisser et que le titre amplifie les mouvements de la bourse ; on s'abstiendra.
On peut remarquer, que certaines valeurs sont plus sensibles aux variations de la bourse, que d'autres. Markowiz.H [47] puis Scharpe.W.F [73] ont eu l'idée de créer une relation linéaire entre les variations du cours du titre et celles de l'indice représentant le marché.
Cette relation, appelée "Modèle de Marché", a permit une formalisation de cette intuition. Avant de vous présenter ce Modèle, nous allons introduire les notions de rentabilité et de risque.

2.2.3.2 Rentabilité :

La notion de rentabilité est très subjective. Elle dépend de ce que l'investisseur attend de son placement. En effet, selon les options fiscales, il aura intérêt a gagner en capital plutôt qu'en dividende ou vice versa.
Nous avons donc pris une mesure de rentabilité ne dépendant pas de ces facteurs (qui devront être intégrés ultérieurement dans l'optimisation de portefeuille).
Nous avons intégré tous les flux financiers sur une durée donnée :

_ Le dividende net (pendant la période t :D_t)

_ La plus value en capital (cours du titre à la fin de t-1 moins le cours du titre à la fin de t : $C_{t-1} - C_t$).

Ce qui nous donne :

_ Le taux de rendement

_ Le taux de plus-value (plus-value en capital rapportée au cours d'achat de l'action).

On arrive à la formulation de la rentabilité pour une durée t :

$$R_t = \frac{D_t + C_t - C_{t-1}}{C_{t-1}}$$

L'utilisation de cette formule, suppose que l'on ait intégré tous les flux financiers : c'est à dire que, par exemple, les dividendes ne soient pas réinvestis avant la fin de cette période t.
On pourra donc calculer un rendement qui ne dépende ni de la durée, ni de son montant. De plus, dans son modèle, Markowitz.H a essayé de quantifier le risque en utilisant la volatilité comme moyen de mesure. Nous allons expliciter cette notion de risque.

2.2.3.3 Risque :

Un épargnant voudra bien investir dans un placement risqué, s'il a l'impression que son rendement pourra être supérieur.

Il y a risque, dès lors que la valeur mobilière peut voir son rendement très faible ou même négatif. Il y a une relation entre le risque accepté et la rentabilité espérée. Plus le titre sera "risqué" plus l'investisseur en attendra un grand rendement. En général, les titres à haut risque sont fuis par les investisseurs.

Il se pose donc un problème : comment évaluer le risque d'un titre ; ce qui revient à évaluer son rendement ultérieur ou son cours futur.

Plus le cours d'un titre fluctue fortement, moins il est possible d'estimer son futur. Une première approximation serait de prendre la variabilité comme mesure du risque. Une solution déterministe serait de dire :

$$\text{Variabilité} = \frac{(\text{cours le plus haut - le plus bas})}{2 * \text{Moyenne des cours}}$$

La solution statistique considère le cours ou plus précisément le rendement comme une variable aléatoire.
Nous aurions un supplément d'informations sur le comportement du titre si la distribution de sa variable aléatoire suivait une loi connue.

Levasseur [44] a montré, que la loi suivie était proche de la Gaussienne (loi normale) avec néanmoins, une queue de distribution plus épaisse.

Fama [22] a étudié le point de vue statistisque et trouve la loi normale très proche. (cette étude a été réalisée sur le marché Américain, qui est plus "parfait" que le nôtre)
La variance comme mesure d'un certain risque n'est pas abusive ; son utilisation dans le Modèle de Marché est justifiée.

2.2.3.4 **Le modèle :**

Ce modèle part du principe que le risque d'un titre peut être divisé en deux sortes de risques :

_ Le risque lié aux fluctuations du marché

_ Le risque lié à l'action

On appelle risque systématique ou non diversifiable, le risque lié au marché. Tout investisseur, qui achètera sur ce marché, subira ce risque. Il est néanmoins possible, de le diminuer, en plaçant sur plusieurs marchés, ayant une faible corrélation.

On appelle risque spécifique de l'action ou diversifiable, le risque lié à l'action. Il est quelque fois appelé risque systématique ou individuel par opposition au risque du marché.

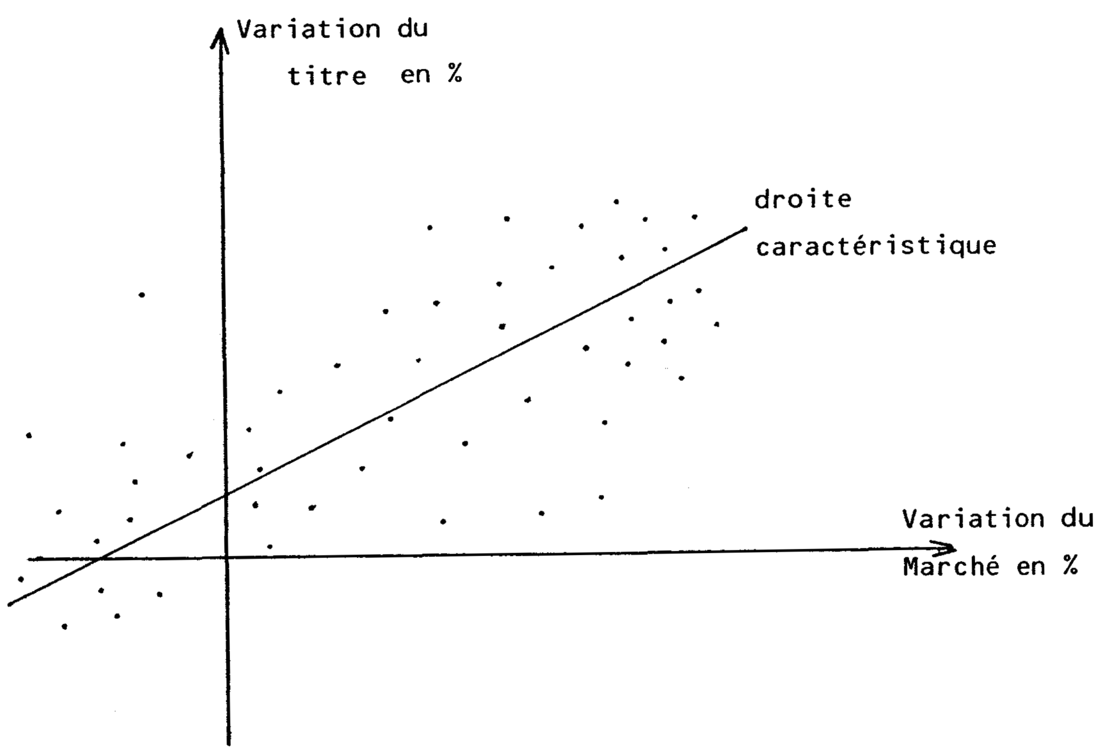


Fig 2.1 : Action représentée par le modèle de marché

Construisons un "graphe" ayant comme abscisse le pourcentage de variation d'un titre sur une période donnée T et comme ordonnée le pourcentage de variation de l'indice des valeurs à revenu variable (cac ou insee) sur la même période T.
A chaque période de durée T, correspondra un point sur le graphe. Sur une durée de nT ; nous aurons n points formant un nuage. Nous voyons sur la figure 2.1 , qu'à partir de ce nuage de point, on peut tracer une droite. (Par la méthode des moindres carrés)
Cette droite aura un sens si ce nuage a une forme allongée. Un coefficient permet de quantifier la validité de ce modèle ; c'est le coefficient de détermination.
Il sert à déterminer la corrélation entre variations du marché et variations du titre.
Les caractéristiques de cette droite sont indiquées sur la figure ci-dessous :

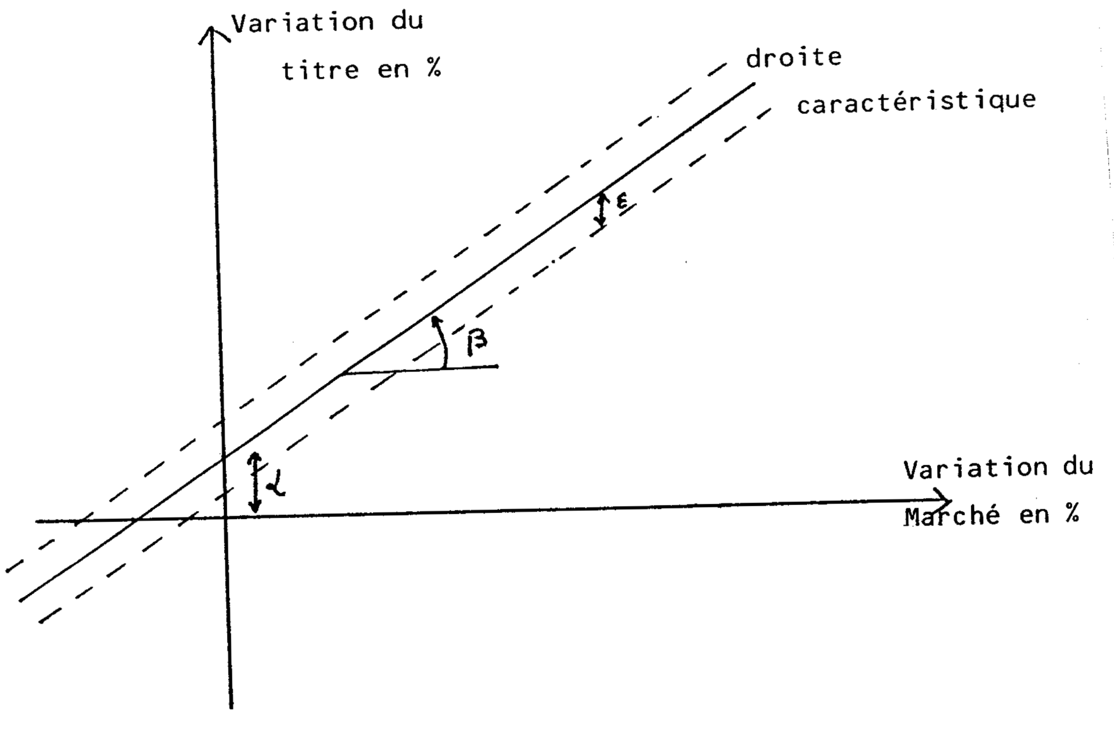


fig 2.2 : Caractéristiques de la droite

On a alors:

$$R_{iT} = alfa_i + béta_i * R_{MT} + epsi_{iT}$$

R_{iT}: Taux de rentabilité de l'action i durant la période T
R_{MT}: Taux de rentabilité du marché durant la période T
$béta_i$: Coefficient de volatilité du titre ou coefficient
$epsi_{iT}$: Paramètre lié aux risques propres de l'action
$alfa_i$: Valeur espérée du rendement du titre lorsque celui du marché est nul.

Volatilité $béta_i$:
Ce paramètre indique la sensibilité des fluctuations d'une valeur à celle de l'indice du marché.
Pour un titre de grande volatilité ($béta_i > 1$), si le marché augmente de x%, le titre augmentera de $béta_i *$ x% .
On aura intérêt à prendre des titres à grande volatilité lorsque le marché monte, et à faible volatilité lorsqu'il descend.

Alpha $alfa_i$:
Ce paramètre, qui donne la valeur espérée du rendement du titre lorsque celui du marché est nul, n'est pas stable d'une période à l'autre ; il est donc peu utilisé.

Epsilon $epsi_{iT}$:
C'est la variable aléatoire résiduelle. Son écart-type $sigma_{epsi\ iT}$ constitue une mesure du risque spécifique. En effet, si la valeur avait le même comportement que le marché, leurs variations seraient identiques et $epsi_{iT} \cong 0$.

Nous n'aurions plus un nuage de points mais une droite. La variabilité liée à l'action est définie par la dispersion autour de la droite. Nous allons nous intéresser a l'utilisation pratique de ce modèle.

2.2.3.5 Intérêts et limitations :

<u>* Diversification et risque :</u>

Soit un portefeuille comportant n actions ; le risque total de chaque action i est :

$$\text{béta}_i{}^2.\text{sigma}_M{}^2 + \text{sigma}_{\text{epsi } i}{}^2$$

Ou $\text{sigma}^2{}_{\text{epsi } i}$ représente le risque spécifique.

Si nous posons deux hypothèses :

_ Les n actions ont un comportement indépendant

_ Le portefeuille est considéré en parts égales de ces n actions.

Le risque total du portefeuille sera :

$$\text{sigma}^2{}_p = \text{béta}^2{}_p * \text{sigma}^2{}_M + \text{sigma}^2{}_{\text{epsi } p}$$

ou $\text{sigma}^2{}_{\text{epsi } p}$ représente le risque spécifique du port.
$\text{béta}^2{}_p * \text{sigma}^2{}_M$ le risque systématique
béta_p représente la volatilité moyenne du port.

$$\text{beta}_p = 1/n \sum_{i=1}^{n} \text{beta}_i$$

nous avons :

$$\text{sigma}^2{}_{\text{epsi } p} = 1/n^2 \sum_{i=1}^{n} \text{sigma}^2{}_{\text{epsi } i} \quad \text{si } \operatorname{cov}(\text{epsi}_i, \text{epsi}_j) = 0$$

Soit $\text{sigma}^2{}_{\text{epsi}}{}^*$ la valeur moyenne des risques spécifiques de chaque action :

$$\text{sigma}^2{}_{\text{epsi}}{}^* = 1/n \sum_{i=1}^{n} \text{sigma}^2{}_{\text{epsi } i}$$

on aura donc :

$$\text{sigma}^2{}_{\text{epsi } p} = 1/n\ \text{sigma}^2{}_{\text{epsi}}{}^*$$

$$\text{avec} \lim_{n \to \infty} \text{sigma}^2{}_{\text{epsi } p} = 0$$

On a alors:

$$R_{iT} = alfa_i + béta_i * R_{MT} + epsi_{iT}$$

R_{iT}: Taux de rentabilité de l'action i durant la période T
R_{MT}: Taux de rentabilité du marché durant la période T
$béta_i$: Coefficient de volatilité du titre ou coefficient
$epsi_{iT}$: Paramétre lié aux risques propres de l'action
$alfa_i$: Valeur espérée du rendement du titre lorsque celui du marché est nul.

Volatilité $béta_i$:
Ce paramètre indique la sensibilité des fluctuations d'une valeur à celle de l'indice du marché.
Pour un titre de grande volatilité ($béta_i > 1$), si le marché augmente de x%, le titre augmentera de $béta_i *$ x% .
On aura intérêt à prendre des titres à grande volatilité lorsque le marché monte, et à faible volatilité lorsqu'il descend.

Alpha $alfa_i$:
Ce paramétre, qui donne la valeur espérée du rendement du titre lorsque celui du marché est nul, n'est pas stable d'une période à l'autre ; il est donc peu utilisé.

Epsilon $epsi_{iT}$:
C'est la variable aléatoire résiduelle. Son écart-type $sigma_{epsi\ iT}$ constitue une mesure du risque spécifique. En effet, si la valeur avait le même comportement que le marché, leurs variations seraient identiques et $epsi_{iT} \equiv 0$.

Nous n'aurions plus un nuage de points mais une droite. La variabilité liée à l'action est définie par la dispersion autour de la droite. Nous allons nous intéresser a l'utilisation pratique de ce modèle.

2.2.3.5 Intérêts et limitations :

<u>* Diversification et risque :</u>

soit un portefeuille comportant n actions ; le risque total de chaque action i est :

$$\text{béta}_i{}^2 . \text{sigma}_M{}^2 + \text{sigma}_{\text{epsi } i}{}^2$$

Ou $\text{sigma}^2{}_{\text{epsi } i}$ représente le risque spécifique.

Si nous posons deux hypothèses :

_ Les n actions ont un comportement indépendant

_ Le portefeuille est considéré en parts égales de ces n actions.

Le risque total du portefeuille sera :

$$\text{sigma}^2{}_p = \text{béta}^2{}_p * \text{sigma}^2{}_M + \text{sigma}^2{}_{\text{epsi } p}$$

ou $\text{sigma}^2{}_{\text{epsi } p}$ représente le risque spécifique du port.
$\text{béta}^2{}_p * \text{sigma}^2{}_M$ le risque systématique
béta_p représente la volatilité moyenne du port.

$$\text{beta}_p = 1/n \sum_{i=1}^{n} \text{beta}_i$$

nous avons :

$$\text{sigma}^2{}_{\text{epsi } p} = 1/n^2 \sum_{i=1}^{n} \text{sigma}^2{}_{\text{epsi } i} \qquad \text{si cov(epsi}_i\text{,epsi}_j\text{)=0}$$

soit $\text{sigma}^2{}_{\text{epsi}}{}^*$ la valeur moyenne des risques spécifiques de chaque action :

$$\text{sigma}^2{}_{\text{epsi}}{}^* = 1/n \sum_{i=1}^{n} \text{sigma}^2{}_{\text{epsi } i}$$

on aura donc :

$$\text{sigma}^2{}_{\text{epsi } p} = 1/n \ \text{sigma}^2{}_{\text{epsi}}{}^*$$

$$\text{avec} \lim_{n \to \infty} \text{sigma}^2{}_{\text{epsi } p} = 0$$

Cette démonstration n'est valable, bien entendu, qu'en supposant valables les deux hypothèses posées ci-dessus.
Un portefeuille comportant beaucoup de titres (de lignes) (n >> 1) aura un risque spécifique négligeable ; son risque total sera donc réduit à :

$$\text{sigma}^2{}_p = \text{béta}^2{}_p \ \text{sigma}^2{}_M$$

Un portefeuille sera d'autant plus risqué que son béta moyen béta $_p$ sera élevé.

Une étude sur la diversification effectuée par Progue et Solnik [55] montre la relation empirique entre le risque du portefeuille et le nombre de titres. La figure 2.3 en montre le tracé :

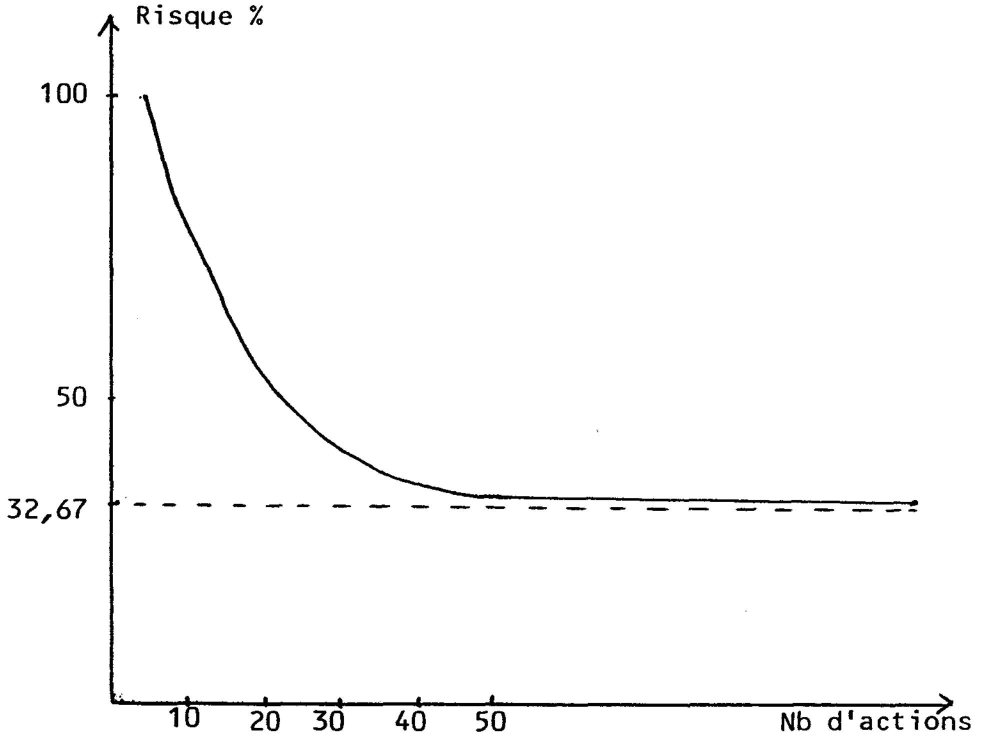


Fig 2.3 : Risque et Diversification en france

Nous pouvons en déduire qu'il faut un nombre de lignes suffisant (n > 40) si l'on veut avoir un risque proche de celui du marché (en France : 32,67 %).
De plus, pour diminuer ce risque, on peut investir sur plusieurs bourses. De préférence, celles qui ont un risque faible (Belgique : 19 % ; Pays-Bas : 24,1 %)

* Limitations du modèle :

La première des limitations est due à la notion d'extrapolation. On calcule le Béta sur une période passée et on espère qu'il restera identique dans le futur.

Une étude de Altmann [01], montre que la stabilité des Béta, est d'autant meilleure, que la durée d'observation est grande (durée : T > 2 ans) et que la périodicité du calcul des taux de rentabilité est faible (t < 7 jours).
Dans un portefeuille, l'instabilité des Béta liée au temps est encore plus faible.

Le choix de l'indice est important, car il doit représenter au mieux le marché.

Le nombre de titres que doit comporter un portefeuille pour être bien diversifié est assez important (de l'ordre de la centaine sur plusieurs marchés). Il parait dès lors difficile, pour un particulier, de gérer efficacement un tel portefeuille ; seuls les spécialistes auront le temps nécessaire à cette gestion.

Le portefeuille ne sera correctement diversifié, que si les titres le composant sont peu corrélés ; sinon il faudra augmenter le nombre de lignes.

Nous devrons faire particulièrement attention au coefficient de détermination (carré du coefficient de corrélation). Plus il sera petit, moins le tracé de la droite caractéristique sera précis.
En effet, il est très difficile dans un nuage de points de forme ronde de tracer une droite. On considèrera ce coefficient R^2 acceptable, s'il est supérieur à 0.5.

Il est certainement simpliste de ramener le risque d'un titre uniquement à sa variabilité (écart-type). Le risque est une notion plus vaste, qui englobe entre autre le risque de chute d'une entreprise, d'un secteur, ou même d'un marché.

C'est pour cela, qu'il faudrait tenir compte dans l'estimation du Béta futur, des données des Analystes.
A ce propos, il a été montré une dépendance entre le Béta et des caractères économiques. Jacquillat [37] a trouvé que plus la croissance des bénéfices, le rapport des capitaux propres aux capitaux d'emprunt, la variabilité des bénéfices, étaient élevés, plus le Béta était élevé.
Inversement, plus le taux de distribution des bénéfices, le fond de roulement, et la taille des actifs étaient élevés, plus le Béta était faible.
Toute projection du passé sur le futur, pour être cohérente, doit veiller à la continuité des caractéristiques des sociétés (pas de changement dans l'entreprise, ni dans le secteur).

2.2.3.6 Conclusion :

Le modèle du marché est un modèle simple, il a le mérite de montrer l'importance de la diversification. Avec toutes les réserves indiquées ci-dessus, il est possible de se servir de sa notion de risque : le Béta.

De part son manque de précision, la gestion d'un porte-feuille ne pourra pas se fonder exclusivement sur cette méthode, mais pourra être intégré avantageusement dans une modélisation plus complète de la bourse. Nous allons maintenant aborder l'étude d'un modèle très employé dans les milieux financiers : le Modèle d'Equilibre des Actifs financiers.

2.2.4 Le modèle d'équilibre des actifs financiers :

MEDAF

Avant de présenter le modèle, nous allons expliquer une notion implicite de celui-ci : "Le Marché efficient"

2.2.4.1 Marché efficient :

Un marché efficient ou efficace est un marché idéal oë toutes les informations circulent. Tous les investisseurs ont en leur possession tous les éléments qui leur permettent de déterminer le cours.

Ce cours va donc refléter le passé du titre, son état actuel et ses possibilités futures. On approcherait, avec le prix de la valeur mobilière, de sa "valeur intrinsèque". Seule une information inconnue, permettrait de faire varier le cours ultérieur (encore faudrait-il que les autres investisseurs estiment l'information importante).
IL sera d'autant plus délicat d'utiliser cette information que la loi interdit d'utiliser une information qu' un investisseur pourrait obtenir par le biais de sa profession ou de sa fonction.

La commission des opérations boursières (COB) sanctionne ce genre d'abus. En France, grâce aux analystes, on peut dire que le marché est pratiquement efficient.
Cela implique, une juste rétribution du risque encouru lors de l'achat d'un titre. Une personne non initiée, peut donc acheter un titre sans crainte, sa rentabilité sera fonction du risque associé à ce titre par les investisseurs professionnels.
Cette notion d'efficience étant introduite, nous allons nous intéresser au "MEDAF". Ce modèle donne le rendement exigé par un investisseur pour un risque donné.

2.2.4.2 Le modèle :

Tout investisseur cherche à maximiser son profit, pour cela, il prendra des actifs ayant une rentabilité maxima. Dans un marché efficient, les titres ayant une rentabilité maxima, présentent un grand risque.
Or les investisseurs ont une grande aversion du risque. Il va falloir trouver un compromis entre risque et rentabilité, pour cela, on a essayé de quantifier ces deux valeurs.
On a pris pour la rentabilité :

$$R = \frac{D_t + C_t - C_{t-1}}{C_{t-1}}$$

Et pour le risque ; la variance de la rentabilité, on décrit donc le risque d'un actif par sa variabilité.
Un moyen très simple de diminuer le risque de son portefeuille serait d'y inclure des titres à risque nul. (A hauteur de (1-tx)%).
Le risque total serait :

$$sigma^2 = tx^2 sigma^2_p + (1-tx)^2 sigma^2_{sr} + 2tx(1-tx)cov(R_p, R_{sr})$$

or : $sigma^2_{sr} = cov(R_p, R_{sr}) = 0$ donc

$sigma^2 = tx^2 sigma^2_p$ comme $tx < 1$ on aura :

$sigma^2 < sigma^2_p$ Le risque total sera diminué

$sigma^2$ est la variance du portefeuille total.
$sigma^2_p$ est la variance du portefeuille.
$sigma^2_{sr}$ est la variance du titre sans risque.

Bien entendu le rendement espéré sera moindre :

$$R = tx*E(R_p) + (1-tx)E(R_{sr}) = tx*E(R_p) + (1-tx)R_{sr}$$

$$\text{Avec } E(R) = 1/n \sum_{T=1}^{n} R_T$$

$$R_{sr} < R_p \quad => \quad R < R_p$$

R est le rendement du portefeuille comportant des titres sans risque.

R_p est le rendement du portefeuille.

R_{sr} est le rendement du titre sans risque.

Le modèle d'équilibre introduit la notion de prix du risque par référence à un titre ayant un risque nul.
Soit R_{sr} la rentabilité de l'actif sans risque. C'est à dire uniquement la rétribution de l'immobilisation de l'argent de l'investisseur.

Un portefeuille d'actions aura une rentabilité espérée de $E(R_p)$ et un risque $sigma_p$. Si un investisseur achète x% d'actions et (1-x)% de titres sans risque ; son portefeuille aura une rentabilité de :

$$E(R) = (1-x)R_{sr} + x\ E(R_p)$$

et un risque : $$sigma^2 = x^2 sigma^2{}_p$$

S'il n'y a pas de corrélation entre le titre sans risque et les actions achetées. On peut écrire :

$$E(R) - R_{sr} = x\ (E(R_p) - R_{sr})$$

$$E(R) = R_{sr} + [E(R_p) - R_{sr}] * sigma/sigma_p$$

Nous avons une relation linéaire entre le risque et la rentabilité totale.

Dans un graphe, ayant pour abscisse le risque et pour ordonnée la rentabilité du portefeuille total ; la formule décrit une droite.

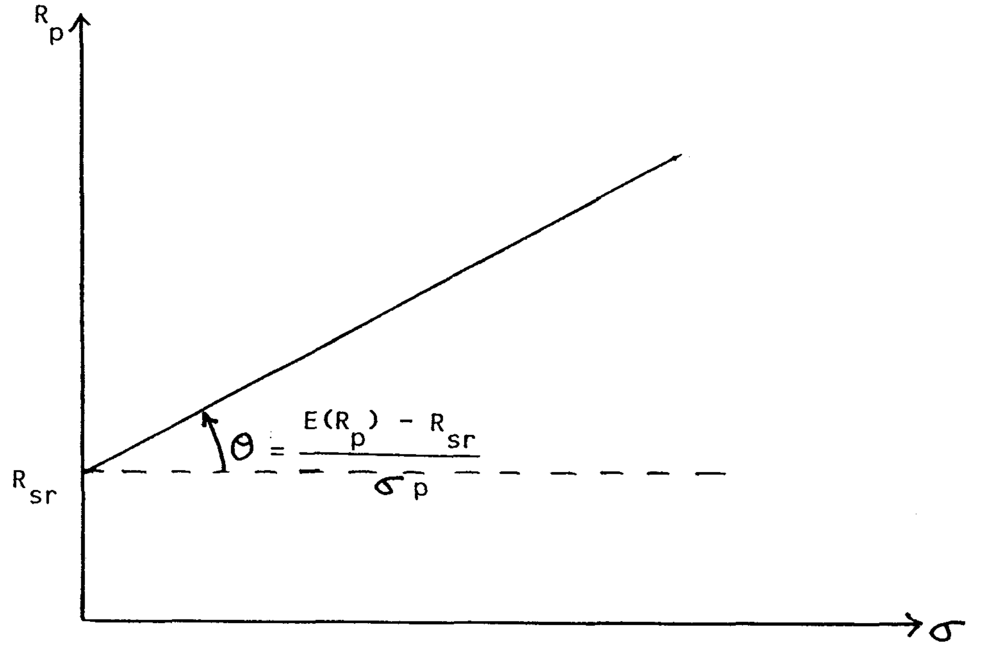


fig 2.4 : Rentabilité en fonction du risque

On voit dans ce graphe, que plus la pente sera élevée, plus le risque sera rétribué. Les investisseurs ont donc intérêt à prendre un portefeuille d'actions donnant la plus grande pente. Si l'on considère le risque comme une variable statistique, il a été démontré (cf 2.2.3.4) que le risque minimum était celui du marché.
Le point de contact entre la droite et l'enveloppe représente donc le portefeuille parfaitement diversifié : le marché. Pour ce point, on a :

$$E(R) = R_{sr} + [E(R_m) - R_{sr}] * \text{sigma} / \text{sigma}_m$$

$E(R_m)$ et sigma_m étant la rentabilité espérée et le risque du marché.
$[E(R_m) - R_{sr}] / \text{sigma}_m$ est le prix du risque d'un portefeuille parfaitement diversifié.

2.2.4.3 **Liaison avec le modèle de marché :**

Au paragraphe 2.2.3 ; nous avons présenté une modélisation des titres en fonction du marché. En tenant compte des hypothèses énoncées, nous avons :

$$R_{iT} = alfa_i + béta_i * R_{MT} + epsi_{iT}$$

Les variables R_{iT} et R_{mT} étant de nature statistique. On peut en calculer l'espérance mathématique :

$$E(R_i) = alfa_i + béta_i * E(R_m) \qquad \text{si } E(epsi_{iT}) = 0$$

Le modèle d'équilibre donne :

$$E(R_i) = R_{sr} + [\ E(R_m) - R_{sr}\ ]\ sigma\ /\ sigma_m$$

ou encore :

$$E(R_i) = (1-béta_i)R_{sr} + [E(R_m)\ sigma\ /\ sigma_m$$

On retrouve le même résultat si :

$$alfa_i = (1-béta_i)R_{sr} \quad \text{et} \quad sigma\ /\ sigma_m = béta$$

Sharpe [72] a remarqué que le modèle d'équilibre implique une non rémunération du risque non-systématique. En effet, tous les points de la droite, de la figure 2.4 , représentent des portefeuilles parfaitement diversifiés.

Ces modèles donnent une relation linéaire entre la rentabilité d'un titre et son risque systématique. Le coefficient de proportionnalité étant le Béta du titre. On relie la volatilité avec le risque. On demandera donc un meilleur rendement (espéré) à un titre volatil. Le modèle d'équilibre pose une borne inférieure à la rentabilité : c'est celle d'un titre sans risque. On parlera donc de rendement en excès du taux d'intérêt sans risque ($E(R_i) - R_{sr}$).

2.2.4.4 conclusion :

La modélisation financière d'un titre, ainsi que les modèles d'évaluation se révèlent peu intéressants aussi nous ne les utiliserons pas.
Beaucoup de tests ont été effectués pour s'assurer de la validité du modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF). Il en ressort qu'il n'y a pas de non linéarité dans les résultats ; mais ceux-ci ne collent pas tout à fait aux résultats théoriques (Modigliani [49]).
On peut en déduire que le modèle d'équilibre ainsi que le modèle de marché permettent une première approche de la quantification du risque d'une valeur. Même si ces modèles ne sont pas complets, ils permettent de donner un ordre d'idée sur la valeur du risque, et par cela de donner la rentabilité associée que l'on est en droit d'exiger.
Nous avons pu nous rendre compte de la portée limitée de ces modèles. Il nous paraît impossible, de cette manière, de décrire de façon parfaite le système complexe qu'est la bourse.
Néanmoins la notion de Béta nous renseigne sur le moyen et long terme. Elle permet, avec les restrictions données précédemment, d'estimer un risque et donc le rendement associé à ce risque sur une période assez longue (quelques mois).
L'analyse fondamentale nous a informé sur le long et moyen terme. Il manque donc des indications sur le court-terme. Celles-ci seront données par l'analyse technique que nous allons présenter dans le paragraphe suivant.

2.3 Analyse Technique :

2.3.1 L'apport de l'Analyse Technique :

Dans un marché totalement efficient, le cours reflète toutes les études sur les titres, ainsi que toutes les informations s'y rapportant.
A partir de cela, on pourrait dire que le cours suivra un cheminement aléatoire. C'est l'hypothèse de la "Marche au hasard" (Random walk). On pourrait dès lors arrêter toutes études et abandonner l'espoir d'une estimation future. En fait, il n'en est rien ; c'est l'analyse fondamentale et l'analyse technique qui permettent de dégager l'information sur le cours présent et sur son évolution.
Sans ces analyses, le marché ne serait pas efficient et toute information nouvelle permettrait de dégager d'énormes profits. Les analystes ont un rôle indispensable au bon fonctionnement de la bourse.
Dans un monde parfait, l'évaluation des entreprises serait parfaite et le cours serait parfaitement déterminé. En fait, c'est l'arbitrage qu'effectuent les agents de change pour leurs clients qui permet d'harmoniser les différents points de vue.
Dès lors, certains chercheurs ont essayé, à partir de l'évolution des cours, de dégager une information supplémentaire. Cela suppose, nécessairement, qu'il y ait dans le passé du cours des éléments suceptibles de modifier l'avenir.
Nous allons maintenant vous montrer différentes méthodes, permettant de déterminer le cours d'un titre en utilisant le graphe de l'évolution passée de son cours.

2.3.2 Théorie de Dow et Chartisme :

2.3.2.1 Théorie de Dow :

La théorie de Dow a été développée par M^{r} Charles.H.Dow en 1897. M^{r} Dow a créé deux indices boursiers permettant de suivre l'évolution du Marché Américain (équivalant à un indice CAC ou INSEE en France).

* Dow-Jones Industriel Index (DJII)
* Dow-Jones Transportation Index (DJTI)

L'étude de ces deux indices à permis à M^{r} Dow d'anticiper un retournement de marché. C'est à dire, qu'il a pu prévoir, quand le marché était en baisse (ou en hausse), le moment ou il allait se mettre à monter (ou a baisser).

Beaucoup d'analystes considèrent cette méthode comme dépassée. Elle n'est valable que pour les mouvements à long terme. De plus, le retournement qu'elle indique, est détecté trop tard. Elle reste néanmoins la première étude graphique des cours permettant d'anticiper un retournement de tendance et est encore utilisée outre Atlantique.
De cette analyse graphique est née une école et des techniques. Les fidèles de cette école, encore appelés "chartistes" ont comme support d'analyse l'évolution graphique des cours boursiers. Les différentes techniques sont regroupées sous le titre d'Analyse Technique". Nous allons vous présenter les quelques méthodes les plus employées.
Parmi celles-ci, la méthode des figures est la plus simple. Elle permet, à partir de la reconnaissance d'une figure particulière sur le graphique, d'extraire certaines informations.

2.2.2.2 Méthodes des parallèles,triangles et figures:

La méthode des parallèles est utilisée lorsque le cours s'inscrit entre deux droites parallèles fig 2.5 ; ces parallèles forment un canal. Lorsque le cours aura rebondi plusieurs fois entre la ligne de résistance (ligne supérieure) et la ligne de soutien (ligne inférieure) ; il percera ce canal. Si le cours perce la ligne de résistance pour un canal descendant ou s'il perse la ligne de soutien pour un canal montant ; il y aura retournement de tendance et donc, signal d'achat ou de vente. Lors de faibles variations (droites parallèles proches),et si le canal est long, on se retrouve dans le cas d'une consolidation avant un mouvement boursier important.
Si l'on observe que le cours se maintient entre deux droites non parallèles, on pourra utiliser la méthode des triangles.

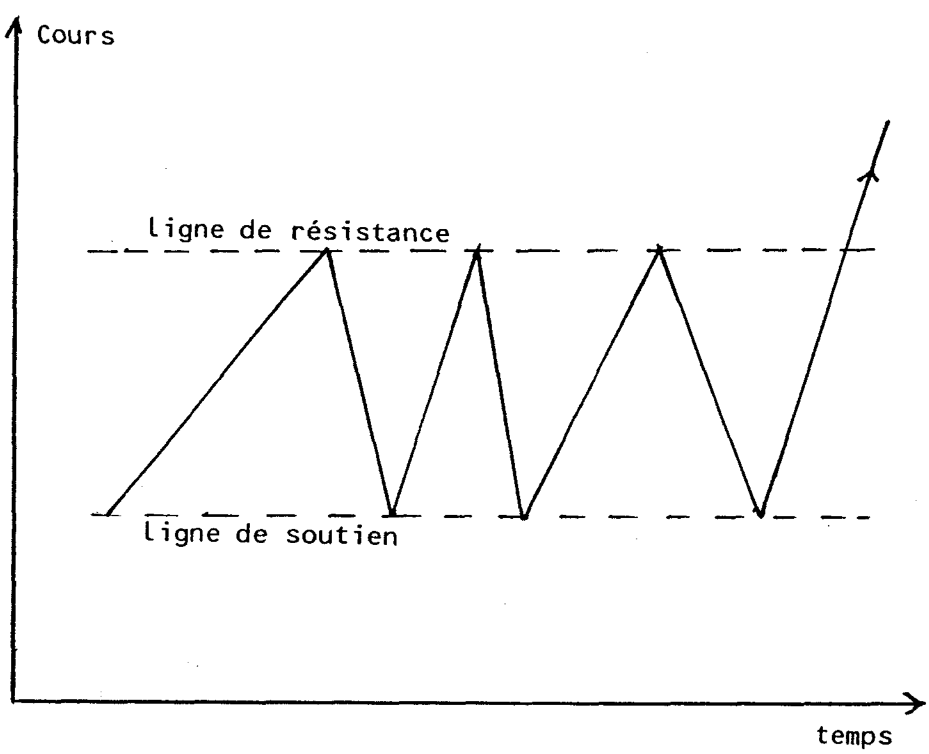


FIG 2.5 : Méthode des parallèles

La méthode des triangles permet de donner des indications sur le comportement du titre. Cette figure fig 2.6 est caractéristique d'une période de structuration du mouvement des cours, qui s'accompagne de baisse de volume de transactions. Le triangle inversé indique une incertitude grandissante avec une volatilité importante des cours. Le triangle rectangle indique un déséquilibre entre l'offre et la demande. Si l'angle droit est en bas, l'offre est supérieure à la demande : le cours baissera. Si l'angle droit est en haut, l'offre est inférieure à la demande : le cours montera.
La figure la plus connue des chartistes est :"la tête et les épaules" (head and shoulders).

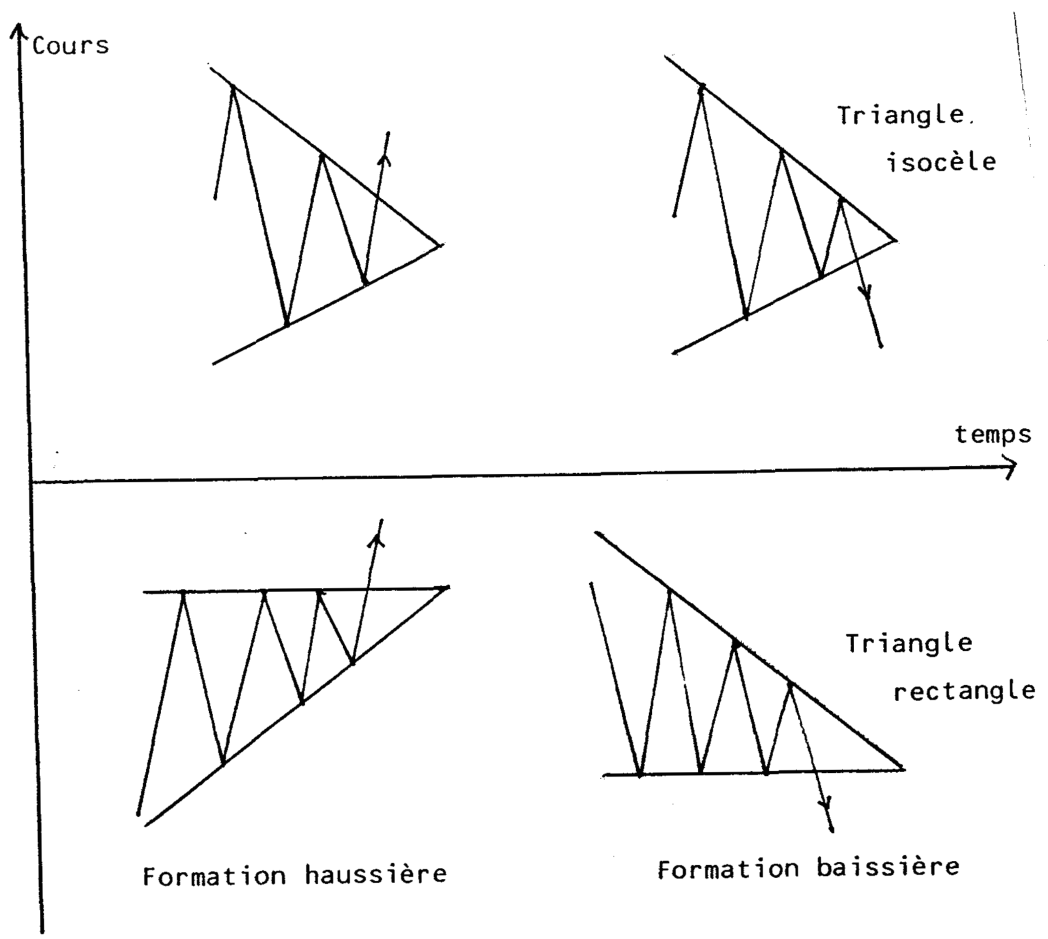


FIG 2.6 : Méthode des triangles

Cette figure ressemble à un M ou un W. Elle se compose d'une pointe suivie d'une deuxième pointe plus haute pour le M (plus basse pour le W) et d'une troisième pointe de même hauteur que la première fig 2.7. Lorsque l'on observe, un début de figure M (ou de figure W) et que les volumes d'échanges vont décroissant (ou vont croissant), on aura alors un renversement de tendance. Pour la figure en M, on passera d'un tendance haussière à baissière, et pour la figure en W, d'une baissière à une haussière.

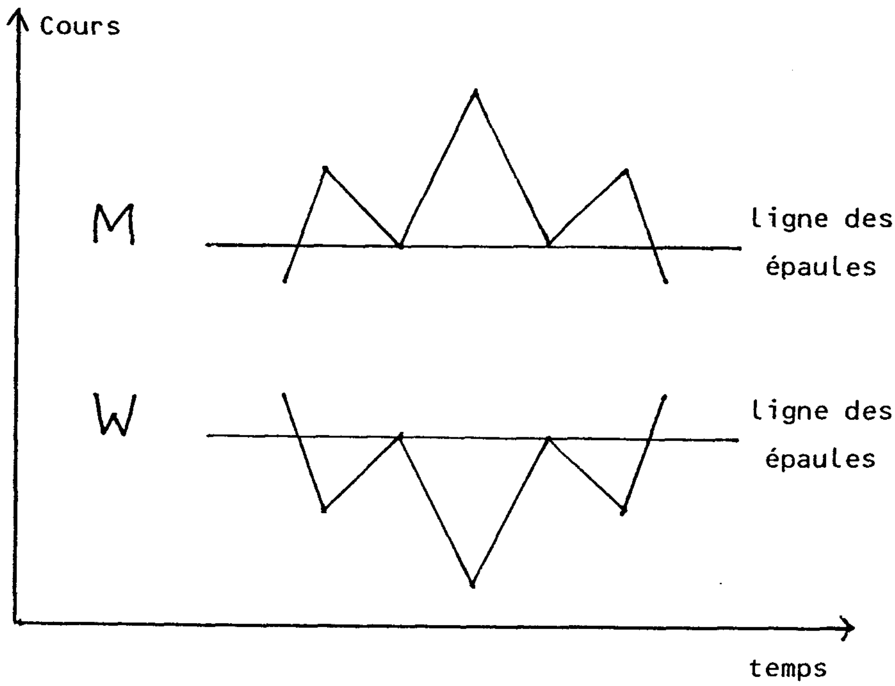


FIG 2.7 : Methode des figures

Ces méthodes supposent que l'on puisse dégager du graphique une des figures décrites ci-dessus. De plus, elles ne donnent qu'une faible information et ne sont pas toujours vérifiées. Il est donc utile d'y adjoindre d'autre méthodes. Parmi celles-ci, la méthode des points et croix, qui permet facilement avec un ordinateur de détecter un renversement de tendance.

2.3.2.3 Méthode des points et croix :

Cette méthode a été élaborée par Seligman.D [70], elle se compose de trois phases :
- La construction du graphique points et croix
- L'interprétation du graphique
- La détection des signaux d'achat ou de vente

La grande particularité de cette méthode consiste en l'utilisation des cours jugés "significatifs". La notion de temps absolu est effacée pour laisser place à une notion de temps relatif entre deux retournements de tendance. Un cours sera significatif s'il s'écarte d'un montant prédéterminé du dernier cours. Ce montant arbitraire est appelé "variation minimale significative". Un graphique "points et croix" est un ensemble de colonnes remplies de points ou de croix. Chaque colonne représente une période de hausse du cours (croix) ou de baisse (points). Il y a retournement, c'est a dire changement de colonne, lorsqu'il y a deux écarts successifs du sens contraire à la colonne. L'écart significatif est fixé, pour J.Hamon f [33] en pourcentage du dernier cours (1%).

Après la construction du graphique, on doit être capable de retirer une information sur le cours futur. Cela revient à chercher des figures sur le graphique, qui entrainent un retournement.
Certains auteurs ont fait une étude systématique avec la méthode points et croix (cf Hamon.J). Ils en concluent l'impossibilité d'appliquer de façon systématique cette méthode à tous les titres. On utilisera cette méthode avec précaution ; en vérifiant avec d'autres méthodes ses résultats. La méthode de la moyenne mobile étant tellement répandue, le lecteur ne comprendrait pas pourquoi nous ne l'utilisons pas. Nous allons en expliquer la raison.

2.3.3 La moyenne mobile :

La méthode des moyennes mobiles a pour but de mettre en évidence la tendance d'évolution du cours du titre. La valeur de la moyenne mobile au jour t est égale à la moyenne arithmétique des cours journaliers du titre de t=T-N à t=T (N étant la taille de la moyenne mobile).
La règle d'intervention est la suivante :
Le signe d'achat apparaitra lorsque la courbe représentative du cours coupera de bas en haut la courbe représentative de la moyenne mobile. De même, le signe de vente apparaitra lorsque la courbe représentative du cours coupera de haut en bas la courbe représentative de la moyenne mobile.
Le critère principal de cette méthode est la taille de la moyenne mobile (N). Sur la figure 2.8 , on a modifié le paramétre N. Les signaux de vente ou d'achat ne sont pas au même endroit et, par conséquent, donne un profit différent.

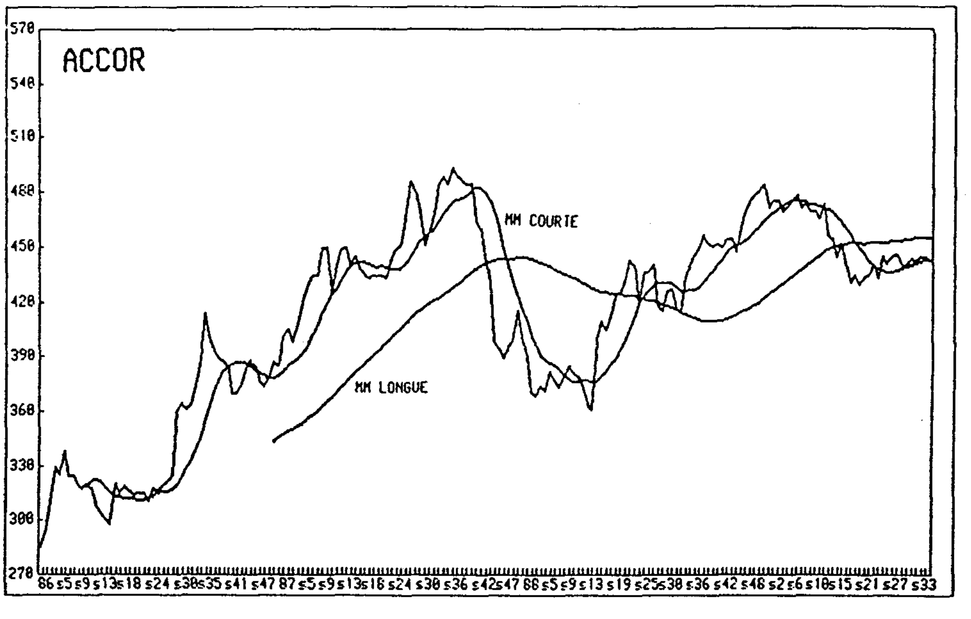


FIG 2.8 : Moyenne mobile courte et longue d' ACCOR (en fonction de sa taille)

L'expression analytique de la moyenne mobile est la suivante :

$$MM_T = \sum_{t=T-N+1}^{t=T} C_t / N$$

avec MM_T : la valeur de la moyenne mobile au temps T

N : la taille de la moyenne mobile

C_t : le cours au temps t

Il existe aussi une pondération de type exponentielle :

$$MM_T = (1-tx) * MM_{T-1} + txC_T$$

tx est le coefficient de pondération

Hamon.J [32] a testé la méthode des moyennes mobiles arithmétiques sur le marché Français. Il a essayé différentes tailles de moyennes mobiles. En résumé, nous pouvons dire que chaque titre possède une taille de moyenne mobile optimale ; mais celle-ci est souvent différente d'un titre à l'autre. Si l'on compare avec la stratégie de simple investissement, qui consiste à acheter en début de période de référence et de vendre en fin de période ; pour une taille donnée, on obtient de moins bon résultats avec la moyenne mobile (dus aux frais de transactions).

Certains auteurs (Mingat.A [48]) ont déclaré que la taille N était constante dans le temps pour un titre donné. Cela permettrait de déterminer pour ce titre sa taille optimale et de dépasser le rendement de la statégie de simple investissement. Les frais liés à l'étude et à l'application de cette méthode la rendent peu utilisable. Pour comprendre la raison de cette contre-performance, il est très intéressant de calculer le spectre relatif au filtrage par moyenne mobile.

La suite temporelle des cours d'une action est définie par sa longueur et son pas d'échantillonnage (en général un jour). Fourrier a montré qu'un signal temporel était la somme d'une infinité de signaux périodiques. Cette décomposition du signal temporel en signaux fréquentiels a permis d'introduire le spectre d'un signal.

Ce spectre représente le poids de chaque fréquence dans le signal représentant l'évolution du cours. Pour la moyenne mobile, le spectre est de la forme d'un sinus cardinal ((sin(kf))/kf) que l'on a tracé figure 2.9 .

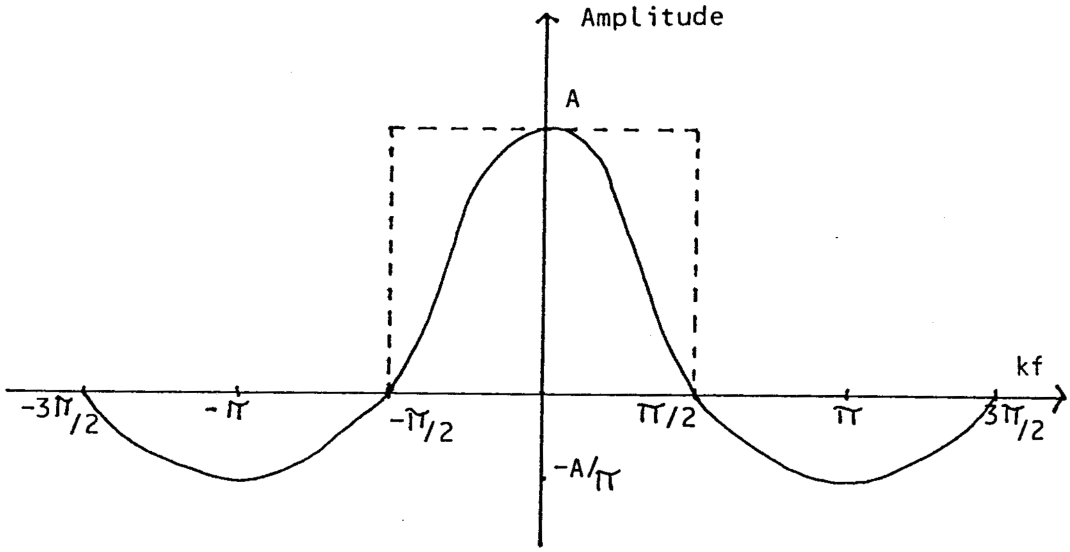


FIG 2.9 : Spectre de la moyenne mobile

On a représenté en pointillés le tracé idéal d'un filtre. Son étude montre les graves inconvénients de la moyenne mobile :

- Elle ne respecte pas la partie du spectre choisie (à comparer avec le tracé du filtre idéal).
- Elle atténue mal les fréquences supérieures à la bande de passage et va même jusqu'a les amplifier (gains négatifs)
- Elle crée des oscillations parasites.
- Elle engendre un retard pur important. De l'ordre de 100 jours pour une moyenne mobile de taille 200 jours.

Il a donc été nécessaire d'utiliser un autre outil permettant de dégager le trend (tendance). Un des plus utilisés consiste à appliquer un filtre passe-bas de bonne qualité.

2.3.4 Méthode des filtres :

La transformée de Fourrier rapide (FFT) permet d'obtenir facilement, à partir d'échantillons de cours (cours journalier), le spectre du signal temporel . La figure 2.10 montre le spectre des cours d'une action. Cet exemple est significatif, le spectre dégage trois fréquences d'amplitude plus élevée qui correspondent à la semaine, au mois, à l'année.

L'utilisation d'un filtre consiste à privilégier ou à éliminer une partie de ce spectre. Un filtre idéal ne ferait passer que les fréquences désirées ; bien entendu, il n'en existe pas.

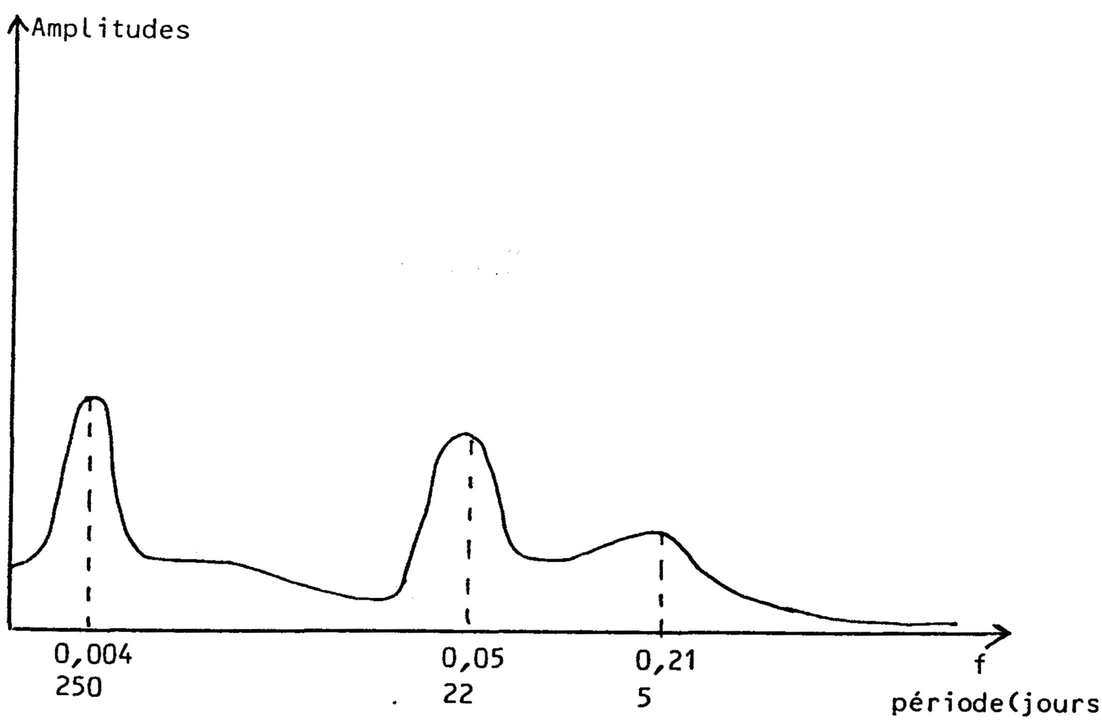


FIG 2.10 : Spectre des cours d'une action

Il existe différents types de filtres :
- Le passe bas, qui ne conserve que les basses fréquences
- Le passe bande laisse passer une partie du spectre
- Le coupe bande efface une partie du spectre
- Le passe haut conservant les hautes fréquences

A partir d'une fonction de transfert, on peut, de deux manières différentes, créer un filtre :

* La méthode du développement de fourrier :
On démontre que les coefficients A_n d'un filtre de la forme:

$$y^*(t) = A_{-n}\ y(t-n\Delta t)+.....+A_{-1}\ y(t-\Delta t)+A_0\ y(t)+ A_1\ y(t+\Delta t)+.......+A_n\ y(t+n\Delta t)$$

ou y(t) est la valeur chronique à l'instant t, $y^*(t)$ la valeur filtrée correspondante et t le pas d'échantillonnage, sont obtenus par la formule:

$$A_n = \Delta t \int_{-1/2\ t}^{1/2\ t} T(f)\ e^{-2\pi n f\Delta t}\ df$$

ou T(f) est la fonction de transfert du filtre.
Pour un passe bande idéal de fréquence de coupure f_0 les coefficients A_n valent :

$$A_n = \frac{\sin\ (\ 2\pi f_0\ (t-n\Delta t))}{\pi(t-n\Delta t)}$$

On remarque immédiatement qu'il va falloir calculer une infinité de A_n. Les artifices, que l'on pourra employer pour palier à ce problème, introduiront systématiquement une déformation de la fonction de transfert. Cette méthode est imprécise, lourde et lente. Nous allons utiliser la deuxième méthode, celle de la transformée en Z.

* La méthode de la transformée en Z a pour but de construire un filtre récursif. C'est à dire défini à partir des valeurs de cours et des valeurs filtrées précédemment calculées :

$$y^*(t) = \sum_{n=N'}^{N} A_n\ y(t+n\Delta t) + \sum_{n=-1}^{K} B_n\ y^*(t-n\Delta t)$$

avec $N' \leq 0 \leq N$ et $K < 0$

Cette méthode permet un calcul rapide (grâce à la récurrence). A partir de la fonction de transfert T(f) ou T(P) on déduit, par transformation homographique :

$P=(Z-1)/(Z+1) = 2\pi if$

la tranformée en Z du filtre. Pour palier à la distorsion en fréquence liée à cette transformation,

on pose $f' = tg(\pi f\ t)*1/2\pi$

avec f : fréquence de coupure désirée

f': fréquence de coupure après correction de la distorsion

La fonction de transfert en Z obtenue s'écrira:

$$H(Z) = \left(\sum_{n=N'}^{N} A_n Z^n \right) / \left(1 - \sum_{k=1}^{K} B_k Z^k \right) \quad \text{avec } N=0$$

Il existe plusieurs familles de filtres, qui possèdent chacune des caractéristiques particulières (Bessel ; Tchébitchev ; Butterworth .....). Les trois critères importants pour cette étude sont :

- La rigueur de la fonction de transfert
- La qualité de l'atténuation hors bande passante
- Le retard de phase, c'est a dire dans la préhension de la tendance (il est de 100 jours pour la moyenne mobile)

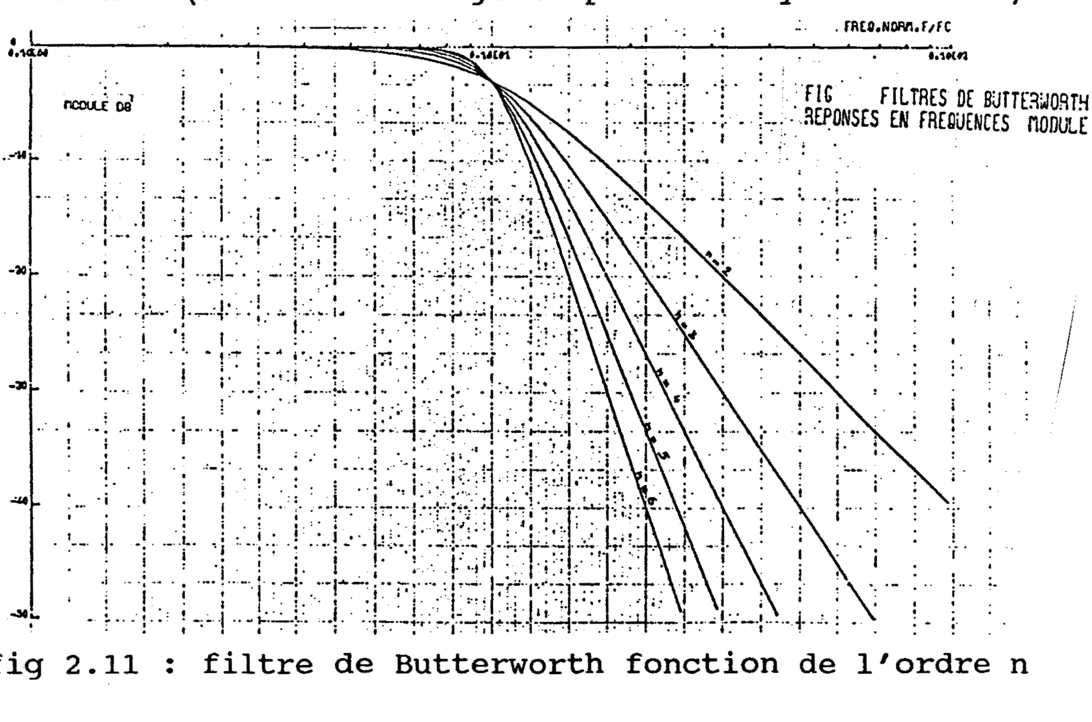


fig 2.11 : filtre de Butterworth fonction de l'ordre n

Les filtres de Butterworth ont le plus petit retard de phase, et sont équivalents sur les autres critères. La fonction de transfert des filtres de Butterworth s'écrit :

$$T(f) = 1/(1+(f/f_C)^{2n})^{1/2}$$

avec f_C fréquence de coupure
n l'ordre du filtre

Plus n sera grand, plus la coupure sera nette (fig 2.11). Le retard de phase observé pour un filtrage à 200 jours est de 64 jours (au lieu de 100 pour la moyenne mobile).

2.3.5 Conclusion de l'Analyse Technique :

Certaines études statistiques ont montré une dépendance, notamment au niveau journalier, entre les variations de cours successifs. Quelques auteurs appellent cette dépendance: "une inertie du mouvement des cours". Malheureusement pour le chartiste, cette "dépendance" ou "inertie" est trop faible pour donner avec précision le cours futur. De ce fait, certains estiment qu'en ajoutant les frais de transactions et d'études, ces méthodes ont un rendement inférieur à la stratégie de simple investissement. On peut néanmoins remarquer qu'une grande partie des investisseurs utilisent ces méthodes avec profit. S'il y a contradiction, elle n'est qu'apparente ; en effet l'utilisation d'une méthode graphique seule dans la détermination d'une statégie ne permet pas d'intégrer toutes les informations détenues sur le marché. Ces investisseurs effectuent une utilisation judicieuse de plusieurs méthodes graphiques (qui les informent sur le cours terme). Ils complètent cette étude par une solide analyse fondamentale (les informant du moyen terme et quelque peu du long terme).

2.4 Conclusion :

Les différentes méthodes, fondamentales ou techniques, d'évaluation ou de prédiction du cours d'un titre, ont permis de montrer la vision étroite qu'elles avaient du phénomène. Aucune, à elle seule, n'a pu expliquer complètement les variations des cours. Chaque spécialiste a sa manière d'évaluer un titre, en utilisant ses propres méthodes. Celles-ci ne donnent qu'une partie de l'information connue du titre. L'évaluation du titre en sera donc très bruitée. Le problème va être de comparer deux titres pour obtenir un classement. Ce problème sera abordé au chapitre suivant.

III MODELISATION DES PREFERENCES

3.1 Introduction :

Comme nous l'avons vu précédemment, il n'existe pas de modèle "universel" de la bourse. Nous avons, dans la première partie de ce chapitre, essayé de créer un modèle plus complet que ceux vus au chapitre précédent, tout en permettant une utilisation aisée.

Dans la deuxième partie, nous apportons une solution pour le problème de choix entre deux actions. Celle-ci tient compte de la nature bruitée des données. Elle se présente sous la forme d'un modèle de préférence qui permettra d'effectuer un classement sur l'ensemble des actions.

3.2 Modèle du processus boursier :

3.2.1 Introduction :

Un modèle est une représentation abstraite d'une réalité concrète. Il existe deux sortes de modèles :

_ Les modèles de représentation : ils servent à la commande ; leur évolution suit scrupuleusement celui du processus. Ces modèles considèrent le processus comme une boite noire. Ils ne s'intéressent qu'à l'évolution de leurs "entrées-sorties".

_ Les modèles de connaissance : ils sont bâtis à partir du fonctionnement réel du processus ; ils nécessitent la connaissance interne de celui-ci.

Notre modèle est de ce type. Il est bâti à partir de l'ensemble de l'information disponible sur le processus Bousier. La figure 3.1 montre de quelle manière la Bourse peut être decomposée.

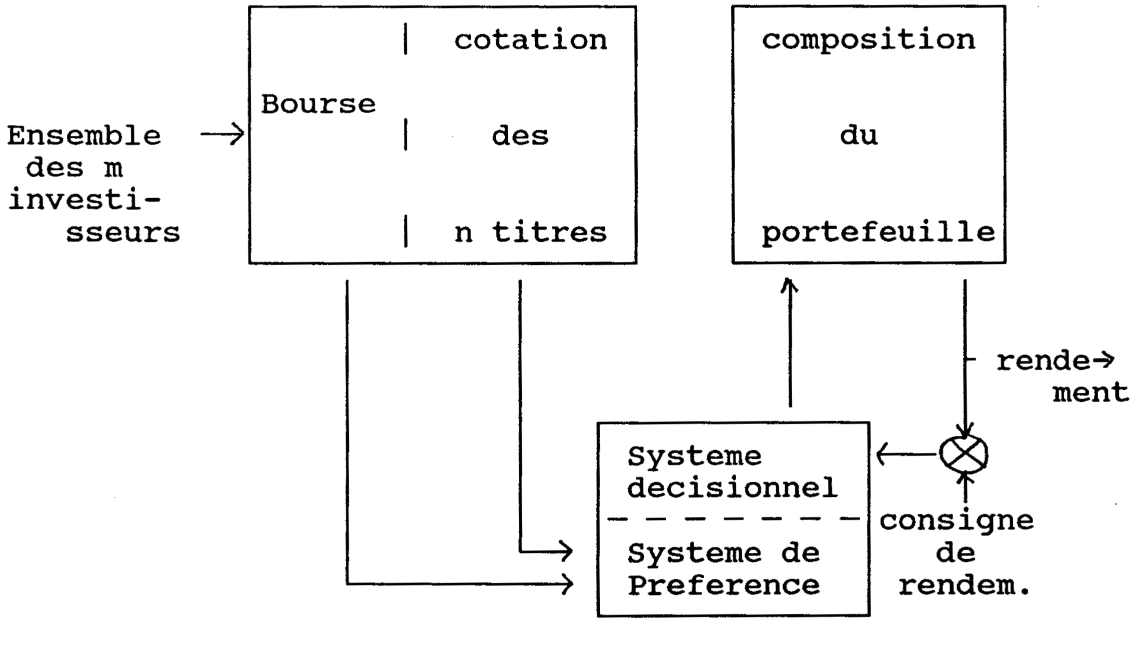


figure 3.1 : Schéma de la bourse

Interprétation de la figure 3.1 :

Les entrées de ce système sont les m investisseurs : ce sont des entrées non commandables. Elles sont modifiées par le contexte politico-financier du moment.
La sortie du système est la rentabilité du portefeuille ; elle est parfaitement observable, car les cours des titres sont donnés chaque jour.
Le bloc "Bourse - cotation des n titres" représente l'ensemble de l'information sur les n actions. Les sorties de ce bloc vont permettre au bloc "système de préférence" de classer les actions. Le bloc "système décisionnel" permettra la composition du portefeuille, en fonction du rendement de celui-ci et de la consigne de l'investisseur.

Notre premier but va être la modélisation du premier bloc "bourse - cotation des n titres ". Pour cela, nous prendrons l'exemple suivant :

L'ensemble des investisseurs "I" est composé de deux éléments : $I=\{i_1,i_2\}$. L'ensemble des titres "A" est composé de deux éléments : $A=\{a_1,a_2\}$.

Cas n°1 :
L'investisseur i_1, au vu des cours et du contexte de la bourse, pense qu'il faut vendre n titres de a_1 et acheter m titres de a_2. Alors que i_2 pense, lui, qu'il faut acheter n titres de a_1 et vendre m de a_2. Comme nous l'avons vu au chapitre I, les transactions se feront au cours de la veille sur les quantités n et m des titres a_1 et a_2. Le nombre d'achats étant égal au nombre de ventes, le cours de ces titres ne changera donc pas.
Cas n°2 :
i_1 et i_2 veulent vendre n titres de a_1 et m titres de a_2. Ils trouvent tous les deux les titres a_1 et a_2 "sur-coté".

Le cours des deux titres va s'effondrer jusqu'au moment où il y aura accord sur le prix et sur le nombre de titres à échanger. L'intervention des investisseurs aura modifié les cours.

Cas n°3 :
C'est le cas inverse du cas numéro deux. Les titres sont estimés trop "bon marché". Là aussi, les investisseurs forceront les cours à un niveau qui leur semble raisonnable.

Chacun des deux investisseurs a ses propres valeurs, sa propre vision, ses préférences plus ou moins consciemment formulées. Le problème est donc d'établir de façon mathématique leur manière de procéder.
Dans les trois cas de l'exemple précédent, le cours ne varie que lorsque les deux investisseurs sont en accord. Pour anticiper une baisse ou une hausse d'un cours, il faudrait donc connaître les points d'entente des investisseurs.
Si l'on passe à m investisseurs, le problème est le même, la majorité (au sens des capitaux manipulés) imposera son point de vue sur le cours du titre. Un modèle précis serait un modèle qui recouvrirait les vues des m investisseurs. Ceci est impossible, car ils n'ont pas la même vue du système. Néanmoins, le modèle restera juste s'il représente la majorité des investisseurs. Des études ont été faites pour analyser leurs comportements (PINCON Pierre [54]). Un profil type de l'investisseur a été dégagé. A partir de celui-ci, on a pu élaborer un modèle commun aux investisseurs.

Dans un premier temps, nous allons vous présenter le modèle de la bourse. En fait, ce modèle se compose de plusieurs modèles donnant chacun une information partielle sur le marché.

3.2.2 Modèles de l'analyse technique :

Le modèle le plus employé est celui lié à l'analyse technique. A partir de l'historique des cours des titres, on en déduit une estimation sur le cours futur. Cette estimation est d'autant plus fiable qu'elle est à court terme. Il est possible, à partir de la notion de tendance ("trend"), d'extraire une information supplémentaire (cf méthode des figures ainsi que la méthode "points et croix" (2.3.2)).

De par la stratégie employée pour la gestion d'un portefeuille, la décomposition en trois groupes nous est imposée. Ces trois groupes sont la gestion court terme (spéculatif), moyen terme et long terme. Nous avons donc, au niveau de l'analyse technique, retenu trois modèles :

- L'estimation des cours à une semaine
- L'estimation des cours à un mois
- L'estimation des cours à un an

Sur un temps d'une année, l'estimation est naturellement très imprécise ; elle ne sert qu'à indiquer le comportement à long terme de la société. Cette estimation permet de s'affranchir de la modélisation financière du titre ; qui comme nous l'avons vu au 2.1.1 est très peu exploitable.

Après avoir traité l'analyse technique, nous allons aborder les modèles de l'analyse fondamentale.

3.2.3 Modèles de l'analyse fondamentale :

Plusieurs modèles ont été étudiés au chapitre II, nous allons étudier de quelle manière nous les avons intégrés à notre modèle.

3.2.3.1 Le Béta :

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.2.3 , le risque d'un titre peut être décomposé en un risque lié au marché et un risque propre à l'action. On peut diminuer fortement le second en diversifiant son portefeuille ; mais pour le premier, on ne peut que subir. Pourtant les risques pourraient être diminués si l'on adaptait la sensibilité des titres aux mouvements du marché. C'est dans cette optique que le modèle de marché a été créé.

Il permet de lier de façon linéaire les fluctuations du titre et du marché (cf 2.2.3). Le coefficient de proportionnalité est appelé "Béta" ou volatilité ; il représente le risque lié au marché et permet aussi de s'orienter dans le choix des titres. Ainsi, dans un marché haussier, il sera intéressant de choisir des titres très sensibles aux fluctuations du marché (à grand Béta). Inversement, dans un marché baissier, on préfèrera des actions à faible volatilité (à faible Béta). Si le marché s'effondre, les titres en question ne baisseront que faiblement.
Pour le modèle du MEDAF, la rentabilité d'un actif est lié à son risque, lui-même lié au marché. Il a été montré (cf 2.2.4.3) que le risque de ce modèle était proportionnel au Béta. Par l'étude du coefficient Béta, nous aurons la presque totalité de l'information contenue dans les deux grands modèles du 'Béta' et du 'MEDAF'.

3.2.3.2 Le coefficient de corrélation :

Toutes les hypothèses énoncées pour la construction des modèles ont en commun la non corrélation des titres (cf 2.2.3.5). Un portefeuille, dont les actions seraient fortement corrélées, aurait le même comportement qu'un portefeuille à une seule ligne : il ne serait pas diversifié! Le risque non systématique n'est pas rétribué par le MEDAF. Il est donc indispensable de veiller à ce que les titres, acceptés dans le portefeuille soient très peu corrélés entre eux. De ce problème, Markowitz.H [47] a créé une méthode de choix d'un portefeuille. Cette méthode est basée sur la dualité "rendement-risque". Le risque pris en compte est celui lié à la non diversification.

Présentation de la méthode:

Soit A l'ensemble des actions possibles. $A=\{a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n\}$
Chaque action a_i a une rentabilité r_i définie par :

$$r_i = \frac{(C_t(a_i)-C_{t-1}(a_i))}{C_{t-1}(a_i)}$$

avec $C_t(a_i)$ étant le cours de l'action i au temps t.

Le but de l'investisseur est de créer un portefeuille regroupant les meilleures actions. Ce qui implique un rendement maximal du portefeuille. La méthode de Markowitz est un peu différente. Elle cherche à minimiser le risque de diversification, avec un rendement supérieur à un minimum imposé "r_{min}".

Soit $\underline{x}$, le vecteur représentant les proportions de chaque actif dans le portefeuille ; et $\underline{r}$ le vecteur rentabilité.

$$\underline{x} = (x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots,x_n)^T$$
$$\underline{r} = (r_1,r_2,\ldots\ldots\ldots,r_n)^T$$

Si r_p est le rendement du portefeuille, il s'écrit :

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \, r_i = \underline{x}^T \, \underline{r}$$

L'espérance mathématique du rendement est :

$$E(r_p) = \sum_i x_i \, E(r_i)$$

On introduit une contrainte en voulant maximiser l'espérance du rendement. Cette contrainte s'écrit :

$$E(r_p) = \sum_i x_i \, E(r_i) > r_{min}$$

Markowitz introduit une notion du risque liée à la covariance des titres. Il construit la matrice V de variance-covariance des rendements. Les coefficients de cette matrice représentent la liaison temporelle entre deux titres.

$$V(i,j) = cov(a_i,a_j) = \frac{1}{Q} * \sum_{t=t_i}^{t_f} (c_i(t)-c_{im})*(c_j(t)-c_{jm})$$

avec $c_i(t)$ représentant le cours de l'action i au temps t, et c_{im} son cours moyen. Q représente le nombre d'échantillons. ($t_f = t_i + Q$)

Pour diversifier un portefeuille, il sera nécessaire que la covariance des actions retenues soit minimale. Dans le cas contraire, un portefeuille comportant un titre et celui comportant n titres, aurait le même risque spécifique (2.2.3.5).

La variance de la rentabilité du portefeuille sera :

$$var(r_p) = \underline{x}^T \, V \, \underline{x}$$

Le vecteur $\underline{x}$ représente des proportions, une contrainte supplémentaire vient s'ajouter :

Soit $\underline{1}$ le vecteur colonne (1,1,...,1)

$$\sum x_i = 1 \quad \text{ou encore} \quad x^T \, \underline{1} = 1$$

La formulation du problème devient :
Minimisation de la variance sous diverses contraintes :

$$\text{Min } x^T V x$$

- contraintes :

$$\sum_i x_i E(r_i) > r_{min}$$

$$x^T \underline{1} = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

Ce système particulier (matrice V défini positive) a été résolu par Markowitz en utilisant des conditions d'optimalité.
Cette méthode est naturellement trop incomplète pour être utilisée. Nous n'en garderons que la notion de risque lié à la non diversification. Ce risque sera exprimé par la matrice de variance-covariance. Cette matrice représentera donc notre modèle relatif à la diversification.

3.2.3.3 Modèle probabiliste :

Le risque, qui n'a pas été introduit et qui est fondamental, est celui dû à l'imprécision de l'estimation. Tous les modèles se basent sur une série temporelle des cours des titres. Une anticipation du futur basée sur le passé est forcément imprécise. Les modèles doivent en tenir compte et ne pas donner un résultat ponctuel. Les sorties seront de type flou, elles fourniront une borne supérieure et inférieure pour chaque donnée. Ces bornes définiront un intervalle à l'intérieur duquel se trouvera certainement la valeur réelle.

3.2.3.3 Modèle probabiliste :

Le risque, qui n'a pas été introduit et qui est fondamental, est celui dû à l'imprécision de l'estimation. Tous les modèles se basent sur une série temporelle des cours des titres. Une anticipation du futur basée sur le passé est forcément imprécise. Les modèles doivent en tenir compte et ne pas donner un résultat ponctuel. Les sorties seront de type flou, elles fourniront une borne supérieure et inférieure pour chaque donnée. Ces bornes définiront un intervalle à l'intérieur duquel se trouvera certainement la valeur réelle.

Nous avons essayé d'utiliser les outils statistiques pour construire un modèle probabiliste. Nous avons commencé par étudier les caractéristiques statistiques du rendement des actions. Cette étude se fit sur un ensemble de trois cents actions du marché "comptant" et "à terme". La durée d'observation fut de plus de deux ans.
Nous avons tracé les histogrammes des actions. La figure 3.2 en présente un exemple.

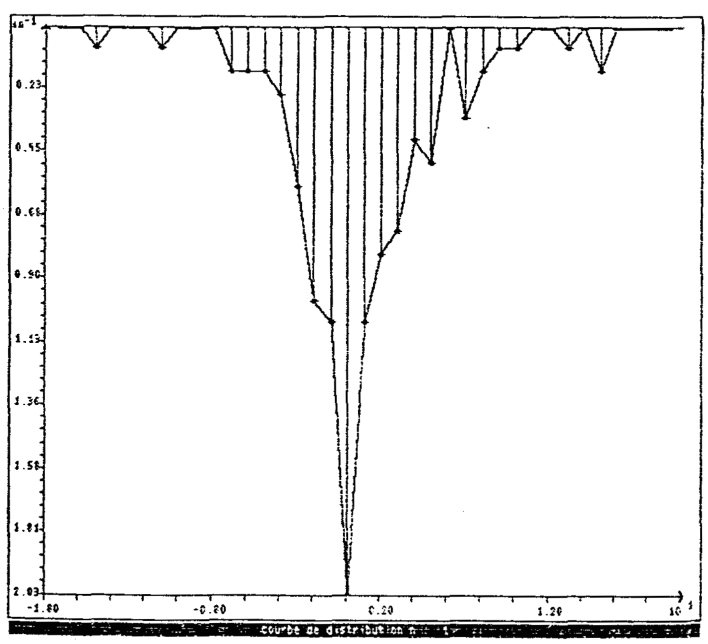


figure 3.2 : Histogramme d'un titre

Nous avons essayé de définir plus précisément l'intervalle d'incertitude en utilisant les histogrammes. Pour définir les bornes de cet intervalle, la formule suivante a été prise :

$$\frac{\int_{C^{-}_{i}(a_j)}^{C^{+}_{i}(a_j)} D(C_i(a_j))}{\int_{-\infty}^{+\infty} D(C_i(a_j))} = \text{cste}$$

$$0 \leq \text{cste} \leq 1$$

Ou $D(a_i)$ est la loi de distribution pour l'action i
$C^{+}_{j}(a_i)$ est la borne supérieure du segment relatif au $j^{iéme}$ modèle pour le $i^{iéme}$ titre ; $C^{-}_{j}(a_i)$ étant la borne inférieure.

Les résultats furent décevants car avec une constante égale à 0.68 (c'est à dire une probabilité de 0.68 de se trouver à l'intérieur de l'intervalle), le segment avait comme longueur deux écart-types.

Les méthodes d'analyse technique donnent des résultats nettement meilleurs. C'est à dire une longueur inférieure à un écart-type avec une probabilité, de se trouver à l'intérieur, supérieure à 0.68.

3.2.4 Les évaluateurs du modèle :

D'autres modèles auraient pu être utilisés, mais ils sont très peu employés par les investisseurs. On risquerait alors de s'éloigner de la modélisation de l'investisseur type. C'était le cas de l'évolution des bénéfices (cf 2.2.3), de l'évolution des investissements, du délai de recouvrement (Sam.R [69]),etc...

Notre modèle sera la somme des cinq "sous-modèles" décrits précédemment. Nous aurons donc les trois rendements (semaine, mois, année), le bêta et la corrélation. Chaque "sous-modèle" donne un point de vue partiel du phénomène.
L'ensemble des sorties du modèle donnera les descripteurs relatifs à la modélisation du comportement général des investisseurs. Il est impératif de trouver les évaluateurs quantifiant les descripteurs. Ces évaluateurs seront des nombres flous, représentant le fait qu'ils appartiennent à un domaine d'incertitude .
Les évaluateurs liés au descripteurs de rendement seront simples. Il suffira de prendre la fourchette de rendement donnée par les méthodes techniques.
L'évaluateur lié au Béta sera un peu plus compliqué. Il sera nécessaire de faire passer "au mieux" (cf 2.2.3.4) une droite dans un nuage de points. Si ce nuage a une forme allongée, il n'y aura pas de problème. La fourchette sera l'ensemble des valeurs prises par la pente de la droite. Dans le cas d'un nuage de forme ronde, il n'y aura pas de Béta. Seul le descripteur lié à la corrélation aura une forme ponctuelle.

3.3 Modélisation des préférences :

3.3.1 présentation des structures :

Soit A l'ensemble des actions possibles.

$A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n\}$

L'ensemble A peut être amorphe (sans structure) ou muni d'une structure plus ou moins forte (par exemple, une relation de similarité, de distance, ou une ultramétrique).

Il est naturel d'employer ces structures assez fortes pour des données cardinales. Mais pour des données ordinales ou pour des données incertaines, il sera très difficile pour le décideur, c'est à dire pour l'investisseur, d'utiliser une distance.

Entre l'ensemble amorphe et celui doté d'une structure forte, il sera intéressant de trouver un juste milieu. La solution la plus proche du décideur sera d'utiliser une relation binaire de préférence.

Définition :
Soit A un ensemble, on appelle relation, et l'on note R, une partie du produit logique A x A, c'est à dire un lien entre certains couples (a,b) de A x A : $a \in A$, $b \in A$. Si a est lié à b, on note a R b (elle est dite binaire car elle porte sur des couples).

De plus, le fait que le décideur ait des préférences donne une structure de graphe à l'ensemble des actions.

Cette relation peut être représentée par un graphe dont les sommets sont les actions et les arcs les préférences.

exemple: $a_1 \; R \; a_2$ $\qquad\qquad$ $a_1 \curvearrowright a_2$

La relation de préférence n'est pas obligatoirement transitive. Soit P la relation binaire de préférence ; il peut arriver que:

$$a_1 \; P \; a_2 \qquad a_2 \; P \; a_3 \qquad \text{et} \qquad a_1 \; NP \; a_3 \quad (a_1 \not{P} a_3)$$

On peut introduire par ce graphe la notion d'indifférence. Celle-ci peut être représentée par la relation suivante:

$$a_1 \; P \; a_2 \quad \text{et} \quad a_2 \; P \; a_1 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 \; I \; a_2 \quad \text{ou encore}$$

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, bend left] & a_2 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Comme nous avons doté notre ensemble d'actions d'une relation binaire de préférence, nos descripteurs deviennent des critères. Il serait très intéressant de doter l'ensemble d'une structure plus forte, par exemple une structure d'ordre (ou de préordre) complet ou partiel.

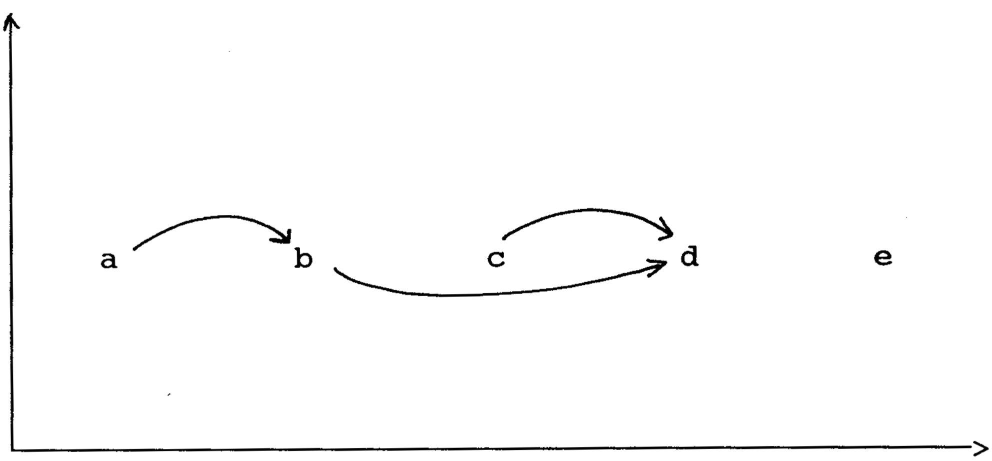


figure 3.3 graphe d'un préordre partiel

Un préordre est une relation réflexive et transitive. Soit R cette relation, alors :

$$a \; R \; a \qquad \forall \, a \in A$$
$$a \; R \; b \text{ et } b \; R \; c \;\Rightarrow\; a \; R \; c \qquad \forall \, a,b,c \in A$$

Un préordre non réflexif est un préordre strict.
Un ordre est un préordre antisymétrique, tel que :

$$\forall\, a,b \in A \quad \text{avec } a \neq b \qquad a\ R\ b \Rightarrow b \text{ non } R\ a$$

Un ordre exclut la situation d'indifférence ; il sera total ou complet, si cette relation est établie sur l'ensemble A x A tout entier.

<u>3.3.2 les relations binaires :</u>

Dans la description du risque lié à l'imprécision des évaluations, il a été pris comme hypothèse la non modification des caractéristiques passées de la société. Ce type de risque a introduit les nombres flous. Bien que ce soit assez rare, il faut néanmoins admettre la possibilité d'un événement futur indétectable. La seule manière d'en tenir compte est d'introduire un seuil, qui permettra de s'assurer de la validité de la relation.

Les trois relations que nous avons établies sur l'ensemble A sont : la préférence (notée P), la non-préférence (notée NP) et l'indifférence (notée I). Nous allons maintenant définir l'ensemble des couples d'actions appartenant à ces trois relations.

soit C l'ensemble des critères :

$$C = \{ c_1, c_2, \ldots., c_m \}$$

soit h_i une application de :

$$A \dashrightarrow \{ \text{ segment de droite de } R \}$$

$e_i^j = e_i(a_j) = h_i(a_j)$ est l'évaluateur de l'action j au point de vue du critère i.

Un nombre flou sera représenté par les bornes supérieure et inférieure du segment : $[e_i^+(a_j), e_i^-(a_j)]$. Le seuil appliqué à chaque critère sera noté : S_i.

Une action a_j sera préférée à une action a_k, si la valeur de l'évaluateur de l'action a_j est plus grande que celle de l'évaluateur de l'action a_k. De plus, la différence de valeur doit être supérieure au seuil du critère en question S_i.

Pour simplifier l'écriture nous utiliserons $e^+(a_j)$ au lieu de $e^+{}_i(a_j)$,le critère i étant le seul employé.

soit $a_j, a_k \in A$,

si $e^+(a_j) > e^+(a_k) + S_i$
et $e^-(a_j) > e^-(a_k) + S_i$

Alors a_j est préférée à a_k pour le critère i.
Dans ce cas, une perturbation p, due à un événement imprévisible, ne changera pas le choix si son amplitude est moins importante que le seuil S_i.

si $p < S_i$ nous aurons :

$$e^+(a_j) > e^+(a_k) + p$$
$$e^-(a_j) > e^-(a_k) + p$$

a_j est toujours préférée à a_k pour le critère i.(on écrit a_j P a_k ou a_k NP a_j)

La relation de préférence sera construite grâce à la comparaison de deux nombres flous :

$$[\ e^-(a_j),\ e^+(a_j)\ ] \text{ et } [\ e^-(a_k),\ e^+(a_k)\ ]$$

Présentation des diverses comparaisons:

cas 1 $e^+(a_j) - e^+(a_k) > S_i$

La figure 3.4 ci- dessous montre les différentes possibilités du cas 1 :

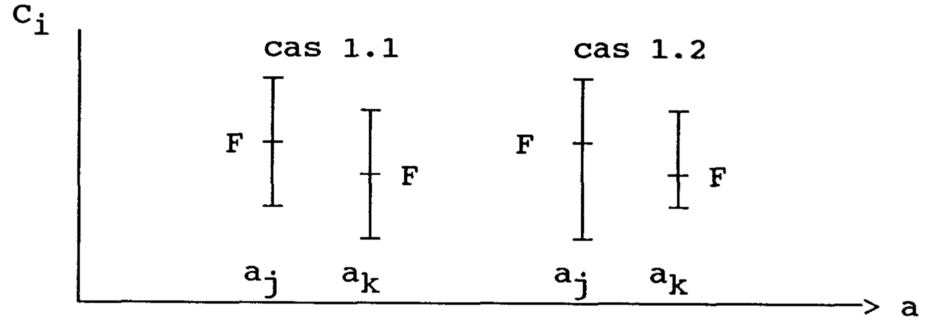


figure 3.4 : cas 1 (où $e^+(a_j) - e^+(a_k) > S_i$)

Ces différentes possibilités s'écrivent:

cas 1.1 $e^-(a_j) - e^-(a_k) > - S_i$

dans ce cas,il n'y a pas de problème : a_j P a_k

cas 1.2 $e^-(a_j) - e^-(a_k) \leq - S_i$

Nous arrivons au cas délicat du choix entre deux segments imbriqués l'un dans l'autre. Pour nous aider dans ce choix, nous allons construire une fonction F (qui sera un critère supplémentaire de choix). Cette fonction F dépendra de multiples paramètres (différence des segments d'incertitude, seuil, risque toléré par l'investisseur, etc....).

Sur la figure 3.5 (p 84), on voit immédiatement que le choix de l'investisseur dépendra de son aversion pour le risque. En effet, l'action a_j a autant de chances d'obtenir un meilleur rendement, qu'un moins bon, par rapport à l'action a_k.

Définissons la variable M : c'est la différence des points milieux des deux segments.

$$M = ((\ e^{+}(a_j) + e^{-}(a_j)) - (\ e^{+}(a_k) + e^{-}(a_k)))\ /\ 2$$

Soit r le nombre représentant la position du décideur par rapport au risque. $0 \leq r \leq 1$ (0 = peur du risque)
Soit f_j et f_k les fourchettes des actions j et k :

$$f_j = e^{+}(a_j) - e^{-}(a_j)\ ;\ f_k = e^{+}(a_k) - e^{-}(a_k)$$

Soit f_M et f_m les fourchettes maximum et minimum de A.
La fonction F devra transformer le point M en fonction de la différence de fourchette $(f_j - f_k)$ et de l'attrait du risque du décideur.

Si cet attrait du risque r est supérieur à 0.5 (attrait important), F doit être une fonction croissante de la différence de fourchette (décroissante si r < 0.5).

On peut définir la fonction F par :

$$F = M - n*S_i*2(0.5 - r)*(f_j - f_k)/(f_M - f_m)$$

La fonction F ainsi définie, est une transformation de la valeur M. Celle-ci sera augmentée ou diminuée d'un certain nombre de seuils. Ainsi la fonction F dépendra de la différence de fourchette et de la position du décideur vis-à-vis du risque.

Dans le cas d'un décideur qui n'aurait ni attirance ni aversion pour le risque (r = 0.5) la formule de F se réduira à la variable M. Pour la suite le risque a été pris égale à 0.5.

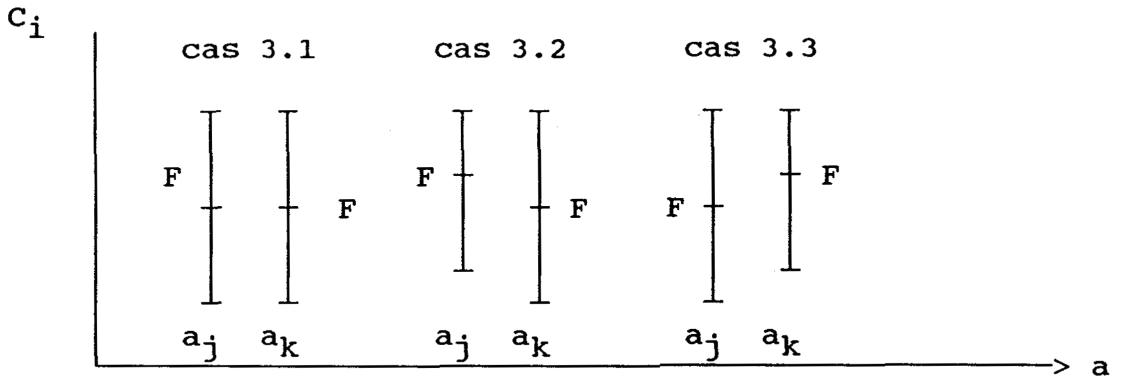


figure 3.6 : cas 3 (où $-s_i \leq e^+(a_j) - e^+(a_k) \leq s_i$)

On peut maintenant comparer deux à deux tous les titres de l'ensemble A. Cette comparaison donnera une matrice de préférence (de dimension n x n), et ce pour chaque critère. Nous allons présenter maintenant les différentes propriétés des relations P,NP,I.

<u>3.3.3 Propriétés des relations :</u>

Nous avons défini une partition de l'ensemble A x A des couples d'actions en trois sous-ensembles :

- P : l'ensemble des couples (a,b) où l'action a est <u>préférée</u> à l'action b.
- NP: l'ensemble des couples (a,b) où l'action a est <u>non-préférée</u> à l'action b, donc où b est préférée à a.
- I : l'ensemble des couples (a,b) pour lesquels le choix entre a et b est <u>indifférent</u>.

Nous considérons donc que deux actions sont toujours comparables. Par la suite, nous confondrons les noms P,NP,I des trois sous-ensembles avec ceux des relations qu'ils représentent :

$(a,b) \in P \iff a\ P\ b$ etc

Donc, lors de fourchettes imbriquées nous obtenons trois cas : (cf figure 3.5)

cas 1.2.1	$-S_i \leq F \leq S_i$	=>	a_j I a_k
cas 1.2.2	$F > S_i$	=>	a_j P a_k
cas 1.2.3	$F < S_i$	=>	a_j NP a_k

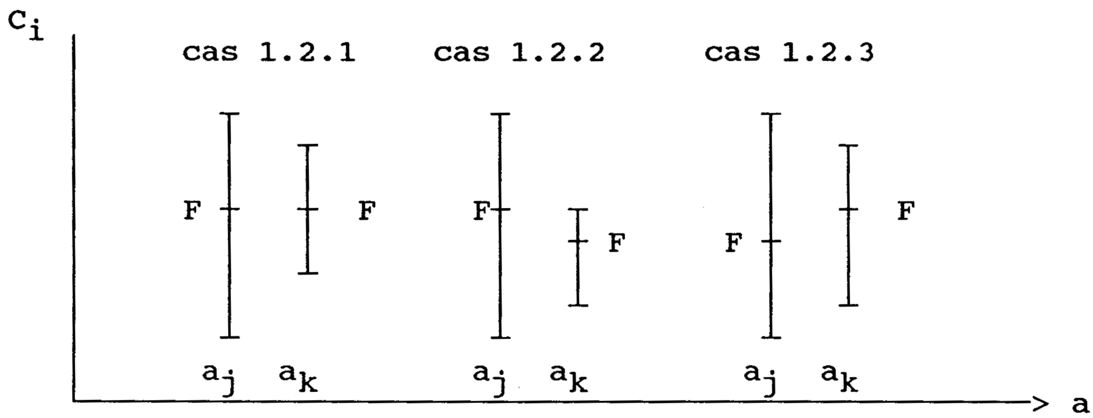


figure 3.5 : cas 1 (où $e^+(a_j) - e^+(a_k) > S_i$)

Nous allons maintenant examiner le deuxième cas :

cas 2 $\quad e^+(a_j) - e^+(a_k) < -S_i$

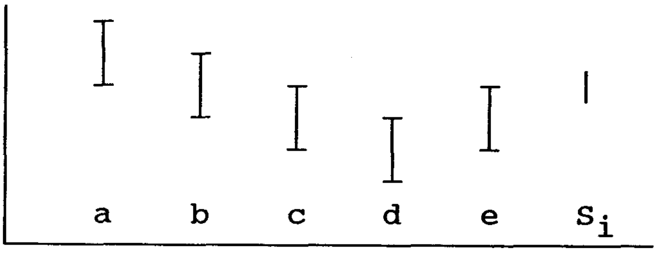
Les résultats sont les mêmes que dans le cas 1 en permutant j et k.

Le dernier cas (3) est celui où la différence n'est pas significative : (cf figure 3.6)

cas 3	$-S_i \leq e^+(a_j) - e^+(a_k) \leq S_i$		
cas 3.1	$-S_i \leq F \leq S_i$	=>	a_j I a_k
cas 3.2	$F > S_i$	=>	a_j P a_k
cas 3.3	$F < -S_i$	=>	a_j NP a_k

Toutes les possibilités ont été étudiées. L'ensemble des couples d'actions appartient soit à la partie I, soit à la partie P, soit à la partie NP. Ces trois parties appartiennent à l'ensemble des couples d'actions A x A.

Exemple:



$\forall$ a,b,c,d,e $\in$ A

	a	b	c	d	e
a	I	I	P	P	P
b	I	I	I	P	I
c	NP	I	I	I	I
d	NP	NP	I	I	I
e	NP	I	I	I	I

P = { (a,c),(a,d),(a,e),(b,d) }

NP = { (c,a),(d,a),(d,b),(e,a) }

I = R - P - NP

Les relations P et NP ne sont pas symétriques, mais vérifient la relation : a P b <=> b NP a
La relation d'indifférence I est une relation réflexive, symétrique mais pas transitive.

$\forall$ a,b,c $\in$ A :

1°) a I a
2°) a I b => b I a
3°) a I b et b I c $\not\Rightarrow$ a I c

En effet, on peut trouver un contre exemple pour la transitivité :

soit $S > e^+(a) - e^+(b) > 0$ et $S > e^+(b) - e^+(c) > 0$
$S > e_-(a) - e^-(b) > 0$ et $S > e^-(b) - e^-(c) > 0$
$e^+(a) - e^+(c) > S$ et $e^-(a) - e^-(c) > S$

D'aprés les formules définissant la relation de préférence (cas 1.1 jusqu'au cas 3.3) nous avons:

a I b et b I c mais a P c

IL existe donc une possibilité telle que le 3°) ne soit pas satisfait => I n'est pas transitive.

Les relations P et P U NP sont des ordres stricts partiels.

3.3.4 Signature des relations :

Pour coder efficacement les relations obtenues, nous allons chercher une application de A x A dans l'ensemble des réels.
Il y a trois relations à coder : P, I, NP ; le codage le plus immédiat sera (-1, 0, 1). (codage ternaire)

$$\text{L'application } S_R(a,b) = \begin{cases} +1 & \text{si } a \, P \, b \\ 0 & \text{si } a \, I \, b \\ -1 & \text{si } a NP \, b \end{cases}$$

$\forall$ a,b $\in$ A
On a donc $S_R(a,b) = - S_R(b,a)$ et $S_R(a,a) = 0$
Cette application s'appelle la signature de la relation de préférence. Nous pouvons construire une matrice carrée P_{ci} indicée en ligne et en colonne par A, et dont l'élément (a,b) contient $S_R(a,b)$.
C'est la <u>matrice signature</u> pour le critère i.

On aurait pu définir un codage plus précis que le codage ternaire, par exemple, un codage "flou".

1°) $0 < S_R(a,b) \leq 1$ pour la préférence de a sur b, avec préférence strict si $S_R = 1$, ou plus généralement :
$0 < S_R(a,b) \leq f(a,b)$

2°) $0 > S_R(a,b) \geq -1$ pour la non-préférence de a sur b, avec non-préférence stricte si $S_R = -1$, ou plus généralement :

$$0 > S_R(a,b) \geq f(a,b)$$

3°) Indifférence si $S_R = 0$

exemple de codage flou :

$$\begin{array}{c|ccc|}
a & 0 & 0.6 & 0.8 \\
b & -0.6 & 0 & 0.7 \\
c & -0.8 & -0.7 & 0 \\
\multicolumn{1}{c}{} & a & b & \multicolumn{1}{c}{c}
\end{array}$$

Le codage flou revient alors à donner une note de préférence ou de non-préférence. Les données de type ordinale se transforment en données de type cardinal. Cette méthode demande au décideur de donner une note de préférence. Dans la plupart des cas, il ne le peut pas. C'est pour cette raison que nous allons créer des notes de préférence, par l'intermédiaire du vecteur score.

Une fois la matrice signature P_{Ci} définie, on construit le vecteur score S_{Ci} indicé par A donc de dimension n :

$$\forall\ a_j, a_k \in A$$

$$S_{Ci}(a_j) = \sum_{k=1}^{n} P_{Ci}(a_j, a_k)$$

$S_{Ci}(a_j)$ est donc la somme des éléments de la ligne a_j. S'il n'y a pas d'ex-aequo, les composantes du vecteur S_{Ci} sont comprises entre -n+1 et n-1.

L'action dont le score pour le critère i est "n-1" sera la "préférée" des actions. Dans le cas où elle obtient "-n+1", elle sera la moins préférée.

Cette fonction score donne une note de préférence d'une action par rapport aux autres de l'ensemble A. La fonction score sera d'autant plus fine que n sera grand, ce qui permettra de séparer plus précisément deux titres.

$$\forall\, a,b \in A$$

$$S_{ci}(a) = \text{card}\ \{\ b \mid a\ P\ b\ \} - \text{card}\ \{\ b \mid b\ P\ a\ \} \quad (1)$$

On retrouve les problèmes dus à la non-structure d'ordre ou de préordre. En effet, nous n'avons pas :

$$\forall\, a,b \in A \quad a\ I\ b \Rightarrow S_{ci}(a) = S_{ci}(b)$$

Cela va être montré en trouvant un contre-exemple :
il existe un couple (a,b) tel que :

$$a\ I\ b \Rightarrow S_{ci}(a) \neq S_{ci}(b)$$

Nous allons reprendre l'exemple à cinq actions a,b,c,d,e $\in$ A défini précédemment. On en déduit la matrice préférence P_{ci} et le vecteur score associé :

$$P_{ci} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad S_{ci} = \begin{array}{|c|c} 3 & a \\ 1 & b \\ -1 & c \\ -2 & d \\ -1 & e \end{array}$$

a I b pourtant $S_{ci}(a) \neq S_{ci}(b)$

Autres propriétés :

$$a\ P\ b \Rightarrow S_{ci}(a) > S_{ci}(b)$$
$$S_{ci}(a) = S_{ci}(b) \Rightarrow a\ I\ b$$

Ce résultat est dû à la non transitivité de la relation d'indifférence I et à la transitivité de la relation P.

Démonstration :

a I b veut dire que le couple (a,b) appartient à la partie de A^2 notée I.

$S_{Ci}(a) = S_{Ci}(b) \Rightarrow a\ I\ b$

$\Leftrightarrow (a,b) \notin I \Rightarrow S_{Ci}(a) \neq S_{Ci}(b)$

soit Pa = Card { actions préférées à a }

NPa= Card { actions non-préférées à a }

Si $(a,b) \notin I \Rightarrow (a,b) \in P$ ou $(a,b) \in NP$

1°) Première possibilité : <u>$(a,b) \in P$</u>

Les relations P et NP sont transitives.

$\forall c \in A$ si $c\ P\ a \Rightarrow c\ P\ b$

si $c\ NP\ a \Rightarrow c\ NP\ b$

on a donc :

$$Pa < Pb \quad \text{et} \quad NPa > NPb$$

Ou encore :

$$NPa - Pa > NPb - Pb \qquad (2)$$

Avec les formules (1) et (2), nous obtenons :

<u>$S_{Ci}(a) > S_{Ci}(b)$</u>

2°) deuxième possibilité : <u>$(a,b) \in NP$</u>

De même on aura :

$$Pb < Pa \quad \text{et} \quad NPb > NPa$$

Ou encore :

$$NPb - Pb > NPa - Pa \qquad (3)$$

Avec les formules (1) et (3), nous obtenons :

<u>$S_{Ci}(b) > S_{Ci}(a)$</u>

Donc $\forall (a,b) \in P \cup NP$ on a : $S_{Ci}(b) \neq S_{Ci}(a)$

ou encore $\forall (a,b) \notin I \Rightarrow S_{Ci}(b) \neq S_{Ci}(a)$

La fonction score établit un classement des actions pour le critère i.

3.4 Conclusion :

Le modèle de préférence a créé une matrice de préférence P_{Ci} (de dimension n x n). A partir de cette matrice, nous avons déduit le vecteur score S_{Ci}, qui permet le classement des actions. Mais ce rangement n'est pas définitif, car il ne concerne qu'un critère. Il va donc falloir construire m fonctions scores et les comparer. De cette comparaison naîtra un classement définitif qui permettra de construire le portefeuille le plus attractif.
Ce travail est effectué par le modèle de décision que nous allons présenter au chapitre suivant.

IV MODELISATION DECISIONNELLE

4.1 Introduction :

Le problème que rencontre le décideur est celui du choix entre plusieurs actions possibles. Il devra faire ce choix en essayant de tenir compte de toute l'information disponible. Grâce à de nombreuses études, la prise de décision est devenue plus facile. Ces études ont en effet permis l'élaboration de modèles de décision, qui réalisent le meilleur compromis désiré par le décideur. Il existe quatre classes de modèles de décision. Nous avons construit le nôtre à partir de ceux-ci. Dans un premier temps nous les présenterons. Dans un deuxième temps, nous décrirons la modélisation décisionnelle que nous avons élaborée. Celle-ci a été testée sur des données réelles de la Bourse de Paris. Nous présenterons ensuite les résultats de ces tests. Pour commencer, le paradoxe du vote va être introduit afin de mieux comprendre la notion de choix multicritère.

4.2 Le paradoxe du vote :

Dans nos sociétés démocratiques, la représentativité populaire d'un homme politique est très importante. L'élection de celui-ci se fait par l'obtention de la majorité des votants. Le but étant : la représentation du "point de vue" de la majorité des personnes.
L'élection se complique si au lieu de deux candidats, il y en a trois. Prenons, par exemple, trois candidats A,B,C ; après le vote, ils obtiennent respectivement :

42 °/° , 18 °/° , 40 °/° des voix

Aucun des trois n'a réussi à obtenir la majorité. Pour résoudre ce problème, on a imaginé un deuxième tour, où seulement les deux candidats les mieux placés pouvaient se présenter. Dans notre exemple, A (42 °/°) et C (40 °/°) seront au second tour. Sur les 18 °/° du candidat B,
11 °/° préfère A et 7 °/° C ; les résultats du second tour (en considérant que les électeurs de A et C ne changent pas d'avis) seront : 53 °/° pour A et 47 °/° pour C. Le candidat A sera élu avec la majorité des électeurs et la démocratie sera respectée.

Mais si l'on y regarde de plus près ; A ne représente que 42 °/° des électeurs et si B avait été au deuxième tour l'élection aurait été différente. Supposons que les électeurs de A préfèrent tous B à C, et que les électeurs de C préfèrent tous B à A, le candidat B l'aurait emporté contre A ou contre C, avec respectivement 58 °/° ou 60 °/° des voix. Dans les deux cas, B l'emporterait avec une plus grande majorité que le candidat A (53 °/°).
Cet exemple montre bien que le candidat préféré des votants est écarté du deuxième tour et de ce fait de la victoire.

Exemple :

	A	B	C	
1^{er} tour	42	18	40	
2^{eme} tour	53		47	A contre C
	42	58		A contre B
		60	40	B contre C

Ce paradoxe de vote a été découvert au $18^{ème}$ siècle par les mathématiciens Borda et Condorcet. Ce dernier le décrit dans son livre "des progrès de l'esprit humain" (1785). Il décrit une relation de préférence non transitive basée aussi sur trois actions A,B,C et sur m juges qui donnent leurs préférences relatives. Les m juges se répartissent en trois groupes égaux.

Le groupe G1 : A P B et B P C (notation : A P B veut dire A est préféré à B)
Le groupe G2 : B P C et C P A
Le groupe G3 : C P A et A P B

G1 = G2 = G3 = m/3

Si on utilise la régle de la majorité pour choisir une action, on aura :

A = 33 °/° ; B = 33 °/° ; C = 33 °/°.

Aucune des trois actions n'a la majorité.
Si la comparaison se fait entre :

A et B : A est préférée par rapport à B
(par 2/3 des juges G1 et G2)
B et C : B est préférée par rapport à C
(par 2/3 des juges G2 et G1)
C et A : C est préférée par rapport à A
(par 2/3 des juges G3 et G2)

En prenant la régle majoritaire :

A P B , B P C et C P A

Cette relation n'est pas transitive car A n'est pas préférée à C. On arrive à l'effet Condorcet.

Ces exemples montrent bien que le choix d'un ordre à partir de m ordres n'est pas trivial. Comme l'a montré Condorcet, la préférence à la majorité n'est pas forcément transitive. Il a montré le premier la possibilité d'agréger des préférences en utilisant la notion de "majorité". Cette idée a été reprise par Michaud.P [82] qui trouva un modèle décisionnel permettant la résolution du problème que Condorcet n'avait pu résoudre. Beaucoup d'autres modèles ont été construits ; ayant chacun ses avantages et ses inconvénients.

Nous allons vous présenter dans le paragraphe suivant les quatre grandes classes de modèle de décision.

4.3 Les quatre classes de modèles de décision :

4.3.1 Hiérarchisation des critères :

Le modèle de décision le plus simple est naturellement la hiérarchisation. C'est pour cette raison qu'il sera présenté en premier.
Considérons l'ensemble des critères $C = \{ C_1, C_2, \ldots., C_m \}$
Appliquons à cet ensemble une relation binaire de préférence, notée P'. Si cette relation crée un ordre total, on aura un classement sans ex-aequo des critères, du plus important, au moins important pour le décideur.

Soit C_1' le critère le plus important

et C_m' le critère le moins important

On aura un nouvel ordre dans l'ensemble C :

$$C' = \{ C_1', C_2', \ldots\ldots, C_m' \}$$

avec C_1' P C_2' et C_2' P C_3' etc...
On pourra alors résoudre le problème de critères contradictoires de façon très simple. Dans un premier temps, on effectuera le classement des n actions suivant le critère le plus important :C_1'. Il subsistera des ensembles d'actions à l'intérieur desquels les actions seront indifférentes suivant ce critère. Le critère C_2' sera appliqué sur ces ensembles d'actions, puis C_3' et ainsi de suite. Les m critères ainsi appliqués donneront le classement définitif des actions.

Ce type de résolution de problème multicritère a l'intérêt de sa simplicité. Néanmoins, il a un gros inconvénient ; il n'est pas possible de modifier le classement d'un critère plus important.
En effet, pour deux critères C_i' et C_j' (avec C_i' P C_j' => $i < j$), le classement de l'action "a" dû au critère C_i' ne sera pas modifié même s'il est intolérable pour le critère Cj' (notion de véto non permise).

4.3.2 Agrégation et fonction d'utilité :

La deuxième classe de modèles qui est présentée, est basée sur l'agrégation des critères.

Soit A l'ensemble des actions ; $A = \{ a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \}$ et D l'ensemble des descripteurs $D = \{ d_1, d_2, \ldots\ldots, d_m \}$.
L'évaluation de l'action a_j suivant le descripteur d_i est notée : $e_i(a_j)$.
S'il existe une structure d'ordre total sur A ; on pourra utiliser un outil intéressant : la fonction d'utilité.
Elle s'écrit de manière générale :

$$U(a_j) = U [e_1(a_j), e_2(a_j), \ldots\ldots, e_m(a_j)]$$

La forme de U est à priori quelconque. Théoriquement, il existe une infinité de fonctions que l'on puisse utiliser. Pratiquement, on cherchera la fonction la plus compréhensible pour le décideur. Celle qui lui permettra le mieux de préciser ses préférences.
La forme la plus simple et la plus aisée d'utilisation est, sans doute, la forme additive :

$$U(a_j) = U_1[e_1(a_j)] + U_2[e_2(a_j)] + \ldots\ldots + U_m[e_m(a_j)]$$

Les m fonctions U sont appelées "contribution du descripteur e_i à l'utilité additive U.

Fishburn.P.C [24] a démontré qu'une utilité additive U est additive si, et seulement si, les critères sont indépendants au sens des préférences. C'est à dire que l'intérêt d'un critère peut être jugé indépendamment des autres. Cette condition d'indépendance est très difficilement réalisée en pratique ; il faut donc se méfier d'une utilisation trop hâtive de l'utilité.
Ayant rempli la condition précédente, il reste à construire cette utilité.

4.3.2.1 Utilité sous forme de somme pondérée :

Si les évaluateurs sont des applications de A --> R ; alors on peut écrire l'utilité sous la forme d'une somme pondérée :

$$U(a_j) = p_0 + p_1\, e_1(a_j) + p_2\, e_2(a_j) + \dots + p_m\, e_m(a_j)$$

(avec $i \in \{1,2,\dots,n\}$)

p_i sont des constantes, ce sont les poids des critères.
Dans le cas où l'on doit effectuer un "plongeon" des critères, il est possible de réaliser celui-ci de manière à englober les pondérations p_i dans les évaluations.
On obtient ainsi :

$$U(a_j) = e_1'(a_j) + e_2'(a_j) + \dots + e_m'(a_j)$$

Une somme pondérée de critères de poids unitaire.

4.3.2.2 Le taux de substitution :

Si les évaluations sont des fonctions à valeurs réelles, l'utilité est alors une fonction réelle à variables réelles : $U(e_1,e_2,\dots,e_m)$. On peut alors définir le taux de substitution du critère C_k par rapport au critère C_l :

$$t^k{}_l = \frac{\delta U}{\delta e_l} \Big/ \frac{\delta U}{\delta e_k} \qquad (4.01)$$

$\delta U/\delta e$ désigne la dérivée partielle de la fonction U par rapport à la variable réelle e.
Pour une utilité additive (cf 4.3.2.1) le taux de substitution s'écrit :

$$\frac{\delta U}{\delta e_i} = \frac{\delta U_i(e_i)}{\delta e_i}$$

il ne dépend que de e_i

On arrive au théorème de Debreu qui démontre qu'une utilité est additive, si et seulement si, le taux de substitution entre deux critères est indépendant des autres critères. De part la formule (4.01), le taux de substitution se réduit à : $t^1{}_k = p_k / p_1$

4.3.2.3 Variations marginales des évaluations :

La notion de différentielle nous fait arriver à la variation marginale des évaluations. S'il est possible de différencier la fonction d'utilité (condition de continuité), on obtient :

$$dU = \delta U / \delta e_1 \, de_1 + \delta U / \delta e_2 \, de_2 + \ldots + \delta U / \delta e_m \, de_m \tag{4.02}$$

Si deux actions ont la même utilité pour le décideur (indifférence) => $dU = 0$
Divisons (4.02) par $\delta U / \delta e_1$ (en supposant l'expression non nulle) ; on obtient :

$$(\delta U / \delta e_1)/(\delta U / \delta e_1) \, de_1 + (\delta U / \delta e_2)(\delta U / \delta e_1) \, de_2 + \ldots + (\delta U / \delta e_m)(\delta U / \delta e) \, de_m = 0 \tag{4.03}$$

Or le taux de substitution est égal à :

$$t^i{}_1 = (\delta U / \delta e_1)/(\delta U / \delta e_i)$$

(4.03) devient :

$$de_1 + de_2/t^2{}_1 + \ldots + de_m/t^m{}_1 = 0$$

Si l'on peut étendre les différentielles aux accroissements finis, on a alors :

$$\delta e_1 + \delta e_2/t^2{}_1 + \ldots + \delta e_m/t^m{}_1 = 0 \tag{4.04}$$

Supposons que tous les critères, sauf deux e_1 et e_k, ont des accroissements δe nuls ; (4.04) devient :

$$\delta e_1 + \delta e_k/t^k{}_1 = 0 \implies t^k{}_1 = - \delta e_k / \delta e_1$$

Pour connaître le taux de substitution, il faudra demander au décideur quelle est la valeur δe_k qu'il faut avoir de manière à ne pas changer la fonction d'utilité, lorsque e_1 varie de δe_1.

On posera cette question pour tous les $k \in \{1,2,...,M\}$ des évaluateurs e_k pour l'action a_j. On connaitra ainsi toutes les dérivées partielles de la fonction utilité au point a_j. Si on étend cette méthode à toutes les actions a_j. On aura entièrement déterminé la fonction d'utilité U.
Cette méthode n'est pas facilement applicable. Il est nécessaire que le décideur puisse donner assez précisément m x n réponses. De plus, elle ne sera applicable que si U a une forme additive.

4.3.2.4 Cas discret :

Dans le cas où les critères créeraient des ordres totaux il serait possible d'étendre ce que l'on vient de voir.
Le taux de substitution aurait comme définition : le nombre de places N_{Pi} qu'il faudrait ajouter au critère i de manière à compenser une perte d'une place sur le critère de référence (choisi arbitrairement).

$$t^i{}_1 = N_{Pi}/1 \qquad\qquad t_{i1} = - \delta ei \;/\; \delta e_1$$

4.3.2.5 Critères multiples en avenir incertain :

Rappelons brièvement que dans le cas d'un avenir incertain, l'éventualité que l'évaluateur vaille e_k a une certaine probabilité : pr_k.
Soit p_i le poids du critère i, la fonction d'utilité devient :

$$U(a_j) = \sum_k pr_k \left(\sum_i p_i \, e^k{}_i(a_i) \right)$$

Cette formule nécessite l'indépendance des critères au sens des préférences.

4.3.2.6 Agrégation des préférences, Méthode "Condorcet" :

Les spécialistes de l'agrégation ont longtemps cru à l'impossibilité de la mise en oeuvre de l'idée de Condorcet. Un chercheur du centre de recherche IBM , Michaud.P [82], a créé un modèle utilisable (quelque soit le type des données) qui se sert de la règle majoritaire de Condorcet. Les données sont présentées sous forme relationnelle.
Soit m le nombre des votants et n le nombre de candidats, on pose :

c_{ij} = le nombre de votants ayant répondu "oui" à la question : "i est-il classé avant j"

c'_{ij} = le nombre de votants ayant répondu "non" à la question : "i est-il classé avant j"

Par convention la valeur c_{ij} avec i=j ne sera jamais considérée. Le tableau des réponses (oui non) collectives (X) est créé :

x_{ij} = oui si la réponse collective est "oui"
x_{ij} = non si la réponse collective est "non"

Le nombre de voies supportant une opinion collective X est (pour la question (i,j)) :

$$v_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} & \text{si } x_{ij} = \text{oui} \\ c'_{ij} & \text{si } x_{ij} = \text{non} \end{cases}$$

Le nombre de voies supportant une opinion collective X est défini par le critère de Condorcet :

$$V(X) = \sum_{i \neq j} v_{ij}(x_{ij})$$

Un classement collectif majoritaire est par définition un classement supporté par le plus grand nombre de voie. La règle majoritaire de Condorcet est défini par :

max V(X)   où X représente un classement

La première originalité de cette méthode est sa structure relationnelle et logique. Grâce à celle-ci, Il n'est pas nécessaire de quantifier des variables qualitatives.
Sa deuxième originalité est la possibilité de pouvoir choisir au préalable la structure de l'ensemble d'actions que l'on désire (par exemple une structure d'ordre total). On pourra également consulter les articles [83], [84], [85], [86] traitant de ce sujet.

4.3.2.7 conclusion :

On a pu observer que certaines méthodes d'agrégation sont très faciles à mettre en oeuvre mais présentent de sérieuses lacunes. Le décideur devra, soit donner les m pondérations $(p_1,....,p_m)$ pour la méthode du 4.3.2.1, soit donner les m x n réponses pour celle du 4.3.2.3. Dans les pondérations du 4.3.2.1, on peut être amené à prendre une action dont une valeur d'évaluateur serait aberrante (si la pondération du critère correspondant est faible) ; la notion de véto n'existant pas.
D'autre méthode plus complexes mais toutefois plus efficaces, ne présentent pas les inconvénients des méthodes précédentes. Notamment la méthode de Condorcet au 4.3.2.6, qui bien que sa résolution ne soit pas aisée, donne des résultats particulièrement intéressants (cf [82]).

La classe de modèles, que nous allons maintenant aborder, est aussi appelée classe des modèles itératifs. Ces modèles permettent de se déplacer dans l'espace à m dimensions des critères jusqu'a l'obtention du résultat voulu. Tout d'abord, nous aborderons la notion de points efficaces et point de mire.

4.3.3 Méthodes itératives:

4.3.3.1 Points efficaces de "Pareto" :

Chaque action est décrite par m évaluateurs, qui donnent m valeurs par action. Dans l'espace Euclidien à m dimensions R^m, cette action sera représentée par un point. Les n actions formeront un nuage de n points. Pour cela, il est nécessaire que ces m évaluations soient des fonctions réelles de l'ensemble des actions. Chaque point peut être représenté par un vecteur de dimension m.

Définition :

Un point Y est dit efficace s'il n'existe pas de point Z distinct de Y, tel que Z soit au moins aussi bon selon chacun des critères, et meilleur que Y selon au moins l'un d'entre eux.

Soit B l'ensemble des points réalisables : $B \subset R_m$
Soit $f_i(a_j)$ les fonctions des points a_j ; ces fonctions sont à maximiser.

Un point $a_j \in B$ sera dit "efficace" s'il n'existe pas de points $a_k \in B$ meilleur que a_j : ou encore :

$$f_i(a_j) \geq f_i(a_k) \quad \forall\ i \in I = \{1,2,\ldots.,m\}$$
$$l \in I \text{ tel que } fl(a_j) > fl(a_k)$$

On peut en déduire deux choses :

1°) Si a_j est un point optimum pour une fonction pondérée des critères :

$$g = \sum_i x_i\ f_i(a_j) \qquad \text{avec} \qquad x_i > 0 \qquad \forall\ i \in I$$

Alors a_j est un point efficace.

2°) De même, si les fonctions f_i sont convexes, ainsi que B, alors il existe m multiplicateurs $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ non négatifs et non tous nuls tels que a_j soit solution optimale pour la fonction objectif.

$$g(a_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \, f_i(a_j)$$

Les points efficaces de Pareto et les optimum des combinaisons linéaires à coefficients positifs de fonction convexe, sont les mêmes. (cf Fréhel.j [26])

4.3.3.2 Point de mire :

C'est le point de l'espace critère dont chaque composante est le maximum enregistré sur A pour le critère correspondant.
Soit $e_i(a_j)$ l'évaluation du critère C_i pour l'action a_j.

$$e^M{}_i = \text{Max} \{ e_i(a_j) \ ; \ \forall \ a_j \in A \}$$

Le point de mire sera donc le point de coordonnées :

$$P_M = (e^M{}_1, e^M{}_2, \ \ldots\ldots \ , e^M{}_m)$$

L'ensemble des vecteurs évaluateurs des actions, sera noté : E.

$$E = \{ e^j = (\ e_1(a_j), e_2(a_j), \ldots\ldots, e_m(a_j) \ ) \ ; \ \forall \ a_j \in A \}$$

Si le point P_M appartient à E : le problème est résolu !
Dans le cas contraire, nous devrons choisir le point le plus "proche" du point de mire. C'est pour cette raison que l'on a introduit la notion de vecteur regret.
Soit e^j un point de E ; le vecteur d'origine $e_i(a_j)$ et d'extrémité P_M sera appelé "vecteur regret", sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans R^m est :

$$e^M{}_i - e_i(a_j)$$

Comme distance, la méthode de minimax-regret prend la plus grande valeur absolue des différences de coordonnées entre deux points :

$$d(e^1,e^2) = \underset{i=1 \dashrightarrow m}{\mathrm{Max}} \quad | \; e_i(a_1) - e_i(a_2) \; |$$

Entre le point e^j et le point de mire la distance sera :

$$d(e^j,P_M) = \underset{i=1 \dashrightarrow m}{\mathrm{Max}} \quad | \; e_i(a_j) - P_M \; |$$

La méthode du minimax-regret consiste à rechercher l'action dont la plus grande composante du vecteur regret associé soit la plus petite possible.

4.3.3.3 Programmation linéaire : P.O.P :

Cet algorithme dérive de la méthode de minimax-regret. Il introduit la notion de "meilleur compromis" au lieu de meilleure solution au sens de l'optimum. Benayoun.R ; Tergny.J [06] ont créé la méthode P.O.P ; puis avec De montgolfier.J [07] l'algorithme de cette méthode : S.T.E.M, qui va être présenté.
Ils créent en premier le tableau des gains. Ce tableau contient les m points qui ont chacun une composante maximum. La ligne i ,correspondant au critère i, contiendra le point dont la $i^{iéme}$ composante est maximale. La diagonale de ce tableau donnera le point de mire.
Le programme linéaire suivant est ensuite effectué :

$$PL(p) \begin{cases} \min \alpha & i = 1,2,\ldots,m \\ \alpha \geq (M_i - e_i(X)).p_i \\ X \in B \; ; \; \alpha \in R \end{cases} \qquad (4.05)$$

Avec p_i poids accordé au critère i
M_i l'optimum pour le critère i
B l'ensemble des actions réalisables

Le terme p_i pourrait être appelé sensibilité du critère i vis à vis de l'ensemble des solutions trouvées.
Si pour le critère e_i, il y a de grandes différences entre actions ; on lui accordera un poids p_i fort.
En effet, si toutes les valeurs de la colonne i du tableau des gains (correspondant au critère i), sont proches de l'optimum M_i de cette colonne ; quel que soit le poids p_i relatif à ce critère, on aura un bon résultat (c.a.d peu éloigné de l'optimum).
Les auteurs proposent un choix du poids p :

$$p_i = n_i / \sum_{j=1}^{m} n_j$$

$$n_i = (M_i - m_i)/(M_i * \sqrt{(\sum_{j=1}^{n} (e_i(j))^2)})$$

Avec M_i, m_i le maximum et le minimum pour le critère i
p_i est l'écart entre le min et le max pour le critère i sur la somme des écarts.

Si le point trouvé plaît au décideur, le programme prend fin. Dans le cas contraire, il faut dégrader un critère pour améliorer les autres. Le décideur donne le critère et la valeur supportable de dégradation.

4.3.3.4 Le "goal programming" :

Le but n'est plus d'atteindre le point de mire ; mais un but (goal) donné. La formule (4.05) change car on ne connait pas le signe de ($M_i - e_i(X)$).p_i où M_i devient le but, noté G_i. Cette formule devient :

$$PL(p) \begin{cases} \min \alpha & i = 1,2,\ldots,m \\ \alpha \geq (G_i - e_i(X)).p_i \\ \alpha \geq (C_i(X) - G_i).p_i \\ \alpha \geq 0 \\ X \in B \; ; \; \alpha \in R \end{cases}$$

On détermine ainsi le vecteur X tel que PL soit vérifié quelque soit i $\in \{1,2,...,m\}$.

4.3.3.5 Le cône d'amélioration :

Soit V_g, le vecteur d'amélioration ; il est défini par tout vecteur de R^m ayant pour origine le point g tel que tous les points g' de ce vecteur soient préférés à g.
S'il n'existe pas de vecteur V_g, alors g est un optimum local. Tous les vecteurs V_g issus de g forment un cône K_g d'amélioration de g.

Soit B l'espace des actions réalisables
Si $B \subset K_g = \phi \Rightarrow$ g est un optimum local
Certaines procédures itératives utilisent cette notion (Geoffrion.A.M [29]). Elles construisent un vecteur d'amélioration particulier, en demandant au décideur un point meilleur que g.

Ceci peut être rapproché du taux de substitution pour le cas d'une fonction d'utilité U continue par rapport aux variables e_i. Le vecteur suivant lequel l'amélioration est la plus rapide, est le vecteur gradient de U au point g. Ce vecteur a pour composantes :

$$[\ \delta U / \delta e_1\ ,\ \delta U / \delta e_2\ ,\ \dots,\ \delta U / \delta e_m\ ]$$

Celles-ci sont inversement proportionnelles aux composantes du vecteur taux de substitution.
Le taux de substitution s'écrit : $\forall\ i,j \in [1..m]$

$$\tau^i_j = [\ (\delta U / \delta e_j)\ /\ (\delta U / \delta e_i)\ ]_g$$

Le gradient s'écrit :

$$\left| \frac{\delta U}{\delta e_j} \right| * \left| \frac{1}{\tau^1_j}\ ,\ \frac{1}{\tau^2_j}\ ,\ \dots\dots\ ,\ \frac{1}{\tau^m_j} \right|$$

Tout vecteur d'amélioration aura un produit scalaire avec le vecteur gradient positif.

4.3.3.6 conclusion :

Pour des données non quantifiables, on pourra regarder Giodano.j.l ; Sucquet.J.L [30]. Une comparaison de méthodes itératives a été faite par Wallenius.j [76].
Comme nous venons de le voir, les modèles à progression itérative conduisent difficilement à un classement de l'ensemble des actions. Ils ne tiennent compte ni de l'imprécision des évaluations, ni d'une notion de seuil. Comme pour les méthodes d'agrégation, la pondération est primordiale ; ce qui rend le choix difficile. C'est pour ces raisons que nous nous sommes tournés vers les méthodes de "surclassement".

4.3.4 Méthodes de surclassement :

4.3.4.1 Les méthodes Electres :

Une action "a" surclassera une action "b" si le décideur préfère "a" à "b". Il n'est pas toujours possible de déterminer cette préférence.

- Soit parce qu'il y a plusieurs décideurs
- Soit que les actions sont trop nombreuses
- Soit parce que le décideur n'arrive pas à comparer les actions.

Les méthodes du type Electre sont basées sur la notion de relation de surclassement.
Une action "a" surclassera une action "b" si pour la plupart des critères, "a" est préférée à "b" et pour les autres, "a" n'est pas nettement "moins bon" que "b".
Ces méthodes obligent le décideur à déterminer un poids pour chaque critère. Ce poids représente son importance relative.
Deux tests sont appliqués :

- Un test de concordance
- Un test de discordance

Le premier est basé sur la somme des poids des critères selon lesquels "a" est meilleure que "b".
Le second est basé sur la non appartenance à l'ensemble de discordance défini par le décideur.
La première méthode Electre I [67] consiste à déterminer un sous-ensemble $N \subset A$ d'actions dominantes. C'est à dire tel que toute action qui n'est pas dans N est surclassée par au moins une action de N.

La seconde méthode Electre II crée un préordre complet sur A. Elle se base sur deux préordres provenant des notions de surclassement faible S_f et fort S_F. Ces deux préordres sont comparés par le décideur qui peut ainsi bâtir son préordre final.

Enfin, la troisième méthode Electre III [66] a introduit en plus une représentation floue des préférences. Cette méthode est la plus proche de ce dont nous avons besoin. C'est à partir de ce modèle que nous avons bâti le nôtre. Nous allons vous présenter Electre III en détail.

4.3.4.2 Electre III :

L'imprécision de l'évaluation d'un critère a toujours posé de nombreux problèmes pour la résolution des systèmes à critères multiples. B.Roy a pour cette raison introduit la représentation floue des préférences. Il a créé un algorithme de classement appelé Electre III, basé aussi sur le concept de relation de surclassement. Aucune contrainte de transitivité ne sera exigée.

Le modèle Electre III se déroule en trois temps :
_ Construction d'une relation de surclassement floue
_ Construction de deux préordres complets
_ Comparaison de ces deux préordres et rangement final

1°) Pseudo-critère :

Soit $C = \{ c_1, c_2, \ldots\ldots, c_m \}$ l'ensemble des actions possibles et $F = \{ 1, 2, \ldots\ldots, m \}$

Soit a,b deux actions de A :

$\forall\ i \in F$ avec $k \in F$ et $i \neq k$

$c_i(a) = c_i(b)$ et il existe $k \in F$ tel que :

$c_k(a) - c_k(b) = u$

Dans le cas d'un critère vrai, il n'y a que deux solutions

$u = 0$: Alors l'action a est indifférente à l'action b

$u > 0$: Alors l'action a est strictement préférée à b

(le cas $u < 0$ n'est pas traité car il suffit d'intervertir "a" avec "b".)

Ceci ne tient pas compte des erreurs possibles sur l'évaluateur c_k. B.Roy a utilisé la notion de pseudo-critère. Il crée deux seuils : le seuil de préférence "s" et le seuil d'indifférence "q".

La relation de préférence devient :

$0 \leq u \leq q$: a est indifférente à b

$q < u \leq s$: a est faiblement préférée à b

$s < u$: a est strictement préférée à b

On voit qu'entre l'indifférence et la préférence stricte il y a maintenant une préférence faible.
Les deux seuils q et s sont différents suivant le critère utilisé. Par définition, un vrai critère sera un critère dont la relation de préférence associée, aura les deux seuils s et q nuls.

B Roy définit quatre situations fondamentales exclusives :
_ I : L'indifférence symétrique réflexive
_ P : La préférence stricte antisymétrique irréflexive
_ Q : La préférence faible antisymétrique irréflexive
_ R : L'incomparabilité irréflexive

Le surclassement d'une action "a" par une action "b" se fera si : "Les données disponibles (principalement $\underline{c}$(a) et $\underline{c}$(b)), compte tenu de leur niveau de signification, justifie la proposition '"a" est au moins aussi bon que "b"'.
La relation de surclassement, notée S_A, sera donc la réunion des trois relations précédemment définies : I,Q,P (S_A = I U Q U P), ce sera la relation de surclassement triviale.
L'apport de cette méthode vient de la possibilité d'accepter plus ou moins de risques dans le surclassement par la création d'une relation de surclassement floue S^d. Cette relation associe à tout couple d'actions (a,b) un nombre d(a,b) qui définit le degré de surclassement de "a" par "b". Il permet de quantifier la plus ou moins grande crédibilité du surclassement de "b" par "a". Ce degré de surclassement est bâti à partir d'un indice de concordance C(a,b) et d'un indice de discordance D_i(a,b).

2°) Indice de concordance :

Définition du degré de crédibilité spécifique : $d_i(a,b)$

Dans le cas d'une formulation simple, on obtient :

_ si $s_i \neq q_i$

$$d_i(a,b) = \frac{s_i - \mathrm{Min}(\ (c_i(a) - c_i(b))\ ,\ s_i\ )}{s_i - \mathrm{Min}(\ (c_i(a) - c_i(b))\ ,\ q_i\ )}$$

_ si $s_i = q_i$

$$d_i(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } c_i(a) \leq c_i(b) + q_i \\ 0 & \text{lorsque } c_i(a) > c_i(b) + q_i \end{cases}$$

Soit p_i les poids relatifs à chaque critère, la concordance s'écrit :

$$C(a,b) = \sum_{i \in F} p_i\ d_i(a,b)$$

avec :

$$\sum_{i \in F} p_i = 1$$

La concordance sera maximum ($C(a,b) = 1$) si quelque soit le critère, le degré de crédibilité spécifique est égal à un.

3°) L'indice de discordance :

On appélera "seuil de véto" V_i la valeur de $(c_i(a) - c_i(b))$ à partir de laquelle il sera important de refuser toute crédibilité au surclassement de "a" par "b". Ce véto permet de rejeter le surclassement quelques soient les résultats obtenus dans les autres critères.

En prenant la formulation suivante, nous obtenons :

$$D_i(a,b) = \mathrm{Min}\ [\ 1\ ,\ \max\ (\ 0\ ,\ \frac{c_i(a) - c_i(b) - s_i}{V_i - s_i}\ )\ ]$$

4°) Degré de crédibilité :

Ce degré de crédibilité est construit à partir des deux préordres définis ci-dessus : les indices de concordance et de discordance.

définition :

si $\{ i \,/\, i \in F,\ D_i(a,b) > C(a,b) \} = \phi$ alors :

$$d(a,b) = C(a,b)$$

si $\{ i \,/\, i \in F,\ D_i(a,b) > C(a,b) \} \neq \phi$ alors :

$$d(a,b) = \left[\prod_{i \in F} \frac{1 - D_i(a,b)}{1 - C(a,b)} \right] * C(a,b)$$

Le seuil de discrimination s(x) va être introduit de manière à différencier deux valeurs du degré de crédibilité. $x \in [0,1]$ si $d(a,b) = x$ et $d(b,a) = x - y$ avec $y \leq s(x)$, alors le surclassement de a par b n'est pas plus crédible que celui de b par a. En effet la différence y n'est pas suffisante pour décider du surclassement.

La fonction seuil doit vérifier la condition suivante :

$$\frac{s(y) - s(y')}{y - y'} \geq -1 \qquad \forall\, y, y'$$

5°) formulation de l'algorithme :

Définitions :

soit B une partie de A, le niveau de séparation dans B de la valeur y est défini par :

$$d_B^{\,y} = \begin{cases} \max d(a,b) & \text{si } \Phi = \{ (a,b) \mid a,b \in B,\ d(a,b) < y \} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \Phi = 0 \end{cases}$$

C'est le maximum du degré de crédibilité atteint dans B juste inférieure à y.

La y qualification de a dans B $q\Big[_{B}^{y}(a)$ est le nombre d'actions que a surpasse dans B moins celui qui la surpasse et ce avec un degré de crédibilité strictement supérieur à y.

$$q\Big[_{B}^{y} = \left| \{b \in B, d(a,b) > y,\ d(a,b) > d(b,a)+s(d(a,b))\} \right| - \left| \{b \in B, d(b,a) > y,\ d(b,a) > d(a,b)+s(d(b,a))\} \right|$$

$$y_0[B] = \max_{a,b \in B} d(a,b)$$

$$y_1 = d\Big[_{B}(y0[B] - s(y0[B]))$$

$$\underline{p} = \max_{a \in B} q\Big[_{B}^{y1}(a) \qquad \underline{q} = \min_{a \in B} q\Big[_{B}^{y1}(a)$$

L'algorithme va constituer un ensemble de parties de A, qui seront classées de la meilleure à la pire au sens du surclassement des actions et grâce au degré de crédibilité. Cette ensemble de parties sera la "distillation descendante". Il donnera un classement qui sera un préordre complet. De même, l'ensemble des parties classées de la pire à la meilleure sera la "distillation montante". Ce sera le deuxième préordre complet.

a) Distillation descendante :

$$D_1 = \{ a |\ a \in B,\ q\Big|_{B}^{y1}(a) = \underline{p} \}$$

$$y_{k+1} = d\Big[_{Dk}(yk - s(yk))$$

$$D_{k+1} = \{ a |\ a \in D_k,\ q\Big[_{Dk}^{yk+1}(a) = \underline{p} \}$$

$$\text{avec } \underline{p} = \max_{a \in D_k} q\Big[_{Dk}^{yk+1}(a)$$

b) Distillation montante :

il suffit de remplacer p par q

c) Fin de la distillation :

Elle aura lieu lorsque : $y_k = 0$ ou $| D_k | = 1$

Le préordre complet intermédiaire entre les distillations montante et descendante pourra être construit. Il sera d'autant plus significatif que les deux préordres seront voisins.

Les modèles qui viennent d'être présentés, sont de type général. Ils s'appliquent sur tous les systèmes et ne tiennent pas compte de leur spécificité. De plus, le décideur doit fournir une pondération des critères la plus précise possible.
Notre démarche est différente car elle vise à créer un modèle pour un système donné, ici : la Bourse.
Dans le paragraphe suivant, nous allons aborder ce modèle décisionnel que nous avons bâti, en essayant de tenir compte de la nature du système économique.

4.4 Modèle décisionnel :

4.4.1 Introduction :

Dans le chapitre précédent, nous avons élaboré un modèle représentant le plus fidèlement la réalité. Puis en tenant compte de la nature du système, c'est à dire en intégrant la notion de nombre flou et de seuil, nous avons bâti un modèle de préférence. Celui-ci nous a permis d'obtenir m préordres provenant des m critères. Ces préordres sont des classements des n actions de l'ensemble A. Il nous reste maintenant à construire un préordre résultant des m premiers, cette opération sera appelée "modélisation décisionnelle".

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, il existe quatre grandes classes de modèles de décisions. Pour bâtir le notre, nous nous sommes inspirés plus particulièrement de trois d'entre eux : la hiérarchisation et le surclassement et la fonction d'utilité. Quelque soit la méthode employée, le décideur doit classer les critères. Cela ne pose en général que peu de problèmes. Mais il doit souvent donner un poids relatif à chaque critère, ce qui souvent est très imprécis.

Pour notre système, les investisseurs dégagent facilement une hiérarchisation des critères. Nous avons donc utilisé la structure de la hiérarchisation. Pour introduire la notion de Véto et donc permettre l'inversion d'un classement par un critère peu important, nous avons utilisé une structure voisine du surclassement et de la fonction d'utilité.

Notre méthode est basée sur la comparaison de deux vecteurs score relatifs à deux critères. Ce vecteur score donne le classement de chaque action pour le critère C_i. Si les m vecteurs score étaient identiques, le classement final serait trivial. En général, il n'en est rien. Nous allons définir un classement à partir de deux classements contradictoires.

4.4.2 Présentation du modèle :

L'ensemble C des critères a été ordonné par le décideur. On obtient un classement sur l'ensemble des critères, noté C'. Dans cet ensemble, le critère c'_i est plus important que le critère c'_{i+1}.

$$C' = \{ c'_1, c'_2, \ldots\ldots, c'_m \}$$

Deux vecteurs score n'ont pas forcément les mêmes minimum et maximum. Aussi pour pouvoir les comparer, nous avons normalisé ces vecteurs score. Les nouveaux vecteurs s'appelleront "$v_{somi}(a)$" :

$$v_{somi}(a) = \frac{Sc_i(a) - v_{somi\ min}}{v_{somi\ max} - v_{somi\ min}}$$

$v_{somi\ max}$ et $v_{somi\ min}$ sont les maximum et minimum des composantes du vecteur score relatif au critère i.

Soit a et b deux actions de l'ensemble A, nous pouvons définir la différence de classement entre l'action a et b pour le critère i (noté D_i).

$$D_i = v_{somi}(a) - v_{somi}(b)$$

Si les critères i et i+1 sont contradictoires alors :

$D_i > 0 \quad \Rightarrow \quad a\ P\ b$

et $D_{i+1} < 0 \quad \Rightarrow \quad b\ P\ a$

Si nous appliquons la méthode hiérarchique, l'action a sera préférée à l'action b. Il a été montré la rigidité de ce raisonnement. Pour résoudre ce dilemme, nous introduisons le coefficient de préférence CPi+1, qui est le coefficient relatif aux critères i et i+1. Il doit satisfaire aux deux contraintes suivantes :

1°) $CP_{i+1} > CP_{i+2} \quad \forall\ i \in \{1,2,\ldots,m-2\}$

2°) $CP_{i+1} \leq 1 \quad \forall\ i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$

Pour deux critères i et i+1, on peut sans problèmes trouver la préférence entre a et b, et ce, pour cinq cas des valeurs de Di et Di+1 :

$Di > 0$ et $Di+1 \geq 0$ => a P b
$Di < 0$ et $Di+1 \leq 0$ => a NP b
$Di = 0$ et $Di+1 = 0$ => a I b
$Di = 0$ et $Di+1 > 0$ => a P b
$Di = 0$ et $Di+1 < 0$ => a NP b

Il reste deux cas non triviaux à résoudre :

$Di > 0$ et $Di+1 < 0$ ou $Di < 0$ et $Di+1 > 0$

Le résultat de l'équation suivante va fournir la solution.

$$Di + Di+1 * CPi+1$$

Trois cas possibles:

$Di + Di+1 * CPi+1 > 0$ => a P b
$Di + Di+1 * CPi+1 < 0$ => a NP b
$Di + Di+1 * CPi+1 = 0$ => a I b

Cette manière de composer un classement à partir de deux classements a comme propriété l'absence d'effet Condorcet. C'est à dire que : si une action "a" est préférée à une autre action "b" pour deux critères et que "b" est elle-même préférée à une action "c" : alors "a" est préférée à "c" dans le classement final résultant des deux classements. Autrement dit : a P b et b P c => a P c
On conserve la transitivité de la préférence de chaque classement.
Ceci est dû à la forme de fonction d'utilité de notre méthode, or la fonction d'utilité conserve la transitivité.

L'intérêt de l'emploi d'une telle méthode par rapport à une fonction d'utilité réside dans la possibilité d'y adjoindre un véto.
Celui-ci pourrait être appliqué par la formule suivante :

si signe(Di+1) $\neq$ signe(Di) et Di+1 > Véto

Alors la préférence du critère i sera inversée quelque soit la valeur de Di. Il sera intéressant de montrer ce que devient la transitivité de la préférence avec ce véto.

Grâce à ce coefficient de préférence CPi, nous avons pu à partir de deux classements, construire des relations liant tous les couples d'actions de A x A. Il y a donc n x n couples d'actions qui appartiennent soit à la relation P, la relation NP ou la relation I.

En codant de la même manière les relations, c'est à dire 1 pour la préférence, 0 pour l'indifférence, -1 pour la non-préférence, on obtient une nouvelle matrice de préférence P_i.
La somme des colonnes de cette matrice donnera le vecteur score Sco_i qui, normalisé, fournira le vecteur v_{si}.

Algorithme :

Soit n le nombre d'actions et m le nombre de critères soit E_i la matrice des évaluateurs des n actions pour le critère i. Elle est composée de deux vecteurs colonnes:

e_i^+ et e_i^-

Chaque matrice E_i donnera par application du modèle de préférence (MP), une matrice de préférence Pc_i. Chaque matrice de préférence donnera un vecteur score Sc_i puis par normalisation un vecteur v_{somi}.

$$E_1 \xrightarrow{\text{modèle de préférence(MP)}} Pc_1 \xrightarrow{\text{Somme colonnes}} Sc_1 \xrightarrow{\text{Normalisation}} v_{som1}$$

$$E_2 \xrightarrow{\hspace{3cm}} Pc_2 \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} Sc_2 \xrightarrow{\hspace{2cm}} v_{som2}$$

$$\left.\begin{matrix} v_{som1} \\ v_{som2} \end{matrix}\right] \xrightarrow[\text{MP}]{\text{modèle de décision (MD)}} P_1 \longrightarrow Sco_1 \longrightarrow v_{s1}$$

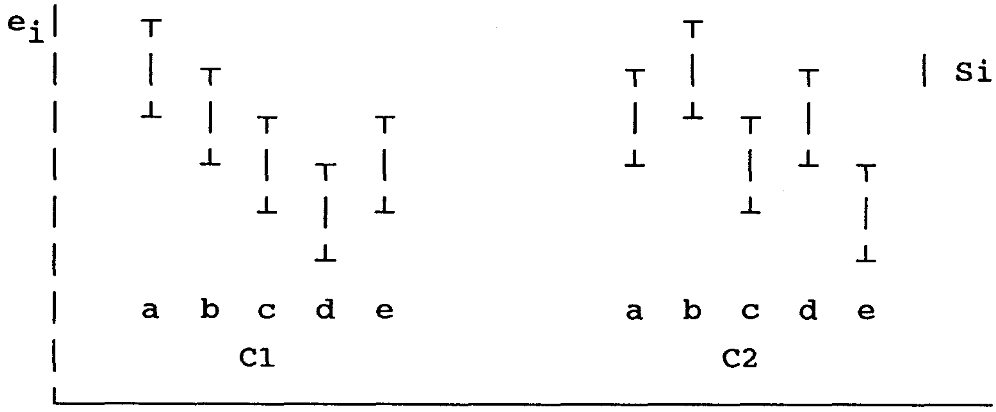
$$E_3 \xrightarrow{\hspace{3cm}} Pc_3 \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} Sc_3 \xrightarrow{\hspace{2cm}} v_{som3}$$

$$\left.\begin{matrix} v_{s1} \\ v_{som3} \end{matrix}\right] \xrightarrow{\text{MD}} P_2 \longrightarrow Sco_2 \longrightarrow v_{s2}$$

v_{s2} sera comparé à v_{som4} et donnera v_{s3}, et ainsi de suite jusqu'à $v_{s\ m-2}$ qui sera comparé à $v_{som\ m}$ et donnera le vecteur final $v_{s\ m-1}$. En divisant chaque composante de ce vecteur par la somme des composantes, on obtiendra la répartition de chaque action dans le portefeuille.

Exemple :

Soit les actions a,b,c,d,e $\in$ A,et C1,C2 deux critères nous avons :



Nous allons appliquer à cet exemple le modèle de préférence. On obtient deux matrices de préférence Pc_1 et Pc_2. La somme de leurs lignes donne les deux vecteurs score Sc_1 et Sc_2. IL ne reste plus qu'à normaliser ces deux vecteurs pour obtenir les vecteurs normalisés v_{som}.

$$Pc_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad Sc_1 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \quad v_{som1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0.6 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{vmatrix}$$

$$Pc_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad Sc_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix} \quad v_{som2} = \begin{vmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 0.4 \\ 0.8 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Les vecteurs v_{som1} et v_{som2} donnent le classement des cinq actions pour les critères 1 et 2. On voit immédiatement que ces deux classements sont contradictoires. Pour obtenir un classement final, nous allons employer le modèle de décision.

Les deux vecteurs score normalisés vont donner la matrice de préférence P_1 suivante : (CP1 sera pris à 1)

$$P_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad Sco_1 = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{vmatrix} \qquad v_{s1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0.75 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 0 \end{vmatrix}$$

La répartition des cinq actions dans le portefeuille sera la suivante :

a = 1/2.5 = 0.4 : b = 0.75/2.5 = 0.3
c = 0.25/2.5 = 0.1 : d = 0.5/2.5 = 0.2 : e = 0

Pf = (0.4 , 0.3 , 0.1 , 0.2 , 0)

Dans cet exemple les deux critères ont la même importance. Si le critère 2 était de moindre importance, on aurait eu un coefficient CP1 inférieur à 1. Nous pourrions prendre par exemple un coefficient CP1 égal à 0.5. Dans ce cas, en prenant le même exemple, nous aurions :

$$P_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad Sco_1 = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \end{vmatrix} \qquad v_{s1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0.75 \\ 0.375 \\ 0.375 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le critère 1 a maintenant plus d'importance que le critère 2, le classement résultant va donc changer.
On obtient la répartition suivante :

Pf = (0.4 , 0.3 , 0.15 , 0.15 , 0)

Les actions c et d ont maintenant la même importance dans le portefeuille.

4.4.3 Résultats des simulations :

Pour nous rendre compte de la validité de ces modèles, nous avons effectué différentes simulations sur ordinateur. Elles ont toutes été faites avec des données réelles prises sur le marché boursier Parisien.

4.4.3.1 Précision de la méthode :

Nous avons pris un grand nombre d'actions du marché à terme et du marché au comptant. (au total 300 actions)
La précision du vecteur score dépend du nombre d'actions. En effet, la valeur des composantes de ce vecteur varie au maximum de n-1 à -n+1, soit une excursion de 2n-2. Le vecteur score normalisé (v_{somi}) aura une excursion de 0 jusqu'à 1, avec une précision de :

$1/(v_{somi\ max} - v_{somi\ min})$ soit au mieux :
$1/\ 2n - 2$ dans notre cas n=300
Cela nous donne une précision de : 1/598 = 0.167 °/°

4.4.3.2 Critère de réussite de l'algorithme :

Le but de tout investisseur est d'obtenir le maximum de gains avec son portefeuille. Cela sous-entend qu'il devra choisir la méthode lui donnant le rendement optimal.
Le critère de réussite de l'algorithme est donc le rendement. Il reste à le comparer à celui des autres portefeuilles provenant de modèles différents. Il existe très peu de méthodes théoriques de création d'un portefeuille. Actuellement, les décideurs l'élaborent grâce à leur expérience.
Markowitz (cf 3.2.3.2) a été le premier à proposer une méthode, celle-ci est basée sur la minimisation du risque de diversification.
Notre modèle intègre cette notion et par cela englobe la méthode de Markowitz.

Tous les gestionnaires de portefeuilles essaient d'obtenir un rendement supérieur à un rendement de référence : celui du marché. Plusieurs indices tentent de suivre le marché, l'indice INSEE et l'indice CAC. Le plus utilisé étant le CAC, nous le prendrons en référence. Celui-ci prend un petit ensemble d'actions comme référence du marché, en pondérant leur importance suivant leur capitalisation boursière.
L'autre point de repère pourrait être la valeur moyenne des rendements. Il constituerait l'équivalent de l'indice CAC, mais en prenant toutes les actions et en leurs accordant la même importance.

$$Rcac(t) = \frac{CAC_{i+t} - CAC_i}{CAC_i}$$

Avec CAC_i l'indice CAC à l'instant i
Rcac(t) le rendement de l'indice CAC pour une durée de t.
Les investisseurs ont trois sortes de placement :
- Le court terme (semaine)
- le moyen terme (mois)
- le long terme (année)

Pour tenir compte de leurs actifs, nous avons créé trois portefeuilles : semaine, mois, année. Nous nous intéresserons au rendement semaine (rps) du premier, au rendement mois (rpm) du second, au rendement année (rpa) du troisième.
Les rendements CAC pour ces trois durées sont :

Rcac(semaine) = - 1.96 °/°
Rcac(mois) = - 6.925 °/°
Rcac(année) = -15.636 °/°

Les rendements moyens pour ces trois durées sont :

Rmoy(semaine) = 1.275 °/°
Rmoy(mois) = - 3.224 °/°
Rmoy(année) = - 5.134 °/°

Il est intéressant de noter l'écart-type des rendements :
$sigma_{rs}$ = 4.45°/° $sigma_{rm}$ = 8.12°/° $sigma_{ra}$ = 21.93°/°

4.4.3.3 Bruits sur les rendements :

Les méthodes de l'analyse technique donnent des erreurs sur les évaluateurs de critères. Ces erreurs sont quantifiées par la longueur des domaines d'incertitudes où se trouvent les rendements. Nous allons simulé ce domaine par l'introduction d'une variable aléatoire (produite par la fonction random du pascal). Cette méthode permettra d'étudier différents éléments en fonction du bruit.

Le premier essai effectué a été la construction d'un portefeuille à partir d'un seul critère et ce, pour différents bruits. On va calculer le rendement des trois portefeuilles :

rps : rendement du portefeuille pour une semaine

rpm : rendement du portefeuille pour un mois

rpa : rendement du portefeuille pour un an

Les critères pris pour le portefeuille semaine, mois, an, sont respectivement le rendement des actions sur une semaine, un mois, un an. Le seuil Si pris est égal à zéro.

L'amplitude maximale du bruit varie de la façon suivante :

0.4 --> 4.8°/° 0.8 --> 9.6°/° 2.2 --> 26.4°/°

rps:	0.07574	rpm:	0.07208	rpa:	0.07536
rps:	0.07555	rpm:	0.07229	rpa:	0.07512
rps:	0.07552	rpm:	0.07124	rpa:	0.07452
rps:	0.07516	rpm:	0.07044	rpa:	0.07423
rps:	0.07400	rpm:	0.06799	rpa:	0.06699
rps:	0.07273	rpm:	0.06871	rpa:	0.06803
rps:	0.07365	rpm:	0.06173	rpa:	0.06366
rps:	0.06926	rpm:	0.05767	rpa:	0.05699
rps:	0.07178	rpm:	0.06393	rpa:	0.06078
rps:	0.06840	rpm:	0.05720	rpa:	0.06739
rps:	0.06150	rpm:	0.04952	rpa:	0.05264
rps:	0.06397	rpm:	0.04546	rpa:	0.05541

La première remarque est que le rendement minimum (bruit très faible) est bien plus élevé que le rendement CAC. Ce résultat n'est pas étonnant, car le bruit étant faible, cela revient à connaître pratiquement les rendements futurs des titres.

La deuxième remarque est que le rendement diminue avec l'accroissement du bruit. Là encore, le résultat était prévisible car nous obtenons des estimations de rendement de plus en plus erronées.

4.4.3.4 Etude du seuil Si :

Dans le modèle de préférence, le seuil Si est utilisé pour pallier aux perturbations dues à des événements futurs. Il permet de se donner une marge de certitude du surclassement d'une action par une autre. Il est néanmoins conseillé de ne pas prendre un trop grand seuil, car seules les meilleures actions seraient retenues dans le portefeuille. Cela entraînerait un poids trop important de ces actions et de ce fait diminuerait la diversification du portefeuille.

Nous avons étudié le comportement des rendements lorsque le seuil Si varie et ce, pour différents niveaux de bruit.

Bruit de 0°/° :

Si=0.0	rps:	0.07575	rpm:	0.07255	rpa:	0.07630
Si=2.0	rps:	0.07642	rpm:	0.07301	rpa:	0.07680
Si=4.0	rps:	0.07901	rpm:	0.07383	rpa:	0.07779
Si=6.0	rps:	0.08266	rpm:	0.07491	rpa:	0.07867
Si=8.0	rps:	0.08463	rpm:	0.07575	rpa:	0.07951
Si=10.0	rps:	0.08565	rpm:	0.07681	rpa:	0.08053
Si=12.0	rps:	0.08465	rpm:	0.07832	rpa:	0.08196
Si=14.0	rps:	0.07791	rpm:	0.08101	rpa:	0.08458
Si=16.0	rps:	0.08950	rpm:	0.08175	rpa:	0.08552
Si=18.0	rps:	0.10415	rpm:	0.08724	rpa:	0.09078
Si=20.0	rps:	0.11795	rpm:	0.08711	rpa:	0.09065
Si=22.0	rps:	0.13122	rpm:	0.09457	rpa:	0.09798

Comme prévu, le rendement croît avec le seuil.

Bruit de : 1°/° 2°/° 5°/°

Si=0.0	rps:	0.07571	rpm:	0.07174	rpa:	0.07457
Si=0.5	rps:	0.07574	rpm:	0.07185	rpa:	0.07509
Si=1.0	rps:	0.07579	rpm:	0.07193	rpa:	0.07476
Si=1.5	rps:	0.07597	rpm:	0.07238	rpa:	0.07565
Si=2.0	rps:	0.07625	rpm:	0.07226	rpa:	0.07553
Si=2.5	rps:	0.07659	rpm:	0.07275	rpa:	0.07602
Si=3.0	rps:	0.07710	rpm:	0.07304	rpa:	0.07631
Si=3.5	rps:	0.07780	rpm:	0.07323	rpa:	0.07650
Si=4.0	rps:	0.07872	rpm:	0.07294	rpa:	0.07623
Si=4.5	rps:	0.07983	rpm:	0.07334	rpa:	0.07664
Si=5.0	rps:	0.08066	rpm:	0.07333	rpa:	0.07659
Si=5.5	rps:	0.08171	rpm:	0.07368	rpa:	0.07750

Le rendement croît toujours avec le seuil, mais dans de plus faibles proportions. Il faudra donc choisir pour Si un compromis entre une espérance de fort gain et un faible risque de diversification.

4.4.3.5 Etude du coefficient de préférence CPi :

Le modèle de décision repose sur l'amélioration du classement par le premier critère, grâce à l'adjonction d'un classement provenant d'un autre critère.
Le second critère (ainsi que les autres) palliant le défaut dû aux bruits par une information supplémentaire.

Nous avons voulu tester le modèle en ajoutant aux critères techniques le critère "Béta". Deux portefeuilles sont testés avec chacun deux critères ; pour le portefeuille moyen terme : le rendement mois et le béta, et pour le portefeuille long terme : le rendement année et le béta. Le classement dû aux rendements sera plus ou moins modifié suivant la valeur du coefficient de préférence.
L'évaluateur du critère béta est une variable statistique. On peut donc le considérer comme une variable bruité. Selon la répartition de ce bruit, on peut, soit nettement améliorer le classement, soit nettement le détériorer.
Sur un grand nombre de tests, on ne devrait avoir pratiquement que des améliorations.

Afin de diminuer le nombre de variables, le seuil Si sera pris égal à zéro. Dans nos tests, nous nous sommes placés à un moment où le marché était baissier. Statistiquement, les titres qui, durant cette période, ont eu un bon rendement sont ceux qui avaient un faible béta.

L'évaluateur du critère béta retenu est le suivant :

eva_béta(a) = béta max + béta min - béta(a)

avec béta max étant le maximum de tous les béta

béta min étant le minimum de tous les béta

eva_béta étant l'évaluateur du critère béta(a)

Les tests ont été faits pour CPi variant de 0 --> 1 et pour des bruits différents.

Sur l'ensemble des tests réalisés, nous présentons des exemples significatifs :

Avec peu de bruit :

		2°/°		5°/°
Cli:0.00	rpm:	0.07001	rpa:	0.25782
Cli:0.10	rpm:	0.07081	rpa:	0.25985
Cli:0.20	rpm:	0.07144	rpa:	0.25876
Cli:0.30	rpm:	0.07196	rpa:	0.25817
Cli:0.40	rpm:	0.07185	rpa:	0.25492
Cli:0.50	rpm:	0.07180	rpa:	0.25491
Cli:0.60	rpm:	0.07173	rpa:	0.25477
Cli:0.70	rpm:	0.07167	rpa:	0.25013
Cli:0.80	rpm:	0.06943	rpa:	0.24940
Cli:0.90	rpm:	0.06934	rpa:	0.24864
Cli:1.00	rpm:	0.06929	rpa:	0.24861

Avec un bruit moyen :

		8°/°		22°/°
Cli:0.00	rpm:	0.05113	rpa:	0.23031
Cli:0.10	rpm:	0.05314	rpa:	0.22898
Cli:0.20	rpm:	0.05347	rpa:	0.23517
Cli:0.30	rpm:	0.05455	rpa:	0.23968
Cli:0.40	rpm:	0.05635	rpa:	0.23986
Cli:0.50	rpm:	0.05644	rpa:	0.23955
Cli:0.60	rpm:	0.06508	rpa:	0.24905
Cli:0.70	rpm:	0.06330	rpa:	0.24930
Cli:0.80	rpm:	0.06330	rpa:	0.25130
Cli:0.90	rpm:	0.06904	rpa:	0.25083
Cli:1.00	rpm:	0.06899	rpa:	0.25068

Dans la grande majorité des essais, on remarque une amélioration d'autant plus grande que le bruit est important (comme sur l'exemple précédent). Ceci est parfaitement justifié par le fait que plus le bruit est important, plus on s'éloigne des valeurs réelles de rendement et plus l'information sur le béta est appréciable. Plus le bruit est important, plus le coefficient CPi devra être élevé.

4.5 Conclusion :

Nous espérons que le modèle de décision que nous avons introduit permettra avec une approche plus théorique la formation d'un portefeuille d'actions et donnera aux investisseurs un outil mathématique mieux adapté à ce marché financier qu'est la bourse.
Les différents résultats que les tests ont montrés, permettent d'espérer la bonne tenue d'un portefeuille créé grâce à ce modèle.

CONCLUSION

Les différentes modélisations (du processus, de préférence, décisionnelle) que nous avons élaborées, ont permis d'effectuer un choix entre deux actions et d'effectuer un classement de l'ensemble des actions. Ce classement représente un "bon compromis" pour le décideur. De plus, nous avons montré l'intérêt de cette méthode pour le rendement d'un portefeuille d'actions. On a pu vérifier que ce dernier était supérieur à celui du marché.

Il serait intéressant de pouvoir expérimenter sur ce système la théorie des jeux dans l'espoir d'améliorer encore la modélisation de ce processus. De même, le modèle décisionnel serait certainement enrichi si l'on pouvait y introduire la classification automatique des actions en groupes de caractéristiques équivalentes. Enfin, l'application du modèle "Condorcet" à la bourse pourrait se révéler intéressante.
Il est fort probable que le développement de ces axes de recherche améliorerait la possibilité de choix du décideur.

Bibliographie

1 **ALTMAN.E ; JACQUILLAT.B ; LEVASSEUR.M**
La stabilité du coefficient bêta
ANALYSE FINANCIERE
n° 16 pages :0043-0054 Janvier 1974

2 **BAAS.Sjoerd.M ; KWAKERNAAK.Huibert**
Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using
AUTOMATICA
pages :0047-0058 1977

3 **BAPTISTELLA.LFB ; OLLERO.A**
Fuzzy methodologies for interactive multicriteria optimizati
IEEE-TRANSACTIONS ON SYSTEMS,MAN AND
n° 7 pages :0355-0365 1980

4 **BATISTELLA L.F.B**
Contribution à l'optimisation multicritère de système dynam.
THESE 1980
1980

5 **BELLMAN.R.E ; ZADEH.L.A**
Decision-making in fuzzy environment
MANAGEMENT SCIENCE
n° 4 pages :0141-0164 Décembre 1970

6 **BENAYOUN R ; TERGNY J**
Critères multiples en programmation Mathématique:
R.i.r.o
n° 2 pages :0031-0056 1969

7 **BENAYOUN R ; de MONTGOLFIER J; TERGNY J**
Linear programming with multiple objective functions:STEM
MATHEMATICAL PROGRAMMING
n° 1 pages :0366-0375 Décembre 1971

8 **BERGE.C**
Graphes et hypergraphes
DUNOT
1973

9 **BERNARD.G ; BESSON.M.L**
Douze méthodes d'analyse multicritère
R.I.R.O Verte
n° 3 pages :0019-0066 1971

10 **BOWER R.S ; BOWER D.H**
Risk and valuation of common stock.
JOURNAL OF POLITICAL ECONOMIE
pages :0349-0363 Mai 1969

11 **BRAGARD L**
Objectifs discordants et solutions efficaces ...
AIDE A LA DECISION MULTICRITERE
pages :0043-0049 Mars 1976

12 **BREALEY A.RICHARD**
Risques et profits a la Bourse
DUNOT
1972

13 **BROYLES J.E**
Politique de gestion de portefeuille dans un marché financi.
ANALYSE FINANCIERE
pages :0034-0038 Janvier 1974

14 **COB**
Les facteurs de variations des cours de Bourse
DOCUMENTATION FRANCAISE
1976

15 **COLSON G**
Toward a bipolar théorie of risk
EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONEL RESEARCH
n° 6 pages :0352-0359 1981

16 **DE LA BRUSLERIE H;DE LATTRE H**
Analyse chartiste et gestion du risque de change
ANALYSE FINANCIERE
n° 62 pages :0047-0057 Mars 1985

17 **DE MONTGOLFIER.JEAN ; BERTIER.PATRICE**
Approche multicritère des problèmes de décision
AFCET-ED HOMMES ET TECHNIQUES
1978

18 **DIDAY.E ; LEMAIRE.J ; PONGET.J ; TESTU.F**
Eléments d'analyse de données
DUNOT
1982

19 **DOMBI J**
Basic concepts for theorie of evaluation ...
EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONEL RESEARCH
n° 10 pages :0282-0293 1982

20 **DUBOIS.D ; PRADE.H**
Operations on fuzzy numbers
INTERNATIONAL JOURNAL OF SYSTEMS SCIENCE
n° 6 pages :0613-0626 1978

21 **DUBOIS.Didier ; PRADE.Henri**
Fuzzy real algebra: some results
FUZZY SET AND SYSTEMS
n° 2 pages :0327-0348 1979

22 **FAMA E**
Portfolio décisions and security prices
BASIC BOOKS
1976

23 **FERY CHRISTIAN**
La mesure des perform. et le contrôle des gérants de Port.
ANALYSE FINANCIERE
n° 11 pages :0018-0030 Avril 1972

24 **FISHBURN.Peter.C**
Lexicographic orders,utilities and decision rules : a survey
MANAGEMENT SCIENCE
n° 11 pages :1442-1471 Juillet 1974

25 **FOURGEAUD ; LENCLUD ; SENTIS**
Critère de choix en avenir incertain
R.I.R.O
n° 14 pages :0009-0020 1968

26 **FREHEL J**
Problèmes multicritères : Théorie de la domination de Yu
METRA
n° 1 pages :0047-0057 1974

27 **GAL T**
A general method for determining the set of efficient sol.
EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONEL RESEARCH
n° 1 pages :0307-0322 1970

28 **GALESNE A**
Performence et validité de la méthode des filtres
PROCEEDING de l'association Européenne
pages :057-071 Juin 1975

29 **GEOFFRION Arthur.M**
Proper efficiency and the theory of vector maximization
JOURNAL OF MATHMATICAL ANALYSIS AND APP
n° 22 pages :0618-0630 1968

30 **GIORDANO JL ;SUQUET JC**
Une procédure multicritère interactive adaptée a la saisie
R.A.I.R.O recherche opérationnelle
n° 2 pages :0181-0205 Mai 1978

31 **HAIMES.Yacov.Y ; CHANKONG.Vira**
KUHN-TUCKER multipliers as trade-offs in multiobjective ...

pages :1063-1072 1982

32 **HAMON J**
Application d'un modèle de moyennes mobiles
REVUE DE SCIENCE FINANCIERE
n° 3 pages :0669-0694 Octobre 1974

33 **HAMON JAQUES**
Prévision des cours boursiers et méthode "points et croix"
ANALYSE FINANCIERE
pages :0024-0037 Mars 1975

34 **HOLT CHARLES C**
The influence of growth duration on share prices
JOURNAL OF FINANCE
n° 3 pages :0465-0475 Septembre 1962

35 **JACQUET-LAGREZE E**
De la logique d'agrégation de critères à une logique ...
CAHIER DU LAMSADE:Univers.Paris-Dauphine
n° 18 pages :0001-0023 1978

36 **JACQUET-LAGREZE E ;ROY B**
Aide a la décision multicritère et systèmes relationels
CAHIER DU LAMSADE : Université
n° 34 pages :0001-0027 Juillet 1980

37 **JACQUILLAT B**
Modèles d'évaluation et de sélection des valeurs mobilières
ANALYSE FINANCIERE
n° 11 pages :0068-0088 Avril 1972

38 **JACQUILLAT.B ; LEVASSEUR.M ; PENE.D**
Les mesures du risque boursier et du risque comptable
BANQUE
n° 3 pages :0400-0415 Mars 1976

39 **JAQUILLAT B. SOLNIK B.**
Les marches financiers et la gestion de portefeuille
DUNOT ENTREPRISE
1981

40 **JENSEN M.C;BENNINGTON G.A**
Random walks and technical theorie: some additional evidence
THE JOURNAL OF FINANCE
pages :0469-0482 Mai 1970

41 **KEENEY R**
Utility fonctions for multiattributed conseqences.
MANAGEMENT SCIENCE
n° 5 pages :0276-0287 Janvier 1972

42 **KORSVOLD Paul.E**
Analyse et sélection de portefeuille : une vue d'ensemble
ANALYSE FINANCIERE
pages :0040-0054 Janvier 1973

43 **KOSKI J**
Defectiveness of weighting method in multicriterion
APPLIED NUMERICAL METHODS
n° 1 pages :0333-0337 1985

44 **LEVASSEUR M**
L'évolution boursière des sociétés de croissance
ANALYSE FINANCIERE
n° 39 Avril 1979

45 **LEVY R.A**
Stationarity of Beta coefficients
FINANCIAL ANALYST JOURNAL
pages :0055-0063 Novembre 1971

46 **LOIRET PIERRE ; ROUVIER GUILLAUME**
Une nouvelle approche bours. comparat.: le graph. en étoile
ANALYSE FINACIERE
n° 66 pages :0084-0092 Mars 1986

47 **MARKOWITZ H**
Portfolio Selection
JOURNAL OF FINANCE
Mars 1952

48 **MINGAT A**
Cheminement aleatoire et modèles systématiques d'intervent.
CONSOMMATION
pages :0078-0096 Mars 1973

49 **MODIGLIANI;PROGUE;SCHOLES;SOLNIK**
Efficiency of Européan Capital Markets ...
Proceeding of the first international
1972

50 **MOLODOWSKY NICOLAS**
Common stock valuation
FINANCIALE ANALYST JOURNAL
n° 21 pages :0104-0123 Mars 1965

51 **MONTIER B**
L'analyse technique du marché des valeurs mobilières .
ANALYSE FINANCIERE.
n° 2 1969

52 **MONTIER BRUNO**
Analyse technique.
ANALYSE FINANCIERE
n° 2 pages :0007-0017 Février 1970

53 **PENE Didier**
Les modèles d'évaluation boursiers
BANQUE
pages :0595-0607 Juin 1974

54 **PINCON PIERRE**
Le profil du gérant de portefeuille membre de SFAF
ANALYSE FINANCIERE
n° 65 pages :0066-0068 Février 1986

55 **PROGUE Gerald.A ; SOLNIK Bruno.H**
The market model applied to european common stocks:
JOURNAL OF FINANCIAL AND QUANTIT. ANALY.
pages :0917-0944 Décembre 1974

56 **PROGUE ; SOLNIK**
Risque,diversification et gestion de portefeuille.
ANALYSE FINANCIERE .
n° 10 Mars 1972

57 **HUREL D ; LAURENT R ; POVY L ; LITWAK R**
Analysis of the stock exchange quotations evolution
CONGRES INRIA
Juillet 1988

58 **QUINTART.A ; ZISSWILLER.A**
Théorie de la finance
PRESSE UNIVERSITAIRE DE FRANCE
1982

59 **ROBERT F**
Meilleure approxim. en norme vectorielle et minima de Paréto
MODELISATION MATHEMATIQUE ET ANALYSE
n° 1 pages :0089-0110 1985

60 **ROSA Jean.Jacques**
Le portefeuille sur mesure
BANQUE
pages :0459-0463 Mai 1972

61 **ROSA J.Jacques**
Rentabilité,risque,et équilibre à la bourse de Paris
REVUE ECONOMIQUE
pages :0001-0055 Juillet 1976

62 **ROSENFELD FELIX**
L'évaluation des actions
DUNOT
1975

63 **ROSENFELD FELIX**
Analyse financière et gestion de portefeuille
DUNOT
Juin 1974

64 **ROY B**
Décisions avec critères multiples :problèmes et méthodes.
MATHEMATICAL PROGRAMING
n° 2 pages :0121-0151 1971

65 **ROY B**
Classement et choix en présence de points de vue multiples
R.I.R.O
n° 8 pages :0057-0075 1968

66 **ROY B ; VINCKE P**
Multicriteria analysis :survey and new directions
EUROPEEN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH
n° 8 pages :0207-0218 1981

67 **ROY.B**
ELECTRE III: un algorithme de classements ...
CAHIER DU CENTRE D'ETUDES ET DE
n° 1 pages :0003-0024 1978

68 **RUDEANU.Sergiu**
Programmation bivalente a plusieurs fonctions économiques
R.I.R.O.
n° 2 pages :0013-0031 1969

69 **SAM R**
Le P.E.R ,un instrument mal adapté à la gest. mond. des port
ANALYSE FINANCIERE
n° 57 pages :0058-0063 Février 1984

70 **SELIGMAN D**
The mystique of point and figure
FORTUNE
pages :0113- Mars 1962

71 **SENTIS.PH ; FOURGEAUD.B ; LENCLUD.B**
Critère de choix en avenir partiellement incertain

pages :0037-0053 190

72 **SHARPE WILLIAM F**
A simplified methode for portfolio Analysis.
MANAGEMENT SCIENCE
pages :0277-0293 Janvier 1963

73 **SHARPE WILLIAM F**
Capital assets prices: A theorie of market equilibrium
JOURNAL OF FINANCE
n° 3 pages :0425-0442 Septembre 1964

74 **STADER W**
A survey of multicriteria optimization or Vecto Maximum pb.
JOURNAL OF OPTIMIZATION :Theor.et Appli.
n° 1 pages :0001-0051 1979

75 **VAN DEN BERG ANDRE**
La théorie moderne du portefeuille et ses applicat. au U.S.A
ANALYSE FINANCIERE
n° 47 pages :054-062 Avril 1981

76 **WALLENIUS.Jyrki**
Comparative evaluation of some interactive approaches ...
MANAGEMENT SCIENCE
n° 12 pages :1387-1396 Août 1975

77 **WHITBEK.V ; KISOR.M**
A new tool in investment décision-making
FINANCIAL ANALYST JOURNAL
pages :0055-0062 Mai 1963

78 **YU.P.L**
Cone convexity, cone extreme points, and nondominated
JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORIE AND APPL
n° 3 pages :0319-0377 1974

79 **YU.P.L ; LEITMANN.G**
Nondominated decisions and cone convexity in dynamic
JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORIE AND APPL
n° 5 pages :0573-0584 1974

80 **YU.P.L ; ZELENY.M**
The techniques of linear multiobjective programming
R.A.I.R.O
n° 3 pages :0051-0071 Novembre 1974

81 **LITWAK R ; LAURENT R ; POVY L ; HUREL D**
Classification method using multicriterion optimisation
BELLMAN CONTINUUM
pages :0177-0182 Juin 1988

82 **MICHAUD.P**
Condorcet - A man of avant-garde
APPLIED STOCHASTIC MODELS AND DATA ANAL.
n° 3 pages :0173-0189 1987

83 **MICHAUD.P**
Agrégation des préférences
DOCTORAT SCIENCES MATHEMATIQUES PARIS VI
1981

84 **MICHAUD.P**
Agrégation à la majorité 2 : Analyse du résultat d'un vote
CENTRE SCIENTIFIQUE DE PARIS : ETUDE F
n° 52 Mai 1985

85 **MICHAUD.P**
The true rule of the marquis de condorcet
COMPROMISE,NEGOTIATION AND GROUP DECISI.
pages :0083-0100 1988

86 **MICHAUD.P ; MARCOTORCHINO.P**
Modèles d'optimisation en analyse des données relationnelles
MATHEMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES
n° 67 pages :0007-0038 1979

Mots clefs :

Modélisation, Optimisation multicritère, Bourse, Système complexe, Modèle de préférence, Modèle décisionnel, Nombres flous, décision.

Résumé :

Le thème de cette thèse consiste en l'étude d'un système économique complexe : la Bourse. Le but de ce travail est de permettre la création d'un portefeuille d'actions en optimisant le rendement de ce dernier.
Pour atteindre cet objectif, nous avons dans un premier temps réalisé la modélisation du système. Dans un deuxième temps, pour tenir compte du bruit important sur les données (estimations des cours des actions), nous avons introduit la notion de nombre flou (un nombre flou représente l'évaluation d'une action suivant un critère). L'élaboration du modèle de préférence a permis la comparaison de deux nombres flous, ce qui aboutit à la création d'un classement de l'ensemble des actions.
Enfin, pour résoudre le problème de choix entre plusieurs classements contradictoires, un modèle décisionnel a été créé. Ce dernier nous donne le classement définitif des actions et par cela la composition du portefeuille.