

N° d'ordre : 305

50376
1988
231



50376
1988
231

THESE

présentée à

**L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS**

pour obtenir le grade de

Docteur en Automatique

par

BOUAZIZ Bouchaib

SUR UNE NOUVELLE METHODE DE SIMPLIFICATION DE MODELES DES SYSTEMES DYNAMIQUES : APPLICATION AU CALCUL DES REALISATIONS EQUILIBREES

Soutenue le 20 Décembre 1988 devant la Commission d'Examen :

M. J.C.GENTINA	Président
Mme. G.DAUPHIN-TANGUY	Rapporteur
M. M.STAROSWIECKI	Rapporteur
M. P.BORNE	Directeur de thèse
M. A.EL MOUDNI	Directeur de thèse

*A la mémoire de mon père, à ma mère
A ma femme, à ma petite fille
A tous ceux qui me sont chers*

AVANT-PROPOS

AVANT-PROPOS

Le travail que nous présentons dans ce mémoire, a été effectué dans le cadre d'une action intégrée entre le Laboratoire d'Automatique de La Faculté des Sciences I de CASABLANCA et Le Laboratoire d'Automatique et Informatique Industrielle de l'Institut Industriel du Nord de LILLE, sous la direction conjointe de MM. les Professeurs A. EL MOUDNI et P.BORNE.

Nous tenons tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur GENTINA, directeur de L'Institut Industriel du Nord, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Monsieur le Professeur BORNE, directeur scientifique de l'I.D.N., nous a beaucoup soutenu dans l'accomplissement de ce travail, nous lui exprimons notre vive reconnaissance. Pour l'accueil qu'il nous a réservé durant nos stages au sein de son équipe de recherche, nous l'en remercions et lui témoignons notre sincère amitié.

Malgré ses lourdes charges, Madame DAUPHIN-TANGUY s'est intéressée de près à nos recherches. Elle nous a accordé une attention particulière en nous prodiguant de ses conseils précieux et avisés durant nos séjours à l'I.D.N., nous la prions d'accepter nos très vifs et très sincères remerciements, nous sommes très honoré par sa présence dans le jury de thèse.

A Monsieur EL MOUDNI, nous exprimons toute notre amitié et notre profonde gratitude pour l'aide et la confiance dont il nous a généreusement gratifiées, et qui nous étaient nécessaires au cours de ce long travail qu'il a bien voulu diriger, nous l'en remercions et lui témoignons notre plus vive reconnaissance.

Pour avoir bien voulu juger notre travail, nous adressons à Monsieur le Professeur STAROSWIECKI l'expression de notre profonde gratitude. Nous sommes très sensible à l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'être notre rapporteur de thèse et qu'il en soit vivement remercié.

Nous ne saurions qu'associer dans un même sentiment de gratitude, Monsieur le Professeur DAOUDI, Doyen de la Faculté des Sciences I de Casablanca, pour l'appui qu'il nous a montré en acceptant de nous libérer momentanément de nos enseignements afin d'effectuer des stages à l'étranger.

Nous ne saurions oublier les collègues du Département de Physique qui ont bien voulu nous remplacer durant nos absences, qu'ils soient aussi remerciés pour leur gentillesse et leur sympathie.

Nous tenons enfin à remercier tous les membres du Laboratoire d'Automatique de La faculté des Sciences I de Casablanca et du Laboratoire d'Automatique et Informatique Industrielle de l'I.D.N., pour l'aide qu'ils nous ont apportée tant de point de vue scientifique que sur le plan humain.

Nous ne saurions terminer cet avant-propos sans remercier Messieurs VANGREVENINGE et DANQUERQUE qui se sont chargés de l'impression de ce rapport.

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Les travaux présentés dans ce mémoire se situent dans le cadre général de la modélisation et de la simplification de modèles des processus dynamiques linéaires.

Dans ce domaine, de nombreuses méthodes ont été développées, chacune d'elles repose sur un principe différent et cherche avec plus ou moins de succès, à élaborer un modèle réduit assurant une représentation adéquate du processus initial.

Parmi ces méthodes, celle de la symétrisation interne développée par Moore [36], présente un intérêt particulier vis à vis du comportement externe du processus : elle permet de retenir, dans une base donnée, les composantes d'état les plus significatives pour la commande et l'observation. Toutefois, cette méthode exige en plus de la connaissance préalable d'une réalisation minimale du processus à simplifier, des calculs matriciels qui peuvent dans certains cas s'avérer compliqués et coûteux.

Dans ce mémoire nous présentons une nouvelle méthode de simplification de modèles des systèmes dynamiques linéaires, lorsque ces derniers sont décrits dans le domaine fréquentiel par leur fonction de transfert. Cette méthode est conçue comme une généralisation aux cas approchés des critères simplifiés de commandabilité et d'observabilité. Elle permet de retrouver avec une bonne précision les résultats obtenus par la méthode de Moore.

Dans le premier chapitre nous rappelons les définitions et les principales propriétés des différentes modélisations d'un système dynamique. Une attention particulière a été accordée aux systèmes discrets : pour ces systèmes, diverses méthodes sont développées permettant le passage d'une représentation d'état à une représentation par équations de récurrence vectorielles faisant intervenir seulement une partie du vecteur d'état. En particulier, lorsque la représentation initiale est incomplètement observable, nous avons mis au point un algorithme pratique permettant le calcul des coefficients intervenant dans l'écriture de ces équations. Ces méthodes conçues pour les systèmes linéaires, présentent l'avantage de s'adapter parfaitement aux systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov.

Dans le deuxième chapitre, après avoir rappelé l'approche de Moore pour le calcul des réalisations équilibrées d'un système représenté par une équation d'état, nous introduisons la méthode des pôles et zéros rapprochés pour un système initialement représenté par sa fonction de transfert.

Enfin, l'étude présentée au troisième chapitre, permet d'illustrer sur un exemple concret les résultats développés dans les chapitres précédents : il s'agit d'un groupe turbo-alternateur à resurchauffe pour lequel il est possible de distinguer deux types de fonctionnement. L'étude envisagée permet de montrer la mise en oeuvre de la méthode proposée pour l'élaboration de modèles réduits pour chaque fonctionnement.

CHAPITRE I

CHAPITRE I

MODELISATION ET SIMPLIFICATION DE MODELES DES SYSTEMES DYNAMIQUES

INTRODUCTION

Lors de la description d'un système dynamique, le problème de la modélisation constitue une étape très importante : en effet, le choix d'un modèle mathématique représentant le processus à commander doit être bien adapté à la nature des problèmes à résoudre, et par conséquent, apparaît comme fondamental quant à la qualité des résultats obtenus.

Ce chapitre commence par une présentation des différentes méthodes les plus utilisées pour la description des processus linéaires continus ou discrets. Parmi ces modélisations, la représentation dans l'espace d'état constitue un outil très puissant et a permis d'introduire les concepts de commandabilité et d'observabilité dont nous rappellerons les définitions et les principales propriétés.

Pour les systèmes discrets initialement représentés dans l'espace d'état, nous présenterons un algorithme simple de mise en équation qui permettra le passage de la représentation initiale à une formulation récurrente d'ordre minimale. En particulier, nous illustrerons par un exemple l'application de cette méthode à une classe importante de systèmes non linéaires.

La dernière partie du chapitre sera consacrée à l'exposé des différentes techniques de simplification de modèles des systèmes dynamiques linéaires, dans lequel la méthode de symétrisation interne sera juste définie pour être plus détaillée dans le chapitre suivant.

I-DESCRIPTION DES SYSTEMES DYNAMIQUES

Les systèmes dynamiques les plus couramment observés peuvent être classés en deux types selon le mode de transmission de l'information [1] :

- Les systèmes continus dans lesquels l'information se transmet sous forme de signaux continus par rapport à la variable temps.

- Les systèmes discrets dans lesquels l'information se transmet en un ou plusieurs points du système sous forme de signaux arrivant à des intervalles de temps égaux ou non.

Ces derniers peuvent être discrets par nature ou, ce qui est fréquent, obtenus par échantillonnage de systèmes initialement continus.

Dans tout ce qui suit, nous nous intéresserons au problème de la représentation par un modèle mathématique de processus dynamiques déterministes [3].

I.1- Systèmes continus

I.1.1- Equation d'état

L'état d'un système est défini par un nombre minimal de variables dont la connaissance à l'instant initial t_0 permet à partir des relations entrées - sorties régissant son évolution de prédire son comportement futur pour une loi d'évolution des entrées donnée [2].

Une caractérisation complète du processus est donc définie pour $t \in [t_0, \infty [$ par :

- La donnée de l variables $(u_1(t), u_2(t), \dots, u_l(t))$ représentant les actions de l'extérieur sur le système et qui constituent les composantes du vecteur de commande $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_l(t))^T$.

- La donnée de r variables $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t))$ par le biais desquelles le comportement du processus est observé et qui constituent les composantes du vecteur de sortie $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t))^T$.

- La donnée d'un nombre minimal q de variables ($x_1(t), x_2(t), \dots, x_q(t)$) dites d'état et qui constituent les composantes du vecteur d'état à l'instant t : $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_q(t))^T$.

Le vecteur d'état évolue en fonction du temps dans un espace vectoriel E de dimension q appelé espace d'état, en général pris égal à \mathbb{R}^q , suivant la loi [3] :

$$X(t) = \chi [X(t_0), U(t_0, t), t] \quad t \geq t_0 \quad (1-1)$$

L'équation (1-1) est appelée équation d'état sous forme explicite.

En générale, l'évolution du processus dans l'espace d'état peut être décrite par :

$$\dot{X}(t) = F [X(t), U(t), t] \quad \text{-a-} \quad (1-2)$$

$$Y(t) = G [X(t), U(t), t] \quad \text{-b-}$$

où G est une fonction univoque et F une fonction continue vérifiant les propriétés d'existence et d'unicité de la solution de (1-2-a) pour des conditions initiales $X(t_0)$ et une entrée $U(t)$ données.

Les équations (1-2) représentent respectivement l'équation d'état et l'équation d'observation.

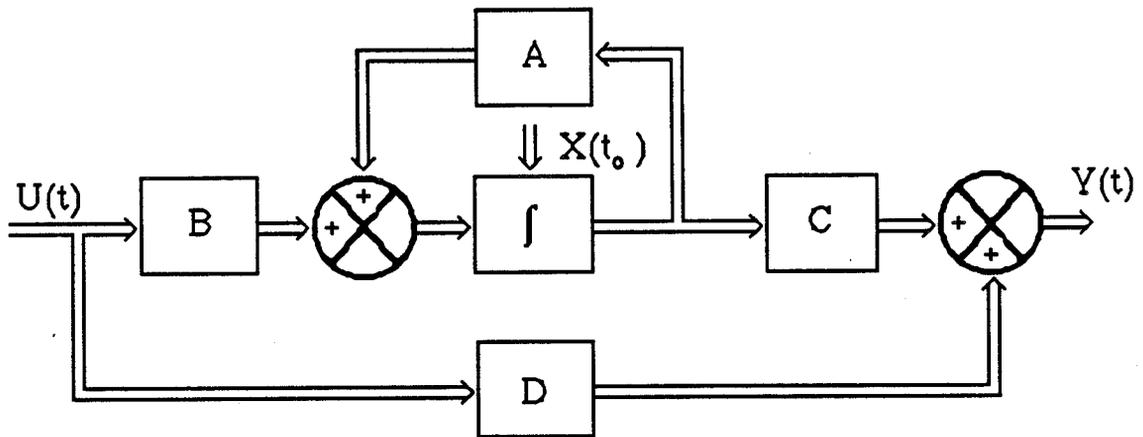
Dans le cas particulier des processus linéaires non stationnaires, ces équations se ramènent au système différentiel vectoriel :

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad \text{-a-} \quad (1-3)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t) \quad \text{-b-}$$

où $X(t)$ est un vecteur de dimension q et $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ sont des matrices réelles de dimensions respectives $q \times q$; $q \times l$; $r \times q$ et $r \times l$ appelées matrices d'évolution, de commande, d'observation et de transmission directe.

Le schéma-bloc associé à la représentation (1-3) est décrit sur la figure ci-après :



Lorsqu'en plus ces matrices sont à coefficients constants, le processus est dit stationnaire ou invariant.

L'équation (1-3-a) a pour solution générale :

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) U(\tau) d\tau \quad (1-4)$$

$$t \geq t_0$$

dans laquelle $\Phi(t, t_0)$ est une matrice dite de transition et vérifiant les propriétés suivantes [3] :

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0) \quad \text{-a-}$$

$$\Phi(t_1, t_2) = \Phi^{-1}(t_2, t_1) \quad \text{-b-}$$

$$\Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0) \quad \text{-c-}$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I_q \text{ (matrice unitaire)} \quad \text{-d-}$$

(1-5)

L'évolution de la sortie à partir de t_0 se fait suivant :

$$Y(t) = C(t) \Phi(t, t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t S(t, \tau) U(\tau) d\tau \quad (1-6)$$

$$S(t, \tau) = C(t) \Phi(t, \tau) B(\tau)$$

où $S(t, t_0)$ est une matrice de dimension $r \times l$ que l'on désigne par matrice de réponse impulsionnelle [4].

La représentation d'état (I-3) n'est pas unique, en effet si T est une matrice régulière de transformation linéaire, alors :

$$\begin{aligned} T^{-1} \dot{X}(t) &= T^{-1} A T (T^{-1} X(t)) + T^{-1} B U(t) & -a- \\ Y(t) &= C T (T^{-1} X(t)) + D(t) U(t) & -b- \end{aligned} \quad (I-7)$$

est aussi une représentation d'état du même système qui fait intervenir des matrices d'évolution, de commande et d'observation différentes; l'étude du système à l'aide de cette nouvelle représentation peut être notablement simplifiée.

Lorsque le nombre de variables d'état choisies pour décrire le processus n'est pas minimal, la représentation est alors dite redondante.

I.1.2- Equations différentielles

- cas monovariante : $l = r = 1$

La mise en équation d'un système physique conduit souvent à une relation de la forme :

$$f(y^{(q)}, y^{(q-1)}, \dots, y, u^{(l)}, \dots, u, t) = 0 \quad (I-8)$$

dans laquelle $y^{(k)}$, $1 \leq k \leq q$ et $u^{(i)}$, $1 \leq i \leq l$ sont respectivement les dérivées successives de la sortie y et de l'entrée u .

Lorsque le système est linéaire et stationnaire, (I-8) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants [5] :

$$\sum_{i=0}^{q-1} a_i y^{(q-i)} = \sum_{j=0}^{l-1} b_j u^{(l-j)} \quad (I-9)$$

avec $a_0 \neq 0$.

- cas multivariante [6] :

La représentation du système est dans ce cas de la forme :

$$L(D) Y = M(D) U \quad (I-10)$$

où $L(D)$ et $M(D)$ sont des matrices polynômiales par rapport à l'opérateur de différentiation D de dimensions respectives $r \times r$ et $r \times l$.

I.1.3- Fonction de transfert

L'application à l'équation (I-9) de la transformée de Laplace, les conditions initiales supposées nulles, conduit à une relation du type :

$$\sum_{i=0}^{q-1} a_i p^{q-i} y(p) = \sum_{j=0}^{l-1} b_j p^{l-j} u(p) \quad (I-11)$$

et permet de définir la fonction de transfert du système comme le rapport de deux polynômes en p :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{j=0}^{l-1} b_j p^{l-j}}{\sum_{i=0}^{q-1} a_i p^{q-i}} \quad (I-12)$$

avec la condition de réalisabilité physique : $l < q$.

Lorsque le système est multivariable, sa description dans le domaine fréquentiel conduit à un ensemble de transmittances qui constituent la matrice de transfert $\mathbf{H}(p)$ de dimension $r \times l$ [7] :

$$\mathbf{H}(p) = \begin{bmatrix} H_{11}(p) & \dots & H_{1l}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{r1}(p) & \dots & H_{rl}(p) \end{bmatrix} \quad (I-13)$$

où $H_{ij}(p)$, $1 < i < r$ et $1 < j < l$ est la fonction de transfert relative à l'entrée u_j et la sortie y_i .

Dans tous les cas, la matrice de transfert fournit une description externe du processus et peut être déduite de l'équation d'état par [6] :

$$H(p) = C(p.I_q - A)^{-1}B \quad (I-14)$$

I.2- Systèmes discrets

I.2.1- Equation d'état discrète

Les grandeurs intervenant dans la description des systèmes discrets sont :

- Les variables d'entrée ($u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^l$) constituant le vecteur de commande à l'instant n : $U_n \in \mathbf{IR}^l$.
- Les variables de sortie ($y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^r$) constituant le vecteur de sortie à l'instant n : $Y_n \in \mathbf{IR}^r$.
- q variables d'état x_n^i ($i = 1, 2, \dots, q$) constituant le vecteur d'état à l'instant n : $X_n \in \mathbf{IR}^q$.

Les équations d'évolution du vecteur d'état entre les instants n_0 et $n \geq n_0$ s'expriment par :

$$X_n = \chi [X_{n_0}, U(n, n_0), n, n_0] \quad (I-15)$$

Lorsque le système est linéaire et invariant, le changement d'état entre deux instants successifs est régi par les équations :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n + BU_n && \text{-a-} \\ Y_n &= CX_n + DU_n && \text{-b-} \end{aligned} \quad (I-16)$$

où X_n est un vecteur de dimension q et A, B, C et D des matrices à coefficients réels et constants de dimensions appropriées.

La solution générale de l'équation (I-16-a) est ($n_0=0$) :

$$X_n = A^n X_0 + \sum_{i=1}^n A^{i-1} B U_{n-i} \quad (I-17)$$

I.2.2- Equations de récurrence

Lorsque le système est décrit par une séquence définie à partir des valeurs successives de la variable de sortie Y_n , les équations

d'évolution sont du type [8] :

$$Y_{n+q} = F(Y_{n+q-1}, \dots, Y_n, U_{n+q-1}, \dots, U_n, n+q-1, \dots, n) \quad (I-18)$$

où $Y_n \in \mathbf{IR}^r$ et $U_n \in \mathbf{IR}^l$ représentent respectivement les vecteurs de sortie et d'entrée.

Pour un processus linéaire à coefficients constants, il vient l'équation de récurrence vectorielle suivante :

$$\sum_{i=0}^q M_i Y_{n+i} = \sum_{j=0}^l N_j U_{n+j} \quad (I-19)$$

où M_i et N_j sont des matrices à coefficient constants.

Lorsque le processus est monovariable, l'équation (I-19) devient :

$$\sum_{i=0}^q a_i y_{n+i} = \sum_{j=0}^l b_j u_{n+j} \quad (I-20)$$

avec $a_0 \neq 0$

I.2.3- Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système discret linéaire et monovariable s'écrit à partir de (I-20) :

$$W(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{j=0}^l b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^q a_i z^{-i}} \quad (I-21)$$

La matrice de transfert pour un processus multivariable se définit comme dans le cas continu et on a :

$$W(z) = C(zI_q - A)^{-1} B \quad (I-22)$$

Toutefois, il faut noter que les différentes représentations d'un système par variables d'état, par équations différentielles ou récurrentes et par matrice de transfert ne sont pas équivalentes : Les conditions de validité ainsi que les propriétés de ces trois modélisations peuvent être bien mises en évidence grâce aux notions de commandabilité et d'observabilité.

I.3- Commandabilité et observabilité des systèmes linéaires

Outre l'intérêt que présente la modélisation dans l'espace d'état pour l'étude des systèmes multivariables linéaires ou non, elle permet d'introduire simplement les concepts de commandabilité et d'observabilité utiles dans les problèmes de commande et d'identification.

Dans tous ce qui suit, nous supposerons que le processus étudié est décrit par des équations de la forme :

$$\begin{aligned}
 \text{- continu : } \quad \dot{X}(t) &= A(t) X(t) + B(t) U(t) & \text{-a-} \\
 & & (I-23) \\
 Y(t) &= C(t) X(t) & \text{-b-}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{- discret : } \quad X_{n+1} &= A(n) X_n + B(n) U_n & \text{-a-} \\
 & & (I-24) \\
 Y_n &= C(n) Y_n & \text{-b-}
 \end{aligned}$$

où $X(t)$ et X_n sont des vecteurs de dimension q et $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ (respectivement $A(n)$, $B(n)$ et $C(n)$) sont des matrices réelles de dimensions $q \times q$; $q \times 1$ et $r \times q$.

Les définitions et propriétés de commandabilité et d'observabilité seront énoncées seulement pour les systèmes continus : le cas discret se traitant d'une manière pratiquement analogue.

I.3.1- Commandabilité

La notion de commandabilité traduit la possibilité de transférer l'état du système d'un état initial donné à un état final désiré moyennant une énergie de commande finie.

Définition 1 [2]

Un état initial X_0 du système (I-23) est commandable à l'instant t_0 s'il existe un instant t_1 fini ($t_1 \geq t_0$) et une commande $U(t_0, t_1)$ qui permet de transférer l'état X_0 à l'instant t_0 à l'état d'équilibre O à l'instant t_1 .

En utilisant l'expression de la solution de (I-23) définie par (I-4) , il vient que l'état X_0 est commandable à l'instant t_0 s'il existe $t_1 \geq t_0$ et $U(t)$ bornée telle que la relation suivante soit vérifiée [10] :

$$X_0 = - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) U(\tau) d\tau \quad (I-25)$$

Définition 2

Si tous les états initiaux X_0 à l'instant t_0 sont commandables quel que soit $t_0 \geq 0$, alors le système est dit complètement commandable.

Une définition équivalente est donnée comme suit :

Définition 2'

Le système défini par (I-23) est complètement commandable si quel que soient X_0 , t_0 et X_1 , il existe $t_1 \geq t_0$ et $U(t_0, t_1)$ qui transfère $X_0 = X(t_0)$ à $X_1 = X(t_1)$.

I.3.2- Observabilité et dualité

Définition 3

Un état initial X_0 du système (I-23) est observable à l'instant t_0 s'il existe $t_1 \geq t_0$ tel que l'observation de la sortie $Y(t)$ et la connaissance de l'évolution de l'entrée sur l'intervalle fini (t_0, t_1) permet de déterminer X_0 de façon unique.

Définition 4

Le système (I-23) est complètement observable si tous les états initiaux X_0 sont observables à l'instant t_0 quelconque.

Le système dual (ou adjoint modifié) du système (I-23) est défini par :

$$\begin{aligned} \dot{X}_d(t) &= A^T(t)X_d(t) + C^T(t)U(t) & -a- \\ Y(t) &= B^T(t)X_d(t) & -b- \end{aligned} \quad (1-26)$$

Le principe de dualité exprime une similarité des définitions de commandabilité et d'observabilité et peut être énoncé comme suit :

Théorème

Le système (1-23) est complètement commandable (respectivement complètement observable) si et seulement si son dual (1-26) est complètement observable(respectivement complètement commandable).

1.3.3- Décomposition canonique de Kalman [12]

Théorème

L'espace d'état d'un système dynamique quelconque (1-23) peut être décomposé en quatre sous-espaces :

$$E = E_{c\bar{o}} + E_{co} + E_{\bar{c}\bar{o}} + E_{\bar{c}o} \quad (1-27)$$

où :

- $E_{c\bar{o}}$ représente les états commandables et inobservables
- E_{co} représente les états commandables et observables
- $E_{\bar{c}\bar{o}}$ représente les états non commandables et inobservables
- $E_{\bar{c}o}$ représente les états non commandables et observables

relativement à cette décomposition, les équations du système peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{c\bar{o}} \\ \dot{X}_{co} \\ \dot{X}_{\bar{c}o} \\ \dot{X}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{c\bar{o}} \\ X_{co} \\ X_{\bar{c}o} \\ X_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U \quad (I-28-a)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{c\bar{o}} & X_{co} & X_{\bar{c}o} & X_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}^T \quad (I-28-b)$$

Cette décomposition correspond à la structure décrite sur la figure (I-1).

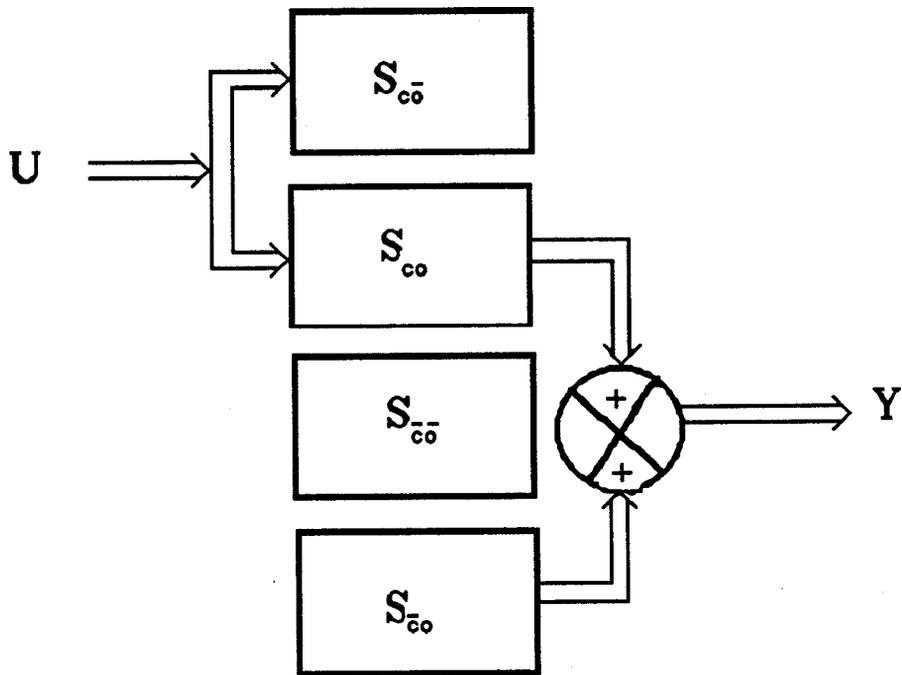


Figure (I-1) : Décomposition canonique de Kalman

Conséquence :

La matrice de transfert du système s'exprime par :

$$H(p) = C_2 (p.I - A_{22})^{-1} B_2 \quad (1-29)$$

$H(p)$ ne représente alors que la partie commandable et observable du système (A_{22}, B_2, C_2) et l'on dira que (A_{22}, B_2, C_2) est une réalisation irréductible ou minimale de $H(p)$.

I.3.4- Systèmes à coefficients constants**Définition 5**

On appelle matrice de commandabilité (respect. d'observabilité) la matrice définie par :

$$C_q = [B, AB, \dots, A^{q-1}B] \in \mathbb{R}^q \times q^1 \quad (1-30)$$

(respectivement :

$$O_q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{q-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rq} \times q \quad (1-31)$$

Théorème

Le système décrit par (1-23) supposé linéaire et invariant est complètement commandable (respect. complètement observable) si et seulement si C_q est de rang q (respect. O_q est de rang q).

Application aux fonctions de transfert

Considérons le système linéaire et invariant décrit par sa fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} + \dots + b_q}{a_0 p^q + a_1 p^{q-1} + \dots + a_q} \quad (1-32)$$

on a alors le critère simplifié [11] :

Le système décrit par la fonction de transfert (I-32) est commandable/observable si cette dernière n'admet pas de pôles et zéros communs.

II-APPLICATION A LA DESCRIPTION DES SYSTEMES DISCRETS: RECHERCHE D'UNE FORMULATION RECURRENTE MINIMALE

Les représentations les plus courantes pour l'étude et la description des systèmes discrets sont des modèles exprimés sous la forme d'équations de récurrence de type matriciel ou scalaire. Ce mode de représentation qui conduit à un symbolisme mathématique simple se trouve généralement mieux adapté pour l'analyse de certains problèmes de stabilité [54].

Dans ce qui suit, nous présenterons des méthodes de mise en équations sous forme de relations récurrentes d'un système discret initialement représenté dans l'espace d'état. Ces méthodes permettent d'aboutir à une formulation récurrente d'ordre minimal qui décrit la partie observable ou observable et commandable du système initial : en particulier, nous proposerons un algorithme pratique de calcul des coefficients intervenant dans l'écriture de ces équations. L'extension au cas non linéaire sera illustrée par le biais d'un exemple numérique.

II.1- Systèmes discrets linéaires

Considérons le système discret linéaire et invariant décrit dans l'espace d'état par les équations :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n + BU_n & \text{-a-} \\ Y_n &= CX_n & \text{-b-} \end{aligned} \tag{I-33}$$

avec :

- X_n vecteur d'état à l'instant n , $X_n \in \mathbb{R}^q$
- U_n vecteur d'entrée à l'instant n , $U_n \in \mathbb{R}^l$
- Y_n vecteur de sortie à l'instant n , $Y_n \in \mathbb{R}^r$

et A , B et C des matrices réelles à coefficients constants de dimensions

respectives $q \times q$; $q \times 1$ et $r \times q$.

Nous cherchons à déterminer à partir de (I-33) une équation récurrente vectorielle liant les vecteurs U_n et Y_n .

II.1.1- Méthode de mise en équation

Par itérations successives de l'équation (I-33-a) nous obtenons l'état du système à l'instant $n+i$:

$$X_{n+i} = A^i X_n + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} B U_{n+j} \quad (I-34)$$

$i \geq 1$

compte tenu de la relation (I-33-b), il vient :

$$Y_{n+i} = CA^i X_n + \sum_{j=0}^{i-1} CA^{i-1-j} B U_{n+j} \quad (I-35)$$

une somme pondérée par les coefficients α_i des équations (I-35) pour $i=1, 2, \dots, q$ conduit à :

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i Y_{n+i} = \sum_{i=1}^q \alpha_i CA^i X_n + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sum_{j=0}^{i-1} CA^{i-1-j} B U_{n+j} \quad (I-36)$$

nous ajoutons aux deux membres de (I-36) le terme $\alpha_0 Y_n = \alpha_0 C X_n$ et en ordonnant par rapport à U_{n+j} , il vient :

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i Y_{n+i} = \sum_{i=0}^q \alpha_i CA^i X_n + \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j \sum_{i=1+j}^q CA^{i-1-j} B U_{n+j} \quad (I-37)$$

la relation recherchée est obtenue en annulant le premier terme du second membre de (I-37), soit :

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i CA^i X_n = 0 \quad (I-38)$$

l'annulation de ce terme peut s'effectuer de deux façons [14] :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^q \alpha_i A^i &= 0 && \text{-a-} \\ \text{ou} &&& \\ \sum_{i=0}^q \alpha_i CA^i &= 0 && \text{-b-} \end{aligned} \quad (I-39)$$

II.1.2- Premier cas

Les $\{ \alpha_i \}$ $1 \leq i \leq q$ sont les coefficients du polynôme caractéristique de A défini par [13] :

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda.I_q - A) = \sum_{i=0}^q \alpha_i \lambda^i \quad (I-40)$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton, nous avons :

$$P_A(A) = \sum_{i=0}^q \alpha_i A^i = O \quad (I-41)$$

Formulation récurrente minimale

Lorsque la matrice A admet un polynôme annulateur de degré $m < q$, en choisissant les $\{ \alpha_i \}$ $1 \leq i \leq m$ coefficients de ce polynôme, on obtient une équation récurrente vectorielle avec un degré d'itération inférieur à celui de (I-37) :

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i Y_{n+i} = \sum_{j=0}^{m-1} M^j U_{n+j} \quad (I-42)$$

$$\text{où } M^j = \sum_{i=1+j}^m \alpha_i C A^{i-1-j}$$

(I-42) est dite minimale lorsque m est le degré du plus petit polynôme annulateur de A au sens de la division.

II.1.3- Deuxième cas

Les $\{ \alpha_i \}$ $1 \leq i \leq m$ sont des coefficients non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i C A^i = O \quad \text{avec } m < q \quad (I-43)$$

l'équation vectorielle (I-43) représente un système d'équations à $(m+1)$ inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$.

$$\text{Posons : } N_q = [C^T, A^T C^T, \dots, A^{(q-1)T} C^T] \quad (I-44)$$

N_q n'est autre que la matrice d'observabilité du système décrit par (I-33).

Théorème

Le système d'équations (I-43) admet une solution avec $m < q$ si et seulement si le modèle (I-33) est incomplètement observable.

en effet, lorsque le système n'est pas complètement observable nous avons :

$$r_q = \text{rang} (N_q) < q$$

r_q est le nombre maximal d'éléments $\{ A^{iT} C \}$ linéairement indépendants que nous pouvons extraire de N_q ; il suffit donc de choisir $(m+1) = r_q + 1$ d'où $m = r_q$.

Il en découle que l'ordre d'itération de l'équation de récurrence liant les variables U_n et Y_n peut toujours être réduit au nombre de variables observables : l'équation obtenue décrit alors la partie complètement observable du système.

Cependant, nous relevons que la détermination des coefficients α_i ($i=0, 1, \dots, m$) par l'équation (I-43) est difficile à mettre en oeuvre surtout lorsque l'ordre du système est élevé; dans ce qui suit, nous proposons un algorithme simple de calcul de ces coefficients basé sur l'utilisation de la matrice de transfert.

Algorithme de calcul des $\{ \alpha_i \} \ 1 \leq i \leq m$

- Cas des systèmes commandables

Le système défini par (I-33), supposé commandable, admet une matrice de transfert que nous pouvons calculer à partir de sa représentation d'état par la relation :

$$W(z) = C (z.I_q - A)^{-1} B \quad (I-45)$$

l'algorithme de Leverrier [17] nous permet de calculer $W(z)$ comme le rapport de deux polynômes en z :

$$W(z) = \frac{\sum_{i=0}^{q-1} C R_i B z^{q-i}}{\sum_{i=0}^q d_i z^{q-i}} \quad (1-46)$$

où les $q \times q$ matrices R_i ($1 \leq i \leq q-1$) et les coefficients d_i ($1 \leq i \leq q$) sont reliés par les relations récurrentes suivantes :

$$R_{i+1} = R_i A + d_i I_q \quad 2 \leq i \leq q-1$$

$$d_i = 1/i \text{ trace} (R_i A) \quad 1 \leq i \leq q \quad (1-47)$$

$$R_1 = I_q$$

lorsque le système est incomplètement observable (existence des pôles et zéros identiques), le numérateur et le dénominateur de $W(z)$ admettent un ou plusieurs facteurs communs; la simplification par ces facteurs dans l'expression (1-46) conduit à un dénominateur réduit dont les coefficients sont alors les coefficients recherchés.

Pour des raisons de simplifications, et sans perte de généralité, nous allons illustrer ce résultat par un exemple de dimension $q = 3$:

l'algorithme de Leverrier donne :

$$W_3(z) = \frac{[C.z^2 + C(A + d_1.I_3)z + C(A^2 + d_1.A + d_2.I_3)] B}{z^3 + d_1 z^2 + d_2 z + d_0} \quad (1-48)$$

lorsque z_0 est un pôle et zéro commun de $W_3(z)$ (mode inobservable) nous avons alors :

$$-d(z) = (z - z_0)(\beta_2.z^2 + \beta_1.z + \beta_0) \quad (1-49)$$

pour le dénominateur, et :

$$-CA^2 + (z_0 + d_1).CA + (z_0^2 + d_1.z_0 + d_2).C = 0 \quad (1-50)$$

pour le numérateur

en posant $\alpha_2 = 1$; $\alpha_1 = z_0 + d_1$; $\alpha_0 = z_0^2 + d_1 \cdot z_0 + d_2$; il est aisé de vérifier que : $\beta_i = \alpha_i$ $i = 0, 1, 2$

la matrice de transfert simplifiée est :

$$W_2(z) = \frac{M(z).B}{\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0} \quad (1-51)$$

où $M(z)$ est un polynôme matriciel de degré 1 en z

l'équation récurrente liant les vecteurs Y_n et U_n est donc :

$$\alpha_2 Y_{n+2} + \alpha_1 Y_{n+1} + \alpha_0 Y_n = M^1 U_{n+1} + M^0 U_n \quad (1-52)$$

- Cas des systèmes non commandables

Dans ce cas la simplification de la matrice de transfert conduit à une équation récurrente commandable (du fait que la simplification porte aussi sur les modes non commandables).

Pour éviter cette situation, nous introduisons la matrice $W_{es}(z)$ de dimension $r \times q$ définie par :

$$W_{es}(z) = C(z.I_q - A)^{-1} \quad (1-53)$$

la matrice de transfert entrée-sortie du système s'écrit :

$$W(z) = W_{es}(z).B \quad (1-54)$$

$W_{es}(z)$ peut être calculée de la même façon que $W(z)$ en utilisant le même algorithme :

$$W_{es}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{q-1} C R_i z^{q-i}}{\sum_{i=0}^q d_i z^{q-i}} \quad (1-55)$$

ainsi $W_{es}(z)$ se présente comme le quotient de deux polynômes, l'un matriciel au numérateur, et l'autre scalaire au dénominateur. La

simplification par les facteurs communs de ces deux polynômes conduit simplement à éliminer les seules modes inobservables : ceci est justifié par le fait que $W_{es}(z)$ ne représente que la partie complètement observable du système :

$$W_{es}(z) = C_2(z.I - A_{22})^{-1} + C_4(z.I - A_{44})^{-1} \quad (I-56)$$

II.1.4- Exemples numériques

- Exemple 1 [14] : cas commandable

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} U_n \quad (I-57)$$

$$Y_n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} X_n$$

a) polynôme minimal

La matrice d'évolution A du système admet un polynôme annulateur de degré 2 :

$$P_{\min}(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \quad \text{avec } P_{\min}(A) = 0$$

d'où : $\alpha_2 = 1$; $\alpha_1 = -6$; $\alpha_0 = 8$

l'équation de récurrence correspondante est :

$$Y_{n+2} - 6 Y_{n+1} + 8 Y_n = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} U_{n+1} + \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} U_n \quad (I-58)$$

le polynôme caractéristique aurait donné une équation de degré 3.

b) réduction par inobservabilité

L'utilisation de l'algorithme de Leverrier donne immédiatement :

$$W_3(z) = \frac{\begin{bmatrix} -0.5(z-2)(z-4) & -1.5(z-2)(z-4) \\ -(z-2)(z-4) & -3(z-2)(z-4) \end{bmatrix}}{(z-2)(z-2)(z-4)} \quad (1-59)$$

après simplification par $(z-2)(z-4)$, il vient :

$$W_1(z) = \frac{\begin{bmatrix} -0.5 & -1.5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}{(z-2)} \quad (1-60)$$

l'équation de récurrence est donc :

$$Y_{n+1} - 2 Y_n = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} U_n \quad (1-61)$$

remarque :

L'exemple 1 ci-dessus nous permet d'illustrer le résultat suivant :

Lorsque la matrice A admet un polynôme annulateur de degré inférieur à q , le système admettant A comme matrice d'évolution ne peut être complètement observable, en effet nous avons :

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i A^i = O \Rightarrow \sum_{i=0}^m \alpha_i C A^i = O \quad (1-62)$$

$m < q$ quel que soit C

La réciproque n'est pas en général vraie.

- Exemple 2 : cas non commandable

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-63)$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice de transfert du système (A, B, C) est :

$$W_3(z) = \frac{\begin{bmatrix} 2(z+1)(z+5) & (z+1)(z+5) \\ 3(z+1)(z+5) & 1.5(z+1)(z+5) \end{bmatrix}}{(z+2)(z+1)(z+5)} \quad (1-64)$$

soit après simplification :

$$W_1(z) = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1.5 \end{bmatrix}}{(z+2)} \quad (1-65)$$

et conduit à l'équation commandable :

$$Y_{n+1} + 2 Y_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1.5 \end{bmatrix} U_n \quad (1-66)$$

la matrice $W_{es}(z)$ est après simplification :

$$W_{es}(z) = \frac{\begin{bmatrix} -(z+2) & 2(z+1) & 0 \\ (z+2) & 3(z+1) & 0 \end{bmatrix}}{(z+2)(z+1)} \quad (1-67)$$

auquelle correspond l'équation de récurrence non commandable :

$$Y_{n+2} + 3 Y_{n+1} + 2 Y_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1.5 \end{bmatrix} U_{n+1} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1.5 \end{bmatrix} U_n \quad (1-68)$$

II.2- APPLICATION AUX SYSTEMES DISCRETS NON LINEAIRES

Une classe importante de systèmes non linéaires multivariables, type Lur'e Postnikov, peut être décrite par des équations de la forme[18]:

$$X_{n+1} = AX_n + K^*(\mathcal{E}_n).\mathcal{E}_n \quad -a-$$

$$Y_n = C X_n \quad -b- \quad (1-69)$$

$$\mathcal{E}_n = U_n - C X_n \quad -c-$$

avec :

- X_n vecteur d'état à l'instant n , $X_n \in \mathbb{R}^q$
- Y_n vecteur de sortie à l'instant n , $Y_n \in \mathbb{R}^r$
- U_n vecteur de commande à l'instant n , $U_n \in \mathbb{R}^l$
- ε_n vecteur erreur à l'instant n , $\varepsilon_n \in \mathbb{R}^l$
- A matrice à coefficients constants représentant l'évolution de la partie linéaire du système, $A \in \mathbb{R}^q \times q$
- Les matrices $K^*(\varepsilon_n)$ et C sont de dimensions respectives $q \times l$ et $r \times q$.

Une représentation par schéma-bloc de (I-69) est décrite sur la figure (I-2) :

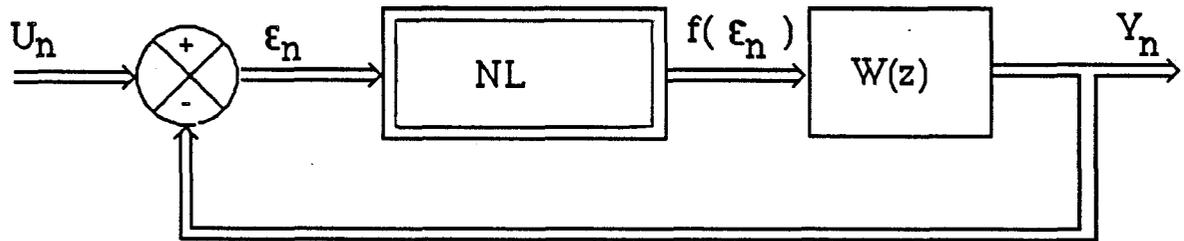


Figure (I-2)

où :

- $W(z)$ représente le matrice de transfert de la partie linéaire de la chaîne d'action que nous écrivons sous la forme :

$$W(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (I-70)$$

- $f(\varepsilon_n)$ est une non linéarité séparable de classe Φ [15] :

$$\text{classe } \Phi \quad \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(\varepsilon_n) = f^*(\varepsilon_n) \cdot \varepsilon_n \\ f^*(\varepsilon_n) \in [\underline{L}, \bar{L}] \subset \mathbb{R}, \quad \underline{L} \leq \bar{L} \end{array} \right. \quad (I-71)$$

$f^*(\mathcal{E}_n)$ est appelé gain équivalent de la non linéarité et est relié à la matrice $K^*(\mathcal{E}_n)$ par la relation :

$$K^*(\mathcal{E}_n) = B.f^*(\mathcal{E}_n)$$

où B est la matrice de commande associée à la partie linéaire.

De la même façon que dans le cas continu, la mise en équation du système (I-69) conduit à une relation liant les vecteurs Y_n et \mathcal{E}_n :

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i Y_{n+i} = \sum_{i=0}^q \alpha_i C A^i X_n + \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=1+j}^q \alpha_i C A^{i-1-j} K^*(\mathcal{E}_{n+j}) \mathcal{E}_{n+j} \quad (I-72)$$

ou encore avec un choix approprié des $\{\alpha_i\}$ $1 \leq i \leq q$:

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i Y_{n+i} = \sum_{j=0}^{q-1} M_j^*(\mathcal{E}_{n+j}) \mathcal{E}_{n+j} \quad (I-73)$$

où les matrices $M_j^*(\mathcal{E}_{n+j})$ sont données par :

$$M_j^*(\mathcal{E}_{n+j}) = \sum_{i=1+j}^q \alpha_i C A^{i-1-j} K^*(\mathcal{E}_{n+j}) \quad (I-74)$$

Le choix des paramètres $\{\alpha_i\}$ $1 \leq i \leq m$ coefficients du polynôme caractéristique ou d'un polynôme annulateur de A de degré moindre est toujours possible. Par contre, l'application de la deuxième méthode qui fait intervenir la matrice de transfert, non définie pour les systèmes non linéaires, n'est pas justifiée. Cependant, nous allons illustrer par le biais d'un exemple la possibilité de généraliser cette méthode au cas non linéaire; nous avons dans ce but utilisé la notion de matrice de transfert symbolique [16] [19].

Définition

La matrice de transfert symbolique du système non linéaire défini par la structure de la figure (I-2) est :

$$W^*(z, \mathcal{E}_n) = \frac{N(z) f^*(\mathcal{E}_n)}{D(z) + f^*(\mathcal{E}_n) N(z)} \quad (I-75)$$

et qui peut être calculée comme si le gain instantané $f^*(\mathcal{E}_n)$ était

constant; le dénominateur de cette fonction est appelé polynôme symbolique.

Nous pouvons noter facilement que l'existence des modes inobservables de la partie linéaire considérée séparément se traduit aussi par une simplification de l'écriture (I-75).

Exemple de mise en équation :

Considérons le système monovariante de type Lur'e Postnikov représenté par les équations :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n + K^*(\epsilon_n)\epsilon_n && \text{-a-} \\ Y_n &= CX_n && \text{-b-} \end{aligned} \quad (I-76)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A, B et C sont les matrices associées à la partie linéaire de fonction de transfert :

$$W_3(z) = C(z.I - A)^{-1} B = \frac{-0.5(z-2)(z-4)}{(z-2)(z-2)(z-4)} \quad (I-77)$$

après simplification

$$W_1(z) = \frac{-0.5}{(z-2)} \quad (I-78)$$

nous identifions alors : $\alpha_1 = 1$; $\alpha_0 = -2$ (m=1)

$$M^*_0 = \alpha_1 C B f^*(\epsilon_n) = -0.5 f^*(\epsilon_n)$$

d'où l'équation récurrente :

$$Y_{n+1} - 2Y_n = -f^*(\epsilon_n) \cdot \epsilon_n \quad (I-79)$$

la fonction de transfert symbolique du système (I-76) est :

$$W_3^*(z) = \frac{-0.5 f^*(\epsilon_n)(z-2)(z-4)}{(z-2)(z-2)(z-4) - 0.5 f^*(\epsilon_n)(z-2)(z-4)} \quad (1-80)$$

soit après simplification :

$$W_1^*(z) = \frac{-0.5 f^*(\epsilon_n)}{z - 2 - 0.5 f^*(\epsilon_n)} = \frac{Y_n}{Y_n + \epsilon_n} \quad (1-81)$$

et conduit à la même équation (1-79).

remarque sur les équations obtenus

Nous avons présenté un algorithme de passage de l'équation d'état d'un système discret à une équation de récurrence dont les coefficients sont calculés à partir de l'une des deux méthodes proposées. Dans le cas particulier des systèmes incomplètement observables/commandables, la deuxième méthode permet d'obtenir des équations d'ordres réduits par rapport à celui du système initial.

L'ordre des équations obtenues peut être davantage réduit par l'une des deux considérations suivantes :

-L'application de l'algorithme à un modèle d'état simplifié représentant la partie fortement commandable et fortement observable du modèle d'état initial.

-Le calcul direct d'une fonction de transfert simplifiée.

III- METHODES DE SIMPLIFICATION DE MODELES

III.1- Introduction

Souvent, et par souci de réalisme, la description d'un système physique conduit à un modèle de très grande dimension; cependant, lorsque l'ordre du système est très élevé, les calculs qu'exigent sa simulation aussi bien que l'élaboration d'une commande optimale deviennent très compliqués et coûteux : d'où l'intérêt porté à sa simplification et/ou son approximation par un modèle d'ordre moins élevé offrant une représentation adéquate du système initial.

Toutefois, lorsque nous voulons aborder le problème de simplification, nous relevons l'absence d'une méthode universelle : l'ordre et la nature du modèle simplifié dépendent du but poursuivi, du

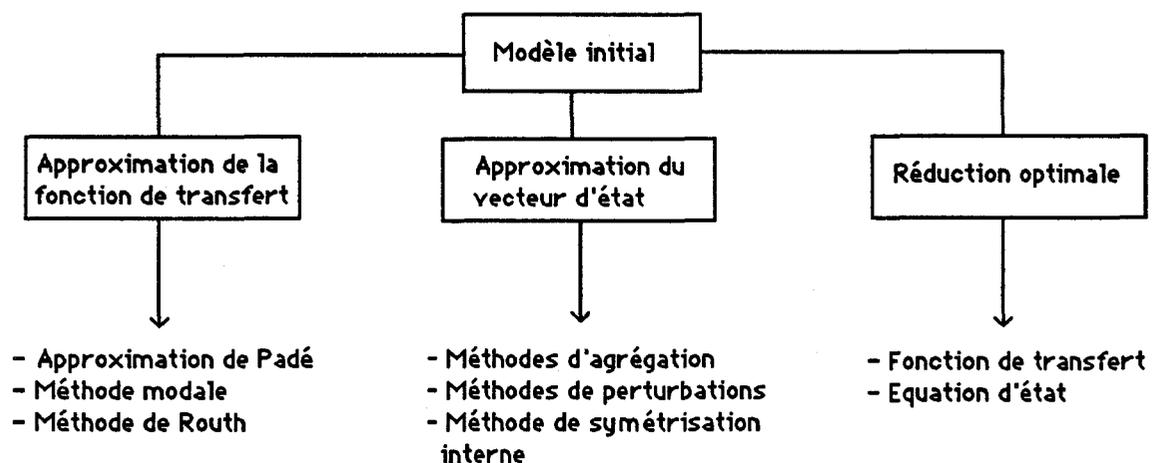
mode de représentation du système initial et du critère de réduction.

Les méthodes de simplification peuvent être regroupées en deux catégories :

-Simplification de structure (linéarisation, décomposition en sous-systèmes ... etc).

-Réduction de dimensionnalité.

Ici, nous ne nous intéresserons qu' à la dernière catégorie; les techniques qui y sont utilisées peuvent être classées selon le schéma ci-après [20],[21],[22],[23] :



III.2- Position du problème

Considérons un système dynamique Σ_q linéaire, invariant et irréductible (commandable et observable) d'ordre q . Le problème de simplification consiste à déterminer un modèle réduit Σ_m d'ordre $m \ll q$ qui représente de manière satisfaisante le comportement de Σ_q pour une entrée donnée [20] (Figure I-3).

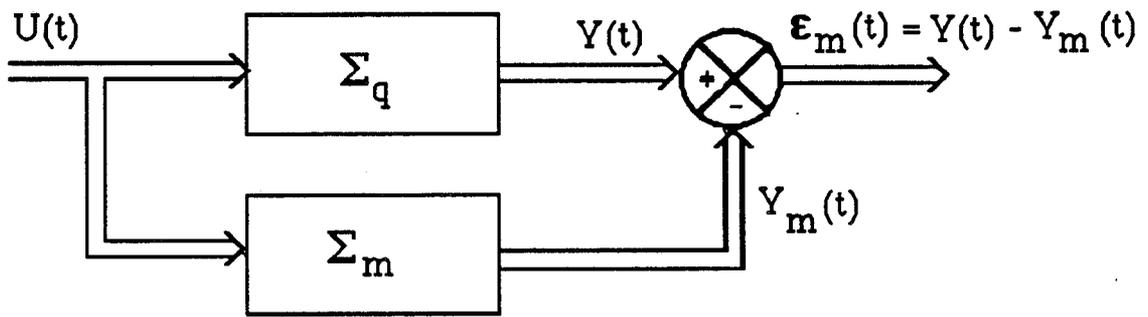


Figure (I-3)

La première question qui se pose est comment juger de la qualité de l'approximation : en général, elle est d'autant plus satisfaisante que l'écart $\epsilon_m(t)$ entre les sorties du modèle initial et du modèle réduit est plus faible; cependant, ce critère est parfois insuffisant car $\epsilon_m(t)$ dépend de m aussi bien que de l'entrée appliquée $U(t)$.

Le système à réduire peut être décrit :

-Soit dans le domaine fréquentiel par une fonction de transfert :

$$H_q(p) = \frac{b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} + \dots + b_q}{a_0 p^q + a_1 p^{q-1} + \dots + a_q} \quad (1)$$

-Soit dans le domaine temporel par une équation d'état commandable et observable :

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) \quad \text{-a-} \quad (2)$$

$$Y(t) = C X(t) \quad \text{-b-}$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^q$

Suivant le choix (1) ou (2) pour décrire le système initial, nous distinguons trois grandes classes de méthodes de simplification :

- Approximations de la fonction de transfert
- Approximations du vecteur d'état
- Réduction optimale de (1) ou (2)

Dans tous les cas, quel que soit la méthode adoptée, un bon modèle réduit doit reproduire le plus fidèlement possible les caractéristiques du système original (conservation des propriétés de stabilité,

conservation du gain statique ... etc).

III.3 Approximation de la fonction de transfert

le système à réduire est représenté par sa fonction de transfert d'ordre q :

$$H_q(p) = \frac{b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} + \dots + b_q}{a_0 p^q + a_1 p^{q-1} + \dots + a_q} \quad (I-82)$$

III.3.1- Approximant de Padé [20]

L'approximant de Padé d'ordre m de $H_q(p)$ est une fraction rationnelle $H_m(p)$ dont le développement en série de Taylor autour de $p=0$ coïncide avec celui de $H_q(p)$ à l'ordre $2m$.

Le calcul de l'approximant de Padé suppose la connaissance du développement de $H_q(p)$ autour de $p=0$; en pratique on utilise la décomposition de $H_q(p)$ en fractions continues (Annexe I-A).

La fonction de transfert réduite obtenue par la méthode de Padé est une approximation en basses fréquences de la fonction de transfert initiale et a la propriété d'en conserver les $2m$ premiers moments [24]. Les approximations autour de $p = \infty$ et ($p = 0$ et $p = \infty$) ont été aussi proposées bien que le problème peut être posé autour de n'importe quel point. L'approximation autour de $p = \infty$ conserve les $2m$ premiers paramètres de Markov de $H_q(p)$ [25].

propriétés de la méthode

- l'approximation autour de $p=0$ permet d'assurer une erreur statique nulle entre les deux modèles, lorsqu'ils sont stables, pour toute entrée de type $\sum \alpha_i t^i$, mais elle présente l'inconvénient de ne pas garantir la stabilité pour un système initial stable.

- l'approximation autour de $p = \infty$ permet d'obtenir une meilleure qualité du transitoire et de mieux reproduire les qualités de stabilité du modèle initial que l'approximant de Padé sans toutefois garantir la stabilité (l'instabilité) du modèle réduit pour un modèle initial stable (instable).

III.3.2- Méthode modale

Elle consiste en la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert du système à réduire; le modèle réduit est alors obtenu en conservant dans cette décomposition, avec l'ordre de multiplicité correspondant :

- les modes instables
- les modes lents

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite la connaissance de tous les modes du système, et par conséquent, la résolution de son équation caractéristique ce qui n'est pas évident lorsque l'ordre q est élevé; mais elle est de ce fait très utilisée lorsque la fonction de transfert est déjà factorisée :

$$H_q(p) = H_a(p) H_s(p) H_c(p) \quad (I-83)$$

- où :
- $H_a(p)$ représente les actionneurs
 - $H_s(p)$ " le processus
 - $H_c(p)$ " les capteurs

III.3.3- Méthode de Routh

Elle utilise la décomposition suivante de la fonction de transfert :

$$H_q(p) = \beta_1 F_1(p) + \beta_2 F_1(p)F_2(p) + \dots + \beta_q F_1(p)F_2(p)\dots F_q(p) \quad (I-84)$$

avec :

$$F_1(p) = \frac{1}{1 + \alpha_1 p + \frac{1}{\alpha_2 p + \frac{1}{\alpha_{q-1} p + \frac{1}{\alpha_q p}}}} \quad (I-85)$$

$$F_i(p) = \frac{1}{\alpha_i p + \frac{1}{\alpha_{i+1} p + \frac{1}{\alpha_{i+2} p + \dots + \frac{1}{\alpha_{q-1} p + \frac{1}{\alpha_q p}}}}} \quad (I-86)$$

pour $1 \leq i \leq q$

Les coefficients $\{ \alpha_i \}$ $1 \leq i \leq q$ sont calculés à partir du tableau de Routh du dénominateur utilisé pour le test de stabilité. Les coefficients $\{ \beta_i \}$ $1 \leq i \leq q$ sont quant à eux calculés à partir des tableaux de Routh pour le numérateur et le dénominateur (Annexe I-B).

Le modèle réduit d'ordre m est alors obtenu en posant :

$$\alpha_i = \beta_i = 0 \quad \text{pour } i > m \quad (I-87)$$

et constitue une approximation en hautes fréquences du modèle initial; pour l'approximation en basses fréquences, Hutton [26] a introduit la notion du système réciproque défini par la transformation :

$$H_q^*(p) = \frac{1}{p} H_q\left(\frac{1}{p}\right) \quad (I-88)$$

ainsi, pour obtenir l'approximation autour de $p=0$ de $H_q(p)$, il suffit d'appliquer la transformation réciproque au modèle réduit obtenu par l'application de la méthode de Routh à $H_q^*(p)$ définie par (I-88).

propriétés de la méthode de Routh

- le modèle réduit est stable pour un modèle initial stable; cette propriété découle directement de l'utilisation du tableau de Routh; mais un modèle instable peut conduire à un modèle réduit stable.

- pour un modèle réduit stable, on définit l'énergie de réponse impulsionnelle :

$$I = \|h\|^2 = \int_0^{\infty} h^2 dt \quad (I-89)$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système; on montre que :

$$I = \sum_{i=1}^q \frac{\beta_i^2}{2\alpha_i} \quad (I-90)$$

l'écriture (I-90) est invariante par la transformation réciproque. les énergies de réponses impulsionnelles $\| h_i(t) \|$ $i=1, 2, \dots, q$ des différents modèles réduits vérifient :

$$0 < \| h_1 \| \leq \| h_2 \| \leq \dots \leq \| h_q \| = \| h \| \quad (I-91)$$

d'où le critère de choix de l'ordre de réduction m : $\| h_m \| / \| h \|$

- le modèle réduit $H_m(p)$ est un approximant de Padé partiel en ce sens qu'il ne conserve que les m premiers moments de $H_q(p)$.

Pour les systèmes instables, Hutton propose la transformation :

$$\tilde{H}_q(p) = H_q(p+a) \quad (I-92)$$

où a est un réel positif vérifiant : $a > \sup \{ \text{Re}(\lambda_i) \}$, λ_i étant un mode instable; cependant, l'efficacité de cette méthode est mise en cause du fait que le modèle réduit obtenu à partir de celui de $\tilde{H}_q(p)$ par la translation $(-a)$ n'est pas unique.

III.3.4- Conclusion

En général, les différentes méthodes exposées ci-dessus sont issues de la théorie générale du développement d'une fraction rationnelle en série de Taylor ou en fractions continues. Elles présentent l'inconvénient de pas préserver complètement les propriétés de stabilité du modèle initial. De nombreux travaux ont été proposés pour remédier à cette inconvénient et qui reposent le plus souvent sur l'utilisation conjointe de ces techniques [44][45].

III.4- Approximation du vecteur d'état

III.4.1- Méthodes d'agrégation [28] [29]

La notion d'agrégation a été d'abord utilisée en économie puis généralisée par Aoki aux systèmes dynamiques [28]; en particulier l'agrégation linéaire s'est montrée de beaucoup d'intérêt tant en modélisation qu'en commande optimale.

Considérons le système linéaire et invariant, supposé commandable et observable, décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t) && \text{-a-} \\ Y(t) &= CX(t) && \text{-b-} \end{aligned} \quad (1-93)$$

avec $X \in \mathbb{R}^q$; $U \in \mathbb{R}^1$; $Y \in \mathbb{R}^r$

Le principe de l'agrégation linéaire consiste à approcher (1-93) par un modèle réduit, dit agrégé, de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= FZ(t) + GU(t) && \text{-a-} \\ Y(t) &= HZ(t) && \text{-b-} \end{aligned} \quad (1-94)$$

où $Z(t)$ est un vecteur d'état de dimension $m \ll q$ lié à $X(t)$ par la relation :

$$Z(t) = LX(t) \quad (1-95)$$

avec : $Z(0) = LX(0)$

où L est la matrice d'agrégation supposée de rang plein et dont l'existence est conditionnée par les relations :

$$\begin{aligned} FL &= LA && \text{-a-} \\ G &= LB && \text{-b-} \end{aligned} \quad (1-96)$$

de sorte que F doit nécessairement conserver m valeurs propres de A .

Le modèle agrégé optimal est défini comme étant le meilleur modèle réduit au sens du critère :

$$J_r = \sum_{i=1}^1 \int_0^T \|CX^i(t) - HZ^i(t)\|^2 dt \quad (1-97)$$

où $X^i(t)$ et $Z^i(t)$ sont les réponses du modèle initial et du modèle réduit

lorsque l'entrée i est appliquée.

La minimisation du critère J_r dépend du choix optimal de l'ordre de réduction, des modes dominants et de la matrice de sortie et par conséquent, elle est difficile à mettre en oeuvre lorsque le système est de grande dimension.

Dans un article de G. Michalesco & al [30], on propose une technique qui sépare le problème du choix des modes dominants de celui d'optimisation du critère de réduction; le modèle obtenu est sous optimal par rapport au précédent mais très satisfaisant.

De nombreuses méthodes proposées dans la littérature consistent à choisir comme modes du modèle réduit des modes dominants du système initial et sont considérées de ce fait comme des cas particuliers de la méthode d'agrégation [35], [36], [37], [38].

III.4.2- Méthode de perturbations singulières

Les techniques de perturbations singulières sont utilisées à chaque fois que la description du processus met en jeu des petits paramètres dus à des dynamiques d'ordres de grandeurs différents : de tels systèmes possèdent la propriété de double échelles de temps.

dans le cas des systèmes continus linéaires, le modèle initial s'écrit sous la forme singulièrement perturbée :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A_{11}X(t) + A_{12}Z(t) + B_1U(t) & -a- \\ \mu\dot{Z}(t) &= A_{21}X(t) + A_{22}Z(t) + B_2U(t) & -b- \end{aligned} \quad (I-98)$$

où $X \in \mathbb{R}^m$ représente la partie lente et $Z \in \mathbb{R}^{q-m}$ représente la partie rapide du système et μ un petit paramètre vérifiant :

$$0 < \mu \leq 1 \quad (I-99)$$

et qui est le plus souvent calculé comme étant [18] [22] :

- le rapport entre les échelles de temps de la partie lente (t) et la partie rapide (τ) :

$$\mu = (\tau - t_0)/t \quad (t_0 \text{ est l'instant initial})$$

- le rapport des valeurs propres de chaque partie :

$$\mu = |\lambda_{\max}(\text{partie lente})| / |\lambda_{\min}(\text{partie rapide})|$$

Les techniques de perturbations singulières peuvent conduire à une simplification de structure par découplage ou/et une réduction de dimensionnalité lorsque la partie rapide est stable : dans ce cas le modèle initial est approché par la partie lente en régime permanent.

III.4.3- Méthode de symétrisation interne

Introduite par Moore [36], la méthode de symétrisation interne consiste à effectuer un changement de base qui conduit à représenter le système à simplifier, supposé commandable, observable et asymptotiquement stable, par un modèle d'état pour lequel les propriétés de commandabilité et de l'observabilité sont équivalentes: le modèle réduit est obtenu en identifiant la partie la "plus" commandable et par conséquent la "plus" observable.

La méthode de symétrisation interne a fait l'objet de nombreux travaux dont [36] [37] pour les systèmes continus et [37] [39] pour les systèmes discrets; la généralisation aux systèmes linéaires non stationnaires a été proposée par Verriest & al [40] et S.Shokoohi & al [38] et aux systèmes stochastiques par Vaccaro [41].

III.5-Réduction optimale

le problème de la réduction optimale consiste à calculer à partir d'un modèle initial donné d'ordre q les paramètres d'un modèle réduit optimal au sens du critère :

$$J = \sum_{i=1}^1 \int_0^T \| Y^i(t) - \hat{Y}^i(t) \|^2 dt \quad (I-100)$$

où Y^i et \hat{Y}^i sont les réponses des deux modèles lorsque l'entrée i est appliquée.

La réduction optimale a été abordée à partir d'une représentation par fonction de transfert aussi bien qu'à partir d'une représentation d'état.

Dans le premier cas, la minimisation du critère J conduit à un

système d'équations non linéaires pour déterminer les paramètres du modèle réduit.

Pour les systèmes modélisés par des équations d'état, Wilson [33], en raisonnant sur le système élargi dont l'état est la somme directe des états du système initial et du système réduit, a donné les conditions d'optimalité pour une entrée en bruit blanc sous forme de deux équations de Lyapunov d'ordre $q+m$. Hyland [35] a proposé des conditions simplifiées avec des équations de Lyapunov modifiées d'ordre q .

Decoster [34] a donné des conditions nécessaires sur les paramètres du modèle réduit en considérant des entrées de type échelon et impulsion. Il a aussi imposé la contrainte d'égalité des gains statiques.

Cependant, l'inconvénient de ce type de méthode est qu'il nécessite des algorithmes de résolution d'équations qui peuvent dans certains cas ne pas converger.

Conclusion

Après avoir présenté les différentes représentations d'un système dynamique par équations d'état, équations différentielles ou de récurrence et matrice de transfert, nous avons proposé des résultats concernant la mise en équation d'un système discret sous forme d'équation de récurrence vectorielle d'ordre réduit et qui décrit le comportement des variables observables ou observables/ commandables. Dans ce sens nous avons proposé un algorithme de calcul des coefficients intervenant dans l'écriture de ces équations.

Cependant, un système même réduit à sa partie complètement commandable et complètement observable peut être d'ordre élevé et il s'avère souvent nécessaire de le simplifier. Nous avons proposé dans ce but une classification des différentes méthodes de simplification les plus utilisées.

Parmi ces méthodes, la méthode de symétrisation interne nous paraît intéressante en particulier lorsque nous nous intéressons à réduire davantage l'ordre d'itération de la formulation récurrente proposée.

Dans le prochain chapitre, nous allons développer d'une façon détaillée cette méthode, en suite nous proposerons une nouvelle méthode de simplification qui y est étroitement liée.

CHAPITRE II

CHAPITRE-II

METHODES DE SIMPLIFICATION DE MODELES BASEES SUR LES NOTIONS DE MESURES DE COMMANDABILITE ET D' OBSERVABILITE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser au problème de simplification de modèle basée sur les notions de mesures du degré de commandabilité et d'observabilité d'un système dynamique.

Après un rappel de l'approche développée par Moore pour une modélisation initiale d'état, nous proposons une nouvelle méthode de simplification, traitant sur des représentations par fonction de transfert. La méthode proposée, de mise en oeuvre particulièrement aisée, est une généralisation au cas approché de la notion de dégénérescence et de ses relations avec les propriétés de commandabilité et d'observabilité. Les résultats obtenus par cette méthode sont étroitement liés à ceux que nous pouvons obtenir par la méthode de symétrisation interne. En particulier, les modèles réduits conservent "exactement" le gain statique du système initial.

I- TRAITEMENT DANS L'ESPACE D'ETAT

I.1- Position du problème

Considérons le système linéaire et invariant d'ordre 2 supposé commandable, observable et asymptotiquement stable décrit par les équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (II-1)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$$

avec :

- a_1, a_2 des réels strictement négatifs
- b_1, b_2, c_1 et c_2 des réels non nuls

Nous cherchons dans quels cas nous pouvons le simplifier et l'approcher par un modèle réduit d'ordre 1.

- premier cas : $|a_1| \ll |a_2|$

Nous pouvons penser à éliminer le mode a_2 pour ne conserver que le mode dominant a_1 . Cependant, lorsque $b_2 c_2 \gg b_1 c_1$, la dominance de a_1 devient moins évidente.

- deuxième cas: a_1 et a_2 de même ordre de grandeur

Dans ce cas, lorsque $b_1 \gg b_2$, le mode a_1 est plus affecté par la commande $u(t)$ que le mode a_2 qui est alors "difficilement" commandable, en effet :

Définition [42]

L'énergie minimale nécessaire pour transférer l'état du système (II-1) de l'état 0 à l'instant $t_0=0$ à l'état X à l'instant t est :

$$E_{\min} = X^T S^{-1}(0,t) X \quad (II-2)$$

où :

$$\begin{aligned} - X &= [x_1 \ x_2]^T \\ - S(0,t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (II-3)$$

le calcul de $S(0,t)$ pour t suffisamment grand donne :

$$S(0, \infty) = \begin{bmatrix} \frac{b_1^2}{2 a_1} & -\frac{b_1 b_2}{a_1 + a_2} \\ -\frac{b_1 b_2}{a_1 + a_2} & -\frac{b_2^2}{2 a_2} \end{bmatrix} \quad (II-4)$$

il vient alors dans la base qui diagonalise $S(0, \infty)$:

$$E_{\min} = \frac{x_1'^2}{\lambda_1} + \frac{x_2'^2}{\lambda_2} \quad (II-5)$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de $S(0, \infty)$ et x_1' , x_2' sont les composantes de l'état à atteindre dans la nouvelle base.

Il en découle que lorsque $a_1 \approx a_2$ et $b_1 \gg b_2$, λ_1 tend vers $-(b_1)^2/2a_1$ alors que λ_2 tend vers 0 : E_{\min} deviendrait infinie si x_2' n'est pas nul, ce qui signifierait qu'une énergie de commande finie agit seulement sur x_1' que nous retenons pour la description du système; mais encore faut-il tenir compte des coefficients c_i ($i=1,2$) car si $c_1 \ll c_2$, la "faible" commandabilité de a_2 peut être compensée par une "forte" observabilité.

exemple numérique:

Les courbes décrites sur les figures (II-1) et (II-2) montrent les réponses indicielles du système défini par (II-1) et des modèles d'ordre 1 pour les valeurs numériques suivantes :

$$a_1 = -1 ; a_2 = -3 \text{ et}$$

- figure (I-1) : $b_1 = c_1 = 1$; $b_2 = 0.1$; $c_2 = 1$
- figure (II-2) : $b_1 = c_1 = 1$; $b_2 = 0.1$; $c_2 = 15$

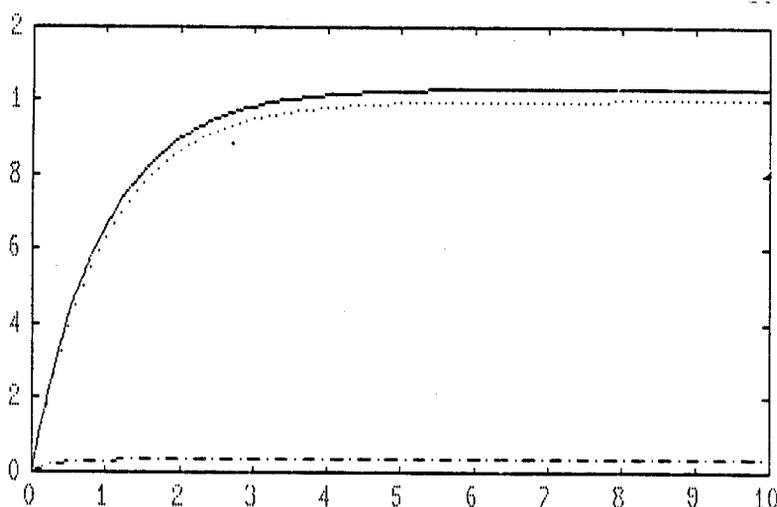


Figure (II-1)

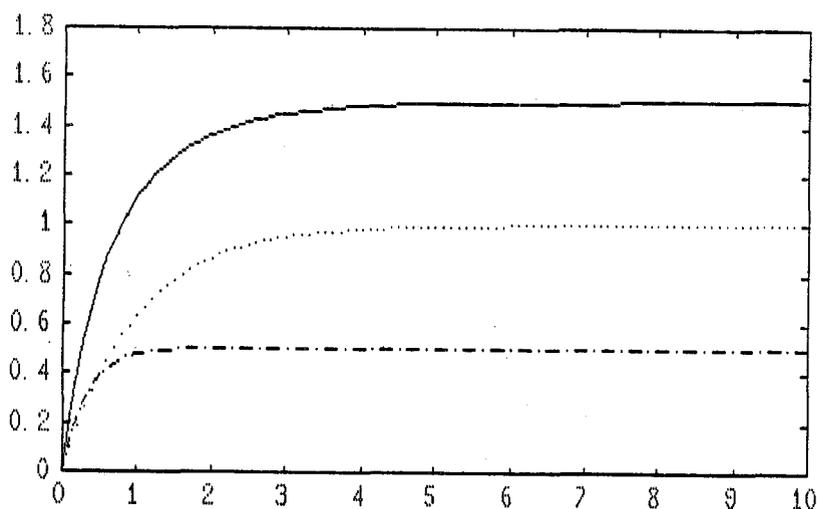


Figure (II-2)

_____ : modèle global

..... : mode { -1 }

-.-.-. : mode { -3 }

dans le premier cas la dominance du mode { -1 } est nette alors que dans le second la contribution du mode { -3 } dans la réponse du système global n'est pas négligeable.

Nous en concluons qu'une approche plus complète du problème tiendrait compte, en plus du degré de commandabilité, du degré d'observabilité de chaque composante de l'état du système en terme de la matrice :

$$Q(o,t) = \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T C e^{A(t-\tau)} d\tau \quad (II-6)$$

I.2- Rappel de l'approche de Moore : Symétrisation interne

I.2.1- Cas continu

a) Généralités

Considérons le système continu linéaire et invariant d'ordre q supposé commandable, observable et asymptotiquement stable décrit dans l'espace d'état par les équations :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t) & -a- \\ Y(t) &= CX(t) & -b- \end{aligned} \quad (II-7)$$

où $X \in \mathbb{R}^q$, $U \in \mathbb{R}^1$ et $Y \in \mathbb{R}^r$.

(II-7) est une représentation minimale du système que nous désignerons dans toute la suite par le triplet matriciel (A, B, C) .

Les grammians de commandabilité W_c et d'observabilité W_o sont définis respectivement par :

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt \quad (II-8)$$

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (II-9)$$

W_c et W_o sont des matrices symétriques semi-définies positives de dimensions $q \times q$ et vérifient les propriétés suivantes :

propriété 1

Les grammians W_c et W_o ne sont pas invariants par un changement de base.

en effet, si nous effectuons le changement de base de matrice P :

$$(A, B, C) \xrightarrow{P} (\tilde{A} = P^{-1}AP; \tilde{B} = P^{-1}B; \tilde{C} = CP)$$

alors, (A, B, C) est aussi une réalisation minimale du même système pour laquelle les grammians valent [36] :

$$\tilde{W}_c = P^{-1}W_c(P^{-1})^T \quad (II-10)$$

$$\tilde{W}_o = P^T W_o P \quad (II-11)$$

propriété 2

W_c et W_o sont solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$AW_c + W_c A^T = -BB^T \quad (II-12)$$

$$A^T W_o + W_o A = -C^T C \quad (II-13)$$

Les grammians sont liés aux propriétés de commandabilité et d'observabilité du modèle (II-7) :

- Le système décrit par (II-7) est complètement commandable (respect. complètement observable) si et seulement si la matrice W_c (respect. W_o) est non singulière.

- Les valeurs propres de W_c (respect. de W_o) sont interprétées comme des mesures de degré de commandabilité (respect. d'observabilité) et par conséquent caractérisent l'importance de chaque composante de l'état du système relativement au comportement entrées-sorties de ce dernier.

b) Réalisation équilibrée

Les définitions et théorèmes suivants sont dûs à Moore [36]

Définition

Une représentation minimale (A^* , B^* , C^*) du système défini par (II-7) est dite équilibrée si pour cette représentation les grammians sont égaux à la même matrice diagonale W :

$$W_c^* = W_o^* = W = \text{Diag} (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q) \quad (\text{II-14})$$

où les nombres positifs $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ sont appelés modes de second ordre du système; la base par rapport à laquelle sont définies les équations d'état du système est alors appelée base équilibrée.

Théorème d'existence

Si (A , B , C) est une représentation minimale, alors il existe un changement de base de matrice P telle que ($P^{-1}AP$, $P^{-1}B$, CP) soit équilibrée.

Le changement de base de matrice P est celui qui diagonalise le produit $W_c.W_o$, en effet :

$$\text{si } W = P^{-1}W_c(P^{-1})^T \text{ et } W = P^T W_o P \text{ alors } P^{-1}W_c W_o P = W^2$$

Théorème d'unicité

Lorsque les modes de second ordre du système sont distincts, alors la réalisation équilibrée (A^* , B^* , C^*) est unique à une transformation orthogonale près.

interprétation

Dans une base quelconque, la définition des mesures de commandabilité et d'observabilité en terme des valeurs propres de W_c et W_o ne nous permet pas d'identifier les composantes d'état les plus significatives vis à vis de la commande et de l'observation du système global. Ceci provient essentiellement du fait que les deux grammians sont distincts et que , la "forte" commandabilité d'une composante d'état peut être compensée par une "faible" observabilité.

Dans la base équilibrée, ces mesures sont définies comme étant les modes de second ordre du système, valeurs propres communes à W_c^* et W_o^* ; il s'en suit que dans cette base, les variables d'état sont autant commandables qu'observables.

c) Application à la simplification de modèle

Supposons que les modes de second ordre sont ordonnés de la manière suivante :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q > 0 \quad (II-15)$$

posons :

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \quad (II-16)$$

avec : $W_1 = \text{Diag} (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ et $W_2 = \text{Diag} (\sigma_{m+1}, \dots, \sigma_q)$.

Relativement à cette décomposition, la réalisation équilibrée (A^* , B^* , C^*) peut être partitionnée comme suit :

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11,m}^* & A_{12,m}^* \\ A_{21,m}^* & A_{22,m}^* \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} B_{1,m}^* \\ B_{2,m}^* \end{bmatrix} \quad (11-17)$$

$$C^* = \begin{bmatrix} C_{1,m}^* & C_{2,m}^* \end{bmatrix}$$

où $A_{11,m}^*$ et $A_{22,m}^*$ sont des matrices carrées de dimensions $m \times m$ et $(q-m) \times (q-m)$.

Définition (dominance interne)

Le sous-système décrit par $(A_{11,m}^*; B_{1,m}^*; C_{1,m}^*)$ est dit dominant si et seulement si :

$$\left(\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \gg \left(\sum_{i=m+1}^q \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11-18)$$

La notion de dominance interne permet alors de définir le sous système $(A_{11,m}^*; B_{1,m}^*; C_{1,m}^*)$ comme modèle réduit d'ordre m du modèle initial (A^*, B^*, C^*) avec l'erreur relative de réduction :

$$\varepsilon(m) = \frac{\left(\sum_{i=m+1}^q \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (11-19)$$

propriétés du modèle réduit

En plus des propriétés de commandabilité et d'observabilité du modèle réduit ($\sigma_i \neq 0 \quad i=1,2,\dots,m$), celui-ci possède les propriétés suivantes :

p₁) symétrie interne

la représentation $(A_{11,m}^*; B_{1,m}^*; C_{1,m}^*)$ du modèle réduit est équilibrée.

p₂) stabilité [37]

Le modèle réduit est asymptotiquement stable.

p₃) dualité

Le système défini par (A, B, C) et son dual (A^T, C^T, B^T) admettent la même réalisation équilibrée et par conséquent le même modèle réduit à une transformation orthogonale près.

démonstration de p₃) :

Désignons par (A*, B*, C*) et (Â, B̂, Ĉ) les deux réalisations équilibrées associées respectivement aux modèles (A, B, C) et (A^T, B^T, C^T), nous avons :

$$\begin{aligned} A^*W + WA^{*T} &= -B^*B^{*T} \\ A^{*T}W + WA^* &= -C^*C^{*T} \end{aligned}$$

$$\text{avec } W_c = W_o = W$$

de même, si nous notons W_c^d et W_o^d les grammians de commandabilité et d'observabilité du système dual, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{A}W^d + W^d\hat{A}^T &= -\hat{B}\hat{B}^T \\ \hat{A}^TW^d + W^d\hat{A} &= -\hat{C}^T\hat{C} \end{aligned}$$

$$\text{avec } W_c^d = W_o^d = W^d$$

or, nous savons que W_c^d = W_o et W_o^d = W_c, ce qui implique que W = W^d et par conséquent, (Â, B̂, Ĉ) est une réalisation équilibrée du même système; plus particulièrement, nous avons

$$\left| \begin{array}{l} \hat{A} = A^{*T} \\ \hat{B} = C^{*T} \\ \hat{C} = B^{*T} \end{array} \right. \quad (11-20)$$

p₄) conservation du gain statique

Si nous désignons par H_q(p) et H_m(p) les fonctions de transfert du modèle initial et du modèle réduit supposés monovariabiles :

$$H_q(p) = C^*(p.I_q - A^*)^{-1}B^* \quad (II-21)$$

$$H_m(p) = C^*_{1,m}(p.I_m - A^*_{11,m})^{-1}B^*_{1,m} \quad (II-22)$$

il vient pour les gains statiques :

$$H_q(0) = - C^*A^{*-1}B^* \quad (II-23)$$

$$H_m(0) = - C^*_{1,m}A^*_{11,m}^{-1}B^*_{1,m} \quad (II-24)$$

Théorème [40]

Les gains statiques vérifient la relation :

$$\frac{H_m(0)}{H_q(0)} = \frac{\sum_1^m \lambda_i}{\sum_1^q \lambda_i} \quad (II-25)$$

où λ_i , $i=1,2,\dots,q$ sont les valeurs propres du grammian mixte défini par:

$$W_{co} = \int_0^{\infty} e^{A^*t} B^* (e^{A^*Tt} C^*)^T dt \quad (II-26)$$

et qui sont reliés aux modes de second ordre par :

$$\lambda_i = \text{signe}(\lambda_i) \cdot \sigma_i \quad 1 \leq i \leq q \quad (II-27)$$

I.2.2- Cas discret

Considérons le système discret linéaire et invariant décrit par le modèle commandable, observable et asymptotiquement stable :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n + BU_n && \text{-a-} \\ Y_n &= CX_n && \text{-b-} \end{aligned} \quad (II-28)$$

les grammians de commandabilité et d'observabilité sont définis par :

$$W_c = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^T (A^T)^k \quad (11-29)$$

$$W_o = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k \quad (11-30)$$

et vérifient les équations de Lyapunov suivantes :

$$A W_c A^T - W_c = -B B^T \quad (11-31)$$

$$A^T W_o A - W_o = -C^T C \quad (11-32)$$

comme dans le cas continu, la définition d'une réalisation équilibrée est basée sur l'égalité des deux grammians : la définition et les propriétés du modèle réduit se transposent simplement au cas discret.

I.2.3- Algorithme de calcul

L'algorithme de calcul proposé par Moore pour calculer une réalisation équilibrée (A^* , B^* , C^*) à partir d'une réalisation minimale quelconque (A , B , C) peut être résumé comme suit :

- étape 1 : Détermination de W_c

généralement, W_c est calculé comme solution de l'équation de Lyapunov :

$$A W_c + W_c A^T = -B B^T$$

- étape 2 : Décomposition en valeurs singulières de W_c [47] [48]

on montre qu'il existe une matrice orthogonale V_c telle que

$$W_c = V_c \Sigma_c^2 V_c^T \quad (11-33)$$

avec $V_c V_c^T = I_q$ et Σ_c une matrice diagonale d'ordre q

- étape 3 : Changement de base de matrice $P = V_c \Sigma_c$

la nouvelle représentation du système est donc :

$$\tilde{A} = P_c^{-1} A P_c ; \tilde{B} = P_c^{-1} B ; \tilde{C} = C P_c$$

- étape 4 : Détermination de \tilde{W}_0 solution de l'équation de Lyapunov :

$$\tilde{A}^T \tilde{W}_0 + \tilde{W}_0 \tilde{A} = -\tilde{C}^T \tilde{C}$$

- étape 5 : Décomposition en valeurs singulières de W_0

$$\tilde{W}_0 = \tilde{V}_0 \tilde{\Sigma}_0 \tilde{V}_0^T$$

avec $\tilde{V}_0 \tilde{V}_0^T = I_q$ et $\tilde{\Sigma}_0$ une matrice diagonale d'ordre q

- étape 6 : Changement de base de matrice $P_0 = \tilde{V}_0 \tilde{\Sigma}_0^{-1/2}$

la réalisation équilibrée est obtenue par :

$$A^* = P_0^{-1} \tilde{A} P_0 = P_0^{-1} P_c^{-1} A P_c P_0$$

$$B^* = P_0^{-1} \tilde{B} = P_0^{-1} P_c^{-1} B$$

$$C^* = \tilde{C} P_0 = C P_c P_0$$

D'autres algorithmes ont été proposés dans la littérature dont notamment un dû à A.J.Laub & al. [53] et qui consiste en la démarche suivante :

- étape 1 : Calcul des facteurs de Cholesky des grammians W_c et W_0
[17] :

$$W_c = L_c L_c^T \tag{II-34}$$

$$W_0 = L_0 L_0^T$$

- étape 2 : Décomposition en valeurs singulières du produit des facteurs L_c et L_0 :

$$L_0^T L_c = U \Omega V^T \tag{II-35}$$

- étape 3 : La réalisation équilibrée est obtenue par le changement de base de matrice P définie par :

$$P = L_c V \Omega^{-1/2} \tag{II-36}$$

ou

$$P^{-1} = \Omega^{-1/2} U^T L_0^T \quad (11-37)$$

I.2.4- Exemple d'application

Considérons le système d'ordre $q = 3$ défini par le triplet :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

et de fonction de transfert :

$$H_3(p) = \frac{3p^2 + 12p + 11}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} \quad (11-38)$$

$$H_3(0) = 1.833$$

le calcul de la réalisation équilibrée par la méthode de Moore donne :

$$A^* = \begin{bmatrix} -1.162 & -6.75 & 0.106 \\ -0.75 & -2.04 & 0.54 \\ 0.106 & 0.54 & -2.34 \end{bmatrix} ; B^* = C^{*T} = \begin{bmatrix} 1.68 \\ 0.41 \\ -0.051 \end{bmatrix} \quad (11-39)$$

avec les modes de second ordre correspondant :

$$\{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} = \{ 0.875 ; 0.04 ; 6.5 \cdot 10^{-4} \}$$

- modèle réduit d'ordre 2

$$H_2^*(p) = \frac{3p + 5.02}{p^2 + 3.66p + 2.74} \quad (11-40)$$

$$H_2^*(0) = 1.832$$

avec l'erreur de réduction : $\mathcal{E}(2) = 0.07 \%$

- modèle réduit d'ordre 1

$$H_1^*(p) = \frac{2.83}{p + 1.62} \quad (II-41)$$

$$H_1^*(0) = 1.747$$

$$\mathcal{E}(1) = 5 \%$$

La figure (II-3) représente les réponses indicielles du modèle initial et des modèles réduits (les courbes correspondants à $H_3(p)$ et $H_2^*(p)$ sont pratiquement confondues) et montre que le modèle d'ordre 1 réalise une bonne approximation du système global.

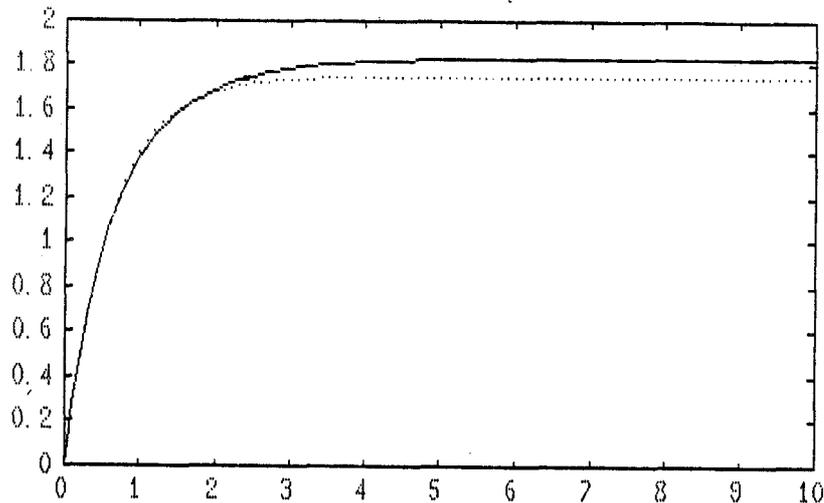


Figure (II-3)

_____ : $H_3(p)$; $H_2^*(p)$

..... : $H_1^*(p)$

I.2.5- Conclusion

La méthode de symétrisation interne, que nous venons de rappeler, paraît comme un moyen particulièrement efficace de simplification de

modèle. Elle est surtout utilisée lorsque nous nous intéressons à approcher le comportement externe du processus, en termes des relations entrées- sorties régissant son évolution : les composantes d'état retenues dans le modèle réduit sont celles qui sont les plus affectées par la commande et qui, en même temps, affectent le plus la sortie du système.

Toutefois certains problèmes inhérents à cette méthode ne sont pas encore bien élucidés; parmi eux nous citons :

- problème d'optimalité

La définition du modèle réduit à partir du modes de second ordre seuls n'est pas en général suffisante pour obtenir une bonne approximation du modèle initial. D'autres critères ont été proposés et qui reposent le plus souvent sur la contribution en l'énergie de réponse impulsionnelle du modèle réduit [40] [46] [49].

- problème de calcul

Ce point, très fondamental, concerne le calcul des réalisations équilibrées. En effet, la majorité des travaux ont été fait dans le domaine temporel, ce qui, à notre point de vue, présente les inconvénients suivants :

i) la détermination d'une réalisation équilibrée à partir d'une réalisation minimale donnée, implique des calculs importants surtout lorsque l'ordre du système est élevé.

ii) la méthode exige souvent la connaissance d'une réalisation minimale au départ. Or, dans la plupart des cas, une première modélisation d'un système physique est obtenue sous forme de relations entrées- sorties, qui conduisent à le décrire éventuellement par une matrice ou fonction de transfert.

Dans ce qui suit, et dans le but de contribuer à résoudre ce problème, nous présentons une nouvelle méthode de simplification de modèle. Cette méthode permet d'obtenir avec une précision suffisante, la réalisation équilibrée d'un système monovariable directement à partir de sa fonction de transfert.

II-TRAITEMENT DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL

II.1-Position du problème

Considérons le système linéaire, invariant et monovarié décrit dans le domaine fréquentiel par sa fonction de transfert :

$$H_q(p) = \frac{b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} + \dots + b_q}{p^q + a_1 p^{q-1} + \dots + a_q} \quad (II-42)$$

et soit (A, B, C) une réalisation minimale de $H_q(p)$

Nous nous proposons de déterminer à partir de $H_q(p)$, une réalisation minimale et équilibrée, représentée par le triplet matriciel (A*, B*, C*).

Le problème tel qu'il est posé peut être traité de deux façons :

- Calculer directement (A*, B*, C*) tel que :

$$H(p) = C^*(p.I_q - A^*)^{-1}B^* \quad (II-43)$$

- Calculer les approximations successives $H_i(p)$ ($i=1,2,\dots,q$) de $H_q(p)$ et reconstruire (A*, B*, C*) d'une manière récursive moyennant :

$$H_i(p) = C^*_{1,i}(p.I_i - A^*_{11,i})^{-1}B^*_{1,i} \quad (II-44)$$

$$1 \leq i \leq q$$

avec :

$$A^* = \begin{bmatrix} A^*_{11,i} & A^*_{12,i} \\ A^*_{21,i} & A^*_{22,i} \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} B^*_{1,i} \\ B^*_{2,i} \end{bmatrix} \quad (II-45)$$

$$C^* = \begin{bmatrix} C^*_{1,i} & C^*_{2,i} \end{bmatrix}$$

II.2- Calcul direct

Le calcul de la réalisation équilibrée à partir de la relation (II-43), est basé sur la propriété de symétrie absolue du modèle (A^*, B^*, C^*) que nous pouvons énoncer sous la forme du théorème suivant :

Théorème [40]

Une réalisation équilibrée (A^*, B^*, C^*) de $H_q(p)$ vérifie les relations suivantes :

$$A^{*T} = EA^*E \quad (II-46)$$

$$C^{*T} = EB^* \quad (II-47)$$

avec :

$$- E = \text{Diag} (V_1, V_2, \dots, V_q) \quad (II-48)$$

$$- V_i = \text{signe} (\lambda_i) \quad 1 \leq i \leq q \quad (II-49)$$

où les λ_i , $i=1,2,\dots,q$ sont les valeurs propres du grammian mixte W_{co} défini par :

$$W_{co} = \int_0^{\infty} e^{At} B (e^{A^T t} C^T)^T dt \quad (II-50)$$

posons :

$$A^* = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq q}; \quad B^* = (b^*_1, b^*_2, \dots, b^*_q)^T$$

$$C^* = (c^*_1, c^*_2, \dots, c^*_q) \quad (III-51)$$

les relations (II-46) et (II-47) s'écrivent alors :

$$a^*_{j,i} = V_i V_j a^*_{i,j} \quad 1 \leq i,j \leq q \quad (II-52)$$

$$c^*_i = V_i b^*_i \quad 1 \leq i \leq q \quad (II-53)$$

Le problème se ramène donc au calcul de (A^*, B^*, C^*) à partir de l'équation (II-43) telle que les relations (II-52) et (II-53) soient vérifiées. Cependant, d'une part, cette procédure présente l'inconvénient

de ne pas assurer l'unicité de la solution, et d'autre part, il n'y a pas à notre connaissance d'algorithme de résolution de ce genre d'équation, le problème étant essentiellement non linéaire.

II.3- Méthode des pôles et zéros rapprochés

L'approche que nous présenterons dans ce qui suit peut être vue comme la généralisation au cas approché du critère simplifié de commandabilité et d'observabilité d'un système décrit par sa fonction de transfert [11].

Définition [50]

La fonction de transfert $H_q(p)$ du système définie par (II-42) est dite dégénérée si elle admet au moins un pôle p_0 qui soit aussi un zéro.

Il s'en suit qu'un système décrit par une fonction de transfert dégénérée ne peut être complètement commandable et/ou complètement observable : la présence des pôles et zéros identiques de $H_q(p)$ conduit après simplification à une fonction de transfert non dégénérée qui représente donc la partie complètement commandable et complètement observable du système.

Nous généralisons ici ces notions aux cas où la fonction de transfert du système, supposée non dégénérée, admet des pôles et zéros suffisamment voisins.

II.3.1 Cas d'une fonction de transfert factorisée

Supposons tout d'abord que la fonction de transfert du système est donnée sous la forme suivante :

$$H_q(p) = K \frac{\prod_{j=1}^{q-1} (p + z_j)}{\prod_{i=1}^q (p + p_i)} \quad (\text{II-54})$$

avec :

- $p_i \neq z_j \quad 1 \leq i \leq q \text{ et } 1 \leq j \leq q-1$
- p_i et z_j sont des réels positifs

Lorsque pour $i = m+1, \dots, q$ et $j = m+1, \dots, (q-1)$ p_i et z_j sont très rapprochés, par exemple ne diffèrent seulement qu'après leur premier ou second digit, nous pouvons approcher $H_q(p)$ par une fonction réduite d'ordre m :

$$H_m(p) = K \frac{\prod_{j=1}^{m-1} (p + z_j)}{\prod_{i=1}^m (p + p_i)} \quad (II-55)$$

interprétation :

Dans le cas particulier où les pôles de $H_q(p)$ sont distincts, la réponse impulsionnelle du système décrit par (II-54) peut être calculée par la formule de développement de Heaviside [52] :

$$h(t) = \sum_{k=1}^q \frac{N_q(p_k)}{D'_q(p_k)} e^{p_k t} \quad (II-56)$$

avec :

- $N_q(p)$ est le numérateur de $H_q(p)$
- $D'_q(p)$ est la dérivée première par rapport à p du dénominateur de $H_q(p)$
- $p_k, k=1,2,\dots, q$ sont les pôles distincts de $H_q(p)$

Les modes éliminés $\{ p_k \} k=m+1, \dots, q$ sont ceux dont la contribution à la réponse impulsionnelle du système global est négligeable ($N_q(p_k) \approx 0$).

Cependant, nous notons que le cas étudié ci-dessus est très particulier au sens où :

- $H_q(p)$ est déjà factorisée ce qui suppose la connaissance des racines de son numérateur et de son dénominateur

- les pôles et zéros simplifiés sont "très" proches

- les modes conservés sont des modes réels du système initial

II.3.2 Approche géométrique

Dans plusieurs cas, il est intéressant d'étudier les propriétés du modèle réduit ainsi que la qualité de l'approximation en utilisant des méthodes géométriques qui consistent le plus souvent en la représentation graphique de la fonction de transfert du système (tracé graphique du numérateur et du dénominateur, configuration des pôles et zéros du modèle initial et du modèle réduit, diagrammes de Bode...etc); ces méthodes, quoique peu précises, sont pratiquement plus rapides surtout lorsque les pôles et zéros sont simples et réels.

a) localisation graphique des pôles et zéros

Supposons que la fonction de transfert du système puisse s'écrire :

$$H_q(p) = \frac{N_q(p)}{D_q(p)} = K \frac{\prod_{j=1}^{q-1} (p + z_j)}{\prod_{i=1}^q (p + p_i)}$$

avec les hypothèses suivantes :

- $z_i \neq z_j \quad 1 \leq i, j \leq q-1 \text{ et } i \neq j$

- $p_i \neq p_j \quad 1 \leq i, j \leq q \text{ et } i \neq j$

- $p_i, z_j \in \mathbf{IR} \quad 1 \leq j \leq q-1 ; 1 \leq i \leq q$

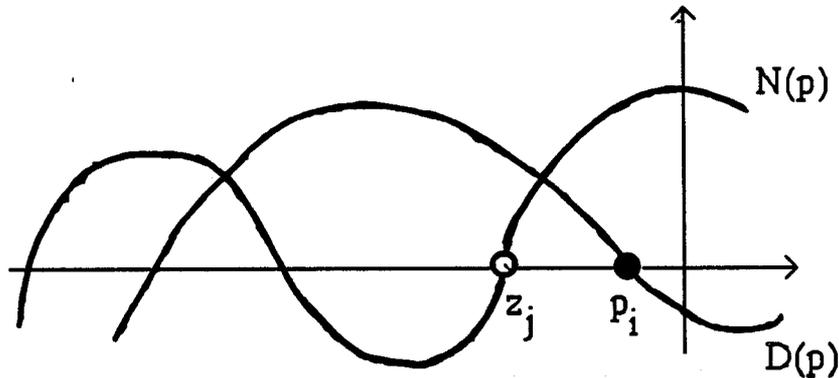
la représentation graphique du numérateur $N_q(p)$ et du dénominateur $D_q(p)$ permet surtout de mettre en évidence le rapprochement entre les pôles et zéros de $H_q(p)$ (figure (II-4)).

La simplification des facteurs $(p+z_j)$ et $(p+p_i)$ est d'autant plus

justifiée que l'erreur relative d'approximation e_{ij} définie par (II-57) est faible :

$$e_{ij} = \Delta(p_i, z_j) / \inf(|p_i|, |z_j|) \quad (\text{II-57})$$

où $\Delta(p_i, z_j) = |p_i - z_j|$ exprime l'écartement entre le pôle p_i et le zéro z_j



Fig(II-4)

remarque

Dans le cas le plus général où le système admet des pôles et zéros complexes, il est plutôt intéressant d'étudier la configuration dans le plan de la variable complexe p des pôles et zéros de sa fonction de transfert (Figure (II-5)).

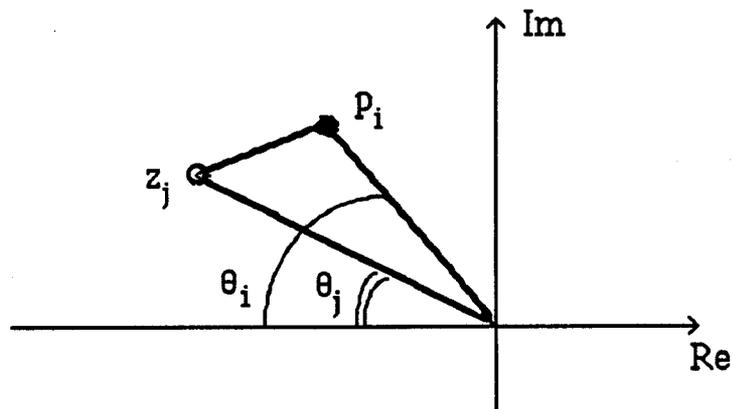


Figure (II-5)

l'écartement entre le pôle p_i le zéro z_j (complexes) sera alors mesuré par les quantités :

$$e_{ij} = \Delta(p_i, z_j) / \inf(|p_i|, |z_j|) \quad (II-58)$$

$$\delta_{ij} = \Delta(\theta_i, \theta_j) / \inf(\theta_i, \theta_j) \quad (II-59)$$

b) représentation dans le plan de Bode

De la même façon que précédemment, la représentation de la fonction de transfert du système dans le plan de Bode par ses diagrammes d'amplitude et/ou de phase, peut constituer un moyen graphique pratique pour nous renseigner sur le rapprochement des pôles et zéros. Elle permet aussi l'étude dans le plan de Bode des caractéristiques du modèle réduit.

La présence des pôles et zéros se traduit par l'existence dans l'expression de la fonction de transfert des termes de la forme $1 + \tau_i p$ en numérateur et $1 + \tau_j p$ en dénominateur avec :

$$\tau_i = 1/p_i \quad 1 \leq i \leq q \quad (II-60)$$

$$\tau_j = 1/z_j \quad 1 \leq j \leq q-1$$

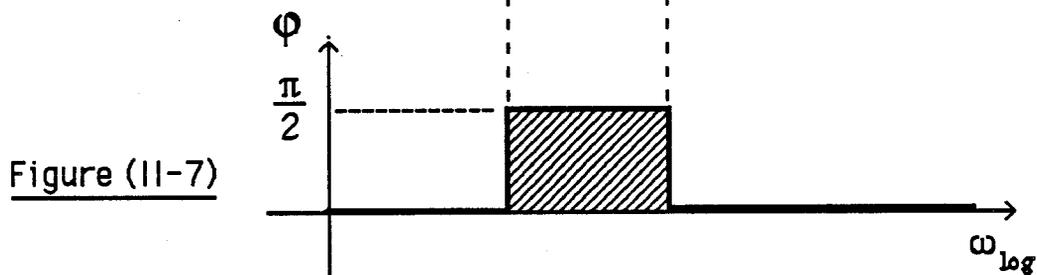
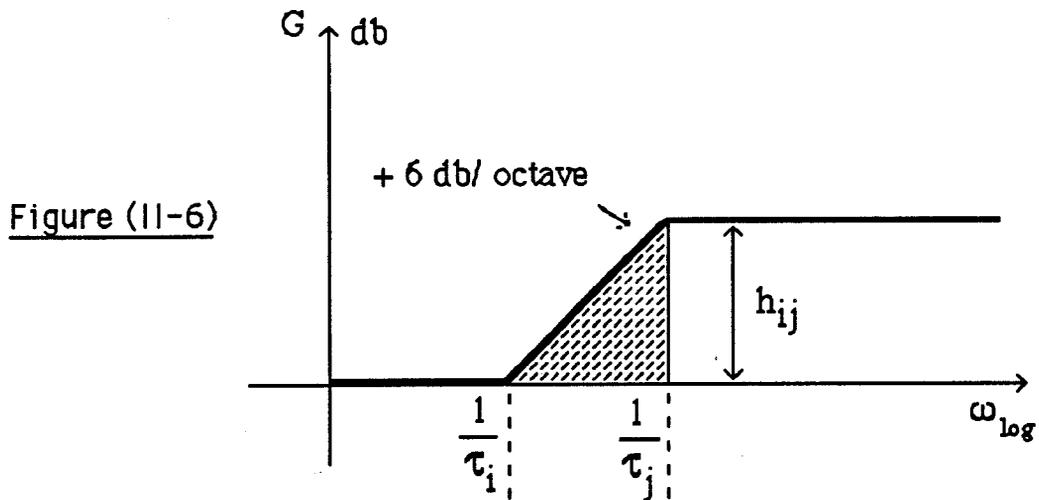
lorsque les pulsations de cassures $1/\tau_i$ et $1/\tau_j$ sont suffisamment rapprochées, la simplification des facteurs $(1 + \tau_j p)$ et $(1 + \tau_i p)$ se traduit par une neutralisation graphique des diagrammes d'amplitudes et de phases correspondant à ces termes (Figures (III-6) et (III-7)).

Les aires hachurées peuvent être calculées à partir des constantes de temps τ_j et τ_i par :

$$a_{ij} = 10 \text{Log}_{10}^2 \left(\frac{\tau_i}{\tau_j} \right) \quad (II-61)$$

$$\rho_{ij} = 10 \pi \text{Log}_{10} \left(\frac{\tau_i}{\tau_j} \right) \quad (II-62)$$

et peuvent servir à évaluer la qualité de l'approximation.



Les diagrammes résultants représentent les contributions dans les diagrammes d'amplitude et de phase de la fonction de transfert globale des termes $(1+\tau_i p)$ et $(1+\tau_j p)$. Le diagramme de Bode du modèle réduit peut être obtenu directement à partir de celui du modèle initial en ignorant ces contributions.

c) Exemple numérique

Soit le système d'ordre 3 représenté par sa fonction de transfert :

$$H_3(p) = \frac{12(p+1.087)(p+2.913)}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

après simplification , nous obtenons la fonction de transfert réduite d'ordre 1 :

$$H_1(p) = \frac{12}{p+2}$$

la réalisation équilibrée correspondante calculée par la méthode de Moore à partir d'une représentation initiale sous forme compagnon est :

$$A^* = \begin{bmatrix} -1.9 & 0.42 & -0.09 \\ 0.42 & -1.37 & 0.59 \\ -0.09 & 0.59 & -2.72 \end{bmatrix} \quad B^* = C^{*T} = \begin{bmatrix} 3.44 \\ -0.39 \\ 0.086 \end{bmatrix} \quad (II-63)$$

les modèles réduits obtenus à partir de (II-63) sont :

- modèle d'ordre 1

$$H_1^*(p) = \frac{11.83}{p + 1.9}$$

- modèle d'ordre 2

$$H_2^*(p) = \frac{11.98(p + 1.285)}{(p + 1.138)(p + 2.13)}$$

la simplification de $H_3(p)$ aurait donné :

$$H_2(p) = \frac{12(p + 1.087)}{(p + 1)(p + 2)}$$

La réponse impulsionnelle du système est :

$$h(t) = 0.083e^{-t} + 0.83e^{-2t} + 0.055 e^{-t}$$

que nous pouvons approcher avec une bonne précision par :

$$h_2(t) = 0.83e^{-2t}$$

Les courbes de simulation des réponses indicielles du modèle initial et des différents modèles réduits, décrits sur les figures (II-8) et (II-9), montrent que les deux méthodes sont pratiquement analogues quant à la qualité des approximations obtenues.

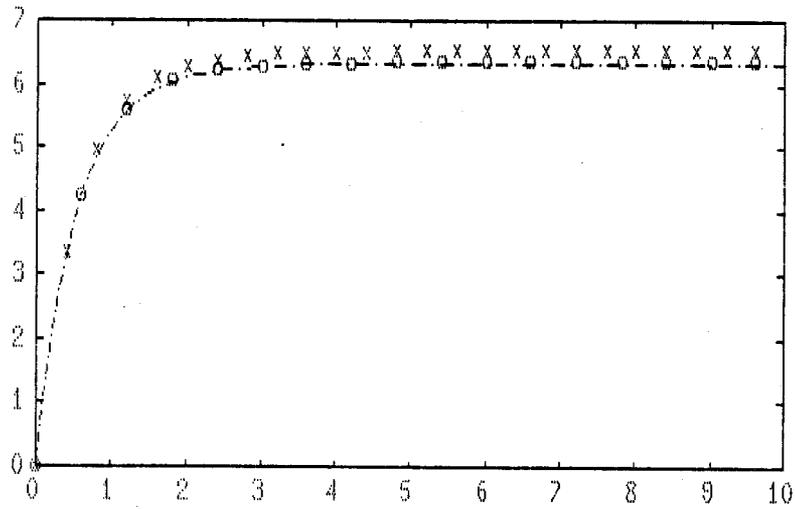
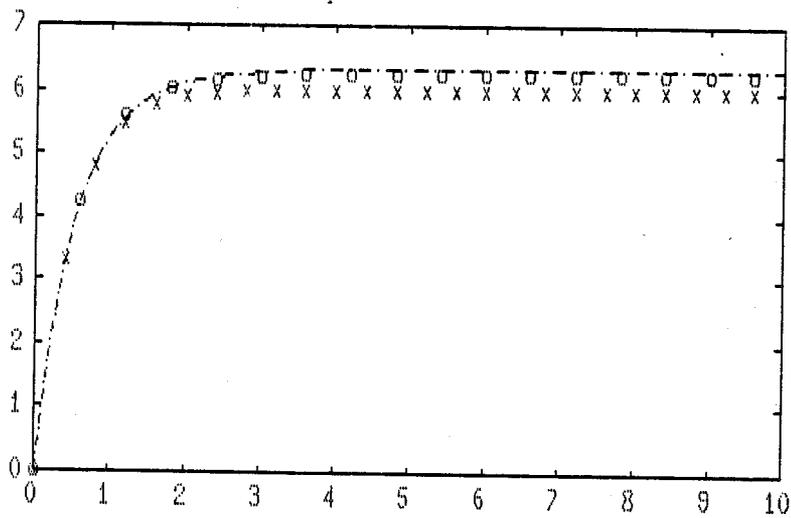


Figure (II-8)

----- : H₃(p)
 xxxxxxxx : H₂(p)
 ooooooooo : H*₂(p)



Fig(II-9)

----- : H₃(p)
 xxxxxxxx : H₁(p)
 ooooooooo : H*₁(p)

II.3.3- Cas général [53]

La fonction de transfert du système supposée non dégénérée est de la forme :

$$H_q(p) = \frac{N_q(p)}{D_q(p)} = \frac{b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} + \dots + b_q}{p^q + a_1 p^{q-1} + \dots + a_q}$$

dans laquelle, les racines du numérateur et du dénominateur sont supposées réelles et strictement négatives.

La méthode consiste à déterminer $p_{o,q}$ réel et positif tel que $-p_{o,q}$ puisse être considéré en même temps comme une racine approchée de $N_q(p)$ et $D_q(p)$: autrement dit, $p_{o,q}$ doit réaliser le meilleur compromis entre $|N_q(-p_{o,q})| \approx 0$ et $|D_q(-p_{o,q})| \approx 0$.

La factorisation de $H_q(p)$ par $(p+p_{o,q})$ donne :

$$H_q(p) = \frac{(p + p_{o,q}) N_{q-1}(p) + \varepsilon_{N,q}(p_{o,q})}{(p + p_{o,q}) D_{q-1}(p) + \varepsilon_{D,q}(p_{o,q})} \quad (II-64)$$

où $\varepsilon_{N,q}(p_{o,q})$ et $\varepsilon_{D,q}(p_{o,q})$ sont respectivement les restes de la division euclidienne de $N_q(p)$ et $D_q(p)$ par $(p+p_{o,q})$ que nous pouvons exprimer par :

$$\varepsilon_{N,q}(p_{o,q}) = (-1)^{q-1} b_1 p_{o,q}^{q-1} + (-1)^{q-2} b_2 p_{o,q}^{q-2} + \dots + b_q = N_q(-p_{o,q}) \quad (II-65)$$

$$\varepsilon_{D,q}(p_{o,q}) = (-1)^q p_{o,q}^q + (-1)^{q-1} a_1 p_{o,q}^{q-1} + \dots + a_q = D_q(-p_{o,q}) \quad (II-66)$$

posons :

$$H_{q-1}(p) = \frac{N_{q-1}(p)}{D_{q-1}(p)} \quad (II-67)$$

avec , pour le numérateur :

$$\begin{aligned} b'_1 &= b_1 \\ b'_i &= b_i - b'_{i-1} p_{o,q} \quad i=2, \dots, q-1 \end{aligned} \quad (II-68)$$

et pour le dénominateur :

$$a'_i = a_i - a'_{i-1}p_{o,q} \quad i=1,2,\dots,(q-1) \quad (II-69)$$

l'approximation de $H_q(p)$ par $H_{q-1}(p)$ est d'autant plus satisfaisante que les restes $\mathcal{E}_{N,q}(p_{o,q})$ et $\mathcal{E}_{D,q}(p_{o,q})$ sont voisins de zéro : le problème se ramène donc à rechercher $p_{o,q}$ qui permettra de minimiser la valeur absolue de ces deux quantités.

remarque

Lorsque $(-p_{o,q})$ est racine commune à $N_q(p)$ et $D_q(p)$ alors $\mathcal{E}_{N,q}(p_{o,q})$ et $\mathcal{E}_{D,q}(p_{o,q})$ sont nuls et $H_q(p)$ est dégénérée : la simplification "exacte" par $(p+p_{o,q})$ conduit à la même expression (II-67).

Minimisation de $|\mathcal{E}_{N,q}(p_{o,q})|$ et $|\mathcal{E}_{D,q}(p_{o,q})|$

Le problème de la minimisation simultanée de plusieurs fonctions apparait d'un point de vue mathématique comme mal posé ou du moins n'a pas toujours de solution : $|\mathcal{E}_{N,q}(p_{o,q})|$ et $|\mathcal{E}_{D,q}(p_{o,q})|$ n'admettent pas obligatoirement le même minimum absolu.

Cependant dans le cas qui nous intéresse, une solution approchée qui s'avère suffisante, peut être formulée de la façon suivante [51]

- étape 1 : chercher les zéros de $|\mathcal{E}_{D,q}(p)|$; ces valeurs ne sont autres que les pôles de $H_q(p)$
- étape 2 : soit p_i un pôle de $H_q(p)$: chercher dans un voisinage restreint J_{p_i} de p_i les minima de $|\mathcal{E}_{N,q}(p)|$; soit $\{p_{ik}\}$ l'ensemble de ces minima
- étape 3 : parmi toutes les solutions possibles, choisir celle qui conduit au minimum- minimorum de $|\mathcal{E}_{N,q}(p)|$

la figure (II-9) est une illustration graphique de l'étape 2 décisive quant à la qualité des résultats obtenus.

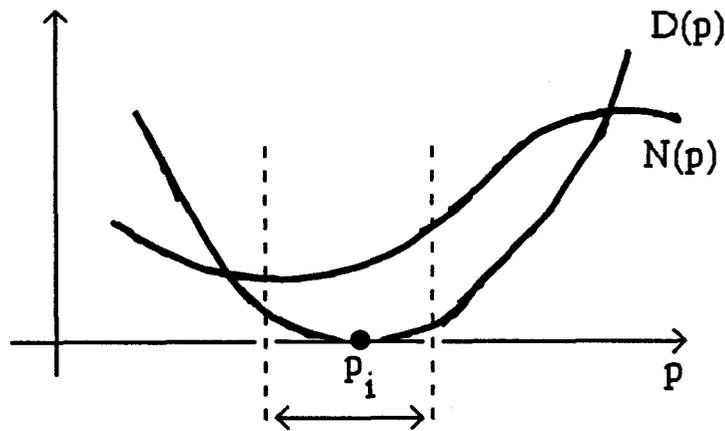


Figure (II-9)

remarque

La nature même du problème suppose que $|\mathcal{E}_{N,q}(p)|$ et $|\mathcal{E}_{D,q}(p)|$ ne doivent pas admettre le même minimum : la fonction de transfert du système étant supposée non dégénérée.

Une autre méthode analytique et souvent appliquée consiste à minimiser le critère défini par :

$$J_q(p_{o,q}) = \alpha_N^2 \mathcal{E}_{N,q}^2(p_{o,q}) + \alpha_D^2 \mathcal{E}_{D,q}^2(p_{o,q}) \quad (II-70)$$

où α_N et α_D sont des coefficients de poids affectés aux erreurs $\mathcal{E}_{N,q}$ et $\mathcal{E}_{D,q}$ et dont le choix peut être laissé à l'utilisateur lui permettant ainsi d'accorder plus d'importance soit à l'erreur sur le numérateur ou sur le dénominateur.

Dans ce qui suit, et pour des considérations de conservation du gain statique, nous opterons pour les valeurs suivantes :

$$\alpha_N = 1/a_q \quad \text{-a-}$$

(II-71)

$$\alpha_D = 1/b_q \quad \text{-b-}$$

Cependant la minimisation de $J_q(p_{o,q})$ nécessite la résolution d'une équation algébrique d'ordre $2q$ ce qui complique les calculs lorsque le système est d'ordre élevé.

En vue de simplifier le problème, nous proposons une solution pratique qui consiste en la démarche suivante :

i) imposer la contrainte d'égalité des gains statiques entre le système initial et le système réduit, ce qui entraîne la condition suivante :

$$\varepsilon_{N,q}(p_{o,q})/b_q = \varepsilon_{D,q}(p_{o,q})/a_q \quad (II-72)$$

en effet :

$$N_q(p) = (p+p_{o,q})N_{q-1}(p) + \varepsilon_{N,q}(p_{o,q})$$

$$D_q(p) = (p+p_{o,q})D_{q-1}(p) + \varepsilon_{D,q}(p_{o,q})$$

d'où :

$$N_{q-1}(p) = \frac{N_q(p) - \varepsilon_{N,q}(p_{o,q})}{p+p_{o,q}} \quad \text{et} \quad D_{q-1}(p) = \frac{D_q(p) - \varepsilon_{D,q}(p_{o,q})}{p+p_{o,q}}$$

pour $p=0$, nous avons :

$$\frac{N_{q-1}(0)}{D_{q-1}(0)} = \frac{N_q(0) - \varepsilon_{N,q}(p_{o,q})}{D_q(0) - \varepsilon_{D,q}(p_{o,q})} = \frac{b_q - \varepsilon_{N,q}(p_{o,q})}{a_q - \varepsilon_{D,q}(p_{o,q})}$$

$$\frac{N_{q-1}(0)}{D_{q-1}(0)} = \left[\frac{1 - \frac{\varepsilon_{N,q}(p_{o,q})}{b_q}}{1 - \frac{\varepsilon_{D,q}(p_{o,q})}{a_q}} \right] \times \frac{b_q}{a_q}$$

soit :

$$\frac{N_{q-1}(0)}{D_{q-1}(0)} = \frac{b_q}{a_q} \quad \text{si} \quad \frac{\varepsilon_{N,q}(p_{o,q})}{b_q} = \frac{\varepsilon_{D,q}(p_{o,q})}{a_q}$$

ii) parmi les solutions de l'équation i), choisir $p_{o,q}$ tel que :

$$|\varepsilon_{N,q}(p_{o,q})/b_q| \text{ minimum} \quad (II-73)$$

i) est équivalente à la résolution de l'équation d'ordre $(q-1)$ suivante :

$$c_q p_{o,q}^{q-1} + c_{q-1} p_{o,q}^{q-2} + \dots + c_1 = 0 \quad (II-74)$$

avec :

$$c_k = (-1)^k (b_q a_{q-k} - a_q b_{q-k}) \quad k=1,2,\dots,q$$

$$a_0 = 1 ; b_0 = 0$$

$p_{o,q}$ est alors obtenu comme étant une solution dans \mathbf{IR}^+ de (II-74) qui minimise (II-73).

remarque sur la stabilité du modèle réduit :

On pourra montrer que pour les pôles du système suffisamment stables, cette propriété est conservée lors des différentes transformations, en effet :

Soit p_1 un pôle du modèle défini par :

$$H_{q-1}(p) = N_{q-1}(p) / D_{q-1}(p)$$

nous avons d'après (II-64) :

$$D_q(p_1) - \varepsilon_{D,q}(p_{o,q}) = p_1^q + a_1 p_1^{q-1} + \dots + a_{q-1} p_1 + (a_q - \varepsilon_{D,q}(p_{o,q})) = 0$$

La condition (II-73), si elle est vérifiée, est équivalente à $\varepsilon_{D,q}(p_{o,q})/a_q$ faible, ce qui permet de négliger le terme $\varepsilon_{D,q}(p_{o,q})$ dans l'équation précédente devant a_q . Il vient alors que p_1 est au voisinage immédiat d'un pôle de $H_q(p)$ supposé suffisamment stable.

Exemple d'application

Soit le système d'ordre $q=3$ défini par :

$$H_3(p) = \frac{3p^2 + 20p + 31}{p^3 + 10p^2 + 31p + 30}$$

$$H_3(0) = 1.0333$$

les modèles réduits calculés par la méthode décrite ci-dessus sont :

- modèle d'ordre 2

$$H_2(p) = \frac{3p + 12.2726}{p^2 + 7.4242p + 11.8767}$$

avec :

$$\begin{cases} p_{0,3} = 2.5758 \\ \left| \frac{\epsilon_{N,3}}{31} \right| = \left| \frac{\epsilon_{D,3}}{30} \right| \approx 2.10^{-2} \end{cases}$$

$$H_2(0) = 1.0333 = H_3(0)$$

le critère de qualité est : $J_3(p_{0,3}) \approx 8.10^{-4}$

- modèle d'ordre 1

$$H_1(p) = \frac{3}{p + 2.9032}$$

obtenu à partir de $H_2(p)$ avec :

$$\begin{cases} p_{0,2} = 4.521 \\ \left| \frac{\epsilon_{N,2}}{12.3} \right| = \left| \frac{\epsilon_{D,2}}{11.9} \right| \approx 10^{-1} \end{cases}$$

$$H_1(0) = 1.0334$$

le critère de qualité est : $J_2(p_{0,2}) \approx 2.10^{-2}$

l'application de la méthode de Moore conduit aux modèles réduits suivants :

- modèle d'ordre 2

$$H_2^*(p) = \frac{2.995p + 10.12}{p^2 + 6.695p + 9.8}$$

avec : $\epsilon(2) = 5.32.10^{-4}$

$$H_2^*(0) = 1.0326$$

- modèle d'ordre 1

$$H_1^*(p) = \frac{2.89}{p + 2.877}$$

avec : $\epsilon(1) = 2.8.10^{-2}$

$$H_1^*(0) = 1.0045$$

Les courbes de simulation des figures (II-11) et (II-12) montrent les réponses indicielles du modèle initial et des différentes approximations obtenues.

L'examen rapide de ces courbes met en évidence l'identité de ces deux méthodes avec une légère amélioration apportée par la méthode que nous proposons quant à la conservation du gain statique.

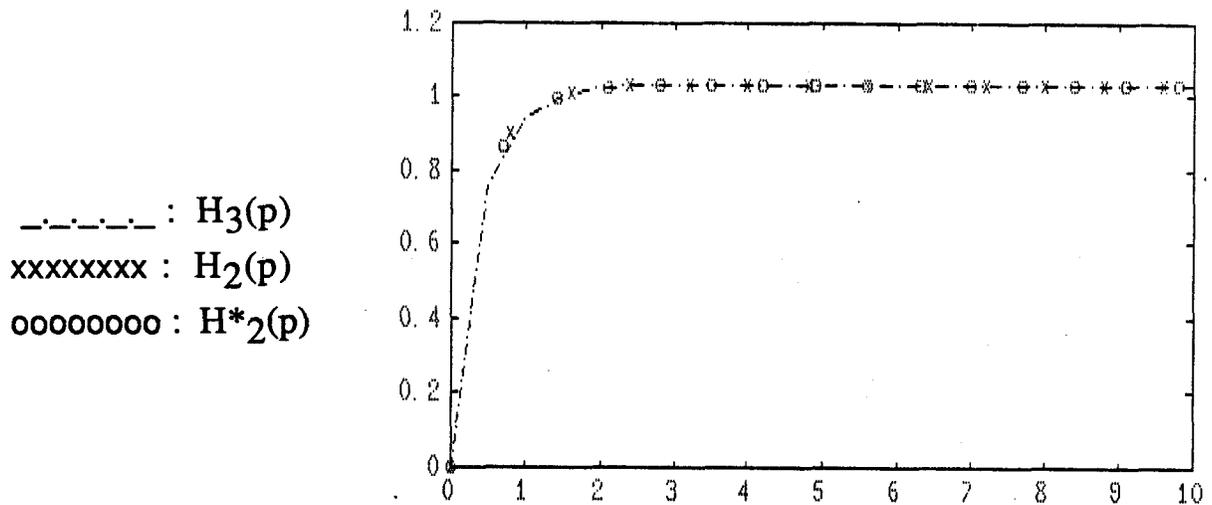


Figure (II-11)

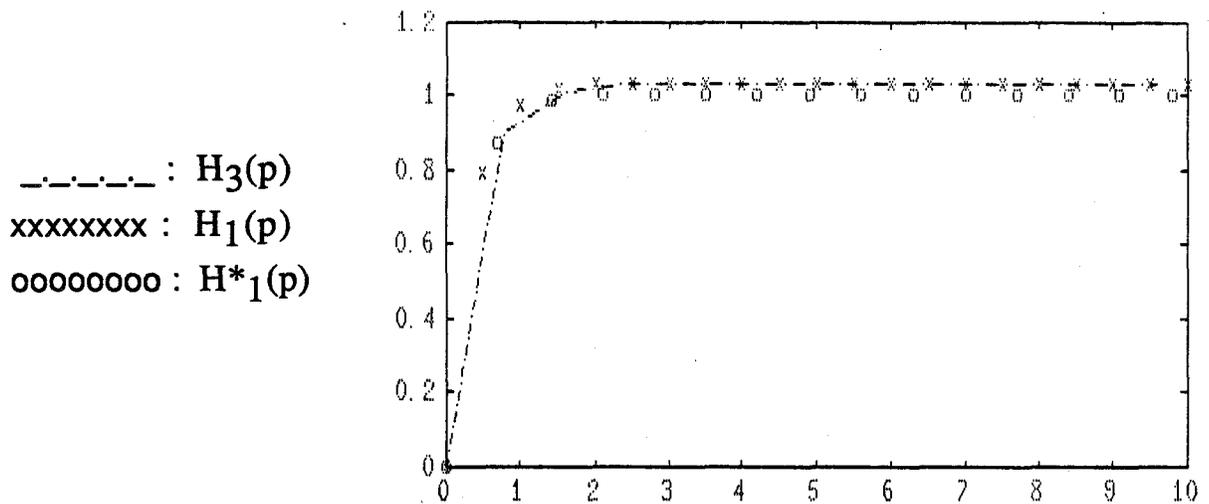


Figure (II-12)

II.3.4- Validité de la méthode

Lorsque le système à simplifier possède des dynamiques d'ordres de grandeur différents et/ou lorsque les pôles et zéros de la fonction de transfert $H_q(p)$ sont relativement éloignés les uns des autres, la méthode des pôles et zéros rapprochés ne donne pas de résultats suffisamment précis.

Considérons l'écriture suivante de la fonction de transfert du système :

$$H_q(p) = \frac{(p + p_{o,q}) \left[N_{q-1}(p) + \frac{\epsilon_{N,q}(p_{o,q})}{p + p_{o,q}} \right]}{(p + p_{o,q}) \left[D_{q-1}(p) + \frac{\epsilon_{D,q}(p_{o,q})}{p + p_{o,q}} \right]} \quad (11-75)$$

- approximation au voisinage de $p=\infty$

Pour p suffisamment grand, $\epsilon_{N,q}(p_{o,q})/(p+p_{o,q})$ et $\epsilon_{D,q}(p_{o,q})/(p+p_{o,q})$ tendent vers zéro et ceci quel que soit $p_{o,q}$: l'approximation est donc toujours valable en hautes fréquences.

- approximation au voisinage de $p=0$

Lorsque $p_{o,q}$ est très petit, l'approximation n'est valable en basses fréquences que si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\epsilon_{N,q}(p_{o,q}) / p_{o,q} \ll 1 \quad (11-76)$$

$$\epsilon_{D,q}(p_{o,q}) / p_{o,q} \ll 1 \quad (11-77)$$

Dans ce qui suit, nous traiterons le cas où l'une de ces deux conditions n'est pas remplie par suite de la présence dans la fonction de transfert à réduire de modes très séparés.

II.3.5- Cas des systèmes à deux dynamiques

- Première approche : séparation des modes

La fonction de transfert du système peut être décomposée de la façon suivante :

$$H_q(p) = H_{q1}(p) + H_{q2}(p) \quad (11-78)$$

avec :

- $H_{q1}(p)$ fonction de transfert d'ordre q_1 représentant la partie lente

du système

- $H_{q_2}(p)$ fonction de transfert d'ordre q_2 représentant la partie rapide du système

$$- q = q_1 + q_2$$

l'écriture (II-79) peut être obtenue par décomposition en éléments simples de $H_q(p)$

Le gain statique du système global est la somme des gains statiques de chaque sous-système :

$$H_q(0) = H_{q_1}(0) + H_{q_2}(0) \quad (\text{II-80})$$

L'application de la méthode des pôles et zéros rapprochés respectivement à $H_{q_1}(p)$ et $H_{q_2}(p)$ conduit à écrire la fonction de transfert du modèle réduit d'ordre m sous la forme :

$$H_m(p) = H_{m_1}(p) + H_{m_2}(p) \quad (\text{II-81})$$

avec :

- $H_{m_1}(p)$: approximation d'ordre m_1 de $H_{q_1}(p)$

- $H_{m_2}(p)$: approximation d'ordre m_2 de $H_{q_2}(p)$

$$- m = m_1 + m_2$$

La conservation du gain statique découle immédiatement du fait que

$$H_m(0) = H_{m_1}(0) + H_{m_2}(0)$$

$$H_{m_1}(0) = H_{q_1}(0)$$

$$H_{m_2}(0) = H_{q_2}(0)$$

Quant au choix du modèle d'ordre m parmi les $(m+1)$ solutions possibles, il peut être fait selon l'une des deux considérations suivantes

- retenir les valeurs de m_1 et m_2 qui conduisent à la meilleure approximation de $H_q(p)$ au sens d'un critère qui reste à définir

- fixer le nombre de modes rapides (m_2) qu'on désire retenir dans le modèle réduit $H_m(p)$; ce choix peut dépendre de l'application envisagée.

- Deuxième approche : Utilisation du système réciproque [55]

Une autre approche, plus facile à mettre en oeuvre, consiste à déterminer l'approximation en basses fréquences de $H_q(p)$ en appliquant la méthode des pôles et zéros rapprochés à la fonction de transfert du système réciproque défini par [26] :

$$\tilde{H}_q(p) = \frac{1}{p} H_q\left(\frac{1}{p}\right)$$

soit $H_{q-1}(p)$ l'approximation d'ordre $q-1$ ainsi obtenue, nous avons :

$$H_{q-1}(p) = \frac{1}{p} \tilde{H}_{q-1}\left(\frac{1}{p}\right)$$

Les propriétés de stabilité et de conservation du gain statique ne sont pas altérées par une double application de la transformation réciproque.

Pour une valeur de m donnée ($m < q$), le modèle réduit d'ordre m peut être obtenu, suivant les cas, par applications successives de la méthode des pôles et zéros rapprochés aux systèmes d'ordre k ($m < k \leq q$) ou à leurs systèmes réciproques.

- Exemples d'application

Considérons le système d'ordre 3 défini par :

$$H_3(p) = \frac{2p^2 + 13p + 14}{p^3 + 10p^2 + 17p + 2}$$

les pôles et zéros de $H_3(p)$ sont respectivement:

$$\text{-pôles : } \{ p_1 = -0.127 ; p_2 = -2 ; p_3 = -7.87 \}$$

$$\text{-zéros : } \{ z_1 = -1.36 ; z_2 = -5.14 \}$$

a) comparaison des modèles réduits obtenus par la méthode de Moore et la méthode proposée

Méthode de MooreMéthode proposée-modèles réduits d'ordre 2

$$H_2^*(p) = \frac{1.876p + 3.784}{p^2 + 4.33p + 0.542}$$

zéros : { -2 }

pôles : { -0.13 ; -4.2 }

$$H_2^*(0) = 6.98$$

$$H_2(p) = \frac{2p + 9.1}{p + 8.05p + 1.3025}$$

zéros : { -4.55 }

pôles : { -0.16 ; -7.88 }

$$H_2(0) = 7$$

-modèles réduits d'ordre 1

$$H_1^*(p) = \frac{0.0993}{p + 0.147}$$

pôles : { -0.147 }

$$H_1^*(0) = 6.755$$

$$H_1(p) = \frac{2}{p + 0.286}$$

pôles : { -0.286 }

$$H_1(0) = 6.993$$

nous constatons sur cet exemple que :

-Les coefficients de $H_2(p)$ et $H_2^*(p)$ sont très différents (de même pour $H_1(p)$ et $H_1^*(p)$)

$$- \varepsilon_3(p_{0,3})/p_{0,3} \approx 1.92 > 1$$

et par conséquent un mauvais comportement des modèles réduits obtenus par la méthode proposée, dû à des modes très séparés

b) séparation des modes

la décomposition en éléments simples conduit à l'écriture suivante de $H_3(p)$:

$$H_3(p) = \frac{0.854}{p + 0.127} + \frac{1.146p + 4.429}{p^2 + 9.87p + 15.74}$$

où nous pouvons distinguer :

- la partie lente de transmittance :

$$H_1^l(p) = \frac{0.854}{p + 0.127}$$

- la partie rapide de transmittance :

$$H_2^r(p) = \frac{1.146p + 4.429}{p^2 + 9.87p + 15.74}$$

critère du choix des modèles réduits

Le gain statique est pratiquement conservé dans la partie lente du système :

$$H_3(0) = H_1^l(0) + H_2^r(0) = 7$$

avec : $H_1^l(0) = 6.724$ et $H_2^r(0) = 0.276$

Ce résultat, qui est vérifié aussi dans le cas des modèles réduits obtenus par les techniques de perturbations singulières [18], va pouvoir nous permettre de décider quant au choix des valeurs m_1 et m_2 retenues pour l'obtention de l'approximation d'ordre m :

$$H_m(p) = H_{m_1}(p) + H_{m_2}(p)$$

ainsi :

- lorsque m est inférieur au nombre des modes lents, le modèle d'ordre m est calculé directement par application de la méthode des pôles et zéros rapprochés à la fonction de transfert lente.

- dans le cas contraire, le modèle d'ordre m est calculé par adjonction à la partie lente, de l'approximation d'ordre $m-q_1$ obtenue par application de la méthode à la fonction de transfert rapide.

L'application de la méthode des pôles et zéros rapprochés à $H_2^r(p)$ donne :

$$H_1^r(p) = \frac{1.146}{p + 4.027}$$

- le modèle d'ordre 2, constitué d'un mode rapide et d'un mode lent est donc:

$$H_2(p) = H_1^l(p) + H_1^r(p) = \frac{2p + 3.585}{p^2 + 4.154p + 0.511}$$

- le modèle d'ordre 1 est :

$$H_1(p) = H_1^l(p) = \frac{0.854}{p + 0.127}$$

c) utilisation du système réciproque

les modèles réduits obtenus par application de la transformation réciproque sont pratiquement identiques à ceux obtenus en séparant les dynamiques :

- modèle d'ordre 2 :

$$H_2(p) = \frac{2p + 3.637}{p^2 + 4.22p + 0.52}$$

$$H_2(0) = 6.994$$

- modèle d'ordre 1 :

$$H_1(p) = \frac{0.862}{p + 0.123}$$

$$H_1(0) = 7.01$$

toutefois, ici, le modèle d'ordre 1 est légèrement meilleur quant à la conservation du gain statique.

CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre des résultats originaux concernant une nouvelle méthode d'approximation de la fonction de transfert d'un système dynamique, basée sur la présence dans celle-ci de pôles et zéros rapprochés.

Lorsque les dynamiques du système sont séparées, nous avons proposé deux approches différentes. L'une consiste à décomposer la fonction de transfert du système initial en une partie lente et une partie rapide. La deuxième approche utilise la notion du système réciproque. L'utilisation de l'une de ces deux approches conjointement à la méthode des pôles et zéros rapprochés permet d'obtenir une meilleure approximation du système initial.

Les simulations numériques montrent que les résultats obtenus par la méthode proposée coïncident souvent avec ceux obtenus par la méthode de symétrisation interne.

CHAPITRE III

CHAPITRE 3

APPLICATION DE LA METHODE DES POLES ET ZEROS RAPPROCHES A LA SIMPLIFICATION DE MODELE D'UN GROUPE TURBO-ALTERNATEUR

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous envisagerons d'appliquer les méthodes développées dans le chapitre précédent à l'élaboration de modèles simplifiés d'un processus industriel; il s'agit ici d'un groupe turbo-alternateur à resurchauffe dont une étude de synthèse d'une régulation discrète a été proposée par Borne [15].

Après avoir décrit le processus étudié, nous effectuerons une étude comparative des différentes approximations calculées par la méthode de symétrisation interne de Moore d'une part, et d'autre part, par la méthode proposée; en particulier, nous montrerons comment l'application conjointe de la méthode des pôles et zéros rapprochés et la séparation des dynamiques peut conduire à des modèles réduits suffisamment représentatifs du processus initial.

I-DESCRIPTION DU PROCESSUS ETUDIE

Le dispositif étudié, dont le schéma-bloc est représenté sur la figure (III-1) est constitué de trois éléments caractéristiques.

I.1- La turbine

La turbine, dont la puissance motrice fournie est fonction de l'ouverture des soupapes du corps haute pression (HP) est composée des éléments suivants :

a) le corps haute pression (HP)

La puissance motrice fournie par le corps haute pression est proportionnelle dans le rapport μ à la puissance de la turbine et est reliée à la position des soupapes par le transfert suivant :

$$\frac{G \mu}{1 + \tau_1 p} \quad (\text{III-1})$$

où G représente le gain en débit des soupapes.

b) le circuit de resurchauffe

La fonction de transfert liant la pression du circuit de resurchauffe à l'ouverture des soupapes d'admission du corps HP s'écrit :

$$\frac{G}{1 + \tau_2 p} \cdot \frac{1}{1 + \tau_3 p} \quad (\text{III-2})$$

c) les corps moyenne pression (MP) et basse pression (BP)

Ils fournissent une puissance motrice représentant une fraction $(1-\mu)$ de la puissance de la turbine, les soupapes d'admission du corps MP étant à pleine puissance ouverture.

Le transfert puissance fournie par les corps MP et BP -ouverture des soupapes du corps HP s'exprime par :

$$\frac{G}{1 + \tau_2 p} \cdot \frac{1 - \mu}{1 + \tau_3 p} \quad (\text{III-3})$$

I.2- Les masses tournantes

La relation liant la vitesse du groupe et l'écart entre la puissance absorbée par l'alternateur s'exprime par la fonction de transfert :

$$\frac{1}{\tau_4 p} \quad (\text{III-4})$$

I.3- L'alternateur et le réseau

On distingue deux cas selon que le groupe est interconnecté ou isolé du réseau électrique général :

- Réseau interconnecté

Dans ces conditions la relation liant la puissance électrique produite et la vitesse du groupe s'exprime sous la forme :

$$R(p) = \frac{1}{p} (\alpha + \beta p) \quad (\text{III-5})$$

- Réseau isolé

$$R(p) = 1 \quad (\text{III-6})$$

Dans le cadre d'une étude de régulation en asservissement de puissance, une représentation plus complète tiendrait compte des différents capteurs qui sont décrits par les fonctions de transfert suivantes :

- tachymètre

$$\frac{1}{1 + \tau_5 p} \quad (\text{III-7})$$

- Wattmètre

$$\frac{1}{1 + \tau_6 p} \quad (\text{III-8})$$

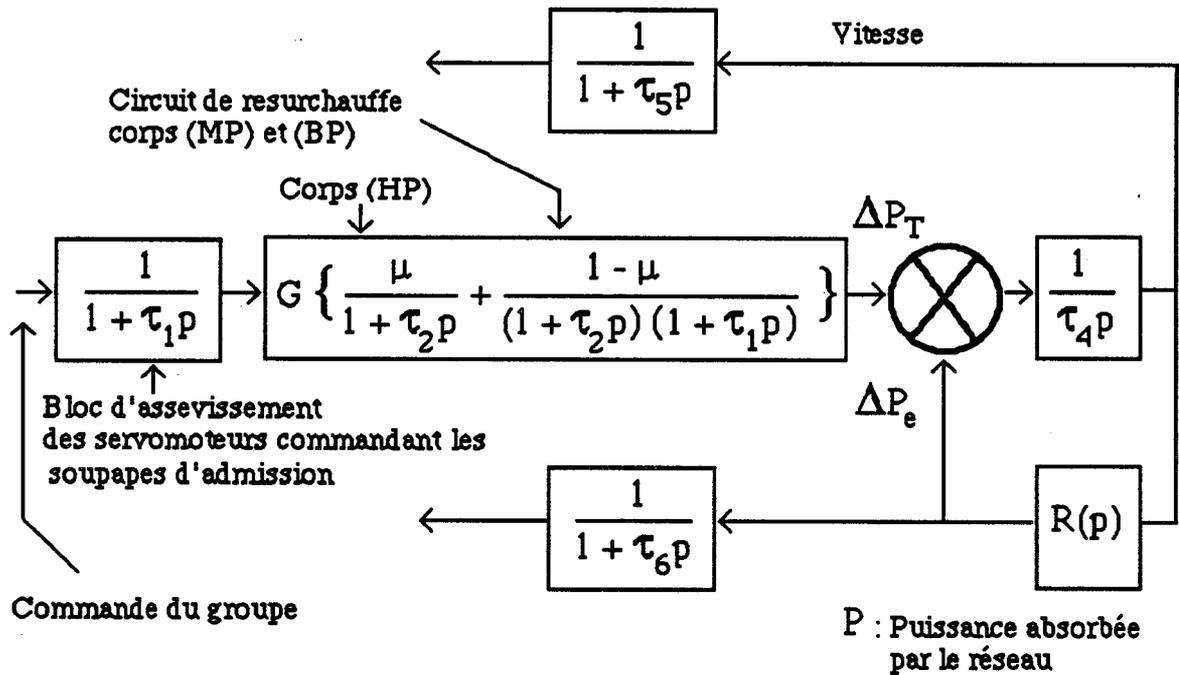


Figure (III-1) : Schéma-bloc du groupe turbo-alternateur

Les différents paramètres et constantes de temps intervenant dans la définition du modèle dans cette étude ont les valeurs numériques suivantes :

$$\tau_1 = 0.125s ; \tau_2 = 0.1s ; \tau_3 = 12.5s ; \tau_4 = 8s ; \tau_5 = 0.05s ; \tau_6 = 0.08s$$

$$G = 1.732 ; \mu = 0.4 ; \alpha = 200 ; \beta = 16$$

II-REPRESENTATION DU PROCESSUS DANS L'ESPACE D'ETAT

Si nous désignons par "e" la variable d'interconnexion avec e=0 lorsque le groupe est isolé du réseau et e=1 lorsque il est y connecté, nous adopterons une description d'état unifiée du processus qui met en évidence la contribution en gain statique de chaque constante de temps dans les équations de sortie, il vient alors :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t) & \text{-a-} \\ Y(t) &= CX(t) & \text{-b-} \end{aligned} \quad (\text{III-9})$$

avec :

$$\begin{aligned} - X &= (x_1, x_2, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8 \\ - Y &= (\omega, \pi)^T \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \text{Diag} \left[-\frac{1}{\tau_1} \quad -\frac{1}{\tau_2} \quad -\frac{1}{\tau_3} \quad -\frac{1}{\tau_4} \quad -\frac{1}{\tau_5} \quad -\frac{1}{\tau_6} \quad -\frac{1}{\tau_7} \quad -\frac{1}{\tau_8} \right] \\ B &= \left[\frac{1}{\tau_1} \quad \frac{1}{\tau_2} \quad \frac{1}{\tau_3} \quad \frac{1-e}{\tau_4} \quad \frac{1}{\tau_5} \quad \frac{1}{\tau_6} \quad \frac{e}{\tau_7} \quad \frac{e}{\tau_8} \right]^T \\ C &= \begin{bmatrix} (1-e)\alpha'_i + e\alpha''_i \\ (1-e)\beta'_i + e\beta''_i \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq 8 \end{aligned}$$

Les valeurs des différents paramètres du modèle (III-9) sont données ci-après :

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= -9.025 \cdot 10^{-2} ; \alpha'_2 = 6.93 \cdot 10^{-2} ; \alpha'_3 = 2.951 ; \alpha'_4 = -1.195 ; \\ \alpha'_5 &= -2.89 \cdot 10^{-3} ; \alpha'_6 = \alpha'_7 = \alpha'_8 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta'_1 &= -0.15 ; \beta'_2 = 0.173 ; \beta'_3 = 2.96 ; \beta'_4 = -1.2 ; \beta'_5 = 0 ; \beta'_6 = -4.92 \cdot 10^{-2} \\ \beta'_7 &= \beta'_8 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha''_1 &= -7.789 \cdot 10^{-2} ; \alpha''_2 = 6.52 \cdot 10^{-2} ; \alpha''_3 = -42.76 \cdot 10^{-5} ; \alpha''_4 = \alpha''_6 = 0 ; \\ \alpha''_5 &= 2.98 \cdot 10^{-3} ; \alpha''_7 = (8.057 - j1.513) \cdot 10^{-3} ; \alpha''_8 = (8.057 + j1.513) \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta''_1 &= 1.168 ; \beta''_2 = -0.652 ; \beta''_3 = 1.065 ; \beta''_4 = \beta''_5 = \beta''_6 = 0 ; \\ \beta''_7 &= (0.075 + j0.313) ; \beta''_8 = (0.075 - j0.313) \end{aligned}$$

III-REPRESENTATION PAR FONCTION DE TRANSFERT

III.1- Groupe turbo-alternateur alimentant un réseau isolé

Dans un fonctionnement sur réseau isolé, les boucles ouvertes de vitesse et de puissance ont pour transmittances respectives :

$$\omega_o(p) = \frac{1}{1 + \tau_1 p} \frac{G}{1 + \tau_2 p} \left(\mu + \frac{1 - \mu}{1 + \tau_3 p} \right) \frac{1}{1 + \tau_4 p} \frac{1}{1 + \tau_5 p} \quad (\text{III-10})$$

$$\pi_o(p) = \frac{1}{1 + \tau_1 p} \frac{G}{1 + \tau_2 p} \left(\mu + \frac{1 - \mu}{1 + \tau_3 p} \right) \frac{1}{1 + \tau_4 p} \frac{1}{1 + \tau_6 p} \quad (\text{III-11})$$

Toutefois, lorsque l'influence des constantes de temps τ_5 et τ_6 des appareils de mesures peut être négligée sans erreur appréciable sur la sortie (cas d'une commande discrète avec période d'échantillonnage judicieusement choisie), il vient pour la description des chaînes de vitesse et de puissance une représentation unique sous forme de la transmittance d'ordre 4 suivante :

$$H_4(p) = \frac{1}{1 + \tau_1 p} \frac{G}{1 + \tau_2 p} \left(\mu + \frac{1 - \mu}{1 + \tau_3 p} \right) \frac{1}{1 + \tau_4 p} \quad (\text{III-12})$$

III.2- Groupe turbo-alternateur alimentant un réseau interconnecté

Dans ce cas, avec les hypothèses précédentes, les fonctions de transfert des boucles ouvertes de vitesse et de puissance admettent respectivement les expressions suivantes :

$$\omega_5(p) = \frac{1}{1 + \tau_1 p} \frac{G}{1 + \tau_2 p} \left(\mu + \frac{1 - \mu}{1 + \tau_3 p} \right) \frac{p}{\alpha + \beta p + \tau_4 p^2} \quad (\text{III-13})$$

$$\pi_5(p) = \frac{1}{1 + \tau_1 p} \frac{G}{1 + \tau_2 p} \left(\mu + \frac{1 - \mu}{1 + \tau_3 p} \right) \frac{\alpha + \beta p}{\alpha + \beta p + \tau_4 p^2} \quad (\text{III-14})$$

IV-CALCUL DES MODELES SIMPLIFIES

IV.1- Fonctionnement sur réseau isolé e=0

Dans ce premier cas, le modèle initial considéré à partir duquel seront calculés les modèles réduits est le modèle unique, pour la description des différentes boucles, représenté par la transmittance :

$$H_4(p) = \frac{b_1 p^3 + b_2 p^2 + b_3 p + b_4}{p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4} \quad (\text{III-15})$$

avec les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} b_1 = b_2 = 0 ; b_3 = 6.928 ; b_4 = 1.3856 \\ a_1 = 18.205 ; a_2 = 83.7 ; a_3 = 16.58 ; a_4 = 0.8 \end{aligned}$$

la décomposition de l'écriture (III-15) selon la méthode des modes conduit à l'expression suivante :

$$H_4(p) = \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i}{p + p_i} \quad (\text{III-16})$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } p_1 = -0.08 ; p_2 = -0.125 ; p_3 = -8 ; p_4 = -10 \\ \alpha_1 = 0.23515 ; \alpha_2 = -0.14848 ; \alpha_3 = -0.43321 ; \alpha_4 = 0.346 \end{aligned}$$

A partir de l'écriture (III-16) nous pouvons distinguer deux sous-ensembles de pôles de même ordre de grandeur conduisant à une partie lente et une partie rapide toutes d'ordre 2 et d'expressions respectives :

$$H_2^l(p) = \frac{0.08667p + 0.01751}{p^2 + 0.205p + 0.01} \quad (\text{III-17})$$

$$H_2^r(p) = \frac{0.08667p + 1.156}{p^2 + 18p + 80} \quad (\text{III-18})$$

avec :

$$H_4(p) = H^l_2(p) + H^r_2(p) \quad (\text{III-19})$$

D'autre part, le calcul de la représentation équilibrée sera fait à partir d'une représentation d'état commandable et observable d'ordre 4 déduite de (III-16) :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -0.08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.125 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} U \quad (\text{III-20-a})$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2.94 & -1.19 & -0.054 & 0.0347 \end{bmatrix} X \quad (\text{III-20-b})$$

avec : $-X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$-Y = \omega$ ou π

a) Méthode de Moore

La représentation d'état équilibrée correspondant au système défini par (III-20) s'écrit :

$$\dot{X}_{ib} = \begin{bmatrix} -0.0523 & 0.0611 & 0.0967 & -0.04 \\ 0.0611 & -0.3161 & -0.8733 & 0.4668 \\ -0.0967 & -0.8733 & -4.5981 & 4.0967 \\ -0.04 & 0.4668 & 4.0967 & -13.2385 \end{bmatrix} X_{ib} + \begin{bmatrix} 0.3103 \\ 0.1720 \\ 0.2843 \\ 0.1186 \end{bmatrix} U \quad (\text{III-21-a})$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.3103 & -0.1720 & -0.2843 & 0.1186 \end{bmatrix} X_{ib} \quad (\text{III-21-b})$$

il en résulte les modèles réduits et erreurs de réduction suivants :

- modèle d'ordre 1

$$H_1^*(p) = \frac{0.09632}{p + 0.0523} \quad (\text{III-22})$$

$$\mathcal{E}(1) = 5\%$$

- modèle d'ordre 2

$$H_2^*(p) = \frac{0.0677p + 0.03542}{p^2 + 0.3684p + 0.0203} \quad (\text{III-23})$$

$$\mathcal{E}(2) = 1\%$$

- modèle d'ordre 3

$$H_3^*(p) = \frac{-0.014p^2 + 0.41524p + 0.0788}{p^3 + 4.9665p^2 + 0.9541p + 0.0455} \quad (\text{III-24})$$

$$\mathcal{E}(3) = 0.06\%$$

b) Méthode proposée

Le système étant à deux dynamiques, le modèle d'ordre 1 est calculé en appliquant la méthode des pôles et zéros rapprochés à la fonction de transfert $H_2^1(p)$ représentant la partie lente; cette même fonction de transfert est retenue comme modèle d'ordre 2; quant au modèle d'ordre 3, il est calculé comme la somme du modèle d'ordre 2 et du modèle d'ordre 1 obtenu par application de la méthode des pôles et zéros rapprochés à la fonction de transfert $H_2^r(p)$ représentant la partie rapide du système; il vient alors pour les différentes approximations :

- modèle d'ordre 1

$$H_1(p) = \frac{0.08667}{p + 0.0495} \quad (\text{III-25})$$

- modèle d'ordre 2

$$H_2(p) = H_2^1(p) = \frac{0.08667p + 0.01751}{p^2 + 0.205p + 0.01} \quad (\text{III-26})$$

- modèle d'ordre 3

$$H_3(p) = H_2(p) + \frac{-0.08667}{p + 4.4452} = \frac{0.3675p + 0.07697}{p^3 + 4.650p^2 + 0.9213p + 0.044} \quad (\text{III-27})$$

Nous proposons dans le tableau (III-1) une étude comparative des différents résultats obtenus par les deux méthodes et qui met en évidence la qualité des approximations calculées de part la localisation des pôles et zéros ainsi que les gains statiques des modèles réduits et du modèle initial.

L'examen de ces résultats ainsi que des réponses indicielles sur la figure (III-2) nous permet de conclure quant au modèle réduit pour décrire le fonctionnement du groupe sur réseau isolé.

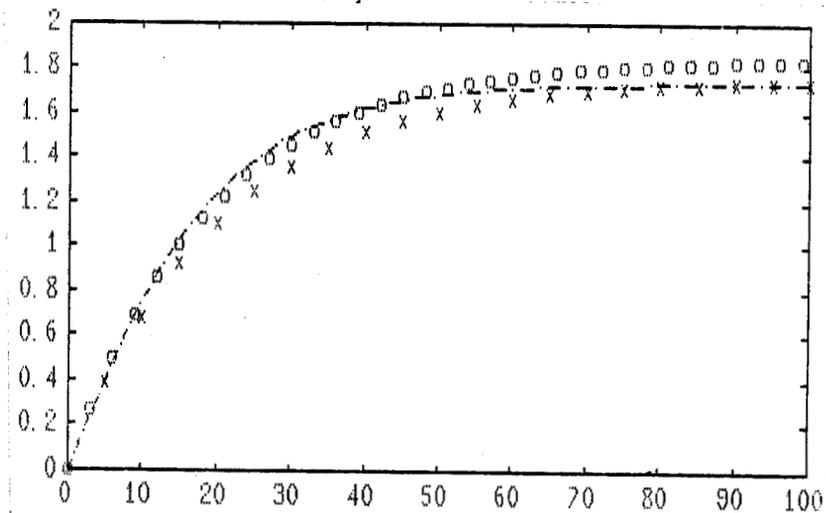


Figure (III-2)

..... : $H_4(p)$

xxxxxxxx : $H_1(p)$

oooooooo : $H^*_1(p)$

Ordre k 1 ≤ k ≤ 3	Méthode de Moore			Méthode proposée		
	Pôles	Zéros	Gain statique	Pôles	Zéros	Gain statique
1	-0.0523	-	1.842	-0.0495	-	1.751
2	-0.0673 -0.301	-0.531	1.748	-0.08 -0.125	-0.2	1.732
3	-0.0827 -0.115 -4.768	-0.189	1.732	-0.0802 -0.1248 -4.445	-0.209	1.732
Modèle initial	-0.08 -0.125 -8 -10	-0.2	1.732			

Tableau (III-1) : Comparaison des résultats

IV.2- Fonctionnement sur réseau interconnecté e = 1

Les fonctions de transfert retenues pour la description du processus en fonctionnement interconnecté admettent respectivement pour expressions :

$$\omega_5(p) = \frac{\sum_{i=1}^5 b'_i p^i}{\sum_{i=1}^5 a'_i p^i} \quad (\text{III-28})$$

et

$$\pi_5(p) = \frac{\sum_{i=1}^5 b''_i p^i}{\sum_{i=1}^5 a'_i p^i} \quad (\text{III-29})$$

dans lesquelles, les différents paramètres admettent les valeurs numériques :

$$\begin{aligned} b'_1 = b'_2 = 0 ; b'_3 = 6.928 ; b'_4 = 1.3856 ; b'_5 = 0 \\ b''_1 = b''_2 = 0 ; b''_3 = 110.848 ; b''_4 = 1407.7696 ; b''_5 = 277.12 \\ a'_1 = 20.08 ; a'_2 = 142.6 ; a'_3 = 621.28 ; a'_4 = 2048.8 ; a'_5 = 160 \end{aligned}$$

L'examen des résultats du chapitre précédent sur la précision des modèles réduits, nous conduit à nous limiter aux seules approximations d'ordre 3 et 4.

a) Méthode de Moore

Les représentations d'état équilibrées correspondant aux transmittances définies par (III-28) et (III-29) s'expriment respectivement par les modèles d'état suivants :

- pour la chaîne de vitesse :

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\omega,ib} &= A_{\omega} X_{\omega,ib} + B_{\omega} U \\ \omega &= C_{\omega} X_{\omega,ib} \end{aligned} \quad (III-30)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{\omega} &= \begin{bmatrix} -0.7481 & 4.953 & 1.875 & -0.3102 & 0.9657 \\ -4.953 & -0.311 & -0.8842 & 0.2361 & -0.7158 \\ -1.875 & -0.8842 & -4.161 & 2.042 & -6.056 \\ 0.3102 & -0.2361 & -2.042 & -1.964 & 6.22 \\ 0.9657 & 0.7158 & 6.056 & 6.22 & -12.895 \end{bmatrix} \\ B_{\omega} &= \begin{bmatrix} 0.1725 & 0.101 & 0.1756 & 0.0345 & -0.885 \end{bmatrix}^T \\ C_{\omega} &= \begin{bmatrix} 0.1725 & -0.101 & -0.1756 & 0.0345 & -0.885 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

-- pour la chaine de puissance :

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\pi,ib} &= A_{\pi} X_{\pi,ib} + B_{\pi} U \\ \pi &= C_{\pi} X_{\pi,ib} \end{aligned} \quad (III-31)$$

avec :

$$A_{\pi} = \begin{bmatrix} -0.4883 & 4.4223 & -0.1136 & -0.898 & 0.1163 \\ -4.4223 & -1.4 & 1.375 & 2.1541 & -0.2367 \\ -0.1136 & 4.3756 & -0.0294 & -0.291 & 0.0398 \\ -0.898 & -2.1541 & -0.291 & -7.166 & 1.7583 \\ -0.1163 & -0.2367 & -0.0398 & -1.7583 & -11 \end{bmatrix}$$

$$B_{\pi} = \begin{bmatrix} 0.975 & 1.371 & 0.172 & 0.955 & 0.116 \end{bmatrix}^T$$

$$C_{\pi} = \begin{bmatrix} 0.975 & -1.371 & 0.172 & 0.955 & -0.116 \end{bmatrix}$$

les différents modèles calculés à partir des représentations (III-30) et (III-31) ainsi que les erreurs de réduction sont présentés dans le tableau ci-joint :

	Ordre k $3 \leq k \leq 4$	Fonction de transfert représentant le modèle réduit $H_k^*(p)$	Erreur $\mathcal{E}(k) \times 100\%$
Vitesse	3	$\frac{(p-0.094)(p-32.446)}{(p+3.32)(p+0.91+4.986j)(p+0.91-4.986j)}$	1.65 %
	4	$\frac{-0.01(p-34)(p+0.995)(p+2.385)}{(p+0.96+5j)(p+0.96-5j)(p+2.64+1.7j)(p+2.64-1.7j)}$	1.2 %
puissance	3	$\frac{-0.898(p-13.3)(p+0.388)}{(p+0.131)(p+0.9+4.6j)(p+0.9-4.6j)}$	5 %
	4	$\frac{0.0135(p+0.198)(p-19.3+93j)(p-19.3-93j)}{(p+0.0796)(p+7.01)(p+0.99+4.9j)(p+0.99-4.9j)}$	0.05 %

b) Méthode proposée

La décomposition en éléments simples des transmittances définies par (III-28) et (III-29) permet de les écrire sous la forme suivante :

$$\omega_5(p) = \sum_{i=1}^5 \frac{\alpha'_i}{p + p_i} \quad (\text{III-32})$$

et

$$\pi_5(p) = \sum_{i=1}^5 \frac{\alpha''_i}{p + p_i} \quad (\text{III-33})$$

avec les valeurs numériques suivantes :

$$\alpha'_1 = -3.41 \cdot 10^{-5}; \quad \alpha'_2 = -0.37386; \quad \alpha'_3 = 0.32591; \quad \alpha'_4 = 0.024 + 0.0323j;$$

$$\alpha'_5 = 0.024 - 0.0323j$$

$$\alpha''_1 = 0.08463 ; \alpha''_2 = 3.365 ; \alpha''_3 = -1.304 ; \alpha''_4 = -0.4577 - 1.542j ;$$

$$\alpha''_5 = 0.4577 + 1.542j$$

$$p'_1 = -0.08 ; p'_2 = -8 ; p'_3 = -10 ; p'_4 = -1 - 4.899j ; p'_5 = -1 + 4.899j$$

et permet de distinguer un mode lent { -0.08 }

L'application conjointe de la séparation des dynamiques et de la méthode des pôles et zéros rapprochés conduit aux modèles d'ordre 3 et 4 présentés dans la tableau ci-joint :

	Ordre k $3 \leq k \leq 4$	Fonction de transfert du modèle réduit $H_k(p)$
Vitesse	3	$\frac{0.0492p(p+0.2)}{(p+0.08)(p+2.16+3.08j)(p+2.16-3.08j)}$
	4	$\frac{0.3466p(p+0.2)}{(p+0.08)(p+4.965)(p+1.04+4.365j)(p+1.04-4.365j)}$
puissance	3	$\frac{13.1961(p+0.2)}{(p+0.08)(p+2.143+3.8j)(p+2.143-3.8j)}$
	4	$\frac{119.38(p+0.2)}{(p+0.08)(p+7.02)(p+1.014+4.85j)(p+1.014-4.85j)}$

c) Comparaison des résultats et Interprétation

La comparaison des différents résultats montre que pour la méthode de Moore, les modèles réduits ne reproduisent pas certaines caractéristiques du système initial, bien que les erreurs de réductions calculées laissent supposer de bonnes approximations; en effet :

- Les gains statiques ne sont pas conservés, et plus particulièrement pour la chaîne de vitesse, les modèles réduits présentent un gain statique alors qu'il est nul dans le système initial. Cette caractéristique est bien reproduite dans les modèles réduits que nous proposons.

- Apparition dans les modèles réduits de zéros instables; le modèle initial admet un zéro unique stable.

- A part les approximations d'ordre 4, les pôles des modèles d'ordre 3 ne tendent pas vers ceux du système initial. Dans les modèles calculés par la méthode proposée, les pôles approchent d'une manière suffisante les pôles du système global.

A notre point de vue, ceci confirme le fait que les erreurs de réduction calculées sur la base des modes de second ordre, ne sont pas, du moins dans ce cas, suffisantes pour juger de la qualité des approximations obtenues.

V- CONCLUSION

L'étude présentée permet de mettre en évidence l'efficacité de la méthode des pôles et zéros rapprochés pour le calcul d'un modèle réduit d'un processus industriel; bien qu'approximatifs, les résultats obtenus rendent bien compte des caractéristiques du modèle initial.

Compte tenu du fait que les modèles réduits sont destinés à la synthèse d'un asservissement du groupe et afin de mieux conserver les propriétés caractéristiques du système, nous proposons pour représenter les différents fonctionnements du processus, les modèles réduits suivants :

- fonctionnement $e = 0$

Le modèle réduit retenu est le modèle d'ordre 2 défini par :

$$G \left(\mu + \frac{1 - \mu}{1 + \tau_3 p} \right) \frac{1}{1 + \tau_4 p} \quad (\text{III- 33})$$

ceci revient à remplacer dans le modèle initial, le transfert puissance fournie par le corps HP - position des soupapes par un gain constant égal à $G\mu$.

- fonctionnement e = 1

Les chaînes de vitesse et de puissance peuvent être correctement représentées par les modèles réduits d'ordre 4 ci-après :

$$\omega_4(p) = G \left(\mu + \frac{1 - \mu}{1 + \tau_3 p} \right) \frac{1}{1 + \tau_v p} \frac{p}{\alpha + \beta p + \tau_4 p} \quad (\text{III- 34})$$

avec $\tau_v = 0.2$ s

et

$$\pi_4(p) = G \left(\mu + \frac{1 - \mu}{1 + \tau_3 p} \right) \frac{1}{1 + \tau_\pi p} \frac{\alpha + \beta p}{\alpha + \beta p + \tau_4 p} \quad (\text{III- 35})$$

avec $\tau_\pi = 0.142$ s

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Les résultats principaux développés dans ce mémoire peuvent être resumés en deux thèmes :

- Dans le premier chapitre, nous avons présenté des méthodes de mise en équations d'un système discret initialement représenté dans l'espace d'état. Nous avons ainsi introduit un algorithme basé, suivant les cas, sur l'utilisation de la matrice de transfert entrées-sorties ou "états-sorties". Elles conduisent à une équation récurrente vectorielle commandable et observable dans le premier cas, non commandable et observable dans le second. Par le biais d'un exemple, nous avons illustré la possibilité d'étendre ces méthodes aux systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov. Ces résultats constituent une suite des travaux relatifs à la représentation d'un système discret à l'aide d'équations de récurrence vectorielles basée sur la notion de polynôme annulateur et de la dépendance de matrices.

- Dans le second chapitre, nous avons présenté des résultats nouveaux concernant des méthodes de simplification de modèles des systèmes dynamiques monovariabiles décrits par fonctions de transfert. Lorsqu'il est possible de détecter dans ces dernières des pôles et des zéros suffisamment rapprochés, ces méthodes permettent de calculer aisément un modèle réduit pour lequel les propriétés essentielles de stabilité et le gain statique sont conservés pour un modèle initial stable. Deux démarches sont alors proposées. La première est applicable lorsque les pôles et zéros du système sont du même ordre de grandeur. La seconde concerne les fonctions de transfert admettant des modes d'ordres de grandeur différents. L'approche que nous avons introduite peut conduire au calcul de la réalisation équilibrée du processus étudié par une procédure informatisable, beaucoup plus simple que celles introduites dans d'autres travaux.

A notre point de vue, l'extension de ces résultats aux systèmes non linéaires et aux systèmes partitionnés, nous parait possible à condition de définir de nouveaux outils mathématiques susceptibles de mieux traduire les propriétés de "faible" commandabilité et de "faible" observabilité d'un système, en relation avec la localisation de ses pôles et zéros et c'est dans cette voie que nous envisageons de poursuivre nos travaux.



ANNEXES

Annexe I-A : Calcul des approximants de Padé

- Approximations au voisinage de $p = 0$

$$H_q(p) = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{\frac{h_2}{p} + \frac{1}{h_3 + \dots + \frac{1}{h_{2q-1} + \frac{1}{\frac{h_{2q}}{p}}}}}}$$

où les $\{h_i\}_{1 \leq i \leq 2q}$ sont donnés par :

$$h_i = \frac{a_{i,1}}{a_{i+1,1}} \quad 1 \leq i \leq 2q$$

avec :

$$a_{j,1} = a_{j-2,1+1} - h_{j-2} \times a_{j-1,1+1} \quad 3 \leq j \leq 2q+1$$

$$\begin{cases} a_{1,1} & = a_{q-1+1} \\ a_{2,1} & = b_{q-1+1} & 1 \leq l \leq q \\ a_{1,q+1} & = a_0 \end{cases}$$

le modèle réduit d'ordre m est obtenu en posant :

$$h_i = 0 \text{ pour } i > 2m$$

ce qui conduit à :

$$H_m(p) = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{\frac{h_2}{p} + \frac{1}{h_3 + \dots + \frac{1}{h_{2m-1} + \frac{1}{\frac{h_{2m}}{p}}}}}}$$

- Approximations au voisinage de $p = \infty$

$$H_q(p) = \frac{1}{k_1 p + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 p + \dots + \frac{1}{k_{2q-1} p + \frac{1}{k_{2q}}}}}}$$

avec :

$$k_i = \frac{b_{i,1}}{b_{i+1,1}} \quad 1 \leq i \leq 2q$$

et

$$b_{j,1} = b_{j-2,1+1} - k_{j-2} \times b_{j-1,1+1}$$

$$\begin{cases} b_{1,1} = a_{1-1} & 3 \leq j \leq 2q+1 \\ b_{2,1} = b_{1-1} & 1 \leq l \leq q \\ b_{1,q+1} = a_q \end{cases}$$

l'approximation d'ordre m est obtenue en posant :

$$k_i = 0 \text{ pour } i > 2m$$

- Approximations autour de $p = 0$ et $p = \infty$

$$H_q(p) = \frac{1}{h'_1 + k'_1 p + \frac{1}{\frac{h'_2}{p} + k'_2 + \frac{1}{h'_3 + k'_3 p + \frac{1}{\dots}}}}$$

avec :

$$h'_1 = \frac{a_{1,1}}{a_{l+1,1}} \quad ; \quad k'_1 = \frac{a_{1,q+2-1}}{a_{l+1,q+1-1}}$$

et

$$a_{j,1} = a_{j-2,l+1} - h'_{j-2} \times a_{j-1,l+1} - k'_{j-2} \times a_{j-1,1}$$

$$\begin{cases} a_{1,1} = a_{q-l+1} & 3 \leq j \leq q+1 \\ a_{2,1} = b_{q-l+1} & 1 \leq l \leq q \end{cases}$$

l'approximation d'ordre m est obtenue en posant :

$$h'_i = 0 \text{ et } k'_i = 0 \text{ pour } i > m$$

Annexe I-B : Approximation de Routh

- Calcul des coefficients $\{ \alpha_i \} \ 1 \leq i \leq q$

$$\begin{array}{lll}
 a_0^0 = a_0 & a_2^0 = a_2 & a_4^0 = a_4 \dots\dots\dots \\
 a_0^1 = a_1 & a_2^1 = a_3 & a_4^1 = a_5 \dots\dots\dots \\
 a_0^2 & a_2^2 & a_4^2 \dots\dots\dots \\
 a_0^3 & a_2^3 & a_4^3 \dots\dots\dots \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 a_j^{i+1} &= a_{j+2}^{i-1} - \alpha_i \times a_{j+2}^i & i = 1, \dots, (q-1) \\
 & & j=0,2,4,\dots, q \text{ si } q \text{ pair} \\
 & & q-1 \text{ si } q \text{ impair}
 \end{aligned}$$

et $\alpha_i = a_0^{i-1} / a_0^i \quad 1 \leq i \leq q$

- Calcul des coefficients $\{ \beta_i \} \ 1 \leq i \leq q$

$$\begin{array}{lll}
 b_0^1 = b_1 & b_2^1 = b_3 & b_4^1 = b_5 \dots\dots\dots \\
 b_0^2 = b_2 & b_2^2 = b_4 & b_4^2 = b_6 \dots\dots\dots \\
 b_0^3 & b_2^3 & b_4^3 \dots\dots\dots \\
 b_0^4 & b_2^4 & b_4^4 \dots\dots\dots \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 b_{j-2}^{i+2} &= b_j^i - \beta_i \times a_j^i & i=1,2, \dots, q-2 \\
 & & j=2,4, \dots, q-i \text{ si } q-i \text{ pair} \\
 & & q-i-1 \text{ si } q-i \text{ impair}
 \end{aligned}$$

et $\beta_i = b_0^i / a_0^i \quad 1 \leq i \leq q$

le modèle réduit d'ordre m est obtenu en posant :

$$\alpha_i = \beta_i = 0 \text{ pour } i > m$$

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.VIDAL

"Théorie unifiée des systèmes discrets linéaires et non linéaires"
Polycopié, Novembre 1968

[2] R.E.KALMAN

"On the general theory of control systems"
Proceeding of the First International Congress On Automatic control,
pp. 481-493, Moscou 1960

[3] R.BOUDAREL; J.DELMAS; P.GUICHET

"Commande optimale des processus"
Tome I, Dunod, Paris 1967

[4] R.E.KALMAN

"Mathematical description of linear dynamical systems"
Journal of SIAM Control, Ser. A, Vol.1, No. 2, pp. 152-192, 1963

[5] F.De CARFORT; C.FOULARD; J.CALVET

"Assevissements linéaires continus"
Dunod Université, Paris 1976

[6] A.FOSSARD

"Commande des systèmes multidimensionnels"
Dunod, Paris 1972

[7] R.J.KAVANACH

"The application of matrix methods to multivariable control systems"
Journal of Franklin Institute, Vol. 262, pp. 349-367, Novembre 1956

[8] A.EL MOUDNI

"Introduction de nouveaux outils mathématiques pour la description des systèmes discrets non linéaires de grande dimension"
Thèse de Doctorat 3ème cycle, No. 888, LILLE 1981

[9] H.BUHLER

"Réglages échantillonnés"
Vol. 2, Presses Polytechniques Romandes, 1983

[10] O.L.MERCIER

"Propriétés structurales des systèmes linéaires dynamiques.
Application à la commande optimale et au filtrage"
Document ONERA, No. 547, Mars 1977

[11] P.BORNE: A.CARLIER: C.VASSEUR

"Commandabilité et observabilité des systèmes continus linéaires dans
l'espace d'état"
90 ème congrès de l'AFAS, Chambéry 5-10 Juillet 1971

[12] R.E.KALMAN

"Canonical structure of linear dynamical systems"
Proc.Nat.Acad.Sci. USA, No. 48, pp. 596-600, 1962

[13] F.R.GENTMACHER

"Théorie des matrices"
Tome I, Dunod, Paris 1966

[14] A.EL MOUDNI

"Sur une représentation minimale des variables mesurables d'un système
discret"
Acte Congrès IASTED, AI 83, pp. 179-184, Lille 1983

[15] P.BORNE

"Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande
dimension. Application aux systèmes interconnectés"
Thèse de Doctorat es-sciences physiques, Lille 1976

[16] B.BOUAZIZ: A.EL MOUDNI

"Sur une formulation récurrente minimale des systèmes discrets"
Dans 1ère Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées
et Industrielles, ICIAM 87, 29 juin-3 Juillet, Paris 1987

[17] M.SIBONY: J.CI.MARDON

"Analyse numérique I : Systèmes linéaires et non linéaires"
Hermann, Paris 1984

[18] A.EL MOUDNI

"Contribution à la modélisation et à l'analyse des systèmes discrets à
échelles de temps multiples. Application à la commande optimale"
Thèse de Doctorat es-sciences physiques, No. 656, Lille 1985

[19] J.P.RICHARD

"Sur la mise en équation d'état des systèmes continus non linéaires par une méthode de calcul symbolique : Définition d'un invariant de représentation"

Thèse de Docteur-ingénieur, No. 259, Lille 1981

[20] Z.BINDER: C.COMMAULT

"Une revue des différentes méthodes de simplification de modèles dynamiques linéaires et invariants"

RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control, Vol.12, No.3,1978

[21] A.FOSSARD: G.DAUPHIN-TANGUY: P.BORNE

"Modelling complexity and control"

IMACS Symposium on Modelling and Simulation for Control of Lumped and Distributed Systems, pp. 5-14, Villeneuve d'Ascq 1986

[22] F.ROTELLA

"Méthodes algébriques et analytiques pour la simplification et la commande des systèmes bilinéaires à deux dynamiques"

Thèse de Doctorat es-sciences physiques, No. 732, Lille 1987

[23] P.BERTRAND: G.DUC: G.MICHALESKO

"Développements récents sur la réduction de modèles"

APII, Vol. 19, No. 2, pp. 131-146,

[24] Y.SAMASH

"Failure of the Routh-Hurwitz method of reduction"

IEEE Trans. On AC., Vol. AC-25, No. 2, pp. 822-824, 1980

[25] K.J.KHATWANI: R.K.TIWARI: J.S.BAJWA

"On chuang's continued fraction method of model reduction"

IEEE Trans. On AC., Vol. AC-25, No. 4, pp. 822-824, 1980

[26] M.F.HUTTON: B.FRIEDLAND

"Routh-Approximation for reducing order of linear time invariant systems"

IEEE Trans. On AC., Vol. AC-20, No. 3, pp. 320-337, 1975

[27] V.KRICHNAMURTHY: V.SESHADRI

"Model reduction using the Routh stability criterion"

IEEE Trans. On AC., Vol. AC-23, No. 4, pp. 729-731, 1978

[28] M.AOKI

"Control of large scale dynamical systems by aggregation"

IEEE Trans. On AC., Vol. AC-13, No. 3, pp. 246-253, 1968

[29] G.MICHAILESCO: J.M.SIRET: P.BERTRAND

"Agrégation de variables d'état et applications"

Dans Analyse et commande des systèmes complexes, A.TITLI et al., Editions Cepadues, pp. 75-94

[30] G.MICHAILESCO: J.M.SIRET: P.BERTRAND

"Modélisation de grands systèmes par agrégation"

RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control, Vol.13, No.2, pp.159-170, 1979

[31] A.FOSSARD

"A method for simplifying linear dynamic systems"

IEEE Trans. On AC., Vol. AC- ,pp. 261-262, 1970

[32] C.COMMAULT: P.GUERIN

"Propriétés et structures des systèmes agrégés : Application au problème de projection optimale"

RAIRO Automatique/systems Analysis and Control, Vol. 12, No. 4, pp.377-390, 1978

[33] D.A.WILSON

"Model reduction for multivariable systems"

Int. Jour. of Control, pp. 57-64, Janvier 1974

[34] M.DECOSTER: E.NOLDUS: A.VAN CAUWENBERGHE

"Réduction des systèmes linéaires stationnaires et continus"

RAIRO Jaune, pp. 47-66, Avril 1976

[35] D.C.HYLAND: D.S.BERNSTEIN

"The optimal projection equation for model reduction and the relationships among the method of Wilson, Skelton and Moore"

IEEE Trans. On AC., Vol. AC-30, No. 12, pp. 1201-1211, 1985

[36] B.C.MOORE

"Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction"

IEEE Trans. On AC., Vol. AC-26, No. 1, pp. 16-31, 1981

[37] L.PERNEBO: L.M.SILVERMAN

"Model reduction via balanced state space representations"
IEEE Trans. On AC., Vol. AC-27, pp. 382-387, 1982

[38] S.SHOKOOHI: L.M.SILVERMAN: P.M.VAN DOOREN

"Linear time-variable systems : Balancing and model reduction"
IEEE Trans. On AC., Vol. AC-28, No. 8, pp. 810-822, 1983

[39] K.V.FERNANDO: H.NICHOLSON

"Singular perturbational approximation for discrete-time balanced systems"
IEEE Trans. On AC., Vol. AC-28, No. 2, pp. 240-243, 1983

[40] C.P.THERAPOS

"On the selection of the reduced order via balanced state representations"
IEEE Trans. On AC., Vol. AC-29, No. 11, pp. 1019-1021, 1984

[41] R.J.VACARO

"Deterministic balancing and stochastic model reduction"
IEEE Trans. On AC., Vol. AC-30, No. 9, pp. 921-923, 1985

[42] D.HAUY

"Sur la définition et l'interprétation des mesures de la commandabilité et de l'observabilité d'un processus multivariable"
Thèse de Docteur-ingénieur, No. 206, Lille 1977

[43] E.I.VERRIEST: T.KAITLAH

"On generalized balanced realizations"
IEEE Trans. On AC., Vol. AC-28, No. 8, pp. 833-844, 1983

[44] J.PAL

"System reduction by a mixed method"
IEEE Trans. On AC., Vol. AC-25, No. 5, pp. 973-976, 1980

[45] L.S.SHIEH: Y.J.WEI

"A mixed method for multivariable system reduction"
IEEE Trans. On AC., Vol. AC-20, No.3, pp.429-432, 1975

[46] P.T.KABAMBA

"Balanced gains and their significance for L^2 model reduction"
IEEE Trans. On AC., Vol. AC-30, No. 7, pp. 690-693, 1985

[47] G.H.GOLUB: C.REINSH

"Singular value decomposition and least square solutions"
Numer. Math., Vol. 14, pp. 403-420, 1970

[48] V.C.KLEMA: A.J.LAUB

"The singular value decomposition : its computation and some applications"
IEEE Trans. On AC., Vol. AC-25, pp.164-176, 1980

[49] C.J.LASTMAN: N.K.SINHA

"An error analysis of the balanced matrix method of model reduction, with application to the selection of reduced-order models"
Large Scale Systems, No. 9, pp. 63-71, 1985

[50] V.M.POPOV

"L'hyperstabilité des systèmes automatiques"
Dunod, Paris 1973

[51] V.BOLTIANSKI

"Commande optimale des systèmes discrets"
Editions Mir, Moscou 1976

[52] M.R.SPIEGEL

"Transformées de Laplace"
Série Schaum, Mc Graw-Hill, Paris 1980

[53] B.BOUAZIZ: A. EL MOUDNI

"Computation of reduced balanced realization using approximate pole-zero cancellation"
12th IMACS World Congress on Scientific Computation, Vol.1, pp.112-115,
Paris 18-22 septembre 1988

[54] J.C.ANGUE

"Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires décrits par un modèle récurrent"
Thèse de Doctorat de 3ème cycle, Lille, Juillet 1973

[55] G.DAUPHIN TANGUY

"Sur la représentation multi-modèles des systèmes singulièrement perturbés. Application à l'analyse et la synthèse"

Thèse de Doctorat es-sciences physiques, No.600, Lille, Octobre 1983

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS

INTRODUCTION GENERALE 01

CHAPITRE I : MODELISATION ET SIMPLIFICATION DE MODELES DES SYSTEMES DYNAMIQUES

Introduction 03

I - DESCRIPTION DES SYSTEMES DYNAMIQUES 04

 I.1 - Systèmes continus 04

 I.1.1 - Equation d'état 04

 I.1.2 - Equations différentielles 07

 I.1.3 - Fonction de transfert 08

 I.2 - Systèmes discrets 09

 I.2.1 - Equation d'état discrète 09

 I.2.2 - Equations de récurrence 09

 I.1.3 - Fonction de transfert 10

 I.3 - Commandabilité et observabilité des système linéaires 11

 I.3.1 - Commandabilité 11

 I.3.2 - Observabilité et dualité 12

 I.3.3 - Décomposition canonique de Kalman 13

 I.3.4 - Systèmes à coefficients constants 15

II - APPLICATION A LA DESCRIPTION DES SYSTEMES DISCRETS :

 Recherche d'une formulation récurrente minimale 16

II.1 - Systèmes discrets linéaires	16
II.1.1 - Méthode de mise en équation	17
II.1.2 - Premier cas	18
II.1.3 - Deuxième cas	18
- Cas des systèmes commandables	19
- Cas des systèmes non commandables	21
II.1.4 - Exemples numériques	22
- Exemple 1 : cas commandable	22
- Exemple 2 : cas non commandable	23
II.2 - Application aux systèmes non linéaires	24
III - METHODES DE SIMPLIFICATION DE MODELES	28
III.1 - Introduction	28
III.2 - Position du problème	29
III.3 - Approximation de la fonction de transfert	31
III.3.1 - Approximant de Padé	31
III.3.2 - Méthode modale	32
III.3.3 - Méthode de Routh	32
III.3.4 - Conclusion	34
III.4 - Approximation du vecteur d'état	34
III.4.1 - Méthodes d'agrégation	34
III.4.2 - Méthode des perturbations singulières	36
III.4.2 - Méthode de symétrisation interne	37
III.5 - Réduction optimale	37
Conclusion	39

CHAPITRE II : METHODES DE SIMPLIFICATION DE MODELES BASEES SUR LES	
NOTIONS DE MESURES DU DEGRE DE COMMANDABILITE ET	
D'OBSERVABILITE	41
Introduction	41
I - TRAITEMENT DANS L'ESPACE D'ETAT	41
I.1 - Position du problème	41
I.2 - Rappel de l'approche de Moore : symétrisation interne	44
I.2.1 - Cas continu	44
a) Généralités	44
b) Réalisation équilibrée	45
c) Application à la simplification de modèles	47
I.1.2 - Cas discret	50
I.1.3 - Algorithmes de calcul	51
I.1.4 - Exemple d'application	53
I.1.5 - Conclusion	54
II - TRAITEMENT DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL	56
II.1 - Position du problème	56
II.2 - Calcul direct	57
II.3 - Méthode des pôles et zéros rapprochés	58
II.3.1 - Cas d'une fonction de transfert factorisée	58
II.3.2 - Approche géométrique	60
a) localisation des pôles et zéros	60
b) représentation dans le plan de Bode	62
c) exemple numérique	63

II.3.3 - Cas générale	66
II.3.4 - Validité de la méthode	72
- Approximation au voisinage de $p = \infty$	73
- Approximation au voisinage de $p = 0$	73
II.3.5 - Cas des systèmes à deux dynamiques	73
- Première approche : séparation des modes	73
- Deuxième approche : utilisation du système réciproque	75
- Exemple d'application	75
Conclusion	79

CHAPITRE III : APPLICATION DE LA METHODE DES POLES ET ZEROS

RAPPROCHES A LA SIMPLIFICATION DE MODELE D'UN GROUPE TURBO-ALTERNATEUR

81

Introduction	81
--------------------	----

I - DESCRIPTION DU PROCESSUS ETUDIE	81
---	----

I.1 - La turbine	81
------------------------	----

I.2 - Les masses tournantes	82
-----------------------------------	----

I.3 - L'alternateur et le réseau	82
--	----

II - REPRESENTATION DU PROCESSUS DANS L'ESPACE D'ETAT	84
---	----

III - REPRESENTATION PAR FONCTION DE TRANSFERT	86
--	----

III.1 - Groupe turbo-alternateur alimentant un réseau isolé	86
---	----

III.2 - Groupe turbo-alternateur alimentant un réseau interconnecté..	86
---	----



IV - CALCUL DES MODELES SIMPLIFIES	87
IV.1 - Fonctionnement sur réseau isolé $e = 0$	87
a) Méthode de Moore	88
b) Méthode proposée	89
IV.2 - Fonctionnement sur réseau interconnecté $e = 1$	91
a) Méthode de Moore	92
b) Méthode proposée	94
c) Comparaison des résultats et interprétation	95
 V- CONCLUSION	 96
 CONCLUSION GENERALE	 99
Annexes :	101
Annexe A-1	101
Annexe B-1	104
Bibliographie	107
Table des matières	115

RESUME

Les travaux présentés dans ce mémoire constituent une contribution à la modélisation et à la simplification de modèles des systèmes dynamiques.

Pour les systèmes discrets représentés initialement dans l'espace d'état, il est toujours possible de se ramener à une représentation par équations de récurrence vectorielles. Les coefficients intervenant dans l'écriture de ces équations peuvent être calculés moyennant un algorithme simple basé sur le calcul de la matrice de transfert du système, et où il est effectuée une simplification "exacte" des pôles et zéros stables identiques.

Lorsque la matrice de transfert du système est non dégénérée, la simplification des pôles et zéros rapprochés permet de définir un système réduit qui conserve les propriétés essentielles et le gain statique du système initial.

La méthode proposée, de mise en oeuvre particulièrement aisée, conduit à des résultats semblables à ceux obtenus par la méthode de symétrisation interne et, de ce fait, permet une estimation suffisante de la réalisation équilibrée du système initial.

MOTS-CLES

- Systèmes dynamiques
- Modélisation
- Commandabilité
- Observabilité
- Matrice de transfert
- Pôles et zéros rapprochés
- Réalisations équilibrées