

N° d'acte : 233

50 376

Université de Lille 1

1988

Thèse de doctorat  
d'université  
en  
mathématiques

EXCLU  
DU  
PRÉT

Consultation sur place uniquement

Dualité entre homologie d'intersection  
et cohomologie  $L^2$

per

SARALEGUI-ARANGUREN Martin

Directeur de thèse : Brasselet Jean-Paul

1988

EXEMPLAIRE PROVISOIRE

SCD LILLE 1



D 030 330105 0

# SARALEGI (Haut)

mai 88

Chapitre I : Il contient 22 pages numérotées: 0 → 21.

Dans la famille ⑩ il y a deux dessins qu'il faut ajouter dans le chapitre I dans les endroits signalés (en rouge).

Chapitre II : 13 pages, numérotées: 1 → 13

Chapitre III : 2 pages, .. : 1 → 2

Chapitre IV : 12 pages, .. : 1 → 12

Chapitre V : 10 pages, .. : 0 → 9

Chapitre VI : 6 pages, .. : 1 → 6

Chapitre VII : 9 pages, .. : 0 → 8

## Méthodes

A la fin il y a un addendum, qui contient trois corrections à faire dans les endroits explicité (en rouge).

Récl. en définitive  
le 15. 6. 89

## Chapitre I.

### PSEUDOVARIÉTÉS STRATIFIÉES ET SÉRIÉES.

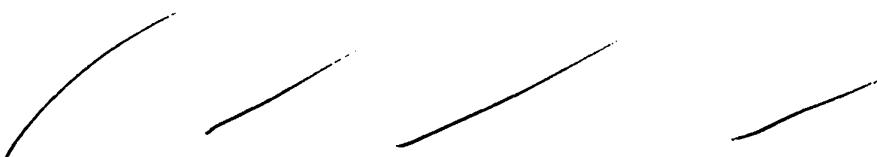
Une pseudovariété stratifiée ([GM]) est une pseudovariété qui admet une stratification par des variétés; appelées strates, chacune d'entre elles possède une structure transversale conique. Dans ce premier chapitre nous introduisons un type particulier de pseudovariété stratifiée que nous appellerons pseudovariété stratifiée ételée (PVSE en abrégé).

Elles sont caractérisées par le fait que toute strate admet un voisinage tubulaire (de fibre conique) et que ces voisinages sont compatibles dans un certain sens ( $D_1$  et  $D_2$ ). Des prestations finitaires abstraites (cf. [V]) fournissent un cas particulier de PVSE. Nous trouvons aussi des exemples de PVSE: variétés algébriques, semi-algébriques, analytiques, espace d'orbites de l'action d'un groupe de Lie compacte...

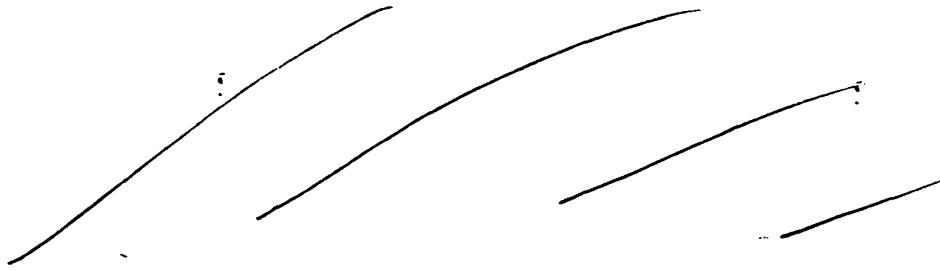
Dans un deuxième temps nous décrivrons un processus de désingularisation des PVSE (que nous appellerons déplissage) inspiré de celui de désingularisation des actions de groupes. Pour terminer le chapitre nous traitons une désingularisation de simplexe linéaire (que nous appellerons déplissage simplicial). Ces deux processus sont à la base de la formule de Stokes du chapitre VII.

Dans ce travail, le mot "différentiable" signifiera de classe  $C^\infty$  et les variétés seront supposées différentiables sans bord et paracompactes.

La suite est dans la page suivante, en laissant un double espace



(1)



1. Fixons pour la suite une pseudovariété  $X$  de dimension  $n$  et  $\mathcal{F} = (\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_{n-1} \subset X_n = X)$  une stratification sur  $X$ . On dit alors que  $X$  est une pseudovariété stratifiée (cf. [GM1], [Bra]).

Nous noterons par  $\Sigma(X)$ , ou simplement  $\Sigma$ , la partie singulière de  $X$ . La partie régulière de  $X$  sera notée  $X - \Sigma$  ou  $X^+$ . Pour chaque  $i$  nous poserons  $U_i = X_i - X_{i-1}$ , ~~où~~  $U_i$  est ou vide, ou une variété de dimension  $i$ , non nécessairement connexe. Ses composantes connexes seront appelées strates.

La longueur de  $X$ , notée  $\text{long}(X)$ , est le nombre d'ensembles  $U_i$  non vides. Remarquons que  $\text{long}(X) = 1$  si:  $\mathcal{F} = (\emptyset = X_0 = \dots = X_{n-1} \subset X)$ ; dans ce cas  $X$  est une variété. La réciproque n'est pas toujours vraie.

Pour les notions associées aux pseudovariétés stratifiées nous nous renvoyons à [GM1] et [Bra].

#### 4.1. Définition.

Soit  $cX$  le cone ouvert  $X \times [0,1[ / X \times \{0\}$ . Soit  $*$  son sommet  $X \times \{0\} / X \times \{0\}$ . L'espace  $cX$  est une pseudovariété qui hérite de  $X$  la filtration:

$$(cX)_i = \begin{cases} * & \text{si } i=0 \\ X_{i-1} \times [0,1[ / X_{i-1} \times \{0\} & \text{si } i=1, 2, \dots, n+1. \end{cases}$$

Le cone  $cX$  est donc une pseudovariété stratifiée de dimension  $(n+1)$ , ayant une strate de plus que  $X$ .

Goresky et MacPherson ([GM2]) introduisent la notion de morphisme

(2)

de pseudovariétés stratifiées. Nous disons qu'un morphisme  $f: X \rightarrow X$  est un automorphisme si (i) il préserve  $\mathcal{F}$  et (ii) sa restriction à chaque ~~réduction~~ strate est un difféomorphisme.

### 2. Fibrés coniques.

Soit  $L$  une pseudovariété stratifiée de dimension  $l$ ,  $S$  une variété de dimension  $m$  et  $\pi: T \rightarrow S$  un fibré localement trivial de fibre le cône  $cL$ . Supposons de plus que le groupe structural de ce fibré se réduise à  $\text{Aut}(L)$  (considéré comme sous-groupe du groupe des homéomorphismes de  $cL$ ). Pour cela nous entendons que si  $(\varphi, W)$  et  $(\psi, V)$  sont deux cartes de trivialisation de  $\pi$ , il existe une application continue  $A: (W \cap V) \times L \rightarrow L$  telle que:

- a) pour tout  $x \in W \cap V$  l'application  $A(x, -)$  est dans  $\text{Aut}(L)$ ,
- b)  $\psi\varphi^{-1}(x, [y, r]) = ([x, A(x,)], r)]^*$  pour tout  $x \in W \cap V$  et tout  $[y, r] \in cL$ . (les points de  $cL$  sont notés par  $[y, r]$ ,  $(y, r) \in cL \setminus \{0\}$ ).

Under ces conditions on vérifie aisément que  $T$  admet une structure de pseudovariété stratifiée de dimension  $(m+l)$  (cf. 1). Cette pseudovariété est dite extension conique de  $L$ . L'application  $\pi: T \rightarrow S$  est dite fibration conique.

Soit  $x \in T$  et  $(\varphi, W)$  une trivialisation de  $\pi$  telle que  $\pi(x) \in W$ . On a  $\varphi(x) = (\pi(x), [y, r])$ . Le réel  $r \in ]0, 1[$  est indépendant du choix de la carte  $(\varphi, W)$  car le groupe structural de  $\pi$  est  $\text{Aut}(L)$ . Notons  $v = \lambda(x)$ . L'application ainsi construite  $\lambda: T \rightarrow ]0, 1[$  est appelée fonction rayon. Elle est continue et sa restriction à chaque strate est différentiable. Pour chaque  $t \in ]0, 1[$ ,  $\lambda^{-1}(t)$  est une pseudovariété stratifiée, dont la structure est induite par celle de  $L$ . L'ensemble  $\lambda^{-1}(t)$  est appelé couche.

Notons  $\mathbb{P}^1_{\text{hor}}$  le champ radial de (la partie régulière de)  $cL$ , c'est,  $L^+ \times ]0, 1[$ . Ce champ est invariant par le groupe structural de  $\pi$ . Ceci nous permet d'étendre  $\mathbb{P}_{\text{hor}}$  en un champ  $X$  défini

(3)

sur (la partie régulière de)  $T$ . Nous dirons alors que  $\chi$  est le champ radial de  $T$  et l'on en déduit les relations  $\pi_*\chi = 0$  et  $\lambda_*\chi = d_*\frac{\partial}{\partial r}$ , où  $d: \mathbb{C}L \rightarrow [0,1]$  est la projection  $\alpha([y, r]) = r$ .

### 3 Voisinages coniques. Compatibilité.

Le voisinage conique d'une strate est à la pseudovariété ce qui le voisinage tubulaire d'une sousvariété est à la variété.

3.1 Soit  $S$  une strate de  $X$ . Un voisinage ouvert  $T$  de  $S$  dans  $X$  est un voisinage conique de  $S$  s'il existe une fibration conique  $\pi: T \rightarrow S$  dont la restriction à  $S$  est l'identité. Si  $\mathbb{C}L$  est la fibre de ce fibré, on dira que  $L$  est le link de  $S$ .

~~Si  $T$  est la strate de dimension  $n$  alors  $T \cap S$  est réduit à un point. Pour  $x \in S$~~

Dans le cas d'une strate de dimension  $n$  le voisinage  $T$  coïncide avec  $S$  et  $\mathbb{C}L$  est réduit à un point et  $\pi_S$  est l'identité sur  $S$ . Par convention nous adopterons la notation  $L = \emptyset$  et  $\mathbb{C}L = \{*\}$ .

3.2 Soit  $\hat{T}$  l'espace des adhérences des fibres de  $\pi$ . On va à réduire l'ouvert  $T$  ou supposera toujours que  $\pi$  s'étend à  $\hat{T}$  comme une fibration. Dans ce cas la fibre est le cône fermé  $\bar{\mathbb{C}}L = [x[0,1]] / L_{x=0}$  et les définitions du paragraphe 2 s'étendent de façon naturelle à  $\hat{T}$ . Ainsi par exemple la fonction rayon devient  $\lambda: \hat{T} \rightarrow [0,1]$ . Notons  $K = \lambda^{-1}(s)$  la  $s$ -couche.

Ajouter ici le paragraphe (\*) de l'addendum

Tout point  $x \in T$  s'écrit, à l'aide d'une carte locale  $(\varphi, W)$ , sous la forme  $(\pi(x), [y]_x, \lambda(x))$ , avec  $y \in \mathbb{C}L$ . Puisque le groupe structural de  $\pi$  est  $\text{Aut}(L)$  le point  $\varphi^{-1}(\pi(x), [y]_x, \lambda(x)) \in K$  est indépendant du choix de  $(\varphi, W)$ . Ainsi l'application  $\varphi$ :

$$(3.3) \quad f: T-S \rightarrow K / f(x) = \varphi^{-1}(\pi(x), [y]_x, \lambda(x))$$

est bien définie et est un morphisme de pseudovariétés

stratifiées. On vérifie sans peine que l'application :

$$(3.4) \quad F = f \times \pi : T \times S \rightarrow K \times [0,1[$$

est un isomorphisme de pseudorvariétés au sens de [GM2].

Rappelons que le "mapping cylindre" de  $\pi: K \rightarrow S$  est le quotient  $K \times [0,1] / \sim$  où  $(x, t) \sim (x', t)$  si  $\pi(x) = \pi(x')$ . L'application  $F$  s'étend de façon naturelle à l'homomorphisme :

$$(3.5) \quad F: \hat{T} \rightarrow K \times [0,1] / \sim$$

en posant  $F^{-1}([c, 0]) = \pi(c)$  (où  $\sim$  désigne la classe d'équivalence pour  $\sim$ ).

On identifiera donc  $\hat{T}$  au mapping cylindre de  $\pi: K \rightarrow S$ .

3.6 Fixons pour chaque strate  $S$  de  $X$  un voisinage conique de  $S$  et notons  $\Sigma$  la famille ainsi construite. ~~Supposons~~ On imposera dans ce paragraphe certaines conditions de compatibilité entre les divers voisinages coniques de  $\Sigma$ . Ces conditions généralisent en particulier celles de [Na], celles de [V], ...

Pour ce qui suit nous adopterons la convention suivante. Si  $S$  est une strate de  $X$  alors  $\pi_S: T_S \rightarrow S$  dirige son voisinage conique (celui considéré dans  $\Sigma$ ),  $L_S$  son link,  $X_S$  le champ radial,  $\lambda_S$  la fonction rayon,  $K_S$  la  $S$ -couche de  $T_S$  la fonction définie en (3.5).

~~Si~~ Si la longueur de  $X$  est zéro, ~~alors~~ la famille  $\Sigma$  est réduite à l'identité  $: S \rightarrow S \}$  et nous dirons que  $\Sigma$  est un voisinage conique de  $\Sigma$ . En général nous nous procéderons par récurrence sur la longueur de la pseudorvariété en question. Nous dirons que  $\Sigma$  est un voisinage conique de  $\Sigma$  si pour chaque strate  $S$  de  $X$  il existe un voisinage conique de  $\Sigma(L_S)$ , noté  $\Sigma_S$ , vérifiant (D1) et (D2)

D1 - | Le groupe structural de  $\pi_S$  peut être réduit aux éléments  
 $f \in \text{Aut}(L_S)$  vérifiant :

(5)

| "i. R est une strate de  $L_S$ ,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  dans les voisinages respectifs de R et  $f(R)$ , données dans  $E_S$ , alors  $f(\varepsilon')$  est un  $\varepsilon'$  de façon à être un isomorphisme au sens des fibrés"

Cette condition vérifiée, nous généralisons l'extension conique des strates (cf. 2) aux voisinages coniques des strates. Pour cela considérons R une strate de  $L_S$ ,  $\varepsilon$  son voisinage conique dans  $E_S$  et  $S'$  la strate de X dont la trace  $T_{S'} \cap S$  est l'extension conique de R (si  $S \cap T_S$  n'est pas convexe on va tourne sur chaque composante convexe). À l'aide des trivialisations de  $T_S$  et ~~grâce~~ de la condition D1 nous construisons un voisinage conique de  $S \cap T_S$ , appelé extension conique de  $\varepsilon$ . Il est clair maintenant que la famille  $\{ \text{extensions coniques de } R \mid R \text{ strate de } L_S \} \cup \{ T_S \}$  constitue une famille de voisinages coniques des strates de  $T_S$ , appelée extension conique de  $E_S$ .

Considérons d'abord part les traces sur  $T_S$  des éléments de  $\Sigma$ . On a ainsi, quitte à considérer les composantes convexes, une famille des voisinages coniques des strates de  $T_S$ , appelée restriction de  $\Sigma$  à  $T_S$ .

D2 - | La restriction de  $\Sigma$  à  $T_S$  coïncide avec l'extension de  $E_S$ .

(Cette définition de voisinage conique de  $\Sigma$  a un sens car  $\text{long}(L_S) < \text{long}(X)$  (g. 1).

Laisser la place pour le lemme 2 de l'annexe  
 Finalement, on appellera pseudovariété stratifiée étalée (PVSE en abrégé) toute paire  $(X, \Sigma)$  où X est une pseudovariété stratifiée et  $\Sigma$  un voisinage conique de  $\Sigma$ . Quand il n'y aura pas

(6)

d'équivoques le terme  $\Sigma$  sera pris et on dira simplement que  $X$  est une PVSF.

Dans [V8], pag. ..., l'auteur a montré un résultat qui s'annonçait maintenant.

### 3.7 Proposition.

Soit  $X$  une préstratification abstraite. Alors  $X$  possède une structure de pseudovariété stratifiée et chacune de ces strates possède un voisinage convexe. On pourra choisir ces voisinages remplissant la condition D1 et D2.

Ainsi, toute préstratification de Whitney (variétés algébriques, semi-algébriques, analytiques, ...) admet une structure étiquetée (cf [G1]). Un autre exemple de PVSF est donné par les espaces stratifiés de [Na].

3.8 Soient  $(X, \Sigma)$  et  $(X', \Sigma')$  deux PVSF. Soit  $f: X \rightarrow X'$  un isomorphisme au sens de [G+H2]. Nous devons que  $f$  envoie  $\Sigma$  sur  $\Sigma'$  pour chaque strate  $S$  de  $X$ :

(i)  $f$  envoie  $T$  (voisinage convexe de  $S$  dans  $\Sigma$ ) sur  $T'$  (voisinage convexe de  $f(S)$  dans  $\Sigma'$ ) et

(ii) la restriction de  $f$  à  $T$  est un isomorphisme au sens des fibres.

On notera  $\text{Aut}(X, \Sigma)$ , le sous-groupe de  $\text{Aut}(X)$  constitué par les éléments qui envoient  $\Sigma$  sur lui-même.

Avec ces notations la condition D1 devient:

(D1)' - | Le groupe structural de  $\pi_S$  peut être réduit à  $\text{Aut}(L_S, \Sigma_S)$ .

Fixons pour la suite de ce travail  $(X, \Sigma)$  une PVSF de dimension n.

### 4. Certaines constructions de PVSF à partir de $(X, \Sigma)$ .

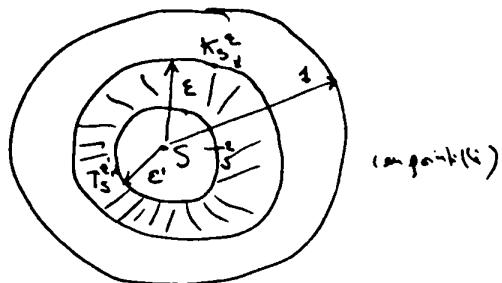
4.1 Soit  $Z \subset X$  un sous-ensemble de  $X$  qui est une pseudovariété stratifiée pour la structure induite. Nous dirons que  $Z$  est plain si il est saturé par les fibres des éléments de  $\Sigma$ , i.e., si pour chaque strate  $S$  de  $X$ :

(7)

$$(4.2) \quad j \in S \cap Z \Rightarrow \pi_S^{-1}(j) \subset Z.$$

Il est clair que si  $Z$  est plain et si  $\bar{\Sigma}_Z$  est constitué par les restrictions à  $Z$  des éléments de  $\bar{\Sigma}$  alors  $(Z, \bar{\Sigma}_Z)$  est une PVSE.

4.3 Soient  $0 \leq \epsilon' < \epsilon \leq 1$  et  $S$  un state de  $X$ . Parous  $K_S^\epsilon = \lambda_S^1(\epsilon)$ ,  $T_S^{\epsilon', \epsilon} = \lambda_S^1([j\epsilon', \epsilon])$  et  $T_S^\epsilon = \lambda_S^1([0, \epsilon])$



En appliquant le résultat précédent les sous-ensembles  $K_S^\epsilon$ ,  $T_S^{\epsilon', \epsilon}$  et  $T_S^\epsilon$  héritent une structure étoilée de celle de  $X$ . Si  $S$  est fermée, alors l'ensemble  $X - \bar{T}_S^\epsilon$ , où  $\bar{-}$  dénote l'adhérence, hérite aussi une structure étoilée. Enfin, si  $U \subset S$  est un ouvert de  $S$  alors  $\pi_S^{-1}(U)$  est aussi une PVSE, avec la structure induite.

4.4 Sur  $X \times ]a, b[$  on considérera la structure étoilée, définie de façon naturelle. Elle sera notée  $(X \times ]a, b[, \bar{\Sigma} \times ]a, b[)$ .

## 5. Compatibilité de deux states

5.1 Explicitons maintenant les conditions D1 et D2 pour le cas de deux states  $S_i$  et  $S_j$  telles que  $S_i \subset \bar{S}_j$ . Supposons pour simplifier que la trace  $L_{S_i} \cap T_{S_j}$  est connexe. Notons  $R$  le state de  $L_{S_i}$ , ayant ~~extension~~  $L_{S_i} \cap S_j$  pour extension canonique (cf. 2). Notons  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow R$  le morphisme canonique de  $R$  ayant  $T_{S_i} \cap T_{S_j}$  pour extension canonique (cf. (3.6)). Rappelons que  $L_{S_j}$  est précisément le link de  $R$ .

(8)

5.2 Dans un premier temps supposons  $\pi_{S_i}$  et  $\pi_{S_j}$  triviaux, i.e.,  $T_{S_i} = S_i \times cL_{S_i}$  et  $T_{S_j} = S_j \times cL_{S_j}$ . D'après D2 :

$$T_{S_i} \cap T_{S_j} = S_i \times c \times ]0,1[ \subset S_i \times cL_{S_j}$$

D'après trivialité de  $T_{S_i}$  et de  $T_{S_j}$  on en déduit :  $c = R \times cL_{S_j}$ . Puisque

$\pi_{S_i}$  est un fibré conjugué on a aussi :  $S_j \cap T_{S_i} = S_i \times R \times ]0,1[ \subset S_i \times cL_{S_j}$ . Par conséquent on en déduit la relation suivante,  $T_{S_i}, T_{S_j}$  et  $c$

$$T_{S_i} \cap T_{S_j} = S_i \times R \times cL_{S_j} \times ]0,1[ = S_j \cap T_{S_i} \times cL_{S_j}.$$

5.3 À l'aide des trivialisations locales, on ramène le cas général au cas précédent. Ainsi pour tout  $x \in T_{S_i} \cap T_{S_j}$  il existe :

- 1)  $(W, \varphi)$  carte de trivialisation de  $\pi_{S_i}$  avec  $\pi_{S_i}(x) \in W$ ,
- 2)  $(V, \psi)$  " " .. " "  $\pi_{S_j}$  " "  $\pi_{S_j}(x) \in V$ , et
- 3)  $(\omega, \gamma)$  " " .. " "  $\pi$  " "  $\pi(\gamma) \in W$  où

$$\varphi(x) = (\pi_i(x), [\gamma, r]), \quad (r \neq 0!),$$

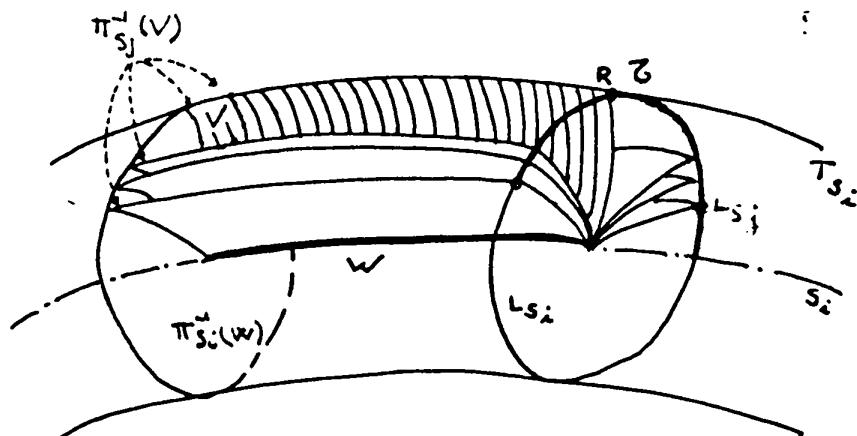
tels que  $\pi_{S_i}^{-1}(W) \cap \pi_{S_j}^{-1}(V) = \pi_{S_j}^{-1}(V)$  et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{S_j}^{-1}(V) & \xrightarrow{\varphi_j} & W \times \pi^{-1}(W) \times ]0,1[ \\
 \downarrow \varphi_j & & \downarrow id \times \gamma \times id \\
 V \times cL_{S_j} & \xrightarrow{\varphi_i \times id} & W \times W \times cL_{S_j} \times ]0,1[ \\
 & & \parallel \\
 & & W \times W \times ]0,1[ \times cL_{S_j}
 \end{array}$$

(5.4)

où l'application  $id$  est l'identité dans les espaces respectifs.

Le diagramme (5.4) est équivalent à la condition D2, pourvu que D1 soit vérifiée.



(dans cette figure  $W$  est confondu à  $R$  et  $Z = L_{S_j}$ )

Une première conséquence de (5.4) est :

### 5.5 Proposition.

Dans les conditions précédentes on a les relations :

- 1)  $\pi_{S_i} \circ \pi_{S_j} = \pi_{S_j}$  ; 2)  $\lambda_{S_i} \circ \pi_{S_j} = \lambda_{S_j}$  ; 3)  $(P_i)_* \chi_{S_i} = (\text{lo}_i)_*(\chi_{Z, 0})$  ; 4)  $\chi_{S_i}(\lambda_{S_j}) = 0$ .

Une autre conséquence directe de (5.4) est le résultat suivant qui généralise (3.4).

### 5.6 Proposition.

Pour tout état  $S$  de  $X$  l'application  $F_S: T_S \times S \rightarrow K_S \times J_{S, 1}[$  définie en (3.4), est un isomorphisme de pseudovariétés stratifiées qui envoie  $E$  sur  $E_{K_S} \times J_{S, 1}[$ .

## 6. Dépliement et dépliage d'une PVSE.

6.1 Le processus de dépliement d'une PVSE consiste d'abord à remplacer chaque état  $S$  de dimension minimal par  $K_S$ , c.e., on remplace chaque  $x \in S$  par  $\pi_S^{-1}(x) \cap K_S = L_S$ . On retrouve le même phénomène dans le passage des coordonnées cartesiennes aux coordonnées polaires.

Dans un deuxième temps, afin de rester dans la catégorie des pseudovariétés sans bord, nous collerons deux exemplaires de l'espace

précédemment obtenu pour leurs bords. Ainsi le dépliement de  $T_S = K_S \times [0,1]_T$  consistera à coller deux exemplaires de  $K_S \times [-1,1]$  par leurs bords, on aura donc  $K_S \times [-1,1]$ .

Si la pseudovariété ainsi obtenue possède une partie singulière non vide nous la répéterons la procédure. Après un nombre fini de pas nous obtiendrons une pseudovariété sans singularités, que nous appellerons dépliement de X. Passons maintenant aux définitions précises.

6.2 Supposons  $\Sigma \neq \emptyset$ . Soit  $\{S_i : i \in I\}$  la famille des strates de dimension minimale de X. Puisque l'union  $\bigsqcup_i S_i$  est fermée, la frontière de  $X - \bigsqcup_i T_{S_i}$  est la réunion des frontières des  $T_{S_i}$ , i.e.,  $\bigsqcup_i K_{S_i} \dots$

On appelle dépliement de X l'espace somme amalgamée de deux copies de  $X - \bigsqcup_i T_{S_i}$  et d'une copie de  $\bigsqcup_i K_{S_i} \times [-1,1]$  collées par leurs bords, c'est-à-dire,

$$\hat{X} = ((X - \bigsqcup_i T_{S_i}) \times \{-1\}) \sqcup (\bigsqcup_i K_{S_i} \times [-1,1]) \sqcup ((X - \bigsqcup_i T_{S_i}) \times \{1\}) / \sim$$

où  $(x, j) \sim (c, t)$ , si  $\begin{cases} x \in K_{S_i} \\ j = t = \pm 1 \\ F_{S_i}(x) = (c, t) \end{cases}$

On appelle application dépliante à  $\tau_X : \hat{X} \rightarrow X$  définie par:

$$(6.3) \quad \tau_X(\gamma) = \begin{cases} \gamma & \text{si } \gamma = (x, j) \in (X - \bigsqcup_i T_{S_i}) \times \{-1, 1\} \\ F_{S_i}^{-1}(c, |t|) & \text{si } \gamma = (c, t) \in K_{S_i} \times [-1, 1], i \in I \end{cases}$$

Cette application est continue par construction. Les propriétés suivantes sont immédiates à partir de la définition :

(11)

- (6.4) l'image réciproque de  $S_i$  est  $K_{S_i} \times \{0\}$ , pour chaque  $i \in I$ ,  
 (6.5) la restriction  $\tau_x : \hat{X} - (\bigsqcup_I (K_{S_i} \times \{0\})) \rightarrow X - \bigsqcup_I S_i$  est un revêtement trivial à deux feuilles, et  
 (6.6) le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} K_{S_i} \times \{0\} & \xhookrightarrow{\quad} & K_{S_i} \times [-1, 1] \\ \downarrow \pi_{S_i} & & \downarrow \tau_x \\ S_i & \xhookrightarrow{\quad} & T_{S_i}. \end{array}$$

Pour chaque strate  $S$  de  $X$ , différente de  $S_i$ , l'ensemble

$$R = ((S - \bigsqcup_I T_{S_i}) \times [-1]) \sqcup \left( \bigsqcup_I (K_{S_i} \cap S) \times [-1, 1] \right) \sqcup ((S - \bigsqcup_I T_{S_i}) \times [1]) / \sim$$

est une variété de la même dimension que  $S$ . Ces variétés définissent une stratification sur  $\hat{X}$  avec l'appelle, le dépliement est une grandorieté stratifiée. Remarquons que la restriction  $\tau_x : \tau_x^{-1}(S) \rightarrow S$  est un revêtement trivial à deux feuilles.

### ~~Hypothèse supplémentaire~~

Le dépliement hante lui aussi une structure étroite de celle de  $X$ , décrite dans la proposition suivante, dont la démonstration est immédiate à partir de (5.4).

### 6.7 Proposition.

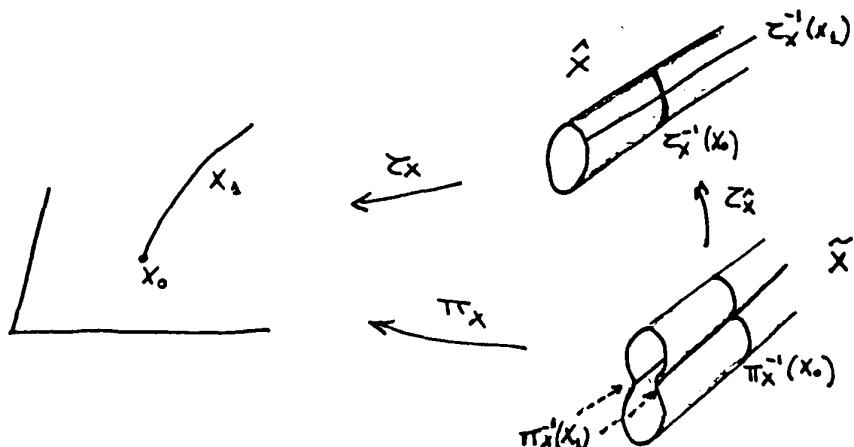
Le dépliement de  $(X, E)$  admet une structure de PVSE, notée  $(\hat{X}, \hat{E})$ , caractérisée par :

- a) la restriction de  $\tau_x$  à chacune des composantes connexes de  $\hat{X} - \bigsqcup_I (K_{S_i} \times \{0\})$  est un isomorphisme pluriisé au sens de [GM2] qui envoie  $E$  sur  $\hat{E}$ , et
- b) la restriction de  $\hat{E}$  à droite  $K_{S_i} \times [-1]$  est  $[E_{K_{S_i}} \times [-1, 1]]$ .

Remarquons que cet ensemble a un sens grâce à (4.3).

6.9 Le processus de déplissement de  $\tilde{X}$  la diminue les strats de  $X$  de dimension minimale, par conséquent :  $\text{long}(X) = \text{long}(\tilde{X}) + 1$ .

~~Si~~ : la pseudovariété  $\tilde{X}$  possède une partie singulière non vide nous itérons le processus de déplissement. Celui-ci s'arrête lorsque  $\text{long}(X) < +\infty$  et la variété  $\tilde{\tilde{X}}$  ainsi obtenue sera appelée déplissage de  $X$ . Nous noterons par  $\pi_X : \tilde{\tilde{X}} \rightarrow X$  la composition des applications déplissantes. Remarquons que restriction de  $\pi_X$  à  $\tilde{\tilde{X}} - \pi_X^{-1}(\Sigma)$  est un revêtement bival à  $\approx \text{long}(X)$  feuilles.



Pas d'autre pour terminer ce paragraphe que le déplissage de  $X$  dépend de la structure étatée de  $\Sigma$  de  $X$ .

## 7. Déplissage simplicial.

Nous introduisons maintenant le déplissage simplicial, appelé ainsi pour sa ressemblance avec le déplissage des pseudovariétés (cf. (7.1)). Cette étude sera utilisée dans VII et dans VIII (formes de Stokes).

~~Mais pas d'application officielle~~

~~Non utilisée en pratique~~

### 7.1 Définitions. (voir [6])

Notre  $\Delta$  un simplexe abstrait et A et B deux faces de  $\Delta$

(13)

avec  $\Delta = A * B$ . Nous disons que  $A$  est la face opposée de  $B$  et vice versa. Pour relier  $\Delta, A$  et  $B$ , nous disposons des applications:

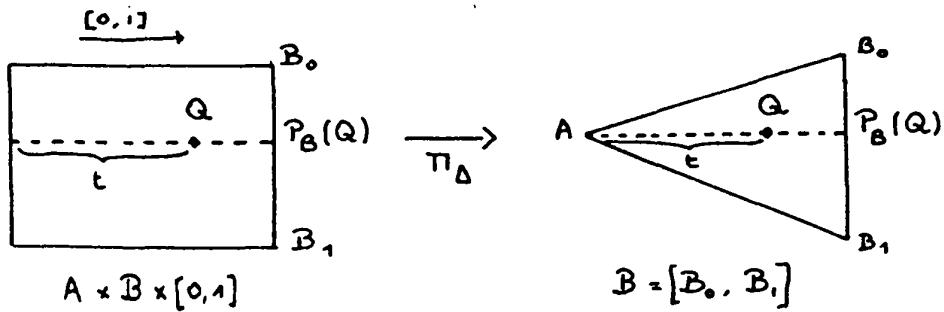
$$(7.2) \quad P_A: \Delta - B \rightarrow A \quad / \quad P_A(ta + (1-t)b) = a, \text{ et}$$

$$(7.3) \quad R_A: \Delta \rightarrow [a] \quad / \quad R_A(ta + (1-t)b) = t,$$

et de façon analogue  $P_B$  et  $R_B$ . Nous pouvons écrire donc:

$$(7.4) \quad x = R_A(x)P_A(x) + R_B(x)P_B(x), \quad \forall x \in \Delta,$$

où on mettra  $P_A(x)$  (resp.  $P_B(x)$ ) au point quelqueque de  $B$  (resp. de  $A$ ) si  $x \in A$  (resp.  $x \in B$ ).



7.5 Considérons  $\{a_0, \dots, a_n\}$  les sommets de  $\Delta$  de façon que  $A$  soit engendré par les  $k$  premiers et  $B$  pour le reste. Ceci nous permet de traiter les points de  $\Delta$  (resp.  $A, B$ ) comme de  $(n+1)$ -uplets (resp.  $(k+1)$ -uplets,  $(n-k-1)$ -uplets) de nombres réels. Ainsi  $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^{k+1}$  et  $B \subset \mathbb{R}^{n-k-1}$ .

Nous dirons qu'une application  $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ , définie sur un polyèdre  $P \subset \mathbb{R}^n$ , est différentiable si elle est la restriction d'une application différentiable  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ , contenant  $P$ .

Possus  $x = (t_0, \dots, t_n) \in \Delta$ , alors  $R_A(x) = t_0 + \dots + t_k$ , qui est une application différentiable, et  $P_A(x) = (t_0 + \dots + t_k)^{-1} (t_0, \dots, t_k)$ . Cette dernière expression a un sens car:  $x \in B \Leftrightarrow t_0 + \dots + t_k = 0$

À l'aide de ces expressions locales on montre:

### 7.6 Lemme.

Soient  $D$  et  $K$  deux sous-convexes de  $\Delta$  avec  $K \subset \Delta - B$ .  
Notons  $\sigma$  le sommet de  $\bar{\epsilon}D$ . Les applications suivantes sont différentiables :

a)  $g: \bar{\epsilon}D \rightarrow [0,1] \quad | \quad g(tx + (1-t)\sigma) = tR_A(x),$

b)  $G: \bar{\epsilon}D \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{d+1} \quad | \quad G(tx + (1-t)\sigma, y) = tR_A(x)P_A(x) + (1-t)R_A(y)P_A(y),$

c)  $P_A: K \rightarrow A.$

### Démonstration.

Le polyèdre  $\bar{\epsilon}D$  est inclus de façon naturelle dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  par :

$$\iota: \bar{\epsilon}D \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \quad | \quad \iota(tx + (1-t)\sigma) = (t \cdot x, t)$$

Alors  $g$  est la restriction sur  $\bar{\epsilon}D$  de l'application :

$$\rho: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad | \quad \rho(t_0, \dots, t_n, t) = t(t_0 + \dots + t_n)$$

qui est différentiable. L'application  $G$  est la restriction sur  $\bar{\epsilon}D \times \Delta$  de l'application :

$$\alpha: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1} \quad | \quad \alpha(t_0, \dots, t_n, s_0, \dots, s_d) = (t_0 + (1-t)s_0, \dots, t_n + (1-t)s_d),$$

elle aussi différentiable.

Pour c) considérons  $U = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 + \dots + t_n = 0\}$ , ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$  contenant  $K$ . D'après l'écriture locale de  $P_A$  il est clair que  $P_A: \Delta \rightarrow A$  est différentiable.  $\#$

### 7.7 Déplissage de $\Delta$ .

Fixons sur  $\Delta$  une décomposition ordonnée de faces.

$\Delta = \Delta_0 * \dots * \Delta_p$ . Remarquons que  $\Delta$  est le produit avec les relations :

$$(7.8) \left\{ \begin{array}{l} (a_0, \dots, a_i, \dots, a_p, t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}) \sim_0 (a_0, \dots, a_i, \dots, a_p, t_0, t_{i-1}, 0, t_i + t_p) \\ (a_0, \dots, a_i, \dots, a_p, t_0, \dots, t_{i-1}, 1, t_i, \dots, t_{p-1}) \sim_1 (a_0, \dots, a_i, \dots, a_p, t_0, \dots, t_{i-1}, 1, t_i, \dots, t_{p-1}) \end{array} \right.$$

Le polyèdre  $\tilde{\Delta} = \Delta_0 * \dots * \Delta_p * [0,1]^p / \sim$  sera appelé déplissage de  $\Delta$  le long de  $\Delta_0 * \dots * \Delta_p$ .

Les points de  $\tilde{\Delta}$  seront notés  $[x_0, \dots, x_p, t_0, \dots, t_{p-1}]$ . L'application ~~et inverse pour~~  $\pi_\Delta: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$  est définie par :

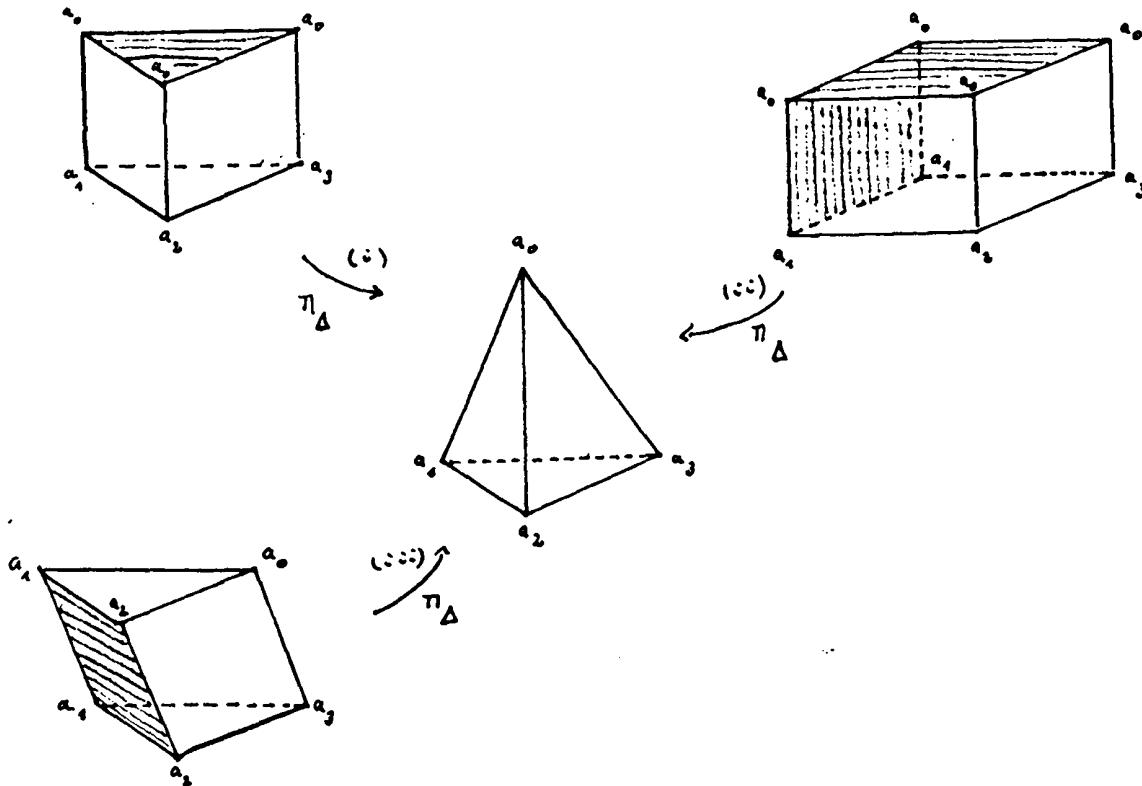
$$\pi_\Delta([x_0, \dots, x_p, t_0, \dots, t_{p-1}]) = t_0x_0 + (1-t_0)t_1x_1 + \dots + (1-t_{p-2})t_{p-2}x_{p-2} + (1-t_{p-1})x_p$$

## 7.9 Exemples.

Soit  $\Delta = \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle$  un tétraèdre de sommets  $a_0, a_1, a_2$  et  $a_3$ .  
Sur  $\Delta$  considérons les décompositions :

- (i)  $\Delta = \langle a_0 \rangle \times \langle a_1, a_2, a_3 \rangle,$
- (ii)  $\Delta = \langle a_0 \rangle \times \langle a_1 \rangle \times \langle a_2, a_3 \rangle.$
- (iii)  $\Delta = \langle a_1, a_2 \rangle \times \langle a_0, a_3 \rangle.$

Les déplissages respectifs sont :



~~¶~~ Même si on se limite souvent à écrire que "déplissage de  $\Delta$ ", il ne faut pas perdre de vue que  $\tilde{\Delta}$  dépend de la décomposition  $\Delta = \Delta_0 \times \dots \times \Delta_p$  choisie.

7.10 Le polyèdre  $\tilde{\Delta}$  est homéomorphe à  $\tilde{\Delta}_0 \times \dots \times \tilde{\Delta}_{p-1} \times \Delta_p$  par l'application :

$$\alpha : \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{\Delta}_0 \times \dots \times \tilde{\Delta}_{p-1} \times \Delta_p \quad | \quad \alpha([x_0, \dots, x_p, t_0, \dots, t_{p-1}]) = ([x_0, t_0], \dots, [x_{p-1}, t_{p-1}], x_p),$$

où les crochets indiquent des classes d'équivalence dans l'espace respectifs. Dans la suite on identifiera ces deux présentations.

La restriction de  $\pi_\Delta$  à l'intérieur de  $\tilde{\Delta}$  est un difféomorphisme. Sur cet ensemble une section  $\sigma$  est donnée par:

$$\sigma(x) = \left[ P_{\Delta_0}(x), R_{\Delta_0}(x) \right], \left[ P_{\Delta_1}(x), \frac{R_{\Delta_1}(x)}{R_{\Delta_0 \times \cdots \times \Delta_p}(x)} \right], \dots, \left[ P_{\Delta_{p-1}}(x), \frac{R_{\Delta_{p-1}}(x)}{R_{\Delta_0 \times \cdots \times \Delta_p}(x)} \right], P_{\Delta_p}(x),$$

car d'après (7.4) on a:

$$x = \sum_{i=0}^p R_{\Delta_i}(x) P_{\Delta_i}(x), \text{ pour tout } x \in \Delta.$$

Pour des raisons qui apparaîtront clairement dans IV nous disons que  $\Delta_0 \times \cdots \times \Delta_{p-2}$  est la face singulière de  $\Delta$ .

### 7.11 Remarque.

Si au moment d'introduire les pseudovariétés stratifiées on s'était placé dans la catégorie "à bord et à coins", le simplexe  $\Delta$ , avec la filtration  $F_\Delta = (\Delta \supset \Delta_0 \times \cdots \times \Delta_{p-1} \supset \Delta_0 \times \cdots \times \Delta_{p-2} \supset \cdots \supset \Delta_0 \supset \emptyset)$  serait maintenant une pseudovariété stratifiée.

Dans cette catégorie on peut  $\Delta$  d'une structure naturelle de PVSE. En effectuant le premier pas du déplissage décrit en §6, on reste dans la catégorie et ce n'y a donc pas lieu de continuer avec le deuxième pas. Ce "déplissage" est justement le processus défini en (7.7). Ce qui justifiait la dénomination de "déplissage simplicial".

Ces considérations ne sont pas utilisées dans la suite.

Tirons pour le reste du paragraphe une décomposition  $\Delta = \Delta_0 \times \cdots \times \Delta_p$ .  $\tilde{\Delta}$  deviendra le déplissage de  $\Delta$  le long de cette décomposition.

### 7.12 Etude des faces de codimension 1 de $\tilde{\Delta}$ .

Pour cette étude on supposera que la face singulière de  $\Delta$  n'est pas un point. Soit  $F$  une face de codimension 1 de  $\tilde{\Delta}$ . Posons  $K = \pi_\Delta(F)$ ,

Pour étudier la relation entre  $F$  et  $K$  distinguons trois cas :

- (1)  $F = \bar{\Delta}_0 \times \dots \times \bar{\Delta}_{i-1} \times \bar{\Delta}_i \times \bar{\Delta}_{i+1} \times \dots \times \bar{\Delta}_{p-1} \times \Delta_p$ , où  $\bar{\Delta}_i \subset \Delta_i$  est une face de codimension 1,
- (2)  $F = \bar{\Delta}_0 \times \dots \times \bar{\Delta}_{p-1} \times F_p$ ; où  $F_p \subset \Delta_p$  est une face de codimension 1
- (3)  $F = \bar{\Delta}_0 \times \dots \times \bar{\Delta}_{i-1} \times (\Delta_i \times \{1\}) \times \bar{\Delta}_{i+1} \times \dots \times \bar{\Delta}_{p-1} \times \Delta_p$ .

Paragraphe à mettre dans le papier séparé

La distribution des faces dans les exemples de (7-9) est la suivante (où  $\{ \dots \}$  dénote les faces) :

- (i)  $\begin{cases} (1) \{a_1, a_2, a_3\} \\ (2) \{a_0, a_0, a_1, a_2\}, \{a_0, a_0, a_2, a_3\}, \{a_0, a_0, a_1, a_3\} \\ (3) \{a_0, a_0, a_0\} \end{cases}$
- (ii)  $\begin{cases} (1) \{a_1, a_1, a_2, a_3\}, \{a_0, a_0, a_2, a_3\} \\ (2) \{a_0, a_0, a_1, a_2\}, \{a_0, a_0, a_1, a_3\} \\ (3) \{a_0, a_0, a_1, a_1\}, \{a_0, a_0, a_0, a_0\} \end{cases}$
- (iii)  $\begin{cases} (1) \{a_1, a_0, a_0, a_3\}, \{a_2, a_2, a_0, a_3\} \\ (2) \{a_0, a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\} \\ (3) \{a_1, a_1, a_2, a_2\} \end{cases}$

Dans le premier cas  $K = \Delta_0 \times \dots \times \Delta_{i-1} \times \bar{\Delta}_i \times \Delta_{i+1} \times \dots \times \Delta_p$  et dans le deuxième  $K = \Delta_0 \times \dots \times \Delta_{p-1} \times \bar{\Delta}_p$ . C'est-à-dire,  $K$  parcourt les faces de codimension 1 de  $\Delta$ . Dans chacun de ces deux cas  $F$  est le déplissage de  $K$  le long de la décomposition correspondante. D'autre part la restriction de  $\pi_\Delta$  à  $F$  coïncide avec  $\pi_K$ .

Dans (3) on obtient  $K = \Delta_0 \times \dots \times \Delta_i$  et la restriction de  $\pi_\Delta$  à  $F$  est la composée de la projection naturelle de  $F$  sur  $\bar{\Delta}_0 \times \dots \times \bar{\Delta}_{i-1} \times \Delta_i$

avec  $\pi_K$ . L'application  $\pi_\Delta$  est donc une fibration sur l'intérieur de  $\tilde{\Delta}$ . La face  $K$  est dans la face singulière de  $\Delta$ . La codimension de  $K$  dans  $\Delta$  est strictement plus grande que 1.

Remarquons que ces trois cas sont indépendants les uns des autres car  $\Delta_p$  n'est pas un point.

Ajouter paragraphe de la page précédente.

7.13 Considérons sur  $\tilde{\Delta}$  l'orientation qui fait de  $\pi_\Delta$  un morphisme préservant l'orientation. (Comme  $\pi_\Delta$  est un difféomorphisme à l'intérieur de  $\tilde{\Delta}$ , cela est toujours possible) Nous écrivons donc  $\tilde{\partial}\tilde{\Delta}$  en conservant l'orientation induite. D'après la décomposition précédente on aura :

$$(7.14) \quad \tilde{\partial}\tilde{\Delta} = \tilde{\gamma}_1\tilde{\Delta} + \tilde{\gamma}_2\tilde{\Delta} + \tilde{\gamma}_3\tilde{\Delta},$$

où  $\tilde{\gamma}\tilde{\Delta}$  est la chaîne orientée constituée par des éléments du type  $j=1, 2, 3$ .

### 7.15 Déplissage simplicial induit.

Soit  $C$  un sous-simplicial de  $\Delta$ . Considérons la suite  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_q \leq p$  telle que :

$$\begin{aligned} \phi &= C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_0-1}) \not\models C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_0}) = \dots = C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_1-1}) \not\models \dots \\ &\dots \not\models C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_q}) = \dots = C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_p) = C. \end{aligned}$$

Pour chaque  $j \in \{0, \dots, q\}$  on pose  $C_j$  la face de  $C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_j})$  opposée à  $C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_{j+1}})$ , ainsi :

$C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_i) = C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_{j+1}}) * C_j = C_0 * \dots * C_j$   
Ajouter 5 lignes de l'annexe (sur les 5 lignes qui suivent)  
Elle décomposition  $C = C_0 * \dots * C_q$  est décomposition de  $C$  induite  
par celle de  $\Delta$ . Notons  $\tilde{C}$  le déplissage correspondant.

(\*) Ajouter d'après addendum  
 Dans la suite on présente certains lemmes dont l'objectif est de montrer la relation existante entre  $\tilde{C}$  et  $\tilde{\Delta}$ . Afin de préserver la cohérence des notations on mettra :  $i_{-1} = -1$ ,  $i_{q+1} = p+1$ ,  $C_{-1} = \emptyset$  et  $C_{q+1} = C$ .

7.16 Lemma.

Soit  $j \in \{1, 2, \dots, q\}$  et  $x \in C_j$ . Alors si  $m > i_j$ ,  $R_{\Delta_m}(x)$  est zéro et si  $m = i_j$  alors  $R_{\Delta_m}(x) \neq 0$ .

Démonstration.

Si  $m > i_j$ , par construction  $x$  est point de  $C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_j})$  et donc il est inclus dans  $\Delta_0 * \dots * \Delta_{m-1}$ . En conséquence  $R_{\Delta_m}(x) = 0$ . Si  $m = i_j$  alors  $C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_m) = C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{m-1}) * C_j$  et donc  $R_{\Delta_m}(x) \neq 0$ . #

7.17 Lemma.

Considérons  $\tilde{x} = ([x_0, t_0], \dots, [x_{q-1}, t_{q-1}], x_q) \in \widetilde{C}$ ,  $j \in \{1, \dots, q\}$  et  $m > i_j$ . Posons  $x = \pi_C(\tilde{x})$  et  $y = \pi_C([x_0, 0], \dots, [x_j, 0], [x_{j+1}, t_{j+1}], \dots, [x_{q-1}, t_{q-1}], x_q]$ . Alors les relations suivantes sont vraies :

- $R_{\Delta_m}(x) = (1-t_0) \dots (1-t_{j-1}) (t_j R_{\Delta_m}(x_j) + (1-t_j) R_{\Delta_m}(y))$ ,
- $R_{\Delta_m}(x) P_{\Delta_m}(x) = (1-t_0) \dots (1-t_{j-1}) (t_j R_{\Delta_m}(x_j) P_{\Delta_m}(x_j) + (1-t_j) R_{\Delta_m}(y) P_{\Delta_m}(y))$ ,
- $R_{\Delta_m * \dots * \Delta_q}(y) \neq 0$ , si  $i_j < m \leq i_{j+1}$ .

Démonstration.

a) On a  $x = t_0 x_0 + (1-t_0) t_1 x_1 + \dots + (1-t_{j-1}) t_j x_j + (1-t_j) \dots (1-t_q) y$ . D'après le lemme précédent  $R_{\Delta_m}(x_h)$  s'annule pour  $h \in \{0, \dots, j-1\}$ , par conséquent :  $R_{\Delta_m}(x) = (1-t_0) \dots (1-t_{j-1}) (t_j R_{\Delta_m}(x_j) + (1-t_j) R_{\Delta_m}(y))$ . Pour montrer b) on agit de la même façon. Pour c) remarquons que le point  $y$  n'appartient pas à  $C \cap \dots * C_j = C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_j})$ . D'autre part  $i_j < m-1 \leq i_{j+1}$ , ainsi :  $y \notin C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_j}) = C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{m-1})$ , et donc  $R_{\Delta_m * \dots * \Delta_q}(y)$  est différent de zéro. #

7.18 Lemma.

Pour chaque  $m \in \{0, \dots, p-1\}$  les applications :

$$\Psi_m : \widetilde{C} \rightarrow [0, 1] / \Psi_m(\tilde{x}) = \frac{R_{\Delta_m}(\pi_C(\tilde{x}))}{R_{\Delta_0 * \dots * \Delta_p}(\pi_C(\tilde{x}))} \quad \text{et}$$

$$\varphi_m : \widetilde{C} \rightarrow \bar{\Delta}_m / \varphi_m(\tilde{x}) = \Psi_m(\tilde{x}) P_{\Delta_m}(\pi_C(\tilde{x})) + (1 - \Psi_m(\tilde{x})) \bar{\Gamma}_m,$$

où  $\gamma_m$  est le sommet de  $\tilde{\Delta}_m$ , non différentiable.

### Démonstration.

Pour  $j \in \{1, \dots, q-1\}$  vérifiant  $i_j \leq m < i_{j+1}$ . Par (7.17 b) on a la relation:

$$(*) \Psi_m(\tilde{x}) = \frac{t_j R_{\Delta_m}(x_j) + (1-t_j) R_{\Delta_m}(\gamma)}{t_j R_{\Delta_m}(x_j) + (1-t_j) R_{\Delta_m} * \dots * \Delta_p(\gamma)}.$$

Si  $m = i_j$  alors  $R_{\Delta_m}(x_j)$  et  $R_{\Delta_m} * \dots * \Delta_p(\gamma)$  sont tous nuls.

Alors le dénominateur de cette expression est différent de zéro et donc  $\Psi_m$  est différentiable (cf. (7.6)).

$$\text{Si } m \neq i_j \text{ alors l'expression (*) est réduite à: } \Psi_m(\tilde{x}) = \frac{R_{\Delta_m}(\gamma)}{R_{\Delta_m} * \dots * \Delta_p(\gamma)},$$

qui est différentiable par les mêmes raisons.

Pour  $\Psi_m$  on raisonne de la même façon sur l'égalité:

$$\Psi_m(\tilde{x}) = \frac{t_j R_{\Delta_m}(x_j) P_{\Delta_m}(x_j) + (1-t_j) R_{\Delta_m}(\gamma) P_{\Delta_m}(\gamma)}{t_j R_{\Delta_m}(x_j) + (1-t_j) R_{\Delta_m} * \dots * \Delta_p(\gamma)} + (1-\Psi_m(\Pi_c(\tilde{x}))) \gamma_m. \#$$

### 7.19 Lemma.

Supposons que  $C$  n'est pas inclus dans la face singulière de  $\Delta$ .

Soit  $\tilde{x} = ([x_0, t_0], \dots, [x_{q-1}, t_{q-1}], x_q)$  un point de  $\tilde{\Delta}$  et  $x = \Pi_c(\tilde{x})$ , alors:

$$R_{\Delta_p}(x) P_{\Delta_p}(x) = R_{\Delta_p}(x) P_{\Delta_p}(x_q).$$

### Démonstration.

Par hypothèse  $C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{p-1}) \neq C$ ,  $p = q$  et  $C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{p-1}) = \emptyset$ .

En appliquant le lemme (7.17) pour  $m = q$  et  $j = q$  on obtient les relations:

$$R_{\Delta_p}(x) = (1-t_0) \dots (1-t_{q-1}) R_{\Delta_p}(x_q) \text{ et } R_{\Delta_p}(x) P_{\Delta_p}(x) = (1-t_0) \dots (1-t_{q-1}) R_{\Delta_p}(x_q) P_{\Delta_p}(x_q),$$

d'où le résultat. #

Finalement, la relation entre  $\tilde{\Delta}$  et  $\tilde{\Delta}$  se trouve dans:

### 7.20 Proposition.

Soit  $C$  un sous-complexe de  $\Delta$  tel que  $C$  ne soit pas inclus dans la face singulière de  $\Delta$ . Il existe une application différentiable  $h: \tilde{C} \rightarrow \tilde{\Delta}$  qui vérifie  $\Pi_{\Delta} \circ h = \Pi_C$ .

#### Démonstration.

Considérons  $h: \tilde{C} \rightarrow \tilde{\Delta}$  qui associe à chaque  $\tilde{x} = ([x_0, t_0], \dots, [x_q, t_q], x_q)$  le point :  $h(\tilde{x}) = (\Psi_0(\tilde{x}), \dots, \Psi_{q-1}(\tilde{x}), P_{\Delta_q}(x_q))$ . Cette application est bien définie car  $C$  ne rencontre pas  $\Delta_0 \times \dots \times \Delta_{q-1}$ . Elle est différentiable (cf. (7.18) et (7.6)).

Par définition de l'application  $\Pi_{\Delta}$  nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \Pi_{\Delta}(h(\tilde{x})) &= \sum_{k=0}^{m-1} ((1-\Psi_0(\tilde{x})) \dots (1-\Psi_k(\tilde{x}))) \Psi_k(\tilde{x}) P_{\Delta_k}(\Pi_{\Delta}(\tilde{x})) + \\ &\quad + (1-\Psi_0(\tilde{x})) \dots (1-\Psi_{m-1}(\tilde{x})) P_{\Delta_m}(x_q), \end{aligned}$$

ce qui d'après (7.19) est égal à :

$$\Pi_{\Delta}(h(\tilde{x})) = \sum_{k=0}^{m-1} R_{\Delta_k}(\Pi_C(\tilde{x})) P_{\Delta_k}(\Pi_C(\tilde{x})) + R_{\Delta_m}(\Pi_C(\tilde{x})) P_{\Delta_m}(x_q).$$

Finalement, compte tenu de (7.19) et de (7.10) nous avons :

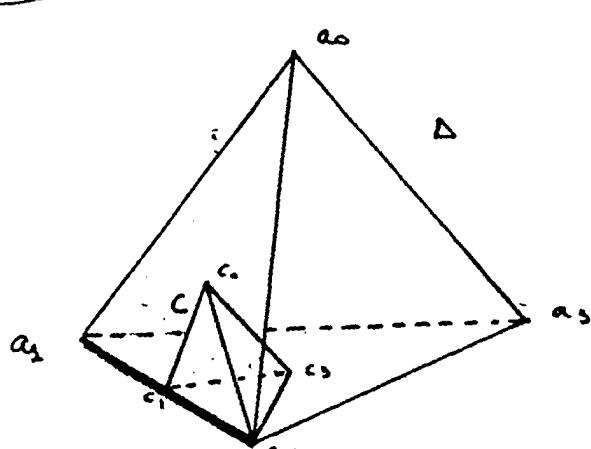
$$\Pi_{\Delta}(h(\tilde{x})) = \sum_{k=0}^m R_{\Delta_k}(\Pi_C(\tilde{x})) P_{\Delta_k}(\Pi_C(\tilde{x})) = \Pi_C(\tilde{x}). \#$$

Puisque pour terminer cette section que, dans l'intérieur de  $\tilde{C}$ ,  $h$  est égale à  $\sigma \cdot \Pi_C$ , où  $\sigma$  est la section de  $\Pi_{\Delta}$  (cf. 7.10).

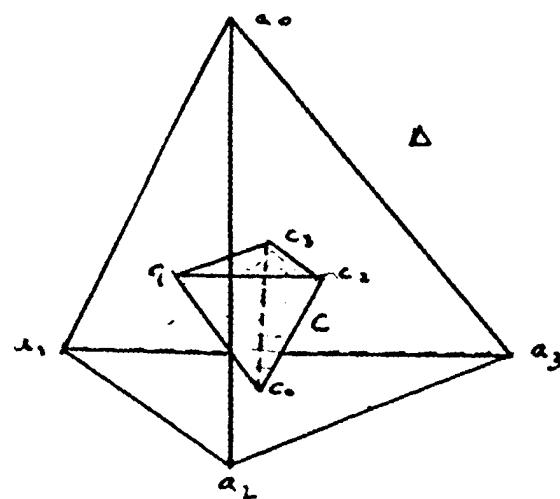
ANNEXE

(D)

DESSIN 2



(i)



(ii)

Considérons que  $\Delta$  la décomposition  $\Delta = \Delta_0 * \Delta_1 * \Delta_2$  où :

$\Delta_0 = \langle a_0, a_3 \rangle$ ,  $\Delta_1 = \langle a_0 \rangle$  et  $\Delta_2 = \langle a_3 \rangle$ .

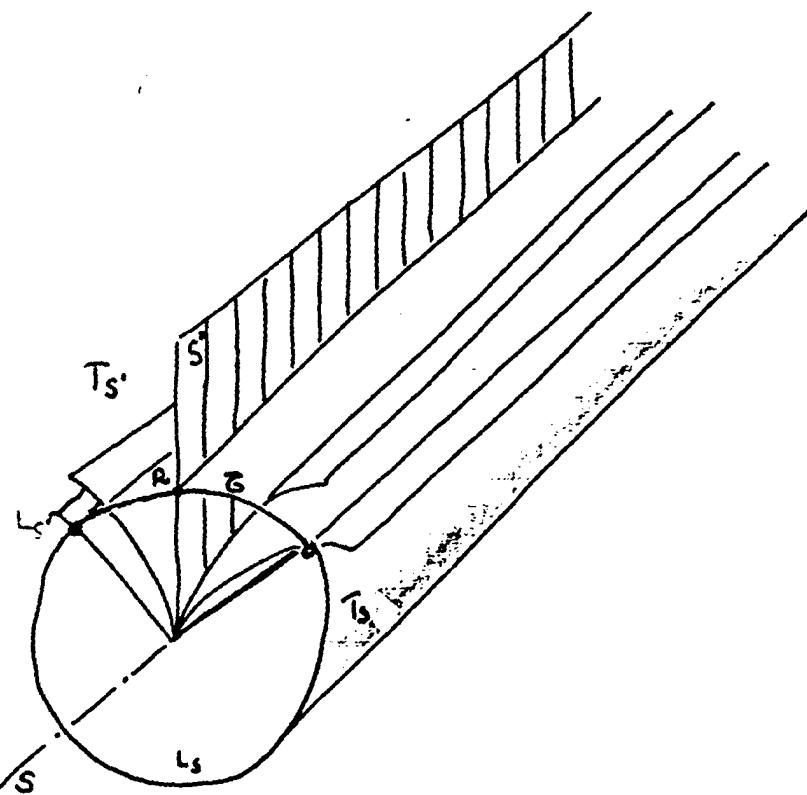
$\Delta_0 = \langle a_0, a_3 \rangle$ ,  $\Delta_1 = \langle a_0 \rangle$  et  $\Delta_2 = \langle a_3 \rangle$ .

La décomposition induite sur  $C$  est :

(i)  $C = C_0 * C_1 * C_2$ , où :  $C_0 = \langle c_0, c_3 \rangle$ ,  $C_1 = \langle c_0 \rangle$  et  $C_2 = \langle c_3 \rangle$ .

(ii)  $C = C_0 * C_1$ , où :  $C_0 = \langle c_0 \rangle$  et  $C_1 = \langle c_0, c_2, c_3 \rangle$ .

DESSIN 2



## Chapitre III

(1)

### L<sup>2</sup>-COHOMOLOGIE ET PSEUDOVARIETES STRATIFIEES ENROLLES.

Cheeger fut le premier à étudier la relation entre la  $L^2$ -cohomologie et l'homologie d'intersection d'une pseudovariété stratifiée. Dans [Coh] et [Che 2] il montre le résultat suivant:

"Si  $X$  est une pseudovariété stratifiée, à singularités isolées, où  $\bar{P}$  une pseudovariété supérieure ou égale à la pseudovariété initiale, alors il existe une variété riemannienne sur  $X \rightarrow \Sigma$  telle que la  $L^2$ -cohomologie de  $X \rightarrow \Sigma$  et l'homologie d'intersection de  $X$  pour  $\bar{P}$ , soient isomorphes."

Il remarque que si  $\bar{P}$  est la pseudovariété unité, alors la métrique peut être sphérique plate.

Dans ce paragraphe nous adoptons la variété de Cheeger aux PSC. Ce point de vue suggère celui de Noguchi [Nog], c'est avec cette variété que nous étendrons la théorie de Cheeger aux PSC, dans VIII.

#### 1. Rappels.

Soit  $(N, m)$  une variété riemannienne de dimension  $n$ . Notons  $S^*(N)$  le complexe des formes différentielles, à supports fermés,  $k$ -es et un élément de  $S^*(N)$  on appelle la livrure que lui par:

$$\|w\|_m = \left( \int_N |w|^2 g \right)^{1/2},$$

où  $g$  est la métrique sphérique riemannienne. Remarquons que cette norme peut être infinie.

Le sous-complexe différentiel:

$$S^*_{\text{dR}}(N, m) = \{ w \in S^*(N) / \|w\|_m < \infty \text{ et } \|dw\|_m = 0 \}$$

est le complexe  $L^2$ -Pures. Remarquons que si  $N$  ne comporte alors un complexe et tout simplement  $S^*(N)$ . Deux situations intéressantes sont possibles, noté  $m_1, m_2$ , il existe  $K > 0$  tel que  $\frac{1}{K} m_1 \leq m_2 \leq K m_1$ . Des classes d'équivalence de cette relation sont les types de spinc-tori. Le complexe  $S^*_{\text{dR}}(N, m)$

(2)

ne dépend que du type de quasi-isométrie de  $m$ .

La cohomologie du complexe  $\mathcal{L}_{(2)}^*(N, m)$ , notée  $H_{(2)}^*(N, m)$ , est la  $L^2$ -cohomologie de  $(N, m)$  et est un invariant de quasi-isométrie de  $m$ .

Le type de pseudovariété étudiée par Cheeger est celui du cône d'une variété. La partie régulière de  $cN$  est le produit  $N \times ]0, 1[$ . Sur cette variété il considère la famille des métriques riemanniennes suivante:

$$m(a) = r^{2a} m + dr^2$$

où  $a > 0$  et  $r \in ]0, 1[$  désigne la variable de  $]0, 1[$ .

Le résultat suivant est du à Cheeger et se trouve à la base de ce travail.

e. Théorème [Ch. 2, <sup>Lemma 3.4</sup> p. 3]

Soit  $(N, m)$  une variété riemannienne de dimension  $n$ . Si la cohomologie  $H_{(2)}^*(N, m)$  est de dimension finie alors on a:

- i) pour tout entier  $i < \frac{1}{2}(n + \frac{1}{a})$  l'application  $pr^*: H_{(2)}^*(N, m) \rightarrow H_{(2)}^*(N \times ]0, 1[)$  induite par la projection canonique  $pr: N \times ]0, 1[ \rightarrow N$ , est un isomorphisme et
- ii) pour tout entier  $i > \frac{1}{2}(n + \frac{1}{a})$ ,  $H_{(2)}^i(N, m(a)) = 0$ .

e.1 Une conséquence immédiate de ce théorème est que si  $V \subset ]0, 1[^{\frac{n}{2}}$  est un ouvert simplement connexe, alors la projection canonique  $pr: N \times V \rightarrow N$  induit un isomorphisme entre  $H_{(2)}^*(N, m)$  et  $H_{(2)}^*(N \times V, m + dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$ .

2.2 Notations. Si  $w \in \mathcal{L}^*(N \times ]0, 1[^{\frac{n}{2}})$  et  $(x_1, \dots, x_j) \in ]0, 1[^{\frac{n}{2}}$  nous poserons  $w(x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{L}^*(N)$  la restriction de  $w$  à la couche de "hauteur"  $(x_1, \dots, x_j)$ . C'est à-dire, si  $I: N \rightarrow N \times ]0, 1[^{\frac{n}{2}}$  est donnée par  $I(x) = (x, x_1, \dots, x_j)$  alors  $\omega w(x_1, \dots, x_j) = I^*w$ .

3. Modèle local.

Fixons  $x \geq 0$  et  $j \in \mathbb{N}$ . Sur la variété  $]0, 1[^{\frac{n}{2}} \times N \times ]0, 1[$  on considère

(3)

la métrique riemannienne:

$$\mu = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 + r^{2\alpha} dr^2$$

où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les variables de  $J_{0,1}[\delta]$  et  $r$  celle de  $J_{0,1}[1]$ .

Cette métrique constituera le "modèle local" des métriques appelées adaptées aux  $\gamma$ 's, qui seront introduites dans la section suivante.

Le résultat qui suit se trouve dans [Ch2], page .

### 3.1 Proposition.

$$\text{Soit } w = \sum_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dr \wedge \sum_{j_1, \dots, j_q} dr_{j_1} \wedge \dots \wedge dr_{j_q}$$

un élément de  $\mathcal{S}^1(J_{0,1}[\delta \times N \times] \alpha)[1]$ , où les formes  $dx_{i_1, \dots, i_p}$  et  $dr_{j_1, \dots, j_q}$  ne contiennent pas les éléments  $dx_1, \dots, dx_n, dr$ . Alors la norme de  $w$  pour  $\mu$  est :

$$\|w\|_\mu = \sum_{i_1, \dots, i_p} \left[ \int_0^1 r^{\alpha(n-2(i-1-p))} \|dx_{i_1, \dots, i_p}(r)\|_{\mu_i}^2 dr + \right. \\ \left. \int_0^1 r^{\alpha(n-2(j-p))} \|dr_{j_1, \dots, j_q}(r)\|_{\mu_j}^2 dr \right]^{1/2}$$

où  $\mu_i = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 + r^{2\alpha} dr^2$  est une métrique riemannienne sur  $J_{0,1}[\delta \times N]$ .

Fixons pour la suite  $(X, \mathbb{E})$  une  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n$  et  $\hat{\alpha} = [\alpha_0, \dots, \alpha_n]$  une  $(n+1)$ -tuple de nombres réels positifs ou nuls.

### 4. Métriques riemanniennes $\hat{\alpha}$ -adaptées à une $\mathbb{R}^n$ .

4.1 On définit cette notion sur la longueur de  $X$ . Si cette longueur est nulle alors toute métrique riemannienne sur  $X^+ = X$  sera dite  $\hat{\alpha}$ -adaptée à  $\mathbb{E}$ . Dans le cas général, nous dirons qu'une métrique riemannienne  $\mu$  sur  $X^+$  est  $\hat{\alpha}$ -adaptée à  $\mathbb{E}$  si pour toute partie  $S$  de  $X$  et tout point  $x \in S$  il existe :

a)  $V \subset S$  voisinage de  $x$  et  $\varphi: \pi_S^{-1}(V) \rightarrow V \times L_S$  carte de trivialisation de  $\pi_S$ ,

b)  $\eta$  métrique riemannienne sur  $V$ ,

c)  $m$  métrique riemannienne sur  $L_S^+$ ,  $[\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}]$ -adaptée à

(4)

$\mathbb{E}_S$ , où  $j = \dim S$ ,

tels que sur la partie régulière de  $T_S^*(V)$  on ait:

$$(4.2) \quad \mu \sim \varphi^{-*}(g + m(a_{n-j})).$$

### Définition

4.3 Un ouvert  $T_S^*(V)$  du type précédent sera appelé ouvert modèle. Si  $V$  est contractile et relativement compacte. A isomorphisme près (au sens des DVS) et au sens métrique) un ouvert modèle est :

$$]0,1[^j \times L_S$$

avec la métrique riemannienne  $dx_1^2 + \dots + dx_j^2 + dr^2 + r^{2m-j} dm$  (sur la partie régulière), où  $-j = \dim S$  et  $m$  est  $[a_0, \dots, a_{n-j}]$ -adaptée à  $\mathbb{E}_S$ .

La notion de métrique adaptée généralise celle de Cheeger, où les strates sont des points [Ch1], et celle de Nagase, où les strates sont des cubes [Na]. Nous montrons, dans les paragraphes suivants, l'existence et l'unicité de telles métriques. Cependant, contrairement à [Ch1] et à [Na], les strates des DVS n'admettent pas toujours des voisinages connexes triviaux et l'existence des métriques  $\hat{\alpha}$ -adaptées est plus compliquée à montrer. Cette démonstration utilisera un autre type de métriques, les métriques constructibles.

5. Proposition. Unicité des métriques  $\hat{\alpha}$ -adaptées.

Deux métriques riemanniennes sur  $X^+$ ,  $\hat{\alpha}$ -adaptées sont équivalentes, pourvu que  $X$  soit compacte.

### Démonstration.

Soient  $\mu$  et  $\mu'$  des telles métriques. On raisonne par récurrence sur la longueur de  $X$ . Si cette longueur est nulle, alors le résultat est évident car  $X^+ = X$  est une variété compacte.

Dans le cas général remarquons que  $X$  est recouvert par un nombre fini d'ouverts modèles. Le problème se réduit à montrer que sur  $]0,1[^j \times L_S^+ \times ]0,1[$  les deux métriques  $dx_1^2 + \dots + dx_j^2 + m(a_{n-j})$  et

(5)

$dx_1^2 + \dots + dx_j^2 + m'(a_{n,j})$  sont équivalents. Ce qui est le cas, car par hypothèse de récurrence,  $m$  et  $m'$  sont équivalents.  $\blacksquare$

### 6. Métriques a-constructibles sur un fibré conique.

~~Parce que tout fibré est décomposé en fibrés canoniques.~~

Soit  $\pi: T \rightarrow S$  un fibré conique du fibre le cône fermé  $\bar{L}$ . Nous construisons sur  $T^+$  une métrique riemannienne qui étend la modèle locale.

Fixons  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in J}$  un revêtement de  $S$  constitué par des ouverts de trivialisation et notons par  $\varphi_i: \pi^{-1}(V_i) \rightarrow V_i \times \bar{L}$  une telle trivialisation. Fixons  $\{f_i\}_{i \in J}$  une partition de l'unité associée à  $\mathcal{V}$  et posons  $\{\tilde{f}_i\}_{i \in J}$  la partition de l'unité <sup>subordonnée</sup> associée subordonnée à  $\{\pi^{-1}(V_i)\}_{i \in J}$ , revêtement de  $T$ , c.-à-d.,  $\tilde{f}_i = f_i \circ \pi$ .

Fixons  $a > 0$ ,  $m$  une métrique riemannienne sur  $L^+$  et  $\eta$  une métrique riemannienne sur  $S$ . Ces données permettent de définir sur  $T^+$  la métrique riemannienne suivante:

$$(6.1) \quad \mu = \pi^* \eta + \sum_{i \in J} \tilde{f}_i \cdot \varphi_i^*(m|_a).$$

Nous dirons alors que  $\mu$  est une métrique a-constructible, que  $m$  est la partie transversale de  $\mu$  et que  $\eta$  est la partie horizontale de  $\mu$ .

Notons  $K$  la 1-couche de  $T$ ,  $X$  le champ radial,  $\lambda$  la fonction rayon et, pour chaque  $i \in J$ ,  $\gamma_i$  la restriction de  $\varphi_i$  à  $K$ . Soit  $M = \sum_{i \in J} \tilde{f}_i \cdot \gamma_i^* m$ ,  $M$  est une métrique riemannienne sur les fibres de  $\pi$ . On a alors:

$$(6.2) \quad \mu = \pi^* \eta + \lambda^2 M + dd^2$$

et la restriction de  $\mu$  à  $K$ , notée  $\mu_K$ , est:

$$\mu_K = \pi^* \eta + M.$$

La classe d'équivalence est déterminée par celle de  $\eta$  et celle de  $\mu_K$ .

(6)

### 6.3 Lemme.

Soient  $\mu$  et  $\mu'$  deux métriques sur  $T^+$   $\alpha$ -constructibles. Si  $\mu \sim \mu'$   
et  $\alpha \mu \sim \mu'_k$  alors  $\mu \sim \mu'$ .

### Démonstration.

Soient  $A, B, E$  et  $D$  quatre constantes non négatives avec  $DE \neq 0$ .  
F'étude de la fonction  $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(t) = \frac{tA+B}{tE+D}$   
montre l'inégalité :

$$\min \left\{ \frac{B}{D}, \frac{A+B}{E+D} \right\} \leq \frac{tA+B}{tE+D} \leq \max \left\{ \frac{A+B}{E+D}, \frac{B}{D} \right\} \quad \forall t \in [0,1].$$

Pour chaque vecteur tangent  $w = u + b\lambda$  de  $T^+$ , où  $\lambda_u = 0$ , on a :

$$\frac{\mu(w,w)}{\mu'(w,w)} = \frac{\mu(\pi_u u, \pi_u u) + b^2 + \lambda^{2\alpha} (\sigma u) M(u,u)}{\mu'(\pi_u u, \pi_u u) + b^2 + \lambda^{2\alpha} (\sigma u) M'(u,u)},$$

où  $\pi_u \in T^+$  est le point base de  $u$ . En appliquant les inégalités précédentes, en tenant compte de (6.2) et les hypothèses on a le résultat. #

### 7. Métriques $\hat{\alpha}$ -constructibles fermées FSE.

Une métrique  $\hat{\alpha}$ -constructible sur  $X^+$  est essentiellement une métrique qui est  $g_j$ -constructible sur les voisinages coniques des strates de dimension  $(n-j)$ , et ce pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Pour obtenir une définition précise nous agissons par récurrence sur  $\text{long}(X)$ .

Si la longueur de  $X$  est zéro, alors toute métrique riemannienne sur  $X^+ = X$  sera dite  $\hat{\alpha}$ -constructible. Pour le cas général nous notons  $n-k = \inf \{ j \in \mathbb{N} \mid U_j \neq \emptyset \}$  et posons  $U_{n-k} = \bigsqcup_{\alpha \in \Delta} S_\alpha$  sa décomposition en composantes connexes.

Nous disons qu'une métrique riemannienne  $\mu$  sur  $X^+$  est  $\hat{\alpha}$ -constructible pour  $E$  si, pour tout  $\alpha \in \Delta$ , il existe :

- a)  $\mu_0$  métrique  $\hat{\alpha}$ -constructible sur  $(X - \bigsqcup_{\alpha \in \Delta} S_\alpha)^+$ ,

(7)

- b) une métrique  $\mu_a$ -constructible sur  $T_{S_a}^+$ , dont la partie transversale est une métrique  $[a_0, \dots, a_m]$ -constructible,  
c) une application différentiable  $f: \bigsqcup_{\alpha \in \Delta} T_{S_\alpha}^+ \rightarrow [a_1]$ , constante sur les couches de chaque  $T_{S_\alpha}^+$  telle que  $f(x)=1$  si  $x < \varepsilon$  et  $f(x)=0$  si  $x > \gamma$ , pour  $0 < \varepsilon < \gamma < 1$ ,

telle que  $\mu$  s'écrit :

$$(7.1) \quad \mu = (1 \cdot f) \mu_0 + f \cdot \sum_{\alpha \in \Delta} \mu_\alpha.$$

L'existence de telles métriques est évidente. Nous établissons quelques lemmes afin de montrer que toute métrique  $\hat{\alpha}$ -constructible est  $\hat{\alpha}$ -adaptée. En particulier, nous montrons l'équivalence de toutes les métriques  $\hat{\alpha}$ -constructibles, sur une variété compacte (lemme 7.3).

### Démonstration.

Soit  $Z \subset X$  une sous-variété plongée de  $X$  vérifiant pour toute strate  $S$  de  $X$ :

$$(*) \quad Z \cap T_S = \emptyset \text{ si } Z \cap S = \emptyset.$$

Pour un  $\hat{\alpha} = [a_0, \dots, a_m]$  et  $\mu$  une métrique  $\hat{\alpha}$ -constructible sur  $X^+$ .

Under these conditions la restriction de  $\mu$  à  $Z^+$  est une métrique  $\hat{\alpha}$ -constructible.

### Référence.

Remarque. Nous utiliserons ce lemme dans le cas où l'espace  $Z$  est une couche d'un voisinage ouvert de  $E$  (cf. 7.3), qui vérifie bien les conditions de l'ensemble.

### Démonstration.

On va montrer par récurrence sur la longueur de  $X$ . Si long( $X$ )=1 le résultat est trivial. Dans le cas général notons  $\Delta' = \{\alpha \in \Delta \mid S_\alpha \cap Z \neq \emptyset\}$ .

$\Delta' = \emptyset$  alors, d'après (\*),  $Z$  est inclus dans  $X - \bigsqcup_{\alpha \in \Delta} \overline{T_{S_\alpha}^+}$  (cf. 7).

Sur cet espace  $\mu$  et  $\mu_0$  coïncident et il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Supposons  $\Delta' \neq \emptyset$ . La restriction de  $\mu_0$  à  $Z - \bigsqcup_{\alpha \in \Delta'} (S_\alpha \cap Z) = Z \cap (X - \bigsqcup_{\alpha \in \Delta'} S_\alpha)$

(2)

et, par hypothèse de récurrence,  $\tilde{b}$ -constructible. (ce qui prouve 7.a).

Pour prouver 7.b) rappelons d'abord que, pour tout  $\alpha \in \Delta$ , le voisinage conique de  $S_\alpha \cap Z$  est  $\pi_{S_\alpha}^*: T_{S_\alpha} \cap Z \rightarrow S_\alpha \cap Z$ , de fibre  $C_{S_\alpha}$  (si  $S_\alpha \cap Z$  n'est pas connexe, on raisonne de la même façon sur chaque composante connexe). La dimension de  $Z \cap S_\alpha$  est donc :  $\dim Z - k - 1$ .

Considérons d'autre part l'ensemble  $\{\mu_\alpha | \alpha \in \Delta\}$  la famille des parties transverses de  $\{\mu_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ . Chaque  $\mu_\alpha$  est, par hypothèse, une métrique  $[a_0, \dots, a_{k-1}]$ -constructible et donc  $[b_0, \dots, b_{k-1}]$ -constructible ( $k-1 \leq \dim Z$ ). Rappelons d'autre part que, pour chaque  $\alpha \in \Delta$ , on a la relation :

$$\mu_\alpha = \pi_{S_\alpha}^* \mu_{\alpha'} + \sum_{i \in I} \tilde{f}_i \cdot p_i^*(\mu_{\alpha(\alpha_i)}) ,$$

où  $\mu_{\alpha'}$  est la partie horizontale de  $\mu_\alpha$ . En prenant la restriction de  $\mu_\alpha$  sur  $Z$  on obtient :

$$\mu_{\alpha|Z} = \pi_{S_\alpha}^* \mu_{\alpha'|Z} + \sum_{i \in I} \tilde{f}_i \cdot h_i^*(\mu_{\alpha(\alpha_i)}),$$

ce qui prouve 7.b).

Pour 7.c) considérons  $p_{|Z}$  la restriction de  $p$  à  $Z$ .

Pour terminer, en prenant la restriction de  $p$  à  $Z$  on obtient (cf(7.1)):

$$\mu_{|Z} = (1 - f_{|Z}) \mu_{0|Z} + f_{|Z} \sum_{\alpha \in \Delta} \mu_{\alpha|Z},$$

ce qui montre que  $\mu_{|Z}$  est  $\tilde{b}$ -constructible.  $\#$

### 7.3 Lemme.

Soient  $\mu$  et  $\mu'$  deux métriques  $\tilde{a}$ -constructibles sur  $X^+$ . Supposons qu'il existe un ouvert plein  $V$  de  $X$  tel que  $X - V$  soit compacte. Si  $\mu$  et  $\mu'$  sont équivalentes sur  $V^+$  alors il le sont  $X^+$ .

### Démonstration.

On raisonne sur la longueur de  $X$ . Si cette longueur est nulle, le

(9)

réellement est triviale. Dans le cas général, considérons la RUSE  
 $Y = X - \bigsqcup_{\alpha \in A} T_\alpha^p$ , avec  $p < e$ ,  $p \neq 1$ , et l'ouvert plein  $W = V \sqcup \overline{T_\alpha}$

La paire  $(Y, W)$  vérifie bien les conditions de l'hypothèse de  
réurrence car  $Y - W = X - \bigsqcup_{\alpha \in A} T_\alpha$  est connexe. Par conséquent,  
 $\mu$  et  $\mu'$  sont équivalentes sur  $Y^+ \setminus \overline{T_\alpha^p}$ , et donc  $\mu_0$  et  $\mu'_0$

se sont sur  $X - \bigsqcup_{\alpha \in A} \overline{T_\alpha^p}$ .

D'autre part, pour chaque  $\alpha \in A$ , les variations de  $\mu_0$  et de  $\mu'_0$   
à la source  $V_\alpha$  vérifient l'hypothèse de réurrence et donc :  $\mu_0$  et  $\mu'_0$   
les métriques  $\mu_\alpha$  et  $\mu'_\alpha$  partis horizontales de  $\mu_0$  et  $\mu'_0$  respecte  
récurrent, sont deux métriques riemannoviennes équivalentes sur  $V_\alpha$ .  
Elles sont aussi équivalentes sur  $S_\alpha - V_\alpha$  par comparaison. Par  
conséquent  $\mu_0 \sim \mu'_0$ .

En appliquant (6.3) nous obtenons que les métriques  
 $\mu_0$  et  $\mu'_0$  sont équivalentes, pour chaque  $\alpha \in A$ . Finalement, d'après la  
définition, les métriques  $\mu$  et  $\mu'$  sont équivalentes sur  $X^+$ .  $\#$

Remarquons que, dans le cas où  $X$  est compacte, deux métriques  
à constructibles sur  $X^+$  sont équivalentes.

#### 7.4-PROPOSITION. Existence des métriques à-départs.

Soit  $(X, E)$  une fibre compacte de dimension  $n$ . Soit  $\alpha = [a_0, \dots, a_n]$   
un multi-vecteur de vielles normées. Il existe sur  $X^+$  une métrique  
à départ  $\alpha$ .

#### Démonstration.

Il suffit de montrer que toute métrique à constructible ad  
à départ. Soit donc  $\mu$  une métrique à-constructible sur  $X^+$ . Fixons  
un strate et un point de  $S$ .

• Construisons maintenant une métrique  $\mu$  à-construisible sur  $X^+$ .  
 Un choix convenable de  $f$  nous permet d'obtenir cette métrique :  
 ♀  $\mu_j$ -adaptée dans un voisinage de  $x$ , où  $i-j=\dim S$ . D'autre part  
 si l'on choisit un recouvrement  $\mathcal{V}$  des  $S$  dont un seul élément  
 contient  $x$ , le point  $x$  possède alors un voisinage modèle.

D'après le lemme précédent  $\mu$  et  $\mu'$  sont équivalents sur  $X^+$   
 et par conséquent,  $\mu$  vérifie la condition (4.1) pour  $x$ , et  
 ceci pour quelque  $i$  tel que  $x \in S_i$ . Ainsi,  $\mu$  est  $\mu$ -adaptée  
 à  $\Sigma$ . #

### 8. Mayer-Vietoris généralisé.

Fixons pour la suite une métrique  $\mu$   $\mu$ -adaptée à  $\Sigma$  sur  $X^+$ .  
 La 2<sup>e</sup> cohomologie ne vérifie pas en général la propriété de  
 Mayer-Vietoris. Voyons maintenant ~~un~~ type de recouvrement pour  
 lesquels le résultat est vrai (~~mais~~).

#### 8.1 Définitions.

Un recouvrement  $\mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$  de  $X$  est borné si chaque  $U_j$   
 est plein et s'il existe  $\{f_j \mid j \in J\}$  partition de l'unité subordonnée à  
 $\mathcal{U}$  telle que, chaque  $f_j$ , ainsi que ses dérivées, soient bornées.

Nous dirons que  $X$  est finie si elle est peut être recouverte par un  
 nombre fini d'ouverts modèles. Si  $X$  est compacte alors  $X$  est finie.  
 Remarquons que si  $X$  est finie et  $\Sigma X$  est un ouvert plein alors  $\Sigma$   
 est aussi finie.

#### 8.2 Exemple.

a) Considérons  $\{S_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$  la famille des strates de dimension minimale.  
 Les espaces  $U = \bigsqcup_{\alpha \in \Delta} T_{S_\alpha}$  et  $V = X - \bigsqcup_{\alpha \in \Delta} \overline{T_{S_\alpha}}^{1/2}$  sont des ouverts  
 pleins. Soit  $f_0: [0,1] \rightarrow [0,1]$  une fonction différentiable vérifiant  
 $f_0(r) = 1$  si  $r \leq 3/4$  et  $f_0(r) = 0$  si  $r > 7/8$ . Construisons la fonction  
 $f_0(r) = 1$  si  $r \leq 3/4$  et  $f_0(r) = 0$  si  $r > 7/8$ .

(11)

différentiable  $f: X^+ \rightarrow [0,1]$  définie par:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(\pi_{S_\alpha}(x)) & \text{si } x \in \pi^{-1}_{S_\alpha}, \alpha \in \Delta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors  $\{f, 1-f\}$  est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $\{\pi^{-1}_*(U_i, V_i)\}$ . L'application  $f$  est bornée puisque ses dérivées. Le recouvrement  $M$  est donc borné.

2) Supposons maintenant que  $X$  est l'espace total d'une filtration  $\pi: X \rightarrow S$  dont la structure étalée est celle de (I-3.6).

Soit  $\{V_j\}_{j \in J}$  un recouvrement ouvert de  $S$  constitué par des ouverts relativement compacts, soit  $\{f_j\}_{j \in J}$  une partition de l'unité subordonnée. Posons  $M = \{\pi^{-1}(V_j)\}_{j \in J}$ , qui est un recouvrement de  $X$ , et  $\{h_j \circ \pi\}_{j \in J}$ , partition de l'unité subordonnée à  $M$ . Le recouvrement  $M$  est alors borné par construction.

### 8.3 Lemme.

Soit  $X$  une PVSE finie et  $M = \{U_j\}_{j \in J}$  un recouvrement borné de  $S \in \Omega_{fin}^*(U_j \otimes \mu)$ , alors  $f_j \cdot w \in \Omega_{fin}^*(U_j \otimes \mu)$ , pour tout  $j \in J$ .

#### Démonstration.

Soit  $K$  une borne supérieure de  $f_j$  et de ses dérivées premières. Les relations suivantes sont immédiates à partir de la définition:

$$\|f_j w\|_\mu \leq K \|w\|_\mu \text{ et } \|f'_j w\|_\mu \leq K \|dw\|_\mu.$$

Donc, pour montrer le résultat, il suffit de vérifier que  $\|df_j w\|_\mu$  est finie.

Par hypothèse, il suffit de se restreindre à un ouvert modèle  $V = ]0,1[^{n-k} \times \mathbb{C}^k_S$ , où la métrique est de la forme :

$$dx_1^2 + \dots + dx_{n-k}^2 + dr^2 + r^{2k} dm,$$

où  $n-k = \dim S$  et  $m$  métrique sur  $L_S^+ [a_0, \dots, a_{k-1}]$ - adaptée à  $\mathbb{C}^k_S$ .

Par (3.1) on peut se restreindre au cas où  $w$  est de la forme

(12)

$\alpha \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  où  $\alpha \in \Omega_{(2)}^k$ , (V) ne contient pas de termes  $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ .  
D'après ce même résultat on a:

$$\begin{aligned}\|df \wedge w\|_\mu^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_1 \wedge \alpha \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \right\|_\mu^2 \leq \\ &\leq k^2 \sum_{j=1}^{n-k} \|dx_1 \wedge \alpha \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n\|_\mu^2 \leq \\ &\leq k^2 \|w\|_\mu^2\end{aligned}$$

ce qui montre que  $\|df \wedge w\|_\mu$  est fini. #

8.4 Fixons  $M$  un revêtement borné de  $X$ . Pour chaque couple d'entiers  $(i,j)$  posons:

$$C^*(M, \Omega_{(2)}^j) = \prod_{a_1, \dots, a_k} \Omega_{(2)}^j((U_{a_1} \cap U_{a_2})^+, \mu).$$

Suivant [Bo], considérons la dérivée sur  $C^*(M, \Omega_{(2)}^+)$ . (voir aussi §-1). En procédant de façon standard (cf. [Bo]) et en tenant compte de (8.2) on montre:

8.5 Proposition. Mayer-Vietoris généralisé.

Si  $X$  est une FSE, si  $w$  n'est l'application restriction  $r: \Omega_{(2)}^+(X^+, \mu) \rightarrow C^*(M, \Omega_{(2)}^+)$  induit un homomorphisme entre  $H_{(2)}^*(X^+, \mu)$  et  $H^1(C^*(M, \Omega_{(2)}^+), \mathbb{D})$ .

~~Considérons maintenant  $X$  dans les conditions de (8.2)). Posons la métrique sur  $L^+$ , où  $\pi$  est la fibre de  $x$ . Soit  $m$  la dimension de  $S$ .~~

8.6 Considérons maintenant  $X$  dans les conditions de (8.2 b))  
~~et la métrique sur  $L^+$ , où  $\pi$  est la fibre de  $x$ . Soit  $m$  la dimension de  $S$ .~~ Soit  $m$  la dimension de  $S$ . À chaque entier  $j$  nous associons le préfaisceau

$$H_{(2)}^j((cL)^+, m(w)) (V) = H_{(2)}^j(\pi^{-1}(V)), \quad \text{pour } V \subset S \text{ ouvert.}$$

Ce préfaisceau est localement trivial, car si  $V$  contractile :

(13)

$$H_{(2)}^{\delta}(\pi^{-1}(v))^+, \mu) \cong H_{(2)}^{\delta}((cL)^+, m(ab)) \quad (\text{cf. (2.1)})$$

### 8.7 Proposition.

Dans les conditions précédentes il existe une suite spectrale  $\{E_m^{i,j}\}$  convergant vers  $H_{(2)}^*(X^+, \mu)$  dont le second terme  $E_2^{i,j}$  est :

$$H^i(S, H_{(2)}^{\delta}((cL)^+, m(ab))),$$

cohomologie de  $S$  à valeurs dans le préfaisceau  $H_{(2)}^{\delta}((cL)^+, m(ab))$ .

### Démonstration.

Considérons  $N = \{V_j \mid j \in J\}$  à un bon recouvrement de  $S$  vérifiant les conditions de (8.2.1). Soit  $U = \{\pi^{-1}(V_j) \mid j \in J\}$ , recouvrement borné de  $X$ . Le complexe double  $C^k(U, S_2^{**})$  définit une suite spectrale  $\{E_m^{i,j}\}$  convergant vers  $H_{(2)}^*(X^+, \mu)$  (cf. (8.5)) et dont le premier terme est :

$$E_2^{i,j} = \prod_{\text{deuxièmes}} H_{(2)}^{\delta}(\pi^{-1}(V_{j+1} \cap V_{j+2})) = C^i(N, H_{(2)}^{\delta}((cL)^+, m(ab)))$$

complexe de Čech de  $S$ , associé au recouvrement  $N$ , à valeurs dans le préfaisceau  $H_{(2)}^{\delta}((cL)^+, m(ab))$ . ~~tenant compte~~.

Comme  $N$  est un bon recouvrement, on obtient :

$$E_2^{i,j} = H^i(C(N, H_{(2)}^{\delta}((cL)^+, m(ab))), \delta) = H^i(S, H_{(2)}^{\delta}((cL)^+, m(ab))).$$

Où  $S$  est la différentielle de Čech habituelle. #

## Chapitre III

(2)

### HOMOLOGIE D'INTERSECTION

La notion d'homologie d'intersection a été introduite par Goresky-MacPherson ([GM1], [GM2]) avec l'objectif d'étendre aux espaces singuliers le théorème de Poincaré-Baïschet sur l'intersection des cycles d'homologie des variétés. Ces travaux présentent l'homologie d'intersection d'un point de vue simpliciale ou faisceautique. Dans King [K] on considère un point de vue singulier que nous utiliserons dans la suite.

Dans ce paragraphe nous étudions l'homologie d'intersection "à la Čech". Cela nous permet de calculer l'homologie d'intersection d'un fibré complexe.

Pour les définitions et les notations nous nous renvoyons à [GM1], [K] et [Bra].

1. Fixons  $(X, \mathcal{F})$  une pseudovariété stratifiée de dimension  $n$  et  $\bar{\mathbf{p}} = (p_1, \dots, p_n)$  une perversité, au sens de King [K]. On posera  $SC_{\mathbf{p}}^{\bar{\mathbf{p}}}(X)$  le complexe des chaînes d'intersection, à supports compacts, et à coefficients réels.

Soit  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Pour chaque couple d'entiers  $(i, j)$  posons:

$$C_i(\mathcal{U}, SC_j^{\bar{\mathbf{p}}}) = \bigoplus_{U_i \cap U_j} SC_j^{\bar{\mathbf{p}}}(U_{i+n-j}).$$

Notons par  $\delta$  la différentielle de Čech brutale et par  $\square$  la différentielle du  $SC_{\mathbf{p}}^{\bar{\mathbf{p}}}(X)$ . Posons  $D: C_i(\mathcal{U}, SC_j^{\bar{\mathbf{p}}}) \rightarrow C_{i-1}(\mathcal{U}, SC_j^{\bar{\mathbf{p}}})$  définie par  $D = \delta + (-1)^i \square$ , qui est une différentielle sur le complexe double  $C_{\mathbf{p}}(\mathcal{U}, SC_{\mathbf{p}}^{\bar{\mathbf{p}}})$ . En procédant de façon standard (voir par exemple [Bo]) et en tenant compte du fait que l'homologie d'intersection vérifie Mayer-Vietoris (q.v. [Bra]) on obtient:

2. Proposition. (Mayer-Vietoris généralisé).

L'inclusion  $C_{\mathbf{p}}(\mathcal{U}, SC_{\mathbf{p}}^{\bar{\mathbf{p}}}) \rightarrow SC_{\mathbf{p}}^{\bar{\mathbf{p}}}(X)$  induit un isomorphisme en homologie entre  $H\{C_{\mathbf{p}}(\mathcal{U}, SC_{\mathbf{p}}^{\bar{\mathbf{p}}}), D\}$  et  $H_{\mathbf{p}}^{\bar{\mathbf{p}}}(X)$ .

(2)

3. Convention. Soit  $Y$  une pseudovariété stratifiée de dimension  $m$ , avec  $m < n$ . Quand on écrira  $H_{\infty}^{\bar{F}}(Y)$  on sous-entendra qu'il s'agit de l'homologie d'intersection de  $Y$  pour la perruauté  $(p_2, p_3, \dots, p_m)$ .

4. Supposons maintenant que  $X$  est l'espace total d'un fibré complexe  $\pi: X \rightarrow S$  de fibre  $L$ , ~~Pour ce qui suit~~ dans les conditions de (I-9.3 b'). Pour chaque entier  $j$  nous définissons le copréfaisceau  $H_{\infty}^{\bar{F}}(cL)$  sur  $S$  par :

$$H_{\infty}^{\bar{F}}(cL)(V) = H_{\infty}^{\bar{F}}(\pi^{-1}(V)) , \text{ où } V \subset S \text{ ouvert.}$$

(cf. [Bo]). Il est localement trivial car, pour  $V$  assez petit :

$$H_{\infty}^{\bar{F}}(\pi^{-1}V) \cong H_{\infty}^{\bar{F}}(\mathbb{P}_{0,1}^{n-k-1} \times L) \cong H_{\infty}^{\bar{F}}(cL),$$

où  $k = \dim L$  (cf. [GM] pag. [K] pag.).

Comme pour l'homologie singulière on obtient (cf. [Bo]) :

#### 5. Proposition.

Under les conditions précédentes il existe une suite spectrale  $\{E_{i,j}^m\}$  convergant vers  $H_{\infty}^{\bar{F}}(X)$  et dont le second terme est  $H_1(S, H_{\infty}^{\bar{F}}(cL))$ , l'homologie de  $S$  à valeurs dans le copréfaisceau  $H_{\infty}^{\bar{F}}(cL)$ .

#### Démonstration.

Considérons  $N$  un bon recouvrement de  $S$  et  $\mathcal{U} = \{\pi^{-1}V / V \in \mathcal{V}\}$ , qui est un recouvrement de  $X$ . Le complexe double  $C_*(\mathcal{U}, SC_*^T)$  définit une suite spectrale  $\{E_{i,j}^m\}$  convergante vers  $H_{\infty}^{\bar{F}}(X)$  (cf. 2) et dont le premier terme est :

$$E_{i,j}^1 = \bigoplus_{V_0 \cup \dots \cup V_i} H_{\infty}^{\bar{F}}(\pi^{-1}(V_0 \cup \dots \cup V_i)) = C_*(N, H_{\infty}^{\bar{F}}(cL)),$$

complexe de Čech de  $S$ , associé au recouvrement  $N$ , à valeurs dans le copréfaisceau  $H_{\infty}^{\bar{F}}(cL)$ . Comme  $N$  est un bon recouvrement, on obtient :

$$E_{i,j}^1 = H_1(C(N, H_{\infty}^{\bar{F}}(cL)), \mathbb{Z}) = H_1(S, H_{\infty}^{\bar{F}}(cL)). \#$$

## Chapitre VI

### LE COMPLEXE $\mathcal{R}^{\bullet}(X)$ . RELATION ENTRE $\mathcal{R}^{\bullet}(X)$ ET $S\mathcal{C}^{\bullet}(X)$ .

La grande difficulté entre l'application d'intersection d'un pseudorandom  $X$  et la 1<sup>e</sup> cohomologie de sa partie régulière  $X-S$  est leur non dualité induite par l'intégration des formes sur des souspace différents.

Renonçons que, bien que les deux dimensions sont différentes, sur  $X$ , la 1<sup>e</sup> partie n'ait pas d'application qui tue la partie régulière  $X-S$  parmi toutes celles qui sont possibles via toute homomorphisme.

Dans § 5 et § 6, nous trouvons des sous-complexes de  $S\mathcal{C}^{\bullet}(X)$  et de  $S\mathcal{C}_*(X^*)$  respectivement pour lesquels l'intégration est bien définie et différable. Dans ce chapitre nous introduisons le sous-complexe  $\mathcal{R}^{\bullet}(X)$  de  $S\mathcal{C}_*^{\bullet}(X)$  et montrons qu'il est indépendant d'une complexification ou d'un lifting (§ 5.5). Pour cela nous montrons certains résultats (§ 5.5), (4.2) équivalents aux résultats déjà connus pour le complexe  $\mathcal{C}_*^{\bullet}(X)$  (§ 5.6) et  $S\mathcal{C}_*^{\bullet}(X)$  (4.1).

Tâche pour la suite ( $X, \Sigma$ ) une variété de dimension  $n$  et  $\bar{P} = (\bar{P}_0, \dots, \bar{P}_n)$  une pseudoroute. Pseudoroute à donner. On désignera par  $\Delta$  un complexe canonique de dimension  $n$ ,  $\Delta = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1\}$

1. une application continue  $\varphi: \Delta \rightarrow X$  tel un n<sup>e</sup> complexe possède de dimension  $i$ , pour  $\bar{P}_i$ , si et seulement si :

$$(S1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Pour chaque } k=0, \dots, n \text{ l'image réciproque de } \varphi^k(X_{\Delta-k}) \\ \text{est une partie de } \Delta. \end{array} \right.$$

$$(S2) \quad \left| \begin{array}{l} \text{L'application } \varphi \text{ possède différemment l'intersection} \\ \text{de droite} \text{ par } \Delta \text{ sur un état de } X. \end{array} \right.$$

Pour tous  $i, j, k, l, m, n$  la partie des indices telles que  $\varphi^i(X_{\Delta-i})$  contienne strictement  $\varphi^j(X_{\Delta-j})$ . La propriété (S2)

verified, nous considérons pour chaque  $m \in \{0, \dots, p\}$  l'ensemble  $\Delta_m$  de  $\Delta$  vérifiant:

$$\varphi^{-1}(X_{j_m}) = \varphi^{-1}(X_{j_{m-1}}) * \Delta_m.$$

Ceci définit une décomposition ordonnée  $\Delta = \Delta_0 * \dots * \Delta_p$ , que nous dirons induite par  $\varphi$ . Notons par  $\pi_\Delta : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$  le dégagement associé (cf. I-7).

(S3) | Il existe une application différentiable  $\tilde{\varphi} : \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{X}$  telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{X} \\ \pi_\Delta \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ \Delta & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

(S4) |  $\dim \varphi^{-1}(X_{n-k}) \leq i - k + p_k$ , pour tout  $k \in \{2, \dots, n\}$ .

Une chaîne  $c = \sum_{t=1}^n d_t p_t$ ,  $d_t \in \mathbb{R}$ , est dite permise si chaque simplexe  $p_t$  est permis. Nous disons que  $c$  est une chaîne d'intersection si  $c$  et  $\bar{c}$  sont permises. Notons  $I\tilde{\Delta}^F(X)$  le complexe des chaînes d'intersection.

Remarquons que  $I\tilde{\Delta}^F(X)$  est dans  $SC_X^F(X)$ . Dans la section 2 nous montrons en plusieurs étapes que cette inclusion induit un isomorphisme en homologie. Pour cela nous suivons le chemin développé en [K].

1.1 Remarque. Soit  $\varphi : \Delta \rightarrow X$  une application continue vérifiant (S1) et (S4). Pour tout  $k \in \{2, \dots, n\}$  on a la relation  $p_k \leq k-2$  et par conséquent:

$$(1.1) \quad \dim \varphi^{-1}(X_{n-k}) \leq i-2.$$

En particulier  $\Delta = \varphi^{-1}(X_n) \not\supseteq \varphi^{-1}(X_{n-1}) = P^1(\Sigma)$  et donc  $j_\varphi = n$ . Dès lors la définition nous montre:

$$\Delta = \varphi^{-1}(\Sigma) * \Delta_p = (\Delta_0 * \dots * \Delta_{p-1}) * \Delta_p,$$

d'où  $\Delta_0 * \dots * \Delta_p \subset \varphi^{-1}(\Sigma)$  et  $\Delta_p \cap \varphi^{-1}(\Sigma) = \emptyset$ . C'est pour cette raison que  $\Delta_0 * \dots * \Delta_{p-1}$  est appelée face régulière.

Une autre conséquence de (1.2) est que si  $F$  est une face de codimension 1 de  $\Delta$  alors  $\varphi$  envoie l'intérieur de  $F$  sur la partie régulière de  $X - \Sigma$ . Remarquons pour terminer que  $\Delta_p$  n'est pas un point.

### 2. Première étape : Mayer-Vietoris généralisé.

Cette étape sert à localiser le problème. Considérons d'abord les lemmes suivants.

#### 2.1 Lemme.

Soit  $P: \Delta \rightarrow X$  un simplexe permis et  $C \subset \Delta$  un sous-simplexe de  $\Delta$ . Alors la restriction  $\varphi: C \rightarrow \Delta$  est aussi un simplexe permis.  
Démonstration.

Les propriétés (S1), (S2) et (S4) sont immédiates pour (S3) il suffit d'appliquer (I-7.20), ce qui est possible d'après (1.1). #

2.2 Soit  $M = \{U_i\}$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts plats. Posons pour chaque couple d'entiers  $(i, j)$ :

$$C_{ij}(M, \mathbb{L}_j^P) = \bigoplus_{U_i \in M} \mathbb{L}_j^P(U_{i0} \cap \dots \cap U_{in}).$$

Ceci a un sens car les ouverts  $U_{i0}, \dots, U_{in}$  sont plats. Notons  $D$  comme dans (III-1). En procédant de façon standard (q. I.80) et en tenant compte de (2.1) on montre:

#### 2.3 Proposition. Mayer-Vietoris généralisé.

L'inclusion de  $C_x(M, \mathbb{L}_x^P)$  dans  $\mathbb{L}_x^P(X)$  induit un homomorphisme  $H_x(C_x(M, \mathbb{L}_x^P), D) \rightarrow H_x(\mathbb{L}_x^P(X))$

2.4 Supposons maintenant que  $X$  est l'espace total d'un fibré conjugué de fibré cl, deux des conditions de (I-9.3 b)). Pour chaque entier

(4)

Si nous considérons la copréfaisceau  $\tilde{H}_j(\mathcal{R}^{\bar{P}}(cL))$  sur  $S$ , défini par:

$$\tilde{H}_j(\mathcal{R}^{\bar{P}}(cL))(V) = H_j(\mathcal{R}^{\bar{P}}(\pi^{-1}(V))), \text{ où } V \in S \text{ ouvert.}$$

Cela va nous servir grâce à (I-4.4). Ce copréfaisceau est en fait localement trivial (cf (2.5) et (4.1)).

De la même façon que dans (III-3) nous avons:

### 2.5 Proposition.

Dans les conditions précédentes, il existe une suite spectrale  $\{E_{i,j}^m\}$  convergant vers  $H_{\infty}(\mathcal{R}^{\bar{P}}(X))$  dont le second terme est:

$$H: (S, \tilde{H}_j(\mathcal{R}^{\bar{P}}(cL))),$$

homologique de celle de  $S$ , à valeurs dans le copréfaisceau  $\tilde{H}_j(\mathcal{R}^{\bar{P}}(cL))$ .

### 3 Deuxième étape : calcul de $H_{\infty}(\mathcal{R}^{\bar{P}}(X \times ]-1,1[))$ .

Considérons sur  $X \times ]-1,1[$  la structure étendue produit  $\mathbb{E}_{X \times ]-1,1[}$  (cf. I-5.6). Fixons un entier  $a$  tel que  $p_n \leq a \leq n-1$  et notons  $\bar{\rho}$  la génératrice  $(p_0, \dots, p_n, \alpha)$ . Notons  $\text{pr}_X: X \times ]-1,1[ \rightarrow X$  et  $\text{pr}_t: X \times ]-1,1[ \rightarrow ]-1,1[$  les projections canoniques.

### 3.1 Lemma.

Soit  $\Delta$  un simplexe de dimension  $i$ . Les applications :

$$\rho: \mathcal{E}(\Delta \times [0,1]) \rightarrow \mathcal{E}\Delta / \cancel{\rho: \mathcal{E}[0,1]} \quad \rho([x,s], t] = [x, t],$$

$$\beta: \mathcal{E}(\Delta \times [0,1]) \rightarrow [0,1] / \quad \beta([x,s], t] = t \cdot s, \text{ et}$$

$$\gamma: \mathcal{E}(\Delta \times [0,1]) \rightarrow [0,1] / \quad \gamma([x,s], t] = t$$

sont différentiables.

### Démonstration

Le polyèdre  $\mathcal{E}(\Delta \times [0,1])$  est inclus de façon naturelle dans  $(\mathbb{R}^{i+1} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  par:

$$j: \mathcal{E}(\Delta \times [0,1]) \rightarrow (\mathbb{R}^{i+1} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} / \quad j([x,s], t] = (t \cdot x, t \cdot s, t).$$

De même,  $\mathcal{E}\Delta$  est inclus dans  $\mathbb{R}^{i+1} \times \mathbb{R}$  par:

(5)

$$\iota : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^{i+1} \times \Omega / \iota([x, t]) = (t \cdot x, t)$$

Les applications  $\rho, \beta$  et  $\gamma$  sont les restrictions respectives de :

$$A : (\mathbb{R}^{i+1} \times \Omega) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{i+1} \times \Omega / A(u, r, b) = (u, b),$$

$$B : (\mathbb{R}^{i+1} \times \Omega) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} / B(u, r, b) = t \cdot r$$

$$C : (\mathbb{R}^{i+1} \times \Omega) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} / C(u, r, b) = t.$$

On montre que  $\rho, \beta$  et  $\gamma$  sont différentiables.  $\#$

### 3.2 Lemme.

Soit  $\varphi : \Delta \rightarrow X \times ]-1, 1[^n$  un simplexe purifié de dimension  $i$ . Posons  $\{\sigma_0, \dots, \sigma_i\}$  les sommets de  $\Delta$ . Considerons  $S \subset \Delta \times [0, 1]$  le simplexe linéaire engendré par  $\{(\sigma_0, 0), \dots, (\sigma_j, 0), (\sigma_j, 1), \dots, (\sigma_i, 1)\}$ , pour un certain  $j \in \{0, \dots, i\}$ . Alors l'application  $\Psi : S \rightarrow X \times ]-1, 1[^n$  définie par  $\Psi(s, t) = (pr_X \varphi(x), t \cdot pr_2 \varphi(n))$  est un simplexe purifié.

### Démonstration.

Remarquons d'abord que pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  on a :

$(X \times ]-1, 1[^n)_{n+1-k} = X_{n-k} \times ]-1, 1[^k$ . Ainsi la condition  $\Psi(s, t) \in (X \times ]-1, 1[^n)_{n+1-k}$  équivaut à  $pr_X \varphi(x) \in X_{n-k}$ , ou encore à  $\varphi(x) \in (X \times ]-1, 1[^n)_{n+1-k}$ . Par conséquent :

$$(S1) \quad \Psi^{-1}\left((X \times ]-1, 1[^n)_{n+1-k}\right) = \left(\varphi^{-1}\left((X \times ]-1, 1[^n)_{n+1-k} \times [0, 1]\right) \cap S\right).$$

Ceci montre (S1). La propriété (S2) est immédiate. Pour prouver (S3) posons  $\Delta = \Delta_0 * \dots * \Delta_p$  la décomposition induite pour  $\varphi$ . Remarquons que, d'après la construction de  $S$ , l'intersection  $S \cap (\Delta_j \times [0, 1])$  est une face non nulle de  $S$ , pour chaque  $j \in \{0, \dots, p\}$ . ~~et que~~

~~et que~~

Pour chaque  $k \in \{0, \dots, n\}$  il existe  $k' \in \{k+1, \dots, n\}$  et  $j \in \{0, \dots, p\}$  tels que :

$$\varphi^{-1}\left((X \times ]-1, 1[^n)_{n+1-k'}\right) \subseteq \varphi^{-1}\left((X \times ]-1, 1[^n)_{n+1-(k'-1)}\right) = \dots = \varphi^{-1}\left((X \times ]-1, 1[^n)_{n+1-k}\right),$$

$$\Psi^{-1}((x_{\square}-1,1)_{n+1-k}) = \Psi^{-1}((x_{\square}-1,1)_{n+1-k'}) + \Delta_j.$$

Ainsi, d'après (3.3), on écrit :

$$\Psi^{-1}((x_{\square}-1,1)_{n+1-k'}) \in \Psi^{-1}((x_{\square}-1,1)_{n+1-(k'-1)}) = \dots = \Psi^{-1}((x_{\square}-1,1)_{n+1-k}).$$

$$\Psi^{-1}((x_{\square}-k)_{n+1-k}) = \Psi^{-1}((x_{\square}-1,1)_{n+1-k'}) + (\Delta_j \times [0,1]) \cap S.$$

Posons, pour chaque  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $S_j = (\Delta_j \times [0,1]) \cap S$ , la décomposition de  $S$  induite par  $\Psi$  est donc :  $S = S_0 \times \dots \times S_p$ .

Considérons maintenant le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{S} & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{\Delta} \times [0,1] & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \tilde{x}_{\square}-1,1 \\
 \downarrow \pi_S & & \downarrow \pi_{\Delta \times [0,1]} & & \downarrow \pi_{x_{\square}-1,1} = \pi_{x_{\square}-1,1} \\
 S & \xrightarrow{\quad} & \Delta \times [0,1] & \xrightarrow{\beta} & x_{\square}-1,1
 \end{array}$$

où :

i)  $\tilde{S} = S_0 \times \dots \times S_p$  est le déplissage de  $S$  par rapport à  $S = S_0 \times \dots \times S_p$ ,

ii)  $\text{id}$  est l'application identité dans les groupes respectifs,

iii)  $\beta(x, t) = (\text{pr}_1 \varphi(x), t \cdot \text{pr}_2 \varphi(x))$ ,

iv)  $\gamma([x_0, s_0], [x_1, s_1], \dots, [x_p, s_p], [t_0, s_0], \dots, [t_p, s_p]) =$

$$([x_0, t_0], \dots, [x_p, t_p], x_p, t_0 s_0 + (1-t_0)s_1, \dots, (1-t_p)s_0 + (1-t_0)\dots(t-p)s_p),$$

v)  $\tilde{\beta}([x_0, t_0], \dots, [x_p, t_p], x_p, t) =$

$$= (\text{pr}_1 \tilde{\varphi}([x_0, t_0], \dots, [x_p, t_p], x_p), t \cdot \text{pr}_2 \tilde{\varphi}([x_0, t_0], \dots, [x_p, t_p], x_p)),$$

où  $\tilde{\varphi}: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$  est le déplissage de  $\Delta = \Delta_0 \times \dots \times \Delta_p$ .

Les applications  $\beta$  et  $\tilde{\beta}$  sont différentiables par construction et  $\gamma$  l'est par (3.1).

(2)

Considérons  $(\tilde{x}, b) \in \tilde{\Delta} \times [0,1]$ , nous avons:

$$\begin{aligned}\pi_{X \times \mathbb{I}^{-1}[b]} \tilde{\beta}(\tilde{x}, t) &= (\pi_X \rho_X \tilde{\varphi}(\tilde{x}), t \cdot \text{pr}_1^*(\tilde{x})) \text{ et} \\ \beta \pi_{\Delta \times \mathbb{I}}(\tilde{x}, t) &= (\rho_X \varphi(\pi_\Delta(\tilde{x})), t \cdot \text{pr}_2 \varphi(\pi_\Delta(\tilde{x}))).\end{aligned}$$

Or, les expressions coïncident car  $\pi_{X \times \mathbb{I}^{-1}[b]} \tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi_\Delta$ .

Considérons d'autre part le point:

$\tilde{z} = ([x_0, s_0], t_0), \dots, ([x_p, s_p], t_p), (x_p, s_p) \in \tilde{S}$ . D'après la définition de  $\pi_\Delta$ ,  $\pi_\Delta$  et  $\gamma$  on a:

$$\begin{aligned}\pi_\Delta(\tilde{z}) \cdot t_0(x_0, s_0) + (1-t_0)t_1(x_0, s_1) + \dots + (1-t_p)\dots(1-t_{p-1})(x_p, s_p) &= \\ &= (t_0 x_0 + (1-t_0)x_1 + \dots + (1-t_p)\dots(1-t_{p-1})x_p, \\ &\quad t_0 s_0 + (1-t_0)s_1 + \dots + (1-t_p)\dots(1-t_{p-1})s_p) = \\ &= (\pi_\Delta([x_0, t_0], \dots, [x_p, t_p]), s_p), t_0 s_0 + (1-t_0)s_1 + \dots + (1-t_p)\dots(1-t_{p-1})s_p \\ &\xrightarrow{\text{Def. } \gamma} = (\pi_{\Delta \times \mathbb{I}})^*\gamma(\tilde{z}).\end{aligned}$$

Ceci montre donc que le diagramme (\*) commute. Il suffit maintenant de counterer  $\tilde{\varphi} = \tilde{\beta} \circ \gamma$  pour montrer (SS).

Finalement, pour (SM) il suffit de remarquer que d'après (3.3) on a l'inégalité:

$$\dim \varphi^{-1}(X \times \mathbb{I}^{-1}[1]) \leq \dim \varphi^{-1}(X \times \mathbb{I}) + 1 \leq c + 1 - h + g_h.$$

Ceci termine la démonstration.  $\blacksquare$

3.4 Il est immédiat de vérifier que les applications  $\text{pr}_X$  et  $\text{co}\text{pr}_X$ :  $X \times X \times \mathbb{I}^{-1}[b] \rightarrow X \times \mathbb{I}^{-1}[b]$ , définie par  $\text{co}\text{pr}_X(x) = (x, x)$ , induisent des applications entre les complexes  $\mathcal{P}_X^\mathbb{R}(X)$  et  $\mathcal{P}_X^\mathbb{R}(X \times \mathbb{I}^{-1}[b])$ . La composition  $\text{pr}_X \circ \text{co}\text{pr}_X$  est l'identité sur  $X$ . Reste à montrer maintenant que  $(\text{co}\text{pr}_X)_*$  est homotope à l'opérateur identité sur  $\mathcal{P}_X^\mathbb{R}(X \times \mathbb{I}^{-1}[b])$ .

Pour chaque simplexe pur  $n$   $\varphi: \Delta \rightarrow X \times \mathbb{I}^{-1}[b]$  de dimension  $i$ , posons  $F(\varphi) = \sum_{j=0}^i (-1)^j \varphi_j$ , où chaque  $\varphi_j$  est défini comme dans (3.2). Ainsi maintenant  $c$  est une élâtre de  $\mathcal{P}_X^\mathbb{R}(X \times \mathbb{I}^{-1}[b])$ , c'est à dire il faut vérifier

Théorème:

$$\mathcal{D}(c) = c - (\text{co-} \mathcal{R}_X)c - \mathcal{F}(c).$$

Un argument par récurrence sur la dimension de  $\Delta$ , montre que  $\mathcal{F}(c)$  est un élément de  $\mathcal{R}_X^{\bar{p}}(X \times \mathbb{P}^1)$ . En conséquent,  $\mathcal{F}$  est un opérateur d'homologie entre  $(\text{co-} \mathcal{R}_X)_k$  et  $\mathcal{R}_X^{\bar{p}}(X \times \mathbb{P}^1)$ , et l'on a

### 3.5 Implications

L'application  $(\mathfrak{p}_X)_k : \mathcal{R}_X^{\bar{p}}(X \times \mathbb{P}^1) \rightarrow \mathcal{R}_X^{\bar{p}}(X)$  est un quasi-isomorphisme

### 3.6 Remarques:

i) Le même résultat est obtenu pour  $X \times \mathbb{Q}^n$ , preuve non détaillée dans la structure stable produite (cf. I-4.4).

ii) La morphism  $H_j(\mathcal{R}^{\bar{p}}(\Delta))$  introduit à (2) est également trivial. En effet, si  $v \in S$  est un ouvert avec  $\partial v \subset \Delta$ , on a:

$$H_j(\mathcal{R}^{\bar{p}}(\pi^{-1}(v))) \cong H_j(\mathcal{R}^{\bar{p}}(V \cap \Delta)) \cong H_j(\mathcal{R}^{\bar{p}}(\Delta)).$$

### 4. Troisième étape : Calcul de $H_k(\mathcal{R}^{\bar{p}}(X))$ .

Parsons  $\tilde{\mathbf{f}} = (p_1, \dots, p_n, \alpha)$  générant comme dans (2). Sur les groupes fondamentaux  $\pi_1(X)$  considérés comme structure stable, l'action stable est stabilisée. L'action stable sur  $\tilde{\mathbf{f}}$  (I-3.6). Pour relier  $\mathcal{R}_X^{\bar{p}}(X)$  et  $\mathcal{R}_X^{\bar{p}}(X)$  on dispose des donnees suivantes.

### 4.1 Prémisses:

Art  $\phi : \Delta \rightarrow X$  un morphisme pur au sens de dimension  $i$ . Art  $\psi : \Delta'' \rightarrow \Delta$ , simple de dimension  $i+1$ . On a:  $\phi \circ \psi = \text{id}_{\Delta''}$ . On a:  $\phi|_{\psi^{-1}(t_1, \dots, t_i)} = [\psi(t_1, \dots, t_i), t]$ .

Art  $\varphi : \Delta \rightarrow X$  un morphisme pur au sens de dimension  $i$ .

### Démonstration:

On va se ramener à  $c_X$  et à celle de  $\mathbb{P}^1$ . Soit  $\phi : \Delta'' \rightarrow \Delta$  tel que  $(t_1, t_2, \dots, t_i) = [t_1, \dots, t_i, t]$ . L'application  $\phi$  devient:  $\phi([t_1, \dots, t_i], t) = [\phi(t_1, \dots, t_i), t]$ . En procédant de façon analogue à (3.2) on trouve:

$$\phi^{-1}((cX)_{n+h}) = c\varphi^{-1}(X_{n+h}), \quad \text{si } h \neq n, \text{ et}$$

$$\phi^{-1}(\sigma) = \sigma'.$$

Ceci montre (S1) et (S2). Si  $\Delta^i = \Delta_0 \times \cdots \times \Delta_p$  est la décomposition de  $\Delta$  induite par  $\varphi$ , alors la décomposition de  $\Delta^{i+1}$  induite par  $\varphi$  est :  $\Delta^{i+1} = \tilde{\Delta}^{i+1} \times \Delta_0 \times \cdots \times \Delta_p$ . Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{\Delta}^{i+1} & \xrightarrow{\widetilde{\phi}} & \widetilde{cX} \\
 (\ast\ast) \quad \downarrow \pi_{\Delta^{i+1}} & & \downarrow \pi_{cX} \\
 \Delta^{i+1} & \xrightarrow{\phi} & cX
 \end{array}$$

où :

- i)  $\widetilde{\Delta}^{i+1}$  est le déplissage de  $\Delta^{i+1}$ , il s'identifie avec  $c\sigma' \times \widetilde{\Delta}^i$  et  $\pi_{\Delta^{i+1}}$  donne :  $\pi_{\Delta^{i+1}}([\sigma', t], \tilde{x}) = [\pi_{\Delta^i}(\tilde{x}), t]$ ,
- ii)  $\widetilde{cX}$  est le déplissage de  $cX$ , il s'identifie avec  $\widetilde{X} \times ]-1, 1[$  et  $\pi_{cX}$  donne :  $\pi_{cX}(j, t) = [\pi_X(j), |t|]$ ,
- iii)  $\widetilde{\phi}([\sigma', t], \tilde{x}) = (\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), t)$ .

Remarquons que  $\widetilde{\phi}$  est différentiable car  $\widetilde{\varphi}$  l'est. D'autre part, pour tout  $z = ([\sigma', t], \tilde{x}) \in \widetilde{\Delta}^{i+1}$  on a :

$$\pi_{cX} \widetilde{\phi}(z) = \pi_{cX}(\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), t) = [\pi_X \widetilde{\varphi}(\tilde{x}), |t|] = [\pi_X \widetilde{\varphi}(\tilde{x}), t],$$

(car  $t \in [0, 1]$ ). D'autre part  $\pi_X \circ \widetilde{\varphi} = \varphi \pi_\Delta$ , ainsi :

$$\pi_{cX} \widetilde{\phi}(z) = [\varphi(\pi_\Delta(\tilde{x})), t] = \phi([\pi_\Delta(\tilde{x}), t]) = \phi \pi_{\Delta^{i+1}}(z).$$

Ainsi le diagramme  $(\ast\ast)$  commute. Ceci montre (S3). Pour (S4) remarquons que :

$$\dim \phi^{-1}(X_{n+h} \times ]-1, 1[) = \dim \varphi^{-1}(X_{n+h}) + 1 \leq i+1-h+p_h \quad \text{et},$$

$$\dim \phi^{-1}(\sigma) = 0 \leq i+1-(n+1)+\alpha. \quad \#$$

En posant  $\phi = c\varphi$ , on a la relation  $D\phi = \varphi - c(D\varphi)$ .

#### 4.2 Proposition.

L'inclusion  $\iota_{12}: X \rightarrow cX$ , définie par  $\iota_{12}(x) = [x, 1/2]$ , induit un

étoomorphisme entre  $H_i(\mathbb{R}^{\bar{p}}(x))$  et  $H_i(\mathbb{R}^{\bar{p}}(cx))$  pour  $i \in \mathbb{N}$ .  
*S. si  $n = 1$ , l'espace vectoriel  $H_1(\mathbb{R}^{\bar{p}}(cx))$  est trivial.*

### Démonstration.

Considérons d'abord le cas  $i = n = 1$ . Soit  $\gamma = \sum a_j \gamma_j$  un cycle de  $\mathbb{R}^{\bar{p}}(cx)$  et posons  $c\gamma = \sum a_j c\gamma_j$ . On a :

$$\partial c\gamma = \gamma + c(\partial\gamma) = \gamma$$

D'après le lemme précédent  $c\gamma$  est un élément de  $\mathbb{R}_{\leq m}^{\bar{p}}(cx)$ . Ainsi  $[c\gamma] = 0$  dans  $H_1(\mathbb{R}^{\bar{p}}(cx))$ .

Pour  $i > n$  il suffit de remarquer que  $\mathbb{R}_n^{\bar{p}}(cx) = \mathbb{R}_n^{\bar{p}}(x \times [0,1]^i)$  et d'appliquer (25).  $\#$

### 5. Étape finale.

Considérons l'hypothèse de récurrence suivante.

(Am) Pour toute partie  $(X, E)$  de longueur inférieure ou égale à  $m$  et pour toute pente réelle  $\bar{p}$ , l'inclusion  $i: \mathbb{R}_n^{\bar{p}}(X) \hookrightarrow SC_n^{\bar{p}}(X)$  est un quasi-étoomorphisme.

### 5.1 Lemme.

Not  $(X, E)$  de longueur  $m$ . Supposons (Am) vérifiée. Posons  $\bar{p}$  une pente réelle. L'inclusion  $i: \mathbb{R}_n^{\bar{p}}(X \times [0,1]^i) \longrightarrow SC_n^{\bar{p}}(X \times [0,1]^i)$  est un quasi-étoomorphisme.

### Démonstration

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n^{\bar{p}}(X) & \xrightarrow{i} & SC_n^{\bar{p}}(X) \\ \uparrow (p^r x)_* & & \uparrow (pr x)_* \\ \mathbb{R}_n^{\bar{p}}(X \times [0,1]^i) & \xrightarrow{i} & SC_n^{\bar{p}}(X \times [0,1]^i) \end{array}$$

La flèche supérieure est un étoomorphisme par hypothèse de

de récurrence. La flèche de gauche est aussi un quasi-isomorphisme par (3.5). Puisque la flèche de droite est aussi un quasi-isomorphisme (cf [K], lemme 3) on a le résultat  $\blacksquare$

Remarquons que le résultat précédent reste vrai si l'on remplace J-1.1[ par  $\mathbb{R}^n$  (cf. 3.6 a)).

En appliquant (4.2) et [K], prop. 5, on obtient de façon analogue :

### 5.2 lemme.

Soit  $(X, \Sigma)$  une PVSE de longueur m. Supposons que (Am) est vérifiée et fixons  $\bar{p}$  une perversité. Alors l'inclusion  $i : \mathbb{R}_{\bar{p}}^{\bar{p}}(cX) \rightarrow SC_{\bar{p}}^{\bar{p}}(cX)$  est un quasi-isomorphisme.

### 5.3 lemme.

Soit  $(X, \Sigma)$  une PVSE de longueur m, espace total d'une filtration conjugée antisymétrique faisant aux conditions de (I-3.6). Soit  $\bar{p}$  une perversité. Supposons que (Am) est vérifiée. L'inclusion  $i : \mathbb{R}_{\bar{p}}^{\bar{p}}(X) \rightarrow SC_{\bar{p}}^{\bar{p}}(X)$  est un quasi-isomorphisme.

### Démonstration.

Notons  $\pi : X \rightarrow S$  la projection de la filtration et cl sa fibre. Fixons  $N$  un bon recouvrement de  $S$  et  $M = \bigcup \pi^{-1}(V) / V \in \mathcal{V}$ , qui est un recouvrement de  $X$ . L'inclusion entre les complexes doubles  $C_{\infty}(N, \mathbb{R}_{\bar{p}}^{\bar{p}})$  et  $C_{\infty}(N, \mathbb{R}_{\bar{p}}^{\bar{p}})$  préserve la filtration et commute avec les différentiels  $\delta$ ,  $\gamma$  et  $D$ . Cette inclusion induit donc un morphisme entre les suites spectrales associées à ces deux complexes doubles.

Pour le second terme on a la flèche induite (cf. III-5, 2.5),  
 $(5.4) \quad \iota_* : H_{\infty}(S, \mathbb{R}_{\infty}(\mathbb{R}_{\bar{p}}^{\bar{p}}(cL))) \rightarrow H_{\infty}(S, \mathbb{R}_{\infty}(\mathbb{R}_{\bar{p}}^{\bar{p}}(cl))).$

D'après (5.1) et (5.2) et l'hypothèse de récurrence, l'inclusion induit un isomorphisme entre les espaces fondamentaux  $H_{\infty}(\mathbb{R}_{\bar{p}}^{\bar{p}}(cl))$

et  $\mathcal{H}_x^F(\text{cl})$ . Par conséquent (5.4) est un *isomorphisme*. Ainsi, l'application  $\iota$  induit un *isomorphisme* entre les abélianisations de ces deux suites spectrales. D'où le résultat.  $\blacksquare$

### 5.5 Proposition.

Soit  $(X, \Sigma)$  une PVS et  $\bar{P}$  une pertinence. L'inclusion  $\iota : \mathcal{R}_x^{\bar{P}}(X) \hookrightarrow \mathcal{S}^{\bar{P}}_x(X)$  est un quasi-isomorphisme.

#### Démonstration.

On démontre par récurrence (Am). Pour  $n=0$ , le résultat est évident. Supposons donc (Am) vérifié pour  $n$ . Considérons  $(X, \Sigma)$ , PVS de longueur  $m$  et  $\bar{P}$  une pertinence. Soit  $\{S_\alpha / \alpha \in \Delta\}$  la famille des sous-sets de  $X$  de dimension minimale. Posons:

$$U = \bigsqcup_{\alpha \in \Delta} T_{S_\alpha} \text{ et } V = X - \bigsqcup_{\alpha \in \Delta} \partial S_\alpha^{[1/2]},$$

qui sont des PVS, de même que  $UV$ , avec la structure induite (cf. I-4). La première est une réunion de PVS dans les conditions de (5.3). D'autre part,  $\text{long}(V) = m$  et  $\text{long}(UV) = m$ .

Considérons le diagramme commutatif de suites exactes suivantes (cf. [Bra] et (2.2)):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_x^{\bar{P}}(UV) & \longrightarrow & \mathcal{R}_x^{\bar{P}}(U) \oplus \mathcal{R}_x^{\bar{P}}(V) & \longrightarrow & \mathcal{R}_x^{\bar{P}}(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \iota_{UV} & & \downarrow \iota_U & & \downarrow \iota_X \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}^{\bar{P}}_x(UV) & \longrightarrow & \mathcal{S}^{\bar{P}}_x(U) \oplus \mathcal{S}^{\bar{P}}_x(V) & \longrightarrow & \mathcal{S}^{\bar{P}}_x(X) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Les flèches  $\iota_{UV}$  et  $\iota_X$  sont des quasi-isomorphismes par l'hypothèse de récurrence. D'après (5.3) la flèche  $\iota_U$  est aussi un quasi-isomorphisme ce qui achève la démonstration.  $\blacksquare$

## Chapitre V

### LE COMPLEXE $\mathcal{X}_{\bar{p}}^*(X)$ .

Nous introduisons dans ce chapitre le complexe des formes d'intersection  $\mathcal{X}_{\bar{p}}^*(X)$ , généralisant celui de Cheeger ([Ch.1]). Une forme d'intersection  $w$  est une forme différentiable de  $X \setminus \Sigma$  soumise à deux conditions:

- 1) Une première condition de contrôle (~~sur le~~) (cf. [V1]) du comportement de  $w$  autour des singularités :  $w$  est invariante par les champs radiaux.
- 2) Une condition d'intersection qui généralise celle de [GM1] pour les simplices. Elle se traduit en termes du degré  $f$  filtrant de  $w$  près de chaque strate, degré qui mesure la gervanie ("allowability")

En particulier, dans le cas  $\bar{p} = \bar{\tau}$  nous retrouvons le complexe des formes contrôlées de [V]. Dans ce chapitre nous étudions les principales propriétés de  $\mathcal{X}_{\bar{p}}^*(X)$ , qui seront utilisées dans les chapitres VI et VII.

Faisons  $(X, \Sigma)$  une PSE de dimension  $n$  et  $\bar{p} = (\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_n)$  une persévérance.

La suite est dans la page suivante, en laissant double espace.



### 1. Définition.

Soit  $w \in \Omega^*(X^+)$  et  $S$  une strate de  $X$ . Le degré filtrant de  $w$  par rapport à  $\Pi_S$  est :

$$\text{deg}_S w = \min \{ j \in \mathbb{N} / w(x_0, \dots, x_j) \neq 0 \text{ pour toute famille } \{x_0, \dots, x_j\}$$

$$|w|_S = \min \{ j \in \mathbb{N} / w(u_0, \dots, u_j) = 0 \text{ pour toute famille } \{u_0, \dots, u_j\} \text{ de vecteurs tangents aux fibres de } \Pi_S \}$$

Si  $w$  et  $\gamma$  sont deux formes de  $\Omega^*(X^+)$ , on vérifie aisément les relations :

$$(1.1) \quad |w + \gamma|_S \leq \max(|w|_S, |\gamma|_S).$$

$$(1.2) \quad |w \cdot \gamma|_S \leq |w|_S + |\gamma|_S.$$

Nous dirons qu'une forme  $w \in \Omega^*(X^+)$  est une forme permise si pour toute strate  $S$  de  $X$  on a :

(R1) | la restriction de  $w$  à  $(T^{*,0})^+$  est invariante par  $\chi_S$ , c'est  
la dérivée de Lie  $L_{\chi_S} w$  est nulle.

(R2) |  $|w|_S < k - 1 - q_S$ , où  $k$  est  $S$ .

On dira que  $w$  est une forme d'intersection si  $w$  et  $dw$  sont permises. On définit le complexe  $\mathcal{K}_S^*(X)$  comme le sous-complexe différentiel de  $\Omega^*(X^+)$  constitué par les formes qui sont d'intersection.

La condition (R2) est une condition de contrôle du comportement de  $w$  près de  $\Sigma$ . La condition (R2) est la version différenentielle de la condition d'intersection simpliciale de (S4).

(\*) 2. Schéma de  $H^*(\mathcal{K}_S^*(X))_{[0,1]^\perp}$ .

Considérons sur  $X \times [0,1]$  la structure étale  $\mathbb{E} \times [0,1]$  (cf. I-5.6)

(2)

Fixons un entier  $n$  avec  $p_n < \infty$  et toutes autres  $p_i$  de la pente  $\alpha$   
 $(\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha)$ .

2.1 Toute forme  $w \in \Omega^*(X^+ \times ]0,1[)$  se décompose de façon unique comme  
 $w = \gamma + d\alpha \wedge p$ , où  $\gamma$  et  $p$  sont des formes de  $\Omega^*(X^+ \times ]0,1[)$  avec  $i_{\gamma} \alpha =$   
 $= i_{p} \alpha \beta = 0$  ( $i_{\gamma}$  indique le produit intérieur par  $\gamma$ ), où  $r$  est  
la variable de  $]0,1[$ ). En fait  $p = i_{\gamma} w$  et  $\gamma = w - d\alpha \wedge p$ . Cette  
décomposition sera appelée la décomposition canonique de  $w$   
par rapport à  $X \times ]0,1[$ . Pour cette décomposition on vérifie aisément  
les relations:

$$(2.2) \quad \|w\|_{S^* X \times ]0,1[} = \max (\|\gamma\|_{S^* X \times ]0,1[}, \|p\|_{S^* X \times ]0,1[}),$$

pour toute strate  $S$  de  $X$ . Une autre relation importante est:

$$(2.3) \quad \|\gamma\|_{S^* X \times ]0,1[} = \max_{r \in ]0,1[} |\gamma(r)|_S$$

et de même pour  $p$  (cf. II-2.3). En général on a:

2.4 Lemma.

Soit  $w = \gamma + d\alpha \wedge p$  la décomposition canonique de  $w \in \Omega^*(X^+ \times ]0,1[)$ .

Pour toute strate  $S$  de  $X$  on a la relation:

$$\max (\|w\|_{S^* X \times ]0,1[}, \|dw\|_{S^* X \times ]0,1[}) = \max_{r \in ]0,1[} (\|\gamma(r)\|_S, \|d\gamma(r)\|_S, \|p(r)\|_S, \|dp(r)\|_S)$$

Démonstration.

Posons  $S' = S \times ]0,1[$ : Calculons d'abord  $\|i_{\gamma} d\gamma\|_{S'}$  qui est égal  
à  $\|L_{\text{for}} \gamma\|_{S'}$ . Pour cela considérons  $\{\varphi_t\}$  une famille de  
fonctions à un paramètre associé à  $\text{for}$ . Le changement  $\text{for}$  préserve  
la structure élémentaire  $\mathbb{E}_{S'}$  et aussi, pour tout  $t \in ]0,1[$ :

$$\|\varphi_t^* \gamma - \gamma\|_{S'} \leq \max (\|\varphi_t^* \gamma\|_{S'}, \|\gamma\|_{S'}) = \|\gamma\|_{S'}.$$

En passant à la limite pour  $t$  tendant vers 0, on obtient:

$$(2.5) \quad \|L_{\text{for}} \gamma\|_{S'} = \lim_{t \rightarrow 0} \|\frac{1}{t} (\varphi_t^* \gamma - \gamma)\|_{S'} = \lim_{t \rightarrow 0} \|\varphi_t^* \gamma - \gamma\|_{S'} \leq \|\gamma\|_{S'}.$$

Pour simplifier les notations posons:

$$d\gamma = \overline{d\gamma} + d\alpha \wedge i_{\gamma} d\alpha \quad \text{et} \quad dp = \overline{dp} + d\alpha \wedge i_{\gamma} d\alpha,$$

les décompositions canoniques de  $d\gamma$  et  $d\beta$  respectivement.

Remarquons que pour tout  $r \in ]0,1[$  on a :

$$(2.6) \quad \overline{d\gamma}(r) = d\gamma(r) \quad \text{et} \quad \overline{d\beta}(r) = d\beta(r).$$

Avec ces notations, nous écrivons :

$$dw = \overline{d\gamma} + d\alpha \left( L_{\partial br}\gamma - \overline{d\beta} \right)$$

et, par conséquent, pour toute strate  $S$  de  $X$  (cf. (2.1)) :

$$(2.7) \quad \max(|w|_{S'}, |dw|_{S'}) = \max(|\gamma|_{S'}, |\beta|_{S'}, |\overline{d\gamma}|_{S'}, |L_{\partial br}\gamma - \overline{d\beta}|_{S'}).$$

D'autre part, les relations (2.5) et (2.1) nous montrent :

$$|L_{\partial br}\gamma - \overline{d\beta}|_{S'} \leq \max(|\gamma|_{S'}, |\overline{d\beta}|_{S'}), \text{ et}$$

$$|\overline{d\beta}|_{S'} \leq \max(|L_{\partial br}\gamma - \overline{d\beta}|_{S'}, |\gamma|_{S'}).$$

Finalement, l'égalité (2.6) devient :

$$\max(|w|_{S'}, |dw|_{S'}) = \max(|\gamma|_{S'}, |\beta|_{S'}, |\overline{d\gamma}|_{S'}, |\overline{d\beta}|_{S'}),$$

ce qui, à l'aide de (2.3) et de (2.6), montre le résultat cherché.<sup>11</sup>

Une conséquence immédiate de ce lemme est le résultat suivant, qui met en relation des éléments de  $\mathcal{K}_p^*(X \times ]0,1[)$  et de  $\mathcal{K}_p^*(X)$ .

2.8 Proposition:

Soit  $w = \gamma + d\alpha + \beta$  la décomposition canonique de  $w \in \Omega^*(X \times ]0,1[)$ .  
On a l'équivalence :

$$w \in \mathcal{K}_p^*(X \times ]0,1[) \iff \gamma(r), \beta(r) \in \mathcal{K}_p^*(X), \text{ pour tout } r \in ]0,1[.$$

Cette dernière proposition montre que, pour tout  $r \in ]0,1[$ , les applications :  $pr_x^*: \mathcal{K}_p^*(X) \rightarrow \mathcal{K}_p^*(X \times ]0,1[)$  et  $(\iota_r)^*: \mathcal{K}_p^*(X \times ]0,1[) \rightarrow \mathcal{K}_p^*(X)$  sont bien définies ( $\iota: X \times ]0,1[ \rightarrow X$  est la projection canonique et  $\iota_r: X \rightarrow X \times ]0,1[$  est définie par  $\iota_r(x) = (x, r)$ ). Elles induisent des homomorphismes en cohomologie. Pour montrer que ces applications induites sont des isomorphismes continuons considérons l'opérateur d'homotopie introduit par Cheeger [Che1] :

$$\mathcal{L} : \Omega^*(X \times J_{0,1}\mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{*-1}(X \times J_{0,1}\mathbb{C})$$

où  $\mathcal{L}(w) = \int_{\mathbb{H}^n} p \wedge dw$ ,  ~~$p = \beta + i\alpha$~~   $\beta + i\alpha$  étant la décomposition canonique de  $w$ . Dans ([Ch1]) on montre :

### 2.9 Lemme.

L'application  $\mathcal{L}$  vérifie la relation :

$$d\mathcal{L}w + \mathcal{L}dw = w - pr_X^* f(1)\omega.$$

On montre ici que l'opérateur d'homotopie  $\mathcal{L}$  est un endomorphisme de  $\mathcal{K}_p^*(X)$ .

### 2.10 Lemme.

$$\text{si } w \in \mathcal{K}_p^*(X \times J_{0,1}\mathbb{C}) \text{ alors } \mathcal{L}w \in \mathcal{K}_{\bar{p}}^{*-1}(X \times J_{0,1}\mathbb{C}).$$

#### Démonstration.

Pour tous  $\beta + i\alpha$  la décomposition canonique de  $w$ . Soit  $S$  une strate de  $X$  et posons  $S' = S \times J_{0,1}\mathbb{C}$ . Le champ  $X_S$  est justement  $(X_{S'}, 0)$ . Par conséquent, sur la partie régulière de  $T_{S'}^{reg} = T_S^{reg} \times J_{0,1}\mathbb{C}$  on a la relation :

$$L_{X_S} \mathcal{L}w = \int_{\mathbb{H}^n} L_{X_S} (\beta \wedge dw) = \int_{\mathbb{H}^n} L_\beta \beta \wedge dw.$$

Cette expression est nulle car  $L_{X_S} w = 0$  équivaut à  $L_{X_S} \beta = L_{X_S} f = 0$ . D'où (R1).

Pour (R2) remarquons d'abord que les vecteurs tangents aux fibres de  $T_{S'}$  sont de la forme  $(\tilde{z}, 0)$ , où  $\tilde{z}$  est un vecteur tangent aux fibres de  $T_S$ . Pour tout  $t \in J_{0,1}\mathbb{C}$ ,  $i\tilde{z} \int_{\mathbb{H}^n} \beta \wedge dw = \int_{\mathbb{H}^n} i(\tilde{z}, 0) \beta \wedge dw$ .

De ces deux faits, on déduit la relation :

$$|\mathcal{L}w|_S = \left| \int_{\mathbb{H}^n} \beta \wedge dw \right| \leq \max_{t \in J_{0,1}\mathbb{C}} |\beta(t)|_S \leq |\beta|_S, \quad \forall t \in J_{0,1}\mathbb{C}.$$

Par conséquent :

$$|\mathcal{L}w|_{S'} \leq |\beta|_{S'} \leq |w|_{S'} \wedge k-1 - \rho_k, \text{ où } k = \text{cod } S'.$$

Ainsi,  $\mathcal{L}w$  est une forme permutée. Pour la dérivée  $d\mathcal{L}w$  on a la relation  $d\mathcal{L}w = w - pr_X^* f(1)\omega - \mathcal{L}dw$ , qui montre (R1), et la relation :

(5)

$$|\partial \text{dw}|_S \leq \max(|w|_S, |pr_X^* f(1\lambda)|_S, |\partial w|_S) \leq \\ \leq \max(|w|_S, |f|_S, |\partial w|_S) < k-1-p_k,$$

qui montre (R2). #

D'une part on a l'égalité  $pr_X \circ \iota_{1\lambda} = id_X$ , d'autre part les dernières relations résultent montrent que  $\ell$  est un opérateur d'homothétie  $(\iota_{1\lambda} \circ pr_X)^*$  et l'identité de  $J\ell_{\bar{\lambda}}^*(X \times ]0,1[)$ . On a donc montré.

### 2.11 Proposition.

L'application  $pr_X^*: \mathcal{K}_{\bar{\lambda}}^*(X) \rightarrow \mathcal{K}_{\bar{\lambda}}^*(X \times ]0,1[)$  est un quasi-isomorphisme.

2.12 Remarque. On obtient le même résultat pour  $X \in \mathbb{R}^m$ , pseudovariété munie de la structure étendue produit  ~~$\mathbb{R}^{n+1}$~~   $\mathbb{E} \times \mathbb{R}^m$ .

### 3. Calcul de $H^*(\mathcal{K}_{\bar{\lambda}}^*(cX))$ .

Comme dans (2), nous posons  $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_n, \omega)$ . Sur la pseudovariété  $cX$  conditions, comme structure étendue, l'extension canonique de  $\mathbb{E}$  (cf I-26). Rappelons que la partie régulière de  $cX$  est  $X^* \times ]0,1[$ .

3.1 Ainsi  $\text{pr}_X^*\text{dw}$  la décomposition canonique de  $w \in \Omega^*(X^* \times ]0,1[)$ . On vérifie sans peine que  $w$  est un élément de  $\mathcal{K}_{\bar{\lambda}}^*(cX)$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- a)  $w \in \mathcal{K}_{\bar{\lambda}}^*(X \times ]0,1[)$ ,
- b)  $\gamma(r) = \gamma(1\lambda)$  et  $\beta(r) = 0$  si  $r \leq 1\lambda$ ,
- c)  $\gamma(1\lambda) = 0$  si  $i \geq n-\alpha$  et
- d)  $d\gamma(1\lambda) = 0$  si  $i \geq n-1-\alpha$ .

### 3.2 Lemme.

a.  $w \in \mathcal{K}_{\bar{\lambda}}^*(cX)$  alors  $\text{dw} \in \mathcal{K}_{\bar{\lambda}}^{i+1}(cX)$ .

### Démonstration.

Grâce à (2.10) il suffit de montrer b), c) et d). Nous nous demandons

La décomposition canonique. Pour démontrer  $\text{Per}_n = \text{Per}_{n+1}$ , alors  $\text{dim}(v) = 0$  si  $v \in V_n$ . Cela montre b). a) et b). #

### 3.3 Réapplications.

Réapplications par induction sur l'ensemble entre  $H^i(\mathcal{K}^*(x))$  et  $H^i(\mathcal{K}^*(cx))$  si  $i > n$ .  $H^i > n$  alors l'unique  $H^i(\mathcal{K}^*(cx))$  est nul.

### Démonstration.

On va démontrer d'abord la cas  $i > n$ . Soit  $w \in \mathcal{K}^*(cx)$  un vecteur. Supposons que le principe précédent la forme des appariements à  $\mathcal{K}^{i-1}(cx)$ . Autrement dit  $w = (\#_1, \dots, \#_n)$  avec  $\#_i \in H^i(\mathcal{K}^*(cx))$  et nulle. #

Pour écrire un renouvellement pour  $\#_i : \mathcal{K}^*(x) \rightarrow \mathcal{K}^*(cx)$  set  $\#_{i+1} : \mathcal{K}^{i+1}(x) \rightarrow \mathcal{K}^{i+1}(x)$  nous faisons référence à l'onde de (2.9) et on va faire comme dans (2.11). #

### 4. Théorème principal.

Le théorème  $\mathcal{K}^*(x)$  va valoir pour le principe de Marg. Vélois soit pour un couple quel renouvellement de  $x$ . Dans ce paragraphe on introduit un type particulier de renouvellement pour lequel le principe sera encore vrai.

### 4.1 Définition.

Un renouvellement  $N = \mathcal{K}^*(x)$  est un renouvellement adapté à  $\Sigma$  si il existe une partition de l'unité  $\{\mathcal{K}^*(y)\}_{y \in \Sigma}$  telles que  $\mathcal{K}^*(y)$  admette une action de  $\mathcal{K}^*(x)$  sur  $\mathcal{K}^*(y)$  identifiant:

- 1) lorsque  $y \neq x$  et  $\mathcal{K}^*(y)$ ,
- 2) si  $y$  est un élément de  $\Sigma$  et  $\mathcal{K}^*(y)$  nulle alors  $\mathcal{K}^*(y) = 0$  pour tous les  $y \in \Sigma \setminus \{y\}$ .

Ces conditions nous permettent de continuer:

### 4.2 Théorème.

$\mathcal{K}^*(x) \mathcal{K}^*(y) = \mathcal{K}^*(y) \mathcal{K}^*(x)$  alors  $\mathcal{K}^*(x+y) = \mathcal{K}^*(y+x)$ .

Démonstration.

Remarquons que  $\mathbb{K}_P^+(u_j)$  a un sens car  $u_j$  est plein. Prenons  $S \cap u_j$  une strate de  $u_j$  (ni elle n'est pas connexe, alors on raisonne sur chaque composante connexe). Sur  $u_j \cap T_S^{(1)}$  on a:

$$i_{\chi_S}(f_j \cdot w) = f_j i_{\chi_S} w = 0,$$

$$i_{\chi_S}(d(f_j \cdot w)) = i_{\chi_S}(df_j \wedge w + f_j \cdot dw) = 0,$$

car  $i_{\chi_S} w = i_{\chi_S} dw = 0$  et  $i_{\chi_S}(df_j) = \chi_S(f_j) = 0$ . Cela montre (R1).

La propriété (R2) démontre de:

$$|f_j \cdot w|_{S \cap u_j} \leq |w|_S < k-1-p_k, \text{ où } k = \text{wd } S = \text{wd } S \cap u_j, \text{ et}$$

$$|d(f_j \cdot w)|_{S \cap u_j} = |df_j \wedge w + f_j \cdot dw|_{S \cap u_j} \leq \max(|df_j|_S + |w|_S, |dw|_S)$$

$$< k-1-p_k, \text{ car } |df_j|_S = 0. \quad \#$$

4.3 Exemples.

a) Considérons l'exemple de 2.1 a) et montrons que  $\mathcal{M}$  est un revêtement adapté à  $\Sigma$ .

Soit  $S$  une strate de  $X$ . Si  $S = S_\alpha$ , pour un  $\alpha \in \Delta$ , alors  $f(\alpha) = s \in \mathbb{X} \in (T_S^{(1)})^+$  et donc  $\chi_S(f) = 0$  sur  $(T_S^{(1)})^+$ .

Si  $S + S_\alpha$ , pour tout  $\alpha \in \Delta$ , et si il n'existe pas  $\alpha \in \Delta$  avec  $S_\alpha \subset \overline{S}$  alors  $f(\alpha) = 0$  sur  $(T_S^{(1)})^+$  et donc  $\chi_S(f) = 0$  sur  $(T_S^{(1)})^+$ .

Finalement, si  $S + S_\alpha$ , pour tout  $\alpha \in \Delta$ , et si il existe  $\alpha \in \Delta$  avec  $S_\alpha \subset \overline{S}$  alors la fonction  $\chi_{S_\alpha}$  est constante sur les fibres de  $T_S$  (cf. I-5.4). Or, le champ  $\chi_S$  est tangent aux fibres de  $T_S$  et donc  $\chi_S(f) = 0$ .  $\#$

b) Supposons maintenant que  $X$  est l'espace total d'une fibration conjugée dont la structure étiquetée est celle de (I-3.6). Prenons  $\{V_j\}_{j \in J}\}$  un revêtement ouvert de  $S$  et  $\{h_{ij}\}_{j \in J}$  une partition de l'unité subordonnée. Alors le revêtement

(2)

$M = \{\pi^{-1}(v_j) \mid j \in J\}$  est un recouvrement de  $X$  adapté à  $\Sigma$ . La partition de l'unité subordonnée est  $\{h_{j\alpha} \mid j \in J\}$ .

Pour un raisonnement analogue à celui utilisé dans a) on montre que  $M$  est un recouvrement adapté à la structure étendue de  $X$ .

C'est pourquoi les deux exemples qui seront utilisés dans la suite.

4.4 Fixons  $M$  un recouvrement de  $X$  adapté à  $\Sigma$ . Pour chaque couple d'entiers  $(i, j)$  posons:

$$C^i(M, \mathbb{K}_p^\varphi) = \prod_{\alpha \in \Sigma^{+}} \mathbb{K}_p^\varphi (M_{\alpha i} \cap M_{\alpha i}) .$$

(ici et au sens où  $M_{\alpha i} \cap M_{\beta i}$  est plein. Comme dans [Bo], pg. 1, (voir aussi III-1), notons  $D$  la différentielle sur le complexe double  $C^*(M, \mathbb{K}_p^*)$ . En procédant de façon standard (cf. [Bo]) et tenant compte de (4.2) on montre:

4.5 Proposition. Mayer-Vietoris généralisé.

L'application restriction  $r: \mathbb{K}_p^\varphi(X) \rightarrow C^*(M, \mathbb{K}_p^\varphi)$  induit une isomorphie entre  $H^*(\mathbb{K}_p^\varphi(X))$  et  $H^*\{(M, \mathbb{K}_p^\varphi), D\}$ .

Considérons maintenant  $X$  dans les conditions de (4.3 b)). Posons  $\tilde{\pi}$  la fibre de  $\pi$ . À chaque entier  $j$  nous associons le préfaisceau  $\tilde{H}^j(\mathbb{K}_p^\varphi(\text{ch}))$  défini par:

$$\tilde{H}^j(\mathbb{K}_p^\varphi(\text{ch}))(V) = H^j(\mathbb{K}_p^\varphi(\pi^{-1}(V))), \quad V \subset S \text{ ouvert},$$

ce qui a un sens grâce à (I-4.1). Ce préfaisceau est localement trivial (§. 2.12). De la même façon que dans (III-5) on montre le:

4.6 Proposition.

Sous les conditions précédentes il existe une suite spectrale  $\{\tilde{E}^{i,j}\}$  convergant vers  $H^*(\mathbb{K}_p^\varphi(X))$ , dont le second terme est  $\tilde{C}_2^{i,j}$  et,

$$H^i(S, \tilde{H}^j(\mathbb{K}_p^\varphi(\text{ch}))),$$

cohérence de  $S$  à valeurs dans le préfaisceau  $H^d(\mathcal{K}_S(cL))$ .

### 5. Déplissage et complexe $\mathcal{K}_S^\pm(x)$

Dans (I-6) on a écrit le déplissage de  $X$ . Nous allons voir que sous ce déplissage les formes de  $\mathcal{K}_S^\pm(x)$  deviennent des formes définies sur tout  $\tilde{X}$ , en d'autres termes, le déplissage de  $X$  déingularise les formes de  $\mathcal{K}_S^\pm(x)$ .

#### 5.1 Proposition.

Soit  $w$  un élément de  $\mathcal{K}_S^\pm(x)$ , alors il existe  $\tilde{w} \in \mathcal{L}^\pm(\tilde{X})$  telle que  $\tau_X^\pm w$  et  $\tilde{w}$  coïncident sur  $\tilde{X} - \tau_X^{-1}(\Sigma)$ .

#### Démonstration.

En fait, il suffit de montrer qu'il existe  $\tilde{w} \in \mathcal{K}_S^\pm(\tilde{X})$  telle que  $\tau_X^\pm \tilde{w}$  et  $w$  coïncident sur  $\tilde{X} - \tau_X^{-1}(\Sigma)$ .

Pour simplifier les notations, supposons que la famille des strates de dimension minimale est réduite à un élément, disons  $S$ . Posons  $y + dr + p$  la décomposition canonique de la restriction de  $w$  à  $T_S$ . Remarquons que  $F_S^{+/-}(w_{T_S})$  est un élément de  $\mathcal{L}^\pm(K_S^{+/-}x]_{-1,1}L)$ .

Définissons  $\tilde{w}$  par:

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} w(x) & \text{si } x \in ((x-T_S) \times \{r\})^+ \cup \\ & ((x-T_S) \times \{r\})^- \\ F_S^{+/-}(y(r), r) + dr \wedge p(r) & \text{si } x = (y, r) \in K_S^{+/-}x]_{-1,1}L \end{cases}$$

qui est bien un élément de  $\mathcal{L}^\pm(\tilde{X}^+)$  car  $y(1) = y(1/r)$  et  $p(r) \geq 0$  si  $r \leq 1/y$ . D'autre part, à l'aide de (2.8) on montre sans peine que  $\tilde{w}$  appartient à  $\mathcal{K}_S^\pm(\tilde{X})$ . Par construction, les formes  $\tau_X^\pm w$  et  $\tilde{w}$  coïncident sur  $\tilde{X} - \tau_X^{-1}(\Sigma)$ .

La forme  $\tilde{w}$ , dont l'existence est assurée par la proposition précédente (5.1), est appelée déplissage de  $w$ .

## Chapitre VI.

## RELATION ENTRE $\mathcal{L}_F^N(x)$ ET $S_{\text{err}}^N(x^+, \mu)$

4

Fixons  $(X, \Sigma)$  une PVSE de dimension  $n$ . Posons  $\bar{p}$  une pénalité telle que  $\bar{p} \leq \bar{m}$ , où  $\bar{m}$  est la pénalité mortie, et  $\tilde{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$  une  $(n+1)$ -cycle des nombres positifs ou nuls vérifiant les relations:

Fixons une métrique  $\tilde{g}$ -adaptée sur  $X^+$  (cf. IV). Le but de ce chapitre est de montrer que l'inclusion  $i: \mathcal{K}_F^+(X) \hookrightarrow \mathrm{Lie}(X^+, \tilde{g})$  est un quasi-isomorphisme, dans le cas où  $X$  est complète.

1. La signification de la condition (Q) est la suivante. Si  $n$  et  $i$  sont deux entiers quelconques, alors nous pouvons écrire:

$$(1.1) \quad \left( i < \frac{1}{2} (k-1 + \frac{1}{\alpha_k}) \right) \iff (i < k-1 - \varphi_k).$$

Le terme de gauche est relié au calcul de  $H_{(2)}^*(N \times_{\mathbb{P}^1} \mathbb{P}^1, m(\alpha_k))$  (cf. I-2) et celui de droite au calcul de  $H_{*}^{\mathbb{R}}(cN)$ , où  $N$  est une variété et  $m$  une métrique riemannienne sur  $N$ . En d'autres termes, la condition (Q) n'est d'autre que celle de Cheeger pour son théorème de dualité ([Ch1], voir aussi [NaJ], pag. 342).

## 2. Proposition.

Si  $X$  est conjugué, le complexe  $\mathcal{F}_x^{\bar{\Phi}}(X)$  est inclus dans  $\mathcal{S}_{(2)}^{+}(x^+, \mu)$ .

## Demonstration

On raisonne par récurrence sur la longueur de  $\lambda$ . Si cette longueur est nulle alors le résultat est trivial, car  $X^* = X$  est une variété compacte. Supposons donc que le résultat est vrai pour les PSE dont la longueur est

(2)

strictement plus petite que  $\ell$  et soit une forme  $(X, \Sigma)$  avec long  $(X) = \ell$ .

Soit  $w \in \mathcal{K}_\mu^{\leq \ell}(X)$  et montrons que  $\|w\|_\mu$  est fini. Puisque  $X$  est compact il existe un nombre fini d'ouverts modèles (cf. II-4.3) qui recouvrent  $X$ . Restreignons nous à un de ces ouverts modèles  $U = ]0, 1[^{n-h} \times \mathbb{R}^h$ . La métrique induite par  $\mu$  sur  $U$  est de la forme  $dr^2 + \sum dx_{n-k}^2 + r^{2k} dm$ , où  $m$  est une métrique Riemannienne sur  $L_S^+$ ,  $[x_0, \dots, x_h]$ -adaptée à  $\Sigma_S$ . Il suffira de montrer  $\|w|_U\|_\mu < \infty$ , où  $w_U$  est la restriction de  $w$  à l'ouvert  $U$ .

Puisque  $w \in \mathcal{K}_\mu^{\leq \ell}(X)$ , on pourra supposer que  $w_U$  ne dépend pas de  $n-h$ . Cette restriction s'écrit sous la forme:

$$w_U = \sum_{j=i-1+1}^i \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_j} \gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_j} \alpha_1 dx_1 \wedge \dots \wedge \alpha_j dx_j,$$

où:

$$(2.1) \quad i \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_j \Rightarrow \text{pour } b=1, \dots, n-h.$$

On peut aussi se restreindre au cas  $w_U = \gamma \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_j$  (cf. II-3.1),  $\gamma$  étant une  $(i-j)$ -forme dans les conditions de (2.1) ne contenant ni  $x_{n-h}$ . D'autre part, il n'est pas difficile de montrer:

$$\|\gamma\|_\mu < \infty \Leftrightarrow \|\gamma \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_j\|_\mu < \infty.$$

D'après (II-3.1):

$$\|\gamma\|_\mu^2 = \int_{]0, 1[^{n-h}} \int_0^1 r^{ak(k-1-2(i-j))} \|\gamma(x_1, \dots, x_{n-h})\|_m^2 dx_1^2 \dots dx_{n-h}^2 dr.$$

Or, pour chaque  $(x_1, \dots, x_{n-h}) \in ]0, 1[^{n-h}$  la forme  $\gamma(x_1, \dots, x_{n-h})$  est dans  $\mathcal{K}_\mu^{\leq i}(L_S)$  (cf. II-4.8). Par hypothèse de récurrence on a  $\|\gamma(x_1, \dots, x_{n-h})\|_\mu < \infty$ . Puisque  $w$  est une forme globale, il existe  $c > 0$  tel que:

$$\|\gamma(x_1, \dots, x_{n-h})\|_\mu < c \quad \forall (x_1, \dots, x_{n-h}) \in ]0, 1[^{n-h}.$$

Ainsi:

$$\|\gamma\|_\mu^2 < c \int_0^1 r^{ak(k-1-2(i-j))} dr.$$

(3)

Le deuxième terme de cette inégalité sera fini si  $|w|_{k-1} \cdot 2^{(i-j)} < -1$   
 ce qui équivaut à (cf. 1.1) :  $i-j < k-1-p_k$ . Or c'est justement  
Ceci termine la démonstration.

Or, ceci est juste car  $w$  est un élément de  $\mathcal{K}_p^*(X)$ , et donc :

$$i-j = |w|_k < k-1-p_k.$$

Ceci termine la démonstration maintenant  $\|\gamma\|_\mu < \infty$  et par construction  
 $\|w\|_\mu < \infty$ .  $\#$

3. Dans le cas où la PSE n'est pas complète, l'inclusion précédente  
 n'est plus vérifiée. Ceci nous amène à introduire le complexe auxiliaire  
 suivant :

si  $Z \subset X$  est un ouvert, on mettra

$$\hat{\mathcal{K}}_p^*(Z) = \{ w \in \mathcal{S}^*(Z^+) / \exists \gamma \in \mathcal{K}_p^*(X) \text{ tel que } w_z = \gamma_z \}.$$

Remarquons que si  $Z$  est l'espace total alors  $\hat{\mathcal{K}}_p^*(Z) = \mathcal{K}_p^*(X)$ . Le  
 complexe  $\hat{\mathcal{K}}_p^*(Z)$  vérifie des propriétés semblables à celles vérifiées par  
 $\mathcal{K}_p^*(Z)$ , par exemple :

### 3.1 Lemme.

Si  $Z \subset X$  est un ouvert relativement compact alors  $\hat{\mathcal{K}}_p^*(Z)$  est  
 inclus dans  $\mathcal{S}_{(\nu)}^*(Z^+, \mu)$ .

### Démonstration.

De même que pour 2.  $\#$

3.2 Soient  $S$  une strate de  $X$ ,  $V$  et  $W$  deux ouverts sa avec  $V \subset \bar{V} \subset W$  et  
 $\mathbb{C}[[z_2, 1]]$ . Soient  $f: W \rightarrow [0, 1]$  et  $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  deux fonctions de  
 classe de  $C^\infty$  à supports compacts vérifiant :

$$f(z) = 1 \quad \forall z \in V \quad \text{et} \quad h(x) = 1 \quad \forall x \leq \varepsilon.$$

Il est clair que si  $w \in \mathcal{K}_p^*(\pi_S^{-1}(W))$  alors la forme  $(f \circ \pi_S) \cdot (h \circ \pi_S) \cdot w$   
 appartient à  $\mathcal{K}_p^*(X)$ . Ces deux formes coïncident sur  $\pi_S^{-1}(V) \cap T_S^\varepsilon$ . D'où  
 la définition équivalente :

$$\hat{\mathcal{K}}_{\bar{p}}^*(\pi_s^{-1}(V) \cap T_s^{-\epsilon}) = \left\{ w \in \Omega^*(\pi_s^{-1}(V) \cap T_s^{-\epsilon})^+ / \exists \gamma \in \hat{\mathcal{K}}_{\bar{p}}^*(\pi_s^{-1}(W)) \text{ qui étend } w \right\}$$

3.3 Lemme.

Soient  $S$  un stade de  $X$  et  $x$  un point de  $S$ . Il existe un voisinage  $V$  de  $x$  et une trivialisation  $\varphi: \pi_s^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{C}L_S$  tels que si  $\theta: \pi_s^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{C}L_S$  /  $\theta(z) = [r, j]$  avec  $\varphi(z) = (\pi_s(z), [r, j])$ , alors:

- i)  $\theta^*: \hat{\mathcal{K}}_{\bar{p}}^*(\mathbb{C}L_S) \longrightarrow \hat{\mathcal{K}}_{\bar{p}}^*(\pi_s^{-1}V)$  est bien défini, et
- ii)  $\theta$  induit un isomorphisme en cohomologie.

Démonstration.

D'après (I-3.2) nous pouvons supposer que  $\pi_s$  est la restriction d'un voisinage conique  $\mathbb{P}: \mathbb{C} \rightarrow S$  où le fibre est  $c_2 L_S \cong L_S \times [0, 1] / L_S \times \{0\}$ . Considérons  $W$  un ouvert de  $S$  contenant  $x$  qui trivialise  $\mathbb{P}$  par  $\varphi: \mathbb{P}^{-1}(W) \rightarrow W \times c_2 L_S$ . Soit  $V$  un autre ouvert de  $S$  contenant  $x$  avec  $V \subset \bar{V} \subset W$ . Remarquons que la restriction de  $\varphi$  à  $\pi_s^{-1}(V)$  est une trivialisation de  $\pi_s^{-1}(V)$ .

D'après le lemme précédent (remplaçant  $0 < \epsilon_1$  par  $0 < \epsilon_2$ ):

$$\hat{\mathcal{K}}_{\bar{p}}^*(\pi_s^{-1}(V)) = \left\{ w \in \Omega^*(\pi_s^{-1}(V))^+ / \exists \gamma \in \hat{\mathcal{K}}_{\bar{p}}^*(\mathbb{P}^{-1}(W)) \text{ qui étend } w \right\}.$$

Ainsi  $\theta^* w \in \hat{\mathcal{K}}_{\bar{p}}^*(\pi_s^{-1}(V))$  et  $\theta$  est donc bien définie.

Pour i) il suffit de remarquer que les opérateurs de (II-2) sont compatibles avec la réduction  $\hat{\mathcal{K}}_{\bar{p}}^*$ .  $\blacksquare$

3.4 Posons  $Z \subset X$  un ouvert plein et  $\mathcal{U}$  un recouvrement de  $Z$  adaptée à  $\Sigma_Z$ . Pour chaque couple d'entiers posons:

$$c: (n, \hat{\mathcal{K}}_{\bar{p}}^i) \rightarrow \prod_{U_i \in \mathcal{U}} \hat{\mathcal{K}}_{\bar{p}}^i(U_{i, n, \dots, n, U_i}).$$

Notons  $D$  comme dans [Bo] (voir aussi II-4.4). En procédant de façon standard (cf. [Bo]) et en tenant compte de (II-4.2) on montre la proposition:

(5)

### 3.5 Proposition. Mayer-Vietoris généralisé.

L'application restriction  $r: \hat{K}_\beta^*(Z) \rightarrow C^*(M, \hat{K}_\beta^*)$  induit un isomorphisme entre  $H^*(\hat{K}_\beta^*(Z))$  et  $H^*(C^*(M, \hat{K}_\beta^*), D)$ .

Supposons maintenant que  $Z = T_S$ , pour une strate  $S$  de  $Z$  de dimension minimale. En procédant comme dans (II-4.6), et en tenant compte du lemme 3.3 on montre la proposition:

### 3.6 Proposition.

Il existe une suite spectrale  $\{\mathcal{E}^{i,j}\}$  convergeant vers  $H^*(\hat{K}_\beta^*(Z))$  dont le deuxième terme  $\{\mathcal{E}_2^{i,j}\}$  est:

$$H^i(S, H^j(\hat{K}_\beta^*(cL_S))).$$

### Démonstration

Et finalement on arrive au résultat principal de cette section. Pour cette proposition on utilisera le fait que pour toute pris  $(X', E')$ , l'espace vectoriel  $H^*(\hat{K}_\beta^*(X'))$  est de dimension finie. Ceci est une conséquence de (III-5.3) et de (IV-3.4).

### 3.7 Proposition.

Si  $X$  est compacte alors l'inclusion  $i: \hat{K}_\beta^*(X) \hookrightarrow L_{12}^*(X^+, \mu)$  est un quasi-isomorphe.

### Démonstration.

On démontre par récurrence l'annonce suivante:

(An) | Soit  $Z \subset X$  un ouvert plein rencontrant au plus  $m$  strates de  
|  $X$ . Alors l'inclusion  $i: \hat{K}_\beta^*(Z) \hookrightarrow L_{12}^*(Z^+, \mu)$  est un  
| quasi-isomorphe.

Remarquons que si  $Z$  est relativement compacte et  $i$  est ainsi bien définie pour nous le résultat se déduit de (3.3). Supposons que (An.) est vérifié. Soit  $Z \subset X$  un ouvert plein rencontrant au plus  $m+1$  strates de  $X$ . Posons  $\{S_\alpha / \alpha \in \Delta\}$  la famille de strates de  $X$  de dimension minimale,

6

$$U = \bigsqcup_{n \in \Delta} (T_{S_n} \cap Z) \text{ et } V = Z - \bigsqcup_{n \in \Delta} \overline{T_{S_n}}.$$

Remarquons que  $U$ ,  $V$  et  $UV$  sont des ouverts pleins. La première est une réunion d'ouverts dans les conditions de (3.6) et  $V$  et  $UV$  sont dans les conditions de l'hypothèse de recouvrement.

Considérons le diagramme commutatif de suites exactes courtes (cf. (3.5) et II-85) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \hat{\mathcal{K}}_p^*(Z) & \rightarrow & \hat{\mathcal{K}}_p^*(U) \oplus \hat{\mathcal{K}}_p^*(V) & \rightarrow & \hat{\mathcal{K}}_p^*(UV) \rightarrow 0 \\ & & f_L & & f_U & & f_{UV} \\ 0 & \rightarrow & \Omega_{L^2}^*, (Z, \mu) & \rightarrow & \Omega_{L^2}^*, (U, \mu) \oplus \Omega_{L^2}^*, (V, \mu) & \rightarrow & \Omega_{L^2}^*, ((UV), \mu) \rightarrow 0 \end{array}$$

où les flèches verticales sont les inclusions.

Les flèches  $f_U$  et  $f_{UV}$  sont des quasi-isomorphismes par hypothèse de recouvrement. D'après (3.6), (II-87) et l'hypothèse de recouvrement l'inclusion  $f_U$  est un quasi-isomorphisme. En conséquence,  $f_Z$  est aussi un quasi-isomorphisme.  $\blacksquare$

## Chapitre VIII.

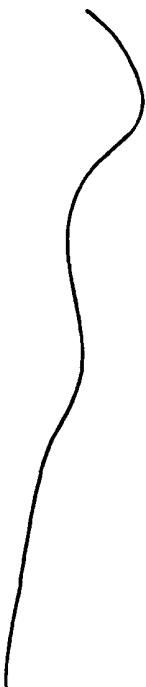
### RELATION ENTRE $\mathcal{L}_x^{\bar{p}}(X)$ ET $\mathcal{L}_x^{\bar{p}}(x)$ . THÉORÈME A.

Nous avons démontré dans les chapitres précédentes que les inductions  $\mathcal{L}_x^{\bar{p}}(X) \hookrightarrow \mathcal{S}C_x^{\bar{p}}(X)$  et  $\mathcal{L}_x^{\bar{p}}(x) \hookrightarrow \mathcal{S}C_x^{\bar{p}}(x_{\bar{p}})$  sont des quasi-isomorphismes. Nous avons aussi étudié le comportement sous des compositions. Dans ce chapitre nous terminons la démonstration du théorème A. Pour cela nous nous servirons de deux résultats préalables:

- 1) L'intégrale  $\int: \mathcal{L}_x^{\bar{p}}(X) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{L}_x^{\bar{p}}(X), R)$  est bien définie.
  - 2) Elle intégrale vérifie la formule de Stokes.
- Ces deux points démontrent des propriétés des déplissements que l'on a étudié : géométrique (~~stabilité~~ (I-6)), simpliciale (I-7) et des formes différentielles (II-5).

Fixons  $(X, \bar{p})$  une russe de dimension  $n$  et  $\bar{p} = (\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_n)$  une partition.

On暑re  $\bar{p}$  dans la forme suivante, en laissant un espace





### 1. Intégration.

L'introduction des complexes  $\Omega_{\bar{p}}^i(X)$  et  $\mathcal{K}_{\bar{p}}^i(X)$  est due au fait que l'intégration des  $L^i$ -formes sur des chaînes d'intersection n'est pas toujours bien définie. Par contre, pour les deux complexes introduits l'intégration est bien définie (cf (1.1)).

Dans la suite, pour tout  $\varphi: \Delta \rightarrow X$  simplex permis on écrira  $\tilde{\Delta}$  le dépliage de  $\Delta$  le long de la décomposition induite par  $\varphi$ .

#### 1.1 Fonne.

Soit  $w \in \mathcal{K}_{\bar{p}}^i(X)$  et  $\varphi: \Delta \rightarrow X$  un simplex de dimension  $i$  vérifiant (S1) et (S3). Supposons que  $\varphi$  envoie différentiablement l'intérieur de  $\Delta$ , noté  $i(\Delta)$ , sur  $X$ . On a alors:

$$(1.2) \quad \int_{i(\Delta)} \varphi^* w < +\infty.$$

#### Démonstration.

Puisque la restriction de  $\pi_\Delta^*$  à l'intérieur de  $\tilde{\Delta}$ , noté  $i(\tilde{\Delta})$ , est un difféomorphisme sur  $i(\Delta)$  (cf. I-2.10), nous écrivons:

$$\int_{i(\Delta)} \varphi^* w = \int_{i(\tilde{\Delta})} \pi_\Delta^* \varphi^* w = \int_{i(\tilde{\Delta})} \tilde{\varphi}^* \pi_X^* w.$$

D'après (II-5.1) il existe  $\tilde{w} \in \Omega^n(\tilde{X})$  tel que  $\pi_X^* w = \tilde{w}$  sur  $\tilde{\varphi}(i(\tilde{\Delta}))$ . L'application  $\tilde{\varphi}: \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{X}$  étant différentiable la forme  $\tilde{\varphi}^* \tilde{w}$  est une forme globale sur  $\tilde{\Delta}$  (cf. I-7.5). Ainsi:

$$(1.3) \quad \int_{i(\Delta)} \varphi^* w = \int_{\tilde{\Delta}} \tilde{\varphi}^* \tilde{w}$$

qui est finie car  $\tilde{\Delta}$  est compacte.

#### 1.4 Définition.

Pour toute forme  $w \in \mathcal{K}_{\bar{p}}^i(X)$  et toute chaîne  $c = \sum_{j \in J} n_j \varphi_j \in \Omega_{\bar{p}}^i(X)$

on pose:

$$(1.5) \quad \int_{\epsilon} w = \sum_{j \in J} n_j \int_{\epsilon(\alpha)} \varphi_j^* w \in \mathbb{R}.$$

Ce qui définit un morphisme d'intégration:

$$\int: \mathfrak{X}_{\tilde{\varphi}}^*(X) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}_x^T(X), \mathbb{R}).$$

### 2. Formule de Stokes.

On montre maintenant que  $\int$  est un morphisme différentiel.

#### 2.1 Lemme.

Supposons que  $\text{deg}(X) \geq 1$ . Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \searrow \pi_X \\ N & \xrightarrow{\varphi} & S \hookrightarrow X \end{array}$$

où :

- i)  $M$  et  $N$  sont des variétés connexes et  $\pi$  une fibration localement triviale,
- ii)  $S$  est une strate de  $X$  de codimension  $k \geq 2$ ,
- iii)  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  sont des applications de classe  $C^\infty$ .

Soit  $w \in \mathfrak{X}_{\tilde{\varphi}}^k(X)$  et  $\tilde{w} \in \Omega^k(\tilde{X})$  son déplissage (cf. II-5.1). Le degré filtrant de  $\tilde{\varphi}^* \tilde{w}$  par rapport à  $\pi$  vérifie :

$$(2.1) \quad |\tilde{\varphi}^* w|_\pi \leq k - k_S.$$

#### Démonstration.

On fait la démonstration par récurrence sur la longueur de  $X$ . Supposons d'abord  $\text{deg}(X) = 2$ . Par hypothèse  $\varphi(M)$  est inclus dans  $\pi_X^{-1}(S)$  qui est, par construction, égal à  $K_S$ . On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & K_S \\ \downarrow \pi & \searrow \varphi & \downarrow \pi_S \\ N & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

morphisme des fibrés. Par conséquent  $|\tilde{\varphi}^* w|_\pi \leq |w|_{\pi_S}$  et

(3)

donc  $|\tilde{\varphi}^* w|_n < k - 1 - p_n$ , car  $w$  est une forme permise.

Dans le cas général, si  $S$  est de dimension minimale, on procède de la même façon que dans le cas précédent. Sinon, il existe une strate  $R$  de  $\hat{X}$ , de la même dimension que  $S$ , qui contient  $\tau_x^{-1}(S)$  (cf. I-6). La restriction de  $\tau_x$  à  $\tau_x^{-1}(S)$  est un revêtement différentiable trivial. Par hypothèse  $T\pi_{\hat{X}} \tilde{\varphi}(M)$  est inclus dans  $\tau_x^{-1}(S)$ . Posons  $Y$  le compacte convexe de  $\tau_x^{-1}(S)$  contenant  $Y$ . La restriction de  $\tau_x$  à  $Y$  est un difféomorphisme sur  $S$ . Posons  $\sigma: S \rightarrow Y$  son inverse

$$\begin{array}{ccc} Y & \hookrightarrow & \tau_x^{-1}(S) \hookrightarrow R \\ \uparrow \tau_x & \swarrow \sigma^{-1} & \downarrow \tau_x \\ S & & \end{array}$$

On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \searrow T\pi_{\hat{X}} \\ N & \xrightarrow{\varphi} & S \xrightarrow{\sigma} R \hookrightarrow \hat{X} \end{array}$$

Considérons  $\tilde{w} \in \mathcal{K}_{\tilde{\varphi}}^*(\tilde{X})$  dont le déplissage est aussi la forme  $\tilde{w}$  (cf. II-5.1). Par hypothèse de récurrence on aura :

$$|\tilde{\varphi}^* \tilde{w}|_n < k - 1 - p_n. \quad \#$$

### P. 3 Lemme.

Supposons  $\text{long}(x) \geq 2$ . Soit  $\varphi: \Delta \rightarrow X$  un simplexe permis de dimension  $i$  et  $F \subset \Delta$  une face de codimension  $1$  du type 3) (cf. I-7.12). Soit  $w \in \mathcal{K}_{\varphi}^i(X)$  et  $\tilde{w} \in \mathcal{K}_{\tilde{\varphi}}^i(\tilde{X})$  son déplissage. La restriction de  $\tilde{\varphi}^* \tilde{w}$  à  $F$  est nulle.

### Démonstration.

Posons  $K = T\pi_{\Delta}(F)$  face de  $\Delta$ . Soit  $S$  la strate de  $X$  qui contient

(4)

$\varphi(i(K))$ . Soit  $k$  sa codimension, qui est supérieure ou égale à 2.  
Par la définition du déglissement on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 i(F) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{X} \\
 \downarrow \pi_{\Delta} & & \searrow \pi_X \\
 i(K) & \xrightarrow{\varphi} & S \hookrightarrow X
 \end{array}$$

D'après (I-7.12) la restriction de  $\pi_{\Delta}$  à  $i(F)$  est une filtration. On a donc dans les conditions de ce lemme précédent que:

$$(2.3) \quad \tilde{\varphi}^* \tilde{\omega} |_{\pi_{\Delta}} \ll k-t-p_k.$$

D'autre part la dimension de la fibre  $\pi_{\Delta}$  vérifie:

$$(2.4) \quad \dim F - \dim K \geq i-1-(k-t-p_k) = k-t-p_k,$$

Car  $\dim K = \dim \varphi^{-1}(S) \leq k-t-p_k$ . De (2.3) et (2.4) on en déduit que la restriction de  $\tilde{\varphi}^* \tilde{\omega}$  sur  $i(F)$  est nulle (et donc sur  $F$ ).  $\blacksquare$

### 2.7 Proposition.

Soit  $w \in \mathbb{K}_{\tilde{\varphi}}^i(X)$  et  ~~$c \in \mathbb{K}_{\tilde{\varphi}}^{i+1}(X)$~~   $c \in \mathbb{K}_{\tilde{\varphi}}^{i+1}(X)$ , alors la formule de Stokes  $\int_{\partial c} w = \int_c dw$  est vérifiée.

### Démonstration.

D'après (IV-1.1), les faces de codimension 1 des simplices purs sont dans les conditions de (2.2). Ainsi pour montrer le résultat il suffira de prouver que si  $\varphi: \Delta \rightarrow X$  est un simplexe pur de dimension  $(i+1)$  alors:

$$\int_{i(\Delta)} \varphi^* dw = \int_{i(\varphi(\Delta))} \varphi^* w.$$

D'après (1.3) on a:

$$\int_{i(\Delta)} \varphi^* dw = \int_{\tilde{\Delta}} d\tilde{\varphi}^* \tilde{\omega},$$

qui est, d'après la formule de Stokes pour la variété,  $\int_{\partial \tilde{\Delta}} \tilde{\varphi}^* \tilde{\omega}$ .

Maintenant, grâce à (2.3) et à (I-(7.14)) nous savons:

$$\int_{i(\Delta)} \varphi^* dw = \int_{\tilde{\Delta}} \tilde{\varphi}^* \tilde{w}$$

Puisque les faces de  $\Delta$  sont aussi dans les conditions de (4.6) nous avons finalement :

$$\int_{i(\Delta)} \varphi^* dw = \int_{i(\Delta)} \varphi^* w. \quad \#$$

2.8 La formule de Stokes montre que l'opérateur  $\int$  induit

$$J^*: H^*(\mathcal{K}_{\bar{p}}(X)) \longrightarrow \text{Hom}(H_*(\Omega^F(X), \mathbb{R}))$$

défini par  $\int^* [w] = \int_c w$ . On montre dans la suite

que  $\int^*$  est un isomorphisme.

3. L'opérateur  $\int^*$  est un isomorphisme.

Considérons l'hypothèse de réécriture suivante.

Pour toute PVS  $(X, \Sigma)$  de longueur inférieure ou égale à  $m$  et toute perversité  $\bar{p}$ , l'application

$$J^*: H^*(\mathcal{K}_{\bar{p}}(X)) \longrightarrow \text{Hom}(H_*(\Omega^F(X)), \mathbb{R})$$

est un isomorphisme.

3.1 Lemme.

Soit  $(X, \Sigma)$  une PVS de longueur  $m$ . Supposons (Am) vérifié. Posons  $\bar{p}$  une perversité. Alors l'application

$$J^*: H^*(\mathcal{K}_{\bar{p}}(X \times ]-1, 1[)) \longrightarrow \text{Hom}(H_*(\Omega^F(X \times ]-1, 1[)), \mathbb{R})$$

est un isomorphisme.

Démonstration.

Considérons le diagramme commutatif :

(6)

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(\mathcal{K}_p(x)) & \xrightarrow{\quad f^* \quad} & \text{Hom}(H_*(\mathbb{L}_p^0(x)), \mathbb{R}) \\
 \downarrow p_x^* & & \downarrow p_{x'}^* \\
 H^*(\mathcal{K}_p(x_{-1,1})) & \xrightarrow{\quad f^* \quad} & \text{Hom}(H_*(\mathbb{L}_p^0(x_{-1,1})), \mathbb{R})
 \end{array}$$

La flèche d'en haut est un isomorphisme par hypothèse de récurrence, celle de gauche par (IV-2.11) et celle de droite par (IV-3.5). D'où le résultat.  $\blacksquare$

Remarquons que le résultat précédent reste aussi vrai si l'on remplace  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{R}^m$  (cf. (II-2.12), (IV-3.6)).

En appliquant (III-4.2) et (IV-3.5) on obtient:

3.2 Lemme.  
 Soit  $(X, \Sigma)$  une pise de longueur  $m$  qui est l'espace total d'une filtration complète, dans les conditions de (IV-3.6). Soit  $\bar{p}$  une pente.  
 Supposons que

3.2 Lemme.

Soit  $(X, \Sigma)$  une pise de dimension  $m$ . Supposons que (Am) est vérifiée. Soit  $\bar{p}$  une pente. Alors  $f^*: H^*(\mathcal{K}_{\bar{p}}(cX)) \rightarrow \text{Hom}(H_*(\mathbb{L}_{\bar{p}}^0(X)), \mathbb{R})$  est un isomorphisme.

3.3 Lemme.

Soit  $(X, \Sigma)$  une pise de longueur  $m$  qui est l'espace total d'une ~~pise~~ filtration complète, dans les conditions de (IV-3.6). Soit  $\bar{p}$  une pente. Supposons que (Am) est vérifiée. Alors l'application  $f^*: H^*(\mathcal{K}_{\bar{p}}(X)) \rightarrow \text{Hom}(H_*(\mathbb{L}_{\bar{p}}^0(X)), \mathbb{R})$  est un isomorphisme.

Démonstration.

Posons pour simplifier les notations  $\mathbb{L}_{\bar{p}}^n(-) = \text{Hom}(H_n(\mathbb{L}_{\bar{p}}^0(-)), \mathbb{R})$ .  
 Alors  $H^*(\mathbb{L}_{\bar{p}}(-)) = \text{Hom}(H_*(\mathbb{L}_{\bar{p}}^0(-)), \mathbb{R})$ . Ce foncteur vérifie les mêmes

(2)

propriétés, mais duals, que  $\Omega_{\bar{X}}^{\bar{p}}(-)$ . Pour les concepts, qui apparaissent dans cette démonstration, associés à  $\Omega_{\bar{X}}^{\bar{p}}$  on se réfère aux concepts duals pour  $\Omega_X^p$  du paragraphe IV.

Nousons  $\pi: X \rightarrow S$  la projection conique et cl sa fibre. Fixons  $V$  un bon revêtement de  $S$  et considérons  $\mathcal{U} = \pi^{-1}(V) / \sqrt{e} V$  quel revêtement adapté à  $\Sigma$ .

L'intégration  $\int^*$  entre les complexes doubles  $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{K}_{\bar{p}}^*)$  et  $C^*(\mathcal{U}, |\mathbb{L}_{\bar{p}}^*|)$  préserve la filtration et commute avec les différentielles  $\delta$ ,  $\gamma$  et  $D$ . Cette application  $\int^*$  induit donc un morphisme entre les deux spectres associés à ces deux complexes doubles.

Pour le second terme on a la flèche induite (cf. IV-2.5, I-4.6):

$$(3.4) \quad \int^*: H^*(S, \mathbb{H}^*(\mathbb{K}_{\bar{p}}(cL))) \rightarrow H^*(S, \mathbb{H}^*(\Omega_{\bar{p}}(cL))).$$

D'après (3.1), (3.2) et l'hypothèse de récurrence, l'application  $\int^*$  est un isomorphisme entre les faisceaux  $H^*(\mathbb{K}_{\bar{p}}(cL))$  et  $H^*(\Omega_{\bar{p}}(cL))$ . En conséquence, (3.4) est un isomorphisme et il induit un isomorphisme entre les aboutissements de ces deux suites spectrales:  $H^*(\mathbb{K}_{\bar{p}}(X))$  et  $H^*(\Omega_{\bar{p}}(X)) = \text{Hom}(H_X(\Omega^{\bar{p}}(X)), \mathbb{Q})$ . Donc le résultat.  $\blacksquare$

### 3.5 Proposition.

Soit  $(X, \Sigma)$  une PSE et  $\bar{p}$  une perversité. Alors l'application  $\int^*: H^*(\mathbb{K}_{\bar{p}}(X)) \rightarrow \text{Hom}(H_X(\Omega^{\bar{p}}(X)), \mathbb{Q})$  est un isomorphisme.

### Démonstration.

On démontre par récurrence l'hypothèse (A<sub>m</sub>). Pour  $m=0$ , le résultat résulte du théorème de De Rham car  $\mathbb{K}_{\bar{p}}^0(X) = \Omega^0(X)$  et  $|\mathbb{L}_{\bar{p}}^0(X)| = S_X(X)$ , complexe des chaînes régulières différentiables.

Supposons donc (A<sub>m</sub>) vérifiée pour n'importe quel PSE  $(X, \Sigma)$  de longueur m. Soit  $\bar{p}$  une perversité. Soit  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  la famille des états de X de dimension minimale. Posons :

$$U = \bigsqcup_{\alpha \in \Delta} T_{S_\alpha} \quad \text{et} \quad V = X - \bigsqcup_{\alpha \in \Delta} T_{S_\alpha}^{4^*},$$

qui sont de PSE, de même que  $U \cap V$  (cf. I-4). La première est

une réunion des PVS dans les conditions de (3.4). D'autre part  
 $\text{long}(u \cap v) \leq m$  et  $\text{long}(v) \leq n$ .

Considérons le diagramme commutatif des séries exactes courtes  
 associées au revêtement  $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ , qui est adapté à  $\Sigma$  (cf. IV-2.3 et  
 IV-4.4) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^*(\mathcal{K}_{\bar{p}}(x)) & \rightarrow & H^*(\mathcal{K}_{\bar{p}}(u)) \oplus H^*(\mathcal{K}_{\bar{p}}(v)) & \rightarrow & H^*(\mathcal{K}_{\bar{p}}(u \cap v)) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f_u^* & & \downarrow f_v^* & & \downarrow f_{uv}^* \\ 0 & \rightarrow & H^*(\mathcal{L}_{\bar{p}}(x)) & \rightarrow & H^*(\mathcal{L}_{\bar{p}}(u)) \oplus H^*(\mathcal{L}_{\bar{p}}(v)) & \rightarrow & H^*(\mathcal{L}_{\bar{p}}(u \cap v)) \rightarrow 0 \end{array}$$

Les flèches  $f_u^*$  et  $f_{uv}^*$  sont des isomorphismes par hypothèse de  
 récurrence. D'après (3.4) la flèche  $f_v^*$  est aussi un isomorphisme.  
 Par conséquent  $f^*$  est aussi un isomorphisme.  $\blacksquare$

Pour  $\bar{p} = \bar{t}$  on retrouve le résultat de Verona [V1].

D'après IV-5.5, IV-2.7 et (3.5) on monte finalement.

### Théorème 1.

Soit  $(X, \Sigma)$  une PVS compacte et  $\bar{p} \in \bar{m}$  une geranité. Il existe une  
 métrique riemannienne  $\mu$  sur  $X - \Sigma$  telle que  $H_{(2)}^*(X - \Sigma, \mu)$  soit  
 isomorphe à  $H_{(2)}^*(X)$ .

Ce morphisme est réalisé de la façon suivante : il existe deux  
 sous-complexes  $\mathcal{L}_{\bar{p}}^*(x) \subset \mathcal{S}\mathcal{C}_{\bar{p}}^*(x)$  et  $\mathcal{K}_{\bar{p}}^*(x) \subset \mathcal{L}_{(2)}^*(X - \Sigma, \mu)$  pour lesquels  
 l'intégrale  $\int : \mathcal{K}_{\bar{p}}^*(x) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{L}_{\bar{p}}^*(x), \mathbb{R})$  est un morphisme  
 différentiel et tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_{\bar{p}}^*(x) & \xrightarrow{\int} & \text{Hom}(\mathcal{L}_{\bar{p}}^*(x), \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}_{(2)}^*(X - \Sigma, \mu) & & \text{Hom}(\mathcal{S}\mathcal{C}_{\bar{p}}^*(x), \mathbb{R}) \end{array}$$

est constitué par des quasi-isomorphismes.

## ADDENDUM.

(\*)  
quite I  
pe ③

Le fait de se restreindre au paramétrage  $[0,1]$  est une convention.

Nous pouvons supposer que le voisinage conique est paramétré par  $[0,2]$  mais on travaillera sur la partie  $[0,1]$  seulement.

\*) Considérons par exemple  $C = \Delta_0 * \dots * \Delta_{i-1} * F_i * \Delta_{i+1} * \dots * \Delta_p$ , où  
int]  $F_i$  est une face de  $\Delta_i$  et  $i \in \{0, \dots, p\}$ . La décomposition de  $C$  induite  
⑧ par celle de  $\Delta$  est celle qu'on vient d'écrire. Ainsi, la formule (7.14)  
dément:

$$(7.14)' \quad \mathcal{D}\Delta = \widetilde{\mathcal{D}\Delta} + \mathcal{D}_3\Delta,$$

où sur  $\mathcal{D}\Delta$  on considère la décomposition induite par celle de  $\Delta$ .

\*)  
quite II  
pe ①

Pour  $\bar{p} = \bar{t}$ , pente maximale, le complexe  $\mathcal{K}^F(x)$  est constitué  
par les formes contractées de Veronese [V1].