USTL
FLANDRES ARTOIS

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

N° d'ordre : 199

THÈSE

Nouveau Régime

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN INFORMATIQUE

par

Igor LITOVSKY

GENERATEURS DES LANGAGES RATIONNELS DE MOTS INFINIS

Soutenue le 26 Février 1988 devant la Commission d'Examen

Président :	M.	DAUCHET
Rapporteurs :	A.	ARNOLD
	D.	GIRAULT-BEAUQUIER
Directeur de thèse :	M.	LATTEUX
Examinateurs :	M.	NIVAT
	E.	TIMMERMAN

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

M. A. DUBRULLE.

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie végétale
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie-Physique
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DHAINAUT André	Biologie animale
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOCT Jacques	Métallurgie
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GRANELLE Jean jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie organique
M. LACOSTE Louis	Biologie végétale
M. LAVEINE Jean Pierre	Paléontologie
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique atomique et moléculaire
M. LEROY Jean Marie	Spectrochimie
M. LHOMME Jean	Chimie organique biologique
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie physique
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphérique
M. MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M. PAQUET Jacques	Géologie générale
M. PETIT Francis	Chimie organique
M. POUZET Pierre	Modélisation - Calcul scientifique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joel	Spectroscopie moléculaire
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
Mle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. TILLIEU Jacques	Physique théorique
M. TOULOTTE Jean Marc	Automatique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ALLAMANDO Etienne	Composants électroniques
M. ANDRIES Jean Claude	Biologie des organismes
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie animale
M. BASSERY Louis	Génie des procédés et réactions chimiques
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique atomique et moléculaire
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques et Sociales
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie végétale
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie civil
M. BOIVIN Jean Claude	Spectrochimie
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie animale
M. CATTEAU Jean pierre	Chimie organique
M. CAYATTE Jean Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie structurale
M. CHIVE Maurice	Composants électroniques optiques
M. COMYN Gérard	Informatique théorique
M. COQUERY Jean Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques et Sociales
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique nucléaire et corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie organique
M. CRAMPON Norbert	Tectolique Géodynamique
M. CROSNIER Yves	Electronique
M. CURGY Jean jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELORME Pierre	Physiologie animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DEPREZ Gilbert	Physique du solide - Cristallographie
M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
Mle DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides

M. DUPONT Christophe	Vie de la firme (I.A.E.)
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FAUQUEMBERGUE Renaud	Composants électroniques
M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie structurale
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démographie
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie physique
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie organique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. HENRY Jean Pierre	Génie mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. HOUDART René	Physique atomique
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et statistiques
M. JEAN Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme (I.A.E.)
M. JOURNEL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques
M. LATTEUX Michel	Informatique
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEVRE Christian	Pétrologie
Mle LEGRAND Denise	Algèbre
Mle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne
M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme (I.A.E.)
M. LEROY Yves	Composants électroniques
M. LESENNE Jacques	Systèmes electroniques
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques et Sociales
M. MESMACQUE Gérard	Génie Mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée

M. PERTUZON Emile	Physiologie animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie physique
M. PORCHET Maurice	Biologie animale
M. POSTAIRE Jack	Informatique industrielle
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie animale
M. RIETSCH François	Physique des polymères
M. ROBINET Jean CLaude	EUDIL
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean Claude	Psychophysiologie
Mme SCHWARZBACH Yvette	Géométrie
M. SLIWA Henri	Chimie organique
M. SOMME Jean	Géographie
M. STAROSWIECKI Marcel	Informatique
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Génie alimentaire
M. THERY Pierre	Systèmes électroniques
M. THIEBAULT François	Sciences de la terre
M. THUMERELLE Pierre	Démographie - Géographie Humaine
Mme TJOTTA Jacqueline	Mathématiques
M. TOURSEL Bernard	Informatique
M. TREANTON Jean rené	Sociologie du Travail
M. TURREL Georges	Spectrochimie infrarouge et Raman
M. VANDORPE Bernard	Chimie minérale
M. VASSEUR Christian	Automatique
M. VAST Pierre	Chimie inorganique
M. VERBERT André	Biochimie
M. VERNET Philippe	Génétique
M. WACRENIER Jean Marie	Electronique
M. WALLART Francis	Spectrochimie infrarouge et Raman
M. WARTEL Michel	Chimie inorganique
M. WATERLOT Michel	Géologie générale
M. WEINSTEIN Olivier	Analyse économique de la recherche et développement
M. WERNER Georges	Informatique théorique
M. WOZNIAK Michel	Spectrochimie
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Algèbre

Je remercie Max DAUCHET de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Je remercie Maurice NIVAT d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je suis reconnaissant à André ARNOLD et Danièle GIRAULT-BEAUQUIER d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour les remarques, suggestions et critiques qu'ils ont pu faire.

Mes remerciements vont aussi tout particulièrement à Erick TIMMERMAN. Il m'a grandement aidé tout au long de ce travail et m'a donné un exemple de rigueur dans la recherche et de clarté dans la rédaction.

Michel LATTEUX fut à l'origine de ce travail, ses nombreuses idées et ses questions judicieuses en furent le moteur. Ne ménageant ni son temps ni son humour, il m'a fait découvrir les joies et les difficultés de la recherche. J'ai pu apprécier son aide et sa confiance durant ces trois dernières années. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

A peine exprimons-nous quelque chose qu'étrangement nous le dévaluons. Nous pensons avoir plongé au plus profond des abîmes, et quand nous revenons à la surface, la goutte d'eau ramenée à la pointe pâle de nos doigts ne ressemble plus à la mer dont elle provient. Nous nous figurons avoir découvert une mine de trésors inestimables, et la lumière du jour ne nous montre plus que des pierres fausses et des tessons de verre; et le trésor, inaltéré, n'en continue pas moins à briller dans l'obscur.

MAETERLINCK.

<u>TABLE DES MATIERES</u>

INTRODUCTION

Sur un alphabet X on peut définir des mots et des mots infinis. Un mot est reconnu par un automate s'il existe une lecture de ce mot dans l'automate partant d'un état initial et se terminant dans un état final. Büchi le premier a donné une définition de la reconnaissance d'un mot infini par un automate : un mot infini est reconnu par un automate s'il existe une lecture de ce mot dans l'automate partant d'un état initial et passant une infinité de fois par un ensemble d'états distingués. Un Ω-langage - c'est-à-dire un langage de mots infinis - est rationnel si et seulement si il est l'ensemble des mots infinis reconnus par un automate.

Les automates munis de la reconnaissance définie par Büchi, permettent donc d'obtenir les Ω-langages rationnels, un autre moyen pour obtenir des Ω-langages est l'opération puissance infinie - notée puissance-Ω - dont nous rappelons la définition. Etant donné un langage R de X^+, on peut lui associer par l'opération puissance-Ω un langage de X^Ω noté R^Ω et défini de la façon suivante :

$$R^\Omega = \{w \in X^\Omega \ / \ w = u_1 \ldots u_n \ldots \ , \text{ où } \forall\, n \geq 1,\ u_n \in R\}$$

L'opération puissance-Ω est fondamentale dans l'étude des langages rationnels de mots infinis comme le montre le théorème de Büchi-Mac Naughton.

La donnée de R détermine complètement R^Ω et, si R est un langage rationnel de X^+, R^Ω est alors un langage rationnel de X^Ω. De plus, à partir d'un automate reconnaissant R, on peut aisément construire un automate reconnaissant R^Ω. Nous allons étudier le problème inverse. La donnée est un langage rationnel L de X^Ω.

L est-il la puissance-Ω d'un langage rationnel ?

Quels sont tous les langages dont la puissance-Ω est L ?

De tels langages seront appelés générateurs de L.
Ce problème est comparable à l'élévation au carré dans le corps des réels, qui ne présente aucune difficulté, et à son problème inverse - moins simple -, la détermination des racines carrées éventuelles d'un réel donné.

Avant d'en venir à la puissance-Ω et en restant dans les mots (finis), on peut regarder ce qui se passe pour l'opération étoile, qui n'est évidemment pas sans rapport avec la puissance-Ω. R^* est l'ensemble des concaténations finies de mots de R. R^Ω est l'ensemble des concaténations infinies de mots de R. Partant d'un langage rationnel R, R^* est bien déterminé. La question inverse, détermination des "racines *" d'un langage, admet les réponses suivantes :

Un langage L est l'étoile d'un autre langage si et seulement si L est un monoïde.

La famille des générateurs du monoïde L est alors sans mystères : L en est le plus grand élément (pour l'inclusion), $Prem(L) = (L\setminus\varepsilon)\setminus(L\setminus\varepsilon)^2$ est le plus petit élément (pour l'inclusion) et tout langage compris entre Prem(L) et L est un générateur de L et réciproquement.

En remplaçant l'opération étoile par la puissance-Ω, le problème se pose de la même façon mais n'aura pas de solution aussi simple. Pour la puissance-Ω, la première question - décider si un Ω-langage rationnel L est ou non une puissance-Ω - se résout bien et nous permet "en prime" d'obtenir un générateur rationnel de L.

"Une histoire de famille"

Il ne nous reste plus alors qu'à étudier - et ce sera l'essentiel de notre travail - la famille de tous les générateurs de L sachant que L est une puissance-Ω. En d'autres termes, puisque nous savons construire un générateur rationnel R de L, nous partirons d'un langage rationnel R et nous nous intéresserons à la famille notée $[R]_\Omega$ de tous les langages qui ont la même puissance-Ω que R :

$$[R]_\Omega = \{G \subseteq X^+ \ / \ G^\Omega = R^\Omega\}$$

Si la famille des langages ayant la même étoile que R est - comme nous l'avons rappelé - bien déterminée et sans ombres, en revanche la famille $[R]_\Omega$ nous a réservé de nombreuses surprises et ne nous a pas encore livré tous ses secrets.

"Rien n'est simple" (Sempé)

Dans $[R]_\Omega$, on ne peut bien sûr pas avoir R^Ω comme plus grand élément, mais R^+ - qui appartient bien à $[R]_\Omega$ - n'est pas non plus toujours le plus grand élément, de même $Prem(R^+)$ - qui appartient aussi à $[R]_\Omega$ - n'est pas toujours le plus petit élément. Par exemple, en prenant $R = a^*ba^*b$, on a $R^+ = X^*bX^*b$, qui n'est pas le plus grand élément de $[R]_\Omega$, car a^*ba^* appartient à $[R]_\Omega$ mais n'est pas inclus dans R^+.

"Tout se complique" (Sempé)

En effet, non seulement le plus grand élément n'est pas toujours R^+, mais encore il peut ne pas exister, comme le montre l'exemple $R = X^*(aa+bb)X^*$. Il est clair que $R+a$ et $R+b$ sont deux autres générateurs de R^Ω et que par ailleurs $(ab)^\Omega$ n'appartient pas à R^Ω et donc $[R]_\Omega$ ne peut pas posséder de plus grand élément qui contiendrait nécessairement a et b. Comme il n'y a pas toujours de plus grand élément, il est naturel d'une part de chercher à savoir quand il y en a un, d'autre part de s'intéresser, quand il n'y en a pas, aux générateurs maximaux . Nous montrons qu'il y a toujours un nombre fini de générateurs maximaux, que ceux-ci sont tous rationnels et de plus que tout générateur de R^Ω est inclus dans l'un d'entre eux, ce qui nous permettra de décider si $[R]_\Omega$ possède ou non un plus grand élément.

"La loi du moindre effort"

En fait les générateurs maximaux ne sont pas les plus recherchés dans une optique d'économie d'énergie. Savoir que l'on "n'en fait pas plus" avec X^*bX^* qu'avec a^*ba^* - c'est-à-dire que ces deux langages ont la même puissance-Ω - n'est pas intéressant. Les générateurs recherchés seront le ou les plus "petits". En ce sens, a^*b est meilleur que a^*ba^* dans $[a^*ba^*]_\Omega$. Cependant les générateurs maximaux pourront être utiles si, comme pour l'étoile où le plus grand élément R^* nous permet d'obtenir le plus petit élément $Prem(R^*)$, on peut construire les minimaux à partir des maximaux. Sur le simple exemple $R = \{a\}$, où $\{a^2\}$ est un autre générateur de R^Ω, on note que $\{a\} \cap \{a^2\} = \emptyset$ et donc qu'il n'y a pas de plus petit élément dans $[R]_\Omega$. Ceci étant valable pour tout langage R, ne cherchons pas le plus petit élément ni même à décider s'il y en a un ou non... il n'y en a jamais!

"Qui peut le plus peut le moins"

La question du plus petit élément étant résolue faute de combattants, nous chercherons donc des "moins qui peuvent le plus" - i.e. des générateurs minimaux (pour l'inclusion) dans $[R]_\Omega$ -. Nous verrons que, si la recherche des "plus" - i.e. des générateurs maximaux de $[R]_\Omega$ - a été menée à bien, la recherche des "moins" - i.e. des minimaux de $[R]_\Omega$ - s'avère plus délicate et restera incomplète. Cette quête des générateurs minimaux sera le fil conducteur de la suite de notre travail. Le résultat important obtenu dans le cas d'un langage rationnel quelconque sera de décider si un générateur est ou non minimal. Deux questions en revanche resteront sans réponses.

La première : existe-t-il un générateur minimal dans toute famille $[R]_\Omega$?

Et la seconde qui, si elle admet une réponse positive, donne à fortiori une réponse positive à la première : étant donné un langage R, tout générateur de R^Ω contient-il un générateur minimal de R^Ω?

Pour essayer de mieux appréhender ces questions, nous avons cherché à les résoudre dans un cadre plus restreint.

D'une part nous chercherons des "moins" - i.e. des minimaux - possédant des propriétés en plus. Les premiers seront les générateurs fg-minimums, ils seront minimaux (pour l'inclusion) et de plus l'ensemble de leurs facteurs gauches sera minimum (pour l'inclusion) dans l'ensemble des facteurs gauches des générateurs de R^Ω. On obtient ainsi les générateurs ayant en quelque sorte les mots les plus "courts". Ces générateurs nous permettront par la suite de décider si la famille $[R]_\Omega$ possède ou non des générateurs finis. Les seconds seront les Ω-bases : une Ω-base B est un générateur minimal tel que tout autre générateur de B^Ω est inclus dans B^*. On peut dire qu'une Ω-base B est l'ensemble des "mini-mots qui font le maximum" puisque nous verrons que B^+ est le plus grand élément de $[R]_\Omega$. Tout Ω-base est un générateur fg-minimum, en revanche si nous reprenons l'exemple où R est le langage a^*ba^*b, a^*b est alors un générateur fg-minimum, mais n'est pas Ω-base car a^*ba^*, qui appartient à $[R]_\Omega$, n'est pas inclus dans $(a^*b)^+$.

D'autre part nous chercherons les "moins" quand la famille $[R]_\Omega$ a des propriétés en plus.

Le premier cas sera celui où $[R]_\Omega$ possède (au moins) un générateur fini, ce qui est décidable. On peut alors envisager des "moins" sous deux angles nouveaux qui n'ont pas de sens dans le cas général. On étudiera déjà les "moins" qui ont le moins d'éléments possible - nous dirons les générateurs de plus petite cardinalité - puis les "moins" pour ce qui est de la somme des longueurs des mots - nous dirons les générateurs de plus petite taille -. "Entre deux mots il faut choisir le moindre" (Valéry). Peut-être, mais pas dans $[R]_\Omega$ où les mots "courts" n'en font pas forcément "plus" - pour la puissance-Ω - que les mots "longs".

Le deuxième cas sera celui où le "super-plus" - c'est-à-dire le plus grand élément - existe et est un semi-groupe libre. Nous verrons qu'alors les "moins" sont les codes de $[R]_\Omega$, ni plus ni moins, et que tout générateur contient (au moins) un "moins".

Dans le troisième cas l'hypothèse en plus sera que $[R]_\Omega$ possède un idéal. Il sera montré que les "moins" sont exactement les codes préfixes de $[R]_\Omega$ et que tout générateur contient un "moins".

Dans le quatrième cas l'hypothèse en plus sera que $[R]_\Omega$ possède un langage local. Là aussi tout générateur contient un "moins", nous n'en dirons pas plus.

Si tous ces cas particuliers ne donnent pas de réponses pour le cas général, ils permettent d'une part de voir que la question n'est pas simple et d'autre part de nous donner une meilleure intuition sur ce qu'est une famille de générateurs.

Nous aurons souvent recours à des exemples, certains pour illustrer les propositions, les autres plus nombreux seront destinés à faire apparaître soit les difficultés cachées des propositions, soit la nécessité de tout ou partie des hypothèses.

"Rencontre du troisième type"

De même que les problèmes rencontrés avec les mots infinis sont différents des problèmes rencontrés avec les mots, les problèmes rencontrés avec les mots bi-infinis seront eux-aussi différents des précédents. Dans le dernier chapitre de ce travail nous faisons une "incursion" dans l'ensemble des mots bi-infinis. Nous y amorçons une étude de la famille ${}_\Omega[R]_\Omega$ des générateurs de la puissance bi-infinie de R. Pour cette étude, nous établirons quelques résultats concernant les bilimites et biadhérences des langages rationnels. Nous resterons sur une question ouverte : décider si la famille ${}_\Omega[R]_\Omega$ possède ou non un langage fini.

CHAPITRE I

RESULTATS GENERAUX SUR LES Ω-LANGAGES

INTRODUCTION

Ce chapitre de résultats généraux sur les langages de mots infinis - appelés Ω-langages - comporte quatre parties.

Dans la partie A nous donnons les notations et définitions utilisées dans la suite. Nous présentons la reconnaissance au sens de Büchi d'un Ω-langage et nous rappelons quelques résultats classiques de la théorie des langages rationnels de mots infinis.

Après avoir rappelé [5] que, pour les Ω-langages, le non-déterminisme ne se ramène pas au déterminisme, nous présentons dans la partie B les Ω-langages déterministes en liaison avec la notion de limite d'un langage. Nous terminons par l'énoncé du célèbre théorème de Büchi-Mac Naughton.

Dans la partie C nous rappelons la définition de l'adhérence d'un langage en utilisant la notion de limite. Nous précisons les liens entre l'adhérence et la puissance-Ω. Nous terminons par un court rappel d'une définition topologique des adhérences.

Dans La partie D nous présentons [5] la congruence des transitions d'un automate de Büchi et nous donnons les propriétés de cette congruence utilisées dans la suite.

A. FAMILLES RATIONNELLES DE MOTS ET D'Ω-MOTS

Soit X un alphabet fini.

Un **mot** sur X est une application u d'une partie initiale de N^+ dans X, on note $u = u_1 \ldots u_n$.

Le **mot vide** i.e. l'application de l'ensemble vide dans X, est noté ϵ.

Pour tout mot u, on note par $|u|$ **la longueur de u.**

On note X^* **l'ensemble des mots sur X.**
On note X^+ **l'ensemble** $X^* \backslash \epsilon$.
On appelle **langage** toute partie de X^*.

Pour tout langage R, on appelle **étoile de R** le langage noté R^* défini par :

$$R^* = \{ u_1 \ldots u_n \text{ où } n \geq 0 \text{ et } \forall\, i,\ 1 \leq i \leq n,\ u_i \in R \}.$$

R^* est le **monoïde engendré par R**
$R^+ = R^* \backslash \epsilon$ est le **semi-groupe engendré par R.**

Un langage P est dit **préfixe** si $P \cap PX^+ = \emptyset$.
Pour tout langage R, on appelle **partie préfixe de R** le langage préfixe noté Pref(R) défini par :

$$\mathrm{Pref}(R) = R \backslash RX^+.$$

Un **mot infini** sur X ou **Ω-mot** sur X est une application w de N^+ dans X, on note $w = w_1 \ldots w_n \ldots$.

On note X^Ω l'ensemble des Ω-mots sur X.
On appelle **Ω-langage** toute partie de X^Ω.

$\forall\, u \in X^*$, $\forall\, w \in X^\Omega$, **le concaténé de u et w** est l'Ω-mot noté uw défini par :

$$uw = u_1 \ldots u_n w_1 \ldots w_p \ldots$$

$\forall\, A \subset X^*$, $\forall\, L \subset X^\Omega$ **le concaténé ou produit de A et L** est l'Ω-langage noté AL défini par :

$$AL = \{ uw \ /\ u \in A \text{ et } w \in L \}.$$

$\forall\, R \subset X^*$, on appelle **puissance infinie de R** ou **puissance-Ω de R** l'Ω-langage noté R^Ω défini par :

$$R^\Omega = \{ u_1 \ldots u_i \ldots \ /\ \forall\, i \geq 1,\ u_i \in R \backslash \epsilon \}.$$

Exemple 1. Soit l'alphabet a+b.
Soit L l'Ω-langage des mots infinis ayant une infinité d'occurrences de b. On a : $L = (a^*b)^\Omega$.

Soit L' l'Ω-langage des mots infinis ayant un nombre fini d'occurrences de b.
Soit R un langage quelconque de $(a+b)^*$.
Ou aucun mot de R ne contient d'occurrences de b, alors $R^\Omega = a^\Omega$ et donc $R^\Omega \neq L'$.
Ou il existe un mot ubv dans R, alors $(ubv)^\Omega \in R^\Omega$ et donc $R^\Omega \neq L'$.
Donc L' n'est la puissance-Ω d'aucun langage.
$L' = (a+b)^*a^\Omega$.■

Remarque : D'après la définition, $R^\Omega = (R\backslash\epsilon)^\Omega$ c'est pourquoi les langages dont nous prendrons la puissance-Ω seront supposés inclus dans X^+.

On a les égalités suivantes :

Lemme 1. $\forall A \subset X^+,\ A^\Omega = A^*A^\Omega$

$$A^\Omega = (A^+)^\Omega.$$

$$\forall A,B \subset X^+,\ (A+B)^\Omega = (A+B)^*B^\Omega + (B^*A)^\Omega.$$

$\forall w \in (X^*+X^\Omega)$, on appelle **ensemble des facteurs gauches de w** le langage noté FG(w) défini par :

$$FG(w) = \{ u \in X^* \ /\ \exists\ v \in (X^*+X^\Omega) \text{ avec } uv = w \}.$$

Si $u \in FG(w)$, on dit que u est **facteur gauche** ou **préfixe de w** et on note $u < w$.

Sur X^*, la relation $<$ est une relation d'ordre dite **ordre préfixe**.

On a :
$\forall w,w' \in X^\Omega$, $w = w'$ si et seulement si $FG(w) = FG(w')$.

En d'autres termes, un Ω-mot est déterminé par la donnée de ses facteurs gauches.

$\forall L \subset (X^*+X^\Omega)$, on appelle **ensemble des facteurs gauches de L** le langage noté FG(L) défini par :

$$FG(L) = \bigcup_{w \in L} FG(w)$$

En général un Ω-langage n'est pas déterminé par la donnée de ses facteurs gauches.

Exemple 2. Soit X un alphabet contenant a, les deux Ω-langages distincts X^*a^Ω et X^Ω ont le même ensemble de facteurs gauches : X^*.■

Un autre résultat immédiat sur les facteurs gauches est :

Lemme 2. Pour tout langage R de X^+, on a : $FG(R^\Omega) = FG(R^+)$.

Nous nous intéresserons principalement aux langages et Ω-langages reconnaissables.

Définition :

Un **automate d'états finis** A est un quintuplet (X,Q,δ,I,T) où :
X est un alphabet
Q est un ensemble fini d'états
I est une partie de Q dite ensemble des états initiaux
T est une partie de Q dite ensemble des états terminaux
δ est une partie de Q x X x Q dite ensemble des transitions.

A est **déterministe** si δ est une fonction de Q x X dans Q et card(I) = 1.

$\forall$ u $\in$ X*, une **lecture de u dans A** est une suite (finie) d'états $l_1,\dots,l_n$ tels que :
$\forall$ i, 1 $\leq$ i $\leq$ n-1, $(l_i,u_i,l_{i+1}) \in \delta$.

Un mot u est **reconnu par A** s'il existe une lecture de u dans A partant d'un état initial (i.e. $l_1 \in$ I) et aboutissant à un état terminal (i.e. $l_n \in$ T).
Une telle lecture est dite **réussie dans A.**
Le **langage reconnu par A,** noté **T(A),** est l'ensemble des mots reconnus par A.
Un langage R est **reconnaissable** s'il existe un automate A tel que T(A) = R.

Il est bien connu (Kleene [10]) que la **famille des langages reconnaissables** est égale à la **famille des langages rationnels** notée **Rat(X*)** et que la famille notée **DRat(X*)** des **langages reconnaissables par un automate déterministe** est égale à Rat(X*).

Nous introduisons maintenant les **automates de Büchi** [5], qui sont des automates d'états finis sur lesquels on utilise un autre mode de reconnaissance permettant d'accepter des mots infinis.

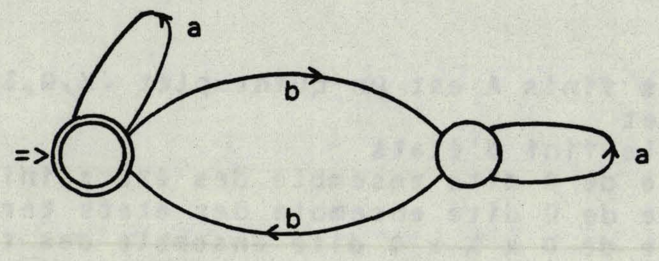
$\forall$ w $\in X^\Omega$, une **lecture de w dans A** est une suite (infinie) d'états l = (l_n) tels que :
$\forall$ n $\geq$ 1, $(l_n,w_n,l_{n+1}) \in \delta$.

On note : **Inf(l)** = {q $\in$ Q / card(l^{-1}(q)) est infini}.
Inf(l) est l'ensemble des états "traversés" une infinité de fois au cours de la lecture l.
Remarque : Comme Q est fini, Inf(l) n'est jamais vide.

Une lecture l est **réussie dans A** si et seulement si :
$l_1 \in$ I et Inf(l) $\cap$ T $\neq \emptyset$.
Autrement dit ,comme T est fini, l est réussie si et seulement si il existe un état terminal traversé une infinité de fois au cours de la lecture l.

Un Ω-mot w est **reconnu par A** s'il existe une lecture réussie de w dans A.
L'Ω-langage reconnu par l'automate de Büchi A, noté **T_Ω(A),** est l'ensemble des Ω-mots reconnus par A.

Exemple 3. Soit A l'automate suivant :



ababab... $\in T\Omega(A)$
aaaa... $\in T\Omega(A)$
mais abaaa... $\notin T\Omega(A)$.
$T\Omega(A) = (a + a^*ba^*b)^\Omega$.■

Un Ω-langage L est **reconnaissable** s'il existe un automate de Büchi A tel que $T\Omega(A) = L$.

On appelle **Rat(X^Ω) la famille des Ω-langages reconnaissables.**

Quand on s'intéresse au langage reconnu par A, on parle simplement de l'automate A, quand on s'intéresse à l'Ω-langage reconnu par A, on parle de l'automate de Büchi A.

La notation Rat(X^Ω) pour la famille des Ω-langages reconnaissables est justifiée par :

Proposition 1.[6] Soit L inclus dans X^Ω, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $L \in Rat(X^\Omega)$
(ii) On peut écrire :

$$L = \bigcup_{i=1}^{n} A_i B_i^\Omega, \text{ où } n \geq 0 \text{ et } \forall\, i,\ 1 \leq i \leq n,\ A_i,\ B_i \in Rat(X^*).$$

D'autre part en remarquant que dans un automate de Büchi reconnaissant l'Ω-langage L, si on prend tous les états non puits comme terminaux, l'automate obtenu reconnaît FG(L) on a :

Lemme 3. Pour tout Ω-langage L de Rat(X^Ω), FG(L) appartient à Rat(X^*).

Pour démontrer l'inclusion de langages rationnels il est commode d'utiliser le résultat suivant qui découle du théorème de Büchi.
Pour tout Ω-langage L, notons :
$Ult(L) = \{ uv^\Omega \in L \ / \ u \in X^* \text{ et } v \in X^+ \}$

Lemme 4. Soient L et L' deux Ω-langages de Rat(X^Ω), $L \subseteq L'$ si et seulement si $Ult(L) \subseteq Ult(L')$.

Une grande différence entre $Rat(X^\Omega)$ et $Rat(X^*)$ est que **la famille notée $DRat(X^\Omega)$ des Ω-langages reconnaissables par un automate déterministe de Büchi** est strictement incluse dans $Rat(X^\Omega)$. Ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant. Rappelons cependant qu'avec le critère de reconnaissance de Müller [15], les automates déterministes reconnaissent alors la famille $Rat(X^\Omega)$ tout entière.

B. LIMITES

Si on considère l'ordre préfixe, une suite strictement croissante (u_n) de X^* définit un unique Ω-mot qui est déterminé par $FG(\{u_n,\ n \geq 1\})$ et appelé limite de (u_n).

Définition :

Soit R un langage de X^*, on appelle **limite de R** l'Ω-langage noté $\overrightarrow{R}$ défini par :

$$\overrightarrow{R} = \{\ w \in X^\Omega \ /\ card(FG(w) \cap R) \text{ est infini } \}.$$

Remarque : $\forall\ w \in X^\Omega,\ w = \overrightarrow{FG(w)}$.

On a les relations :

Lemme 5.

$$\forall\ A,B \subset X^*,\quad \overrightarrow{A+B} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$$
$$A\overrightarrow{B} \subset \overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{A} + A\overrightarrow{B}$$
$$A^\Omega \subset \overrightarrow{A^+}$$

Si de plus A est préfixe :

$$\overrightarrow{A} = \emptyset$$
$$\overrightarrow{AB} = A\overrightarrow{B}$$
$$A^\Omega = \overrightarrow{A^+}$$
$$\overrightarrow{BA^+} = \overrightarrow{B} + BA^\Omega.$$

De ces relations, on déduit deux résultats reliant la limite d'un semi-groupe à sa puissance-Ω.

Lemme 6.

$$\forall\ A \subset X^+,\quad \overrightarrow{A^+} = A^\Omega + A^*\overrightarrow{A}$$
$$A^\Omega = \overrightarrow{A^+} \text{ ssi } \overrightarrow{A} \subset A^\Omega.$$

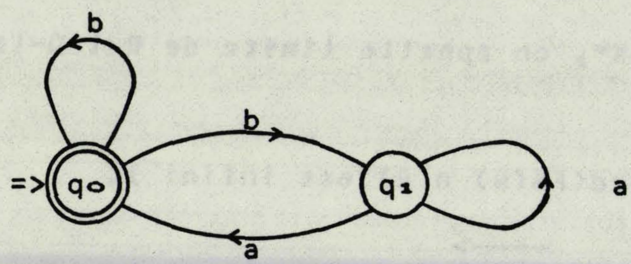
Un automate déterministe d'états finis A permet de reconnaître un langage T(A) et un Ω-langage $T_\Omega(A)$ qui sont reliés par :

<u>Proposition 2</u>. Soit A un automate déterministe d'états finis, on a :

$$\overrightarrow{T(A)} = T_\Omega(A).$$

Ce qui n'est pas vrai quand A n'est pas déterministe.

Exemple 4. Soit A l'automate suivant :



A n'est pas déterministe.

$T(A) = \epsilon + bX^*$ et donc $\overrightarrow{T(A)} = bX^\Omega$.
Or $T_\Omega(A) = (bX^*)^\Omega$ qui est différent de bX^Ω.∎

On donne maintenant deux caractérisations de $DRat(X^\Omega)$:

<u>Proposition 3</u>.[6] Soit L inclus dans X^Ω, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $L \in DRat(X^\Omega)$

(ii) $L \in \overrightarrow{Rat(X^*)}$, où $\overrightarrow{Rat(X^*)} = \{ \vec{R} \ / \ R \in Rat(X^*) \}$

(iii) On peut écrire :

$L = \bigcup_{i=1}^{n} A_i B_i^\Omega$, où $n \geq 0$ et $\forall$ i, $1 \leq i \leq n$, A_i et B_i sont des langages préfixes rationnels.

PREUVE.

(iii) => (ii)

Si $L = \bigcup_{i=1}^{n} A_i B_i^\Omega$

avec $\forall$ i, $1 \leq i \leq n$, A_i et B_i sont des langages préfixes rationnels.

Comme on a : $\forall\ i,\ 1 \leq i \leq n,\ \overrightarrow{A_iB_i^*} = A_iB_i^\Omega$

L appartient à $\overrightarrow{Rat(X^*)}$.

(ii) => (i)

Si $L \in \overrightarrow{Rat(X^*)}$

Soit $M \in Rat(X^*)$, tel que : $\overrightarrow{M} = L$.
Il existe un automate déterministe A tel que $T(A) = M$,

et d'après la proposition précédente : $T_\Omega(A) = \overrightarrow{M}$.
Donc $L \in DRat(X^\Omega)$.

(i) => (iii)
Si $L \in DRat(X^\Omega)$
Soit $M = (X,Q,\delta,q_0,T)$ un automate déterministe reconnaissant L.
$\forall\ t \in T$, notons $M_{q_0,t} = (X,Q,\delta,q_0,\{t\})$
$M_{t,t} = (X,Q,\delta,t,\{t\})$
$A_t = Pref(T(M_{q_0,t}))$
$B_t = Pref(T(M_{t,t}))$.
On vérifie alors que :
$L = \bigcup_{t \in T} A_tB_t^\Omega$.■

On peut maintenant vérifier que $Rat(X^\Omega)\backslash DRat(X^\Omega)$ est non vide grâce à l'exemple suivant :

Exemple 5. $L = (a+b)^*a^\Omega$
. $L \in Rat(X^\Omega)$
. Mais L n'est pas la limite d'un langage R, sinon :
comme $ba^\Omega \in L,\ \exists\ i_1 \geq 1\ /\ ba^{i_1} \in R$
comme $ba^{i_1}ba^\Omega \in L,\ \exists\ i_2 \geq 1\ /\ ba^{i_1}ba^{i_2} \in R$.
On peut ainsi construire une suite infinie strictement croissante de mots de R dont la limite :
$ba^{i_1}ba^{i_2}\ldots ba^{i_n}\ldots$
doit appartenir à L, ce qui n'est pas.■

Rappelons [11] sans la démontrer la propriété suivante :

Proposition 4. **Soit $L \in Rat(X^\Omega)$. On peut décider si L appartient ou non à $DRat(X^\Omega)$.**

Nous terminons par un énoncé du théorème de Büchi-Mac Naughton, pièce maitresse dans la théorie des Ω-langages rationnels.

Théorème. $Rat(X^\Omega)$ est la fermeture booléenne de $DRat(X^\Omega)$.

C. ADHERENCES

La notion de limite permet de définir l'adhérence d'un langage d'un langage par :

Définition :

Soit $R \subset X^*$, on appelle adhérence de R l'Ω-langage noté Adh(R) défini par :

$$Adh(R) = \overrightarrow{FG(R)}.$$

Autrement dit : $Adh(R) = \{ w \in X^{\Omega} \ / \ FG(w) \subset FG(R) \}$.

Remarque : $Adh(R) = Adh(FG(R))$.

On dit que **L est une adhérence** s'il existe un langage R tel que $L = Adh(R)$, on a alors :

Lemme 6.[4] Soit L un Ω-langage, L est une adhérence si et seulement si $L = Adh(FG(L))$.

PREUVE.
Soit R un langage, tel que $L = Adh(R)$.
On a alors : $FG(L) \subset FG(R)$.
D'où : $Adh(FG(L)) \subset Adh(FG(R))$
i.e. : $Adh(FG(L)) \subset L$.
Comme l'inclusion inverse est toujours vérifiée,
on obtient : $L = Adh(FG(R))$.

Réciproquement :
Si $L = Adh(FG(L))$, L est une adhérence.■

D'après le lemme précédent et le lemme 3, on peut alors donner deux définitions (équivalentes) de la famille notée $FRat(X^{\Omega})$ des adhérences rationnelles.

$FRat(X^{\Omega}) = \{L \subset X^{\Omega} \ / \ L \in Rat(X^{\Omega})$ et L est une adhérence$\}$.
$FRat(X^{\Omega}) = \{L \subset X^{\Omega} \ / \ L$ est l'adhérence d'un langage rationnel$\}$.

Remarques :
- Une adhérence rationnelle est caractérisée par le fait qu'elle peut être reconnue par un automate de Büchi **déterministe où tout état non puits est terminal.**

- La famille $FRat(X^{\Omega})$ est strictement incluse dans $DRat(X^{\Omega})$.

Exemple 6. $a^*ba^{\Omega} = \overrightarrow{a^*ba^*}$
mais d'après le lemme 6, a^*ba^{Ω} n'est pas une adhérence.■

On a rappelé qu'étant donné un langage $L \in Rat(X^\Omega)$ on peut décider si L appartient ou non à $DRat(X^\Omega)$, pour l'appartenance à $FRat(X^\Omega)$ on a (comme conséquence directe des lemmes 3 et 6) un résultat plus précis :

<u>Proposition 5</u>.[4] Soit $L \in Rat(X^\Omega)$, L appartient à $FRat(X^\Omega)$ si et seulement si $L = Adh(FG(L))$ et $FG(L) \in Rat(X^*)$.

Du lemme 6, on déduit aussi que dans $FRat(X^\Omega)$ tout Ω-langage est déterminé par la donnée de ses facteurs gauches, i.e. :

<u>Proposition 6</u>. Soient L et L' deux Ω-langages de $FRat(X^\Omega)$, on a : $L = L'$ si et seulement si $FG(L) = FG(L')$.

Remarque : Ceci n'est plus vrai dans $DRat(X^\Omega)$.

Exemple 7. $L = (a+b)^\Omega$ et $L' = (b^*a)^\Omega$

- . $FG(L) = FG(L') = X^*$.
- . $L \in DRat(X^\Omega)$ (et même à $FRat(X^\Omega)$).
- . $L' \in DRat(X^\Omega)$ car $L' = \overrightarrow{X^*a}$,
  mais $L' \notin FRat(X^\Omega)$ car $b^\Omega \notin L'$,
  et donc $L' \neq Adh(FG(L'))$.
- . Donc $L \neq L'$.■

Concernant l'adhérence de l'union, du produit et de l'étoile on a :

<u>Lemme 7</u>.[4] $\forall A,B \subseteq X^*$: $Adh(A+B) = Adh(A) + Adh(B)$

$Adh(AB) = Adh(A) + AAdh(B)$.

$\forall A \subseteq X^+$: $Adh(A^*) = A^\Omega + A^*Adh(A)$.

Si nous regardons les relations entre la puissance-Ω d'un semi-groupe et son adhérence, nous allons voir qu'elles sont plus étroites que celles vues entre puissance-Ω et limite.

<u>Proposition 7</u>. Soit $A \in Rat(X^+)$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $A^\Omega \in FRat(X^\Omega)$

(ii) $A^\Omega = Adh(A^+)$

(iii) $Adh(A) \subseteq A^\Omega$.

PREUVE.

(i) => (ii). D'après le lemme 6.

(ii) => (iii) et (iii) => (i) découlent de l'égalité :

$Adh(A^+) = A^\Omega + A^*Adh(A)$.■

Remarque : $A^\Omega \in DRat(X^\Omega)$ n'entraîne pas que $A^\Omega = \overrightarrow{A^+}$.

Exemple 8. $R = (ab)^*a$

. $R^\Omega = (ab)^*aa((ba)^*a)^\Omega$
et comme $(ab)^*aa$ et $(ba)^*a$ sont deux langages rationnels préfixes, R^Ω appartient à $DRat(X^\Omega)$.

. Mais $\overrightarrow{R} = (ab)^\Omega$ n'est pas inclus dans R^Ω

et donc : R^Ω est strictement inclus dans $\overrightarrow{R^+}$.■

De la proposition précédente, on déduit alors :

Proposition 8. $\forall$ $R,G \in Rat(X^+)$, si R^Ω et G^Ω appartiennent à $FRat(X^\Omega)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $R^\Omega = G^\Omega$
(ii) $FG(R^+) = FG(G^+)$.

La proposition 6 montre qu'une adhérence est déterminée par ses facteurs gauches, ce qui n'est pas étonnant d'aprés la caractérisation topologique des adhérences que nous rappelons brièvement.

On peut munir $(X^* + X^\Omega)$ d'une topologie [17] où les ouverts sont les Ω-langages du type AX^Ω où A est inclus dans X^*. L'adhérence d'un langage R est alors l'intersection de la fermeture topologique de R et de X^Ω. Et $FRat(X^\Omega)$ est exactement l'ensemble des Ω-langages fermés.

D. CONGRUENCE DE BÜCHI

Soit X un alphabet, on appelle **congruence sur X^***, une relation d'équivalence notée $\sim$, définie sur X^* et telle que la concaténation soit compatible avec $\sim$, c'est-à-dire telle que :
$\forall\ x,x',y,z \in X^* : x \sim x' \Rightarrow yxz \sim yx'z$.
Pour tout mot u de X^*, la classe de u pour $\sim$ sera notée $[u]$:
$[u] = \{v \in X^+ \ / \ u \sim v\}$.

Nous rappelons la définition - classique - de la saturation d'un langage R par une congruence.
La congruence $\sim$ **sature R** si et seulement si :
$\forall\ u \in X^*,\ [u] \cap R \neq \emptyset \Rightarrow [u] \subseteq R$.

Büchi a défini la saturation d'un Ω-langage L par une congruence $\sim$.
La congruence $\sim$ **sature L** si et seulement si :
$\forall\ u,v \in X^+,\ [u][v]^\Omega \cap L \neq \emptyset \Rightarrow [u][v]^\Omega \subseteq L$.

Dans la suite nous utiliserons souvent une congruence sur X^+ introduite par Büchi [5] et définie à partir des automates de Büchi.

Soit $A = (X,Q,I,\delta,T)$ un automate, pour tout mot u de X^+, nous noterons :

$\delta_T(u) = \{ q' \in Q \ / \ \exists\, t \in T, \exists\, u_1,u_2 \in X^*$ avec $u = u_1u_2$ et $t \in \delta(q,u_1)$ et $q' \in \delta(t,u_2) \}$.

En d'autres termes, $q' \in \delta_T(u)$ si et seulement si il existe un chemin dans A de la forme :

$$q \xrightarrow{u_1} t \xrightarrow{u_2} q' \quad \text{avec } u_1u_2 = u \text{ et } t \in T.$$

<u>Définition</u> : Soit $A = (X,Q,I,\delta,T)$ un automate, nous appellerons **congruence de Büchi de A** ou (comme B. Le Saec [12]) **congruence transitionnelle de A** la congruence notée $\sim$ et définie par :

$$\forall\, u,v \in X^+,\ u \sim v \text{ ssi } \forall\, q \in Q \quad \delta(q,u) = \delta(q,v) \text{ et } \delta_T(q,u) = \delta_T(q,v).$$

En d'autres termes $u \sim v$ si et seulement si :

- pour tout chemin $q \xrightarrow{u} q'$, il existe un chemin $q \xrightarrow{v} q'$ et réciproquement.

- pour tout chemin $q \xrightarrow{u} q'$ passant par un état terminal, il existe un chemin $q \xrightarrow{v} q'$ passant par un état terminal et réciproquement.

Donc si deux mots sont congrus pour $\sim$, ils ont vis-à-vis de la reconnaissance de Büchi le même comportement, c'est-à-dire que l'on peut dans un mot infini remplacer l'un par l'autre sans changer l'appartenance ou la non-appartenance du mot infini à $T_\Omega(A)$.

Büchi a prouvé [5] que cette relation est une congruence d'index fini calculable qui sature $T^\Omega(A)$.

Comme $\sim$ est d'index fini calculable, nous avons :

<u>Lemme 8</u>. **$\forall\, u \in X^+$, $[u]$ est un langage rationnel constructible de X^+.**

Une autre conséquence directe de la définition de $\sim$ est le résultat suivant que nous utilisons dans le chapitre suivant.

<u>Lemme 9</u>. **Soient (u_i) et (v_i) deux suites de X^+ telles que : $\forall\, i > 0$, $u_i \sim v_i$. On a alors : $u_1 \ldots u_n \ldots \in T_\Omega(A)$ si et seulement si $v_1 \ldots v_n \ldots \in T_\Omega(A)$.**

CHAPITRE II

DEFINITION DE $[R]_\Omega$ ET PREMIERS RESULTATS SUR $[R]_\Omega$

INTRODUCTION

Un Ω-langage est rationnel si et seulement si il peut être reconnu par un automate de Büchi. Un Ω-langage L est une puissance-Ω si et seulement si il existe un langage R tel que $R^{\Omega} = L$, R sera appelé un générateur de L. Etant donné un Ω-langage rationnel, nous allons étudier la famille des générateurs de cet Ω-langage.

La congruence de Büchi, définie à partir d'un automate reconnaissant un Ω-langage rationnel, est d'index fini sur X^{+} et telle que, si deux mots u et v sont équivalents, on peut alors dans tout mot infini remplacer tout ou partie des occurrences de u par v sans changer l'appartenance ou la non-appartenance de ce mot infini au langage.

Dans la partie A nous montrons que, si un Ω-langage rationnel est puissance-Ω d'un langage R (rationnel ou non), alors il est la puissance-Ω du plus petit langage contenant R et saturé par la congruence précédente. Ceci nous permet alors de décider si un Ω-langage rationnel est ou non une puissance-Ω, et, si c'est le cas, d'en construire un générateur rationnel.

Puisque l'on sait décider si un Ω-langage rationnel est une puissance-Ω et en construire un éventuel générateur rationnel R, on ne s'occupera plus désormais que des Ω-langages du type R^{Ω} avec R langage rationnel.

Après avoir défini la famille $[R]_{\Omega}$ des générateurs de R^{Ω}, dans la partie B nous donnons deux lemmes dont nous "(ab)userons" par la suite pour prouver l'appartenance d'un langage à $[R]_{\Omega}$.

Nous nous intéresserons dans la partie C aux propriétés de fermeture de $[R]_{\Omega}$ par les opérations classiques sur les langages.

A. DECIDER SI UN Ω-LANGAGE RATIONNEL EST UNE PUISSANCE-Ω

Soit L un Ω-langage rationnel reconnu par un automate $A = (X,Q,I,\delta,T)$. Nous allons montrer que l'on peut décider si L est ou non la puissance-Ω d'un langage R de X^+, i.e. s'il existe un langage R tel que $R^\Omega = L$, ceci en utilisant la congruence de Büchi associée à A.

Proposition 1. Soit L un Ω-langage rationnel. Si L est une puissance-Ω, alors il existe un langage rationnel R tel que $L = R^\Omega$.

PREUVE.

Soit $A = (X,Q,I,\delta,T)$ un automate reconnaissant L, et soit $\sim$ sa congruence transitionnelle associée.
Soit M tel que $M^\Omega = L$.
Notons $R = [M] = \bigcup_{u \in M} [u]$, le saturé de M pour $\sim$.
Comme $M \subset R$, on a : $M^\Omega \subset R^\Omega$.
Prenons maintenant $w = v_1 \dots v_n \dots \in R^\Omega$, où $\forall\, n \geq 1\ v_n \in R$
on a :
$\forall\, i > 0,\ \exists\, u_i \in M$ tel que $u_i \sim v_i$.
Donc : $u_1 \dots u_n \dots \in M^\Omega$
et d'après le lemme I.10 : $v_1 \dots v_n \dots \in M^\Omega$.
D'où : $M^\Omega = R^\Omega$
et comme R est une union finie de classes pour $\sim$ (car $\sim$ est d'index fini), R est un langage rationnel.■

Proposition 2. Etant donné un Ω-langage rationnel L, on peut décider s'il est ou non une puissance-Ω. Si c'est le cas, on peut construire un langage rationnel dont la puissance-Ω est L.

PREUVE.

Soient $L \in Rat(X^\Omega)$, A un automate reconnaissant L et $\sim$ sa congruence transitionnelle.
Soit k l'index de $\sim$ et soient $R_1,\dots,R_k$ les classes de $\sim$.
On a vu dans la preuve de la proposition 1 que, si L est la puissance-Ω d'un langage M, alors L est la puissance-Ω d'une union de langages R_i.
Or comme :
- d'une part l'égalité de deux Ω-langages rationnels est décidable,
- d'autre part le cardinal de $\{ \bigcup_{j \in J} R_j$, avec $J \subset \{1,\dots,k\} \}$

est fini,
on peut décider si L est une puissance-Ω.
En outre, si c'est le cas, on aura construit un langage rationnel dont la puissance-Ω est L.
Notons enfin que l'on voit déjà ici que tout langage de $[R]_\Omega$ est inclus dans un générateur maximal pour l'inclusion dans $[R]_\Omega$ - ce qui sera approfondi dans le chapitre III -.■

A partir de maintenant, nous nous intéresserons uniquement aux Ω-langages rationnels qui sont des puissances-Ω, et plus particulièrement à la famille des générateurs de ces Ω-langages, c'est-à-dire :

Définition : Soit $R \in Rat(X^+)$, nous noterons :

$$[R]_\Omega = \{ G \subseteq X^+ \ / \ G^\Omega = R^\Omega \}.$$

Tout langage G appartenant à $[R]_\Omega$ sera appelé un **générateur de R^Ω**.

Exemple 1. $R = ba^*b^*$

R^Ω est l'ensemble des Ω-mots w tels que $|w|_b$ est infini.

$G = ba^*$ est un générateur de R^Ω inclus dans R

$G' = ba^*ba^*$ est un générateur de R^Ω d'intersection vide avec R.∎

Notre travail portera donc sur l'étude des propriétés de la famille $[R]_\Omega$ pour R langage rationnel. Il est facile de voir que $[R]_\Omega$ peut contenir des langages non rationnels. Ainsi $[a]_\Omega$ contient le langage $\{ a^p$, avec p premier $\}$, ou bien $[(a+b)]_\Omega$ contient $a + b + \{a^nb^n, n \geq 1\}$. Mais nous ne considérerons souvent que des générateurs rationnels de R^Ω, soit parce qu'ils seront choisis rationnels par hypothèse, soit parce que nous montrerons qu'ils sont rationnels.

B. LEMME "D'ITERATION INFINIE"

Proposition 3. Lemme d'itération infinie :

Soient $A \subseteq X^+$ et $L \subseteq X^\Omega$. Si $L \subseteq AL$, alors $L \subseteq A^\Omega$

PREUVE.

Soit $w \in L$.

On construit par récurrence une suite (u_i) de mots de A de la façon suivante :

Comme $L \subseteq AL$, on peut écrire :

$w = u_1w_1$, avec $u_1 \in A$ et $w_1 \in L$

$\forall i \geq 1$, $w_i = u_{i+1}w_{i+1}$, avec $u_{i+1} \in A$ et $w_{i+1} \in L$.

On a : $\forall i \geq 1$, $w = u_1...u_iw_i$

Considérons alors $w' = u_1...u_i...$

$w' \in A^\Omega$

et comme w et w' ont les mêmes facteurs gauches, on a :

$w = w'$.∎

Remarque : Cette proposition montre que A^Ω est le plus grand point fixe de l'équation $L = AL$.

Pour démontrer qu'un langage est générateur de R^Ω, nous utiliserons souvent la proposition 3 dans le cas particulier où L est une puissance-Ω :

Corollaire 1. Soient $R, R' \in Rat(X^+)$.

Si $R^\Omega \subseteq R'R^\Omega$, alors $R^\Omega \subseteq R'^\Omega$.

Dans la proposition 3 on part de l'hypothèse "$L \subseteq AL$", on va voir ici ce qui se passe avec l'hypothèse "$AL \subseteq L$".

Proposition 4. Soient $A \subseteq X^+$ et $L \subseteq X^\Omega$ avec L adhérence. Si $AL \subseteq L$, alors $A^\Omega \subseteq L$.

PREUVE.

Si $AL \subseteq L$, on a :
$\forall\, n \geq 1,\ A^n L \subseteq L$
et donc : $A^+L \subseteq L$ et à fortiori $FG(A^+L) \subseteq FG(L)$.
En conséquence : $Adh(FG(A^+L)) \subseteq Adh(FG(L))$
Or comme : $A^\Omega \subseteq Adh(FG(A^+L))$
On a : $A^\Omega \subseteq Adh(FG(L)) = L$.■

En particulier, si L est une adhérence et $L = AL$ alors $L = A^\Omega$.

Remarques : Sans l'hypothèse "L adhérence" :
- Le résultat est en général faux.

Exemple 2. $L = (a^*b)^\Omega$ et $A = a+b$
L n'est pas une adhérence, car $a^\Omega \in Adh(a^*b)$, mais $a^\Omega \notin L$
On a : $AL = L$
Mais : $a^\Omega \notin L$
c'est-à-dire : $A^\Omega \not\subseteq L$ et à fortiori $A^\Omega \neq L$.■

- Mais le résultat n'est pas toujours faux.

Exemple 2 (reprise). $L = (a^*b)^\Omega$ et $A = a^*b$.■

C. FERMETURE DE $[R]_\Omega$ PAR LES OPERATIONS CLASSIQUES

Tout d'abord il est immédiat que la famille $[R]_\Omega$ est fermée par élévation à une puissance quelconque et par l'opération * (au mot ε près), plus précisément :

Proposition 5. Soit $R \in Rat(X^+)$.

1) $\forall\, G \in [R]_\Omega,\ G^+ \in [R]_\Omega$.
2) $\forall\, n \geq 1,\ \forall\, G \in [R]_\Omega,\ G^n \in [R]_\Omega$.

Exemple 1 (reprise). $R = ba^*b^*$
$R^+ = bX^*$ est générateur de R^Ω.■

Comme $A \subset B$ implique $A^\Omega \subset B^\Omega$, nous pouvons énoncer une propriété très souvent utilisée dans la suite pour prouver l'égalité de la puissance-Ω de deux langages.

Lemme 1. Soit $R \in Rat(X^+)$. $\forall G, G' \in [R]_\Omega$, $\forall E \subset X^+$, $G \subset E \subset G' \Rightarrow E \in [R]_\Omega$.

Définition : Soit R un langage de X^+, nous noterons :

$Prem(R) = R \setminus RR^+$.

Autrement dit, Prem(R) est l'ensemble des mots de R qui ne peuvent pas se décomposer en un produit de plusieurs mots de R.

Comme $(Prem(R))^+ = R^+$, la proposition 3 implique :

Lemme 2. Soit $R \in Rat(X^+)$, alors Prem(R) appartient à $[R]_\Omega$.

Exemple 1 (reprise). $R = ba^*b^*$
$Prem(R) = ba^*$ est un générateur de R^Ω.∎

D'autre part il est immédiat que :

**Lemme 3. Etant donné $R \in Rat(X^+)$,
$\forall G, G' \in [R]_\Omega$, $R^\Omega = (G+G')^* R^\Omega$.**

En revanche, on n'a pas nécessairement $R^\Omega = (G+G')^\Omega$, en effet :

Proposition 6. Soit $R \in Rat(X^+)$, la famille $[R]_\Omega$ est fermée par union si et seulement si $[R]_\Omega$ admet un plus grand élément pour l'inclusion.

PREUVE.

. Si $[R]_\Omega$ est fermée par union.
Soit $G \in [R]_\Omega$, d'après la remarque finale de la preuve de la proposition 2, on sait que G est inclus dans un générateur maximal G_M.
Supposons que G_M n'est pas le plus grand élément de $[R]_\Omega$, on a alors :
$\exists G' \in [R]_\Omega$ tel que $G' \not\subset G_M$.
D'où G_M est strictement inclus dans $(G_M + G')$ qui ne peut donc pas être dans $[R]_\Omega$.
Donc G_M est le plus grand élément de $[R]_\Omega$.

. La réciproque est immédiate par le lemme 1.∎

Exemple 3. $R = X^*(aa+bb)X^*$
$(R+a)$ et $(R+b)$ sont deux autres générateurs de R^ω.
$[R]_\omega$ n'a pas de plus grand élément sinon ce dernier contiendrait a et b
et donc $(ab)^\omega$ appartiendrait à R^ω, ce qui n'est pas.■

Proposition 7. Soit $R \in Rat(X^+)$, la famille $[R]_\omega$ est fermée par produit si et seulement si $[R]_\omega$ admet un plus grand élément pour l'inclusion.

PREUVE.

Si $[R]_\omega$ est fermée par produit,
comme $\forall\ G,G' \in [R]_\omega$, on a (d'après la proposition 3) :
$G^+ \in [R]_\omega$ et $G'^+ \in [R]_\omega$
on en déduit : $G^+G'^+ \in [R]_\omega$ et $G'^+G^+ \in [R]_\omega$.
Comme $(G+G')^\omega = (G+G')^*(G^\omega + G'^\omega + (G^+G'^+)^\omega)$, on a :
$(G+G')^\omega = (G+G')^*R^\omega$.
D'où grâce au lemme 3 : $G+G' \in [R]_\omega$.
Donc $[R]_\omega$ est fermée par union et possède un plus grand élément, d'après la proposition 4.

Réciproquement, si $[R]_\omega$ est fermée par union,
comme $\forall\ G,G' \in [R]_\omega$, on a : $GG' \subseteq (G+G')^+$,
il s'ensuit que : $(GG')^\omega \subseteq (G+G')^\omega$.
D'autre part : $R^\omega = G^\omega = GG^\omega = GG'^\omega = (GG')G'^\omega = (GG')R^\omega$
Donc à fortiori : $R^\omega \subseteq (GG')R^\omega$
et d'après le lemme "d'itération infinie", on a :
$R^\omega \subseteq (GG')^\omega$.
On a donc : $GG' \in [R]_\omega$
c'est-à-dire : $[R]_\omega$ est stable par produit.■

Proposition 8. Soit $R \in Rat(X^+)$, $[R]_\omega$ n'est jamais fermé par intersection.

PREUVE.

Comme $Prem(R) \in [R]_\omega$ (lemme 2) et que $(Prem(R))^2 \in [R]_\omega$, si $[R]_\omega$ est stable par intersection, on a :
$Prem(R) \cap (Prem(R))^2 \in [R]_\omega$
Or $Prem(R) \cap (Prem(R))^2 = \emptyset$
Donc $[R]_\omega$ n'est pas stable par intersection.■

CHAPITRE III

MAXIMAUX ET PLUS GRAND ELEMENT DE $[R]_\Omega$

INTRODUCTION

Dans cette partie, nous nous intéressons aux "grands" générateurs de $[R]_{\Omega}$, i.e. aux maximaux pour l'inclusion dans $[R]_{\Omega}$. Nous commencerons par introduire deux majorants de $[R]_{\Omega}$ qui ne sont pas en général dans $[R]_{\Omega}$.

Le premier, noté $R^{\subseteq}$, qui peut être vu comme le semi-groupe des "homothéties laissant stable R^{Ω}", c'est-à-dire :

$$R^{\subseteq} = \{h \in X^{+} \ / \ hR^{\Omega} \subseteq R^{\Omega}\}.$$

Le second, noté $R^{\sqsupseteq}$, (qui n'est plus un semi-groupe) est un sous-langage de $R^{\subseteq}$:

$$R^{\sqsupseteq} = \{h \in X^{+} \ / \ hR^{\Omega} \subseteq R^{\Omega} \text{ et } h^{\Omega} \in R^{\Omega}\}$$

Dans la partie A nous prouvons que ces deux majorants sont rationnels et constructibles et que $R^{\sqsupseteq}$ est un semi-groupe si et seulement si il appartient à $[R]_{\Omega}$.

Dans la partie B nous verrons que $[R]_{\Omega}$ ne possède pas toujours de plus grand élément (pour l'inclusion) mais que $[R]_{\Omega}$ possède toujours des générateurs maximaux en nombre fini. De plus, tout générateur de R^{Ω} est inclus dans l'un de ces maximaux. Ceci nous permettra de décider si $[R]_{\Omega}$ possède ou non un plus grand élément.

Dans la partie C nous montrons que, quand R^{Ω} est déterministe, "$R^{\sqsupseteq}$ appartient à $[R]_{\Omega}$" équivaut à "$[R]_{\Omega}$ possède un plus grand élément". Un exemple prouvera que ce n'est plus vrai quand R^{Ω} n'est pas déterministe.

Dans la partie D nous montrons que, quand R^{Ω} est une adhérence, alors le plus grand élément existe et est égal à $R^{\subseteq}$ qui est dans ce cas égal à $R^{\sqsupseteq}$.

La partie E présente un résumé des résultats précédents concernant l'existence et la valeur du plus grand élément éventuel de $[R]_{\Omega}$.

A. ETUDE DES MAJORANTS $R^{\subset}$ ET R^{d}

<u>Définition</u> : Soit R un langage inclus dans X^{+},

$R^{\subset} = \{u \in X^{+} \ / \ uR^{\omega} \subset R^{\omega}\}$

<u>Lemme 1</u>. Soit R un langage inclus dans X^{+}, $R^{\subset}$ est un majorant de $[R]_{\omega}$.

C'est-à-dire que : $\forall\ G \in [R]_{\omega},\ G \subset R^{\subset}$.

PREUVE.

Soit $G \in [R]_{\omega}$, on a :
$GR^{\omega} = GG^{\omega} = G^{\omega} = R^{\omega}$
i.e. : $G \subset R^{\subset}$. ■

Remarque : $R^{\subset}$ peut ou non appartenir à $[R]_{\omega}$, comme le prouvent les deux exemples suivants.

Exemple 1. $R = a$
$R^{\subset} = a^{+}$. ■

Exemple 2. $R = a^{*}b$
$R^{\subset} = X^{+}$
$R^{\subset} \notin [R]_{\omega}$, car $a^{\omega} \notin R^{\omega}$. ■

<u>Proposition 1</u>. Soit $R \in Rat(X^{+})$, $R^{\subset}$ est un semi-groupe rationnel constructible (à partir d'un automate reconnaissant R^{ω}).

PREUVE.

. $\forall\ u,v \in R^{\subset}$, on a : $vR^{\omega} \subset R^{\omega}$
d'où : $(uv)R^{\omega} = u(vR^{\omega}) \subset uR^{\omega} \subset R^{\omega}$
i.e. $uv \in R^{\subset}$, donc $R^{\subset}$ est un semi-groupe.

. Pour montrer que $R^{\subset}$ est un langage rationnel constructible, il suffit de remarquer que $R^{\subset}$ est saturé par la congruence transitionnelle associée à un automate de Büchi reconnaissant R^{ω}. ■

Remarque : On a évidemment : $R_1^{\omega} = R_2^{\omega} \Rightarrow R_1^{\subset} = R_2^{\subset}$, mais la réciproque est fausse.

Exemple 3. $R_1 = X^{*}$ et $R_2 = X^{*}a$.
$R_1^{\subset} = R_2^{\subset} = X^{+}$
mais $R_1^{\omega} \neq R_2^{\omega}$. ■

Un autre majorant, inclus dans $R^{\subset}$ et noté R^{d}, jouera un rôle important quand R^{ω} est déterministe.

Définition : Soit R un langage inclus dans X^+,

$$R^{\sqsupseteq} = \{u \in X^+ \ / \ uR^\Omega \subseteq R^\Omega \text{ et } u^\Omega \in R^\Omega\}$$

On constate déjà que $R^{\sqsupseteq}$ est inclus dans $R^{\subseteq}$ et peut être soit différent de $R^{\subseteq}$ soit égal à $R^{\subseteq}$, comme le montrent les deux exemples suivants.

Exemple 1 (reprise). $R = a$
$R^{\subseteq} = a^+ = R^{\sqsupseteq}$.■

Exemple 2 (reprise). $R = a^*b$
$R^{\subseteq} = X^+$ et $R^{\sqsupseteq} = X^*bX^*$.■

Lemme 2. **Soit R un langage inclus dans X^+, $R^{\sqsupseteq}$ est un majorant de $[R]_\Omega$.**

PREUVE.
Soit $G \in [R]_\Omega$, on sait que : $GR^\Omega = R^\Omega$.
De plus, $\forall u \in G : u^\Omega \in R^\Omega$.
Donc $G \subseteq R^{\sqsupseteq}$.■

Proposition 2. **Soit $R \in Rat(X^+)$, $R^{\sqsupseteq}$ est un langage rationnel constructible (à partir d'un automate reconnaissant R^Ω).**

PREUVE.
Il suffit de remarquer que $R^{\sqsupseteq}$ (comme $R^{\subseteq}$) est saturé par la congruence transitionnelle associée à un automate de Büchi reconnaissant R^Ω.■

Remarquons maintenant que $R^{\sqsupseteq}$ peut être ou non un semi-groupe. Et dans le cas où $R^{\sqsupseteq}$ est un semi-groupe, il peut être égal ou non à $R^{\subseteq}$.

Exemple 4. $R = X^*(aa+bb)$
$a \in R^{\sqsupseteq}$ car : $a^\Omega \in R^\Omega$
et d'autre part : $aR \subseteq R$
d'où : $aR^\Omega \subseteq R^\Omega$.
De même $b \in R^{\sqsupseteq}$
mais $ab \notin R^{\sqsupseteq}$, car $(ab)^\Omega \notin R^\Omega$
et donc $R^{\sqsupseteq}$ n'est pas un semi-groupe.
On a prouvé en outre que : $R^{\sqsupseteq} \notin [R]_\Omega$.■

Exemple 1 (reprise). $R = a$
$R^{\subseteq} = a^+ = R^{\sqsupseteq}$.
Donc $R^{\sqsupseteq}$ est un semi-groupe égal à $R^{\subseteq}$.■

Exemple 2 (reprise). $R = a^*b$
$R^{\subseteq} = X^+$ et $R^{\sqsupseteq} = X^*bX^*$.
Donc $R^{\sqsupseteq}$ est un semi-groupe différent de $R^{\subseteq}$,
mais on constate que $R^{\sqsupseteq} \in [R]_\Omega$.■

Sur ces trois exemples, il y a coïncidence entre "$R^{\trianglelefteq}$ est un semi-groupe" et "$R^{\trianglelefteq} \in [R]_{\Omega}$"; cette propriété est générale.

Proposition 3. Soit $R \in Rat(X^{+})$. $R^{\trianglelefteq}$ est un semi-groupe si et seulement si $R^{\trianglelefteq} \in [R]_{\Omega}$.

PREUVE.

Si $R^{\trianglelefteq} \in [R]_{\Omega}$, $R^{\trianglelefteq}$ est alors le plus grand élément de $[R]_{\Omega}$, et est donc un semi-groupe (car $G \in [R]_{\Omega} \Rightarrow G^{+} \in [R]_{\Omega}$).

Pour la réciproque, on montre que :
$Ult(R^{\trianglelefteq\Omega}) \subseteq Ult(R^{\Omega})$, ce qui permet de conclure grâce au lemme I-4.
Soit $uv^{\Omega} \in R^{\trianglelefteq\Omega}$, il existe r et r' dans $(R^{\trianglelefteq})^{+}$ tels que :
$uv^{\Omega} = rr'^{\Omega}$.
Comme $R^{\trianglelefteq}$ est un semi-groupe, r et r' sont dans $R^{\trianglelefteq}$ et donc :
$r'^{\Omega} \in R^{\Omega}$, en conséquence $rr'^{\Omega} \in R^{\Omega}$.■

Donnons maintenant une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que $R^{\subseteq} = R^{\trianglelefteq}$.

Proposition 4. Soit R un langage inclus dans X^{+}. Si R^{Ω} est une adhérence, alors on a : $R^{\subseteq} = R^{\trianglelefteq} = \{u \in X^{+} \ / \ uR^{*} \subseteq FG(R^{*})\}$

PREUVE.

Montrons déjà que $R^{\subseteq} = R^{\trianglelefteq}$.
Comme $R^{\subseteq}R^{\Omega} \subseteq R^{\Omega}$, d'après la proposition II-4, on obtient :
$R^{\subseteq\Omega} \subseteq R^{\Omega}$
Or ceci entraîne que $R^{\subseteq} = R^{\trianglelefteq}$.

D'autre part, $uR^{\Omega} \subseteq R^{\Omega} \Rightarrow uR^{*} \subseteq FG(R^{*})$.
Et réciproquement :
$uR^{*} \subseteq FG(R^{*})$ implique $uFG(R^{*}) \subseteq FG(R^{*})$
donc : $Adh(uFG(R^{*})) \subseteq Adh(FG(R^{*}))$
et comme $Adh(FG(R^{*})) = R^{\Omega}$, on a : $uR^{\Omega} \subseteq R^{\Omega}$.
Finalement : $R^{\subseteq} = \{u \in X^{+} \ / \ uR^{*} \subseteq FG(R^{*})\}$.■

Remarque : La réciproque de la proposition 4 est fausse.

Exemple 2 (reprise). $R = bX^{*}$
$R = R^{\subseteq} = R^{\trianglelefteq} = \{u \in X^{+} \ / \ uR^{*} \subseteq FG(R^{*})\}$
mais $ba^{\Omega} \in Adh(R)$ et $ba^{\Omega} \notin R^{\Omega}$
et donc (d'après la proposition I.7) R^{Ω} n'est pas une adhérence.■

B. CAS GENERAL

Lemme 3. Soit $R \in Rat(X^+)$, $[R]_\Omega$ ne possède pas toujours de plus grand élément.

PREUVE.

Considérons le langage $R = X^*(aa+bb)X^*$.
$[R]_\Omega$ ne possède pas de plus grand élément, en effet :
$R+a \in [R]_\Omega$ et $R+b \in [R]_\Omega$,
mais $R+a+b \notin [R]_\Omega$ car, par exemple, $(ab)^\Omega \notin R^\Omega$.
Donc $[R]_\Omega$ ne possède pas de plus grand élément, sinon (d'après proposition II.6) le langage $R+a+b$ appartiendrait à $[R]_\Omega$.■

Remarquons que $R^{\subseteq}$ (resp. $R^{\sqsupseteq}$) appartient à $[R]_\Omega$ implique que $R^{\subseteq}$ (resp. $R^{\sqsupseteq}$) est le plus grand élément de $[R]_\Omega$. Mais nous verrons par la suite que le plus grand élément peut exister et n'être ni $R^{\subseteq}$ ni $R^{\sqsupseteq}$.

Puisqu'il n'y a pas toujours de plus grand élément dans $[R]_\Omega$, la question de trouver des éléments maximaux dans $[R]_\Omega$ se pose alors naturellement.

Notons tout d'abord que tout maximal de $[R]_\Omega$ est un semi-groupe, mais qu'un semi-groupe de $[R]_\Omega$ n'est pas nécessairement maximal dans $[R]_\Omega$.

Exemple 5. $R = a^*b$
$R^+ = X^*b$ est un semi-groupe de $[R]_\Omega$ et n'est pas maximal, en effet $[R]_\Omega$ a un plus grand élément qui est X^*bX^*.■

Proposition 5. Soit $R \in Rat(X^+)$, $[R]_\Omega$ possède un nombre fini, non nul, de langages maximaux. De plus ces langages sont des semi-groupes rationnels et constructibles.

PREUVE.

Soient $A = (X,Q,I,\delta,T)$ un automate qui reconnaît R^Ω, et $\approx$ la congruence transitionnelle associée.
Notons k l'index de $\approx$, et $u_1,\dots,u_k$ des représentants des classes de $\approx$.
Pour toute partie J de $\{1,\dots,k\}$, nous noterons :

$$R_J = \bigcup_{i \in J} [u_i]$$

Soit $G \in [R]_\Omega$.
Nous avons vu dans la preuve de la proposition II.1 que :
$[G]$ appartient à $[R]_\Omega$ (en notant $[G]$ le saturé de G pour $\approx$) et donc :
$\exists\ J \subset \{1,\dots,k\}$ tel que $G \subset R_J$ et $R_J \in [R]_\Omega$.

Ce qui prouve que la famille F :

$$F = \{R_J \ / \ J \subset \{1,\dots,k\} \text{ et } R_J \in [R]_\omega\}$$

contient tous les langages maximaux de $[R]_\omega$.
Ils sont donc en nombre fini, et tous sont rationnels et constructibles.■

Comme de plus, tout générateur de R^ω est inclus dans un langage de F, on a :

Proposition 6. Soit $R \in Rat(X^+)$, tout générateur de $[R]_\omega$ est inclus dans un générateur maximal dans $[R]_\omega$.

Remarque : Un générateur de $[R]_\omega$ peut être contenu dans plusieurs maximaux.

Exemple 6. $R = X^*(aa+bb)X^*$

Nous avons vu que $[R]_\omega$ ne possède pas de plus grand élément.
Nous donnons ici deux maximaux contenant R.
$X^+\backslash R = (ab)^+ + (ab)^*a + (ba)^+ + (ba)^*b$
D'une part : $\forall\ u \in (ab)^+,\ u^\omega \notin R^\omega$
et de même pour $(ba)^+$.
D'autre part : $(ab)^*a + R \in [R]_\omega$
et $(ab)^*a + R$ est maximal (car on ne peut lui ajouter que des mots de $(ba)^*b$ qui donneraient alors $(ab)^\omega$).
De même : $(ba)^*b + R \in [R]_\omega$ et $(ba)^*b + R$ est maximal.
On a donc les deux maximaux contenant R.■

Un générateur de R^ω ne pouvant être maximal que s'il appartient à F, on a donc :

Corollaire 1. Soit $R \in Rat(X^+)$, on peut décider si R est ou non maximal dans $[R]_\omega$.

D'autre part, comme F est une famille finie, on obtient :

Corollaire 2. Soit $R \in Rat(X^+)$, on peut décider si $[R]_\omega$ possède ou non un plus grand élément.

C. CAS OU R^ω EST DETERMINISTE

Notons tout d'abord qu'un langage du type R^ω n'appartient pas nécessairement à $DRat(X^\omega)$ (nous en verrons des exemples par la suite), mais que c'est "très souvent" le cas.

Supposant donc que R^ω appartient à $DRat(X^\omega)$, nous reprenons la question de l'existence du plus grand élément de $[R]_\omega$.

<u>Proposition 7</u>. Si R^ω appartient à $DRat(X^\omega)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $[R]_\omega$ admet un plus grand élément

(ii) $R^d \in [R]_\omega$ (et est alors le plus grand élément)

(iii) R^d est un semi-groupe.

Pour la preuve nous utilisons le lemme suivant.

<u>Lemme 4</u>. Si R^ω appartient à $DRat(X^\omega)$, alors, pour tout mot z de R^d, il existe G dans $[R]_\omega$ tel que z appartienne à G.

PREUVE.

Soit $A = (X,Q,q_0,T,*)$, un automate déterministe reconnaissant R^ω, notons $n = card(Q)+1$.

On va montrer que : $G = R^n+z \in [R]_\omega$.

On sait déjà que : . $z^\omega \in R^\omega$

. $(z+R)^*R^\omega \subset R^\omega$ (ceci car $zR^\omega \subset R^\omega$).

Pour montrer que $G^\omega \subset R^\omega$, il reste donc à vérifier que : $(z^+(R^n)^+)^\omega \subset R^\omega$.

Posons $Q' = \{q_0*u,\ u \in (z+R)^*\}$.

Comme A est déterministe, on a :

$\forall\ q \in Q',\ \forall\ w \in R^\omega,\ Inf[lecture(q,w)] \cap T \neq \emptyset$.

On a de plus :

<u>Fait</u>. $\forall\ q \in Q',\ \forall\ v \in R^n,\ lecture(q,v) \cap T \neq \emptyset$.

PREUVE DU FAIT.

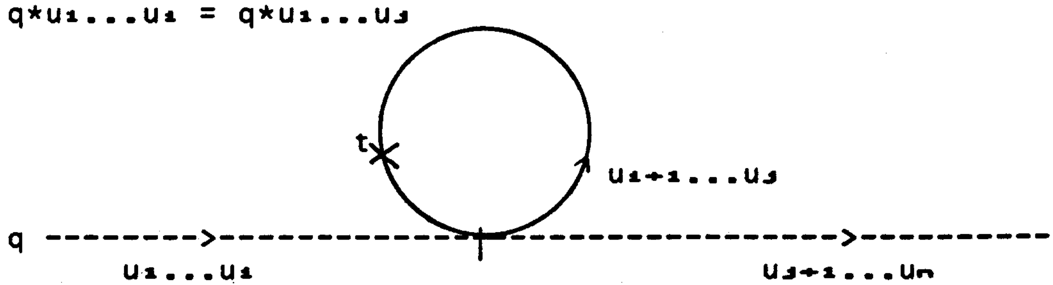
On peut écrire :

$v = u_1...u_n$ où $\forall\ i \leq n,\ u_i \in R$.

Comme $card(\{q*u_1...u_i,\ i \leq n\}) \leq n-1$,

il existe i et j, $1 \leq i < j \leq n$ tels que :

$q*u_1...u_i = q*u_1...u_j$



Comme $u_1...u_i(u_{i+1}...u_j)^\omega \in R^\omega$, on a :

$inf[lecture(q,u_1...u_i(u_{i+1}...u_j)^\omega)] \cap T \neq \emptyset$

et donc, puisque A est déterministe :

$lecture(q*u_1...u_i,u_{i+1}...u_j) \cap T \neq \emptyset$

et à fortiori :

$lecture(q,u_1...u_n) \cap T \neq \emptyset$.■

Soit maintenant $w \in (z^+(R^n)^+)^\omega$, on peut écrire :
$w = z_1r_1 \dots z_ir_i \dots$ où $\forall\, i > 0$, $z_i \in z^+$ et $r_i \in (R_n)^+$.
D'après le fait précédent, on a :
$\forall\, i > 0$, $\text{lecture}(q_0 * z_1r_1 \dots z_ir_i, z_{i+1}r_{i+1}) \cap T \neq \emptyset$
d'où : $\text{Inf}[\text{lecture}(q_0, w)] \cap T \neq \emptyset$.■

PREUVE DE LA PROPOSITION 7.
D'après la proposition 3, il suffit de prouver que
(i) <=> (ii)

Si $[R]_\omega$ admet un plus grand élément P, d'après le lemme précédent, R^d est inclus dans P.
Comme R^d est un majorant de $[R]_\omega$, on a donc : $P = R^d$.
D'où : $R^d \in [R]_\omega$.

Si $R^d \in [R]_\omega$, comme R^d est un majorant de $[R]_\omega$, il est le plus grand élément de $[R]_\omega$. (ceci est vrai même si $R^\omega \notin DRat(X^\omega)$).■

Exemple 7. $R = X^*b$.
$R^c = X^+$ et $R^d = X^*bX^*$
R^d est un semi-groupe et appartient bien à $[R]_\omega$.■

Notons que, sans l'hypothèse "R^ω appartient à $DRat(X^\omega)$", la proposition 7 est fausse, comme le montre le lemme suivant.

<u>Lemme 5</u>. Soit R tel que $R^\omega \in Rat(X^\omega) \setminus DRat(X^\omega)$. $[R]_\omega$ possède un plus grand élément n'implique pas que R^d appartienne à $[R]_\omega$.

PREUVE.
Prenons le langage
$L = a^2 + ba(a^2+aba)^*[\varepsilon+(b+ab^2)(a+b)^*] + b^2(a+b)^*$
Nous allons voir que :
(1) $L^\omega \notin DRat(X^\omega)$
(2) $L^d \notin [L]_\omega$
(3) L^+ est le plus grand élément de $[L]_\omega$.

PREUVE DE (1).
S'il existe un langage R tel que : $L^\omega = \lim R$.
Comme $baa^2aba(a^2)^\omega \in L^\omega$, il existe $i_1 > 1$ tel que :
$ba^4ba^{i_1} \in R$
On prend alors un entier pair $> i_1$, par exemple $2i_1$.
Comme $baa^2ab(a^2)^{i_1}ba(a^2)^\omega \in L^\omega$, il existe $i_2 > 1$ tel que :
$baa^2ab(a^2)^{i_1}ba^{i_2} \in R$.
En itérant le processus, on a une suite de mots de R dont la limite est : $w = baa^2ab(a^2)^{i_1}b(a^2)^{i_2} \dots b(a^2)^{i_n} \dots$
Donc : $w \in L^\omega$
Or $L^\omega \cap (a^2)^*(b(a^2)^+)^\omega = \emptyset$, d'où la contradiction.■

PREUVE DE (2).
Nous allons voir que :
- d'une part $b \in L^{d}$
- d'autre part aucun générateur de L^{ω} ne peut contenir b.

- Comme $b^{2} \in L$: $b^{\omega} \in L^{\omega}$.

De plus : $bL^{\omega} \subseteq L^{\omega}$, en effet :

$b(L\backslash a^{2}) \subseteq b^{2}(a+b)^{*} \subseteq L$

$$b(a^{2})^{+}ba(a^{2}+aba)^{*}[\varepsilon+(b+ab^{2})(a+b)^{*}] \subseteq ba(a^{2}+aba)^{+}[\varepsilon+(b+ab^{2})(a+b)^{*}] \subseteq L$$

$b(a^{2})^{+}b^{2}(a+b)^{*} \subseteq ba(a^{2})^{*}ab^{2}(a+b)^{*} \subseteq L$

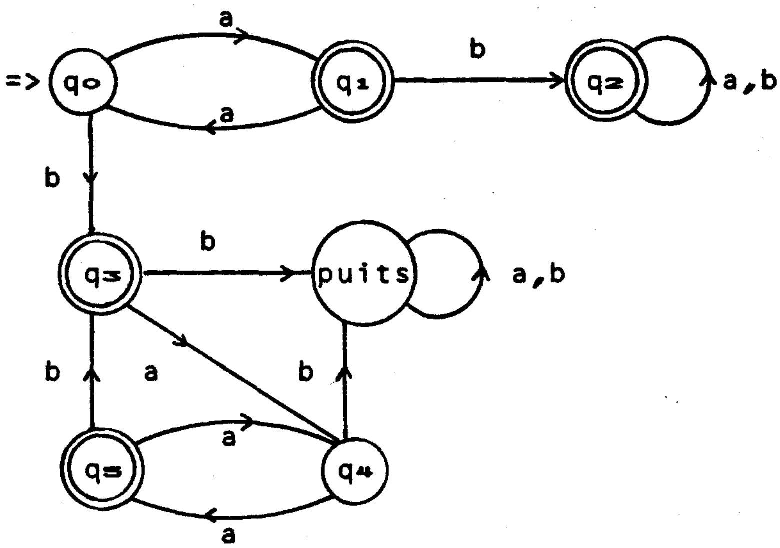
Donc $b(a^{2})^{*}(L\backslash a^{2})L^{\omega} \subseteq LL^{\omega}$.
Il reste à envisager $b(a^{2})^{\omega}$:
comme $b(a^{2})^{\omega} = ba(a^{2})^{\omega}$, $b(a^{2})^{\omega} \in L^{\omega}$.
Donc $b \in L^{d}$.

- D'autre part, $\forall$ $G \in [L]_{\omega}$, il existe un entier pair p tel que $a^{p} \in G$, en effet :
$a^{\omega} \in G^{\omega}$, donc p existe,
de plus il est pair car $a(a^{2})^{*}b \cap FG(L^{+}) = \emptyset$.
On voit alors que $b \notin G$, sinon $(a^{p}b)^{\omega} \in L^{\omega}$.
Or c'est impossible d'après : $(a^{2})^{*}(b(a^{2})^{+})^{\omega} \cap L^{\omega} = \emptyset$.

En conclusion L^{d}, qui contient b, n'appartient pas à $[L]_{\omega}$.■

PREUVE DE (3).
Notons $P = \bigcup_{G \in [L]_{\omega}} G$
On peut vérifier que :
$a(a^{2})^{*} \cap P = \emptyset$
$a(a^{2})^{*}bX^{*} \cap P = \emptyset$
$(a^{2})^{*}(b(a^{2})^{+})^{+}(\varepsilon+b) \cap P = \emptyset$
$(a^{2})^{*}b \cap P = \emptyset$.
Notons $R = (a^{2})^{*}(a + abX^{*} + (b(a^{2})^{+})^{+}(\varepsilon+b) + b)$.
D'après ce qui précède : $P \cap R = \emptyset$,
i.e. : $P \subseteq X^{+}\backslash R$.
On va montrer que $X^{+}\backslash R \in [L]_{\omega}$.

L'automate suivant reconnaît R :



On voit alors que :
$X^+ \backslash R = (a^2)^*[\varepsilon + b^2(a+b)^* + ba(a^2+aba)^* +$
$ba(a^2+aba)^*(b+ab^2)^*]$
Or comme $L \subset X^+ \backslash R$ et que $X^+ \backslash R \subset L^+$, on a : $X^+ \backslash R \in [R]_\omega$.
Donc : $X^+ \backslash R \subset P$
et finalement : $X^+ \backslash R = P = L^+$.
D'où L^+ est le plus grand élément de $[L]_\omega$.∎

{fin de preuve lemme 5}∎

Remarque : On peut cependant avoir : R^ω n'appartient pas à $DRat(X^\omega)$ et R^d est le plus grand élément de $[R]_\omega$.

Exemple 8. $R = b^2X^*+a$.
D'une part on peut vérifier que : $R^\omega \notin DRat(X^\omega)$.
D'autre part : $R^c = a^*b^2X^*+a^* = R^*$
et donc : $R^c \in [R]_\omega$.
En conséquence $R^c = R^d$ est le plus grand élément de $[R]_\omega$.∎

Quand R^ω est déterministe, R^c n'appartient pas nécessairement à $[R]_\omega$, en revanche :

<u>Lemme 6</u>. Soit R tel que $R^\omega \in DRat(X^\omega)$, il existe un entier n tel que pour tout G de $[R]_\omega$, G^nR^c appartienne à $[R]_\omega$.

PREUVE.
Soit $A = (X,Q,q_0,T,*)$ un automate déterministe reconnaissant R^ω.
Notons $n = 1 + card(Q)$.
Soit G appartenant à $[R]_\omega$, nous allons montrer que $G' = G^nR^c$ appartient à $[R]_\omega$.
Comme $G^nG \subset G'$, on a : $G^\omega \subset G'^\omega$.

Pour l'inclusion inverse, soit w appartenant à G'^{Ω} on peut écrire : $w = u_1v_1u_2v_2\ldots$ avec $\forall\ j > 0$, u_j G^{n} et v_j R^{c}.
On a alors :
$\forall\ i > 0$, $\mathrm{lecture}(q_0 * u_1v_1\ldots u_{i-1}v_{i-1}, u_i) \cap T \neq \emptyset$
donc w appartient à R^{Ω}, i.e. G'^{Ω} inclus dans R^{Ω}.■

D. CAS OU R^{Ω} EST UNE ADHERENCE

Si, dans le cas où $R^{\Omega} \in \mathrm{DRat}(X^{\Omega})$, le plus grand élément ne peut être que R^{d}, nous allons voir que, dans le cas où R^{Ω} est une adhérence, le plus grand élément existe toujours et est R^{c}.

Proposition 8. Soit $R \in \mathrm{Rat}(X^{+})$. Si R^{Ω} est une adhérence, alors R^{c} est le plus grand élément de $[R]_{\Omega}$.

PREUVE.
Sachant que $R \subset R^{c}$, il reste à montrer que $R^{c\Omega} \subset R^{\Omega}$.
Comme $R^{c}R^{\Omega} \subset R^{\Omega}$ et que R^{Ω} est une adhérence, en appliquant la proposition II-8, on obtient $R^{c\Omega} \subset R^{\Omega}$.■

Remarque : Mais R^{c} peut être le plus grand élément de $[R]_{\Omega}$ sans que R^{Ω} soit une adhérence.

Exemple 9. $R = ba^{*}$.
$R^{c} = bX^{*}$ et on a bien $R^{c} \in [R]_{\Omega}$
Mais R^{Ω} n'est pas une adhérence, en effet :
par exemple $ba^{\Omega} \in \mathrm{Adh}(R)$ mais $ba^{\Omega} \notin R^{\Omega}$.■

En dernier lieu, rappelons que dans le cas où R^{Ω} est une adhérence on a égalité entre R^{c} et R^{d}.

E. TABLEAU RECAPITULATIF DES RESULTATS

Nous donnons ici un diagramme résumant les résultats obtenus pour l'existence et la valeur du plus grand élément de $[R]_{\Omega}$ en fonction de l'appartenance de R^{Ω} à $\mathrm{DRat}(X^{\Omega})$ ou à $\mathrm{FRat}(X^{\Omega})$. Chaque situation sera illustrée par un exemple. Nous commençons par présenter deux exemples non encore étudiés et servant dans le récapitulatif.

Exemple 10. $R = a^{2}+ab((a^{2})^{*})^{*}$
. On peut décrire R^{Ω} comme l'ensemble des Ω-mots tels que :
- ou : le début est dans $(a^{2})^{*}ab$ et le nombre de séquences dans $b(a^{2})^{*}ab$ est infini
- ou : le début est dans $(a^{2})^{*}ab$ et le nombre de b est fini
- ou : a^{Ω}.

. On peut vérifier que : $R^{\Omega} \notin DRat(X^{\Omega})$.
. D'après la description précédente de R^{Ω}, on voit que :
$R^{\subseteq} = (a^2)^+ + (a^2)^* ab\ X^*$.
Or $aba \in R^{\subseteq}$, mais $(aba)^{\Omega} \notin R^{\Omega}$, donc $R^{\subseteq} \notin [R]_{\Omega}$.
. Toujours d'après la description de R^{Ω}, on voit que :
$R^{\supseteq} = (a^2)^+ + [((a^2)^* ab\ X^*) \cap (X^* b(a^2)^* ab\ X^* + X^* b(a^2)^*)]$.
Il est alors facile de vérifier que $R^{\supseteq}$ est un semi-groupe et donc le plus grand élément de $[R]_{\Omega}$.■

Exemple 11. $R = X^*(a^2+b^2+c^2)X^* + (a+b)^* d(a+b)^*$ avec $X = a+b+c+d$
. On peut vérifier que $R^{\Omega} \notin DRat(X^{\Omega})$.
. Or $(R+a)^{\Omega} = R^{\Omega}$ et $(R+b)^{\Omega} = R^{\Omega}$.
Mais $(ab)^{\Omega} \notin R^{\Omega}$ et donc $(R+a+b) \notin [R]_{\Omega}$.
Il s'ensuit que $[R]_{\Omega}$ n'a pas de plus grand élément.■

TABLEAU RECAPITULATIF

- $R^{\Omega} \notin DRat(X^{\Omega})$
  - $\longrightarrow$ pas de plus grand élément : ex.11
$\forall\ G \in [R]_{\Omega},\ G \subsetneq R^{\dashv} \subsetneq R^{\sqsubset}$
  - $\longrightarrow$ plus grand élément P
    - $\longrightarrow$ $P = R^{\sqsubset} = R^{\dashv}$: ex.8
    - $\longrightarrow$ $P = R^{\dashv} \subsetneq R^{\sqsubset}$: ex.10
    - $\longrightarrow$ $P \subsetneq R^{\dashv} \subsetneq R^{\sqsubset}$: ex.lemme5
- $R^{\Omega} \in DRat(X^{\Omega}) \setminus FRat(X^{\Omega})$
  - $\longrightarrow$ pas de plus grand élément : ex.lemme3
$\forall\ G \in [R]_{\Omega},\ G \subsetneq R^{\dashv} \subsetneq R^{\sqsubset}$
  - $\longrightarrow$ plus grand élément $P = R^{\dashv}$
    - $\longrightarrow$ $P \subsetneq R^{\sqsubset}$: ex.2
    - $\longrightarrow$ $P = R^{\sqsubset}$: ex.9
- $R^{\Omega} \in FRat(X^{\Omega})$ $\longrightarrow$ plus grand élément $= R^{\dashv} = R^{\sqsubset}$: ex.1

CHAPITRE IV

MINIMAUX DE $[R]_n$ DANS LE CAS GENERAL

INTRODUCTION

La partie précédente concernait les "grands" générateurs de R^Ω; nous regardons ici les "petits" générateurs de R^Ω, c'est-à-dire les générateurs de R^Ω minimaux pour l'inclusion - appelés générateurs Ω-minimaux -. Nous verrons que ce problème est plus difficile. Le résultat principal de la partie A est que l'on peut décider si un langage rationnel R est ou non minimal dans $[R]_\Omega$. Deux questions importantes restent encore ouvertes :

Q1 : Est-ce que, pour tout langage rationnel R, $[R]_\Omega$ possède un générateur Ω-minimal ?

Q2 : Etant donné un langage rationnel R, est-ce que tout générateur de R^Ω contient un générateur Ω-minimal dans $[R]_\Omega$?

Notons qu'une réponse positive à Q2 entraînerait à fortiori une réponse positive à Q1.

Dans les deux parties suivantes nous chercherons des minimaux bien particuliers dans $[R]_\Omega$: les fg-minimums et les Ω-bases.

Les générateurs fg-minimums, que nous étudions dans la partie B, sont des générateurs Ω-minimaux dont l'ensemble des facteurs gauches est en outre le plus petit élément (pour l'inclusion) dans la famille $\{FG(G) \ / \ G \in [R]_\Omega\}$. Nous montrons qu'il n'y a pas toujours de générateurs fg-minimums, mais qu'il peut y en avoir plusieurs et que l'on peut décider si un langage rationnel est ou non fg-minimum.

Nous avons vu que, étant donné un langage R, il n'y a pas de générateur de R^Ω inclus dans tous les autres. Nous nous posons ici la question de savoir s'il existe un générateur minimal B tel que : $\forall\ G \in [R]_\Omega,\ G \subseteq B^+$. Un tel générateur sera dit Ω-base de $[R]_\Omega$. Dans la partie C nous allons voir que, étant donné un langage rationnel R, on peut décider si $[R]_\Omega$ contient ou non une Ω-base, qui, si elle existe, est unique, rationnelle et constructible.

A. MINIMAUX POUR L'INCLUSION

Nous pouvons déjà noter que pour tout langage R, on a :
$R^{\Omega} = (R^{+})^{\Omega} = (\mathrm{Prem}(R))^{\Omega}$
où Prem(R) désigne le langage $R \setminus RR^{+}$.

Il est clair que : $\mathrm{Prem}(R) \cap (\mathrm{Prem}(R))^{2} = \emptyset$
et que : $((\mathrm{Prem}(R))^{2})^{\Omega} = R^{\Omega}$.

En conséquence :

Proposition 1. Soit $R \in \mathrm{Rat}(X^{+})$, $[R]_{\Omega}$ ne contient jamais de plus petit élément pour l'inclusion.

Nous étudierons donc les générateurs minimaux pour l'inclusion dans $[R]_{\Omega}$.

Définition : Un langage R sera dit **Ω-minimal** s'il est minimal pour l'inclusion dans $[R]_{\Omega}$.

Exemple 1. $\forall\ n \geq 1$, le langage $\{a^{n}\}$ est Ω-minimal,
c'est-à-dire le langage $\{a^{n}\}$ est un générateur minimal dans $[\{a\}]_{\Omega}$.■

Exemple 2. $R = ba^{*}$
$R^{\Omega} = \{bw \in X^{\Omega}\ /\ |w|_{b} = \infty\}$
et il est clair que R est Ω-minimal.■

Exemple 3. $R = a^{+}ba^{*}$
R n'est pas Ω-minimal, car :
$R^{\Omega} = (a^{+}b)^{\Omega}$ et $a^{+}b$ est strictement inclus dans R.■

Cet exemple montre aussi que Prem(R) n'est pas forcément Ω-minimal dans $[R]_{\Omega}$.

Remarquons déjà que L est Ω-minimal dans $[R]_{\Omega}$ si et seulement si : $\forall\ x \in L$, $(L \setminus x)^{\Omega} \neq L^{\Omega}$.

**Lemme 1. Soit $R \in \mathrm{Rat}(X^{+})$, et soit $u \in R$,
$(R \setminus u)^{\Omega} = R^{\Omega}$ si et seulement si $uR^{\Omega} \subset (R \setminus u)R^{\Omega}$.**

PREUVE.
Si $(R \setminus u)^{\Omega} = R^{\Omega}$, on a :
$uR^{\Omega} \subset RR^{\Omega} = (R \setminus u)^{\Omega} = (R \setminus u)(R \setminus u)^{\Omega} = (R \setminus u)R^{\Omega}$.
i.e. : $uR^{\Omega} \subset (R \setminus u)R^{\Omega}$

Réciproquement, si $uR^{\Omega} \subseteq (R\backslash u)R^{\Omega}$:
$RR^{\Omega} \subseteq (R\backslash u)R^{\Omega}$, c'est-à-dire : $R^{\Omega} \subseteq (R\backslash u)R^{\Omega}$.
Par application de la proposition (II-C) on a alors :
$R^{\Omega} \subseteq (R\backslash u)^{\Omega}$.
Et comme : $(R\backslash u) \subseteq R \Rightarrow (R\backslash u)^{\Omega} \subseteq R^{\Omega}$,
on a l'égalité : $(R\backslash u)^{\Omega} = R^{\Omega}$.■

Ce lemme, souvent utilisé dans la suite pour prouver qu'un langage est ou non Ω-minimal signifie que, pour tester si $(R\backslash u)^{\Omega} = R^{\Omega}$, il suffit de voir si tout mot de uR^{Ω} peut se décomposer sur R en commençant par un mot différent de u. Autrement dit, si R est minimal dans $[R]_{\Omega}$, pour tout mot u de R, il existe un Ω-mot au moins de R^{Ω}, dont toute décomposition sur R commence par u.

<u>Proposition 2</u>. **Soit $R \in Rat(X^{+})$. On peut décider si R est ou non un langage Ω-minimal.**

PREUVE.

Suivant la même idée que pour les générateurs maximaux, nous allons tester l'égalité $(R\backslash x)^{\Omega} = R^{\Omega}$ pour uniquement un nombre fini de mots de R. Pour cela, nous utiliserons une congruence, notée ≈, d'index fini calculable telle que :

$$u \approx v \Rightarrow [\ (R\backslash u)^{\Omega} = R^{\Omega} \text{ ssi } (R\backslash v)^{\Omega} = R^{\Omega}\ ].$$

Nous supposerons que R = Prem(R) (égalité qui est décidable), car si ce n'est pas le cas, R n'est évidemment pas Ω-minimal.

Soit $A = (X,Q,q_0,T,\delta)$ un automate déterministe reconnaissant R, on construit alors un nouvel automate (non déterministe), noté A', de la façon suivante :

- $Q' = Q + q'_0$
- $I' = q_0$
- $T' = q'_0$
- δ' est la transition δ à laquelle on ajoute :

(q,a,q'_0) ssi $\exists\ t \in T\ /\ (q,a,t) \in \delta$
(q'_0,a,q) ssi $(q_0,a,q) \in \delta$
(q'_0,a,q'_0) ssi $\exists\ t \in T\ /\ (q_0,a,t) \in \delta$

On vérifie alors que $T(A') = R^{+}$ et que $T_{\Omega}(A') = R^{\Omega}$.

On a aussi les deux équivalences suivantes :
- $u \in R$ si et seulement si il existe une lecture de u dans A' partant de q_0, arrivant dans un état de T, sans passer par q'_0.
- $u \in RR^{+}$ si et seulement si il existe une lecture de u dans A' partant de q_0, arrivant dans un état de T en passant par q'_0.

De ces deux affirmations, on déduit que la congruence de Büchi, notée $\approx$, associée à A' vérifie :

Fait 1.

$u \approx v \Rightarrow (u \in R$ ssi $v \in R)$ et $(u \in RR^+$ ssi $v \in RR^+)$

C'est-à-dire que $\approx$ sature chacun de ces deux ensembles.

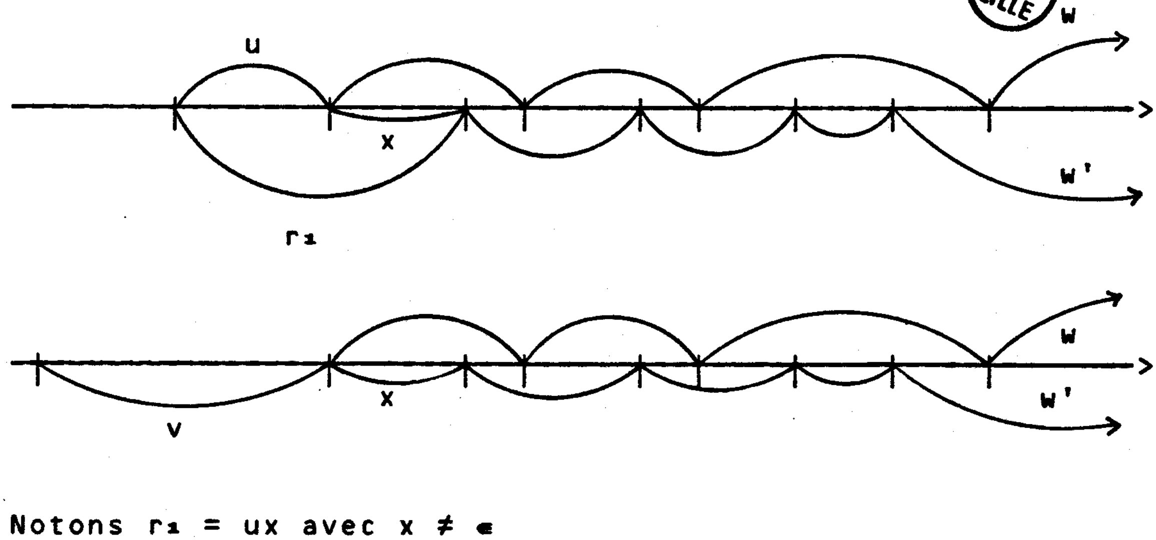
Nous montrons alors :

Fait 2.

$u \approx v \Rightarrow [(R\backslash u)^\Omega = R^\Omega$ ssi $(R\backslash v)^\Omega = R^\Omega]$.

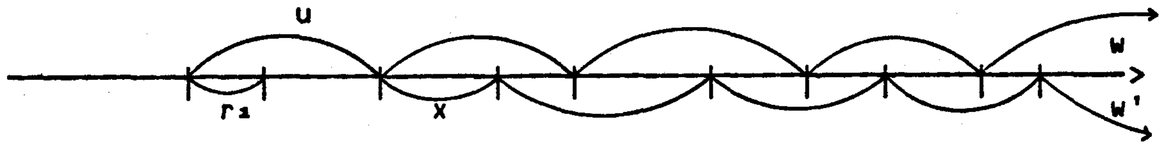
PREUVE DU FAIT 2.
Si $u \notin R$, alors $v \notin R$
et donc $R\backslash u = R\backslash v = R$, l'équivalence est alors triviale.
Si $u \in R$, alors $v \in R$.
Comme d'après le lemme 1 :
$(R\backslash u)^\Omega = R^\Omega$ équivaut à $uR^\Omega \subset (R\backslash u)R^\Omega$,
pour montrer que :
$(R\backslash u)^\Omega = R^\Omega$ implique $(R\backslash v)^\Omega = R^\Omega$,
il suffit de montrer que :
$uR^\Omega \subset (R\backslash u)R^\Omega$ implique $vR^\Omega \subset (R\backslash v)R^\Omega$.
Soit $w \in R^\Omega$.
Il existe $r_1 \in (R\backslash u)$ et $w' \in R^\Omega$ tels que : $uw = r_1w'$.

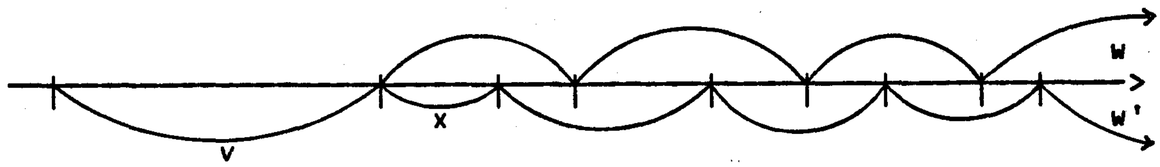
1° cas. $u < r_1$



Notons $r_1 = ux$ avec $x \neq \varepsilon$
Comme $u \approx v$, on a : $ux \approx vx$.
Or $ux \in R$ et donc : $vx \in R$
d'où on déduit la décomposition $(vx)w'$ de vw sur $(R\backslash v)R^\Omega$.

<u>2°cas</u>. $r_1 < u$





On peut écrire :
$uw = r_1ru'xw''$ où $r_1ru' = u$,
avec $r_1 \in R$, $r \in R^*$, $u'x \in R$, $w'' \in R^\Omega$.
Comme $r_1ru'x \in RR^+$ et $ru'x \in R$, il existe une lecture l de $r_1ru'x$ telle que :

$$l : q_0 \xrightarrow{r_1} q'_0 \xrightarrow{ru'} q \neq q'_0 \xrightarrow{x} t \in T$$

$q \neq q'_0$ sinon $u \in RR^+$

Comme $u \approx v$, il existe une lecture l' de vx avec :

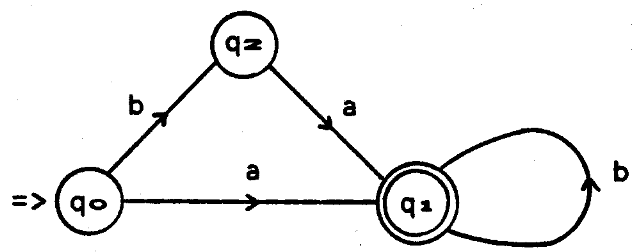
$$l' : q_0 \xrightarrow{s_1} q'_0 \xrightarrow{sv'} q \neq q'_0 \xrightarrow{x} t \in T$$

On peut alors écrire $v = s_1sv'$ avec :
$s_1 \in R\backslash v$ ($s_1 \neq v$ car $q \neq q'_0$), $s \in R^*$, $v'x \in R$.
Donc : $s_1(sv'x)w''$ est une décomposition de vw sur $(R\backslash v)R^\Omega$.∎

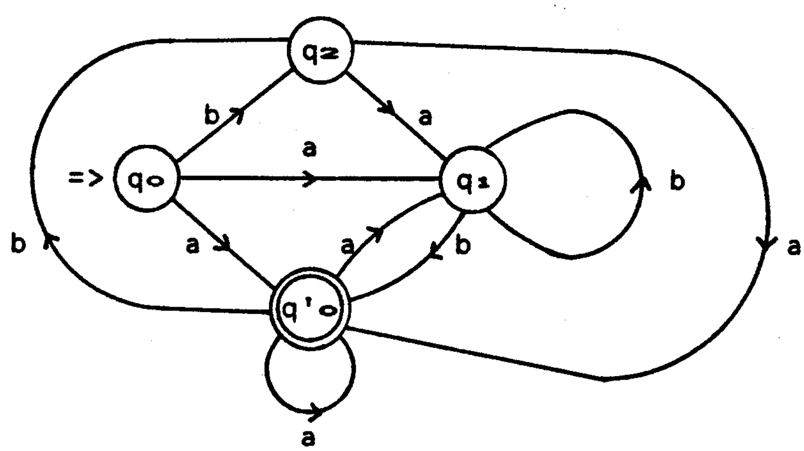
La congruence de Büchi étant d'index fini calculable, on peut construire n mots $u_1, \ldots, u_n$ appartenant respectivement aux n classes de $\approx$. Il suffit alors de tester l'égalité $(R\backslash u_i)^\Omega = R^\Omega$ pour chaque u_i, pour décider si R est ou non Ω-minimal.∎

Cependant ceci ne nous permet pas de construire un langage Ω-minimal inclus dans R, car $(R\backslash u)^\Omega = R^\Omega$ n'implique pas que $(R\backslash[u])^\Omega = R^\Omega$, ni même que $(R\backslash([u]\backslash u))^\Omega = R^\Omega$, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4. Prenons $R = (\varepsilon+b)ab^*$.
R est bien égal à Prem(R).
L'automate déterministe suivant reconnaît R :



On construit alors A' :



Nous allons voir que :
(1) $ab^+ = [ab]$
(2) $abR^\Omega \subset (R\backslash ab)R^\Omega$
(3) $(R\backslash ab^+)^\Omega \neq R^\Omega$ et $\forall i > 0$, $(R\backslash(ab^+\backslash ab^i)) \neq R^\Omega$.

PREUVE DE (1).
On vérifie facilement sur A' que $\forall$ i > 0 :
$\delta'(q_0,ab^i) = \delta'(q_2,ab^i) = \delta'(q'_0,ab^i) = \{q_1,q_2,q'_0\}$
$\delta'(q_1,ab^i) = \emptyset$
$\delta'_T(q_0,ab^i) = \delta'_T(q_2,ab^i) = \{q_2,q'_0\}$
$\delta'_T(q'_0,ab^i) = \{q_1,q_2,q'_0\}$
$\delta'_T(q_0,ab^i) = \emptyset$
Donc $ab^+ \subset [ab]$.
D'autre part, un mot n'appartenant pas à ab^+ ne peut pas être congru à ab, d'où le résultat.∎

PREUVE DE (2).
$ab(ab^*) \subset a(bab^*) \subset aR$
$ab(bab^*) \subset (ab^2)(ab^*) \subset ab^2R$
d'où : $abR \subset (R\backslash ab)R$
et à fortiori, on a le résultat (2).∎

PREUVE DE (3).
On a le résultat en remarquant que :
$\forall$ i $\geq$ 1, $ab^{i}(bab)(ab)^{\Omega}$ ne peut se décomposer que :
ou sur $ab^{i}R^{\Omega}$
ou sur $ab^{i+1}R^{\Omega}$.

En fait il est facile de vérifier que quatre Ω-minimaux distincts sont inclus dans R, ce sont :
. $(\varepsilon+b)a(b^{2})^{*}$
. $a(b^{2})^{*}b + ba(b^{2})^{*}$
. $a(b^{2})^{*} + ba(b^{2})^{*}b$
. $(\varepsilon+b)a(b^{2})^{*}b$.■

Donc les deux questions suivantes restent ouvertes :

Q1 : Est-ce que, pour tout langage rationnel R, $[R]_{\Omega}$ possède un générateur Ω-minimal ?

Q2 : Etant donné un langage rationnel R, est-ce que tout générateur de R^{Ω} contient un générateur Ω-minimal dans $[R]_{\Omega}$?

(Une réponse positive à Q2 impliquerait évidemment une réponse positive à Q1.)

Si nous ne savons pas construire de générateur Ω-minimal inclus dans un générateur donné, nous avons cependant :

<u>Proposition 3</u>. Soit R un langage inclus dans X^{+}. Si $G \in [R]_{\Omega}$, alors $G \backslash GR^{\subseteq} \in [R]_{\Omega}$.

PREUVE.
Notons $G' = G \backslash GR^{\subseteq}$.
Comme $G' \subseteq G$, on a : $G'^{\Omega} \subseteq G^{\Omega}$.
Supposons maintenant que : $G \in [R]_{\Omega}$.
Comme d'autre part : $G \subseteq G'+G'R^{\subseteq}$, on a alors :
$G^{\Omega} = GG^{\Omega} \subseteq (G'+G'R^{\subseteq})G^{\Omega}$
comme $R^{\subseteq}G^{\Omega} \subseteq G^{\Omega}$, on déduit que : $G^{\Omega} \subseteq G'G^{\Omega}$
d'où : $G^{\Omega} \subseteq G'^{\Omega}$
et finalement : $G^{\Omega} = G'^{\Omega}$
c'est-à-dire : $G' \in [R]_{\Omega}$.■

Donc G contient un générateur $G \backslash GR^{\subseteq}$, qui, nous le verrons dans les chapitres suivants, est "souvent" Ω-minimal dans $[R]_{\Omega}$.

Mais l'exemple suivant montre que ce générateur n'est pas toujours Ω-minimal dans $[R]_{\Omega}$.

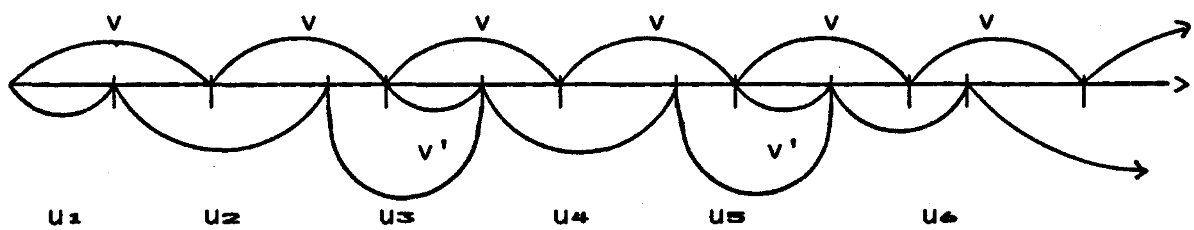
Exemple 4 (reprise). $R = (\varepsilon+b)ab^{*}$
On a alors $R^{\subseteq} = R^{+}$
et donc $R \backslash RR^{\subseteq} = \mathrm{Prem}(R) = R$.
Or R n'est pas Ω-minimal, car par exemple :
$(ab)R^{\Omega} \subseteq (a+ab^{2})R^{\Omega}$ et donc, d'après le lemme 1 :
$(R \backslash ab)^{\Omega} = R^{\Omega}$, c'est-à-dire que R n'est pas Ω-minimal.■

La condition "$G \cap GR^{=} = \emptyset$" est donc nécessaire mais non suffisante pour que G soit Ω-minimal dans $[R]_\Omega$. En revanche, la proposition 4 sera une condition suffisante mais non nécessaire.

Proposition 4. Si R est un code, alors R est Ω-minimal.

PREUVE.

Soit $v \in R$, notons $K = R \backslash v$.
Supposons que $K^\Omega = R^\Omega$.
v^Ω appartient alors à K^Ω.
On peut donc écrire :
$v^\Omega = u_1 \ldots u_n \ldots$ où $\forall\ i \geq 1,\ u_i \in K$



Il existe forcément deux indices k et l, avec $k < l$ (ils sont même une infinité) tels que :
$u_1 \ldots u_k = v^i v'$
$u_1 \ldots u_l = v^{i+j} v'$ avec $i,j > 0$ et v' préfixe de v.
On a alors deux factorisations sur R du mot $v^{i+j}v'$:
- d'une part : $u_1 \ldots u_l$
- d'autre part : $v^j u_1 \ldots u_k$

Comme $u_1 \neq v$, ces deux décompositions sont bien distinctes, ce qui contredit le fait que R est un code.■

Remarque : La réciproque est fausse. Il suffit de regarder l'exemple $R = aa+aaa+b$ où R est Ω-minimal mais n'est pas un code.

B. fg-MINIMUMS

Toujours dans le but de trouver des générateurs les "plus petits" possible, on peut considérer le préordre suivant sur $[R]_\Omega$:

$$G\ \alpha_1\ G' \iff FG(G) \subseteq FG(G'),$$

préordre naturel si on veut obtenir les générateurs ayant les mots les "plus courts".

On va alors s'intéresser aux langages de $[R]_\Omega$ qui sont à la fois Ω-minimaux et plus petits éléments pour le préordre α_1.

Définition : G est **fg-minimum** dans $[R]_\Omega$ si et seulement si :

- G est Ω-minimal dans $[R]_\Omega$
- $\forall$ L $\in [R]_\Omega$, $FG(G) \subset FG(L)$.

Exemple 5. $R = X^*b$

Soit G un générateur de $[R]_\Omega$

$\forall$ g $\in$ G, g contient au moins une occurrence de b

et donc : $a^*b \subset FG(G)$ (sinon $G^\Omega \neq R^\Omega$)

Comme $a^*b \in [R]_\Omega$, a^*b est l'unique générateur fg-minimum de $[R]_\Omega$.■

Remarques :

- G Ω-minimal n'implique pas que G est fg-minimum.

Exemple 6. $R = a+b$,

$G = (a+b)^2$ est Ω-minimal,

mais G n'est pas fg-minimum.■

- G plus petit élément pour α_1 n'implique pas que G est fg-minimum.

Exemple 7. $G = a+ab+ab^2+b(a+ab+ab^2)$.(traité plus loin).■

Dans la suite, nous utiliserons la notation suivante :

$$G^t = \{g \in G \ / \ gG^\Omega \not\subset G_{|g|}G^\Omega\},$$

où $G_{|g|}$ est l'ensemble des mots de G de longueur strictement inférieure à $|g|$.

Remarque : $G^t \subset G \backslash GG^c$, en effet si $u \in GG^c$, on a :

$\exists$ $u' \in G_{|u|}$ et $v \in G^c$ / $u'v = u$

d'où $uG^\Omega = u'vG^\Omega$, or comme $v \in G^c$, on obtient:

$uG^\Omega \subset u'G^\Omega$, ce qui implique que : $u \notin G^t$.

Proposition 5. Soit G un langage rationnel, G^t appartient à $[G]_\Omega$ et G^t est un langage rationnel constructible (à partir d'un automate reconnaissant G^Ω).

PREUVE.

Déjà : $G^{t\Omega} = G^\Omega$ en effet :

$G^t \subset G$ donc $G^{t\Omega} \subset G^\Omega$.

Réciproquement, on va voir que : $G^\Omega \subset G^tG^\Omega$.

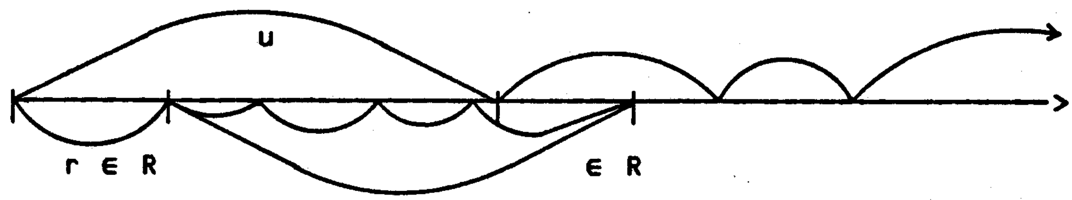
Soit $w \in G^\Omega$, on peut écrire : $w = uw'$, où $w' \in G^\Omega$, $u \in G$ et u est le plus petit mot pouvant commencer une décomposition de w sur G.

Par construction, $u \in G^t$.

Notons $Inut(G) = G\backslash G^t$.

Les mots de Inut(G) sont "inutiles" en ce sens que $G\backslash Inut(G)$ a la même puissance-Ω que G.

Inut(G) est rationnel et constructible, en effet :



En reprenant l'automate A' construit pour la preuve de la proposition 2, et en se replaçant dans le deuxième cas du fait 2, c'est-à-dire le cas où :
pour $w \in R^{\Omega}$, il existe $r \in (R\backslash u)$ avec $r < u$ et $uw \in rR^{\Omega}$,
on constate que :
si $u \approx v$: $(\exists\ r \in R_{|u|}\ /\ uw \in rR^{\Omega}) \Rightarrow$
$(\exists\ s \in R_{|v|}\ /\ vw \in sR^{\Omega})$
et donc : $(u \approx v$ et $u \in Inut(R)) \Rightarrow v \in Inut(R)$.
C'est-à-dire que Inut(R) est saturé par la congruence $\approx$ et donc Inut(R) est un langage rationnel constructible.■

Donc $G^{\leftarrow}$ est un générateur inclus dans G, mais il n'est pas toujours Ω-minimal (donc à fortiori pas fg-minimum).

Exemple 7 (reprise). $G = a+ab+ab^2+b(a+ab+ab^2)$ (traité plus loin).■

Mais ce générateur possède des propriétés intéressantes vis-à-vis de l'inclusion.

Lemme 2. Soit M un langage de $[R]_{\Omega}$. on a :
$\forall\ G \in [M]_{\Omega},\ G \subseteq M \Rightarrow FG(M^{\leftarrow}) \subseteq FG(G)$.

PREUVE.
Pour tout $u \in M^{\leftarrow}$, on montre qu'il existe $g \in G$, avec $u < g$.
Soit $u \in M^{\leftarrow}$, $uR^{\Omega} \subseteq GR^{\Omega}$;
On ne peut pas avoir : $uR^{\Omega} \subseteq G_{|u|}R^{\Omega}$
sinon : $uR^{\Omega} \subseteq M_{|u|}R^{\Omega}$,
donc il existe $g \in G$ tel que : $u < g$
donc $u \in FG(G)$.■

Nous en déduisons deux corollaires.
Notation : **$FG([R]_{\Omega}) = \{FG(G)\ /\ G \in [R]_{\Omega}\}$.**

Corollaire 1. Soit $R \subseteq X^{+}$. Si $[R]_{\Omega}$ possède un plus grand élément, P, alors $FG(P^{\leftarrow})$ est le plus petit élément de $FG([R]_{\Omega})$.

Mais cela n'implique pas que $P^{\leftarrow}$ soit fg-minimum, il faudrait que $P^{\leftarrow}$ soit Ω-minimal ce qui n'est pas toujours le cas.

Exemple 7 (reprise). $G = a+ab+ab^2+b(a+ab+ab^2)$

. Partant de $FG(G) = b+G$ et de $G^{\subset} \subset G^*FG(G)$, on vérifie facilement que :
$G^{\subset} = G^{+}$ (car $b \notin G^{\subset}$) et de plus $Prem(G) = G$.

. $G = G^{\pm}$ en effet :
$a \in G^{\pm}$ et $ba \in G^{\pm}$
$abba\ G^{\Omega} \not\subset a\ G^{\Omega}$ donc $ab \in G^{\pm}$
$babba\ G^{\Omega} \not\subset (a+ab+ba)G^{\Omega}$ donc $bab \in G^{\pm}$
$ab^2ba\ G^{\Omega} \cap (G\backslash ab^2)G^{\Omega} = \emptyset$ donc $ab^2 \in G^{\pm}$
$bab^2ba\ G^{\Omega} \cap (G\backslash bab^2)G^{\Omega} = \emptyset$ donc $bab^2 \in G^{\pm}$
donc $FG(G^{\pm})$ est le plus petit élément de $FG([G]_{\Omega})$.

. Mais G n'est pas Ω-minimal en effet :
$ab\ G^{\Omega} \subset (a+ab^2)G^{\Omega}$.■

<u>Corollaire 2</u>. Soit $R \in Rat(X^+)$. $FG([R]_{\Omega})$ admet un nombre fini de minimaux (pour l'inclusion), qui sont tous rationnels et constructibles.

PREUVE.

Soient $M_1,\ldots,M_n$ les maximaux de $[R]_{\Omega}$.
$\forall\ M \in [R]_{\Omega},\ \exists\ i,\ 1 \leq i \leq n\ /\ M \subset M_i$,
Donc, d'après le lemme : $FG(M_i^{\pm}) \subset FG(M)$,
Donc seuls $FG(M_1^{\pm}),\ldots,FG(M_n^{\pm})$ peuvent être des minimaux pour l'inclusion dans $FG([R]_{\Omega})$.■

Notons que si $[R]_{\Omega}$ possède un générateur fg-minimum alors $FG([R]_{\Omega})$ admet un (unique) plus petit élément pour l'inclusion, d'où :

<u>Corollaire 3</u>. Soit $R \in Rat(X^+)$. $[R]_{\Omega}$ ne possède pas toujours de fg-minimums.

PREUVE.

Il suffit que $FG([R]_{\Omega})$ admette au moins deux minimaux, ce qui est possible, comme le montre l'exemple suivant.
Exemple 8. $R = X^*(aa+bb)X^*$.
Soient $R_1 = (ba)^*(bb+a)$ et $R_2 = (ab)^*(b+aa)$,
R_1 et R_2 sont deux langages de $[R]_{\Omega}$.
Or $FG(R_1) \cap FG(R_2) = a+b$.
Si $FG([R]_{\Omega})$ admet un plus petit élément G, on a alors :
$FG(G) \subset a+b$
d'où : $G = a+b$
Or : $a+b \notin [R]_{\Omega}$.
$FG([R]_{\Omega})$ contient donc deux minimaux (au moins) qui sont $FG(R_1)$ et $FG(R_2)$.■

<u>Proposition 6</u>. Soit $R \in Rat(X^+)$. $[R]_{\Omega}$ peut contenir plusieurs fg-minimums.

PREUVE.

Nous verrons que c'est le cas, dans l'exemple 11 qui se trouve dans la partie C.■

Proposition 7. Soit $R \in Rat(X^+)$. On peut décider si R est ou non fg-minimum dans $[R]_\Omega$.

PREUVE.

Soit G un langage rationnel, on teste s'il est Ω-minimal puis si FG(G) est plus petit élément dans $FG([R]_\Omega)$ (ce qui est possible d'après le corollaire 2).■

Remarque : Un code est toujours Ω-minimal, mais il n'est pas nécessairement fg-minimum.

Exemple 9. R = aa+aaa+b

aa+aaab+b est un code de $[R]_\Omega$ non fg-minimum, FG(R) est strictement inclus dans FG(aa+aaab+b).■

C. Ω-BASE

On se pose ici la question : existe-t-il un générateur B tel que : $\forall\ G \in [R]_\Omega,\ G \subseteq B^+$?

Exemple 2 (reprise). $R = ba^*$

R est Ω-minimal

et $R^* = \epsilon+bX^*$ est le plus grand élément de $[R]_\Omega$.■

Un langage tel que R sera appelé Ω-base.

Définition : Soit $B \subseteq X^+$. B est une **Ω-base** si et seulement si :

- B est Ω-minimal
- $\forall\ L \in [B]_\Omega,\ L \subseteq B^+$.

De la définition, il découle que B^+ est alors le plus grand élément de $[B]_\Omega$ (car $B^{+\Omega} = B^\Omega$).

Proposition 8. Soit R un langage rationnel. $[R]_\Omega$ possède une Ω-base si et seulement si :

- $[R]_\Omega$ admet un plus grand élément, noté P

- Prem(P) est Ω-minimal.

Remarquons que la condition "Prem(P) est Ω-minimal" est nécessaire, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 10. $R = a^*ba^*$

Le plus grand élément est $P = X^*bX^*$,

mais Prem(P) = R n'est pas Ω-minimal, en effet :

$a^*b \in [R]_\Omega$

et a^*b est strictement inclus dans R.

Donc R n'est pas Ω-minimal et $[R]_\Omega$ ne contient pas d'Ω-base.■

<u>Corollaire 4</u> . Soit R un langage rationnel, $[R]_\Omega$ possède au plus une Ω-base.

En d'autres termes, quand elle existe, l'Ω-base est unique.

<u>Corollaire 5</u>. Soit R un langage rationnel, on peut décider si $[R]_\Omega$ contient une Ω-base. De plus, si elle existe, elle est rationnelle et constructible.

<u>Proposition 10</u>. Si B est une Ω-base, alors B est un générateur fg-minimum.

PREUVE.

Soit $G \in [B]_\Omega$ et soit $b \in B$.
On a : $bG^\Omega \subseteq G^\Omega$.
Supposons que : $G \cap bB^* = \emptyset$.
comme $G \subseteq B^+$, on a : $G \subseteq (B\backslash b)B^*$.
Or : $bB^\Omega \subseteq GG^\Omega = GB^\Omega$
d'où : $bB^\Omega \subseteq (B\backslash b)B^\Omega$,
ce qui contredit le fait que B est Ω-minimal.
On a finalement : $\forall\ b \in B,\ G \cap bB^* \neq \emptyset$
d'où : $b \in FG(G)$.■

Remarque : Mais B n'est pas nécessairement l'unique fg-minimum de $[B]_\Omega$.

Exemple 11. $B = aa + aaa + b + aaabc + aabc$
. B est une Ω-base, en effet :
- B est Ω-minimal (immédiat)
- D'autre part, $B^\subseteq = B^+$ car :
$B^\subseteq \subseteq B^*FG(B) = B^*a$
Si $u = a$, $ab^\Omega \notin B^\Omega$ donc $a \notin B^\subseteq$
Si $u \in B^*(aa+aaa)a$, $u \in B^+$
En utilisant le fait que : $vbaw \in R^\Omega \Rightarrow aw \in R^\Omega$
et que : $vbcaw \in R^\Omega \Rightarrow aw \in R^\Omega$
on déduit que :
si $u \in B^*(b+aaabc+abc)a$, alors $u \notin B^\subseteq$
Donc : $B^\subseteq \subseteq B^+$
et finalement : $B^+ = B^\subseteq$.

. Mais $R = aa+aabc+aaab+aaabc+b$ est un autre fg-minimum de $[B]_\Omega$, en effet :
- $R \in [B]_\Omega$, car :
d'une part : $R \subseteq B^+$
et donc : $R^\Omega \subseteq B^\Omega$
d'autre part : $aaaB^\Omega \subseteq RB^\Omega$
et donc : $B^\Omega \subseteq RB^\Omega$
- R est Ω-minimal
- $FG(R) = FG(B)$.■

Ceci montre de plus que la réciproque de la proposition précédente est fausse.

Remarque : Même si B est l'unique générateur fg-minimum, alors B n'est pas nécessairement une Ω-base.

Exemple 12. B = ab + aba + abb + bb + ba(ab + aba + abb).
On montrera dans le chapitre V que B est l'unique générateur fg-minimum de $[B]_\Omega$.■

CHAPITRE V

MINIMAUX DE $[R]_{\Omega}$ DANS LE CAS OU R^{Ω} EST FINIMENT ENGENDRE

INTRODUCTION

A partir de ce chapitre nous considèrerons la famille $[R]_\Omega$ dans le cas où R appartient à des sous-familles particulières de $Rat(X^*)$.

Le premier problème abordé par M. Latteux et E. Timmerman [12] concernant la famille $[R]_\Omega$ a été de décider si un langage rationnel R est ou non finiment engendré, c'est-à-dire si $[R]_\Omega$ contient ou non un langage fini. Dans la partie A nous présentons une nouvelle démarche pour résoudre ce problème en utilisant le langage $(R^=)^*$ défini dans le chapitre IV.

Dans la suite de ce chapitre nous supposerons que $[R]_\Omega$ contient un langage fini.

Dans la partie B nous reprenons la recherche des minimaux définis dans le chapitre IV. Il y a évidemment toujours des générateurs Ω-minimaux finis dans $[R]_\Omega$. Cependant tous les Ω-minimaux ne sont pas nécessairement finis et on peut décider si un générateur contient ou non un Ω-minimal fini. En outre $[R]_\Omega$ possède des générateurs fg-minimums mais ne possède pas toujours d'Ω-base.

Quand R^Ω est finiment engendré, on peut envisager la minimalité des générateurs sous deux nouveaux aspects :
- avoir le plus petit cardinal
- avoir la plus petite taille, c'est-à-dire avoir la plus petite somme des longueurs de ses mots.

Dans la partie C nous examinons les générateurs de plus petite cardinalité. Des exemples montreront que le calcul du plus petit cardinal n'est pas aussi simple que l'on pourrait le penser à priori et nous présenterons une méthode - assez lourde - pour déterminer ce cardinal. Enfin, nous verrons qu'il peut y avoir plusieurs générateurs de plus petite cardinalité, que l'Ω-base - quand elle existe - en est un, mais qu'elle n'est pas nécessairement le seul.

Dans la partie D nous étudions les générateurs de plus petite taille. La détermination de la plus petite taille et de tous les générateurs de plus petite taille ne pose pas de problème. Il peut en exister plusieurs, mais si l'Ω-base existe, elle est l'unique générateur de plus petite taille.

Dans la partie E des exemples montreront - ce qui est assez surprenant - que les trois familles, celle des générateurs fg-minimums, celle des générateurs de plus petite cardinalité et celle des générateurs de plus petite taille sont incomparables deux à deux.

A. DECIDER SI R CONTIENT UN GENERATEUR FINI

Définition : Soit R un langage rationnel, nous dirons que R^{Ω} est **finiment engendré** si et seulement si il existe un langage fini appartenant à $[R]_{\Omega}$.

Nous allons résoudre le problème : décider si R^{Ω} est finiment engendré.

Notons tout d'abord [12] :

Lemme 1. Si R^{Ω} est finiment engendré, alors R^{Ω} est une adhérence.

PREUVE.
Soit F un langage fini tel que : $R^{\Omega} = F^{\Omega}$.
On sait que : $Adh(F^*) = F^{\Omega} + F^*Adh(F)$
Or : $Adh(F) = \emptyset$ (car F est fini)
Donc : R^{Ω} est une adhérence.■

Remarque : La réciproque est fausse.

Exemple 0. $R = a+b+ab^*c$
- $Adh(R) = ab^{\Omega} \subseteq R^{\Omega}$ et donc R^{Ω} est une adhérence.
- Supposons que R^{Ω} soit finiment engendré par F,
soit alors $n = \max \{|u| \ / \ u \in F\}$.
Comme : $ab^n ca^{\Omega} \in R^{\Omega}$,
on a : $b^*ca^{\Omega} \cap F^{\Omega} \neq \emptyset$,
ce qui est impossible car : $b^*ca^{\Omega} \cap R^{\Omega} = \emptyset$.■

Si R^{Ω} est finiment engendré, $R^{=}$ est donc le plus grand élément de $[R]_{\Omega}$. $Prem(R^{=})$ appartient alors à $[R]_{\Omega}$, mais l'exemple suivant montre que R^{Ω} peut être finiment engendré sans que $Prem(R^{=})$ ne soit fini.

Exemple 1. $R = ab + aba + abb + ba(ab+aba+abb) + bb$
R^{Ω} est finiment engendré
Mais $Prem(R^{=})$ n'est pas fini, en effet:
$ab^+a \subseteq Prem(R^{=})$ car : $ab^+aR^{\Omega} \subseteq (ab+abb)R^{\Omega}$,
mais : $\forall\ i \geq 0,\ b^i a \notin R^{=}$
et donc : $ab^+a \cap R^{=}R^{=} = \emptyset$.■

Nous allons donc chercher un langage inclus dans $Prem(R^{=})$ tel que ce langage soit fini dès que R^{Ω} est finiment engendré. Pour cela, nous résolvons le problème plus général : étant donné un langage rationnel R, décider si R contient un langage fini qui appartient à $[R]_{\Omega}$. Rappelons tout d'abord la définition de R^{ε}, vue dans le chapitre IV :

$R^{\not\subset} = \{u \in R \ / \ uR^{\Omega} \not\subset R_{|u|}R^{\Omega}\}$, où $R_{|u|}$ représente l'ensemble des mots de R de longueur strictement plus petite que u.

<u>Proposition 1</u>. Soit R un langage rationnel, il existe un générateur fini de R^{Ω} inclus dans R si et seulement si $R^{\not\subset}$ est un langage fini.

PREUVE.

On a vu dans la partie IV.C que :
- $R^{\not\subset} = \{u \in R \ / \ uR^{\Omega} \not\subset R_{|u|}R^{\Omega}\}$ appartient à $[R]_{\Omega}$. (proposition IV.5)
- $\forall$ G $\in [R]_{\Omega}$ avec G $\subset$ R, on a : FG($R^{\not\subset}$) $\subset$ FG(G). (corollaire IV.1)

On en déduit que :
si $[R]_{\Omega}$ contient un générateur fini F $\subset$ R, comme FG(F) est fini, alors FG($R^{\not\subset}$) est fini
et donc que : $R^{\not\subset}$ est un langage fini.

La réciproque est immédiate, puisque $R^{\not\subset}$ appartient à $[R]_{\Omega}$.■

En conséquence, comme d'après la proposition IV.5, $R^{\not\subset}$ est un langage rationnel et construtible, on en déduit :

<u>Proposition 2</u>. Soit R un langage rationnel, on peut décider s'il existe un langage fini, inclus dans R et appartenant à $[R]_{\Omega}$. De plus, si c'est le cas, on peut construire un tel langage.

Remarque : On a donc une réponse partielle à Q2 : on sait décider si R contient un Ω-minimal fini. Mais il faut noter que tous les Ω-minimaux de $[R]_{\Omega}$ avec R^{Ω} finiment engendré ne sont pas nécessairement finis, comme nous le verrons dans l'exemple 4 de la partie B.

On peut maintenant résoudre le problème initial.

<u>Proposition 3</u> . Soit R un langage rationnel, on peut décider si R^{Ω} est finiment engendré. De plus, si c'est le cas, on peut construire un générateur fini de R^{Ω}.

PREUVE.

Si R^{Ω} est finiment engendré, alors R^{Ω} est une adhérence et donc $R^{\subset}$ est le plus grand élément de $[R]_{\Omega}$.
Pour décider si R^{Ω} est finiment engendré, il suffit donc :
- de décider si R^{Ω} est une adhérence
- de construire $R^{\subset}$, puis $R' = (R^{\subset})^{\not\subset}$
- de décider si R' est fini.■

Exemple 1 (reprise). $R = ab + aba + abb + ba(ab+aba+abb) + bb$
. Sur cet exemple, où $Prem(R^{\subseteq})$ est infini, nous allons vérifier que $(R^{\subseteq})^{\varepsilon}$, noté R', est égal à R et est donc fini.
D'après le corollaire IV.1 : $FG(R') \subseteq FG(R)$.
En conséquence, R' est inclus dans $FG(R) \cap Prem(R^{\subseteq})$.
Comme a, b, ba et baa n'appartiennent pas à $R^{\subseteq}$,
R est inclus dans $Prem(R^{\subseteq})$ et $FG(R) \cap Prem(R^{\subseteq}) = R$,
donc : $R' \subseteq R$.
. On voit d'autre part facilement que R est Ω-minimal, et donc $R' = R$.■

Remarque : Il est nécessaire de tester si R^{Ω} est une adhérence, en effet il est possible que R' soit fini sans que R^{Ω} ne soit une adhérence et donc à fortiori sans que R^{Ω} ne soit finiment engendré.

Exemple 2. $R = X^*b$
R^{Ω} n'est pas une adhérence.
$R^{\subseteq} = X^+$ donc $Prem(R) = a+b$ et donc $(R^{\subseteq})^{\varepsilon} = a+b$.
Or $a+b$ n'appartient pas à $[R]_{\Omega}$.■

B. Ω-MINIMAUX, fg-MINIMUMS ET Ω-BASE

Sachant donc que R^{Ω} est finiment engendré, nous partons à nouveau à la recherche des Ω-minimaux de $[R]_{\Omega}$. Etant donné que si R^{Ω} est finiment engendré nous pouvons construire un générateur fini de R^{Ω}, dans la suite nous considérerons directement des langages (notés R ou F) finis.

Soit F un langage fini, notons tout d'abord que ni $Prem(F)$, ni $F \backslash FF^{\subseteq}$ ne sont nécessairement des langages Ω-minimaux de $[F]_{\Omega}$.

Exemple 3. $F = (\varepsilon+b)(a+ab+abb)$.
Comme $b \notin F^{\subseteq}$ et $bb \notin F^{\subseteq}$, on a :
$F = F \backslash FF^{\subseteq} = Prem(F)$.
Mais F n'est pas Ω-minimal, en effet :
$abF \subseteq (a+abb)F$
$babF \subseteq (ba+babb)F$
et donc : $F^{\Omega} \subseteq [F \backslash (ab+bab)]F^{\Omega}$,
d'où : $[F \backslash (ab+bab)] \in [F]_{\Omega}$.■

D'autre part, si F est fini, il est immédiat qu'il contient (au moins) un générateur Ω-minimal de $[F]_{\Omega}$ qui est fini et que l'on peut construire, mais cependant il faut noter que tous les générateurs Ω-minimaux de $[F]_{\Omega}$ ne sont pas nécessairement finis et donc que tout générateur de F^{Ω} ne contient pas nécessairement un générateur fini de F^{Ω}.

Exemple 4. $R = a+(ab)^*ba$

. R^Ω est finiment engendré car $R^\Omega = (a+ba+ab)^\Omega$

. Mais R est Ω-minimal dans $[R]_\Omega$ car :
a ne peut pas lui être enlevé (sinon on perd a^Ω)
et $\forall\ i \geq 0$, $(ab)^i ba$ ne peut pas lui être enlevé (sinon on perd $(ab)^i ba(ba)^\Omega$).■

Toutefois on a :

Proposition 4. Si R est un langage fini, alors $[R]_\Omega$ possède une infinité de générateurs Ω-minimaux qui sont finis et deux à deux disjoints.

PREUVE.

Soit F un générateur fini, Ω-minimal de $[F]_\Omega$,
notons $l = 1 + \max\{|u| \ / \ u \in F\}$.
Considérons $G = F^l$, on a alors :
$G \cap F = \emptyset$ et $G \in [F]_\Omega$.
Comme G est fini, il contient un Ω-minimal F_2.
En réitérant le processus, on construit ainsi une suite de générateurs de F^Ω vérifiant les conditions demandées.■

En ce qui concerne les générateurs fg-minimums de $[F]_\Omega$, on a :

Proposition 5. Si R est un langage fini, alors $[R]_\Omega$ possède des générateurs fg-minimums.

PREUVE.

R^Ω, étant finiment engendré, est une adhérence,
et donc $P = R^=$ est le plus grand élément de $[R]_\Omega$.
D'après le corollaire IV.1, on obtient que $FG(P^\pm)$ est le plus petit élément de $FG([R]_\Omega)$.
Soit alors F un générateur fini de R^Ω, $FG(F)$ est fini,
donc $FG(P^\pm)$ et à fortiori $P^\pm$ sont finis.
Tout générateur de $[R]_\Omega$ Ω-minimal et inclus dans $P^\pm$ est alors fg-minimum.■

Remarque : Il peut y avoir plusieurs fg-minimums dans $[R]_\Omega$.

Exemple 5. $R = (\epsilon+b)(a+ab+ab^2+ab^3)$

. De même que dans l'exemple 3, on montre que $Prem(R) = R$

. On a aussi : $R = P^\pm$ où P désigne le plus grand élément de $[R]_\Omega$, i.e. $P = R^=$.

. Or il y a 4 Ω-minimaux (donc fg-minimums) distincts inclus dans R :
$(\epsilon+b)(a+ab^2+ab^3)$
$(\epsilon+b)(a+ab+ab^3)$,
$(a+ab+ab^3)+b(a+ab^2+ab^3)$
$(a+ab^2+ab^3)+b(a+ab+ab^2)$.■

En revanche $[R]_\Omega$ ne contient pas nécessairement d'Ω-base.

Exemple 3 (reprise). $F = (\varepsilon+b)(a+ab+ab^2)$.
On a vu que $F = Prem(F)$ *n'est pas Ω-minimal, donc il suffit* de montrer que $F^{\subset} = F^{+}$ pour prouver que $[F]_\Omega$ ne contient pas d'Ω-base.
On a toujours : $F^{+} \subset F^{\subset} \subset F^{*}FG(F)$.
Or ici : $FG(F) = F+b$
d'où l'on déduit : $F^{*}FG(F) = b+F^{+}+F^{*}(\varepsilon+b)ab^3$
Comme $b \notin F^{\subset}$ et que :
$\forall\ u \in F^{*}(\varepsilon+b)$, $uab^3ba^{\Omega} \notin F^{\Omega}$ (car b^4 n'est pas un facteur de F^{Ω}).
On a : $F^{*}FG(F) \subset F^{+}$
ce qui entraine : $F^{\subset} = F^{+}$.■

Mais nous verrons dans la partie C (proposition 11) que si l'Ω-base existe, elle est finie.

C. GENERATEURS DE PLUS PETITE CARDINALITE ET RANG

Pour comparer les générateurs de $[R]_\Omega$, nous allons maintenant comparer leur cardinal. Si R^{Ω} est finiment engendré, il admet des générateurs dont le cardinal est inférieur ou égal au cardinal de tout autre élément de $[R]_\Omega$.

<u>Définition</u> :

Soit R un langage fini. F est un générateur de **plus petite cardinalité** de R^{Ω} si et seulement si :
$\forall\ G \in [R]_\Omega,\ card(F) \leq card(G)$.

Remarque : Il peut exister plusieurs générateurs de plus petite cardinalité dans $[R]_\Omega$.

Exemple 6. $R = a$
$\forall\ i \geq 1$, a^i est générateur de plus petite cardinalité.■

Exemple 7. $R = aa+aaa+b$ et $G = aa+aaab+b$ sont deux générateurs de plus petite cardinalité de R^{Ω}.■

On se pose alors deux questions : étant donné un langage rationnel R, où R^{Ω} est finiment engendré,
- comment décider si $F \in [R]_\Omega$ est de plus petite cardinalité ?
- comment calculer le cardinal du (ou des) éléments de plus petite cardinalité ?

<u>Définition</u> :

On appelle **rang** de R, noté rg(R), le plus petit élément de $\{card(G)\ /\ G \in [R]_\Omega\}$.

Remarque : La définition a un sens même si R^{Ω} n'est pas finiment engendré, auquel cas $rg(R) = \infty$.

Nous allons voir que l'on peut calculer le rang de tout langage rationnel, (i.e. la deuxième question est résolue), ce qui permet de répondre à la première question (il suffit de tester si le rang de R est égal au cardinal de F).

Tout d'abord quelques remarques montrant que le problème n'admet pas de réponses "triviales".

- Bien que $(R^{c})^{\epsilon}$ (défini au paragraphe précédent) soit fini quand R est un langage fini, il n'est pas toujours un élément de plus petite cardinalité.

Exemple 8. $R = (\epsilon+b)(a+ab+ab^2+ab^3)$
$(R^{c})^{\epsilon} = R$ n'est pas Ω-minimal, contient 4 générateurs de plus petite cardinalité qui sont :
$(\epsilon+b)(a+ab^2+ab^3)$
$(\epsilon+b)(a+ab+ab^3)$,
$(a+ab+ab^3)+b(a+ab^2+ab^3)$
$(a+ab^2+ab^3)+b(a+ab+ab^2)$.
Donc : $rg(R) = 6 \neq card(R)$.■

- Tous les générateurs de plus petite cardinalité ne sont pas inclus dans $(R^{c})^{\epsilon}$ ni même dans $Prem(R^{c})$.

Exemple 7 (reprise). $R = aa+aaa+b$
$R = Prem(R^{c}) = (R^{c})^{\epsilon}$.
mais $aa+aaab+b$ est aussi un élément de plus petite cardinalité de $[R]_{\Omega}$.■

Mais nous allons voir que :

<u>Proposition 6</u>. Soit R un langage fini. Il existe au moins un générateur de plus petite cardinalité inclus dans $Prem(R^{c})$.

PREUVE.
Soit G un générateur de plus petite cardinalité de $[R]_{\Omega}$.
On montre que, si un mot g de G n'appartient pas à $Prem(R^{c})$, on peut l'enlever et le remplacer par un mot de $Prem(R^{c})$ en restant dans $[R]_{\Omega}$.
Soit $g \in G$, avec $g = g_1 g_2$, où $g_1 \in Prem(R^{c})$ et $g_2 \in R^{c}$
Soit $G' = (G\backslash g)+g_1$
. $G' \in [G]_{\Omega}$, car $G' \subset R^{c}$ et donc $G'^{\Omega} \subset R^{\Omega}$.
. réciproquement :
$gG^{\Omega} \subset g_1g_2G^{\Omega} \subset g_1R^{c}G^{\Omega} \subset g_1G^{\Omega}$
d'où : $G^{\Omega} \subset G'G^{\Omega}$
d'où : $G^{\Omega} \subset G'^{\Omega}$.■

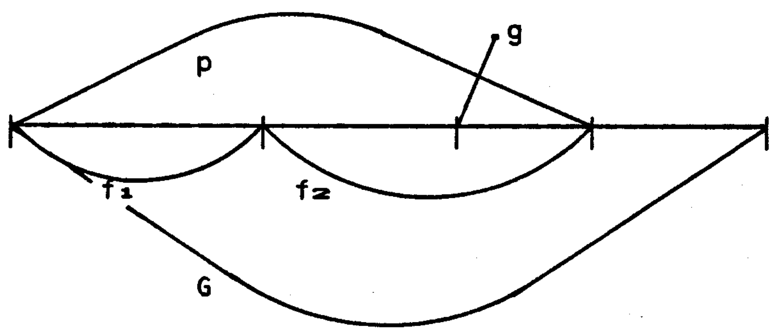
Mais comme $Prem(R^{c})$ peut être infini quand R^{Ω} est finiment engendré, cela ne permet pas de calculer le rang de R.

La proposition précédente n'est hélas pas valable pour $(R^{\subseteq})^{t}$ (ce qui aurait permis de calculer le rang de R, car $(R^{\subseteq})^{t}$ est fini), en effet, en reprenant la notation déjà utilisée - $P = R^{\subseteq}$ -, nous avons le résultat, prouvé par l'exemple 10 de la partie D :

Proposition 7. Soit R un langage fini. Il n'existe pas nécessairement de générateurs de plus petite cardinalité de R^{Ω} inclus dans $FG(P^{t})$.

Ici, la démarche suivie pour calculer le rang sera la suivante : on va montrer qu'il existe un entier c que l'on peut calculer, tel que tous les générateurs de plus petite cardinalité de R^{Ω} n'ont que des mots de longueur inférieur à c.

Proposition 8. On peut calculer un entier c tel que tout langage Ω-minimal G de $[R]_{\Omega}$ vérifie :
$\forall\ p \in FG(G)$, $\forall\ f_1, f_2$ avec $p = f_1 f_2$ et $|f_2| > c$,
$\exists\ g \in G\ /\ f_1 < g$ et $p \ n< g$.

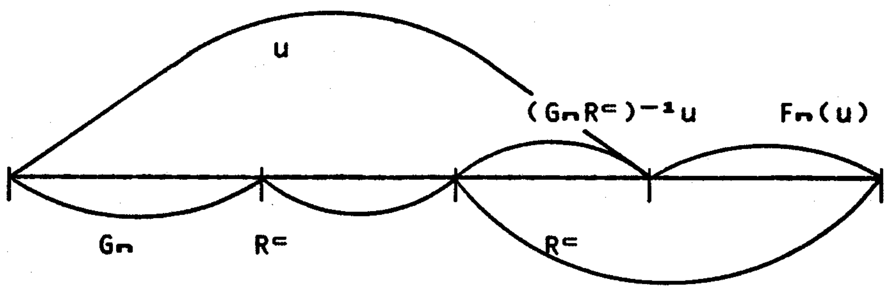


PREUVE.

Soit G un générateur Ω-minimal de $[R]_{\Omega}$.
Notons pour tout $n \geq 1$:

$$G_n = (X \cup X^2 \cup \ldots \cup X^n) \cap G$$

$$\begin{aligned} F_n = X^n X^* &\longrightarrow 2^{X^*} \\ u &\longrightarrow [(G_n R^{\subseteq})^{-1} u]^{-1} R^{\subseteq} \end{aligned}$$



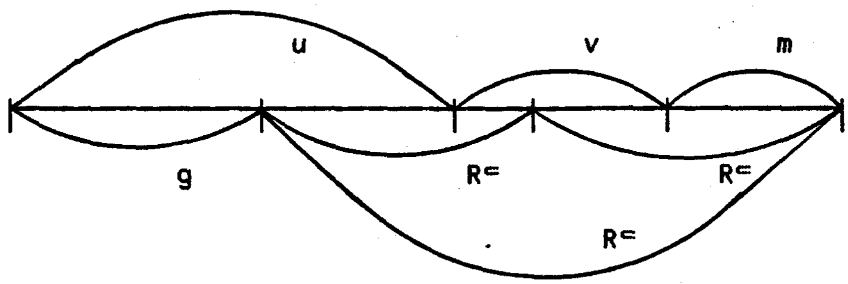
F_n a deux propriétés :

(1) $F_n(u) = F_n(u')$ => $(\forall\ v \in X^*,\ F_n(uv) = F_n(u'v))$

(2) $F_n(u) = F_n(u')$ => $R(u,u')$, où $R(u,u')$ est la propriété :
$\forall\ z \in X^\Omega$, ($uz \in G_n\ R^\Omega$ <=> $u'z \in G_n\ R^\Omega$)

En d'autres termes, $R(u,u')$ signifie que, z étant un Ω-mot, si uz peut se décomposer sur G_nR^Ω, alors u'z peut aussi se décomposer sur G_nR^Ω, et réciproquement.

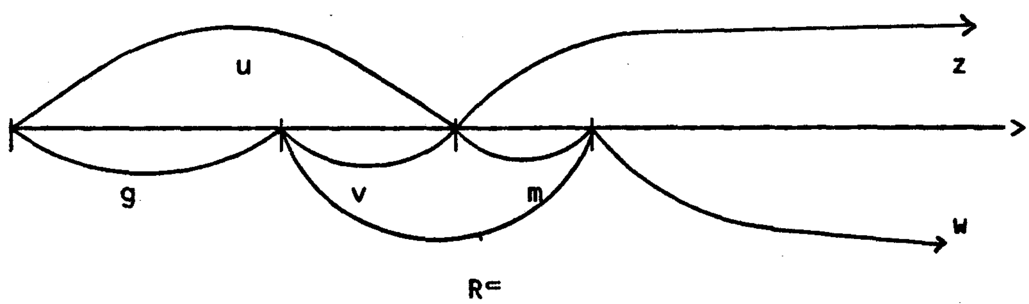
PREUVE DE (1).

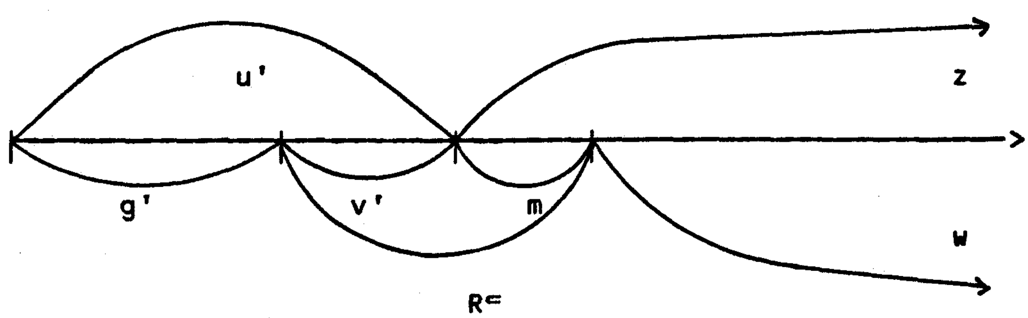


Soit $m \in F_n(uv)$
donc : $vm \in F_n(u)$ (car $g < u$)
d'où : $vm \in F_n(u')$
d'où : $m \in F_n(u'v)$.■

Remarque : Si on définit F_n sur X^+ et non sur X^nX^*, la propriété (1) n'est plus vraie.

PREUVE DE (2).





Soit $z \in X^{\Omega}$, avec $uz \in G_n R^{\Omega}$
On peut écrire :
$uz = gvmw$, avec $g \in G_n$, $vm \in R$ et $gv = u$
donc : $m \in F_n(u)$
donc : $m \in F_n(u')$
i.e. il existe $g' \in G$ et v' tels que :
$g'v' = u'$ et $v'm \in R^c$
et donc : $u'z \in G_n R^{\Omega}$.■

On définit alors une congruence à droite $\approx_n$ sur $X^n X^*$ ($\approx_n$ sera notée $\approx$ pour alléger les notations).

Définition :

$$\forall\, u,v \in X^n X^*,\ u \approx v \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F_n(u) = F_n(v) \\ u^{-1}R^c = v^{-1}R^c \end{cases}$$

Fait 1. $\approx$ **vérifie les propriétés suivantes :**

(a) $\approx$ **est une congruence à droite, d'index fini, noté i.**

(b) $u \approx u' \Rightarrow \begin{cases} R(u,u') \\ u \in R^c \text{ si et seulement si } u' \in R^c \end{cases}$

PREUVE DU FAIT 1.

PREUVE DE (a).

D'après la première propriété de F_n, on déduit que $\approx$ est une congruence à droite.
De plus, comme l'ensemble quotient pour $\approx$ s'identifie à l'ensemble des couples du type $E \times C$ où :
- E est une partie de l'ensemble quotient de X^* par la congruence de Nérode attachée à R^c.
- C est une classe pour cette congruence de Nérode,

on en déduit une majoration c (que l'on peut calculer) pour l'indice de $\approx$.
De plus, ce majorant c est valable pour tout générateur G de R^{Ω} et pour tout entier $n \geq 1$.■

PREUVE DE (b).

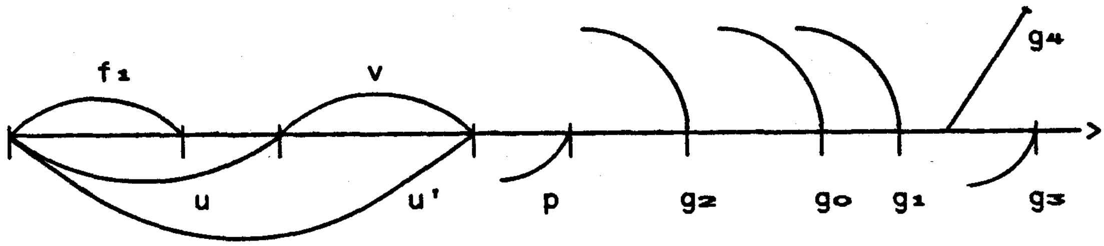
Cela découle de la deuxième propriété de F_n.■

On montre alors par l'absurde que c vérifie la proposition 8. Faisons l'hypothèse suivante :

$\exists\, G \in [R]_n$, G minimal, $\exists\, p \in FG(G)$, $\exists\, f_1, f_2 \in X^+$ tels que:
- **$f_1 f_2 = p$**
- **$|f_2| > c$**

(H). $\forall\, g \in G$, ($f_1 < g$ et $f_1 = g$) $\Rightarrow g \in G'$, où
$G' = G \cap pX^*$ (ensemble des mots de G ayant p pour préfixe).

Les mots de G' seront notés $g_0, \ldots, g_n$.
On utilise la congruence $\approx$ associée à F_1, où l est la longueur de f_1.
Comme $|f_2| > c$, il existe deux mots u et u' tels que :
$f_1 < u < u' < p, \quad u \neq u'$ et $u \approx u'$



On note : $u' = uv$, avec $v \neq \varepsilon$.

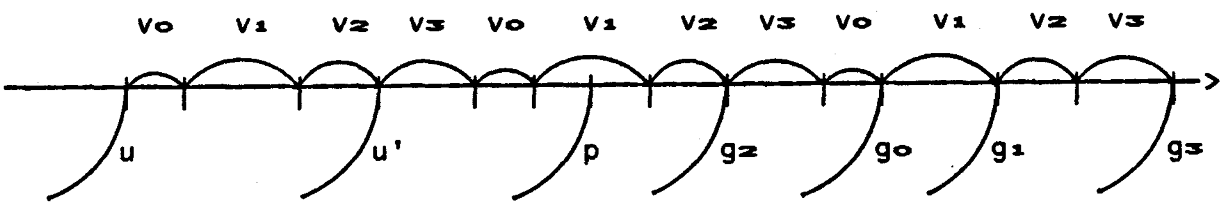
On va utiliser deux faits :

__Fait 2.__

Pour tout i, $0 \leq i \leq n$, il existe $j_i \geq 1$ tel que :
$g_i = uv^{j_i}u_i, \quad u_i < v$ et $u_i \neq v$.

On en déduit deux conséquences :
- l'ensemble G' est totalement ordonné (donc sur le dessin le cas de g_4 ou celui de g_3 est impossible).
- $\forall$ i, $0 \leq i \leq n$, $g_i \approx uu_i$.

On suppose alors (ce qui ne nuit pas à la généralité) que :
$\forall$ i, $0 \leq i \leq n$, $u_i < u_{i+1}$
On note $\forall$ i, $0 \leq i \leq n$: $v_i = (u_{i-1})^{-1}u_i$
et $v_{n+1} = (u_n)^{-1}v$.
On a alors : $v = v_0 \ldots v_{n+1}$.



__Fait 3.__

$\forall$ k, $0 \leq k \leq n$, $\forall$ $w \in X^\Omega$,
si $g_k w \notin G_1R^\Omega$ et $w \in R^\Omega$, alors $\exists$ i, $0 \leq i \leq n$ tel que :
$w = (v_{k+1} \ldots v_{n+1})v^{j}u_i w'$ avec $g_i w \notin G_1R^\Omega$ et $w' \in R^\Omega$

On en déduit alors que :
$\forall$ k, $0 \leq k \leq n$, $\forall$ $w \in X^\Omega$,
si $g_k w \in G_1R^\Omega$ et $w \in R^\Omega$, alors $w_k = (v_{k+1} \ldots v_{n+1})v^\Omega$
c'est-à-dire que le seul Ω-mot de R^Ω qui n'appartient pas à G_1R^Ω est : uv^Ω.
Or ceci est impossible, en effet on peut écrire :
$uv^\Omega = dr^\Omega$ avec $d, r \in R^+$.
Soit w un mot de R^Ω tel que $w = r^\Omega$ (w existe sinon card(R^Ω) = 1 auquel cas le problème est trivial).

On a alors :
$\forall\ i \geq 1,\ dr^{i}w \in G_1R^{\Omega}$
d'où : $Adh(dr^{+}w) = Adh(G_1R^{\Omega})$
Or : $Adh(G_1R^{\Omega}) = G_1R^{\Omega}$ (car G_1 est fini et R^{Ω} est une adhérence)
donc : $dr^{\Omega} \in G_1R^{\Omega}$.
En conclusion : (H) est donc impossible.

Donnons maintenant les preuves des deux faits précédents.

PREUVE DU FAIT 2.

On peut écrire : $g_1 = uvv_1$ (ceci car $uv < p < g_1$)
Comme $u \approx uv$, on a : $uv_1 \approx g_1$
D'autre part, G étant Ω-minimal :
$\exists\ w_1 \in R^{\Omega}\ /\ g_1w_1 \in G_1R^{\Omega}$
Donc d'après $R(g_1,uv_1)$: $uv_1w_1 \in G_1R^{\Omega}$
Donc d'après (H) : $uv_1w_1 \in G'R^{\Omega}$
v_1 est alors comparable (pour l'ordre préfixe) à v.
Deux cas sont à envisager :
(1) $v_1 < v$ et $v_1 = v$, d'où $j_1 = 1$
(2) $v_1 > v$, d'où $v_1 = vv_1$, avec $g_1 = uv^{2}v_1 \approx uv_1$
Donc par induction sur la longueur de v_1, on arrive au résultat.■

PREUVE DU FAIT 3.

$g_kw \in G_1R^{\Omega}$ et $g_k \approx uu_k$
Donc d'après $R(g_k,uu_k)$: $uu_kw \in G_1R^{\Omega}$
Et donc d'après (H) : $uu_kw \in G'R^{\Omega}$.
Soit i tel que : $uu_kw \in g_iR^{\Omega}$.
Alors : $\exists\ w' \in R^{\Omega}\ /\ uu_kw_k = g_iw'$
D'où : $w = (v_{k+1}\ldots v_{n+1})v^{j}u_iw'$
Or $uu_kw \in G_1R^{\Omega}$, i.e. $g_iw' \in G_1R^{\Omega}$.■

On déduit alors de la proposition 8 que, s'il y a dans G un mot de longueur supérieure ou égale à k(c+1), il y a au moins k mots dans G.
En conséquence, tous les générateurs de plus petite cardinalité n'ont que des mots de longueur inférieure ou égale à (c+1)card(R).■

Il est alors immédiat que :

<u>Proposition 9</u>. Etant donné un langage fini R, on peut construire tous les générateurs de plus petite cardinalité de R^{Ω}, et donc déterminer le rang de R.

Nous regardons maintenant les relations entre les générateurs de plus petite cardinalité et les minimaux définis dans la partie IV.

En premier lieu il est immédiat que tout élément de plus petite cardinalité de $[R]_\Omega$ est un générateur Ω-minimal de $[R]_\Omega$, mais que la réciproque est fausse.

Concernant les liens avec les générateurs fg-minimums, nous allons voir ... qu'il n'y en a pas. Plus précisément, la sous-famille des générateurs fg-minimums de $[R]_\Omega$ et celle des générateurs de plus petite cardinalité sont incomparables et peuvent même être disjointes (cf. partie D).

Si un générateur de plus petite cardinalité n'est pas nécessairement une Ω-base (sinon pour tout R fini, $[R]_\Omega$ possèderait une Ω-base, ce qui n'est pas), en revanche :

Proposition 10. Soit R un langage fini. Si $[R]_\Omega$ admet une Ω-base B, alors B est un élément de plus petite cardinalité de $[R]_\Omega$.

PREUVE.

Soit G un générateur de R^Ω, nous allons construire une injection de B dans G.
Soit $b \in B$, comme B est Ω-minimal (d'après le lemme IV.1) :
$\exists\, w \in B^\Omega$ avec $w \notin (B\backslash b)B^\Omega$.
Or $w \in G^\Omega$ et donc on peut écrire :
$w = u_b w'$ avec $u_b \in G$ et $w' \in G^\Omega$.
B étant une Ω-base, $u_b \in B^+$.
Mais par choix de w, $u_b \notin (B\backslash b)B^*$ d'où $u_b \in bB^*$.
On définit alors f par : $\forall\, b \in B$, $f(b) = u_b$.
$\forall\, b,b' \in B$ avec $b \neq b'$, on a
$f(b) \notin (B\backslash b)B^*$ et $f(b') \in b'B^*$ et donc $f(b) \neq f(b')$
i.e. f est injective et donc $Card(b) \leq Card(G)$.∎

Remarque : L'Ω-base B n'est pas forcément le seul élément de plus petite cardinalité.

Exemple 7(reprise). $R = aa+aaa+b$
$G = aa+aaab+b$ est un autre générateur de plus petite cardinalité de $[R]_\Omega$.∎

D. GENERATEURS DE PLUS PETITE TAILLE

Nous envisageons ici un dernier point de vue pour comparer deux générateurs de R^Ω.

Définition :

Soit F un langage fini. La **taille de** F est la somme des longueurs des mots de F :

$$Taille(F) = \sum_{f\in F} |f|$$

Nous étudions les générateurs de R^{Ω} dont la taille est la plus petite possible. Il en existe toujours, mais nous verrons dans l'exemple 8 de la partie D qu'il n'y a pas toujours unicité (ce qui est moins immédiat que pour les générateurs de plus petite cardinalité).

Lemme 2. Soit R un langage fini, il peut existér plusieurs générateurs de plus petite taille dans $[R]_{\Omega}$.

En revanche, contrairement aux éléments de plus petite cardinalité, la question de calculer la taille d'un élément de plus petite taille se résout immédiatement. Car, connaissant un générateur fini de R^{Ω} (par exemple $(R^{\subseteq})^{*}$), on a alors une majoration M (par exemple taille($(R^{\subseteq})^{*}$)) pour la longueur des mots des éléments de plus petite taille. Il suffit donc de calculer la taille de tous les générateurs de R^{Ω} inclus dans $X^{\leq M}$.

Par ailleurs, si un élément de plus petite cardinalité n'appartient pas nécessairement à Prem($R^{\subseteq}$), nous avons ici :

Proposition 11. Soit R un langage fini. Tout élément de plus petite taille est inclus dans Prem($R^{\subseteq}$).

PREUVE.

Soit G un générateur de plus petite taille de R^{Ω}.
Supposons que $G \not\subseteq$ Prem($R^{\subseteq}$).
On a alors :
$\exists$ $g \in G$ avec $g = uv$ où $u \in$ Prem($R^{\subseteq}$) et $v \in R^{\subseteq}$.
Notons $G' = (G\backslash g)+u+v$.
Comme $G' \subseteq R^{\subseteq}$ et $G \subseteq G'^{+}$, on a :
$G' \in [R]_{\Omega}$.
Or : Taille(G') $\leq$ Taille(G),
et donc : Taille(G') = Taille(G) (car G est de plus petite taille).
Donc G' est Ω-minimal, d'où :
$\exists$ $w \in R^{\Omega}$ avec $w \in vR^{\Omega}$ et $w \notin (G'\backslash v)R^{\Omega}$.
A fortiori : $w \notin (G\backslash g)R^{\Omega}$
d'où : $w \in gR^{\Omega}$
et donc : $w \in uR^{\Omega}$
ce qui contredit : $w \notin (G'\backslash v)R^{\Omega}$.■

Mais tout élément minimal inclus dans Prem($R^{\subseteq}$) n'est pas nécessairement de plus petite taille .

Exemple 5 (reprise). $R = (\varepsilon+b)(a+ab+ab^{2}+ab^{3})$
On a $R^{\subseteq} = R$.
Soit $G = (\varepsilon+b)(a+ab^{2}+ab^{3})$, $G \subseteq R$.
En outre G est Ω-minimal (donc fg-minimum) et :
Taille(G) = 19.
Soit $G' = (\varepsilon+b)(a+ab+ab^{3})$, $G' \subseteq R$.
G' est aussi Ω-minimal, mais Taille(G') = 17.

Donc G est un générateur Ω-minimal inclus dans $R^{=}$ et G n'est pas de plus petite taille.
(Cet exemple montre en outre qu'un générateur fg-minimum n'est pas nécessairement de plus petite taille, ce qui sera revu dans la partie D)∎

Nous cherchons maintenant à situer les générateurs de plus petite taille par rapport aux autres minimaux précédemment définis.

Tout d'abord, il est immédiat que tout élément de plus petite taille de $[R]_\Omega$ est générateur Ω-minimal dans $[R]_\Omega$, mais que la réciproque est fausse.

Concernant les liens avec les générateurs fg-minimums, nous allons voir qu'il n'y en a pas (bis!). Plus précisément, la sous-famille des générateurs fg-minimums de $[R]_\Omega$ et celle des générateurs de plus petite taille sont incomparables et peuvent même être disjointes. (cf partie D)

Si un générateur de plus petite cardinalité n'est pas nécessairement une Ω-base (sinon tout R^Ω finiment engendré aurait une Ω-base), on a en revanche :

Proposition 12. Soit R un langage fini. Si la famille $[R]_\Omega$ possède une Ω-base, B, alors B est l'unique élément de plus petite taille de $[R]_\Omega$.

PREUVE.
Soit G un générateur de plus petite taille de R^Ω.
Comme B = Prem($R^{=}$) et que G $\subseteq$ Prem($R^{=}$),
on a immédiatement : G = B.∎

Remarque : Notons que l'Ω-base est l'unique générateur de plus petite taille, alors qu'elle n'est pas nécessairement l'unique générateur de plus petite cardinalité.

E. COMPARAISON DES TROIS FAMILLES SUIVANTES :

LA FAMILLE DES GENERATEURS fg-MINIMUMS , LA FAMILLE DES GENERATEURS DE PLUS PETITE CARDINALITE ET LA FAMILLE DES GENERATEURS DE PLUS PETITE TAILLE

Etant donné un langage fini R, notons :
- **FGM(R)** la sous-famille des générateurs fg-minimums de $[R]_\Omega$
- **PPC(R)** la sous-famille des générateurs de plus petite cardinalité de $[R]_\Omega$
- **PPT(R)** la sous-famille des générateurs de plus petite taille de $[R]_\Omega$.

Nous allons voir, par des exemples, que contre toute attente :

<u>Proposition 13</u>. Soit R un langage fini. Les trois sous-familles de $[R]_\Omega$, FGM(R), PPC(R) et PPT(R) sont incomparables et peuvent même être deux à deux disjointes.

PREUVE.

La preuve comprendra 3 exemples :

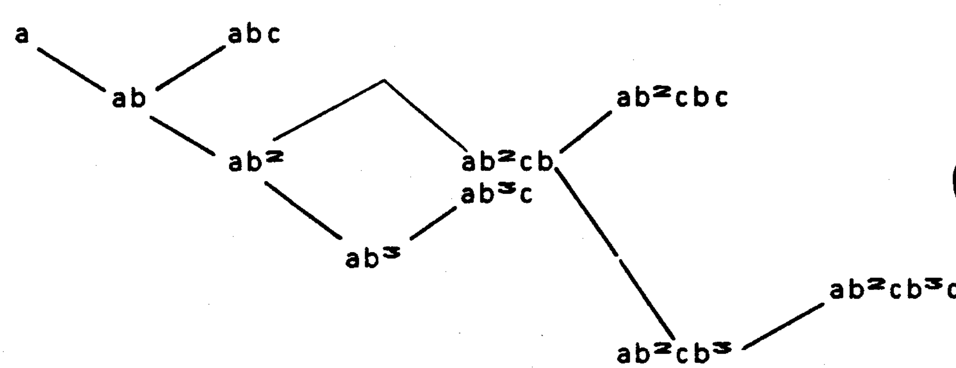
Le premier montrera qu'il peut exister plusieurs générateurs de plus petite taille (Lemme 2) et qu'en outre PPT(R) n'est pas inclus dans PPC(R).

Le second exemple, très voisin du premier, montrera que PPT(R) et PPC(R) peuvent être disjoints.

Dans le dernier exemple nous verrons que d'une part PPT(R) et FGM(R) d'autre part PPC(R) et FGM(R) peuvent être disjoints. De plus il n'y aura pas de générateur de plus petite cardinalité inclus dans $FG(R^t)$ (proposition 7).

Exemple 8.

Soit $F = a+ab+abc+ ab^2(\varepsilon+b+bc) + ab^2cb(\varepsilon+c) + ab^2cb^2(b+bc)$



Soit $D = \varepsilon+b+b^2+bcb+cb^2$.

Soit alors $R = DF$.

Nous allons voir que dans $[R]_\Omega$:

- card(PPT(R)) = 2, ce qui revient à dire qu'il n'y a pas unicité des générateurs de plus petite taille.
- PPT(R) $\not\subset$ PPC(R), i.e. un générateur de plus petite taille n'est pas toujours de plus petite cardinalité.

On va montrer que l'on peut enlever à F : $(ab+ab^2)$ ou (exclusif) ab^2cb, sans changer la puissance-Ω de R, ce qui permettra d'obtenir deux générateurs de plus petite taille dont l'un ne sera pas de plus petite cardinalité.

La preuve assez calculatoire sera décomposée en 7 étapes.

Fait 1. $\forall\ \delta \in D,\ \forall\ f \in F,\ \delta f X^{\Omega} \cap (D\backslash\delta) F X^{\Omega} = \emptyset$.

Ce fait immédiat implique que les Ω-mots de $\delta F R^{\Omega}$ ne pourront se décomposer sur R qu'en commençant par un mot de δF.

Etape a.
Dans R on ne peut enlever isolément que des mots de $D(ab+ab^2+ab^2cb)$ sans changer la puissance-Ω, en effet :
- sans a, on perd a^{Ω}
- pour toutes les "feuilles" f de F, on a :
  sans f, on perd $fbcba^{\Omega}$
- sans ab^3, on perd $ab^3b^2a^{\Omega}$
- sans ab^2cb^3, on perd $ab^2cb^3bcba^{\Omega}$.

Etape b.
$\forall\ \delta \in D$, dans R on peut enlever l'ensemble $\delta(ab+ab^2)$, mais alors δab^2cb est nécessaire pour garder la même puissance-Ω, en effet :
- $abF \subset a(bF)$
- $ab(bF) \subset a(b^2F)$
- $ab(b^2F) \subset (ab^3)F$
- $ab(bcbF) \subset (ab^2cb)F$
- $ab(cb^2F) \subset abc(b^2F)$

Donc : $abR \subset (a+ab^3+ab^2cb+abc)R$
et à fortiori : $abR^{\Omega} \subset (a+ab^3+ab^2cb+abc)R^{\Omega}$.
Or de plus : $ab(bcb)a^{\Omega} \notin [F\backslash(ab+ab^2cb)]R^{\Omega}$.
Donc on ne peut plus enlever ab^2cb quand on a enlevé ab.
De même, on a :
$ab^2R^{\Omega} \subset (a+ab^3+ab^2cb+ab^3c)R^{\Omega}$.
$ab^2(cb^2)a^{\Omega} \notin [F\backslash(ab^2+ab^2cb)]R^{\Omega}$.
Grâce au fait 1, on a alors le résultat annoncé pour :
$\delta(ab+ab^2)$ et δab^2cb.

Etape c.
De façon analogue on montre que, $\forall\ \delta \in D$, dans R on peut enlever δab^2cb, mais alors $\delta(ab+ab^2)$ est nécessaire pour garder la même puissance-Ω.

Etape d.
$R \subset Prem(R^{=})$
Il suffit de remarquer que tout Ω-mot de R^{Ω} contient une infinité de a et donc que tout mot de $R^{=}$ doit contenir au moins un a. Or les mots de R contiennent exactement un a et donc sont dans $Prem(R^{=})$.

Etape e.
$R^{=} = R^{+}$
Pour cela il suffit de montrer que :
$FG(R^{+}) \cap R^{=} \subset R^{+}$.
On a : $FG(R) = R + D(ab^2c+ab^2cb) + FG(D)$

Lemme 1. $FG(R) \cap R^{\subset} = R$.

PREUVE DU LEMME 1.
$\forall\, \delta \in D,\ \forall\, w \in X^{\Omega},\ \delta(ab^2c)w \in R^{\Omega} \Rightarrow ab^2cw \in R^{\Omega}$
or : $(ab^2c)a^{\Omega} \notin R^{\Omega}$
donc : $ab^2c \notin R^{\subset}$,
et donc : $Dab^2c \cap R^{\subset} = \emptyset$.
On montre de même que : $Dab^2cb \cap R^{\subset} = \emptyset$.
Comme $FG(D) \cap R^{\subset} = \emptyset$, on a le résultat.■

Fait 2. $\forall\, u \in X^*,\ \forall\, v \in X^*$
$uav \in R^{\subset} \Rightarrow \exists\, \delta \in D \,/\, u\delta^{-1} \in R^+$ et $av \in R^{\subset}$.

PREUVE DU FAIT 2.
Il suffit de remarquer que :
$\forall\, u \in X^*,\ \forall\, v \in X^*$
$uav \in R^{\subset} \Rightarrow \exists\, \delta \in D \,/\, u\delta^{-1} \in R^+$ et $av \in R^{\subset}$.■

Lemme 2. $R^+FG(R) \cap R^{\subset} \subset R^+$.

PREUVE DU LEMME 2.
- si $u \in R^+D(a^2bc+ab^2cb^2) \cap R^{\subset}$: d'après le fait 2, a^2bc ou ab^2cb^2 appartient alors à $R^{\subset}$, ce qui n'est pas.
- si $u \in R^*DF\ FG(D) \cap R^{\subset}$: d'après le fait 2, il suffit de montrer que $F\ FG(D) \cap R^{\subset} \subset FR^*$.
Or, $\forall\, v \in F,\ \forall\, u \in FG(D)$:
ou : $vu \in R \subset FR^*$
ou : $vu = ab^2c$ et alors $vu \notin R^{\subset}$
ou : $vu = ab^2cb^2$ et alors $vu \notin R^{\subset}$
ou : $vu \notin FG(F)$,
comme $vucb^2a^{\Omega} \notin R^{\Omega}$ (car il faudrait un mot du type mcb^2a dans R, avec $m \neq \varepsilon$),
on obtient : $vu \notin R^{\subset}$.■

Les deux lemmes nous permettent d'affirmer que $R^{\subset} = R^+$.

Etape f.
$R = Prem(R^{\subset})$, ceci découle des étapes e) et f).

Etape g.
Sachant que tous les générateurs de plus petite taille sont inclus dans $Prem(R^{\subset})$, pour les obtenir il suffit de les chercher parmi les Ω-minimaux inclus dans R.
Or d'après les étapes a), b) et c) ils sont de la forme :
$\varepsilon F_1 + bF_2 + b^2F_3 + bcbF_4 + cb^2F_5$
avec $\forall\, i,\ 1 \leq i \leq 5$, $F_i = F\backslash(ab+ab^2)$ ou $F_i = F\backslash ab^2cb$.
Il y a donc 2^5 Ω-minimaux inclus dans R mais deux seulement sont de plus petite taille :

$$M = D(F\backslash(ab+ab^2))$$

et $$M' = F\backslash ab^2cb + (D\backslash\varepsilon)(F\backslash(ab+ab^2)).$$

Donc : $card(PPT(R)) = 2$.
De plus : $card(M') = card(M) + 1$
et donc : $PPT(R) \not\subset PPC(R)$.■

Exemple 9.

En reprenant l'exemple précédent mais en remplaçant la lettre c par le mot cc' (c' étant une nouvelle lettre), on va voir :

- PPC(R) ∩ PPT(R) = ∅, i.e. il n'y a pas de générateur à la fois de plus petite cardinalité et de plus petite taille.

Avec les notations de l'exemple précédent, $F\backslash(ab+ab^2)$ reste un générateur de plus petite cardinalité, mais il n'est plus générateur de plus petite taille, car : $\text{Taille}(F\backslash(ab+ab^2)) = \text{Taille}(F\backslash ab^2cc'b) + 1$.
M est donc le seul générateur de plus petite cardinalité inclus dans R, mais il n'est pas de plus petite taille, car Taille(M) = Taille(M') + 1.
Donc PPT(R) ∩ PPC(R) = ∅.∎

Exemple 10.

Soit $F = c+ca+ca^2+ca^3+a^8+a^2b+ca^5$.
Soit $D = \epsilon+a+a^3+b$.
Soit alors R = DF.

Nous allons voir que dans $[R]_\Omega$:

- FGM(R) ∩ PPT(R) = ∅, i.e. il n'y a pas de générateur à la fois fg-minimum et de plus petite taille.
- FGM(R) ∩ PPC(R) = ∅, i.e. il n'y a pas de générateur à la fois fg-minimum et de plus petite cardinalité. Ce qui implique qu'il n'y a pas de générateur de plus petite cardinalité inclus dans $FG(R^{\epsilon})$.

On va montrer que l'on peut enlever à F :
ca^2+ca^3
ou (exclusif) ca^5,
sans changer la puissance-Ω de R, ce qui nous permettra d'obtenir l'unique générateur de plus petite taille qui sera en outre unique générateur de plus petite cardinalité inclus dans R^c, mais qui ne sera pas fg-minimum.

La preuve calculatoire comprendra 9 étapes.

Fait 1. $\forall\ \delta \in D, \forall\ f \in (F\backslash a^8), \delta f R^\Omega \cap (D\backslash\delta)FX^\Omega = \emptyset$.

Ce fait (facile à vérifier) signifie que les Ω-mots de $\delta(F\backslash a^8)R^\Omega$ ne pourront se décomposer sur R qu'en commençant par un mot de δF.

Etape a.

Dans R on ne peut enlever isolément que des mots de $D(ca^2+ca^3+ca^5)$ sans changer la puissance-Ω, en effet :

- sans a^8, on perd a^8c^Ω
- sans a^9, on perd $a^9a^2bbc^\Omega$
- sans a^{11}, on perd $a^{14}c^\Omega$
- sans ba^8, on perd ba^8c^Ω.

Pour les mots restant, grâce au fait 1, il suffit de regarder c, ca et a^2b.
- sans c, on perd c^Ω
- sans ca, on perd $cabc^\Omega$
- sans a^2b, on perd a^2bc^Ω.

Etape b.
$\forall\ \delta \in D$, dans R on peut enlever l'ensemble $\delta(ca^2+ca^3)$, mais alors δca^5 est nécessaire pour garder la même puissance-Ω, en effet :
- $ca^2F \subset caaF$
- $ca^2aF \subset ca^3F$
- $ca^2a^3F \subset ca^5F$
- $ca^2bF \subset ca^2bF$

Donc : $ca^2R \subset (c+ca+ca^5)R$
et à fortiori : $ca^2R^\Omega \subset (c+ca+ca^5)R^\Omega$.
On a de même : $ca^3R^\Omega \subset (c+ca+ca^5)R^\Omega$.
Or de plus : $ca^2a^3c^\Omega \notin (F\backslash(ca^2+ca^5))R^\Omega$,
donc on ne peut pas supprimer ca^5 quand on a enlevé ca^2.
De même on ne peut pas supprimer ca^5 quand on a enlevé ca^3.
Maintenant, grâce au fait 1, on a le résultat annoncé pour: $\delta(ca^2+ca^3)$ et δca^5.

Etape c.
De façon analogue on montre que, $\forall\ \delta \in D$, dans R on peut enlever l'ensemble δca^5 mais alors $\delta(ca^2+ca^3)$ est nécessaire pour garder la même puissance-Ω.

Etape d.
$R \subset \mathrm{Prem}(R^{\subset})$, en effet il suffit de constater que :
- $b \notin R^{\subset}$
- $\forall\ i,\ 1 \leq i \leq 7,\ a^i \notin R^{\subset}$

(par exemple : $a^3 \notin R^{\subset}$ car $a^3acc^\Omega \notin R^\Omega$).

Etape e.
Montrons maintenant que $R^{\subset} = R^+$.
Il suffit de montrer que $FG(R^+) \cap R^{\subset} \subset R^+$.

Lemme 1. $\forall\ i \geq 0,\ a^i \in R^{\subset} \Rightarrow a^i \in R^+$.

PREUVE DU LEMME 1.
Déjà : $a^i \in R^{\subset} \Rightarrow i \geq 8$.
Posons $i = 8k + j$, avec $0 \leq j \leq 7$.
- Si $k = 1$, on a : $j = 0$ ou 1 ou 3,
et donc $a^i \in R$.
- Si $k = 2$, on a : $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 6,
et donc $a^i \in R^2$.
- Si $k \geq 3$, on a : $\forall\ j,\ a^i \in [(\varepsilon+a+a^2)a^8]^+$,
et donc $a^i \in R^+$.■

Fait 2. $\forall\ i \geq 1$,

$$uba^iw \in R^\Omega \Rightarrow \begin{array}{c}(ba^iw \in R^\Omega \text{ et } u \in R^+)\\ \text{ou}\\ (a^iw \in R^\Omega \text{ et } ub \in R^+).\end{array}$$

Ceci car b ne peut être que début ou fin dans un mot de R.
Or $ba^iw \in R^\Omega$ implique $a^iw \in R^\Omega$, d'où

Fait 3. $\forall\ i \geq 1,$

$$uba^i \in R^{\subseteq} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}(u \in R^+ \text{ ou } ub \in R^+)\\ \text{et}\\ a^i \in R^{\subseteq}.\end{array}$$

D'après le lemme 1, on a donc : $a^i \in R^+$.
Comme $a^i \in R^+$ entraine $ba^i \in R^+$, on obtient :

Lemme 2. $\forall\ i \geq 0,\ uba^i \in R^{\subseteq} \Rightarrow uba^i \in R^+$.

(pour $i = 0$, il suffit de voir que :
$ubbc^\Omega \in R^\Omega \Rightarrow ub \in R^+$)

De façon analogue, on a les trois faits suivants :

Fait 3. $\forall\ i \geq 0,$
$uca^iw \in R^\Omega \Rightarrow \exists\ j \in \{0,1,3\}\ /\ u(a^j)^{-1} \in R^+$ et $a^jca^iw \in R^\Omega$.

Fait 4. $\forall\ i \geq 0,$
$uca^i \in R^{\subseteq} \Rightarrow \exists\ j \in \{0,1,3\}\ /\ u(a^j)^{-1} \in R^+$ et $ca^i \in R^{\subseteq}$.

Fait 5. $\forall\ i \geq 0,\ ca^i \in R^{\subseteq} \Rightarrow ca^i \in R^+$.

D'où le dernier résultat :

Lemme 3. $\forall\ i \geq 0,\ uca^i \in R^{\subseteq} \Rightarrow uca^i \in R^+$.

Les trois lemmes prouvent que :
$FG(R^+) \cap R^{\subseteq} \subseteq R^+$
et donc le résultat : $R^{\subseteq} = R^+$.

Etape f.
$R = Prem(R^{\subseteq})$, ceci car $R \subseteq Prem(R^{\subseteq})$ et $R^{\subseteq} = R^+$.

Etape g.
$D(ca^5) \cap R^t = \emptyset$, ceci car $D(ca^5)R^\Omega \subseteq D(c+ca^2+ca^3)R^\Omega$.

Etape h.
$D(ca^2+ca^3) \subseteq R^t$, ceci car : $ca^2a^3c^\Omega \notin (F\backslash(ca^2+ca^5))R^\Omega$
et : $ca^3a^3c^\Omega \notin (F\backslash(ca^3+ca^5))R^\Omega$

Etape i.
Donc $R^t = R\backslash Dca^5$, qui est Ω-minimal, est l'unique générateur fg-minimum de $[R]_\Omega$.
Finalement on obtient :
$P = R\backslash D(ca^2+ca^3) \in [R]_\Omega$
et :
$Taille(P) = Taille(R) - (7 + 9 + 13 + 9)$
$card((P) = card(R) - 8$
D'où :
$Taille(P) < Taille(R^t) = Taille(R) - (6 + 7 + 9 + 7)$
$card(P) < card(R^t) = card(R) - 4$.
Donc P est l'unique générateur de plus petite taille et l'unique générateur de plus petite cardinalité, mais P n'est pas inclus dans $FG(R^t)$.

Il n'y a pas de générateur de plus petite cardinalité inclus dans FG($R^{\in}$).
PPT(R) $\cap$ FGM(R) = $\emptyset$.
PPC(R) $\cap$ FGM(R) = $\emptyset$.■

CHAPITRE VI

LA FAMILLE $[R]_\Omega$ QUAND SON Ω-BASE EXISTE ET EST UN CODE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre - sauf dans la partie C -, nous supposerons que $[R]_\Omega$ possède un plus grand élément qui est un semi-groupe libre, ce qui revient à dire que $[R]_\Omega$ possède une Ω-base C qui est un code. Notons que cette propriété de $[R]_\Omega$ est décidable car, pour tout langage rationnel R, on sait construire le plus grand élément et décider s'il est libre ou non [3]. Nous obtiendrons alors, concernant les générateurs Ω-minimaux de $[R]_\Omega$, des résultats plus précis que dans le cas général.

Après avoir donné une caractérisation des codes en termes de mots infinis, nous prouvons dans la partie A que, si $[R]_\Omega$ possède une Ω-base C qui est un code, tout générateur de R^Ω contient un générateur Ω-minimal. En outre, les générateurs Ω-minimaux sont alors exactement les codes appartenant à $[R]_\Omega$. Avec l'hypothèse supplémentaire "R^Ω est une adhérence", nous montrons que les générateurs Ω-minimaux sont exactement les codes complets à droite dans C^* dont la puissance-Ω est une adhérence.

Dans la partie B nous supposerons en outre que R^Ω est finiment engendré et nous montrons alors que tous les générateurs Ω-minimaux sont finis si et seulement si l'Ω-base C est un ifl-code fini. Avec cette dernière condition, nous verrons aussi que les générateurs Ω-minimaux de $[R]_\Omega$ sont exactement les codes finis complets à droite dans C^* - caractérisation intéressante en ce sens qu'elle ne fait plus appel aux mots infinis -. Pour terminer nous verrons que, si de plus C est fini - mais non réduit à un élément -, alors C est l'unique générateur de plus petite cardinalité de $[R]_\Omega$.

Dans la partie C nous supposerons seulement que $[R]_\Omega$ contient un code préfixe fini. Il sera vu alors que $[R]_\Omega$ possède nécessairement une Ω-base qui est un code préfixe fini. Mais des exemples montreront que, sans l'hypothèse complète "code préfixe fini", le résultat précédent n'est plus vrai.

La partie D est un récapitulatif des résultats obtenus sur les générateurs Ω-minimaux, dans les différents cas étudiés.

A. C EST A LA FOIS UNE Ω-BASE ET UN CODE

1. Cas général

Nous intéressant aux codes et à leur puissance-Ω, nous donnons deux caractérisations des codes en termes de mots infinis. Rappelons tout d'abord la définition d'un code.

Définition : Soit C un langage de X^+, C est un code si et seulement si : $\forall\, u,v \in C,\ uC^* \cap vC^* \neq \emptyset \Rightarrow u = v$.

Proposition 1. **Soit C un langage de X^+, alors les trois propriété suivantes sont équivalentes :**
(i) C est un code
(ii) $\forall\, u \in C,\ \forall\, V \in C^*,\ \forall\, u_1 \in C,\ (uV)^\Omega \in u_1C^\Omega \Rightarrow u_1 = u$
(iii) $\forall\, U \in C^+$, U^Ω a une décomposition unique sur C.

PREUVE.

non(ii) => non(i)
$(uV)^\Omega \in u_1C^\Omega$ avec $u_1 \neq u$
Notons $U = uV$ et $U^\Omega = u_1 \ldots u_n \ldots$.
Il existe alors deux indices k et l avec $k < l$ tels que :
$u_1 \ldots u_k = U^i U'$
$u_1 \ldots u_l = U^{i+j}U'$, avec $i,j > 0$ et U' préfixe de U.
On a alors deux factorisations sur C du mot $U^{i+j}U'$:
d'une part : $u_1 \ldots u_k$
d'autre part : $U^j u_1 \ldots u_k$
Comme $u_1 \neq u$, ces deux décompositions sont bien distinctes

(ii) => (iii)
Soit $U \in C^+$.
Notons : $U = u_1 \ldots u_n$, où $\forall\, i,\ 1 \leq i \leq n,\ u_i \in C$
et $U^\Omega = v_1 \ldots v_k \ldots$, où $\forall\, k \geq 1,\ v_k \in C$
d'après (ii), on a donc : $v_1 = u_1$
d'où : $u_2 \ldots u_n U^\Omega = v_2 \ldots v_k \ldots$
or $u_2 \ldots u_n U^\Omega = (u_2 \ldots u_n u_1)^\Omega$
En itérant le processus, on obtient ainsi l'unicité de la décomposition de U^Ω sur C.

non(i) => non(iii)
Si C n'est pas un code, alors il est immédiat que (iii) n'est pas vérifiée.∎

Un code est donc un langage C tel que tout Ω-mot <u>périodique</u> a au plus une factorisation sur C.

Le résultat suivant sera très utile par la suite; il permet entre autres d'assurer l'existence d'un générateur Ω-minimal inclus dans tout générateur, dès que le plus grand élément est un semi-groupe libre.

Proposition 2. Si C est à la fois une Ω-base et un code, alors, pour tout générateur G de C^{Ω}, le langage $G\backslash GC^{+}$ est un code inclus dans $[C]_{\Omega}$.

PREUVE.

Comme $C^{+} \subseteq C^{\subseteq}$, on a : $G\backslash GC^{\subseteq} \subseteq G\backslash GC^{+} \subseteq G$
D'après la proposition IV-3, on en déduit que $G\backslash GC^{+}$ appartient à $[C]_{\Omega}$.
Par ailleurs nous avons le fait suivant :

Fait. Si C est un code et G un langage inclus dans C^{+}, alors le langage $G\backslash GC^{+}$ est un code.

PREUVE DU FAIT.
Notons $G' = G\backslash GC^{+}$
Soient $g, g' \in G'$ et $v, v' \in G'^{*}$ tels que :
$g < g'$ et $gv = g'v'$.
Comme $G' \subseteq C^{+}$ et que C est un code, on a forcément $g' \in gC^{*}$ et donc, puisque $g' \in G'$, on a $g' = g$.
Il s'ensuit que G' est un code.■

Donc $G\backslash GC^{+}$ est un code.■

Exemple 1. $C = a+b$ et $G = a^{*}ba^{*}$
$C^{+} = (a+b)^{+}$
donc $G' = a^{*}b$.
Il est intéressant de noter que, bien que C soit fini, G' n'est pas fini.■

On a donc ici une réponse positive à Q2 : tout générateur contient un générateur Ω-minimal et plus précisément :

Corollaire 1. Si C est à la fois une Ω-base et un code, alors, pour tout générateur G de $[C]_{\Omega}$, $G\backslash GC^{+}$ est un langage Ω-minimal de $[C]_{\Omega}$.

Mais remarquons que l'hypothèse moins forte "C est une Ω-base" n'est pas suffisante pour impliquer que $G\backslash GC^{+}$ est Ω-minimal, comme le prouve l'exemple suivant.

Exemple 2. $R = a^{5} + a^{6} + a^{7} + b + ab + c + a^{2}c$.
. Il est facile de vérifier que R est un langage Ω-minimal, mais n'est pas un code.
. $R^{\subseteq} = R^{+}$, en effet on a toujours : $R^{\subseteq} \subseteq FG(R^{+})$
Or ici : $FG(R^{+}) = R^{*}(\varepsilon+a+a^{2}+a^{3}+a^{4})$

Fait. $\forall\, u,v \in X^{*}$, $ubv \in R^{\subseteq} \Rightarrow ub \in R^{+}$ et $v \in R^{\subseteq}$
et $ucv \in R^{\subseteq} \Rightarrow uc \in R^{+}$ et $v \in R^{\subseteq}$

PREUVE DU FAIT.
(Nous faisons la démonstration pour la lettre b)
Comme, dans les mots de R contenant b, b n'apparait qu'en dernière lettre, on a :
$u \in X^{*}$, $w \in X^{\Omega}$: $ubw \in C^{\Omega} \Rightarrow ub \in R^{+}$ et $w \in R^{\Omega}$

et donc, si $ubv \in R^{\infty}$, on a :
$\forall\ w \in R^{\Omega}$, $ubvw \in R^{\Omega}$
d'où : $ub \in R^{+}$ et $vw \in R^{\Omega}$ ce qui prouve le fait.■

Il suffit alors de montrer que $a^{*} \cap R^{\infty} \subseteq R^{+}$.
On a déjà : a, a^{2}, a^{3}, a^{4} n'appartiennent pas à R^{∞}
de plus : $a^{8} \notin R^{\infty}$ (car $a^{8}abb^{\Omega} \notin R^{\Omega}$)
de même : $a^{9} \notin R^{\infty}$ (car $a^{9}b^{\Omega} \notin R^{\Omega}$)
Comme, $\forall\ i \geq 1$, $a^{9+i} \in R^{+}$, on a bien : $a^{*} \cap R^{\infty} \subseteq R^{+}$
et donc $R^{\infty} = R^{+}$.
Par conséquent R est une Ω-base.
. Mais $R^{2}\backslash R^{2}R^{+} = R^{2}$ n'est pas un langage Ω-minimal, en effet:
$a^{6}a^{7} \in R^{2}$,
$a^{6}a^{7}R \subseteq (a^{5}a^{5}+a^{5}a^{6}+a^{6}a^{6}+a^{7}a^{7})(R^{2}+R) \subseteq (R^{2}\backslash a^{6}a^{7})(R^{2}+R)$
donc : $a^{6}a^{7}R^{\Omega} \subseteq (R^{2}\backslash a^{6}a^{7})R^{\Omega}$.■

Remarquons aussi que l'hypothèse "C est un code" n'est pas nécessaire.

Exemple 3. $C = a^{2}+a^{3}+b$.
. C n'est pas un code, mais C est Ω-minimal.
. C est une Ω-base (même preuve que dans l'exemple précédent).
. Soit $G \in [C]_{\Omega}$, supposons que $G' = G\backslash GC^{+}$ ne soit pas Ω-minimal, on a alors :
$\exists\ g' \in G'$ / $g'C^{\Omega} \subseteq (G'\backslash g')C^{\Omega}$.
En particulier :
$\exists\ g'' \in (G'\backslash g')$ / $g'b^{\Omega} = g''w$ avec $w \in C^{\Omega}$.
Si $g' < g''$: $g'' = g'b^{i}$ et donc $g'' \in GC^{+}$
Si $g'' < g'$: $g' = g''u$ avec $u \in C^{+}$ (ceci car b n'est facteur propre d'aucun mot de C) et donc $g' \in GC^{+}$.
Dans les deux cas il y a contradiction.■

Le second corollaire énonce deux caractérisations des générateurs Ω-minimaux de C^{Ω}.

<u>Corollaire 2</u>. Si C est à la fois une Ω-base et un code, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) G est un générateur Ω-minimal de C^{Ω}
(ii) G est un générateur de C^{Ω} et $G = G\backslash GC^{+}$
(iii) G est un code de $[C]_{\Omega}$.

Autrement dit, lorsque C est à la fois une Ω-base et un code, les langages Ω-minimaux de $[C]_{\Omega}$ sont exactement les codes de $[C]_{\Omega}$.

Remarques :
- $[C]_{\Omega}$ peut contenir un code sans que son Ω-base ne soit un code. (cf. exemple précédent, où $a^{2} + a^{3}b + b$ est un code de $[C]_{\Omega}$.)

- $[C]_{\Omega}$ peut contenir un code sans que $[C]_{\Omega}$ ne contienne d'Ω-base.

Exemple 4. $R = a^*b$

Le plus grand élément de $[R]_\Omega$ est $P = X^*bX^*$.

$Prem(P) = a^*ba^*$ qui n'est pas Ω-minimal car R est strictement inclus dans a^*ba^*.

Or $[R]_\Omega$ contient un code préfixe : R.■

2. Cas des adhérences

Dans le cas particulier où C^Ω est de plus une adhérence, nous donnons une caractérisation des générateurs de C^Ω, qui utilise la notion d'ensemble complet à droite [3] dont nous rappelons la définition.

Définition : Soit P une partie d'un monoïde M.

P est un **ensemble complet à droite dans M** si et seulement si : $\forall\ u \in M,\ \exists\ v \in M$ tel que $uv \in P^*$.

Autrement dit on peut compléter tout mot de M par un mot de M pour en faire un mot de P^*.

Proposition 3. Si C^Ω est une adhérence et si C est à la fois une Ω-base et un code, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $G \in [C]_\Omega$.

(ii) G est un ensemble complet à droite dans C^* et G^Ω est une adhérence.

PREUVE.

Rappelons [3] que G est un ensemble complet à droite dans C^* si et seulement si G^* est dense à droite dans C^*, i.e. $\forall\ u \in C^*,\ \exists\ v \in C^*$ avec $uv \in G^*$.

(i) => (ii)

Déjà $G^\Omega = C^\Omega$ implique que G^Ω est une adhérence.

De plus comme C est un code, on a d'après la proposition 1: $\forall\ u \in C^+$, u^Ω a une décomposition unique sur C.

Or $u^\Omega \in G^\Omega$, donc on peut écrire :

$u^\Omega = g_1 \dots g_n \dots$ avec, $\forall\ n > 0$, $g_n \in G$.

D'où il existe n tel que $u < g_1 \dots g_n$

La décomposition de u^Ω étant unique sur C et comme u et $g_1 \dots g_n$ sont dans C^+ :

$\exists\ v \in C^*$ tel que $uv = g_1 \dots g_n$, i.e. $uv \in G^*$.

(ii) => (i)

G étant complet à droite dans C^*,

d'une part : $G \subset C^*$

d'où : $FG(G^*) \subset FG(C^*)$,

d'autre part : $FG(C^*) \subset FG(G^*)$.

Donc : $FG(G^*) = FG(C^*)$

et comme G^Ω et C^Ω sont des adhérences, on en déduit grâce à la proposition I.8 que $G^\Omega = C^\Omega$.■

Remarque : même si C^Ω n'est pas une adhérence, l'implication "$G \in [C]_\Omega$ implique G est un ensemble complet à droite" demeure exacte; mais la réciproque peut être fausse.

Exemple 5. $C = ba^*$.
- C est un code (suffixe).
- C est une Ω-base, puisque : $Pref(C^*) = C^*$.
- C^Ω n'est pas une adhérence, car : $ba^\Omega \in Adh(C) \setminus C^\Omega$.
- Soit $G = C^*b$, G est un ensemble complet à droite dans C^*.
- mais $(ba)^\Omega \in C^\Omega$ et $(ba)^\Omega \notin G^\Omega$.■

En utilisant la corollaire 2, on déduit alors une caractérisation des langages Ω-minimaux de $[C]_\Omega$.

Proposition 4. **Si C^Ω est une adhérence et si C est à la fois une Ω-base et un code, alors les conditions suivantes sont équivalentes :**
(i) G est un langage Ω-minimal de $[C]_\Omega$.
(ii) G est un code complet à droite dans C^* et G^Ω est une adhérence.

Remarque : On ne peut pas enlever la propriété "G^Ω est une adhérence" dans (ii), comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 6. $C = a+b$
$G = a+ba^*b$
- C^Ω est une adhérence et C est une Ω-base.
- G^Ω n'est pas une adhérence,
en effet : $ba^\Omega \in Adh(G)$
mais : $ba^\Omega \notin G^\Omega$.
- et $G^\Omega \notin [C]_\Omega$ car : $ba^\Omega \notin G^\Omega$.■

Cela va nous permettre, sans utiliser la puissance-Ω, de caractériser les langages finis Ω-minimaux de $[C]_\Omega$, lorsqu'il en existe, c'est-à-dire lorsque C est un ensemble fini.

Corollaire 3. **Si C est à la fois une Ω-base et un code fini, alors les conditions suivantes sont équivalentes :**
(i) G est un langage fini Ω-minimal de $[C]_\Omega$.
(ii) G est un code fini complet à droite dans C^*.

B. CAS OU C EST A LA FOIS UNE Ω-BASE ET UN CODE FINI

1. Générateurs Ω-minimaux finis

Nous donnons d'abord une condition suffisante pour que tout générateur Ω-minimal soit fini; nous utiliserons pour cela la notion de ifl-code [18] dont nous rappelons la définition.

Définition : Soit C un langage de X^+, C est un ifl-code si et seulement si :

$\forall u,v \in C,\ uC^\Omega \cap vC^\Omega \neq \emptyset$ **implique** $u = v$.

Autrement dit, C est un ifl-code si et seulement si tout Ω-mot admet au plus une décomposition sur C.

Notons que tout ifl-code est un code mais que la réciproque est fausse (par exemple aa+b+ba est un code (suffixe) mais n'est pas un ifl-code car $b(aa)^\Omega = ba(aa)^\Omega$).

Comme sous-classe des ifl-codes, il y a la classe des codes à délai borné [3].

Définitions : Soit C un langage de X^+.

C est un **code à délai borné n** si et seulement si :

$\forall u,v \in C,\ uC^nX^* \cap vC^* \neq \emptyset$ **implique** $u = v$.

C est un **code à délai borné** si et seulement si il existe n tel que C soit à délai borné n.

Rappelons [18] que si C est un langage fini, ces deux notions sont équivalentes, ce qui n'est pas le cas si C est un langage infini.

Une sous-classe bien connue des codes à délai borné est la classe des codes préfixes qui sont les codes à délai borné 0.

Proposition 5. Si C est à la fois une Ω-base et un ifl-code fini, alors tout langage Ω-minimal de $[C]_\Omega$ est un ifl-code fini.

PREUVE.

Supposons que G soit un générateur Ω-minimal et infini de $[C]_\Omega$.
Rappelons que $G \subset C^+$.
Comme C est un langage fini :
$\exists\ r_1 \in C$ / $r_1C^+ \cap G$ est infini.
De même :
$\exists\ r_2 \in C$ / $r_1r_2C^+ \cap G$ est infini.
On peut ainsi construire une suite (r_i) de C,
et d'après le corollaire 2, on a :
(a) $\forall\ i \geq 1$: $r_1 \ldots r_i \notin G$
Alors soit l'Ω-mot $w = r_1 \ldots r_n \ldots$
Comme $w \in C^\Omega$ et que $C^\Omega = G^\Omega$, on peut écrire :
$w = g_1 \ldots g_n \ldots$, avec $g_n \in G$, $\forall\ n > 0$.

L'unicité de la factorisation de w sur C nous permet de déduire que :
$\exists\ k \in N$ / $r_1 \ldots r_k = g_1$, ce qui contredit (a).
G est donc fini.

D'autre part si il existe un Ω-mot w qui a deux décompositions sur G, on peut écrire :

$w = g'w'$ où $g' \in G$ et $w' \in G^{\Omega}$

et $w = g''w''$ où $g'' \in G$, g'' préfixe propre de g'et $w'' \in G^{\Omega}$.
Comme $G \subset C^{+}$ et C est un ifl-code, on en déduit que :
$g' \in g''C^{+}$ ce qui est en contradiction avec :
G est un générateur Ω-minimal de $[C]_{\Omega}$.■

Remarque : Le résultat de la proposition 4 devient faux avec l'hypothèse moins forte "C est à la fois une Ω-base et un code fini", comme le prouve l'exemple suivant où C est un code à trois éléments.

Exemple 7. $C = a^2+ba+ba^2$

- C n'est pas un ifl-code, mais est un code
- C est une Ω-base
- mais le code infini $a^2+ba+ba^2(a^2)^*(ba+ba^2)$ appartient à $[C]_{\Omega}$.■

Donnons maintenant une caractérisation de la propriété "tout langage Ω-minimal de $[C]_{\Omega}$ est un ensemble fini".

Proposition 6. Si C est à la fois une Ω-base et un code, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) Tout langage Ω-minimal de $[C]_{\Omega}$ est un ensemble fini.
(ii) C est un ifl-code fini.

Pour la preuve nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2. Si C est un code rationnel mais n'est pas un ifl-code, alors il existe un code infini dans $[C]_{\Omega}$.

PREUVE DU LEMME.

- Comme C n'est pas un ifl-code :

$\exists\ \alpha, \beta \in C \ /\ \alpha \neq \beta$ et $\alpha C^{\Omega} \cap \beta C^{\Omega} \neq \emptyset$

- On a alors :

Fait 1. Il existe $i \in \mathbb{N}$ et quatre mots u, u', v, v' de X^{+} avec $u \neq u'$, $u \in \alpha C^{i-1}$, $u' \in \beta C^{i-1}$, $v \in C^{i}$, $v' \in C^{i}$ tels que : $uv^{\Omega} = u'v'^{\Omega}$.

PREUVE DU FAIT 1.
Comme C est rationnel, $\alpha C^{\Omega} \cap \beta C^{\Omega}$ est un langage rationnel de X^{Ω}, et donc il contient un mot w tel que :

$w = uv^{\Omega}$ avec $u \in \alpha C^{*}$ et $v \in C^{+}$

et $w = u'v'^{\Omega}$ avec $u' \in \beta C^{*}$ et $v' \in C^{+}$.
Il reste à voir que l'on peut se ramener au cas où :
$\exists\ i$ tel que $u,u',v,v' \in C^{i}$.
On peut déjà supposer que :
v et $v' \in C^{i}$
en remplaçant, s'il le faut, v (resp. v') par des puissances de v (resp. v').

On peut ensuite se ramener à :
$u \in C^j$ avec $j \leq i$
en prenant encore des puissances de v et de v' s'il le faut.
Maintenant, si $j < i$, on écrit :
$v = v_1v_2$ avec $v_2 \in C^j$
puis on remplace u par uv_1 et v par v_2v_1.
D'autre part : $u \in \alpha C^*$ et $u' \in \beta C^*$
donc : $u \neq u'$.■

On prouve alors que le langage $G = uv^*(C^i\backslash v) + (C^i\backslash u)$ est un code infini dans $[C]_\Omega$.

Déjà G appartient bien à $[C]_\Omega$ car :
- $G \subset C^*$ donc $G^\Omega \subset C^\Omega$
- $(C^i\backslash u)C^\Omega \subset GC^\Omega$
  $uv^*(C^i\backslash v)C^\Omega \subset GC^\Omega$
  $uv^\Omega = u'v'^\Omega$ avec $u \neq u'$ d'où $uv^\Omega \in (C^i\backslash u)C^\Omega$
Donc $C^\Omega \subset GC^\Omega$ d'où $G^\Omega = C^\Omega$.
D'autre part G est bien infini.
Il reste donc à voir que G est un code.

<u>Fait 2.</u> Si C est un code, u et v deux mots distincts de c alors $C' = uv^*(C\backslash v)+(C\backslash u)$ est un code.■

PREUVE DU FAIT 2.
Soient α et $\beta \in C'$ avec $\alpha C'^* \cap \beta C'^* \neq \emptyset$.
Comme $C' \subset C^+$, α ou β appartient à $uv^*(C\backslash v)$.
Supposons que c'est α, on peut écrire :
$\alpha = uv^jc$ avec $c \in (C\backslash v)$
Soit alors $uv^jcm \in \beta C'^*$ avec $m \in C'^*$.
Comme $\beta \in C'$, on a forcément : $\beta = uv^jc$.
Donc C' est un code.■

Maintenant comme C^i est un code, il découle du fait précédent que G est un code.■

PREUVE DE LA PROPOSITION 6.
(i) => (ii)
Si C est Ω-base, C est Ω-minimal donc fini et à fortiori rationnel. Le lemme 2 nous permet alors de conclure.

(ii) => (i)
Découle immédiatement de la proposition 5.■

Remarque : Il est intéressant de remarquer que, dans la proposition 6, l'hypothèse "C est une Ω-base" n'est pas suffisante pour l'implication (i) => (ii), comme le prouve l'exemple suivant.

Exemple 8. $C = (\varepsilon+b)(a+ab)$.
. C est un langage fini mais n'est pas un code.

. C est une Ω-base, car d'une part C est Ω-minimal, et d'autre part :
$FG(C^*) = C^*(\varepsilon+b) = C^++C^*(abb+babb)+b$

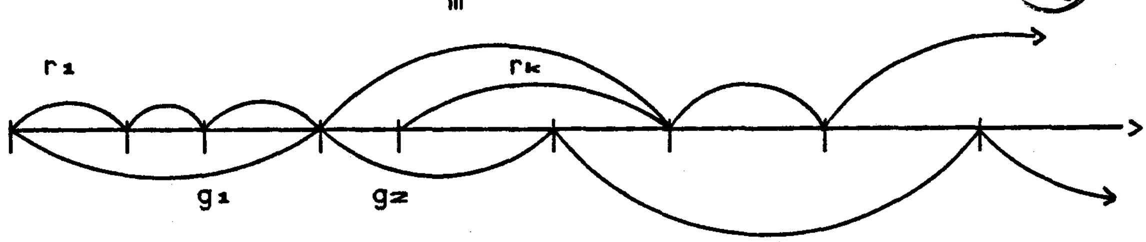
Or $b \notin C^{=}$ et aucun mot se terminant par bb ne peut appartenir à $C^{=}$ donc : $C^{=} \cap FG(C^*) \subset C^+$.
D'où $C^{=} = C^+$.

. Montrons maintenant (c'est le point intéressant) que tout Ω-minimal de $[C]_\Omega$ est fini.
Supposons que G soit un générateur Ω-minimal infini de $[C]_\Omega$, on sait (d'après la proposition IV.3) que $G = G \backslash GC^+$.
G étant infini et C fini, il existe une suite croissante de mots de C^+, (s_n) avec :

- $s_0 = \varepsilon$
- $\forall\ n \geq 0$, $s_{n+1} = s_n r_{n+1}$ avec $r_{n+1} \in C$
- $\forall\ n \geq 0$, $s_n C^+ \cap G$ est infini.

On a donc (car $GC^+ \cap G = \emptyset$) : $\forall\ n \geq 0$, $s_n \notin G$.

Posons $w = \overrightarrow{(s_n)} = r_1 \ldots r_n \ldots$
$w \in C^\Omega$ et donc $w \in G^\Omega$, ce qui se traduit par :
$w = g_1 \ldots g_n \ldots$ avec $g_n \in G$.
Soit alors $k \geq 0$ tel que : $g_1 < s_k$
notons $s_k = g_1 m$, on a :
$m \in FG(C^+) \cap FD(C^+)$



Or : $FG(C^+) \cap FD(C^+) = C^*+b$,
et comme on peut supposer que $|m| > 1$,
on obtient : $m \in C^+$
D'où : $g_1 m s_k C^+ = s_k C^+$ est infini, donc non vide,
ce qui contredit : $g_1 C^+ \cap G = \emptyset$.

Mais C n'est pas un code, donc à fortiori C n'est pas un ifl-code.∎

Remarque : D'un autre côté on peut avoir :
- C est une Ω-base,
- il existe un langage Ω-minimal infini dans $[C]_\Omega$,
- C n'est pas un code.

Exemple 9. $C = a+ab+ba$.
. C est un langage fini mais n'est pas un code.
. C est une Ω-base, car :
d'une part C est Ω-minimal
et d'autre part : $FG(C^*) = C^*(\varepsilon+b)$

Or : - $b \notin C^{=}$
- $\forall u \in C^*$, $(ua)b = u(ab) \in C^+$
- $\forall u \in C^*$, $(uab)b \notin C^{=}$ (car $uab^{\omega}aa^{\Omega} \notin C^{\Omega}$)
- De plus : $\forall u \in X^*$, $\forall w \in X^{\Omega}$
$ubbw \in C^{\Omega} \Rightarrow ub \in C^+$ et $bw \in C^{\Omega}$.
Donc si $(uba)b \in C^{=}$ alors $(uba)b \in C^+$.

D'où : $C^{=} = C^+$.

. Mais $a(ba)^*(ab+a)+ab+ba$ est un langage Ω-minimal infini dans $[C]_{\Omega}$.■

2. C est à la fois une Ω-base et un ifl-code fini

Nous commencerons par le cas particulier où l'ifl-code fini est un alphabet fini Y. Y satisfait clairement les hypothèses des propositions 3 et 5 et, comme [3] un code fini est complet à droite dans Y^* si et seulement si il est préfixe fini maximal, on peut énoncer les résultats suivant :

Proposition 7. Soit Y un alphabet fini, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $G \in [Y]_{\Omega}$.
(ii) $G \setminus GY^+$ est un code fini complet à droite dans Y^*.
(iii) $G \setminus GY^+$ est un code préfixe fini maximal.

Proposition 8. Soit Y un alphabet fini, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) G est un langage Ω-minimal de $[Y]_{\Omega}$.
(ii) G est un code préfixe fini maximal.

En considérant maintenant un code fini C (pas nécessairement un ifl-code) et en utilisant un morphisme de codage [3] d'un alphabet Y sur C, l'appartenance à $[C]_{\Omega}$ peut s'exprimer en termes d'appartenance à $[Y]_{\Omega}$. Rappelons déjà les deux définitions suivantes :

Définition :

Soit C un code sur l'alphabet X. Un **morphisme de codage pour C** est un morphisme injectif f de Y^* dans X^* où Y est un alphabet et tel que $f(Y) = C$.

Soit alors C' un code sur l'alphabet Y (avec alphabet(C') = Y), on appelle **composition de C' et de C** (par f) le code f(C') noté C'o C.

Proposition 9. Si C est à la fois un code (pas nécessairement un ifl-code) fini et une Ω-base, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $G \in [C]_{\Omega}$.
(ii) $G \subseteq C^+$ et G^{Ω} est une adhérence et $G \setminus GC^+ = C' o C$, où C' est code préfixe maximal (pas nécessairement fini) sur un alphabet Y.

PREUVE.

(i) => (ii)

Comme $G \in [C]_\Omega$, on a :

$G \subseteq C^+$ et G^Ω est une adhérence.

Soit f un morphisme de codage de Y sur C.

On sait que f est une bijection de Y^+ sur C^+.

Soit alors $C' = f^{-1}(G \backslash GC^+)$.

Or, d'après la corollaire 2 et la proposition 4, on déduit que :

$G \backslash GC^+$ est un code complet à droite dans C^*,

donc C' est un code complet à droite dans Y^*.

Comme $C' = f^{-1}(G) \backslash f^{-1}(G) f^{-1}(C^+)$, puisque $G \subseteq C^+$, on a :

$C' = f^{-1}(G) \backslash f^{-1}(G) Y^+$,

i.e. C' est préfixe.

on a alors le résultat d'après le théorème suivant :

théorème [3]. Soit P ($P \neq \varepsilon$) un langage préfixe. P est complet à droite si et seulement si P est un code préfixe maximal.

(ii) => (i)

C' étant un code préfixe maximal, par application du théorème précédent, C' est un code complet à droite dans Y^*,

et donc $f(C') = G \backslash GC^+$ est un code complet à droite dans C^*.

G est alors un ensemble complet à droite dans C^*.

Comme en outre G^Ω est une adhérence, grâce à la proposition 3, on conclut que $G \in [C]_\Omega$.■

Remarque : $G \backslash GC^+$ appartient toujours à $[C]_\Omega$, mais $C' \in [Y]_\Omega$ si et seulement si $G \backslash GC^+$ est un ensemble fini. Ce qui est le cas si on ajoute l'hypothèse "ifl-code", mais ce qui n'est pas forcément le cas sinon, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 7 (reprise). $C = aa+ba+baa$

- C est un code, mais pas un ifl-code
- Soit $G = aa+ba+baa(aa)^*(ba+baa)$
- $G = G \backslash GC^+ \in [C]_\Omega$
- Soit f le morphisme de code définie par :

$f(x) = aa$, $f(y) = ba$, $f(z) = baa$

On a : $C' = x+y+zx^*(y+z)$ et $c' \notin [Y]_\Omega$

Cependant C' est bien un code préfixe maximal infini et $C' \notin [x+y+z]_\Omega$, en effet $zx^\Omega \notin (C')^\Omega$.■

En supposant désormais que C est un ifl-code, on peut énoncer d'après les propositions 5 et 9 :

Proposition 10. Si C est à la fois un ifl-code fini et une Ω-base, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $G \in [C]_\Omega$.

(ii) $G \subseteq C^+$ et $G \backslash GC^+ = C' \circ C$, où C' est code préfixe fini maximal sur un alphabet Y.

La corollaire 2 et le corollaire 3 permettent de déduire deux caractérisations des générateurs Ω-minimaux de $[C]_\Omega$ qui ne font plus intervenir les puissances-Ω.

<u>Corollaire 4</u>. Si C est à la fois une Ω-base et un ifl-code fini, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) G est un générateur Ω-minimal de $[C]_\Omega$.
(ii) G est code fini complet à droite dans C^*.
(iii) $G \subseteq C^+$ et $G \backslash GC^+ = C' o C$, où C' est code préfixe fini maximal sur un alphabet Y.

3. Unicité du générateur de plus petite cardinalité

Enfin, examinons la question de l'unicité de l'élément de plus petite cardinalité de $[C]_\Omega$. Nous savons (proposition V-11) que, si C est une Ω-base, alors C est un élément de plus petite cardinalité de $[C]_\Omega$, mais que $[C]_\Omega$ peut contenir d'autres générateurs de plus petite cardinalité). Ici supposant en outre que C est un code, nous obtenons :

<u>Proposition 11</u>. Si C est à la fois une Ω-base et un code, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $2 \leq card(C) < \infty$.
(ii) C est l'unique élément de plus petite cardinalité de $[C]_\Omega$.

PREUVE.

non i) => non ii)
Si $card(C) = 1$ alors $C = \{u\}$ et on a alors :
$\forall n \geq 1$, $\{u^n\}$ est un générateur de plus petite cardinalité de C^Ω. Donc il y a une infinité de générateurs de plus petite cardinalité dans $[C]_\Omega$.

i) => ii)
Montrons tout d'abord le fait suivant :

<u>Fait</u>. Soit C une Ω-base fini. Si $[C]_\Omega$ contient un générateur G de plus petite cardinalité tel que $G \neq C$, alors il existe $c, c' \in C$ tels que $((C \backslash c)+cc') \in [C]_\Omega$.

PREUVE DU FAIT.
Soit G un générateur de plus petite cardinalité différent de C.
Soit alors $g = cg'$ avec $c \in C$ et $g' \in C^+$.

On va déjà voir que $G' = (G \backslash g)+c$ appartient à $[C]_\Omega$:
D'une part : $G' \subseteq C$
donc : $G'^\Omega \subseteq C^\Omega$
D'autre part :
$(G \backslash g)C^\Omega \subseteq G'C^\Omega$
$g'C^\Omega \subseteq C^\Omega$
d'où $gC^\Omega \subseteq cC^\Omega$

donc $GC^{\Omega} \subseteq G'C^{\Omega}$
i.e. $G^{\Omega} \subseteq G'G^{\Omega}$.
donc $G'^{\Omega} = G^{\Omega}$.

Comme $\mathrm{Card}(G') \leq \mathrm{Card}(G)$, G' est aussi un générateur de plus petite cardinalité de $[C]_{\Omega}$.
En répétant la construction précédente, on peut supposer que :
$G = (C\backslash c)+cg'$ avec $c \in C$ et $g' \in C^{+}$.
Posons alors $g' = c'g''$ avec $c' \in C$ et $g'' \in C^{*}$.
Il est facile de vérifier que $(C\backslash c)+cc'$ appartient à $[C]_{\Omega}$.∎

Supposons que G est un générateur de plus petite cardinalité de $[C]_{\Omega}$ tel que $G \neq C$.
D'après le fait il existe G' dans $[C]_{\Omega}$ tel que :
$G' \subseteq C^{2}$, $G' \neq C^{2}$ (car $\mathrm{Card}(C) \geq 2$),
ce qui est en contradiction avec le fait que C^{2} est un code (donc Ω-minimal dans $[C]_{\Omega}$).∎

Remarques :
- Comme nous l'avons déjà vu l'hypothèse "C est une Ω-base" n'est pas suffisante pour l'implication (i) => (ii), comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3 (reprise). $C = aa+aaa+b$
. C est une Ω-base
. C n'est pas un code
. $\mathrm{card}(C) = 3$
. mais C n'est pas l'unique élément de plus petite cardinalité de $[C]_{\Omega}$, en effet : $C' = aa+aaab+b$ en est un autre (plus précisément C et C' sont les deux seuls éléments de plus petite cardinalité de $[C]_{\Omega}$).∎

- D'un autre côté, une Ω-base peut vérifier les deux propriétés (i) et (ii) sans être un code.

Exemple 9 (reprise). $C = a+ab+ba$
. $\mathrm{card}(C) = 3$ et C est une Ω-base.
. C est l'unique élément de plus petite cardinalité, ceci d'après le fait vu dans la preuve de la proposition 11 et le fait que $C^{2} = a(a+ab+ba)+ab(ab+ba)+ba(a+ab+ba)$ est Ω-minimal.∎

- Et un code C peut vérifier les deux propriétés (i) et (ii) sans être une Ω-base.

Exemple 10. $C = (\varepsilon+b)(a+ab^{2})$
. C est un code
. $\mathrm{card}(C) = 4$
. on prouve (de la même façon que pour la preuve de la proposition 7, bien que C ne soit pas une Ω-base) que C est l'unique élément de plus petite cardinalité de $[C]_{\Omega}$.
. Mais C n'est pas une Ω-base, en effet :
$C^{\subseteq} =[(\varepsilon+b)(a+ab+ab^{2})]^{*}$
et $\mathrm{Prem}(C^{\subseteq}) = (\varepsilon+b)(a+ab+ab^{2})$
comme $C \subseteq \mathrm{Prem}(C^{\subseteq})$ et $C \neq \mathrm{Prem}(C^{\subseteq})$, C n'est pas une Ω-base.∎

C. LA FAMILLE $[R]_{\Omega}$ CONTIENT UN CODE PREFIXE FINI

Dans cette dernière partie nous supposerons que C est un code préfixe fini, mais qu'il n'est pas nécessairement l'Ω-base de $[C]_{\Omega}$, et nous allons montrer que $[C]_{\Omega}$ possède alors une Ω-base qui est un code préfixe fini -ce qui est plus fort que ifl-code fini-.

<u>Proposition 12</u>. Si C est un code préfixe fini, alors la famille $[C]_{\Omega}$ possède une Ω-base qui est le code préfixe $C^{=}\backslash C^{=}X^{+}$.

PREUVE.

Montrons d'abord :

<u>Fait 1</u>. $(C^*)^{-1}C^{=} = C^{=}$

PREUVE DU FAIT 1.

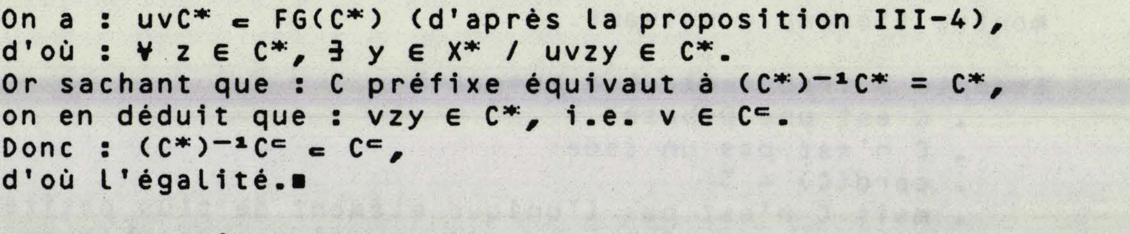
Soit uv un mot de $C^{=}$ où $u \in C^*$.
On a : $uvC^* \subset FG(C^*)$ (d'après la proposition III-4),
d'où : $\forall\ z \in C^*,\ \exists\ y \in X^*\ /\ uvzy \in C^*$.
Or sachant que : C préfixe équivaut à $(C^*)^{-1}C^* = C^*$,
on en déduit que : $vzy \in C^*$, i.e. $v \in C^{=}$.
Donc : $(C^*)^{-1}C^{=} \subset C^{=}$,
d'où l'égalité.∎

Montrons maintenant :

<u>Fait 2</u>. $(C^{=})^{-1}C^{=} \subset C^{=}$

PREUVE DU FAIT 2.

Supposons que $(C^{=})^{-1}C^{=}\backslash C^{=} \neq \emptyset$.
Soit alors $z \in (C^{=})^{-1}C^{=}\backslash C^{=}$.
Notons $E_z = \{m \in C^{=}\ /\ mz \in C^{=}\}$.
Par définition de z, E_z n'est pas vide.
On considère alors $u \in E_z$ tel que : $\forall\ m \in E_z,\ |u| \leq |m|$.
Comme $u^{\Omega} \in C^{\Omega}$, il existe $u_1, u_2 \in X^*$ et $i < j$ avec :
$u = u_1u_2$ et $u^iu_1 \in C^+$ et $u^ju_1 \in C^+$.



Comme $u_2 = (u^iu_1)^{-1}u^{i+1}$,
d'après le fait 1, on a : $u_2 \in C^{=}$.
De même, $u_2z = (u^iu_1)^{-1}(u^iuz)$ entraine que : $u_2z \in C^{=}$.
Donc : $u_2 \in E_z$
et comme u_2 est suffixe de u, on a : $u = u_2$ et $u_1 = \epsilon$

Il s'ensuit que : $u^i \in C^+$.
D'autre part : $u \in C^{=}$ et $uz \in C^{=}$ entrainent que $u^iz \in C^{=}$ (en effet on peut toujours supposer $i \geq 1$),
d'où l'on conclut que : $z \in C^{=}$,
ce qui contredit l'hypothèse.■

Nous prouvons pour terminer que, si l'on note :
$C' = C^{=} \setminus C^{=}X^+$, on a :

Fait 3. $C'^+ = C^{=}$.

PREUVE DU FAIT 3.
Déjà : $C'^+ \subset C^{=}$.
Inversement, soit $u \in C^{=} \cap C^{=}X^+$.
On peut écrire : $u = cu'$ avec $c \in C'$ et $u' \in X^+$.
D'après le fait 2, $u' \in C^{=}$.
Par induction sur la longueur des mots de $C^{=}$, on montre alors que : $C^{=} \subset C'^+$.■

Comme $C' \subset \mathrm{Prem}(C^{=})$, on en déduit que $C' = \mathrm{Prem}(C^{=})$.
Par ailleurs, C' étant préfixe est Ω-minimal dans $[C]_\Omega$ et C' est donc l'Ω-base de $[C]_\Omega$.■

Exemple 11. $C = aa+ab+b$
On a : $C^{=} = (a+b)^*$
$C^{=} \setminus C^{=}X^+ = a+b$, qui est bien l'$\Omega$-base de $[C]_\Omega$.■

Une conséquence immédiate de la proposition 12 est que, si $[R]_\Omega$ contient un code préfixe fini, alors $[R]_\Omega$ contient une Ω-base. Mais remarquons que les hypothèses plus faibles "$[R]_\Omega$ contient un code préfixe" ou bien "$[R]_\Omega$ contient un ifl-code fini" ne sont pas suffisantes comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 12. $C = a^*b$
- C est un code préfixe infini
- le plus grand générateur de $[C]_\Omega$ est $X^*bX^* = P$
- Or $\mathrm{Prem}(P) = a^*ba^*$ n'est pas un langage Ω-minimal car $C \subset \mathrm{Prem}(P)$ et $C \neq \mathrm{Prem}(P)$
- Donc $[C]_\Omega$ ne contient pas d'Ω-base.■

Exemple 10 (reprise). $C = (\varepsilon+b)(a+ab^2)$
- C est un code fini à délai borné 2, et donc un ifl-code
- Mais nous avons vu que $[C]_\Omega$ ne contient pas d'Ω-base.■

Faisons une dernière remarque sur les codes préfixes. Les propositions 5 et 12 permettent de déduire que : C code préfixe infini implique $[C]_\Omega$ ne contient pas de code préfixe fini. Mais plus généralement, nous avons :

Proposition 13. Si C est un code préfixe infini, alors C^Ω n'est pas une adhérence (et à fortiori $[C]_\Omega$ ne contient pas de langage fini).

PREUVE.

Supposons que C^Ω est une adhérence, on a donc :
$Adh(C) \subset C^\Omega$.
Comme C est un langage infini, $Adh(C) \neq \emptyset$.
Soit alors $w \in Adh(C)$, on peut écrire :
$w = c_1 \ldots c_n \ldots$ avec $\forall\, n \geq 1,\ c_n \in C$.
Or c_1c_2 doit être facteur gauche d'un mot de C,
ce qui est impossible car $c_1 < c_1c_2$ et $c_2 \neq \varepsilon$.■

Remarque : cette propriété reste vraie lorsque C est un code infini à délai borné, mais elle est fausse lorsque C est seulement un ifl-code infini.

Exemple 13. $C = ba+ca+b(ac)^*$

. C est un ifl-code, car le seul Ω-mot pouvant avoir deux décompositions sur C ne peut être que $b(ac)^\Omega$. Et comme $b(ac)^\Omega$ a pour unique décomposition sur C : $ba(ca)^\Omega$, C est un ifl-code.

. C est une Ω-base, car :
$FG(C) = C+c+\varepsilon$
donc $FG(C^*) = C^*+C^*c$
Or : - $c \notin C^=$ (car $c^\Omega \notin C^\Omega$)
- $c^*(ba)(ca)^*c \subset C^*b(ac)^+ \subset C$
- $c^*b(ac)^*(ca)^*c \cap C^= = \emptyset$
- $(ca)^+c \cap C^= = \emptyset$
Donc $C^= \subset C^+$, d'où C est l'Ω-base de $[C]_\Omega$.

. C^Ω est une adhérence, en effet
$Adh(C) = b(ac)^\Omega = ba(ca)^\Omega \subset C^\Omega$.■

Remarquons pour terminer cette partie que, étant donné un langage rationnel R, on peut décider si $[R]_\Omega$ possède ou non un code préfixe <u>fini</u>. Mais les questions plus générales suivantes ne sont pas résolues : décider si $[R]_\Omega$ possède un code préfixe ou un ifl-code ou enfin un ifl-code fini.

D. RECAPITULATIF

Nous résumons ici les résultats concernant les générateurs Ω-minimaux. Les différentes hypothèses envisagées 1), 2), 3) et 4) sont de plus en plus fortes et permettent de donner des résultats de plus en plus précis.

1) C est une Ω-base et un code :

. $\forall$ G $\in [C]_\Omega$, G contient (au moins) un générateur Ω-minimal qui est $G \backslash GC^+$.

. Les générateurs Ω-minimaux de $[C]_\Omega$ sont exactement les codes appartenant à $[C]_\Omega$.

2) C est une Ω-base et un code et C^Ω est une adhérence :

G est un générateur Ω-minimal de C^Ω si et seulement si G est un code complet à droite dans C^* et G^Ω est une adhérence.

3) C est une Ω-base et un code fini :

G est un générateur Ω-minimal <u>fini</u> de C^Ω si et seulement si G est un code fini complet à droite dans C^*.

4) C est une Ω-base et un ifl-code fini :

G est un générateur Ω-minimal de C^Ω si et seulement si G est un ifl-code fini complet à droite dans C^*.

CHAPITRE VII

LA FAMILLE $[R]_{\Omega}$ QUAND R EST UN IDEAL

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, les parties B à D sont consacrées à la famille $[I]_\Omega$ quand I est un idéal (i.e. $X^*IX^* = I$) ou - ce qui revient au même pour $[I]_\Omega$ - un idéal gauche (i.e. $X^*I = I$). Dans la partie E, nous étudions le cas plus général où I est un idéal droit (i.e. $IX^* = X^*$).

Nous commençons dans la partie A par rappeler les définitions et par montrer que R^Ω est déterministe quand R est un idéal gauche ou droit.

Nous montrons ensuite dans la partie B que supposer que I est un idéal ou supposer que I est seulement un idéal gauche ne change pas la famille $[I]_\Omega$. Nous verrons dans la partie E que le cas des idéaux droits est très différent. Remarquant que $I^= = X^+$, nous déduisons que tous les Ω-minimaux de $[I]_\Omega$ sont des codes préfixes et que tout générateur de $[I]_\Omega$ contient un générateur Ω-minimal (réponse oui à Q2 ici). Nous montrons aussi que, pour R langage rationnel, si $R^=$ est un idéal, alors $R^= = X^+$. Le dernier résultat affirme que I^Ω n'est une adhérence que si $I^\Omega = X^\Omega$, c'est-à-dire que, sauf dans ce cas "dégénéré", I^Ω est déterministe mais n'est pas une adhérence.

Dans la partie C nous donnons deux caractérisations de "$[R]_\Omega$ contient un idéal" dont l'une permet de décider si $[R]_\Omega$ contient un idéal.

Dans la partie D nous étudions la sous-famille des idéaux de $[I]_\Omega$. Si G appartient à $[I]_\Omega$, X^*G n'appartient pas nécessairement à $[I]_\Omega$; nous voyons que c'est vrai si et seulement si I est un idéal et que dans tous les cas il existe un entier n (calculable) tel que : pour tout $G \in [I]_\Omega$, $X^*G^n \in [I]_\Omega$. En outre, $[I]_\Omega$ possède un plus grand idéal qui contient tous les idéaux de $[I]_\Omega$.

Nous supposerons maintenant que I est seulement un idéal droit. Nous verrons dans un premier temps par des exemples que le cas des idéaux droits (non idéaux) est très différent du cas des idéaux (ce qui n'est pas surprenant!). Notamment la partie préfixe d'un idéal droit D n'a pas la même puissance-Ω que D et de plus $D^=$ n'est pas un idéal droit. Pour la "quête" des générateurs Ω-minimaux, les interrogations du cas général se retrouvent ici et nous n'obtenons aucun résultat supplémentaire. En revanche, nous donnons une caractérisation de "D^Ω est une adhérence". Nous obtiendrons aussi le résultat suivant dont la réciproque est fausse : si la partie préfixe de D est finie, alors $D^=$ est le plus grand élément de $[D]_\Omega$. Enfin nous verrons que l'on peut décider si $[R]_\Omega$ contient ou non un idéal droit. Remarquons que dans le cas particulier où D est un idéal, les résultats de cette partie sont alors souvent des trivialités.

A. PRELIMINAIRES

Définitions :

I est un **idéal** de X^* si et seulement si $X^*IX^* = I$
I est un **idéal gauche** (resp. **droit**) de X^* si et seulement si $X^*I = I$ (resp. $IX^* = I$)

Remarque : un idéal est à fortiori un idéal gauche et un idéal droit.

Nous rappelons [17] le résultat :

Lemme 1. I étant un idéal gauche, notons P la partie préfixe de I, on a : $I^\Omega = \overrightarrow{P^*}$.

PREUVE.

$P = I \setminus IX^+$

Comme P est préfixe, on a : $\overrightarrow{P^*} = P^\Omega$

D'autre part :

$P \subset I \quad \Rightarrow \quad P^\Omega \subset I^\Omega$

$I^\Omega \subset PI^\Omega \quad \Rightarrow \quad I^\Omega \subset P^\Omega$

D'où : $I^\Omega = P^\Omega = \overrightarrow{P^*}$.■

D'autre part, pour les idéaux droits, nous allons montrer :

Lemme 2. D étant un idéal droit, notons P la partie préfixe de D, on a : $D^\Omega = \overrightarrow{PX^*P}$.

PREUVE.

$P = D \setminus DX^+$

P étant préfixe,

- d'une part : $\overrightarrow{PX^*P} = P\,\overrightarrow{(X^*P)}$
- d'autre part, en utilisant le fait suivant :

Fait : Si A est préfixe, alors $\overrightarrow{(X^*A)} = (X^*A)^\Omega$

$\overrightarrow{X^*P} = (X^*P)^\Omega$

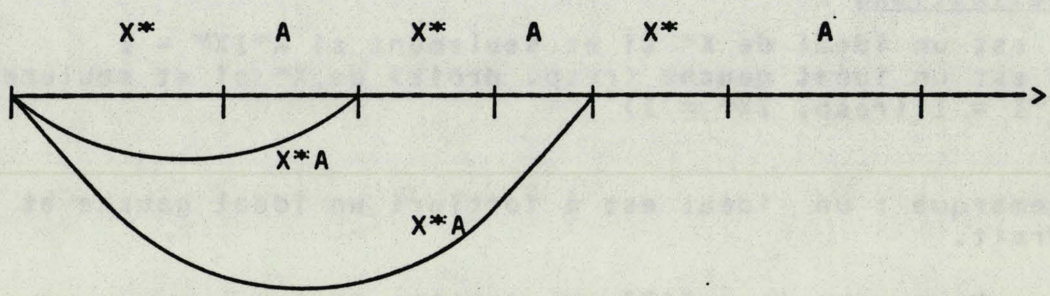
D'où : $\overrightarrow{PX^*P} = P(X^*P)^\Omega = (PX^*)^\Omega$

Et comme D est un idéal droit, on a : $PX^* = D$

d'où le résultat.■

PREUVE DU FAIT.

Il est évident que : $(X^*A)^\Omega \subset \overrightarrow{X^*A}$



Inversement, soit $w \in \overrightarrow{X^*A}$
il existe une suite $(x_i a_i)$ strictement décroissante de facteurs gauches de w, avec : $\forall\ i \geq 1,\ x_i \in X^*,\ a_i \in A$.
Comme A est préfixe, pour tout $n > 0$, il existe un nombre fini (inférieur strictement à n) d'indices i tels que : $|x_i| < n$.
Et donc : $w \in (X^*A)^\Omega$.■

Remarque : Si A n'est pas préfixe, le fait précédent n'est en général pas vérifié. Il suffit de prendre $A = ba^*$ et on a :

$ba^\Omega \in \overrightarrow{X^*A}$ et $ba^\Omega \notin (X^*A)^\Omega$.

Des deux lemmes précédents, on déduit immédiatement :

<u>Proposition 1</u>. R étant un idéal gauche ou un idéal droit, on a: $R^\Omega \in DRat(X^\Omega)$.

Dans toute la suite de cette partie, I désigne un idéal, D un idéal droit et R un rationnel quelconque.

B. Ω-MINIMAUX DE $[I]_\Omega$ AVEC I IDEAL

<u>Lemme 3</u>. Soit $R \in Rat(X^+)$. $[R]_\Omega$ contient un idéal si et seulement si $[R]_\Omega$ contient un idéal gauche.

PREUVE.
Si $[R]_\Omega$ contient un idéal I, alors $[R]_\Omega$ contient l'idéal gauche I.
Réciproquement, si $[R]_\Omega$ contient l'idéal gauche G, alors l'idéal GX^* appartient à $[R]_\Omega$.■

Lemme 4. Soit I un idéal, $I^{\subseteq}$ est l'idéal X^+.

PREUVE.

Soit $u \in X^+$.
Pour tout $m \in I$, on a : $um \in I$
d'où : $umI^{\Omega} \subseteq I^{\Omega}$
donc : $uII^{\Omega} \subseteq I^{\Omega}$
c'est-à-dire : $uI^{\Omega} \subseteq I^{\Omega}$.■

On en déduit immédiatement, d'après la proposition IV-3 :

Proposition 2. Soit I un idéal, pour tout $G \in [I]_{\Omega}$, $G\backslash GX^+$ est un générateur Ω-minimal de $[I]_{\Omega}$. En conséquence, tous les générateurs Ω-minimaux de $[I]_{\Omega}$ sont des préfixes et tout générateur de $[I]_{\Omega}$ contient un générateur Ω-minimal.

Remarquons que ce générateur minimal, inclus dans G, n'est pas nécessairement unique.

Exemple 1. $I = X^*(aa+bb)X^*$
$I+a \in [I]_{\Omega}$, et $I+a$ n'est pas un idéal
$I\backslash IX^+ = (\varepsilon+b)(ab)^*aa+(\varepsilon+a)(ba)^*bb$
$I\backslash IX^+$ est un générateur minimal inclus dans I donc aussi dans $I+a$.
Mais on a aussi :
$(I+a)\backslash(I+a)X^+ = a+b(ab)^*aa+(ba)^*bb$,
qui est un autre générateur minimal inclus dans $I+a$.■

Pour ce qui est des générateurs fg-minimums de $[I]_{\Omega}$, on a vu dans le chapitre 4 que pour l'exemple précédent $[I]_{\Omega}$ n'en possède pas (cf. exemple 8 du chapitre 4).

Etant donné un langage rationnel R quelconque, nous savons que $R^{\subseteq}$ est un semi-groupe. Peut-il être un idéal ?

Proposition 3. Soit R un langage rationnel, $R^{\subseteq}$ est un idéal si et seulement si $R^{\subseteq} = X^+$.

PREUVE.

Si $R^{\subseteq} = X^+$, alors $R^{\subseteq}$ est un idéal.

Réciproquement, $R^{\subseteq}$ étant un idéal, on a :
$\forall u \in X^+, \forall m \in R : m \in R^{\subseteq}$
d'où : $um \in R^{\subseteq}$
et donc : $umR^{\Omega} \subseteq R^{\Omega}$,
ceci pour tout $m \in R$, d'où le résultat.■

<u>Proposition 4</u>. **Soit I un idéal de X^+. Les propriètés suivantes sont équivalentes**

(i) $I^= \in [I]_\Omega$

(ii) I^Ω est une adhérence

(iii) $I^\Omega = X^\Omega$

(iv) $[I]_\Omega$ contient un langage fini

(v) $[I]_\Omega$ a une Ω-base

(vi) $X^*\backslash I$ est fini.

PREUVE.

(i) => (ii)
car : I^Ω est alors finiment engendré.

(ii) => (iii)
car : $I^= = X^+$ appartient alors à $[I]_\Omega$.

(iii) => (iv)
Immédiat.

(iv) => (v)
car : I^Ω est alors une adhérence,
et donc, d'après (ii) => (iii) : $I^\Omega = X^\Omega$,
d'où : X est l'Ω-base de $[I]_\Omega$

(v) => (i)
car, (d'après la proposition 2) :
l'Ω-base B de $[I]_\Omega$ est préfixe
Partant de $I \subset B^*$, on déduit alors :
$X^* \subset I^{-1}I \subset (B^*)^{-1}B^*$
Comme B est préfixe, on a : $(B^*)^{-1}B^* = B^*$
donc : $X^* \subset B^*$,
et à fortiori : $X^\Omega \subset B^\Omega$, d'où le résultat.

(vi) => (i)
$X^*\backslash I$ étant fini, il existe n tel que $X^n \subset I$
d'où $(X^n)^\Omega \subset I^\Omega$ et finalement $X^\Omega = I^\Omega$.

(i) => (vi)
Supposons que $X^*\backslash I$ soit infini.
I étant un idéal, $X^*\backslash I$ est fermé par facteur gauche
et donc : $\overrightarrow{X^*\backslash I} = Adh(X^*\backslash I)$.
D'où : $\overrightarrow{X^*\backslash I} \neq \emptyset$,
soit alors $u \in \overrightarrow{X^*\backslash I}$, $u \notin IX^\Omega$
et donc à fortiori : $u \notin I^\Omega$,
d'où $X^\Omega \neq I^\Omega$.∎

Remarque : Sans l'hypothèse "I idéal", ces équivalences ne tiennent plus.

C. CARACTERISATIONS DE "$[R]_\omega$ CONTIENT UN IDEAL"

Lemme 5. Soit R un langage rationnel. Si $R^{=} = X^+$, alors $R^\omega \in DRat(X^\omega)$.

PREUVE.

D'après la proposition IV-3, comme $R^{=} = X^+$ on sait que :
$P = R\setminus RX^+ \in [R]_\omega$.
P étant alors préfixe, on a :

$$P^\omega = \overrightarrow{P^*}.$$

D'où : $R^\omega \in DRat(X^\omega)$.■

Lemme 6. Soit $R \in Rat(X^+)$. Si $R^{=} = X^+$, alors il existe un entier $n \geq 1$ tel que : $\forall\ G \in [R]_\omega$, $X^*G^n \in [R]_\omega$.

PREUVE.

D'après le Lemme 5, $R^\omega \in DRat(X^\omega)$.
Soit $A = (X,Q,q_0,*,T)$ un automate déterministe reconnaissant R^ω, notons $n = card(Q)+1$.
On montre que : $\forall\ G \in [R]_\omega$, $X^*G^n \in [R]_\omega$.

Déjà : $G^n \subset X^*G^n$
d'où : $G^\omega \subset (X^*G^n)^\omega$

Inversement :
Soit $w = u_1v_1u_2v_2\ldots$ un mot de $(X^*G^n)^\omega$,
où $u_i \in X^*$ et $v_i \in G^n$.
On utilise le fait suivant :

Fait. $\forall\ i \geq 1$: lecture $(q_0*u_1v_1\ldots v_{i-1}u_i, v_i) \cap T \neq \emptyset$

ce qui prouve que : Inf [lecture (q_0,w)] $\neq \emptyset$
donc que : $w \in G^\omega$.■

PREUVE DU FAIT.
Notons :

$u_1v_1\ldots v_{i-1}u_i = U$
$v_i = r_1\ldots r_n$ où $\forall\ j \leq n$, $r_j \in G$
$u_{i+1}v_{i+1}\ldots = W$
$q_0*U = q$

On a : $card\{q*r_1\ldots r_j,\ 1 \leq j \leq n\} \leq n-1$,
donc il existe k et j avec $1 \leq k < j \leq n$ tels que :

$q*r_1\ldots r_k = q*r_1\ldots r_j$

Or comme : $Ur_1\ldots r_k(r_{k+1}\ldots r_j)^\omega \in X^*G^\omega \subset G^\omega$
on a : Inf [lecture$(q_0,Ur_1\ldots r_k(r_{k+1}\ldots r_j)^\omega$)] $\cap T \neq \emptyset$
ce qui entraine, car l'automate est déterministe :

lecture$(q_0*Ur_1\ldots r_k, r_{k+1}\ldots r_j) \cap T \neq \emptyset$

d'où à fortiori : lecture$(q_0*U,v_i) \cap T \neq \emptyset$.■

On en déduit une caractérisation de "$[R]_\Omega$ possède un idéal":

<u>Proposition 5</u>. Soit $R \in Rat(X^+)$. La famille $[R]_\Omega$ possède un idéal si et seulement si $R^{\subseteq} = X^+$.

En conséquence du lemme 6 et de la proposition 5, on a alors :

<u>Corollaire 1</u>. Soit $R \in Rat(X^+)$. On peut décider si $[R]_\Omega$ contient ou non un idéal et en construire un (s'il en existe).

Nous donnons maintenant une autre caractérisation de "$[R]_\Omega$ contient un idéal" qui passe par la notion de "code sémaphore" [3].

<u>Définition</u> :

On appelle code sémaphore tout code de la forme : $X^*S \setminus X^*SX^+$ où S est un langage non vide de X^+.

En d'autres termes, un code sémaphore est la partie préfixe d''un idéal gauche.

<u>Proposition 6</u>. Soit $R \in Rat(X^+)$. La famille $[R]_\Omega$ possède un idéal si et seulement si $[R]_\Omega$ possède un code sémaphore.

PREUVE.

Si $[R]_\Omega$ possède l'idéal I, alors le code sémaphore $I \setminus IX^+$ appartient à $[R]_\Omega$ (d'après la proposition 2).

Réciproquement :
soit $C = X^*S \setminus X^*SX^+$ un code sémaphore.
On vérifie alors facilement que CX^* est un idéal qui appartient à la famille $[C]_\Omega$.■

Remarque : Si tous les Ω-minimaux de $[R]_\Omega$ sont alors des préfixes, ils ne sont pas tous des codes sémaphores.

Exemple 1 (reprise). $I = X^*(aa+bb)X^*$
Soit $L = a + b(ab)^*aa + (ba)^*bb$.
On a vu que L est un générateur minimal dans $[I]_\Omega$.
Mais L n'est pas un code sémaphore, sinon :
$\exists\ S \subseteq X^+ \ / \ L = X^*S \setminus X^*SX^+$
or : $a \in L \Rightarrow a \in S$ (car $S \subseteq X^+$)
Et donc baa par exemple appartient à X^*SX^+, ce qui n'est pas car baa appartient à L.■

D. SOUS-FAMILLE DES IDEAUX DE $[I]_n$

D'après le lemme 6 et la proposition 5, on déduit :

Proposition 7. Soit I un idéal de $Rat(X^+)$. Il existe un entier n calculable, tel que, pour tout $G \in [I]_n$, l'idéal $X^*G^nX^*$ appartienne à $[I]_n$.

En général, X^*G n'appartient pas à $[I]_n$ et même G peut n'être inclus dans aucun idal de $[I]_n$.

Exemple 1 (reprise). $I = X^*(aa+bb)X^*$ et $G = I+a$
$(ba)^n \notin I^n$
donc : $\forall R \in [I]_n$, $ba \notin R$
et à fortiori : $\forall I' \in [I]_n$, avec I' idéal : $G \not\subseteq I'$.∎

Nous donnons maintenant une caractérisation de "tout générateur de $[I]_n$ est inclus dans un idéal de $[I]_n$".

Proposition 8. Soit $R \in Rat(X^+)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) Pour tout $G \in [R]_n$, l'idéal $X^*GX^* \in [R]_n$
(ii) R^d est un idéal.

PREUVE.
(ii) => (i)
Si R^d est un idéal, alors R^d est un semi-groupe et est donc le plus grand élément de $[R]_n$.
Or : $\forall G \in [R]_n$, $G \subseteq R^d$.
On a alors : $G \subseteq X^*GX^* \subseteq X^*R^dX^* = R^d$,
i.e. $X^*GX^* \in [R]_n$.

(i) => (ii)
$X^*GX^* \in [R]_n$
donc $[R]_n$ contient un idéal, d'où $R^n \in DRat(X^n)$.
Supposons R^d non idéal, i.e. :
$\exists\, u \in R^d$, $\exists\, x,y \in X^*$ avec $xuy \notin R^d$
Sachant que R^n est déterministe, on a :
$\exists\, G \in [R]_n$ avec $u \in G$ (d'après le lemme III.4)
d'où $xuy \in X^*GX^*$
Or $X^*GX^* \in [R]_n$ et est donc inclus dans R^d,
d'où $xuy \in R^d$: contradiction.∎

Nous voyons donc que n vaut 1 dans la proposition 7 si et seulement si I^d est un idéal; en revanche, l'exemple suivant montre qu'il n'éxiste pas de valeur de n assurant que I^d soit un semi-groupe.

Exemple 3. $\forall\, n > 1$, notons $I_n = X^*a^nX^*$
Il est facile de voir que : $\forall\, n > 1$
. $I_n^d = a+a^2+...+a^{n-1}+I_n$
. I_n^d est un semi-groupe (mais n'est pas un idéal) et est donc le plus grand élément de $[I_n]_\Omega$
. Mais : $X^*(I_n)^{n-1} \notin [I_n]_\Omega$, car $(ba^{n-1})^\Omega \notin I_n^\Omega$.■

Remarques :
- I^d peut être un idéal.

Exemple 4. $I = X^*(ab+aa)X^*$
I^d est alors l'idéal X^*aX^*.■

- I^d peut être un semi-groupe non idéal.

Exemple 5. $I = X^*ab^2X^*$
. Un mot $u \in I^d$ si et seulement si :
ou : $u \in I$
ou : $u \in I_1$, avec $I_1 = b(X^*\backslash I)ab$
ou : $u \in I_2$, avec $I_2 = b^2(X^*\backslash I)a$
. I^d n'est pas un idéal, car :
$a \in X^*$ et $bab \in I^d$, mais $(baba)^\Omega \notin I^\Omega$
et donc $baba \notin I^d$.
. I^d est un semi-groupe, car :
$(I_1)^2 \subset I$
$I_1I_2 \subset I$
$(I_2)^2 \subset I$
$I_2I_1 \subset I+I_1$

- I^d peut ne pas être un semi-groupe (et à fortiori pas un idéal).

Exemple 6. $I = X^*a(b^2+a)X^*$
. Un mot u appartient à I^d si et seulement si :
ou : $u \in I$
ou : $u \in b(X^*\backslash I)ab$
ou : $u \in b^2(X^*\backslash I)a$
ou : $u \in a(X^*\backslash I)a$
ou : $u = a$
. I^d n'est pas un semi-groupe, car :
$a \in I$, $bab \in I$, mais $(abab)^\Omega \notin I^\Omega$.■

Ce dernier exemple montre en outre (d'après la proposition III.7) que $[I]_\Omega$ n'admet pas toujours de plus grand élément; en revanche, la sous-famille des idéaux contient toujours un plus grand idéal.

<u>Proposition</u> 9. Soit I un idéal de Rat(X^+). $[I]_\Omega$ possède un plus grand idéal qui est rationnel et constructible.

PREUVE.
Notons $I' = \{u \in I^d \ / \ X^*uX^* \subset I^d\}$
Déjà I' est le plus grand idéal inclus dans I^d, en effet: supposons I' non idéal, on a alors :
$\exists\, i \in I'$, $\exists\, x,y \in X^* \ / \ xiy \notin I'$

or comme $i \in I'$: $x_1y \in I^d$
ce qui contredit le fait que : $i \in I'$.

D'autre part, soit K un idéal de $[I]_\Omega$,
on sait que : $K \subseteq I^d$
et comme $X^*KX^* = K$, on a : $K \subseteq I'$.

On montre maintenant que $I' \in [I]_\Omega$.
Comme $I \subseteq I'$, on a : $I^\Omega \subseteq I'^\Omega$.
Inversement :
on reprend l'automate déterministe de la preuve du lemme 6
reconnaissant I^Ω.
Soit $w \in I'^\Omega$, on peut écrire :
$w = u_1u_2 \ldots u_j \ldots$ avec $\forall\, j \geq 1$, $u_j \in I'^{n}$
et on montre que :
$\forall\, j \geq 1$: lecture $(q_0 * u_1 \ldots u_{j-1}, u_j) \cap T \neq \emptyset$
(même genre de preuve que pour le fait utilisé dans le
lemme 6)
Donc $w \in I^\Omega$.
I' est rationnel et constructible car il est saturé par la
congruence de Nérode associée à I^d. ∎

Exemple 5 (reprise). $I = X^*ab^2X^*$
Déterminons le plus grand idéal I'.
On voit que : $X^*I_2X^* \subseteq I^d$
D'autre part, notons $J = \varepsilon + a(a+ba)^*(\varepsilon + b)$
sachant que : $X^* \backslash I = b^*J$
on arrive à : $X^*bb^+JabX^* \subseteq I$
mais : $\forall\, u \in bJab$, $(ua)^\Omega \notin I^\Omega$.
On a donc : $I' = X^*(ab^2 + I_2 + bb^+Jab)X^*$.
I^d est un semi-groupe et est donc le plus grand élément de
$[I]_\Omega$. Mais ce n'est pas un idéal.
Donc le plus grand idéal I' de $[I]_\Omega$ n'est pas I^d et n'est
donc pas un générateur maximal de $[I]_\Omega$. ∎

Le plus grand idéal de $[I]_\Omega$ n'est donc pas nécessairement un générateur maximal de $[I]_\Omega$, plus précisément nous avons :

<u>Proposition 10</u>. Soit I un idéal, notons I' le plus grand idéal de $[I]_\Omega$. I' est un générateur maximal si et seulement si I' est le plus grand élément de $[I]_\Omega$.

PREUVE.
Supposons que I' ne soit pas le plus grand élément de $[I]_\Omega$,
I' est alors strictement inclus dans I^d,
d'où : $\exists\, u \in I^d \backslash I'$
$(I'+u)$ appartient alors à $[I]_\Omega$, en effet :
comme $u^*I' = I'$, on a : $(I'+u)^\Omega = I'^\Omega + I'u^\Omega$
or $u^\Omega \in I'^\Omega$, d'où : $(I'+u) \in [I]_\Omega$
et donc I' n'est pas maximal dans $[I]_\Omega$.

Réciproquement, si I' est le plus grand élément de $[I]_\Omega$, il est maximal dans $[I]_\Omega$. ∎

D'autre part,

Proposition 11. Soit I un idéal, $[I]_\Omega$ ne contient jamais de plus petit idéal.

PREUVE.
Supposons que J soit le plus petit idéal de $[I]_\Omega$.
Soit I' le plus grand idéal de $[I]_\Omega$,
et soit u un mot de plus petite longueur de I'.
Comme $u^\Omega \in J^\Omega$ et que J est un idéal, on déduit :
$\exists\ i > 0$ tel que $u^i \in J$.
Or $u^i \notin I'^{i+1}$, d'où la contradiction car $I'^{i+1} \in [I]_\Omega$.■

E. CAS DES IDEAUX DROITS

Contrairement aux idéaux gauches, $[D]_\Omega$ contient un idéal droit n'implique pas que $[D]_\Omega$ contienne un idéal.

Exemple 7. $D = aX^*$
$D^{\subseteq} = D$, qui est différent de X^+
donc d'après le lemme 2, $[D]_\Omega$ ne contient pas d'idéaux.■

Contrairement aux idéaux gauches (où $I^{\subseteq}$ était l'idéal X^+), $D^{\subseteq}$ n'est pas toujours un idéal droit.

Exemple 8. $D = aaaX^*$
$D^{\subseteq} = D^{\supseteq} = a+aa+aaaX^*$, qui n'est pas un idéal droit.■

Exemple 9. $D = a^*bX^*$ avec $X = a+b+c$
$D^{\subseteq} = a^++D$ et $D^{\supseteq} = D$, donc ici $D^{\subseteq}$ n'est pas un idéal droit, mais $D^{\supseteq}$ en est un.■

D'autre part $D\backslash DD^{\subseteq}$ n'est pas toujours un langage minimal de $[D]_\Omega$.

Exemple 10. $D = (a^*d+(ba)^*c)X^*$, avec $X = a+b+c+d$
Nous avons $D^{\subseteq} = D$, d'où $D\backslash DD^{\subseteq} = \mathrm{Prem}(D)$.
$dba \in \mathrm{Prem}(D)$ car $ba \notin D$ et $a \notin D$.
De plus $dbaD \subset (d+db)D$, en effet :
$(dba)(a^*dX^*) = (db)(a^+dX^*) \subset dbD$
et $(dba)((ba)^*cX^*) = d(ba)^+cX^* \subset dD$
comme $d \in \mathrm{Prem}(D)$ et $db \in \mathrm{Prem}(D)$, il s'en suit que $\mathrm{Prem}(D)$ n'est pas Ω-minimal dans $[D]_\Omega$.■

Pour ce qui est de la partie préfixe d'un idéal droit, nous avons :

Proposition 12. Soit D un idéal droit. La partie préfixe de D (i.e. $D\backslash D\ X^+$) appartient à $[D]_\Omega$ si et seulement si $[D]_\Omega$ contient un idéal.

PREUVE.

Notons $P = D \backslash DX^+$.

Si $P \in [D]_\Omega$, alors on a :

$\forall m \in P, \forall u \in X^+ : mu \in D$

d'où : $muD^\Omega \subseteq P^\Omega$

or comme P est préfixe, on a alors : $muD^\Omega \subseteq mP^\Omega$

d'où : $uD^\Omega \subseteq P^\Omega$

c'est-à-dire : $uD^\Omega \subseteq D^\Omega$

donc : $D^= = X^+$

et d'après la proposition 5, $[D]_\Omega$ possède un idéal.

La réciproque découle directement de la proposition 2.■

Aux vues de l'exemple 10 et de la proposition 12, il semble donc que l'hypothèse "D est un idéal droit (non idéal)" n'apporte rien pour la recherche des Ω-minimaux dans $[D]_\Omega$.

Remarque : Notons cependant que le résultat de la proposition 12 est faux en ne supposant pas que D est un idéal droit.

Exemple 11. $R = a+ba$

$R \backslash RX^+ = R \in [R]_\Omega$

mais $[R]_\Omega$ ne contient pas d'idéaux, sinon comme R^Ω est une adhérence (car R est fini), d'après la proposition 3, on aurait : $R^\Omega = X^\Omega$, ce qui n'est pas.■

Nous avons vu (exemple 7) que $R^=$ et R^d peuvent être des idéaux droits différents de X^+. Cependant, avec l'hypothèse "$R^\Omega \in DRat(X^\Omega)$", si R^d est un idéal droit, il appartient alors à $[R]_\Omega$ (d'après la proposition III.7). En ce qui concerne $R^=$, nous avons :

<u>Proposition 13</u>. Soit $R \in Rat(X^+)$. Si $R^\Omega \in DRat(X^\Omega)$ et $R^=$ est un idéal droit, alors $[R]_\Omega$ contient un idéal droit (mais qui n'est pas nécessairement $R^=$).

PREUVE.

D'après le lemme III-6, $G = R^\cap R^=$ appartient à $[R]_\Omega$ et comme $R^=$ est ici un idéal droit, G est aussi un idéal droit, ce qui donne le résultat.

Il reste à voir que $R^=$ n'appartient pas nécessairement à $[R]_\Omega$. Pour cela prenons $R = aX^*b$, on a alors $R^= = aX^*$ qui n'appartient pas à $[R]_\Omega$.■

Nous regardons maintenant le cas où D^Ω est une adhérence qui ici n'est pas réduit au cas trivial $D^\Omega = R^\Omega$.

Exemple 12. $D = (a+bb)X^*$

Comme $Adh(D) \subseteq D^\Omega$, il s'ensuit que D^Ω est une adhérence.

Mais $D^\Omega \neq X^\Omega$, en effet par exemple $(ba)^\Omega \notin D^\Omega$.■

Proposition 14. Soit D un idéal droit. D^{Ω} est une adhérence si et seulement si Prem(D) (i.e. $D\backslash DD^{+}$) est de cardinal fini.

PREUVE.

Si D^{Ω} est une adhérence, $D^{\Omega} = Adh(D^{*})$ et $Adh(D) \subset D^{\Omega}$.
Or $Prem(D) \subset D$
d'où $Adh(Prem(D)) \subset D^{\Omega}$.
Supposons que Prem(D) soit infini, i.e. :
$Adh(Prem(D)) \neq \emptyset$.
Soit $w \in Adh(Prem(D))$
alors $w \in D^{\Omega}$
comme $Prem(D) \in [D]_{\Omega}$: $w \in [Prem(D)]^{\Omega}$
On peut écrire : $w = uvw'$, avec $u,v \in Prem(D)$ et $w' \in D^{\Omega}$.
Comme : $w \in Adh(Prem(D))$,
$\exists$ $m \in X^{*}$ tel que $uvm \in Prem(D)$
or $v \in Prem(D)$, donc $vm \in D$.
On obtient alors : $uvm \notin Prem(D)$, ce qui n'est pas.

La réciproque est immédiate car $Prem(D) \in [D]_{\Omega}$ et donc s'il est fini, D^{Ω} est une adhérence.■

Remarques :
- Nous avons déjà vu dans la partie V-A que ce résultat est faux en ne supposant pas que D est un idéal droit.
- Dans le cas particulier où D est un idéal on retrouve l'équivalence (ii) <=> (iv) de la proposition 3.

Si D est un idéal droit mais pas un idéal, nous avons vu que la partie initiale de D (i.e. $D\backslash DX^{+}$) n'appartient pas à $[D]_{\Omega}$, cependant ce langage a une propriété intéressante :

Proposition 15. Soit D un idéal droit. Si la partie préfixe de D (i.e. $D\backslash DX^{+}$) est de cardinal fini, alors $D^{=}$ est le plus grand élément de $[D]_{\Omega}$.

PREUVE.

Notons $P = D\backslash DX^{+}$ et $l = \max \{ |m| \ / \ m \in P \}$.
Sachant que : $D^{=} \subset D^{*}FG(D)$, on peut écrire :
$D^{=} = D + E$ où $E = (FG(P)\backslash P) \cap D^{=}$
Pour montrer que $D^{=} \in [D]_{\Omega}$, il suffit alors de prouver que:
$(D^{*}E^{+})^{\Omega} \subset D^{\Omega}$.

Soit $w \in (D^{*}E^{+})^{\Omega}$, on peut écrire :
$w = r_1e_1r_2e_2\ldots$, où $\forall$ $i \geq 1$, $r_i \in D^{*}$ et $e_i \in E^{+}$
$\exists$ i / $l < |r_1e_1\ldots r_ie_i|$
or comme : $r_1e_1\ldots r_ie_i \in D^{=}$, on déduit :
$r_1e_1\ldots r_ie_i \in D$
Donc $w \in D(D^{*}E^{+})^{\Omega}$,
c'est-à-dire : $(D^{*}E^{+})^{\Omega} \subset D(D^{*}E^{+})^{\Omega}$
ce qui entraine : $(D^{*}E^{+})^{\Omega} \subset D^{\Omega}$.■

Remarques :
- $D \backslash DX^{+}$ fini $\not\Rightarrow$ $D \backslash DD^{+}$ fini.

Exemple 7 (reprise). $D = aX^{*}$
On a vu que $Prem(D) = ab^{*}$, qui est infini.
Or $D \backslash DD^{+} = a$, qui est fini.
Par ailleurs, $D^{\subseteq} = D$ et est donc bien le plus grand élément de $[D]_{\Omega}$.■

- La réciproque de la proposition 14 est fausse.

Exemple 13. $D = (da^{*}b)X^{*}$, avec $X = a+b+c$
D'une part $D \backslash DX^{+}$ est infini car il contient $(ca^{*}b)$.
D'autre part, comme $D^{\subseteq} \subseteq D+FG(ca^{*}b)$,
et que $ca^{*} \cap D^{\subseteq} = \emptyset$,
on a $D^{\subseteq} = D$.■

- La proposition 15 est fausse en ne supposant pas que D est un idéal droit.

Exemple 14. $R = (ab)^{*}a$
$R \backslash RX^{+} = a$ est un langage fini,
mais $ab \in R^{\subseteq}$ et $(ab)^{\Omega} \notin R^{\Omega}$.■

En ce qui concerne les Ω-bases nous allons voir que tous les cas sont possibles.

- $[D]_{\Omega}$ ne possède pas de plus grand élément et donc à fortiori pas d'Ω-base.

Exemple 15. $D = (ab)^{*}(aa+ac+b+c)X^{*}$ avec $X = a+b+c$
Comme $D^{\subseteq}$ est toujours inclus dans $D^{*}FG(D)$, et que
$D^{*}FG(D) = D + (ab)^{*}(\varepsilon+a)$
on en déduit que $D^{\subseteq} = D + (ab)^{*}a$, car $(ab)^{\Omega} \notin D^{\Omega}$.
$D^{\subseteq}$ n'est pas un semi-groupe, car :
$aba \in D^{\subseteq}$, $b \in D^{\subseteq}$, mais $abab \notin D^{\subseteq}$.
Donc $[D]_{\Omega}$ ne possède pas de plus grand élément, d'après la proposition III.3.■

- $[D]_{\Omega}$ peut possèder un plus grand élément mais pas d' Ω-base.

Exemple 10 (reprise). $D = (a^{*}d+(ba)^{*}c)X^{*}$, avec $X = a+b+c+d$
$D^{\subseteq} = D$ est le plus grand élément de $[D]_{\Omega}$, mais Prem(d) n'est pas Ω-minimal donc pas Ω-base de $[D]_{\Omega}$.■

- $[D]_{\Omega}$ peut posséder une Ω-base.

Exemple 7 (reprise). $D = aX^{*}$
On a vu que $Prem(D^{\subseteq}) = ab^{*}$ qui est Ω-minimal et donc Ω-base de $[D]_{\Omega}$.

Pour terminer, regardons la sous-famille des idéaux droits de $[D]_\Omega$.

Proposition 16. **Soit R $\in$ Rat(X^+). Les propositions suivantes sont équivalentes :**
(i) $\forall$ G $\in$ $[L]_\Omega$, l'idéal droit G X^* $\in$ $[R]_\Omega$.
(ii) R^d est un idéal droit.

La preuve est analogue à celle vue pour la proposition 8.

Remarques :
- D^d peut être un idéal droit (cf. exemple 7).

- D^d peut être un semi-groupe, non idéal droit.

Exemple 16. D = aaX^*
D^d = a + D, qui est un semi-groupe mais pas un idéal droit.■

- D^d peut ne pas être un semi-groupe (cf. exemple 15).

Par ailleurs dans la sous-famille des idéaux droits de $[D]_\Omega$ nous avons :

Proposition 17. **Soit D un idéal droit de Rat(X^+), $[D]_\Omega$ possède un plus grand élément idéal droit, qui est un langage rationnel et constructible.**

La preuve est analogue à celle vue pour la proposition 9.

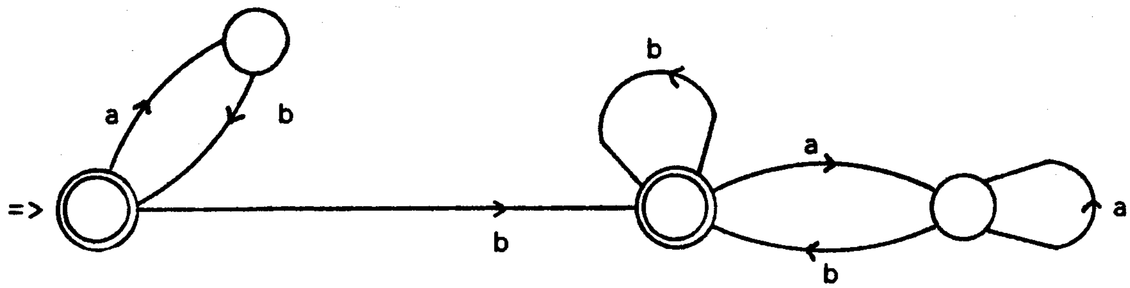
Soit R $\in$ Rat(X^+), en construisant le plus grand idéal droit inclus dans R^d, puis en testant s'il appartient ou non à $[R]_\Omega$, il découle de la proposition 17 que :

Corollaire 2. **Soit R $\in$ Rat(X^+), on peut décider si $[R]_\Omega$ possède ou non des idéaux droits et en construire un (quand il en existe).**

Remarque : Si D est un idéal droit, en notant D = PX^* avec P partie préfixe de D, on peut écrire D^d = E + PX^* avec E $\subset$ FG(P). Mais la réciproque est fausse, plus précisément : R $\in$ Rat(X^+) et R^d de la forme E + PX^* avec P préfixe et E $\subset$ FG(P) n'impliquent pas que $[R]_\Omega$ possède un idéal droit . Et ce même si R^Ω appartient à DRat(X^Ω).

Exemple 17. $R = ab+bX^*$

On a $R^{\omega} \in DRat(X^{\omega})$ car l'automate suivant reconnait R^{ω}.



$R^{\lhd} = (ab)^{+} + (ab)^*bX^* = R^{+}$

Le plus grand idéal droit inclus dans $R^{\lhd}$ est $(ab)^*bX^*$.
Il n'appartient pas à $[R]_{\omega}$, car $(ab)^{\omega} \notin ((ab)^*bX^*)^{\omega}$ et donc, d'après le corollaire précédent, $[R]_{\omega}$ ne contient pas d'idéaux droits.■

CHAPITRE VIII

LA FAMILLE $[R]_\Omega$ QUAND R EST UN LANGAGE LOCAL

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous regardons le cas où R est un langage local au sens d'Eilenberg [6].

Définition : Un langage local est un langage L de la forme : $(AX^* \cap X^*B)\setminus X^*CX^*$ où : $A,B \subseteq X$ et $C \subseteq X^2$.

Notons que tout langage local est rationnel.

Dans la partie A nous verrons que, si L est un langage local, alors $[L]_\Omega$ admet toujours un plus grand élément, mais pas toujours d'Ω-base. D'autre part, R étant un langage rationnel, s'il suffit que $[R]_\Omega$ possède un langage local pour que $R^{=}$ soit aussi un langage local, cette condition n'est cependant pas nécessaire.

Dans la partie B, pour l'étude des minimaux, nous supposerons seulement pour commencer que $R^{=}$ est un langage local. Dans ce cas, tout générateur contient un générateur Ω-minimal, et R^{Ω} est une adhérence si et seulement si R contient un générateur fini. Avec l'hypothèse "L est un langage local", $[L]_\Omega$ possède alors un unique générateur fg-minimum.

A. MAXIMAUX DE $[R]_\Omega$

Tout d'abord, notons qu'étant donné un langage rationnel R, il n'y a pas de problème pour décider si $[R]_\Omega$ contient ou non un langage local, puisque le nombre de langages locaux de X^* est fini dès que X est fini.

Lemme 1. Soit L un langage local, alors $L^\Omega \in DRAT(X^\Omega)$.

PREUVE.

Soit $L = (AX^* \cap X^*B)\backslash X^*CX^*$ où : $A,B \subset X$ et $C \subset X^2$.
En notant $L' = (AX^* \cap X^*BA)\backslash X^*(C\backslash BA)X^*$,
On montre que : $L^\Omega = \lim L'$

Soit $w \in L^\Omega$, on peut écrire :
$w = u_1 \ldots u_n \ldots$, avec $\forall\, n \geq 1$, $u_n \in L$
$\forall\, n \geq 1$, $u_n = a_n u_n'$ avec $a_n \in A$
$u_n = u_n'' b_n$ avec $b_n \in B$
et donc, $\forall\, n \geq 1$: $u_1 \ldots u_n a_n \in L'$
ce qui prouve que : $w \in \lim L'$.

réciproquement, soit $w \in \lim L'$.
Il existe une suite strictement croissante (u_i) de facteurs gauches de w avec, $\forall\, i \geq 1$, $u_i \in L'$
d'où : $u_1 = au_1'b_1a_1$ avec $a,a_1 \in A$ et $b_1 \in B$
donc, $\forall\, i \geq 2$: $(au_1'b_1)^{-1}u_i \in L'$ et $au_1'b_1 \in L^+$
c'est-à-dire : $\lim L' \subset L^+ \lim L'$
d'où, d'après la proposition II-7 : $\lim L' \subset L^\Omega$.■

On peut décrire L^Ω comme étant l'ensemble des Ω-mots :
- commençant par une lettre de A
- et contenant une infinité de mots de BA
- et ne contenant pas de mots appartenant à $C\backslash BA$ (ensemble qui peut être éventuellement vide).

Remarques :
- L^Ω n'est pas nécessairement une adhérence.

Exemple 1. $L = (aX^* \cap X^*b)\backslash X^*baX^*$
$aa^*b \subset L$
et donc : $a^\Omega \in Adh(L)$
mais $a^\Omega \notin L^\Omega$.■

- L^Ω n'est pas toujours égal à $\lim L^+$.

Exemple 1 (reprise). $L = (aX^* \cap X^*b)\backslash X^*baX^*$
$ab^+ \subset L$
donc $ab^\Omega \in \lim L$
mais $ab^\Omega \notin L^\Omega$.■

<u>Proposition 1</u>. Soit L un langage local, alors $L^{\subseteq}$ est un langage local qui est égal à $[AX^* \cap X^*(F+B)]\backslash X^*(C\backslash BA)X^*$ où F est la plus grande partie de $X\backslash B$ telle que $FA \cap C = \emptyset$.

PREUVE.

Notons F la plus grande partie de $X\backslash B$ telle que :
$FA \cap C = \emptyset$.
Montrons que : $L^{\subseteq} = [AX^* \cap X^*(F+B)]\backslash X^*(C\backslash BA)X^*$.
En effet, comme $L^{\subseteq} \subseteq L^*FG(L)$, on obtient facilement que :
$L^{\subseteq} = L^+ + L^*[(AX^* \cap X^*F)\backslash X^*CX^*]$
On constate alors que :
$L^+ + L^*[(AX^* \cap X^*F)\backslash X^*CX^*] = [AX^* \cap X^*(F+B)]\backslash X^*(C\backslash BA)X^*$.■

Remarques :
- Mais $L^{\subseteq}$ n'appartient pas toujours à $[L]_{\omega}$.

Exemple 1 (reprise). $L = (aX^* \cap X^*b)\backslash X^*baX^*$
Ici $F = a$ et $C\backslash BA = \emptyset$.
Donc $L^{\subseteq} = (aX^* \cap X^*)$
et $L^{\subseteq}$ n'appartient pas à $[L]_{\omega}$, en effet :
$a \in L^{\subseteq}$, donc $a^{\omega} \in (L^{\subseteq})^{\omega}$
mais $a^{\omega} \notin L^{\omega}$.■

- En fait quand L est un langage local, $L^{\subseteq}$ vérifie la propriété suivante : $L^{\subseteq} = \{u \in X^+ \ / \ uL \subseteq L^+\}$.

D'autre part si R est un langage rationnel quelconque, $R^{\subseteq}$ peut être un langage local sans que $[R]_{\omega}$ ne possède un langage local, même si R^{ω} appartient à $DRAT(X^{\omega})$.

Exemple 2. $R = aX^*cX^*\backslash X^*ccX^*$, avec $X = a+b+c$
$R^{\subseteq} = aX^*\backslash X^*ccX^*$
Mais $[R]_{\omega}$ ne possède pas de langage local, en effet, pour traduire le fait que qu'il y a une infinité de c dans tout mot de R^{ω}, ce langage local devrait être inclus dans L, où
$L = (aX^* \cap X^*c)\backslash X^*ccX^*$
or : $(acb)^{\omega} \in R^{\omega}$ et $(acb)^{\omega} \notin L^{\omega}$.■

Remarque : Si $R^{\subseteq}$ est un langage local, $R^{\subseteq} = (AX^* \cap X^*B)\backslash X^*CX^*$ et on a forcément $BA \cap C = \emptyset$ (sinon $R^{\subseteq}$ ne peut pas être un semi-groupe).

Donc "$R^{\subseteq}$ est un langage local" est une hypothèse moins forte que "R est un langage local". Dans la suite nous énoncerons donc les résultats soit avec la première hypothèse, soit avec la seconde en justifiant par un contre-exemple que la première n'est pas suffisante.

<u>Proposition 2</u>. Soit L un langage local, alors $L^{\supseteq}$ est un semi-groupe.

PREUVE.

On reprend la notation F de la preuve précédente et on va montrer que :
$L^{\lhd} = L^{+} + L^{+}[(AX^* \cap X^*F)\setminus X^*(C\setminus BA)X^*] = L(L^{=})^*$.

Si $m \in L^{+}[(AX^* \cap X^*F)\setminus X^*(C\setminus BA)X^*]$, on peut écrire :
$m = ubav$, avec $ub \in L^{+}$ et $av \in (AX^* \cap X^*F)\setminus X^*(C\setminus BA)X^*$
d'où : $m^{\Omega} = (ub)(avub)^{\Omega}$
Or : $avub \in L^{=}L$
donc : $avub \in L^{+}$
En conséquence : $m^{\Omega} \in L^{\Omega}$
d'où : $m \in L^{\lhd}$
et donc : $L^{+} + L^{+}[(AX^* \cap X^*F)\setminus X^*(C\setminus BA)X^*] \subset L^{\lhd}$.

Réciproquement,
si $L^{\lhd}\setminus(L^{+} + L^{+}[(AX^* \cap X^*F)\setminus X^*(C\setminus BA)X^*]) \neq \emptyset$,
soit $u \in L^{\lhd}\setminus(L^{+} + L^{+}[(AX^* \cap X^*F)\setminus X^*(C\setminus BA)X^*])$
comme $u \in L^{=}$, on a : $u \in (AX^* \cap X^*F)\setminus X^*(C+BA)X^*$
donc : $FG(u^{\Omega}) \cap BA = \emptyset$
ce qui entraîne que $u \notin L^{\lhd}$ (car tout mot de L^{Ω} contient une infinité de mots de BA).
Donc : $L^{\lhd} = L^{+} + L^{+}[(AX^* \cap X^*F)\setminus X^*(C\setminus BA)X^*]$.

A partir de là, il est alors facile de vérifier que $L^{\lhd} = L(L^{=})^*$ et que $L^{\lhd}$ est un semi-groupe.■

Remarques :
- Mais $L^{\lhd}$ n'est pas toujours un langage local.

Exemple 1 (reprise). $L = (aX^* \cap X^*b)\setminus X^*baX^*$

$L^{+} = aX^* \cap X^*b$
$L^{\lhd} = aX^* \cap X^*b + (aX^* \cap X^*b)(aX^* \cap X^*a)$
$= aX^* \cap X^*b + aX^*bX^*a$
$= aX^*bX^*$.

Et donc $L^{\lhd}$ n'est pas un langage local.■

- Ici l'hypothèse "$R^{=}$ est un langage local" est insuffisante comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3. $R = X^*(aa+bb)X^*$

$R^{=} = X^{+}$
Or : $a \in R^{\lhd}$, $b \in R^{\lhd}$.
Mais : $ab \notin R^{\lhd}$, car $(ab)^{\Omega} \notin R^{\Omega}$.■

<u>Corollaire 1</u>. Soit L un langage local, alors $[L]_{\Omega}$ admet un plus grand élément qui est égal à $L(L^{=})^*$.

PREUVE.

L^{Ω} étant déterministe et $L^{\lhd}$ étant un semi-groupe, on sait (d'après la proposition III.7) que $L^{\lhd}$ est le plus grand élément de $[L]_{\Omega}$.■

Remarque : L'exemple 3 montre que l'hypothèse "$R^{\sqsubset}$ est un langage local" est insuffisante pour assurer l'existence du plus grand élément.

Si $[L]_\Omega$ possède toujours un plus grand élément, en revanche l'exemple suivant montre que $[L]_\Omega$ ne possède pas toujours une Ω-base.

Exemple 4. $L = (bX^* \cap X^*a)\backslash X^*abX^* = b^+a^+$
$L^{\sqsubset} = bX^*$ et $L^{\sqsupset} = bX^*aX^*$
Or $\mathrm{Prem}(L^{\sqsupset}) = b^+a^+b^+$, qui n'est pas Ω-minimal, car :
$L \subset \mathrm{Prem}(L)$ et $L \neq \mathrm{Prem}(L^{\sqsupset})$.■

B. MINIMAUX DE $[R]_\Omega$

Proposition 3. Soit R un langage rationnel. Si $R^{\sqsubset}$ est un langage local, alors : $\forall\ G \in [R]_\Omega$, $G\backslash GR^{\sqsubset}$ est un générateur Ω-minimal de R^Ω.

PREUVE.
On sait déjà (proposition IV-3) que :
$G' = G\backslash GR^{\sqsubset} \in [R]_\Omega$.
Il reste à voir qu'il est Ω-minimal.
Soit m un mot de G'.
Comme $G' \subset R^{\sqsubset}$, on peut écrire :
$m = au = vd$, avec $a \in A$, $d \in F+B$, et $u,v \in X^*$
Supposons que : $mR^\Omega \subset (G'\backslash m)R^\Omega$
Soit alors $w \in R^\Omega$, on peut écrire :
$mw = m'w'$ avec $m' \in G'\backslash m$ et $w' \in R^\Omega$
ou bien $m' < m$, et alors, comme $w' \in AX^\Omega$, on a :
$m'^{-1}m \in [AX^* \cap X^*(F+B)]\backslash X^*(C\backslash BA)X^*$
ce qui contredit : $m \in G'$
ou bien $m < m'$, et alors de façon analogue on a :
$m^{-1}m' \in R^{\sqsubset}$
donc : $mR^\Omega \not\subset (G'\backslash m)R^\Omega$
c'est-à-dire G' est un générateur Ω-minimal de $[R]_\Omega$.■

Exemple 4 (reprise). $L = (bX^* \cap X^*a)\backslash X^*abX^* = b^+a^+$
Nous avons vu que $\mathrm{Prem}(L^{\sqsubset})$ n'était pas Ω-minimal,
en revanche $L^{\sqsupset}\backslash L^{\sqsupset}L^{\sqsubset} = b^+a^+$ est bien Ω-minimal.■

Donc ici, nous avons une réponse positive à Q2, en effet : si $R^{\sqsubset}$ est un langage local, alors tout générateur (resp. tout générateur rationnel) contient un générateur Ω-minimal (resp. un générateur rationnel constructible).

On déduit également de la proposition 3 que :

Proposition 4. Soit L un langage local, $[L]_\Omega$ possède une Ω-base si et seulement si $L^= \in [L]_\Omega$.

PREUVE.

. Si $L^= \in [L]_\Omega$, $L^=$ est le plus grand élément de $[L]_\Omega$ et donc $Prem(L^=)$ est un générateur Ω-minimal de $[L]_\Omega$. Il s'ensuit que $Prem(L^=)$ est Ω-base de $[L]_\Omega$.

. Il reste à montrer que $[L]_\Omega$ a une Ω-base entraîne que $L^= \in [L]_\Omega$.
Comme L^d est le plus grand élément de $[L]_\Omega$ (corollaire 1), l'Ω-base de $[L]_\Omega$ est $Prem(L^d)$.
Supposons que $L^d \neq L^=$, alors : $\exists\ u \in L^=\backslash L^d$
On a : $u \notin X^*BAX^*$.
Soit alors $v \in Prem(L)$,
on a : $v \notin X^*BAX^*$
Et d'après l'égalité $L^d = L^+ + L^+[(AX^* \cap X^*F)\backslash X^*(C\backslash BA)X^*]$,
on obtient : $vu \in Prem(L^d)$
Or : $vu \in L^dL^=$
d'où : $L^d\backslash L^dL^= \subset Prem(L^d)$ et $L^d\backslash L^dL^= \neq Prem(L^d)$
Comme $L^d\backslash L^dL^= \in [L]_\Omega$, ceci montre que : $Prem(L^d)$ n'est pas Ω-minimal, ce qui contredit le fait que $Prem(L^d)$ est l'Ω-base de $[D]_\Omega$.■

Une autre conséquence de la proposition 3 dans le cas où L est un langage local concerne les éléments fg-minimums de $[L]_\Omega$.

Proposition 5. Soit L un langage local, $[L]_\Omega$ possède un unique générateur fg-minimum.

PREUVE.

Notons $L^d = P$
On sait que P^t (défini en IV-B) est inclus dans $P\backslash PL^=$ et que $P^t \in [L]_\Omega$.
Comme $P\backslash PL^=$ est Ω-minimal de $[L]_\Omega$, on en déduit que :
$P^t = P\backslash PL^=$
et d'après le corollaire IV-1, P^t est alors générateur fg-minimum de $[L]_\Omega$.
Il reste à prouver l'unicité.
Soit $G \in [L]_\Omega$, avec $G \neq P^t$
Comme $G \not\subset P^t$, $\exists\ g \in G$ avec $g \notin P^t$
donc on peut écrire : $g = uv$ avec $u \in P^t$ et $v \in L^=$
d'où $g \notin FG(P^t)$ en effet sinon :
$\exists\ w \in X^* \ /\ gw \in L^=$, i.e. $gw \notin P^t$.
Donc aucun autre générateur que P^t n'est fg-minimum dans $[L]_\Omega$.■

Remarque : Ici encore l'hypothèse "$R^{=}$ est un langage local" est insuffisante.

Exemple 3 (reprise). $R = X^*(aa+bb)X^*$
Nous avons déjà vu (cf. exemple IV-8) que $[R]_\Omega$ ne possédait pas de générateurs fg-minimums.■

<u>Proposition 6</u>. Soit R un langage rationnel. Si $R^{=}$ est un langage local, R^Ω est une adhérence si et seulement si $R \backslash RR^{=}$ est fini.

PREUVE.
Si $R' = R \backslash RR^{=}$ est fini, alors (d'après la proposition 3) : R^Ω est finiment engendré et est donc une adhérence.

Réciproque :
Sachant que : $Adh(R) \subset R^\Omega$,
Et que : $R' \subset R$,
On déduit : $Adh(R') \subset R^\Omega = R'^\Omega$.
Supposons que R' soit infini, i.e. : $Adh(R') \neq \emptyset$.
Soit $w \in Adh(R')$, on a : $w \in R'^\Omega$
D'où : $w = u_1u_2w'$ avec $u_1,u_2 \in R'$ et $w' \in R'^\Omega$.
Or : $\exists\ x \in X^* \ /\ u_1u_2x \in R'$ (car $w \in Adh(R')$)
Comme : $u_2 \in R^{=}$ et $u_1u_2x \in R^{=}$
On a : $u_2x \in R^{=}$ (car $R^{=}$ est un langage local),
Ce qui est incompatible avec : $u_1u_2x \in R'$ et $u_1 \in R'$.■

Remarque : Comme nous l'avons vu dans la partie V-A, dans le cas général, R^Ω peut être une adhérence sans que R ne contienne de générateur fini.

En revanche, si L est un langage local, on a:

<u>Proposition 7</u>. Soit L un langage local, L^Ω est une adhérence si et seulement si Prem(L) est fini.

PREUVE.
Analogue à la précédente en remplaçant $R^{=}$ par L^+.■

Exemple 5. $L = aX^*b \backslash X^*(aa+bb)X^* = (ab)^+$
$L^\Omega = (ab)^\Omega$ est une adhérence et $L \backslash LL^+ = ab$.■

De la proposition 6 et de la proposition IV.3, on déduit immédiatement:

<u>Corollaire 4</u>. Soit $R \in Rat(X^+)$, si $R^{=}$ est un langage local et R^Ω une adhérence, alors tout générateur contient un générateur fini .

CHAPITRE IX

MOTS BI-INFINIS

INTRODUCTION

Ce dernier chapitre est une "escapade" dans l'ensemble des mots bi-infinis [2] qui est l'ensemble des suites de Z dans un alphabet X quotienté par la relation d'équivalence "être égal à une translation près". Nous amorçons une étude de la famille $\omega[R]\omega$ des générateurs de la puissance bi-infinie, ${}^{\omega}R^{\omega}$, d' un langage rationnel R.

Après un rappel de définitions (partie A), nous regardons dans la partie B la notion de bilimite d'un langage [2]. Nous donnons pour ces bilimites des résultats analogues aux résultats sur les limites rappelés dans le chapitre I : caractérisation de "la bilimite d'un langage est vide", expression de la bilimite d'un monoïde.

Dans la partie C nous rappelons [2] la définition de la limite à gauche d'un langage de X^{ω}, puis nous montrons que pour tout langage rationnel de X^*, sa bilimite est la limite à gauche de sa limite (à droite), mais que ce n'est plus vrai si le langage n'est pas rationnel.

De même que l'on peut définir l'adhérence à partir de la limite, on définit la biadhérence [7] à partir de la bilimite. Dans la partie D nous donnons une expression de la biadhérence d'un monoïde et prouvons que ${}^{\omega}R^{\omega}$ est une biadhérence si et seulement si il est la biadhérence de R^*.

Nous en arrivons dans les parties E et F au sujet qui nous préoccupe : l'étude de la famille $\omega[R]\omega$ des générateurs de ${}^{\omega}R^{\omega}$. Après avoir constaté qu'il n'y a pas de relation d'inclusion entre $[R]\omega$ et $\omega[R]\omega$, nous passons à l'étude des maximaux de $\omega[R]\omega$ qui ne posera pas de problèmes. Mais nous restons dans la partie F sur une question ouverte : comment décider si $\omega[R]\omega$ contient ou non un langage fini ? Nous verrons seulement que l'on peut ramener ce problème à cet autre : comment décider s'il existe ou non un langage fini G tel que $F(G^*) = F(R^*)$?

A. PRELIMINAIRES

Nous rappelons [2] les définitions suivantes concernant les mots bi-infinis.

Définitions :

Soit X un alphabet, un mot **bi-infini pointé** est un élément de $X^{\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire une application de Z dans X.

Un mot **bi-infini** est une classe d'équivalence dans l'ensemble $X^{\mathbb{Z}}$ pour la relation ~ définie par :

$u \sim v \iff \exists\, p \in \mathbb{Z},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\quad u(n+p) = v(p)$

En d'autres termes, deux mots bi-infinis pointés sont équivalents si et seulement si on passe de l'un à l'autre par une translation de l'origine.

L'ensemble quotient $X^{\mathbb{Z}}/\sim$ sera noté ${}^{\Omega}X^{\Omega}$ et est donc **l'ensemble des mots bi-infinis écrits sur X.** Un mot bi-infini sera souvent identifié à l'un de ses représentants.

Remarque : Contrairement aux mots infinis (à droite), pour lesquels on a :

$\forall\, u,v \in X^{\Omega},\ FG(u) = FG(v) \implies u = v,$

ici :

$u,v \in {}^{\Omega}X^{\Omega}$ et $F(u) = F(v) \not\Rightarrow u = v$

Exemple 1. Sur l'alphabet a+b, on peut construire un mot infini w tel que $F(w) = (a+b)^*$. Les deux mots bi-infinis ${}^{\Omega}aw$ et ${}^{\Omega}bw$ ont alors le même ensemble de facteurs $(a+b)^*$ et sont distincts.

Définitions :

Un **automate A** est un quintuplet (X,Q,I,T,δ) où :

X est un alphabet
Q est l'ensemble des états
I et T sont deux parties de Q
δ est l'ensemble des transitions de A.

Un mot bi-infini w est reconnu par A si et seulement si il existe un représentant de w, $\ldots x_{-1}x_0x_1\ldots$ et une suite d'états (q_n), $n \in \mathbb{Z}$, tels que :

$\forall\, n \in \mathbb{Z},\quad q_{n+1} \in \delta(q_n,x_n)$
$card(\{n \leq 0 \ /\ q_n \in I\})$ et $card(\{n \geq 0 \ /\ q_n \in T\})$ sont infinis.

Définitions :

Un langage de mots bi-infinis L est **rationnel** si et seulement si il existe un automate A dont l'ensemble des mots reconnus est L.

On notera $Rat({}^{\Omega}X^{\Omega})$ l'ensemble des langages rationnels de mots bi-infinis sur X.

On va maintenant définir la puissance bi-infinie d'un langage.

Définition : Soit $R \subset X^{+}$. On note :

${}^{\Omega}R^{\Omega} = \{w \in {}^{\Omega}X^{\Omega} \;/\; w = \ldots u_{-n} \ldots u_0 \ldots u_n \ldots$ où $\forall\, n \in Z,\ u_n \in R\}$.

B. BILIMITE D'UN LANGAGE DE X*

Nous allons voir comme deuxième opération permettant d'associer à un langage de mots un langage de mots bi-infinis, la bilimite [2].

Définition :

Soit A un langage de X^*. La **bilimite de A**, notée $\overleftrightarrow{A}$, est l'ensemble des mots bi-infinis w tels que :
si $\ldots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2 \ldots$ est un représentant de w, il existe une suite décroissante (m_k) d'entiers de Z^- et une suite croissante (n_k) d'entiers de Z^+ telles que :
$\forall\, k \geq 0,\ x_{m_k} \ldots x_{n_k} \in A$.

Remarque : Il ne suffit pas que w ait une infinité de facteurs dans A pour que $w \in \overleftrightarrow{A}$.

Exemple 2. $A = (ba)^*$

$w = {}^{\Omega}(ba)b^{\Omega} \notin \overleftrightarrow{A}$,
et pourtant $(ba)^*$ est infini et est inclus dans $F(w)$.■

Commençons par deux lemmes concernant le calcul des bilimites. Le premier est immédiat.

Lemme 1. Soient A et B deux langages de X^*. Alors :

$$\overleftrightarrow{A+B} = \overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{B}.$$

Lemme 2. Soient A et B deux langages de X^*. Alors :

$$\overleftrightarrow{AB} \subset \overleftarrow{A}.\overrightarrow{B} + \overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{B}.$$

De plus, si $\varepsilon \in A$ et $\varepsilon \in B$, il y a égalité.

PREUVE.

Soit $w \in \overleftrightarrow{AB}$, notons $w = \ldots x_{-k} \ldots x_0 \ldots x_k \ldots$
Il existe une suite (m_k) strictement décroissante d'entiers de Z^- et une suite (n_k) strictement croissante d'entiers de Z^+ telles que :
$\forall\ k \geq 0,\ x_{m_k} \ldots x_{n_k} \in AB$
i.e. $\forall\ k \geq 0,\ \exists\ l_k$ avec $m_k \leq l_k \leq n_k$, tel que :
$x_{m_k} \ldots x_{l_k} \in A$ et $x_{l_k+1} \ldots x_{n_k} \in B$

Supposons que $w \in \overleftrightarrow{AB} \setminus [\overleftarrow{A} + \overrightarrow{B}]$.
On a alors :
$\exists\ n \in Z\ /\ \forall\ k \geq 0,\ l_k \leq n$
et $\exists\ m \in Z\ /\ \forall\ k \geq 0,\ m \leq l_k$
On en déduit que :
$\forall\ k \geq 0,\quad m \leq l_k \leq n$
et donc il existe l, avec $m \leq l \leq n$, tel que, pour une infinité d'indices K :
$x_{m_k} \ldots x_l \in A$ et $x_{l+1} \ldots x_{n_k} \in B$
ce qui entraîne que : $w \in \overleftarrow{A}.\overrightarrow{B}$
Donc : $\overleftrightarrow{AB} \subset \overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{B} + \overleftarrow{A}.\overrightarrow{B}$

Si $\varepsilon \in A$ et $\varepsilon \in B$, on a de plus :
$A \subset AB$ et donc $\overleftrightarrow{A} \subset \overleftrightarrow{AB}$
$B \subset AB$ et donc $\overleftrightarrow{B} \subset \overleftrightarrow{AB}$
Comme $\overleftarrow{A}.\overrightarrow{B}$ est toujours inclus dans $\overleftrightarrow{AB}$, on a finalement :
$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{B} + \overleftarrow{A}.\overrightarrow{B}$.■

Remarques :
- L'inclusion peut être stricte si $\varepsilon \notin A$ ou $\varepsilon \notin B$.

Exemple 3. $A = a^+$ et $B = b^+$
On a $\overleftrightarrow{AB} = {}^{\Omega}a.b^{\Omega}$, qui est différent de :
${}^{\Omega}a.b^{\Omega} + {}^{\Omega}a^{\Omega} + {}^{\Omega}b^{\Omega}$.■

- Mais il peut y avoir égalité avec $\varepsilon \notin A$ ou $\varepsilon \notin B$.

Exemple 4. $A = B = a^+$
$\overleftrightarrow{AB} = {}^{\Omega}a^{\Omega} = \overleftarrow{A}.\overrightarrow{B} + \overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{B}$.■

Dans [2], D. Beauquier donne une condition suffisante pour que, étant donné $R \in Rat(X^*)$, $\overleftrightarrow{R} = \emptyset$. Nous voyons ici deux caractérisations de : $\overleftrightarrow{R} = \emptyset$.

Proposition 1. Soit $R \in Rat(X^*)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\overleftrightarrow{R} = \emptyset$

(ii) R est une union finie de langages rationnels préfixes ou suffixes.

(iii) $\forall\, u \in X^*,\ \forall x,y \in X^+,\ x^*uy^* \not\subset R$

PREUVE.

(i) => (ii)

Soit $M = (X,Q,\{q_o\},T,\delta)$ un automate déterministe qui reconnaît R, i.e. $T(M) = R$.

Comme $T(M) = \bigcup_{t \in T} T(M_t)$, où $M_t = (X,Q,\{q_o\},\{t\},\delta)$,

il suffit de démontrer (ii) pour les langages $T(M_t)$.

Notons $L = T(M_t)$, nous allons voir que, si L n'est pas préfixe, alors L est union finie de suffixes rationnels.

Supposons donc L non préfixe.

D'après l'automate déterministe M_t qui reconnaît L, on peut écrire :

$L = LA^*$, avec $A \neq \emptyset$ et A^* est le langage reconnu par l'automate $(X,Q,\{t\},\{t\},\delta)$.

Soit alors L^R le langage miroir de L, on a :

$L^R = (A^R)^* L^R$

Fait : L^R est une union finie de langages rationnels préfixes.

PREUVE DU FAIT.

On peut décomposer L^R en une union finie de langages rationnels reconnus par un automate déterministe à un seul état terminal.

Soit L_1 un de ces langages.

Si L_1 n'est pas préfixe, on peut écrire :

$L_1 = L_1B^*$, avec $B \neq \emptyset$

d'où : $L_1^R = (B^R)^* L_1^R$

Comme $L_1^R \subset L$, on a alors : $(B^R)^* L_1^R A^* \subset L$.

Or A et B étant non vides, $\overleftrightarrow{L}$ est alors non vide

Donc L_1 est préfixe.■

Il s'ensuit que L est une union finie de suffixes rationnels et donc (i) => (ii).

(ii) => (i)

D'après le lemme 1, il suffit de montrer que :

si R est préfixe ou suffixe rationnel, alors $\overleftrightarrow{R} = \emptyset$

D'autre part, comme :

- R suffixe équivaut à R^R préfixe
- $\overleftrightarrow{R} = \emptyset$ équivaut à $\overleftrightarrow{R^R} = \emptyset$,

il suffit de prouver l'implication pour R préfixe.

Fait : Si R est un langage rationnel préfixe, alors $\overleftrightarrow{R} = \emptyset$

PREUVE DU FAIT.
Ce résultat est prouvé dans [2], nous donnons ici une autre preuve.
Si $\overleftrightarrow{R} \neq \emptyset$, alors il existe une suite (u_n) de mots de R avec
$\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \alpha_n u_n \beta_n$, où $\alpha_n \neq \varepsilon$ et $\beta_n \neq \varepsilon$.
Soit $\sim_R$ la congruence syntaxique associée à R. Comme elle est d'index fini :
$\exists\, i < j$, avec $u_1\beta_1\ldots\beta_i \sim_R u_1\beta_1\ldots\beta_j$
et donc : $u_1 \sim_R u_1\beta_1\ldots\beta_j$
Comme $u_1 \in R$, on a : $u_1\beta_1\ldots\beta_j \in R$, ce qui contredit le fait que R est préfixe.∎

On a donc (ii) => (i)

Il est immédiat, même si $R \notin Rat(X^*)$, que :
non(iii) => non(i)

Il reste donc à montrer que non(i) => non(iii).
Pour cela, reprenons une suite (u_n) de mots de R avec :
$u_{n+1} = \alpha_n u_n \beta_n$, où $\alpha_n \neq \varepsilon$ et $\beta_n \neq \varepsilon$
$\exists\, i < j$ avec $u_i \sim_R u_j$
Notons $u_j = u u_i v$
On a : $u \neq \varepsilon$ et $v \neq \varepsilon$
et : $\forall n \geq 0$, $u^n u_i v^n \in R$
d'où l'existence de m, x et y tels que :
$x \neq \varepsilon$, $y \neq \varepsilon$ et $x^* m y^* \subset R$ (ceci car R est rationnel).∎

Remarque : Ces équivalences sont fausses si $R \notin Rat(X^*)$. En effet, si un langage préfixe (même non rationnel) a toujours une limite (à droite) vide, sa bilimite peut être non vide.

Exemple 5. $R = \{a^n b a^n,\ n \geq 0\}$

$\overleftrightarrow{R} = {}^{\omega}aba^{\omega}$, et cependant R est préfixe.∎

De plus cet exemple montre que l'on peut avoir non(i) et (iii).

On a vu pour la limite à droite de L^* que :

$$\overrightarrow{L^*} = L^*\,\overrightarrow{L} + L^{\omega}.$$

Pour la bilimite d'un monoïde, le résultat s'énonce comme suit:

Proposition 2. Soit L un langage de X^*.

$$\overleftrightarrow{L^*} = \overleftarrow{L^*}\,\overrightarrow{L^*} + \overleftrightarrow{L}$$

$$= {}^{\omega}L^{\omega} + \overleftarrow{L}.L^{\omega} + {}^{\omega}L.\overrightarrow{L} + \overleftarrow{L}.L^*.\overrightarrow{L} + \overleftrightarrow{L}$$

PREUVE.

Soit $w \in \overleftrightarrow{L^*} \setminus \overleftrightarrow{L}$

En notant $w = \ldots x_{-k} \ldots x_0 \ldots x_k \ldots$, il existe une suite (m_k) strictement décroissante d'entiers de Z^- et une suite (n_k) strictement croissante d'entiers de Z^+ telle que :

$\forall\ k \geq 0,\ x_{m_k} \ldots x_{n_k} \in L^*$

or $w \notin \overleftrightarrow{L}$, donc :

$\exists\ n_0\ /\ \forall\ m,n > n_0,\ x_{-m} \ldots x_n \notin L$

Prenons k_0 tel que : $\forall\ k \geq k_0,\ -m_k > n_0$ et $n_k > n_0$

On obtient alors :

$\forall\ k \geq k_0,\ \exists\ j$ tel que : $-n_0 \leq j \leq n_0$
et $x_{m_k} \ldots x_j \in L^+$
et $x_{j+1} \ldots x_{n_k} \in L^+$

Par conséquent, il existe $j_0 \in [-n_0, n_0]$ tel que, pour une infinité de k, $x_{m_k} \ldots x_{j_0} \in L^+$ et $x_{j_0+1} \ldots x_{n_k} \in L^+$.

Ce qui entraîne que : $w \in \overleftarrow{L^*}.\overrightarrow{L^*}$

donc : $\overleftrightarrow{L^*} \subset \overleftarrow{L^*}.\overrightarrow{L^*} + \overleftrightarrow{L}$

L'inclusion inverse étant immédiate, on a l'égalité.

Maintenant, sachant que :

$\overrightarrow{L^*} = \overrightarrow{L^*}\ L + L^\omega$

$\overleftarrow{L^*} = L.\overleftarrow{L^*} + {}^\omega L$

${}^\omega L.L^\omega \subset {}^\omega L^\omega$

on obtient :

$\overleftrightarrow{L^*} \subset {}^\omega L^\omega + \overleftarrow{L}.L^\omega + {}^\omega L.\overrightarrow{L} + \overleftarrow{L}.L^*.\overrightarrow{L} + \overleftrightarrow{L}$

L'inclusion inverse étant immédiate, on a l'égalité.∎

C. LIMITE A GAUCHE (RESP. A DROITE) D'UN LANGAGE DE X^ω (RESP. DE ${}^\omega X$)

Un mot bi-infini peut aussi être considéré comme la limite à droite (resp. à gauche) d'une suite de mots infinis à gauche (resp. à droite).

Définition :

Soit L un langage de X^ω. La **limite à gauche de L**, notée $\overset{\leftarrow\omega}{L}$, est l'ensemble des mots bi-infinis w tels que :

Si $\ldots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2 \ldots$ est un représentant de w, il existe une infinité d'entiers m de Z^- tels que $x_m x_{m+1} \ldots \in L$.

Remarque : Il ne suffit pas que w ait une infinité de facteurs droits dans L pour que $w \in \overset{\leftarrow\omega}{L}$.

Exemple 6. $L = b(a+b)^{\omega}$

$\overset{\longleftarrow\omega}{L} = {}^{\omega}(ba^*)(a+b)^{\omega}$

Or $w = {}^{\omega}a(ba)(ba^2)(ba^3)\ldots \notin \overset{\longleftarrow\omega}{L}$
Mais w a une infinité de facteurs droits dans L.■

On définit de même la limite à droite d'un langage de ${}^{\omega}X$.

Nous allons relier les notions de bilimites et de limites à gauche et à droite.

<u>Proposition 3</u>. Soit $R \in Rat(X^*)$, on a :

$$\overleftrightarrow{R} = \overset{\leftrightarrows\omega}{R} = \overset{\omega\rightleftarrows}{R}$$

PREUVE.
On va déjà montrer que :
$\overset{\leftrightarrows\omega}{R} \subset \overleftrightarrow{R}$, et ceci que R soit ou non rationnel.
Soit $w \in \overset{\leftrightarrows\omega}{R}$, en notant $w = \ldots x_{-n}\ldots x_0\ldots x_n\ldots$,
on sait qu'il existe une suite décroissante (m_k) d'entiers de Z^- telle que:

$\forall\, k \geq 0,\ x_{m_k}\ldots x_0\ldots \in \overrightarrow{R}$
ce qui permet de construire une suite de Z^+ (n_k) telle que:
$\forall\, k \geq 0,\ n_k > n_{k-1}$ et $x_{m_k}\ldots x_0\ldots x_{n_k} \in R$

On en déduit que : $w \in \overleftrightarrow{R}$

Pour l'inclusion inverse, reprenons une suite (u_n) de mots de R avec : $u_{n+1} = \alpha_n u_n \beta_n$ où $\alpha_n \neq \varepsilon$ et $\beta_n \neq \varepsilon$
et soit w la bilimite de (u_n).
Reprenons $\sim_R$ la congruence syntaxique de R, on a :
$\forall\, i,\ \exists\, j > i$ tel que, pour une infinité d'indices $k > j$, on ait :
$u_i\beta_i\ldots\beta_j \sim_R u_i\beta_i\ldots\beta_j\ldots\beta_k$
ce qui implique : $u_j \sim_R u_j\beta_{j+1}\ldots\beta_k$
Or comme $u_j \in R$, on a : $u_j\beta_{j+1}\ldots\beta_k \in R$

et donc : $w_j = u_j\beta_{j+1}\ldots \in \overrightarrow{R}$
Comme ceci est vrai pour tout i, on peut construire une suite (m_i) strictement croissante telle que :

$\forall\, i \geq 1,\ w_{m_i} \in \overrightarrow{R}$

et donc : $w \in \overset{\leftrightarrows\omega}{R}$.■

Remarque : Ce résultat est faux si $R \notin Rat(X^*)$.

Exemple 5 (reprise). $R = \{a^n b a^n \ n \geq 0\}$

$$\overleftrightarrow{R} = {}^{\Omega}aba^{\Omega}$$

$$\overrightarrow{R} = \emptyset \text{ (car R est préfixe)}$$

et donc : $\overset{\leftrightarrows\Omega}{R} = \emptyset$.■

En conséquence, la proposition 3 nous permet de caractériser les bilimites des langages rationnels de X^* par :

Proposition 4. $\overleftrightarrow{Rat(X^*)} = \overset{\Omega\rightleftarrows}{Rat(X^*)} = \overset{\leftrightarrows\Omega}{Rat(X^*)} = \overset{\longleftarrow\Omega}{Drat(X^{\Omega})}$

D. BIADHERENCE D'UN LANGAGE DE X^*

De même que l'on peut définir les adhérences comme des limites de facteurs gauches, on peut définir [7] les biadhérences par :

Définition :

Soit L un langage de X^*, on appelle **biadhérence** de L le sous-ensemble de ${}^{\Omega}X^{\Omega}$:

$$Biadh(L) = \overleftrightarrow{F(L)} = \{w \in {}^{\Omega}X^{\Omega} \ / \ F(w) \subset F(L)\}.$$

Nous donnons quelques propriétés de calcul de ces biadhérences.

Déjà il est immédiat que :$Biadh(A+B) = Biadh(A) + Biadh(B)$, et de plus, en conséquence directe du Lemme 2, on a, en notant:

$$Adhg(A) = \overleftarrow{FD(A)} \text{ et } Adhd(A) = \overrightarrow{FG(A)} = Adh(A)$$

Lemme 3. $Biadh(AB) = Biadh(A) + Biadh(B) + Adhg(A).Adhd(B)$

Pour les adhérences, nous avions : $Adh(L^*) = L^{\Omega} + L^*Adh(L)$. Ici, on peut énoncer :

Proposition 6.

$$Biadh(L^*)={}^{\Omega}L^{\Omega}+Biadh(L)+{}^{\Omega}L.Adhd(L)+Adhg(L).L^{\Omega}+Adhg(L).L^*.Adhd(L)$$

PREUVE.

$$Biadh(L^*) = \overleftrightarrow{FG(L)L^*FD(L)}$$

$$= \overleftarrow{FG(L)L^*}.\overrightarrow{L^*FD(L)} + \overleftrightarrow{FG(L)L^*}\ \overleftrightarrow{L^*FD(L)}$$

ceci d'après le lemme 1.

Or : $\overleftarrow{FG(L)L^*} = Adhg(L^*)$

$\overrightarrow{L^*FD(L)} = Adhd(L^*)$

$\overleftrightarrow{FG(L)L^*} = \overleftarrow{FG(L)}.\overrightarrow{L^*} + \overleftrightarrow{FG(L)} + \overleftrightarrow{L^*}$

D'autre part :

$\overrightarrow{L^*} = L^{\omega} + L^*\overrightarrow{L}$

$\overleftrightarrow{L^*} = {}^{\omega}L^{\omega} + \overleftarrow{L}.L^{\omega} + {}^{\omega}L.\overrightarrow{L} + \overleftarrow{L}.L^*\overrightarrow{L} + \overleftrightarrow{L}$

En utilisant le fait que, pour tout langage de X^*, ces différentes limites sont incluses dans les adhérences associées, on obtient que $Biadh(L^*)$ est inclus dans :

$${}^{\omega}L^{\omega} + Biadh(L) + {}^{\omega}L.Adhd(L) + Adhg(L).L^{\omega} + Adhg(L).L^*.Adhd(L)$$

L'inclusion inverse étant immédiate, on a le résultat.∎

Nous avons aussi la caractérisation suivante des langages de mots bi-infinis qui sont des biadhérences.

<u>Proposition 7</u>. **$M \subset {}^{\omega}X^{\omega}$ *est une biadhérence si et seulement si* $M = Biadh(F(M))$.**

PREUVE.

Soit $M \subset {}^{\omega}X^{\omega}$.
Supposons qu'il existe $L \subset X^*$ tel que : $M = Biadh(L)$
$\forall\ w \in M,\ F(w) \subset F(L)$
et donc : $F(M) \subset F(L)$
d'où : $Biadh(F(M)) \subset Biadh(F(L))$
Comme : $Biadh(F(L)) = Biadh(L)$
On a : $Biadh(F(M)) \subset M$.
L'inclusion inverse étant triviale, on a l'égalité.∎

Comme $F({}^{\omega}L^{\omega}) = F(L^*)$, on en déduit :

<u>Corollaire 1</u>. **${}^{\omega}L^{\omega}$ est une biadhérence si et seulement si ${}^{\omega}L^{\omega} = Biadh(L^*)$.**

En revanche, si " ${}^{\omega}L^{\omega}$ biadhérence" implique $Biadh(L) \subset {}^{\omega}L^{\omega}$, cette dernière condition ne suffit pas à assurer que ${}^{\omega}L^{\omega}$ est une biadhérence.

Exemple 7. $L = a + c + b^{+}a^{*}b^{+}$
$\quad Biadh(L) = {}^{\omega}b^{\omega} + {}^{\omega}a^{\omega} + {}^{\omega}ba^{\omega} + {}^{\omega}ba^{*}b^{\omega} + {}^{\omega}ab^{\omega}$
$\quad Biadh(L) \subset {}^{\omega}L^{\omega}$
$\quad$ Mais : $ba^{\omega} \in Adh(L)$
$\quad$ et donc : ${}^{\omega}cba^{\omega} \in {}^{\omega}L.Adh(L)$, ${}^{\omega}cba^{\omega} \notin {}^{\omega}L^{\omega}$.■

De même qu'un ensemble fini est caractérisé par le fait que son adhérence est vide, on a en utilisant le lemme de Köenig que nous rappelons ici :

Lemme de Köenig :

Soit E un ensemble, et soit (E_n) une suite de parties finies de E, telle que $\bigcup_{n \in N} E_n$ est infinie.

Soit R une relation sur E, telle que :
$\forall\, n \geq 1, \forall\, y \in E_{n+1}, \exists\, x \in E_n$ avec $x\, R\, y$.
Il existe alors une suite infinie (x_n) d'éléments de E vérifiant :
$\forall\, n \geq 1$, $x_n \in E_n$ et $x_n\, R\, x_{n+1}$.

Proposition 8. $Biadh(L) = \emptyset$ si et seulement si L est fini.

PREUVE.
Si L est fini, alors $Biadh(L) = \emptyset$.

Réciproquement, si L est infini, on pose :
$\forall\, n \geq 1$, $E_n = \{w \in X^{*} \mid |w| = 2n\} \cap F(L)$
On a :
- $\forall\, n \geq 1$, E_n est fini et non vide
- $\bigcup_{n \in N} E_n$ est infini

Soit F la relation définie par :
u F v ssi il existe u',u" mots non vide tels que :
u'uu" = v.
F vérifie :
$\forall\, n \geq 1, \forall\, y \in E_{n+1}, \exists\, x \in E_n \,/\, x\, F\, y$.
On peut appliquer le lemme de Köenig à notre suite (E_n); on obtient donc une suite strictement croissante (x_n) de facteurs de L dont la bilimite appartient à Biadh(L), qui est donc non vide.■

De la proposition 6 et de la proposition 8, on déduit :

Corollaire 2. Soit F un langage fini, on a alors :
${}^{\omega}F^{\omega} = Biadh(F^{*})$

E. LA FAMILLE ${}^{\Omega}[R]^{\Omega}$ - LIENS AVEC $[R]^{\Omega}$ - ELEMENTS MAXIMAUX DE ${}^{\Omega}[R]^{\Omega}$

Nous proposons ici d'étudier les générateurs d'un langage puissance-biinfinie.

Définition : Soit R un langage rationnel de X^*.

$${}^{\Omega}[R]^{\Omega} = \{L \subset X^+ \ / \ {}^{\Omega}L^{\Omega} = {}^{\Omega}R^{\Omega}\}$$

Sortant de l'étude de $[R]^{\Omega}$, une première question est de chercher à comparer $[R]^{\Omega}$ et ${}^{\Omega}[R]^{\Omega}$.

Proposition 9. Soit R un langage rationnel de X^*, les familles $[R]^{\Omega}$ et ${}^{\Omega}[R]^{\Omega}$ sont incomparables.

PREUVE.

- ${}^{\Omega}L^{\Omega} = {}^{\Omega}M^{\Omega} \ \not\Rightarrow \ (L^{\Omega} = M^{\Omega}$ ou ${}^{\Omega}L = {}^{\Omega}M)$.

Exemple 8. $L = ab$ et $M = ba$
${}^{\Omega}L^{\Omega} = {}^{\Omega}(ab)^{\Omega} = {}^{\Omega}(ba)^{\Omega} = {}^{\Omega}M^{\Omega}$
mais $(ab)^{\Omega} \neq (ba)^{\Omega}$ et ${}^{\Omega}(ab) \neq {}^{\Omega}(ba)$.■

- $L^{\Omega} = M^{\Omega} \ \not\Rightarrow \ {}^{\Omega}L^{\Omega} = {}^{\Omega}M^{\Omega}$.

Exemple 9. $L = a+ab+ba$ et $M = a+(ab)^*ba$
On a déjà vu que $L^{\Omega} = M^{\Omega}$.
Or, prenons $w = {}^{\Omega}(ab)(ba)^{\Omega}$.
$w \in {}^{\Omega}L^{\Omega}$ mais $w \notin {}^{\Omega}M^{\Omega}$, en effet :
une décomposition de w sur M ne peut être que du type ${}^{\Omega}(ba)M^{\Omega}$
ab ab ab ab ab a|b ba ba ba ba

or $bba(ba)^{\Omega} \notin M^{\Omega}$ (car $bb \in FG(M^{\Omega})$).■
■

Remarque : Si $L^{\Omega} = M^{\Omega}$ et ${}^{\Omega}L = {}^{\Omega}L$, alors ${}^{\Omega}L^{\Omega} = {}^{\Omega}M^{\Omega}$, puisque ${}^{\Omega}L^{\Omega} = {}^{\Omega}L.L^{\Omega}$.

On reprend donc l'étude des langages puissance-biinfinie d'un langage rationnel en reprenant le même plan, mais sans pouvoir utiliser les résultats obtenus sur $[R]^{\Omega}$.

Proposition 10. Soit L un langage rationnel de ${}^{\Omega}X^{\Omega}$, on peut décider si L est la puissance-biinfinie d'un langage de X^*. De plus, si c'est le cas, on peut en construire un qui est rationnel.

PREUVE.

Soit un automate $A = (X,Q,I,T,\delta)$ et la congruence transitionnelle associée à la reconnaissance par A des mots biinfinis, notée $\sim_A$ et définie sur X^* par :

$$u \sim_A v \text{ si et seulement si } \forall\, q \in Q \quad \begin{array}{l} \delta(q,u) = \delta(q,v) \\ \delta_T(q,u) = \delta_T(q,v) \\ \delta_I(q,u) = \delta_I(q,v) \end{array}$$

où : $\delta_T(q,u) = \{q' \in Q \;/\; \exists\, t \in T,\ \exists\, u_1,u_2 \in X^*$ avec $t \in \delta(q,u_1)$ et $q' \in \delta(t,u_2)$ et $u = u_1u_2\}$

et où : $\delta_I(q,u) = \{q' \in Q \;/\; \exists\, i \in I,\ \exists\, u_1,u_2 \in X^*$ avec $i \in \delta(q,u_1)$ et $q' \in \delta(i,u_2)$ et $u = u_1u_2\}$.

Il est clair que $\sim_A$ est une congruence d'index fini, où toutes les classes sont des langages rationnels constructibles. La preuve donnée pour les propositions II-1 et II-2 convient alors pour cette nouvelle congruence transitionnelle.■

Pour ce qui est des maximaux de $_\Omega[R]_\Omega$, nous avons des résultats analogues à ceux obtenus pour $[R]_\Omega$, c'est-à-dire :

<u>Proposition 11</u>. Soit R un langage rationnel de X^*, $_\Omega[R]_\Omega$ contient un nombre fini non nul de langages maximaux.
- Tous ces maximaux sont rationnels et constructibles.
- Tout langage de $_\Omega[R]_\Omega$ est inclus dans l'un d'entre eux.
- On peut décider s'il y a un plus grand élément dans $_\Omega[R]_\Omega$.

PREUVE.

identique à celle faite pour les maximaux de $[R]_\Omega$.■

Dans l'ordre chronologique, le premier problème étudié pour $[R]_\Omega$ a été de décider si R^Ω est finiment engendré. C'est pourquoi, pour $_\Omega[R]_\Omega$, nous avons également commencé par cette question (qui restera ici sans réponse).

F. PROBLEME OUVERT : DECIDER SI $^\Omega R^\Omega$ EST FINIMENT ENGENDRE

<u>Définition</u> : $^\Omega R^\Omega$ est **finiment engendré** si et seulement si $_\Omega[R]_\Omega$ contient un langage fini.

Notons tout d'abord que le problème de décider si $^\Omega R^\Omega$ est finiment engendré ne se ramène pas au problème de décider si R^Ω est finiment engendré. En effet dans l'exemple suivant $^\Omega R^\Omega$ sera finiment engendré, mais ni R^Ω ni $^\Omega R$ ne seront des adhérences et donc à fortiori ne seront finiment engendrés.

Exemple 10. $R = a + aba + b^{+}a^{*}b^{+}$

D'une part, $^{\omega}R^{\omega} = {}^{\omega}(a+b)^{\omega}$, en effet pour les mots de $^{\omega}(a+b)^{\omega}$ ayant un nombre infini de b, on a :

- $^{\omega}(X^{*}b^{+}X^{*})^{\omega} \subseteq {}^{\omega}(a+b^{+}a^{*}b^{+})^{\omega}$
- $^{\omega}a(X^{*}b^{+}X^{*})^{\omega} \subseteq {}^{\omega}a(a+b^{+}a^{*}b^{+})^{\omega}$
- $^{\omega}(X^{*}b^{+}X^{*})a^{\omega} \subseteq {}^{\omega}(a+b^{+}a^{*}b^{+})^{\omega}$

Et, pour les mots de $^{\omega}(a+b)^{\omega}$ ayant un nombre fini de b, on a :

$^{\omega}a(b^{+}a^{+}b^{+}a^{+})^{+}a^{\omega} \subseteq {}^{\omega}a(a+b^{+}a^{*}b^{+})^{+}a^{\omega}$

$^{\omega}a(b^{+}a^{+}b^{+}a^{+})^{*}ba^{\omega} \subseteq {}^{\omega}a(a+b^{+}a^{*}b^{+})^{+}abaa^{\omega}$

$^{\omega}a(b^{+}a^{+}b^{+}a^{+})^{*}bb^{+}a^{\omega} \subseteq {}^{\omega}a(a+b^{+}a^{*}b^{+})^{+}a^{\omega}$

D'autre part, $ba^{\omega} \in Adhd(R)$, mais $ba^{\omega} \notin R^{\omega}$ et de façon symétrique : $^{\omega}ab \in Adhg(R)$, mais $^{\omega}ab \notin {}^{\omega}R$.■

<u>Proposition 12</u>. Soit R un langage rationnel. $^{\omega}R^{\omega}$ est finiment engendré si et seulement si

1) $^{\omega}R^{\omega}$ est une biadhérence

2) $\exists$ G fini tel que $F(G^{*}) = F(R^{*})$.

PREUVE.

Si $^{\omega}L^{\omega}$ est finiment engendré, soit G un générateur fini de $^{\omega}L^{\omega}$.

Comme $F(^{\omega}L^{\omega}) = F(L^{*})$, on a donc : $F(L^{*}) = F(G^{*})$.

D'autre part, d'après le corollaire 2, $^{\omega}G^{\omega}$ est une biadhérence, i.e. $^{\omega}L^{\omega}$ est une biadhérence.

Réciproquement, soit G un langage fini tel que : $F(G^{*}) = F(L^{*})$.

Comme $^{\omega}L^{\omega}$ est une biadhérence, d'après le corollaire 1, on a :

$^{\omega}L^{\omega} = Biadh(L^{*})$

d'où : $^{\omega}L^{\omega} = Biadh(F(L^{*})) = Biadh(F(G^{*}))$

Or, G étant fini : $^{\omega}G^{\omega} = Biadh(F(G^{*}))$.■

Remarque : Notons que la condition "$\exists$ G fini tel que $F(G^{*}) = F(L^{*})$" est insuffisante pour que $^{\omega}L^{\omega}$ soit finiment engendré.

Exemple 11. $L = ba^{*}$ et $G = a+b$

On a $F(L^{*}) = F(G^{*}) = X^{*}$

Mais : $^{\omega}a^{\omega} \notin {}^{\omega}L^{\omega}$ et $^{\omega}a^{\omega} \in Biadh(L)$ donc $^{\omega}L^{\omega}$ n'est pas une biadhérence.■

Pour décider si $^{\omega}R^{\omega}$ est finiment engendré, il suffit donc de décider :

1) si $^{\omega}R^{\omega}$ est une biadhérence

2) si $\exists$ G fini / $F(G^{*}) = F(L^{*})$

Or, étant donné un langage $R \in Rat(X^{*})$, d'après le corollaire 1, on peut décider si $^{\omega}R^{\omega}$ est ou non une biadhérence (sachant que d'une part la biadhérence d'un rationnel est un rationnel de $^{\omega}X^{\omega}$ et que d'autre part l'égalité de deux rationnels de $^{\omega}X^{\omega}$ est décidable).

La question non résolue est la suivante : étant donné $R \in Rat(X^*)$, comment peut-on décider s'il existe un langage fini G tel que : $F(G^*) = F(R^*)$?

Notons que dans ce problème, il n'est question que de mots et non plus de mots infinis ou bi-infinis.

CONCLUSION

Cette étude de la famille des générateurs de la puissance infinie d'un langage rationnel est loin d'être complète et laisse non résolus des problèmes qui méritent d'être étudiés.

En ce qui concerne les générateurs maximaux, il y a trois résultats importants : ces générateurs sont rationnels, en nombre fini et tout générateur est inclus dans l'un d'entre eux.

Pour les générateurs minimaux qui sont en nombre infini, nous retiendrons que d'une part on peut décider si un langage rationnel est minimal et que d'autre part on peut décider si, étant donné un langage rationnel R, $[R]_\Omega$ possède un langage fini. Une question importante résiste : est-ce que tout générateur (rationnel) contient un générateur minimal (rationnel) ? Même quand R^Ω est finiment engendré, nous n'avons pas de réponses, nous savons seulement décider si un générateur quelconque de R^Ω contient un générateur minimal fini. En revanche nous donnons une réponse positive dans les trois autres cas particuliers étudiés : R est à la fois une Ω-base et un code, R est un idéal et R est un langage local.

Il semble intéressant de se tourner vers les ifl-codes qui sont à l'opération puissance infinie ce que les codes sont à l'opération étoile : pour un code C tout mot de C^* a une décomposition unique sur C, pour un ifl-code C tout mot de C^Ω a une décomposition unique sur C. Dans cette direction deux problèmes se présentent : la décidabilité de l'existence d'un ifl-code dans $[R]_\Omega$ et l'étude du cas où $[R]_\Omega$ a pour Ω-base un ifl-code (cas correspondant pour les codes aux monoïdes libres).

Pour les mots bi-infinis, si l'étude des générateurs maximaux de ${}^\Omega R^\Omega$ n'apporte rien de neuf, tout reste à faire pour celle des générateurs minimaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **A. ARNOLD**, A syntactic congruence for rational Ω-languages. Theoretical Computer Science 39 (1985) 333-335.

[2] **D. BEAUQUIER**, Automates sur les mots bi-infinis. Thèse d'état Univ. Paris VII, 1986.

[3] **J. BERSTEL** and **D. PERRIN**, Theory of codes. Academic Press (1985).

[4] **L. BOASSON** and **M. NIVAT**, Adherences of languages. J. Comput. System Sci. 20 (1980) 285-309.

[5] **J. BÜCHI**, On a decision method in restricted second order arithmetics. Internat. Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science (Stanford Univ. Press, 1962).

[6] **S. EILENBERG**, Automata, Languages and Machines. Vol. A (Academic Press, New York, 974).

[7] **F. GIRE** et **M. NIVAT**, Langages algébriques de mots bi-infinis. Rapport LITP n° 86-50 (1986).

[8] **J. KARHUMÄKI**, A property of three-element codes. Theoretical Computer Science 41 (1985) 215-222.

[9] **J. KARHUMÄKI**, On three-element codes. Theoretical Computer Science 40 (1985) 3-11.

[10] **SC. KLEENE**, Representation of events in nerve nets and finite automata. Automata studies Princeton (1956) 3-40.

[11] **L.H. LANDWEBER**, Decision problems for automata. Math. Syst. Theor. 3 (1969) 376-384.

[12] **M. LATTEUX** and **E. TIMMERMAN**, Finitely generated Ω-languages. Information Processing Letters 23 (1986) 171-175.

[13] **B. LE SAEC**, Etude de la reconnaissabilité des langages rationnels de mots infinis. Thèse Univ. Bordeaux I, 1986.

[14] **I. LITOVSKY** and **E. TIMMERMAN**, On generators of rational Ω-power languages. Theoretical Computer Science 53 (1987) 187-200.

[15] **R. MACNAUGHTON,** Testing and generating infinite sequences by a finite automaton. Information and Control 9 (1966) 521-530.

[16] **M. NIVAT,** Sur les ensembles de mots infinis engendrés par une grammaire algébrique. RAIRO informatique théorique, vol. 11, n° 4 (1977) 311-327.

[17] **D. PERRIN,** An introduction to finite automata of infinite words. Automata on ininfinite words, Lecture Notes in Computer Science 192 (Springer, Berlin, 1985) 2-17.

[18] **L. STAIGER,** On infinitary finite length codes. Theoretical Informatics and Applications, vol. 20, n°4, 1986.

[19] **E. TIMMERMAN,** Feuillages d'arbres infinis. Thèse Univ. Lille I (1984).

[20] **S. TISON,** Mots infinis et processus, objets infinitaires et topologie. Thèse Univ. Lille I (1983).

TABLE DES NOTATIONS UTILISEES

RESUME

Soit R un langage rationnel, on étudie la famille $[R]_\Omega$ de tous les langages G - dits générateurs de R^Ω - tels que $G^\Omega = R^\Omega$. Cette famille possède un nombre fini de générateurs maximaux pour l'inclusion; tous sont rationnels.

On peut décider si un langage rationnel est ou non minimal pour l'inclusion dans $[R]_\Omega$ et si $[R]_\Omega$ possède ou non un générateur de cardinal fini.

On définit d'autres générateurs minimaux - fg-minimums, Ω-bases, générateurs de plus petite cardinalité, générateurs de plus petite taille - qui sont étudiés dans le cas général.

Des résultats plus précis sur ces différents minimaux sont donnés dans les quatre cas particuliers suivants : $[R]_\Omega$ possède un générateur fini, $[R]_\Omega$ possède une Ω-base qui est un code, $[R]_\Omega$ possède un idéal, $[R]_\Omega$ possède un langage local.

On termine par une ébauche de l'étude de la famille des langages G tels que ${}^\Omega G^\Omega = {}^\Omega R^\Omega$.

Mots-clés :

adhérence	mot bi-infini
automate	mot infini
code	puissance-Ω
déterministe	rationnel.