

Numéro d'ordre 299

50376  
1988  
257



50376  
1988  
257

présentée à

L'Université des Sciences et Techniques de Lille  
Flandres-Artois

pour obtenir le grade de

**Docteur en Mécanique**

par

**Mohamed LAHOUBI**

**SIMULATION DE L'ÉCOULEMENT ARTERIEL  
A L'AIDE DE  
LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Soutenue le 15 Décembre 1988 devant la commission d'Examen

Président	M DYMENT
Rapporteurs	M ODDOU M PELISSIER
Examineurs	M BARRAND M DEBUS M DECARPIGNY

*A la mémoire de mon grand Père,*

*à ma grand Mère Kikia,*

*à mes parents,*

*à ma Famille,*

*et à tous mes Amis.*

Je remercie Monsieur A. DYMENT, Professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille d'avoir accepté de présider le jury. Ses précieux enseignements m'ont initié à la Mécanique des Fluides et permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier Messieurs C. ODDOU, Professeur à l'Université Val-de-Marne et R. PELISSIER, Professeur à l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille qui ont bien voulu juger ce rapport dans une version de travail et accepté de participer à ce jury.

J'exprime mes remerciements à Monsieur J.P. BARRAND, Professeur à l'ENSAM Lille pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et d'avoir accepté de se joindre au jury.

Je tiens à exprimer ma très sincère reconnaissance à Messieurs J.C. DEBUS et J.N. DECARPIGNY, Professeurs à l'ISEN, à qui je dois ma formation à la Méthode des Eléments Finis. L'attention qu'ils ont constamment témoignée à cette étude ainsi que les conseils éclairants ont été pour moi une source permanente d'encouragement et de confiance.

Je remercie Monsieur le Professeur M. BERTRAND de l'hôpital cardiologique de Lille pour les nombreuses et fructueuses discussions que j'ai eues avec lui.

Je remercie l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord où ce travail a été réalisé dans les meilleures conditions grâce à toute l'infrastructure disponible pour le travail de recherche. Que Messieurs G. VANDECANDELAERE et P. ASTIER veuillent bien trouver ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je voudrais également adresser mes remerciements à tous les membres du Laboratoire pour leur disponibilité et sympathie.

Enfin, je remercie vivement ma famille et mes amis, qui par leur soutien moral et les encouragements qu'ils m'ont prodigués, ont contribué à l'accomplissement de ce travail.



II - 2.1	<u>Equations dynamiques</u> .....	22
II - 2.2	<u>Paramètres sans dimensions</u> .....	23

### CHAPITRE III

#### METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE AUX EQUATIONS DE NAVIER-STOKES......25

III - 1	<u>PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS</u> .....	26
III - 1.1	<u>Introduction</u> .....	26
III - 1.2	<u>Principe</u> .....	26
III - 1.3	<u>Existence et unicité de la solution par éléments finis</u> .....	27
III - 2	<u>FORMULATION DU PROBLEME DISCRET</u> .....	27
III - 2.1	<u>Définition de l'élément quadrilatère</u> .....	27
III - 2.2	<u>Approximation en u,p,v</u> .....	30
III - 2.3	<u>Discrétisation des équations de Navier-Stokes</u> .....	31
III - 2.4	<u>Méthodes de résolution pour les problèmes non-linéaires</u> .....	32
III - 2.4.1	Méthode itérative directe.....	33
III - 2.4.2	Méthode de Newton-Raphson.....	34
III - 2.4.3	Méthode de Newton-Raphson modifiée.....	35
III - 2.4.4	Conclusion.....	36
III - 2.5	<u>Formulation de la matrice tangente élémentaire pour la méthode de Newton-Raphson.</u> .....	38

III - 2.6	<u>Discrétisation du problème instationnaire</u>	41
-----------	--	----

## CHAPITRE IV

	<u>STRUCTURE ET ORGANISATION DU PROGRAMME DE CALCUL</u>	45
--	---	----

IV - 1	INTRODUCTION	45
--------	--------------	----

IV - 2	TECHNIQUE D'ASSEMBLAGE-ELIMINATION ET RESOLUTION FRONTALE.	47
--------	---	----

IV - 3	ALGORITHME DE NEWTON-RAPHSON ASSOCIE A LA RESOLUTION FRONTALE.	50
--------	---	----

IV - 3.1	1 <sup>er</sup> cas: <u>algorithme pour l'écoulement permanent</u>	50
----------	--	----

IV - 3.2	2 <sup>er</sup> cas: <u>algorithme pour l'écoulement de type instationnaire.</u>	53
----------	--	----

## CHAPITRE V

	<u>PRESENTATION DES RESULTATS ET DISCUSSIONS</u>	56
--	--	----

V - 1	ETUDE DE L'ECOULEMENT PERMANENT	57
-------	---------------------------------	----

V - 1.1	<u>Introduction</u>	57
---------	---------------------	----

V - 1.2	<u>Analyse de l'écoulement dans des conduites présentants des rétrécissements de section</u>	59
---------	--	----

V - 1.2.1	Modèles géométriques	59
-----------	----------------------	----

V - 1.2.2	Influence du degré de rétrécissement	59
-----------	--------------------------------------	----

V - 1.2.3	Influence du nombre de Reynolds	61
-----------	---------------------------------	----

V - 1.3	<u>Analyse de l'écoulement dans les bifurcations</u>	65
---------	--	----

V - 1.3.1	Présentation	65
-----------	--------------	----

V - 1.3.2	Influence de l'angle et du nombre de Reynolds sur le champ de l'écoulement	65
-----------	---	----

V - 1.4	<u>Simulation de l'écoulement dans</u>	68
	<u>les pontages artériels</u>	
V - 1.4.1	Géométries et maillages	68
V - 1.4.2	Analyse du champ de vitesses	69
V - 1.4.3	Influence de la géométrie sur	71
	la distribution de la pression	
V - 1.5	<u>Conclusion</u>	72
V - 2	EXTENSION A L'ECOULEMENT DE TYPE INSTATIONNAIRE	73
V - 2.1	<u>Introduction et Tests préliminaires</u>	73
V - 2.2	<u>Simulation de l'écoulement périodique</u>	75
	<u>dans une bifurcation</u>	
<b>CONCLUSION</b>		78
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		80
<b>FIGURES</b>		86
<b>ANNEXES</b>		145

## INTRODUCTION

En biomécanique cardiovasculaire, l'élément essentiel permettant de mieux comprendre la physiologie artérielle est celui de l'influence des caractéristiques physiques de l'écoulement sur la pathologie. Il est bien connu que la formation de plaques d'athérome à l'intérieur de la paroi est souvent localisé au voisinage des coudes et des embranchements vasculaires. De telles maladies cardiovasculaires sont considérées comme étant le fléau numéro un et ne cessent de progresser au niveau mondial. Tout ceci a conduit à de nombreux travaux théoriques et expérimentaux qui sont l'oeuvre de physiciens dont le but est d'expliquer la formation de plaques d'athérome en certains endroits privilégiés du réseau vasculaire.

Nous présentons dans le chapitre I, une revue bibliographique axée principalement sur les écoulements dans les bifurcations et les sténoses avec un aperçu sur l'hémorhéologie et la microcirculation. Bien que les mesures expérimentales soient indispensables, des modélisations par voies numériques peuvent contribuer à mieux comprendre l'écoulement artériel. La méthode des éléments finis est particulièrement adaptée aux problèmes de mécanique des fluides biologiques, étant donné qu'ils peuvent souvent être régis par des équations non-linéaires avec des conditions aux limites et avec des géométries très particulières. Pour cela, nous avons contribué à l'élaboration d'un code de calcul par éléments finis nous permettant de résoudre les équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux incompressible et d'obtenir le champ d'écoulement bidimensionnel à travers tout le modèle géométrique.

Dans le chapitre II, nous présentons les équations dynamiques et les conditions aux limites associées à chaque type de géométrie (3 modèles de bifurcations, 4 modèles de sténoses et 3 modèles de pontage). Le chapitre III concerne l'analyse par la méthode des éléments finis des équations de

Navier-Stokes pour les problèmes à symétrie de révolution ou non. On aboutit ainsi à un système d'équations algébriques non-linéaires qu'on peut résoudre avec une bonne précision à l'aide de la méthode de Newton-Raphson associée à la technique frontale en raison de son efficacité dans les applications industrielles. La discrétisation temporelle et spatiale du problème instationnaire est abordée dans la deuxième partie du chapitre III.

Dans le chapitre IV, nous donnons la structure générale du programme de calcul ainsi élaboré, avec les deux schémas d'algorithmes de résolution des problèmes non-linéaires, permanents ou non-permanents.

Tous les résultats obtenus sont rassemblés dans le chapitre V, celui-ci est présenté en deux parties. La première concerne l'écoulement permanent dans des modèles de géométries différentes tels que les conduites présentant des rétrécissements de section ( 36%, 55% et 88% ), les bifurcation ( 30°, 60° et 90° ) et les pontages. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée aux tests de validations de l'extension du code à la résolution des équations de Navier-Stokes dans le cas des écoulements instationnaires, en particulier l'écoulement périodique dans une conduite de section constante. enfin, nous terminons ce chapitre par une simulation complète de l'écoulement périodique dans une bifurcation à 60° durant une période d'écoulement.

## CHAPITRE I

### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I - 1 INTRODUCTION

I - 2 ETUDE DES BIFURCATIONS

I - 3 ETUDE DES ARTERES STENOSEES

I - 4 A PROPOS DU COMPORTEMENT NON-NEWTONIEN DU SANG

I - 5 CONCLUSION

I - 1 INTRODUCTION

La nature des écoulements dans les vaisseaux sanguins est extrêmement complexe. Cela est dû essentiellement au fait que les canaux physiologiques forment des réseaux de géométries compliquées, présentant des courbures, ramifications et variations de section. Certaines régions du système circulatoire artériel, notamment au voisinage de singularités telles les coudes et les embranchements vasculaires peuvent-être associées à certaines maladies. C'est le cas de l'athérosclérose, maladie particulièrement développée et répandue, due à un durcissement et un épaissement de la couche interne des parois vasculaires, provenant d'une accumulation au niveau de l'intima d'un dépôt de lipide et d'autres substances plasmatiques ( cf annexe I ), ce qui donne naissance à ce que l'on appelle *sténose artérielle*. La figure I-1 montre une représentation graphique de la structure de la paroi et du processus de dépôt de la plaque d'athérome:

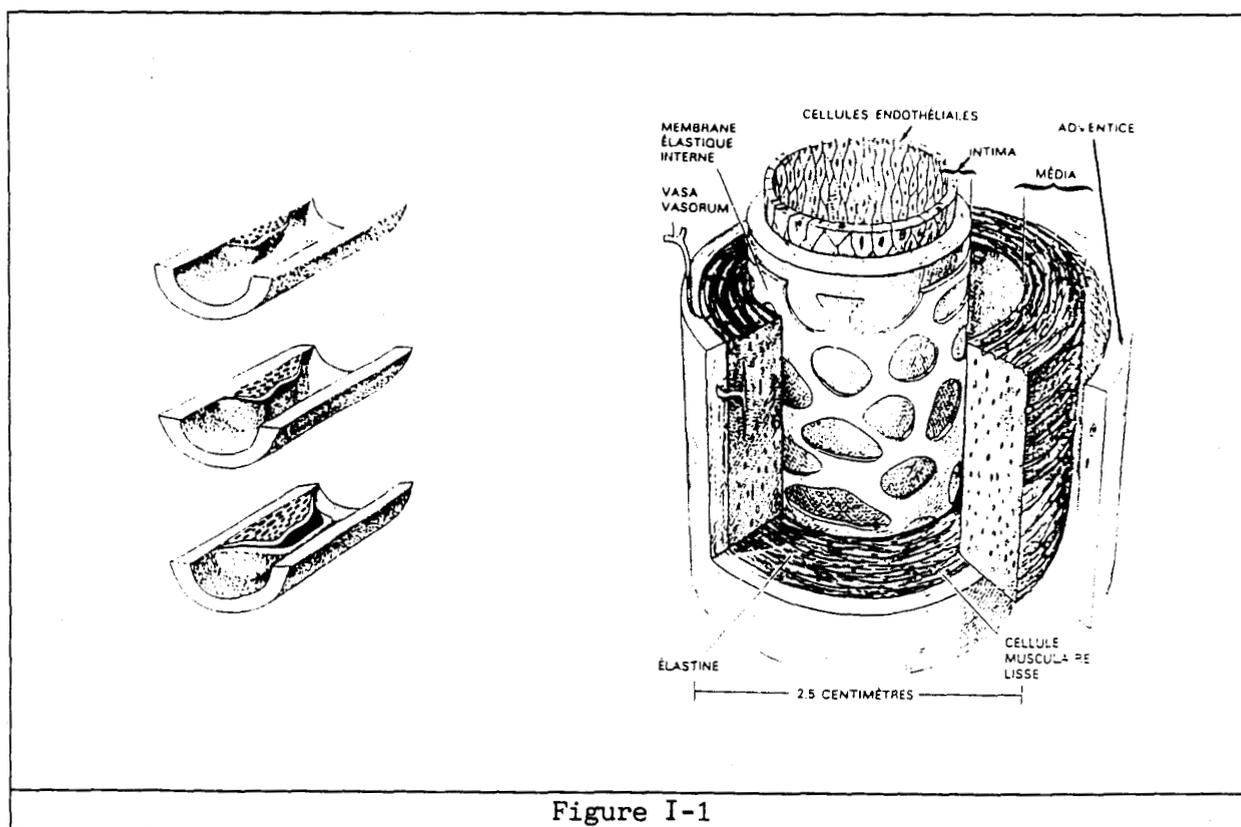


Figure I-1

La possibilité que les facteurs hémodynamiques participent dans la genèse de cette maladie, a conduit à de nombreux travaux sur la biomécanique cardiovasculaire, entraînant parfois des conclusions contradictoires .

FRY [1] attribue les dépôts athéromateux au fait que le transport de substances entre le sang et la paroi vasculaire est proportionnel au gradient de la vitesse à la paroi, que la perméabilité augmente avec le gradient de vitesse et que, sous l'effet de contraintes élevées et répétées, les cellules endothéliales sont détruites et facilitent ainsi le transport vers la paroi de certaines substances contenues dans le sang comme les lipides et le cholestérol.

CARO [2] pour sa part, suggère que les dépôts ont plutôt tendance à se localiser dans les zones à faibles contraintes de cisaillement. Les régions de recirculation perturbent localement le transport de substances et entraînent la formation des plaques d'athérome.

## I - 2 ETUDE DES BIFURCATIONS

Pour décrire les caractères fondamentaux de l'écoulement du fluide dans les bifurcations, les auteurs utilisent une schématisation de la géométrie (figure I-2):

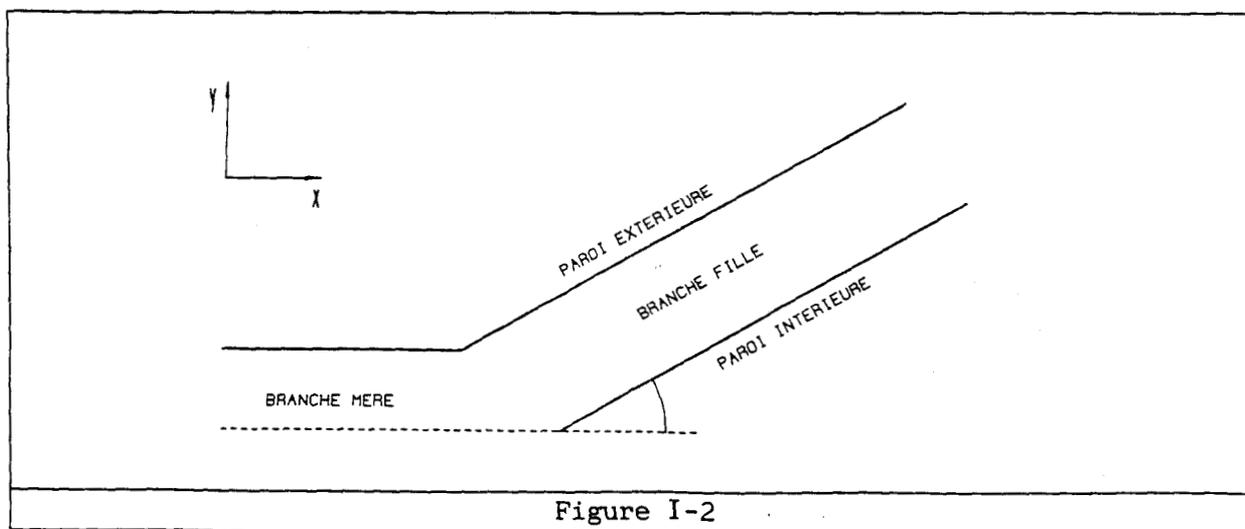


Figure I-2

Les résultats expérimentaux de CROWE et al [3] concernant un fluide newtonien en écoulement permanent dans une bifurcation indiquent, pour un nombre de Reynolds amont compris entre 20 et 50, d'une part l'existence d'une zone de recirculation le long des parois extérieures dont la taille dépend de l'angle des branches filles, et d'autre part de fortes contraintes de cisaillement au niveau des parois intérieures près du point de stagnation.

Les études de LYNN [4], O'BRIEN et al [5] ont été faites avec un modèle de bifurcation à deux dimensions. Dans ces deux études, les auteurs ont introduit dans les équations dynamiques les fonctions de courant et le tourbillon. O'BRIEN indique que la séparation se produit pour des nombres de Reynolds proches du domaine physiologique, tandis que LYNN ne signale aucune séparation pour l'écoulement permanent avec des nombres de Reynolds voisins de 1000 .

FERNANDEZ et al [6] ont étudié à l'aide d'une méthode aux différences finies, l'écoulement pulsé en introduisant une fonction de pression sinusoïdale. Leurs résultats montrent un renversement de l'écoulement au niveau des parois extérieures, de forts taux de cisaillement au niveau des parois intérieures et surtout le développement et la disparition totale de la zone de recirculation en fonction de la pression durant le cycle. Enfin, plus le nombre de Reynolds augmente, plus l'enveloppe grossit en amont, en aval et vers le courant principal. Ces résultats ont été obtenus pour un nombre de Reynolds compris entre 130 et 173.

Les études expérimentales faites par FARAHIFAR et al [7], SIOUFFI et al [8] et RIEU et al [9] ont été conduites sur des modèles de bifurcations symétriques en plexiglass, de section rectangulaire et d'angle variant de 30° à 180°. Les relevés de distribution des vitesses ont été effectués par vélocimétrie ultrasonore dans des conditions de débit permanent, pulsé simple et pulsé de type physiologique. Les résultats obtenus mettent en évidence l'influence de l'angle des branches filles et

surtout le rôle joué par certains paramètres caractéristiques de l'écoulement tels que le nombre de Reynolds et le paramètre de fréquence. Ces auteurs indiquent que sous l'effet des pulsations, les modifications apportées par la bifurcation sont considérablement amorties et notamment le déplacement du maximum de vitesse vers la paroi extérieure.

### I - 3 ETUDE DES ARTERES STENOSEES

CHOW et al [10] et MANTON [11] ont étudié l'écoulement permanent d'un fluide newtonien au voisinage d'une singularité douce et pour de faibles nombres de Reynolds. La résolution des équations de la dynamique non-linéaires est alors faite analytiquement et à l'aide des méthodes de perturbations, moyennant un développement en série par rapport aux petites valeurs prises par le paramètre caractéristique de la géométrie de la sténose. Les résultats issus de cette méthode concernent le champ de vitesse, la distribution de la pression et les contraintes à la paroi. CHOW indique que pour des conduits présentant des sténoses successives, le transport local d'oxygène au niveau de la paroi est fortement perturbé.

Les calculs numériques de DESHPANDE et al [12] correspondant aux écoulements permanents, laminaires, dans des modèles de rétrécissements sinusoïdaux à symétrie de révolution, montrent que la position du point de réattachement augmente avec le nombre de Reynolds, et indiquent le nombre de Reynolds critique correspondant à l'apparition de la séparation. Celui-ci dépend à la fois du pourcentage d'obstruction et de la longueur de la déformation. Des résultats similaires ont été déterminés expérimentalement par YOUNG et TSAI [13].

D'une manière générale, la présence d'une sténose sur l'arbre artériel entraîne une chute de pression accompagnée d'une réduction du flux sanguin périphérique. Ainsi, le débit dans les vaisseaux est non seulement fonction des propriétés caractéristiques du fluide et de sa vitesse, mais aussi de la longueur de la singularité et de son degré d'obstruction.

YOUNG et al [14] indiquent que le degré critique de la sténose dépend de la vitesse de l'écoulement et que la chute de pression ne varie pas linéairement avec la réduction de la section du tube. LETAC et al [26] présentent un domaine de variation de la valeur critique du pourcentage de rétrécissement ( 80% - 90% ) entraînant une diminution très importante du flux sanguin.

Une autre étude de YOUNG [15] concerne l'influence des déformations du vaisseau sur la distribution du fluide vers la périphérie et analyse les effets hydrodynamiques locaux tels que le champ de vitesse, l'évolution de la pression et les phénomènes de séparation et de turbulence.

Pour l'écoulement stationnaire, la chute de pression n'est fonction que des paramètres géométriques de la sténose et du nombre de Reynolds. Elle varie linéairement avec la vitesse pour de faibles nombres de Reynolds; par contre, lorsque celui-ci est élevé, ce sont les effets d'inertie qui influent considérablement sur les pertes de pression.

Pour l'écoulement instationnaire, la chute de pression et le champ de vitesse instantané dépendent en plus du paramètre de fréquence et de la nature du débit imposé. Des résultats analogues sont donnés par CLARK [16] dans son étude sur les sténoses aortiques. L'étude numérique faite par DALY [17] sur l'écoulement instationnaire dans une artère fémorale sténosée de chien, a mis en évidence l'évolution de la zone de séparation avec le temps. Pour un nombre de Reynolds voisin de 180 , la séparation apparaît pendant la phase d'accélération de la systole; en phase de la diastole, le sens de l'écoulement est inversé et une deuxième zone de séparation se manifeste en amont de la sténose. L'auteur précise que la contrainte de cisaillement maximum se situe en amont de section minimum .

BACK et al [18] montrent qu'au delà d'un nombre de Reynolds critique, la turbulence apparaît au niveau de la zone de cisaillement et se développe d'avantage avec l'augmentation du nombre de Reynolds, alors que la longueur de la zone de séparation décroît et approche une valeur limite.

Il est bien connu que dans un tube de section constante, et pour un écoulement stationnaire, le nombre de Reynolds critique correspondant à la transition entre écoulement laminaire et écoulement turbulent est de l'ordre de 2000 . Par contre, les critères de transition sont difficiles à établir en écoulement instationnaire. Toutefois, d'autres grandeurs caractéristiques comme le paramètre de fréquence et le signe du terme d'accélération jouent un rôle fondamental dans la transition ( DANTAN et al [19], COMOLET [20] ).

Lorsqu'il s'agit d'écoulement pulsé en présence d'une singularité, le processus est encore plus complexe. Pour un nombre de Reynolds moyen égal à 600 et un paramètre de fréquence de l'ordre de 7.5 , AHMED et al [21] ont relevé une turbulence de courte durée sur un modèle de sténose à 75%. Ce phénomène s'accroît pendant la phase de décélération et s'amortit complètement avant la fin du cycle. Par contre, aucun phénomène de turbulence n'est apparu dans les modèles à 25% et 50% . Par ailleurs, l'évolution de la contrainte pariétale pour les trois types de sténoses présente un maximum au voisinage immédiat de la section minimum et décroît rapidement dans la partie divergente de la déformation.

Certains auteurs ont appliqué la méthode des éléments finis pour traiter des écoulements en présence de singularités. Dans les travaux de LATINOPOULOS et al [22-23], les équations dynamiques associées à l'écoulement pulsé à travers une succession de déformations sinusoïdales sont discrétisées suivant la méthode de Galerkin et à l'aide d'un schéma d'Euler explicite pour les termes d'accélération. Les distributions de la fonction de courant et de la fonction tourbillon sont obtenues à tout instant. La comparaison avec des résultats théoriques donne des écarts satisfaisants.

WILLE [24-25], a analysé l'écoulement pulsé dans différents modèles de rétrécissement. Les équations de la dynamique sont discrétisées comme précédemment et résolues selon l'algorithme de Newton-Raphson. Outre la

distribution de la pression, les résultats montrent l'évolution du champ de vitesse au cours du cycle et notamment l'apparition en phase de diastole de deux zones de séparation en amont et en aval de la sténose. Toutefois, il n'a pas été possible d'obtenir des solutions convergentes vers la fin du cycle. L'auteur attribue cela à des instabilités au niveau des conditions aux limites.

#### I - 4 A PROPOS DU COMPORTEMENT NON-NEWTONIEN DU SANG

La modélisation des écoulements sanguins a pour but de mettre en évidence l'influence de la rhéologie du fluide sur l'écoulement. Pour des conduites de faibles section, le sang est représenté par des lois de comportements pseudo-plastiques. Un tel comportement est d'autant plus marqué que le taux de cisaillement est faible. Ceci est dû essentiellement à la présence des globules rouges en suspension. La nature de ces écoulements est extrêmement complexe et les études *in vivo* et *in vitro* sont difficilement réalisables.

A partir d'une bibliographie sur ce sujet, deux études nous ont paru intéressantes. Dans des tubes de tailles moyennes présentant des déformations pariétales douces et pour de faibles nombre de Reynolds, THEODOROU et al [27] ont traité l'écoulement non permanent de fluides non-newtoniens ayant un comportement pseudo-plastique et représentés par une loi de puissance d'Ostwald. Les résultats montrent l'influence du nombre de Reynolds généralisé au cas ostwaldien et du paramètre de fréquence sur l'écoulement. Les développements théoriques ont permis de caractériser les effets sensibles de la consistance et de l'indice de comportement du fluide sur la forme du profil de vitesses et la distribution de pression .

L'autre étude est faite par BITOUN et al [28-29], et concerne la microcirculation au niveau d'une déformation douce et axisymétrique. Les deux phases, plasma et éléments figurés sont prises en considération. La visualisation par vidéomicroscopie montre une forte concentration des

globules rouges au niveau du noyau central et une lente variation de l'épaisseur de la couche périphérique. Par ailleurs, la méthode de perturbation fournit des profils de vitesses sans variation brusque au niveau de l'interface entre le noyau central et la couche plasmatique.

#### I - 5 CONCLUSION

Aussi importantes que soient les mesures expérimentales, des modélisations hydrodynamiques de la circulation artérielle sont nécessaires pour comprendre et expliquer les divers problèmes qui se rapportent à de tels écoulement. Le cas le plus simple consiste à traiter l'écoulement d'un fluide newtonien au voisinage d'une singularité et en régime permanent. Malgré ces hypothèses simplificatrices, la résolution des équations de la dynamique associées pose des difficultés d'analyse, dues en particulier à la présence de non-linéarités. Ces difficultés peuvent-être surmontées grâce :

- aux méthodes de perturbations lorsque les paramètres fondamentaux de l'écoulement et de la géométrie restent petits.

- aux méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis qui se prête mieux que la méthode des différences finies à de telles géométries.

Pour ces raisons, nous avons essayé par la présente étude, d'élaborer un code de calcul par éléments finis nous permettant de déterminer le champ d'écoulement local à travers tout le modèle géométrique, de mesurer l'importance des termes d'inertie vis à vis des autres termes, et de bien préciser l'influence des paramètres géométriques tels que l'angle des branches filles pour une bifurcation, le degré de rétrécissement d'une sténose ainsi que la forme et les dimensions des pontages sur de tels écoulements.

## CHAPITRE II

### FORMULATION DU PROBLEME

#### II - 1 *ECOULEMENT EN REGIME PERMANENT*

II - 1.1 *Modèles de rétrécissements à symétrie de révolution.*

II - 1.2 *Equations de mouvement et conditions aux limites.*

II - 1.3 *Modèles de bifurcations et pontages étudiés*

II - 1.3.1 *Choix des bifurcations*

II - 1.3.2 *Choix des pontages*

II - 1.3.3 *Equations de mouvement et conditions aux limites.*

#### II - 2 *ECOULEMENT EN REGIME NON-PERMANENT*

II - 2.1 *Equations dynamiques*

II - 2.2 *Paramètres sans dimensions*

## II - FORMULATION DU PROBLEME

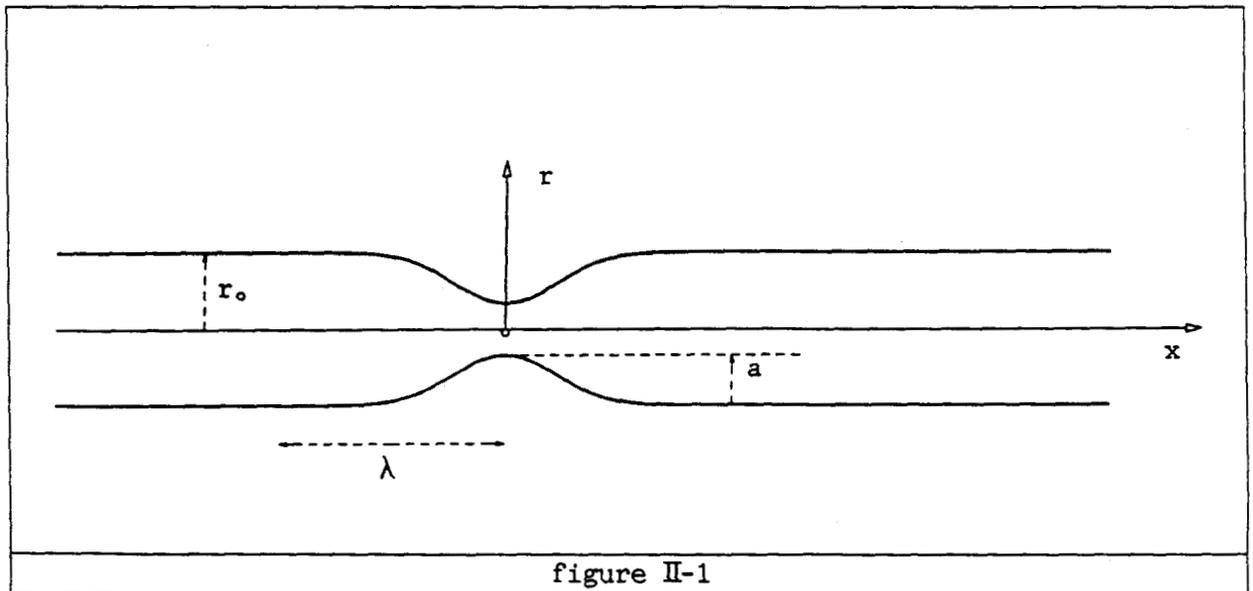
### II - 1 ECOULEMENT EN REGIME PERMANENT

#### II - 1.1 Modèles de rétrécissements à symétrie de révolution

La géométrie de l'écoulement faisant l'objet de notre étude (figure II-1) est caractérisée par un tube cylindrique présentant des rétrécissements de sections axisymétriques définies par une courbe de Gauss d'équation:

$$r = r_0 - a \exp\left(-\frac{\pi^2 x^2}{\lambda^2}\right) \quad (\text{II-1})$$

dans laquelle,  $a$  est l'amplitude de la déformation,  $r_0$  le rayon du tube non déformé et  $\lambda$  la longueur d'amortissement.



En introduisant le paramètre géométrique  $x = \frac{a}{r_0}$ , l'équation (II-1) s'écrit sous forme adimensionnelle:

$$r^* = 1 - x \exp\left(-\frac{\pi^2 x^2}{\lambda^2}\right) \quad (\text{II-2})$$

De façon à valider nos résultats numériques par rapport aux solutions analytiques ou aux résultats expérimentaux, nous avons choisi d'une part, trois valeurs de  $\chi$  de telle sorte que les pourcentages de rétrécissement en section soient 36%, 55% et 88% et d'autre part, deux modèles de même pourcentage de rétrécissement 88% mais en considérant deux valeurs différentes pour la longueur d'amortissement  $\lambda = 3\text{cm}$  et  $1\text{cm}$ . Nous présentons la géométrie de ces 4 modèles de sténose sur la figure II-2.

### II -1.2 Equations de mouvement et conditions aux limites

Les hypothèses de travail sont les suivantes:

- L'écoulement est permanent, bidimensionnel.
- Le fluide est newtonien, visqueux et incompressible.
- La conduite est à symétrie de révolution et à paroi rigide.

Dans ce cas, les équations de la dynamique régissant l'écoulement sont celles de Navier-Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-3})$$

dans lesquelles :

$u$  et  $v$  représentent respectivement les composantes longitudinales et radiales de la vitesse,

$\rho$  est la masse volumique,

$\nu$  est la viscosité cinématique,

et  $p$  la pression locale.

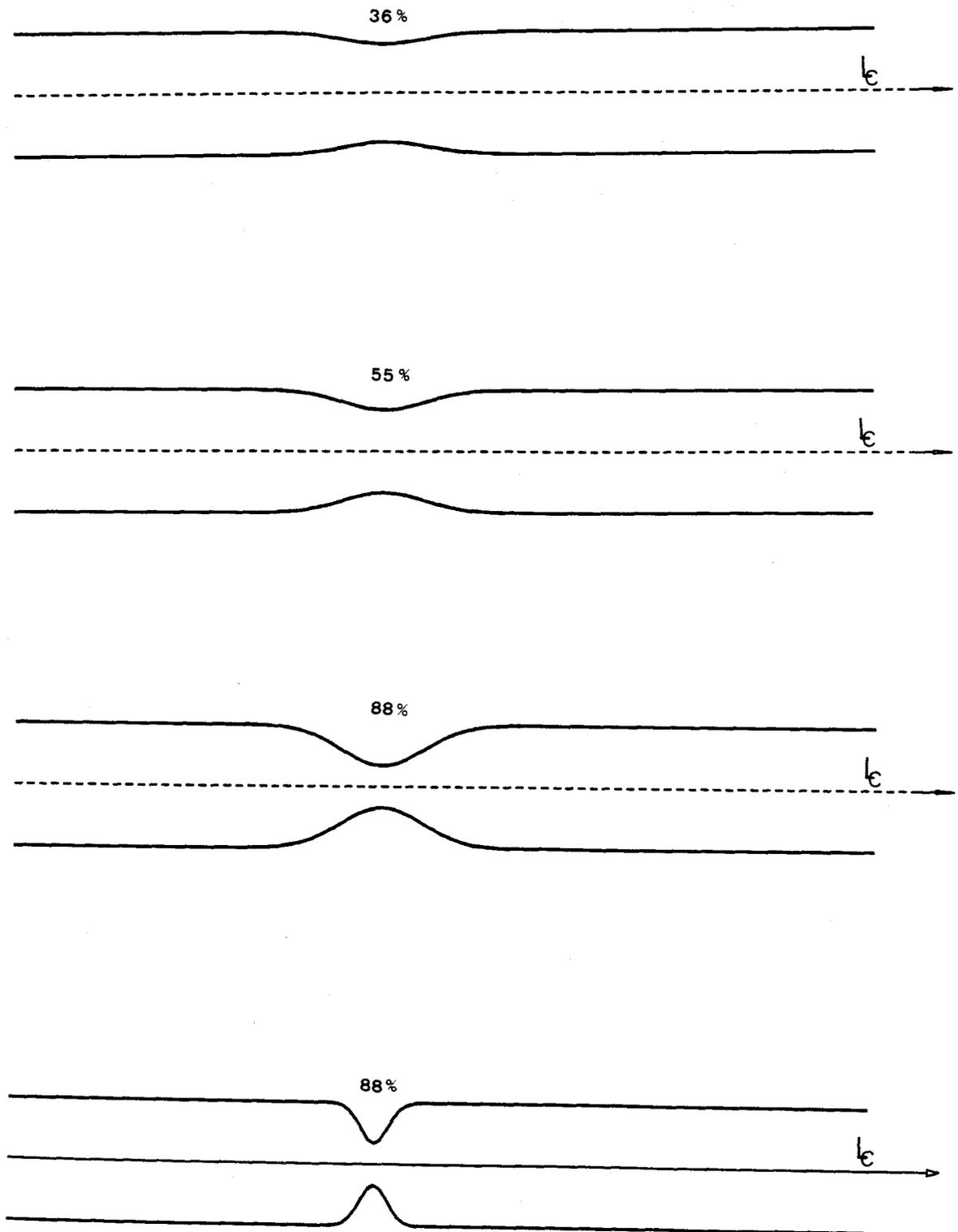


Figure II-2 MODELES DE RETRECISSEMENTS A SYMETRIE DE REVOLUTION ETUDIES

Pour écrire les équations réduites, nous utilisons comme grandeurs caractéristiques le rayon interne du tube  $r_0$ , la vitesse  $u_0$  au centre du profil d'entrée et choisissons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$u^* = \frac{u}{u_0} \quad ; \quad v^* = \frac{v}{u_0} \quad ; \quad p^* = \frac{p}{\rho u_0^2} \quad ;$$

$$x^* = \frac{x}{r_0} \quad \text{et} \quad r^* = \frac{r}{r_0}$$

Le système d'équations (II-3) s'écrit de manière adimensionnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right] \\ u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \frac{v^*}{r^*} \right] \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-4})$$

Le système (II-4) fait apparaître le nombre de Reynolds  $Re = \frac{r_0 u_0}{\nu}$ , paramètre sans dimension qui caractérise l'importance des effets d'inertie par rapport aux effets de la viscosité. L'influence de ce paramètre sur de tels écoulements est mise en évidence grâce aux différents essais effectués avec des valeurs de  $Re$  comprises entre 1 et 1000

Conditions aux limites :

- A l'amont, on impose une distribution parabolique de la vitesse sous la forme suivante :

$$u = u_0 \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \quad \text{et} \quad v = 0 \quad (\text{II-5})$$

- A l'aval, nous faisons l'hypothèse que l'écoulement est libre. En effet, pour des nombres de Reynolds suffisamment grands, l'écoulement dans une conduite déformée peut présenter des vitesses négatives au niveau du profil de sortie. Cette hypothèse s'écrit sous la forme suivante ( conditions de type Neuman ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-6})$$

- De plus, les conditions d'adhérence du fluide à la paroi et de symétrie de l'écoulement par rapport à la ligne centrale de l'écoulement s'écrivent:

$$\begin{array}{l} u = 0 \quad \text{et} \quad v = 0 \quad \text{à la paroi} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{et} \quad v = 0 \quad \text{pour } r = 0 \end{array} \quad (\text{II-7})$$

A ces conditions sur les inconnues  $u$  et  $v$ , s'ajoute une indication sur la pression  $p$ . Celle-ci peut être prise comme étant nulle en un point donné de l'écoulement ( par exemple au niveau de la section de sortie ).

### II - 1.3 MODELES DE BIFURCATIONS ET PONTAGES ETUDIES

Pour décrire les caractères fondamentaux de l'écoulement dans de tels systèmes, nous utilisons une schématisation de la géométrie comme indiquée sur les figures II-3 et II-4 .

#### II - 1.3.1 Choix des bifurcations

Le modèle de bifurcation est constitué par une branche mère de rayon  $r_1 = 1\text{cm}$  et de deux branches filles symétriques de rayon  $r_2 = 0.7\text{cm}$ , de

tel sorte que le rapport des sections défini par  $\beta = \frac{2S_2}{S_1}$  se situe dans la réalité physiologique. L'ordre de grandeur des valeurs de  $\beta$  et leur influence dans le système cardiovasculaire sont discutés par COMOLET [20].

Afin de mettre en évidence le rôle joué par l'angle  $\Phi$  des branches filles sur le champ de l'écoulement, nous avons choisi trois valeurs différentes pour l'angle  $\Phi$  :  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$ . La géométrie des trois modèles de bifurcation est représentée sur la figure II-3.

### II - 1.3.2 Choix des pontages

Dans le but de définir, d'une part l'influence de la forme et des dimensions du raccord du pontage sur la dérivation permettant de ramener le maximum de flux au delà de la déformation et, d'autre part, d'évaluer les pertes de charges dans les artères sténosées à 88% pontées et non pontées, nous avons opté pour trois géométries différentes pour le pontage. Celles-ci sont représentées sur la figure II-4.

### II - 1.3.3 Equations de mouvement et conditions aux limites

Pour traiter le problème de l'écoulement à travers les bifurcations ou les pontages, on suppose que l'écoulement est plan, permanent, laminaire et concerne un fluide visqueux et incompressible. Dans ce cas, les équations réduites du mouvement s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] \\ u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right] \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-8})$$

A ces équations on associe les conditions aux limites suivantes:

- à l'entrée, une distribution parabolique de la vitesse axiale et vitesse normale nulle:

$$u = u_0 \left( 1 - \frac{y^2}{r_1^2} \right) \quad \text{et} \quad v = 0$$

- au niveau de la section de sortie du pontage, on impose une pression nulle et pour les vitesses, des conditions du type Neuman:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad p = 0$$

- et la condition d'adhérence du fluide à la paroi:

$$u = 0 \quad \text{et} \quad v = 0 \quad \text{à la paroi}$$

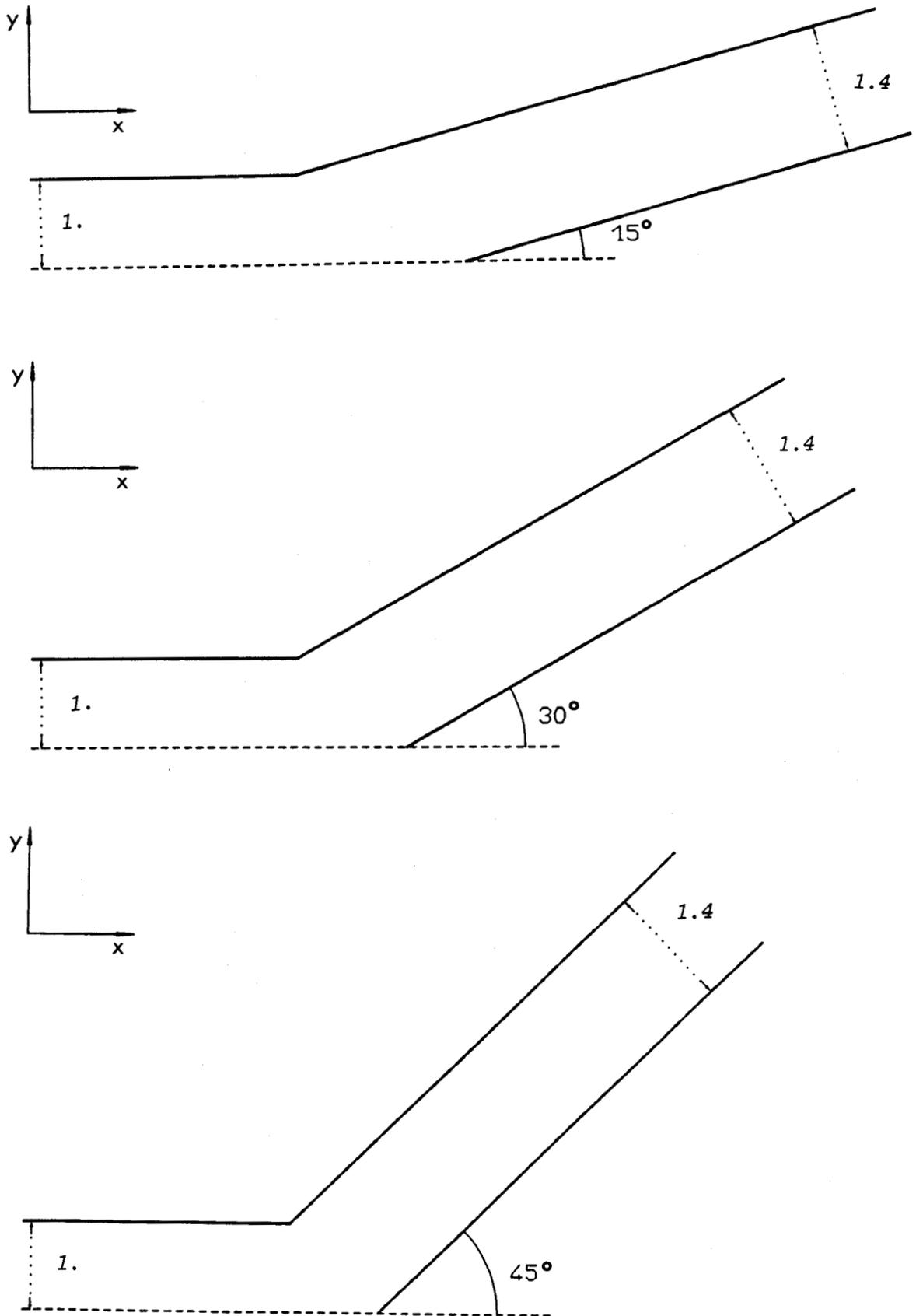


Figure II-3 MODELES DE BIFURCATION ETUDIES

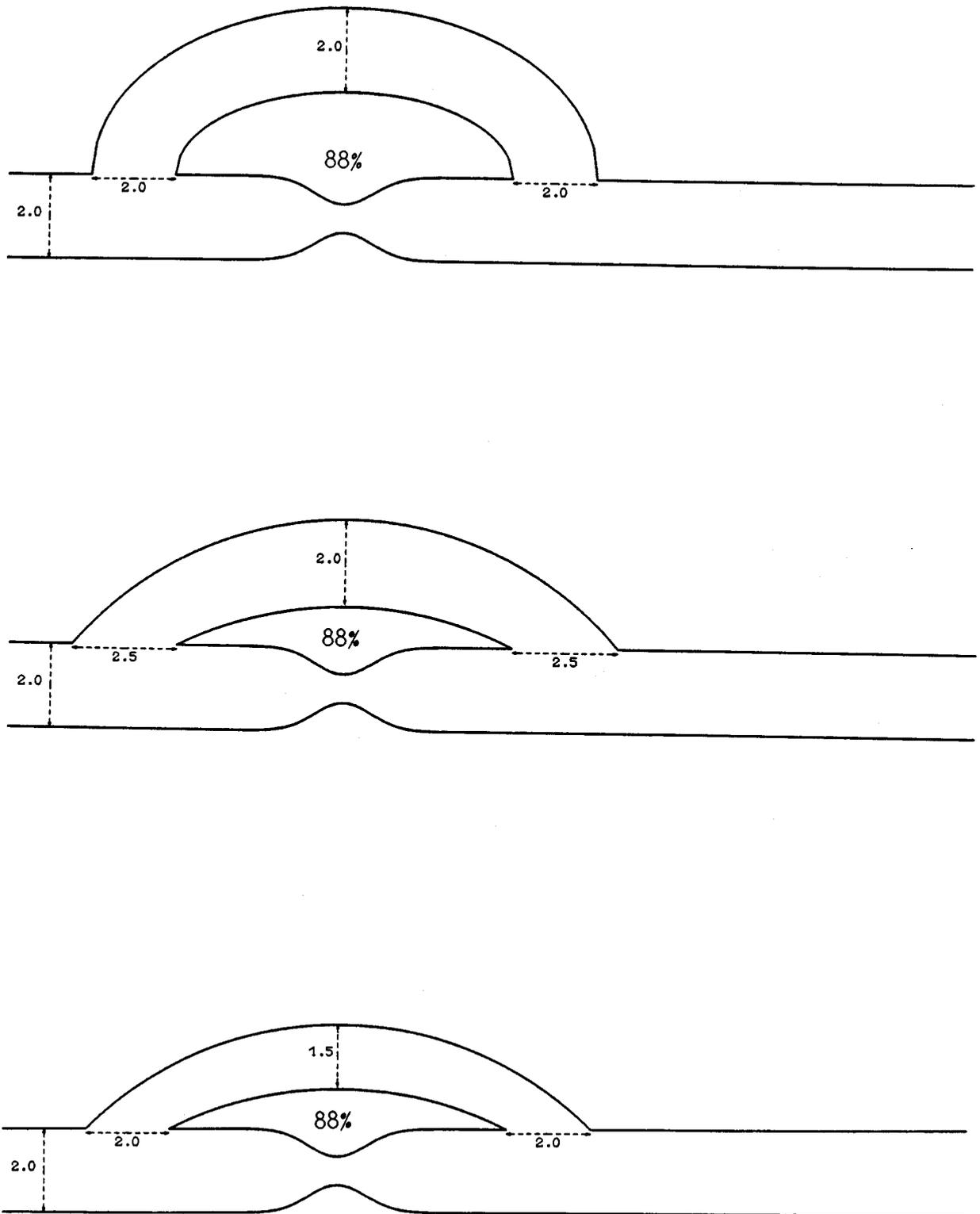


Figure II-4 MODELES DE PONTAGE ETUDIES

## II - 2 ECOULEMENT EN REGIME NON-PERMANENT

Dans le réseau vasculaire, plusieurs facteurs affectent l'évolution du champ d'écoulement, cela est dû en particulier à la géométrie complexe du lit artériel et à la nature pulsatoire de l'écoulement. Il est donc très important pour notre étude de traiter les équations de Navier-Stokes dans le cas instationnaire et de déterminer l'influence de l'instationnarité sur le champ de vitesses dans une bifurcation.

### II -1.1 Equations de la dynamique

En premier lieu, nous avons considéré l'écoulement dû à un gradient de pression sinusoïdal s'effectuant dans un tube de section constante. L'étude est faite dans le plan polaire  $(x, \theta, r)$  puisque l'on considère l'écoulement à symétrie de révolution. Ceci nous permet de valider le *code de calcul* développé en confrontant les résultats qu'il fournit à ceux donnés par WOMERSLEY [38] pour les écoulements périodiques.

Ensuite, nous avons imposé le même type d'écoulement ( obtenu pour un écoulement plan ) à travers le modèle de bifurcation ( $\Phi = 60^\circ$ ) qui a été traité en écoulement permanent. Pour écrire les équations dynamiques régissant notre problème, on suppose l'écoulement instationnaire et plan pour un fluide visqueux, incompressible et newtonien:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-9})$$

## II -1.2 Paramètres sans dimensions:

Nous définissons le nombre de Reynolds  $Re$  à l'aide du rayon  $r_1$  de la branche mère (figure II-3), d'une vitesse caractéristique  $u_0$  et de la viscosité cinématique du fluide  $\nu$ :

$$Re = \frac{r_1 u_0}{\nu} \quad (\text{II-10})$$

Soit  $\omega$  la pulsation de l'écoulement de période  $T$ , nous pouvons alors définir le paramètre de fréquence  $\alpha$  :

$$\alpha = r_1 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (\text{II-11})$$

C'est un paramètre important pour de tels écoulements, il se présente sous forme de rapport des effets d'inertie instationnaires aux effets de viscosité, ou encore de lien entre le rayon et l'inverse de l'épaisseur de la couche limite oscillatoire. Ainsi, dans l'aorte et les grosses artères, où le nombre de Reynolds est important ( $\geq 1200$ ), la couche limite est relativement faible et par voie de conséquence  $\alpha$  prend des valeurs élevées, tandis qu'en périphérie, le nombre de Reynolds étant faible, l'épaisseur de la couche limite est très importante et donc  $\alpha$  est faible.

Pour écrire les équations du mouvement sous forme adimensionnelle, nous choisissons les grandeurs normalisées suivantes:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u}{u_0} & ; & & v^* &= \frac{v}{u_0} & ; & & p^* &= \frac{p}{\rho u_0^2} & ; \\ x^* &= \frac{x}{r_1} & ; & & y^* &= \frac{y}{r_1} & \text{et} & & t^* &= \omega t \end{aligned}$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha^2}{Re} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] \\ \frac{\alpha^2}{Re} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right] \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-12})$$

Les conditions aux limites associées à ces équations sont les suivantes:

- A l'entrée, on impose un profil de vitesse dû à une fonction de pression sinusoïdale:

$$p = p_0 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad v = 0$$

- A la sortie, on applique les conditions de Neuman:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

- La condition d'adhérence du fluide à la paroi :  $u = v = 0$ ,
- et une pression nulle à la section de sortie de la bifurcation.

## CHAPITRE III

### METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE AUX EQUATIONS DE NAVIER-STOKES.

#### III - 1 PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

##### III - 1.1 Introduction

##### III - 1.2 Principe

##### III - 1.3 Existence et unicité de la solution par éléments finis

#### III - 2 FORMULATION DU PROBLEME DISCRET

##### III - 2.1 Définition de l'élément quadrilatère

##### III - 2.2 Approximation en $u, p, v$

##### III - 2.3 Discrétisation des équations de Navier-Stokes

##### III - 2.4 Méthodes de résolution pour les problèmes non-linéaires

###### III - 2.4.1 Méthode itérative directe

###### III - 2.4.2 Méthode de Newton-Raphson

###### III - 2.4.3 Méthode de Newton-Raphson modifiée

###### III - 2.4.4 Conclusion

##### III - 2.5 Formulation de la matrice tangente élémentaire pour la méthode de Newton-Raphson.

##### III - 2.6 Discrétisation du problème instationnaire

### III - METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE AUX EQUATIONS DE NAVIER-STOKES.

#### III - 1 Présentation de la méthode des éléments finis.

##### III - 1.1 Introduction

La méthode des éléments finis a été introduite comme étant une procédure de résolution de problèmes de structures mécaniques dans le domaine linéaire, puis a pris en compte les non-linéarités et la géométrie du matériau.

Elle a été reconnue comme étant une procédure générale des approximations numériques à tous les problèmes physiques pouvant être régis par une description d'équations différentielles tels que:

- le calcul des structures,
- la mécanique des fluides,
- la biomécanique,
- les transferts de chaleur,
- l'électromagnétisme,
- et récemment la microélectronique.

##### III - 1.2 Principe

Le principe de la méthode des éléments finis consiste à:

- découper le domaine continu à étudier en un certain nombre d'éléments connectés par des points nodaux,
- remplacer les inconnues du problème par leurs développements finis moyennant des approximations en tout points de chaque élément en fonction des inconnues des noeuds,
- transformer les systèmes d'équations aux dérivées partielles en une série d'équations algébriques discrètes,
- programmer les matrices élémentaires correspondant aux systèmes d'équations algébriques et appliquer les algorithmes numériques d'intégration et de résolution.

### III - 1.3 Existence et unicité de la solution par éléments finis

L'étude théorique de l'application de la méthode des éléments finis en mécanique des fluides a fourni beaucoup de résultats sur l'existence et les propriétés de convergence d'une solution approchée vers la solution exacte. La plupart de ces résultats sont basés sur le théorème dit de Lax-Milgram, les théorèmes qui en découlent et leurs démonstrations sont présentés par TEMAM [33] et RAVIART [34].

## III - 2 FORMULATION DU PROBLEME DISCRET

### III - 2.1 Définition de l'élément quadrilatère

Le type d'approximation que nous adoptons pour le système (II-4) consiste à conserver les variables primitives qui sont les vitesses ( $u, v$ ) et la pression  $p$ .

Pour effectuer le maillage du domaine de l'écoulement, nous avons pris comme élément de référence un carré rapporté à ses axes naturels  $\xi, \eta$  défini par les deux segments joignant les milieux des cordes opposées, tandis que l'élément déformé est rapporté au repère global de l'écoulement figure (III-1). La forme distordue de l'élément réel est fixée par les coordonnées des noeuds milieux.

Les fonctions d'interpolations utilisées pour discrétiser le champ de l'écoulement dans l'élément réel ont la particularité de lier tout points  $p(x, r)$  de l'élément réel à un point  $p'(\xi, \eta)$  de l'élément de référence. Cette transformation est définie de manière univoque par les coordonnées  $x_i, r_i$  des noeuds de l'élément réel:

$$x = \sum_{i=1}^{i=8} N_i x_i, \quad r = \sum_{i=1}^{i=8} N_i r_i \quad (\text{III-1})$$

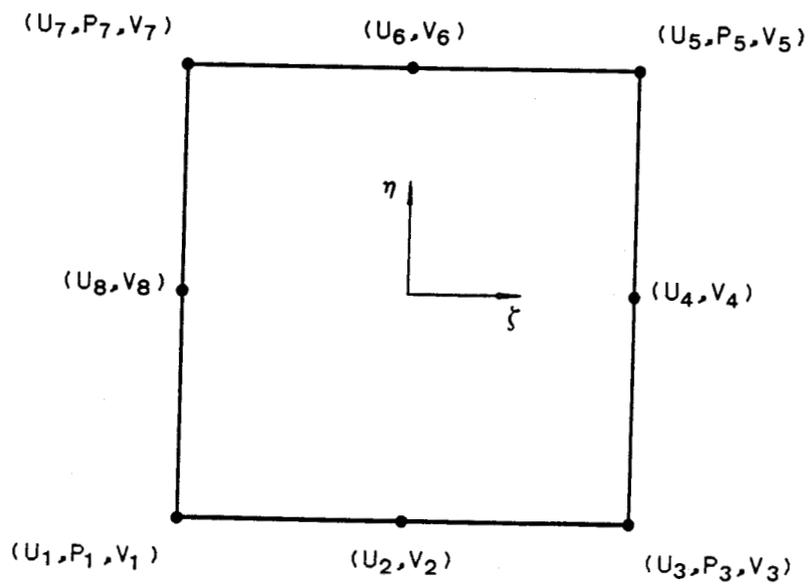
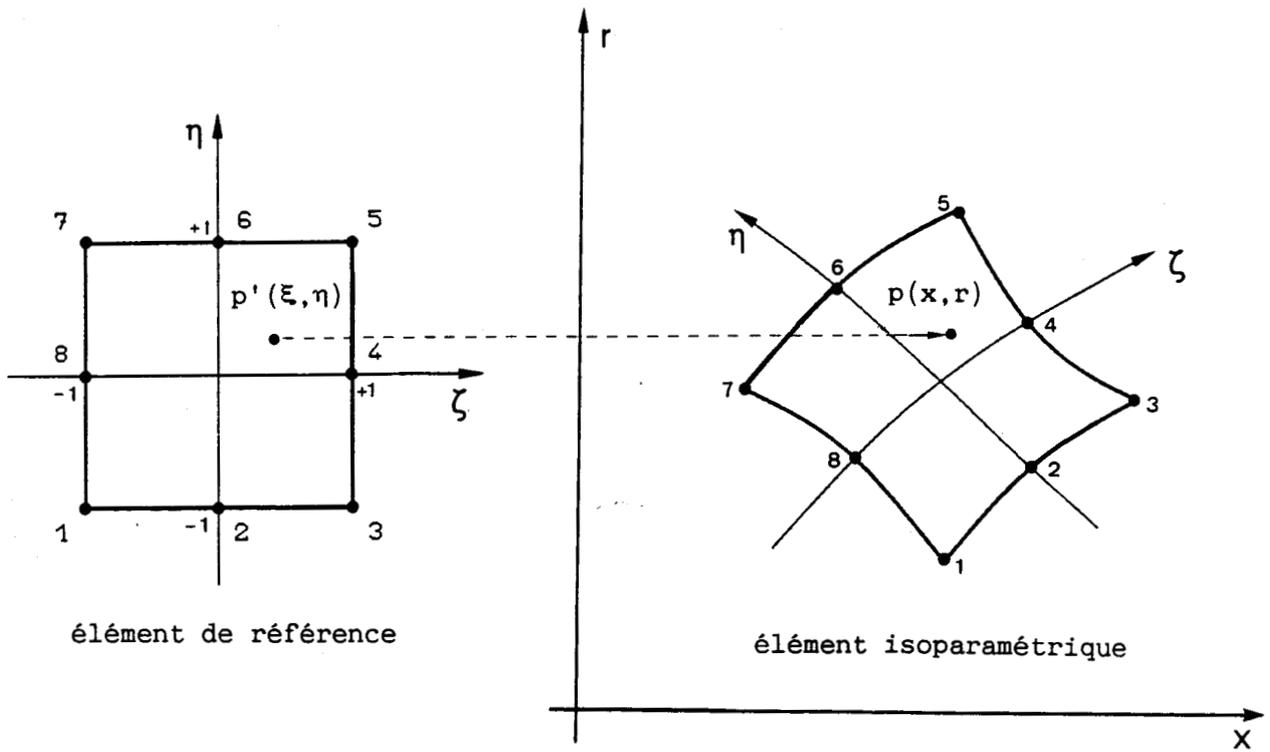


figure III-1 Élément quadrilatère à 8 noeuds et 20 degrés de liberté

avec la condition suivante:

$$N_i(\xi_i, \eta_i) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{pour } i=j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (\text{III-2})$$

cette dernière expression traduit la correspondance entre un noeud de l'élément de référence avec le noeud de même numéro dans l'élément réel.

Puisque la transformation géométrique et l'interpolation du champ de l'écoulement sont établies sur les mêmes noeuds et avec les mêmes fonctions de formes  $N_i$ , l'élément réel est dit isoparamétrique. Dans le cas de la figure (III-1), les polynômes d'interpolations quadratiques sont exprimées en fonction des coordonnées naturelles  $\xi, \eta$  :

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)/4 \\ N_2 &= (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \\ N_3 &= (1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)/4 \\ N_4 &= (1+\xi)(1-\eta^2)/2 \\ N_5 &= (1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)/4 \\ N_6 &= (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \\ N_7 &= (1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)/4 \\ N_8 &= (1-\xi)(1-\eta^2)/2 \end{aligned} \quad (\text{III-3})$$

et on pourra donc écrire la relation matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-4})$$

où [J] est matrice jacobienne que l'on calcul à l'aide de (III-1):

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{i=8} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{i=8} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i \\ \sum_{i=1}^{i=8} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{i=8} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i \end{bmatrix} \quad (\text{III-5})$$

avec la condition, que pour tout point de l'élément de référence, le déterminant du jacobien de la transformation ne peut-être nul ou indéfini.

### III - 2.2 Approximation en u,p,v

Soient  $U_i$ ,  $V_i$  et  $P_i$  les valeurs nodales des vitesses et pressions sur un élément quadrilatère isoparamétrique du type de la figure (III-1). A l'intérieur de chaque élément, on suppose une approximation de nature quadratique pour les vitesses et linéaire pour la pression. Ces approximations s'écrivent sous la forme suivante:

$$u = \sum_{i=1}^{i=8} N_i U_i \quad , \quad v = \sum_{i=1}^{i=8} N_i V_i \quad , \quad p = \sum_{i=1}^{i=4} L_i P_i \quad , \quad (\text{III-6})$$

où les  $L_i$  , sont les polynômes d'interpolation linéaires définis sur les noeuds aux coins de l'élément de la figure (III-1):

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) && \text{au noeud n}^\circ 1 \\ L_2 &= \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta) && \text{au noeud n}^\circ 3 \\ L_3 &= \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta) && \text{au noeud n}^\circ 5 \\ L_4 &= \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta) && \text{au noeud n}^\circ 7 \end{aligned}$$

### III - 2.3 Discrétisation des équations de Navier-Stokes

Pour le processus de discrétisation, on part de la formulation variationnelle du problème continu basé sur la méthode des *résidus pondérés de Galerkin*. DHATT [35], TAYLOR [36], ZIENKIEWICZ [37] et WILLE [24].

Après avoir introduit les expressions (III-1) et (III-6) dans le système d'équations (II-4), on peut écrire pour la première équation suivant la direction  $x$ , le résidu élémentaire correspondant au noeud "i" :

$$\begin{aligned}
 R_{1i}^e = & \iint_e \left[ N_i \left( \sum_1^8 N_k U_k \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial x} U_k + \sum_1^8 N_k V_k \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial r} U_k + \sum_1^4 \frac{\partial L_k}{\partial x} P_k \right) \right] dx dr \\
 & + \frac{1}{Re} \iint_e \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial x} U_k + \frac{\partial N_i}{\partial r} \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial r} U_k - \frac{N_i}{r} \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial r} U_k \right] dx dr \\
 & - \frac{1}{Re} \int_s \left[ N_i \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial n} U_k \right] ds
 \end{aligned} \tag{III-7}$$

pour l'équation de continuité:

$$R_{2i}^e = \iint_e \left[ L_i \left( \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial x} U_k + \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial r} V_k + \frac{1}{r} \sum_1^8 N_k U_k \right) \right] dx dr \tag{III-8}$$

et pour l'équation suivant  $r$ :

$$R_{3i}^e = \iint_e \left[ N_i \left( \sum_1^8 N_k U_k \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial x} V_k + \sum_1^8 N_k V_k \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial r} V_k + \sum_1^4 \frac{\partial L_k}{\partial r} P_k \right) \right] dx dr$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\text{Re}} \iint_e \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial x} V_k + \frac{\partial N_i}{\partial r} \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial r} V_k \right] dxdr \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \iint_e \left[ \frac{N_i}{r^2} \sum_1^8 N_k V_k - \frac{N_i}{r} \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial r} V_k \right] dxdr \\
& - \frac{1}{\text{Re}} \int_s \left[ N_i \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial n} V_k \right] ds
\end{aligned} \tag{III-9}$$

Pour réduire les dérivées d'ordre 2 qui figurent dans les termes de diffusion, nous avons appliqué le théorème de Green.

Après calcul et assemblage des équations (III-7), (III-8) et (III-9) pour l'ensemble des éléments du domaine de l'écoulement, on aboutit à un système d'équations algébriques non-linéaires du type:

$$\left\{ \mathbf{F} \right\} - \left[ \mathbf{K}(\mathbf{U}) \right] \left\{ \mathbf{U} \right\} = \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{U}) \right\} \tag{III-10}$$

où  $[\mathbf{K}(\mathbf{U})]$  représente la matrice de rigidité globale définie en fonction des inconnues du problème,

$\{\mathbf{F}\}$  est le vecteur sollicitation global,

$\{\mathbf{U}\}$  est le vecteur global des inconnues,

et  $\{\mathbf{R}(\mathbf{U})\}$  le vecteur résidu global de résolution.

Nous présentons les termes de la matrice élémentaire  $[\mathbf{k}^e(\mathbf{U})]$  dans l'annexe II.

### III - 2.4 Méthodes de résolution pour les problèmes non-linéaires

Diverses méthodes de résolution adaptées aux systèmes non-linéaires du type (III-10) sont proposées par DHATT [35] et ZIENKIEWCZ [37]. Le principe essentiel de ces méthodes est de résoudre une série d'équations

algébriques linéaires afin d'approcher la solution exacte par une solution qui satisfait le critère de convergence sélectionné. Trois méthodes de base peuvent-être utilisées:

### III - 2.4.1 Méthode itérative directe

Cette méthode consiste à effectuer les itérations directement sur le système suivant:

$$\left[ K(U) \right] \left\{ U \right\} = \left\{ F \right\} \quad (\text{III-11})$$

partant d'une solution initiale  $\{U^0\}$ , on peut construire une nouvelle solution  $\{U^1\}$  en écrivant que:

$$\left\{ U^1 \right\} = - \left[ K(U^0) \right]^{-1} \left\{ F \right\} \quad (\text{III-12})$$

Le processus itératif peut alors se mettre sous la forme suivante:

$$\left\{ U^i \right\} = - \left[ K(U^{i-1}) \right]^{-1} \left\{ F \right\} \quad (\text{III-13})$$

et le test d'arrêt consiste à évaluer la différence entre deux solutions successives en termes de normes euclidiennes:

$$\frac{\| \{U^i\} - \{U^{i-1}\} \|}{\| \{U^i\} \|} < \epsilon \quad (\text{III-14})$$

la valeur de  $\epsilon$  est généralement de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-5}$ .

Pour conclure cette description sommaire de l'algorithme itératif direct, précisons deux inconvénients majeurs, et ce, malgré la souplesse au niveau de sa programmation :

- susceptibilité de non convergence pour certains types de problèmes. Cette possibilité est illustrée sur la figure III-2.
- son utilisation s'avère fort coûteuse en raison du nombre important d'itérations et donc d'opérations à effectuer pour résoudre le système d'équations algébriques (III-11).

### III - 2.4.2 Méthode de Newton-Raphson

Cette méthode suppose que le résidu correspondant à une solution approchée  $\{U^i\}$  est non nulle:

$$\left\{ F \right\} - \left[ K(U^i) \right] \left\{ U^i \right\} = \left\{ R(U^i) \right\} \neq 0 \quad (\text{III-15})$$

Une meilleure approximation  $\{U^{i+1}\}$  est obtenue en utilisant un développement du résidu correspondant à l'itération  $i+1$ , en série de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre et au voisinage de  $\{U^i\}$  :

$$\left\{ R(U^{i+1}) \right\} = \left\{ R(U^i + \Delta U^{i+1}) \right\} \simeq 0 \quad (\text{III-16a})$$

$$\left\{ R(U^{i+1}) \right\} = \left\{ R(U^i) \right\} + \left[ \frac{\partial \{R(U)\}}{\partial U} \right]_{U^i} \left\{ \Delta U^{i+1} \right\} + \dots \quad (\text{III-16b})$$

Le vecteur  $\{\Delta U^{i+1}\}$  contient les corrections à apporter à la solution  $\{U^i\}$  de l'itération précédente afin d'obtenir la nouvelle solution  $\{U^{i+1}\}$  :

$$\left\{ \Delta U^{i+1} \right\} = - \left[ \frac{\partial \{R(U)\}}{\partial U} \right]_{U^i}^{-1} \left\{ R(U^i) \right\} \quad (\text{III-17})$$

et

$$\left\{ U^{i+1} \right\} = \left\{ U^i \right\} + \left\{ \Delta U^{i+1} \right\} \quad (\text{III-18})$$

dans l'équation (III-17), l'expression  $\left[ \frac{\partial \{R(U)\}}{\partial U} \right]$  représente la matrice dite tangente globale notée  $[K_t(U)]$  et qu'on peut définir ainsi:

$$[K_t(U^1)] = - \left[ \frac{\partial \{R(U)\}}{\partial U} \right]_{U^1} \quad (\text{III-19a})$$

ou encore en tenant compte de (III-10) :

$$[K_t(U^1)] = [K(U^1)] + \left[ \frac{\partial [K(U)]}{\partial U} \right]_{U^1} \left\{ U^1 \right\} \quad (\text{III-19b})$$

L'algorithme de Newton-Raphson est très conseillé pour les problèmes fortement non-linéaires. La convergence est généralement assurée dès lors que la solution initiale  $\{U^0\}$  est suffisamment bonne et le maillage assez fin dans les régions à fort gradient. La figure III-3 illustre le processus itératif de cette méthode.

### III - 2.4.3 Méthode de Newton-Raphson modifiée

Dans le cas des problèmes faiblement non-linéaires, l'approximation suivante est réalisée:

$$[K_t(U^1)] = [K_t(U^0)] \quad (\text{III-20})$$

ce qui entraîne un nouveau schéma itératif:

$$\left\{ \Delta U^{i+1} \right\} = \left[ K_t(U^0) \right]^{-1} \left\{ R(U^i) \right\}$$

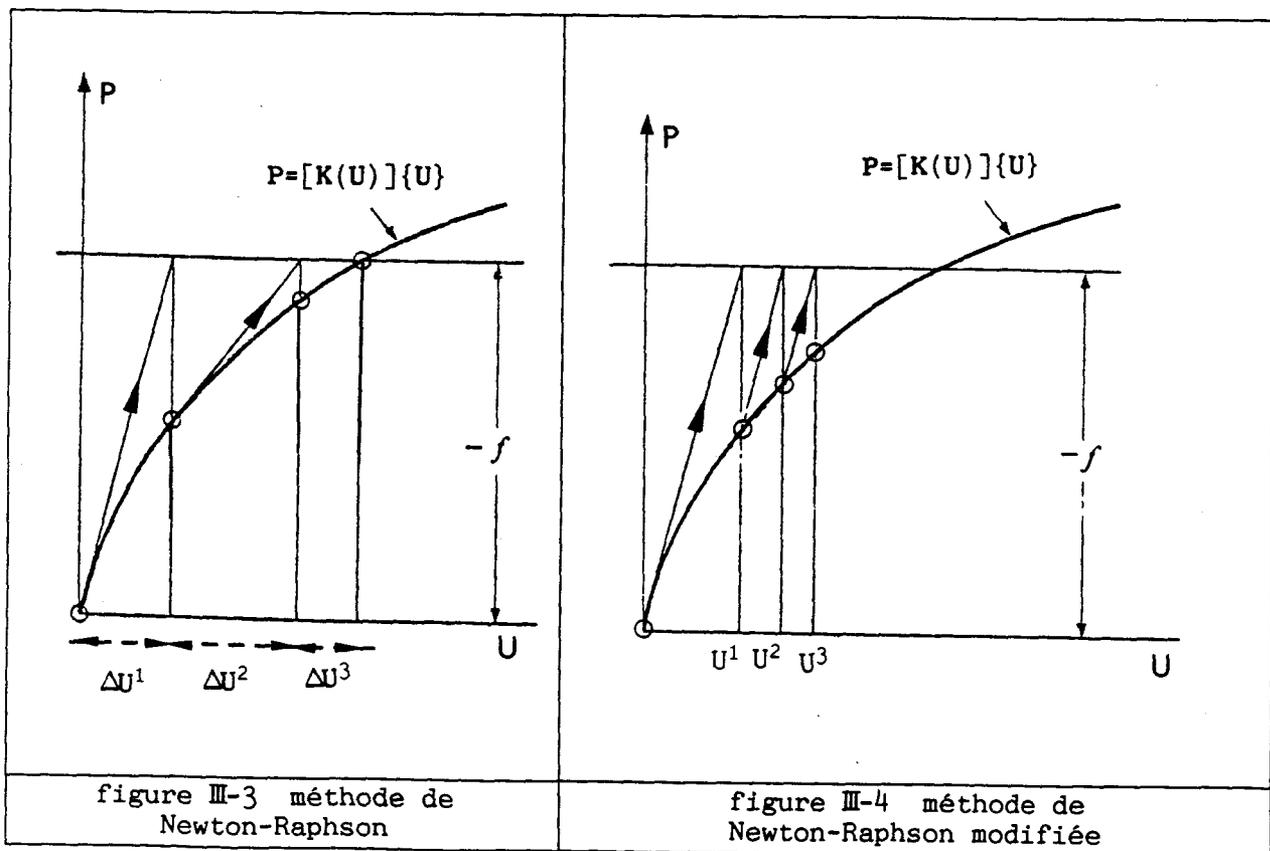
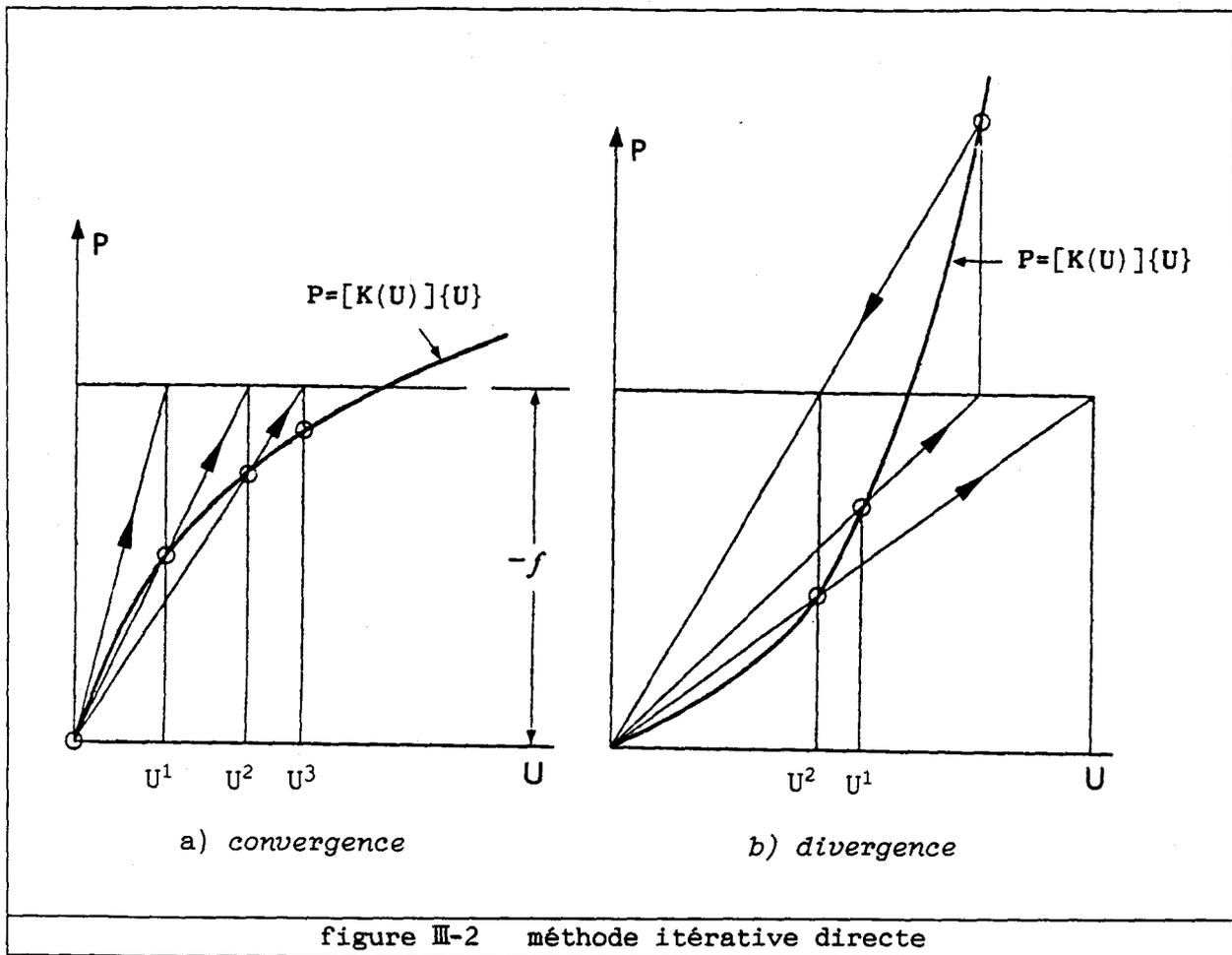
et

$$\left\{ U^{i+1} \right\} = \left\{ U^i \right\} + \left\{ \Delta U^{i+1} \right\}$$
(III-21)

Cette méthode nécessite un nombre d'itérations beaucoup plus important qu'avec la précédente méthode, néanmoins, elle permet de réduire le temps de calcul puisque la matrice tangente n'est calculée que lors de la première itération. Pour accélérer la convergence, il est souvent conseillé d'actualiser la matrice tangente ( expression III-20 ) après quelques itérations. Le processus itératif de cette méthode est illustré par la figure III-4.

#### III - 2.4.4 Conclusion

Etant donné l'importance d'une part des termes convectifs dans les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement artériel, et d'autre part des perturbations dues aux bifurcations et aux singularités. Notre choix s'est porté sur la méthode de Newton-Raphson en raison de son efficacité dans les applications industrielles et ce, malgré la difficulté de construire la matrice tangente élémentaire  $\left[ k_t^e(U) \right]$ .



III - 2.5 Formulation de la matrice tangente élémentaire pour la méthode de Newton-Raphson.

Pour construire la matrice tangente élémentaire  $[k_c^e(U)]$ , on part des expressions (III-7), (III-8) et (III-9) qui définissent le résidu élémentaire au noeud "i". Celles-ci sont dérivées explicitement par rapport aux variables nodales ( $U_j, P_j, V_j$ ), ainsi, on obtient les différents termes qui constituent la matrice essentielle pour la méthode de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{1i}^e}{\partial U_j} = & \iint_e \left[ N_i \left( N_j \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial x} U_k + \sum_1^8 N_k U_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + \sum_1^8 N_k V_k \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right] dxdr \\ & + \frac{1}{Re} \iint_e \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} - \frac{N_i}{r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] dxdr \\ & - \frac{1}{Re} \int_s \left[ N_i \frac{\partial N_j}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (III-22)$$

$$\frac{\partial R_{1i}^e}{\partial P_j} = \iint_e \left[ N_i \frac{\partial L_j}{\partial x} \right] dxdr \quad (III-23)$$

$$\frac{\partial R_{1i}^e}{\partial V_j} = \iint_e \left[ N_i N_j \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial r} U_k \right] dxdr \quad (III-24)$$

$$\frac{\partial R_{2i}^e}{\partial U_j} = \iint_e \left[ L_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] dxdr \quad (III-25)$$

$$\frac{\partial R_{2i}^e}{\partial P_j} = 0 \quad (\text{III-26})$$

$$\frac{\partial R_{2i}^e}{\partial V_j} = \iint_e \left[ L_i \left( \frac{N_j}{r} + \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right] dxdr \quad (\text{III-27})$$

$$\frac{\partial R_{3i}^e}{\partial U_j} = \iint_e \left[ N_i N_j \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial x} V_k \right] dxdr \quad (\text{III-28})$$

$$\frac{\partial R_{3i}^e}{\partial P_j} = \iint_e \left[ N_i \frac{\partial L_j}{\partial r} \right] dxdr \quad (\text{III-29})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{3i}^e}{\partial V_j} = & \iint_e \left[ N_i \left( N_j \sum_1^8 \frac{\partial N_k}{\partial r} V_k + \sum_1^8 N_k U_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + \sum_1^8 N_k V_k \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right] dxdr \\ & + \frac{1}{Re} \iint_e \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] dxdr \\ & + \frac{1}{Re} \iint_e \left[ \frac{N_i N_j}{r^2} - \frac{N_i}{r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] dxdr \\ & - \frac{1}{Re} \int_s \left[ N_i \frac{\partial N_j}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (\text{III-30})$$

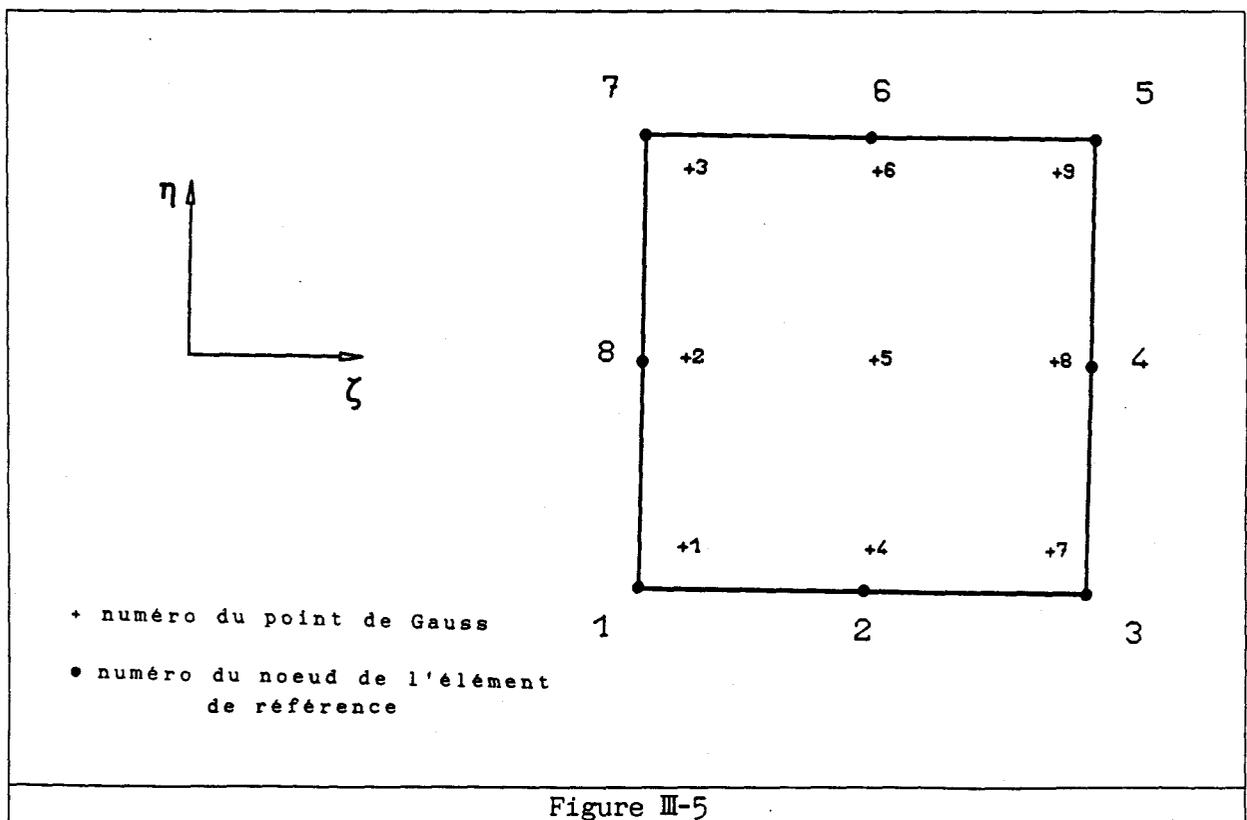
L'emplacement des termes (III-22) à (III-30) dans la matrice tangente élémentaire est défini comme suite :

$$[k_t^e(U)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{11}^e}{\partial U_j} & \frac{\partial R_{11}^e}{\partial P_j} & \frac{\partial R_{11}^e}{\partial V_j} \\ \frac{\partial R_{21}^e}{\partial U_j} & \frac{\partial R_{21}^e}{\partial P_j} & \frac{\partial R_{21}^e}{\partial V_j} \\ \frac{\partial R_{31}^e}{\partial U_j} & \frac{\partial R_{31}^e}{\partial P_j} & \frac{\partial R_{31}^e}{\partial V_j} \end{bmatrix} \quad (\text{III-31})$$

Après avoir exprimé tous les termes des matrices élémentaires en fonction des coordonnées locales  $\xi$  et  $\eta$ . Les intégrales peuvent être évaluées numériquement sur l'élément de référence défini par:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \xi \leq +1 \\ \text{et} & \\ -1 &\leq \eta \leq +1 \end{aligned} \quad (\text{III-32})$$

Ensuite, nous utilisons la *méthode d'intégration numérique de GAUSS* avec trois points d'intégration dans chaque direction, l'orientation et la position des neuf points sont données sur la figure (III-5) suivante:



### III - 2.6 Discretisation du problème instationnaire.

A partir des équations dynamiques (II-10) avec conditions aux limites, on va introduire une discretisation en temps selon un schéma semi-implicite pour les deux termes d'accélération  $\left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \right)$  et une discretisation par élément finis pour les autres termes.

En tenant compte de la formulation pour le problème d'écoulement en régime permanent (cf § III-2.3), on peut écrire pour les équations de Navier-Stokes (II-10), le système d'équations algébriques non-linéaire de type instationnaire suivant:

$$\left[ C \right] \frac{\partial}{\partial t} \left\{ U \right\} + \left[ K(U) \right] \left\{ U \right\} = \left\{ F \right\} \quad (\text{III-33})$$

où  $[C]$  est une matrice assemblée à partir des sous-matrices élémentaires définies par:

$$\left[ C_{ij}^e \right] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{Re} \iint_e N_i N_j dx dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha^2}{Re} \iint_e N_i N_j dx dy \end{bmatrix} \quad (\text{III-34})$$

Pour la discretisation temporelle, on introduit un pas de temps uniforme  $\Delta t$  à l'aide d'une approximation par différences finies décentrées. Le schéma que nous avons utilisé découle de la méthode d'Euler semi-implicite. Le point essentiel à souligner est que les deux composantes

de la vitesse à l'instant  $(n+1)\Delta t$  sont exprimées à la fois en fonction de ces mêmes vitesses et de celles correspondant au pas de temps précédent  $n\Delta t$ :

$$\frac{u_{(n+1)\Delta t} - u_{n\Delta t}}{\Delta t} = (1-\theta) \frac{\partial u_{(n+1)\Delta t}}{\partial t} - \theta \frac{\partial u_{n\Delta t}}{\partial t}$$

et

$$\frac{v_{(n+1)\Delta t} - v_{n\Delta t}}{\Delta t} = (1-\theta) \frac{\partial v_{(n+1)\Delta t}}{\partial t} - \theta \frac{\partial v_{n\Delta t}}{\partial t}$$
(III-35)

expressions qui peuvent être réarrangées de la manière suivante:

$$(1-\theta) \frac{\partial u_{(n+1)\Delta t}}{\partial t} = \frac{u_{(n+1)\Delta t} - u_{n\Delta t}}{\Delta t} - \theta \frac{\partial u_{n\Delta t}}{\partial t}$$

et

$$(1-\theta) \frac{\partial v_{(n+1)\Delta t}}{\partial t} = \frac{v_{(n+1)\Delta t} - v_{n\Delta t}}{\Delta t} - \theta \frac{\partial v_{n\Delta t}}{\partial t}$$
(III-36)

A partir de celles-ci, on va remplacer les deux composantes de l'accélération dans les équations dynamiques écrites à  $(n+1)\Delta t$  par le second membre de (III-36), extraire les deux expressions correspondantes à  $\left( \frac{\partial u_{n\Delta t}}{\partial t}, \frac{\partial v_{n\Delta t}}{\partial t} \right)$  des deux premières équations de Navier-Stokes écrites à  $n\Delta t$ , et, en poursuivant l'analyse par la méthode des résidus pondérés de Galerkin et les approximations sur les variables  $(u,p,v)$  de la même manière que précédemment à l'aide de (III-6), on aboutit ainsi à l'équation matricielle suivante:

$$\left[ R(U_{(n+1)\Delta t}) \right] = (1-\theta) \left\{ \left\{ F \right\} - \left[ K(U_{(n+1)\Delta t}) \right] \left\{ U_{(n+1)\Delta t} \right\} \right\} \Delta t$$

$$\begin{aligned}
& + \theta \left\{ \left\{ \mathbf{F} \right\} - \left[ \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{U}_{n\Delta t}) \right] \left\{ \mathbf{U}_{n\Delta t} \right\} \right\} \Delta t \\
& - \left[ \mathbf{C} \right] \left\{ \mathbf{U}_{(n+1)\Delta t} - \mathbf{U}_{n\Delta t} \right\}
\end{aligned} \tag{III-37}$$

dans laquelle,  $[\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{U}_{n\Delta t})]$  est une matrice non-linéaire définie à partir des expressions correspondantes à  $\frac{\partial U_{n\Delta t}}{\partial t}$  et  $\frac{\partial V_{n\Delta t}}{\partial t}$ . Ses éléments sont identiques à ceux de la matrice  $[\mathbf{K}(\mathbf{U})]$  du problème permanent à l'exception des termes pour l'équation de continuité.

A ce stade, il nous reste à formuler la matrice tangente  $[\mathbf{K}_t(\mathbf{U})]$  pour la méthode de Newton-Raphson. De manière générale, à l'iteration "i+1", on peut réécrire son expression (III-19b) en tenant compte des termes de la matrice  $[\mathbf{C}]$ :

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbf{K}_t(\mathbf{U}_{(n+1)\Delta t}^i) \right] &= \left[ \mathbf{C} \right] + (1-\theta)\Delta t \left[ \mathbf{K}(\mathbf{U}_{(n+1)\Delta t}^i) \right] \\
&+ (1-\theta)\Delta t \left[ \frac{\partial[\mathbf{K}(\mathbf{U})]}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\mathbf{U}_{(n+1)\Delta t}^i} \left\{ \mathbf{U}_{(n+1)\Delta t}^i \right\}
\end{aligned} \tag{III-38}$$

ensuite, nous pouvons calculer le vecteur global des corrections (ou accroissements) nécessaire à la construction de la nouvelle solution grâce au système suivant:

$$\left\{ \Delta \mathbf{U}_{(n+1)\Delta t}^{i+1} \right\} = \left[ \mathbf{K}_t(\mathbf{U}_{(n+1)\Delta t}^i) \right]^{-1} \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{U}_{(n+1)\Delta t}^i) \right\} \tag{III-39}$$

et

$$\left\{ U_{(n+1)\Delta t}^{i+1} \right\} = \left\{ U_{(n+1)\Delta t}^i \right\} + \left\{ \Delta U_{(n+1)\Delta t}^{i+1} \right\} \quad (\text{III-40})$$

Ainsi, pour chaque pas de temps, la procédure de résolution nécessite la connaissance de la solution du pas de temps précédent et le problème revient à effectuer une série d'itérations selon la méthode de Newton-Raphson jusqu'à ce que le critère de convergence suivant soit satisfait:

$$\frac{\left\| \left\{ U_{(n+1)\Delta t}^{i+1} \right\} - \left\{ U_{(n+1)\Delta t}^i \right\} \right\|}{\left\| \left\{ U_{(n+1)\Delta t}^{i+1} \right\} \right\|} < \epsilon = 10^{-5} \quad (\text{III-41})$$

En prenant pour  $\theta$  la valeur 0.5, ce schéma de discrétisation en temps n'est autre que celui de Crank-Nicholson, il a l'avantage d'être inconditionnellement stable pour des pas de temps relativement petits et offre une précision convenable pour les problèmes du premier ordre [41].

## CHAPITRE IV

### STRUCTURE ET ORGANISATION DU PROGRAMME DE CALCUL

IV - 1 INTRODUCTION

IV - 2 TECHNIQUE D'ASSEMBLAGE-ELIMINATION  
ET RESOLUTION FRONTALE.

IV - 3 ALGORITHME DE NEWTON-RAPHSON ASSOCIE  
A LA RESOLUTION FRONTALE.

IV - 3.1 1<sup>er</sup> cas: *algorithme pour l'écoulement permanent*

IV - 3.2 2<sup>er</sup> cas: *algorithme pour l'écoulement  
de type instationnaire.*

## IV STRUCTURE ET ORGANISATION DU PROGRAMME DE CALCUL.

### IV - 1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'organisation du programme de calcul, celui-ci est conçu à partir de la version III de MEF (Méthode des Eléments Finis) [35] et écrit avec le langage *Fortran 77*. On s'est attaché dans ces programmes à préserver la structure hiérarchique et les noms des différents paramètres utilisés. Certains de ses blocs de calculs ont été conservés sous leur formes originales, tels que les sous-programmes de lecture et contrôle des données, de calcul des coefficients et coordonnées des points de Gauss nécessaires à l'intégration numérique ainsi que les différents tableaux contenant les fonctions d'interpolation et leurs dérivées. D'autres sous-programmes ont été modifiés pour traiter notre problème, notamment l'adaptation de l'algorithme de Newton-Raphson à la méthode de résolution frontale.

Par ailleurs, nous avons créé et adapté au bloc d'exécution résolution de MEF, des sous-programmes de calcul tels que:

- Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire  $[k^e(U)]$  correspondant aux équations de Navier-Stokes.
- Le calcul du résidu élémentaire  $\{r(U)\}$  et son assemblage dans le résidu global  $\{R(U)\}$ .
- Le calcul de la matrice tangente élémentaire  $[k_t^e(U)]$  pour la méthode de Newton-Raphson.
- La méthode frontale pour l'assemblage-élimination et résolution du système algébrique non-linéaire.
- L'algorithme d'Euler semi-implicite pour la discrétisation temporelle du problème instationnaire.
- Et la représentation graphique des solutions numériques.

Ainsi, sous sa version actuelle, le programme MEF peut servir à

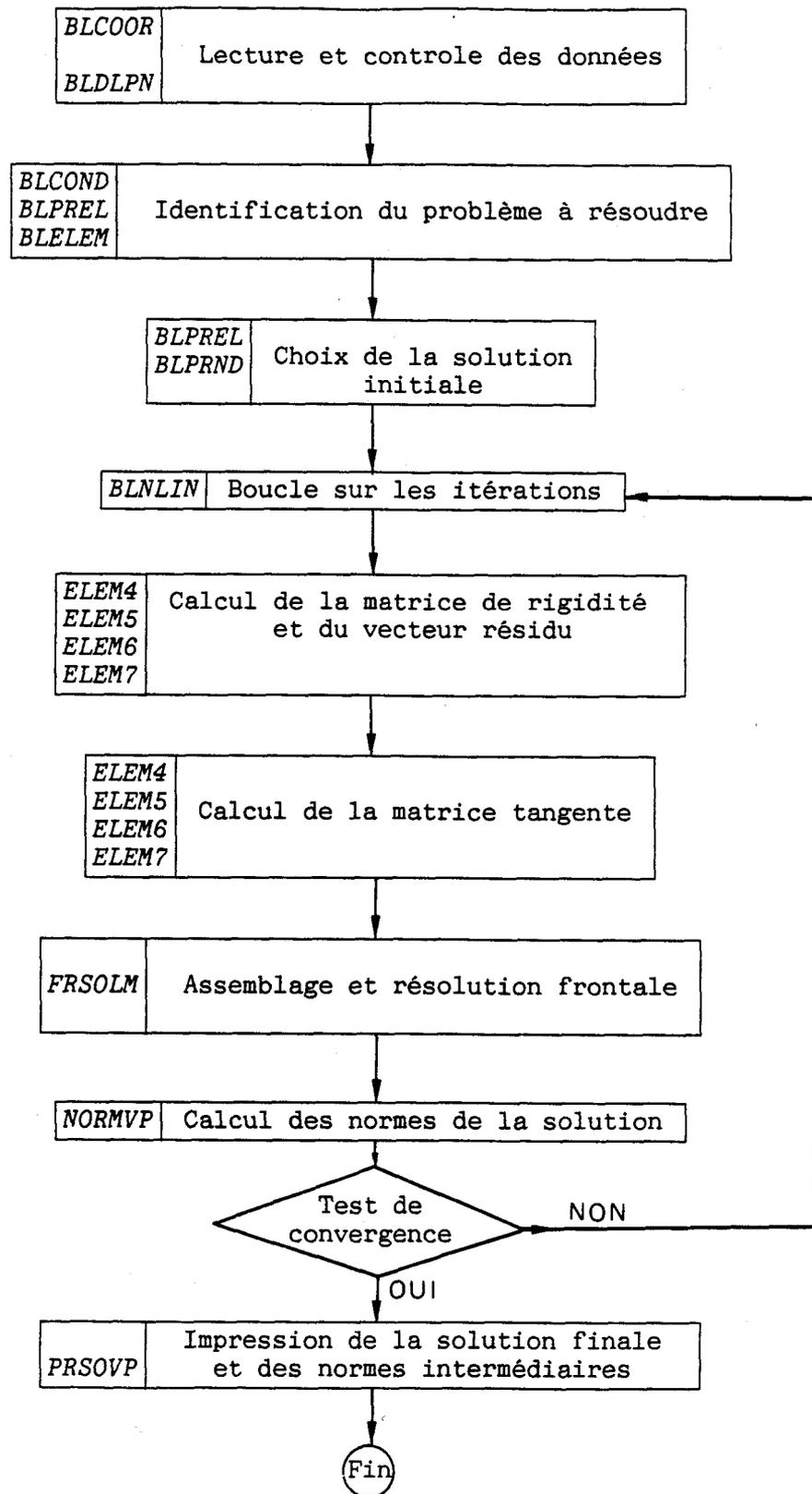


Figure IV-1 Structure générale du programme de calcul.

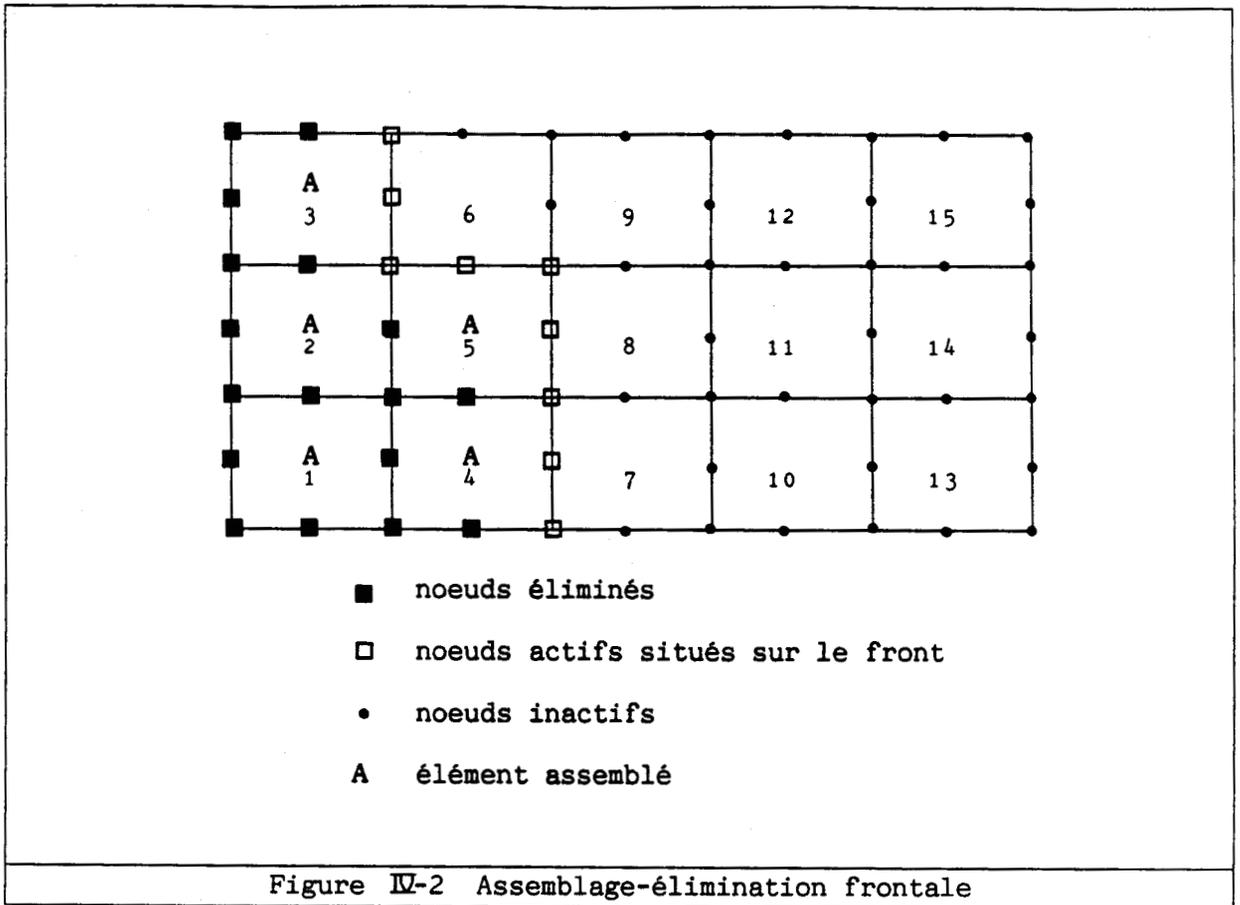
traiter les problèmes harmoniques anisotropes, les problèmes d'élasticité linéaire et les équations de Naviers-Stokes pour les écoulements plans ou à symétrie de révolution aussi bien en régime permanent qu'en régime non-permanent. L'organigramme général du code de calcul est présentée sur la figure (IV-1).

Citons également que la génération du maillage ainsi que la topologie des éléments a été effectué à l'aide du module *mosaïque* du code ATILA.

#### IV - 2 Technique d'assemblage-élimination et résolution frontale.

La méthode classique d'élimination de Gauss pour une matrice stockée par la technique de ligne de ciel [35] s'est avérée inapplicable pour notre problème en raison de l'existence de termes nuls sur la diagonale de la matrice tangente  $[k_t^e(U)]$ , cf équations (III-26) et (III-31). Nous avons donc été amené à implanter au programme MEF, une autre méthode de résolution avec pivot et qui est particulièrement recommandée pour les matrices creuses. C'est la méthode dite de résolution frontale, qui a été introduite par IRONS [39] pour résoudre les problèmes de calcul de structures dans le domaine linéaire, et développée par TAYLOR [36] et SLOAN [40] pour les problèmes non-linéaires.

Le principe de cette méthode est basé sur l'élimination des inconnues n'appartenant pas au front pendant la phase d'assemblage d'un élément dans la matrice globale de stockage  $[K_t(U)]$ . C'est à dire que pour chaque matrice tangente élémentaire  $[k_t^e(U)]$  calculé (en tenant compte des conditions aux limites), les inconnues éliminées sont celles liées aux noeuds qui n'interviennent pas avec l'assemblage de nouveaux éléments. Les figures IV-2 et IV-3 représentent pour un maillage à 1 degré de liberté (d.d.l.) par noeud, une schématisation de cette technique d'assemblage et élimination des inconnues.



Ainsi, après élimination de l'inconnue  $U_s$ , les nouveaux termes de la matrice de stockage  $(K'_t)_{ij}$  et du second membre  $R'_i$  (résidu global) sont donnés par l'algorithme de Gauss:

$$(K'_t)_{ij} = (K_t)_{ij} - \left[ \frac{(K_t)_{is}(K_t)_{sj}}{(K_t)_{ss}} \right] \quad (\text{IV-1})$$

et

$$R'_i = R_i - \frac{(K_t)_{is}}{(K_t)_{ss}} R_s \quad (\text{IV-2})$$

De cette manière, la ligne et la colonne correspondant à une élimination sont remplacées par celles qui apparaîtront avec une nouvelle inconnue de l'élément qui suit, et de ce fait, la largeur du front évolue constamment au cours de la phase d'assemblage-élimination.

Par ailleurs, la taille de la matrice de stockage est conditionnée

5	8	13	16	21	24	29
4	II	12	IV	20	VI	28
3	7	11	15	19	23	27
2	I	10	III	18	V	26
1	6	9	14	17	22	25

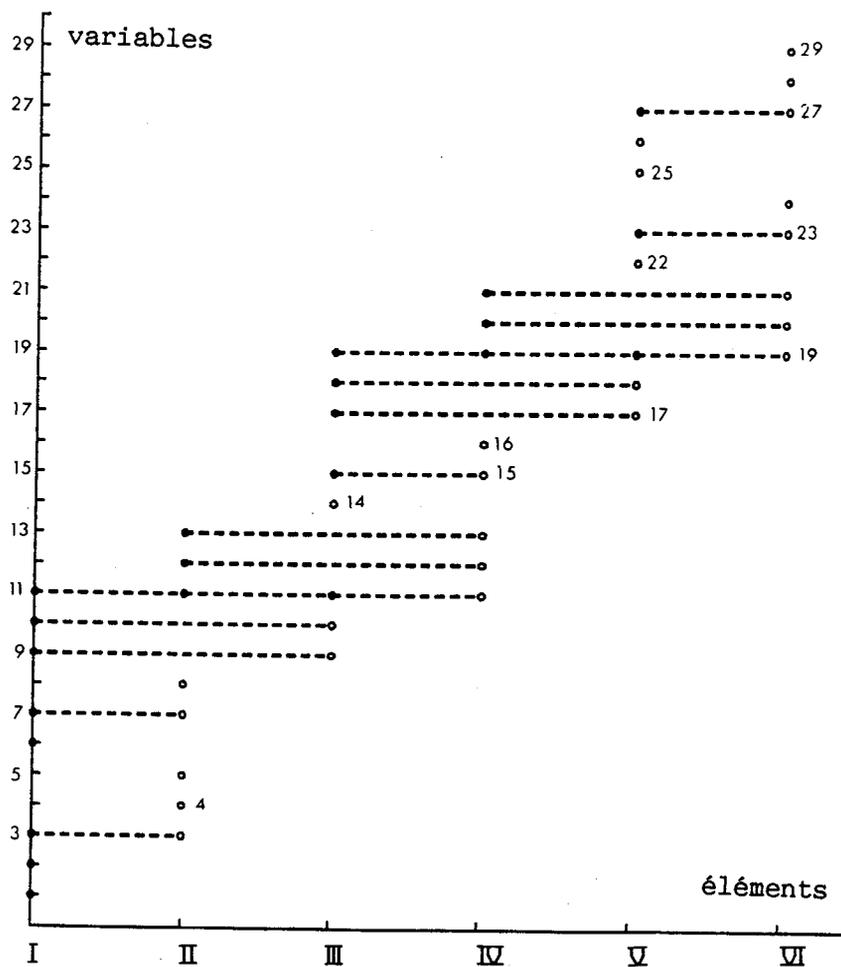


Figure IV-3 Représentation graphique de l'assemblage en éléments finis par la méthode frontale, IRONS [39].

par la topologie du maillage, il faut donc effectuer la numérotation des éléments suivant la direction qui minimise la largeur maximale du front (LFRONT). On définit ce paramètre par le nombre maximum de degrés de liberté totalisés par les éléments situés sur une des faces du domaine étudié. Dans le cas du maillage de la figure IV-2 et pour un élément isoparamétrique à 20 degrés de liberté, la valeur nécessaire de LFRONT est égal à 40, alors que pour une numérotation horizontale du même maillage, cette valeur doit-être pris égal à 60, soit une augmentation de la taille de la matrice de stockage  $[K_t(U)]$  de 125%.

Lors de la phase d'assemblage-élimination, la matrice d'assemblage  $[K_t(U)]$  et le vecteur résidu global  $\{R(U)\}$  de dimensions respectives  $(LFRONT \cdot LFRONT)$  et  $(NDLT)$  sont stockés en mémoire centrale; Les termes entre crochets de l'équation (IV-1) sont stockés en mémoire périphérique pour être utilisé ultérieurement muni d'un tableau de localisation qui définit les inconnues correspondantes. Ce procédé nous permet d'éviter l'encombrement de la mémoire centrale.

Pour l'ensemble des éléments qui constituent le maillage du domaine d'écoulement étudié, le même processus d'assemblage-élimination est répété jusqu'au dernier élément et dernière inconnue ainsi que le montre la figure IV-3, et on peut alors déterminer les inconnues correspondant au dernier élément et retrouver les unes après les autres, toutes les inconnues du problème par substitution arrière, moyennant les données stockées hors mémoire centrale.

#### IV - 3 Algorithme de Newton-Raphson associé à la résolution frontale.

##### IV - 3.1 1<sup>er</sup> cas : écoulement permanent.

Comme nous l'avons vu au § III-2.3, le système d'équations algébriques non-linéaire obtenu à partir des équations de Navier-Stokes s'écrit ainsi:

$$\{R(U)\} = \{F\} - [K(U)] \{U\}$$

La résolution de ce système par la méthode de Newton-Raphson implique la construction de la matrice tangente  $[K_t(U)]$  à partir du résidu  $\{R(U)\}$  et à l'aide de l'expression (III-19b) :

$$[K_t(U)] = [K(U)] + \left[ \frac{\partial [K(U)]}{\partial U} \right] \{U\}$$

Avant de commencer les boucles d'itérations au sein du processus de résolution, il est conseillé d'initialiser le vecteur global des inconnues noté *VDLG* ( contenant tous les degrés de liberté du problème ) par une solution approchée  $\{U^0\}$  qui peut-être construite à partir de la solution d'un problème de " référence ". Ce procédé nous a permis de minimiser le nombre d'itérations et donc le temps de calcul nécessaire à la convergence de la solution approchée. A titre d'exemple, nous présentons un tableau regroupant 8 essais de calcul d'écoulements dans 2 géométries différentes. Il apparait clairement que l'initialisation du problème avec la solution obtenue pour un nombre de Reynolds  $Re = 1$  réduit considérablement le nombre d'itérations effectuées.

Tableau: influence de la solution initiale sur le nombre d'itérations.

solution initiale	écoulement en régime permanent			
	bifurcation 60°		sténose 88%	
	Re = 100	Re = 200	Re = 100	Re = 200
VDLG <sup>i</sup> nul+CL	12 iter	19 iter	18 iter	+25 iter
VDLG <sup>i</sup> sol.Re=1	4 iter	5 iter	4 iter	5 iter

où *VDLG<sup>i</sup>* : vecteur contenant toutes les variables nodales du problème et utilisé comme solution initiale.

Algorithme 1 :

Initialisation: choix de la solution approchée  $\{U^0\}$ ,

$i = 1, 2, \dots$  pour chaque itération

calcul du résidu global avec la solution  $(U^{i-1})$

boucle sur l'ensemble des éléments

organigramme figure (IV-4).

calculer la matrice élémentaire  $[k^e(U^{i-1})]$

calculer le résidu élémentaire :

$$\left\{ r(U^{i-1}) \right\} = \{f\} - [k^e(U^{i-1})] \{U^{i-1}\}$$

assembler  $\left\{ r(U^{i-1}) \right\}$  dans le résidu global  $\left\{ R(U^{i-1}) \right\}$

boucle sur l'ensemble des éléments

calculer la matrice tangente élémentaire  $[k_t^e(U^{i-1})]$

et assemblage dans  $[K_t(U^{i-1})]$

élimination et résolution par la méthode frontale du système:

$$[K_t(U^{i-1})] \{\Delta U^i\} = \left\{ R(U^{i-1}) \right\}$$

construire la nouvelle solution approchée:

$$\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\}$$

le test d'arrêt consiste à évaluer la différence entre deux solutions successives en termes de norme euclidienne:

$$\frac{\|\{U^i\} - \{U^{i-1}\}\|}{\|\{U^i\}\|} \leq \epsilon = 10^{-5}$$

De manière générale, le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de la solution est de l'ordre de 3 à 5, celui-ci dépend essentiellement de la valeur prise par le nombre de Reynolds, du choix de

la solution initiale et bien sûr de la finesse du maillage utilisé.

IV - 3.2 2<sup>er</sup> cas : écoulement de type instationnaire.

Pour chaque pas de temps, la résolution de tels problèmes est identique à celle décrite précédemment mais avec des matrices élémentaires  $[k^e(U)]$  et  $[k_t^e(U)]$  différentes, puisque, intervient dans celles-ci les termes d'accélération ainsi que la matrice  $[\tilde{k}^e(U)]$  calculée avec la solution du pas de temps précédent.

Algorithme 2 :

Initialisation: choix de la solution approchée  $\left\{ U_0^0 \right\}$ .

n = 1, 2, ... pour chaque pas de temps nΔt

i = 1, 2, ... pour chaque itération

boucle sur l'ensemble des éléments

calculer la matrice élémentaire [c]

calculer la matrice élémentaire  $[k^e(U_{n\Delta t}^{i-1})]$

calculer le résidu élémentaire  $\left\{ r(U_{n\Delta t}^{i-1}) \right\}$  :

(*expression III-37 sous forme élémentaire*)

et l'assembler dans le résidu global  $\left\{ R(U_{n\Delta t}^{i-1}) \right\}$

boucle sur l'ensemble des éléments

calculer la matrice tangente élémentaire  $[k_t^e(U_{n\Delta t}^{i-1})]$

(*expression III-38 sous forme élémentaire*)

et assemblage dans  $[K_t(U_{n\Delta t}^{i-1})]$

élimination et résolution par la méthode frontale du système:

$$[K_t(U_{n\Delta t}^{i-1})] \left\{ \Delta U_{n\Delta t}^i \right\} = \left\{ R(U_{n\Delta t}^{i-1}) \right\}$$

construire la nouvelle solution approchée:

$$\left\{ U_{n\Delta t}^i \right\} = \left\{ U_{n\Delta t}^{i-1} \right\} + \left\{ \Delta U_{n\Delta t}^i \right\}$$

test de convergence:

$$\frac{\left\| \left\{ U_{n\Delta t}^i \right\} - \left\{ U_{n\Delta t}^{i-1} \right\} \right\|}{\left\| \left\{ U_{n\Delta t}^{i-1} \right\} \right\|} \leq \epsilon = 10^{-5}$$

sauvegarder la solution  $\left\{ U_{n\Delta t} \right\}$  nécessaire à la construction de

la solution au pas de temps suivant  $\left\{ U_{(n+1)\Delta t} \right\}$ .

L'algorithme ainsi présenté correspond au schéma semi-implicite de Crank-Nicholson, il a l'avantage d'être inconditionnellement stable par rapport à d'autres algorithmes existants, c'est ce qui ressort des travaux de VAN de VOSSE [41] et de LOYD et al [42].

Le nombre d'itérations effectuées entre deux pas de temps successifs ne dépasse pas 3, ceci est en partie dû à la finesse du pas de temps utilisé ( $\Delta t = 0.04166$ ) pour le calcul d'écoulement périodique dans une bifurcation.

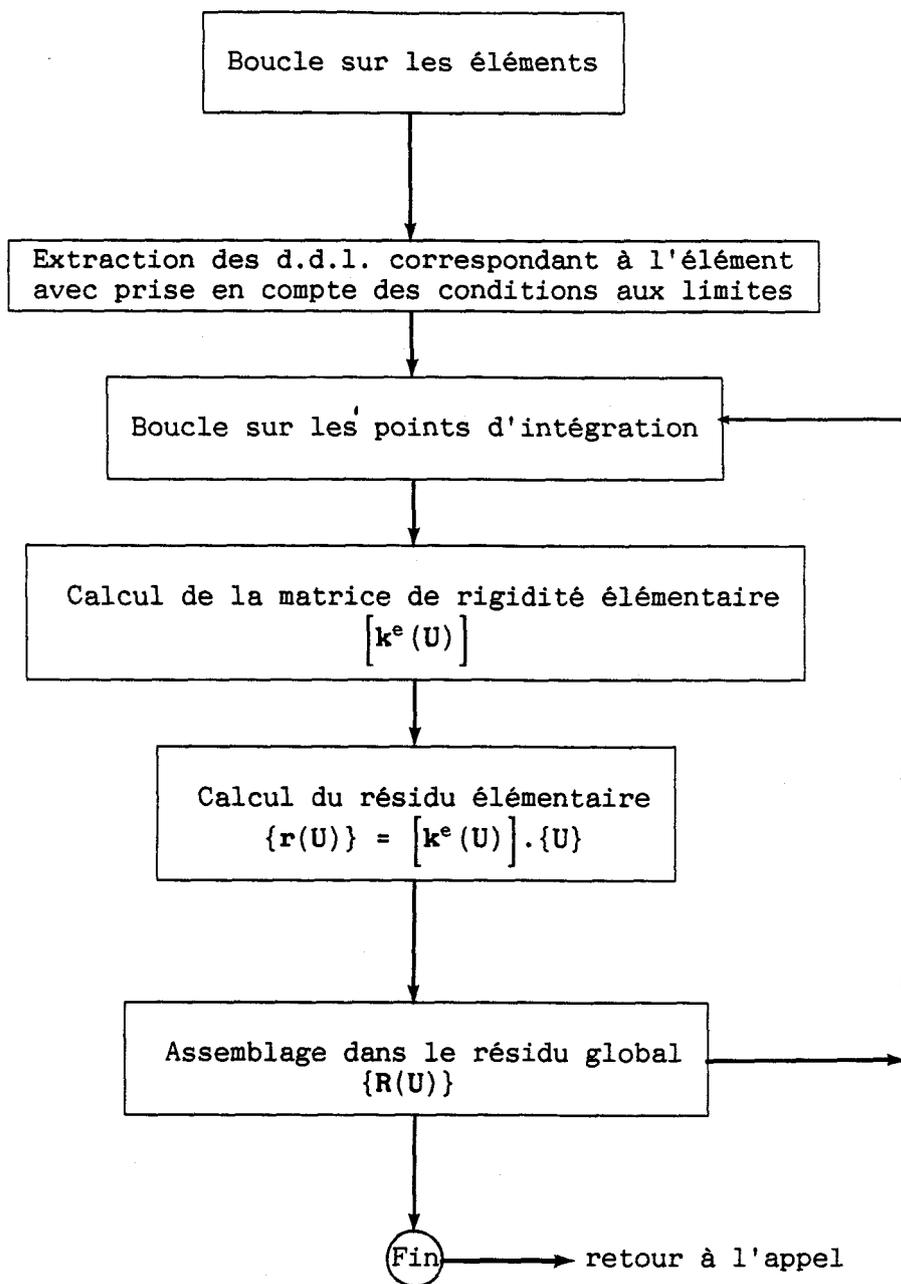


Figure IV-4 Construction du résidu global de résolution.

## CHAPITRE V

### PRESENTATION DES RESULTATS ET DISCUSSIONS

#### V - 1 ETUDE DE L'ÉCOULEMENT PERMANENT

##### V - 1.1 Introduction

##### V - 1.2 Analyse de l'écoulement dans des conduites présentants des rétrécissements de section

###### V - 1.2.1 Modèles géométriques

###### V - 1.2.2 Influence du degré de rétrécissement

###### V - 1.2.3 Influence du nombre de Reynolds

##### V - 1.3 Analyse de l'écoulement dans les bifurcations

###### V - 1.3.1 Présentation

###### V - 1.3.2 Influence de l'angle et du nombre de Reynolds sur le champ de l'écoulement

##### V - 1.4 Simulation de l'écoulement dans les pontages artériels

###### V - 1.4.1 Géométries et maillages

###### V - 1.4.2 Analyse du champ de vitesses

###### V - 1.4.3 Influence de la géométrie sur la distribution de la pression

##### V - 1.5 Conclusion

#### V - 2 EXTENSION A L'ÉCOULEMENT DE TYPE INSTATIONNAIRE

##### V - 2.1 Introduction et Tests préliminaires

##### V - 2.2 Simulation de l'écoulement périodique dans une bifurcation

## V - PRESENTATION DES RESULTATS ET DISCUSSIONS

### V - 1 ETUDE DE L'ÉCOULEMENT PERMANENT

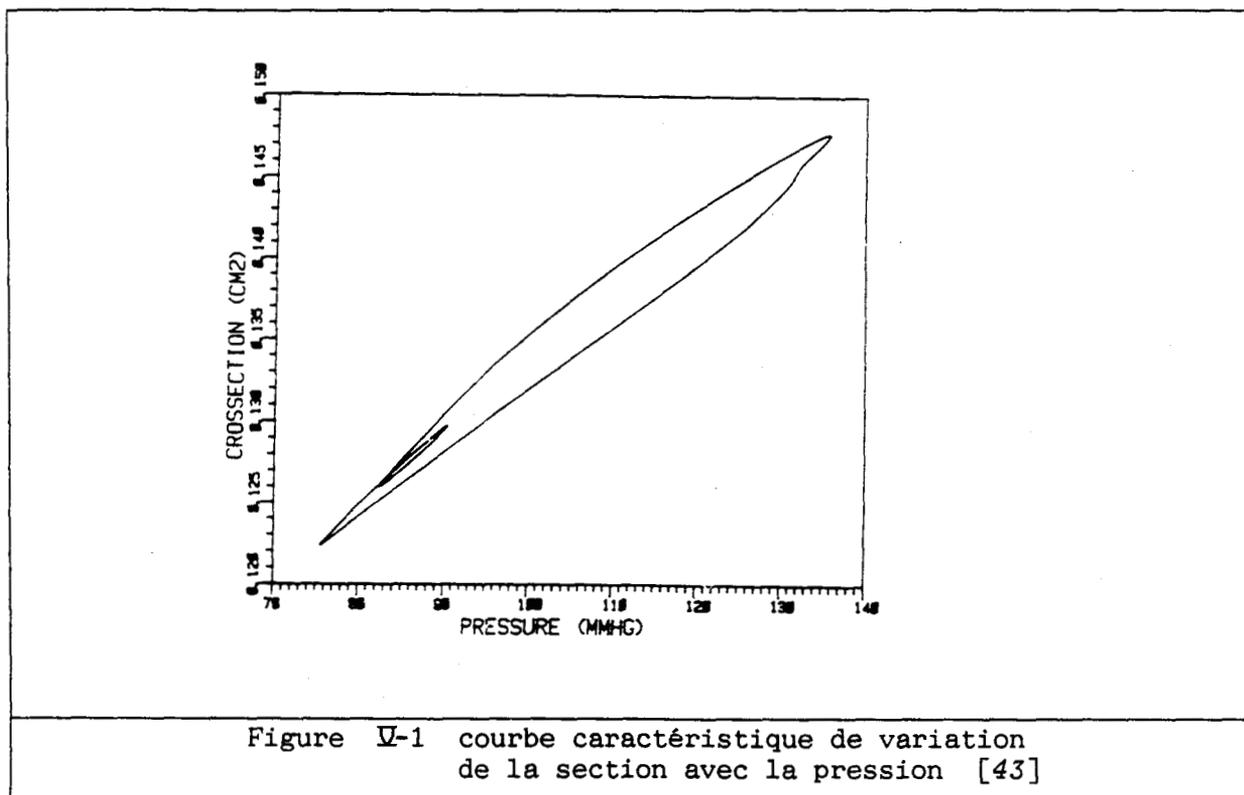
#### V - 1.1 Introduction

En biomécanique cardiovasculaire, l'élément essentiel permettant de mieux comprendre la physiologie artérielle est sans doute celui de l'influence des caractéristiques physiques de l'écoulement sur la pathologie. Cependant, la nature de tels écoulements dans les vaisseaux sanguins est extrêmement complexe, cela étant dû d'une part à la géométrie du système circulatoire, notamment au voisinage de singularités telles que les coudes, les embranchements vasculaires, et d'autre part au comportement rhéologique du sang. Néanmoins, certaines hypothèses de travail sont nécessaires pour notre approche de l'écoulement par éléments finis.

Dans les problèmes hémodynamiques, le sang peut être considéré comme un fluide newtonien ou non newtonien moyennant certaines hypothèses. En ce qui concerne notre étude, nous supposons que le fluide est newtonien, ce qui est généralement admis pour l'écoulement dans les gros vaisseaux, telles que l'aorte et ses principales artères latérales où le taux de cisaillement peut atteindre  $3000 \text{ s}^{-1}$ . Par contre, dans les vaisseaux à très faible calibre (rayon  $< 1\text{mm}$ ), où le taux de cisaillement reste inférieur à  $100 \text{ s}^{-1}$ , le comportement rhéologique du sang doit être approché par des modèles non newtoniens.

En ce qui concerne les modèles géométriques étudiés, nous supposons que les parois sont rigides et imperméables. Dans le cas contraire, il faut ajouter au système de Navier-Stokes les équations qui définissent les déplacements de la paroi en fonction des gradients de vitesses et les conditions aux limites associées (en tenant compte de son épaisseur et ses propriétés caractéristiques). Néanmoins, on admet que l'hypothèse sur la rigidité de la paroi est acceptable puisque d'après [43], la courbe caractéristique ( l'hystérésis de la figure V-1 ) de variation de la

section en fonction de la pression n'indique en moyenne qu'une variation d'environ 10% du rayon.



Enfin, dans toute la première partie de cette étude, nous supposons que l'écoulement est permanent et nous appliquons la méthode des éléments finis pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Les résultats ainsi obtenus ont fait l'objet de deux communications [44-45]. L'extension de l'étude au cas instationnaire est réalisée dans la deuxième partie de ce chapitre.

## V - 1.2 Analyse de l'écoulement dans des conduites présentant des rétrécissements de section

### V - 1.2.1 Modèles géométriques

La géométrie de l'écoulement faisant l'objet de notre étude est caractérisée par un tube cylindrique présentant des déformations de section à symétrie axiale représentées par une courbe de Gauss. Nous présentons sur la figure V-2 le maillage des trois modèles de rétrécissement de section (36%, 55% et 88%). Nous avons volontairement serré le maillage au niveau de la paroi et dans la région de la déformation afin d'améliorer la précision des calculs dans les zones à fort gradient. Les différents paramètres liés à chaque maillage et qui définissent la taille du problème sont donnés dans le tableau suivant:

	36%	55%	88%
Nombre Total d'Eléments NELT	198	198	210
Nombre Total de Noeuds NNT	673	673	713
Nombre Total de Degrés de Liberté NDLT	1584	1584	1678
Largeur maximale du Front LFRONT	70	70	70

Les équations de la dynamique associées à ces modèles géométrique sont celles du système (III-10) en tenant compte de la symétrie de révolution.

### V - 1.2.2 Influence du degré de rétrécissement

Nous avons effectués les calculs numériques avec les quatre modèles de déformations à symétrie de révolution (36% , 55% et 88% pour 2 longueurs

de déformation) et en faisant prendre au nombre de Reynolds des valeurs comprises entre 1 et 1000. Les résultats numériques obtenus nous permettent de représenter graphiquement les champs de vitesses et l'évolution de la pression dans tout le domaine de l'écoulement.

Les figures V-3 et V-4 montrent que pour les premiers nombres de Reynolds  $Re = 1$  et  $20$ , les degrés de rétrécissement 36% et 55% sont pratiquement sans influence sur le champ de vitesse. Par contre, pour le rétrécissement à 88% et un nombre de Reynolds  $Re = 10$ , on peut observer l'existence des premières vitesses négatives figure V-9. Celles-ci se situent dans la zone de déformation aval et près de la paroi. A partir de  $Re = 20$ , l'écoulement inversé près de la paroi prend de l'importance et donne naissance à une zone de recirculation avec des vitesses relativement faibles figure V-10.

De même, les résultats obtenus avec les trois modèles pour  $Re = 200$  mettent bien en évidence l'influence du degré de rétrécissement sur le champ de l'écoulement. Ainsi, pour le modèle à 36%, on ne remarque qu'une faible déformation des profils de vitesse localisée dans la zone de rétrécissement. Cette observation reste valable pour le modèle à 55%, avec cependant l'apparition de vitesses négatives près de la paroi et en aval de la déformation figure V-5. Enfin, c'est avec le modèle à 88% que la perturbation est la plus marquée: l'inversion de l'écoulement atteint la section aval et la zone de recirculation s'est considérablement développée figure V-14.

Par ailleurs, nous avons représenté sur les figures V-15, V-16 l'évolution de la pression sur la ligne centrale de l'écoulement obtenue avec des modèles à 36% et 55% de constriction et rapportée à celle calculée pour un tube de même longueur mais de section constante. Pour le modèle à 88%, nous avons porté sur les figures V-17 à V-23 la distribution des pressions sur la paroi en trait continu et le long de la ligne centrale d'écoulement en trait discontinu.

D'une manière générale, pour un même nombre de Reynolds, ces figures mettent clairement en évidence l'influence des caractéristiques géométriques de la singularité sur l'évolution de la pression locale ainsi que la chute globale de pression. Ces dernières sont d'autant plus importantes que le degré d'obstruction est grand. Ainsi, si on compare les résultats numériques obtenus avec les trois modèles (de même longueur de rétrécissement) pour  $Re = 20$  figures V-15 et V-19 on remarque que la chute de pression globale calculée avec le modèle à 88% est de 3.5 à 4 fois plus importante que celle obtenue avec les deux autres modèles, et que ces proportions augmentent avec le nombre de Reynolds.

### V - 1.2.3 Influence du nombre de Reynolds

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à l'influence des effets d'inertie par rapport aux effets de viscosité, et cela grâce aux solutions numériques obtenues pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et avec les quatre modèles géométrique de sténose. Là encore, nous considérons l'influence sur le champ de vitesses, sur la taille de la zone de recirculation, sur l'évolution de la vitesse axiale, la pression et, bien sûr, les chutes de pression.

Il ressort des figures V-3 à V-14, concernant le champ de vitesse, que pour chaque modèle géométrique, les déformations des profils de vitesses sont d'autant plus nets que le nombre de Reynolds est grand. Cette influence se fait surtout sentir dans la région où la pente du profil de la paroi est la plus forte. Ces observations concernent surtout les deux modèles à faible taux d'obstruction (36% et 55%). Par contre, c'est avec le modèle à 88% qu'on note les effets les plus marquants du nombre de Reynolds  $Re$  sur le champ de l'écoulement. Les perturbations se font sentir dès les premiers nombres de Reynolds ( $Re = 10$ ), figure V-9 d'une part au niveau de la section minimale où la vitesse maximale se déplace de l'axe du tube vers la paroi et, d'autre part, l'apparition de vitesses négatives au voisinage de la paroi et en aval de la sténose.

De telles perturbations s'accroissent au fur et à mesure que le nombre de Reynolds  $Re$  augmente: les termes d'inertie deviennent donc prépondérants, et on voit apparaître une zone de recirculation dont la taille évolue très rapidement. Ainsi, pour  $Re = 100$  figure V-13, le point de réattachement est situé au niveau de la section aval de la conduite, ce qui rend impossible de localiser le point de réattachement de la zone de recirculation au delà de cette valeur du nombre de Reynolds. Quant au cas où  $Re = 300$  figure V-14, on peut noter quelques fluctuations numériques sur les vitesses dans la zone proche de la déformation. Il est possible que ces fluctuations soient dues au fait que le pas de maillage dans cette zone est trop grand par rapport aux variations de vitesses qui s'y produisent.

La figure V-24 , concerne l'évolution de la fonction de courant  $\psi(x,r)$  et de la zone de recirculation en fonction du nombre de Reynolds. Cette fonction de courant  $\psi(x,r)$  est calculée à partir de la connaissance des composantes  $(u,v)$  du vecteur vitesse. Nous présentons dans l'annexe III les principales étapes de l'analyse nécessaires pour déterminer la fonction de courant.

L'influence du nombre de Reynolds sur la taille de la zone de recirculation est donnée par la figure V-25a . Sur cette dernière sont portés, d'une part, des résultats numériques [12] et expérimentaux [13] obtenus pour un modèle géométrique de sténose représenté par une déformation pariétale sinusoïdale à 89% de rétrécissement et, d'autre part, les résultats issus de notre étude numérique avec le modèle à 88%. La comparaison entre ces résultats amène à constater une bonne concordance.

Nous avons porté sur la figure V-26 les résultats numériques pour la vitesse axiale obtenue avec les trois modèles de rétrécissement. Là encore, l'influence du nombre de Reynolds sur l'évolution de la vitesse axiale le long de la ligne centrale de l'écoulement est très nette . La première remarque est que la vitesse axiale passe par un maximum au niveau la section minimale, et que cette valeur maximale diminue et se déplace

légèrement en aval avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Ensuite, vers la section de sortie, la vitesse décroît et peut atteindre une valeur qui reste supérieure ( d'autant plus importante que le nombre de Reynolds est grand ) à celle imposée à l'amont. Des résultats similaires ont été trouvés par DESHPANDE [12] et sont reproduit sur la figure V-25b .

Par ailleurs, si l'on s'intéresse aux profils de vitesse en différentes positions de la déformation, on observe que la composante radiale de la vitesse est toujours trop faible vis à vis de la composante axiale, sauf au voisinage de la section minimale où sa valeur est plus importante ( figures V-3 à V-14 ).

En ce qui concerne l'influence du nombre de Reynolds  $Re$  sur la distribution de la pression. Les allures des courbes sont quasiment semblables: elles traduisent une chute importante de la pression au niveau de la section minimale et mettent bien en évidence l'effet de plus en plus sensible de l'augmentation du nombre de Reynolds sur la diminution des chutes globales de pression.

Pour le modèle à 88%, nous avons représenté sur les figures V-18 à V-23 à la fois l'évolution de la pression sur la ligne centrale et celle sur la paroi. En plus des observations faites précédemment pour les deux modèles à 36% et 55%, il est intéressant de noter, que la limite de la chute de pression est localisée juste au niveau de la section minimale, et que, dans les sections situées en amont et en aval de la déformation pariétale, la pression y est presque uniforme. Par ailleurs, c'est dans la zone proche de la paroi que les particules fluides ( dont la quantité de mouvement est la plus faible ) sont le plus affectées par la présence d'un gradient de pression négatif. De telles situations expliquent l'existence de zone de recirculation en aval de la sténose.

**Remarque:**

Sur les figures V-8 à V-13 , on peut comparer les résultats obtenues pour les deux modèles de même pourcentage de rétrécissement 88% mais avec deux longueurs de déformations différentes ( $\lambda = 1$  et  $\lambda = 3$ ). Ainsi, pour un nombre de Reynolds  $Re = 10$  , on remarque d'une part, l'apparition nette d'une zone de recirculation dont la taille est plus importante avec le modèle à courte déformation ( $\lambda = 1$ ), et d'autre part que la position du premier point de séparation est située légèrement en aval de la section minimale. Cette observation est encore plus nette avec les autres valeurs du nombre de Reynolds figures V-10 à V-13 .

Par ailleurs, les figures V-17 à V-22 , montrent l'évolution de la pression sur la paroi et la ligne centrale de l'écoulement. D'une manière générale, la chute de pression est plus brutale au niveau de la section minimale du modèle à courte déformation. Ensuite on peut noter que pour les premiers nombres de Reynolds (  $Re = 1, 10, 20$  et  $50$  ), la chute de pression globale est moins importante avec le modèle à courte déformation ( $\lambda=1$ ) qu'avec l'autre modèle. Par contre, pour les deux valeurs du nombre de Reynolds (  $Re = 70$  et  $100$  ) , cette situation a tendance à s'inverser figures V-21 et V-22 .

### V - 1.3 Analyse de l'écoulement dans les bifurcations

#### V - 1.3.1 Présentation

Notre modélisation des écoulements au niveau des bifurcations a pour objectif principal de mettre en évidence l'influence de l'angle des branches et du nombre de Reynolds sur le champ d'écoulement. Pour décrire ces aspects fondamentaux, nous faisons l'hypothèse que l'écoulement est plan, ainsi, l'étude est faite en considérant trois modèles de bifurcations à deux dimensions. Les angles choisis pour les branches filles sont 30°, 60° et 90°. Nous présentons sur la figure V-27 la géométrie et le maillage pour chaque modèle de bifurcation. Le type de maille utilisé correspond à l'élément isoparamétrique décrit au paragraphe III-2.1. Les équations algébriques non-linéaires sont linéarisées au niveau de l'élément lui-même en utilisant la procédure de Newton-Raphson. Les paramètres qui définissent la taille des matrices de calcul et donc du problème sont les suivants:

Nombre total d'éléments (NELT) : 175

Nombre total de noeuds (NNT) : 590

Nombre total de degrés de liberté (NDLT) : 1388

Largeur maximale du front (LFRONT) : 80

#### V - 1.3.2 Influence de l'angle et du nombre de Reynolds sur le champ de l'écoulement

Les calculs numériques sont orientés sur la détermination du champ de vitesses et la distribution de la pression dans tout le domaine de l'écoulement. Les résultats que nous avons obtenus avec les trois modèles de bifurcation et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds ( 10 - 1000 ) sont comparés et font apparaître des phénomènes intéressants.

L'étude des profils de vitesses indique que pour les premières valeurs du nombre de Reynolds  $Re = 10$ , le champ de vitesses est très peu

perturbé par la géométrie du domaine et on note aucune séparation près des parois. Par ailleurs, le développement de la vitesse à partir de la branche mère jusqu'à la section aval de la branche fille est clairement observé sur la figure V-28 .

Dans le cas du champ de vitesse obtenu pour un nombre de Reynolds  $Re = 100$  , on remarque l'importance des gradients de vitesses au niveau des parois intérieures près de la pointe angulaire ( figure V-29 ) et un déplacement du maximum de vitesse vers la paroi intérieure. Alors que le long des parois extérieures et près de l'arête, les gradients de vitesse sont presque nuls et c'est cette zone qui est susceptible au renversement de l'écoulement. D'autre part, la comparaison qualitative des résultats ( $Re = 100$ ) pour les trois modèles de bifurcations ne montre qu'une légère sensibilité du champ de vitesses à la grandeur de l'angle.

La figure V-30 montre qu'avec l'augmentation du nombre de Reynolds ( $Re = 200$ ) , les effets de l'angle de la bifurcation sur le champ de l'écoulement sont très nets. En effet, pour les trois modèles géométriques, on observe une déformation plus importante du profil de vitesses à l'entrée des branches filles. Ceci est essentiellement dû au fait que le changement d'orientation de l'écoulement s'accompagne d'une poussée de forces centrifuges dirigées vers la paroi intérieure indiquant la présence d'importantes contraintes de cisaillement à cet endroit, ce qui est en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus par FARAHIFAR [?] SIOUFFI [8] et RIEU [9]. En ce qui concerne la paroi extérieure, le fait le plus marquant est que des vitesses négatives font leurs apparitions uniquement pour les modèles de bifurcation à  $60^\circ$  et  $90^\circ$ , que le point de séparation de cette zone est d'autant plus près de l'arête que l'angle des branches filles est grand. Cette dernière observation est encore plus nette avec des valeurs supérieures du nombre de Reynolds.

Pour  $Re = 500$ , la figure  $\text{V-31}$  indique d'une part, pour les trois modèles de bifurcation, la présence de zone de recirculation dont la taille s'est développée aussi bien vers le courant principal qu'en amont et en aval, et d'autre part, que le déplacement du maximum de la vitesse vers la paroi intérieure est très net. Par ailleurs, la forme parabolique des profils de vitesse dans les branches filles n'est plus assurée même au niveau de la section de sortie. Cela est dû à la longueur de la branche fille qui n'est pas assez grande pour permettre de localiser le rétablissement du profil parabolique de l'écoulement.

Les phénomènes que nous venons de décrire pour le champ d'écoulement dans les modèles de bifurcation à  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$  sont davantage mis en évidence sur la figure  $\text{V-32}$  et qui correspond aux solutions obtenues pour un nombre de  $Re = 1000$ .

Sur les figures  $\text{V-33}$  à  $\text{V-35}$  sont portées d'une part les courbes en trait plein pour l'évolution de la pression le long de la paroi de la branche mère ainsi que de la paroi extérieure de la branche fille (cf figure I-2), et d'autre part les courbes tracées en traits discontinus pour l'évolution de la pression sur la paroi intérieure. D'une manière générale, avec les trois modèles et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds (10 - 1000), on observe une élévation sensiblement identique de la pression située au niveau de la pointe de séparation. Par contre, au niveau de l'arête de la paroi extérieure, on note une légère chute de pression. Celle-ci est sensiblement plus importante si l'angle est grand.

Par ailleurs, l'augmentation du nombre de Reynolds  $Re$  entraîne une baisse des chutes de pression globale et surtout la présence de fluctuation de la pression après la pointe de séparation de la paroi intérieure. On remarque que ces fluctuations de pression apparaissent plutôt avec les modèles de bifurcation à  $30^\circ$  et  $60^\circ$  figure  $\text{V-34}$ .

## V - 1.4 Simulation de l'écoulement dans les pontages artériels

### V - 1.4.1 Géométries et maillages

Par rapport aux résultats que nous avons obtenu pour les trois modèles de sténoses ( 36%, 55% et 88% ) cf paragraphe V-1-2 , il apparait que les deux premières sévérités ( 36% et 55% ) peuvent être considérées comme non significatives. Par contre, une sténose à 88% peut être considérée comme une lésion menaçante étant donné qu'elle réduit considérablement la section artérielle, entraînant une perte de charge considérable et une diminution du flux sanguin dans l'artère. Lorsque l'état du lit artériel le permet, le pontage (artériel ou aorto-coronaire) est un des moyens permettant de rétablir une circulation normale en aval de la sténose [30], [31], [32].

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à l'influence de la géométrie du pontage ainsi qu'à son raccord à l'artère sténosée sur le champ de l'écoulement. Pour ce faire, nous avons effectué sur le modèle géométrique à 88% d'obstruction, trois géométries différentes de pontage.

La différence entre les modèles M1 et M2 se situe uniquement au niveau de la forme du raccord entre le pontage et l'artère sténosée. En effet, l'angle du modèle M1 est de  $90^\circ$ , par contre celui de M2 et M3 est de l'ordre de  $20^\circ$ . Par ailleurs, les modèles M2 et M3 se différencient entre eux quant aux dimensions utilisées pour les pontages. Nous présentons sur la figure V-36 la géométrie et le maillage associé à chacun des modèles. On peut remarquer le nombre important d'éléments utilisés pour effectuer de tels maillages, ce qui augmente considérablement les différents paramètres et donc la taille de notre problème par rapport aux structures précédentes:

Nombre total d'éléments (NELT) : 524

Nombre total de noeuds (NNT) : 1718

Nombre total de degrés de liberté (NDLT) : 4033

Largeur maximale du front (LFRONT) : 90

#### V - 1.4.2 Analyse du champ de vitesses

Pour les trois modèles géométriques de pontage, nous avons effectué le calcul numérique en donnant au nombre de Reynolds caractéristique les quatre valeurs suivantes: 1, 20, 100 et 200. A partir de la représentation graphique du champ de vitesses obtenu, on peut remarquer que d'une façon générale, le pontage entraîne une diminution notable du flux dans l'artère sténosée ( figures V-37 à V-40 ) .

En comparant les courbes de profils de vitesses situées juste après le point de jonction et en amont de la sténose à 88% ( figure V-41 ) pour le même nombre de Reynolds, on remarque que les courbes de profils correspondant aux deux modèles M1 et M2 sont très semblables et quelles présentent une différence sensible avec le profil de vitesse obtenu pour le modèle M3. Cette différence de forme de profil s'explique par le fait que le rayon  $r_p$  du pontage utilisé pour le modèle M3 est inférieur à celui de l'artère sténosée ( $r_p = 0.75 r_s$ ) alors que pour les modèles M1 et M2, les deux rayons sont égaux ( $r_p = r_s$ ).

D'autre part, à mesure que le nombre de Reynolds augmente, on peut observer sur la figure V-41 , pour les trois modèles de pontage , une nette déformation des profils de vitesses accompagnée par le déplacement du maximum de la vitesse vers la paroi intérieure ( coté raccord ) indiquant de fortes contraintes de cisaillement à cet endroit. Ce phénomène est tout à fait semblable à celui rencontré dans l'étude des bifurcations.

Par ailleurs, pour un même modèle de pontage, on ne note aucune influence majeure du nombre de  $Re$  sur la répartition des débits entre le pontage et l'artère. Ceci est mis en évidence en comparant les profils de vitesse situés au niveau du pontage ( section CC' ) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds  $Re$  figure V-42 .

En ce qui concerne l'évolution globale du champ d'écoulement dans les modèles de pontage, on peut noter que dès le premier nombre de Reynolds  $Re = 1$  ( figure V-37 ), la forme des profils de vitesse est fortement affectée par la zone de dérivation, en particulier par la forme du raccord. L'écoulement se sépare au point de jonction conduisant ainsi à des profils de vitesses non symétriques. Cette asymétrie du profil se produit aussi dans l'embranchement où le maximum de vitesse apparaît près de la courbure intérieure du pontage. Par conséquent, le phénomène d'entrée va jouer un rôle important à la fois du côté de l'embranchement et en amont de la sténose.

Cette modification du profil de vitesse est essentiellement due au fait que, dans la zone du raccord, le fluide est soumis à des forces centrifuges qui l'entraînent vers les parois situées au voisinage du point de jonction. La figure V-38 montre que pour  $Re = 20$ , la remarque précédente est encore plus nette. En effet, on peut signaler la présence de zone de recirculation uniquement avec le modèle M1, ce qui met en évidence l'effet de l'angle du raccord sur la répartition des vitesses à l'entrée du pontage. Par contre, aucun renversement d'écoulement n'est observé en aval de la sténose.

Avec l'augmentation du nombre de  $Re = 100$ , la figure V-39 indique d'une part que la zone de recirculation observée dans le modèle M1 s'est bien développée vers le courant principal du pontage et du côté de sa courbure extérieure, et d'autre part, l'apparition d'une couche de renversement d'écoulement où règnent de très faibles vitesses (portion de la paroi AB). Des phénomènes similaires, mais moins intenses, sont observés au niveau du champ de vitesse dans le modèle M2. Par contre, pour le modèle M3, c'est en aval de la sténose qu'on note l'existence de deux zones de renversement de l'écoulement.

Enfin, c'est avec le nombre de  $Re = 200$ , que les trois phénomènes décrits précédemment sont regroupés dans chacun des trois modèles géométriques de pontage ( figure V-40 ).

### V - 1.4.3 Influence de la géométrie sur la distribution de la pression

Les évolutions de la pression le long de la paroi inférieure de l'artère sténosée et sur son axe, mettent en évidence l'influence des dimensions du pontage et de la géométrie du raccord sur de tels écoulements.

Comme précédemment, les perturbations sont très localisées. La figure V-43, correspondant aux résultats obtenus pour  $Re = 1$  et  $20$ , nous indique clairement que c'est toujours au niveau de la section minimale de la sténose que se produisent les chutes de pressions les plus importantes, et que celles-ci semblent être minimales dans la zone d'embranchement aussi bien en amont qu'en aval de la sténose. Par ailleurs, on peut noter une diminution considérable de la chute globale de pression: elle se situe entre  $1/6^e$  et  $1/8^e$  de la valeur trouvée pour l'artère sténosée non pontée ( cf figures V-17 et V-19 ), et elle est plus faible avec le modèle M2 .

Les courbes obtenues pour les autres valeurs du nombre de Reynolds (  $Re = 100$  et  $200$  ) sont quasiment identiques ( figure V-44 ). Toutefois, on peut noter la présence de gradients de pressions négatifs situé immédiatement après la section minimale de la sténose. Ceux-ci sont plus importants avec le modèle M3 qu'avec les deux autres modèles, ce qui explique l'existence prématurée d'une zone de recirculation avec le modèle M3 ( figure V-39 ). Quant à la chute globale de pression, les proportions sont encore plus faibles avec l'augmentation du nombre de  $Re$ , puisqu'elles se situent aux environs de  $1/9^e$  de la valeur trouvée en l'absence de pontage ( cf figures V-22 et V-23 ) .

### V - 1.5 Conclusion

La détermination par la méthode des éléments finis du champ de vitesse de l'écoulement permanent, particulièrement en présence d'une singularité telle qu'une bifurcation ou une sténose, s'avère une bonne approximation du champ de l'écoulement dans de telles géométries. Notre modélisation numérique a mis clairement en évidence les propriétés physiques essentielles, comme l'influence de l'angle d'une bifurcation, ou encore, du degré de rétrécissement d'une section, ainsi que celle de la géométrie des pontages et de la forme du raccord sur le champ de vitesse et la distribution des pressions.

Les résultats relatifs aux pontages nous indiquent bien la nécessité d'effectuer la dérivation de l'écoulement suffisamment loin en amont de la sténose afin de permettre à l'écoulement de se rétablir après la zone d'embranchement et de minimiser ainsi la perturbation occasionnée par la singularité. De même l'utilisation d'un pontage de rayon au moins égal à celui de l'artère sténosée entraîne un minimum de flux dans celle-ci.

Enfin, compte tenu des hypothèses établies dans cette partie de l'étude (écoulement permanent et paroi rigide), on peut dire que par rapport aux facteurs dynamiques pouvant être directement liés à la formation des plaques d'athérome, il y a existence au niveau de certaines régions privilégiées (et bien localisées) d'importantes contraintes de cisaillement pouvant détériorer les parois artérielles et entraîner des dépôts athéromateux.

## V - 2 EXTENSION A L'ÉCOULEMENT DE TYPE INSTATIONNAIRE

### V - 2.1 Introduction et Tests préliminaires

Considérons maintenant le cas de l'écoulement instationnaire produit par un gradient de pression de type sinusoïdal. Pour aborder ce problème nous traitons les équations de Navier-Stokes qui régissent les écoulements plan ou à symétrie de révolution, à la fois par la méthode des éléments finis et par la formule des différences finies (spécialement pour les termes d'accélération). La résolution de tels systèmes associés est encore plus compliquée qu'en écoulement permanent.

Comme test préliminaire, nous avons jugé nécessaire de rechercher la forme des profils de vitesse d'un fluide visqueux incompressible en écoulement périodique s'effectuant dans une conduite cylindrique de section constante. Ce qui nous permet de comparer nos résultats numériques avec les solutions analytiques fournies par WOMERSLEY [38].

A partir du système d'équations algébriques ( III-33 ) pour un écoulement à symétrie de révolution et dû à une fonction de pression sinusoïdale  $P = P_0 \cos \omega t$ , ( figure V-45 ), nous avons recherché les champs de vitesses pour quatre valeurs du paramètre de fréquence  $\alpha = r_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$  ( 1, 5, 6, et 10 ) et avec un nombre de Reynolds  $Re = 200$ . D'un point de vue numérique, la résolution du système algébrique est effectuée en considérant un pas de temps égal à  $\Delta t = T/24$  ( T étant la période ), ce qui correspond à une solution analytique du champ de vitesse pour chaque accroissement de  $\omega t$  de  $15^\circ$  ( figures V-46 et V-47 ).

Pour chaque valeur du paramètre de fréquence  $\alpha$  et pour une section considérée, nous donnons sur les figures V-46a/b/c/d, l'évolution du profil de vitesse durant une période (  $T = 1s$  ) d'écoulement. D'une manière

générale, nos résultats numériques sont en bon accord avec les solutions analytiques obtenues par WOMERSLEY [38] et reproduits sur la figure V-47 à partir de la référence [20]. En effet, pour  $\alpha = 1$  (figure V-46a), les effets visqueux sont prédominants par rapport aux effets d'inertie, ce qui conduit à des profils de vitesse ayant une forme parabolique pratiquement sur toute la période à l'exception cependant des profils obtenus aux deux instants  $t = 8\Delta t$  et  $t = 20\Delta t$  et qui correspondent à un renversement de l'écoulement.

Avec l'augmentation du paramètre de fréquence ( $\alpha = 5$ , figure V-46b), les profils de vitesses changent remarquablement d'allure en présentant des maxima près de la paroi et une forme aplatie dans la région centrale. Enfin pour  $\alpha = 10$  (figure V-46d), la forme des profils s'aplatit d'avantage et peut présenter de faibles maxima au voisinage de la paroi. Ce phénomène s'explique par le fait qu'avec l'accroissement du paramètre de fréquence, les effets d'inertie deviennent prédominants devant les effets visqueux.

Sur l'ensemble de ces figures V-46a/b/c/d, on peut remarquer que le profil de vitesse obtenu en fin de cycle est le même que celui obtenu au début du cycle, ce qui signifie bien que l'écoulement est numériquement établi et périodique. A noter cependant, que cette périodicité de l'écoulement n'a été constatée qu'à partir de la troisième itération temporelle complète.

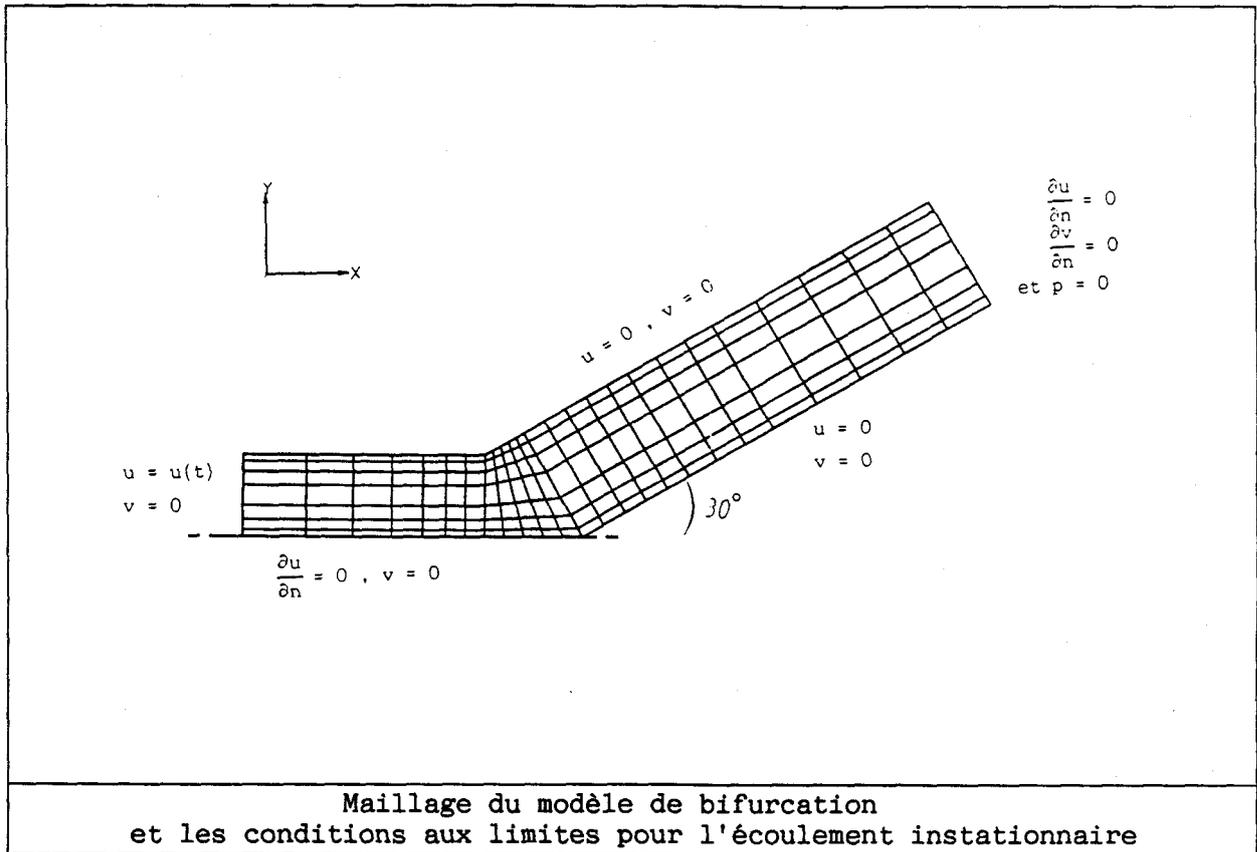
Enfin, sur la figure V-48, nous avons porté en trait plein la fonction de pression imposée comme conditions aux limites, et en trait discontinu, la vitesse axiale (située à l'entrée sur la ligne centrale) calculée par la méthode des éléments finis. Ces figures montrent bien que pour  $\alpha = 1$  la vitesse est presque en phase avec la pression et que pour  $\alpha = 10$ , on note un déphasage de  $\pi/2$ , ce qui correspond bien aux conclusions théoriques fournies par WOMERSLEY [38] et données dans l'ouvrage [20].

## V - 2.2 Simulation de l'écoulement périodique dans une bifurcation

Etant donné la bonne concordance entre les résultats numériques issus du code de calcul développé dans le cadre de cette étude et les solutions analytiques dues à WOMERSLEY, il est particulièrement intéressant de traiter le même type d'écoulement mais dans une géométrie différente telle qu'une bifurcation. Le modèle géométrique choisi pour cette section est le même que celui qui a servi en écoulement permanent ( bifurcation à  $60^\circ$  ). La démarche générale que nous avons adoptée pour étudier ce cas de figure est composée de trois étapes:

- Une première étape consiste à déterminer les profils de vitesses d'un écoulement plan (système d'équations algébriques III-33 écrit en coordonnées cartésiennes) dûs à un gradient de pression sinusoïdal avec un paramètre de fréquence (moyen)  $\alpha = 6$  et un nombre de Reynolds  $Re = 200$ . Comme précédemment, le pas de temps est de  $\Delta t = T/24$ , et la solution retenue est celle obtenue à la quatrième période (quatrième seconde d'écoulement) étant donné que la périodicité de l'écoulement est assurée dès la troisième itération temporelle complète .

- Une seconde étape consiste à utiliser comme condition à l'entrée de la bifurcation, les solutions pour les profils de vitesses trouvés à l'étape précédente. Les autres conditions aux limites sont décrites sur la figure suivante:



- Dans une troisième étape, pour chaque pas de temps  $\Delta t = T/24$ , on effectue les itérations selon la méthode de Newton-Raphson (problème non linéaire) jusqu'à ce que le critère de convergence ( III-41 ) retenu soit satisfait. Le nombre d'itérations effectué entre deux pas de temps successifs est de 3.

Sur les figures V-49 à V-57, on présente les champs de vitesses obtenus dans la bifurcation ( angle  $60^\circ$  ) et pour chaque pas de temps  $\Delta t = T/24$  ( accroissement de  $\omega t$  de  $\pi/12$  ). Ces figures montrent d'une façon générale comment la nature instationnaire modifie la structure du champ de vitesses sur une période d'écoulement. Ainsi, l'observation successive des résultats obtenus pour les premiers instants  $t = 0$ ,  $\Delta t$  et  $2\Delta t$  (  $0$ ,  $\pi/12$  et  $2\pi/12$  ) montre bien le développement des profils de vitesses de la branche mère vers la branche fille. De même on constate que pour ces deux branches, les maxima sont situés au voisinage des parois et ont des formes de profils de vitesses semblables ( figure V-49 ).

Ensuite, pour les instants qui suivent  $t = 3\Delta t$ ,  $4\Delta t$  et  $5\Delta t$  ( figure V-50 ), on remarque qu'au niveau d'un profil, les maxima de la vitesse sont légèrement décalés des parois des deux branches et que comparativement avec la solution obtenue pour l'écoulement permanent, les vitesses radiales négatives sont moins importantes à l'entrée de la branche fille.

La figure V-51 montre que pour  $t = 6\Delta t$ , la vitesse d'écoulement est maximale ( ce qui correspond au pic d'écoulement cf figure V-58 ) et qu'au niveau de la région centrale, la forme des profils de vitesses est presque uniforme avec des minima situés près des parois. On observe pratiquement la même structure pour le champ obtenu aux instants  $t = 7\Delta t$  et  $t = 8\Delta t$ . Par contre, pour l'instant qui suit  $t = 9\Delta t$  ( figure V-52 ), la vitesse commence à diminuer et on note l'apparition d'un tourbillon de petite taille situé juste après l'arête au niveau de la paroi extérieure. La taille de ce tourbillon augmente rapidement avec les instants qui suivent  $t = 10\Delta t$ ,  $t = 11\Delta t$  et  $t = 12\Delta t$  en raison de l'existence de vitesses négatives au niveau des parois de la branche mère ( figures V-52 et V-53 ). Par ailleurs, une forme similaire pour le profil de vitesses est observée dans la branche fille, mais suffisamment loin en aval du tourbillon.

Ainsi, pour  $t = 13\Delta t$  ( figure V-53 ), l'écoulement est complètement inversé, et pour les instants qui suivent (  $14\Delta t \leq t \leq 19\Delta t$ , figures V-53 à V-55 ), le gradient de pression étant négatif, l'écoulement inversé se développe davantage dans les deux branches. Enfin, pour les instants qui suivent (  $t \geq 20\Delta t$ , figures V-55 V-56 ), on assiste à une diminution des vitesses de l'écoulement inversé jusqu'à la fin de la période (  $t = 24\Delta t$ , figure V-57 ) où on retrouve le champ d'écoulement initial.

Enfin, sur la figure V-58, nous donnons l'évolution de la pression à l'entrée de la bifurcation à chaque pas de temps et due à la vitesse imposée à l'amont.

## CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons considéré les non-linéarités dues aux termes de convections pour des écoulements s'effectuant à travers des géométries assez complexes. Le code de calcul par éléments finis que nous avons construit fournit des résultats qui sont en bon accord avec ceux rencontrés dans la littérature concernant les écoulements permanents dans les bifurcations et les sténoses.

Notre simulation a mis clairement en évidence l'influence des paramètres géométriques et les propriétés physiques de l'écoulement en particulier dans les zones à fort gradient, comme le voisinage immédiat d'un important rétrécissement ou encore, les zones de dérivations pour les pontages. Ceci représente un avantage majeur lié à l'utilisation de la méthode des éléments finis comme outil pour la modélisation des écoulements notamment dans les zones sensibles.

L'étude de l'écoulement dans les différents modèles de rétrécissement fait apparaître l'influence du pourcentage de rétrécissement, celui de la longueur de déformation et aussi du nombre de Reynolds sur le champ de vitesses et la distribution de la pression en particulier au voisinage de la singularité. De même, les résultats obtenus pour les trois modèles de bifurcation montrent l'influence de l'angle et du nombre de Reynolds surtout à l'entrée de la branche fille. Pour cette branche on peut noter l'existence d'une zone de séparation au niveau de la paroi extérieure et de fortes contraintes de cisaillement au niveau de la paroi intérieure.

L'écoulement bidimensionnel dans les modèles de pontages montre l'influence des dimensions utilisées pour les pontages sur la répartition des débits entre l'artère sténosée et la branche du pontage, ainsi que sur la distribution des pressions dans tout le modèle géométrique d'écoulement. De même, on note une diminution importante de la chute globale de pression qui se situe aux environs de  $1/8^e$  de celle trouvée pour l'artère sténosée non pontée. Par ailleurs, pour un même nombre de Reynolds, l'influence de

la forme du raccord entre le pontage et l'artère est clairement observé grâce aux trois modèles géométriques étudiés. Enfin, pour un même modèle de pontage, on n'observe aucune influence majeure du nombre de Reynolds sur le flux récupéré dans la branche du pontage.

Dans le cadre de l'extension du code pour le calcul d'écoulement de type instationnaire, les tests préliminaires montrent une bonne concordance avec la solution théorique fournie par WOMERSLEY [38]. La simulation de l'écoulement périodique obtenu dans une bifurcation à  $60^\circ$  montre l'influence de l'instationnarité sur l'évolution des profils de vitesses durant une période d'écoulement.

D'un point de vue numérique, ces derniers résultats nous rassurent sur la stabilité de l'algorithme de résolution ainsi élaboré, ce qui est très appréciable lorsqu'on aborde l'étude numérique de modèles mathématiques dépendant du temps.

Pour conclure, on peut citer l'intérêt qu'il y a à poursuivre ce travail, d'abord vers une simulation de l'écoulement dans les pontages avec des conditions de type physiologique pour la forme de pression, ensuite, effectuer l'extension du code de calcul aux problèmes d'écoulements tridimensionnels afin de tenir compte des écoulements secondaires qui existent au niveau des embranchements. Cette étape nous semble indispensable pour pouvoir contribuer à la modélisation et l'optimisation des prothèses de pontages artériels ou aorto-coronaires.

**BIBLIOGRAPHIE**

1. D.L. FRY,  
"Acute vascular endothelial changes associated with increased blood velocity gradients", *Circ. Res.* 22, 165-197 (1968).
2. C.G. CARO,  
"Atheroma and arterial wall shear observation", *Proc. Roy. Soc. Lond. B.* 177, 109-159 (1971).
3. W.T. CROWE, L.J. KROVETZ,  
"Studies of arterial branching flows in models using flow birefringence", *Med. Bio. Eng.* 10, 415-426 (1972).
4. N.S. LYNN, V.G. FOX, L.W. ROSS,  
"Computation of fluid dynamical contributions to atherosclerosis at arterial bifurcations", *Biorheology* 9, 61-66 (1972).
5. V. O'BRIEN, L.W. EHRLICH, M.H. FRIEDMAN,  
"Unsteady flow in a branch", *J. Fluid Mech.* 75, 315-336 (1976).
6. R.C. FERNANDEZ, K.J. DEWITT, M.R. BOTWIN,  
"Pulsatile flow through a bifurcation with applications to arterial disease", *J. Biomech.* 9, 575-580 (1976).
7. D. FARAHIFAR, R. RIEU,  
"Etude experimentale de l'écoulement dans différents modèles de bifurcation", *Innov. Tech. Biol. Med.* Vol. 4, N°6, 647-658 (1983).
8. M. SIOUFFI, R. PELISSIER, D. FARAHIFAR, R. RIEU,  
"The effects of unsteadiness on the flow through stenoses and bifurcations", *J. Biomech.* Vol. 17, N°5, 299-315 (1984).
9. R. RIEU, C. ORTEGA, R. PELISSIER,  
"Analyse des différents paramètres hemodynamiques sur l'écoulement dans des bifurcations", *J. Biophysique et Biomécanique* Vol. 10, 83-84 (1986).
10. J.C.F. CHOW, K. SODA,  
"Laminar flow and blood oxygenation in channels with boundary irregularities", *J. of Applied Mechanics*, 843-850, December (1973).

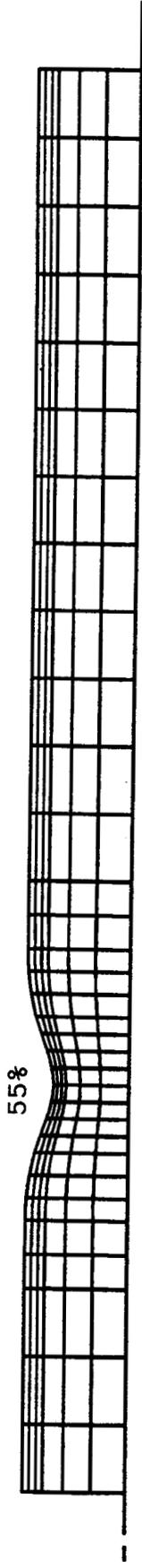
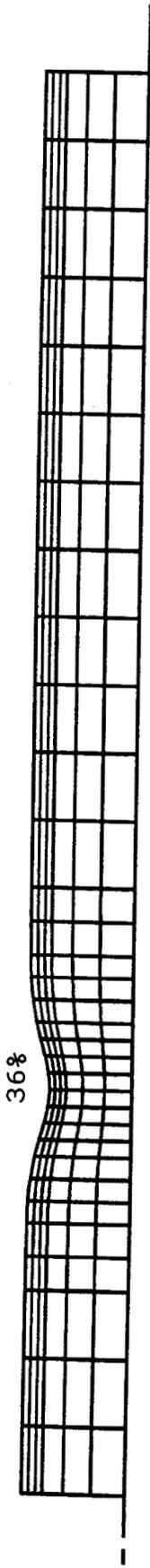
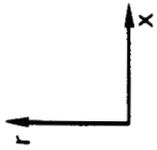
11. M.J. MANTON,  
"Low Reynolds number flow in slowly varying axisymmetric tubes", J. Fluid Mechanics Vol. 49, Part 3, 451-459 (1971).
12. M.D. DESHPANDE, D.P. GIDDENS, R.F. MABON,  
"Steady laminar flow through modelled vascular stenoses", J. Biomechanics Vol. 9, 165-174 (1976).
13. D.F. YOUNG, F.Y. TSAI,  
"Flow characteristics in models of arterial stenoses. I- Steady flow", J. Biomechanics 6, 395-410 (1973).
14. D.F. YOUNG, N.R. CHOLVIN, R.L. KIRKKEIDE, A.C. ROTH,  
"Hemodynamics of arterial stenoses at elevated flow rates", Circulation Research 41, 1, 99-107 (1977).
15. D.F. YOUNG,  
"Fluid mechanics of arterial stenoses", J. of Biomechanical Engineering Vol. 101, 157-175 (1979).
16. C. CLARK,  
"The fluid mechanics of aortic stenosis. II- Unsteady flow experiments", J. Biomechanics Vol. 9, 567-573 (1976).
17. B.J. DALY,  
"A numerical study of pulsatile flow through stenosed canine femoral arteries", J. Biomechanics Vol. 9, 465-475 (1976).
18. L.H. BACK, E.J. ROSCHKE,  
"Shear-layer flow regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of abrupt circular channel expansion", ASME J. of Applied Mechanics, 677-681 (1972).
19. Ph. DANTAN, F.D. JOUVENEL, C. ODDOU,  
"Transition laminaire-turbulent en écoulement pulsatile, application à la circulation sanguine", Le Journal de Physique, T. 37, L157-L160 (1984).
20. R. COMOLET,  
"Biomécanique circulatoire", Masson (1984).

21. S.A. AHMED, D.P. GIDDENS,  
"Pulsatile poststenotic flow studies with laser doppler anemometry", J. Biomechanic Vol. 37, N°9, 695-705 (1984).
22. P.P. LATINOPOULOS, J. GANOULIS,  
"Numerical simulation of oscillating flow through idealized sclerotic arteries", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 20, N°3, 279-290 (1979).
23. P.P. LATINOPOULOS, J. GANOULIS,  
"Numerical simulation of pulsatile flow in constricted axisymmetric tubes", Appl. Math. Modeling Vol. 6, 55-60 (1982).
24. S.O. WILLE,  
"A finite element solution of the Navier-Stokes equations for two dimension and axis-symmetric flow", Modelling Identification and Control 2, 105-117 (1980).
25. S.O. WILLE,  
"Finite element simulations of the pulsatile blood flow patterns in arterial abnormalities", Finite Elements in Biomechanics, Ed. R. Gallagher et Al, John Wiley and Sons Ltd, 39-52 (1982).
26. B. LETAC, G. LEROUX, P. BERTEAU, Ph. BARBE,  
"La coronographie, technique et résultats", Ouest-Médical, 27<sup>e</sup> année, N°5, 447-455 (1974).
27. G. THEODOROU, D. BELLET, D.P. LY,  
"Ecoulements non-permanents non newtoniens dans un rétrécissement de section", C.R. Acad. Sc. Paris, T. 297, série II, 97-100 (1983).
28. J.P. BITOUN, P. BOYER, D.P. LY, D. BELLET,  
"Modèle d'écoulement diphasique au niveau d'un rétrécissement de section", Actes du Colloque CNRS-RCP 619, ITBM, 127-133 (1983).
29. J.P. BITOUN, D.P. LY, D. BELLET,  
"In vitro blood flow through small tubes", Biorheology, sup. I, 151-153 (1984).

30. D.J. MOZERSKY, D.S. SUMNER, R.W. BARNES, G.P. CALLAWAY, D.E. STRANDNESS  
"The hemodynamics of the axillary-axillary bypass", Surg. Gyne. and Obst., Vol. 135, 925-929 (1972).
31. A.VACHERON, P.D VERNEJOUL, J.Ph. METZGER, H. LAFONT, D. GAMBINI,  
F. DELARUE, J. AGNELY, J.D. MATTEO.  
"Exploration dynamique du lit artériolaire coronaire par scintigraphie coronarienne sélective sous hyperhémie", Arch. Mal. Coeur, Vol. 72, 1165-1172 (1979).
32. P.R. CIPRIANO, A.H. SACKS, B.A. REITZ  
"The Effect of Stenosis of Bypass Grafts on coronary blood flow", Circulation, Vol. 62, N°1, 61-66 (1980).
33. R. TEMAM,  
"Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis", North-Holland ed. (1984).
34. P.A. RAVIART,  
"Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides", CEA-EDF-INRIA, école d'été d'analyse numérique, ed. Eyrolles (1981).
35. G. DHATT, G. TOUZOT,  
"Une présentation de la méthode des éléments finis", collection Université de Compiègne Maloine ed. (1982).
36. C. TAYLOR, T.G. HUGHES,  
"Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations", Pineridge press Ltd. Swansea (1981).
37. O.C. ZIENKIEWICZ,  
"The Finite Element Method in Engineering Science", Mc Graw Hill ed. (1977).
38. J.R. WOMERSLEY,  
"Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known", J. Physiol. 127, 553-563 (1955).

39. B.M. IRONS,  
"A frontal solution program for finite element analysis", International J. for Numerical Methods in Engineering Vol. 2, 5-32 (1970).
40. S.W. SLOAN, M.F. RANDOLPH,  
"Automatic element reordering for finite element analysis with frontal solution schemes", International J. for Numerical Methods in Engineering Vol. 19, 1153-1181 (1983).
41. F.N. VAN DE VOSSE, A. SEGAL, A.A. VAN STEENHOVEN, J.D. JANSSEN,  
"A finite element approximation of the unsteady two dimensional Navier-Stokes equations", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, 427-443 (1986).
42. B. LOYD, E.M. MURMAN, S.S. ABARBANEL,  
"A semi-implicit scheme for the Navier-Stokes equations", Proceedings of the Seventh GAMM-Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Louvain, Note on numerical fluid mechanics Vol. 20, 175-182, septembre (1987).
43. R. HOLENSTEIN, P. NIEDERER,  
"Propagation and damping of flow and pressure pulses in the human arterial tree", International Conference on Finite Elements in Biomechanics, ed. B.R. SIMON, Vol. 1, 315- 328, (1980).
44. M. LAHOUBI, J.C. DEBUS,  
"Simulation d'écoulements dans les pontages artériels", J. de Biophysique et de Biomécanique Vol. 11 supp. N° 1, 73-75. XII<sup>e</sup> Congrès de la Société de Biomécanique, Paris, 3-4 Septembre 1987,
45. M. LAHOUBI, J.C. DEBUS,  
"Simulation d'écoulements dans les sténoses et pontages artériels", Recherche et Transfert Technologique en Mécanique, Pôle Mécanique Région Nord Pas-de-Calais, Lille, 16-17 Décembre 1987.
46. A.C. BURTON,  
"Physiologie et Biophysique de la circulation", ed. Masson & Cie Paris, (1975).

**FIGURES**



Nombre Total d'Eléments NELT	36%	55%	88%
Nombre Total de Noeuds NNT	198	198	210
Nombre Total de Degrés de Liberté NDLT	673	673	713
Largeur maximale du Front L.FRONT	1584	1584	1678
	70	70	70

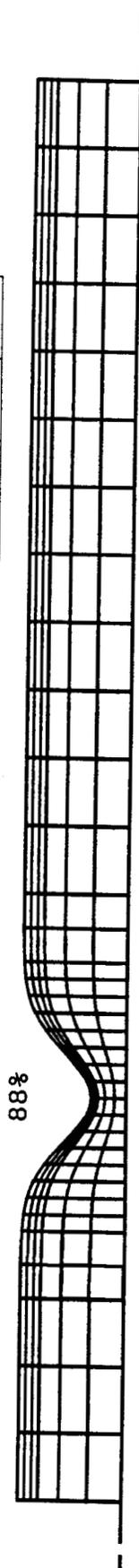


Figure V-2 MAILLAGE DES MODELES DE RETRECISSEMENTS A SYMETRIE DE REVOLUTION

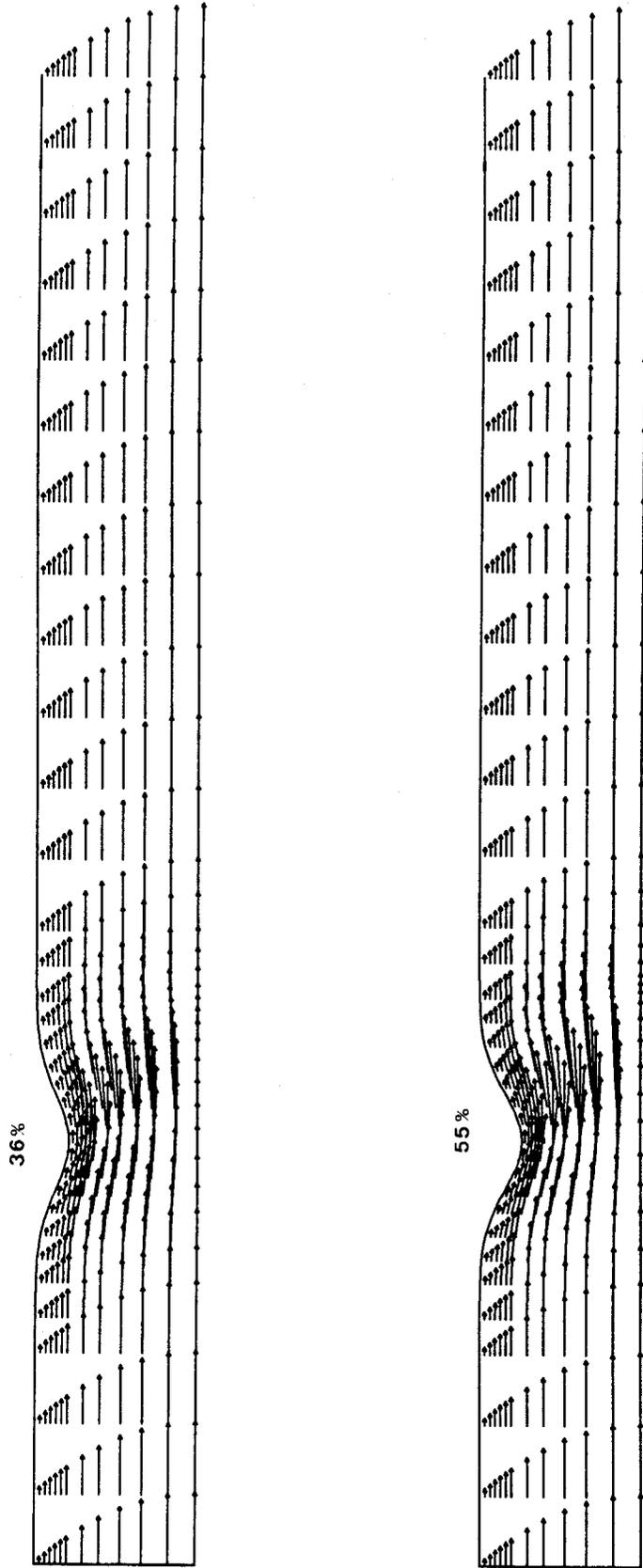


Figure V-3 PROFILS DE VITESSES POUR LES MODELES DE RETRECISSEMENTS  
A 36% ET 55% AVEC  $Re = 1.$

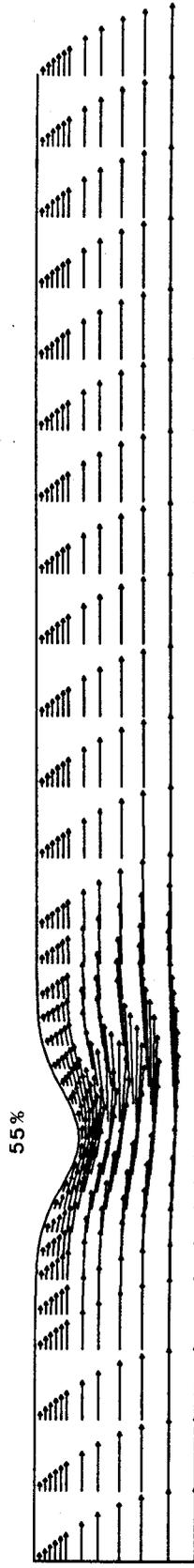
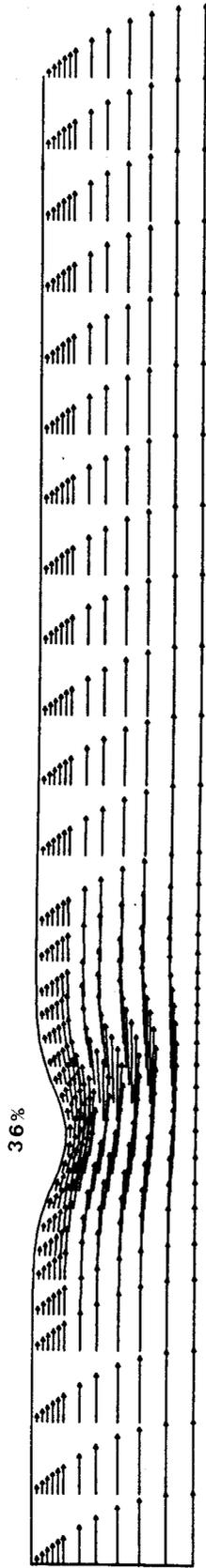


Figure V-4 PROFILS DE VITESSES POUR LES MODELES DE RETRECISSEMENTS  
A 36% ET 55% AVEC  $Re = 20$ .

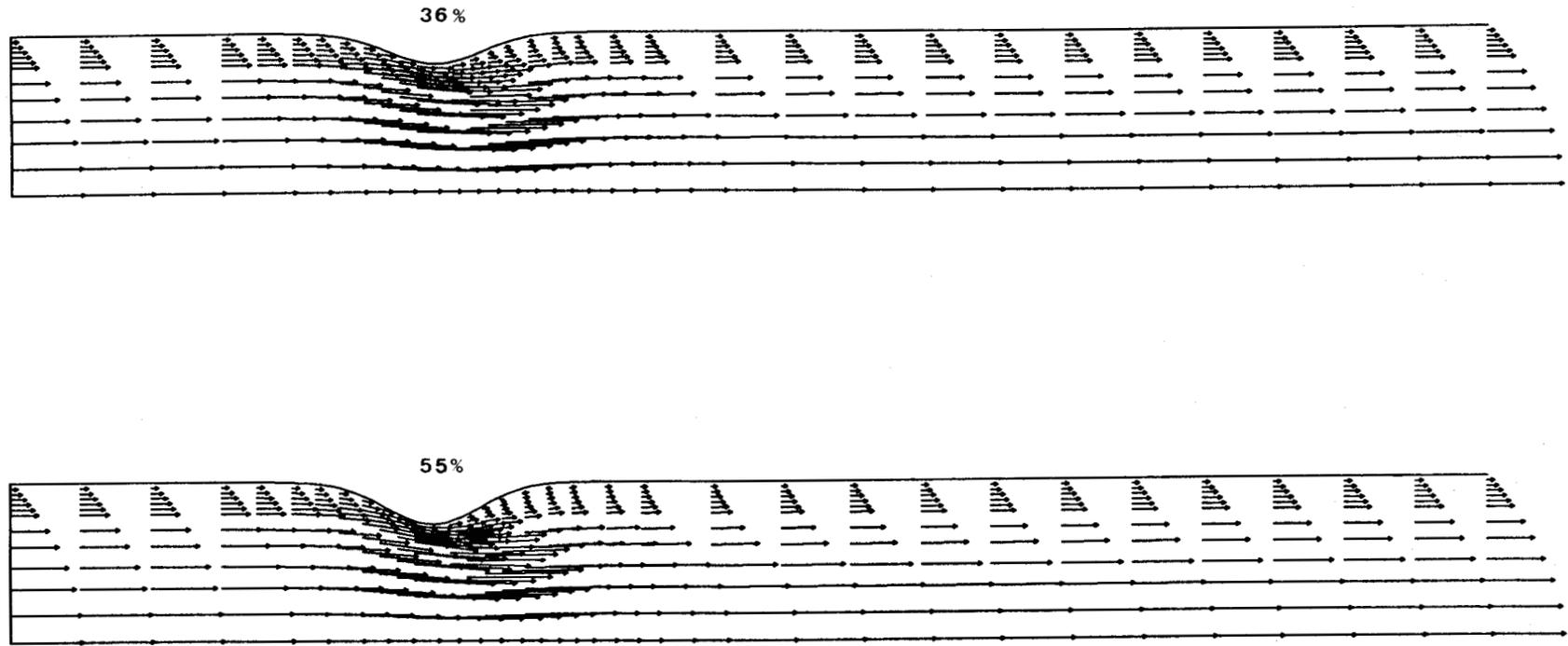


Figure V-5 PROFILS DE VITESSES POUR LES MODELES DE RETRECISSEMENTS  
A 36% ET 55% AVEC  $Re = 200$ .

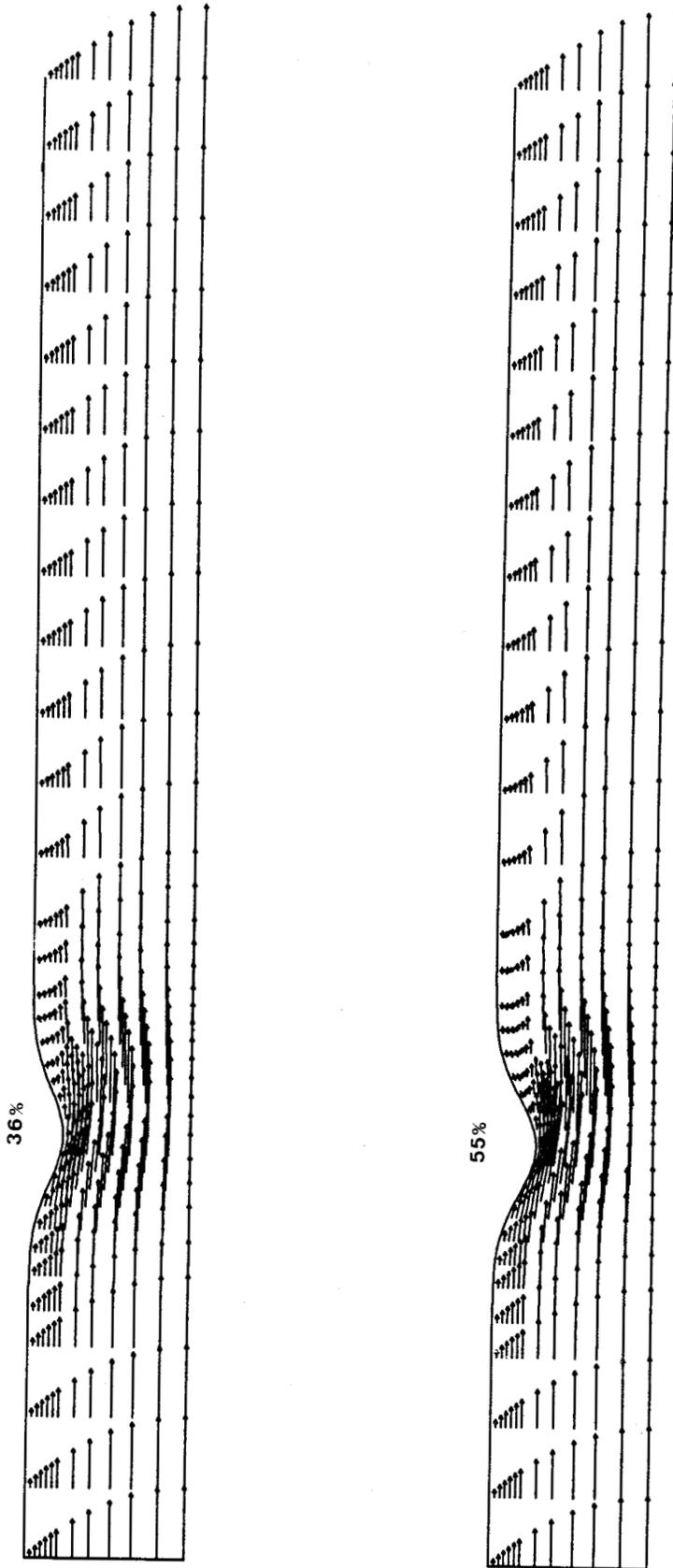
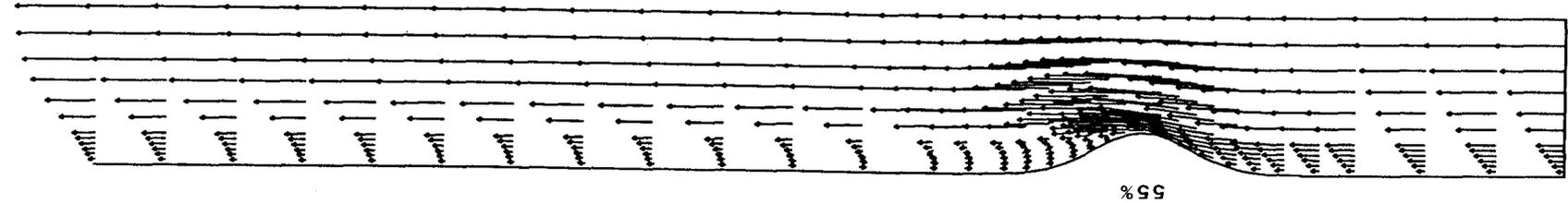


Figure V-6 PROFILS DE VITESSES POUR LES MODELES DE RETRECISSEMENTS  
A 36% ET 55% AVEC  $Re = 500$ .

Figure V-7 PROFILS DE VITESSES POUR LES MODELES DE RETRECISSEMENTS  
A 36% ET 55% AVEC  $Re = 1000$ .



55%



36%

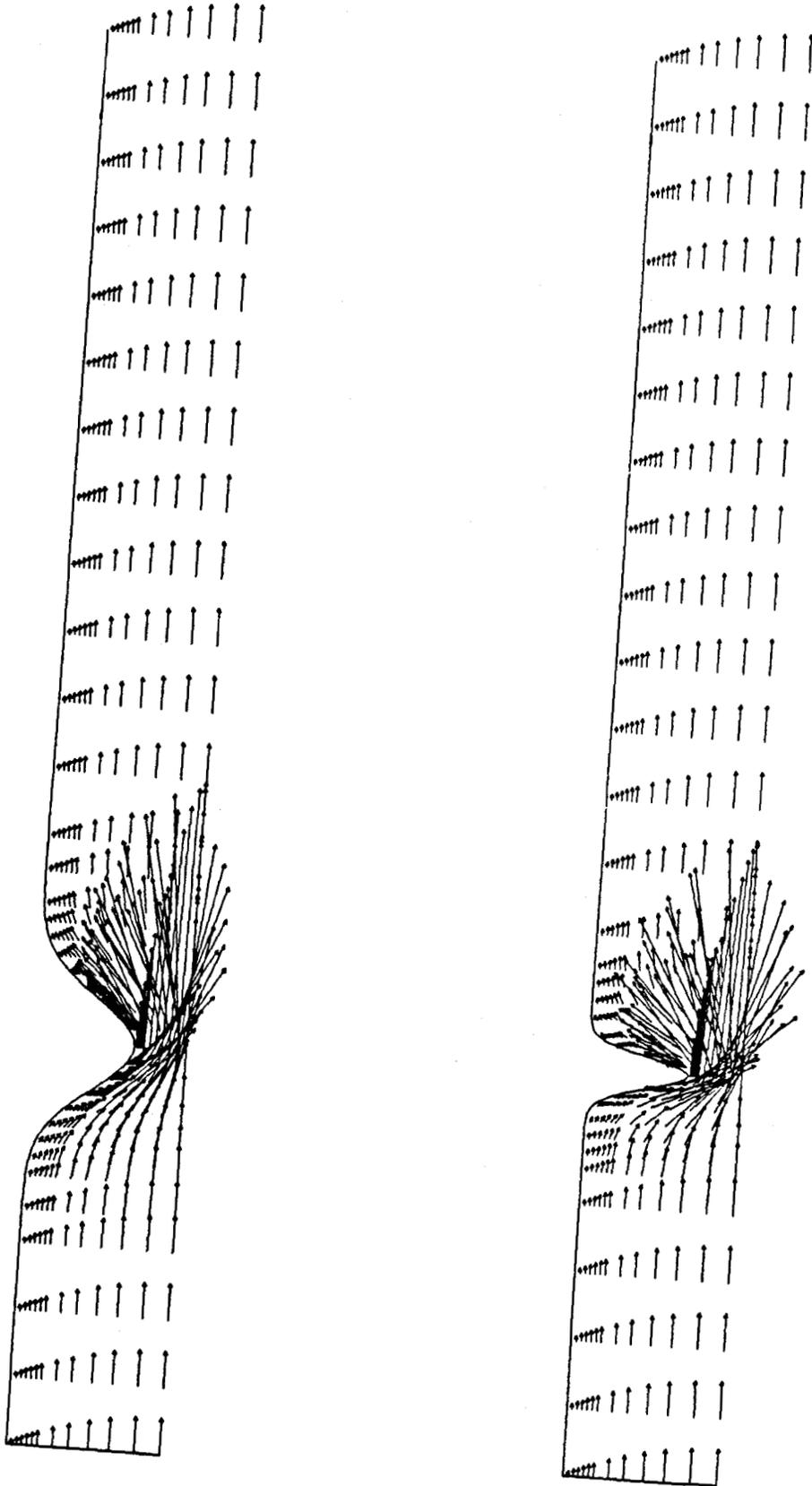


Figure V-8 PROFILS DE VITESSES OBTENUS POUR DEUX MODELES DE MEME POURCENTAGE DE RETRECISSEMENTS A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC UN NOMBRE DE REYNOLDS  $Re = 1$ .

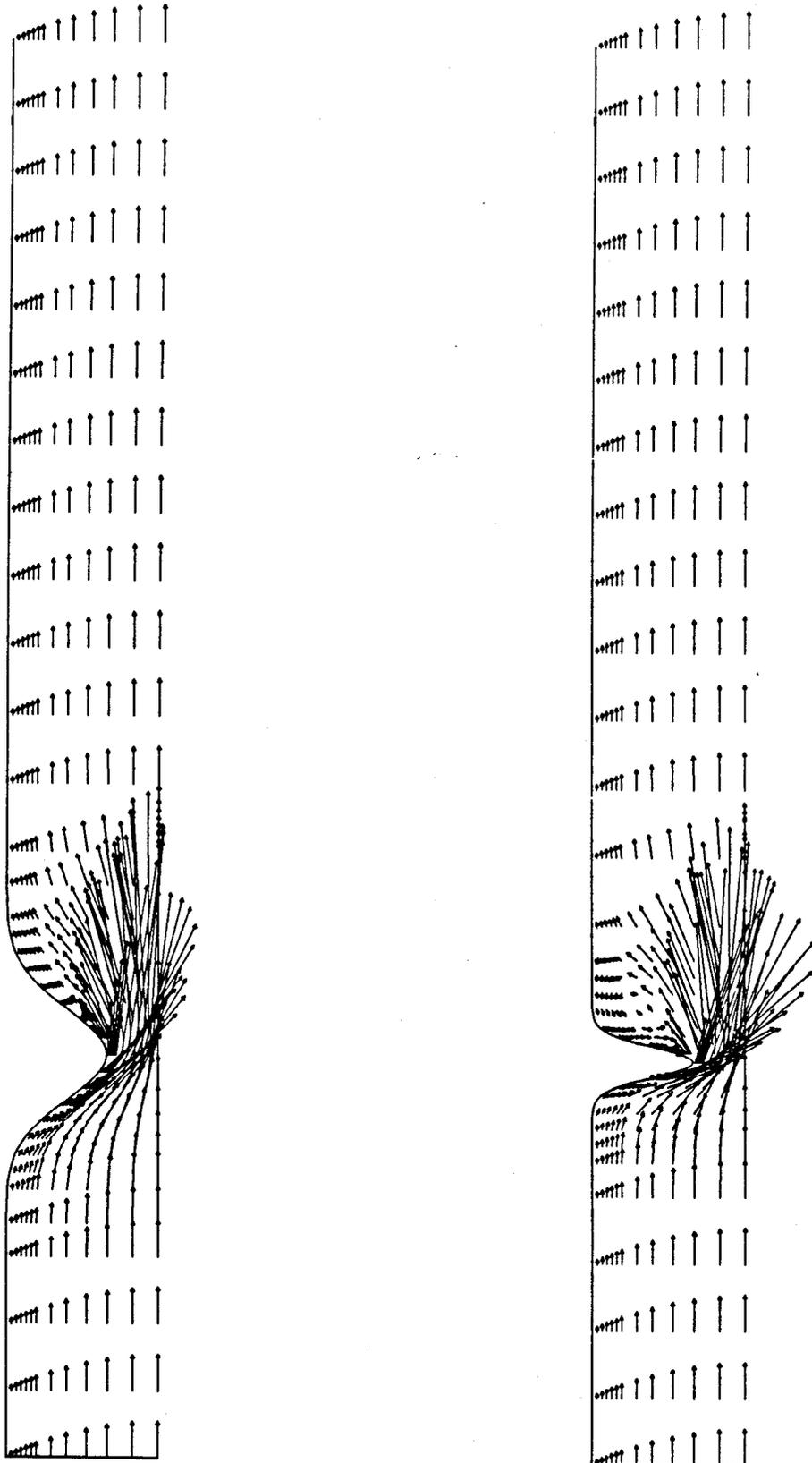


Figure V-9 PROFILS DE VITESSES OBTENUS POUR DEUX MODELES DE MEME POURCENTAGE DE RETRECISSEMENTS A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC UN NOMBRE DE REYNOLDS  $Re = 10$ .

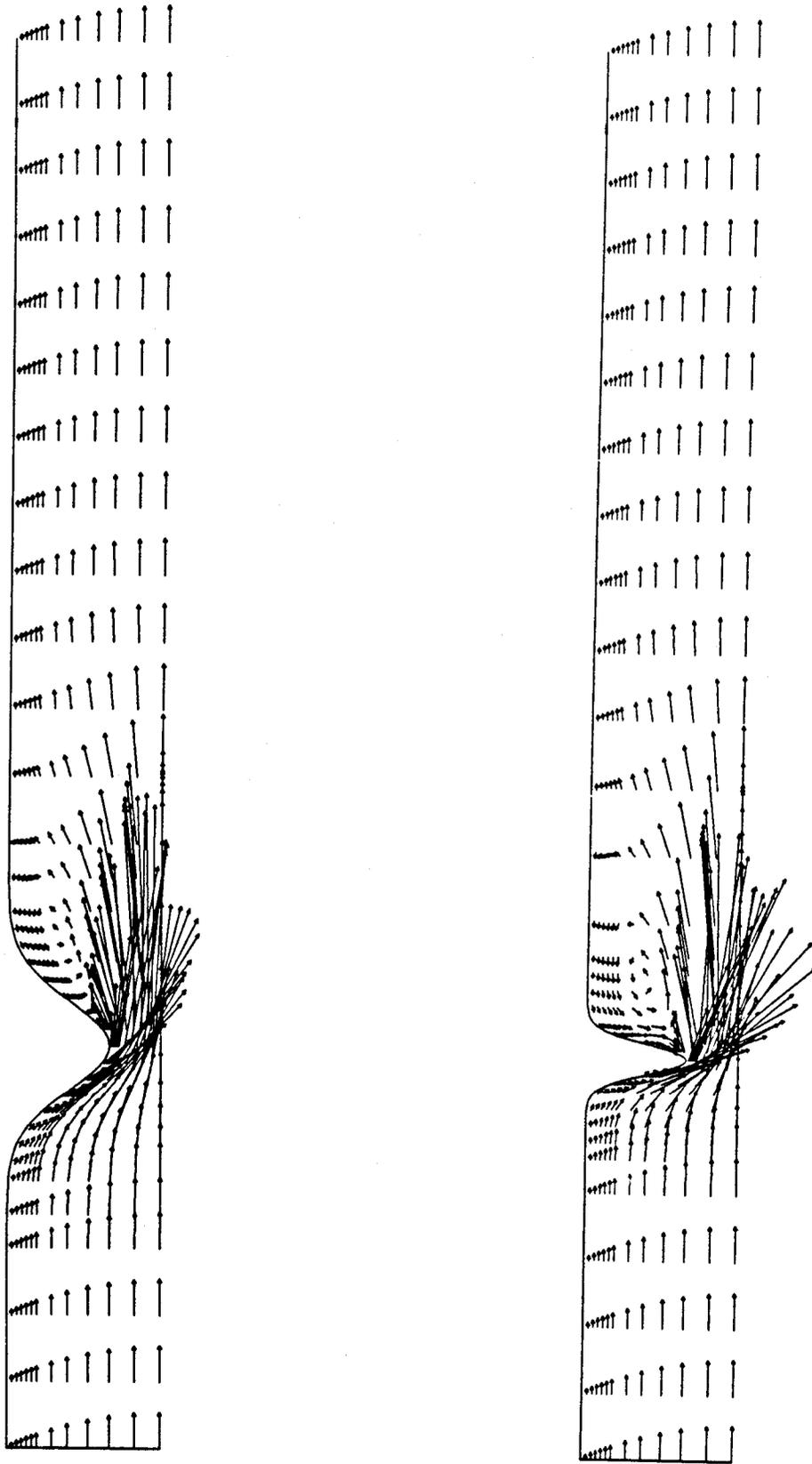


Figure V-10 PROFILS DE VITESSES OBTENUS POUR DEUX MODELES DE MEME POURCENTAGE DE RETRECISSEMENTS A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC UN NOMBRE DE REYNOLDS  $Re = 20$ .

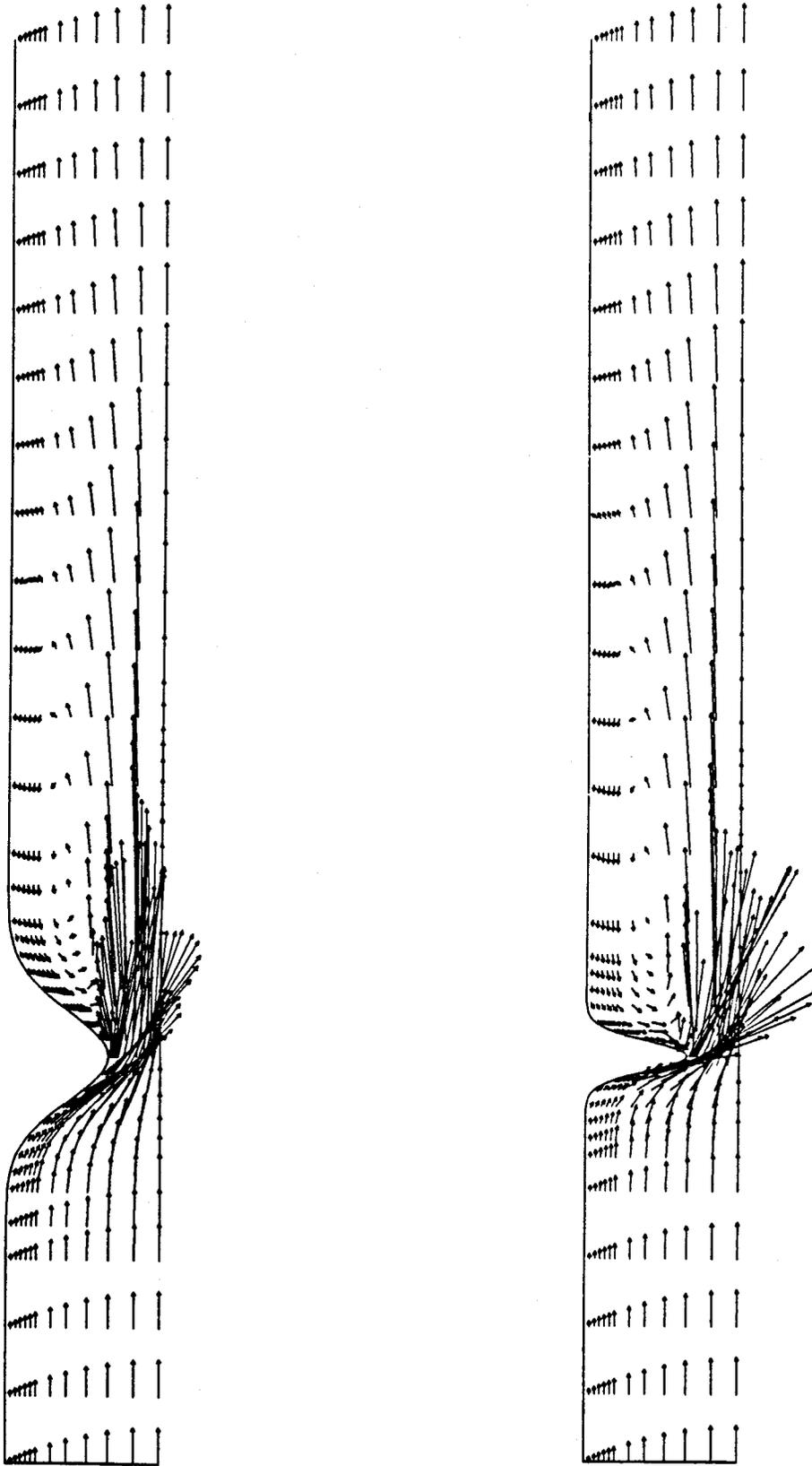


Figure V-11 PROFILS DE VITESSES OBTENUS POUR DEUX MODELES DE MEME POURCENTAGE DE RETRECISSEMENTS A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC UN NOMBRE DE REYNOLDS  $Re = 50$ .

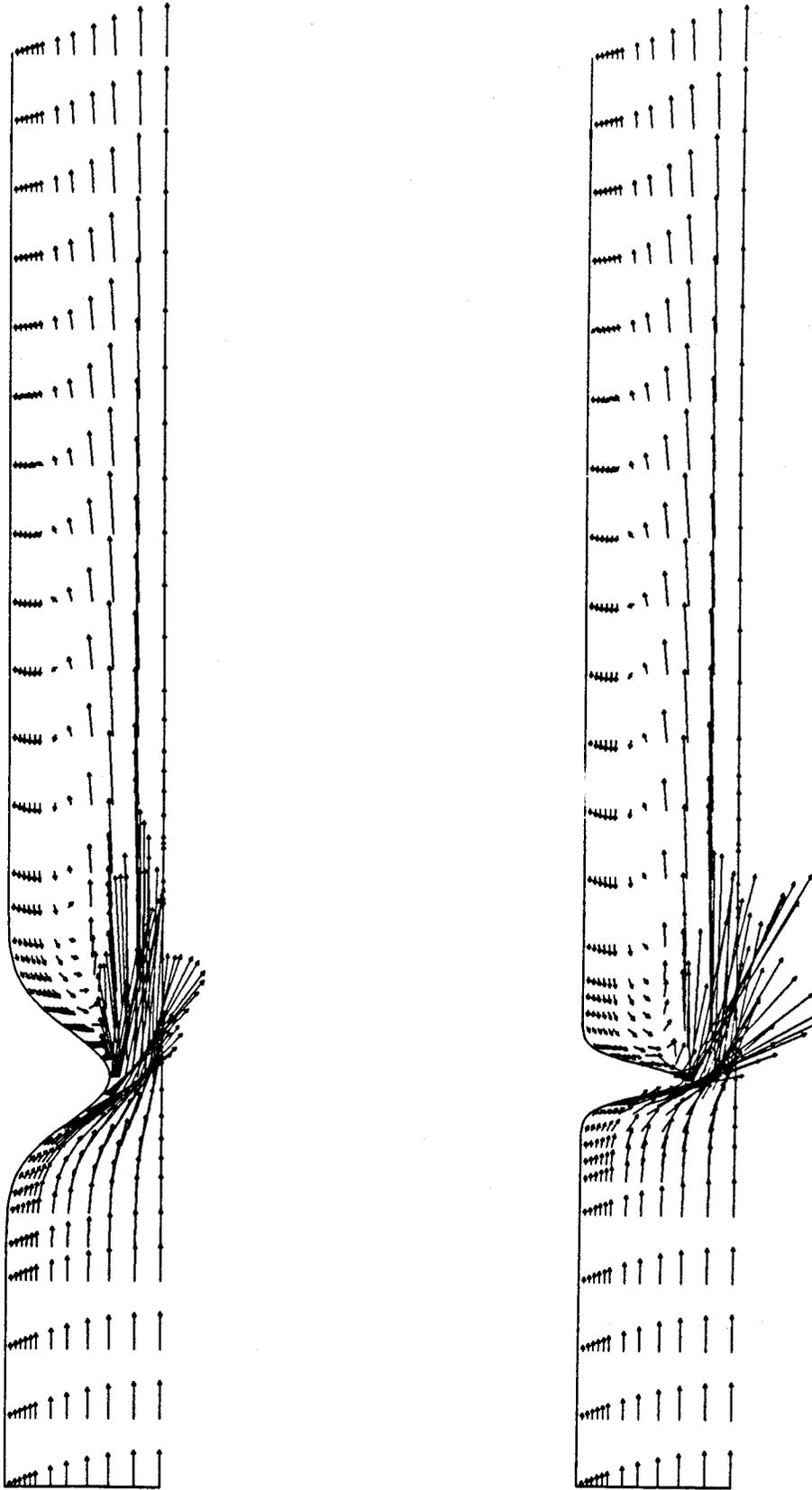


Figure V-12 PROFILS DE VITESSES OBTENUS POUR DEUX MODELES DE MEME POURCENTAGE DE RETRECISSEMENTS A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC UN NOMBRE DE REYNOLDS  $Re = 70$ .

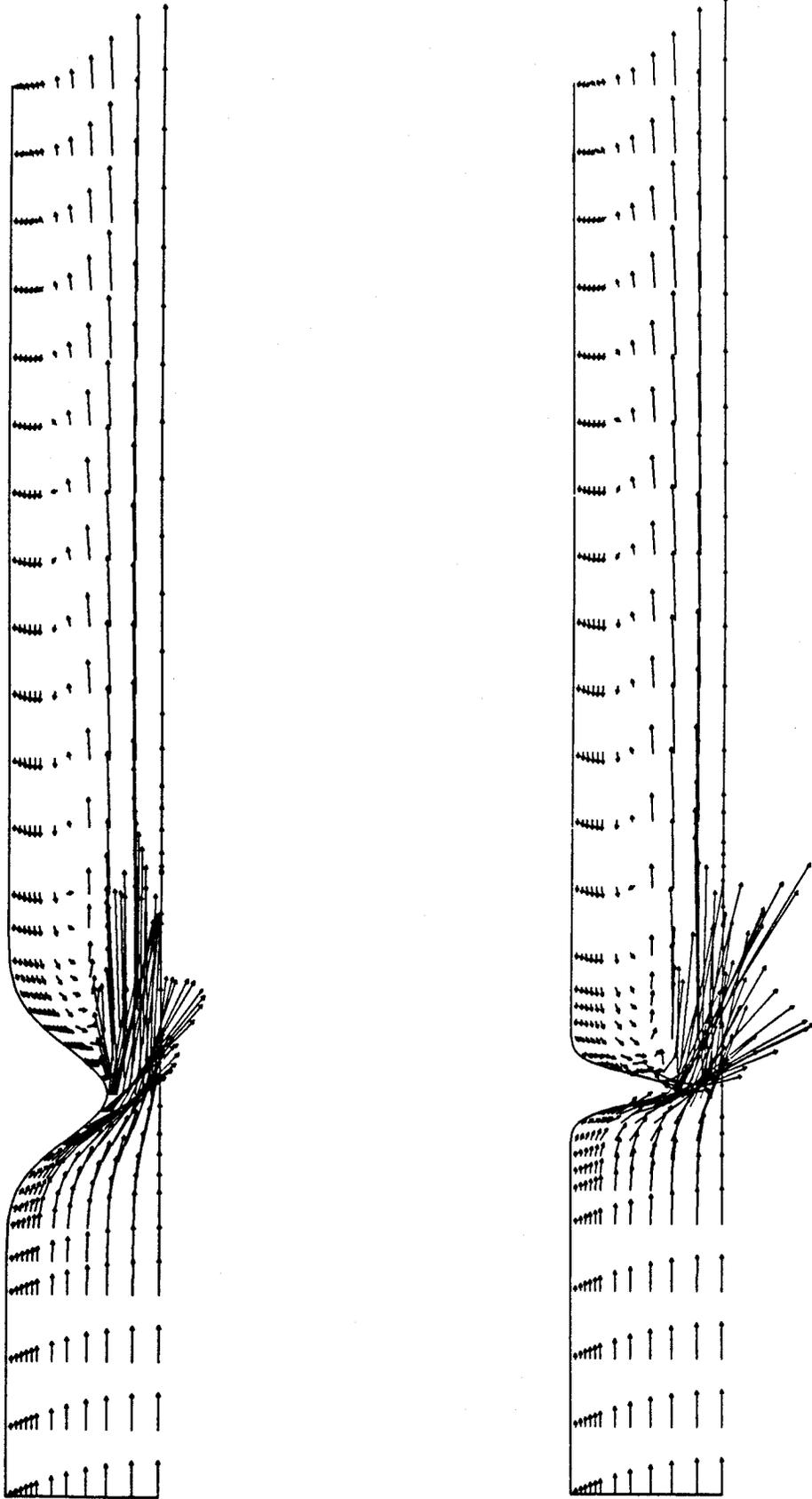


Figure V-13 PROFILS DE VITESSES OBTENUS POUR DEUX MODELES DE MEME POURCENTAGE DE RETRECISSEMENTS A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC UN NOMBRE DE REYNOLDS  $Re = 100$ .

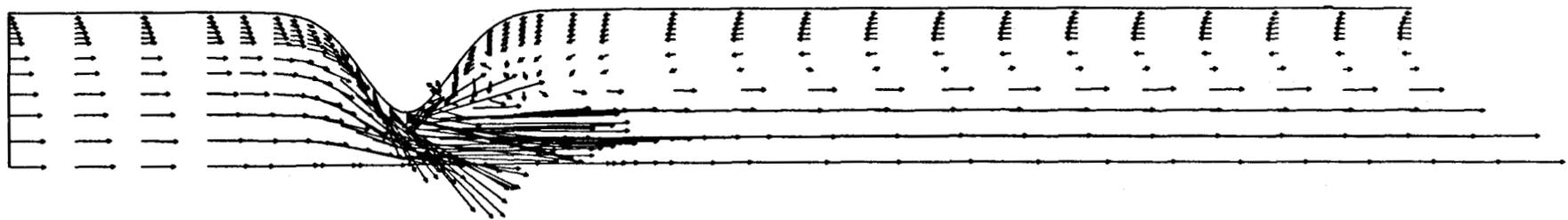
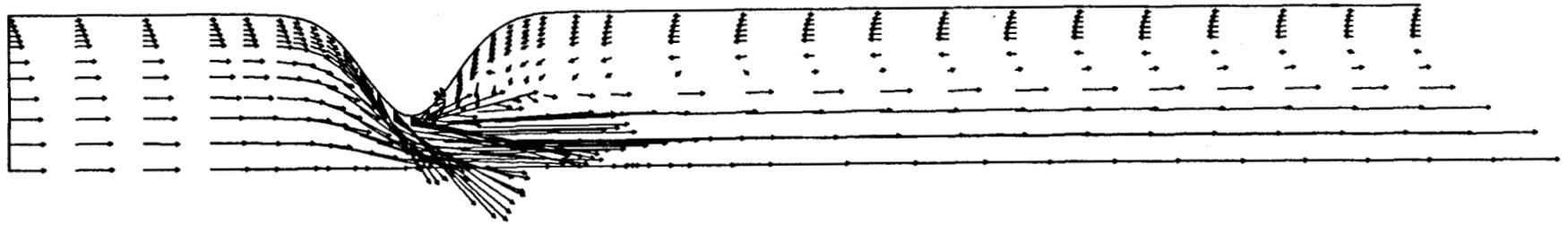


Figure V-14 CHAMPS DE VITESSES OBTENUS AVEC  $Re = 200$  ET  $Re = 300$  POUR LE MODELE DE RETRECISSEMENT A 88%.



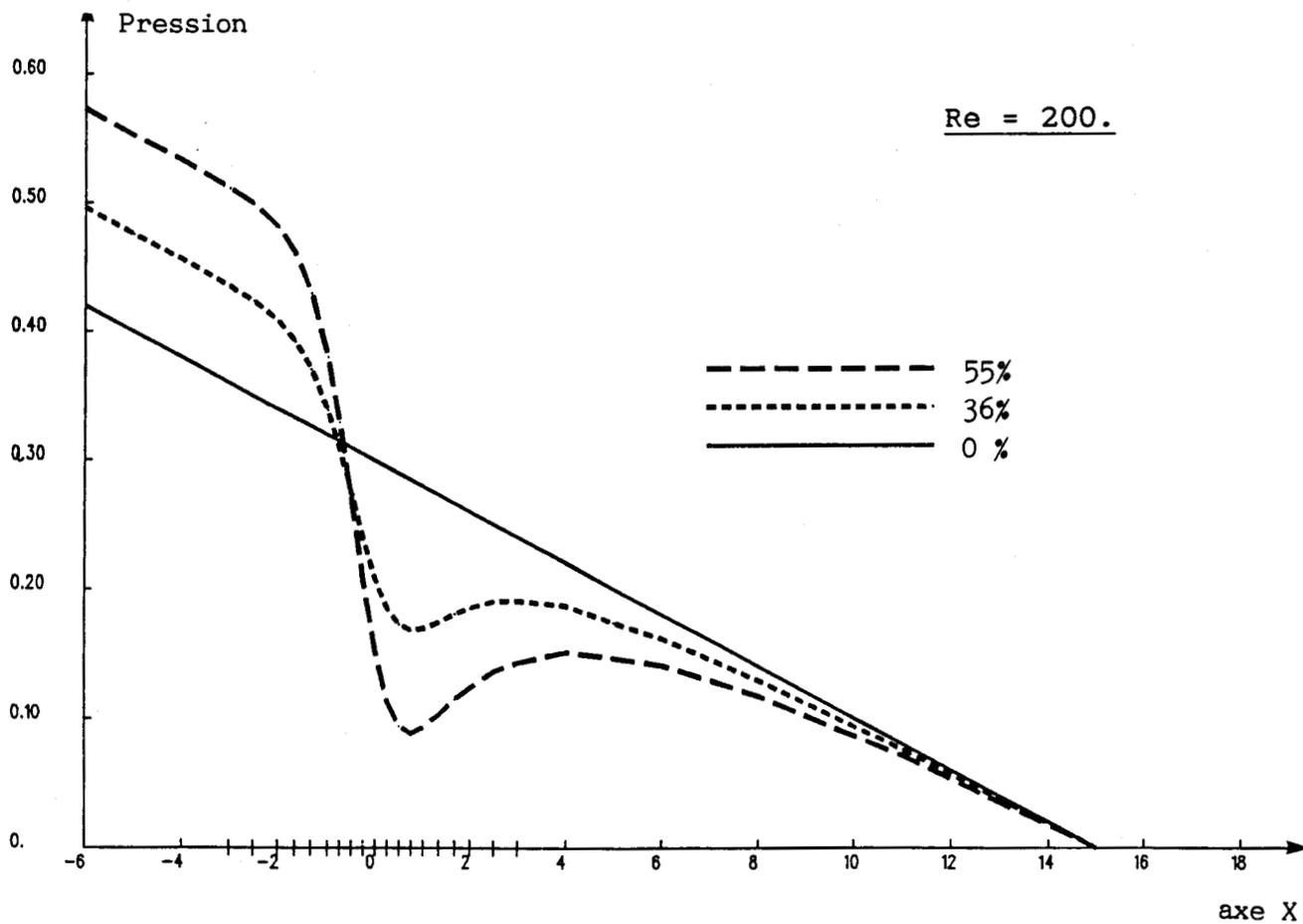
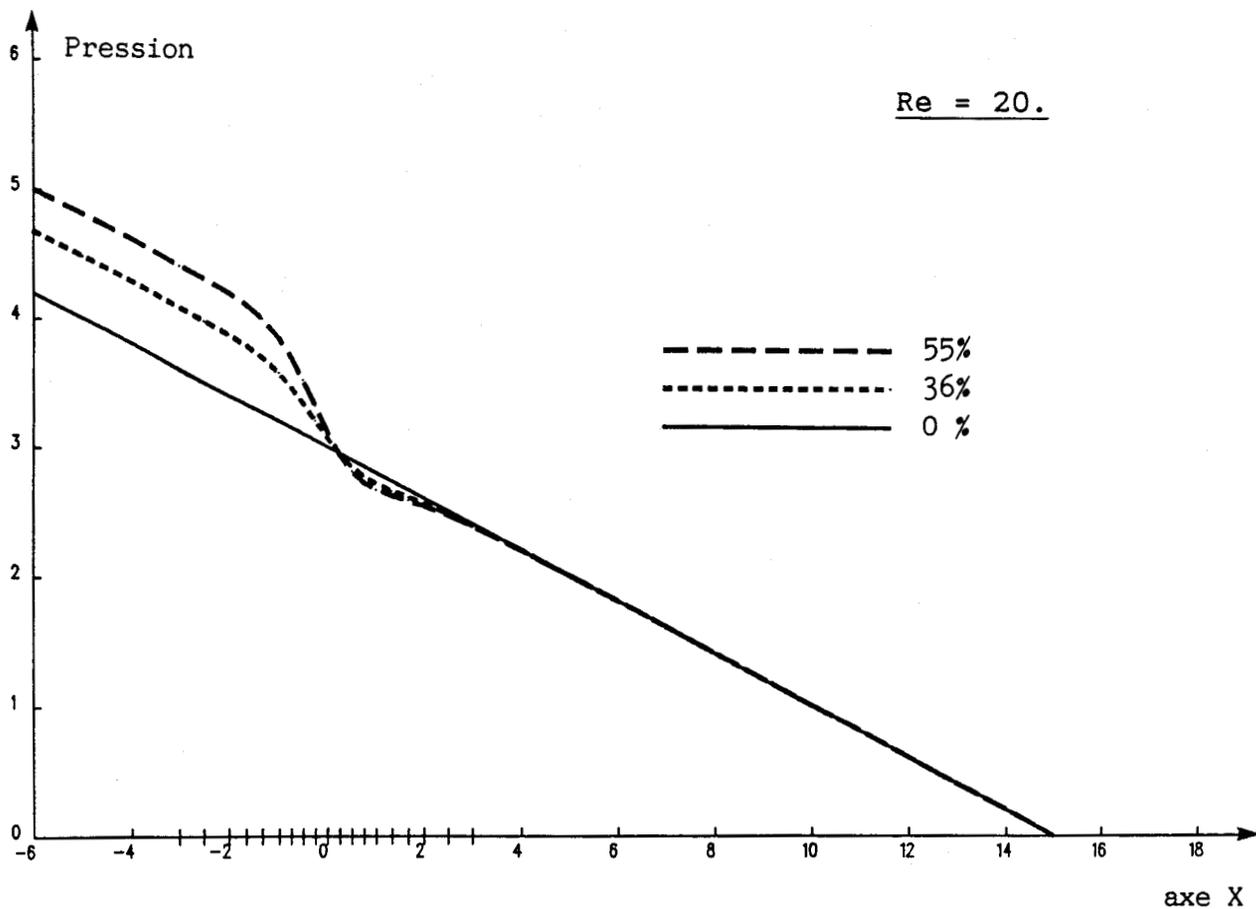


Figure  $\nabla$ -15 EVOLUTIONS LONGITUDINALES DES PRESSIONS A TRAVERS LES MODELES DE RETRECISSEMENT A 36% ET 55% COMPAREES A LA PRESSION OBTENUE DANS UN TUBE DE SECTION CONSTANTE, AVEC Re = 20 ET Re = 200.

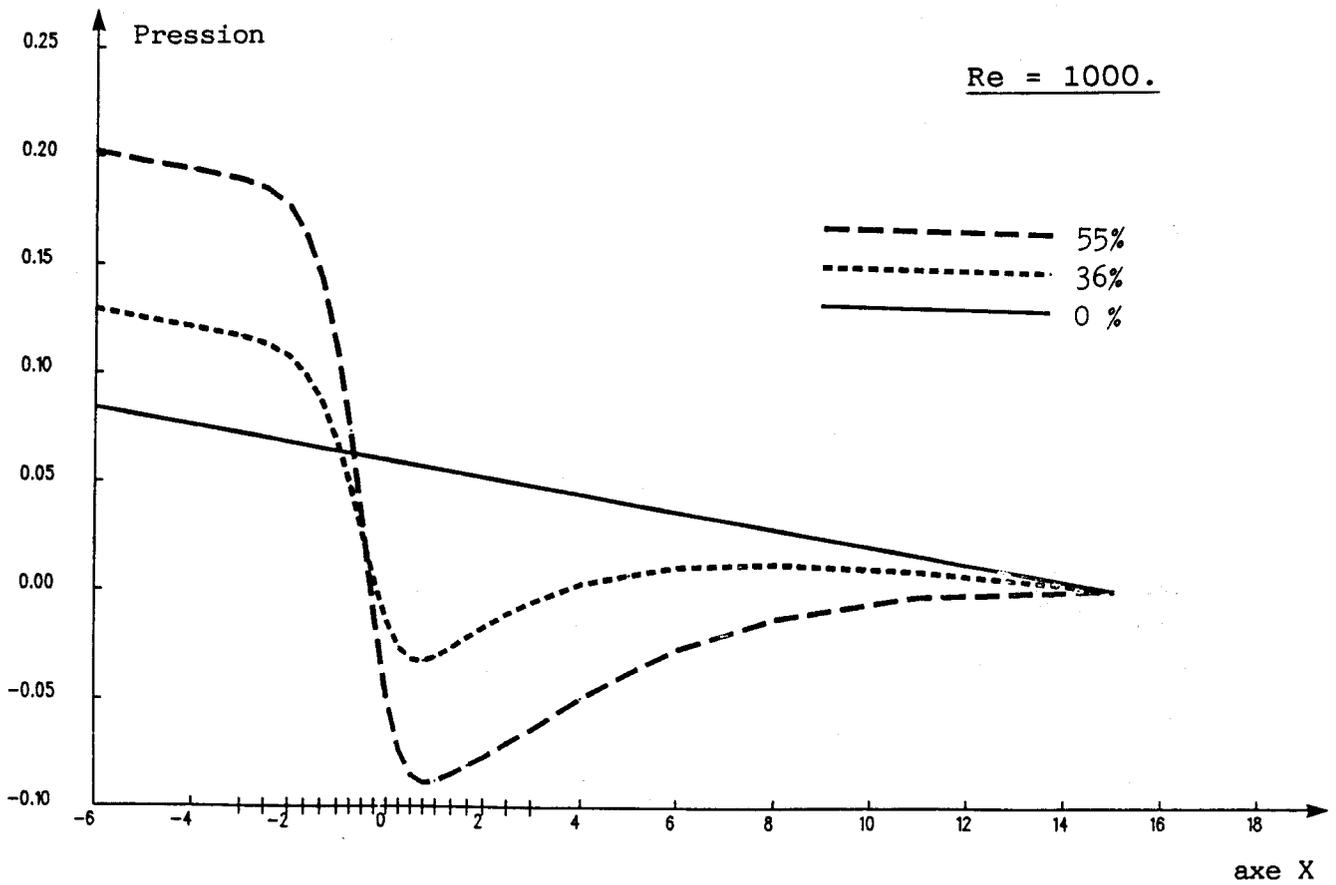
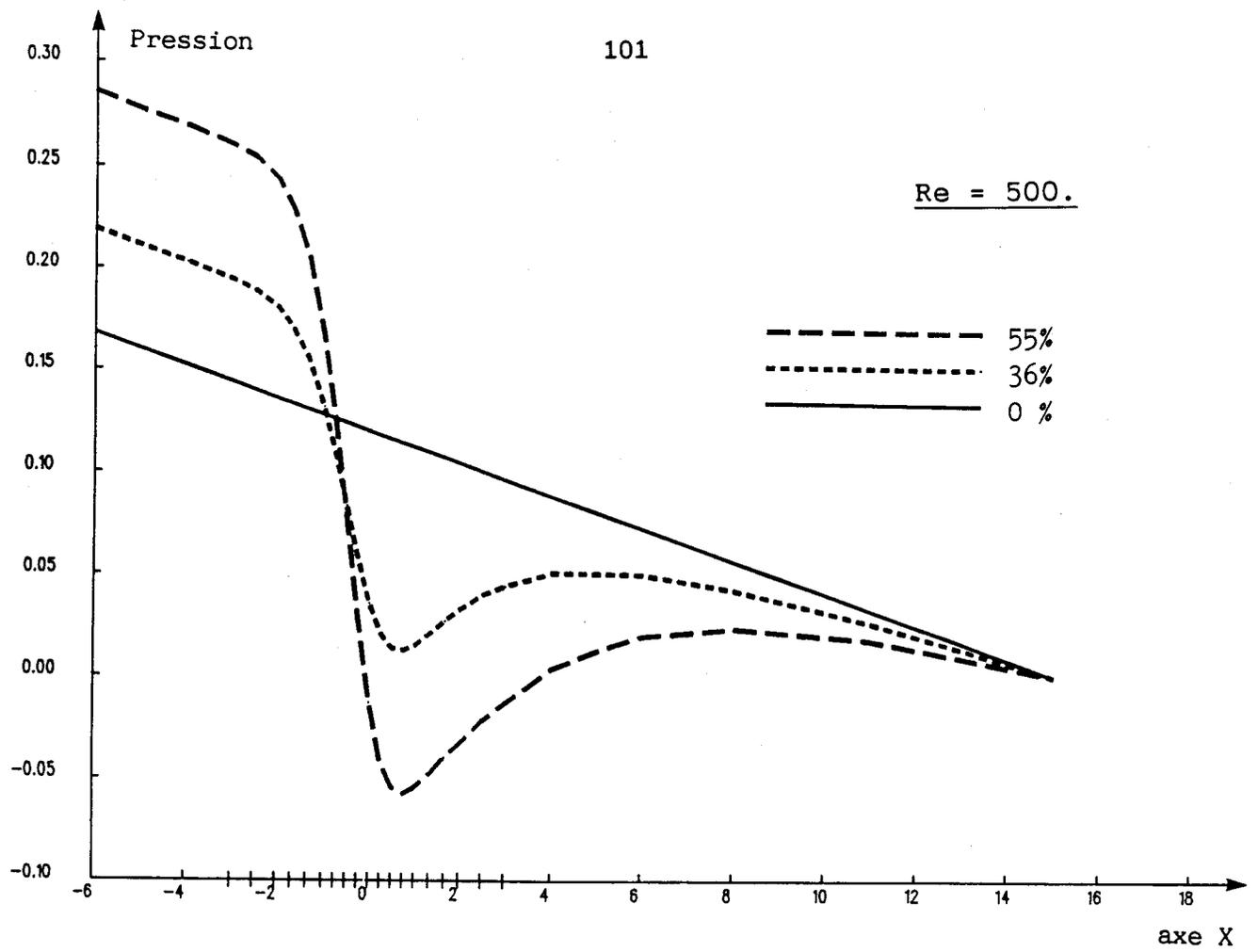


Figure V-16 EVOLUTIONS LONGITUDINALES DES PRESSIONS A TRAVERS LES MODELES DE RETRECISSEMENT A 36% ET 55% COMPAREES A LA PRESSION OBTENUE DANS UN TUBE DE SECTION CONSTANTE, AVEC  $Re = 500$  ET  $Re = 1000$ .

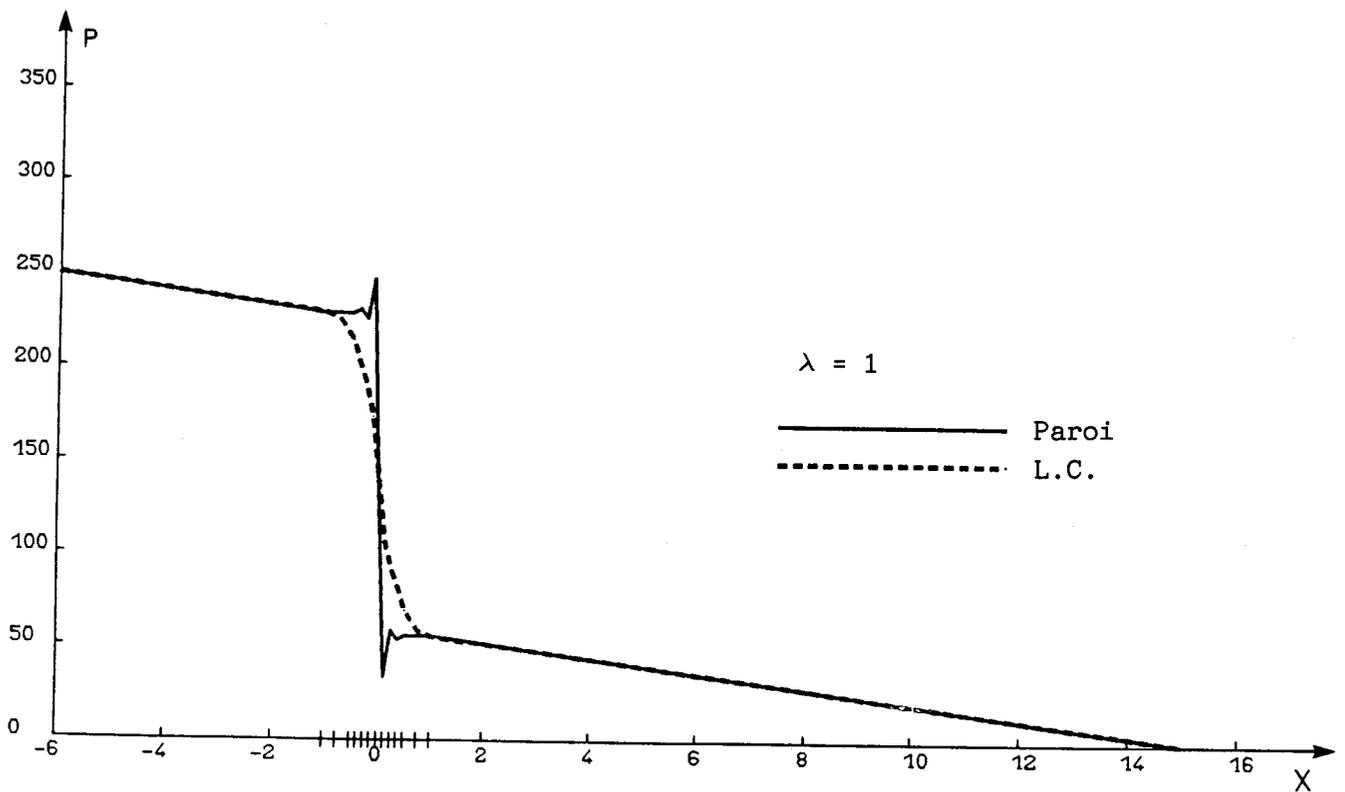
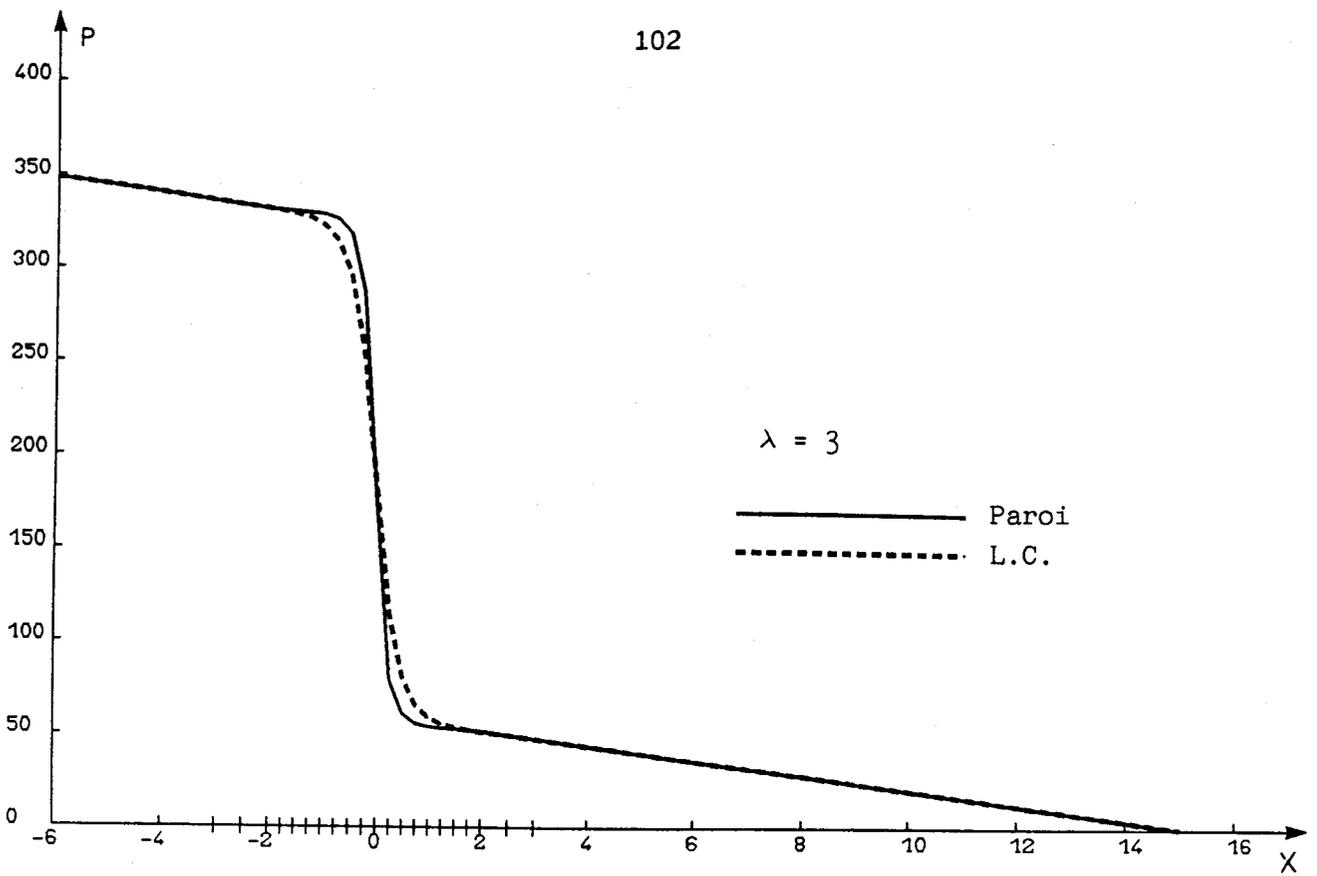


Figure V-17 COMPARAISON DES EVOLUTIONS DES PRESSIONS OBTENUES POUR LES DEUX MODELES A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC  $Re = 1$ .

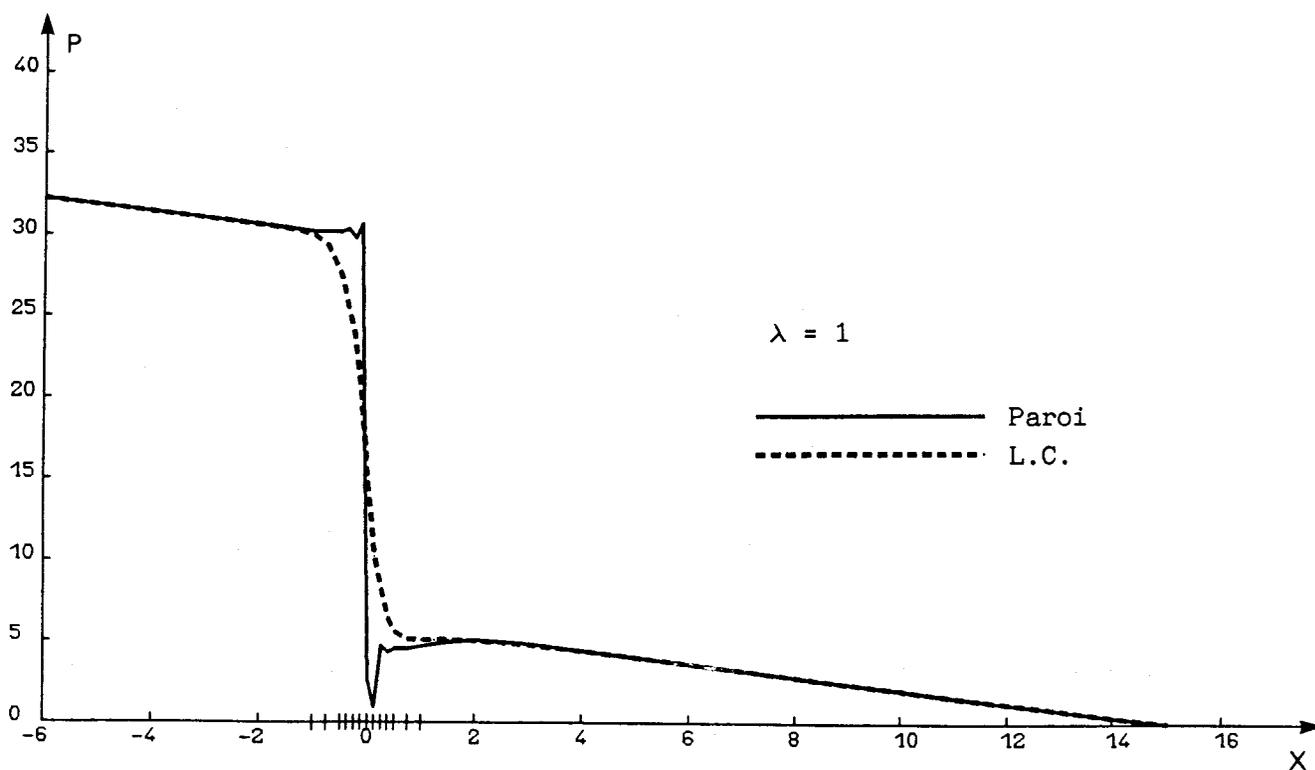
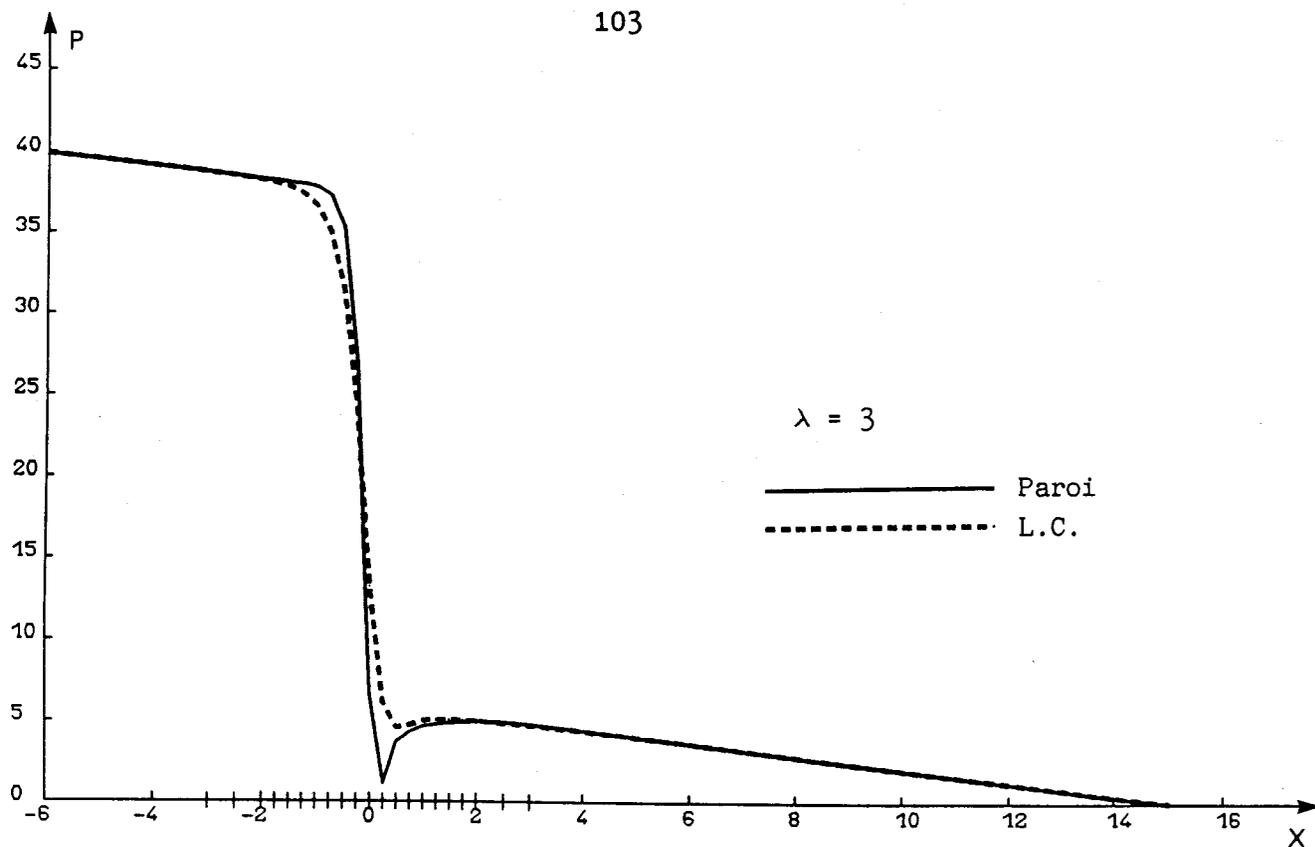


Figure V-18 COMPARAISON DES EVOLUTIONS DES PRESSIONS OBTENUES POUR LES DEUX MODELES A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC  $Re = 10$ .

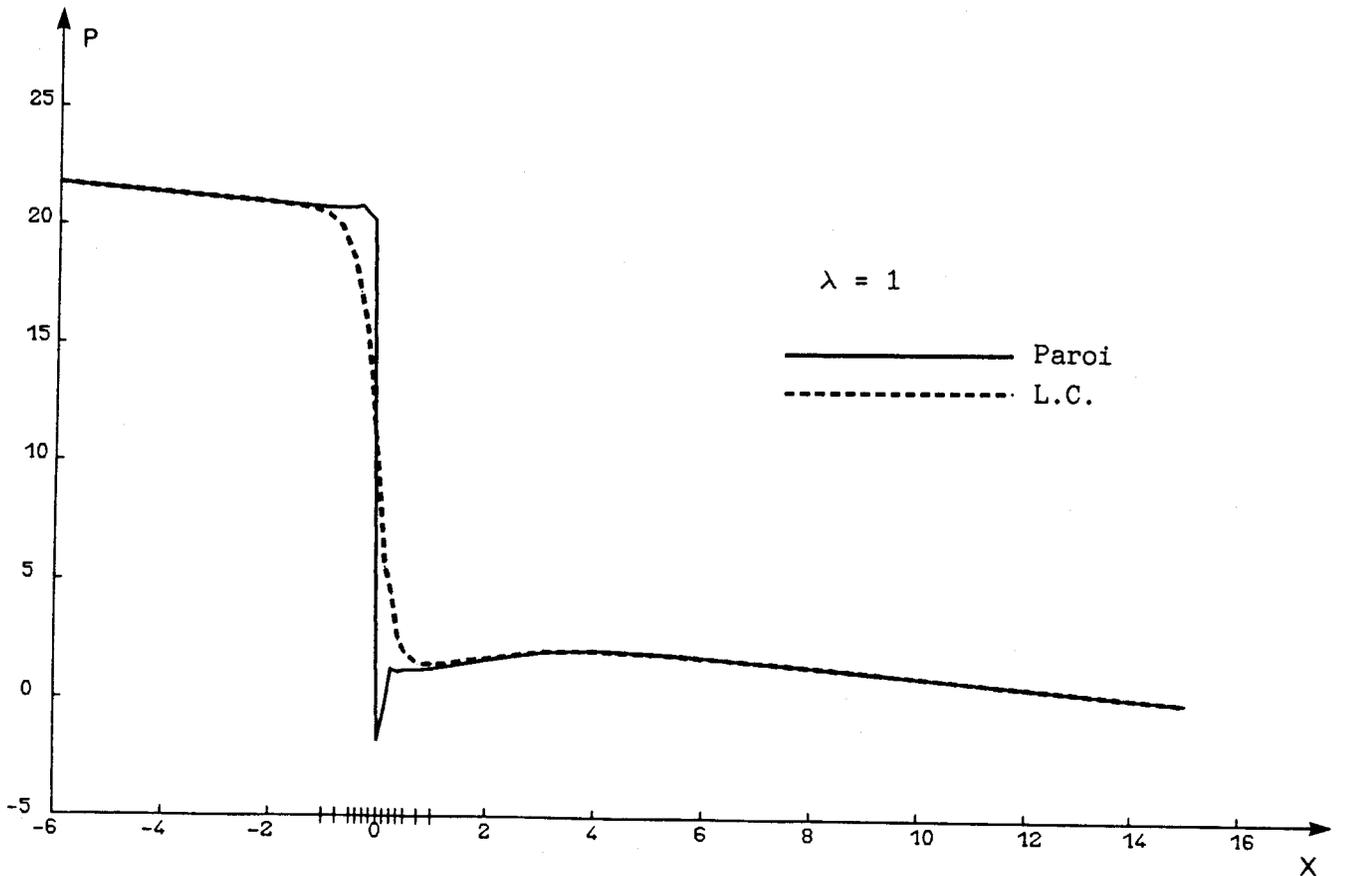
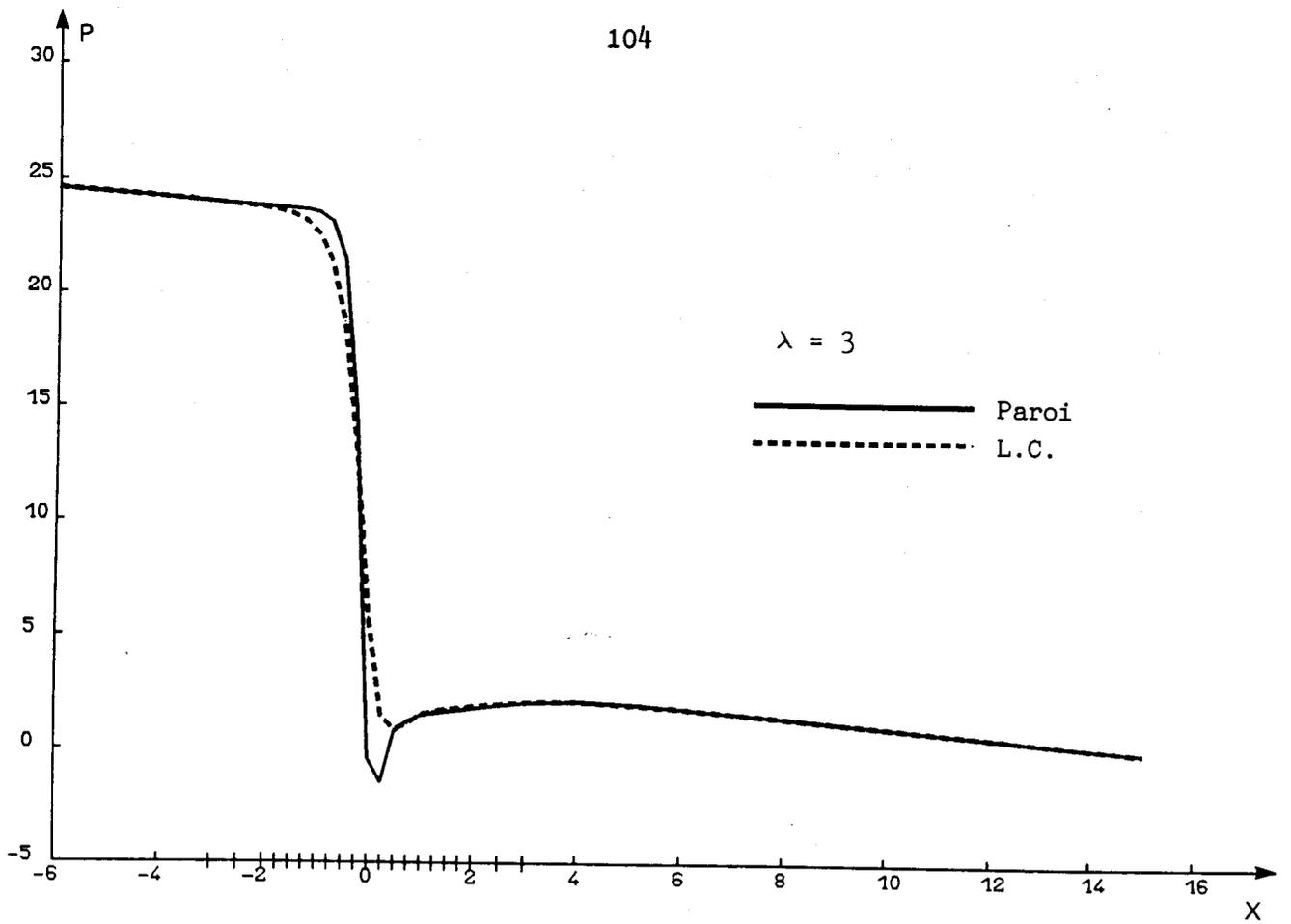


Figure V-19 COMPARAISON DES EVOLUTIONS DES PRESSIONS OBTENUES POUR LES DEUX MODELES A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC  $Re = 20$ .

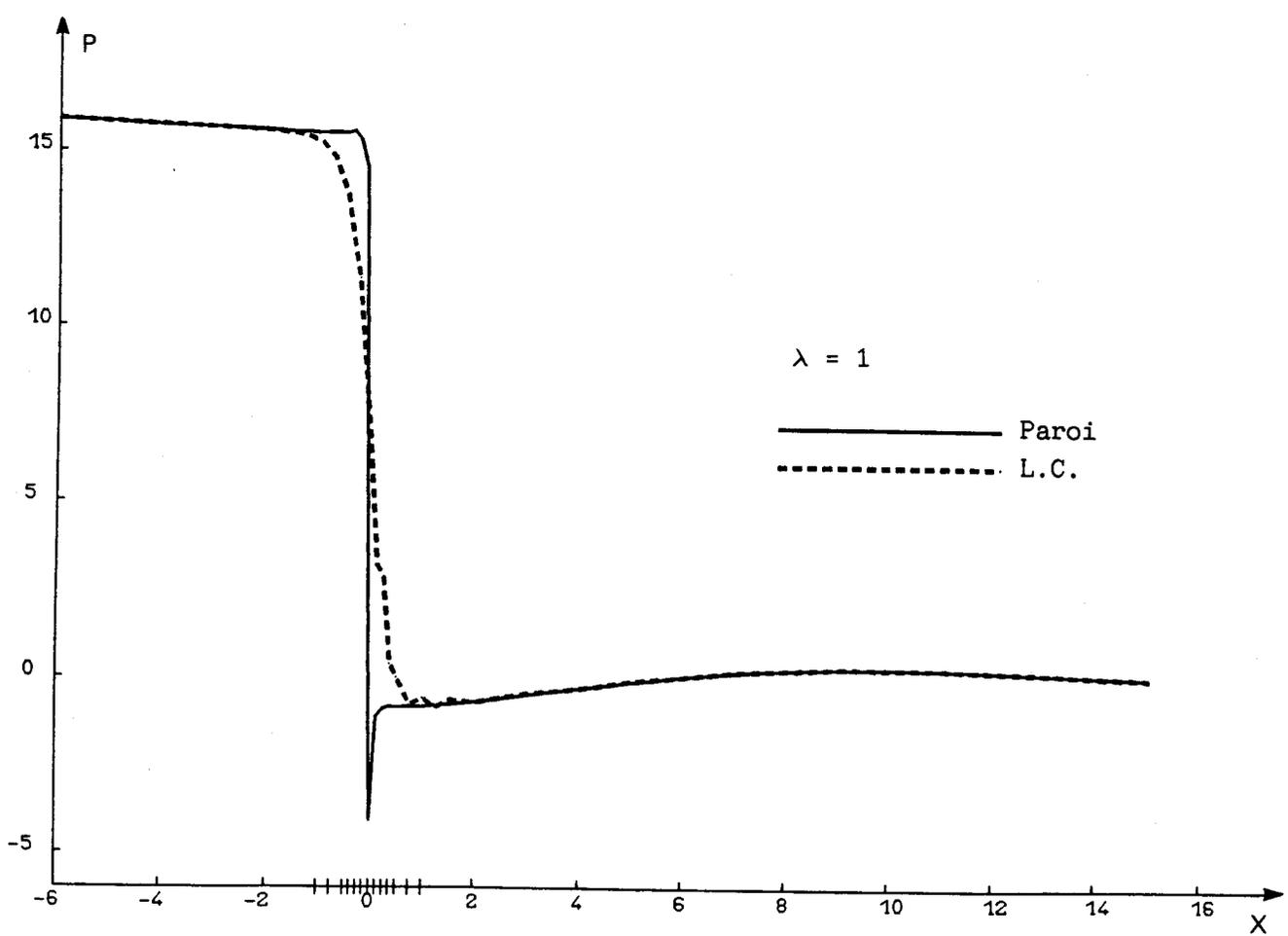
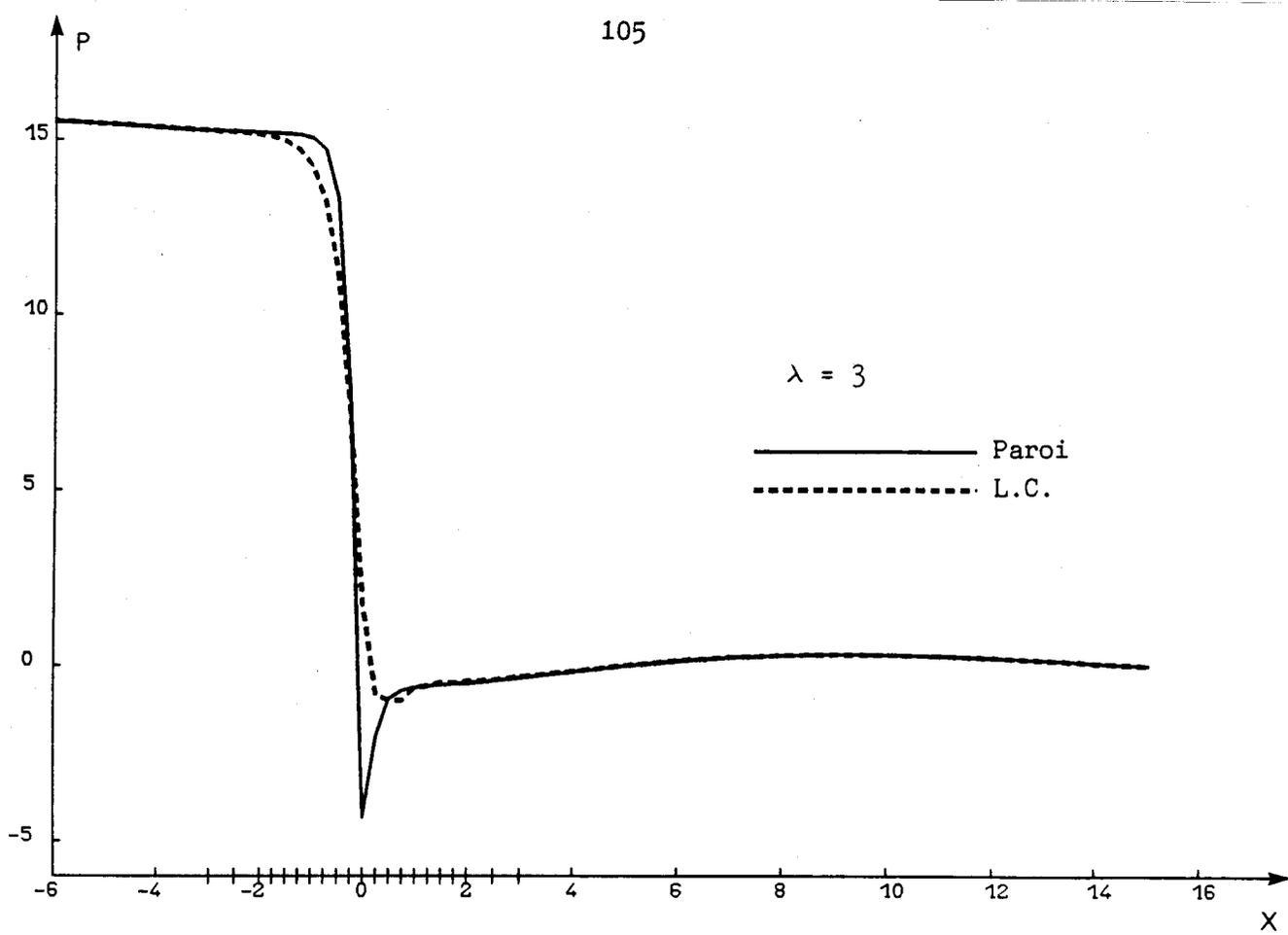


Figure V-20 COMPARAISON DES EVOLUTIONS DES PRESSIONS OBTENUES POUR LES DEUX MODELES A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC  $Re = 50$ .

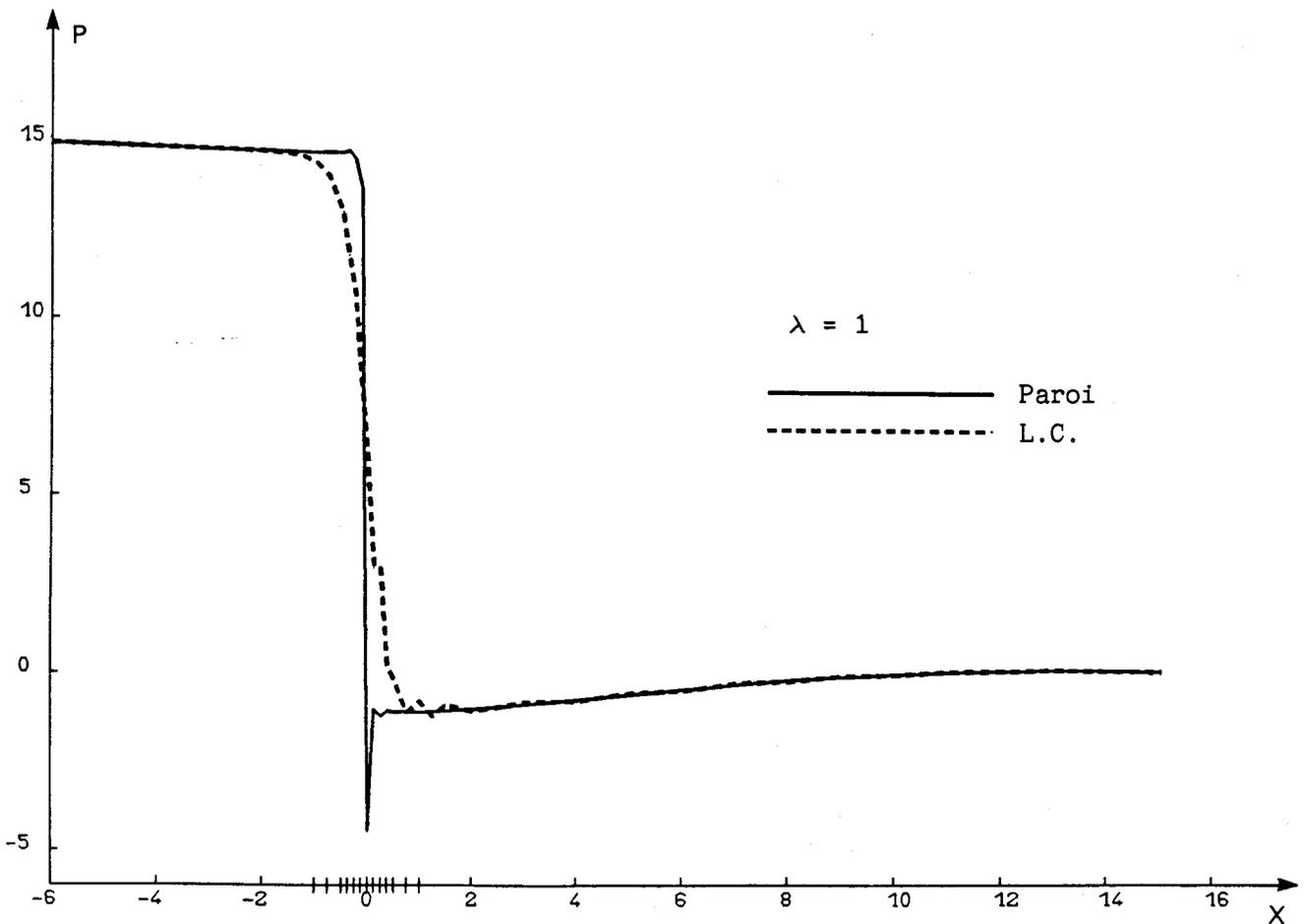
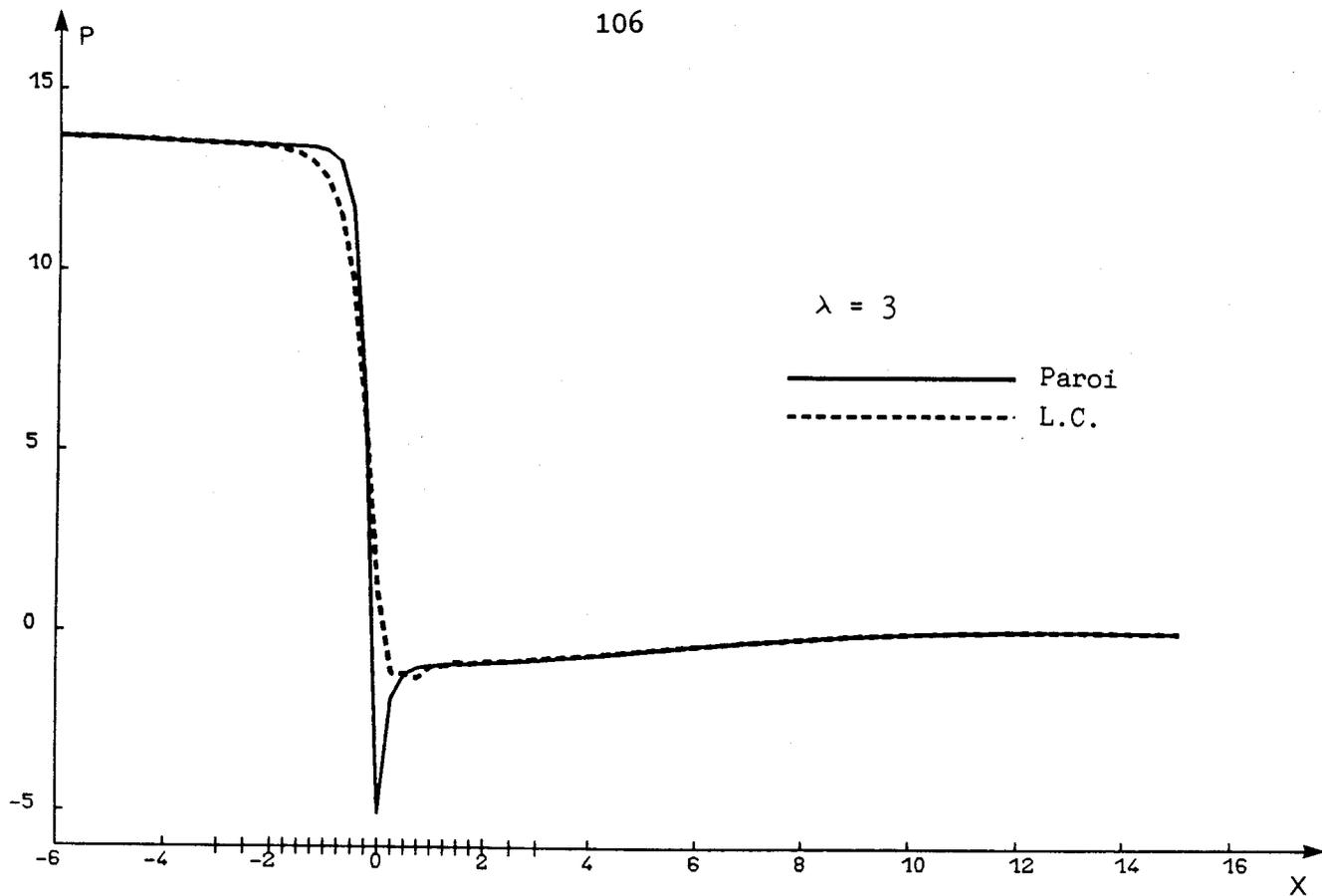


Figure V-21 COMPARAISON DES EVOLUTIONS DES PRESSIONS OBTENUES POUR LES DEUX MODELES A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC  $Re = 70$ .

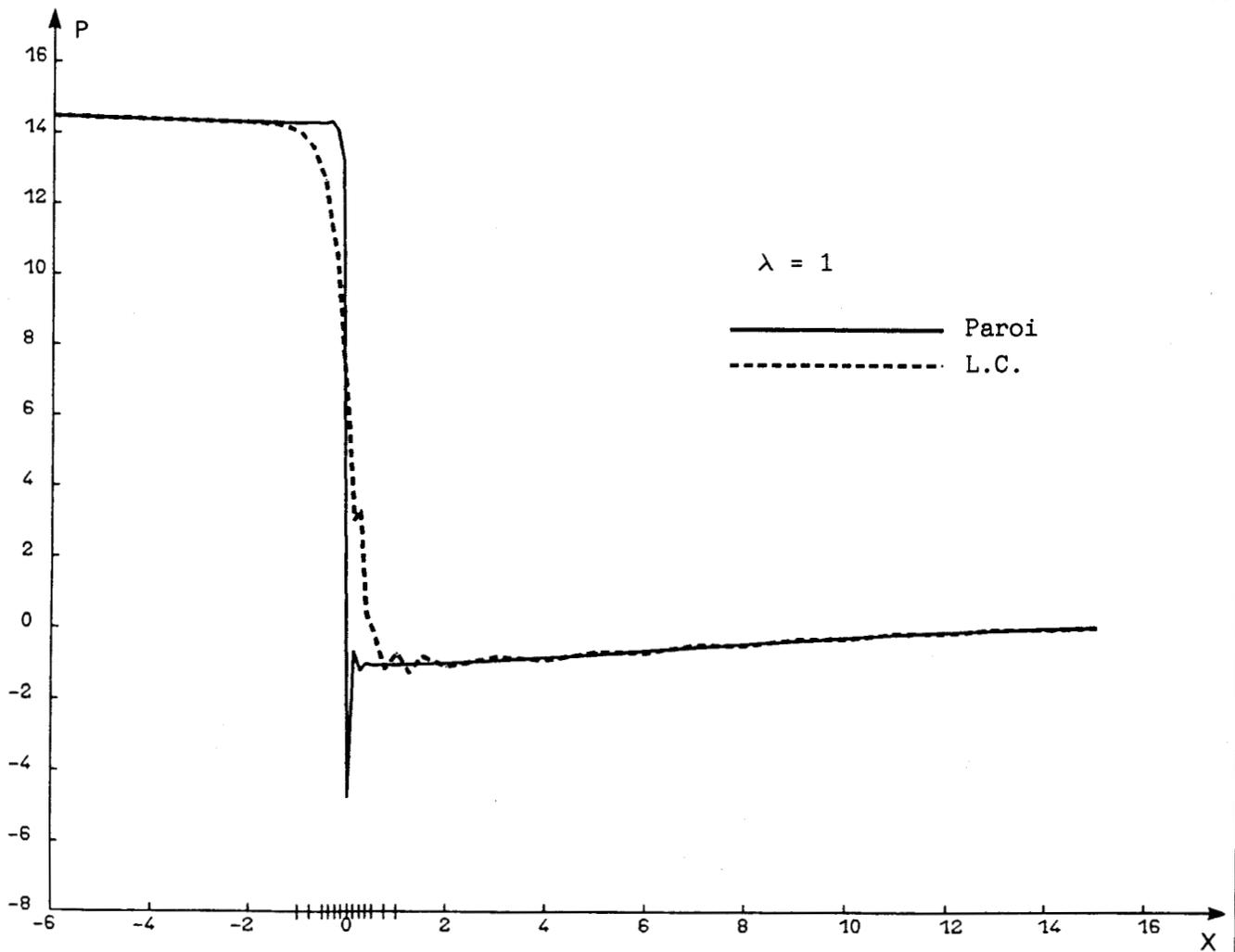
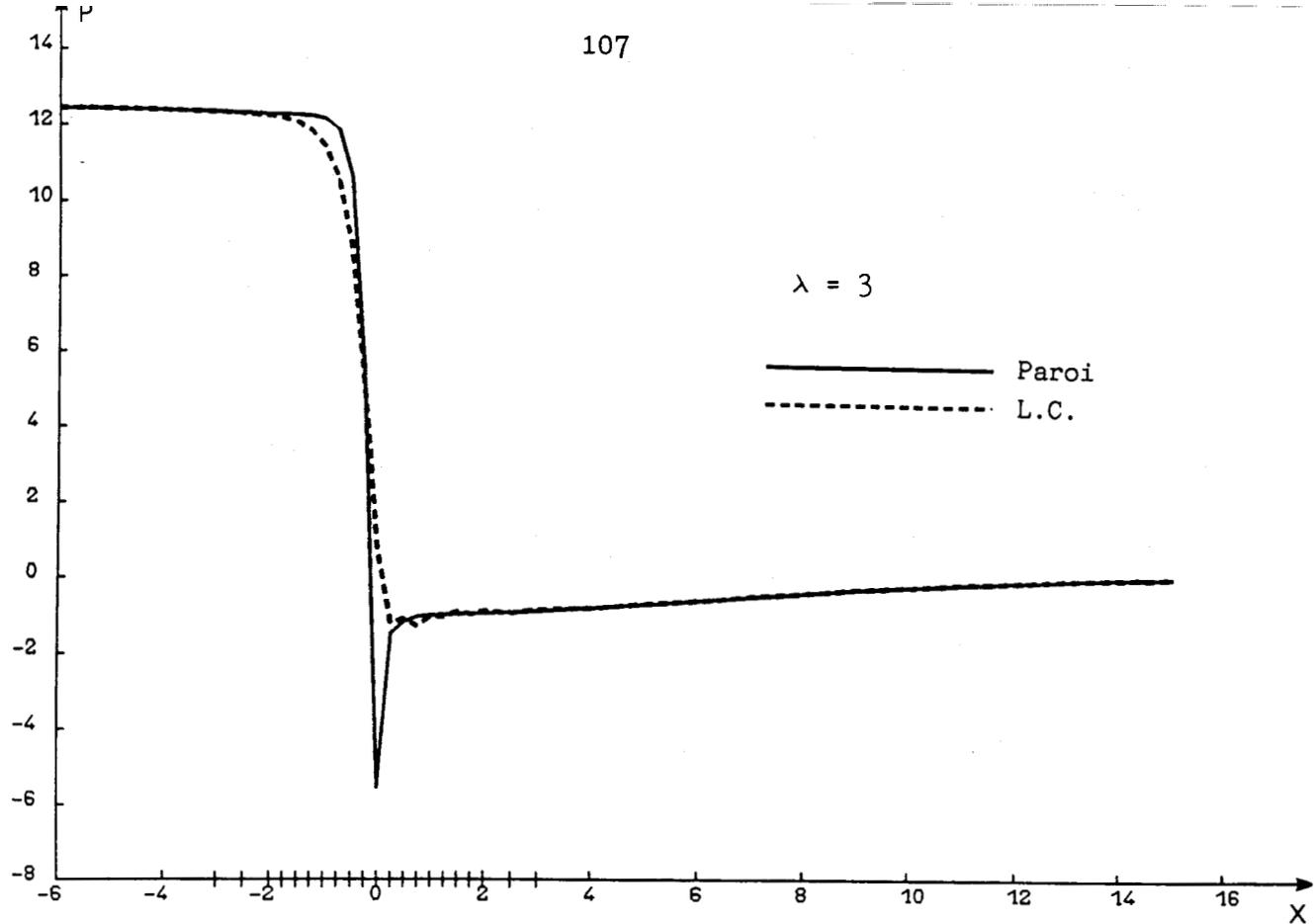


Figure V-22 COMPARAISON DES EVOLUTIONS DES PRESSIONS OBTENUES POUR LES DEUX MODELES A 88% ET DE LONGUEURS DE DEFORMATION DIFFERENTES, AVEC  $Re = 100$ .

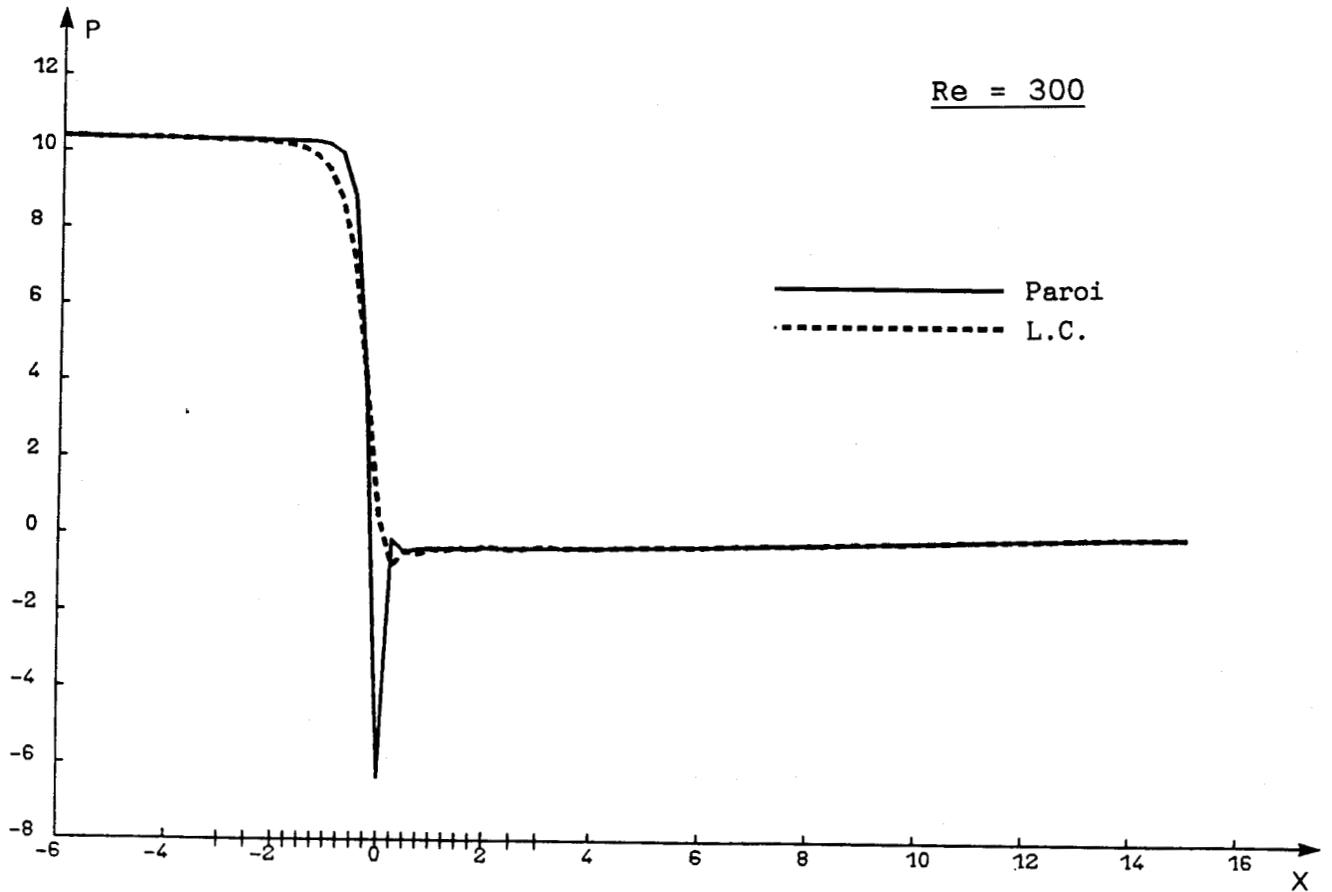
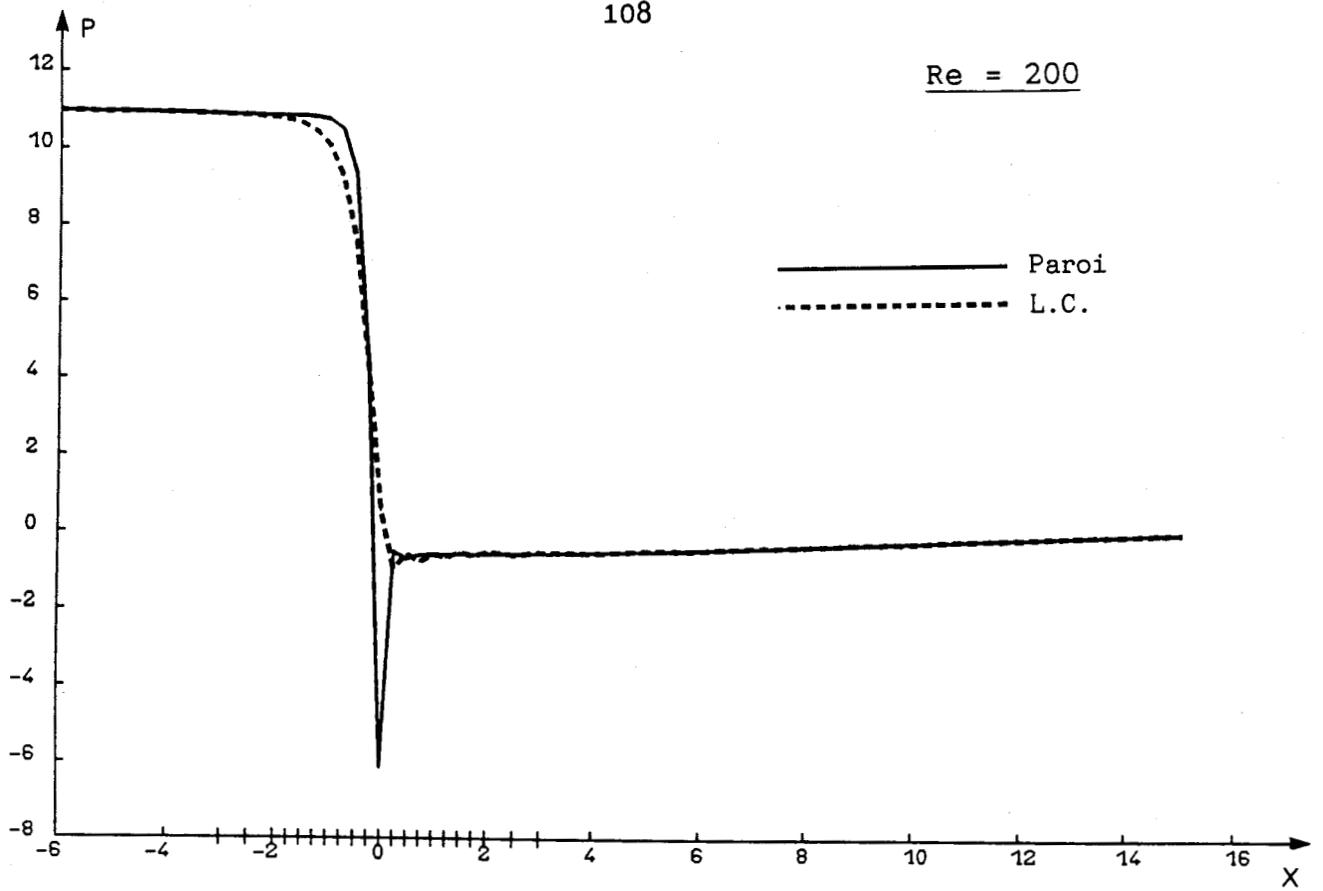
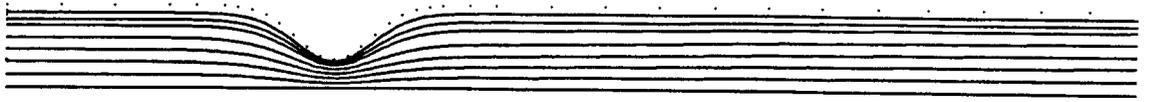
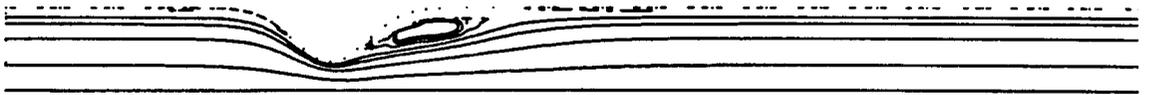


Figure V-23 EVOLUTIONS LONGITUDINALES DES PRESSIONS POUR LE MEME MODELE DE RETRECISSEMENT A 88% ET AVEC DEUX NOMBRES DE REYNOLDS Re = 200 ET Re = 300

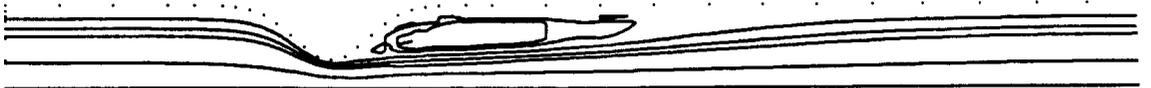
Re = 1.



Re = 20.



Re = 50.



Re = 100.

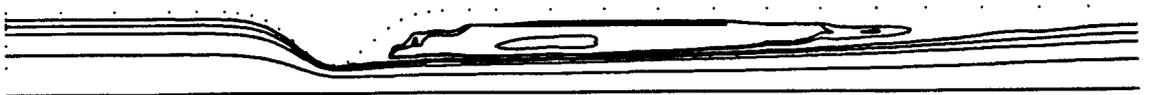


Figure V-24 EVOLUTIONS DES LIGNES DE COURANTS OBTENUES POUR LE MODELE A 88% DE RETRECISSEMENT EN FONCTION DU NOMBRE DE REYNOLDS

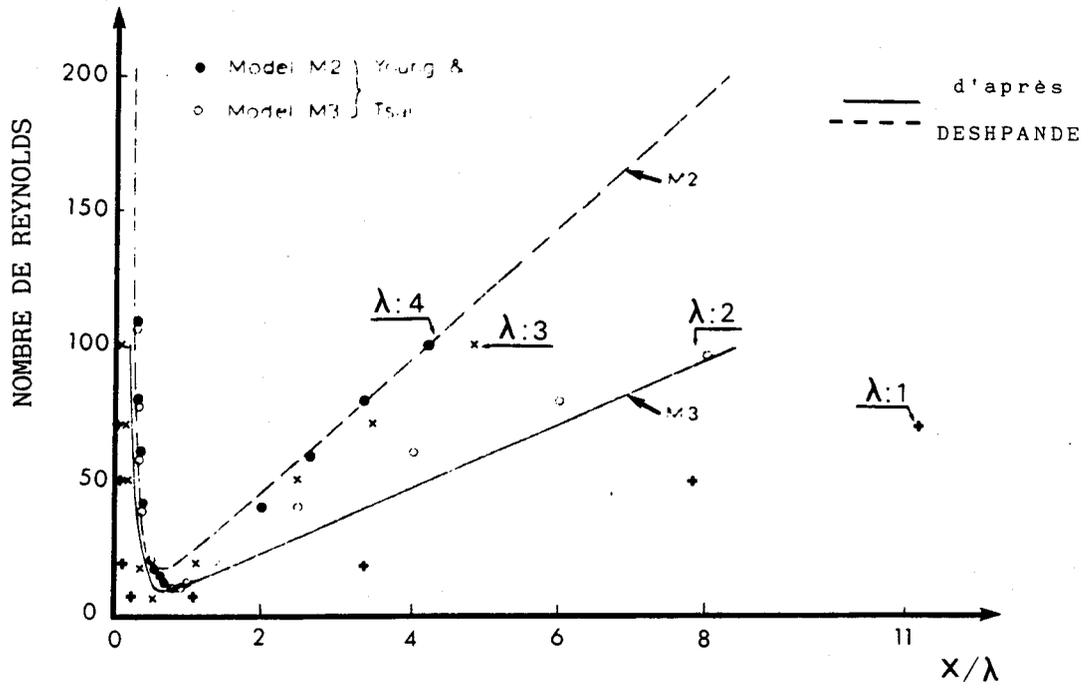


Figure V-25.a INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS SUR L'EVOLUTION DE LA TAILLE DE LA ZONE DE RECIRCULATION POUR DIFFERENTES VALEURS DE LA LONGUEUR DU RETRECISSEMENT. COMPARAISON DES RESULTATS NUMERIQUES D'APRES DESHPANDE [12] ET CEUX EXPERIMENTAUX DONNES PAR YOUNG [13] AVEC LA SOLUTION TROUVEE PAR ELEMENTS FINIS ( + , \* )

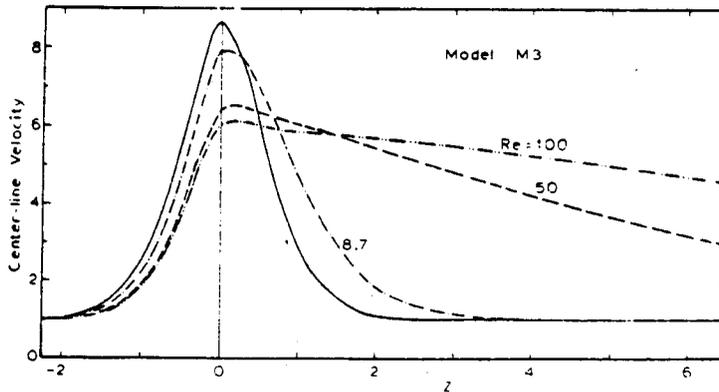


Fig. 11. Axial variation of centerline velocity, model M3.

Figure V-25.b INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS SUR L'EVOLUTION DE LA VITESSE AXIALE LE LONG DE LA LIGNE CENTRALE DE L'ECOULEMENT POUR UN MODELE DE RETRECISSEMENT A 89% et λ=2 D'APRES DESHPANDE [12].

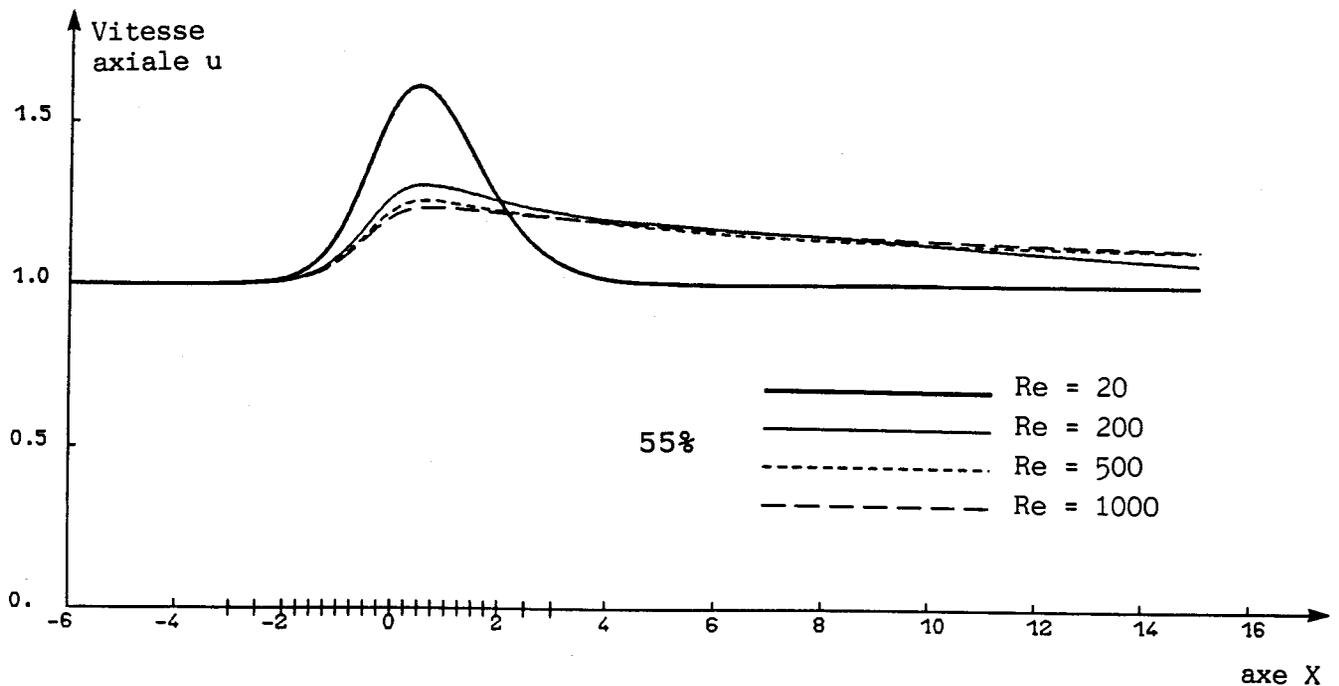
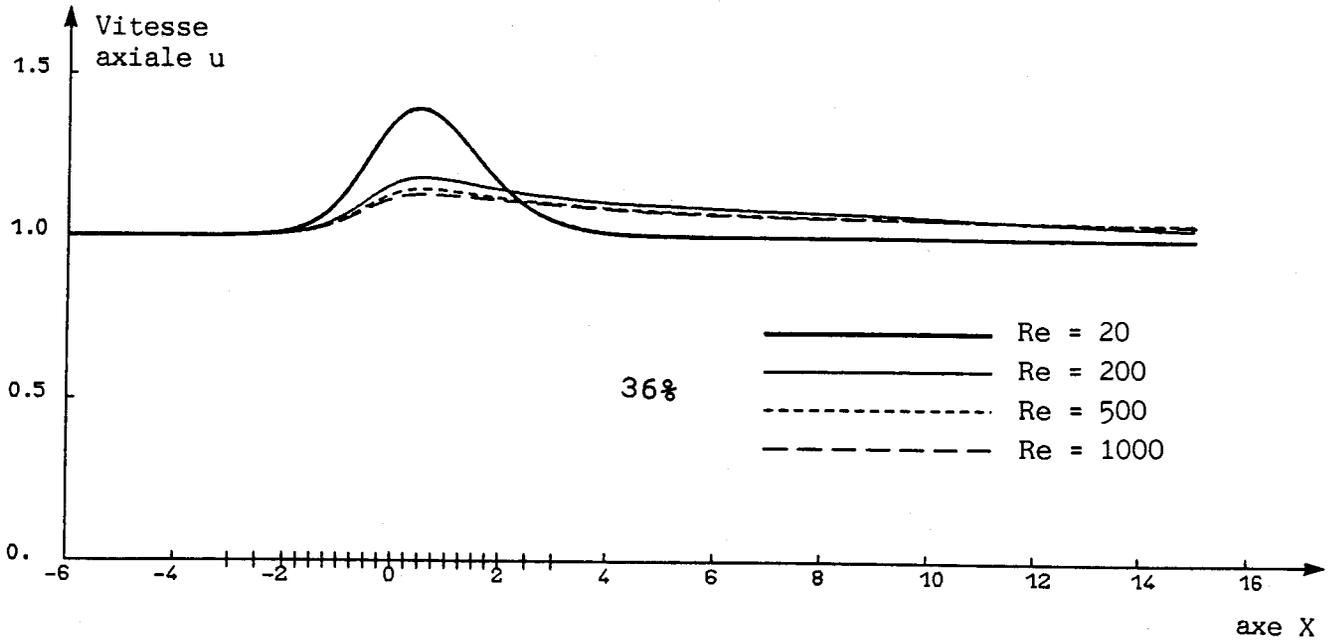


Figure V-26.a INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS SUR L'EVOLUTION DE LA VITESSE AXIALE LE LONG DE LA LIGNE CENTRALE DE L'ECOULEMENT POUR LES DEUX MODELES DE RETRECISSEMENT A 36% ET 55%.

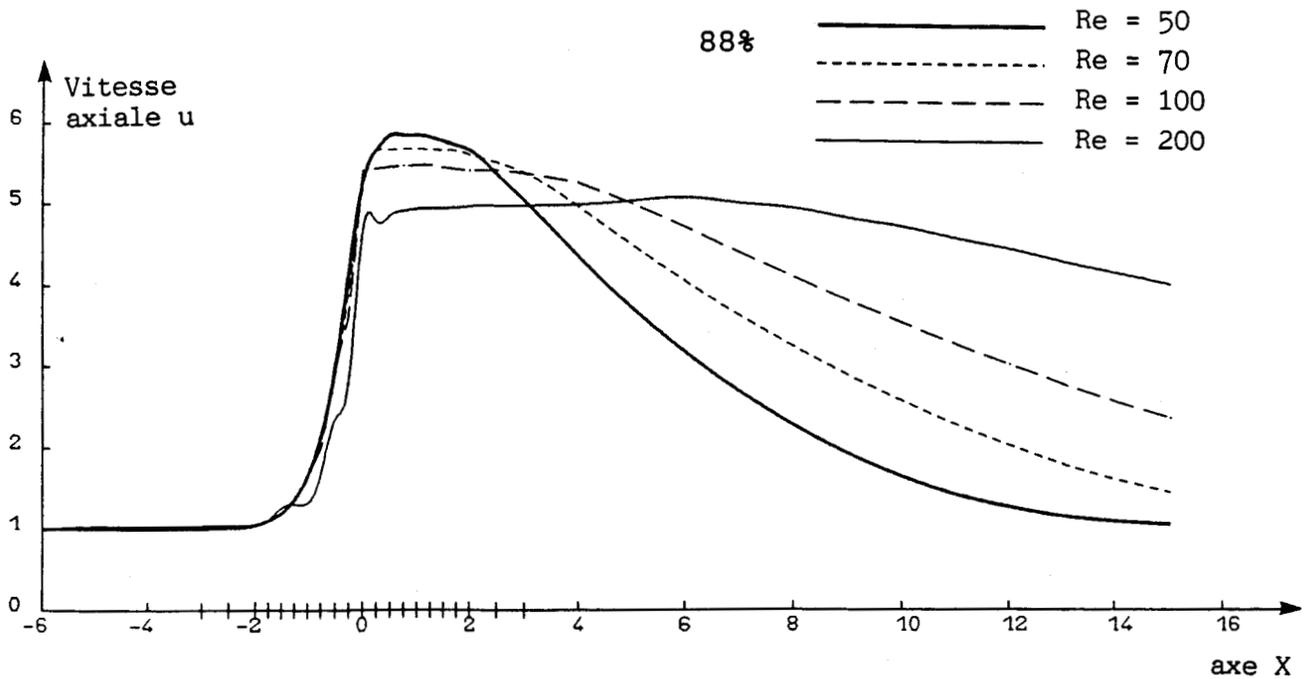
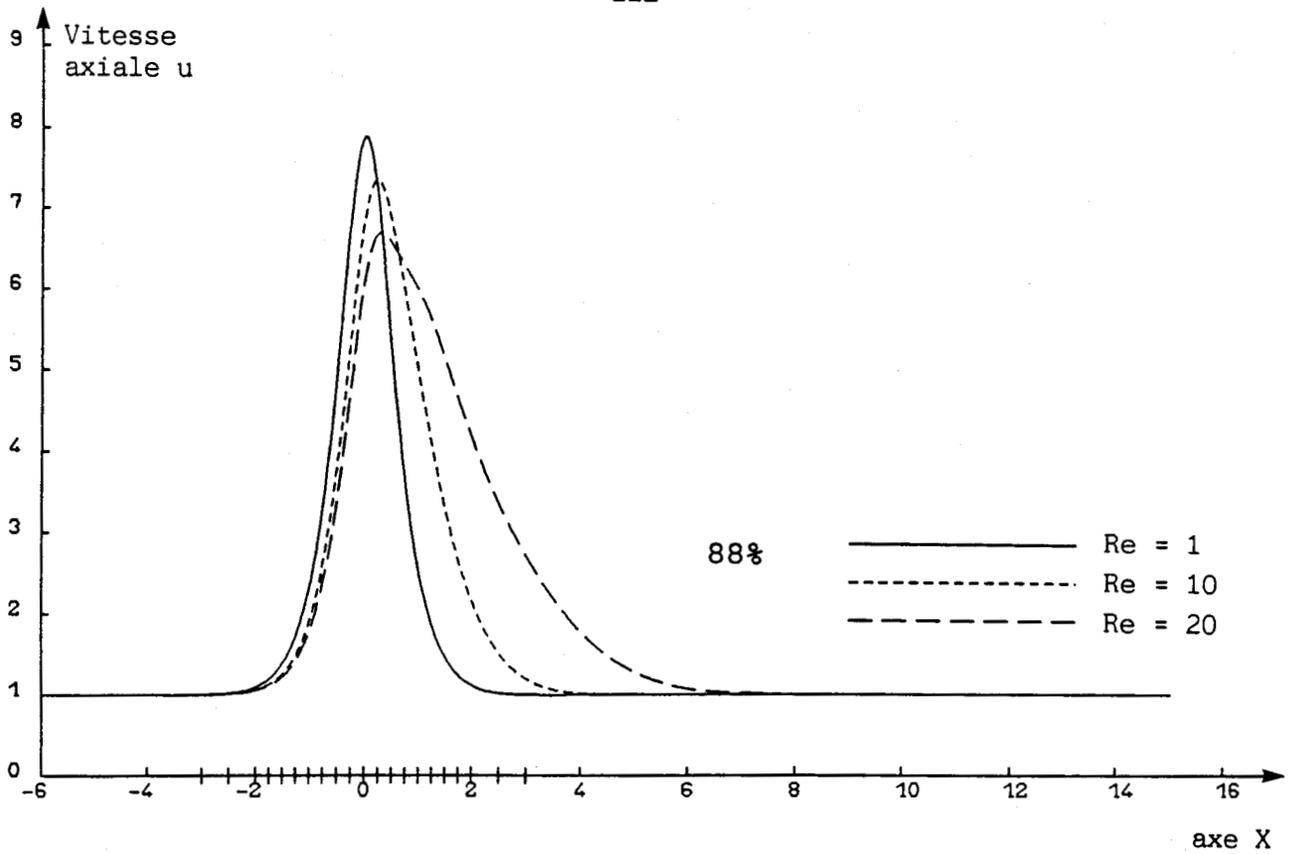
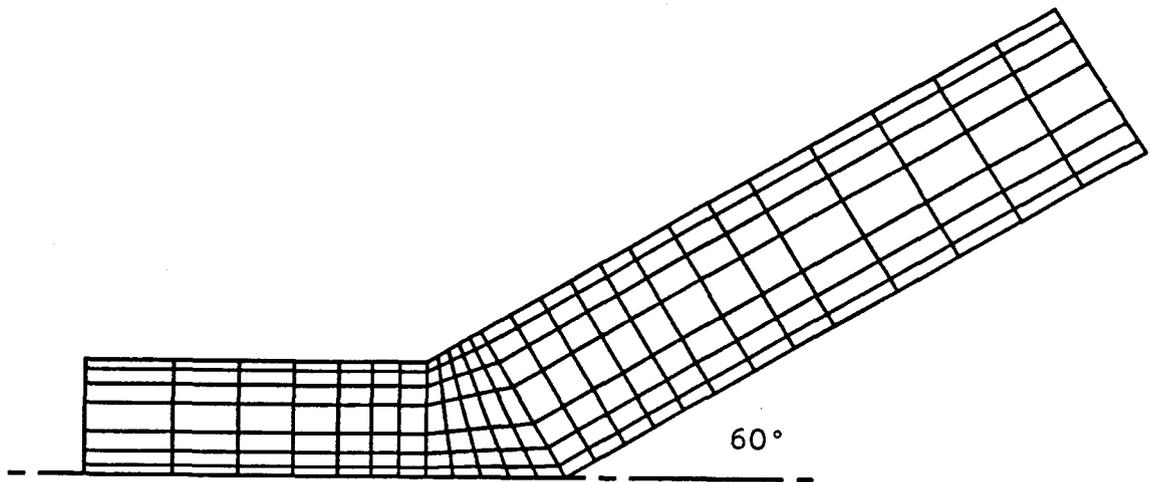
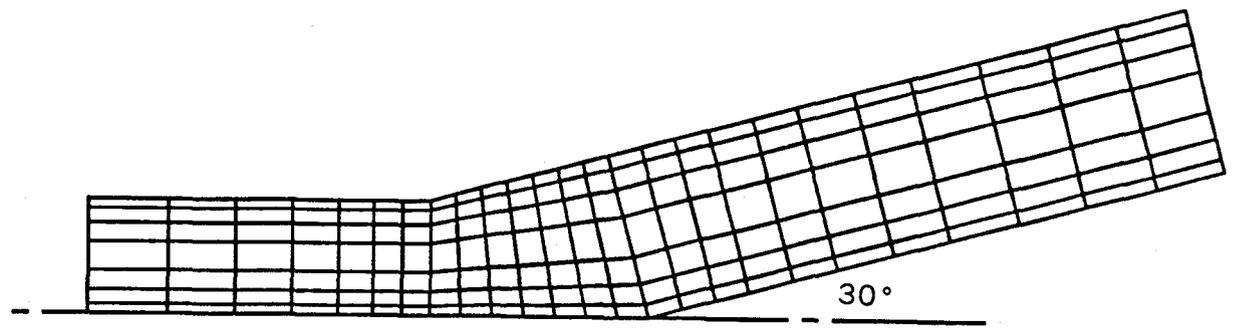


Figure V-26.b INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS SUR L'EVOLUTION DE LA VITESSE AXIALE LE LONG DE LA LIGNE CENTRALE DE L'ECOULEMENT POUR LE MODELE DE RETRECISSEMENT A 88%.



Nombre Total d'Eléments NELT	175
Nombre Total de Noeuds NNT	590
Nombre Total de Degrés de Liberté NDLT	1388
Largeur maximale du Front LFRONT	80

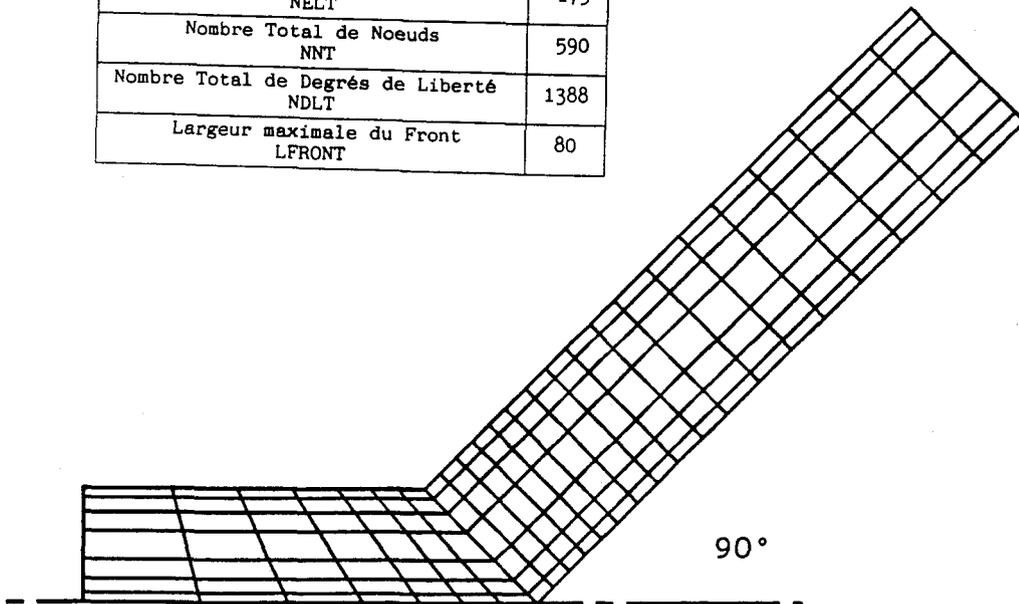


Figure V-27 MAILLAGES DES TROIS MODELES DE BIFURCATION

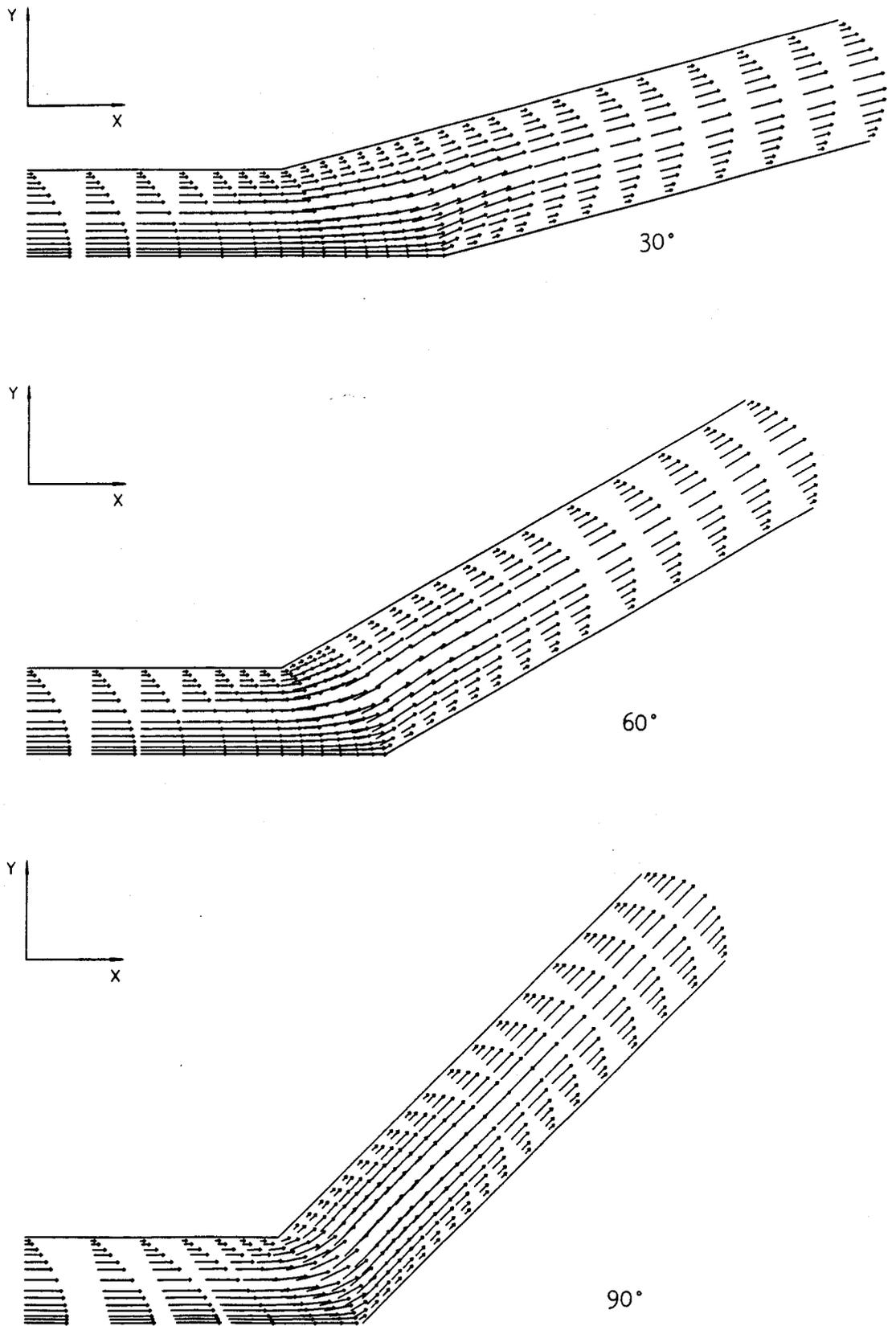


Figure Q-28 CHAMPS DE VITESSES OBTENUS POUR LES TROIS MODELES DE BIFURCATION AVEC  $Re = 10$ .

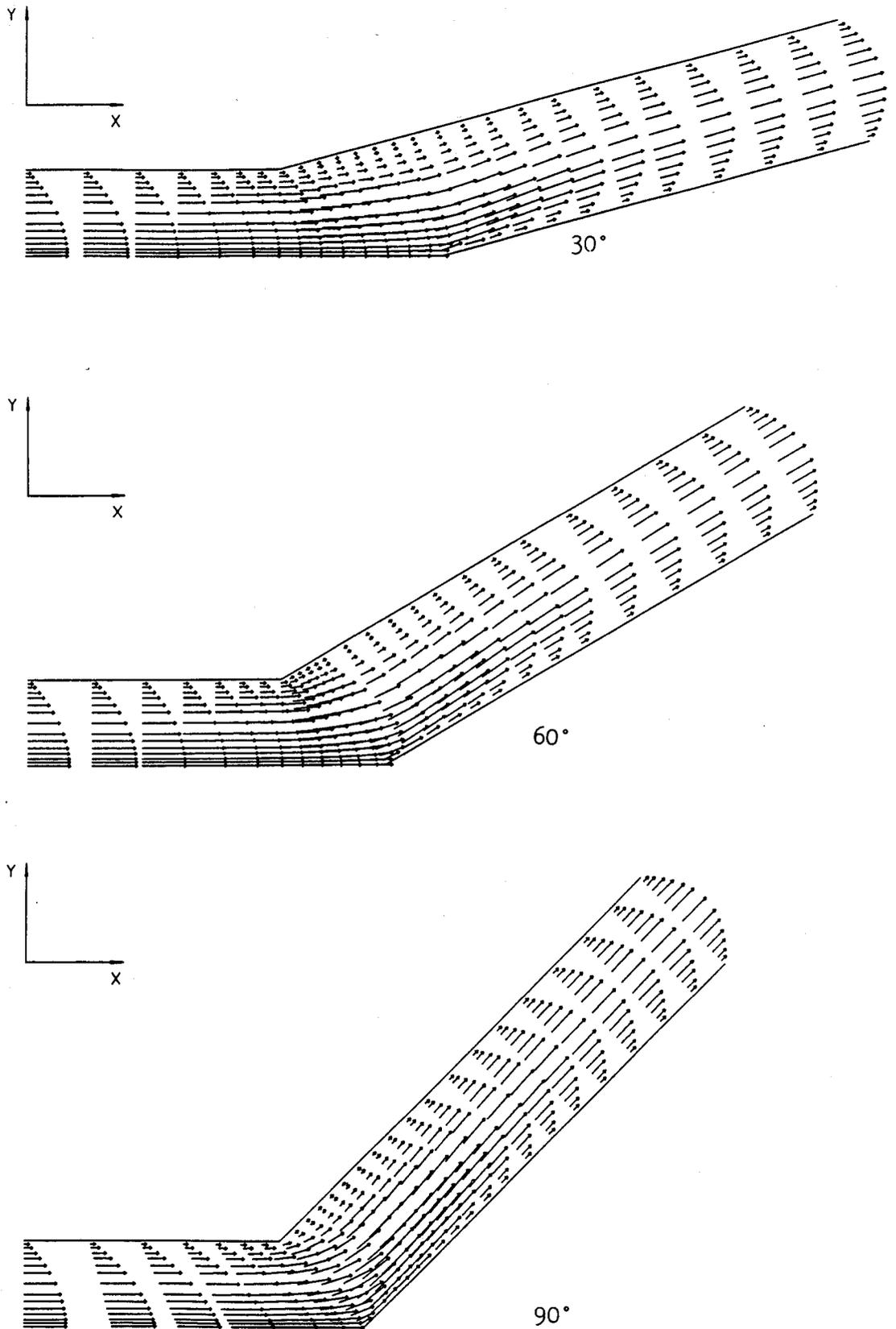


Figure V-29 CHAMPS DE VITESSES OBTENUS POUR LES TROIS MODELES DE BIFURCATION AVEC  $Re = 100$ .

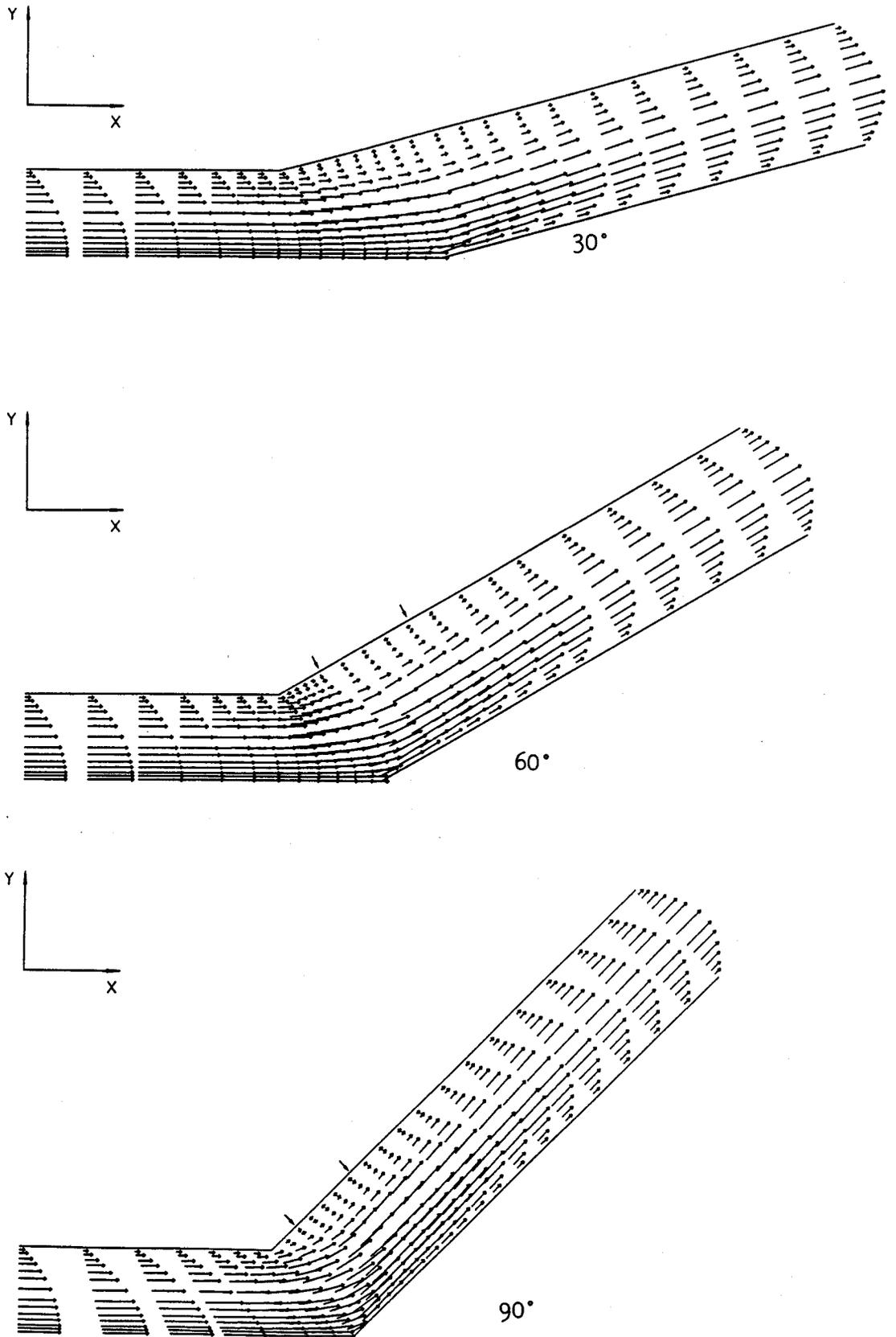


Figure V-30 CHAMPS DE VITESSES OBTENUS POUR LES TROIS MODELES DE BIFURCATION AVEC  $Re = 200$ .

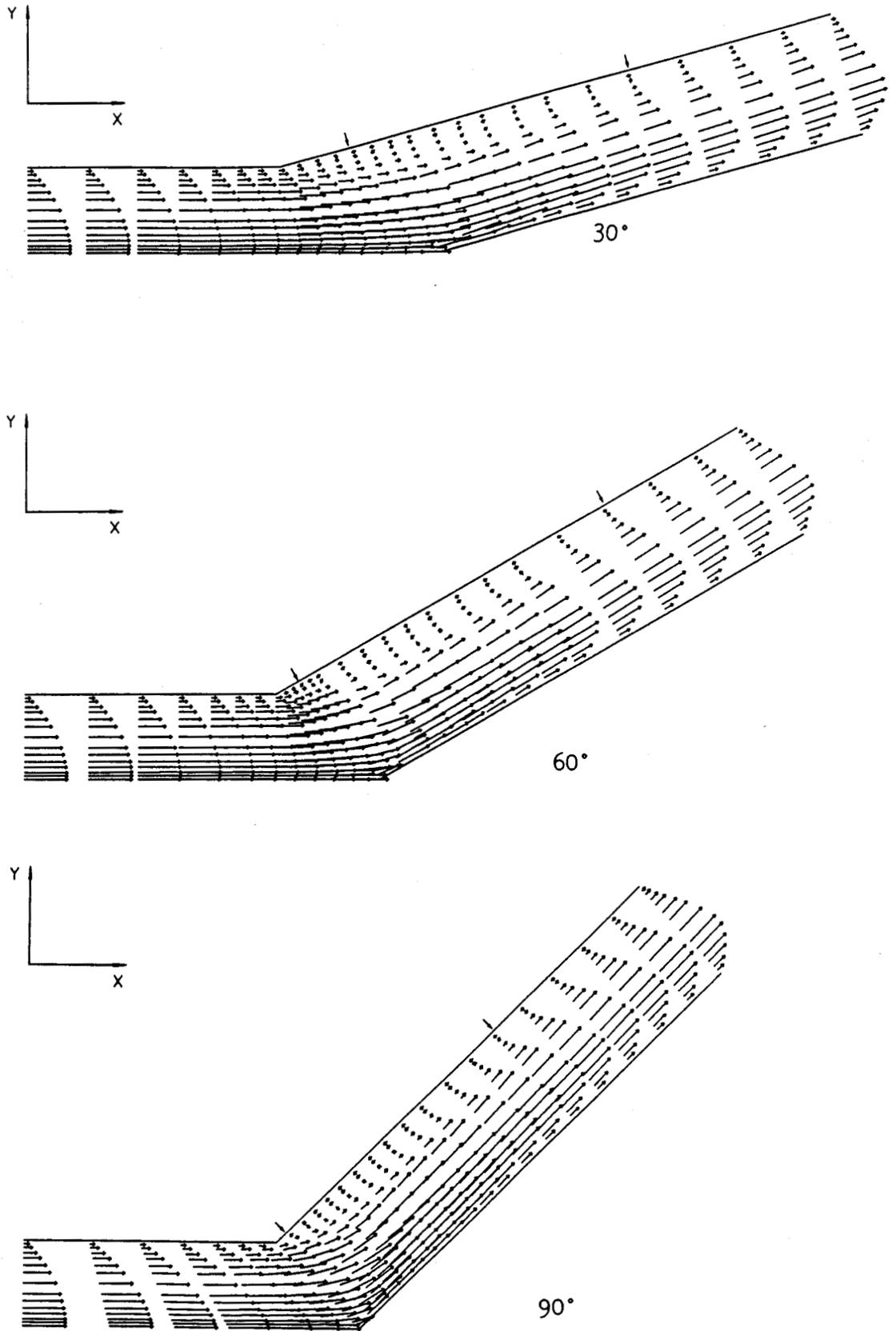


Figure V-31 CHAMPS DE VITESSES OBTENUS POUR LES TROIS MODELES DE BIFURCATION AVEC  $Re = 500$ .

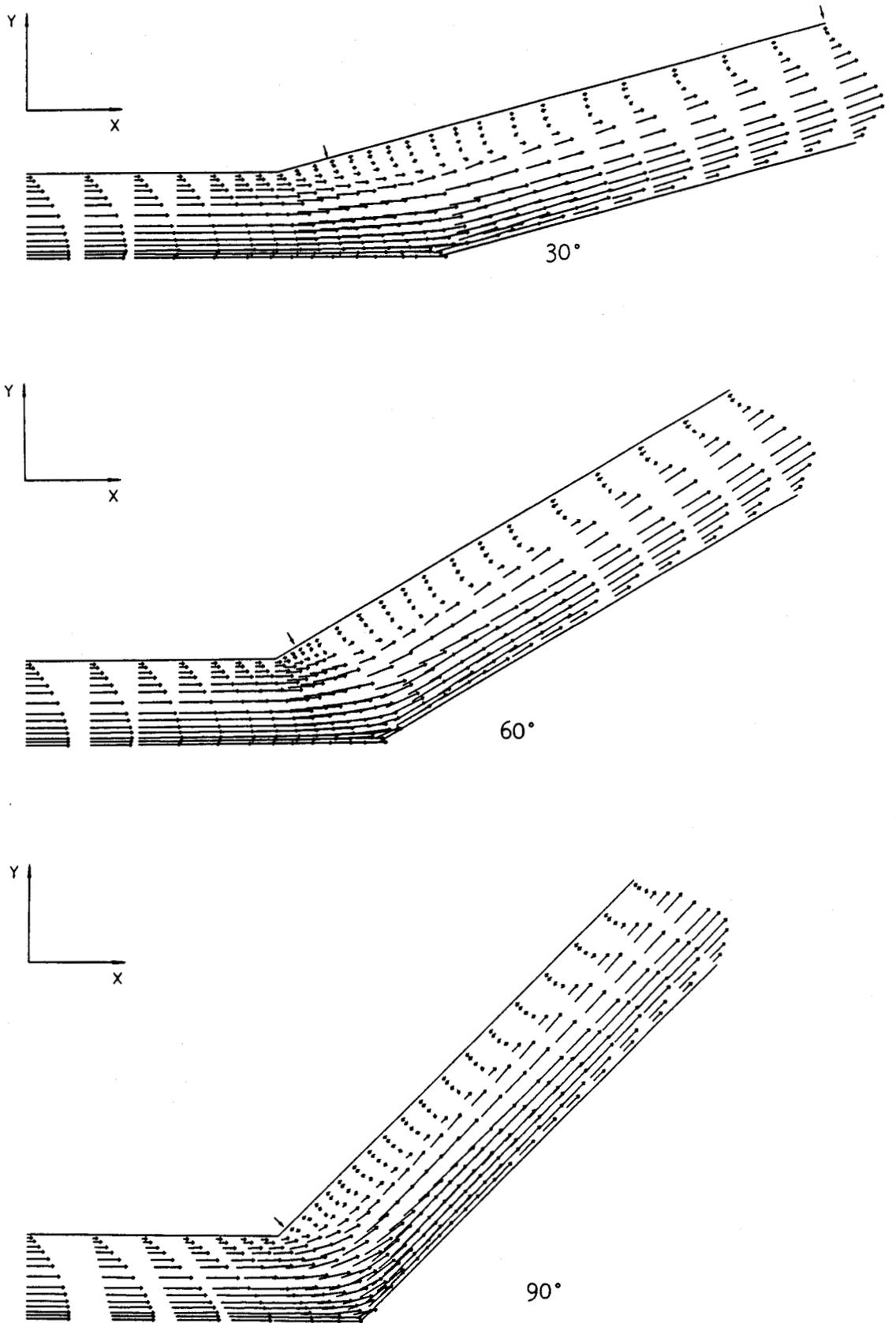


Figure V-32 CHAMPS DE VITESSES OBTENUS POUR LES TROIS MODELES DE BIFURCATION AVEC  $Re = 1000$ .

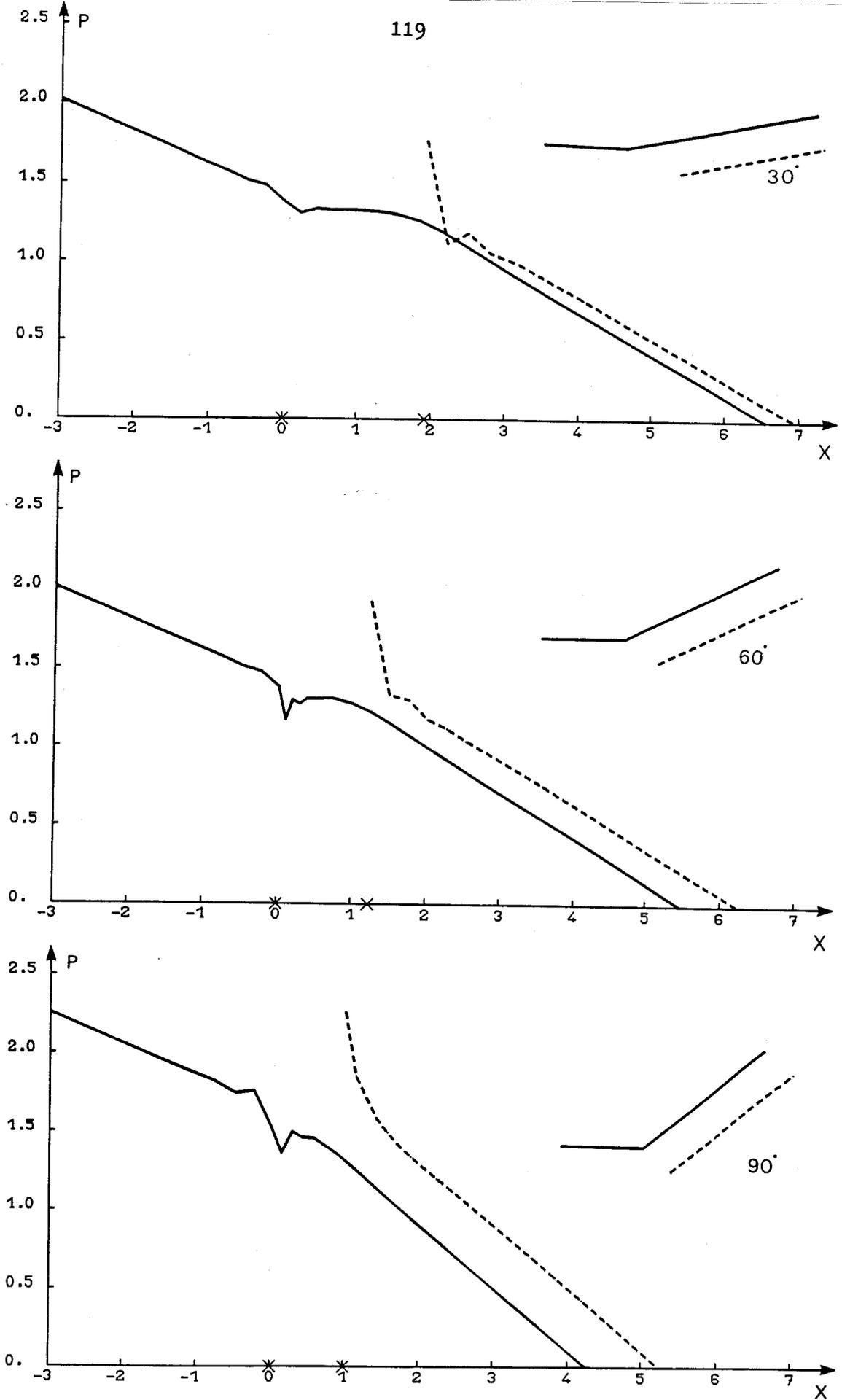


Figure V-33 EVOLUTIONS LONGITUDINALES DES PRESSIONS A TRAVERS LES TROIS MODELES DE BIFURCATION AVEC  $Re = 10$ .

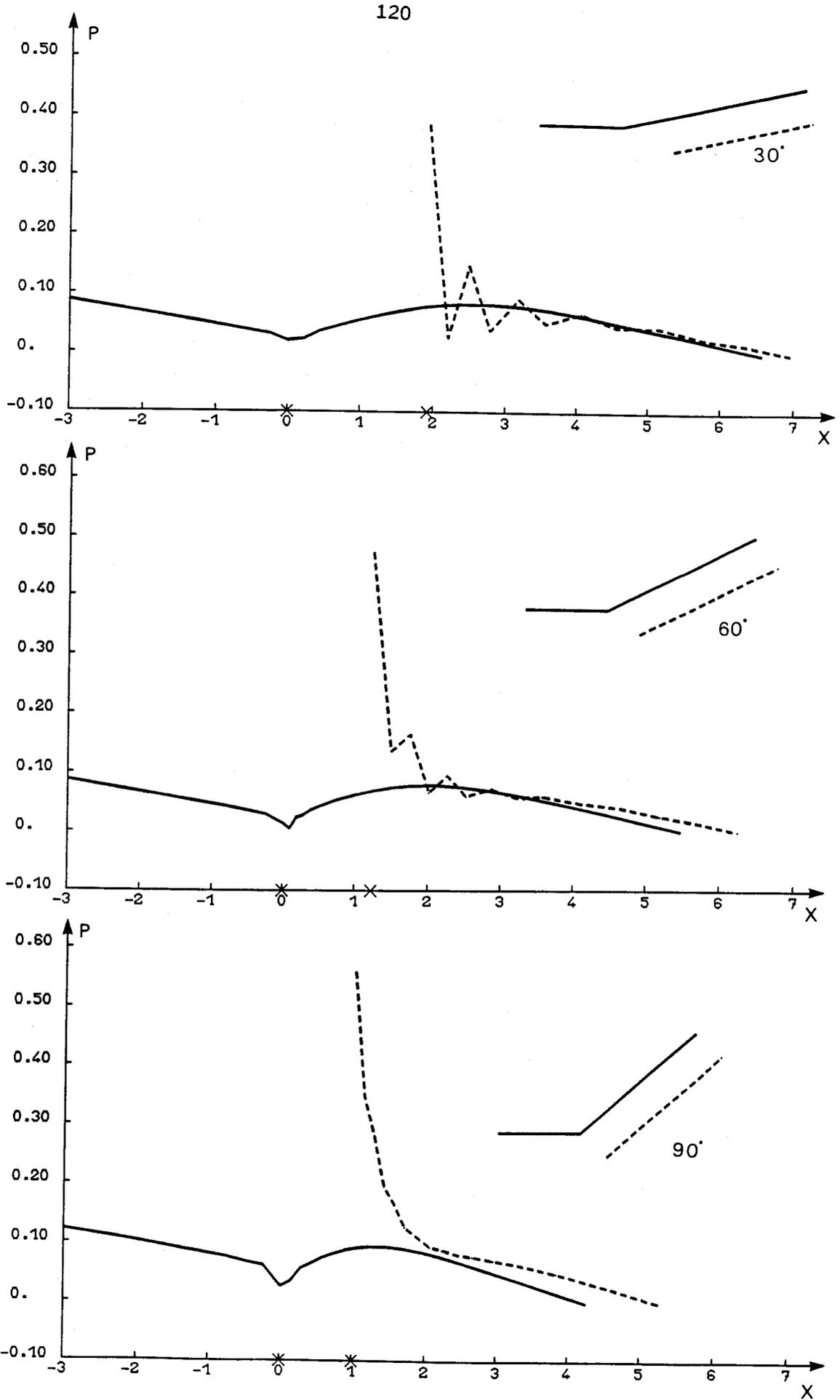


Figure V-34 EVOLUTIONS LONGITUDINALES DES PRESSIONS A TRAVERS LES TROIS MODELES DE BIFURCATION AVEC  $Re = 100$ .

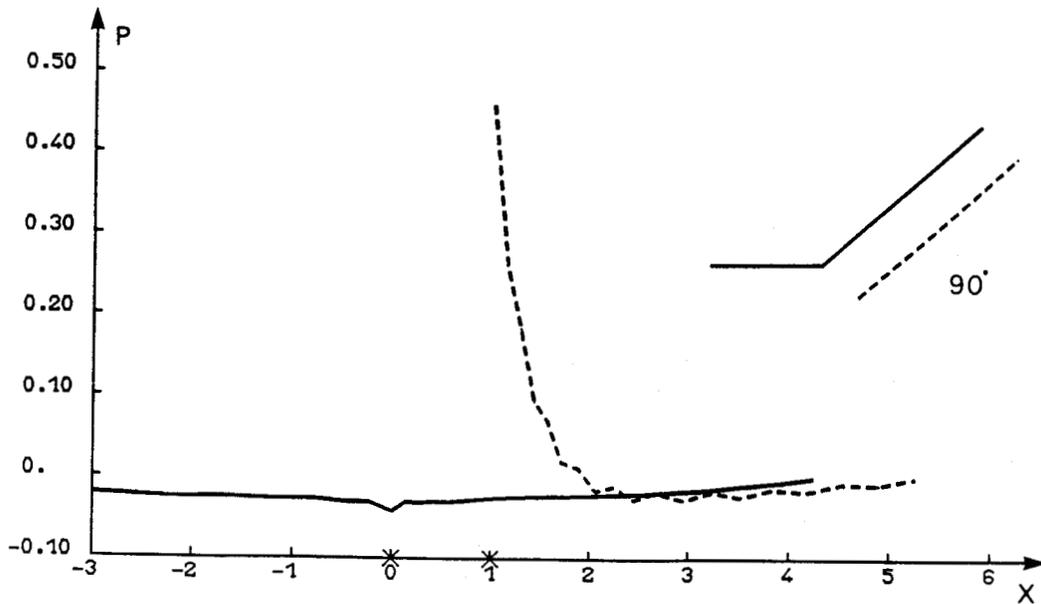
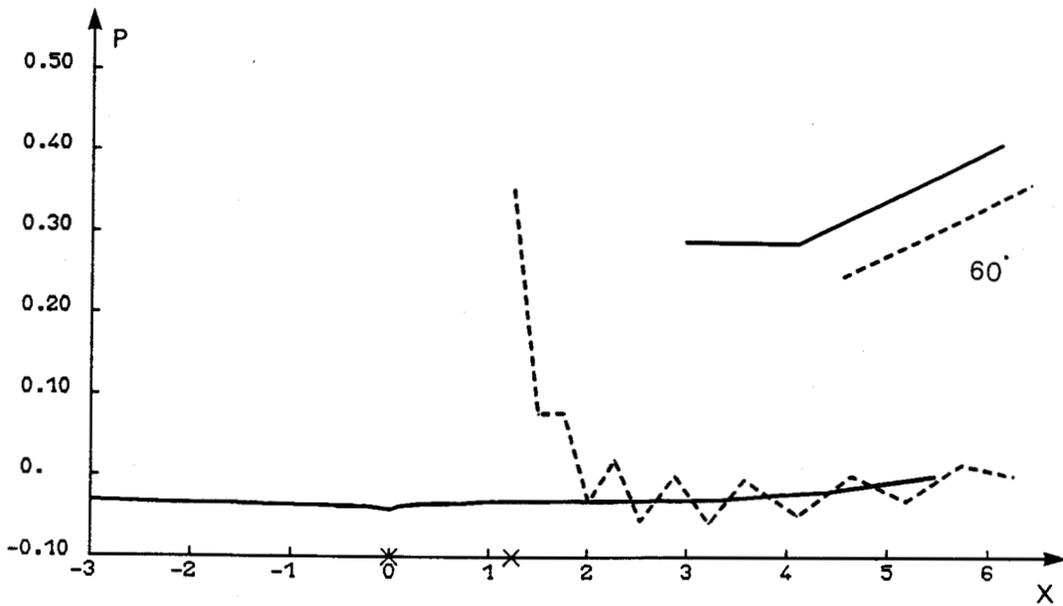
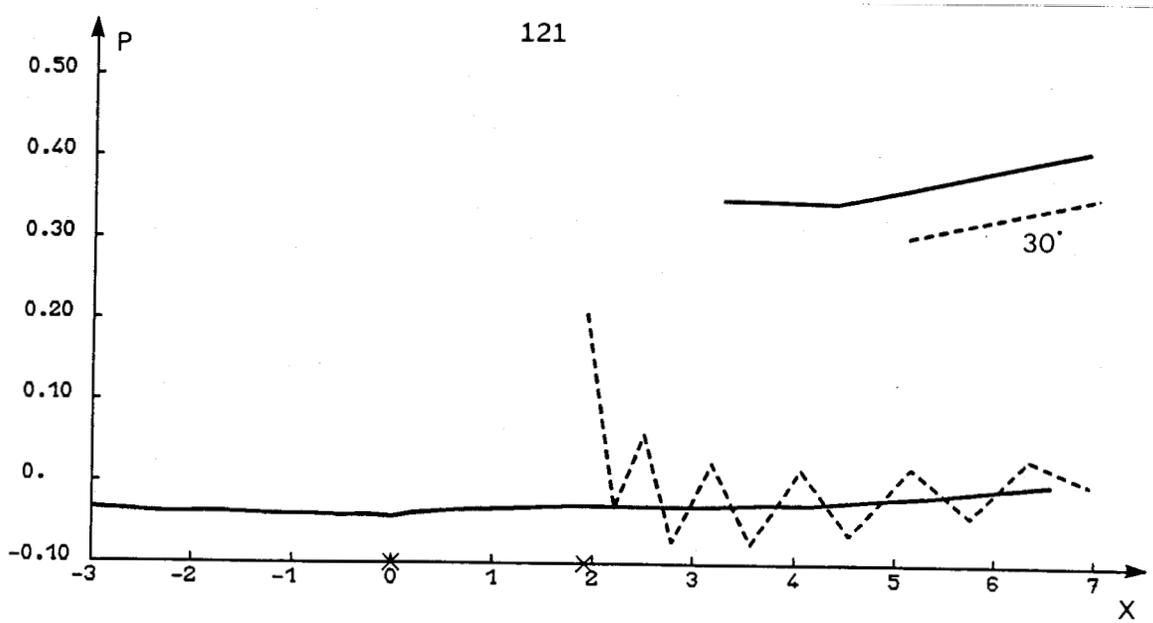
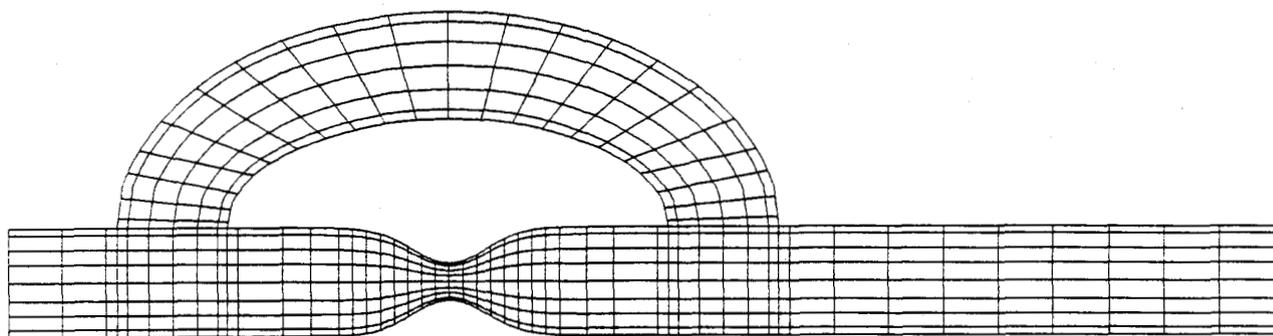
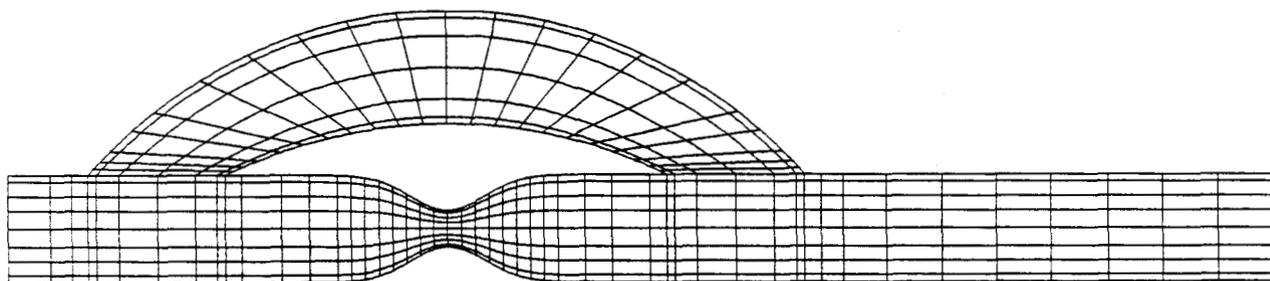


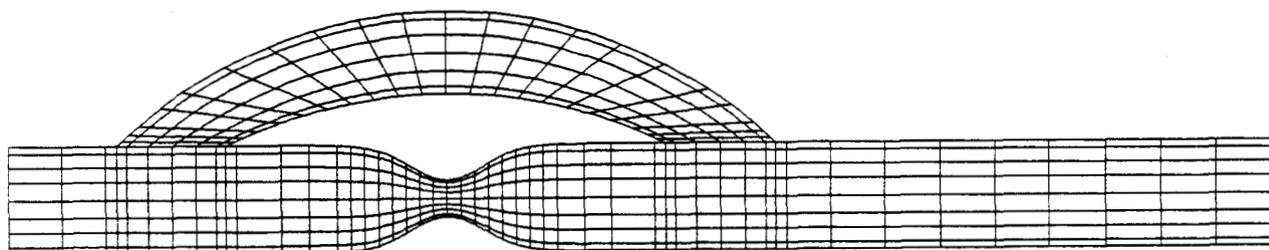
Figure V-35 EVOLUTIONS LONGITUDINALES DES PRESSIONS A TRAVERS LES TROIS MODELES DE BIFURCATION AVEC  $Re = 1000$ .



MODELE M1



MODELE M2



MODELE M3

Figure V-36 MAILLAGES DES TROIS MODELES DE PONTAGE

Nombre Total d'Eléments NELT	524
Nombre Total de Noeuds NNT	1718
Nombre Total de Degrés de Liberté NDLT	4033
Largeur maximale du Front LFRONT	90

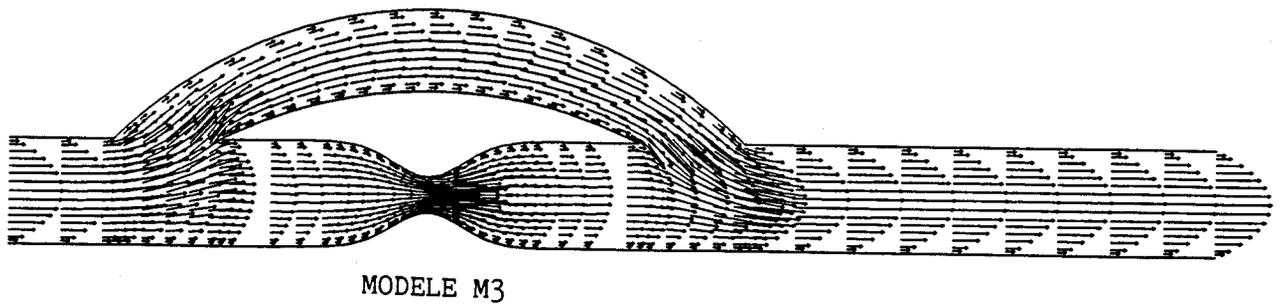
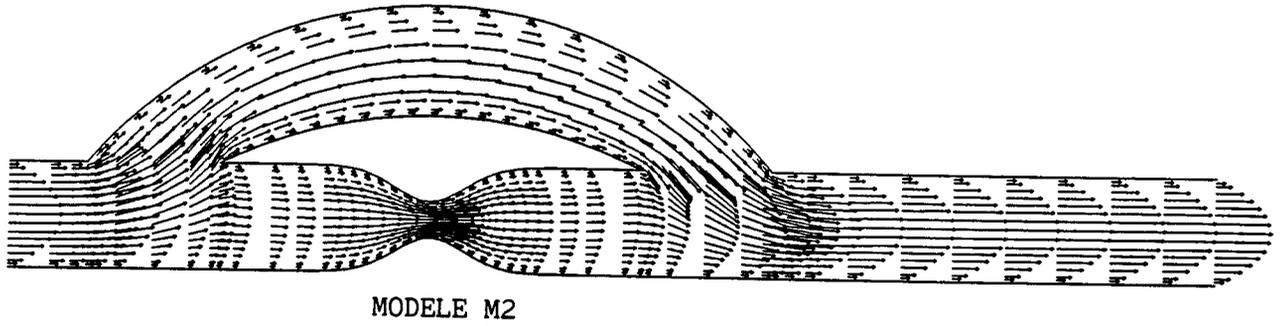
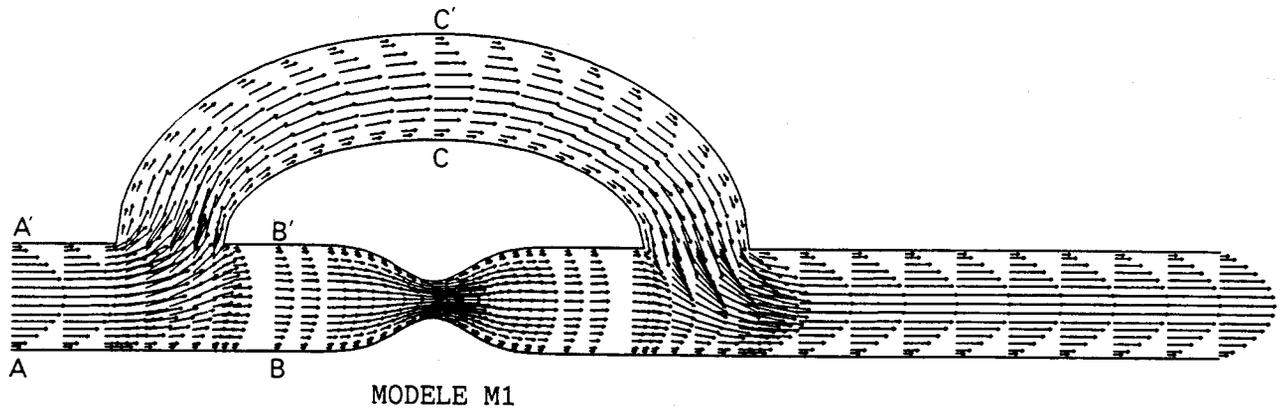


Figure V-37 CHAMPS DE VITESSES OBTENUS POUR LES TROIS MODELES DE PONTAGE ET AVEC  $Re = 1$ .

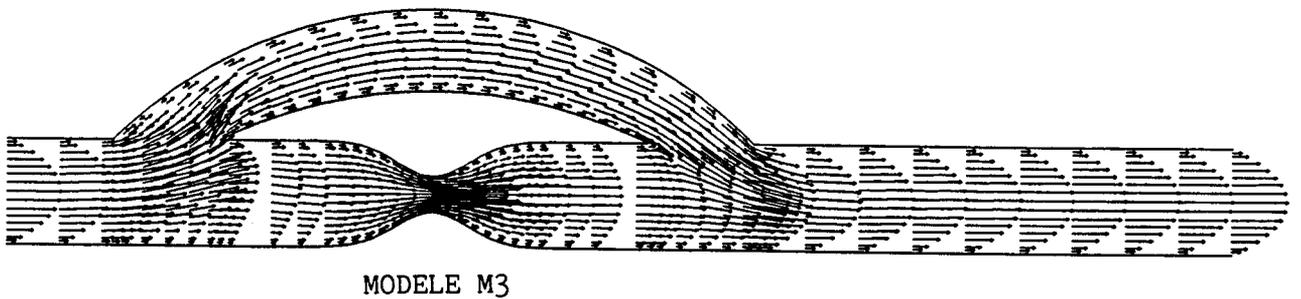
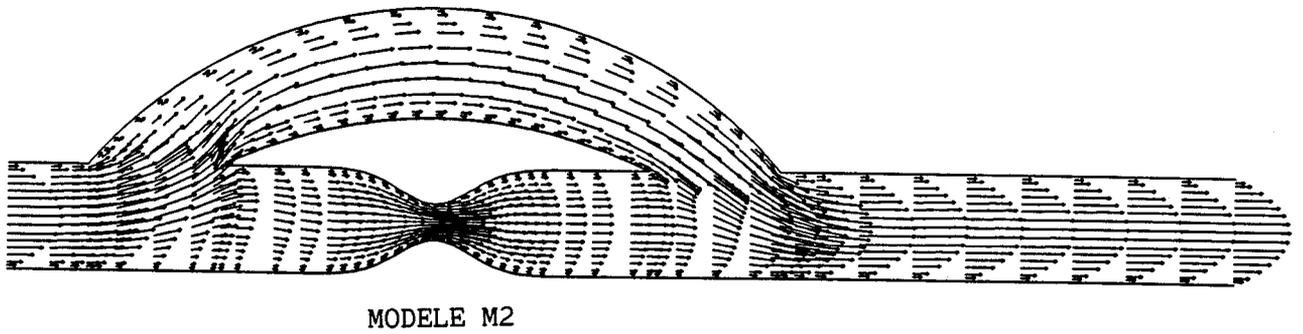
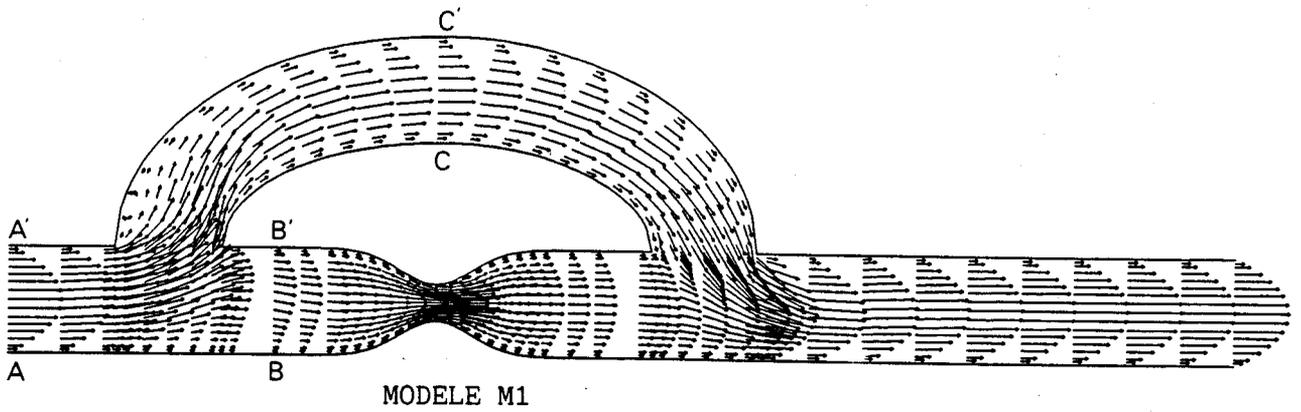


Figure V-38 CHAMPS DE VITESSES OBTENUS POUR LES TROIS MODELES DE PONTAGE ET AVEC  $Re = 20$ .

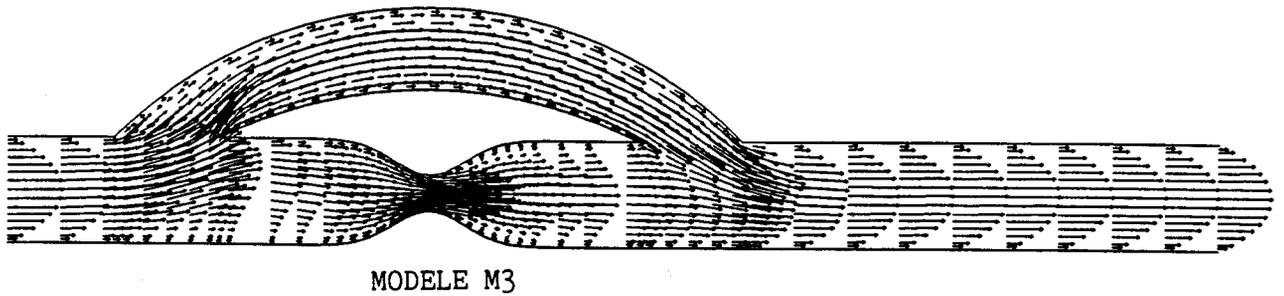
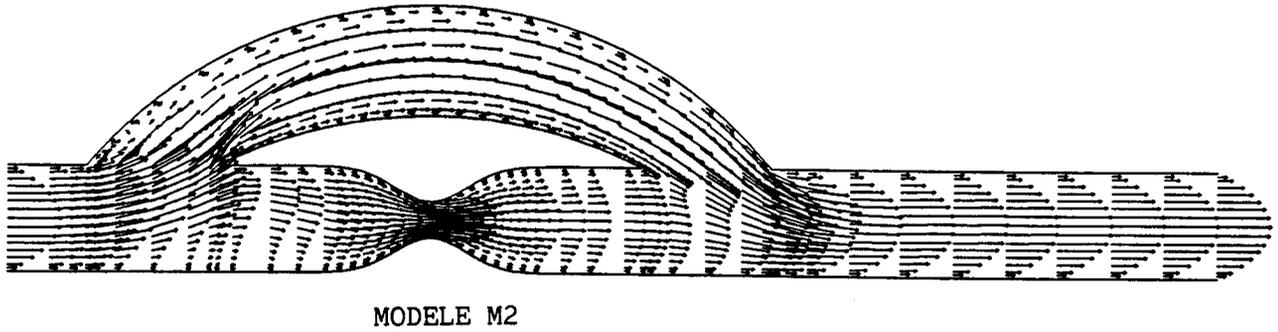
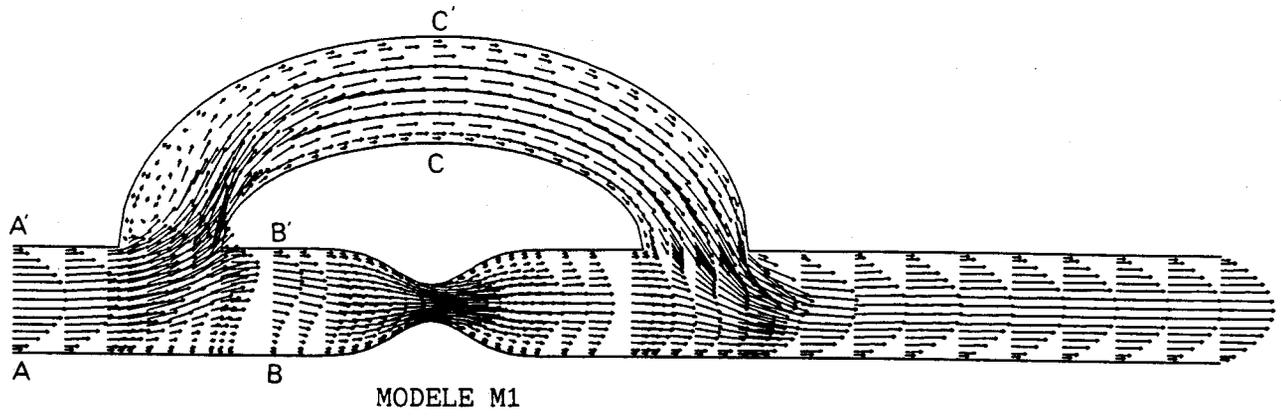


Figure V-39 CHAMPS DE VITESSES OBTENUS POUR LES TROIS MODELES DE PONTAGE ET AVEC  $Re = 100$ .

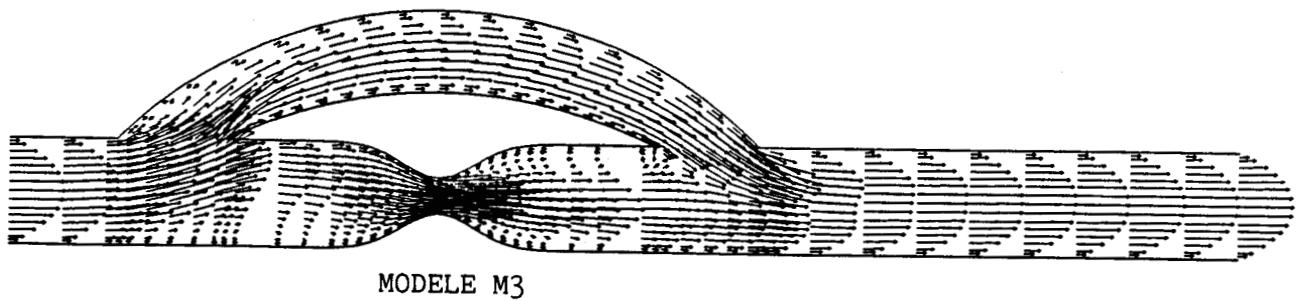
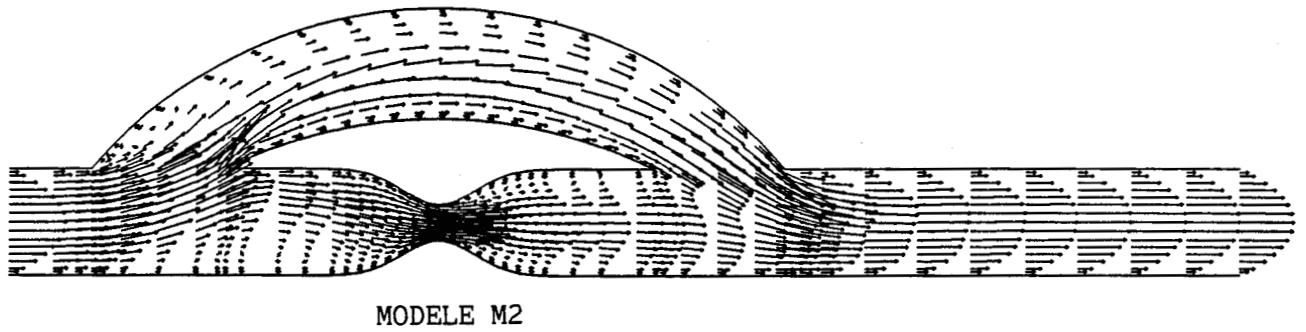
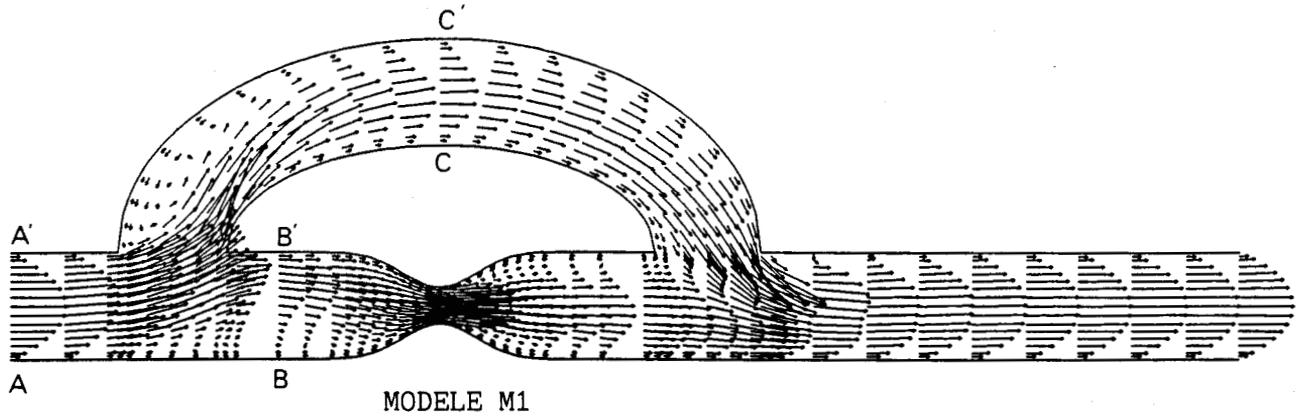
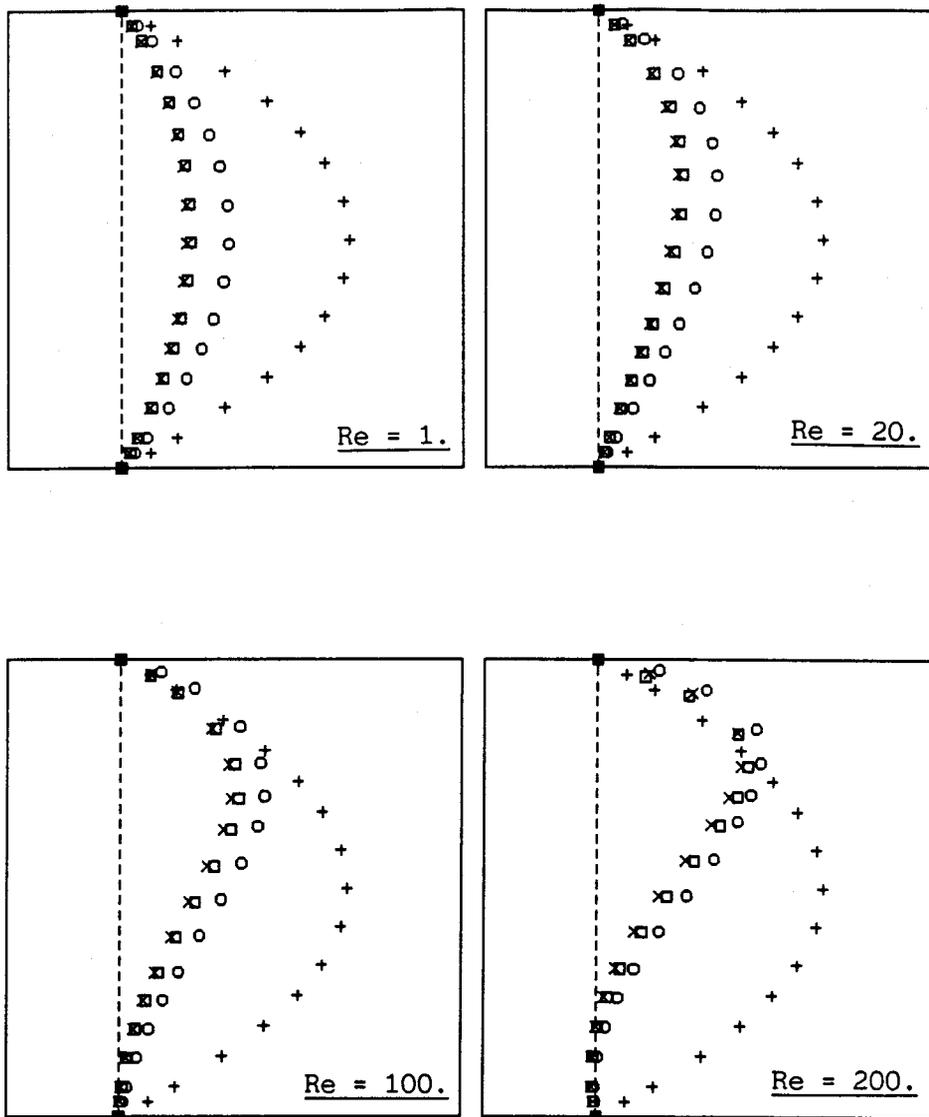


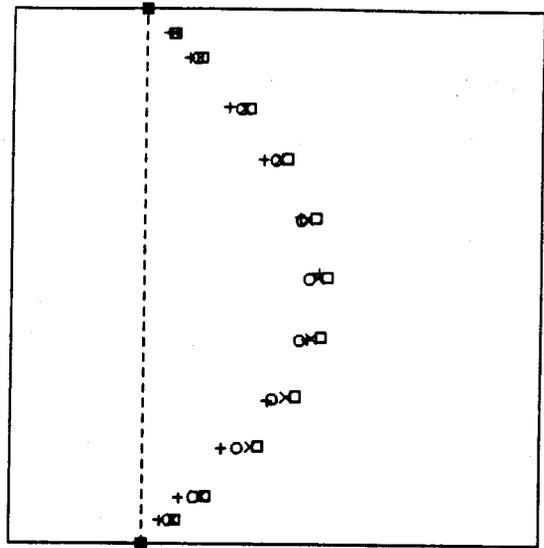
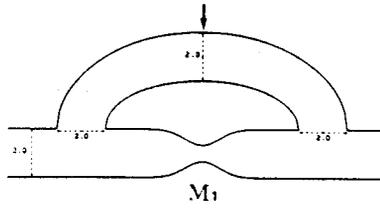
Figure V-40 CHAMPS DE VITESSES OBTENUS POUR LES TROIS MODELES DE PONTAGE ET AVEC  $Re = 200$ .



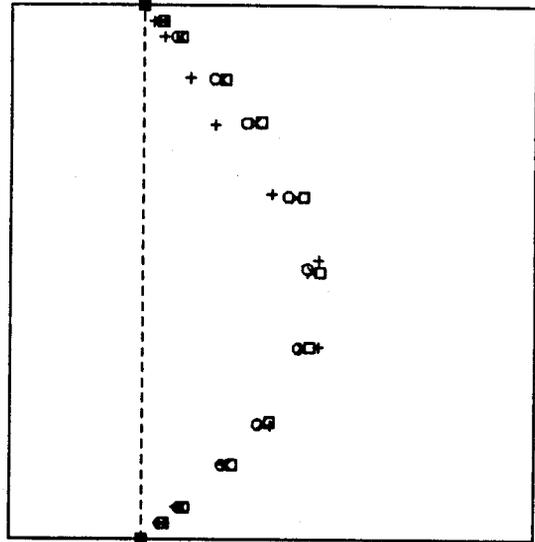
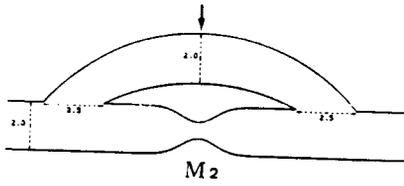
- M1
- × M2 ( EN X = -3 )
- M3
- + PROFIL AMONT ( EN X = -8 )

Figure V-41 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS SUR LES PROFILS DE VITESSES SITUÉS EN AMONT DU RETRECISSEMENT A 88% (section BB') POUR LES TROIS MODELES DE PONTAGE.

- Re 1
- × Re 20
- Re 100
- + Re 200



- Re 1
- × Re 20
- Re 100
- + Re 200



- Re 1
- × Re 20
- Re 100
- + Re 200

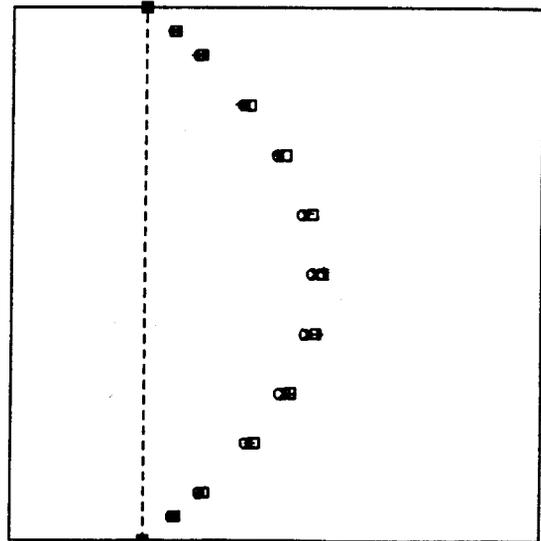
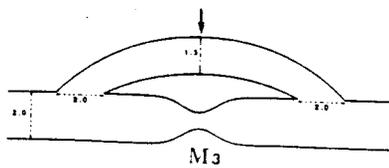
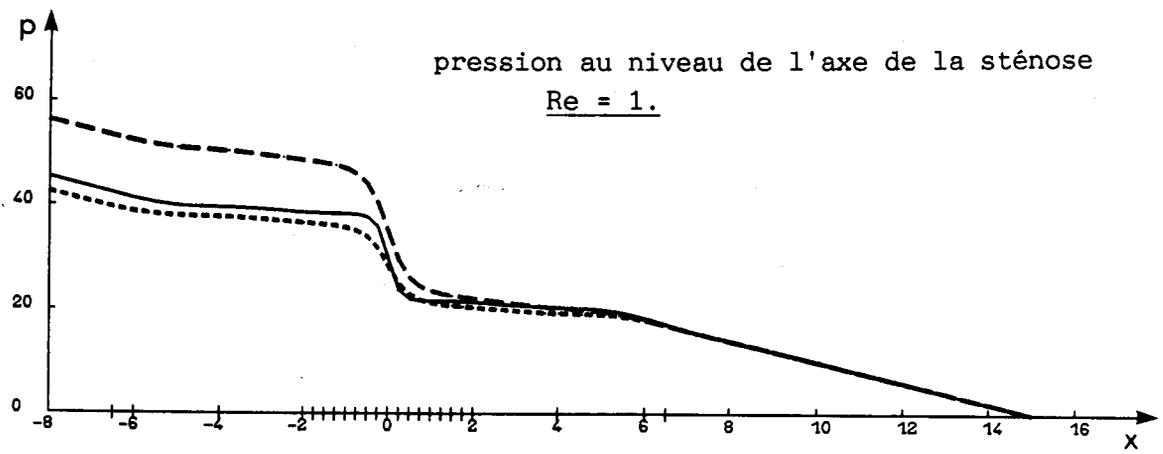
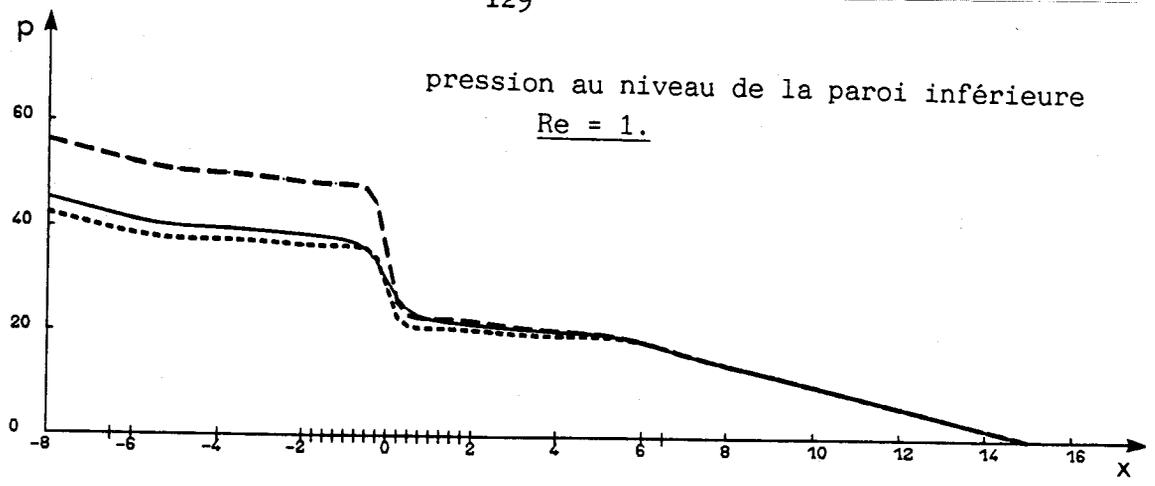


Figure V-42 COMPARAISON DES PROFILS DE VITESSES AU NIVEAU DU PONTAGE (section CC') OBTENUS POUR DIFFERENTS NOMBRES DE REYNOLDS



— MODELE M1  
- - - MODELE M2  
- - - MODELE M3

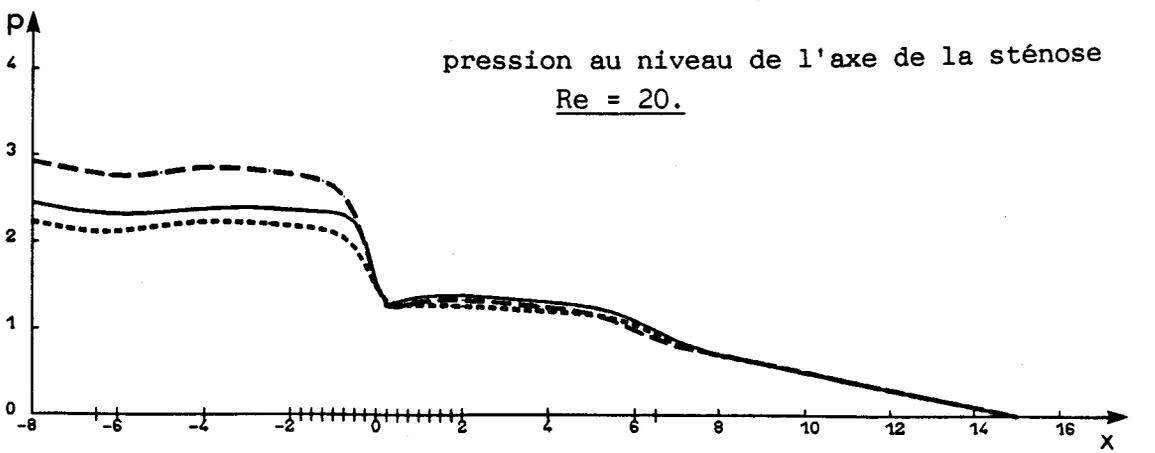
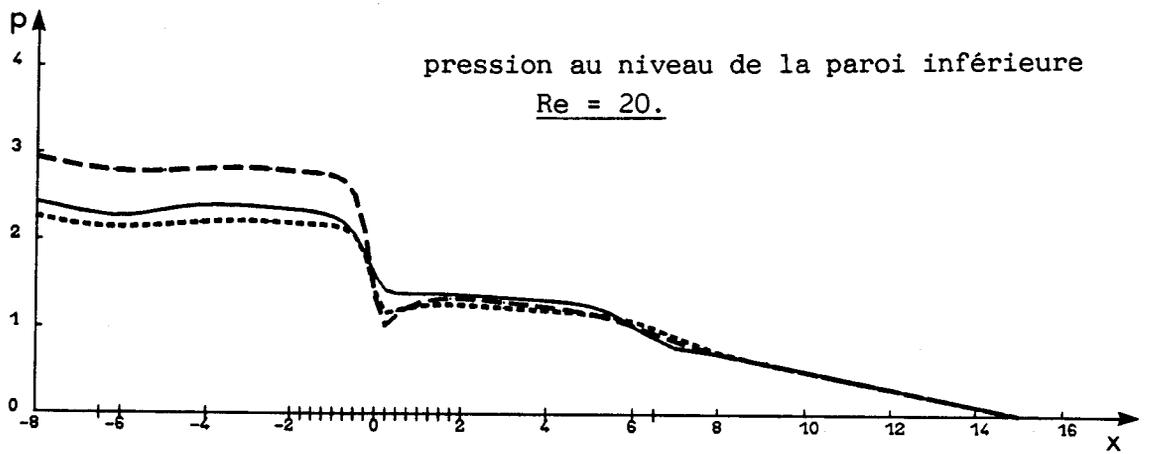
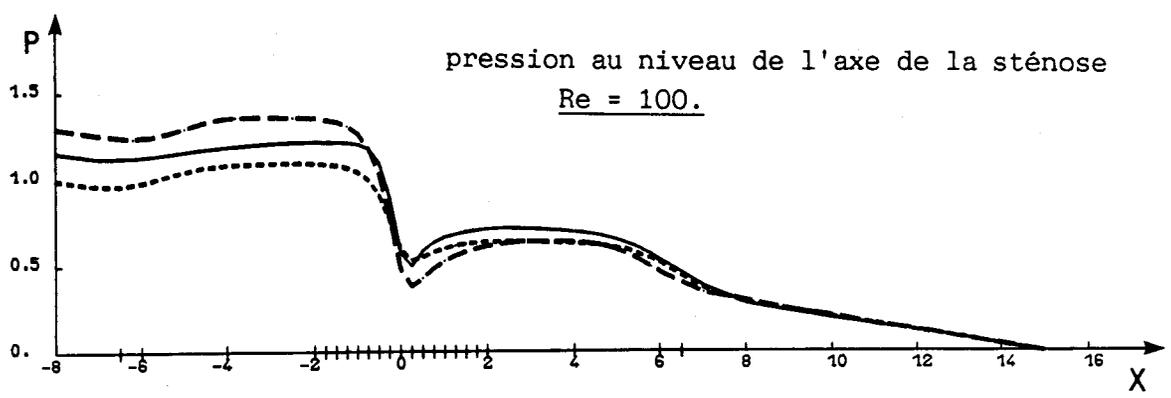
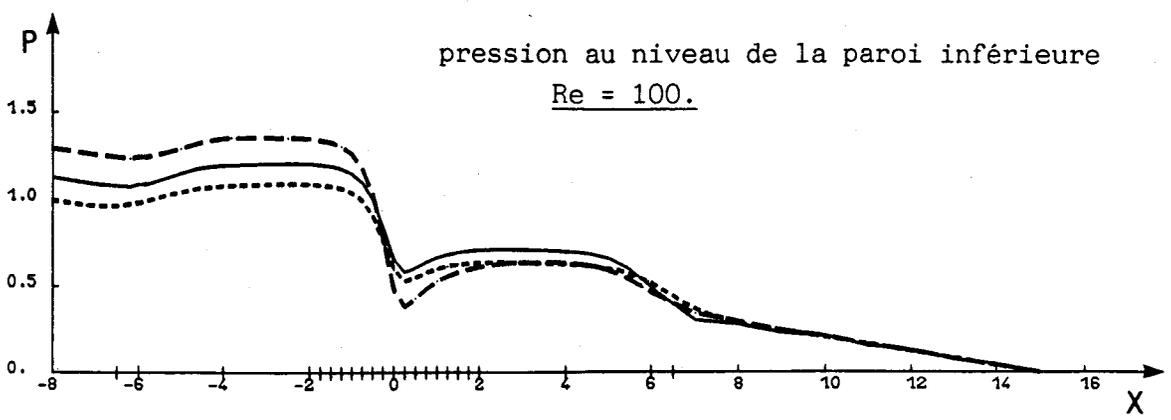


Figure V-43 EVOLUTIONS LONGITUDINALES DES PRESSIONS A TRAVERS LES TROIS MODELES DE PONTAGE AVEC Re = 1. ET Re = 20.



MODELE M1  
MODELE M2  
MODELE M3

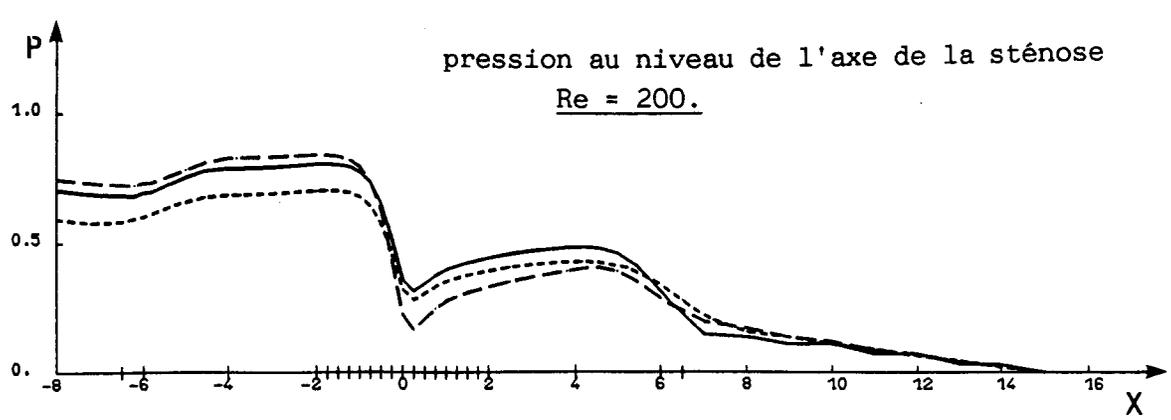
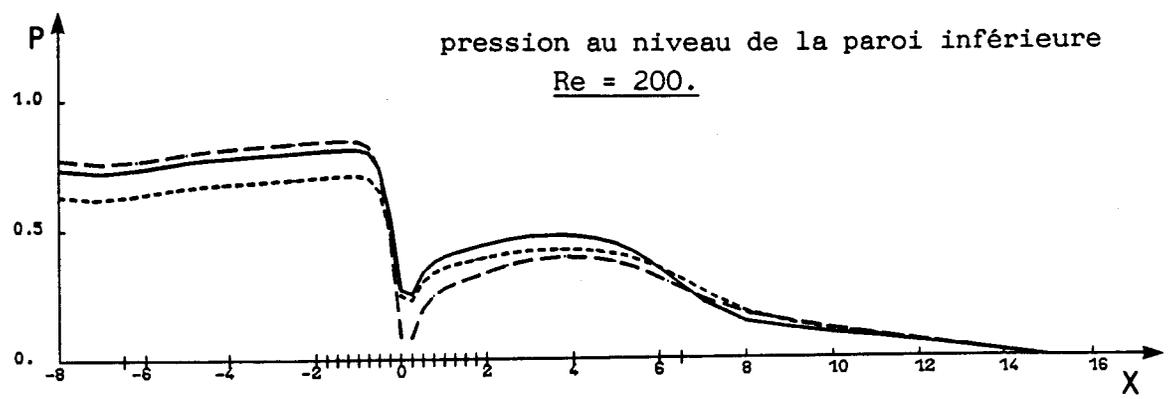


Figure V-44 EVOLUTIONS LONGITUDINALES DES PRESSIONS A TRAVERS LES TROIS MODELES DE PONTAGE AVEC Re = 100. ET Re = 200.

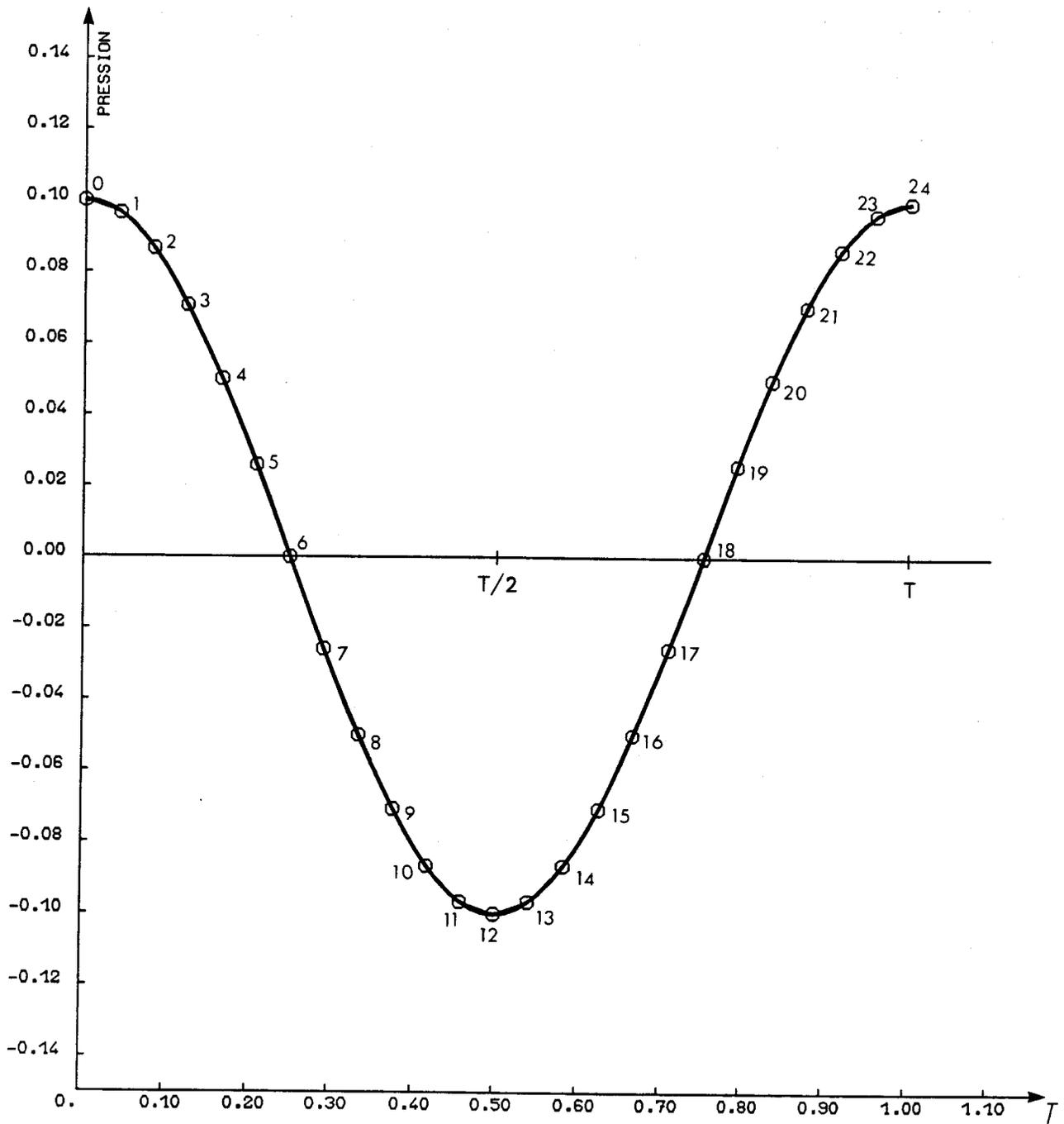


Figure V-45 PRESSION SINUSOIALE UTILISEE COMME CONDITIONS AUX LIMITES  
 $P = 0.1 \cos \omega t$

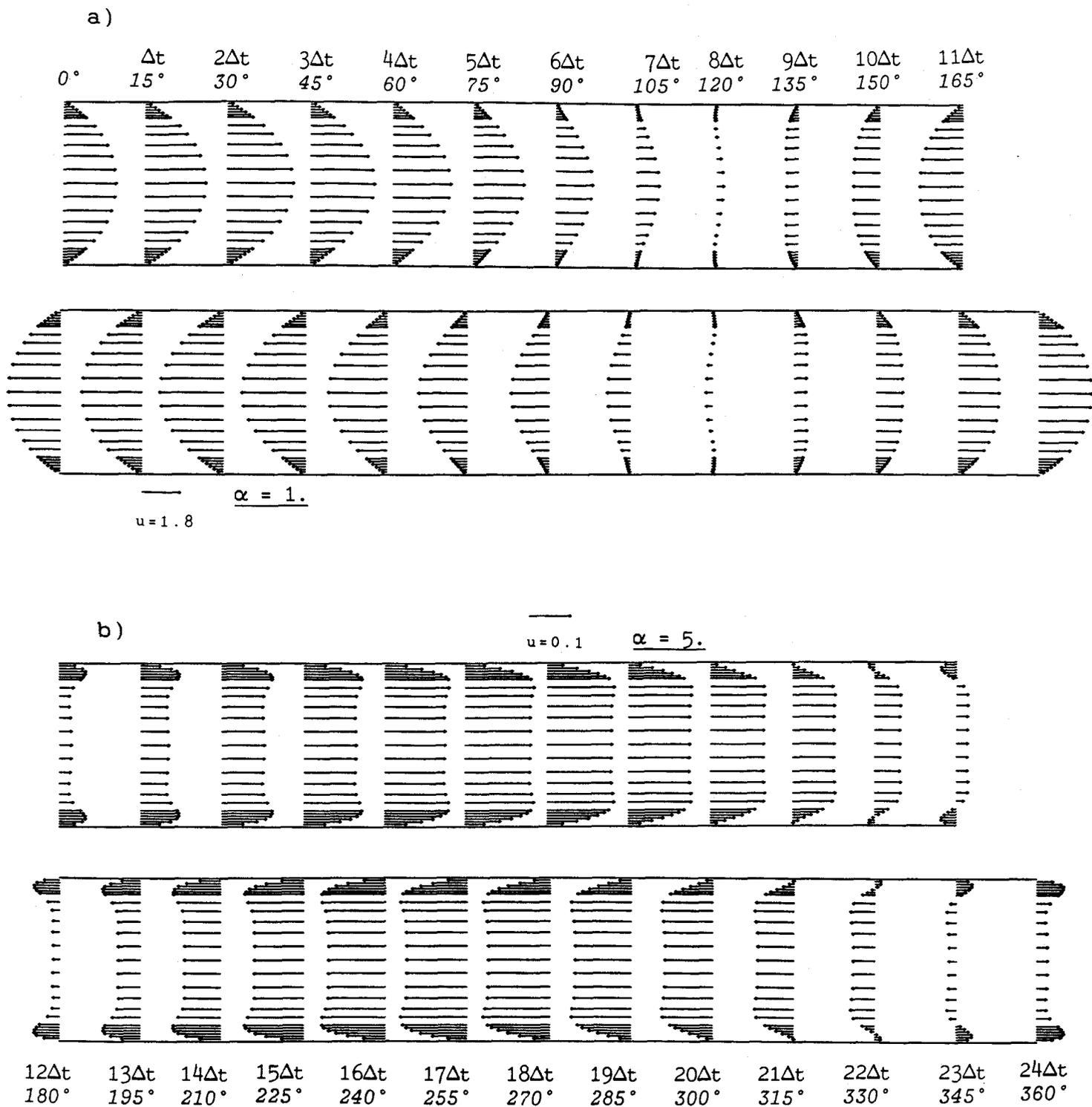


Figure V-46.a / b PROFILS DES VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE POUR DIFFERENTES VALEURS DU PARAMETRE DE FREQUENCE  $\alpha$ .  
- SOLUTIONS NUMERIQUES PAR ELEMENTS FINIS -

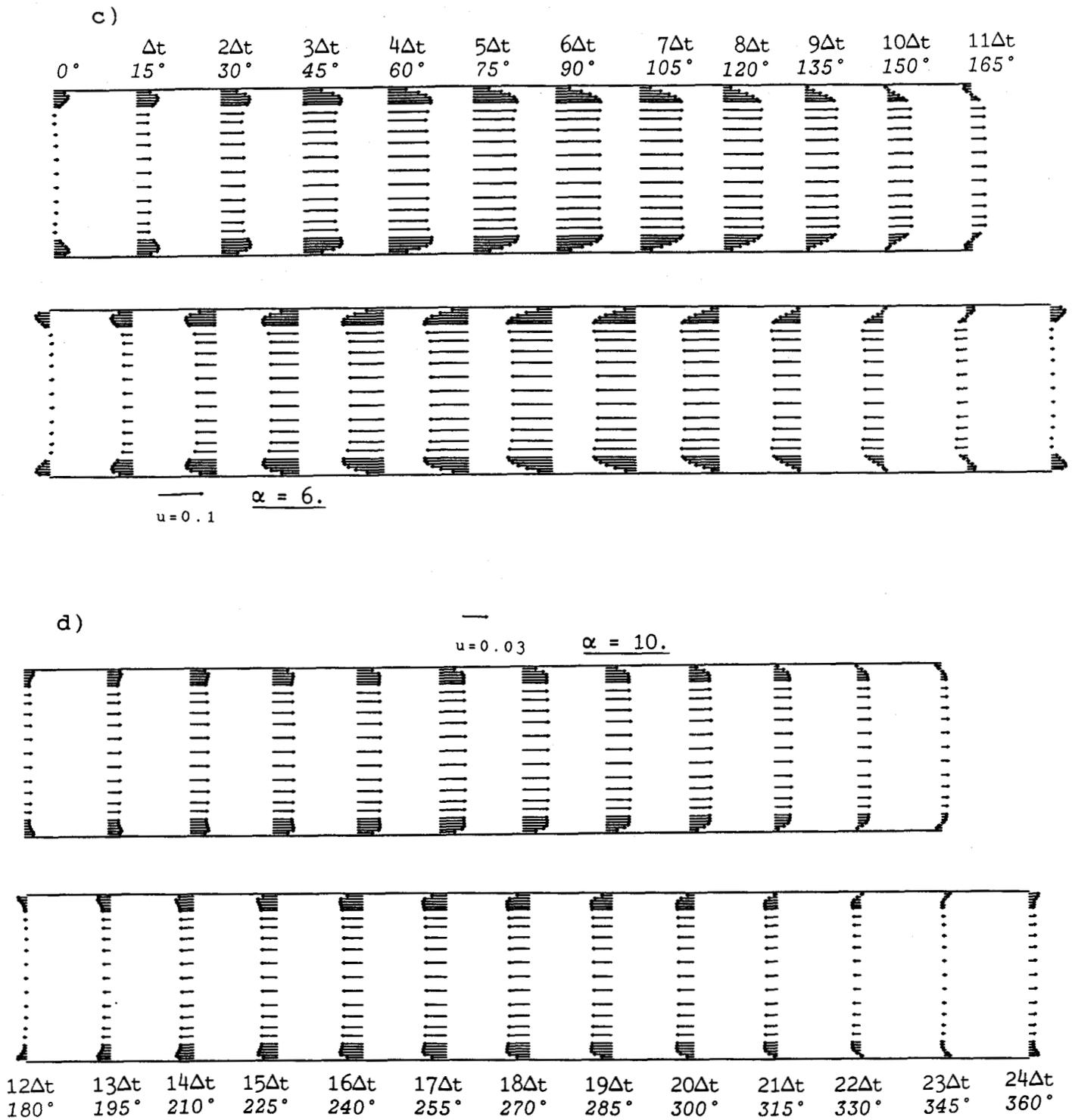


Figure V-46.c / d PROFILS DES VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE POUR  
DIFFERENTES VALEURS DU PARAMETRE DE FREQUENCE  $\alpha$ .  
- SOLUTIONS NUMERIQUES PAR ELEMENTS FINIS -

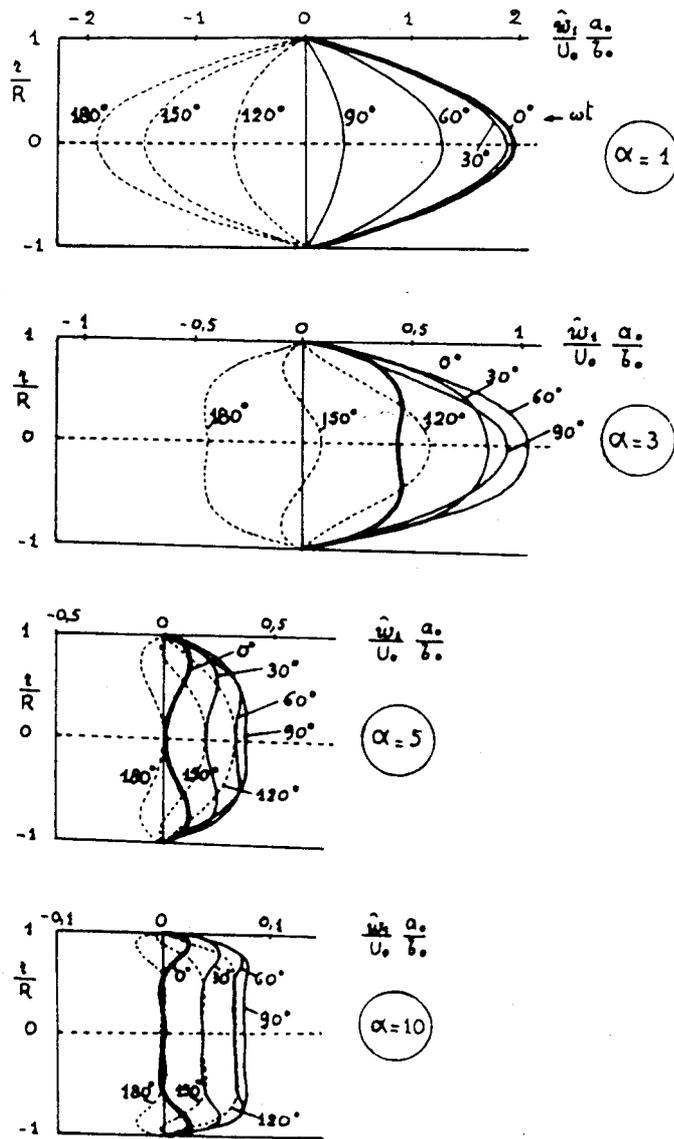


Figure V-47 PROFILS DES VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE POUR DIFFERENTES VALEURS DU PARAMETRE DE FREQUENCE  $\alpha$ .

- SOLUTIONS THEORIQUES D'APRES WOMERSLEY [38] ET COMOLET [20] -

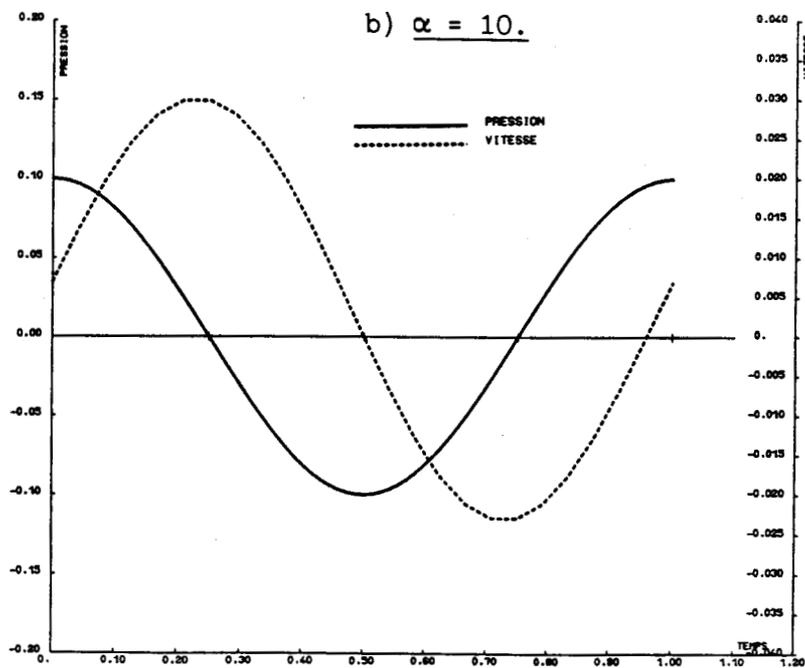
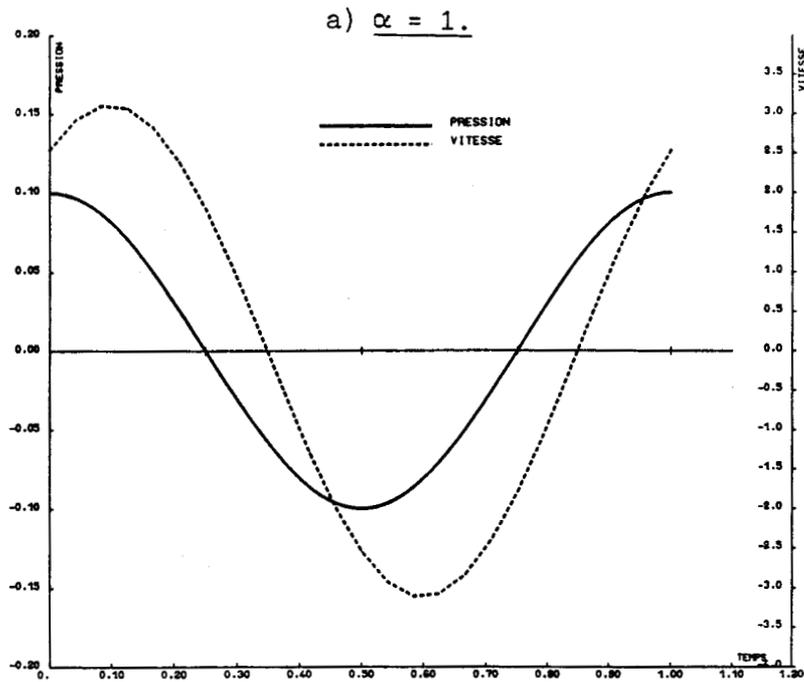


Figure V-48 EVOLUTIONS DE LA VITESSE CALCULEE EN AMONT (par éléments finis) DUES A LA PRESSION IMPOSEE DURANT UNE PERIODE D'ECOULEMENT ET POUR DIFFERENTES VALEURS DU PARAMETRE DE FREQUENCE  $\alpha$  .

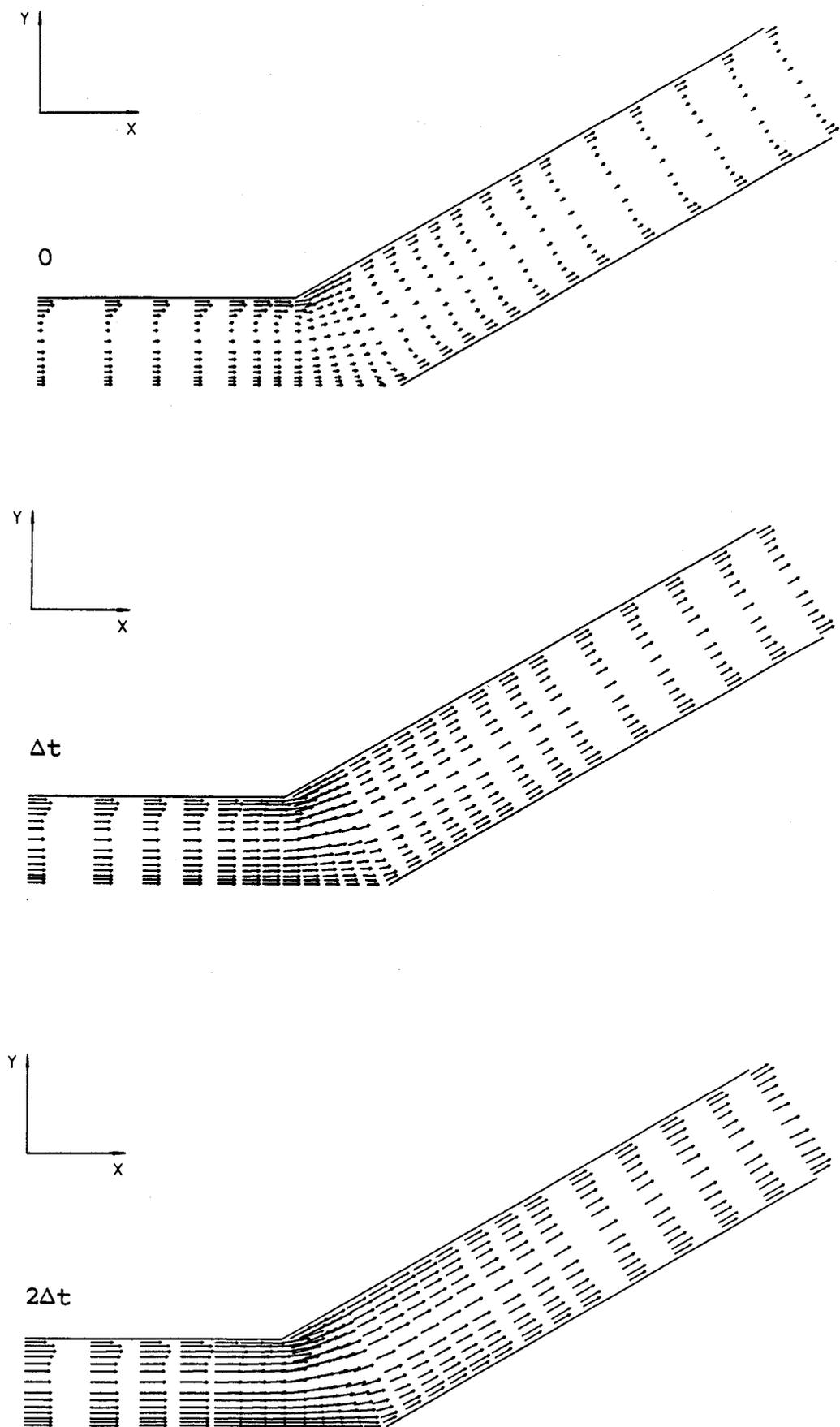


Figure V-49 CHAMPS DE VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE  
POUR TROIS INSTANTS SUCCESSIFS 0,  $\Delta t$ ,  $2\Delta t$

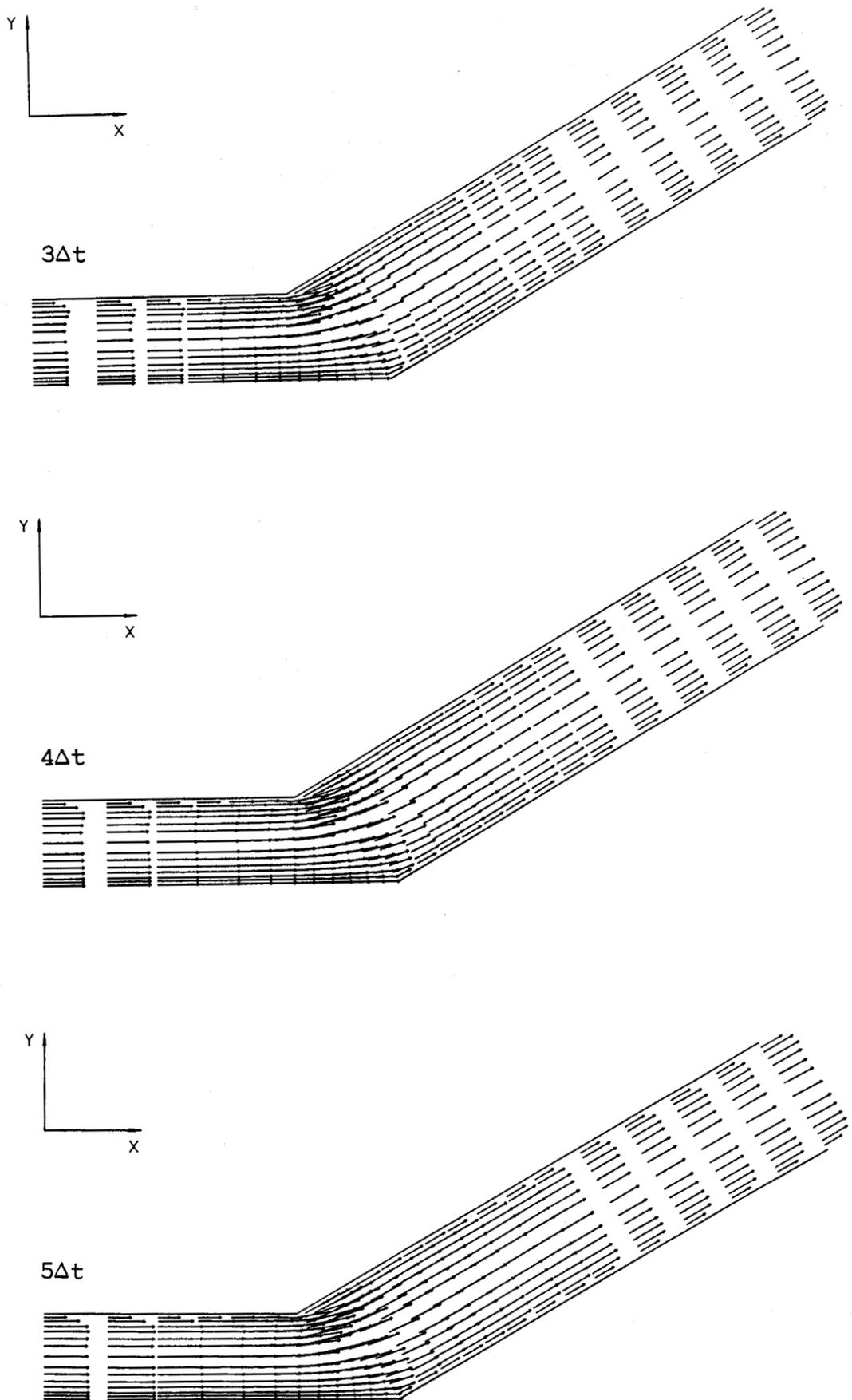


Figure V-50 CHAMPS DE VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE  
POUR TROIS INSTANTS SUCCESSIFS  $3\Delta t$ ,  $4\Delta t$ ,  $5\Delta t$

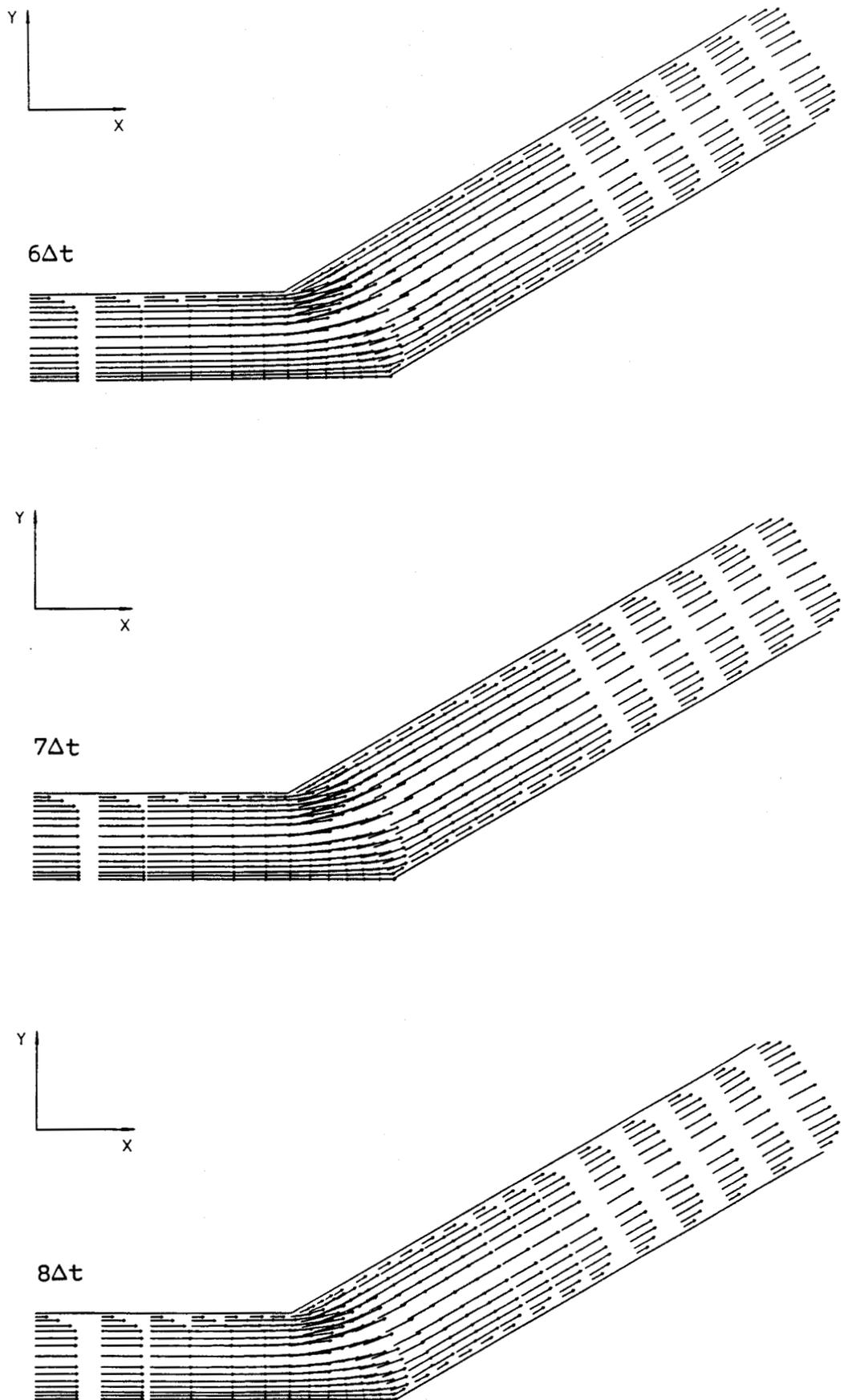


Figure V-51 CHAMPS DE VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE  
POUR TROIS INSTANTS SUCCESSIFS  $6\Delta t$ ,  $7\Delta t$ ,  $8\Delta t$

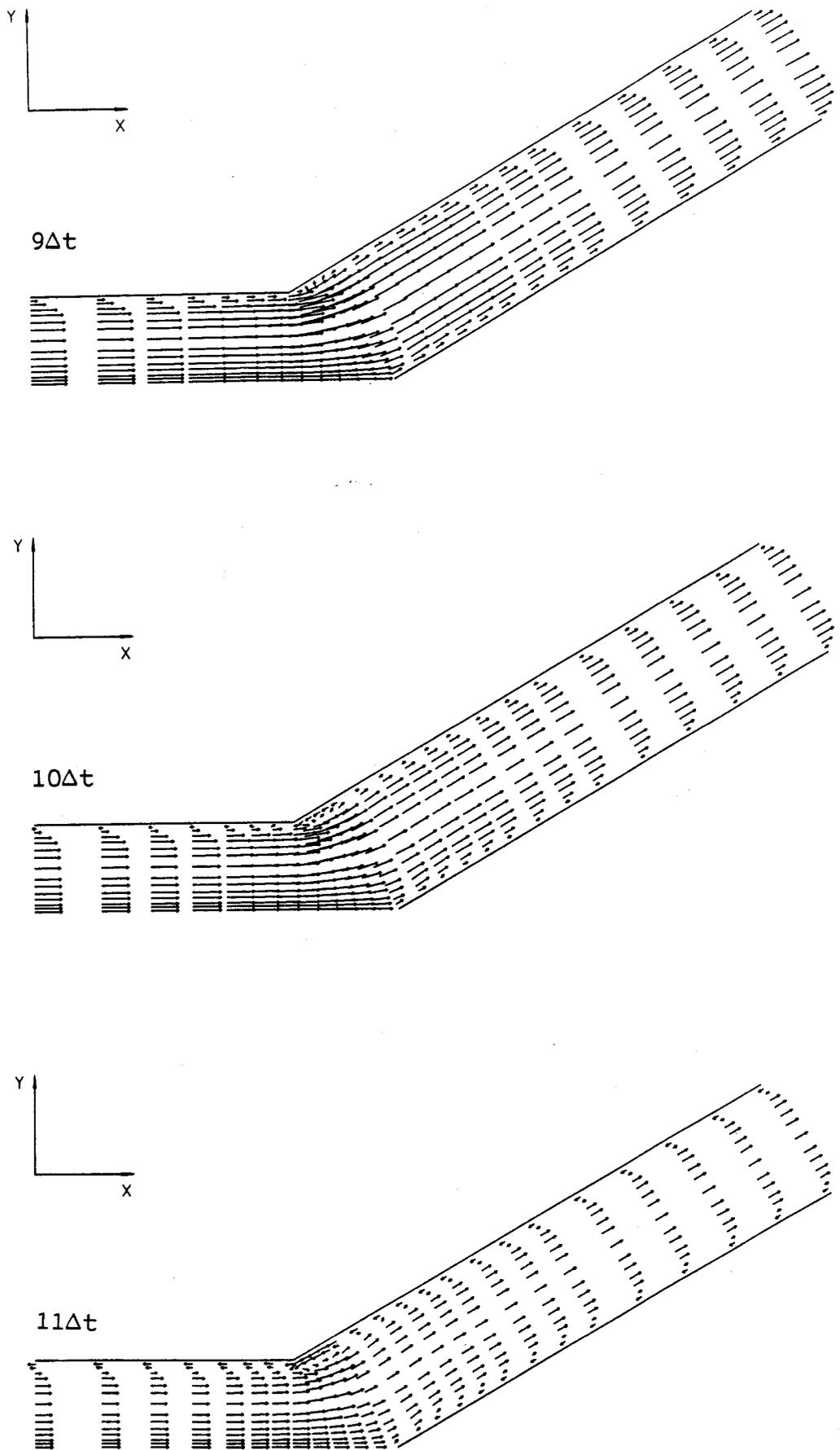


Figure V-52 CHAMPS DE VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE  
POUR TROIS INSTANTS SUCCESSIFS  $9\Delta t$ ,  $10\Delta t$ ,  $11\Delta t$

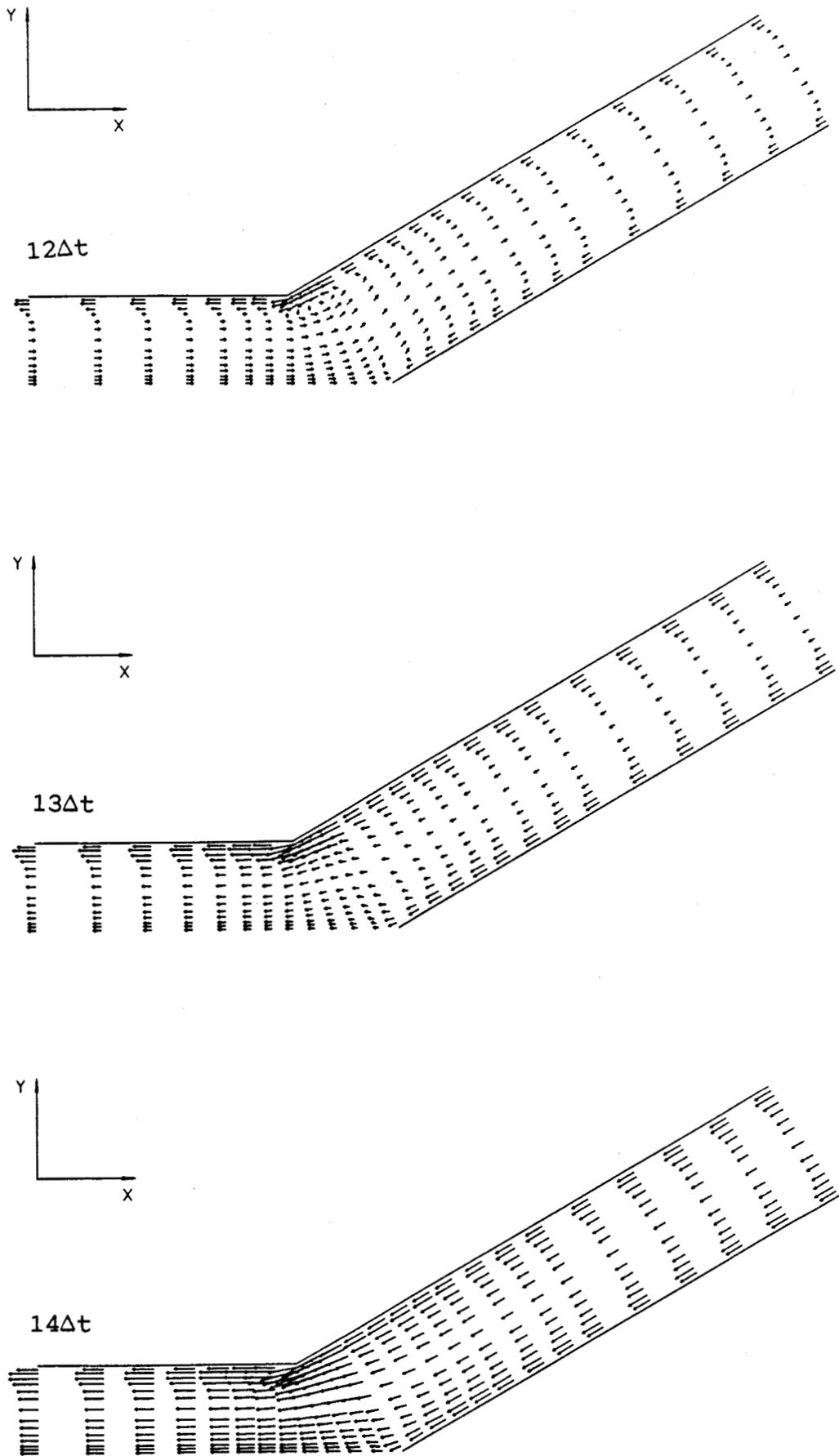


Figure V-53 CHAMPS DE VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE  
POUR TROIS INSTANTS SUCCESSIFS  $12\Delta t$ ,  $13\Delta t$ ,  $14\Delta t$

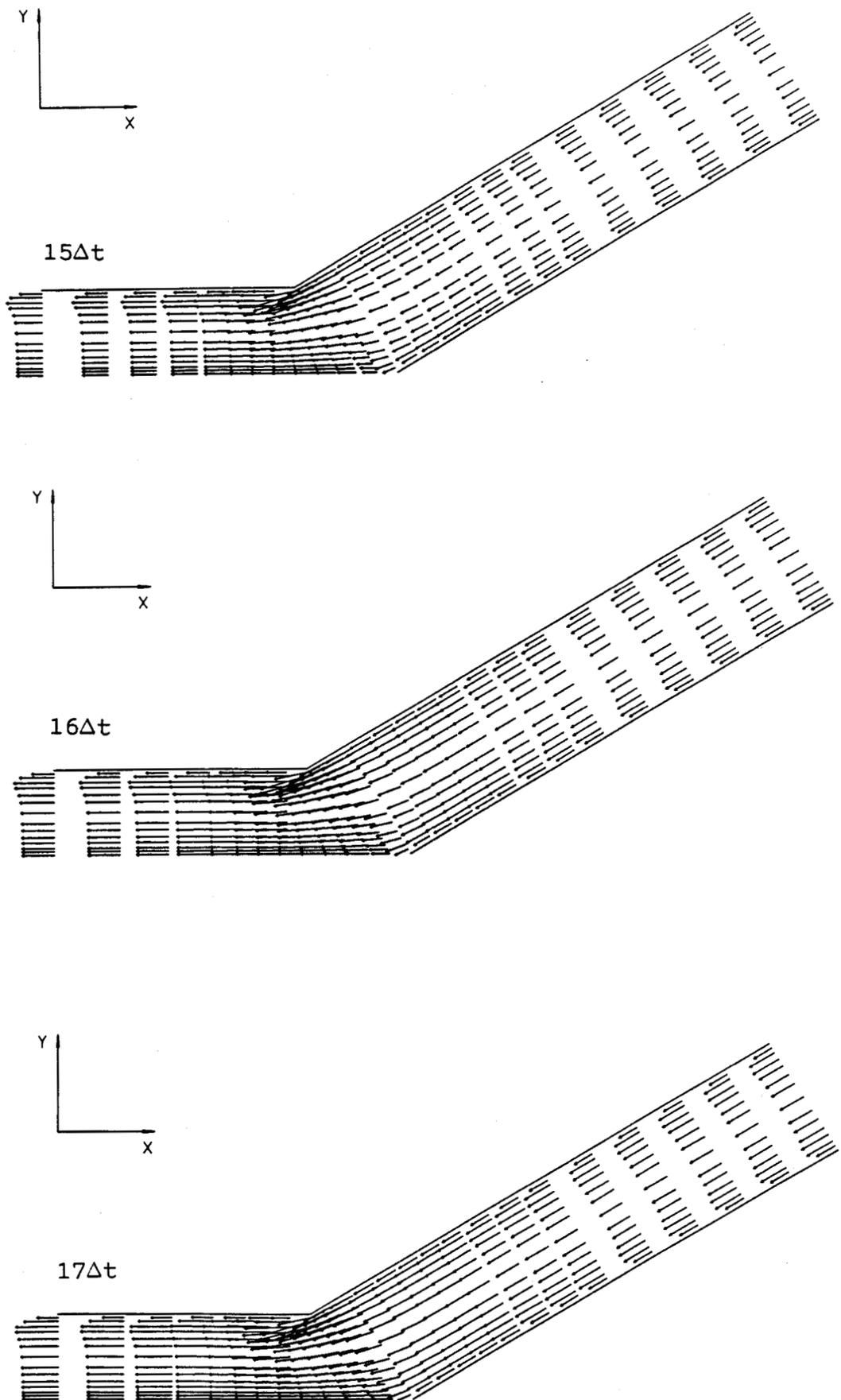


Figure V-54 CHAMPS DE VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE  
POUR TROIS INSTANTS SUCCESSIFS  $15\Delta t$ ,  $16\Delta t$ ,  $17\Delta t$

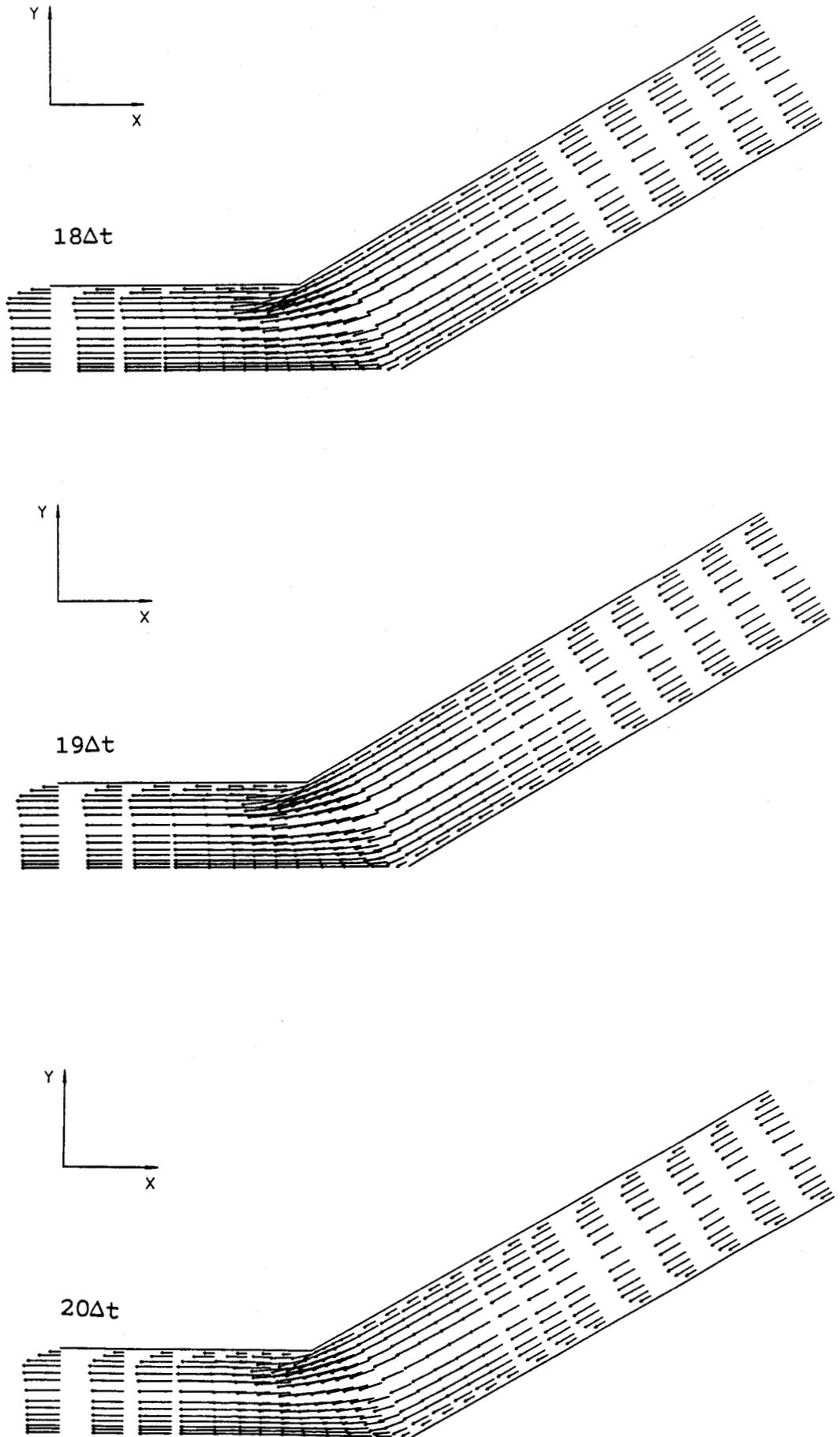


Figure V-55 CHAMPS DE VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE  
POUR TROIS INSTANTS SUCCESSIFS  $18\Delta t$ ,  $19\Delta t$ ,  $20\Delta t$

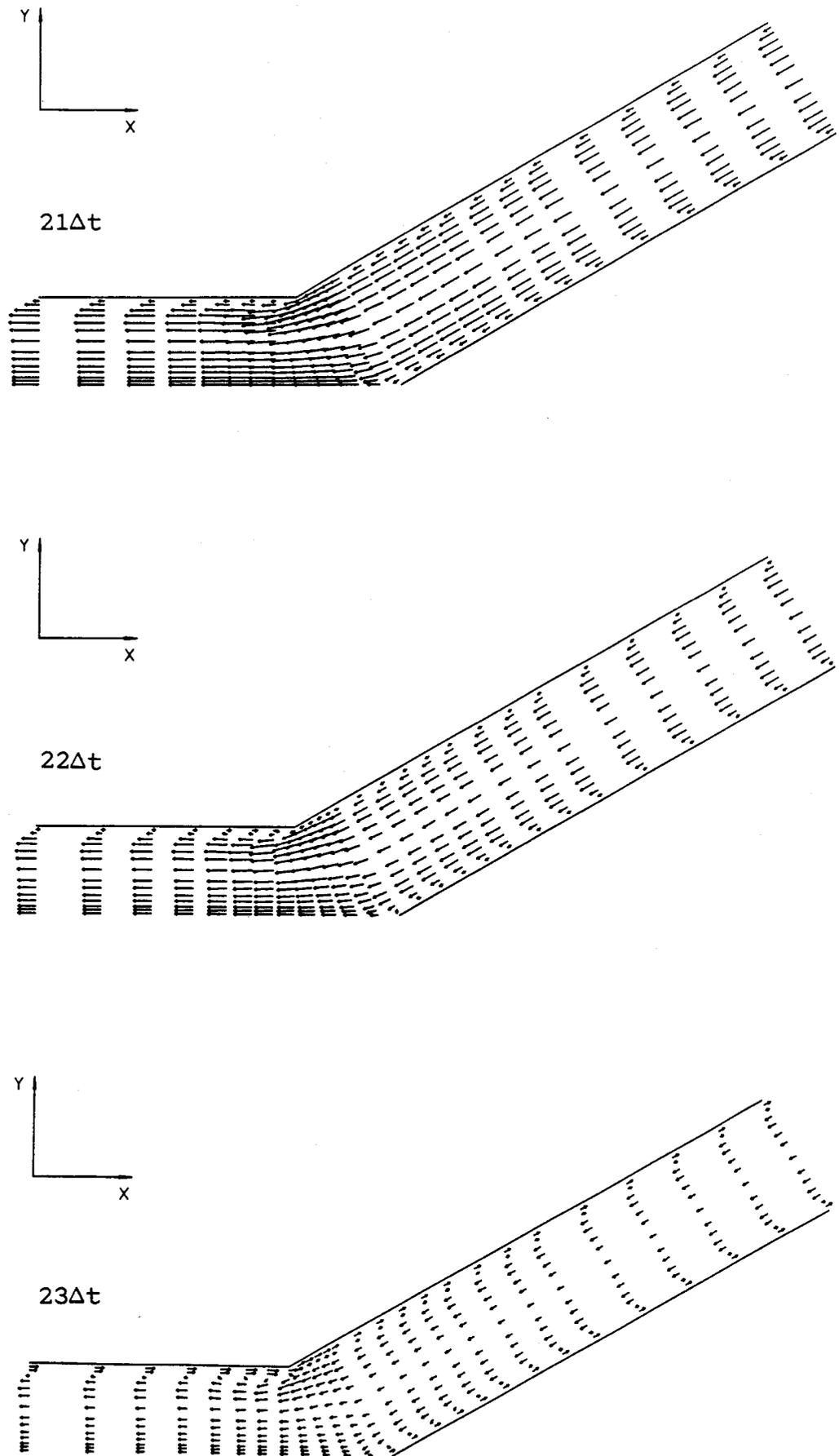


Figure V-56 CHAMPS DE VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE  
POUR TROIS INSTANTS SUCCESSIFS  $21\Delta t$ ,  $22\Delta t$ ,  $23\Delta t$

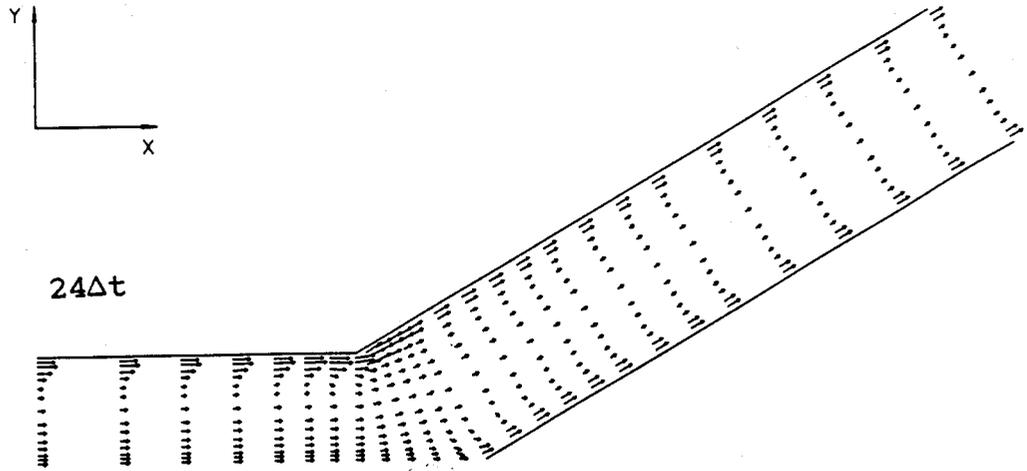


Figure V-57 CHAMP DE VITESSES EN ECOULEMENT PERIODIQUE  
OBTENU A LA FIN DE LA PERIODE  $24\Delta t$

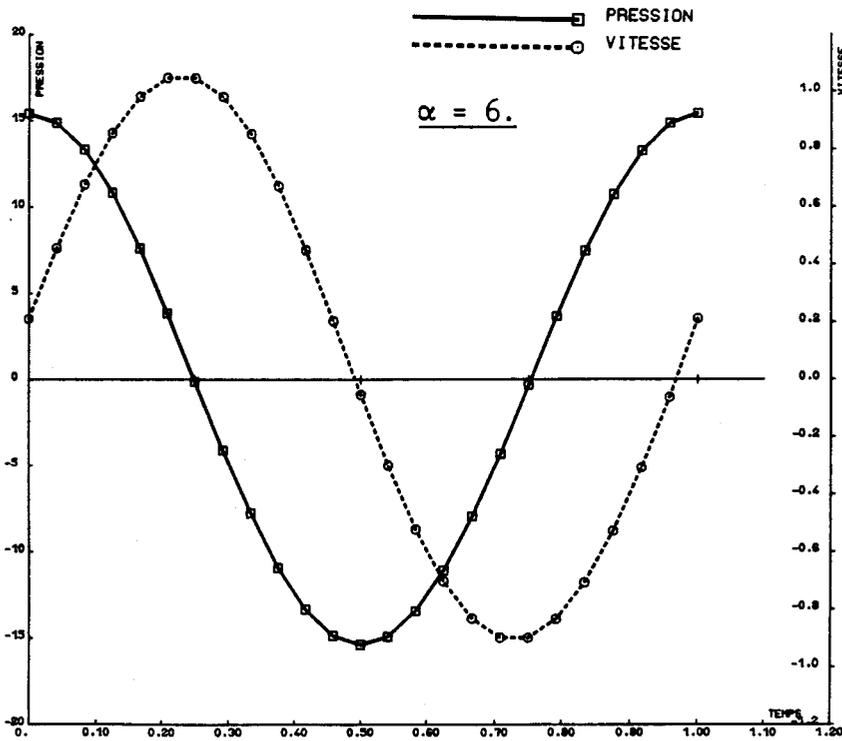


Figure V-58 EVOLUTION DE LA PRESSION CALCULEE PAR ELEMENT FINIS EN AMONT  
DE LA BIFURCATION ( $60^\circ$ ) DUE A LA VITESSE  $u(t)$  IMPOSEE DURANT  
UNE PERIODE D'ECOULEMENT.

**ANNEXES**

**ANNEXE I**La paroi vasculaire [20] [46]

La structure d'une paroi vasculaire est constituée de tissus appelés: l'intima, la média et l'adventice.

- Au niveau de la face interne de l'artère, on trouve dans l'intima des cellules endothéliales dont la perméabilité permet l'échange de substances passant du courant sanguin aux tissus. Ces cellules minces ont la particularité d'offrir peu de résistance à la pression qui tend à les dilater et résistent bien aux forces de cisaillement.

- La média est constituée en partie par des fibres d'élastine très extensibles et qui sont responsables du comportement élastique de la paroi et de sa résistance.

- Au niveau de l'adventice, on trouve des fibres de collagènes, peu extensibles qui résistent d'avantage à l'extension que les fibres d'élastine. Ainsi, lors d'une dilatation globale de l'artère, l'effet des fibres de collagènes deviennent effectives et modifient l'élasticité du tissu artériel.

Les sténoses sont dues aux plaques athéromateuses qui se développent au niveau de la face interne (intima) de la paroi vasculaire et perturbent l'écoulement sanguin. Cette perturbation est engendrée de deux manières différentes, soit en réduisant la lumière artérielle et entraînant une diminution du flux en aval, soit en favorisant la formation de caillots qui peut provoquer une embolie en se fragmentant.

## ANNEXE II

### Termes de la matrice non-linéaire [K(U)]

L'assemblage des équations (III-7), (III-8) et (III-9) pour l'ensemble des éléments du maillage peut-être écrit sous forme de système d'équations algébriques non-linéaires du type:

$$\left\{ F \right\} - \left[ K(U) \right] \left\{ U \right\} = \left\{ R(U) \right\} \quad (\text{A.II-1})$$

où  $\left[ K(U) \right]$  est la matrice globale formé à partir des sous-matrices  $k_{ij}$  définit comme suit:

$$k_{ij} = \sum_{e=1}^{\text{NELT}} \begin{bmatrix} T_{11}^e & T_{12}^e & 0 \\ T_{21}^e & 0 & T_{31}^e \\ 0 & T_{32}^e & T_{33}^e \end{bmatrix} \quad (\text{A.II-2})$$

dans laquelle:

$$\begin{aligned} T_{11}^e &= \iint_e \left[ N_i \left( \sum_1^8 N_k U_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + \sum_1^8 N_k V_k \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right] dxdr \\ &+ \frac{1}{\mathcal{R}_e} \iint_e \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} - \tau \frac{N_i}{r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] dxdr \\ &- \frac{1}{\mathcal{R}_e} \int_s \left[ N_i \frac{\partial N_j}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (\text{A.II-3})$$

$$T_{12}^e = \iint_e \left[ N_i \left( \frac{\partial L_j}{\partial x} \right) \right] dxdr \quad (\text{A.II-4})$$

$$T_{21}^e = \iint_e \left[ L_i \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} + \tau \frac{N_j}{r} \right) \right] dxdr \quad (\text{A.II-5})$$

$$T_{23}^e = \iint_e \left[ L_i \left( \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right] dxdr \quad (\text{A.II-6})$$

$$T_{32}^e = \iint_e \left[ N_i \left( \frac{\partial L_j}{\partial r} \right) \right] dxdr \quad (\text{A.II-7})$$

$$\begin{aligned} T_{33}^e &= \iint_e \left[ N_i \left( \sum_1^8 N_k U_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + \sum_1^8 N_k V_k \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right] dxdr \\ &+ \frac{1}{\mathcal{R}_e} \iint_e \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \tau \frac{N_i N_j}{r^2} - \tau \frac{N_i}{r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] dxdr \\ &- \frac{1}{\mathcal{R}_e} \int_s \left[ N_i \frac{\partial N_j}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (\text{A.II-8})$$

On rappelle que cette formulation est valable pour les équations de Navier-Stokes dans le cadre des problèmes d'écoulement à symétrie de révolution ( $\tau = 1$ ). En ce qui concerne les écoulements plan, il suffit de substituer les dérivations par rapport à  $r$  par celles suivant  $y$ , et de faire  $\tau = 0$ .

### ANNEXE III

#### Détermination de la fonction de courant $\psi$

Pour le calcul de la fonction de courant, on se place dans le cas où l'écoulement est à symétrie de révolution valable pour les modèles de sténoses. Dans ce cas, nous pouvons écrire les relations qui lient les deux composantes de la vitesse ( $u, v$ ) à la fonction de courant  $\psi(x, r)$ :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{A.III-1})$$

et

$$v = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{A.III-2})$$

Si on dérive la première équation par rapport à  $r$  et la seconde par rapport à  $x$ , la soustraction des deux expressions ainsi obtenues nous donne l'équation de Poisson:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = u + r \frac{\partial u}{\partial r} - r \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.III-3})$$

Appliquons maintenant la méthode des résidus pondérés de Galerkin à l'équation (A.III-3):

$$\iint_e N_i \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right] dx dr = \iint_e N_i \left[ u + r \frac{\partial u}{\partial r} - r \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dr \quad (\text{A.III-4})$$

Pour réduire le degré de dérivation dans le premier membre de l'équation précédente, on utilise le théorème de Green et on aboutit alors à l'expression suivante:

$$\iint_e N_i \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right] dx dr = - \iint_e \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] dx dr + \int_s N_i \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \quad (\text{A.III-5})$$

A ce stade du calcul, il nous reste à introduire les expressions qui définissent les approximations par élément finis des variables à l'intérieur de chaque élément:

$$u = \sum_{j=1}^{j=8} u_j N_j \quad (\text{A.III-6})$$

$$v = \sum_{j=1}^{j=8} v_j N_j \quad (\text{A.III-7})$$

$$\text{et } \psi = \sum_{j=1}^{j=8} \psi_j N_j \quad (\text{A.III-8})$$

et le système d'équation (A.III-4) s'écrit alors:

$$\iint_e \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] \psi_j dx dr = - \iint_e N_i \left[ N_j + r \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] u_j dx dr + \iint_e N_i \left[ r \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] v_j dx dr + \int_s N_i \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \quad (\text{A.III-9})$$

Enfin, puisque la résolution du système algébrique non-linéaire (III-10) fournit les vitesses (u, v) en chaque noeud (j) cf §.III-2, le second membre du système (A.III-9) est donc entièrement connu et on peut alors déterminer la fonction de courant  $\psi(x,r)$  dans tout le domaine étudié. A noter que l'intégrale sur la frontière du domaine d'écoulement

$\int_s N_i \frac{\partial \psi}{\partial n} ds$  ne concerne que les conditions aux limites de type Neuman.



## Résumé de thèse

L'influence de l'écoulement sur la pathologie est un des aspects importants de la biomécanique cardiovasculaire nécessaire pour comprendre et expliquer la formation de plaques d'athérome à l'intérieur de la paroi. En effet, ces lésions ont tendance à se localiser au voisinage de singularités telles les coudes et les embranchements vasculaires. L'étape cruciale pour l'étude de tels écoulements est de considérer l'influence des termes non-linéaires dans les équations dynamiques associées à ce type de problème.

Les équations de NAVIER-STOKES pour un fluide newtonien en régime permanent ou non-permanent sont résolues numériquement à l'aide d'un code de calcul par éléments finis que nous avons développé au laboratoire d'Acoustique de l'ISEN. La procédure de discrétisation est basée sur la méthode des résidus pondérés de GALERKIN, et le système non-linéaire est résolu par la méthode de NEWTON-RAPHSON associée à la technique frontale. Une telle méthode permet de déterminer le champ d'écoulement local à travers tout le modèle géométrique étudié. Les résultats obtenus montrent l'influence du nombre de Reynolds, du taux de rétrécissement de la sténose ainsi que l'angle d'une bifurcation sur le champ de vitesses et la distribution de pression. De même, les résultats numériques relatifs aux pontages montrent l'influence de la forme du raccord et des dimensions de celui-ci à la fois sur le champ d'écoulement, la répartition des débits et la réduction de la chute globale de pression. L'étude de l'écoulement périodique dans une bifurcation met bien en évidence l'influence de l'instationnarité sur l'évolution des profils de vitesses durant une période d'écoulement.

## Mots-clés

Sténose artérielle  
*Arterial stenosis*

Eléments finis  
*Finite element*

Pontage  
*Bypass*

Simulation  
*Simulation*

Bifurcation  
*Bifurcation*

Biomécanique  
*Biomechanic*