

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

Docteur Ingenieur

Specialité : Mécanique des Fluides

par

M'hamed MAHDJOUB - ARAIBI

" LA MODELISATION ASYMPTOTIQUE
D'UN ECOULEMENT DE FLUIDE AVEC
UN COEFFICIENT D'ECHANGE AYANT
DES VARIATIONS MICROSCOPIQUES."

Membres du Jury :

Président : P. A. BOIS , Professeur à L'U.S.T.L.F.A.

Rapporteur: A. LASEK , Maître de recherches
au C.N.R. S.

Membres : S. GODTS , Maître de Conférences
à l'Université de
Valenciennes

R. ZEYTOUNIAN , Professeur à l'U.S.T.L.F.A.

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	1
PREMIER CHAPITRE : INFLUENCE D'UNE VISCOSITE DYNAMIQUE VARIABLE DANS LES EQUATIONS DE NAVIER AUTOUR D'UN CONTOUR CURVILIGNE..	9
I.1. - Rappels Preliminaires	10
I.1.1. - Modèle de Navier pour les fluides Incompressibles et visqueux.	10
I.1.2. - Coordonnées Locales	11
I.2. - Position du Problème	15
I.3. - Formulation Mathématique du Problème	18
I.4. - Modélisation Asymptotique	22
I.4.1. - Modèle d'Euler	22
I.4.2. - Modèle de Couche Limite Laminaire à Viscosité Variable.	24
I.4.3. - Modèle de Sous-couche Visqueuse au Voisinage de la Paroi.	26
I.4.4. - Mise en évidence de l'interaction Couche Limite Laminaire - Sous- Couche Visqueuse.	31

I.4.5.-	Formulation du Problème de Couche Limite de Seconde Approximation.	35
I.5.-	CONCLUSION.	38
DEUXIEME CHAPITRE : PRISE EN COMPTE D'UNE SOUS-COUCHE VISQUEUSE A UN NIVEAU DU PROBLEME DE BLASIUS.		
		41
II.1.-	Introduction	42
II.2.-	Formulation Mathématique du Problème.	43
II.3.-	Modelisation Asymptotique.	46
II.3.1.-	Interaction: Fluide Parfait - Couche Limite de Première Approximation.	46
II.3.2.-	Mise en Evidence de la Sous-couche Visqueuse	
II.3.3.-	Interaction: Couche Limite - Sous-Couche Visqueuse.	49
II.3.4.-	Formulation du Problème de Couche Limite de Seconde Approximation.	54
II.4.-	Mise en Evidence d'une Solution Semblable du Problème (2.37), (2.38).	55
II.5.-	CONCLUSION.	61
TROISIEME CHAPITRE : LE MODELE DE BOUSSINESQ HYDROSTATIQUE		
		63

III.1.-	Les Equations de Base.	64
III.1.1.-	Atmosphère Standard.	64
III.1.2.-	Equations Adimensionnelles de Navier - Stokes pour l'atmosphère..	66
III.2.-	Modèle Correspondant pour $M_0 \rightarrow 0$ et $B_0 \rightarrow 0$	71
III.2.1.-	Modèle de Boussinesq, Les résultats de Zeytounian.	74
III.3.-	Modèle Hydrostatique de Boussinesq pour les Mouvements Atmosphériques Non - adiabatiques.	77
III.4.-	CONCLUSION.	78

QUATRIEME CHAPITRE: PRISE EN COMPTE
D'UNE SOUS-COUCHE DE
DISSIPATION DANS LES
PHENOMENES DE CONVECTION
LIBRE. 79

IV.1.-	Modèle Exact de Départ.	80
IV.2.-	Hypothèses Fondamentales.	82
IV.3.-	Modelisation Asymptotique.	83
IV.3.1.-	Interaction: Couche Exterieur (non visqueuse et non conductrice de chaleur) - Couche Limite.	85

IV.3.2. - Analyse de la Sous-couche de Dissipation	88
IV.3.3. - Interaction: Couche Limite - Sous couche de Dissipation	92
IV.3.4. - Formulation du Problème de Couche Limite de Seconde Approximation	94
IV.4. - Un Cas Simple	98
CINQUIEME CHAPITRE: L'HOMOGENEISATION ET SON APPLICATION A LA MODELISATION DES ECOULEMENTS A VISCOSITE FORTEMENT VARIABLE	
V.1. - Définition	105
V.2. - Technique de L'homogénéisation	105
V.3. - Application	107
CONCLUSION	128
ANNEXES ET GRAPHES	132
BIBLIOGRAPHIE	153

INTRODUCTION

Cela peut paraître paradoxal, mais aujourd'hui la modélisation asymptotique tend à prendre de plus en plus d'importance dans le processus global de résolution des problèmes que pose notre environnement. Cette modélisation se place juste en amont de la modélisation numérique, sur ordinateurs à partir de codes numériques, elle devient de plus en plus nécessaire au numériques - mécaniciens pour formuler des problèmes "non rigides". Le travail de KAPLUN^(*), de 1954, fut la première manifestation de ce grand renouveau théorique de la mécanique des fluides basé sur l'utilisation systématique des techniques asymptotiques cohérentes.

Il faut bien comprendre que le plus important, au départ, pour aboutir à une résolution numérique satisfaisante, c'est quand même d'avoir de "bonnes" équations - c'est-à-dire des équations modèles approchées qui soient bien consistantes avec les équations "exactes" de Navier-Stokes qui gouvernent les mouvements des fluides

(*) S. KAPLUN, ZAMP, 5, 1954, p 111-135.

dits classiques (ou newtoniens, tels que les gaz et les liquides usuels), en tenant compte des effets de compressibilité, de viscosité et de conduction de la chaleur. A notre avis, seules les techniques asymptotiques, via ~~une~~ modélisation asymptotique, permettent d'exhiber de telles équations modèles consistantes, pourvu que la formulation du problème exact de départ fasse intervenir ~~un~~, ou plusieurs, petits (ou grands) paramètres réduits, sans dimensions.

La situation présentée ici est "assez" académique mais on doit la considérer comme une étape préparatoire à l'étude de problèmes de turbulence générés par des coefficients d'échange turbulents ayant des fluctuations importants par rapport à des coefficients moyens (laminaires!), où des méthodes analogues devraient donner des indications intéressantes:

Des résultats récents basés sur la technique de l'homogénéisation, ont montré qu'un des termes de l'équation de Reynolds, au moins, a un effet de viscosité turbulente (voir, à ce sujet [1], [2]).

L'une des premières approches empiriques, pour tenir compte du frottement turbulent au voisinage

d'une paroi est due à BOUSSINESQ.

Cette hypothèse de Boussinesq, dite de "viscosité apparente" consiste par analogie avec le cas laminaire, à supposer le frottement turbulent proportionnel au gradient de vitesse.

De ce fait, un coefficient (μ_f), analogue au coefficient de viscosité dynamique (μ_m) laminaire, apparait dans l'équation de la quantité de mouvement du système des équations de Navier (cas incompressible). Dans la mesure où μ_f restera constant, il est manifeste qu'avec une telle hypothèse, toutes les études d'écoulement turbulent viennent se confondre avec celles du cas laminaire. Mais on sait aussi, que l'on peut semblablement améliorer la description par un choix de μ_f variable, d'un point à l'autre, au voisinage de la paroi.

Dans le présent travail, grâce à l'introduction de coefficients d'échange variables (dynamique ou thermique); on met en évidence un modèle à trois couches: couche extérieure, couche limite classique et sous-couche limite.

On montre que l'influence de la sous-couche sur la couche limite se manifeste au second ordre et on donne la formulation du problème

de couche limite de seconde approximation correspondant.

Dans le premier chapitre, on tient compte d'une viscosité dynamique variable de la forme $\mu = \mu_m + \mu_{fe}$, au niveau des équations de Navier (cas incompressible), qui régissent un écoulement visqueux au voisinage d'un contour curviligne, où $\mu_{fe} = \mu_0 \bar{\mu}_{fe} \left(\frac{n/L_0}{\delta(\varepsilon)} \right)$, avec $\mu_0 = \text{constante}$, L_0 une échelle de longueur liée au contour et n la coordonnée normale à ce contour curviligne. Les équations de Navier, sans dimensions, sont écrites en coordonnées curvilignes orthogonales où apparaissent deux petits paramètres de perturbation singulière: $\varepsilon \equiv \frac{1}{\sqrt{Re}}$ où Re est le nombre de Reynolds et $\delta(\varepsilon)$.

Donc, pour $\varepsilon \ll 1$ ($Re \gg 1$), on considère trois représentations asymptotiques qu'il faudra raccorder, en tirant profit de:

$$\frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0, \text{ avec } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Naturellement, on choisira la jauge d'épaisseur de la sous-couche visqueuse $\delta(\varepsilon)$ de telle façon

(*) le bon choix est $\delta(\varepsilon) \equiv \varepsilon^2$.

que ce modèle soit consistant au sens de la méthode des développements asymptotiques raccordés (voir [4], [7] et [8]). Et, grâce au mécanisme d'interaction couche limite - sous couche visqueuse, on écrira la formulation du problème de couche limite de seconde approximation.

Dans le second chapitre, on considère le cas particulier d'une plaque plane semi-infinie, ce qui nous permet d'écrire le problème en introduisant la fonction de courant $\Psi(x, y)$: (Problème de BLASIUS).

On sait, que dans la théorie classique de Blasius, on a toujours des conditions homogènes pour le problème de couche limite de seconde approximation (en $\hat{y} = 0$, de ce fait $\hat{\Psi}_1 \equiv 0$). Ainsi, on remarque que la sous-couche visqueuse influe sur le coefficient de frottement, sur la plaque plane, et que l'on peut, aussi, obtenir pour le problème de couche limite de seconde approximation une solution semblable fonction uniquement de $\eta = y / \varepsilon \sqrt{x}$.

Dans le troisième chapitre, nous rappelons les équations générales de Navier Stokes concernant le mouvement de l'atmosphère; celles-ci sont rapportées à un système de coordonnées lié au plan tangent en un point de la surface terrestre. Sous l'hypothèse $\delta = \frac{L_0}{r_0} \ll 1$, ces équations écrites sous forme adimensionnelle, dans l'approximation du plan β , font apparaître un certain nombre de paramètres sans dimensions tels que: le nombre de Reynolds Re , le nombre de Boussinesq Bo , le nombre de Mach Mo , le paramètre d'anisotropie E_0 , etc...

On construit le modèle hydrostatique de Boussinesq; car il tient compte du fait que le phénomène de convection libre a lieu dans une couche relativement mince de la troposphère; Ce modèle est déduit des équations générales écrites par rapport aux perturbations thermodynamiques π , w et θ relativement à l'état standard caractérisé par $p_0(z_0)$, $T_0(z_0)$ et $T_{00}(z_0)$: Il est connu (R. Zeytounian 1974),

(*) Nous nous limiterons aux mouvements atmosphériques pour lesquels l'échelle caractéristique L_0 est "beaucoup plus petite" que le rayon moyen de la sphère terrestre, $r_0 = 6367$ km.

que par le processus limite lié à la petitesse du nombre de Mach, et du nombre de Boussinesq: $M_0 \rightarrow 0$ et $B_0 \rightarrow 0$, avec $\hat{B} \equiv \frac{B}{M} = o(1)$, nous pouvons écrire l'approximation^M de Boussinesq. Par la suite, nous appliquons évidemment, aux équations non-adiabatiques de Boussinesq, le processus limite hydrostatique: $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ et $Re \rightarrow +\infty$, avec $\varepsilon_0^2 Re \equiv Re_{\perp} = o(1)$, qui conclut, alors, ce chapitre.

Dans le chapitre III, à partir du modèle de Boussinesq hydrostatique regissant un phénomène de convection libre au voisinage d'un sol thermiquement non homogène, on construit un modèle asymptotique en trois couches lié à la variation des coefficients d'échange avec l'altitude.

On donne la formulation du problème de couche limite de seconde approximation qui en résulte et prenant en compte l'influence de la sous-couche de dissipation qui apparaît au voisinage immédiat du sol. Un cas simple est considéré et il permet d'obtenir une solution explicite pour la perturbation de la température absolue créée en régime périodique en temps.

On notera enfin que le cas $\delta_1(\varepsilon) \gg \varepsilon$ doit aussi faire l'objet d'une étude séparée, et, cela dans le dernier chapitre à partir des équations stationnaires de Navier (cas incompressible).

Toute une série de problèmes de la mécanique des fluides ne peut être modélisée à partir de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Il faut donc avoir recours à la méthode des échelles multiples. Nous travaillons avec des grandeurs adimensionnelles, et, le fait que la viscosité $\mu(\eta/\delta)$ est fortement variable est lié à l'hypothèse :

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \equiv \Delta(\varepsilon) \ll 1.$$

Premier chapitre :- INFLUENCE D'UNE VISCOSITE
DYNAMIQUE VARIABLE DANS
LES EQUATIONS DE NAVIER
AUTOUR D'UN CONTOUR
CURVILIGNE

On élabore, à partir d'une idée de ZEYTOUNIAN (1983), un modèle asymptotique pour des nombres de Reynolds très grands qui permet d'inclure une sous-couche visqueuse dans la couche limite classique au voisinage immédiat de la paroi. Cette sous-couche visqueuse est induite par l'introduction d'un coefficient de viscosité dynamique variant sur une petite échelle relativement à l'échelle $O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$ de la couche limite. On met en évidence et on explicite le mécanisme d'interaction couche-limite - sous-couche visqueuse en précisant le choix de $\frac{1}{Re}$ pour la petite échelle microscopique.

I. 1. - RAPPELS PRELIMINAIRES

I. 1. 1. - MODELE DE NAVIER POUR LES FLUIDES INCOMPRESSIBLES ET VISQUEUX.

On sait^[7] que, le concept de fluide incompressible est un concept asymptotique issu du fluide peu compressible.

Les écoulements de fluides incompressibles mais visqueux, sont régis par le modèle dit de Navier. Ce modèle se justifie asymptotiquement à partir du modèle exact complet de Navier - Stokes^(*).

Le point de départ est ici le modèle exact de Navier - Stokes, gouverné par les équations adimensionnelles où apparaissent évidemment des nombres sans dimensions ; tels que le nombre de Reynolds (Re) ; le nombre de Strouhal (S) ; le nombre de Mach (M_0) etc...

L'hypothèse fondamentale est que : le nombre de Mach, caractéristique M_0 est toujours très petit devant l'unité ($M_0 \ll 1$).

(*) D'une façon plus détaillée, consulter le livre « Les modèles asymptotiques de la mécanique des fluides I » de R. Zentouian.

En fait, on suppose que la vitesse de l'écoulement considéré, en tout point et à tout instant est très petite devant la célérité locale du son.

Donc, le passage à la limite de Navier, qui est lié à $M_0 \rightarrow 0$:

$$\lim_N P = \left\{ M_0 \rightarrow 0 \text{ à } \vec{x} \text{ et } t \text{ fixés} \right\}.$$

I. 1.2. - COORDONNEES LOCALES

Il est souvent nécessaire d'écrire les équations de la mécanique des fluides newtoniens dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales, lié directement à l'obstacle autour duquel l'écoulement est analysé.

Nous considérons, tout d'abord, le cas d'un obstacle immobile et plan (un profil). Soit Σ la paroi de cet obstacle plan, on note σ l'abscisse curviligne le long de cette paroi et n la distance à cette paroi; d'un point se trouvant dans le voisinage de Σ , (voir figure 1.).

Ainsi, σ et n sont nos coordonnées curvilignes orthogonales dans le voisinage de la paroi. Σ .
 Designons par \vec{e} le vecteur tangent, unitaire, à Σ , orienté vers les σ croissants et par \vec{v} le vecteur unitaire normal, orienté vers le fluide.

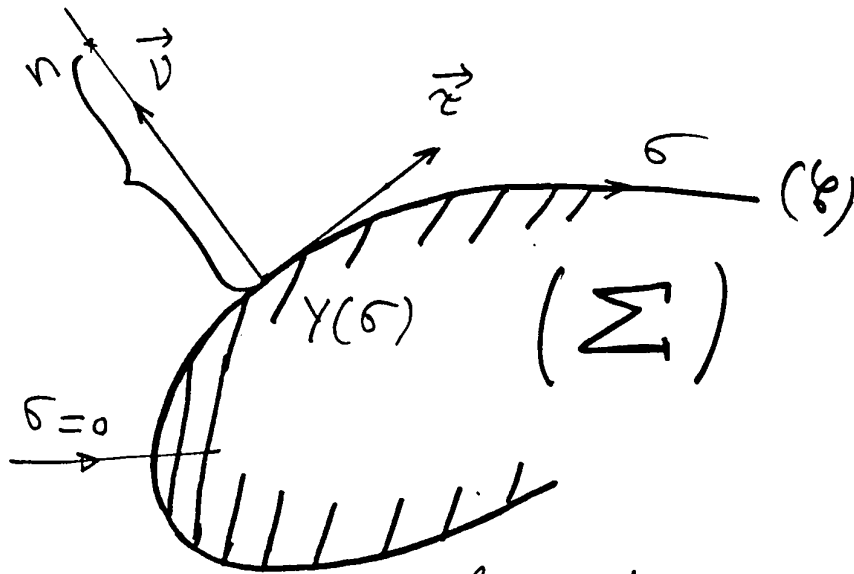


figure 1.

Enfin, $K(\sigma)$ désigne la courbure de la paroi Σ au point σ .

Rappelons les formules de Frenét :

$$(1.1) \quad \frac{d\vec{e}}{d\sigma} = -K(\sigma)\vec{v} ; \quad \frac{d\vec{v}}{d\sigma} = K(\sigma)\vec{e}.$$

D'une manière générale, on supposera toujours que la paroi Σ est régulière et que le rayon de courbure $R = 1/K$, que l'on peut définir en tout point de Σ est du même ordre de grandeur qu'une

dimension caractéristique L_0 de notre écoulement ;
c'est-à-dire que notre obstacle est à "courbure
modérée".

Un point dans le voisinage de la paroi Σ est
ainsi repéré par :

$$(1.2) \quad \vec{X}(\sigma, n) = \vec{Y}(\sigma) + n \vec{V}(\sigma),$$

où $\vec{Y}(\sigma)$ est situé sur la paroi, de sorte que
le déplacement élémentaire de ce point est :

$$\begin{aligned} d\vec{X} &= d\vec{Y} + dn \vec{V} + n d\vec{V} \\ &= d\sigma \vec{e} + dn \vec{V} + n K(\sigma) d\sigma \vec{e} \\ &= (1 + n K(\sigma)) d\sigma \vec{e} + dn \vec{V} \\ &= d\sigma / G \vec{e} + dn \vec{V}, \end{aligned}$$

$$\text{où } G \equiv 1 / (1 + n K(\sigma)).$$

Ainsi, nous pouvons exprimer l'opérateur nabla
(gradient) sous la forme :

$$(1.3) \quad \vec{\nabla} = G \frac{\partial}{\partial \sigma} \vec{e} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{V};$$

représentons, maintenant, le vecteur vitesse \vec{U}
sous la forme :

$$(1.4) \quad \vec{u} = u \vec{e} + v \vec{v};$$

nous obtenons alors les formules suivantes :

$$(1.5) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = g \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial v}{\partial n} + g k(\sigma) v;$$

$$(1.6) \quad (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \left\{ g u \frac{\partial u}{\partial \sigma} + g k u v + v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} \vec{e} \\ + \left\{ g u \frac{\partial v}{\partial \sigma} - g k u^2 + v \frac{\partial v}{\partial n} \right\} \vec{v};$$

$$(1.7) \quad \vec{\nabla}^2 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = g \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(g \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) + g k(\sigma) \frac{\partial}{\partial n} \\ + \frac{\partial^2}{\partial n^2}.$$

On obtient donc pour le laplacien bidimensionnel^(*) de la vitesse $\vec{\nabla}^2 \vec{u}$ l'expression suivante :

$$(1.8) \quad \vec{\nabla}^2 \vec{u} = A_T \vec{e} + A_V \vec{v}$$

$$\text{où} \quad A_T = g \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(g \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + g k \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$$

$$(1.8a) \quad + 2 g^2 k \frac{\partial v}{\partial \sigma} + g \frac{\partial}{\partial \sigma} (g k) v \\ - g^2 k^2 u;$$

(*) Pour le cas d'un obstacle tridimensionnel, voir "les modèles asymptotiques de la mécanique des fluides II" de R. Kh. ZEYTOUNIAN N° 276 lectures Notes in Physics. Springer-Verlag.

$$\begin{aligned}
 \text{et } \mathcal{A}_D &= \gamma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\gamma \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) + \gamma K \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \\
 (1.86) \quad &- 2 \gamma^2 K \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \gamma \frac{\partial}{\partial \sigma} (\gamma K) u \\
 &- \gamma^2 K^2 v.
 \end{aligned}$$

I.2. - POSITION DU PROBLEME

Le point de départ de ce travail est la prise en compte d'une viscosité dynamique variable au niveau des équations de Navier régissant l'écoulement stationnaire bidimensionnel d'un fluide homogène, incompressible, visqueux, newtonien.

Cet écoulement est supposé s'effectuer au voisinage d'un contour curviligne simulé par la paroi Σ , dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales (σ, n) lié directement à l'obstacle (Σ) .

On ne précise pas plus le type d'écoulement considéré, et, on se limitera à imposer la condition d'adhérence classique :

$$(1.9) \quad \vec{u} = \vec{0} \quad \text{sur la paroi } \Sigma,$$

où \vec{u} est le vecteur vitesse fonction des variables σ et n .

On caractérise la viscosité dynamique variable sous la forme suivante :

$$(1.10) \quad \mu = \mu_0 \bar{\mu} \left(\frac{n}{L_0} \right) = \mu_0 \left\{ \mu_{lm} \left(\frac{n/L_0}{\delta_1} \right) + \mu_{fl} \left(\frac{n/L_0}{\delta_2} \right) \right\},$$

où $\mu_0 \equiv$ constante et $\nu_0^{(*)} = \frac{\mu_0}{\rho_0}$ avec $\rho_0 =$ conste la masse volumique du fluide incompressible.

Si U_0 et L_0 désignent respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques pour l'écoulement, on peut construire le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{U_0 L_0}{\nu_0} ; \text{ soit } \varepsilon^2 \equiv Re^{-1}, \text{ notre petit paramètre principal de}$$

notre problème

$$(1.11) \quad \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \delta_2 = \delta_2(\varepsilon),$$

de telle façon que :

$$\delta_1 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \delta_2 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (Re \rightarrow \infty).$$

Dans la relation (1.10), l'indice "m" caractérise un coefficient moyen laminaire, qui est le coefficient de viscosité classique. A partir de ce coefficient on met en évidence habituellement

(*) ν_0 est la viscosité cinématique du fluide incompressible

la couche limite classique dont l'épaisseur est de l'ordre de ε . De ce fait il semble tout naturel de faire l'hypothèse complémentaire:

$$(1.12) \quad \delta_1(\varepsilon) \equiv \varepsilon.$$

L'indice inférieur "fl" caractérise un coefficient fluctuant microscopique. Ce coefficient conduit à l'apparition d'une sous-couche au voisinage immédiat de la paroi Σ . De ce fait, on supposera d'abord tout ce qui suit que :

$$(1.13) \quad \delta_2(\varepsilon) \ll \varepsilon,$$

c'est-à-dire que la fonction de jauge $\delta_2(\varepsilon)$ qui caractérise l'épaisseur de la sous-couche visqueuse est supposée beaucoup plus petite, en ordre, que l'épaisseur de la couche limite laminaire.

Dans ce qui suit nous voulons construire un modèle asymptotique en trois couches :

Fluide parfait, couche limite laminaire et sous-couche visqueuse, en tirant profit du double passage à la limite :

$$(1.14) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad ; \quad \delta_2(\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Il va de soi qu'une ^{telle} modélisation asymptotique peut, éventuellement, dépendre de la façon dont les deux petits paramètres ε et $\delta_2(\varepsilon)$ tendent vers zéro; en particulier il faut élucider la relation de similitude entre ε et $\delta_2(\varepsilon)$, qui conduit au modèle asymptotique le plus significatif et qui soit consistant au sens de la technique de la modélisation des développements asymptotiques raccordés (M. O. A. R.) (voir [47], [7] et [8]), aussi, qui permet de construire un développement asymptotique de la solution recherchée, uniformément valable quelque soit le processus de passage à la limite (1.14) choisi.

I.3. - FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

On considère les équations de Navier.

$$1.15) \left\{ \begin{array}{l} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p = \nu_0 \vec{\nabla} \cdot \left\{ \mu \left(\frac{n}{L_0} \right) \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] \right\}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \end{array} \right.$$

avec les notations suivantes :

$\vec{u}(\sigma, n)$, de composantes u et v (selon \vec{e} et \vec{v} respectivement), est la vitesse ; $p(\sigma, n)$ est la pression hydrodynamique.

Pour un écoulement bidimensionnel, on peut écrire :^(*)

$$(1.16) \quad \vec{\nabla} \cdot \left\{ \bar{\mu} \left(\frac{n}{L_0} \right) \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] \right\} = \bar{\mu} \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \frac{d\bar{\mu}}{dn} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} + \vec{\nabla} v \right)$$

Les formules (1.3), (1.5), (1.6) et (1.8) permettent d'écrire les équations de Navier (1.15) bidimensionnelles sous la forme locale.

Ainsi, dans tout ce qui suit, on obtient à la place de (1.15) le problème suivant pour u, v et p :

$$(1.17) \quad G \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial v}{\partial n} + G K(\sigma) v = 0 ;$$

$$(1.18) \quad G \left[u \frac{\partial u}{\partial \sigma} + v \frac{\partial u}{\partial n} + G K u v + \frac{1}{\rho_0} G \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right] = \nu_0 \bar{\mu} \left\{ G \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(G \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + G K \frac{\partial u}{\partial n} + 2 G^2 K \frac{\partial v}{\partial \sigma} + G \frac{\partial}{\partial \sigma} (G K) v - G^2 K^2 u \right\} + \nu_0 \frac{d\bar{\mu}}{dn} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + G \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) ;$$

(*) Voir ANNEXE A

$$\begin{aligned}
 & \gamma u \frac{\partial v}{\partial \sigma} + v \frac{\partial u}{\partial n} - \gamma k u^2 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial n} \\
 & = v_0 \bar{\mu} \left\{ \gamma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\gamma \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) + \gamma k \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right. \\
 (1.19) \quad & \left. - 2 \gamma^2 k \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \gamma \frac{\partial}{\partial \sigma} (\gamma k) u - \gamma^2 k^2 \right\} \\
 & + 2 v_0 \frac{d\bar{\mu}}{dn} \frac{\partial v}{\partial n} ;
 \end{aligned}$$

$$(1.20) \quad u = v = 0 \quad \text{sur } n = 0 ;$$

$$(1.21) \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}_m \left(\frac{n/L_0}{\varepsilon} \right) + \bar{\mu}_p \left(\frac{n/L_0}{\delta_2} \right) ;$$

$$(1.22) \quad \varepsilon \equiv \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad \text{avec } Re = \frac{U_0 L_0}{\nu_0} .$$

Introduisons au niveau du problème (1.17) - (1.22) des grandeurs sans dimensions :

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= u/U_0 ; \quad \bar{v} = v/U_0 ; \quad \bar{p} = p/\rho_0 U_0^2 ; \\
 \bar{n} &= n/L_0 ; \quad \bar{\sigma} = \sigma/L_0 \text{ et } \bar{K} = K L_0, \quad (*)
 \end{aligned}$$

en effaçant les barres sur les grandeurs sans dimensions, nous obtenons, à la place de

(1.17) - (1.22), le problème suivant, mis sous

(*) $K = 1/R$ est la courbure ; R est le rayon d'où $\bar{K} = K L_0$.

forme adimensionnelle, où s'introduisent les deux petits paramètres de perturbation ε et $\delta_2(\varepsilon)$:

$$(1.23) \quad G \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial v}{\partial n} + G K v = 0;$$

$$G u \frac{\partial u}{\partial \sigma} + v \frac{\partial u}{\partial n} + G K u v + G \frac{\partial v}{\partial \sigma}$$

$$= \varepsilon^2 \left\{ \mu_m \left(\frac{n}{\varepsilon} \right) + \mu_{ke} \left(\frac{n}{\delta_2} \right) \right\} \left\{ G \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(G \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) \right.$$

(1.24)

$$- G^2 K^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + G K \frac{\partial u}{\partial n} + 2 G^2 K \frac{\partial v}{\partial \sigma} + G \frac{\partial}{\partial \sigma} (G K v)$$

$$+ \varepsilon^2 \left\{ \frac{d\mu_m \left(\frac{n}{\varepsilon} \right)}{dn} + \frac{d\mu_{ke} \left(\frac{n}{\delta_2} \right)}{dn} \right\} \left\{ \frac{\partial v}{\partial n} + G \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right\};$$

$$G u \frac{\partial v}{\partial \sigma} + v \frac{\partial v}{\partial n} - G K u^2 + \frac{\partial v}{\partial n}$$

$$= \varepsilon^2 \left\{ \mu_m \left(\frac{n}{\varepsilon} \right) + \mu_{ke} \left(\frac{n}{\delta_2} \right) \right\} \left\{ G \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(G \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \right.$$

(1.25)

$$+ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + G K \frac{\partial v}{\partial n} - 2 G^2 K \frac{\partial u}{\partial \sigma} - G \frac{\partial}{\partial \sigma} (G K) u$$

$$- G^2 K^2 v \left. \right\} + 2 \varepsilon^2 \left\{ \frac{d\mu_m \left(\frac{n}{\varepsilon} \right)}{dn} + \frac{d\mu_{ke} \left(\frac{n}{\delta_2} \right)}{dn} \right\} \frac{\partial v}{\partial n};$$

(1.26)

$$u = v = 0 \quad \text{sur } n = 0.$$

On admettra que Ψ_m et Ψ_{fe} et leurs dérivées premières en n restent bornés lors des divers processus limite, liés à $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus nous supposons que :

$$(1.27) \quad \Psi_m(\infty) \equiv 1 \quad \text{et} \quad \Psi_{fe}(\infty) \equiv 0.$$

I. 4. - MODELISATION ASYMPTOTIQUE

Au niveau des équations ((1.23) - (1.26)), lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il faut considérer en premier lieu, le processus limite d'Euler.

I. 4. 1. - MODELE D'EULER

(1.28) $\varepsilon \rightarrow 0$ à σ et n fixés,
et on associe à (1.28) les développements asymptotiques suivants :

$$(1.29) \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{v}_0 \\ \bar{\pi}_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\pi}_1 \end{pmatrix} + \dots;$$

on obtient, alors, en première approximation, les équations bidimensionnelles stationnaires d'Euler :

$$(1.30) \begin{cases} \gamma \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \delta} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial n} + \gamma K \bar{v}_0 = 0; \\ \gamma \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \delta} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial n} + \gamma K \bar{u}_0 \bar{v}_0 + \gamma \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \delta} = 0; \\ \gamma \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \delta} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial n} - \gamma K \bar{u}_0^2 + \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial n} = 0. \end{cases}$$

Soit :

$$(1.31) \bar{u}_0 = u_e(\delta, n) ; \bar{v}_0 = v_e(\delta, n) \text{ et } \bar{p}_0 = p_e(\delta, n)$$

la solution correspondante. On sait que :

$$(1.32) v_{e0}(\delta) \equiv v_e(\delta, 0) = 0, \quad (*)$$

qui est la condition dite de "glissement" sur la paroi $n=0$, pour l'écoulement de fluide parfait gouverné par les équations (1.30).

$$\text{Donc : } \frac{dp_{e0}(\delta)}{d\delta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{e0}^2(\delta)}{d\delta^2} = 0,$$

$$\text{où } u_{e0}(\delta) = u_e(\delta, 0) \text{ et } p_{e0}(\delta) = p_e(\delta, 0).$$

Pour l'analyse asymptotique de la couche limite (couche intermédiaire) qui suit, il est judicieux au niveau du problème ((1.23) - (1.26)) d'introduire

(*) Pour un obstacle profilé sur lequel la couche limite reste attachée (pas de décollement!).

On notera bien que la condition (1.31) est essentiellement une condition de raccord et elle exprime le fait que dans la couche limite on a pour la composante verticale de la vitesse le développement asymptotique local suivant : $v = \varepsilon \hat{v}_1(\delta, \hat{n}) + \dots$

Tandis que dans l'écoulement de fluide parfait : $v = \bar{v}_0(\delta, n) + \varepsilon \bar{v}_1(\delta, n) + \dots$

la variable de couche limite :

$$(1.33) \quad \hat{n} = \frac{\eta}{\varepsilon}$$

et on pose

$$(1.34) \quad \Delta(\varepsilon) = \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

I.4.2. - MODELE DE COUCHE LIMITE LAMINAIRE A VISCOSITE VARIABLE

Précisons tout d'abord, que :

$$(1.35) \quad \Delta(\varepsilon) = \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0, \text{ avec } \varepsilon \rightarrow 0,$$

puisque d'après l'hypothèse (1.13) ; $\delta_2(\varepsilon) \ll \varepsilon$.
Dans ce cas, au processus limite de Prandtl

$$(1.36) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ à } \tau \text{ et } \hat{n} = \eta/\varepsilon \text{ fixés,}$$

il faut associer les développements intermédiaires suivants :

$$(1.37) \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ 0 \\ \hat{p}_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{p}_1 \end{pmatrix} + \dots ;$$

si on suppose que $K(\delta) \sim O(1)$, alors,

$$(1.38) \quad K(\delta) \cdot \varepsilon \ll 1;$$

On obtient à l'ordre zéro les équations classiques de couche limite laminaire de Prandtl, avec coefficient de viscosité variable $\mu_m(\hat{h})$:

$$(1.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \delta} + \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{h}} = 0; \quad \hat{p}_0 = p_{e0}(\delta); \\ \hat{u}_0 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \delta} + \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{h}} + \frac{d p_{e0}(\delta)}{d \delta} = \frac{\partial}{\partial \hat{h}} \left(\mu_m(\hat{h}) \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{h}} \right); \end{array} \right.$$

auxquelles on associe, pour l'instant, la condition de comportement à l'infini (raccord à l'ordre zéro du modèle d'Euler avec celui de la couche limite classique); d'après VANDYKE [4]:

$$(1.40) \quad \lim_{\hat{h} \rightarrow +\infty} \hat{u}_0 \equiv u_{e0}(\delta);$$

mais, on ne peut rien dire pour l'instant, sur les conditions pour $\hat{h} = 0$.

Aussi, au niveau de (1.39), on perd toute information concernant l'influence de $\mu_m(\frac{\hat{h}}{\Delta})$, et, de ce fait il est nécessaire de considérer un troisième passage à la limite.

I.4.3. - MODELE DE SOUS-COUCHE VISQUEUSE
AU VOISINAGE DE LA PAROI

Pour l'analyse asymptotique qui suit, il est nécessaire au niveau du problème (1.23) - (1.26) d'introduire la variable,

$$(1.41) \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta_2(\varepsilon)}$$

et, de considérer le passage à la limite locale:

$$(1.42) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{à } \sigma \text{ et } \tilde{n} \text{ fixés.}$$

Dans ce cas, en toute généralité, il faut postuler les développements asymptotiques intérieurs suivants:

$$(1.43) \quad \begin{cases} u(\sigma, n; \varepsilon) = \varepsilon^\alpha \tilde{u}_0(\sigma, \tilde{n}) + \dots; \\ v(\sigma, n; \varepsilon) = \varepsilon^\beta \tilde{v}_0(\sigma, \tilde{n}) + \dots; \\ p(\sigma, n; \varepsilon) = \tilde{p}_0(\sigma, \tilde{n}) + \varepsilon \tilde{p}_1(\sigma, \tilde{n}) + \dots; \end{cases}$$

On obtient alors les équations de sous-couche visqueuse suivantes:

$$(1.44) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \tilde{n}} = 0 \quad ; \quad \tilde{p}_0 \equiv p_{e0}(\sigma); \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{n}} \left\{ \left[\psi_{lm}(0) + \psi_{gl}(\tilde{n}) \right] \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{n}} \right\} = 0. \end{cases}$$

Ces équations (1.44) s'obtiennent sous l'hypothèse que:

$$(1.45) \quad \delta_2(\varepsilon) \equiv \varepsilon^\lambda \implies \Delta(\varepsilon) = \varepsilon^{\lambda-1}, \text{ avec } \lambda > 1;$$

et $\beta = \alpha + \lambda$

α , β et λ étant des scalaires à déterminer.
Aux équations (1.44), on peut imposer les conditions aux limites:

$$(1.46) \quad \tilde{u}_0 = 0, \quad \tilde{v}_0 = 0, \quad \text{sur } \tilde{h} = 0.$$

Il nous faut maintenant rappeler (1.43) et (1.37) afin d'être en mesure d'écrire des conditions aux limites en $\tilde{h} = 0$ pour les équations de la couche limite laminaire (1.39); chemin faisant, on déterminera les exposants α et β ce qui donnera aussi la valeur de λ !

Mais revenons d'abord à (1.44); on tire de la dernière des équations (1.44) la solution:

$$(1.47) \quad \tilde{u}_0(\sigma, \tilde{h}) = A_0(\sigma) \int_0^{\tilde{h}} \frac{dn}{\psi_{ln}(0) + \psi_{fe}(n)} \equiv A_0(\sigma) \tilde{U}_0(\tilde{h})$$

et, il faut connaître le comportement de $\tilde{U}_0(\tilde{h})$ lorsque $\tilde{h} \rightarrow +\infty$. On notera qu'au niveau (1.47) la fonction $A_0(\sigma)$ est pour l'instant arbitraire.

Lorsque $\tilde{n} \rightarrow +\infty$, on a: ^(*)

$$(1.48) \quad \tilde{U}_0(\tilde{n}) \equiv \int_0^{\tilde{n}} \frac{dn}{\mu_m(0) + \mu_{fe}(n)} \sim \frac{\tilde{n}}{\mu_m(0)} + \tilde{U}_0^\infty + \dots; \quad (**)$$

et il faut supposer que:

$$(1.49) \quad \tilde{U}_0^\infty \equiv \int_0^\infty \left(\frac{1}{\mu_m(0) + \mu_{fe}(n)} - \frac{1}{\mu_m(0)} \right) d\tilde{n} < +\infty,$$

ce qui impose une contrainte sur $\mu_{fe}(\tilde{n})$.

Ainsi,

$$(1.50) \quad \tilde{U}_0(\sigma, \tilde{n}) \sim A_0(\sigma) \left\{ \frac{\tilde{n}}{\mu_m(0)} + \tilde{U}_0^\infty + \dots \right\}$$

lorsque $\tilde{n} \rightarrow +\infty$.

D'autre part, lorsque $\hat{n} \rightarrow 0$, la solution $\hat{U}_0(\sigma, \hat{n})$ des équations de la couche limite laminaire (1.39), se comporte comme:

$$(1.51) \quad \hat{U}_0(\sigma, \hat{n}) \sim \hat{U}_0(\sigma, 0) + \hat{n} \left. \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{n}} \right|_{\hat{n}=0} + \dots,$$

lorsque $\hat{n} \rightarrow 0$

(*) Voir ANNEXE B

(**) On tire profit du fait que l'intégrale

$$\int_{\tilde{n}}^\infty \left(\frac{1}{\mu_m(0) + \mu_{fe}(n)} - \frac{1}{\mu_m(0)} \right) dn \text{ tend vers zéro, avec } \tilde{n} \rightarrow +\infty$$

(*) Le raccord de (1.50) avec (1.51), en tenant compte de la relation :

$$(1.52) \quad \hat{n} = \varepsilon^{\lambda-1} \tilde{n}$$

conduit à imposer

$$(1.53) \quad \lambda = \alpha + 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 2\alpha + 1$$

Ce qui fait que

$$(1.54) \quad \hat{u}_0(\sigma, 0) = 0 \quad \text{et} \quad A_0(\sigma) = \mu_m(0) \left. \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{n}} \right|_{\hat{n}=0}$$

Une fois $\tilde{u}_0(\sigma, \tilde{n})$ déterminé par la formule

$$(1.55) \quad \tilde{u}_0(\sigma, \tilde{n}) = \mu_m(0) \left. \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{n}} \right|_{\hat{n}=0} \cdot \tilde{U}_0(\tilde{n}),$$

avec $\tilde{U}_0(\tilde{n})$ donné par la formule

$$(1.56) \quad \tilde{U}_0(\tilde{n}) \equiv \int_0^{\tilde{n}} \frac{dn}{\mu_m(0) + \mu_k(n)},$$

on peut calculer

$$(1.57) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_0(\sigma, \tilde{n}) &= - \frac{\partial}{\partial \sigma} \int_0^{\tilde{n}} \tilde{u}_0(\sigma, n) dn \\ &= - \frac{dA_0(\sigma)}{d\sigma} \int_0^{\tilde{n}} \tilde{U}_0(n) dn, \end{aligned}$$

(*) En précisant qu'il existe une règle de raccord "hybride" proposée par SHIVAMOGGI (1978), qui s'avère efficace dans de nombreuses applications à la mécanique des fluides. (voir [10]).

et, d'après (1.50),

$$(1.58) \quad \tilde{v}_0(\sigma, \hat{n}) \sim -\frac{dA_0(\sigma)}{d\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\hat{n}^2}{\mu_m(\sigma)} + \hat{n} \tilde{u}_0^\infty + \tilde{v}_0^\infty + \dots \right\}$$

lorsque $\hat{n} \rightarrow +\infty$

où

$$(1.59) \quad \tilde{v}_0^\infty \equiv \int_0^\infty (\tilde{u}_0^n - \tilde{u}_0^\infty) d\hat{n} \quad (*)$$

D'autre part, pour la couche limite on a :

$$(1.50) \quad \hat{v}_1(\sigma, \hat{n}) \sim \hat{v}_1(\sigma, 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial \hat{n}^2} \Big|_{\hat{n}=0} \hat{n}^2$$

lorsque $\hat{n} \rightarrow 0$, puisque

$$\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{n}} \Big|_{\hat{n}=0} = -\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \sigma}(\sigma, 0) = 0, \text{ d'après (1.54)}$$

Le raccord de (1.58) avec (1.50), en tenant compte de (1.52) conduit à :

$$(1.61) \quad \hat{v}_1(\sigma, 0) = 0$$

et, il n'y a aucune condition à imposer sur λ puisque :

(*) Voir Annexe C, dans cet annexe, on démontre la formule (1.58), et on remarque que (1.59) est bornée pour le choix de μ_m et μ_g , et \tilde{u}_0^∞ est présentée par $\tilde{u}_0^\infty \equiv \int_0^\infty \left(\frac{1}{\mu_m(\sigma) + \mu_g(n)} - \frac{1}{\mu_m(\sigma)} \right) dn$.

$$(1.62) \quad \left. \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial \hat{\eta}^2} \right|_{\hat{\eta}=0} \equiv -\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\left. \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{\eta}} \right|_{\hat{\eta}=0} \right) = -\frac{1}{\mu_m(\sigma)} \frac{dA_0(\sigma)}{d\sigma}$$

I.4.4. - MISE EN EVIDENCE DE L'INTERACTION :
COUCHE LIMITE LAMINAIRE - SOUS COUCHE
VISQUEUSE

Ainsi, au vu des résultats de l'analyse asymptotique effectuée ci-dessus, on constate qu'il faut résoudre en première approximation, les équations (1.39) de la couche limite laminaire avec viscosité variable sous les conditions aux limites classiques : (1.40), (1.54) et (1.61). Cela veut dire qu'en première approximation la sous-couche visqueuse n'est pas en interaction directe avec la couche limite laminaire. De plus, au niveau de cette première approximation, l'exposant λ , qui doit préciser la relation de similitude

$$(1.63) \quad \varepsilon \gg \delta_2(\varepsilon) = \varepsilon^\lambda$$

entre les jauges $\delta_2(\varepsilon)$ et ε , reste indéterminé. Seul le mécanisme d'interaction : couche limite laminaire - sous-couche visqueuse peut permettre de déterminer λ !

A cette fin, précisons que, une fois la couche limite laminaire calculée, nous pouvons effectuer un nouveau calcul de fluide parfait, en théorie linéaire (seconde approximation) avec une condition à la limite en $\eta = 0$ sur la vitesse verticale, tenant compte de l'épaisseur de déplacement induite par la couche limite laminaire de première approximation. Comme conséquence, cela implique nécessairement que les développements asymptotiques de la solution de couche limite doivent contenir des termes proportionnels à ε :

$$(1.64) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \hat{u}_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \dots ; \\ v = \varepsilon \hat{v}_1 + \varepsilon^2 \hat{v}_2 + \dots ; \\ p = p_{e.o.}(\sigma) + \varepsilon \hat{p}_1 + \dots ; \end{array} \right.$$

Les équations régissant \hat{u}_1 , \hat{v}_1 et \hat{p}_1 sont linéaires. Nous précisons qu'il existe une règle de raccord "hybride", proposée par SHIVAMOGGI (1978) qui s'avère efficace dans ce cas-ci.

L'analyse de (1.64), au voisinage de $\hat{\eta} = 0$, en tenant compte de (1.52), avec la condition

à la limite (1.54), nous permet d'écrire les comportements suivants :

$$(1.65) \left\{ \begin{array}{l} u \sim \varepsilon^\alpha \frac{1}{\mu_m(0)} A_0(\sigma) + \dots + \varepsilon \hat{u}_1(\sigma, 0) + \dots, \\ v \sim -\varepsilon^{2\alpha+1} \frac{1}{\mu_m(0)} \frac{dA_0(\sigma)}{d\sigma} + \dots + \varepsilon^2 \hat{v}_2(\sigma, 0) + \dots, \end{array} \right.$$

Les équations régissant \hat{u}_1 , \hat{v}_1 et \hat{p}_1 interagissant avec celles de la sous-couche visqueuse (1.43), donc, si on impose la condition à la limite :

$$(1.66) \quad \hat{u}_1(\sigma, 0) = A_0(\sigma) \tilde{u}_0$$

cela impose le choix suivant :

$$(1.67) \quad \alpha = 1, \quad \lambda = 2 \quad \text{et} \quad \beta = 3$$

ce qui fait

$$(1.68) \quad \hat{v}_2(\sigma, 0) \equiv 0.$$

Ainsi, les développements asymptotiques de la solution de sous-couche visqueuse se présentent sous la forme :

$$(1.69) \quad \begin{cases} u = \varepsilon \tilde{u}_0 + \varepsilon^2 \tilde{u}_1 + \dots, \\ v = \varepsilon^3 \tilde{v}_0 + \varepsilon^4 \tilde{v}_1 + \dots, \\ p = p_{e0}(\sigma) + \varepsilon \tilde{p}_1 + \dots, \end{cases}$$

et, il vient pour \tilde{u}_1 et \tilde{v}_1 les équations de sous-couche visqueuse de seconde approximation suivantes :

$$(1.70) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{h}} = 0 ; \quad \tilde{p}_1 \equiv \tilde{p}_1(\sigma) ; \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{h}} \left\{ \left[\mu_m(0) + \mu_g(\tilde{h}) \right] \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{h}} \right\} = \frac{d p_{e0}(\sigma)}{d \sigma} . \end{cases}$$

Précisons que les équations de sous-couche visqueuse (1.44) et (1.70) sont obtenues sous l'hypothèse :

$$(1.71) \quad \left. \frac{d \mu_m(\hat{h})}{d \hat{h}} \right|_{\hat{h}=0} = 0 .$$

La description asymptotique effectuée ci-dessus est liée au processus limite :

$$(1.72) \quad \delta_2(\varepsilon) = \varepsilon^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0 ;$$

il conduit au modèle le plus significatif et permet de construire un développement asymptotique de la solution recherchée uniformément valable quelque soit le processus limite choisi relativement à $\delta_2(\varepsilon)$ et ε .

D'après (1.72) on constate que le modèle asymptotique le plus consistant est obtenu avec une sous-couche visqueuse d'épaisseur de l'ordre $O(\varepsilon^2)$, c'est-à-dire en $\frac{1}{Re}$.

I. 4.5. - FORMULATION DU PROBLEME DE COUCHE LIMITE DE SECONDE APPROXIMATION

Revenons à la représentation (1.29) dans la couche extérieure (d'Euler), et écrivons les équations auxquelles doivent satisfaire \bar{u}_1 , \bar{v}_1 et \bar{p}_1 .
A l'ordre un, les équations linéarisés de perturbation des équations d'Euler, de seconde approximation sont :

$$(1.73) \quad G \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} + G K \bar{v}_1 = 0,$$

$$(1.74) \quad \int \frac{\partial}{\partial \sigma} (\bar{u}_0 \bar{u}_1) + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial n} + \int K (\bar{u}_0 \bar{v}_1 + \bar{u}_1 \bar{v}_0) + \int \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \sigma} = 0;$$

$$(1.75) \quad \int \left(\bar{u}_0 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \sigma} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial n} (\bar{v}_0 \bar{v}_1) - 2 \int K \bar{u}_0 \bar{u}_1 + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial n} = 0.$$

Au système ((1.73) - (1.75)) il faut associer la condition à la limite :

$$(1.76) \quad n=0 : \quad \bar{v}_1 = \int_0^{\infty} \left(\frac{d u_e}{d \sigma} - \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \sigma} \right) d \hat{n}$$

Ce qui exprime justement le couplage entre l'écoulement de fluide parfait et la couche limite de Prandtl. [9].

Une fois le problème ((1.73) - (1.76)) résolu, on peut résoudre les équations de la couche limite (classique) de seconde approximation où interviennent les effets dus à la courbure $K(\sigma)$, ces équations sont :

$$(1.77) \quad \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{n}} = -K(\sigma) \frac{\partial}{\partial \hat{n}} (\hat{n} \hat{v}_1);$$

$$(1.78) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} (\hat{u}_0 \hat{u}_1) + \hat{v}_2 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{h}} + \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{h}} + \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \hat{h}} \left(\mu_m(\hat{h}) \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{h}} \right) = K(\sigma) \left(\hat{h} \hat{u}_0 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \sigma} - \hat{u}_0 \hat{v}_1 + \hat{h} \frac{d\mu_{e0}(\sigma)}{d\sigma} + \mu_m(\hat{h}) \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{h}} \right);$$

$$(1.79) \quad \hat{p}_1(\sigma, \hat{h}) = \bar{p}_1(\sigma, 0) + \int_{\hat{h}}^{\infty} \hat{u}_0^2 dN.$$

C'est justement à ces équations ((1.77) - (1.79)) qu'il faut associer les conditions à la limite en $\hat{h} = 0$:

$$(1.80) \quad \hat{h} = 0 : \quad \hat{u}_1 = A_0(\sigma) \hat{u}_0^{\infty} \quad \text{et} \quad \hat{v}_2 = 0$$

avec,

$$A_0(\sigma) \equiv \mu_m(0) \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{h}} \Big|_{\hat{h}=0}$$

et

$$\hat{u}_0^{\infty} \equiv \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_m(0) + \mu_{ge}(\hat{h})} - \frac{1}{\mu_m(0)} \right) d\hat{h}.$$

On constate aisément que dans la sous-couche visqueuse de seconde approximation on a :

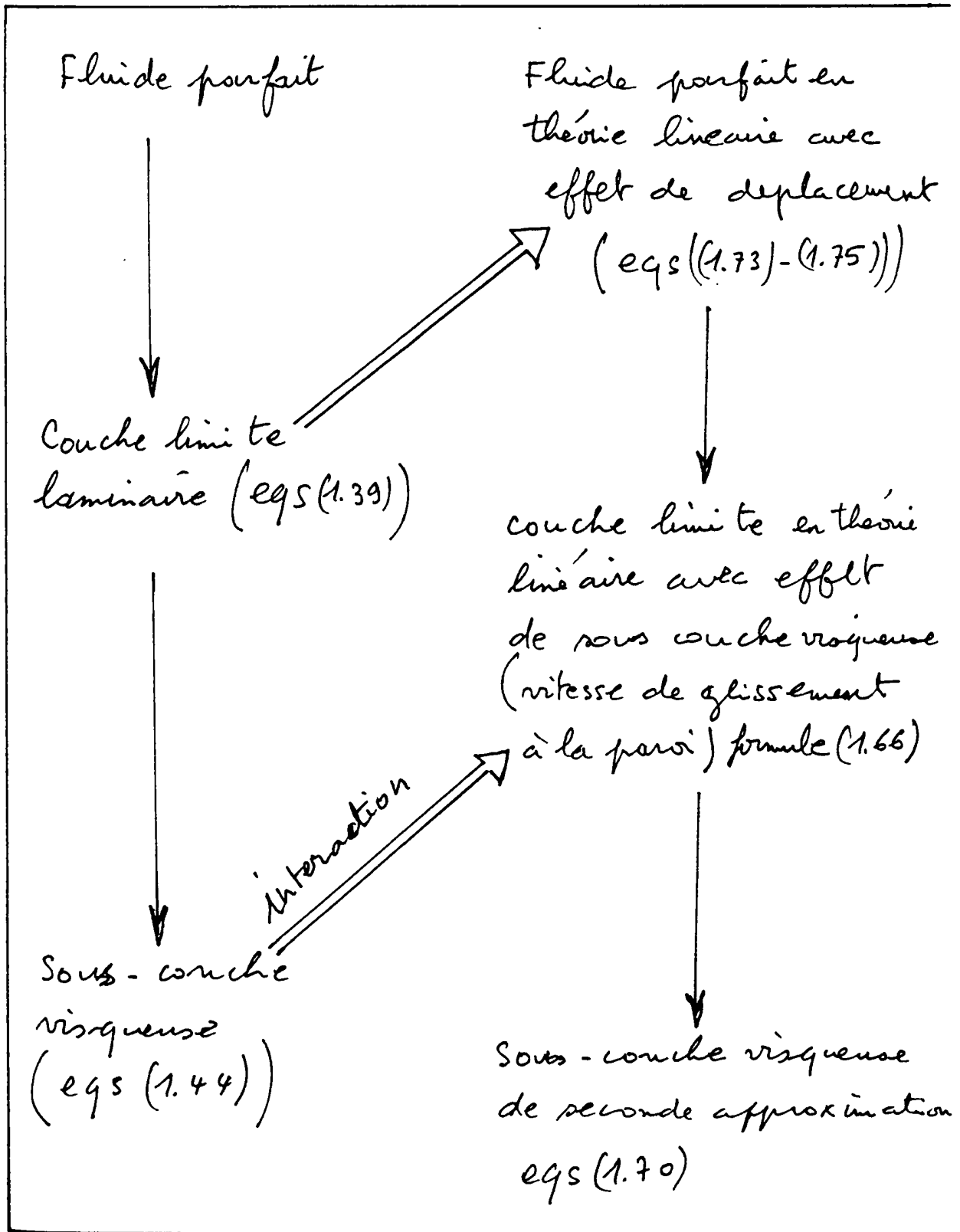
$$(1.81) \quad \hat{p}_1(\sigma) = \bar{p}_1(\sigma, 0) + K(\sigma) \int_0^{\infty} \hat{u}_0^2 d\hat{h}.$$

se "determine" une fois la solution des équations de la couche limite laminaire de Prandtl (avec coefficient dynamique de viscosité $\mu_m(\hat{n})$) connue. On doit donc s'attendre à ce que la présence de la sous-couche visqueuse au voisinage du contour de l'obstacle due à la viscosité variable, influence de façon appréciable le coefficient de frottement sur le contour.

Nous pouvons schématiquement représenter le couplage^{*)} des trois couches sous la forme indiquée ci-dessous : (page suivante)

*) En effet il s'agit d'un couplage faible (dit aussi régulier), en ce sens qu'à cet ordre zéro il n'y a pas d'interaction directe entre la couche limite classique et la sous-couche visqueuse [9].

Par "opposition" à la situation régulière décrite ci-dessus, on dit qu'il y a couplage singulier ou fort lorsque dès la première approximation, l'écoulement de fluide parfait et la couche limite sont en interaction directe, réciproque, par l'intermédiaire d'une couche dite "médiane", voir thèse de Kharab.



Deuxième chapitre : PRISE EN COMPTE D'UNE
SOUS-COUCHE VISQUEUSE
AU NIVEAU DU PROBLEME
DE BLASIUS

II.1. - INTRODUCTION

Dans cette deuxième partie, nous voulons considérer le cas particulier de l'écoulement bidimensionnel stationnaire autour d'une plaque plane semi-infinie qui occupe tout le demi-axe Ox et qui est placé dans un écoulement de vitesse constante U_0 et parallèle à l'axe Ox .

Le fluide étant homogène et incompressible, nous pouvons introduire la fonction de courant $\psi(x, y)$, telle que les composantes de la vitesse u et v , selon Ox et Oy , satisfont aux relations:

$$(2,1) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

En toute généralité, nous supposons que la viscosité dynamique satisfait à la relation:

$$(2,2) \quad \mu = \mu_0 \left\{ \mu_m \left(\frac{x}{L_0}, \frac{y/L_0}{\delta_1} \right) + \mu_{fl} \left(\frac{x}{L_0}, \frac{y/L_0}{\delta_2} \right) \right\}$$

où L_0 est une longueur de référence qui devra disparaître du résultat final par le choix d'une

solution semblable adéquate, comme dans le problème de Blasius classique [9].

Les jauges δ_1 et δ_2 sont supposées être fonction de $\varepsilon = Re^{-1/2}$, où $Re = U_0 L_0 / \nu_0$ est le nombre de Reynolds caractéristique du problème.

II.2. - FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Avec les grandeurs de références U_0 et L_0 , nous pouvons introduire des grandeurs sans dimensions pour x , y et Ψ que nous noterons avec les mêmes symboles ($\bar{x} = \frac{x}{L_0}$, $\bar{y} = \frac{y}{L_0}$ et $\bar{\Psi} = \Psi / (U_0 L_0)$). Dans ce cas pour la fonction de courant adimensionnelle $\Psi(x, y)$ nous obtenons l'équation suivante :^(*)

(*) On part des équations ^{adimensionnelles} v de Navier (cas incompressible), écrites dans le système Oxy en introduisant les formules (2.1):
$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (\text{voir ANNEXE}).$$

$$(2.3) \quad \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \varepsilon^2 \mu \Delta_2 - 2\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\} \Delta_2 \psi = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + 4 \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y},$$

avec

$$(2.4) \quad \mu = \mu\left(x, \frac{y}{\delta_1(\varepsilon)}\right) + \mu_{fe}\left(x, \frac{y}{\delta_2(\varepsilon)}\right)$$

Les conditions aux limites, pour résoudre (2.3), sont :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \psi(x, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0, & 0 < x < +\infty \\ \psi(-\infty, y) = y \end{cases}$$

Le problème ((2.3), (2.4) et (2.5)) contient trois paramètres ε , $\delta_1(\varepsilon)$ et $\delta_2(\varepsilon)$.

C'est un problème de perturbation singulière lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Le cas général ne semble pas facile à analyser, aussi, afin d'obtenir un schéma susceptible d'être traité par les méthodes des développements asymptotiques raccordés, nous nous limiterons, ici, au cas suivant :

$$(2.6) \quad \delta_1(\varepsilon) \equiv \varepsilon \quad , \quad \delta_2(\varepsilon) \ll \varepsilon.$$

Le cas particulier est justement celui qui permet de prendre en compte une sous-couche visqueuse au niveau du problème de Blasius. Naturellement, l'ordre de grandeur exact de $\delta_2(\varepsilon)$ en fonction de ε n'est pas connu a priori; c'est la cohérence interne de l'analyse asymptotique qui doit permettre de le déterminer. En fait, on sait, d'après les résultats du chapitre I, que $\delta_2(\varepsilon) \equiv \varepsilon^2$. Nous supposerons enfin, que :

$$(2.7) \quad \mu_m(x, \infty) \equiv 1 \quad \text{et} \quad \gamma_k(x, \infty) \equiv 0.$$

II. 3. - MODELISATION ASYMPTOTIQUE

II. 3. 1. - INTERACTION: FLUIDE PARFAIT - COUCHE LIMITE, DE PREMIERE APPROXIMATION

1. Un premier passage à la limite au niveau du problème ((2.3) - (2.5)) consiste à effectuer

$$(2.8) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{avec } x \text{ et } y \text{ fixés,}$$

puis d'écrire le développement asymptotique extérieur :

$$(2.9) \quad \Psi(x, y; \varepsilon) = \bar{\Psi}_0(x, y) + \varepsilon \bar{\Psi}_1(x, y) + \dots$$

Dans ce cas, l'équation pour $\bar{\Psi}_0(x, y)$ est celle qui détermine l'écoulement de fluide parfait :

$$(2.10) \quad \left(\frac{\partial \bar{\Psi}_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\Psi}_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta_2 \bar{\Psi}_0 = 0.$$

On constate donc que :

$$(2.11) \quad \Delta_2 \bar{\Psi}_0 = -2 \bar{\omega}_0(\bar{\Psi}_0),$$

où $\bar{\omega}_0$ (le tourbillon) est une fonction de $\bar{\Psi}_0$ seule.

Si l'on suppose que pour $x \rightarrow -\infty$, l'écoulement est irrotationnel^(*), alors par continuité:

$$(2.12) \quad \Delta_2 \bar{\Psi}_0 = 0 \quad ; \quad \bar{\Psi}_0(-\infty, y) = y.$$

2.- Le second passage à la limite au niveau du problème (2.3) - (2.5) consiste à effectuer

$$(2.13) \quad \varepsilon \rightarrow 0, \text{ avec } x \text{ et } \hat{y} = \frac{y}{\varepsilon} \text{ fixés,}$$

puis d'écrire le développement de Prandtl

$$(2.14) \quad \Psi(x, y; \varepsilon) = \varepsilon \hat{\Psi}_0(x, \hat{y}) + \varepsilon^2 \hat{\Psi}_1(x, \hat{y}) + \dots,$$

puisque :

$$(2.15) \quad \Delta(\varepsilon) \equiv \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0, \text{ avec } \varepsilon \rightarrow 0,$$

d'après (2.6),

On trouve aisément que $\hat{\Psi}_0(x, \hat{y})$ satisfait à l'équation de la couche limite suivante :

(*) L'écoulement en amont de la plaque plane est uniforme de vitesse V_0 parallèle à Ox , d'après la condition $\Psi(-\infty, y) = y$, donc $\vec{\text{rot}} V_0 \equiv 0$.

$$(2.16) \quad \frac{\partial \hat{\Psi}_0}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_0}{\partial x \partial \hat{y}} - \frac{\partial \hat{\Psi}_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_0}{\partial \hat{y}^2} = \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(\Psi_{lm}(x, \hat{y}) \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_0}{\partial \hat{y}^2} \right)$$

Le raccord des représentations (2.9) et (2.14), permet d'associer à l'équation (2.12) la condition de glissement

$$(2.17) \quad \bar{\Psi}_0(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty$$

et comme

$$(2.18) \quad \bar{\Psi}_0(-\infty, y) \equiv y,$$

On constate que la seule solution du problème de fluide parfait ((2.11), (2.17) et (2.18)) est :

$$(2.19) \quad \bar{\Psi}_0(x, y) \equiv y$$

De ce fait, à (2.16) il faut associer la condition de comportement à l'infini suivante :

$$(2.20) \quad \lim_{\hat{y} \rightarrow +\infty} \frac{\partial \hat{\Psi}_0}{\partial \hat{y}} \equiv 1.$$

II.3.2. - MISE EN EVIDENCE DE LA SOUS-COUCHE VISQUEUSE

D'après (2.4) et (2.6) on pressent bien qu'il faut introduire dans la sous-couche visqueuse la coordonnée locale :

$$(2.21) \quad \tilde{y} = \frac{y}{\delta_0(E)} \equiv \frac{\hat{y}}{\Delta(E)},$$

avec $\Delta(E) \rightarrow 0$, lorsque $E \rightarrow 0$. De ce fait il faut considérer un troisième passage à la limite au niveau du problème (2.3) - (2.5) :

(2.22) $E \rightarrow 0$, avec x et \tilde{y} fixés, puis écrire le développement local suivant :

$$(2.23) \quad \Psi = \varepsilon^\alpha \tilde{\Psi}_0(x, \tilde{y}) + \dots,$$

où $\alpha > 0$ est un scalaire réel qu'il faudra choisir de telle façon que le raccord des représentations (2.23) et (2.14) soit possible.

Quelque soit $\alpha > 0$, on trouve que

$$(2.24) \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left\{ \left[\Psi_{lm}(x, 0) + \Psi_{ge}(x, \tilde{y}) \right] \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}^2} \right\} = 0,$$

et on peut lui associer les conditions d'adhérence

$$(2.25) \quad \tilde{\Psi}_0(x, 0) = \frac{\partial \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}}(x, 0) = 0.$$

La solution du problème (2.24), (2.25) est telle que

$$(2.26) \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}_0}{\partial \tilde{y}}(x, \tilde{y}) = A_0(x) \int_0^{\tilde{y}} \frac{dy}{\Psi_{lm}(x, 0) + \Psi_{ge}(x, y)},$$

avec $A_0(x)$ une fonction arbitraire qui reste à déterminer, et, pour cela il faut élucider le comportement de $\tilde{\Psi}_0(x, \tilde{y})$ lorsque $\tilde{y} \rightarrow +\infty$.

II.3.3. - INTERACTION : COUCHE - LIMITE - SOUS-COUCHE VISQUEUSE

Introduisons la grandeur suivante :

$$(2.27) \quad \mathcal{M}(x) \equiv \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\psi_{lm}(x,0) + \psi_{lf}(x,\tilde{y})} - \frac{1}{\psi_{lm}(x,0)} \right] d\tilde{y},$$

supposée bien définie une fois que ψ_{lm} et ψ_{lf} ont été choisies. Dans ce cas, de (2.26) on peut aisément obtenir le comportement suivant :

$$(2.28) \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \tilde{y}} \sim A_0(x) \left\{ \frac{\tilde{y}}{\psi_{lm}(x,0)} + \mathcal{M}(x) + \dots \right\}$$

lorsque $\tilde{y} \rightarrow +\infty$

D'autre part, si l'on suppose que

$$(2.29) \quad \delta_2(\varepsilon) = \varepsilon^\lambda, \quad \text{avec } \lambda > 1,$$

alors, comme $\hat{y} = \Delta(\varepsilon) \tilde{y} \equiv \varepsilon^{\lambda-1} \tilde{y}$, on trouve que ; (voir [10]) :

$$(2.30) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \sim \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} + \varepsilon^{\lambda-1} \tilde{y} \frac{\partial^2 \hat{\psi}_0}{\partial \hat{y}^2} \Big|_{\hat{y}=0} + \dots$$

$$\dots + \varepsilon \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} + \dots,$$

au voisinage de $\hat{y}=0$.

De même, en intégrant (2.28), on trouve que

$$(2.31) \quad \tilde{\psi}_0(x, \tilde{y}) \sim A_0(x) \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tilde{y}^2}{\psi_{lm}(x, 0)} + \tilde{y} \mathcal{M}(x) \right.$$

$$\left. + \mathcal{N}(x) + \dots \right\},$$

lorsque $\tilde{y} \rightarrow +\infty$

où

$$(2.32) \quad \mathcal{M}(x) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\tilde{y}} \left(\frac{1}{\psi_{lm}(x, 0) + \psi_{ll}(x, y)} - \frac{1}{\psi_{lm}(x, 0)} \right) dy - \mathcal{B}(x) \right] d\tilde{y}$$

D'autre part, au voisinage de $\hat{y}=0$, on a de (2.14):

$$(2.33) \quad \psi \sim \varepsilon \hat{\psi}_0(x, 0) + \varepsilon^2 \hat{\psi}_1(x, 0) + \varepsilon^{\lambda} \tilde{y} \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} + \dots$$

Grâce à (2.28), (2.30), (2.31) et (2.33) le raccord des représentations de Prandtl (2.14) et locale (2.23) conduit aux relations suivantes :

$$(2.34) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{\Psi}_0}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} = \Psi_{lm}(x,0) \mathcal{M}(x) \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_0}{\partial \hat{y}^2} \Big|_{\hat{y}=0} \\ \hat{\Psi}_0(x,0) = 0 \quad ; \quad \hat{\Psi}_1(x,0) = A_0(x) \mathcal{N}(x); \\ A_0(x) \equiv \Psi_{lm}(x,0) \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_0}{\partial \hat{y}^2} \Big|_{\hat{y}=0} \end{array} \right.$$

une fois que l'on fait le choix de :

$$(2.35) \quad \alpha = \lambda = 2.$$

Ainsi, on constate que le problème de couche limite de Prandtl de première approximation (2.16), avec (2.20), doit être résolu avec les conditions d'adhérence classiques :

$$(2.36) \quad \hat{\Psi}_0(x,0) = \frac{\partial \hat{\Psi}_0}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

Donc, pour tenir compte de la sous-couche visqueuse il faut une fois de plus pousser au moins jusqu'à la seconde approximation de couche limite.

II.3.4. - FORMULATION DU PROBLEME DE COUCHE LIMITE DE SECONDE APPROXIMATION.

Pour $\hat{\Psi}_1(x, \hat{y})$ on obtient aisément l'équation homogène linéaire suivante :

$$(2.37) \quad \frac{\partial \hat{\Psi}_0}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_1}{\partial x \partial \hat{y}} - \frac{\partial \hat{\Psi}_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_1}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_0}{\partial x \partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_0}{\partial \hat{y}^2} \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(\psi_{lm}(x, \hat{y}) \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_1}{\partial \hat{y}^2} \right).$$

D'après (2.34), il faut associer à cette équation (2.37) les conditions non homogènes suivantes :

$$(2.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Psi}_1(x, 0) = A_0(x) \mathcal{N}(x); \\ \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} = A_0(x) \mathcal{M}(x); \\ \lim_{\hat{y} \rightarrow +\infty} \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial \hat{y}} \equiv 0. \end{array} \right.$$

Précisons que la condition de comportement à l'infini ($\hat{y} \rightarrow +\infty$) pour $\partial \hat{\Psi}_1 / \partial \hat{y}$, au niveau de (2.38) découle du fait que pour le problème de Blasius le terme $\Psi_1(x, y)$ du développement d'Euler est telle que :

$$(2.39) \quad \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0.$$

Dans la théorie classique de Blasius on a toujours des conditions nulles en $\hat{y} = 0$ et de ce fait $\hat{\Psi}_1 \equiv 0$. Ainsi on doit s'attendre à une influence de la sous-couche visqueuse sur le coefficient de frottement sur la plaque plane.

II. 4. - MISE EN EVIDENCE D'UNE SOLUTION SEMBLABLE DU PROBLEME (2.37), (2.38)

On sait ^[9] que pour éliminer L_0 du problème de couche limite classique : (2.16), avec (2.20) et (2.36), il faut postuler une solution semblable :

$$(2.40) \quad \hat{\Psi}_0(x, \hat{y}) = \sqrt{x} \hat{f}_0(\eta), \quad \eta = \frac{\hat{y}}{\sqrt{x}}.$$

Dans ce cas, si l'on suppose de plus que :

$$(2.41) \quad \Psi_m(x, \hat{y}) \equiv \hat{\Psi}_1(\eta),$$

on retrouve le problème de Blasius, avec une viscosité variable :

$$(2.42) \quad \begin{cases} 2 \left(\hat{\Psi}_1 \hat{f}_0 \right)' + \hat{f}_0 \hat{f}_0'' = 0, \\ \hat{f}_0(0) = \hat{f}_0'(0) = 0 ; \quad \hat{f}_0'(\infty) = 1. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de se convaincre que l'on peut aussi obtenir, pour le problème de couche limite de seconde approximation une solution semblable fonction uniquement de $\eta = \hat{y}/\sqrt{x}$:

En effet, on montre aisément que si :

$$(2.43) \quad \hat{\Psi}_1(x, \hat{y}) = \sqrt{x} \hat{f}_1(\eta),$$

alors on peut écrire les relations suivantes, où K_0 , H_0 et L_0 sont des constantes bien déterminées.

$$(2.44) \left\{ \begin{aligned} A_0(x) &= \frac{\hat{\psi}_1(0) \hat{f}_0''(0)}{\sqrt{x}} \equiv \frac{K_0^\circ}{\sqrt{x}} \\ \mathcal{M}(x) &= \frac{\hat{f}_1'(0)}{\hat{\psi}_1(0) \hat{f}_0''(0)} \sqrt{x} \equiv H_0^\circ \sqrt{x} \\ \mathcal{N}(x) &= \frac{\hat{f}_1(0)}{\hat{\psi}_1(0) \hat{f}_0''(0)} x \equiv L_0^\circ x \end{aligned} \right.$$

Ainsi, il vient pour $\hat{f}_1(\eta)$ le problème suivant

$$(2.45) \left\{ \begin{aligned} 2 \left(\hat{\psi}_1 \hat{f}_1'' \right)' + \hat{f}_0 \hat{f}_1'' + \hat{f}_0'' \hat{f}_1 &= 0 \\ \hat{f}_1(0) = K_0^\circ L_0^\circ ; \quad \hat{f}_1'(0) = K_0^\circ H_0^\circ \\ \hat{f}_1'(\infty) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où $\hat{f}_0''(0)$, $\hat{f}_1'(0)$ et $\hat{f}_1(0)$ sont inconnues, il est important de noter, que K_0° , L_0° et H_0° sont des constantes que l'on peut effectivement calculer :

On pose une solution semblable, pour éliminer L_0 du problème de sous-couche visqueuse (2.24) et (2.25), de la forme :

$$(2.46) \quad \tilde{\Psi}_0(x, \tilde{y}) = \sqrt{x} \tilde{f}_0(\tilde{\eta}) ; \quad \tilde{\eta} = \frac{\tilde{y}}{\sqrt{x}}$$

on peut écrire, si l'on suppose de plus, que

$$(2.47) \quad \mu_{se}(x, \tilde{y}) \equiv \tilde{\mu}(\tilde{\eta})$$

le problème suivant pour la sous-couche visqueuse^(*)

$$(2.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left([\hat{\mu}(0) + \tilde{\mu}(\tilde{\eta})] \tilde{f}_0'' \right)' = 0 \\ \tilde{f}_0'(0) = \tilde{f}_0(0) = 0 \end{array} \right.$$

L'analyse du comportement du problème (2.48) à l'infini ($\tilde{\eta} \rightarrow +\infty$), nous permet d'introduire les grandeurs suivantes :

$$(2.49) \quad H_0^0 \equiv \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\hat{\mu}(0) + \tilde{\mu}(\tilde{\eta})} - \frac{1}{\hat{\mu}(0)} \right) d\tilde{\eta}$$

(*) Le problème (2.48) est fonction uniquement de

$$\tilde{\eta} = \frac{\tilde{y}}{\sqrt{x}}$$

et

$$(2.50) \quad L_0^{\circ} \equiv \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\tilde{\eta}^2} \left(\frac{1}{\hat{\mu}(0) + \tilde{\mu}(\eta)} - \frac{1}{\hat{\mu}(0)} \right) d\eta - H_0^{\circ} \right] d\tilde{\eta}^2$$

Dans ce cas, on obtient le comportement pour le problème (2.48)

$$(2.51) \quad \tilde{f}_0(\tilde{\eta}) \sim K_0^{\circ} \left\{ \frac{\tilde{\eta}^2}{2\hat{\mu}(0)} + \tilde{\eta}^2 H_0^{\circ} + L_0^{\circ} + \dots \right\}$$

lorsque $\tilde{\eta}^2 \rightarrow +\infty$,

alors, en identifiant (2.51) à (2.31), en tenant compte de $\tilde{y} = \tilde{\eta} \sqrt{x}$, on obtient les relations suivantes :

$$(2.52) \quad \begin{cases} A_0(x) = \frac{K_0^{\circ}}{\sqrt{x}} & ; \quad M(x) = H_0^{\circ} \sqrt{x} \\ C(x) = L_0^{\circ} x. \end{cases}$$

Remarque :

On peut également utiliser la méthode des développements asymptotiques raccourcis. Et, par cette technique, on aboutit aux résultats (2.44),

et cela grâce au procédé de Blasius^(*), alors, on pose $\tilde{\psi}_0(x, \tilde{y}) = x^{1-a} \hat{f}_0(\tilde{y}/x^a)$, et à l'interaction couche limite classique et sous-couche visqueuse :

$$\tilde{f}_0 \sim K_0 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tilde{\eta}^2}{\hat{\eta}(0)} + \tilde{\eta}^2 H_0 + L_0 + \dots \right\}$$

lorsque $\tilde{\eta} \rightarrow +\infty$

avec

$$\hat{f} \sim \hat{f}_0(0) + \eta \hat{f}'_0(0) + \frac{\eta^2}{2} \hat{f}''_0(0) + \dots + \varepsilon \hat{f}_1(0) + \varepsilon \eta \hat{f}'_1(0) + \dots,$$

au voisinage de $\eta = 0$,

nous permet de faire le choix de $a = 1/2$ et d'écrire les relations (2.44).

(*) En utilisant la condition de comportement à l'infini $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \frac{\partial \tilde{\psi}_0}{\partial \tilde{y}} \equiv 1$, pour déterminer la

valeur de a , avec $\hat{\psi}_0(x, \hat{y}) = x^{1-a} \hat{f}_0(\hat{y}/x^a)$.
Finalement, Blasius fait le choix de $a = 1/2$.

II.5. CONCLUSION

Il aurait fallu résoudre les problèmes (2.42) et (2.45) des fonctions semblables mises en évidence, pour une viscosité variable choisie.

On peut toutefois dire que ces deux problèmes n'admettent pas de solution analytique et qu'actuellement leur résolution est numérique et qu'elle sera obtenue avec une très grande précision.

Cette étude fera l'objet d'un domaine de recherche numérique et, dans ce cas on analyse non seulement le problème de première approximation mais aussi celui de seconde approximation pour \hat{f}_1 qui tient compte de la sous-couche visqueuse :

$$\hat{f}_1(0) = K_0 L_0 \quad ; \quad \hat{f}_1'(0) = K_0 H_0.$$

Pour le cas particulier introduit dans le chapitre IV $\hat{\mu} \equiv 1$, on a *)

$$2\hat{f}_1''' + \hat{f}_0\hat{f}_1'' + \hat{f}_0''\hat{f}_1 = 0,$$

*) On remarque dans ce cas que \hat{f}_0 est connue car déjà étudiée par Blasius; voir en détail l'analyse du problème [9].

et $\tilde{\mu}(\gamma)^{*)}$ est à choisir suivant les conditions initiales.

Cependant, ce n'est pas là notre sujet, cela mériterait en effet d'être approfondi dans un travail ultérieur.

*) On peut dire qu'il existe plusieurs façons de présenter $\tilde{\mu}(\gamma)$, le cas le plus simple est celui choisi dans le chapitre IV.

Troisième chapitre : LE MODELE DE BOUSSINESQ
HYDROSTATIQUE

III. 1. - LES EQUATIONS DE BASE

III. 1. 1. - ATMOSPHERE STANDARD

L'atmosphère étant supposée être un milieu continu en mouvement, on admet que l'air atmosphérique est un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes c_p et c_v . De ce fait, si on désigne par p, ρ, T respectivement la pression, la masse volumique et la température absolue de l'air atmosphérique, on peut écrire la loi d'état:

$$(3.1) \quad p = R \rho T,$$

$$\text{ou } (*) \quad R = c_p - c_v = (\gamma - 1) \frac{c_p}{\gamma}, \text{ avec } \gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Pour l'analyse qui suit, il est nécessaire de postuler l'existence d'une atmosphère dite "Standard", qui est supposée exister de jour en jour sous la forme d'une distribution de référence, fonction uniquement de l'altitude, et qui n'est que légèrement perturbée par le temps proprement dit.

$$(*) \quad R = 287 \text{ m}^2 / \text{s}^2 \text{ degré}$$

Si l'on note par z_0 , l'altitude, dans cette atmosphère standard, et par p_0 , ρ_0 , T_0 la pression, la masse volumique et la température absolue de l'atmosphère standard, on écrira :

$$(3.2) \quad \begin{cases} p_0 = R \rho_0 T_0, \\ \frac{dp_0}{dz_0} + g \rho_0 = 0, \end{cases}$$

où $g \cong 980,665 \text{ cm/s}^2$ est l'accélération gravitationnelle.

On peut rajouter dans ce paragraphe, l'équation complémentaire, qui considère les échanges énergétiques :

$$(3.3) \quad K_0 \frac{d^2 T_0}{dz_0^2} + \frac{dR_0}{dz_0} = 0$$

où $R_0(z_0)$ est la valeur standard du taux de quantité de chaleur R et $K_0 = \text{constante}$, le coefficient de conduction thermique turbulente^(*)

(*) Le coefficient $\alpha_0 = K_0 / (\rho_0(0) c_p)$, qui est constant, est la diffusivité thermique.

Si on se limite uniquement à la troposphère, on peut fermer les équations standard (3.2), (3.3), pour p_∞ , ρ_∞ et T_∞ , en postulant l'existence d'une distribution de la température de la forme:

$$(3.4) \quad T_\infty(z_\infty) = T_\infty(0) \left\{ 1 - \frac{\Gamma_\infty^0}{T_\infty(0)} z_\infty \right\},$$

où $\Gamma_\infty^0 \equiv - \frac{dT_\infty}{dz_\infty} = \text{conste}$ est $0,0065 \text{ } ^\circ\text{C/cm}$.

III.1.2. - EQUATIONS ADIMENSIONNELLES DE NAVIER-STOKES POUR L'ATMOSPHERE

Dans tout ce qui suivra, nous nous limiterons aux mouvements atmosphériques pour lesquels l'échelle caractéristique L_0 est "beaucoup plus petite" que le rayon moyen $R_0 \approx 6367 \text{ Km}$ de la sphère terrestre. Sous cette hypothèse, on peut reperer, avec une très bonne approximation, les mouvements atmosphériques dans un système de coordonnées cartésiennes lié au plan normal à l'accélération gravitationnelle \vec{g} .

Soit donc \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} les vecteurs unitaires dirigés respectivement vers l'Est, le Nord et le Zenith, dans le sens opposé à \vec{g} . Le vecteur $\vec{\Omega}$, de rotation de la terre étant dirigé selon l'axe des pôles, du sud vers le nord, peut s'exprimer sous la forme suivante^(*):

$$(3.5) \quad \vec{\Omega} = \Omega_0 (\sin \varphi \vec{k} + \cos \varphi \vec{j}); \quad \Omega_0 \equiv |\vec{\Omega}|$$

où φ : latitude (φ est positive dans l'hémisphère nord).

Nous obtenons, dans l'approximation du plan- β , avec $\delta \rightarrow 0$ ($\delta = L_0/r_0 \ll 1$), le système d'équations de Navier Stokes:

$$(3.6) \quad S \frac{D\varphi}{Dt} + \varrho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0;$$

$$\varrho \left\{ S \frac{D\vec{v}}{Dt} + \left(\frac{1}{R_0} + \beta y \right) (\vec{k} \wedge \vec{v}) + \frac{\epsilon_0}{\tan \varphi_0} \frac{1}{R_0} \omega \vec{z} \right\}$$

$$(3.7) \quad + \frac{1}{\delta M_0^2} \vec{D} p = \frac{1}{Re} \left\{ \vec{D}^2 \vec{v} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \vec{D} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right\};$$

(*) $\Omega_0 = 7,292 \cdot 10^{-5}$ rad/sec

$$(3.8) \quad \rho \left\{ S \varepsilon_0^2 \frac{Dw}{Dt} - \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \frac{1}{R_0} \vec{v} \cdot \vec{v} \right\} + \frac{1}{\delta M_0^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ + \frac{B_0}{\delta M_0^2} \rho = \frac{1}{Re} \left\{ \varepsilon_0^2 \vec{D}^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\vec{v} \cdot \vec{u}) \right\} j$$

$$(3.9) \quad \rho = \rho T$$

$$\rho \left\{ S \frac{DT}{Dt} - \frac{\gamma-1}{\gamma} S \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \left\{ \vec{D}^2 T \right.$$

$$(3.10) \quad \left. + \varepsilon_0^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\} + \frac{\gamma-1}{\varepsilon_0^2 Re} M_0^2 \chi(u; \varepsilon_0)$$

$$+ \frac{1}{Pr} \frac{B_0^2 \varepsilon_0}{\varepsilon_0^2 Re} \frac{d R_{\infty}(T_{\infty})}{dz_{\infty}}$$

où les variables et les fonctions sont adimensionnelles

Notons que : $z_{\infty} \equiv B_0 z$ est la forme dimensionnelle

Dans les équations (3.6) - (3.10), nous avons :

$$S \frac{D}{Dt} = S \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad \vec{v} = \vec{D} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{D} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}, \quad \vec{u} = \vec{v} + \varepsilon_0 w \vec{k},$$

$$\vec{v} = u \vec{i} + v \vec{j},$$

et

$$\chi(\vec{u}; \epsilon_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon_0^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \epsilon_0^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

$$(3.11) \quad + \epsilon_0^2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2 \right\}.$$

dans les équations (3.6) - (3.10), apparaissent des nombres sans dimensions^(*):

- le nombre de Strouhal : $S = L_0 / U_0 t_0$,

- le paramètre d'anisotropie de l'atmosphère :

$$\epsilon_0 = H_0 / L_0,$$

- le nombre de Prandtl : $Pr = \psi_0 c_p / k_0$,

- le nombre de Rossby : $Ro = U_0 / L_0 f_0$

(*) L'existence des échelles caractéristiques, nous permet d'introduire des variables sans dimensions, notées par "barres" : $x = L_0 \bar{x}$, $y = L_0 \bar{y}$, $z = H_0 \bar{z}$, $t = t_0 \bar{t}$,
 $u = U_0 \bar{u}$, $v = U_0 \bar{v}$, $w = \epsilon_0 U_0 \bar{w}$, $p = p_{\infty(0)} \bar{p}$
 $\rho = \rho_{\infty(0)} \bar{\rho}$, $T = T_{\infty(0)} \bar{T}$

- le nombre de Boussinesq : $B_0 = g H_0 / R T_{\infty}(0)$

- le nombre de Mach : $M_0 = U_0 / [\gamma R T_{\infty}(0)]^{1/2}$

- le nombre de Reynolds : $Re = L_0 U_0 / (\mu_0 / \rho_{\infty}(0))$

et le paramètre de Rayonnement :

$$\sigma_0 = \frac{R}{g k_0} P_{\infty}(0),$$

où $P_{\infty}(0)$ est la valeur caractéristique du transfert moyen de rayonnement.

Pour les équations (3.6) - (3.10), nous utilisons les conditions initiales suivantes :

$$(3.12) \quad t=0 : \quad \vec{v} = \vec{V}^{\circ} ; \quad \varepsilon w = W^{\circ}, \quad \rho = P^{\circ}$$

$$\rho = R^{\circ},$$

où \vec{V}° , W° , P° et R° sont données en fonction de z et de la position horizontale $x = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Sur le sol, nous posons :

$$(3.13) \quad z=0 : \quad \vec{v} = \vec{0}, \quad w=0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} + B_0 \sigma_0 P_{\infty}(T_{\infty}) = 0,$$

III. 2. - MODELE CORRESPONDANT pour

$$\underline{M_0 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad B_0 \rightarrow 0.}$$

Nous savons déjà, que la théorie asymptotique des écoulements pour un faible nombre de Mach est très incomplète. Avec les récents résultats de GUIRAUD et ZEYTOUNIAN^(*), il y a déjà un commencement d'une théorie asymptotique compatible.

Donc, pour les différents mouvements atmosphériques, il est intéressant de considérer le cas limite suivant :

$$(3.14) \quad M_0 \rightarrow 0, \quad B_0 \rightarrow 0$$

d'où, nous considérons l'altitude

$$(3.15) \quad H_0 \ll R T_{\infty}(0) / g.$$

Nous introduisons les perturbations suivantes :

$$\pi = \frac{p - p_{\infty}(z_0)}{p_{\infty}(z_0)}; \quad \omega = \frac{p - p_{\infty}(z_0)}{p_{\infty}(z_0)}$$

$$\text{et} \quad \theta = \frac{T - T_{\infty}(z_0)}{T_{\infty}(z_0)}$$

(*) A ce sujet, voir [5], section 4.2

dans les équations complètes de Navier-Stokes (3.6) - (3.10), alors, en négligeant l'effet β , nous obtenons, sous la forme trouvée par Zeytounian^(*), le système d'équations suivant, pour \vec{V} , w , π , ω et θ :

$$(3.16) \quad (1+\omega) \left\{ S \frac{D\vec{V}}{Dt} + \frac{1}{R_0} (\vec{k} \wedge \vec{V}) + \frac{\epsilon_0}{\text{tg} \varphi_0 R_0} w \vec{e} \right\} + \frac{T_\infty}{\partial M_0^2} \vec{D} \pi = \frac{1}{\rho_\infty} \frac{1}{Re} \left\{ \frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} + \vec{D}^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \vec{D}(\vec{V} \cdot \vec{u}) \right\};$$

$$(1+\omega) \left\{ \epsilon_0^2 S \frac{Dw}{Dt} - \frac{\epsilon_0}{\text{tg} \varphi_0 R_0} \vec{V} \cdot \vec{e} \right\} + \frac{T_\infty}{\partial M_0^2} \frac{\partial \pi}{\partial z}$$

$$(3.17) \quad -(1+\omega) \frac{B_0}{\partial M_0^2} \theta = \frac{1}{\rho_\infty} \frac{1}{Re} \left\{ \epsilon_0^2 \vec{D}^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial(\vec{V} \cdot \vec{u})}{\partial z} \right\}$$

$$(3.18) \quad S \frac{D\omega}{Dt} + (1+\omega) \vec{V} \cdot \vec{u} = (1+\omega) \frac{B_0}{T_\infty} \left(1 + \frac{dT_\infty}{dz \omega} \right) w;$$

(*) R. KH. ZEYTOUNIAN, Arch. Mech. Stosowanej 26, 499 (1974)

$$\begin{aligned}
 & (1+\omega) \frac{\rho_0}{\rho_\infty} \frac{D\theta}{Dt} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho_0 \frac{D\pi}{Dt} + (1+\pi) \frac{B_0}{T_\infty} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_\infty}{dz_\infty} \right) W \\
 (3.19) \quad & = \frac{1}{\rho_\infty} \frac{1}{\rho_r} \frac{1}{\rho_e} \left\{ \vec{D}^2 \theta + \frac{1}{\varepsilon_0^2} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + 2 \frac{B_0}{T_\infty} \frac{dT_\infty}{dz_\infty} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{B_0^2}{T_\infty} \frac{d^2 T_\infty}{dz_\infty^2} \theta \right] \right\} + \frac{\gamma-1}{\rho_\infty T_\infty} \frac{M_0^2}{\varepsilon_0^2 \rho_e} \chi ;
 \end{aligned}$$

$$(3.20) \quad \pi = \omega + \theta + \omega \theta .$$

Pour la dérivation de l'équation (3.19), nous avons tenu compte de l'équation "standard"

$$(3.21) \quad \frac{dT_\infty}{dz_\infty} + \sigma_0 \mathcal{R}(T_\infty) = 0, \quad z_\infty \equiv B_0 z$$

pour $T_\infty(z_\infty)$,

Associées aux équations (3.16) - (3.20), nous avons, au niveau du sol ($z \equiv 0$), les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned}
 (3.22) \quad & \vec{V} = \vec{0} ; \quad W = 0 ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} + B_0 \frac{dT_\infty}{dz_\infty} \theta = 0 \\
 & \text{sur } z = 0.
 \end{aligned}$$

III. 2.1. - MODELE DE BOUSSINESQ;
LES RESULTATS DE ZEYTOUNIAN

Nous considerons le cas (Zeytounian [10]):

$$(3.23) \left\{ \begin{array}{l} B_0 \rightarrow 0 \text{ et } M_0 \rightarrow 0, \text{ avec} \\ \frac{B_0}{M_0} = \hat{B}_0 = o(1) \text{ et } t, x, y, z \text{ fixés} \end{array} \right.$$

Dans ce cas : $z_\infty \equiv B_0 z = \hat{B} M_0 z \rightarrow 0$, avec $M_0 \rightarrow 0$

Si nous representons les solutions des equations (3.16)-(3.20) par les developpements asymptotiques de la forme :

$$(3.24) \left\{ \begin{array}{l} \vec{V} = \vec{V}_B + \dots, \\ W = W_B + \dots, \\ \Pi = M_0^2 \Pi_B + \dots, \\ \omega = M_0 \omega_B + \dots, \\ \theta = M_0 \theta_B + \dots, \end{array} \right.$$

avec indice "B", veut dire "Boussinesq".

Nous pouvons aisément montrer que les fonctions limites satisfait aux équations de Boussinesq non-adiabatiques :

$$(3.25) \quad S \frac{D \vec{V}_B}{Dt} + \frac{1}{R_0} (\vec{k} \wedge \vec{V}_B) + \frac{\epsilon_0}{\text{tg} \varphi_0 R_0} W_B \vec{c} + \frac{1}{\gamma} \vec{D} \pi_B = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{\partial^2 \vec{V}_B}{\partial z^2} + \vec{D}^2 \vec{V}_B \right),$$

$$(3.26) \quad \vec{D} \cdot \vec{V}_B + \frac{\partial W_B}{\partial z} = 0 ;$$

$$(3.27) \quad \epsilon_0^2 S \frac{D W_B}{Dt} - \frac{\epsilon_0}{\text{tg} \varphi_0 R_0} \vec{V}_B \cdot \vec{c} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \pi_B}{\partial z} - \frac{\hat{B}}{\gamma} \Theta_B = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 W_B}{\partial z^2} + \epsilon_0^2 \vec{D}^2 W_B \right) ;$$

$$(3.28) \quad S \frac{D \Theta_B}{Dt} + \hat{B} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_{\infty}}{dz_{\infty}} \Big|_{z_{\infty}=0} \right] W_B = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \left(\vec{D}^2 \Theta_B + \frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{\partial^2 \Theta_B}{\partial z^2} \right),$$

$$(3.29) \quad \omega_B = - \Theta_B$$

Sur le sol, si $\left. \frac{dT_{\infty}}{dz_{\infty}} \right|_{z_{\infty} \equiv 0}$ est de l'ordre de un,

nous pouvons poser :

$$(3.30) \quad \vec{V}_B = \vec{0}, \quad w_B = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta_B}{\partial z} = 0 \quad \text{sur} \quad z = 0.$$

On note, que, dans le processus limite de Boussinesq (3.23) on a :

$$\varphi_0(z_0) \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad T_0(z_0) \rightarrow 1$$

La théorie asymptotique nous a non seulement permis d'obtenir les équations classiques de Boussinesq avec $Re \neq \infty$, mais aussi, de définir les limites de l'approximation à travers lesquelles ces équations sont déterminées.

Ainsi, pour l'altitude caractéristique, on en arrive à la limitation suivante :

$$(3.31) \quad \hat{B} \equiv \frac{B_0}{M_0} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad H_0 \approx \frac{U_0}{g} \left[\frac{RT_{\infty}(0)}{\gamma} \right]^{1/2}$$

$H_0 \approx 10^3 \text{ m}$, pour les valeurs usuelles de U_0 et $T_{\infty}(0)$.

En changeant, la dernière condition à la limite (voir [5]) :

$$(3.32) \quad \theta = \gamma_0 \bar{\theta}(t, x, y) \quad \text{sur} \quad z = 0$$

d'où

$$(3.33) \quad \gamma_0 \rightarrow 0 \text{ avec } M_0 \rightarrow 0 : \frac{\tau_0}{M_0} \equiv \underline{\Lambda}_0 = o(1)$$

Pour les équations non-adiabatiques de Boussinesq (3.25) - (3.29), on a la condition thermique suivante :

$$(3.34) \quad \theta_B = \underline{\Lambda}_0 \Pi(t, x, y) \text{ sur } z = 0$$

III. 3. - MODELE HYDROSTATIQUE DE BOUSSINESQ POUR LES MOUVEMENTS ATMOSPHERIQUES NON-ADIABATIQUES

Dans ce cas, il est nécessaire de considérer le processus limite hydrostatique :

$$(3.35) \quad \text{Lim}_{Hs}^P \equiv \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \rightarrow 0 \text{ et } R_0 \rightarrow +\infty, \text{ avec} \\ \varepsilon_0^2 R_0 \equiv R_{e\perp} = o(1) \text{ et } t, x, y, z \text{ fixés} \end{array} \right\}$$

A partir de (3.25) - (3.29), on obtient les équations hydrostatiques, pour les fonctions limites :

$$(3.36) \quad (\vec{V}_{Hs}, w_{Hs}, \pi_{Hs}, \theta_{Hs}) = \text{Lim}_{Hs}^P (\vec{V}_B, w_B, \pi_B, \theta_B)$$

ici indice "Hs" indique "hydrostatique."

$$(3.37) \quad S \frac{D \vec{V}_{HS}}{Dt} + \frac{1}{R_0} (\vec{k} \wedge \vec{V}_{HS}) + \frac{1}{\gamma} \vec{B} \Pi_{HS} = \frac{1}{Re_{\perp}} \frac{\partial^2 \vec{V}_{HS}}{\partial z^2};$$

$$(3.38) \quad \frac{\partial \Pi_{HS}}{\partial z} = \frac{\hat{B}}{\gamma} \Theta_{HS};$$

$$(3.39) \quad \vec{D} \cdot \vec{V}_{HS} + \frac{\partial W_{HS}}{\partial z} = 0;$$

$$(3.40) \quad S \frac{D \Theta_{HS}}{Dt} + \chi_{00} W_{HS} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_{\perp}} \frac{\partial^2 \Theta_{HS}}{\partial z^2};$$

$$(3.41) \quad \omega_{HS} = -\Theta_{HS};$$

$$\text{d'où} \quad \chi_{00} \equiv \hat{B} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_{\infty}}{dz_{\infty}} \Big|_{z_{\infty} \equiv 0} \right].$$

III. 4. - CONCLUSION

En conclusion, les différents paramètres sans dimensions qui s'introduisent au niveau des équations (3.37) - (3.41), tels S , R_0 , Pr et Re_{\perp} , sont, dans beaucoup de cas des petits ou grands paramètres de perturbation singulière. Et, c'est le phénomène singulier $Re_{\perp} \gg 1$, qui fera l'objet d'une analyse au chapitre IV.

Quatrième chapitre : PRISE EN COMPTE D'UNE
SOUS-COUCHE DE DISSIPATION
DANS LES PHÉNOMÈNES
DE CONVECTION LIBRE

Il est bien connu que les phénomènes liés à la convection libre atmosphérique, au dessus d'un site thermiquement non homogène, sont fortement tributaires des coefficients d'échange dynamique et thermique. Afin de prendre en compte de façon plus réaliste l'influence de ces coefficients nous proposons dans ce travail un modèle asymptotique consistant en trois couches, en altitude, liées à la variation de ces coefficients d'échange avec l'altitude.

IV.1. - MODELE EXACT DE DEPART

Comme modèle exact de départ, nous prenons celui de Boussinesq hydrostatique [5], qui tient compte du fait que le phénomène de convection libre a lieu dans une couche relativement mince de la troposphère au voisinage du sol (chapitre III). Le sol est supposé plat, mais thermiquement non homogène, et nous tenons compte de la force de Coriolis.

Soient \vec{v} la vitesse horizontale, w la composante de la vitesse perpendiculaire à la surface du sol, $z=0$, et π , θ les perturbations de la pression et de la température absolue relativement à celles au repos ($t=0$).

Sous les hypothèses classiques liées à l'approximation de Boussinesq et à celle dite "hydrostatique" (échelles horizontales "beaucoup" plus grandes que l'échelle verticale, voir [5]), nous avons les équations adimensionnelles suivantes :

*. le processus limite, en considérant $\epsilon_0 \ll 1$ et $Re \gg 1$, où $\epsilon_0 = H_0/L_0$ (voir III.3).

$$(4.1) \quad S \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{D}) \vec{v} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{1}{R_0} (\vec{k} \wedge \vec{v}) + \vec{D} \pi = \frac{1}{Re_{\perp}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right);$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial \pi}{\partial z} = \frac{\hat{B}}{\alpha} \theta ;$$

$$(4.3) \quad \vec{D} \cdot \vec{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ;$$

$$(4.4) \quad S \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} \theta + w \frac{\partial \theta}{\partial z} + \chi_0 w = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_{\perp}} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right),$$

$$\text{où } \begin{cases} \vec{D} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} & ; \vec{D} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{v} = u \vec{i} + v \vec{j} . \end{cases}$$

Aux équations (4.1) - (4.4), nous associons les conditions aux limites :

$$(4.5) \quad z = 0 : \quad \vec{v} = \vec{0} ; w = 0 , \theta = \hat{B} \square(t, x, y)$$

lors-que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow +\infty$, on a

$$(4.6) \quad \vec{V} = w = \pi = \theta \rightarrow 0,$$

ainsi que les conditions initiales (le repos) :

$$(4.7) \quad t=0: \quad \vec{V} = w = \pi = \theta = 0 ; \quad \Gamma(0, x, y) \equiv 0$$

La condition de comportement "à l'infini" (4.6) caractérise le fait que le phénomène de convection libre est local, il n'y a pas de champs extérieurs.

IV. 2. - HYPOTHESES FONDAMENTALES

L'hypothèse fondamentale est liée au grand nombre de Reynolds vertical : $Re_{\perp} \gg 1$, ce qui nous permet d'introduire le petit paramètre principal de notre problème :

$$(4.8) \quad \varepsilon \equiv \frac{1}{\sqrt{Re_{\perp}}} \ll 1.$$

Au niveau des équations (4.1) - (4.4), les coefficients d'échange μ et k sont supposés être de la forme suivante :

$$(4.9) \quad \mu = 1 + \tilde{\mu}(z/\delta) ; \quad k = 1 + \tilde{k}(z/\delta), \quad (*)$$

puisque nous travaillons avec des grandeurs sans dimensions, $\delta = \delta(\varepsilon)$ est une jauge inconnue a priori qui tend vers zéro avec $\varepsilon \rightarrow 0$, mais de telle façon que :

$$(4.10) \quad \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \equiv \Delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{avec } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On fait l'hypothèse cohérente de :

$$(4.11) \quad \tilde{\mu}(\infty) = \tilde{k}(\infty) \equiv 0 \quad [6]$$

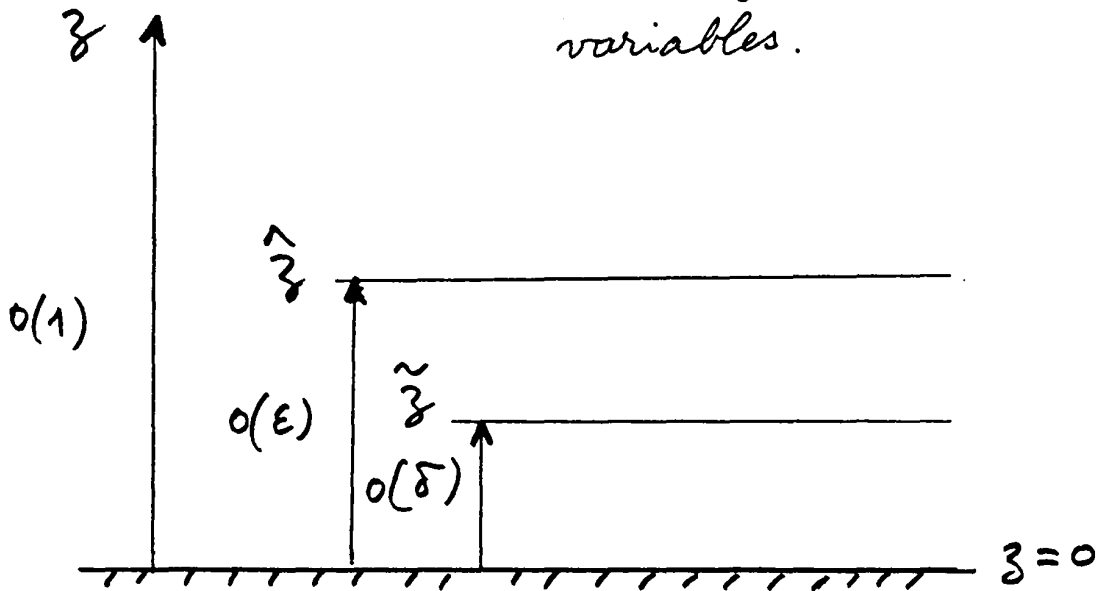
IV.3. - MODELISATION ASYMPTOTIQUE

Il est facile de voir à partir des résultats du chapitre I que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il émerge un modèle en trois couches liées respectivement à ... :

1. - z : couche non visqueuse et non conductrice de la chaleur.
2. - $\hat{z} = z/\varepsilon$: couche limite classique.

(*) Le cas $\tilde{\mu}(z/\delta_1)$ et $\tilde{k}(z/\delta_2)$ est-il plus difficile ?

3. - $\tilde{z} = z/\delta(\epsilon) \equiv \hat{z}/\Delta(\epsilon)$: sous-couche de dissipation avec coefficients d'échange variables.



(fig 2.)

Naturellement, il faut choisir la jauge $\delta(\epsilon)$ de telle façon que ce modèle en trois couches soit consistant (au sens de la méthode des développements asymptotiques raccordés), et de ce fait il nous faudra considérer trois représentations asymptotiques qu'il faudra raccorder.

En fait, la question qui nous intéresse le plus, est de comprendre le mécanisme d'interaction : couche limite - sous-couche de dissipation.

IV. 3.1 - INTERACTION : COUCHE EXTERIEURE
 (non visqueuse et non conductrice de chaleur)
- COUCHE LIMITE CLASSIQUE

On considère donc, tout d'abord le passage à la limite :

$$(4.12) \quad \varepsilon \rightarrow 0, \text{ avec } z \text{ fixé,}$$

étant entendu, par la suite, que toutes les autres grandeurs et paramètres restent fixés durant ce processus limite.

A (4.12), on associe :

$$(4.13) \quad \begin{pmatrix} \vec{v} \\ w \\ \pi \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ w_0 \\ \bar{\pi}_0 \\ \bar{\Theta}_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ w_1 \\ \bar{\pi}_1 \\ \bar{\Theta}_1 \end{pmatrix} + \dots,$$

les grandeurs avec des "barres" étant dépendantes de t, x, y et z .

A l'ordre ε^0 , il vient pour $\vec{v}_0, w_0, \bar{\pi}_0$ et $\bar{\Theta}_0$ les équations de Boussinesq hydrostatiques adiabatiques (d'Euler), et, pour récupérer les termes d'échange

il faut considerer une seconde representation asymptotique, liee au passage à la limite :

$$(4.14) \quad \varepsilon \rightarrow 0, \text{ avec } \hat{z} = z/\varepsilon \text{ fixe'}$$

Ainsi à (4.14) on associe :

$$(4.15) \quad \begin{pmatrix} \vec{v} \\ w \\ \pi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}_0 \\ 0 \\ \bar{\pi}_0 \\ \hat{\theta}_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{\pi}_1 \\ \hat{\theta}_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \hat{v}_2 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{\pi}_2 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} + \dots$$

où $\bar{\pi}_0 \equiv \bar{\pi}_0(t, x, y, 0)$ et les grandeurs avec des "chapeaux" sont dépendantes de t, x, y et $\hat{z} = z/\varepsilon$.
 Comme $\Delta(\varepsilon) \equiv \delta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$, avec $\varepsilon \rightarrow 0$, il vient pour \hat{v}_0, \hat{w}_1 et $\hat{\theta}_0$ les equations de la couche limite classique :

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \mathcal{S} \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial t} + (\hat{v}_0 \cdot \vec{D}) \hat{v}_0 + \hat{w}_1 \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{R_0} (\vec{k} \wedge \hat{v}_0) \\ + \vec{D} \bar{\pi}_0 = \frac{\partial^2 \hat{v}_0}{\partial \hat{z}^2}, \end{aligned}$$

$$(4.17) \quad \vec{D} \cdot \hat{v}_0 + \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{z}} = 0,$$

$$(4.18) \quad \mathcal{S} \frac{\partial \hat{\theta}_0}{\partial t} + \hat{v}_0 \cdot \vec{D} \hat{\theta}_0 + \hat{w}_1 \frac{\partial \hat{\theta}_0}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{\theta}_0}{\partial \hat{z}^2}.$$

De (4.13) et (4.15), on constate qu'il faut associer aux équations de Boussinesq hydrostatiques adiabatiques Euleriennes liées au passage à la limite (4.12) la condition de glissement:

$$(4.19) \quad \bar{w}_s^0 \equiv \bar{w}_s(t, x, y, 0) = 0.$$

Mais d'après (4.6) et (4.7), nous avons aussi:

$$(4.20) \quad \bar{v}_0 = \bar{w}_0 = \bar{\pi}_0 = \bar{\theta}_0 = 0, \text{ pour } z \rightarrow +\infty \text{ et } t=0,$$

et nous pouvons donc postuler la solution triviale:

$$(4.21) \quad \bar{v}_0 = \bar{w}_0 = \bar{\pi}_0 = \bar{\theta}_0 \equiv 0.$$

Dans ce cas le terme $\vec{\nabla} \bar{\pi}_0^0$ est nul au niveau de (4.16).

Et, il faut associer: aux équations de couche limite (4.16) - (4.18) les conditions aux limites suivantes

$$(4.22) \quad \hat{v}_0 \rightarrow 0 \text{ et } \hat{\theta}_0 \rightarrow 0, \text{ lorsque } \hat{z} \rightarrow +\infty$$

En ce qui concerne les conditions en $\hat{z} = 0$, nous ne pouvons rien dire pour le moment, elles doivent découler des conditions de raccord avec la représentation valable dans la sous-couche de dissipation.

Enfin, il faut associer au système (4.16)-(4.18) deux conditions initiales :

$$(4.23) \quad t=0: \quad \hat{V}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\Theta}_0 = 0.$$

Précisons que le problème de couche limite (4.16)-(4.18), (4.22), (4.23) avec des conditions en $\hat{z} = 0$, doit nous permettre d'associer aux équations de Boussinesq hydrostatiques adiabatiques (d'Euler) de seconde approximation, c'est-à-dire pour \bar{V}_1 , \bar{W}_1 , $\bar{\pi}_1$ et $\bar{\Theta}_1$ une condition de glissement qui tienne compte de l'effet de déplacement de la couche limite mise en évidence au voisinage de $\hat{z} = 0$.

Mais pour l'instant occupons nous de la sous-couche de dissipation.

IV. 3. 2. - ANALYSE DE LA SOUS-COUCHE DE DISSIPATION

D'après (4.9), on voit bien qu'il faut introduire une nouvelle coordonnée $\tilde{z} = z/\delta(\epsilon) \equiv \hat{z}/\Delta(\epsilon)$ avec $\Delta(\epsilon) = \frac{\delta(\epsilon)}{\epsilon} \rightarrow 0$, avec $\epsilon \rightarrow 0$, et considérer un troisième passage à la limite :

$$(4.24) \quad \varepsilon \rightarrow 0, \text{ avec } \tilde{z} = \hat{z}/\delta(\varepsilon) \text{ fixe,}$$

puis lui associer la représentation locale :

$$(4.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{V} = \varepsilon^\alpha \vec{\tilde{V}}_0 + \dots, \\ W = \varepsilon^\beta \tilde{W}_0 + \dots, \\ \pi = \varepsilon \tilde{\pi}_1 + \dots, \\ \Theta = \hat{B} \Phi(t, x, y) + \varepsilon^\gamma \tilde{\Theta}_1 + \dots, \end{array} \right.$$

où α , β et γ sont des scalaires positifs qu'il faudra choisir de telle façon que le raccord de (4.25) avec (4.15) soit effectivement possible. Les grandeurs avec des "tildes" dépendent de t , x , y et $\tilde{z} = \hat{z}/\delta(\varepsilon)$.

En substituant (4.25) dans les équations exactes (4.1) = (4.4), on obtient :

$$(4.26) \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left\{ \left[1 + \tilde{\mu}(\tilde{z}) \right] \frac{\partial \vec{\tilde{V}}_0}{\partial \tilde{z}} \right\} = 0;$$

$$(4.27) \quad \vec{D} \cdot \vec{\tilde{V}}_0 + \frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial \tilde{z}} = 0;$$

$$(4.28) \quad \frac{\partial \tilde{\pi}_1}{\partial \tilde{z}} = 0;$$

$$(4.29) \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left\{ \left[1 + \tilde{k}(\tilde{z}) \right] \frac{\partial \tilde{\Theta}_1}{\partial \tilde{z}} \right\} = 0,$$

une fois que l'on tire profit de (4.9) et que l'on fasse le choix de :

$$(4.30) \quad \beta + \lambda > 2 ; \quad \beta - \alpha = \lambda,$$

après avoir posé : $\delta(\varepsilon) \equiv \varepsilon^\lambda$, $\lambda > 1$.

On verra que ce choix (4.30) est bien consistant avec le raccord de (4.25) et (4.15).

La solution de la première équation (4.26) est :

$$(4.31) \quad \tilde{V}_0 = \tilde{A}_0(t, x, y) \int_0^{\tilde{z}} \frac{du}{1 + \tilde{\psi}(u)},$$

puisque $\tilde{V}_0(t, x, y, 0) = 0$ et il en est de même pour $\tilde{W}_0(t, x, y, 0) = 0$ et $\tilde{\Theta}_1(t, x, y, 0) = 0$.

De la même façon, la dernière équation (4.29), donne :

$$(4.32) \quad \tilde{\Theta}_1 = \tilde{B}_0(t, x, y) \int_0^{\tilde{z}} \frac{dv}{1 + \tilde{k}(v)}.$$

Ensuite, la seconde équation (4.27) donne :

$$(4.33) \quad \tilde{w}_0 = - \int_0^{\tilde{z}} (\vec{B} \cdot \vec{\tilde{v}}_0) dz,$$

et enfin de $\frac{\partial \tilde{\pi}_1}{\partial \tilde{z}} = 0$, on obtient :

$$(4.34) \quad \tilde{\pi}_1 \equiv \tilde{M}_1(t, x, y),$$

mais dans la couche limite, en seconde approximation on a :

$$(4.35) \quad \frac{\partial \hat{\pi}_1}{\partial \hat{z}} = \frac{\hat{B}}{\gamma} \hat{\Theta}_0,$$

de ce fait on trouve que :

$$(4.36) \quad \tilde{M}_1(t, x, y) = \bar{\pi}_1^0(t, x, y) + \frac{\hat{B}}{\gamma} \int_0^{\infty} \hat{\Theta}_0 d\hat{z},$$

où $\bar{\pi}_1^0(t, x, y) \equiv \tilde{\pi}_1(t, x, y, 0)$.

Ainsi, à condition de connaître les grandeurs \vec{A}_0 et B_0 , dépendantes de t, x , et y , on a une solution explicite dans la sous-couche de dissipation. Pour déterminer \vec{A}_0 et B_0 , il faut effectuer le raccord de (4.25) avec (4.15).

IV. 3.3. - INTERACTION : COUCHE LIMITE - SOUS-COUCHE DE DISSIPATION.

On sait [4] que pour raccorder les représentations (4.25) et (4.15), il faut d'abord élucider le comportement à l'infini, pour $\tilde{z} \rightarrow +\infty$, des solutions (4.31) - (4.33), puis supposer que la représentation (4.15), de couche limite, reste valable au voisinage de $\hat{z} = 0$.

Nous introduisons les grandeurs :

$$(4.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} M(\tilde{r}) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{1 + \tilde{r}(u)} - 1 \right] du, \\ K(\tilde{k}) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{1 + \tilde{k}(v)} - 1 \right] dv, \end{array} \right.$$

et supposons que ces deux grandeurs constantes soient bien définies une fois que $\tilde{r}(\tilde{z})$ et $\tilde{k}(\tilde{z})$ ont été choisies.

Dans ce cas une analyse analogue à celle qui est faite au chapitre I, permet de se convaincre que l'on a les comportements suivants :

$$(4.38) \left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_0 \sim \vec{A}_0 \left\{ \tilde{z} + \mathcal{M}(\tilde{M}) + \dots \right\}, \\ \tilde{\Theta}_1 \sim B_0 \left\{ \tilde{z} + K(\tilde{k}) + \dots \right\}, \\ \tilde{W}_0 \sim -\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{A}_0 \left\{ \tilde{z}^2 + 2 \mathcal{M}(\tilde{M}) \tilde{z} + \dots \right\} \end{array} \right. \\ \text{lorsque } \tilde{z} \rightarrow +\infty$$

D'autre part de (4.15), en tenant compte du fait que :

$$(4.39) \quad \hat{z} = \varepsilon^{\lambda-1} \tilde{z},$$

on peut écrire que :

$$(4.40) \left\{ \begin{array}{l} \vec{V} \sim \vec{V}_0(t, x, y, 0) + \varepsilon^{\lambda-1} \tilde{z} \frac{\partial \vec{V}_0}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} + \dots + \varepsilon \hat{V}_1(t, x, y, 0) \\ W \sim \varepsilon \hat{W}_1(t, x, y, 0) + \varepsilon^{\lambda} \tilde{z} \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} \\ \quad + \varepsilon^{2\lambda-1} \frac{\tilde{z}^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{W}_1}{\partial \tilde{z}^2} \Big|_{\tilde{z}=0} + \dots + \varepsilon^2 \hat{W}_2(t, x, y, 0) \\ \Theta \sim \hat{\Theta}_0(t, x, y, 0) + \varepsilon^{\lambda-1} \tilde{z} \frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} + \dots \\ \quad + \varepsilon \hat{\Theta}_1(t, x, y, 0) + \dots \end{array} \right.$$

$$(4.38) \left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_0 \sim \vec{A}_0 \left\{ \tilde{z} + \mathcal{M}(\tilde{\mu}) + \dots \right\}, \\ \tilde{\Theta}_1 \sim B_0 \left\{ \tilde{z} + K(\tilde{k}) + \dots \right\}, \\ \tilde{W}_0 \sim -\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{A}_0 \left\{ \tilde{z}^2 + 2 \mathcal{M}(\tilde{\mu}) \tilde{z} + \dots \right\} \end{array} \right. \\ \text{lorsque } \tilde{z} \rightarrow +\infty$$

D'autre part de (4.15), en tenant compte du fait que :

$$(4.39) \quad \hat{z} = \varepsilon^{\lambda-1} \tilde{z},$$

on peut écrire que :

$$(4.40) \left\{ \begin{array}{l} \vec{V} \sim \vec{V}_0(t, x, y, 0) + \varepsilon^{\lambda-1} \tilde{z} \frac{\partial \vec{V}_0}{\partial \hat{z}} \Big|_{\hat{z}=0} + \dots + \varepsilon \hat{V}_1(t, x, y, 0) \\ W \sim \varepsilon \hat{W}_1(t, x, y, 0) + \varepsilon^{\lambda} \tilde{z} \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial \hat{z}} \Big|_{\hat{z}=0} \\ \quad + \varepsilon^{2\lambda-1} \frac{\tilde{z}^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{W}_1}{\partial \hat{z}^2} \Big|_{\hat{z}=0} + \dots + \varepsilon^2 \hat{W}_2(t, x, y, 0) \\ \Theta \sim \hat{\Theta}_0(t, x, y, 0) + \varepsilon^{\lambda-1} \tilde{z} \frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial \hat{z}} \Big|_{\hat{z}=0} + \dots \\ \quad + \varepsilon \hat{\Theta}_1(t, x, y, 0) + \dots \end{array} \right.$$

En raccordant (4.25) et (4.15) nous obtenons grâce à (4.38) et (4.40), les relations suivantes :

$$\hat{V}_0|_{\hat{z}=0} = 0 ; \hat{V}_1|_{\hat{z}=0} = \vec{A}_0(t, x, y) M(\tilde{h}),$$

$$(4.41) \quad \hat{W}_1|_{\hat{z}=0} = 0, \quad \hat{W}_2|_{\hat{z}=0} = 0 ; \hat{\Theta}_0|_{\hat{z}=0} = \hat{B} \Theta(t, x, y),$$

$$\hat{\Theta}_1|_{\hat{z}=0} = B_0(t, x, y) K(\tilde{h}),$$

avec

$$(4.42) \quad \vec{A}_0(t, x, y) = \frac{\partial \hat{V}_0}{\partial \hat{z}} \Big|_{\hat{z}=0} \quad \text{et} \quad B_0(t, x, y) = \frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial \hat{z}} \Big|_{\hat{z}=0}$$

une fois que l'on a vu qu'il fallait faire le choix de :

$$(4.43) \quad \alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 1 \quad \text{et} \quad \lambda = 2.$$

IV. 3.4. - FORMULATION DU PROBLEME DE COUCHE LIMITE DE SECONDE APPROXIMATION

Revenons à la représentation (4.13) pour la couche extérieure non visqueuse et non conductrice de chaleur et écrivons les équations linéaires auxquelles doivent satisfaire \vec{v}_1 , \bar{w}_1 , $\bar{\pi}_1$ et $\bar{\theta}_1$.

Grâce à (4.20) on trouve que :

$$(4.44) \quad S \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{R_0} (\vec{k} \wedge \vec{v}_1) + \vec{D} \bar{\pi}_1 = 0,$$

$$(4.45) \quad \vec{D} \cdot \vec{v}_1 \pm \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z} = 0,$$

$$(4.46) \quad \frac{\partial \bar{\pi}_1}{\partial z} = \frac{\hat{B}}{\gamma} \bar{\theta}_1,$$

$$(4.47) \quad S \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial t} + \chi_{00} \bar{w}_1 = 0.$$

À ce système (4.44) - (4.47) il faut associer la condition de glissement :

$$(4.48) \quad z=0: \bar{w}_1 = \lim_{\hat{z} \rightarrow +\infty} \hat{w}_1 = -\vec{D} \cdot \int_0^{\infty} \hat{v}_0 d\hat{z},$$

puisque l'on a (4.22).

Les équations (4.44) - (4.47) avec (4.48)^(*) et des conditions nulles en $t=0$ et $z \rightarrow +\infty$ doivent

(*) Cette condition induit pour \vec{v}_1 , $\bar{\pi}_1$ et $\bar{\theta}_1$ une solution non nulle.

permettre de calculer :

$$(4.49) \quad \bar{\pi}_1^0 \equiv \bar{\pi}_1(t, x, y, 0).$$

Ainsi, nous pouvons résoudre ensuite les équations de la couche limite de seconde approximation :

$$(4.50) \quad S \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial t} + (\hat{V}_0 \cdot \vec{D}) \hat{V}_1 + (\hat{V}_1 \cdot \vec{D}) \hat{V}_0 + \hat{W}_1 \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \hat{z}} + \hat{W}_2 \frac{\partial \hat{V}_0}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{R_0} (\vec{k}_1 \hat{V}_1) + \vec{D} \bar{\pi}_1^0 = \frac{\partial^2 \hat{V}_1}{\partial \hat{z}^2} ;$$

$$(4.51) \quad \vec{D} \cdot \hat{V}_1 + \frac{\partial \hat{W}_2}{\partial \hat{z}} = 0 ;$$

$$(4.52) \quad \hat{\pi}_1 \equiv \bar{\pi}_1^0(t, x, y) + \frac{\hat{B}}{\gamma} \int_{\hat{z}}^{\infty} \hat{\theta}_0 d\hat{z} ;$$

$$(4.53) \quad S \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} + \hat{V}_0 \cdot \vec{D} \hat{\theta}_1 + \hat{V}_1 \cdot \vec{D} \hat{\theta}_0 + \hat{W}_1 \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial \hat{z}} + \hat{W}_2 \frac{\partial \hat{\theta}_0}{\partial \hat{z}} + \chi_{00} \hat{W}_1 = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{\theta}_1}{\partial \hat{z}^2} .$$

Il est justement à ces équations (4.50) - (4.53), pour \hat{V}_1 , \hat{W}_2 et $\hat{\theta}_1$, qu'il faut associer les conditions à la limite en $\hat{z} = 0$, qui découlent de (4.41).

$$\begin{aligned}
 \hat{z}=0 : \quad \hat{V}_1 &= M(\hat{h}^2) \frac{\partial \hat{V}_0}{\partial \hat{z}} \Big|_{\hat{z}=0}, \\
 (4.54) \quad \hat{W}_2 &= 0, \\
 \hat{\Theta}_1 &= K(\hat{h}) \frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial \hat{z}} \Big|_{\hat{z}=0}.
 \end{aligned}$$

A (4.50) - (4.53) il faut associer, aussi, les conditions de comportement à l'infini :

$$(4.55) \quad \left. \begin{aligned}
 \hat{V}_1 &\rightarrow \bar{V}_1(t, x, y, 0), \\
 \hat{\Theta}_1 &\rightarrow \bar{\Theta}_1(t, x, y, 0),
 \end{aligned} \right\} \text{lorsque } \hat{z} \rightarrow +\infty,$$

ainsi que des conditions nulles en $t=0$ pour \hat{V}_1 et $\hat{\Theta}_1$. Mais de (4.41), il découle aussi que l'on doit associer aux équations (4.16) - (4.18) de la couche limite classique les conditions au sol, suivantes :

$$(4.56) \quad \hat{z}=0 : \quad \hat{V}_0 = 0, \quad \hat{W}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\Theta}_0 = \hat{B} \Pi(t, x, y).$$

Naturellement aux équations (4.44) - (4.47), qu'il faut associer des conditions nulles en $t=0$ et en $z \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}
 (4.57) \quad t=0 \quad \bar{V}_1 &= \bar{W}_1 = \bar{\Pi}_1 = \bar{\Theta}_1 \equiv 0, \\
 z \rightarrow +\infty : \quad \bar{V}_1 &= \bar{W}_1 = \bar{\Pi}_1 = \bar{\Theta}_1 \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Grâce à (4.48) et (4.54) les équations (4.44)-(4.47) et (4.50)-(4.54) ont, en général des solutions différentes de zéro et il en sera de même des équations (4.16)-(4.18) grâce à (4.56)...

IV.4. - UN CAS SIMPLE

Afin d'illustrer le modèle de convection libre mis en place ci-dessus, nous considérons un cas simple qui correspond à :

$$(4.58) \quad S \equiv 1 ; R_0 \equiv \infty ; \hat{B} \equiv 1 ; Pr \equiv 1$$
$$\vec{D} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{c} \quad \text{et} \quad \vec{V} = u \vec{c}$$

Nous supposons alors, que l'on s'intéresse à un phénomène périodique en temps de telle façon que :

$$(4.59) \quad \vec{\Pi}(t, x) \equiv (a_0 + b_0 x) \sin t.$$

Il faut tout d'abord résoudre le problème de couche limite classique de première approximation, constitué par les équations (4.16)-(4.18), où $\vec{D} \vec{\pi}_0 \equiv 0$ avec les conditions (4.22) et (4.56).

On recherche des solutions périodiques en t , ce qui fait ^{que} nous n'imposerons pas de conditions initiales en $t=0$.

Dans ce cas, on peut postuler une solution de la forme suivante :

$$(4.60) \quad \hat{u}_0 = u(t, \hat{z}) \quad ; \quad \hat{w}_1 \equiv 0 ;$$

$$\hat{\theta}_0 = \theta(t, \hat{z}) + \chi \sigma(t, \hat{z}).$$

Nous obtenons, alors, les équations suivantes :

$$(4.61) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{z}^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \sigma = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \hat{z}^2}$$

$$\text{et } \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \hat{z}^2},$$

qu'il faut résoudre avec les conditions aux limites suivantes :

$$(4.62) \quad \hat{z} = 0 : \quad u = 0 \quad ; \quad \theta = a_0 \sin t$$

$$\sigma = b_0 \sin t$$

$$(4.63) \quad \hat{z} \rightarrow +\infty : \quad u = \theta = \sigma \rightarrow 0.$$

Les équations (4.61), à l'aide de (4.62) et (4.63) admettent comme solutions :

$$\begin{aligned} u &\equiv 0, \\ (4.64) \quad \sigma &= b_0 e^{-\frac{\hat{z}}{\sqrt{2}}} \sin\left(t - \frac{\hat{z}}{\sqrt{2}}\right), \\ \theta &= a_0 e^{-\frac{\hat{z}}{\sqrt{2}}} \sin\left(t - \frac{\hat{z}}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Dans ce cas, il est facile d'obtenir une solution des équations de la couche limite classique de première approximation (4.16) - (4.18) :

$$\begin{aligned} (4.65) \quad \hat{u}_0 &\equiv 0 \quad ; \quad \hat{w}_1 \equiv 0 \\ \hat{\theta}_0 &= (a_0 + b_0 x) e^{-\frac{\hat{z}}{\sqrt{2}}} \sin\left(t - \frac{\hat{z}}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

D'après (4.48), on peut associer aux équations (4.44) - (4.47), la condition à la limite :

$$(4.66) \quad z=0: \quad \bar{w}_1 = 0 \quad \text{d'après (4.65),}$$

et les équations (4.44) - (4.47) admettent la solution triviale :

$$(4.67) \quad \bar{u}_1 = \bar{w}_1 = \bar{\pi}_1 = \bar{\theta}_1 = 0.$$

Ainsi, dans ce cas simple, on doit résoudre le problème de couche limite de seconde approximation suivant :

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial \hat{z}^2} \quad ; \quad \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \hat{z}} = 0 ;$$

$$(4.68) \quad \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} - \frac{\hat{w}_2}{\sqrt{2}} e^{-\hat{z}/\sqrt{2}} (a_0 + b_0 x) \left\{ \sin\left(t - \frac{\hat{z}}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(t - \frac{\hat{z}}{\sqrt{2}}\right) \right\} = \frac{\partial^2 \hat{\theta}_1}{\partial \hat{z}^2}$$

avec les conditions aux limites :

$$\hat{z} = 0 : \quad \hat{u}_1 = 0 \quad ; \quad \hat{w}_2 = 0 ,$$

$$(4.69) \quad \hat{\theta}_1 = -K(\vec{k}) (a_0 + b_0 x) \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) ,$$

$$\hat{z} \rightarrow +\infty : \quad \hat{u}_1 = \hat{\theta}_1 \rightarrow 0$$

Donc le système (4.50) - (4.53) de couche limite de seconde approximation, admet comme solution :

$$\hat{u}_1 = 0 \quad ; \quad \hat{w}_2 = 0 \quad ;$$

$$(4.70) \quad \hat{\theta}_1 = -K(\vec{k}) (a_0 + b_0 x) e^{-\hat{z}/\sqrt{2}} \sin\left(t + \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{z}}{\sqrt{2}}\right)$$

On constate, que c'est au niveau de $\hat{\Theta}_1$, que se manifeste l'effet de la sous-couche de dissipation par l'intermédiaire de la grandeur $K(\tilde{k})$ définie par (4.37).

Si on tient compte de (4.25) pour Θ et de la solution (4.32), on peut écrire une solution composite^(*) valable de $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = \infty$, pour la perturbation de température $\Theta(t, x, \zeta)$, à partir des expressions (4.65) et (4.70).

On en déduit donc la solution suivante :

$$\begin{aligned}
 \Theta(t, x, \zeta) = & (a_0 + b_0 x) \left\{ e^{-\zeta/\sqrt{\frac{2}{Re_{\perp}}}} \sin\left(t - \zeta/\sqrt{\frac{2}{Re_{\perp}}}\right) \right. \\
 & - \frac{1}{\sqrt{Re_{\perp}}} \left[K(\tilde{k}) \right] \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\
 & + e^{-\zeta/\sqrt{\frac{2}{Re_{\perp}}}} \sin\left(t + \frac{\pi}{4} - \zeta/\sqrt{\frac{2}{Re_{\perp}}}\right) \\
 & \left. + \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\zeta/\frac{1}{Re_{\perp}}} \left(\frac{1}{1 + \tilde{k}(v)} - 1 \right) dv \right\} + O\left(\frac{1}{Re_{\perp}}\right).
 \end{aligned}
 \tag{4.71}$$

(*) Voir ANNEXE E

Afin de concrétiser et compléter notre travail nous avons tenu à présenter les graphes de la fonction de la perturbation de température Θ (4.71) dans la partie "annexe-graphes", ce pour $\tilde{k}(v)$ de la forme :

$$(4.72) \quad \tilde{k}(v) = e^{-v} + \dots;$$

Cinquième chapitre : L'HOMOGENEISATION
et son application à LA
MODELISATION des Ecoulements
à VISCOSITE fortement
VARIABLE

Il semble que le concept (ou plus exactement le vocable) d'homogénéisation, au sens strict, ait été pour la première fois exprimé par E. SANCHEZ-PALENCIA dans une note au compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris en 1971 (CRAS, 272, pp 1410 - 1413, 1971), où il montrait que la loi dite de DARCY, pour les milieux poreux, était une version homogénéisée (moyennée) des équations classiques de Stokes régissant le mouvement lent d'un fluide visqueux à travers une matrice rigide.

Nous parlerons ici exclusivement de problèmes liés à la mécanique des fluides (newtoniens).

Une des applications les plus prometteuses de l'homogénéisation est liée à la modélisation de la turbulence ([1], [2]).

V.1. - DEFINITION

D'une manière générale : l'homogénéisation est la démarche asymptotique qui consiste à substituer à un écoulement fortement hétérogène (très raide) un écoulement homogène que l'on souhaite équivalent au précédent et cela avec une certaine approximation.

Elle consiste à construire des modèles "moyennés" (homogénéisés) et tient compte globalement des caractéristiques essentielles de l'écoulement à plusieurs échelles^(*)

V.2. - TECHNIQUE DE L'HOMOGENEISATION

L'homogénéisation, via la Méthode des Echelles Multiples, permet de réaliser de façon rationnelle et consistante le passage d'une

*) Il est intéressant de noter à ce sujet que le modèle exact de Navier-Stokes est en fait un modèle homogénéisé du modèle plus réaliste de Boltzmann de la théorie cinétique des gaz.

structure complexe et hétérogène à une structure plus simple, homogène, dans laquelle apparaît nécessairement une trace (un effet de mémoire), liée à la microstructure caractérisant les hétérogénéités.

On notera que pour mettre en œuvre la technique d'homogénéisation, il faut, avant tout être capable de définir avec précision et de façon cohérente, une opération de moyenne, qui fasse disparaître la dépendance fine, liée à la microstructure. Les grandeurs moyennes (macroscopiques) satisfont à des équations moyennes, homogénéisées, dans lesquelles interviennent des termes mémoire, traces de la microstructure moyennée.

V. 3. - APPLICATION

En particulier, on peut appliquer la technique d'homogénéisation au système d'équations de Navier régissant un écoulement stationnaire bidimensionnel d'un fluide incompressible.

La viscosité dynamique du fluide de Navier, incompressible visqueux, est supposée variable avec la coordonnée y , normale au plan $y=0$, sous la forme suivante :

$$(5.1) \quad \mu = \mu\left(\frac{y}{\delta}\right),$$

où $\delta(\varepsilon)$, avec $\varepsilon \equiv \frac{1}{Re}$, est une jauge à déterminer.

On travaille, ici, avec des grandeurs adimensionnelles et le fait que la viscosité est fortement variable est lié à l'hypothèse que :

$$(5.2) \quad \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \equiv \Delta(\varepsilon) \ll 1,$$

qui représente le cas d'une microstructure (visqueuse) au sein de l'écoulement, qui, à partir de la technique d'homogénéisation,

simule un phénomène de régime turbulent. (*)
 Il nous faut donc élucider le comportement asymptotique, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, des équations de Navier suivantes :

$$(5.3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$(5.4) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon \mu \left(\frac{y}{\delta} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \varepsilon \frac{d\mu}{dy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

$$(5.5) \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon \mu \left(\frac{y}{\delta} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2\varepsilon \frac{d\mu}{dy} \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$(5.6) \quad u = v = 0 \quad \text{sur } y = 0.$$

(*) Pour ce qui concerne la turbulence, on consultera :
 P. Perrier et O. Pironneau : Math. Modelling,
 2, pp 295-317, 1981.

1. Introduisons les nouvelles variables

$$(5.7) \quad \xi = \frac{x}{\delta} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

et soient

$$(5.8) \quad \begin{cases} u(\delta\xi, \delta\eta) \equiv u^*(\xi, \eta; \Delta) \\ v(\delta\xi, \delta\eta) \equiv v^*(\xi, \eta; \Delta) \\ p(\delta\xi, \delta\eta) \equiv p^*(\xi, \eta; \Delta) \end{cases}$$

avec $\Delta \equiv \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \ll 1$. Il vient pour u^* , v^* et p^* les nouvelles équations suivantes, à la place de ((5.3) - (5.6)),

$$(5.9a) \quad \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v^*}{\partial \eta} = 0;$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial \eta} + \frac{\partial p^*}{\partial \xi} = \Delta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu(\eta) \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right]$$

$$(5.9b) \quad + \Delta \mu(\eta) \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \Delta \frac{d\mu}{d\eta} \frac{\partial v^*}{\partial \xi};$$

$$(5.9c) \quad u^* \frac{\partial V^*}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial V^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \pi^*}{\partial \eta} = \Delta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu(\eta) \frac{\partial V^*}{\partial \eta} \right] \\ + \Delta \mu(\eta) \frac{\partial^2 V^*}{\partial \xi^2} + \Delta \frac{d\mu}{d\eta} \frac{\partial V^*}{\partial \eta};$$

$$(5.9d) \quad u^* = v^* = 0 \quad \text{sur } \eta = 0.$$

2. Il faut d'abord se convaincre qu'une MDAR ne permet pas de tenir compte du caractère variable du coefficient $\mu(\eta)$, au niveau du problème (5.9), lorsque $\Delta \rightarrow 0$. En effet, lorsque $\Delta \rightarrow 0$ il faut selon la MDAR, effectuer tout d'abord le passage à la limite d'Euler

$$(5.10) \quad \Delta \rightarrow 0 \quad \text{avec } \xi \text{ et } \eta \text{ fixés}$$

et on retrouve les équations d'Euler

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_0^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}_0^*}{\partial \eta} = 0; \\ \bar{u}_0^* \frac{\partial \bar{u}_0^*}{\partial \xi} + \bar{v}_0^* \frac{\partial \bar{u}_0^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\pi}_0^*}{\partial \xi} = 0; \\ \bar{u}_0^* \frac{\partial \bar{v}_0^*}{\partial \xi} + \bar{v}_0^* \frac{\partial \bar{v}_0^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\pi}_0^*}{\partial \eta} = 0, \end{array} \right.$$

On ne peut pas appliquer les conditions en $\eta=0$!

$$(5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^* = \bar{u}_0^* + \Delta^\alpha \bar{u}_1^* + \dots, \\ v^* = \bar{v}_0^* + \Delta^\beta \bar{v}_1^* + \dots, \\ p^* = \bar{p}_0^* + \Delta^\gamma \bar{p}_1^* + \dots, \end{array} \right.$$

Ensuite on opère le passage à la limite de Prandtl

$$(5.13) \quad \Delta \rightarrow 0 \text{ avec } \frac{\xi}{\Delta} \text{ et } \hat{\eta} = \frac{\eta}{\Delta^b} \text{ fixés}$$

et

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^* = \hat{u}_0^* + \Delta^a \hat{u}_1^* + \dots, \\ v^* = \Delta^b \hat{v}_1^* + \dots, \\ p^* = \hat{p}_0^* + \Delta^c \hat{p}_1^* + \dots, \end{array} \right.$$

Il vient alors les équations les moins dégénérées possible, en première approximation, avec $b = \frac{1}{2}$:

$$(5.15a) \quad \frac{\partial \hat{u}_0^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{v}_1^*}{\partial \hat{\eta}} = 0;$$

$$(5.15b) \quad \hat{u}_0 \frac{\partial \hat{u}_0^*}{\partial \xi} + \hat{V}_1^* \frac{\partial \hat{u}_0^*}{\partial \hat{\eta}} + \frac{\partial \hat{p}_0^*}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \hat{\eta}} \left[\mu(\Delta^{1/2} \hat{\eta}) \frac{\partial \hat{u}_0^*}{\partial \hat{\eta}} \right] + \Delta \mu(\Delta^{1/2} \hat{\eta}) \frac{\partial^2 \hat{u}_0^*}{\partial \xi^2} + \Delta \frac{d\mu(\Delta^{1/2} \hat{\eta})}{d\hat{\eta}} \frac{\partial \hat{V}_1^*}{\partial \xi}$$

$$\Delta^{1/2} \left[\hat{u}_0^* \frac{\partial \hat{V}_1^*}{\partial \xi} + \hat{V}_1^* \frac{\partial \hat{V}_1^*}{\partial \hat{\eta}} \right] + \frac{1}{\Delta^{1/2}} \frac{\partial \hat{p}_0^*}{\partial \hat{\eta}}$$

$$(5.15c) = \Delta^{1/2} \frac{\partial}{\partial \hat{\eta}} \left[\mu(\Delta^{1/2} \hat{\eta}) \frac{\partial \hat{V}_1^*}{\partial \hat{\eta}} \right] + \Delta^{3/2} \mu(\Delta^{1/2} \hat{\eta}) \frac{\partial^2 \hat{V}_1^*}{\partial \xi^2} + \Delta^{1/2} \frac{d\mu(\Delta^{1/2} \hat{\eta})}{d\hat{\eta}} \frac{\partial \hat{V}_1^*}{\partial \hat{\eta}}$$

On garde, ainsi, au niveau de (5.15), le terme visqueux prépondérant $\mu(\Delta^{1/2} \hat{\eta})$.

Si on suppose que $\mu(0) \equiv 1$, on obtient lorsque $\Delta \rightarrow 0$ à ξ et $\hat{\eta}$ fixés les équations de la couche limite classique:

$$(5.16) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{u}_0^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{v}_1^*}{\partial \hat{\eta}} = 0 ; \\ \hat{u}_0 \frac{\partial \hat{u}_0^*}{\partial \xi} + \hat{v}_1^* \frac{\partial \hat{u}_0^*}{\partial \hat{\eta}} + \frac{\partial \hat{p}_0^*}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \hat{u}_0^*}{\partial \hat{\eta}^2} ; \\ \frac{\partial \hat{p}_0^*}{\partial \hat{\eta}} = 0 ; \\ \hat{u}_0^* = \hat{v}_1^* = 0 \quad \text{sur } \hat{\eta} = 0 ; \\ \hat{\eta} \rightarrow +\infty \quad \hat{u}_0^* \rightarrow \bar{u}_0^* . \end{array} \right.$$

Avec la condition de glissement pour le système (5.11) :

$$(5.17) \quad \gamma \rightarrow 0 \quad \bar{v}_0^* \rightarrow 0$$

3. - Mise en œuvre d'une technique de double échelle. On introduit

$$(5.18) \quad \theta = \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\Delta} . \quad \left(\Delta \equiv \frac{\varepsilon}{\delta} \ll 1 \right)$$

où θ est une fonction qui caractérise la microstructure.

Nous devons chercher la contrainte qu'on doit imposer à la fonction $\Psi(\xi, \gamma)$ pour décrire, lorsque $\Delta \rightarrow 0$, la double structure des solutions (5.9).

- Remarques : on aurait pu essayer d'écrire que $\Theta = \frac{\Psi(\xi, \gamma)}{\delta(\epsilon)}$, mais alors pour obtenir des équations significatives pour la microstructure (selon la technique de l'homogénéisation), il faut imposer le choix

$$\delta = \Delta = \frac{\epsilon}{\delta} \Rightarrow \delta = \sqrt{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{Re}} ?$$

Mais si on revient au problème de départ avec $\epsilon = \frac{1}{Re}$ et $\delta = \frac{1}{\sqrt{Re}}$, on peut mettre en œuvre une MDAR avec Euler - couche limite (avec μ variable) :

$$\hat{y} = \frac{y}{\epsilon^{1/2}} ; \quad \mu = \mu(\hat{y}),$$

$$u = \hat{u}_0 + \dots ; \quad v = \epsilon^{1/2} \hat{v}_1 + \dots ;$$

$$p = \hat{p}_0 + \dots ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_0 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x} + \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(\mu(\hat{y}) \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{y}} \right); \\ \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{y}} = 0; \\ \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \hat{y}} = 0; \\ \hat{u}_0 = \hat{v}_1 = 0 : \quad \hat{y} = 0 \\ \hat{u}_0 \rightarrow \bar{u}_0 \quad \hat{y} \rightarrow +\infty \\ \bar{v}_0 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Donc il faut considérer le cas de (*)

$$\delta \gg \frac{1}{\sqrt{Re}} \equiv \varepsilon^{1/2}$$

Cela veut dire que $\Delta \ll \delta$

(*) Lorsque $\delta \ll \frac{1}{\sqrt{Re}}$ on peut mettre

en œuvre une MDA avec trois couches et on trouve que $\delta = \frac{1}{Re}$ ce qui met en

evidence une sous-couche visqueuse dont l'épaisseur est $\frac{1}{Re}$ (plus petite que celle de la couche limite de Prandtl $\frac{1}{\sqrt{Re}}$) et où se

→ pages suivantes

On revient à (5.18) et on considère le système (5.9). On a

$$(5.19) \quad \frac{\partial u^*}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

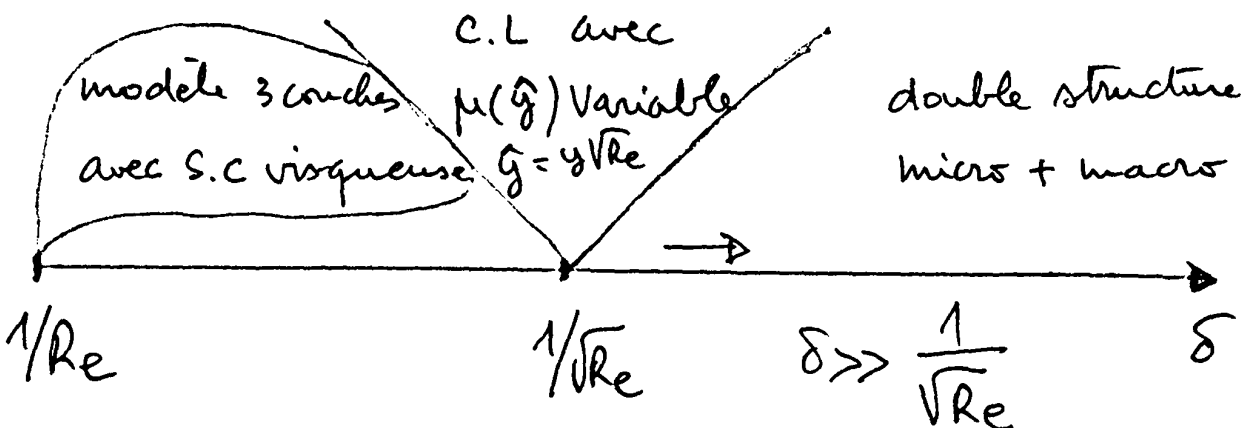
.....

où $u^* \rightarrow u(\xi, \eta, \theta; \Delta)$ et de même pour v^* et p^* ; la variable θ caractérise la microstructure liée à $\mu(\eta)$.

fait sentir la variabilité de μ :

$$\mu \rightarrow \mu(\eta/1/Re)$$

Si on arrive à mettre en œuvre une homogénéisation en n'imposant aucune contrainte sur Δ (sauf celle de $\Delta \ll \delta$) cela voudra dire que toute microstructure en θ avec $\Delta \ll \delta \Rightarrow \delta \gg \frac{1}{\sqrt{Re}}$ sera décrite par le modèle mis en évidence!



de (5.9a) on a :

$$(5.20) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = 0,$$

de (5.9b) on a :

$$(5.21) \quad \begin{aligned} & u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} u + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} v \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] = \Delta \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[\mu(\eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta} \mu(\eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \Delta \mu(\eta) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{2}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{1}{\Delta^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \\ & + \Delta \frac{d\mu}{d\eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right); \end{aligned}$$

et de (5.9c) on a :

$$(5.22) \quad \begin{aligned} & u \frac{\partial v}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial \eta} + \frac{1}{\Delta} \left[\left(u \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + v \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] = \Delta \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[\mu(\eta) \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{\Delta} \mu(\eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \\ & + \Delta \mu(\eta) \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right] + \Delta \frac{d\mu}{d\eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

ou encore (après avoir multiplié par Δ):

$$(5.23) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0;$$

$$(5.24) \quad \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + v \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \mu(\eta) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \Delta \left\{ 2\mu(\eta) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mu(\eta) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{d\mu}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} u + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} v \right) - u \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\} + \Delta^2 \left\{ \mu(\eta) \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) u + \frac{d\mu}{d\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right\};$$

$$(5.25) \quad \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + v \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \mu(\eta) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \Delta \left\{ 2\mu(\eta) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \mu(\eta) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + 2 \frac{d\mu}{d\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \theta} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} - v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} + \Delta^2 \left\{ \mu(\eta) \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) v + 2 \frac{d\mu}{d\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\}.$$

Maintenant, on fait l'hypothèse que u , v et p peuvent être représentés sous la forme suivante :

$$(5.26) \quad \begin{cases} u = \langle u(\xi, \eta; \Delta) \rangle + \tilde{u}(\xi, \eta, \theta; \Delta) \\ v = \langle v(\xi, \eta; \Delta) \rangle + \tilde{v}(\xi, \eta, \theta; \Delta) \\ p = \langle p(\xi, \eta; \Delta) \rangle + \tilde{p}(\xi, \eta, \theta; \Delta) \end{cases}$$

où $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$ et $\langle p \rangle$ sont les parties moyennes, tandis que \tilde{u} , \tilde{v} et \tilde{p} sont les fluctuations des composantes de la vitesse et de la pression respectivement, de telle façon que :

$$(5.27) \quad \langle \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{v} \rangle = \langle \tilde{p} \rangle = 0. \quad (1)$$

Dans ce cas, de (5.23), (5.24) et (5.25) on obtient :

$$(5.28) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \Delta \left[\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \xi} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right] = 0;$$

(1) L'opération moyenne $\langle \cdot \rangle$ fait disparaître la structure fine en θ (microstructure).

$$\begin{aligned}
 & \left(\langle u \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \langle v \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \mu(\eta) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} = \Delta \left\{ 2 \mu(\eta) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right. \\
 (529) \quad & \left. + \mu(\eta) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{d\mu}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \tilde{u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \tilde{v} \right) \right. \\
 & \left. - (\langle u \rangle + \tilde{u}) \frac{\partial (\langle u \rangle + \tilde{u})}{\partial \xi} - (\langle v \rangle + \tilde{v}) \frac{\partial (\langle v \rangle + \tilde{v})}{\partial \eta} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} \right\} + o(\Delta^2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\langle u \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \langle v \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \mu(\eta) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} = \Delta \left\{ 2 \mu(\eta) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (530) \quad & \left. + \mu(\eta) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + 2 \frac{d\mu}{d\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right. \\
 & \left. - (\langle u \rangle + \tilde{u}) \frac{\partial (\langle v \rangle + \tilde{v})}{\partial \xi} - (\langle v \rangle + \tilde{v}) \frac{\partial (\langle v \rangle + \tilde{v})}{\partial \eta} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right\} + o(\Delta^2).
 \end{aligned}$$

Ensuite, on recherche les solutions sous la forme des développements :

$$(5.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle u \rangle = \langle u_0 \rangle + \Delta \langle u_1 \rangle + \dots; \\ \tilde{u} = \tilde{u}_0 + \Delta \tilde{u}_1 + \dots; \\ \langle v \rangle = \langle v_0 \rangle + \Delta \langle v_1 \rangle + \dots; \\ \tilde{v} = \tilde{v}_0 + \Delta \tilde{v}_1 + \dots; \\ \langle p \rangle = \langle p_0 \rangle + \Delta \langle p_1 \rangle + \dots; \\ \tilde{p} = \tilde{p}_0 + \Delta \tilde{p}_1 + \dots; \end{array} \right.$$

À l'ordre Δ^0 , il vient les équations suivantes :

$$(5.32) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \tilde{u}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \tilde{v}_0 \right\} = 0;$$

$$(5.33) \quad \left(\langle u_0 \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \langle v_0 \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \theta} + \left(\tilde{u}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \tilde{v}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \langle u_0 \rangle}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} - \mu(\gamma) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \theta^2} = 0;$$

$$(5.34) \quad \left(\langle u_0 \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \langle v_0 \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \theta} + \left(\tilde{u}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \tilde{v}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} - \mu(\eta) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \theta^2} = 0.$$

Si on caractérise la fonction $\varphi(\xi, \eta)$ de telle façon que :

$$(5.35) \quad \langle u_0 \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \langle v_0 \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0.$$

Alors, on a les équations suivantes pour \tilde{u}_0, \tilde{v}_0 et \tilde{p}_0 :

$$(5.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{F}_0(\xi, \eta) \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \\ - \mu(\eta) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \theta^2} = 0; \\ \tilde{F}_0(\xi, \eta) \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \\ - \mu(\eta) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \theta^2} = 0, \end{array} \right.$$

d'où

$$(5.37) \quad \tilde{F}_0(\xi, \eta) = \tilde{u}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \tilde{v}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta};$$

$\tilde{F}_0(\xi, \eta)$: fonction arbitraire !

A l'ordre Δ^4 :

$$(5.38) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \tilde{u}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \tilde{v}_1 \right\} = - \frac{\partial \langle u_0 \rangle}{\partial \xi} - \frac{\partial \langle v_0 \rangle}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \eta};$$

$$\begin{aligned} & \left(\langle u_1 \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \langle v_1 \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \theta} + \tilde{F}_0(\xi, \eta) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \theta} \\ & + \left(\tilde{u}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \theta} - \mu(\eta) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \theta^2} - 2 \mu(\eta) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 39) \quad - \mu(\eta) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \theta} - \frac{d\mu}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \tilde{u}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \tilde{v}_0 \right) \\ & = - \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u_0 \rangle^2}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \langle v_0 \rangle^2}{\partial \eta} - \frac{\partial \langle u_0 \rangle \tilde{u}_0}{\partial \xi} \\ & - \left(\langle v_0 \rangle + \tilde{v}_0 \right) \frac{\partial \langle u_0 \rangle + \tilde{u}_0}{\partial \eta} - \frac{\partial \langle v_0 \rangle}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \eta}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\langle u_1 \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \langle v_1 \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \theta} + \tilde{F}_0(\xi, \eta) \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \theta} \\ & + \left(u_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + v_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \theta} - \mu(\eta) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial \theta^2} \\ & - 2\mu(\eta) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \theta} - \mu(\eta) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \theta} \end{aligned}$$

(5.40)

$$- 2 \frac{d\mu}{d\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \theta} = - (\langle u_0 \rangle + \tilde{u}_0) \frac{\partial (\langle v_0 \rangle + \tilde{v}_0)}{\partial \theta}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial \langle v_0 \rangle^2}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\tilde{v}_0)^2}{\partial \eta} - \frac{\partial (\langle v_0 \rangle \tilde{v}_0)}{\partial \eta}$$

$$- \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \eta} - \frac{\partial \langle u_0 \rangle}{\partial \eta},$$

(*)

Puis, en prenant la moyenne $\langle \quad \rangle$ des deux membres des équations (5.38), (5.39) et (5.40), de lesquelles découlent les relations suivantes :

(*) On rappelle que cette opération de moyenne élimine les termes séculaires qui apparaissent lors de la mise en œuvre de la M.E.M.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \langle u_0 \rangle}{\partial \xi} + \frac{\partial \langle v_0 \rangle}{\partial \eta} = 0; \\
 & \left(\langle u_0 \rangle \frac{\partial}{\partial \xi} + \langle v_0 \rangle \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \langle u_0 \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_0^2}{\partial \xi} \right\rangle \\
 & + \left\langle \tilde{v}_0 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \eta} \right\rangle + \frac{\partial \langle \rho_0 \rangle}{\partial \xi} = 0; \\
 & \left(\langle u_0 \rangle \frac{\partial}{\partial \xi} + \langle v_0 \rangle \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \langle v_0 \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \tilde{v}_0^2}{\partial \eta} \right\rangle \\
 & + \left\langle \tilde{u}_0 \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \xi} \right\rangle + \frac{\partial \langle \rho_0 \rangle}{\partial \eta} = 0.
 \end{aligned}$$

Les équations (5.41) sont des équations homogénéisées avec des termes "mémoire":

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_0^2}{\partial \xi} \right\rangle, \left\langle \tilde{v}_0 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \eta} \right\rangle, \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \tilde{v}_0^2}{\partial \eta} \right\rangle, \left\langle \tilde{u}_0 \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \xi} \right\rangle,$$

qui sont traces de la microstructure, qui elles satisfont aux équations locales (5.36) pour \tilde{u}_0 , \tilde{v}_0 et $\tilde{\rho}_0$.

En d'autres termes, on constate que la structure complexe hétérogène, peut-être représentée par une structure moyenne (macro) à laquelle vient se coupler une structure fluctuante (micro). En toute généralité ces deux structures interagissent l'une sur l'autre et on comprend que seule une méthode du type des échelles multiples (M.E.M.) soit adéquate pour analyser le comportement limite d'une telle structure hétérogène.

Nous constatons qu'au niveau de la présente modélisation, il faut tout d'abord savoir traiter par un code numérique le problème local (5.36), qui gouverne la microstructure et ce n'est qu'ensuite que l'on peut avoir accès à la description macroscopique homogénéisée, avec les termes mémoires, traces de la microstructure.

C'est pourquoi, on peut dire de façon quelque peu imagée que: le présent modèle asymptotique permet de manière rationnelle et consistante d'insérer dans une hiérarchie

d'équations approchées, le modèle local de la turbulence (*) homogène.

(*) Une recherche en cours de R. Kh. ZEYTOUNIAN et J. P. GUIRAUD, dans le cadre d'une activité O.N.E.R.A., à la direction de l'Aérodynamique doit permettre à court terme de mettre sur pied une modélisation asymptotique de la turbulence, qui soit quelque peu plus simple et mieux adaptée à la réalité physique du phénomène de turbulence. Une publication est en cours sur ce sujet, mais on pourra déjà consulter la note au C.R.A.S., 300, II, pp. 981-984, 1985.

CONCLUSION

- Dans les travaux qui viennent d'être présentés (chapitres I, II et IV), nous avons montré que la prise en compte de coefficients d'échange variables au niveau des équations telles que celles de Navier, de Blasius ou du modèle hydrostatique de Boussinesq à grand nombre de Reynolds ($Re \gg 1$ ou $Re_L \gg 1$), et, en effectuant le passage à la limite :

$$Re \rightarrow +\infty \quad (Re_L \rightarrow +\infty)$$
 a permis à considérer des problèmes de perturbation singulière.
- La présence des petits paramètres ε et $\delta(\varepsilon)$ au sein de ces équations, nous permet de mettre en évidence une analyse asymptotique lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Dans le but d'éclaircir la solution de cette analyse asymptotique nous avons été amenés à utiliser la méthode des développements asymptotiques raccordés : technique nécessaire du fait de la dégénérescence des équations lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$.

- Cette analyse nous a amenés, lorsque $\delta(\varepsilon) \ll \varepsilon$, à élaborer un modèle, pour des nombres de ε très petits ($\varepsilon \ll 1$), permettant d'inclure une troisième couche au voisinage immédiat de la paroi (sol).

- Donc pour $\varepsilon \rightarrow 0$, tirant profit de $\Delta(\varepsilon) \equiv \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0$ nous avons considéré trois représentations asymptotiques liées respectivement à :

① couche extérieure : $y \sim O(1)$,

② couche limite classique : $\hat{y} = \frac{y}{\varepsilon} \sim O(\varepsilon)$,

③ sous-couche visqueuse (de dissipation) :

$$\tilde{y} = \frac{y}{\delta(\varepsilon)} \equiv \frac{\hat{y}}{\Delta(\varepsilon)} \sim O(\delta).$$

- En appliquant la M.D.A.R., le modèle le plus consistant est obtenu avec une sous-couche visqueuse (de dissipation) d'épaisseur de l'ordre ε^2 , c'est à dire $\frac{1}{Re} \left(\frac{1}{Re_{\perp}} \right)$.

- La présence de la sous-couche visqueuse (de dissipation) agit uniquement à partir des équations de couche limite de seconde approximation de telles façons que les

conditions sur le sol (paroi), pour $\hat{\Psi}_1$, \hat{u}_1 , \hat{v}_1 et $\hat{\theta}_1$ ne sont plus homogènes:

$$\begin{cases} \hat{\Psi}_1 = A_0(x) \mathcal{N}(x), \\ \hat{v}_1 = \mathcal{N}b(\tilde{\mu}) \left. \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, \\ \hat{\theta}_1 = K(\tilde{k}) \left. \frac{\partial \hat{\theta}_0}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}. \end{cases}$$

L'analyse du problème de Blasius (cas particulier), que la présence de la sous-couche visqueuse au voisinage immédiat de la paroi ($y=0$) influence nettement le frottement sur la plaque plane. Nous avons ainsi pu en déduire une formulation de la couche limite en seconde approximation en fonction de $\eta = y/\sqrt{x}$ (solution semblable):

$$2 \left(\hat{\mu} \hat{f}_1'' \right)' + \hat{f}_0 \hat{f}_1'' + \hat{f}_0'' \hat{f}_1 = 0$$

les résultats ainsi obtenus ont montré que la présence de coefficients d'échange fluctuants $\hat{\mu}$ et \hat{k} , ont une influence significative sur l'écoulement de couche limite pour $\hat{\xi}=0$.

$$\begin{cases} \mathcal{M}(\tilde{\mu}) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+\tilde{\mu}(\xi)} - 1 \right) d\xi \\ K(\tilde{k}) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+\tilde{k}(\xi)} - 1 \right) d\xi. \end{cases}$$

- Enfin, nous pouvons dire que la technique d'homogénéisation, pour le cas $\delta(\varepsilon) \gg \varepsilon$, est un outil mathématique qui permet de réaliser le passage d'une structure complexe hétérogène à une structure plus simple homogène, et dans laquelle apparaît une trace "effet de mémoire" $\left(\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}_0^2 \right\rangle, \text{etc.} \right)$, liée à la composition fixe (microstructure) de la structure hétérogène.

ANNEXES

ET

GRAPHES

ANNEXE A

$$\begin{aligned}
 (1.16) \quad \vec{\nabla} \cdot \left\{ \bar{\mu} \left(\frac{n}{l_0} \right) \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] \right\} \\
 = \bar{\mu} \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right]^{(1)} \\
 + \frac{d\bar{\mu}}{dn} \vec{\nu} \cdot \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right]^{(2)}
 \end{aligned}$$

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] = \vec{\nabla}^2 \vec{u}$$

puisque $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^T \vec{\nabla}^T = 0$, avec $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.

$$(2) \quad \vec{\nu} \cdot \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] = \vec{\nu} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nu} \cdot (\vec{\nabla} \vec{u})^T$$

$$\text{ou } \vec{\nu} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \quad \text{et } \vec{\nu} \cdot \vec{u}^T \vec{\nabla}^T = \vec{\nabla} \nu$$

donc

$$\vec{\nu} \cdot \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] = \vec{\nabla} \nu + \frac{\partial \vec{u}}{\partial n}$$

$$\begin{aligned}
 (1.16) \quad \vec{\nabla} \cdot \left\{ \bar{\mu} \left(\frac{n}{l_0} \right) \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] \right\} = \bar{\mu} \vec{\nabla}^2 \vec{u} \\
 + \frac{d\bar{\mu}}{dn} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} + \vec{\nabla} \nu \right).
 \end{aligned}$$

ANNEXE B

$$(1.48) \quad \tilde{U}_0(\tilde{n}) = \int_0^{\tilde{n}} \frac{dn}{\psi_{lm}(0) + \psi_{je}(n)}$$

$$= \int_0^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{\psi_{lm}(0) + \psi_{je}(n)} - \frac{1}{\psi_{lm}(0)} + \frac{1}{\psi_{lm}(0)} \right) dn$$

(1.48) est équivalente à l'expression suivante :

$$\tilde{U}_0(\tilde{n}) = \frac{\tilde{n}}{\psi_{lm}(0)} + \int_0^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{\psi_{lm}(0) + \psi_{je}(\tilde{n})} - \frac{1}{\psi_{lm}(0)} \right) d\tilde{n}$$

$$- \int_{\tilde{n}}^{\infty} \left(\frac{1}{\psi_{lm}(0) + \psi_{je}(n)} - \frac{1}{\psi_{lm}(0)} \right) dn$$

et pour $\tilde{n} \rightarrow +\infty$, on tire profit de

$$\int_{\tilde{n}}^{\infty} \left(\frac{1}{\psi_{lm}(0) + \psi_{je}(n)} - \frac{1}{\psi_{lm}(0)} \right) dn \rightarrow 0 \text{ lorsque } \tilde{n} \rightarrow +\infty$$

donc, $\tilde{U}_0(\tilde{n}) \sim \frac{\tilde{n}}{\psi_{lm}(0)} + \tilde{u}_0^{\infty} + \dots, \tilde{n} \rightarrow +\infty$

avec $\tilde{u}_0^{\infty} \equiv \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\psi_{lm}(0) + \psi_{je}(\tilde{n})} - \frac{1}{\psi_{lm}(0)} \right) dn < +\infty$

ANNEXE C

Détermination de l'expression (1.58)

on a
$$\tilde{v}_0(\sigma, \tilde{h}) = - \frac{dA_0(\sigma)}{d\sigma} \int_0^{\tilde{h}} \tilde{U}_0(n) dn,$$

avec
$$\tilde{U}_0(\tilde{h}) \equiv \int_0^{\tilde{h}} \frac{dn}{\psi_m(0) + \psi_{\ell\ell}(n)},$$

on peut écrire

$$\tilde{v}_0(\sigma, \tilde{h}) = - \frac{dA_0(\sigma)}{d\sigma} \tilde{V}_0(\tilde{h})$$

où
$$\tilde{V}_0(\tilde{h}) \equiv \int_0^{\tilde{h}} \int_0^u \frac{du}{\psi_m(0) + \psi_{\ell\ell}(u)} dn$$

$\tilde{V}_0(\tilde{h})$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\tilde{V}_0(\tilde{h}) = \int_0^{\tilde{h}} \left\{ \int_0^u \frac{1}{\psi_m(0) + \psi_{\ell\ell}(u)} \left(-\frac{1}{\psi_m(0)} + \frac{1}{\psi_m(0)} \right) du - u_{\infty}^{\tilde{h}} + u_{\infty}^{\tilde{h}} \right\} dn$$

$$\tilde{V}_0(\tilde{h}) = \frac{\tilde{h}^2}{2\psi_m(0)} + u_{\infty}^{\tilde{h}} \tilde{h} + \int_0^{\infty} (u_0^{\tilde{h}} - u_{\infty}^{\tilde{h}}) d\tilde{h}$$

$$- \int_{\tilde{h}}^{\infty} (u_0^{\tilde{h}} - u_{\infty}^{\tilde{h}}) d\tilde{h}.$$

donc, pour $\tilde{n} \rightarrow +\infty$

$$\tilde{V}_0(\tilde{n}) \sim \frac{1}{2} \frac{\tilde{n}^2}{\psi_m(0)} + \tilde{n} \tilde{u}_0^\infty + \tilde{v}_0^\infty + \dots,$$

$$\text{ou } \tilde{v}_0^\infty \equiv \int_0^\infty (\tilde{u}_0^n - \tilde{u}_0^\infty) d\tilde{n} < +\infty$$

$$\text{avec } \tilde{u}_0^n \equiv \int_0^n \left(\frac{1}{\psi_m(0) + \psi_{fe}(n)} - \frac{1}{\psi_m(0)} \right) dn$$

$$\text{et } \tilde{u}_0^\infty \equiv \int_0^\infty \left(\frac{1}{\psi_m(0) + \psi_{fe}(\tilde{n})} - \frac{1}{\psi_m(0)} \right) d\tilde{n}_{+\infty}$$

On tient compte du fait que :

$$\int_{\tilde{n}}^\infty (\tilde{u}_0^n - \tilde{u}_0^\infty) d\tilde{n} \rightarrow 0 \text{ pour } \tilde{n} \rightarrow +\infty.$$

ANNEXE D

A partir des équations de Navier (cas incompressible) indiquées au premier chapitre (1.15) et écrites dans le système d'axes cartésien Oxy , en tenant compte de (2.2), il convient de détailler les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu_0 \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 &+ 2\nu_0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\
 &+ \nu_0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= \nu_0 \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 &+ \nu_0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &+ 2\nu_0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y},
 \end{aligned}$$

$$(c) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Pour avoir une équation écrite seulement en $\psi(x,y)$, il faut éliminer la pression hydrodynamique $p(x,y)$ des équations (a) et (b), pour cela :

On dérive (a) par rapport à y , qui donne :

$$\begin{aligned}
 (a)': \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} &= \nu_0 \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 &+ \nu_0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\
 &+ 2 \nu_0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \nu_0 \frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &+ 2 \nu_0 \frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x},
 \end{aligned}$$

et (b) par rapport à x :

$$\begin{aligned}
 (b)': \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} &= \nu_0 \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 &+ 2 \nu_0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \nu_0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 &+ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left(\nu_0 \frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &+ \nu_0 \frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

puis, $(a)' - (b)'$ pour éliminer $p(x, y)$, donne

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \nu_0 \bar{\psi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \nu_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \nu_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &+ \nu_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &+ 2 \nu_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

En introduisant $\psi(x, y)$ tel que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) &= \nu_0 \bar{\psi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + 2 \nu_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ &+ 2 \nu_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \nu_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + 4 \nu_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \nu_0 \bar{\mu} \Delta_2 - 2\nu_0 \left(\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \Delta_2 \psi = \nu_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + 4\nu_0 \frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

avec $\bar{\mu} = \bar{\mu}_m \left(\frac{x}{L_0}, \frac{y/L_0}{\varepsilon} \right) + \bar{\mu}_e \left(\frac{x}{L_0}, \frac{y/L_0}{\delta_2(\varepsilon)} \right)$

et $\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

ANNEXE E

SOLUTION COMPOSITE

1. - DEFINITIONS

- Le développement ; dit composite, uniformément valable dans un domaine \mathcal{D}_0 , c'est le résultat de la somme des développements extérieurs et intérieurs de laquelle on a soustrait la partie commune à ces deux développements.
- Dans le chapitre IV, l'approximation de la perturbation de température absolue Θ (IV.4) est uniformément valable dans le domaine \mathcal{D}_0 :
 $0 \leq \zeta < +\infty$.

2. - CALCULS

Dans la section IV.4, la solution approchée Θ est une approximation très fidèle de la solution exacte, Θ est une solution, dite composite, approchée, valable à l'ordre zéro et un en ε où $\varepsilon \equiv \frac{1}{\sqrt{Re_1}}$.

La solution composite Θ s'écrit sous la forme :

$$\Theta = \Theta_0 + \varepsilon \Theta_1 + O(\varepsilon^2),$$

d'où Θ_0 peut s'exprimer de la façon suivante:

$$\Theta_0 = \hat{\Theta}_0 + \tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta}_0(\infty),$$

avec $\hat{\Theta}_0$: la solution de couche limite classique (première approximation), présentée par la formule (4.65), pour la perturbation de température.

$\tilde{\Theta}_0$: est la solution du développement local de la sous-couche de dissipation à l'ordre zéro en $\left(\frac{1}{\sqrt{Re_\perp}}\right)$, présentée par (4.59).

$\tilde{\Theta}_0(\infty)$: la partie commune des deux solutions précédentes $\hat{\Theta}_0$ et $\tilde{\Theta}_0$: Elle peut aussi présenter le comportement à l'infini de la solution locale de la sous-couche de dissipation (ici pour $\tilde{z} \rightarrow +\infty$)

À l'ordre zéro en $\left(\frac{1}{\sqrt{Re_\perp}}\right)$, on a : $\tilde{\Theta}_0 \equiv \tilde{\Theta}_0(\infty)$, donc,

$$\Theta_0 = (a_0 + b_0 x) e^{-\tilde{z}/\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\tilde{z}}{\sqrt{2}}\right).$$

$\tilde{\Theta}_0$: solution du développement local de la sous couche de dissipation à l'ordre zéro en $\frac{1}{\sqrt{Re_\perp}}$, présentée par la condition (4.59).

À l'ordre zéro en $\frac{1}{\sqrt{Re_\perp}}$, on a $\tilde{\Theta}_0 \equiv \tilde{\Theta}_0(\infty)$

donc,

$$\Theta_0 = (a_0 + b_0 x) e^{-\frac{\hat{x}}{\delta}/\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}\right).$$

et $\Theta_1 = \hat{\Theta}_1 + \tilde{\Theta}_1 - \tilde{\Theta}_1(\infty)$.

avec $\hat{\Theta}_1$: solution du développement intérieur de la couche limite classique ou seconde approximation, présentée par (4.70).

$$\hat{\Theta}_1 = -K(\hat{k})(a_0 + b_0 x) e^{-\frac{\hat{x}}{\delta}/\sqrt{2}} \sin\left(t + \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}\right).$$

$\tilde{\Theta}_1$: solution de la sous-couche de dissipation présentée par (4.32) $\frac{1}{\delta}$

$$\tilde{\Theta}_1 = (a_0 + b_0 x) \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \int_0^x \frac{dv}{1 + k(v)}.$$

et $\Theta_1 = \hat{\Theta}_1 + \tilde{\Theta}_1 - \tilde{\Theta}_1(\infty)$

où $\hat{\Theta}_1$: la solution de couche limite de seconde approximation, présentée par la formule (4.70), est :

$$\hat{\Theta}_1 = -K(\tilde{k}^2)(a_0 + b_0 x) e^{-\frac{\tilde{z}}{\sqrt{2}}} \sin\left(t + \frac{\pi}{4} - \frac{\tilde{z}}{\sqrt{2}}\right),$$

$\tilde{\Theta}_1$: est la solution de la sous couche de dissipation présentée par (4.32)

$$\tilde{\Theta}_1 = (a_0 + b_0 x) \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\frac{\tilde{z}}{\delta}} \frac{dv}{1 + \tilde{k}(v)}$$

$\tilde{\Theta}_1(\infty)$ est le comportement à l'infini de $\tilde{\Theta}_1$ (voir (4.38)), qui représente la partie commune entre $\hat{\Theta}_1$ et $\tilde{\Theta}_1$, dans notre cas

$$\tilde{\Theta}_1(\infty) \sim (a_0 + b_0 x) \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \left\{ \tilde{z} + K(\tilde{k})_{t-} \right\}$$

Alors,

$$\Theta_1 = (a_0 + b_0 x) \left\{ -K(\tilde{k}^2) \left[e^{-\frac{\tilde{z}}{\sqrt{2}}} \sin\left(t + \frac{\pi}{4} - \frac{\tilde{z}}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \right] + \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\frac{\tilde{z}}{\delta}} \left(\frac{1}{1 + \tilde{k}(v)} - 1 \right) dv \right\}.$$

Donc la solution approchée de la perturbation de température Θ , en tenant compte des

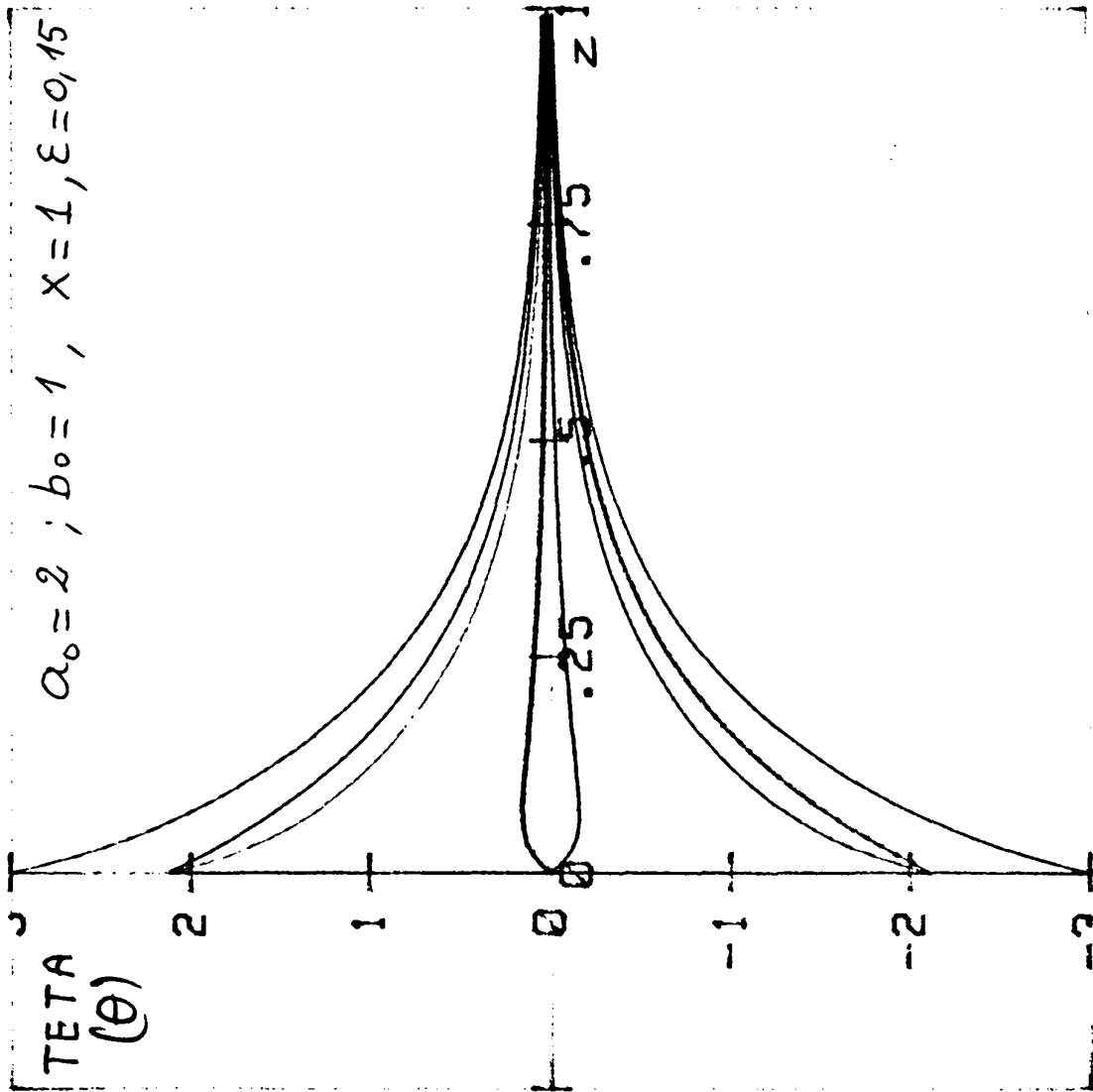
Conditions aux limites :

$$\begin{cases} z = 0 : & \theta = (a_0 + b_0 x) \sin t \\ z \rightarrow +\infty : & \theta \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \theta(t, x, z; \varepsilon) = & (a_0 + b_0 x) \left\{ e^{-z/\sqrt{\frac{2}{\text{Re}_1}}} \sin\left(t - z/\sqrt{\frac{2}{\text{Re}_1}}\right) \right. \\ & - \varepsilon \left[K\left(\frac{z}{2}\right) \left\{ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - e^{-z/\sqrt{\frac{2}{\text{Re}_1}}} \sin\left(t + \frac{\pi}{4} - z/\sqrt{\frac{2}{\text{Re}_1}}\right) \right\} \right. \\ & \left. \left. - \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{z/\sqrt{\frac{2}{\text{Re}_1}}} \left(\frac{1}{1 + k(u)} - 1 \right) du \right] \right\} + O\left(\frac{1}{\text{Re}_1}\right) \end{aligned}$$

ANNEXE F

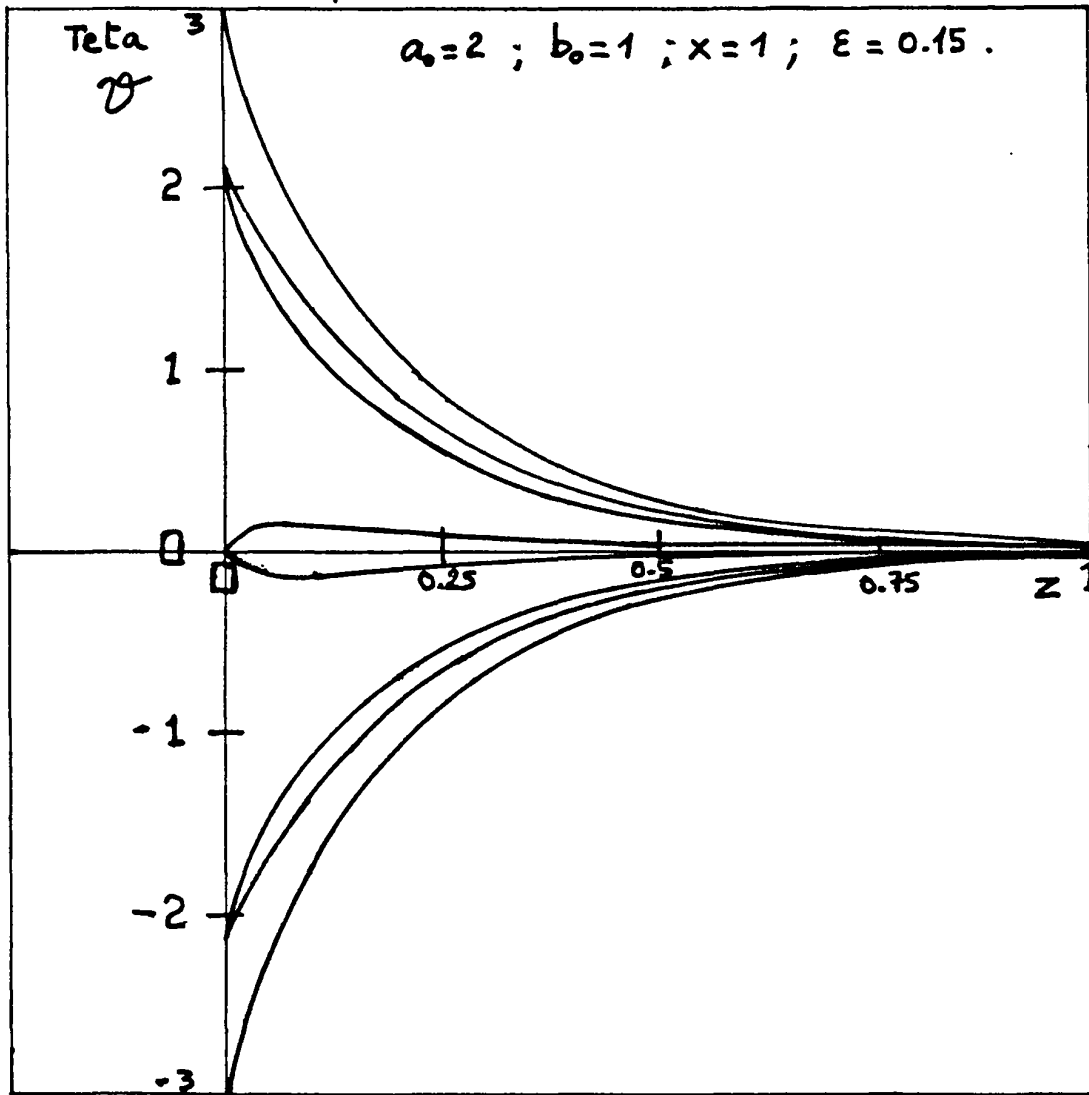
" GRAPHS "



Variation de θ en fonction de l'altitude (z)
pour $t = 0 ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{4} ; \pi ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{3\pi}{2} ; \frac{7\pi}{4} ; 2\pi$

Graphe 1.

Perturbation de Temperature ϑ en Fonction de l'altitude z pour differentes valeurs du temps.

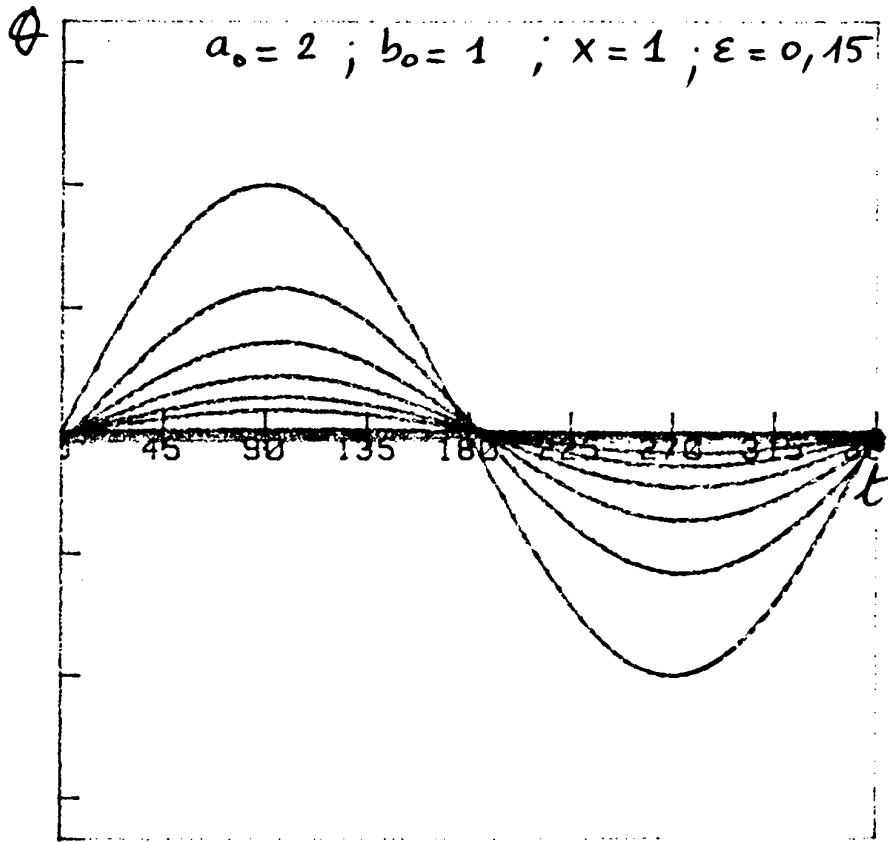


$t = 0 ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{4} : \text{ courbes positives}$

$t = \pi ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{3\pi}{2} ; \frac{7\pi}{4} : \text{ courbes négatives}$

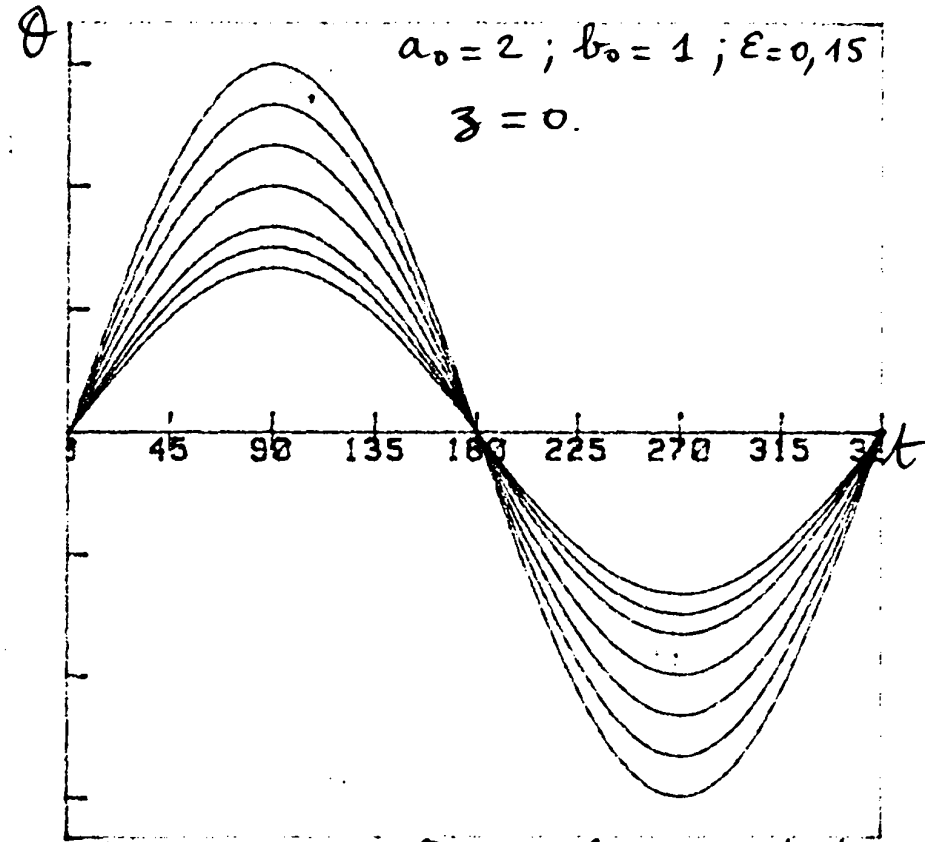
PERTURBATION DE TEMPERATURE $\vartheta(t)$

Graphe 4



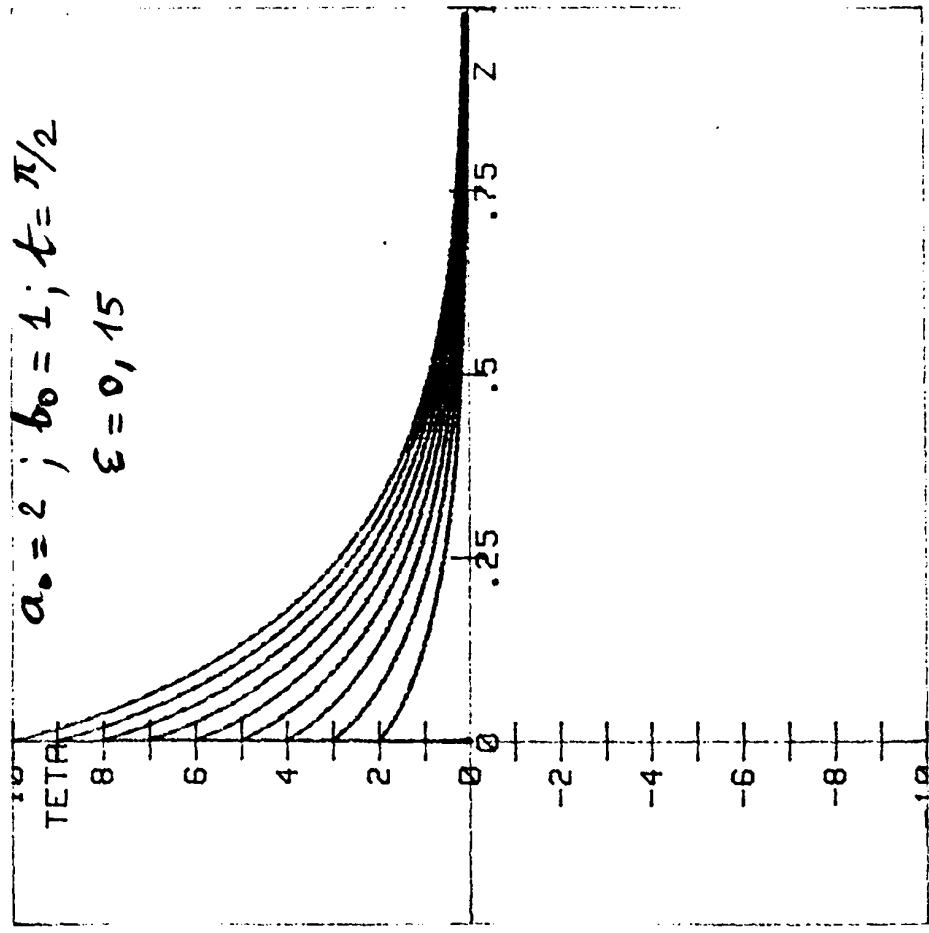
Variation de ϑ en fonction du temps (t)
pour $z = 0 ; 0.1 ; 0.2 ; 0.3 ; 0.4 ; 0.5 ; 1$.

Graphe 5

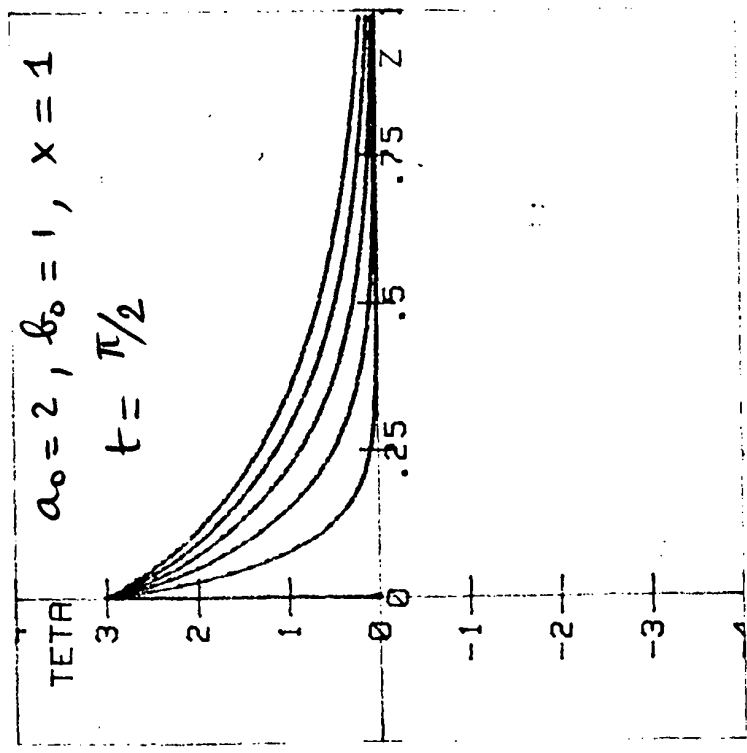


Variation de ϑ en fonction du temps (t)
pour $x = 0 ; 0.5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4$.

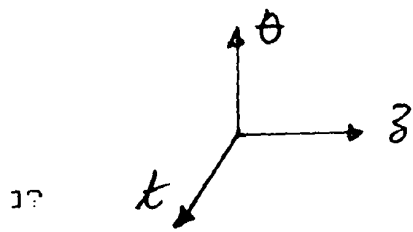
PERTURBATION DE TEMPERATURE $\Theta(z)$



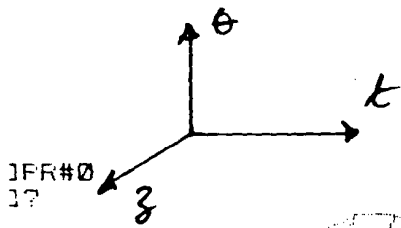
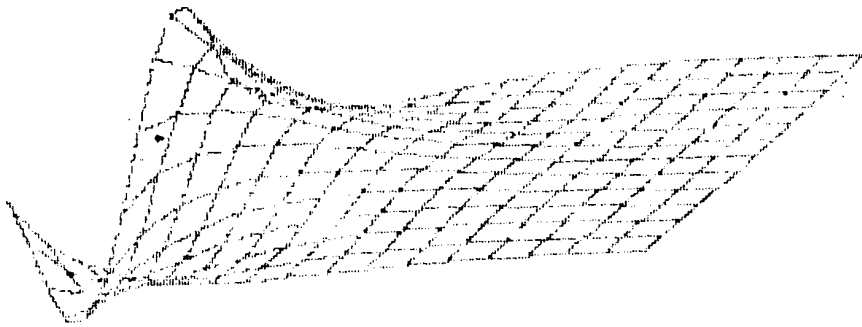
Graph 2 :
 Pour $x = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8$.



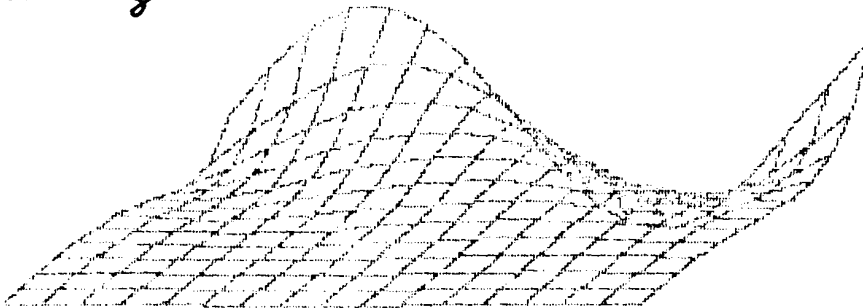
Graph 3 :
 Pour $\epsilon = 0.05 ; 0.1 , 0.15 ;$
 $0.2 ; 0.25$.



$$\epsilon = 0,15 \quad a_0 = 2, \quad b_0 = 1$$
$$X = 1$$

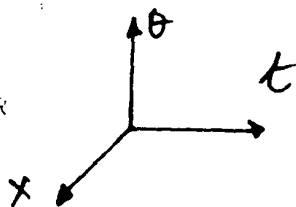


$$\epsilon = 0,15 \quad a_0 = 2, \quad b_0 = 1$$
$$X = 1$$



PR#0

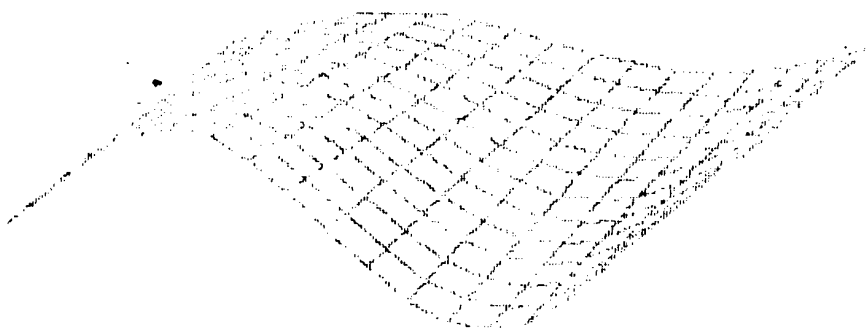
?SYNTAX ERROR
IPR#0



$$E = 0,15, a_0 = 2, b_0 = 1$$

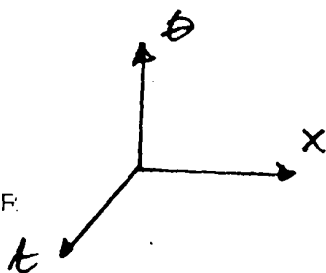
$$z = 0$$

]



PR#0

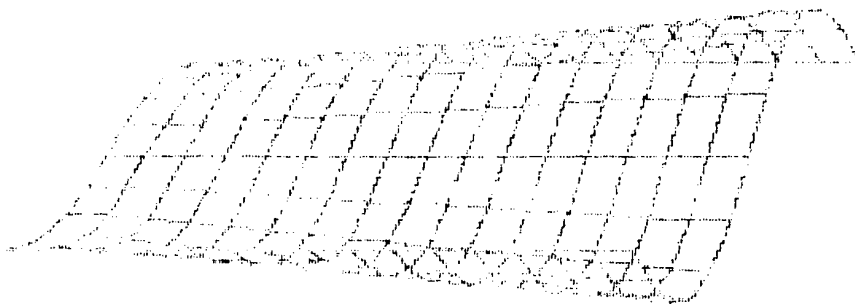
?SYNTAX ERROR
IPR#0

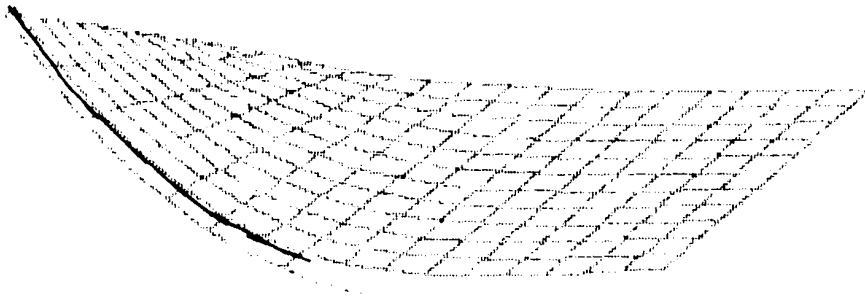
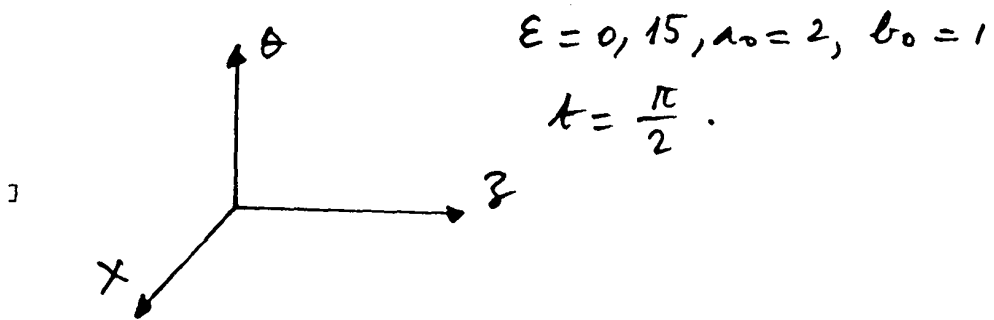
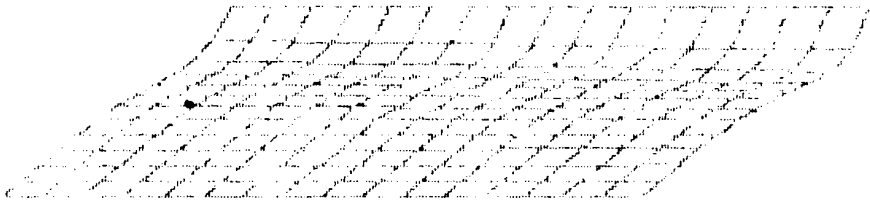
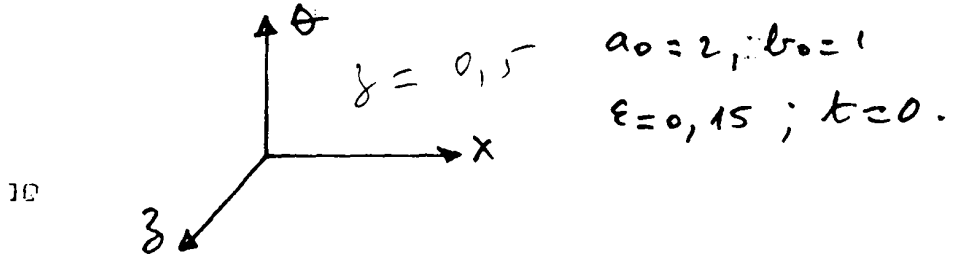


$$E = 0,15, a_0 = 2, b_0 = 1$$

$$z = 0$$

]





BIBLIOGRAPHIE

- [1] PIRONNEAU O. — Homogénéization transport processes and turbulence modelling
Proc. IRIA. NOVOSIBIRSK, décembre 1978.
- [2] PERRIER P. and PIRONNEAU O. — Sub-grid turbulence modelling by homogénéization
Math. Modelling, Vol, (1981)
pp 295 - 317.
- [3] KEVORKIAN J. and COLE J.D. — Perturbation Methods in Applied Mathematics,
Springer Verlag, New-York Inc,
1981.
- [4] VAN DYKE. — Perturbation Methods in fluid Méchanics, Parabolic press,
Stanford 1975.
- [5] ZEYTOUNIAN R. Kh. — Int. J. Engng. Sci.
Vol. 23, N° 11, pp 1239 - 1288.
- [6] GUTMAN L. N. — Introduction to the nonlinéar theory of mesoscale meteorological process. Israël program. for Sci. transl.,
Jerusalem 1972 (translated from Russian).

- [7] ZEYTOUNIAN R. Kh. — Les modèles asymptotiques de la mécanique des fluides I. Lectures Notes in Physics. Vol. 245, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.
- [8] NAYFEH A. H. — Perturbation Methods, Wiley, New-York.
- [9] ZEYTOUNIAN R. Kh. — Les modèles asymptotiques de la mécanique des fluides II. Lectures Notes in Physics. Vol. 276, Springer-Verlag, 1987.
- [10] SHIVAMOGGI B. K. — Asymptotic matching Principle. ZAMM, 58, (1978).
- [11] ZEYTOUNIAN R. Kh. — Arch. Mech. Stosowanej 26, 499 (1974).
- [12] KUTATELADZE S. S. — On turbulent boundary layer with vanishing viscosity. Heat and Mass Transfer, Beograd, 1, 9-38, 1970.
- [13] KUTATELADZE S. S. — The concept of fluid with disappearing viscosity. Proc. 3rd Int. Heat Transf conf., Chicago, 1966, New York, Alche, 1966.

- [14] SANCHEZ - PALENCIA E. - Non homogénéous media and vibrations theory, Lectures Notes in Physics, Vol. 127, 1980.
- [15] GUIRAUD J. P. et ZEYTOUNIAN R. KH. - C.R. Acad. Sci., PARIS, t. 302, II, 1986, pp. 383-386.
- [16] BEGUE G., CHACON T., Mc LAUGHLIN D., PAPANICOLAOU G. et PIRONNEAU O. - Convection of microstructures (II), Proc. 5th. Intern. conf. in Num. Method in Engng., Versailles 1983, R. GLOWINSKI edi., North - Holland, Amsterdam, 1985.

$$(4.9) \quad \mu = 1 + \tilde{\mu} \left(\frac{z}{\delta} \right) ; \quad k = 1 + \tilde{k} \left(\frac{z}{\delta} \right), \quad (*)$$

puisque nous travaillons avec des grandeurs sans dimensions, $\delta = \delta(\varepsilon)$ est une jauge inconnue a priori qui tend vers zéro avec $\varepsilon \rightarrow 0$, mais de telle façon que :

$$(4.10) \quad \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \equiv \Delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{avec } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On fait l'hypothèse cohérente de :

$$(4.11) \quad \tilde{\mu}(\infty) = \tilde{k}(\infty) \equiv 0 \quad [6]$$

IV.3. - MODELISATION ASYMPTOTIQUE

Il est facile de voir à partir des résultats du chapitre I que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il émerge un modèle en trois couches liées respectivement à ... :

1. - z : couche non visqueuse et non conductrice de la chaleur.
2. - $\hat{z} = z/\varepsilon$: couche limite classique.

(*) Le cas $\tilde{\mu} \left(\frac{z}{\delta_1} \right)$ et $\tilde{k} \left(\frac{z}{\delta_2} \right)$ est-il plus difficile ?