50376
1988
201

50376
1988
201

N° d'ordre : 771

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Pierre JEANNIN

CONTROLE DES COURBES ET SURFACES RATIONNELLES PAR VECTEURS MASSIQUES

Thèse soutenue le vendredi 16 decembre 1988 devant la commission d'Examen

Membres du jury	Président	C. BREZINSKI
	Rapporteurs	P.J. LAURENT A. LE MEHAUTE J.C. FIOROT
	Examinateurs	P. SABLONNIERE L GRUSON

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

M. A. DUBRULLE.

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie végétale
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie-Physique
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DHAINAUT André	Biologie animale
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOCT Jacques	Métallurgie
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GRANELLE Jean jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie organique
M. LACOSTE Louis	Biologie végétale
M. LAVEINE Jean Pierre	Paléontologie
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique atomique et moléculaire
M. LEROY Jean Marie	Spectrochimie
M. LHOMME Jean	Chimie organique biologique
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie physique
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M. PAQUET Jacques	Géologie générale
M. PETIT Francis	Chimie organique
M. POUZET Pierre	Modélisation - Calcul scientifique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joel	Spectroscopie moléculaire
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
Mlle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. TILLIEU Jacques	Physique théorique
M. TOULOTTE Jean Marc	Automatique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ALLAMANDO Etienne	Composants électroniques
M. ANDRIES Jean Claude	Biologie des organismes
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie animale
M. BASSERY Louis	Génie des procédés et réactions chimiques
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique atomique et moléculaire
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques et Sociales
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie végétale
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie civil
M. BOIVIN Jean Claude	Spectrochimie
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie animale
M. CATTEAU Jean pierre	Chimie organique
M. CAYATTE Jean Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie structurale
M. CHIVE Maurice	Composants électroniques optiques
M. COMYN Gérard	Informatique théorique
M. COQUERY Jean Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques et Sociales
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique nucléaire et corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie organique
M. CRAMPON Norbert	Tectolique Géodynamique
M. CROSNIER Yves	Electronique
M. CURGY Jean jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELORME Pierre	Physiologie animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DEPREZ Gilbert	Physique du solide - Cristallographie
M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
Mle DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides

M. DUPONT Christophe	Vie de la firme (I.A.E.)
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FAUQUEMBERGUE Renaud	Composants électroniques
M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie structurale
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démographie
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie physique
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie organique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. HENRY Jean Pierre	Génie mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. HOUDART René	Physique atomique
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et statistiques
M. JEAN Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme (I.A.E.)
M. JOURNEL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques
M. LATTEUX Michel	Informatique
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEVRE Christian	Pétrologie
Mlle LEGRAND Denise	Algèbre
Mlle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne
M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme (I.A.E.)
M. LEROY Yves	Composants électroniques
M. LESENNE Jacques	Systèmes electroniques
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques et Sociales
M. MESMACQUE Gérard	Génie Mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée

A MES PARENTS

A MON EPOUSE

REMERCIEMENTS

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur le Professeur Claude Brézinski d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je l'en remercie vivement ainsi que tous les autres membres du jury : Messieurs les Professeurs J.C Fiorot, L. Gruson, P.J. Laurent, A. Le Méhauté, P. Sablonnière.

Je remercie tout particulièrement Jean Charles Fiorot dont l'enthousiasme a su me convertir aux Mathématiques appliquées. Sa compétence en tant que directeur de thèse m'a permis de trouver rapidement une interessante voie de recherche.

TABLE DES MATIÈRES

- AVERTISSEMENT p 2
- AVANT-PROPOS P 3

- CHAPITRES

COURBES

I- Cadre général p 7
II- Courbes rationnelles. Détermination par un polygone massique p 10
III- Algorithmes. p 16
IV- Etude locale. Construction d'une (BR) p 17
V- Les coniques comme courbes (BR) p 18

SURFACES

VI- Surfaces rationnelles. Détermination par un réseau massique p 21
VII- Changement de paramètre dans le cas d'une surface p 25
VIII- Transformée affine et projective d'une surface (SBR) p 28
IX- Génération de surfaces (SBR) à l'aide de courbes (BR) p 30
X- Réseaux massiques des quadriques comme surfaces (SBR) définies sur $[0,1]^2$ p 33
XI- Algorithmes de calcul d'une surface (SBR) p 36

- REFERENCES p 39

AVERTISSEMENT

Les documents rassemblés pour cette soutenance de thèse sont:

1- Deux notes aux Comptes rendus de l'Académie des Scienses [14] et [15].

2- L'épreuve du livre intitulé " Contrôle des courbes et surfaces rationnelles par vecteurs massiques " écrit en collaboration avec J.C. Fiorot.

Ce livre a pour point de départ et développe les deux notes citées ci-dessus. Il est actuellement sous presse aux Editions MASSON, dans la collection R.M.A dirigée par Messieurs P.G. Ciarlet et J.L. Lions.

3- Le present mémoire

Ce mémoire est une synthèse de l'ouvrage cité ci-dessus.

AVANT-PROPOS

Cette thèse est une contribution à l'étude des courbes et des surfaces rationnelles dans l'optique de leur traitement informatique en CAO, CFAO, DAO. Nous proposons une nouvelle description des courbes et des surfaces rationnelles. Une telle courbe ou surface est déterminée, à l'aide des polynômes de Bernstein, par la donnée d'un certain nombre de *vecteurs massiques*; un vecteur massique étant un point pondéré ou un vecteur de l'espace dans lequel est plongée cette courbe ou cette surface.

Nous exploitons cette nouvelle description sur le plan du traitement informatique et géométrique et nous développons des techniques de recherche de polygones et réseaux massiques, notamment pour les coniques et les quadriques, ainsi que des techniques de création de formes déterminées par des réseaux massiques.

Les géométries projective et affine constituent un outil privilégié dans la plupart des développements. La matière de cette thèse peut être qualifiée de géométrie algorithmique.

Les premières études sur les courbes et surfaces contrôlées par des points ont été réalisées vers la fin des années 50, à propos des courbes polynomiales, et n'ont fait que se développer par la suite.
De Casteljau, en 1959, et Bézier, en 1962, introduisent des courbes polynomiales contrôlées par un polygone de points. Ces courbes seront connues, par la suite, sous le nom de courbes Bézier. Ces premiers travaux seront complétés, en 1972, par

ceux de A. Forrest. Les courbes splines polynomiales sont introduites en CAO par Ferguson en 1964. Leur utilisation se généralise, à partir de 1972, avec la mise au point de l'algorithme Cox De Boor en 1972, et les travaux de Riesenfeld en 1973. Les surfaces polynomiales "produit tensoriel" sont traitées par De Casteljau en 1963 et, sous forme Bézier, vers la fin des années 60. Les surfaces splines polynomiales "produit tensoriel" sont décrites par Ferguson en 1964, à propos des surfaces bi-cubiques. Signalons que, dès 1959, De Casteljau avait introduit des surfaces à pôles définies sur un triangle; travaux qui seront développés par la suite, en utilisant la base de Bernstein, par M. A. Sabin (1977), G. Farin (1979) et P. Sablonnière (1979). Notons également la détermination de surfaces à partir de quatre courbes frontières, par Coons, en 1967; et à partir de courbes supports, par Gordon, en 1969. L'utilisation des courbes rationnelles en CAO, due à Coons, apparait en 1967. En 1974, Ball introduit des surfaces rationnelles construites à partir de certaines cubiques rationnelles.

Depuis une quinzaine d'années, de très nombreux travaux concernant le polynomial à une et surtout plusieurs variables ont été publiés. Citons les noms de R. Alfeld, R. Arcangeli, R.E. Barnhill, B.A. Barsky, W. Boehm, G. Chang, E. Cohen, W.Dahmen, C. De Boor, R. Delbourgo, J. Duchon, G. Farin, R.T.Farouki, Y.Feng, J.C.Fiorot, R.Franke, R.N.Goldman, J.A.Gregory, G.Herron, K.Hollig, M.Hosaka, J.Hoschek, P.J.Laurent, R.Laydi, A.Le Méhauté, T.Lyche, C.A.Michelli, G.M.Nielson, M.J.Pratt, H.Prautzsch, A.G.Requicha, M.A.Sabin, P.Sablonnière, R.Sarraga, L.L.Schumaker, T.W.Sedeberg, T.Varady. Cette liste, non exhaustive, traduit incomplétement le foisonnement des recherches en ce domaine; tant sur le plan technologique que sur celui de recherches mathématiques et informatiques plus fondamentales.

Le développement de ces travaux est dû aux interactions entre le progrès des ordinateurs, la recherche mathématique, la demande industrielle: :carrosserie automobile, fuselage et

ailes d'avion, coque de bateau, pales de turbine, pièces mécaniques, habillement, conception de formes esthétiques, chaussures, etc ... et aussi la demande des sciences appliquées: géologie (reconstitution d'une structure géologiques à partir de mesures), médecine (reconstitution d'un organe: cerveau, coeur, dent, articulation), graphisme, simulation et visualisation de phénomènes physiques, etc...Le mathématicien est contraint à un double objectif: rechercher la meilleure détermination d'une courbe ou d'une surface en vue de son utilisation informatique et englober aussi le plus grand nombre de courbes et de surfaces.

Songeons que, naguère, la représentation des courbes et des surfaces se traitait, sans l'aide de l'ordinateur, en utilisant la géométrie descriptive et le dessin industriel. La première idée des mathématiciens a été de déterminer ou, comme on dit encore, de contrôler une courbe ou une surface par un certain nombre de points. La courbe ou la surface peut alors être manipulée à travers ses points de contrôle; du point de vue géométrique, les déplacements des points de contrôle entrainant une déformation de la surface; et aussi du point de vue informatique, mémoriser la courbe ou la surface revenant à le faire pour les points de contrôle. Les premières qualités de ce procédé résident en son caractère intrinsèque (la détermination de la courbe ou de la surface ne dépend pas d'un repère) et en son universalité (le procédé permet de soumettre à un même traitement un grand nombre de courbes et surfaces diverses) par opposition aux déterminations analytiques ou par des éléments géométriques particuliers. Un bon contrôle implique certaines qualités: les points de contrôle doivent déjà donner un maximum de renseignements sur la courbe ou la surface à tracer (localisation, allure, etc..); ce contrôle doit déboucher sur un algorithme de calcul stable, cela en vue de la visualisation et surtout de la reproduction des courbes et surfaces par machines outils ; la déformation de l'ensemble des points de contrôle doit se répercuter harmonieusement sur la courbe ou la surface et une transformation de la courbe ou la surface (rotation,

similitude, transformation affine ou projective) doit pouvoir se caractériser simplement par une transformation des points de contrôle.

Le contrôle des courbes et surfaces polynomiales a été réalisé de façon satisfaisante à travers les représentations "Bézier" et "spline" comme en témoignent les nombreux logiciels réalisés en la matière. Ceci explique le succès et la grande utilisation des courbes et surfaces polynomiales en CAO, CFAO, DAO. Néammoins, leur utilisation peut se révéler insuffisante car de nombreuses courbes et surfaces simples et utiles, comme le cercle et la sphère, ne sont pas polynomiales mais rationnelles et étaient approchées, jusqu'alors, par des courbes ou surfaces polynomiales. D'où un intérêt croissant pour les courbes et surfaces rationnelles et la nécessité de les contrôler aussi simplement que les courbes et surfaces polynomiales.
Jusqu'alors, le contrôle des courbes et surfaces rationnelles n'était pas réalisé de manière satisfaisante. Les auteurs tel G.Farin, L.Piegl, W.Tiller, K.Versprille, ne considèrent que les courbes ou surfaces rationnelles controlées par des points pondérés, d'où leur impossibilité de traiter des exemples aussi simples que ceux du demi-cercle ou de la sphère. Pour y arriver, K.Versprille [26] et L.Piegl [23] introduisent, de façon expérimentale, dans le cas du demi-cercle, la notion de point de contrôle à l'infini.

Nous montrons que la bonne notion à introduire n'est pas celle de point de contrôle à l'infini mais celle de vecteur de contrôle. Nous sommes amenés à contrôler, cette fois-ci, une courbe ou une surface rationnelle par un ensemble de *vecteurs massiques* ; un vecteur massique étant un point pondéré ou un vecteur de l'espace dans lequel est plongée la courbe ou la surface. Le contrôle d'une courbe ou surface rationnelle que nous proposons nous apparait satisfaisant dans la mesure où il préserve la plupart des qualités d'un bon contrôle et aussi dans la mesure où il englobe toutes les courbes et surfaces rationnelles.

CHAPITRE I CADRE GENERAL

- Géométrie projective réelle, rappels.
- Espace $\hat{\mathcal{E}}$ des vecteurs massiques d'un espace affine réel $\mathcal{E}$. Isomorphisme linéaire entre $\hat{\mathcal{E}}$ et l'espace vectoriel induisant le complété projectif de $\mathcal{E}$.
- Calcul barycentrique.
- Constructions géométriques d'une combinaison linéaire affine de deux vecteurs massiques.

Le but de ce chapitre est de préciser un cadre bien adapté à la nouvelle description des courbes et surfaces rationnelles que nous proposons.
Pour cela, nous rappelons quelques éléments essentiels de géométrie projective. L'importance des transformations projectives , dont les transformations affines sont des cas particuliers, apparaitra dans la suite. Nous introduisons la notion de **vecteur massique** *qui généralise celle de point pondéré.*
Les courbes et surfaces que nous étudions sont dans un espace affine $\mathcal{E}$. Un point Ω est choisi en dehors de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ désigne l'espace affine contenant Ω et admettant $\mathcal{E}$ comme hyperplan. Ces données définissent une bijection naturelle $\hat{\Omega}$ de l'ensemble des **vecteurs massiques** $\hat{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \times \mathbf{R}^*) \cup \vec{\mathcal{E}}$ *vers* $\vec{\mathcal{F}}$, $\vec{\mathcal{E}}$ *et* $\vec{\mathcal{F}}$ *désignant les directions de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.*

$$\begin{array}{llll} \hat{\Omega} : & \hat{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{F}} \\ & (M,\alpha) & \longmapsto & \alpha.\overrightarrow{\Omega M} \\ & \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} & \longmapsto & \vec{u} \end{array}$$

Cette bijection permet de tranférer sur $\hat{\mathcal{E}}$ *la structure d'espace vectoriel de* $\vec{\mathcal{F}}$. *Les opérations ainsi définies sur* $\hat{\mathcal{E}}$ *contiennent l'opération "barycentre" et étendent le calcul barycentrique en soumettant au même traitement points pondérés et vecteurs. Une construction de la combinaison linéaire affine de deux vecteurs massiques est proposée.*

L'isomorphisme linéaire $\hat{\Omega}$ *permet d'identifier les espaces* $\hat{\mathcal{E}}$ *et* $\vec{\mathcal{F}}$. *Une transformation projective* T *de* $\tilde{\mathcal{E}}$, *le complété projectif de* $\mathcal{E}$, *est induite par une transformation linéaire* $\vec{T}$ *de* $\vec{\mathcal{F}}$ *ou par la transformation linéaire correspondante* $\hat{T}$ *de* $\hat{\mathcal{E}}$. *La projection naturelle* $\Pi\Omega$, *de sommet* Ω , *de* $\mathcal{F} - \{\Omega\}$ *sur* $\tilde{\mathcal{E}}$, *s'identifie à la projection naturelle*

$$\begin{array}{lcl} \Pi : & \hat{\mathcal{E}} - \{0\} & \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}} \\ & (M, \alpha) & \longmapsto M \\ & \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} & \longmapsto (\vec{u})\infty \end{array}$$

Nous avons les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal{E}} \arrow[r, dashed, "\hat{T}"] \arrow[d, "\hat{\Omega}"'] & \hat{\mathcal{E}} \arrow[d, "\hat{\Omega}"] \\ \vec{\mathcal{F}} \arrow[r, dashed, "\vec{T}"] & \vec{\mathcal{F}} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal{E}} \arrow[rr, dashed, "\hat{\Omega}"] \arrow[dr, "\Pi"'] & & \vec{\mathcal{F}} \arrow[dl, "\Pi\Omega"] \\ & \tilde{\mathcal{E}} & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\vec{\mathcal{F}} \arrow[r, dashed, "\vec{T}"] \arrow[d, "\Pi\Omega"'] & \vec{\mathcal{F}} \arrow[d, "\Pi\Omega"] \\
\tilde{\mathcal{S}} \arrow[r, dashed, "T"] & \tilde{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{S}} \arrow[r, dashed, "\hat{T}"] \arrow[d, "\Pi"'] & \hat{\mathcal{S}} \arrow[d, "\Pi"] \\
\tilde{\mathcal{S}} \arrow[r, dashed, "T"] & \tilde{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

Les projections Π *et* $\Pi\Omega$ *interviendront dans la nouvelle des -cription des courbes et surfaces rationnelles.*

CHAPITRE II COURBES RATIONNELLES
DETERMINATION PAR UN POLYGONE MASSIQUE

- Courbes rationnelles.
- Utilisation des polynômes de Bernstein dans la détermination d'une courbe rationnelle par un polygone massique.
- Changements de paramètre. Exemples.
- Image d'une courbe (BR) par une application projective. Cas des projections.
- Elévation et diminution de la longueur d'une courbe (BR). Raccordement C^k. Courbes composites.

Les courbes et les surfaces polynomiales, dans leur représentation Bézier ou spline, sont très étudiées et utilisées en pratique: CAO, CFAO, DAO; en raison de leur simplicité de description et de calcul. Néanmoins, l'utilisation de ces courbes et de ces surfaces polynomiales peut se révéler insuffisante. D'où un intérêt croissant pour les courbes et surfaces rationnelles.

Dans cette partie, utilisant les outils du chapitre I, nous proposons une nouvelle description des courbes rationnelles à l'aide des polynômes de Bernstein et des vecteurs massiques et nous essayons de transférer la simplicité polynomiale aux courbes rationnelles.

Une courbe Bézier rationnelle est classiquement déterminée par la donnée de points pondérés (P_i, β_i) *de poids non nul, selon la formule:*

$$P(t) = \frac{\sum_i \beta_i \, B_i^n(t) \, P_i}{\sum_i \beta_i \, B_i^n(t)}$$

où les $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} \, t^i$ *sont les polynômes de Bernstein.*

Ce point de vue est trop restrictif.
Une courbe rationnelle dont les coordonnées ont un dénominateur commun admettant des coordonnées nulles dans la base de Bernstein, ne peut s'écrire sous la forme classique évoquée ci-dessus. Une courbe Bézier rationnelle classique est la projetée conique d'une courbe polynomiale mais les projetées coniques de toutes les courbes polynomiales donnent une classe de courbes plus large que celle des courbes Bézier rationnelles classiques.
Certains auteurs (K.J. Versprille [24] , L. Piegl [22]) ont bien senti ce caractère restrictif. Ils introduisent la notion de point de contrôle à l'infini pour traiter le demi-cercle comme cas limite d'un arc de cercle inférieur à π ; mais des difficultés se présentent dès lors qu'on veut déterminer une courbe Bézier rationnelle par des points et des poids, certains des points étant à l'infini. Ces auteurs constatent que si l'on transforme projectivement une courbe Bézier rationnelle, les points de contrôle sont transformés en les points de contrôle; mais ne disent rien sur ce que deviennent les poids. Il apparait que, si l'on veut généraliser correctement la définition d'une courbe Bézier rationnelle, la bonne notion à introduire est la notion de vecteur de contrôle et non la notion de point de contrôle à l'infini. Une courbe Bézier rationnelle généralisée est alors déterminée par des points pondérés et des vecteurs $\mathcal{E}$.
Nous donnons alors la définition d'une **courbe B-rationnelle** *de* $\mathcal{E}$ *(en abrégé: courbe* **(BR)***) comme* Π*-projetée d'une courbe Bézier polynomiale de* $\hat{\mathcal{E}}$ *ou, ce qui revient au même, comme* $\Pi\Omega$*-projetée d'une courbe Bézier polynomiale de* $\mathcal{F}$.

Si nous notons: $\mathbf{BP}[P_0, P_1, \ldots, P_n](t) = \sum_i B_i^n(t)\, P_i$

la courbe Bézier polynomiale de polygone $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$,

La courbe **B-rationnelle** *de polygone massique* $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)$

où $\theta_i \in \hat{\mathcal{E}}$, *est définie par:*

$$\mathbf{BR}[\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n](t) = \Pi\,(\,\mathbf{BP}[\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n](t)\,)$$

Si nous introduisons $R_i \in \mathcal{F}$ *tel que:* $\overrightarrow{\Omega R_i} = \hat{\Omega}(\theta_i)$ *alors:*

$$\mathbf{BR}[\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n](t) = \Pi\Omega\,(\,\mathbf{BP}[R_0, R_1, \ldots, R_n](t)\,)$$

I (resp $\bar{I}$*) désignant l'ensemble des indices i pour lesquels* θ_i *est un point pondéré (resp vecteur)* (P_i, β_i) *de* $\mathcal{E}$ *(resp* $\vec{u}_i$ *de* $\mathcal{E}$ *), la définition précédente débouche sur l'expression suivante du point courant d'une courbe B-rationnelle.*

$$\mathbf{BR}[\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n](t) = \frac{\sum_I \beta_i\, B_i^n(t)\, P_i}{\sum_I \beta_i\, B_i^n(t)} + \frac{\sum_{\bar{I}} B_i^n(t)\, \vec{u}_i}{\sum_I \beta_i\, B_i^n(t)}$$

Il y a alors identité entre les courbes rationnelles et les courbes B-rationnelles. Remarquons que lorsque $\bar{I}$ *est vide nous retrouvons les courbes Bézier rationnelles classiques.*

La notation $BR[\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n ; K]$ *désigne la restriction à l'intervalle* K *de la courbe (BR) de polygone massique :* $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)$

Exemples de mise sous forme (BR).

1- Le demi-cercle de diamètre AB, de centre Ω_1, et passant par C équidistant de A et B, admet pour polygone massique sur [0,1]:

$$\theta_0 = (A,1) \quad ; \quad \theta_1 = \overrightarrow{\Omega_1 C} \quad ; \quad \theta_2 = (B,1)$$

Nous entendons par là que ce demi-cercle est le support de la courbe $BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2 ; [0,1]]$

(voir figure 1 en fin de chapitre)

2- La branche de l'hyperbole de centre Ω_1, qui passe par B et dont les asymptotes sont dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ tels que $B = \Omega_1 + \vec{I} + \vec{J}$ admet comme polygone massique sur [0,1] :

$$\theta_0 = 2.\vec{I} \quad ; \quad \theta_1 = (\Omega_1, 1) \quad ; \quad \theta_2 = 2.\vec{J}$$

Nous étudions ensuite l'incidence de certains changements de paramètre sur le polygone massique. Ceci répond à des préoccupations algorithmiques: un paramètre variant entre 0 et 1 apparaissant comme un facteur de stabilité des calculs.

La relation: $$T \circ \Pi = \Pi \circ \hat{T}$$

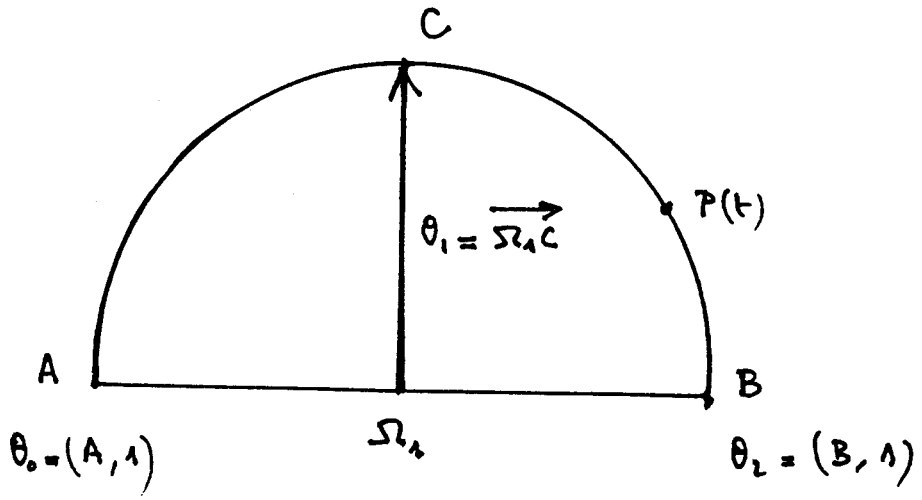
où T *est l'application projective de* $\tilde{\mathcal{E}}$ *induite par l'application linéaire* $\hat{T}$ *de* $\hat{\mathcal{E}}$ *, permet d'établir que la transformée projective d'une courbe B-rationnelle est une courbe B-rationnelle dont le polygone massique est le transformé du polygone massique initial par l'application linéaire de* $\hat{\mathcal{E}}$ *induisant l'application projective. Ce résultat permet de déterminer un polygone massique pour de nombreuses courbes .*

Ainsi le polygone massique de la branche d'hyperbole de l'exemple 2 ci-dessus peut se retrouver, à partir du polygone massique du demi-cercle, en utilisant une transformation projective transformant ce demi-cercle en la branche d'hyperbole.

Il débouche également sur une visualisation des courbes B-rationnelles par projection conique ou cylindrique sur un plan. L'intérêt est de fournir la perspective d'une courbe (BR) de façon globale, par son polygone massique, et non par projection point par point.

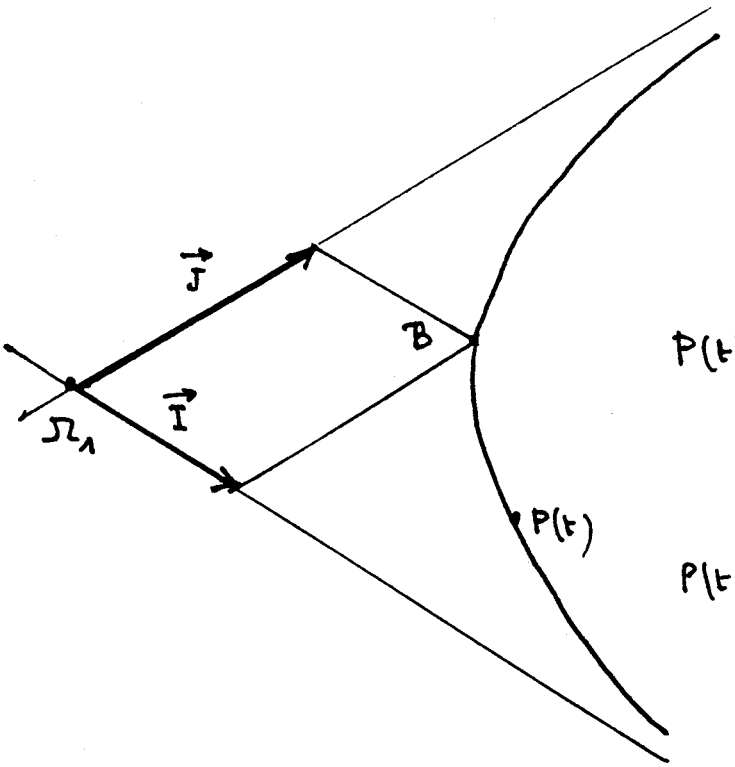
Après avoir traité de l'élévation et de la diminution de la longueur (nombre de points du polygone diminué de un) d'une courbe B-rationnelle, nous donnons des conditions suffisantes de raccordement de deux courbes B-rationnelles.

FIGURE 1



$$P(t) = \frac{B_0^2(t)\,A + B_2^2(t)\,B}{B_0^2(t) + B_2^2(t)} + \frac{B_1^2(t)\,\overrightarrow{\Omega_1 C}}{B_0^2(t) + B_2^2(t)}$$

FIGURE 2



$\theta_0 = 2\vec{I}$; $\theta_1 = (\Omega_1, 1)$; $\theta_2 = 2.\vec{J}$

$$P(t) = \frac{B_1^2(t)\,\Omega_1}{B_1^2(t)} + \frac{2\,B_0^2(t)\,\vec{I} + 2\,B_2^2(t)\,\vec{J}}{B_1^2(t)}$$

$$P(t) = \Omega_1 + \frac{2\left(B_0^2(t)\,\vec{I} + B_2^2(t)\,\vec{J}\right)}{B_1^2(t)}$$

CHAPITRE III ALGORITHMES

- Ecriture d'un polynôme dans la base de Bernstein.
- Calcul d'une (BP). Algorithme de De Casteljau.
- Calcul d'une (BR). Algorithme $\Pi\Omega$-projeté de De Casteljau.
- Calcul d'une (BR). Algorithme Π-projeté de De Casteljau.
- Algorithmes de subdivision.

Une courbe B-rationnelle est la Π-projetée d'une courbe Bézier polynomiale de $\hat{\mathcal{E}}$ et la $\Pi\Omega$-projetée d'une courbe polynomiale de $\mathcal{F}$. Tout algorithme de calcul d'une courbe Bézier polynomiale, comme l'algorithme de De Casteljau ou l'algorithme de subdivision de Lane Riesenfeld [19], induit donc deux algorithmes de calcul d'une courbe B-rationnelle. Lorsque le paramètre est compris entre 0 et 1, ces algorithmes calculent des combinaisons linéaires affines convexes; ce qui est un facteur de stabilité. Cette remarque montre l'importance, déjà signalée au chapitre II, de se ramener à des courbes paramétrées sur [0,1].

CHAPITRE IV ETUDE LOCALE - CONSTRUCTION D'UNE (BR)

- Dérivation d'une courbe (BR) et raccordement.
- Etude locale.
- Constructions géométriques d'un contact d'une courbe (BR).

Nous donnons plusieurs expressions de la dérivée première d'une courbe (BR) et en déduisons une condition nécessaire et suffisante de raccordement C^1.

Si $BR[\theta_0,\theta_1, \ldots ,\theta_n;[0,1]]$ et $BR[\tau_0,\tau_1, \ldots ,\tau_n;[0,1]]$ sont deux courbes B-rationnelles de même longueur, une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles se raccordent C^1 en un point à distance finie est que:

- $\Pi(\theta_n) = \Pi(\tau_0)$ avec $\Pi(\theta_n)$ à distance finie et
- $[\chi(\tau_0)\chi(\theta_{n-1}) + \chi(\tau_1)\chi(\theta_n)]\,\theta_n = \chi(\theta_n)\,[\chi(\tau_0)\theta_{n-1} + \chi(\theta_n)\tau_1]$

la notation $\chi(\theta)$ désignant la masse de θ, masse nulle lorsque θ est un vecteur.

Le calcul des dérivées successives fournit un processus récurrent permettant de traduire le raccordement C^k de deux (BR) de façon nécessaire et suffisante.

Nous montrons comment l'étude locale (tangente, plan osculateur, espace osculateur en un point) de la courbe (BR) de polygone $\theta = (\theta_0,\theta_1, \ldots .\theta_n)$ se lit sur le schéma de De Casteljau appliqué aux points de θ en une valeur t du paramètre .

Nous donnons une construction géométrique simple d'un contact d'une courbe (BR) ainsi que quelques propriétés géométriques.

CHAPITRE V LES CONIQUES COMME COURBES (BR)

- Les coniques comme courbes (BR) sur $\tilde{\mathbb{R}}$.
- Les coniques comme courbes (BR) sur [0,1].
- Changement de paramètre homographique.
- Caractérisation du cercle parmi les courbes paramétrées (BR).

Les coniques sont parmi les plus simples et les plus utilisées des courbes rationnelles, d'où l'intérêt de les mettre sous forme (BR). Par transformation projective de la parabole, nous montrons que la donnée d'une base $(\theta_0,\theta_1,\theta_2)$ *de vecteurs massiques détermine une conique* $BR[\theta_0,\theta_1,\theta_2 ; \tilde{\mathbb{R}}]$ *et que, réciproquement, toute conique admet un paramétrage de cette forme. La base* $(\theta_0,\theta_1,\theta_2)$ *permet de préciser simplement deux contacts de la conique et, réciproquement, pour chaque type de conique, nous précisons un polygone massique à partir de deux contacts et un point. En particulier, nous précisons un polygone massique de l'hyperbole en utilisant comme contacts ses points à l'infini.*

Si θ_0, θ_1, θ_2 sont 3 vecteurs massiques indépendants du plan, le support de la courbe $BR[\theta_0,\theta_1,\theta_2 ; \tilde{\mathbb{R}}]$ est une conique propre du plan, bitangente en $\Pi(\theta_0)$ et $\Pi(\theta_2)$ respectivement aux droites $(\Pi(\theta_0)\Pi(\theta_1))$ et $(\Pi(\theta_2)\Pi(\theta_1))$. Réciproquement, toute conique du plan est de cette forme.

Précisons:

Soient: P_0 , P_1, P_2, B quatre points du plan constituant un repère projectif;
t_0 un réel distinct de 0 et 1 .

Notons: Γ la conique propre du plan bitangente en P_0 et P_2 aux droites (P_0P_1) et (P_2P_1) et passant par B.

Alors: Il existe 3 vecteurs massiques linéairement indépendants : θ_0 , θ_1 , θ_2 tels que:

- $\Pi(\theta_i) = P_i \quad i = 0,1,2$
- Γ est le support de $BR[\theta_0,\theta_1,\theta_2 ; \tilde{R}]$
- $BR[\theta_0,\theta_1,\theta_2](t_0) = B$

Le triplet θ est unique à une proportionnalité près.

Le support de la courbe $BR[\theta_0,\theta_1,\theta_2 ; [0,1]]$ *est un arc de conique. Nous précisons un polygone massique, sur* [0,1], *d'un arc de cercle, du demi-cercle, de la demi-ellipse, d'une branche d'hyperbole, d'une demi-parabole. Nous retrouvons ainsi certains résultats déjà vus.*
Le type de la conique est précisé uniquement en fonction des masses des vecteurs massiques du polygone.

A l'aide d'un changement de paramètre, nous déterminons ensuite les coniques comme courbes (BR) sur [0,1], *par un polygone massique de la forme* $(\omega_0,\omega_1,\omega_2,-k\omega_1,-k^2\omega_0)$. *Nous précisons, là encore, la nature de la conique en fonction des masses des vecteurs massiques du polygone et montrons que la conique* $BR[\omega_0,\omega_1,\omega_2,-k\omega_1,k^2\omega_0 ; [0,1]]$ *se raccorde* C^1 *pour* $k = 1$.

Nous étudions ensuite l'effet d'un changement de paramètre homographique sur le polygone massique de la conique $BR[\theta_0,\theta_1,\theta_2 ; \tilde{R}]$.

Enfin, nous caractérisons le cercle parmi les coniques $BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2 \; ; \; \tilde{\mathbf{R}}\,]$ et $BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, -\omega_1, \omega_0 \; ; \; [0,1]\,]$.

Remarquons que, dans tous les cas, une conique propre est déter -minée par trois vecteurs massiques linéairement indépendants.

CHAPITRE VI

SURFACES RATIONNELLES. DETERMINATION PAR UN RESEAU MASSIQUE

1- Surfaces polynomiales.

2- Surfaces rationnelles. Généralités.

3- Utilisation des polynômes de Bernstein pour la détermination d'une surface rationnelle par un réseau massique.

Dans de nombreuses branches de l'industrie: automobile, aviation, mécanique, conception de formes; on utilise les surfaces Bézier polynomiales et les surfaces spline polynomiales à cause de leur simplicité de calcul et aussi du fait que le réseau de contrôle donne une indication grossière sur la forme de la surface. Nous proposons ici, comme pour les courbes, la détermination de toute surface rationnelle par un réseau massique.

Notations. Définitions

Surfaces Bézier Polynomiales rectangulaires.

Si $P = (P_{ij})$ $i = 0,1,\ldots,n$ $j = 0,1,\ldots,p$
est un réseau rectangulaire de points
et D un domaine de R^2, nous notons

$$SBP[P](u,v) = \sum_{i,j} B_i^n(u)\, B_j^p(v)\, P_{ij}$$

et $SBP[\,P\,;\,D\,]$ la surface paramétrée décrite par $SBP[P](u,v)$ lorsque (u,v) décrit D.

Cette surface est dite Surface Bézier Polynomiale rectangulaire de réseau P.
n est sa longueur et p sa largeur.

Surfaces Bézier Polynomiales triangulaires.

Notons: $\Delta_n = \{ (i,j,k) : i,j,k \in N^3 \text{ et } i+j+k = n \}$

$\mathcal{P} = \{ (\lambda,\mu,\nu) : (\lambda,\mu,\nu) \in R^3 \text{ et } \lambda+\mu+\nu = 1 \}$

$B^n_{ijk}(\lambda,\mu,\nu) = \frac{n!}{i!\,j!\,k!} \lambda^i \mu^j \nu^k$ où $(i,j,k) \in \Delta_n$ et $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathcal{P}$

Si $P = (P_{ijk})$ $ijk \in \Delta_n$ est un réseau triangulaire de points et D un domaine de $\mathcal{P}$, nous notons

$$SBP[P](\lambda,\mu,\nu) = \sum_{ijk} B^n_{ijk}(\lambda,\mu,\nu)\, P_{ijk}$$

et SBP [P ; D] la surface paramétrée décrite par $SBP[P](\lambda,\mu,\nu)$ lorsque (λ,μ,ν) décrit D.

Cette surface est dite Surface Bézier Polynomiale triangulaire de réseau P.
n est sa hauteur.

Nous rappelons les généralités concernant les applications et les surfaces polynomiales puis nous montrons comment, pratiquement, mettre une surface polynomiale sous forme Bézier rectangulaire, bien adaptée au repérage cartésien du plan paramètre, et sous forme Bézier triangulaire, bien adaptée au repérage barycentrique du plan paramètre. Ces formes, qui utilisent les polynômes de Bernstein, sont bien adaptées au calcul numérique de ces surfaces. Nous précisons l'algorithme de De Casteljau dans chacun des cas rectangulaire et triangulaire.
Dans les rappels concernant les surfaces rationnelles, nous

mettons en évidence le fait qu'une surface rationnelle peut toujours s'interpréter comme la projection conique d'une surface polynomiale.
Nous proposons ensuite une nouvelle description des surfaces rationnelles, à l'aide des polynômes de Bernstein, en déterminant de telles surfaces par un réseau massique; ceci dans le but de transférer aux surfaces rationnelles la simplicité polynomiale, notamment dans le domaine du calcul numérique de ces surfaces. Les définitions et résultats sont calqués sur ceux déjà obtenus pour les courbes. En particulier une **surface B-rationnelle** *de* $\tilde{\mathcal{E}}$ *(SBR en abrégé) est définie comme la* Π*-projetée d'une surface Bézier polynomiale de* $\hat{\mathcal{E}}$*. Nous distinguons les surfaces (SBR) rectangulaires, dont le réseau est rectangulaire et pour lesquelles le plan paramètre est rapporté à un repère cartésien et les surfaces (SBR) triangulaires, dont le réseau est triangulaire et pour lesquelles le plan paramètre est rapporté à un repère barycentrique.*

La Surface B-rationnelle rectangulaire de réseau massique:

$\theta = (\theta_{ij})$ où $\theta_{ij} \in \hat{\mathcal{E}}$ est définie par

$$SBR[\theta](u,v) = \Pi(SBP[\theta](u,v))$$

Si nous introduisons $R_i \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{\Omega R_i} = \hat{\Omega}(\theta_i)$ alors

$$SBR[\theta](u,v) = \Pi\Omega(SBP[R](u,v))$$

$SBR[\theta\ ;\ D]$ désigne la (SBR) décrite par $SBR[\theta](u,v)$ lorsque (u,v) décrit le domaine D.

I (resp $\bar{I}$) désignant l'ensemble des (i,j) pour lesquels θ_{ij} est un point pondéré (P_{ij},β_{ij}) de $\mathcal{E}$ (resp vecteur $\vec{U}_{ij}$ de $\mathcal{E}$), la définition précédente débouche sur l'expression suivante du point courant d'une surface B-rationnelle rectangulaire.

$$SBR[\theta](u,v) = \frac{\sum_I \beta_{ij}\ B_i^n(u)B_j^p(v)\ P_{ij}}{\sum_I \beta_{ij}\ B_i^n(u)B_j^p(v)} + \frac{\sum_I B_i^n(u)B_j^n(v)\ \vec{U}_{ij}}{\sum_I \beta_{ij}\ B_i^n(u)B_j^p(v)}$$

Nous avons des expressions analogues dans le cas triangulaire. Enfin nous complétons en donnant des méthodes de mise sous forme **B-rationnelle** *illustrées par des exemples.*

Exemples de réseaux massiques.

La sphère de centre Ω_1 et de rayons $\Omega_1 A$, $\Omega_1 B$, $\Omega_1 C$ orthogonaux deux à deux admet, sur $R \times R_+$, le réseau massique rectan -gulaire suivant:

θ_{ij}	j = 0	1	2
i = 0	(C,1)	(E,1)	(A,2)
1	(C,1)	(G,1)	(F,2)
2	(C,2)	(D,2)	(B,4)

où $D = \Omega_1 + \overrightarrow{\Omega_1 B} + \overrightarrow{\Omega_1 C}$; $E = \Omega_1 + \overrightarrow{\Omega_1 A} + \overrightarrow{\Omega_1 C}$

$F = \Omega_1 + \overrightarrow{\Omega_1 A} + \overrightarrow{\Omega_1 B}$; $G = \Omega_1 + \overrightarrow{\Omega_1 A} + \overrightarrow{\Omega_1 B} + \overrightarrow{\Omega_1 C}$

La sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ admet comme réseau massique triangulaire sur le plan $\mathcal{P}$ entier le réseau θ suivant

$\theta_{200} = ((1,0,0);2)$; $\theta_{020} = ((0,1,0);2)$; $\theta_{002} = ((0,0,-1);1)$

$\theta_{110} = ((1,1,-1);1)$; $\theta_{011} = ((0,1,-1);1)$; $\theta_{101} = ((1,0,-1);1)$

CHAPITRE VII

CHANGEMENT DE PARAMETRE DANS LE CAS D'UNE SURFACE

1- Préliminaires.
2- Etude de deux exemples concernant la sphère.
3- Quelques résultats généraux.
4- Transformation d'un carré en un quadrangle.

La motivation

Pour calculer les points d'une surface géométrique, il est interessant de la considérer, si possible, comme le support d'une surface (SBR) à propos de laquelle nous disposons d'algorithmes efficaces; plus précisément encore, et pour des raisons algorithmiques, comme le support d'une surface (SBR) rectangulaire définie sur $[0,1]^2$ *ou d'une surface (SBR) triangulaire définie sur le triangle* Δ.
Lorsque la surface (SBR) est définie sur un domaine quelconque, nous nous raménerons aux deux cas de figure précédents à l'aide d'un changement de paramètre.

Le principe

Etant donnée une surface $SBR[\theta;D]$ *définie sur un certain domaine plan* D, *nous cherchons une quasi-bijection rationnelle* Φ *définie sur* $[0,1]^2$ *(ou* Δ*) sur* D. $SBR[\theta;D]\circ\Phi$ *est alors une surface rationnelle définie sur* $[0,1]^2$ *(ou* Δ*) qui peut se mettre sous la forme* $SBR[\omega,[0,1]^2]$ *(ou* $SBR[\omega,\Delta]$*). Les deux (SBR):* $SBR[\theta;D]$ *et* $SBR[\omega;[0,1]^2]$ *(ou* $SBR[\omega;\Delta]$*) ayant alors même support.*
(Nous entendons par quasi-injection une application telle que toute image, sauf au plus un nombre fini, ait un antécédent et

un seul. Une quasi-bijection sera une quasi-injection surjective).

La technique

Le plus souvent Φ *sera une transformation homographique du plan ou une application rationnelle du plan dans le plan fabriquée à l'aide des bijections suivantes:*

$$]0,1[\longrightarrow \mathbf{R}$$

$$t \longmapsto \frac{\alpha B_0^2(t) + \beta B_1^2(t) + \gamma B_2^2(t)}{B_1^2(t)}$$

$$\text{où} \quad \alpha\gamma < 0$$

$$\mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$t \longmapsto \frac{t^2 - 1}{t}$$

$$[0,1[\longrightarrow \mathbf{R}_+$$

$$t \longmapsto \frac{t}{1 - t}$$

Contenu

Pour une surface rationnelle définie sur un domaine plan comme $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, *ou encore l'intérieur d'un quadrangle convexe, nous déterminons une quasi-bijection du carré ou du triangle sur ce domaine. Nous calculons alors le nouveau réseau massique résultant de ce changement de paramètre. Cette démarche se justifie par des raisons algorithmiques: le calcul de combinaisons linéaires affines convexes. Nous étudions des exemples: la sphère, paramétrée cette fois-ci sur* $[0,1]^2$, *et*

admettant un réseau rectangulaire de 15 vecteurs massiques et la sphère paramétrée sur un triangle et admettant un réseau triangulaire de 28 vecteurs massiques.
Nous donnons quelques résultats généraux, sur l'obtention de nouveaux réseaux massiques, faisant intervenir les transformations projectives du plan paramètre ainsi que les homographies et les transformations quadratiques de R.
En utilisant la transformation projective transformant l'intérieur d'un carré en l'intérieur d'un quadrangle convexe, nous montrons, sur un exemple, comment obtenir le réseau massique sur le carré d'une surface paramètrée à priori sur le quadrangle.

Exemple

La sphère de centre Ω_1 et de rayons $\Omega_1 A$, $\Omega_1 B$, $\Omega_1 C$ orthogonaux deux à deux admet pour réseau massique rectangulaire sur $[0,1]^2$:

θ_{ij}	j = 0	1	2
i = 0	(C,1)	$-\overrightarrow{\Omega_1 A}$	(C',1)
1	$\vec{0}$	$-2\overrightarrow{\Omega_1 B}$	$\vec{0}$
2	$(C,\frac{7}{3})$	$3\overrightarrow{\Omega_1 A}$	$(C',\frac{7}{3})$
3	$\vec{0}$	$2\overrightarrow{\Omega_1 B}$	$\vec{0}$
4	(C,1)	$-\overrightarrow{\Omega_1 A}$	(C',1)

où C' désigne le symétrique de C par rapport à Ω_1 .

CHAPITRE VIII TRANSFORMEE AFFINE ET PROJECTIVE D'UNE SURFACE (SBR)

- Transformations projectives et affines.
- Applications projectives et affines. Perspectives. Visualisation des (SBR).

Le réseau massique de la transformée projective d'une surface (SBR) est déterminé en fonction de l'ancien réseau et de la transformation linéaire induisant la transformation projective suivant la formule:

$$T(SBR[\theta](u,v)) = SBR[\ \hat{T}(\theta)\ ](u,v)$$

où T est la transformation projective de $\tilde{\mathcal{S}}$ induite par $\hat{T}$

Cette formule, valable pour les surfaces (SBR) rectangulaires, est encore valable pour les (SBR) triangulaires à condition de remplacer les coordonnées cartésiennes (u.v) par les coordonnées barycentriques (λ,μ,ν).

Nous montrons, par exemple, comment un réseau de l'hyperboloïde à deux nappes peut s'obtenir à partir d'un réseau de la sphère. Nous traitons le cas particulier des transformations affines et montrons comment un réseau du demi-ellipsoïde peut s'obtenir à partir d'un réseau de la demi-sphère. Nous caractérisons les surfaces (SBR) qui sont transformées projectives d'une surface (SBP).

Les résultats précédents s'étendent au cas d'une application projective ou affine et, appliqués au cas des projections cylindrique ou conique, ils permettent la visualisation d'une

surface (SBR) en donnant le réseau massique de la projection. Nous traitons le cas de la projection cylindrique de la sphère.

Un réseau massique, sur RxR_+, de l'hyperboloide à deux nappes d'équation cartésienne: $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

	j = 0	1	2
i = 0	((1,0,0);1)	((1,1,0);1)	((2,2,0);0)
1	((1,0,0);1)	((1,1,1);1)	((2,2,2);0)
2	((1,0,0);2)	((1,0,1);2)	((4,0,4);0)

CHAPITRE IX GENERATION DE SURFACES (SBR) A L'AIDE DE COURBES (BR)

- Surfaces de révolution.
- Surfaces (SBR) déterminées par une combinaison variable de courbes (BR).

En faisant tourner un demi-cercle puis une demi-hyperbole autour d'un axe, chacun étant déterminé par un réseau massique, nous montrons comment obtenir des réseaux massiques rectangulaires, sur $[0,1]^2$, de la sphère et de l'hyperboloide de révolution à une nappe. Les réseaux obtenus comportent chacun 15 vecteurs massiques; celui de la sphère ayant déjà été obtenu précédemment. Nous traitons ensuite le cas général d'une surface (SBR) engendrée par une courbe (BR) tournant autour d'un axe. En application du cas général, nous déterminons un réseau massique rectangulaire, sur $[0,1]^2$, de 25 éléments pour le tore.

Nous obtenons ensuite une très large classe de surfaces (SBR) à partir de combinaisons variables de courbes (BR). De façon précise, nous déterminons un réseau massique de:

$$\sigma(u,v) = \alpha_0(u)C_0(v) + \alpha_1(u)C_1(v) + \alpha_2(u)C_2(v) + z(u)\,\vec{k}$$

à partir des polygones massiques des courbes C_0 , C_1 , C_2 *et de la courbe décrite par*

$$M(u) = \alpha_0(u)\Omega_1 + \alpha_1(u)A + \alpha_2(u)B + z(u)\,\vec{k}$$

Ω_1 , A , B , $\vec{k}$ *étant des points et un vecteur donnés.*

Nous retrouvons en particulier les surfaces de révolution, les surfaces réglées, les surfaces à sections de forme identique et de taille variable.
Dans les techniques mises en oeuvre, nous utilisons notamment le résultat concernant la détermination du polygone massique de la transformée affine d'une courbe (BR).
Les résultats précédents permettent, à partir de données réduites sous forme de réseaux massiques, de créer de nombreuses formes ou surfaces: d'où leur intérêt sur le plan informatique en CAO, DAO, CFAO, conception de formes; ces formes ou ces surfaces pouvant être alors considérées comme autant de primitives.

Réseau massique de l'hyperboloide de révolution à une nappe.

L'espace étant rapporté au repère orthonormé $(\Omega_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'hyperboloide H_1 d'équation $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ admet comme réseau massique sur $[0,1]^2$:

	j = 0	1	2
i = 0	$\vec{i} - \vec{k}$	$(\Omega_1, 1)$	$\vec{i} + \vec{k}$
1	$2\,\vec{j}$	$\vec{0}$	$2\,\vec{j}$
2	$-3\,\vec{i} - \frac{7}{3}\,\vec{k}$	$(\Omega_1, \frac{7}{3})$	$-3\,\vec{i} + \frac{7}{3}\,\vec{k}$
3	$-2\,\vec{j}$	$\vec{0}$	$-2\,\vec{j}$
4	$\vec{i} - \vec{k}$	$(\Omega_1, 1)$	$\vec{i} + \vec{k}$

Dans la première colonne ou la dernière se trouve un réseau de la conique à l'infini du H_1.
Dans la première ligne ou la dernière se trouve un réseau massique d'une branche d'hyperbole engendrant le H_1 par révolution.

Réseau massique du tore.

L'espace étant rapporté au même repère que précédemment, le tore $\mathcal{T}$ engendré par le cercle du plan $x\Omega_1 z$ de centre $(R,0,0)$ et de rayon ρ admet comme réseau massique sur $[0,1]^2$:

	j = 0	1	2	3	4
i = 0	$(T_1,1)$	$2\rho\vec{k}$	$(T_2,\frac{7}{3})$	$-2\rho\vec{k}$	$(T_1,1)$
1	$2(R+\rho)\vec{j}$	$\vec{0}$	$\frac{14}{3}(R-\frac{9}{7}\rho)\vec{j}$	$\vec{0}$	$2(R+\rho)\vec{j}$
2	$(T_4,\frac{7}{3})$	$\frac{14}{3}\rho\vec{k}$	$(T_3,\frac{49}{9})$.	$-\frac{14}{3}\rho\vec{k}$	$(T_4,\frac{7}{3})$
3	$-2(R+\rho)\vec{j}$	$\vec{0}$	$-\frac{14}{3}(R-\frac{9}{7}\rho)\vec{j}$	$\vec{0}$	$-2(R+\rho)\vec{j}$
4	$(T_1,1)$	$2\rho\vec{k}$	$(T_2,\frac{7}{3})$	$-2\rho\vec{k}$	$(T_1,1)$

CHAPITRE X RESEAUX MASSIQUES DES QUADRIQUES COMME SURFACES (SBR) DEFINIES SUR $[0,1]^2$

- Les deux types de quadriques propres.
- Calcul de réseaux massiques des quadriques.
- Caractérisation des quadriques.
- Autres réseaux des quadriques non sphériques.

Les quadriques sont parmi les plus simples des surfaces rationnelles; d'où l'intérêt de les contrôler par réseau massique en vue de les rendre plus utilisables sur le plan informatique: CAO, CFAO, DAO. C'est l'un des buts de ce chapitre.

Nous rappelons d'abord les deux types de quadriques propres: celles qui sont l'image projective d'une sphère et que nous dirons de type sphérique et celles qui sont l'image projective d'un hyperboloide à une nappe (H_1) et que nous dirons de type non sphérique.

A partir de réseaux massiques connus pour la sphère et le (H_1), nous déterminons, par transformation projective, deux réseaux rectangulaires de 15 vecteurs massiques pour chacune des quadriques: l'ellipsoide, le paraboloide elliptique, l'hyperboloide à deux nappes à partir de la sphère; le paraboloide hyperbolique à partir du (H_1). Les deux réseaux mis en évidence pour chacune des quadriques débouchent chacun sur une caractérisation des deux types de quadriques. Précisons une des caractérisations.

Dans l'espace usuel, toute quadrique de type sphérique possède un réseau massique, sur $[0,1]^2$, de la forme:

θ	$j = 0$	1	2
$i = 0$	ω_0	ω_1	ω_2
1	$\vec{0}$	ω_3	$\vec{0}$
2	$\frac{7}{3}\omega_0$	$-3\omega_1$	$\frac{7}{3}\omega_2$
3	$\vec{0}$	$-\omega_3$	$\vec{0}$
4	ω_0	ω_1	ω_2

où $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une base de $\hat{\mathcal{X}}$. Et réciproquement.

Dans l'espace usuel, toute quadrique de type non sphérique possède, sur $[0,1]^2$, un réseau massique rectangulaire de la forme:

θ	$j = 0$	1	2
$i = 0$	ω_0	ω_1	ω_2
1	ω_3	$\vec{0}$	ω_3
2	$-\frac{1}{3}(\omega_0+8\omega_2)$	$\frac{7}{3}\omega_1$	$-\frac{1}{3}(8\omega_0+\omega_2)$
3	$-\omega_3$	$\vec{0}$	$-\omega_3$
4	ω_0	ω_1	ω_2

où $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une base de $\hat{\mathcal{X}}$. Et réciproquement.

En complément, à partir d'une étude sur le paraboloide hyperbolique (PH), nous déterminons des réseaux massiques, sur $\mathbb{R}^2$ et $[0,1]^2$, des quadriques de type non sphérique (H_1 et PH). Ces réseaux sont tels que les lignes coordonnées de la B-représentation coincident avec les deux familles de génératrices. Nous donnons un réseau général du type précédent pour les quadriques de type non sphérique, réseau à partir duquel nous pouvons discriminer la nature de la quadrique: (PH) ou (H_1). Dans cette dernière représentation (BR) du (H_1) ou du (PH), nous obtenons seulement 4 vecteurs massiques sur $\mathbb{R}^2$ et 9 sur $[0,1]^2$.

Dans tous les cas, une quadrique est parfaitement déterminée par la donnée de quatre vecteurs massiques linéairement indépendants.

Cette étude permet d'utiliser toutes les quadriques sur le plan informatique car nous verrons plus loin que leur détermination par un réseau massique permet de les calculer, comme toute surface (SBR), aussi simplement que les surfaces (SBP). Jusqu'alors, l'utilisation des quadriques, sous forme (SBP), nous limitait au cas du (PH).

Toute quadrique de type non sphérique admet, sur $[0,1]^2$, un réseau massique rectangulaire de la forme:

ω	j = 0	1	2
i = 0	ω_{00}	ω_{01}	$-\omega_{00}$
1	ω_{10}	ω_{11}	$-\omega_{10}$
2	$-\omega_{00}$	$-\omega_{01}$	ω_{00}

où $(\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{10}, \omega_{11})$ est une base de $\hat{\mathcal{S}}$. Et réciproquement.

Les lignes coordonnées de $SBR[\omega; [0,1]^2]$ sont les génératrices. Cette quadrique est un (PH) si et seulement si:

$$\chi(\omega_{00})\chi(\omega_{11}) = \chi(\omega_{01})\chi(\omega_{10})$$

CHAPITRE XI ALGORITHMES DE CALCUL D'UNE SURFACE (SBR)

- Algorithmes projetés de l'algorithme de De Casteljau par $\Pi\Omega$ et Π .
- Algorithmes de subdivision. Cas rectangulaire.
- Subdivision. Cas triangulaire. Préliminaires.
- Un algorithme de subdivision. Cas triangulaire.

Les algorithmes de calcul d'une (SBP) vus au chapitre VI qui calculent, l'un, une (SBP) rectangulaire, l'autre, une (SBP) triangulaire, induisent chacun, par $\Pi\Omega$ et Π, deux algorithmes de calcul d'une (SBR).

Nous rappelons ensuite les résultats essentiels qui fondent l'algorithme de subdivision calculant une (SBP) rectangulaire. Nous donnons des démonstrations et admettons seulement le fait intuitif que les réseaux engendrés successivement par l'algorithme se confondent, en définitive, avec la surface donnée. Nous montrons comment le support d'une surface (SBP) rectangulaire, contrôlée par un réseau sur $[0,1]^2$, peut être considéré comme la réunion des supports de deux surfaces (SBP) sur $[0,1]^2$, contrôlées chacune par un réseau déduit du réseau initial et de même format que celui-ci. Ce partage de la surface initiale peut être réalisé de deux façons selon que l'on opère relativement à l'une ou l'autre des variables. L'itération de ce double processus débouche sur l'algorithme de subdivision; la surface initiale étant "confondue" avec la réunion des réseaux obtenus après plusieurs itérations. Cet algorithme puissant et efficace induit, par $\Pi\Omega$ et Π , deux algorithmes de calcul d'une (SBR) rectangulaire.

Nous développons enfin un algorithme de subdivision pour les (SBP) triangulaires définies sur

$$\Delta = \{(\lambda,\mu,\nu):\ \lambda,\mu,\nu \geq 0,\ \lambda+\mu+\nu = 1\}$$

Le principe en est le suivant. Δ_1, Δ_2, Δ_3, ... , Δ_i ,... *étant une triangulation de* Δ, *la restriction à* Δ_i *de la (SBP) initiale a pour support celui d'une (SBP) définie sur* Δ *et de réseau* $\hat{R}_i$. *Lorsque le diamètre des* Δ_i *est assez petit, la réunion des réseaux* $\hat{R}_i$ *est "confondue" avec la surface initiale. L'algorithme de subdivision pour une (SBP) triangulaire induit par* $\Pi\Omega$ *et* Π , *deux algorithmes de subdivision pour une (SBR) triangulaire.*

Nous ne prétendons pas rendre complétement compte de la richesse du sujet. Nous proposons dans chacun des cas, rectangulaire et triangulaire, une façon de subdiviser parmi d'autres possibles.

Références

[1] **M. Berger**, *Géométrie, 1, action de groupes, espaces affines et projectifs*, Cedic, F. Nathan, Paris, 1977.

[2] **P. Bézier**, *Procédé de définition numérique des courbes et surfaces non mathématiques, Système Unisurf*, Automatisme, 13, 1968.

[3] **P. Bézier**, *Essais de définition numérique des courbes et surfaces expérimentales*, Thèse d'état, Université de Paris VI (1977).

[4] **M. Boehm, G. Farin and J. Kahmann**, *A survey of curve and surface methods*, CAGD, 1, 1984, 1-60.

[5] **M. Boehm**, *On cubics survey*, CG and IP, 19, 1982, 201-226.

[6] **C. de Boor**, *B-form basics*, in Geometric Modeling : algorithms and new trends, G.E. Farin, ed., Siam,1987, 131-148.

[7] **F. De Casteljau**, *Outillage, méthode de calcul*, André Citroën Automobiles, S.A., Paris, 1959.

[8] **F. De Casteljau**, *Courbes et surfaces à pôles*, André Citroën Automobiles, S.A., Paris, 1963.

[9] **S.A. Coons**, *Surfaces for computer aided design of space forms*, MIT Projet MAC-TR-41, 1967 .

[10] **G. Farin**, *Algorithms for rational Bézier curves*, CAD, 15, 1983, 73-77.

[11] **G. Farin**, *Bézier polynomials over triangles and the construction of piecewise C^r polynomials*, TR/91, Dept. of Mathematics, Brunel University, Uxbridge, Middlesex, U.K., 1980.

[12] **I.E. Faux and M.J. Pratt**, *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood, Chichester, 1979.

[13] **J.C. Fiorot et P. Jeannin**, *Courbes Bézier rationnelles*, XIXème Congrés National d'Analyse Numérique, Port-Barcarés, France, 26-30 Mai 1986.

[14] **J.C. Fiorot et P. Jeannin**, *Nouvelle description et calcul des courbes rationnelles à l'aide de points et vecteurs de contrôle*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, 1987, 435-440.

[15] **J.C. Fiorot et P. Jeannin**, *Surfaces rationnelles sur un carré contrôlées par des points pondérés et des vecteurs*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, 1988, 87-92.

[16] **A. Forrest**, *The twisted cubic curve : A computer aided geometric design approach*, CAD, 12, 1980, 165-172.

[17] **A. Forrest**, *Curves and surfaces for computer aided design*, Ph.D., Cambridge University, 1968.

[18] **R.N. Goldman**, *Subdivision algorithms for Bézier triangle, CAD*, 15, 1983, 159-166.

[19] **J.M. Lane and R.F. Riesenfeld**, *A theoretical developpement for computer generation of piecewise polynomial surfaces*, I.E.E.E. Trans. on P.A.M.I., 2, 1980, 35-46.

[20] **A. Le Méhauté et P. Sablonnière**, *Courbes et surfaces Bézier, B-splines*, Collection Mathématiques et Informatique, Hermès, Paris, 1988, (à paraître) .

[21] **A. Le Méhauté**, *A knot removal strategy for scattered data*, Mathematical Methods in CAGD, Oslo,June 16-22, 1988.

[22] **L. Piegl**, *Reprentation of rational Bézier curves and surfaces by recursive algorithms*, CAD, 18, 1986, 361-366.

[23] **L. Piegl**, *Infinite control points a method for representing surfaces of revolution using boundary data*, I.E.E.E. CGA, 1987, 45-55.

[24] **P. Sablonnière**, *Base de Bernstein et approximants splines*, Thèse d'état, Lille, 1982.

[25] **W. Tiller**, *Rational B-splines for curve and surface representation*, I.E.E.E. CGA, 3, 1983, 61-69.

[26] **K.J. Versprille**, *Computer aided design applications of the rational B-pline approximation form*, Ph.D. Syracuse University, 1975.

RESUME

Cette thèse est une contribution à l'étude des courbes et des surfaces rationnelles dans l'optique de leur traitement informatique en CAO, CFAO, DAO. Une nouvelle description des courbes et surfaces rationnelles est proposée. Une telle courbe ou surface est contrôlée, à l'aide des polynômes de Bernstein, par la donnée d'un certain nombre de vecteurs massiques ; un vecteur massique étant un point pondéré ou un vecteur de l'espace dans lequel est plongée cette courbe ou cette surface.

Cette nouvelle description est exploitée sur le plan du traitement informatique et géométrique. Des techniques de recherche de polygones et réseaux massiques sont développées ; notamment pour les coniques et les quadriques ; ainsi que des techniques de création de formes déterminées par les réseaux massiques. Les géométries projective et affine constituent un outil privilégié dans la plupart des développements. La matière de cette thèse peut être qualifiée de géométrie algorithmique.

MOTS-CLES

Vecteur massique,
Réseau massique,
surface B-rationnele,
géométrie projective,
polygone massique,
courbe B-rationnelle,
algorithme,
visualisation.