N[os] d'ordre : 29
30

THESES

présentées à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

Pour obten:

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES DE L'EDUCATION

par

CHANTAL D'HALLUIN et DANIEL POISSON

UNE STRATEGIE D'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES : LA MATHEMATISATION DE SITUATIONS INTEGRANT L'INFORMATIQUE COMME OUTIL ET MODE DE PENSEE

Membres du jury :

Messieurs les Professeurs	M. MIGEON	Président
	P. DEMUNTER	Rapporteurs
	J. CHASTENET DE GERY	
	N. ROUCHE	
	R. BKOUCHE	Examinateurs
Madame le Professeur	F. MAYEUR	

Soutenues le 2 mars 1988

Monsieur le Recteur Michel Migeon nous a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Qu'il trouve ici le témoignage de notre reconnaissance en particulier pour avoir impulsé à l'Université de Lille I les systèmes de formation modulaires et par Unités Capitalisables et la pédagogie par objectifs.

Nous remercions Monsieur le Professeur Paul Demunter d'avoir accepté la direction de cette thèse en Sciences de l'Education notre travail se situant au carrefour de plusieurs disciplines.

Que Monsieur le Professeur Jérôme Chastenet de Géry trouve ici notre reconnaissance pour avoir accepté d'être rapporteur. Le travail du CREEM IREM a nourri nos réflexions sur l'impact de l'informatique dans l'enseignement. Toute l'équipe nous a encouragés dans notre entreprise. Nous les en remercions.

Nous tenons à exprimer notre grande estime à Monsieur le Professeur Nicolas Rouche. Nous le remercions d'avoir suivi et critiqué minutieusement la partie mathématique de cette thèse. A travers lui, c'est toute l'équipe du GEM de Louvain-la-Neuve que nous remercions pour les échanges que nous avons eus.

Nos remerciements vont également à Madame et Monsieur les Professeurs Françoise Mayeur, Rudolph Bkouche qui ont bien voulu accepté de faire partie du jury qui concrétisent ainsi les collaborations avec l'Université de Lille III, l'IREM de Lille.

Le travail que nous présentons ici est le fruit de plusieurs années de recherche, de pratique sur le terrain quelquefois abrupt de la formation d'adultes, de formation de formateurs. C'est dans le cadre de l'Institut CUEEP (Centre-Université Economie Education Permanente) de l'Université de Lille I que nous avons trouvé la possibilité d'unifier et de développer ces trois axes en interaction. C'est l'ensemble des personnels que nous remercions. Aux permanents et aux formateurs du Département Mathématiques c'est plus que des remerciements que nous adressons, nous avons conscience d'avoir porté un travail au nom d'un collectif. Les échanges avec les uns et les autres individuellement ou en réunion, leur enthousiasme à produire, expérimenter, se former, chercher, critiquer a été pour nous une aide considérable et un véritable moteur.

Nous adressons nos remerciements à Françoise Hares pour la patience, la diligence et la qualité dont elle a fait preuve lors de la frappe du texte.

Enfin nous ne pouvons taire toute la satisfaction que nous avons eue à élaborer ce travail en commun. Bien que nos méthodes de travail, nos méthodes de pensée, nos sensibilités ne soient pas toujours semblables, nous avons réussi à établir une sincère et très fructueuse coopération avec toute l'exigence que cela impose l'un par rapport à l'autre.

Ce mémoire est le résultat d'un travail effectué en commun par Chantal D'Halluin et Daniel Poisson. La formulation définitive s'est faite en collaboration, par approximations successives, à partir du matériau apporté par l'un ou par l'autre.

Dans la deuxième partie, Daniel Poisson a dégagé le rôle des supports, Chantal D'Halluin a explicité la méthode globale.

Dans la troisième partie Daniel Poisson a travaillé l'apport des nouveaux outils de calcul, Chantal D'Halluin celui des nouvelles images.

Dans la quatrième partie, Chantal D'Halluin a étudié le rôle du tryptique Tableau-Graphique-Formule et son opérationnalisation dans toute la monographie, Daniel Poisson a étudié le rôle des calculs par approximation et par encadrement pour dégager le concept de limite.

Dans la cinquième partie, Chantal D'Halluin a travaillé sur les entretiens des formateurs, Daniel Poisson a fait une relecture orientée des écrits sur la pédagogie par objectifs.

La présentation générale, l'amorce de la méthodologie et la conclusion ont été élaborées collectivement et résultent d'une synthèse des apports de chacun.

UNE STRATEGIE D'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES :

LA MATHEMATISATION DE SITUATIONS INTEGRANT L'INFORMATIQUE

COMME OUTIL ET MODE DE PENSEE

PREMIERE PARTIE

PRESENTATION GENERALE

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Dès le début de nos interventions en formation initiale et en formation d'adultes, nous fûmes persuadés que l'Université devait et pouvait mettre sa capacité de recherche au service de l'amélioration de l'enseignement en vue d'une appropriation collective du savoir par le plus grand nombre.

Nous occupons dans l'Université une place privilégiée pour contribuer à cette mission. Notre statut d'Enseignant Chercheur et notre rattachement au Centre Université-Economie d'Education Permanente (CUEEP) au sein de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois nous a permis :

- de participer tant localement que régionalement ou au niveau national à divers travaux, réflexions et recherche sur l'enseignement concernant soit des publics spécifiques (adultes faiblement scolarisés des Actions Collectives de Formation, insertion jeunes, entreprises, lutte contre l'illétrisme, formation des maîtres, ...) soit des aspects disciplinaires (mathématiques, initiation informatique, interdisciplinarité), soit des techniques éducatives (pédagogie par objectifs et diplômes par unités capitalisables et contrôle continu, informatique pédagogique, personnalisation et individualisation) ;

- d'exercer nos fonctions d'enseignement principalement et prioritairement dans des actions innovantes soit sur des terrains de formation d'adultes liés à des recherches pédagogiques, soit en formation des maîtres, soit en sciences de l'éducation dans des actions de transfert des résultats de ces recherches ;

- de choisir de façon volontariste de mener au sein de l'Université des recherches fondamentales sur l'enseignement.

Ces recherches s'inscrivent historiquement dans une transformation de l'Université qui a intégré simultanément, dans un contexte de régionalisation :

- une mission d'éducation permanente et des recherches associées sous l'impulsion en particulier de M. Bertrand Schwartz ;

- des réflexions sur l'enseignement des disciplines (création des IREM, des UER de didactique, des UER de Sciences de l'Education) ;

- une mission de formation et de recherche sur l'introduction de l'informatique à l'école sous la responsabilité d'universitaires en particulier de M. Claude PAIR.

Nous avons la double "chance" d'appartenir à la fois à une discipline qui pose problème : les mathématiques, et à une région défavorisée culturellement mais ayant une volonté politique de s'attaquer à ces problèmes.

En effet, les mathématiques sont le principal outil d'orientation et de sélection en formation initiale et constituent l'un des principaux obstacles à l'accès des adultes aux formations scientifiques et techniques dans le cadre de la formation permanente.

Toute recherche qui concourt à l'amélioration même minime de l'enseignement des mathématiques est donc très importante, surtout pour une région comme le Nord-Pas-de-Calais qui présente des zones de forts retards scolaires en formation initiale et des zones de sous-scolarisation pour le public adulte.

Nous avons pu dans cette région, bénéficier de trois facteurs favorables :

- une tradition de mouvements d'éducation populaire et associatifs,

- un militantisme pédagogique,

- une volonté politique d'"Universités pour tous" pour une montée collective en qualification sociale et professionnelle s'inscrivant dans une pédagogie inégalitaire : donner plus à ceux qui ont moins.

De plus, les trois axes de recherches universitaires précédemment cités ont été relayés et amplifiés par des personnalités locales s'appuyant sur des collectifs dynamiques, citons parmi elles M. Michel Migeon, M. André Lebrun.

Dans ce contexte notre projet vise à travers une action et une recherche, une amélioration de l'enseignement des mathématiques en tant qu'activité sociale s'inscrivant dans un dispositif de formation : pour une appropriation par le plus grand nombre de l'outil mathématique au service d'une action éducative et d'une montée en qualification globale.

Plus précisément notre projet est de contribuer à l'élaboration de questions et d'éléments de réponses à ces questions :

. Est-il possible de" réconcilier" les adultes avec les mathématiques après un échec scolaire ?
. Certaines des innovations impulsées en formation d'adultes sont-elles pertinentes en formation initiale dans le cadre de la lutte contre l'échec scolaire (zone d'éducation prioritaire, ...) ?
. Dans quelle mesure ces méthodes sont-elles pertinentes pour tout public ?
. Au-delà d'une appropriation collective de l'outil informatique et de la pensée informatique par le plus grand nombre (Plan Informatique pour Tous), comment mettre les technologies nouvelles au service d'une amélioration de l'enseignement des mathématiques ?
. Est-ce que ce nouvel outil (l'ordinateur) influence les contenus d'enseignement et les méthodes pédagogiques ?

Dans cette thèse, nous proposons
une stratégie d'enseignement des mathématiques: la mathématisation de situations intégrant l'informatique comme outil et mode de pensée

permettant à des adultes d'acquérir des savoirs et savoir-faire mathématiques transférables en totalité ou en partie en formation initiale, amplifiant les méthodes actives et intégrant l'apport de la pédagogie par objectifs.

Compte-tenu de notre projet social de montée collective en qualification, il nous a paru prioritaire de centrer notre étude sur les méthodes et les points stratégiques qui permettent d'avoir une intervention globale dans une action éducative.

L'objet de cette étude est ample (au sens de N. Rouche [101]), nous l'étudierons sous certaines faces, ces études partielles visant à donner une représentation globale. Peut-être peut-on parler de plusieurs sondes envoyées dans l'objet d'étude ?

C'est donc volontairement que nous prenons du recul par rapport aux apprentissages ponctuels, aux études expérimentales et cliniques des stagiaires pour montrer comment les savoirs, savoir-faire, théories mathématiques peuvent être construits par des méthodes actives à partir de situations problèmes. Nous précisons en quoi dans notre stratégie, le concept d'organisation des informations sur des supports, issu directement de la pensée informatique et relayé par l'outil informatique, joue un rôle particulier dans l'activité de mathématisation. Nous dégageons le rôle spécifique des nouveaux outils de calculs et des nouveaux modes de production d'images dans une approche expérimentale des mathématiques.

Notre but est que cette thèse fournisse à des enseignants, à des formateurs de différents horizons, une matière pour réfléchir à leur propre méthode pédagogique, processus que nous avons enclanché pendant la rédaction même de la thèse et qui y est intégré. Il ne s'agit pas de fournir des leçons modèles clés en main, ni même une méthode clés en main. Il s'agit plus de fournir des clés pour construire collectivement un réel savoir mathématique transférable et opératoire et ce quels que soient le contenu, le niveau, le public.

CHAPITRE II

PRESENTATION DU CADRE INSTITUTIONNEL

Comme nous l'avons indiqué dans la présentation générale, nos recherches sont directement liées à notre appartenance au Département Mathématiques de l'Institut C.U.E.E.P., composante de l'Université.

Nous ne développons pas ici l'évolution du C.U.E.E.P., l'analyse des terrains ni le suivi du public [20] [41]. Nous nous attacherons à expliciter seulement les caractéristiques particulières de cet institut qui facilitent la compréhension de notre travail.

1 - LE C.U.E.E.P.

L'analyse de la signification du sigle C.U.E.E.P. choisi en 1968, cette date étant elle-même significative, fournit une bonne trame de présentation des idées forces.

C.U.E.E.P. signifie Centre Université-Economie d'Education Permanente, chaque mot est porteur d'informations.

1-1 - L'EDUCATION PERMANENTE

Ce concept d'Education Permanente lié à des courants de pensée très actifs pendant les années 70 a été et reste la principale motivation pour venir travailler à temps plein ou à temps partiel au C.U.E.E.P. [42]. L'Education Permanente est prise dans son sens le plus large, elle englobe et dépasse la formation initiale des jeunes et la formation professionnelle continue des adultes. Le concept d'Education est plus ambitieux que les concepts d'enseignement ou de formation. Par delà la formation d'adultes,les membres du C.U.E.E.P. visent une prise en compte globale de l'éducation.

Cet aspect d'Education Permanente est particulièrement mis en valeur dans la participation du C.U.E.E.P. à la mise en place, à l'animation et à l'évolution du modèle Action Collective de Formation.

Ces actions expérimentales à bases territoriales visent à tenter une approche collective des problèmes de formation et à décloisonner la fonction enseignante en faisant appel à des formateurs non-enseignants issus du terrain, à égalité de nombre avec les enseignants. Les enseignants n'interviennent pas forcément au même niveau, ni dans la même discipline, qu'en formation initiale, alternent plusieurs niveaux, ce qui leur donne une vision globale de l'enseignement et évite la sclérose et la routine.

L'enseignement des mathématiques a donc été intégré à un ensemble de formations. La diversité du collectif des formateurs a permis dans ces actions de tenir à la fois la dimension pluridisciplinaire et une réflexion disciplinaire. Le modèle Action Collective de Formation a induit les stratégies et les pratiques éducatives du C.U.E.E.P. sur la totalité de ses terrains d'intervention. En particulier dans le cadre de l'Education Permanente, le C.U.E.E.P. attache une grande importance à l'accueil du public et à l'environnement de la formation. L'accueil ne se limite pas à une" mise en formation" mais sous-entend une orientation-suivi-évaluation en lien avec les disciplines.

La fonction de conseil en formation vise à prendre en compte ou à faire émerger et à donner les possibilités de réaliser les projets individuels de formation. Cette interaction continuelle entre terrains et pédagogie caractérisée par la coopération constante entre des conseillers en formation chargés d'un terrain et des responsables des départements pédagogiques du C.U.E.E.P. chargés des aspects disciplinaires est une des caractéristiques du C.U.E.E.P.

Il est important de signaler que les A.C.F. jouent le rôle de laboratoire de recherche et d'expérimentation en grandeur réelle des innovations pédagogiques impulsées par le C.U.E.E.P. (l'A.C.F. de Roubaix-Tourcoing concerne 3000 auditeurs, celle de Sallaumines-Noyelles-sous-Lens a touché 20 % de la population adulte des communes concernées). Les Actions Collectives et en particulier celles gérées par le C.U.E.E.P. ayant fait l'objet de nombreuses recherches, nous ne détaillerons pas cet aspect, néanmoins essentiel pour notre thèse et renvoyons le lecteur intéressé à [48] [46] [87] extraits de la bibliographie de la Thèse de Jacques Hedoux "Non-publics, publics de formation d'adultes" [60]

1-2 - UNIVERSITE - ECONOMIE

La liaison Université-Economie fournit un cadre adapté pour la réalisation de l'Education Permanente.

L'Université apporte :

- son statut du Service Public,
- sa possibilité de définir et de délivrer des diplômes,
- sa capacité de recherche
- sa marge d'autonomie.

L'Economie ancre le C.U.E.E.P. dans la réalité socio-économique en fonction :

- des priorités nationales
- des initiatives régionales
- du marché local de la formation permanente.

Le trait d'union entre les deux mots définit bien une des caractéristiques du C.U.E.E.P. qui est d'être à la fois un service public, composante de l'Université avec des postes et un budget d'Etat et aussi soumise aux lois du marché de la formation permanente en concurrence avec les organismes privés, publics ou parapublics (la moitié du budget des postes provient de ressources propres).

1-3 - UN CENTRE

Le mot Centre recouvre plusieurs aspects de l'institution :

- Une dimension géographique : l'ancrage dans la réalité socio-économique implique l'existence de centres locaux relativement autonomes dans les négociations des actions de formation en prise directe sur les spécificités locales pour pouvoir mieux analyser et répondre aux besoins.

- Une dimension politique : cette relative autonomie des centres locaux se situe dans un cadre politique centralisé.

- Une dimension pédagogique : les départements pédagogiques ont en responsabilité la définition des contenus,des filières de formation, des recherches pédagogiques, du recrutement et de la formation de formateurs.

Ces trois dimensions en interférence, font que le C.U.E.E.P. fonctionne comme un centre qui à la fois coordonne, synthétise, impulse, attire et réfléchit des dynamiques locales. L'adaptabilité, la souplesse et la grande vitesse de décision internes au C.U.E.E.P. ont été parmi les facteurs qui ont favorisé notre recherche. Ce fonctionnement implique que toute décision soit négociée entre un responsable de terrain et un responsable pédagogique, chacun ayant pouvoir de décision dans le cadre de la politique générale du centre.

2 - LA POLITIQUE PEDAGOGIQUE DU DEPARTEMENT MATHEMATIQUES

Dans le cadre du projet d'éducation permanente du C.U.E.E.P., le Département Mathématiques, partant du constat de l'"échec scolaire par les maths" pour une partie des élèves de la formation initiale a voulu offrir prioritairement à ces exclus une nouvelle chance et non une deuxième chance identique à la première d'accéder à une formation mathématique. Il s'agissait de faire fonctionner le concept de formation inégalitaire, donner plus et autre chose à ceux qui ont le moins bien tiré partie de la formation initiale.

L'hypothèse était qu'en reproduisant la formation initiale, on aboutirait aux mêmes échecs sauf pour une petite minorité, les volontaristes, qui de toutes façons n'avaient pas besoin du C.U.E.E.P. pour réussir dans la promotion sociale classique.

LA PEDAGOGIE EST CENTREE SUR L'ELEVE

- Après une phase d'accueil, orientation, évaluation, on traite les demandes individuelles en positionnant les adultes dans une filière de formation modulaire de montée en qualification dans le domaine mathématique.

- On traite par des négociations directes et spécifiques les demandes collectives provenant d'entreprises ou d'associations.

- Suivant les projets de formation, il y a des regroupements cohérents débouchant sur des diplômes ou une qualification.

Toute cette démarche s'inscrit dans le courant de pensée de la Pédagogie par Objectifs en en faisant une adaptation à notre spécificité en particulier qui centre la formation sur l'activité des élèves.

Le dispositif pédagogique du C.U.E.E.P. repose sur la notion de co-responsabilité de l'adulte et du formateur : celui-ci passe avec l'adulte un contrat "compte-tenu de vos connaissances actuelles, vous devez être capable d'atteindre tels savoirs et savoir-faire en un temps donné, à condition de ..."

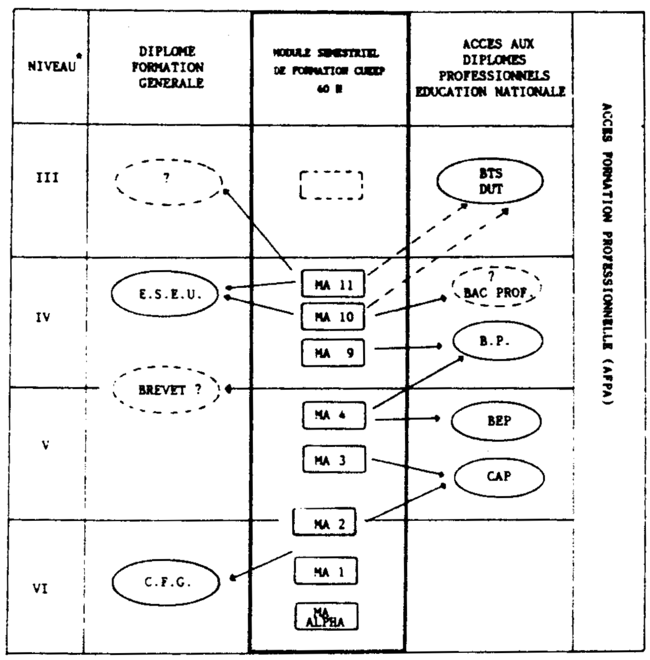
Les méthodes employées par les formateurs peuvent être diverses mais sont négociées dans le groupe et visent à favoriser au maximum l'activité de chacun.

LA VALIDATION DES ACQUIS EST AU SERVICE DE LA FORMATION ET NON L'INVERSE

Il s'agit d'éviter le bachotage et la "diplômite" tout en favorisant la promotion des individus.

Il est possible d'envisager une formation uniquement en vue d'acquérir un diplôme, il aurait été possible de créer des diplômes spécifiques à la formation continue, une autre voie a été choisie : faire acquérir des diplômes existants (C.A.P., E.S.E.U., par exemple) en adaptant le contenu, la forme et la délivrance à la formation continue.

ORGANIGRAMME DE LA FORMATION MODULAIRE
EN MATHEMATIQUES AU C.U.E.E.P.



* Niveau de qualification professionnelle

UN TRAVAIL D'EQUIPE, UNE FORMATION DE FORMATEURS

Une formation par et pour la production de documents pédagogiques, d'éléments de réflexion, de capitalisation, de théorisation pris en charge collectivement : se former pour produire, produire pour se former.

Une formation en double piste qui consiste à placer le formateur en situation réelle de formé en utilisant les moyens pédagogiques que l'on souhaite analyser. Cette pratique permet à la fois de prendre en compte la discipline, de ne pas se limiter à la logique interne de cette discipline, de s'intéresser à son interaction avec tout l'environnement de l'action de formation. [97]

Dans ce travail d'équipe, chacun peut jouer le rôle de personne ressource pour les autres, sur des points particuliers.

UNE RECHERCHE PEDAGOGIQUE

Le Département Mathématiques est globalement impliqué dans la fonction Recherche. Tous sont à la fois praticien et chercheur plus ou moins impliqués dans la fonction chercheur. Ce sont les lieux et les temps qui diffèrent, les personnes physiques sont les mêmes.

L'originalité du C.U.E.E.P. et aussi sa force est de faire fonctionner de façon cohérente des interactions fortes entre Recherche Universitaire, Formation des maîtres, Actions Expérimentales sur les bas niveaux de qualification, Actions expérimentales à tout niveau, validation institutionnelle des acquis.

LE LABORATOIRE TRIGONE

Cette particularité du C.U.E.E.P. a été encore amplifiée par la création du Laboratoire Formation, Technologies Nouvelles, Développement (Laboratoire Trigone).

En effet, dès son origine, le C.U.E.E.P. a développé des actions qui associent la recherche et la formation. Afin de renforcer ce pôle de recherche et d'assurer encore plus de cohérence, il a été décidé de créer en 1986, un laboratoire de recherche associé au C.U.E.E.P.

Ce laboratoire de recherche en Sciences de l'Education a :

- trois angles d'approche de la réalité éducative : la recherche,l'action et l'évaluation de cette recherche et de cette action,

- trois axes de recherche : l'ingéniérie de l'éducation, la didactique des diverses disciplines et le lien entre formation et développement.

- trois démarches de recherches privilégiées : expérimentale, appliquée et participante.

Un principe unificateur : le souci constant d'innover, d'expérimenter, d'évaluer, de transférer, fondant ainsi une Science de l'éducation.

Nos recherches démarrées avant la création du Laboratoire Trigone se sont intégrées aux recherches du laboratoire et contribuent à son développement.

CHAPITRE III

PRESENTATION DE LA THESE

Le chapitre précédent a précisé dans quel cadre institutionnel se situe notre fonction d'enseignement et de recherche. Nous avons dans le premier chapitre précisé nos finalités. Ce chapitre est consacré à la formulation de l'hypothèse globale de notre recherche dont la validation est l'objet de cette thèse. Elle est issue d'une longue réflexion pédagogique en interaction avec une pratique sur des terrains de formation d'adultes et de formation des maîtres propres au CUEEP ou associés.

En entreprenant ce travail, nous avons le désir de quitter le militantisme, l'innovation, la réponse quotidienne ou quasi-quotidienne aux nouvelles demandes et exigences de la formation d'adultes pour prendre du recul, théoriser notre pratique.

Nous avons cherché à être le plus rigoureux possible tout au long de ce travail, tout en sachant comme l'écrit Nicolas Rouche [100] :

> *"La rigueur ne se pratique que suivant des registres variés. La rigueur a valeur instrumentale : on y recourt, on en augmente la dose lorsqu'on est en danger de se tromper... La rigueur absolue est un concept limite".*

Nous avions conscience en démarrant ce travail de ne pas avoir à notre disposition de méthode "scientifique" standard qui soit adaptée.

Notre travail s'inscrit dans *"une diversité d'approches et une multiplicité d'investigations pour lesquelles la connaissance en éducation trouve ses fondements"*.[7]. Nous espérons qu'il apportera un *"éclairage spécifique permettant de mieux connaître certains aspects du système éducatif jusque là ignorés"*.

Dans ce sens, nous dégageons à la fin de cette thèse (chapitre XIV), au moyen d'une analyse de notre méthode de recherche, des pistes et des techniques, qui intégrées dans une recherche collective [19], serviront à l'émergence d'une méthodologie propre à des objets d'étude semblables au nôtre (un fait éducatif global) dans le cadre d'une interaction pratique - théorisation liée à un terrain.

Un double questionnement est à l'origine de notre hypothèse globale :

- d'une part, un questionnement au sujet d'une méthode pédagogique d'enseignement des mathématiques
- d'autre part, un questionnement sur l'impact de l'informatique dans l'enseignement.

QUELLE METHODE PEDAGOGIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ?

Dans une filière de formation organisée en modules allant de l'alphabétisation à l'entrée à l'Université, il s'agissait de mettre en place un enseignement des mathématiques pour les adultes qui ne soit ni un enseignement de théories apparaissant stériles parce que sans emprise sur le réel, ni un enseignement mécaniste de recettes utilitaires. H. Freudenthal développe dans "Mathematics as an Educational Task" une critique d'un tel enseignement [77]. Il reproche aux enseignants de mathématiques d'enseigner des maths stériles car coupées de leurs applications et aux enseignants-utilisateurs de mathématiques appliquées de faire des sciences démathématisées se réduisant à des transformations mécaniques de formules.

Les mathématiques ayant été cause d'échecs en formation initiale, il n'était pas question d'offrir une deuxième chance identique à la première mais réellement une nouvelle chance d'accéder à une formation mathématique en faisant davantage appel à l'intuition et à l'intelligence qu'à la mémoire. Il nous fallait par rapport à l'enseignement traditionnel "*élargir le champ des connaissances explicitement enseignables*", Marc Legrand [n].

Il faut souligner que le cadre institutionnel CUEEP permettait de prendre une marge d'autonomie par rapport aux programmes scolaires et à une progression linéaire imposée, en ayant toutefois la possibilité de valider les acquis y compris par des diplômes.

En suivant l'hypothèse Piagétienne très largement admise en didactique des mathématiques suivant laquelle l'élève construit essentiellement ses connaissances par un jeu de déséquilibration-rééquilibration en interaction permanente avec son environnement (l'enseignement, les élèves, les outils d'aide, ...), en pratiquant des méthodes actives (agir en situation), le Département Mathématiques du CUEEP **a choisi de faire faire des mathématiques à partir de situations.**

QUEL IMPACT DE L'INFORMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT ?

Initialement, les promoteurs de l'utilisation de l'informatique espéraient des grands changements du seul fait de l'introduction de la culture informatique et des ordinateurs dans la classe.

Le Département Mathématiques du CUEEP a été porteur de l'introduction de l'outil informatique dans l'enseignement. Les premières observations des équipes expérimentales [47] ont fait ressortir deux faits en apparence contradictoires tout en éliminant certains fantasmes par rapport à l'ordinateur :

L'ordinateur n'est qu'un outil, seul il ne modifie rien et en même temps, **c'est un outil puissant qui provoque des destabilisations** importantes, suffisamment importantes pour s'interroger sur les pratiques pédagogiques et faire redébattre les questions de didactique générales : qu'est-ce qu'apprendre, comment, quel est le rôle de l'enseignant, interaction enseignant-élève-machine...

Parallèlement dans les classes, les directives administratives recommandaient d'introduire l'informatique à l'intérieur des disciplines et non comme une nouvelle discipline. On s'est aperçu alors que l'impact de l'informatique était différent suivant les disciplines [18] d'où la nécessité de se poser la question de l'impact de l'informatique à l'intérieur d'une discipline.

De plus, les expériences de diverses équipes ont montré que le même matériel mis dans des environnements différents est utilisé de façons très différentes [1]. On ne peut donc étudier l'impact de l'informatique sur l'enseignement d'une discipline indépendamment des pratiques de l'enseignant.

La question devient alors :

> **Quelle est l'interaction entre un outil (l'ordinateur), une discipline (les mathématiques), une pratique pédagogique (méthode active) ?**

Cette question qui s'est posée historiquement après le questionnement sur la méthode d'enseignement a relancé celui-ci pour aboutir à la question finale dont découle notre recherche :

Quel est l'impact de l'informatique sur les stratégies d'enseignement du Département Mathématiques du CUEEP ?

plus précisément :

> **Quelle est l'interaction entre un apprentissage des mathématiques par la mathématisation de situations et l'utilisation de l'informatique comme outil d'aide et comme mode de pensée ?**
>
> **Le couple mathématisation de situations/informatique, dans un environnement adéquat engendre une méthode globale d'enseignement des mathématiques performante, en modifiant les méthodes pédagogiques, les cursus et les modes de pensée.**

Le recours à des situations n'était au départ qu'une astuce pour réconcilier les adultes avec les mathématiques et n'était pas érigé en méthode bien que le département mathématiques "*visait à travers l'enseignement par situations-problèmes, une appropriation et une constitution de savoir mathématique par les élèves, s'opposant à une présentation traditionnelle des contenus mathématiques bâtie sur le schéma définitions-théorèmes-exercices d'application*" [2]

Le mode de pensée informatique a induit dans la pédagogie des situations le concept de support de gestion de l'information.

L'organisation de données sur des supports, les manipulations structurantes permettent de reconnaître sur différents supports des analogies entre plusieurs situations pour dégager des **modèles** mathématiques sans avoir dans un premier temps recours au formalisme et à la théorie.

La **formalisation** et la **théorisation** viennent ensuite quand les élèves peuvent lui donner un sens. "*There is no mathematics without mathematizing in particular, no axiomatics without axiomatizing and no formalism without formalizing*" (H. Freudenthal [50]

Dans les chapitres IV et V nous montrons ainsi comment la mathématisation de situations et l'outil informatique inter-agissent pour former un couple et engendrer une méthode d'enseignement : la mathématisation de situations à l'aide de supports de gestion de l'information assistée par des aides techniques.

Dans les chapitres VI, VII et VIII nous dégageons des effets spécifiques des nouveaux **outils de calcul** et de production **d'images** sur les mathématiques en tant qu'objet et matière d'enseignement.

Les chapitres IX, X, XI sont consacrés à une **monographie sur l'enseignement de l'analyse** qui explicite et approfondit sur des points particuliers (qui nous paraissent capitaux dans l'enseignement : la modélisation, le concept de dérivation-intégration, le passage à la limite) la méthode globale d'enseignement, le rôle amplificateur de l'outil informatique. Cette monographie contribue à la validation des hypothèses émises dans les chapitres précédents et illustre un aspect de la performance de la méthode.

Dans les chapitres XII et XIII nous étudions d'autres aspects de la **performance**. Compte-tenu de nos finalités une méthode est performante :

- si elle permet à un public exclu du système scolaire d'accéder à une culture,
- si elle est transférable partiellement ou globalement à d'autres terrains, si à l'occasion de ces transferts elle induit des destabilisations non destructurantes porteuses d'interrogations, de réflexions individuelles et collectives, d'innovations,
- si elle permet d'enrichir d'autres courants de réflexions.

Le chapitre XII est une étude du **transfert en formation initiale** par l'intermédiaire d'enseignants de collège et de lycée, vacataires au CUEEP. Cette étude nous conduit à préciser en quoi la méthode de mathématisation modifie les méthodes pédagogiques, les cursus, les modes de pensée. En particulier dans ce cadre, apparaît une réflexion pédagogique, sur les objectifs en formation.

Ce qui nous conduit dans le chapitre XIII à étudier un dernier aspect de la performance qui est l'interaction entre la **pédagogie par objectifs** et la méthode globale.

Précisons maintenant ce que, dans l'hypothèse globale, nous appelons **environnement adéquat** sur lequel nous ne reviendrons pas spécifiquement. Pour que notre démarche pédagogique soit transférable à d'autres niveaux d'enseignement et à d'autres terrains d'intervention, il apparaît nécessaire :

- que le terrain d'intervention soit bien défini : nous entendons par là un groupe de personnes (responsables administratifs, chargés de l'accueil et de l'orientation, responsables pédagogiques, enseignants, élèves) réunies autour d'un projet commun de formation pour un temps donné,

- qu'il y ait un contrat explicite entre enseignants et élèves portant sur les méthodes et les contenus, que ce contrat soit ou non validé institutionnellement,

- qu'il y ait une cohérence entre objectifs de formation et validation des acquis,

- qu'il existe un travail d'équipe en prise directe sur ce terrain. Il faut en particulier que la formation continue des enseignants existe et qu'elle soit en partie centrée sur la discipline avec production de documents de travail,

- qu'un noyau de personnes-ressources assurent synthèse, capitalisation et transfert inter-terrains des travaux,

- qu'il y ait une remise en question des pratiques et des méthodes de travail.

La méthode d'enseignement que nous décrivons dans cette thèse est une méthode globale au sens où elle s'oppose à un enseignement linéaire et uniquement déductif. Il nous a été difficile de choisir un ordre d'exposition des différentes faces étudiées de notre sujet dans la mesure où chacune éclaire les autres. L'idéal serait d'en faire une lecture globale en associant les différentes parties simultanément.

Nous avons essayé de rendre lisible les différentes parties indépendamment les unes des autres de façon à ce que suivant les centres d'intérêt, il soit possible de lire certaines parties avant d'autres.

DEUXIEME PARTIE

UNE METHODE GLOBALE D'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES INTEGRANT L'INFORMATIQUE COMME OUTIL ET MODE DE PENSEE

CHAPITRE IV

LE COUPLE MATHEMATISATION DE SITUATION/INFORMATIQUE

Dans l'hypothèse globale, nous parlons de couple mathématisation de situation/informatique. Nous montrons dans ce chapitre que l'interaction entre informatique et mathématisation de situation crée bien un couple qui, par delà l'effet de chacune de ses composantes, est le principal vecteur des changements aboutissant à une nouvelle stratégie d'enseignement des mathématiques.

1 - LE CONTEXTE

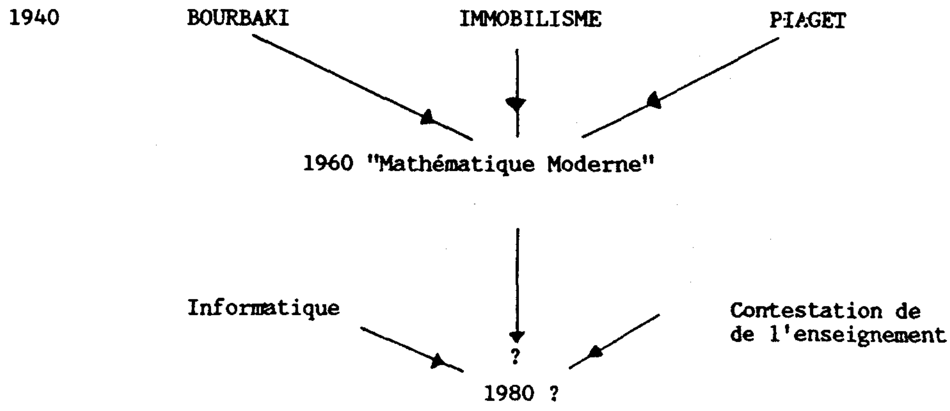
Précisons d'abord par rapport à quel modèle d'enseignement et dans quel contexte, ont eu lieu les changements et la nouveauté. Le modèle de référence est celui correspondant à notre propre formation aux mathématiques modernes à l'Université, ayant démarré notre activité enseignante au moment de la réforme des Maths modernes dans le secondaire, conjointement avec l'introduction de l'informatique dans l'éducation. Il y avait également une contestation post 68 dans les IREM, de l'enseignement traditionnel y compris celui correspondant à l'application de la réforme des Maths modernes.

Le modèle induit par notre propre formation, c'est Bourbaki appliqué à tort comme modèle pour l'enseignement. Nous rejoignons en cela la critique de J. Kuntzmann [75]

> Le mouvement Bourbakiste (qui se situe au niveau de la science mathématique et non à celui de son enseignement) a fait un double travail
> - de rénovation par l'introduction de "structures" ;
> - d'unification de la mathématique.
>
> ... A la suite de Bourbaki, "Mathématique Moderne" déplace le centre d'intérêt de l'enseignement en direction des structures. Ce déplacement consiste, en fait, assez souvent à utiliser un langage unificateur, l'étude de la structure elle-même étant hors de portée des lycéens.
> Les structures induisent dans l'enseignement un ordre de présentation qui n'est pas toujours raisonnable.

Il décrit dans cet article le contexte historique et l'évolution :

> **"Mathématique Moderne" est un mouvement qui est né dans un certain contexte historique, qui véhicule des idées qui a obtenu des réformes mais qui, comme tout mouvement, est destiné à être un jour, dépassé.**
> **La figure 1 schématise la manière dont je vois à la fois le contexte historique et l'évolution.**



Dès sa création (1971), le Département Mathématiques du CUEEP se situait directement dans ces perspectives. La critique de l'enseignement traditionnel ne portait pas uniquement sur les contenus, modernes ou pas, mais sur la stratégie d'enseignement. L'enseignement traditionnel, y compris depuis la réforme des maths modernes, est basé sur le schéma :

$$\boxed{\text{DEFINITIONS ET AXIOMES}} \longrightarrow \boxed{\text{THEOREMES}} \longrightarrow \boxed{\text{EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE}}$$

Il s'effectue en général dans un contexte de cours magistral. Le travail de l'élève étant limité à "j'apprends, j'applique".

De nombreuses critiques de ce modèle dominant d'enseignement ont été formulées.

Citons Régine Douady [40] :

"L'élève doit apprendre à résoudre des exercices d'application fabriqués pour que l'élève puisse utiliser ce qu'il a appris sans transformation. De plus, il doit le faire selon des règles du jeu qui ne sont pas toujours explicitées mais qui servent de références pour évaluer son travail".

Marc Legrand [77] précise de plus que ce travail s'effectue dans un contexte mathématique restreint. *"Seules sont explicitement enseignées les connaissances à propos desquelles a pu être identifié un processus complet d'enseignement : présentation non acrobatique d'un corps de savoir bien cerné, donnant lieu à un ensemble d'exercices et problèmes "faisables" par les étudiants et "corrigeables" par des enseignants, le tout permettant des contrôles normalisés évaluant les acquis".*

On aboutit souvent à ce que H. Freudenthal qualifie de "*mathématiques stériles coupées de leurs applications*" [50].

De plus cette conception de l'enseignement est centrée sur le discours du maître : "le maître dit, le maître montre, l'élève n'a qu'à faire pareil". C'est donc une présentation linéaire et structurée sur la logique interne de la science mathématique, de mathématiques mortes et aseptisées à l'opposé de l'activité de production du mathématicien.

Un mouvement s'appuyant sur la critique du modèle précédent et prônant des "mathématiques actives" et des "mathématiques vivantes" s'est développé dans les années 70 en particulier au sein des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM). Dans ce mouvement, deux aspects concernent directement notre travail, **le recours à des situations** pour ne plus faire de mathématiques aseptisées et stériles et **l'impact de l'informatique** en tant qu'outil et mode de pensée. Après avoir analysé dans ce contexte le rôle des situations et de la mathématisation de situation, nous montrons que c'est l'influence de l'informatique déjà pressentie par Kuntzmann [75], par le biais du concept de support qui a introduit la première étape de la méthode globale d'enseignement du CUEEP.

2 - LE ROLE DES SITUATIONS

Le recours aux situations visait à mettre en activité les élèves et à ne pas couper les mathématiques de leurs applications. Il ne s'agit plus d'apprendre des mathématiques, mais de faire des mathématiques en apprenant à mathématiser.

L'ambition était de calquer l'activité des élèves sur l'activité des chercheurs.

Le but initial est poursuivi à l'heure actuelle. Nicolas Rouche dans l'introduction de " la Perspective en Question" [54] précise bien l'enjeu :

> Peut-être trouverez-vous ici des situations-problèmes susceptibles d'animer votre classe. pourquoi ne pas essayer de défier les adolescents avec des questions à leur mesure, pas trop molles, pas trop dures non plus, où chacun exerce sa force intellectuelle et son agressivité de chercheur. Pourquoi ne pas tenter de mettre un tigre dans chaque élève ?

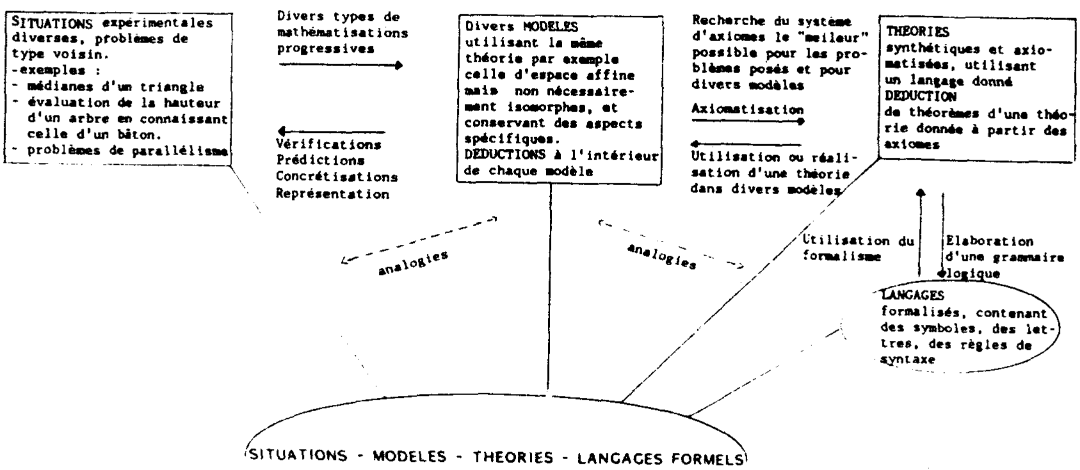
Nous avons repéré à l'intérieur de ce courant de pensée, deux pistes travaillées simultanément qui partent toutes les deux du concept de situations.

D'une part, en formation d'adultes et dans certains secteurs de l'enseignement technique, on résolvait des problèmes liés à des situations de la vie professionnelle ou sociale par exemple fiche de paye, impôt, consommation. Le recours à des situations ne débouchait pas sur une réelle rénovation. Soit on replaquait très vite sur ces situations l'outil mathématique sans le transformer, ni l'adapter pour aboutir à des écritures formelles et au monopole de l'algèbre.

> "Vous voulez comprendre les pourcentages ? Etudiez l'algèbre.
> Vous voulez calculer le montant de vos impôts ? Etudiez l'algèbre.
> Vous voulez maîtriser les règles de trois ? Etudiez l'algèbre.
> Vous voulez faire de la trigonométrie ? Etudiez l'algèbre.
> L'algèbre n'est pas une réponse appropriée à un besoin. C'est une réponse bulldozer, passe-partout. Ce n'est pas la peine d'écouter le demandeur, la réponse est déjà là, toute prête".
> [Contre la mystique de l'Algèbre] [83]

Soit on s'engluait dans la situation pour la situation en résolvant le problème sans apporter ni méthodes ni connaissances nouvelles. Les analogies entre situations-problèmes n'étaient pas mises en évidence, il n'y avait pas de mathématisation mais uniquement résolution de problèmes en situation.

D'autre part, une construction de système d'axiomes puis de théorie et de langage par mathématisation de situation s'appuyant sur des analogies de structure. Les axiomes et les définitions ne sont plus parachutés mais reconstruits selon le schéma proposé par J. Gadrey [51].



De fait, contrairement aux souhaits des promoteurs de cette rénovation, dans le schéma, seules les flèches allant d'une situation vers la théorie et le langage étaient mises en oeuvre. Les flèches d'interaction (analogies) et les flèches de retour (prédiction, réalisation, ...) n'étaient pas développées par les enseignants. Dans cette démarche que nous qualifions de **mathématisation axiomatisante**, les étapes essentielles et les activités liées au processus de mathématisation sont définies clairement. Cette démarche de mathématisation a été une des références du Département Mathématiques du CUEEP pour élaborer sa propre stratégie de mathématisation. Initialement, la mathématisation axiomatisante était dominante dans les activités de formation des maîtres et la pratique de résolution de situations-problèmes dans les actions de formation collective.

3 - LA DECOUVERTE DU CONCEPT DE SUPPORT A PARTIR DES "MATHEMATIQUES PAR LEURS APPLICATIONS"

Les activités de mathématisation qui ont permis de déclencher la synthèse entre les deux pratiques intégraient explicitement l'informatique comme mode de pensée et comme outil.

En formation des maîtres, le Département Mathématiques a été directement influencé par le courant pédagogique "les mathématiques par leurs applications". Dans un premier temps, il s'agissait uniquement de faire fonctionner les "retours vers les situations" du schéma proposé par J. Gadrey . Citons à ce propos M. Glaymann [55]

> **Nous enseignons des notions nouvelles et souvent fort intéressantes ; cependant notre point faible réside au niveau des applications de ces notions.**
> **Nous savons combien reste stérile une belle théorie sans applications !**
> **Notre tâche, à l'heure actuelle, est de trouver le maximum de problèmes et de situations, mettant en oeuvre les idées nouvelles de la mathématique d'aujourd'hui.**
> **Inversement, n'est-il pas pensable que l'étude d'une ou plusieurs situations nous conduisent à construire avec nos élèves des outils mathématiques pour comprendre et analyser la nature profonde d'un phénomène ?**

Dans la dernière phrase, on voit s'amorcer le changement radical qui conduira au renversement du couple "j'apprends, j'applique" au profit d'un apprentissage partant des "applications".

Analysons l'exemple proposé par M. Glaymann dans son article "au commencement était le calcul" [55]. Le titre de l'article montre déjà l'importance de l'aspect calculatoire : **le calcul précède la théorie.**

Le point de départ est une situation :

> **Une étude d'une situation économique :**
> **Une usine comprend deux secteurs A et B.**
> **Le secteur A fabrique du matériel à partir de matières premières ; le secteur B fabrique du matériel à partir des sous-produits fournis par A.**
> **Les capitaux initiaux des secteurs A et B sont respectivement 70 millions et 30 millions.**
> **On suppose que chaque secteur double tous les ans son capital ; en outre, à la fin de chaque année :**
> **1) le secteur A réinvestit a % de son revenu annuel, investit b % de son revenu annuel dans le secteur B et verse le reste de son revenu annuel en salaires et impôts.**
> **2) Le secteur B investit c % de son revenu annuel dans le secteur A et verse le reste de son revenu annuel en salaires et impôts.**

La consigne :

"Que constatez-vous ? Pouvez-vous donner une explication et mathématiser la situation?"

montre qu'il ne s'agit pas seulement de résoudre un problème concret mais bien de mathématiser et de théoriser pour comprendre.

Avant toute théorisation, M. Glaymann propose une exploration sur un exemple numérique (a = 60, b = 20, c = 70) à l'aide d'un tableau. **Ce tableau numérique** qui constitue un **support** de visualisation et sert de base à des conjectures est obtenu à l'aide d'une calculatrice.

année	x_n	y_n	$r_n = \frac{x_n}{y_n}$	$s_n = x_n + y_n$	$v_n = \frac{s_n}{s_{n-1}}$
0	70	30	2, 333	100	
1	133	44	3, 023	177	1, 770
2	244	71	3, 450	315	1, 775
3	439	119	3, 681	558	1, 777
4	786	207	3, 795	993	1, 778
5	1 403	364	3, 850	1 767	1, 779
6	2 500	645	3, 876	3 145	1, 779
7	4 451	1 145	3, 888	5 596	1, 779
8	7 923	2 035	3, 893	9 958	1, 780
9	14 102	3 620	3, 896	17 721	1, 780
10	25 097	6 440	3, 897	31 537	1, 780
11	44 663	11 460	3, 897	56 123	1, 780

Le recours à un tableau numérique est un tremplin pour le passage progressif à d'autres formalismes.
On trouve ainsi trois supports formels comme aide à la résolution

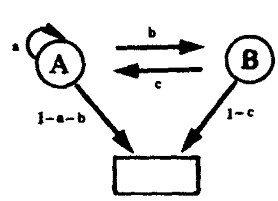
Le support algébrique :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1,6\ x_n + 0,7\ y \\ y_{n+1} = 0,2\ x_n + y_n \end{cases}$$

Le support matriciel :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6 & 0,7 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Le support graphe :



Notons que sur un exemple analogue, M. Dumont [44] propose le support organigramme informatique (concept de boucle et/ou de récursivité) et une visualisation du phénomène sur un graphique en étudiant l'évolution des points M_n (x_n, y_n) dans le plan.

L'informatique est présente à la fois comme mode de pensée et comme outil de calcul. Le calcul numérique n'intervient pas en fin comme application mais bien dès le début comme moyen d'accéder par conjectures successives à la théorie.

Le travail de M. Glayman ne vise pas seulement la résolution de la situation problème mais conduit par étapes à utiliser les matrices puis les puissances de matrices et enfin les valeurs propres et les vecteurs propres, pour résoudre des problèmes non triviaux exprimés sous une forme synthétique dépouillée de tout verbalisme : la stabilisation du phénomène se traduit par l'équation matricielle $A\ X = X$.

Ces travaux présupposaient implicitement la théorie connue et cherchaient des "concrétisations et applications".

En revanche T.J. Fletcher dans "L'algèbre linéaire par ses applications" [49] s'était fixé comme objectif d'apprendre la théorie à partir d'applications bien choisies.

> Il existe de nombreux livres sur l'algèbre linéaire ; mais celui-ci correspond à une attitude peu commune. Le but est d'approcher des questions théoriques à l'aide de problèmes et de situations.
> Le livre contient de nombreuses applications de l'algèbre linéaire ; cependant, ce n'est pas un recueil d'applications à l'usage des personnes qui connaissent déjà la théorie. Les applications que nous avons choisies, en géométrie, en physique, en statistique et autres domaines, conduisent tout naturellement aux idées maîtresses de la théorie...
> ... Le lecteur trouvera dans ce livre la plupart des idées qui forment l'ossature des cours d'initiation. On démontre la plus grande partie des résultats fondamentaux, mais lorsqu'une démonstration rigoureuse impose de dépasser les limites que nous nous sommes fixées dans le cadre de cet ouvrage, nous admettons purement et simplement le résultat. Ce que nous cherchons avant tout, c'est de montrer la nécessité d'une théorie et de faire sentir son intérêt.
> (Extrait de la Préface).

Cet objectif a directement influencé la stratégie d'enseignement du département Mathématiques du CUEEP qui se trouvait devant des publics qui ne connaissaient pas les théories et désiraient résoudre des problèmes non triviaux. Dans un premier temps, cette influence s'est exercée surtout sur l'utilisation des supports et de l'informatique. La verbalisation des théories sous-jacentes n'était pas prioritaire. Dans un deuxième temps (cf. chap. V), les situations serviront réellement d'ancrage aux modèles et à la théorie.

Explicitons à partir de quelques exemples, les voies ouvertes par T.J. Fletcher. Certaines situations proposées sont issues directement de l'utilisation des ordinateurs :

> Le but de cet exemple est la présentation, sous forme simplifiée, de la construction d'une courbe à partir de résultats fournis par un ordinateur...
> Nous pouvons envisager de nombreux critères d'ajustement.
> ...Une méthode conduit à faire une interpolation par un polynôme du troisième degré.

Fletcher débouche alors directement sur le concept de base de polynômes sans théorie préalable des espaces vectoriels, ni de définition de base.

> L'idée essentielle est de montrer que lorsque nous calculons sur des polynômes, il est intéressant d'utiliser une base formée par certains polynômes et d'exprimer d'autres polynômes en fonction de cette base. Le choix de la base dépend du problème envisagé.

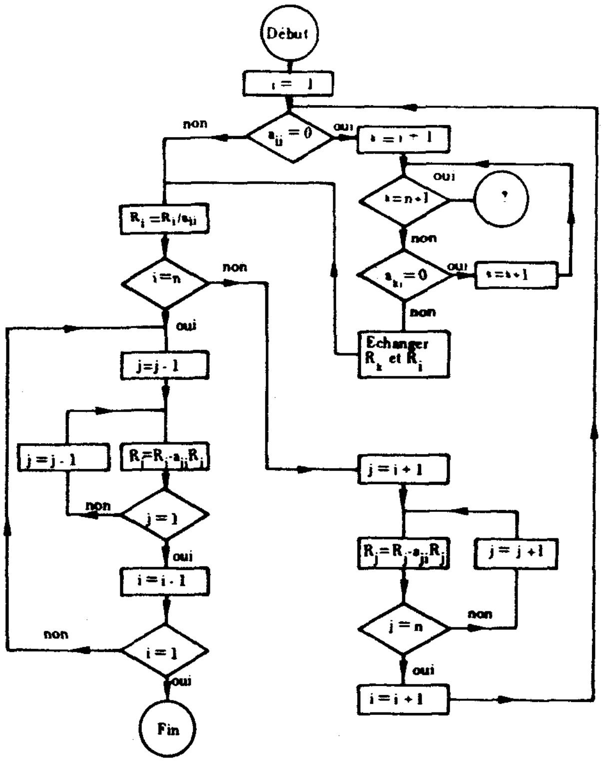
Il "intuite" à travers cet exemple, la puissance du concept de base et des possibilités offertes par la théorie linéaire en particulier du changement de base dans une situation non triviale et utile à beaucoup.

Fletcher vise également à unifier des morceaux de théorie, à donner des méthodes de travail transférables pour reconnaître qu'il s'agit d'une même théorie avant de l'avoir exposée.

> La détermination de l'inverse d'une matrice est intimement liée à la résolution d'un système d'équations. En fait ces deux types de calculs procèdent de la même méthode.

Il utilise pour cela explicitement des supports et l'informatique comme outil et mode de pensée.

> La résolution d'un système par la méthode des éliminations successives est beaucoup plus efficace et fournit une méthode pour inverser une matrice.
> Nous n'avons pas essayé de l'analyser complètement On peut en donner une description ; nous nous contenterons ici de présenterl'organigramme de cette méthode.



Cet organigramme permet d'écrire un programme pour résoudre un système d'équations à l'aide d'un ordinateur.
Nous pouvons aussi considérer que l'organigramme est une machine dans laquelle on introduit le système.

$$\mathbf{A\,x = b}$$

Elle traite ce système comme une matrice à n lignes et n + 1 colonnes :

$$\mathbf{(A|b)}$$

Par étapes successives, elle transforme cette matrice pour la réduire à la forme :

$$\mathbf{(I_n|x)}$$

La solution du système est la dernière colonne de cette matrice.
Dans le cas où le système n'admet pas de solution unique, la machine sonne l'alarme ; il faut alors envisager une autre méthode de résolution.

C'est cette approche algorithmique qui fournira la méthode de calcul sous forme matricielle :

$$(2.8)\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$(2.9)\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$(2.10)\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$(2.11)\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$(2.12)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

La présentation choisie conduit à une visualisation de l'algorithme sur le support tableau. On voit sur ce support fonctionner la **machine**. A l'époque, cette introduction influencée par l'informatique de l'inverse d'une matrice par la méthode des éliminations successives au lieu de la méthode traditionnelle des cofacteurs est vraiment un renversement de "j'apprends, j'applique".

L'organigramme devient, en décrivant les algorithmes, un véritable outil méthodologique sans même penser à la programmation sur ordinateurs.

Le lien entre informatique, mathématisation de situation et support de gestion de l'information est encore renforcé dans le traitement de situations-problèmes liés à la recherche opérationnelle. Plus qu'un renforcement, c'est un réel changement qui est introduit en particulier par A. Kaufmann et R. Faure dans "Invitation à la recherche opérationnelle". [74]

Dans ce livre de vulgarisation, les supports servent à construire des modèles d'où découlera la théorie.

> **"A l'aide de dix-huit petites histoires, nous présentons les méthodes principales et les démarches analytiques de mise en équation ou de construction de modèles... puis, ... nous donnons un aperçu de l'aspect théorique général de chacun des problèmes".**

L'activité des élèves est centrée sur la création, l'utilisation de support de gestion de l'information.

Les supports servent :

- *à définir* la situation problème en donnant les informations en vrac sur un premier support, par exemple dans un problème l'affectation d'équipage. Informations initiales :

Mexico - Acapulco :

Départ Mexico	Numéro de la ligne	Arrivée Acapulco	
06,00	a →	12,00	
07.30	b →	13,30	
11,30	c →	17,30	durée : 6 heures
19,00	d →	01,00	
00,30	e →	06,30	

Acapulco - Mexico :

Arrivée Mexico	Numéro de la ligne	Départ Acapulco	
11,30	← 1	05,30	
15,00	← 2	09,00	
21,00	← 3	15,00	durée : 6 heures
00,30	← 4	18,30	
06,00	← 5	00,00	

la question :

> **Dans ces conditions, le problème peut être formulé comme suit :
> Où les équipages doivent-ils loger et quelles lignes doivent-ils assurer, de telle sorte que le temps total passé par l'ensemble des équipages à attendre le service de retour soit minimal, pourvu que le temps d'attente de chacun soit supérieur à 4 heures et inférieur à 24 heures ?**

- *à mathématiser* : de nouveaux supports (ici tableaux à double entrée) donnent les résultats d'une première mathématisation :

TABLEAU 6-1

Équipages logés à Mexico

	1	2	3	4	5
a	17,5	21	3	6,5	12
b	16	19,5	1,5	5	10,5
c	12	15,5	21,5	1	6,5
d	4,5	8	14	17,5	23
e	23	2,5	8,5	12	17,5

TABLEAU 6-2

Équipages logés à Acapulco

	1	2	3	4	5
a	18,5	15	9	5,5	0
b	20	16,5	10,5	7	1,5
c	0	20,5	14,5	11	5,5
d	7,5	4	22	18,5	13
e	13	9,5	3,5	0	18,5

- à *raisonner* : un raisonnement portant sur les deux tableaux conduit à fabriquer un troisième tableau par algorithme :

TABLEAU 6-1

Équipages logés à Mexico

	1	2	3	4	5
a	17,5	21	3	6,5	12
b	16	19,5	1,5	5	10,5
c	12	15,5	21,5	1	6,5
d	4,5	8	14	17,5	23
e	23	2,5	8,5	12	17,5

TABLEAU 6-2

Équipages logés à Acapulco

	1	2	3	4	5
a	18,5	15	9	5,5	0
b	20	16,5	10,5	7	1,5
c	0	20,5	14,5	11	5,5
d	7,5	4	22	18,5	13
e	13	9,5	3,5	0	18,5

Dans chaque case prendre le nombre le plus petit en éliminant les nombres plus petits ou égaux à 4

TABLEAU 6-3

	1	2	3	4	5
a	17,5	15	9	5,5	12
b	16	16,5	10,5	5	10,5
c	12	15,5	14,5	11	5,5
d	4,5	8	14	17,5	13
e	13	9,5	8,5	12	17,5

- *à prévoir* un type de solution : une affectation correspond à un tableau booléen du type :

Exemple d'une solution possible

	1	2	3	4	5
a	0	1	0	0	0
b	1	0	0	0	0
c	0	0	0	0	1
d	0	0	1	0	0
e	0	0	0	1	0

- *à résoudre* : le but à atteindre est un tableau n'ayant qu'une case par ligne et par colonne de façon à ce que le total soit minimum. La recherche et le traitement de l'algorithme (déplacement de zéros) se fait directement sur ce support. Exemple de tableau de traitement :

TABLEAU 6-10

	1	2	3	4	5	
1	12,5	6,5	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	6	×
2	11,5	8,5	2	$\boxed{0}$	5	×
~~3~~	~~7,5~~	~~7,5~~	~~0~~	~~0~~	$\boxed{0}$	
~~4~~	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	~~5,5~~	~~12,5~~	~~7,5~~	
5	8,5	1,5	$\boxed{0}$	7	12	×
			×	×		

Le tableau est donc un outil théorique et un instrument de résolution.

Dans toutes les situations proposées par Kaufmann et Faure, les supports de gestion de l'information jouent un rôle central dans la résolution du problème. L'informatique est présente à la fois comme mode de pensée (algorithmique), comme outil de calcul mais aussi comme outil de simulation pour les problèmes ne relevant pas de modèles algébriques.

Les supports utilisés sont très divers mais dans tous les cas, ils sont au centre de l'activité de mathématisation. De plus, ils portent en eux-mêmes la possibilité de se créer une représentation mentale schématisée de la méthode de traitement du problème. Les supports aident à se créer une image mentale et aide donc par là à la compréhension des problèmes. Nous donnons ci-après un aperçu de ces supports.

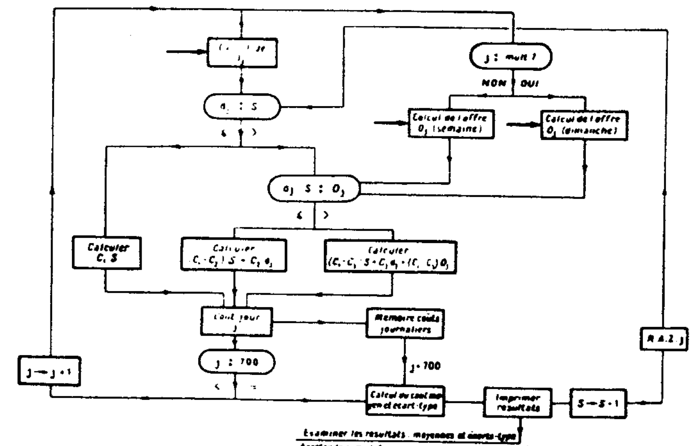


FIG. 12-2. — Organigramme d'une simulation (portant sur 700 jours).

C_1 : coût journalier d'un permanent.
C_2 : coût journalier d'un extra.
C_3 : coût d'une pénurie.
S : nombre de permanents disponibles chaque jour.
d_j : demande pour j.

O_j : offre pour j.
: signifie comparer à.
—> symbolise l'introduction des suites aléatoires équiprobables.
R.A.Z. : remise à zéro.

TABLEAU 5-2

	E	F	G	H	
A	(70)	(30)	(20)	0	120
B	30	(40)	(10)	0	80
C	0	0	30	70	100
D	0	10	10	(80)	100
	100	80	70	150	

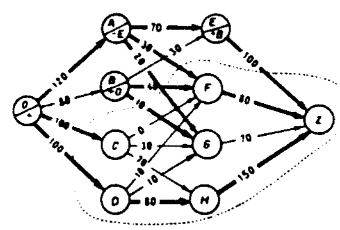


FIG. 5-8.

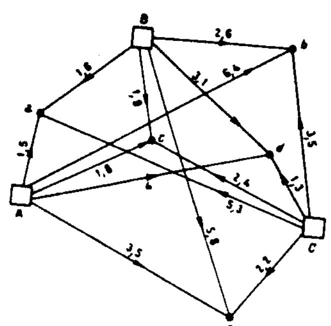


FIG. 7-1.

TABLEAU 7-4

	a (1)	b (2)	c (3)	d (4)	e (5)	
A (1)	40 / −1	35	15 / +1	×	×	90
B (2)	×	×	55 / −1	20 / +1	×	75
C (3)	× / −1	×	×	10 / −1	25	35
F (4)	×	×	×	×	25	25
	40	35	70	30	50	

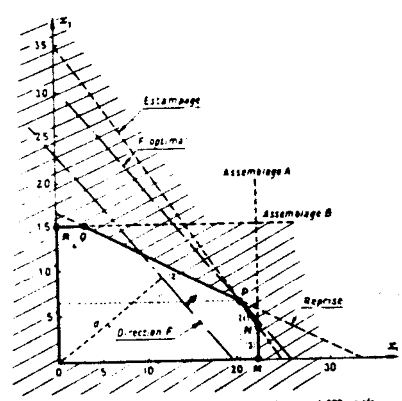


FIG. 13-1. — Les valeurs portées sur les axes représentent 1 000 unités.

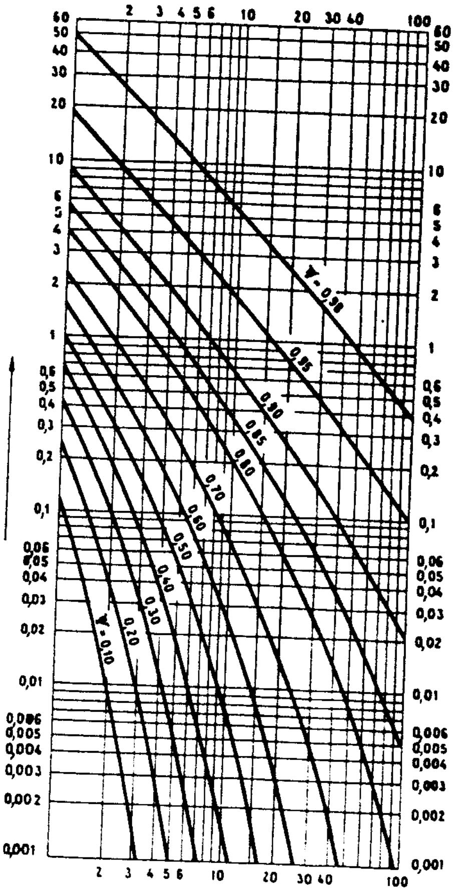


FIG 4-2.

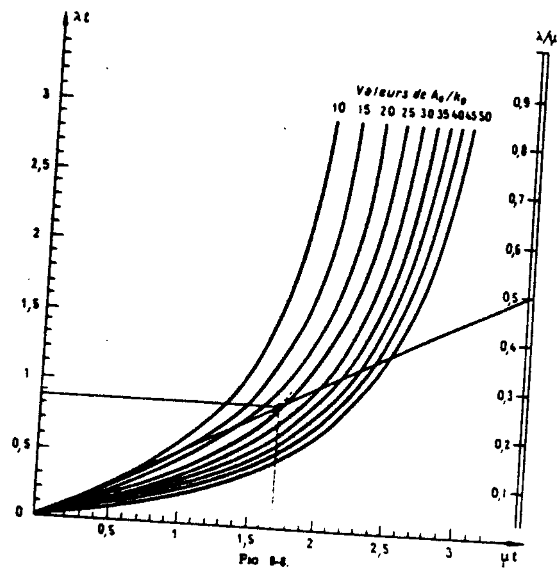


FIG 8-8.

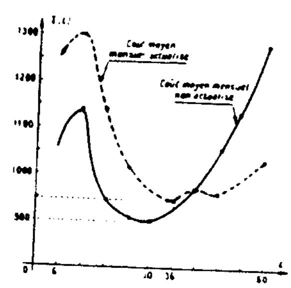


FIG. 8-4.

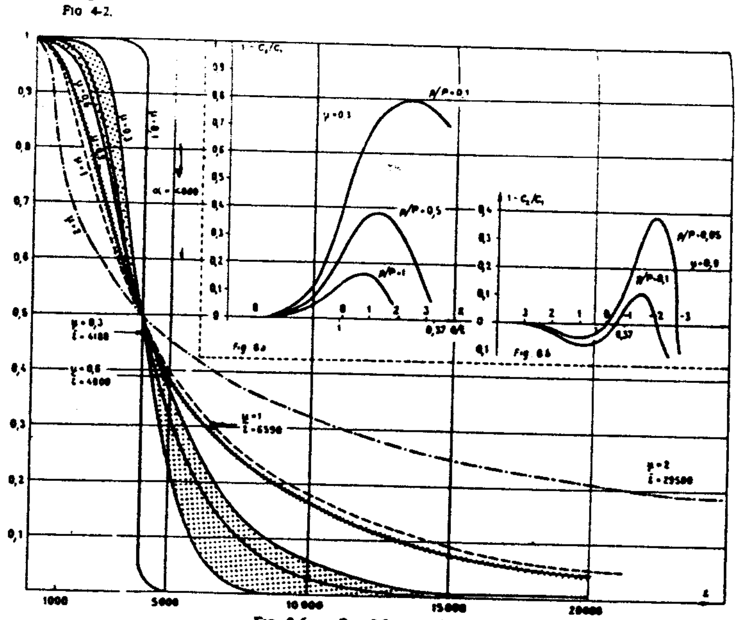


FIG. 9-6. FIG. 9-8 a. FIG. 9-8 b.

4 - LA THEORISATION ET L'OPERATIONNALISATION DU ROLE DES SUPPORTS PAR LE DEPARTEMENT MATHEMATIQUES DU CUEEP

Nous venons de voir comment dans les années 1970-75, le courant pédagogique "les mathématiques par leurs applications" recourrait à des méthodes d'analyse de situations-problèmes, des descriptions d'algorithme et à des outils de calcul utilisant le concept de support de gestion et/ou de visualisation de l'information.

Sous l'influence de son responsable de l'époque, Philippe Loosfelt, électronicien de formation, le Département Mathématiques a systématisé l'utilisation de support comme outil d'aide à la résolution de problèmes au niveau des actions collectives de formation et en a fait une stratégie d'enseignement des mathématiques.

Une première théorisation des pratiques du Département a conduit à donner une définition quasi-informatique des activités mathématiques pour les adultes des Actions Collectives.

Un extrait de document de travail interne au CUEEP décrit parfaitement cette intrusion de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques.

CUEEP 1974
Faire des Maths, c'est de façon privilégiée, trouver un support d'information permettant :
- d'enregistrer les informations entrantes,
- de travailler systématiquement sur ces informations,
- d'isoler et fournir l'information sortante

$\boxed{\text{Information entrante}} \longrightarrow \boxed{\text{Information sortante}}$

↑ $\boxed{\text{faire des mathématiques}}$

On arrive donc à la notion de couple situation-problème/support

Flot d'informations en vrac + question	⟶	Informations utiles visualisées et réorganisées sur le support

Cette phase de la recherche centrée sur le couple situation/support a donné lieu en 1975 à la brochure "mathématiques pour la formation d'adultes" [82]

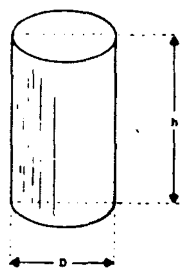
Dans cette brochure, la priorité est donnée au rôle des supports dans les activités de résolution de problèmes. Les théories et les modèles mathématiques ne sont esquissés qu'au travers du choix du support.

Par contre, on s'intéresse à des questions différentes à propos de la même situation. Un support sert alors à résoudre un "champ de questions" lié à une seule situation.

C.U.E.E.P. LILLE
Octobre 1975

CYLINDRES

F 31



Un premier cylindre a pour caractéristiques :

Diamètre D = 48 cm.
Hauteur h = 134 cm.
Densité d = 7,8 g/cm^3

Quel est son poids ?

Un deuxième cylindre a pour caractéristiques :

h = 134 cm
d = 7,8 g/cm^3
Poids P = 1147 kg

→ quel est son diamètre ?

Un troisième cylindre a pour caractéristiques :

D = 48 cm
d = 7,8 g/cm^3
P = 1250 kg

→ quelle est sa hauteur ?

Un quatrième cylindre a pour caractéristique :

D = 48 cm
h = 134 cm
P = 1548 kg

→ quelle est sa densité ?

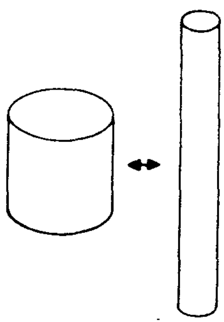
Traitement type :

Calcul de h :

CYLINDRES

2° partie

F 31 v



Un premier cylindre a pour caractéristiques :

D = 13 cm
d = 5,6 g/cm^3
P = identique au poids du 2° cylindre.

Le second cylindre a pour caractéristiques :

h = 120 cm
D = 10 cm
d = 4,5 g/cm^3

Quelle est la hauteur du 1° cylindre ?

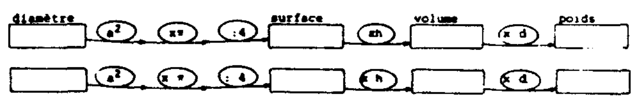
Même problème que plus haut, avec les caractéristiques suivantes :

1° cylindre	2° cylindre
h = 54 cm	h = 120 cm
D = ?	D = 10 cm
d = 5,6 g/cm^3	d = 4,5 g/cm^3

Poids 1° cylindre = Poids 2° cylindre.

Quel est le diamètre du 1° cylindre ?

Traitement type

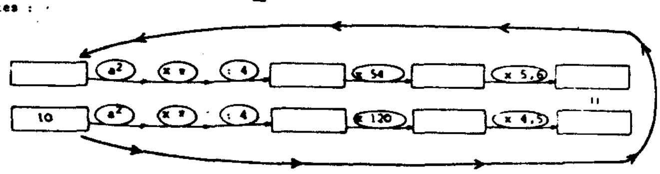


Même problème que plus haut, avec les caractéristiques suivantes :

1° cylindre	2° cylindre
Hauteur 1° cylindre = Hauteur 2° cylindre	
D = 13 cm	D = 10 cm
d = 5,6 g/cm^3	d = 4,5 g/cm^3
P = 132 kg	P = ?

Quel est le poids du 2° cylindre ?

Calcul de d_1



5 - APPORT DE L'OUTIL INFORMATIQUE A LA STRATEGIE SITUATION/SUPPORT

La pensée informatique a induit l'utilisation des supports et a fourni un cadre à une première théorisation de cette pratique. Cette influence de l'informatique a précédé l'arrivée du matériel.

De la même façon, nous l'avons vu, le renforcement de l'algorithmique s'est fait bien avant l'arrivée des ordinateurs. Nous ne détaillerons pas cet aspect qui bien que très important dans les travaux du CUEEP n'a rien d'original ni de spécifique.

En revanche, **le couplage entre un outil de traitement et un support de gestion de l'information** dans une activité de résolution de problèmes a été et reste un des domaines de recherche du Département Mathématiques. Ces recherches ont été amorcées par P. Loosfelt. Il avait constaté qu'un support non rendu opératoire est vite rejeté par les élèves parce qu'il est soit trop lourd à établir, soit trop lourd à gérer. Par exemple, les chaînes d'opérateurs sont performantes pour visualiser les étapes de résolution d'un problème mais si les calculs sont faits à la main, cela devient trop lourd et la méthode classique est plus adaptée. C'est l'arrivée massive des calculettes qui imposa définitivement l'utilisation des schémas d'opérateurs parce que les langages sont similaires.

P. Loosfelt renforça ce couplage entre calculettes et réseau d'opérateurs en réalisant "un ensemble technico-pédagogique de traitement de communication sur écran de télévision" [80].

Le couple opérateurs/calculette permit non seulement de résoudre des situations-problèmes classiques par exemple situation de pourcentage (cf. Chap. V exemple de Supersolde) mais aussi et surtout de renouveler les situations-problèmes en proposant par exemple une introduction des logarithmes (cf. chapitre VI).

Presque tous les supports (c'est-à-dire ceux que l'on définira comme standard au chapitre V) ont donné lieu à la création d'outils spécifiques de traitement réalisés sous forme de logiciels-outils : gestionnaire de tableau à simple ou double entrée, gestionnaire de graphiques, calculette logique, calculette formelle... Ces outils ont eux-mêmes enrichi la bibliothèque de situations problèmes. Par exemple le support tableau numérique a conduit à réaliser un tableur spécifique adapté à notre stratégie d'enseignement. ce tableur, lui-même nous a amené à créer de nouvelles situations-problèmes non traitables sans tableurs [26].

En conclusion, nous pouvons dire qu'il y a eu réellement création d'un couple : mathématisation de situation/informatique.

La stratégie de mathématisation intègre l'informatique comme outil et mode de pensée en privilégiant le support comme outil de traitement de l'information dans le cadre de la résolution de situations/problèmes.

CHAPITRE V

UNE STRATEGIE GLOBALE D'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Nous avons montré dans le chapitre précédent que l'interaction entre pédagogie des situations et informatique a conduit à des activités de résolution de situations-problèmes isolés les uns des autres. Le concept de support a joué le rôle de déclencheur, l'informatique intervient à la fois comme mode de pensée et comme outil de traitement.

C'est une réflexion sur cette pratique pédagogique dans un contexte où la volonté du CUEEP était de créer une filière modulaire de l'alphabétisation à l'entrée à l'Université validée par des diplômes qualifiants (CAP, ESEU, ...), qui a conduit à l'étape suivante de la mise sur pied de notre stratégie d'enseignement des mathématiques.

Les activités de résolution de problèmes devaient s'accompagner d'une acquisition validable de savoirs et savoir-faire mathématiques en lien avec le cursus scolaire. Le travail autour du concept de support loin d'être abandonné, s'est renforcé et s'est orienté vers la notion de transférabilité et de généralisation à partir de l'étude d'analogies. Il ne s'agissait plus de résoudre une situation-problème à l'aide d'un support (parfois construit spécialement pour la situation) mais d'aborder un champ de problèmes en étudiant les analogies entre situations dans le but de dégager des modèles, des critères de reconnaissance et de rejet de ces modèles sur différents supports pour élaborer une théorie.

Nous allons dans ce chapitre, exposer les étapes importantes de cette activité mathématique. Nous n'exposerons ici que les grandes lignes de ces étapes : la monographie d'une part, le choc des nouveaux outils de calcul et de production d'images d'autre part, illustrent en détail la stratégie d'enseignement.

A notre point de vue, ces troisième et quatrième parties éclairent autant ce chapitre que celui-ci donne les clefs de lecture des suivants. Nous avons choisi d'exposer synthétiquement la stratégie globale tout en sachant que certains points nécessitent l'éclairage des chapitres suivants pour être compris. Conformément à notre pratique pédagogique, il n'y a pas linéarité mais complémentarité des différentes faces.

1 - LE ROLE DES SUPPORTS DANS L'ACQUISITION DES MODELES : LE TRIPLET SITUATION - SUPPORT - MODELE

1-1 - SUR LES SUPPORTS, DIFFERENTES ACTIVITES CONDUISENT A LA MAITRISE DE MODELES

- La reconnaissance **d'analogies** de traitement de situations différentes sur un même support fait pressentir l'existence d'un modèle.

- L'observation et la verbalisation des analogies conduit à formuler des **règles de fonctionnement** communes sur un même support.

- La reconnaissance sur plusieurs supports d'un même modèle conduit à la maîtrise des savoirs et savoir-faire liés aux **changements de supports.**

- La clarification des règles de fonctionnement sur différents supports permet d'établir le modèle en précisant les conditions nécessaires et suffisantes, les **critères de reconnaissance et de rejet** du modèle

- **L'institutionnalisation** du modèle : le nommer, pouvoir communiquer, verbaliser dans un langage codifié les caractéristiques du modèle.

- La **discrimination** du champ de problèmes et les limites d'utilisation du modèle.

- **L'instrumentalisation** du modèle en le faisant entrer dans le champ des connaissances et en l'utilisant pour construire de nouvelles théories.

Toutes ces activités ne sont pas linéaires, elles sont liées et intégrées à des situations-problèmes. Contrairement à la méthode traditionnelle :

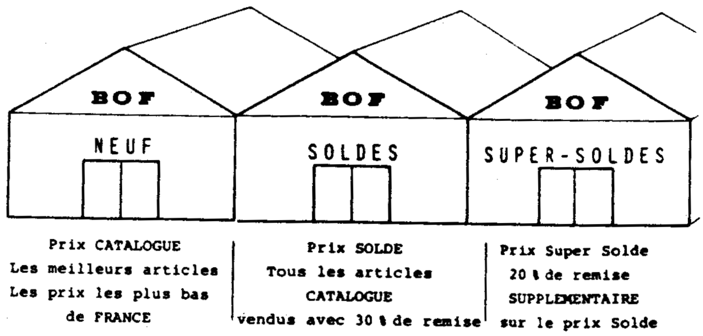
- on ne donne pas une définition puis des applications,

- on ne noie pas dès le départ sous un formalisme institutionnalisé,

- on ne choisit pas un point de vue de départ qui conduit à dérouler de façon "rigoureuse" et "logique" les autres aspects. En particulier la découverte du modèle se fait simultanément sur plusieurs supports, par exemple tableau, graphique, opérateurs pour la proportionnalité.

- on n'hésite pas à travailler longuement la construction du modèle par les élèves eux-mêmes. L'expérience prouve que c'est finalement un gain de temps (cf. chap. XII). Dire quand une situation se traite de la même façon que telle autre, c'est-à-dire que les supports adaptés sont les mêmes et que les règles associées à ces supports sont aussi les mêmes et donc que l'on passe d'une situation à une autre, par un simple changement de vocabulaire et de données numériques : des situations se traitent de la même façon quand elles relèvent d'un même modèle mathématique. Les élèves utilisent souvent un vocabulaire découlant des situations ; telle situation, "c'est comme les choux-fleurs" (cf. chap. IX).

1-2 - ILLUSTRONS SUR UN EXEMPLE LE ROLE DES SUPPORTS DANS L'ACQUISITION DU MODELE PROPORTIONNALITE

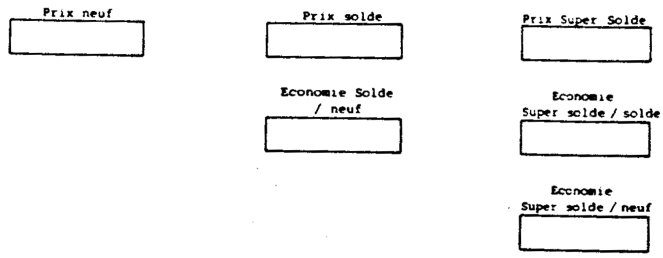


	NEUF	SOLDES		SUPER-SOLDES		
		PRIX	ECONOMIE	PRIX	ECON./NEUF	ECON./SOL.
Pantalon	97					
Perçeuse élect.				154		
rôtissoire......					83,6	

Extrait de "Mathématiques du Consommateur" [53]

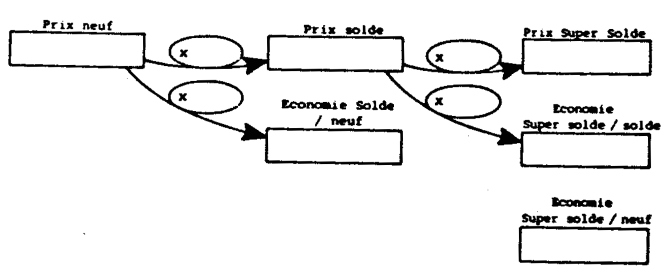
Un support intervient dès l'énoncé de la situation-problème pour formuler le problème de façon synthétique. Plusieurs stratégies de résolution sont utilisées par les élèves ou impulsées par l'enseignant suivant que le modèle proportionnalité a été ou non institutionnalisé.

Dans le premier cas, la situation présente est une application du modèle. Les diverses informations sont représentées par des cases vides.

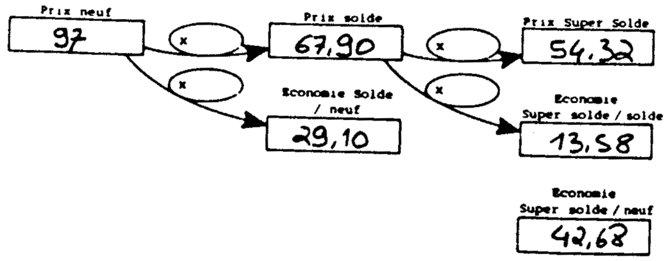


Le modèle" proportionnalité" est reconnu grâce au critère : "Si une case double ou triple, toutes les cases doublent ou triplent", car si on achète deux ou trois fois le même article, tous les prix sont multipliés par deux ou trois.

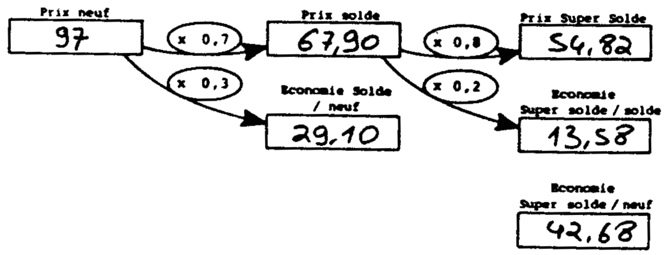
Il existe donc un réseau d'opérateurs x, ne dépendant pas de la valeur des articles



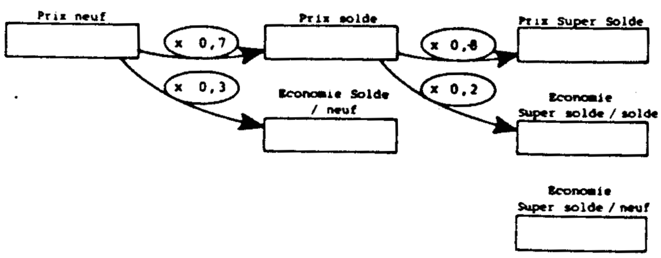
Le réseau est rempli à partir de l'exemple numérique du pantalon à 97 F neuf.



La règle extrémité / origine fournit les coefficients multiplicateurs 67,90 / 97 = 0,7



On vide alors les cases pour obtenir le support de résolution



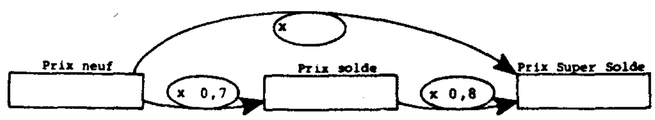
Dans certains cas apparaît encore plus nettement l'aspect application d'une théorie en lien avec un support et un modèle.

Le modèle "proportionnalité" conduit à une "théorie des pourcentages" basée sur les coefficients multiplicateurs :

Prendre 30 % d'un nombre, c'est multiplier par 0,3
Diminuer de 30 % c'est multiplier par 0,7

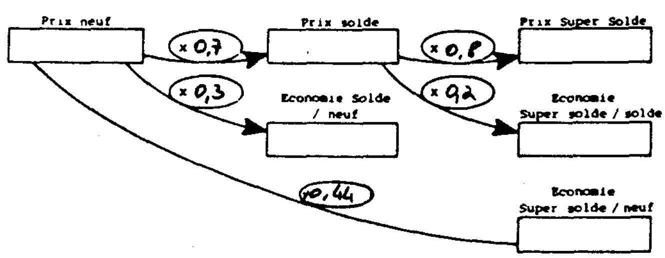
Par simple application des coefficients multiplicateurs le schéma précédent est directement construit sans passer par les exemples numériques. La recherche du dernier opérateur nécessite un raisonnement utilisant la "théorie des coefficients x":

Recherche de l'opérateur



Le produit des deux opérateurs donne 0,56. On en déduit en utilisant la théorie que le prix baisse de 44 %

Ce raisonnement permet de contrecarrer l'intuition fausse, très prégnante chez les élèves que - 30 % suivi de - 20 % fait - 50 %



Ce support fournit une résolution quasi automatique des questions.

Dans le deuxième cas, cette situation est utilisée pour introduire le modèle proportionnalité.

Avant d'essayer de résoudre les questions posées une pré-étude "à pas constant", éventuellement à l'aide d'un tableur, fournit une aide appréciable

NEUF	SOLDES		SUPER-SOLDES		
	PRIX	ECONOMIE	PRIX	ECO/NEUF	ECO/SOL
100	70	30	56	44	12
200	140	60	112	88	24
300	210	90	168	132	36
400	280	120	224	176	48
500	350	150	280	220	60
A	B	C	D	E	F

Les règles de fonctionnement de ce tableau sont dégagées pour permettre de remplir automatiquement n'importe quel tableau.

La première règle concerne les lignes : on passe d'une ligne à l'autre par un coefficient x constant.

Cette règle conduit directement au modèle règle de trois

: 100

x 97

100	70	30	56	44	12
1	0,7	0,3	0,56	0,44	0,12
97					

En revenant à l'énoncé, la solution s'obtient par **règle de trois**. L'opérateur constant x est 154/54,2

x

97	67,90	29,10	54,32	42,68	13,58
			154		

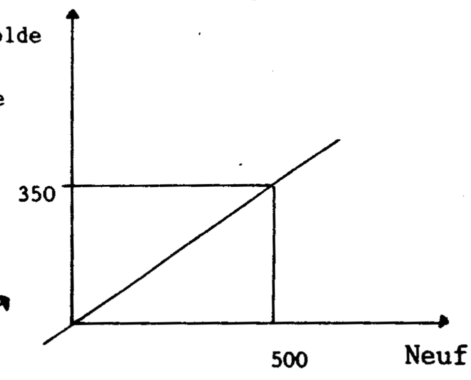
La deuxième règle concerne les colonnes : comment passe-t-on d'une colonne à une autre ?

A	B
100	70
200	140
300	210
400	280
500	350

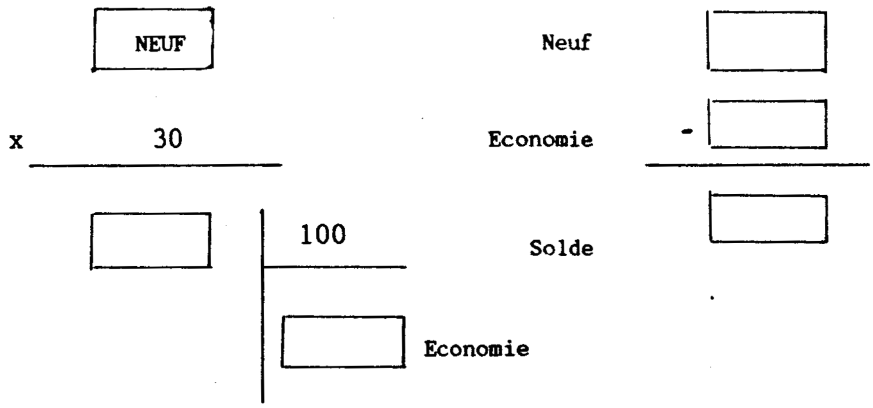
On passe de la colonne A à la colonne B par l'opérateur

x 0,70

Sur le support graphique

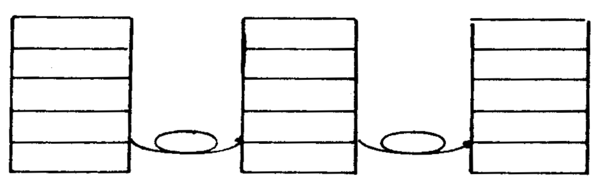


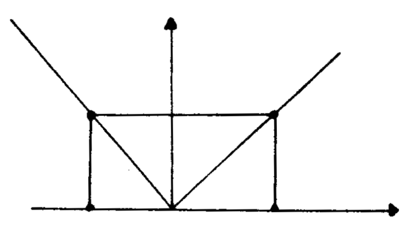
Le calcul



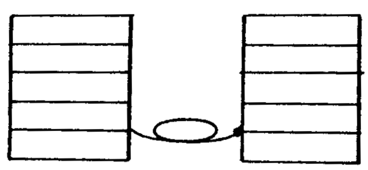
qui nécessite trois opérations est équivalent à une multiplication par 0,70.

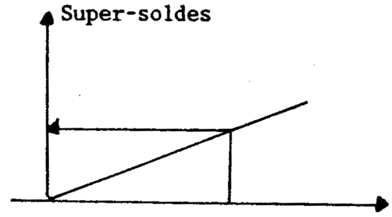
On développe alors les critères de reconnaissance d'un opérateur X invariant sur le tableau et le support graphique.





se résume par



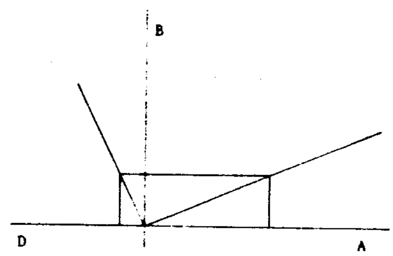


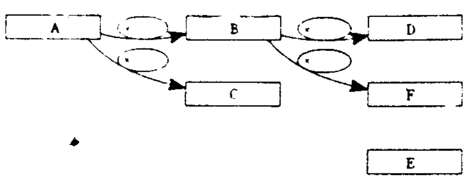
On institutionnalise le modèle proportionnalité en montrant en particulier que le modèle "opérateur X constant" et le modèle "règle de trois" sont deux faces d'un même modèle.

Les critères de reconnaissances sur les trois supports tableau, graphique, formule ou opérateurs sont verbalisés.

RAISONNEMENT COLONNE

RAISONNEMENT LIGNE	100					
	200					
	300					
	400					
	500					
	97					
				154		
					83,6	
	A	B	C	D	E	F





B = 0,7 * A

C =

D =

F =

E =

1-3 - LES SUPPORTS, LES MODELES STANDARD

Dans le chapitre précédent, nous avons pu voir que le concept de support était vaste. Dans la mesure où nous voulons à partir du couple situation/support faire apparaître des modèles mathématiques en découvrant les règles de fonctionnement sur les supports, il est nécessaire de privilégier les supports sur lesquels ces règles apparaîtront de façon claire. Des supports qui seront à la fois les mieux adaptés et les plus généraux possibles.

C'est ce que nous appelons des supports standard : un support standard est un support opérationnel dans un ou plusieurs champs de problèmes liés à une théorie ou à un morceau de théorie. Pour concrétiser cette notion donnons quelques exemples :

- le tableau numérique à simple ou double entrée, le graphique, les formules (prises dans un sens large que nous expliciterons au paragraphe 3 de ce chapitre) pour toutes les situations qui se rattachent aux modèles fonctionnels d'une ou plusieurs variables,

- les arbres de choix pour les problèmes d'affectation,

- les arbres binaires, le tableau de Karnaugh pour les problèmes d'ordonnancement.

Trouver le "bon support" adapté à une situation c'est déjà reconnaître de quoi il s'agit, c'est percevoir de façon intuitive, expérimentale, parcellaire à quelle théorie la situation se réfère.

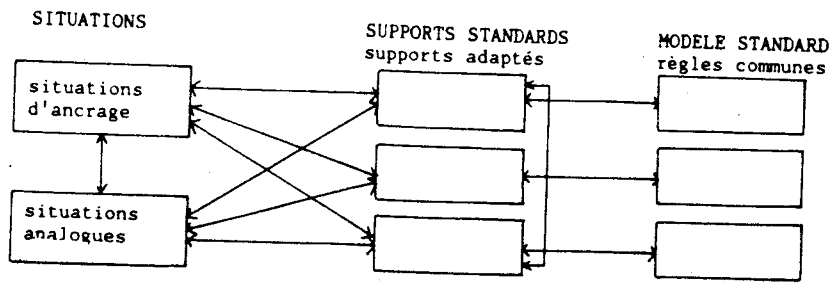
De la même façon, le concept de modèle est vaste, il englobe aussi bien les modèles fonctionnels, que les modèles probabilistes, que des modèles de méthode. Son sens est cependant différent de celui qui peut être donné en sciences expérimentales comme schématisation de la réalité. Nous reviendrons sur cet aspect de modélisation dans un prochain paragraphe.

Nous parlerons du modèle standard pour insister sur le caractère de généralité, de transférabilité et d'instrumentalité des modèles.

Quant aux situations, elles ne sont pas prises au hasard. La méthode globale est une méthode active mais n'est pas non directiviste. Il est important que les élèves découvrent, travaillent par eux-mêmes, explorent des pistes non prévues à l'avance par l'enseignant. Il est tout aussi important que l'enseignant se soit fixé des objectifs de formation et qu'il les maintienne (cela suppose que les objectifs soient réalistes et réalisables en prenant éventuellement quelques distances avec le "programme"). On en arrive à définir des situations particulières qui servent de référence. Ce sont des schématisations de situations réelles ne retenant que les informations pertinentes, suffisamment riches, choisies pour ancrer le modèle.

Elles permettent de transférer le raisonnement à d'autres situations sans avoir recours, dans un premier temps, au vocabulaire et au symbolisme éventuellement utilisés dans les mathématiques classiques. Cela revient à développer systématiquement les analogies et des concrétisations avant d'enclencher trop vite une mathématisation axiomatisante.

On en arrive au schéma suivant :



En reprenant les niveaux taxonomiques (exécuter - traiter - choisir) utilisés en Unités Capitalisables et Contrôle Continu dans le domaine mathématique, la démarche de mathématisation conduit à :

- choisir les supports et les modèles
- mettre en place les données et les traitements
- exécuter les calculs.

1-4 - DES CAS NON STANDARD

La construction d'un savoir mathématique validable par des diplômes institutionnels ne limite pas l'activité mathématique au champ des modèles traditionnels. En effet, on souhaite montrer la forte limitation de certains modèles, garder une place pour la méthodologie de formulation de problèmes et la résolution de problèmes non standard, y compris d'accepter de poser des questions non résolubles, de chercher des supports spécifiques d'aide à la résolution.

Donnons un exemple d'une telle situation, qui a donné lieu à une vingtaine d'activités différentes en formation de formateurs ou dans des groupes de formation [27] :

> **ITINERAIRE** **F 1016**
> **Pour me rendre à mon travail, j'ai le choix entre 2 trajets, l'un passant par Achicourt, l'autre passant par Béchicourt. Ces trajets sont plus ou moins encombrés ; je suis bien embêté pour savoir lequel est le meilleur.**
> **Pendant une année, j'ai relevé les durées de mes trajets : Quel est le meilleur chemin ?**
> **1) Formuler un ou plusieurs problèmes précis conduisant à un choix entre l'itinéraire A et l'itinéraire B**
> **2) Proposer des supports à l'information permettant de résoudre ces questions.**

Les problèmes proposés sont très divers :

- le meilleur chemin est celui dont la moyenne des trajets est la plus basse,
- je fais la course avec mon voisin. Si l'un prend le trajet A, l'autre prend le trajet B
- le patron tolère en moyenne un retard par semaine. Quel est le meilleur chemin ?

- le patron ne tolère pas plus d'un retard par semaine. Le meilleur chemin sera celui qui minimisera le risque d'être en retard plus d'une fois par semaine.
- les deux trajets sont-ils significativement différents ? Le trajet B peut-il être considéré comme une fluctuation du trajet A ? Le trajet A peut-il être considéré comme une fluctuation du trajet B ?
- les deux trajets peuvent-ils être considérés comme des échantillons d'une même loi ?

Les *supports* varient selon les problèmes posés : tableau à simple entrée, à double entrée, arbres, graphique sur papier millimétré, gausso-arithmétique, dérivation graphique.

Les *modèles* : dérivation-intégration (liaison fonction de densité-fonction de répartition), modèle probabiliste (événements indépendants), tests d'hypothèse (X^2, normalité) modèle expérimental (méthode de Monte Carlo).

Les *outils* : calculette, tableur, simulation sur ordinateur, papiers fonctionnels

2 - ROLE DE L'INFORMATIQUE COMME OUTIL ET MODE DE PENSEE

2-1 - L'OUTIL INFORMATIQUE

Le développement des logiciels au Département Mathématiques s'est fait en interaction avec la mise en place de la stratégie de mathématisation.

Dès 1980 sur CBM semi-graphique, certains types de logiciels ont été privilégiés mettant en scène :

- soit des modèles que l'utilisateur manipule pour les découvrir (par exemple le logiciel parabole que nous décrivons au chapitre VII).
- soit des modèles sur différents supports, il faut alors passer d'un support à l'autre ou reconnaître le modèle sur l'un des supports (par exemple le logiciel Affine).
- soit comme nous l'avions indiqué dans le chapitre IV, uniquement les supports : le tableau de Karnaugh, les tableurs, calculette de courbes, ... [36]

2-2 - LE MODE DE PENSEE INFORMATIQUE :

Dans le schéma précédent, un même modèle mathématique apparaît et est reconnu sous diverses représentations, c'est de cette façon qu'il est identifié. L'activité mathématique met en liaison ces différentes représentations, les associe. Il ne s'agit pas d'une activité déductive, linéaire. Par opposition à un langage de programmation, à base de logique séquentielle, cette activité se rapproche d'un langage orienté objet "à base de traitement global et en parallèle des informations".

Nous pronostiquons que ce nouveau mode de pensée aura une grande influence sur l'enseignement tant par les outils qui pourront techniquement être développés que par le mode de pensée sous-tendu.

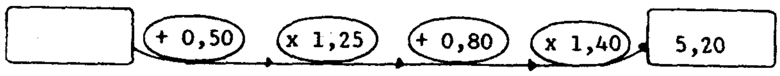
2-3 - DES MODELES ISSUS DU CONCEPT DE SUPPORT ET DE LA PENSEE INFORMATIQUE

Le concept de support et son utilisation volontariste dans toute activité mathématique a amené le département mathématiques à exhiber des modèles "originaux". Donnons l'exemple de deux modèles qui sont de fait des modèles de traitement d'un problème.

. *Le modèle "Equation où la variable n'apparaît qu'une fois"*

Il s'agit d'équations traitables en une chaîne de calculs. C'est un outil pour résoudre des situations-problèmes séquentiels par exemple :

LE CHOU : Un producteur vend un chou. Le camionneur majore ce chou de 50 centimes pour sa commission. Le grossiste majore le prix camionneur de 25 %. Le demi-grossiste rajoute 80 centimes. Le détaillant prend 40 % de bénéfice sur son prix d'achat. Le client achète ce chou 5,20 F. Quel est le prix producteur ?



Résoudre le problème revient à inverser la chaîne d'opérateurs.

Il est possible de traiter ainsi tous les problèmes qui se traduisent en une chaîne sur le support réseau d'opérateurs.

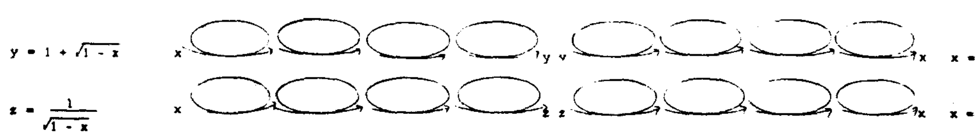
CUEEP LILLE
FEVRIER 1979 **F 413**

EQUATIONS OU LA VARIABLE N'APPARAIT Q'UNE FOIS
résoudre les équations suivantes :

$\frac{d}{-4} = -2$	$2(u + 3)^2 - 5 = 0$
$\sqrt{e} = 2$	$\sqrt{5v^2 - 4} = 5$
$f^2 = 1,44$	$7\left(\frac{w + 3}{2} - 5\right) = 12$
$-2g + 5 = 7$	

Des fiches techniques, des logiciels adaptés ont été créés comme outil d'aide :

F 420 V



Ce modèle est utile dans tout problème où intervient une inversion de formule ; il est directement issu du support "réseau d'opérateurs" relayé par l'outil calculette (cf. chap. IV)

5) CALCULS FINANCIERS :

a) $C = D + I$; $I =$ b) $a = 1 + \frac{A}{100}$; $A =$

c) $C = Da^6$; $a =$ d) $C = D\left(1 + \frac{A}{100}\right)^n$

e) $m = \sqrt[3]{t}$; $t =$ f) $a = t^4$; $t =$

6) ELECTRICITE

a) $V = RI$; $R =$ b) $W = RI^2t$; $I =$

c) $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$; $L =$

d) $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$; $C =$

. Le modèle "Gestion de Formule Numérique"

Nous nommons ce modèle "GFN" en référence au logiciel qui porte cet intitulé. Le logiciel a été conçu pour coder et décoder, gérer des formules numériques. Il s'est avéré à l'usage que c'est un modèle de méthode pour analyser une formule quelle qu'elle soit (numérique ou algébrique ou...), la décomposer en opérations élémentaires et pouvoir la transformer, l'utiliser suivant les besoins d'un problème.

Donnons un exemple :

$$\frac{2 + \frac{4}{3 - 5}}{7}$$

Le décodage donne : A = 3 - 5 ; B = 4/A ; C = 2 + B ; D = C/7

Avec cette méthode, le degré de complexité de la formule importe peu. Il s'agit de décomposer une opération complexe en une succession d'opérations élémentaires exécutables automatiquement.

On peut utiliser ce modèle de traitement pour le calcul des dérivées d'expressions "monstrueuses". Il suffit de décomposer l'expression en expressions élémentaires dont les dérivées font partie du registre connu par l'élève ou par un logiciel (μ-Math par exemple) ou figurent dans un formulaire.

L'exécution des calculs se fait par la machine (logiciel ou formulaire ou mémoire de l'élève). l'activité de l'élève est centrée sur le choix et le traitement.

Exemple :

L'expression est $e^x + \frac{\sin(2x + 3)}{\sqrt{x + 2}}$

Décodage	traduction "automatique"	
$A = e^x$	$A' = e^x$	$A' = e^x$
$B = 2x + 3$	$B' = 2$	$B' = 2$
$C = \sin B$	$C' = B' \cos B$	$C' = 2 \cos (2x + 3)$
$D = x + 2$	$D' = 1$	$D' = 1$
$E = \sqrt{D}$	$E' = \frac{D'}{2\sqrt{D}}$	$E' = \frac{1}{2\sqrt{x + 2}}$
$F = \frac{C}{E}$	$F' = \frac{C'E - E'C}{E^2}$	$F' = \frac{2 \cos (2x + 3) - \frac{1}{2\sqrt{2x + 3}} \cdot \sin (2x + 3)}{(x + 2)}$
$G = A + F$	$G' = A' + F'$	$G' = e^x + \frac{2 \cos (2x + 3) - \frac{1}{2\sqrt{2x + 3}}}{(x + 2)}$

Ce modèle est issu du support "écriture en registre" utilisée en programmation. Cette écriture est celle que l'on emploie dans les tableurs : exprimer une colonne (ou une ligne) en fonction d'une ou d'autres colonnes (ou lignes).

3 - MODELE ET MODELISATION

La démarche qui consiste, à partir d'une situation, à rechercher le modèle qui explique la situation est proche d'une démarche expérimentale sans toutefois se confondre avec l'activité expérimentale de modélisation. En effet, à partir de l'observation d'une situation, des hypothèses sont émises, un modèle expliquant la situation est exhibé, des vérifications sur des situations analogues sont entreprises. Mais dans la perspective de construction d'un savoir mathématique et non d'une découverte non-directive, le type de situations de départ est volontairement orienté.

Les situations sont choisies et téléguidées en fonction des objectifs de formation. Ce qui donne une alternance entre :

- des situations où les modèles antérieurs s'appliquent (situation de transfert ou de renforcement). Certaines étant des illustrations du modèle pour mieux le maîtriser, d'autres des applications du modèle,
- des situations où on met en place un nouveau modèle (situation d'ancrage ou de référence),
- des situations où en première approximation on peut ajuster un modèle existant (situations statistiques par exemple),
- des situations où volontairement on ne sait pas modéliser, un "modèle" propre à la situation sera construit par simulation.

Quelle que soit la situation, l'élève va mettre en oeuvre une **démarche expérimentale** : observer, poser des questions, en fonction des réponses, faire des hypothèses, les vérifier...

- Sur un support adapté, trouver des règles de fonctionnement ?
- Faire des hypothèses sur un modèle puis tester et vérifier sur des critères qualitatifs ou quantitatifs ces hypothèses, en cas de reconnaissance d'un modèle, expliciter les paramètres du modèle et enfin vérifier l'adéquation du modèle à la réalité.
- Si les règles de fonctionnement dégagées sur un ou plusieurs supports ne sont pas connues mais qu'elles existent, il s'agira vraisemblablement d'un nouveau modèle. A partir de ces règles, il faudra définir des conditions nécessaires et suffisantes de reconnaissance de ce nouveau modèle. (Est-ce qu' un taux de croissance fixe délimite un modèle ? Est-ce que le produit de deux droites est un modèle ?...)

L'enseignant impulse l'institutionnalisation du modèle dans sa généralité. Pour institutionnaliser le modèle, il faut faire un inventaire des propriétés du modèle, en mettant en place **un protocole d'expérimentation** (cf. chap. IX protocole expérimental pour établir la Loi des Grands Nombres). Ce protocole donne éventuellement lieu à démonstration déductive de certains éléments les uns par rapport aux autres.

Par un protocole d'expérimentation, on aborde un modèle sous différents angles en même temps. On a une connaissance globale du modèle et non une connaissance linéaire à partir d'un seul point d'entrée.

Remarquons que cette démarche expérimentale n'est réalisable que grâce aux outils de calculs et à l'aide informatique.

Remarquons également qu'il y a effectivement démarche expérimentale de reconnaissance ou de construction de modèle mais qu'il ne s'agit pas de modélisation au sens des sciences expérimentales puisque la situation est en fait déjà le modèle.

Dans les autres cas, il s'agit d'une véritable démarche expérimentale de modélisation soit par des ajustements à l'aide de modèles existants en choisissant le meilleur modèle adapté à la situation [37], soit par simulation sur ordinateur à l'aide par exemple de la méthode de Monte Carlo.

Il nous semble important que ces deux types d'activités soient discriminés. Dans ce sens il existe des fiches qui font appel recto-verso à l'un ou l'autre cas.

LES HARICOTS VERTS

Un supermarché vend des boîtes de haricots verts extra-fins habituellement à 6,00 F la boîte et écoule 1 000 boîtes par semaine.
Le gestionnaire "Alimentation" estime qu'une baisse de 0,10 F augmente la vente hebdomadaire de 100 boîtes.
Le supermarché paie au grossiste les boîtes 4,00 F et ne peut ni ne veut vendre en-dessous de ce prix.

un super marché a testé la réponse du "marché" en fonction du prix de vente d'une boite de conserve

prix	nombre de boites
4	3000
4.5	2900
5	1800
5.5	1700
6	1000
6.5	400

Etablir un modèle mathématique permettant d'étudier l'évolution du nombre de boites en fonction du prix de vente.

Quel sera le bénéfice maximum ?

Cette pratique issue des sciences expérimentales a été intégrée à l'enseignement des mathématiques grâce à l'apport de scientifiques expérimentaux qui ont enseigné les maths. Cet apport constitue pour le département mathématiques une piste de recherche ouverte. Actuellement elle a surtout concerné l'enseignement des probabilités et des statistiques.

Cet enseignement recoupe les deux approches :

- l'approche modélisante issue du schéma : situation - support - modèle - théorie en partant du dénombrement et des lois théoriques (situation Ville de New-York)
- l'approche modélisation expérimentale à partir des statistiques. Nous montrerons dans la monographie la synergie entre les deux approches conduisant à un enseignement simultané et en interaction des statistiques et des probabilités.

Simultanément aux activités de modélisation ou modélisantes se développent des activités de formalisation et de théorisation de façon continue et progressive.

4 - LA FORMALISATION

Dans ces activités de recherche, de mathématisation, les élèves ont un besoin de communiquer, communication entre eux, avec l'enseignant et au-delà savoir lire et comprendre les livres de mathématiques.

C'est un premier aspect de la formalisation que nous appellerons comme E. Barbin et B. Charlot [2] **formulation** : "*Formuler, c'est énoncer sous une forme ou une autre ce qui a été trouvé*". Très vite les élèves s'aperçoivent qu'il n'est pas facile de communiquer si toute la classe n'emploie pas le même langage, les mêmes codes d'écriture et qu'il y a un langage et des codes institutionnalisés. Il ne faut pas pour autant sauter les étapes et imposer un langage rigoureux trop vite. Au contraire "*il semble souhaitable de partir du niveau de formulation des élèves pour le faire progresser. Construire son savoir, c'est aussi construire les mots pour le dire*". [2].

La formalisation est aussi une aide à la résolution de problèmes : devant un problème dont on n'entrevoit pas la solution, il y a nécessité d'organiser, de structurer, de transformer les données, de raisonner dans un univers plus formel que la situation de départ. Par exemple, pour résoudre le problème des super-soldes cité précédemment, il est utile de raisonner sur le tableau de nombres ou à partir des réseaux d'opérateurs. A ce niveau d'enseignement, le tableau numérique, les réseaux d'opérateurs sont des objets formels.

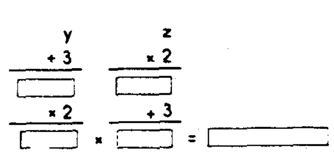
Le symbolisme, le formalisme sont introduits progressivement comme des outils performants de résolution de problèmes. L'activité de formalisation doit être continue et progressive pour ne pas inhiber les connaissances antérieures mais au contraire s'appuyer sur elles, les dépasser, monter d'un degré dans l'abstraction.

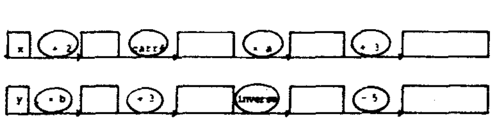
Le tableau numérique, objet formel au niveau pré-CAP pourra devenir situation concrète à un niveau post-CAP, ce sera par exemple le tableau de variation d'une fonction qui sera objet formel alors que le tableau numérique des valeurs prises par cette même fonction sera "concret".

Donnons comme illustration un commentaire d'une fiche de travail :

> **Après deux années d'expérience sur la fiche 54 Règle de Trois, et un constat d'échec pour les plus faibles, nous aboutissons à la conclusion suivante : il faut reconstruire la règle de trois de l'école primaire, et utiliser cette reconstruction comme infrastructure des connaissances futures.**

et également la fiche "Parlons Algèbre" qui s'appuie sur le formalisme de l'école primaire (disposition des quatre opérations) pour passer au formalisme algébrique (parenthésage, priorités opératoires)



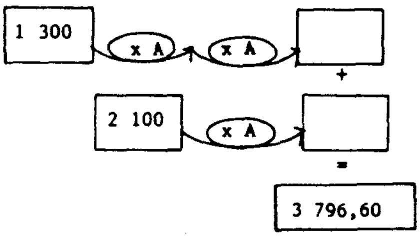


L'activité de formalisation ainsi conçue débouche sur une pluralité de formalismes et d'écritures formelles sans considérer l'écriture algébrique comme le formalisme dominant.

Par exemple le problème suivant ne peut être résolu avec les outils arithmétiques de l'école primaire. Pour le traiter, il faut organiser les données sur un support.

Un ami me dit qu'il a déposé 1 300 F le 01/01/1976 et 2 100 F le 01/01/1977. Il pourra retirer 3 796,60 F le 01/01/1978. Quel est le taux de ce placement ?

a) l'écriture en réseau d'opérateurs donne :



b) l'écriture dans un tableur donne :


```
Entrée en Colonne A : tabulation des valeurs possibles pour le
                      taux de placement.
                      Col B = Col A * 1 300
                      Col C = Col B + 2 100
                      Col D = Col C * Col A
```

c) l'écriture du programme informatique est (en Basic) :

```
10 For A = 1.. TO.. STEP..
20 B = A * 1300
30 C = B + 2100
40 D = C * A
50 PRINT A,D
60 NEXT
```

Dans les cas b) et c) on aura une résolution approchée, dans le cas a) il faudra multiplier les essais pour avoir une solution approchée. La solution "exacte" découlera de la résolution de l'équation du second degré : $1300\ A^2 + 2100\ A = 3796{,}60$, autre formalisme.

On arrive à l'une ou l'autre écriture formelle selon la situation, selon le support choisi pour la résolution du problème, selon aussi les outils disponibles : si les élèves ne connaissent pas la résolution d'une équation du second degré, il n'est pas adéquat d'utiliser l'écriture algébrique. Le type de formalisme est induit par le support.

L'activité de changement de support, de transfert des informations d'un support à un autre est relayée au niveau du formalisme par une activité de changement de formalisme.

Savoir traduire une écriture formelle en une autre écriture formelle, savoir reconnaître que deux écritures formelles sont équivalentes, permet bien souvent d'éviter les blocages en mathématiques.

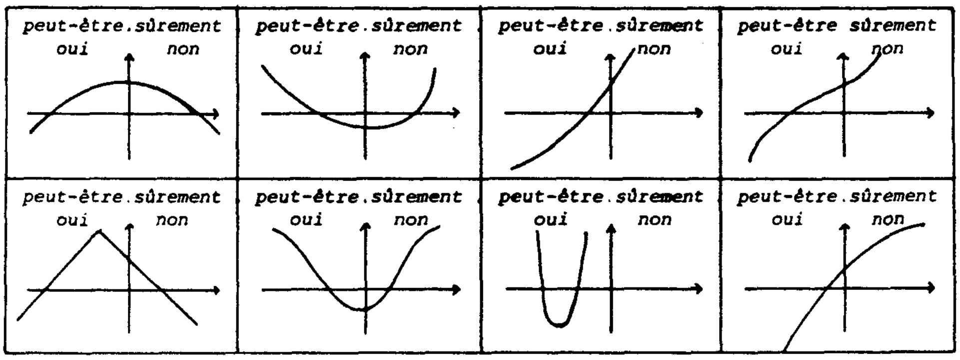
Nous insistons sur le fait que l'activité de formalisme est continue et progressive : l'utilisation du formalisme comme le raisonnement ne sont pas réservés à un bon niveau de mathématiques. Dès les plus bas niveaux on utilise et on raisonne sur des objets formels. Un nombre, dès qu'il n'est plus attaché à une unité est un objet formel. Ceci représente d'ailleurs une réelle difficulté au niveau de l'alphabétisation. A ce niveau, les élèves peuvent savoir compter quand il s'agit d'argent et ne plus rien comprendre quand il s'agit des mêmes opérateurs avec d'autres mesures (litre ou centimètre). Ils n'ont pas alors encore accès au nombre comme objet formel.

5 - LA THEORISATION

Dans les différentes activités d'organisation des données, de recherche de règles de fonctionnement sur les supports, de résolution de problèmes, les élèves se laissent guider par leurs intuitions.

Dès qu'il s'agit de reconnaissance de modèles ou d'émettre des conjectures sur les modèles possibles, on passe d'une **activité intuitive** à une **activité déductive**, à un **raisonnement** :

ça peut être parce que ..., ça ne peut pas être parce que ...



C'est une analyse critique qui entraîne la formulation de **conditions nécessaires et suffisantes** (cf. chap. IX Mise en place du modèle parabole).

Même à des niveaux bas d'enseignement, des raisonnements très formels peuvent être mis en oeuvre pour résoudre des problèmes, donnons l'exemple de l'activité collective autour de la reconstitution d'une multiplication dans laquelle chaque chiffre est remplacé par une lettre (Logiciel Math Pendu).

```
        D   J   E
            F   A
        ---------
    E   D   A   E
C   J   D   B
-----------------
E   E   E   A   E
```

Remarques "évidentes" en vrac $A \neq 1$, $E \neq 1$, $F \neq 1$
$D \neq 0$, $F \neq 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$

PROPOSITION	ARGUMENTATION	CONTESTATION	HYPOTHESE RETENUE
E = C + 1	évident		E + C + 1
E + J > 10	retenue	retenue possible avant	E + J ≥ 9
E pair	2 D = E	retenue possible mais	
B = 0 ←	A + B = A ou A + B = 10 + A ---→ impossible		B = 0 et E est pair E = 2, 4, 6 ou 8
E = 2, 4, 6 ou 8			
F = 5	F x E = mult de 10 et E est pair		F = 5
J = 9	E + J = 10 + E --->impossible E + J + 1 = 10 + E ....>		J = 9
D > 5	2 D = 10 + E	D ≠ 5	D ≥ 5

Chercher E à partir de E x A = E mod 10 dans les tables de multiplication

E = 2 => A = 6 ; E = 4 => A = 6 ; E = 6 => A = 6 ; E = 8 => A = 6

A = 6			A = 6
E = 4	9 x 6 = 54 J x A = A mod 10 la retenue est 2		E = 4
4 = C + 1			C = 3
2 D = 10 + E			D = 7

vérification

```
  796
x  56
-----
 4764
 3970
-----
44464
```

La richesse de ce type d'activité déductive tient au fait qu'il ne s'agit pas seulement de déduction linéaire mais bien qu'il faille puiser dans différentes bases de données (table de multiplication, d'addition, convergence, gestion d'égalités et d'inégalités, ...) les associer pour pouvoir progresser dans la déduction.

Peut-on, grâce à un système expert faire un logiciel reprenant celui-ci et rendant possible une utilisation "riche" en auto-formation. Le logiciel pourrait-il vérifier les raisonnements de l'apprenant. Pourrait-il lui fournir des messages d'aide indiquant des indices non utilisés, etc... Jusqu'alors, nous n'avons pas réussi, à l'aide du système expert Prolog à simuler ce type de raisonnement, nous pensons en revanche que les langages orientés objets ouvrent des voies intéressantes dans ce domaine.

Dans ce type d'activité, le raisonnement n'est pas gratuit, les déductions formelles servent à résoudre un problème. le résultat n'est pas évident au départ. Il est impossible de résoudre ce type de problème par intuition sans raisonnement.

En revanche, quand un problème est résolu intuitivement, il est inutile (voir nuisible) de vouloir démontrer quelque chose qui est évident, en mettant en place une machinerie déductive. Le risque est que les élèves n'y retrouvent plus rien et rejettent en bloc toute démonstration "démontrer, c'est rendre évident".

C'est le cas bien souvent des **problèmes d'existence** : quand les élèves ont travaillé et résolu des problèmes de croissance exponentielle, est-il nécessaire avant toute théorisation des fonctions exponentielles, d'en démontrer l'existence ?

Nous répondons catégoriquement non, il n'est pas nécessaire, il est nuisible de démontrer l'existence de ces objets mathématiques avant de les avoir manipulé, de les avoir fait servir. Nous disons avec N. Rouche "*L'existence quotidienne fait loi, on ne travaille qu'avec des choses dont on a de bonnes représentations*". Une bonne représentation est rarement donnée par une démonstration d'existence. Ne pas démontrer l'existence avant de s'en servir ne signifie pas ne jamais la démontrer ou ne pas soulever le problème. Quand ce problème devient un obstacle à la construction du savoir, il est alors nécessaire pour progresser, d'établir l'existence de l'objet mathématique.

Nous arrivons donc à dire que **tout un cours ne peut être fait au même niveau**. Suivant les circonstances, certains faits seront établis par une démonstration, d'autres pas. Quand les évidences ou les intuitions produisent des énoncés faux, quand il y a un doute, alors une démonstration s'impose pour trancher, établir clairement les faits, corriger les intuitions fausses.

D'autres situations peuvent amener des problèmes que la seule intuition ne permet pas d'appréhender. Enfin certaines démonstrations portent en elles-mêmes une méthode de raisonnement transférable à d'autres contextes et sont elles-mêmes objet de formation.

Ne pas tout démontrer ne signifie pas ne pas être rigoureux. **Etre rigoureux**, c'est préciser comment les faits ont été établis. On peut être rigoureux sans être rigoriste (c'est-à-dire prétendre tout établir soigneusement, ce qui revient à transformer le cours en un code déductif étroit sans pouvoir s'en écarter).

L'activité de théorisation est une activité continue, progressive, inachevée : une théorie se construit par bribes ; rapprocher les éléments, les assembler, capitaliser pour construire une théorie. La monographie illustre par exemple trois phases de construction et d'étude de la théorie du calcul différentiel et intégral. Ces trois phases effleurent à peine à elles trois l'ensemble de la théorie.

L'activité de théorisation ne doit pas être coupée de la "réalité" : il est nécessaire de confronter la théorie, l'adéquation du modèle trouvé à la réalité des situations "concrêtes". Il peut y avoir contradiction entre la" réalité" et la théorie. Pourtant la théorie donne une solution du problème. La théorie est juste, mais elle peut être dans un certain champ inadéquate. Par exemple, en travaillant sur l'équilibre d'un petit déjeuner en nutriments fondamentaux des élèves ont abouti à une consommation de lait négative. Leur première idée est de remettre en cause la justesse de leur calcul au lieu de la validité du résultat. Une fois les calculs vérifiés, le modèle étant celui des équations linéaires, on est amené à se poser le problème du champ de validité, d'abord par rapport à la situation, ensuite sans référence à une situation de façon à rendre cohérente dans le champ mathématique la solution trouvée. La question de savoir si oui ou non la théorie de la résolution des systèmes d'équations peut s'appliquer se pose alors. Les conditions initiales de la situation sont-elles en concordance avec les axiomes de départ et les hypothèses des théorèmes que l'on veut appliquer sont-elles vérifiées ?

Les résultats obtenus à l'aide de la théorie ont-ils un sens dans la situation de départ ?

Dans cet exemple les élèves travaillent sur deux plans et confrontent ces deux plans : la situation, la théorie. C'est à partir de cette confrontation que la validation d'une théorie pourra se faire.

On pourra alors évaluer la maîtrise de la théorie en faisant inventer des situations que la théorie permettra de résoudre. Les élèves devront alors délimiter le champ de problèmes dans lequel la théorie intervient.

Une théorie n'est utile que si elle sert : les modèles, les théories ou éléments de théorie peuvent servir eux-mêmes de situations pour construire de nouveaux modèles et de nouveaux éléments de théorie dans un processus dynamique de mathématisation pour résoudre d'autres problèmes. la théorie construite sur un savoir-faire est transformée en savoir opératoire et instrumental.

Savoir "bien poser" un problème,
Savoir construire un raisonnement,
Savoir manipuler les signes comme des objets,
Savoir définir des hypothèses, des conditions nécessaires et suffisantes, des champs de validité,

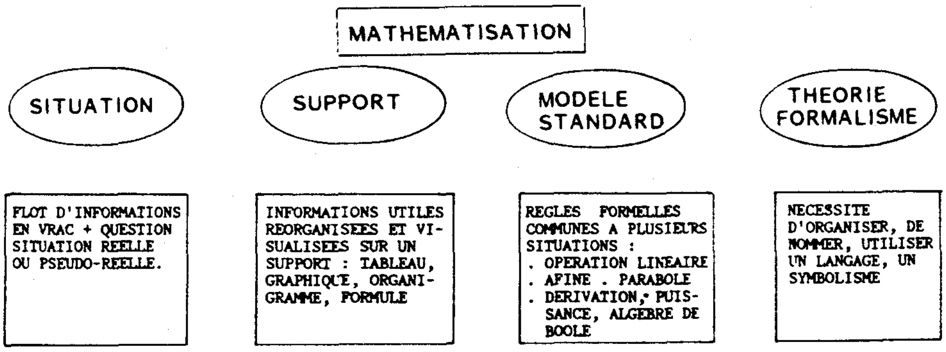
sont des objectifs de formation "continus, transversaux, progressifs" du niveau le plus bas au niveau le plus élevé.

L'illustration des théories mathématiques, le maniement du symbolisme, la démonstration et l'application de théorèmes pour eux-mêmes ne constituent pas la finalité de notre stratégie d'enseignement. Ils sont nécessaires et interviennent à une étape donnée dans la construction du savoir mathématique pour simplifier, classer, structurer, nommer, unifier.

Les finalités de l'enseignement des mathématiques, peuvent se résumer par :

> - Développement des capacités d'analyse, de logique, de rigueur, de raisonnement,
> - Acquisition de connaissances,
> - Apprendre des mathématiques pour avoir les capacités de résoudre des problèmes,
> - En outre, la certification des acquis sous diverses formes (attestation deniveau, unité capitalisable, diplôme...) est un élément important de notre dispositif de formation.
>
> Ces finalités sont d'égale importance et poursuivies simultanément en pratiquant la méthode de mathématisation de situations-problèmes à l'aide de support de l'information
>
> La mathématisation de situation a un double rôle :
>
> 1) C'est une méthode de travail mise en oeuvre par l'enseignant
> 2) C'est un objectif de formation qui vise à ce que les formés apprennent eux-mêmes en pleine autonomie, à poser et à résoudre des problèmes. Cet apprentissage se faisant par paliers successifs.
>
> [Document interne] [37].

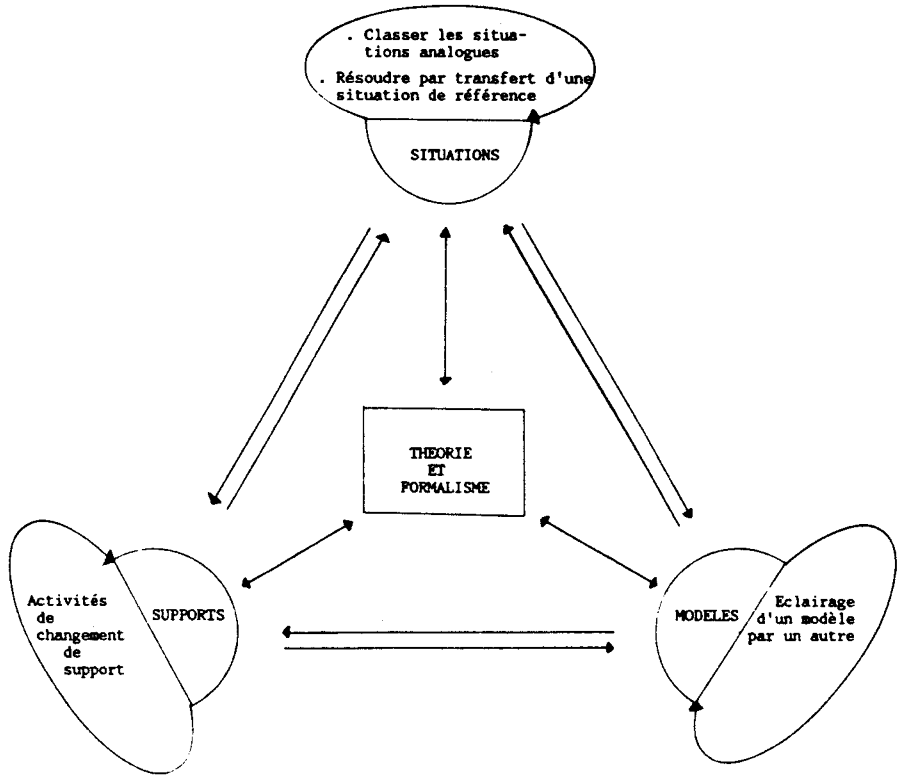
Nous résumons notre stratégie d'enseignement par le schéma



Dans ce schéma, aucun des états n'est privilégié par rapport aux autres, ce qui nous importe est de savoir gérer et utiliser les informations (qu'elles soient issues d'une situation ou d'une théorie) pour passer d'un état aux autres, on casse ainsi obligatoirement la linéarité de l'enseignement dit classique visant le seul apprentissage de théories.

C'est en ce sens que nous parlons de méthode globale d'enseignement intégrant l'informatique comme outil et comme mode de pensée. Le schéma précédent qui a servi de guide à l'élaboration de la méthode globale en induit peut-être une idée fausse car on peut en avoir une lecture linéaire et penser que la théorie n'intervient qu'à la fin.

Pour illustrer l'aspect global de la méthode nous proposons le schéma suivant :



3EME PARTIE

APPORTS SPECIFIQUES DE L'OUTIL INFORMATIQUE SUR LES MATHEMATIQUES EN TANT QU'OBJET D'ENSEIGNEMENT

Les chapitres IV et V ont montré que les modes de pensées issus de l'informatique ont induit une méthode globale d'enseignement des maths, qui n'a été rendue opératoire que par le recours à des aides techniques de gestion des supports (calculette et ordinateur).

Au-delà de l'aspect aide technique opérationnelle, l'outil informatique a apporté des modifications spécifiques sur la matière elle-même en tant qu'objet d'enseignement :

Deux chocs successifs ont fortement influencé l'enseignement des mathématiques :

Le choc des nouveaux moyens de calculs numériques : calculette, calculatrice programmable, ordinateur, tableur.

Le choc des nouveaux moyens de production et de gestion des images : ordinateur semi-graphique, ordinateur graphique, traceur, fonctionnalité de gestion des images dans le contexte nanoréseau.

De plus, ces deux apports spécifiques de l'outil informatique agissent en synergie.

CHAPITRE VI

LE CHOC DES NOUVEAUX OUTILS DE CALCUL

1 - LEUR APPROPRIATION COLLECTIVE :

En une dizaine d'années, une mutation très rapide des outils de calcul mis à la disposition du grand public, s'est opérée.

Cette arrivée massive de nouveaux outils de calcul a modifié le statut social du calcul numérique.

Cette modification apparaît très clairement si l'on compare le statut du calcul numérique avant et après les années 70 dans la vie sociale, la vie professionnelle et à l'école.

1-1 - AVANT 1970

Dans la vie sociale

Les seuls calculs accessibles au grand public étaient les additions et les soustractions effectuées à la main.

Dans les entreprises :

Seuls les ingénieurs avaient accès aux autres opérations par le biais des outils "prestigieux" que constituaient les tables numériques et la règle à calcul, les employés se contentaient d'additionneuses mécaniques et les ouvriers de lectures d'abaques. Bien sûr, les ordinateurs existaient déjà, mais ils n'étaient pas utilisés pour effectuer des calculs courants en temps réel, dans ce domaine leurs performances sont d'ailleurs médiocres comparées aux calculettes actuelles.

Dans les écoles :

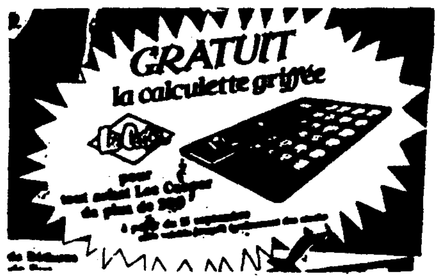
L'utilisation de calculatrices mécaniques était limitée à des actions de recherche pédagogique et était considérée comme une activité novatrice. Ces premières expériences étaient d'ailleurs plus centrées sur l'algorithmique que sur le calcul numérique lui-même [102].

Dans l'enseignement technique, les sections commerciales attendaient leurs premières dotations en calculatrices de bureau programmables du type P 101 Olivetti et Monroe 1880.

1-2 - APRES 1980

Dans la vie sociale :

Les machines à calculer sont devenues au même titre que les montres à quartz, des produits de grande consommation, cela va de la calculatrice carte de crédit en "plaqué or" offerte comme cadeau de Noël à la calculatrice "griffée" donnée en prime pour l'achat d'un pantalon.



Il y a eu appropriation collective de cet outil, il n'est pas rare de voir des adultes ne sachant pas leurs tables de multiplications, effectuer sans complexe des calculs de pourcentages, voire de racines carrées ou de trigonométrie sur leur calculette. De même, les enfants dès le début de l'école primaire utilisent la calculette pour vérifier leurs opérations. Les ordinateurs commencent à faire partie de l'environnement familial.

Dans les entreprises

Les cadres ont remplacé leur règle à calcul par un ordinateur personnel. Une entreprise de Vente par Correspondance a fourni en 1983 un Makintosh en lising à tous ses cadres. Des calculatrices électroniques avec ou sans imprimante sont présentes dans tous les bureaux.

Dans les écoles

En première analyse, il semblerait que là aussi, le bouleversement ait été total.

La calculatrice fait partie des fournitures obligatoires à l'entrée en seconde. Presque tous les élèves ont une calculatrice dès la classe de 6ème.

De nombreux enseignants organisent dès l'école primaire des activités autour de la machine à calculer.

Les micro-ordinateurs ont été massivement distribués dans les écoles et les clubs de micro-informatique fleurissent dans de nombreux établissements.

En 10 ans, il y a eu appropriation collective des nouveaux outils de calcul dans la vie professionnelle et sociale ; par contre, dans la grande majorité des cas, il n'y a pas eu intégration globale de ces outils dans l'enseignement.

Au regard des publications des diverses équipes de recherche pédagogique, on constate que l'introduction des calculettes puis des ordinateurs a conduit souvent à deux types d'activités :

- Apprendre la programmation pour la programmation : ces activités intéressantes ne nous semblent pas relever du domaine de l'apprentissage des mathématiques.

- Développer des activités algorithmiques : ces activités se sont révélées passionnantes en formation des maîtres et avec des publics maîtrisant le formalisme de l'abstraction. Récitons les travaux de Glaymann [55] et Fletcher [49] (cf chap IV) ainsi que les travaux algorithmiques autour de l'introduction de la combinatoire développée en collaboration avec l'IREM de Lille [86].

En formation d'adultes bas-niveaux, ces travaux ont été difficilement transférables. On se heurtait à la complexité de la découverte des algorithmes et à l'abstraction de leur description à l'aide d'organigrammes ou d'arbres programmatiques. Ces langages abstraits restaient la propriété des formateurs, au mieux les formés étaient capables de les lire, mais très rarement de les construire.

L'algorithmique n'a eu que des influences sectorielles dans les cursus mathématiques (approximation de nombres réels, résolution d'équations, problèmes de convergence...).

Dans les instructions officielles : l'influence des nouveaux outils de calcul est explicite dans les programmes officiels par exemple ceux des épreuves du CAPES (Concours interne réservé à des enseignants en exercice) et ceux des classes terminales de Septembre 86.

1 - OBJECTIFS GENERAUX DES PROGRAMMES C, D, E.

L'emploi systématique des calculatrices vient renforcer les possibilités d'étude de ces questions, aussi bien pour effectuer des calculs que pour vérifier des résultats ou alimenter le travail de recherche.

L'impact de l'informatique doit être progressivement pris en compte : la mise en valeur des aspects algorithmiques et l'emploi des calculatrices programmables ont été évoqués ci-dessus ; il convient aussi d'utiliser les matériels informatiques existant dans les établissements et d'habituer les élèves, sur des exemples simples, à rédiger des programmes de manière méthodique, mais aucune capacité n'est exigible des élèves dans ce domaine.

2. OBJECTIFS MATHEMATIQUES VALABLES POUR L'ENSEMBLE DES EPREUVES DU CAPES

Les candidats doivent se munir, aussi bien pour les épreuves écrites que pour les épreuves orales, d'une calculatrice scientifique programmable de gamme courante, conforme à la réglementation en vigueur. Le programme précise les quelques connaissances de base exigibles concernant leur emploi.

Ils doivent savoir exploiter cet instrument aussi bien pour traiter des problèmes numériques que pour vérifier un résultat théorique et pour alimenter un travail de recherche combinant l'expérimentation et le raisonnement.

d) L'impact de l'informatique sera progressivement pris en compte. Dans une première étape, dès la session 1987, les candidats sont incités à exploiter les aspects algorithmiques dans le domaine des problèmes numériques : construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leur performance. Dans les années à venir des capacités précises dans ce domaine seront exigibles, et d'autres champs de problèmes, notamment celui des algorithmes de tri et de recherche, seront progressivement abordés.

Dans le domaine de la programmation des algorithmes numériques, les candidats sont incités à rédiger leurs programmes de manière méthodique. Ici aussi, des exigences plus précises seront progressivement introduites dans les années suivantes, en liaison avec l'emploi d'ordinateurs.

A la lecture de ces documents, on s'aperçoit cependant que cette influence est limitée. Il n'y a pas intégration globale de l'outil dans l'enseignement et on ne perçoit pas l'influence sur les cursus.

Cette limitation est retrouvée également au niveau de la rédaction des livres scolaires. En classe de seconde, un chapitre est consacré à la calculatrice mais il forme un tout à lui seul sans influence sur les autres chapitres.

Cependant, à partir des années 1970, il y a eu effectivement la volonté de la part des commissions nationales de réflexion (sur les programmes, sur les unités capitalisables, ...) ou de quelques uns de leurs membres d'introduire effectivement les outils de calcul dans l'enseignement. C'est ainsi que les calculettes ont été autorisées aux examens malgré une résistance non négligeable d'une partie du corps enseignant qui n'a cédé que sous la pression sociale et hiérarchique.

En 1986, s'est reproduit le même phénomène avec les calculettes graphiques autorisées au baccalauréat.

Une volonté politique d'intégrer l'informatique à la démarche pédagogique de l'enseignant apparaît dans la circulaire du 3 novembre 1986, du Directeur du Cabinet du Ministre B. Saint-Servin. Il parle de l'apport de ce moyen nouveau qui assistera et enrichira la pédagogie, laisse la responsabilité de l'utilisation de logiciels aux enseignants pour assister leur démarche pédagogique.

Des équipes d'enseignants ont dépassé le seul aspect algorithmique et intégré globalement et partout les nouveaux outils de calcul sans en faire un chapitre à part, ce n'était pas un nouveau but mais un nouveau moyen intégré parmi d'autres à une stratégie pédagogique. Citons les travaux de M. Bruston [8] où il est question de difficultés objectives que rencontrent les étudiants dans l'apprentissage des mathématiques notamment avec la logique, l'écriture symbolique, le vocabulaire etc... et du transfert des savoir-faire acquis sur calculette pour vaincre les difficultés. Citons également les travaux de D. Péchillon, B. Cazier, Y. Martin, J.L. Wattez de l'IREM de Lille [85]

2 - LE CHOC DU CALCUL DANS LA STRATEGIE DE FORMATION D'ADULTES AU DEPARTEMENT MATHEMATIQUES DU C.U.E.E.P.

En 1975, le C.U.E.E.P. a pu se procurer un important stock de calculettes scientifiques. Il y a donc eu une conjonction entre :

- la demande des formés de traiter des situations réelles ou en rapport avec leurs situations réelles en rapport avec leurs situations professionnelles,

- du matériel disponible,

- l'attitude volontariste des responsables du Département d'imposer l'utilisation systématique des calculettes.

Cette attitude volontariste s'est manifestée par la prise en compte systématique en formation de formateurs d'activités autour de la calculette et également par des interventions dans les commissions nationales pour la prise en compte de l'outil calculette dans la formation.

Cette attitude volontariste a eu des effets beaucoup plus forts que ceux initialement prévus. On voulait simplement pouvoir traiter des situations réelles et étendre le volume des calculs réalisables en temps réels (calcul d'impôts, dépouillement de séries statistiques importantes, Plan Epargne Logement, ...). Mais très vite, il y eut un véritable choc bouleversant globalement la stratégie pédagogique du Département Mathématiques.

En effet, en 1974/1975, le Département Mathématiques a dû faire face à plusieurs demandes d'enseignement des logarithmes à des publics faiblement scolarisés. Le niveau de certains formés ne dépassait pas un bon C.E.P., on était donc bien loin des prérequis habituels pour un tel enseignement.

Notre hypothèse de départ qui déclencha les premières expériences était la suivante :

L'utilisation d'un outil comme la calculette par le biais d'activités manipulatoires permet d'acquérir des savoirs et des savoir-faire sur les puissances, les exponentielles et les logarithmes en courcircuitant provisoirement la théorie. A partir de ces savoirs construits sur des activités manipulatoires, on exhibe les modèles standard (puissances, logarithme et exponentielles) et on passe à la théorie.

La stratégie pédagogique était la suivante :

- utiliser la mathématisation de situation à l'aide de support de gestion de l'information, en particulier en partant des situations d'ancrage fournies par les adultes (crédit, séries Renard, abaque sur papier fonctionnel, croissance de populations, inflation, etc...) et en privilégiant, contrairement à la formation traditionnelle, les supports opératoires : tableau - chaîne d'opérateurs - papier semi-log, par rapport aux supports formule algébrique et courbe sur papier millimétré.

- sans revenir au vocabulaire et aux "recettes de cuisine" basés sur les progressions arithmétiques et géométriques, remplacer pour l'introduction, l'aspect fonctionnel et théorique de la méthode traditionnelle par des activités manipulatoires liées aux calculettes, en particulier privilégier l'aspect opératoire de l'exponentiation (touche y^x) par rapport à l'aspect fonctionnel et analytique.

- ne pas perdre de vue l'apport des "mathématiques modernes" en développant systématiquement les transferts entre modèle affine et modèle exponentiel induit par l'isomorphisme de structure mais sans verbaliser ni étouffer sous le formalisme cette idée force.

Nous allons, dans le paragraphe suivant, détailler cette stratégie sur l'exemple de l'enseignement des puissances, logarithmes et exponentielles, en montrant le rôle spécifique des nouveaux moyens de calcul. A travers cet exemple, nous allons montrer que c'est l'interaction entre une demande précise d'un public "hors norme", la présence de matériel disponible et la volonté d'innover des formateurs qui, par des capitalisations et des transferts successifs aboutit à une profonde rénovation.

En 1974, les logarithmes enseignés uniquement au niveau de l'entrée à l'Université était introduits de façon traditionnelle par la formule :

La fonction exponentielle était définie comme fonction réciproque : $\exp(x) = \ln^{-1}(x)$

Les propriétés de cette fonction permettaient d'introduire la notion $\exp(x) = e^x$, puis grâce à la formule $a^x = e^{x \ln a}$, on généralisait aux fonctions logarithmes et exponentielles en base a.

Pour finir, on débouchait sur l'emploi des exposants fractionnaires grâce aux formules :

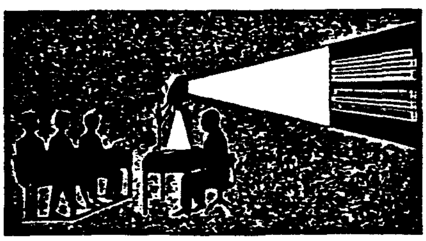
$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

L'emploi de la table de logarithmes décimaux et de la règle à calcul faisait l'objet d'une leçon annexe, souvent magistrale, à l'aide de documents spécifiques pour rétroprojecteurs.

Il y avait à l'époque des publicités du type ci-dessous, dans le bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques

ARISTO

REGLES A CALCUL MODELES DE PROJECTION



(A.P.M.E.P. n° 278)

L'aspect calculatoire était second par rapport aux considérations théoriques.

Les problèmes de mises en équations à l'aide des puissances, logarithmes et exponentielles étaient très minoritaires par rapport aux exercices formels. Cela apparaît très bien en analysant les énoncés du baccalauréat. En 1974, dans les séries Bac D et D' sur 50 sujets, quasiment tous utilisent l'aspect théorique des fonctions $y = \ln x$ et $y = e^x$ alors que seulement deux énoncés parlent de mise en équation :

Caen

I – On suppose que $u_0 = 23{,}50$ F soit le prix du kilogramme de bifteck au 1er janvier 1974; on désignera par u_n son prix n années plus tard. (exemple : u_3 = prix du kilogramme de bifteck au 1er janvier 1977).

En admettant que l'accroissement annuel de ce prix soit constant et égal à 12% :

1. Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}, puis en fonction de u_0 et de n.
2. Calculer à l'aide d'une table de logarithmes le prix du kilogramme de bifteck au 1er janvier 2000.

Dijon

I – La consommation du pétrole en France augmente régulièrement de 10% par an.

Soit f(0) le nombre qui mesure sa consommation actuelle, et soit f(n) le nombre qui mesurera sa consommation dans n années (n étant un entier naturel).

1. Etablir une relation entre f(n) et f(n + 1), puis exprimer f(n) en fonction de f(0) et n.
2. Déterminer dans combien d'années la consommation de la France atteindra le double de sa consommation actuelle.
3. La consommation de pétrole étant actuellement de 100 millions de tonnes, quelle sera, dans cette hypothèse de croissance, la consommation de pétrole dans 20 ans ?

On remarque d'ailleurs que la mise en équation est préformulée dans le langage des suites.

3 - LE ROLE SPECIFIQUE DES NOUVEAUX MOYENS DE CALCUL DANS L'ENSEIGNEMENT DES PUISSANCES, LOGARITHMES, EXPONENTIELLES

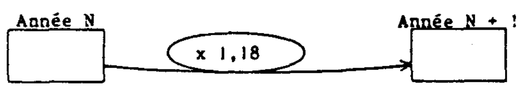
3-1 - LA SITUATION D'ANCRAGE EST CLASSIQUE EN FORMATION D'ADULTES : PROBLEME D'INTERET COMPOSE :

Je place 1 U (1 million, 1 "brique") au taux annuel de 18 %.
Je capitalise les intérêts chaque année (je ne sais plus où mettre mon argent, autant le laisser à la banque !)
Que devient mon avoir au bout de 1 an, 2 ans, 3 ans ?...

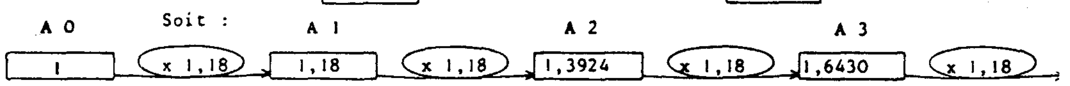
Deux activités manipulatoires sont directement proposées :

1°) Travail avec machine à calculer

Chaque année, mon avoir subit la transformation suivante :



Soit :



Soit la série :

1
1,18
1,39
1,64
1,94
2,29
2,70 ...

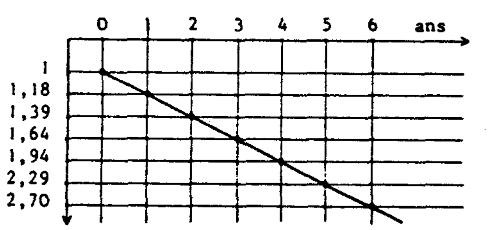
PROGRAMME : 1,18 x = $\underset{2}{=}$ $\underset{3}{=}$ $\underset{4}{=}$ $\underset{5}{=}$ $\underset{6}{=}$ $\underset{7}{=}$ (sur machines à facteur constant.)

2°) Relevé sur "papier magique"

(ce papier magique s'appelle, chez les initiés, papier semi-log).

La série des nombres trouvés plus haut donne une droite lorsqu'on reporte ces points sur ce papier "drôlement" millimétré.

A ce stade du travail, il parait pédant d'écrire ainsi cette liste : →



Extraits du document interne [30]

Nous observons dès ce travail, différents apports de la calculette :

a) moyen de calcul

Des grandes séries d'opérations se manient facilement et rapidement.

b) inducteur d'un langage

Le formalisme algébrique, en particulier celui des suites géométriques comme celui de l'exemple du sujet de Baccalauréat précédemment cité, est remplacé par l'écriture "chaîne d'opérateurs".

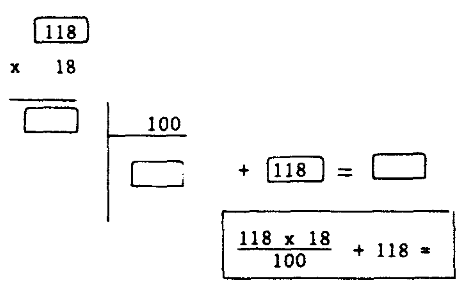
Ce langage induit par les calculettes, est intermédiaire entre l'arithmétique où l'on ne s'intéresse qu'au résultat opération après opération (stratégie à une étape) et l'algèbre où l'on s'intéresse au résultat final grâce à une formule globale. Ce langage intermédiaire permet de battre en brêche l'impérialisme de l'algèbre [83] et fournit un moyen de courcircuiter le calcul littéral formel.

L'algèbre n'est plus un prérequis à l'introduction des logarithmes.

c) changement de statut des pourcentages

La calculette induit dans les problèmes de pourcentages, l'utilisation des **coefficients multiplicateurs.**

La méthode traditionnelle pour augmenter de 18 % est :



Les pourcentages apparaissent alors comme des fractions. Les problèmes se traitent plus ou moins comme cas particulier de la règle de trois. Cette méthode est directement liée au calcul à la main. A la main, il vaut mieux faire plusieurs opérations simples qu'une seule opération compliquée.

Les calculettes rendent toutes les opérations aussi simples, il n'y a plus d'opération privilégiée.

D'une stratégie à 3 étapes, on passe donc à une stratégie à une étape : augmenter de 18 %, c'est x 1,18.

Les machines à calculer en lien avec les opérateurs permettent donc de courcircuiter les connaissances sur les fractions et de traiter de façon efficace les problèmes de pourcentage (composition, inversion).

d) Concrétisation de la notion d'invariant

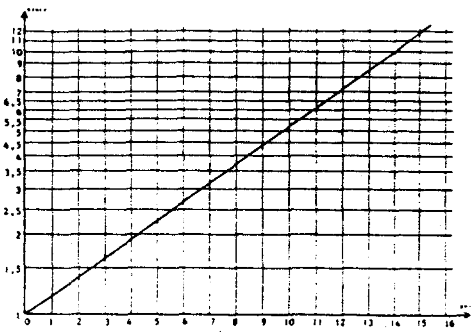
Dans la manipulation précédente, l'algébrisation du problème par la formule $f(n) = 1,18^n$ est remplacée par l'utilisation du facteur constant de la machine :

118 = = = =

La mémoire et le facteur constant permettent une concrétisation de la notion d'invariant.

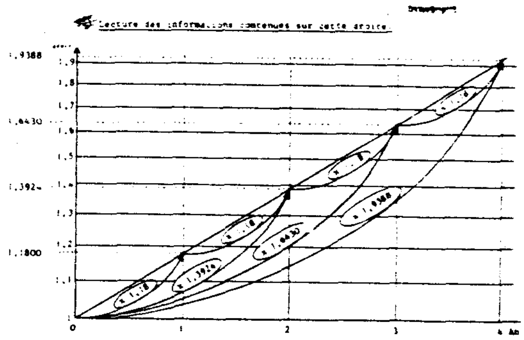
Dans cette première étape du travail, le papier semi-logarithmique apparaît comme magique. Mais il va permettre de visualiser et de se représenter concrètement les règles de fonctionnement du modèle exponentiel sous-jacent à ces premiers travaux avant que le modèle soit explicité.

A partir du graphique sur papier "magique".



Comment trouver l'avoir au bout de 16 ans avec le minimum de manipulations-machine ?

On va pouvoir visualiser les calculs précédents :



3-2 - LA RECONNAISSANCE DU MODELE

Une activité manipulatoire est alors donnée pour exhiber le modèle

> **Comment trouver l'avoir au bout de 16 ans avec le minimum de manipulations-machine ?**

Notons que cette activité algorithmique n'est motivée que comme situation d'apprentissage du modèle. Pas d'algorithmique pour l'algorithmique. La solution 1,18 x = x = x = x = prépare le passage à l'écriture formelle sans encore passer au formalisme algébrique :

$$(1,18)^{16} = ((((1,18)^2)^2)^2)^2$$

Les règles de fonctionnement sont dégagées: additionner les durées équivaut à multiplier les coefficients multiplicateurs correspondants.

Ces activités manipulatoires permettent de fonder le modèle $y = a^x$. Le papier semi-log fait le lien avec le traitement du modèle linéaire $y = ax$ sur papier millimétré : Par changement d'origine et en introduisant le cas décroissant ($a<1$ dans $y = a^x$ correspond à un $a<0$ dans $y = ax$), on obtient une analogie, qui débouchera sur l'isomorphisme de structure, entre le modèle affine $y = ax + b$ sur papier millimétré et le modèle exponentiel $y = ba^x$ sur papier semi-log.

Dans ces activités, le rôle de la calculette est le même que précédemment. Elle permet, en lien avec le papier millimétré, de résoudre par **reversibilité** des problèmes non triviaux tels que :

> **Même conditions que dans le premier exercice : je place 2,8 U en banque, à 8 %, et je place en même temps 1,5 U à mon "ami", à 25 %.**
> **Au bout de combien d'années le placement ches mon "ami" aura dépassé le placement en banque ?**
> **A chaque rebondissement, une balle de ping-pong remonte aux 4/5 de sa hauteur initiale. On lâche une balle à 60 cm de hauteur. Pendant combien de bonds remontera-t-elle au-dessus de 10 cm ?**

Les résolutions sont numériques (approximations successives) et graphiques (lecture sur papier semi-log). Cependant, une étape a été franchie :

Les activités manipulatoires, en faisant fonctionner le modèle, permettent d'en comprendre les règles de fonctionnement avant de le nommer.

3-3 - LE PASSAGE A LA THEORIE

On passe alors seulement à la théorie, à l'institutionnalisation du modèle en verbalisant ce qui s'est fait.

En utilisant la touche précablée log x le papier "magique" est reconstruit, il est nommé, démystifié.

Les deux touches précablées lnx et logx , le papier semi-log, aident à dégager l'isomorphisme de structure induit par la formule $a^{x+y} = a^x . a^y$ et la règle $a^x = y \iff x^2 = \log y / \log a$ obtenue par réversibilité qui permet de remplacer les résolutions par approximations précédentes par une résolution algébrique.

Il est important que la théorie serve à simplifier des problèmes compliqués et non à compliquer des problèmes simples.

Dans le passage à la théorie, la calculette permet, par le biais de touches précablées, une concrétisation des fonctions (exponentielles, logarithmes, puissances).

Cette concrétisation par des activités manipulatoires les rend facilement accessibles. Cette accessibilité a pour effet de faire passer de l'aspect fonctionnel à l'aspect opératoire.

L'exponentiation concrétisée par la touche y^x acquiert un statut d'opération au même tire que l'addition et la multiplication.

Nous retrouvons ici une proposition de Freudhental "From powers to Logarithms" [50].

Dans la monographie , nous détaillons ce passage à la théorie et au formalisme. En effet ces travaux, au départ réalisés avec des publics non algébrisés, on été réinvestis dans la préparation à l'Examen Spécial d'Accès aux Etudes Universitaires. Bien que ce public E.S.E.U. ait accès à l'écriture formelle et aux règles algébriques, cette démarche d'enseignement des puissances logarithmes, exponentielles est gardée. La raison en est qu'au-delà de la progression dans l'apprentissage qui peut être plus ou moins rapide suivant le public, cette démarche d'enseignement induite par les nouveaux outils de calculs est meilleure parce plus ancrée sur une réalité sensible, plus instrumentalisable et plus porteuse au niveau du savoir mathématique.

4 - DES MODIFICATIONS INDUITES PAR LES NOUVEAUX OUTILS DE CALCUL

4-1 - MODIFICATION DU STATUT DES OPERATIONS

Les calculettes nivellent le niveau de difficulté des opérations les unes par rapport aux autres et permettent d'unifier les raisonnements.

Dans les calculs faits à la main, les additions sont privilégiées, les divisions sont très nettement plus "coûteuses" que les multiplications et les exponentiations sont carrément infaisables en une étape. Cela a conduit à une certaine déformation des stratégies de résolution. L'exemple précité des calculs de pourcentages illustre bien cet aspect. La calculette met toutes les opérations y compris y^x sur un pied d'égalité.

Une tendance heureusement atténuée dans les nouveaux programmes était d'enseigner séparément les opérations. Les techniques classiques ne faisaient pas clairement apparaître le lien entre elles. En particulier, il est très difficile de reconnaître dans l'algorithme de calcul de la division traditionnelle française que cette opération est l'inverse de la multiplication.

Souvent, l'enseignement d'une opération et celui de son opération inverse sont séparés dans le temps.

Les calculettes ont induit une approche globale des opérations basée sur la reversibilité.

Il n'y a que trois opérations, chacune dédoublée par son inverse. L'addition, et son inverse la soustraction
La multiplication et son inverse la division.
La puissance et son inverse la racine.
Pour soustraire un nombre, on peut additionner son opposé.
Pour diviser un nombre, on peut multiplier par son inverse.
Pour extraire la racine n ième d'un nombre, on peut prendre la puissance inverse.
Extrait de [53].

Cette approche a permis de résoudre par reversibilité sans prérequis sur le formalisme algébrique tous les problèmes traitables par une équation où la variable n'apparaît qu'une fois (chap. V).

Examinons un exemple : le problème du chou.

Un producteur vend un chou.
Le camionneur majore ce prix de 50 centimes pour sa commission.
Le grossiste majore le prix camionneur de 25%.
Le demi-grossiste rajoute 80 centimes.
Le détaillant prend 40% de bénéfice sur son prix d'achat.
Le client achète ce chou : 5,20 F.
Quel est le prix producteur ?

Supposons que ce prix soit 1,50 F.

Est-ce que ça marche ?

1,50 + 0,50 = 2 x 1,25 = 2,50 + 0,80 = 3,30 x 1,40 = 4,62

au lieu de 5,20.

J'efface les résultats faux et j'entoure les bons. Je remplace les "=" par des flèches. J'obtiens le schéma :

$\xrightarrow{\times\ 0,50} \ \xrightarrow{\times\ 1,25} \ \xrightarrow{\times\ 0,80} \ \xrightarrow{\times\ 1,40}$

qui fournit la structure du problème, ainsi que sa solution par inversion du sens du parcours :

$\xleftarrow{-\ 0,50} \ \xleftarrow{:\ 1,25} \ \xleftarrow{\times\ 0,80} \ \xleftarrow{:\ 1,40}$ 5,20

Cette méthode s'applique à bien des problèmes dans la solution algébrique est très lourde.

Cette stratégie s'étend bien sûr aux opérations y^x et $\sqrt[x]{y} = y^{1/x}$ et aux fonctions $\sqrt{\ }$ et x^2, $\ln x$ et e^x, sin et $\sin^{-1}$

La présence de la touche INV sur les calculettes scientifiques introduit une concrétisation de ce concept : la fonction et son inverse étant alors une seule et même touche à double effet. Nous pouvons généraliser cet apport de la calculette.

L'existence de "touche machine" concrétise, rend manipulatoires et clarifie des concepts mathématiques très abstraits.

Cet apport très important de la calculette ne se limite pas aux touches de fonctions préprogrammées et à la touche INV

Récitons le facteur constant et la mémoire dont le rôle a été détaillé précédemment. Donnons aussi deux autres exemples significatifs :

Premier exemple :

Quelle est la signification des signes - dans une expression telle que :

- (- 2) + (5 - 2) - (- 2) =

Certains enseignants, devant la confusion, obligent leurs élèves à utiliser des écritures du type :

OPP (2^-) + (5 - 2) - 2^-

Un même signe a trois significations différentes pour un même signe :

- la fonction changement de signe (prendre l'opposé : OPP ( )
- l'opération soustraction : 5 - 2
- le repérage du nombre : 2^-

Le mélange entre ces trois significations différentes provoque des confusions souvent difficiles à enrayer, qu'il s'agisse de l'interprétation d'une écriture formelle ou par exemple de la confusion entre la règle des signes - et + pour les produits, les suppressions de parenthèses et les additions, il est courant de voir - 2 - 3 = + 5

Sur les calculettes, les trois significations du signe - sont dissociées :

- la touche +/- correspond au changement de signe
- la touche - correspond à la soustraction
- le signe - apparaît à l'affichage comme repérage du nombre.

La manipulation machine permet de distinguer les trois significations sans avoir à recourir à des écritures formelles non standard lourdes à manipuler.

Deuxième exemple :

Sur les calculettes, les petits et grands nombres s'affichent avec la notation scientifique. La touche EE permet de manipuler cette notion sans recourir aux puissances de 10.

L'affichage en notation scientifique s'interprète comme un simple déplacement de virgule à droite ou àgauche.

La touche EE permet concrètement de manipuler ces déplacements de virgule. ces manipulations précèdent l'explicitation de la notation.

On frappe sur calculette : 51000000 x 8000 =
On obtient un résultat étrange : 4,08 11
Inversement, on peut entrer des nombres débordant 8 chiffres grâce à la touche EE
On frappe sur calculette :
51 EE 9 x 8 EE 3 =
Résultat : on retrouve 4,08 E11

4-2 - EXTENTION DU CHAMP D'UTILISATION DES RESOLUTIONS NUMERIQUES

La méthode globale est centrée sur des activités de résolution de problèmes. *Les nouveaux outils de calcul ont profondément modifié la "problémathèque". Grâce à ces nouveaux outils, on échappe au tout algébrique et aux problèmes aseptisés [34], [83].*

Par **problèmes aseptisés** nous entendons des problèmes pseudo-réels où les données ont été soigneusement trafiquées pour que "ça marche" et que les calculs puissent se faire facilement et tombent juste.

Par **tout algébrique**, nous entendons restriction de la problématique aux problèmes résolubles par l'algèbre : toutes les équations du troisième degré ont une racine évidente en général 1 ou -1 ; toutes les primitives sont algébriquement calculables ; toutes les dérivées ont un signe qui s'étudie facilement, ...

Les belles formules algébriques sont préférées aux méthodes numériques efficaces pour la résolution de problèmes.

Pendant longtemps, pour calculer l'inverse d'une matrice, la seule méthode reconnue était la formule $A^{-1} = \frac{A'}{\det A'}$ A' étant la matrice des cofacteurs. Cette méthode se révèle très médiocre sur le plan pratique, les calculs "faisables" se limitant aux matrices 3 x 3.

Les nouveaux outils de calcul ont imposé la méthode du Pivot qui ne correspond pas à une formule algébrique. Cette méthode est incluse d'ailleurs dans les programmes des classes terminales et du CAPES.

Les problèmes "traitables" en calcul matriciel ne sont plus restreints aux matrices d'ordre 2 ou 3. En particulier, l'arrivée des tableurs rend numériquement accessible le calcul vectoriel.

Pareillement les calculettes et depuis peu les tableurs, permettent de résoudre facilement des problèmes dont les solutions ne sont pas algébriques ou dans lesquels les formules ne sont pas standard, c'est-à-dire où le traitement algébrique formel est remplacé par une méthode numérique (dichotomie, Newton, récurrence, ...).

De même, nous verrons dans la monographie sur les statistiques et probabilités que pour calculer une probabilité dans une loi binomiale, à la formule :

$$P(\chi = k) = C_n^k (1 - p)^{n-k} p^k \quad \text{avec} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

on préfère un algorithme qui est beaucoup plus efficace :

$$P(\chi = k) = P(\chi = k - 1) \times \frac{p}{1 - p} \times \frac{n - k + 1}{k}$$

Ces exemples mettent aussi en évidence un aspect important des modifications de la problémathèque.

Les nouveaux outils de calcul permettent d'étendre le champ d'utilisation de certains modèles, ce qui modifie certains cursus.

Ainsi le fait de pouvoir utiliser des lois binomiales avec des paramètres très grands permet d'aborder la théorie des sondages d'opinion et des tests d'hypothèses sans recourir à la loi de Gauss. Cela rend ces notions enseignables à partir du niveau CAP au lieu d'exiger les prérequis du niveau de la Terminale.

De même nous avons vu que le modèle $Z = x^y$ qui, avant les calculettes scientifiques, était réservé à quelques cas très simples ($x = 10$, y entier "petit") peut être utilisé pour aborder des problèmes réels de crédit.

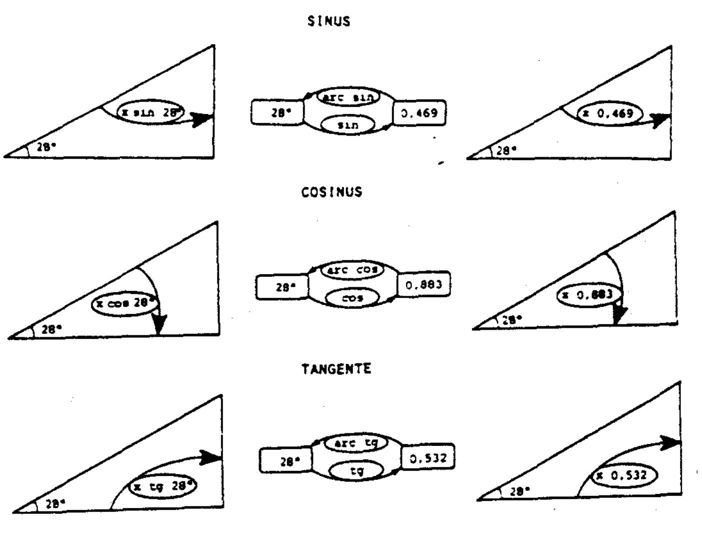
4-3 - MODIFICATION DES CURSUS ET DES CONTENUS

Nous verrons dans la monographie que le fait de pouvoir calculer aisément une valeur numérique approchée d'une dérivée et d'une primitive a considérablement modifié le cursus d'apprentissage des modèles dérivation - intégration.

Plus généralement, on peut affirmer :

Les calculettes modifient l'ordre d'exposition de certaines notions.

En utilisant les touches Sin Cos Tg comme des opérateurs faisant passer d'un côté à un autre d'un triangle rectangle, on enseigne la trigonométrie indépendamment des fractions.



Signalons un autre apport des outils de calcul, c'est :

L'émergence de problèmes induits par l'utilisation des machines elles-mêmes.

Citons par exemple :

- comment faire une division euclidienne sur une calculette ?

- comment trouver le programme qui utilise le moins de touches ?

Cette activité motive les transformations formelles et assure un auto-contrôle.

- comment détecter des fautes de manipulation ?

L'existence des machines à calculer renforce la nécessité du calcul mental et de l'utilisation de la notion d'ordre de grandeur d'un résultat. L'E.A.O. dans son aspect "aide individualisée" apporte une aide considérable car dans ce domaine, il est nécessaire de travailler à son rythme et à son niveau.

- Quelle est la validité d'un résultat ?

Le calcul d'erreur classique basé sur les différentielles est remplacé par des problèmes d'analyse numérique, d'optimisation des calculs de vitesse de convergence, fausse convergence, paradoxe, ...

Ces nouveaux problèmes posés à partir de calculs "simples" débouchent très souvent sur des problèmes théoriques qui dépassent largement le niveau initial.

Nous n'avons encore que peu étudié cet aspect, nous l'avons plus observé, ce qui nous amène à affirmer qu'ils impliquent des modifications sur la matière sans pouvoir encore cerner les retombées sur l'enseignement.

Signalons cependant ces travaux autour du choix d'une formule optimum de calcul d'une dérivée à partir des formules :

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h}$$

Quelle valeur de h choisir, compte tenu de la précision de la machine, pour avoir la meilleure approximation de la dérivée ? Ceci débouche directement sur le concept de développement limité.

Donnons pour conclure quelques aspects complémentaires relatifs au comportement des élèves dû à leur appropriation de l'outil. Ils sont porteurs à terme d'autres modifications importantes pour l'enseignement.

- La différence entre nombre rationnel et nombre réel : $2/3 = 0{,}66$, $\sqrt{2} = 1{,}41$

- L'égalité de deux nombres : le nouveau statut des nombres va jusqu'à de "nouveaux théorèmes" ; deux nombres sont égaux si les deux premières décimales sont les mêmes.

De tels "énoncés" empiriques et non formulés soulèvent des problèmes délicats, dès que l'on fait des calculs un peu fins ; par exemple :

$(0{,}99)^9$ est-il égal à $(1{,}01)^{-9}$

Sur la calculette $(0{,}99)^9 = 0{,}9135...$

et $(1{,}01)^{-9} = 0{,}9143...$

A deux décimales, les deux nombres sont égaux.

- L'abolition des simplifications algébriques : avec la machine on peut toujours calculer

- Quand la machine ne peut pas calculer (erreur à l'affichage), c'est qu'il y a un problème : la théorie mathématique est souvent nécessaire.

CHAPITRE VII

LE CHOC DES NOUVELLES IMAGES LIEES AUX NOUVEAUX MOYENS DE PRODUCTION D'IMAGES

I - LE CONTEXTE : DE L'AUDIO VISUEL FIGURATIF AUX USAGES INTERACTIFS DU RETROPROJECTEUR

Avant de préciser et d'analyser le choc produit par les nouvelles images et les conséquences de ce bouleversement dans l'enseignement des mathématiques, il apparaît nécessaire de situer le contexte historique et thématique de leur apparition.

Depuis très longtemps, les enseignants utilisent le support-image, mais on peut dire, en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, qu'une étape importante a été franchie dans les années 70.

Des événements simultanés ont déclenché la recherche de nouvelles pratiques enseignantes :

- apparition sur le marché et dans l'Education Nationale de moyens de production d'images accessibles aux enseignants (rétroprojecteur, magnétoscope) ;

- réforme des Maths modernes ;

- création dans les IREM, de groupes audio-visuels équipés en matériel disponible.

1-1 - L'AUDIO-VISUEL FIGURATIF

Face à l'excès de formalisation et de verbalisation consécutif à la réforme dite "des maths modernes", diverses équipes d'enseignants ont réagi en réintroduisant dans leur enseignement des **supports figuratifs** [32]. En effet, cet excès de formalisation et de verbalisation a conduit à présenter les maths, y compris la géométrie, comme une succession de signes qui s'organisent suivant des règles qui n'étaient logiques que pour quelques uns. C'est ainsi qu'en classe de 4ème, en 1973, la droite réelle est définie par : (extrait de [99])

> **THEOREME ET DEFINITION**
>
> ...
>
> **2° La famille de toutes les bijections ainsi définies, possède la propriété**
> **Pour deux bijections quelconques g' et g" de cette famille, il existe un couple (a,b) de nombres réels, tel que a=0, et pour tout élément de M de :**
>
> **g'(M) = a.g'(M) + b**
>
> **On appelle alors graduation de D, toute bijection de cette famille, et le nom g'(M) est appelé abscisse de M dans la graduation.**
> **Etant donnée une droite graduée (D,g), on appelle droite réelle, l'ensemble (D,g) muni de la famille des graduations associée à g.**

Comme l'écrivent Jean Delerue et Jacqueline Rogeon dans un Bulletin Inter-IREM [n], il s'agissait pour ces équipes d'enseignants, en particulier pour les groupes audio-visuels des IREM, de créer des images qui surpassaient le dessin à la craie au tableau, qui donnaient la possibilité aux élèves **d'observer** et de **manipuler**, qui ramenaient un peu de notre environnement dans les classes par des films ou des diapositives. Leur problématique était différente du télé-enseignement qui visait à remplacer le professeur par un cours télévisé. Il s'agissait de fournir des aides à l'enseignant dans sa classe.

La tendance quasi générale a été alors de produire des documents d'une grande qualité technique (documents pour rétro-projecteur, films, diapos, ...), l'image étant utilisée comme **support figuratif.**

Cette démarche pédagogique peut se résumer comme suit :

- une théorie ou un morceau de théorie mathématique est au programme de la classe,
- pour comprendre, les élèves ont besoin de s'en construire une ou plusieurs **représentations,**
- les enseignants produisent/utilisent des **documents figuratifs** aidant les élèves à se former des **représentations imagées.**

LA DROITE AFFINE
Fiche technique : Super 8 (10 min) sonore
Contenu : Il s'agit d'un film de synthèse ; c'est un dessin animé qui illustre de façon imagée comment l'abscisse d'un point est modifiée par un changement de graduation.
Une fiche pédagogique explique comment le film s'insère dans la progression habituelle de la leçon.
Livre du maître avec exemples et exercices.

LES APPLICATIONS
Fiche technique
Première partie :
Rodéo (3 min 30 s), film d'animation sonore
Danse (4 min) sonore
Deuxième partie : Taxi (15 min) muet.
Contenu : Une série de trois petits films montrant des situations de la vie courante ou imaginaire est destinée à faire construire aux enfants la définition d'une application à partir de la notion de relation. Les films sont sonores mais peuvent être projetés en muet sans inconvénient (il s'agit de musique).
Un film plus long montre trois applications numériques : prix d'une course en taxi, consommation d'essence, affranchissement du courrier. Un livre du maître très complet explique comment les films s'insèrent dans la progression habituelle de l'enseignement.

Extraits de [66].

D'autres documents se rapprochent plus des jeux vidéo, il s'agit alors d'une mise en scène et d'une animation autour d'un thème. *"Le but de ces séquences plus ou moins récréatives est de susciter la réflexion des élèves et d'éveiller leur esprit critique"* IREM de Besançon [66].

Dès sa création, le C.U.E.E.P. s'est doté d'un service audiovisuel fort bien équipé tant en matériel et en documents qu'en ressources humaines. Certains départements (Anglais, Français, Sciences) ont largement utilisé ou produit des documents audiovisuels (film vidéo, montage diapos, ...). Le Département Mathématiques, bien que possédant de très nombreux documents audiovisuels en mathématiques, provenant de R.T.S. Promotion, du C.R.D.P. et des IREM, n'a utilisé ni le magnétoscope ni le projecteur de diapositives.

Les causes de non utilisation des films et des montages diapo ne sont à chercher dans la compétence des formateurs ou dans l'accessibilité du matériel. En formation des Maîtres, le Département Mathématiques a utilisé l'autoscopie et a réalisé des films vidéo. Les causes de cette non utilisation proviennent de l'inadéquation entre les images produites et de la stratégie d'enseignement des mathématiques du département.

Explicitons deux raisons principales de cet inadéquation.

Premièrement, les images produites sur magnétoscope sont des images figées sur lesquelles, ni le formateur, ni les élèves ne peuvent agir. La seule maîtrise de l'utilisateur étant l'arrêt ou la marche arrière. L'explication passe par le discours du maître.

Deuxièmement, la démarche pédagogique sous-jacente :

Concept a acquérir	→	image produite indépendamment des utilisateurs	→	création d'une représentation imagée par l'élève	→	acquisition du concept

respecte le déroulement linéaire séquentiel de l'enseignement. L'audio-visuel ainsi conçu n'était adapté qu'aux situations de cours magistral.

On retrouve, en la généralisant à l'audio-visuel, une des idées émises dans le chapitre IV :

Les technologies nouvelles (audio-visuel, informatique) ne sont pas en soi porteuses de changements, seule l'interaction entre une technologie nouvelle et une stratégie pédagogique conduit à des modifications sur la matière à enseigner.

Cette interaction ne s'est pas produite avec le magnétoscope. Par contre elle a eu lieu avec le rétroprojecteur.

> **Utiliser le rétroprojecteur n'est donc pas changer de pédagogie ; mais c'est s'approprier un outil de communication pour amplifier l'action choisie.**

Jean Delerue et Jacqueline Rogeon font une comparaison d'utilisation du rétroprojecteur dans deux types de pédagogie :

EN PEDAGOGIE ACTIVE
a) L'appareil n'est pas l'exclusivité du professeur ; il est utilisé par les élèves pour des exercices d'expression, de création, ...
b) L'émetteur s'assoit à côté de l'appareil, restant à la même hauteur que celle des récepteurs : il installe une relation d'échanges.

EN PEDAGOGIE "PASSIVE"
a) L'appareil est réservé à des informations didactiques très souvent données par le professeur
b) L'émetteur reste debout face aux récepteurs : maîtrise et domination de son auditoire.

Avec eux, nous pouvons dire plus généralement que :

Les aides techniques à l'enseignement apportées par les technologies nouvelles ne changent pas la pédagogie, mais amplifient les pratiques.

L'évolution de l'utilisation du rétro-projecteur par le Département Mathématiques illustre parfaitement ce point de vue. L'interaction entre rétro-projecteur/mathématisation de situation préfigure l'interaction nouvelles images/méthode globale. Notons d'ailleurs que les ordinateurs n'ont pû remplacer le rétroprojecteur, celui-ci reste un outil privilégié.

Au départ, les formateurs du C.U.E.E.P. fabriquaient ou utilisaient des documents spécifiques à des situations données. Ces documents étaient assez sophistiqués : couleurs, rabats, parties mobiles etc...

Citons :

- la règle à calcul transparente,
- le cercle trigonométrique,
- le tableau de Karnaugh avec rabat de couleurs et superposition de cartes perforées pré-remplies,
- le traitement graphique d'inéquations pour introduire la programmation linéaire.

Leur utilisation impliquant des démarches trop magistrales fut très rapidement abandonnée, il n'y avait pas adéquation entre ce style de documents et la pédagogie active souhaitée par le Département Mathématiques. Par contre, d'autres pistes d'utilisation du rétroprojecteur se révélèrent parfaitement adaptées.

1-2 - L'UTILISATION DE SUPPORTS VIDEO PROJETES SUR LE TABLEAU

Dans la méthode globale : situation -> support -> modèle, un certain nombre de **supports standard** intervenant dans de nombreuses situations différentes ont été élaborés et polycopiés en grande quantité, (papier à points, papier quadrillé, papier millimétré, papier fonctionnel, tableaux à simple et à double entrée, arbres, réseau d'opérateurs, matrice, cercle trigonométrique gradué, diagramme...).

Ces supports ont été transférés sur rétroprojecteur par simple photocopie. Il s'agit donc de supports vides en noir sans couleur ni rabats. Les formés choisissent avec l'aide du formateur les supports les mieux adaptés à la situation et reportent sur ces supports les informations pertinentes.

Ces mêmes supports projetés sur "tableau noir" sont remplis par le groupe de façon dynamique au fur et à mesure des découvertes des sous-groupes ou lors des synthèses. Contrairement au support "tout fait" par le formateur, une grande part d'initiative est laissée aux formés, la prise en compte de la diversité des propositions (qu'elles s'avèrent bonnes ou mauvaises), l'élaboration collective de la solution sont autant d'attitudes qui s'opposent à l'existence d'un document figé pré-établi, incompatible avec une pédagogie interactive. Notons d'ailleurs qu'un travail "interactif" à la craie sur l'image projetée précède souvent le "remplissage" du support rétroprojecteur au **feutre effaçable**, ce remplissage étant d'ailleurs fait la plupart du temps par un élève "hors rétroprojection".

Illustrons ceci par un exemple :

Le problème est le suivant : le prix de l'essence ne fait qu'augmenter, la consommation ne fait que diminuer

F 422

C.U.E.E.P. LILLE
Octobre 80

PRIX AUX 100 KILOMÈTRES

Le prix de l'essence ?
Il ne fait qu'augmenter !
Voyez un peu :

Année	Prix du litre
68	1 F F
72	1,30
74	2,20
76	2,60
78	3
80	3,40

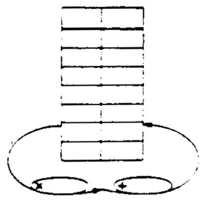
La consommation d'une voiture "petite bourgeoisie" ?
Elle ne fait que descendre !
Voyez un peu :

Année	Consommation aux 100 km
50	17,6 litres
60	14,4
70	[illegible]
80	[illegible]

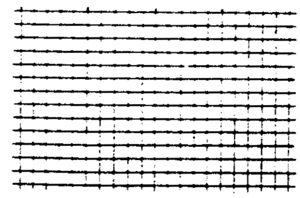
Comment évolue le prix aux 100 kilomètres ?

Année	Prix d'un litre	Nombre de litres pour 100 km	Prix pour 100 km
70			
75			
80			
85			
90			
95			
100			

Deux supports vides sont adaptés à cette situation

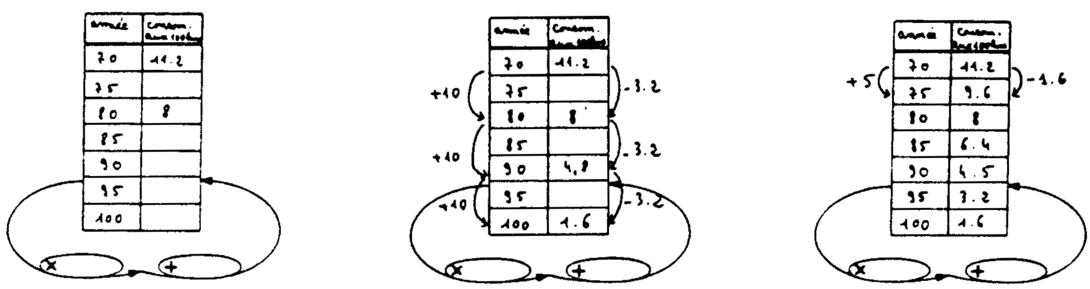


OU

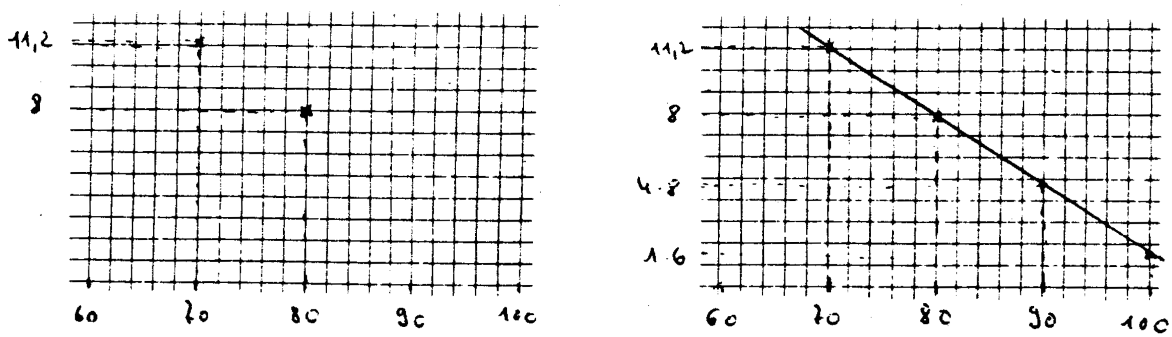


Dans cette mathématisation, **l'usage "interactif" du rétroprojecteur** va constamment intervenir.

Pour compléter le support, les opérateurs "invariants" sont dégagés puis éventuellement les "**milieux**"

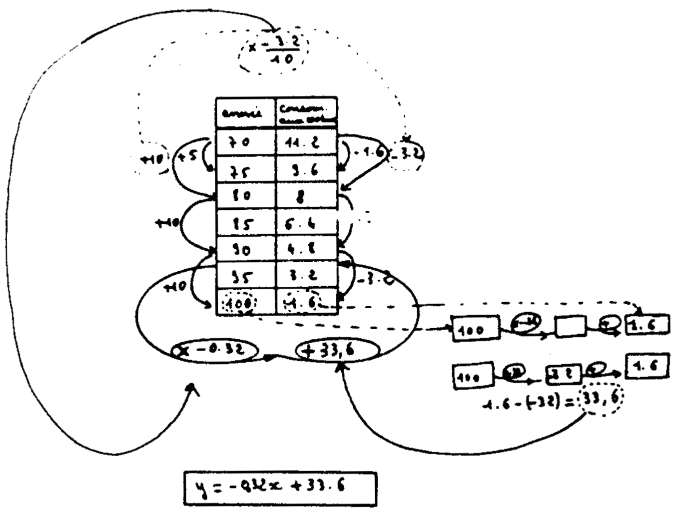


Cette démarche est auto-contrôlée sur le support graphique.



Dans cette recherche les "supports vides" continuent à évoluer et à se remplir de façon dynamique.

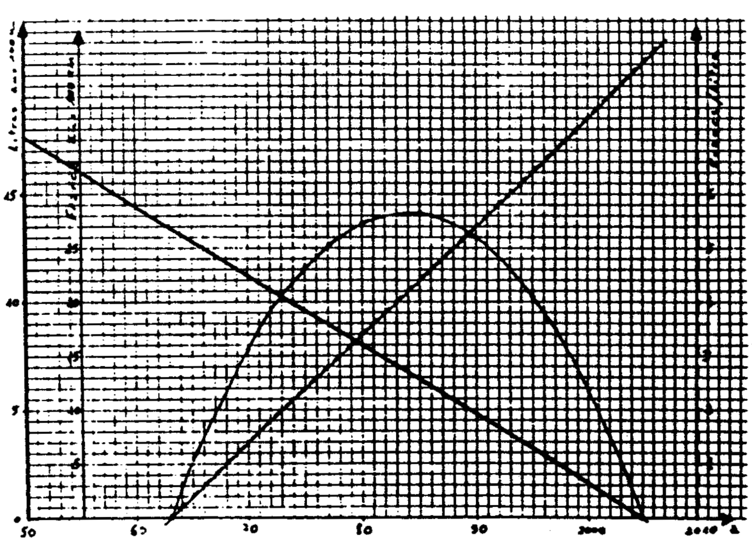
Ce qui donne le "support final" suivant :



Il est évident que seul le remplissage dynamique en interaction avec les élèves présente de l'intérêt, le résultat final étant illisible.

Les résultats numériques sont mis en commun sur le support tableau à double entrée, puis reportés sur un graphique par chaque élève.

On décalque en temps réel le **meilleur tracé** du groupe pour obtenir la visualisation, en final, de la parabole comme "produit de deux droites".



1-3 - DOCUMENTS PRODUITS EN TEMPS REEL : LES ELEVES REALISENT EUX-MEMES LES TRANSPARENTS PENDANT LA SEANCE.

Prenons un exemple d'introduction à la programmation linéaire

C.U.E.E.P. LILLE
Décembre 1975

POINT de FONCTIONNEMENT
d'une ENTREPRISE

F 1036

Une entreprise fabrique des électrophones et des téléviseurs.
Le Comité d'Entreprise a posé à la direction la question suivante :

" Pouvez-vous justifier votre refus d'embaucher du nouveau personnel pour remplacer ceux qui viennent de partir en retraite ? "

REPONSE DU DIRECTEUR :

" C'est un peu compliqué :
Trois contraintes nous empêchent de faire comme nous le voulons :

1° Contrainte MAIN D'OEUVRE :
140 ouvriers travaillent, actuellement, à la fabrication.
En une heure d'horloge, nous disposons de 140 H de main d'oeuvre.
Or il faut, en moyenne, 5 H de main d'oeuvre pour fabriquer un téléviseur
et 10 H de main d'oeuvre pour fabriquer un électrophone

2° Contrainte BUDGET
Les services comptables estiment que ce serait trop de risques de dépasser un budget horaire de 6000 F, pièce et main d'oeuvre
Or les prix de revient, pièce et main d'oeuvre, sont de :
- 400 F pour un poste de télévision
- 300 F pour un électrophone.

3° Contraintes VENTE
Les services commerciaux nous disent :
" Etant donné le marché, si vous faites plus de 10 téléviseurs à l'heure, nous n'arriverons pas à les écouler ;
de même si vous faites plus de 12 électrophones à l'heure.

Notre intérêt est de faire le maximum de bénéfices pour pouvoir
-augmenter notre budget horaire
-faire davantage de publicité
donc, vendre davantage, et, peut-être, je l'espère, par la suite, pouvoir embaucher du nouveau personnel.

Or notre BENEFICE actuel, tous frais payés, est de :
240 F par téléviseur
et 160 F par électrophone

Un expert m'a dit qu'à cause de tout cela, il ne fallait pas ré-embaucher.
J'ai mis une journée à comprendre pourquoi.
Quand vous aurez compris pourquoi, alors, on en discutera !

Il se traitait généralement suivant la même stratégie que l'ensemble précédent, l'enseignant élaborant petit à petit le support adapté à la situation en interaction avec les recherches du groupe.

Il existait comme nous l'avons dit précédemment, un magnifique document avec rabat de couleurs mais les enseignants à juste titre, ne voulaient pas l'utiliser et préféraient construire avec les stagiaires, les supports.

La stratégie utilisée fait intervenir une **interactivité collective** grâce au rétroprojecteur. L'enseignant joue le rôle du patron, il connaît les conditions du marché.

3° Contrainte VENTE
Les services commerciaux nous disent :
"Etant donné le marché, si vous faites plus de 10 téléviseurs à l'heure, nous n'arriverons pas à les écouler ; de même si vous faites plus de 12 électrophones à l'heure.

La classe est partagée en trois. Chaque groupe reçoit une partie de l'information.

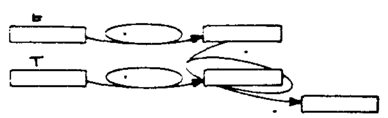
1° Contrainte MAIN D'OEUVRE :
140 ouvriers travaillent actuellement à la fabrication. En une heure d'horloge, nous disposons de 140 H de main d'oeuvre. Or, il faut en moyenne 5 H de main d'oeuvre pour fabriquer un téléviseur et 10 H de main d'oeuvre pour fabriquer un électrophone.

2° Contrainte BUDGET
Les services comptables estiment que ce serait trop de risques de dépasser un budget horaire de 6000 F pièce et main d'oeuvre. Or les prix de revient, pièce et main d'oeuvre, sont de : 400 F pour un poste de télévision et 300 F pour un électrophone.

BENEFICE
Or notre bénéfice actuel, tous frais payés, est de 240 F par téléviseur et 160 F par électrophone. Il est actuellement de 3 200 F.

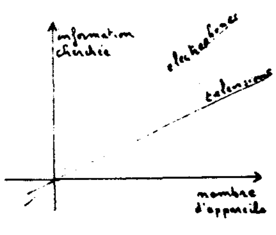
Chaque groupe prépare le conseil d'administration. Il s'agit donc de trouver les supports permettant de répondre aux questions susceptibles d'être posées.

Chacun fait d'abord ses propres essais, en essayant d'exhiber un support qui traduira le mieux sa démarche. Une mise en commun des diverses démarches suit cette première étape et permet de dégager les supports les plus pertinents pour gérer les données du problème.

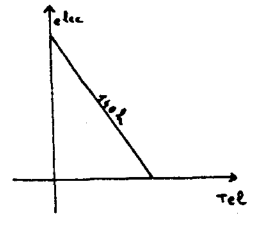


E							
5							
10							
15							
20							
25							
30							
	5	10	15	20	25	30	TV

Le support graphique est généralement utilisé à partir de deux idées :

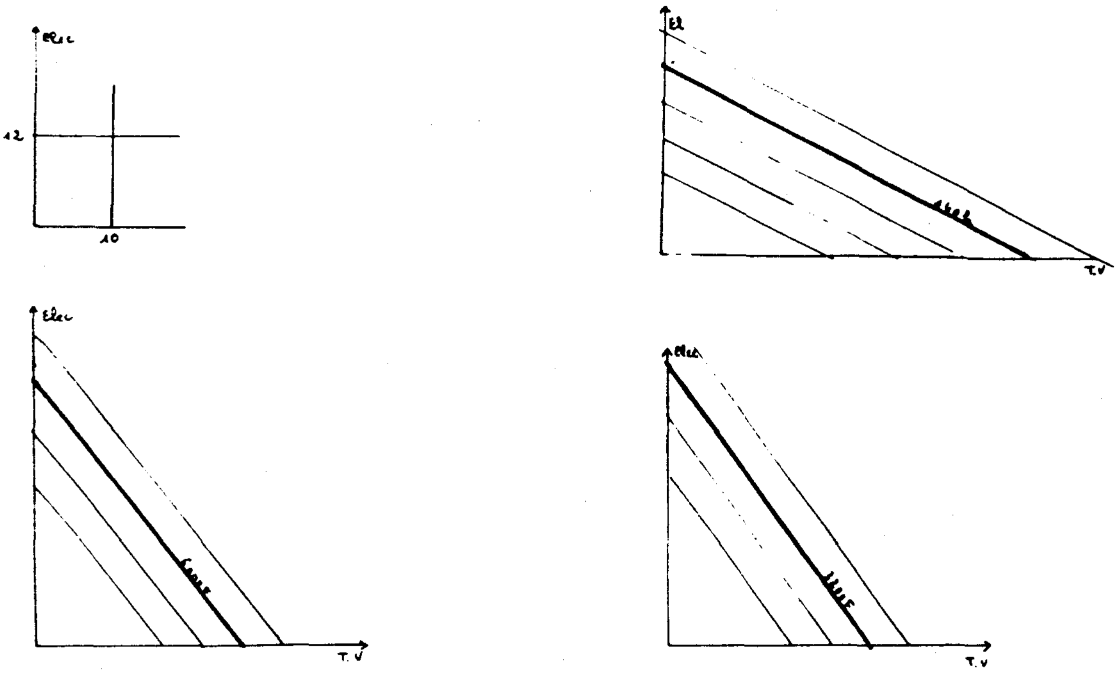


Graphique orienté
représentation de
fonctions



Repérage
représentation
d'un ensemble
de points

La première idée conduit à une impasse, la deuxième se révèle fructueuse. Chaque groupe et l'enseignant établissent alors l'abaque correspondant à sa contrainte et la décalque sur transparent



La superposition dans différents ordres de ces 4 abaques sur papier millimétré transparent, conduit à la solution sans pratiquement d'intervention du formateur.

La concaténation d'images, fabriquées en temps réel par les formés, est le type même de ce que l'on peut appeler l'interactivité collective.

Donnons un autre exemple d'interactivité collective dans l'utilisation du rétroprojecteur : le téléphone algébrique. Ce jeu pédagogique préfigure l'interactivité collective du nanoréseau (échanges d'informations entre postes).

Chaque sous-groupe écrit une **formule algébrique** sur transparent, la passe à son voisin qui la traduit en "français", il passe alors la traduction au groupe suivant qui retraduit en formule jusqu'au retour à l'envoyeur. On analyse alors collectivement sur rétroprojecteur, les erreurs de transmission.

Exemple :

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}}}$$

se traduit par l'inverse de la racine carrée de l'inverse de la somme de carrés de x et de y. Mais parfois cela se déforme en l'inverse de la racine carrée de la somme des inverses des carrés qui s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}}$$

Dans cette activité, le rétroprojecteur permet de visualiser, de comparer, de différencier les différentes formules comme des images globales. A partir de 1980, les ordinateurs comme moyen de production d'image vont prendre le relais et amplifier cet aspect.

2 - LE CHOC DES NOUVELLES IMAGES

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que les outils techniques eux-mêmes n'engendraient pas de nouvelles pratiques pédagogiques, mais étaient amplificateurs des pratiques existantes. Ce n'est pas l'arrivée des ordinateurs comme nouveaux moyens de produire des images qui a été un choc, mais l'appropriation dans le cadre d'une stratégie déterminée de l'utilisation de nouvelles images produites par ces nouveaux moyens.

Nous entendons par nouvelles images produites par ordinateur, des images interactives, paramétrables, reprogrammables en temps réel qui permettent de :

- rendre manipulatoire des concepts et donc de rendre concrètes des "choses abstraites",

- renvoyer la pensée de l'apprenant sous une forme appropriée.

L'appropriation dans le cadre de la stratégie de mathématisation de nouvelles images a pu être réalisée grâce à la conjonction de plusieurs faits :

- La demande du public : jusqu'en 80, la plupart des demandes ESEU étaient formulées par un public ayant déjà suivi une partie du second cycle (niveau IV), par la suite, l'ESEU est devenu une véritable nouvelle formation pour un public venant du niveau V.

- La volonté du Département Mathématiques, pour répondre à la demande, de mettre en place une nouvelle formation intégrant les nouveaux outils disponibles.

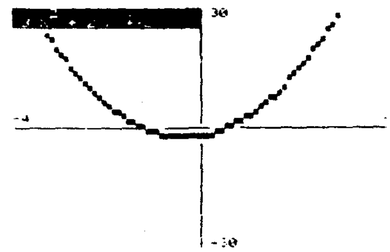
- Le matériel : le Département Mathématiques a hérité en 80, d'un stock d'ordinateurs démodés venant du Département Informatique.

- Le désir individuel et volontariste de Philippe Loosfelt, permanent du Département, d'avoir des outils graphiques adaptés à l'enseignement.

Il s'agit bien d'une conjonction dans le sens où chacun des aspects a pu trouver un écho amplificateur dans les autres aspects pour aboutir à une méthode globale d'enseignement (cf. Chap IV et V). Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux apports spécifiques des nouvelles images. L'aspect global de l'intégration des images dans la stratégie d'enseignement sera abordé dans les monographies. Pour préciser ce que nous entendons par nouvelles images, pour dégager les différents apports, nous allons détailler le statut des images dans trois logiciels créés pour le public cité ci-dessus.

2-1 - LES IMAGES DE "PARABOLE"

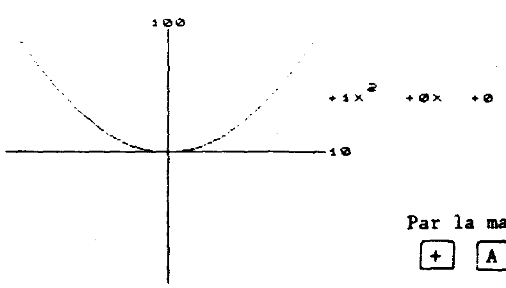
Regardons une copie-écran du logiciel "Parabole" version 82 sur CBM semi-graphique



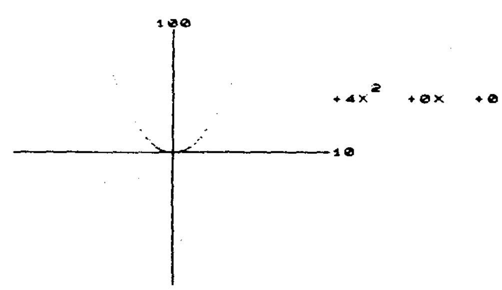
Cette image n'est pas belle, il faut presque être convaincu que c'est une parabole pour l'y voir. Pourtant, cette image a séduit bien des formateurs et des formés. Les raisons ne sont pas à chercher dans la beauté de l'image, même si avec la génération des ordinateurs graphiques, les réalisateurs de logiciels ont cherché à améliorer au maximum la qualité des images. Les raisons sont à chercher dans ce qu'il est possible de faire avec cette image.

Dans une première partie, le logiciel nous fournit une image liant formule algébrique et représentation graphique reparamétrable en temps réel : le logiciel étant écrit en langage machine, la formule et la courbe s'affichent globalement et simultanément. La courbe ne se trace pas point par point, elle flasche à l'écran (les images copies-écran sont celles de la version 84 sur Nanoréseau) [24].

La parabole devient donc un **objet manipulable et transformable** à partir d'un jeu très réduit **d'actions élémentaires de base**. L'utilisateur peut agir ou manipuler simultanément les deux représentations en appuyant sur les touches dédiées A, B, C, +, - (A, B, C représentant les paramètres du modèle $ax^2 + bx + c$, + pour augmenter, - pour diminuer les paramètres).



Par la manipulation
+ A A A
devient



Par l'intermédiaire d'une simple touche, l'action sur un des paramètres établit, en temps réel la connexion entre la formule et la courbe correspondante. L'utilisateur peut alors à sa convenance, **explorer, manipuler, agir pour comprendre**, c'est lui qui commande l'action sur l'image.

La manipulation des objets paraboles favorise la formulation d'hypothèses : "si j'augmente A, la courbe va se déformer comme ceci, si je diminue B, elle va se déplacer ...". Les images renvoyées en temps réel permettent de tester immédiatement la pertinence de ces hypothèses.

La manipulation des images **rend** en quelque sorte **expérimentable une matière théorique** : les hypothèses émises sont soumises à l'expérimentation, c'est l'expérimentation qui décidera de la justesse de l'hypothèse.

La manipulation des images représentant des **objets abstraits**, rend ces **objets concrets.** Le mot concret signifiant ici qui a pris un sens, un objet concret est un objet mathématique dont on s'est fait une représentation, qui pourra devenir un outil utilisable pour construire un nouveau savoir. "*Le concret, c'est l'abstrait rendu familier par l'usage*" a écrit P. Langevin.

Grâce à la manipulation, l'univers des paraboles est explorable, expérimentable, chaque constituant étant un objet concret. La succession des images reprogrammables donne l'idée de **l'évolution de l'image** et même si cette évolution n'est pas continue elle **favorise l'activité déductive**, permet de comprendre les règles de fonctionnement du modèle.

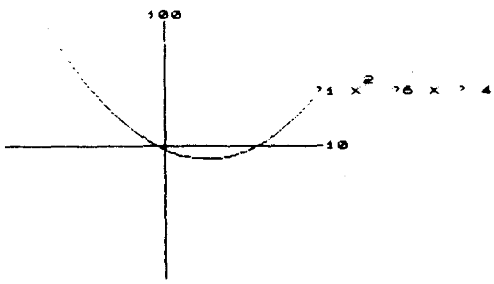
Grâce à la simplicité du maniement, les élèves peuvent accéder rapidement à l'"univers des paraboles" sans avoir au préalable franchi toutes les étapes calculatoires. Comme il est dit au chapitre V, l'institutionnalisation viendra après.

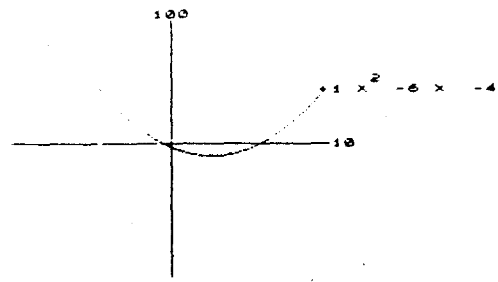
Dans ce logiciel, les images produites sont des paraboles. C'est un modèle mathématique qui est mis en scène. Ce ne sont pas des images copies du réel qui figureraient de près ou de loin des situations-paraboles (miroirs, portée d'un canon, ...) porteuse de l'approche fonctionnelle.

L'idée de variable (expression d'une quantité en fonction d'une autre) n'est pas présente. La lettre X qui figure dans la formule algébrique ne sert que de référence et n'a aucun rôle actif. En revanche, les paramètres A, B, C ont eux, un statut de variable qui permet de se promener dans l'"univers des paraboles". On court-circuite la lettre X (en tant que variable) pour opérer sur un objet tridimensionnel qui mathématiquement est beaucoup plus compliqué qu'une simple parabole $ax^2 + bx + c$: formellement l'opération peut se décrire par une correspondance entre un espace à trois dimensions et l'ensemble des représentations graphiques des paraboles. Cette opération formelle se résume de fait à l'emploi de cinq touches A, B, C, +, -

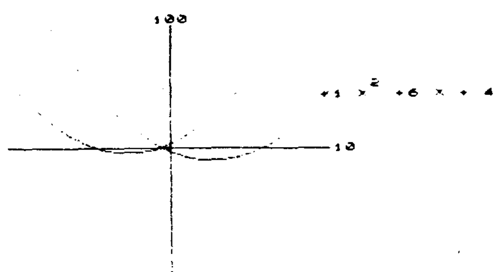
La conception de l'interactivité de cette première partie du logiciel est **d'agir pour comprendre**, l'objectif étant l'appropriation du modèle Parabole. La conception de l'interactivité de la deuxième partie du logiciel est différente. Il s'agit plus de **comprendre pour agir**, le but étant de mettre en oeuvre, de tester de manière active un nouveau savoir pour le structurer, le "mettre en place".

Dans une deuxième partie, les mêmes outils graphiques vont servir à animer un **dialogue interactif** basé sur le concept de réversibilité. L'image est composée d'une parabole et de la formule algébrique correspondante amputée des signes algébriques + ou -. Avec les touches + ou - , il faut donner les signes pour que la formule et la courbe se correspondent.

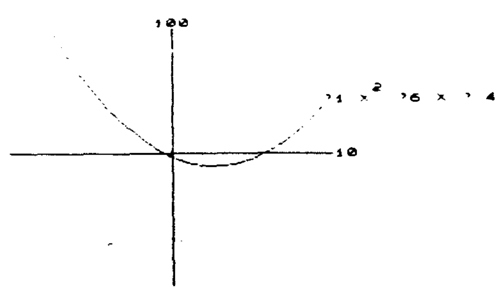




En cas d'erreur, la parabole correspondant à la formule reconstituée est affichée sans que la parabole initiale soit effacée.



La première image est restituée : parabole initiale + formule à trous.

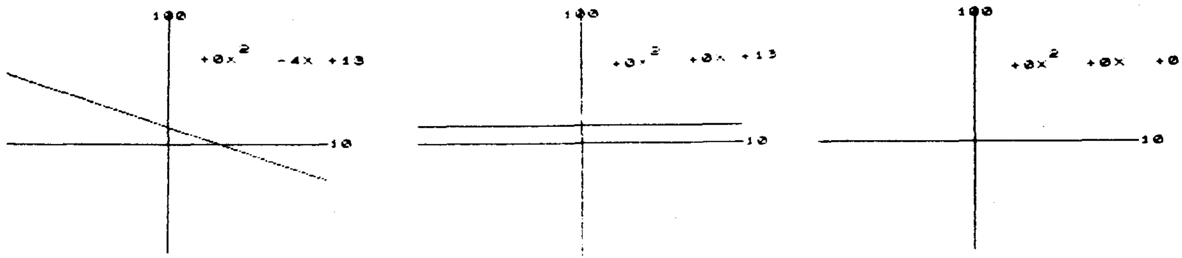


S'il n'y a pas correspondance entre les deux courbes, l'apprenant devra chercher, déduire à l'aide de ses propres images mentales acquises en quoi les deux paraboles diffèrent. Il pourra alors tester la justesse de son raisonnement déductif en proposant sa nouvelle réponse.

Ces problèmes interactifs s'effectuent jusqu'à assimilation complète ou structuration du nouveau savoir.

Avec ce processus interactif, il n'y a pas d'erreurs-sanctions. L'erreur a statut d'essai, le renvoi par une image de la proposition faite et sa confrontation au but est source d'un nouvel essai et non d'un échec. L'erreur s'intègre à une activité déductive, elle-même constructive du savoir. Cette dépénalisation de l'erreur est importante car puisqu'il y a possibilité d'essai sans censure, il n'y a pas de "blancs" de "je ne sais pas", l'utilisateur propose toujours quelque chose, il n'a pas peur, il verra de toute façon l'effet de sa proposition et sera amené à comprendre la signification de sa réponse même faite au hasard dans un premier temps.

En cours de manipulation, des images parasites qui apparemment n'appartiennent pas à l'univers des paraboles apparaissent à l'écran. Par exemple :



Ces images sont déroutantes ; on ne sait plus s'il s'agit de paraboles, si les droites sont un cas particulier des paraboles, si "rien" est aussi un cas particulier de parabole.

Nous ne nous intéresserons pas ici à la réponse à cette question, en revanche, nous nous intéresserons à ce type d'images que nous appellerons **images paradoxes**. Ces images paradoxes heurtent le "bon sens", les certitudes établies (une parabole c'est toujours comme ça ∩ ou comme ça ∪). Ces images destabilisent les connaissances acquises et apportent avec elles des interrogations. Les réponses à ces interrogations ne sont pas contenues dans l'image elle-même, mais nécessitent un apport extérieur. Dans notre cas, l'explication est relativement simple et rapide mais l'intervention de l'enseignant est souvent nécessaire pour restabiliser. Dans d'autres cas, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, les images paradoxales posent des problèmes beaucoup plus délicats.

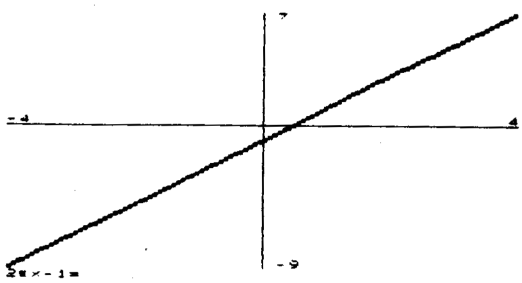
En plus du rôle d'exploration, l'expérimentation du modèle mathématique, ces nouvelles images facilitent la fabrication par les apprenants eux-mêmes de leur propre système de représentation mentale.

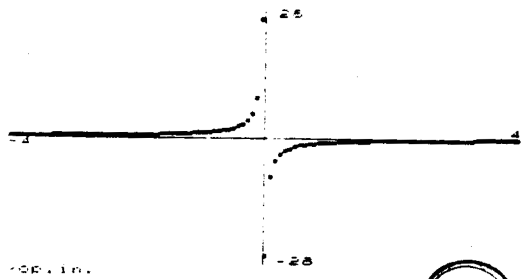
Ce type d'images, que nous avons qualifié de nouvelles images, parce qu'elles représentent des objets mathématiques sur lesquels on peut opérer, facilitent l'approche et la compréhension de la théorie : la compréhension visuelle d'un théorème comme celui du signe du trinôme permet de passer à la compréhension de l'énoncé formel. Nous détaillerons cet exemple à la fin du chapitre VIII. Ce sont les images qui sont mémorisées, non l'énoncé écrit, c'est un processus économique.

C'est certainement pour cette raison que le logiciel Parabole séduit bon nombre de formateurs et de formés. Le temps apparemment "perdu" dans les activités manipulatoires étant grandement rattrapé dans le passage à la théorie et dans les réinvestissements.

2-2 - Les images de "calcourb"

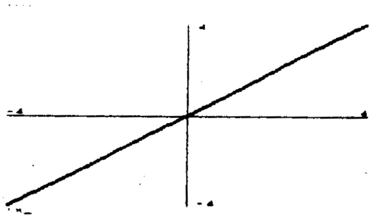
Il s'agit d'une calculette de courbes [26] au sens où l'utilisateur opère au clavier de l'ordinateur comme il opère sur les touches de la calculette scientifique. Au lieu d'afficher un seul nombre, l'ordinateur affiche globalement et simultanément la courbe et le programme-calcul correspondant :

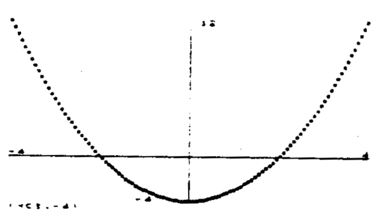


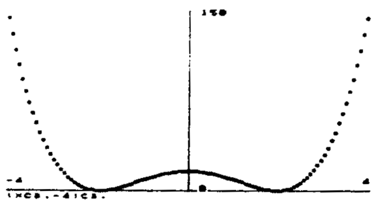


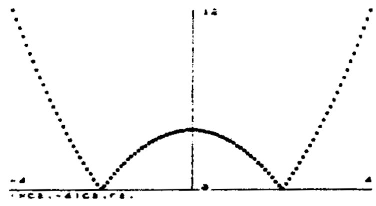
Ici, les objets manipulables sont des courbes sur lesquelles on peut opérer. Les opérations possibles sont celles de la calculette scientifique auxquelles il a été ajouté la "dérivation" et l'"intégration" (nous mettons des guillemets à ces mots puisqu'il s'agit de différence relative et de somme approchée), et quelques fonctions spécifiques du langage basic.

Ce ne sont pas des fonctions de la variable x qui sont représentées. La lettre x désigne l'inconnue dans la formule algébrique qui est écrite sous la forme d'un programme-calcul. La courbe correspondant à chaque étape du programme-calcul est immédiatement affichée comme les résultats numériques sur une calculette scientifique.









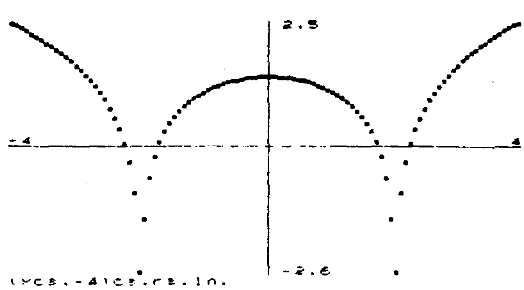
Avec ces images, l'élève a à sa portée tout l'univers des courbes qu'il construit, qu'il peut observer et dans lequel il peut évoluer sans difficulté. De plus l'utilisateur opère directement sur ces objets globaux :

- la somme de deux droites est une droite
- le produit de deux droites n'est pas une droite (... c'est une parabole)
- le quotient de deux droites n'est pas une droite, n'est pas une parabole (... c'est une hyperbole).
- etc...

La manipulation, l'expérimentation précèdent toujours la verbalisation. L'élève a envie d'essayer, et il peut le faire, d'autres opérations pour voir le résultat. La facilité d'utilisation transforme l'élève en explorateur : sans être identiques, certaines courbes se ressemblent, peut-on définir des familles ? Sur quels critères définir ces familles ?

A partir de son exploration de cette "algèbre de courbes", l'élève est amené à se poser des problèmes de modélisation et à s'intéresser aux règles de fonctionnement de ces modèles.

Le fait que l'on s'intéresse aux courbes d'un point de vue global déclenche toute une activité de reconnaissance de forme, de reconnaissance de modèles, de "contrôle qualité" : est-ce que cette courbe :



peut avoir pour formule : ln $|x^2 - 4|$? Oui... parce que ou non... parce que...

Ces activités de reconnaissance, de rejet, de discrimination sur les images posent des questions très riches pour l'enseignement de l'analyse.

Toutes ces activités ne seraient pas possibles sans un logiciel du type Calculette de Courbes. D'une part sans outil adapté, il n'est pas envisageable à des niveaux en-dessous du baccalauréat (et même au-dessus) de tracer plusieurs courbes en une heure. D'autre part, avec des traceurs de fonctions, il est possible d'avoir beaucoup de représentations graphiques très rapidement, mais les images sont indépendantes l'une de l'autre. Le traceur de fonctions ne permet pas d'opérer sur les images elles-mêmes.

2-3 LES IMAGES DE "GESTION DE FORMULES NUMERIQUES"

L'idée générale de ce Gestionnaire de Formules Numériques est d'offrir un jeu de cible pour décoder et recoder une formule cible [25] [18].

Les images sont des formules numériques tirées au hasard par l'ordinateur. L'utilisateur doit reconstituer la formule :

$$1 - \frac{(2 + 3) \times 5}{7}$$

A=

POUR VALIDER ENTREE   POUR CORRIGER EFF

Ce logiciel est en quelque sorte un **interprète**, l'utilisateur lui envoie des messages : A = 2 + 3 ; B = A x 5 ; C = B/7. Chaque message est traduit en écriture standard algébrique.

$$1 - \frac{(2 + 3) \times 5}{7}$$

$$\frac{(2 + 3) \times 5}{7}$$

A=2+3   B=Ax5   C=B/7   D=

POUR VALIDER ENTREE   POUR CORRIGER EFF

Dans ce logiciel, les objets mathématiques mis en images sont des formules numériques. L'utilisateur opère dans l'"univers des formules".

L'image de départ est une formule globale, c'est-à-dire la copie exacte des formules écrites traditionnellement. L'utilisateur n'agit pas directement sur la formule de départ, mais la construit par des formules élémentaires (une seule opération). Dans l'écriture 2 + 3, ce n'est ni le 2 ni le 3 ni le + qui sont intéressants, c'est l'ensemble 2 + 3 qui deviendra d'ailleurs une entité A sur laquelle on opère A x 5 qui devient une entité B, etc...

L'utilisateur agit "globalement par morceaux" pour reconstituer l'image de départ. Les images successives sont les images des transformations de la formule.

L'action se passe dans l'univers des formules. Par la manipulation, l'expérimentation, l'élève va découvrir ce qu'est cet univers des formules, ses règles, son fonctionnement.

Une formule est un objet traditionnellement écrit, figé, fabriqué par nombre de règles d'écriture implicites.

Par exemple dans :

$$\frac{2 + 3 \times 5 - \frac{4}{7}}{6}$$

Il faut lire :

- que c'est 3 qui est multiplié par 5
- que 7 divise 4
- que 6 divise tout le numérateur.

La non-connaissance de ces règles amène de fait à confondre

$$\frac{2 + 3 \times 5 - \frac{4}{7}}{6} \quad \text{avec} \quad \frac{(2 + 3)\ 5 - \frac{4}{7}}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{(2 + 3)\ 5 - 4}{7}}{6}$$

ou encore $\frac{2}{6} + 3 \times 5 - \frac{4}{7}$ ou ...

La réalisation des logiciels de gestion de formules nous a confronté à l'extrême complexité des règles d'écriture de ces formules. Complexité dont nous étions conscients au départ puisque le scénario était conçu pour répondre à ce problème, mais dont nous sous-estimions l'ampleur. L'étude et la réalisation d'une calculette formelle a fait l'objet du DEA de Jean-Noël GERS [52].

Toutes ces règles, soit ne sont jamais explicitées, soit sont verbalisées et deviennent une litanie à savoir par coeur pour avoir une bonne note à l'interrogation, mais sans les comprendre.

En revanche, ces images permettent de **voir** fonctionner les règles sans les verbaliser. L'important est de savoir **lire**, décoder et recoder une formule, pas de connaître les règles d'écriture par coeur.

Grâce à ces images qui visualisent les états successifs de construction, qui permettent de confronter l'image construite avec l'image initiale, de corriger si besoin, la lecture de formules se fait par une méthode globale. C'est bien par les images que le message passe. Cela permet aux élèves de se constituer des images mentales d'objets mathématiques tout à fait abstraits qui n'avaient pas au départ vocation à une représentation imagée.

3 - LES MODIFICATIONS SPECIFIQUES LIEES AUX IMAGES

La description des images de ces logiciels a fait apparaître des traits caractéristiques essentiels quant à la nature même des images, à leur interactivité et à leur insertion dans une méthode d'enseignement. L'utilisation de ces images induit des modifications sur la matière elle-même comme objet d'enseignement.

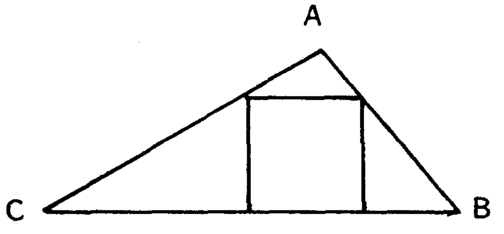
3-1 - LES NOUVELLES IMAGES PERMETTENT DE SE CREER DES IMAGES D'OBJETS MATHEMATIQUES PRIS GLOBALEMENT EN TANT QU'OBJET SUR LEQUEL ON PEUT OPERER

Nous avons vu différents exemples de tels objets. Nous pouvons généraliser en disant que quels que soient les objets mathématiques l'ordinateur permet de créer un univers lié à l'objet : opérer sur l'objet par des manipulations structurantes.

Ces activités manipulatoires rendent concrets des objets mathématiques abstraits ou formels et facilitent l'appropriation des concepts et théories sous-jacents.

De plus, lors des manipulations, c'est souvent un véritable protocole expérimental qui est mis en place. Celui-ci facilite la verbalisation d'hypothèses de la part des élèves eux-mêmes. Ces hypothèses peuvent être vérifiées ou infirmées immédiatement par les images renvoyées. A partir de là, s'enclenche un processus de démonstration ou de vérification théorique.

C'est le cas des jeux de cible construits sur des images interactives par l'équipe du CREEM-IREM [15]. Par exemple, à partir de la situation-problème : construire un carré dans un triangle :



Ils développent une stratégie de démonstration basée sur des conjectures obtenues par des manipulations structurantes et la mise en place d'un protocole expérimental.

3-2 - LES IMAGES ONT MODIFIE LA PLACE ET LE ROLE DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

Les nouveaux moyens de production d'images rendent aux représentations graphiques leur véritable rôle d'outils de découverte et de construction d'un savoir mathématique.

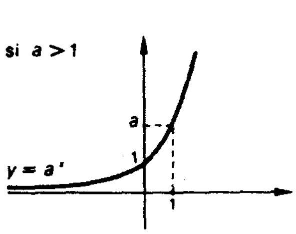
Nous pouvons affirmer schématiquement qu'avant l'arrivée massive des outils de représentations graphiques, la **théorie précédait les images**. En effet, il était matériellement impossible de tracer suffisamment de courbes pour en avoir un échantillon représentatif et ainsi pouvoir en tirer de façon expérimentale des conclusions.

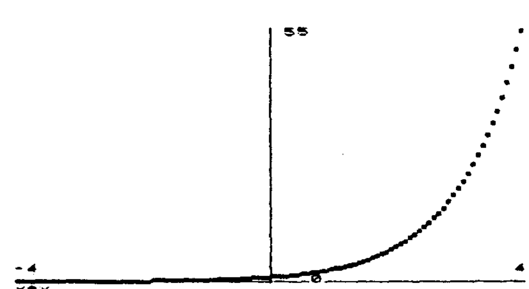
Dans cette situation, le schéma classique pour tracer une courbe passe d'abord par l'étude de la fonction : domaine de définition, calcul de la dérivée, tableau de variations, limites, etc... points particuliers. La lecture de cette énumération montre que les prérequis théoriques à un tracé de courbe sont très importants.

De plus, le tracé de la courbe consiste alors en une interprétation des résultats obtenus à l'aide des outils théoriques. Interprétation qui comprend également le bon choix des échelles. Ce bon choix - s'il n'est pas donné - nécessite d'avoir préalablement une représentation mentale du tracé possible.

Dans cette problématique, la question se pose alors de savoir pourquoi tracer des courbes ? Est-ce pour que les élèves se fassent une représentation imagée des différents concepts : continuité, limite, croissance, etc. Dans ce cas, il faut que l'élève sache se servir des outils théoriques avant de s'en faire une représentation imagée. Finalement si l'élève sait tracer une courbe, c'est qu'il a tout compris. La phase d'apprentissage expérimentation n'existe pas, il n'y a qu'une phase d'évaluation. De plus, les courbes obtenues sont des courbes "théoriques", "aseptisées". Nous entendons par là une courbe tracée pour lire toutes les informations issues de la théorie : discontinuité, extrema, limites, inflexion, ... les échelles étant choisies à priori en fonction des résultats théoriques.

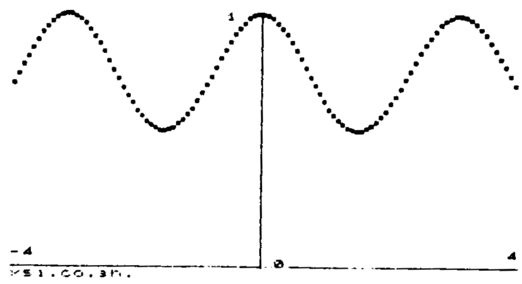
Nous opposerons ces images "aseptisées" aux images expérimentales, l'image expérimentale étant obtenue sans à priori sans étude ou même connaissance préalable. Donnons comme exemple une courbe exponentielle :

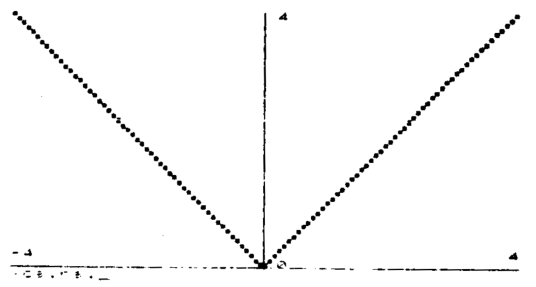


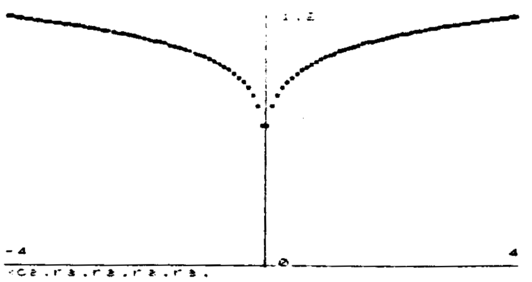


Les nouveaux moyens de production d'images sur lesquelles on peut opérer en temps réel, permettent une approche expérimentale et opératoire des représentations graphiques et au-delà de l'analyse.

Les images-représentations graphiques, qu'elles soient obtenues avec la calculette de courbes ou avec un traceur de fonctions, forment un univers à explorer. Qu'y découvre-t-on? Quantités de choses diverses, au départ difficiles à cerner, à catégorier.

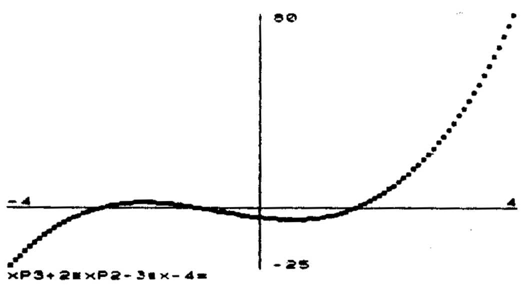


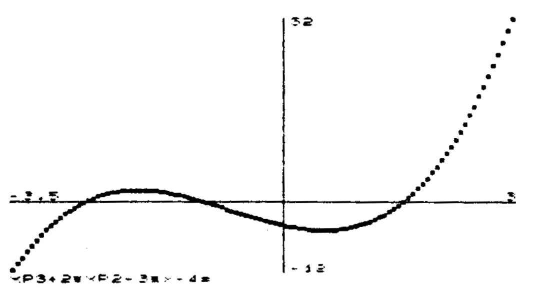


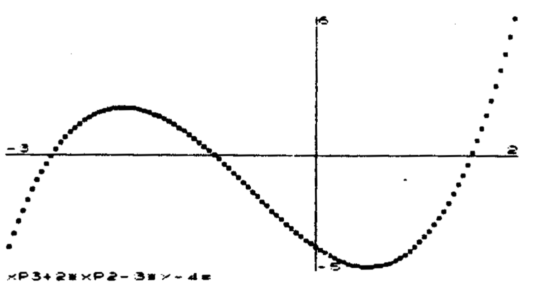


L'expérimentation, la manipulation en changeant les échelles, les paramètres, les formules donnent des idées d'organisation de cet univers.

Par exemple : Quelles sont les caractéristiques des courbes du 3ème degré ? Zéros, extrêma, inflexion, symétrie, croissance, ... ? Pour arriver à formuler des hypothèses, il est nécessaire de voir bon nombre de cas différents, faire varier les paramètres, faire des zooms.







Peut-on conclure ?

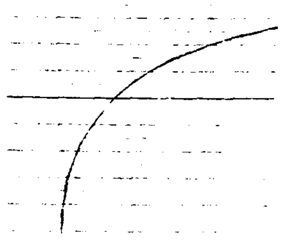
Les conclusions expérimentales sont limitées, les images sont-elles "justes" ? La lecture est-elle bonne ? ... On a besoin de rigueur.

L'interprétation des images nécessite des outils théoriques. La théorie pourra alors s'appuyer sur des images mentales pour être comprise. L'écriture formelle aura un sens.

De plus, ces images mentales pourront être réutilisées par la suite.

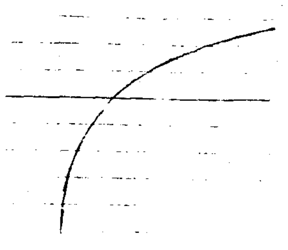
MODELE EXPERIMENTAL ET SON INVERSE
- Compléter le graphe standard pour qu'il corresponde à chacune des courbes suivantes
1) Orienter l'axe existant ; 3) Choisir la variable ; 3) Placer l'autre axe ; 4) Le nommer ; 5) L'orienter ; 6) Graduer les axes.
- Donner l'expression de la fonction réciproque (x = g (y))
EQUATION DES COURBES :

A : y = ln (x - 3)



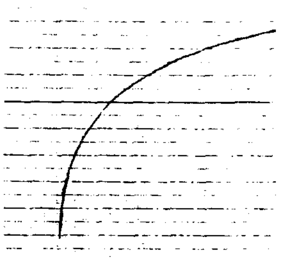
x =

B : y = ln (-2x + 1)



x =

C : y = e^{2x-1}



x =

Document d'évaluation MA 11.

La manipulation des images, l'expérimentation modifie la place et le rôle de la théorie.

3-3 - CONTRIBUTION DES NOUVELLES IMAGES A LA MODIFICATION DU STATUT DE L'ERREUR DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Dans la pratique traditionnelle, le traitement de l'erreur se traduit la plupart du temps par un **discours sur l'erreur**. Ce discours porte souvent sur la bonne réponse plus que sur l'erreur elle-même.

Le niveau de langue rend ce discours incompréhensible pour les élèves les plus faibles.

Par exemple l'erreur : 2 + 3 x 4 = 20 se traduit par "Tu t'es trompé dans la hiérarchie des opérations, la multiplication a priorité sur l'addition, il fallait trouver : 2 + 3 x 4 = 14".

Les premiers logiciels écrits sur des ordinateurs non graphiques ont souvent péché par excès de verbalisation. La longueur et le niveau de langue des messages de ces tutoriels trop bavards les rendent difficilement utilisables et peu efficaces avec des élèves en difficulté.

Le logiciel "Parabole" a montré que grâce aux images interactives, un logiciel peut être à la fois très peu bavard et très riche. Une bonne image vaut mieux qu'un long discours. **la verbalisation est remplacée par la visualisation.**

Les nouvelles images interactives permettent de court-circuiter les axes de verbalisation dans le traitement des erreurs, elles recentrent le traitement de l'erreur sur la réponse de l'élève et non sur la seule bonne réponse.

Dans le logiciel GFN, pour le calcul 2 + 3 x 4 face à une erreur de traitement du type A = 2 + 3   B = A x 4, l'image (2 + 3) x 4 de la formule correspondant à sa réponse est renvoyée à l'élève. L'élève confronte sans verbalisation cet image à l'image cible 2 + 3 x 4 qui est elle associée à la réponse : A = 3 x 4   B = 2 + A

La plupart des logiciels développés par le Département Mathématiques du C.U.E.E.P., privilégient ce type de traitement de l'erreur.

Plutôt qu'un discours du type erreur de priorité opératoire, erreur de signe, faux, ..., toutes les fois où cela est possible, l'ordinateur renvoie une image qui traduit la signification de la réponse de l'élève et ce dans le contexte de la question.

Les nouvelles images recentrent le traitement de l'erreur sur la réponse,l'erreur-sanction est remplacée par une erreur-essai

L'erreur est dépénalisée et l'élève traite lui-même, grâce au renvoi de "sa pensée" son erreur. Cette activité renvoie au concept **d'auto-apprentissage**. En effet, grâce aux images interactives, l'utilisateur évalue l'effet de ses actes et dans certains cas, les erreurs-essais sont nécessaires pour mettre au point une méthode permettant d'atteindre l'objectif.

Les nouvelles images ont surtout été utilisées pour créer des logiciels outils, des simulations, des "interprètes", des "micro-mondes", mais même dans le domaine plus classique des tutoriels leur utilisation a permis d'éviter dans les messages d'aide, les excès de verbalisation et de résoudre le problème des "niveaux de langue" d'où un autre apport des nouvelles images :

Dans les tutoriels, les messages d'aide type "page de livre" sont remplacés par des animations dynamiques".

Le message d'aide du logiciel Trigo illustre tout à fait cet aspect. Le logiciel a pour objectif d'automatiser le repérage des opérateurs trigonométriques dans un triangle rectangle.

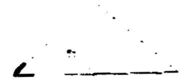
Un aide-mémoire rappelle la signification des touches actives :

CODE DES TOUCHES

* MULTIPLIER	S SINUS
/ DIVISER	C COSINUS
● AIDE	T TANGENTE

POUR CONTINUER APPUYER ENTREE

Un triangle rectangle apparaît à l'écran et une flèche clignotante indique quel est l'opérateur trigonométrique demandé. L'angle connu est coloré en bleu.



On répond en choisissant le sens de l'opérateur trigonométrique :

[*] Multiplier par ou [/] diviser par

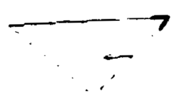
Puis sa nature :

[S] Sinus [C] Cosinus [T] Tangente

En cas de mauvaise réponse par exemple ici on tape * T

La figure correspondant à la proposition apparaît alors en rouge puis on revient à la même question :

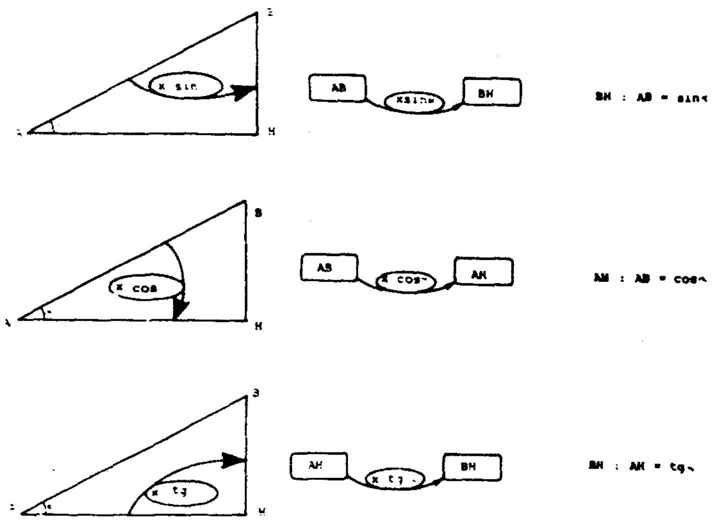
*TANGENTE



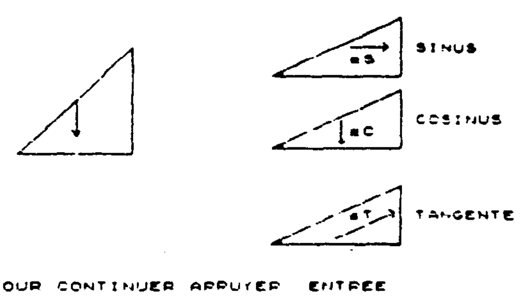
Le renvoi "en situation" à l'opérateur de l'image correspondant à sa réponse montre le rôle des nouvelles images dans l'auto-apprentissage d'une notion.

Le message d'aide de "Trigo" montre comment des messages d'aide dynamique peuvent suggérer une méthode. En effet, le message d'aide permet ici de se fabriquer une représentation mentale de la méthode à utiliser pour réussir l'exercice : la méthode consistant à remettre mentalement le triangle dans la position standard et à utiliser l'aide-mémoire papier ou une représentation mentale de cet aide-mémoire.

LA TRIGONOMETRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE
DEFINITION :
Sinus, cosinus, tangente : opérateur ou extrémité : origine



On peut à tout moment demander un message d'aide. Le formulaire Trigo apparaît alors et une animation déplace le triangle proposé pour l'amener dans la position du formulaire : rotation du triangle suivie éventuellement d'une symétrie.



Le message d'aide est interactif : l'image de départ est celle du triangle pour lequel l'aide a été demandée et on revient ensuite à cette même image, il y a visualisation sans verbalisation, la verbalisation interviendra quand le savoir-faire ancré sur des "images mentales" sera acquis.

3-4 - UNE NOUVELLE PISTE : LES NOUVELLES IMAGES AU SERVICE DE L'INTERACTIVITE COLLECTIVE

Au moment où nous écrivons ce texte, il s'agit encore d'une nouvelle piste. Nous pouvons actuellement affirmer que les fonctionnalités conviviales du nanoréseau en lien avec les nouvelles images étendent le concept d'interactivité entre un apprenant et une image à une interactivité entre un groupe d'apprenants d'un ensemble d'images, on pourra parler dans ce cas **d'interactivité collective** [98]. Les effets sur les méthodes d'animation ne sont plus à prouver (extension du cours/T.P. créativité collective, traitement des erreurs par le groupe, etc...) nous pensons que cela aura des répercussions sur la matière elle-même, mais nous n'avons pas encore capitalisé et analysé suffisamment ces modifications pour les décrire ici.

Précisons par quelques exemples, des pistes ouvertes par cette interactivité collective.

Exemple 1 : A partir de la même série statistique, grâce à un logiciel approprié, chaque élève crée un histogramme correspondant à une répartition des données différentes. La mise en commun sur le poste grand écran de toutes les images de la classe, permet de visualiser l'effet d'un changement de classes sur l'histogramme.

Exemple 2 : A partir d'un logiciel permettant d'animer une droite, on crée une interaction collective pour introduire la méthode des moindres carrés. Chaque élève essaie d'ajuster graphiquement sa droite au même nuage de points. A tout moment, le "poste maître" renvoie l'image du meilleur ajustement de la classe.

Exemple 3 : Archivage électronique d'une banque d'exemples et de contre-exemples. A tout moment, l'enseignant peut prélever une image d'un écran de la salle pour l'archiver sur la disquette, cette image peut lors des synthèses, être exploitée, soit sur le poste maître (grand écran) soit renvoyé à chaque poste.

CHAPITRE VIII

SYNERGIE ENTRE LE NUMERIQUE ET LE GRAPHIQUE

Nous avons analysé séparément le choc des nouveaux outils de calcul et le choc des nouvelles images. Or, il apparaît que, souvent les idées forces sous-jacentes sont les mêmes. Ces deux outils agissent en synergie.

1 - L'EFFET DE SYNERGIE

Notons que, historiquement, les deux outils numérique et graphique étaient présents dès le début dans la mise sur pied de la méthode globale d'enseignement des mathématiques par le C.U.E.E.P. :

- l'arrivée des calculettes coïncide avec le développement des usages interactifs du rétroprojecteur. La stratégie de mathématisation propose simultanément et en interaction, une approche numérique et graphique ;

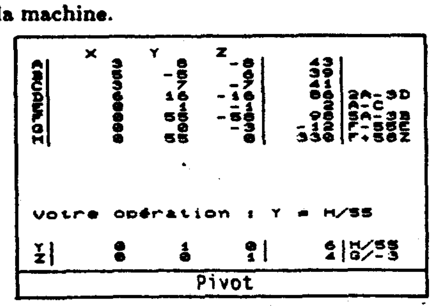
- l'interaction entre numérique et visualisation était déjà présente dans les premières aides électroniques à l'enseignement des mathématiques réalisées par Philippe Loosfelt avant l'arrivée des ordinateurs [80].

Dans la démarche de mathématisation, l'écriture d'un problème dans différents supports, le passage d'un support à un autre sont des étapes importantes (cf. Chap. IV).

Il y a constamment interaction entre approche numérique et approche graphique et/ou visuelle.

Prenons l'exemple de la résolution d'un système d'équations linéaires. Ce problème semble, au départ, un problème essentiellement numérique. Pourtant, par le biais d'un logiciel outil "Pivot" :

Il y a prise en charge des tâches fastidieuses par l'ordinateur dans ce programme qui permet de résoudre un système d'équations par la méthode du pivot : l'élève entre au clavier la combinaison de lignes à effectuer, et l'écran affiche la nouvelle ligne obtenue : tous les calculs intermédiaires sont effectués par la machine.



Extrait de [81].

L'aspect numérique est dépassé, on débouche sur un jeu de cible. Ce jeu s'appuie autant sur des "images" que sur des nombres.

A partir du tableau de départ :

3	8	-8	43
5	-5	6	39
3	7	-7	41

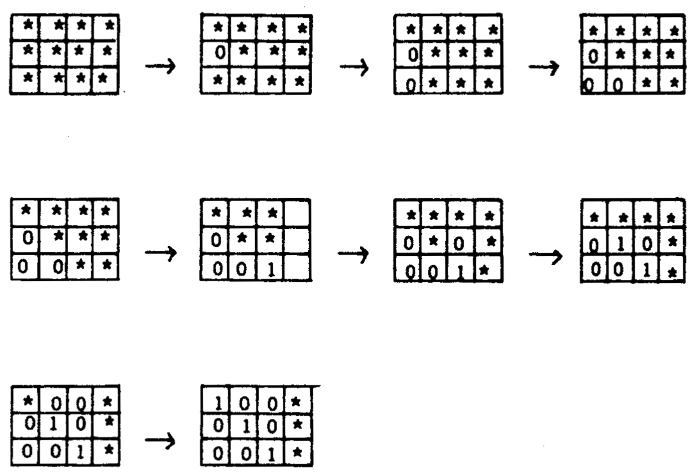
Il s'agit d'atteindre le tableau cible :

1	0	0	*
0	1	0	*
0	0	1	*

* désigne un nombre quelconque

Les seules manipulations autorisées étant des combinaisons linéaires de lignes. On opère ici dans "l'univers des équations".

La stratégie gagnante qui se découvre petit à petit s'appuie sur une succession d'images représentant l'évolution des zéros du tableau.



Cette visualisation, en court-circuitant le formalisme algébrique classique a permis d'utiliser cette méthode y compris au niveau CAP sur des publics non algébrisés [82, p 119]. Elle développe des capacités logiques et introduit l'écriture formelle comme codage de transformation.

Nous voyons sur cet exemple apparaître une fusion entre le numérique et le visuel. De plus, le support tableau devient un **outil opératoire** nous pouvons donc dire :

Le support tableau n'est plus seulement une série de nombres isolés obtenus successivement à l'aide d'une calculette, mais un objet mathématique en tant que tel sur lequel on opère, une image interactive que l'on peut manipuler globalement.

Nous préciserons cela dans la monographie sur l'analyse dans l'étude du tryptique Tableau-Graphique-Formule (TGF). Mais dès maintenant, nous pouvons signaler que la visualisation par graphique et/ou tableau en lien avec l'aspect formel (formule) jouera un rôle important en tant **qu'économie de pensée** et vérification d'hypothèses dans le passage à la théorie. Cela était déjà ébauché dans l'usage dynamique des supports pour rétro-projecteur.

L'intégration du **numérique et du graphique** médiatisé par le **support tableau** apparaît encore plus nettement dans l'usage des tableurs en mathématiques [38] [25].

2 - QUELQUES APPORTS SPECIFIQUES DE CETTE SYNERGIE

Les nouveaux outils de calcul et les nouvelles images favorisent les activités manipulatoires des élèves et cela a pour effet de :

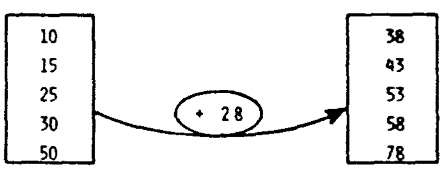
2-1 - CENTRER LA FORMATION SUR LE CONCEPT D'INVARIANT

Le concept d'invariant est un concept central dans de nombreux domaines des mathématiques. Il apparaît souvent dans l'usage des calculettes et dans les manipulations des nouvelles images, dans plusieurs exemples précédemment cités :

- dans l'univers des paraboles grâce au mode Trace, on repère aisément les "invariants" dans certaines transformations de la parabole.

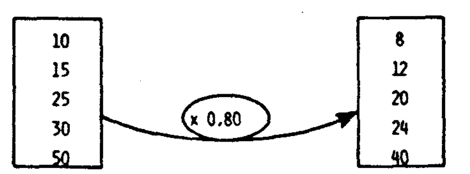
- dans l'exemple des histogrammes, évoqué précédemment, que nous reprendrons dans la monographie, on dégage **l'invariant "surface"** dans la manipulation des différents histogrammes, ainsi que **l'invariant fonction de répartition.**

Nous retrouvons également le concept d'invariant dans la gestion du support tableau en lien avec le facteur constant et/ou la mémoire des calculettes. Cela débouche sur le critère de reconnaissance des opérations que nous pouvons illustrer par un extrait de [53, p 27] :



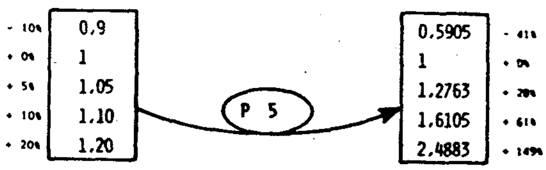
Quand a-t-on le droit de mettre une addition entre deux listes ?

quand l'écart (d'une liste à l'autre) est toujours le même
(exemple : 38 - 10 = 28 ; 43 - 15 = 28 etc ...)
ou quand les pas sont égaux
(ex. pas de 5 ; 10 ; 5 ; 20 dans chacune des deux listes)



Quand a-t-on le droit de mettre une multiplication entre deux listes ?

Si je double d'un côté
alors le nombre correspondant de l'autre côté doit doubler.
(les nombres doivent être "proportionnels".



Quand a-t-on le droit de mettre une puissance entre deux listes ?

Si j'élève au carré d'un côté,
alors le nombre correspondant de l'autre côté doit être
élevé au carré.

Cet aspect visualisation et recherche d'invariant est encore plus explicite dans l'approche de la "règle de trois". La formation traditionnelle insistait plus sur comment faire une "règle de trois" que sur : quand faire une règle de trois". Les nouveaux outils débouchent eux, directement sur : qu'est-ce qui est invariant dans les situations de règle de trois (cf. Chap IV) ?

A QUELLE CONDITION PEUT-ON FAIRE UNE REGLE DE TROIS ?

On peut utiliser la règle de trois si le test suivant est positif

Si je double d'un côté ⇒ *la valeur correspondante doit doubler*

D'autres tests découlent du premier.
Ils nécessitent la création préalable
d'un tableau de valeurs, ou d'un graphique.

Par addition ou par soustraction des lignes du tableau → *on trouve d'autres lignes du tableau*

Deux conditions à vérifier simultanément :

Pas constant d'un côté *entraine* *Pas constant de l'autre* + *à ZERO correspond ZERO*

Un multiplicateur constant permet de passer d'une colonne à l'autre.

La représentation graphique, c'est une droite passant par les ZEROS

Extrait de [53]

2-2 REVALORISER LES RECHERCHES PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES RAISONNEES

Les nouveaux outils de calcul, ont de toute évidence, revalorisé les recherches par approximations successives raisonnées.

Les nouvelles images ont permis d'étendre ces recherches au non-numérique. Ainsi grâce à des jeux de cible construits sur des images interactives, on peut chercher à atteindre une formule, une parabole, découvrir une fraction, l'allure d'une courbe. Les essais successifs pour atteindre la cible assurant un auto-apprentissage des règles du modèle sous-jacent avant théorisation.

Ces activités transforment le simple jeu de cible en une méthode d'acquisition de connaissances dans presque tous les domaines des mathématiques.

2-3 - CHANGER LE STATUT DES DEMONSTRATIONS

Les jeux de cibles construits sur des images interactives ont souvent débouché sur une transformation du rôle, de la place et des contenus des démonstrations. Nous avons cité précédemment l'exemple de la construction du carré dans un triangle. Un autre exemple du même type a été développé par les formateurs-maths du C.U.E.E.P. Il s'agissait, en maniant le micro-monde de la Tortue-Logo de tracer des polygones à partir de la procédure REPETE [ ] AV [ ] T D [ ]. On est arrivé à une démonstration des théorèmes classiques sur les angles au centre et les angles inscrits [29].

Dans ces deux exemples, seules les nouvelles images interviennent, mais dans de nombreux cas, c'est une synergie entre numérique et graphique, qui est porteuse de changement.

Détaillons dans l'exemple du trinôme du second degré, le statut de la démonstration.

Dans le modèle traditionnel, l'équation du second degré est enseignée, avant les paraboles et sans lien avec les représentations graphiques. Le trinôme est l'objet d'une étude détaillée et spécifique, les outils utilisés, essentiellement les identités remarquables, ne sont pas généralisables, ni transférables mais sont des particularités liées à l'objet trinôme. C'est ce que certains ont qualifié de **trinomite**.

L'aspect uniquement algébrique de cette approche est bien illustré par cet extrait de livre :

9 ***Théorème relatif au trinôme*** Soit un trinôme mis sous sa forme canonique

$$T(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Le nombre $b^2 - 4ac$ s'appelle discriminant du trinôme : selon qu'il est négatif, nul ou positif, le crochet est une somme de carrés, un carré ou une différence de carrés.

1er cas. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: $T(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2\right]$.

Le trinôme est le produit de a par une somme de carrés.
Il ne se décompose pas, il n'a pas de zéros.
Il a, quel que soit x, le signe du coefficient de x^2.

2e cas. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$: $T(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Le trinôme est le produit de a par un carré.
Il se décompose, il a un zéro double, $-\frac{b}{2a}$.
Il a, pour $x \neq -\frac{b}{2a}$, le signe du coefficient de x^2.

3e cas. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: $T(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right]$

Le trinôme est le produit de a par une différence de carrés.
Il se décompose en le produit de a par deux facteurs distincts :

$$a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) ;$$

il a deux zéros distincts : $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$T(x)$ a le signe du coefficient de x^2 pour toute valeur de x extérieure à l'intervalle de ses zéros ; il a le signe opposé pour toute valeur de x comprise entre ses zéros.

En effet, en désignant ses zéros par x' et x'',

$$\boxed{T(x) = a(x - x')(x - x'')} ;$$

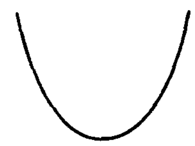
en supposant : $x' < x''$, le tableau suivant indique comment le signe de chaque facteur, puis celui de $T(x)$, dépendent de la valeur de x :

x	$-\infty$	x'		x''	$+\infty$
$x - x'$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x''$	$-$		$-$	0	$-$
$(x - x')(x - x'')$	$+$		$-$		$+$
$T(x)$	signe de a		signe de $-a$		signe de a

A l'opposé de cette approche algébrique, les nouvelles images du logiciel Parabole permettent dès les premières **manipulations structurantes** de créer des images mentales que les élèves réutilisent quand il s'agit de trouver le signe d'un trinôme ou le signe de ses racines.

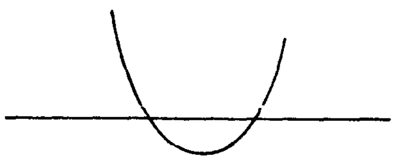
Pour étudier le signe du trinôme : $2x^2 - 8x + 4$, les élèves tracent mentalement ou sur papier le portrait robot de la parabole associée :

$a = 2$ donc $a > 2$ donc (concavité)



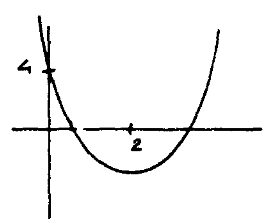
$\Delta = b^2 - 4ac = + 32$ donc $\Delta > 0$

(position de l'axe des abscisses)



$c = 4 > 0$ et $\frac{-b}{2a} = 2 > 0$

(position de l'axe des ordonnées).



En fait, cette représentation imagée contient toutes les informations et même plus, qui étaient verbalisées et formalisées algébriquement dans l'extrait du livre, mais sous une autre forme. Ce portrait robot donne le signe du trinôme et le signe des racines sous une forme visuelle.

Les recettes de cuisine apprises par coeur sont remplacées par un **raisonnement**. La succession des images donne bien lieu à un raisonnement même s'il n'est pas formalisé algébriquement.

Dans le cas du signe du trinôme ;

les nouvelles images permettent d'accéder directement à un savoir structuré.

Montrons comment la synergie numérique - graphique introduit de nouvelles approches dans la démonstration de la formule :

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donnant les solutions de l'équation du second degré.

Dans la méthode globale, la résolution de l'équation du second degré apparaît comme un moyen parmi d'autres d'inverser le sens de lecture d'un graphique ou d'un tableau (cas particulier de la parabole). Dans cette filière Tableau-Graphique-Formule, l'aspect numérique (support tableau) et visuel (support graphique) sont prédominants. Le support formule est introduit comme un moyen de décrire les étapes de la construction du tableau numérique et comme économie d'écriture.

Ainsi, les mathématisations débouchent sur des problèmes de **reversibilité**. Se pose alors le problème de distinguer les situations où l'inversion est possible sur les trois supports Tableau-Graphique-Formule des situations où cette inversion n'est possible que sur les supports tableau et graphique.

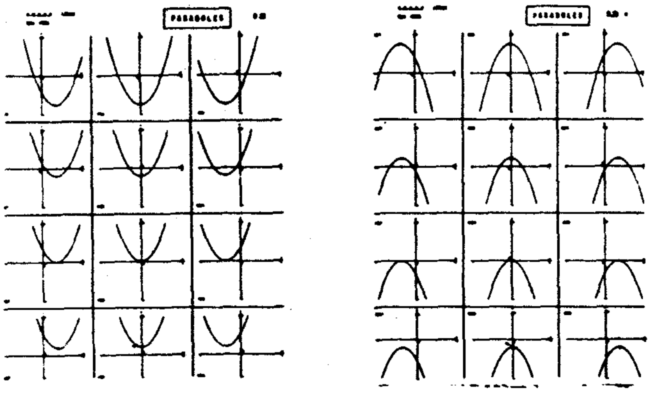
Les premières équations du second degré sont résolues par des manipulations numériques (approximations successives à la calculette ou grâce à un tableur) ou par des manipulations graphiques (lecture d'une parabole tracée à la main ou zooms successifs grâce à un traceur de courbes).

Ces nouveaux outils informatiques (Tableur/Traceur de courbes) permettent de résoudre numériquement des équations du second degré à un coût équivalent à celui de l'utilisation de la formule. Cette formule est alors introduite sans démonstration préalable et "testée" sur les exemples précédents. C'est une sorte de "révolution culturelle" pour le milieu mathématique.

Les méthodes numériques et graphiques sont réhabilitées et considérées comme aussi "nobles" que les méthodes algébriques dans la mesure où elles permettent de construire des raisonnements et des démonstrations rigoureuses [85].

Le rôle et la place des démonstrations sont fortement modifiés, ainsi que les rapports entre savoir, savoir-faire, théorie et formalisme.

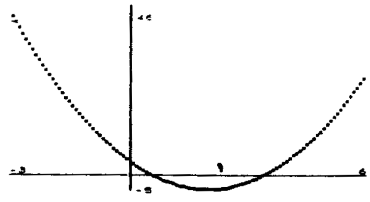
Montrons comment la démonstration apparaît après les savoir-faire et directement en lien avec des manipulations structurantes. A partir des manipulations du logiciel Parabole, les élèves ont acquis des automatismes permettant de tracer le portrait robot d'une parabole donnée, en particulier ont vu le rôle essentiel de l'axe de symétrie et du signe du discriminant. Un document écrit sert d'aide-mémoire visuel.



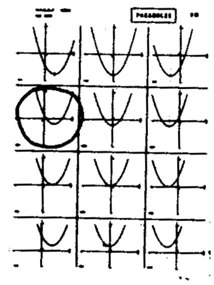
La démarche de la démonstration de la factorisation du trinôme du second degré consiste à transformer $ax^2 + bx + c$ en une expression où la **variable n'apparaît qu'une fois.** Cette transformation revient géométriquement à une translation. L'utilisation de la Calculette de Courbes permet d'associer à la transformation algébrique une image géométrique.

ECRITURE ALGEBRIQUE — IMAGE — DOCUMENT PAPIER

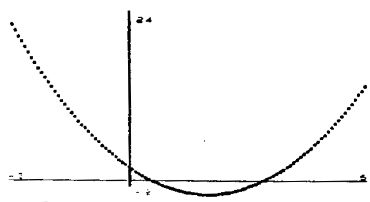
$2x^2 - 8x + 4$



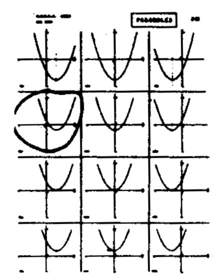
$2x^2 - 8x + 4$



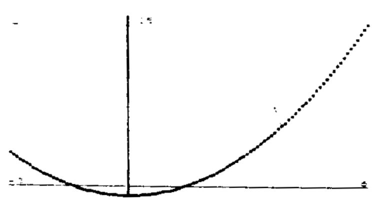
$2\left[x^2 - 4x + 2\right]$



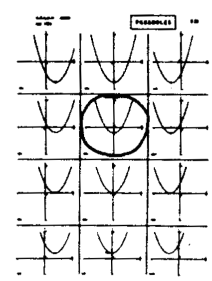
$2x^2 - 4x + 2$



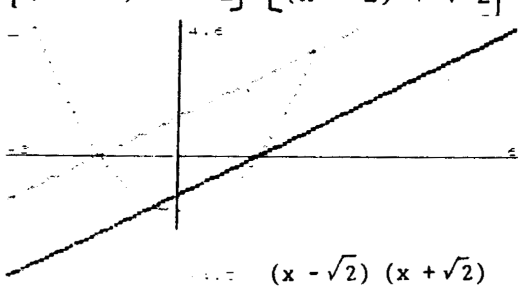
$2\left[(x-2)^2 - 2\right]$



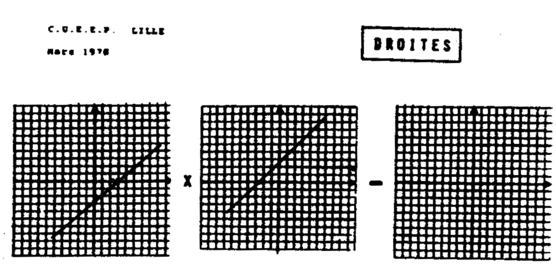
$x^2 - 2$



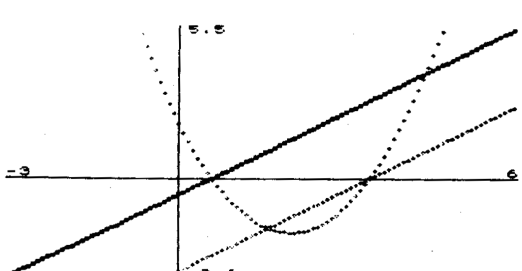
$2\left[(x-2) - \sqrt{2}\right]\left[(x-2) + \sqrt{2}\right]$



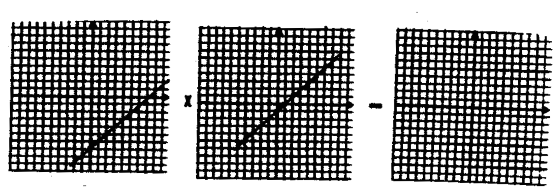
$(x - \sqrt{2})\ (x + \sqrt{2})$



$2\left[(x - 2 - \sqrt{2})\ (x - 2 + \sqrt{2})\right]$



$(x - 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})$



L'équation du second degré sous sa forme réduite apparaît plusieurs fois comme cas particulier de cette stratégie générale.

Les formules $$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

découlent des manipulations du modèle "équation où la variable n'apparaît qu'une fois"

$$(x - 2)^2 - 2 = 0 \qquad (x - 2)^2 = 2 \qquad x - 2 = \pm \sqrt{2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2} = \frac{1}{4} (8 + 4\sqrt{2}) = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{4} = \frac{(-8) \pm \sqrt{64 - 4 \times 4 \times 2}}{2 \times 2}$$

Dans ce cas, la démonstration se fait à l'aide d'une méthode transférable et généralisable.

En résumé, on peut dire que la démonstration est issue d'une part des techniques visuelles et graphiques, d'autre part de "travaux expérimentaux" basés sur le concept de réversibilité.

Elle s'inscrit elle-même dans le cursus pédagogique dans la mesure où elle n'est pas une fin en soi, elle n'intervient qu'en lien avec des manipulations structurantes et uniquement parce qu'elle apporte un plus dans la rigueur.

Il est plus important de faire raisonner les élèves sur des mini-théorisations que de dérouler des démonstrations exhaustives et formelles hors de leur portée. Dans ce type de raisonnement, l'utilisation d'objets mathématiques et d'images mentales associées est systématiquement recherchée, il n'y a pas opposition entre visualisation et rigueur.

De plus, l'identification à un modèle connu, l'équation où la variable n'apparaît qu'une fois, ouvre d'autres perspectives porteuses de nouvelles interrogations : peut-on généraliser cette identification par exemple aux équations du 3ème degré ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

CONCLUSION

L'ordinateur, par le biais des nouveaux outils de calcul et de production d'images permet d'aborder les maths de façon expérimentale.

Par façon expérimentale, nous désignons la même démarche que les sciences dites expérimentales par opposition aux sciences dites exactes. C'est-à-dire que les activités expérimentales ne sont ni gratuites ni soumises au hasard mais suivent un plan pré-établi à partir d'hypothèses. Les expériences confortent ou infirment les hypothèses et leurs résultats aboutissent à la construction de théories.

Les nouveaux outils de calcul et de production d'images permettent d'implanter sur ordinateur des objets mathématiques. Ces objets ne sont ni inertes ni figuratifs, ils sont rendus interactifs par le biais de commandes dédiées pour l'utilisation envisagée.

Ces manipulations structurantes permettent de se fabriquer un champ de représentations, de découvrir des théorèmes, d'acquérir des savoir et des savoir-faire et d'aider au développement des capacités de raisonnement.

Grâce à cette approche expérimentale structurée, l'outil informatique permet, suivant les besoins de la formation, soit de court-circuiter les théories formelles globalisantes par le biais de mini-théorisations, soit de les introduire en temps et en heure.

QUATRIEME PARTIE

MONOGRAPHIE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE DANS LA FILIERE D'ACCES AU NIVEAU III DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

Dans la première partie, nous avons posé le cadre institutionnel, le cadre de notre recherche. Nous avons formulé une hypothèse globale sur l'impact du couple mathématisation/informatique dans l'enseignement. Dans la deuxième partie, nous avons défini notre stratégie d'enseignement basée sur la mathématisation de situations en dégageant le rôle de l'informatique comme mode de pensée. Dans une troisième partie, nous avons spécifié les apports de l'outil informatique sur la discipline en tant qu'objet d'enseignement.

Dans ces deuxième et troisième parties, les idées forces faisaient appel sans spécification à tous les domaines de l'enseignement des maths, à tous les publics, à tous les niveaux. Pour fonder notre problématique et pour valider notre hypothèse globale, nous restreignons provisoirement notre étude dans le temps, dans l'espace et par rapport au public. Le public : nous prenons en considération un public qui, quel que soit le niveau de départ et sa scolarité antérieure, désire accéder à un niveau IV ou à un niveau Baccalauréat +, le + étant une formation professionnalisée de niveau III. Le temps : les formations considérées sont donc celles de niveau V (CAP) aux niveaux IV, III en enseignement professionnel. L'espace : nous nous restreignons à quelques objectifs transversaux continus, progressifs dans l'enseignement de l'analyse.

Le choix de ces restrictions nous est dicté par notre méthodologie, à savoir : analyser des pratiques de terrain dont nous avons la maîtrise tant pédagogique qu'institutionnelle. La préparation à l'Examen Spécial d'Accès à l'Enseignement Universitaire par Unités Capitalisables nous fournit une masse critique d'auditeurs (deux mille inscrits dans la région) et de formateurs (potentiellement une centaine). Nous avons, en tant que responsables, depuis sa création, la maîtrise totale du dispositif (mise en place, définition des contenus, formation de formateurs, validation des acquis, responsabilité du jury).

Nous consacrons donc cette quatrième partie à une monographie de l'enseignement de l'analyse dans la filière d'accès aux enseignements professionnels de niveau III. C'est l'état actuel de la pratique collective que nous analysons. Cette pratique, comme la réflexion et l'analyse sont le fruit d'une interaction dans le temps (dix années) entre les trois composantes terrain/formation de formateurs/recherche.

La monographie a à la fois une fonction de validation des hypothèses émises dans les premières parties, d'introduction à la cinquième, mais elle a aussi sa dynamique propre :

- Poursuivre des objectifs de façon transversale, continue, progressive sans rupture de méthode tout au long du cursus.

- Court-circuiter provisoirement, par le biais de mini théorisations, les théories globalisantes pour les introduire en temps et en heure.

- Donner toute sa place à l'expérimentation et à la recherche, dans la construction d'un savoir et d'un savoir-faire réellement structurée.

Précisons les objectifs transversaux, continus, progressifs :

- Reconnaissance de modèles sur les supports Tableau-Graphique-Formule, changement de supports,

- Utilisation de supports formels et de différents formalismes quand la formalisation est opérante ou structurante ou économique,

- Développement des capacités de raisonnement : de la formulation d'hypothèse à la démonstration hypothético-déductive,

La monographie ne vise pas à décrire un cours. Nous ne voulons pas donner un itinéraire d'apprentissage. Elle vise à modéliser notre stratégie d'apprentissage en exhibant les passages obligés, les points clés incontournables dans l'accès au niveau III de la formation professionnelle. Nous montrons comment ces points-clés sont atteints à travers ces activités sur des situations d'ancrage. Ces activités sont les mêmes tout au long du cursus, elles permettent des sauts quantitatifs et/ou qualitatifs sans rupture de pratique. C'est en ce sens que l'on parle de méthode globale.

Les exemples décrits dans la monographie sont en partie décontextualisés. Dans la réalité, l'enseignant téléguide le déroulement de la séquence pédagogique en fonction de ses objectifs propres et des réactions du groupe.

CHAPITRE IX

FAIRE DE L'ANALYSE SANS PREREQUIS ALGEBRIQUE

OPERATIONNALISER LE TRYPTIQUE TABLEAU - GRAPHIQUE - FORMULE

Nous avons écrit dans le chapitre IV que "faire des mathématiques, c'est de façon privilégiée, trouver un support d'information permettant :

- d'enregistrer les informations entrantes,
- de travailler systématiquement sur ces informations,
- d'isoler et de fournir l'information sortante",

que "la stratégie de mathématisation de situation propose une phase d'informatisation consistant à dégager les informations utiles, à les organiser et à les visualiser sur un support adapté".

Le support n'est pas unique et nous avons explicité dans le chapitre V comment le Département Mathématiques a été amené à privilégier **trois supports standard : le tableau, le graphique, la formule.**

En effet, dans l'itinéraire de formation classique, le support dominant est l'écriture algébrique. Le support graphique est utilisé soit en amont pour donner une idée intuitive ou une image mentale figurative (par exemple, la figure géométrique liée au théorème de Thalès en 3ème avant de passer à l'expression vectorielle ou analytique ; également les graphiques de température avant d'introduire en 6ème-5ème, les nombres relatifs) soit en aval pour évaluer les calculs formels (par exemple le tracé de courbes que nous avons appelées courbes théoriques dans le chapitre VII).

Or, il se trouve que dans la vie sociale et professionnelle, les supports rencontrés sont outre le texte écrit, les tableaux de nombres à simple ou double entrée et les graphiques orientés ou non orientés (abaques). Les formules s'adressent aux "techniciens". A l'aide de ces trois supports, on peut traiter beaucoup de situations-problèmes et assurer une synthèse entre la vie sociale et professionnelle et l'école.

La participation du C.U.E.E.P. d'une part au groupe Inter IREM GEDEOP (Groupe d'Etude sur l'Enseignement par Objectifs).[67] d'autre part à la formation de formateurs d'adultes des CAP par Unités Capitalisables au Centre Académique de Lille [9] a conduit le Département Mathématiques à synthétiser ses premières expériences à propos de la liaison tableau, graphique, formule et à ériger le tryptique T.G.F. en méthode, et en particulier à considérer la première étape de l'enseignement de l'analyse comme une opérationnalisation de ce tryptique.

Par opérationnalisation du tryptique T.G.F., nous entendons :

- **choisir un support adapté au type d'informations données,**
- **formaliser le problème dans le support choisi,**
- **changer de support - repérer les invariants,**
- **reconnaître des modèles mathématiques "connus" sur les différents supports,**
- **utiliser les supports pour construire des modèles "nouveaux".**

1 - CHOISIR UN SUPPORT - PASSER D'UN SUPPORT A L'AUTRE - DEGAGER LES INVARIANTS

COMMENT CES ACTIVITES PERMETTENT D'APPROCHER LE MODELE DROITE DE DEUX FAÇONS DIFFERENTES

1-1 - APPROCHE NON ORIENTEE

BRIQUE ET BOIS

Une entreprise de construction dispose de camions qui ne peuvent pas transporter plus de 24 tonnes ni plus de 26 mètres cube de matériaux.
Elle cherche à équilibrer les chargements de bois et de brique de manière à utiliser les camions à la limite de leurs possibilités.
Un mètre cube de bois pèse 0,8 tonne. Un mètre cube de brique pèse 1,2 tonne.
Quelle est la meilleure répartition ?

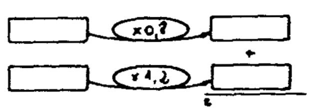
Chaque case du tableau correspond à un chargement. Indiquer son poids.

VOL BRIQUES							
20							
16							
12							
8							
4							
0							
	0	4	8	12	16	20	VOL BOIS

1-1-1 - LE REMPLISSAGE DES CASES DU TABLEAU PEUT SE FAIRE DE DIVERSES FAÇONS

Presque toujours, sinon au début, au moins au fur et à mesure, des méthodes se dégagent :

- remplir pour chaque case du tableau, les cases vides du schéma d'opérateurs :



- formuler le problème en algèbre et utiliser la formule :

Bois x 0,8 + Briques x 1,2

- se déplacer sur les lignes du tableau en ajoutant 3,2 à chaque fois ou se déplacer sur les colonnes du tableau en ajoutant 4,8 à chaque fois.

Dans tous les cas, quelle que soit la méthode employée, les deux constantes 0,8 et 1,2 sont mises en valeur.

VOL BRIQUES							
20	24	27,2	30,4	33,6	36,8	40	
16	19,2	22,4	25,6	28,8	32	35,2	
12	14,4	17,6	20,8	24	27,2	30,4	
8	9,6	12,8	16	19,2	22,4	25,6	
4	4,8	8	11,2	14,4	17,6	20,8	
0	0	3,2	6,4	9,6	12,8	16	
	0	4	8	12	16	20	VOL BOIS

1-1-2 - UNE FOIS LE TABLEAU NUMERIQUE REMPLI, L'INTERET NE SE PORTE PLUS SUR CHAQUE NOMBRE, MAIS SUR L'ORGANISATION DE L'ENSEMBLE DU TABLEAU : C'EST LE TABLEAU EN TANT QU'OBJET GLOBAL QUE L'ON ETUDIE

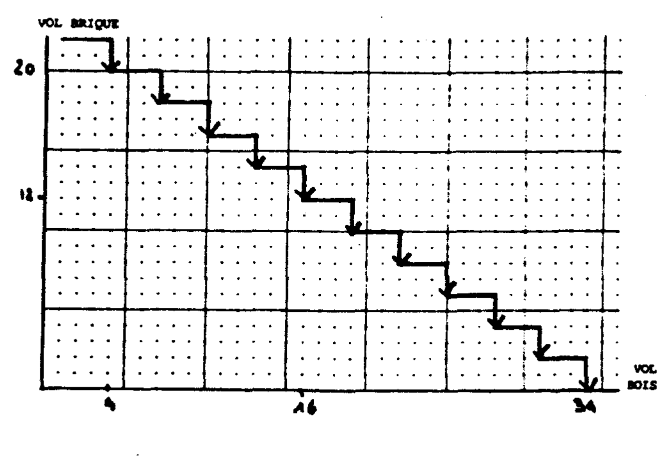
Quelques nombres figurent deux fois, le passage de l'un à l'autre se fait par une règle constante 3 pas à droite, 2 pas vers le bas :

VOL BRIQUES							
20	24	27,2	30,4	33,6	36,8	40	
16	19,2	22,4	25,6	28,8	32	35,2	
12	14,4	17,6	20,8	24	27,2	30,4	
8	9,6	12,8	16	19,2	22,4	25,6	
4	4,8	8	11,2	14,4	17,6	20,8	
0	0	3,2	6,4	9,6	12,8	16	
	0	4	8	12	16	20	VOL BOIS

Est-ce que "3 pour 2" est une règle généralisable ?

On quitte le domaine des nombres pour s'intéresser aux règles formelles. Le support graphique permettra la visualisation.

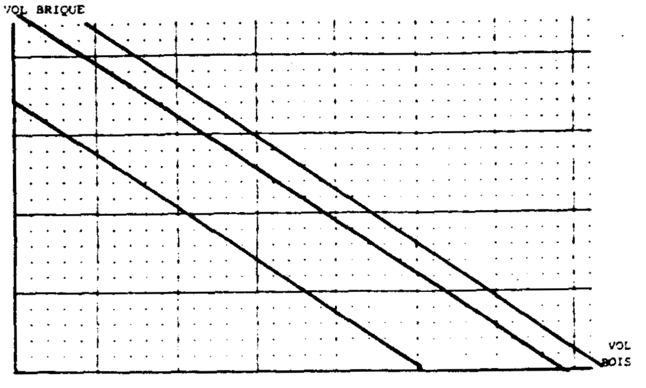
La question se formule de la façon suivante : en suivant la règle "3 pour 2" à partir du point (4,20) qui correspond dans le tableau à un chargement de 27,2 tonnes, obtient-on les mêmes chargements ?



Le chargement (16,12) figure dans le tableau et tous les points sont alignés. En fait 3m^3 de bois pèsent autant que 2m^3 de briques.

Dans la formule Bois x 0,8 + Bri x 1,2 = 27,2, intuitivement augmenter la quantité de bois, revient à diminuer les briques dans une certaine proportion pour garder la balance. **Ici la proportion est de 2 pour 3**. La règle "3 pour 2" est indépendante du tonnage des camions.

Sur le papier à points, on construit des "droites isopoids" correspondant à d'autres poids :



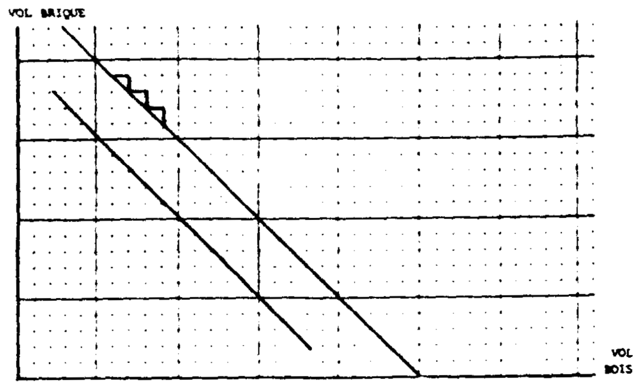
Toutes les droites isopoids sont parallèles : elles ont été construites avec la même règle "3 pour 2". Sur le support graphique, les deux facteurs constants 1,2 et 0,8 donnent un seul invariant : le rapport 3 pour 2, c'est-à-dire 3/2 qui est aussi le rapport 1,2/0,8, c'est la pente de la droite. *Le support graphique aide à dégager l'invariant.*

Cet invariant permet de formuler des critères de reconnaissance d'une droite sur les différents supports :

- sur un graphique : des points sont alignés si on passe de l'un à l'autre par une même proportion, si la pente est constante,
- sur une formule, si elle est de la forme A x Cte + B x Cte = le rapport des deux constantes étant l'invariant,
- sur un tableau numérique à double entrée si les lignes et les colonnes du tableau sont à pas constant : le rapport des pas est l'invariant.

Ces critères de reconnaissance sont testés immédiatement en recherchant tous les chargements iso-volumes :

La règle est 1 pour 1, l'invariant est 1

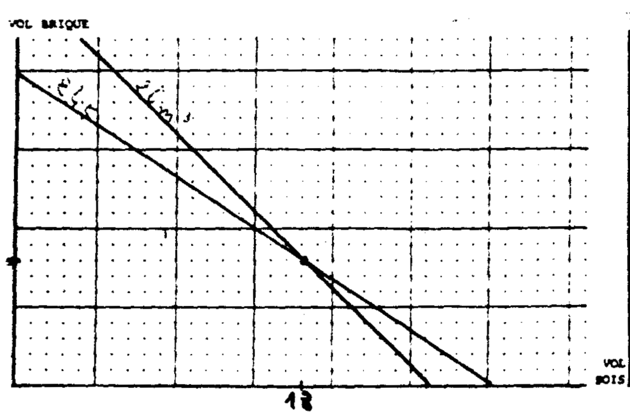


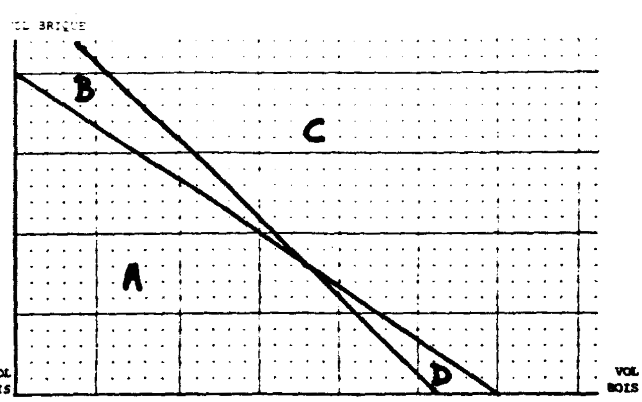
Toutes les droites iso-volumes sont parallèles de pente 1. *Une droite est reconnue par un invariant : sa pente.*

1-1-3 - APRES CES ACTIVITES, C'EST LE SUPPORT GRAPHIQUE QUI DEVIENT OBJET D'ETUDE

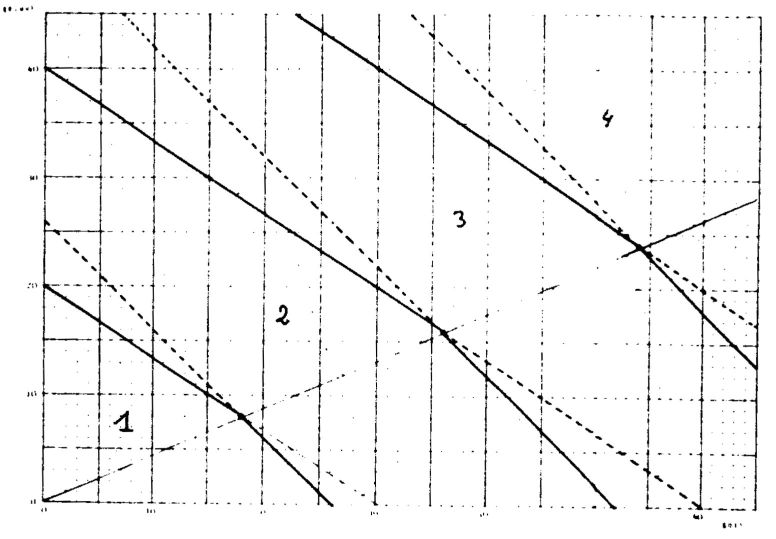
Certains problèmes pourront être résolus par raisonnement sur le graphique et inversement un raisonnement sur le graphique suggérera de nouveaux développements.

Chaque droite, partage le plan en deux parties. Les deux contraintes partagent le plan en quatre zones





Pour plusieurs camions :



La lecture de l'abaque, le raisonnement sur le support graphique remplacent ici le calcul algébrique formel de résolution de systèmes d'équations et d'inéquations.

Il nous semble important à ce stade d'insister sur le raisonnement graphique et de ne pas "tuer" les problèmes (ou les raisonnements) en passant trop tôt au calcul formel (algébrique ou en algèbre des registres).

Le raisonnement graphique ne sert pas comme prothèse aux personnes "non algébrisées". L'écriture formelle viendra en son temps quand elle s'avérera nécessaire pour formaliser un raisonnement.

1-2 - APPROCHE ORIENTEE

LA FACTURE DE TELEPHONE F 402

Abonnement : 80 F tous les deux mois.
70 centimes pour une unité de communication

Cette situation a le mérite de sa simplicité, c'est-à-dire :

- accéder très rapidement au modèle affine sur les trois supports,
- passer d'un support à un autre en repérant les invariants sur les trois supports,
- résoudre des problèmes par inversion.

Elle fournit un repère, un ancrage, une référence simple pour toutes les situations affines : "les locations de voitures, c'est comme le téléphone".

- Ecrire la formule revient à **coder** les trois lignes d'énoncé dans un langage formel :

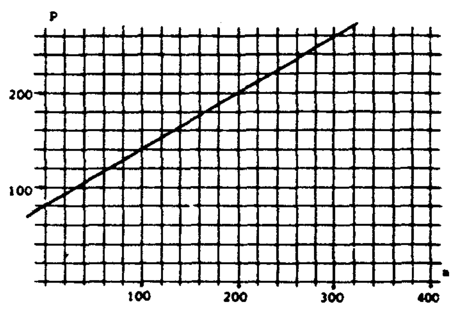
Formule : $p = 0{,}70\ n + 80$

- Remplir le tableau revient également à coder l'information dans le support en partant des opérateurs $\xrightarrow{\times 0{,}7} \xrightarrow{+80}$

n	p
0	80
40	108
100	150
140	178
200	220
300	290
400	360

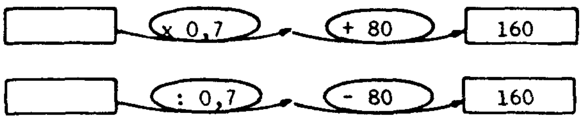
$\xrightarrow{\times 0{,}7} \xrightarrow{+80}$

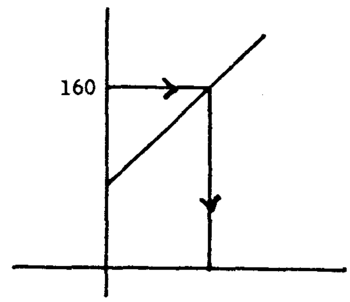
De même pour le graphique :



On dispose ainsi tous les éléments pour **caractériser et reconnaître le modèle affine** sur les trois supports.

Résoudre des problèmes, c'est inverser la lecture des différents supports.





ou

$$0{,}7n + 80 = 160$$

$$0{,}7\ n = 160 - 80$$

$$n = \frac{160-80}{0{,}7}$$

$$n =$$

Lire le graphique "à l'envers" c'est inverser le réseau d'opérateurs, c'est résoudre une équation algébrique du premier degré.

En conclusion, les deux approches orientée et non orientée conduisent bien à dégager un seul modèle : la droite affine. Le modèle est unique mais les deux approches n'utilisent pas le même support tableau (double ou simple entrée) ni les mêmes concepts sous-jacents. Dans le premier cas, c'est un repérage d'"ensemble de points" et on agit par transformation de points (translation, homothétie) avec des concepts de régionnement du plan, d'intersection de droites, de parallélisme. Cette première approche va donner lieu à plusieurs prolongements (abaques, systèmes d'équations linéaires, fonction à plusieurs variables). L'approche orientée débouche elle sur le concept de fonction, d'inversion de fonction (équations où la variable n'apparaît qu'une fois) et d'algèbre de fonctions.

b) Combinaison de tableaux associés à des droites

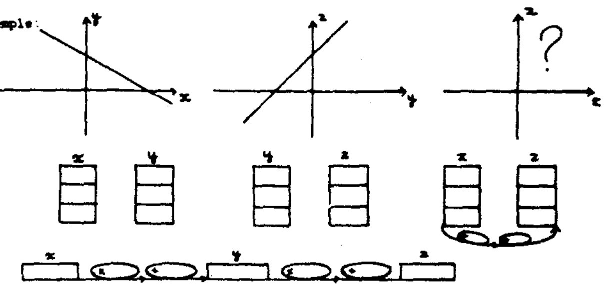
A partir des tableaux correspondant à des droites, on va faire apparaitre par combinaisons, d'autres tableaux, certains seront associés à des droites et d'autres à de nouveaux modèles.

Deux types de combinaisons sont possibles :

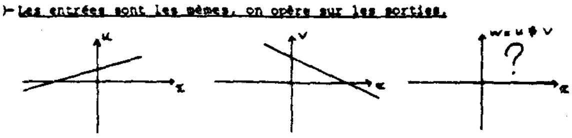
1)- L'entrée du deuxième tableau est la sortie du premier.

Dans ce cas, on obtient la composition de deux fonctions affines et on retrouve un tableau de droite, là encore deux méthodes pour obtenir la formule standard : par lecture du tableau ou par calcul

Exemple :



2)- Les entrées sont les mêmes, on opère sur les sorties.



On peut obtenir les tableaux et les graphiques et formules associés.

x	u	v	u + v	u × v	$\frac{u}{v}$
			1	2	3

En résumé :

Dans le premier cas, on obtient une droite.
Dans le deuxième cas, on obtient une parabole.
dans le troisième cas, obtient une hyperbole.

DROITE + DROITE = DROITE
DROITE x DROITE = PARABOLE
DROITE / DROITE = HYPERBOLE

Extrait d "Activités en seconde" [71].

Dans les deux approches orientée et non orientée, l'apport de l'informatique se situe comme mode de pensée, comme mode de gestion de l'information (quelles sont les entrées ? quelles sont les sorties ?)

Dans les prolongements, en particulier dans la composition de tableaux associés à des droites, où à des nouveaux modèles l'informatique est présente aussi comme outil. A partir de manipulations structurantes sur des logiciels outils adaptés et/ou de mathématisation de situation des produits, quotients, sommes de droites seront construits pour construire de nouveaux modèles.

2 - EXPERIMENTER - CONSTRUIRE DES MODELES - ETABLIR DES CRITERES DE RECONNAISSANCE

La situation décrite ci-dessous est une **situation d'ancrage** pour les modèles droite et parabole au sens où, à partir d'un tableau de nombres, les élèves sont amenés à construire et à établir des critères de reconnaissance de ces modèles, à les faire fonctionner et à transférer ces savoir-faire à d'autres situations

C.U.E.E.P. LILLE

Mars 1978

LES CHOUX FLEURS F 904

Sur un grand marché en plein air, plus le prix du chou fleur baisse, plus on en vend (voir tableau).

Un commerçant, astucieux, est sûr de vendre tous ses choux fleurs, étant donnée sa très belle situation sur la place.

Plus les prix sont bas, moins on y gagne. Il décide donc de diminuer sa vente de choux fleurs quand les prix baissent, en fonction d'une table qu'il se fixe. (voir tableau).

Prix d'1 chou fleur	Quantité de choux fleurs vendus sur le marché	Quantité de choux fleurs vendus par le commerçant
0,50	4500	80
0,60	4380	84
0,80	4140	92
1,00	3900	100
1,20	3660	108
1,50	3300	120
1,80	2940	132
2,00	2700	140
2,40	2220	156
3,00	1500	180

Les informations contenues dans le texte conduisent à lire le tableau de nombres colonne par colonne. Ceci incite à chercher, à comprendre comment les colonnes sont construites, d'où une phase d'expérimentation. L'outil informatique est une aide appréciable dans les phases d'expérimentation pour éviter un travail fastidieux. Il est toujours possible de partager les calculs entre les élèves, de les centraliser puis de les mettre en commun en utilisant le rétroprojecteur, mais un tableur est plus adapté.

2-1 - L'EXPERIMENTATION SUR LE SUPPORT TABLEAU DEBUTE PAR UNE LECTURE :

	Prix d'1 chou fleur	Quantité de choux fleurs vendus sur le marché	
+ 0,10	0,50	4500	- 120
+ 0,20	0,60	4380	- 240
+ 0,20	0,80	4140	- 240
+ 0,20	1,00	3900	- 240
+ 0,30	1,20	3660	- 360
+ 0,30	1,50	3300	- 360
+ 0,20	1,80	2940	- 240
+ 0,40	2,00	2700	- 480
+ 0,60	2,40	2220	- 720
	3,00	1500	

Chaque fois que l'on augmente le prix de 0,10 la quantité diminue de 120

	Prix d'1 chou fleur	Quantité de choux fleurs vendus par le commerçant	
+ 0,10	0,50	80	+ 4
+ 0,20	0,60	84	+ 8
+ 0,20	0,80	92	+ 8
+ 0,30	1,00	100	+ 8
+ 0,30	1,20	108	+ 12
+ 0,30	1,50	120	+ 12
+ 0,20	1,80	132	+ 8
+ 0,40	2,00	140	+ 16
+ 0,60	2,40	156	+ 24
	3,00	180	

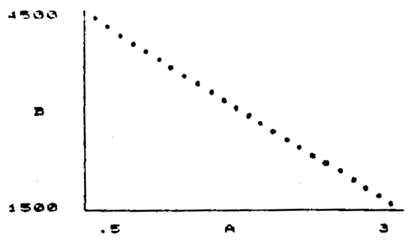
Chaque fois que l'on augmente le prix de 0,10 la quantité augmente de 4.

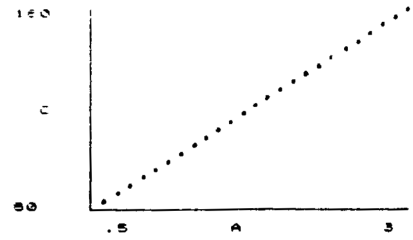
Cette règle s'implante très facilement sur le tableur, ce qui donnera en même temps un tableau plus complet sans calcul supplémentaire :

Entrée en table à pas constant :
+ 0,10 pour le prix à partir de 0,50 en colonne A
- 120 pour la vente marché à partir de 4 500 en colonne B
+ 4 pour la vente commerçant à partir de 80 en colonne C

A	B	C
0.50	4500.00	80.00
0.60	4380.00	84.00
0.70	4260.00	88.00
0.80	4140.00	92.00
0.90	4020.00	96.00
1.00	3900.00	100.00
1.10	3780.00	104.00
1.20	3660.00	108.00
1.30	3540.00	112.00
1.40	3420.00	116.00
1.50	3300.00	120.00
1.60	3180.00	124.00
1.70	3060.00	128.00
1.80	2940.00	132.00
1.90	2820.00	136.00
2.00	2700.00	140.00
2.10	2580.00	144.00
2.20	2460.00	148.00
2.30	2340.00	152.00
2.40	2220.00	156.00
2.50	2100.00	160.00
2.60	1980.00	164.00
2.70	1860.00	168.00
2.80	1740.00	172.00
2.90	1620.00	176.00
3.00	1500.00	180.00

La représentation graphique ponctuelle de la colonne B (resp C) en fonction de la colonne A est une suite de points alignés :





Cette représentation graphique ponctuelle contient les informations des tableaux et elles seules. Ce graphique est une **représentation visuelle économique du tableau** et en permet une **lecture globale**. Il est différent de celui qu'on aurait pu obtenir en expérimentant sur le support graphique au lieu de faire l'expérimentation sur le support tableau. En effet, faire le graphique à la main fait intervenir une interaction ponctuelle entre les colonnes. Le travail se fait ligne par ligne. La question de la règle qui permet de passer du prix de vente à la quantité vendue est posée tout de suite comme dans le point précédemment étudié. Cette question n'est pas suggérée de la même façon si on raisonne colonne par colonne sur le support tableau.

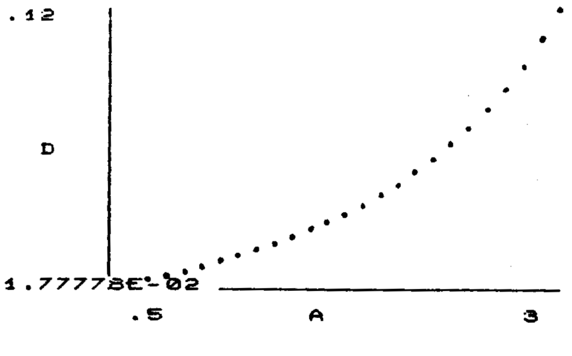
L'interprétation de l'alignement des points sur le graphique ponctuel donné par le tableur se fait "colonne par colonne" c'est-à-dire un pas constant sur chacune des deux colonnes donne un alignement.

Ceci constitue une première formulation de reconnaissance de la droite sur le support tableau, s'appuyant sur le modèle géométrique de la droite qui fait partie des acquis.

L'outil informatique conduit à pousser l'expérimentation plus loin sans pratiquement de "frais supplémentaires".

- Comment évolue la vente du commerçant par rapport à la vente du marché en fonction du prix ? Il suffit de faire faire au tableur le calcul D = C/B

A	D
0.50	0.018
0.60	0.019
0.70	0.021
0.80	0.022
0.90	0.024
1.00	0.026
1.10	0.028
1.20	0.030
1.30	0.032
1.40	0.034
1.50	0.036
1.60	0.039
1.70	0.042
1.80	0.045
1.90	0.048
2.00	0.052
2.10	0.056
2.20	0.060
2.30	0.065
2.40	0.070
2.50	0.076
2.60	0.083
2.70	0.090
2.80	0.099
2.90	0.109
3.00	0.120

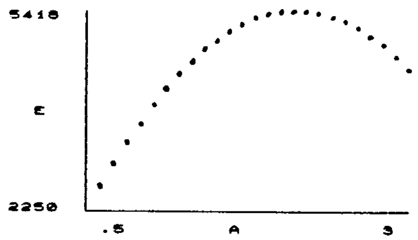


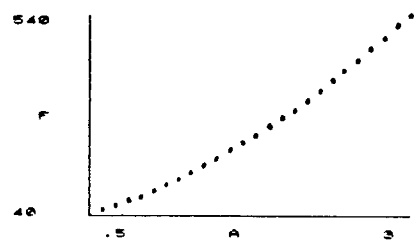
Cette fois, les points ne sont plus alignés. La colonne D n'est pas à pas constant. Comment est-elle construite ?

- Quel est le chiffre d'affaires du commerçant ? du marché ?

On calcule E = A x B et F = A x C

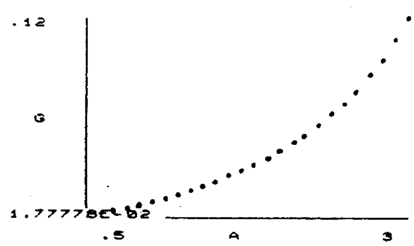
A	E	F
0.500	2250.00	40.00
0.600	2628.00	50.40
0.700	2982.00	61.60
0.800	3312.00	73.60
0.900	3618.00	86.40
1.000	3900.00	100.00
1.100	4158.00	114.40
1.200	4392.00	129.60
1.300	4602.00	145.60
1.400	4788.00	162.40
1.500	4950.00	180.00
1.600	5088.00	198.40
1.700	5202.00	217.60
1.800	5292.00	237.60
1.900	5358.00	258.40
2.000	5400.00	280.00
2.100	5418.00	302.40
2.200	5412.00	325.60
2.300	5382.00	349.60
2.400	5328.00	374.40
2.500	5250.00	400.00
2.600	5148.00	426.40
2.700	5022.00	453.60
2.800	4872.00	481.60
2.900	4698.00	510.40
3.000	4500.00	540.00





- Comment évolue le chiffre d'affaires du commerçant par rapport au chiffre d'affaires du marché en fonction du prix de vente ?

A	G
0.50	0.018
0.60	0.019
0.70	0.021
0.80	0.022
0.90	0.024
1.00	0.026
1.10	0.028
1.20	0.030
1.30	0.032
1.40	0.034
1.50	0.036
1.60	0.039
1.70	0.042
1.80	0.045
1.90	0.048
2.00	0.052
2.10	0.056
2.20	0.060
2.30	0.065
2.40	0.070
2.50	0.076
2.60	0.083
2.70	0.090
2.80	0.099
2.90	0.109
3.00	0.120



Les graphiques G -> A et D -> A se ressemblent, en effet les colonnes G et D sont indentiques, pourquoi ?

G = F/E ; D = C/B mais F = A x C et E = A x B donc G = A x C / A x B

Donc G = D

Remarquons ici que les images des graphiques ponctuels amènent à examiner les contenus des colonnes G et D. Les contenus numériques des colonnes étant identiques, on étudie comment elles ont été obtenues, on raisonne alors sur des écritures en registres issues du tableur.

Les graphiques ponctuels différents amènent à se poser des questions de modélisation. Certains forment une suite de points alignés d'où l'hypothèse de reconnaissance sur les colonnes du tableau. Pour les produits ou les quotients de colonne, les points ne sont plus alignés. Est-ce que tous les produits se ressemblent ? Est-ce que tous les quotients se ressemblent ? Est-ce que les produits ressemblent aux quotients ?

A ce stade, on essaie de formuler des hypothèses pour reconnaître les produits et les quotients sur le tableau.

Reconnaître le modèle droite sur un tableau, c'est regarder si la différence tabulaire est constante. Est-ce que ce critère est **transférable** ?

Différence tabulaire des colonnes contenant les chiffres d'affaires :

A	E	ΔE
0.50	2250.00	0.00
0.60	2628.00	378.00
0.70	2982.00	354.00
0.80	3312.00	330.00
0.90	3618.00	306.00
1.00	3900.00	282.00
1.10	4158.00	258.00
1.20	4392.00	234.00
1.30	4602.00	210.00
1.40	4788.00	186.00
1.50	4950.00	162.00
1.60	5088.00	138.00
1.70	5202.00	114.00
1.80	5292.00	90.00
1.90	5358.00	66.00
2.00	5400.00	42.00
2.10	5418.00	18.00
2.20	5412.00	-6.00
2.30	5382.00	-30.00
2.40	5328.00	-54.00
2.50	5250.00	-78.00
2.60	5148.00	-102.00
2.70	5022.00	-126.00
2.80	4872.00	-150.00
2.90	4698.00	-174.00
3.00	4500.00	-198.00

A	F	Δ F
0.50	40.00	0.00
0.60	50.40	10.40
0.70	61.60	11.20
0.80	73.60	12.00
0.90	86.40	12.80
1.00	100.00	13.60
1.10	114.40	14.40
1.20	129.60	15.20
1.30	145.60	16.00
1.40	162.40	16.80
1.50	180.00	17.60
1.60	198.40	18.40
1.70	217.60	19.20
1.80	237.60	20.00
1.90	258.40	20.80
2.00	280.00	21.60
2.10	302.40	22.40
2.20	325.60	23.20
2.30	349.60	24.00
2.40	374.40	24.80
2.50	400.00	25.60
2.60	426.40	26.40
2.70	453.60	27.20
2.80	481.60	28.00
2.90	510.40	28.80
3.00	540.00	29.60

Les différences tabulaires ne sont pas constantes, cependant, le tracé de E en fonction de A et de F en fonction de A donnent des points alignés, il est également facile de repérer que E et F sont "à pas constant". D'où l'idée de refaire la différence tabulaire :

A	E	ΔE	ΔΔ E
0.50	2250.00	0.00	0.00
0.60	2628.00	378.00	378.00
0.70	2982.00	354.00	-24.00
0.80	3312.00	330.00	-24.00
0.90	3618.00	306.00	-24.00
1.00	3900.00	282.00	-24.00
1.10	4158.00	258.00	-24.00
1.20	4392.00	234.00	-24.00
1.30	4602.00	210.00	-24.00
1.40	4788.00	186.00	-24.00
1.50	4950.00	162.00	-24.00
1.60	5088.00	138.00	-24.00
1.70	5202.00	114.00	-24.00
1.80	5292.00	90.00	-24.00
1.90	5358.00	66.00	-24.00
2.00	5400.00	42.00	-24.00
2.10	5418.00	18.00	-24.00
2.20	5412.00	-6.00	-24.00
2.30	5382.00	-30.00	-24.00
2.40	5328.00	-54.00	-24.00
2.50	5250.00	-78.00	-24.00
2.60	5148.00	-102.00	-24.00
2.70	5022.00	-126.00	-24.00
2.80	4872.00	-150.00	-24.00
2.90	4698.00	-174.00	-24.00
3.00	4500.00	-198.00	-24.00

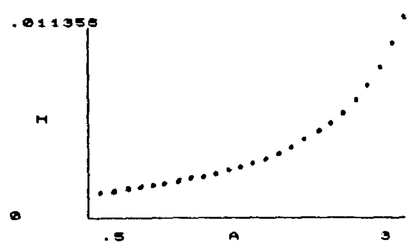
A	F	ΔF	ΔΔ F
0.50	40.00	0.00	0.00
0.60	50.40	10.40	10.40
0.70	61.60	11.20	0.80
0.80	73.60	12.00	0.80
0.90	86.40	12.80	0.80
1.00	100.00	13.60	0.80
1.10	114.40	14.40	0.80
1.20	129.60	15.20	0.80
1.30	145.60	16.00	0.80
1.40	162.40	16.80	0.80
1.50	180.00	17.60	0.80
1.60	198.40	18.40	0.80
1.70	217.60	19.20	0.80
1.80	237.60	20.00	0.80
1.90	258.40	20.80	0.80
2.00	280.00	21.60	0.80
2.10	302.40	22.40	0.80
2.20	325.60	23.20	0.80
2.30	349.60	24.00	0.80
2.40	374.40	24.80	0.80
2.50	400.00	25.60	0.80
2.60	426.40	26.40	0.80
2.70	453.60	27.20	0.80
2.80	481.60	28.00	0.80
2.90	510.40	28.80	0.80
3.00	540.00	29.60	0.80

D'où l'hypothèse :

La différence tabulaire de la différence tabulaire d'un produit de deux colonnes à pas constant est constante.

En faisant la même pour les quotients :

A	D ou G	ΔD ou ΔG
0.50	0.018	0.0000
0.60	0.019	0.0014
0.70	0.021	0.0015
0.80	0.022	0.0016
0.90	0.024	0.0017
1.00	0.026	0.0018
1.10	0.028	0.0019
1.20	0.030	0.0020
1.30	0.032	0.0021
1.40	0.034	0.0023
1.50	0.036	0.0024
1.60	0.039	0.0026
1.70	0.042	0.0028
1.80	0.045	0.0031
1.90	0.048	0.0033
2.00	0.052	0.0036
2.10	0.056	0.0040
2.20	0.060	0.0043
2.30	0.065	0.0048
2.40	0.070	0.0053
2.50	0.076	0.0059
2.60	0.083	0.0066
2.70	0.090	0.0075
2.80	0.099	0.0085
2.90	0.109	0.0098
3.00	0.120	0.0114



Cette fois, la différence tabulaire n'est pas à pas constant. Le graphique ponctuel a une forme qui ressemble au graphe de D ou G en fonction de A. On retient que :

L'hypothèse sur les différences tabulaires émise pour les produits n'est pas valable pour les quotients.

Une hypothèse de reconnaissance des produits de droites sur le support tableau a été formulée, cependant, les graphiques correspondant aux deux produits ne se ressemblent pas. Peut-on reconnaître des produits de droites sur un graphique ? Cette question amène à porter le problème sur le **support graphique** et en conséquence, à formuler le passage d'une colonne à une autre colonne.

2-2 - FORMULER DES CRITERES DE RECONNAISSANCE DU MODELE DROITE SUR LES DIFFERENTS SUPPORTS

Des critères de reconnaissance sont formulés sur les supports tableau et graphique. Reste à formuler un critère de reconnaissance sur le support formule. C'est le passage d'une colonne à une autre qui va le fournir. Pour un public non algébrisé en effet, on passe d'une colonne à une autre par une multiplication suivie d'une addition, c'est le langage des opérateurs qui se traduit en écriture algébrique par y = ax + b.

Notons ici une spécificité de la méthode globale :

L'algèbre n'apparaît pas comme une activité gratuite et autonome, mais comme une économie d'écriture ou de pensée dans la résolution de problèmes.

Le support algèbre est rarement utilisé seul, il est pratiquement toujours introduit en situation et en interaction avec les supports graphique et tableau et le support "programme de calcul" (opérateur ou algèbre des registres).

Plutôt que des formules algébriques apprises par coeur du type :

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad \text{Voire det} \begin{vmatrix} x - x_0 & x_i - x_0 \\ y - y_0 & y_i - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

qui se trouvent dans les manuels scolaires, la formule est construite de façon raisonnée à partir des supports tableau ou graphique.

Sur le support tableau :

	x	y	
	0,50	80	
	0,60	84	
+ 0,20	0,80	92	+ 8

$$a = \frac{8}{0{,}20} = 40$$

$$\boxed{0{,}60} \xrightarrow{\times 40} \xrightarrow{+ b} \boxed{84}$$

b = 84 - 24 = 60

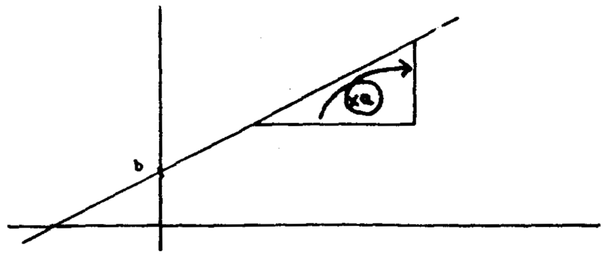
	x	y	
- 0,10	0	60	- 4
- 0,10	0,10	64	- 4
- 0,10	0,20	68	- 4
- 0,10	0,30	72	- 4
- 0,10	0,40	76	- 4
- 0,10	0,50	80	- 4
+ 0,10	0,60	84	+ 4

On retrouve,

on lit

la formule y = 40 x + 60

Sur le support graphique :



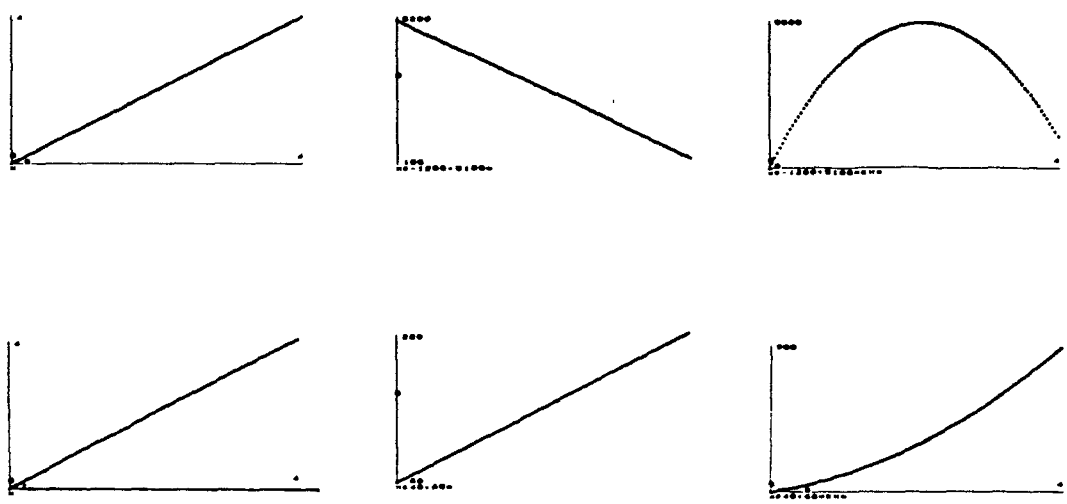
Les critères de reconnaissance du modèle droite sur les trois supports fournissent des conditions nécessaires et suffisantes équivalentes.

2-3 - CONSTRUIRE LE MODELE ASSOCIE A DES PRODUITS DE DROITE

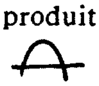
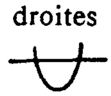
Dans la phase d'expérimentation de la situation d'ancrage "les choux-fleurs", une hypothèse de reconnaissance d'un produit de droites sur le support tableau a été formulée. Cette hypothèse est-elle un critère ?

Les produits de droites forment-ils une "famille" ? Comment les reconnaître sur les supports graphique et formule ? Il est alors nécessaire d'élargir **le champ d'expérimentation au support graphique**. Le logiciel outil "Calculette de courbes" (cf Chap VII) est particulièrement adapté à cette expérimentation.

Dans un premier temps, on essaie des produits de droites en lien avec la situation d'ancrage.



Après une expérimentation plus large, il s'avère que suivant que les pentes des droites sont de même signe ou de signe contraire, les courbes sont tournées vers le haut ou vers le bas. Les courbes coupent l'axe des abscisses et on un axe de symétrie. La formule algébrique associée est du type $ax^2 + bx + c$. D'où les critères sur les supports formule et graphique :

Le produit de deux droites a comme formule algébrique $ax^2 + bx + c$ et un graphe de la forme  ou 

Ces critères sont-ils des conditions nécessaires et suffisantes ? Pour répondre, il faut poursuivre l'expérimentation en implantant des trinômes quelconques :

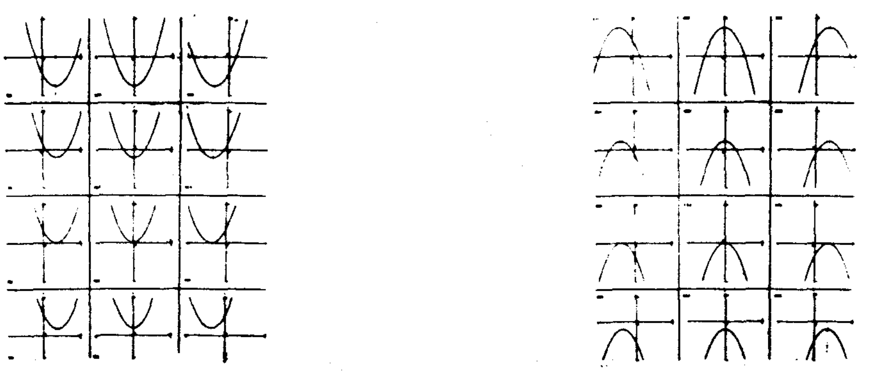
Tous les trinômes ne correspondent pas aux courbes précédentes, toutes les courbes ne coupent pas l'axe des abscisses, mais elles ont toutes un axe de symétrie et elles ont toutes la même forme. On peut les nommer : ce sont des paraboles. **Les courbes correspondant au trinôme $ax^2 + bx + c$ sont des paraboles.**

La famille des produits de deux droites est une sous famille des paraboles. Pour formuler et valider des critères de reconnaissance (ou de rejet) il est nécessaire d'étudier les paraboles comme des objets mathématiques nécessaires.

L'outil informatique favorise cette étude par une approche expérimentale et une visualisation (chap VII et VIII).

Les critères de reconnaissance (ou de rejet) sur les trois supports peuvent alors être énoncés.

Tableau : Sur une table à pas constant, la différence tabulaire seconde est constante.
Formule : c'est un trinôme $ax^2 + bx + c$
Graphique : c'est une courbe de la famille :



avec la possibilité de reconnaître la courbe suivant le signe de a, b, c, et en particulier la possibilité ou non de factoriser.

A la différence du modèle droite pour lequel les critères sur les différents supports étaient reconnus équivalents, dans le cas du modèle parabole, les critères ne sont pas reconnus équivalents : quel est le lien entre la différence tabulaire, la différence tabulaire seconde constante et la formule algébrique $ax^2 + bx + c$ ou la courbe ? Ce n'est que dans une étape ultérieure que l'équivalence des critères sera démontrée en se servant d'un outil théorique plus performant : la dérivation.

Nous remarquons là encore une spécificité de la méthode globale. Cette absence de démonstration de l'équivalence et de fait, la non-justification théorique de ce critère de reconnaissance n'empêche pas d'opérationnaliser le modèle parabole en l'utilisant pour résoudre des problèmes.

Nous avons donc à partir d'une situation, explicité la construction du modèle parabole. Cette construction s'est faite par paliers successifs d'expérimentation, de formulation d'hypothèses, de validation pour arriver à définir des critères de reconnaissance (ou de rejet) du modèle sur les trois supports. Au cours de l'expérimentation, avoir vu des tableaux ou des courbes qui n'entrent pas dans le modèle parabole a servi à mieux ancrer le modèle en permettant la discrimination.

Avoir vu d'autres courbes (quotient de droites), avoir formulé des critères qui ne sont pas au stade actuel des conditions nécessaires et suffisantes (différences tabulaires) induisent d'autres activités exploratoires qui pourront donner lieu à modélisation et à théorisation.

Notons également qu'au cours de la construction des modèles, on est passé de tableaux de données numériques au concept de variable (c'est le prix de vente qui détermine la quantité vendue et le chiffre d'affaires) et au concept de relation fonctionnelle entre la quantité vendue ou le chiffre d'affaires et le prix de vente. Ce concept est apparu en passant au support graphique et à l'écriture algébrique.

Le tryptique TGF n'est pas lié à la modélisation fonctionnelle. Par exemple la construction du modèle probabiliste de la loi binomiale se fera sans formulation fonctionnelle, par deux approches statistique et probabiliste liées à des supports différents : tableaux, images mentales, abaques. La construction de la loi binomiale est le troisième point clé de cette première étape de la monographie.

3 -INTRODUCTION DE LA LOI BINOMIALE DANS LE CADRE DE LA METHODE GLOBALE A L'AIDE DU TRYPTIQUE TABLEAU - GRAPHIQUE - FORMULE

3-1 INTERACTION STATISTIQUE - PROBABILITE

Pour introduire la loi **binomiale**, deux approches complémentaires sont utilisées :

- l'approche statistique, mettant en oeuvre des expériences aléatoires liées à la loi binomiale. Cette approche s'appuie essentiellement sur la simulation et sur la statistique descriptive.

- l'approche probabiliste mettant en oeuvre la combinatoire.

Ces deux approches seront d'abord traitées de façon indépendante à partir de deux situations d'ancrage : la Loterie et Cheminement dans la ville de New-York. Puis l'utilisation d'un support commun (chemin sur un quadrillage) conduira à reconnaître les analogies entre les "modèles" sous-jacents à l'approche statistique "Loterie" et à l'approche probabiliste "Ville de New-York".

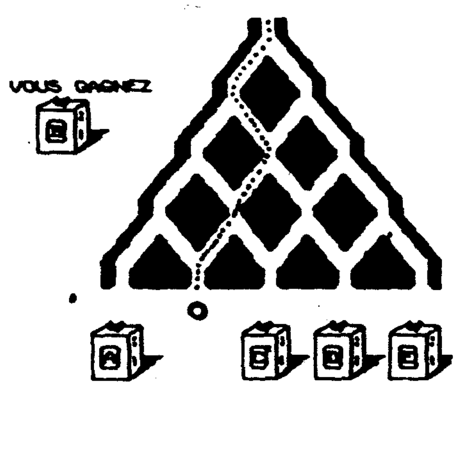
Les activités de mathématisation propres à la méthode globale conduisent naturellement à une interaction continuelle entre statistique et probabilités : nous avons donc une **spirale de modélisations successives avec alternance entre modèle théorique lié aux probabilités et expériences aléatoires liées aux statistiques.**

3-2 -APPROCHE EXPERIMENTALE : LA LOTERIE

3-2-1 -LA SITUATION DE DEPART :

Cette approche démarre directement sans préalable probabiliste ni statistique par un cours/TP construit autour d'un logiciel de simulation d'une loterie de fête foraine [35]

La balle a autant de chances de passer à droite qu'à gauche quand elle rebondit sur un plot.
A chaque partie, on perd sa mise et on gagne le lot sur lequel tombe la balle.



Ce logiciel sert à présenter la situation de départ puis permet de simuler et de visualiser l'expérience aléatoire en fournissant une aide à la modélisation.

Nous ne détaillerons ici que les aspects liés à l'introduction de la loi binomiale. Dans cette approche, l'outil informatique est primordial, les manipulations structurantes qui fondent la loi binomiale sont directement liées à des outils de simulation et de visualisation sur ordinateur.

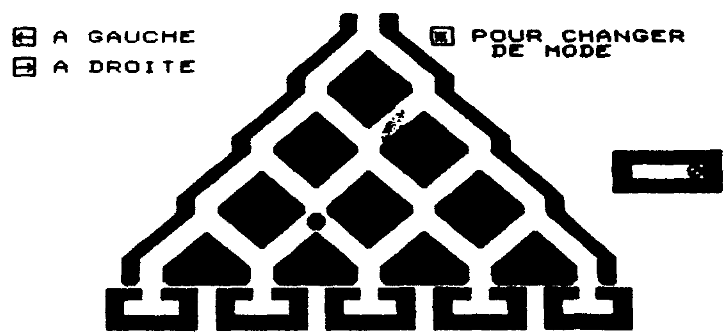
L'informatique amplifie les pratiques (ici le recours à la simulation).

L'informatique revalorise le rôle des images dans les stratégies d'apprentissage.

3-2-2 - SIMULATIONS "MANUELLES"

Dans un premier temps, les élèves construisent une simulation de la loterie à l'aide de divers matériaux : dés, cartes, pièces de monnaie, urnes, tables de nombres au hasard.

Le logiciel "Loterie" sur le mode manuel, enregistre, visualise et comptabilise les résultats de l'expérience manuelle.



La plupart des groupes propose des modèles expérimentaux corrects. Par exemple : pour chaque étage de la loterie, on lance une pièce. Si Pile, à gauche <- . Si face, à droite -> . Pour une partie il faut répéter 4 lancés successifs.

Mais souvent, le désir de gagner du temps conduit à d'autres propositions :

- lancé de quatre dés simultanément avec la règle : pair à droite, impair on va à gauche. Problème : a-t-on le droit de ramasser les dés dans n'importe quel ordre ?
- tirage simultané de quatre boules dans une urne avec la règle, noire à droite, rouge à gauche. Problèmes : est-ce que le fait de ne pas remettre les boules dans l'urne a une influence sur la simulation ? Le nombre de boules au départ joue-t-il un rôle ?

Les manipulations et les discussions soulevées par la construction d'un modèle expérimental de la loterie permettent outre la distinction entre "tirage avec remise" et "tirage sans remise" préfigurant la discrimination entre le modèle binomial et le modèle hypergéométrique, de sensibiliser à la différence entre évènement élémentaire "passer à droite ou à gauche d'un plot" et un évènement plus global "tomber dans telle case".

Une première mise en commun des résultats des simulations manuelles montre une grande diversité dans les résultats. Avant de passer à la simulation par l'ordinateur, la réalisation d'un ensemble homogène d'expériences à l'aide de la **table de nombres au hasard** a le triple but d'exhiber un outil simple et performant à usage professionnel, de démystifier le fonctionnement de l'ordinateur et d'avoir rapidement et manuellement un échantillon de taille "raisonnable".

Pour simuler des séries d'échantillons de 20 parties avec une table de nombres au hasard. Les chiffres 0,1,2,3,4 sont associés à passer à gauche et les chiffres 5,6,7,8,9 sont associés à passer à droite.

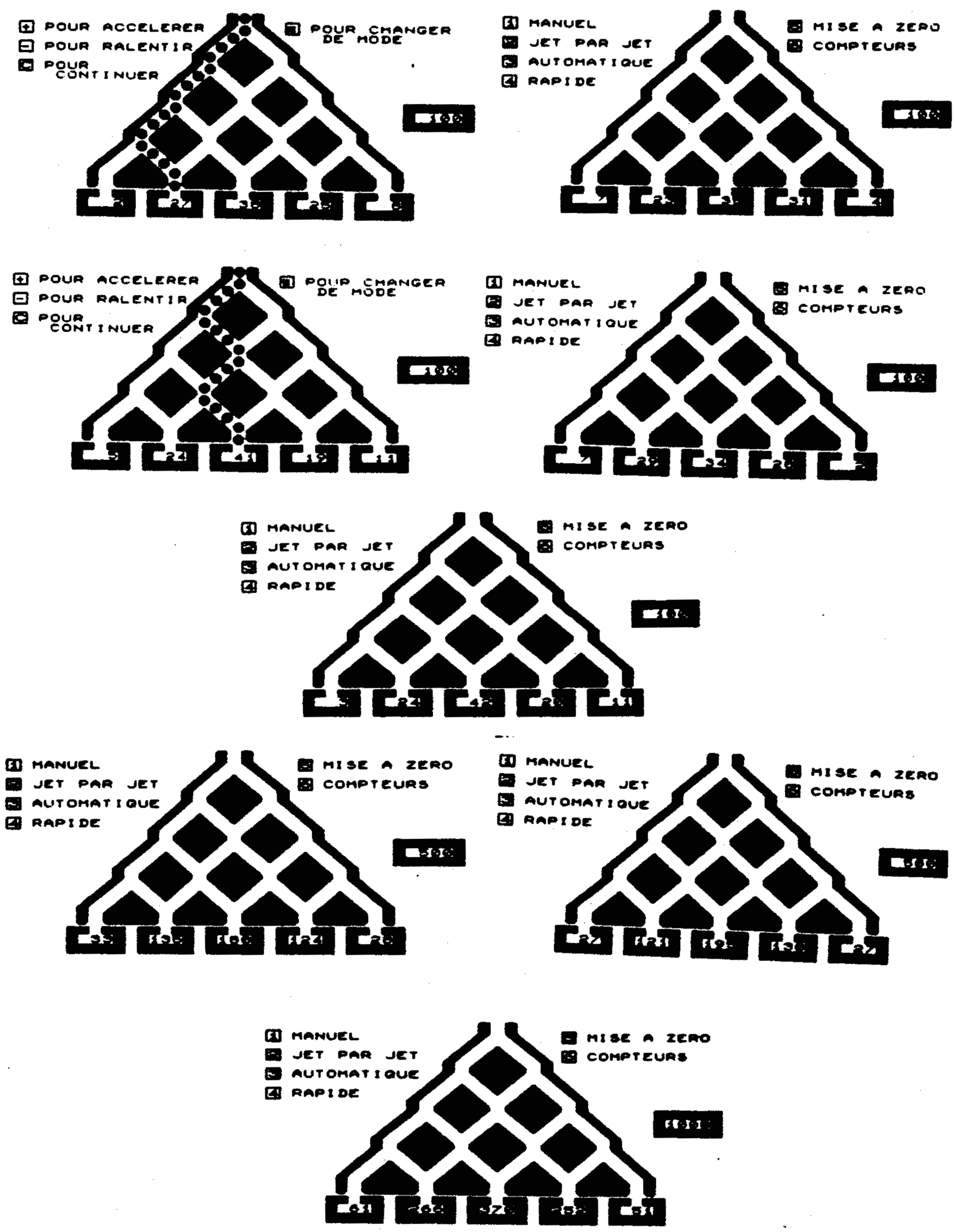
A chaque nombre de 4 chiffres on associe la case atteinte : 8156 est associé à la case D. Par comparaison, les échantillons de 20 parties sont encore relativement variables mais respectent une certaine régularité : les cases A et E sont les moins fréquentes, la case C est la plus fréquente. Les regroupements de 100 parties respectent mieux cette régularité.

3-2-3 - SIMULATION A L'AIDE DE L'ORDINATEUR

Une simulation sur ordinateur prolonge cette étude. Pour démystifier complètement cette simulation, on exhibe la table de nombres au hasard interne à l'ordinateur grâce à l'instruction : FOR I = 1 TO 20 : PRINT RND : NEXT : L'ordinateur utilise un Pile ou Face électronique basé sur cette table de nombres au hasard, qui se traduit en pseudo-basic par : IF RND < 0.5 THEN "passer à gauche" ELSE "passer à droite"

Les élèves réalisent alors rapidement, grâce à la vitesse de l'ordinateur plusieurs échantillons de 100 parties qui sont regroupées ou des séries de 500 parties ou de 1000 parties en laissant l'ordinateur travailler plus longtemps.

Exemple de document de synthèse obtenu par une classe :



Dans cette phase d'expérimentation, la **visualisation de l'expérience** joue un rôle important pour se faire une **représentation correcte du phénomène.** Pour aider à la visualisation, différentes vitesses de défilement du programme sont prévues, un des modes laissant même une trâce du cheminement de la balle pour bien associer un évènement "tombé dans telle case" à un chemin. Il est important aussi de vivre en direct des "évènements peu probables", grâce à l'ordinateur, le grand nombre d'expériences réalisées fait que, même des évènements assez peu probables tels qu'une longue série de mêmes lots distribués ou une loterie fortement disymétrique, se produisent. Le grand nombre de parties et leur diversité renforce la conviction que chaque partie est indépendante des autres.

Deux questions apparaissent alors :

La première découle de l'observation des échantillons :

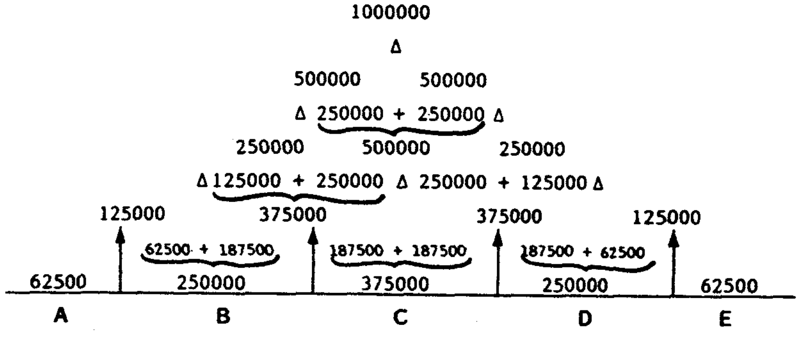
- les échantillons sont différents mais l'ordre de grandeur des résultats est grossièrement le même, pouvait-on prévoir en fonction du nombre de parties l'ordre de grandeur approximatif d'un nombre de lots de chaque type distribué ?

- la deuxième découle de l'observation des variations du nombre de lots d'un type (A,B,C,D ou E) dans les différents échantillons. Sur 100 parties , le lot E a été distribué 8, 4, 11, 2 ou 11 fois, par ailleurs, alors qu'on s'attendait plutôt à avoir une symétrie, sur l'échantillon de 1000 parties, le lot E a été distribué 51 fois alors que le lot A l'a été 61 fois. Quel est l'ordre de grandeur prévisible du nombre de lots d'un type distribuę ? Dans quelle **"fourchette"** ce nombre de lots peut-il varier ? Notons que la notion de "fourchette" est ici introduite expérimentalement, nous la reprendrons par la suite.

3-2-4 - PASSAGE AU MODELE PROBABILISTE

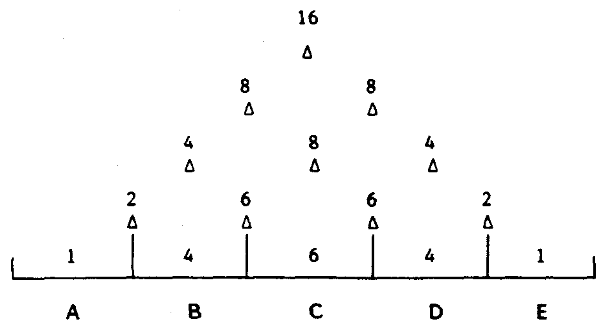
La première question amène à faire un premier passage des statistiques vers les probabilités. Pourtant ce passage délicat ne pose pas trop de problèmes car la phase d'expérientation a bien mis en place le **"vrai hasard"** intervenant dans les expériences aléatoires. On se propose donc de lancer 1 000.000 boules et d'essayer d'imaginer, comment elles vont se répartir dans les cases, du moins au niveau de l'ordre de grandeur. Le nombre 1 000 000 est suffisamment grand pour dissuader, même sur ordinateur, de tenter une simulation réelle.

En raisonnement sur les ordres de grandeur, à sur chaque plot il y a sensiblement la moitié des boules qui passe de chaque côté (à de petites variations près dûes au vrai hasard).



En terme d'ordre de grandeur, on peut donc s'attendre à avoir environ : 6,25 % de lots A, 25 % de lots B, 37,5 % de lots C, 25 % de lots D, 6,25 % de lots E.

Les probabilités sont donc introduites comme un "**hasard théorique**" donnant l'ordre de grandeur du "**vrai hasard**" pour de grands échantillons. Le "**hasard théorique**" associé aux probabilités est un hasard "**trop parfait**". Il n'est plus alors nécessaire de raisonner sur des grands nombres, par exemple ici, 16 boules suffisent à décrire le "**modèle probabiliste**" de la loterie.



$$P(A) = \frac{1}{16} \; ; \; P(B) = \frac{4}{16} \; ; \; P(C) = \frac{6}{16} \; ; \; P(D) = \frac{4}{16} \; ; \; P(E) = \frac{1}{16}$$

Les instituts de sondage utilisent pour tester la popularité des hommes politiques, des échantillons de l'ordre de 1000 personnes. En comparant à l'échantillon de 1000 obtenu par simulation, on s'aperçoit que les résultats expérimentaux peuvent s'éloigner de plus de 1 % du résultat théorique ; ici 26,6 % pour le lot B dans la simulation pour 25 % en théorie. Cette observation conduit à s'interroger sur la validité d'affirmation du type : tel homme politique a gagné ou perdu 1 point de popularité.

3-2-5 - SIMULATION DE L'EVOLUTION DU NOMBRE DE LOTS GAGNES : RECHERCHE EXPERIMENTALE D'UN INTERVALLE DE CONFIANCE POUR LA LOI BINOMIALE B (P,N).

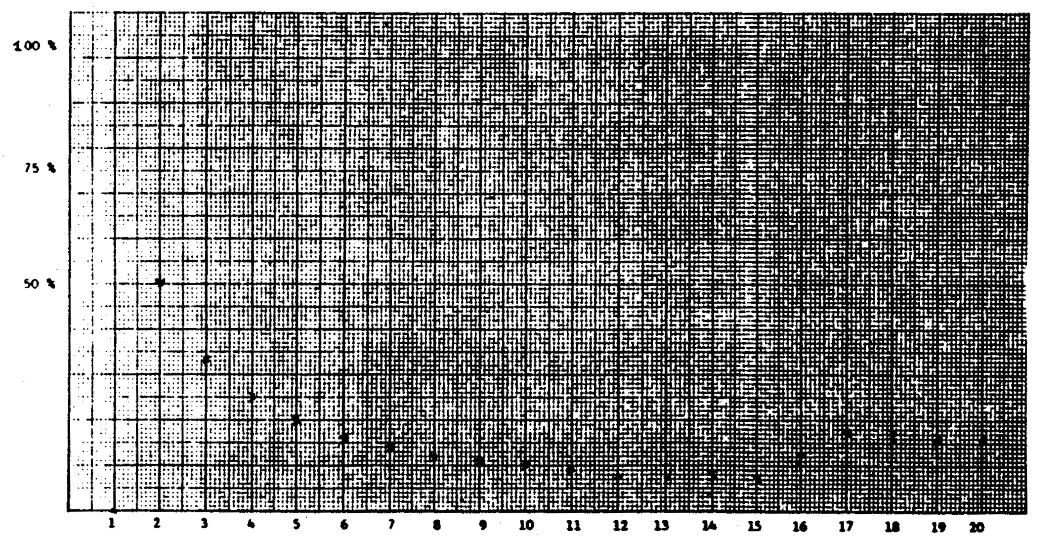
Par exemple, étudions, pour un ensemble de parties, l'évolution du pourcentage de lots B distribués. Le modèle probabiliste donne 25 % de chances de gagner ce type de lots. La simulation "plot par plot" qui nécessite 4 tirages successifs de "Pile ou Face", est donc remplacée par un tirage unique dans une urne représentant le "modèle théorique" de la loterie : il suffit de 16 boules. Si l'on s'intéresse uniquement à un type de lot, par exemple ici les lots B, deux types de boules suffisent, 25 % d'entre elles représentant les lots B.

Le passage des tirages successifs (4 fois 1 chance sur 2) au tirage unique (1 chance sur 4 pour le lot B), comporte une réelle difficulté qu'il ne faut pas escamoter, l'équivalence des deux simulations n'est pas évidente pour les élèves et même pour les enseignants. On quitte le domaine sécurisant des cas équiprobables pour celui des choix pondérés.

Le modèle théorique (Probabilité) simplifie donc à ce stade le modèle expérimental et va donc permettre de faire des statistiques, non plus sur un évènement élémentaire, répartition des lots mais sur un évènement plus complexe : évolution du pourcentage de lots B au cours d'un ensemble de N parties et variation de cette évolution en répétant l'expérience. Avant d'implanter la simulation sur ordinateur, il est important de faire une première simulation manuelle et de bien mettre en place le support graphique permettant une visualisation de l'expérience.

exemple de documents obtenus par les élèves

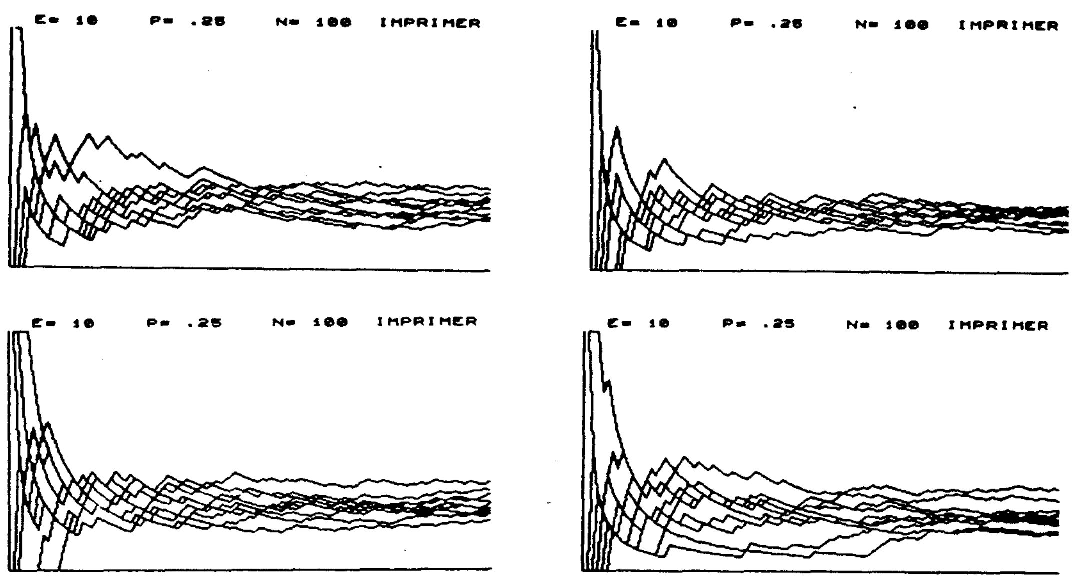
Numéro de la partie	Résultat	Total lot B distribué	Pourcentage Lot B
1	R	0	0
2	B	1	0,5
3	R	1	0,333
4	R	1	0,25
5	R	1	0,2
6	R	1	0,166
7	R	1	0,142
8	R	1	0,125
9	R	1	0,111
10	R	1	0,1
11	R	1	0,090
12	R	1	0,083
13	R	1	0,076
14	R	1	0,071
15	R	1	0,066
16	B	2	0,125
17	B	3	0,176
18	R	3	0,166
19	R	3	0,157
20	R	3	0,15



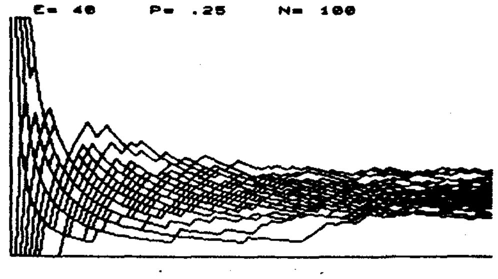
Une simulation sur ordinateur permet mieux d'expérimenter et de visualiser l'influence des paramètres, L'imagiciel Loi des Grands Nombres "LGN" qui va tracer automatiquement la visualisation de E (nombre d'essais) ensembles de N parties avec une chance P de gagner le lot.

Première simulation : tracer 10 fois l'évolution du pourcentage de lots B gagnés au cours de séries de 100 parties. Les paramètres sont donc E = 10 : P = 0,25 : N = 100. L'ordinateur trace sur chaque poste, 10 courbes chacune associée à un essai de 100 parties. Ces courbes se tracent successivement, en se superposant elles représentent l'évolution du pourcentage de lots distribués pendant les 100 parties.

En comparant ces courbes grâce à l'échange-écran du nanoréseau et en les transférant par copie-écran sur imprimante puis sur rétroprojecteur, on obtient un ensemble d'images qui contient pratiquement toutes les informations sous-jacentes à la Loi des Grands Nombres.

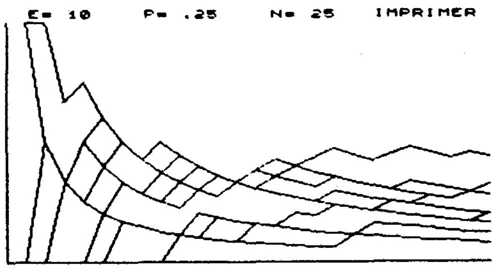


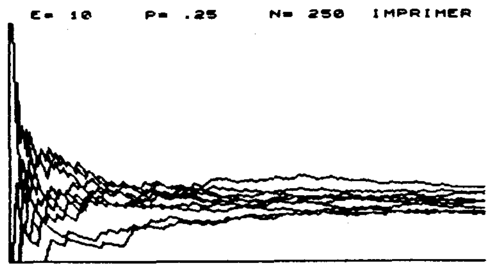
Superposition sur rétroprojecteur

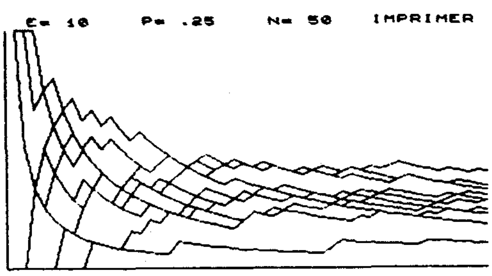


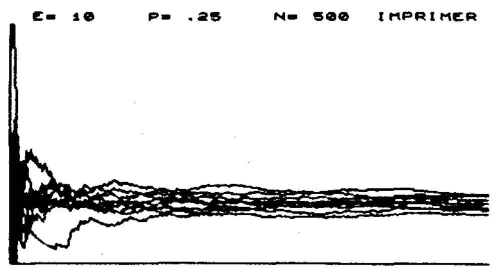
Après cette première simulation, on construit un **protocole d'expérimentation** de Loi des Grands Nombres en faisant varier les paramètres les uns après les autres.

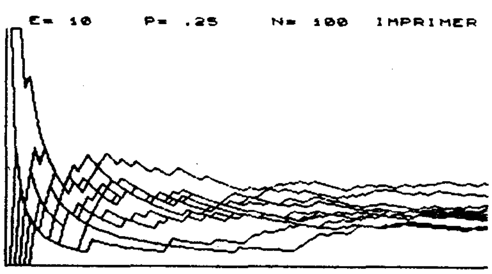
- Influence du nombre de parties à nombre d'essais et chance de gagner constants (N varie de 25 à 1000) :

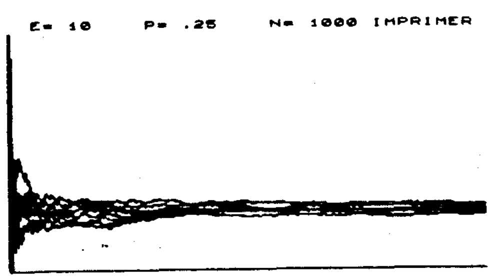




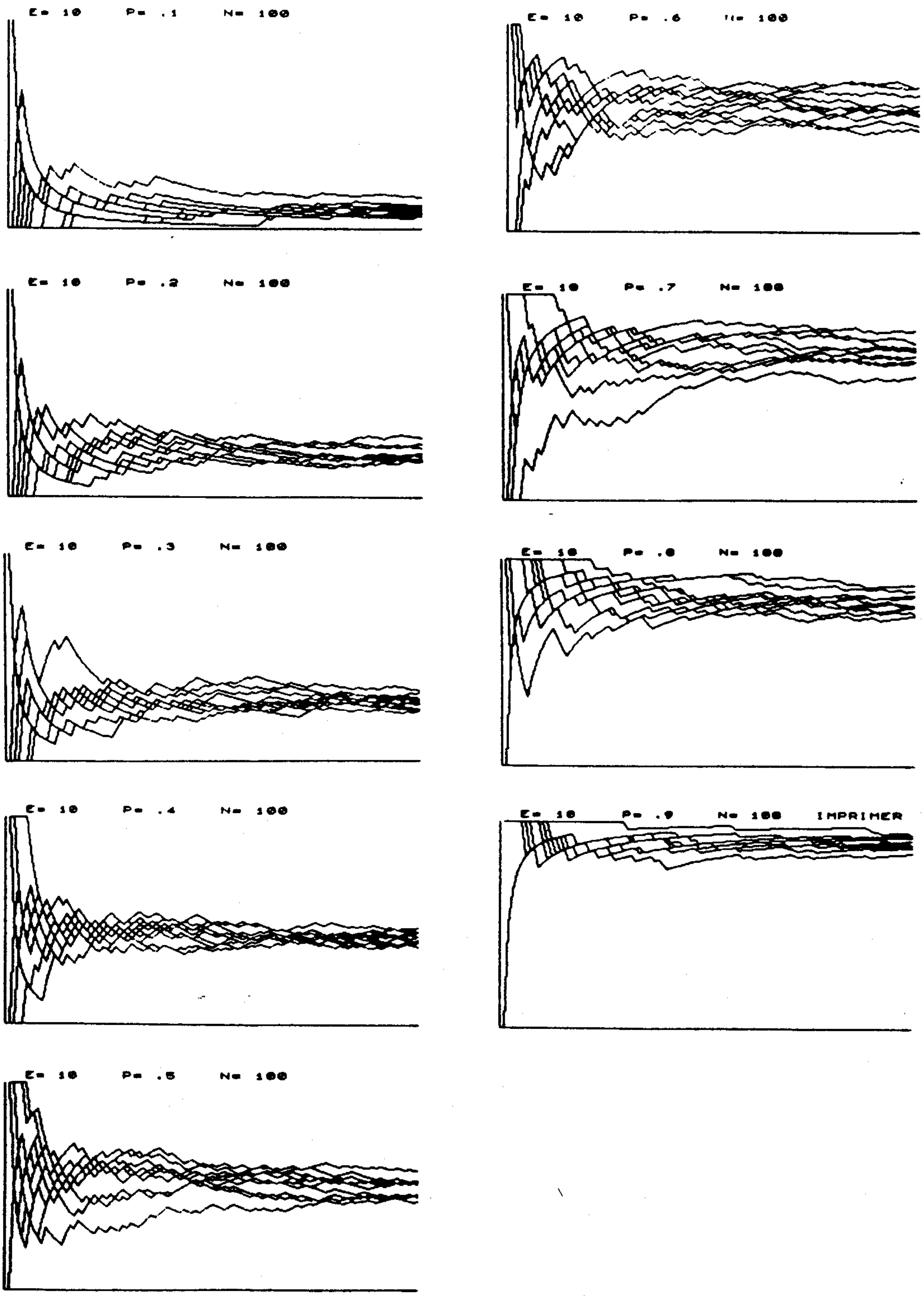




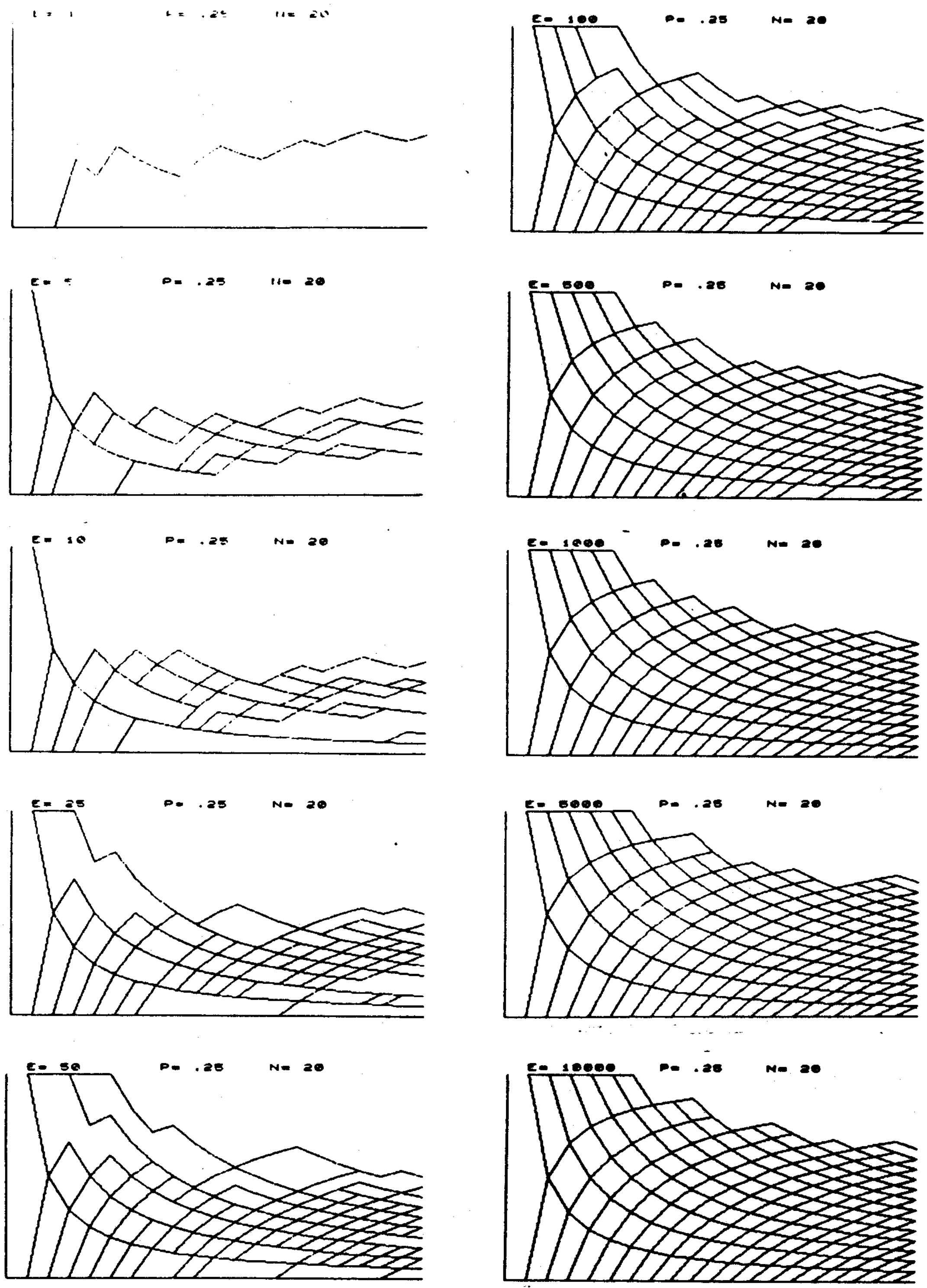




- Influence de la probabilité de gagner le lot. P varie de 0,1 à 0,9 :

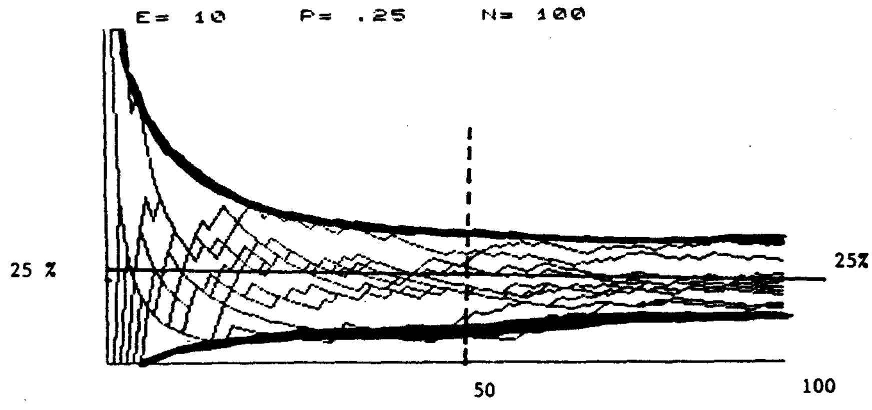


- Influence du nombre d'essais. E varie de 1 à 10 000 :



L'observation des résultats permet de formuler que :

- presque toutes les courbes restent dans une "zone de sécurité" qui a toujours à peu près la même forme :



- plus le nombre de parties N est grand, plus la "zone de sécurité" s'écrase sur la droite correspondant à la valeur théorique, au début cela s'écrase très vite, ici par exemple jusqu'à 50 et après on ne gagne pratiquement plus rien.

- pour un très grand nombre d'expériences, (E = 20 000) pour de petits nombres de parties (N = 20), le rectangle est entièrement recouvert..

A ce stade du travail, les concepts ne sont pas encore élaborés, mais les élèves se forgent déjà des "objets mentaux". L'approche résolument expérimentale n'exclue pas les questions théoriques, venant souvent des élèves eux-mêmes. Combien d'expériences faut-il pour remplir tout le plan ? Quelle est l'équation de la "courbe de sécurité" ? Pourquoi les sondages d'opinion se font-ils sur 1000 personnes ? Les réponses à ces questions sont souvent prématurées, mais elles ne sont pas occultées pour autant. Ces formulations débouchent qualitativement sur la notion d'intervalle de confiance, de fourchette.

Par une approche quantitative, on recherche donc la zone du plan qui contient presque tous les points des graphiques précédents pour un P et un N fixés.

L'observation des graphiques correspondant à de très grandes valeurs de E, nous a conduit à formuler que pour ne prendre aucun risque, il faut garder tout le rectangle. On se propose donc de prendre un risque R et de chercher pour ce risque (R = 4 %) la zone du plan telle que à chaque abscisse (valeur de N) 2 % de courbes passent au-dessus et 2 % des courbes passent en-dessous, on parle de fourchette à 96 %.

Déterminer cette zone, c'est résoudre le problème suivant :

Pour un nombre de parties fixé (N = 100). Pour une chance de gagner fixée (P = 0,25). Dans quelle fourchette (exprimée en % de lots distribués) a-t-on 96 % de chances d'observer le pourcentage de lots distribués sur 100 parties ?

A ce stade, la résolution théorique est prématurée, mais nous pouvons approcher ce problème grâce à une expérimentation statistique. Cette approche n'est pas à dévaloriser, c'est la "méthode de Monte Carlo", souvent utilisée en recherche opérationnelle [74].

Dans le cas qui nous intéresse, l'informatique rend cette méthode performante. Le logiciel BINEX fournit pour l'expérimentation précédente, la série statistique du nombre de lots distribués à chaque essai, puis le tableau classé associé.

Recherche de la fourchette à 96 % E = 100 N = 50 P = 0,25

```
 8  7  11  14  11  8  9  11  15  10  9  15  13  19  11  17  15  11  9  19  14  1
3  9  15  13  16  11  12  15  10  12  17  9  15  12  11  12  11  7  9  9  11  14
 10  11  10  6  14  17  8  15  13  10  15  12  12  13  15  12  11  12  16  18
12  19  13  10  20  16  8  13  14  12  17  12  13  14  13  18  14  13  13  9  11
 13  13  13  13  15  8  8  14  9  5  7  19  13  14  13  17  0  0
1        0
2        0
3        0              2 %
4        0
5        1
6        1
7        3
8        6
9        9
10       6
11       12
12       11
13       17
14       9
15       10
16       3
17       5
18       2
19       4
20       1
21       0
22       0              2 %
23       0
24       0
25       0
26       0
27       0
28       0
29       0
30       0
31       0
32       0
33       0
34       0
35       0
36       0
37       0
38       0
39       0
40       0
41       0
42       0
43       0
44       0
45       0
46       0
47       0
48       0
49       0
50       0
```

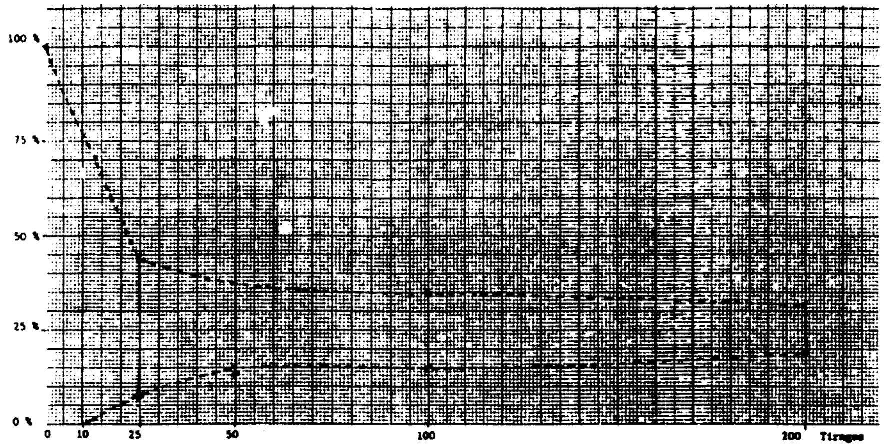
On élimine les 2 cas sur 100 les plus faibles et les 2 cas sur 100 les plus forts. On obtient donc :

96 % dans [7,19] pour 50 parties, soit une fourchette observée de [14 % à 38 %] de lots distribués. Le risque de sortir de cette fourchette est de 4 %.

La recherche de la fourchette correspondant à un nombre de parties différent pour un même risque R = 4% et une même probabilité P = 0,25 donne alors le tableau suivant :

Nombre de parties N	Intervalle contenant 96 % des résultats	Fourchette à 96 % en %
25	[2 ; 11]	[8 ; 44]
50	[7 ; 19]	[14 ; 38]
100	[15 ; 35]	[15 ; 35]
200	[39 ; 64]	[19,5 ; 32]

En reportant ce tableau sur un graphique, on retrouve l'allure de la "zone de sécurité" tracée à partir de l'étude qualitative par LGN.



3-2-6 - REMARQUES SUR L'APPROCHE EXPERIMENTALE

Cette approche illustre parfaitement le "courcircuitage" du formalisme algébrique, rendu possible par l'utilisation de la simulation et de la visualisation sur ordinateur. Sans aucune formule algébrique, grâce aux supports graphique et tableau, les outils pour aborder des tests d'hypothèse et le jugement sur échantillon sont en place.

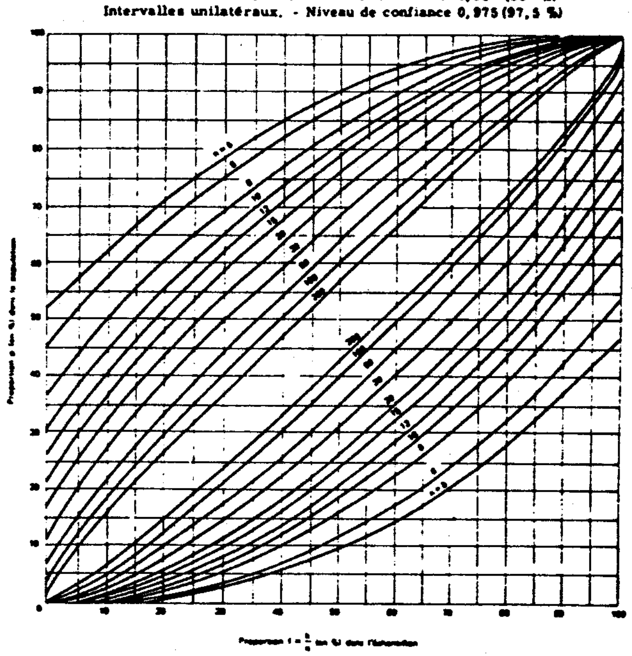
Les résultats fournis sont quasiment ceux obtenus par la théorie classique qui nécessite l'approximation de la loi binomiale par la loi de Gauss et l'utilisation de la fonction de répartition de la loi normale réduite pour obtenir l'intervalle de confiance [m - t ; m + t].

En s'appuyant sur le support graphique plutôt que de se lancer prématurément dans cette théorie, il est possible de traiter les problèmes classiques de statistiques professionnelles en utilisant des abaques du type :

INTERVALLES DE CONFIANCE POUR UNE PROPORTION p

(Loi binomiale)

Intervalle bilatéral. - Niveau de confiance 0,95 (95 %)
Intervalles unilatéraux. - Niveau de confiance 0,975 (97,5 %)

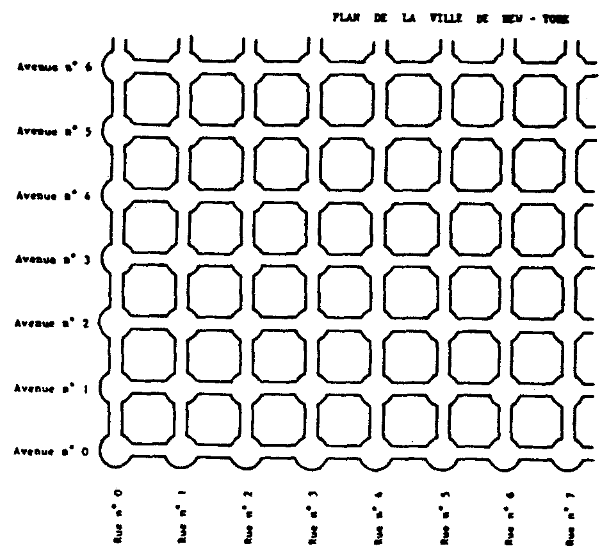


3-3 - APPROCHE COMBINATOIRE : LA VILLE DE NEW-YORK

3-3-1 - LA DECOUVERTE DU MODELE

Celle-ci se fait sans aucun prérequis combinatoire, ni probabiliste, par la mathématisation d'une "situation-modèle", la ville de New-York [96].

Nous parlons de situation modèle, car ici, il n'y a pas de différence entre la situation (dénombrement de chemins sur un quadrillage) et le modèle (Triangle de Pascal).



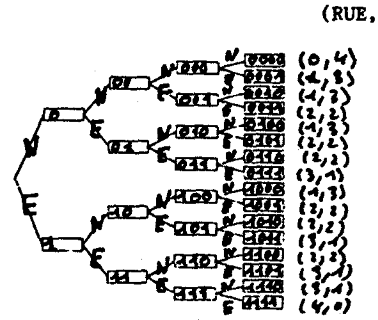
Dans un premier temps, il s'agit d'inscrire dans chaque carrefour le nombre de chemins différents, conduisant de l'origine à ce carrefour (sans retour en arrière).

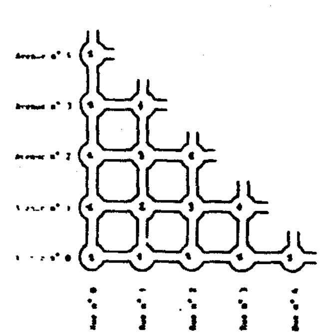
Ce sont les activités liées au codage d'informations sur un support.

Les premiers carrefours sont remplis sans problème, mais rapidement une recherche des méthodes s'impose pour ne pas oublier de chemins et faciliter les calculs.

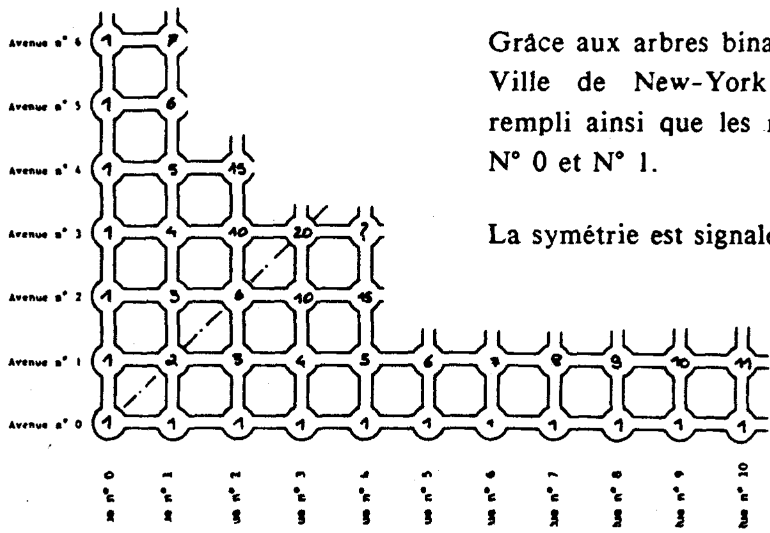
Différents supports sont utilisés : codages alphabétiques du type E N E E avec classement alphabétique pour ne pas oublier de chemins. Codages binaires et classement par ordre croissant (1011 désigne ENEE), arbre de choix pour visualiser les tris et les dénombrements sur des arbres de choix. Cela conduit à chercher globalement, tous les chemins d'une longueur donnée (4).

(RUE, AVENUE)





Cette première étape du travail, correspond à la liaison situation <-> support que nous avons introduite dans le chapitre IV, il faut alors passer à la deuxième phase de la mathématisation en cherchant des règles sous-jacentes au "remplissage de la ville de New-York".



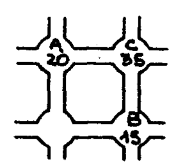
Grâce aux arbres binaires, le début de la Ville de New-York est correctement rempli ainsi que les rues et les avenues N° 0 et N° 1.

La symétrie est signalée.

Deux règles importantes vont alors être découvertes puis démontrées :

- l'arbre binaire permet de montrer que le nombre de chemins de longueur n est 2^n, donc que la somme des nombres d'une diagonale de la Ville de New-York est 2^n.

- pour arriver à un carrefour, il n'y a que deux possibilités, venir du carrefour au-dessous ou du carrefour de gauche. on obtient donc le contenu d'un carrefour et une simple addition des deux carrefours contigus. Cette règle qui n'est autre que celle du triangle de Pascal apparaît naturellement dans ce contexte.

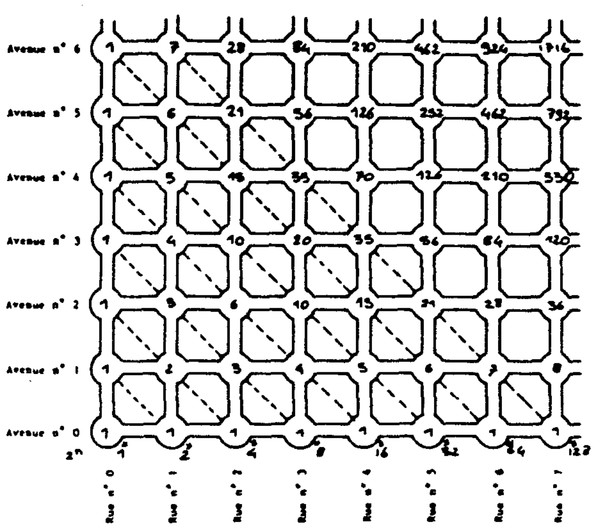


3-3-2 - LES ACTIVITES DE TRANSFERTS

Nous avons fait fonctionner, le schéma :

Situation ⟶	Support ⟶	Modèle
Dénombrement des chemins dans la Ville de New-York	Arbres binaires Ville de New-York	Ville de New-York remplie, avec ses règles de remplissage

Nous sommes en présence d'un cas un peu particulier, car la situation sert de support et devient un modèle d'où le qualicatif de situation-modèle. Elle permet, par transfert de résoudre des problèmes.



Par exemple :

Mon frère vient de se marier et veut 5 enfants.
Combien y-a-t-il de chances pour qu'il ait 3 filles et 2 garçons ?

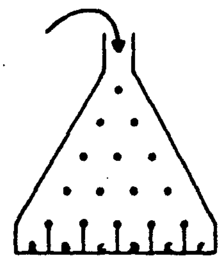
La résolution de ces problèmes est directement effectuée à l'aide du support Ville de New-York remplie. A une famille de 3 filles et 2 garçons on associe un codage du type : E N E E N donc on lit directement qu'il y a 2^5 familles possibles dont 10 avec 3 filles et 2 garçons (carrefour Rue n° 3, Avenue n° 2)

Un exercice mettant en jeu une loterie va provoquer la prise de conscience de l'analogie entre la situation "Loterie" et la situation Ville de New-York.

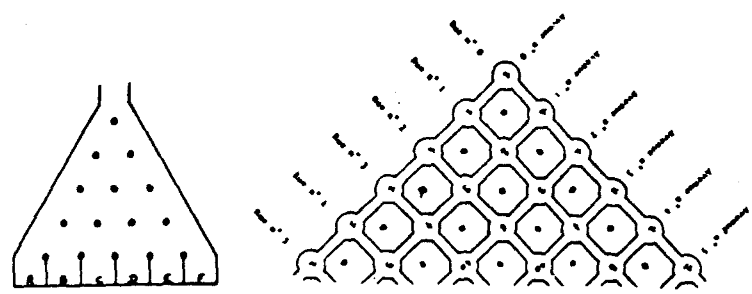
Le jeu de Ping Ball

On laisse tomber en haut du jeu de Ping Ball, une balle de ping pong. Le jeu est tel qu'à chaque niveau, la balle tombe sur un clou et ait une chance sur 2 de passer à gauche et 1 chance sur 2 de passer à droite de ce clou.

On jette 4 000 balles par le haut, combien va-t-on en retrouver en A, en B en C ... ?



Les élèves visualisent l'analogie en basculant la Ville de New-York :



La Loterie à n étages avec une approche statistique (modèle expérimental) et Ville de New-York avec une approche probabiliste (modèle théorique) sont deux approches du même modèle.

A ce moment, et seulement si c'est nécessaire, on peut nommer le modèle triangle de Pascal, en introduisant les C^p_n et les premières notions de probabilités.

3-4 - SYNTHESE ENTRE LES APPROCHES STATISTIQUES ET PROBABILISTES : ETUDE DE LA LOI BINOMIALE B (N,0,5)

3-4-1 - LA SITUATION D'ANCRAGE

A partir d'une situation liée à la Ville de New-York, mais qui donne envie à la fois d'expérimenter (approche statistique) et de théoriser approche probabiliste) la mathématisation va se poursuivre avec une alternance d'aspects statistiques et d'aspects probabilistes.

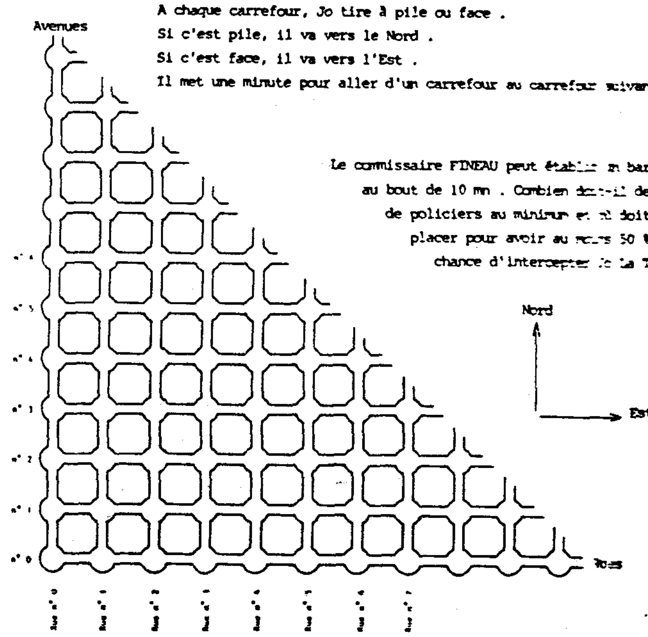
C.U.E.E.P. Lille
Aout 82

F 1033

JO LA TERREUR

Jo La Terreur s'évade de la prison située à l'avenue 0 et à la rue 0 de la ville de New-York . C'est un habitué de l'évasion . Le commissaire FINEAU connait sa tactique .

A chaque carrefour, Jo tire à pile ou face .
Si c'est pile, il va vers le Nord .
Si c'est face, il va vers l'Est .
Il met une minute pour aller d'un carrefour au carrefour suivant .



Le commissaire FINEAU peut établir un barrage au bout de 10 mn . Combien doit-il demander de policiers au minimum et où doit-il les placer pour avoir au moins 50 % de chance d'intercepter Jo La Terreur ?

On peut généraliser le problème :

1-Au bout de "n" minutes, avec "p" policiers, combien de chances "c" a-t-on de l'intercepter ?

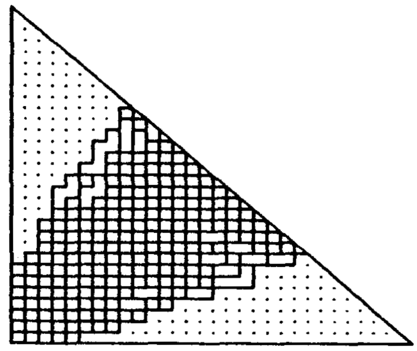
2-Au bout de "n" minutes, combien de policiers "p" doit on appeler pour avoir "c" chances de l'intercepter ?

3-Ayant "p" policiers et voulant "c" chances de l'intercepter, en combien de temps maximum "n" doit être placé le barrage ?

3-4-2 - LE MODELE EXPERIMENTAL .

Avant de passer à l'étude théorique, on reprend une approche expérimentale du même type que celle de la loterie. D'abord une expérimentation manuelle avec de vraies pièces et un enregistrement des résultats sous forme d'un chemin sur papier millimétré, ensuite une simulation et une visualisation sur ordinateur.

L'imagiciel VDN fournit une visualisation des tracés de E évasions et de N minutes.



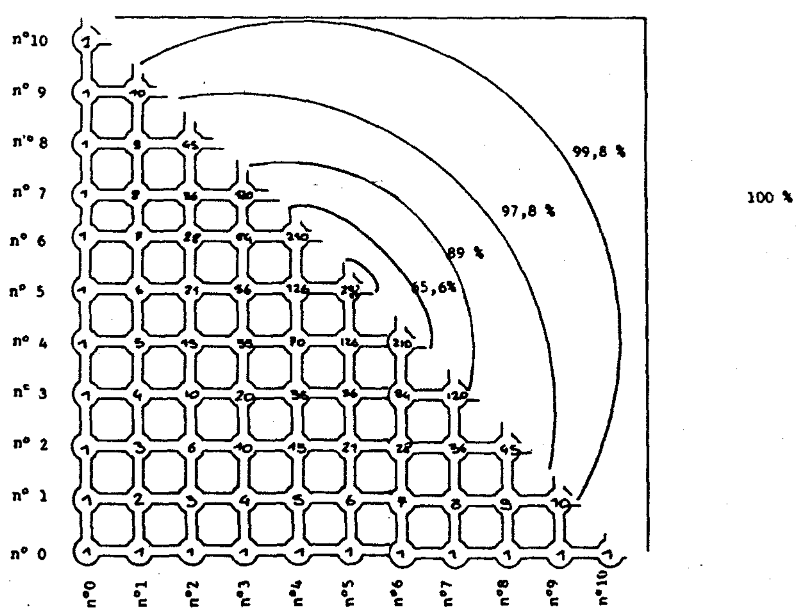
BINEX donne une détermination expérimentale par la méthode de Monte Carlo de la fourchette pour un nombre de minutes et un risque donné.

3-4-3 - LE MODELE THEORIQUE

L'utilisation du modèle "Ville de New-York remplie" fournit un moyen théorique de calculer les fourchettes en introduisant sur le support tableau, les fréquences cumulées croissantes (fonction de répartition de la loi binomiale (10 ; 0,5) :

La lecture directe de la 10ème diagonale de la Ville de New-York, donne le tableau correspondant à 10 minutes et les fourchettes que l'on reporte sur le support Ville de New-York.

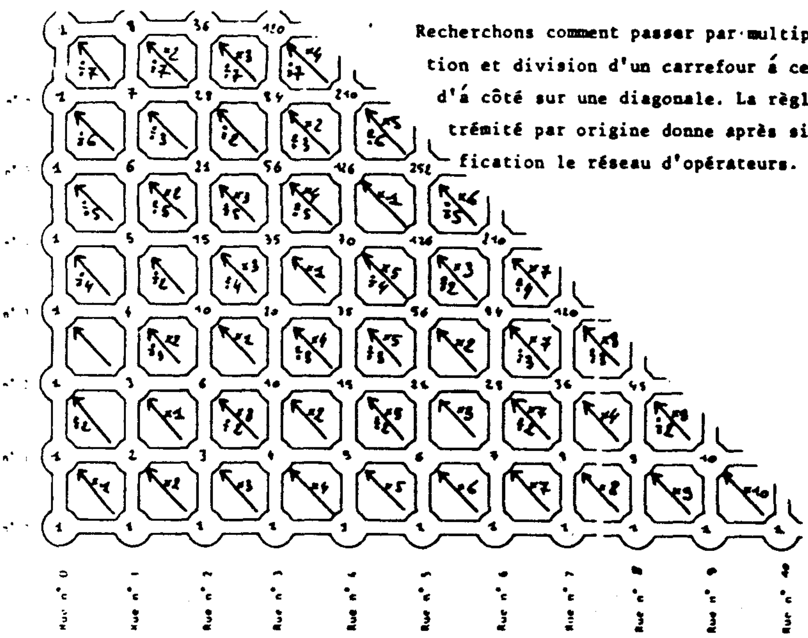
RUE	AVENUE	n	Σ	%	Σ %
0	10	1	1	0,001	0,001
1	9	10	11	0,010	0,010
2	8	45	56	0,044	0,055
3	7	120	176	0,117	0,172
4	6	210	386	0,205	0,377
5	5	252	638	0,346	0,623
6	4	210	848	0,205	0,828
7	3	120	968	0,117	0,945
8	2	45	1013	0,044	0,989
9	1	10	1023	0,010	0,999
10	0	1	1024	0,001	1



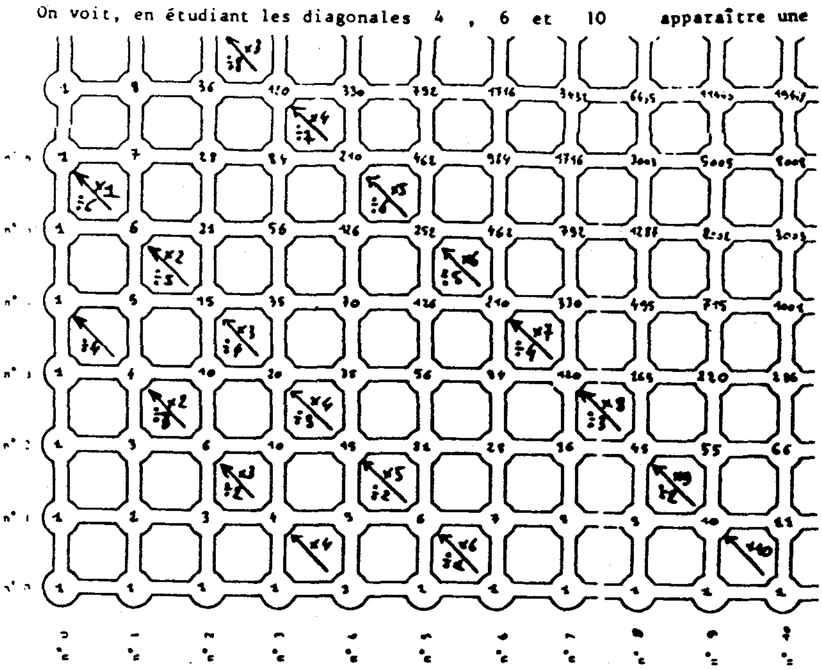
Pour un temps plus long, par exemple 20 minutes, la "Ville de New-York remplie" n'est plus utilisable, se pose alors le problème de chercher un algorithme pour trouver directement les contenus d'une diagonale. La recherche de l'algorithme va directement se faire sur le support Ville de New-York, en visualisant le réseau d'opérateurs permettant de remonter le long d'une diagonale.

Donnons un extrait de l'Analyse de la Ville de New-York [96].

Recherchons comment passer par multiplication et division d'un carrefour á celui d'á côté sur une diagonale. La règle extrémité par origine donne après simplification le réseau d'opérateurs.



On voit, en étudiant les diagonales 4 , 6 et 10 apparaître une règle.



La règle démontrée sur une diagonale s'énonce de deux façons :

- on multiplie par le numéro de la rue du carrefour du départ et on divise par le numéro de l'avenue du carrefour d'arrivée ;
- le premier numérateur est le numéro de la diagonale, le premier dénominateur est 1, le numérateur diminue de 1 et le dénominateur augmente de 1 à chaque fois.

Il suffit d'implanter cet algorithme et de visualiser sur le support tableau le contenu de la 20ème diagonale. :

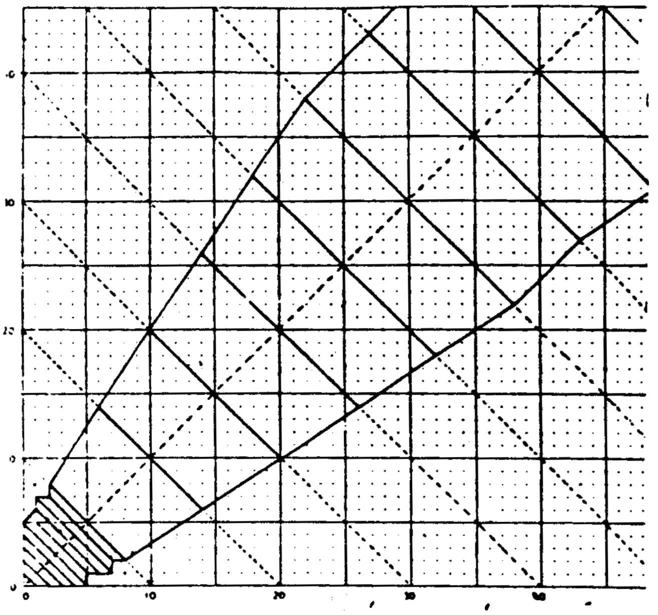
avenue	rue	opérateurs	nombre de chemins arrivant au carrefour	chances d'arriver au carrefour	nombre de chemins arrivant en dessous ou au carrefour	chance d'arrivée en dessous ou au carrefour
0	20		1	0,00000095	1	0,00000095
1	19	×20÷1	20	0,000019	21	0,000020
2	18	×19÷2	190	0 000181	211	0,00020
3	17	×18÷3	1140	0,00108	1351	0,001288
4	16	×17÷4	4845	0,00462	6196	0,0059
5	15	×16÷5	15504	0,01478	21700	0,02069
6	14	×15÷6	38760	0,03696	60460	0,05765
7	13	×14÷7	77520	0,07392	137980	0,13158
8	12	×13÷8	125970	0,12013	263950	0,25172
9	11	×12÷9	167960	0,16017	431910	0,41190
10	10	×11÷10	184756	0,17619	616666	0,58809
11	9	×10÷11	167960	0,16017	784626	0,74827
12	8	×9÷12	125970	0,12013	910596	0,86841
13	7	×8÷13	77520	0,07392	988116	0,94234
14	6	×7÷14	38760	0,03696	1026876	0,97930
15	5	×6÷15	15504	0,01478	1042380	0,99409
16	4	×5÷16	4845	0,00462	1047225	0,99871
17	3	×4÷17	1140	0,00108	1048365	0,99979
18	2	×3÷18	190	0,000181	1048555	0,99998
19	1	×2÷19	20	0,000019	1048575	99999905
20	0	×1÷20	1	0,00000095	1048576	1

÷1048576 ÷1048576

$2^{20} = 1048576$

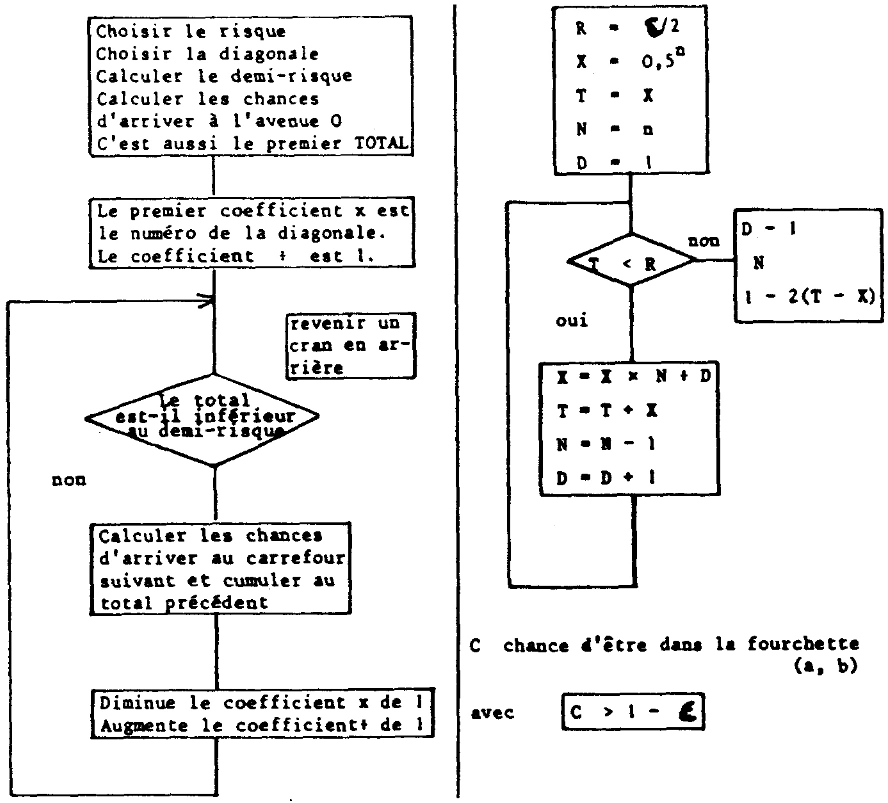
73,682 95,862 99,742

A partir du modèle théorique, on peut réaliser l'abaque associé à un risque donné, par exemple 5 %. La visualisation est analogue à celle obtenue pour le modèle expérimental avec BINEX dans l'approche statistique à partir de la Loterie.



Courbes contenant pour chaque diagonale au moins 50 % de chemins possibles (Attention, ce n'est pas 95% des chemins qui sont à l'intérieur, on peut sortir et rentrer)

Le lien avec les tests d'hypothèse amorcés dans le paragraphe 3-2-5 apparaît, le support "Ville de New-York" remplaçant les courbes de pourcentages et la fonction de répartition remplaçant la méthode de Monte Carlo. La recherche de la fourchette se fait par un algorithme, traitable sur calculette pour les petites valeurs de n, puis implantable sur calculettes programmables ou sur ordinateurs pour des valeurs plus grandes.



Cet algorithme a l'avantage de centrer l'étude sur la fonction de répartition qui jouera dans le chapitre suivant un rôle important. Il est donc très important d'opérationnaliser ce concept en en faisant un outil de résolution de problèmes.

Nous disposons donc de deux outils de résolution de problèmes associés à une loi binomiale B (n,0,5)

- la méthode de Monte Carlo (modèle expérimental)
- la fonction de répartition (modèle théorique).

EN CONCLUSION,

Nous avons voulu montrer dans ce chapitre comment opérationnaliser le tryptique Tableau - Graphique - Formule qui constitue une première étape de l'enseignement des mathématiques fondée sur le couple mathématisation de situation/informatique.

Nous avons écrit dans les chapitres IV et V qu'une première étape de la méthode globale d'enseignements est la modélisation de situations au travers des supports d'information.

La notion de support de l'information est issue du mode de pensée informatique mais dans le cadre de la modélisation de situation, il a été nécessaire de distinguer les supports utilisés dans une seule situation des supports, rendus opératoires par une aide technologique et de ne retenir que ces derniers c'est-à-dire de façon privilégiée :

- les tableaux numériques rendus opératoires par les calculettes ou les tableurs, les tableurs permettant de plus d'en avoir une vue globale.
- les graphiques rendus opératoires par les outils de représentations graphiques.
- les formules, elles symbolisent les activités manipulatoires sur les autres supports sous différentes formes liées aux supports (programme calcul, algèbre des registres, ... symbolisme algébrique comme écriture-standard).

La modélisation consiste à dégager ou à reconnaître sur les différents supports des règles de fonctionnement communes à plusieurs situations. Les activités liées à la modélisation sont essentiellement exploratrices et manipulatoires. La démarche est proche d'une démarche expérimentale.

Nous avons explicitement, dans ce chapitre, construit les modèles affines et paraboles en énonçant des critères de reconnaissance ou de rejet de la même façon qu'au travers des développements sur les nouveaux outils de calcul nous avions construit le modèle exponentiel.

Nous avons également dans ce chapitre, à partir d'une expérimentation raisonnée construit des modèles de référence : loi binomiale, loi des grands nombres. Dans ce dernier cas, nous avons établi un véritable protocole d'expériences de chaque paramètre sur la forme de l'image et tiré les conséquencs. C'est le même protocole expérimental que celui du logiciel Parabole.

Par ailleurs, en particulier à travers les exemples de construction du modèle binomial et de problèmes non orientés, nous montrons que les activités de modélisation de situation au travers de supports d'informations donnent aux élèves des méthodes de raisonnement transférables, ces méthodes leur permettant de traiter un éventail très large de problèmes. Le traitement peut être numérique, graphique, par simulation ou algébrique, mais dans tous les cas, il se traduit par des manipulations structurantes des supports sur lesquels le problème a été porté. Le traitement algébrique est un des traitements possibles, si la situation s'y prête et quand les élèves possèdent les outils nécessaires. Il n'est jamais mis en avant d'emblée.

C'est un aspect spécifique de la méthode globale : le déroulement de l'enseignement n'est pas linéaire au sens où un cours prépare le cours suivant etc...

Au contraire, des situations-problèmes fournissent un matériau riche et on les traite en fonction du niveau de formation expérimentalement et/ou par des moyens économiques algébriques si les élèves en disposent. Si les élèves n'en disposent pas et si les outils algébriques et les concepts théoriques sous-jacents font partie des objectifs de la formation alors l'étude des situations-problèmes permettra de les aborder. Un des objectifs est de se les approprier comme outils disponibles.

S'ils ne font pas partie des objectifs de la formation alors l'étude des situations-problèmes permettra de les aborder. Un des objectifs est de se les approprier comme outils disponibles. S'ils ne font pas partie des objectifs de la formation alors on pourra les introduire intuitivement ou quantitativement, interpréter les résultats trouvés, donner des formules sans démonstration... mais en aucun cas escamoter les problèmes.

Ne pas avoir tous les outils algébriques ou théoriques pour résoudre des problèmes n'empêche pas de les aborder et de se donner les moyens de les traiter.

CHAPITRE X

OPERATIONNALISER LE CONCEPT DERIVATION-INTEGRATION SANS PREREQUIS SUR LES LIMITES

Le chapitre précédent a montré, comment dans le cadre de la méthode globale, la stratégie "TGF" permet une première approche de l'analyse. A une situation fonctionnelle sont associés globalement trois objets formels en interaction, le tableau, la courbe, la formule. Grâce aux "calculettes" les actions sur ces objets sont globales : le concept d'opérations sur les nombres s'étend à celui d'opérations sur les tableaux, les courbes, les formules, mais à ce niveau, le concept unificateur d'algèbre de fonctions n'apparaît pas et les notations fonctionnelles ne sont pas dégagées. On laisse dire que le produit de deux droites est une parabole. Les modèles dégagés (proportionnalité, droite, parabole, exponentielle, puissance) sont directement liés aux supports (Tableau - Graphique - Formule) et ancrés sur des savoirs arithmétiques.

Les activités sur les différences tabulaires et les sommations tabulaires amorcent un changement, mais à ce niveau, les différences restent finies, il n'y a pas de manipulation d'encadrements et encore moins de passage à la limite.

Les savoir-faire techniques liés aux formules sont restreints à la manipulation d'égalités. Même dans le cas des "fourchettes" en statistiques, c'est l'intervalle de confiance qui apparaît par lecture directe d'abaques.

Nous allons montrer dans ce chapitre, comment à partir de ces acquis, sans rupture de pratique, le tryptique TGF opérationnalisé dans la première étape va permettre de progresser dans la maîtrise des objectifs.

Plusieurs sauts quantitatifs et qualitatifs vont marquer le passage de la première étape à la deuxième étape pour fonder le concept dérivation-intégration :

- quitter le domaine sécurisant des opérations sur les nombres, opérer sur des objets formels plus complexes (tableaux, courbes, formules) en utilisant les modèles de l'étape précédente (droite, parabole, exponentiel, puissance, ...) ;
- quitter le domaine familier du maniement des égalités pour celui, plus délicat des encadrements ;
- un nouvel objet formel de raisonnement est introduit : le tableau de variation.

L'approche purement numérique et quantitative de l'étape précédente cède la place à une approche plus qualitative. Sous un aspect intuitif ce sont la notion de limite, le passage discret-continu et l'infini qui sont introduits ; mais dans cette étape les difficultés théoriques sont contournées au profit d'une opérationnalisation du concept de dérivation-intégration dans des activités de résolution de problèmes. L'algébrisation fait revenir au quantitatif.

Rappelons que cette monographie ne constitue pas un plan de cours, nous étudions ici seulement les points clés pour l'opérationnalisation du concept de dérivation-intégration. Dans la pratique, l'enchaînement des documents varie énormément d'un formateur à un autre et même pour le même formateur d'un groupe à un autre. Par exemple, la situation-problème fondamentale dépend souvent de l'environnement des formés (cours de physique en parallèle, demande de statistiques, ...). De même, les activités algébriques sont introduites très rapidement dans certains groupes, beaucoup plus tard dans d'autres. Mais dans tous les cas les points clés sont les mêmes et les démarches des formateurs sont sous-tendues par les mêmes idées forces, en particulier le tryptique TGF est un outil opératoire.

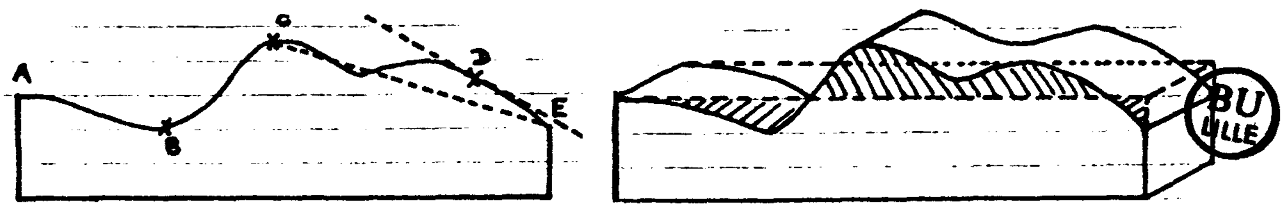
Les points clés étudiés sont :

- la mise en place du concept de dérivation-intégration (ancrage, approches diverses, transfert et réversibilité)
- la calcul algébrique formel des dérivées et des primitives et ses applications
- le tableau de variations, un nouvel objet formel, puissant outil de raisonnement pour la résolution de problèmes.

1 - MISE EN PLACE DU CONCEPT DERIVATION-INTEGRATION

1-1 - APPROCHE GEOMETRIQUE : PENTE - HAUTEUR - SURFACE

La situation d'ancrage : Tracer une route, connaissant le profil du terrain. On s'intéresse soit à la pente si le profil n'est pas modifié, soit au problème des déblais et des remblais qui reviennent à des calculs de surface. Cette situation a donné lieu à une brochure "Pente-Hauteur-Surface" [95].



Cette situation fournit quatre situations-problèmes permettant un ancrage du modèle dérivation-intégration. L'information de départ sera fournie dans chaque cas par une courbe et un tableau numérique. Volontairement dans ces situations les courbes et les tableaux associés ne sont pas liés à une formule. L'absence de formule évite les tentations d'introduire prématurément des calculs algébriques formels.

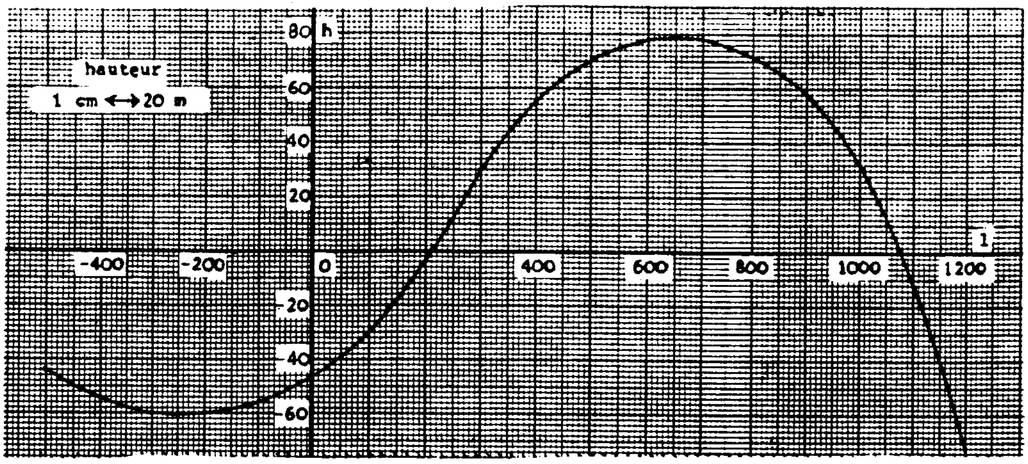
1 - Hauteur -> Pente : connaissant le profil, étudier la pente

2 - Hauteur -> Surface : Connaissant le profil, étudier la surface pour évaluer les remblais

3 - Pente -> Hauteur : Connaissant la pente, retrouver le profil

4 - Surface -> Hauteur : Connaissant la surface, retrouver le profil.

PROBLEME 1 : HAUTEUR -> PENTE

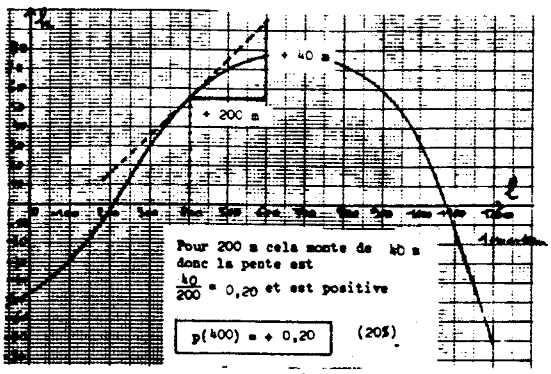


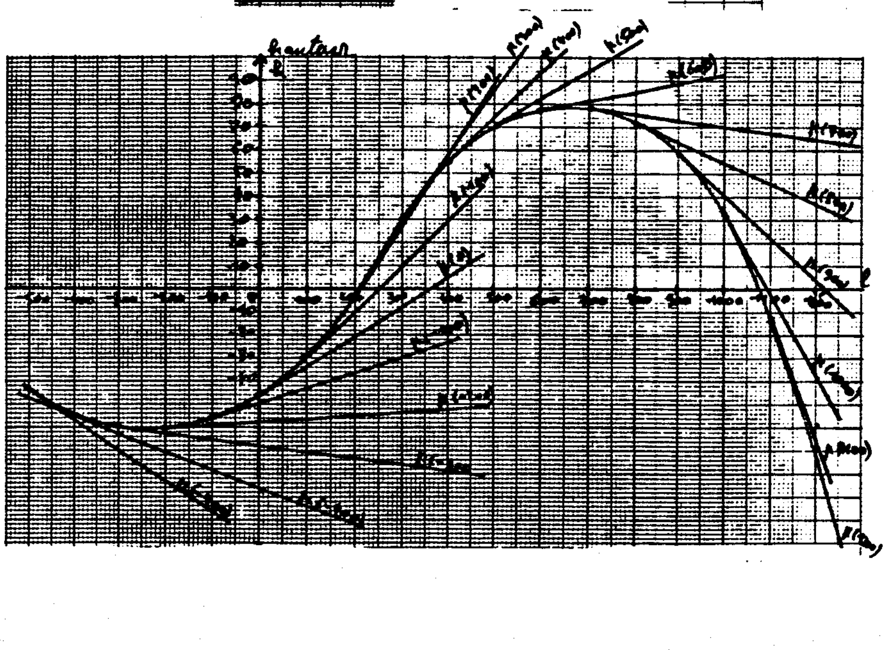
longueur	-500	-400	-300	-200	-100	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
HAUTEUR	-44	-54	-60	-60	-56	-46	-30	-4	+30	+55	+70	+78	+78	+72	+58	+32	-12	-72

APPROCHE A L'AIDE DU SUPPORT GRAPHIQUE

Dans cette approche, la pente est définie à partir du concept intuitif de la tangente : la tangente est la droite qui est "juste en contact" avec la courbe. La pente de la courbe sera donc la pente de sa tangente.

Les tracés "à vue" des tangentes à la courbe, montrent l'évolution de la pente.



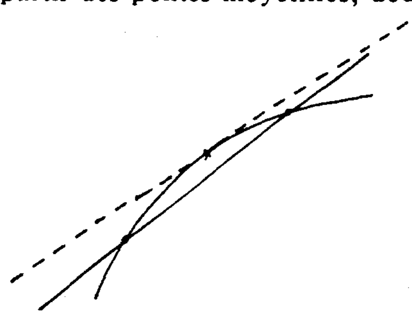


APPROCHE A L'AIDE DU SUPPORT TABLEAU

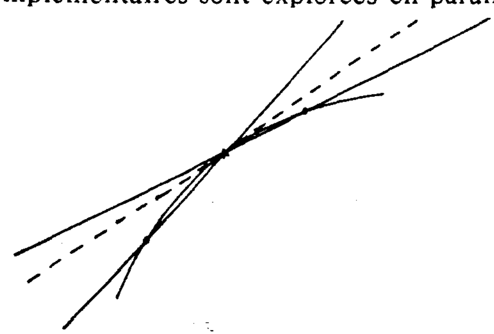
Le pentes moyennes sont calculées à partir du tableau numérique soit à la calculette, soit au tableur en utilisant la différence tabulaire

Intervalle		pente moyenne	milieu de l'interv.
- 500	- 400	- 0,10	- 450
- 400	- 300	- 0,06	- 350
- 300	- 200	0	- 250
- 200	- 100	0,04	- 150
- 100	0	0,10	- 50
0	100	0,16	50
100	200	0,26	150
200	300	0,34	250
300	400	0,25	350
400	500	0,15	450
500	600	0,08	550
600	700	0	650
700	800	- 0,06	750
800	900	- 0,14	850
900	1000	- 0,26	950
1000	1100	- 0,44	1050
1100	1200	- 0,600	1150

A partir des pentes moyennes, deux voies complémentaires sont explorées en parallèle



La pente moyenne sur un intervalle est approximativement la pente au milieu de l'intervalle
Par exemple $p(450) \approx \frac{h(500) - h(400)}{100} \approx 0,15$



La pente est comprise entre les pentes moyennes, avant et après
$0,15 < p(400) < 0,25$

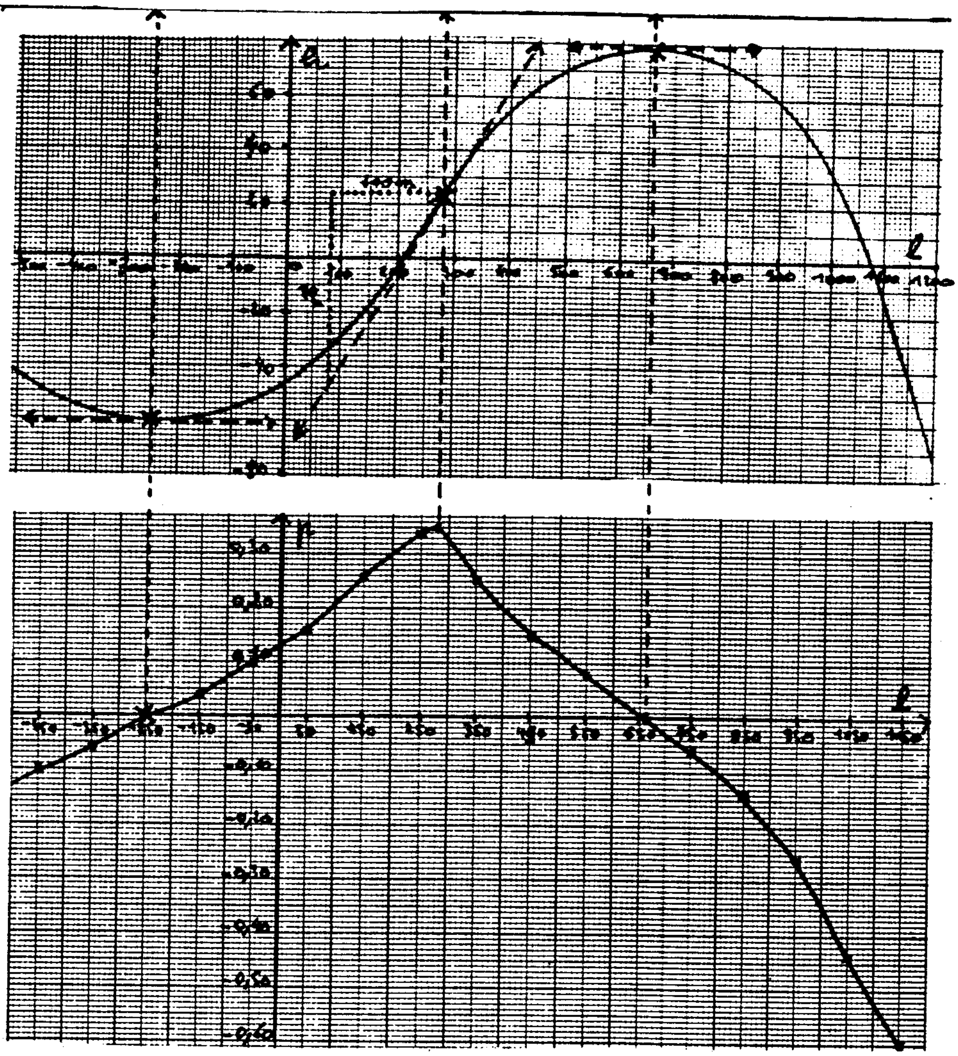
Le tableau numérique ne permet pas une vision globale. Le support graphique prend le relais. Le nuage de points correspondant réalise une économie de lecture. L'approche qualitative du problème permet de lisser les points par une courbe.

Deux tableaux et un graphique synthétisent toutes ces activités et fournissent les outils nécessaires pour résoudre le problème. Un tableau de variations formalisant et résumant l'étude qualitative des variations de la hauteur et de la pente, un tableau numérique rassemblant les valeurs approchées. La courbe des pentes obtenue par lissage de nuage de points.

Trois points remarquables apparaissent pour environ 250 m et environ 660 m : la pente est nulle (Tangente horizontale), la colline présente un creux puis une bosse et pour 280 m environ la pente est maximum (point d'inflexion), la concavité change, la tangente traverse la courbe.

LONGUEUR	-500		-250		280		660		1200
Variation de la hauteur	-44	descend →	-61	cela monte		→	78	cela descend →	-72
Signe de la pente		−	0		+		0	−	
Variation de la pente		descend de moins en moins		monte de plus en plus		monde de moins en moins		descend de plus en plus	
		la pente augmente					*la pente diminue*		
	-0,13		→		+0,35		→		-0,67
signe de la pente de la pente		+			0		−		

8



LONGUEUR l	-500	-400	-300	-200	-100	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
Pente p(l)	0,13	0,08	0,03	0,01	0,07	0,13	0,19	0,32	0,27	0,20	0,14	0,04	-0,03	[illegible]	-0,18	-0,35	-0,51	-0,68

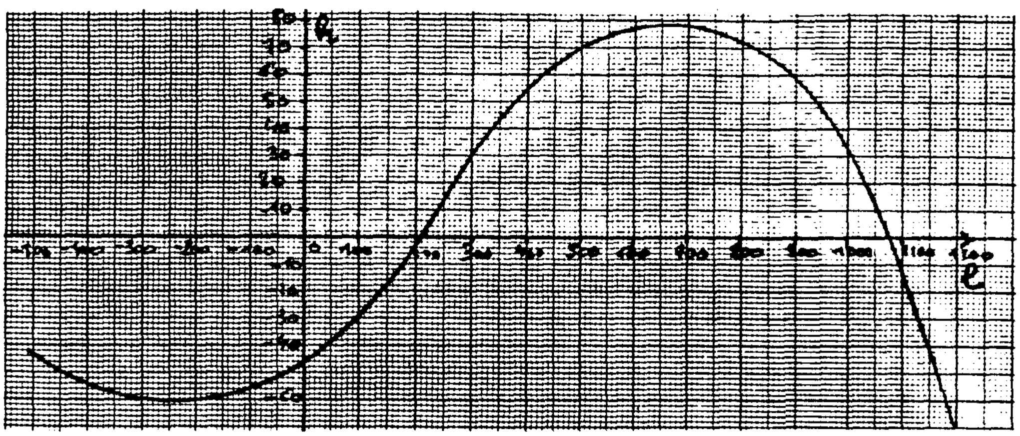
PROBLEME 2 - HAUTEUR - SURFACE

Le problème du calcul des déblais et des remblais se ramène à un calcul de surface, les déblais étant comptés positivement et les remblais négativement.

Pour démarrer l'étude, il faut fixer un point de départ, ce sera l'origine. Ceci paraît arbitraire, mais sera justifié ensuite et est nécessaire au démarrage de toute activité.

APPROCHE QUALITATIVE

Dans un premier temps, on porte sur un tableau toutes les informations qualitatives lisibles sur la courbe.

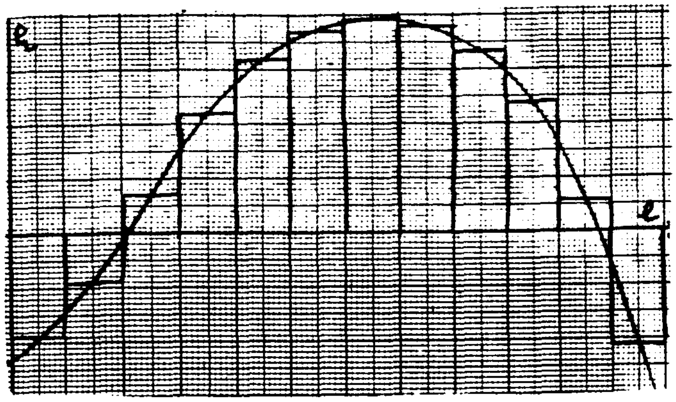


LONGUEUR	0		210		650		1075		1200
Variation de la hauteur	-46	↗	0	↗	78	↘		↘	-70
Signe de la hauteur		—	0		+		0	—	
Variation de la surface	0	↘		↗		↗		↘	
Vitesse de variation		Diminue de moins en moins vite		Augmente de plus en plus vite		Augmente de moins en moins vite		Diminue de plus en plus vite	
			Minimum de surface		Vitesse de croissance maximum de la surface		Maximum de surface		

APPROCHE A L'AIDE DU SUPPORT TABLEAU ET DU SUPPORT GRAPHIQUE

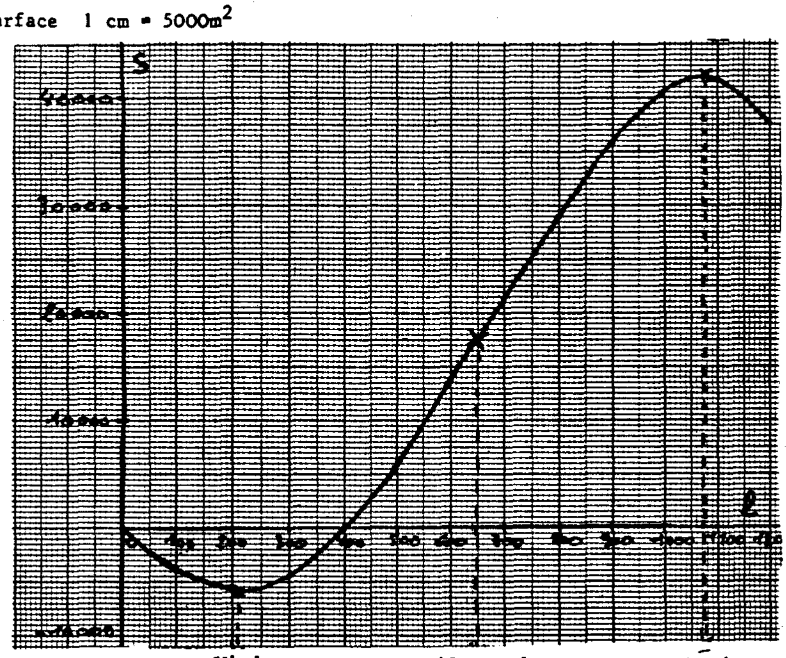
Le travail peut se faire par approximation ou par encadrement. Dans les deux cas, le problème se résout grâce à des changements de support d'abord sur le graphique le découpage et le calcul de surface ensuite construction d'un tableau numérique et en s'aidant de l'étude qualitative, passage au graphique qui donnera la solution du problème.

Par approximation, en utilisant les rectangles médians :



$\Delta \ell$	Intervalle	Longueur milieu	h Hauteur milieu	$\Delta s = h\Delta\ell$ Rectangle médian	S Surface totale	ℓ Longueur associée
100	0 à 100	50	- 39	- 3900	- 3900	100
100	100 à 200	150	- 18	- 1800	- 5700	200
100	200 à 300	250	+ 13	+ 1300	-- 4400	300
100	300 à 400	350	+ 43	+ 4300	- 100	400
100	400 à 500	450	+ 63	+ 6300	+ 6200	500
100	500 à 600	550	+ 74	+ 7400	+ 13600	600
100	600 à 700	650	+ 78	+ 7800	+ 21400	700
100	700 à 800	750	+ 76	+ 7600	+ 29000	800
100	800 à 900	850	+ 67	+ 6700	+ 35700	900
100	900 à 1000	950	+ 49	+ 4900	+ 40600	1000
100	1000 à 1100	1050	+ 12	+ 1200	+ 41800	1100
100	1100 à 1200	1150	- 42	- 4200	+ 37600	1200

Surface 1 cm = 5000m^2

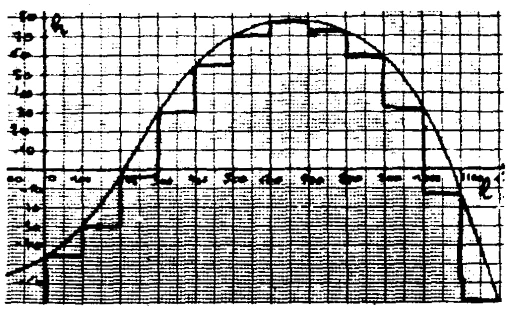


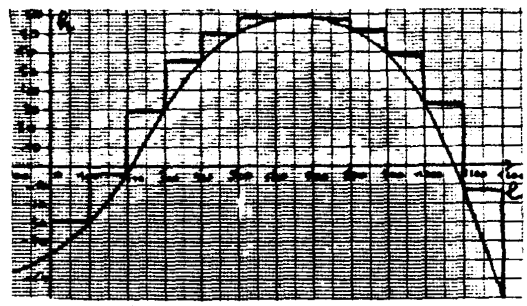
Minimum

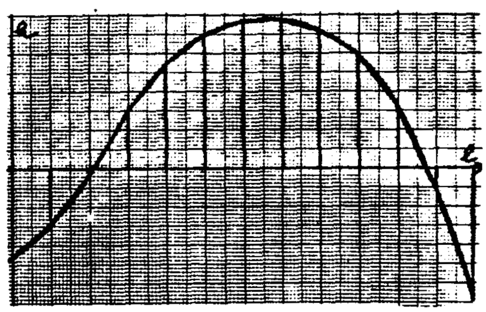
Vitesse de croissance maximum

Maximum

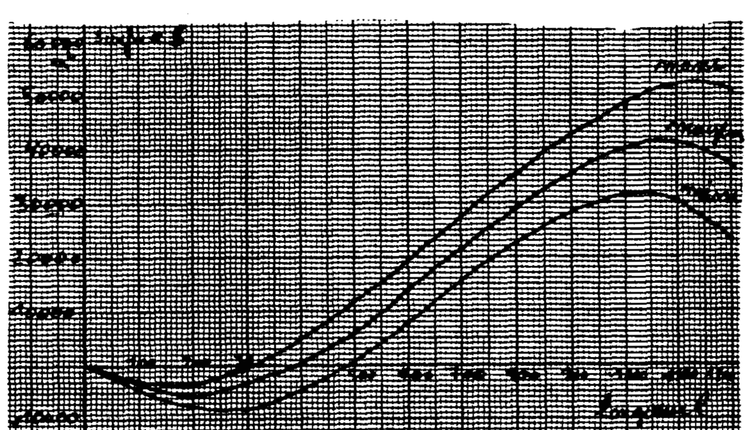
Par encadrements







Intervalle	hauteur		Variation de S		total		
	mini	maxi	mini	maxi	mini	maxi	moyen
0 à 100 m	-46	-30	-4600	-3000	-4600	-3000	-3800
100 à 200 m	-30	- 4	-3000	- 400	-7600	-3400	-5500
200 à 300 m	- 4	+30	- 400	+3000	-8000	- 400	-4200
300 à 400 m	+30	+55	+3000	+5500	-5000	+5100	+ 50
400 à 500 m	+55	+70	+5500	+7000	+ 500	+12100	+6300
500 à 600 m	+70	+78	+7000	+7800	+7500	+19900	+13700
600 à 700 m	+78	+78	+7800	+7800	+15300	+27700	+21500
700 à 800 m	+72	+78	+7200	+7800	+22500	+35500	+29000
800 à 900 m	+58	+72	+5800	+7200	+28300	+42700	+35500
900 à 1000m	+32	+58	+3200	+5800	+31500	+48500	+40000
1000 à 1100m	-12	+32	-1200	+3200	+30300	+51700	+41000
1100 à 1200m	-72	-12	-7200	-1200	+23100	+50500	+36800



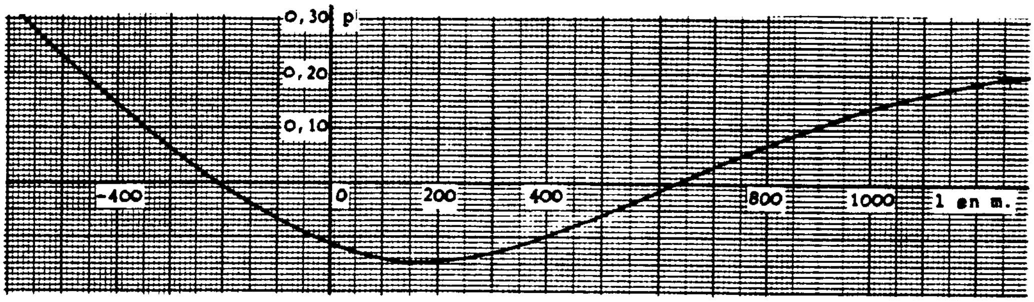
A ce stade, grâce aux outils de calcul et de visualisation des calculs, il est possible sans frais supplémentaires, de refaire les calculs en prenant un autre point de départ (le début des travaux de remblais est fixé à 100 m ou à - 200 m, où ...). Les résultats numériques changent mais en fait tous les nombres sont décalés d'une même quantité. De même, la courbe surface est translatée mais garde globalement la même forme.

Ainsi, le rôle de la constante d'intégration est bien mis en évidence.

PROBLEME 3 : PENTE -> HAUTEUR

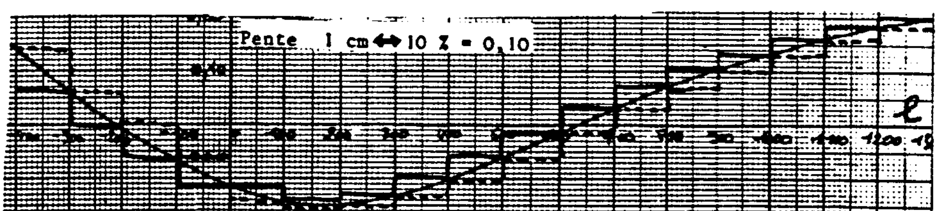
Dans cette étude, on retrouve les mêmes supports et les mêmes approches graphique, numérique, qualitative avec un travail soit par approximation soit par encadrement :

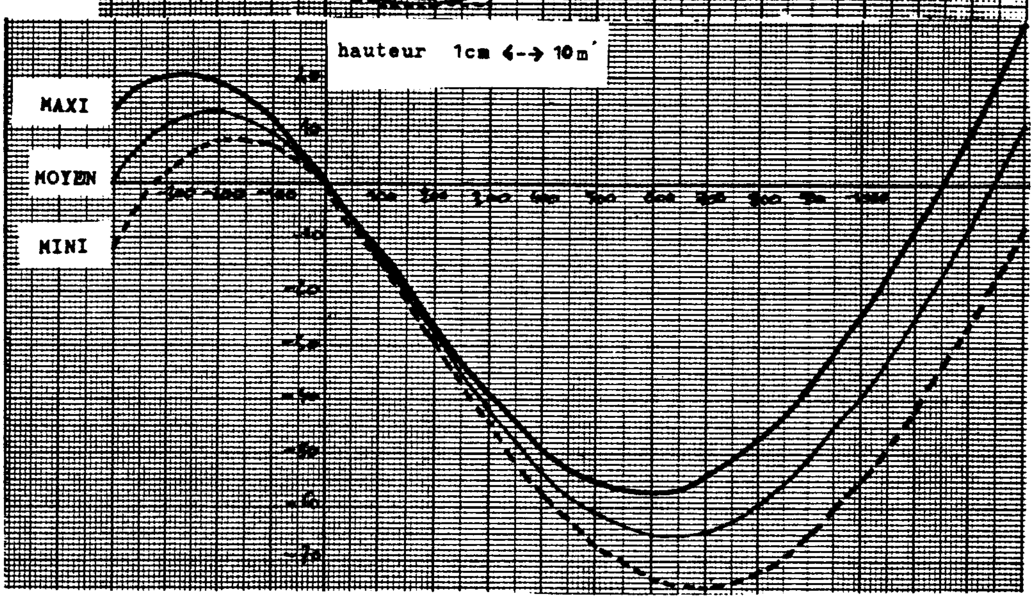
Longueur	-400	-300	-200	-100	0	+100	+200	+300	+400	+500	+600	+700	+800	[illegible]	+1000	+1100	+1200
Pente	+0,14	+0,06	-0,01	-0,07	-0,12	-0,14	-0,15	-0,13	-0,10	-0,06	-0,02	-0,03	+0,07	[illegible]	+0,13	+0,16	+0,18



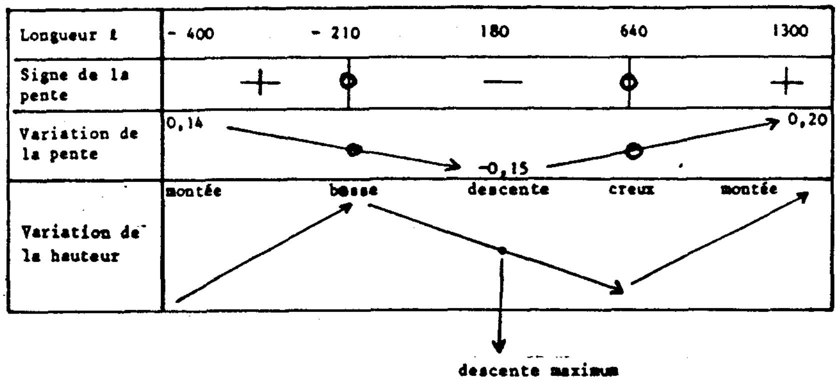
Intervalle	pente sur l'intervalle mini	maxi	moyen	Variation de hauteur mini	maxi	moyen	variation totale mini	maxi	moyen	longueur
-400 à -300	+0,06	+0,14	+0,10	+6	+14	+10	+14	-12	+1	-400
-300 à -200	-0,01	+0,06	+0,025	-1	+ 6	+2,5	+20	+ 2	+11	-300
-200 à -100	-0,07	-0,01	-0,04	-7	-1	-4	+19	+8	+13,5	-200
-100 à 0	-0,12	-0,7	-0,095	-12	-7	-9,5	+12	+7	+9,5	-100
										0
0 à 100	-0,14	-0,12	-0,13	-14	-12	-13	-14	-12	-13	100
100 à 200	-0,15	-0,14	-0,145	-15	-14	-14,5	-29	-26	-27,5	200
200 à 300	-0,15	-0,13	-0,14	-15	-13	-14	-44	-39	-41,5	300
300 à 400	-0,13	-0,10	-0,115	-13	-10	-11,5	-57	-49	-53	400
400 à 500	-0,10	-0,06	-0,08	-10	- 6	- 8	-67	-55	-61	500
500 à 600	-0,06	-0,02	-0,04	-6	-2	-4	-73	-57	-65	600
600 à 700	-0,02	+0,03	+0,005	-2	+3	+0,5	-75	54	-64,5	700
700 à 800	+0,03	+0,07	+0,05	+3	+7	+5	-72	-47	-59,5	800
800 à 900	+0,07	+0,10	+0,085	+7	+10	+8,5	-65	-37	-51	900
900 à 1000	+0,10	+0,13	+0,115	+10	+13	+11,5	-55	-24	-39,5	1000
1000 à 1100	+0,13	+0,16	+0,145	+13	+16	+14,5	-42	-8	-25	1100
1100 à 1200	+0,16	+0,18	+0,17	+16	+18	+17	+26	+10	-8	1200
1200 à 1300	+0,18	+0,20	+0,19	+18	+20	+19	-8	+30	+11	1300

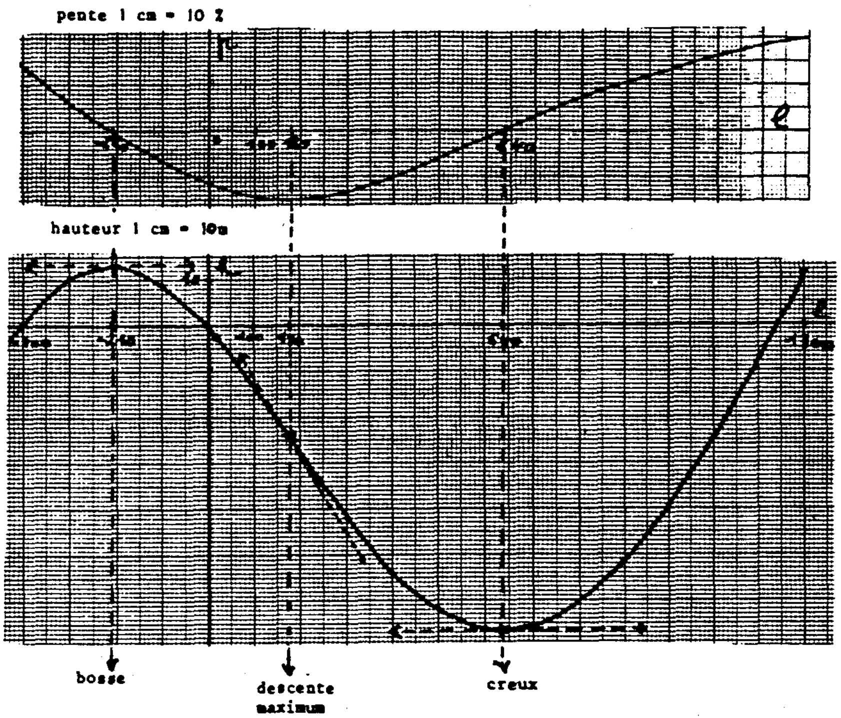
Attention changement de signe





L'étude qualitative joue le même rôle essentiel :





La structuration des calculs en tableau et la manipulation éventuelle d'un tableur sont systématiquement encouragés :

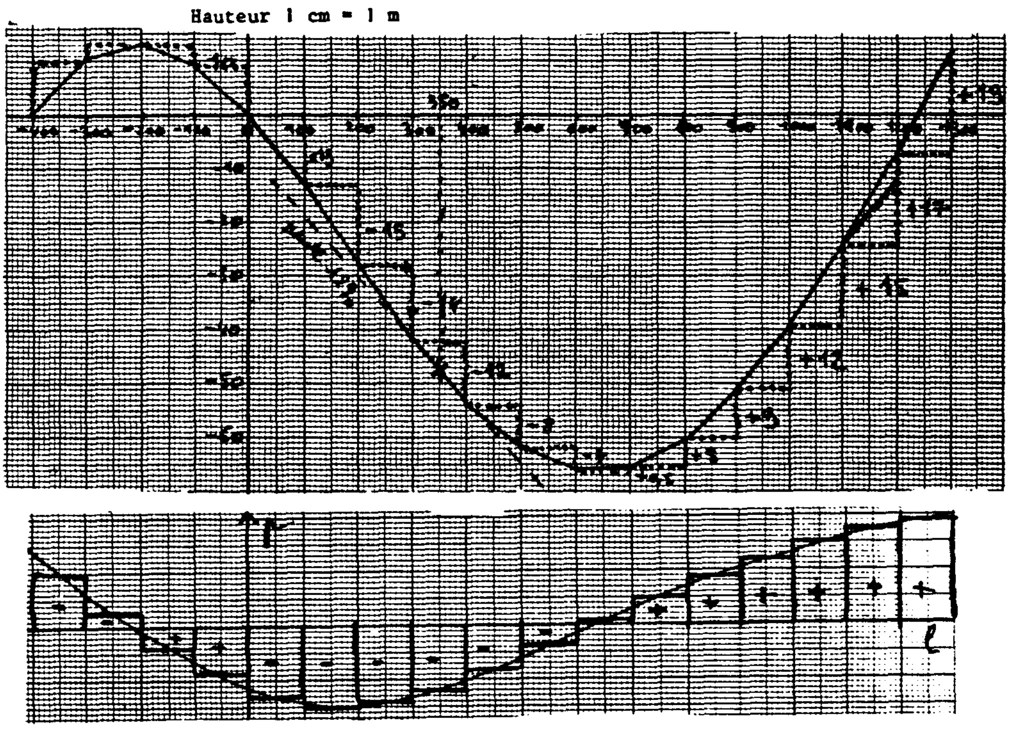
Intervalle		Pente au milieu
- 400	- 300	0,10
- 300	- 200	0,025
- 200	- 100	- 0,04
- 100	0	- 0,09
0	100	- 0,13
100	200	- 0,15
200	300	- 0,14
300	400	- 0,12
400	500	- 0,08
500	600	- 0,04
600	700	+ 0,005
700	800	+ 0,05
800	900	+ 0,09
900	1000	+ 0,12
1000	1100	+ 0,15
1100	1200	+ 0,17
1200	1300	+ 0,19

ℓ en m	h en m
- 400	+ 0,5
- 300	+ 10,5
- 200	+ 13
- 100	+ 9
0	0
100	- 13
200	- 28
300	- 42
400	- 54
500	- 62
600	- 66
700	- 65,5
800	- 60,5
900	- 51,5
1000	- 39,5
1100	- 24,5
1200	- 7,5
1300	+ 11,5

VISUALISATION GEOMETRIQUE ET APPROCHE DE LA REVERSIBILITE

Très souvent, les élèves abordent directement le tracé de la hauteur, sur le support graphique en partant d'une approche purement géométrique.

En première approximation, ils considèrent que la pente sur un intervalle est approximativement la pente au milieu de l'intervalle. Ils tracent donc la succession des plans inclinés associés à cette hypothèse. Le lissage de cette fonction affine par morceaux avec l'aide de l'étude qualitative n'étant effectuée que dans un deuxième temps



Ce graphique de la pente associée aux plans inclinés permet par analogie avec le problème 2 de voir que l'on retrouve un calcul de surface algébrique par la méthode des rectangles médians.

Il suffit de dérouler en parallèle les calculs associés aux problèmes 2 et 3.

Variation de surface = hauteur au milieu x variation de longueur
Surface totale = somme des variations de surface

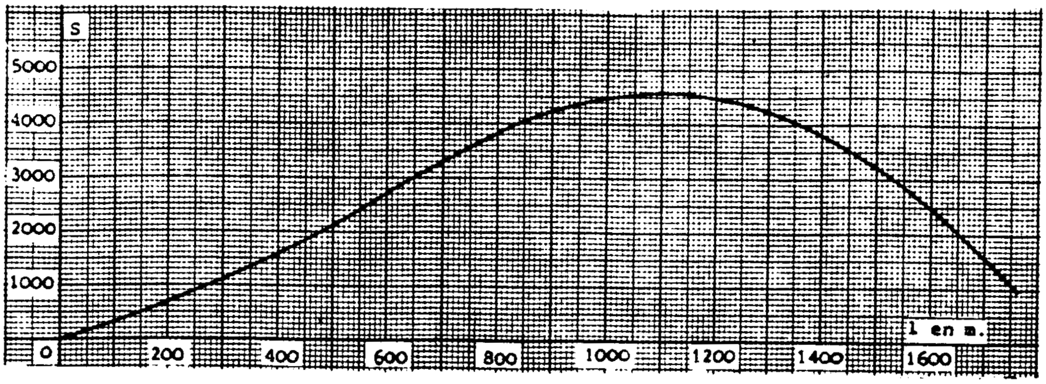
Variation de hauteur = pente au milieu x variation de longueur
Hauteur totale = somme des variations de hauteur.

$S = \Sigma h \Delta l$

$h = \Sigma p \Delta l$

D'où la formulation : la hauteur se calcule à partir de la pente comme la surface se calcule à partir de la hauteur.

PROBLEME 4 - SURFACE -> HAUTEUR



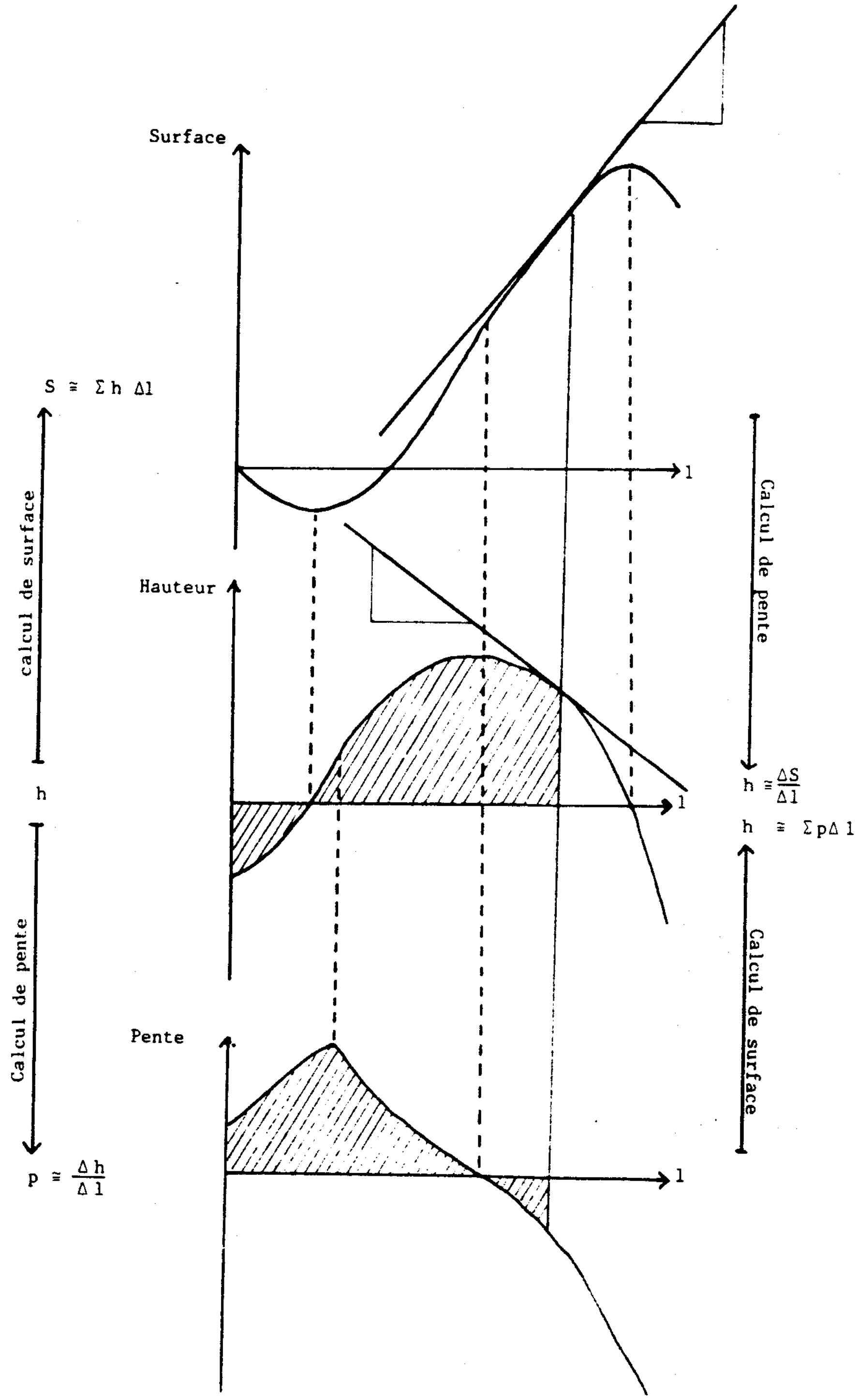
long	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700
surf	0	300	700	1100	1550	2100	2700	3300	3800	4250	4500	4600	4500	4250	3800	3250	2500	1600

Ce problème se traite alors de la même façon par analogie au problème 1. D'où la formulation :

La hauteur se calcule à partir de la surface comme la pente se calcule à partir de la hauteur.

En conclusion : l'étude des quatre problèmes se résume par un schéma et un "théorème"

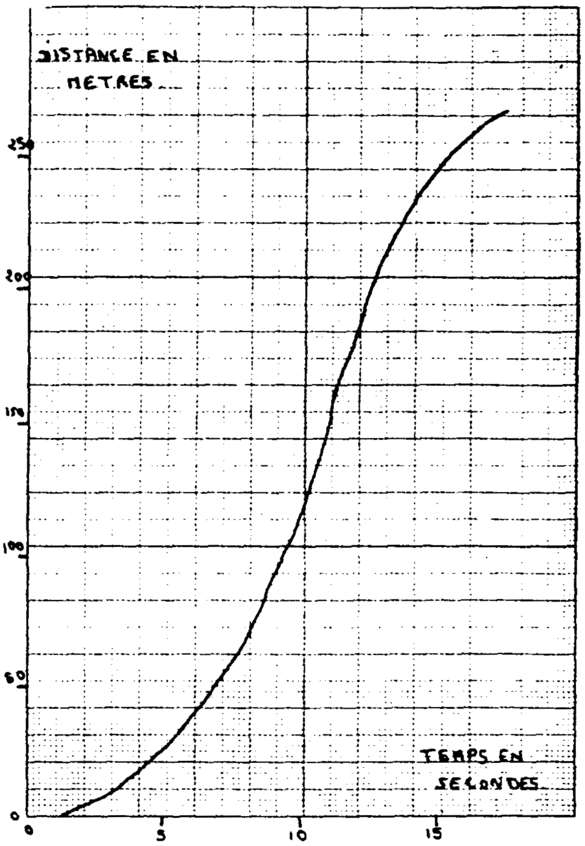
La hauteur est la surface de la pente
La hauteur est la pente de la surface.



N.B. Les pointillés indiquent les liaisons qualitatives entre les points remarquables des trois courbes Pente - Hauteur - Surface

1-2 - APPROCHE CINEMATIQUE : TEMPS - DISTANCE - VITESSE

La situation d'ancrage est un graphique donnant la distance parcourue par une voiture en fonction du temps et liée à ce graphique, un problème. A quels moments la voiture roule-t-elle plus vite que sa vitesse moyenne ?

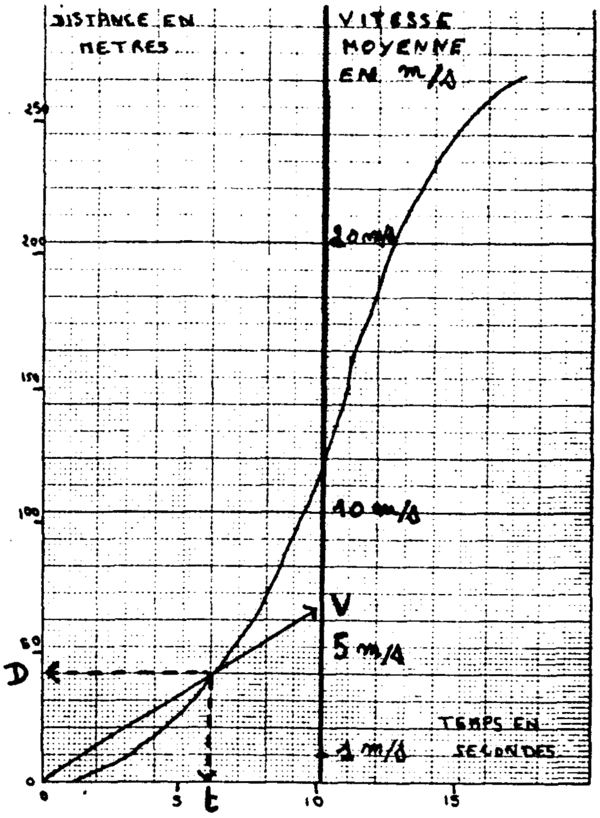


Ce problème conduit à calculer d'une part la vitesse moyenne, d'autre part la vitesse instantanée et à les comparer.

VITESSE MOYENNE

Ce premier calcul ne pose pas de difficulté aux élèves, deux solutions sont généralement utilisées :

- la solution numérique classique vitesse = distance/temps,
- Une résolution graphique à partir d'une abaque construite par les élèves. Cela permet d'utiliser "l'invariant" sous-jacent. Ce sont les mêmes activités que dans l'étape précédente : raisonnement sur le support graphique



VITESSE INSTANTANEE

La vitesse lue au compteur (vitesse instantanée) apparaît comme la limite au sens intuitif des vitesses moyennes. Ce qui amorce une représentation dynamique de la dérivation. Contrairement aux habitudes des professeurs de mathématiques, les élèves travaillent de façon symétrique, ils utilisent implicitement la formule

$$V\ (t) \sim \frac{d(t+\Delta) - d(t-\Delta)}{2\Delta}$$

au lieu de la formule classique :

$$f((x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

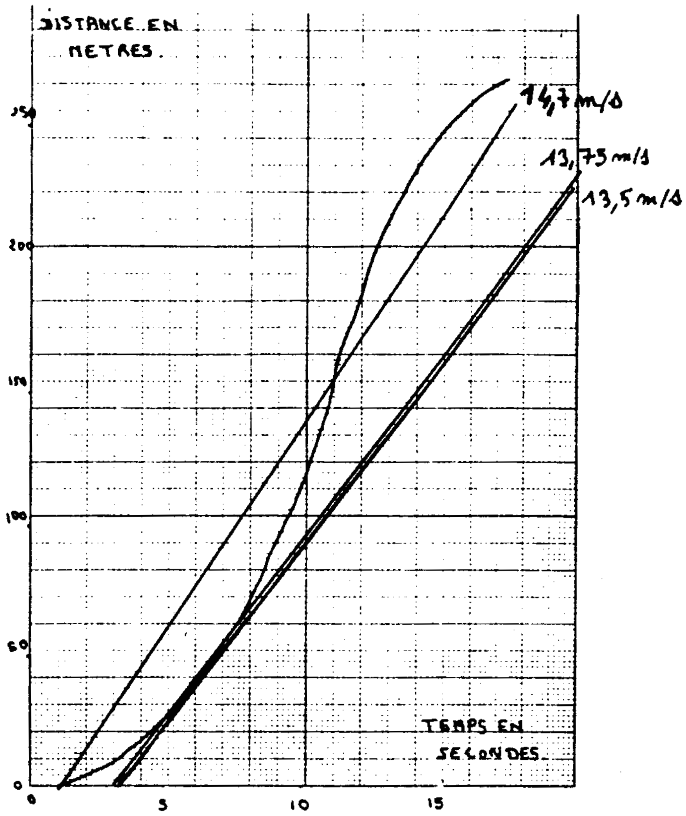
Par exemple pour calculer la vitesse instantanée au bout de 6 secondes, on obtient la suite de valeurs approchées suivantes :

$$\frac{d(11) - d(1)}{10} = \frac{148 - 1}{10} = 14{,}7 \text{ m/s ou } 52{,}9 \text{ Km/h}$$

$$\frac{d(7) - d(5)}{2} = \frac{55 - 27{,}5}{2} = 13{,}75 \text{ m/s ou } 49{,}5 \text{ Km/h}$$

$$\frac{d(6{,}5) - d(5{,}5)}{1} = \frac{47 - 33{,}5}{1} = 13{,}5 \text{ m/s ou } 48{,}6 \text{ Km/h}$$

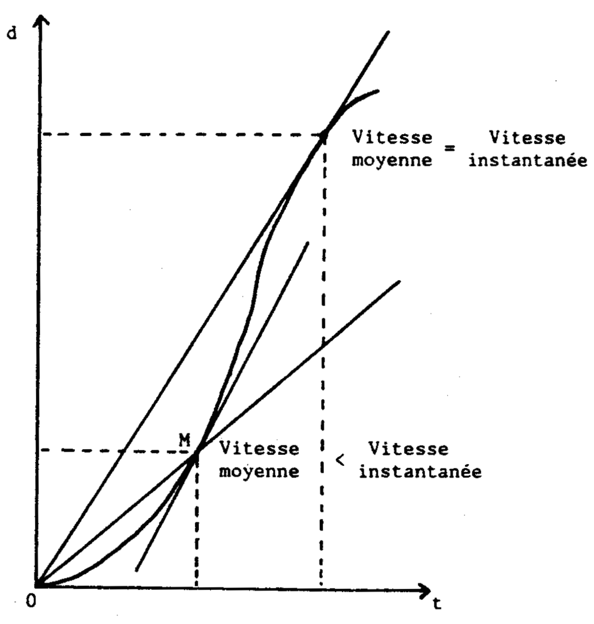
Après, le graphique n'est pas assez précis, mais il permet de visualiser les calculs.



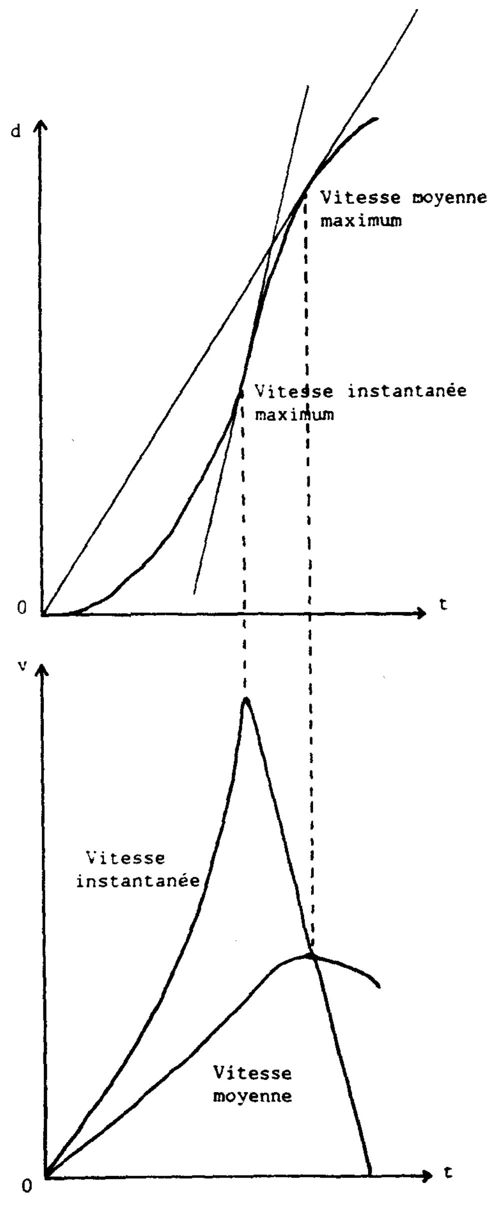
Sur le graphique, l'information vitesse instantanée est donnée par la pente de la tangente. De façon intuitive on énonce que la tangente est la limite de la sécante quand les deux points se rapprochent du point de contact.

COMPARAISON DES DEUX VITESSES

L'étude quantitative et qualitative des deux courbes : vitesse moyenne depuis le départ et vitesse instantanée ne pose alors plus aucun problème. Seule la détermination du maximum de la courbe vitesse moyenne pose quelques difficultés d'ailleurs fort intéressantes.



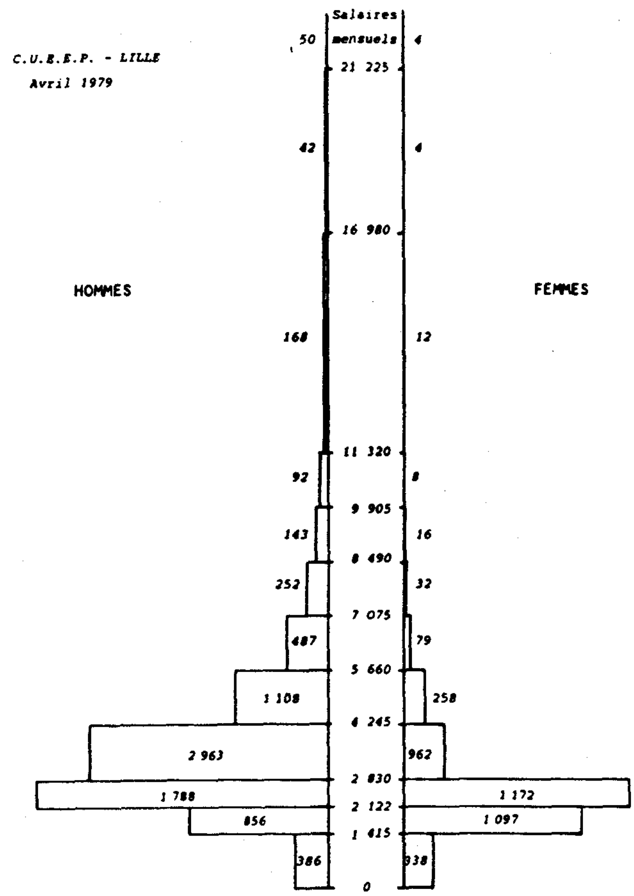
Si la vitesse instantanée (pente de la tangente) est supérieure à la vitesse moyenne (pente de 0M) la vitesse augmente. Le maximum de la vitesse moyenne se lit donc sur le graphique quand la tangente à la courbe passe par l'origine. Pour ce point, la vitesse moyenne est égale à la vitesse instantanée et pour notre étude c'est le maximum de la vitesse moyenne. La voiture roule plus vite que sa vitesse moyenne quand la pente de la tangente est supérieure à la pente de la droite OM. Par **réversibilité**, les calculs de distances en fonction de la vitesse se font par calcul de surface.



1-3 - APPROCHE STATISTIQUE :PRIORIRITE AUX CALCULS DE SURFACES

La situation d'ancrage est un document INSEE :

LA PYRAMIDE DES SALAIRES



N-B : Les salaires sont ceux du 1 janvier 1979 , il s'agit des salaires annuels après déduction des cotisations sociales, divisés par 12 .
Les nombres de salariés à temps complet sont exprimés en milliers.

Accompagné d'une question :

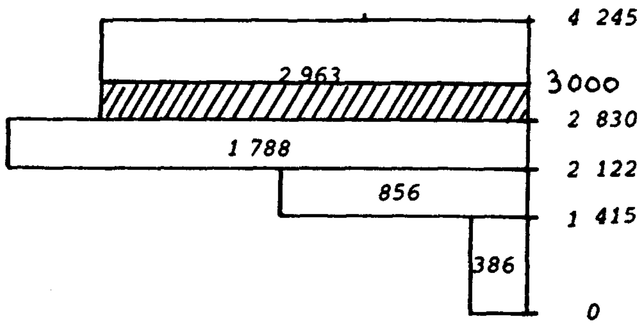
Je gagne 3000 F par mois et ma femme 2 500 F, quel est le mieux placé dans la hiérarchie des salaires ?

Etablir un graphique permettant de résoudre, pour chaque couple, ce problème.

Le choix de la situation-problème est très orienté, il s'agit de mettre en place le modèle dérivation-intégration, à travers une situation statistique sans aucune connaissance préalable sur ce modèle.

L'INFORMATION EST DANS LA SURFACE

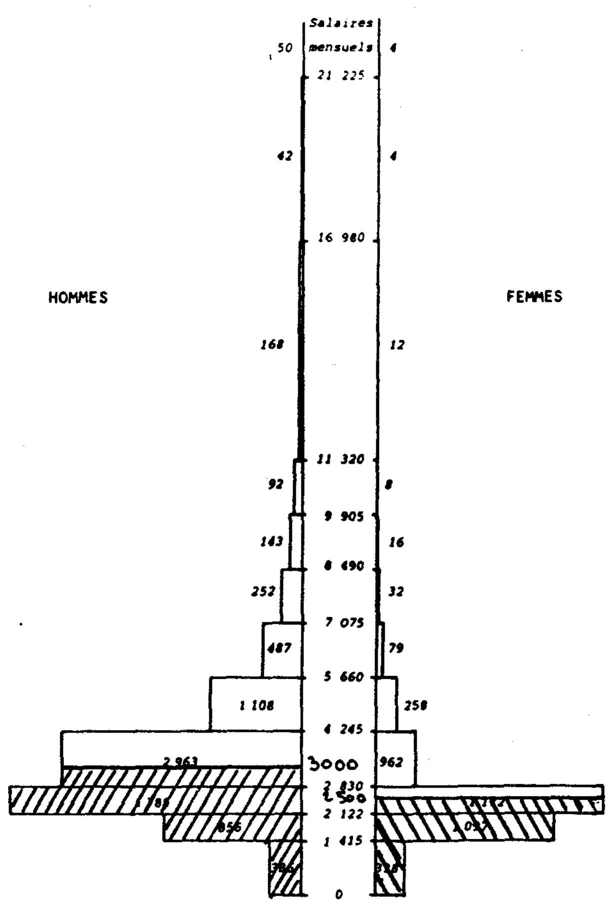
Après une phase de lecture et de décodage du graphique, pour placer les 3000 F côté hommes et 2500 F côté femmes, les élèves découvrent que l'information est dans la surface soit à partir de la question : pourquoi le "rectangle 1788" est-il "plus haut" que le "rectangle 2963" ? soit en cherchant à placer l'information 3000 F.



A l'intérieur d'un rectangle le calcul se fait par proportionnalité.

Le choix délibéré de démarrer avec des classes d'inégales amplitudes, oblige à découvrir le bon invariant. Un histogramme avec des classes d'égales amplitudes est trop simple et occulte le concept fondamental, l'information est dans la surface.

Cet aspect étant acquis, la première question du problème : comparer un salaire homme de 3000 F et un salaire femme de 2500 F dans la hiérarchie des salaires conduit à la comparaison de deux rapports de surfaces.



En appelant :

H la surface de l'histogramme "Homme"

H_{3000} la surface noircie de cet histogramme

F la surface de l'histogramme "Femme"

F_{2500} la surface noircie de cet histogramme,

Le problème revient à comparer :

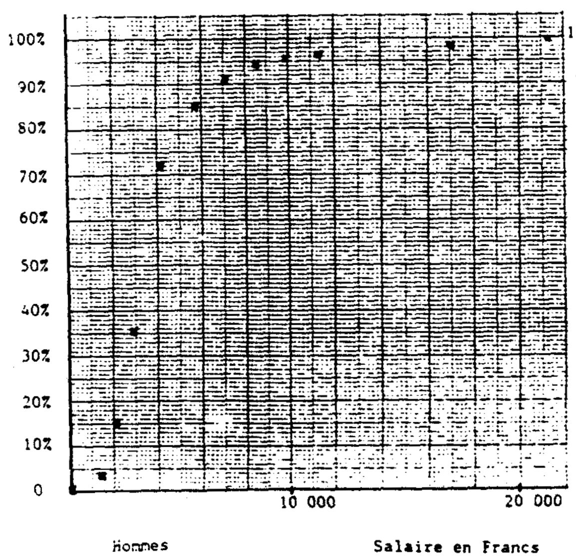
$$\frac{H_{3000}}{H} \quad \text{et} \quad \frac{F_{2500}}{F}$$

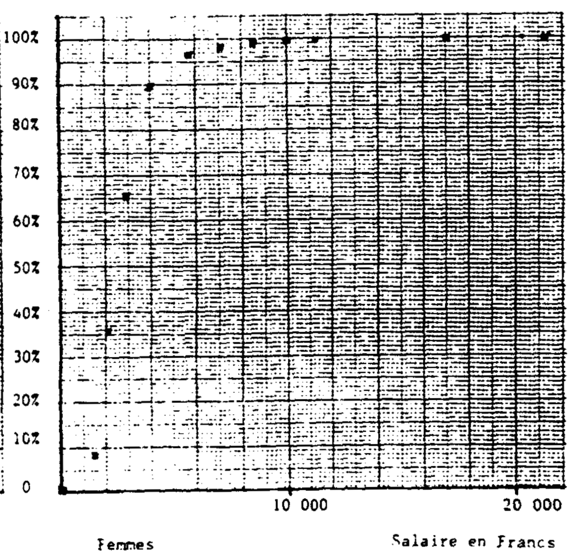
LA FONCTION DE REPARTITION

L'activité de recherche d'un support rendant automatique la comparaison de n'importe quel couple de salaires (homme, femme), conduit au support tableau. La différence dans la taille des populations "hommes" et "femmes" induit le passage aux pourcentages (fréquences) et aux sommations tabulaires de ces pourcentages (fréquences cumulées croissantes)

TRANCHE DE SALAIRE	HOMMES				FEMMES			
	EFFECTIFS	EFFECTIFS CUMULES	FREQUENCES *	FREQUENCES CUMULEES *	EFFECTIFS	EFFECTIFS CUMULES	FREQUENCES *	FREQUENCES CUMULEES *
0 à 1415	386	386	4,63	4,63	338	338	8,5	8,5
1415 à 2122	856	1242	10,27	14,90	1097	1435	27,55	36,5
2122 à 2830	1788	3030	21,45	36,35	1172	2607	29,43	65,5
2830 à 4245	2963	5993	35,55	71,90	962	3569	24,16	89,6
4245 à 5660	1108	7101	13,29	85,19	258	3827	6,5	96,1
5660 à 7075	487	7588	5,84	91,04	79	3906	2,0	98,1
7075 à 8490	252	7840	3,02	94,06	32	3938	0,8	98,9
8490 à 9905	143	7983	1,72	95,78	16	3954	0,4	99,3
9905 à 11320	92	8075	1,10	96,88	8	3962	0,2	99,5
11320 à 16980	168	8243	2,02	98,90	12	3974	0,3	99,8
16980 à 21225	42	8285	0,50	99,40	4	3978	0,1	99,9
21225 à ...	50	8335	0,60	100	4	3982	0,1	100

La visualisation de ces tableaux sur papier millimétré donne les deux nuages de points suivants :





Comment traiter ces nuages de points :

- joindre les points par des segments de droites ?
- tracer une fonction escalier ? (centrée ? à droite ? à gauche ?)
- lisser le nuage de points ?
- ajuster une courbe ?

A travers ces questions, les principaux problèmes liés aux classements et la représentation des données sont abordés (début de classe, fin de classe, centre de classe, différence entre polygone des fréquences et histogramme, lien entre histogramme et polygone des fréquences cumulées, ajustement et lissage etc...).

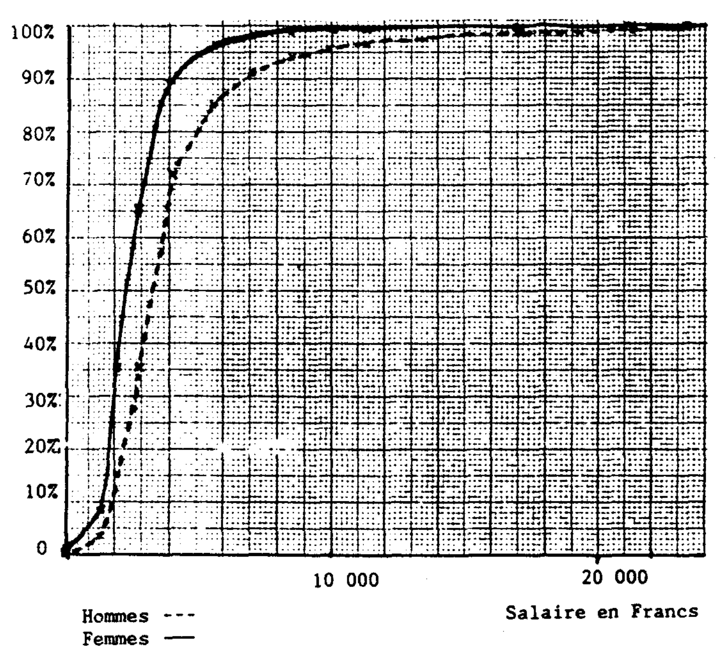
Nous ne les traiterons pas ici, bien qu'en formation, ils soient fortement pris en compte.

Le choix de cette méthode est justifié, par le choix arbitraire des classes. Une autre répartition conduirait pour la même population à d'autres points, mais quel que soit le nouveau découpage, l'information sur les pourcentages cumulés est invariante du découpage fait avant. les points sont donc "sûrs", le lissage de la courbe pour rejoindre les points est donc plus "vraisemblable" que le tracé d'une droite. Rien ne justifie à priori des points anguleux, le choix des classes étant en partie arbitraire.

Les courbes lissées sont donc une bonne approximation des courbes des fonctions de répartition.

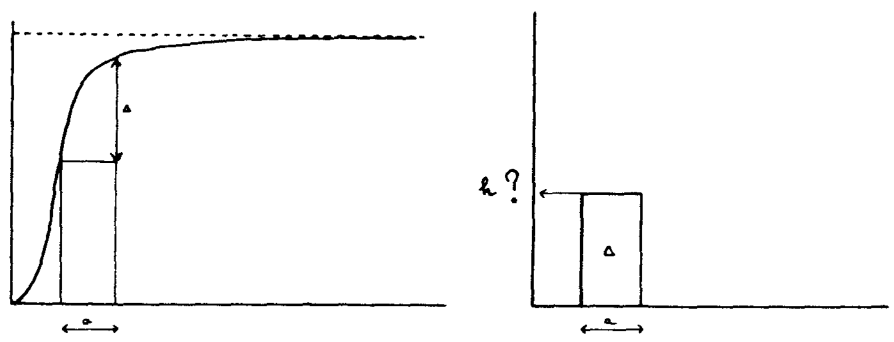
La sommation tabulaire des fréquences est donc associée à la fonction **répartition**.

Le report sur un même graphique des deux courbes fournit le bon support pour résoudre le problème de la comparaison d'un couple et d'autres problèmes analogues.



LA REVERSIBILITE DU PROBLEME : LA FONCTION DE DENSITE

Comment, à partir de la fonction de répartition, retrouver un autre découpage en classes : ce problème est bien le problème inverse du précédent. La réversibilité apparaît : les différences tabulaires conduisent à retrouver la surface des rectangles puis la hauteur associée.



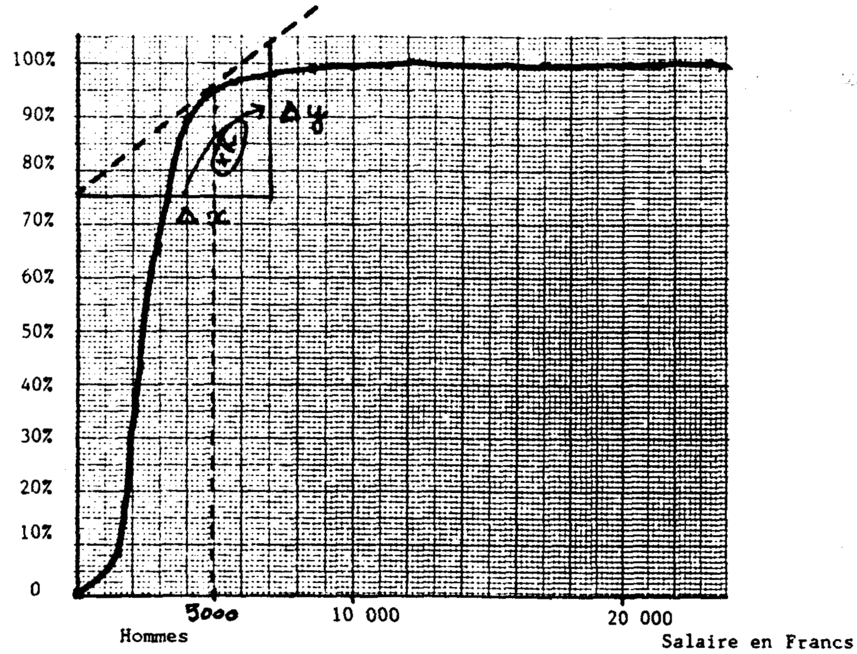
On découvre dans cette activité un point clef : quelle est la hauteur du rectangle de l'histogramme correspondant au découpage ?

- la différence tabulaire Δ de la fonction de répartition est la surface du rectangle, la hauteur est donc h = Δ/a La question : Quelle est l'unité ?, est une première étape pour introduire le concept de fonction de densité :
- Δ représente des "pourcentages de personnes (l'information est dans la surface)
a représente des "Francs".
- h apparaît donc comme un quotient de différence tabulaire exprimé en pourcentage/Francs.
- la détermination de l'unité repose sur : la somme de tous les rectangles vaut 1 ou 100 %.
- le passage aux effectifs par proportionnalité ne pose pas de problème, ce qui conduit à formuler :

La hauteur des rectangles dans la pyramide des salaires (histogramme des effectifs) est exprimée en personnes/Francs.

L'explicitation du concept de **fonction de densité** va découler de problèmes du type :

A partir de la fonction de répartition peut-on trouver le pourcentage de salariés qui gagnent entre 5000 F et 5010 F ? Cette question sature la précision de lecture et va conduire à chercher l'information dans la tangente.



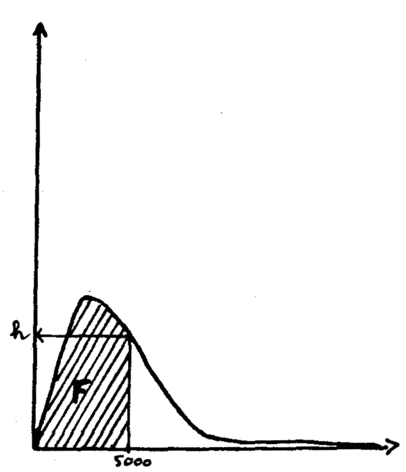
La lecture de $\Delta = F(5010) - F(5000)$ impossible est remplacée par le tracé approximatif de la tangente et la lecture de $h = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ qui conduit à

$\Delta = h \times a$ avec $a = 5010 - 5000 = 10$

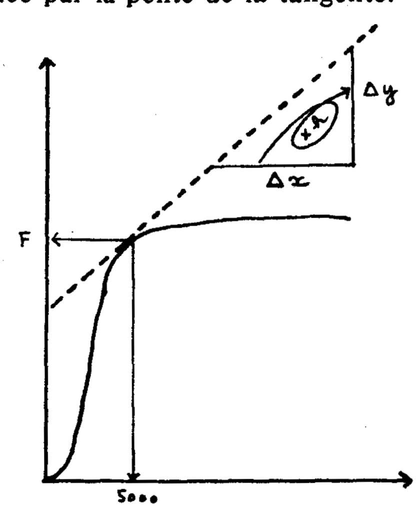
On formule donc que la fonction de densité est la pente de la fonction de répartition et que la courbe associée à la fonction de densité a la même "surface" que l'histogramme des fréquences, c'est-à-dire 1 (100 %).

Cette fonction apparaît donc comme un "lissage" de l'histogramme des fréquences. Sur le support tableau, la fonction de densité s'obtient à partir de la fonction de répartition par un quotient de différences tabulaires (pente). Réciproquement, la fonction de répartition s'obtient à partir de la fonction de densité par une sommation tabulaire de produits (somme de surfaces de rectangles).

Sur la courbe "fonction de densité", l'information "fonction de répartition" est donnée par la surface.

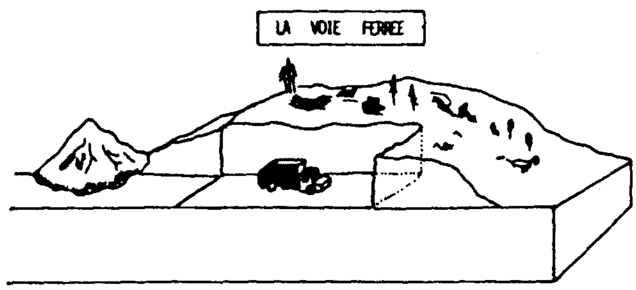


Sur la courbe "fonction de répartition", l'information "fonction de densité" est donnée par la pente de la tangente.



2-1 - UTILISATION DU CALCUL D'AIRE

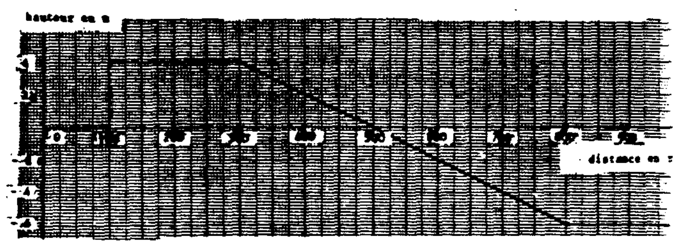
F 1012



Une voie ferrée horizontale de 50 m de large est en construction. L'entreprise dispose de deux dépôts de terre.

Le premier, le plus proche, contient déjà 10 000 m^3 de terre et peut contenir au maximum 60 000 m^3, le deuxième plus éloigné est vide et peut contenir 20 000 m^3.

En première approximation, le profil du terrain est donné par le graphique suivant :



A quelle distance doit-on commencer à utiliser le deuxième dépôt ?
Suffira-t-il ?
Quand va-t-on manquer de terre ?

Les déblais s'évaluent jusqu'à 300 m et après 800 m par un calcul de surface de rectangle S = L x l : l = 4 , L = x ou l = - 6, L = x - 800.

La formule de la surface du rectangle donne une primitive de y = a.

Les déblais ou remblais s'évaluent entre 300 et 800 m par un calcul de surface de trapèze S = (B + b) h/2 : B = 4, b = - 1/50 x + 10, h = x - 300.

La formule de la surface du trapèze donne une primitive de y = ax + b.

La situation proposée se prête bien à traiter le problème du calcul des **constantes d'intégration** qui apparaissent comme des **conditions initiales** ou pour le **raccordement des primitives.**

La réversibilité ou directement l'approche cinématique donne les formules des dérivées. Les calculs des différences tabulaires avaient déjà montré que la dérivée de y = ax + b était y = a et avaient préparé le terrain pour la parabole en visualisant que la pente était une droite. Dans ce cas, le théorème des diamètres de la parabole donne la pente sans passage à la limite.

On récupère ainsi deux formules sécurisantes $y = ax^2 + bx + c$ a pour dérivée $y' = 2ax + b$ et $y = ax + b$ a pour primitive $y = ax^2/2 + bx + Cte$.

Le traitement de diverses situations de fonctions affines par morceaux comme celle ci-dessus met bien en évidence le rôle des constantes d'intégration.

1-4 - SYNTHESE DES DIFFERENTES APPROCHES DU CONCEPT DERIVATION-INTEGRATION

Au travers des trois approches, il s'agit bien de faire comprendre le concept dérivation-intégration, c'est-à-dire le sens de l'opération dérivation, le sens de l'opération intégration et la réversibilité des deux opérations.

Aucune des trois approches ne se suffit à elle-même. Chacune aborde le concept sous un angle différent. Ceci a pour but d'aider les élèves à se créer des représentations qui donneront du sens au concept et le transformeront en un instrument utilisable.

Contrairement aux méthodes classiques d'enseignement, on s'appuie d'une part sur les notions géométriques (et intuitives) de tangente et de surface et d'autre part sur des calculs par encadrements ou par approximation. Il y a interaction entre les calculs numériques structurés sur le support tableau et la vision globale du problème sur le support graphique. Cette interaction est renforcée par les outils tableur et calculette de courbes. L'utilisation du tableur, en particulier de la différence tabulaire et de la sommation tabulaire permet de dépasser l'aspect numérique ponctuel par un traitement global de la recherche de la pente ou de la surface : **les calculs de pente sont associés à des quotients de différences tabulaires. Les calculs de surface sont associés à des sommations tabulaires de produits.** Le tracé graphique permet de visualiser **globalement la "courbe pente" ou la "courbe surface".**

A aucun moment, il n'est question d'infiniment petit ni à fortiori de limite. La lisibilité interdit d'ailleurs de prendre un pas trop petit. Pourtant, bien que fondée sur des notions intuitives de courbes, de tangentes, de surfaces, la démonstration de la réversibilité des calculs de pente et de surface est une vraie activité déductive et constitue à ce niveau une "**démonstration**". La réversibilité est mise en évidence par la recherche d'analogies entre les informations portées par les différents supports.

Dans ces approches, le support formule est absent, il n'y a aucun calcul algébrique formel, mais cela ne veut pas dire que les activités, elles, ne sont pas formelles. En évitant le support formule, on centre directement les activités sur des notions d'"application linéaire tangente" et de théorie de la mesure plutôt que sur les calculs formels de dérivées et primitives mais à ce niveau, bien que le passage du discret au continu et du continu au discret soit sous-jacent, les difficultés théoriques sont provisoirement évitées.

En interaction avec les supports tableau numérique et graphique, un nouveau support est introduit lié à l'étude qualitative, le tableau de variation qui apparaît comme un nouvel objet formel visualisant les évolutions, guidant les tracés.

2 - LE PASSAGE AUX FORMULES ALGEBRIQUES

Les activités graphiques, numériques et qualitatives précédentes constituent un saut qualitatif important pour les élèves. L'introduction du support formule a un double rôle : **sécuriser** le groupe en revenant à des manipulations de l'étape précédente liées au tryptique tableau-graphique-formule et **opérationnaliser le formulaire** de calcul de dérivées et de primitives pour de "bonnes" fonctions dans le cadre d'activités de résolution de situations-problèmes.

Compte-tenu des acquis précédents des notions de pente et de surface, à ce stade, le vocabulaire et les notations usuelles sont introduites sans poser le problème de l'existence :

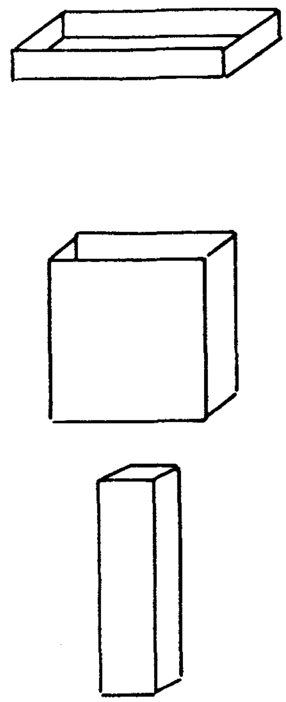
La dérivation, c'est un calcul de pente
L'intégration, c'est un calcul de surface
La dérivée est l'écriture algébrique de la dérivation
Le calcul de primitive est l'opération inverse du calcul de dérivée.

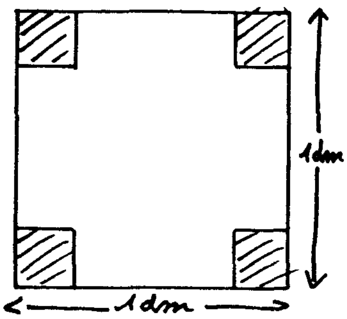
Plutôt que de mal démontrer ou d'utiliser prématurément des outils non opérationnalisés (la notion de limite) pour démontrer les formules algébriques de dérivées et de primitives, on préfère, sur des situations favorables, trouver **quelques formules en utilisant des acquis antérieurs** en s'appuyant sur des calculs d'aires simples (trapèze, cercle, triangle) ou par reconnaissance de modèle à l'aide du tryptique T.G.F. Les difficultés liées au rapport intégrale/primitive ne sont pas prises en compte. Le rôle des constantes d'intégration est bien mis en évidence.

2-2 - RECONNAISSANCE DE MODELES CONNUS

LE CENDRIER

Dans le cadre de la grande campagne anti mégots, on décide de fabriquer des cendriers à partir de plaques de tôle carrées en découpant un carré dans chaque coin et en relevant les bords.

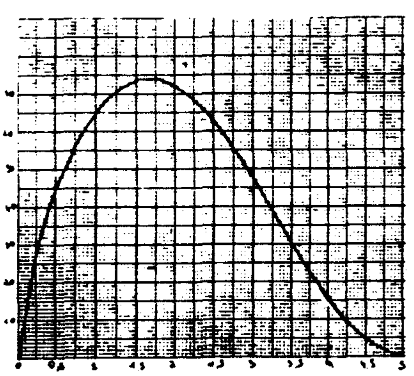




Quelle découpe choisir pour avoir des cendriers de contenance maximum ?

Les premières activités constituent à porter le problème sur les trois supports Tableau, Graphique, Formule.

DECOUPE	V
0.5	40.5
1	64
1.5	73.5
2	72
2.5	62.5
3	48
3.5	31.5
4	16
4.5	4.5
5	0

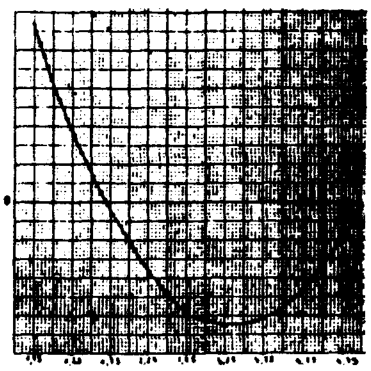


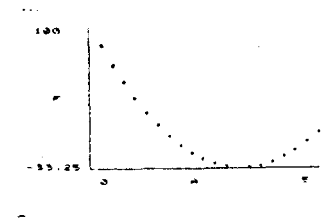
FORMULE : $V = (10 - 2x)^2 \times x = 100x - 40x^2 + 4x^3$

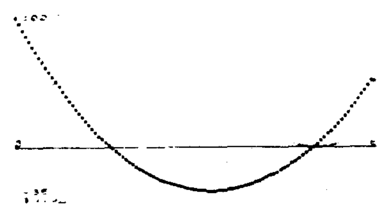
Contrairement aux situations précédentes qui ont servi à introduire le concept dérivation-intégration, la situation est algébrisable. Cela motive les élèves pour trouver "exactement" la découpe pour avoir la contenance maximum. Ils procèdent souvent dans un premier temps par approximations successives raisonnées. Cette méthode basée sur le calcul numérique facile à mettre en oeuvre surtout avec des calculettes programmables, laisse les élèves insatisfaits car ils ne trouvent pas une réponse "exacte".

Ils cherchent alors une autre méthode, c'est-à-dire se reportent sur l'étude qualitative et algébrique. La contenance sera maximum quand elle cessera d'augmenter pour diminuer, quand la pente de la courbe cessera d'être positive pour devenir négative. il s'agit donc de trouver la pente et de chercher quand elle s'annule.

On établit donc la courbe des pentes soit à la main, soit au tableur, soit avec la calculette de courbe (munie de la fonction différence relative) suivant l'aspect privilégié :







L'hypothèse selon laquelle la courbe-pente est une parabole paraît vraisemblable. La contenance sera maximum quand la parabole s'annule. le problème revient donc à trouver l'équation de cette parabole.

L'enseignant formule que :

- la dérivée d'une expression du 3ème degré est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$

- la formule algébrique de la dérivée de $4x^3 - 40x^2 + 100x$ est $12x^2 - 80x + 100$

Les élèves vérifient la validité de la formule graphiquement et numériquement. L'enseignant peut alors donner les formules générales des dérivées et des primitives des polynômes.

Les autres formules (dérivées d'un quotient, d'un produit, d'une puissance, et des fonctions de base) seront utilisées sans démonstration ou justification.

La démonstration d'autres formules de dérivée ou de primitive est renvoyée à une étape ultérieure de la formation. Que ce soit par des passages à la limite ou par des techniques liées à des calculs d'aires, elle se fera dans le cas où la démonstration porte en elle-même un aspect formateur : méthode de raisonnement ou meilleure connaissance du modèle (par exemple l'exponentielle Cf. Chap XI)

Le formulaire est donné globalement, il est utilisé au fur et à mesure des besoins en veillant à ce que primitive et dérivée soient bien perçues comme des opérations réversibles.

C.U.E.E.P. LILLE

Février 1979

FORMULAIRE : DERIVEE - PRIMITIVE

D 1001

x est la variable, a,b,c,d,e et C des constantes ainsi que n.
U et V sont des fonctions de x.

PRIMITIVE	FONCTION	DERIVEE
$Y = F(x)$	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
a	0	0
$ax + b$	a	0
$\frac{a}{2}x^2 + bx + c$	$ax + b$	a
$\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d$	$ax^2 + bx + c$	$2ax + b$
$\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + e$	$ax^3 + bx^2 + cx + d$	$3ax^2 + 2bx + c$
$\frac{a}{n+1}x^{n+1} + ..$	$ax^n + \dots$	$nax^{n-1} + \dots$

PRIMITIVE	FONCTION	DERIVEE
$\ln x$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
$\frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\frac{-2}{x^3} = -2x^{-3}$
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$	$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{-1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

FONCTION	DERIVEE
$aU + bV$	$aU' + bV'$

FONCTION	DERIVEE
UV	$U'V + UV'$

FONCTION	DERIVEE
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V - UV'}{V^2}$

FONCTION	DERIVEE
$\frac{1}{U}$	$-\frac{U'}{U^2}$

FONCTION	DERIVEE
$\sqrt{U}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$

FONCTION	DERIVEE
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$tg\, x$	$1 + tg^2 x$
$\ln x$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
e^x	e^x

FONCTION	DERIVEE
$y = f(ax + b)$	$y' = a f'(ax + b)$
$(ax + b)^n$	$an(ax + b)^{n-1}$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$
$tg(ax + b)$	$a(1 + tg^2(ax + b))$
$\ln(ax + b)$	$\frac{a}{ax + b}$
$e^{ax + b}$	$a e^{ax + b}$

FONCTION	DERIVEE
$y = f(U)$	$y' = U'f'(U)$
U^n	$nU'U^{n-1}$
$\sin U$	$U' \cos U$
$\cos U$	$-U' \sin U$
$tg\, U$	$U'(1 + tg^2 U)$
$\ln U$	$\frac{U'}{U}$
e^U	$U'e^U$

FONCTION	PRIMITIVE
$n \neq -1 ;\ x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

FONCTION	PRIMITIVE
$(ax + b)^n$	$\frac{1}{a}\,\frac{(ax + b)^{n+1}}{n + 1} + C$
$\frac{1}{ax + b}$	$\frac{1}{a} \ln(ax + b) + C$
$e^{ax + b}$	$\frac{1}{a} e^{ax + b} + C$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$

FONCTION	PRIMITIVE
$U'U^n$	$\frac{U^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{U'}{U}$	$\ln U + C$
$U'e^U$	$e^U + C$
$U' \sin U$	$-\cos U + C$
$U' \cos U$	$\sin U + C$

2-3 - OPERATIONNALISATION DU CALCUL ALGEBRIQUE POUR RESOUDRE DES PROBLEMES

Des problèmes de recherche d'extremum et de calcul de surface nécessitant des outils algébriques peuvent maintenant être traités. De nombreux exemples figurent dans le document d'évaluation ESEU ainsi que dans des fiches de travail ESEU.

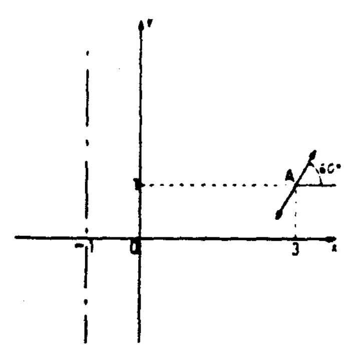
Signalons que dans ces situations, nous ne privilégions pas le support formule même si la formule algébrique intervient à un moment donné comme outil de résolution.

- Très souvent, plusieurs supports et le passage de l'un à l'autre sont nécessaires.
- Le raisonnement nécessaire pour résoudre le problème inclut différents aspects : géométrique,numérique, algébrique, ...
- On insiste aussi souvent sur les raccordements de courbes : détermination des constantes d'intégration, ou recherche de pente.
- Les équations algébriques obtenues ne sont pas forcément prévues pour être résolubles avec les outils algébriques classiques (3ème ou 4ème degré) et pareillement pour le calcul des primitives.

Parmi les situations, nous distinguons quatre types se référant à des niveaux taxonomiques différents : Exécuter - Traiter - Choisir (Cf. Chap XIII).

- Des utilisations directes du concept dérivation-intégration non liées à une situation mais liées au support graphique: détermination de maximum, de tangente, de surface, etc... Nous parlerons du niveau **Traiter** :

On veut trouver l'équation de la parabole passant par le point A de coordonnées 3 et 1 avec une pente de 60° en ce point et dont l'axe de symétrie se situe en x = -1.
Quelle est l'équation de cette parabole ?



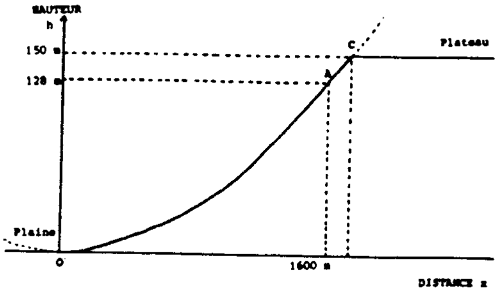
- Des situations d'application algébrique,le modèle étant explicité, nous parlerons du niveau **Exécuter**

C.U.E.E.P.-LILLE
Avril 1981

L'AUTOROUTE

F 1028

Une autoroute doit passer d'une plaine à un plateau.
Le profil du terrain correspond au schéma suivant :



En première approximation, on peut admettre que le profil correspond à un morceau de parabole de sommet 0.

La carte fournit les deux renseignements suivants :

- le plateau est situé 150 m plus haut que la plaine ;
- le point A est situé 128 m plus haut que le point 0 et à 1600 m de distance sur l'horizontale.

1) Etablir la formule donnant la hauteur h correspondant au profil en fonction de la distance horizontale x.

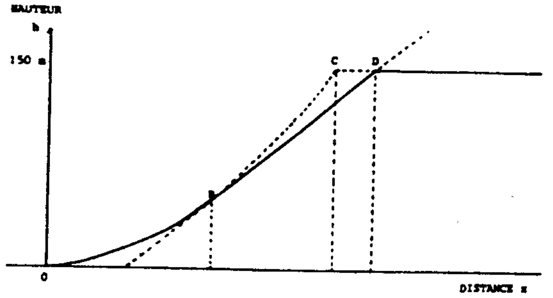
2) Quelle est précisément la pente au point A ?

3) Etablir la formule donnant la pente p en fonction de la distance horizontale x ?

Pour des raisons de sécurité, on veut limiter la pente maximum à 10 %.

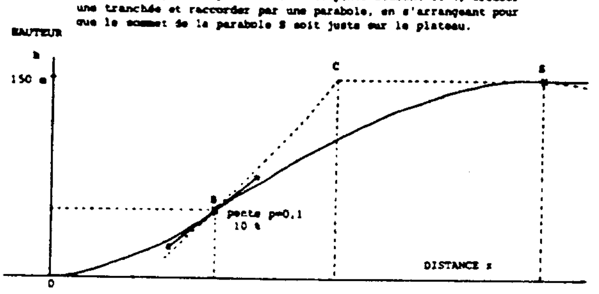
Deux solutions sont envisagées :

1) A partir du point B où la pente atteint juste 10 %, creuser une tranchée et raccorder par un plan incliné de pente constante 10 %.



Etablir l'équation de la droite BD qui assure le raccordement.

2) Pour raccorder plus en douceur, une autre solution est proposée. A partir du point B précédent, où la pente atteint 10 %, creuser une tranchée et raccorder par une parabole, en s'arrangeant pour que le sommet de la parabole S soit juste sur le plateau.



Etablir l'équation de la parabole qui assure le raccordement.

Question subsidiaire :
Calculer dans chacun des cas, les surfaces correspondant aux déblais à effectuer.

- Des situations où il faudra reconnaître le modèle, traiter le problème, par des méthodes algébriques. la solution finale pouvant être fournie par une résolution algébrique, graphique ou numérique. Nous parlerons de **Choisir + Traiter**

C.U.E.E.P. LILLE

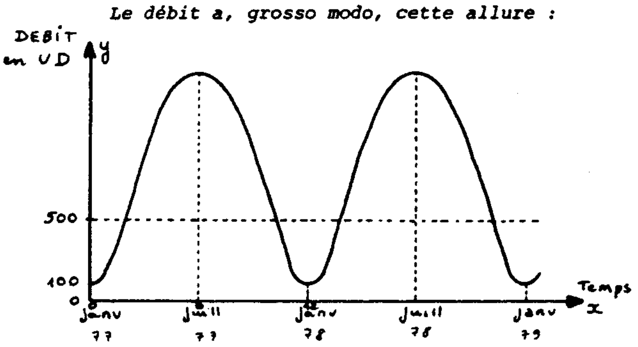
Octobre 1978

F 1018

LE FLEUVE

Le charmant pays de CHAMARABIE est traversé par un fleuve qui, comme son cousin le NIL, suit un cycle très régulier de crues et de sècheresses.

Le débit a, grosso modo, cette allure :



En pratique, on peut dire que ce débit suit la formule :

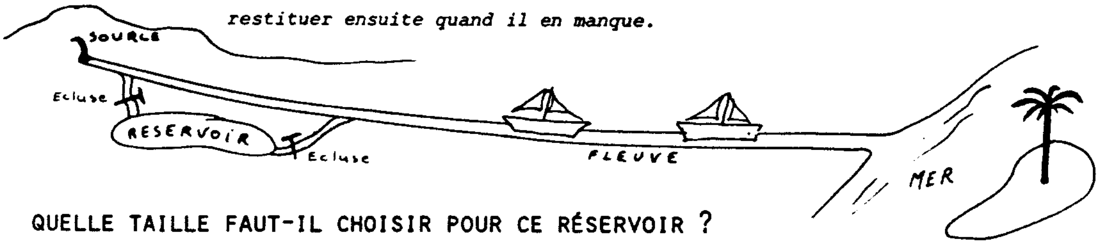
$$\boxed{y = x^4 - 24\,x^3 + 144\,x^2 + 100}$$

"x" désigne la durée, en mois, dans l'année. Par exemple :

$x = 0$	1° janvier,	0 heure
$x = 5$	1° juin,	0 heure
$x = 12$	31 décembre,	24 heures

"y" désigne le débit par mois (en UD)*

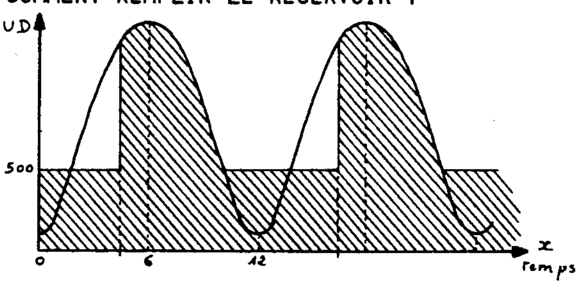
En période de sècheresse, les bateaux sont immobilisés. Le ministre de la navigation, dont le beau frère est entrepreneur de travaux publics, propose de faire creuser un immense lac, en amont du fleuve. On pourrait ainsi faire provision d'eau quand il y en a trop, pour en restituer ensuite quand il en manque.

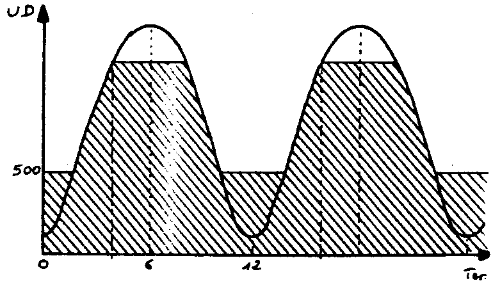


QUELLE TAILLE FAUT-IL CHOISIR POUR CE RÉSERVOIR ?

On ne veut pas que le débit du fleuve soit inférieur à 500 UD, sinon les bateaux s'enlisent.

COMMENT REMPLIR LE RÉSERVOIR ?





**Remarque : UD = unité de débit*
UV = unité de volume

Un fleuve dont le débit est de une UD fournit en un mois un volume d'eau d'une UV.

- Enfin des situations où il faut **transformer** l'information pour faire apparaître le modèle dérivation-intégration **avant le traitement**.

C.U.E.E.P. LILLE

F 52
1054

- <u>LES LIAISONS TEMPS, DISTANCE, VITESSE</u>.

L'auto-journal donne le résultat d'essai de voiture sous forme de courbes et de tables numériques. Vitesse/distance et vitesse/temps.

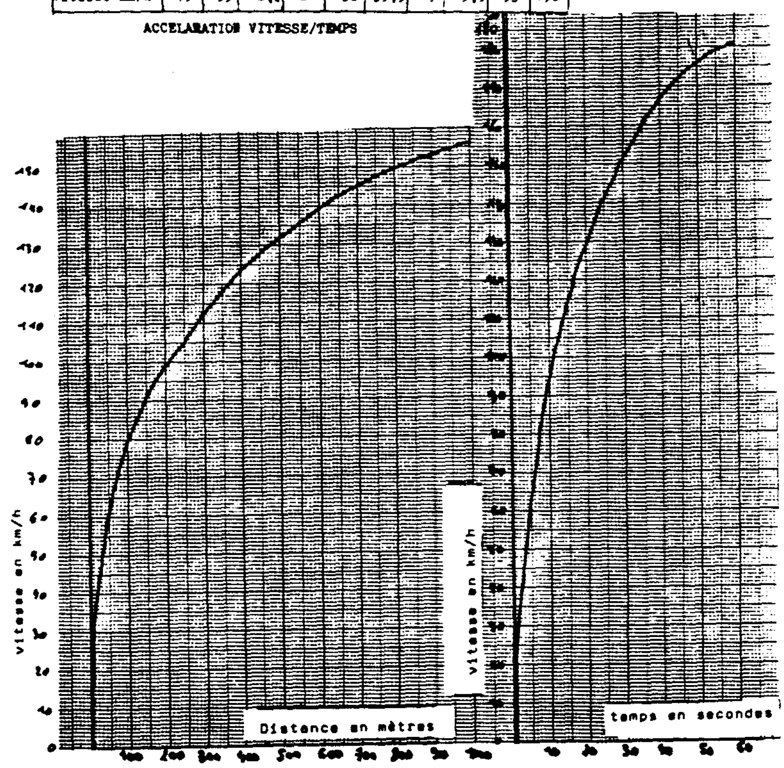
Peut-on à l'aide de ces <u>deux informations</u> trouver l'information distance/temps ?
Est-ce possible avec une seule de ces informations ?

Vitesse en km/h	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	181
Temps en seconde	2,5	3,5	4,5	5,8	7,2	8,8	11,1	13,8	16,6	20,3	24	28,1	35	43	57,5	60

Distance en m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Vitesse km/h	79	99	112,5	124	132	139,5	145	149,5	153	156

ACCELARATION VITESSE/TEMPS

ACCELERAT VITESSE/TEMPS



3 - LE TABLEAU DE VARIATION : UN NOUVEAU SUPPORT

La mise en place du concept dérivation-intégration a fait apparaître un nouvel objet, le **tableau de variation** sur lequel on peut raisonner et qui va donc devenir un **support opérationnel.**

Le fait d'utiliser les formules algébriques ne modifie pas l'importance attachée aux activités qualitatives sur les supports graphiques et sur le support tableau de variations. Citons par exemple :

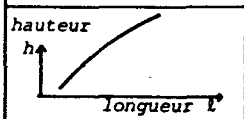
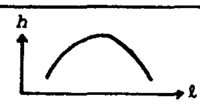
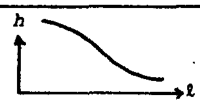
-établir un lien entre l'allure de la courbe et le signe de la pente

C.U.E.E.P.
LILLE
Mars 1979

ETUDE QUALITATIVE DE LA DERIVEE

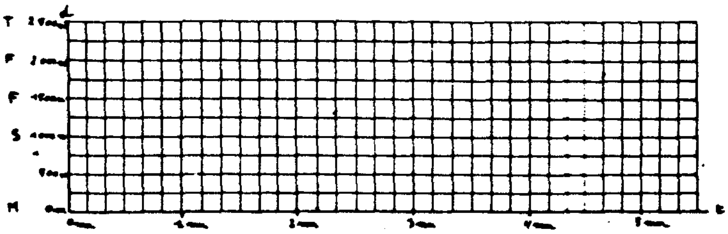
F 1011

Compléter le tableau, en suivant le modèle de la première ligne.

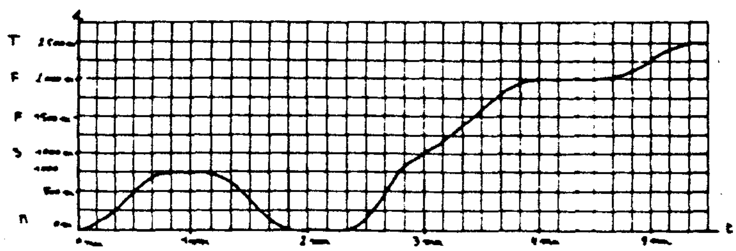
Allure du tracé de la courbe (hauteur)	*description de la variation de la courbe (hauteur)*	*Signe de la pente*	*Tableau de variation de la pente (dérivée)*
	*monte de moins en moins vite*	+	ℓ p = y' ↘
			ℓ p = y'
h ℓ	*descend de moins en moins vite*		ℓ p = y'
h ℓ		-	ℓ p = y' ↘
			ℓ p = y'
h ℓ	*descend de moins en moins vite puis monte de plus en plus vite*		ℓ p = y'
h ℓ		+	ℓ p = y' ↗ ↘
			ℓ p = y'
h ℓ	*monte de moins en moins vite puis monte de plus en plus vite*		ℓ p = y'
h ℓ		-	ℓ p = y' ↗ ↘

- établir le lien entre un texte et le support graphique

LE TRAJET : pour aller au travail, j'emprunte une route de campagne pendant 1 Km, puis après un stop, la rue principale où se trouvent à 500 m et à 1 000 m du stop, deux feux. Le parking de mon entreprise est à 500 m du dernier feu.
<u>Trajet d'hier</u> : la circulation était fluide, j'ai respecté les limites de vitesse et marqué le stop. Le premier feu est passé au rouge, quand j'arrivais dessus, le deuxième feu était au rouge, mais il est passé au vert avant que je m'arrête. J'ai mis 4 mn 30 s pour faire le trajet.
Tracer la courbe donnant la distance de mon domicile en fonction du temps.

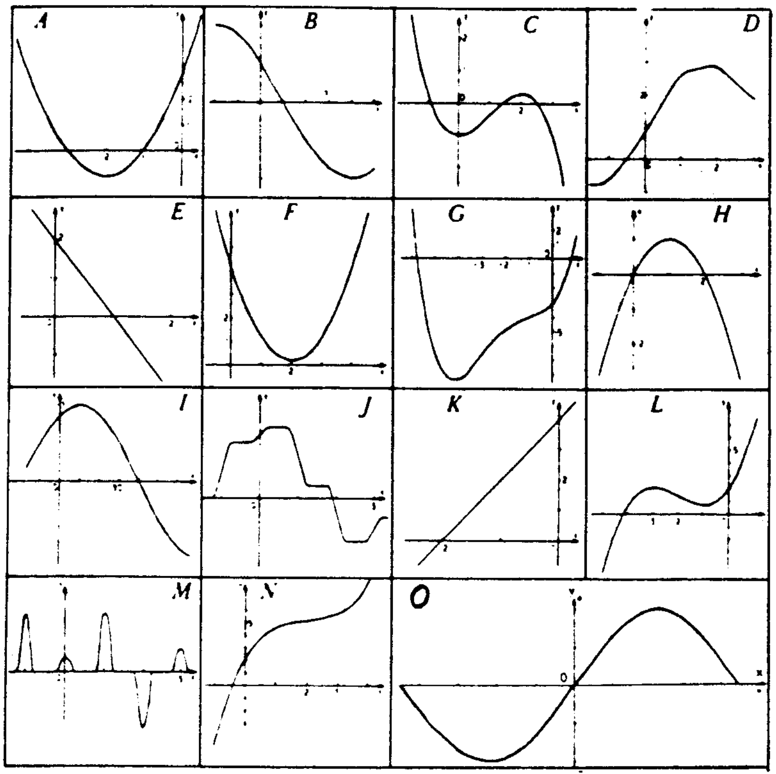


Trajet d'aujourd'hui : la courbe distance est celle tracée ci-dessous. Inventer l'histoire.



Toutes ces activités sont qualitatives mais très formelles. On passe aussi bien d'une courbe (au sens d'un dessin) au tableau de variation à une courbe incorporant toutes les informations. Le tableau de variation est bien un support opérationnel, il apparaît dans certains cas comme un outil de résolution.

Donnons en exemple un extrait de la brochure d'évaluation ESEU :

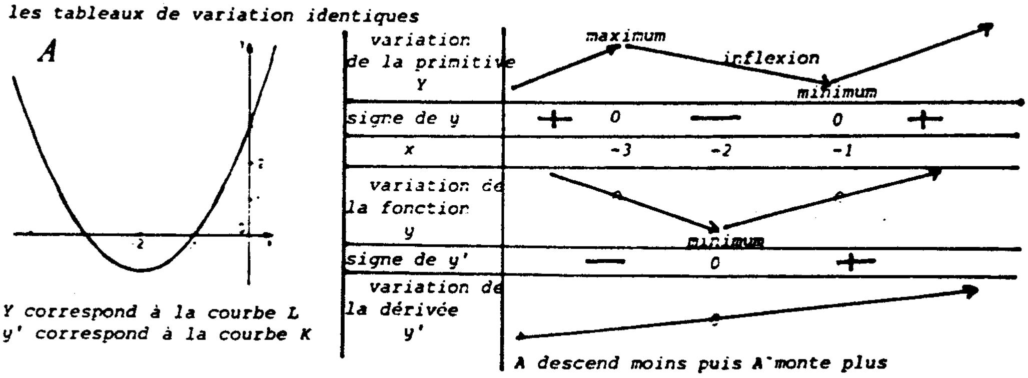


Parmi les courbes représentées,certaines se déduisent l'une de l'autre par par dérivation et intégration,lesquelles ?

Autrement dit si l'on suppose,que l'une des courbes représente la hauteur d'une colline,est-ce-que la pente (dérivée) et la surface (primitive) de cette colline sont représentées ?

et d'une méthode de traitement de ce type de problème :

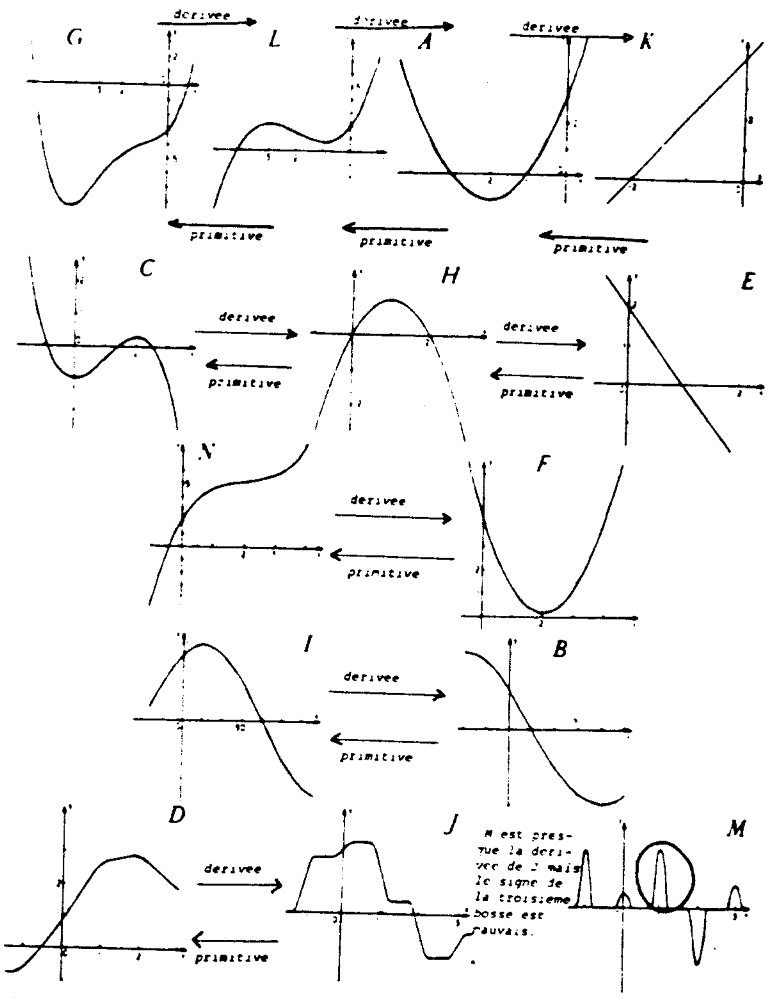
Une méthode un peu longue mais sure et systématique est d'établir les tableaux de variation de chaque fonction,de sa primitive et de sa dérivée puis de reconnaitre les tableaux de variation identiques



Y correspond à la courbe L
y' correspond à la courbe K

A descend moins puis A monte plus

ainsi que le document final :



Il n'y a pas d'autre liaison que celles donnees ci-dessus.

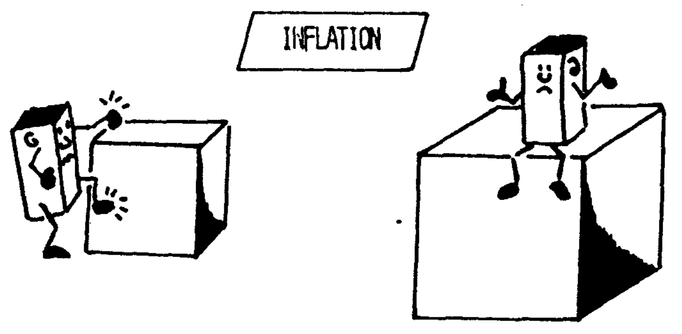
Le tableau de variation est aussi un outil de résolution de problèmes.

Même dans le cas de données algébriques, l'aspect qualitatif reste prédominant, le côté algébrique ne servant qu'à quantifier les résultats.

Dans l'exemple ci-dessous, le tableau de variation donne un sens à une phrase du type : Baisse de la hausse des prix.

C.U.E.E.P. LILLE

F 1013



M. B est un homme carré. Il s'aperçoit que l'inflation est plus forte que lui. Il décide qu'elle ne peut être que cubique.

Aussitôt les services techniques des ministères bourdonnent autour de la nouvelle formule miracle :

Indice des prix après t semestres $= \boxed{100 + at + bt^2 + ct^3}$

et calculent les coefficients a, b, c en se basant sur les statistiques officielles :

ler juillet 1976	indice 100	($t = 0$)
ler janvier 1977	indice 108	($t = 1$)
ler juillet 1977	indice 108	($t = 2$)
ler janvier 1978	indice 112	($t = 3$)

Quels commentaires vous inspirent les extraits de presse suivants :

OCTOBRE 1976	*HUMANITE* :	*"TOUJOURS LA HAUSSE"*
	FIGARO :	*"TENDANCE A LA BAISSE"*
1 JANVIER 1977	*AURORE* :	*"D'ici 2 mois BAISSE DES PRIX"*
1 MARS 1977	*AURORE* :	*"PARIS TENU, LES PRIX BAISSENT"*
1 MAI 1977	*FIGARO* :	*"Les prix continuent de baisser, l'inflation est vaincue"*
	HUMANITE :	*"Tendance à la hausse. De mauvaises surprises pour les vacances".*
1 JUILLET 1977	*FRANCE-SOIR* :	*"L'indice des prix n'a jamais été aussi bas depuis 6 mois. Partez en vacances tranquilles".*
	HUMANITE :	*"L'inflation reprend. Les prix montent".*
1 JANVIER 1978	*LIBERATION* :	*"100 % d'inflation en 1978".*

En conclusion

Nous avons dans ce chapitre décrit différentes approches possibles du concept de dérivation-intégration. Ce ne sont pas les seuls approches possibles, par exemple, le problème de la chute des corps aurait pu en fournir un autre.

Ces approches ne sont pas essentiellement des approches descriptives et intuitives pour "introduire le sujet et passer aux choses sérieuses ensuite" (la chose sérieuse dans ce cas étant la notion de limite). Elles sont construites sur les savoirs et savoir-faire de l'étape précédente, c'est-à-dire structuration des données sur le support tableau, activités de changement de support. Elles en sont en partie le prolongement direct, en particulier quand les calculs de pente sont associés à la manipulation structurante différence tabulaire.

La notion de réversibilité est opératoire dès les niveaux VI et V de la formation comme nous l'avons mentionné dans l'introduction à la monographie.

Par ailleurs, c'est avec les méthodes, sans rupture de pratique, que sont construites les nouvelles connaissances : les formules algébriques sont introduites en référence soit à des acquis géométriques par calcul sur le support graphique, soit par modélisation au travers de changement de supports. Le tableau de variation apparaît "naturellement" comme un nouveau support qualitatif formel, puissant outil de résolution de problèmes.

L'outil différence tabulaire et sommation tabulaire sur le support tableau sera l'outil de reconnaissance du modèle dérivation-intégration dans les cas non-standard. Dans les cas difficiles ou les cas non explicites les élèves se sécurisent d'abord sur le support tableau avant de passer au support graphique pour visualiser globalement et reconnaître le modèle.

Ainsi, à l'aide de méthodes numériques, graphiques, algébriques ou qualitatives qui sont à leur disposition, les élèves peuvent donc traiter (au sens de la conclusion du chapitre précédent) tous les problèmes relevant du concept de dérivation-intégration.

CHAPITRE XI

OPERATIONNALISER LE CONCEPT DE LIMITE

Dans l'étape précédente, pour dégager et opérationnaliser le concept de dérivation-intégration, les quantités étaient finies : différences et sommes tabulaires, surface de rectangles ou de trapèzes, pente de droites, la tangente est tracée approximativement comme la droite en contact avec...

Ce concept a été introduit avec une vision à la fois **statique** et **globale** centrée plus sur la **courbe dérivée** en évitant le passage à la limite. L'introduction du calcul algébrique formel n'a pas modifié cette vision.

A ce stade, le passage à la limite est évité en prenant comme points de référence des situations qui se traitent globalement grâce à des acquis antérieurs (géométriques ou reconnaissance de modèles) et ensuite en utilisant un formulaire comme un outil opérationnel simplificateur quand les situations peuvent se traiter algébriquement. Or, le passage à la limite permet d'avoir une vision **dynamique** de la dérivation-intégration. Celle-ci a été partiellement effleurée dans l'approche cinématique.

Cette vision dynamique et la notion de limite qui en découle vont introduire des sauts qualitatifs et quantitatifs dans le passage de la deuxième à la troisième étape :

- raisonnement sur des quantités qui ne sont pas fixes : qu'il s'agisse des raisonnements sur des égalités, sur des inégalités obtenues par encadrements ou par approximation. Le raisonnement porte sur l'étude des variations de ces quantités avec éventuellement passage égalité-inégalité.

- le domaine du calcul numérique et algébrique est enrichi par intégration de l'infini (infiniment grand, infiniment petit). Le passage à la limite entraîne le passage de quantités finies à des quantités infinies ou de quantités infinies à des quantités finies : le rapport de deux quantités tendant vers zéro (ou vers l'infini) peut être une quantité finie. Une surface géométrique infinie peut avoir une aire algébrique finie.

- le domaine du calcul numérique est enrichi de nombres non-rationnels qui ne pourront s'écrire que sous forme symbolique comme limite. On aborde l'ensemble des réels en définissant ponctuellement certains nombres.

Les points clés décrits dans ce chapitre ne recouvrent pas l'ensemble des problèmes liés à l'enseignement du concept de limite. En particulier nous ne reprendrons pas tout ce qui concerne le concept de suite et de limite de suite. Notre pratique dans ce domaine recoupe largement celle de l'équipe du G.E.M. de Louvain-La-Neuve pour laquelle des situations-problèmes utilisant les suites sont abordées à tout niveau de formation. Cette pratique a été analysée par Christiane Hauchart dans sa thèse [59].

Nous traitons dans ce chapitre du passage à la limite pour

- définir les dérivées et les primitives
- définir le modèle logarithme-exponentiel
- traiter des problèmes liés aux infiniments petits.

Il s'agit plus de faire des minithéorisations. Cependant on aborde par là un nouveau champ de problèmes : celui de la convergence.

Dans les deux premières étapes de la monographie, qui sont maintenant bien "rodées", les situations ont été largement utilisées en formation. Dans cette troisième étape, certaines situations ont le même statut, d'autres sont plus des pistes nouvelles en cours d'élaboration. nous avons ici poussé la théorisation plus loin que ce qui se pratique en formation mais il s'agit bien du même fondement. De plus, certains points font plus l'objet d'une formation de niveau III que de niveau IV.

1 - PASSER DU POINT DE VUE STATIQUE ET GLOBAL AU POINT DE VUE DYNAMIQUE ET LOCAL - DEGAGER UN CONCEPT DE LIMITE

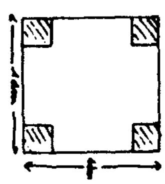
Nous détaillons dans cette partie deux situations :

La première conduit à définir la dérivée en un point, la deuxième à définir l'intégrale, en tant que surface, comme "somme infinie de lignes".

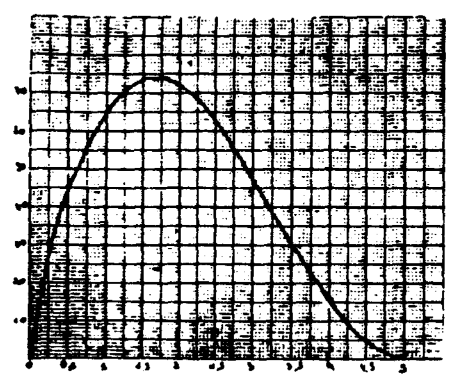
Dans ces deux situations, l'infiniment petit fournit une première approche du concept de limite.

1-1 - CALCUL DE LA PENTE D'UNE COURBE DEFINIE PAR UNE EQUATION

Nous reprenons la situation précédemment citée du Cendrier :



FORMULE : $V = (10 - 2x)^2 \times x = 100x - 40x^2 + 4x^3$



Il s'agit de calculer la pente de cette courbe. Dans le prolongement des activités autour de Pente-Hauteur-Surface, les élèves établissent un tableau numérique à partir de la formule, en pensant calculer la pente moyenne.

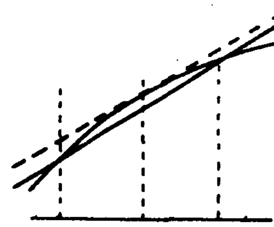
DECOUPE	V	Δ V	$\frac{\Delta V}{\Delta D}$
0,5	40,5	23,5	23,5 x 2
1	64	9,5	9,5 x 2
1,5	73,5	- 1,5	- 1,5 x 2
2	72	- 9,5	- 9,5 x 2
2,5	62,5	- 14,5	- 14,5 x 2
3	48	- 16,5	- 16,5 x 2
3,5	31,5	- 15,5	- 15,5 x 2
4	16	- 11,5	- 11,5 x 2
4,5	4,5	- 4,5	- 4,5 x 2
5	0		

Par ailleurs, ils disposent de la formule de la courbe dérivée : $12x^2 - 80x + 100$

Le calcul de la valeur de la courbe dérivée aux milieux des intervalles, montre un "décalage" entre la pente moyenne et la valeur de la courbe dérivée. Grâce à l'approche cinématique, la valeur de la courbe dérivée est mise en correspondance avec la pente de la tangente à la courbe. Cette situation nous permet de "mesurer l'écart" entre la pente moyenne et la pente de la tangente et "passer" de l'une à l'autre.

Le calcul formel de la pente moyenne sur un intervalle de longueur 2 de centre x quelconque donne :

$$\frac{f(x+\Delta) - f(x-\Delta)}{2\Delta}$$



ici $f(x) = 4x3 - 80x^2 + 100x$

$$\frac{4(x+\Delta)^3 - 80(x+\Delta)^2 + 100(x+\Delta) - 4(x-\Delta)^3 - 80(x-\Delta)^2 + 100(x-\Delta)}{2\Delta} =$$

$$\frac{24x^2 + 8\Delta^3 - 160x + 200}{2\Delta} = 12x^2 - 80x + 100 + 4\Delta^2$$

$12x^2 - 80x + 100$ est exactement $f'(x)$

$$\frac{f(x+\Delta) - f(x-\Delta)}{2\Delta} = f'(x) + 4\Delta^2$$

Cette formule fournit un moyen algébrique de mesure de l'écart entre la pente moyenne et la pente de la tangnete au milieu de l'intervalle. L'écart est $4\Delta^2$ c'est-à-dire que :

Plus la largeur de l'intervalle Δ deviendra petite plus la différence $4\Delta^2$ deviendra négligeable. On formule ainsi deux hypothèses :

- la pente moyenne est la valeur de la courbe dérivée avec une correction, cette correction est négligeable quand Δ est asez petit,

- la pente d'une sécante c'est "à peu de chose près" ($4\Delta^2$) la pente de la tangente, la correction étant d'autant plus négligeable que la sécante se rapproche de la tangente.

Le concept de limite est introduit ainsi en ayant en référence les différents supports : numérique, algébrique, graphique pour formuler que :

- la tangente est la position limite d'une sécante,
- la dérivée en un point est la limite de la pente moyenne sur un intervalle quand cet intervalle tend vers zéro

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x-\Delta)}{2\Delta}$$

Ce nouveau concept, une fois introduit, sert de base pour établir rigoureusement la notion de dérivation, démontrer les formules algébriques de dérivées et par réversibilité les formules algébriques des primitives.

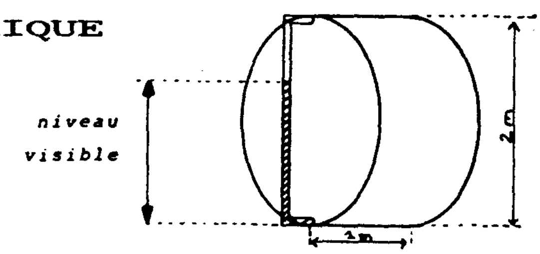
Il est également possible alors de justifier le critère sur les différences tabulaires et plus généralement des différences relatives émis comme hypothèse dans la première étape pour reconnaître un polynôme sur un tableau numérique.

1-2 - LA DEUXIEME SITUATION EST UN CALCUL DE SURFACE

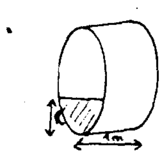
Comme précédemment, en partant d'une formule d'approximation, le concept de limite permet de définir la notion d'intégrale.

LA CUVE CYLINDRIQUE

Trouver le nombre de litres en fonction du niveau

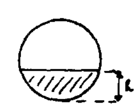


Le problème est un problème de calcul de surface



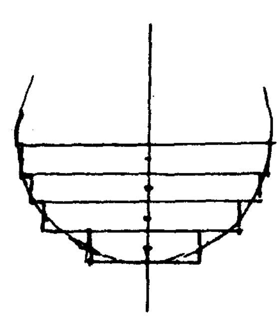
V(h) = S (h) x 1 m

Il faut déterminer S(h)

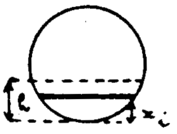
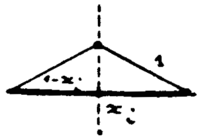


Ne connaisant pas de moyens simples de calcul de S(h) (formules algébriques ou géométriques) les élèves proposent comme dans la deuxième étape, de découper la surface en bandes rectangulaires, de calculer la surface de chaque bande et d'en faire la somme. On obtiendra ainsi une **valeur approchée de la surface.**

Comme nous l'avons décrit dans la deuxième étape, plusieurs formes d'approximation ou d'encadrement sont possibles, nous choisissons ici celle des rectangles médians.



Le calcul de la surface de chaque bande nécessite de connaître sa longueur, c'est-à-dire la longueur de la corde qui passe par le centre x_i de chaque intervalle et de structurer les calculs sur le support tableau. C'est-à-dire :

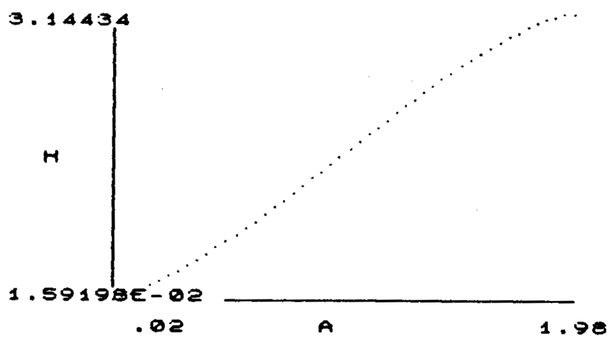
- calculer  en fonction de x_i  qui donne $2\sqrt{1-(1-x_i)^2}$

- inscrire les calculs dans un tableur :

x	2 x	x^2	$2x - x^2$	$\sqrt{2x - x^2}$	$2\sqrt{2x - x^2}$	multiplication par la largeur du rectangle	Σ des aires des rectangles
A	B = A * 2	C = A * A	D = B - C	E=SQR(D)	F = E * 2	G=F*0.04	H= Som Tab G

- lire la surface S en fonction de la hauteur h : la somme des aires correspond à la fin de l'intervalle ($x_i = \frac{\Delta}{2}$)pour faciliter la lisibilité, on fait apparaître sur le tableur la colonne $A + \frac{\Delta}{2} = h$

x	S	h
0.02	0.016	0.04
0.06	0.043	0.08
0.10	0.078	0.12
0.14	0.119	0.16
⋮	⋮	⋮
1.78	2.980	1.80
1.82	3.025	1.84
1.86	3.066	1.88
1.90	3.101	1.92
1.94	3.128	1.96
1.98	3.144	2.00



La surface totale correspondant à h = 2 est de 3.144. Or, il est bien évident que cette surface est la surface d'un cercle de rayon 1, soit exactement π. L'erreur commise est donc lisible, c'est la différence entre π et la valeur approchée trouvée. Pour chaque hauteur h, on peut lire une valeur approchée de S(h), mais on ne sait pas déterminer l'erreur commise.

Les mêmes calculs avec un pas plus fin, diminuent l'erreur commise mais on se heurtera très vite à la précision de la machine.

Que signifie prendre un pas plus fin ? On a calculé $\sum_{i=1}^{n} \left(2\sqrt{2x_i - x_i^2} \cdot \Delta\right)$

Prendre un pas plus fin signifie d'une part prendre π le plus petit et parallèlement augmenter le nombre de rectangles, c'est-à-dire faire la somme de plus de valeurs.

A ce stade, les élèves sentent bien que plus Δ sera "petit", plus il y aura de valeurs à sommer et plus la précision théorique sera grande. Il s'agit bien d'une précision théorique car, sans méthode de calcul numérique, à cause de la précision de la machine quelle qu'elle soit, la précision du calcul ne sera pas améliorée.

Le problème ne trouvera une solution qu'en passant à la théorie. C'est un double passage à la limite : limite quand Δ tend vers zéro et limite sur le nombre de valeurs à sommer. Les élèves formulent l'hypothèse :

Une surface est la limite d'une somme infinie de rectangles de largeur nulle ou une somme infinie de lignes. Ou encore la surface S(h) est la limite quand $\Delta \to 0$ *en même temps que la somme de 1 à n devient infinie.*

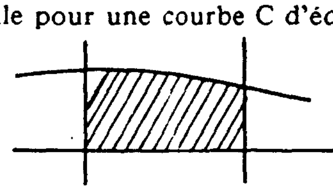
Cette hypothèse a été introduire par une pratique issue de l'étape précédente. Elle pose clairement le passage délicat du discret au continu.

Elle permettra d'établir et de donner un sens à l'écriture formelle

$$S(h) = \int_0^h 2\sqrt{2x - x^2}\,dx$$

A partir de cette écriture formelle de l'intégrale pour une courbe C d'équation y = f(x)

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



Revenons avant de conclure ce point, sur le cas où la primitive n'est pas calculable algébriquement. On connait théoriquement l'existence d'un nombre S(h) mais il n'y a pas de moyen de le calculer effectivement. Tous les calculs en donneront une valeur approchée plus ou moins précise suivant les moyens et les méthodes de calculs.

En unifiant les approches numériques, graphiques et algébriques, le **concept de limite** a permis de **définir les notions de nombre dérivé, intégrale-définie**, comme limite. On a :

- **rendu ces notions instrumentales** c'est-à-dire des instruments utilisables suivant les besoins, mais en tant que tels sans référence aux différentes approches qui ont permis de les construire,

- **élargi le champ des nombres** à des nombres obtenus comme limite

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x-\Delta)}{2\Delta} \quad , \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Ce sont bien de nouveaux nombres, nombres réels, au sens où ils existent, mais qui s'expriment par un symbole :

$$S(h) = \int_0^h f(x)\ dx$$

Dans aucune des deux situations nous n'avons posé les problèmes d'existence. En effet, à ce stade, les fonctions sont toujours dérivables, au moins par morceaux, intégrables et suffisamment "régulières". Les points de discontinuité, non dérivabilité sont les bornes des intervalles de définition et les problèmes de raccordement d'intégrales ne se posent que dans le calcul des constantes d'intégration. Les images mentales (la fonction est continue si on peut la tracer sans lever la main, la fonction est dérivable si elle n'a pas de point anguleux) sont suffisantes.

Les conditions d'existence des dérivées et des intégrales ne prendront de sens que quand le problème se posera, c'est-à-dire que le champ de problèmes sera suffisamment étendu pour rencontrer de telles fonctions en particulier des problèmes de non "régularité".

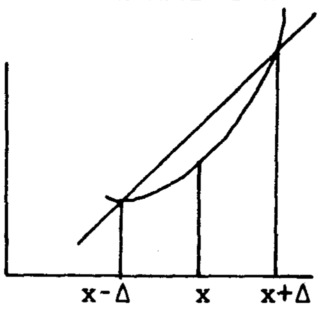
Il est préférable au niveau de formation auquel on s'adresse de faire fonctionner le concept de limite, les notions de dérivée et d'intégrale dans des situations "normales" comme outil pour résoudre des problèmes ou comme instrument pour construire des théories plus rigoureuses ou unifier des éléments de théories comme dans le cas de la construction du modèle fonctionnel exponentiel et de son inverse.

2 - UN EXEMPLE D'INTERACTION SITUATION-THEORIE : OPTIMALISATION DU CALCUL NUMERIQUE D'UN NOMBRE DERIVE

2-1 - LA SITUATION DE DEPART : APPROCHE EXPERIMENTALE

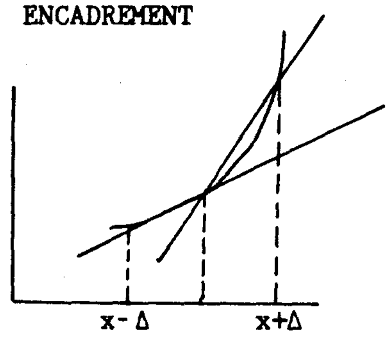
Dans l'introduction de la dérivation, les activités numériques et graphiques des élèves peuvent se formaliser pour un mathématicien, sur les supports graphique et formule sous deux formes :

APPROXIMATION



$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta) - f(x - \Delta)}{2\,\Delta}$$

ENCADREMENT



$$f'(x) \in \left[\frac{f(x) - f(x - \Delta)}{\Delta} \; ; \; \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}\right]$$

Croyant bien faire, les élèves prennent souvent des Δ trop petits. Ils dépassent la précision de la machine, trouvent des résultats aberrants, par exemple une dérivée nulle pour une fonction strictement croissante.

Se pose le problème du choix du meilleur Δ pour chacune des formules, pour une fonction donnée, pour une valeur donnée et sur une machine donnée. La mathématisation de cette situation/problème commence par une approche expérimentale grâce à un protocole qui conduit à changer successivement la valeur, la précision de la machine, puis la fonction. Le travail s'effectuant sur les fonctions dont la dérivée est connue, l'observation du meilleur Δ est aisée.

2-2 - EXEMPLE D'ETUDE EXPERIMENTALE

1) Calcul de la dérivée $f(x) = x^3$ pour $x = 1$ sur MO5 (6 chiffres significatifs)

a) Première approche avec $\Delta = 10^{-n}$

FONCTION : F(X)=X↑3 : F'(1) = 3

H	APPROXIMATION F(X+H)-F(X-H) / 2H	ENCADREMENT F(X)-F(X-H) / H	ENCADREMENT F(X+H)-F(X) / H
1	4	1	7
.1	3.01	2.71	3.31
.01	3.00006	2.97005	3.03006
.001	2.99984	2.99656	3.00312
.0001	2.99811	2.99573	3.0005
.00001	2.99216	2.95639	3.02792
.000001	2.83122	2.68221	2.98023
1E-07	-1.78814	-3.57628	0
1E-08	0	0	0
1E-09	0	0	0
9.99999E-11	0	0	0

<0? zéros

? zéros

b) Affinement de l'étude autour du maximum de précision

FONCTION : F(X)=X^3 : F'(1) = 3 — APPROXIMATION

FONCTION : F(X)=X^3 : F'(1) = 3 — ENCADREMENT

H	APPROXIMATION F(X+H)-F(X-H) / 2H	H	ENCADREMENT F(X)-F(X-H) / H	ENCADREMENT F(X+H)-F(X) / H
.1	3.01	.1	2.71	3.31
.09	3.0081	.09	2.7381	3.27809
.08	3.0064	.08	2.7664	3.2464
.07	3.0049	.07	2.79489	3.2149
.06	3.0036	.06	2.8236	3.1836
.05	3.0025	.05	2.85249	3.1525
.04	3.00159	.04	2.88159	3.12159
.03	3.00089	.03	2.91088	3.0909
.02	3.0004	.02	2.94039	3.06041
.01	3.00005	.01	2.97005	3.03006
.01	3.00006	.01	2.97005	3.03006
.009	3.00004	.009	2.97303	3.02706
.008	3.00002	.008	2.97598	3.02406
.007	3.00001	.007	2.979	3.02102
.006	3.00005	.006	2.98197	3.01812
.005	2.99996	.005	2.98491	3.01502
.004	2.99995	.004	2.98794	3.01197
.003	2.99987	.003	2.99078	3.00896
.002	2.99963	.002	2.99358	3.00568
.001	2.99984	.001	2.99656	3.00312
.001	2.99984	.001	2.99656	3.00312
.0009	2.99964	.0009	2.99679	3.00249
.0008	2.99946	.0008	2.99707	3.00184
.0007	2.99986	.0007	2.99718	3.00254
.0006	2.99926	.0006	2.99742	3.00109
.0005	2.99978	.0005	2.99788	3.00169
.0004	2.99871	.0004	2.99782	2.9996
.0003	2.9998	.0003	2.99831	3.00129
.0002	2.99946	.0002	2.99722	3.00169
.0001	2.99811	.0001	2.99573	3.0005
.0001	2.99811	.0001	2.99573	3.0005
.00009	2.99613	.00009	2.99348	2.99877
.00008	2.99252	.00008	2.98992	2.99513
.00007	2.99173	.00007	2.9913	2.99215
.00006	2.99513	.00006	2.99215	2.99811
.00005	2.99394	.00005	2.99334	2.99454
.00004	2.99513	.00004	2.98619	3.00407
.00003	2.99513	.00003	2.98619	3.00407
.00002	2.97725	.00002	2.96831	2.98619
.00001	2.99215	.00001	2.95639	3.02791

améliorations régulières du résultat

zone de doute ?

oscillations anormales la précision est dépassée

améliorations

doute ?

précision dépassée

2) Changement de la valeur de x par exemple x = 100

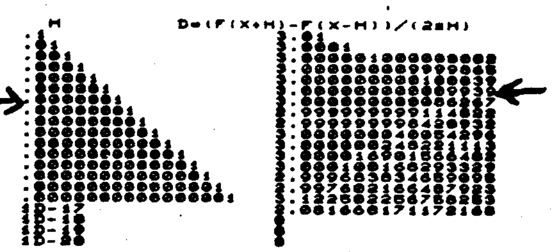
FONCTION :F(X)=X↑3:F'(100)= 30000

H	APPROXIMATION F(X+H)-F(X-H) / 2H	ENCADREMENT F(X)-F(X-H) / H	ENCADREMENT F(X+H)-F(X) / H
1	30001.2	29700.4	30301.9
.1	29997.8	29967.5	30028.1
.01	30040.6	30037.5	30043.8
.001	30062.5	29625	30500
.0001	28437.5	28750	28125
.00001	0	0	0
.000001	0	0	0
1E-07	0	0	0
1E-08	0	0	0
1E-09	0	0	0

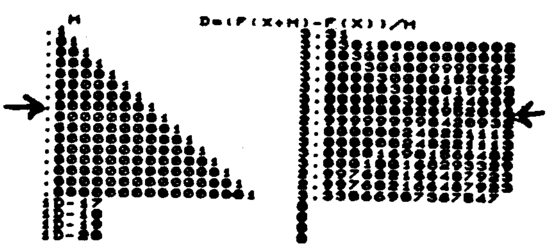
3) Changement de la précision par exemple TO7 (16 chiffres significatifs)

FONCTION : F(X)=X^3 : F'(1) = 3

APPROXIMATION



ENCADREMENT



4) Changement de la fonction par exemple f(x) = sin x

FONCTION :F(X)=SIN(X): F'(1)= .540302

H	APPROXIMATION $\frac{F(X+H)-F(X-H)}{2H}$	ENCADREMENT $\frac{F(X)-F(X-H)}{H}$	ENCADREMENT $\frac{F(X+H)-F(X)}{H}$
1	.454649	.841471	6.78265E-02
.1	.539403	.581441	.497365
.01	.540292	.544494	.53609
.001	.540346	.540733	.539959
.0001	.540316	.540018	.540614
.00001	.539422	.536442	.542403
.000001	.536442	.536442	.536442
1E-07	.894069	.596046	1.19209
1E-08	0	0	0
1E-09	0	0	0
9.99999E-11	0	0	0

5) Mise en commun des observations

- au début, la précision s'améliore régulièrement
- une courte période est douteuse, il est impossible de décider si l'on peut se fier ou non aux résultats
- puis les résultats deviennent aberrants, ils ne correspondent plus aux contrôles qualitatifs (inversion des inégalités, oscillation, etc...), la précision de la machine est visiblement dépassée, les résultats sont à rejeter
- enfin les calculs se stabilisent sur 0.
- le Δ optimum pour la formule d'approximation est plus grand, que celui des formules d'encadrement. Dans ce cas, il semblerait que Δ corresponde environ à la "demi-précision" de la machine, mais compte-tenu de la zone de doute ce résultat est très approximatif.

2-3 - MODELISATION DES CALCULS EN VIRGULES FLOTTANTES, UNE PROPOSITION : LA MACHINE A CALCULER THEORIQUE A N CHIFFRES

[Ce paragraphe est extrait d'un document formateur]

L'approche expérimentale aboutit assez vite à la nécessité de passer à la théorie et aux calculs formels pour lever les doutes et mieux comprendre les phénomènes observés, l'expérimentation ne suffit plus. En particulier comment expliquer l'apparition des zéros.

Un résultat nul signifie que pour la machine, les trois "programmes" $f(x + \Delta)$, $f(x)$ et $f(x - \Delta)$ donnent le même résultat. Notons $\boxed{=}$ la relation qui indique que deux programmes donnent le même résultat sur une machine

L'observation précédente se formalise donc par :

quelle que soit la machine pour Δ suffisamment petit

$$f(x + \Delta) \boxed{=} f(x) \boxed{=} f(x - \Delta)$$

L'étude de la relation $\boxed{=}$ sur des "machines réelles" conduit très vite à des problèmes insurmontables.

Par exemple sur MO5 :

la relation $\boxed{=}$ n'est pas la même à l'écran et en interne

$\frac{1}{3} \boxed{=} 0.33333$ à l'affichage mais $(\frac{1}{3} - 0{,}333333) \boxed{\neq} 0$

de même $7 \times 7 \times 7 - 7 \uparrow 3 \boxed{\neq} 0$ et $\left(\frac{5 \times 7}{9} - \frac{5}{9} \times 7\right) \boxed{\neq} 0$

```
?1/3
 .333333
?1/3-0.333333
 3.27826E-07
```

```
?7*7*7
 343
?7↑3
 343
?7*7*7-7^3
 1.52588E-04
```

```
?5*7/9-5/9*7
-2.38419E-07
```

Pour poursuivre la mathématisation nous proposons donc d'introduire une machine théorique, en éliminant les problèmes parasites dûs aux arrondis et aux conversions décimales / binaires.

Cette machine théorique à n chiffres modélise les calculs en virgules flottantes sur les machines réelles, la relation $\boxed{=}$ se définie donc par :

$$x + y \boxed{=} x \quad \text{si} \quad \frac{y}{x} < 10^{-n}$$

qui peut se traduire par : "y est négligé par rapport à x".

Dans la situation réelle du calcul de x + y trois cas peuvent se produire :

par exemple sur MO5	$x + y \boxed{=} z$	
	$2 + 0.001 \boxed{=} 2.001$	y est entièrement pris en compte
	$2 + 0.00333333 \boxed{=} 2.00333$	y est partiellement pris en compte
	$2 + 10^{-8} \boxed{=} 2$	y est négligé

La machine théorique explicite l'apparition des zéros :

dès que $x + \Delta \boxed{=} x$ donc si $\Delta < 10^{-n} \; |x|$

$$f(x + \Delta) \boxed{=} f(x) \boxed{=} f(x - \Delta)$$

<u>Calculs formels sur la "machine théorique"</u>

Pour déterminer le Δ optimum étudions le calcul de $(x + \Delta)^3$ sur la machine théorique à n chiffres.

Le programme est $\left[(x + \Delta)\ (x + \Delta)\right]\ (x + \Delta)$

La première étape est $x + \Delta$ dans ce calcul Δ peut être totalement ou partiellement pris en compte ou négligé.

La deuxième étape est $(x + \Delta)(x + \Delta) = x^2 + 2x\Delta + \Delta^2$

Dans ce calcul, les termes $2x\Delta$ et Δ^2 peuvent être de même totalement, partiellement pris en compte ou négligés.

La troisième étape conduit à $(x + \Delta)^2 (x + \Delta) = x^3\Delta + 3x^2\Delta + 3x\Delta^2 + \Delta^3$ on retrouve pour chacun des termes les trois cas de figure.

Ces observations se modélisent donc sur la machine théorique par :

- pour Δ assez grand tous les termes sont pris en compte

$$(x + \Delta)^3 \boxed{=} x^3 + 3x^2\Delta + 3x\Delta^2 + \Delta^3$$

- pour Δ trop petit $x + \Delta \boxed{=} x$ donc

$$(x + \Delta)^3 \boxed{=} x^3$$

- pour des valeurs intermédiaires les termes $3x^2\Delta$ $3x\Delta^2$ et Δ^3 seront partiellement ou totalement pris en compte ou éventuellement négligés.

Dans la formule d'approximation

$$D = \frac{(x + \Delta)^3 - (x - \Delta)^3}{2\Delta} = \frac{\left[x^3 + 3x^2\Delta + 3x\Delta^2 + \Delta^3\right] - \left[x^3 - 3x^2\Delta + 3x\Delta^2 - \Delta^3\right]}{2\Delta}$$

Pour avoir le maximum de précision dans le calcul, il faudrait que simultanément le terme Δ^3 soit négligé et le terme $3x^2\Delta$ totalement pris en compte.

Si les deux conditions sont remplies alors :

$$(x + \Delta)^3 - (x - \Delta)^3 \boxed{=} 6x^2\Delta \quad \text{et} \quad D \boxed{=} 3x^2$$ (valeur exacte du nombre dérivé)

Il n'est souvent pas possible d'avoir à la fois Δ^3 négligé et $3x^2\Delta$ totalement pris en compte. Il faut donc pratiquement se contenter de négliger Δ^3 donc de prendre le plus grand Δ qui vérifie

$$\frac{\Delta^3}{x^3 + 3x^2\Delta + 3x\Delta^2} < 10^{-n}$$

Cette formule conduit approximativement à :

$$\frac{\Delta^3}{x^3} < 10^{-n} \quad \text{qui donne} \quad \Delta < |x|\, 10^{-\frac{n}{3}}$$

Les calculs formels sur la machine théorique proposent donc d'utiliser sur les machines réelles la formule d'approximation suivante :

$$D = \frac{(x + x\,10^{-\frac{n}{3}})^3 - (x - x\,10^{-\frac{n}{3}})^3}{2x\,10^{-\frac{n}{3}}}$$

Pour les formules d'encadrement, la même approche conduit à rendre négligeables les termes en Δ^2, tout en essayant de garder les termes en Δ, cela donne :

$$(x + \Delta)(x + \Delta) = x^2 + 2x\Delta \quad \text{si } \Delta^2 \text{ négligé par rapport à } x^2$$

$$(x^2 + 2x\Delta)(x + \Delta) = x^3 + 3x^2\Delta \quad \text{si } \Delta^2 \text{ négligé par rapport à } x^3$$

Pour que Δ^2 soit négligé dans le premier calcul, il faut donc que :

$$\frac{\Delta^2}{x^2 + 2x\Delta} < 10^{-n} \quad \text{soit approximativement} \quad \Delta < |x|\, 10^{-\frac{n}{2}}$$

Cela signifie, que dans ce cas Δ correspond à la "demi-précision de la machine".

L'extension des calculs précédents aux binomes de degré k, aboutit aux formules :

$$(x + \Delta)^k - (x - \Delta)^k = k\,\Delta\, x^{k-1} \quad \text{si } \Delta^3 \text{ négligé par rapport à } x^3$$

donc si $\Delta \cong |x| \,.\, 10^{-\frac{n}{3}}$

$$(x + \Delta)^k - x^k = k\,\Delta\, x^{k-1} \quad \text{si } \Delta^2 \text{ négligé par rapport à } x^2$$

donc si $\Delta \cong |x| \,.\, 10^{-\frac{n}{2}}$

Les choix optimums obtenus pour les polynomes sont valables pour les autres fonctions de la calculette, car ces fonctions se calculent directement ou indirectement à l'aide de polynomes.

Il ne reste plus qu'à tester, sur quelques fonctions, les formules :

$$\frac{f(x + \Delta) - f(x - \Delta)}{2\Delta} = \frac{f((1 + 10^{-\frac{n}{3}})x) - f((1 - 10^{-\frac{n}{3}})x)}{2.10^{-\frac{n}{3}}\, x} \quad \text{et} \quad \frac{f(x + B) - f(x)}{\Delta} = \frac{f((1+10^{-\frac{n}{2}})x) - f(x)}{10^{-\frac{n}{2}}\, x}$$

La théorie sous-jacente aux manipulations précédentes est riche, il faut alors faire le lien entre les calculs en virgules flottantes sur machines à calculer, les calculs formels sur la "machine théorique" et les calculs de limites dans R introduits au paragraphe 1.

Les calculs dans R apparaissent donc, par le biais du concept de limite, comme des calculs en "précision infinie".

Les machines à calculer ne permettent pas d'aborder les formes indéterminées. Dans l'exemple précédent, seuls des calculs théoriques "en précision infinie" permettent d'écrire :

$$\frac{(x + \Delta)^3 - x^3}{\Delta} = 3x^2 + \Delta\ (3x + \Delta)$$

pour aboutir à $(x^3)' = \lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{(x + \Delta)^3 - x^3}{\Delta} = 3x^2$

Par contre les calculs en précision 10^{-n} sur la machine théorique conduisent à $f(x + \Delta)\ \boxed{=}\ f(x) + f'(x)\ \Delta$

Ce résultat en lien avec les "zooms" sur des traceurs de fonctions, débouche sur l'approximation au voisinage d'un point de la fonction par sa "tangente"
$f(x)\ \boxed{=}\ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ puis dans des activités de résolution de problèmes à l'aide de la méthode de Newton.

Pour optimiser cette méthode sur les ordinateurs ou sur les calculatrices programmables (avec possibilité de sous-programmes), la programmation de $f'(x)$ à partir de la formule théorique est remplacée par l'approximation :

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} \quad \text{avec } \Delta = x.10^{-\frac{n}{2}}$$

en posant $t = 10^{-\frac{n}{2}}$ on obtient $x_1 = x_0 \quad 1 + \left[\dfrac{t}{1 - \dfrac{f((1 + t)x)}{f(x)}} \right]$

qui ne nécessite que la programmation de f.

Cette distinction entre calcul en virgule flottante modélisé par la machine théorique à n chiffres et les calculs de limites dans R, va permettre d'aborder et de clarifier avec des approches analogues le problème des infiniment grands et en particulier de distinguer comportement asymptotique et asymptote.

Sur la machine théorique à n chiffres significatifs (que l'on suppose de plus avec une "mantisse" à n chiffres).

Quand n devient très grand, dans le calcul d'un polynome les termes sont progressivement négligés dans les calculs.

Pour $x > 10^n$ (pour une machine à n chiffres significatifs)

$ax^3 + bx^2 + cx + d \boxed{=} ax^3$ (si a, b, c sont du même ordre de grandeur)

Pour $x > 10^{n/2}$

$ax^3 + bx^2 + cx + d \boxed{=} ax^3 + bx^2$

$cx + d$ est négligé et bx^2 partiellement pris en compte.

Pour les infiniments grands, les concepts sont les mêmes que pour les infiniments petits.

Le passage en précision infinie, c'est à dire aux limites dans R va être nécessaire pour discriminer le cas du comportement asymptotique :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

du cas asymptote : $\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = 0$

3 - INSTRUMENTALISATION DU CONCEPT DE LIMITE : CONSTRUCTION DU MODELE FONCTIONNEL EXPONENTIEL ET DE SON INVERSE

Nous avons vu dans le chapitre VI sur les nouveaux outils de calculs comment, en utilisant précisément ces nouveaux outils, sans autre pré-requis que les savoir-faire arithmétiques, les élèves peuvent formuler et résoudre les problèmes liés aux croissances exponentielles :

- Par une approche algébrique : il s'agit alors de faire des opérations algébriques sur les puissances et non de manipuler les fonctions exponentielles. La touche machine utilisée pour calculer a^x est y^x et non e^x. Les manipulations algébriques s'appuient sur la relation fondamentale démontrée pour les puissances $a^{x+x} = a^x \, . \, a^{x'}$ et le type "croissance exponentielle" est caractérisé par cette relation.

- Par une approche graphique : les courbes représentatives ont une forme bien caractéristique. Sur le papier fonctionnel semi-logarithmique toutes les croissances exponentielles sont des droites et inversement. Il y a une famille exponentielle comme il y a une famille parabole.

L'objectif visé était alors de faire fonctionner le modèle exponentiel, d'en percevoir les spécificités, de résoudre des problèmes, c'est d'ailleurs uniquement dans ce dernier but que les logarithmes ont été introduits. Cependant, en lien avec l'étude qualitative des pentes et à partir des approches numérique, graphique et algébrique une approche qui n'est à ce stade que qualitative se dégage : les courbes a^x sont caractérisées par leur type de croissance. Ce sont des croissances de plus en plus rapides, la courbe - pente est une courbe de la même famille.

Pour étudier ce type de croissance et définir rigoureusement la fonction exponentielle et son inverse de logarithme, la notion de limite est nécessaire. C'est donc seulement dans la troisième étape "opérationnalisation du concept de limite" que la fonction exponentielle est définie comme étant la fonction dont le taux de croissance est égal à 1.

Il est alors possible d'unifier les divers éléments caractéristiques déjà rencontrés :

- le type "croissance exponentielle" est caractérisé par la relation algébrique $a^{x+x'} = a^x . a^{x'}$

- il existe une famille "exponentielle"

- l'exponentielle e^x est la seule fonction qui est en même temps sa propre dérivée

3-1 - ETUDE DE LA CROISSANCE EXPONENTIELLE

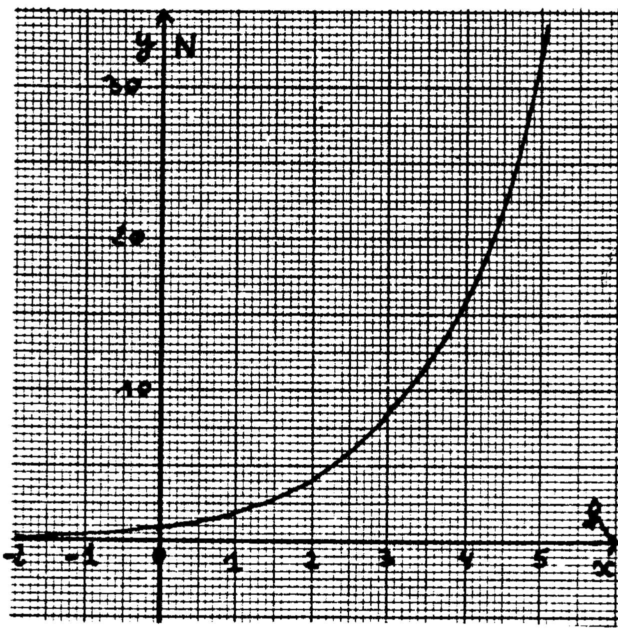
LES BACTERIES

Dans un bocal il y a des bactéries. Elles étaient 1 Millier à 0 heure.
Leur nombre double toutes les heures.
Combien y avait-il de bactéries à 1 heure, à 2 heures, hier à 10 heures,
Combien y en aura-t-il à midi ?

Document IREM [85]

Après avoir rempli le tableau numérique et tracé la courbe, on s'intéresse à la croissance. La formule algébrique est $y = 2^x$

h	N
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32



Les élèves font le lien entre croissance, pente et dérivée Ils savent utiliser les formulaires pour trouver les courbes dérivées mais précisément 2^x n'y figure pas. Le fait que la seule expression de la forme a^x qui figure dans les formulaires soit e^x suggère qu'il faudra se ramener à cette exponentielle de base.

Le seul moyen est donc de calculer les rapports d'accroissement $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en sachant que la dérivée en x_0 de $f(x)$ est :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

L'étude numérique en un point particulier (x = 3) fournit un support pour le passage à la limite.

x	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
2	$\frac{2^3 - 2^2}{1} = 4$
2,9	$\frac{2^3 - 2^{2,9}}{0,1} = 5,357361$
2,99	$\frac{2^3 - 2^{2,99},99}{0,01} = 4,52601$
2,999	$\frac{2^3 - 2^{2,999},999}{0,001} = 5,5433$
9,9999	$\frac{2^3 - 2^{2,9999}}{0,0001} = 5,545$

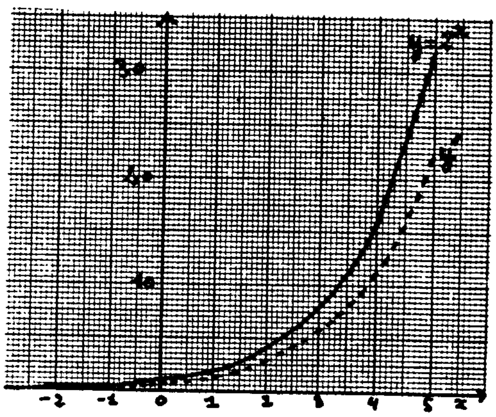
x	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
4	$\frac{2^3 - 2^4}{-1} = 8$
3,1	$\frac{2^3 - 2^{3,1}}{-0,1} = 5,741877$
3,01	$\frac{2^3 - 2^{3,01}}{-0,01} = 5,56444$
3,001	$\frac{2^3 - 2^{3,001}}{-0,001} = 5,5471$
3,0001	$\frac{2^3 - 2^{3,0001}}{-0,0001} = 5,545$

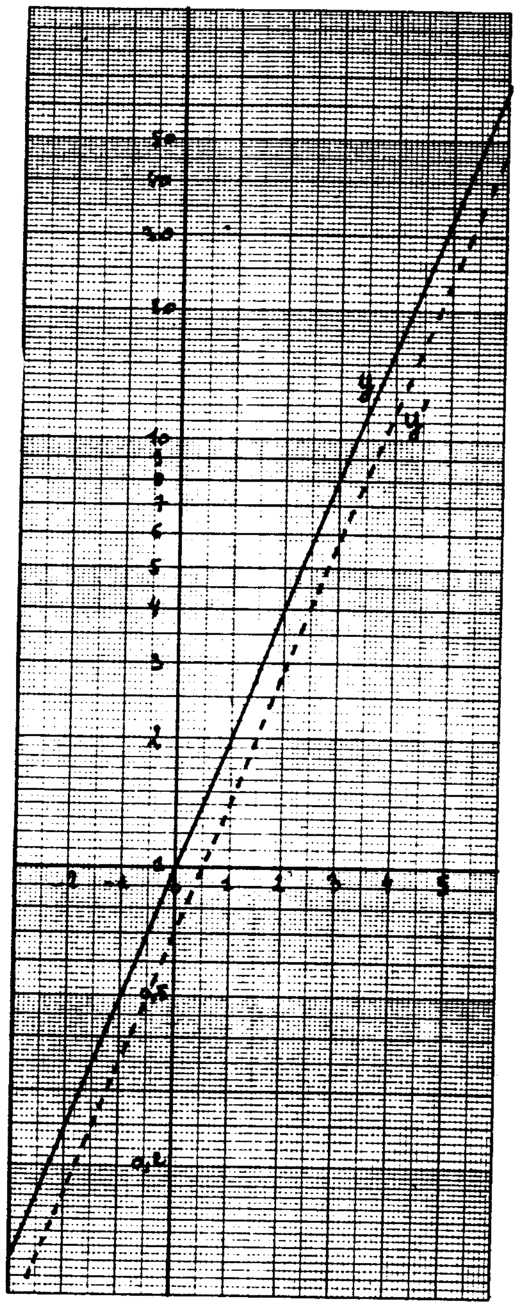
x = 2,9999 et x = 3,0001 donnent la même valeur approchée 5,545 : on retrouve pour cette fonction, le résultat "théorique" établi dans le paragraphe 2. L'optimum de précision est atteint pour $\Delta = |x'10^{-n/2} \cong 0,0001$ pour l'exemple considéré.

Pour obtenir la courbe dérivée approchée, il suffit pour chaque valeur de x_0 de faire un seul calcul :

$$\frac{f\,(x_0 + 0{,}0001) - f(x_0)}{0{,}0001}$$

x_0	$f'(x_0)$
- 2	0,17335
- 1	0,3467
0	0,693
1	1,386
2	2,773
3	5,545
4	11,09
5	22,18





La courbe dérivée a elle-même l'allure d'une courbe exponentielle. Sur papier semi-log, les 2 droites sont parallèles, elles se déduisent l'une de l'autre par translation verticale, ceci suggère que les deux courbes diffèrent d'un coefficient multiplicatif. Le calcul numérique conforte cette hypothèse, en effet en calculant pour les différents x_0 le rapport de $\frac{\Delta y}{\Delta x}(x_0)$ et de 2^{x_0}, on trouve 0,693 à trois chiffres significatifs.

Après avoir "découvert" graphiquement et conforté numériquement ce résultat, il s'agit de l'établir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}(x_0) = \frac{2^{x_0+\Delta} - 2^{x_0}}{\Delta} = 2^{x_0}\left(\frac{2^{\Delta}-1}{\Delta}\right)$$

$\dfrac{2^{\Delta}-1}{\Delta}$ ne dépend pas du point x_0 choisi, c'est une constante que l'on reconnaît être une valeur approchée de la dérivée en 0.

Un passage à la limite donne la valeur de la dérivée en n'importe quel point x_0.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta \to 0} 2^{x_0}\left(\frac{2^{\Delta}-1}{\Delta}\right) = 2^{x_0}\left(\lim_{\Delta \to 0} \frac{2^{\Delta}-1}{\Delta}\right)$$

ainsi que la formule générale $(2^x)' = (2^x)\left(\lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{2^{\Delta}-1}{\Delta}\right)$

D'où les fonctions exponentielles a^x sont caractérisées par leur type de croissance $\frac{(a^x)'}{a^x}$ = Cte, la constante donnée par $\lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ ne dépend que de a

C'est par définition le taux de croissance intantané qui n'est autre que la pente de la courbe en 0.

Notons que :

- c'est à partir de la relation algébrique que l'on a formulé la caractérisation des fonctions exponentielles par leur taux de croissance ou ce qui revient au même comme solution de l'équation différentielle $\frac{y'}{y}$ = Cte

- des nouveaux nombres ont été définis comme limite en les écrivant sous forme symbolique $(\lim\limits_{\to})$ sans soulever les problèmes d'existence de ces limites. Leur existence n'est pas en cause, on sait que ce sont des nombres réels mais on ne les connait pas. Quels sont ces nombres ? Inversement à partir d'un taux de croissance, comment trouver la fonction a^x ?

3.2 - LA FONCTION e^x EST LA FONCTION EXPONENTIELLE DONT LE TAUX DE CROISSANCE INSTANTANE EST EGAL A 1

Il faut donc chercher a tel que : $\left(\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}\right) = 1$

La procédure sera la même que précédemment : expliciter les calculs approchés avant le passage à la limite.

Pour Δ assez petit (mais pas trop) $\frac{a^\Delta - 1}{\Delta} \sim 1$

$a^\Delta \sim 1 + \Delta$

$a \sim (1 + \Delta)^{1/\Delta}$

Pour des commodités de calcul $\Delta = 10^{-n}$

pour $n = 4$ $a \sim 2.7181459$

pour $n = 5$ $a \sim 2.7182682$

pour $n = 6$ $a \sim 2.7182805$

pour $n = 7$ $a \sim 2.7182817$

pour $n = 8$ $a \sim 1$ ($\Delta = 0$ pour la machine)

On admet alors que quand n augmente indéfiniment $(1 + \frac{1}{10^n})^{10^n}$ a une limite qui est un nombre dont une valeur approchée est 2.7182817 et que ce nombre est représenté par le symbole e

D'où la définition :

Le nombre e tel que la fonction e^x ait un taux de croissance instantané égal à 1 (e^x est solution de l'équation différentielle $\frac{y'}{y} = 1$) est la limite quand n tend vers l'infini de

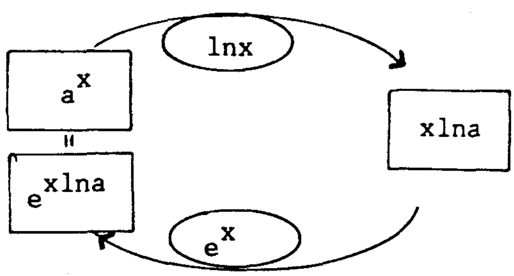
$(1 + \frac{1}{10^n})^{10^n}$

Pour étudier la liaison entre le taux de croissance instantané et la base a de la fonction a^x, il est possible de refaire ce qui vient d'être fait avec le taux 1 et la base e. On obtiendra ainsi que pour un taux de croissance instantané k,

$$a = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{k}{10^n}\right)^{10^n}$$

Mais l'idée d'engendrer la famille exponentielle par la seule fonction e^x qui vient d'être définie a été induite par les outils de calculs (calculette et formulaire). Par ailleurs, les logarithmes ont été introduits pour résoudre des équations du type $a^x = b$

Le schéma :



donne $\mathbf{a^x = e^{x.lna}}$

d'où

- la fonction e^x est génératrice de la famille exponentielle : $a^x = e^{xlna}$

- $(a^x)' = e^{xlna} = lna.a^x$

- le taux de croissance instantané des fonctions a^x est lna

- a^x est solution de l'équation différentielle $\frac{y'}{y} = k$ où $k = lna$

- $$lna = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

La définition de la fonction logarithme népérien unifie les différentes approches

- les logarithmes ont été utilisés pour résoudre des problèmes,

- $\ln a = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$

- dans les formulaires lnx figure comme une primitive de 1/x, dans presque tous les manuels scolaires lnx est défini comme primitive de 1/x.

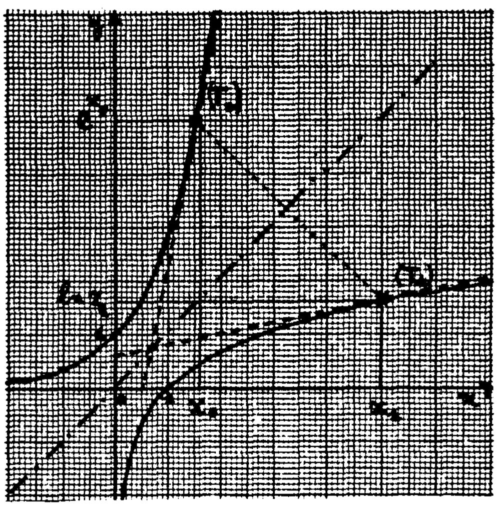
3-3 - DEFINITION DE LA FONCTION LN X

La fonction exponentielle est caractérisée à la fois par une relation de type algébrique $e^{x + x'} = e^x \cdot e^{x'}$ et par son type de croissance : $\dfrac{(e^x)'}{e^x} = 1$

De la même façon, le logarithme népérien est caractérisé par une relation de type algébrique réciproque $\ln(x.x') = \ln x + \ln x'$ et par son type de croissance réciproque.

Pour cela on détermine la pente de lnx et un point x_1 par des considérations graphiques de réciprocité.

Les deux courbes lnx et e^x sont symétriques par rapport à la droite $y = x$



T_0 la tangente en x_0 à la courbe e^x
sa pente est e^{x_0}
T_1 la tangente en $x_1 = e^{x_0}$ à la courbe lnx, sa pente est $\frac{1}{e^{x_0}}$ c'est à dire $\frac{1}{x_1}$
donc la dérivée de lnx est $\frac{1}{x}$

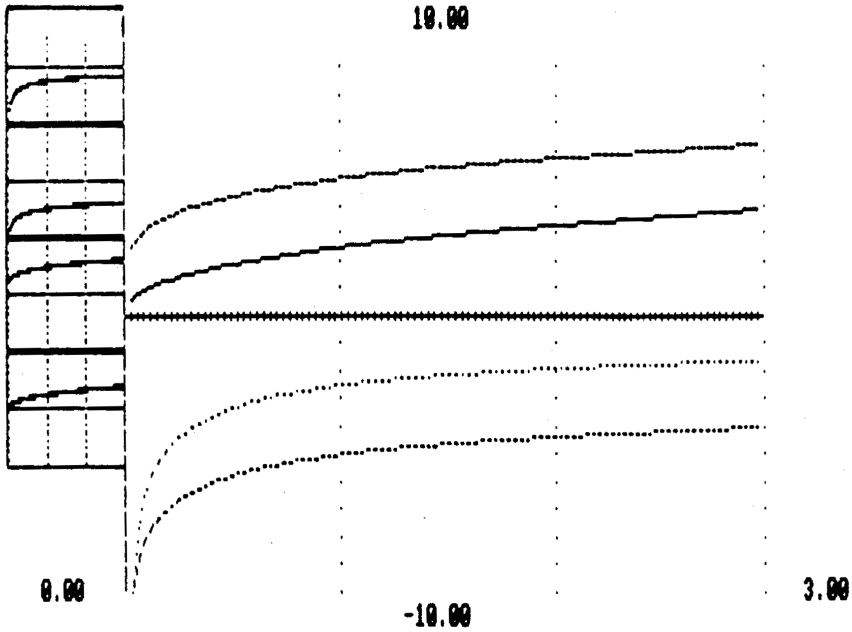
Par réciprocité, on retrouve la définition du logarithme népérien classiquement donnée dans l'enseignement : lnx est une primitive de $1/x$

Dans le formulaire, lnx s'intercalle dans les primitives de x pour $\alpha = -1$, alors que si $\alpha = -1$ une primitive de x est $\dfrac{x^{\alpha + 1}}{\alpha + 1}$

Il est possible à ce niveau d'enseignement, d'approcher une justification de ce fait graphiquement et intuitivement. Cette approche permet en outre de commencer à poser les problèmes de convergence et d'existence.

Décrivons sommairement cette approche, l'outil informatique est utilisé pour tracer les courbes soit en "dessin animé" soit en superposition.

On commence par tracer des courbes C_α primitives de $y = x^\alpha$ pour $x < -1$ et $x > -1$ par exemple $\alpha = -1{,}4$; $\alpha = -1{,}2$; $\alpha = -0{,}8$; $\alpha = -0{,}6$



L'examen des graphiques amène à constater que :

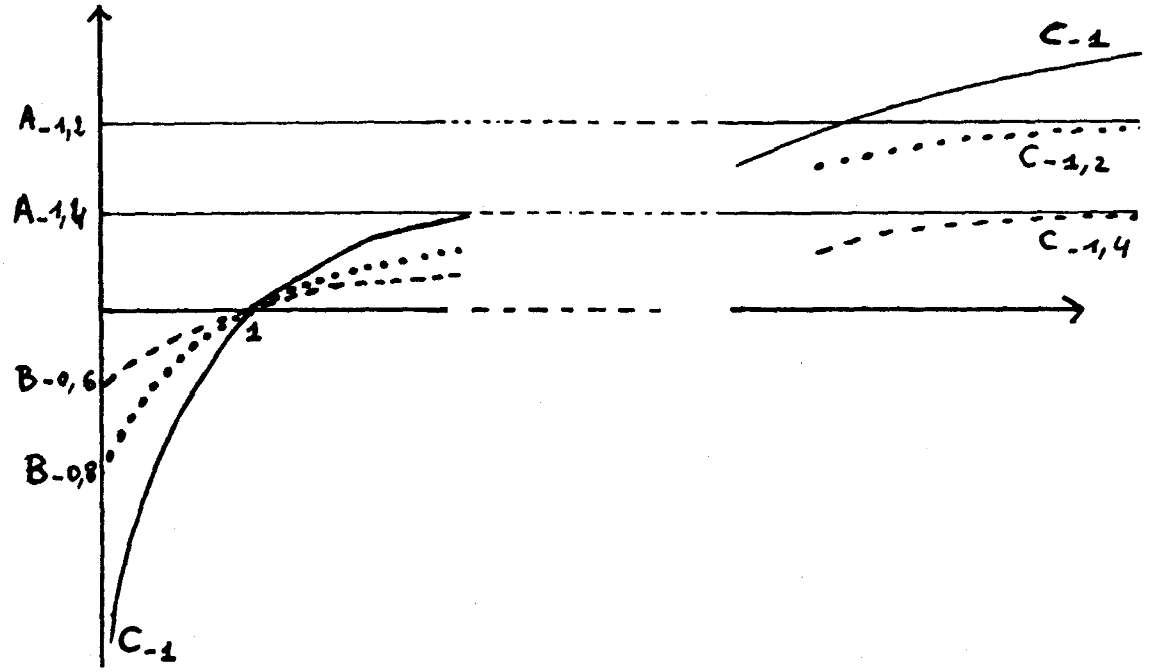
si $x < 1$ le comportement de lnx se rapproche plus de C_α pour $\alpha < -1$
si x 1 le comportement de lnx se rapproche plus de C_α pour $\alpha > -1$
ln a une asymptote verticale et n'a pas d'asymptote horizontale.

Les mêmes tracés, mais en prenant les primitives qui s'annulent pour $x = 1$ pour mieux comparer les croissances en "dessin animé" montrent la déformation des courbes vers la courbe C_{-1}

En superposition, on bloque sur la précision des tracés. C'est le même "blocaqe technique" que dans le calcul des infiniment petits ou des infiniment grands. Sur un écran d'ordinateur, en utilisant les représentations graphiques usuelles, il est difficile de décider si la courbe correspondant à lnx a ou non une asymptote horizontale sans connaître la réponse au préalable.

Pour étudier la déformation des courbes C_α vers la courbe C_{-1} il est donc indispensable d'avoir recours à l'étude théorique, en particulier des deux aspects déterminants à faire apparaître : l'étude de l'asymptote horizontale et l'étude de l'asymptote verticale ou du point de rencontre avec l'axe des y.

Des tracés "théoriques" permettent de visualiser la déformation, ils ne respectent pas le tracé exact.



Pour $\alpha < -1$ les nouvelles courbes C_α ont une asymptote horizontale $y = \frac{-1}{\alpha + 1}$ et ont une asymptote verticale $x = 0$

Pour $\alpha > -1$ les courbes C_α rencontrent l'axe des y au point B_α : $y = \frac{-1}{\alpha+1}$ la pente en ce point étant infinie.

Si α tend vers -1 par valeurs inférieures, l'asymptote à la courbe " monte de plus en plus", le point $A\alpha$ tend vers l'infini à la limite ($\alpha = -1$) C_{-1} n'aura plus d'asymptote horizontale.

Si α tend vers -1 par valeurs supérieures, le point B_α tend vers l'infini (par valeurs négatives), à la limite ($\alpha = -1$) les courbes C_α ne recontreront plus l'axe des y, C_{-1} aura une asymptote verticale $x = 0$.

C_{-1} est une courbe "charnière" entre les deux familles de courbes C_α

La visualisation nous conduit donc à dire que C_{-1} est la limite de C_α quand α tend vers -1 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures, écriture symbolique : $C_{-1} = \lim\limits_{\alpha \to -1} C_\alpha$

En référence àl'écriture de lna obtenue précédemment : $\ln a = \lim \frac{a^h - 1}{h}$

peut-on aller jusqu'à écrire $\ln x = \lim\limits_{\alpha \to -1} \frac{x^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$ en terme de fonction ?

A ce niveau de formation, la question ne peut qu'être posée.

Ce sont les représentations graphiques, les différents calculs en interaction avec les outils théoriques qui ont induit cette question. Ce sont alors d'autres problèmes d'analyse qui sont abordés.

4 - AU DELA DU CONCEPT DE LIMITE... LES PROBLEMES DE CONVERGENCE

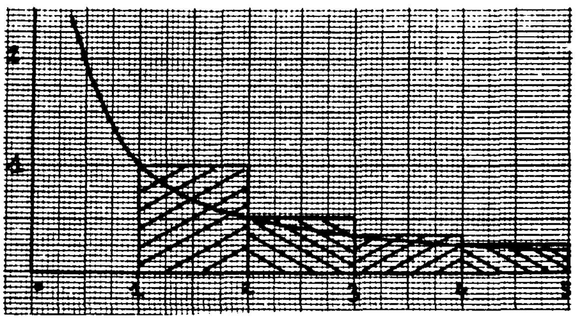
Plusieurs fois dans les paragraphes précédents des problèmes d'existence de limite sont apparus. ils ont été verbalisés mais à ce stade de la formation, ils ont été évités. Ils ont pu être évités sans être évacués parce que l'existence de la limite était apparue sur le support graphique ou sur le support tableau numérique ou sur le support "une machine théorique à n chiffres".

Après avoir rencontré et manipulé des situations pour lesquelles "tout marche bien", il est important de faire prendre conscience aux élèves qu'il peut exister des problèmes et donc de montrer la nécessité de définir les choses rigoureusement et de démontrer qu'effectivement la limite existe (ou n'existe pas), que la fonction est continue, dérivable, etc...

Donnons un exemple de **situation paradoxale** qui apprendra à se **méfier des évidences** : la pyramide que l'on peut remplir et que l'on ne peut pas peindre. C'est une pyramide construite d'éléments cylindriques de rayon $1/\sqrt{p}$ et de hauteur $1/\sqrt{p}$

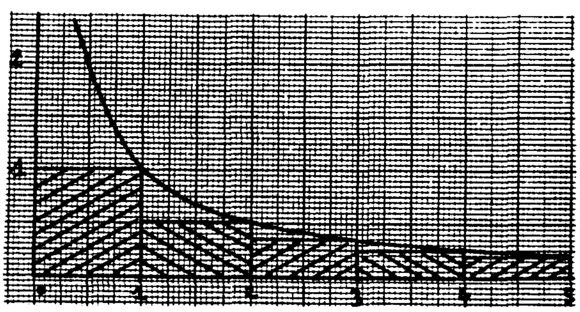
Le traitement de cette situation reprend les méthodes mises en oeuvre dans le calcul par encadrement de la surface d'une colline dans la deuxième étape.

[Extrait d'un document d'après-travail MA 11]



$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < a_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \; ; \; [\ln x]_1^{n+1} < a_n$$

$\ln(n+1) < a_n$ donc $(a_n)_n$ tend vers l'infini

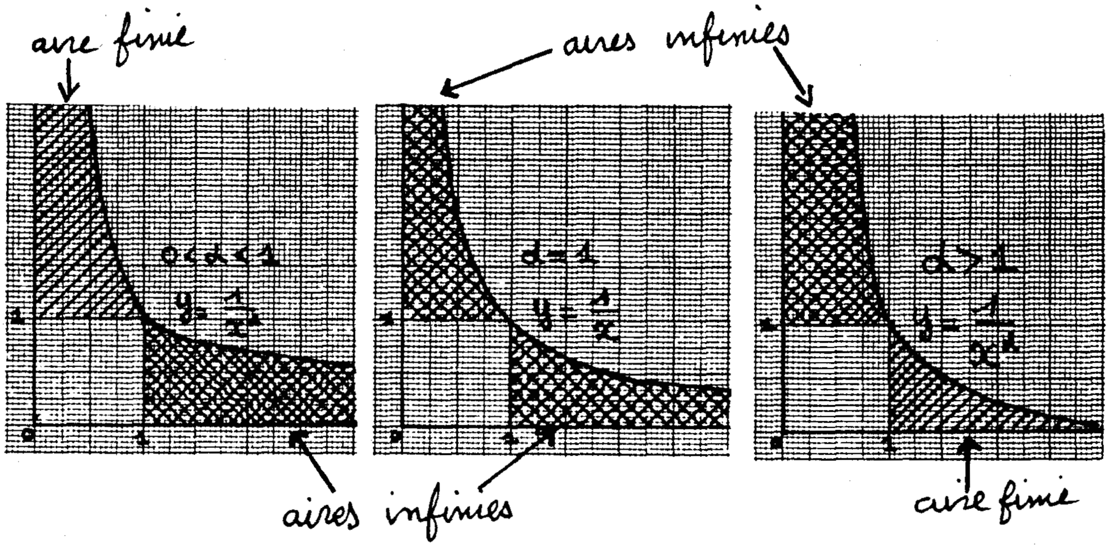


$$b_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p\sqrt{p}} = 1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p\sqrt{p}} < 1 + \int_1^{n} \frac{dx}{x\sqrt{x}} \; ; \; b_n < 1 + \left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^{n}$$

donc $\forall n \; b_n < 1+2$; $\forall n \; b_n < 3$

$(b_n)_n$ est une suite croissante majorée par 3, elle est convergente vers une limite $l < 3$ (on ne sait pas calculer facilement cette limite)

Nous avons aussi remarqué que $\frac{1}{x}$ ou sa primitive $\ln x$ joue un rôle charnière



Nous voyons dans cet exemple, une caractéristique du saut qualitatif correspondant à cette troisième étape : **le passage du discret au continu.** Dans la deuxième étape, pour modéliser, on passait du continu au discret pour revenir à des manipulations de tableau.ici, la théorie sert pour résoudre, par passage au continu, un problème discret "délicat".

Un autre exemple un peu plus complexe du phénomène de convergence, illustre ce passage du discret au continu et le **rôle simplificateur de la théorie,** il s'agit de la convergence d'une loi de probabilité vers une autre.

L'étude de la loi binomiale B (n,0,5) de la première étape se prolonge facilement avec les mêmes outils pour les lois binomiales B (n,p) et les lois hypergéométriques [96].

Les concepts de fonctions de répartition et de fonctions de densité dans le cas continu ont été vus dans la deuxième étape, les fonctions logarithmes et exponentielles ont été définies.

Uniquement avec ces outils, on peut faire une démonstration de la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.

Dans l'approche "Ville de New York", la loi binomiale B (n,p) est associée à l'algorithme de remontée sur une diagonale qui peut s'écrire d'une façon littérale :

$$P(X = k) = (1 - p)^n \ \frac{n}{1} \ (\frac{n}{1-p}) \ x \ \frac{n-1}{2} \ (\frac{p}{1-p}) \ x \ \frac{n-2}{3} \ (\frac{p}{1-p}) \ x \ ..... \ x \ \frac{n-k+1}{k} \ (\frac{p}{1-p})$$

Si $n \longrightarrow +\infty$ avec np constant (c'est à dire $n \longrightarrow +\infty$, $p \longrightarrow 0$ avec $np = a$)

Chacun des termes $(\frac{n-i+1}{i}) \ (\frac{p}{1-p}) = \frac{np - (i-1)p}{i(1-p)} = \frac{a - (i-1)p}{i(1-p)}$ tend vers $\frac{a}{i}$

L'algorithme de remontée sur la diagonale a fait apparaître la bonne factorisation

$$\lim_{n \longrightarrow 0} P(X = k) = \frac{a^k}{k!} \ x \ (\lim_{n \longrightarrow +\infty} (1-p)^n \ ) \quad \text{en posant} \quad p = \frac{a}{n} \quad \text{avec } np = a$$

La limite ne dépend pas de k $\ l = \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{a}{n})^n$; cette limite n'est autre que e^{-a}.

On a donc $\lim \ P(X = k) = \frac{a^k}{k!} \ e^{-a}$ d'où la loi de Poisson.

La démonstration de la convergence de la loi binomiale vers la loi de Gauss est à ce niveau hors de propos, par contre, le théorème central limite est énoncé sous une forme intuitive et les règles pratiques utilisées par les statisticiens professionnels sont testées expérimentalement.

Si $n>30$ et $np>10$ alors on peut calculer la fonction de répartition de la loi binomiale à l'aide de la loi de Gauss.

Si $n>30$ et $np<5$ alors on peut calculer la fonction de répartition de la loi binomiale à l'aide de la loi de Poisson.

Le calcul des fourchettes dans le cas de la loi binomiale peut donc se faire avec quatre méthodes :

- la méthode de Monte Carlo
- l'algorithme de calcul de la fonction de répartition
- l'abaque
- le théorème d'approximation par la loi de Gauss ou par la loi de Poisson.

Nous insistons une fois encore sur le choc que constitue l'utilisation du passage discret-continu.

Jusqu'à cette étape, on rendait discret le continu pour calculer, ici on rend continu le discret pour simplifier, grâce à un recours à une théorie.

En conclusion de ce chapitre, nous pouvons donc dire qu'il n'y a pas opposition entre approche théorique et approche à l'aide du tryptique T.G.F.

Le concept de support s'étend à des supports "fictifs" (machine à calculer théorique, zooms fictifs sur les représentations graphiques).

La théorie apparaît comme un puissant moyen de simplification.

Il y a interaction entre recherche et théorie. Les situations servant dans une approche dialectique à l'explicitation de la théorie mais aussi par le biais de situations d'applications à l'instrumentalisation de la théorie dans le cadre de la résolution de problèmes.

Le raisonnement et le formalisme portent sur des nouveaux objets y compris des définitions quantifiées du type $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ tq $n > N \quad |x_n - l| <$

CONCLUSION

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, cette monographie ne constitue pas un plan de cours et ne recouvre pas tous les aspects de l'enseignement de l'analyse.

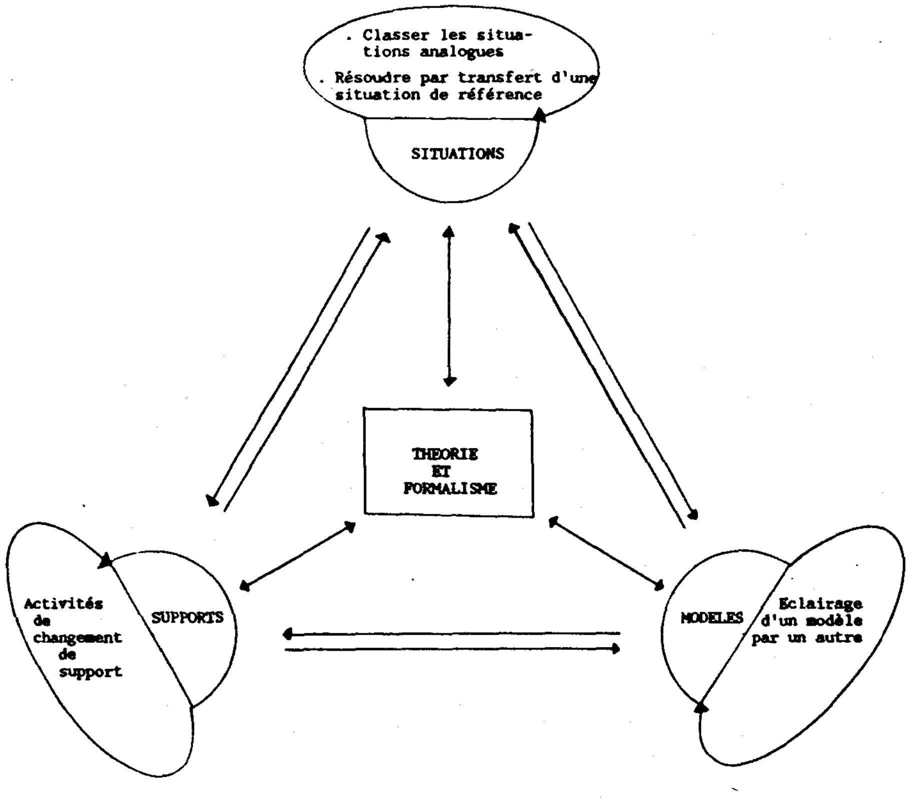
Nous n'avons pas mentionné les contenus de formation, ni détaillé les acquis, les savoirs et les savoir-faire. Une banque de documents régulièrement actualisée, est mise à disposition des élèves et des enseignants dans les centres de ressources liés aux différents terrains d'intervention du CUEEP [23].

Dans cette monographie, nous avons explicité à partir de l'enseignement de l'analyse, les points qui nous semblent les plus importants par rapport à l'hypothèse globale. Examinons ce que la monographie apporte dans la validation de cette hypothèse.

En ce qui concerne le **couple mathématisation/informatique**, nous pouvons dire que : l'informatique comme mode de pensée et comme outil est présente partout et intégrée à la pratique pédagogique. L'informatique n'apparaît jamais comme une fin en soi et même dans les activités où l'algorithmique est explicitement centrale, l'aspect implantation des calculs sur machine est secondaire, c'est l'aspect méthode et exploitation des résultats qui est important.

Comme dans l'exemple de la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson, l'algorithmique devient un moyen d'accéder à la démonstration formelle au travers des manipulations structurantes sur ordinateur. Les transformations pour obtenir un résultat sont plus intéressantes que le résultat lui-même. Si l'informatique est totalement intégrée à la pratique pédagogique, nous n'en sommes pas pour autant prisonniers. Comme nous l'avons vu dans le calcul des limites, le recours à la théorie est nécessaire mais la limitation de l'outil a posé le problème et induit des raisonnements pour le résoudre.

Au terme de cette monographie, nous sommes en mesure de préciser en quoi la **méthode est globale** et correspond au schéma :



La monographie montre que ce schéma est opératoire.

Le rôle central des **supports** y apparaît clairement.

Les **situations** sont diverses, elles ne sont pas choisies au hasard, elles peuvent être fournies par la vie professionnelle ou sociale, par un modèle mathématique, par un problème déjà posé en termes mathématiques, par une situation empruntée aux autres sciences. Elles servent à ancrer le modèle, à fonder la théorie. Les activités mathématiques se font aussi dans l'autre sens : inventer des situations mettant en jeu le modèle, reconnaître dans des situations tel ou tel modèle, discriminer entre plusieurs modèles, modéliser, décider si un modèle est acceptable.

Le **formalisme** intervient à tout niveau mais à des degrés divers, il a toujours un rôle synthétique, économique, il oblige à une précision, une structuration, une rigueur dans l'écriture. Le formalisme algébrique ayant de plus un rôle de communication. Il est toujours utilisé comme étant au service de résolution de problèmes et jamais comme une fin en soi.

La **théorie** n'est pas construite une fois pour toutes. La construction se fait étape par étape par approches successives. On n'attend pas d'avoir achevé la construction pour faire fonctionner.

La mise en oeuvre de cette méthode pédagogique, vise à donner les moyens d'appréhender globalement un champ de problèmes. C'est en ce sens que nous parlons de **méthode globale**, cette globalité est opposée à un déroulement linéaire de l'enseignement. En effet, les contenus d'une formation ne sont pas définis en fonction du domaine d'application (statistiques, géométriques, financier, algébriques, mécaniques...) mais en fonction des modèles de référence, des outils mathématiques, des concepts mathématiques. Par exemple, le modèle Parabole est abordé au travers de différentes situations-problèmes sous plusieurs faces : produits de droite, différence tabulaire seconde constante, formule algébrique, calcul de variance, ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés, utilisation du théorème de Pythagore. Ceci implique que les statistiques sont intégrées à l'ensemble de la formation et qu'elles ne font pas l'objet dans le cadre d'une formation générale de base d'un enseignement spécifique.

Parmi les modifications portant sur les méthodes pédagogiques, nous pouvons dire que la mise en oeuvre de la méthode globale d'enseignement implique des méthodes actives structurées et directives. La monographie a laissé implicite ces aspects liés aux acteurs de la formation et à son environnement.

L'objet de la cinquième partie sera l'approfondissement de l'étude de la performance et de l'interaction entre méthode globale et environnement.

CINQUIEME PARTIE

INTERACTION ENTRE METHODE GLOBALE ET ENVIRONNEMENT

L'objet de la cinquième partie est l'étude de certains aspects de la méthode globale.

L'ASPECT MATIERE

La monographie a montré que la méthode globale permet d'enseigner l'analyse du niveau CAP à l'entrée dans les filières professionnelles de niveau III sans rupture de pratique. Ce constat peut être généralisé, la méthode globale permet d'aborder tous les niveaux de l'alphabétisation à l'université et tous les contenus.

Citons quelques extraits de la présentation générale de l'ensemble MAC6 (Mathématiques à la carte pour les niveaux VI et VI bis [21]. A ces niveaux, la mathématisation de situation est explicite : il s'agit de faire apparaître le modèle linéaire au travers de supports liés à des situations, les formateurs pilotent la formation :

> *"Une situation devient source d'apprentissage à partir du moment où elle peut être exploitée pédagogiquement, ce qui soutend des objectifs et des outils adaptables au public..."*
> *"Manipuler les objets mathématiques à bon escient peut être un objectif... si cette manipulation se révèle fructueuse..."*
> *"L'utilisation de graphique, de tableau, de formule, permet aux gens de travailler..."*
> *"A partir du couple Tableau et Graphique, on peut visualiser et vérifier..."*

L'informatique est intégrée à la formation : *"Très souvent, il y a à la fois fiches et logiciels parce que l'emploi des deux supports parait bénéfique..."* Elle intervient aussi bien comme outil de présentation de situation, de gestion de support ou d'acquisition de modèle que comme moyen de fabriquer des micro-mondes de manipulations structurantes (machine à rendre la monnaie, robot, interprète automatique pour le passage chiffres-lettres). Les nouvelles images jouent un rôle essentiel : agir pour amener l'écran à l'état souhaité, renvoi de la pensée de l'apprenant.

On retrouve une problématique semblable au niveau universitaire, par exemple dans la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en DEUG à Lille I. *"Ne leur sera-t-il pas infiniment plus nécessaire de savoir modéliser un problème, reconnaître une approximation, évaluer un ordre de grandeur d'erreurs. D'avoir des méthodes de raisonnement, de savoir simplifier la réalité tout en contrôlant ce qu'on néglige ? d'être actif, de savoir poser des problèmes, de faire des essais pour se faire une idée d'une question, émettre des conjectures..." (Marc Rogalski)*

ASPECT EDUCATIF

De façon quasi-systématique au CUEEP, dès qu'un nouveau dispositif de formation est mis en place, des études de suivi et d'évaluation du dispositif sont entreprises.

Des études sociologiques ont été réalisées, d'autres sont en cours, portant sur l'analyse des publics : position socio-professionnelle, motivation de l'entrée en formation, réussite, et dans certains cas, effets de la formation et devenir ultérieur. C'est notamment la mise en place de l'ESEU par unités capitalisables qui a suscité une enquête menée par l'Institut de Sociologie de Lille I, de 1976 à 1979, et prenant en compte le devenir de plusieurs cohortes 1 an, 2 ans et 3 ans, après l'obtention de l'ESEU. L'enquête a été reprise en 1986, pour une observation plus fine de la trajectoire des formés pendant et après la formation (y compris ceux qui abandonnent en cours de route). Une autre enquête, menée par le service statistiques de la DAFCO, a été faite en 1980 sur l'orientation des titulaires de l'ESEU après l'obtention de l'examen. Claude DUBAR, Claude Wagnon ont réalisé des Analyses du public de l'ESEU dans le Nord-Pas-de-Calais en 1982 [43].

Ces études ne portent pas spécifiquement sur les centres CUEEP ni sur la matière mathématique. Elles fournissent cependant des indicateurs indirects de la performance de la méthode globale dans la mesure où :

- pour la plupart des stagiaires concernés, l'apprentissage des mathématiques est un point de passage obligé, cette matière constituant souvent à tort un point de blocage dans la formation antérieure,

- le "modèle CUEEP" inspiré par la méthode globale est mis en oeuvre, y compris dans les centres extérieurs au CUEEP.

Le bilan 86 des publics en formation au CUEEP à Roubaix-Tourcoing confirme cette accessibilité de l'enseignement des mathématiques pour un large public.

Le poids des Mathématiques représente 27,5 % des modules suivis en filière littéraire et 38 de l'ensemble (tableau 3-14) contre 36,6% au français qui est pourtant la seule unité obligatoire dans les deux filières. Il s'agit là vraisemblablement d'un effet d'accueil et d'orientation où nous ne manquons pas pour tous ceux dont l'objectif final n'est pas clairement défini, d'insister sur l'intérêt d'opter pour une filière où les possibilités ultérieures de formation sont les plus nombreuses.

c) E.S.E.U. A et E.S.E.U. B

Tableau 3-14 Année 1986

Matières \ Sexes	Hommes	Femmes	Total	%
E.E.O. 9	67	84	151	19.7
E.E.O. 10	44	85	129	16.9
MATHS 9	62	78	140	18.3
MATHS 10	58	69	127	16.6
MATHS 11	14	11	25	3.3
ANGLAIS P 2	11	43	54	7.1
ANGLAIS P 2 BIS	12	46	58	7.6
SCIENCES 9	21	26	47	6.1
SCIENCES 10	11	5	16	2.1
GEOGRAPHIE	4	14	18	2.3
TOTAL	304	461	765	100

EN AUDITEURS

Pour prendre en compte la variable mathématique et en particulier de cerner la performance de la méthode globale par rapport au système éducatif, des études spécifiques sont nécessaires. Nous avons amorcé ce type d'approche. Dans le cadre de cette thèse, nous nous contenterons de donner les éléments méthodologiques qui nous permettront d'obtenir des indicateurs significatifs spécifiques à notre objet.

L'ASPECT TRANSFERABILITE

Un aspect important de la performance d'une nouvelle stratégie éducative est sa possibilité de transférabilité en dehors du noyau d'innovation et son adaptabilité à différents environnements.

Quand nous parlons de transfert, il s'agit de transfert de tout ou partie de la méthode : transfert de matériaux, de méthode pédagogique, d'idées... Nous étudierons plus spécifiquement les transferts effectués par des enseignants de formation initiale (CES, lycée, LEP) travaillant comme vacataire au CUEEP. L'hypothèse initiale est : "les enseignants de formation initiale perçoivent la méthode globale prise dans son ensemble ou sous certains de ses aspects, comme un moyen de faire face à l'échec scolaire en mathématiques pour une partie de leurs élèves". Cette étude fera l'objet du chapitre XII.

Un autre aspect de la performance de la méthode est sa capacité de féconder, d'enrichir de transformer des aspects transdisciplinaires du système éducatif en dehors de son champ strict d'application. C'est un autre aspect de la transférabilité. Une partie de la performance est due à l'interaction entre l'environnement et la méthode globale, en particulier dans le mise en oeuvre d'une pédagogie par objectifs. La pédagogie par objectifs a favorisé l'émergence de la méthode globale mais également, la méthode globale a permis de définir une nouvelle approche plus globalisante de la pédagogie par objectifs.

Le chapitre XIII est consacré à l'étude de l'interaction entre méthode globale, pédagogie par objectifs dans un système modulaire avec délivrance d'unités capitalisables par contrôle continu.

En formulant la méthode globale, nous avons été amenés à réfléchir sur son élaboration, en particulier sur l'interaction formation, formation de formateurs et recherche. La théorisation de cette méthode d'élaboration fait l'objet du chapitre XIV.

CHAPITRE XII

LE TRANSFERT EN FORMATION INITIALE DE LA METHODE GLOBALE

Dans ce chapitre, nous étudions le transfert de la méthode globale en formation initiale. L'hypothèse de départ :

"Les enseignants de formation initiale, vacataires au C.U.E.E.P. perçoivent la méthode globale prise dans son ensemble ou sous certains de ces aspects, comme un moyen de faire face à l'échec scolaire en mathématiques pour une partie de leurs élèves", résulte de discussions éparses avec des enseignants.

Ce travail vise à valider cette hypothèse, par une étude plus systématique. Notre but éait de recueillir auprès des formateurs-vacataires au C.U.E.E.P., enseignants en CES, lycée, LEP, un maximum d'informations brutes sur leur manière de percevoir et de mettre en oeuvre la méthode globale dans leurs classes en formation initiale.

Le critère enseignants-vacataires au CUEEP initialement émis a été un peu élargi : à une équipe de formateurs ESEU du GRETA de Lens et à un ancien animateur du groupe Formation d'Adultes à l'REM (Denis Péchillon).

Nous les avons informés de notre travail de recherche sous la forme d'une lettre circulaire exposant très brièvement l'objet de notre recherche et leur demandant leur collaboration.

Des formateurs intéressés nous ont contactés. Nous n'avons fait aucune relance. Ayant obtenu rapidement une quinzaine de réponses représentant un éventail assez large et compte-tenu du type de travail que nous voulions engager avec eux, nous nous sommes limités à ce nombre.

Nous avons fait des entretiens individuels non directifs. La question initiale étant : quels sont pour toi les transferts des "idées CUEEP" en formation initiale ? "idées" au sens le plus large pouvant être fiches, documents, méthodes, progiciels, attitude, etc... Les quelques questions de relance au cours de l'entretien visaient à des éclaircissements.

Enfin, pour clore l'entretien, nous avons systématiquement posé une dernière question : "si tu n'avais aucune contrainte, que souhaiterais-tu pour améliorer l'enseignement des mathématiques dans ton établissement ?

L'entretien était individuel, non préparé, les formateurs ne savaient pas comment allait se faire l'entretien. Ceci était voulu de façon à recueillir le maximum d'informations "à chaud", en quelque sorte, les premières impressions brutes. Pour pouvoir corriger, nuancer, amender ce flot d'informations en vrac, un compte-rendu en une page, de l'interview a été envoyé individuellement à chaque formateur (fin du chapitre). Nous lui avons demandé d'ettayer ses propos à l'aide d'un exemple qu'il avait mentionné : pour cet exemple de fournir les documents : les siens, ceux des élèves, copie du cahier de cours, etc... et la façon dont ces documents ont été élaborés et utilisés.

Pour valider notre hypothèse en exploitant ces entretiens individuels, nous avons été amenés à structurer l'ensemble des entretiens en quatre points. Les trois premiers reprenant les axes de notre recherche : le rôle du support, la mathématisation de situations, les outils d'aide à l'enseignement. Le quatrième point les formateurs concernés perçoivent leur enseignement comme s'inscrivant dans un système éducatif, est apparu au cours des entretiens. Ces quatre points feront l'objet chacun d'un paragraphe de ce chapitre :

1 - Importance du support pour poser et résoudre un problème
2 - Rôle et place des situations, du formalisme, de la théorie
3 - Les outils d'aide à l'enseignement
4 - Influence de la méthode pédagogique sur le système éducatif

Par ailleurs, nous avons voulu, en accord avec eux, ou sur leur demande, que le travail ne se limite pas à un entretien. A partir du moment où ils nous proposaient leur collaboration, ils se sentaient impliqués dans notre recherche de plus, ils désiraient le faire collectivement.

Nous avons prévu une discussion collective après les entretiens individuels au cours de laquelle nous leur avons exposé la structuration de leurs entretiens, c'est-à-dire le contenu des quatre paragraphes de ce chapitre, nous avons aussi détaillé notre travail de recherche en leur proposant de lire tout ou partie de la thèse dans l'état actuel d'écriture et nous avons décidé de pistes de travail à poursuivre : réflexion sur des thèmes avec production de documents.

Nous verrons au cours de ce chapitre, que nous étions partis d'une hypothèse que l'on peut à postériori qualifier de faible, dans la mesure où les entretiens individuels et la discussion collective nous ont révélé une prise de conscience et des pratiques beaucoup plus générales tant au point de vue de la pratique pédagogique, que de l'insertion de la réflexion pédagogique dans les différents courants de pensée.

Comme nous l'avons décrit dans l'introduction, nous avons recherché dans les entretiens, un maximum de spontanéité. Les citations de ce chapitre sont des transcriptions écrites d'un oral spontané. Nous n'avons pas voulu modifier le style.

Nous remercions vivement pour leur collaboration active et enthousiaste

Sylvain APEDO-AMAH

Jackie BOUCHE

Christian CALONNE

Marc CASTELEYN

Gérard DEGRYSE

Jacques D'HOOGE

Marie-Claude GUILAIN

Didier LEFEBVRE

Jean-Louis MOUTON

Denis PECHILLON

Gérard OFFROY

Yves TONDELIER

Régis VANDENMERSCH

Alain VANGHELUWE

1 - IMPORTANCE DU SUPPORT POUR POSER ET RESOUDRE DES PROBLEMES

Tous les enseignants ont mentionné dans leur entretien, l'importance des supports pour susciter, organiser l'activité des élèves, découvrir les règles de fonctionnement, des modèles, pour visualiser.

Bien qu'ils parlent d'"inventer l'outil qui donnera la meilleure visualisation" ou de "dégager les outils dont on a besoin", les supports utilisés sont ce que nous avons appelés dans le chapitre IX, les supports standard : opérateurs, tableaux numériques, et graphiques ; car il ne faut pas "multiplier les représentations surtout des représentations gratuites qui ne seront utilisées que pendant quinze jours".

Citons les enseignants :

M.C. "C'est au CUEEP que j'ai appris le langage des opérateurs, les cases, les bulles, c'est un truc très simple qui permet de mettre en évidence des choses compliquées. Quand il y a un problème pour la mise en équation, on met des choses dans des cases, on traduit le texte en langage d'opérateurs, ça devient graphique... ça schinte l'écriture algébrique... Une fois que c'est écrit dans ce langage, tout le monde comprend".

J.D. "J"utilise les opérateurs pour reconstituer une formule algébrique en 5ème et aussi en 3ème".

A.V. "Le tableau numérique pousse au calcul et au raisonnement ... les gosses aiment faire des calculs, ils aiment dégager d'un ensemble de valeurs ce qui peut être analogue ... faire poser des opérations, disposer les nombres de façon systématique. Si on distingue une apparence de loi, on a des chances d'être sur la bonne voie ... le premier degré, c'est une proportionnalité boiteuse, on va le retrouver sur les tableaux numériques".

D.P. "Obtenir des tableaux de nombres avec les calculettes, les ordinateurs pour extrapoler, interpoler".

D.L. "Au départ, je donne un support, ensuite j'essaie qu'ils retrouvent le meilleur support adapté au problème et à eux, par exemple le tableau apparaît avec des mots du langage, des phrases, mais il est posé".

J.C.V. "Aborder la trigo avec les opérateurs ... les fractions c'est difficile, on les remplace par des flèches, par des trucs. Il faut d'abord savoir-faire, il faut éviter ce qui fait peur au niveau du formalisme. Utiliser un support visuel".

D.P. "L'outil premier est le papier millimétré ... faire des graphiques ... En utilisant le graphique, les élèves étaient capables de résoudre en 5ème des problèmes que l'on ne résolvait pas habituellement en 5ème".

J.L.M. "J'apprends aux élèves à traiter les graphiques".

G.O. "Je travaille systématiquement les graphiques, si on ne sait pas résoudre une question, on passe au graphique".

A.V. "Faire varier les coefficients directeurs des droites, voir les choses varier".

A travers ces citations, nous voyons clairement que :

- l'utilisation des opérateurs n'est pas un but en soi,
- le but de la constitution de tableaux numériques n'est pas de faire des calculs, même si ces activités font travailler le sens des opérations et leur réalisation,
- le but des graphiques n'est pas de faire des représentations graphiques mais que des supports sont des outils au service d'activités mathématiques plus ambitieuses constitutives du savoir, "traiter les graphiques", "organiser un tableau", "utiliser pour résoudre des problèmes".

Souvent, l'utilisation d'un des supports en appelle un autre, et les enseignants font une référence explicite au tryptique Tableau - Graphique - Formule. La partie formule étant employée dans un sens large, plus au sens d'écriture formelle que de formule algébrique.

J.D. "En trigo, on pourrait se contenter d'utiliser les touches machines, c'est plus riche, faire reconstruire les Tables avec un tableur, de visualiser les graphiques, de faire le lien avec les formules... Pour la proportionnalité en 5ème, je lie Tableau - Graphique - Formule. Voir si la droite passe par les points ou pas ... Affine en 3ème, c'est T.G.F."

G.D. "Si un gamin sait faire quelque chose sur Tableau et Graphique, il a de fortes chances de pouvoir réussir sur l'aspect F... Savoir reconnaître une droite sur un tableau, sur le graphique est aussi important que de calculer"

D.L." J'ai choisi de travailler en même temps le Tableau de nombres et le Graphique, pour la Formule, ça dépend du niveau de la classe. J'évite les expressions littérales pures. Même si la formule, n'est pas algébrisée, elle existe quand même, c'est dit sous "forme française".

R.V. (Sciences) "J'ai utilisé les opérateurs en physique surtout quand il y a des opérations en Tableau : verticalement, horizontalement. Je fais faire les tableaux, remplir les cases, on construit la flèche dès que l'on calibre ... Je passe systématiquement au graphique... J'utilise beaucoup T.G.F., je ne vois pas comment je pourrais faire autrement".

J.L.M. "J'aimerai avoir un tableur parce qu'il y a une piste de recherche... ça doit nous aider d'une façon énorme à lier les trois supports T.G.F. Il faudrait que la gestion de Formule soit associée au Graphique".

G.O. "J'emploie régulièrement T.G.F. en seconde, c'est quelque chose qui est apparu dans les nouveaux programmes".

Y.T. "Une conception, plutôt un concept que j'essaie de pratiquer au maximum est la figure que j'explore parfois d'une année sur l'autre".

On voit aussi l'idée de "combler les insuffisances d'un support par un autre"

A.V. "Faire varier les coefficients directeurs des droites, voir les choses varier".

A travers ces citations, nous voyons clairement que :

- l'utilisation des opérateurs n'est pas un but en soi,
- le but de la constitution de tableaux numériques n'est pas de faire des calculs, même si ces activités font travailler le sens des opérations et leur réalisation,
- le but des graphiques n'est pas de faire des représentations graphiques mais que des supports sont des outils au service d'activités mathématiques plus ambitieuses constitutives du savoir, "traiter les graphiques", "organiser un tableau", "utiliser pour résoudre des problèmes".

Souvent, l'utilisation d'un des supports en appelle un autre, et les enseignants font une référence explicite au tryptique Tableau - Graphique - Formule. La partie formule étant employée dans un sens large, plus au sens d'écriture formelle que de formule algébrique.

J.D. "En trigo, on pourrait se contenter d'utiliser les touches machines, c'est plus riche, faire reconstruire les Tables avec un tableur, de visualiser les graphiques, de faire le lien avec les formules... Pour la proportionnalité en 5ème, je lie Tableau - Graphique - Formule. Voir si la droite passe par les points ou pas ... Affine en 3ème, c'est T.G.F."

G.D. "Si un gamin sait faire quelque chose sur Tableau et Graphique, il a de fortes chances de pouvoir réussir sur l'aspect F... Savoir reconnaître une droite sur un tableau, sur le graphique est aussi important que de calculer"

D.L." J'ai choisi de travailler en même temps le Tableau de nombres et le Graphique, pour la Formule, ça dépend du niveau de la classe. J'évite les expressions littérales pures. Même si la formule, n'est pas algébrisée, elle existe quand même, c'est dit sous "forme française".

R.V. (Sciences) "J'ai utilisé les opérateurs en physique surtout quand il y a des opérations en Tableau : verticalement, horizontalement. Je fais faire les tableaux, remplir les cases, on construit la flèche dès que l'on calibre ... Je passe systématiquement au graphique... J'utilise beaucoup T.G.F., je ne vois pas comment je pourrais faire autrement".

J.L.M. "J'aimerais avoir un tableur parce qu'il y a une piste de recherche... ça doit nous aider d'une façon énorme à lier les trois supports T.G.F. Il faudrait que la gestion de Formule soit associée au Graphique".

G.O. "J'emploie régulièrement T.G.F. en seconde, c'est quelque chose qui est apparu dans les nouveaux programmes".

Y.T. "Une conception, plutôt un concept que j'essaie de pratiquer au maximum est la figure que j'explore parfois d'une année sur l'autre".

On voit aussi l'idée de "combler les insuffisances d'un support par un autre"

D.L. "Travailler un problème avec le support papier et le support machine par exemple pour le calcul approché d'intégrale, on calcule la surface avec les carreaux du papier et par ailleurs avec la machine. On vérifie les résultats. On a la signification des nombres qui apparaissent sur la machine".

2 - ROLE ET PLACE DES SITUATIONS, DU FORMALISME, DE LA THEORIE

Les enseignants interviewés ont tous reçu une formation magistrale qui partait de la théorie formalisée pour éventuellement déboucher sur des applications. Un apport de la formation d'adultes a été de découvrir la possibilité de faire des mathématiques à partir de situations, sans formalisation excessive préalable, la formalisation et la théorisation sont opérationnalisées ; pas de formalisme stérile et inutile.

S.A. "Le CUEEP, à travers les fiches, m'a appris à lier le concret, le réel et l'abstrait. J'ai essayé de montrer ce qu'on peut faire avec les maths, la façon de raisonner... Avec des exemples concrets, j'essaie de leur redonner confiance, de leur montrer que les maths, ce n'est pas si sorcier que cela... On travaille en géométrie avec des fiches, on leur a appris à construire soit après le cours, mais aussi avant, ça les met sur la route, ils voient la façon de faire, ils découvrent des figures, ils ont trouvé eux-mêmes... puis vient le cours..."

A.V. "Il faudrait définir un thème qui puisse envoyer tout le monde sur différents terrains : bricoler, manipuler, construire... à partir de là, voir les prolongements... découvrir les maths ... faire des opérations ... faire intervenir la réflexion sur les opérations ... arriver à un but. Les élèves aiment bien arriver à un but".

J.D. "A partir de la vie courante, on va être amené à découvrir une nouvelle notion".

J.C.V. "Je pense que la démarche problèmes concrets est importante, je m'en sers de plus en plus".

C.C. "Partir d'une activité pour organiser les acquisitions. Une activité permet de cerner des problèmes et les difficultés et est plus efficace en terme d'acquisition de connaissances".

Les situations concrètes, les activités permettent de "donner de la vie" "donner du sens" aux maths pour ce qui est de la matière. Leur côté "attrayant", "amusant", "délassant" pour l'enseignant peut "captiver les élèves, les intriguer et alors ils suivent", "faire des maths sans en avoir l'air".

Cependant, on peut voir que les enseignants ne rejettent ni la théorie ni le formalisme qu'ils font partie de la stratégie d'utilisation mais que celui-ci et celle-là viennent en temps et en heure.

S.A. "Les théorèmes, les définitions ça ne marche pas : je les donne à ma manière pour qu'ils comprennent en prenant les mots de tous les jours en décomposant la définition en petites tranches. Je laisse tomber le bouquin".

A.V. "Une fiche doit déboucher sur du formalisme, le formalisme doit être illustré par un schéma mental pour pouvoir être réinvesti par la suite. L'algèbre je mets de côté dans l'enseignement du 1er degré, c'est un outil qui ne se justifie pas, les problèmes du premier degré peuvent être résolus par des essais (fausses suppositions), on n'a pas besoin d'algèbre. Il y a des gosses qui savent faire des problèmes s'il n'y a pas de vocabulaire, si on met le vocabulaire, ils ne savent plus".

J.P. "En 3ème, je démarre une fiche par une série de problèmes se faisant par l'arithmétique et ensuite les problèmes se corsent, on utilise ensuite (quand c'est nécessaire) le langage 4 Tulipes + 3 Roses et ensuite on passe à l'algèbre".

J.C.V. "Partir d'objets pratiques, formaliser après c'est dans les nouvelles idées de 6ème, c'est la démarche de la formation au CUEEP ... faire de la formalisation si on en a besoin quand elle est utile... Avant je partais des maths, maintenant je pars des situations concrètes pour théoriser. La théorisation se fait différemment suivant les réactions des élèves. Il faut s'adapter aux élèves pour théoriser.

D.L. "J'essaie de n'utiliser que les choses dont j'ai besoin au fur et à mesure... le support visuel est trop souvent schinté au bénéfice de l'évolution du calcul algébrique. Le dessin fait perdre du temps immédiatement, mais c'est rentable à long terme".

C.C. "Au lieu de commencer par des exercices littéraux ... partir des problèmes géométriques, on littéralise les formules ... Il y a toujours une situation qui crée une activité qui débouche sur des règles de calcul, au lieu d'avoir d'abord une grammaire de calcul et ensuite des exercices. L'acquisition de la vitesse au niveau organisation des calculs vient après".

G.O. "Avant, on était très théorique, l'axiomatique a disparu de l'enseignement, on nous demande d'utiliser l'outil et non l'axiomatique de l'outil".

Toutes les situations n'ont pas le même statut. Si certaines sont principalement attrayantes, d'autres sont qualifiées "d'appel de besoins", de "référence".

J.D. "Pour définir le cosinus, je fais appel à la fiche "dénivellation - distance horizontale" les élèves prennent la référence de la fiche, au lieu de dire théorème X je dis voyez la fiche untel".

J.L.M. "Pente-Hauteur-Surface c'est rôdé, c'est décapé, je suis sûr de moi. J'aimerais pouvoir faire passer la notion de pente et surface en mettant en oeuvre la même méthode sur les stats. Etre aussi efficace qu'avec PHS".

G.O. "Pour l'enseignement des suites, j'ai deux situations de référence : les bactéries et les lapins, c'est l'un ou c'est l'autre".

Y.T. "Voici des années que je ne commence plus ma leçon sur les primitives sans l'introduction Pente - Hauteur - Surface".

Il faut que les situations soient riches pour permettre une réelle mise en activité.

A.V. "Les problèmes posés trop simplement ne permettent pas le raisonnement. Je fais mes exercices pour permettre le raisonnement".

D.P. "On peut avoir l'impression de résoudre des problèmes par exemple dans le problème du cendrier, si on prend le côté de 24 cm, ça ne donne pas les moyens de poser un problème, (la solution tombe tout de suite)".

Les enseignants mentionnent aussi l'intérêt d'utiliser les mêmes situations à différents niveaux.

G.D. "Ce qui est intéressant, ce sont les situations ouvertes, réfléchir sur un problème, l'adapter au niveau des enfants, en tirer des choses intéressantes, tout le monde peut travailler jusqu'au bout de ses possibilités".

J.C.V. "La calculette permet de travailler une situation sur un calcul de volume (le cendrier) qui ne pouvait pas être abordé sans la dérivation. En 6ème, on peut le traiter, ça leur fait prendre des décisions, ils construisent le document".

D.P. "Devant un problème, il y a des tas d'outils possibles. Un même problème peut être abordé de l'école à l'université. La solution que l'on construit est variable : solution approchée ou partielle, mais il y a toujours moyen de résoudre quelque chose qui ressemble au problème".

Y.T. "J'aborde le problème du cendrier en seconde avec des tableaux de nombres à partir d'une formule puis de graphique, la modification du pas permettant de faire un zoom sur l'approche de la solution. L'algébrisation définitive ne se faisant qu'en première avec la dérivée".

Il semble aussi intéressant de faire créer des situations par les élèves eux-mêmes.

J.D. "Il ne faut pas toujours imposer, l'esprit découverte est important... "A la suite de l'utilisation de "location de voiture" ils peuvent eux-mêmes créer des exemples sur des schémas vides".

Enfin, ils perçoivent la mathématisation de situation comme une méthode pédagogique d'enseignement en l'exprimant avec leur sensibilité propre.

M.C. "On fait des problèmes, on dégage la théorie, on fait le cours... Mathématiser : trouver ce que l'on recherche, le traduire, trouver un support après le problème est fait, si on ne sait pas le faire, on prend une machine ou on demande à quelqu'un".

A.V. "J'ai trouvé une filière plus expérimentale, par tâtonnements, qui aboutit à une démonstration. Au départ, je régurgitais un bouquin en y mettant un peu de moi. J'ai découvert qu'on peut faire la démarche inverse : partir d'un exemple, faire un raisonnement, trouver des solutions pour montrer qu'ils ont un savoir, un savoir-faire, donner des directives qu'il peuvent transférer".

R.V. "Partir de quelque chose de différent de l'objectif final, en sachant où on veut arriver. Comment va-t-on travailler un problème, les jeter dedans, c'est à eux de gérer... voir s'ils essaient de trouver un objectif dans ce qu'ils font".

D.P. "Faire des maths, c'est résoudre des problèmes... on ne part pas de la définition pour appliquer, on part du problème, on construit un outil, on le nomme, on retient un certain nombre de règles, par exemple, on dégage la notion de dérivée à partir de temps, distance, et on trouve un tas de choses en prime (trouver une équation qui approxime la courbe). C'est le renversement du sujet. Je ne prenais pas de retard par rapport aux programmes parce que je ne démontrais que l'essentiel".

Y.T. "A partir d'une approche concrète analytique, tant par valeurs que par représentation, permettre de dégager une idée que l'on théorisera plus ou moins selon la classe et le but recherché. L'enseignement ne doit pas être au service de la théorie désirée, c'est elle qui devra être incidente".

J.D. "Le cours devient faire une synthèse, les cours écrits deviennent des résumés. Sans faire de cours magistral, on introduit des notions, avec ces fiches là, ce sont les élèves qui posent les questions ... c'est pas dans un cours magistral qu'un prof fera découvrir, c'est alors imposer un point de vue ... Il ne faut pas toujours imposer, l'esprit découverte est important".

Cette méthode pédagogique a des conséquences sur l'attitude des enseignants et des élèves.

A.V. "Il faut donner des exercices qui permettent le raisonnement".

J.B. "Je laisse passer tout ce qu'ils veulent après on met en place, ensemble il faut qu'ils parlent, on rectifie après".

D.P. "Je n'avais pas imaginé que l'on pouvait faire des maths comme cela. Il faut vivre les choses, faire vivre les maths... je crois que l'enseignant doit être chercheur".

M.C. "Je suis plus souple, avec les classes faibles, on ne peut pas préparer un cours, il faut se lancer dans un exercice et creuser jusqu'à ce qu'il en reste quelque chose, après je fais un résumé quelques éléments de cours".

3 - LES OUTILS D'AIDE A L'ENSEIGNEMENT

Pour mettre en oeuvre leur méthode pégagogique, les enseignants utilisent différents outils : fiches, logiciels, calculettes, ... Ils n'utilisent que des outils qu'il se sont appropriés. Ils font en sorte que les élèves se les approprient eux-mêmes et ils sont partie intégrante de leur pédagogie.

A.V. " Un document de travail c'et quelque chose qui est ouvert ... les fiches du CUEEP, il faut les digérer pour les adapter ... il faut refaire une mouture personnelle ... Avec l'info on peut présenter aux gosses un tas d'exemples en un temps limité, mais je l'utilise très peu je ne me suis pas approprié l'outil, Jacques, lui a fait l'effort de rentrer dans la machine, il crée des outils pour les gosses. Je n'aime pas utiliser un outil que je ne maîtrise pas".

J.B. "Je n'utilise que très rarement tels quels, des documents CUEEP, je modifie en fonction du cours que je fais, il faut se placer dans la continuité ... on découpe on transforme".

J.L.M. "J'ai utilisé un logiciel, ensuite je l'ai fait modifier par les élèves pour l'adapter à l'évolution du cours, ensuite je l'ai réutilisé en cours de maths".

M.C.G. "Le logiciel VIDOC, ça a été pour moi l'aventure, je n'avais pas entendu Christian expliquer ce qu'on pouvait en tirer".

C.C. "... l'utilisation systématique de la calculatrice en particulier programmable pour illustrer des programmes de calcul. Ainsi, les formules de surface, les gamins n'avaient pas envie de mémoriser. En les programmant, ça leur donne un pouvoir sur la machine et ça leur permet de faire plus de calculs. Les gamins investissent plus dans l'apprentissage... L'utilisation donne un pouvoir sur la machine ... Si j'ai la connaissance des priorités algébriques, je peux utiliser la calculatrice... L'autonomie des élèves par rapport à l'utilisation de la calculatrice correspond à leur connaissance des priorités algébriques".

J.B. "La machine permet de multiplier les exercices, de ne pas rester bloqué. Ils n'ont pas tous des machines (1/3 environ en ont). Il ne faut pas que la machine devienne quelque chose de magique qui résout les problèmes sans comprendre pourquoi".

M.C. "J'utilise les messages d'erreurs de la machine pour chercher les domaines de définition des fonctions".

A propos du plus apporté par l'utilisation des outils, certains enseignants s'interrogent sur le transfert EAO - Oral - Ecrit.

M.C.G. "Dans le travail sur ordinateur, les élèves ne verbalisent pas à l'ensemble du groupe, ils expliquent pour moi, avec moi... je le dis à l'ensemble du groupe... A la suite du travail sur la réduction au même dénominateur en EAO, en classe ça a permis de faire des exercices, de vérifier les connaissances. J'ai utilisé Polynômes maintenant la référence est, comment faisait-on sur ordinateur ? En classe, j'ai envoyé les garçons au tableau, ils ont mis un résultat juste, je leur ai fait exprimer leur démarche. Ce sont eux qui ont dit qu'ils faisaient comme sur l'ordinateur. Après j'ai envoyé les filles en difficulté au tableau. Je travaille comme ça".

J.D. "Dans la salle Info, je sépare la classe en 2, moitié travail sur fiche, moitié travail en EAO. J'essaie de faire des fiches où il y a un lien EAO et que tous les élèves fassent à la fois fiches et EAO. J'essaie aussi de voir qui va mieux assimiler une notion par fiches ou par EAO. Il n'y a pas de règle, ça dépend du type de notion à faire passer et pas vraiment des élèves".

J.B. "J'ai quelques inquiétudes au niveau des transferts des notions vues en info. Je n'ai pas le moyen de mesurer ce qu'ils savent faire avant et après, je n'ai pas le temps d'évaluer".

R.V. "Après un travail sur un logiciel, je veux voir ce qui a été vu, s'il en reste quelque chose ... faire une mise au point, qu'est-ce qui est acquis, quels sont les problèmes... Je ne les emmène pas sur machine si ce n'est pas nécessaire... Si un programme est bien compris, je ne les laisse pas aller jusqu'au bout, je garde la maîtrise... Je n'ai pas fait de self-service, je suis toujours là... J'ai beaucoup de questions sur l'utilisation autonome... sur machine je ne sais pas ce qu'ils sont capables de faire seuls, ce qui est constructif, s'ils travaillent seuls... Je favorise le travail d'équipe entre élèves".

L'enseignant prévoie les groupements d'élèves pour qu'ils soient constructifs.

J.D. "Sur fiche, je laisse les groupes se faire au début et après je les regroupe par niveaux, quelquefois un très bon et un faible avec la consigne : le bon corrige. Il y a des élèves qui sont arrivés à un niveau moyen. En revanche, sur machine, j'évite de mettre des groupes hétérogènes (celui qui a trouvé donne la réponse)".

L'ordinateur peut avoir des effets "inattendus" en particulier d'aider à la rédaction.

J.D. "Avec le traitement de texte Nanotext, je pousse sur la rédaction en géométrie. Je fais fabriquer des banques de données et les utiliser. Il faut que les élèves sachent rédiger".

L'outil informatique sert de médiateur entre l'enseignant et les élèves. il dégage l'enseignant de tâches répétitives pour aller à l'essentiel.

M.C.G. "J'ai beaucoup utilisé MPendu parce qu'ils n'avaient pas de méthode de travail. Ils ne s'en sont pas lassés. Il a fallu du temps pour découvrir une méthode, j'ai poussé certains groupes à s'organiser, je leur ai suggéré l'aide du papier crayon... Le logiciel Division m'a permis de détecter des lacunes que le prof n'avait pas vues. C'est très important de détecter les lacunes".

J.B. "Je n'aurai pas analysé de la même façon leur comportament si j'étais en classe. Ca me permet de passer 5 minutes avec quelqu'un, voir la manipulation. Avec l'info, je me rends compte de leur démarche, je me suis rendu compte qu'ils n'avaient pas le sens des opérations, la présentation était différente de ce qui était fait en cours".

Il permet comme les fiches d'individualiser le travail.

J.D. "Je les fais travailler par groupe avec des fiches, on peut individualiser le travail. Quand ils ont des difficultés, on prend des fiches pour les faire arriver au résultat par étapes. On peut vraiment faire un travail différencié".

Il sert également de prothèse.

J.B. "Ils rejettent tout ce qui est écrit. En classe, quand il faut écrire, c'est dfficile à faire passer. Ce sont eux qui demandent l'info... En info, j'étais libéré du côté discipline".

M.C.G. "J'ai accepté ce cours "en soutien" à condition d'utiliser l'outil informatique et uniquement l'outil informatique. Pour eux, c'était découvrir une autre façon de travailler. Ca les a intéressé. Je ne me vois pas faire un travail de fiches à ce moment là. Pour eux, ça n'est pas la panacée, mais c'est le seul outil... A l'opération "portes ouvertes", 6 élèves sont venus sur ordinateur pour finir leur fiche de travail sur Vidoc. Il y a quelque chose qui s'est débloqué".

Les enseignants regrettent que les établissements ne disposent que de peu de matériels souples de reproduction (rétroprojecteur, photocopieuse) et de peu ou pas de calculettes ou d'un environnement favorable.

M.C. "Je ne peux pas faire de photocopies, il me manque le support papier".

M.C.G. "L'idéal serait de pouvoir faire faire les transparents aux élèves, mais je ne peux pas".

J.C.V. "Dans la salle info, j'ai mis 15 calculettes, ça démarre tout doucement".

R.V. "Avoir un éventail de duplication, faire des documents, les adapter..."

S.A. "Il n'y a pas d'ordinateurs dans l'établissement"

M.C. 'C'est difficile d'utiliser l'info avec la classe entière, il y a 6 postes et ils sont 30. Je l'utilise en soutien, mais le soutien est détourné de son objectif".

J.B. "Je voudrais disposer d'une salle de maths avec des tableaux, un coin ordinateurs, un coin calculettes, un coin bibliothèque scientifique. Cette classe m'appartiendrait et aussi une photocopieuse, un rétroprojecteur".

R.V. "Il faudrait 5 postes info sur roulettes, un petit train pour l'utiliser dans la salle de sciences".

4 - INFLUENCE DE LA METHODE PEDAGOGIQUE SUR LE SYSTEME EDUCATIF

Dans les entretiens, les enseignants font souvent référence à un changement dans leur façon de définir leurs enseignements. l'institution leur apparaît comme un frein au transfert de leur méthode de formation d'adultes en formation initiale.

J.C.V. "On ne peut pas sortir trop du programme".

M.C.G. "Le changement ne peut se faire qu'un peu à la fois, difficulté de se libérer de l'attente de l'inspecteur, du directeur, des collègues".

J.B. "J'ai essayé de perdre la rigueur et l'esprit que l'inspection veut faire passer".

Ils s'en libèrent petit à petit, ils "prennent des risques".

A.V. "Cette façon de faire est rejetée par les profs de maths : c'est du tâtonnement, en fait, ça permet de dégager une loi".

J.D. "L'inspectrice est venue, elle a été étonnée, elle est revenue trois fois, travail sur fiches, résumé en cours, séance EAO. Elle marque dans son rapport que j'ai adapté l'enseignement aux élèves.

Le programme leur apparaît souvent inadapté à l'état réel des élèves.

S.A. "Terminer le programme est imposé par le Rectorat, je préfère faire peu et prendre le risque de ne pas terminer le programme... on fonctionne par groupes de niveau... il faudrait que ceux qui ont fait les programmes se mettent à la place des jeunes, il faudrait adapter aux différents types d'élèves".

Ils expriment, parfois crûment, leur désir de recentrer la pédagogie sur les élèves.

M.C. "Il faut foutre la paix aux profs, constater ce que les élèves savent au départ, voir ce qu'ils savent à l'arrivée, leur laisser carte blanche sans programme avec des objectifs, passer des contrats avec les élèves.

Le souci des savoirs et savoir-faire des élèves est souvent signalé :

J.C.V. "Il faut vraiment faire attention au public, on a du mal à savoir ce que les gamins savent".

J.D. "Cette année, toutes mes séances de soutien sont vraiment individualisées, 6 élèves, 6 postes de travail EAO, je connais leurs lacunes".

Les classes surchargées, par opposition au groupe d'une quinzaine de stagiaires en formation d'adultes, ne leur permettent pas toujours d'individualiser la formation mais ils en expriment fortement le désir.

J.C.V. "Les connaissances sont du brouillard, les résultats même d'un test ne peuvent nous donner une idée des connaissances... il faudrait un suivi plus individuel des élèves, des groupes avec des élèves dont on a classé les difficultés.

Ils essaient en toute ocasion d'approfondir la connaissance des compétences réelles des élèves sans se contenter des "tests écrits traditionnels". En particulier, l'utilisation de l'informatique en tutorat permet une évaluation formative comme nous l'avons déjà relevé dans le paragraphe précédent "en informatique, je me rends compte de leur démarche, je n'aurais pas analysé de la même façon leur comportement si j'étais en classe".

Ce recentrage sur le public, très important en formation d'adultes est caractéristique du changement induit en formation initiale. on peut résumer ce changement par un passage d'une pédagogie centrée sur la matière et le discours du maître défini par les programmes, les instructions et les désirs réels ou supposés des inspecteurs et de l'institution à une pédagogie centrée sur les savoirs et les savoir-faire réels des élèves prenant en compte leur différence et définie de façon plus ou moins explicite par des objectifs.

Ce changement ne s'exprime pas forcément dans un langage de "spécialiste" des sciences de l'éducation.

"C.C. "Etonnement puis interrogation de la plupart des collègues, pour eux, c'est très clair, il y a le programme et un déroulement linéaire du cours, ils sont très étonnés par une pédagogie par taches qui a l'air décousue... Il y a de "êtres capables de ...", des acquis dans le programme. J'ai découvert qu'on pouvait s'interroger à la fois sur le public, sur les objectifs et sur les moyens de les atteindre".

R.V. "Ne pas oublier l'objectif, adapter le contenu à l'objectif... si le contenu n'est pas passé c'est pas forcément dramatique, c'est la méthode qui est importante... éviter le découpage en matières, en leçons, établir des relations entre les objectifs ponctuels, faire une formation plutôt qu'étudier une matière".

Enfin, plusieurs enseignants font explicitement référence à l'utilisation de la pédagogie par objectifs comme moyens d'améliorer leur enseignement.

M.C.G. "Il faudrait définir un contenu globalement de la 6ème à la 3ème. J'aimerais travailler en pédagogie par objectifs et travailler en équipe comme au CUEEP. On est là et on peut aller là, chacun le fait avec ses méthodes (chacun a sa façon de travailler), se sentir à l'aise avec les outils, les méthodes, bilan, concertation, créer des groupes de soutien, recommencer avec des autres outils... Pour les élèves, il n'y a pas une seule voie possible".

Il est intéressant de remarquer, et c'est peut-être une retombée de la formation d'adultes CUEEP qui traite globalement sans cloisonement la formation mathématique de l'alphabétisation à l'Université, que pour les formateurs pédagogie par objectifs ne signifie pas forcément micro-objectifs. Ils relisent ou interprètent les nouveaux programmes de 6ème, 5ème ou seconde en termes d'objectifs.

J.B. "On a établi des grilles de mini-objectifs que l'on a fait au niveau du CES, c'est impossible à remplir, on est reparti à zéro avec les programmes de 6ème, je retrouvais un objectif CUEEP, je me sentais à l'aise... je ne fais pas de distinction entre ce qu'on veut faire acquérir aux élèves et l'esprit CUEEP".

J.C.V. "On a découvert la continuité dans les programmes, petit à petit, on reprend les mêmes idées et on approfondit mais on ne sait pas jusqu'où, je voudrais avoir une vue globale de la réforme mais précise du CP à la terminale".

Pour finir, donnons quelques extraits de l'entretien d'un enseignant pratiquant le contrôle continu en formation initiale en LEP.

G.D. "Au CUEEP.. importance de l'évaluation au début de cycle, c'est un diagnostic, on a des choses précises, on sait où on en est, en formation initiale ça n'existe pas, on vit sur des impressions quand on passe aux évaluations on est déçu... J'ai essayé de réinvestir en essayant d'être plus précis au niveau des évaluations des objectifs, mais c'est plus des objectifs de classe... je vise à faire travailler les enfants en fonction de leurs objectifs à leur rythme".

Il exprime une volonté de dépasser les objectifs matière pour développer en pluridsciplinaire des capacités transférables (s'informer, se documenter, etc...) à partir de fiches CUEEP.

Il signale aussi que la pédagogie d'adultes lui a permis de transférer le tryptique TGF en formation initiale pour développer un objectif de reconnaissance globale du modèle affine sur les trois supports.

"Ce point figure dans le référentiel, mais personne n'y est sensible, je l'ai vu à travers la pédagogie d'adultes".

Il termine par un plaidoyer pour une pédagogie du contrat et de la responsabilité qui lui semble l'apport le plus important de la pédagogie d'adultes.

"On module les horaires, ... passer un contrat ... la contrainte de temps liée à un contrat et à un objectif de plus grande responsabilité est intéressante".

CONCLUSION

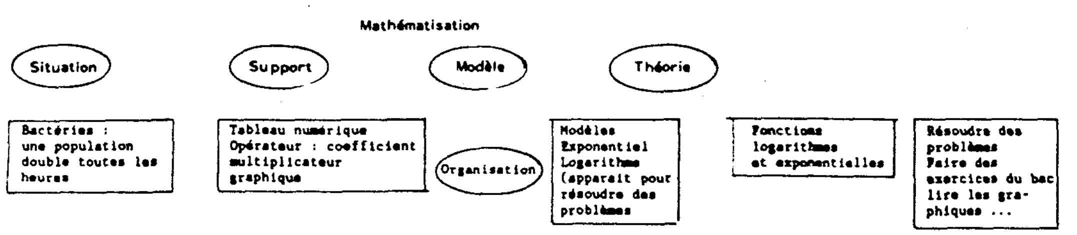
Les extraits des entretiens prouvent que l'hypothèse faite avant d'amorcer la collaboration avec les formateurs est trop faible. en effet, dans les échanges antérieurs aux entretiens et dans une partie des entretiens individuels, il apparaissait que chaque enseignant s'était approprié un aspect de la méthode. Cela tenait en partie au fait, que l'entretien était non préparé et que l'enseignant privilégiait ses préoccupations momentanées. On pouvait donc dire que collectivement, les enseignants interrogés possédaient bien la méthode globale.

Après la discussion collective nous modifions cette hypothèse en disant qu'il est certain que des formateurs (il est peut-être difficile d'affirmer que c'est vrai pour tous) se sont appropriés individuellement la méthode globale dans sa totalité. Mais nous devons encore maintenant amplifier cette affirmation dans la mesure où pour les formateurs, leur collaboration est elle-même source de réflexion et que certains nous ont affirmé que depuis l'entretien ils avaient eu "conscience de modifier leur pratique et "d'avoir une réflexion plus globale".

Dans cette conclusion, nous dégageons des entretiens individuels et de la discussion collective qui a suivi, les éléments qui nous permettront d'affirmer la pertinence de la méthode globale en formation initiale et donc la performance de la méthode.

1 - LES FORMATEURS PERCOIVENT LA METHODE GLOBALE DANS SA GLOBALITE

Citons d'abord deux exemples cités par les formateurs dans lesquels la démarche de mathématisation est vue dans son ensemble :



Citons ensuite quelques réflexions générales :

"Le schéma idéal est le suivant : Problèmes concrets -> appels besoins -> mise en place et acquisition des techniques -> retour à des applications.

"Je lie théorie et support pour opérationnaliser la théorie"

"Il est logique que les élèves soient plus à l'aide avec cette démarche car il n'y a que les cours de maths où l'on part de la théorie, dans les autres matières, on construit plus les modèles".

"On manipule pour structurer".

"C'est l'état d'esprit qui est important. Dans la pratique, on peut tout faire, y compris des cours magistraux, prendre le bouquin, il faut aussi savoir "bachoter", mais même dans un cours magistral, il y a une problématique". "Il ne faut pas confondre poser un problème et utiliser les techniques algébriques".

"Il faut se poser le problème de savoir ce que c'est que faire des maths en classe, enseigner les maths en tenant compte des contraintes que l'on a".

"C'est notre attitude, c'est systématique, on n'est pas 10 % "comme ça".

2 - CETTE METHODE D'ENSEIGNEMENT EST EFFICACE NON SEULEMENT POUR LES ELEVES EN DIFFICULTE MAIS POUR TOUS Y COMPRIS LES CLASSES D'EXAMEN

"Je n'introduis jamais la dérivée sans pente-hauteur-surface".

"En 1ère S, j'ai introduit la dérivée avec temps-vitesse-distance, ça a été passionnant et efficace (on peut trouver du plaisir, mais ça a été en plus efficace par rapport à la matière et aux examens)".

"Mes élèves réussissent aussi bien, si ce n'est mieux au bac".

"Je ne fais pas de distinction entre ce qu'on peut faire acquérir aux élèves et les mathématiques "CUEEPISTES". Ce sont les mêmes mais je ne perds pas de vue que mes élèves iront au lycée et qu'ils doivent acquérir un minimum de vocabulaire et de notation dont ils auront besoin".

"Même au lycée, y compris en 1ère S, et en terminale, j'ai pratiqué ces idées. Je préférais consacrer du temps à l'essentiel et construire les notions fondamentales par mathématisation du réel. Je ne prenais pas de retard sur le programme car je ne démontrais que l'indispensable".

3 - CES PRATIQUES, ATTITUDES, REFLEXIONS PEDAGOGIQUES NE LES ISOLENT PAS BIEN AU CONTRAIRE, ELLES SE SITUENT A L'INTERIEUR DES DIFFERENTS COURANTS DE REFLEXION PEDAGOGIQUES

Beaucoup de formateurs ont travaillé au sein de l'IREM, soit avant de venir au CUEEP, soit en même temps, dans les groupes IREM pour la formation d'adultes ou dans d'autres groupes.

"Avant de travailler au CUEEP, j'étais à l'IREM. Quand j'ai enseigné au Maroc, on m'appelait Monsieur Méthodes Nouvelles".

"J'ai retenu aussi de mon travail dans le groupe mathémactives de l'IREM de Lille l'idée du "renversement du sujet".

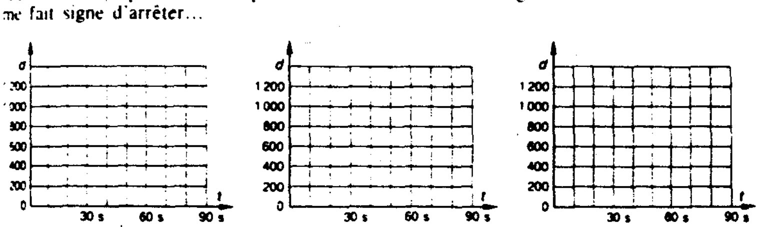
D'autres font référence à d'autres courants de réflexion : "j'ai suivi des UV d'épistémologie à la fac de lettres, ça m'a apporté... Il ne faut pas croire que les choses sont simples en donnant la bonne forme tout de suite. Ce qui est évident pour nous, ne l'est absolument pas, c'est souvent même compliqué... Le prof peut être un escroc, consciemment ou pas...".

Le Groupe d'Etudes et de Recherche Expérimentale (GEREX) qui s'intéresse plus spécialement à la pédagogie par objectifs en LEP : *"Je fais partie du GEREX, ça me rend plus sensible à ce qui se passe au CUEEP"*

Si les réflexions externes au CUEEP ont influencé les formateurs (et nous-mêmes) inversement les réflexions au CUEEP ont influencé des enseignants en dehors du champ d'intervention CUEEP. Citons à l'appui des extraits de manuels scolaires reprenant des fiches de travail élaborées au CUEEP reflétant la méthode globale en particulier, la liaison qualitative Tableau-Graphique et le raisonnement graphique :

Question 4. Histoire imaginaire : L'Alcootest (d'après CUEEP, Lille).

L'Alcootest : Après une fête bien arrosée, je prends le volant et roule à 60 km/h pendant 30 s; quand, à 300 m devant moi, un agent me fait signe d'arrêter...



Scénario 1 : Je m'arrête, je souffle dans le ballon et on me retire le permis.

Scénario 2 : Je prends peur, je fais rapidement demi-tour et je m'enfuis.

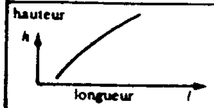
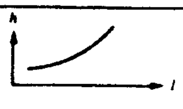
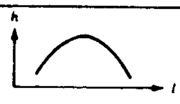
Scénario 3 : Je fais semblant de m'arrêter et je redémarre tout de suite.

Tracer pour chaque scénario, une courbe possible donnant en fonction du temps, la distance qui me sépare de mon point de départ.

Extrait de "Mathématiques 2e
Comprendre... et s'exercer"
Etudes Vivantes

44 *Etude qualitative de la dérivée*

Compléter le tableau, en suivant le modèle de la première ligne

Allure du tracé de la courbe (hauteur)	Description de la variation de la courbe (hauteur)	Signe de la pente	Tableau de variation de la pente p (dérivée)
	monte de moins en moins vite	+	l ; $p = y'$ ↘
			l ; $p = y'$
	descend de moins en moins vite		l ; $p = y'$
			l ; $p = y'$
	descend de moins en moins vite puis monte de plus en plus vite		l ; $p = y'$

45. On désigne par y' la dérivée (pente) associée à une courbe et par y'' la dérivée de la dérivée (dérivée seconde, c'est-à-dire pente de la courbe pente)

x	-1 0 1 3
variation de y	↗ ↘

On donne les renseignements suivants

x	-1	0	1	3
y	2	1,5	3	6
y'	-1	0	2	1

Sont-ils compatibles?
Dans l'affirmative, compléter le tableau de variation et tracer *une* courbe satisfaisant à *tous* les renseignements.

x	-1 0 1 3
signe de y''	
variation de y'	
signe de y	
variation de y	

On prendra pour unités, 2 cm sur l'axe des x et 1 cm sur l'axe des y.

Extrait de "Activités en Terminale C et E"
Collection Dimathème.

On peut citer également, dans le même ordre d'idées, un extrait d'épreuve du baccalauréat qui ne provient pas du CUEEP mais illustre bien la même tendance :

(6 points)

Organisation d'une production.
Une entreprise a fait une étude prévisionnelle du coût de production d'un article en fonction du nombre q d'articles fabriqués. Elle est parvenue aux résultats suivants :

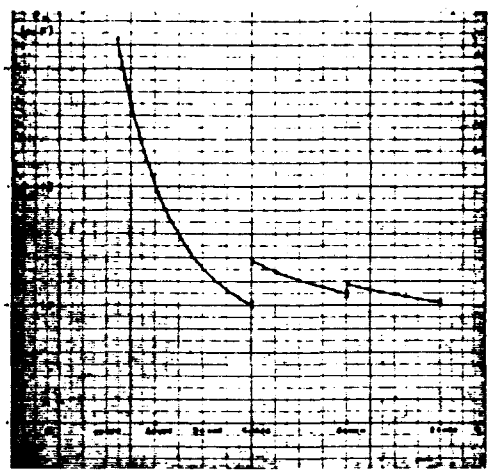
Production (en unité)	*Charges fixes (en F)*	*Charges variables (en F)*
$q \leq 40\,000$	200 000	$5\,q$
$40\,000 < q \leq 60\,000$	250 000	$7{,}5\,q - 75\,000$
$60\,000 < q \leq 80\,000$	280 000	$7{,}5\,q - 75\,000$

1. Déterminer en fonction de q le coût total de la production C_T.

2. Déterminer en fonction de q le coût unitaire C_u (coût de production d'un article fabriqué).

3. A partir de la courbe représentative de C_u donnée sur le graphique joint et sachant que le prix de vente d'un article est de 12 F, déterminer graphiquement les quantités de production qui permettent à l'entreprise de réaliser un bénéfice d'au moins 1 F par article fabriqué.
Retrouver ces résultats par le calcul.

4. Le prix de vente par article étant toujours de 12 F, pour quelle quantité de production l'entreprise a-t-elle le plus grand bénéfice par article fabriqué ?



4 - LES FORMATEURS PERÇOIVENT QUE LES REFLEXIONS PEDAGOGIQUES QUI SOUS-TENDENT LA MISE EN OEUVRE DE LA METHODE GLOBALE NE SONT PAS ETRANGERES AUX DIRECTIVES INSITUTIONNELLES

Nous ne reviendrons pas dans la conclusion sur la "lecture" que font les formateurs des nouveaux programmes. Nous compléterons cet aspect institutionnel par deux remarques :

- Effectivement dans les directives ou dans les présentations des programmes, on trouve des considérations sur les objectifs généraux et sur les finalités de l'enseignement.

"On a voulu mieux dégager les objectifs et les contenus du programme en précisant nettement les capacités requises ou non requises des élèves..."

"En offrant une formation mathématique de qualité..."

"On a voulu insister sur le rôle formateur des activités de résolution de problèmes".

III - Objectifs généraux des programmes C, D, E

1. Les représentations graphiques doivent tenir une place très importante dans l'ensemble des parties du programme. Outre leur intérêt propre, elles permettent de donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques étudiés ; leur mise en oeuvre développe aussi les qualités de soin et de prévision et met l'accent sur des réalisations combinant une compétence manuelle et une réflexion théorique.

2. Les problèmes et méthodes numériques figurant dans les différentes parties du programme doivent être largement exploités : ils jouent un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses notions mathématiques et dans les différents secteurs d'intervention des mathématiques ; ils permettent aussi d'entraîner les élèves à combiner l'expérimentation et le raisonnement en mathématiques et concourent au développement des qualités de soin et de rigueur. L'emploi systématique des calculatrices vient renforcer les possibilités d'étude de ces questions, aussi bien pour effectuer des calculs que pour vérifier des résultats ou alimenter le travail de recherche.

De même, il convient de mettre en valeur le contenu culturel des mathématiques en particulier, l'introduction d'une perspective historique peut permettre aux élèves de mieux saisir le sens et la portée des notions et des problèmes étudiés, et de mieux comprendre les ressorts du développement scientifique.

6. Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, mettre en oeuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, évaluer la pertinence des résultats obtenus en fonction du problème posé, ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique. Dans ce contexte, la clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs majeurs.

B.O. du 11 sept. 86

Citons quelques formateurs :

"Les nouveaux programmes de 6ème et 5ème vont plus dans le sens de ce que l'on fait au CUEEP, plus de concret, moins de vocabulaire".

"T.G.F., j'emploie régulièrement en seconde, c'est quelque chose qui est apparu dans les nouveaux programmes".

"Dans les nouveaux programmes, l'axiomatique a pratiquement disparu : on nous demande de faire utiliser l'outil mathématique et non de faire l'axiomatique de l'outil".

Nous retrouvons donc les objectifs généraux, des préoccupations qui ont été présentes dans notre approche de l'enseignement des mathématiques aux adultes. Nous retrouvons également dans une circulaire sur le développement de l'informatique dans l'enseignement, notre problématique :

"L'informatique comme un ensemble d'outils, de méthodes et de démarches... ce moyen nouveau qui assistera et enrichira la pédagogie".

- Mais nous devons faire une réserve qui nous paraît fondamentale. Il nous semble qu'il y a un décalage entre les directives, et la mise en oeuvre de ces directives. Nous pensons que les enseignants non préparés à ce type de réflexion ne feront pas la même "lecture" des programmes qu'en ont faite les formateurs du CUEEP. En particulier que l'on peut lire les contenus et faire fonctionner l'enseignement sans opérationnaliser les objectifs généraux. Ceci nous conduit à formuler une dernière remarque :

5 - LE DEPARTEMENT MATHEMATIQUES A UNE SPECIFICITE

Nous pensons que la spécificité du CUEEP est de se donner les moyens à la fois de :

- **mener une réflexion pédagogique**
- **se fixer des objectifs généraux de formation**
- **les opérationnaliser par des objectifs spécifiques**

ceci avec des formateurs travaillant en équipe et sur un public de plusieurs milliers de stagiaires.

Comme le dit un des formateurs :

"J'ai découvert au Département Mathématiques du CUEEP, une structure où le fait de s'interrroger à la fois sur le public, les objectifs et les moyens de les atteindre n'est pas sacrilège ou vain, mais constitue au contraire un principe de fonctionnement. Il y a l'infrastructure nécessaire".

Nous reprendrons et approfondirons certains aspects de cette conclusion dans le chapitre suivant, en particulier dans l'étude de l'interaction entre la pédagogie par objectif et la méthode globale.

RESUME DES ENTRETIENS AVEC LES FORMATEURS

SYLVAIN APEDO

Au CUEEP, j'ai beaucoup appris surtout à lier le concret à l'abstrait. J'ai reçu une formation formelle. En formation initiale, j'ai essayé de montrer ce qu'on peut faire avec les mathématiques. Les théorèmes, les définitions, ça ne marche pas, je leur donne à ma manière pour qu'ils comprennent : laisser tomber le vocabulaire du bouquin, qui est trop scientifique, trop sophistiqué pour les élèves, prendre les mots de tous les jours, décomposer les définitions en petites tranches. Il faut que les élèves manipulent pour arriver à travailler. Par exemple, en géométrie, les fiches de manipulation peuvent précéder le cours : découvrir, trouver la façon de faire. Puis vient le cours et les exercices à la maison.

Au CUEEP, j'ai des MA 9 je pourrais utiliser des fiches en 1ère, 2nde. Je n'ai pas eu de cours au CUEEP qui corresponde au collège. Pour l'informatique, il n'y a pas de matériel dans l'établissement, mais Affine, Mempuiss auraient été intéressants.

Il y a de gros problèmes de motivation des élèves, en plus il y a des contraintes de programme, mais avec les plus faibles, j'y vais à pas de tortue je prends le risque de ne pas terminer le programme. Mais j'essaie de leur redonner confiance en leur montrant que les maths c'est aussi du réel, du concret.

Il faudrait que ceux qui font les programmes se mettent à la place des jeunes. Il ont fait un programme moyen il faudrait adapter aux différents types d'élèves et adapter les horaires. Les plus faibles doivent avoir une ou deux heures de plus pour s'exercer et rattraper les autres. Les élèves ne sont pas bêtes, ils savent faire des choses intelligentes, mais ils ne sont pas motivés.

JACKIE BOUCHE

Dans un premier temps, j'ai surtout utilisé des idées de problèmes que je trouvais dans les fiches du CUEEP. C'est tout un esprit que j'ai acquis en travaillant au CUEEP : abandon d'un certain vocabulaire, d'une rigueur d'exposé et de comportement que nous imposaient l'inspection et notre formation, c'est superflu pour les élèves moyens et un risque de blocage.

Avant d'avoir acquis une certaine expérience, nos fiches étaient des polycopiés classiques d'exercices d'application, et j'ai commencé à utiliser les fiches CUEEP comme délassement, dérivatif au programme, elles plaisent aux élèves. Je les utilise maintenant en fonction du cours que je fais, je tiens compte du programme. Je ne me sers pratiquement jamais d'une fiche CUEEP telle quelle, j'ai un "bagage" dont je me sers pour faire mes fiches, elles sont souvent inspirées par les fiches CUEEP que je trouve amusantes et originales (elles ne le sont pas toutes) et j'espère qu'aussi elles plaisent aux élèves. L'esprit CUEEP m'a permis de voir les mathématiques avec un peu plus de recul et lorsque je regarde les programmes mis en place en 6ème, 5ème cette année, je me dis "mais ils ont piqué tout ça au CUEEP".

Je ne pars pas de situations entre ce qu'on peut faire acquérir aux élèves et l'esprit CUEEP, autrement dit les mathémtiques de l'enseignement initial et les mathématiques "CUEEPISTES" sont les mêmes mais je ne perds pas de vue que mes élèves iront au lycée et qu'ils doivent acquérir un minimum de vocabulaire et de notations dont ils auront besoin.

Les fiches que je fais le plus souvent, sont des fiches de présentation des notions, ce sont des fiches d'appel de besoins : leur but est de provoquer une situation nouvelle qui nécessite des besoins nouveaux sans toutefois provoquer de blocage d'où la nécessité d'être très "diplomate". Il faut que les élèves parlent, je laisse dire, je laisse écrire tout ce qu'ils veulent, on rectifie, on met en place ensemble. Le schéma idéal est le suivant :

problèmes concrets -> appels besoins -> mise en place et acquisition des techniques -> retour à des applications.

Avec l'informatique, je demande toujours quelle est son efficacité. Le transfert info-écrit n'est pas évident et aux examens on demande de l'écrit. L'informatique permet cependant de constater et d'analyser le comportement d'un élève, il y est plus facile de discuter cas par cas car je suis libéré du côté discipline, un élève parle plus facilement lorsqu'il est face à l'ordinateur.

La machine à calculer, je l'utilise peu car la moitié de mes élèves n'en a pas et parce que j'essaie de faire en sorte que mes élèves sachent calculer mentalement et "à la main". Je ne veux pas que la calculette soit "l'objet magique". Par contre, lorsqu'il s'agit de gérer une formule elle est indispensable. (Par exemple, les calculs où intervient , R^2, 2 R etc...

En 6ème, au collège, on a établi des grilles de mini-objectifs, sur le papier c'est super, mais pour gérer ces grilles il me faudrait une secrétaire, c'est à revoir. On a organisé des groupes de niveau en 6e et 5e et tenté de mettre en place une pédagogie par objectifs mais cela pose beaucoup trop de problèmes avec les élèves que nous avons.

Le collège idéal : 300 élèves, effectifs de 20 élèves (18 pour les classes difficiles) par classe. J'aimerais une salle de classe gaie, insonorisée, avec des tableaux un peu partout qui seraient à la disposition des élèves, des ordinateurs, des calculettes, un rétroprojecteur, des documents. Il faudrait que l'on ait une photocopieuse dont on pourrait se servir sans contrainte, sans espionnage administratif.

Je suis dans un bahut pas facile, avec des élèves pas toujours motivés pour les études telles qu'ils les suivent actuellement et à certains moments je me demande si je ne "débloque pas". Heureusement que mes collègues sont comme moi, cela me rassure, et puis il y a les stagiaires du CUEEP qui nous redonnent le moral.

CHRISTIAN CALONNE

En 73, au Département Maths du CUEEP, j'ai découvert une structure où le fait de s'interroger à la fois sur le public, les objectifs et les moyens de les atteindre n'est pas sacrilège en vain mais constitue au contraire un principe de fonctionnement. Il y a l'infrastructure nécessaire.

Mes idées actuelles ont été élaborées en symbiose avec la pratique CUEEP. Les idées et la manière de faire : partir d'une activité, cerner les problèmes et les difficultés, organiser les acquisitions. Cette manière de procéder est plus efficace par exemple, la grammaire algébrique n'est plus une fin en soi. Je romps le déroulement linéaire du programme par une pédagogie par taches : on commence sur un thème donné en sachant que je ne l'épuiserai pas, j'y reviens 3 ou 4 fois pour un effet de résonnance, reprendre autrement, aller plus loin... Le déroulement linéaire peut paraître un raccourci c'est une impression d'être performant dans des champs très petits.

J'utilise systématiquement les calculatrices scientifiques et programmables : la machine symbolise le passage départ -> arrivée en lien avec le graphique. Savoir utiliser une machine donne un pouvoir au gamin. Comment programmer ma machine ? S'ils connaissent les priorités algébriques, ils peuvent utiliser la machine : mettre en évidence la différence arithmétique - algèbre où la formule est traitée globalement, mémorisation des formules, possibilités de calculs numériques.

En CES, il y a une distorsion proche de la rupture entre formation traditionnelle et le public. Le savoir-faire CUEEP est d'un grand secours. L'enseignement secondaire fonctionnait comme un alibi social justifiant l'entrée plus ou moins rapide dans "la vie active" il doit maintenant "garder" la majorité des jeunes. Que fait-on pour s'adapter au public ? Il faudrait concrétiser les maths, les faire apparaître comme un outil. Il faudrait qu'il y ait des retombées palpables autres que la réussite scolaire qui n'est plus une motivation. Il faudrait que ça leur donne un pouvoir supplémentaire dans leur vécu.

MARC CASTELEYN

C'est au CUEEP que j'ai appris le langage des opérateurs : les cases, les bulles, c'est un truc très simple qui permet de mettre en évidence des choses compliquées. On met des choses dans les cases, on nomme les cases et ensuite on passe aux lettres. Une fois que c'est écrit dans le langage opérateur, tout le monde comprend, ça devient graphique et ça évite les problèmes de langage. Certains élèves se réapproprient ce langage. J'utilise ce langage dans toutes mes classes : suites proportionnelles, fractions équivalentes, opérateur fractionnaire, composition d'applications, Bibulle en 3ème.

Les machines à calculer : oui je les utilise, calcul par approximaion, pour trouver le domaine de définition d'une fonction, j'utilise les messages d'erreurs.

L'informatique : surtout en soutien mais ça détourne le soutien de son objectif parce que tout le monde veut venir. Au départ j'utilise un logiciel sans intégration dans le processus pédagogique, par exemple Navire marche bien, il faut faire exploser le navire. Les négatifs semblent "naturels".

Le CUEEP m'a fait modifier mon attitude, au départ il y avait deux mondes, le CUEEP et la formation initiale. Je me dédoublais. Actuellement, je me suis assoupli. Avec les classes faibles, il faut être disponible, on ne peut pas faire un cours préparé, il faut se lancer dans un exercice, creuser jusqu'au bout pour qu'il en reste quelque chose : faire des exercices, quelques éléments de cours après. Les nouveaux programmes vont dans ce sens.

Au CUEEP on mathématise : savoir trouver ce que l'on cherche, le traduire, trouver un support. Après le problème est fait (on demande à quelqu'un ou à la machine). L'IREM m'apporte aussi des idées, des documents...

En formation initiale, on rencontre des problèmes de discipline, de matériel, d'isolement des profs, de motivation des élèves. Il faudrait laisser carte blanche aux profs en équipe sans programme avec des objectifs, passer un contrat avec les élèves.

GERARD DEGRYSE

Ce qui me parait intéressant : à partir d'une évaluation de départ, dans un temps annoncé : atteindre un objectif. Le temps est une contrainte intéressante. Quand on veut atteindre un objectif on crée les conditions pour que ça puisse se réaliser. En formation initiale, ça n'existe pas, on vit sur des impressions quand on passe aux évaluations, on est déçu.

J'enseigne en LEP, en Contrôle continu, je fais partie du GEREX. Je vise à faire travailler les enfants en fonction de leurs objectifs et à leur rythme. C'est l'idéal mais en fait il s'agit plus des objectifs de la classe. La PPO se trouve diluée dans une classe. L'examen a le même contenu pour tout le monde y compris le contrôle traditionnel. Adapter les objectifs aux élèves est incompatible avec le diplôme.

Le fait de travailler en même temps au GEREX, me rend plus sensible à ce qui se passe au CUEEP. Ce qui est intéressant au CUEEP ce sont les situations ouvertes : réfléchir sur un problème, l'adapter au niveau des élèves, en tirer des choses intéressantes mathématiquement, la formulation, avec des mots de tous les jours. L'approche est séduisante, piégeante quand les enfants sont piégés, on peut leur faire faire autre chose. On peut travailler au bout des possibilités : tout le monde a appris quelque chose.

J'associe beaucoup plus maintenant l'outil graphique. Si un élève sait faire son tableau et graphique, il y a de fortes chances pour qu'il réussisse sur formule.

Ce point figure au référentiel CC, je l'ai vu à travers la pédagogie d'adultes. En formation initiale, je mettrais une contrainte de temps, liée à un contrat et à un objectif. Il faudrait une plus grande responsabilité. Travailler de façon plus souple. Les élèves sont rarement au courant des objectifs.

JACQUES D'HOOGE

Depuis que je suis au CUEEP, j'ai appris beaucoup de choses, en particulier je fais travailler mes élèves par sous-groupe avec des fiches ça permet d'individualiser le travail, de faire un travail différencié. Je reprends les fiches du CUEEP telles quelles avec le sigle ou je les adapte ou je les refais en gardant les idées, je les adapte aux besoins. Je les mets dans le cahier de cours.

Je pars de la vie courante, on est amené à découvrir une nouvelle notion, sans cours magistral, le cours devient "faire une synthèse". Les cours écrits sont des résumés. Après je leur demande de créer d'autres exemples sur des schémas vides (ex : location de voiture et TGF).

Il ne faut pas toujours imposer, l'esprit de découverte est important. Je fais à la fois fiches et EAO. Dans la salle info, il y a des tables de travail, j'organise le travail par groupe en alternance. L'EAO : pour introduire une notion, en individualisation, pour leur faire rédiger leur solution. Il faut que les élèves sachent rédiger. Dans le travail individuel, j'essaie de voir comment une notion est la mieux passée en EAO ou en fiche, ça dépend plus de la notion que des élèves.

- j'ai peu d'échanges avec les autres profs sauf un, on a les mêmes idées, pas la même façon de travailler, mais on s'entend, on échange des fiches. Les autres ont peur du chahut en groupe, de la méthode différenciée, ...

- je voudrais intégrer les gosses dans la société, pas respecter un programme, arriver à un minimum d'acquis, leur faire aimer les maths par rapport aux idées qu'ils ont, s'adapter à leurs désirs.

- on n'a pas les idées seul. Si on n'a jamais vu autre chose, on reproduit le système.

MARIE-CLAUDE GUILAIN

Je me suis battue pour être raccrochée au site informatique de Saint-André. J'étais seule. Les collègues ne se sentaient pas concenés, j'étais déterminée. Le site fonctionne depuis un an à 7 minutes à pied du collège. J'y emmène des 6èmes en soutien (je ne les ai pas en classe) : pour eux, c'est une autre façon de travailler, c'est la seule possible (je les ai en fin de journée). J'y emmène aussi une classe de 4ème par moitié (il faut trouver une surveillante pour l'autre moitié), 4 ou 5 fois depuis le début de l'année (problèmes de déplacement et de surveillance).

Utilisation de l'outil informatique

- donner des méthodes de travail : j'ai beaucoup utilisé MPENDU ; s'organiser

- détecter des lacunes : avec DIVISION je me suis aperçue que certains ne savaient pas construire une table de multiplication par addition et le sens de "Dans 35, combien je peux faire de paquets de 12 ?" Leur professeur ne s'en était jamais aperçu

- travailler le calcul mental, l'ordre de grandeur, le sens des opérations : cible

- aider à la verbalisation : les élèves ne verbalisent pas à l'ensemble du groupe la machine sert d'intermédiaire. Ils expliquent pour moi et leur partenaire du binôme

- faire des exercices, vérifier les connaissances : fractions, nombres relatifs

- Vidoc et Polynôme servent de référence : ils écrivent comme sur l'ordinatgeur ça a débloqué des élèves par rapport à l'algèbre ; exemples : $(2x + 3)(4x - 5)$

Des élèves ne savent pas faire le développement en ligne :

- ils oublient des produits (ils en font 2 sur 4)
- ils font des erreurs de signes

Avec Multi poly, ils ont introduit eux-mêmes leurs polynômes. La présentation sous cette forme les a aidés

1. A comprendre ce qu'était un produit de polynômes
2. A être attentif d'abord au signe de chaque produit
3. A réduire les monômes de même degré puis à les ordonner

De retour en classe, certains élèves ont reproduit spontanément sur feuille la représentation sous forme de multiplication comme sur l'ordinateur. D'eux-mêmes ils disent "je fais le calcul comme en informatique".

Je suis persuadée qu'il faut utiliser les machines à calculer pour travailler l'ordre de grandeur et le sens des opérations en 6ème. En 4ème la machine à calculer sert "à faire des calculs".

Exemple : en début d'année, les élèves passent beaucoup de temps à simplifier et additionner, multiplier, diviser les fractions. Pour trouver le PGCD et le PPCM ils "traînent" car ils divisent mal ou lentement. La calculette m'apparaît là comme un outil indispensable car le but est d'acquérir les techniques opératoires avec les rationnels et non de vérifier l'apprentissage de la division dans N

Mon attitude a changé, je suis plus détendue, j'accueille toutes les réponses les méthodes. Les élèves parlent, on examine ensemble les réponses données, on met en commun les difficultés.

En géométrie de 3ème les élèves commencent à comprendre qu'il n'y a pas qu'une seule démarche de démonstration... et qu'il est important qu'ils osent dire leur raisonnement devant toute la classe, surtout s'il ne ressemble pas à celui exprimé au tableau. Le droit à la différence, le droit à l'erreur sont permis en maths aussi.

Réponses à la question : Si tu étais libre de décider, comment imaginerais-tu l'enseignement des maths au collège ?

- définir un contenu global de la 6e à la 3e

- pédagogie par objectifs : concertation serrée pour les objectifs à atteindre dans une période donnée : travail d'équipe

- liberté totale des méthodes employées : chaque enseignant doit pouvoir travailler selon ce qu'il est (il doit se sentir à l'aise avec les outils)

- l'inspecteur = conseiller pédagogique. Il viendrait soutenir les équipes dans leur définition des objectifs et vérifier avec les individus l'intérêt des méthodes employées.

DIDIER LEFEBVRE

Je réinvestis en formation initiale, les idées des fiches CUEEP. J'utilise des extraits de fiches. Ma formation me conduisait au tout algébrique, ma pratique est une retombée de la formation continue. Je travaille en même temps trois phases TGF, mais la formule ne vient pas automatiquement, elle est dite avec les mots du français, j'évite les expressions littérales pures. la formule existe quand même, c'est dit sous forme "française". Si les idées sont algébrisées, j'utilise la formule.

En formation continue, j'ai appris à aller à l'essentiel, à donner le maximum de méthode de travail plus qu'à multiplier sous forme de cours les multiples façons d'aborder un problème.

Devant un problème, réinventer l'outil, quelle est la meilleure visualisation ? J'essaie qu'ils retrouvent un support adapté. S'ils ne trouvent pas, je leur donne, ça débloque. Trouver un support pour résoudre un problème précis. Je limite le nombre de supports. Si je leur en donne plusieurs, je les lie entre eux. Par exemple, en trigo, globaliser les supports papier et machine, corriger les insuffisances de l'un et l'autre ; comprendre la signification des nombres qui apparaissent sur la machine avec d'autres supports. Le support "dessin" peut apparaître comme une "perte de temps" c'est rentable à long terme. il ne faut pas donner trop d'informations à la fois, il faut les globaliser. Je fais le lien entre les tableaux numériques statistiques de géographie et les pourcentages à l'endroit et à l'envers.

Il faudrait changer les rapports de la société avec les maths. Je n'utilise pas de bouquin, le support est trop rigide, la charge de faire le cours revient à l'enseignant avec des fiches. J'ai débarassé mon cours des choses inutiles, j'essaie d'utiliser les choses dont j'ai besoin au fur et à mesure. Changer les programmes est illusoire, ça ne changera rien.

JEAN-LOUIS MOUTON

J'ai trois souvenirs marquants de deux stages IREM formation d 'adultes qui ont énormément modifié ma façon de voir :

1 - j'ai été bombardé sur les calculatrices. J'en ai fait une fixation positive : c'est un outil d'aide, de prise de décision, être capable d'analyser une formule, utiliser ses connaissances pour faire des conjectures, outil sécurisant que l'on domine. Attention à une mauvaise utilisation.

2 - Des énoncés "imperméables" : les maths sont pourtant plus perceptibles par un public moins formaliste. Ca répond à une nécessité de la formation.

3 - Utilisation des premiers ordinateurs. C'était mon premier contact, maintenant j'essaie de suivre une formation de formateur à l'informatique.

En formation initiale, j'apprends aux élèves à traiter les graphiques, c'est important, beaucoup de collègues passent à côté. J'introduis la notion de dérivée avec Pente Hauteur Surface ou Temps Vitesse Distance. J'aimerais enseigner avec autant d'efficacité, la dérivation-intégration avec des thèmes statistiques.

Avec l'outil informatique, j'ai également introduit les dérivées en utilisant Tracgraf. Je l'ai utilisé d'abord en cours et des besoins sont apparus. Avec les élèves on a "tourné" le logiciel pour l'adapter à l'étude locale d'une fonction puis en cours de maths. Ca a été intéressant. Pour moi c'est une piste de recherche. Ce sont les idées que ça peut ouvrir qui sont intéressantes. L'intérêt, c'est comme les fiches, c'est d'adapter, de détourner. J'aimerais avoir un tableur, il y a une piste de recherche dans la liaison des 3 supports : associer la gestion de formule au graphique.

D'une façon plus générale, j'accorde plus d'importance à la pratique. Dans les cours, dans l'évaluation aussi.

Je souhaiterais moduler l'enseignement, cerner les besoins, en fonction d'une orientation personnalisée, l'informatique devrait aider, ça supposerait une concertation. Le travail par thème serait aussi intéressant pour mathématiser.

GERARD OFFROY

La première chose qui vient à l'esprit et qui va à l'encontre de ce qu'on faisait c'est Pente-Hauteur-Surface (vocabulaire différent - approche graphique d'une notion et traitement en continuité de dérivation- intégration).

- la liaison tableau - graphique - formule et reconnaissance 1er degré second degré sur un tableau : je travaille systématiquement les graphiques. Si on ne sait pas résoudre algébriquement une équation, on passe au graphique.

- utilisation des touches fonctions des calculettes : on découvre, on utilise

- j'utilise des thèmes pour plusieurs niveaux. J'en fais des exploitations différentes (VDN, les bactéries, la Caisse d'Epargne). Pour les suites, j'ai des situations de référence : les bactéries ou les lapins.

Dans les nouveaux programmes, l'axiomatique a pratiquement disparu : le nombre dérivé, c'est le coefficient directeur de la tangente : dans certains programmes ils est demandé de parler de la notion intuitive de tangente à une courbe et d'en déduire le nombre dérivé de f en ce point. On nous demande plus d'être théorique mais de faire utiliser l'outil mathématique et non faire l'axiomatique de l'outil : utiliser la dérivée pour trouver des maximums. Je traite les idées du CUEEP à l'intérieur du programme. Il y a beaucoup de manuels où l'on retrouve ces idées. La moitié des collègues adhère à ces idées, la moitié les ignore ou les rejette.

Le MA 10 a influencé la formation initiale surtout dans les classes avec élèves en difficulté, mais le retour à la formation initiale a influencé le MA 11 (il faut aussi préparer aux études supérieures). Cf Brochure Trigo du CUEEP remaniée et donnée aux formés suivant le MA 11.

On doit faire pour la très grande majorité des élèves, des utilisateurs de maths et pas des "matheux" ou des "scientifiques". Il faut que l'enseignement privilégie les utilisateurs, moins d'axiomatique. ils feront cela après le bac. On pourrait essayer des classes de niveau pour éviter l'hétérogénéité. Mettre les maths en relation avec les autres disciplines (physique). Utiliser les outils modernes. rendre les maths plus accessibles. intégrer l'ESEU dans les services de formation initiale.

DENIS PECHILLON

Ce dont j'ai tiré le plus parti, c'est un esprit : faire des maths, c'est résoudre des problèmes, mathématiser des situations. Pour que l'élève vive cette démarche, le rôle du maître est de proposer des problèmes, de transposer la réalité pour lui donner un intérêt pédagogique. J'ai retenu aussi de mon travail dans le groupe Matémactives de l'IREM de Lille, l'idée du "renversement sujet" : on part du problème, on construit un outil, on retient des règles de fonctionnement de cet outil, on le nomme enfin.

Un même problème peut être abordé de l'école à l'université et résolu à des degrés divers : résolution d'un problème voisin plus accessible, résolution partielle, approchée ou exacte. Avant tout : ne pas renoncer !

L'enseignant doit être un chercheur, trouver pourquoi enseigner, se donner des objectifs (dont certains hors de la discipline : stimuler l'imagination, développer l'autonomie, ...) et adapter constamment sa pratique à ses fins. Il est différent du didacticien qui vise d'abord la transmission de connaissances et cherche surtout comment enseigner.

Même au lycée, y compris en 1ère S et en terminale, j'ai pratiqué ces idées. Je préférais consacrer du temps à l'essentiel et construire les notions fondamentales par mathématisation du réel. Je ne prenais pas de retard sur le programme, car je ne démontrais que l'indispensable.

Les outils :

- *les opérateurs,*
- *le papier millimétré (les représentations graphiques marchent remarquablement bien : en 5ème faible, mes élèves résolvaient ainsi des problèmes inabordables en 5ème classique)*
- *les calculatrices, puis les ordinateurs, pour simuler la réalité, pour résoudre des problèmes par approximation, pour obtenir des tableaux de nombres et interpoler ou extrapoler.*

Pendant des années, je n'avais pas imaginé qu'on pouvait enseigner les maths comme ça alors que c'était écrit dans les instructions officielles, mais pour l'école élémentaire seulement et sans beaucoup d'effet : à peu près personne parmi les maîtres, les professeurs d'école normale et les inspecteurs ne comprenaient vraiment ces textes. Pour faire résoudre des problèmes, il faut en avoir résolu soi-même. faisant fonction d'IDEN, puis étant PEN, j'ai placé les maîtres en situation de vivre des maths. je pariais sur leur désir de faire partager à leurs élèves, en la transposant, cette expérience personnelle.

J'ai retenu de cette pratique du problème ouvert qu'on apprend beaucoup du travail collectif, non seulement dans des équipes d'enseignants, mais aussi dans la classe avec les élèves.

YVES TONDELIER

Une conception, plutôt un concept que j'essaie de pratiquer au maximum est la figure TGF que j'exploite parfois d'une année sur l'autre lorsque je retrouve les élèves ou lorsque les collègues de l'année précédente ont oeuvré dans ce sens :

a) exemple : le problème du cendrier abordé en seconde sous forme de tableau de nombres à partir d'une formule puis de graphique, la modification du pas permettant de faire un zoom sur l'approche de la solution (bonne idée d'utilisation de Nanotab). L'algébrisation définitive ne se faisant qu'en 1ère au niveau de l'utilisation de la dérivée.

b) autre exemple : le problème des petits pois (supermarché) qui existe également sous la version (salle de cinéma : prix du billet à 8 $ et augmentation de la fréquentation de 100 personnes si le prix diminue de 0,50 $) que j'ai expérimenté il y a de cela quinze jours en première sous les trois formes : (un succès) de cela on peut extraire la symétrie de la parabole (deux solutions avec des diminutions de 1/2 $ et la recherche du sommet, diminution de 1/4 $ seulement).

c) Voici des années que je ne commence plus ma "leçon" sur les primitives sans l'introduction Pente Hauteur Surface avec le problème des déblais et remblais, la détermination de "la" courbe surface par la méthode des rectangles médians et ceci me permet d'opposer le "la" de "une" courbe surface (entre autres choses).

d) J'utilise en alternance selon la force des classes en statistiques les deux fiches suivantes :

> *1ère B et Term B : la halte-garderie d'enfants*
> *1ère A (bonne) : le trajet usine - maison*
> *TA2 (plus faible) : la petite auto du grand-père et la pièce de 5 F du père (il va falloir réactualiser)*

Je complète cette étude avec la donnée en vrac des résultats du dernier DS que l'on essaie de classifier et de représenter sous toutes formes qui viennent à l'esprit de la classe. Je n'ai pu cependant expliciter efficacement les fiches liens statistiques - primitives (en partie parce que je n'y suis pas à l'aise moi-même).

e) J'ai une "tendresse" particulière pour la fiche "la conjoncture économique" (articles de l'Humanité, l'Aurore, etc).

f) J'exige de mes élèves que toute résolution d'inéquations ou d'équations du second degré soit associée à la représentation d'un type de parabole (en trajectoire d'obus).

g) J'avais oublié, "Jo la Terreur" qui a beaucoup de succès en Terminale que je panache avec le problème des treize marches d'une puce qui fait des sauts d'une marche, ou bien de deux marches sans jamais redescendre.

En bref, pour moi les idées CUEEP ont des retombées fondamentales dans ma conception de l'enseignement en formation initiale : à partir d'une approche concrète, analytique tant par valeurs que par représentation, permettre de dégager une idée que l'on théorisera plus ou moins selon la classe et le but recherché.L'enseignement ne doit pas être au service de la théorie désirée, c'est elle qui devra être incidente.

J'ai surtout travaillé avec Gérard et Jean-Louis mais cependant au niveau des 1ères surtout B et A1, j'essaie d'impulser mes collègues dans les choix plus en prise avec des problèmes d'actualité (optimisation) et ceci est d'ailleurs conforme avec les tendances des nouveaux programmes.

REGIS VANDENMERSCH

Le CUEEP a déteint sur moi, je vise plus à faire une formation qu'à étudier une matière. Adapter le contenu à l'objectif (de formation). Si le contenu n'est pas passé, c'est pas forcément dramatique, c'est la méthode qui est importante. Avec la pédagogie des situations, captiver les élèves, les intriguer, ils sont obligés de suivre. Ensuite, vérifier si le contenu et surtout la méthode est acquise par des exercices de transferts. Vérifier ce qui a été fait avant. Eviter le découpage en matière, en leçon : établir des relations entre les objectifs ponctuels.

En sciences, j'ai détourné des fiches de maths, des outils : par exemple la lecture des graphiques, des opérateurs, des tableaux numériques ... avant je les utilisais (je faisais confiance au prof de maths) maintenant je les utilise de façon systématique avec l'idée tableau - graphique - formule pour la physique, je fais plus attention à la façon de représenter un histogramme, je n'utilise pas n'importe quel graphique. Ce sont des retombées de la formation en maths.

Au niveau EAO : utiliser l'EAO a remis en question une partie des cours et ça permet d'avancer avec les élèves : analyser les problèmes qu'il y a en classe, changer les choses auxquelles on tient. En quittant l'ordinateur, j'essaie d'évaluer les acquis, les problèmes, faire une mise au point. J'ai découvert au CUEEP la posibilité du travail collectif pour les élèves (LPENDU). En EAO pour créer ou utiliser des logiciels, il faut s'échanger les idées, détourner les idées, travailler en commun. Mais les collègues ne sont pas prêts à passer du temps, ils se déchargent sur les spécialistes : une personne ressource c'est pratique mais c'est dangereux.

Il faudrait une salle d'ordinateurs à roulettes, un vidéodisque, une photocopieuse,

- obliger les gens à enseigner en formation continue, ils auraient moins de réactions stupides en orientation, les enfants vont devenir des adultes,

- obliger les enseignants à suivre les gosses dans leur classe pendant une semaine, découvrir les exigences des autres matières.

ALAIN VANGHELUWE

Les adultes en C3 résolvent les problèmes sans algèbre en faisant des calculs automatiquement et après ils organisent les calculs. Le tableau numérique pousse aux calculs, ils aiment dégager d'un ensemble de valeurs, ce qui peut être analogue. Il faut leur apprendre à disposer les nombres, ce qui permettra de dégager les règles.

Au CUEEP, j'ai trouvé une filière expérimentale par tâtonnements qui aboutit à une démonstration :

- replacer les maths dans un cadre général, faire des maths sans en avoir l'air, associer le graphisme, visualiser, faire varier les coefficients. Poser les opérations avant de formaliser. Associer les résultats théoriques à un graphisme initial.

- emploi systématique des tableaux numériques, d'abord des situations, puis plus complexes où le formalisme peut s'appliquer.

On n'a pas besoin d'algèbre pour résoudre des problèmes de 1er degré, c'est une "proportionnalité boîteuse". l'algèbre est un outil. j'ai évacué tous les langages excessifs, sauf les termes qu'on pose aux examens (il faut bien !).

J'ai besoin de me réapproprier les outils dont je me sers : fiches, calculettes, info, je n'utilise pas un outil que je ne maîtrise pas (info).

Si on schinte la partie intiation, on peut faire croire que les choses sont simples parce qu'on donne la "bonne forme" alors qu'en fait, c'est compliqué. Ca a mis des années à se construire (référence à l'histoire, à l'épistémologie). Si les problèmes sont posés "trop simplement" ça ne permet pas le raisonnement. Il faudrait mettre les maths au service du public et pas construire un outil pour des spécialistes (les matheux). Mettre les élèves sur le terrain, manipuler, et étudier les prolongements. Evacuer les prophètes (je pose x ceci, y cela ...). Faire intervenir la réflexion à partir des opérations et arriver à un but.

JEAN-CLAUDE VERNALDE

J'utilise de plus en plus de documents, d'idées. Avant, je partais des maths, maintenant je pars de situations concrêtes : partir d'objets pratiques, faire de la formalisation, si on en a besoin, quand elle est utile : les élèves ne voyaient pas à quoi ça servait maintenant ils s'en rendent compte.

Il faut d'abord savoir faire, il faut éviter ce qui fait peur au niveau du formalisme, passer par le support visuel : exemple Trigo avec les opérateurs, les flèches ça évite les fractions qui font peur. C'est plus simple. Si la classe est faible, il faut faire attention, manipuler c'est bien, mais attention à la diversification et il faut suivre tout le monde. Par exemple quand il y a une série de calculs, des nombres sans formalisation mathématique, ils ne voient pas ce qu'il y a à en tirer.

Les machines à calculer entrent dans les moeurs, les programmables c'est un bon échec, avec les simples, on peut aborder des notions que l'on ne pouvait pas aborder avant la dérivation, exemple : le cendrier.

J'utilise les fiches du CUEEP, de l'IREM, que je refais avec les mêmes idées des logiciels aussi, Pourcent, MAC 6. La façon d'utiliser dépend du niveau de la classe.j'adapte la théorisation aux réactions des élèves.

Mais on a du mal à savoir ce que les gamins savent. Les connaissances sont du brouillard. Les résultats d'un test ne donnent pas de renseignements. Il faudrait des groupes avec des élèves dont on a classé les difficultés. Il faudrait avoir une vue globale et précise des programmes du CP à la terminale, reprendre les mêmes idées petit à petit, les approfondir. mais actuellement, on ne sait pas jusqu'où on va. Les nouveaux programmes de 6ème se rapprochent des idées plus concrètes.

CHAPITRE XIII

INTERACTION ENTRE PEDAGOGIE PAR OBJECTIFS ET METHODE GLOBALE

Nous avons mentionné dans le chapitre II (Contexte institutionnel), que la Pédagogie par Objectifs est sous-jacente à l'organisation de la formation, à la validation des acquis, qu'elle sous-tend les recherches pédagogiques dans le domaine de l'enseignement des mathématiques au C.U.E.E.P. L'étude du transfert en formation initiale des "idées CUEEP" du chapitre précédent a dégagé l'apport de la formation d'adultes quant à l'utilisation d'objectifs en pédagogie en formation initiale.

Dans ce chapitre, nous allons approfondir le lien entre la pédagogie par objectifs et l'hypothèse globale : le couple mathématisation de situation/outil informatique dans un environnement adéquat, engendre une méthode globale d'enseignement des mathématiques, performante, en modifiant les méthodes pédagogiques, les cursus et les modes de pensée.

Plus précisément, nous étudions l'influence de la méthode globale sur la Pédagogie par Objectifs pour montrer que :

La méthode globale a évité le piège des micro-objectifs et du contrat centré sur des objectifs minimaux du diplôme pour favoriser une approche plus globalisante centrée sur les objectifs de formation

et par là même, prouver la performance de la méthode globale dans le sens :

Une méthode est performante si elle a des retombées en dehors de son champ strict d'application et donc si elle a la capacité de féconder, d'enrichir, de transformer des aspects transdisciplinaires du système éducatif.

Avant cette étude, nous dégageons l'apport de la Pédagogie par Objectifs à la méthode globale car plus qu'une influence de celle-ci sur celle-là il s'agit bien d'une interaction entre les deux.

L'APPORT DE LA PEDAGOGIE PAR OBJECTIFS A L'EMERGENCE DE LA METHODE GLOBALE

En centrant la formation sur les élèves, la pédagogie par objectifs a permis de réguler les essais pédagogiques foisonnants et désordonnés des débuts du Département Mathématiques du CUEEP. Avant d'être modélisés et théorisés en une méthode globale, de nombreux aspects ont émergé d'une pratique expérimentale auto-régulée par le terrain : tout était permis sauf de faire échouer les élèves. La formation était centrée sur les objectifs des élèves, ces objectifs étant formulés en "être capable de..." En plus de l'aspect régulation des innovations, le fait de centrer la formation sur les élèves a conduit à s'affranchir des programmes, des cursus existants pour créer des "court-circuits" : l'enseignement traditionnel, très linéaire basé sur la logique interne de la matière est remplacé par des méthodes prenant en compte l'état réel des acquis des élèves et leur désir d'être des utilisateurs avertis de l'outil mathématique sans être nécessairement des mathématiciens rigoristes.

Donnons quelques exemples d'objectifs de formés qui ont contribué à l'émergence d'éléments de la méthode globale :

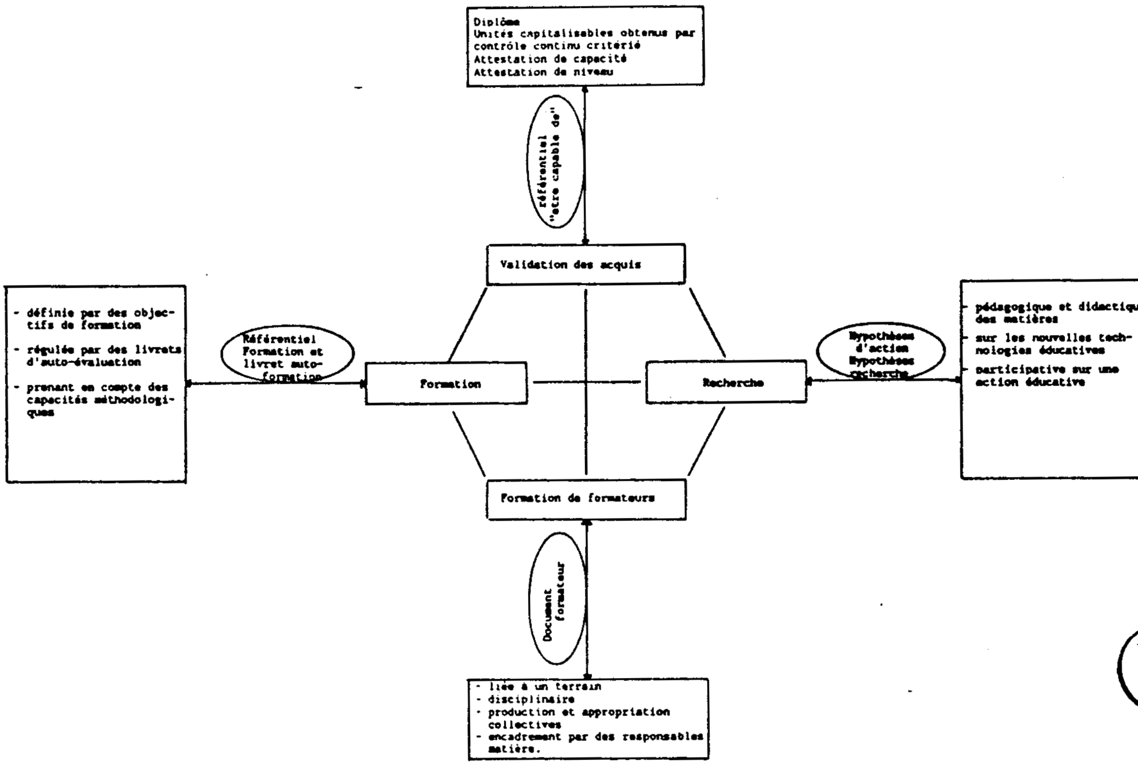
- la demande dans des cycles de maths modernes pour parents d'élèves, de comprendre les sondages d'opinion à un niveau CEP a conduit à la filière d'enseignement des statistiques et probabilités à partir de la situation Ville de New York (cf Chap. IX)

- la demande de groupes non algébrisés de s'attaquer aux calculs de taux réels de crédit a conduit à utiliser le support "réseau d'opérateurs" (cf. Chap IV et V)

- la demande d'un groupe de techniciens d'assainissement des eaux, (niveau BEPC) de mise à niveau pour démarrer des études de Mécanique des Solides et des Fluides a conduit à "Pente-Hauteur-Surface" pour introduire le concept dérivation-intégration (cf. Chap. X)

- la demande de comprendre la théorie de l'information dans un cycle d'ergonomie, formulée par des stagiaires de niveau CAP a conduit à la filière d'enseignement des logarithmes-exponentielles (cf. Chap. VI et XI).

Il nous semble nécessaire à ce stade, de préciser le sens que nous donnons à la Pédagogie par Objectifs" dans notre cadre d'études. Assez souvent la Pédagogie par Objectifs n'est pas considérée comme une méthode pédagogique. Les tenants de cette thèse préfèrent employer "utilisation d'objectifs en pédagogie" [72]. Cette critique est fondée. Dans notre cadre, nous considérons que la pratique de définition d'objectifs est intervenue de façon globale, cohérente, sur tout notre système pédagogique et on peut donc bien parler de pédagogie. Cette pédagogie par objectifs globale, cohérente et systémique fournit **l'environnement adéquat** à l'émergence de la méthode globale en assurant la cohérence du schéma.



Signalons également que la Pédagogie par Objectifs a dans le cadre de l'interaction avec la méthode globale un effet de destabilisation sur les enseignants en les obligeant à se poser des questions. Nous reviendrons à la fin de ce chapitre sur ce rôle de destabilisation non destructurante dans un système à évolution continue et progressive.

Pour étudier comment la méthode globale a contribué à l'enrichissement du courant de pensée lié à l'utilisation d'objectifs en pédagogie, nous dégageons d'abord l'influence de la mathématisation de situations, puis nous analysons quelques apports spécifiques de l'outil informatique.

[Les documents analysés proviennent du groupe de travail ministériel sur les Unités Capitalisables et du Département Mathématiques].

1 - LA MATHEMATISATION DE SITUATIONS ET REFERENTIEL

La principale critique externe et interne de la pédagogie par objectifs est le risque d'émiettement, de parcellisation, voire de sclérose et de bureaucratisation que fait courir à la formation, la définition de micro-objectifs.

Par critique externe nous entendons, les critiques émises par les adversaires déclarés de la Pédagogie par Objectifs qui refusent de s'engager dans un processus de définition d'objectifs par crainte justement d'un "saucissonnage" de la formation et d'une atomisation destructurante du savoir, réduit à une succession de conditionnements. Il craignent, et leur crainte se justifie dans certains cas, que la dérivation des objectifs pour aboutir à des comportements observables, ne débouche obligatoirement sur une suite de micro-objectifs se confondant pratiquement avec la liste des items d'un enseignement programmé Skinnérien.

Par critique interne, nous désignons les critiques formulées par des partisans convaincus de la Pédagogie par Objectifs, c'est-à-dire convaincus de la nécessité de se définir des objectifs, de passer des contrats avec les élèves. Ils pratiquent cette pédagogie, ils peuvent être aussi expérimentateurs des diplômes par Unités Capitalisables et Contrôle Continu critérié. Leur principale critique porte sur les dérivations induites par une pédagogie trop centrée sur les micro-objectifs des référentiels. Ils contestent violemment certains fonctionnements dûs à une utilisation "trop bureaucratique" du référentiel. Ils dénoncent une perte de responsabilité et une inflation des tests.

Dans les deux cas, les critiques externes et internes s'adressent non pas à la notion d'objectifs, mais au piège d'une formation centrée exclusivement sur des micro-objectifs.

1-1 - ROLE DE LA MATHEMATISATION DE SITUATIONS DANS LA CREATION DU REFERENTIEL UC-CC (UNITE CAPITALISABLE - CONTROLE CONTINU)

Le premier indicateur de l'influence de la mathématisation par rapport aux "micro-objectifs" est fourni par l'analyse du rôle qu'elle a joué dans l'évolution des référentiels-diplômes des CAP et BEP. Ces référentiels ont été définis dans le cadre de la recherche-action sur les unités capitalisables et le contrôle continu dans l'enseignement technique animée par Alain Elié.

Le premier référentiel utilisé au début des années 70 dans les Actions Collectives de Formation, notamment celle de Nancy était très imprécis :

Formation Par unités capitalisables	Unité de formation Arithmétique et Initiation à l'Algèbre	MA_2

L'unité de "Initiation à l'Algèbre", indépendamment des connaissances et des outils qu'elle doit permettre d'acquérir, constitue une étape importante dans l'apprentissage de la logique. A l'issue de cette unité, l'adulte doit être capable :

. Organiser son travail en vue de résoudre le problème qui lui est posé, ce qui implique le choix d'une méthode ;

. Conduire un raisonnement logique.

Un certain nombre de concepts devront avoir été assimilés au cours de la formation ; il s'agit des concepts de :

. Opération,
. Correspondance entre grandeurs
. Fonction
. Equation

La connaissance de ces concepts doit permettre à l'adulte l'acquisisition des connaissances et d'outils mathématiques, à savoir :

. Résoudre un problème simple faisant intervenir les opérations élementaires
. Résoudre par l'algèbre des problèmes du 1er degré à une ou deux inconnues
. D'acquérir certaines notions ayant trait au concept de fonction (représentation graphique, fonction linéaire).

Ce premier référentiel ne correspondait pas au discours novateur véhiculé par les ACF : les "être capable de" définissaient les critères de validation des unités. La pédagogie restait très normative, car bien évidemment vu le flou et l'ambition des objectifs, aucun élève ne pouvait maîtriser complètement les contenus sous-jacents à ce référentiel. Les verbes d'actions du type "conduire un raisonnement logique" étaient loin de définir des comportements observables critériés. La notion de "concept de" était encore plus vague et seule la référence aux niveaux des élèves moyens passant le CAP traditionnel permettait de réguler la délivrance des unités. Notons l'ambition démesurée de l'objectif "Résoudre par l'algèbre des problèmes du 1er degré à une ou deux inconnues". Le titre "Initiation à l'algèbre" comme ce type d'objectifs sont vite apparus irréalistes et inadaptés au niveau réel des CAP et aux possibilités des adultes en formation.

Il n'y avait aucune idée de rénovation pédagogique et à fortiori pas de mathématisation sous-jacente à ce référentiel très marqué par le "monopole" de l'algèbre. Mais cela ne veut pas dire que les ACF n'innovaient pas, l'innovation se faisait sans référence au référentiel.

Les premières recherches pédagogiques menées par le Département Mathématiques dans l'ACF de Tourcoing débouchèrent sur une première reformulation du référentiel.

PROJET
MAI 74
C.U.E.E.P.

Unité de Formation

MA 2

ARITHMETIQUE - INITIATION A L'ALGEBRE

L'unité "Arithmétique et Initiation à l'Algèbre poursuit un double objectif : permettre aux adultes qui démarrent leur formation :

- de ré-actualiser toutes leurs connaissances arithmétiques antérieures
- de parvenir à un niveau d'abstraction suffisant pour une parfaite maîtrise de l'Algèbre élémentaire.

A la fin du cycle, l'adulte doit être capable :

- de s'aider de divers "graphiques" pour mieux traduire l'ensemble des information contenues dans l'énoncé d'un problème,
- de choisir parmi ces "graphiques" celui qui donnera la solution la plus rapide et la plus sûre,
- d'effectuer le traitement numérique complet.

(les "problèmes de référence" sont ceux qu'un salarié, muni d'un C.A.P., est censé savoir résoudre, particulièrement ceux qui font intervenir des fonctions linéaires).

Les "graphiques" de référence sont : les diagrammes, arbres, opérateurs, représentations graphiques traditionnelles, algèbre, schémas divers.

Parmi les travaux qui s'intègrent parfaitement dans le contenu de ce cycle, on peut citer :

- des problèmes simples de dénombrement menant aux probabilités,
- des problèmes de scores et de rendement, menant aux fractions,
- des problèmes sur les cardinaux de parties d'ensemble, menant aux systèmes d'équation,
- le calcul et les opérations toutes bases,
- des travaux de logique sur carte perforée,
- des problèmes de change de monnaie,
- des problèmes menant à l'exploitation de chaînes d'opérateurs x (engrenages)
- des travaux de traitements numériques sur machines à calculer,
- des travaux de décodage de factures diverses, de fiches de paie,
- etc...

Sur le plan Mathématiques traditionnelles, il faut que les formés aient rencontré : les règles d'opération sur fractions ; les écritures sous forme de puissances ; les cas d'opérations de nombres positifs et négatifs ; le traitement de parenthèses en produit et quotient ; la traduction algébrique d'une droite. Les notions de proportion se résument aux traitements par opérateurs x et à la règle : "produit des extrêmes = produit des moyens".

Toutes ces règles devront avoir été rencontrées de la manière la plus expérimentale possible, mises suffisamment en forme pour permettre d'effectuer quelques exercices simples ; mais aucune performance n'est demandée dans le cycle Ma 2. Le cycle Ma 3 et les formations ultérieures assureront les automatismes de calcul.

Ce deuxième référentiel interne au CUEEP prend en compte les expériences réalisées sur l'ACF de Roubaix-Tourcoing et recentre la formulation sur les activités des formés. Le contrat n'est pas beaucoup plus explicite, mais les activités des stagiaires sont décrites par des "situations de référence". La "mathématisation de situation" influence partiellement la rédaction de ce référentiel : *"s'aider de divers graphiques pour mieux traduire l'ensemble des informations"*.

Le concept de support apparaît ici en filigrane mais il n'est pas encore explicité autrement que par une liste : *"diagrammes, arbres, opérateurs, représentations graphiques traditionnelles, algèbre, schémas, divers"*

Le but final est dégagé : *"effectuer le traitement numérique complet"* et on annonce une référence à des situations professionnelles : *"les problèmes de référence sont ceux qu'un salarié..."* qui amorce le passage d'une pédagogie centrée sur des contenus à une pédagogie centrée sur des "face à telle situation, être capable de..." .De même, le concept de modèle est sous-jacent bien que non formulé explicitement : *"particulièrement ceux qui font intervenir des fonctions linéaires"*.

Dans cette rédaction, il y a une confusion qui se retrouve souvent, y compris dans les récents programmes scolaires de 6ème, 5ème et de seconde, entre contenu, objectifs, méthode pédagogique, activités, instruction, accompagné de plus d'un "flou artistique" plus ou moins volontaire *"il faut que les formés aient rencontré"*, *"ces règles devront avoir été rencontrées de la manière la plus expérimentale possible"*. La phrase : *"sur le plan des mathématiques traditionnelles..."* illustre bien dans ce référentiel, la coexistence de contenus normatifs en termes de programme et l'amorce d'une définition en terme de comportements qui, à ce stade, ne sont pas critériés. Notons que ce référentiel reflète l'influence des supports non standard et des mathématiques modernes que nous avons décrits au chapitre IV et qui seront abandonnés utlérieurement.

On observe aussi, sous l'influence de la mathématisation de situation, le changement de statut de l'algèbre. Le calcul littéral "aseptisé" est évacué, l'algèbre n'apparaît plus comme le seul formalisme autorisé ni même comme le formalisme prioritaire. Les formules ont un codage parmi d'autres, elles n'interviennent jamais seules mais en lien avec le codage d'une situation comme outil de résolution. La brochure "Mathématiques pour la formation d'adultes" publiée à l'APMEP en 1976 reflète fidélement et de façon exhaustive cette étape [82].

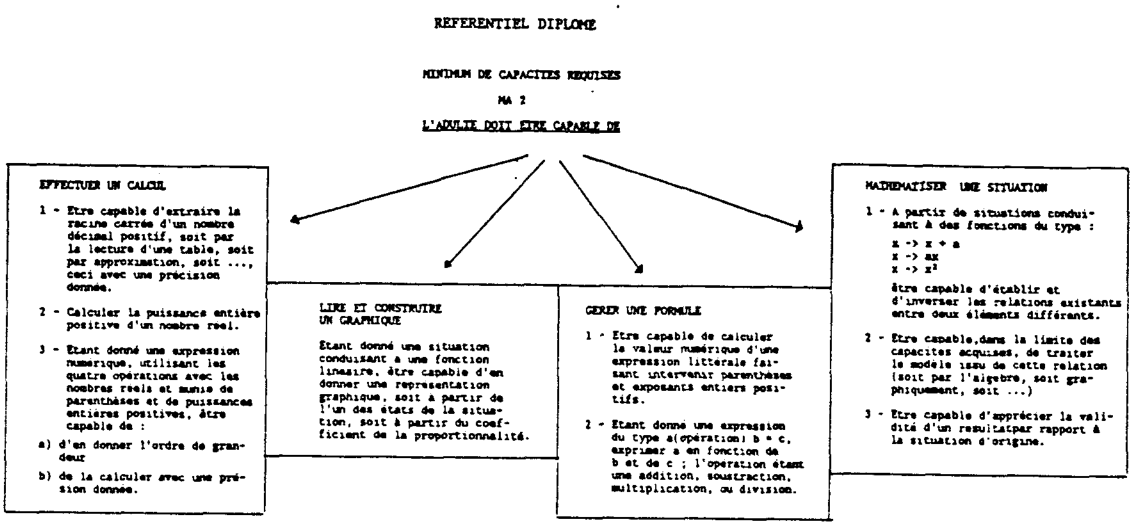
Le début de l'opérationnalisation de la stratégie de mathématisation de situation (années 1973-1974) a conduit à un passage d'un référentiel défini en contenus s'apparentant aux têtes de chapitres d'un manuel scolaire et calibrée de façon non dite par les annales de l'examen traditionnel à l'amorce d'un référentiel centré sur les "activités des formés" implicitement critérié par des situations de la vie sociale et professionnelle données en référence.

Dès 1975, en lien étroit avec la commission nationale (contrôle continu et unités capitalisables) réunie par Alain Elie, une première clarification a conduit les formateurs du CUEEP à dégager trois référentiels ayant des fonctions différentes :

- un référentiel "diplôme"
- un référentiel "formation"
- un référentiel "auto-évaluation"

Ces trois référentiels étaient alors non plus implicitement mais explicitement liés à la stratégie de mathématisation de situation.

Le **référentiel diplôme** est défini en "être capable de" à l'aide de comportements explicites par des verbes d'action regroupés en quatre grands objectifs :



Ce document servait à expliciter le contrat passé avec le jury permanent du contrôle continu d'où le nom de **référentiel diplôme**. Il prend partiellement en compte, mais de façon explicite, certains éléments de la méthode globale : "*Mathématiser une situation*". Les situations sont explicitement liées à des "*modèles*",."*une situation conduisant à une fonction linéaire*", "*traiter le modèle*". Mais il n'était pas nécessaire de fonder sa pédagogie sur la mathématisation de situation pour utiliser ce référentiel : les savoirs minima exigibles définis par le référentiel-diplôme pouvant être acquis par des méthodes très diverses.

En interne, ce référentiel fut complété par un référentiel d'"objectifs de formation" qui ne concernait pas le jury permanent mais était destiné à nourrir les réflexions et les recherches pédagogiques dans la formation de formateurs.

Donnons quelques traits commentés de ce **référentiel formation** :

C.U.E.E.P. LILLE

Décembre 1975 — Cycle Ma 2

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Le document "Etre capable de" de l'Unité Ma 2 (voir document d'évaluation Ma 2 - Ma 3) décrit les objectifs minima du cycle. A la fin du cycle, il faut que les adultes soient au moins capables de faire tout ce qui est indiqué :

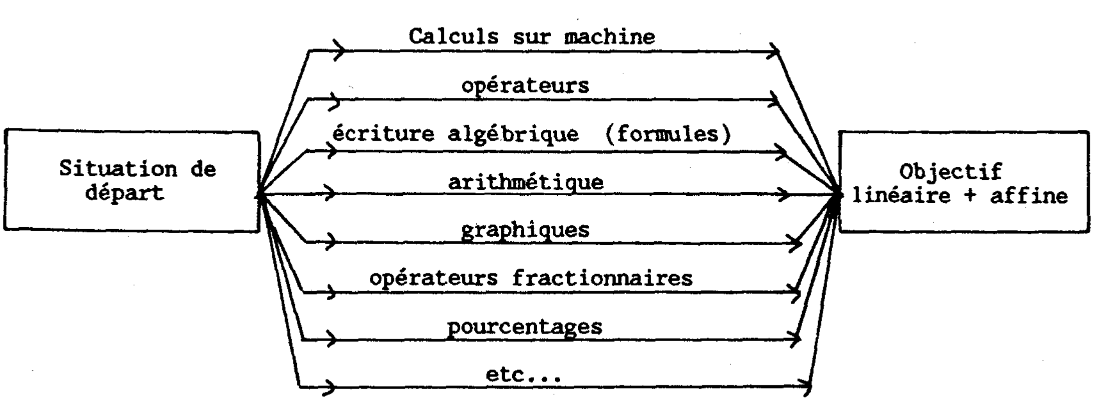
Mathématiser une situation ...
Gérer une formule
Effectuer un calcul
Lire et construire un graphique.

Dans le cadre du C.U.E.E.P., le formateur Ma 2 se fixera pour objectif : "Permettre aux formés de maîtriser les situations menant à des fonctions type "linéaires" ou "affines".

Le document ne se réfère pas uniquement aux "micro-objectifs" du référentiel diplôme, le titre "objectifs pédagogiques" est à lui seul significatif. La capacité "mathématiser une situation" apparaît en premier, nous verrons par la suite que ce détail n'est pas anodin et les micro-objectifs du référentiel diplôme sont globalisés par un **objectif de formation** plus ambitieux que le minimum requis "*maîtriser les situations menant à des fonctions type linéaire ou affine*".

L'acquisition des modèles linéaire et affine à travers l'activité de mathématisation de situations montre l'émergence dans ce référentiel, du concept de modèle au sens de la méthode globale. L'importance accordée à la notion de transfert, le rôle médiateur des "supports" pour passer des "situations" aux "modèles" sont présents mais pas encore verbalisés explicitement.

REFORMULATION DES OBJECTIFS



Tous ces moyens de parvenir à l'objectif sont des itinéraires pratiquement indépendants. Il faut que les formés, en fin de cycle :

- aient utilisé au moins une fois chacun de ces itinéraires
- soient autonomes dans au moins la moitié de ces itinéraires
- soient capables d'associer des démarches parallèles
- soient capables de s'aider d'une démarche pour mieux maîtriser une autre
- soient capables d'appliquer l'outil élaboré à d'autres situations de départ.

Dans la suite du document, apparaît l'idée que le formateur doit s'approprier le référentiel et le recouvrir par des objectifs pédagogiques. Sa formation est centrée sur ces objectifs et non sur les micro-objectifs du référentiel diplôme. Le diplôme est une retombée de la formation. La responsabilité du formateur dans le domaine de la formation est clairement affirmée, mais aussi la nécessité du travail collectif et de la libre circulation des idées.

MODALITES DU TRAVAIL

1) Chaque formateur est responsable intégralement de la formation qu'il assure. Il n'utilise que des itinéraires dont il perçoit clairement les finalités, et où il est suffisamment à l'aise. Il n'a pas à "faire plaisir" aux permanents du C.U.E.E.P., il doit atteindre les objectifs du groupe. Parallèlement, pour ré-évaluer ses perspectives, il doit prendre connaissance des documents du C.U.E.E.P. et les étudier. De plus, il doit s'approprier l'usage des machines à calculer.

2) Chaque formateur est invité à démarrer la formation en faisant travailler les formés par petits groupes autonomes mais synchronisés (quatre formés par petit groupe si possible).

3) Chaque formateur est invité à mettre les formés sur un terrain qu'ils peuvent très rapidement s'approprier. L'univers de travail doit être parfaitement perçu et délimité par les formés. Eliminer de cet univers les "contingences" annexes (situation pseudo-réelle).

4) Le travail typiquement mathématique peut alors démarrer selon le projet du formateur, avec les meilleures chances de succès.

DOCUMENTS

Les documents publiés par le C.U.E.E.P. sont à la disposition du formateur et des formés. SI un document permet d'atteindre les objectifs du groupe, (de l'avis du formateur), alors celui-ci peut envisager d'utiliser ce document. Sinon, il ne faut pas l'utiliser, il faut faire un travail original. En principe, dans une fiche du C.U.E.E.P., seul un aspect est intéressant pour un groupe donné à un moment déterminé.

Très rapidement les formateurs éprouvèrent le besoin de compléter les référentiels "diplôme" et "formation" par un troisième référentiel qui opérationnalise les deux autres à l'aide de situations d'évaluation. Ce **référentiel auto-évaluation** sert à expliciter les autres référentiels illisibles pour les élèves. La brochure d'auto-évaluation n'est pas centrée sur les micro-objectifs, ceux-ci permettent de qualibrer le niveau des situations. Les situations d'auto-évaluation recouvrent les micro-objectifs mais il n'y a pas une situation par micro-objectif. Chaque situation d'évaluation globale recouvre très souvent plusieurs "micro-objectifs".

Ce travail fut repris, amendé, complété, par le groupe de travail national sur la base d'expérimentation dans plusieurs centres de formation d'adultes dépendants de GRETA, en lien avec l'expérimentation du contrôle continu dans les LEP en formation initiale. Le groupe de travail a abouti à un document de synthèse en 1977 qui a servi de base à une première extention de l'expérimentation des unités capitalisables.

DOCUMENT -

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

DIRECTION DES LYCEES

EXPERIMENTATION UNITES CAPITALISABLES

L'Enseignement de la mathématique dans la structure des unités capitalisables

PLAN DU DOSSIER

Le plan de ce dossier de 78, montre que le référentiel diplôme (chap. 4) n'occupe qu'une petite partie du document. Dans cette phase initiale de la recherche action sur les unités capitalisables et le contrôle continu, la recherche pédagogique et la formation de formateurs, avaient plus de place que la définition des "micro-objectifs" du référentiel. Dans cette phase, l'interaction entre :

RECHERCHE PEDAGOGIQUE
ET
EXPERIMENTATION TERRAIN

↔

VALIDATION DES ACQUIS
ET JURY PERMANENT DU
CONTROLE CONTINU

FORMATION DE FORMATEUR
ET
PRODUCTION PEDAGOGIQUE COLLECTIVE

fonctionne à plein.

La plupart des membres de la commission avait un rôle actif dans chacun de ces domaines et constituait pour les terrains, des personnes ressources.

Montrons à partir de quelques extraits de ce document, l'influence de la méthode globale expérimentée dans l'ACF de Tourcoing sur le contenu et "l'esprit" de ce dossier. La stratégie de mathématisation apparaît explicitement dans le premier chapitre "Finalités et objectifs".

. Pour les adultes en formation continue

Il s'agit d'une part

- de développer certains outils (mathématiques) spécifiques et de les maîtriser suffisamment pour atteindre un degré de performance satisfaisant. Le rôdage et la mécanisation de ces outils doivent être acquis.

D'autre part

- d'être capable de mathématiser certains situations spécifiques de façon rapide.

Afin de pouvoir suivre avec profit les enseignements des domaines U1- (Technologie et Professionnel) et U3 (sciences), puis plus tard, d'être opérationnel dans le métier choisi et de faciliter les éventuels perfectionnements ou réorientations.

Si les outils, les situations et les niveaux de performances requis dépendent fortement de la profession choisie, ils exigent tous, pour leur acquisition, une culture mathématique également indispensable pour être un citoyen réellement responsable :

Exemple : coût de la vie, crédit, inflation, vote (à la proportionnelle etc...) statistiques, etc... sont autant de domaines qu'une culture mathématique permet de clarifier.

Dans ce passage et dans le suivant "organisation de la formation", la mathématisation de situation permet en partie d'éviter l'opposition entre "mathématiques professionnelles" et "mathématiques générales". Elle insiste sur le concept "d'outil transférable" grâce à l'opérationnalisation de modèles et intègre les situations sociales et professionnelles à l'activité mathématique. L'organisation de la formation reposait donc sur un tronc commun de formation auquel s'ajoutait des compléments spécifiques intégrés à l'axe professionnel.

<u>Compléments nécessaires à l'axe professionel</u>

Le tronc commun ne prenant pas en compte toutes les capacités mathématiques, des compléments éventuels, indispensables pour acquérir le diplôme et pour suivre avec profit telle ou telle unité professionnelle ou scientifique sont définis à partir de l'analyse des "être capable de" de chaque unité du Tronc commun et en référence au <u>document A 4.1</u>.

La validation de ces capacités se fera automatiquement à l'intérieur de ces unités professionnelle et scientifique.

. Par contre, <u>la formation</u> pourra se faire :

- soit intégrée à une formation visant une unité du tronc commun en particulier si celle-ci se déroule avec un temps d'avance sur la formation technique.
- soit séparément avec coordination avec la matière technique
- soit intégrée à la matière technique, etc...

<u>Liaison entre tronc commun et compléments</u>

Il n'y a pas d'opposition mais plutôt complémentarité et dualité : les situations professionnelles servant de motivation pour la formation du tronc commun.

Mais pour le problème de l'attribution des unités de tronc commun ou des unités techniques, il y a séparation des "être capable de", chacun répondant à des exigences propres :

- beaucoup d'adultes demandent une attestation du domaine U2 sans avoir choisi le domaine U1.
- d'autres changent d'orientation professionnelle en cours de formation.

Notons aussi qu'apparaît clairement la nécessité de distinguer le diplôme et la formation

Il est nécessaire de bien distinguer la différence entre :

CE QUI EST VISE
CE QUI DOIT ETRE AU MINIMUM ATTEINT.

Il faut donc définir, avec des exigences réalistes et précises, les profils des capacités minimaux requis pour l'obtention des diplômes ou des différentes unités, ce qui ne doit pas restreindre les propres exigences du professeur-formateur, lequel doit garder à l'esprit les objectifs de FORMATION.

Ce concept **d'objectif de formation** à ne pas confondre avec les micro-objectifs du référentiel diplôme qui eux, permettent de "critérier" l'attribution de l'unité est bien explicite. D'une part, dans le chapitre "objectifs du tronc commun" :

OBJECTIFS DU TRONC COMMUN MATHEMATIQUE

Domaine U2

L'adulte doit, grâce à l'apprentissge de la mathématisation de situations variées, acquérir un degré d'autonomie qui s'exprime par la capacité de transférer ses logiques, ses raisonnements, ses méthodes, ses stratégies, c'est-à-dire de les appliquer seul à des situations nouvelles en particulier de sa vie professionnelle et sociale.

3.1 L'activité de mathématisation

Elle se situe dans une démarche intellectuelle, plus large de modélisation dont les étapes principales sont :

A) désir d'gir face à une situation

B) Analyse d'une situation complexe afin d'en extraire les éléments pertinents, saisir les relations entre ces éléments et énoncer une hypothèse initiale d'ction.

C) Traitement de l'information ainsi dégagée

a) examiner les modèles mathématiques adéquats qu'il connaît ou qu'il peut inventer et choisir le ou les mieux adaptés au problème posé et à ses moyens de traitement.

b) gérer le traitement de l'information à l'aide du modèle ne faisant appel à sa mémoire, à des documents ou instruments que l'adulte sait utiliser.

c) exmploiter les résultats obtenus soit pour résoudre le problème, soit critiquer le modèle.

D) Décision pour l'action et l'organisation de cette action.

3.2 Pour atteindre une certaine capacité de transfert

Il paraît indispensable de déconditionner l'adulte à l'égard de ses capacités de mathématisation :

A) lui permettre d'appliquer plusieurs modèles à une même situation

B) élargir à des situations variées l'utilisation d'un même modèle.

La multiplication de ses outils transférables consciemment utilisés, accroîtra son autonomie à l'agard des situations et des possibilités de traitement.

3.3 Son degré d'autonomie

Il sera dans une certaine mesure, lié à un entraînement mental et à l'appropriation d'un minimum de connaissances et d'un grand nombre de méthodes susceptibles de lui permettre de choisir la stratégie la plus économique en vue de la résolution de problèmes.

A partir d'apprentissges antérieurs, riche de toutes ses expériences eprsonnelles, l'adulte construira son savoir logico-mathématique afin de pouvoir réagir, selon ses propres critères vis à vis des problèmes posés.

D'autre part, dans les quatre capacités globales :

4.3 Les quatre capacités globales

En fonction des finalités et objectifs de l'enseignement de la mathématique, rappelés au chapitre 1, les différentes unités ont été définies par rapport aux quatre capacités globales suivantes :

- mathématiser une situation
- effectuer un calcul
- gérer une formule
- lire et construire.

On entend par :

MATHEMATISER UNE SITUATION :

- faire une liste des éléments du problème posé pour rechercher les données pertinentes
- rechercher les données pertinentes
- rechercher les relations entre ces données : choisir le modèle approprié
- définir les étapes successives à la solution et les faire apparaître.

EFFECTUER UN CALCUL

Pour les premières unités, l'adulte devra, à propos de situations concrètes :

- donner un ordre de grandeur, précisé par un encadrement
- déterminer la précision avec laquelle le calcul doit être conduit, compte-tenu de la situation donnée
- choisir l'outil de calcul, en fonction de cette précision
- calculer.

GERER UNE FORMULE

- remplacer des lettres par des nombres sur des formules
- isoler une lettre dans ces formules
- résoudre des équations.

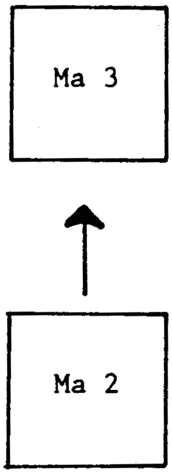
LIRE ET CONSTRUIRE

- utiliser des tableaux numériques
- représenter un tableau de valeurs et l'exploiter
- construire des figures géométriques.

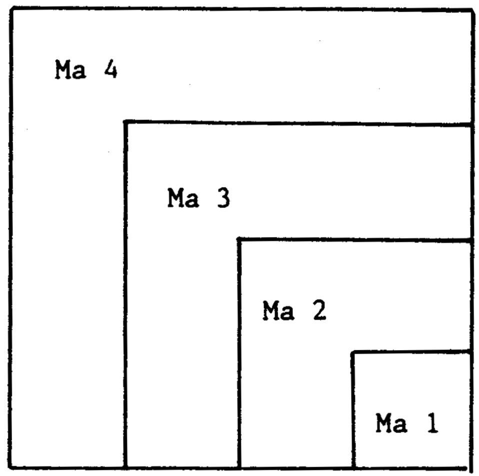
Analysé à la lumière de nos réflexions actuelles, ce travail préfigure le concept d'objectifs continus transversaux progressifs développés par Bertrand Schwartz [104] et l'opérationnalise grâce à la méthode globale (cf paragraphe suivant).

A ce stade de l'élaboration des référentiels, la verbalisation de ce concept n'était pas encore faite, mais sous l'influence directe de la mathématisation de situation, on passe alors d'un système d'unités successives définies par des contenus à un sytème modulaire en "poupées gigognes" sous-tendu par les quatre grandes capacités globales :

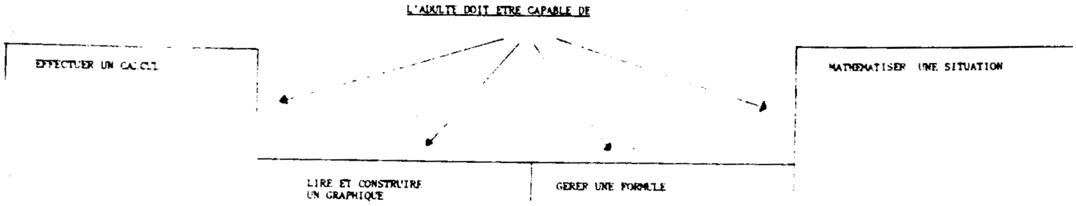
Unités successives



"poupées gigognes"



Les unités Ma 1 et Ma 4 complétent la filière vers le bas et vers le haut. Le rôle central joué par la mathématisation de situation pour éviter le "piège des micro-objectifs" est illustré par un détail très significatif : sous la pression de formateurs des GRETA expérimentaux, en particulier du GRETA de Reims, la commission nationale a modifié le projet initial du CUEEP en permutant l'ordre des colonnes. Le document CUEEP structuré en :



est devenu :

MA 2 CAPACITES REQUISES

L'ADULTE DOIT ETRE CAPABLE DE ...

MATHEMATISER UNE SITUATION	EFFECTUER UN CALCUL	GERER UNE FORMULE	LIRE ET CONSTRUIRE
1. Traduire par un graphisme non imposé les informations extraites d'une situation ; exemples de graphismes : dessin géométrique, plan, schémas divers... 2. A partir de situations conduisant à des fonctions du type : x -> x + a x -> ax x -> x² établir les relations existant entre deux éléments différents. N.B. cette capacité ne concerne pas l'étude des fonctions elles-mêmes, mais la traduction des situations étudiées. 3. Dans la limite des capacités acquises, traiter le modèle issu de cette situation (soit par l'algèbre, soit graphiquement, soit...). Etant donné une situation conduisant à une fonction linéaire, en donner une représentation graphique, soit à partir de l'un des états de la situation, soit à partir du coefficient de proportionnalité. 4. Apprécier la validité d'un résultat par rapport à la situation d'origine.	1. Extraire la racine carrée d'un nombre décimal positif donné, soit par la lecture d'une table, soit par approximation, soit... ceci avec la précision permise par l'outil. 2. Calculer le carré et le cube d'un nombre réel. 3. Etant donnée une expression numérique utilisant les 4 opérations avec des nombres réels et munie de parenthèses et d'exposants entiers positifs : a) en donner l'ordre de grandeur b) la calculer soit à la main, soit à la règle à calculer, soit à la machine à calculer, soit ... ceci avec la précision permise par l'outil.	1. Calculer la valeur numérique d'une expression littérale faisant intervenir parenthèses et exposants entiers positifs. 2. Etant donnée une expression du type a (opération) b = c calculer a, b ou c en fonction de deux autres. L'opération étant : une division, une multiplication, une addition ou une soustraction.	1. Utiliser un tableau numérique par lecture directe. 2. Etant donnée une situation traduite par un graphique sur papier millimétré, trouver la ou les valeurs inconnues correspondantes à une valeur fixée. 3. Représenter graphiquement sur papier millimétré un tableau de valeurs. 4. Mesurer une longueur et un angle. Effectuer des tracés simples.

La permutation des colonnes renforçait l'entrée du référentiel par l'objectif global : mathématiser et non par les micro-objectifs : effectuer un calcul. la commission nationale ajoutait aussi un objectif très lié au couple situation <-> support de la méthode globale. *"1) Traduire par un graphique non imposé les informations extraites d'une situation".*

Cet objectif qui apparaît maintenant plus comme un objectif de formation que comme un objectif opérationnalisable dans le cadre d'un diplôme était le premier du référentiel. Cela montre bien l'influence de la méthode globale dans ce référentiel mais aussi une certaine confusion même au niveau du référentiel diplôme, entre les objectifs de formation et les critères de validation des acquis. Dans ce document, l'annexe pédagogique (chap. 5) rédigée par des formateurs des GRETA expérimentaux, fait une part très importante à la pédagogie des situations.

5.1. <u>LA PEDAGOGIE DE SITUATION</u>

5.1.1. Il est constaté que l'une des méthodes pédagogiques la plus utilisée dans le système U.C. (au moins jusqu'à l'unité MA 3) repose essentiellement sur l'emploi de situations de type "tronc commun", c'est-à-dire où n'apparaissent pas de caractères très spécifiques de telle ou telle profession.

<u>Qu'est-ce qu'une situation</u> ?

Nous appelons "situation mathématisable", tout exemple de la vie courante ou professionnelle conduisant à une réflexion dont le traitement aboutira à un modèle mathématique (équations, fonctions, ...). Le modèle parfaitement maîtrisé devient un outil.

Les "être capable de" prennent en compte la reconnaissance des <u>Modèles</u>, et l'utilisation des <u>Outils</u>.

Ces formateurs ont fait une classification des situations qui fait apparaître la notion de **situation structurante**, notion que nous reprenons dans la méthode globale sous le terme de **manipulation structurante.**

SITUATIONS	Structurantes ou acquisition	Consolidation	Evaluation
Réelles	Tarifs cons. d'électricité		
Pseudo-réelles	Calcul d'aire	Poutre	Contrôle
Aseptiques			ponctuel MA2 -CNTE

L'approche par situation dépasse le seul contexte de "problème d'application", en particulier dans le cas des "situations ouvertes" :

<u>Le traitement d'une situation</u> peut être multiple : il peut aller jusqu'à gérer une masse de documents ne contenant aucune question précise, mais plus généralement à gérer quelques informations et à traiter le modèle reconnu.

Le transfert du modèle ACF s'est effectué sans problème dans la plupart des GRETA expérimentaux parce que ceux-ci fonctionnaient sur un modèle comparable à celui du CUEEP ; le formateur coordonnateur mathématique jouant le rôle de responsable-matière.

Toute cette étude nous amène à dire que dans la phase initiale de démarrage de la recherche-action sur les unités capitalisables et le contrôle continu, dans le cadre d'une auto-production des formateurs encadrés par des personnes ressources (formateur coordonateur pour les GRETA, responsable matière pour l'ACF), la mathématisation de situation a permis d'éviter tant sur le plan de la rédaction du référentiel que sur le plan des méthods pédagogiques, une utilisation de la pédagogie par objectifs centrée prioritairement sur les micro-objectifs.

1-2 - APPORT DE LA MATHEMATISATION DE SITUATIONS A L'UTILISATION DU REFERENTIEL UC-CC

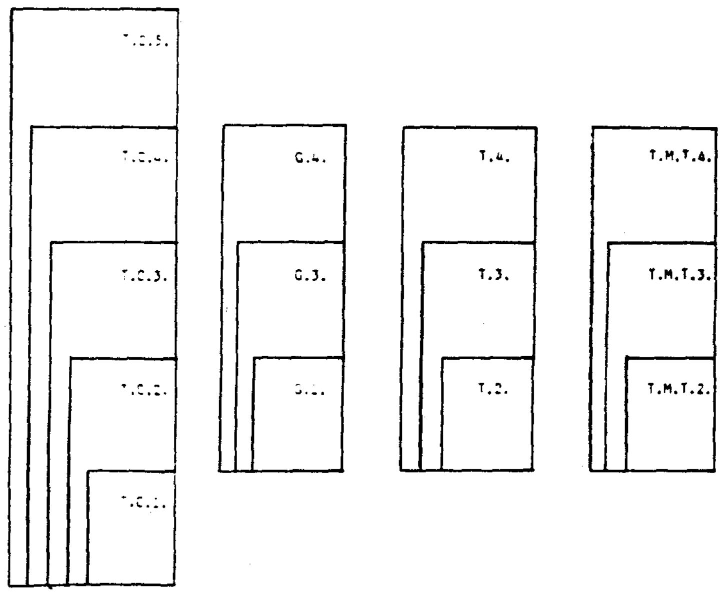
Après cette première phase d'expérimentation dans laquelle les formateurs-expérimentateurs étaient en même temps producteurs, l'expérimentation du système UC-CC a été généralisée et étendue aux BEP, BP. Pour garder une valeur nationale aux diplômes et donc aboutir aux mêmes diplômes quel que soit le mode d'obtention (contrôle global, contrôle continu critérié, unité capitalisable par contrôle continu critérié ou ponctuel critérié) il fallait que le référentiel diplôme ne dépende pas du mode de délivrance, ni des méthodes pédagogiques, ni du public (formation initiale, formation continue) et encore moins de la "géographie". Un nouveau référentiel mathématique couvrant les niveaux CAP/BEP/BP, commun aux divers modes de délivrance fut élaboré par la commission nationale UC-CC en 1978 et a cours actuellement.

Ce référentiel a été influencé par les travaux sur les taxonomies en particulier la **taxonomie de Bloom** [5]. Mais très vite, on s'est aperçu qu'il n'était pas réaliste d'exiger pour le diplôme, l'obtention d'objectifs de niveau "synthèse" et "évaluation", les commissions n'ont donc gardé que les premiers niveaux de la taxonomie, qu'ils ont retraduit dans un vocabulaire lié au domaine. Par exemple en Monde actuel : chercher, s'informer, comprendre, critiquer. En Français, la taxonomie est liée à différents niveaux de communication face à des situations de la vie courante. **En mathématiques, les trois niveaux sont : exécuter, traiter, choisir.** Les objectifs ont été reclassés en fonction de ces niveaux et les critères de réussite explicités.

Par ailleurs, face à la diversification des CAP, BEP, BP, il était nécessaire d'intégrer les mathématiques professionnelles dans le domaine mathématique. Jusqu'en 1978, le contenu du diplôme ne dépendait pas de la profession, la coloration professionnelle avait lieu en formation au niveau du choix des situations à mathématiser ou directement par des compléments mathématiques à l'intérieur des unités professionnelles. Après 1978, en plus du tronc commun existant préalablement les compléments mathématiques de chaque filière professionnelle furent explicités dans le référentiel diplôme et diversifiés. Les comptables et les électriciens ne faisaient plus les mêmes mathématiques.

ORGANISATION DU DOMAINE D 2

MATHEMATIQUES



TC:Tronc Commun G:Géométrie T:Trigonométrie TMT:Techniques Mathématiques du Tertiaire

Dans cette présentaiton, une tendance au découpage en micro-objectifs est fortement apparue sous la forme d'un saucissonage et d'une atomisation de la formation. Dans l'esprit de la commission nationale, le référentiel "être capable de" structuré par la taxonomie Exécuter, Traiter, Choisir ne définissait pas la formation, mais seulement la partie délivrance du diplôme. La colonne "commentaires" indiquait parfois les impasses faites dans le diplôme qu'il fallait néanmoins prendre en compte dans la formation. Il n'était pas nécessaire de faire une évaluation sur chaque micro-objectif, il suffisait que chaque objectif se trouve au moins une fois validé dans une évaluation globale. La formation n'est pas pilotée par des micro-objectifs, mais par les objectifs de formation. Le référentiel intervient au moment de la validation des acquis pour servir de calibrage.

C.2. TRAITER
REFERENTIEL TC.2

Le candidat doit être capable d'EXECUTER les opérations mathématiques définies dans le référentiel, c'est-à-dire :

- un calcul dans lequel les opérations sont données ou la chaîne d'opérations programmée
- une représentation graphique
- une construction.

Le candidat aura prouvé sa capacité à exécuter si, dans le travail remis, son calcul, sa représentation graphique ou sa construction mène à un résultat conforme à celui attendu.

EXECUTER

ETRE CAPABLE DE	CONDITIONS	COMMENTAIRES
1.3 Effectuer sur des nombres décimaux positifs, une opération isolée. L'opération étant : . une addition, . une soustraction, . une multiplication, . une division à tant près, et contrôler l'ordre de grandeur du résultat	Les nombres donnés ont quatre chiffres au plus, et sont compris entre 0,001 et 9,999. Ex : $403{,}2 \times 48{,}85 = 19696{,}32$ Contrôle mental : $400 \times 50 = 20\ 000$. Le résultat ne doit pas dépasser huit chiffres (capacités d'affichage des calculatrices courantes). La notation scientifique, ou ou toute autre notation est exclue, dans son décodage, des exigences.	La formation prend en compte les réflexes de calcul : . donner mentalement un résultat approché, . vérifier une soustraction par addition, une division par multiplication et addition.

Le candidat doit être capable de TRAITER une situation mathématique, c'est-à-dire :
- programmer une chaîne de calculs ou une méthode de travail qui conduira, après exécution, à la résolution de la situation.

Ce programme ou cette méthode de travail pourra résulter d'un choix précédemment fait par le candidat.

Le candidat aura prouvé sa capacité à traiter s'il fait apparaître son cheminement par écrit: les étapes de ses calculs, les tracés de sa construction, ses représentations graphiques...

TRAITER

ETRE CAPABLE DE	CONDITIONS	COMMENTAIRES
1.3. Transformer les formules du type a (opération) b = c afin d'exprimer a ou b en fonction des deux autres et de calculer, si on le demande la valeur numérique du terme considéré. L'opération est une addition, une soustraction, une multiplication, une division.	La capacité implique la résolution d'une équation du type : $x + b = c$ ou $ax = b$ avec a, b, c et x décimaux positifs et $c > b$. La résolution de $ax + b = c$ ne peut être demandée qu'après indication d'une chaîne de traitement.	La formation prend en compte la relation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$

Etant donné une situation résoluble par l'utilisation de l'un des modèles suivants :
- les opérations
- la fonction li aire
- le carré, le r tangle.

Le candidat doit être capable CHOISIR un modèle convenable, c'est-à-dire proposer un modèle dont le traitement conduira à l solution.

Le candidat aura prouvé sa ca té à choisir, si dans le travail remis (calcul, dessin, énoncé d'une propriété caract . stique...), il fait apparaître un résultat conforme à celui attendu.

CHOISIR

ETRE CAPABLE DE	CONDITIONS	COMMENTAIRES
Trouver l'opération à effectuer, celle-ci étant unique	L'opération étant : addition, soustraction, multiplication, division, élévation au carré, racine carrée.	

G.2 - TRAITER

ETRE CAPABLE DE	CONDITIONS	COMMENTAIRES
2. Les calculs 2.2. Calculer la longueur d'un segment en utilisant la propriété de Thalès	La figure est fournie ou mise en évidence. On exige le traitement de l'un au moins des cinq cas suivants.	En relation avec la proportionnalité de TC2, on précise que le travail à faire consiste en : 1° Etablir le tableau des deux suites de segments proportionnelles. 2° Effectuer le calcul (voir TC2 traiter 2.2), en utilisant rapport de projection ...

T.3 - EXECUTER

4. Utiliser le cercle de rayon unité pour donner graphiquement une valeur numérique exacte ou approchée du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un angle de mesure donnée.	Il s'agit, le papier millimétré étant fourni de : . positionner l'angle . donner le signe du résultat . donner la valeur demandée.	

T.M.T. 3 - CHOISIR

1. EN CALCULS COMMERCIAUX ET FINANCIERS 1.1. Résoudre des situations professionnelles correspondant à la détermination	On utilise : . des pourcentages directs ou indirects . ou des coefficients multiplicateurs (barèmes) Il s'agit de calculer : . le prix de vente TC d'un objet fabriqué à partir du prix d'achat brut HT des matières premières et réciproquement	En formation, la capacité CHOISIR est étendue à des situations telles que : . pourcentages professifs (calcul de l'impôt), . pourcentages dégressifs (achats en gros).

Dans de nombreux cas, les concepts de modèle et de support interviennent dans la réalisation des situations d'évaluation. Les capacités de traitement et d'exécution apparaissent en situation dans des activités de changement de support ou d'obtention des modèles standard. Dans cette lecture, les mathématiques du tronc commun sont intégrées aux mathématiques professionnelles. Par exemple, l'introduction des graphiques et des pourcentages peut se faire par et en même temps que l'introduction des statistiques. Le référentiel Ma 2 peut être entièrement couvert à partir de situations statistiques.

La monographie a montré comment les statistiques pouvaient s'intégrer à l'enseignement de l'analyse. Dans les CAPUC, les statistiques peuvent servir d'ancrage et d'évaluation à la quasi-totalité des capacités y compris par le biais des représentations imagées de la géométrie.

A partir de ces observations, nous pouvons formuler :

La Mathématisation de situation, au sens de la méthode globale, a permis dans le cadre de l'expérimentation des Unités Capitalisables, et du Contrôle Continu, une lecture non réductrice du référentiel. Elle a permis de traiter la formation et l'évaluation sans se faire piéger dans les micro-objectifs.

PAR LECTURE NON REDUCTRICE DU REFERENTIEL, NOUS ENTENDONS,

- ne pas escamoter les objectifs généraux, écrits dans le référentiel, mais souvent non diffusés ou du moins non pris en compte dans la réflexion collective des formateurs. Le dernier paragraphe du document ci-dessous exclut théoriquement que la formation puisse se contenter de mécaniser les micro-objectifs : "apprendre à mathématiser" y apparaît bien comme une finalité.

1. OBJECTIFS GENERAUX

La mathématique a pour objectifs :
- de développer les capacités de logique, de rigueur et de raisonnement,
- de munir de connaissances.

Pour les candidats il s'agit

. D'une part de développer certains outils mathématiques spécifiques et de les maîtriser suffisamment pour atteindre un degré de performance satisfaisant. Le rodage et la mécanisation de ces outils doivent être acquis,

. D'autre part d'être capable de mathématiser, à l'aide de ces outils, certaines situations de la vie courante afin de pouvoir suivre ou approfondir les enseignements des domaines technologiques et professionnels et scientifiques puis, plus tard, d'être opérationnels dans le métier choisi et de faciliter les éventuels perfectionnements ou réorientations.

Si les outils, les situations et les niveaux de performance requis dépendent fortement de la profession choisie, ils exigent tous, pour leur acquisition, une culture mathématique également indispensable pour être un citoyen réellement responsable.

L'objectif global est de faire accéder l'élève à l'autonomie, acquise par degrés successifs, grâce à des stratégies de formation ambitieuses qui doivent permettre de dépasser très largement les référentiels requis pour l'obtention du diplôme.

Le candidat doit, grâce à l'apprentissage de la mathématisation de situations variées, acquérir un degré d'autonomie qui s'exprime par la capacité de transférer ses logiques, ses raisonnements, ses méthodes, ses stragégies, c'est-à-dire de les appliquer seul à des situations nouvelles en particulier de sa vie professionnelle et sociale.

- Comprendre que la taxonomie Exécuter - Traiter - Choisir n'est pas seulement un mode de classement des micro-objectifs mais qu'elle sous-tend **des capacités à agir en situation**. Les trois niveaux Exécuter, Traiter, Choisir indiquent le degré d'autonomie de l'élève (nous verrons plus loin dans ce chapitre l'interaction entre l'outil informatique et cette taxonomie). La définition de ces capacités globales reprend des éléments essentiels de la méthode globale, en particulier les concepts de situations, modèle, transfert par analogie, etc...

2 - CAPACITES

En fonction des finalités et objectifs rappelés ci-dessus, le référentiel a été défini par rapport aux trois capacités globales suivantes :

1 - Exécuter certaines opérations mathématiques spécifiques lorsqu'elles sont proposées, programmées à l'avance :

1.1 Un calcul

1.2 Une construction

2 - Traiter un modèle mathématique en référence à une situation professionnelle ou de la vie courante lorsque le modèle est proposé, le but à atteindre étant fixé :

2.1. Programmer, organiser un calcul numérique ou littéral, exploiter une relation : la représenter par une formule ou un graphique, la transformer, l'utiliser.

2.2. Reconnaître, décrire, construire des figures géométriques.

3 - Choisir les modèles mathématiques adaptés dans une situation proposée, les traiter, les utiliser aux deux conditions suivantes :

3.1. Le choix est à faire parmi des modèles antérieurement acquis et utilisés

3.2 Le choix consiste en un transfert, par analogie, d'une situation connue à la situation donnée
La capacité comprend les cinq dimensions suivantes :

. Observer et comprendre la situation proposée,
. comparer et critiquer les modèles,
. organiser un algorithme (traitement),
. exécuter cet algorithme (exécution),
. exprimer les résultats.

Après ces différentes lectures du référentiel, nous faisons la remarque suivante :

quelle que soit la qualité de la rédaction d'un référentiel (de programmes scolaires) les enseignants en font une lecture orientée par leur pratique. Le référentiel de juin 1984 a été aussi bien interprété en terme de programmes scolaires bâtis sur une progression linéaire ascendante dans l'acquisition des micro-objectifs que comme une opérationnalisation de la pédagogie des situations à partir d'une approche globale. *Même dans ce cadre, le travail et la production collectifs sont indispensables pour une appropriation non réductrice du référentiel.*

Notons que la lecture orientée du référentiel ou des programmes scolaires à partir des pratiques collectives issues de la méthode globale s'est faite également sur les nouveaux programmes de 6ème et 5ème et de Seconde, Première et Terminale, comme nous l'avons signalé dans le chapitre précédent en analysant les entretiens des formateurs. Nous explicitons maintenant ce que nous entendons par lecture orientée.

1-3 - LECTURE ORIENTEE PAR DES PRATIQUES COLLECTIVES ISSUES DE LA METHODE GLOBALE

Dans les entretiens d'enseignants (chapitre précédent), un enseignant en LEP pratiquant le Contrôle Continu nous a dit à propos de l'utilisation du tryptique TGF : *"Ce point figure dans le référentiel, mais personne n'y est sensible, je l'ai vu à travers la pédagogie en formation d'adultes"*. Pourtant ce point apparaît à plusieurs endroits dès la présentation générale des troncs communs (TC2-3-4-5).

> 1 - <u>LES NIVEAUX 1, 2, 3 DU TRONC COMMUN</u>
>
> 1.1. <u>Présentation</u>
>
> TC1, TC2 et TC3 constituent les composantes de base des exigences de niveau C.A.P., à de rares exceptions près. Les objectifs de ces 3 éléments de référentiels sont les mêmes, seul le degré de performance et d'exigence diffère (longueur de la chaîne de traitement, la fonction linéaire et la fonction affine).
>
> 1.2. <u>Objectifs</u>
>
> Il s'agit d'être capable de gérer les 3 supports :
>
> - formule
> - tableau
> - graphique,
>
> à l'aide d'une démarche de type arithmétique, c'est-à-dire être capable de :
>
> - exploiter chaque support (compléter, utiliser en sens direct, inverser...)
> - changer de support
> - reconnaître les modèles liés au 1er degré.
>
> N.B. Il s'agit de traiter les problèmes du 1er degré par une méthode arithmétique et non de faire un traitement algébrique avec mise en équation et calculs littéraux formels (factorisation, développement de parenthèses, identités remarquables...).

On retrouve explicitement le début de la démarche Tableau-Graphique-Formule que nous avons décrite dans la monographie. L'influence du concept de mathématisation des situations et en particulier de TGF est encore plus explicite dans les objectifs des TC4 et TC5.

2 - LES NIVEAUX 4, 5 DU TRONC COMMUN

2.1 - Présentation

TC4 et TC5 constituent un saut qualitatif par rapport à TC1? TC2 et TC3.

Il y a changement du "niveau de langue", le but est d'atteindre l'autonomie dans l'utilisation du langage formel.

Sauf de rares exceptions ces niveaux ne sont pas ceux du C.A.P. mais du B.E.P. ou du B.P.

2.2 - Objectifs

1. Traitements de type "arithmétique"

Maîtrise des six opérations (addition et soustration, multiplication et division, puissance et racine) :

- sur des nombres positifs et négatifs, écrits dans les divers systèmes (nombres décimaux, notation scientifique, notation fractionnaire, numération sexagésimale).
- pour la gestion des formules et des égalités littérales (lecture, écriture, inversion, transformations...).

2. Traitements algébriques

Face à une situation, apprendre à reconnaître et à résoudre les questions conduisant à la résolution algébrique d'une équation (inéquation) choisie parmi les modèles standard :

- équations où la variable n'apparaît qu'une fois
- équation standard du second degré
- système standard d'équations (inéquations) du premier degré.

Il s'agit d'être capable de :

- mettre en équation ou en formule
- reconnaître éventuellement le modèle standard sous-jacent
- transformer les équations pour aboutir à la forme standard
- vérifier l'exactitude et la validité des résultats trouvés.

3. Traitements graphiques

Face à une situation, apprendre à reconnaître et à résoudre les questions conduisent à l'étude d'une fonction sans utilisation obligatoire des dérivés (par exemple : droites, paraboles, hyperboles, puissances...)

L'information indiquant que deux variables sont liées entre elles est donnée soit par un texte, soit par un tableau, soit par un grphique soit par une formule. A partir de l'un de ces quatre supports de l'information,

- il faut être capable de reconstituer les trois autres
- il faut être capable de reconnaître s'il s'agit :
  . d'une droite passant par l'origine
  . d'une droite ne passant pas par l'origine
  . d'une parabole dont le sommet est sur l'origine
  . d'une parabole dont le sommet n'est pas sur l'origine
  . d'autre chose.
- il faut être capable d'exploiter les courbes obtenues, en particulier pour la résolution ou la vérification d'équations ou d'inéquations.

4. Synthèse

Apprendre à choisir l'outil le mieux adapté
- soit le traitement arithmétique
- soit le traitement algébrique
- soit le traitement graphique

et, quand c'est possible, apprendre à contrôler un outil par un autre.

On retrouve dans ces quelques lignes, la démarche de mathématisation que nous avons décrite au chapitre V

SITUATION ⟷ SUPPORT ⟷ MODELE

Mais faute d'un travail collectif des formateurs avec des personnes ressources et d'un éclairage adéquat, cette approche est escamotée au profit des micro-objectifs.

A l'heure actuelle, après diverses pratiques et réflexions sur ces pratiques, nous caractérisons l'approche orientée par des pratiques collectives issues de la méthode globale par :

- **une approche globale disciplinaire** : Dans les documents apparaissent des objectifs communs aux différents niveaux. C'est le même objectif qui est travaillé du début à la fin de la formation, seuls le champ d'application et le niveau d'autonomie se modifient d'une unité à l'autre. Les critères précisent les performances de niveaux 1, 2, 3, 4, 5, ..., Ce sont des objectifs continus, transversaux, progressifs comme les a nommés B. Schwartz. Par exemple, les objectifs "inverser une formule", "résoudre une équation", "changer de support" sont développés du niveau 1 au niveau 5.

- **une approche pluridisciplinaire** : La pratique des CAPUC en insertion jeunes nous a conduit à une pratique analogue à celle de certains LEP expérimentaux (cf le groupe GEREX-Soutien) et qui fait actuellemnt l'objet de recherches dans les commissions nationales : faire apparaître des capacités communes à plusieurs domaines et insister sur les capacités transversales, en particulier sur les capacités méthodologiques. Cette problématique est celle des recherches que mène Anne de Blignières à Paris-Dauphine sur les "Capacités Clefs". Par exemple, dans ces CAPUC, la capacité "interpréter un document" était formulée dans trois domaines : Monde Actuel, Français, Bureau-Commercial et recoupait la même "capacité à agir en situation". On arrivait donc dans ce cas, à exploiter en pluridisciplinaire la même situation d'évaluation que chacun réalisait avec sa grille d'analyse pour la validation des acquis. De même, au niveau CFG, la réalisation du dossier Monde Actuel peut pratiquement valider, à condition d'introduire des graphiques et des rédactions de comptes-rendus de visites, les référentiels de Français et de Mathématiques. D'où des évaluations centrées sur des mini-projets.

On aboutit alors à une intégration horizontale des micro-objectifs dans des formations prenant en charge la totalité de la demande de formation des élèves. Cette intégration est sous-tendue par des capacités méthodologiques transversales opérationnalisées dans chaque domaine et globalisées dans des projets inter-disciplinaires. Ainsi les micro-objectifs TC 2 peuvent être intégrés sans problèmes à des projets thématiques du type "lire et comprendre les statistiques" ou "Maths et mécanique auto" ou "math et électricité". Pour conclure, nous pouvons dire que :

La mathématisation de situation a permis d'effectuer une synthèse et surtout d'opérationnaliser dans le domaine de l'enseignement des mathématiques trois courants de pensée complémentaires :

- la définition de diplômes par unités capitalisables obtenus par contrôle continu critérié à l'aide d'un référentiel de "être capable de" de micro-objectifs diplôme : Recherche-action UC-CC dirigée par Alain Elie.

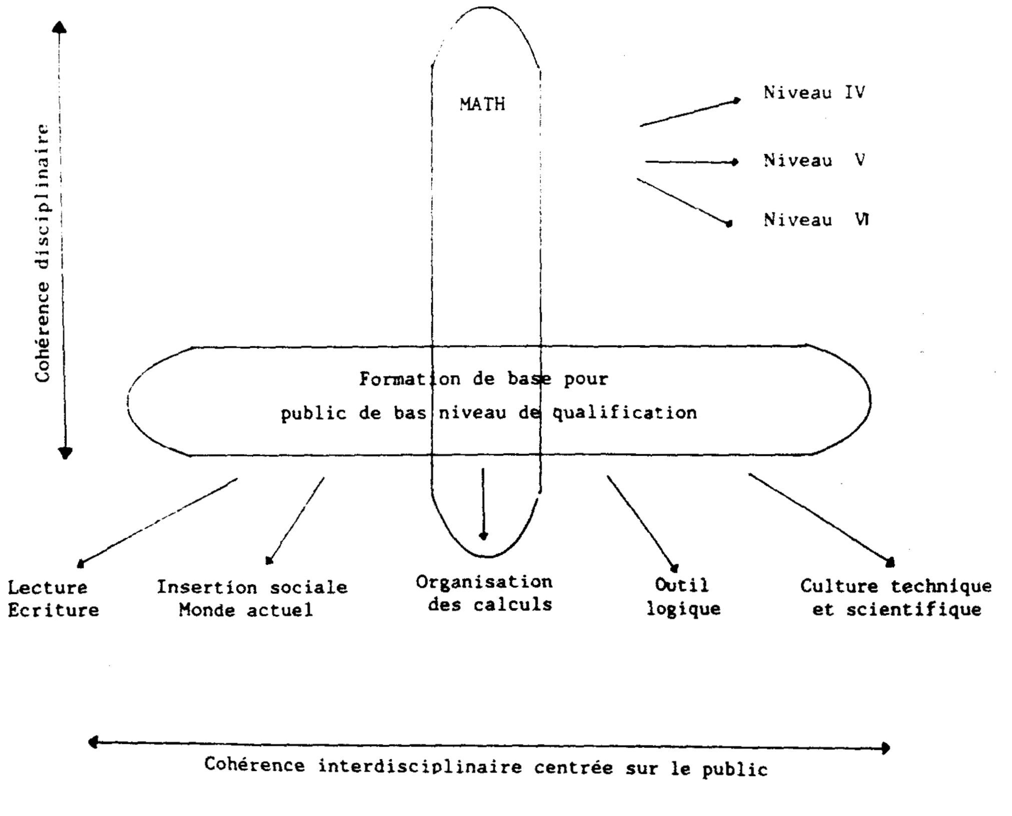
- les projets "pour une nouvelle école française de la pédagogie par objectifs" dans lesquelles B. Schwartz, L. Chastrette, M. Migeon dégagent le concept d'objectifs transversaux, continus, progressifs : travail sur la mise en place des DEUG et de l'ESEU par UC.

- les concepts de "capacités-clés" et "d'agir en situation" développés dans la recherche-action sur l'insertion des jeunes à Paris-Dauphine sous la conduite d'Anne de Blignières.

Les pratiques collectives au CUEEP et nos propres recherches, en interaction avec la conceptualisation de la méthode globale nous ont amenés à schématiser la formation suivant deux organisations :

- une organisation verticale disciplinaire, sous-tendue par des objectifs globaux transversaux, continus, progressifs.

- une organisation horizontale pluridisciplinaire sous-tendue par des capacités méthodologiques transversales.



Une opérationnalisation de ce schéma, par le collectif de formateurs mathématiques du CUEEP est en cours dans le cadre de la recherche-action sur le Centre de Ressources de Tourcoing (cf. Conclusion). Cette réflexion nous a amené à élaborer une redéfinition de ce que peut être un référentiel dans le cadre de notre pédagogie par objectifs.

Nous donnons ici quelques extraits d'un document de travail [37]

QUELLE FORMATION EN MATHEMATIQUES POUR LES ADULTES ?

FINALITES :
- . Développement des capacités d'analyse, de logique, de rigueur, de raisonnement,
- . Acquisition de connaissances,
- . Apprendre des mathématiques pour avoir les capacités de résoudre des problèmes,
- . En outre, la certification des acquis sous diverses formes (attestation de niveau, unité capitalisable, diplôme ...) est un élément important de notre dispositif de formation.

Ces finalités sont d'égale importance et poursuivies simultanément en pratiquant la méthode de mathématisation de situations-problèmes à l'aide de support de l'information.

La mathématisation de situations a un double rôle :

1) c'est une méthode de travail mise en oeuvre par l'enseignant
2) C'est un objectif de formation qui vise à ce que les formés apprennent eux-mêmes en pleine autonomie à poser et à résoudre des problèmes. Cet apprentissage se faisant par paliers successifs.

Pour répondre aux exigences et aux besoins des adultes, notre formation doit être cohérente.
D'une part cohérence globale entre système de formation (par modules) validation (par contrôle continu et unité capitalisable), méthode pédagogique (mathématisation de situations), système pédagogique (par objectifs), d'autre part cohérence interne dans chaque module : chaque module constitue une entité en soi spécifiée par un objectif prioritaire qui doit permettre à chaque niveau des sorties vers des formations professionnelles ou des validations institutionnelles ou des reconnaissances de qualification (C.F.G., C.A.P., B.E.P., B.P., Bac professionnel, A.F.P.A., Brevet des Collèges, E.S.E.U. ...).

Les objectifs de formation définis ci-dessous visent à constituer des points de repère pour les formateurs. Il est indispensable que les formateurs se les approprient et qu'ils les opérationnalisent en fonction de leur "sensibilité" et de leur public.
Il est important de rechercher une adéquation entre les objectifs, le formateur, les formés explicitée par un contrat entre formateur et formés.
Le travail en équipe est également une condition indispensable de réussite d'un tel système de formation, la cohérence du système étant plus liée au travail collectif des formateurs entre eux et à la réfutation de leurs diverses pratiques qu'à un dogme pointilliste.

LES OBJECTIFS DE FORMATION

En plus des finalités que l'on doit toujours avoir à l'esprit, nous décrivons trois types d'objectifs à poursuivre lors d'une formation mathématique :

- objectifs méthodologiques non spécifiques aux mathématiques,
- objectifs globaux mathématiques non spécifiques à un niveau ou à un contenu
- objectifs spécifiques.

1. Objectifs méthodologiques

Il s'agit d'acquérir des méthodes de travail non spécifiques aux mathématiques mais développées à travers des activités mathématiques. Ces objectifs sont à traiter en situation. Si possible en pluridisciplinaire chaque fois que cela est possible (stage à temps plein, action spécifique entreprise, stage de prise de décision, ...).

2 - Objectifs globaux :

Ils ne dépendent pas du niveau de formation ni du contenu. Ce sont les mêmes objectifs que l'on poursuit tout au long d'un cursus. Le domaine d'application change. Par exemple les calculs formels ne sont pas les mêmes en M3 qu'en M10, les modèles ne sont pas les mêmes en M2, M4, M11. Il y a extension du domaine d'application. B. Schwartz les définit comme objectifs Transversaux, Continus, Progressifs.

3 - Les objectifs spécifiques :

Opérationnalisation pour un niveau donné des objectifs globaux. Objectifs spécifiques à des contenus particuliers (géométrie, maths financières, statistiques, algorithmique, ...).

Ma1	Objectif prioritaire : Maîtrise du sens des opérations dans les situations de la vie courante.		
FORMALISME	MODELE	DEGRE DE MAITRISE DU MODELE	SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE
Ecriture d'une opération en ligne à l'aide : - d'un opérateur ou - du symbole "touche machine"	Les quatre opérations	Comprendre le sens des opérations A (opération) B=C 1 opération à la fois	. Lire et écrire un nombre . Effectuer une opération . Contrôler l'ordre de grandeur du résultat . Lire un nombre dans un tableau numérique . Lire une donnee numérique sur un graphique . Changer d'unites . Calculer un périmètre, une surface
N.B. : Plus encore que dans les autres niveaux, ce tableau ne prend en compte que la partie opérationnalisable de la formation. Ce qui est visé dans cette formation est le passage de l'illétrisme à une préqualification sociale et professionnelle.			

Ma 2	OBJECTIF PRIORITAIRE : MAITRISE DE LA PROPORTIONNALITE SUR LES 3 SUPPORTS TABLEAU - GRAPHIQUE - FORMULE		
FORMALISME	MODELE	DEGRE DE MAITRISE DU MODELE	SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

Au terme de cette analyse, nous pouvons affiner les hypothèses annoncées en formulant :

La mathématisation de situation au sens de la méthode globale a permis dans la mise en oeuvre de la pédagogie par objectifs, d'éviter le piège des micro-objectifs

- en permettant une lecture non réductrice et une pratique globalisante du référentiel UC-CC dans le cadre des diplômes par unités capitalisables,

- en opérationnalisant le concept d'objectifs transversaux continus progressifs de l'alphabétisation à l'université dans le domaine de la filière mathématique,

- en amorçant la prise en compte des capacités méthodologiques transversales dans une approche pluridisciplinaires de la formation,

- en synthétisant et opérationnalisant ces trois approches dans la perspective d'un centre de ressources.

2 - OUTIL INFORMATIQUE ET PPO : L'ORDINATEUR AMPLIFICATEUR DE PRATIQUE

Comme nous l'avons esquissé dans le chapitre III : l'ordinateur n'est qu'un outil, seul il ne modifie rien, par contre il amplifie les pratiques existantes. Nous nous posions alors la question "Quelle interaction entre un outil, une discipline et une pratique pédagogique".

Nous allons préciser maintenant l'interaction entre l'outil informatique et la PPO là encore l'ordinateur peut aussi bien servir à mettre sur pied une méthode pédagogique hyper-directive centrée sur les micro-objectifs que s'intégrer à la pédagogie par objectifs globale décrite dans le paragraphe précédent.

L'outil informatique a amplifié la pratique liée à une "lecture non réductrice du référentiel" en permettant de :

- rendre indépendants les niveaux taxonomiques Exécuter-Traiter - Choisir
- développer les objectifs transversaux continus progressifs
- prendre en compte les capacités méthodologiques transversales
- intégrer les trois types d'objectifs (méthodologiques, globaux, spécifiques).

2-1 - L'OUTIL INFORMATIQUE ET LA TAXONOMIE

L'entrée dans la pédagogie par objectifs par les micro-objectifs a souvent induit une utilisation de l'outil informatique liée au niveau le plus faible de la taxonomie : Exécuter. L'ordinateur sert alors uniquement de répétiteur pour mécaniser un savoir ponctuel correspondant à un micro-objectif "isolé". Cette utilisation décharge l'enseignant des taches fastidieuses de correction, mais pour l'élève, à part l'attrait de l'outil, le gain pédagogique par rapport à des exercices auto-correctifs est faible.

L'entrée dans la pédagogie par objectifs par la méthode globale a induit d'autres utilisations, la plus spécifique est de rendre indépendants les niveaux taxonomiques Exécuter - Traiter - Choisir. En choisissant le logiciel adapté ou en donnant à l'élève des consignes d'utilisation personnalisées, l'enseignement cible le niveau taxonomique sur lequel il veut focaliser le travail de l'élève, cela permet de :

- faire travailler même pour les élèves les plus faibles, les capacités d'exécution en situation

Grâce au tutorat apporté par l'ordinateur en particulier en utilisant des "images interactives" dans les messages d'aide (cf. Chap. VII), on peut travailler le niveau Exécuter à partir de situations. La guidance apportée par l'ordinateur pallie le manque d'autonomie de l'élève par rapport aux niveaux Traiter et Choisir. Dans ce cas, l'ordinateur centre l'activité de l'élève sur le niveau Exécuter tout en gardant un contexte.

- Décharger l'élève des taches fastidieuses et inutiles pour lui en privilégiant les niveaux de la taxonomie où il est en réelle situation d'apprentissage :

Par exemple, dans la résolution d'un système d'équations pour un élève qui maîtrise le calcul littéral formel, il est inutile, voire néfaste de multiplier les opérations élémentaires de combinaisons linéaires d'équation. En revanche, l'attention sera portée sur la stratégie optimum de traitement, l'élève décide de la combinaison linéaire à effectuer, l'ordinateur exécute le calcul. L'élève est également déchargé des taches de recopie tout en gardant grâce à l'imprimante, une trace propre de son itinéraire. Dans ce cas, la capacité Choisir n'intervient pas, le modèle (système d'équation linéaire) est fourni à la suite.

L'élève est déchargé des capacités Exécution. Son activité est entièrement consacrée à la mise en oeuvre des décisions liées au Traitement. En focalisant l'activité sur le traitement, cela permet de multiplier les exemples et d'acquérir par expérimentation, une méthodologie d'optimisation du traitement.

Dans d'autres cas, ce sera la capacité Choisir qui sera privilégiée, l'ordinateur se prête bien à une multiplication des acticités de prise de décision au niveau Choisir, par exemple dans des activités de reconnaissance de modèle sur des supports : reconnaître le modèle affine sur le support tableau ou reconnaître le modèle dérivation-intégration sur le support graphique.

- Courcircuiter provisoirement certaines capacités d'exécution ou de traitement pour développer le "savoir à quoi ça sert" avant le savoir-faire en autonomie :

Dans les exemples précédents, on évitait de faire travailler l'élève sur les objectifs qu'il maîtrisait correctement pour consacrer le maximum du temps de formation aux apprentissages nouveaux. Dans d'autres cas, la maîtrise de capacités d'exécution nécessite un temps long, voire très long. Il n'est pas non plus certain que le but d'un tel apprentissage soit clairement perçu. L'ordinateur fournit provisoirement une "prothèse" pour les taches d'exécution ou de traitement non maîtrisées et permet ainsi de comprendre l'intérêt et l'utilité de ces apprentissages de base. Par exemple, des systèmes d'aide à la résolution d'équations courcircuitent les savoir algébriques (règle des signes, développement de parenthèses) et permettent de découvrir en situation, l'importance de la maîtrise de ces techniques. Le "à quoi ça sert ?" et le choix de l'outil deviennent dans ce cas, plus importants que le savoir-faire technique.

Contrairement aux tutoriels classiques qui éliminent les niveaux élevés de la taxonomie par des messages d'aide appropriés, ce sont les niveaux faibles qui sont provisoirement courcircuités.

L'enseignant peut donc guider l'élève dans le choix de logiciels pour travailler soit globalement les trois niveaux Exécuter, Traiter, Choisir, soit de les travailler séparément mais parallèlement et cela de façon personnalisée. L'ordinateur permet une approche "non linéaire" et personnalisée de l'objectif global, : c'est ce que nous appelons rendre indépendant les niveaux taxonomiques.

Le vrai problème pédagogique est celui de la gestion du temps, de l'espace et des ressources. La règle étant de ne pas faire faire à l'ordinateur ce qui doit être fait par l'élève ou par le professeur et réciproquement.

2-2 - L'OUTIL INFORMATIQUE ET LES OBJECTIFS CONTINUS, TRANSVERSAUX, PROGRESSIFS

Le premier apport de l'ordinateur est "classique", il permet à l'enseignant de régler plus facilement qu'avec des documents papiers le degré auquel il veut faire travailler l'élève dans un objectif continu, transversal, progressif. Il peut régler de façon individualisée, le champ d'application, la difficulté, la vitesse... Nous ne détaillerons pas cet apport bien connu maintenant dû à la souplesse du paramétrage de l'outil informatique. Signalons cependant que le choix du degré de travail est piloté par l'enseignant, notre préférence va plus vers des petits logiciels ciblés organisés en filière par rapport à un objectif continu, transversal, progressif qu'à un super-logiciel faisant tout. La guidance reste du ressort de l'enseignant.

Le deuxième apport de l'ordinateur est directement lié à la méthode globale et au concept d'objectifs continus transversaux progressifs. Certains logiciels tels que des gestionnaires de tableaux, des gestionnaires de graphiques, des gestionnaires de formules ont été conçus et créés directement pour être au service de la méthode globale en particulier en lien avec le tryptique T.G.F. Grâce à ces gestionnaires, il est possible par exemple, de travailler à tous niveaux des objectifs tels que : reconnaître le modèle standard, résoudre l'équation standard, changer de support, choisir l'outil de résolution adapté, contrôler un outil par un autre ... (cf. Chap IX)

Enfin, la méthode globale a généré une méthode pédagogique particulièrement adaptée au concept d'objectifs transversaux, continus, progressifs et à un travail à la fois collectif et personnalisé. Il s'agit du cours/TP (au sens des lycées professionnels) autour d'une fiche et/ou d'un logiciel présentant une situation sans consigne ni question, une situation ouverte. L'enseignant crée le scénario en fonction du contexte de formation. C'est ce que nous appelons fiche et/ou logiciel ouvert au service d'une pédagogie active [35]. Le logiciel Loterie dont nous avons parlé dans la monographie illustre parfaitement ce type de logiciel.

2-3 - OUTIL INFORMATIQUE ET CAPACITES METHODOLOGIQUES TRANSVERSALES

L'outil informatique quel que soit son contexte d'utilisation, fait ressortir la nécessité de développer des capacités méthodologiques qui dépasse le seul contenu à enseigner. Par exemple, l'appropriation de l'espace et la latéralisation ou la structuration d'une méthode de travail. Certains logiciels ont été développés spécifiquement pour répondre à ce besoin, c'est le cas de la plupart des logiciels développant les capacités logiques. Dans d'autres cas, c'est l'enseignant qui, par des consignes spécifiques, fait développer ces capacités chez les élèves ; par exemple : stratégie de recherche d'information à partir de logiciels existants.

Le Département Mathématiques du CUEEP a aussi créé des logiciels-outils spécifiques, répondant à ces besoins de travailler les capacités méthodologiques, y compris à l'intérieur des disciplines.

C'est ainsi qu'a été créé l'ensemble Nanobureautique [22] pour répondre à trois besoins :

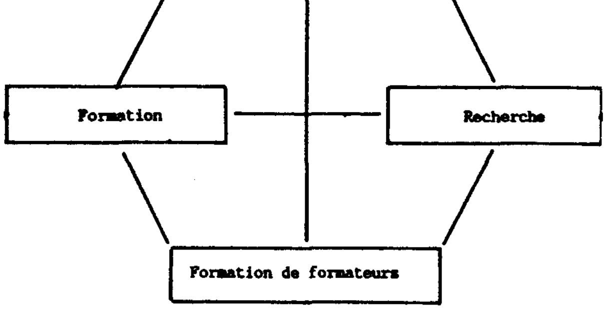
- initiation à la bureautique et sensibilisation à l'informatique des publics faiblement scolarisés,
- fournir des outils au service d'une pédagogie du projet en pluridisciplinarité,
- développer les capacités méthodologiques transversales au sein d'un enseignement disciplinaire.

Dans ce cas, des enseignants ont adapté l'outil traitement de texte à la rédaction d'une démonstration en faisant créer et gérer par les élèves, de façon évolutive, leur bibliothèque de théorèmes. Pour la rédaction d'une solution de problème, les élèves utilisent le traitement de texte en appelant dans le bon ordre, les théorèmes utilisés et en les adaptant à la situation. [22].

Comme nous le voyons sur cet exemple, dans la pratique pédagogique, les trois types d'objectifs (méthodologiqus, globaux, spécifiques) sont travaillés en même temps.

En conclusion de ce chapitre, nous illustrerons l'intégration de l'outil informatique dans la pratique pédagogique et son rôle amplificateur de pratiques au travers de la formation des formateurs mathématiques au CUEEP. En effet, après une phase d'appropriation de l'outil, grâce à une production "tous azimuts" mais collective, la formation de formateurs a été centrée sur la création de scénarii pédagogiques utilisant des logiciels existants et non plus sur la création de nouveaux logiciels [29]. Depuis 1986-1987, l'outil informatique n'est plus un point d'entrée pour la formation de formateurs ni pour la formation. La création des nouveaux produits informatiques et de leur environnement est totalement intégrée à la réflexion pédagogique [28]. Ce sont les recherches de type thématique (statistiques) ou centrées sur un public (préprofessionnalisation) ou sur une stratégie de formation (individualisation, formation à distance, autoformation) qui déterminent la production.

On retrouve bien l'interaction :



Cette évolution de l'utilisation de l'outil informatique nous conduit à formuler que :

Une action de formation se nourrit de ce que nous appelons une évolution continue, volontaire et réfléchie à partir de destabilisations partielles non destructurantes mais obligeant à remettre en chantier globalement des pratiques.

Quelle que soit la qualité d'une expérimentation ou d'une idée, celle-ci s'use. La méthode étant très performante dans la phase d'appropriation collective quand tout le monde se pose réellement des questions. Cette phase est malheureusement souvent suivie d'une phase de banalisation. Pour éviter une ossification, on est condamné à toujours innover. Ces innovations ne peuvent être gratuites, elles doivent viser à une amélioration globale du système et s'appuyer sur les innovations précédentes. Nous nous apercevons que la Pédagogie par Objectifs a été un premier facteur de destabilisation. L'arrivée de l'outil informatique en a été un autre. Plus récemment, l'introduction de l'enseignement des statistiques à tout niveau, a créé un phénomène analogue. L'invidualisation de la formation en lien avec un Centre de Ressources joue actuellement le rôle de destabilisateur.

CHAPITRE XIV

AMORCE DE FONDEMENT METHODOLOGIQUE

Notre objet de recherche, définition d'une stratégie globale d'enseignement des mathématiques au service d'une action éducative collective, s'est imposé à nous d'une façon quasi-évidente et n'a jamais été remis en question. En revanche, la méthodologie ne préexistait pas au démarrage de notre travail.

L'élaboration des pistes méthodologiques que nous allons étudier dans ce chapitre suit le même cheminement que l'élaboration de la méthode globale, nous pouvons même dire que :

l'élaboration des pistes méthodologiques suit un processus analogue au processus de mathématisation de situation

SITUATION → MODELE → THEORIE

Notre formation scientifique, en particulier l'habitude de la démarche expérimentale y compris dans l'enseignement des mathématiques nous a conduit à des attitudes semblables en ce qui concerne l'élaboration d'une méthodologie.

A partir de nos participations à différentes recherches pédagogiques dont nous étions soit objet, soit acteur, soit sujet pour reprendre une classification proposée par Anne de Blignières dans sa Thèse de Doctorat [4], à partir de premiers essais, tous azimuts, de méthodes sans à priori sur leur pertinence par rapport à l'objet de recherche (certains se révélant adaptés, d'autres non), nous avons dégagé à postériori des embryons de modèles par une auto-réflexion théorisante sur les pratiques.

Ce travail est relayé par une participation à une recherche méthodologique collective sur les démarches de recherche en Education. La théorisation se fera par une coopération entre diverses équipes de recherche ayant des démarches analogues catalysées par une recherche méthodologique.

Nous allons détailler d'abord quelques essais de méthode puis des pistes dégagées à partir de notre travail et enfin une amorce d'un fondement méthodologique.

1 - LES ESSAIS : INTERETS ET LIMITES DE CERTAINES METHODES

1-1 - ETUDES COMPARATIVES QUANTITATIVES

Au cours de l'élaboration de la méthode globale au Département mathématiques du CUEEP, une tentative de mesure de l'efficacité comparée, sur un même public, de deux méthodes d'apprentissage de l'algèbre a été mise sur pied ; d'une part le "saut qualitatif dans l'abstrait" et d'autre part "mathématisation de situations". Un plan de recherche expérimental avec tentative de maîtrise des variables et mesure quantitative a été élaboré sur quatre groupes de l'Action Collective de Formation. A l'époque, comme maintenant avec le recul, cette tentative ne nous semble pas adaptée à notre objet d'étude, nous écrivions à l'époque :

> Cette tentative d'étude comparative a montré la grande difficulté, voire l'impossibilité de dégager des échantillons suffisamment importants pour qu'un traitement statistique soit possible dans l'état actuel d'évolution rapide des publics, des formateurs et des contenus en formation d'adultes.
>
> Il faut donc renoncer provisoirement à répondre par un plan d'expérience quantitative à la question : la stratégie de mathématisation de situations est-elle meilleure ou moins bonne qu'une autre méthode ? et recentrer le travail sur l'objet de cette étude : l'apport de la formation d'adultes à l'enseignement des mathématiques. Pour cette étude, ce n'est pas une micro-expérience liée à des conditions historiques, géographiques et humaines très particulières, et de plus difficilement reproductible, qui donnera un apport substantiel à l'enseignement des mathématiques.

Ce constat a été fait également par le G.E.M. de Louvain-la-Neuve. Christiane Hauchard mentionne dans sa Thèse de Doctorat [59].

> Tout ceci explique qu'au lieu de chercher des résultats reproductibles, nous ayons varié de notre mieux nos expériences et leur public, de façon à prendre le moins possible par mégarde un fait isolé pour plus important qu'il n'était ou ignorer par accident une classe de faits significatifs. L'instauration d'expériences reproductibles étroitement contrôlées nous était interdite aussi du fait que notre entreprise de recherche était en plus, à tout moment, une entreprise d'enseignement. Et qu'un enseignement vivant est toujours en projet : au fil des mois et de nos passages dans des classes, nous avons amélioré nos problèmes et modifié leur ordre de succession.

Ce constat est conceptualisé et érigé en méthode de recherche par Nicolas Rouche [101].

> <u>Chercher la reproductibilité ?</u> En reparcourant nos objets de recherche, on s'aperçoit que le critère de reproductibilité ne fonctionne pour aucun d'eux. Il n'est pas question, dans ces recherches, d'établir des lois, fussent-elles simplement statistiques.
> Le "toutes autres choses égales par ailleurs" n'y est jamais maîtrisable. Ces recherches ne sont donc pas des types qualifiés parfois de "nomothétique" ou de "quantitatif".

Si cette tentative de l'analyse comparative quantitative de l'efficacité des deux méthodes a échoué, en revanche la réalisation de cette expérimentation a été très riche sur le plan création de documents et sur le plan qualitatif. Elle a favorisé une réflexion qui a permis d'établir un continuum entre l'ACF et l'ESEU et a donné les prémices de l'opérationnalisation du concept d'objectifs transversaux continus progressifs.

De plus, cette expérience nous a fait prendre conscience de deux choses :

- étant impliqués en tant que formateurs et responsables dans l'enseignement, la conduite d'entretiens individuels portant sur la méthode d'enseignement n'a pas apporté d'éléments supplémentaires à ceux recueillis en formation.

- d'un point de vue déontologique, il n'est pas question pour nous de mener une quelconque expérimentation qui puisse mettre en cause à quelque niveau que ce soit la qualité de la formation et sa nécessaire adaptation au public. Dans l'expérimentation précédente, nous avons été amenés à stopper le protocole dans un des groupes pour que celui-ci n'éclate pas.

1-2 - ETUDE SOCIOLOGIQUE DE TERRAIN PRENANT EN COMPTE LA MATIERE

Nous avons mentionné dans l'introduction une étude sur les publics en formation à Roubaix-Tourcoing. Cette étude fait apparaître que les mathématiques sont devenues un point de passage obligé pour presque toute personne engagée dans une formation. Cette étude est générale, elle ne porte pas spécialement sur les cursus de formation mathématique. Dans le cadre de cette thèse, nous avions pensé faire un relevé, sur la session de février - juin 1987 (500 stagiaires concernés), des cursus de formation que les auditeurs arrivant en unités terminales de l'ESEU avaient suivis. Or, il est apparu que les données brutes fournies par les stagiaires étaient incomplètes et tronquées. En effet, des stagiaires ne mentionnent pas une partie de leur cursus quand la formation qu'ils ont suivie ne porte pas le label Unité 4 ou 9. C'est le cas en particulier pour les formations à l'intérieur des entreprises ou dans un cadre strictement professionnel. Ces omissions dénaturent complètement le sens du relevé.

Pour exploiter ces données, il est nécessaire d'entreprendre un travail de compilation supplémentaire des différents fichiers des GRETA, entreprises, organismes de formation et éventuellement rencontrer quelques stagiaires. La technique du questionnaire se révèle donc difficile à mettre en oeuvre. Si on veut éviter des erreurs importantes d'interprétation seules des personnes "averties" peuvent mener à bien ce type de travail. Par personne "avertie", nous entendons soit une personne qui connaît l'ensemble du dispositif de formation, qui connaît la filière matière et les particularités historiques et géographiques, soit un collectif.

Notons que là encore, l'initialisation du travail a été très profitable, les formateurs se sont sentis impliqués dans ce travail au-delà de ce que nous leur avions demandé.

1-3 - RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

Avant d'avoir entrepris ce travail de recherche et de façon plus méthodique depuis que nous avons commencé la rédaction, nous avons constamment cherché à nourrir notre réflexion d'éclairages divers.

Notre champ est très vaste tant au niveau d'écritures (ce peut être des comptes-rendus d'expériences aussi bien que d'éléments de théorie) qu'au niveau des approches (réflexion sur l'utilisation de l'outil informatique, sur l'enseignement, recherche en didactique des mathématiques, épistémologie, théories de l'apprentissage...). Nous en avons tiré beaucoup d'éléments de réflexion mais nous n'avons trouvé aucun auteur ni à fortiori aucune équipe ayant une approche globale comparable. Même les écrits de personnes-ressources qui ont fortement influencé le CUEEP tels que ceux de Bertrand Schwartz n'ont pu être utilisés dans la stricte perspective de leur auteur. Par exemple le concept d'évaluation transversale continue progressive émis dans "Pour une école française de la pédagogie par objectifs" [104] a été opérationnalisé par nous dans un contexte beaucoup plus large que celui décrit par Anne de Blignières [4]. Elle réduit ce concept à la seule évaluation et à des objectifs généraux de "cycle de 60 heures" alors que dans la méthode globale, ce concept dépasse l'évaluation. Il sous-tend et amorce la cohérence des objectifs de formation de la totalité de la filière mathématique. Cela est en grande partie dû à la prise en compte de l'aspect discipline dans nos travaux mais au sein d'une perspective sociale intégrant diverses coopérations.

1-4 - LA RELECTURE ORIENTEE

En analysant la démarche que nous avons adoptée par l'écriture du chapitre XIII sur l'interaction entre méthode globale et pédagogie par objectifs, nous découvrons une autre technique que nous qualifions de **relecture orientée.**

A la lumière des théorisations ultérieures, il s'agit de comprendre la naissance et l'évolution de concepts en faisant une relecture orientée de textes écrits au moment de la naissance des modèles pédagogiques. Là encore, souvent la pratique a précédé la théorie mais les formulations théoriques ont fortement accéléré l'innovation. Il est donc important dans des recherches éducatives portant sur une durée assez longue, de conserver une mémoire, de relire et de réfléchir sur les productions anciennes. Il ne s'agit pas d'étudier l'histoire, c'est-à-dire de regarder d'une façon statique ce que l'on pensait à un moment donné, mais de relire d'une façon dynamique ces textes à la lumière des connaissances actuelles pour en tirer profit pour les innovations futures.

2 - UNE AUTO-REFLEXION THEORISANTE COLLECTIVE SUR UNE PRATIQUE COLLECTIVE.

A partir d'une double dialectique Pratique / Théorie et Action / Recherche, nous dégageons une piste méthodologique que nous qualifions d'auto-réflexion théorisante collective sur une pratique collective.

L'auto-réflexion est collective dans le sens où comme nous le verrons, des formateurs de l'équipe de travail se sont impliqués dans la recherche à des degrés divers. Conformément à nos pratiques pédagogiques, nous dégageons ce concept à partir de l'analyse de "situations de recherche".

2-1 - LA PRISE DE RECUL DU PRATICIEN

La première étape de la recherche, qui apparaît dans le chapitre IV est basée sur une prise de recul des praticiens que nous sommes. Sans trop se poser de questions au départ, au Département Mathématiques du CUEEP, nous avons mené une politique volontariste d'innovations. Certaines de ces innovations se sont révélées efficaces sur le terrain. Cette auto-régulation de l'innovation par le terrain sans théorisation préalable, nous a valu l'accusation peut-être fondée d'être des "trouveurs" et non des chercheurs.

Or, une relecture orientée des documents du Département Mathématiques montre que dès que les innovations ont été rodées et structurées, dans le souci de capitaliser et de transférer, c'est de fait, un travail de théorisation qui a été entrepris : théorisation des pratiques collectives du département dépassant le simple descriptif des pratiques pour modéliser des méthodes et théoriser des stratégies. Il est important de signaler ici, que structurer ne veut pas dire rigidifier, la théorisation se faisant en interaction continuelle pratique / théorie dans un système en évolution permanente.

La prise de recul nécessaire par rapport à la pratique est rendue possible par notre statut d'enseignants-chercheurs décidés à prendre le temps d'effectuer des recherches sur l'enseignement. Notre implication par le biais de la formation de formateurs et de la formation des maîtres sur d'autres terrains nous oblige également à décoller de notre pratique quotidienne pour modéliser afin de permettre des transferts sur les autres terrains. La théorisation est apparue comme un moyen efficace de transformation des pratiques internes et externes au CUEEP.

Cette théorisation de notre propre pratique nous impose une grande rigueur :

- *ne théoriser que des pratiques collectives portant sur une masse critique d'élèves.*

- *se méfier des expériences ponctuelles même très réussies et des cas individuels*

- *soumettre la théorie comme la pratique au verdict du terrain. On n'a pas le droit d'avoir raison contre les élèves. Une théorie dont l'appropriation collective par les formateurs est impossible ne sert à rien.*

Pour reprendre l'analogie avec l'instrumentalisation de la théorie dans la stratégie de mathématisation (la théorie mathématique sert à construire des instruments utilisables) la recherche doit fournir des instruments pour le terrain

- ne pas théoriser en vase clos. Confronter la théorisation et la pratique à d'autres terrains en participant à des recherches collectives sur l'enseignement des mathématiques, en collaborant avec des équipes qui poursuivent des objectifs semblables.

- ne pas hésiter à alterner les temps de pratique et les temps de théorisation. L'auto-réflexion théorisante sur la pratique et la pratique n'ont pas forcément lieu simultanément ni dans le même lieu ni dans la même phase de travail.

- s'imposer la formulation explicite d'hypothèses comme outil d'analyse des pratiques et comme support à la théorisation tout en gardant une dynamique. Il ne faut pas vouloir formuler tout de suite la bonne hypothèse ni exiger tout de suite une formulation précise. Des schémas d'hypothèses peuvent suffire au début du travail et une reformulation en cours de travail est nécessaire.

La prise de recul à l'aide d'une auto-réflexion théorisante sur une pratique collective par des enseignants-chercheurs aboutit à une recherche sur une action, féconde à la fois pour la théorie et pour la pratique.

2-2 - L'IMPLICATION DU CHERCHEUR DANS L'ACTION

Parallèlement à la dialectique pratique/théorie une autre dialectique liée au couple action/recherche et posant le problème de l'implication du chercheur nous est apparue en participant en tant que **praticien** ou comme **chercheur** à des recherches sur des actions CUEEP menées par ou en collaboration avec des chercheurs extérieurs au CUEEP.

Parmi ces recherches, celles menées par Bertrand Schwartz avec l'équipe de Sciences de l'Education de Paris-Dauphine ont fortement influencé notre réflexion sur l'implication du chercheur par rapport au terrain. En effet, nous avons travaillé avec B. Schwartz directement ou indirectement sur trois Recherches-Actions :

- la recherche sur les ACF, complétée par la recherche sur le district éducatif,
- la recherche sur "l'utilisation de la définition d'objectifs en pédagogie" en lien avec l'ESEU et le DEUG UC
- la recherche sur l'insertion professionnelle des jeunes.

La méthodologie sous-jacente à ce type de recherche a été théorisée par Anne de Blignières [4]. Dans cette thèse apparaît nettement une distinction entre le praticien qui porte une action et le chercheur qui porte une recherche. Le praticien pouvant être impliqué à des degrés différents suivant la graduation Objet -> acteur -> sujet, il n'est jamais chercheur.

Dans ce type de recherche, l'aspect discipline n'est pas directement pris en compte. Etant des praticiens-discipline, pour étudier les "objets d'études" qui nous intéressent et qui partent de la discipline, nous avons été amenés à prolonger la graduation proposée en faisant un saut qualitatif : objet - acteur - sujet - chercheur.

Tout en restant praticien, nous sommes des chercheurs autonomes formulant nos propres hypothèses d'actions et nos propres hypothèses de recherche sur nos propres terrains. La distinciton entre praticien et chercheur devient une distinction entre diverses fonctions assurées dans des temps différents par les mêmes personnes. C'est ainsi que nous concevons l'implication du chercheur sur le terrain.

2-3 - L'IMPLICATION DES FORMATEURS DANS LA RECHERCHE

Nous pensions que ce rôle de praticien/chercheur ne pouvait être tenu que par des enseignants/chercheurs d'une discipline dans la triple fonction

Formateur	⟷	Formateur de formateurs	⟷	Chercheur

Ces trois fonctions étant caractéristiques de niveaux d'écriture différents. Le tout étant sous-tendu par une réflexion théorisante sur la pratique collective.

Dans la dernière partie de notre travail de recherche, certains formateurs de notre équipe se sont emparés de la fonction recherche. Ils ont reproduit sans que nous ayons à les solliciter notre propre démarche : praticien -> chercheur. On retrouve là une mission de l'Université : formation à et par la recherche. Cette implication dans la fonction recherche de ces enseignants-vacataires en formation continue est d'autant plus significative qu'il n'y a pour eux aucun intérêt institutionnel à court ou moyen terme.

Nous devons signaler que tous les formateurs ne se sont pas impliqués au même degré ni dans le même temps mais que ce phénomène nous paraît significatif car il a enclanché une dynamique. Le fait de les avoir associés à notre propre travail de recherche a certes servi de déclancheur mais le terrain avait été préparé d'une part par un travail de production pédagogique : se former pour produire, produire pour se former, et d'autre part par une pratique en formation de formateurs de **la stratégie de double piste**

Le terme double piste désigne une méthode qui consiste à placer l'enseignant (le formateur) en situation d'élève (de formé) en utilisant les moyens et les outils pédagogiques que l'on souhaite analyser. L'analyse de son comportement d'élève et du comportement de l'enseignant dans la formation aide l'enseignant à comprendre les élèves et à se critiquer en tant qu'enseignant. Cette stratégie n'est pas un jeu : on ne joue pas à l'élève ni à l'enseignant, on assume successivement les deux fonctions avec analyse collective.

Ce modèle d'auto-formation collective en double piste est transférable ou du moins adaptable à la situation dialectique action/recherche. Ce sont les mêmes personnes qui, à des moments et dans des lieux différents, fonctionnent comme praticiens de l'enseignement ou chercheurs sur l'enseignement. Une grande rigueur est là aussi nécessaire pour tenir sans confusion ces deux fonctions :

- il faut que cela se passe à l'intérieur d'une pratique et d'une recherche collectives,
- il faut des temps et des lieux spécifiques pour la recherche et pour la pratique,
- il ne doit pas y avoir confusion mais interaction entre formation/formation de formateurs/recherche..

Dans ce cadre là, nous pouvons dire que l'on passe d'une auto-réflexion théorisante sur une pratique collective, à une auto-réflexion théorisante collective sur une pratique collective.

La distanciation entre action et recherche ne se fait plus au niveau des personnes, praticien ou chercheur mais au niveau des fonctions. Action et recherche sont portées à des degrés divers d'implication par des praticiens-chercheurs ou chercheurs-praticiens.

3 - AMORCE DE FONDEMENT METHODOLOGIQUE

La double dialectique pratique/théorie et action/recherche concerne simultanément deux objets d'étude fortement dépendants mais distincts. Le premier est l'objet central de cette thèse : une stratégie d'enseignement des mathématiques qui se situe dans la catégorie des "faits éducatifs globaux" abordés sous l'aspect discipline. Le deuxième concerne les aspects pratiques et théoriques des méthodes de recherche en Sciences de l'Education. Il s'agit de contribuer à fonder des méthodes propres aux recherches en Sciences de l'Education portant sur des actions éducatives liées à des terrains.

L'étude du premier objet nous a conduit à dégager des pistes méthodologiques qui, par rapport à nos situations de recherche fournissent des embryons de modèles. Pour le deuxième objet de recherche, il s'agit de s'interroger sur ces modèles. Pour reprendre l'analogie avec la mathématisation de situation, dans ce cas, les modèles fournissent la situation de départ pour une nouvelle théorisation. Or, c'est à partir de plusieurs situations que l'on pourra dégager des modèles et une théorie. Nous apportons donc ici notre contribution à un ensemble de réflexions similaires en fournissant une situation que nous analysons dans la perspective d'une modélisation plus générale.

Ces recherches en Sciences de l'Education portant sur des faits éducatifs globaux liés à des terrains nécessitent un terrain-laboratoire de recherche et d'expérimentation et une méthodologie propre. Ce type de recherche suppose :

- la double dialectique action/recherche en pratique/théorie

- une coopération entre des recherches portant sur la discipline (plusieurs disciplines mais chacune gardant son identité) et des recherches portant sur des aspects transversaux transdisciplinaires.

- une coopération entre des personnes-ressources portant un regard extérieur sur l'action et la recherche, porteuses de questionnements et un collectif de recherche-action constitué de praticiens-chercheurs et de chercheurs-praticiens chacun impliqué dans la double fonction action/recherche à des degrés divers en définissant clairement les responsabilités.

- un objet de recherche directement issu d'un questionnement du terrain. Pour qu'il y ait recherche, il faut que ce questionnement soit destabilisant mais non destructurant. On ne peut pas faire de recherche sur une action qui ne marche pas et on ne peut pas faire de recherche sur une action, même fonctionnant bien, dans laquelle on ne se pose pas de questions.

- une validation sociale : la recherche doit servir à l'amélioration de l'action, elle est soumise au contrôle du terrain (ne rien faire qui puisse nuire à la qualité de la formation). Elle ne doit pas s'arrêter quand la validation des hypothèses de recherche est faite mais se prolonger par des actions de transfert et de vulgarisation.

CONCLUSION GENERALE

Au départ de notre travail de recherche, après un questionnement sur l'impact de l'informatique dans l'enseignement, nous avons formulé l'hypothèse générale : le couple mathématisation de situation/outil informatique dans un environnement adéquat engendre une méthode globale d'enseignement des mathématiques performante en modifiant les méthodes pédagogiques, les cursus et les modes de pensée.

Tout au long de ce travail, nous nous sommes attachés à valider cette hypothèse. Nous pensons avoir largement démontré qu'elle était juste sous l'angle strict de notre objet d'étude, l'enseignement des mathématiques dans l'environnement C.U.E.E.P. dans le cadre de la formation en groupes..

Nous nous sommes plus attachés dans cette thèse, au niveau correspondant à l'enseignement initial et technique du second degré.

Pour ce niveau d'enseignement nous avons non seulement montré que la méthode globale est une stratégie cohérente d'enseignement des mathématiques mais aussi qu'elle a ouvert de nombreuses pistes novatrices : enseignement simultané de la dérivation et de l'intégration, enseignement simultané et interactif des statistiques et des probabilités, intégration du passage aux écritures formelles dans l'apprentissage.

Nous avons théorisé, mis en pratique le rôle des supports et montré comment, en intégrant l'informatique comme outil et mode de pensée, l'organisation des calculs sur les supports conduit à la formalisation et à la théorisation.

Par ailleurs, compte-tenu de l'expérience du C.U.E.E.P. dans les bas niveaux de qualification (niveau VI et lutte contre l'illétrisme), nous pouvons affirmer qu'une méthode similaire fondée sur les mêmes principes est performante pour l'enseignement des mathématiques dans ces niveaux. En effet dans l'ensemble "Math à la carte de niveau VI" (MAC 6 [21]), *"on est censé trouver de quoi faire franchir l'écart entre le niveau de simple capacité de lecture des nombres et l'acquisition de situations mathématiques (assez) simples... Les thèmes ne sont pas un programme à suivre. Ce sont des "points d'accrochage" laissés au choix des formateurs et des stagiaires... La manipulation d'un même outil mathématique peut se retrouver à travers plusieurs supports différents... A travers cette diversité, il faut préserver la cohérence du programme, de ses objectifs et de ses moyens pédagogiques... cela ne relève pas de la seule responsabilité du stagiaire mais également et pour beaucoup de celle du formateur"*.

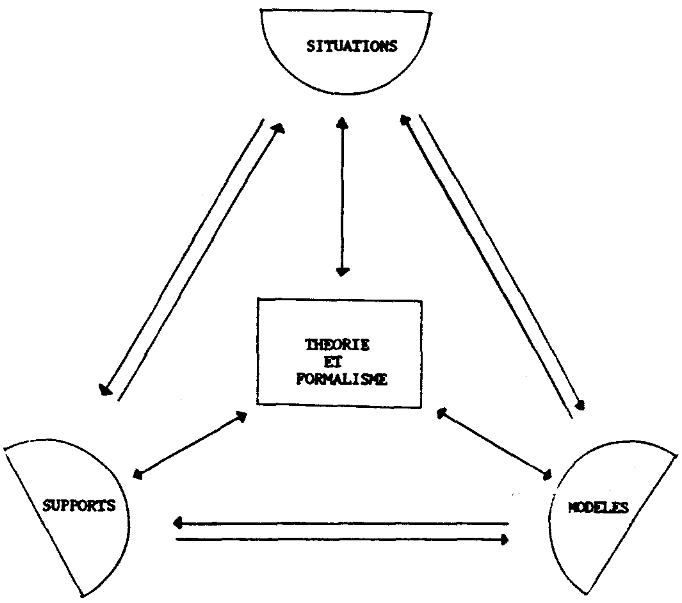
A travers ces quelques citations de la présentation, on retrouve bien les idées principales de la méthode globale. Cet ensemble est actuellement en cours d'expérimentation dans des centres de formation, des LEP, des écoles primaires, des C.E.S. pour des classes "difficiles".

Cette expérimentation, ajoutée aux indicateurs qui nous ont été fournis par l'équipe d'enseignements-vacataires associés à notre recherche nous permettent de conjecturer avec un fort degré de vraisemblance que notre hypothèse générale est également juste pour l'enseignement des mathématiques à quelque niveau que ce soit, en dehors de l'environnement C.U.E.E.P. à condition toutefois de garder un "environnement adéquat".

Au niveau Bac +1, +2, un travail collectif est entrepris dans le but d'augmenter l'accessibilité aux formations modulaires par des possibilités de formation à distance.

Nous avons, au cours de notre travail, fait apparaître que c'est bien un couple mathématisation de situation/outil informatique intégré à une stratégie d'enseignement qui est vecteur de changement. Nous pouvons, au terme de notre étude, généraliser certains points.

La pédagogie de situations non liée à une problématique générale n'est pas porteuse de changement. Pour être efficace, la mathématisation de situation ne doit pas se contenter de résolution de problèmes concrets, mais doit être fondée sur la totalité de l'interaction :



Cette méthode pédagogique nous permet de dépasser le faux débat "mathématiques de service ou vraies mathématiques". Comme nous l'avons amorcé avec l'enseignement des statistiques dans la monographie, diverses expériences en cours portées par le Département Mathématiques nous poussent à affirmer que dans un enseignement "technique" ou professionnalisé ou pluridisciplinaire il est possible, et en tant que mathématicien nous devons le faire, d'enseigner des "vraies mathématiques" y compris les aspects théoriques au travers des situations professionnelles ou sociales.

En tant qu'enseignants de mathématiques nous espérons avoir fourni aux enseignants une banque d'idées et de réflexions.

Tout au long de cette thèse, nous nous sommes attachés à montrer que la discipline ne pouvait être dissociée d'une stratégie éducative globale et notre travail participe au-delà des mathématiques à d'autres recherches :

- une recherche sur la pédagogie par objectifs : une telle méthode pédagogique impose de définir des objectifs de formation, des objectifs spécifiques, des capacités méthodologiques transversales qui soient réellement prises en compte dans la formation et explicités sous forme d'un contrat avec les élèves. Nous avons montré que les critiques traditionnelles de la pédagogie par objectifs peuvent être dépassées et qu'une pédagogie par objectifs au sens où nous l'avons définie peut dynamiser une pratique enseignante.

- une recherche sur l'intégration de l'outil informatique dans les pratiques enseignantes : l'outil informatique joue bien le rôle d'amplificateur de pratique. Par rapport à notre stratégie d'enseignement des mathématiques, l'informatique permet des manipulations structurantes débouchant sur la modélisation et amplifie par là notre approche expérimentale des mathématiques. Nous avons pu constater dans d'autres disciplines et dans d'autres lieux le même rôle amplificateur de l'outil informatique et ce quelle que soit la stratégie éducative de départ. Citons par exemple l'utilisation de l'E.A.O. tutoriel dans le cadre d'une progression en Anglais en interaction avec le Laboratoire de Langues et une salle de cours, l'utilisation de logiciels-outils dans le cadre d'une pédagogie du projet (expérience au C.E.S. Rabelais à Mons), utilisation d'imagiciels dans l'enseignement de la géométrie (équipe CREEM), l'intégration de l'ordinateur dans l'appropriation de la démarche expérimentale (Sciences C.U.E.E.P., groupe Evariste). Ce rôle amplificateur de pratique apparait encore plus fort dans le domaine des acquisitions linguistiques pour lequel chaque"école" a réalisé des produits très orientés, par exemple l'approche fonctionnelle a donné Lucil (Vendôme-Formation et C.U.E.E.P. Alphabétisation), l'approche structurelle a donné Pré-Bac (Expression Ecrite et Orale - C.U.E.E.P.).

Ce rôle amplificateur de pratiques de l'outil informatique nous amène à affirmer qu'il est illusoire de vouloir mesurer l'impact de l'informatique en dehors d'une évaluation globale de la pédagogie dans lequel il s'intègre. De même, une grille d'évaluation d'un logiciel coupée de son contexte d'utilisation et de son intégration dans une pédagogie n'a pas de sens.

- des recherches sur des aspects concernant toutes les disciplines, déclenchées par la réflexion sur l'intégration de l'informatique et qui la dépasse :

  - la place et le rôle de l'image,
  - le rôle de l'expérimentation,
  - le concept de modélisation,
  - les processus de formalisation et de théorisation.

Ces éléments de réflexion se traitent souvent par une approche unidisciplinaire ou pluridisciplinaire. Reprenons ici la description de la pluridisciplinarité que fait L. Not [88] "*Une perspective pluridisciplinaire, même de convergence, transforme l'objet étudié en un lieu de rencontre entre disciplines dont chacune conserve la spécificité de son objet, l'originalité de ses instruments, celle de ses objectifs généraux et celle de sa problématique*". L'amorce de réflexion sur modèle et modélisation procède bien de cette pluridisciplinarité.

Au-delà de ces approches disciplinaires ou pluridisciplinaires, nous apportons également notre contribution à une approche que nous appellons transdisciplinaire dans la mesure où elle dépasse les disciplines en participant à "*la construction d'un savoir relatif à un objet parfaitement défini qu'est l'éducation*" [88].

Dans ce type d'approche, nous gardons notre spécificité d'enseignant de mathématiques, "*l'objet pourvu de son unité engendre une problématique d'ensemble qui suggère des explorations spécialisées certes mais articulées entre elles*".

La réflexion sur l'environnement de la méthode globale nous permet d'apporter notre contribution à une recherche méthodologique en Sciences de l'Education ou pour une Science de l'Education : "*cette problématique, le savoir unitaire qu'elle vise, les méthodes originales qu'elle met en oeuvre, ne conduisent-ils pas à regarder en direction d'une science spécifique de l'éducation ?*" [88]

Toute la réflexion-théorisation qui nous a amené à rédiger cette thèse a été menée dans le cadre de la formation en groupes. Actuellement confrontés à une évolution du public dans les systèmes de formation, nous oeuvrons au sein du C.U.E.E.P., à améliorer le dispositif de formation en nous tournant vers des formes d'individualisation, de personnalisation, d'auto-formation, de formation à distance. Plus spécifiquement nous poursuivons notre travail comme praticiens et comme chercheurs dans la mise sur pied d'un Centre de Ressources pour l'action collective de Roubaix-Tourcoing.

Le travail touche plusieurs aspects :

1) l'aspect disciplinaire

Un nouveau questionnement précède notre travail de recherche : Est-ce que la méthode globale d'enseignement des mathématiques issue des formations en groupes est transférable à un système d'auto-formation ? Nous formulons une première hypothèse de travail : la méthode globale est transférable à un système d'autoformation à condition de créer l'environnement pédagogique adéquat des outils existants.

2) l'aspect pluridisciplinaire

Le questionnement est le suivant : Est-ce que les formulations ci-dessous sont vraies avec d'autres méthodes d'enseignement, qu'est-ce qui est transférable d'une discipline à une autre, dans le cadre du Centre de Ressources ?

3) l'aspect transdisciplinaire

Pour appréhender un fait éducatif dans son ensemble, plusieurs types de coopération nous paraissent nécessaires :

- coopération entre trois modes de formation (formation collective, formation individualisée, autoformation à domicile)
- coopération entre différents acteurs (formateurs, personnes ressources, agents de développement)
- coopération entre différentes fonctions (formation, formation de formateurs, recherche)

4) l'aspect méthodologique

Le Centre de Ressources doit être le lieu d'expérimentation d'une nouvelle interaction entre formation, recherche, formation de formateurs et production pédagogique. Chaque participant étant alternativement mais simultanément acteur ou chercheur impliqué à des degrés divers.

Dans cette interaction théorie et pratique se renforcent et s'approfondissent mutuellement grâce à une théorisation des pratiques et à une mise en application des théories.

En conclusion finale, nous avons la certitude d'avoir produit un certain nombre d'éléments concernant l'enseignement des mathématiques. En soi, chaque élément est contestable et l'est d'ailleurs au sein même de l'équipe d'enseignants avec laquelle nous travaillons.

Nous avons la certitude que la façon dont ces éléments ont été produits constitue une bonne méthode de travail au sens où elle est féconde pour l'ensemble des participants et où elle tire profit des destabilisations sans destructuration.

C'est ce type de méthode de travail que nous nous proposons d'impulser pour la recherche liée au Centre de Ressources, au sein du Laboratoire Trigone.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.P.M.E.P. - Brochure Inforama 1985 - Commission informatique de l'A.P.M.E.P. , 26 rue Duméril - Paris

[2] BARBIN E., CHARLOT B. - L'enseignement des maths par situations-problèmes au collège - Recherches Didactiques - Formation des Maîtres - IREM Pays de Loire - Octobre 86

[3] BKOUCHE R., SOUFFLET M. - Axiomatique, formalisme et théorie - Bulletin Inter-Irem n° 23 Enseignement de la Géométrie.

[4] DE BLIGNIERES A. - Thèse de doctorat : Pratiques et théorie de la recherche participante dans le domaine de la formation et de l'emploi - Université Paris Nord - Juin 86

[5] BLOOM B. - Taxonomie des objectifs pédagogiques - Education Nouvelle - Montreal

[6] BOURBAKI N. - Eléments d'Histoire des Mathématiques - Editions Hermann - 1960

[7] BRU M. - Chap IV Approches Empiriques : Une Science de l'Education ? - Université de Toulouse le Mirail - 1984 série A - t 26

[8] BRUSTON M., ROUXEL C. - Obstacles et déblocages en mathématiques - Publication APMEP N° 47

[9] CAFOC-Lille - Un dossier pédagogique : Les graphiques en formation d'adultes pour un public de niveau CAP - Octobre - Novembre 1979

[10 Cahiers de la Chronique du Nord-Pas-de-Calais n° 5 - Electronique, informatique, la révolution

[11] CALOT G. - Cours de Statistique descriptive - Dunod - Paris 1969

[12] CASTELNUOVO E. - La Mathématique dans la réalité - CEDIC - Paris 1980

[13] CHARLOT B. - Histoire de la réforme des maths modernes, idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique - Université d'été sur l'histoire des maths - juillet 84 - Université du Maine

[14] CIEM - Rapporting Papers : the influence of computers and informatics on mathematics and its teaching - Strasbourg March 1985

[15] CREEM - IREM - Intervention au Colloque : Du tableau noir vers l'ordinateur graphique - CNAM - Mars 86

[16] C.R.I.C. (Coordination des Ressources Informatiques pour la Classe) - Rôle et place de l'image dans l'enseignement - Journée du 22 janvier 1987

[17] C.N.A.M. - Actes du Colloque : du tableau noir vers l'ordinateur graphique - Mars 86

[18] C.U.E.E.P. Cahier d'Etudes n° 6 - Diffusion CUEEP Lille

[19] C.U.E.E.P. Cahier d'Etudes n° 9 - Diffusion CUEEP Lille

[20] C.U.E.E.P. La formation collective en milieu ouvrier - SILDA, Lille, supplément au n° 215 - Mars 72

[21] C.U.E.E.P - Ensemble MAC 6 - Diffusion C.R.D.P. Lille

[22] C.U.E.E.P. - Ensemble Nanobureautique - Diffusion C.R.D.P. Lille

[23] C.U.E.E.P. Dépt. Maths - Catalogue des Outils pédagogiques disponibles

[24] C.U.E.E.P. Dépt. Maths - Collection : Banque d'idées pour l'enseignement des Maths - diffusion C.R.D.P.

[25] C.U.E.E.P. Dépt. Maths - Ensemble : Organisation des calculs et écriture formelle - Diffusion C.R.D.P. Lille

[26] C.U.E.E.P. Dépt. Maths - Ensemble : Calculette de Courbes Diffusion C.R.D.P. Lille

[27] C.U.E.E.P. Dépt. Maths - Brochure interne : Document Statistiques ESEU pour les formateurs

[28] C.U.E.E.P. Dépt. Maths - Brochure interne : Ajustement de modèles fonctionnels ou probabilistes à des séries statistiques

[29] C.U.E.E.P. Dépt. Maths - Brochure interne : Scénarios pédagogiques utilisant des logiciels existants

[30] C.U.E.E.P. Dépt. Maths - Logarithmes - Document d'apprentissage - 1975

[31] DARCHE M., MONSEILLIER M. - Pour une pédagogie par objectifs en mathématiques - GREPPO IREM d'Orléans - Oct. 76

[32] DARCHEVILLE J.C., VAN ISEGHEM J. - Programmation de l'enseignement de la géométrie - Groupe de travail Géométrie - IREM de Lille

[33] DELANDSHEERE V., DELANDSHEERE G. - Définir les objectifs de l'éducation - PUF - Pédagogie d'aujourd'hui

[34] D'HALLUIN C., GERS J.N. - Calculette, opérateurs et fausses suppositions - Colloque Inter-IREM Saint-Amand - Nov. 83

[35] D'HALLUIN C., GERS J.N., POISSON D. - Des logiciels ouverts au service d'une pédagogie active - Cahier d'études n° 6 du CUEEP

[36] D'HALLUIN C., POISSON D. - Panorama des utilisations de l'ordinateur - Cahiers d'Etudes n° 6 du CUEEP

[37] D'HALLUIN C., POISSON D. - Quelle formation en mathématiques pour les adultes ? - Oct. 87 - Document interne Dépt. Math CUEEP

[38] D'HALLUIN C., POISSON D., POLLET M., SIMON G. - A propos du Support tableau, ... quelques scénarii d'utilisation du logiciel Nanotab - Brochure IREM - CUEEP Lille 1986

[39] DOLLE J.M. - Pour comprendre Piaget - Ed. Privat Pensée

[40] DOUADY R. - Thèse de Doctorat d'Etat en didactique : Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques - Octobre 84 - Paris VII

[41] DUBAR C., FEUTRIE M., MLEKUZ G. - Le public de la formation collective - Lille, ADAFCO de la zone de Sallaumines-Noyelles

[42] DUBAR C., FEUTRIE M., MLEKUZ G. - La volonté de former - Lille, ADAFCO de la zone de Sallaumines-Noyelles - Université de Lille I, janvier 1978

[43] DUBAR C., WAGNON C. - Analyse du public de l'ESEU dans le Nord-Pas-de-Calais - 1982

[44] DUMONT M. - La planète très sotte - Document du lycée St-Germain en Laye

[45] Education Permanente n° spécial EAO - 70-71 Déc 83

[46] ELIE A. - Action de formation dans le bassin férifère lorrain - Education permanente

[47] EPI - Revue de l'Enseignement Public et Informatique

[48] FEUTRIE M. - Le public des actions collectives de formation dans la région Nord-Pas-de-Calais - Lille ORICEP, Université de Lille I, Mars 79

[49] FLETCHER T.J. - L'algèbre linéaire par ses applications - Collection CEDIC 1972

[50] FREUDENTHAL H. - Mathematics as an Educationnal TAsk - R. Reidel Publishing Company

[51] GADREY J. - A propos du plan mathématique et du plan physique- Réalité expérimentale, modèles et théories - Revue APMEP Juin 1973 N° 289

[52] GERS J.N. - La formulette : un outil pour l'apprentissage de l'algèbre - Université de Lille I - DEA 27/11/87

[53] GERS J.N., LOOSFELT P., POISSON D. - Les mathématiques du consommateur, le consommateur de mathématiques - Publication IREM de Lille - CUEEP

[54] GILBERT T. - La perspective en question - Proposition 12 - GEM Louvain La Neuve

[55] GLAYMAN M. - La mathématique et ses applications - Séminaire E. Galion - Valloire 1972 - Collection CEDIC

[56] GRAS R. - Quelques problèmes de mathématiques pluridisciplinaires pour les 1ers et 2nds cycles secondaires - Université de Rennes 72-73

[57] HAGEGE M. - Calcul des probabilités et applications OCDL

[58] HAMELINE D. - Formuler des objectifs pédagogiques mode passagère ou voie d'avenir - Université de Paris Dauphine - Juin 76

[59] HAUCHART C. - Sur l'appropriation des concepts de suite et de limite de suite - Dissertation doctorale 1985 - Université Catholique de Louvain-La-Neuve

[60] HEDOUX J. - Non-publics, publics de la formation d'adultes - Thèse de 3ème cycle - Université de Lille III - 1980

[61] IFOREP - Colloque sur l'évaluation dans l'enseignement - Université de Valenciennes - Oct. 1984

[62] Centre INFFO - Actes du colloque : Formations individualisées et modulaires - mai 87

[63] Centre INFFO - Informatique et formation - Revue Actualité de la formation permanente n° 86

[64] INRP - Imagiciels : enseignement des mathématiques illustré par ordinateur, rencontres pédagogiques n° 1 - 1983

[65] Inter-IREM - Bulletin n° XX - Enseignement de l'analyse

[66] Inter-IREM - Bulletin n° XXI - Le rétroprojecteur (J. Rogeon, J. Delerue)

[67] Inter-IREM - Actes du Colloque - GEDEOP - Limoges 1979

[68] Inter-IREM - Histoire et épistémologie des mathématiques - Rôle des problèmes dans l'histoire et l'activité mathématique - Mai-Juin 1985

[69] Inter-IREM - Epistémologie et histoire des sciences - La rigueur et le calcul - CEDIC

[70] IREM de DIJON - Pour une approche heuristique de l'enseignement de l'analyse - (D. Reisz, C. Wasseur) - 1978

[71] IREM de Lille - Bulletin Spécial Activités en Seconde - 1981

[72] IREM d'Orléans - Pédagogie par objectifs/objectifs en pédagogie - Acte du colloque 1977

[73] KAHANE J.P. - Mathématique comme discipline de service - Bulletin APMEP n° 353 Avril 86

[74] KAUFMANN A., FAURE R. - Invitation à la Recherche Opérationnelle - Dunod-Entreprise

[75] KUNTZMANN J. - Au-delà de "mathématique moderne" - Bulletin APMEP n° 290 Sept 73

[76] LANG S. - A first course in calculus - Addison-Nesley, Reading 1978

[77] LEGRAND M. - Colloque : Orientations et échecs dans l'enseignement supérieur et secondaire, Commission II -Paris-Dauphine - 22 et 23 Mai 1987

[78] LOCQUENEUX R., MAITTE B., POURPRIX B. - Les statuts épistémologiques des modèles de la théorie des gaz dans les oeuvres de Maxwell et Blotzmann - Fundamenta Scientiae Vol 4 - 1983

[79] LOI M., DIEUDONNE J., THOM R. - Penser les mathématiques - Séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure - Editions du Seuil

[80] LOOSFELT P. - Un ensemble technico-pédagogique de traitement de communication sur écran de télévision Thèse de Docteur Ingénieur - 1977

[81] LOOSFELT P. - Etude et conception d'un système de comunication pour l'EAO : Le Nanoréseau - Thèse d'Etat - Université de Lille I - Sept 86

[82] LOOSFELT P., POISSON D. - Mathématiques pour la formation d'adultes - Publication APMEP - 1975

[83] LOOSFELT P., POISSON D. - Contre la mystique de l'algèbre - Revue Education Permanente n° 49-50 - 1979

[84] MAITTE B. - Formalisation et expérimentation en physique - Groupe Histoire des Sciences et Epistémologie - Université de Lille I

[85] MATEMACTIVES - (D. Péchillon, B. Cazier, Y. Martin, J.L. Wattez) - IREM de Lille

[86] MERCIER J. - L'activité mathématique : réflexions sur une intervention pédagogique en formation continue - IREM de Lille

[87] MLEKUZ G. - Milieu ouvrier et formation permanente en pays minier - Pour Paris n°65 - Mars-Avril 79

[88] NOT L. - Sciences ou Science de l'éducation Chap. 1 "Une science de l'éducation ?" - Université de Toulouse Le Mirail - 1984 série A t 26

[89] PAPERT S. - Jaillissement de l'esprit - Flammarion

[90] PECHILLON D., POISSON D. - Mathématisation, modélisation, matériaux pour des mathématiques actives Colloque Inter-IREM : Enseignement de l'analyse - Orléans - Juin 81

[91] PIAGET J. - Psychologie et épistémologie, Pour une théorie de la connaissance - Ed. Denoël Méditations

[92] PIAGET J. - L'épistémologie génétique - Paris PUF - 1970

[93] PIAGET J., INHELBER B. - L'image mentale chez l'enfant - PUF 1960

[94] PICARD N. - Evaluation de l'enseignement des mathématiques dans la société française en 1982

[95] POISSON D. - Pente-Hauteur-Surface - IREM de Lille - 1978

[96] POISSON D. - Analyse de la ville de New York - IREM de Lille - 1978

[97] POISSON D. - Faut-il centrer la formation de formateurs d'adultes sur la matière - Acte du 6ème Colloque Formation continue - Universités du Nord - Juin 80

[98] POISSON D., D'HALLUIN C. - Utilisation de la configuration nanoréseau - Colloque - du tableau noir à l'ordinateur graphique mars 86 - CNAM

[99] Col. QUEYSANNE et REVUZ - Classe de 4ème

[100] ROUCHE N. - Les idées qu'on se fait des mathématiques - Symposium International : Construire une éthique de l'enseignement scientifique - Presse Universitaire de Namur - 10-12 Nov. 1986

[101] ROUCHE N. - Construire l'apprentissage comme objet de recherche (à paraître)

[102] SCHEEPEREEL M. - Machine à calculer, calculatrice programmable - Groupe de travail sur les machines à calculer - IREM de Lille

[103] SCHWARTZ B. - Une autre école - Paris Flammarion - 1977

[104] SCHWARTZ B., MIGEON M., CHASTRETTE M. - Formation d'objectifs et gestion du temps. Le développement d'une école française - Revue Education permanente n° 53 - 1980

[105] SEDIMA - Séminaire de didactique de la mathématique - UCL Louvain-la-Neuve

SOMMAIRE

RESUME

Ce travail s'appuie sur une discipline : les mathématiques, dans le contexte d'éducation permanente pour un public adulte en échec scolaire dans une région sous-scolarisée le Nord-Pas-de-Calais.

Il s'agit de formaliser et de théoriser des recherches pédagogiques ayant abouti à une méthode globale d'enseignement des mathématiques et d'analyser l'environnement qui a permis cette réalisation, afin d'en dégager les aspects pédagogiques transférables et les aspects méthodologiques dans des recherches-actions de type stratégique visant à transformer pour les améliorer des dispositifs de formation.

Dans le cadre d'une pédagogie active et par objectifs, cette stratégie d'enseignement des mathématiques repose sur la mathématisation de situations. Elle intègre l'informatique comme outil et mode de pensée pour expérimenter, visualiser et par des manipulations structurantes sur des supports, accéder aux modèles et la théorie.

Nous étudions la performance de cette méthode d'abord sous l'angle de la discipline : est-elle transférable dans le contexte de la formation initiale ? Ensuite nous nous intéressons aux interactions entre la méthode globale et la pédagogie par objectifs.

Ayant été à la fois acteurs (formation directe sur le terrain), responsables d'actions (dispositif de formation de formateurs) et chercheurs, nous contribuons à l'analyse de la double dialectique pratique/théorie, action/recherche dans le cadre de l'implication de l'Université dans une action éducative.

MOTS CLES

MATHEMATISATION

SITUATIONS-PROBLEMES

INFORMATIQUE PEDAGOGIQUE

PEDAGOGIE PAR OBJECTIFS

RECHERCHE-ACTION

PRATIQUE/THEORIE

SUPPORT/MODELE/THEORIE