50376
1988
61

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

50376
1988
61

THESE

N° d'ordre 243

présentée par

Catherine RECH

Ingénieur E.N.S.E.E.I.H.T.

pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois

(arrêté ministériel du 5 Juillet 1984)

Spécialité : **Productique : Automatique et Informatique Industrielle .**

==========

COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE STRUCTURELLES DES SYSTEMES INTERCONNECTES .

==========

soutenue le 7 Juin 1988 devant la commission d'examen :

Monsieur	P.VIDAL	Président
Messieurs	J.M. DION	Examinateurs
	F.J. EVANS	
	R.PERRET	
	L.POVY	
Mademoiselle	L.TRAVE	

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Automatique de Grenoble.

NIVERSITE DES SCIENCES
T TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

M. A. DUBRULLE.

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie végétale
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie-Physique
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DHAINAUT André	Biologie animale
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOCT Jacques	Métallurgie
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GRANELLE Jean jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie organique
M. LACOSTE Louis	Biologie végétale
M. LAVEINE Jean Pierre	Paléontologie
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique atomique et moléculaire
M. LEROY Jean Marie	Spectrochimie
M. LHOMME Jean	Chimie organique biologique
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie physique
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M. PAQUET Jacques	Géologie générale
M. PETIT Francis	Chimie organique
M. POUZET Pierre	Modélisation - Calcul scientifique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joel	Spectroscopie moléculaire
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
Mlle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. TILLIEU Jacques	Physique théorique
M. TOULOTTE Jean Marc	Automatique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ALLAMANDO Etienne	Composants électroniques
M. ANDRIES Jean Claude	Biologie des organismes
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie animale
M. BASSERY Louis	Génie des procédés et réactions chimiques
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique atomique et moléculaire
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques et Sociales
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie végétale
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie civil
M. BOIVIN Jean Claude	Spectrochimie
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie animale
M. CATTEAU Jean pierre	Chimie organique
M. CAYATTE Jean Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie structurale
M. CHIVE Maurice	Composants électroniques optiques
M. COMYN Gérard	Informatique théorique
M. COQUERY Jean Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques et Sociales
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique nucléaire et corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie organique
M. CRAMPON Norbert	Tectolique Géodynamique
M. CROSNIER Yves	Electronique
M. CURGY Jean jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELORME Pierre	Physiologie animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DEPREZ Gilbert	Physique du solide - Cristallographie
M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
Mle DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides

M. DUPONT Christophe	Vie de la firme (I.A.E.)
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FAUQUEMBERGUE Renaud	Composants électroniques
M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie structurale
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démographie
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie physique
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie organique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. HENRY Jean Pierre	Génie mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. HOUDART René	Physique atomique
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et statistiques
M. JEAN Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme (I.A.E.)
M. JOURNEL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques
M. LATTEUX Michel	Informatique
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEVRE Christian	Pétrologie
Mle LEGRAND Denise	Algèbre
Mle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne
M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme (I.A.E.)
M. LEROY Yves	Composants électroniques
M. LESENNE Jacques	Systèmes electroniques
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques et Sociales
M. MESMACQUE Gérard	Génie Mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée

M. PERTUZON Emile	Physiologie animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie physique
M. PORCHET Maurice	Biologie animale
M. POSTAIRE Jack	Informatique industrielle
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie animale
M. RIETSCH François	Physique des polymères
M. ROBINET Jean CLaude	EUDIL
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean Claude	Psychophysiologie
Mme SCHWARZBACH Yvette	Géométrie
M. SLIWA Henri	Chimie organique
M. SOMME Jean	Géographie
M. STAROSWIECKI Marcel	Informatique
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Génie alimentaire
M. THERY Pierre	Systèmes électroniques
M. THIEBAULT François	Sciences de la terre
M. THUMERELLE Pierre	Démographie - Géographie Humaine
Mme TJOTTA Jacqueline	Mathématiques
M. TOURSEL Bernard	Informatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du Travail
M. TURREL Georges	Spectrochimie infrarouge et Raman
M. VANDORPE Bernard	Chimie minérale
M. VASSEUR Christian	Automatique
M. VAST Pierre	Chimie inorganique
M. VERBERT André	Biochimie
M. VERNET Philippe	Génétique
M. WACRENIER Jean Marie	Electronique
M. WALLART Francis	Spectrochimie infrarouge et Raman
M. WARTEL Michel	Chimie inorganique
M. WATERLOT Michel	Géologie générale
M. WEINSTEIN Olivier	Analyse économique de la recherche et développement
M. WERNER Georges	Informatique théorique
M. WOZNIAK Michel	Spectrochimie
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Algèbre

A mes parents,
A ma soeur,
Avec reconnaissance et
affection.

A mes amis .

AVANT-PROPOS .

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein de l'équipe "Systèmes Hiérarchisés " du Laboratoire d'Automatique de Grenoble (L.A.G.) dans le cadre d'un contrat avec le Ministère de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur.

Nous remercions vivement :

Monsieur I.D.LANDAU , Directeur du L.A.G, pour avoir mis à notre disposition toute l'infrastructure nécessaire à l'élaboration de cette étude .

Monsieur P.VIDAL , Professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille, d'avoir bien voulu nous accorder une allocation de recherche et accepter de présider cette thèse .

Monsieur R.PERRET, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble . Nous lui exprimons notre profonde et respectueuse gratitude pour la confiance qu' il nous a témoignée tout au long de ce travail, ses encouragements et ses conseils .

Monsieur F.J. EVANS, Professeur au South Bank Polytechnic de Londres qui nous a fait l'honneur de juger ce travail et de participer au jury .

Monsieur A.TITLI, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse,de s'être intéressé à notre travail .

Mademoiselle L.TRAVE, Chargée de recherche C.N.R.S. au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes de Toulouse,pour ses encouragements amicaux ,ses suggestions et pour avoir accepté d'être rapporteur de ce travail .

Monsieur J.M. DION, Chargé de Recherche C.N.R.S. au Laboratoire d'Automatique de Grenoble, pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail et les remarques qu'il nous a prodiguées avec beaucoup de gentillesse .

Monsieur L.POVY, Professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille ,qui a accepté de participer à ce jury .

Nos remerciements vont aussi à :

Monsieur Z.BINDER, Ingénieur de Recherche C.N.R.S au L.A.G.,pour tout ce qu'il nous a donné d'accueil,d'attention morale, matérielle et scientifique .Nous lui en sommes très reconnaissante .

Monsieur C.PAYAN,Directeur de Recherche C.N.R.S. à l'Institut des Mathématiques Appliquées de Grenoble,et son équipe,qui ont contribué à nous donner le goût de la Théorie des Graphes .

Notre collègue C.PILLOU ,pour sa coopération pendant la période consacrée à son projet de D.E.A.

Tout le personnel du L.A.G. et les membres de l'équipe "Systèmes Hiérarchisés" pour leur accueil,leur sympathie ou leur aide .

Madame M.T. DESCOTES-GENON et Mademoiselle D.PASQUAL qui ont assuré la dactylographie de cet ouvrage avec beaucoup de gentillesse et de compétence .

TABLE DES MATIERES

	Pages
ABREVIATIONS et NOTATIONS	23
INTRODUCTION.	25
CHAPITRE I : **De la commandabilité de KALMAN à la commandabilité structurelle, LIN (1972).**	29
I.1 Introduction.	29
I.2 Commandabilité de KALMAN : Rappels.	29
I.2.1 Commandabilité.	29
I.2.2 Critères de commandabilité.	31
I.3 Observabilité de KALMAN : Rappels.	35
I.3.1 Observabilité.	35
I.3.2 Dualité.	35
I.3.3 Critères d'observabilité.	35
I.4 Commandabilité structurelle, LIN (1972).	36
I.4.1 Structure ; matrice, système, paire structurés.	37
I.4.1.1 Structure : **LIN** (1972).	37
I.4.1.2 Matrice structurée.	38

I.4.1.3 Matrice admissible. 39
I.4.1.4 Paire et système structurés. 39
I.4.2 Commandabilité structurelle. 39

I.5 Conclusion. 40

CHAPITRE II : **Présentation des outils.** 43

II.1 Introduction. 43

II.2 Indépendance algébrique. 44
II.2.1 Polynôme non trivial dans un anneau K. 44
II.2.2 Elément algébrique dans K. 44
II.2.3 Ensemble des paramètres algébriquement indépendants. 44
II.2.4 Ensemble ou variété algébrique V. 44

II.3 Généricité - propriété générique. 44
II.3.1 Définition. 45
II.3.2 Conséquences de la généricité. 45
II.3.3 Rang générique. 45

II.4 Rang terme. 46
II.4.1 Définition. 46
II.4.2 Comparaison du rang générique et du rang terme. 47
II.4.2.1 Propriétés. 47
II.4.2.2 Contre-exemple . 47
II.4.2.3 Exemple 23. 47
II.4.2.4 Exemple 24. 48
II.4.2.5 Remarques. 48

II.5 Eléments de l'algèbre booléenne. 49
II.5.1 Matrice booléenne M_B associée à M_S. 49
II.5.2 Matrice de permutation M_P - matrice de permutation maximale M_{PMAX}. 49

II.6 Théorie des graphes. 50
II.6.1 Eléments classiques. 50
II.6.1.1 Graphe orienté associé à M_S. 50
II.6.1.2 Graphe antécédent. 51
II.6.1.3 Graphe accessible à un noeud. 51
II.6.1.4 Graphe biparti associé à M_S. 51
II.6.1.5 Couplage maximum dans un graphe biparti. 52
II.6.1.6 Couverture d'un sommet par un couplage. 52
II.6.1.7 Arborescence de racine x. 52
II.6.1.8 Couverture d'un graphe orienté G par un graphe G'. 52
II.6.2 Graphes spécifiques. 53
II.6.2.1 Tige. 53
II.6.2.2 Bouton. 53
II.6.2.3 Cactus. 54
II.6.2.3.1 Cactus à une origine. 54
II.6.2.3.2 Cactus à plusieurs origines. 54

II.7 Interprétation booléenne et graphique du rang-terme. 55
II.7.1 Proposition 1. 55
II.7.2 Proposition 2. 56

II.8 Déficience en rang d'une matrice structurée. 56
II.8.1 Concept de dilatation : [LIN, 1972, 1974]. 56
II.8.2 Caractérisation algébrique d'une dilatation. 57
II.8.3 Détection des valeurs propres nulles structurelles dans une matrice structurée carrée. 58
II.8.3.1 Définitions. 58
II.8.3.2 Invariants de $M_S(M_B)$ par une transformation. 59

II.9 Principaux algorithmes de calcul du rang générique d'une matrice M. 60

II.9.1 Introduction. 60

II.9.1.1 Algorithmes de détermination d'un couplage maximum dans un graphe biparti. 60

II.9.1.2 Décomposition en composantes cycliques et acycliques. 60

II.9.1.3 Algorithmes algébriques. 61

II.9.1.3.1 Fixed - zero - rank - finder : [SHIELDS et PEARSON, 1976]. 61

II.9.1.3.2 Génération aléatoire de paramètres : [DAVISON, 1977]. 61

II.9.1.3.3 Mise sous forme d'échelons de lignes : [MORARI et STEPHANOPOULOS, 1980]. 61

II.9.1.3.4 Algorithme de JOHNSTON et BARTON (1984). 62

II.9.I.3.5 Autre algorithme : [PILLOU, 1987]. 64

II.10 Accessibilité d'un graphe G(X, U) à un ensemble de noeuds. 64

II.10.1 Introduction. 64

II.10.1.1 Méthodes graphiques d'exploration en profondeur. 65

II.10.1.2 Méthode algébrique : algorithme de ROY - WARSHALL (1962). 65

II.11 Conclusion. 65

CHAPITRE III : Revue des critères de commandabilité structurelle d'un système structuré. 67

III.1 Introduction. 67

III.2 Commandabilité structurelle : critères et propriétés. 68

III.2.1 Application des préliminaires mathématiques à la description de (A_S, B_S). 68
III.2.2 Revue des critères existants. 69
III.2.2.1 Théorème 1 [MUROTA, 1987]. 69
III.2.2.2 Remarques. 69
III.2.2.3 Formulation classique [LIN, 1972, 1974]. 70
III.2.2.3.1Test d'accessibilité de GLOVER et SILVERMAN (1976). 71
III.2.2.3.2 Matrice d'atteignabilité. 71
III.2.2.4 Interprétation modale. 72
III.2.2.5 Couverture par un cactus : [LIN, 1972, 1974]. 75
III.2.2.6 Note sur les équivalences des critères. 76
III.2.2.7 Approche de ROSENBROCK. 77
III.2.2.7.1 Critère classique : [SHIELDS et PEARSON, 1976].77
III.2.2.7.2 Approche matrices systèmes polynomiales : [MAIONE et TURCHIANO, 1986]. 78
III.2.2.8 Exploitation de l'accessibilité : [SILJAK, 1977]. 80
III.2.2.9 Forme canonique de JORDAN associée à une matrice structurée :[HOSOE et MATSUMOTO, 1979]. 81
III.2.3.0 Critère de commandabilité structurelle de sortie. 82
III.2.3.1 Commandabilité structurelle forte. 83

III.3 Commandabilité structurelle au sens minimal. 84
III.3.1 Cactus - Structure minimale : [LIN, 1976]. 84
III.3.2 Cactus - Pseudo - diagonalisation de (A_S, B_S). 85
III.3.2.1 Extraction d'un cactus couvrant une paire (A_S, B_S) S.C 85
III.3.2.2 Interprétation du cactus. 87
III.3.3 Commande avec un nombre minimum d'entrées. 88
III.3.3.1 Méthode de REINSCHKE (1981). 88

III.4 Méthodes de décomposition du critère de commandabilité structurelle. 92
III.4.1 Introduction. 92
III.4.2 Décomposition de $G(A_S)$ en composantes fortement connexes. 92

III.4.2.1 Accessibilité sur la forme bloc triangulaire T de A_S : [REINSCHKE, 1981] [TRAVE et TITLI, 1985]. 93
III.4.2.2 Rang générique de T. 93
III.4.2.2.1 Algorithme séquentiel de TRAVE et TITLI (1985). 93
III.4.3 Interconnexion hiérarchisée de N sous-systèmes. 100
III.4.4 Décomposition de $G(A_S, B_S)$ en composantes structurellement commandables : [SEZER et SILJAK, 1981], [PICHAI,SEZER et SILJAK, 1983]. 101
III.4.4.1 Décomposition acyclique en sous- systèmes irréductibles accessibles aux entrées. 101
III.4.4.2 Décomposition acyclique en sous-systèmes structurellement commandables. 102
III.4.4.3 Critère de commandabilité structurelle. 103

III.5 Conclusion. 104

CHAPITRE IV : Commandabilité structurelle des systèmes interconnectés. 107

IV.1 Introduction. 107

IV.2 Généralisation de la méthode de TRAVE et TITLI. 108
IV.2.1 Théorèmes. 108
IV.2.2 Exemple. 110
IV.2.3 Analyse de la méthode. 111

IV.3 Résultats de DAVISON (1977). 112

IV.4 Cas de simplification du critère structurel : exploitation des propriétés des sous-systèmes. 113
IV.4.1 Commande de A par B. 113
IV.4.1.1 Proposition 1. 113
IV.4.1.2 Proposition 2. 113
IV.4.2 Commande de A par B_i. 113
IV.4.3 Conclusion. 115

IV.5 Approche graphique fondée sur le cactus. 115
IV.5.1 Préliminaires. 115
IV.5.1.1 Cas où (Σ_i) est structurellement commandable au sens minimal, $\forall$ i = 1, ..., N. 117
IV.5.1.1.1 Deux sous-systèmes (Σ_1), (Σ_2). 117
a-1 Cas mono-entrée. 117
a-2 Cas multi-entrées. 119
IV.5.1.1.2 N sous-systèmes (Σ_i),V i = 1, ..., N. 121
a-1 Cas mono-entrée. 121
a-2 Cas multi-entrées. 125
IV.5.1.2 Cas où (Σ_i) est structurellement commandable,$\forall$i = 1, ..., N 125
IV.5.2 Conclusion. 125

CHAPITRE V : **Observabilité structurelle.** 127

V.1 Introduction. 127

V.2 Observabilité structurelle d'un système isolé (C_S, A_S). 127
V.2.1 Définition. 127
V.2.2 Principaux critères. 127
V.2.3 Observation avec un nombre minimum de points de mesure. 129
V.2.3.1 Méthode de REINSCHKE (1981). 129

V.3 Méthodes de décomposition. 131

V.3.1 Décomposition de $G(A_S)$ en composantes fortement connexes. 131
V.3.2 Décomposition de $G(A^T_S, C^T_S)$ en composantes structurellement observables. 131

V.4 Systèmes interconnectés. 132
V.4.1 Méthode séquentielle généralisée. 132
V.4.2 Cas de simplification du critère structurel. 133
V.4.3 Approche cactus. 133
V.4.3.1 Définition d'un cactus par rapport aux sorties. 133
a-1 Cas mono-sortie. 133
a-2 Cas multi-sorties. 134
V.4.3.2 Principaux résultats. 137
V.4.3.2.1 Deux sous-systèmes. 138
a-1 Cas mono-sortie. 138
a-2 Cas multi-sorties. 138
V.4.3.2.2 N sous-systèmes. 139
V.4.4 Configuration FEEDBACK d'un système isolé : [MORARI 1977, REINSCHKE 1984, 1985]. 140
V.4.4.1 Régulateur proportionnel-intégral : [MORARI, 1977]. 140
V.4.4.2 Retour de sortie : [REINSCHKE, 1984]. 141

V.5 Conclusion. 142

CHAPITRE VI : **Problèmes de robustesse.** 143

VI.1 Introduction. 143

VI.2 Systèmes robustes aux changements de structures pour l'observabilité. 143
VI.2.1 Ruptures d'actionneurs. 143
VI.2.1.1 Formulation du problème. 144
VI.2.1.2 Principaux résultats. 144

1. Partition en composantes fortement connexes. 145
2. Partition en composantes structurellement commandables. 146
3. Couverture par une arborescence de cacti. 148
VI.2.2 Ruptures d'interconnexions. 148
1. Partition en composantes fortement connexes. 148
2. Partition en composantes structurellement commandables. 149
3. Approche cactus. 149

VI.3 Robustesse pour l'observabilité. 149
VI.3.1 Ruptures de capteurs. 149
VI.3.2 Ruptures de liaisons. 151

VI.4 Conclusion. 151

CONCLUSION. 153

ANNEXES. 157

BIBLIOGRAPHIE. 167

- Partie A. 167

- Partie B. 177

ABREVIATIONS ET NOTATIONS

ssi : si et seulement si.

S.C : structurellement commandable.

S.O : structurellement observable.

M.S.C : structurellement commandable au sens minimal.

M.S.O : structurellement observable au sens minimal.

A : matrice d'état.

B : matrice de commande.

C : matrice de sortie.

X : vecteur d'état.

Y : vecteur de sortie.

U : vecteur d'entrée.

$\mathcal{I}$: matrice d'interconnexion.

L'indice S indique la structure des matrices et sera quelquefois omis.

Card : cardinal.

$G(\mathcal{X}, \mathcal{U})$: graphe d'ensemble de sommets $\mathcal{X}$ et d'arcs $\mathcal{U}$.

G(A, B) : graphe associé à la paire (A, B) où $\mathcal{X}$ = {sommets états et commandes} noté $\mathcal{X}$={X, U}et $\mathcal{U}$ est défini par A et B soit par convention $\mathcal{U}$ = {A, B}.

G(A, C) : graphe associé à la paire (A, C) où $\mathcal{X}$ = {X, Y} et $\mathcal{U}$ = {A, C}.

INTRODUCTION

L'une des caractéristiques essentielles des grands systèmes est qu'ils représentent en général un réseau complexe d'éléments en intéraction. Il est alors intéressant de déterminer a priori si certaines propriétés quantitatives ont la chance d'être satisfaites, à partir d'une analyse purement structurelle ; en effet, cela évite éventuellement la mise en oeuvre inutile de calculs numériques lourds. Nous envisagerons ici la classe particulière des systèmes interconnectés linéaires dynamiques invariants dont la structure fondée sur l'existence des interconnexions entre les différentes unités et des intéractions internes à celles-ci, permet de conclure à la possibilité de le gouverner ou de l'observer.
Une deuxième raison de favoriser les études structurelles et qui en justifie tout le fondement, est que les paramètres d'un modèle sont imparfaitement connus, a fortiori pour les grandes dimensions.

Enfin, il faut souligner la commodité des outils mis en jeu permettant de traiter ces informations de type binaire, tels les graphes et l'algèbre booléenne.

Bien que cette caractérisation du système ait l'avantage d'être simple, encore faut-il résoudre le problème de la dimension. Pour les grands systèmes, les méthodes classiques d'optimisation, de commande ou de conception nécessitent des principes de décomposition ou d'agrégation pour ramener à une échelle maîtrisable le domaine sur lequel s'appliquent les techniques utilisées. Il en va de même pour l'approche structurelle. La stratégie de décomposition ne date pas d'aujourd'hui et s'inspire de celle de la résolution des grands systèmes d'équations algébriques dont on exploitera dans ce travail la mise sous forme blocs triangulaires des matrices. On peut, d'autre part, utiliser directement la décomposition physique en sous-systèmes et exprimer le problème global en sous-problèmes liés à chaque unité locale.

Dans ce contexte, nous nous proposons de trouver des ensembles minimum de commandes ou de points de mesures pour commander ou observer un système interconnecté. Cette étude aborde l'extension à ces types de procédés, des résultats de commandabilité et d'observabilité structurelle définis par LIN pour un système isolé ; elle se divise en cinq parties.

Dans le premier chapitre, nous rappelons brièvement les principaux critères de commandabilité au sens de KALMAN, dans le but de les mettre en parallèle avec ceux dits structurels. Nous introduisons ensuite le concept de LIN, fondé sur un modèle d'état structuré du

système.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les outils graphiques, booléens et structurés familiers à ce domaine. Nous donnons ensuite l'éventail des méthodes existant dans la littérature permettant le calcul du rang générique et le test d'accessibilité, deux aspects à la base des critères de commandabilité structurelle. Ceci est réalisé aussi bien en termes graphiques que booléens. La sélection des algorithmes dans la théorie des graphes nous a ouvert un large champ d'investigation qui à lui seul pourrait être l'objet d'un développement plus étendu. Ceci a conduit à une étude de projet de D.E.A. menée en parallèle, [PILLOU, 87].

Dans le troisième chapitre, nous passons en revue les différents critères de commandabilité structurelle pour un système isolé, les algorithmes disponibles pour la détermination du nombre minimum de commandes et les méthodes de décomposition développées jusqu'à présent. Cette synthèse est réalisée de manière objective et évite les conclusions trop définitives avec cependant des commentaires sur certains points de vue. Nous soulignons l'intérêt de certains graphes appelés "cactus" (spécifiques à LIN) dont nous proposons une méthode d'obtention.

D'une manière générale, la synthèse bibliographique qui constitue ces trois premiers chapitres est assez détaillée, par souci pédagogique et parce que son élaboration est le produit de toute une étape de notre travail. Elle est non exhaustive dans le domaine en général puisque nous n'abordons pas en particulier la classe des systèmes descripteurs à la source de nombreuses publications (nous en citons seulement les références) ; par contre, nous mentionnons tous les travaux portés à notre connaissance, concernant les systèmes décrits par un modèle d'état classique.

Dans le quatrième chapitre, nous généralisons une méthode de décomposition introduite pour une classe particulière de systèmes hiérarchisés vue au précédent chapitre ; son principe repose sur une détermination séquentielle algébrique du rang générique .
Nous proposons ensuite une condition suffisante de commandabilité structurelle fondée sur l'approche "cactus", facilement exploitable pour la conception d'un système interconnecté : sous l'hypothèse que chaque sous-système est structurellement commandable , cela consiste à rechercher graphiquement la manière d'extraire un cactus de la matrice d'état globale en utilisant les cacti couvrant chaque sous-système .

Dans le cinquième chapitre, nous examinons les principales propriétés d'observabilité structurelle duales de celles exprimées aux précédents chapitres ; nous définissons en particulier la notion de "cactus par rapport aux sorties" .

Dans le sixième et dernier chapitre, nous abordons les problèmes de robustesse aux

changements de structure dus aux ruptures d'actionneurs ,de liaisons ou de capteurs.Ceci est évalué sur les différentes représentations du système interconnecté, liées aux diverses décompositions.

CHAPITRE I

DE LA COMMANDABILITE DE KALMAN A LA COMMANDABILITE STRUCTURELLE, LIN (1972).

I.1 INTRODUCTION.

Soit un système dynamique linéaire invariant (S) à n états, m commandes et p sorties. Supposons qu'il soit décrit en continu par :

son équation d'état $\frac{d\,x(t)}{dt} = A\,x(t) + B\,u(t)$

(I.1)

et son équation d'observation $y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$

où A(nxn), B(nxm), C(pxn), D(pxm) sont des matrices constantes dans le temps, x(t) et y(t) étant l'état et la sortie à l'instant t.

Nous avons essayé de rappeler ici de la manière la plus concise mais la plus complète pour préparer la voie du domaine structurel, les notions fondamentales de la commandabilité au sens usuel, [KALMAN, 1960], accessibles dans tous les grands classiques de la théorie des systèmes linéaires.
Cependant, en plus des ouvrages de ROSENBROCK (1970) et de RUBIO (1971), nous nous sommes particulièrement inspiré de celui de POPOV (1973) qui nous permettra d'introduire avec continuité les travaux de LIN et de mieux distinguer ce qui est réellement nouveau dans cette approche structurelle. Cette similitude dans la forme et dans le fond n'est pas étonnante puisque LIN a réalisé sa thèse sous la direction de POPOV.

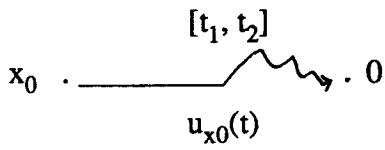
I.2 COMMANDABILITE DE KALMAN : rappels.

I.2.1 Commandabilité.

Définition CK1 : L'état $x_0(t)$ est **commandable** ssi quel que soit l'intervalle $[t_1, t_2]$ il existe une

fonction continue $u_{x0}(t)$ définie dans $[t_1,t_2]$ telle que la solution du système (I.1) pour $u(t) = u_{x0}(t)$ et $x(t_1) = x_0$ satisfasse à la condition $x(t_2) = 0$.

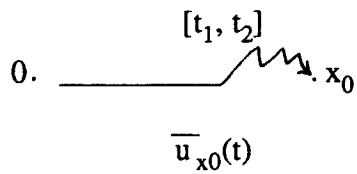
Ce que l'on peut schématiquement représenter par :



Définition CK2 : Le système (I.1) ou la paire (A,B) est commandable ssi la propriété CK1 est vraie pour tous les états et tous les intervalles]t1,t2[.

Définition CK3 : Le système (I.1) ou la paire (A,B) est **accessible** ssi quels que soient l'état x_0 et l'intervalle $]t_1, t_2[$, il existe une fonction continue $\bar{u}_{x0}(t)$ définie dans $[t_1,t_2]$ telle que la solution du système (I.1) pour $u(t) = \bar{u}_{x0}(t)$ et $x(t_1) = 0$ satisfasse à la condition $x(t_2) = x_0$

Soit :



Propriété CK4 : En vertu de la linéarité du système (I.1), les propositions CK2 et CK3 sont équivalentes.

Remarques :

i1) Pour des systèmes discrets ou plus complexes (non stationnaires), CK1 n'est pas vérifiée et les propriétés de commandabilité et d'accessibilité restent distinctes. Pour la classe des systèmes qui nous concernent, cette équivalence est fondamentale même s'il n'y a pas de raison a priori d'en distinguer les deux parties. En effet nous verrons que dans l'approche structurelle les résultats ne sont pas aussi simples.

i2) Certains auteurs préfèrent parler de commandabilité complète dans la définition CK2, pour spécifier qu'il s'agit de tous les états. Ceci peut prêter à confusion avec la notion de système complet aussi choisissons-nous la formulation la plus simple.

i3) On trouve fréquemment l'énoncé suivant :

Définition CK5 : Le système (I.1) ou la paire (A,B) est commandable ssi quels que soient les états x_0, x_1 il existe $t_1>0$ et une fonction continue $\bar{u}(t)$ définie sur $[0, t_1]$ telle que la solution du système (I.1) pour $u(t) = \bar{u}(t)$ et $x(0) = x_0$ satisfasse à la condition $x(t_1) = x_1$

$$\text{i.e} \quad x_0 \xrightarrow[\bar{u}(t)]{[t_0,\, t_1]} x_1$$

Ainsi pour le cas considéré les définitions CK2, CK3 et CK5 sont-elles équivalentes.

i4) Il faut noter que la terminologie dans ce domaine est très variée. Nous avons pris le vocabulaire le plus classique dans la mesure où il n'y a pas d'ambiguïté.

I.2.2 Critères de commandabilité.

Là encore il existe une grande diversification dans les critères équivalents à la propriété de commandabilité. Nous avons sélectionné ceux qui ont une importance pour la suite de ce mémoire ou qui pourront être formellement comparés à leurs homologues structurels.
Signalons avant tout une caractéristique essentielle :

Propriété CK6 : La commandabilité de (A,B) est invariante dans tout changement de base.

Théorème CK7 : Le système (I.1) est commandable ssi l'un ou l'autre des critères suivants est vérifié :

Critère CK1 : [KALMAN]
Le rang de la matrice de commandabilité $Q = [B, AB, ..., A^{n-1}B]$ où $Q(n \times nm)$ est plein donc égal à n .
ou bien
Le rang de la matrice $Q' = [B, AB, ..., A^{q-1}B]$ est de rang n où $q \leqslant n$.

Critère CK2 :
Il n'existe aucune matrice non singulière R telle que la paire transformée $\bar{A} = RAR^{-1}$ et $\bar{B} = RB$ soit

de la forme :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } A_{22}\,(k \times k) \text{ et } B_1\,(n\text{-}k \times m)$$

Cette proposition transcrit clairement que tous les états décrits par A_{22} ne sont pas accessibles à B_1 ; on dit aussi que $(\bar{A}, \bar{B})$ est irréductible.

Critère CK3 : Interprétation modale.

rang $[(A-\lambda I), B] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

En fait ce critère n'est à vérifier que sur le spectre de A.

$(A-\lambda I, B)$ est la matrice modale du système (I.1).

Critère CK4 : [GILBERT , 1963]

Il existe une transformation D telle que la transformée $\bar{A} = DAD^{-1}$ et $\bar{B} = DB$ soient de la forme :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j \quad ; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

et $\bar{B}$ ne possède aucune ligne nulle.

Critère CK5 :

Il existe une transformation J telle que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ soient de la forme :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1(\lambda_1) & & & & \\ & A_2(\lambda_2) & & & \\ & & \cdot & & 0 \\ 0 & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & A_N(\lambda_N) \end{pmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_N \end{pmatrix}$$

où $A_j(\lambda_j)$ $\forall j = 1, ..., N$ est un bloc de JORDAN associé à la valeur propre λ_j :

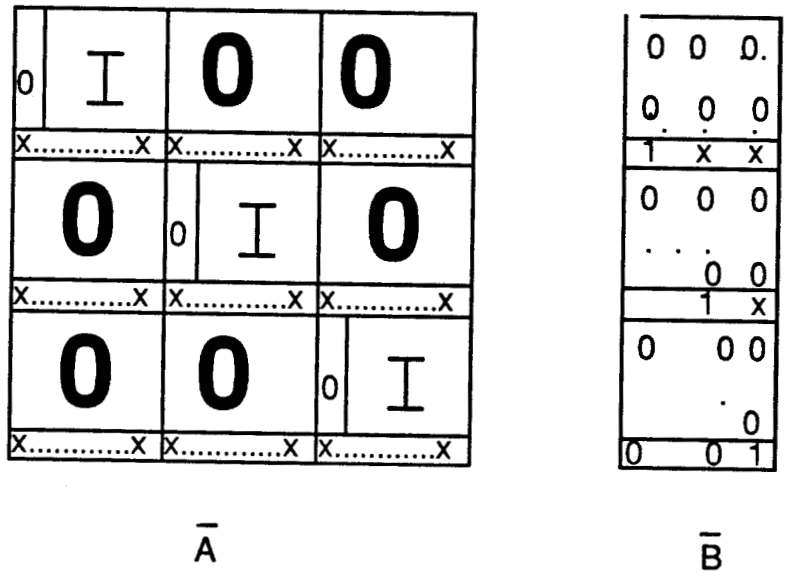
$$A_j(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

d'ordre n_j égal à la multiplicité de λ_j dans le polynôme caractéristique de A et $\forall i \neq j$ $\lambda_i \neq \lambda_j$.

La matrice constituée par les dernières lignes des blocs B_i est de rang N.

Critére CK6 :

Il existe une transformation P telle que $\overline{A} = PAP^{-1}$ et $\overline{B} = PB$ soient de la forme compagnon :



La matrice P ainsi définie est unique.

Critère CK7 :

On peut trouver n nombres complexes λ_j, j = 1, 2, ...,n, tels que la matrice $((\lambda_1 I-A)^{-1}B, (\lambda_2 I-A)^{-1}B, ..., (\lambda_n I-A)^{-1}B)$ est de rang n.

Critère CK8 :

Il n'existe aucun vecteur q non nul tel que l'on vérifie la relation $q^T(sI-A)^{-1}B = 0$, $\forall$ s tel que $(sI-A)^{-1}B$ est définie.

Critère CK9 :

La matrice de transfert $(sI-A)^{-1}B$ a des lignes linéairement indépendantes, $\forall s$ tel que cette matrice est définie.

Critère CK10 : [WOLOWICH,1974].
Soit la matrice polynômiale de transfert $T(s)=N(s)\,D^{-1}(s)=\overline{D}^{-1}(s)\,\overline{N}(s)$ où N(s) (pxm), $D^{-1}(s)$ (pxp),$\overline{D}^{-1}(s)$ (pxp),$\overline{N}(s)$ (pxm).
$\overline{D}^{-1}(s)\overline{N}(s)$ (toujours observable) est commandable ssi $\overline{N}$ et $\overline{D}$ sont premières entre elles à gauche.

Critère CK11 : [ROSENBROCK, 1970]
La matrice étendue R(qn x (q-1)n + ql) est de rang qn où

$$R = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & B \\ -A & I_n & & & & 0 \\ 0 & -A & \ddots & & \iddots & \\ & & \ddots & 0 & & \\ & & & I_n & 0 & B \\ 0 & 0 & & -A & B & 0 \end{pmatrix} \qquad q \leq n$$

On peut choisir q = n.

On déduit de CK10:

Critère CK12 : [ROSENBROCK, 1970]
Soit P(s) la matrice système d'état

$$P(s) = \begin{pmatrix} sI_n-A & B \\ -C & D \end{pmatrix}$$

les matrices (sI_n-A) et B sont premières entre elles à gauche. (En mono-entrée,la matrice de trans-

fert $(sI_n-A)^{-1}B$ n'admet pas d'annulation pôle-zéro).

Si au contraire il existe un polynôme facteur commun à gauche,le nombre de ses racines détermine la déficience en rang de la matrice Q définie en CK1.

I.3 OBSERVABILITE DE KALMAN : rappels.

I.3.1 Observabilité.

Définition OK1 : L'état $x_0(t_0)$ est observable ssi il peut être identifié à partir de la connaissance de la sortie y(t) et de l'entrée u(t) sur un intervalle $[t_0, t_1]$.

Définition OK2 : Le système (I.1) est observable ssi tout état $x_0(t)$ est observable quel que soit t.

I.3.2 Dualité.

Deux systèmes (S1) et (S2) sont duaux s'ils sont définis par

$$(S1) : \begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \qquad (S2) : \begin{cases} \dot{X} = A^TX + C^TU \\ Y = B^TX + D^TU \end{cases}$$

où M^T désigne la transposée de M.

Propriété de dualité due à KALMAN :
Si (S1) est commandable alors (S2) est observable et inversement, ce qui signifie que les notions de commandabilité et d'observabilité sont duales.

I.3.3 Critères d'observabilité.

Pour tester l'observabilité, on peut donc vérifier la commandabilité du système dual, ce qui constitue déjà un premier critère. Tous les autres sont obtenus aisément en transcrivant les critères de commandabilité, par dualité.

En particulier :

Critère OK1 :
Le rang de la matrice d'observabilité $Z = [C^T, A^TC^T, (A^T)^2C^T, ..., (A^T)^{n-1}C^T]$ est égal à n où $Z(n \times np)$.

Critère OK2 :
Il n'existe aucune matrice non singulière R telle que la paire transformée $\bar{A} = RAR^{-1}$ et $\bar{C} = C R^{-1}$ soit de la forme :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et } \bar{C} = (C_1 \quad 0) \text{ où } A_{22}(k \times k)\ k < n,\ C_1(p \times n\text{-}k)$$

Les états décrits par A_{11} n'atteignent pas les sorties.

Les critères OKi duaux de CKi, $\forall i = 3, ..., 9,11$ sont obtenus en remplaçant A par A^T et B par C^T.

Critère OK10 :
Avec les notations de CK10,
$N(s)D^{-1}(s)$ (toujours commandable) est observable ssi N(s) et D(s) sont premières entre elles à droite.

Critère OK12 :
Les matrices $(sI_n\text{-}A)$ et (-C) n'admettent pas de facteur commun à droite $L_1(s)$.

I.4 COMMANDABILITE STRUCTURELLE, LIN (1972).

LIN Ching-Tai a publié dans [LIN, 1974] ses résultats développés en 1972 dans sa thèse de Ph.D réalisée à l'université de Maryland.
Le concept de commandabilité structurelle a été introduit pour des systèmes à paramètres inconnus par manque de valeurs quantitatives ou incorrects pour des raisons d'erreurs de mesure, ce dernier aspect étant inévitable dans les modélisations de processus physiques. Il s'agit donc d'exploiter au maximum le minimum d'informations dont on est certain sur le système, à savoir sa structure et de pouvoir apprécier la commandabilité de chaque état à partir de l'existence et (ou) de l'absence

d'interconnexions. Le résultat escompté ne peut être qu'une idée qualitative de la propriété mais loin de la restreindre, il la généralise. En effet les cas de non commandabilité d'un système structurellement commandable apparaîtront comme pathologiques, ce qui confirmera que la commandabilité est en elle-même une notion beaucoup plus forte que ne le laisse entendre l'approche classique.
Retenons déjà l'image encore plus intuitive donnée par FRANKSEN et al., (1979-b), d'après lesquels la commandabilité structurelle représente la potentialité du système, contenue dans sa structure, à être amené à la commandabilité. Cette capacité est oui ou non exploitée selon la valeur choisie des paramètres de A et de B. Ces mêmes auteurs proposent d'ailleurs le terme de "commandabilité potentielle".
La commandabilité est donc en réalité une propriété structurelle et la terminologie de "commandabilité structurelle" donne presque un pléonasme. Tous ces points s'éclairciront à la lumière du chapitre II.

I.4.1 Structure, matrice, système, paire structurés.

I.4.1.1 Structure : LIN (1972).

Le concept de "structure" d'une paire (A,B) est introduit par la relation d'équivalence ci-après :

Définition 1: Une paire numérique (A,B) est dite de même structure qu'une paire (A', B') de même dimension ssi elles ont le même nombre de coefficients fixés à zéro et s'ils sont situés à la même place.

Exemple 1 :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Cette relation d'équivalence dans l'ensemble des paires (A, B) ($A \in \Re^{nxn}$, $B \in \Re^{nxm}$) définit des classes d'équivalence correspondant aux diverses structures du système. La structure du système est donc déterminée ssi l'on connaît l'existence et la position de tous les coefficients nuls dans la matrice.

I.4.1.2 Matrice structurée :

Pour LIN la structure d'un système est à la fois une caractéristique et une représentation du système. Nous préférons conserver ces deux aspects de façon distincte en utilisant la notion de matrice structurée, comme dans [SHIELDS ET PEARSON, 1976], [GLOVER ET SILVERMAN, 1976].

Définition 2 : Une matrice structurée M_S est une matrice constituée de paramètres libres (modifiables indépendamment les uns des autres) ou de zéros fixes.

ou bien

Définition 2-bis : [LINNEMAN,1981]
Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert et une application S: $\Lambda \longrightarrow M_{n',m'}$ où $M_{n',m'}$ est l'ensemble de toutes les matrices de dimension n'xm'.
S est appelée matrice structurée à paramètres dans Λ s'il existe un sous-ensemble $N \subset$ n'xm' et une bijection l: $N \longrightarrow k$ tels que pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K) \in \Lambda$:

$$s_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \notin N \\ \lambda_{l(i,j)} & \text{si } (i,j) \in N \end{cases}$$

Exemple 2 :

$$M_S = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

où x symbolise la présence d'un paramètre non nul. Soit N le nombre de paramètres libres, chaque ensemble de N valeurs représente un vecteur $p \in \mathbb{R}^N$, ainsi on peut aussi représenter M_S indicée en p, soit pour l'exemple 2 :

$$M_p = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ a_2 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad p = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$$

On dira que la matrice structurée M_S (entité mathématique) décrit la structure du système.

I.4.1.3 Matrice admissible.

Définition 3 : M' est admissible par rapport à M ssi elle est obtenue en fixant p à une certaine valeur $\underline{p}$.

$$\text{i.e. } M_{\underline{p}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & \varepsilon & \delta \end{pmatrix} \quad \text{où } (\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) \in \Re^5 \text{ est fixé}$$

Remarques : La relation "avoir la même structure que" peut aussi bien être définie pour des matrices structurées que réelles.
Par extension, on pourra comparer la structure d'une matrice structurée et d'une matrice réelle.
Nous mentionnerons en détails dans II les propriétés impliquées par la nature des matrices structurées.

I.4.1.4 Paire et système structurés.

Le système (A_S, B_S, C_S) est dit structuré à paramètres dans $\Lambda \subset \Re^k$ où A_S, B_S, C_S désignent respectivement les matrices structurées de A , B, C si Λ est ouvert et

$$\begin{pmatrix} A_S & B_S \\ C_S & 0_{mxm} \end{pmatrix} : \Lambda \longrightarrow M_{n+m,n+m} \text{ est une matrice structurée.}$$

I.4.2 Commandabilité structurelle.

Définition CL1 : [SHIELDS ET PEARSON, 1976]
Un système ou une paire (A_S, B_S) est dit structurellement commandable ssi il est commandable au sens de KALMAN pour presque toutes les valeurs des paramètres.

Définition CL2 : [LIN, 1972, 1974]
Un système ou une paire (A_s, B_s) est dit structurellement commandable ssi $\forall\ \varepsilon > 0$ il existe une paire admissible (A_1, B_1) de même structure que (A_s, B_s) telle que $\|A_1 - A_s\| < \varepsilon$ et $\|B_1 - B_s\| < \varepsilon$, commandable au sens de KALMAN.

En fait, les prémices du concept se laissent voir dans [LEE et MARKUS, 1967] où il est énoncé, entre autres, les deux propriétés réunies ci-dessous.

Proposition CL3 : L'ensemble de toutes les paires KALMAN commandables est ouvert et dense dans l'espace des paires réelles normé par la distance $d((A_1, B_1), (A_2, B_2)) = |A_1 - A_2| + |B_1 - B_2|$.

Proposition CL4 : On en déduit que (A_s, B_s) est structurellement commandable ssi il existe une paire (A_1, B_1) admissible qui soit KALMAN commandable.

Exemple 3 :

$$A_s = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix} \qquad B_s = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[B_1, A_1B_1] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et rang } [B_1, A_1B_1] = 2,$$

donc (A_1, B_1) est KALMAN commandable et (A_s, B_s) structurellement commandable.

Remarque : il est évident qu'une génération aléatoire des valeurs des paramètres ne saurait être une bonne méthode pour déterminer (A_1, B_1) si n est grand. Nous verrons dans le chapitre III les algorithmes disponibles pour tester la commandabilité structurelle.

I.5 CONCLUSION.

Le passage du concept usuel de commandabilité au concept structurel défini par LIN est réalisé dans la définition CL2. On y trouve sa justification physique puisque les paramètres du modèle d'état étant connus seulement avec approximation, la paire admissible de même structure KALMAN commandable est physiquement confondue avec ce modèle. Illustrons cela par l'exemple élémentaire de deux pôles identiques en parallèle, soit :

$$(A, B) = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

On sait que ce système n'est pas KALMAN commandable. Sa structure

$$\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix}$$

admettant la paire admissible $\begin{pmatrix} a+\frac{\varepsilon}{2} & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ KALMAN commandable, est commandable.(*)

Ce qui signifie que si l'égalité des deux pôles est réalisée, on peut parvenir à commander le système avec un infime déplacement des paramètres qui peut finalement correspondre à l'erreur de mesure. Ainsi c'est bien la structure qui porte les caractères de commandabilité. Outre cette continuité presque naturelle, il faut retenir qu'une structure commandable est une condition nécessaire pour pouvoir commander et qu'en cela cette approche constitue une première étape efficace d'analyse d'un système.

(*)Nota : les terminologies "structure commandable" ou "système structurellement commandable" sont équivalentes.

CHAPITRE II

PRESENTATION DES OUTILS

II.1 INTRODUCTION

Ce chapitre pourrait s'intituler "préliminaires mathématiques". Nous avons préféré un vocabulaire plus concret car il s'agit bien de langage ou d'outils que nous présentons ici, sans lesquels aucun travail ne serait possible. Nous y récapitulons les éléments de l'algèbre et de la théorie des graphes nécessaires aux développements qui suivront. Cette partie est d'ailleurs assez substantielle, ce qui nous permettra d'alléger le chapitre III consacré aux critères structurels proprement dits ; en effet, la manière dont on les présente dans la littérature est quelquefois assez ardue pour n'avoir pas bien distingué leurs propriétés de celles des outils qui les expriment : cette constatation émane surtout des articles où on a dû faire passer de nombreuses notions en un volume restreint.

Pour décrire un modèle d'état structuré de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = A_sX + B_sU \\ \\ Y = C_sX + D_sU \end{cases} \qquad (1.2)$$

on dispose de trois outils : le calcul formel, le calcul booléen et la théorie des graphes. La grande majorité des travaux se situent dans les deux derniers domaines. Notre contribution dans les chapitres (IV) ,(V) et (VI) exclut également l'aspect formel. Nous avons exposé dans le chapitre (I) les éléments algébriques juste indispensables pour introduire la commandabilité structurelle. Nous allons dans un premier temps en compléter la liste aussi bien dans l'algèbre des matrices structurées que booléennes et dans la théorie des graphes ; nous examinerons ensuite leurs propriétés.

Nous allons revenir sur la notion d'indépendance des paramètres, présentée de façon

intuitive dans la définition d'une matrice structurée au paragraphe I.4.1.2. En effet cette hypothèse est fondamentale pour l'approche structurelle et sa formulation rigoureuse rappelée dans [MUROTA, 87] lève toute ambiguïté :

II.2 INDEPENDANCE ALGEBRIQUE.

II.2.1 Polynôme non trivial dans un anneau K.

Un polynôme en $x_1, x_2, ..., x_q$ à coefficients dans K est dit **non trivial** si certains de ses coefficients sont différents de zéro.

II.2.2 Elément algébrique dans K.

Soit F une extension de K, c'est-à-dire $K \subset F$.

Un élément y de F est dit **algébrique** dans K s'il existe un polynôme non trivial en x, p(x) à une indéterminée x dans K tel que p(y) = 0.

II.2.3 Ensemble de paramètres algébriquement indépendants.

Un sous-ensemble $Y = \{y_1, ..., y_q\}$ de F est dit **algébriquement indépendant** s'il n'existe aucun polynôme non trivial $p(x_1, ..., x_q)$ à q indéterminées dans K tel que $p(y_1, ..., y_q) = 0$ (le terme algébriquement sera sous-entendu par la suite).

II.2.4 Ensemble ou variété algébrique V.

Soit un ensemble fini de polynômes non triviaux dans K, $\psi_1, ..., \psi_k$.
L'ensemble des zéros communs aux ψ_i tels que $\psi_i(y) = 0 \quad \forall i = 1, ..., k \quad y=(y_1,y_2,...,y_q) \in K^q$ forme une variété algébrique.

Si $V \neq K^q$ V est propre.
Si $V \neq \emptyset$ V est non triviale.

II.3 GENERICITE - PROPRIETE GENERIQUE.

Dans ce contexte, nous sommes amenés à évoquer la notion de généricité qui caractérise une propriété, de la façon suivante :

II.3.1 Définition [SHIELDS et PEARSON, 1976].

Une propriété est générique dans K s'il existe une variété (ou une intersection de variétés)$V \subset K$ telle que l'ensemble des paramètres $\{y_1, ..., y_q\} \subset K$ pour lesquels la propriété n'est pas satisfaite soit inclus dans V. On dira alors que la propriété est générique par rapport à V; dans ce sens,elle est vraie pour presque tous les éléments de K.

II.3.2 Conséquences de la généricité.

Si V est propre et non triviale alors V est un fermé de K.

Ceci implique principalement trois points :

1i) La propriété est vraie pour tout élément appartenant au complémentaire de V dans K et dans tout voisinage suffisamment petit de cet élément.

2i) Pour tout élément de V (où la propriété n'est pas vérifiée) alors tout voisinage de cet élément contient des éléments où la propriété est vérifiée.

3i) Tout point de V peut être amené à satisfaire la propriété par une perturbation adéquate mais faible.

Nous devons avoir présent à l'esprit ces implications quand nous reviendrons au concept structurel dans le chapitre III, si elles n'ont déjà pas éclairé les propriétés ébauchées dans le chapitre I, à partir du paragraphe I.4.2.

II.3.3 Rang générique.

Soit A une matrice dont les coefficients a_{ij} sont des fonctions rationnelles dans K à q variables ou à q paramètres indépendants $x_1, ..., x_q$.

Définition : [WAERDEN, 1955], [JACOBSON, 1964], [MUROTA, 1987]

Si le rang de A (au sens linéaire usuel) est déterminé de façon unique, à l'extérieur d'une variété algébrique propre dans K^q, on appelle rang générique de A (noté rang-g A) relativement à

$x_1, \ldots, x_q$ la valeur du rang de A ainsi déterminé de manière unique.

Propriété : [GLOVER ET SILVERMAN, 1976]

On en déduit facilement que le rang générique est une propriété générique ; en effet l'ensemble des paramètres pour lequel rang-g M<r satisfait que tous les mineurs d'ordre r sont nuls c'est-à-dire des équations polynomiales.

Remarques :

i1) L'indépendance des paramètres de A n'implique pas que le rang-générique soit plein i.e égal à l'ordre de la matrice, comme l'illustre trivialement l'exemple 2.1.

Exemple 2.1 :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} K = \Re \\ x_1, x_2, x_3\ x_4, x_5 \quad \text{indépendants} \end{array}$$

A est structurée et rang-g A = 2.

II.4 RANG TERME : [ORE, 1962], [FORD ET FULKERSON, 1962], [RYSER, 1963]. [MUROTA,1987].

II.4.1 Définition.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice (m,n) dans K.

Le rang terme de A, dénoté par t(A) est égal à k maximum tel que $a_{i(1)\,j(1)}\, a_{i(2)j(2)} \ldots a_{i(k)j(k)} \neq 0$ où $i(p) \neq i(q)$ et $j(p) \neq j(q)$ $\forall p \neq q$.

Exemple 2.2 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} K = \Re \\ \alpha \in \Re \\ \beta \in \Re \end{array}$$

$a_{i(1)j(1)} = a_{21} = \beta$
$a_{i(2)j(2)} = a_{12} = \alpha$ $\qquad t(A) = 2$

II.4.2 Comparaison du rang générique et du rang terme.

II.4.2.1 Propriétés [MUROTA, 1987]

En général rang-g (A) $\leq$ t(A)

a) Dans le cas où chaque paramètre de A est une indéterminée en elle-même, alors rang-g (A) = t(A).
b) Si chaque paramètre est une fonction rationnelle d'indéterminées $x_1, ..., x_q$ sur K, le rang générique de A est égal au rang maximum de A où on a fixé les paramètres à des valeurs particulières de K.
Illustrons ces deux situations par des exemples.

II.4.2.2 Contre-Exemple .

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2} & \frac{a_4}{a_3} \\ \frac{a_3}{a_4} & \frac{a_2}{a_1} \end{pmatrix} \quad ai \in \Re \quad \forall\, i = 1,...,4$$

rang-g A = 1 (dét A = 0 $\quad \forall\, a_i \in \mathfrak{R}$)
or t (A) = 2 .

II.4.2.3 Exemple 2.3 .

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \quad x_i \in \Re \quad \forall\, i = 1, ..., 4$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Re^4 / x_1x_4 - x_2x_3 = 0\}$$

En appliquant la définition du rang générique, on voit qu'en dehors de V, le rang de A est déterminé de façon unique et vaut 2, donc rang-g A = 2.
$x_1x_4 \neq 0$ ou $x_2x_3 \neq 0$ donc $t(A) = 2$.

II.4.2.4 Exemple 2.4.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_2} & x_3 \\ x_2 + x_3 & x_4 \end{pmatrix} \qquad x_i \in \Re \qquad \forall i = 1, \ldots, 4.$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\hat{A}$ est admissible par rapport à A ; rang($\hat{A}$) = 2 donc rang-g(A) = 2. On vérifie aisément que t(A) = 2.

II.4.2.5 Remarques.

Cette différence ou similitude entre le rang générique et le rang terme apparaît peu dans les divers articles sur les aspects structurels. Dans [LIN, 1972] et [LIN, 1974] ces concepts ne sont pas utilisés : le rang générique a été évoqué par SHIELDS et PEARSON, (1976) qui lui ont abusivement donné la définition du rang terme. Cette erreur est d'ailleurs relevée dans [FRANKSEN et al., 1979 - b] qui n'exploitera que ce dernier, [SCHIZAS et EVANS, 1980, 1981 a - b]. MUROTA (1987) a tiré au clair cette confusion qui avait fait plus ou moins boule de neige.

Ceci ne remet pas en cause bien sûr la validité de ces travaux où il est envisagé comme dans ce mémoire le cas où les paramètres sont des indéterminées dans K, en l'occurrence $\Re$. Nous rencontrerons toutefois certaines matrices non structurées, d'où la nécessité de savoir que le rang générique est défini pour des fonctions rationnelles. Nous parlerons de la détermination pratique de ce rang en II.9 car ici encore une génération aléatoire de valeurs numériques attribuées aux divers paramètres n'est pas une méthode satisfaisante pour calculer le rang d'une matrice de grande dimension.

II.5 ELEMENTS DE L'ALGEBRE BOOLEENNE.

II.5.1 Matrice booléenne M_B associée à M_S.

Définition : La matrice booléenne M_B associée à M_S est définie en remplaçant les zéros fixes par des zéros booléens et les coefficients non nuls par des uns booléens.

Exemple :

$$M_S = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix} \qquad M_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il ne faudrait pas en déduire que les matrices booléennes ont été chronologiquement définies après les matrices structurées ; bien au contraire, elles sont depuis longtemps un outil combinatoire naturel pour transcrire une structure, de pair avec les graphes (cf II.6).

II.5.2 Matrice de permutation M_P. Matrice de permutation maximale M_{PMAX}.

Définition 1 : Une matrice de permutation M_P est une matrice booléenne contenant un et un seul "un" par ligne et par colonne.

Par extension, M_P contenant au plus un seul "un" par ligne et par colonne sera aussi appelée matrice de permutation (on autorise la présence de ligne(s) ou colonne(s) nulle(s)). Ceci est en liaison avec la définition du graphe biparti (cf II.6.1.4) et l'équivalence II.7.2.

On considèrera, si besoin est, la matrice structurée associée.

Définition 2 : Soit M_B une matrice booléenne quelconque.
Une matrice de permutation maximale M_{PMAX} par rapport à M est une matrice de permutation d'ordre le plus grand, que l'on peut extraire de M.
La solution n'est bien sûr pas unique.

Exemple :

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{PMAX1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{PMAX2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notes :

i1) L'exploitation de la matrice de permutation permet de donner une interprétation booléenne au rang terme comme on peut lui assigner une traduction graphique. Nous décrirons ces deux aspects après avoir rappelé quelques notions élémentaires de la théorie des graphes.

i2) N'oublions pas que la transformation d'une matrice quelconque A carrée par une matrice de permutation, ce qui sera noté $M_P A M_P^{-1}$, a pour seul effet un réarrangement des colonnes et des lignes de A.

II.6 THEORIE DES GRAPHES.

II.6.1 Eléments classiques.

Définition :[BERGE,1970]
Un graphe G= $\{\mathcal{X},\mathcal{U}\}$ est le couple constitué:
1) par un ensemble $\mathcal{X} = \{ x_1,x_2,...,x_n\}$ (sommets ou noeuds).
2) par une famille $\mathcal{U} = \{ u_1,...,u_m\}$ d'éléments du produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{X} = \{(x,y)/ x\in\mathcal{X},y\in\mathcal{X}\}$ (arcs).
Un élément (x,y) de $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ peut apparaître plusieurs fois dans $\mathcal{U}$.

II.6.1.1 Graphe orienté associé à M_S.

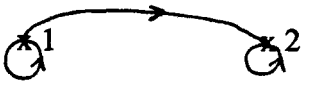
Soit une matrice structurée $M_S = (a_{ij})$ quelconque, n x n.

Définition : Le graphe orienté $G(M_S) \equiv (X, U)$ associé à M_S a pour ensemble de noeuds X et pour ensemble d'arcs U, tels que :
a) Il y ait n noeuds.
b)Il existe un arc orienté (j,i) de j vers i ssi $a_{ij} \neq 0$

On dit que j et i sont incidents à l'arc (j,i) ; j est le prédécesseur de i.
M_S est la matrice d'interconnexion de G.

Exemple 1 :

$M_S = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & x \end{pmatrix}$ $\qquad$ $G(M_S)$:



II.6.1.2 Graphe antécédent.

Dans un graphe G, un ensemble de noeuds T est antécédent d'un autre ensemble de noeuds S si T est l'ensemble de tous les prédécesseurs des noeuds dans S.

II.6.1.3 Graphe accessible à un noeud.

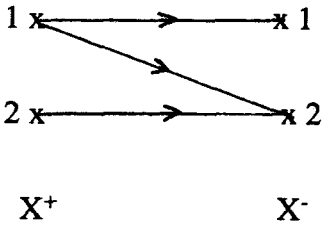
G(X, U) est dit accessible au noeud x_0 ssi il existe un chemin d'arcs orientés de x_0 à tous les sommets de X.

II.6.1.4 Graphe biparti associé à M_S.

Soit M_S une matrice structurée carrée.
Le graphe biparti associé à M_S, $G_B(M_S) \equiv (X^+, X^-, U)$ a pour ensemble de noeuds initiaux X^+, pour ensemble de noeuds terminaux X^- et pour ensemble d'arcs U tels que :

a) X^+ est l'ensemble des colonnes de M_S.
b) X^- est l'ensemble des lignes de M_S.
c) Il existe un arc orienté (j,i) $\qquad \forall j \in X^+$ tel que $a_{ij} \neq 0$
$\qquad \forall i \in X^-$

Exemple 2 :



Nota : On oublie souvent que M_S doit être carrée ; ceci est dû au fait qu'il faut tenir compte dans X^+ ou X^- des noeuds isolés c'est-à-dire des noeuds sources pour X^- (sur lesquels il n'arrive aucun arc) et des noeuds puits pour X^+ (desquels il ne part aucun arc). Aussi pour une matrice rectangulaire sera-t-on amené à rajouter des lignes ou colonnes nulles, ce qui ne modifie pas la valeur du rang.

II.6.1.5 Couplage maximum dans un graphe biparti.

Soit $G_B \equiv (X^+, X^-, U)$ un graphe biparti avec les conventions adoptées ci-dessus.

Définition 1 : Un couplage $\mathbf{C}$ dans G_B est un sous-ensemble d'arcs de U tel qu'il part au plus un arc d'un sommet initial de X^+ et qu'il arrive au plus un arc sur un sommet terminal de X^-.

Définition 2 : Le couplage $\mathbf{C}$ est dit de "cardinalité maximale" ou "maximal" si son nombre d'arcs est maximal.

II.6.1.6 Couverture d'un sommet par un couplage.

Soit $G_B \equiv (X^+, X^-, U)$ un graphe biparti.
Soit $\mathbf{C}$ un couplage sur G_B. Le sommet v est dit couvert par le couplage $\mathbf{C}$ s'il est incident à un arc du couplage.

II.6.1.7 Arborescence de racine x.

Un graphe $G \equiv (X, U)$ est une arborescence de racine $x \in X$ si :

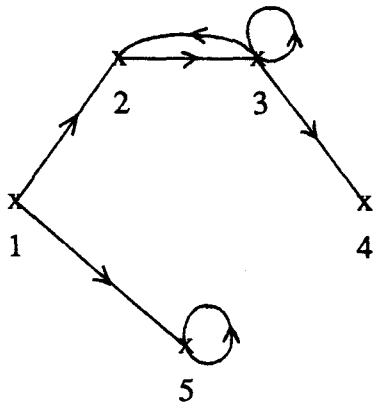
a) $\forall\ x_i \neq x$ $\quad x_i$ est le sommet terminal d'un seul arc.
b) x n'est le sommet terminal d'aucun arc
c) G ne contient pas de circuit.

Une branche de l'arborescence de racine x en est un sous-graphe auquel x appartient et dans lequel on a conservé seulement les arcs adjacents à un seul arc issu de x.

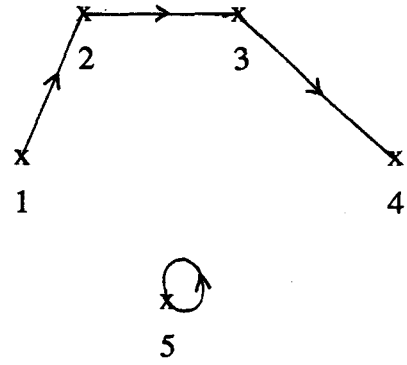
II.6.1.8 Couverture d'un graphe orienté G par un graphe G'.

Soit $G \equiv (X, U)$; $G'(X', U')$ un sous-graphe de G ($X' \subset X$ et $U' \subset U$). $G'(X', U')$ couvre $G(X, U)$ ssi $X' = X$ et $U' \subset U$.

Exemple :



G(X, U)



G'(X', U')

II.6.2 Graphes spécifiques : [LIN, 1974].

LIN a introduit des définitions particulières de graphe dont nous énonçons une forme descriptive :

II.6.2.1 Tige.

Une tige est un chemin d'arcs orientés fini (non cyclique) reliant une origine à une extrémité.(Fig. 1)

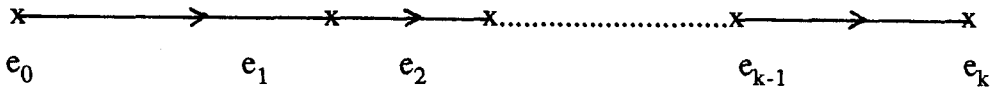


Fig 1

II.6.2.2 Bouton.

Un bouton est constitué d'un arc reliant une origine à une extrémité sur laquelle est fixé un cycle passant par un ou plusieurs noeuds (Fig. 2).
A titre d'information, ce graphe a été appelé initialement "feuille" dans [LIN, 1972].

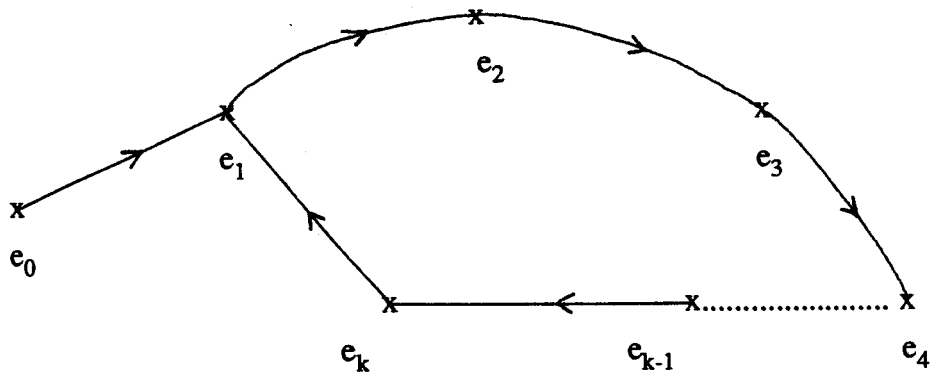


Fig.2

II.6.2.3 Cactus.

II.6.2.3.1 Cactus à une origine.

Un graphe G est un cactus s'il est obtenu à partir d'une tige T en construisant une séquence de graphes $(G_0 = T) \subset G_1 \quad \ldots \subset G_k \ldots \quad \subset (G_p = G) \qquad p \geq 0$, de la manière suivante :

a) Le premier graphe de la séquence est la tige T

b) Le dernier graphe est le graphe G lui-même

c) $\forall k = 1, 2, \ldots, p \quad G_k$ est obtenu à partir de G_{k-1} en ajoutant un bouton B_k à G_{k-1} tel que l'origine e_k de $B_k$est le seul noeud commun à G_k et G_{k-1} (B_k est appelé le $k^{ième}$ bouton de G). L'origine du bouton introduit ne pouvant jamais coïncider avec l'extrémité de la tige (fig 3).

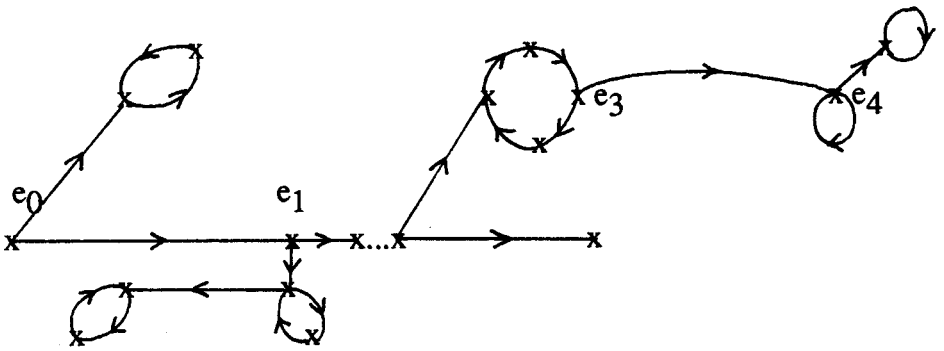


Fig. 3

II.6.2.3.2 Cactus à plusieurs origines.

Dans le cas de plusieurs origines, un cactus est une réunion disjointe de cacti mono-origine (Fig.4).

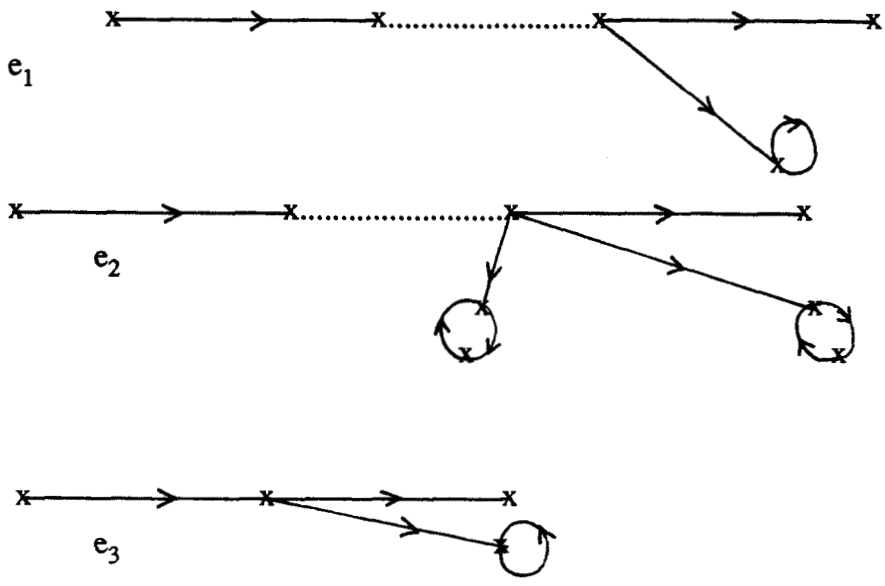


Fig. 4

Remarques :

i1) Dans [LIN, 1972] ce graphe pour une seule origine avait été appelé plante, à côté d'autres concepts "préplante" et "superplante" que nous n'introduirons pas ici.

i2) L'extension dans [LIN, 1977] à plusieurs origines, a été donnée pour répondre à la similitude des résultats obtenus dans le cas d'un système multi-entrées par SHIELDS et PEARSON, GLOVER et SILVERMAN.

i3) Signalons enfin que la définition du cactus existe chez les théoriciens des graphes mais qu'elle est légèrement différente.

II.7 INTERPRETATION BOOLEENNE ET GRAPHIQUE DU RANG-TERME.

Soit M(n, m).

II.7.1 Proposition 1: [SCHIZAS and EVANS,1981 a].

Selon la définition II.4.1, le rang terme de M est égal à l'ordre de la matrice de permutation maximale extraite de M.

II.7.2 Proposition 2 : [MUROTA,1987]

Le rang terme de M est égal à la cardinalité du couplage maximal sur le graphe biparti associé à M (M ayant été rendue carrée).

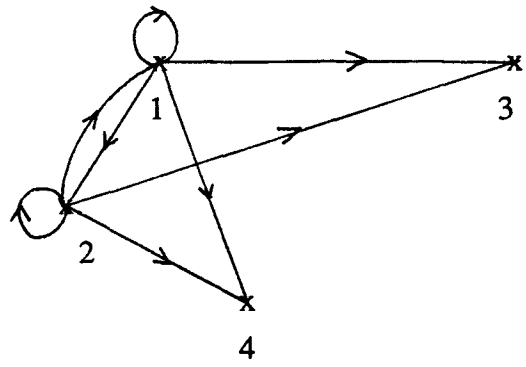
II.8 DEFICIENCE EN RANG D'UNE MATRICE STRUCTUREE.

Soit $M_S(n, m)$ où $n \leq m$.
Le rang structurel de M_S (générique ou terme) est inférieur ou égal à sa plus petite dimension, n. Comme dans l'algèbre linéaire, la valeur de ce rang est diminuée s'il existe un certain nombre de lignes linéairement dépendantes.

II.8.1 Concept de dilatation [LIN, 1972, 1974].

Définition 1 : Un graphe orienté G(X, U) contient une dilatation ssi il existe un ensemble S de k noeuds dont son antécédent T(S) dans G(X, U) contient au plus (k-1) noeuds. (S ne contient pas l'origine de G(X, U)).

Exemple 2 : Soit G le graphe associé à M de l'exemple 1

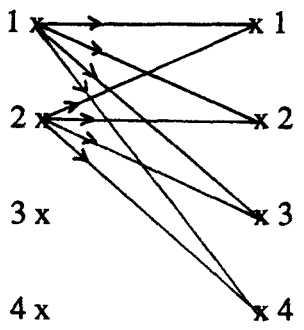


$S = \{1, 2, 3, 4\}$

$T(S) = \{1, 2\}$

La visualisation d'une dilatation est toute naturelle dans le graphe biparti $G_B \equiv (X^+, X^-, U)$ associé à G(X, U).

Exemple 3 : Soit G_B le graphe biparti associé à G de l'exemple 2



On conçoit que le faisceau d'arcs partant de T(S) augmente de volume vers S d'où la dénomination de dilatation. Ainsi si Card S = k et Card T(S) = k-d, d est la déficience en cardinalité du couplage dans G_B ou de manière équivalente la déficience en rang terme de la matrice M_S.

II.8.2 Caractérisation algébrique d'une dilatation.

Soit M_S (n, n + 1).

Définition 2 : [LIN, 1972, 1974]

M_S contient une dilatation ssi il existe une permutation qui la transforme en

$\bar{M}_S = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ où $P_2 = (n - k, n + 1)$ et $P_1(k, n + 1), (k \geq 1)$ avec $(n - k + 2)$ colonnes nulles

et pas plus de (k - 1) colonnes non nulles.
Ceci n'est que l' illustration matricielle de la définition 1.

Exemple 4 :

$$\text{Soit } M_S = \begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & x \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M_S} = \begin{pmatrix} x & x & x & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; P_1 = \begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{et } P_2 = (x \;\; x \;\; x \;\; 0 \;\; 0)$$

$$n = 4, k = 3$$

Définition 3 : [SHIELDS et P., 1976]

Soit une matrice $M_S(n, m)$ et $n \leq m$.
M_S est de la forme (t) pour $t \in [1, n]$ ssi pour $k \in]m - t, m]$, M_S contient une sous-matrice nulle d'ordre $(n + m - t - k + 1) \times k$.

Lemme : $\forall\, t \in [1, n[$ rang-g $M_S < t$ ssi M_S est de la forme (t).

Théorème : rang-g $M_S = t$

a) pour $t = n$: ssi M_S n'est pas de la forme (n).
b) pour $t \in [1, n[$: ssi M_S est de la forme $(t + 1)$ mais pas de la forme (t).

Cette caractérisation par une sous-matrice nulle est duale de celle par une matrice de permutation maximale parmi les coefficients non nuls [FRANKSEN et al., 1979]

II.8.3 Détection des valeurs propres nulles structurelles dans une matrice structurée carrée : 2ème interprétation algébrique de la présence d'une dilatation.

II.8.3.1 Définitions.

Cette approche est longuement développée dans les travaux [FRANKSEN and al., 1979 a - b] indépendamment et dépendamment du concept de commandabilité structurelle ; on la trouvera aussi ébauchée dans [REINSCHKE, 1981].

Définition 4 : [SCHIZAS, EVANS 1980].

Soit M_S une matrice structurée carrée, quelconque.
Une valeur propre nulle est dite structurellement déterminée si elle reste nulle pour toute perturbation sur un coefficient non nul de M_S.
Une valeur propre nulle non structurellement déterminée est dite numériquement déterminée.

Proposition 1 : La déficience du rang terme de M_S indique le nombre de valeurs propres nulles structurellement déterminées.
Nous parlerons pour simplifier de valeurs propres nulles structurelles.

Exemples :

1) $A_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \forall p = (a, b, c, d) \in \Re^4$

rang-g A_p=2 plein : il n'existe pas de mode nul structurel .

Soit $A_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $ad = bc$

alors il existe un mode nul numérique (en effet dét $(A_P - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc)$) .

2) $A_p = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \quad \forall p = (a,b,c,d) \in \Re^4$

dét $(A_p - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - cd)$.
$\forall$ (a,b,c,d),il existe un mode nul structurel.
Si cd=0 , il existe deux modes nuls numériques et un mode nul structurel.

II.8.3.2 Invariants de $M_S(M_B)$ par une transformation.

Les seules transformations qui ont un intérêt ici sont celles qui laissent invariante la structure, c'est-à-dire le groupe des permutations. De plus toute permutation P conserve le rang-terme (en effet celui-ci est égal au nombre d'éléments non nuls de M_{PMAX} extraite de M_B) ; le rang numérique est d'ailleurs aussi invariant par P, ainsi que les valeurs propres. Soulignons que le rang terme n'est pas invariant par une transformation de similarité $T^{-1}MT$, contrairement au rang numérique.

II.9 PRINCIPAUX ALGORITHMES DE CALCUL DU RANG GENERIQUE D'UNE MATRICE M.

II.9.1 Introduction.

Nous adoptons la classification des algorithmes disponibles, selon l'ordre qui vient d'être indiqué. En fait cette distinction en trois parties est couverte par deux tendances : celle des théoriciens des graphes pour lesquels les algorithmes évoqués sont très classiques et celle d'automaticiens qui, dans le cadre de la commande des systèmes, ont déterminé d'autres méthodes de calcul de rang. En ce qui concerne les utilisateurs parmi ces derniers, ils ont un avis partagé sur l'adéquation de l'une ou l'autre méthode mais on peut percevoir un léger penchant en faveur des graphes. Cette constatation justifiait que l'on s'intéresse aux deux, sans pouvoir toutefois présenter de manière détaillée les algorithmes graphiques, comme nous l'avons laissé entendre dans l'introduction de ce mémoire. Notre intérêt a été aussi fortement motivé par le souhait initial d'en implanter certains sur calculateur.

II.9.1.1 Algorithmes de détermination d'un couplage maximum dans un graphe biparti.

Pour un panorama détaillé, on pourra consulter [BERGE, 1970], [GONDRAN et MINOUX, 1979], [SEDGEWICK, 1983], [AHO and al., 1983], ces deux derniers ouvrages étant très près des réalités informatiques (structures de données, etc...).

Ce problème équivalent à la détermination d'une matrice de permutation maximale dans M_B est généralement désigné sous le terme de "problème d'affectation". FORD et FULKERSON, (1962), l'ont abordé dans le contexte de la théorie des flots, où il s'agit de rechercher le flot maximum dans le réseau de flots associé au graphe biparti de départ. A partir de leur algorithme, de nombreuses modifications se sont succédées et malgré l'équivalence des deux notions, le couplage a donné lieu aussi à une multitude de publications. Le sujet est loin d'être tari, visant le but d'obtenir l'algorithme de complexité minimale ; Citons HOPCROFT et KARP (1973), LAWLER (1976), KABEKODE BHAT (1981), PAPADIMITRIOU - STEIGLITZ (1982), qui proposent des algorithmes en $O(mn(\min(m, n))^{1/2})$, soit , si la matrice est carrée, en $O(n^{5/2})$; quant au flot, la complexité minimale jusqu'à présent atteinte est en $O(n^3)$.

II.9.1.2 Décomposition en composantes cycliques et acycliques.

Soit M_B une matrice carrée décomposable en composantes cycliques et acycliques alors le rang

terme de M_B est égal à la somme des rangs termes de chaque composante [SCHIZAS and EVANS, 1980]

II.9.1.3 Algorithmes algébriques.

[SHIELDS et P., 1976], [DAVISON, 1977], [MORARI, 1977],[JOHNSTON et BARTON, 1984] sont autant de références où sont suggérées des méthodes de calcul de rang générique, dans le cadre de la commandabilité structurelle. Nous donnons seulement une description qualitative pour celles qui ne font pas actuellement autorité.

II.9.1.3.1 Fixed-Zero-Rank-Finder : [SHIELDS et PEARSON, 1976].

Cet algorithme conçu pour détecter la sous-matrice nulle (II.8.2, définition 3) est fondé sur un réarrangement de la matrice M(n, m) ($n \leq m$), sous la forme :

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & 0 \\ R_1 & 0 & & & \vdots \\ X & R_2 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ X & \cdots & X & R_w & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } R_i \text{ ne contient aucun zéro}$$

Ceci est obtenu en ordonnant les lignes de i = 1 à n selon le nombre croissant de coefficients non nuls, en regroupant celles qui ont la même structure et en effectuant des permutations sur les lignes et colonnes pour mettre en évidence le bloc triangulaire. Malheureusement , un contre-exemple a été montré dans [MORARI et S., 1978].

II.9.1.3.2 Génération aléatoire de paramètres : [DAVISON, 1977].

Pour divers choix aléatoires des valeurs numériques affectées aux paramètres de la matrice, l'auteur propose de calculer successivement le rang numérique des matrices numériques obtenues. On est alors confronté au problème de la validité des résultats, sensibles aux méthodes numériques utilisées et à la dimension des matrices.

II.9.1.3.3 Mise sous forme d'échelons de lignes : [MORARI et STEPHANOPOULOS, 1980].

Sous l'hypothèse que M(n, m) $n \leq m$, cet algorithme a pour but de mettre M sous la forme

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ X & R_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ X & \cdots & X & R_w & 0 \end{pmatrix}$$ ainsi obtenue

Etape 1 : $i = 0, j = 0$

Etape 2 : Trouver la ligne possédant le nombre minimum de coefficients non nuls, soit k.

Etape 3 : $i \longrightarrow i + 1$; affecter à cette ligne l'indice i et la détruire

Etape 4 : Associer à cette ligne les colonnes qui ont des coefficients appartenant à cette ligne avec les indices $j + 1, j + 2, ..., j + k$ et les détruire ; $j \rightarrow j + k$

Etape 5 : S'il reste des lignes, aller à l'étape 2 sinon STOP.

On réordonne ensuite la matrice avec les indices croissant du haut vers le bas pour les lignes et de gauche à droite pour les colonnes. Les blocs R_i obtenus ne contiennent aucun zéro et sont d'ordre (n_i, m_i)

$$\text{Soit } \overline{R_i} = \begin{pmatrix} R_1 & & & & \\ X & R_2 & & & \\ \vdots & X & R_3 & & \\ & & X & \ddots & \ddots \\ X & \cdots & & X & R_i \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, ..., w$$

L'indice de rang $(RI)_i$ de $\overline{R}_i$ est défini par :

$$(RI)_i = \sum_{\kappa = 1}^{i} (m_k - n_k)$$

$(RI)_i$ indique le nombre de colonnes excédant le nombre de lignes dans $\overline{R}_i$,i.e le plus grand nombre de colonnes de $\overline{R}_i$ qui peuvent être détruites sans affecter la valeur du rang générique de M .

II.9.1.3.4 Algorithme de JOHNSTON et BARTON (1984).

La même procédure que MORARI (II.9.1.3.3) est utilisée pour réordonner la matrice, sauf

pour l'étape 2 qui devient :

Etape 2 : Trouver la ligne possédant le nombre minimum de coefficients non nuls, soit k. Si un choix existe, sélectionner la ligne avec le nombre minimum total de coefficients non nuls (détruits et restants.)

On obtient ainsi $\overline{M} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ X & R_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ X & \cdots & X & R_w \end{pmatrix}$ où les blocs R_i ne contiennent également aucun paramètre nul.

La deuxième partie de l'algorithme consiste à détecter les dilatations.

Etape 1 : Trouver le premier bloc $R_i(n_i, m_i)$ avec $(RI)_i < 0$; sinon STOP.

Etape 2 : Marquer les $(m_i + 1)$ lignes de M couvertes par ce bloc. S'il existe d'autres lignes dans ce bloc de même structure que l'une des précédentes, les marquer aussi ; soit n_l le nombre total de ces lignes.

Etape 3 : Marquer toutes les colonnes qui ont des coefficients non nuls appartenant à ces lignes ; n_c leur nombre.

Etape 4 : Calculer $p_j = n_l - n_c$.

Etape 5 : S'il existe des lignes au-dessus de R_i avec des coefficients non nuls dans une colonne non marquée, sélectionner la ligne avec le nombre minimum de coefficients sur les colonnes non marquées ; marquer cette ligne et ces colonnes. Retourner à l'étape 4.

Etape 6 : Sinon, *s'il existe des lignes non marquées dans R_i, marquer la ligne suivante dans R_i ; détruire toutes les marques sur les colonnes et les lignes excepté sur les lignes de R_i. Retourner à l'étape 3.

** S'il n'existe pas de lignes dans le bloc R_i, enlever toutes les marques ; la déficience en rang additionnelle est égale à $\max(p_j)$; faire $p_j = 0$; retourner à l'étape 1.

II.9.1.3.5 Autre algorithme [PILLOU, 1987].

Cet algorithme a l'avantage de ne nécessiter aucun préarrangement de la matrice.

Etape 1 : Trouver l'ensemble des colonnes C_i qui ont le nombre minimum de paramètres non nuls. Soit L_j l'ensemble des lignes couvertes par ces colonnes. S'il n'existe pas de telles colonnes, STOP.

Etape 2 : Parmi les lignes de L_j, prendre celles qui ont le nombre minimum de paramètres non nuls ; ces lignes définissent L_{jmin}. Soit C_{imin} les colonnes appartenant à C_i qui couvrent les lignes de L_{jmin}.

Etape 3 : Choisir et enregistrer un paramètre non nul commun à une colonne c de C_{imin} et à une ligne l de L_{jmin} ; ce paramètre appartient à la permutation maximale globale.

Etape 4 : Détruire la colonne c et la ligne l. Retour en 1.

On trouvera dans la référence citée la description détaillée d'une structure informatique pour cet algorithme et ses caractéristiques dans [PILLOU, RECH, 1987].

II.10 ACCESSIBILITE D'UN GRAPHE G(X, U) A UN ENSEMBLE DE NOEUDS.

II.10.1 Introduction.

Nous aurons besoin dans le chapitre III de la notion d'accessibilité d'un graphe orienté G(X, U) à un ensemble de noeuds donné, $X' \subset X$: c'est une extension de la définition présentée en II. 6.1.3.

Définition : Cette propriété a lieu ssi il existe un chemin d'arcs orientés d'au moins un noeud de X' vers tout élément de X.

Le vocabulaire est ici encore assez varié ; certains conservent le terme de "connectabilité" [DAVISON, 1977], [REINSCHKE, 1984] réservé pour d'autres au cas des graphes linéaires (quelconques, non orientés). On trouve aussi la notion d'atteignabilité" [SILJAK, 1977 a - b, 1978], [FRANKSEN et al., 1979 a - b] ... Enfin le mot "accessibilité" est choisi par LIN (1972, 1974) et d'autres.

II.10.1.1 Méthodes graphiques d'exploration en profondeur.

Les algorithmes disponibles dans la théorie des graphes font partie des méthodes d'exploration de graphe sur lesquelles nous ne nous étendrons pas longuement ; le lecteur pourra consulter les références du paragraphe II.9.1.1. Elles sont en grand nombre, multiplié par celui des diverses implantations informatiques possibles. Retenons les procédures classiques d'exploration en profondeur (DEPTH-FIRST SEARCH) et une structure de données proposée dans [SEDGEWICK, 1983] et testée dans [PILLOU, 1987]. Ces méthodes graphiques sont très efficaces et nous les recommandons, par rapport à d'autres procédés algébriques beaucoup plus lourds, mais qui ne sont pas dénués d'intérêt d'un point de vue de la commandabilité. Il s'agit de visiter l'ensemble des noeuds du graphe en explorant successivement chaque branche de l'arborescence de racine, le noeud à partir duquel on veut vérifier l'accessibilité.

II.10.1.2 Méthode algébrique : algorithme de ROY - WARSHALL (1962).

Dans le cadre de la théorie des graphes, on associe au graphe G(X, U) sa matrice d'adjacence booléenne A (transposée de la matrice définie en II.6.1.1) ; la relation d'accessibilité dans G est représentée par la matrice $A^+ = A + A^2 + ... + A^n = ((a_{ij}))$, la sommation et les puissances étant boolénnes où

$$\begin{cases} a^+_{ij} = 1 & \text{si j est accessible à i} \\ a^+_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II.11 CONCLUSION.

Dans ce chapitre, nous avons exposé un certain nombre de définitions et de propriétés graphiques ou algébriques, à partir des correspondances biunivoques existant entre les matrices structurées, booléennes et les graphes orientés. Nous avons insisté sur les propriétés de généricité afin de poser les jalons de la commandabilité structurelle. Plus généralement, nous détachons ici quelques éléments essentiels dont certains sont évidents et paradoxalement sources d'erreur. Nous donnerons ensuite notre point de vue sur d'autres aspects qui méritent d'être soulignés.

L'indépendance algébrique des paramètres d'une matrice n'implique pas nécessairement l'indépendance linéaire des vecteurs lignes ou colonnes. Le rang générique est défini pour une matrice non structurée mais dont les coefficients sont des fonctions rationnelles ; dans le cas structuré il est égal au rang terme c'est-à-dire au rang maximum pris par la matrice. Seules les

permutations le laissent invariant contrairement à la propriété d'accessibilité invariante par n'importe quelle transformation.

LIN a introduit le concept de "dilatation" pour exprimer la perte de rang générique d'une matrice structurée ; au passage, une petite digression littéraire : ce terme issu du mot Anglais "dilation" et que certains préfèrent traduire par "dilation" trouve, à notre sens, sa justification dans le graphe biparti ; BARTON et JOHNSTON (1985 a) ne parlent-ils pas de contraction dans un graphe orienté ? On peut s'amuser à trouver une interprétation à la deuxième désignation plus emphatique : avec au plus (K-1) actions on ne peut pas agir simultanément sur K sommets mais en différé, si l'on ne dispose pas de ressources supplémentaires.

Une fois le concept de dilatation bien "apprivoisé", il faut éprouver plus de joie que de crainte à le manipuler ; en effet la détection manuelle d'une telle configuration dans une matrice d'ordre $n \leq 10$ devient un jeu si l'on s'aperçoit qu'il s'agit simplement de trouver un certain nombre de lignes de même structure ; pour des dimensions importantes, on a besoin bien sûr d'un calculateur et (ou) de techniques de décomposition (cf chap III). Nous retenons les algorithmes de recherche de couplage maximum dans le graphe biparti associé, la méthode de JOHNSTON et al., (1984) et celle de PILLOU (1987). A noter que les divers critères algébriques proposés, excepté le dernier, paraîtraient frères jumeaux si on n'allait pas regarder de plus près.

Enfin, les procédures graphiques d'exploration en profondeur d'un graphe orienté sont très adéquates pour tester l'accessibilité.

CHAPITRE III

REVUE DES CRITERES DE COMMANDABILITE STRUCTURELLE D'UN SYSTEME STRUCTURE

III.1 INTRODUCTION

Ce chapitre est divisé en trois parties liées aux thèmes respectifs suivants :

1 - La commandabilité structurelle
2 - La commandabilité structurelle au sens minimal
3 - Les méthodes de décomposition pour tester localement la commandabilité structurelle

Pour donner par contre, une analyse de l'évolution chronologique des divers travaux, on peut dire qu'à la suite de LIN (1972), (1974), qui est aussi l'initiateur de critères liés à son concept pour les systèmes mono-variable, SHIELDS et PEARSON (1976), GLOVER et SILVERMAN (1976) ont étendu l'approche au cas multi-variable (en obtenant la même forme d'énoncés). De manière indépendante, FRANKSEN et al. (1976) ont introduit la commandabilité structurelle potentielle et par la suite ont réalisé non seulement un nombre important de rapports théoriques mais aussi de logiciels d'analyse graphique des grands systèmes en langage APL, [FRANKSEN and al., 1979 a-b-c], [SCHIZAS and EVANS , 1980, 1981 a-b], [EVANS and al., 1979, 1981, 1984]. Précisons que LIN (1976, 1977) a entre-temps défini la commandabilité structurelle au sens minimal. DAVISON (1976, 1977), s'est aussi intéressé au problème, à partir des systèmes composés. MORARI (1977) a mis qualitativement l'accent sur le rôle des modes nuls structurels et a donné une formulation du critère pour les configurations de type feedback, qu'il a reprise dans [MORARI and al., 1980].

Citons aussi SILJAK (1977 a-b), (1978), qui a axé sa recherche sur la propriété d'accessibilité et a ensuite proposé une méthode de décomposition des grands systèmes [SEZER, SILJAK 1981]. Après cette première étape de résultats essentiels, ont surgi des démonstrations plus simples [HOSOE and MATSUMOTO, 1979], [MAYEDA, 1981], [YAMADA, 1984], [LINNEMANN, 1986] ou des propriétés complémentaires [REINSCHKE, 1981, 1984 a, 1985]; MAYEDA et YAMADA (1979) ont introduit la notion de commandabilité structurelle forte tandis

que HOSOE et al. (1979) ont examiné la généricité de la forme canonique de JORDAN et déterminé les dimensions génériques des sous-espaces commandables (1980).

Parallèlement à ces contributions originales, on retrouve les diverses propositions d'algorithmes de test du critère structurel signalées au chapitre II et suggérées dans [MORARI, 1977], [MORARI and al, 1978, 1980], [BURROWS and SAHINKAYA, 1981, 1983], [JOHNSTON and al., 1984].De plus, TRAVE et TITLI (1985) ont développé une méthode séquentielle de calcul de rang.

Récemment, MAIONE et TURCHIANO (1986) ont élaboré, dans le cadre des matrices systèmes polynomiales de ROSENBROCK, des critères de détection de perte de commandabilité. Enfin MUROTA (1987) vient de publier un ouvrage dense en la matière dans lequel il utilise des résultats graphiques propres à la théorie des réseaux.

Il existe aussi un grand nombre de travaux rédigés en Japonais, en particulier [MUROTA, 1983 a-b, 1985] sans compter les multiples études sur des systèmes décrits par des équations d'état de forme particulière, tels les systèmes descripteurs [MUROTA, 1983-c, 1984, 1987], [AOKI and al., 1983], [MATSUMOTO and IKEDA, 1983], [HOSOE, 1984], [YAMADA and LUENBERGER, 1985 a-b-c], ou d'autres systèmes modélisés par des formes linéarisées spécifiques, tels les systèmes dits "à compartiments" [MAYEDA, 1981], [HAYAKAWA and al., 1982, 1984 a-b] et autres [ANDERSON and HONG, 1982], [WILLEMS, 1986].

Pour conclure, la théorie de la commandabilité structurelle se concrétise dans certains exemples [REINSCHKE, 1984 a-b], [SUZUKI and MIO, 1983 a-b, 1984], où on envisage respectivement la commande d'une centrale électrique et la structure de réseaux électriques.

NB : certains articles mentionnés ci-dessus sont écrits en Japonais ou en Allemand. Nous avons eu accès à leur résumé en Anglais ; on trouvera ces références dans la partie B de la "bibliographie" où l'on a également ajouté des titres de travaux et d'ouvrages généraux non répertoriés ici. Les autres études que nous avons citées dans cette introduction et qui font l'objet de ce chapitre sont accessibles dans la partie A.

III.2 COMMANDABILITE STRUCTURELLE ; CRITERES ET PROPRIETES

III.2.1 Application des préliminaires mathématiques à la description de (A_S, B_S).

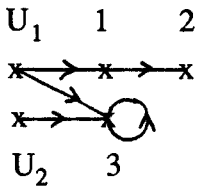
Soit la paire structurée d'état (A_S, B_S). (A_S, B_S) est rectangulaire $(n, n+m)$ où n est le nombre de variables d'état et m le nombre de vecteurs d'entrées.

i) Soit $G(A_S, B_S)$ le graphe orienté associé : les entrées correspondent à des origines (ou des sources) sur lesquels il n'aboutit aucun arc.

Exemple :

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \qquad B_S = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \\ x & x \end{pmatrix}$$

$G(A_S, B_S)$:



En particulier un cactus (c_i) a pour origine (s) la (les) entrées.
Nous appellerons intégrateur structurel tout pôle (mode) nul structurel tel qu'il a été défini en II.

III.2.2 Revue des critères existants.

Les définitions équivalentes de la commandabilité structurelle exposées en I.4.2 conduisent directement à énoncer :

III.2.2.1 Théorème CL1 [MUROTA 87].

Un système est structurellement commandable ssi le rang générique de la matrice de commandabilité $K = [B_S, A_S B_S, A^2{}_S B_S, ..., A_n{}^{n-1} B_S]$ est égal à la dimension du vecteur d'état n. Les produits $A^i{}_S B_S$ étant analogues à des produits booléens sur A_S et B_S structurées.

III.2.2.2 Remarques.

1 - Notons bien que K n'est pas structurée (cf I.4.1.2) car le produit de deux matrices structurées n'est pas structuré (évident : l'indépendance des paramètres est perdue). Cependant, les coefficients étant des fractions rationnelles sur Q, on peut définir le rang générique (cf : II. 4.2.1 b) et il est égal au rang numérique de K obtenu en fixant les divers paramètres à des valeurs particulières algébriquement indépendantes dans Q.

2 - Toutefois comme nous l'avons déjà souligné, en pratique, la répétition d'une génération aléatoire de coefficients numériques dans K donne des résultats sujets à des erreurs de calcul numérique, a fortiori pour de grande dimension, sans parler de son incompatibilité avec l'esprit de l'approche structurelle ; il est donc nécessaire de simplifier ce critère, malgré sa formulation condensée.

3 - Seul MUROTA (1987) fait explicitement allusion à ce critère

4 - **Dimensions génériques des sous-espaces commandables** : [HOSOE, 1980].

Notons S.C., structurellement commandable.
Le rang générique de K est appelé la dimension générique d du sous-espace commandable. Ainsi un système est-il S.C ssi la dimension générique est égale à n.

III.2.2.3 Formulation classique [LIN, 1972, 1974], [SHIELDS et PEARSON, 1976], [GLOVER et SILVERMAN, 1976].

Théorème CL2 :
(A_S, B_S) est S.C ssi : 1) l'accessibilité des états à au moins une commande est vérifiée dans le graphe associé à (A_S, B_S).
2) le rang générique de (A_S, B_S) est égal à n.

On remarque immédiatement que :

i) (1) est équivalente à l'irréductibilité de (A_S, B_S) ou à ce que le graphe $G(A_S, B_S)$ soit accessible aux noeuds origines (entrées).

ii) Si on compare avec KALMAN (définition CK3, critère CK2, chapitre I) la proposition (2) vient s'ajouter à la condition d'accessibilité, malgré la validité du théorème 1 (III.2.2.1). On a acquis l'avantage de devoir calculer le rang sur une matrice beaucoup plus simple que K.
FRANKSEN et al., [1979 a-b-c] ont apporté une explication à ce scindement en deux, d'un critère (III.2.2.1) apparemment similaire au cas classique. En évoquant le critère de GILBERT (CK4), ils ont établi un isomorphisme entre les propriétés numériques et les propriétés booléennes :

ii-1 l'hypothèse de valeurs propres distinctes permettant la mise sous forme diagonale de A correspond en booléen au critère (2) du rang terme.

ii-2 le critère de GILBERT sur cette forme diagonale coïncide avec l'accessibilité (1) dans les deux cas.

iii) La proposition (2) est équivalente à ce qu'il n'y ait pas de dilatation dans le graphe biparti associé à (A_S, B_S) (les entrées pouvant appartenir à T(S) mais pas à S : voir II.8.1). Le calcul du rang s'effectue à partir des algorithmes énumérés en II.9 ; dans l'hypothèse où les entrées sont indépendantes, on peut utiliser la décomposition en composantes cycliques et acycliques A_{si} de A_S; il faut et il suffit alors de tester que rang-g $(A_{si}, B_{si}) = n_i$ où n_i est l'ordre de A_{si}, $\forall i = 1, ..., N$.

4i) L'accessibilité se vérifie à partir des algorithmes II.1.0 ; la procédure algébrique s'applique selon les deux variantes suivantes:

III.2.2.3.1 Matrice d'atteignabilité : [SILJAK, 1977 a].

Théorème : (A_S, B_S) est atteignable par les entrées ssi la matrice B_0 où $B_0 \equiv B_B + A_B B_B + A^2_B B_B + ... + A_B^{n-1} B_B$ (produit et somme booléens) ne possède aucune ligne nulle. B_0 est appelée matrice d'atteignabilité du système.

III.2.2.3.2 Test d'accessibilité de GLOVER et SILVERMAN : [1976].

Sous l'hypothèse que le rang générique de (A_S, B_S) est plein, GLOVER et S. ont développé une procédure d'évaluation de l'accessibilité à partir de la représentation booléenne de la matrice de commandabilité K.

Soit $b = B_B \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$ où le produit des matrices est booléen (détection des lignes nulles de B_B)

Soit $K_k = [b, A_B b, A^2_B b, ..., A^{k-1}_B b]$

Pour tester l'irréductibilité de (A_S, B_S) faire :

1) $c_0 = b,\ d_0 = 0,\ k = 1$
2) $c_k = A_B\, c_{k-1},\ d_k = c_k + d_{k-1}$ (où + est une sommation booléenne).
3) Si $d_k = d_{k-1}$ alors STOP sinon faire $k \longleftarrow k+1$ et retour en 2)

si $d_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$ alors l'accessibilité est assurée et donc la commandabilité structurelle aussi.

Conformément aux remarques ii) précédentes, FRANKSEN et al., (1979) jugent pertinent que GLOVER et S. aient supposé le rang-générique plein pour (A_S, B_S) avant de vérifier l'accessibilité.

III.2.2.4 Interprétation modale.

De manière analogue à KALMAN (critère CK3) il y a équivalence de la commandabilité structurelle des états et de celles des modes, selon :

Théorème CL3 :

(A_S, B_S) est S.C ssi rang-g $(A_S - \lambda I, B_S) = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

i) Ce théorème constitue une démonstration à la deuxième partie du théorème 2. Contrairement au cas de KALMAN, la nécessité d'avoir à considérer seulement les λ du spectre de A n'est à envisager que pour les éléments nuls de ce spectre car les valeurs propres non nulles sont indéterminées. Il découle alors que rang-g $(A_S, B_S) = n$ c'est-à-dire la proposition (2) du théorème 2 ; ainsi celle-ci exprime-t-elle la condition pour que les modes nuls du système soient commandables pour presque toutes les valeurs des paramètres.

ii) De la même façon, on démontre que le critère d'accessibilité est la condition pour que tous les modes non nuls soient structurellement commandables [HOSOE and MATSUMOTO, 1979], [REINSCHKE, 1981].

iii) Aussi si le système A_S ne possède pas d'intégrateur structurel, il faut et il suffit de tester l'accessibilité ; cela se produit si rang-g $(A_S) = n$, ce qui implique bien que rang-g$(A_S, B_S) = n$. Pour détecter la présence de modes nuls structurels sans calculer le rang global de A_S, on peut utiliser les arguments extrinsèques du domaine de la commandabilité, développés en II.9.1.2 [FRANKSEN and al., 1979 a-b-c] où l'on se ramène à un test local sur chaque bloc diagonal (si la décomposition est possible). A moins que la forme structurée A_S ne soit réellement diagonale ou triangulaire auxquels cas les modes nuls apparaissent explicitement sur la diagonale.Seul le cas particulier où on sait a-priori que le système est asymptotiquement stable permet d'éviter tout calcul

: cela en effet implique qu'il n'y a aucun pôle nul (ni intégrateur structurel ni intégrateur numérique); de telles considérations remettent alors en cause que l'approche structurelle est conçue comme une première étape à l'étude d'un système dans laquelle on dispose uniquement d'informations qualitatives. Pour certains exemples cependant sur lesquels l'automaticien a une grande pratique de la commande, cette éventualité est acceptable.

4i) Nous proposons dans cette parenthèse une interprétation d'une déficience en rang de (A_S, B_S). Nous aurons à choisir parmi les hypothèses suivantes :

(H_1) rang-g $(A_S, B_S) \neq n$ $\qquad$ $A_S(n \times n)$, $B_S(n \times m)$

(H_2) rang-g $(A_S) = n\text{-}d$

(H_3) rang-g $(B_S) = m$

(H_4) $m = d$

(H_5) rang-g $(A_S, B_S) = n\text{-}p$ $\qquad$ où $p < d$

On rappelle que $(H_1) \Rightarrow$rang-g $(A_S) \neq n$.
Voici les différentes situations auxquelles on peut se heurter :

4i-1) Si (H_1), (H_2), (H_3), (H_4) sont simultanément satisfaites, cela implique que les m entrées indépendantes disponibles ne suppriment pas la déficience en rang de A_S c'est-à-dire qu'aucune d'elles n'atteint l'un ou plusieurs des modes nuls présents dans A_S. Ceci est illustré dans l'exemple 1.

Exemple 1 :

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \quad ; \quad B_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$n = 3,\ m = 1,\ d = 1$

$$(A_S, B_S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{x} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{x} & 0 \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \Bigg\} \quad S = \{1, 2\}$$

$$\uparrow$$

$$T(S) = \{3\}$$

B_S n'agit pas sur le mode nul. (Notons que l'accessibilité est bien vérifiée ; cf fig 4i-1)

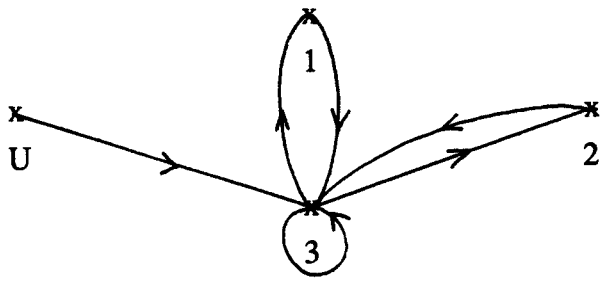


Fig.4i-1

4i-2) Si (H_1), (H_2), (H_3), (H_5) sont réunies, cela signifie que seules (d-p) entrées rendent structurellement commandables autant de pôles nuls. Il reste p pôles qui ne le sont pas. L'exemple 2 décrit une telle configuration.

Exemple 2 :

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{x} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{x} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{x} \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \Bigg\} S \qquad B_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ T(S)

$n = 4$, $m = 2$, $d = 2$, $p = 1$

$$(A_S, B_S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & 0 \\ x & x & x & x & 0 & x \end{pmatrix} \Bigg\} S'$$

$\uparrow$ T(S')

Le graphe correspondant, fig 4i-2, montre l'accessibilité à U_1 et U_2.

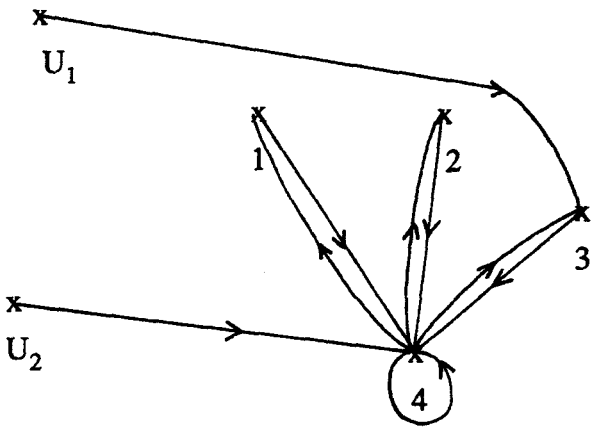


Fig. 4i-2

4i-3) Enfin si (H_1) est vérifiée et B_S n'est pas de rang plein, les deux situations précédentes peuvent se présenter.

5i) Une dernière remarque : si rang-g $(A_S, B_S) = n$, le fait que rang-g $(B_S) \neq m$ signale qu'il existe une redondance dans les vecteurs commandes. Un objectif peut être d'éliminer ceux qui ne sont pas nécessaires (cf III.3.2)

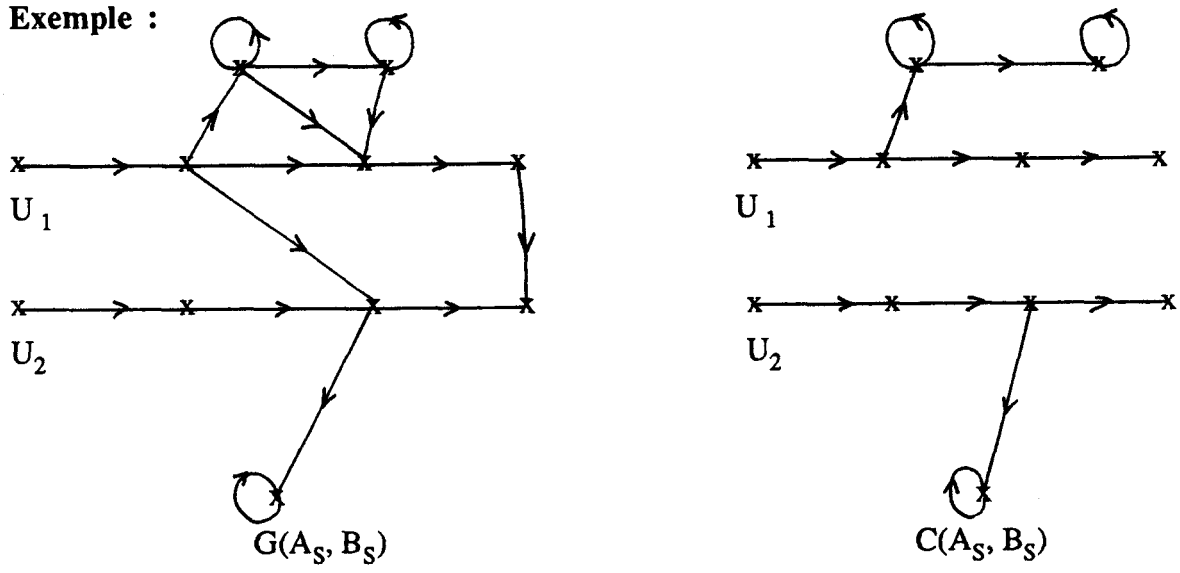
III.2.2.5 Couverture par un cactus [LIN, 1972, 1974].

LIN a établi :

Théorème CL4 :
(A_S, B_S) est S.C ssi le graphe $G(A_S, B_S)$ est couvert par un cactus.

Nous ne revenons pas sur les définitions II.6.1.8 et II.6.2.3. Illustrons cette proposition par un exemple.

Exemple :



Le cactus $C(A_S, B_S)$ couvre le graphe $G(A_S, B_S)$

III.2.2.6 Note sur les équivalences des critères.

La simplification de la démonstration : "(A_S, B_S) S.C" $\Leftrightarrow$
"III.2.2.3 ((1) et (2))" $\Leftrightarrow$
"III.2.2.5"

s'est produite en plusieurs étapes. Initialement, la preuve de ces implications réciproques avait été réalisée par LIN, SHIELDS et P., GLOVER et S, dans un environnement graphique et matriciel complexe.

HOSOE et M. (1979) ont démontré plus simplement (méthodes algébriques en utilisant III.2.2.4) que l'irréductibilité de (A_S, B_S) est une condition suffisante à la commandabilité structurelle des modes non nuls, c'est-à-dire

III.2.2.3 1) $\Rightarrow$ (A_S, B_S) S.C pour $\lambda \neq 0$. Rappelons que
III.2.2.3 2) $\Rightarrow$ (A_S, B_S) S.C pour $\lambda = 0$ est évidente.

MAYEDA (1981) a proposé, à partir d'une interprétation graphique de la plénitude du rang générique de (A_S, B_S), une démonstration réduite de l'implication III.2.2.3 $\Rightarrow$ III.2.2.5. Leur assertion repose sur le corollaire que "rang $(A_S, B_S) = n$ ssi il existe un ensemble de cycles disjoints et de tiges couvrant $G(A_S, B_S)$". (Ceci n'est autre que la décomposition d'une matrice de

permutation en chemins et en cycles bien classique dans la théorie des graphes). De même, MAYEDA a apporté une simplification notoire à III.2.2.5 $\Rightarrow$ (A_S, B_S) S.C, en exploitant les formes matricielles correspondant au cactus et a montré que (A_S, B_S) S.C $\Rightarrow$ III.2.2.3, car sinon la matrice K n'est pas de rang plein.

Par la suite, YAMADA (1984) a considérablement réduit la preuve de III. 2.2.5 $\Rightarrow$ (A_S, B_S) S.C, à partir de la même propriété sous-jacente au corollaire précédemment cité, appliquée à des sous-matrices de (A_S, B_S) et jointe à la structure de cactus.

Enfin LINNEMANN (1986) a développé une démonstration de III.2.2.5 $\Rightarrow$ (A_S, B_S) S.C, très simple et très claire, fondée sur une récurrence sur n et sur les propriétés des cacti.(A partir de l'hypothèse que tout système de dimension (n-1) qui contient un cactus est S.C.,on démontre que le résultat est vrai à l'ordre n).

Cette description assez qualitative des choses a pour but de caractériser les méthodes plutôt que leurs démonstrations, accessibles au lecteur dans les articles ; celui-ci, d'ailleurs s'il joue le jeu, trouvera du plaisir à suivre cette évolution en crescendo et par ricochets. Ainsi, il se détache la conclusion que l'exploitation graphique du cactus a prouvé des simplifications qui atteignent leur apogée dans le dernier des travaux cités ; nous verrons plus en détails en III.3 l'intérêt du cactus.

III.2.2.7 Approche de ROSENBROCK.

III.2.2.7.1 Critère classique CL11 : [SHIELDS et PEARSON, 1976].

Proposition 1 : [SHIELDS et P.]

(A_S, B_S) est structurellement non commandable ssi la matrice de commandabilité étendue (R (n^2 x n (n + m - 1)) définie par :

$$R = \begin{pmatrix} B_S & I_S & 0 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & -A_S & B_S & I_S & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -A_S & B_S & I_S & 0 & & & \\ 0 & & & & & & 0 & -A_S & B_S & I_S & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & -A_S & B_S \end{pmatrix}$$

est de la forme (n^2).
où (A_S, B_S) I_S sont la paire et la matrice Identité structurées.

SHIELDS et P. ont proposé un énoncé qui s'inscrit dans le cadre de la définition II.8.2 de la forme (t) ainsi que sa preuve.
La contre-partie de ce théorème est la suivante :

Proposition 2 :
(A_S, B_S) est structurellement commandable ssi la matrice R est de rang générique égal à n^2

N.B : R n'est pas structurée.

III.2.2.7.2 Approche matrices systèmes polynomiales : critère CL12 [MAIONE et TURCHIANO, 1986].

Soit $P_S(s)\begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ une représentation structurée matrice système de Rosenbrock, du système

$$\text{où } P_S(s) = \begin{pmatrix} T_s(s) & U_s(s) \\ -V_s(s) & W_s(s) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} z \in \Re^r \\ u \in \Re^m \\ y \in \Re^l \end{array}$$

z, u, y sont respectivement les variables internes ,d'entrée et de sortie. $T_S(s)$, $U_S(s)$, $V_S(s)$, $W_S(s)$ sont des matrices polynomiales de dimension appropriée, dont les coefficients sont des polynômes en s.

Relation d'équivalence dans l'ensemble des matrices systèmes :

Désormais l'indice s relatif au système structuré sera oublié, pour alléger les notations.
Soient $P(s) = P_0\, s^{\mu} + P_1\, s^{\mu-1} + \ldots + P_{\mu}$
$P'(s) = P'_0\, s^{\mu} + P'_1\, s^{\mu-1} + \ldots + P'_{\mu}$
où (P_0, P_1, ..., P_{μ}), (P'_0, ..., P'_{μ}) sont des μ-uplets de matrices structurées à coefficients arbitraires dans $\Re$.
P(s) et P'(s) ont la même structure ssi $\forall$ k, $0 \leq k \leq \mu$, P_k et P'_k ont la même structure.

Forme canonique :

MAIONE et T. ont énoncé :

Théorème 1 :

Il existe une permutation des r premières lignes et des r premières colonnes de P(s) qui transforme la matrice système en la forme P*(s) telle que :

$$P^*(s) = \begin{pmatrix} T_{nn}(s) & 0_{np} & T_{nq}(s) & 0_{ng} & U_{nm}(s) \\ T_{pn}(s) & T_{pp}(s) & T_{pq}(s) & T_{pg}(s) & U_{pm}(s) \\ O_{qn} & O_{qp} & T_{qq}(s) & O_{qg} & O_{qm} \\ O_{gn} & O_{gp} & T_{gp}(s) & T_{gg}(s) & O_{gm} \\ -V_{ln}(s) & O_{lp} & -V_{lq}(s) & O_{lg} & W_{lm}(s) \end{pmatrix}$$

où les indices sont les dimensions des sous-matrices, définis ci-après :

Soit G(P(s)) le graphe orienté associé à P(s).

Soit $V_z = \{z_1, z_2, ..., z_r\}$ l'ensemble des sommets "internes"

$V_u = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ l'ensemble des sommets "entrées"

$V_y = \{y_1, y_2, ..., y_l\}$ l'ensemble des sommets "sorties"

On partitionne V_z en quatre sous-ensembles distincts :

V_{z1}, de cardinalité n, l'ensemble des noeuds internes qui sont accessibles aux entrées et aux sorties.

V_{z2}, de cardinalité p, l'ensemble des noeuds internes qui sont accessibles aux entrées et non accessibles aux sorties.

V_{z3}, de cardinalité q, les noeuds internes accessibles aux sorties et non accessibles aux entrées.

V_{z4}, de cardinalité g, les noeuds internes non accessibles, ni aux entrées ni aux sorties.

Commentaires :

i1) La structure de P*(s) est semblable à celle de la forme standard obtenue par KALMAN pour la commandabilité usuelle.

i2) Si P*(s) et P'*(s) sont de même structure alors leur forme canonique ont des sous-matrices de même dimension n, p, q et g.

1) Zéros structurels de découplage entrées :

Ces zéros sont dits structurels car ils sont présents pour toutes les valeurs des paramètres de la matrice système .

Soit P(s) une matrice système (non structurée).

Λ_0 un facteur commun à gauche de T(s) et U(s) :

$$[T(s)\ U(s)] = \Lambda_0(s)\,[T_0(s)\ U_0(s)] \qquad (E)$$

Définition : Sous l'hypothèse que les paires (T'(s), U'(s)) de même structure que (T(s), U(s)) ont un facteur commun à gauche de même structure que $\Lambda_0(s)$ alors :

les racines de l'équation (E) : dét $\Lambda_0(s) = 0$ sont appelés les zéros de découplage structurels d'entrées (notés par leur abréviation Anglaise I.D.S)

Nous ne détaillerons pas les propriétés relatives à ces zéros, pour en venir rapidement au principal résultat :

Théorème 2 :

Soit P*(s) la forme canonique de P(s).

Si $V_{z3} \cup V_{z4} \neq \emptyset$ alors les racines des équations

dét $T_{qq}(s) = 0$ (1)

dét $T_{gg}(s) = 0$ (2)

sont les I.D.S zéros associés à P(s).

Si V_{z3} (ou V_{z4}) est vide, on doit considérer les équations (2) (ou (1))

Conclusion :

Dans le cas où la représentation de Rosenbrock correspond avec les équations d'état, (i.e les variables internes sont celles d'état) la détection des I.D.S. zéros dénonce la présence d'états non structurellement commandables puisque non accessibles aux entrées.

Sinon, cette représentation reste plus générale et est quelquefois plus naturelle à la description d'un système. Nous émettons toutefois une réserve sur la plus ou moins grande facilité à extraire les racines des dits polynômes structurés.

III.2.2.8 Exploitation de l'accessibilité : [SILJAK, 1977].

Le paragraphe précédent a mis en évidence un critère fondé uniquement sur les propriétés

d'accessibilité des systèmes. SILJAK (1978) a été le premier à soutenir la thèse que l'atteignabilité des états aux entrées est la qualité principale que doit posséder un système. Conscient du fait qu'elle constitue un critère beaucoup plus faible que la commandabilité où est exigé un test de rang (matrice de commandabilité) qui inclut l'accessibilité, il avance les arguments qu'une petite perturbation des paramètres des matrices peut suffire à rendre le système KALMAN commandable, s'il est accessible. (Cette constatation est tout à fait dans l'esprit de la commandabilité structurelle).

La deuxième raison qu'il invoque est le problème posé par le calcul numérique du rang, évité par les considérations purement booléennes de l'accessibilité. Contrairement à son opinion, LIN n'a pas introduit son concept structurel pour supprimer ce calcul ; d'ailleurs ses critères se scindent en deux parties distinctes auxquelles il ne donne aucune préférence. Aussi nous pensons qu'il faille considérer que la propriété d'accessibilité est une condition nécessaire donc importante mais pas suffisante ; de plus, le fait que la condition du rang générique exprime la commandabilité des modes nuls nous maintient dans cette position.

Par contre, SILJAK a aussi appuyé ses propos sur l'adéquation des conditions d'accessibilité à être appliquées sur les systèmes non linéaires. Il a proposé de manière analogue à la forme standard de KALMAN évoquée dans l'approche III.2.2.7, une forme représentant "la structure pure canonique d'un système dynamique" dans laquelle apparaissent quatre sous-ensembles équivalents aux V_{z1}, V_{z2}, V_{z3}, V_{z4}.

Toutefois, l'interprétation de FRANKSEN et al. évoquée en III.2.2.3 ii) nous convient mieux, pour justifier de donner priorité au critère d'atteignabilité.

III.2.2.9 Forme canonique de JORDAN associée à une matrice structurée : [HOSOE et M., 1979].

Soit $\mu(A)$ le plus grand ordre du mineur principal non nul de A.

Théorème 1 : Supposons que (A,B) soit irréductible .
Alors tout mode non nul de A est structurellement commandable.Plus précisément ,il existe une variété propre $V \subset \mathcal{R}^{nA} x \mathcal{R}^{nB}$ telle que $\forall$ $(A,B) \in V^C$ ($=\mathcal{R}^{nA} \times \mathcal{R}^{nB}$ -V),A possède $\mu(A)$ valeurs propres non nulles distinctes et tout mode correspondant à ces valeurs propres est structurellement commandable .

Théorème 2 :
Sous l'hypothèse que le système structuré (A_S, B_S) est structurellement commandable alors pour

presque tous les choix des valeurs des paramètres de (A_S, B_S), la forme canonique de JORDAN du système prend la forme :

$$\hat{A} = \text{diag}\,[A_0, A_1, ..., A_S]$$

$$\hat{B} = [B_0^t, B_1^t, ..., B_S^t]^t$$

où B_0 et B_i sont d'ordre $\mu(A) \times r$ et $\mu_i \times r$ respectivement et

$$A_{0_{\mu(A) \times \mu(A)}} = \text{diag}\,[c_1, ..., c_{\mu(A)}]$$

$$A_{i_{\mu_i \times \mu_i}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (\mu_i > 1)\ ,\quad A_i = 0\ (\mu_i = 1)$$

où

1) Les nombres s et μ_i (i = 1, ..., s) ne dépendent pas des valeurs numériques des paramètres de (A_S, B_S) et sont déterminés de manière unique : $s = n - \text{rang-g}\, A_S$.

2) Chaque ligne de B_0 est non nulle.

3) Les dernières lignes des matrices $B_1, ..., B_S$ sont linéairement indépendantes.

4) Les nombres complexes c_i sont différents de zéro et mutuellement distincts.

Ainsi le nombre de blocs associés à (A_S, B_S) est-il unique et l'ordre de ces blocs, de même.

Les nombres de blocs de JORDAN d'ordre $\mu_i \times \mu_i$ sont donnés par :

$$\text{rang-g}\, A^{\mu i-1} - 2\,\text{rang-g}\, A^{\mu i} + \text{rang-g}\, A^{\mu i+1} \qquad 1 \leq \mu i \leq n-1\ .$$

$$\text{rang-g}\, A^{\mu i-1} - \text{rang-g}\, A^{\mu i} \qquad \mu i = n.$$

III.2.3.0 Critère de commandabilité structurelle de sortie.

Si l'on suppose D = 0 dans (I.1), le système (A_S, B_S, C_S) est structurellement commandable du point de vue de la sortie ssi $\text{rang-g}\,(C_S B_S, C_S A_S B_S, C_S A^2{}_S B_S, ..., C_S A_S{}^{n-1} B_S) = n$ [FRANKSEN and al., 1979].

Si le système possède cette propriété, on peut fixer chaque sortie à une référence, pour presque toutes les valeurs des paramètres de (A_S, B_S, C_S).

III.2.3.1 Commandabilité structurelle forte.

MAYEDA et YAMADA (1979) ont introduit la définition de la commandabilité structurelle forte pour un système monoentrée où $b(n \times 1) \in \Re^n$.

Définition 1 : La paire (A, b) est fortement structurellement commandable, ssi tout système admissible (A', b') est KALMAN commandable, sans exception, tant qu'un ou des paramètres non nuls de (A, b) ne deviennent pas nuls.

L'intérêt de cette notion réside dans le fait qu'il n'existe plus d'hypersurface où l'on perd la commandabilité.

Définition 2 : Un cactus sera dit cactus de boutons en série ssi l'origine de chaque bouton B_k appartient au bouton B_{k-1}, $\forall$ k, l'origine de B_1 appartenant à la tige T (voir définition II. 6.2.3.1).

Ceci est illustré fig 5.

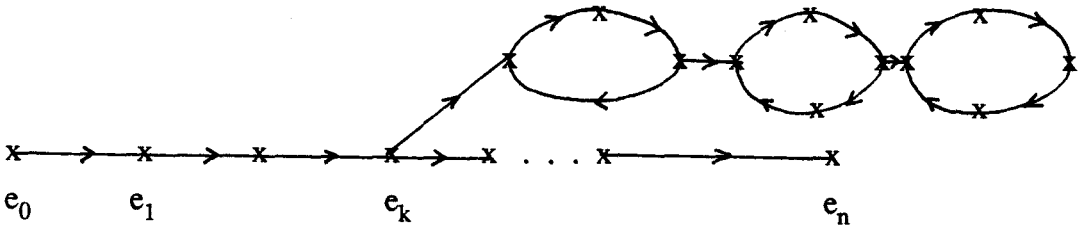


fig. 5

Théorème 1 :
(A, b) est fortement structurellement commandable ssi le graphe G(A, b) satisfait les trois assertions suivantes :

a) G(A, b) est accessible.

b) Pour tout sous-ensemble de noeuds N (excepté l'origine) il existe au moins un noeud i dans T(N), antécédent de N, tel que le nombre d'arcs reliant i à certains noeuds de N soit égal à un.

c) Pour tout sous-ensemble de noeuds N (excepté l'origine) qui satisfait $N \subset T(N)$ il existe au moins un noeud i dans T(N) - N tel que le nombre d'arcs reliant i à certains noeuds de N est égal à un.

Théorème 2 :
(A, b) est fortement structurellement commandable ssi le graphe G(A, b) satisfait les deux propriétés suivantes :

a) G(A, b) est couvert par un cactus de boutons en série, unique.

b) G(A, b) ne contient aucun ensemble de cycles qui soit atteint de l'origine de G(A, b) par plus d'un chemin.

Remarques :
i1) Il est évident que la deuxième formulation est plus simple à vérifier si les graphes ne sont pas très denses ; jusqu'à présent il n'existe pas d'algorithme efficace pour affronter de grandes dimensions.

i2) Cette notion est à rapprocher du concept de commandabilité qualitative [TRAVE et KASZKUREWICZ, 1986 a-b] fondé sur la connaissance du signe des coefficients non nuls des matrices structurées du modèle d'état ; en utilisant cette information supplémentaire on peut garantir qu'il n'existe pas de cas de non commandabilité quelle que soit la valeur des paramètres, pour certaines configurations de signes. Ainsi on peut trouver des systèmes structurellement commandables, non fortement, mais qualitativement commandables.

III.3 COMMANDABILITE STRUCTURELLE AU SENS MINIMAL.

Nous laissons à cet intitulé le sens que LIN (1976) lui a donné et qui est équivalent à la notion de cactus. Aussi le problème important de la commande d'un système avec un nombre minimum d'entrées, dénommé de la même manière par certains auteurs (ex : REINSCHKE, (1981)) est-il un cas particulier de celui-ci. Bien que l'un englobe l'autre, ces deux points restent tout à fait distincts.

III.3.1 Cactus - Structure minimale : [LIN, 1976].

Nous avons énoncé en III.2.2.5 une condition nécessaire et suffisante de commandabilité structurelle. On peut compléter ce résultat à partir de la définition suivante :

Définition : La paire (A_S, B_S) est structurellement commandable au sens minimal (noté M.S.C) ssi

1) (A_S, B_S) est S.C

2) (A_S, B_S) est minimale telle que 1) soit vérifiée (i.e si on fixe à zéro un coefficient non nul de (A_S, B_S), ce qui revient à supprimer un arc dans $G(A_S, B_S)$, la propriété 1) n'est plus vraie).

LIN a énoncé :

Théorème : (A_S, B_S) est M.S.C ssi $G(A_S, B_S)$ est un cactus.

On déduit de cette proposition et de III.2.2.5 qu'un système structurellement commandable possède une (plusieurs) structure (s) minimale (s). La non unicité du cactus est liée à celle du couplage maximal dans la structure de départ et aux différents choix possibles des coefficients non nuls de A_S qui satisfont l'accessibilité des divers cycles aux entrées, une fois qu'un couplage a été déterminé.

Le cactus représente la structure du système juste essentielle c'est-à-dire minimale (en nombre d'entrées et en intéractions entre variables) dont le maintien de la propriété de commandabilité soit assuré. Cet aspect de "minimalité"est très important à souligner . Ce concept est physiquement justifié par le fait qu'un système possède presque toujours des entrées ou (et) des liaisons redondantes. D'autre part , on peut affirmer qu'un système isolé est robuste à la rupture de commandes ou d'intéractions n'appartenant pas au cactus et ceci rejoint les préoccupations du chapitre VI où ce point de vue de robustesse est discuté pour les systèmes interconnectés .

III.3.2 Cactus ; pseudo-diagonalisation de (A_S, B_S).

III.3.2.1 Extraction d'un cactus couvrant une paire (A_S, B_S) S.C.

Ce problème n'a à notre connaissance jamais été abordé car les développements de LIN restent purement théoriques.

Pour obtenir un cactus à partir d'un système S.C, la méthode consiste à déterminer un couplage dans (A_S, B_S) en privilégiant d'abord les vecteurs commandes. On peut utiliser l'algorithme de PILLOU en modifiant l'étape 1 de la manière suivante :

Etape 1 : trouver l'ensemble des colonnes C_i de B qui ont le nombre minimum de paramètres non nuls. Soit L_j l'ensemble des lignes de (A, B) couvertes par ces colonnes. Sil n'existe plus de colonnes dans B, faire cette recherche sur les colonnes de A ; s'il n'existe plus de colonnes, STOP.

Une fois le couplage déterminé, un cactus est obtenu ainsi :

* S'il n'existe pas de cycle, STOP : un cactus est extrait et il est constitué des chemins déterminés par le couplage.

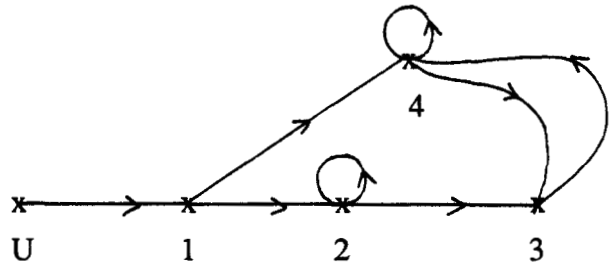
* S'il existe des cycles, vérifier leur accessibilité aux entrées déterminées par les origines des chemins appartenant au couplage, en éliminant du graphe les extrémités des chemins ; enregistrer l'antécédent de chaque cycle et l'arc incident, ce qui constitue les boutons du cactus ; si un cycle n'est pas accessible, déterminer un nouveau couplage en augmentant d'une unité le nombre d'entrées.

En théorie des graphes, il n'existe pas d'algorithme permettant de déterminer tous les couplages possibles dans un graphe biparti ; toutefois pour des dimensions pas trop grandes, c'est concevable, donc aussi l'élaboration de tous les cacti couvrant le graphe d'un système S.C.

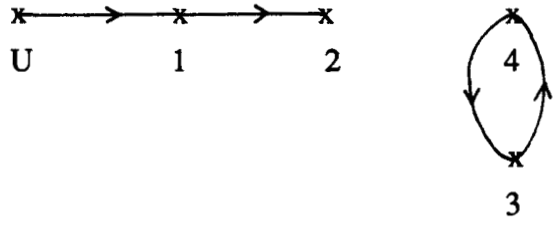
Exemple :

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & x & 0 \\ x & 0 & x & x & 0 \end{pmatrix}$$

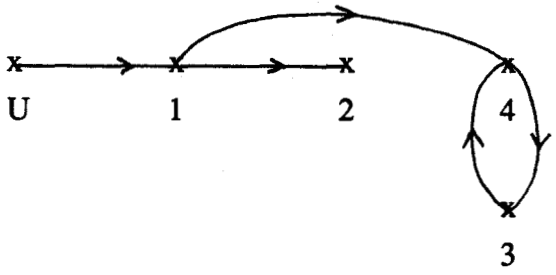
G(A, B) :



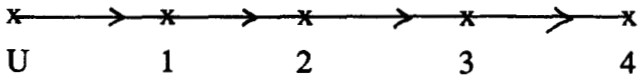
L'algorithme indiqué ci-dessus donne le couplage :

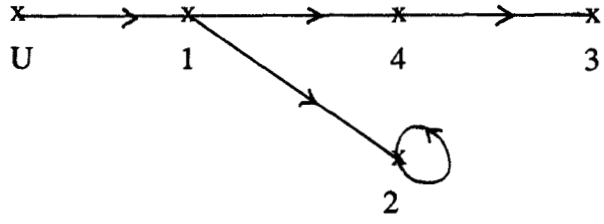


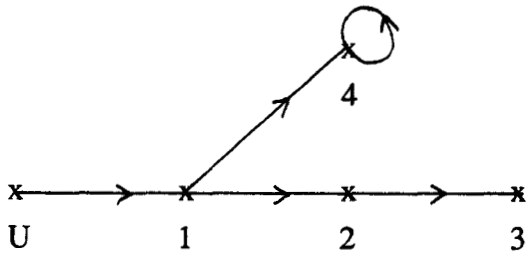
Pour tester l'accessibilité du cycle c'est-à-dire de 4 ou 3 à U, on enlève 2 dans G(A, B) ; 4 est bien accessible à U et a pour antécédent 1 ; le cactus obtenu est :



En faisant varier le couplage dans A (dans B il est unique) on obtient les différents cacti suivants :







III.3.2.2 Interprétation du cactus.

Nous voudrions insister sur l'aspect canonicité du cactus qui à notre sens, devrait être reconnu comme tel dans la théorie de la commande des systèmes linéaires. Soulignons cependant qu'il n'est pas le résultat d'un changement de base comme le sont les formes canoniques dans la commandabilité au sens usuel. Dans cet esprit de transformation, une matrice de cactus "normalisée" s'obtient à partir d'une suppression de certains coefficients non nuls dans (A_S, B_S) initiale et d'une permutation sur les éléments restants. Toutefois en pratique c'est bien un algorithme du type précédent qu'il faut utiliser. Nous ne jugeons pas nécessaire ici de présenter la structure normalisée de ces matrices, présentée dans [LIN, 1976] et exploitée dans [MAYEDA, 1981] car seule en sera utilisée une forme simplifiée en IV.

En multivariable, le cactus constitué de cacti élémentaires en parallèle est une

pseudo-diagonalisation de la paire (A, B). "Pseudo" pour plusieurs raisons : d'abord parce qu'il s'agit de A et de B et pas de A seulement ; d'autre part la forme obtenue est bloc diagonale mais à l'intérieur de chaque bloc il n'y a pas de structure à dégager par rapport à la diagonale (ni symétries, ...) comme la forme de JORDAN par exemple à laquelle il est naturel de se référer même si elle est la transformée de A seule ; en effet il est facile de concevoir la partie "variables d'état" qui correspond au cactus auquel on supprime l'origine et les arcs qui en partent ; dans ce sens on peut aussi dire qu'on n'obtient pas les mêmes valeurs propres nulles que le système initial puisque, comme nous le verrons au chapitre IV, le rang générique de la matrice d'état d'un cactus mono-entrée est toujours égal à (n-1), n étant la dimension du vecteur d'état, alors que celui de A peut être égal à n. (En multivariable le rang générique de la matrice d'état du cactus est égal à (n-m) où m est le nombre d'entrées).

III.3.3 Commande avec un nombre minimum d'entrées.

III.3.3.1 Méthode de REINSCHKE (1981).

REINSCHKE s'est intéressé à la recherche d'un nombre minimal d'entrées pour commander le système A. Nous présentons ici sa méthode puisqu'elle est la seule qui traite explicitement du problème.Nous verrons cependant que l'apparente facilité de sa démarche cache des obstacles liés à la taille des matrices mises en jeu.

Voici de manière synthétisée l'algorithme, fondé sur une détermination séquentielle du rang générique de A .

Etape 1 : * Effectuer une permutation sur A pour la décomposer en ses composantes fortement connexes ; on obtient une forme bloc triangulaire supérieure.

Etape 2 : Soit d la déficience en rang de A_S

$$d = n - \text{rang-g } A_S$$

En notant A_p la sous-matrice bloc lignes constituée des lignes n, n-1, ..., n-p+1 ; dp la déficience de rang-g A_p, d_p = p-rang-g A_p. La méthode consiste à décomposer A en autant de sous-matrices A_p que d'unités de déficience en rang de A. On détecte successivement la dépendance entre les lignes.

* Marquer les d indices p tels que $d_p = d_{p-1} + 1$ où $p \in \{1, 2, ..., n\}$ et $d_0 = 0$, par un second indice p_i $i = 1, 2, ... d$, dans une colonne supplémentaire à droite de A en commençant par le bas. On a $d = d_n$.

Théorème : Soit A une matrice structurée (n x n) sous la forme bloc triangulaire mentionnée ci-dessus et telle que rang-g A = n-d < n. La matrice minimale B qui rende A structurellement commandable est une matrice n x d où

a) les d paramètres $b_{(pi)i}$ (i = 1, 2, ..., d) doivent être non nuls.

b) s'il existe dans A, un bloc diagonal isolé i.e bordé sur sa droite de coefficients tous égaux à zéro alors le bloc ligne correspondant dans B doit avoir au moins un coefficient non nul (ce qui est toujours le cas pour le dernier bloc diagonal).

Si rang-g A = n alors il suffit d'un vecteur d'entrées (n x 1) qui ait au moins un coefficient non nul dans la dernière tranche.

La démonstration du théorème est triviale ; la condition a) est une condition suffisante pour que rang-g (A, B) = n ; la condition b) de même pour que les composantes fortement connexes sur lesquelles aucun état n'agit soient accessibles c'est-à-dire pour que l'accessibilité globale soit satisfaite.

Illustrons cela par un exemple simple où A déjà réordonnée a pour graphe G(A) (Fig. 6).

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} & & & & & \{d_p\} & \{p_i\} \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 1 \quad 6 = p_1 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \end{array}$$

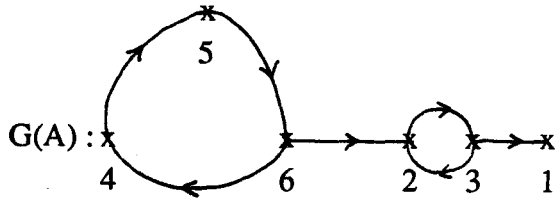


Fig.6.

On a encadré en pointillés les composantes fortement connexes et en trait plein les blocs lignes.

La première déficience en rang n'apparaît que pour $p_1 = 6$ et elle est la seule. Dans la colonne de droite figurent les déficiences d_p et les indices p_i (bien noter que l'indice i augmente du bas vers le haut) ; $d_1 = 1$ pour $p_1 = 6$; rang-g A = 6 - 1 = 5 ;

a) $\Rightarrow b(_{p1})_1 \neq 0$ soit en numérotation classique $b_{11} \neq 0$;

b) $\Rightarrow b_{61}$ ou b_{51} ou $b_{41} \neq 0$

Par exemple:

B minimale = $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui correspond au graphe :

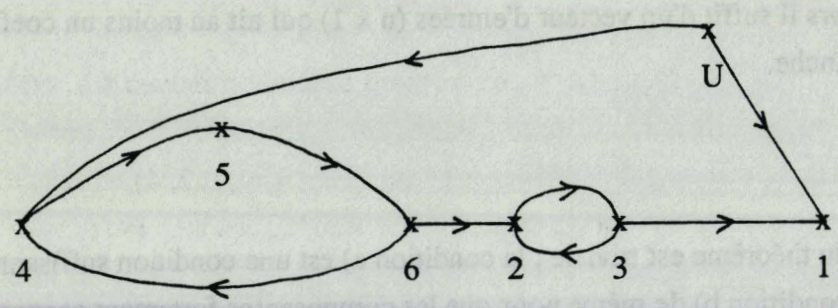


Fig.7.

On vérifie que le graphe obtenu est couvert par le cactus c(A) (Fig.8)

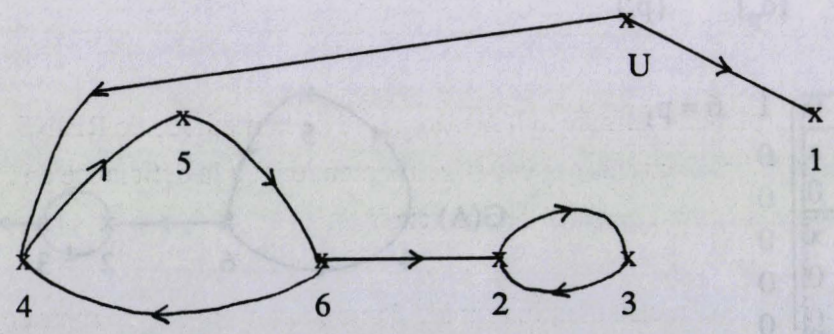


Fig.8

Analyse de la méthode

i1) La vérification du critère d'accessibilité sur la forme bloc triangulaire est très rapide et très simple.

i2) La détermination des p_i nécessite le calcul successif du rang de matrices dont le nombre de lignes augmente à chaque pas. Pour des matrices d'ordre peu élevé ($n \leq 10$), c'est concevable ; pour des grands systèmes le temps de calcul risque d'être long. TRAVE et TITLI (1985) ont proposé un algorithme séquentiel qui conserve à chaque pas le minimum d'informations sur les pas antérieurs ; nous l'exposerons à propos des méthodes de décomposition en III.4.

i3) La couverture par un cactus est pour des graphes peu denses un moyen très efficace et rapide de test de commandabilité structurelle ; si on décompose le critère en deux : on voit qu'il existe une colonne nulle dans A, ou que sur les lignes les ensembles $S = \{1, 2, 4\}$ et $T(S) = \{3, 6\}$ caractérisent une déficience en rang d'une unité ; on est en présence d'une dilatation ; on doit donc agir sur 1 ou 2 ou 4 ; l'accessibilité nécessite une action sur 4 ou 5 ou 6 ; B étant minimale on choisit $b_{41} \neq 0$; ainsi a-t-on obtenu une composante en moins,soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le cactus couvrant correspond à la tige (U, 4, 5, 6, 2, 3, 1).

Nous venons de montrer par cet exemple la non optimalité de la méthode de REINSCHKE; cela ne remet pas en cause le nombre d'entrées qui est effectivement égal à la déficience en rang de A mais le nombre de composantes non nulles pour ces vecteurs.

Ce problème se ramène à la détection la plus rapide d'une dilatation dans la matrice A. Ce principe joint au test d'accessibilité vient ici de mettre en évidence que 4 est le point d'action minimal, d'une manière très systématique.

Nous pensons que dans la mesure où l'on dispose d'un algorithme efficace permettant la recherche des dilatations (cf chapitre II), cette méthode est préférable aux autres ; en effet la "non minimalité" de celle de REINSCHKE est due au choix arbitraire des $b_{(pi)i}$ qui est suffisant et non

nécessaire tandis que l'ensemble S expose tous les points d'action possibles. Un autre procédé qui consiste à considérer que 1 est un mode nul structurel et donc qu'il exige une action directe, conduit avec l'accessibilité au même résultat non optimal, à moins d'envisager l'éventualité qu'a le pôle en question d'être l'extrémité d'une tige.

i4) Pour conclure, il existe un autre problème sous-jacent à celui-ci : au lieu de viser la conception d'une matrice de commande minimale, il s'agit à partir de commandes imposées B, d'en déterminer un sous-ensemble minimal. Nous proposons la démarche suivante :

* Si (A, B) est S.C
  a) Calculer rang-g A ; construire la matrice minimale idéale $B_{i.}$
  b) Comparer B et $B_{i.}$
  c) Supprimer dans B les éléments redondants (vecteurs ou composantes).

* Si (A, B) est non S.C
  a) Ci-dessus
  b) Ci-dessus
  c) Rajouter (supprimer) les éléments manquants (redondants) de B.

III.4 METHODES DE DECOMPOSITION DU CRITERE DE COMMANDABILITE STRUCTURELLE.

III.4.1 Introduction.

Quand on veut implanter sur calculateur des algorithmes où interviennent les matrices de grands systèmes, l'emplacement mémoire requis dépasse souvent la capacité disponible et la rapidité du calcul est aussi affectée ; à ce propos, une étude sur la complexité des critères structurels a été esquissée dans [PILLOU, 1987]. Face à ces limitations technologiques, la seule solution est de rechercher de nouveaux algorithmes qui décomposent le problème global en sous-problèmes locaux. Nous énumérons ici les méthodes existantes dans ce contexte.

III.4.2 Décomposition de $G(A_S)$ en composantes fortement connexes.

La décomposition en composantes fortement connexes du graphe associé à la matrice d'état est une méthode très classique en commande (étude de la stabilité, ...). Les algorithmes présentés ici reposent sur la forme bloc triangulaire obtenue, T.

III.4.2.1 Accessibilité sur la forme bloc triangulaire T de A_S [REINSCHKE, 1981], [TRAVE et TITLI, 1985].

Si on ordonne les N composantes fortement connexes de matrices d'état $A_{11}, ..., A_{NN}$ telles que le système soit décrit par :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{pmatrix} A_{11} & & & & \\ & A_{22} & & & \\ & & \cdot & & \\ A_{ij} & & & \cdot & 0 \\ & & & \cdot & \\ & & & & A_{NN} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_N \end{pmatrix} u(t) \qquad (1.4)$$

$$y = (C_1 \ C_2 \dots \ C_N)\, x(t) \qquad \begin{cases} A_{ii}\ (n_i \times n_i) \\ B_i\ (n_i \times m_i) \\ C_i\ (p_i \times n_i) \end{cases}$$

A est transposée de la matrice d'état intervenant dans la décomposition de REINSCHKE (III.3.3.1). Le critère b) du théorème III.3.3.1 a été formulé par TRAVE et T. ainsi :

Le système (1.4) est accessible aux entrées ssi $[B_i\ A_{i1}\ A_{i2} \dots A_{ii-1}] \not\equiv 0, \forall\ i = 1, ..., N$. En fait il n'est pas nécessaire de vérifier cette propriété pour toutes les composantes mais seulement pour celles telles que $[A_{i1}\ A_{i2} \dots A_{ii-1}] \equiv 0$, (c'est-à-dire que $B_i \not\equiv 0$) comme l'a énoncé REINSCHKE.

III.4.2.2 Rang générique de T.

III.4.2.2.1 Algorithme séquentiel de TRAVE et TITLI (1985).

Nous avons vu que le critère de REINSCHKE nécessite de calculer successivement le rang d'une matrice augmentée à chaque étape du calcul, en conservant toutes les lignes et leurs éléments. Il est proposé ici de garder à chaque étape i le minimum d'informations de l'étape antérieure.

TRAVE et T. ont introduit le concept de dilatation généralisée notée en abrégé G-dilatation.

Définition 1 : Soit $G(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ un graphe orienté ; $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$ où $\mathcal{X}_1$ est l'ensemble des états et

$\mathcal{X}_2$ l'ensemble des commandes.

Une G-dilatation est toute paire d'ensembles {S, T(S)} telle que :

a) $S \subset \mathcal{X}_1$

b) $T(S) \subset \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$

où T(S) est l'antécédent de S dans $G(\mathcal{X}, \mathcal{U})$.

Définition 2 : L'ordre d'une G-dilatation est défini par d :

$$d = \text{Card } S - \text{Card } T(S)$$

Ainsi une dilatation au sens "classique" est-elle une G-dilatation d'ordre positif.

Définition 3 : Une G-dilatation {S, T(S)} d'ordre d est dite maximale ssi pour tous les sous-ensembles propres L de (X-S), la G-dilatation {SUL, T (SUL)} est d'ordre différent de d ; on la notera $\{S^M, T(S^M)\}$.

On a alors les deux principaux théorèmes suivants :

Théorème 1 : Soient $M_{11} = [B_1 \;\; A_{11}]$

$$N_{i,\,i-1} = [B_i \; A_{i1} \; A_{i2} \ldots A_{ii-1}]$$

$$N_{i,\,i} = [A_{ii}]$$

$$M_{i,\,i} = \begin{bmatrix} M_{i-1,\,i-1} & 0 \\ N_{i,\,i-1} & N_{i,\,i} \end{bmatrix}$$

Rang-g (A, B) = n ssi : a) rang-g $[M_{11}] = n_1$

$$\text{b) rang-g} \underbrace{\begin{bmatrix} M_{i-1,\,i-1}^{\overline{T}(S_{i-1}^M)} & 0 \\ N_{i,\,i-1}^{\overline{T}(S_{i-1}^M)} & N_{ii} \end{bmatrix}}_{F_i} = n_i + \text{Card } \overline{S}_{i-1}^M \qquad \forall\; i = 2, \ldots, N$$

où $\{ (S_{i-1}^M), T(S_{i-1}^M) \}$ correspond à la G-dilation maximale d'ordre 0 de $M_{i-1,i-1}$

$M_{i-1,\ i-1}^{\overline{T}(S_{i-1}^M)}$ et $N_{i,\ i-1}^{\overline{T}(S_{i-1}^M)}$ sont les matrices composées des colonnes de $M_{i-1,\ i-1}$ et $N_{i,\ i-1}$ où l'on a supprimé les sommets de $T(S_{i-1}^M)$.

Théorème 2 : La G-dilatation maximale d'ordre 0 de $M_{i,\ i}$ est définie séquentiellement par :

$$S_i^M = S_{i-1}^M + f_i^M \qquad (i = 1,\ S_1^M = f_1^M)$$

$$T(S_i^M) = T(S_{i-1}^M) + T(f_i^M)$$

où $\{ (S_{i-1}^M), T(S_{i-1}^M) \}$ est la G-dilation maximale d'ordre 0 de $M_{i-1,i-1}$ et $\{(f_i^M, T(f_i^M))\}$ est la G-dilatation maximale d'ordre 0 de la matrice F_i définie en b) du théorème 1.

Algo 2 : Algorithme de détermination d'une G-dilatation maximale d'ordre 0 dans F_i :

Soit la décomposition de F_i bloc triangulaire en k blocs R_k utilisée par JOHNSTON et B. (II.9.1.3.4) ; $\forall$ i = 1, ..., k ; soient p_i et q_i le nombre de lignes et de colonnes de R_i.

Etape 1 : i = 1, k = 0

Etape 2 : si $p_1 - q_1 < 0$ aller en 8.
sinon j = 1

Etape 3 : Marquer les $(q_i + k)$ premières lignes de R_i. Marquer aussi dans ce bloc toutes les lignes qui leur sont structurellement équivalentes.

Etape 4 : Marquer les colonnes qui couvrent ces lignes. Calculer :
h^i_j = nombre de lignes marquées - nombre de colonnes marquées.

Etape 5 : si $h^i_j > 0$, STOP : F_i contient une dilatation.
si $h^i_j = 0$, mémoriser toutes les lignes et colonnes marquées qui ne sont pas mémorisées.

Etape 6 : Si toutes les lignes au-dessus de R_i sont marquées, aller en 7. Les lignes au-dessus de R_i avec des coefficients dans les colonnes marquées sont maintenant explorées. Choisir celle qui a le nombre minimum de coefficients dans les colonnes marquées. Si un choix

existe, sélectionner celle qui a le nombre minimum de coefficients et la marquer.
$j = j + 1$, aller en 4.

Etape 7 : Si toutes les lignes et colonnes dans le bloc R_i sont marquées, mémoriser les lignes et les colonnes successivement mémorisées en 5. Aller en 8.
Détruire toutes les marques. $k = k + 1$, $j = j + 1$.

Etape 8 : Si $i = k$ STOP. La G-dilatation maximale d'ordre 0 de F_i est donnée par :

S_i^M : lignes mémorisées.

$T(S_i^M)$: colonnes mémorisées.
sinon $i = i + 1$, aller en 2.

Algorithme global de détermination du rang générique de (A, B) :

Soit Algo 1 l'algorithme de réarrangement de F_i (JOHNSTON et B.)

Etape 1 : $i = 1$; $M_{00} = 0$

Etape 2 : Appliquer Algo 1 à F_i.
Appliquer Algo 2 à F_i réordonnée, soit $\overline{F}_i$.
S'il existe une dilatation, STOP : rang-g (A, B) $\neq n$
Si $i = N$, STOP : rang-g (A, B) = n

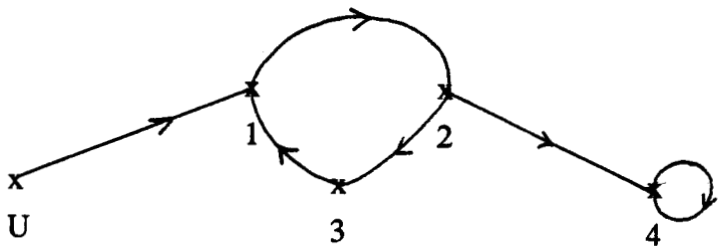
Sinon $\{f_i^M, T(f_i^M)\}$ est donnée par Algo 2.

Etape 3: Détruire les colonnes correspondant à $T(f_i^M)$ et ensuite,les lignes qui n'ont aucun coefficient dans la matrice globale (B, A).
F_{i+1} est obtenue en ajoutant les lignes correspondant au sous-système (i + 1) suivant.

Etape 4 : $i = i + 1$, aller en 2.

Illustrons la méthode pour quelques exemples typiques :

Exemple 1 : Soit $G_1(A, B)$



$$(B,A) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \boxed{x} \end{pmatrix}$$ où l'on a encadré les composantes cycliques.

$$(B, A) = \begin{pmatrix} B_1 & A_{11} & 0 \\ B_2 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec } B_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} \quad A_{22} = (x)$$

$$B_2 = (0) \qquad A_{21} = (0 \quad x \quad 0)$$

Etape 1 :

$$F_1 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}$$

Etape 2 :

$$\overline{F}_1 = \begin{pmatrix} \boxed{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{x} & \boxed{x} \end{pmatrix} \Big\} f_1^M$$

$$T(f_1^M)$$

Etape 3 :

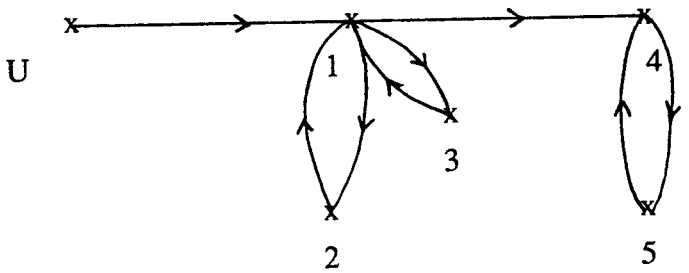
$$(B, A) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & x \end{pmatrix}$$

Etape 4 :

$$F_2 = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \qquad \overline{F}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{x} & 0 & 0 \\ \underbrace{0}_{T(f_2^M)} & \boxed{x \quad x} \end{pmatrix} \Big\} f_2^M \qquad \text{STOP}$$

Rang (B,A) = 4, plein

Exemple 2 : Soit $G_2(A, B)$:



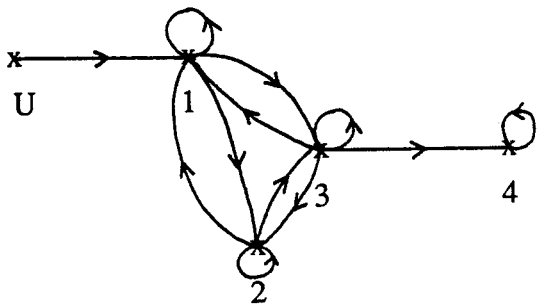
$$(B, A) = \begin{pmatrix} x & 0 & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} x & 0 & x & x \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{F_1} = \begin{pmatrix} \boxed{x} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{x \quad x \quad x} \end{pmatrix}$$

pas de G-dilatation maximale d'ordre 0 et il existe une dilatation S = {2, 3} T(S) = {1}.
STOP : rang-g (B, A) n'est pas plein.

Exemple 3 : Soit $G_3(A, B)$:



$$(B, A) = \begin{pmatrix} x & x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \boxed{x} \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{pmatrix}$$

$$\overline{F_1} = \begin{pmatrix} x & x & x & 0 \\ x & x & x & 0 \\ x & x & x & \boxed{x} \end{pmatrix}$$

Il n'existe pas de G-dilatation maximale d'ordre 0 mais il n'y a pas de dilatation.

$$F_2 = (B, A) = \begin{pmatrix} x & x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

$$\overline{F_2} = \begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x & x & 0 \\ x & 0 & x & x & 0 \\ x & 0 & x & x & \boxed{x} \end{pmatrix}$$

pas de G-dilatation maximale d'ordre 0 mais pas de dilatation donc rang-g (A, B) est plein.

BU LILLE

Remarques :

i1) Cet algorithme détecte séquentiellement les dilatations et s'arrête dès qu'il en rencontre une.

i2) Si rang-g (A, B) est plein :

* Si tous les F_i ont une G-dilatation maximale d'ordre 0 de cardinalité le nombre de lignes de F_i alors on dispose à la fin de l'algorithme, d'un couplage maximum dans (A, B).

* Si au moins un F_i a une G-dilatation maximale d'ordre 0 de cardinalité inférieure au nombre de lignes de F_i alors on dispose à la fin de l'algorithme d'un couplage partiel dans (A, B). Pour le compléter, il existe divers choix possibles parmi les éléments non marqués.
Ceci est clair sur l'exemple 1.

Le couplage partiel est donné par $\{f_1^M, f_2^M\}$, $\{T(f_1^M) \quad T(f_2^M)\}$ soit :

$$(B, A) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \downarrow & & & \downarrow & \end{array} \\ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & x \end{pmatrix} \end{array}$$

où l'on a entouré les élements appartenant à ce couplage ; on a le choix entre les paramètres fléchés pour le compléter.

i3) Comme l'indiquent TRAVE et T., cet algorithme peut être utilisé pour déterminer le nombre minimum d'entrées, de la manière suivante :

Quand $i = N$, soit $e = \text{Card } \overline{T}(f_N^M) - \text{Card } (\bar{f}_N^M)$ alors on peut supprimer e colonnes parmi celles de $\overline{T}(f_N^M)$ dans la mesure où l'on conserve au moins un coefficient non nul par ligne et par colonne.

L'exemple 1 montre :

$$\overline{F}_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix}}_{\overline{T}(f_2^M)} \Big\} \bar{f}_2^M$$

ce qui correspond au choix que nous avons indiqué en i2);

$e = 1$ donc une colonne parmi celles de $\overline{T}(f^M{}_2)$ est excessive. On a le choix entre la commande ou la 3ème colonne de A.

Si l'on cherche B minimale on supprime le maximum de colonnes de B appartenant à $\overline{T}(f^M{}_2)$. Il est évident qu'il faut ajouter à cela le critère d'accessibilité si l'on s'intéresse à la commandabilité structurelle. Ainsi sur l'exemple 1, U est nécessaire pour l'accessibilité et on peut supprimer la 3ème colonne de A, ce qui peut avoir un sens au niveau conceptuel ou pour l'étude de la robustesse aux ruptures d'interconnexions.

III.4.3 Interconnexion hiérarchisée de N sous-systèmes.

La méthode III.4.2.2 est aussi applicable lorsque les sous-systèmes diagonaux sont quelconques. On peut donc déduire le rang d'une paire (A, B) où N sous-systèmes sont interconnectés de manière hiérarchisée c'est-à-dire que A globale est triangulaire inférieure. Par

contre, le critère III.4.2.1 n'est plus valable.

III.4.4 Décomposition de $G(A_S,B_S)$ en composantes structurellement commandables : [SEZER et SILJAK, 1981], [PICHAI, SEZER et SILJAK, 1983].

On peut reprocher à la méthode de décomposition en composantes fortement connexes d'agir seulement sur les états et de considérer les commandes, à part. Ainsi on se retrouve quelquefois avec des sous-systèmes qui n'ont aucun vecteur d'entrées. Sensibles à cet argument et attirés par le rôle de l'accessibilité dans le critère structurel, SEZER, SILJAK et al. proposent une procédure de partition du système A_S, B_S en sous-systèmes irréductibles atteignables par les entrées. Ils en déduisent ensuite une décomposition en composantes structurellement commandables. Voici les principales caractéristiques de cette approche.

III.4.4.1 Décomposition acyclique en sous-systèmes irréductibles accessibles aux entrées.

Le but est de partitionner le système (I.1) en N sous-systèmes (Σ_i) ordonnés de manière hiérarchisée, répondant aux équations suivantes :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{i} A_{ij}\, x_j(t) + \sum_{j=1}^{i} B_{ij} u_j(t) \qquad \text{(III.1)}$$

$$\forall\ i = 1, 2, \ldots, N$$

et où la matrice d'interconnexion globale

$$\mathcal{I} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} X \\ U \end{array} \\ \begin{array}{cc} X & U \end{array} & \end{array}$$

se met après permutation sous la forme bloc triangulaire :

$$\mathcal{J} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} E_{11} & & & F_{11} & & \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ E_{N1} & \cdots & E_{NN} & F_{N1} & \cdots & F_{NN} \\ & 0 & & & 0 & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_N \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{array} \end{array}$$

Soit G(A, B) le graphe orienté associé à (I.1). La forme (III.1) correspond à une partition en sous-graphes $G_i(X_i \cup U_i, E_{ii} \cup F_{ii})$ associés aux (Σ_i) telle qu'elle est acyclique et chaque G_i est accessible aux entrées. On l'appelle partition acyclique de G(A, B) accessible aux entrées. (Les ensembles de sommets $X_1, ..., X_N, U_1, ..., U_N$ sont disjoints).

Propriétés :

1i) Soit $\overline{R}$ la matrice d'accessibilité associée à (I.1) (voir III.2.2.3.2) :

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} \overline{E}_{11} & & & \overline{F}_{11} & & \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ \overline{E}_{N1} & \cdots & \overline{E}_{NN} & \overline{F}_{N1} & \cdots & \overline{F}_{NN} \\ & 0 & & & 0 & \end{bmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la partition (III.1) existe est que la matrice $\overline{F}$ contienne au moins un zéro (acyclicité) et que $\overline{F}_{ii}$ $\forall$ i = 1, ..., N n'ait aucune ligne nulle (accessibilité). Il y a non unicité de la partition et du nombre de ses composantes.

Si de plus on s'intéresse à une décomposition irréductible c'est-à-dire où les sous-graphes G_i ne peuvent pas être eux-mêmes partitionnés en composantes acycliques accessibles, cette partition existe toujours sous les hypothèses que G(A, B) est accessible aux entrées et que chaque entrée agit au moins sur un état. Pour éviter les cas triviaux, on suppose n > 1 et m > 1.

2i) La procédure de décomposition est présentée dans [PICHAI et al.,1983]. Un des avantages est qu'on dispose aussi des composantes fortement connexes.

III.4.4.2 Décomposition acyclique en sous-systèmes structurellement commandables.

Certains des sous-systèmes de la partition accessible aux entrées peuvent présenter des dilatations. Si le système global est S.C, il existe au moins une partition irréductible acyclique en composantes structurellement commandables (cf références citées plus haut). On l'obtient de la manière suivante :

1) Détecter dans la forme irréductible (III.4.4.1) accessible aux entrées, les sous-graphes $G_k(E_{kk}, F_{kk})$ contenant une dilatation, en commençant de 1 à N.

2) S'il existe i tel que $1 \leq i < k$ et $E_{ki} \not\equiv 0$ telle que rang-g $[E_{ki}\, E_{kk}\, F_{kk}] = n_k$ où n_k est l'ordre de (Σ_k), regrouper G_k et G_i en un seul sous-graphe $G_{ki}(U_i U U_k U X_i U X_k, E_{ii} U E_{kk} U E_{ki})$ ce qui ne détruit pas la propriété acyclique (on donne priorité au (Σ_i) le plus voisin de (Σ_k) c'est-à-dire à i le plus proche de k). On peut avoir besoin de plusieurs sous-systèmes G_i pour "détruire" la dilatation.

3) Repérer ensuite les autres G_k contenant une dilatation de k + 1 à N et retourner en 2).

La partition obtenue admet S composantes S.C. où $S \leq N$ et la matrice $\mathcal{T}$ est de la même forme qu'en III.4.4.1 :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} U_{SS} & \cdots & U_3 & U_2 & U_1 & X_1 & X_2 & X_3 \cdots & X_{SS} \end{array} \\
\mathcal{J} = & \left[\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & F_{11} & E_{11} & & & \\
 & & & F_{22} & F_{12} & E_{12} & E_{22} & & \\
 & & F_{33} & F_{23} & F_{13} & E_{13} & E_{23} & E_{33} & \\
F_{SS} & & \cdots\cdots & & F_{1S} & E_{1S} & E_{2S} & \cdots\cdots & E_{SS} \\
0 & & \cdots\cdot & & 0 & 0 & & \cdots\cdot & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

(III.1)

où $\forall\ 1 \leq k \leq s$ rang-g $[F_{kk}\ E_{kk}] = n_k$ et $G_k[E_{kk}, F_{kk}]$ accessible à F_{kk}.

On a réalisé une partition de (I.1) en sous-systèmes S.C par leurs propres commandes ; là encore elle n'est pas unique.

III.4.4.3 Critère de commandabilité structurelle.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition : Un système (A, B) tel que $\overline{F}$ contienne au moins un zéro est S.C ssi il existe une partition irréductible acyclique en composantes structurellement commandables.

Remarques :

Il est clair que si une telle partition est obtenue, chaque (Σ_i) est accessible à F_{ii} et donc (A, B) à U ; si rang-g $[F_{kk}\ E_{kk}] = n_k$ alors rang-g (A, B) = n .La condition est donc bien suffisante. On se réfèrera à [SEZER,SILJAK,1981] pour la condition nécessaire .

III.5 CONCLUSION.

Dans ce chapitre nous avons d'abord exposé les divers critères de commandabilité structurelle d'une paire (A_S, B_S). Certaines propriétés en KALMAN se transposent en structurel, telles celles des matrices de commandabilité, modale, étendue de ROSENBROCK, matrices systèmes mais leur caractère générique en accroît l'incommodité. Heureusement des propositions plus spécifiques au domaine ont été établies, en particulier à la condition d'accessibilité usuelle s'ajoute celle du rang générique ; sur ces deux piliers s'est greffée une floraison d'équivalences obtenues à partir d'interprétations très classiques dans la théorie des graphes et l'algèbre booléenne (structurée). Il existe aussi la condition nécessaire et suffisante de couverture par un cactus dont l'exploitation après son introduction, a connu un temps mort dû peut-être au caractère nouveau et a-priori artificiel du concept mais démenti ensuite par les simplifications notoires qu'il a apportées. On a présenté également dans cette première partie des critères particuliers non dénués d'intérêt (commandabilité structurelle de sortie, commandabilité structurelle forte, etc...)

Le cactus représente la structure minimale extraite d'un système qui soit S.C ; en cela il constitue une forme canonique d'une matrice structurée (non unique) et en multivariable une pseudo-diagonalisation en blocs dont le nombre est égal à celui des entrées. On propose un algorithme d'obtention d'un cactus. Dans ce contexte on passe également en revue les méthodes heuristiques d'obtention d'un nombre minimal d'entrées qui rendent commandables un procédé dont on peut déduire par dualité le nombre minimal de sorties pour l'observer. Il est montré en particulier que l'algorithme de REINSCHKE n'est pas optimal dans le sens où il peut y avoir encore des composantes redondantes dans les vecteurs d'entrées sélectionnés. Nous proposons une démarche systématique pour atteindre l'optimalité, dans la mesure où on sait enregistrer les

dilatations dans le graphe de A. La solution n'est bien sûr pas unique, du point de vue de la distribution de ces commandes.

Ces divers critères nécessitent d'être appliqués à des sous-matrices quand on aborde les grands systèmes. Les techniques de décomposition classiques issues des graphes (donc en général facilement implantables sur calculateur) correspondent ici aux partitions en composantes fortement connexes ou en composantes structurellement commandables, ce qui a donné lieu pour les premières, outre la méthode de REINSCHKE citée plus haut, à l'approche séquentielle de calcul du rang générique de TRAVE et TITLI et pour les deuxièmes au critère simplifié de SEZER et SILJAK. Ces derniers, en faisant apparaître la structure multiniveaux du système, ramènent la condition de commandabilité à celle de chaque constituant.

CHAPITRE IV

COMMANDABILITE STRUCTURELLE DES SYSTEMES INTERCONNECTES

IV.1 INTRODUCTION.

Bon nombre de procédés industriels actuels sont constitués d'une grande quantité d'unités interconnectées. On n'est plus alors en quête de méthodes de décomposition pour des raisons calculatoires (cf : III.4) mais conceptuelles. Du point de vue théorique, ces deux aspects ne sont évidemment pas indépendants et le premier conduit efficacement à des solutions pour le deuxième ; toutefois les résultats obtenus sont plus ou moins traduisibles en termes de structure physique. Dans ce contexte, nous généralisons la méthode séquentielle de TRAVE et T. au cas d'un système interconnecté arbitraire (IV.2).

Il s'agit de déduire de propriétés locales liées à la structure, si la commandabilité structurelle globale est assurée , cela peut avoir deux sens, habituellement combinés : chercher des conditions sur la structure de chaque sous-système ou bien sur celle des interconnexions l'environnant ; si l'on désire traiter séparément l'une de ces deux alternatives il faut faire des hypothèses sur l'autre. Or pour un système interconnecté la notion de structure trouve sa pleine justification, non pas tellement dans celle de ses unités dont il est raisonnable de supposer qu'elles sont commandables, découplées, mais dans celle des diverses liaisons ; avec ces hypothèses, c'est le seul facteur déterminant qui maintient ou détruit la commandabilité globale. Avant d'aborder nos propositions, nous rappelons en IV.3,parmi tant d'autres, un résultat relatif à la KALMAN commandabilité des systèmes composés énoncé par DAVISON, afin de situer l'état d'esprit dans lequel sera abordée la deuxième partie ; celle-ci se scinde en une étude de critères "classiques" pour des systèmes particuliers (IV.4) et une approche fondée sur le cactus pour des cas plus généraux (IV.5).

Soit le système interconnecté (Σ) décrit par :

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU$$
$$Y = CX + DU \qquad (1.5)$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ A_{ij} & & A_{ii} & \\ & & & \ddots \quad A_{NN} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A_{ii}(n_i \times n_i) \\ B_i(n_i \times m_i) \\ A_{ij}(n_i \times n_j) \end{matrix}$$

A est carrée quelconque.Les blocs diagonaux correspondent aux sous-systèmes (Σ_i) ; les matrices A_{ij} sont les interconnexions.

IV.2 GENERALISATION DE LA METHODE DE TRAVE ET TITLI.

IV.2.1 Théorèmes.

Dans le cas de sous-systèmes quelconques et de liaisons arbitraires, le critère d'accessibilité ne se décompose pas. Par contre, nous avons démontré que le calcul du rang générique peut s'effectuer séquentiellement comme pour un système hiérarchisé (III.4.3)

Théorème 1 : Soient M(p x q), N(p' x q)

$$\text{Soit } Q = \begin{bmatrix} M \\ \text{-----} \\ N \end{bmatrix}, \quad Q\,(p + p', q)$$

$$\text{rang-g } Q = p + p' \text{ ssi rang-g } F = p' + \text{Card } \bar{S}^M$$

$$\text{où } F = \begin{bmatrix} M^{\overline{T}(S^M)} \\ \\ N^{\overline{T}(S^M)} \end{bmatrix}$$

$\{S^M, T(S^M)\}$ étant la G-dilatation maximale d'ordre 0 de la matrice M.

$M^{\overline{T}(S^M)}$, $N^{\overline{T}(S^M)}$ sont les matrices composées des colonnes de M et N où l'on a supprimé les colonnes constituées des sommets appartenant à $T(S^M)$.

La démonstration se trouve en annexe 1.
En appliquant successivement ce théorème aux blocs lignes de (A, B) correspondant à chaque sous-système, on obtient de manière analogue à III.4.2.2.1 :

Théorème 2 : Soient $Q_1 = [B_1 \quad A_{11} \quad A_{12} \ \dots \quad A_{1N}]$

$$P_i = [B_i \quad A_{i1} \quad A_{i2} \ \dots\dots A_{ii} \ \dots\dots A_{iN}]$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} P_{i-1} \\ \text{-----} \\ P_i \end{bmatrix} \qquad \forall\, i = 2, \dots, N$$

rang-g (A, B) = n ssi : a) rang-g $Q_1 = n_1$

$$\text{b) rang-g} \begin{bmatrix} P_{i-1}^{\overline{T}(S_{i-1}^M)} \\ \\ P_i^{\overline{T}(S_{i-1}^M)} \end{bmatrix} = n_i + \text{Card } \overline{S}_{i-1}^M = \text{rang-g } F_i \text{ par notation.}$$

$$\forall i = 2,\dots,N$$

où $\{S_{i-1}^M, T(S_{i-1}^M)\}$ correspond à la G-dilatation maximale d'ordre 0 de P_{i-1}.

$P_{i-1}^{\overline{T}(S_{i-1}^M)}$ et $P_i^{\overline{T}(S_{i-1}^M)}$ sont les matrices composées des colonnes de P_{i-1} et P_i où l'on a supprimé les colonnes correspondant aux sommets de $T(S_{i-1}^M)$

La démonstration du théorème 2 découle directement de la démarche adoptée et du théorème 1.

Théorème 3 : La G-dilatation maximale d'ordre 0 de Q_i est définie par

$$S_i^M = S_{i-1}^M + f_i^M$$

$$T(S_i^M) = T(S_{i-1}^M) + T(f_i^M)$$

où $\{ S_{i-1}^M , T(S_{i-1}^M) \}$ est la G-dilatation maximale d'ordre 0 de P_{i-1} et $\{(f_i^M, T(f_i^M))\}$ est la G-dilatation maximale d'ordre 0 de la matrice F_i.

La démonstration du théorème 3 est identique à celle du théorème 2 (III.4.2.2.1) ; en effet soient les ensembles de sommets X_{i-1}, X_i, correspondant respectivement aux lignes de P_{i-1}, P_i, la partition des colonnes en U, X_{i-1} ,X_i [TRAVE et TITLI, 1985, p.35] ne joue en fait aucun rôle dans la preuve, ainsi que la présence de blocs nuls à droite des matrices A_{ii}.

On peut alors utiliser exactement le même algorithme général III.4.2.2.1 à partir de **Algo 1** et **Algo 2** où F_i désigne maintenant la matrice définie au théorème 2.

IV.2.2 Exemple.

$$
\begin{array}{ccc|ccc|ccccccc}
 & B & & & & & & A & & & & \\
0 & 0 & x & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\
0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\
0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & x & 0 & x & 0 \\
0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & x \\
\hline
x & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x
\end{array}
$$

A(10 x 10)

B(10 x 3)

Etape 1 :

$$
Q_1 = \begin{array}{ccc ccc ccccccc}
0 & 0 & x & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\
0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\
0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

pas de G-dilatation maximale d'ordre 0. (évident , on n'a pas besoin d'appliquer Algo 1) mais rang-g Q_1 plein.

Etape 2 - Etape 3:

$$\begin{matrix} 0\,0\,x & 0\,0\,x\,0\,0\,0\,0\,0\,x\,0 \\ 0\,0\,0 & x\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,x \\ 0\,0\,0 & 0\,x\,x\,0\,0\,0\,x\,0\,0\,0 \end{matrix}$$

$$Q_2 = \begin{matrix} 0\,0\,0 & 0\,0\,0\,x\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,x\,0 & 0\,0\,x\,x\,x\,x\,x\,0\,x\,0 \\ 0\,0\,0 & x\,0\,0\,x\,x\,x\,x\,x\,0\,0 \\ 0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,x\,0\,0\,0\,0\,0 \\ & \uparrow\ \uparrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow f_2^M = \{\,4,7\,\} \\ \\ T(f_2^M) = \{\,4,5\,\} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

On détruit les colonnes 4 et 5 dans A et les lignes 4 et 7.

$$\begin{matrix} 0\,0\,x & 0\,0\,x & 0\,0\,0\,x\,0 \\ 0\,0\,0 & x\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,x \\ 0\,0\,0 & 0\,x\,x & 0\,x\,0\,0\,0 \end{matrix}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} \overline{Q}_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0\,x\,0 & 0\,0\,x & x\,x\,0\,x\,0 \\ 0\,0\,0 & x\,0\,0 & x\,x\,x\,0\,0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,x\,0\,0 \\ 0\,0\,0 & x\,0\,0 & 0\,0\,x\,0\,x \\ & & \uparrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow f_3^M = \{\,8\,\} \\ T(f_3^M) = \{8\} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0\,0\,x & 0\,0\,x & 0\,0\,x\,0 \\ 0\,0\,0 & x\,0\,0 & 0\,0\,0\,x \\ 0\,0\,0 & 0\,x\,x & 0\,x\,0\,0 \end{matrix} \quad \leftarrow$$

$$F_4 = \begin{matrix} 0\,x\,0 & 0\,0\,x & x\,x\,x\,0 \\ 0\,0\,0 & x\,0\,0 & x\,x\,0\,0 \end{matrix} \qquad f_4^M = \{\,2,9\,\}$$

$$\begin{matrix} 0\,0\,0 & x\,0\,0 & 0\,0\,0\,x \\ & \uparrow & \uparrow \end{matrix} \quad \leftarrow \quad T(f_4^M) = \{\,10,4\,\}$$

rang-g $F_4 = 6$ plein
donc (B, A) est de rang plein.

IV.2.3 Analyse de la méthode.

L'efficacité de l'algorithme dépend du couplage entre les sous-systèmes. Si celui-ci est faible, on a plus de chance d'obtenir une G-dilatation maximale d'ordre 0 pour chaque bloc. Ceci était

déjà vrai pour les systèmes de structure hiérarchisée du type III.4.3, ça l'est a fortiori dans le cas où il existe des matrices d'interconnexion A_{ij} à droite des A_{ii}. Dans le pire des cas, il faut considérer à chaque étape le rang de blocs lignes pleins (Q_i) au lieu de celui d'un bloc réduit (F_i) et cela ne présente alors aucun intérêt vis à vis d'un algorithme considérant (B, A) globalement. Si le couplage est faible et (ou) les matrices A_{ii} peu denses, la méthode est intéressante mais une évaluation quantitative de ses qualités en est impossible car cet algorithme dépend trop de la spécificité des systèmes étudiés.

On peut déduire le nombre de colonnes excessives de la matrice (A, B) donné par e = card $T(f^M{}_N)$ - card$(f^M{}_N)$ que l'on peut supprimer parmi les $T(f^M{}_N)$ restantes (avec la condition qu'on conserve au moins un coefficient non nul par ligne et par colonne) et donc le nombre minimum de commandes à appliquer sur le système, ce qui est un grand atout.

Soulignons aussi qu'une fois l'accessibilité satisfaite, ce critère est une condition nécessaire et suffisante pour que le rang générique soit plein.

On peut toutefois émettre la critique qu'il est difficilement possible de relier ces conditions séquentielles algébriques à des propriétés des sous-systèmes physiques. L'argument que chaque sous-système A_{ii} environné de ses propres commandes B_i et des interconnexions amont et aval A_{ij} doit donner un bloc P_i de rang plein est évident mais l'exploitation de $S^M{}_{i-1}$ rajoutée à ce bloc (c'est-à-dire de la matrice F_i) n'est pas interprétable physiquement, et a fortiori quand on envisage toute la séquence.

IV.3 RESULTATS DE DAVISON (1977).

Soient un système multivariable interconnecté arbitraire (A, B), G* la condensation de G(A, B) par rapport aux sous-systèmes, supposés commandables.(G^*est telle qu'il y ait autant de noeuds que de sous-systèmes et un arc du noeud j vers le noeud i ssi $A_{ij} = 0$) .

Théorème :

DAVISON a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour rendre le système KALMAN commandable pour presque tous les gains d'interconnexion, par des retours de sortie locaux, est qu'il soit connectable à l'entrée u (i.e il existe une arborescence de racine u dans G*).

Ce résultat a été exploité pour redémontrer le théorème de LIN (CL2-III.2.2.3) mais l'aspect structurel n'est pas abordé pour un système interconnecté, ce que pourrait laisser croire le titre de la publication. Néanmoins, vu la base sur laquelle s'appuie cette démonstration, il nous a paru plus normal qu'elle figure dans cette partie. Le résultat est obtenu en considérant que chaque sous-système

du théorème précédent admet un seul état et que la matrice A peut avoir des termes nuls.

IV. 4 CAS DE SIMPLIFICATION DU CRITERE STRUCTUREL : EXPLOITATION DES PROPRIETES DES SOUS-SYSTEMES.

Soient les hypothèses :

(H_1) : $\forall$ i = 1, ..., N (Σ_i) est tel que rang-g $A_{ii} = n_i$
(H_2) : $\forall$ i = 1, ..., N (Σ_i) est stable asymptotiquement.
(H_3) : $\forall$ i = 1, ..., N (Σ_i) est accessible à B_i

IV.4.1 Commande de A par B.

IV.4.1.1 Proposition 1.

Si (H_1) et (H_3) sont vérifiées, il est clair que l'accessibilité de G(A, B) est vérifiée a fortiori en présence des interconnexions et que le critère du rang est aussi satisfait :
La structure (A, B) de N sous-systèmes interconnectés arbitrairement S.C à partir de B_i quand ils sont découplés, est commandable.

IV.4.1.2 Proposition 2.

Si (H_2) et (H_3) sont vérifiées, puisque $(H_2) \Rightarrow (H_1)$, on a :
La structure (A, B) de N sous-systèmes interconnectés stables asymptotiquement et accessibles à partir des B_i est commandable.

IV.4.2 Commande de A par B_i.

Une situation moins triviale est celle où l'on envisage de commander le système global à partir d'une commande B_i seulement.
Si on suppose (H_1) ou(H_2) vraie, (A, B_i) est S.C ssi $G(A, B_i)$ est accessible.

Dans le cas où (Σ) peut se décomposer en composantes fortement connexes (on détruit la structure des sous-systèmes physiques) on peut énoncer :
Sous (H_1) ou (H_2), la structure (A, B) est commandable ssi la condensation du graphe G(A) relativement à la partition en composantes fortement connexes est accessible à B_i.

Preuve :

* *Condition suffisante :*

Vue la propriété d'une composante fortement connexe ,si la condensation est accessible à B_i, chaque sous-système (Σ_i) l'est.

**Condition nécessaire :*

Un schéma sera beaucoup plus parlant. Soit une telle partition, représentée fig 9.

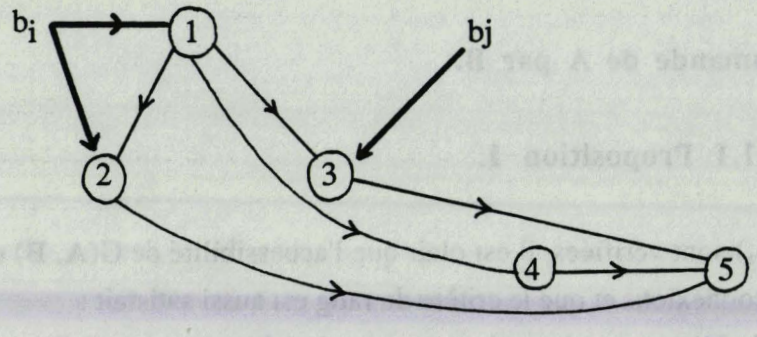


Fig.9

On a numéroté les composantes dont les états peuvent appartenir à des sous-systèmes (Σ_i) différents. Ainsi, dans le cas général, la matrice d'entrées B_i se trouve distribuée, soit $B_i = (b_1\ b_j ...\ b_{mi})$ où $b_j(n_i \times 1)\ \forall\ j = 1, ..., m_i$.

Supposons que la condensation de ce graphe ne soit pas accessible ; cela signifie simplement qu'au moins une composante n'est pas atteinte par B_i , de même que les états lui appartenant et donc qu'un ou plusieurs sous-systèmes sont inaccessibles.

Q.E.D

Remarques :

1) On peut déduire aussi de cette méthode les commandes $B_1, ..., B_k$ $k \leq N$ qui rendent commandable A, si B_i ne suffit pas.

2) Il est aussi très facile de déduire le nombre minimum d'entrées ; on réalise la condensation et si elle est constituée de plusieurs parties (cf arborescences multi-racines, Chap II) il suffit d'un

vecteur d'entrée à chaque racine.

3) La partition n'étant pas unique, la distribution des entrées en dépend mais pas le nombre minimum.

4) Si le système n'est pas décomposable, c'est qu'il est lui-même fortement connexe, il suffit alors d'une entrée.

IV.4.3 CONCLUSION.

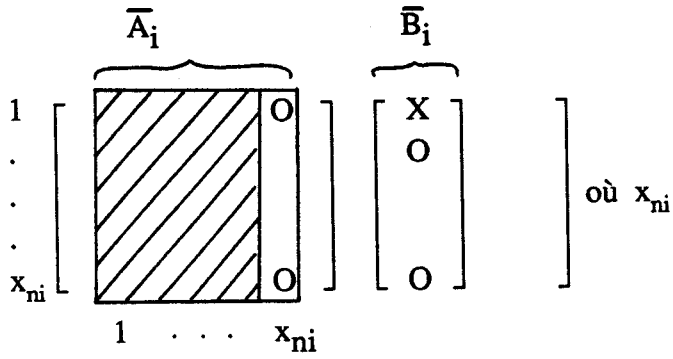
Nous avons présenté ici des cas de simplification du critère qu'il serait ridicule de ne pas reconnaître ; il est vivement conseillé de faire d'abord le calcul du rang sur chaque A_{ii}! Pour les procédés asymptotiquement stables, il suffit de vérifier la condition d'accessibilité. Nous avons cependant déjà expliqué le pourquoi de notre objection à nous arrêter à cette simplification (III.2.2.4 iii)). Mentionnons enfin que les propositions 1 et 2 ne sont pas vraies même dans le cas de la commandabilité au sens de KALMAN (i.e un système composé de systèmes commandables multi-variables n'est pas nécessairement commandable).

IV.5 APPROCHE GRAPHIQUE FONDEE SUR LE CACTUS.

IV.5.1 Préliminaires.

Nous proposons dans cette partie une condition suffisante de commandabilité structurelle pour un système interconnecté arbitraire, fondée sur la construction d'un cactus global à partir des cacti couvrant chaque sous-système. Cette étude a fait l'objet de l'article [RECH, PERRET, 1987] et on en retrouvera ici la trame. Soulignons que cette approche est tout à fait indiquée pour la conception d'un système composé et qu'elle a l'avantage d'élaborer directement des structures à la fois accessibles et de rang générique plein. On peut ainsi obtenir un système avec un nombre minimum de commandes et (ou) d'interconnexions. Le principal résultat est énoncé en IV.5.1.2 ; le développement qui suit montre la démarche qui nous y a conduit.

Nous rappelons que dans le cas mono-entrée, (C_i) est constitué d'un cactus élémentaire d'origine la commande $\overline{B}_i(1 \times 1)$, et $\overline{A}_i$ possède une colonne nulle correspondant à l'extrémité de la tige, soit, $(\overline{A}_i, \overline{B}_i)$ peut être représentée sous la forme simplifiée :



où x_{ni} est l'extrémité de la tige.

Le bloc hachuré a un rang générique égal à n_i - 1 puisque rang-g $(\overline{A}_i, \overline{B}_i) = n_i$

Soit C_i ce bloc, i.e. $(\overline{A}_i, \overline{B}_i) = \left[\begin{array}{c|c} C_i & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} , \quad \overline{B}_i \right]$

Dans le cas multi-entrées, (C_i) est une réunion disjointe de cacti élémentaires, c'est-à-dire :

$$(\overline{A}_i, \overline{B}_i) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \begin{array}{c|c} C_{i1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} & & & x & & \\ & \begin{array}{c|c} C_{i2} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & x & \\ & & & & & 0 & \\ & & & \begin{array}{c|c} C_{iN} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} & & & x \\ & & & & & & 0 \end{array} \right]$$

$\overline{A}_i$ $\qquad$ $\overline{B}_i$

IV.5.1.1 Cas où (Σ_i) est structurellement commandable au sens minimal $\forall$ i = 1,..., N.

Supposons que chaque sous-système est un cactus

IV.5.1.1.1 Deux sous-systèmes (Σ_1), (Σ_2) .

a-1 Cas mono-entrée.

Définition 1 : Une interconnexion de deux cacti mono-entrée est une cascade relativement à la commande U_i ssi l'extrémité de la tige du sous-système (Σ_i) sur lequel elle est appliquée est reliée à l'origine de l'autre sous-système (Σ_j).

Le graphe pour i = 1 est représenté Fig.10

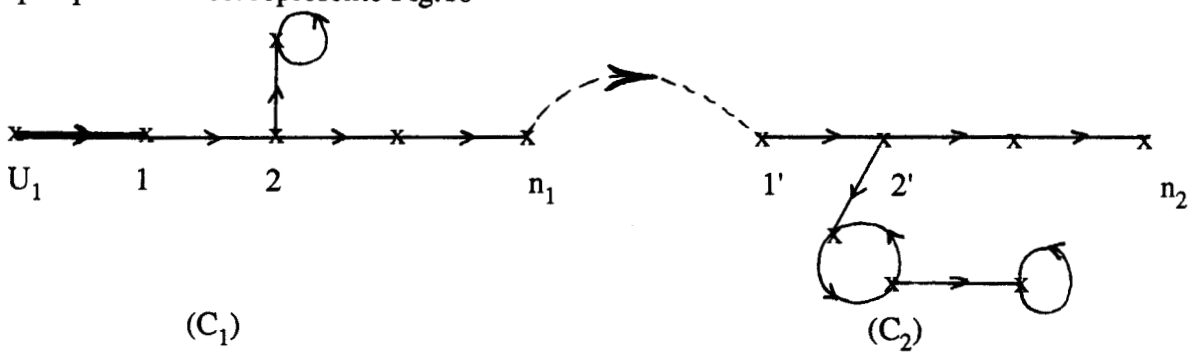


Fig.10
en pointillés : cascade (C_1) - (C_2)

Définition 2 : Une interconnexion de deux cacti contient une cascade ssi en plus d'une cascade il existe d'autres liaisons arbitraires. (cf Fig.11)

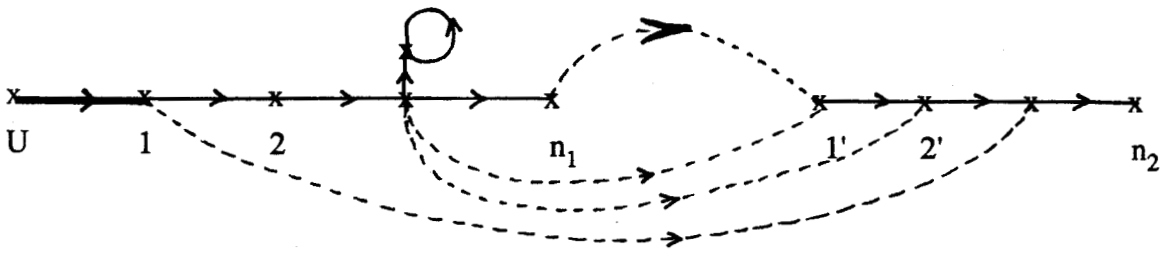


Fig.11

On en déduit :

Proposition 1 : Sous les hypothèses que (Σ_1) et (Σ_2) sont M.S.C.(i.e $G(\bar{A}_i, \bar{B}_i)$ est un cactus $\forall$ i = 1, 2) une condition nécessaire et suffisante pour que (Σ) soit M.S.C à partir de U_i appliquée sur (Σ_i) seul $(G(\bar{A}, \bar{B}_i)$ est un cactus), est que l'interconnexion soit une cascade relativement à U_i.

Preuve: i) *Condition nécessaire* :

Supposons que les cacti ne soient pas interconnectés et gardons la seule entrée U_1 par exemple.

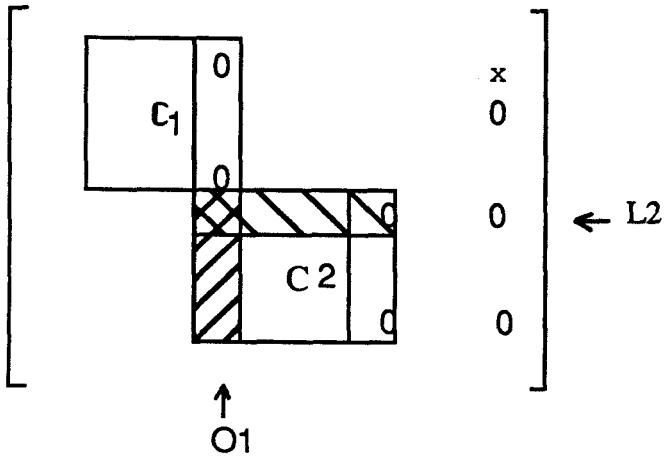
Rang-g($\bar{A}$,$\bar{B}_1$) est donné par:

$$\text{rang-g}\left[\begin{array}{cc|c} \begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ & 0 \end{array} & & \begin{array}{c} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c|c} C_2 & 0 \\ & 0 \end{array} & \end{array}\right] = \text{rang-g}\left[\begin{array}{cc} \begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ & 0 \end{array} & \begin{array}{c} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ & \begin{array}{c|c} C_2 & 0 \\ & 0 \end{array} \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n_1}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n_2-1}$$

$$= n_1 + n_2 - 1.$$

* Pour augmenter le rang d'une unité, il faut qu'il y ait au moins une interconnexion dans la demi-colonne O_1 hachurée ci-après et qu'elle appartienne à une ligne non couverte par la permutation d'ordre (n_2-1) du deuxième bloc diagonal (C_2),à savoir la ligne nulle correspondant à l'origine de la tige de (C_2) donc l'interconnexion doit appartenir à la demi-colonne O_1et à la demi-ligne L_2 hachurée ; finalement,il est nécessaire de relier l'extrémité xn_1 de (Σ_1) à l'origine de (Σ_2) c'est-à-dire d'avoir une cascade relativement à U_1.



alors rang-g $(\bar{A},\bar{B}) = n_1 + n_2$.

** La condition d'accessibilité est automatiquement vérifiée.

ii) *Condition suffisante*

S'il existe une telle interconnexion alors l'accessibilité globale est vérifiée et le rang générique aussi.

Q.E.D

On peut remarquer qu'une analyse graphique donne immédiatement l'interconnexion minimale afin d'obtenir un cactus à partir de U_i.

a-2 **Cas multi-entrées**

Le résultat précédent se généralise au cas multi-entrées en une condition suffisante. La définition de la cascade a besoin d'être reformulée ainsi :

Définition 4 : Une interconnexion de deux cacti multi-entrées est une cascade relativement à U_i (vecteur commande de Σ_i) ssi chaque cactus élémentaire C_{kj} du second sous-système (Σ_j) est relié par une cascade à un cactus élémentaire du premier sous-système C_{li} de (Σ_i) sur lequel est appliquée U_i, les paires ainsi constituées n'ayant aucun cactus élémentaire en commun.

Cette définition implique que le nombre de C_{li} de (C_i) est supérieur ou égal au nombre C_{kj} de (C_j).

On obtient ainsi des configurations du type suivant :

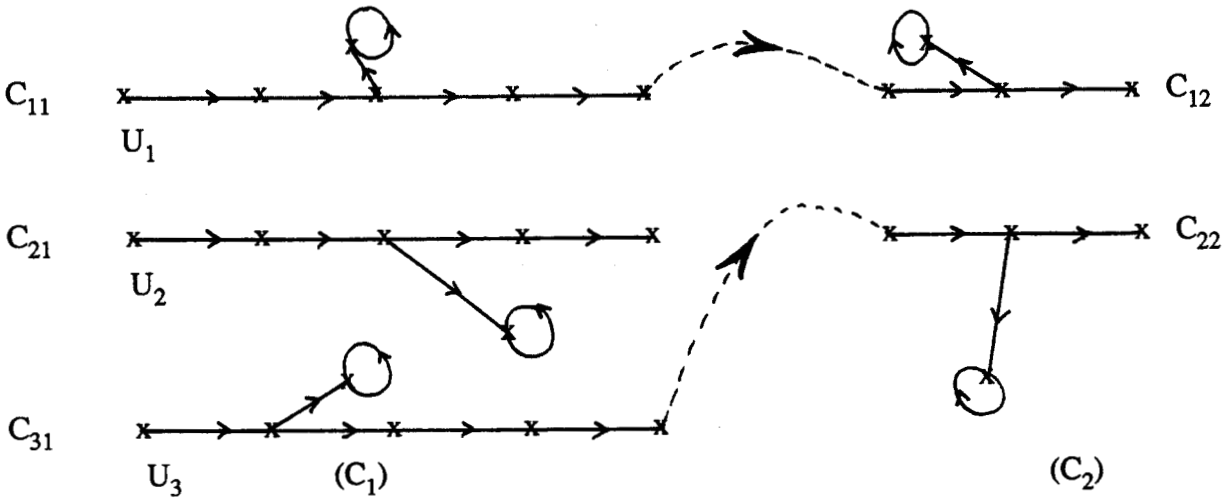


Fig.12.

On peut alors énoncer :

Proposition 2 : Sous les hypothèses que (Σ_1) et (Σ_2) sont M.S.C $(G(\overline{A}_i, \overline{B}_i)$ i = 1, 2 est un cactus),une condition suffisante pour que (Σ) soit M.S.C $(G(\overline{A}, \overline{B}_i)$ est un cactus) à partir de U_i appliquée sur (Σ_i) est que l'interconnexion soit une cascade relativement à U_i.

Preuve : Découle immédiatement de a-1

Nota : Le résultat n'est pas nécessaire comme le montre le contre-exemple ci-dessous.

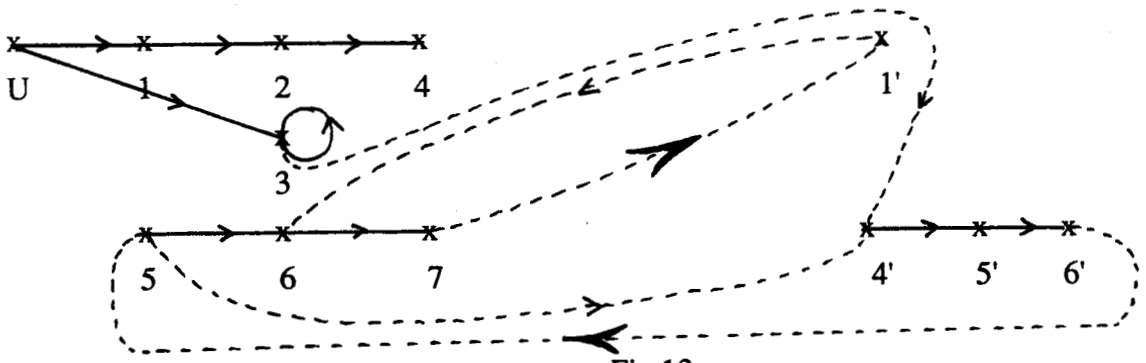


Fig.13.

(C_1) bivariable

(C_2) bivariable

qui donne le cactus global, réordonné spatialement :

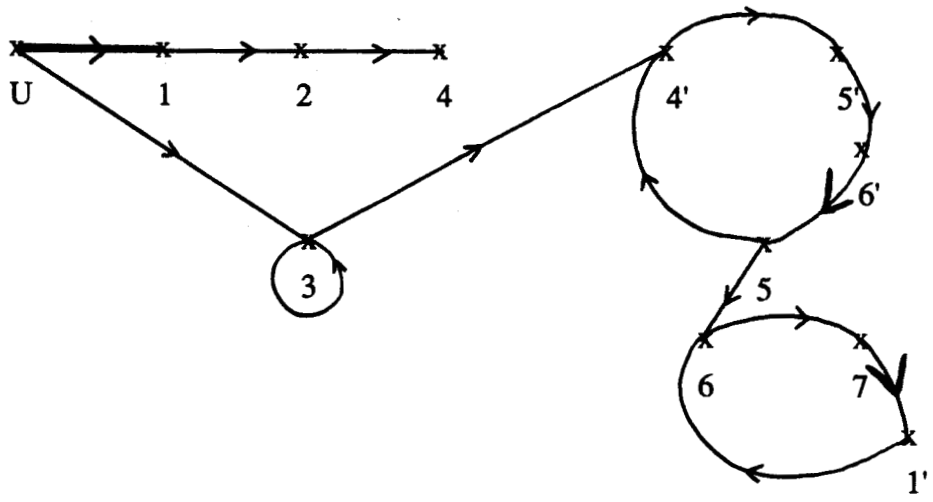


Fig.14

Seules les interconnexions fléchées en caractère gras sont des cascades. Cela correspond au cas où B est minimale sans que A le soit. Une solution (A min, B min) est une cascade relativement à la composante U:

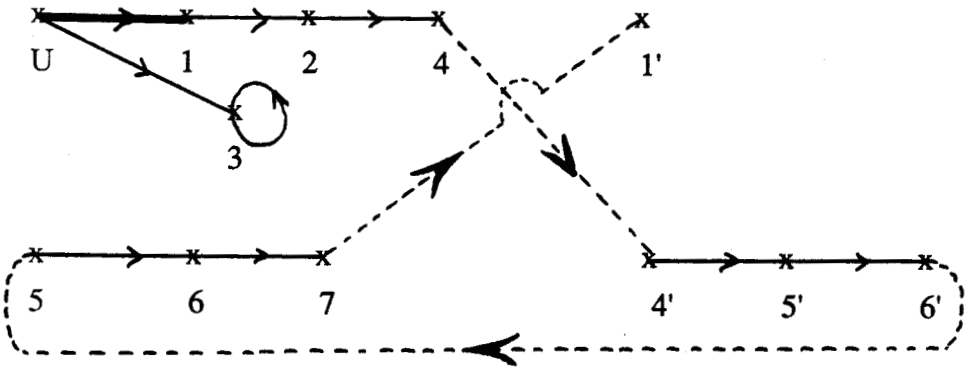


Fig.15

IV.5.1.1.2 N sous-systèmes : (Σ_i), i = 1, ..., N.

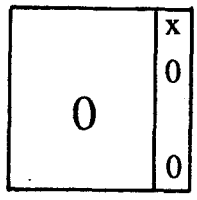
a.1 Cas mono-entrée

a-11 Représentation réduite d'un cactus.

D'après la définition de la cascade entre deux cacti, la seule information qu'on ait besoin de conserver sur chaque cactus est son origine o, son extrémité e et un arc fictif (symbolisant la tige) qui les relie ; ainsi le cactus (C_i) sera-t-il noté en abrégé (o_i, e_i). Chaque cascade constitue alors un chemin alterné du type $(o_1, e_1, o_2, e_2, ...)$.

a.12 Extraction d'un cactus global.

Soit $\Re$ (A) la matrice globale réduite de A, obtenue par les représentations réduites des cacti de A, et à partir des interconnexions entre les extrémités et les origines (e_i, o_j) (chaque arc du type (o_i, o_j), (e_i, e_j) et (o_i, e_j) doit être enlevé) ; les matrices d'interconnexion dans $\Re$(A) sont de la forme



Soit G($\Re$) le graphe associé à $\Re$(A)

Proposition 3 : Soit un ensemble de commandes U_i appliquées sur certains (Σ_i) ,le système global est S.C s'il existe une cascade de cacti relativement à un sous-ensemble de U_i, couvrant G($\Re$).

Démonstration : déduite de a-1) ; l'introduction de $\Re$(A) et de G($\Re$) n'est qu'une méthode de simplification du graphe pour mener plus rapidement à la détection d'une cascade. Si les entrées ne sont pas en nombre redondant, le sous-ensemble des commandes qui rendent le système S.C est égal à l'ensemble des U_i.

D'après la construction de G($\Re$) et sans perte de généralité, ce graphe est de la forme :

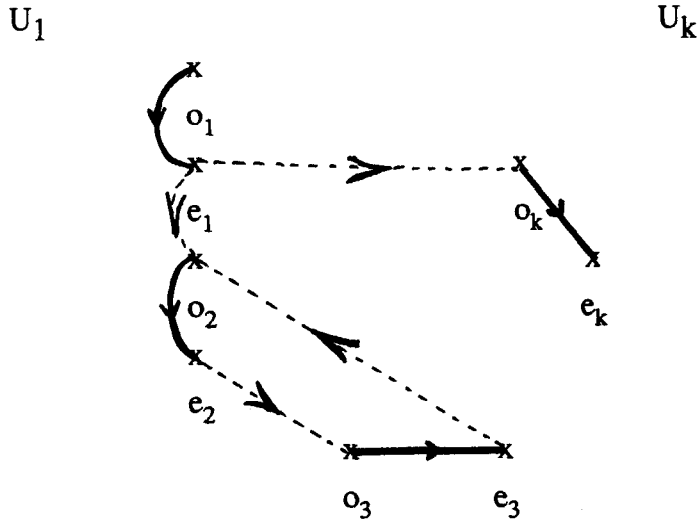


Fig.16

où les arcs en pointillés représentent des cascades.
La figure 17 montre un exemple d'une cascade relativement à $\{U_1, U_k\}$, couvrant $G(\mathfrak{R})$

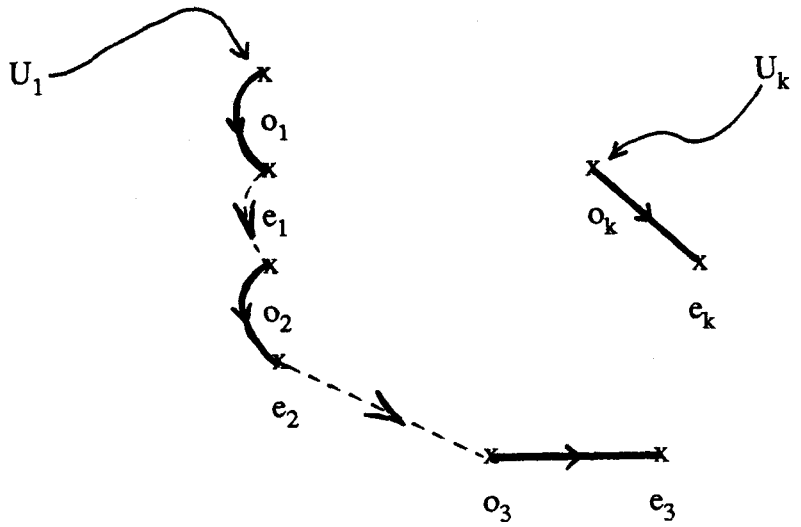


Fig 17

Soit $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ une arborescence couvrant $G(\mathcal{R})$.
On dira que $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ est une arborescence de cascades de cacti.
En reprenant la figure 16, $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ est donnée fig.18.

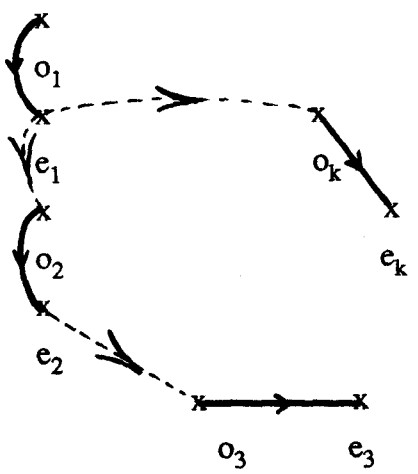


Fig.18.

Soit le sous-graphe de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ du type $e_i \dashrightarrow o_j$, $e_i \dashrightarrow o_k$

le sommet e_i est appelé point de ramification de l'arborescence.
Soient les sous-graphes du type (e_1,o_2,e_2,o_3,e_3),(e_1,o_k,e_k),on les appelle les branches extrêmales de l'arborescence.

Corollaire 1: un nombre minimum d'entrées suffisant pour commander A est égal au nombre de branches extrêmales d'une arborescence de cascades de cacti couvrant $G(\mathcal{R})$,i.e $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.Leur distribution est telle qu'on obtienne une cascade.

Démonstration: Cela provient de la présence d'une dilatation à chaque point de ramification d'où la suffisance d'avoir autant de commandes que de branches extrêmales,d'après la proposition 3.

Pour l'exemple considéré(fig.18),on en déduit qu'il est suffisant d'avoir 2 commandes (fig.17 ou fig.19)

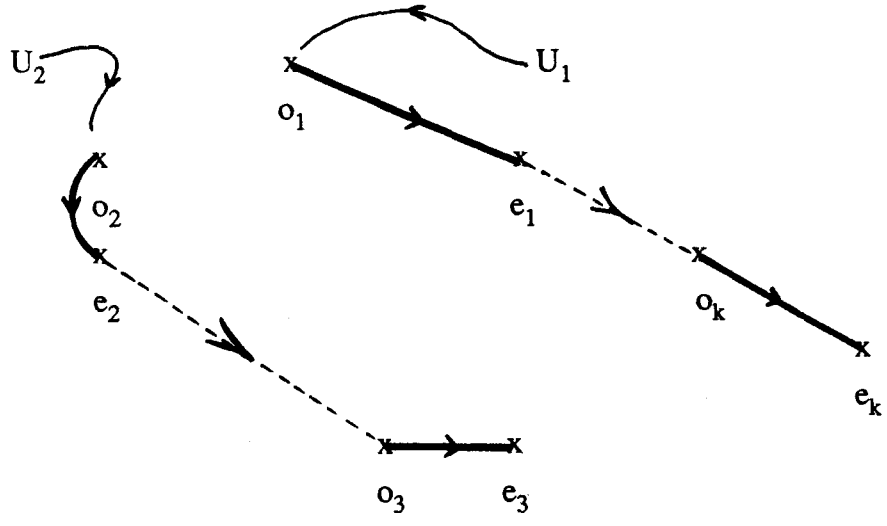


Fig.19

Remarques:

Il n'y a pas unicité de la cascade solution donc du groupe de commandes admissibles.

Le passage par l'arborescence indique le nombre de commandes et facilite la détermination d'une cascade;ainsi de la figure 18 en déduit-on les solutions 17 et 19.

Corollaire 2 : Pour la classe particulière des systèmes M.S.C mono-entrée en série (A bloc triangulaire inférieure) la condition de la proposition 3 devient nécessaire.

Démonstration : Comme il n'existe pas de boucle dans la structure des interconnexions, il est nécessaire et suffisant qu'il y ait une cascade (cf. Fig .13).

On donne en annexe 2 une illustration de la méthode.

a-2 Cas multi-entrées

Mêmes résultats qu'en proposition 3, corollaire 1 et 2 précédents. Chaque cascade élémentaire est un chemin alterné du type (o_1, e_1, ..., o_i, e_i, o_j, e_j, ...) où les indices successifs i et j sont relatifs à deux sous-systèmes différents.

Voir l'annexe 3 pour un exemple

IV.5.1.2 Cas où (Σ_i) est structurellement commandable $\forall i = 1, ..., N$.

Chaque sous-système est supposé maintenant structurellement commandable.

Théorème : Soit un ensemble de commandes U_i appliquées sur certains (Σ_i) ; le système global est S.C s'il existe une cascade de cacti, relativement à un sous-ensemble de U_i, qui couvre $G(\Re)$, les cacti étant extraits des sous-systèmes Σ_j, $\forall$ j = 1, ..., N.

Démonstration : Ceci est une conséquence directe de tout ce qui précède.

Remarque : La non-unicité du cactus couvrant un système, n'altère en rien la fomulation de ces divers résultats.

IV.5.2. CONCLUSION.

La condition suffisante de commandabilité structurelle développée dans cette section a le grand avantage d'être simple. Elle est à notre avis très intéressante pour la conception d'un système interconnecté dont on connaît les propriétés de chaque unité. La méthode employée est très proche de celle de l'accessibilité (construction d'une arborescence à partir d'un graphe "condensé") mais les dilatations sont en outre évitées.

Sa simplicité se paie par son caractère très strict qui limite à une classe particulière de systèmes ; cependant on trouvera encore là un avantage pour les problèmes de robustesse aux changements de structure (chapitre V.I).

CHAPITRE V

OBSERVABILITE STRUCTURELLE

V.1 INTRODUCTION.

L'essentiel de ce travail est centré sur la commandabilité structurelle. Il est clair qu'on peut définir de manière duale l'observabilité structurelle et en particulier s'intéresser au problème du nombre minimum de points de mesure nécessaires pour observer un système interconnecté. Dans ce chapitre, nous présentons les principaux critères d'observabilité structurelle duaux des critères exposés en III ; nous développons ensuite les méthodes duales de celles exprimées en IV pour les systèmes interconnectés.

V.2 OBSERVABILITE STRUCTURELLE D'UN SYSTEME ISOLE (C_S, A_S).

V.2.1 Définition.

Un système structuré (A_S, C_S) est structurellement observable ssi il est KALMAN observable pour presque toutes les valeurs des paramètres.

V.2.2 Principaux critères.

Critère OL1 : (A_S, C_S) est structurellement observable (S.O) ssi la matrice d'observabilité est de rang n :
rang-g (C_S^T, $A_S^T C_S^T$, ..., $(A_S^T)^{n-1} C_S^T$) = n.

Critère OL2 : [MORARI, 1977].
La paire (C_S, A_S) est structurellement observable ssi ($A^T{}_S$, $C^T{}_S$) est commandable structurellement i.e :

1) $G(A_S^T, C_S^T)$ est accessible aux sorties.
2) rang-g (A_S^T, C_S^T) = n.

Le graphe de A^T est le graphe de A dont la direction des arcs est inversée (Fig.21).

Exemple :

$$A^T = \begin{pmatrix} x & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ x & x & 0 & x \\ 0 & x & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \\ x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

états : $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$ $\qquad$ $y_1 \quad y_2$ sorties

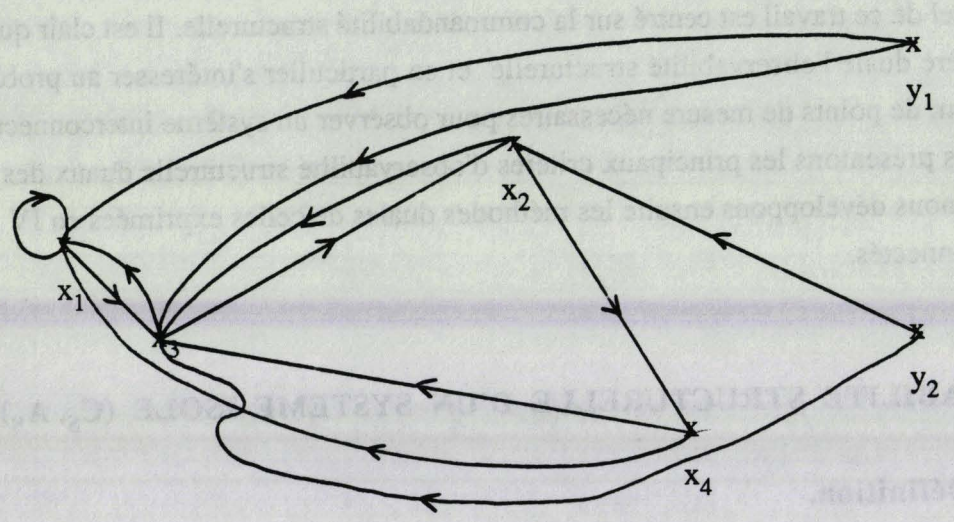


Fig.21

ou bien

Critère OL2 bis : [REINSCHKE, 1984].

(A_S, C_S) est structurellement observable ssi :

1) Il existe un chemin de chaque état i à l'une des sorties.
2) Rang-g $\begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix} = n$.

Remarque : On dit aussi dans ce cas que le graphe est accessible aux sorties.

Matrice d'atteignabilité : [SILJAK, 1977-a].

Théorème : (A_S, C_S) est accessible aux sorties ssi la matrice C_0 où

$C_0=C_B+C_BA_B+C_BA^2_B+...+C_BA^{n-1}_B$ ne possède aucune colonne nulle.

Critère OL3 : Interprétation modale.

(A_S, C_S) est structurellement observable ssi :

$$\text{rang-g}\begin{pmatrix} A_S - \lambda_S I_S \\ C_S \end{pmatrix} = n \qquad \forall\ \lambda_S \in \mathbb{C}.$$

Critère OL12 : Approche matrices systèmes polynomiales :

De manière duale à III.2.2.7.2 :

Définition : Soit $\Lambda_1(s)$ un diviseur commun à droite de T(s) et - V(s) :

$$[T^T(s),\ -V^T(s)]^T = [T^T{}_1(s),\ -V^T{}_1(s)]^T\ \Lambda_1(s).$$

Avec des hypothèses duales aux précédentes on définit les zéros structurels de découplage sorties (O.D.S zéros) comme les racines de l'équation dét $\Lambda_1(s) = 0$.

Théorème : Si $V_{z2}\ U\ V_{z4} \neq \emptyset$ alors les racines des équations

dét $T_{pp}(s) = 0$ (1)'

dét $T_{gg}(s) = 0$ (2)'

sont les O.D.S zéros associés à P(s).

Dans le cas d'équations d'état, la présence des O.D.S zéros correspond à des états non structurellement observables puisque non accessibles aux sorties.

Corollaire : Reprenant les notations de III.2.2.7.2 :

Si $V_{z4} \neq \emptyset$, les racines de l'équation dét $T_{gg}(s) = 0$ (1)" sont les zéros structurels de découplage entrées-sorties du système associé à P(s). (I.O.D.S zéros).

V.2.3 Observation avec un nombre minimum de points de mesure.

V.2.3.1 Méthode de REINSCHKE (1981).

Voir III.3.3.1.

On suppose A_S décomposée en ses composantes fortement connexes (bloc triangulaire supérieure).

On note ${}^{p}A$ la sous-matrice bloc colonnes constituée des colonnes 1, 2, ..., p ; ${}^{p}d$ la déficience en rang de ${}^{p}A$, soit ${}^{p}d = p$ - rang-g ${}^{p}A$. On décompose A en autant de sous-matrices ${}^{p}A$ que d'unités de déficience en rang de A. On détecte successivement la dépendance entre les colonnes.

$d_n = {}^{n}d = n$ - rang-g $[A_S] = d$.

* Marquer les d indices p tels que ${}^{p}d = {}^{p-1}d + 1 \quad p \in \{1, 2, ..., n\}$ et ${}^{0}d = 0$, par un second indice ${}^{p}i$, $i = 1, 2, ..., d$ dans une ligne supplémentaire sous la matrice A en commençant par la droite.

Théorème : Soit A une matrice structurée (n x n) sous la forme bloc triangulaire mentionnée ci-dessus et telle que rang-g A = n - d < n .La matrice minimale C qui rende A structurellement observable est une matrice d x n telle que :

a) Les coefficients $c_{i(pi)}$(i = 1, 2, ..., d) doivent être non nuls.

b) S'il existe dans A un bloc diagonal isolé i.e bordé supérieurement de coefficients tous égaux à zéro alors le bloc colonne correspondant dans C doit avoir au moins un coefficient non nul.

Si rang-gA= n alors il suffit d'un vecteur de sorties (1 x n) qui ait au moins un coefficient non nul dans le premier bloc colonne.
Noter que l'indice i augmente de la gauche vers la droite.

Reprenons l'exemple III.3.3.1 Fig.6.

$$A = \begin{matrix} 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{matrix}$$

$\{{}^{p}i\}$: 1

On en déduit : $c_{11} \neq 0$.

$$C = [x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

V.3 METHODES DE DECOMPOSITION.

V.3.1 Décomposition de $G(A_S)$ en composantes fortement connexes.

Soit T la forme bloc triangulaire inférieure obtenue. Reprenons la représentation (1.4).

Algorithme séquentiel de TRAVE et TITLI :

La même procédure que III.4.2.2.1 est applicable à rang-g $(C^T{}_S, A^T{}_S)$ ainsi que pour l'accessibilité de $G(A^T{}_S, C^T{}_S)$ aux sorties.
L'extension du calcul du rang-générique aux systèmes hiérarchisés de forme bloc triangulaire est aussi possible.

V.3.2 Décomposition de $G(A^T{}_S, C^T{}_S)$ en composantes structurellement observables :

On se reportera à III.4.4.

On réalise une partition du système en sous-systèmes irréductibles accessibles aux sorties ; on en déduit une décomposition en composantes structurellement observables.

Décomposition acyclique en sous-systèmes irréductibles accessibles aux sorties.

L'équation d'observation correspondant à (III.1) est :

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{i} C_{ij}\, x_j(t). \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, N.$$

où y_i est le vecteur sortie de la $i^{ième}$ composante.

La matrice d'interconnexion $\mathcal{T}' = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} E \\ \hline G \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} X \\ Y \end{array}$ se met après permutation sous la forme bloc triangulaire

$$\mathcal{T}' = \begin{bmatrix} E_{11} & & & \\ \cdot & \cdot & 0 & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ E_{N1} & \cdots & E_{NN} & \\ \hline G_{11} & & & \\ \cdot & \cdot & 0 & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ G_{N1} & \cdots & G_{NN} & \end{bmatrix} \begin{matrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N \\ \\ Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_N \end{matrix}$$

ainsi que la matrice d'atteignabilité $\begin{bmatrix} \overline{E} \\ \hline \overline{G} \end{bmatrix}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la partition existe est que la matrice $\overline{G}$ contienne au moins un zéro et que $\overline{G}_{ii}$, $\forall$ i = 1, ..., N n'ait aucune colonne nulle.

Soit G(A, C) le graphe orienté associé à (III.1) ; on le décompose en une partition acyclique de $G_i(E_{ii}, G_{ii}) \equiv G_i(\mathcal{X}_i, \mathcal{U}_i)$ associés aux (Σ_i) où chaque G_i est associé aux sorties ($\mathcal{X}_i = \{X_i, Y_i\}$ et $\mathcal{U}_i = \{A_i, C_i\}$). Cette partition s'obtient en appliquant la méthode III.4.4.1 à $G(G^T, E^T)$.

Décomposition acyclique en sous-systèmes structurellement observables.

Dans le cas de présence de dilatations dans $G_i(E_{ii}, G_{ii})$, appliquer la procédure III.4.4.2 à $G_i(G^T_{ii}, E^T_{ii})$ en posant $G^T_{ii} \equiv F_{ii}$.

Cette partition a un intérêt pour les problèmes de filtrage et d'estimation.

V.4 SYSTEMES INTERCONNECTES.

V.4.1 Méthode séquentielle généralisée.

Se référer à IV.2 ; la démarche est directement applicable à $G(C^T, A^T)$ ce qui revient à détecter séquentiellement les dilatations sur les colonnes de (A, C). On peut ainsi déterminer le nombre minimum de vecteurs de sorties pour observer un système quelconque (cf : IV.2.3).

V.4.2 Cas de simplification du critère structurel.

Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) de IV.4 et (H_4) : $\forall$ i = 1, ..., N (Σ_i) est accessible à C_i.

Observation de A par C :

La structure (A, C) de N sous-systèmes interconnectés arbitrairement, S.O ou stables et accessibles à partir des C_i quand ils sont découplés est observable.

Observation de A par C_i :

Si (H_1) ou (H_2) vraie, (A, C_i) est S.O ssi G(A, C_i) est accessible.

Si (Σ) est décomposable en composantes fortement connexes, (A, C) est observable ssi la condensation de G(A) relativement à cette partition est accessible à C_i.

V.4.3 Approche cactus.

Contrairement à la commandabilité , aucun auteur n'a défini la notion de cactus pour l'observabilité. Il nous paraît intéressant d'introduire ici ce type de graphe en utilisant le critère OL2. Nous aborderons ensuite le cas des systèmes interconnectés.

V.4.3.1 Définition d'un cactus par rapport aux sorties :

a-1 Cas mono-sortie

En définissant un cactus mono-sortie (C') par un système dont le graphe est du type :

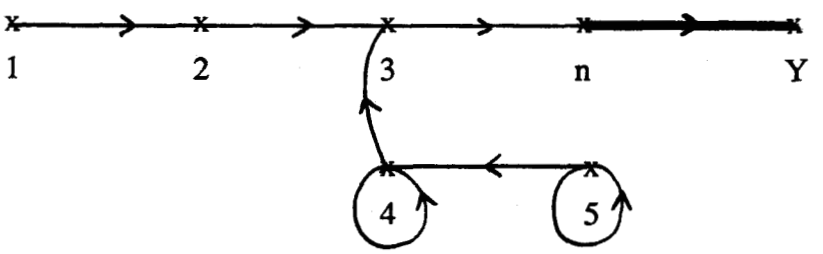


Fig.22

ce qui représente la structure observable au sens minimal telle que :

$$\begin{cases} G(A_S^T, C_S^T) \text{ est accessible aux sorties.} \\ \text{rang-g}(A_S^T, C_S^T) = n. \end{cases}$$

Le sens des arcs des boutons de (C') est inversé par rapport au cactus relatif à la commandabilité.

(C') est constitué d'une extrémité Y (matrice de sortie notée $\bar{C}'$) et d'une matrice d'état $\bar{A}'$ qui possède une colonne nulle lui correspondant ; avec une numérotation adéquate des états,

$$\begin{bmatrix} \bar{A}' \\ \bar{C}' \end{bmatrix} \quad \text{peut s'écrire} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 \ \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{C'} & \begin{matrix} 0 \\ \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & x \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ x_n \\ Y \end{array}$$

$$\text{soit } (\bar{A}', \bar{C}') = \left[\begin{bmatrix} C'^T \\ \hline 0 \quad 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \right]$$

a-2 Cas multi-sorties :

(C') est une réunion disjointe de cacti élémentaires du type:

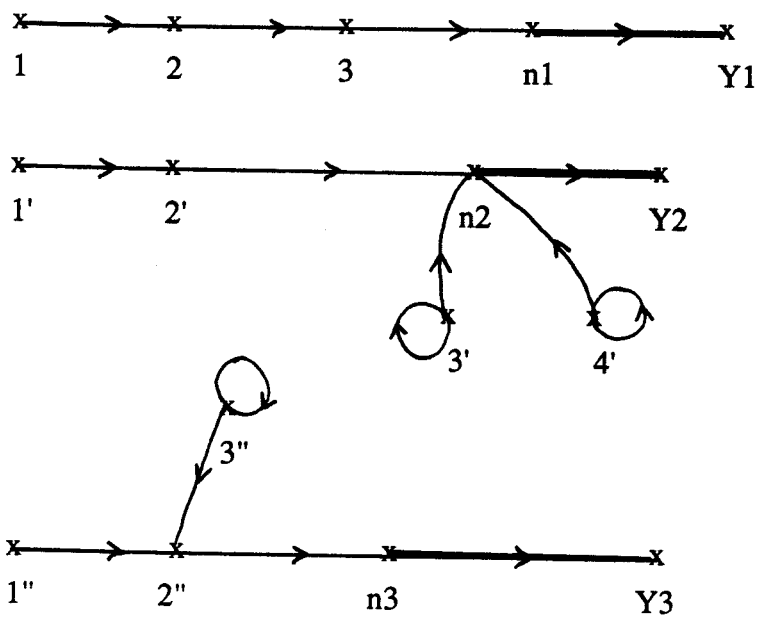


Fig.23

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} C'^T_1 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array} & & & 0 & \\ & \begin{array}{c|c} C'^T_1 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array} & & 0 & 0 \\ & & \ddots & \times & \times \\ & & & \begin{array}{c|c} C'^T_N & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array} & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & \times \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}'^T \qquad \bar{C}'^T$$

Le critère OL2 nous permet d'affirmer :

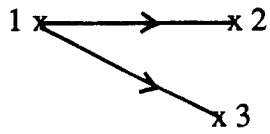
Théorème OL4 :

(A_S, C_S) est structurellement observable ssi $G(A_s, C_S)$ est couvert par un cactus, au sens (a-1) et (a-2).

a-3 Contraction dans G(A,C):

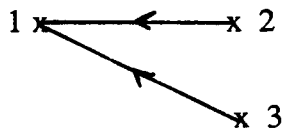
Pour tout système non S.O. mais accessible,il existe une dilatation dans $G(A^T,C^T)$.Cela signifie qu'il en existe une dans $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ c'est-à-dire que pour certains états,on ne dispose pas d'un nombre suffisant de points de mesure.Il est naturel de penser à un terme concret pour décrire ce phénomène : la notion de "contraction" dans un graphe nous paraît adéquate,en rapprochement avec les travaux de JOHNSTON et al. où est utilisé ce concept .

Soit G_1,le graphe le plus élémentaire qui contienne une dilatation:



DILATATION $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{x} & 0 & 0 \\ \boxed{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T(S)} \Big\} S$

$G_1{}^T$ donne G_2 :

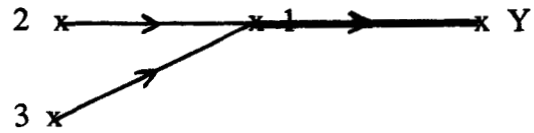


CONTRACTION $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \boxed{x \quad x} \\ 0 & 0 \quad 0 \\ 0 & 0 \quad 0 \end{pmatrix}}_{T(S)} \Big\} S$

Dans le premier cas ,la seule action de l'état 1 ne suffit pas à commander les états 2 et 3.

Dans le second,on ne peut pas observer 2 et 3 à partir de l'état 1 seulement.

Soit G_3:



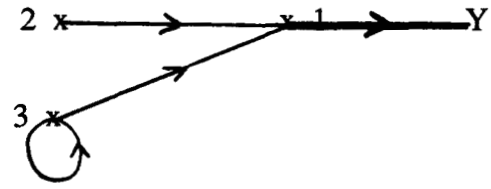
$$\left(\frac{A}{C}\right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 0 & \boxed{x \quad x} \\ 0 & 0 \quad 0 \\ 0 & 0 \quad 0 \\ \hline x & 0 \quad 0 \end{array}\right) \leftarrow S \\ \uparrow \quad \uparrow \\ T(S) \end{array}$$

La paire (A,C) est donc non S.O.

De manière générale,une contraction dans G(A,C) est toute paire d'ensembles de sommets {S,T(S)} tels que Card S< Card T(S).

Ainsi la contraction (au sens de l'observabilité) i.e dans la matrice $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ est-elle duale de la dilatation (au sens de la commandabilité) dans la matrice (A,B).

On peut ainsi expliquer "physiquement" le sens inverse des boutons sur le cactus;soit G_4:



(A,C) est M.S.O. (G_4 est un cactus).

Néanmoins,tout ce qui a été développé pour la commandabilité est applicable sur $G(A^T,C^T)$.

Mathématiquement,la dilatation concerne toute perte de rang d'une matrice rectangulaire horizontale,la contraction,celle d'une matrice rectangulaire verticale ; pour une matrice carrée,la présence de lignes (colonnes) dépendantes non nulles.

V.4.3.2 Principaux résultats.

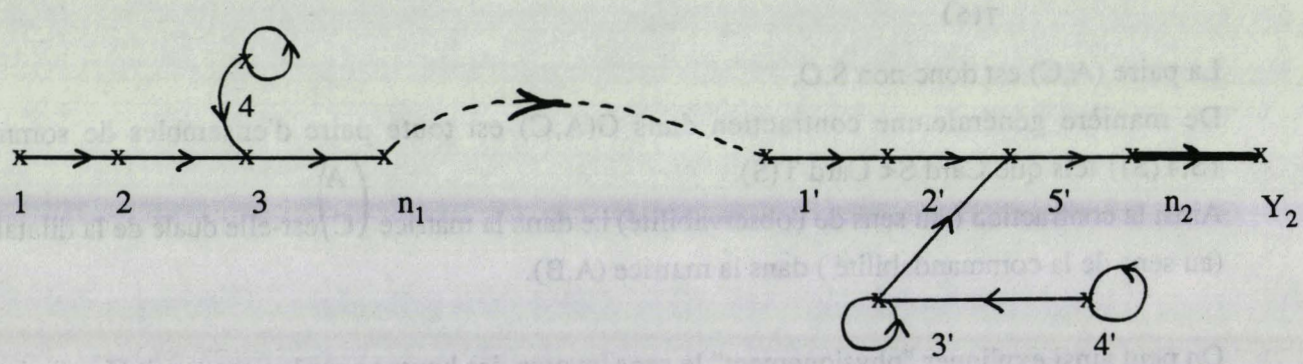
V.4.3.2.1 Deux sous-systèmes :

a-1 Cas mono-sortie :

Définition 1 : Une interconnexion de deux cacti (C'_1) et (C'_2) mono-sortie est une cascade

relativement à la sortie Y_i (i = 1 ou 2) ssi l'extrémité de la tige du sous-système Σ_j, $j \neq i$, est reliée à l'origine de Σ_i.

Le graphe pour i = 2 est représenté Fig.24.



(C'_1) Fig.24,en pointillés : cascade (C'_1)-(C'_2) (C'_2)

On peut énoncer dans le même contexte qu'en IV.5.1.1.1:

Proposition 1 : Sous les hypothèses que (C'_1) et (C'_2) sont M.S.O (i.e $G(\overline{A}'_i, \overline{C}'_i)$ est un cactus $\forall$ i = 1, 2) une condition nécessaire et suffisante pour que (C') soit M.S.O avec la sortie Y_i de (Σ_i) seul $(G(\overline{A}', \overline{C}'_i)$ est un cactus) est que l'interconnexion soit une cascade relativement à Y_i.

a-2 Cas multi-sorties :

Définition 2 : Une interconnexion de deux cacti multi-sorties est une cascade relativement à la sortie Y_i,vecteur sortie de Σ_i (i = 1 ou 2) ssi chaque cactus élémentaire C_{ki} du sous-système (C'_i) est relié par une cascade à un cactus élémentaire C_{lj} de (C'_j).

Exemple :

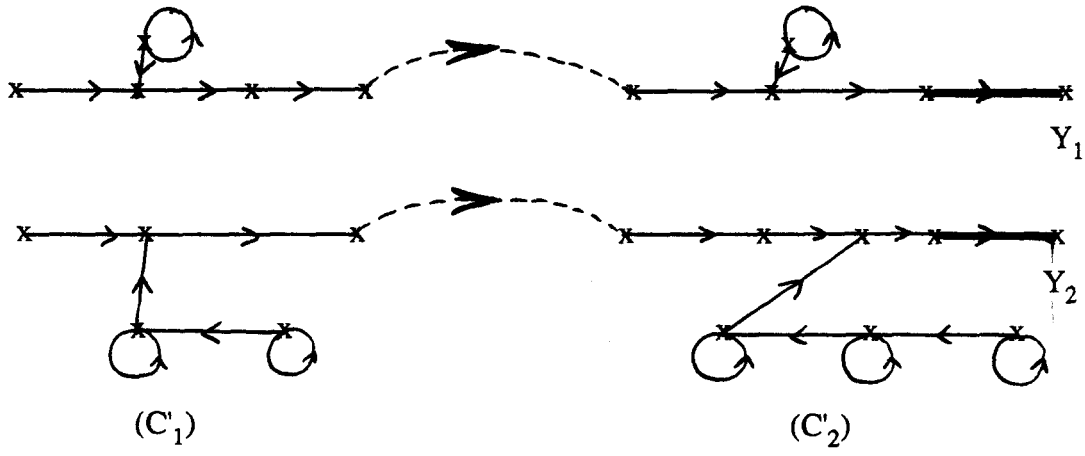


Fig.25

Proposition 2 : Sous les hypothèses que (C'_1) et (C'_2) sont M.S.O. $(G(\overline{A}'_i, \overline{C}'_i)$, i = 1, 2 est un cactus) une condition suffisante pour que (C) soit M.S.O $(G(\overline{A}', \overline{C}'_i)$ est un cactus) avec la sortie Y_i de (C_i) est que l'interconnexion soit une cascade relativement à Y_i.

V.4.3.2.2 N sous-systèmes :

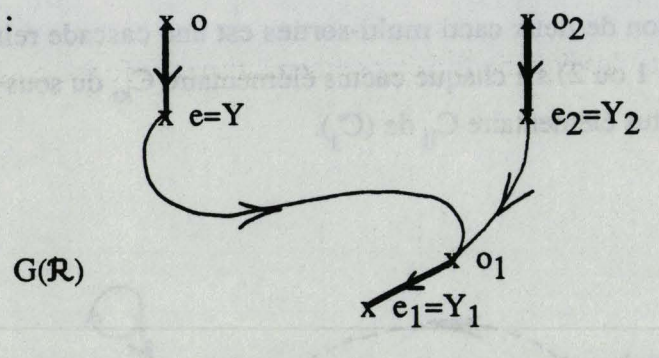
En utilisant la même représentation réduite qu'en IV.5.1.1.2, soient $\mathfrak{R}(A)$ et $G(\mathfrak{R})$.

On peut énoncer en reprenant les proposition 3 et corollaire 1 de la référence précédente, dans les cas mono-sortie et multi-sorties :

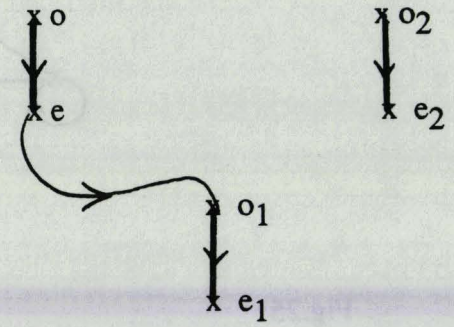
Proposition 3 : Soit un ensemble de sorties Y_i observant certains (C'_i). Le système global est S.O s'il existe une cascade de cacti, relativement à un sous-ensemble de Y_i couvrant $G(\mathfrak{R})$.

Corollaire 1 : Dans ces conditions, un nombre minimum de sorties est égal au nombre de branches extrémales de l'arborescence extraite et leur position est ces extrémités mêmes.

Exemple :



G(ℛ)



$\mathcal{A}(\mathcal{R})$:

2 branches extrêmales donc 2 sorties Y_1 et Y_2 (ou Y, Y_1).
$\mathcal{A}(\mathcal{R})$ est ici confondue avec une cascade couvrant $G(\mathcal{R})$.

Ces propositions se généralisent au cas de sous-systèmes S.O. d'où l'on extrait un cactus (cf.IV.5.1.2) ; on se réfèrera à l'annexe 4 pour un exemple d'application de cette méthode..

V.4.4 Configuration FEEDBACK d'un système isolé : [MORARI, 1977, REINSCHKE, 1984, 1985].

Nous insérons ici un paragraphe considérant des critères de S.C et de S.O dans le cas de certains types de retours d'état.

V.4.4.1 Régulateur proportionnel-intégral : [MORARI, 1977].

Si on envisage un retour d'état $u = K\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ où z est l'intégrale de la sortie y :

$z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} y\,dt = \int_{t_0}^{t_1} C\,x\,dt$ les équations d'état se mettent sous la forme classique :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} U$$

Théorème :

La paire structurée $\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ est structurellement commandable ssi :

1) (A, B) est commandable structurellement.

2) rang-g $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = n + p$

Il faut noter que 2) implique rang-g (A, B) = n et rang-g $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = n$.

V.4.4.2 Retour de sortie : [REINSCHKE, 1984]

Soient F_S la matrice structurée des retours d'état statiques, supposée pleine

$u = F_S\,y$ où $F_S(m \times p)$ (3)

et le système $\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A_S\,X + B_S\,U & (1) \\ Y = C_S\,X + D_S\,U & (2) \end{cases}$

Théorème :

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & C_S & D_S \\ 0 & A_S & B_S \\ F_S & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice (n + m + p, n + m + p).

G(M) son graphe orienté.
Le système décrit par les équations d'état (1) et (2) sous la loi (3) est structurellement commandable et observable ssi :

1) Chaque état est accessible à au moins une entrée et atteint au moins une sortie.

2) Il existe au moins une famille de cycles de largeur n états dans G(M). (c-a-d un ensemble de cycles couvrant n états).

Commentaires :

i1) FRANKSEN et al., (1979) ont été les premiers à introduire la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & C_S & D_S \\ 0 & A_S & B_S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i2) La condition 2) est une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A + BFC$ d'un triplet admissible à (A_S, B_S, C_S) soit non singulière.

V.5. CONCLUSION.

Il est intéressant d'exploiter les graphes de la transposée de (A_S, C_S) afin d'utiliser les algorithmes d'accessibilité développés pour la commandabilité ; au niveau du calcul du rang générique cela n'a pas d'importance. Les méthodes présentées ici ont les mêmes caractéristiques que leur contre-partie aux chapitres III et IV. Nous avons défini la notion de cactus par rapport aux sorties correspondant à (A_S, C_S) non transposée ; on peut l'extraire d'un graphe avec la procédure III.3.2.1 appliquée à la paire transposée. Soulignons enfin la possibilité d'introduire un cactus entrée-sortie pour détecter les systèmes S.O et S.C (Fig.26) et l'intérêt de déterminer un nombre minimum de points de mesure pour observer un système quelconque.

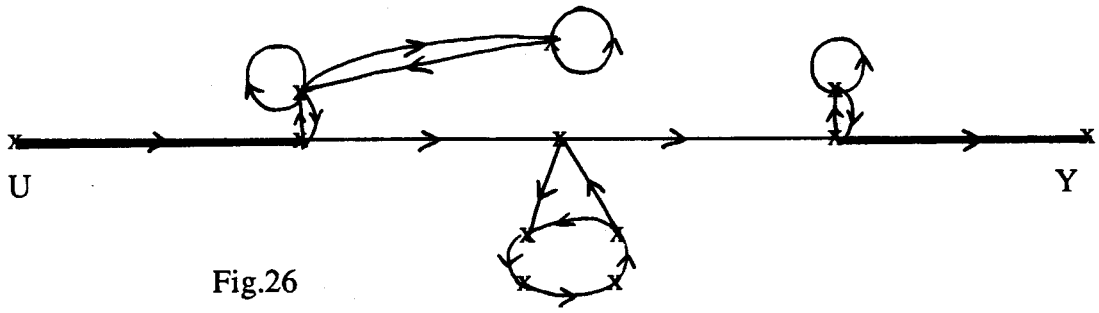


Fig.26

CHAPITRE VI

PROBLEMES DE ROBUSTESSE

VI-1. INTRODUCTION.

Spécifions ce que l'on entend par robustesse.

S'il s'agit de maintenir la propriété de commandabilité malgré les variations paramétriques des matrices A_S, B_S (sans passage par zéro des coefficients dans un premier temps), le concept de commandabilité structurelle lui-même autorise un "déplacement" en presque tous les points de l'espace des paramètres. Ainsi, pour une structure donnée, le sous-espace qui la rend commandable est-il robuste (cette notion d'ensemble robuste a d'ailleurs été utilisée dans [CORFMAT et MORSE, 1976]). Toutefois dans ce contexte, la robustesse prend un sens plus profond si on veut éliminer l'hypersurface des cas exceptionnels de perte de commandabilité : ceci est résolue dans l'idée de commandabilité structurelle forte, émise par MAYEDA et YAMADA (cf III-231) et qui aboutit à la formulation de conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir des structures dont on peut dire donc qu'elles sont robustes.

Si par contre, dans un deuxième temps, on s'intéresse à des ruptures franches d'interconnexion (actionneurs, liaisons...) c'est-à-dire à la robustesse aux changements de structure, on a besoin de considérer un peu plus en détails les algorithmes disponibles. Nous l'évaluerons bien sûr dans le cadre des méthodes poursuivant le but de simplification par décomposition (IV), ce qui fournit un élément de comparaison des divers produits.

VI.2. SYSTEMES ROBUSTES AUX CHANGEMENTS DE STRUCTURES POUR LA COMMANDABILITE.

VI.2.1. Ruptures d'actionneurs.

Envisageons d'abord le cas d'annulation de coefficients dans B. Ceci correspond à un incident ou à un arrêt volontaire (économie, sous-régime,...). La première idée qui vient à l'esprit

est de tester en ligne l'accessibilité et le rang générique de (A,B) et de rétablir la commandabilité presque instantanément. (voir [REINSCHKE, 1984-b]). Il est préférable (pour des raisons de temps de calcul et de temps de réponse ...) de connaître à l'avance les diverses situations interdites, d'autant plus que la plupart des incidents sont prévisibles ; dans le cas contraire, il suffirait alors de reconnaître la configuration dangereuse et d'agir en conséquence.

Une condition nécessaire pour que le système dégradé soit S.C. est que le système initial non dégradé le soit. La perte de commandabilité se produit par apparition d'un mode non nul non accessible ou d'un mode nul non commandable.

VI-2.1.1. Formulation du problème

Définition 1 : Une structure (Σ) est dite robuste aux ruptures d'entrées ssi elle reste commandable après la dégradation. Soit $\overline{B}$ la matrice dégradée à partir de B.
Cela signifie : 1) $G(A,\overline{B})$ accessible à U.
2) rang-g $(A,\overline{B}) = n$

Si ces deux conditions ne sont pas réalisées $\forall\ \overline{B}$, le système est robuste à un certain type d'incidents.
En reprenant une interprétation modale, nous définissons de la même manière un mode robuste aux ruptures d'entrées.

Définition 2 : Un mode λ est dit robuste aux ruptures d'entrées ssi il reste structurellement commandable après la dégradation.

Définition 3 : Une structure (Σ) est dite robuste aux ruptures d'entrées ssi tous ses modes sont robustes.

Si on distingue les incidents qui conservent l'accessibilité et ceux qui ne diminuent pas la valeur du rang générique, il s'ensuit :
si $G(A,\overline{B})$ est accessible aux entrées, la structure est robuste ssi tous les modes nuls structurels sont robustes ; si rang-g $(A,\overline{B}) = n$ uniquement, la structure est robuste ssi tous les modes non nuls structurels sont robustes.

VI.2.1.2. Principaux résultats.

Exprimons les conditions de robustesse sur les diverses représentations d'un système (A,B) interconnecté, en supposant qu'elles sont toutes possibles. On fera l'hypothèse que (A,B) est

initialement S.C. (fondamental). Ce problème se ramène en partie à la conception d'une commande minimale à partir d'une commande B, abordée en III-3.2.1 i4); en effet, il s'agit que $\overline{B}$ ait au moins toutes les qualités requises pour B_{min} ; il peut correspondre plusieurs B_{min} admissibles donc plusieurs groupes de composantes à ne pas dégrader simultanément.

1. Partition en composantes fortement connexes

Soient S_j $\forall$ $j = 1,..., N$ les composantes de la décomposition et A_{jj} les matrices associées.
Soit $J = \{ j \in \{ 1,...,N \} / [A_{1j}... A_{j-1j}] \equiv 0 \}$

a) Si $\forall j = 1,...,N$, rang-g $A_{jj} = n_j$:
Le système (A,B) est robuste à n'importe quelle rupture de commandes telles que $\forall j \in J$ $[\overline{B}_j] \not\equiv 0$.

Preuve : le système étant initialement S.C. , la garantie de l'accessibilité est maintenue si on conserve au moins une composante des matrices B_j agissant sur les blocs A_{jj} isolés.

b) S'il existe des S_j tels que rang-g $A_{jj} \neq n_j$, la méthode séquentielle (III-4.2.2.1 i4) jointe à a) permet d'affirmer les alternatives suivantes :

1- S'il existe une G-dilatation maximale d'ordre 0 à l'étape N, $\{ f_N^M , T(f_N^M) \}$

telle que $e = \text{Card } \overline{T} (f_N^M) - \text{Card } (\overline{f}_N^M) > 0$
Soit m le nombre de vecteurs colonnes d'entrées global.
Soit P l'ensemble de ces vecteurs qui appartiennent à $T(f_N^M)$

1* si Card $P = 0$ et $m \geq e$, le système (A,B) est robuste aux suppressions de n'importe quelles composantes des groupes de e vecteurs parmi les m telles que $\forall$ $j \in J$ $[\overline{B}_j] \not\equiv 0$.

2* si Card $P = 0$ et $m < e$, le système (A,B) est robuste aux suppressions de n'importe quelles composantes des m vecteurs, telles que $\forall j \in J$ $[\overline{B}_j] \not\equiv 0$.

3* si Card $P = p$ et $m-p \geq e$, même résultat qu'en 1* en remplaçant m par (m-p).

4* si Card $P = p$ et $m-p < e$, même résultat qu'en 2* en remplaçant e par (m-p).

2- S'il n'existe pas de G-dilatation maximale d'ordre 0 à l'étape N, les résultats sont difficilement

évaluables ; si toutefois la matrice initiale B n'a pas de colonnes excessives c'est-à-dire que m est égal à la déficience en rang de A, le système (A,B) est robuste à n'importe quelles suppressions de composantes telles que $\forall j \in J$ $[\overline{B}_j] \not\equiv 0$ et rang-g $\overline{B} = m$. Dans le cas contraire il faudrait passer en revue toutes les matrices de permutation maximales dans (A,B) fonctions des éléments pris dans B.

Preuve : elle découle de a) pour l'accessibilité et de l'exploitation de III.4.2.2 pour le rang.

2. Partition en composantes structurellement commandables.

Rappelons qu'il s'agit d'une décomposition de (A,B) en N sous-systèmes S.C.

donc $\forall j = 1,...,N$ rang-g $[A_{jj}\ B_j] = n_j$ (1)

$G(A_{jj}, B_j)$ accessible (2)

2.1. Proposition.

Le système (A,B) est robuste si les conditions (1) et (2) restent vraies pour $\overline{B}_j$ et $\overline{B}_{ij}$ $\forall j = 1,...,N$ $\forall i = 1, ..., N$

Preuve : par définition.

On notera l'adéquation de cette décomposition pour l'étude de la robustesse ; elle apparaitra encore plus pertinente dans le cas des ruptures de liaisons (cf. VI.2.2).

D'autre part, on en déduit le corollaire suivant :

Le système (A,B) est robuste à la rupture simultanée des B_{ij}. $\forall i = 1,...,N$, $\forall j = 1,...,N$ intervenant dans la représentation.

Preuve : les conditions (1) et (2) sont satisfaites.

Enfin remarquons que le maintien de B_j n'est pas nécessaire à l'accessibilité grâce aux B_{ij}.

2.2. Exemple.

Reprenons l'exemple de SEZER et SILJAK (1981).

Supposons qu'il corresponde à un système interconnecté de matrices globales.

$$A = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & x & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} (1) & (2) & (3) \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & x & x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & x & x \\ x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

états : x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 entrées : u_1 u_2 u_3

La décomposition correspond à la partition $X_1 = \{ x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8 \}$
$X_2 = \{ x_4 \}$ $U_1 = \{ u_1, u_3 \}$; $U_2 = \{ u_2 \}$

(Fig. 20)

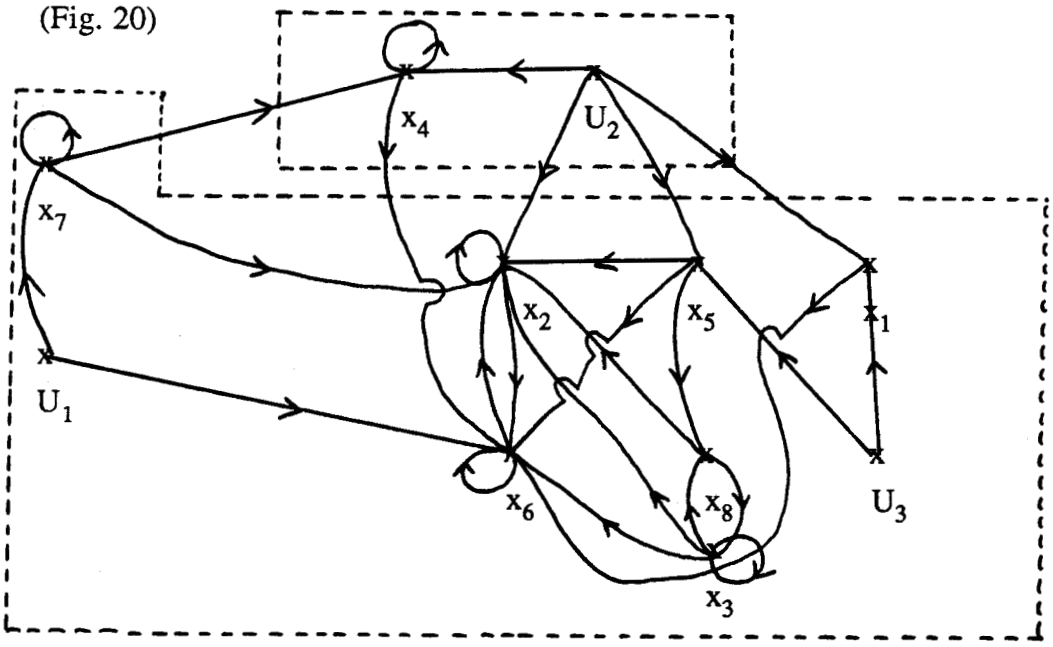


Fig.20.

Un groupe de ruptures désignant un ensemble de ruptures pouvant s'effectuer simultanément :

(A,B) est robuste aux groupes $G_1 \equiv \{ b_{11}, b_{22}, b_{42}, b_{52} \}$, $G_2 \equiv \{ b_{12}, b_{22}, b_{53}, b_{61} \}$ et à

n'importe quel sous-groupe de ces groupes.

Cette décomposition a l'intérêt de mettre à nue les B_{ij} $i \neq j$ non indispensables, les B_{jj} qui maintiennent la commandabilité (test sur chaque S_j pouvant se faire en calcul parallèle) ; par contre, si on désire combiner ces deux groupes, cela ne peut se faire que par inspection du graphe.

3. Couverture par une arborescence de cascades de cacti.

Si dans le cas général, (Σ) est couvert par une arborescence de cascades de cacti (C_i) extraits de chaque Σ_i, alors le système (A,B) est robuste à n'importe quelle rupture de groupes de commandes B_i correspondant aux divers groupes de branches, quelle que soit B_i n'agissant pas sur les systèmes en tête de chaque branche.

Reprenons le cas de figure IV-5.1.1.2.

Au premier ensemble de branches $\{ \{o_1, e_1, o_2, e_2, o_3, e_3\}, \{o_k, e_k\} \}$, correspond le groupe de ruptures $\{ B_2, B_3 \}$ (Fig.17).

Au deuxième, $\{ \{o_1, e_1, o_k, e_k \}, \{ o_2, e_2, o_3, e_3 \} \}$, le groupe $\{ B_k, B_3 \}$. (Fig. 19).

Ainsi, la condition de S.C. développée dans ce cadre, bien que seulement suffisante, a l'avantage de simplifier aussi l'approche robustesse (toutefois, il est exigé que chaque sous-système physique soit S.C. alors que les partitions 2 et 3 ne l'imposent pas).

VI.2.2. Ruptures d'interconnexions.

Considérons des annulations dans les matrices A_{ij} $j \neq i$ de la représentation (1.4).

Définition 4 : Une structure (Σ) est dite robuste aux ruptures de liaisons ssi elle reste commandable après la dégradation.

Soit $\bar{A}$ la matrice dégradée à partir de A.

Cela signifie 1) $G(\bar{A},B)$ accessible à U.

2) rang-g $(\bar{A},B) = n$.

1. Partition en composantes fortement connexes :

Soit $J = \{ j \in \{ 1,...,N \} / [B_j] \equiv 0 \}$.

Attirons l'attention sur le fait que les matrices A_{ij} mises en jeu ici, contiennent à la fois des interconnexions réelles du procédé et des intéractions entre variables d'un même sous-système physique dont on suppose qu'elles ne sont jamais interrompues. On comprendra alors qu'il faille

prendre en compte seulement les dégradations qui conservent la propriété de forte connexité de chaque composante pour que cette représentation ait un intérêt.

a) Si $\forall j = 1,...,N$ rang-g $A_{jj} = n_j$:
Le système (A,B) est robuste à n'importe quelle rupture A_{ij} telle que $\forall j \in J$ $\forall i \in \{ 1,...,N \}$ $[A_{1j},...,A_{ij},..., A_{j-1j}] \not\equiv 0$ et qui conserve la forte connexité de $G(A_{jj})$.

b) S'il existe des S_j tels que rang-g $A_{jj} \neq n_j$, on procède à la même démarche qu'en VI-2.1.2 1-b) appliquée aux colonnes de A et on adjoint la condition a) (à la place de la 2ème partie des assertions).

2. Partition en composantes structurellement commandables.

Ici aussi les matrices A_{ij} contiennent les deux types d'interconnexions (cf. 1).
On peut énoncer :
Le système (A,B) est robuste à la rupture simultanée des A_{ij} $\forall i = 1,...,N$, $\forall j = 1,...,N$.
Fig.20, la rupture de a_{47} et a_{64} ne modifie pas la commandabilité globale.
Les matrices A_{ii} peuvent aussi être prises en compte mais ceci , par inspection de G(A,B) ou calcul de rang-g (A,B) et de l'accessibilité globale ; néanmoins on peut affirmer :

Le système (A,B) est robuste à n'importe quelle rupture de A_{ii} telle que rang-g $(\bar{A}_{ii}, B_i) = n_i$ et $G(\bar{A}_{ii}, B_i)$ accessible.

3. Approche cactus.

Si le système (Σ) est couvert par une arborescence de cascades de cacti, il est robuste à n'importe quelle rupture de liaisons n'appartenant pas à l'arborescence.

VI .3 ROBUSTESSE POUR L'OBSERVABILITE .

VI.31 Ruptures de capteurs.

Définition 5 : Une structure (Σ) est dite robuste aux ruptures de sorties ssi elle reste observable après la dégradation.

Soit $\bar{C}$ la matrice dégradée à partir de C.
1) $G(A^T,\bar{C}^T)$ accessible à Y.
2) rang-g $(A^T,\bar{C}^T)=n$.

On peut également définir des modes robustes aux ruptures de sorties.

1.Partition en composantes fortement connexes.

On aboutit aux mêmes conclusions qu'en VI.2.1.2 . 1) si l'on part d'une matrice bloc triangulaire supérieure A et si l'on travaille sur les transposées de A et de C.

2.Partition en composantes structurellement observables.

Soient les N sous-systèmes S.O obtenues:

$\forall$ j=1, ..., N $\quad$ G (A^T_{jj}, C^T_j) accessible . $\quad$ (1)

rang-g (A^T_{jj}, C^T_j)=nj . $\quad$ (2)

Conformément aux explications de VI.2.1.2. 2) :

*Le système (A,C) est robuste si les conditions (1) et (2) restent vraies pour $\overline{C}_j$ et $\overline{C}_{ij}$ $\forall$ j=1, ..., N, $\forall$ i=1, ..., N.

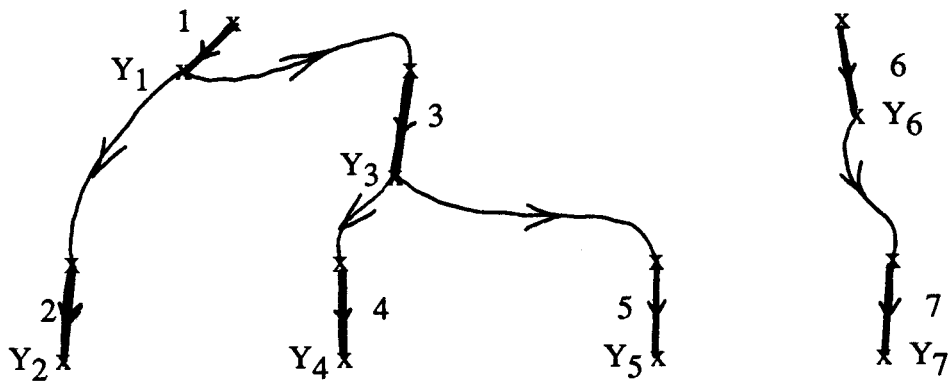
*Le système (A,C) est robuste à la rupture simultanée des C_{ij},$\forall$ i=1, ..., N ,$\forall$ j=1, ... , N.

3.Approche cactus:

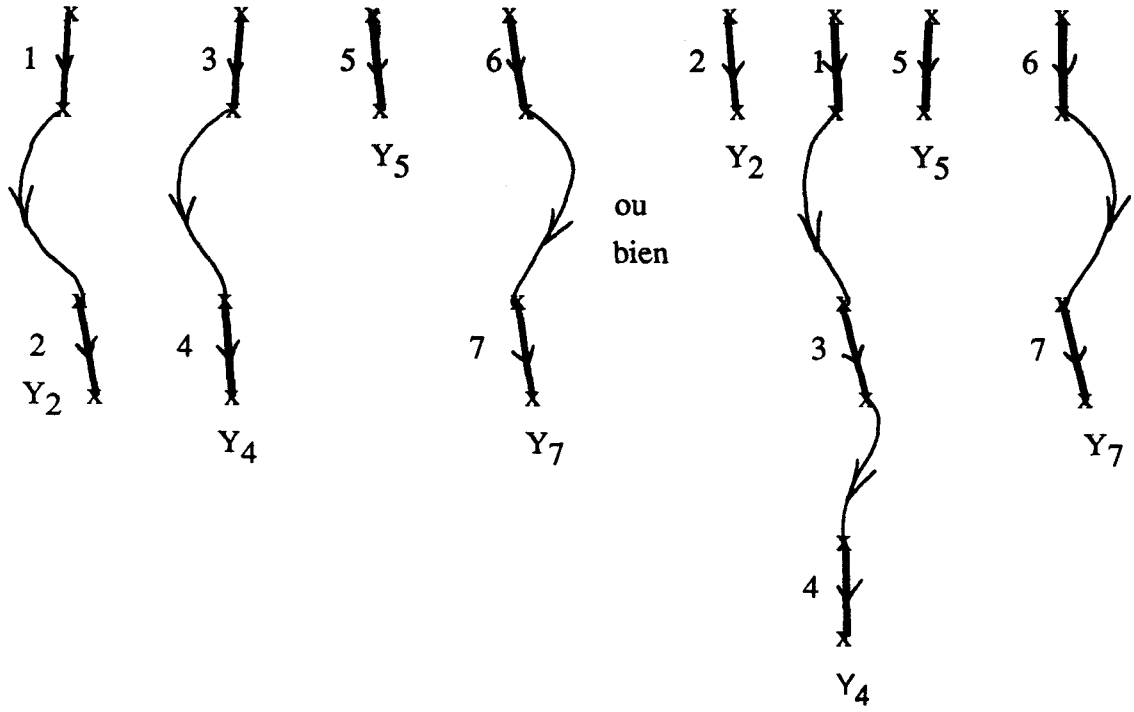
Si le système global (Σ) est couvert par une arborescence de cascades de cacti (C'_i) (par rapport aux sorties) extraits de chaque (Σi),il est robuste à n'importe quelle rupture de sorties Y_i,sauf celles situées aux extrémités des branches.

Preuve : se référer à la proposition 4 (V.4.3.2.2)

Exemple : Supposons une arborescence de cascades de cacti extraite de G(A,C) où on a numéroté les sous-systèmes.



Les sorties Y_2, Y_4, Y_5, Y_7 sont indispensables pour l'observabilité globale, quel que soit le groupe de branches choisi, parmi lesquels:



VI.3.2. Ruptures de liaisons.

En considérant $G(A^T, C^T)$ on peut conclure les mêmes résultats qu'en VI.2.2,1, 2, 3 où A est supposée triangulaire supérieure pour 1 et B aussi pour 2.

VI.4. CONCLUSION.

Il serait possible d'envisager les deux types simultanés de ruptures et d'établir des critères de robustesse en réunissant les différentes propositions ; nous ne le ferons pas, afin d'éviter plus ou moins des répétitions. Nous pensons qu'à la veille de refermer ce mémoire, le lecteur n'est pas étonné de l'aspect heuristique des méthodes proposées. Toutefois, il est transparent que la décomposition en composantes irréductibles structurellement commandables (observables), applicable sur un système quelconque, exhibe naturellement la sous-structure des matrices A ou B (C) facultative au maintien de la commandabilité (observabilité). Enfin l'approche cactus donne une condition suffisante très stricte qui permet encore plus simplement d'aboutir au résultat et qui donne immédiatement un ensemble de composantes plus large qui peuvent être détruites (relativement à la

recherche interne aux composantes de la partition précédente).

CONCLUSION

Cette étude a été motivée par le souhait de déterminer un ensemble d'entrées (de sorties) minimal pour commander (observer) un système interconnecté.

A cette fin, nous avons utilisé l'approche structurelle de commandabilité (d'observabilité) élaborée par LIN.

Pour situer, avant tout, ce travail dans le cadre de l'Automatique qui est "la discipline de l'analyse et de la modélisation des systèmes dynamiques en vue de leur commande", on peut dire que l'approche structurelle constitue la première phase d'analyse et de modélisation des systèmes complexes. Elle permet d'en rationnaliser les méthodes de conception et contribue à une méthodologie de leur automatisation ; en effet, dans la conduite de tels procédés, on doit savoir réaliser des changements de structure correspondant aux diverses alternatives de fonctionnement et aux différents types de perturbations structurelles, et ceci, malgré les difficultés liées aux multiples processus qui intéragissent et à la dimension globale.

Nous avons exploité des représentations d'état linéaires dynamiques structurées continues qui constituent une extension des modèles classiques pour les systèmes à paramètres inconnus ; avec les modèles dits "qualitatifs" non utilisés ici où on considère le signe des coefficients, c'est la jonction entre la tradition et la génération future de modèles de plus en plus qualitatifs voire symboliques. Ces nouveaux axes de recherche sont imposés par le caractère agrégé et hautement imprécis de la modélisation numérique des grands systèmes.

La première partie de ce mémoire a concerné une synthèse bibliographique sur le thème de la commandabilité structurelle, c'est-à-dire générique, des systèmes linéaires invariants "isolés" et sur les méthodes de décomposition existantes permettant de réaliser les tests de cette propriété sur les grands systèmes.

Dans la deuxième partie, nous avons étendu ces résultats à la classe des systèmes interconnectés en proposant en particulier une approche originale fondée sur les graphes "cacti" ; nous avons aussi examiné le concept dual d'observabilité structurelle. Cela nous a permis de définir parallèlement le nombre minimal de commandes (de mesures) pour satisfaire la

commandabilité (l'observabilité).

Nous nous sommes enfin intéressés aux problèmes de robustesse aux changements de structure, en élaborant des critères qui assurent qu'une structure restera commandable (observable) en cas de ruptures de certaines liaisons ou dégradation de certains actionneurs (capteurs).

Il serait intéressant d'implanter sur calculateur les divers algorithmes des chapitres IV et V, afin d'en établir une comparaison plus quantitative qu'en annexe 5.

On pourrait également envisager une application de tous ces résultats à un procédé industriel complexe ; des travaux de simulation des processus d'une centrale énergétique, accessibles dans REINSCHKE (1984-b), sont fort encourageants dans cette voie.

La réflexion que cette étude nous inspire, se situe sur plusieurs niveaux :

A la question qu'il est naturel de se poser - quel outil choisir parmi l'algèbre booléenne (structurée) et la théorie des graphes pour faire du "structurel" ? - nous répondrons qu'il est préférable en général de manipuler les deux : un algorithme peut être théoriquement fondé sur une approche algébrique mais plus facilement conçu de manière graphique pour une implantation informatique, ou vice-versa. On trouvera de nombreuses illustrations de cette complémentarité, dans ce rapport. Cette constatation est venue seulement par la pratique et était loin d'être évidente à nos débuts.

La partie bibliographique relative à un système isolé ayant été largement commentée, nous allons seulement indiquer les nouveaux axes de recherche qu'elle suggère. Actuellement, un très grand intérêt est porté aux modèles structurés dont les paramètres sont algébriquement dépendants ; on pourrait peut-être examiner la structure des différentes formes (compagne, Jordan,...) et étudier les cacti correspondants qui sont des formes canoniques de commandabilité structurelle minimale.

Du point de vue de la modélisation, une fois la forme du modèle choisie (ici linéaire dynamique), il est clair que si l'on dispose des lois physiques du processus, le modèle structuré est directement obtenu ; dans le cas contraire, l'identification entrées-sorties n'a besoin que d'être booléenne ; cela est une évidence mais montre combien il est plus facile de manipuler ce type de modèles. Enfin, il faudrait poursuivre les travaux de réduction de ces modèles, proposés par JOHNSTON et BARTON (1985) et fondés sur la "conservation des informations structurelles" ; remarquons que le cactus donne une paire (A,B) réduite au sens de la densité de ces matrices, du nombre de commandes éventuellement, non du vecteur d'état.

Plus généralement, des méthodes d'agrégation structurelle pour les systèmes complexes seraient les bienvenues, qui s'ajouteraient au répertoire des méthodes de décomposition ; la difficulté provient de la non invariance du rang générique par transformation linéaire. Le terme

d'"agrégation" est peut-être pour cette raison "abusif". Soulignons que la condition graphique suffisante mais forte que nous avons obtenue, procure, à partir d'une décomposition conceptuelle, une solution agrégée du problème ; de plus, elle fournit sous un aspect presque similaire un résultat plus complet que la condition de connectabilité de DAVISON (1977). L'approche séquentielle de TRAVE et TITLI que nous avons généralisée au cas d'une structure interconnectée quelconque, donne une condition nécessaire et suffisante, sans hypothèse sur les sous-systèmes. Dans la tendance actuelle d'une commande totalement informatisée où chaque unité physique est "conduite" par un calculateur, on pourrait ainsi évaluer et le cas échéant rétablir localement la commandabilité du système global ; dans ce contexte, la deuxième méthode présente un intérêt si les pertes de rang générique apparaissent par blocs horizontaux définis par les matrices d'état des unités et leurs interconnexions environnantes.

D'autre part, la prévision hors ligne des structures non admissibles parce que non commandables et (ou) non observables, combinée à une identification booléenne en ligne des paramètres, pourrait être une aide efficace à la commande, à l'étude de la tolérance aux pannes et du diagnostic de celles-ci. L'étude sur la robustesse a été faite dans ce sens mais mérite d'être poursuivie.

Pour conclure, il serait sans doute enrichissant d'aborder une approche structurelle de la régulation (des recherches dans cette voie ont été entreprises par REINSCHKE), d'y adjoindre les résultats en commande décentralisée sur la notion de modes fixes structurels afin d'intégrer le tout dans une théorie structurelle de la commande des grands systèmes.

ANNEXE 1

Preuve du théorème 1 : (IV.2.1).

$$\text{Soit} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} M \\ \hline N \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \end{array}$$

Soient X_1 et X_2 les deux ensembles de sommets correspondant respectivement aux matrices M et N. Nous adoptons les mêmes notations et la même démarche que dans [TRAVE et TITLI, 1985].

Soit $L \subset X_1 \cup X_2$, $T_*(L)$ et $T^*(L)$ les restrictions de T(L) respectivement à $T(S^M)$, $\overline{T}(S^M)$, où $(S^M, T(S^M))$ désigne une G-dilatation maximale d'ordre 0.

Il existe une permutation $\mathcal{P}$ qui transforme la matrice $\left[\begin{array}{c} M \\ \hline N \end{array}\right]$ en $\left[\begin{array}{c} M' \\ \hline N' \end{array}\right]$ telle que

$$\left[\begin{array}{c} M' \\ \hline N' \end{array}\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T(S^M) & \overline{T}(S^M) \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} M^{T(S^M)} & 0 \\ \hline & M^{\overline{T}(S^M)} \\ \hline N^{T(S^M)} & N^{\overline{T}(S^M)} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} S^M \\ \overline{S}^M \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} X_1 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} X_2 \end{array}$$

Condition nécessaire :

i) $\{S^M, T(S^M)\}$ étant une G-dilatation maximale d'ordre 0 de M, card S^M - Card $T(S^M) = 0$

2i) Si la matrice $\begin{bmatrix} M^{\overline{T}(S^M)} \\ N^{\overline{T}(S^M)} \end{bmatrix}$

n'admet pas de G-dilatation maximale d'ordre 0 de cardinalité égale à $Card(\bar{S}^M) + Card(X_2)$, c'est que cette matrice contient une dilatation donc $\exists\, L \subseteq (\bar{S}^M \cup X_2)$ tel que $Card\, L - Card\, T^*(L) > 0$.

Montrons que cette dilatation est aussi dilatation pour la matrice globale $\begin{bmatrix} M \\ \hline N \end{bmatrix}$.

3i) $card\,(S^M \cup L) = card\, S^M + card\, L - card\,(S^M \cap L) = card\, S^M + card\, L$

car $S^M \cap L = \emptyset$

4i) $card\, T(S^M \cup L) = card\, T(S^M) + card\, T(L) - card\,(T(S^M) \cap T(L))$

d'où $card\,(S^M \cup L) - card\,(T(S^M \cup L)) = card\, S^M - card\, T(S^M) + card\, L - card\, T(L) - card\,(T(S^M) \cap T(L))$

$= card\, L - card\, T(L) - card\,(T(S^M) \cap T(L))$.

or $T(L) = T_*(L) \cup T^*(L)$ et $T(S^M) \cap T(L) = T_*(L)$

donc $card\,(S^M \cup L) - card\,(T(S^M \cup L)) = card\, L - card\, T_*(L) - card\, T^*(L) - card\, T_*(L)$

$= card\, L - card\, T^*(L)$

d'après ii) cette quantité est > 0

Q.E.D

Condition suffisante : montrons que (2) implique (1).

Hypothèse : M a un rang générique plein.

donc $\forall S \subseteq X_1$ $card\, S \leq card\, T(S)$.

ceci est a fortiori vrai $\forall\, S \subseteq S^M$

Si (2) est vrai, F est de rang plein donc

$\forall\, L \subseteq \bar{S}^M \cup X_2$ $card\, L - card\, T^*(L) \leq 0$

Soit $S^M \cup \bar{S}^M \cup X_2$ la partition de $X_1 \cup X_2$.

$\forall\, S \subseteq S^M$, $\forall\, L \subseteq \bar{S}^M \cup X_2$:

$card\,(S \cup L) = card\, S + card\, L$.

$card\, T(S \cup L) = card\, T(S) + card\, T(L) - card\,(T(S) \cap T(L))$.

$= card\, T(S) + card\, T_*(L) + card\, T^*(L) - card\,(T(S) \cap T_*(L) \cap T^*(L))$

or $T(S) \cap T^*(L) = 0$ car $T(S) \subseteq T(S^M)$

$T^*(L) \cap T_*(L) = \emptyset$

donc $card\,(T(S) \cap T_*(L) \cap T^*(L)) = card\,(T(S) \cap T_*(L))$

$$\text{d'où card (SUL) - card T(SUL)} = \text{card S - card T(S) + card L - card } T_*(L) - \text{card } T^*(L) + \text{card } (T(S) \cap T_*(L))$$

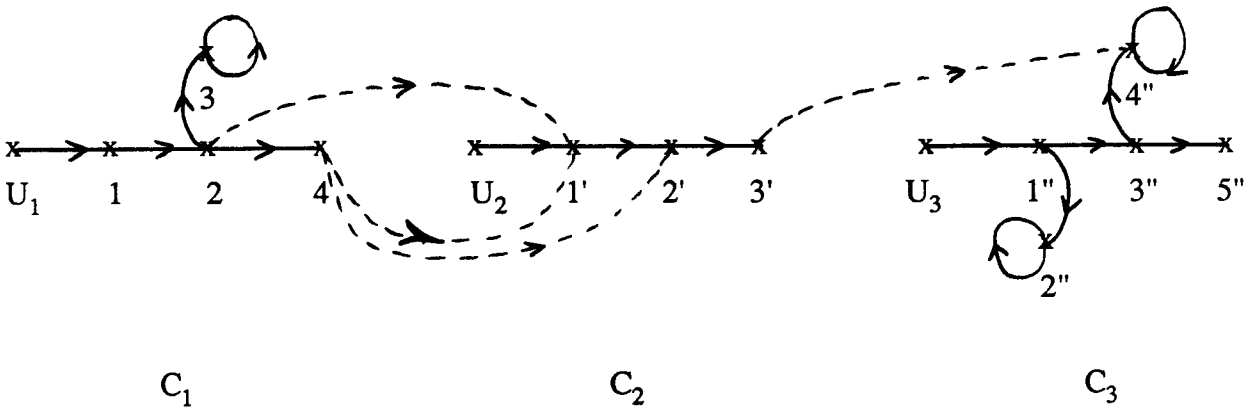
$$= \overbrace{[\text{card S - card T(S)}]}^{\leq 0} + \overbrace{[\text{card L - card } T^*(L)]}^{\leq 0} + \underbrace{[\text{card } (T(S) \cap T_*(L) - \text{card } T_*(L)]}_{\leq 0}$$

donc $\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ ne contient pas de dilatation.

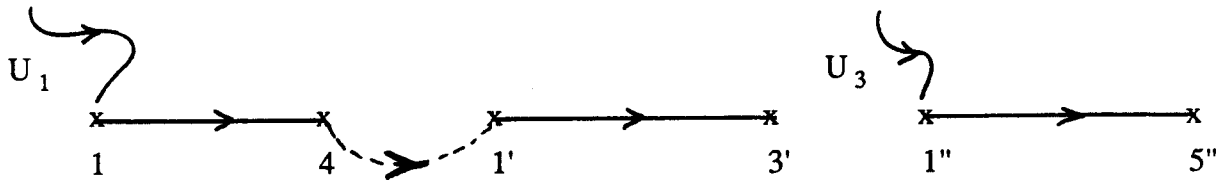
ANNEXE 2

Approche graphique "cactus" (IV.5).

Méthode appliquée à 3 sous-systèmes mono-entrée M.S.C dont les graphes sont les cacti ci-dessous :



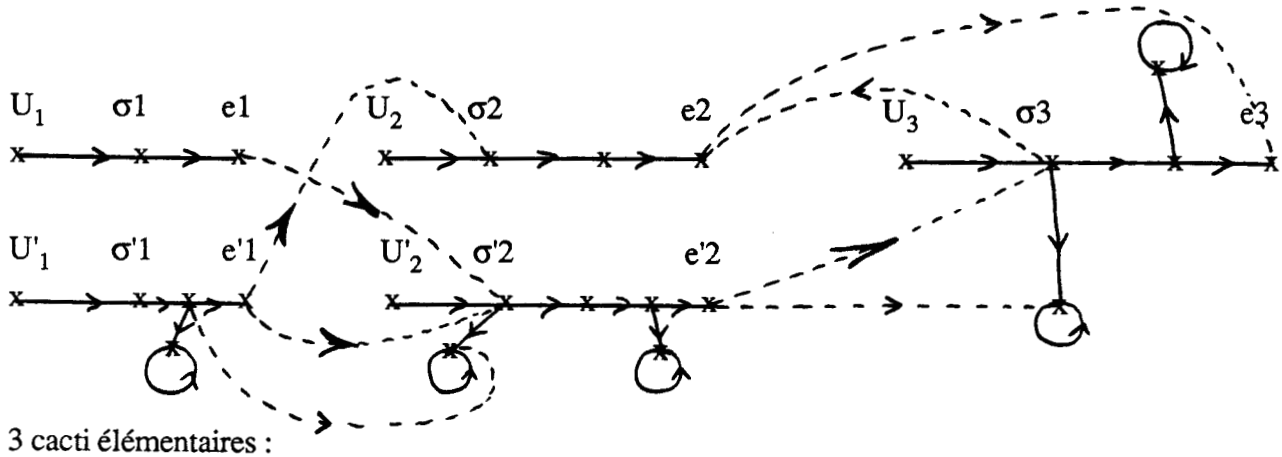
interconnectés selon les traits en pointillés. L'algorithme consiste à conserver seulement les paires (origine, extrémité) et les interconnexions correspondantes. Si par convention on représente les cacti par un arc $0 \rightarrow e$, soit $G(\mathcal{R})$:



B_1 doit être appliquée à (Σ_1) et B_3 à (Σ_3) (2 arborescences : l'une de racine C_1, l'autre C_3).

ANNEXE 3

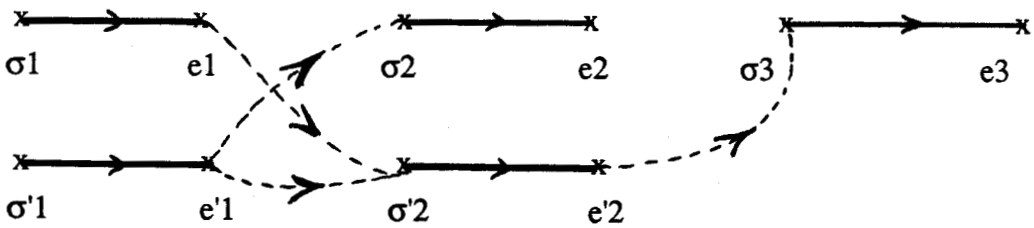
Même méthode appliquée à 3 sous-systèmes multi-entrées, M.S.C.



3 cacti élémentaires :

$\begin{cases} C_1 \\ C'_1 \end{cases}$ $\begin{cases} C_2 \\ C'_2 \end{cases}$ $\begin{cases} C_3 \\ \end{cases}$

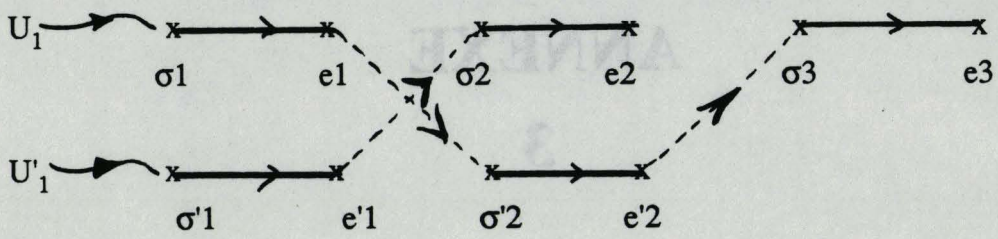
Le graphe $G(\mathcal{R})$ est donné par :



Il faut donc deux commandes : $B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow C'_2 \rightarrow C_3$

$B'_1 \rightarrow C'_1 \rightarrow C_2$

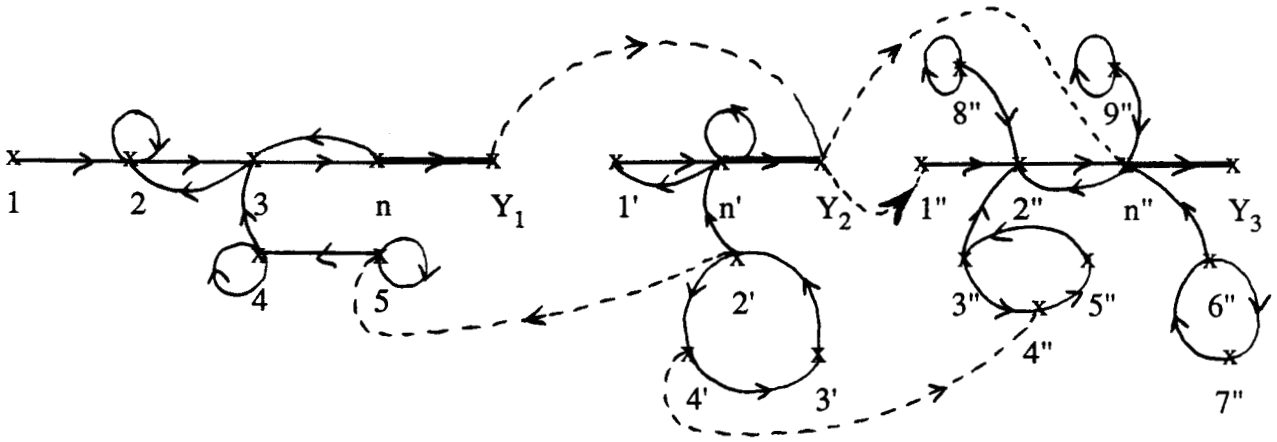
correspondant à l'arborescence $\mathcal{A}(\mathcal{R})$:


U1
σ1
e1
σ2
e2
σ3
e3
U'1
σ'1
e'1
σ'2
e'2

ANNEXE 4

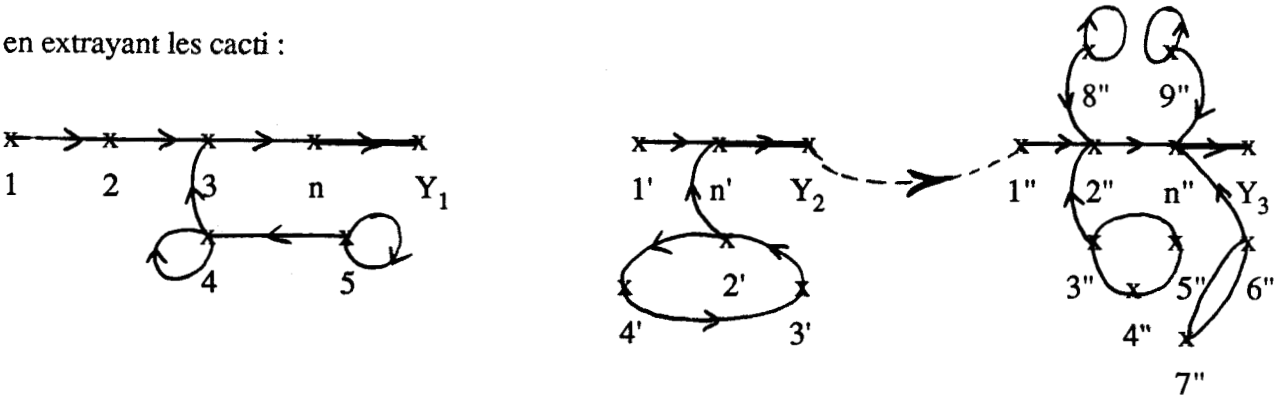
Approche "cactus" (V.4.3).

Méthode appliquée à 3 sous-systèmes mono-sortie S.O dont les graphes interconnectés sont représentés ci-dessous :



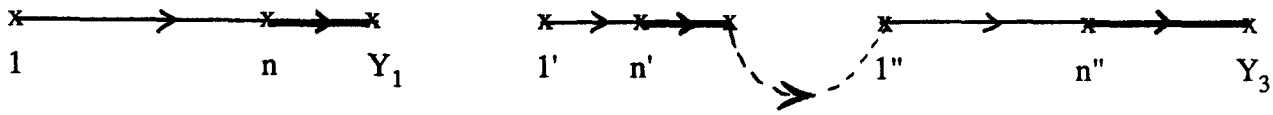
(Σ_1) (Σ_2) (Σ_3)

en extrayant les cacti :



(C'_1) (C'_2) (C'_3)

et en adoptant leur représentation réduite, la cascade :



montre que l'on peut observer le système global avec Y_1 et Y_3.

ANNEXE
5

Tableau récapitulatif des méthodes de test de commandabilité structurelle pour un système interconnecté.

Méthode .	Hypothèse sur les sous-systèmes physiques.	Structure originale.	Caractéristiques	Algorithmes utilisés	Exemple
Sans décomposition .	Sous-systèmes quelconques pas nécessairement S.C.	Conservée	*Test de l'accessibilité et du rang générique sur (A,B) globale. *Condition nécessaire et suffisante.	*Répertoire (chap.II et chap.III) *Implantation graphique [PILLOU, 87] (système APOLLO par ex.)	
Décomposition en composantes fortement connexes. (non unicité).	Sous-systèmes quelconques pas nécessairement S.C.	Non conservée en général.	*Obtention d'une structure triangulaire pour A. *Chaque composante n'est pas nécessairement S.C. *Simplification du critère d'accessibilité. *Test du rang par "bandes". *Condition nécessaire et suffisante.	*1-Détermination d'une partition en composantes fortement connexes. *2-Méthode séquentielle de TRAVE et TITLI.	
Décomposition en composantes structurellement commandables. (non unicité).	Sous-systèmes quelconques pas nécessairement S.C.	Non conservée en général.	*Obtention d'une structure triangulaire pour (A,B). *Chaque composante obtenue est S.C.(intérêt). *Condition nécessaire et suffisante.	*1-Détermination d'une partition en composantes accessibles aux entrées. *2-Regroupement des composantes présentant une dilatation.(SEZER et SILJAK).	
Sans décomposition structurelle.	Sous-systèmes quelconques pas nécessairement S.C.	Conservée.	*Test de l'accessibilité sur (A,B) globale. *Test du rang par "bandes". *Condition nécessaire et suffisante.	*1-Critère d'accessibilité classique. *2-Méthode séquentielle généralisée pour le calcul du rang générique.	
Approche "cactus". (non unicité).	Sous-systèmes S.C.	Conservée.	*Représentation réduite des cacti (origine,extrêmité). *Arborescence agrégée de cascades de cacti. *Pas de calcul de rang générique pour la S.C. du système global. *Condition suffisante.	*1-Extraction d'un cactus pour chaque sous-système. *2-Détermination des arborescences dans le graphe réduit.	

BIBLIOGRAPHIE.

PARTIE A.

AHO A.V., HOPCROFT J.E., ULLMAN J.D. (1983)
"Data structures and algorithms"
Addison - Wesley.

BARTON G.W., JOHNSTON R.D. and BRISK M.L. (1983)
"Comments on determining structural controllability"
Int. J. Control, Vol. 38, N°5, pp. 1081 - 1083

BERGE C. (1970)
"Graphes et hypergraphes"
Dunod, Paris.

BURROWS C.R. and SAHINKAYA M.N. (1981)
"A new algorithm for determining structural controllability".
Int.J.Control, Vol.33, N°2, pp. 379-392.

BURROWS C.R. and SAHINKAYA M.N. (1983)
"A modified algorithm for determining structural controllability"
Int. J. Control, Vol. 37, N°6, pp.1417 - 1431

CHEN W.K. (1976)
"Applied Graph Theory (2nd ed.)"
North - Holland, Amsterdam.

CHONG C.Y. (1982)
"Structural properties in decentralized control"
Proceedings of the 21st IEEE Conference on Decision & Control.
Orlando, FL, U.S.A, 8 - 10 Dec .1982, Vol.3, pp. 1315 - 1316.

CORFMAT J.P. and MORSE A.S.(1976)
"Structurally controllable and structurally canonical systems"
IEEE Trans. Autom. Control, AC - 21, pp. 129 - 131.

DAVISON E.J. (1976)
"Connectability and structural controllability of composite systems"
Large Scale Systems Theory and Applications. Udine, Italy, 16 - 20 June 1976, pp. 241 - 245

DAVISON E.J. (1977)
"Connectability and structural controllability of composite systems"
Automatica, Vol. 13, N°2, pp. 109 - 123.

EVANS F.J. and KRUSER M. (1984)
"Pole assignment in decentralised systems : a structural approach"
IEE Proc. D, Control Theory & Appl, 131 (6), pp. 229- 232.

EVANS F.J. and SCHIZAS C. (1979)
"Digraph analysis of large scale systems : The system primitive"
Electron. Lett., 15, (20), pp. 613 - 614.

EVANS F.J., SCHIZAS C. and CHAN J. (1981)
"Control system design using graphical decomposition techniques".
IEE Proc. D, Control Theory & Appl., 128, (3), pp. 77 - 84.

FORD L.R., FULKERSON D.R. (1962)
"Flows in Networks"
Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

FRANKSEN O.I., FALSTER P. and EVANS F.J. (1976)
"Potential controllability and observability."
Electric Power Engineering Department, the Technical University of Denmark. Publ. N° 7608.

FRANKSEN O.I., FALSTER P. and EVANS F.J. (1979 a)
"Qualitative aspects of large-scale systems"
Springer -Verlag Lecture notes in control and information Sciences, N°17.

FRANKSEN O.I., FALSTER P. and EVANS F.J. (1979 b)
"Structural aspects of controllability and observability I.Tensorial aggregation"
J.Franklin Inst., 308, pp. 79 - 104.

FRANKSEN O.I., FALSTER P. and EVANS F.J. (1979 c)
"Structural aspects of controllability and observability .II. Digraph decomposition"
J.Franklin Inst, 308, pp. 105 - 124.

FULTON W. (1969)
"Algebraic curves "
New York : Benjamin.

GANTMACHER F.R. (1959)
"The theory of matrices"
Chelsea, New York.

GILBERT E.G. (1963)
"Controllability and Observability in Multivariable Control Systems"
J. S.I.A.M control, Ser. A.Vol. 1, N°2, pp. 128 - 151.

GLOVER K. and SILVERMAN L.M. (1976)
"Characterisation of structural controllability"
IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC - 21, N° 4, pp. 534 - 537.

GONDRAN M. ET MINOUX M. (1979)
"Graphes et algorithmes"
Collection de la direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France ; Eyrolles, Paris.

HOPCROFT J.E. and KARP R.M. (1973)
"An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs"
SIAM J. Comput, 2, pp. 225 - 231.

HOSOE S. and MATSUMOTO K. (1979)
"On the irreducibility condition in the structural controllability theorem"
IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC - 24, N°6, pp. 963 - 966.

JOHNSTON R.D. and BARTON G.W. (1985 a)
"Structural equivalence and model reduction"
Int. J. Control, Vol. 41, N°6, pp. 1477 - 1491.

JOHNSTON R.D. and BARTON G.W. (1985 b)
"Structural interaction analysis"
Int. J. Control, Vol. 41, N°4, pp. 1005 - 1013.

JOHNSTON R.D., BARTON G.W. and BRISK M.L. (1984)
"Determination of the generic rank of structural matrices"
Int. J. Control, Vol. 40, N°2, pp. 257 - 264.

JOHNSTON R.D., BARTON G.W. and BRISK M.L. (1985)
"Single-input-single-output control system synthesis"
Part 2 : "Application of the synthesis algorithm to an integrated plant"
Comput. Chem. Engng. Vol. 9, N°6, pp. 557 - 566.

KABEKODE V.S., BHAT (1981)
"Equivalence of data structures and an improved algorithm for maximum matching in bipartite graphs"
Proceedings of the 1981 European Conference on Circuit Theory and Design (La Hague, Aug. 1981)

KAILATH T. (1980)
"Linear systems"
Prentice - Hall, Englewood Cliffs.

KALMAN R.E. (1960)
"On the general theory of control systems"
Proceedings of the first IFAC Congress, Moscow. Vol.1, pp. 481 - 92, Butterworth, London.

KEVORKIAN A.K. (1975)
"Structural aspects of large dynamic systems"
Paper 193, 6th IFAC world Congress, Boston.

LEE B.E., MARKUS L. (1967)
"Foundations of optimal control theory"
New York : Wiley.

LIN C.T. (1972)
"Structural controllability"
Ph.D.thesis, University of Maryland.

LIN C.T. (1974)
"Structural controllability"
IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-19, N°3, pp. 201 -208.

LIN C.T. (1976)
"System structure and minimal structural controllability"
Proceedings of the 1976 IEEE Conference on Decision and Control including the 15th Symposium on Adaptative Processes.
Clearwater, Fla., U.S.A 1-3 Dec 1976, N° 38, pp. 879 - 885.

LIN C.T.(1977)
"System structure and minimal structural controllability"
IEEE Trans.on Autom.Control, Vol.AC-22, N°5, pp. 855-862.

LINNEMAN A. (1986)
"A further simplification in the proof of the structural controllability theorem"
IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-31, N°7.

MAIONE B. and TURCHIANO B. (1986)
"Input and output-decoupling structural zeros of linear systems described by Rosenbrock's polynomial matrices"
Int. J. Control, Vol. 44, N°6, pp. 1641 - 1659.

MAYEDA H. (1981)
"On structural controllability theorem"
IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-26, N°3, pp. 795 - 798.

MAYEDA H. and YAMADA T.(1979)
"Strong structural controllability"
SIAM J. Control & Optimiz, Vol. 17, N°1, pp. 123 -- 138.

MOMEN S. and EVANS F.J. (1983)
"Structurally fixed modes in decentralised systems"
"I.Two control stations".
IEE Proc. D, Vol. 130, N°6, pp. 313 - 321.

MORARI M. (1977)
"Studies in the synthesis of control structures for chemical processes"
Ph. D thesis, University of Minnesota.

MORARI M. and STEPHANOPOULOS G. (1978)
"Comments on finding the generic rank of a structural matrix"
IEEE Trans on Autom. Control, Vol. AC-23, N°3.

MORARI M., ARKUN Y. and STEPHANOPOULOS G. (1980)
"Studies in the synthesis of control structures for chemical processes"
Aiche Journal, Vol. 26, N°2, pp. 220 - 260.

MUROTA K. (1987)
"Systems analysis by graphs and matroïds - Structural solvability and controllability"
"Algorithms and Combinatorics 3 "
Springer Verlag.

PICHAI V., SEZER M.E. and SILJAK D.D. (1982)
"A graph-theoretic algorithm for hierarchical decomposition of dynamic systems with applications to estimation and control"
Proceedings : 1982 IEEE International Large Scale Systems Symposium
Virginia Beach, VA, U.S.A 11-13 Oct 1982, pp. 256 - 257.

PICHAI V., SEZER M.E. and SILJAK D.D. (1983)
"A graph theoretic algorithm for hierarchical decomposition of dynamic systems with applications to estimation and control"
IEEE Trans. Syst. Man Ciber., Vol. SMC-13, pp. 197 - 207.

PILLOU C. (1987)
"Contribution à l'étude des propriétés structurelles de commandabilité des systèmes dynamiques interconnectés"
Rapport de D.E.A, I.N.P.G, Grenoble, France.

PILLOU C., RECH.C. (1987)
"A simple algebraic algorithm for the determination of the generic-rank of structured systems"
Soumis à publication ; Rapport L.A.G n°87/74, Grenoble, France.

POPOV V.M. (1973)
"Hyperstabilité des systèmes automatiques"
Dunod, Paris.

RECH C. , PERRET R. (1987)
"About structural controllability of interconnected dynamical systems"
ICIAM-Paris la Villette June 29 - July 3 1987 ; Rapport L.A.G N°87/61, Grenoble, France.

RECH C. (1988)
"Commandabilité (observabilité) structurelle des systèmes linéaires : méthodes de décomposition"
Rapport L.A.G. N° 88/ 45,Grenoble,France ; Soumis à publication .

REINSCHKE K. (1980)
"On structural controllability of dynamic systems"
Elektron. Informations verarb. Kybern (Germany), Vol. 16, N°5-6, pp.253 - 280. In German.

REINSCHKE K. (1981)
"Structurally complete systems with minimal input and output vectors "
Large-scale Systems Vol. 2, pp. 235 - 242.

REINSCHKE K.J. (1984 a)
"A graph-theoretic criterion for structural completeness of linear systems"
Syst. Anal. Model. Simul. Vol. 1, N°5, pp. 373 - 379.

REINSCHKE K.J. (1984 b)
"Structural model for complex automation systems and its application in
the power station automation"
Msr (Mess. Stevern Regeln) (Germany), Vol. 27, N°1, pp. 29 - 33. In German.

REINSCHKE K.J. (1985)
"Graph-theoretic characterization of structural properties by means of paths and cycle families".
Proceedings of the Ninth Triennial World Congress of IFAC.
Budapest, Hungary 2-6 July 1984 ,Vol. 1, pp. 109 - 114.

ROSENBROCK H.H. (1970)
"State Space and MultivariableTheory"
Nelson, London.

RUBIO J.E. (1971)
"The theory of linear systems"
Academic Press New-York and London.

SCHIZAS C. (1981)
"A graph-theoretic approach for the analysis of large-scale systems"
Ph. D thesis Queen Mary College.

SCHIZAS C. and EVANS F.J. (1980)
"Rank-invariant transformations and the controllability of large-scale systems"
Electron. Lett., 16, (1) pp. 19 - 20.

SCHIZAS C. and EVANS F.J. (1981 a)
"A graph theoretic approach to multivariable control system design"
Automatica, 17, pp. 371 - 377.

SCHIZAS C. and EVANS F.J. (1981 b)
"APL and graph theory in dynamic systems analysis"
IEE Proc. D, Control Theory & Appl., 128, (3), pp. 85 - 92.

SEDGEWICK R. (1983)
"Algorithms"
Addison-Wesley Publishing Company.

SEZER M.E. and SILJAK D.D. (1981)
"On Structural Decomposition and Stabilisation of Large-Scale Control Systems"
IEEE trans. Autom. Control, Vol. AC-26, N°2.

SHIELDS R.W. and PEARSON J.B. (1975)
"Structural controllability of multi-input linear systems"
Proceedings of the 1975 IEEE Conference on Decision Control including the
14th Symposium on Adaptive Processes.
Houston, Tex., USA 10-12 Dec 1975, pp. 807 - 809.

SHIELDS R.W. and PEARSON J.B. (1976)
"Structural controllability of multi-input linear systems"
IEEE trans. Autom. Control, Vol. AC-21, N°2, pp. 203 - 212.

SHIELDS R.W. and PEARSON J.B. (1978)
Author's reply to "Comments on finding the generic rank of a structural matrix"
(MORARI and al.), IEEE Trans on Autom. Control, Vol. AC-23, N°3.

SILJAK D.D. (1977 a)
"On reachability of dynamic systems"
Int.J.Syst. Sci., Vol. 8, N° 3, pp. 321 - 338.

SILJAK D.D. (1977 b)
"On pure structure of dynamic systems"
Non linear Anal ; Theory, Methods, Appl., Vol. 1, pp. 397 - 413.

SILJAK D.D. (1978)
"Large-scale Dynamic Systems :Stability and Structure"
New York : North-Holland, pp. 147 - 165.

SUZUKI Y. and MIO M. (1983 a)
"The structure graph for linear network "
Trans.Inst. Electron & Commun. Eng. Jpn. Part A (Japan), Vol. J 66 A, N°3, pp. 243 - 249.
In Japanese.

SUZUKI Y.and MIO M. (1983 b)
"The judgement of structural controllability by addition of reactance"
Trans. Int. Electron & Commun. Eng. Jpn, Part A (Japan), Vol. J 66 A, N°11,
pp. 1096 - 1100. In Japanese.

SUZUKI Y. and MIO M. (1984)
"The structural controllability for the electrical-mechanical network"
Trans. Inst. Electron & Commun. Eng. Jpn. Part A (Japan), Vol. J 67 A, N° 8,
pp. 826 - 832. In Japanese.

TRAVE L. and KASZKUREWICZ E. (1986 a)
"Qualitative controllability and observability of linear dynamical systems"
Preprints of the 4th. IFAC/IFORS symposium :Large-Scale Systems : Theory and applications ;

Zurich, Switzerland, Vol. 2, pp. 964 - 970.

TRAVE L. and KASZKUREWICZ E.(1986 b)
"Qualitative controllability and observability of linear dynamical systems"
Internal report N° 86316, L.A.A.S, Toulouse, France.

TRAVE L. and TITLI A. (1985)
"A sequential algorithm to conclude on structural controllability of large scale systems"
Internal Report, N° 85312, L.A.A.S, Toulouse, France.

WILLEMS J.L. (1986)
"Structural Controllability"
Systems and Control letters, Vol. 8, pp. 5 - 12, North-Holland.

WOLOVICH W.A. (1974)
"Linear Multivariable Systems"
Springer, New York.

WONHAM M. (1979)
"Linear multivariable control : a geometric approach"
Springer-Verlag.

XUONG N.H. (1984)
"Eléments de combinatoire pour l'informatique"
Tome 2 : Graphes ;Théorie, algorithmes et applications.
Polycopiés de cours 1ère année I.N.P.G - E.N.S.I.M.A.G, Licence d'Informatique U.S.M.G.

YAMADA T. (1984)
Comments on "On structural controllability theorem"
IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-29, N°12.

YAMADA T. and LUENBERGER D.G.(1985 a)
"Generic properties of column-structured matrices"
Linear Alg. Its Appl., 65, pp. 189 - 206.

PARTIE B.

ANDERSON W.N., Jr. (1975)
"Maximum matching and the rank of a matrix"
SIAM J.Appl. Math., 28, pp. 114 - 123.

ANDERSON B.D.O. and HONG H.M. (1982)
"Structural controllability and matrix nets"
Int. J. Control, Vol. 35, N° 3, pp. 397 - 416.

AOKI T., HOSOE S. and HAYAKAWA Y. (1983)
"Structural controllability for linear systems in descriptor form"
Trans. Soc. Instrum & Control Eng. (Japan), Vol. 19, N° 8, pp. 628 - 635, In Japanese.

BACHMANN W. (1981)
"Strong structural controllability and observability of multivariable systems"
Regelungstechnik (Germany),Vol. 29, N°9, pp. 318 - 323. In German.

BARTNIK W. G. (1978)
"Algorithme de couplage dans les graphes"
Thèse de doctorat 3ème cycle informatique de l'Université P. et M. Curie, Paris 6ème.

DEO N. (1974)
"Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science"
Prentice - Hall.

FOSSARD A. (1972)
"Commande des systèmes multidimensionnels"
Dunod.

FRADELLOS G., RAPANAKIS M. and EVANS F.J. (1977)
"Structural controllability in non-linear systems"
Int. J. Syst. Sci., Vol. 8, N° 8, pp. 915 - 932.

HARARY F. (1969)
"Graph Theory"
Addison Wesley.

HARARY F., NORMAN R.Z. and CARTWRIGHT D. (1965)
"Structural Models : An Introduction to the Theory of Directed Graphs"
Wiley, New York.

HAYAKAWA Y. and HOSOE S. (1984 a)
"On the structural controllability of compartmental systems"
IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-29, N° 1, pp. 17 - 24.

HAYAKAWA Y. and HOSOE S. (1984 b)
"On the structural controllability of compartmental systems"
Res. Rep. Autom Control Lab. Fac. Eng. Nagoya Univ. (Japan), Vol. 31, pp. 15 - 22.

HAYAKAWA Y., HOSOE S. and HAYASHI M. (1982)
"Structural controllability of linear time - invariant compartmental systems"
Trans. Inst. Electron & Commun. Eng. Jpn. Sect. E (Japan), Vol. E65, N°4, p. 215.

HAYAKAWA Y., HOSOE S., HAYASHI M. and ITO M. (1981)
"Controllability of structured systems with some linear dependence among variable elements"
Proc. 24th Conf. Japan Joint Automatic Control, 1030, pp. 59 - 60. In Japanese.

HAYAKAWA Y., HOSOE S., HAYASHI M. and ITO M. (1982)
"Structural controllability of linear time-invariant compartmental systems"
Trans. Inst. Electr. Comm. Engin. Japan, J 65 A, pp. 371 - 378. In Japanese.

HAYAKAWA Y., HOSOE S., HAYASHI M. and ITO M. (1984)
"On the structural controllability of compartmental systems"
IEEE Trans. Autom. Control, AC-29, pp. 17 - 24.

HIMMELBLAU D.M. (1973)
"Decomposition of large-scale systems"
New york, North-Holland.

HOSOE S. (1980)
"Determination of generic dimensions of controllable subspaces and its application"
IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-25, N°6.

HOSOE S. (1981)
"Structural controllability"
J. Soc. Instrum. and Control Eng. (Japan), Vol. 20, N°7, pp. 672 - 679. In Japanese.

HOSOE S. (1982)
"Controllability, observability and output regulation of linear multivariable structured system"
Proc. 11th SICE Symp. Control Theory, May 1982, Kobe, pp. 49 - 54.

HOSOE S. (1985)
"Structural controllability analysis for linear systems in linearly parameterized descriptor form"
Proceedings of the Ninth Triennial World Congress of IFAC.
Budapest, Hungary 2-6 July 1984 Vol. 1, pp. 155 - 159.

HOSOE S., HAYAKAWA Y. and AOKI T. (1984)
"Structural controllability analysis for linear systems in linearly parameterized descriptor form"
IFAC World Congress, July 1984, Budapest, 14. 3/D6, pp. 115 - 119.

JACOBSON N. (1964)
"Lectures in Abstract Algebra ; III Theory of Fields and Galois Theory"
D. Van Nostrand, Princeton.

LAWLER E. L. (1976)
"Combinatorial optimization : networks and matroïds"
Holt, Rinehalt and Winston, New York.

LINNEMAN A. (1981) ∝
"Decoupling of structured systems"
Syst. Control Lett. 1, pp. 79 - 86.

MATSUMOTO T. and IKEDA M. (1983)
"Structural controllability based on intermediate standard forms"
Trans. Soc. Instrum & Control Eng. (Japan), Vol. 19, N° 8, pp. 601 - 606. In Japanese.

MAYEDA H. (1981 a)
"Structural properties of compartmental systems"
J.Soc. Instrum. & Control Eng. (Japan), Vol. 20, N° 7, pp. 713 - 719. In Japanese.

MUROTA K. (1983 a)
"Structural controllability of a linear time-invariant system with auxiliary variables"
Trans. Soc. Instrum. & Control Eng. (Japan), Vol. 19, N°2, pp. 104 - 109. In Japanese.

MUROTA K. (1983 b)
"Structural controllability of a system wih some fixed coefficients"
Trans. Soc. Instrum. & Control Eng (Japan), Vol. 19, N°9, pp. 683 - 690. In Japanese.

MUROTA K. (1983 c)
"Structural Solvability and Controllability of systems"
Doctor's dissertation, Dept. Math. Eng. Instr. Phys. Univ. Tokyo.

MUROTA K. (1984)
"Structural controllability of a system in descriptor form expressed in terms of bipartite graphs"
Trans. Soc. Instrum & Control Eng. (Japan), Vol. 20, N° 3, pp. 272 - 277. In Japanese.

MUROTA K. (1985)
"Refined study on structural controllability of descriptor systems by means of matroïds"
Discussion Paper Series 258, Int Socio Economic Planning, Univ. Tsukuba To appear
in SIAM J. Control Opt.

ORE O. (1962)
"Theory of graphs"
Americal Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXXVIII. Providence, R.I.

PAPADIMITRIOU C.H., STEIGLITZ K. (1982)
"Combinatorial optimization :Algorithms and complexity"
Prentice - Hall, Englewood Cliffs.

RYSER H.J.(1963)
"Combinatorial mathematics"
Carus Mathematical Monographs, N°14, Mathematical Association of America, Inc.

TSU-TIAN LEE (1979)
"Structural controllability and observability of multivariable linear systems"
J. Chin. Inst. Eng. (Taïwan), Vol. 2, N° 2, pp. 123 - 128.

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE SECTION DE SCIENCES LILLE

VAN DER WAERDEN B.L. (1955)
"Algebra"
Springer, Berlin.

YAMADA T. and LUENBERGER D.G. (1985 b)
"Generic controllability theorem for descriptor systems"
IEEE Trans. Autom. Control, AC-30, pp. 144 - 152.

YAMADA T. and LUENBERGER D.G. (1985 c)
"Algorithms to verify generic causality and controllability of descriptor systems"
IEEE Trans. Autom. Control, AC-30, pp. 874 - 880.

VIDYASAGAR M. (1980)
"Decomposition technique for large-scale systems with non additive interactions"
Stability and Stabilizability, IEEE Trans. Autom. Control, Vol AC-25, pp. 773 - 779.

VIDYASAGAR M. (1981)
"Input-output analysis of large-scale interconnected systems ; Decomposition Well-posedness and stability"
Springer-Verlag.

WARSHALL S. (1962)
"A theorem on boolean matrices"
Journal of the Association for Computing Machinery, N° 9, pp. 11 - 12.

WASSEL M. (1978)
"New results on controllability of linear time invariant systems"
Regelungstechnik (Germany), Vol. 26, N° 2, pp. 60 - 64. In German.

AUTEUR : Catherine RECH

ETABLISSEMENT : Université des Sciences et Techniques de Lille .

THESE de DOCTEUR de l'U.S.T.L.

Résumé

Cette étude concerne la commandabilité et l'observabilité structurelles des systèmes dynamiques linéaires invariants, concepts introduits par LIN. On présente tout d'abord une synthèse bibliographique en définissant les différents outils de la théorie des graphes et de l'algèbre booléenne (structurée) utilisés ; on évoque les algorithmes permettant la détermination de l'accessibilité dans un graphe et le rang générique d'une matrice structurée quelconque. On donne ensuite un répertoire des critères théoriques de test de commandabilité structurelle, que l'on peut réaliser à partir des procédures précédentes ; on analyse également des méthodes de décomposition pour les grands systèmes.

Dans un deuxième temps, on étend ces résultats au cas des systèmes interconnectés en tenant compte de simplifications spécifiques locales (stabilité,...), en généralisant un critère algébrique ou en proposant une condition suffisante graphique. En parallèle, on caractérise l'observabilité structurelle. Dans ce contexte, des problèmes de robustesse sont abordés : sous l'hypothèse que le système initial est commandable (observable), on compare l'adéquation des diverses partitions déduites des décompositions pour évaluer si la propriété est maintenue à la suite d'une modification dans la structure.

Mots-clés : Systèmes linéaires - Systèmes interconnectés - Structure , graphes - Commandabilité , observabilité structurelles - Accessibilité - Rang générique - Décomposition - Robustesse aux changements de structure.