

50376
1988
77



50376
1988
77

N° d'ordre : 240

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN ELECTRONIQUE

par

Mohammed KASSI - LAHLOU

RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE VERTICALE PLACEE
DANS UN FORAGE
APPLICATION A LA TOMOGRAPHIE
ELECTROMAGNETIQUE

Soutenue le 17 Juin 1988 devant la Commission d'Examen

Membres du jury :

MM.

R. GABILLARD

J. FONTAINE

P. DEGAUQUE

R. LAGABRIELLE

Président, Rapporteur

Rapporteur

Directeur de Thèse

Examineur

A mes Parents

A Malika

A ma Famille

A mes Amis

Ce travail a été effectué au LABORATOIRE DE RADIOPROPAGATION ET ELECTRONIQUE de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, dirigé par Monsieur le Professeur R. GABILLARD.

Je remercie Monsieur le Professeur R. GABILLARD de m'avoir fait l'honneur de juger mon travail, et de présider le jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance et de mon plus profond respect.

Pendant toute la durée de cette étude j'ai travaillé en étroite collaboration avec Monsieur le Professeur P. DECAUQUE. Ses conseils éclairés et son soutien permanent ont été déterminants pour la réalisation de cette thèse. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour cette aide efficace.

Je remercie Monsieur le Professeur J. FONTAINE, de l'Université de Clermont-Ferrand, de m'avoir fait l'honneur de juger mon travail et de participer au jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je tiens à remercier Monsieur R. LAGABRIELLE, Chef de la section de Géophysique Appliquée au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (L.C.P.C.) de Nantes, qui a bien voulu examiner mon travail et participer au jury. Ce travail a pu être réalisé grâce à un contrat du L.C.P.C. et l'aide de Monsieur LAGABRIELLE a été constante.

Mes remerciements s'adressent également à Madame M. DEMOULIN pour sa collaboration et son aide dans le calcul numérique.

Je ne terminerai pas cet avant-propos sans exprimer mes remerciements à Madame MEESMAECKER et Monsieur DEHORTER qui ont contribué à l'élaboration de ce document.

Enfin, je tiens à remercier tous les membres de l'équipe du Laboratoire de Radiopropagation et Electronique pour leur aide sympathique.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

<u>INTRODUCTION</u>	p. 1
<u>CHAPITRE I : RAYONNEMENT D'UN DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL</u>	p. 4
Introduction	p. 4
I.1 - Propagation en milieu homogène et infini	p. 5
I.1.1 - Expression du champ rayonné	p. 5
I.1.2 - Comportement du champ rayonné	p. 7
I.2 - Propagation en demi-milieu	p. 10
I.2.1 - Formulation analytique	p. 10
I.2.2 - Etude des intégrales de Sommerfeld	p. 14
I.2.2.1 - Etude des fonctions intervenant dans les intégrales de Sommerfeld	p. 15
I.2.2.2 - Procédure numérique d'intégration	p. 16
I.2.2.3 - Vérification du traitement numérique	p. 22
I.2.3 - Etude paramétrique du champ émis par un D.E.V. dans le sol	p. 23
Conclusion	p. 32

<u>CHAPITRE II : MODELISATION D'UNE ANTENNE FILAIRE MINCE</u>	p. 33
Introduction	p. 33
II.1 - La méthode des moments	p. 34
II.1.1 - Principe de la méthode	p. 34
II.1.2 - Application de la méthode dans le cas d'une antenne filaire	p. 36
II.2 - Antenne filaire mince dans un milieu homogène et infini	p. 41
II.2.1 - Champ rayonné par l'antenne	p. 41
II.2.2 - Formulation de l'équation intégrale de l'antenne	p. 43
II.2.3 - Résolution de l'équation par la méthode des moments	p. 44
II.2.4 - Exemples numériques	p. 48
II.3 - Antenne filaire mince dans un demi-milieu	p. 53
II.3.1 - Calcul de la matrice impédance	
II.3.1.1 - Formulation de l'équation intégrale	p. 53
II.3.1.2 - Résolution de l'équation par la méthode des moments	p. 55
II.3.2 - Résultats des applications numériques	p. 60
Conclusion	p. 65

CHAPITRE III : ANTENNE CYLINDRIQUE TRAVERSANT L'INTERFACE
ENTRE DEUX MILIEUX

	p. 66
Introduction	p. 66
III.1 - Equation intégrale d'une antenne pénétrant l'interface	p. 67
III.1.1 - Description du problème	p. 67
III.1.2 - Formulation de l'équation intégrale	p. 68
III.2 - Résolution du système intégrale	p. 71
III.2.1 - Application de la méthode des moments	p. 72
III.2.2 - Calcul des éléments de la matrice impédance généralisée	p. 78
III.2.3 - Résultats des exploitations numériques	p. 83
III.3 - Calcul de la tension V_r	p. 89
III.3.1 - Formulation de la tension V_r	p. 93
III.3.2 - Exploitations numériques	p. 96
Conclusion	p.100

<u>CHAPITRE IV : REALISATION D'UNE LIAISON ENTRE FORAGES</u>	p.101
Introduction	p.101
IV.1 - Caractérisation d'une antenne dans un forage	p.102
IV.1.1 - Description des antennes utilisées	p.102
IV.1.2 - Description du Banc de Mesure de l'impédance d'entrée	p.103
IV.1.3 - Mesure de l'impédance d'entrée de l'antenne dans un forage	p.105
IV.1.3.1 - Influence de la profondeur de la sonde	p.106
IV.1.3.2 - Influence du décentrage de la sonde	p.107
IV.2 - Transmission entre deux forages	p.114
IV.2.1 - Description du matériel d'émission et de réception	p.114
IV.2.2 - Résultats des mesures dans les deux configurations d'émission	p.115
IV.2.2.1 - Essais avec la sonde d'émission autonome	p.116
IV.2.2.2 - Essais avec l'antenne alimentée depuis la surface	p.118
IV.2.2.3 - Comparaison des deux dispositifs d'émission	p.120
IV.2.2.4 - Propagation sur différentes distances	p.120
IV.2.3 - Comparaison entre les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux	p.122

IV.3 - Etude paramétrique de l'influence des câbles	p.126
IV.3.1 - Câble de descente de la sonde d'émission	p.126
IV.3.2 - Câble de descente de la sonde de réception	p.131
Conclusion	p.137
<u>CHAPITRE V : INFLUENCE D'UNE ANOMALIE DANS UN MILIEU HOMOGENE</u>	p.138
Introduction	p.138
V.1 - Modélisation d'une anomalie	p.139
V.1.1 - Description de la structure	p.139
V.1.2 - Représentation de l'anomalie par une distribution de dipôles électriques	p.140
V.1.3 - Expression du champ électrique	p.141
V.1.3.1 - Champ total en un point du milieu	p.141
V.1.3.2 - Champ total à l'intérieur de l'anomalie	p.144
V.2 - Résolution du système d'équations intégrales	p.147
V.2.1 - Transformation du système intégrale en système linéaire	p.147
V.2.2 - Calcul des éléments de la matrice	p.149
V.2.3 - Optimisation du calcul de la matrice	p.152

V.2.4 - Calcul du champ total à l'extérieur de l'anomalie	p.156
V.3 - Application à la diffraction par une anomalie parallélépipédique	p.158
V.3.1 - Configuration de référence	p.158
V.3.2 - Influence de la fréquence et de la dimension de l'anomalie	p.162
V.3.3 - Influence de la position de l'anomalie et de la distance entre forages	p.165
V.3.3.1 - Distance entre forages	p.165
V.3.3.2 - Décalage latéral	p.166
V.3.3.3 - Décalage en profondeur	p.173
V.4 - Théorie des rayons appliquée à une anomalie cubique	p.173
V.4.1 - Contraste de conductivité	p.173
V.4.2 - Contraste de permittivité	p.177
V.4.3 - Contraste de permittivité et de conductivité	p.177
V.5 - Réponse basse fréquence d'une anomalie	p.183
Conclusion	p.191
<u>CONCLUSION</u>	p.192
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	
<u>ANNEXES</u>	

INTRODUCTION

I N T R O D U C T I O N

L'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans le sol est à la base de certaines méthodes de prospection géophysique.

L'application potentielle de notre travail concerne la tomographie électromagnétique qui devrait être réalisée à partir d'un système d'antennes d'émission et de réception descendues dans deux forages voisins. La mesure de l'amplitude et, éventuellement de la phase du signal de réception en fonction de la position relative des antennes doit permettre de reconstituer la structure du terrain située entre forages.

La mise en oeuvre de la tomographie électromagnétique entre forages implique, comme étape préliminaire, une bonne connaissance des conditions de propagation dans le sol et l'étude de la faisabilité d'une transmission haute fréquence. En effet on souhaite mettre en évidence la concentration relative en eau du sol qui va se traduire par une variation de la permittivité ϵ du terrain. Celle-ci joue un rôle sur les conditions de propagation à condition que les courants de déplacement soient plus grands que les courants de conduction ($\omega\epsilon \gg \sigma$).

Nous rappellerons tout d'abord les expressions du champ électrique rayonné par des dipôles situés dans le sol et qui font intervenir les intégrales de Sommerfeld. Nous étudierons en détail le comportement de celles-ci afin de mettre au point une procédure numérique pour les calculer rapidement. L'évaluation du champ électrique pour différentes configurations nous renseignera sur la faisabilité d'une liaison entre forages dans une bande de fréquences s'étendant de 50 MHz à 500 MHz. En effet pour ces fréquences, le sol se comporte comme un milieu diélectrique à pertes, et l'influence des anomalies qui peuvent avoir des dimensions de l'ordre du mètre, donc de la longueur d'onde, risque d'être importante.

Dans une seconde partie (Chapitres 2 et 3) nous nous intéresserons à la modélisation des antennes. La limitation dans le choix des structures d'émission et de réception est due essentiellement au faible diamètre des forages 7 cm à 9 cm. Comme nous le décrirons dans le chapitre consacré aux expérimentations, la partie rayonnante de la structure d'émission se comporte comme une antenne filaire mince de longueur voisine de la demi-longueur d'onde dans le sol. Cette antenne est modélisée par une succession de dipôles élémentaires et la distribution du courant est solution d'une équation intégrale. Celle-ci est résolue au moyen de la méthode des moments que nous avons rappelée au début du deuxième chapitre. Nous obtiendrons ainsi la distribution du courant et l'impédance d'entrée pour une antenne enterrée dans un demi-milieu homogène ou plus généralement pour une antenne traversant un interface séparant deux milieux de caractéristiques électriques différentes.

Les résultats des campagnes de mesures effectuées dans des carrières granitiques feront l'objet de l'avant dernière partie de notre travail. Les sondes d'émission et de réception réalisées dans le laboratoire nous ont permis de faire les premiers essais dans des forages situés dans des massifs granitiques de la région de St Brieux. Un premier type d'essai a consisté à mesurer l'impédance d'entrée et la fréquence d'accord de l'antenne en fonction de sa profondeur. Ceci a permis de voir la sensibilité de l'antenne d'émission vis-à-vis de son environnement. Nous avons ensuite relevé l'amplitude du champ électrique dans un forage lorsque la sonde d'émission se trouve dans un autre forage, et ceci à différentes profondeurs. Ces résultats expérimentaux sont confrontés aux prévisions théoriques et une évaluation de l'influence des câbles de descente à l'émission comme à la réception sera donnée en fin du quatrième chapitre.

La dernière partie porte, quant à elle, sur la modélisation d'une anomalie entre les forages qui se comporte comme une hétérogénéité de conductivité et de permittivité. Pour simplifier les calculs nous supposerons que le milieu encaissant est homogène et infini. L'hétérogénéité de volume V sera représentée par une distribution de courant équivalent permettant ensuite de calculer le champ en tout point de l'espace. Les variations du champ par rapport au cas sans anomalie

permettent d'évaluer l'influence de la présence de celle-ci pour différentes configurations géométriques ainsi que pour divers contrastes de caractéristiques électriques avec le milieu encaissant. Nous décrirons aussi une méthode d'interprétation simple qui consiste à supposer que les rayons issus de l'antenne d'émission se propagent en ligne droite avec un facteur d'atténuation linéique dépendant du milieu traversé. Ceci suppose d'abord que les phénomènes de réfraction soient négligeables et par conséquent que la permittivité du milieu ne varie pas fortement d'un point à un autre. Une comparaison des deux méthodes est effectuée afin de savoir dans quel cas une interprétation simple basée sur une théorie élémentaire des rayons pourrait être applicable.

C H A P I T R E I : RAYONNEMENT D'UN DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL

INTRODUCTION

Nous développons dans ce premier chapitre l'approche théorique permettant de calculer le champ électromagnétique rayonné par un dipôle électrique vertical. Après un bref rappel des conditions de propagation dans un milieu conducteur homogène et infini, nous établirons les expressions des composantes du champ dans un demi-milieu.

Pour la mise en oeuvre de la procédure numérique, nous détaillerons l'étude des fonctions intervenant dans les intégrales de Sommerfeld. Etape après laquelle nous décrirons le traitement numérique de ces intégrales. En effet, comme les profondeurs z' et z de l'émetteur et du récepteur et la distance horizontale r les séparant sont du même ordre de grandeur, il n'y a pas de développements approchés permettant de calculer le champ capté par l'antenne de réception. Il faut donc avoir recours à une résolution purement numérique du problème.

Une étude paramétrique dans le cas d'une liaison entre deux forages est réalisée en fin de chapitre. La distance entre les deux forages est comprise entre 10 m et 20 m, la profondeur de ces forages est également du même ordre de grandeur. La gamme de fréquence d'émission est choisie de telle façon que d'une part le milieu se comporte comme un corps diélectrique à pertes ($\omega\epsilon \gg \sigma$) et que, d'autre part, les hétérogénéités qui peuvent être situées entre les forages aient des dimensions du même ordre que la longueur d'onde. Nous avons donc choisi d'étudier une bande de fréquence s'étendant de 50 MHz à 500 MHz. Cette étude nous renseignera sur les évolutions du champ dans différentes configurations et sur l'influence des différents paramètres.

I.1 - PROPAGATION EN MILIEU HOMOGENE ET INFINI

I.1.1 - Expression du champ rayonné

Dans un milieu homogène et infini, on considère un dipôle électrique dont l'axe de rotation coïncide avec l'axe oz du repère (O,x,y,z) Figure (I-1).

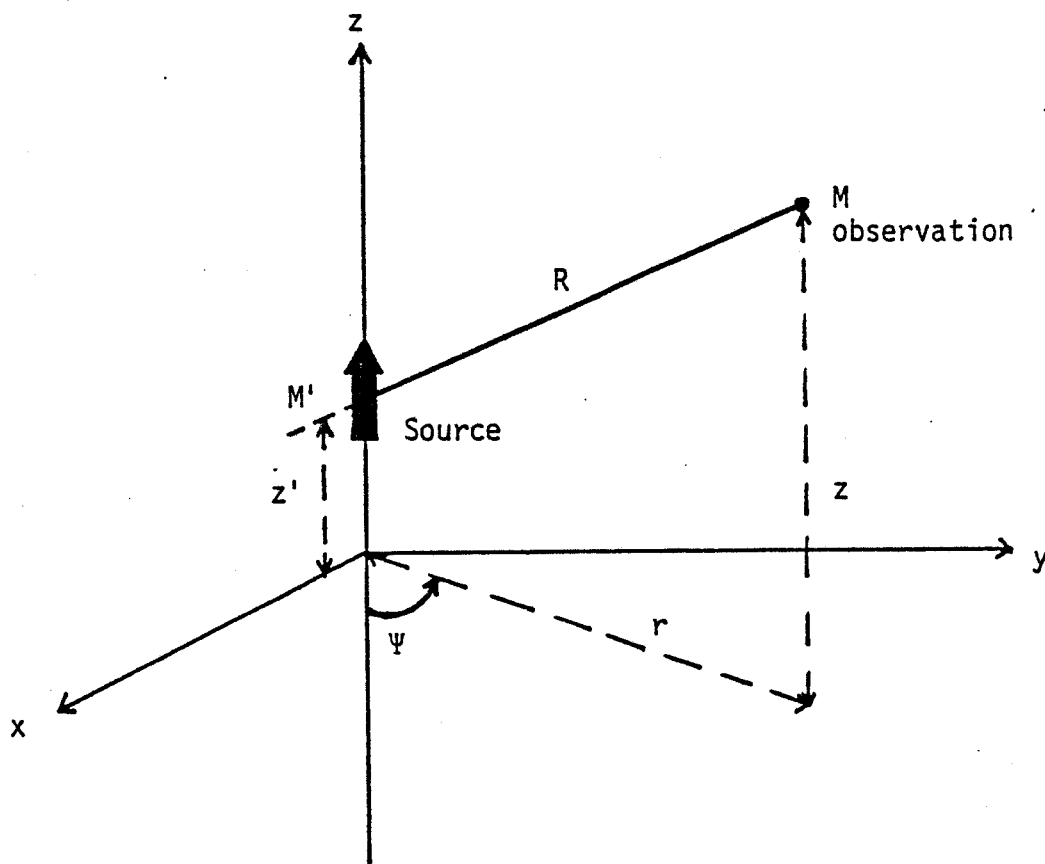


Figure I-1 : Rayonnement d'un dipôle électrique dans un milieu homogène et infini.

Le milieu, de conductivité σ , de perméabilité μ et de permittivité ϵ , contient donc pour unique source le dipôle de longueur dl parcouru par un courant $I = I_0 e^{j\omega t}$. Les points d'observation et d'émission M et M' sont repérés par leurs coordonnées cylindriques.

Le champ électromagnétique rayonné est solution des équations de Maxwell. En introduisant le potentiel de Hertz $\vec{\pi}$ les composantes électrique \vec{E} et magnétique \vec{H} sont déduites de :

$$\vec{E} = \text{rôt} \text{ rôt} \vec{\pi} \tag{I-1}$$

$$\vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{ rôt} \vec{\pi}$$

Le vecteur $\vec{\pi}$ résulte de l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta - \gamma^2) \vec{\pi} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon} \delta(R) \tag{I-2}$$

\vec{P} : polarisation électrique du dipôle.

$\gamma^2 = -\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma$: constante de propagation du milieu.

La pulsation $\omega = 2\pi f$, f : la fréquence de travail, $j = \sqrt{-1}$.

Δ : le laplacien, δ : fonction de Dirac.

Dans le cas présent la symétrie de révolution du système fait que $\vec{\pi}$ soit réduit à sa composante suivant l'axe des z :

$$\pi_z = \frac{Idl}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} G(M, M') \tag{I-3}$$

$$G(M, M') = \frac{e^{-\gamma R}}{R} \quad : \text{ fonction de Green}$$

$$R = [r^2 + (z - z')^2]^{1/2} \quad : \text{ distance émetteur-récepteur.}$$

Le développement des calculs nous mène aux composantes suivantes :

$$\begin{aligned}
 E_r(M) &= \frac{Idl}{4\pi(\sigma+j\omega\epsilon)} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} [G(M, M')] \\
 E_z(M) &= \frac{Idl}{4\pi(\sigma+j\omega\epsilon)} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right) [G(M, M')] \\
 H_\psi(M) &= \frac{-Idl}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} [G(M, M')]
 \end{aligned} \tag{I-4}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 E_r(M) &= \frac{Idl}{4\pi(\sigma+j\omega\epsilon)} r (z-z') (\gamma^2 R^2 + 3\gamma R + 3) \frac{e^{-\gamma R}}{R^5} \\
 E_z(M) &= \frac{Idl}{4\pi(\sigma+j\omega\epsilon)} \left[\frac{(z-z')^2}{R^2} (\gamma^2 R^2 + 3\gamma R + 3) - (\gamma^2 R^2 + \gamma R + 1) \right] \frac{e^{-\gamma R}}{R^3} \\
 H_\psi(M) &= \frac{-Idl}{4\pi} r (\gamma R + 1) \frac{e^{-\gamma R}}{R^3}
 \end{aligned} \tag{I-5}$$

I.1.2 - Comportement du champ rayonné

Pour l'étude des variations du champ électromagnétique on définit deux paramètres physiques du milieu [1] :

$$\begin{aligned}
 f_c &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma}{\epsilon} : \text{fréquence caractéristique} \\
 L_c &= \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} : \text{distance caractéristique}
 \end{aligned} \tag{I-6}$$

avec $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ϵ_0 : permittivité du vide
 ϵ_r : permittivité relative du milieu

$\mu = \mu_0 \mu_r$ μ_0 : perméabilité du vide
 μ_r : perméabilité relative du milieu
 (généralement égale à 1).

Nous indiquons dans le tableau (I-1) les valeurs caractéristiques pour les exemples reproduits sur les figures (I-2, 3 et 4).

	σ (S/m)	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}
	ϵ_r			
f_c (MHZ)	5	3,6	18	36
L_c (m)	10	12	2,4	1,2

Tableau (I-1) : exemples de fréquence et distance caractéristiques.

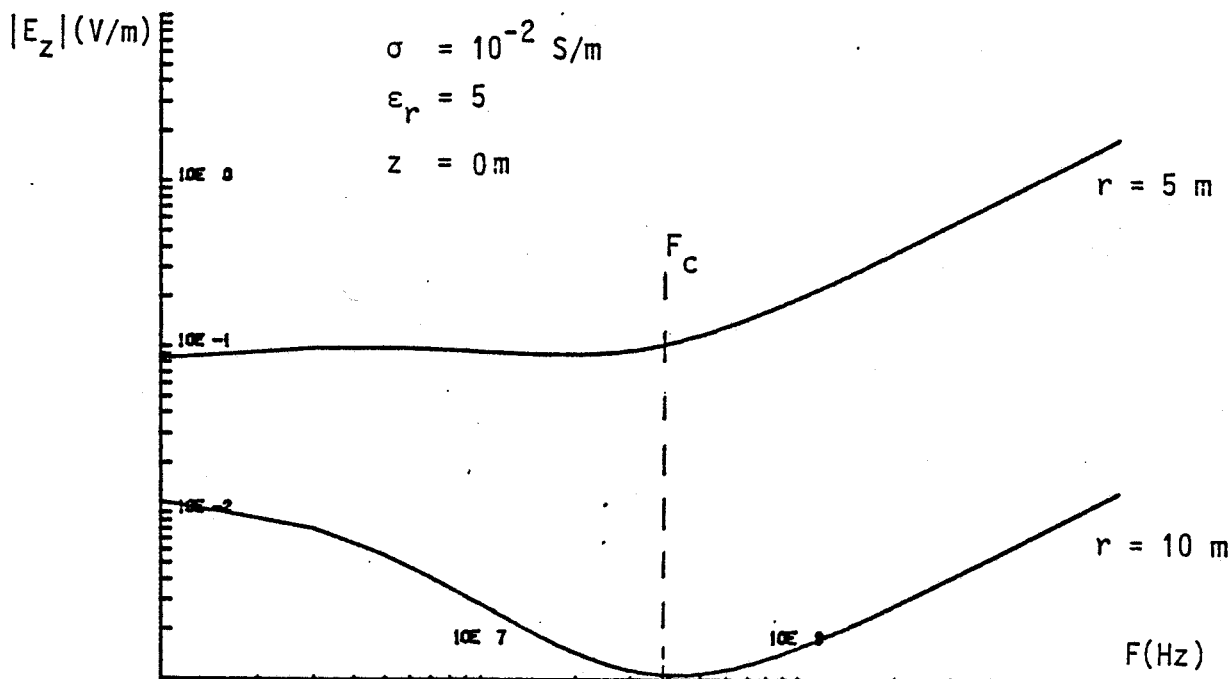


Figure I-2 : Variation de $|E_z|$ avec la fréquence paramètre : la distance r.

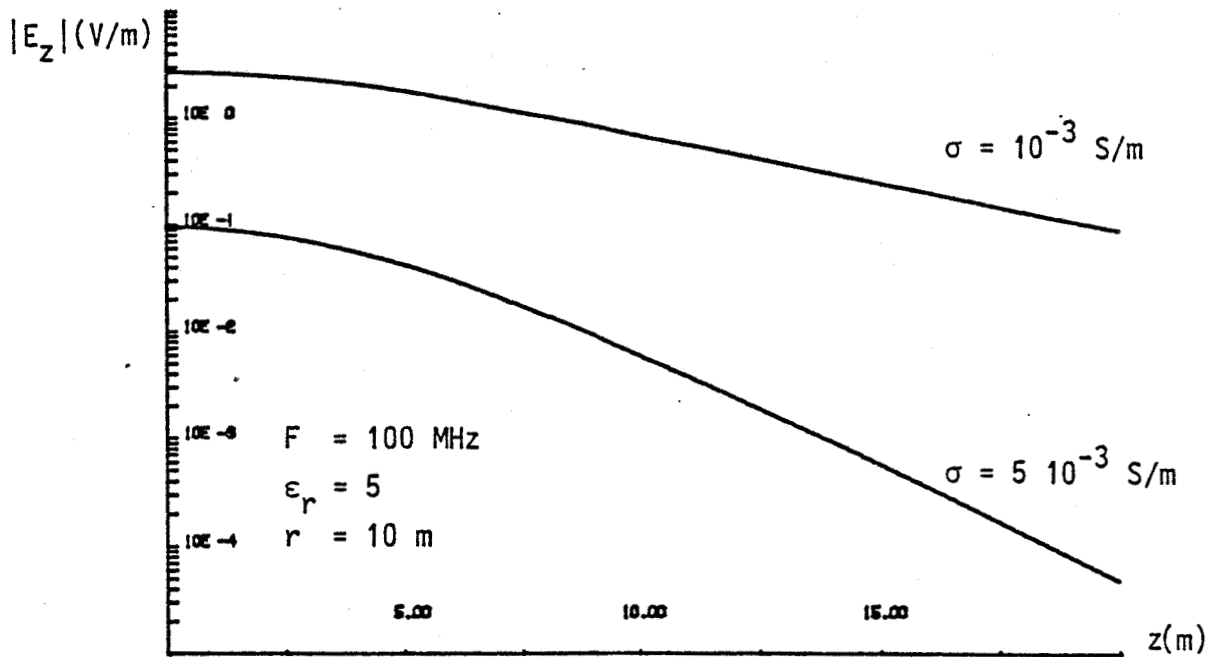


Figure I-3 : Variation de $|E_z|$ avec la position verticale du récepteur paramètre : la conductivité.

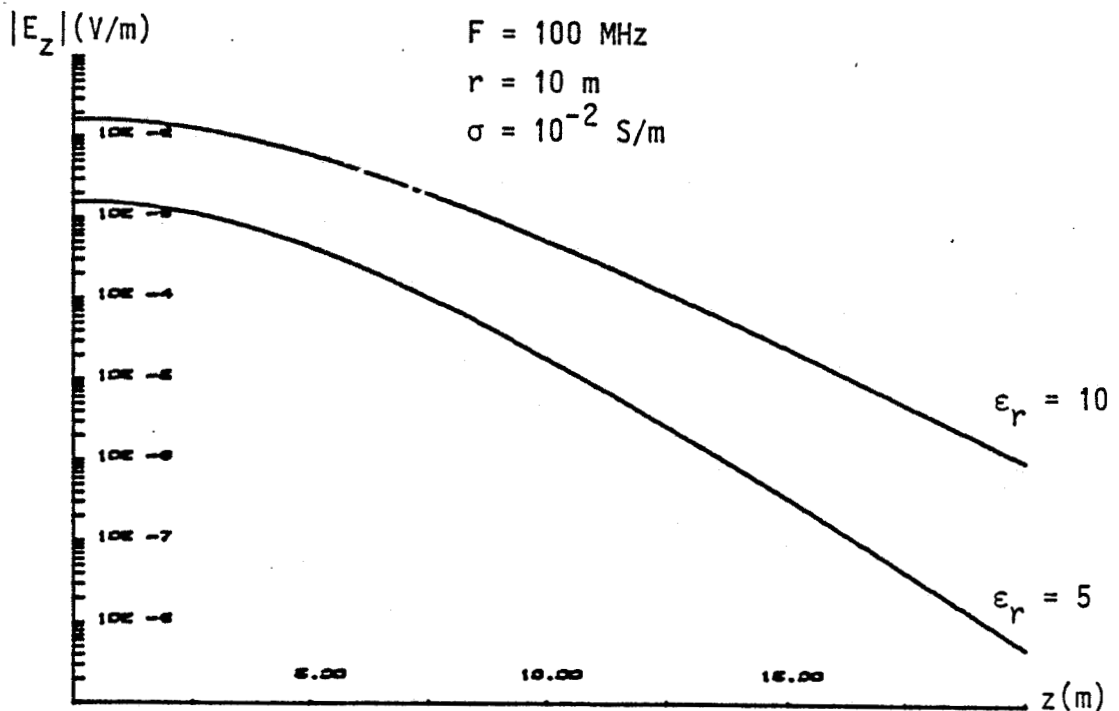


Figure I-4 : Variation de $|E_z|$ avec la position verticale du récepteur paramètre : la permittivité.

Sur les courbes représentant l'évolution de E_z en fonction de la fréquence, figure (I-2), on constate l'augmentation du champ pour les fréquences supérieures à f_0 . D'autre part on remarque la grande sensibilité du rayonnement à la conductivité du milieu de propagation, figure (I-3) et de façon moindre à la permittivité, figure (I-4).

I.2 - PROPAGATION EN DEMI-MILIEU

I.2.1 - Formulation Analytique

Le milieu de propagation est une juxtaposition de deux demi-milieux homogènes et infinis, l'un vers le bas -milieu 1- et l'autre vers le haut -milieu 2-. Les deux milieux (1) et (2) ont pour caractéristiques électromagnétiques respectives $(\sigma_1, \epsilon_1, \mu_1)$ et $(\sigma_2, \epsilon_2, \mu_2)$. L'interface qui les sépare est confondue avec le plan $(0, x, y)$. Figure (I-5).

Le dipôle émetteur, qui lui appartient continuellement à l'axe Oz , peut être, comme le point d'observation, situé dans le milieu (1) ou le milieu (2). Dans cette étude nous traiterons le cas du dipôle électrique vertical (D.E.V.).

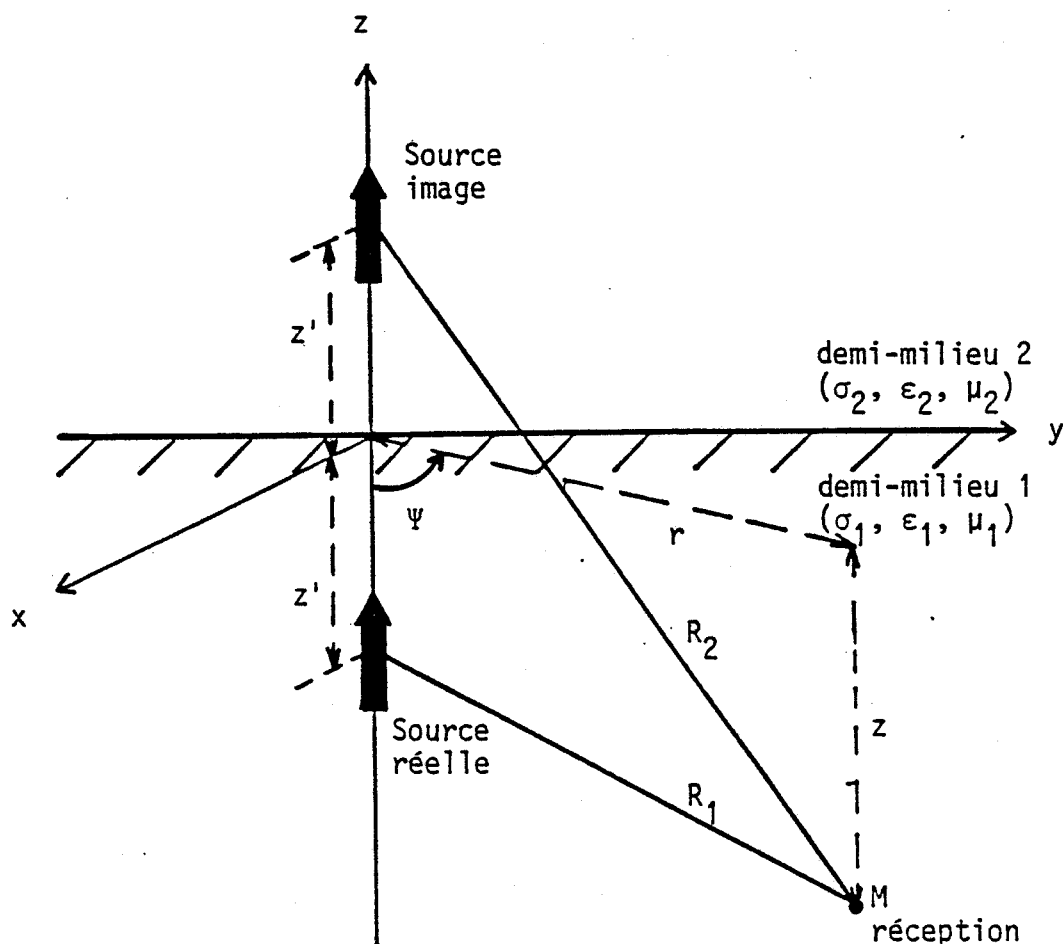


Figure I-5 : Rayonnement d'un D.E.V. dans un demi-milieu.

Comme précédemment les composantes du champ électromagnétique sont établies à partir du potentiel de Hertz dans chacun des milieux :

$$\vec{E}_i = \text{rôt} \text{ rôt} \vec{\pi}_i \quad (I-7)$$

$$\vec{H}_i = (\sigma_i + j\omega\epsilon_i) \text{rôt} \vec{\pi}_i \quad i = 1, 2$$

La symétrie de révolution du système n'étant pas affectée par la nouvelle configuration, le potentiel de Hertz ne possède donc que la composante π_z .

Si l'on note par l'indice (i) le milieu contenant le dipôle d'émission et l'autre milieu par l'indice (k), les équations de Helmholtz dans ces deux milieux sont :

$$(\Delta - \gamma_i^2) \pi_{iz} = -\frac{P}{\epsilon} \delta(R) \quad i = 1 \text{ ou } 2 \quad (I-8)$$

$$(\Delta - \gamma_k^2) \pi_{kz} = 0 \quad k = 2 \text{ ou } 1$$

Les solutions sont des fonctions de Green exprimées sous forme intégrale et les constantes d'intégrations sont déterminées à partir des conditions aux limites. Ces dernières déduites de la continuité des composantes tangentielles de \vec{E} et \vec{H} à l'interface sont exprimées dans les relations :

$$\gamma_1^2 \pi_{1z} = \gamma_2^2 \pi_{2z} \quad (I-9)$$

$$\frac{\partial \pi_{1z}}{\partial z} = \frac{\partial \pi_{2z}}{\partial z} \quad \text{pour } z = 0$$

La théorie de l'électromagnétisme montre que le champ en un point M est la résultante du rayonnement reçu directement de la source émettrice et des réflexions se produisant à l'interface. Ces réflexions

sont représentées par une source image symétrique à la source réelle par rapport au plan (0, x, y) et des termes complémentaires qui sont les intégrales de Sommerfeld [2].

Les relations suivantes donnent les composantes de \vec{E} et de \vec{H} dans le cas où l'émetteur est placé dans le milieu 1. Dans le cas où celui-ci est placé dans le milieu 2 il suffirait de remplacer les indices (1,2) par (2,1).

- point d'observation dans le milieu 1 :

$$E_{1r} = \frac{j\omega\mu_1 p}{4\pi\gamma_1^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} [G_{11} - G_{12} - \gamma_2^2 V_{11}] \right)$$

$$E_{1z} = \frac{j\omega\mu_1 p}{4\pi\gamma_1^2} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) [G_{11} - G_{12} - \gamma_2^2 V_{11}] \right) \quad (I-10)$$

$$H_{1\psi} = - \frac{p}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} [G_{11} - G_{12} - \gamma_2^2 V_{11}] \right)$$

- point d'observation dans le milieu 2 :

$$E_{2r} = - \frac{j\omega\mu_2 p}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r \partial z} [V_{12}] \right)$$

$$E_{2z} = - \frac{j\omega\mu_2 p}{4\pi} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) [V_{12}] \right) \quad (I-11)$$

$$H_{2\psi} = \frac{\gamma_2^2 p}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} [V_{12}] \right)$$

p = Idl : moment du dipôle.

G_{i1} et G_{i2} sont les fonctions de Green primaires :

$$G_{i1} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_i(z'+z)}}{u_i} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{e^{-\gamma_i R_1}}{R_1}$$

$$G_{i2} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_i(z'-z)}}{u_i} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{e^{-\gamma_i R_2}}{R_2}$$

Les termes V_{ik} sont les intégrales de Sommerfeld :

$$V_{ik}(a,b,r) = -2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_1 a} e^{-u_2 b}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda$$

avec :

$$\gamma_i^2 = -\omega^2 \mu_i \epsilon_i + j\omega \mu_i \sigma_i$$

$$u_i = [\lambda^2 + \gamma_i^2]^{1/2} \quad (Re(u_i) > 0) \quad i = 1, 2$$

$$R_1 = [r^2 + (z'+z)^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [r^2 + (z'-z)^2]^{1/2}$$

a et b sont données dans le tableau suivant :

demi-milieu d'émission

		demi-milieu d'émission	
		1	2
i	k	.	.
demi-milieu de réception	1	a = z' - z b = 0	a = -z b = z'
	2	a = z' b = z	a = 0 b = z' + z

Tableau (I-2)

Remarquons que seule la coordonnée du récepteur z change de signe, celle de l'émetteur reste toujours positive quelle que soit la position de ce dernier. De ce fait les formules de R_1 et R_2 restent les mêmes lorsque l'émetteur change de milieu.

Les expressions développées des différentes composantes sont données en annexe 1.

I.2.2 - Etude des Intégrales de Sommerfeld

L'évaluation numérique des intégrales de Sommerfeld a fait l'objet de nombreux travaux. Hormis les méthodes d'approximation valables dans certaines zones de fréquences ou de distances émetteur-récepteur, on peut citer l'intégration dans le plan complexe suivant des contours optimisés [3], la méthode de "la plus grande pente" ou méthode du "col" [4] et l'intégration le long de l'axe réel [5], ainsi que des études comparatives de ces différentes méthodes [6]. Nous avons choisi d'utiliser la méthode d'intégration sur l'axe des réels parce qu'elle donne de bonnes précisions en des temps de calculs satisfaisants.

Mais avant de se pencher sur le traitement numérique il est nécessaire d'étudier les variations des intégrants en fonction des différents paramètres. Pour cela nous traiterons ces intégrants dans le cas où le milieu 1 est de caractéristiques σ_1 , $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1}$ et $\mu_1 = \mu_0$ et le milieu 2 est non conducteur $\sigma_2 = 0$, $\epsilon_r = \epsilon_0$ et $\mu_2 = \mu_0$. Dans le cas de deux milieux conducteurs le traitement est semblable sauf que le point de rebroussement sera proche de la constante de propagation dont la partie réelle est la plus faible.

I.2.2.1 - Etude des fonctions intervenants dans les intégrales de Sommerfeld

Les fonctions des intégrales de Sommerfeld, dont la variable d'intégration est un réel λ , se mettent toutes sous la forme :

$$F = \beta \frac{e^{-u_1 a} e^{-u_2 b}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^n J_i(\lambda r)$$

$$\beta = 1, u_1, u_2$$

$$n = 1, 2, 3$$

$$J_i = J_0, J_1 : \text{fonctions de Bessel}$$

a et b sont donnés dans le tableau I-2.

Ces fonctions admettent des points de branchement en $\pm j\gamma_1$ et $\pm j\gamma_2$ ainsi qu'un point de rebroussement pour λ proche de $\frac{\omega}{c} = |\gamma_2|$. Autour de

ce dernier les fonctions connaissent une zone de grande variation, figures (I-5, I-8). Ceci implique un soin particulier pour le pas d'intégration au voisinage de ce point et ce pour un intervalle de largeur $\delta = |\gamma_2| \left| \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \right|$ (I-12)

D'autre part ces fonctions s'annulent pour les zéros des fonctions de Bessel et pour ceux dus aux termes exponentiels. Les zéros des fonctions de Bessel sont distants de π/r quant à ceux des termes exponentiels, il sont approchés par (annexe 2) :

$$\lambda_n = \left(\left[\frac{(z'-z) I_m(\gamma_1^2)}{n\pi} \right]^2 - \left[\frac{n\pi}{2(z'-z)} \right]^2 - \text{Re}(\gamma_1^2) \right)^{1/2} \quad (\text{I-13})$$

Ces différents zéros définiront les bornes pour les intervalles d'intégration.

Pour mieux comprendre l'influence des différents paramètres, nous avons tracé sur les figures I-6 à I-9 les variations de la fonction :

$$f_1(\lambda) = \frac{e^{-u_1(z'-z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^3 J_0(\lambda r)$$

pour différentes valeurs des paramètres f , r et $(z'-z)$.

Si on compare tout d'abord les figures (I-6) et (I-7) on remarque que si la distance r augmente, la fonction f_1 devient oscillante et cela est dû à la fonction de Bessel. De même, la comparaison des figures (I-7) et (I-8) correspondant respectivement à une fréquence de 50 MHz et de 500 MHz, montre qu'en haute fréquence la décroissance de la fonction f_1 est beaucoup plus lente, et qu'elle s'accompagne de nombreuses oscillations dues au terme exponentiel. Enfin pour un accroissement du paramètre $(z'-z)$ -figures (I-6) et (I-8)- on note une décroissance beaucoup plus rapide, un net affaiblissement du module et une augmentation des oscillations dûs, comme précédemment, au terme exponentiel. Dans tous les cas, la fonction de Bessel et le terme exponentiel jouent un rôle plus ou moins important qui se traduit par un phénomène de "modulation" sur les courbes de variations de $f_1(\lambda)$.

I.2.2.2 - Procédure numérique d'intégration

L'évaluation numérique de l'intégrale :

$$I_s = \int_0^{\infty} f(a, b, r, \lambda) d\lambda$$

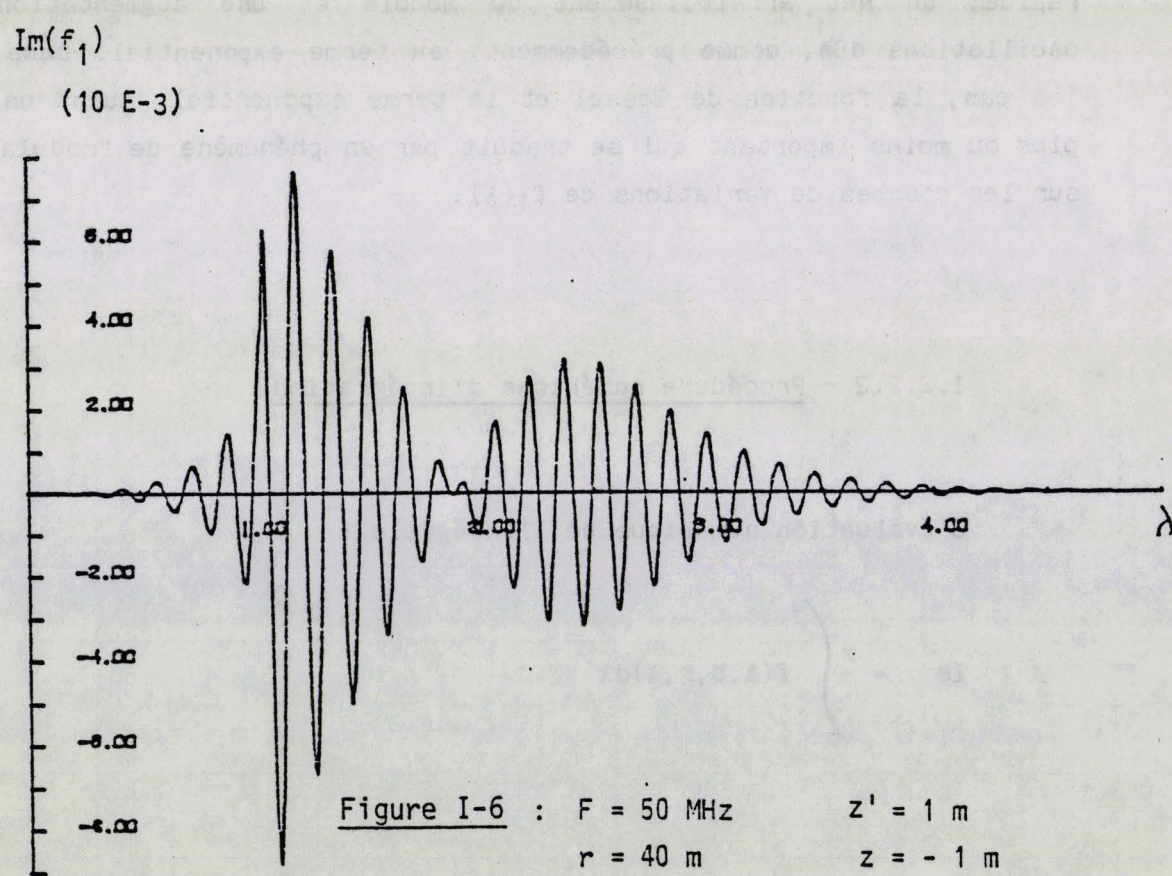
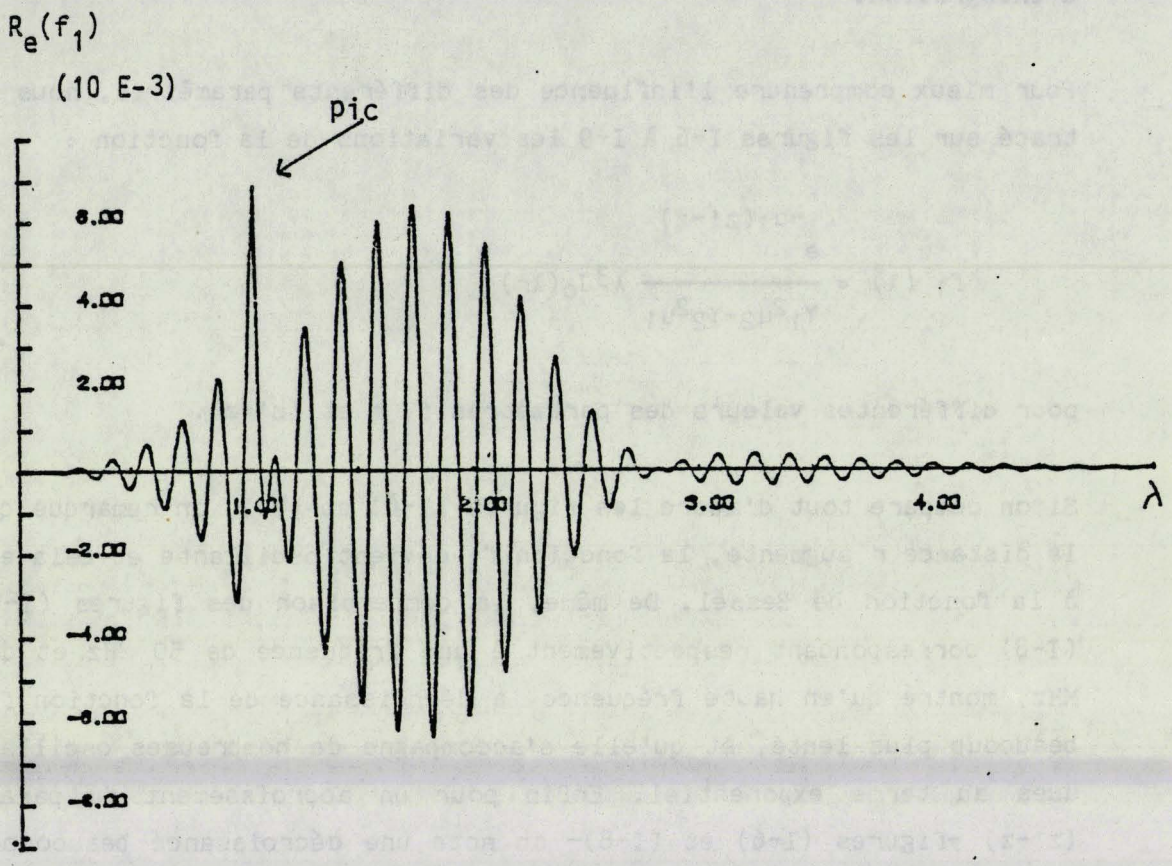


Figure I-6 : $F = 50$ MHz $z' = 1$ m
 $r = 40$ m $z = -1$ m

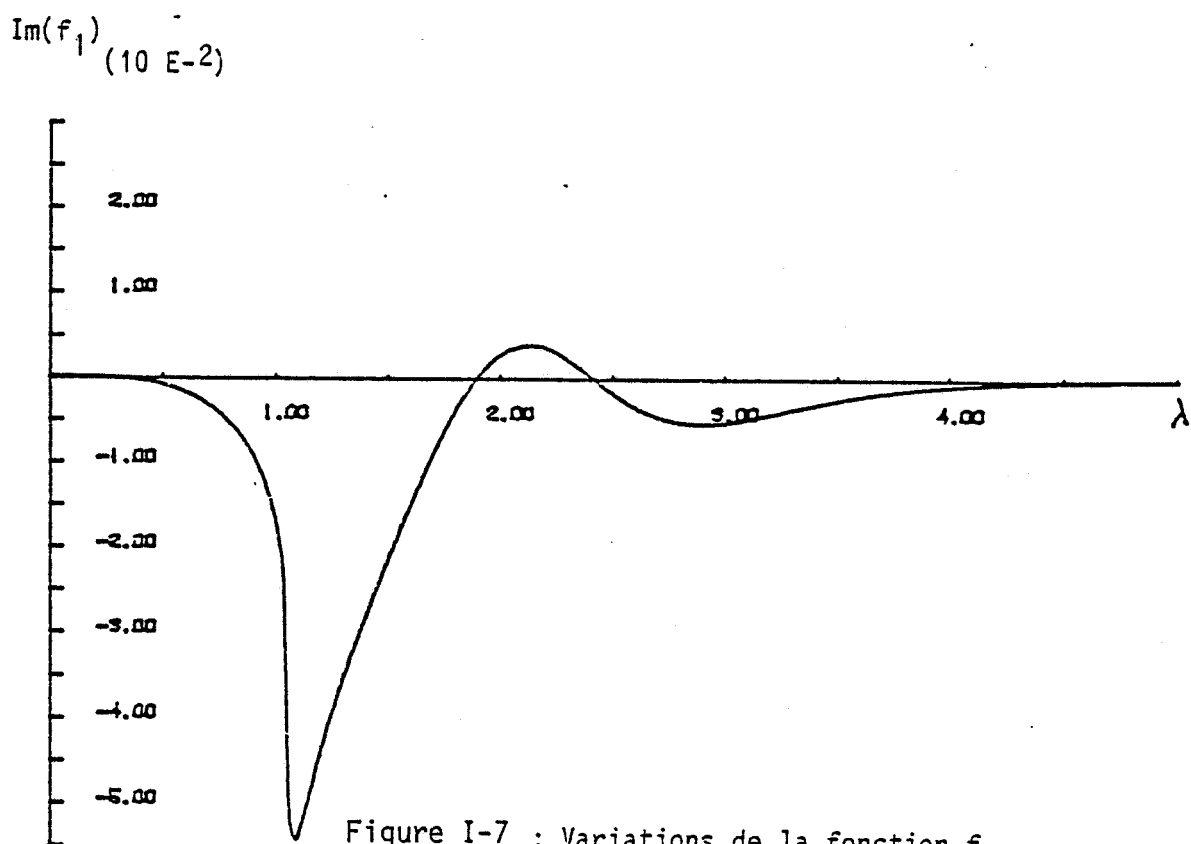
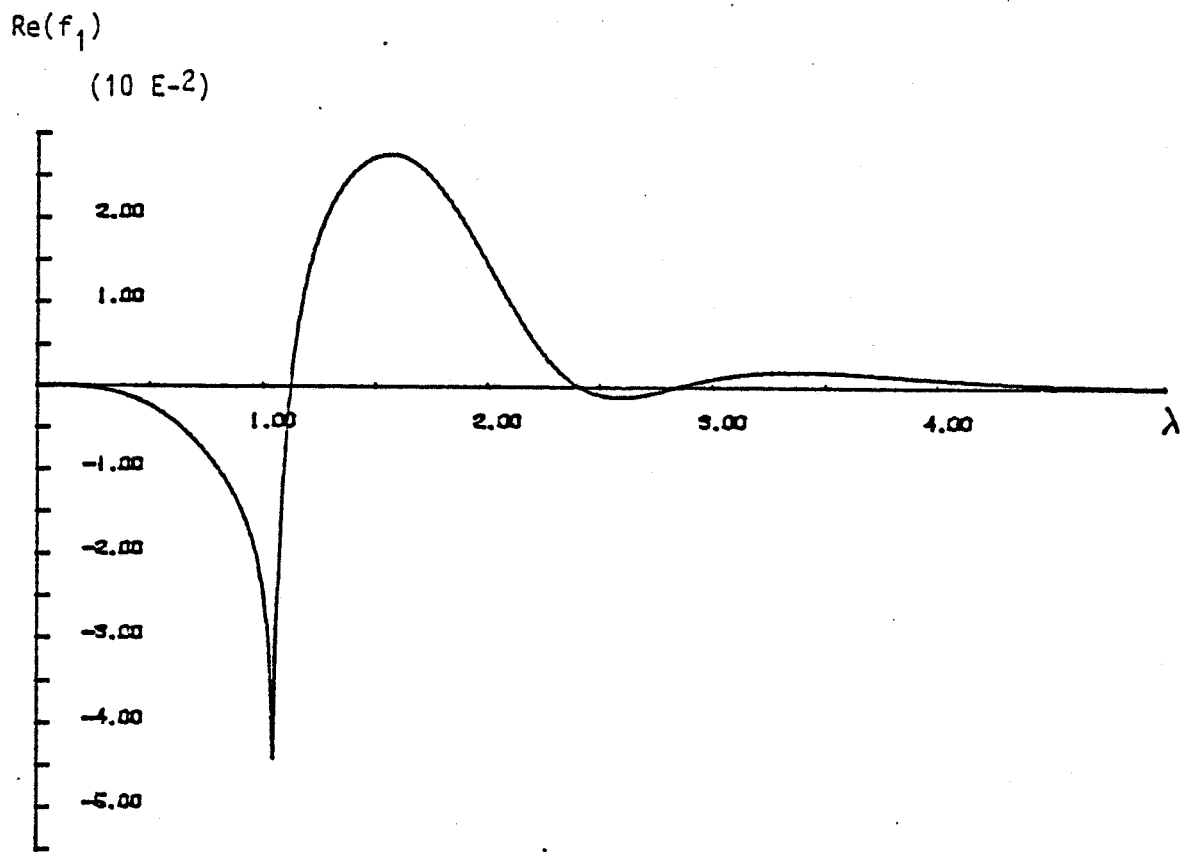
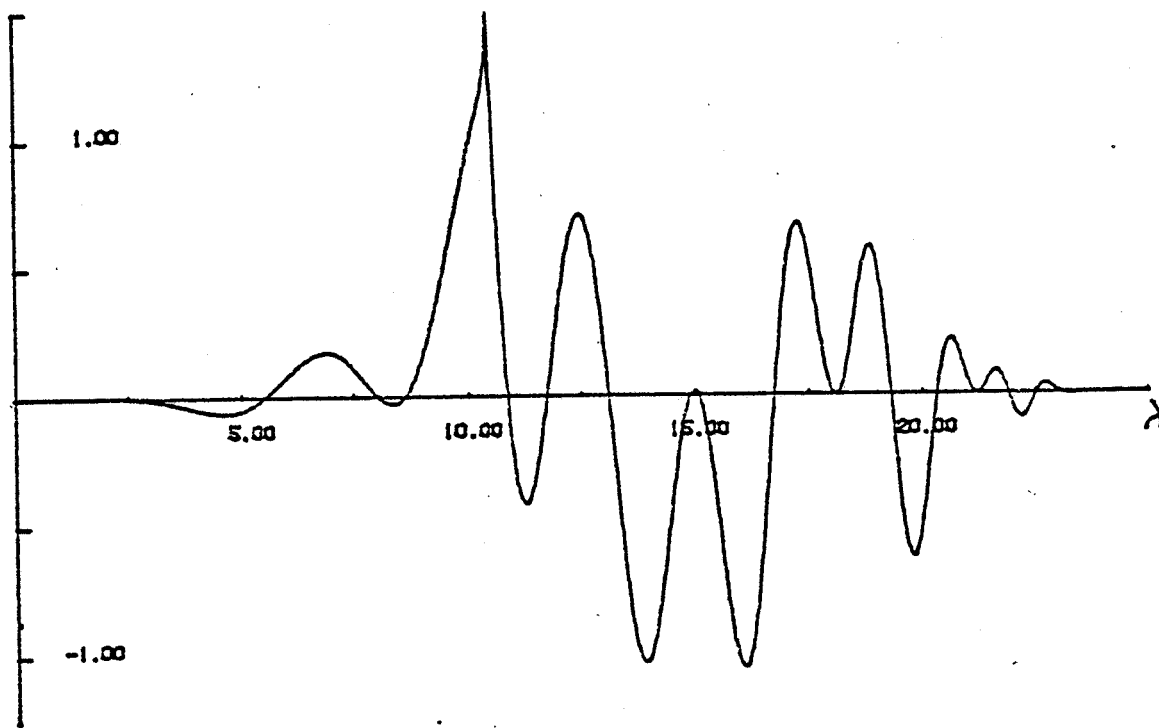


Figure I-7 : Variations de la fonction f_1
- $F = 50$ MHz $z' = 1$ m
- $r = 1$ m $z = -1$ m

$R_e(f_1)$
(10 E-2)



$Im(f_1)$
(10 E-2)

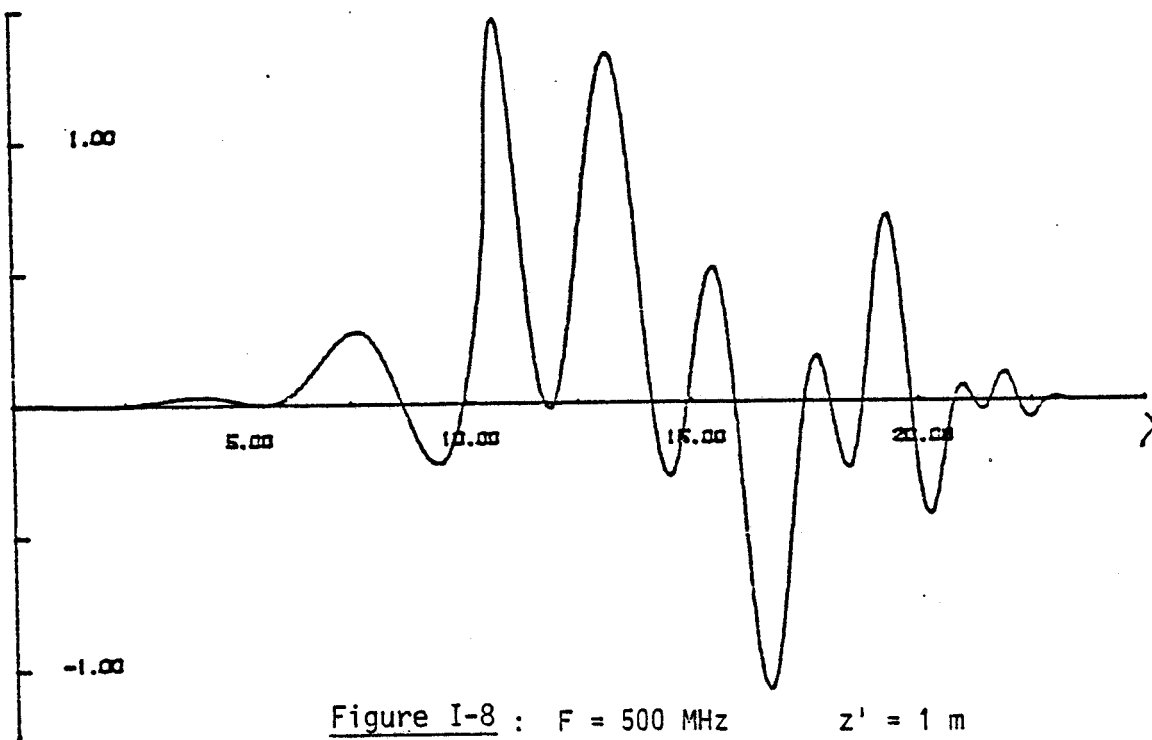


Figure I-8 : $F = 500$ MHz $z' = 1$ m
 $r = 1$ m $z = -1$

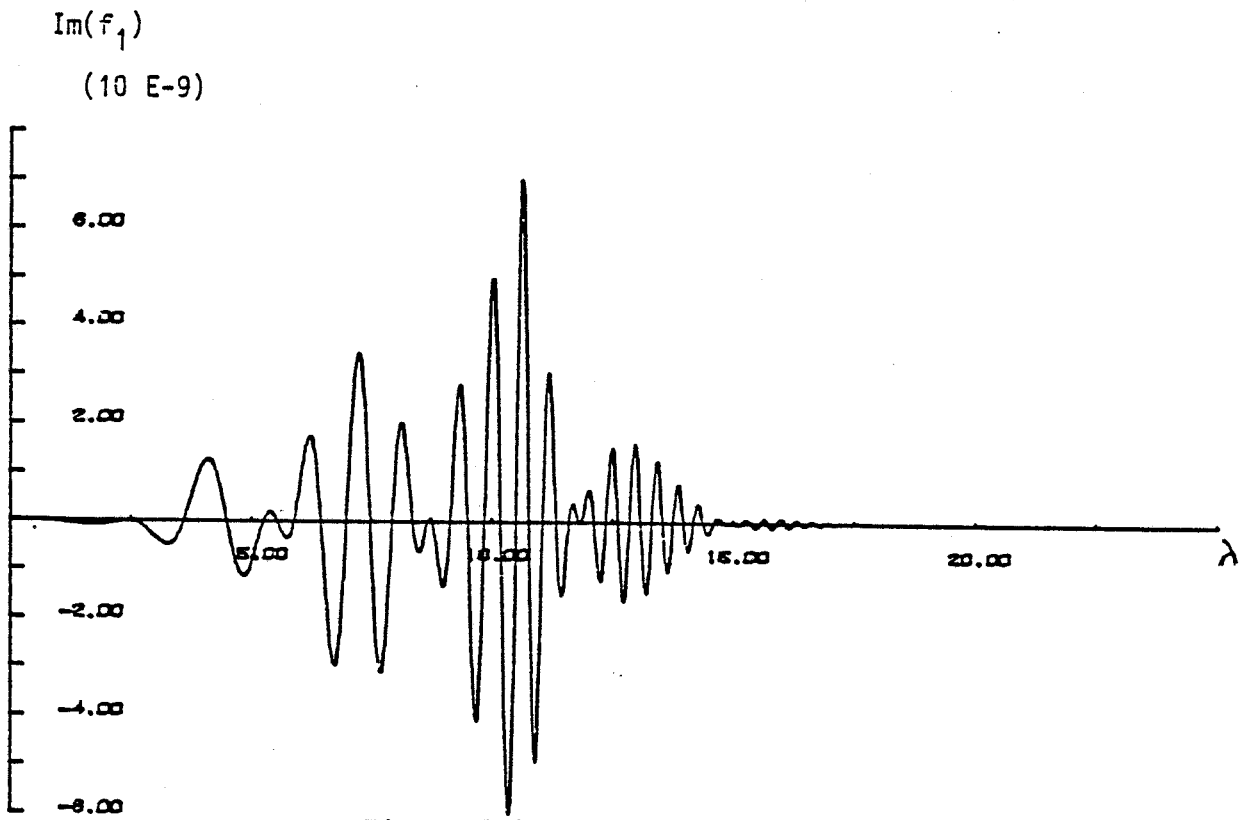
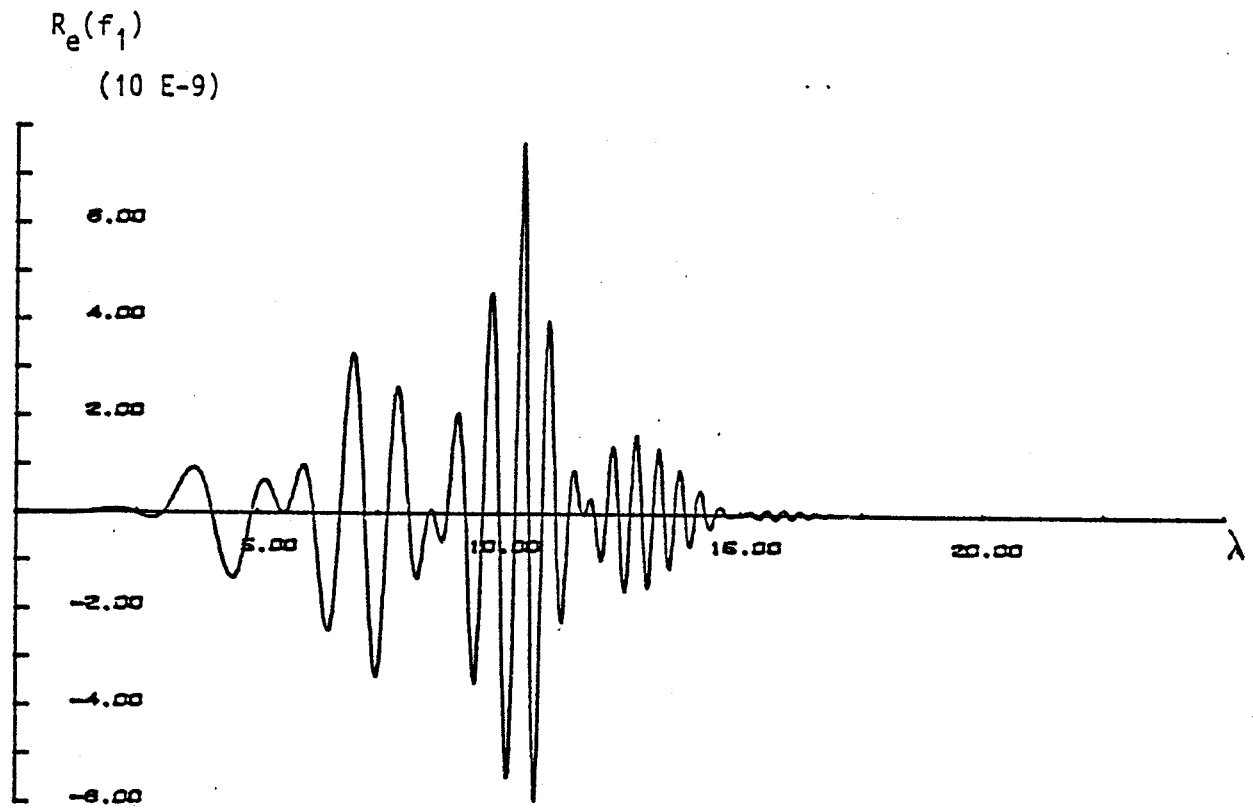


Figure I-9 : $F = 500$ MHz
 $r = 1$ m

$z' = 10$ m
 $z = -10$ m

se limite au calcul de l'intégrale $I_s = \int_0^{\lambda_{\max}} f(a,b,r,\lambda) d\lambda$ tel que la

contribution du segment $[\lambda_{\max}, \infty]$ soit négligeable. Les constatations faites plus haut montrent que λ_{\max} deviendra de plus en plus grand si la fréquence augmente ou si $(z-z')$ diminue. D'autre part comme nous l'avons vu, l'intégrand possède une zone de brusque variation au voisinage du pôle. De ce fait le domaine d'intégration est divisé en trois intervalles [8].

Ces trois intervalles $[0, \frac{\omega}{c} - \delta]$, $[\frac{\omega}{c} - \delta, \frac{\omega}{c} + \delta]$ et $[\frac{\omega}{c} + \delta, \lambda_{\max}]$ sont eux-mêmes subdivisés en segments d'intégration $[x_i, x_{i+1}]$ et l'intégrale devient :

$$I_s = \sum_{i=1}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(a,b,r,\lambda) d\lambda \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_m = \lambda_{\max} \end{array}$$

Dans le premier intervalle $[0, \frac{\omega}{c} - \delta]$ les bornes des segments d'intégration sont les zéros de fonctions de Bessel et des termes exponentiels. L'intégrale est calculée à l'aide de l'algorithme de Gauss-Legendre et la précision de l'ordre de 10^{-6} pour une quadrature comprise entre 8 et 16. Le second intervalle $[\frac{\omega}{c} - \delta, \frac{\omega}{c} + \delta]$ qui encadre la zone perturbée est découpé de manière logarithmique autour de la valeur $\frac{\omega}{c}$, elle-même prise comme borne d'intégration ainsi que les différents zéros de la fonction appartenants à cet intervalle. Le choix d'un algorithme qui converge rapidement s'impose dans cette zone. Celui de Simpson répond à cette exigence et de plus il permet d'obtenir des résultats avec une précision préalablement fixée. Sur le dernier intervalle $[\frac{\omega}{c} + \delta, \lambda_{\max}]$ la méthode d'accélération de convergence Gray-Atchison améliore la rapidité des calculs. De plus nous avons choisi comme bornes d'intégration les maximums des fonctions de Bessel car les zéros de la

fonction à intégrer ne conviennent pas avec la méthode d'accélération choisie. L'algorithme d'intégration utilisé sur ces segments est celui de Gauss-Legendre.

Lorsque les paramètres sont tels que les fonctions sont lentement décroissantes, nous intégrons la fonction diminuée de sa valeur limite. L'intégrale de cette dernière est calculée analytiquement (annexe 2) et rajoutée par la suite. Ceci permet dans certains cas un gain appréciable en temps de calcul.

I.2.2.3 - Vérification du traitement numérique

Afin de vérifier la validité de nos programmes, nous avons comparé nos résultats à ceux donnés par Lytle et Lager [3]. Ces résultats -tableau I-3- sont obtenus pour les données suivantes :

$f = 3 \text{ MHz}$ $\epsilon_r = 9$ $\sigma = 10^{-2} \text{ S/m}$
 $z' = 20 \text{ m}$ $z = -10^{-6} \text{ m}$ $r = 1,20 \text{ et } 200 \text{ m}$
 $dl = 1 \text{ m}$ $I = 1 \text{ A}$

Module des composantes électriques en V/m	r = 1 m		r = 20 m		r = 200 m	
	1	2	1	2	1	2
$ E_r $	1.930E-5	1.930E-5	1.026E-5	1.026E-5	6.032E-8	6.033E-8
$ E_z $	2.418E-6	2.408E-6	2.194E-7	2.192E-7	7.930E-9	7.890E-9

Tableau I-2

Colonnes 1 : résultats de Lytle et Lager.
Colonnes 2 : nos résultats.

Les faibles différences entre les résultats peuvent s'expliquer par le fait que Lytle et Lager se sont limités à une précision de 10^{-3} alors que nous avons pris une précision relative de 10^{-4} pour le calcul des intégrales de Sommerfeld.

I.2.3 - Etude paramétrique du champ émis par un D.E.V. dans le sol [8] :

Comme nous l'avons indiqué en introduction, nous nous intéressons dans cette étude à des liaisons entre un émetteur et un récepteur distants d'une dizaine de mètres, figure I-10. Les fréquences de travail sont choisies voisines des 200 MHz afin de déceler toute anomalie pouvant se trouver entre les deux sondes et dont les dimensions restent de l'ordre du mètre. Dans ce paragraphe nous traitons donc les évolutions du champ émis par un D.E.V. placé dans le sol à une profondeur z' . Le point de réception situé à une distance r de l'émetteur se déplace dans un axe perpendiculaire à la surface du sol.

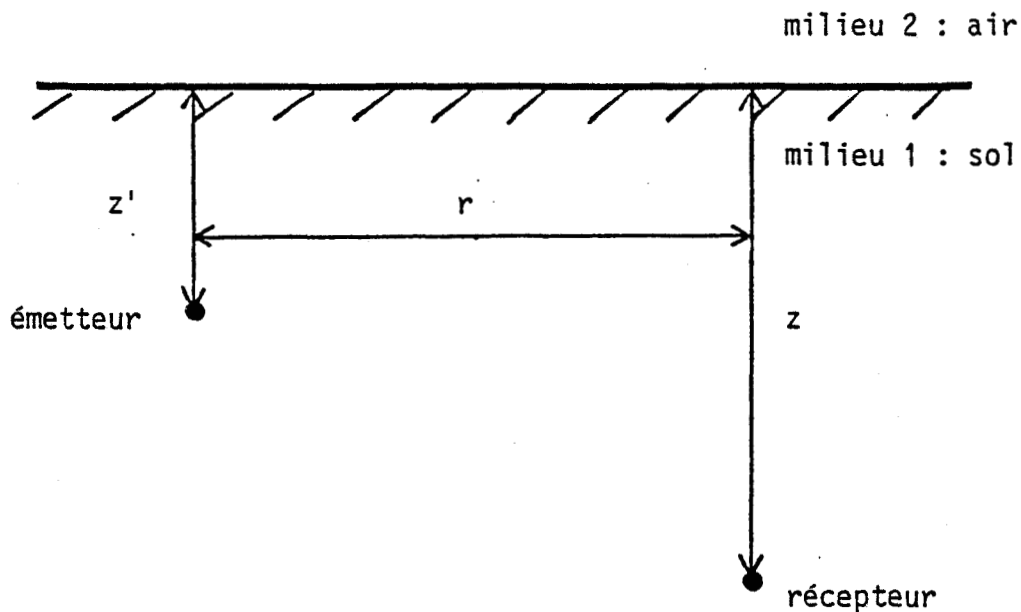


Figure I-10 : Rayonnement d'un D.E.V. dans le sol.

Avant d'étudier l'influence des divers paramètres de la liaison, il est intéressant de noter que le champ se décompose comme suit :

$$E_z = E_{zp1} + E_{zp2} + E_{zs}$$

$$E_{zp1} = \frac{j\omega\mu_0 Id1}{4\pi\gamma_1^2} \left(\frac{(z'+z)^2}{R_1^2} (\gamma_1^2 R_1^2 + 3\gamma_1 R_1 + 3) - (\gamma_1^2 R_1^2 + \gamma_1 R_1 + 1) \right) \frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1^3}$$

$$E_{zp2} = \frac{-j\omega\mu_0 Id1}{4\pi\gamma_1^2} \left(\frac{(z'-z)^2}{R_2^2} (\gamma_1^2 R_2^2 + 3\gamma_1 R_2 + 3) - (\gamma_1^2 R_2^2 + \gamma_1 R_2 + 1) \right) \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2^3}$$

$$E_{zs} = \frac{j\omega\mu_0 Id1}{4\pi\gamma_1^2} 2\gamma_2^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_1(z'-z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^3 J_0(\lambda r) d\lambda$$

E_{zp1} : terme associé à la source réelle et correspondant au rayonnement dans un milieu homogène et infini.

E_{zp2} : terme associé au rayonnement de la source image.

On note la somme de ces deux termes $E_{zp1} + E_{zp2}$ par E_{zp} .

E_{zs} : terme complémentaire dû à une conductivité non infinie du sol.

On peut remarquer dès à présent que dans le cas où l'émetteur ou le récepteur est placé près de la surface du sol ($z' \approx$ ou $z \approx 0$), le terme $E_{zp} = E_{zp1} + E_{zp2}$ s'annule et seule la contribution du terme complémentaire E_{zs} reste. Ceci s'explique par le fait que la source réelle et la source image émettent en opposition de phase et que les distances R_1 et R_2 parcourues pour atteindre le point de réception sont égales, figure (I-11).

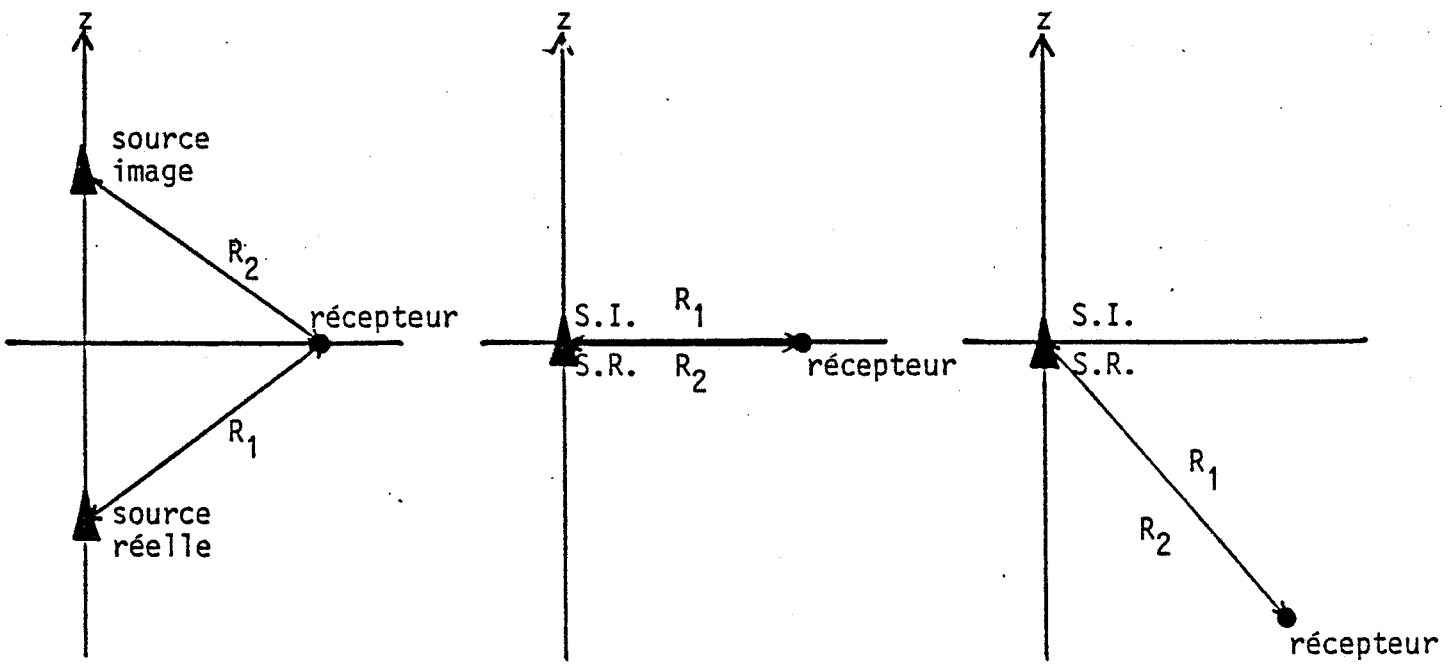


Figure I-11 : Cas où $E_{zp1} = - E_{zp2}$.

Les courbes des figures (I-12,13) représentent les variations de la composante E_z en fonction de la profondeur du récepteur, et ont été tracées pour la configuration suivante : $F = 50$ MHz, $\epsilon_r = 5$, $\sigma = 10^{-2}$ s/m, $r = 10$ m et 20 m, et $z' = 1$ m fig. (I-12), $z' = 10$ m fig. (I-13). Sur

toutes les figures les points notés (*) correspondent aux résultats obtenus dans le cas du demi-milieu, la courbe en trait plein étant calculée dans le cas du milieu infini. Pour les faibles valeurs de z' , on note une grande différence entre la valeur du champ en milieu infini et celle calculée dans le demi milieu. En effet, comme nous l'avons constaté précédemment le terme E_{zp1} correspondant au rayonnement dans un milieu infini est annulé par le terme E_{zp2} associé à la source image, et le terme E_{zs} est prépondérant. Lorsque z croît des oscillations dues à la composition des termes E_{zp1} et E_{zp2} apparaissant avant que E_{zp1} l'emporte sur les deux autres termes E_{zp2} et E_{zs} , d'où alors la coïncidence des résultats avec ceux du milieu infini. Mais ces différents phénomènes s'estompent rapidement lorsque r diminue.

Les courbes de la figure (I-14) ont été tracées pour la même configuration que précédemment, mais pour une fréquence de 500 MHz le comportement de E_z reste semblable à celui obtenu pour $f = 50$ MHz.

Si la conductivité du terrain devient plus faible, le champ E_{zp} deviendra rapidement prépondérant lorsque les sondes d'émission et de réception s'enfoncent dans le sol. Les courbes des figures (I-15, 16) se rapportent à des conductivités de 10^{-2} s/m, $5 \cdot 10^{-3}$ s/m et 10^{-3} s/m avec $f = 200$ MHz, $r = 20$ m, $z' = 10$ m et $\epsilon_r = 5$ Fig. (I-15), $\epsilon_r = 9$ Fig. (I-16). On remarque que l'influence de la permittivité prend de l'importance lorsque la conductivité augmente, si on excepte une faible zone de profondeur ($z < 5$ m), on constate que l'approximation consistant à négliger le terme complémentaire (intégrales de Sommerfeld) est justifiée.

Pour une puissance d'émission de l'ordre du watt avec une antenne demi-onde, on peut espérer atteindre un moment I_{d1} de 0,05 A.m. Si la sensibilité à la réception est de quelques μV on voit que, pour $r = 20$ m, une liaison ne peut-être réalisée que pour des conductivités inférieures à $5 \cdot 10^{-3}$ S/m. Pour une conductivité de l'ordre de 10^{-2} S/m il faudrait se limiter à des distances inférieures à 10 m. Dans ces conditions, la dynamique nécessaire de la chaîne de réception lorsque les sondes se déplacent dans les forages est voisine d'un facteur de 100.

$F = 50 \text{ MHz}$

$\epsilon_r = 5$

$z' = 1 \text{ m}$

$\sigma = 10^{-2} \text{ S/m}$

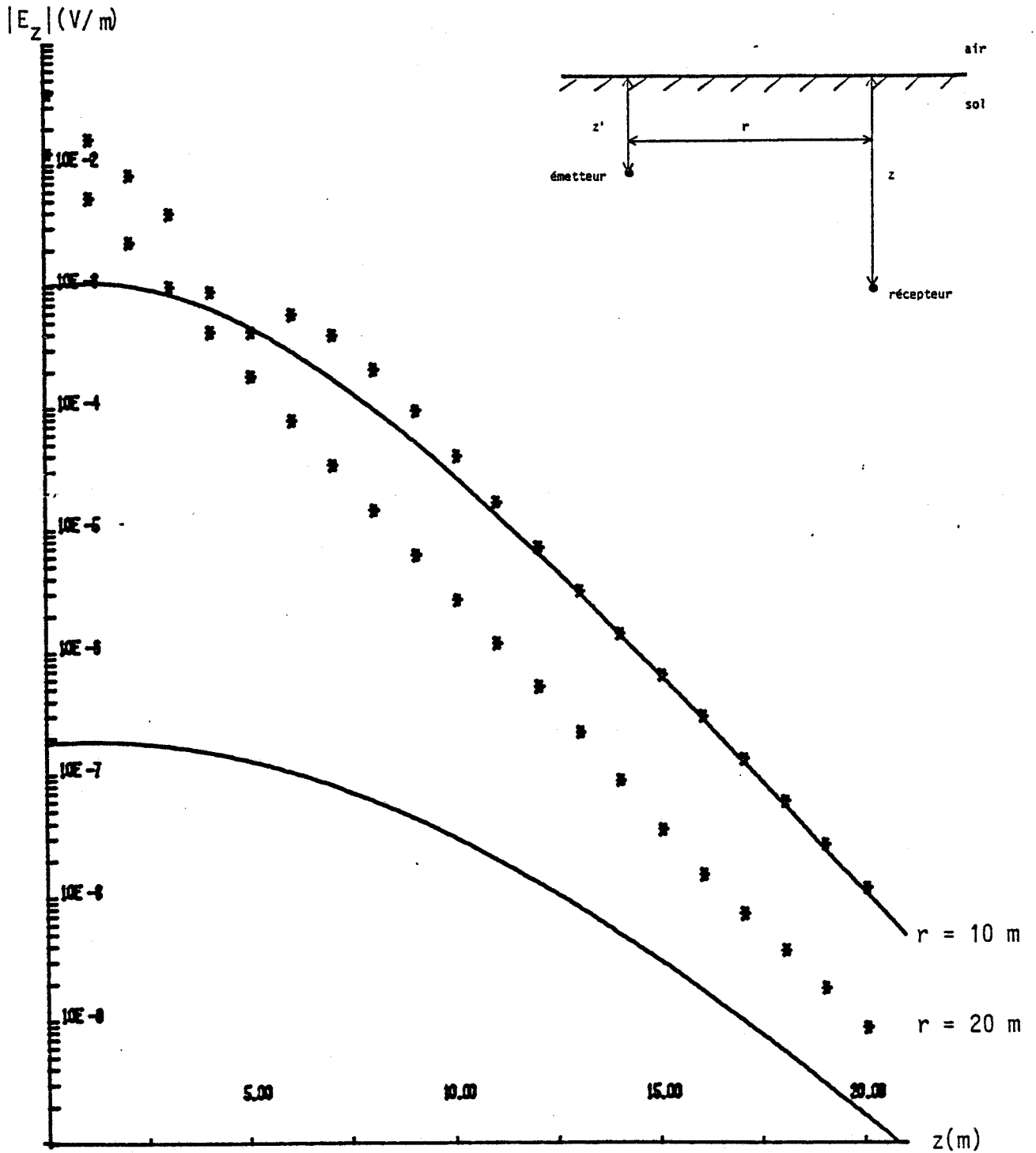


Figure I-12 : $|E_z|$ en fonction de z
paramètre : r

F = 50 MHz

$\epsilon_r = 5$

$z' = 10$ m

$\sigma = 10^{-2}$ S/m

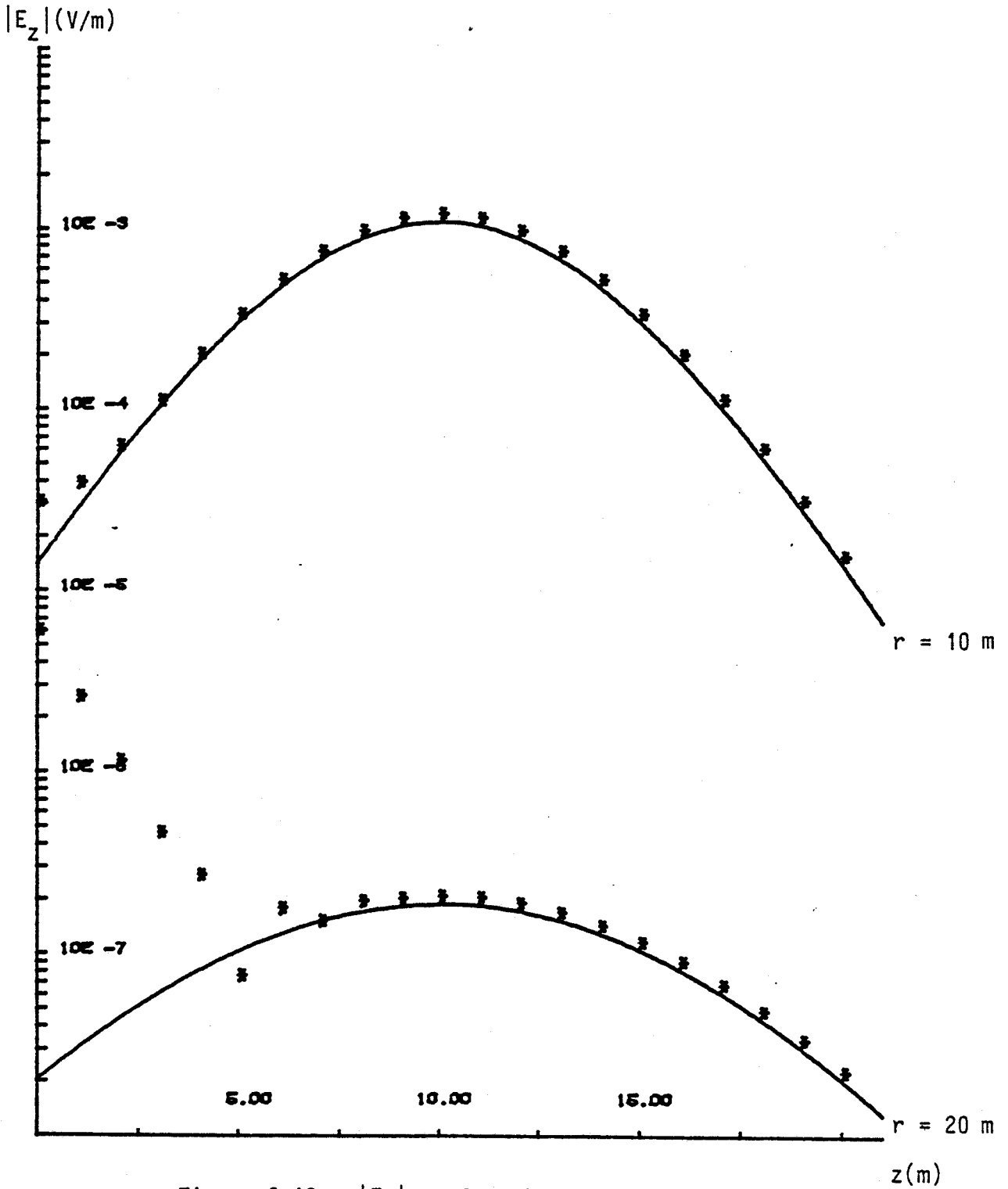


Figure I-13 : $|E_z|$ en fonction de z
paramètre : r

$F = 500 \text{ MHz}$ $\epsilon_r = 5$
 $z' = 10 \text{ m}$ $\sigma = 10^{-2} \text{ S/m}$

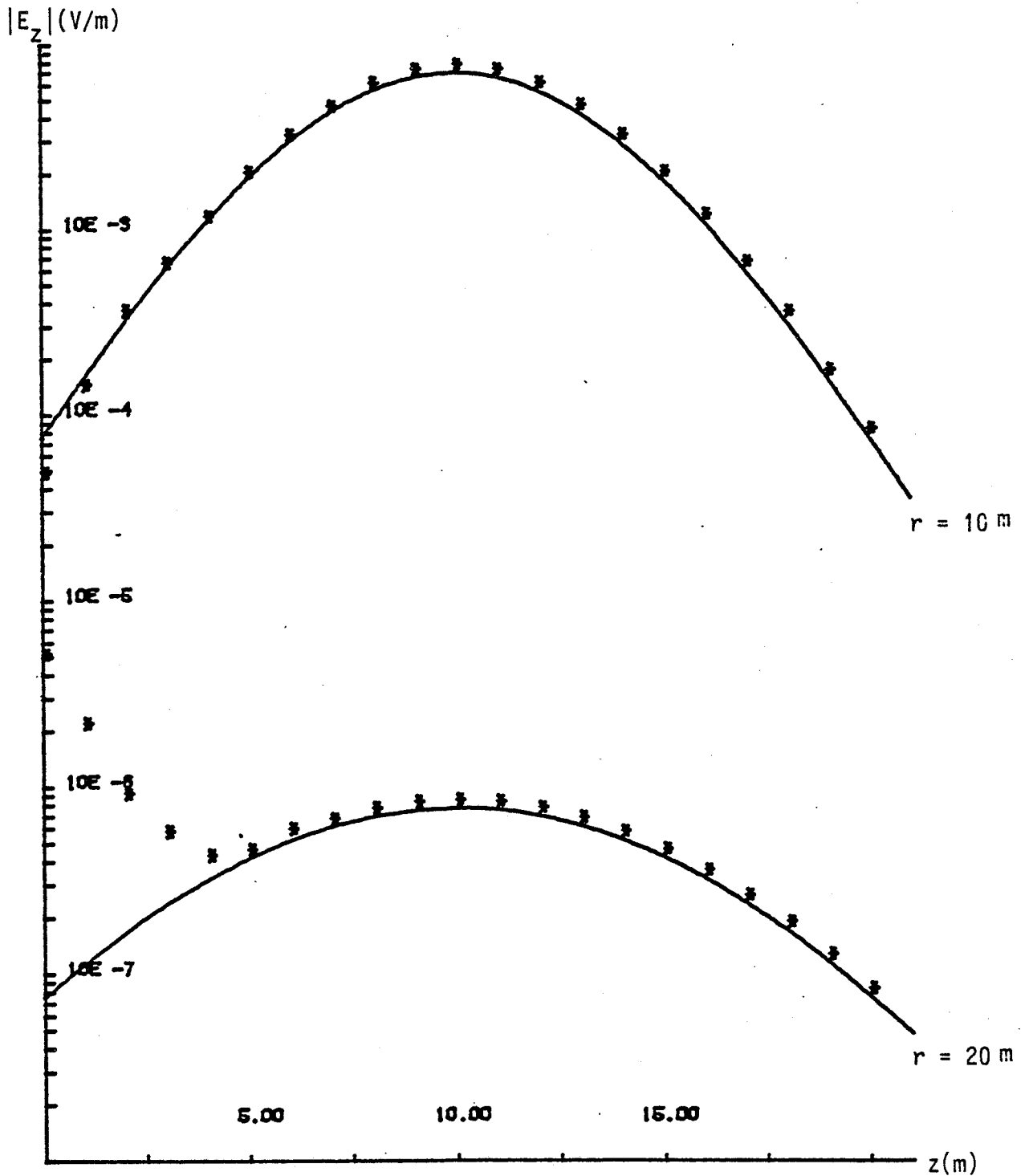


Figure I-14 : $|E_z|$ en fonction de z
paramètre : r

F = 200 MHz

$\epsilon_r = 5$

r = 20 m

z' = 10 m

$|E_z|$ (V/m)

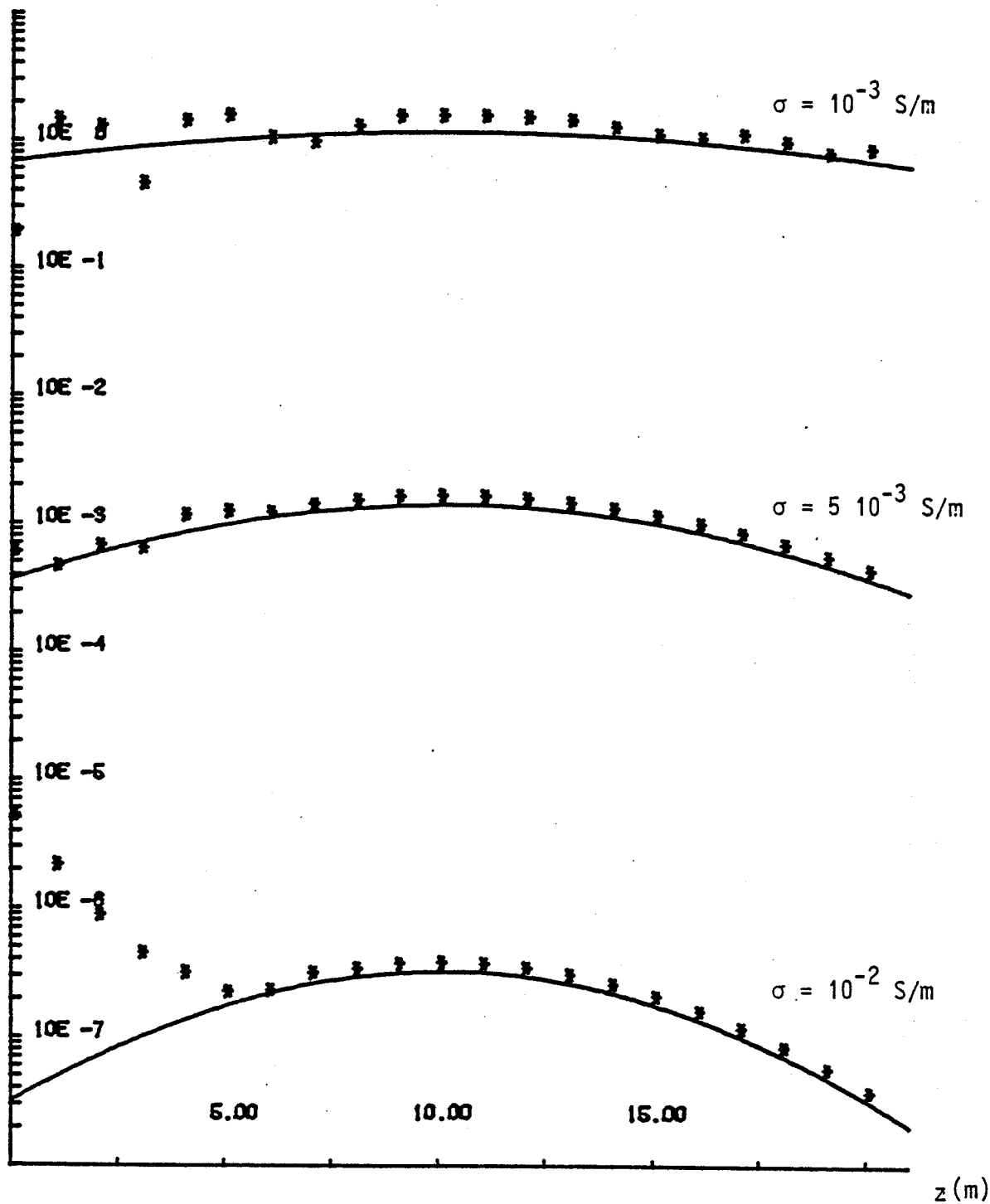


Figure I-15 : $|E_z|$ en fonction de z
paramètre : conductivité

F = 200 MHz

$\epsilon_r = 9$

r = 20 m

z' = 10 m

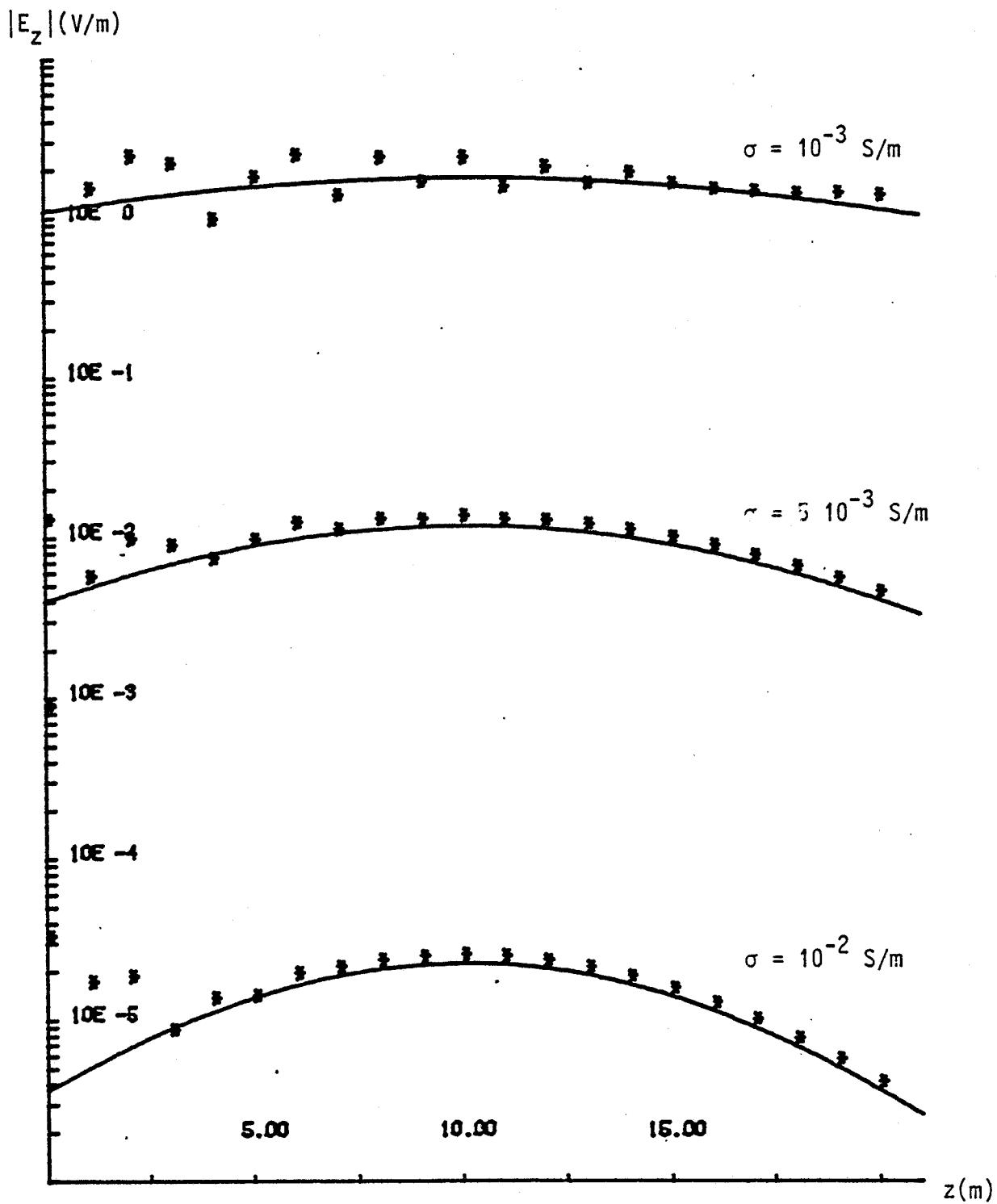


Figure I-16 : $|E_z|$ en fonction de z
paramètre : σ

CONCLUSION

Dans ce premier chapitre nous avons établi les expressions des composantes du champ électromagnétique qui seront nécessaires pour la suite de l'étude. Le modèle numérique mis au point pour le calcul de ce champ nous donne une base pour le traitement numérique des intégrales que nous aurons à effectuer.

L'étude paramétrique montre la forte dépendance du champ de la conductivité du milieu où se fait la propagation. On peut noter dans certaines configurations un rapport 200 entre les modules du champ reçu dans un sol de conductivité $\sigma = 10^{-3}$ S/m et celui reçu quand $\sigma = 10^{-2}$ S/m. Nous indiquons ainsi, pour une puissance à l'émission et une sensibilité de réception données, les conditions dans lesquelles une liaison peut être assurée. Les variations du champ en fonction de la profondeur (z) situent l'ordre de la dynamique nécessaire à la mesure lorsque le récepteur se déplace le long d'un forage. D'autre part, on remarque que pour des distances r faibles ou lorsque l'émetteur et le récepteur se trouvent éloignés de l'interface, l'approximation du milieu infini est justifiée.

C H A P I T R E I I : M O D E L I S A T I O N D ' U N E A N T E N N E F I L A I R E M I N C E

INTRODUCTION

Les antennes utilisées dans les liaisons entre forages sont généralement des antennes filaires minces. En effet les diamètres de ceux-ci, une dizaine de centimètres, ne facilitent pas l'utilisation d'autres structures ; la modélisation de ces antennes filaires nécessite leur décomposition en dipôles élémentaires.

Nous commencerons ce chapitre par un rappel sur la méthode des moments. Cette méthode sera appliquée pour la résolution de l'équation intégrale d'une antenne. L'exposé introductif permettra de définir les différentes notions de matrice impédance, matrice d'excitation, distribution de courant, impédance d'entrée...

Dans un second paragraphe nous établirons le champ rayonné par une antenne cylindrique mince dans un milieu homogène et infini, ce qui nous permettra de développer les différentes hypothèses concernant les antennes filaires minces ainsi que d'autres principes conduisant à la formulation de l'équation intégrale d'une antenne. De façon similaire nous traiterons, dans le dernier paragraphe, le cas d'une antenne placée dans un demi-milieu.

Les résultats numériques obtenus dans ces deux cas nous permettront de conclure sur la convergence de la méthode. D'autre part, dans le cas d'une antenne descendue dans un forage, nous verrons l'influence de la présence de l'air sur la distribution du courant et l'impédance d'entrée. Les variations de ces dernières seront étudiées en fonction de la profondeur de l'antenne.

II.1 - LA METHODE DES MOMENTS

La méthode des moments permet la résolution numérique des équations fonctionnelles. Développée par Harrington [9], la méthode est largement utilisée dans les problèmes d'électromagnétisme [10] et notamment pour les antennes [11,12], de même que dans différents autres domaines.

II.1.1 - Principe de la méthode

La méthode consiste à transformer une équation intégral-différentielle en un système matriciel plus commode à résoudre. Soit l'équation :

$$L(f) = e \quad (\text{II-1})$$

où L : l'opérateur intégral-différentiel linéaire et continu
 f : la fonction inconnue
 e : la fonction excitation connue.

On construit :

deux bases de fonctions $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, b_N)$ b_n : fonction base
 $(t_1, t_2, \dots, t_m, \dots, t_M)$ t_m : fonction test

et un produit scalaire $\langle h, g \rangle$ généralement on prend

$$\langle h, g \rangle = \int_D h(x) \cdot g(x) dx$$

D : domaine de définition de l'opérateur L .

La fonction inconnue est projetée sur les fonctions base :

$$f = \sum_{n=1}^N \alpha_n b_n \quad (\text{II-2})$$

Cette somme n'est qu'une approximation de la fonction et elle est d'autant plus précise que N est grand. Les inconnus sont maintenant les coefficients α_n . La combinaison des équations (II-1) et (II-2) nous donne :

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n L(b_n) = e \quad (\text{II-3})$$

Cette dernière équation est projetée à son tour sur les fonctions test par l'intermédiaire du produit scalaire, ce qui mène à :

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \langle L(b_n), t_m \rangle = \langle e, t_m \rangle \quad (\text{II-4})$$

On remarque donc que l'on obtient un système matriciel qui s'exprime par :

$$[l_{mn}] [\alpha_n] = [e_m] \quad (\text{II-5})$$

avec :

- $[\alpha_n]$: matrice colonne des coefficients inconnus.
- $[e_m]$: matrice colonne d'excitation dont le terme $e_m = \langle e, t_m \rangle$.
- $[l_{mn}]$: matrice d'ordre $N \times M$ et dont le terme $l_{mn} = \langle L(b_n), t_m \rangle$.

Le système matriciel n'admet de solution que si $M \geq N$, les valeurs de M et N sont généralement prises égales. Les fonctions $L(b_n)$ étant indépendantes, la matrice $[l_{mn}]$ n'est pas singulière et son inverse existe d'où :

$$[\alpha_n] = [l_{mn}]^{-1} [e_m] \quad (\text{II-6})$$

Le choix des fonctions base et test est arbitraire mais il est évident que la simplicité des calculs et la rapidité de la convergence dépendent très fortement des fonctions choisies. Parmi les couples de fonctions base-test utilisés on rencontre le plus souvent :

- la méthode "point - segment" où les fonctions base sont des impulsions rectangulaires et les fonctions test sont des diracs ;

- la méthode Galerkin où le couple base-test est formé de fonctions identiques, les plus couramment citées sont les fonctions triangulaires linéaires ou sinusoidales.

Le choix de ces fonctions a donné lieu à de nombreuses études comparatives [13,14]. En ce qui nous concerne, nous avons travaillé avec des fonctions triangulaires linéaires parce que les expressions des calculs restent simples et les précisions atteintes sont de l'ordre du centième avec un pas de discrétisation voisin du dixième de longueur d'onde.

II.1.2 - Application de la méthode dans le cas d'une antenne filaire

Nous montrerons dans les paragraphes suivants que le champ incident E_z^i pour une antenne et la distribution du courant $I(z')$ sur celle-ci sont reliés par une équation intégral-différentielle du type :

$$E_z^i = Z(I(z')) \quad (II-7)$$

où Z est l'opérateur, $I(z')$ l'inconnu et E_z^i l'excitation. On approxime le courant $I(z')$ en le projetant sur les fonctions base :

$$I(z') = \sum_{n=1}^N I_n b_n(z') \quad (II-8)$$

$$\text{d'où } E_z^i = \sum_{n=1}^N I_n Z(b_n(z')) \quad (II-9)$$

La projection de la formule (II-9) sur les fonctions tests au moyen du produit scalaire donne :

$$\langle E_z^i, t_m(z) \rangle = \sum_{n=1}^N I_n \langle z(b_n(z')), t_m(z) \rangle \quad (\text{II-10})$$

$$m = 1, 2, \dots, N$$

Ce système sous forme matricielle s'exprime par :

$$[V] = [Z] [I] \quad (\text{II-11})$$

$$[V] = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_m \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix} : \text{Matrice de tension généralisée}$$

$$v_m = \langle E_z^i, t_m(z) \rangle = \int_L E_z^i(z) t_m(z) dz \quad (\text{II-12})$$

L : longueur de l'antenne.

$$[I] = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdot \\ i_n \\ \cdot \\ i_N \end{pmatrix} : \text{Distribution du courant inconnu.}$$

$$[Z] = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} & \dots & z_{2N} \\ \cdot & & & & & \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mn} & \dots & z_{mN} \\ z_{N1} & z_{N2} & \dots & z_{Nn} & \dots & z_{NN} \end{pmatrix} : \text{Matrice impédance généralisée}$$

$$z_{mn} = \langle z(b_n(z')), t_m(z) \rangle = \int_L z(b_n(z')) t_m(z) dz \quad (\text{II-13})$$

A partir de l'équation matricielle (II-11) on déduit immédiatement la matrice du courant :

$$[I] = [Y] [V] \quad (\text{II-14})$$

avec $[Y] = [Z]^{-1}$: matrice admittance généralisée.

Lorsqu'une antenne fonctionne en réception, c'est-à-dire plongée dans un champ électromagnétique, le vecteur excitation $[V]$ est déduit de la formule (II-12) en fonction du champ tangentiel incident sur sa surface. Dans le cas d'une antenne fonctionnant en émission le champ exciteur est localisé sur le ou les éléments où est branché le générateur de tension et est nul sur tous les autres éléments. Si le générateur est appliqué sur un seul élément le vecteur d'alimentation $[V]$ devient :

$$[V] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ v_k^e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_k^e = \langle E_z^e, t_k(z) \rangle$ est proportionnelle à la différence de potentiel entre les extrémités du segment k . Le facteur de proportionnalité dépend de la fonction test choisie. Il est égal à la longueur du segment lorsque la fonction test est un dirac et à 1 pour des fonctions triangle. C'est ce dernier cas que nous choisissons dans nos applications.

Le vecteur courant [I], quant à lui, est donné par :

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdot \\ i_k \\ \cdot \\ i_N \end{pmatrix} = v_k^e \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \cdot \\ y_{kk} \\ \cdot \\ y_{Nk} \end{pmatrix} \quad (\text{II-15})$$

Donc le vecteur courant est déterminé par la colonne k de la matrice admittance généralisée [Y].

De plus :

$$\text{- l'impédance d'entrée : } z_e^k = \frac{v_k^e}{i_k} = \frac{\sum_{n=1}^N z_{kn} i_n}{i_k} \quad (\text{II-16})$$

$$\text{- l'admittance d'entrée : } y_e^k = \frac{1}{z_e^k} = \frac{i_k}{v_k^e} = y_{kk} \quad (\text{II-17})$$

i_k étant l'intensité de l'élément d'entrée.

Il est bien évident que les valeurs de i_k , z_e^k et y_e^k dépendent, comme nous l'avons vu pour la tension v_k^e , des fonctions utilisées dans la méthode des moments.

Les éléments de la diagonale principale de la matrice [Y] donnent donc les admittances d'entrée de l'antenne. Ces admittances ne dépendent pas de la tension appliquée à l'entrée et en régime de réception, elles sont dites admittances internes.

Ces dernières notions permettent une meilleure compréhension du fonctionnement de ces antennes tant à l'émission qu'à la réception, ainsi qu'une évaluation précise des champs émis et reçus.

Notons que la convergence en fonction du nombre de discrétisation N sera plus aisée à vérifier à partir du calcul de l'impédance ou l'admittance d'entrée. Ceci dans la mesure où le gap est suffisamment faible pour négliger les effets de bords sur l'élément d'alimentation et que l'impédance d'entrée ne dépend plus de sa longueur.

Remarque :

Il est bien sûr possible d'appliquer un générateur de courant au lieu du générateur de tension sur l'élément k . Pour résoudre le système dans ce cas il suffit de remplacer, dans la matrice $[Z]$ les éléments de la ligne (k) par des zéros sauf l'élément diagonal qui est remplacé par 1 :

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccccc}
 z_{11} & \dots & z_{1(k-1)} & z_{1k} & z_{1(k+1)} & \dots & z_{1N} \\
 \vdots & & & & & & \\
 z_{(k-1)1} & \dots & z_{(k-1)(k-1)} & z_{(k-1)k} & z_{(k-1)(k+1)} & \dots & z_{(k-1)N} \\
 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 z_{(k+1)1} & \dots & z_{(k+1)(k-1)} & z_{(k+1)k} & z_{(k+1)(k+1)} & \dots & z_{(k+1)N} \\
 \vdots & & & & & & \\
 z_{N1} & \dots & z_{N(k-1)} & z_{Nk} & z_{N(k+1)} & \dots & z_{NN}
 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c}
 i_1 \\
 \vdots \\
 i_{(k-1)} \\
 i_k \\
 i_{(k+1)} \\
 \vdots \\
 i_N
 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c}
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 i_k^e \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 V \\
 \\
 A \\
 V \\
 \\
 \end{array}
 \end{array}$$

i_k^e : intensité sur le segment d'entrée k

On a donc $v_k = \sum_{n=1}^N z_{kn} i_n$ et $z_k^e = \frac{v_k}{i_k^e} = \frac{\sum_{n=1}^N z_{kn} i_n}{i_k^e}$

II.2 - ANTENNE FILAIRE MINCE DANS UN MILIEU HOMOGENE ET INFINI

II.2.1 - Champ rayonné par l'antenne

L'antenne cylindrique représentée sur la figure (II-1) a son axe principal confondu avec l'axe oz . De longueur L et de rayon a , elle est supposée constituée d'un métal infiniment conducteur. z_i et z_s marquent les extrémités inférieure et supérieure de l'antenne.

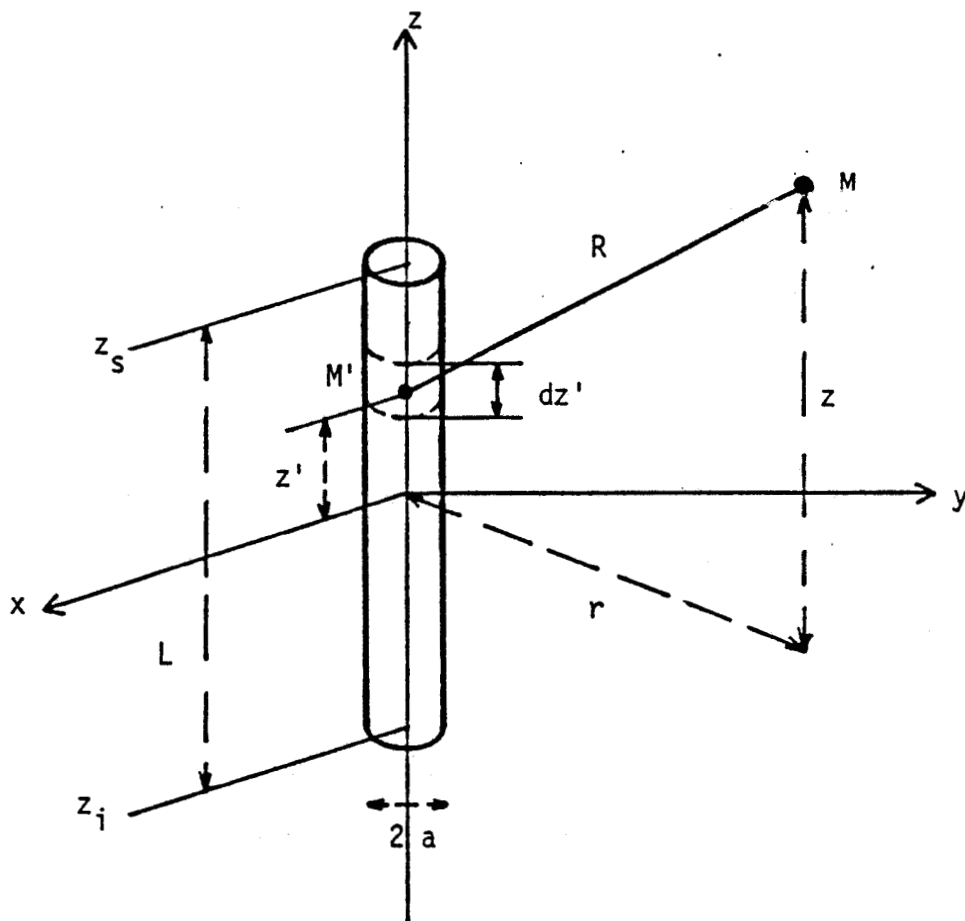


Figure II-1 : Antenne cylindrique dans un milieu homogène et infini.

Pour toutes les antennes filaires que nous aurons à traiter nous nous placerons toujours dans le cas des antennes filaires minces [15,16,17]. Nous ferons donc les hypothèses suivantes :

- Le rayon de l'antenne reste très faible vis-à-vis de la longueur d'onde λ dans le milieu de propagation :

$$a \ll \lambda$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{1}{f} \left[\frac{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 \epsilon_r^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right]^{-1/2} \quad (\text{II-18})$$

- Le diamètre de l'antenne est petit par rapport à sa longueur :

$$2a \ll L$$

- Le courant est nul aux extrémités de l'antenne :

$$I(z_1) = 0 \quad \text{et} \quad I(z_3) = 0$$

Il résulte de ces hypothèses que le courant est localisé de manière uniforme sur la circonférence de l'antenne avec une seule composante orientée suivant l'axe oz . Comme le rayon de l'antenne est faible devant la longueur on peut supposer que tout se passe comme si le courant était entièrement concentré le long de cet axe. Les effets de bords aux extrémités de l'antenne sont négligés.

D'autre part l'antenne peut être considérée comme une superposition de dipôles électriques élémentaires [18,19]. Le champ rayonné est donc la sommation des contributions de chacun des éléments. En faisant appel à la formule (I-4) du champ émis par un dipôle, E_{Σ} le champ rayonné par l'antenne est :

$$E_z^c(M) = \frac{1}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} \int_{z_1}^{z_s} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right) G(M, M') I(z') dz' \quad (\text{II-19})$$

M' : point courant sur l'antenne

M : point de réception.

Rappelons que $G(M, M') = \frac{e^{-\gamma R}}{R}$ et $R = [r^2 + (z-z')^2]^{1/2}$

Cette équation relie le champ E_z^c à la répartition du courant $I(z')$ qui est aussi une inconnue. L'évaluation précise du champ rayonné nécessite donc la connaissance de cette dernière.

II.2.2 - Formulation de l'équation intégrale de l'antenne

L'antenne est supposée de conductivité infinie, et cela implique que le champ tangentiel à sa surface soit nul. Si E_z^i est le champ incident

$$E_z^i + E_z^c = 0 \quad (\text{II-20})$$

Donc on peut relier le courant inconnu $I(z')$ au champ incident E_z^i connu en utilisant les formules (II-19) et (II-20) qui donnent :

$$E_z^i(z) = \frac{-1}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} \int_{z_1}^{z_s} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right) G(z, z') \right] I(z') dz' \quad (\text{II-21})$$

avec cette fois-ci le point M sur la surface de l'antenne d'où $r = a$ et $R = [a^2 + (z-z')^2]^{1/2}$

La formule ci-dessus est l'équation intégral-différentielle ou l'équation intégrale de POCKLINGTON pour une antenne filaire mince dans un milieu homogène et infini. Elle ne peut être résolue analytiquement et sa résolution numérique fait appel à la méthode des moments.

II.2.3 - Résolution de l'équation par la méthode des moments

L'application de la méthode des moments consiste à découper l'antenne en (N+1) segments Δ :

$$\Delta = \frac{L}{N + 1}$$

sur chacun de ces segments on définit les fonctions base et test. Nous avons pris ces fonctions égales à des fonctions triangle représentées sur la figure (II-2) et définies par :

$$b_n(z') = \begin{cases} \frac{\Delta - |z' - z_n|}{\Delta} & ; \text{ pour } z' \in [z_{n-1}, z_{n+1}] \\ 0 & ; \text{ partout ailleurs.} \end{cases} \quad (\text{II-22})$$

$$t_m(z) = \begin{cases} \frac{\Delta - |z - z_m|}{\Delta} & ; \text{ pour } z \in [z_{m-1}, z_{m+1}] \\ 0 & ; \text{ partout ailleurs.} \end{cases} \quad (\text{II-23})$$

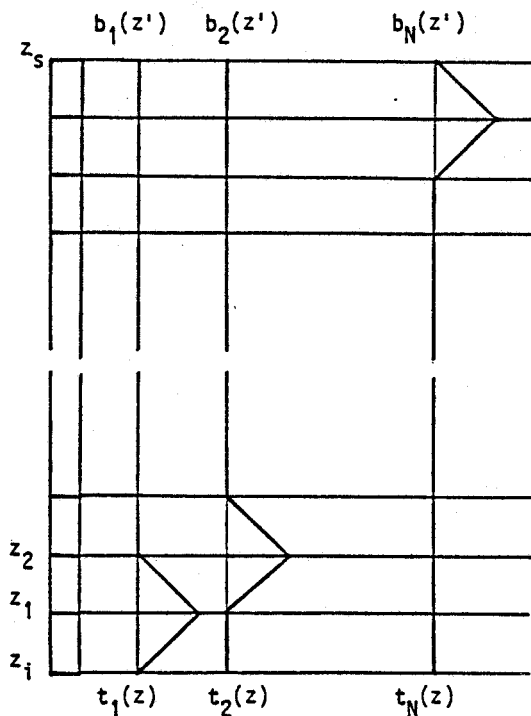


Figure II-2 : représentation des fonctions base et test.

Le courant $I(z')$ est approximé par

$$I(z') = \sum_{n=1}^N I_n b_n(z') \quad (\text{II-24})$$

en introduisant cette formule dans (II-21) on obtient

$$E_z^j(z) = \frac{-1}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} \int_{z_i}^{z_s} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right) G(z, z') \right] \left[\sum_{n=1}^N I_n b_n(z') \right] dz'$$

$$E_z^j(z) = \frac{-1}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} \sum_{n=1}^N I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right) G(z, z') \right] b_n(z') dz'$$

L'intégrale sur $[z_i, z_s]$ est réduite sur $[z_{n-\Delta}, z_{n+\Delta}]$ parce que la fonction $b_n(z')$ est nulle partout sauf sur l'intervalle $[z_{n-\Delta}, z_{n+\Delta}]$. La projection sur les fonctions test au moyen du produit scalaire donne

$$\langle E_z^j(z), t_m(z) \rangle = \frac{-1}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} \int_{z_i}^{z_s} \left(\sum_{n=1}^N I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right) G(z, z') \right] b_n(z') dz' \right)$$

... $t_m(z) dz$

$$\langle E_{\frac{1}{2}}^i(z), tm(z) \rangle = \frac{-1}{4\pi(\sigma+j\omega\epsilon)} \sum_{n=1}^N I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left(\int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right) G(z, z') \right] tm(z) dz \right) \dots b_n(z') dz' \quad (II-25)$$

$$\text{avec } \langle E_{\frac{1}{2}}^i(z), tm(z) \rangle = \int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} E_{\frac{1}{2}}^i(z) tm(z) dz$$

On suppose [20] que Δ est suffisamment petit pour que le champ reste constant sur l'intervalle $[z_{m-\Delta}, z_{m+\Delta}]$ ainsi pour le terme de gauche on a

$$\int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} E_{\frac{1}{2}}^i(z) \frac{\Delta - |z - z_m|}{\Delta} dz = E_{\frac{1}{2}}^i(z_m) \int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} \frac{\Delta - |z - z_m|}{\Delta} dz \quad (II-26)$$

$$= \Delta \cdot E_{\frac{1}{2}}^i(z_m) = V_m$$

Outre la précédente approximation, les calculs développés en annexe 3 montrent que les fonctions triangles permettent d'éviter le calcul de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, et que l'intégrale double est réduite en intégrale simple. Ces calculs mènent à :

$$\Delta \cdot E_{\frac{1}{2}}^i(z_m) = \frac{-1}{4\pi(\sigma+j\omega\epsilon)\Delta^2} \left(\sum_{n=1}^N I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} [G(R_1) - (2+\gamma^2\Delta^2)G(R_2) + G(R_3)] \dots \dots [\Delta - |z' - z_n|] dz' \right) \quad (II-27)$$

$$R_1 = [a^2 + (z_m - \Delta - z')^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [a^2 + (z_m - z')^2]^{1/2}$$

$$R_3 = [a^2 + (z_m + \Delta - z')^2]^{1/2}$$

avec $m = 1, 2, \dots, N$ d'où l'on pose :

$$[V] = [Z] \times [I]$$

Les impédances mutuelles de la matrice $[Z]$ s'expriment sous la forme :

$$Z_{mn} = \frac{-1}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)\Delta^2} \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} [G(R_1) - (2 + \gamma^2 \Delta^2)G(R_2) + G(R_3)] [\Delta - |z_n - z'|] dz \quad (\text{II-28})$$

Notons qu'il est possible d'aboutir au même résultat en faisant l'approximation des différences finies :

$$\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} = \frac{g(z-dz) - 2g(z) + g(z+dz)}{dz^2}$$

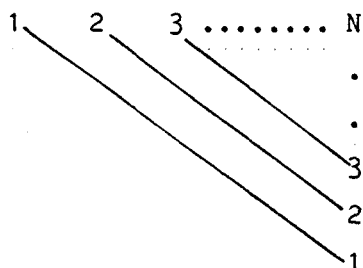
et en prenant la variation en z , dz , égale à Δ , on montre [21] que la convergence des calculs est fortement influencée par le choix de dz et que la convergence la plus rapide est obtenue justement pour $dz = \Delta$.

Il est important de constater que deux éléments de la matrice $[Z]$ sont égaux lorsqu'ils sont calculés pour des distances égales. Ces distances s'expriment toutes sous la forme :

$$R^2 = [a^2 + (z_m - z_n)^2]$$

d'où $R = R'$ si $|m-n| = |m'-n'|$.

On en déduit non seulement que la matrice est symétrique puisque $z_{mn} = z_{nm}$ -les effets mutuels entre deux segments sont égaux- mais aussi que $z_{mn} = z_{(m+k)(n+k)}$ car la distance entre z_m et z_n est la même qu'entre z_{m+k} et z_{n+k} . La matrice est donc du type toeplitz. Le calcul d'une ligne ou d'une colonne suffit pour remplir l'ensemble de la matrice comme l'indique le modèle suivant :



Le temps de calcul est, de ce fait, proportionnel à N et non à N^2 et en plus on réalise un gain de temps au moment de la procédure d'inversion. Lorsque la matrice est inversée, le calcul de la distribution du courant et de l'impédance d'entrée ou interne est immédiat.

II.2.4 - Exemples numériques

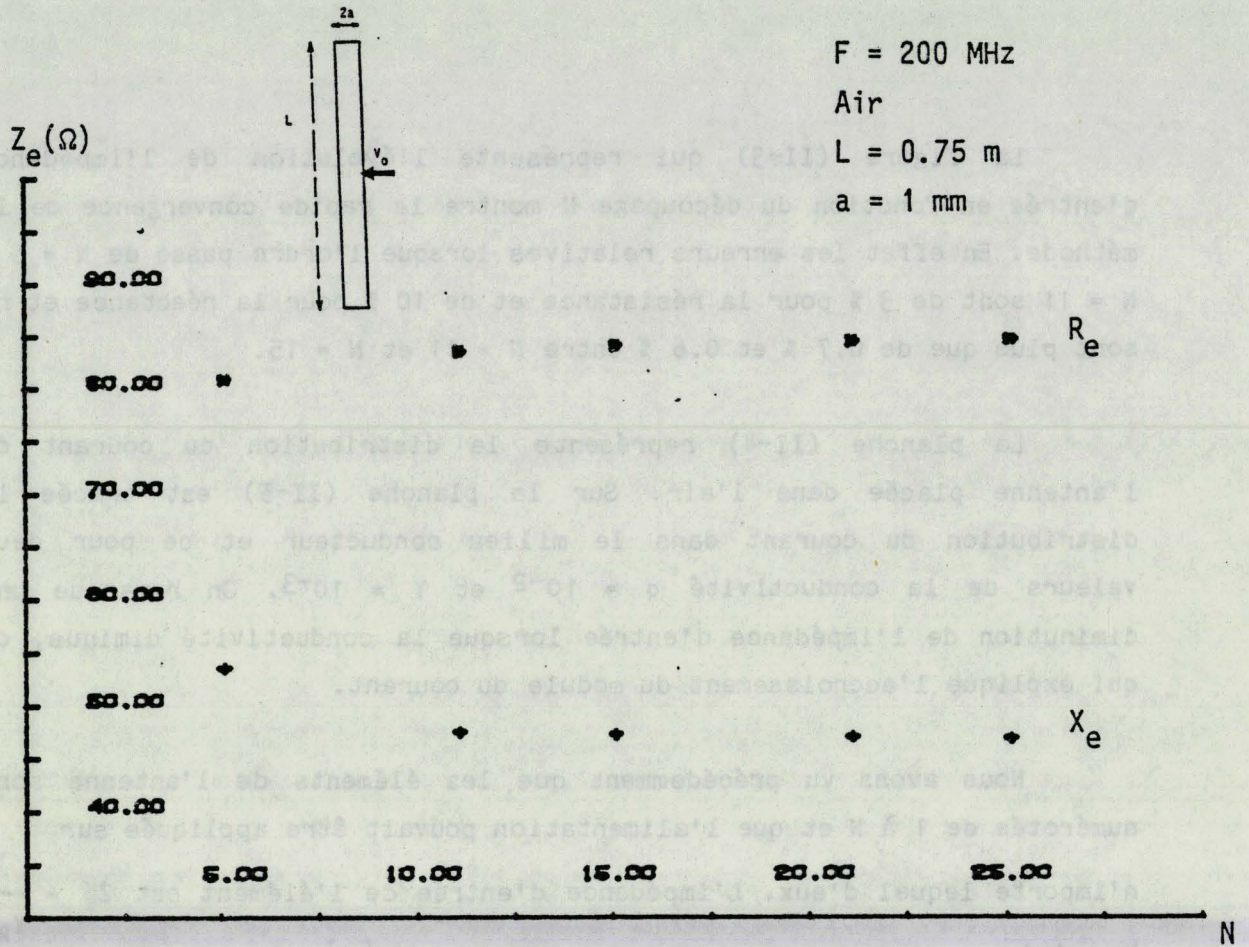
Nous avons tracé sur les planches (II-3,6) les résultats concernant deux antennes demi-ondes fonctionnant à une fréquence de 200 MHz. L'une placée dans l'air ($\sigma = 0$ S/m et $\epsilon_r = 1$) et l'autre dans un milieu conducteur ($\sigma = 10^{-2}$ S/m et $\epsilon_r = 9$). Leurs longueurs, qui sont des demi-longueurs d'ondes, et compte tenu de la formule (II-18), elles sont égales respectivement à 0,75 m et 0,25 m. Les deux antennes ont un rayon $a = 1$ mm et sont alimentées en leur milieu par une tension sinusoïdale d'amplitude $V_0 = 1$ volt.

La figure (II-3) qui représente l'évolution de l'impédance d'entrée en fonction du découpage N montre la rapide convergence de la méthode. En effet les erreurs relatives lorsque l'ordre passe de N = 5 à N = 11 sont de 3 % pour la résistance et de 10 % pour la réactance et ne sont plus que de 0.7 % et 0.6 % entre N = 11 et N = 15.

La planche (II-4) représente la distribution du courant de l'antenne placée dans l'air. Sur la planche (II-5) est tracée la distribution du courant dans le milieu conducteur et ce pour deux valeurs de la conductivité $\sigma = 10^{-2}$ et $\gamma = 10^{-3}$. On remarque une diminution de l'impédance d'entrée lorsque la conductivité diminue, ce qui explique l'accroissement du module du courant.

Nous avons vu précédemment que les éléments de l'antenne sont numérotés de 1 à N et que l'alimentation pouvait être appliquée sur n'importe lequel d'eux. L'impédance d'entrée de l'élément est $Z_e^k = \frac{1}{Y_{kk}}$ élément diagonal de la matrice admittance [Y] de l'antenne. Sur la planche (II-6), vu la symétrie de la courbe nous avons représenté les impédances d'entrée des 13 premiers éléments d'une antenne découpée en 25 éléments. On remarque une diminution de l'impédance d'entrée quand on se déplace de l'élément extrême vers l'élément central. Le courant sera donc d'amplitude d'autant plus faible que le générateur est loin du centre de l'antenne.

Dans toutes les configurations étudiées, à la fréquence de travail choisie, le milieu se comporte comme un diélectrique à pertes ($\omega\epsilon \gg \sigma$). La longueur d'onde dans ces conditions est pratiquement égale à $\frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_r}}$. Pour des antennes demi-ondes on remarque, en comparant les figures (II-5) et (II-7), que le courant croît avec ϵ_r . Par contre, si l'on garde une longueur d'antenne constante alors que ϵ_r croît, on constate une diminution du courant ainsi qu'une déformation de sa variation puisque l'antenne trop longue n'est plus adaptée. Figure (II-8).



-Figure II-3 : Convergence de la méthode en fonction du découpage.

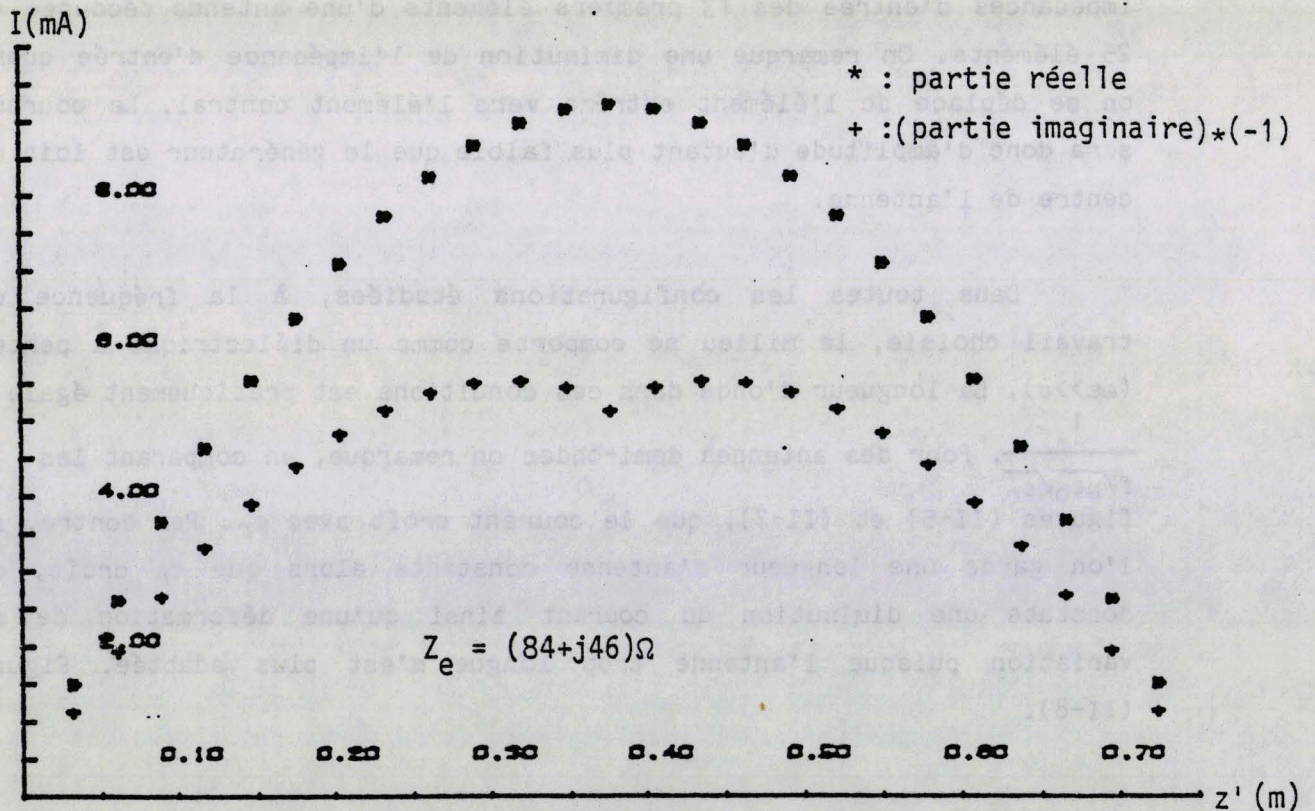


Figure II-4 : Distribution du courant sur une antenne dans le vide.

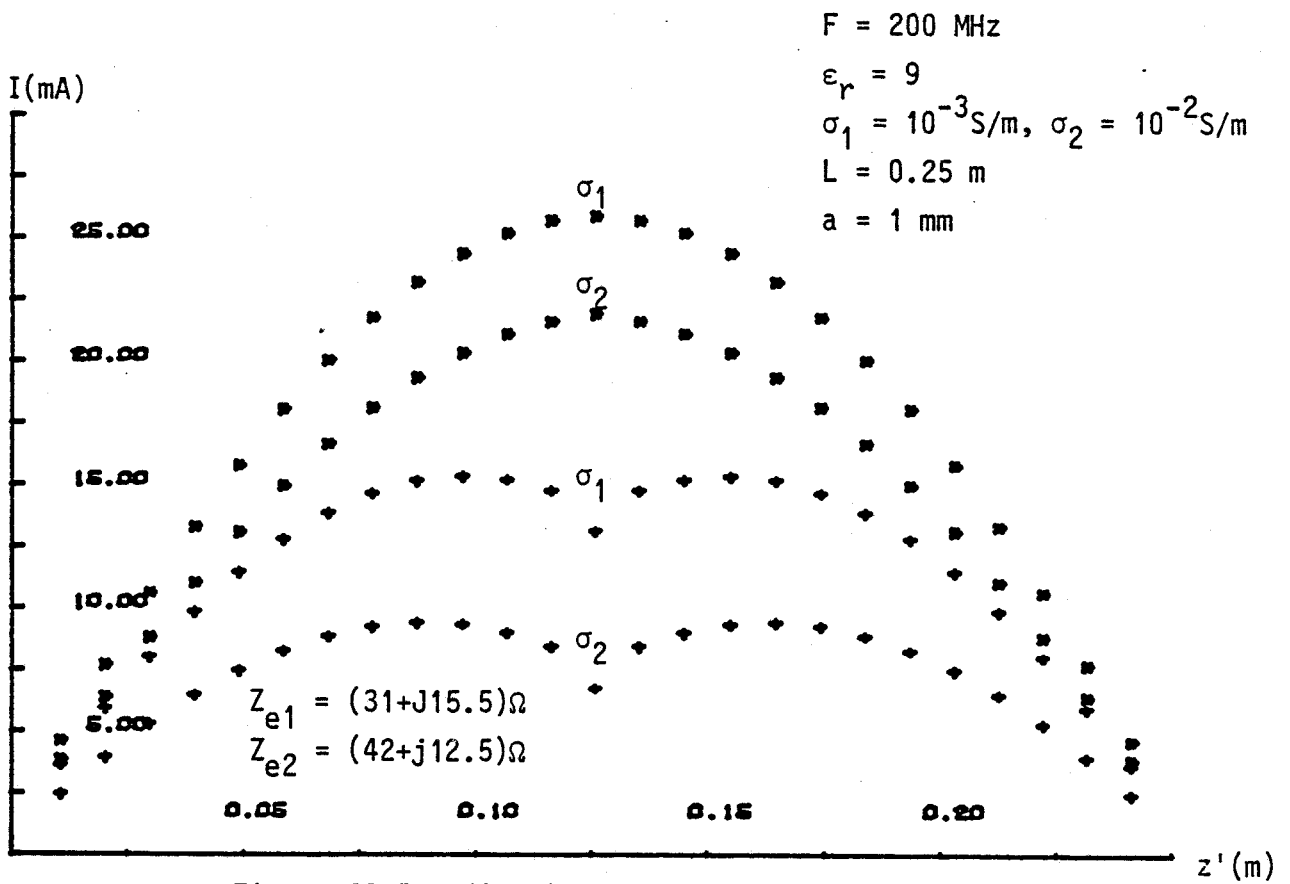


Figure II-5 : distribution du courant sur une antenne dans un milieu conducteur.

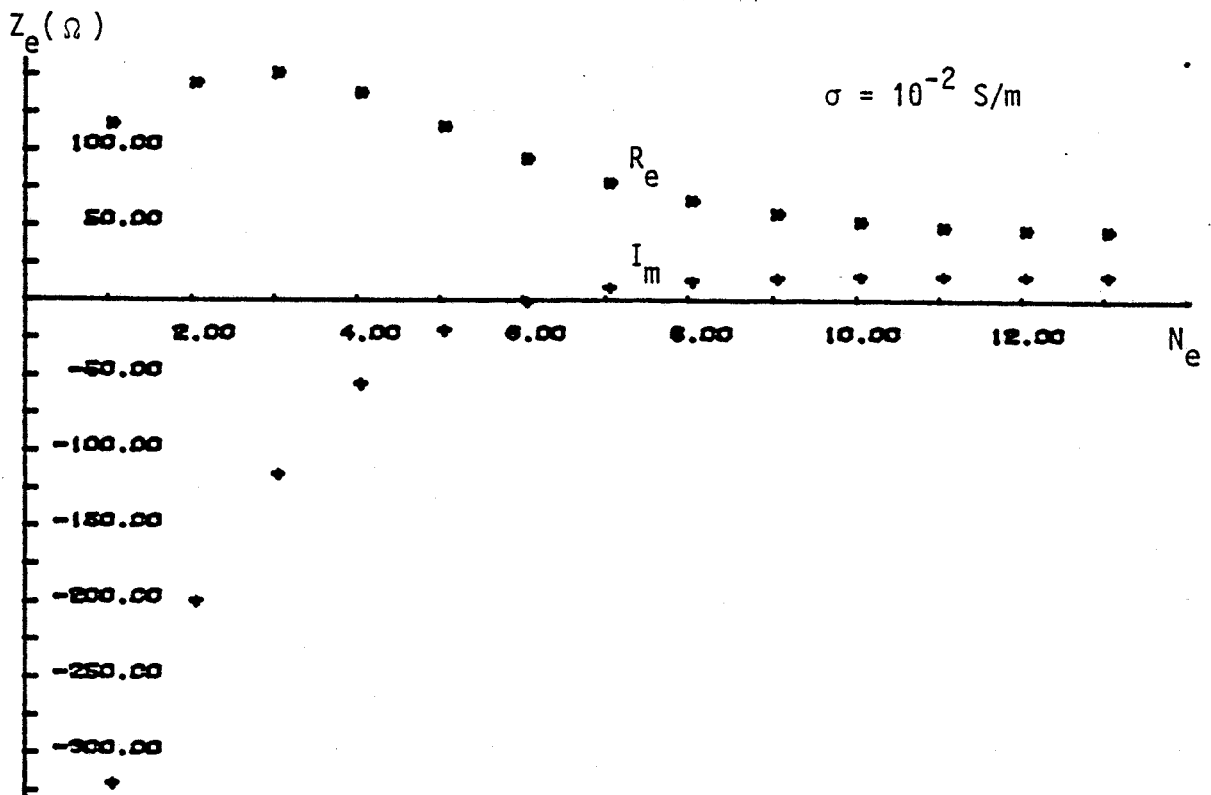


Figure II-6 : Variation de l'impédance d'entrée selon la position du générateur sur l'antenne.

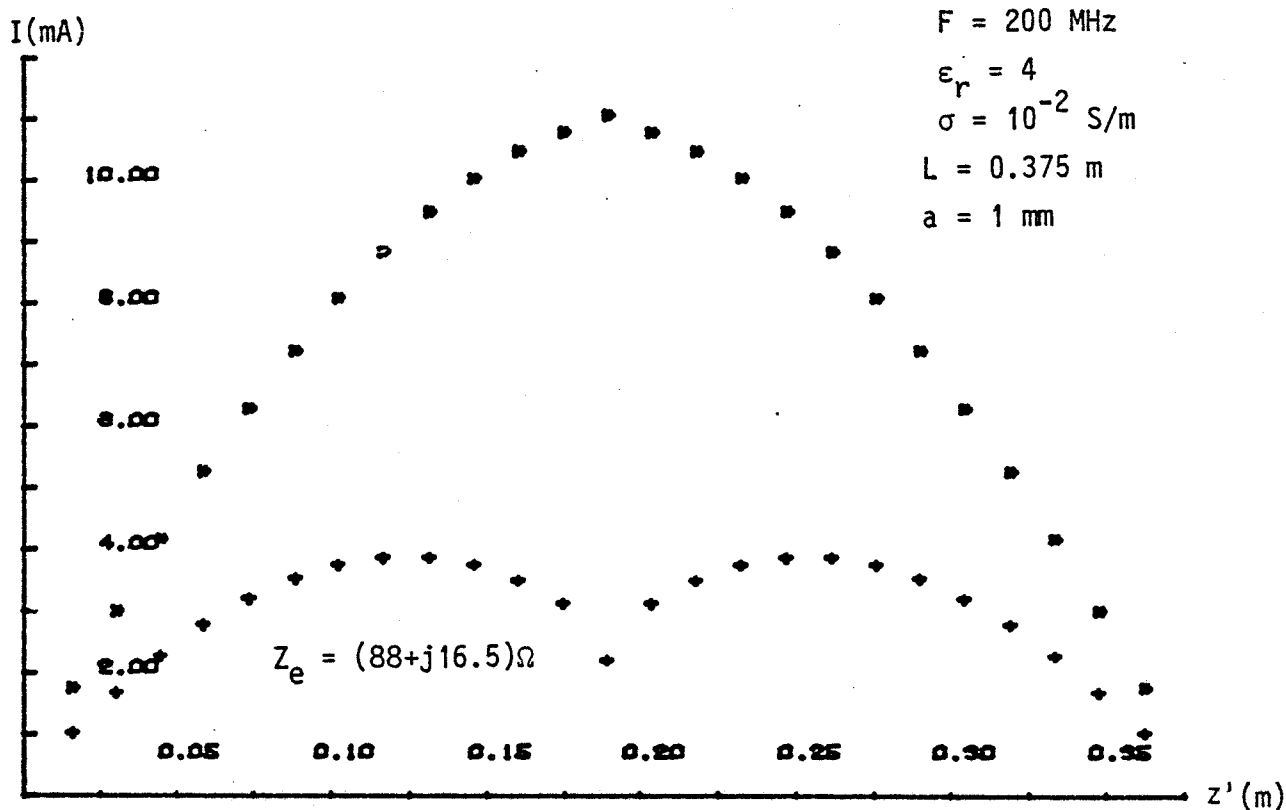


Figure II.7 : Distribution du courant sur une antenne demi-onde.

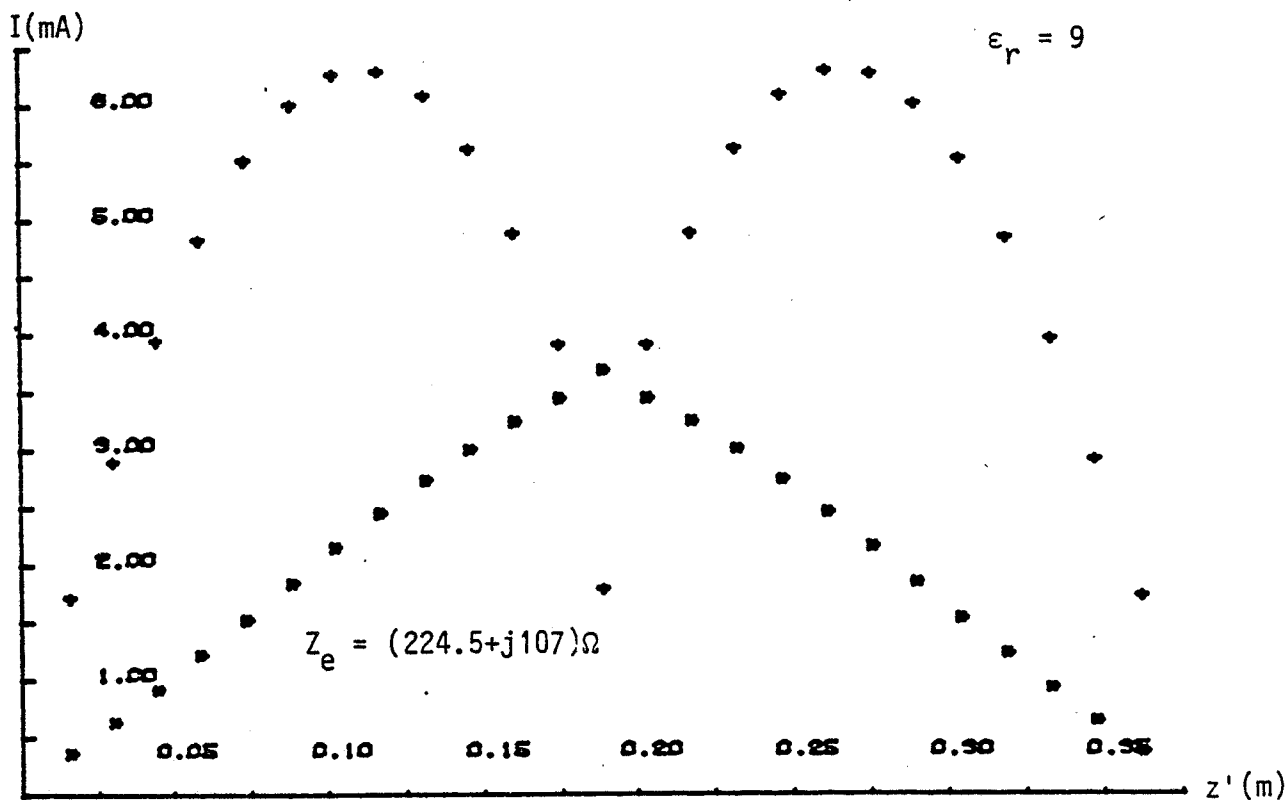


Figure II.8 : Distribution du courant sur une antenne de longueur supérieure à la demi longueur d'onde.

Dans tous les cas traités la condition d'antennes minces ($\frac{2a}{L} < 100$) [13] est largement satisfaite. Dans le cas où cette condition n'est pas remplie les résultats sont erronés et une seconde intégration autour de la circonférence est indispensable. C'est là une limitation de la méthode en très hautes fréquences pour les antennes demi-onde car le rayon de l'antenne ne peut être diminué de manière inconsidérée.

II.3 - ANTENNE FILAIRE MINCE DANS UN DEMI-MILIEU

Dans la première partie de ce chapitre nous avons explicité l'ensemble des hypothèses et méthodes que nous utilisons pour la modélisation d'une antenne filaire mince. Ces différentes hypothèses et méthodes sont de caractère très général et sont applicables quelle que soit la constitution du milieu de propagation. Dans cette seconde partie nous serons donc souvent amenés à faire appel aux notions citées plus haut.

II.3.1 - Calcul de la matrice impédance

II.3.1.1 - Formulation de l'équation intégrale

L'antenne se trouve entièrement dans l'un des deux demi-milieus (1) ou (2) dont les caractéristiques électriques sont indiquées sur la figure (II-9). Rappelons que l'antenne placée sur l'axe oz est un fil métallique de conductivité infinie.

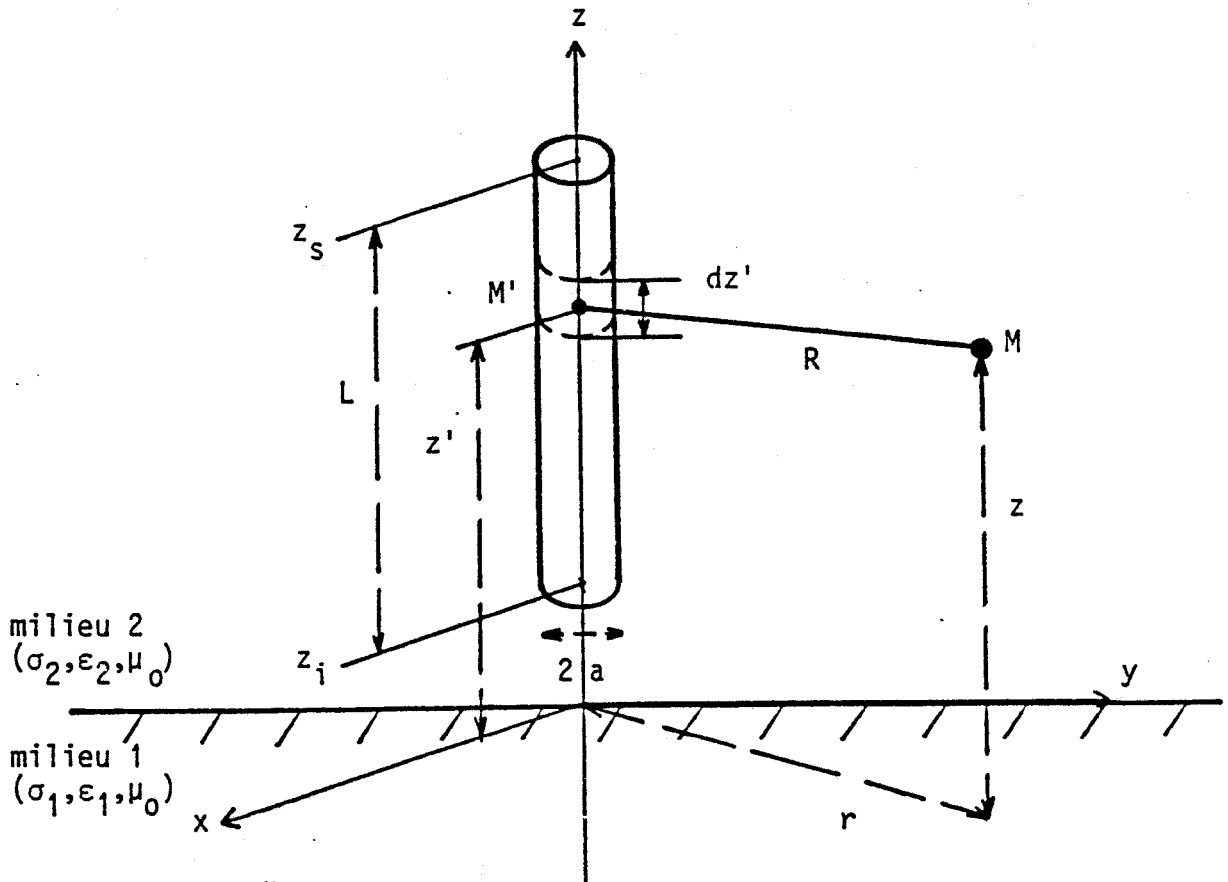


Figure II-9 : Antenne cylindrique dans un demi-milieu.

Nous avons vu que tout se passe comme si le courant était confiné dans l'axe principal. Mis à part le fait que l'on change les fonctions de Green pour tenir compte des deux milieux, la procédure de calcul reste la même que précédemment. Dans ce cas le rayonnement d'un dipôle fait intervenir les intégrales de Sommerfeld. Pour une antenne située dans le milieu (1), on obtient en écrivant la condition $E_z^i + E_z^r = 0$ sur la surface de l'antenne :

$$E_z^i = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_T^2} \int_{z_i}^{z_s} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_T^2 \right) [G_{11} - G_{12} - \gamma_2^2 V_{11}] I(z') dz' \quad (\text{II-29})$$

$$G_{ii} = \frac{e^{-\gamma_i R_i}}{R_i} \quad i = 1, 2$$

$$R_1 = [a^2 + (z' + z)^2]^{1/2} \quad z' > 0$$

$$R_2 = [a^2 + (z' - z)^2]^{1/2} \quad z < 0$$

$$V_{11} = -2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-U_1(z'-z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda$$

Si l'antenne est située dans le milieu (2) il suffit d'intervertir les indices 1 et 2. Les expressions de R_1 et R_2 restent les mêmes avec z et z' tous positifs.

II.3.1.2 - Résolution de l'équation par la méthode des moments

La résolution de l'équation du demi-milieu (1) (II-29) ou de demi-milieu (2) se fait de manière similaire à celle effectuée dans le cas du milieu infini. Les fonctions base et test sont les fonctions triangulaires définies par (II-21,22) et représentées sur la figure (II-2). Le calcul qui suit est mené pour l'antenne placée dans le milieu (1). Après le découpage en éléments Δ , le courant est remplacé par son développement :

$$I(z') = \sum_{n=1}^N I_n b_n(z')$$

dans (II-29) ce qui donne :

$$E_{1z}^{\dagger} = - \frac{j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_1^2} \sum_{n=1}^N I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) [G_{11} - G_{12} - \gamma_2^2 V_{11}] b_n(z') dz' \quad (\text{II-30})$$

de la projection sur les fonctions test on obtient :

$$\langle E_z^{\dagger}(z), t_m(z) \rangle = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_f^2} \sum_{n=1}^N I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left(\int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) [G_{11} - G_{12} - \gamma_f^2 V_{11}] \dots \right. \\ \left. \dots t_m(z) dz \right) b_n(z') dz' \quad (II-31)$$

Le système matriciel équivalent est :

$$[V] = [Z] [I]$$

avec les éléments de la matrice tension :

$$V_m = \int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} E_z^{\dagger}(z) t_m(z) dz = \Delta \cdot E_z^{\dagger}(z_m)$$

et ceux de la matrice impédance :

$$Z_{mn}^1 = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_f^2} \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left(\int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) [G_{11} - G_{12} - \gamma_f^2 V_{11}] t_m(z) dz \right) b_n(z') dz' \quad (II-32)$$

Comme nous l'avons vu précédemment le segment Δ est supposé suffisamment petit pour que les variations du champ sur l'intervalle d'intégration restent faibles. Il résulte des calculs développés dans l'annexe 3 l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 z_{mn}^1 = & \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_f^2\Delta^2} \left(\int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [G_{11}(R_{11}) - (2+\gamma_f^2\Delta^2)G_{11}(R_{12}) + G_{11}(R_{13})](\Delta - |z' - z_n|) dz' \right. \\
 & - \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [G_{12}(R_{21}) - (2+\gamma_f^2\Delta^2)G_{12}(R_{22}) + G_{12}(R_{23})](\Delta - |z' - z_n|) dz' \\
 & + 2\gamma_f^2 \int_0^\infty \left[e^{u_1\Delta} + e^{-u_1\Delta} - (2+\gamma_f^2\Delta^2) \right] \left[e^{u_1\Delta} + e^{-u_1\Delta} - 2 \right] \dots \\
 & \dots \left. \frac{e^{-u_1(z_n - z_m)}}{\gamma_f u_2 + \gamma_f^2 u_1} \frac{\lambda J_0(\lambda r)}{u_f^2} d\lambda \right)
 \end{aligned}$$

(II-33)

$$\begin{aligned}
 \text{avec } R_{11} &= [a^2 + (z' + z_m - \Delta)^2]^{1/2} & R_{21} &= [a^2 + (z' - z_m + \Delta)^2]^{1/2} \\
 R_{12} &= [a^2 + (z' + z_m)^2]^{1/2} & R_{22} &= [a^2 + (z' - z_m)^2]^{1/2} \\
 R_{13} &= [a^2 + (z' + z_m + \Delta)^2]^{1/2} & R_{23} &= [a^2 + (z' - z_m - \Delta)^2]^{1/2}
 \end{aligned}$$

N'oublions pas que $z' > 0 \rightarrow z_n > 0$
 et $z < 0 \rightarrow z_m < 0$

Pour une antenne située dans le milieu (2) les calculs se font d'une manière tout à fait similaire. Il suffit d'interchanger les indices 1 et 2 et de conserver les expressions des distances R_{ij} en imposant toutefois la condition $z > 0$.

On peut écrire alors :

$$z_{mn}^2 = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_2^2\Delta^2} \left(\int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [G_{22}(R_{21}) - (2+\gamma_2^2\Delta^2)G_{22}(R_{22}) + G_{22}(R_{23})](\Delta - |z' - z_n|) dz' \right.$$

$$- \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [G_{21}(R_{11}) - (2+\gamma_2^2\Delta^2)G_{21}(R_{12}) + G_{21}(R_{13})](\Delta - |z' - z_n|) dz' \right.$$

$$+ 2\gamma_2^2 \int_0^\infty [e^{u_2\Delta} + e^{-u_2\Delta} - (2+\gamma_2^2\Delta^2)] [e^{u_2\Delta} + e^{-u_2\Delta} - 2] \dots$$

$$\dots \frac{e^{-u_2(z_n+z_m)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \frac{\lambda \cdot J_0(\lambda a)}{u_2^2} d\lambda$$

(II-34)

$$R_{ij} \text{ (idem) } \begin{array}{l} z' > 0 \text{ --> } z_n > 0 \\ z > 0 \text{ --> } z_m > 0 \end{array}$$

Remarque : dans les R_{ij} l'indice i est associé au demi-milieu à partir duquel la distance R est mesurée pour atteindre le point M . Par contre l'indice j est une simple numérotation, c'est pour cela qu'il est inchangé dans les formules (II-33) et (II-34).

De par leur écriture les formules (II-33) et (II-34) montrent que la matrice $[Z]$, dans les deux cas, peut être décomposée en la somme de trois matrices :

$$[Z] = [Z^s] + [Z^i] + [Z^c] \quad (\text{II-35})$$

$[Z^s]$: matrice source correspondant au cas du milieu homogène et infini. Elle est donc du type Toeplitz et la connaissance d'une seule ligne suffit pour la reconstituer entièrement.

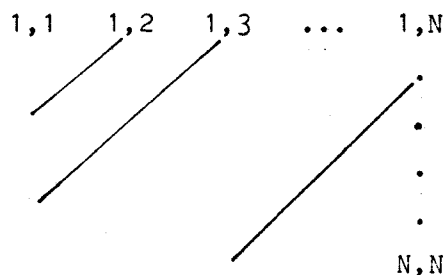
$[Z^i]$: matrice image.

$[Z^c]$: matrice complémentaire dont les éléments sont des intégrales de Sommerfeld.

Dans ces deux dernières matrices, deux éléments Z_{mn} et $Z_{m'n'}$ sont égaux lorsque $|z_m| + |z_n| = |z_{m'}| + |z_{n'}|$.

Ce qui revient à écrire : $m + n = m' + n'$

Les matrices se remplissent donc de la manière suivante :



ce qui nécessite le calcul de $2N-1$ éléments. Le temps de calcul de la matrice $[Z]$ est de ce fait proportionnel à N .

Les intégrales du type Sommerfeld sont calculées selon la même procédure que l'on a vu dans le chapitre I. Les intégrales sur l'intervalle $[z_n-\Delta, z_n+\Delta]$ sont effectuées avec un découpage automatique de l'intervalle par l'algorithme de Simpson. En régime d'émission ou de réception, la répartition du courant et l'impédance d'entrée ou interne sont calculées après inversion de la matrice.

II.3.2 - Résultats des Applications numériques

En premier lieu nous avons tracé la distribution du courant pour $F = 100$ MHz, $L = \frac{\lambda}{2} = 1,5$ m et $a = 0.0027 \lambda = 3.1$ mm. L'antenne est placée dans l'air ($\sigma_2 = 0$, $\epsilon_{r2} = 1$) à une hauteur $h_0 = 0.25 \lambda = 0.75$ m du sol ($\sigma_1 = 10^{-2}$ S/m, $\epsilon_{r1} = 9$). Ces conditions nous permettent de comparer nos résultats à ceux de Wait [22]. La planche (II-10) montre le bon accord entre les deux résultats.

Dans tous les exemples traités nous supposons que l'antenne est alimentée en son milieu par une tension de 1 volt.

Sur la planche (II-11), nous avons représenté les variations de l'impédance d'entrée d'une antenne placée dans l'air en fonction de la hauteur h_0 . Fonctionnant à 200 MHz l'antenne est de longueur $L = 0.75$ m et de rayon $a = 1$ mm. On constate que l'impédance Z_e ne varie pratiquement plus pour les hauteurs supérieures à la demi-longueur d'onde et tend vers sa valeur en milieu infini. Lorsque l'antenne se rapproche de la surface du sol ($\sigma = 10^{-2}$ S/m, $\epsilon_r = 9$) l'impédance diminue faiblement avant d'augmenter de manière sensible. Ceci se traduit, si on compare les planches (II-12) et (II-13) par une dissymétrie du courant et un affaiblissement de son amplitude pour les hauteurs très inférieures à $\lambda/2$.

Ces remarques restent les mêmes pour l'antenne placée dans le sol à ceci près que l'impédance d'entrée augmente faiblement avant de diminuer lorsque l'antenne se rapproche de la surface, comme on peut le voir sur la figure (II-14). Et ceci s'accompagne, contrairement au premier cas, par une augmentation de l'amplitude du courant.

En conclusion, pour les antennes distantes de l'interface de plus d'une demi-longueur d'onde, la distribution du courant n'évolue plus et l'approximation du milieu infini est justifiée.

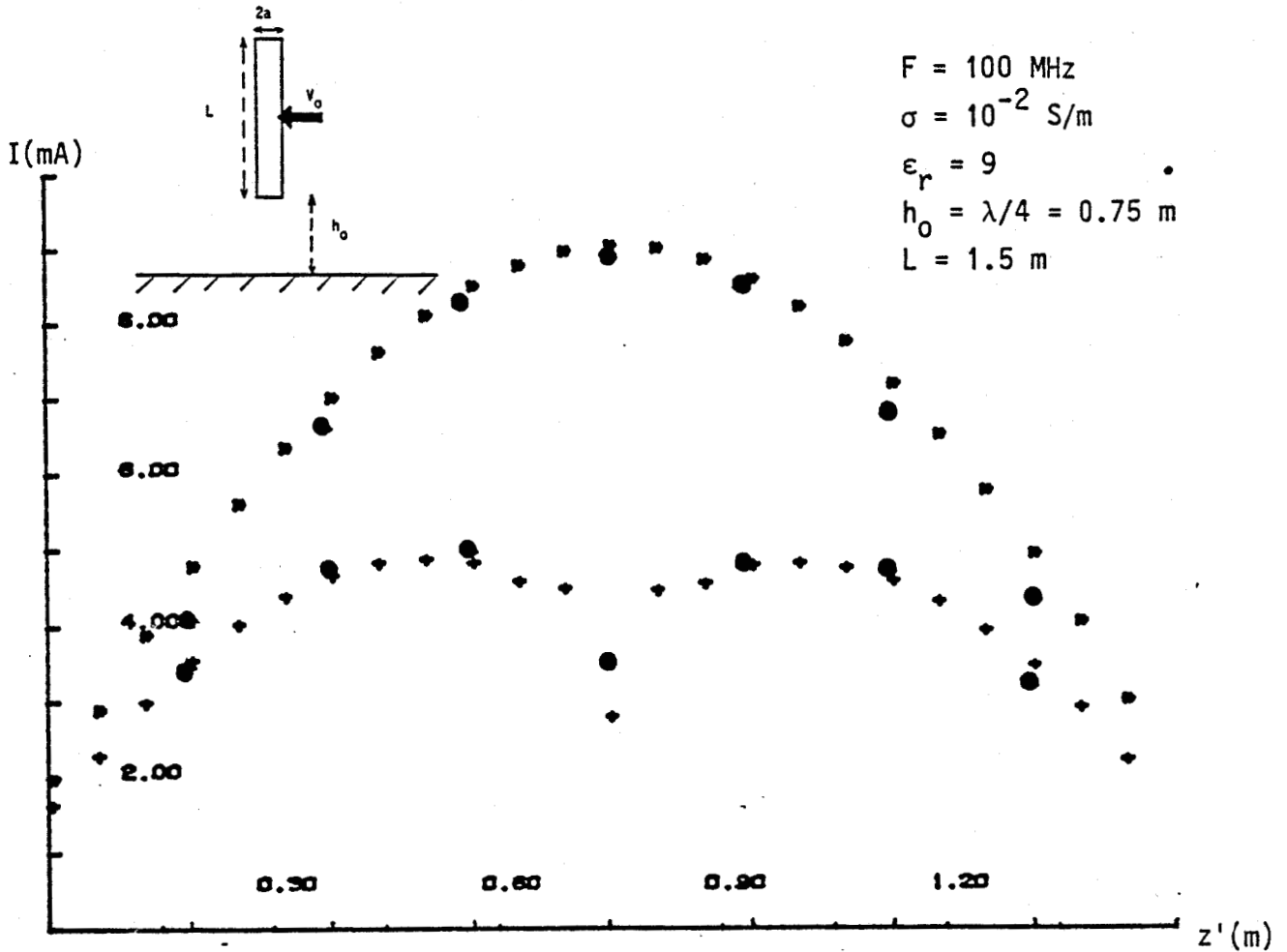


Figure II-10 : Comparaison avec le résultat de Wait (●)

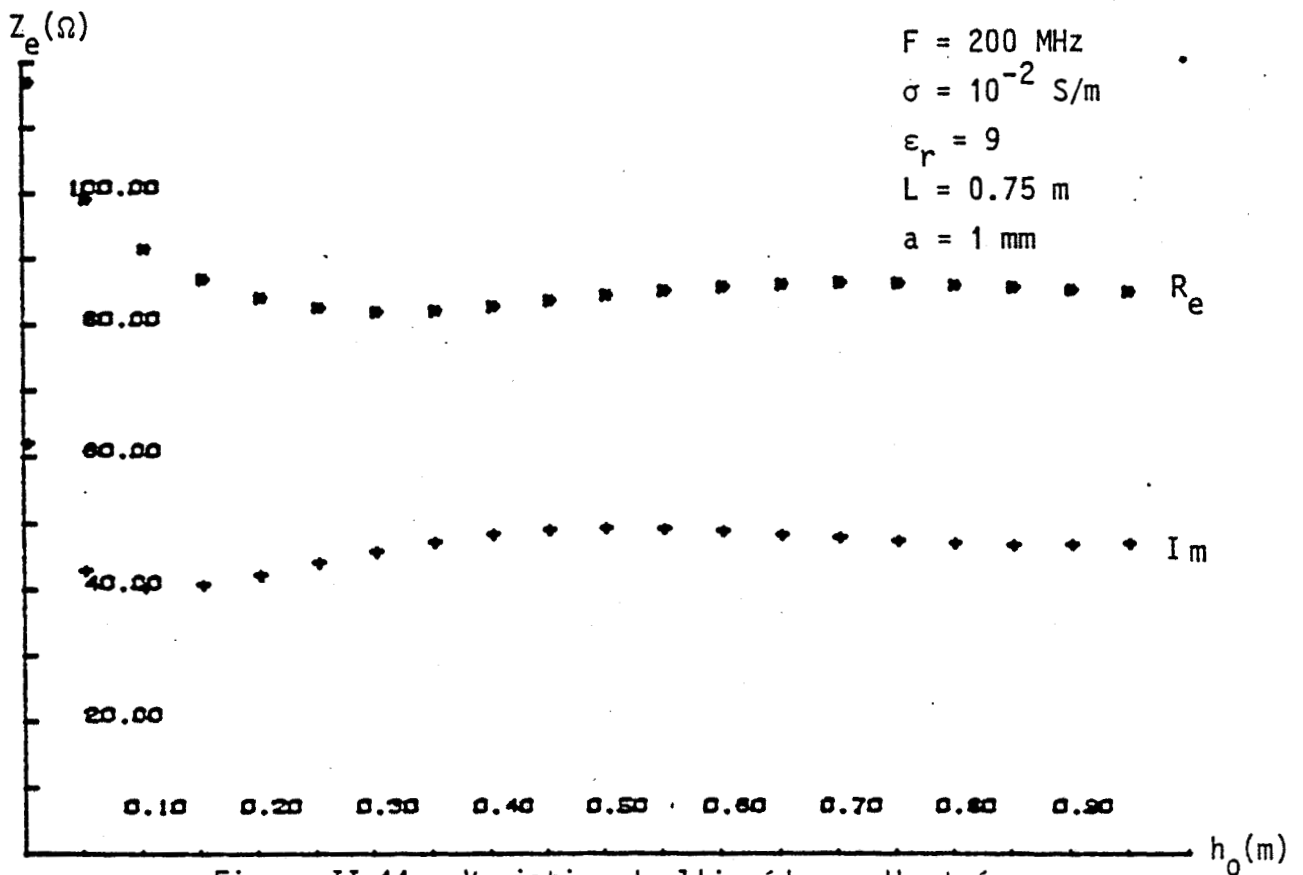


Figure II-11 : Variation de l'impédance d'entrée en fonction de la hauteur de l'antenne par rapport au sol.

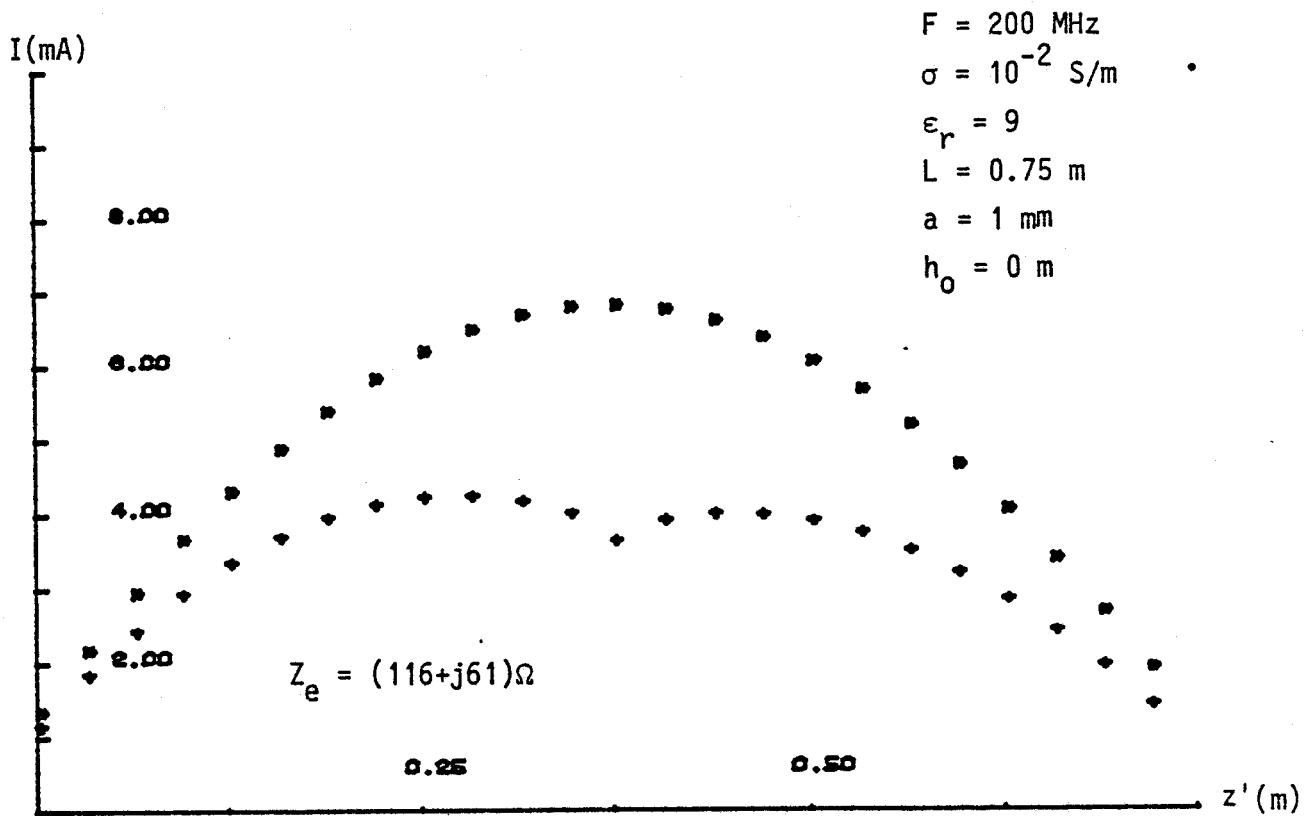


Figure II-12 : Distribution du courant sur une antenne au niveau du sol.

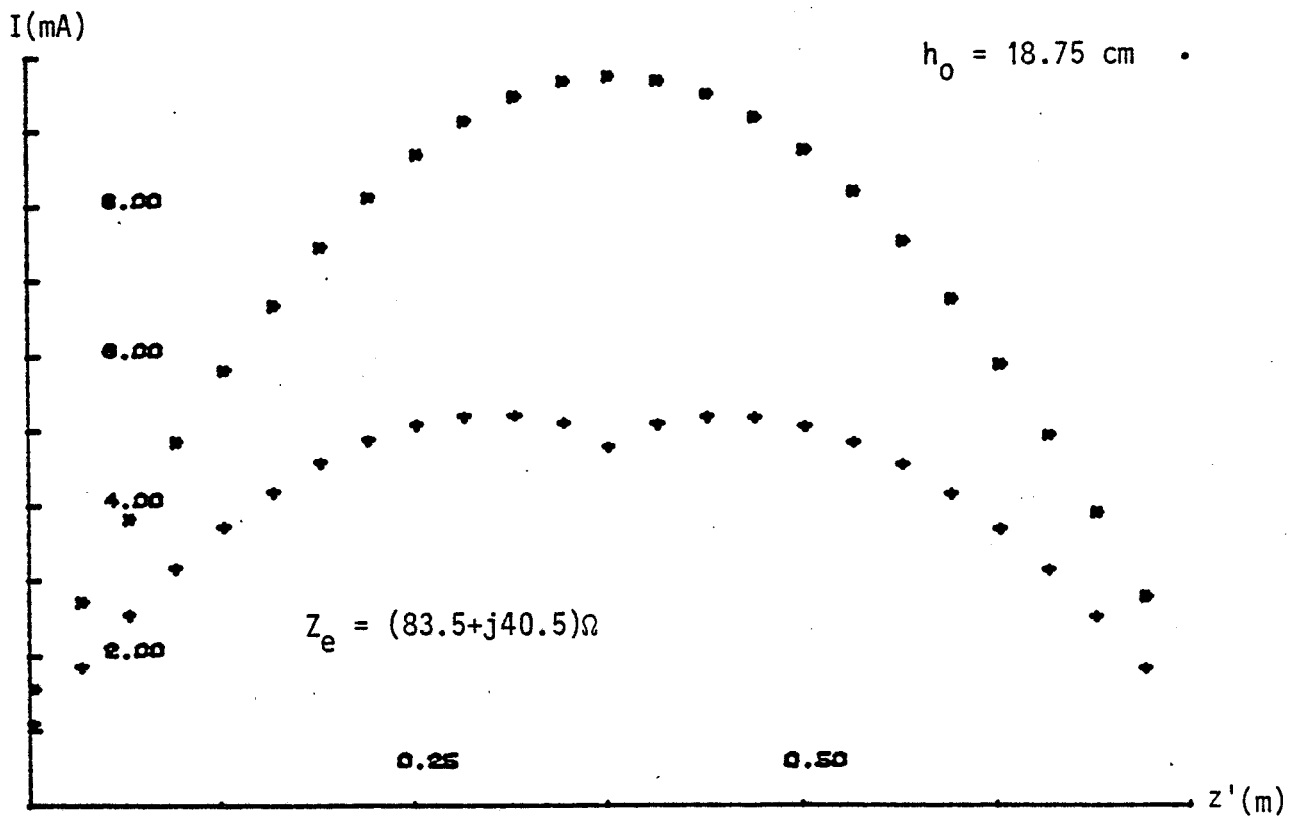


Figure II-13 : Distribution du courant sur une antenne à une hauteur $h_0 = \lambda/8$.

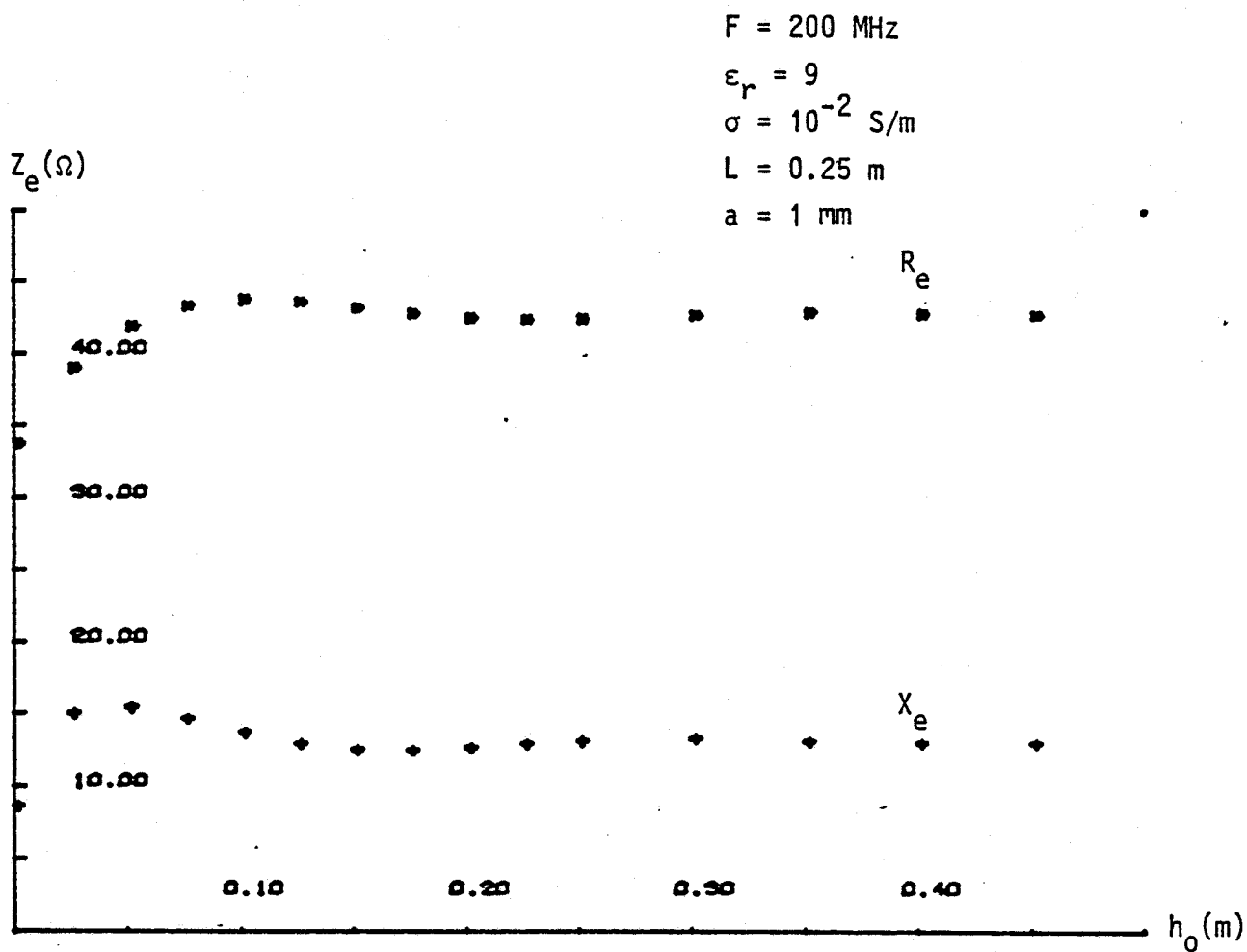
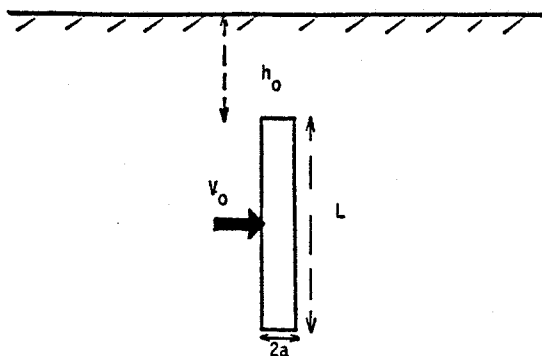


Figure II-14 : Variation de l'impédance d'entrée en fonction de la profondeur de l'antenne.



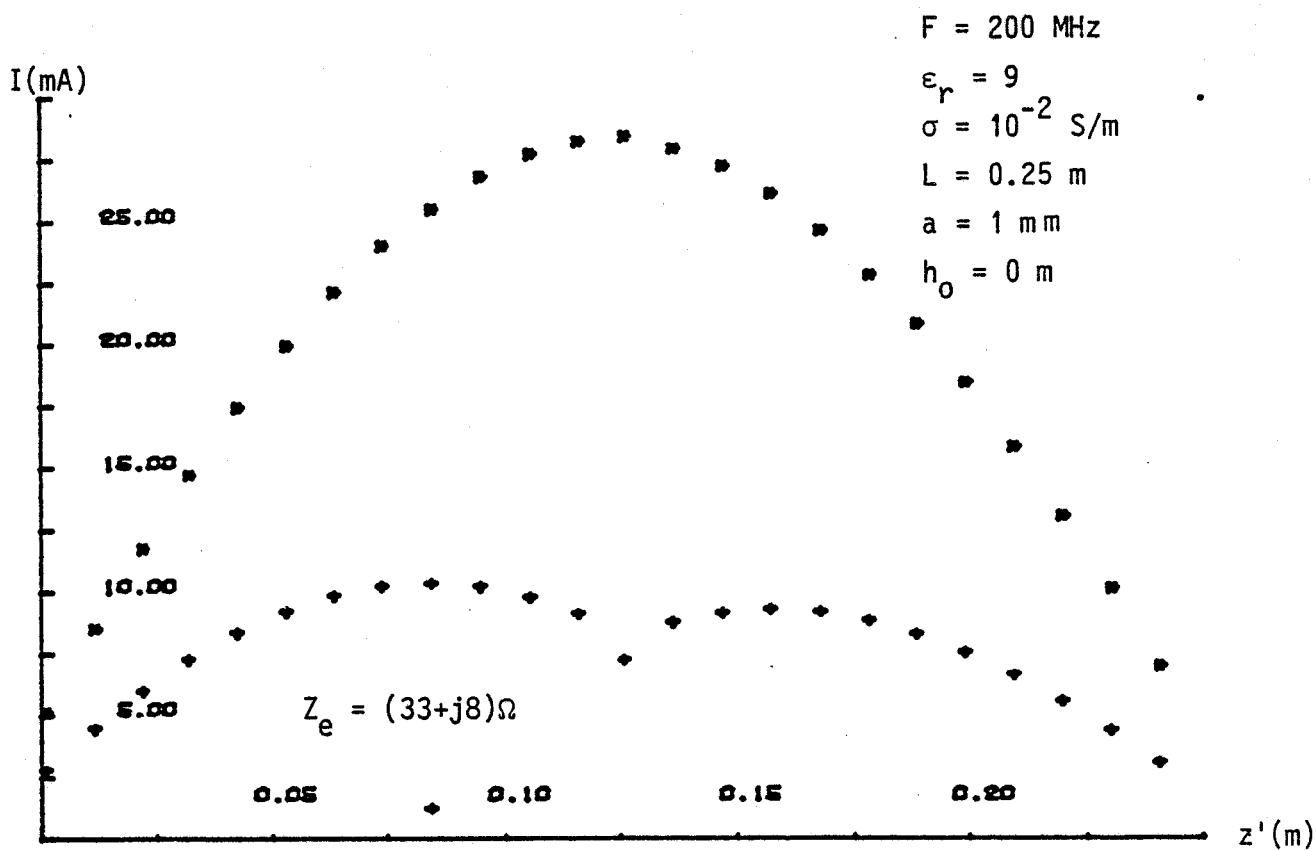


Figure II-15 : Distribution du courant sur une antenne au niveau de l'air.

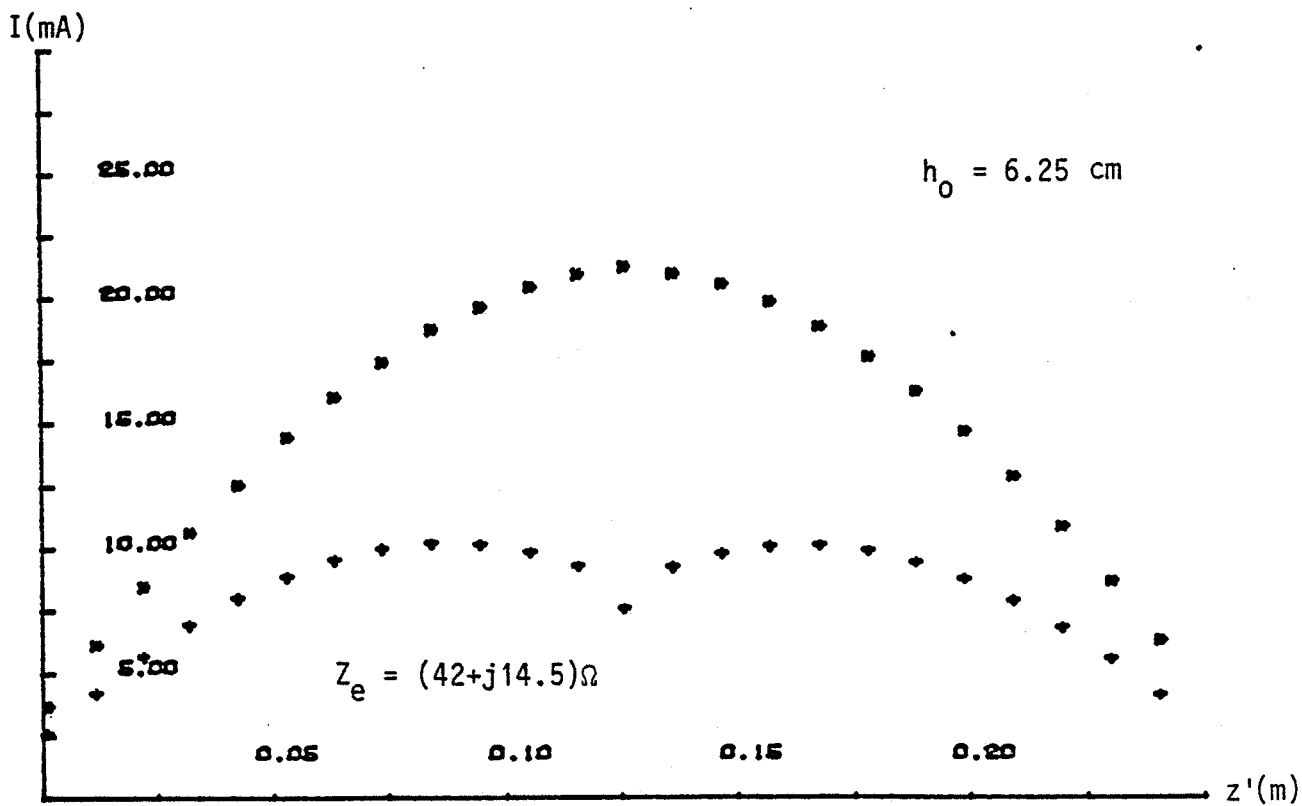


Figure II-16 : Distribution du courant sur une antenne à une profondeur de $h_0 = \lambda/8$.

CONCLUSION :

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à une antenne filaire mince placée dans un milieu homogène et infini ou dans un demi-milieu. Dans les deux configurations nous avons résolu l'équation intégrale de l'antenne par la méthode des moments. Le choix des fonctions triangles comme fonctions base et test permet d'éviter le calcul des dérivées secondes et donne une convergence rapide. D'autre part les propriétés des matrices impédances généralisées permettent de réaliser des gains appréciables en temps de calculs.

Nous avons préféré inverser la matrice au lieu de résoudre le système à N équations afin de pouvoir appliquer, avec la même matrice inversée, différentes matrices d'excitation.

Les limitations de la méthode sont dues essentiellement à l'hypothèse de l'antenne mince qui devient contraignante pour les très hautes fréquences. Dans de tels cas, le calcul de l'intégration sur la circonférence de l'antenne devient nécessaire.

Pour les antennes distantes de l'interface entre deux milieux de plus d'une demi-longueur d'onde, les résultats numériques montrent que la distribution du courant et l'impédance d'entrée sont les mêmes que dans un milieu infini, ce qui nous sera utile dans certaines applications qui seront détaillées par la suite.

Dans le chapitre suivant nous allons nous intéresser aux cas où l'antenne traverse l'interface.

C H A P I T R E I I I : ANTENNE CYLINDRIQUE TRAVERSANT L'INTERFACE

ENTRE DEUX MILIEUX.

INTRODUCTION

Ce chapitre sera consacré à l'étude d'une antenne cylindrique mince qui traverse la surface séparant deux demi-milieux. C'est le cas d'une antenne qui se déplace le long d'un forage, dans un milieu à deux couches, ou bien un piquet de terre dont une partie est entrée dans le sol et l'autre est aérienne.

Si la méthode de résolution reste la même que précédemment, la configuration fait que la matrice impédance généralisée est décomposée en sous-matrices chacune traduisant les effets entre les différents éléments des différents milieux. Nous établirons donc les expressions de toutes ces sous-matrices, ce qui nous permettrait le calcul des distributions de courant et impédances d'entrée.

Au moyen de quelques exemples nous essayerons de voir comment varient l'impédance d'entrée et la distribution du courant dans différentes configurations de milieux et de position de l'antenne.

En fin de chapitre nous donnerons le calcul de la tension V_r créée par le champ radial émis par l'antenne. Le calcul de cette tension, lorsque l'antenne se déplace le long du forage, montrera l'intérêt dans le cadre de l'expérimentation de la mesure de celle-ci.

III.1 - EQUATION INTEGRALE D'UNE ANTENNE PENETRANT L'INTERFACE

III.1.1 - Description du problème

Nous considérons un espace constitué de deux demi-milieux séparés par un interface qui se trouve dans le plan (o,x,y) . L'antenne filaire traverse perpendiculairement cette interface, figure (III.1). On choisit comme axe oz du repère (o,x,y,z) l'axe principal de l'antenne.

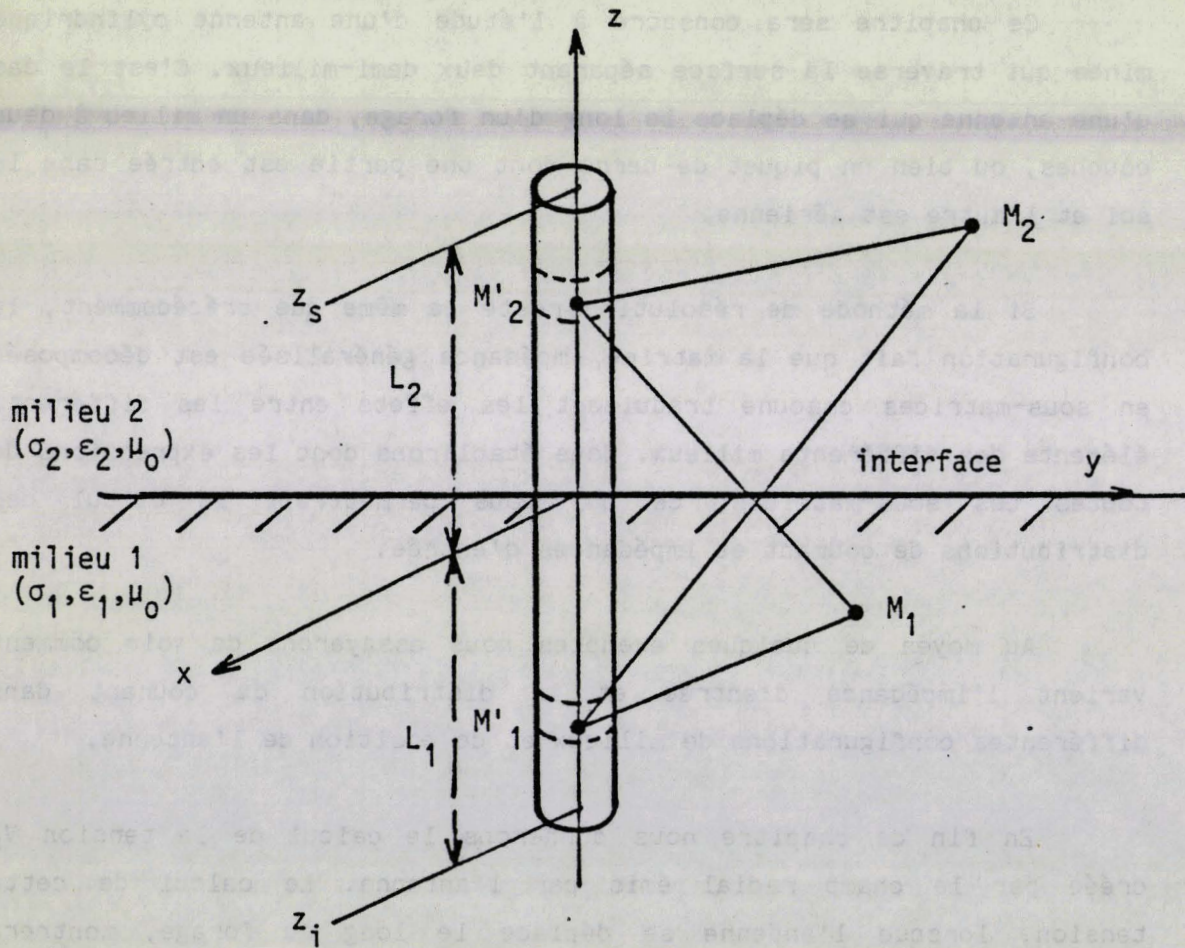


Figure III-1 : Antenne cylindrique pénétrant l'interface de deux milieux

L'antenne de rayon a et de longueur L voit une partie de sa longueur située dans le milieu 1 et l'autre partie dans le milieu 2.

Nous nous plaçons dans les hypothèses d'une antenne filaire mince. Ce qui revient à dire que le rayon est faible devant la longueur de l'antenne et devant la longueur d'onde. Le courant est donc axial et nul aux extrémités z_1 et z_2 .

Rappelons que pour calculer le champ rayonné en un point de l'espace, on considère l'antenne comme une succession de dipôles élémentaires et on somme la contribution de tous ces éléments. Dans le cas présent, des éléments sont situés dans le milieu 1 et d'autres dans le milieu 2 et leurs contributions se font donc selon des modes différents.

III.1.2 - Formulation de l'équation intégrale

Les expressions du champ émis par les dipôles élémentaires dans les deux demi-milieus ont été établies dans la deuxième partie du premier chapitre (I.2.1). Si le point d'observation est un point du milieu 1, il reçoit la contribution de la partie de l'antenne se trouvant dans le même milieu :

$$E_{\Sigma}^1(z) = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_1^2} \int_{z_1}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \gamma_1^2 \right) [G_{11} - G_{12} - \gamma_2^2 V_{11}] I(z') dz' \quad (\text{III-1})$$

et celle de la partie se trouvant dans le milieu 2 :

$$E_{\Sigma}^2(z) = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi} \int_0^{z_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \gamma_2^2 \right) [V_{21}] I(z') dz' \quad (\text{III-2})$$

Le champ total en un point du milieu 1 est

$$E_{z1}^r(z) = E_{z1}^r + E_{z1}^r$$

$$E_{z1}^r(z) = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{\gamma_1^2} \int_{z_1}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \gamma_1^2 \right) [G_{11} - G_{12} - \gamma_2^2 V_{11}] I(z') dz' \right. \\ \left. - \int_0^{z_s} \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \gamma_1^2 \right) V_{21} I(z') dz' \right) \quad (\text{III-3})$$

De même, le champ total en un point du milieu 2 est :

$$E_{z2}^r(z) = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{\gamma_2^2} \int_0^{z_s} \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \gamma_2^2 \right) [G_{22} - G_{21} - \gamma_1^2 V_{22}] I(z') dz' \right. \\ \left. - \int_{z_1}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \gamma_2^2 \right) V_{12} I(z') dz' \right) \quad (\text{III-4})$$

Rappelons que : $G_{ik} = \frac{e^{-\gamma_i R_k}}{R_k}$ $\begin{matrix} i = 1, 2 \\ k = 1, 2 \end{matrix}$

$$R_1 = [r^2 + (z' + z)^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [r^2 + (z' - z)^2]^{1/2}$$

et

$$V_{ik} = -2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_1 a} - e^{-u_2 b}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda$$

a et b sont donnés dans le tableau (I-2).

Le champ tangentiel à la surface de l'antenne, composé des champs rayonné E_{22}^r et incident E_{22}^i , est nul vu que l'antenne est considérée infiniment conductrice. Ce qui implique que pour $r = a$:

$$E_{21}^r + E_{21}^i = 0$$

$$E_{22}^r + E_{22}^i = 0$$

d'où :

$$E_{21}^i(z) = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_1^2} \left(\int_{z_1}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) [G_{11}(z, z') - G_{12}(z, z') - \gamma_2^2 V_{11}(z, z')] I(z') dz' \right. \\ \left. - \gamma_1^2 \int_0^{z_s} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) V_{21}(z, z') I(z') dz' \right) \quad (\text{III-5})$$

$$z \in [z_1, 0]$$

$$z' \in [z_1, z_s]$$

et

$$E_{22}^i(z) = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_2^2} \left(\int_0^{z_s} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) [G_{22}(z, z') - G_{21}(z, z') - \gamma_1^2 V_{22}(z, z')] I(z') dz' \right)$$

$$- \gamma_2^2 \int_{z_1}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) V_{12}(z, z') [(z') dz'] \quad (\text{III-6})$$

$$z \in [0, z_s]$$

$$z' \in [z_1, z_s]$$

nous posons :

$$gV_1(z, z') = G_{11}(z, z') - G_{12}(z, z') - \gamma_2^2 V_{11}(z, z')$$

et

$$gV_2(z, z') = G_{22}(z, z') - G_{21}(z, z') - \gamma_1^2 V_{22}(z, z')$$

Nous avons donc un système de deux équations intégrales l'une valable lorsque le point d'observation appartient au milieu 1, (III-5) et l'autre valable lorsqu'il appartient au milieu 2, (III-6), la résolution de ce système ne diffère pas des cas traités dans le chapitre précédent, sauf que l'expression de l'opérateur intégral change selon le domaine de validité.

III.2 - RESOLUTION DU SYSTEME INTEGRAL

La résolution des systèmes d'équations (III-5), (III-6) repose, comme pour l'antenne en milieu infini ou en demi-milieu, sur la méthode des moments. Nous ne détaillerons donc dans ce paragraphe que les difficultés introduites par cette nouvelle configuration.

III.2.1 - Application de la méthode des moments

Les deux parties L_1 et L_2 de l'antenne, situées respectivement dans les milieux 1 et 2, sont découpées en $N_1 + 1$ éléments Δ pour L_1 et $N_2 + 1$ éléments Δ pour L_2

$$\Delta = \frac{L}{N+1}$$

$$L = L_1 + L_2$$

$$N = N_1 + N_2 + 1$$

Les fonctions base et test sont des triangles définis sur des intervalles de longueur 2Δ , (II-21,22). L'intervalle $[-\Delta, \Delta]$ se trouve à cheval sur les deux milieux. Afin d'assurer la continuité de la densité du courant à l'interface [23] il est nécessaire de définir les fonctions base et test comme suit :

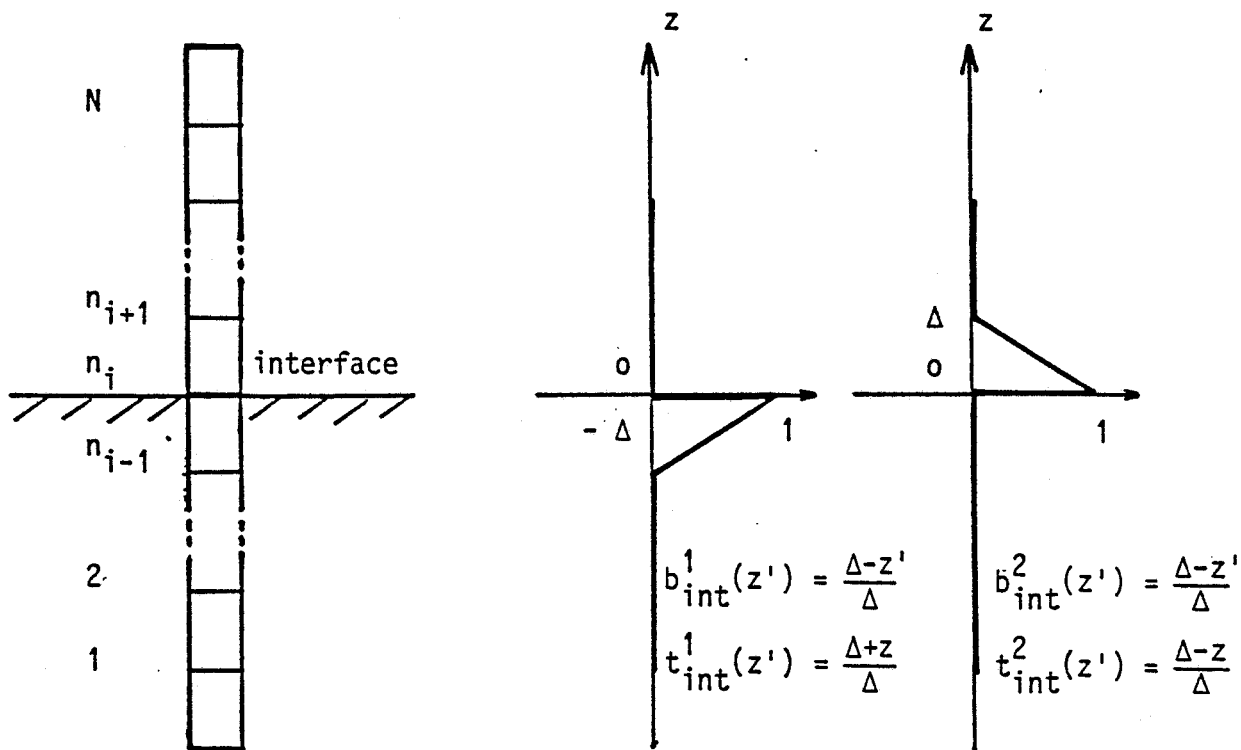


Figure III-2 : définition des fonctions base et test à l'interface.

Les projections sur cet intervalle doivent être effectuées de manière séparée sur $[-\Delta, 0]$ et $[0, \Delta]$.

Le courant $I(z')$ est approximé par sa projection sur les fonctions base :

$$I(z') = \sum_{n=1}^N I_n b_n(z')$$

que l'on introduit dans les relations (III-7) et (III-8).

- Pour un point d'observation situé dans le milieu 1, $z \in [z_i, -\Delta]$:

$$\begin{aligned} E_{z1}^i(z) &= \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_f^2} \left(\sum_{n=1}^{n_i-1} I_n \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) gV_1(z, z') b_n(z') dz' \right. \\ &+ I_{int} \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) gV_1(z, z') \frac{\Delta-z'}{\Delta} dz' \\ &- \gamma_f^2 I_{int} \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) V_{21}(z, z') \frac{\Delta-z'}{\Delta} dz' \\ &\left. - \gamma_f^2 \sum_{n=n_i+1}^N I_n \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) V_{21}(z, z') b_n(z') dz' \right) \quad (III-7) \end{aligned}$$

d'où :

$$E_{z1}^i(z) = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_f^2} \left(\sum_{n=1}^{n_i-1} I_n \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) gV_1(z, z') b_n(z') dz' \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + I_{\text{int}} \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) [gV_1(z, z') - \gamma_1^2 V_{21}(z, z')] \frac{\Delta - z'}{\Delta} dz' \\
 & - \gamma_1^2 \sum_{n=n_i+1}^N I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) V_{21}(z, z') dz' \quad \text{(III-8)}
 \end{aligned}$$

- Pour un point d'observation situé dans le milieu 2, $z \in [\Delta, z_S]$, on obtient de la même façon :

$$\begin{aligned}
 E_{z2}^i(z) &= \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_1^2} \left(-\gamma_2^2 \sum_{n=1}^{n_i-1} I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) V_{12}(z, z') b_n(z') dz' \right. \\
 & + I_{\text{int}} \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) [gV_2(z, z') - \gamma_2^2 V_{12}(z, z')] \frac{\Delta - z'}{\Delta} dz' \\
 & \left. + \sum_{n=n_i+1}^N I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) gV_2(z, z') b_n(z') dz' \right) \quad \text{(III-9)}
 \end{aligned}$$

- Pour un point d'observation de l'intervalle d'interface, $z \in [-\Delta, \Delta]$, on obtient le même résultat qu'en (III-8) pour $z \in [-\Delta, 0]$ et le même qu'en (III-9) pour $z \in [0, \Delta]$, il suffit donc de faire la somme :

$$E_{z\text{int}}^i(z) = E_{z1}^i(z) + E_{z2}^i(z) \quad \text{avec} \quad z \in [-\Delta, \Delta] \quad \text{(III-10)}$$

De la projection de ces trois relations sur les fonctions test on déduit

- Pour $z \in [z_i, -\Delta]$: $m = 1, (n_i-1)$

$$\langle E_{21}^i(z), tm(z) \rangle = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_f^2} \left\langle \sum_{n=1}^{n_i-1} I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left[\int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) gV_1(z, z') tm(z) dz \right] \dots bn(z') dz' \right.$$

$$+ I_{int} \int_0^\Delta \left(\int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) [gV_1(z, z') - \gamma_f^2 V_{21}(z, z')] tm(z) dz \right) \frac{\Delta - z'}{\Delta} dz'$$

$$- \gamma_f^2 \sum_{n=n_i+1}^N I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left[\int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) V_{21}(z, z') tm(z) dz \right] bn(z') dz' \right\rangle$$

(III-11)

- Pour $z \in [\Delta, z_s]$: $m = (n_i+1), N$

$$\langle E_{22}^i(z), tm(z) \rangle = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_2^2} \left\langle - \gamma_2^2 \sum_{n=1}^{n_i-1} I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left[\int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) V_{12}(z, z') \dots tm(z) dz \right] bn(z') dz' \right.$$

$$+ I_{int} \int_0^\Delta \left(\int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) [gV_2(z, z') - \gamma_2^2 V_{12}(z, z')] tm(z) dz \right) \frac{\Delta - z'}{\Delta} dz'$$

$$+ \sum_{n=n_i+1}^N I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left[\int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) gV_2(z, z') tm(z) dz \right] bn(z') dz' \quad \rangle$$

(III-12)

- Pour $z \in [-\Delta, \Delta]$: $m = n_i$

$$\langle E_{zint}^i(z), tm(z) \rangle = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi} \left\langle \sum_{n=1}^{n_i-1} I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} [A_1 + A_2] bn(z') dz' \right.$$

$$+ I_{int} \int_0^{\Delta} [B_1 + B_2] \frac{\Delta - z'}{\Delta} dz'$$

$$+ \sum_{n=n_i+1}^N I_n \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} [C_1 + C_2] bn(z') dz' \quad \rangle$$

(III-13)

$$A_1 = \frac{1}{\gamma_1^2} \int_{-\Delta}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) gV_1(z, z') \frac{\Delta+z}{\Delta} dz$$

$$A_2 = - \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) V_{12}(z, z') \frac{\Delta-z}{\Delta} dz$$

$$B_1 = \frac{1}{\gamma_1^2} \int_{-\Delta}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) [gV_1(z, z') - \gamma_1^2 V_{21}(z, z')] \frac{\Delta+z}{\Delta} dz$$

$$B_2 = \frac{1}{\gamma_2^2} \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) [gV_2(z, z') - \gamma_2^2 V_{12}(z, z')] \frac{\Delta-z}{\Delta} dz$$

$$C_1 = - \int_{-\Delta}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) V_{21}(z, z') \frac{\Delta+z}{\Delta} dz$$

$$C_2 = \frac{1}{\gamma_2^2} \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) gV_2(z, z') \frac{\Delta-z}{\Delta} dz$$

L'ensemble des équations (III-11), (III-12) et (III-13) se traduit sous la forme matricielle : $[V] = [Z] [I]$, et de par leurs écritures il est important de constater que la matrice impédance généralisée peut être décomposée de la manière suivante :

Z_{11}	Z_{1n_i}	Z_{12}
$Z_{n_i 1}$	$Z_{n_i n_i}$	$Z_{n_i 2}$
Z_{21}	Z_{2n_i}	Z_{22}

(III-14)

$[z_{ik}]$: matrice $(N_i \times N_k)$ des impédances mutuelles entre des éléments sources situés dans le milieu k et des éléments observations situés dans le milieu i .

$[z_{in_i}]$: colonne (N_i) des impédances mutuelles entre l'élément source sur l'interface et les éléments observations dans le milieu i .

$[z_{ni_i}]$: ligne (N_i) des impédances mutuelles entre les éléments sources dans le milieu i et les éléments observations sur l'interface.

Z_{ni_i} : impédance de l'élément interface sur lui-même.

III.2.2 - Calcul des éléments de la matrice impédance généralisée

* Sous-matrice $[Z_{ii}]$: $i = 1, 2$, matrice des impédances mutuelles entre les éléments d'un même milieu.

Les éléments de ces matrices sont déduits de :

$$Z_{mn}^{ii} = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_i^2} \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left[\int_{z_m-\Delta}^{z_m+\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial z^2} - \gamma_i^2 \right) \epsilon V_i(z, z') t_m(z) dz \right] b_n(z') dz'$$

z_n et $z_m \in [z_i, -\Delta]$ pour $i = 1$

z_n et $z_m \in [\Delta, z_s]$ pour $i = 2$.

Ces matrices correspondent aux cas d'une antenne entièrement située dans le milieu 1 ou dans le milieu 2. Les résultats sont donc les mêmes que ceux donnés en (II-34) pour $i = 1$ et en (II-35) pour $i = 2$, ils ont donc les mêmes propriétés et leurs temps de calcul sont proportionnels respectivement à N_1 et N_2 .

* Sous-matrice $[Z^{ik}]$: $(i,k) = (1,2)$, $(2,1)$, matrice des impédances mutuelles entre les segments des deux milieux.

Les éléments de ces deux matrices sont :

$$Z_{m\ n}^{i\ k} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{z_{n-\Delta}}^{z_{n+\Delta}} \left[\int_{z_{m-\Delta}}^{z_{m+\Delta}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) V_{ik}(z, z') t_m(z) dz \right] b_n(z') dz'$$

Le développement des calculs donne le résultat suivant :

$$Z_{m\ n}^{i\ k} = \frac{-j\omega\mu_0}{2\pi\Delta^2} \int_0^\infty \left[e^{u_i\Delta} + e^{-u_i\Delta} - (2 + \gamma_1^2\Delta^2) \right] \left[e^{u_k\Delta} + e^{-u_k\Delta} - 2 \right] \dots$$

$$\dots \frac{e^{-u_i|z_m|}}{2} \frac{e^{-u_k z_n}}{2} \frac{\lambda J_0(\lambda a)}{u_k} d\lambda \quad \text{(III-15)}$$

$z_n \in [\Delta, z_s]$ et $z_m \in [z_i, \Delta]$ pour $(i,k) = (1,2)$
 $z_n \in [z_i, -\Delta]$ et $z_m \in [\Delta, z_s]$ pour $(i,k) = (2,1)$

* Sous matrices $[z^{kn_i}]$: $k = 1,2$, colonne des impédances mutuelles entre le segment interface et les segments du milieu k.

Le calcul des éléments de ces colonnes est développé à partir de :

$$\frac{kn_i}{z_{mn}} = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_R^2} \int_0^\Delta \int_{z_m-\Delta}^{z_m+\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_R^2 \right) [\delta V_k(z, z') - \gamma_R^2 V_{k1}(z, z')] \dots$$

$$\dots \quad tm(z)dz \quad \frac{\Delta-z'}{\Delta} dz'$$

Le résultat est :

$$\frac{kn_i}{z_{mn}} = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_R^2\Delta^2} \int_0^\Delta [G_{kk}(R_{k1}) - (2+\gamma_R^2\Delta^2)G_{kk}(R_{12}) + G_{kk}(R_{k3})] \dots$$

$$\dots (\Delta-z')dz'$$

$$- \int_0^\Delta [G_{k1}(R_{11}) - (2+\gamma_R^2\Delta^2)G_{k1}(R_{12}) + G_{k1}(R_{13})] (\Delta-z')dz'$$

$$+ 2 \int_0^\infty [e^{u_k\Delta} + e^{-u_k\Delta} - (2+\gamma_R^2\Delta^2)] \left[\frac{\gamma_I^2}{u_k^2} (e^{-u_k\Delta} + u_k\Delta - 1) + \frac{\gamma_I^2}{u_I^2} (e^{-u_1\Delta} + u_1\Delta - 1) \right]$$

$$\dots \frac{e^{-u_k|z_m|\lambda J_0(\lambda a)}}{\gamma_I^2 u_2 + \gamma_I^2 u_1} d\lambda \quad (III-16)$$

$$z_n \in [0, \Delta]$$

$$z_m \in [z_1, -\Delta] \quad \text{pour } k = 1, l = 2$$

$$z_m \in [\Delta, z_3] \quad \text{pour } k = 2, l = 1$$

les distances R sont données en (II-34).

* Sous-matrices $[z^{n_ik}]$: $k = 1, 2$, lignes des impédances mutuelles entre les segments du milieu k et le segment interface.

Les éléments de ces lignes sont calculés à partir :

$$z_{mn}^{n_11} = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [A_1 + A_2] b_n(z') dz'$$

et

$$z_{mn}^{n_12} = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [C_1 + C_2] b_n(z') dz'$$

il résulte d'un calcul analogue pour les deux équations :

$$z_{mn}^{n_1k} = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_k^2\Delta^2} \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [G_{k1}(R_1) - G_{k2}(R_2)] (\Delta - |z' - z_n|) dz'$$

$$+ 2 \int_0^{\infty} [\gamma_1^2 e^{-u_k\Delta} + \gamma_k^2 e^{-u_1\Delta} - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \gamma_1^2 \gamma_2^2 \Delta^2] [e^{u_k\Delta} + e^{-u_k\Delta}] \dots$$

$$\dots \frac{e^{-u_k z_n \lambda} J_0(\lambda a)}{u_k^2 (\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1)} d\lambda \quad (III-17)$$

$$z_m = 0 \quad \begin{array}{l} z_n \in [|z_i|, |-\Delta|] \quad \text{pour } k = 1, l = 2 \\ z_n \in [\Delta, z_s] \quad \text{pour } k = 2, l = 1 \end{array}$$

$$R_1 = [a^2 + (z' - \Delta)^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [a^2 + (z' + \Delta)^2]^{1/2}$$

* l'élément $z_n^i n_i$: impédance du segment interface sur lui-même.

Cet élément est égal à :

$$z_n^i n_i = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi} \int_0^\Delta [B_1 + B_2] \frac{\Delta - z'}{\Delta} dz'$$

d'où

$$z_n^i n_i = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\Delta^2} \int_0^\Delta \left[\frac{1}{\gamma_1^2} (G_{11}(R_1) - G_{11}(R_2)) + \frac{1}{\gamma_2^2} (G_{22}(R_1) - G_{22}(R_2)) \right] \dots (\Delta - z') dz'$$

$$+ 2 \int_0^\infty [\gamma_1^2 e^{-u_2\Delta} + \gamma_2^2 e^{-u_1\Delta} - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \gamma_1^2 \gamma_2^2 \Delta^2] \dots$$

$$\dots \left[\frac{e^{-u_1\Delta} + u_1\Delta - 1}{\gamma_1^2 u_1^2} + \frac{e^{-u_2\Delta} + u_2\Delta - 1}{\gamma_2^2 u_2^2} \right] \frac{\lambda J_0(\lambda a)}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} d\lambda \quad (\text{III-18})$$

les expressions des R sont les mêmes que celles citées plus haut.

Pour les deux dernières relations, l'application des conditions aux limites (I-9) permet de réduire les termes à l'interface. Les différents calculs pour l'ensemble des éléments z_{mn} sont détaillés en annexe 3. Les intégrales sur les intervalles $[z_n - \Delta, z_n + \Delta]$ sont évaluées avec un découpage automatique par l'algorithme de Simpson. Quant aux intégrales

du type Sommerfeld, elles sont traitées selon une méthode similaire à celle exposée dans le premier chapitre. Après inversion de la matrice on déduit les distributions de courant et les impédances d'entrée se rapportant au mode de l'utilisation de l'antenne.

III.2.3 - Résultats des exploitations numériques

La confrontation de nos résultats (Fig. III-8) à ceux d'autres auteurs [24] permet de vérifier la validité des codes de calcul que nous avons développés. Ces résultats sont obtenus pour :

F	=	50 MHz		σ_1	=	10^{-2} S/m
a	=	1 mm	milieu 1 :	sol		
L ₁	=	1 m		ϵ_{r1}	=	9
L ₂	=	2 m				
d	=	0.5 m	milieu 2 :	air		

l'alimentation est située au milieu de l'antenne avec un module $V_0 = 1$ volt.

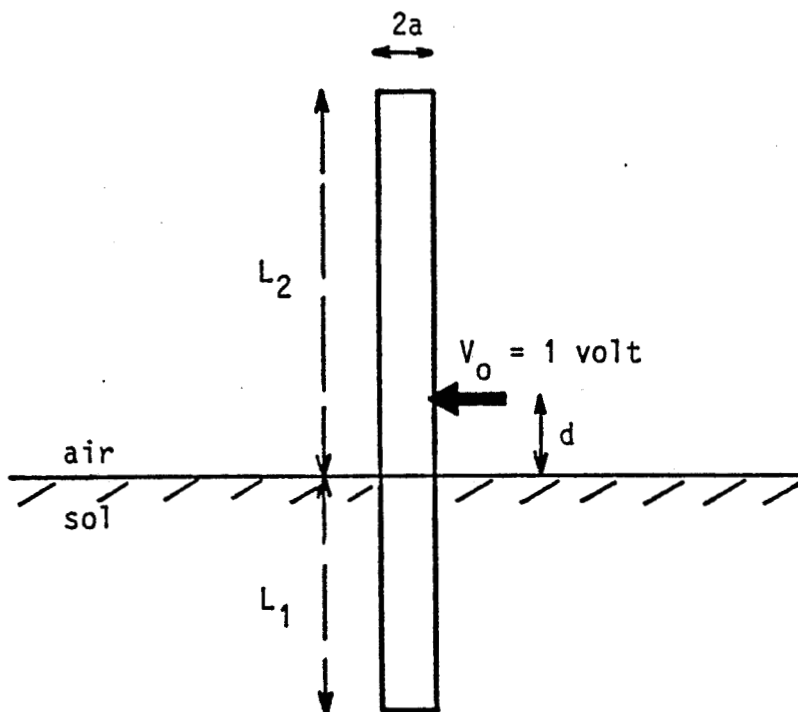


Figure III.3 : Antenne en partie enterrée dans le sol.

Pour la même configuration nous avons tracé sur la planche (III-4) l'évolution de la résistance et la réactance d'entrée en fonction du découpage N . On note une bonne convergence de la méthode pour un découpage supérieur à 20. Entre $N = 23$ et $N = 29$ l'erreur relative n'est plus que de 2 %.

Pour mieux comprendre l'évolution de la distribution du courant lorsque l'antenne s'enfonce dans le sol, nous avons tracé les variations de l'impédance d'entrée -figure (III-5)- en fonction de la distance d entre le milieu de l'antenne et la surface du sol. Cette distance d est égale à zéro lorsqu'une moitié de l'antenne se trouve dans l'air et l'autre dans le sol. On peut constater sur cette courbe trois zones distinctes. Deux zones correspondant aux cas où l'antenne est entièrement dans l'air ou entièrement dans le sol. Dans les deux cas l'impédance tend vers sa valeur en milieux infinis respectifs. Au moment où l'antenne commence à s'enfoncer dans le sol, l'impédance d'entrée croît fortement avant de décroître et ceci lorsque la partie enterrée devient supérieure au quart de la longueur d'onde dans le sol. Enfin une variation, mais plus faible, se produit lorsque la partie aérienne s'approche du huitième de la longueur d'onde dans l'air. On trouve ici l'explication aux variations que subit la distribution du courant pendant que l'antenne traverse l'interface. En comparant l'ensemble des figures (III-6 à III-10), on remarque donc que le courant s'affaiblit de façon importante au début de la descente figure (III-8). Pour une longueur enterrée supérieure à $\lambda_{\text{sol}}/4$ -figures (III-9 , III-10)- le niveau du courant croît, mais reste inférieur à celui de l'antenne dans l'air et tend vers celui de l'antenne dans le sol.

D'autre part on remarque la formation d'oscillations sur la partie enterrée, planches (III-7 , III-10). Ces oscillations apparaissent lorsque la partie enterrée devient plus grande que la demi-longueur d'onde dans le sol. En fait, dans cet exemple, si l'antenne est une demi-onde dans l'air, dans le sol elle fait trois demi-ondes.

Sur la figure (III-11) nous avons représenté la répartition du courant sur une antenne traversant l'interface de deux milieux conducteurs, ceci pour une fréquence de 100 MHz et pour une antenne de longueur 0.75 m dont une moitié se trouve dans le milieu 1 de

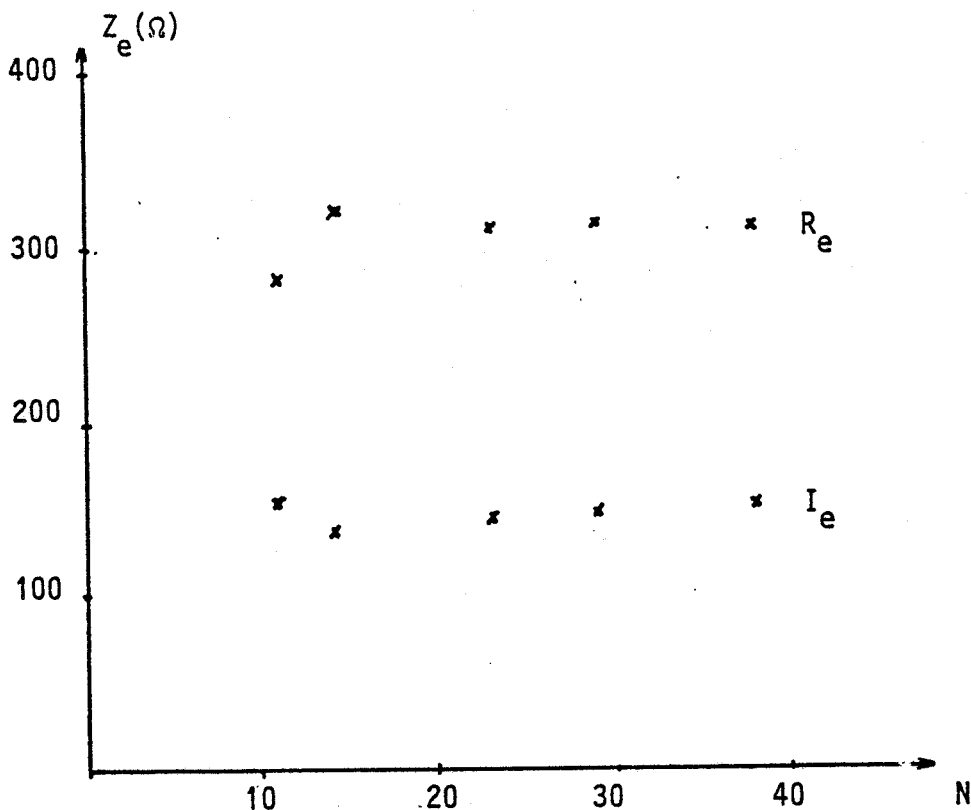


Figure III-4 : Variation de l'impédance d'entrée en fonction du découpage.

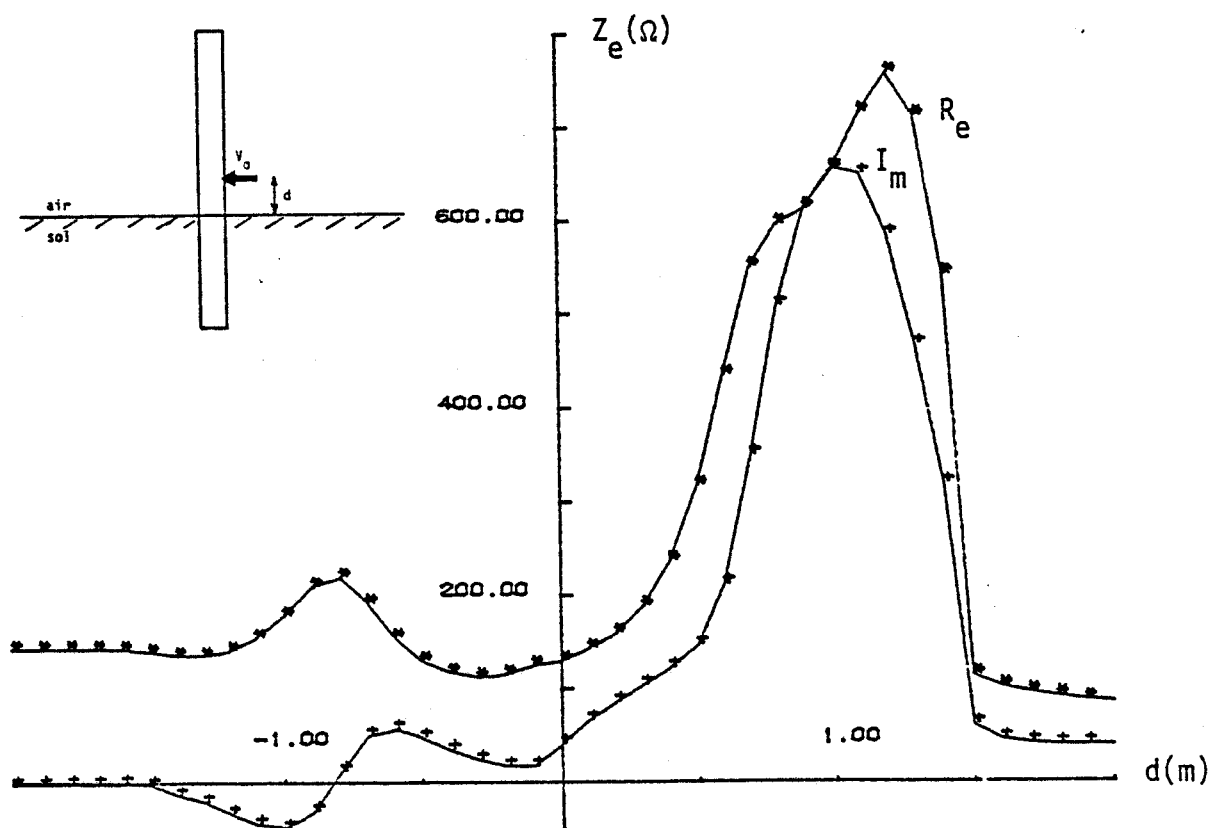


Figure III-5 : Evolution de l'impédance d'entrée lorsque l'antenne s'enfonce dans le sol.

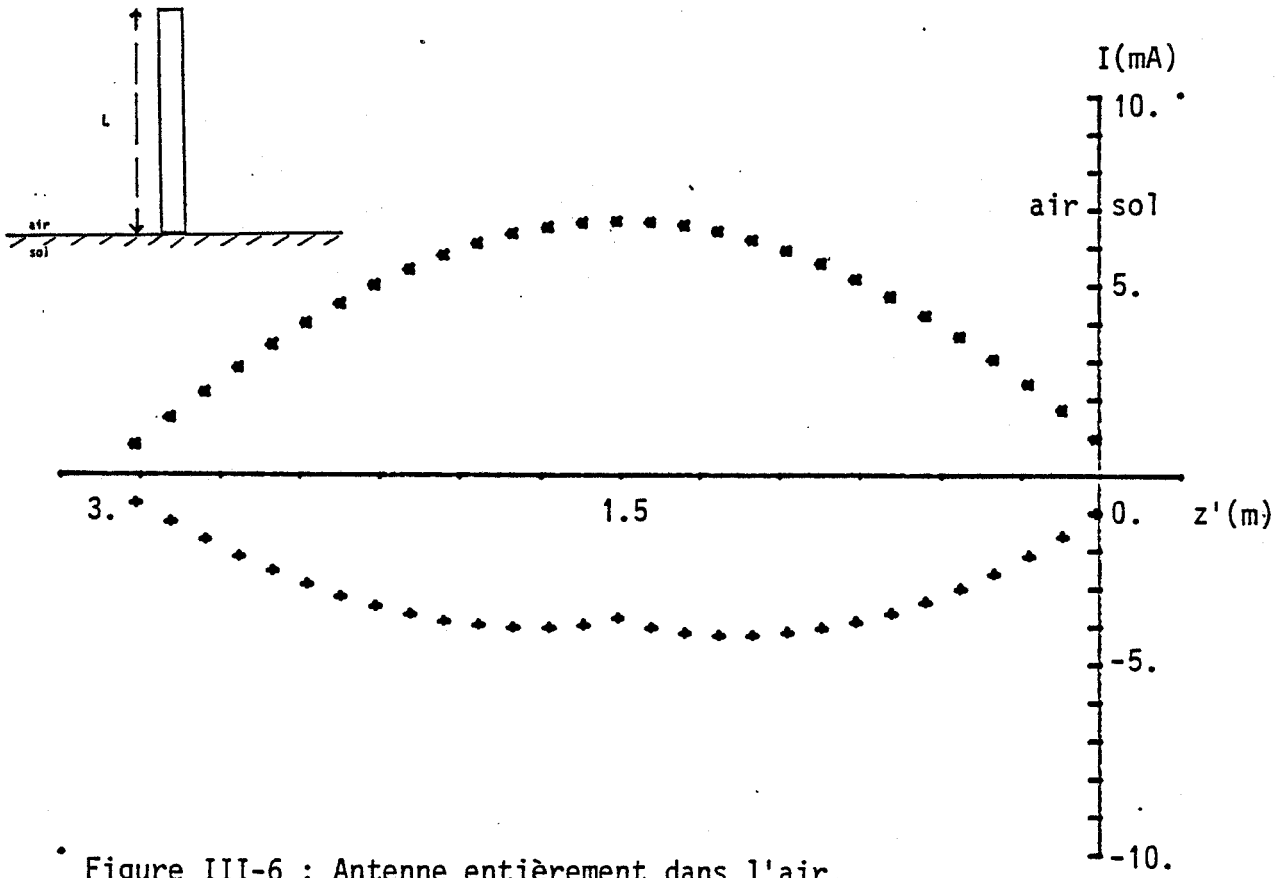


Figure III-6 : Antenne entièrement dans l'air.

* : partie réelle
+ : partie imaginaire

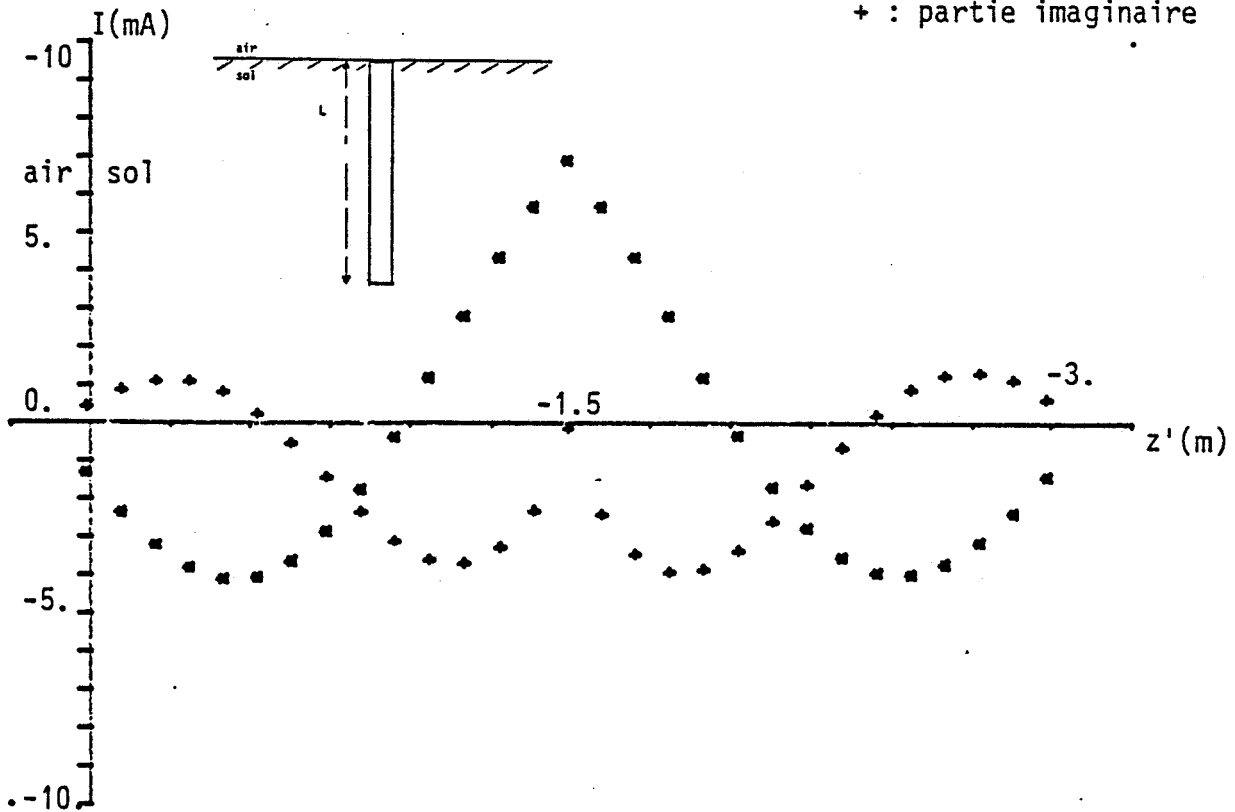


Figure III-7 : Antenne entièrement dans le sol.

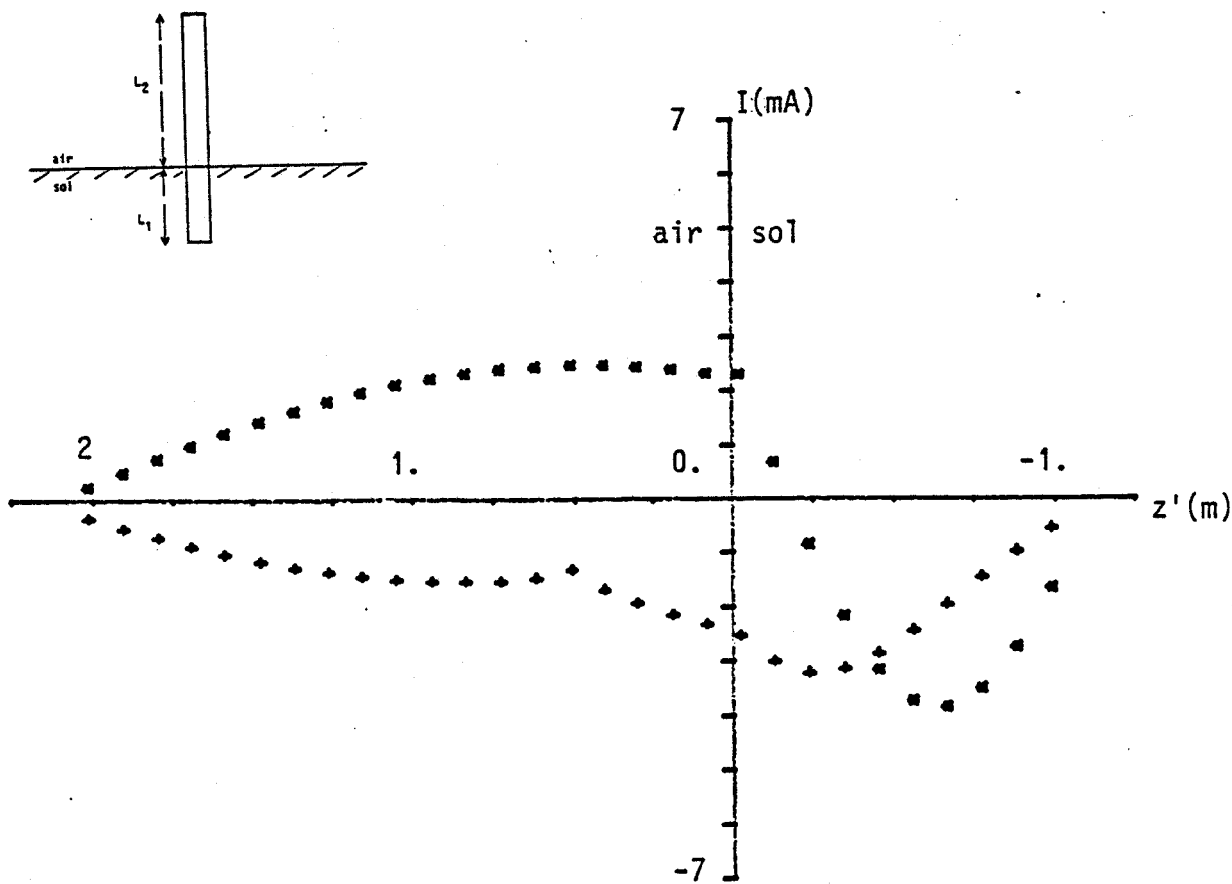


Figure III-8 : partie enterrée : $L_1 = 1$ m.

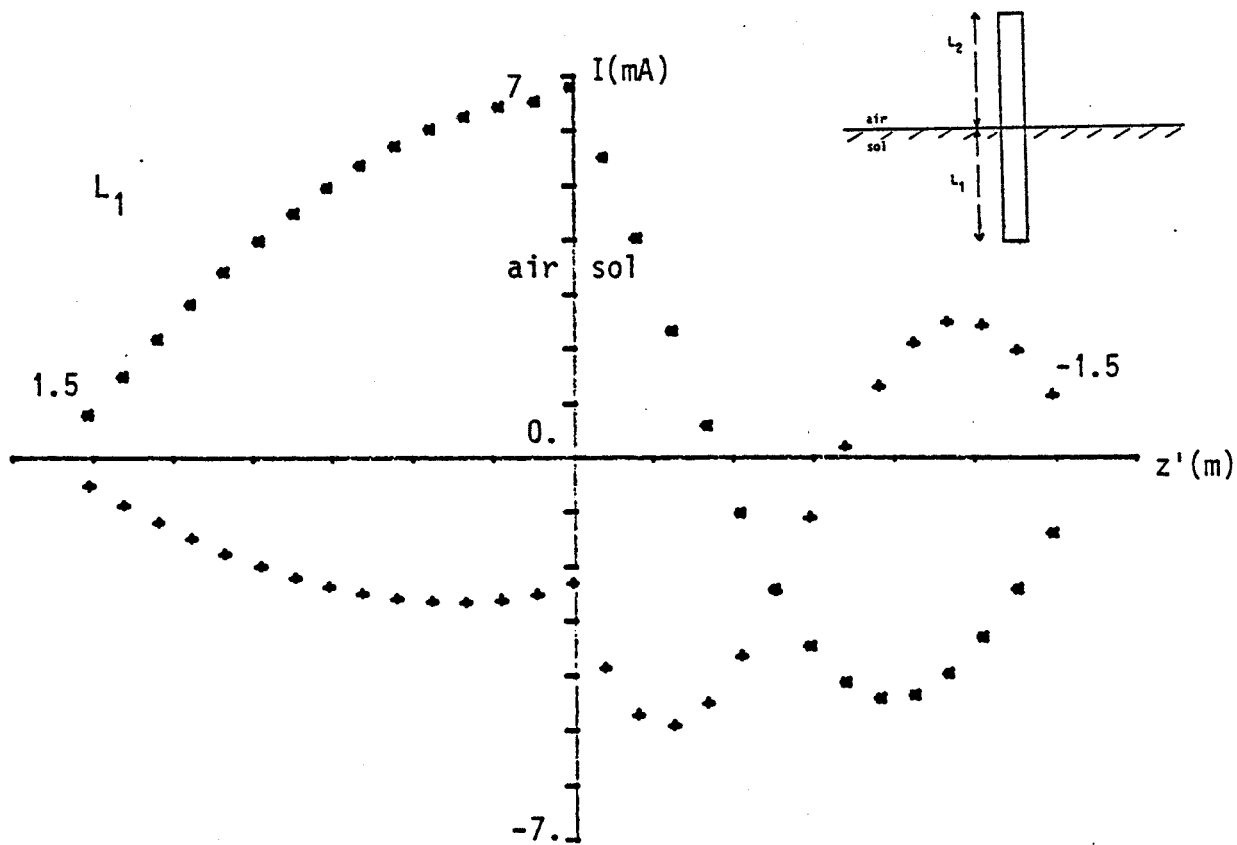


Figure III-9 : Antenne à moitié enterrée.

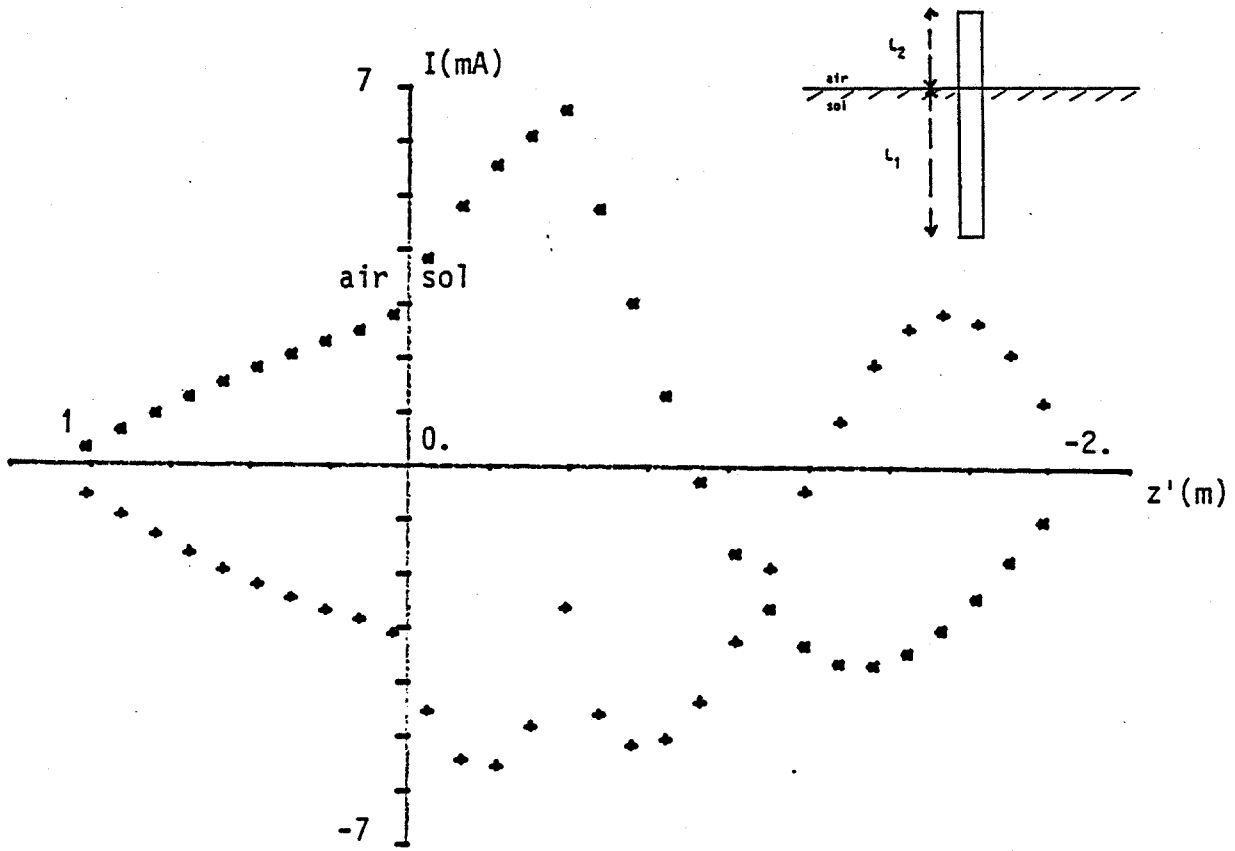


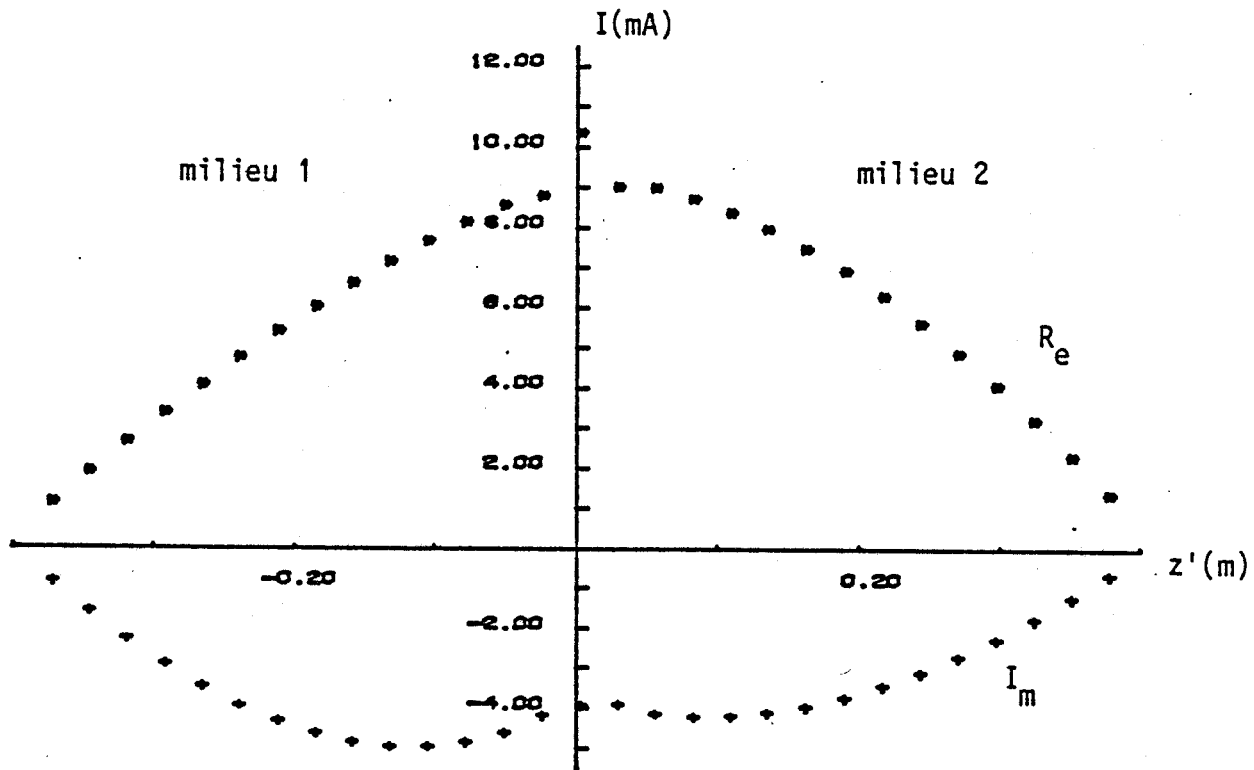
Figure III-10 : Partie enterrée : $L_1 = 2$ -m.

conductivité $\sigma_1 = 10^{-2}$ S/m et l'autre moitié dans le milieu 2 de conductivité $\sigma_2 = 10^{-3}$ S/m. Les deux milieux sont de même permittivité $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 4$. L'antenne de rayon $a = 1$ mm est excitée en son milieu, c'est-à-dire sur l'élément de l'interface, par une tension de 1 volt. Nous remarquons, à l'inverse des parties imaginaires, que la partie réelle du courant dans le milieu 2 est supérieure à celle du milieu 1. On peut montrer que le module du courant est légèrement supérieur dans le milieu 2 qui a donc la conductivité la plus faible.

En dernier lieu nous avons représenté sur les planches (III-12, III-13 et III-14) la répartition du courant sur une prise de terre pour trois fréquences différentes. Cette prise de rayon $a = 1$ mm et de longueur $L = 1$ m est enfoncée à 90 cm dans un sol de conductivité $\sigma = 10^{-2}$ S/m et de permittivité $\epsilon_r = 5$. Une excitation de 1 volt est appliquée sur le premier élément de la partie aérienne de 10 cm. On remarque que l'amplitude du courant croît lorsque la fréquence augmente et que les oscillations deviennent plus importantes. L'augmentation de ces oscillations s'explique par le rapport entre la longueur de la partie enterrée et la longueur d'onde dans le sol.

III.3 - CALCUL DE LA TENSION V_r

La mesure de la tension V_r , créée par une antenne le long de l'axe des y , peut s'avérer intéressante lors de la descente de l'antenne dans un forage. Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier l'évolution de cette tension lorsque l'antenne franchit l'interface séparant deux couches de caractéristiques différentes.



$F = 100 \text{ MHz}$

$L_1 = L_2 = 37.5 \text{ cm}$

$\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 4$

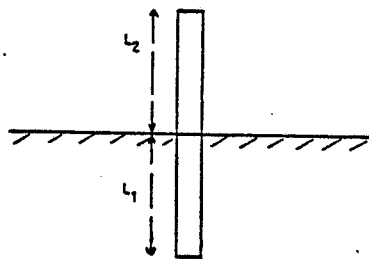
$a = 1 \text{ mm}$

$\sigma_1 = 10^{-2} \text{ S/m}$

$\sigma_2 = 10^{-3} \text{ S/m}$

$Z_e = (84.6 + j33.6) \Omega$

Figure III-11 : Distribution du courant sur une antenne traversant l'interface des deux milieux conducteurs.



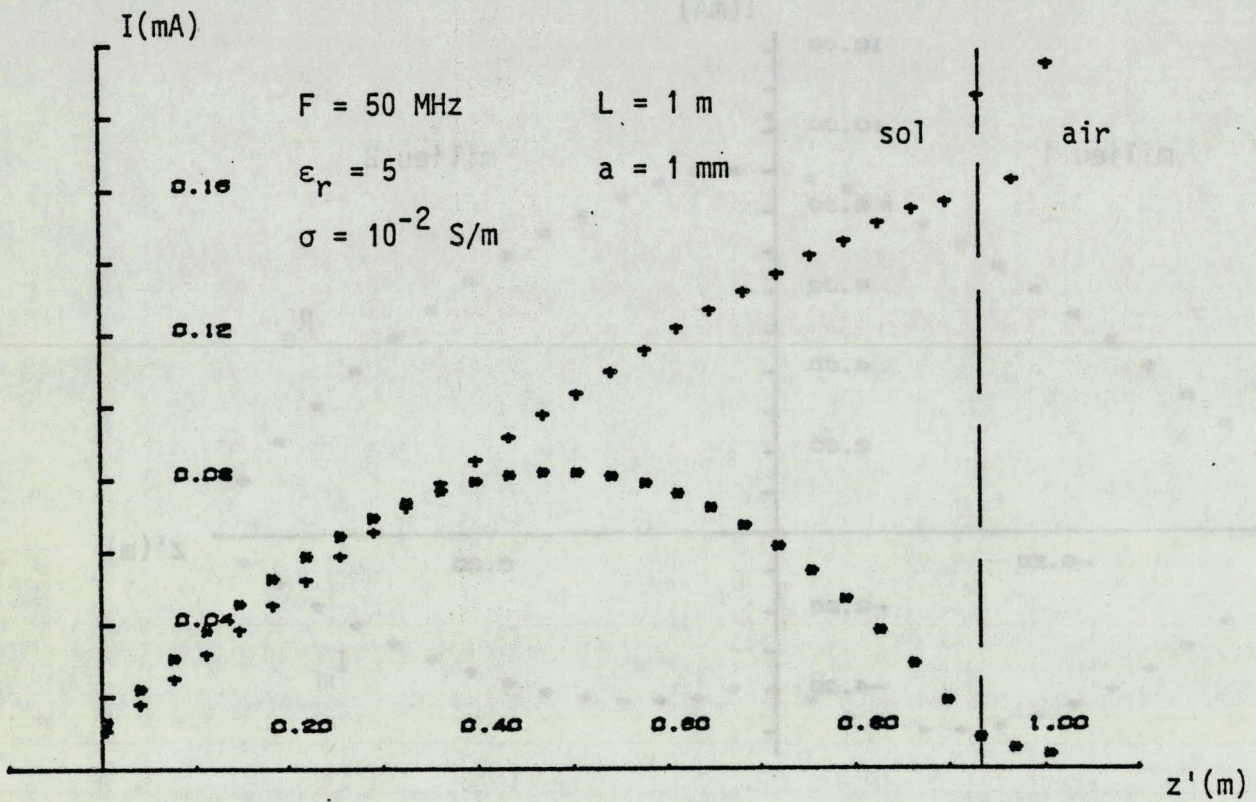


Figure III-12 : Répartition du courant sur une prise de terre.

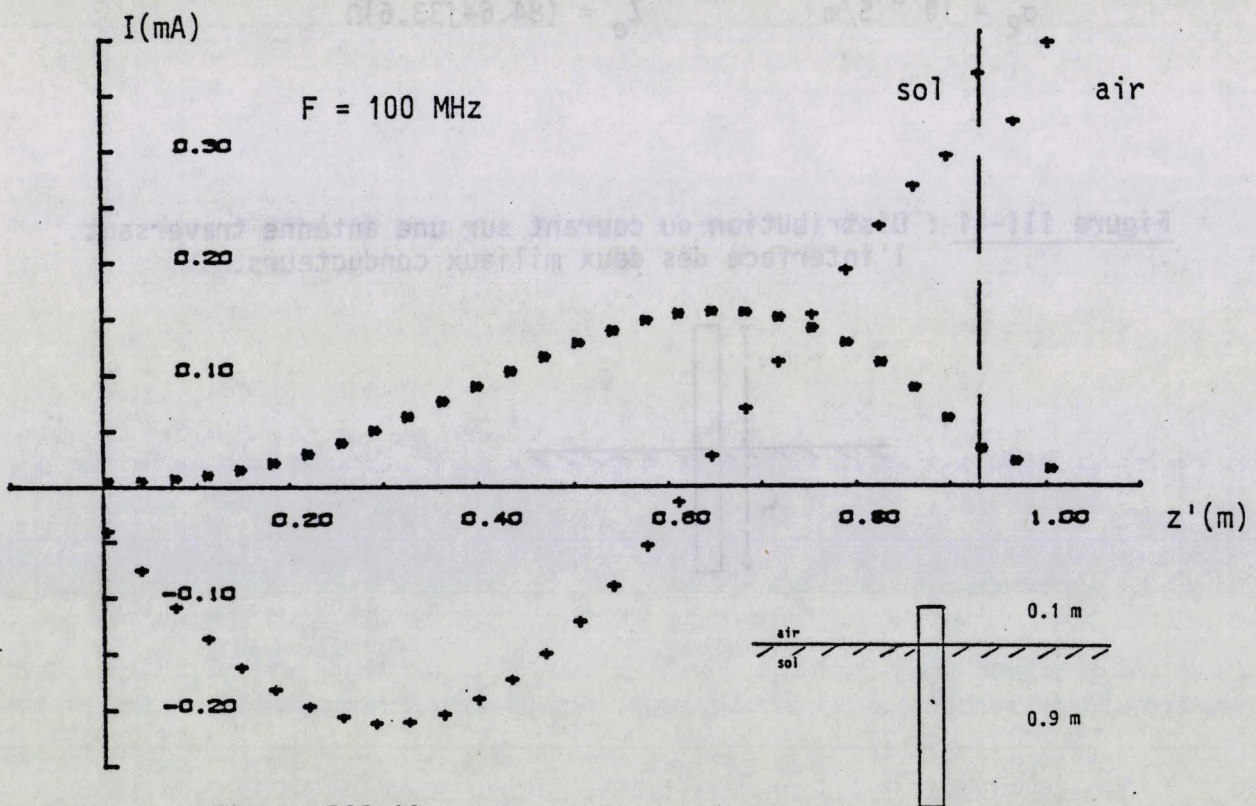


Figure III-13

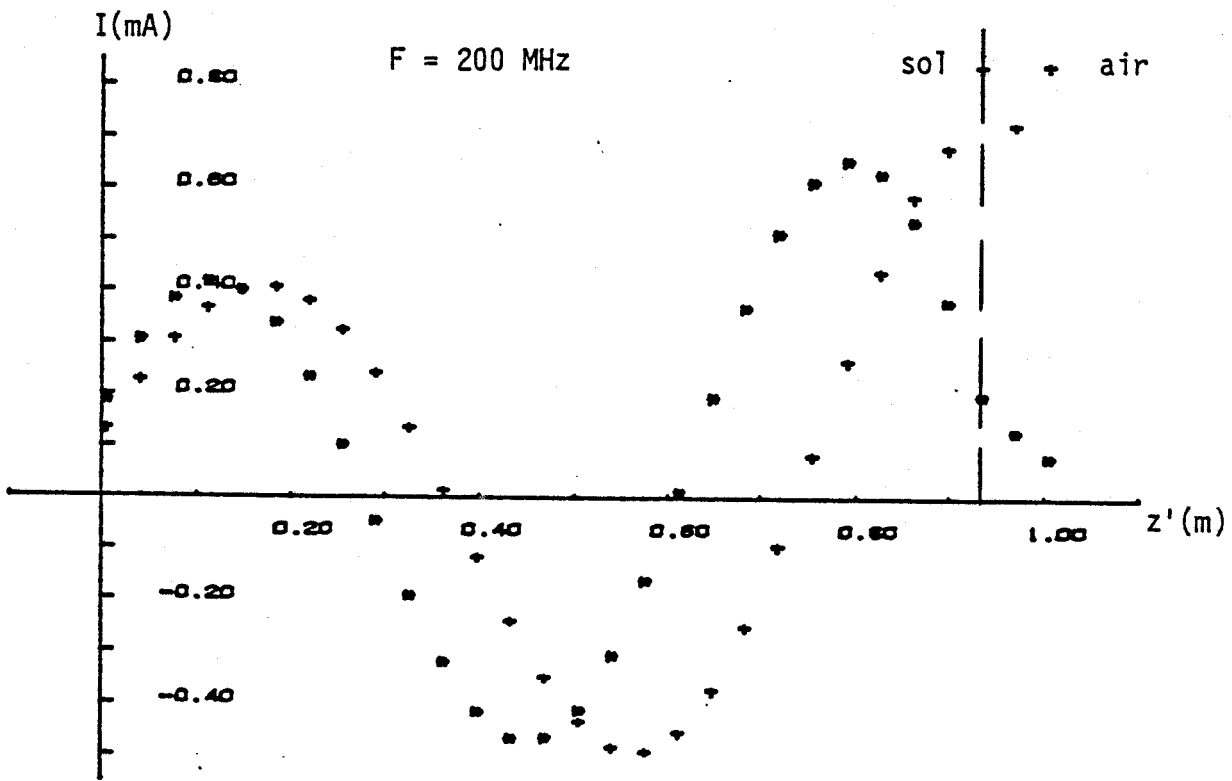


Figure III-14

III.3.1 - Formulation de la tension V_r

On considère une antenne filaire mince, de rayon a , placée à l'interface de deux milieux 1 et 2, figure (III-15). L'antenne est découpée en N éléments. Le champ E_r créé en un point M de l'espace est la somme des champs dE_r créés par l'ensemble de ces N éléments.

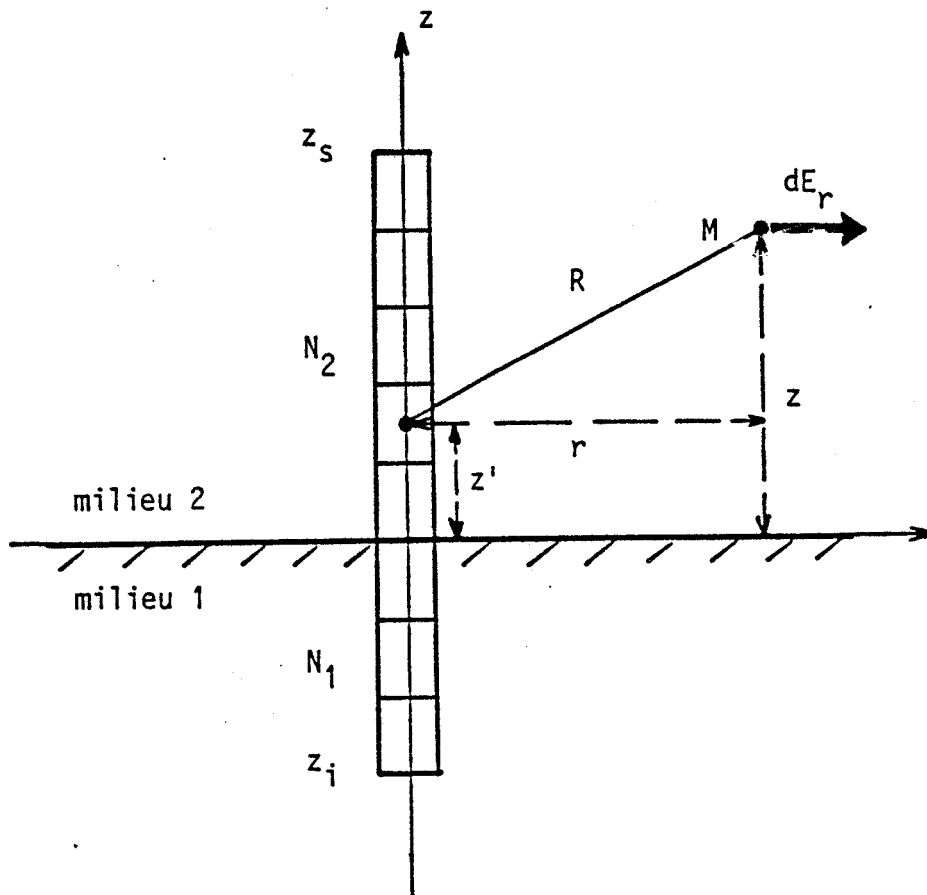


Figure III-15 : Champ E_r créé par les éléments d'une antenne traversant deux milieux.

Prenons le cas où le point d'observation se trouve dans le milieu 2, le cas où celui-ci se trouve dans le milieu 1 se traite de manière tout à fait similaire. Donc dans le cas où le point M est dans le milieu 2, le champ créé en ce point par un élément se trouvant lui-même dans le milieu 2 est :

$$dE_{r22}^{(M)} = \frac{j\omega\mu_0 I(z') dz'}{4\pi r_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} [G_{22} - G_{21} - \gamma_1^2 V_{22}] \right) \quad (\text{III-19})$$

Si l'élément se trouve dans le milieu 1 :

$$dE_{r12}^{(M)} = \frac{-j\omega\mu_0 I(z') dz'}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial r \partial z} \right) \quad (\text{III-20})$$

$I(z')$ est la distribution du courant calculée dans les paragraphes précédents.

Le champ total créé par l'antenne est :

$$E_{r2}^{(M)} = \int_{z_1}^{z_S} dE_{r2} dz' = \int_{z_1}^0 dE_{r12} dz' + \int_0^{z_S} dE_{r22} dz' \quad (\text{III-21})$$

La tension V_{r2} est l'intégrale du champ E_{r2} le long de l'axe des y entre 0 et ∞ si le point d'observation se trouve dans un plan horizontal non traversé par l'antenne et entre a et ∞ dans le cas contraire.

$$V_{r2} = \int_0^{\infty} E_{r2}^{(M)} dr \quad \text{si } z \in]z_S, \infty[$$

et

(III-22)

$$V_{r2} = \int_a^{\infty} E_{r2}^{(M)} dr \quad \text{si } z \in [0, z_S]$$

Dans toutes les applications nous avons pris $z = z_S$.

Dans ces cas :

$$V_{r2} = \int_a^\infty E_{21}^{(M)} dy = \int_a^\infty \int_{z_i}^0 dE_{r12} dz' dr + \int_a^\infty \int_0^{z_s} dE_{r22} dz' dr \quad (\text{III-23})$$

Les calculs sont effectués en annexe 4 avec une extrapolation linéaire de la distribution du courant entre deux éléments successifs de l'antenne. On obtient :

$$V_{r2} = V_{r22} + V_{r21}$$

$$\text{avec } V_{r22} = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_2^2} \sum_{i=1}^{N_2} \int_{z_i}^{z_i+\Delta} \left[\frac{(z'-z)}{R_2^3} (\gamma_2 R_2 + 1) e^{-\gamma_2 R_2} + \frac{(z'+z)}{R_1^3} (\gamma_2 R_1 + 1) e^{-\gamma_2 R_1} \right] \dots (Az'+B) dz'$$

$$- 2\gamma_1^2 \int_0^\infty \frac{e^{-u_2(z_1+z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \left[\left(\frac{A}{u_2} + B \right) (1 - e^{-u_2 \Delta}) + A(z_1 - (z_1 + \Delta)) e^{-u_2 \Delta} \right] \lambda J_0(\lambda a) d\lambda$$

et

$$V_{r21} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_1} \int_0^\infty \frac{u_2 e^{-u_1 z_i} e^{-u_2 z}}{u_1 (\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1)} \left[\left(\frac{A}{u_1} + B \right) (1 - e^{-u_1 \Delta}) + A(z_i - (z_i - \Delta)) e^{-u_1 \Delta} \right] \lambda J_0(\lambda a) d\lambda$$

- N_1, N_2 : nombres d'éléments respectivement dans le milieu 1 et le milieu 2.

- $Az'+B$: extrapolation linéaire du courant dans l'intervalle $[z_i, z_i + \Delta]$

Si l'antenne se trouve en entier dans le milieu 2 il suffit dans ce cas de ne prendre que le terme V_{r22} .

Dans le cas où l'on calcule la tension dans le milieu 1, il suffit d'intervertir les indices 1 et 2 et de changer le signe de z .

III.3.2 - Exploitations numériques

Pour vérifier la convergence des calculs, nous avons traité dans un premier temps la configuration suivante :

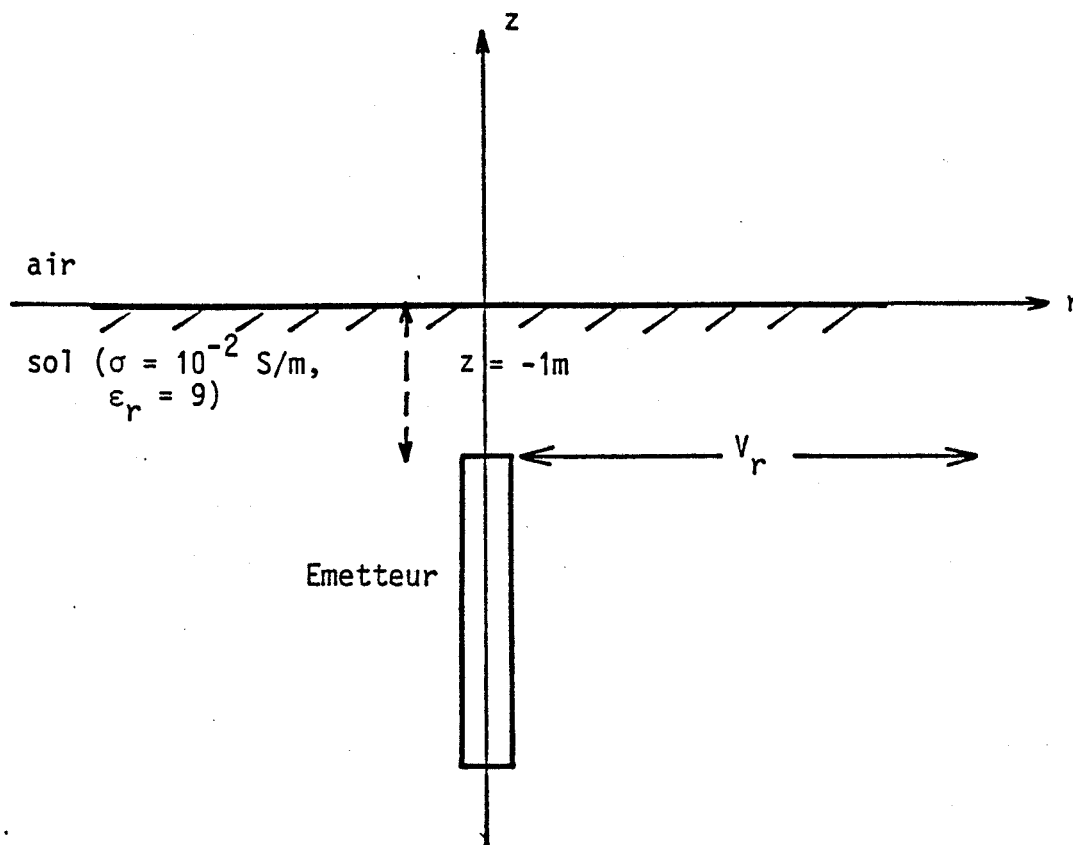


Figure III-16 : Configuration pour le calcul de la tension V_r .

L'émetteur est un dipôle demi-onde fonctionnant à 200 MHz et de rayon $a = 0.5$ mm. La tension V_r est calculée à une profondeur $z = -1$ m.

Sur la planche (III-18) nous avons représenté la tension V_r en fonction du découpage N de l'antenne, cette courbe permet de remarquer que la convergence des calculs est très lente et nécessite donc de grands découpages. En fait, comme on peut le constater sur la figure (III-19), qui représente $\sum_{i=1}^n V_r^i$ pour $n = 1, 2, \dots, N$, la tension V_r est composée essentiellement de la contribution des tous derniers éléments.

Sur les planches (III-20) et (III-21) nous avons tracé l'évolution du module et de la phase de la tension V_r lorsque l'antenne traverse deux couches de natures différentes (Figure III-17). La fréquence est de 200 MHz, l'antenne mesure 0.75 m et a un diamètre de 0.7 mm.

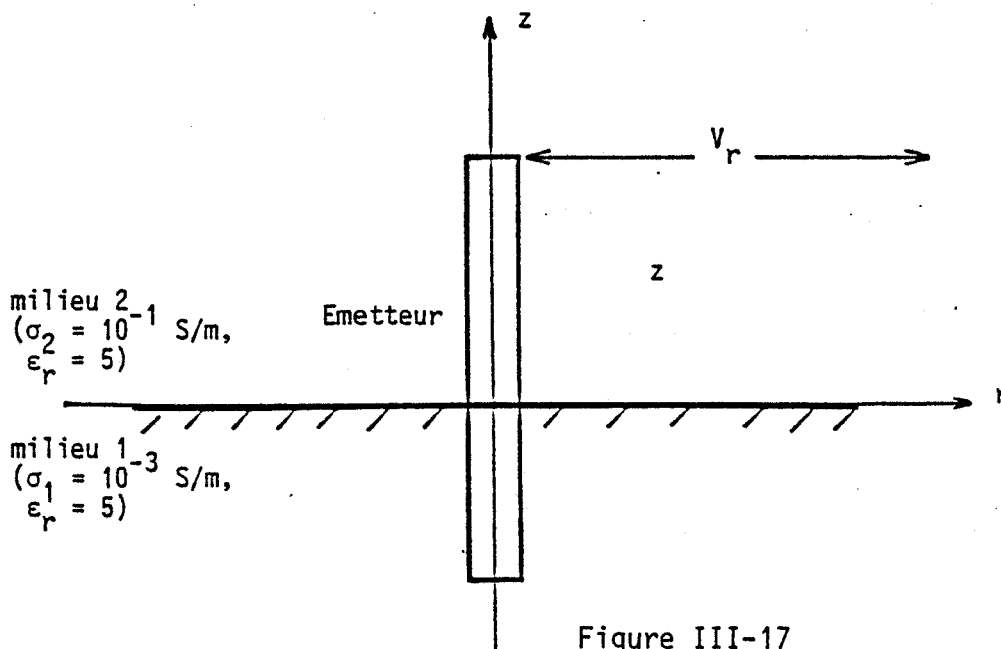


Figure III-17

On constate sur ces dernières courbes que la tension V_r ne varie que peu lorsque l'antenne est à cheval entre les deux demi-milieus. Ceci s'explique par le fait que les éléments de bords dont la contribution est la plus importante sont encore dans le milieu 2. Par contre on remarque une variation brutale au moment où l'antenne passe en entier dans le milieu 1, les tensions limites sont celles du cas du milieu homogène correspondant. Remarquons ici que V_r est dix fois plus grande lorsqu'on passe du milieu 2 ($\sigma_2 = 10^{-1}$ S/m) au milieu 1 ($\sigma_1 = 10^{-3}$ S/m).

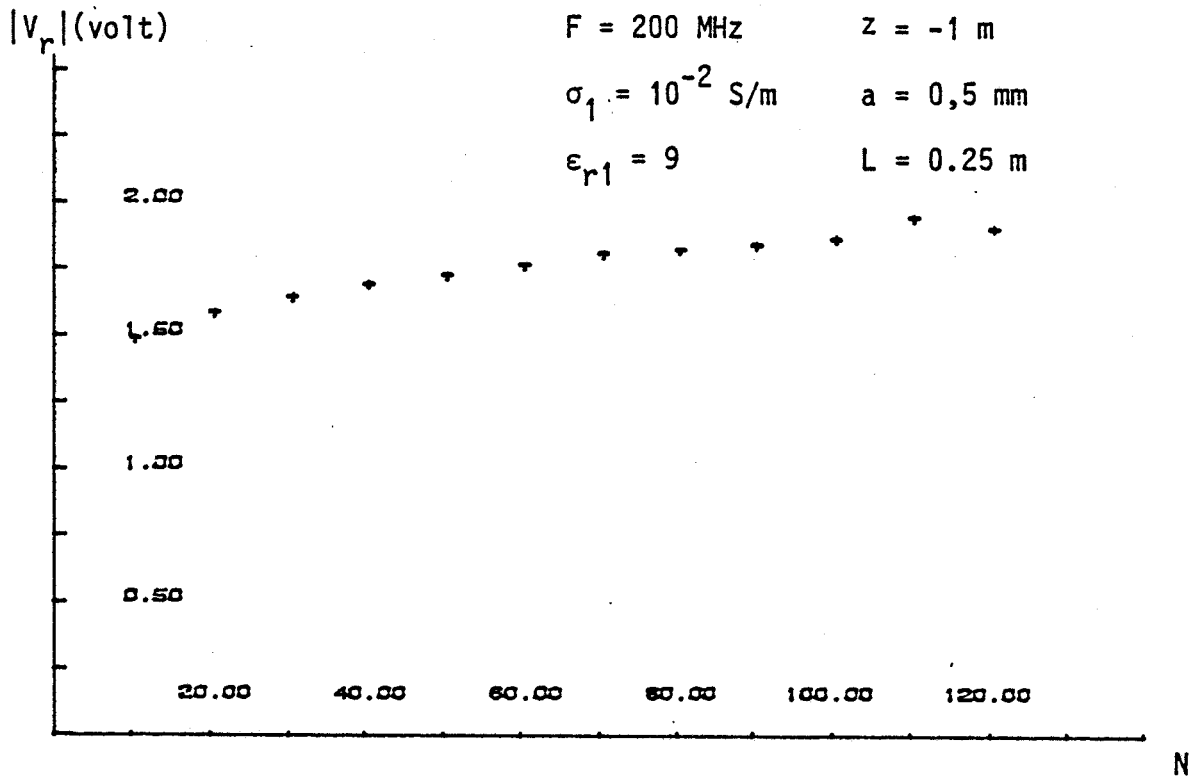


Figure III-18 : Convergence de V_r en fonction du découpage.

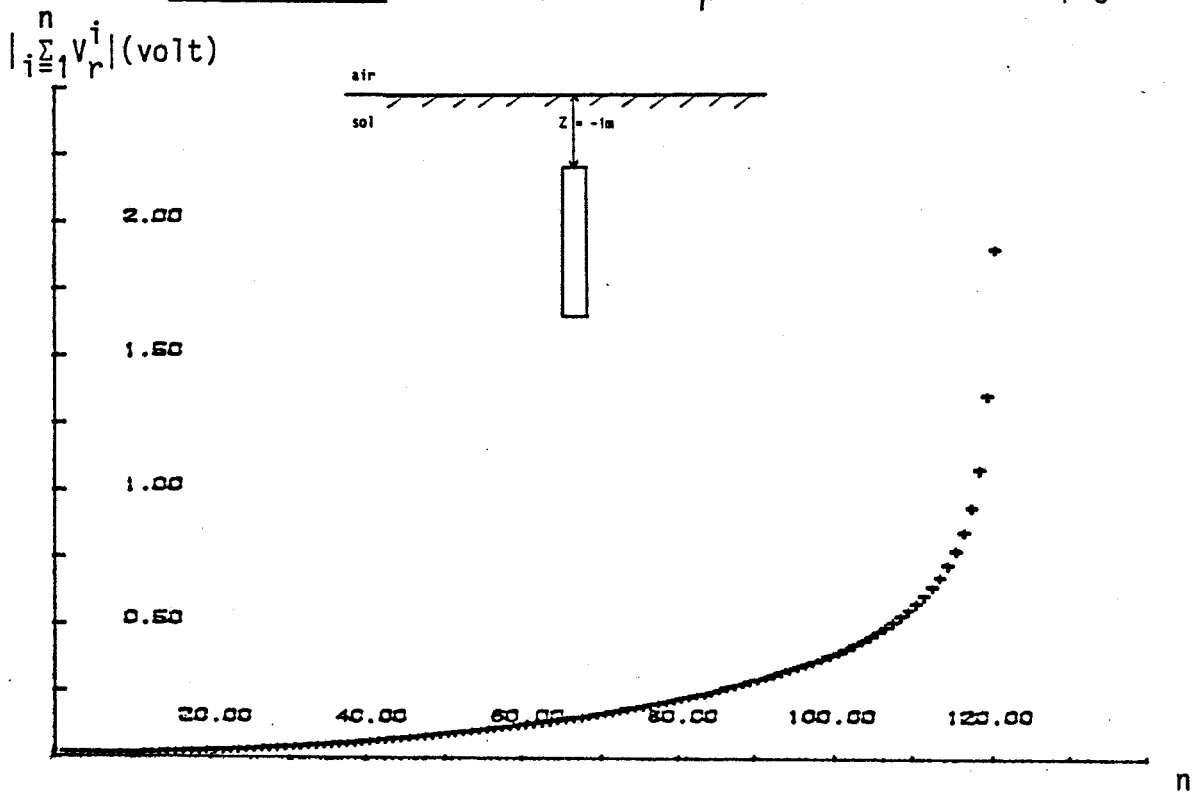


Figure III-19 : Contribution des différents éléments de l'antenne.

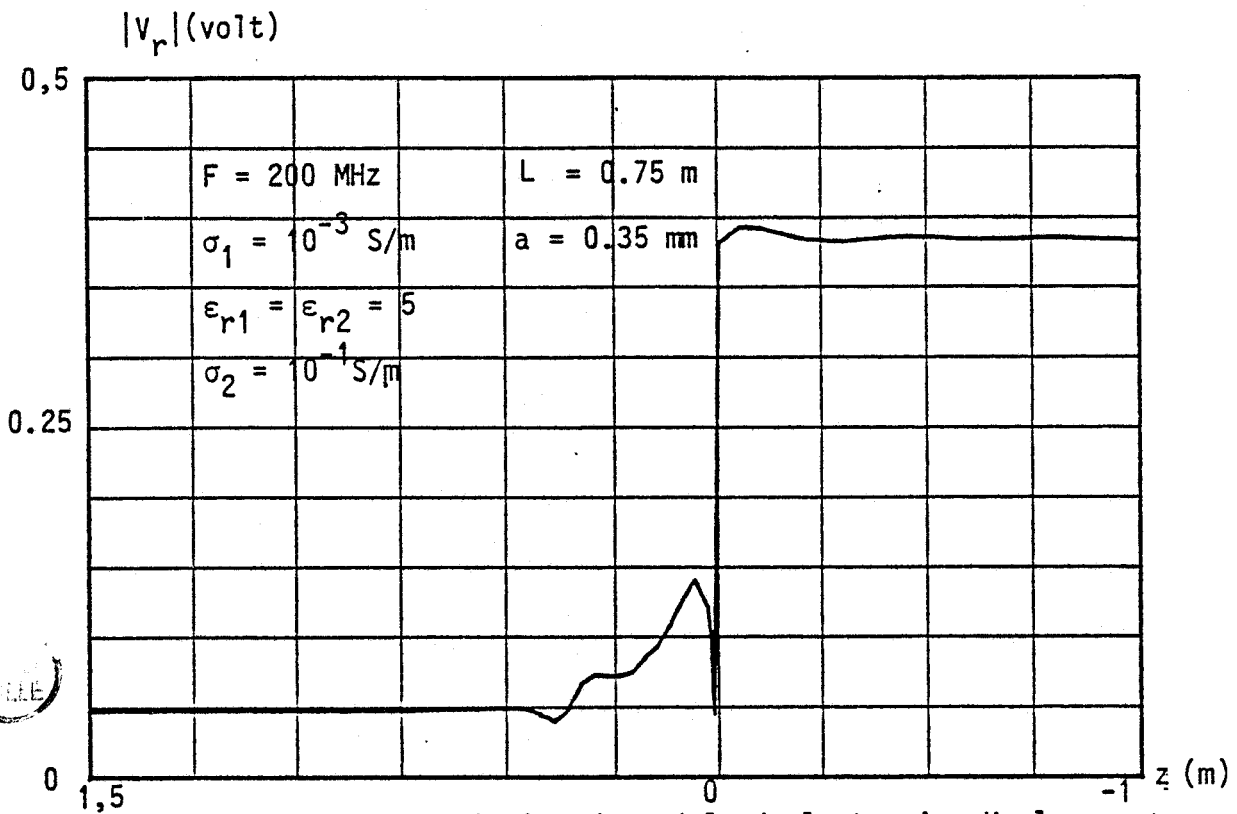


Figure III-20 : Variation du module de la tension V_r lorsque l'antenne se déplace entre deux milieux.

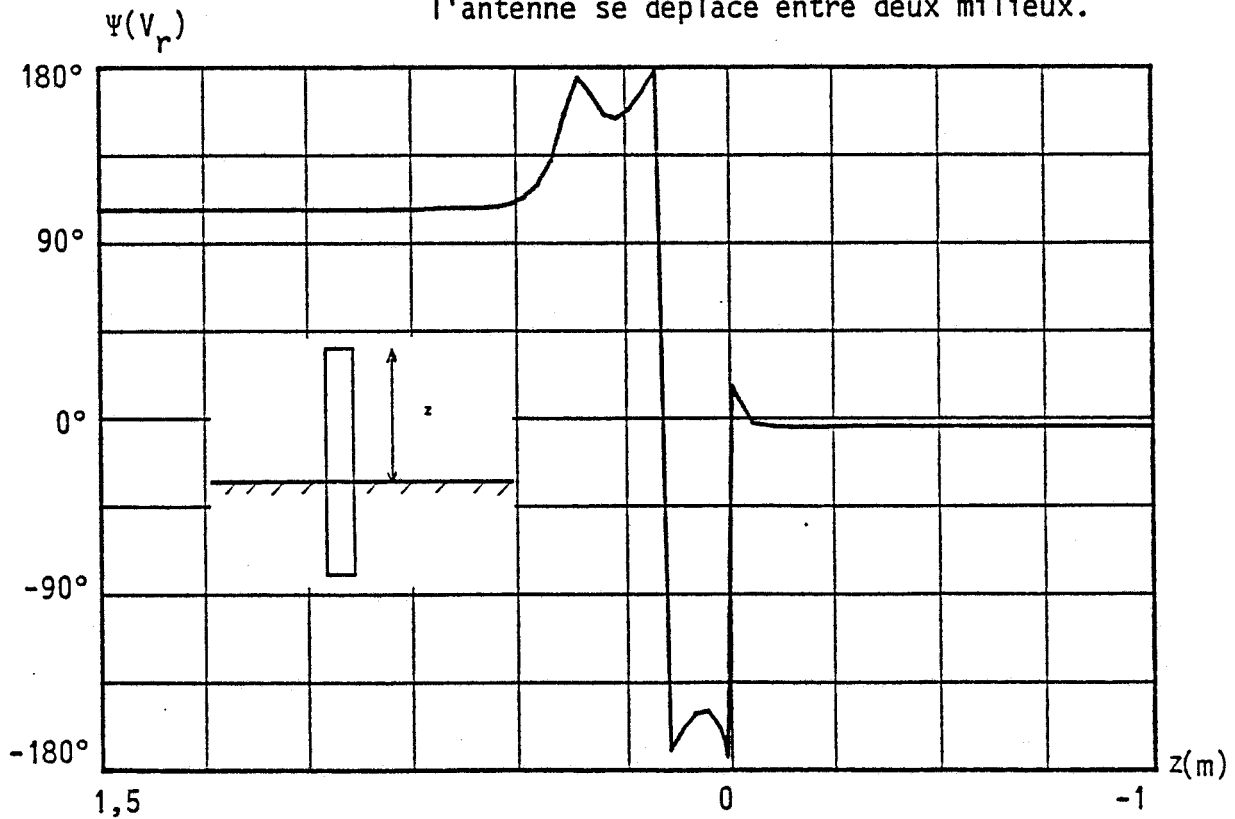


Figure III-21 : Variation de la phase de la tension V_r .

CONCLUSION

La configuration d'une antenne traversant l'interface de deux demi-milieux demande le calcul d'un nombre d'éléments beaucoup plus important que dans tous les autres cas traités. Cela demande donc un temps de calcul beaucoup plus important. Mais la convergence de la méthode reste assez rapide malgré la complexité de ces calculs. La définition des fonctions base et test sur l'élément de l'interface pour assurer la continuité et le choix d'un même découpage sur les deux parties de l'antenne limitent les possibilités de découpage.

L'étude numérique montre que le courant à l'image de l'impédance d'entrée subit de très grandes variations lorsque l'antenne s'enfonce dans le sol. L'amplitude du courant diminue par rapport au cas de l'antenne entièrement dans l'air, et sur la partie enterrée de l'antenne apparaissent des oscillations dès que la longueur de cette partie devient supérieure à la demi-longueur d'onde dans le sol. Pour les prises de terre on constate une augmentation de l'amplitude du courant avec la fréquence.

Le calcul de la tension V_p au bout de l'antenne d'émission montre que celle-ci subit une variation brutale au passage de l'interface entre deux milieux. Mais les calculs demandent des temps importants vu que la convergence n'est pas rapide. La mesure de cette tension peut s'avérer un bon indicateur lors du passage entre deux milieux.

CONCLUSION

La conclusion d'une telle étude est évidemment l'intérêt de ceux qui ont pu bénéficier de ce calcul d'un nombre d'éléments beaucoup plus important que dans les autres cas traités. Cela donne aussi un aperçu de ce qui peut être obtenu plus facilement, mais la connaissance de la méthode reste assez rapide malgré la complexité de ces calculs. La définition des fonctions passe et est sur l'élément de l'intervalle pour assurer la continuité et le choix d'un mode de découpage sur les deux parties de l'intervalle assure la possibilité de découpage.

L'étude numérique montre que le courant à l'image de l'impédance d'entrée suit de très grandes variations lorsque l'impédance d'entrée varie. La variation de l'impédance d'entrée est due à la variation de l'impédance d'entrée elle-même dans l'air et sur la partie inférieure de l'antenne. L'impédance d'entrée des oscillations des parties de cette partie devient négative à la partie inférieure d'onde dans la section. Les prises de terre ou contacts non augmentent de l'impédance de contact avec la fréquence.

Le calcul de la section de la partie de l'antenne d'élévation montre que celle-ci suit une variation brutale au passage de l'impédance entre deux niveaux. Mais les calculs montrent que les variations de la partie inférieure sont assez rapides. La section de cette partie peut varier un peu plus lorsque la partie inférieure de l'antenne est plus élevée.

C H A P I T R E I V : REALISATION D'UNE LIAISON ENTRE FORAGES

INTRODUCTION

Nous avons présenté dans les précédents chapitres les approches théoriques concernant la propagation d'ondes haute fréquence dans le sol considéré comme un demi-milieu homogène, et la modélisation d'antennes filaires dans ce même milieu. Cela nous a permis de décrire les conditions de liaison entre deux forages distants d'une quinzaine de mètres environ. Comme des sondes d'émission et de réception ont été réalisées par le personnel du laboratoire de Radiopropagation et Electronique, des premiers essais ont pu avoir lieu dans la région de St Brieux. Celle-ci a été choisie pour se placer dans une configuration favorable, la conductivité du sol granitique étant relativement faible.

Après description des bancs de mesure, nous présenterons les résultats expérimentaux de la variation d'impédance d'entrée de l'antenne en fonction de la profondeur de la sonde, donc de son environnement. Nous pourrions mettre ainsi en évidence les variations de sa fréquence d'accord et son impédance d'entrée. Des transmissions entre deux forages distants de 7 m, 14 m et 21 m ont été réalisées. Dans la deuxième partie de ce chapitre nous présenterons les principaux résultats ainsi qu'une confrontation avec les prévisions théoriques.

IV. 1 - CARACTERISATION D'UNE ANTENNE DANS UN FORAGE

Pour pouvoir interpréter les mesures résultants d'une transmission entre forages, il faut que les variations du courant d'émission restent faibles en fonction de la profondeur de la sonde. Nous nous sommes donc intéressés dans cette première partie à étudier la variation de l'impédance d'entrée de l'antenne en fonction de sa profondeur dans le sol. Avant de donner les résultats de ces mesures, nous allons faire une description des antennes utilisées ainsi que du banc de mesure.

IV.1.1 - Description des antennes utilisées

La géométrie du forage représente la limitation principale dans le choix de l'antenne et les moyens pour l'alimenter et l'adapter. Compte tenu du faible diamètre du forage, 7 à 9 cm, l'antenne qui est un dipôle demi-onde doit être alimentée à partir d'un câble situé suivant son axe. De plus, l'impédance d'entrée ne doit pas varier d'une manière trop importante suivant les caractéristiques du milieu encaissant. Différentes variantes géométriques du doublet $\lambda/2$ ont été réalisées et testées [25]. Les meilleures performances ont été obtenues pour l'antenne dite en J. figure (IV.1) qui est donc un dipôle en $\lambda/2$ excité à son extrémité au moyen d'une ligne bifilaire d'adaptation de longueur $\lambda/4$.

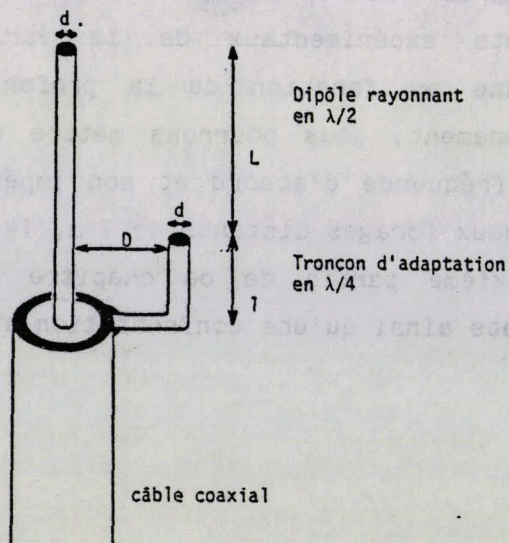


Figure IV.1 : Antenne en J.

Pour une fréquence de travail de 200 MHz une antenne a été réalisée avec un fil de diamètre $d = 0,35$ mm. L'élément rayonnant de longueur $L = 72$ cm et l'élément d'adaptation de longueur $l = 32$ cm sont distant de $D = 4,1$ cm. La rigidité mécanique de l'antenne étant insuffisante, vu le diamètre des fils, ceux-ci ont été collés sur un mince support en PVC alvéolé. L'ensemble a été introduit dans un tube en PVC de diamètre extérieur 5 cm et d'épaisseur 3,5 mm. Des joints d'étanchéités ont été placés sur les extrémités du tube de telle sorte qu'aucun fluide ne puisse pénétrer à l'intérieur de la sonde.

Sur la Planche (IV.2) nous avons représenté les variations de l'amplitude et de la phase de l'impédance d'entrée en espace libre en fonction de la fréquence. Les deux courbes ont été tracées dans le cas où l'antenne est placée ou non dans le tube. On constate un décalage de 5 MHz de la fréquence d'accord entre les deux cas dus à la permittivité diélectrique du PVC.

IV.1.2 - Description du Banc de Mesure de l'impédance d'entrée

Le banc de mesure représenté sur la figure (IV.3) fonctionne dans la gamme de fréquence 100 MHz - 1 GHz. Il permet de mesurer l'impédance d'une charge placée à l'extrémité d'un câble coaxial.

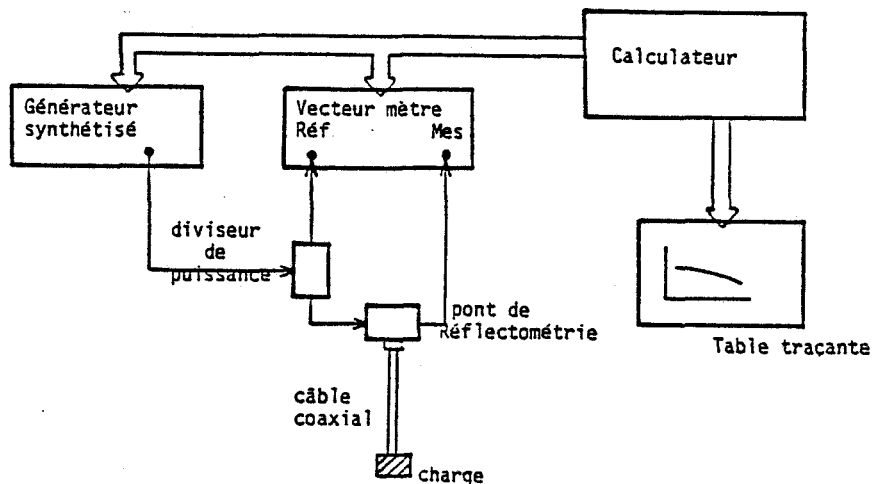


Figure IV.3 : Banc automatique de mesure de l'impédance.

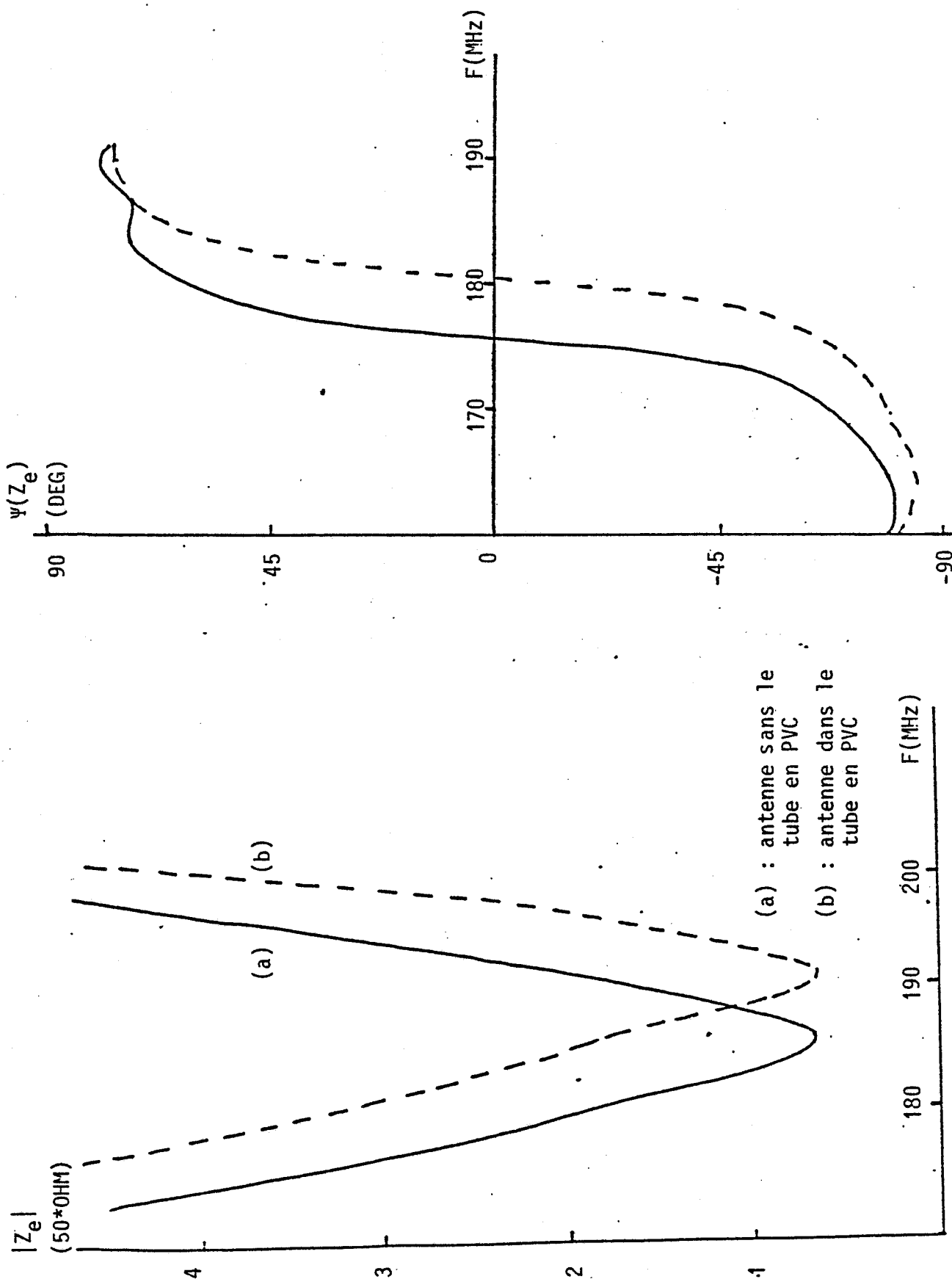


Figure IV-2 : Antenne J,
Impédance d'entrée en fonction de la fréquence.

Les logiciels mis au point sur un ordinateur HP 9836 permettent de piloter automatiquement toute la procédure de mesure. L'étalonnage est obtenu en plaçant un court-circuit de référence à l'extrémité du câble. L'élément à mesurer est ensuite monté à la place du court-circuit. Les résultats de la mesure sont stockés sur une disquette puis représentés sur une table traçante par exemple. Il est à noter que pour chaque pas la mesure est effectuée plusieurs fois et on fait la moyenne en supprimant les valeurs aberrantes.

IV.1.3 - Mesure de l'impédance d'entrée de l'antenne dans un forage [26]

Sur le schéma (IV.4) nous avons représenté la configuration du dispositif expérimental sur le terrain. La sonde, descendue dans le forage au moyen d'une corde de nylon, est reliée au banc de mesure par un câble coaxial. On notera P la profondeur de la sonde, c'est-à-dire la distance séparant l'extrémité supérieure de celle-ci de l'interface air-sol. Avant chaque changement de profondeur, un réétalonnage est effectué avec le court-circuit de référence monté en bout de câble et placé à la profondeur prévue pour la mesure.

Le plan d'eau rencontré à une dizaine de mètres de la surface du sol constitue une limite de la profondeur d'investigation, ceci essentiellement pour la raison mécanique de flottaison de la sonde.

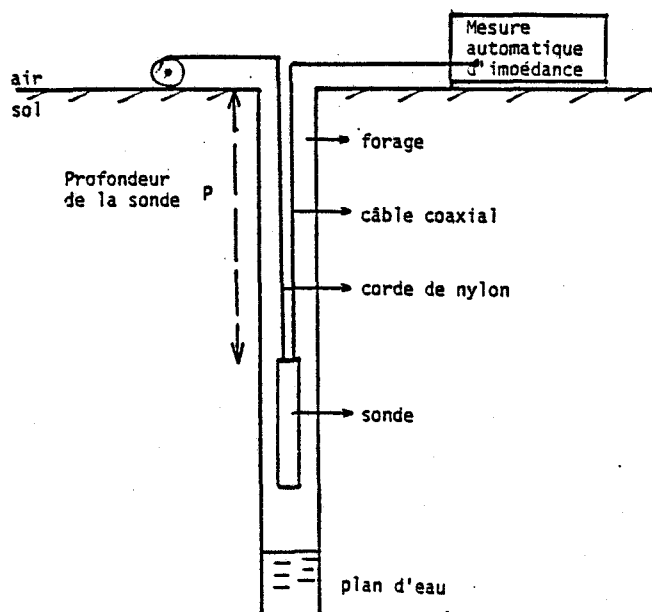


Figure IV.4 : Mesure de l'impédance d'entrée de l'antenne dans le forage

Les brins de l'antenne sont placés à proximité immédiate de l'enveloppe de la sonde compte tenu du faible diamètre des forages, ce qui risque de provoquer une variation importante de l'impédance d'entrée Z_e en fonction de la nature du sol entourant l'antenne. Avant de nous intéresser aux résultats obtenus en fonction de la profondeur P , nous avons envisagé tout d'abord les cas extrêmes qui sont le cas de l'antenne placée dans l'air à 1 m au-dessus du sol, le cas de l'antenne dans le sol et enfin le cas de l'antenne en partie immergée. Cette dernière configuration a été obtenue en descendant la sonde au fond du trou mais, compte tenu de son poids, sa partie immergée ne pouvait dépasser 50 cm.

On note sur les planches (IV.5) et (IV.6) que la fréquence d'accord f_a et que $|Z_e|$ changent notablement lorsque l'antenne se trouve dans des milieux complètement différents, la fréquence d'accord ou de résonance étant définie lorsque la partie imaginaire de l'impédance d'entrée est nulle. L'échelle correspondante à $|Z_e|$ est normalisée à un facteur multiplicatif de 50Ω . On obtient ainsi pour l'antenne dans l'air à 1 m au-dessus du sol $f_a = 190$ MHz, $R_e = 45 \Omega$, pour l'antenne dans le sol à 5 m de profondeur $f_a = 170$ MHz, $R_e = 70 \Omega$ et pour l'antenne en partie dans l'eau $f_a = 155$ MHz, $R_e = 100 \Omega$.

IV.1.3.1 - Influence de la profondeur de la sonde

La fréquence d'accord devant se situer autour de 175 MHz, comme nous venons de le voir, les mesures de l'impédance d'entrée en fonction de la fréquence ont été faites dans la bande 170 MHz-180 MHz pour des profondeurs de sonde comprises entre 0 m et 9 m, ceci avec un pas de 25 cm. Les courbes obtenues ne montrent pas de variations importantes de Z_e sauf pour certaines positions de la sonde et notamment lorsque la profondeur est comprise entre 1.75 m et 3.25 m. Les courbes de la planche (IV.7) correspondent aux cas extrêmes qui ont été enregistrés. On remarque que la fréquence d'accord varie entre 173 MHz et 180 MHz. Cependant, pour la fréquence centrale choisie 175 MHz, le module de l'impédance d'entrée ne varie pas dans des proportions trop importantes puisqu'il reste compris entre 72Ω et 82Ω . Ces variations de fréquence d'accord et de Z_e peuvent s'expliquer par un changement de résistivité

du milieu encaissant dans la zone de profondeur mentionnée précédemment. Une synthèse des différents résultats de mesure est donnée sur la planche (IV.8) où nous avons reporté la variation de la fréquence d'accord et de la résistance d'entrée correspondante en fonction de la profondeur de la sonde. Ce log de sondage montre clairement les différentes couches du terrain qui provoquent de légères variations de ces paramètres. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que si la conductivité σ du milieu augmente, la résistance d'entrée augmente également tandis que la fréquence d'accord diminue. Cette remarque permet de faire une interprétation très qualitative de la planche (IV.8). Dans le premier mètre on observe une augmentation de la fréquence d'accord qui caractérise une diminution de la conductivité. Entre 1 m et 1.75 m, on trouve des résultats voisins de ceux correspondant à des profondeurs supérieures à 3.25 m. Avec une fréquence d'accord supérieure à celle de la zone comprise entre 1.75 m et 3.25 m, les deux zones citées précédemment sont moins conductrices que cette dernière. En effet, on enregistre sur la zone 1.75 m - 3.25 m une diminution de la fréquence d'accord qui doit correspondre donc à une couche plus conductrice.

Lors d'une transmission forage-forage, la fréquence de travail sera fixe. La courbe de la planche (IV.9) montre que pour une fréquence de 175.6 MHz, les variations de l'impédance Z_e d'entrée en fonction de la profondeur de la sonde restent faibles. La valeur de $|Z_e|$ se situe au voisinage de $77 \Omega \pm 3 \Omega$ si on excepte la zone située à $P = 2$ m pour laquelle la valeur de $|Z_e|$ est de 71.5Ω . Ceci correspond donc à une variation relative maximum de 10 % du module de Z_e .

IV.1.3.2 - Influence du décentrage de la sonde

L'antenne ne pouvant être guidée dans le trou du forage, elle peut donc se rapprocher des parois de celui-ci, ou même avoir un mouvement de pendule. Pour mieux apprécier l'influence de la position de la sonde par rapport à l'axe du trou nous avons réalisé certains essais en fonction de cette position. Tout d'abord l'antenne est maintenue à une faible profondeur ($P = 1$ m). Ce qui nous donne la possibilité soit de la centrer par rapport au trou, soit de la plaquer contre une paroi. On

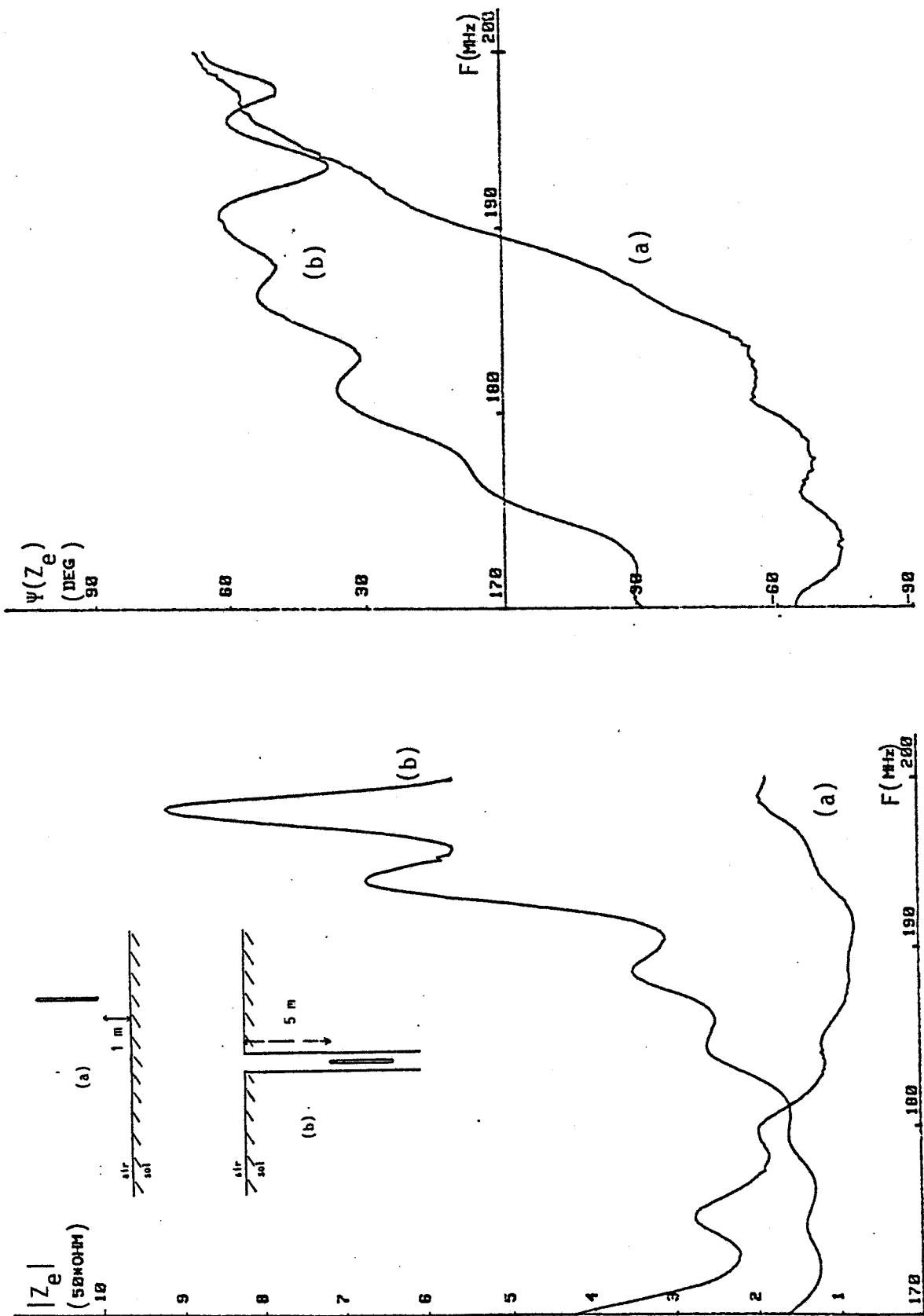


Figure IV-5 : Impédance d'entrée en fonction de la fréquence -
Antenne dans l'air (a) - Antenne dans le sol (b).

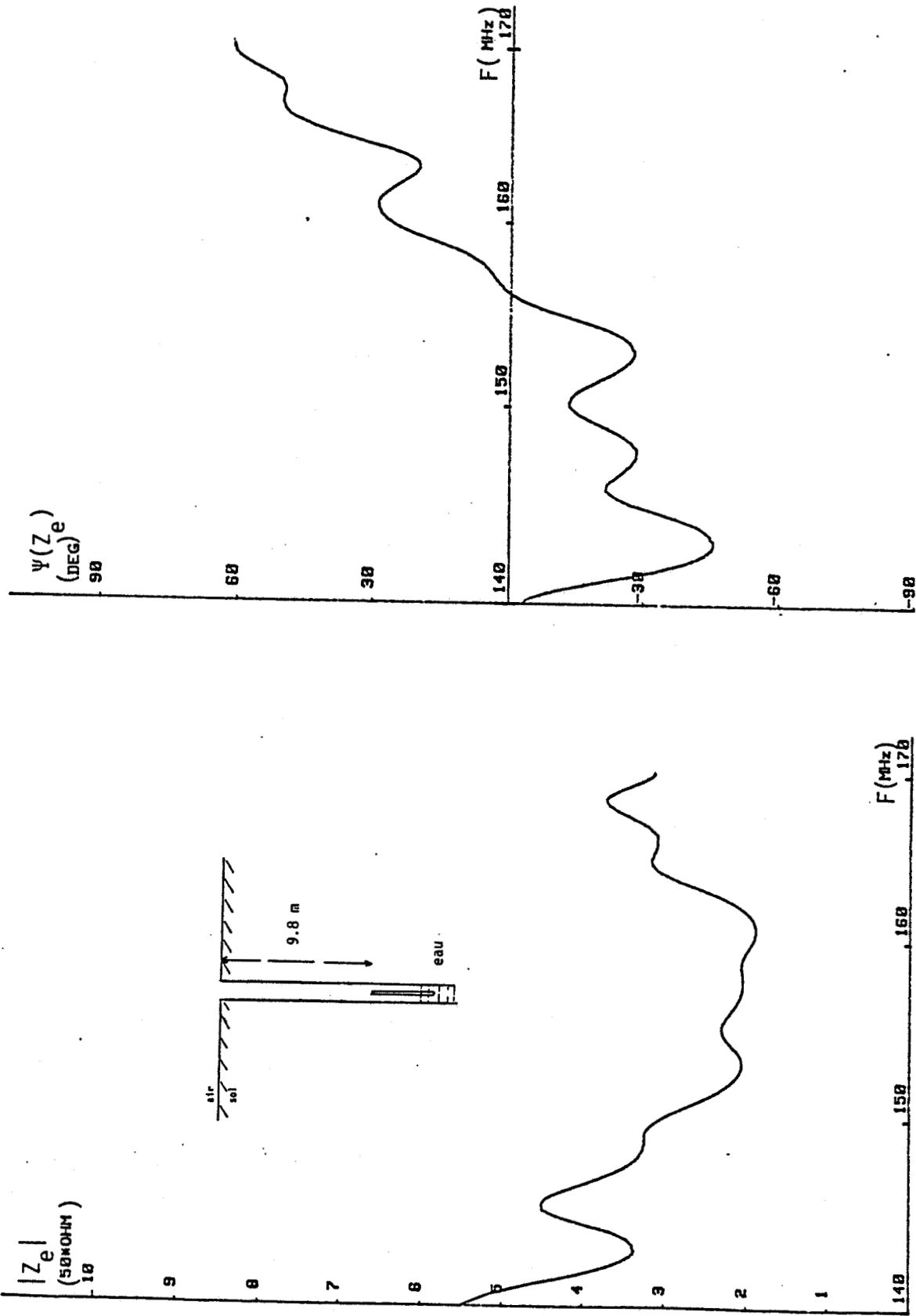


Figure IV-6 : Impédance d'entrée en fonction de la fréquence - Antenne en partie immergée.

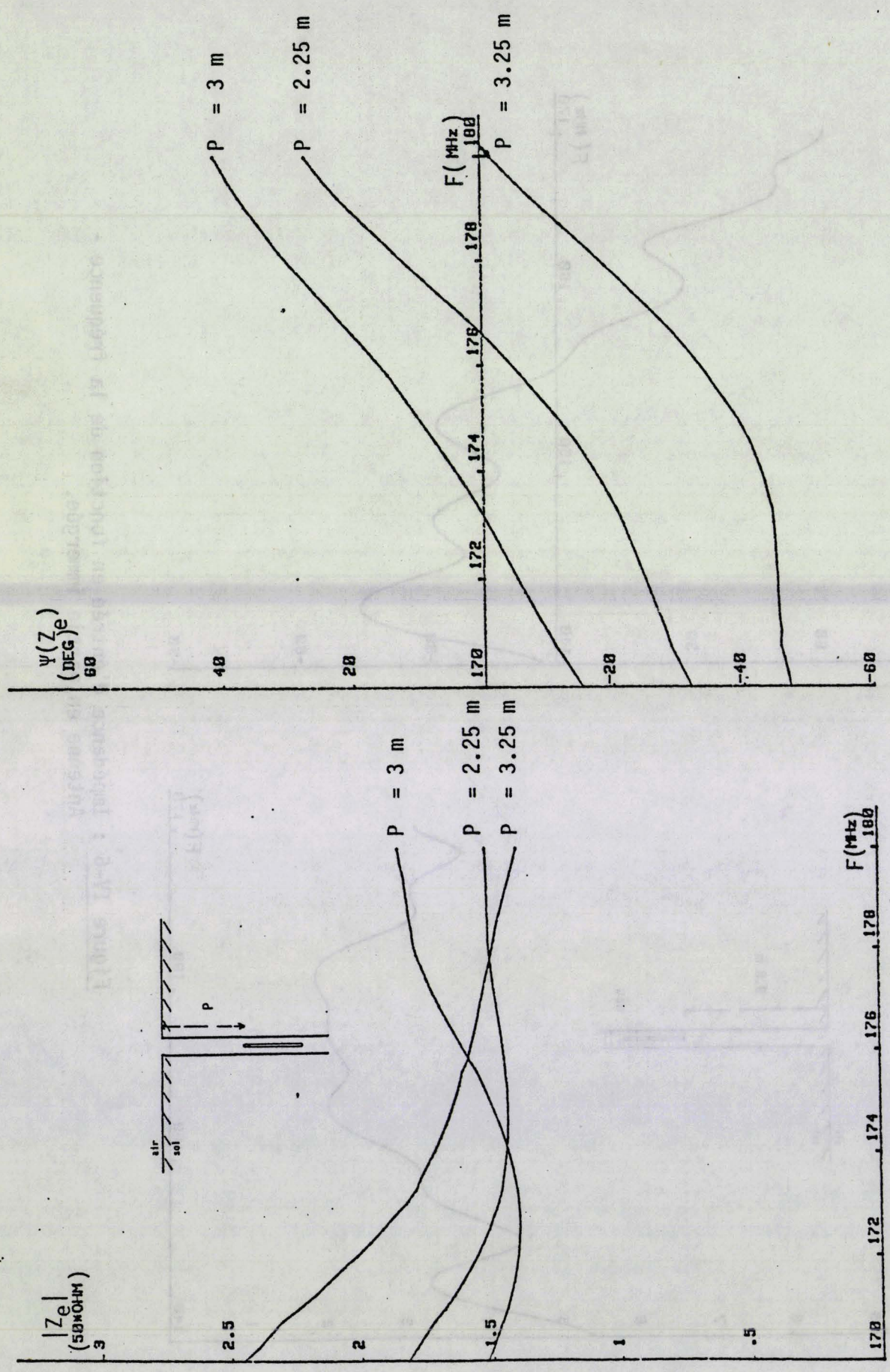


Figure IV-7 : Impédance d'entrée pour trois profondeurs de l'antenne.

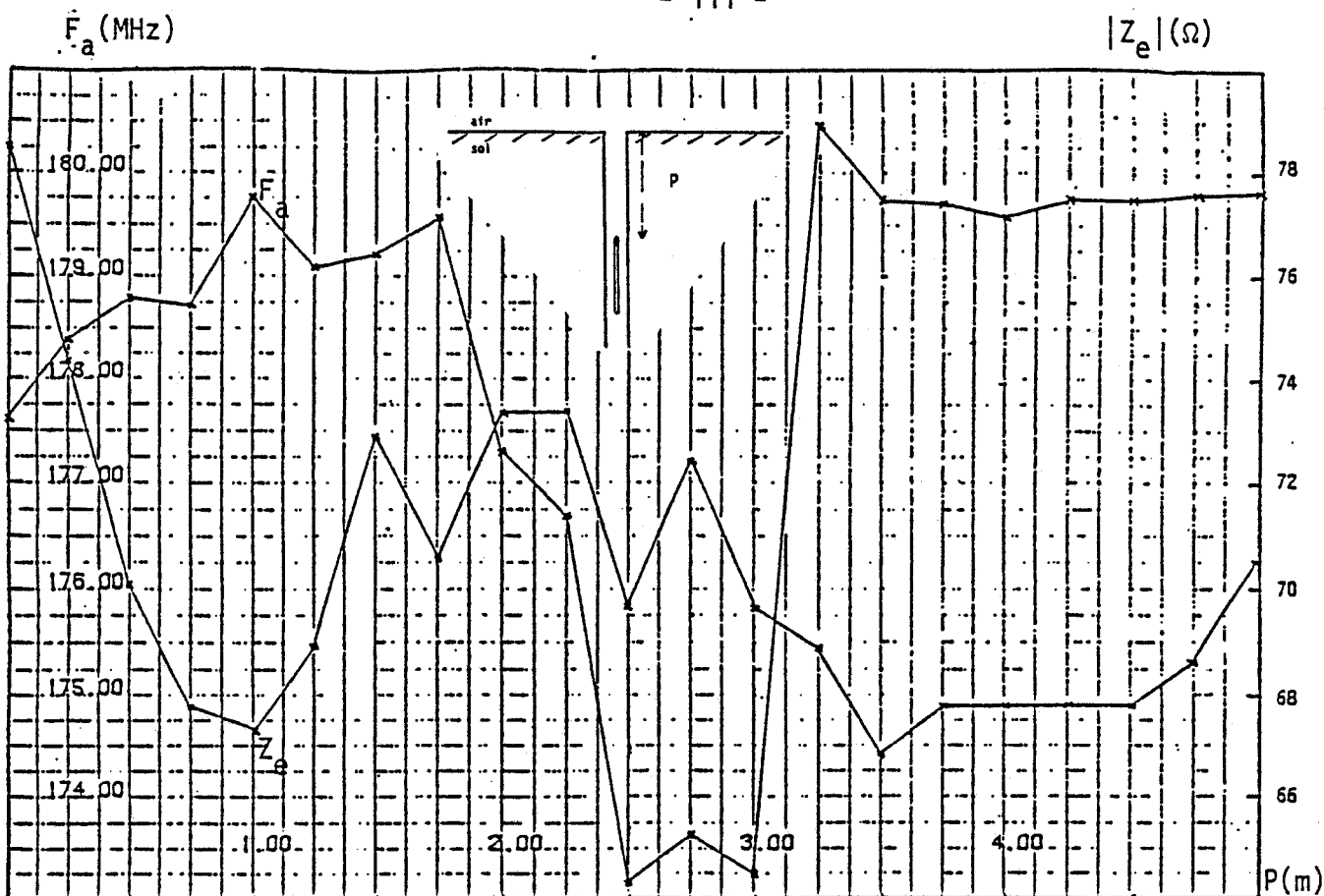


Figure IV-8 : Variation de la fréquence d'accord et de l'impédance d'entrée correspondante en fonction de la profondeur de l'antenne.

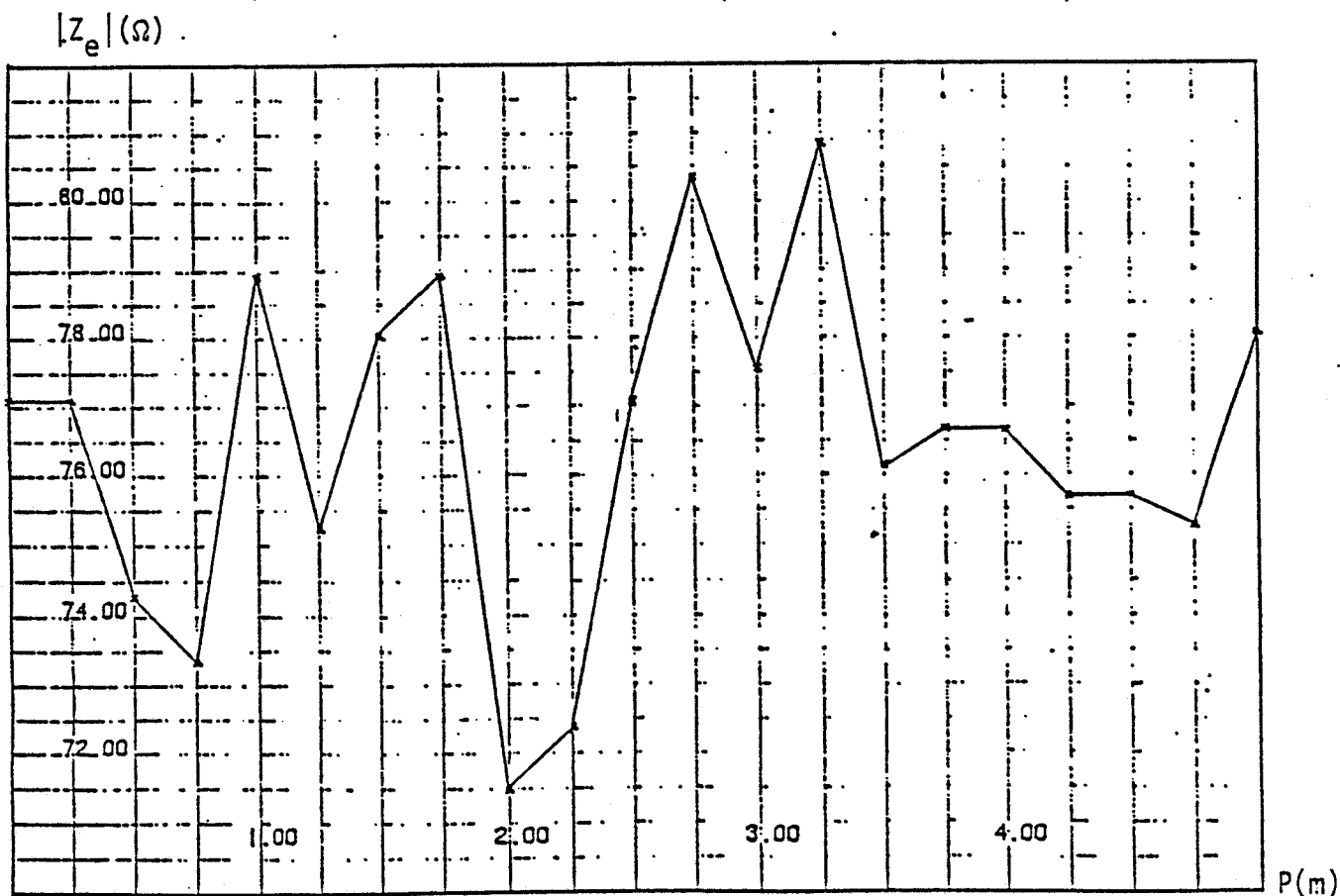


Figure IV-9 : Impédance d'entrée en fonction de la profondeur de l'antenne à la fréquence $F = 175.6$ MHz.

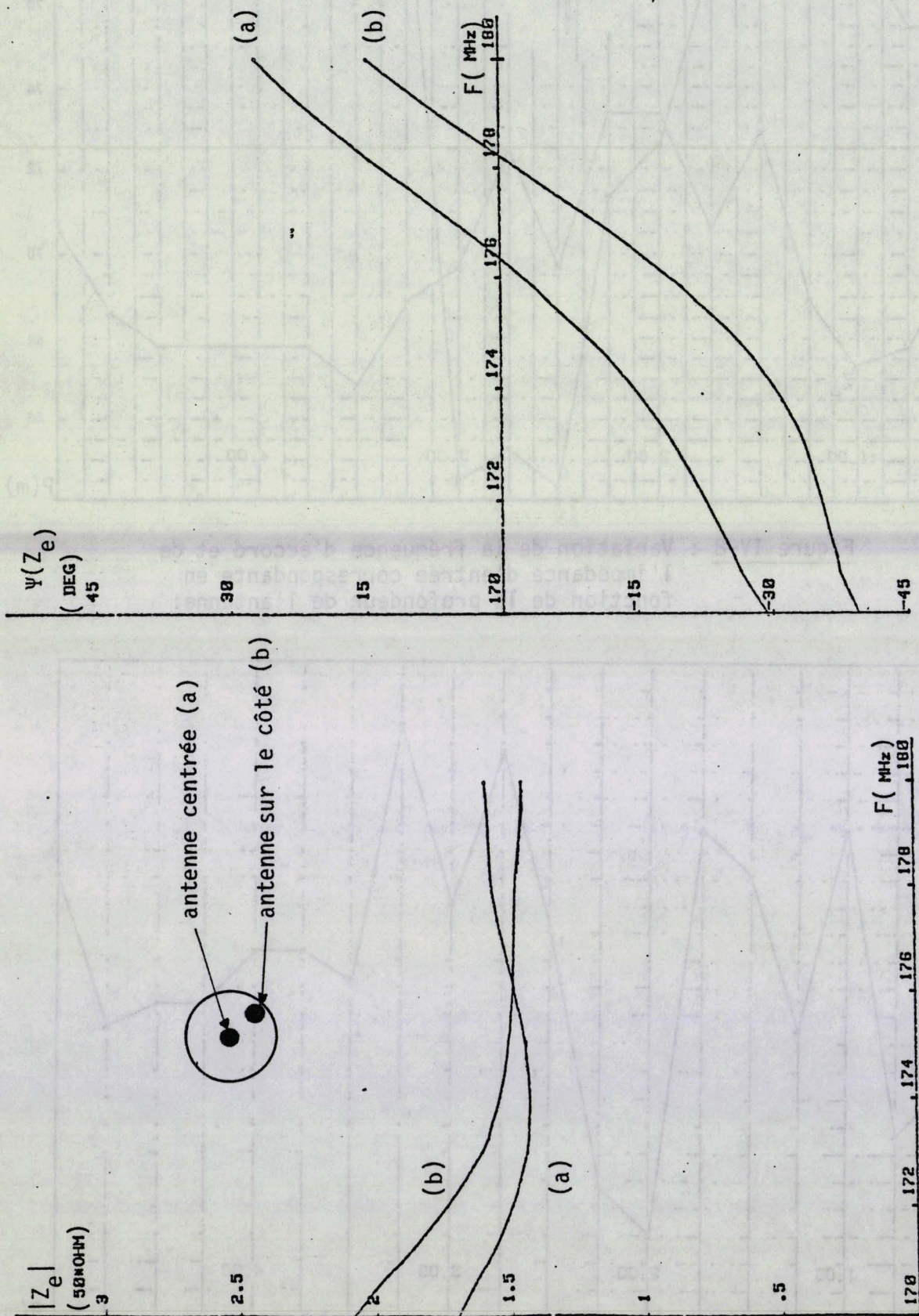


Figure IV-10 : Impédance d'entrée en fonction de la fréquence -
Influence de la position de l'antenne par rapport à l'axe du forage.

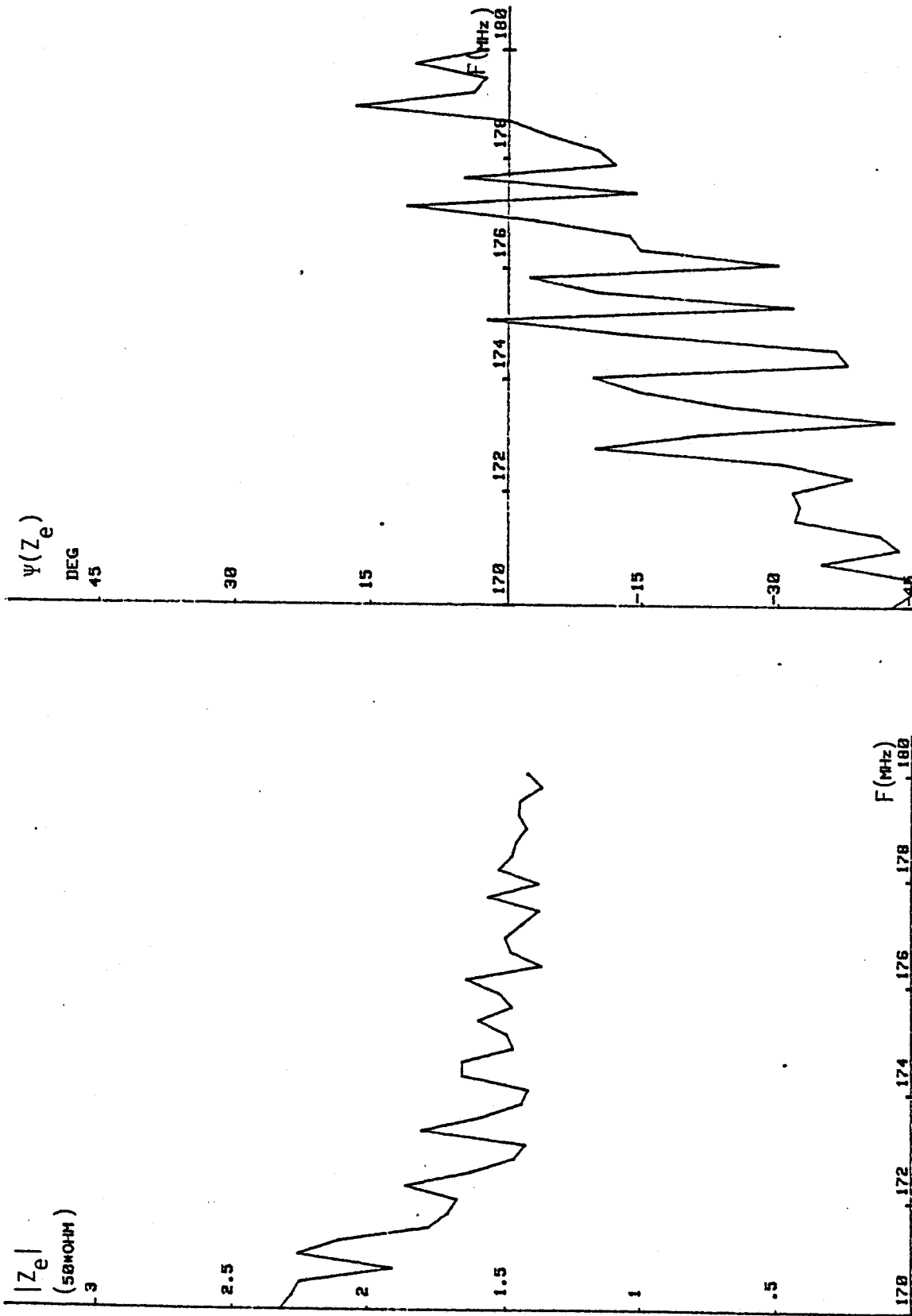


Figure IV-11 : Impédance d'entrée en fonction de la fréquence -
Influence du mouvement de balancement.

remarque sur la planche (IV.10) correspondant à ces essais que la variation de la fréquence d'accord est faible (± 1 MHz) ainsi que les fluctuations du module de l'impédance d'entrée. Une autre expérimentation à peu près similaire, consiste à faire subir à l'antenne qui se trouve à une profondeur de quelques mètres un mouvement de balancement d'une paroi à l'autre. On note sur la planche (IV.11) des résultats tout à fait similaires à ceux que l'on vient de décrire, la fréquence d'accord restant comprise entre 177 MHz et 179 MHz.

IV.2 - TRANSMISSION ENTRE DEUX FORAGES [26,27]

IV.2.1 - Description du matériel d'émission et de réception

Les antennes utilisées à l'émission et à la réception sont identiques, il s'agit des antennes en J décrites dans la première partie de ce chapitre.

La sonde de réception ne contient aucune électronique, le signal capté par l'antenne est remonté en surface par l'intermédiaire d'un câble coaxial. Les mesures sont donc effectuées en surface par un mesureur de champ et sont stockées au moyen d'un enregistreur magnétique.

Quant à la sonde d'émission, deux configurations sont possibles. Dans le premier cas l'antenne est alimentée depuis la surface par un générateur grâce à un câble coaxial. La deuxième configuration est une sonde d'émission autonome dans laquelle, outre l'antenne d'émission, il existe une partie alimentation et une partie électronique constituant l'émetteur proprement dit, figure (IV.12).

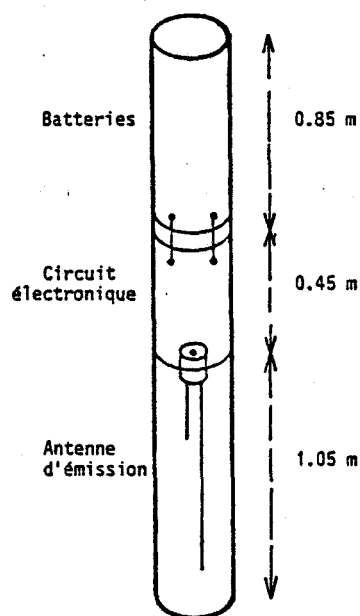


Figure IV.12 : Sonde d'émission autonome.

L'alimentation se compose d'accumulateurs rechargeables placés en série dans un tube plastique. L'émetteur quant à lui est composé d'un oscillateur (V.C.O. 0,1 - 0,2 GHz), d'un module d'amplification et d'un modulateur en tout ou rien [25]. Ce dernier a été envisagé pour minimiser les problèmes de dissipation thermiques. En effet, vu les contraintes d'étanchéités, les échanges thermiques sont très mauvais et les radiateurs seuls sont insuffisants.

Dans ce qui suit, nous allons décrire les résultats obtenus dans les deux configurations d'émission.

IV.2.2 - Résultats des mesures dans les deux configurations d'émission

Pour les différentes mesures en transmission, la sonde d'émission est maintenue à une profondeur constante alors que la sonde de réception est déplacée le long du forage afin de mesurer le champ en tout point de l'axe de celui-ci. Pour s'assurer de la reproductivité des mesures, deux logs sont enregistrés successivement.

IV.2.2.1 - Essais avec la sonde d'émission autonome

La figure (IV.13) représente l'ensemble du dispositif émission-réception pour la configuration de la sonde d'émission autonome.

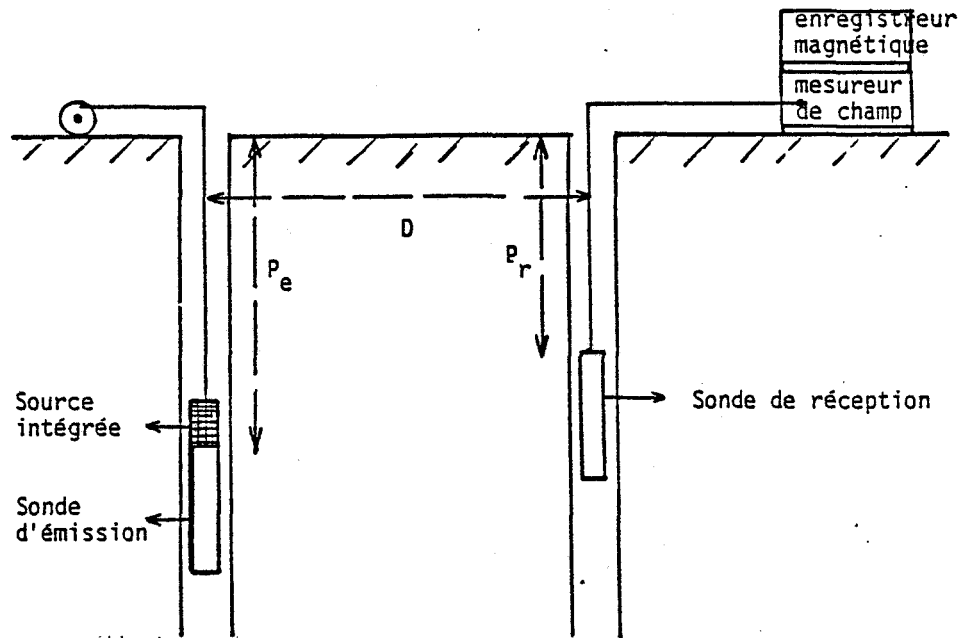


Figure IV.13 : Liaison entre forage avec une sonde d'émission autonome.

- P_e : profondeur de l'émetteur
- P_r : profondeur du récepteur
- D : distance entre les forages.

L'ensemble des courbes qui suivent donne les variations exprimées en dB/ μ V du module du niveau reçu -proportionnel au champ électrique E_z - en fonction de la profondeur de la sonde de réception. Ces courbes sont obtenues lorsque la distance entre forages est de 7 m, la profondeur de l'émetteur étant respectivement de 2 m et de 5 m. On note une reproductibilité satisfaisante des mesures.

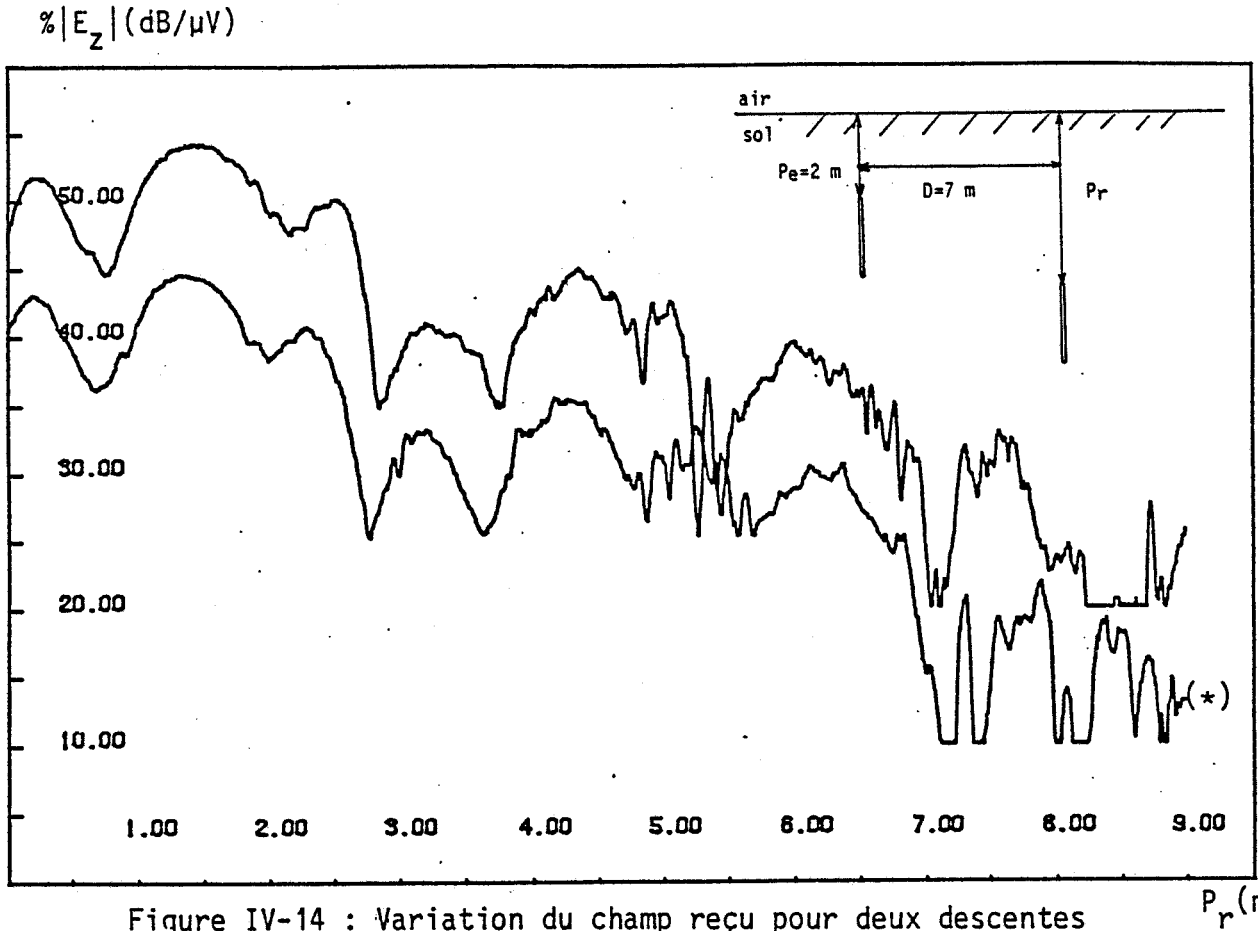


Figure IV-14 : Variation du champ reçu pour deux descentes de la sonde de réception.

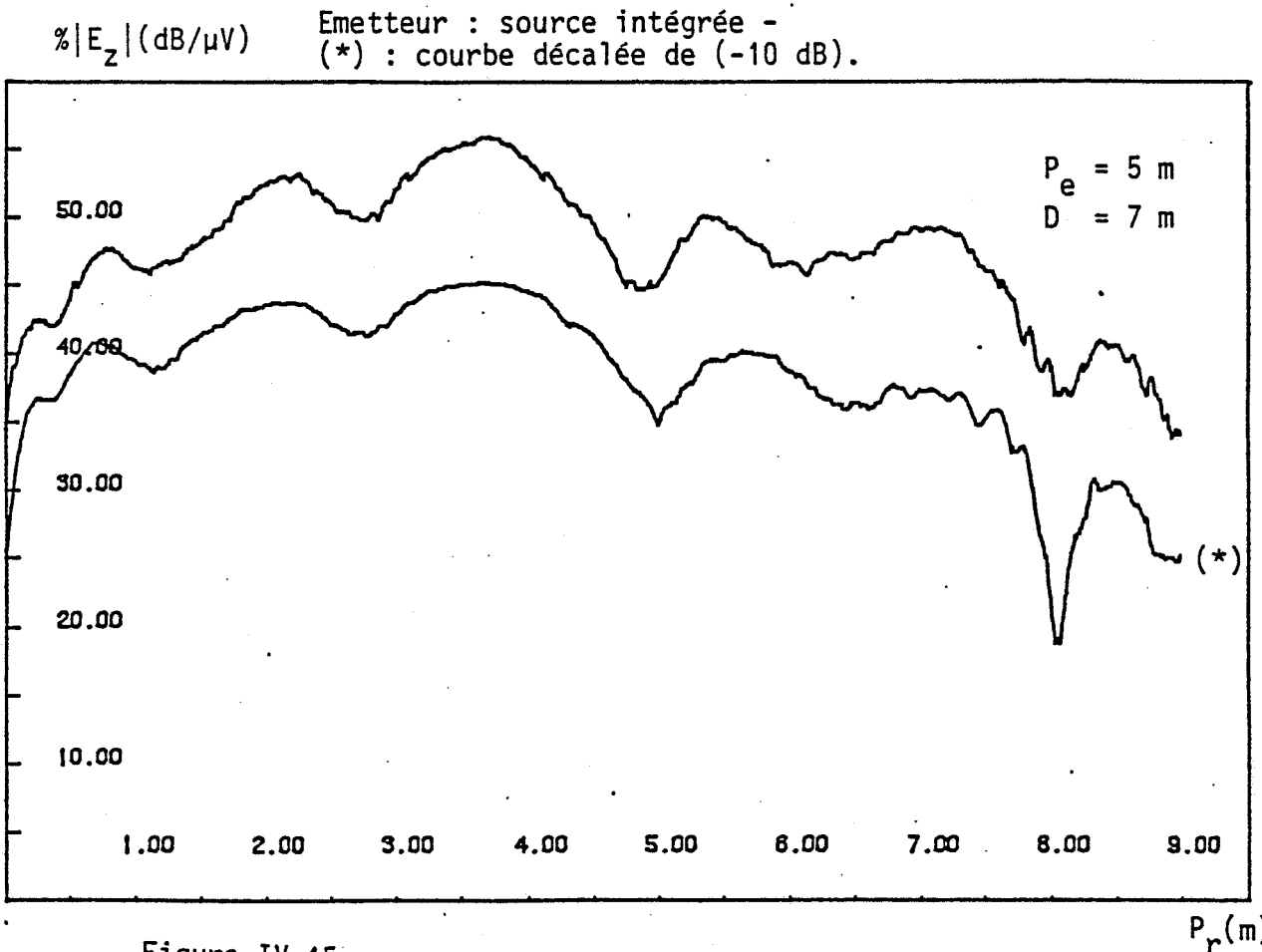


Figure IV-15

IV.2.2.2 - Essais avec l'antenne alimentée depuis la surface

Le signal généré par un synthétiseur est amplifié et envoyé sur la sonde par l'intermédiaire d'un câble coaxial. Le schéma représentatif de cette configuration est donné par la figure (IV-16).

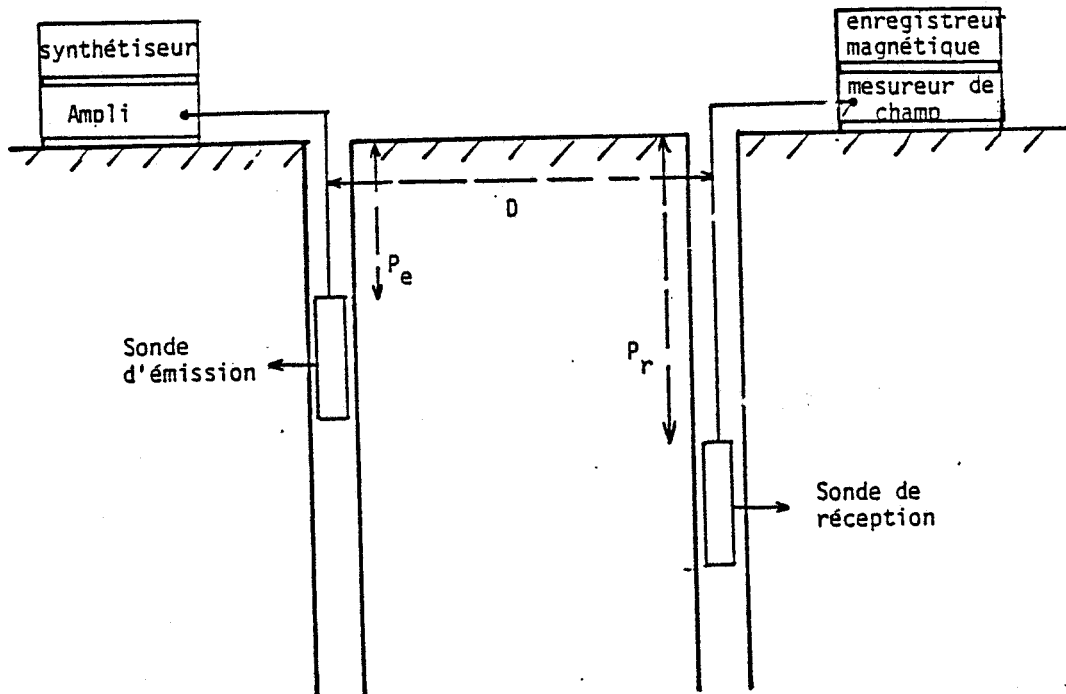


Figure IV.16 : Liaison entre forages avec une sonde d'émission alimentée depuis la surface.

Comme précédemment les courbes des planches (IV.17) et (IV.18) représentent la variation du champ électrique $|E_z|$ en fonction de la profondeur de la sonde de réception, pour une distance entre forages de 7 m et pour des profondeurs d'émetteur de 2 m et 8 m. La reproductibilité des mesures est également correcte.

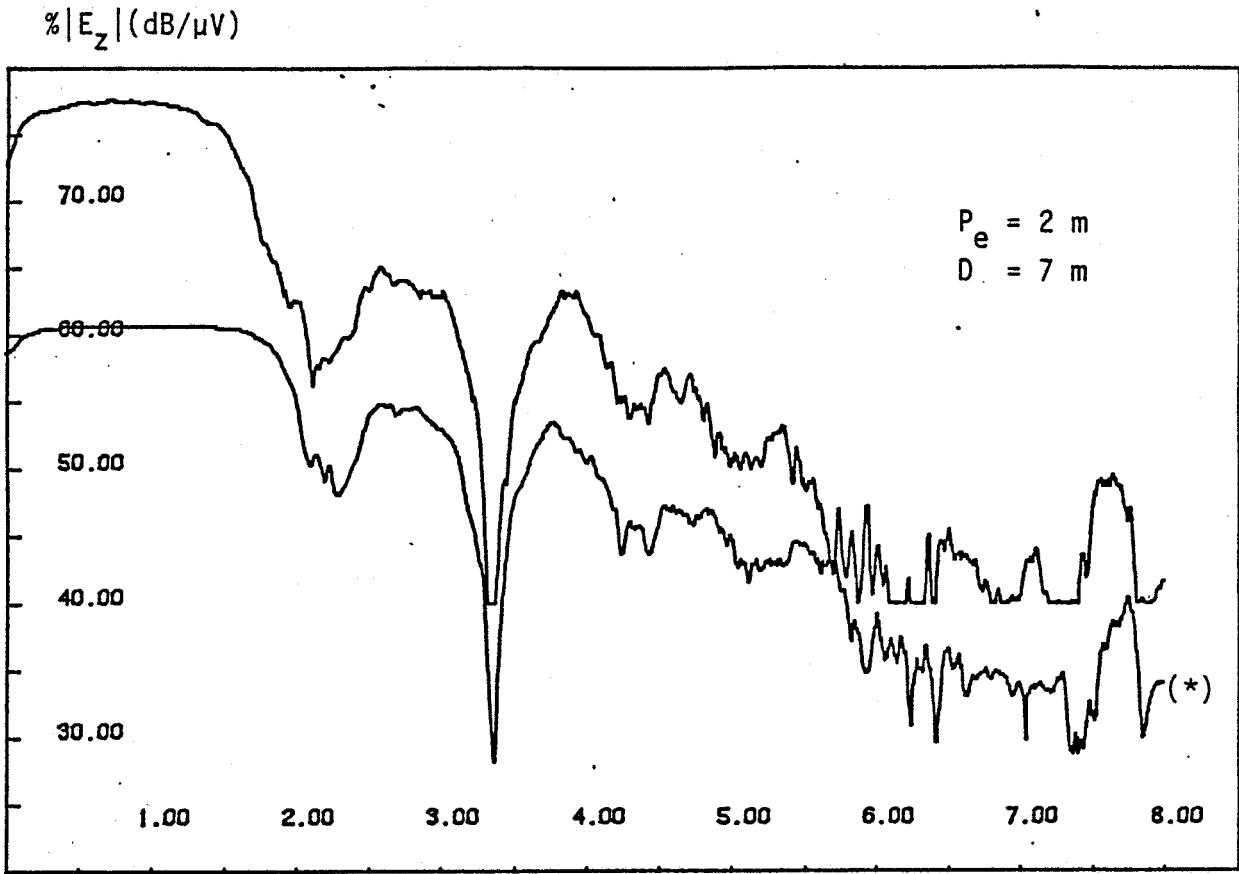


Figure IV-17 : Variation du champ reçu pour deux descentes de la sonde de réception.

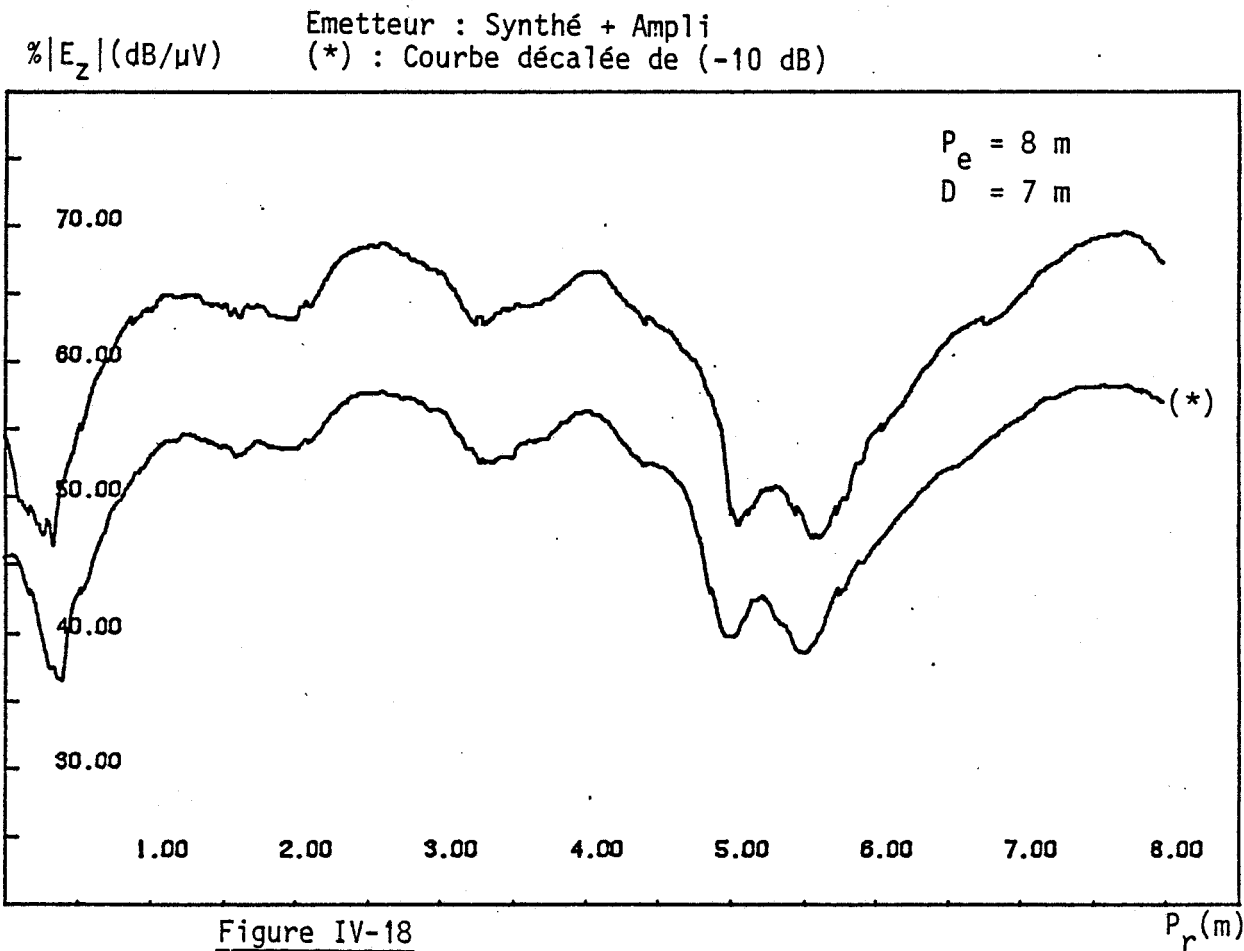


Figure IV-18

IV.2.2.3 - Comparaison des deux dispositifs d'émission

Les courbes des planches (IV.19) et (IV.20) ont été obtenues pour une distance entre forage de 14 m, la profondeur de l'émetteur valant respectivement 2 m et 5 m. Sur chacune des planches nous avons reporté les résultats obtenus dans le cas où la sonde d'émission possède sa propre source d'alimentation et dans le cas où l'antenne est alimentée depuis la surface.

Les courbes obtenues dans les deux configurations d'émission sont très voisines (planches (IV.19-20)). Les différences peuvent être attribuées à la présence du câble d'alimentation, ce que nous essayerons d'évaluer dans le dernier paragraphe de ce chapitre, ou aussi à la stabilité en fréquence de la source autonome.

IV.2.2.4 - Propagations sur différentes distances

Trois forages alignés avaient été effectués dans le massif granitique, la distance entre le forage central et les forages latéraux étant de 7 m et 14 m. En utilisant successivement deux trous de sondage pour placer la sonde d'émission, nous avons donc pu réaliser des liaisons sur trois distances différentes 7 m, 14 m et 21 m. La planche (IV.21) représente les courbes enregistrées en fonction de la profondeur du récepteur. Comme pour toutes les courbes précédentes, l'ordonnée correspond à la tension, exprimée en dB au-dessus du μV , mesurée sur l'antenne de réception. L'atténuation supplémentaire, quand la distance de transmission passe de 7 m à 14 m, est de l'ordre de 20 dB et la comparaison entre les courbes obtenues pour une distance entre forages

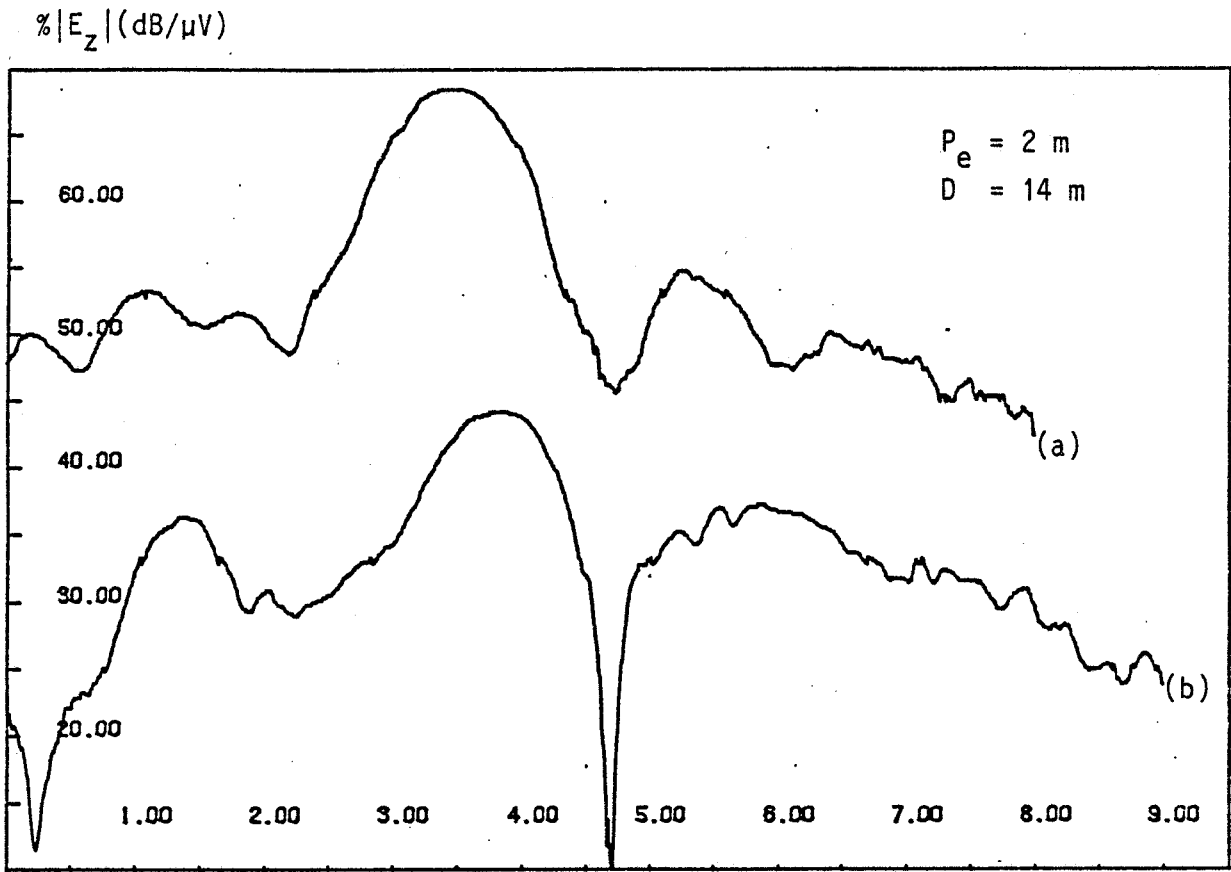


Figure IV-19 : Comparaison de l'évolution du champ reçu dans les deux configurations d'émission
(a) : Synthé + Ampli
(b) : source intégrée

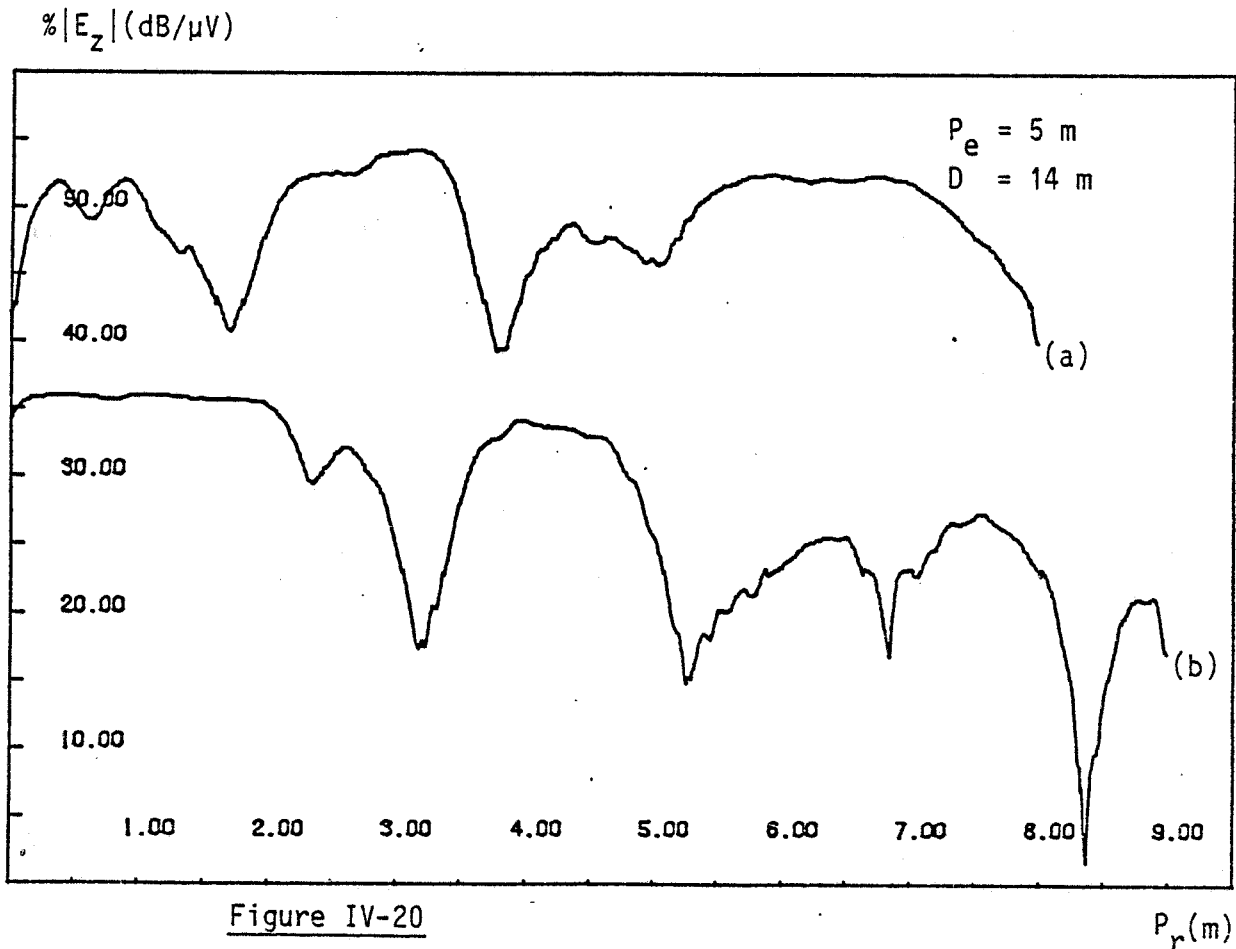


Figure IV-20

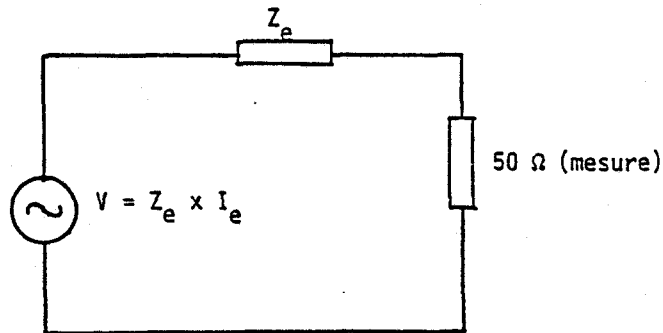
P_r (m)

de 7 m et de 21 m montre que dans ce cas l'affaiblissement supplémentaire est d'environ 30 dB. La distance de 21 m correspond à la portée maximum du système actuel, le mesureur de champ utilisé en réception ayant une sensibilité de 1 μ V (0 dB).

IV.2.3 - Comparaison entre les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux

Nous allons supposer que le sol se comporte comme un demi-milieu homogène, de conductivité σ . La valeur de σ ne peut être déduite que si la tension d'alimentation de l'antenne demi-onde est connue. Pour cela nous avons procédé à une liaison aérienne, les antennes d'émission et de réception étant placées à 2 m au-dessus du sol. Les mesures ont été effectuées pour une distance émetteur-récepteur variant entre 7 m et 21 m. Les calculs numériques ont été effectués pour les mêmes configurations que celles de l'expérimentation, l'antenne d'émission étant supposée être alimentée avec une tension de 1 V. Nous avons tout d'abord calculé la distribution du courant sur l'antenne d'émission et le champ rayonné par celle-ci, puis la distribution du courant sur l'antenne de réception. On en déduit ensuite la tension délivrée par cette antenne à l'entrée du mesureur de champ. La conductivité du sol a été choisie égale 10^{-2} S/m et la permittivité relative $\epsilon_r = 5$, valeurs évidemment tout-à-fait arbitraires mais pratiquement sans conséquence sur le résultat car, comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, l'onde directe est prépondérante pour les hauteurs et distances choisies.

La comparaison de quelques valeurs expérimentales et théoriques, tableau (IV.1) montre qu'il est nécessaire de décaler les résultats expérimentaux de près de 6 dB pour encadrer les résultats théoriques. La valeur théorique est calculée à partir du courant sur l'élément d'entrée selon la figure suivante.



distance émetteur récepteur	résultats théoriques (dB)	résultats expérimentaux (dB)
7 m	84	76
14 m	79	73
21 m	76,5	70

Tableau IV.1 : Résultats théoriques et expérimentaux d'une liaison dans l'air.

Une étude paramétrique a ensuite été faite dans le cas d'une liaison entre deux forages pour trouver la valeur de conductivité qui donne des amplitudes de champ théoriques voisines de celles mesurées. Il apparaît que cette valeur est proche de $5 \cdot 10^{-3}$ S/m en conservant, comme précédemment, une permittivité relative de 5. Les planches (IV.22) et (IV.23) se rapportent ainsi à une distance entre forages de 7 m et à une profondeur d'émetteur de 2 m et de 5 m, tandis que pour la planche (IV.24), la distance émetteur-récepteur est de 14 m, l'émetteur étant à une profondeur de 8 m. On remarque une bonne similitude entre les allures des courbes théoriques et expérimentales. Mais on remarque aussi

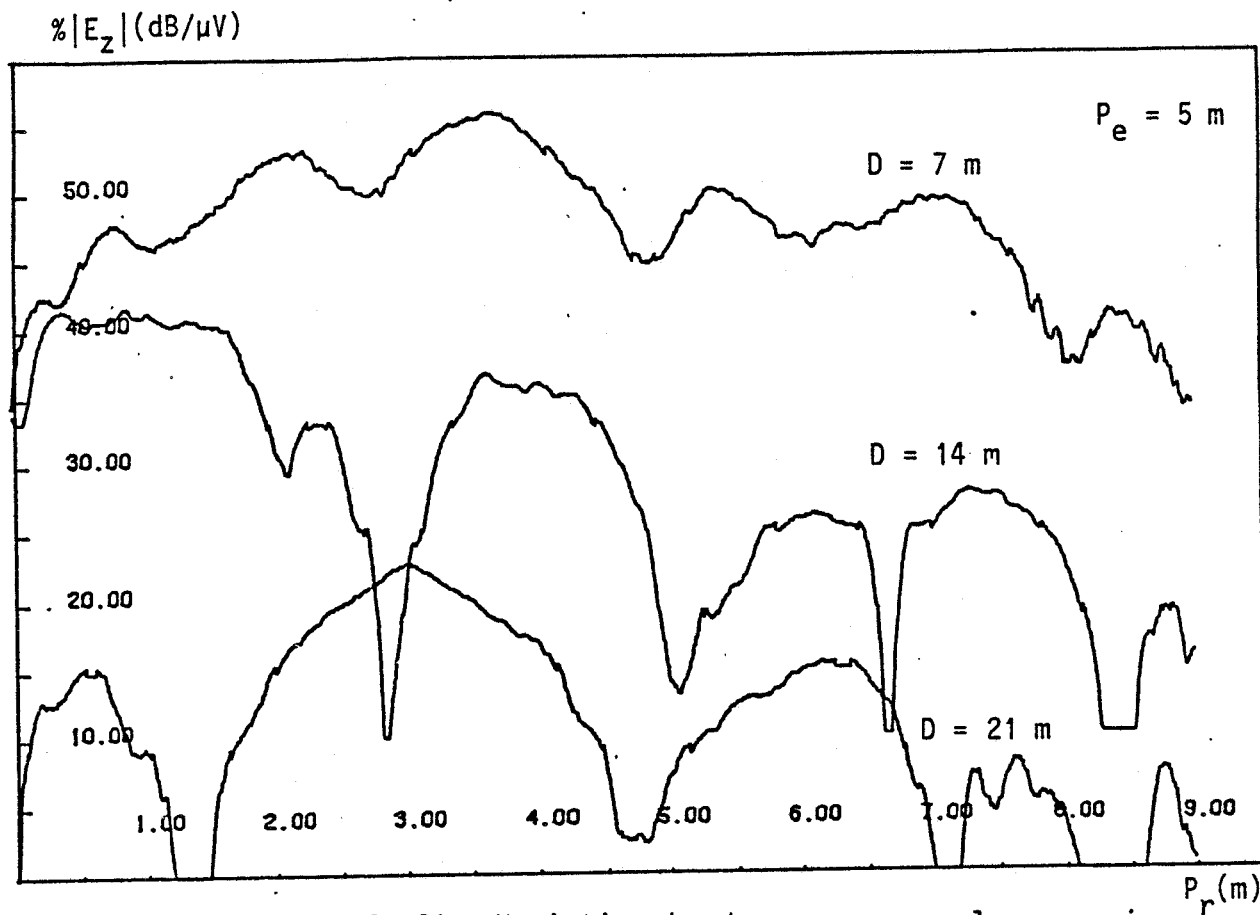


Figure IV-21 : Variation du champ reçu pour les trois distances entre les forges.

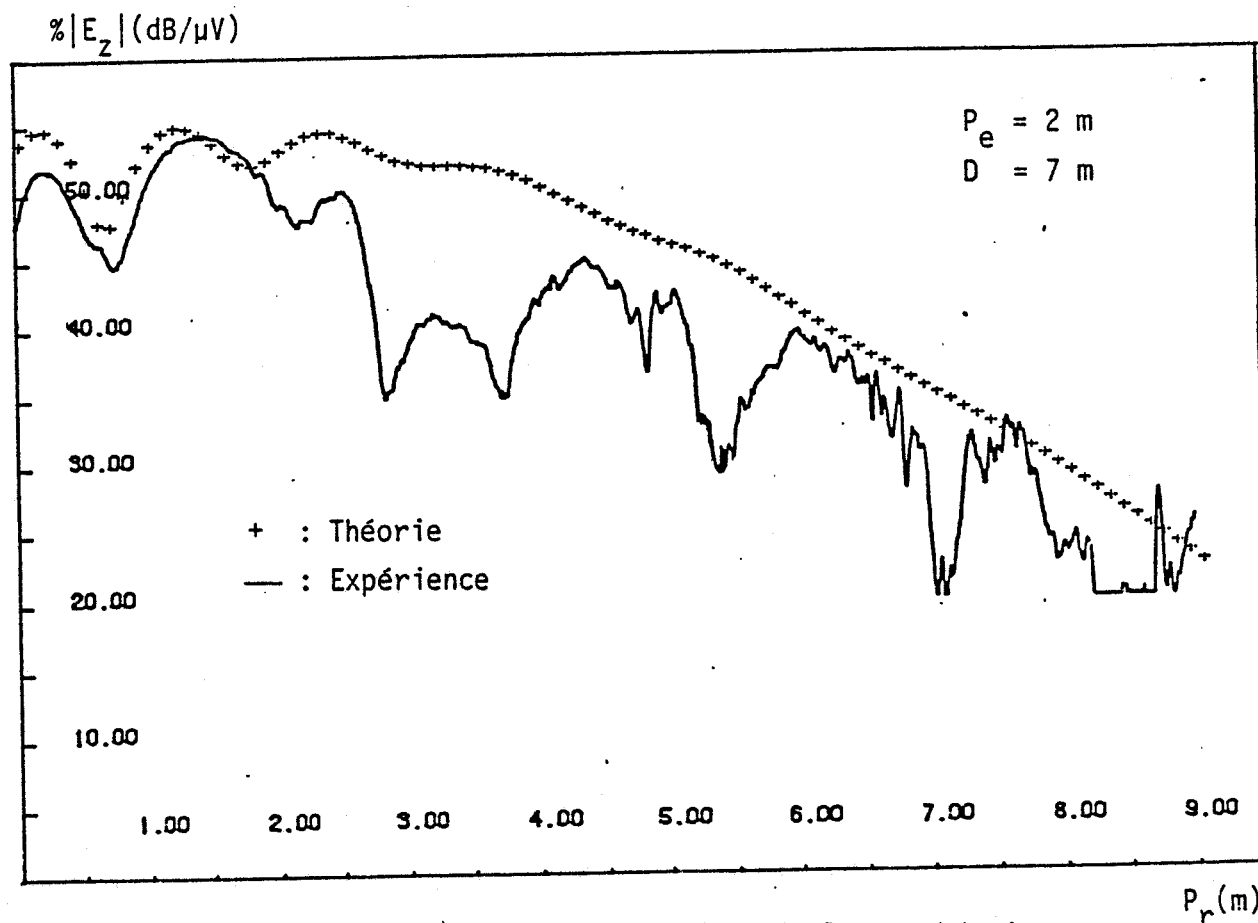


Figure IV-22 : Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.

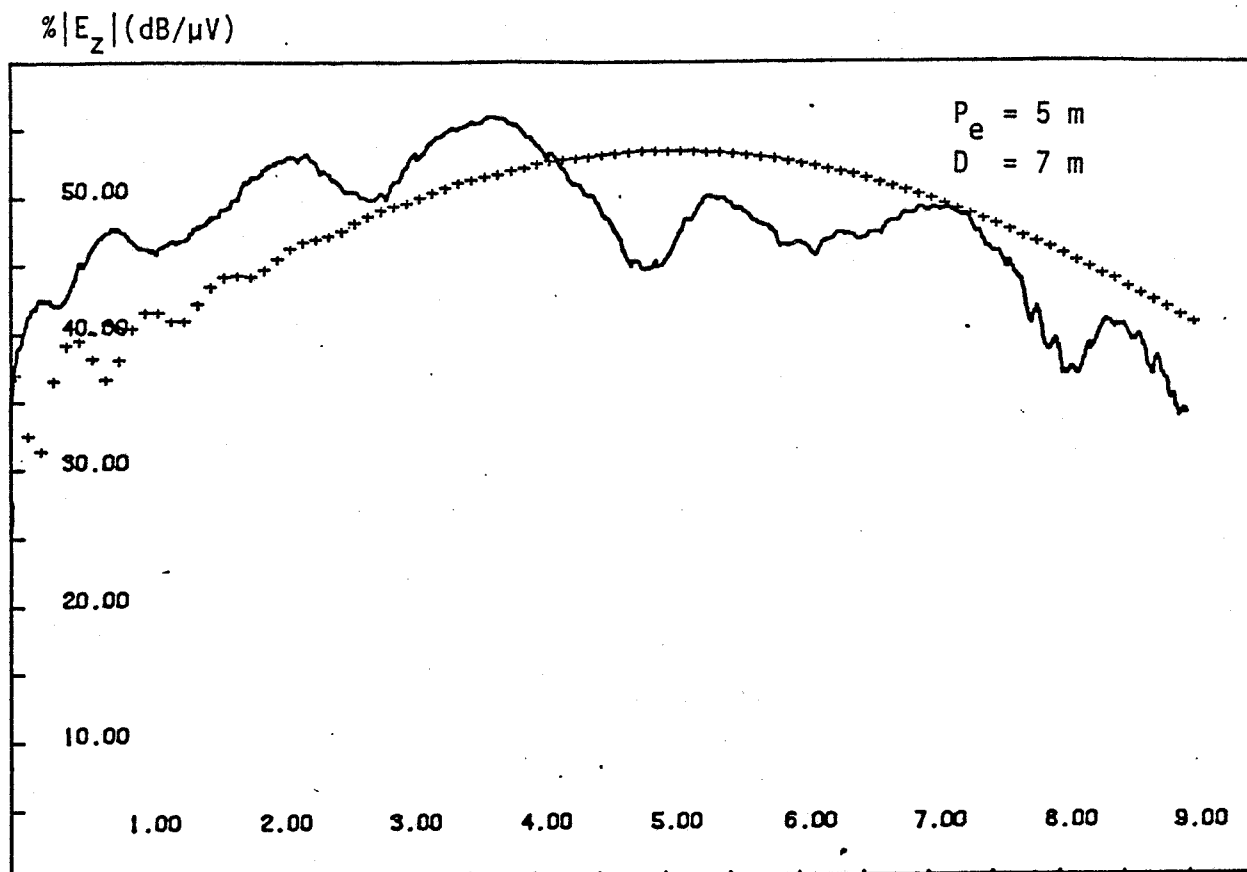


Figure IV-23 : Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux P_r (m)
+ : Théorie
— : Expérience

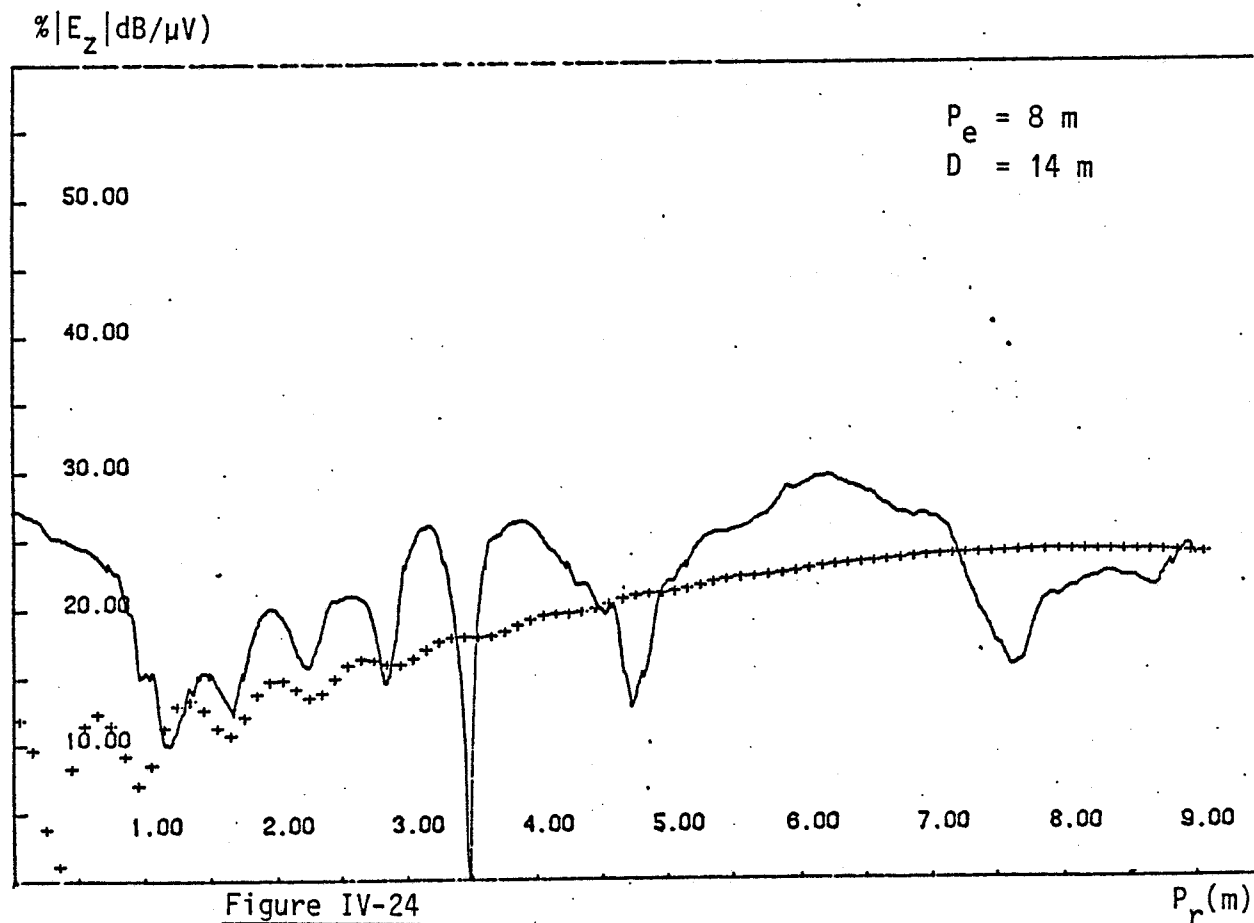


Figure IV-24 P_r (m)

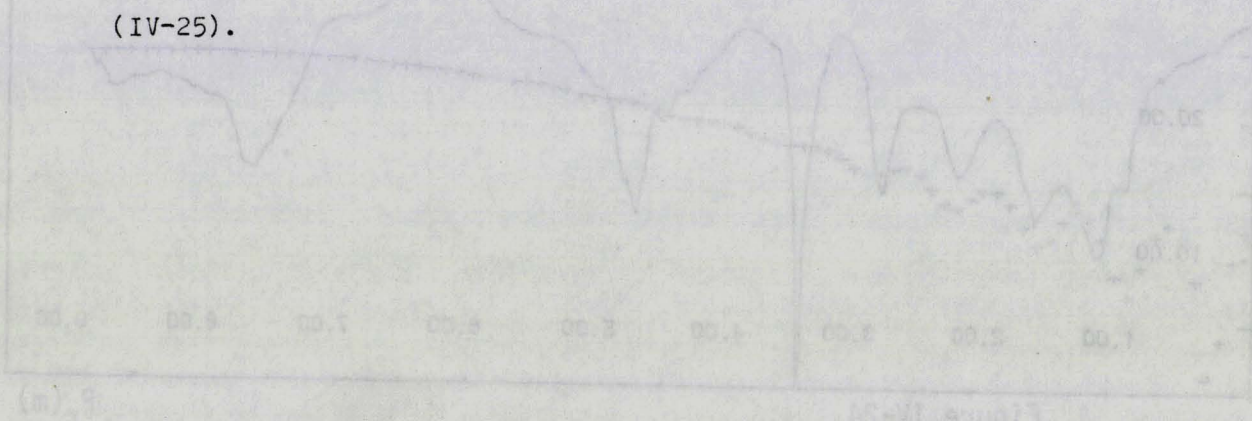
des fluctuations plus ou moins importantes du signal mesuré. Les plus petites peuvent être liées au mouvement des sondes dans leurs forages qui, comme nous l'avons vu en première partie de ce chapitre, influe sur l'impédance d'entrée et donc sur l'adaptation. Les variations observées sur les premiers mètres sont dues (§ I.2.3) à la composition des champs de la source réelle et la source image. Les variations les plus importantes, quant à elles, peuvent être expliquées par l'existence de couches conductrices ou à la présence d'eau due à des fissures dans le granit. D'autres éléments tels que les câbles de remontée du signal, les trous du forage ou la stabilité de la source d'émission en fréquence, peuvent avoir une influence plus ou moins importante sur la liaison entre les deux forages.

IV. 3 - ETUDE PARAMETRIQUE DE L'INFLUENCE DES CABLES

Comme nous venons de le voir, des câbles de descente métallique pour la sonde d'émission et de réception ont été utilisés. L'objet de cette étude paramétrique est d'évaluer la déformation des lignes de champ dans le sol due à la présence de cette hétérogénéité que constitue un câble métallique. Nous donnons dans ce paragraphe quelques applications numériques concernant l'influence de ces câbles sur le signal transmis.

IV.3.1 - Câble de descente de la sonde d'émission

La structure géométrique qui est simulée est celle de la Figure (IV-25).



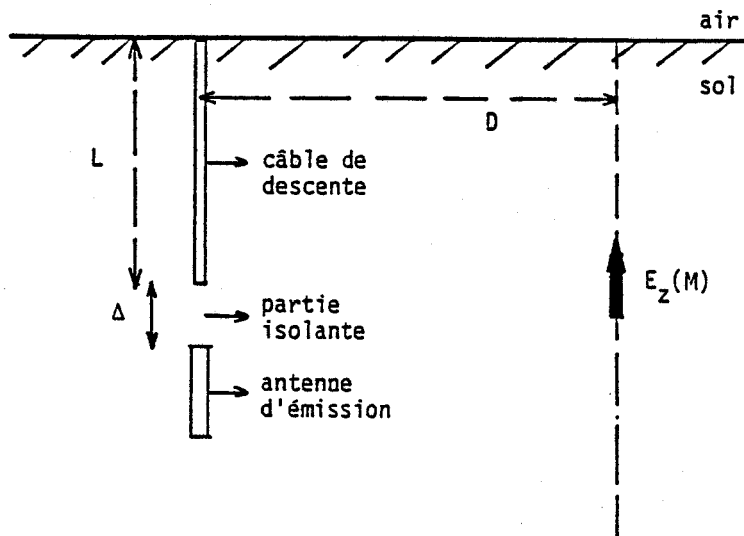
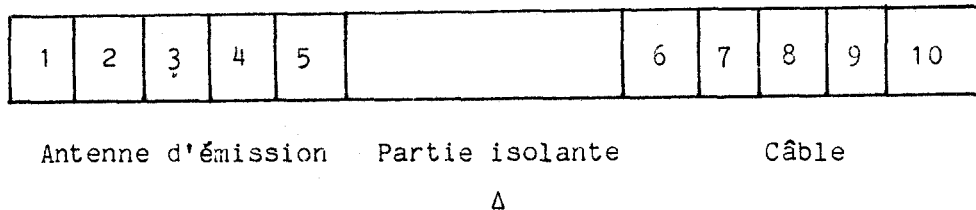


Figure (IV-25)

L'antenne d'émission est supposée être séparée du câble métallique par une partie isolante de longueur Δ et on s'intéresse à la modification du champ vertical $E(z)$ mesuré en un point d'observation M , en fonction, notamment de cette longueur Δ et de celle du câble notée L . Il ne faut pas perdre de vue la signification pratique d'une telle configuration géométrique. Si l'antenne d'émission est alimentée de façon autonome, sur piles, la réalisation de la partie isolante ne pose aucune difficulté. Si on envisage une émission depuis la surface à l'aide d'un câble coaxial, il y a forcément continuité des conducteurs de l'émetteur jusqu'à l'antenne. Dans le dispositif expérimental, l'antenne d'émission est constituée d'un tronçon d'accord assurant la transition entre une structure dissymétrique qui est celle du câble coaxial à la structure symétrique d'une antenne demi-onde ($\lambda/2$).

Cependant une désadaptation entre la partie "antenne" et la partie "câble" peut entraîner sur la surface extérieure de celui-ci un courant I_{ext} qui, à son tour, rayonnera un champ dans l'espace. Ce phénomène n'est pas pris en compte dans la modélisation numérique qui a été effectuée.

L'exploitation du modèle décrit dans le chapitre II se fait de la façon suivante : l'antenne réelle, constituée de l'antenne d'émission proprement dite et du câble, est divisée en N intervalles.



La distribution de courant sur l'ensemble est obtenue en calculant les diverses interactions d'un élément i sur un élément j. Afin de simplifier les conditions d'excitation, on suppose que l'antenne d'émission est alimentée en son centre (élément 3 sur la figure) par un générateur délivrant une différence de potentiel de 1 Volt et une fréquence de 200 MHz. Considérons tout d'abord une longueur L de câble égale à 2.5 m et un intervalle isolant Δ de 10 cm. La courbe de la Figure (IV.26) montre la répartition du courant sur l'ensemble ; le côté $z=0$ correspondant à la surface du sol. On remarque le très faible courant induit sur le câble, les oscillations étant associées à la réflexion se produisant à l'extrémité du câble.

Sur la Figure (IV.27), seule la distribution de courant sur le câble a été représentée avec une échelle dilatée. La courbe correspondant à une longueur $L = 2.5$ m y a été reportée et nous avons également fait figurer le cas correspondant à une longueur $L = 5.5$ m. Les oscillations ont évidemment une amplitude beaucoup plus faible, la ligne de grande longueur étant placée dans un milieu absorbant. On remarque cependant que la valeur moyenne du courant reste sensiblement la même quelle que soit la longueur du câble. Sa valeur maximum est de 0.7 mA, contre 18 mA sur l'antenne.

Si la longueur de l'espace isolant Δ augmente, la Figure (IV.28) montre que l'amplitude du courant sur le câble diminue très rapidement, d'une façon pratiquement inversement proportionnelle à Δ .

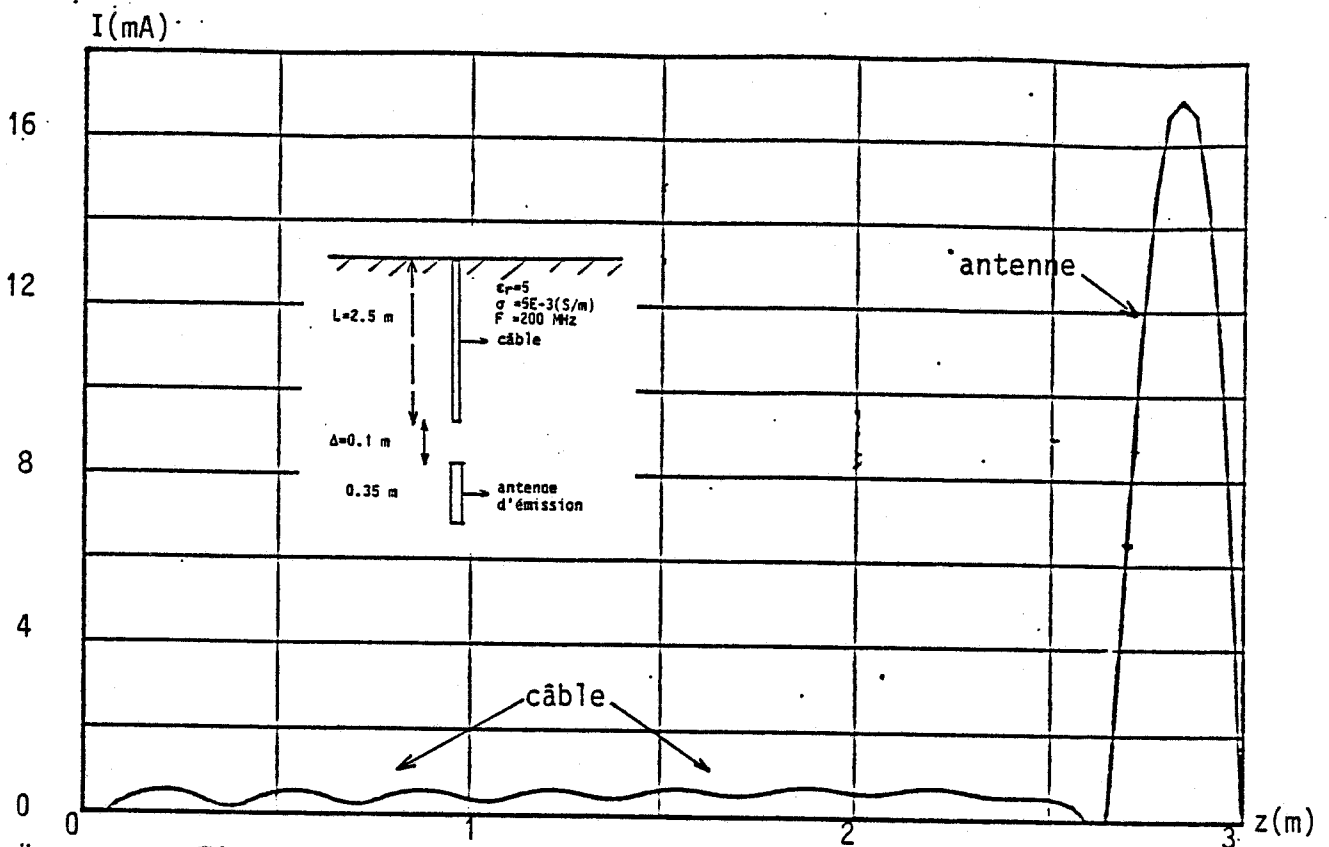


Figure IV-26 : Distribution du courant sur l'antenne et le câble - Alimentation au centre de l'antenne ($V = 1$ Volt).

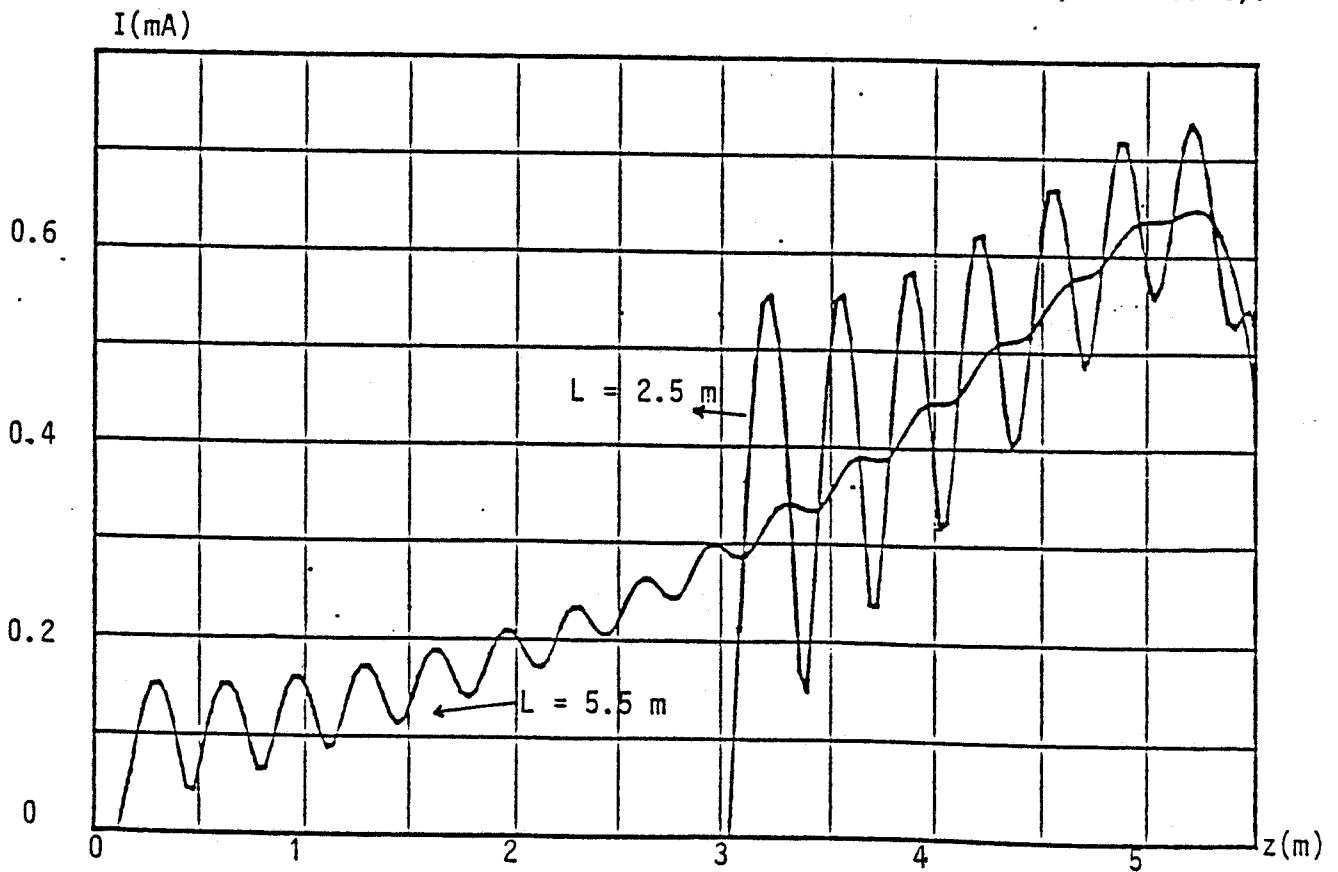


Figure IV-27 Distribution du courant sur le câble

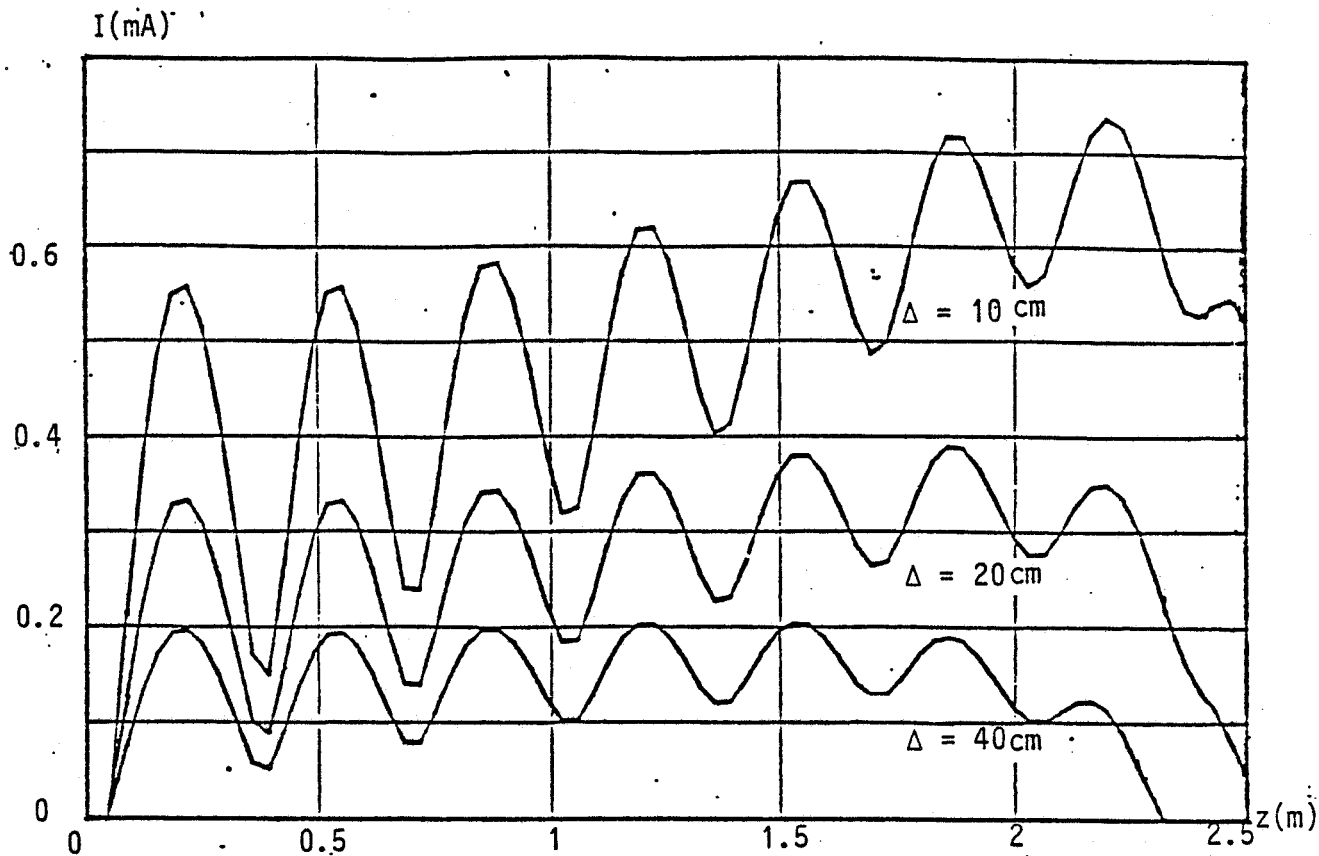


Figure IV-28 : Influence de la longueur de la partie isolante sur la distribution de courant sur le câble.

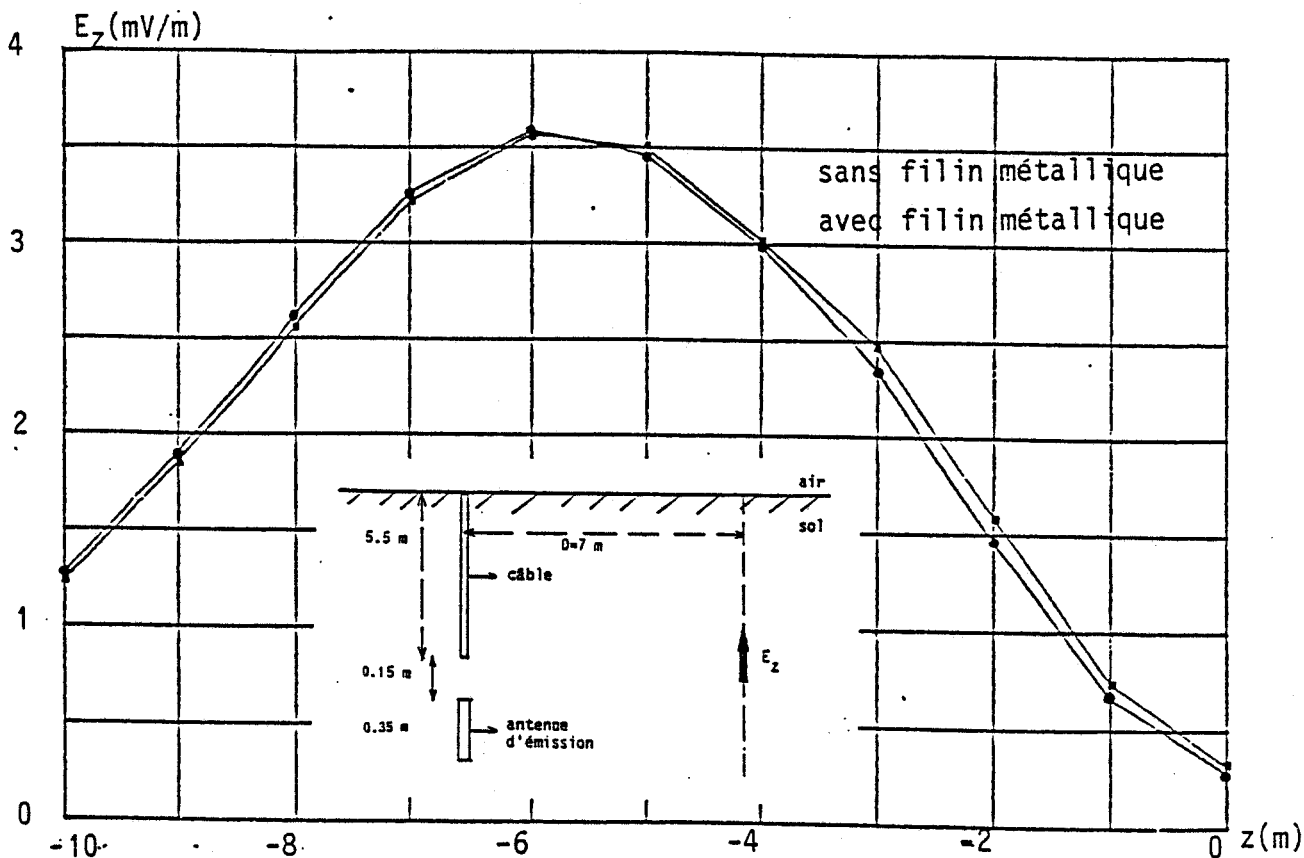


Figure IV-29 : Champ calculé à une distance de 7 m du forage émetteur.

Enfin les courbes de la Figure (IV.29) montrent la variation de l'amplitude du champ vertical E_z , calculé à une distance de 7 m du forage émetteur, en tenant compte ou non de la présence du câble. On voit que les deux courbes sont pratiquement confondues, la partie isolante Δ ayant une longueur de 15 cm.

Un filin métallique de descente ne provoque donc pas de modification sensible de l'amplitude du champ rayonné par l'émetteur.

IV.3.2 - Câble de descente de la sonde de réception

Envisageons maintenant le cas d'un émetteur situé à une certaine profondeur z_0 et supposons que la sonde de réception soit descendue au moyen d'un filin métallique, un intervalle isolant Δ séparant l'antenne de réception du câble. (Figure (IV.30)).

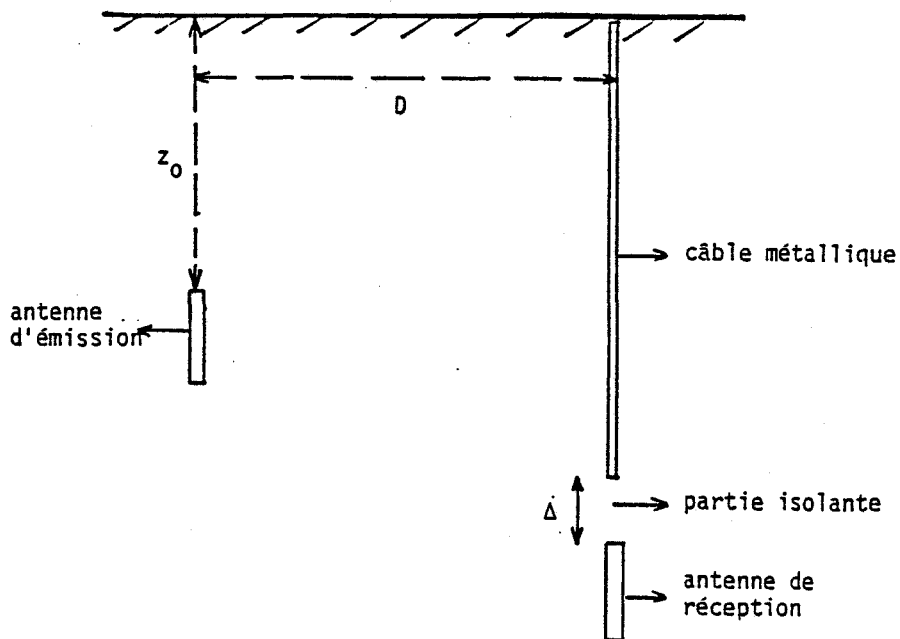


Figure IV.30

Comme dans le paragraphe précédent, on s'intéresse à la déformation des lignes de champ due à la présence du câble et non à l'effet d'une éventuelle désadaptation entre l'antenne de réception et un câble coaxial servant à remonter le signal en surface.

Le même formalisme numérique que celui développé précède et s'applique à ce type de problème. On peut d'abord considérer l'influence du câble supposé isolé. (Figure IV.31) et comparer l'amplitude du champ

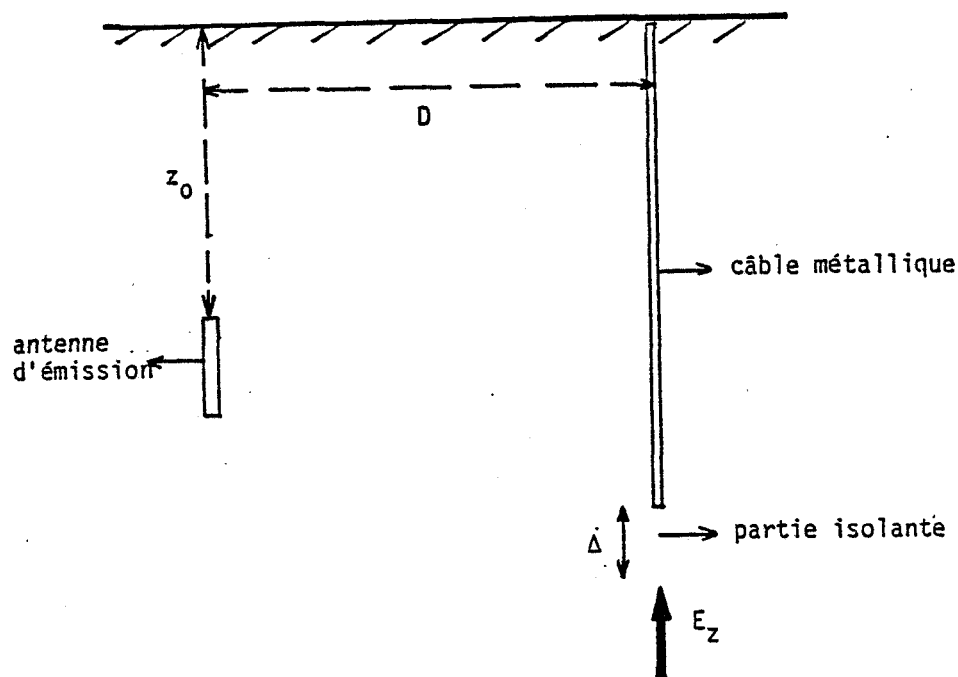


Figure IV.31

E_z^i qui est le champ direct provenant de l'émetteur au champ E_z^r qui est le champ re-rayonné par le câble suivant son axe. Sur la Figure (IV.32), nous avons supposé que l'antenne d'émission se trouve à une profondeur de 5 m et que le câble de descente de la sonde de réception a également une longueur de 5 m. La distance entre les deux forages est de 7 m. Les courbes représentent les variations de E_z^i et E_z^r en fonction de la distance verticale Δ entre un point d'observation et l'extrémité du câble de descente. On remarque que le rapport E_z^r/E_z^i est de 10 % lorsque la distance Δ est de l'ordre de 10 cm et diminue ensuite très rapidement lorsque Δ augmente.

Une façon plus rigoureuse d'aborder le problème est de tenir compte de l'interaction mutuelle entre le câble et l'antenne de réception, c'est-à-dire de traiter globalement la configuration de la Figure IV.30. Supposons tout d'abord, comme l'indique la Figure IV.33 que l'antenne d'émission soit située à une profondeur de 3 m donc à mi-hauteur de l'ensemble câble-antenne de réception. L'antenne de réception étant accordée en $\lambda/2$ le courant est maximum au centre de celle-ci mais il faut noter que le câble se comporte également comme une grande antenne de réception et que les amplitudes du courant induit sont du même ordre de grandeur que le courant sur l'antenne de réception proprement dite.

La courbe de la Figure IV.34 a été obtenue en modifiant simplement la profondeur de l'émetteur. Celui-ci étant situé à 5.65 m, sa profondeur correspond à celle de l'antenne de réception. On remarque que l'amplitude relative du courant sur le câble est évidemment plus faible que celle observée dans le cas précédent.

Enfin les courbes des Figures IV.35 et IV.36 montrent la distribution du courant, uniquement sur l'antenne de réception, dans les deux cas que nous avons envisagé. De plus les valeurs qui auraient été obtenues en l'absence de câble de descente ont été indiquées. On note que le courant maximum au centre de l'antenne subit une variation de l'ordre de 10 % à 15 % lorsque le câble est présent, entraînant ainsi une modification de l'ordre de 1 dB de la tension mesurée.

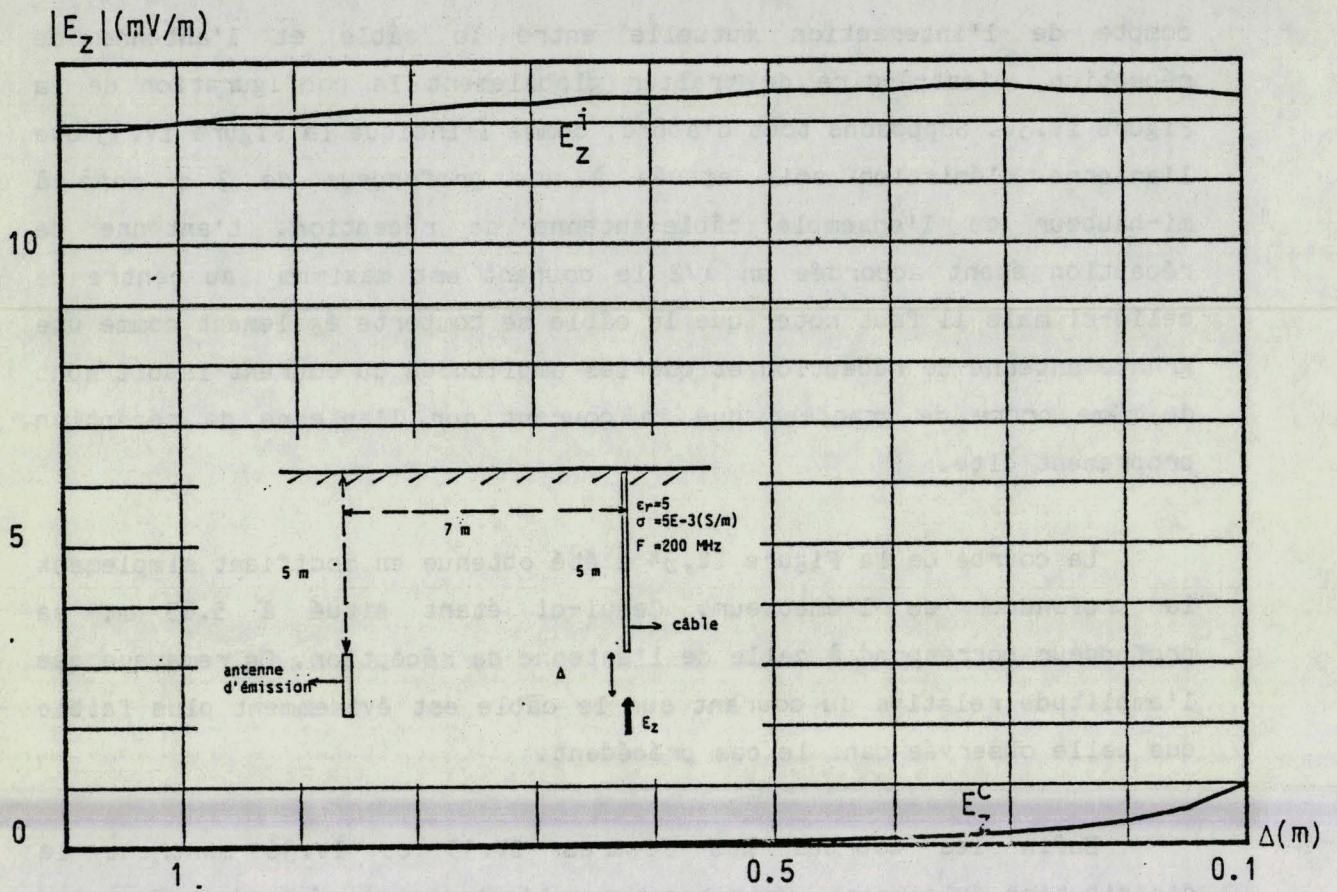


Figure IV-32 : Comparaison du champ E_Z^i rayonné par l'antenne et le champ E_Z^C rerayonné par le câble.

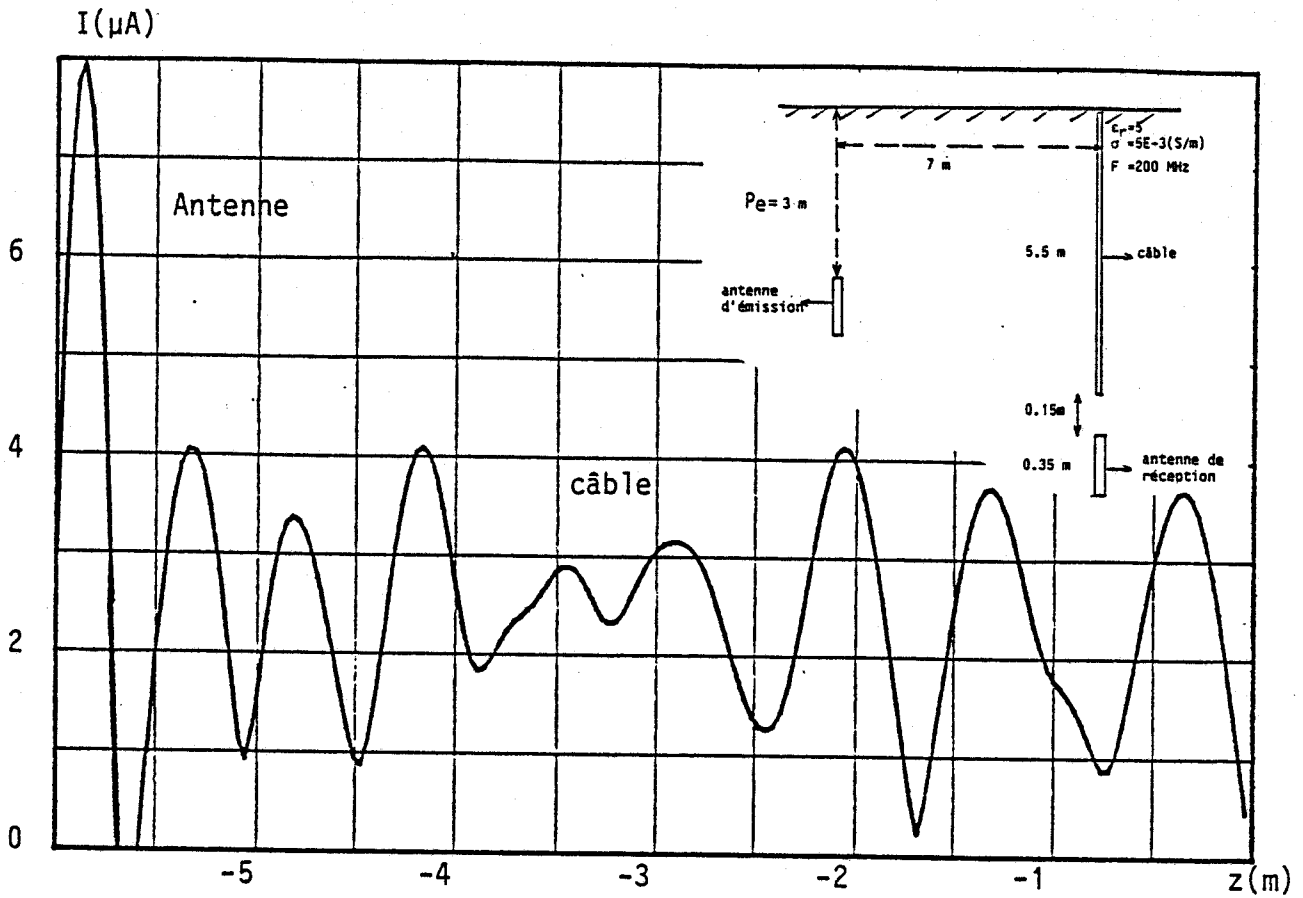


Figure IV-33 : Distribution du courant sur le dispositif de réception ($P_e = 3$ m).

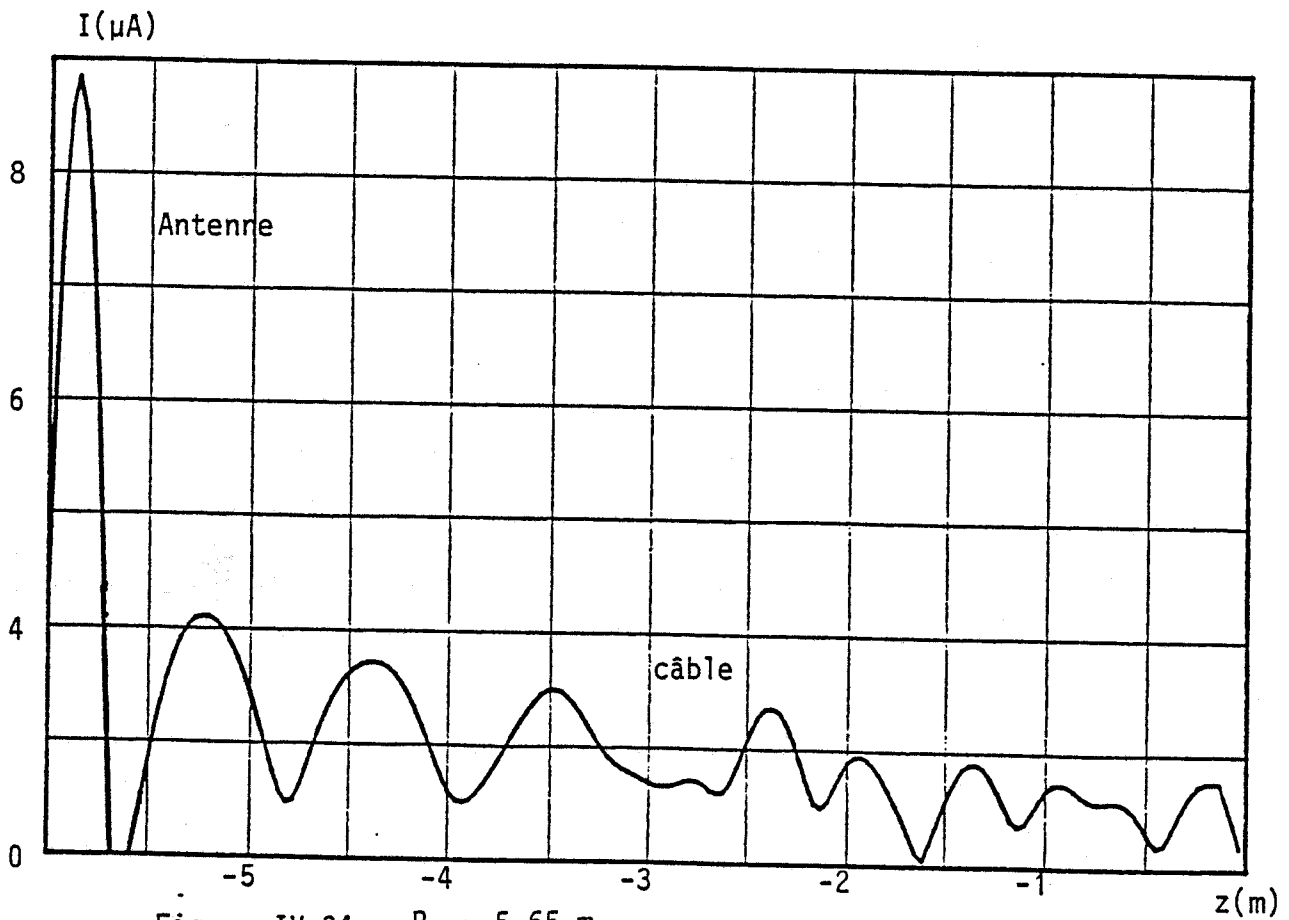


Figure IV-34 $P_e = 5.65$ m

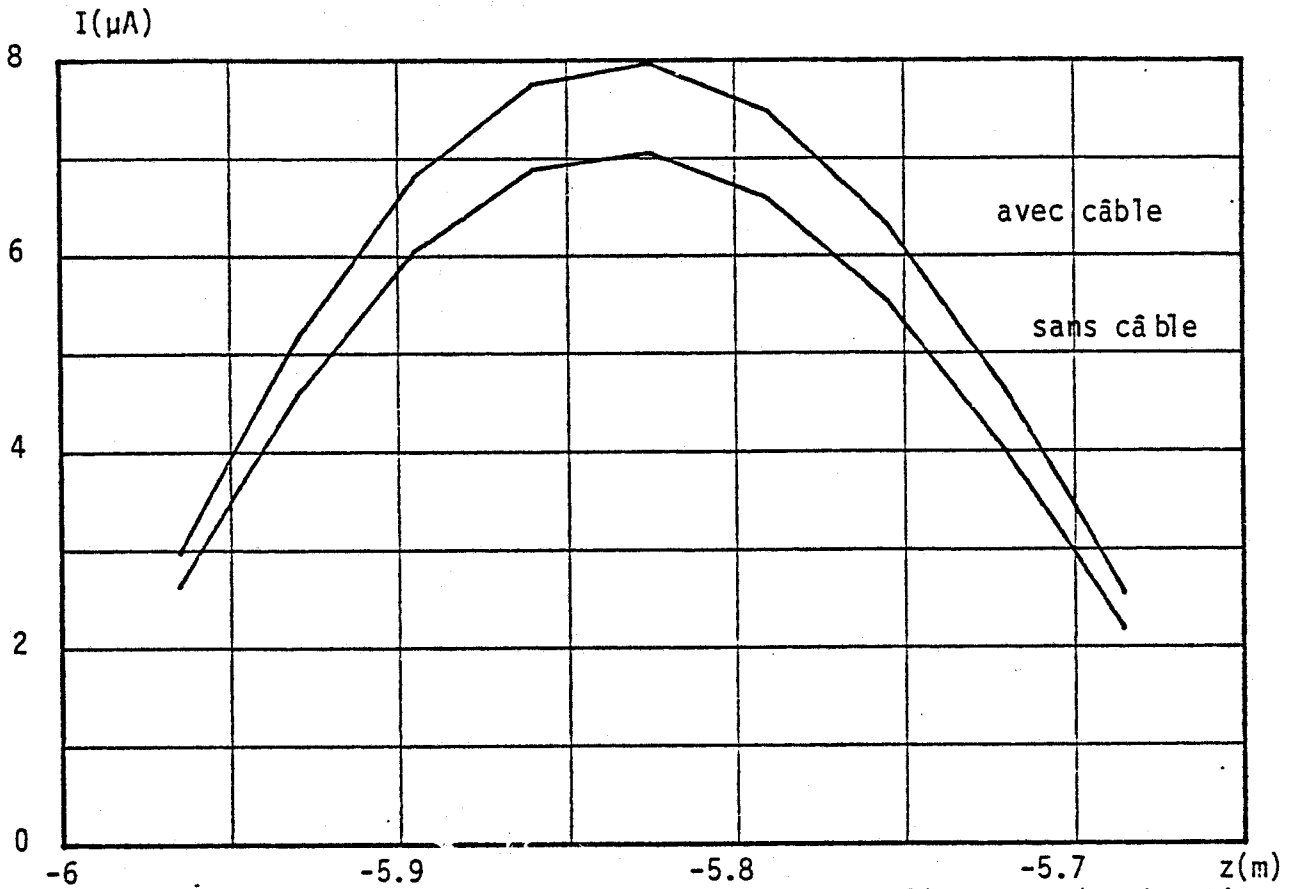


Figure IV-35 : Distribution du courant sur l'antenne de réception ($P_e = 3 \text{ m}$).

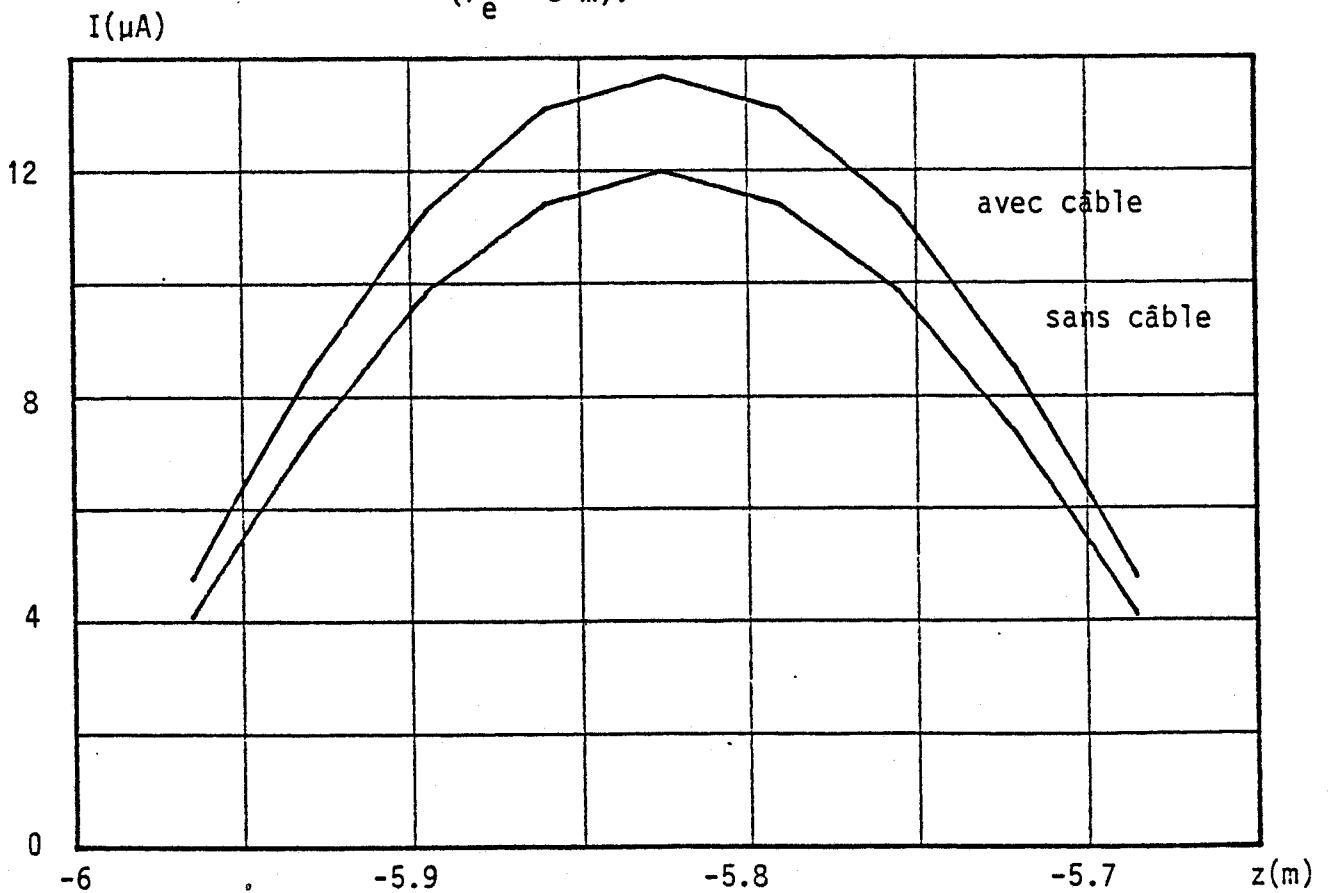


Figure IV-36 : Distribution du courant sur l'antenne de réception ($P_e = 5.65 \text{ m}$).

CONCLUSION

Les résultats théoriques et expérimentaux décrits dans ce chapitre montrent la faisabilité d'une transmission haute fréquence entre deux forages. Les premiers appareillages qui ont été mis au point ont permis d'effectuer des mesures à une fréquence voisine de 200 MHz et sur une distance maximum entre forages de 21 m dans un terrain dont la résistivité moyenne est de l'ordre de quelques centaines d'Ohm-mètre. Un bon accord entre les prévisions théoriques et les valeurs expérimentales a été mis en évidence.

D'un point de vue expérimental, l'électronique de la sonde d'émission doit être optimisée, la sonde de réception pouvant comporter un étage d'amplification et éventuellement de changement de fréquence. L'utilisation en réception d'antennes courtes par rapport à la longueur d'onde devrait diminuer les effets d'intégration des fluctuations du signal dûs à la longueur de l'antenne résonante.

Sur le plan théorique la modélisation des câbles de descente montre que leur influence reste faible. Une modélisation des effets des trous de forage et des couches superficielles doit permettre de mieux quantifier leurs influences. Mais dans un premier temps il serait intéressant d'examiner la réponse d'une anomalie située entre les deux forages. C'est ce que nous nous proposons d'étudier dans le chapitre suivant.

CHAPITRE V : INFLUENCE D'UNE ANOMALIE DANS UN

MILIEU HOMOGENE ET INFINI

INTRODUCTION

Dans ce dernier chapitre nous allons traiter, pour une liaison entre deux forages, des variations sur l'amplitude et la phase du champ électromagnétique que peut produire la présence d'une anomalie. Nous nous limiterons dans ce travail au cas d'un milieu homogène et infini car, comme nous l'avons vu dans les précédents chapitres, cette approximation est vérifiée dès que l'émetteur et le récepteur sont situés à des profondeurs supérieures à 1 ou 2 m.

Nous commencerons par établir les expressions du champ à l'intérieur de l'anomalie lorsque l'émetteur est un dipôle électrique vertical. Puis nous verrons que l'anomalie peut être représentée par une distribution de courant équivalent et donc par une distribution de dipôles électriques.

Le champ en un point de l'espace sera la résultante du champ rayonné par le dipôle émetteur et ceux rayonnés par les dipôles représentant l'anomalie. Dans le cas où l'émetteur est une antenne filaire il suffirait de faire une sommation des champs créés par chaque élément de l'antenne.

En fin de chapitre quelques applications nous permettrons d'évaluer l'influence de la fréquence, du volume de l'anomalie et du contraste de caractéristiques entre l'anomalie et le milieu encaissant. Ces différents résultats seront comparés à ceux obtenus avec la théorie des rayons.

V. 1 - MODELISATION D'UNE ANOMALIE

V.1.1 - Description de la structure

La structure que nous allons étudier dans ce chapitre est un milieu homogène et infini noté milieu 1 dans lequel se trouve une anomalie repérée quant à elle par l'indice 2, figure (V-1). Le milieu encaissant a pour caractéristiques électromagnétiques μ_0 , σ_1 et ϵ_1 . L'anomalie de volume V limitée par la surface S , est de même perméabilité magnétique que la milieu 1 mais de conductivité et permittivité différentes (σ_2, ϵ_2).

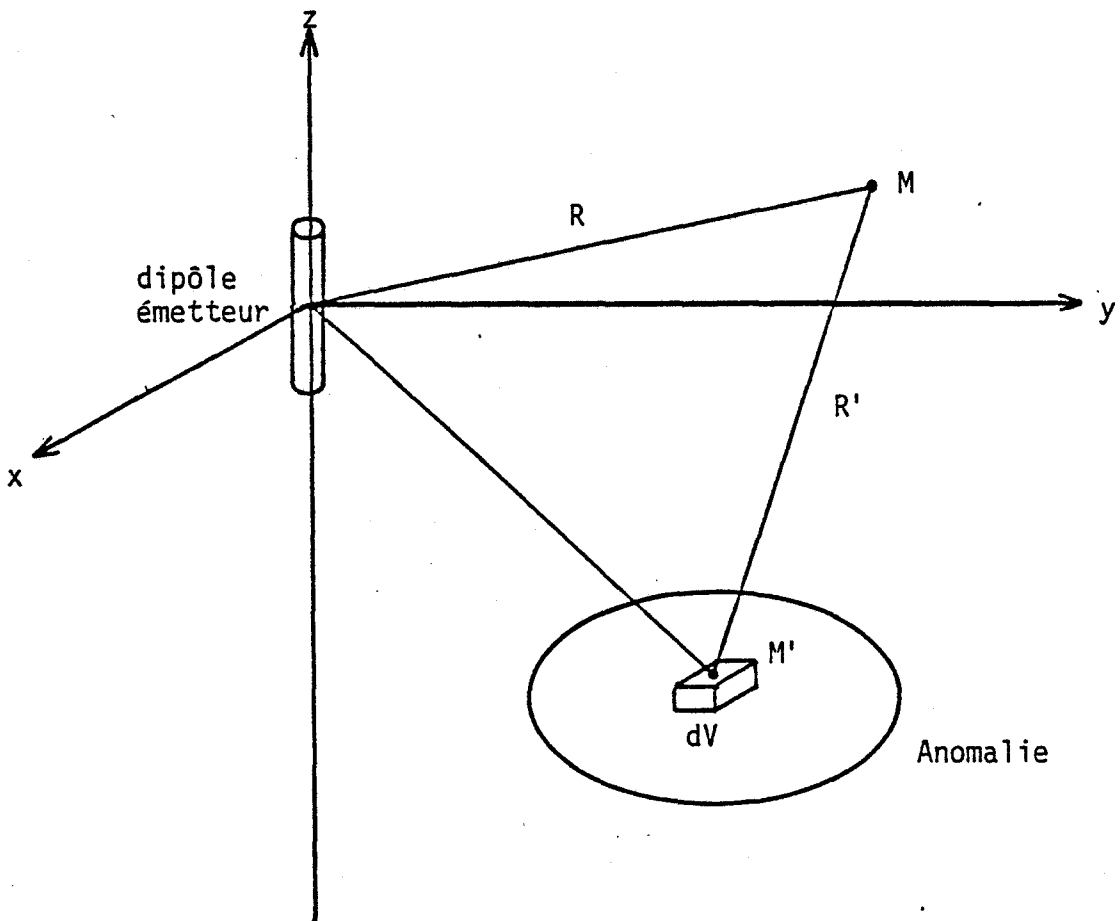


Figure V-1 : Présence d'une hétérogénéité dans un milieu infini.

Les points de l'espace sont désignés par leurs coordonnées cartésiennes dans le repère (o,x,y,z). La source d'émission est un dipôle électrique vertical placé à l'origine du repère et parcouru par un courant sinusoïdal. Le champ total en un point quelconque de l'espace est la superposition du champ provenant directement du dipôle émetteur et des multiples réflexions et réfractions susceptibles de se produire sur l'hétérogénéité.

V.1.2 - Représentation de l'anomalie par une distribution de dipôles électriques

Ecrivons l'équation de Maxwell-Ampère dans le volume de l'anomalie où règnent les champs \vec{E}_2 et \vec{H}_2 .

$$\text{rot}(\mu_2 \vec{H}_2) = \mu_2(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)\vec{E}_2 \quad (V-1)$$

En ajoutant et retranchant dans les deux membres de cette équation, respectivement les quantités $\mu_1 \vec{H}_2$ et $\mu_1 (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)\vec{E}_2$ et en posant $\sigma_i^* = \sigma_i + j\omega\epsilon_i$ (i=1,2) on obtient :

$$\text{rot}[\mu_1 \vec{H}_2 - (\mu_1 - \mu_2)\vec{H}_2] = \mu_1 \sigma_1^* \vec{E}_2 + (\mu_2 \sigma_2^* - \mu_1 \sigma_1^*) \vec{E}_2 \quad (V-2)$$

$$\text{rot}(\vec{H}_2) = \sigma_1^* \vec{E}_2 + \left(\frac{\mu_2 \sigma_2^* - \mu_1 \sigma_1^*}{\mu_1} \right) \vec{E}_2 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} \text{rot}(\vec{H}_2) \quad (V-3)$$

Cette équation peut être considérée comme l'équation de Maxwell-Ampère dans le milieu 1 contenant une distribution de courant $\rho_m \vec{V}_e$ telle que

$$\rho_m \vec{V}_e = \frac{\mu_2 \sigma_2^* - \mu_1 \sigma_1^*}{\mu_1} \vec{E}_2 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} \text{rot}(\vec{H}_2) \quad (V-4)$$

L'équation (V-3) s'écrit donc :

$$\text{rot}(\vec{H}_2) = \sigma_1^* \vec{E}_2 + \rho_m \vec{V}_e \quad (V-5)$$

La perméabilité magnétique des milieux 1 et 2 étant supposée identique, la distribution du courant devient dans ce cas :

$$\rho_m \nabla_e = (\sigma_2^* - \sigma_1^*) \vec{E}_2 \quad (V-6)$$

Un élément de volume dV de l'anomalie est donc équivalent à un dipôle électrique dont le moment est :

$$\vec{p} = (\sigma_2^* - \sigma_1^*) \vec{E}_2 dV \quad (V-7)$$

L'anomalie peut être de ce fait représentée par une distribution de dipôles électriques dans les trois directions de bases de l'espace.

V.1.3 - Expressions du champ électrique

V.1.3.1 - Champ total en un point du milieu

Le champ électrique $\vec{E}(M)$ en un point $M(x,y,z)$ de l'espace est la somme du champ rayonné par le dipôle émetteur $\vec{E}^e(M)$ et celui rayonné par les dipôles équivalents à l'anomalie $\vec{E}^a(M)$:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}^e(M) + \vec{E}^a(M) \quad (V-8)$$

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, le champ électrique est déduit du potentiel de Hertz, solution de :

$$(\Delta - \gamma^2) \vec{\pi} = -\frac{\vec{p}}{\epsilon} \delta(R)$$

Le potentiel de Hertz n'admet qu'une seule composante

$$\pi_z = \frac{IdlG_1(R)}{4\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)}$$

$$G_1(R) = \frac{e^{-\gamma_1 R}}{R}$$

$$R = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$$

(x_0, y_0, z_0) : coordonnées de la source

$$\gamma_1^2 = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_1 + j\omega \mu_0 \sigma_1$$

Les composantes du champ électrique émis par celles-ci sont donc données par :

$$E_x^e(M) = \frac{Idl}{4\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} G_1(R)$$

$$E_y^e(M) = \frac{Idl}{4\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} G_1(R) \quad (V-9)$$

$$E_z^e(M) = \frac{Idl}{4\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) G_1(R)$$

Les expressions développées de E_x^e , E_y^e et E_z^e sont données dans l'annexe 5.

Pour un élément de volume dV entourant un point M' de l'anomalie, le moment électrique du dipôle équivalent est :

$$\vec{p} = (\sigma_2^* - \sigma_1^*) \vec{E}(M') dV$$

Ce dipôle aura en général trois composantes, une verticale et deux horizontales suivant les axes ox et oy . Le potentiel de Hertz se composera donc de

$$\begin{aligned} \pi_x &= \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{4\pi\sigma_1^*} E_x(M') dV G_1(R) \\ \pi_y &= \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{4\pi\sigma_1^*} E_y(M') dV G_1(R) \\ \pi_z &= \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{4\pi\sigma_1^*} E_z(M') dV G_1(R) \end{aligned} \quad (V-10)$$

Ceci nous donne pour le champ électrique rayonné par un élément de l'anomalie :

$$\begin{aligned} E_x^a(M) &= \Lambda_0 [E_x(M') dVG_x^a(R') + E_y(M') dVG_y^a(R') + E_z(M') dVG_z^a(R')] \\ E_y^a(M) &= \Lambda_0 [E_x(M') dVG_x^b(R') + E_y(M') dVG_y^b(R') + E_z(M') dVG_z^b(R')] \end{aligned} \quad (V-11)$$

$$E_z^a(M) = \Lambda_0 [E_x(M') dVG_x^a(R') + E_y(M') dVG_y^a(R') + E_z(M') dVG_z^a(R')]$$

$$\text{avec } G_a^a = \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \gamma_1^2 \right) \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'}$$

$$\begin{aligned} a &= x, y, z \\ b &= x, y, z \end{aligned}$$

$$G_a^b = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'}$$

$$R' = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$$

$$\Lambda_0 = \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{4\pi\sigma_1^*}$$

Le champ total rayonné s'obtient donc en intégrant ces composantes sur la totalité du volume V, ce qui mène à :

$$E_x(M) = E_x^e(M) + \Lambda_0 \left[\int_V E_x(M') G_{xx}^x(R') dV + \int_V E_y(M') G_{yx}^x(R') dV + \int_V E_z(M') G_{zx}^x(R') dV \right]$$

$$E_y(M) = E_y^e(M) + \Lambda_0 \left[\int_V E_x(M') G_{xy}^y(R') dV + \int_V E_y(M') G_{yy}^y(R') dV + \int_V E_z(M') G_{zy}^y(R') dV \right]$$

(V-12)

$$E_z(M) = E_z^e(M) + \Lambda_0 \left[\int_V E_x(M') G_{xz}^z(R') dV + \int_V E_y(M') G_{yz}^z(R') dV + \int_V E_z(M') G_{zz}^z(R') dV \right]$$

Aucune restriction n'ayant été imposée à la position du point d'observation M, les expressions sont valables dans l'espace entier. Ce point peut donc se trouver à l'intérieur du volume V et l'inconnue est précisément le champ total à l'intérieur de l'anomalie en fonction duquel est exprimée la distribution de courant équivalent. Dans ces conditions (V-12) constitue un système d'équations intégrales de FREDHOLM. La résolution de ce système nous permettra de connaître le champ à l'intérieur de l'anomalie, donc l'ensemble des dipôles équivalents. Dans une deuxième étape, le champ en tout point du milieu pourra être calculé.

V.1.3.2 - Champ total à l'intérieur de l'anomalie

Les composantes du champ électrique à l'intérieur du volume de l'anomalie sont exprimées par le système d'équation (V-12). Cependant les fonctions de Green présentent une singularité lorsque les points M et M' sont confondus, une première solution consiste à extraire du volume V un petit volume élémentaire, sphérique par exemple, entourant le point d'observation et essayer de trouver une solution analytique lorsque le rayon de la sphère tend vers zéro.

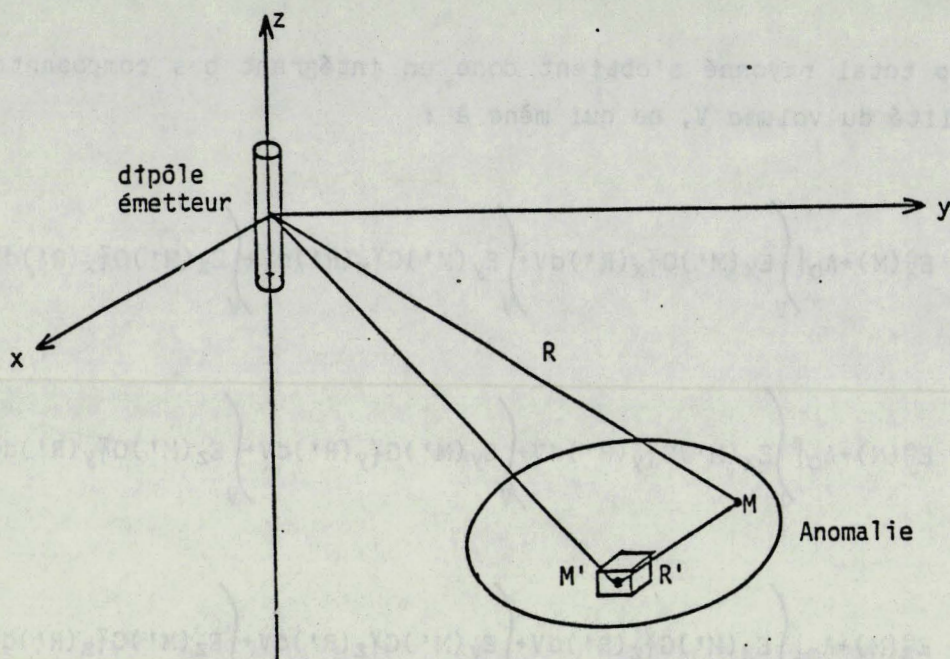


Figure V-2 : Point d'observation dans l'anomalie.

Une autre possibilité est d'utiliser l'équation de Helmholtz que vérifie la fonction de Green [28] :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right) G_1(R') = - 4\pi\delta(R') \quad (V-13)$$

D'après les formules (V-11) et (V-13) on peut écrire dans le cas de la variable x :

$$G_{1x}^x(R') = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma^2 \right) G_1(R') = - 4\pi\delta(R') - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G_1(R')$$

et l'intégrale sur le volume V donne :

$$\begin{aligned} \int_V E_x(M') G_{1x}^x(R') dV &= - 4\pi \int_V E_x(M') \delta(R') dV - \int_V E_x(M') \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G_1(R') dV \\ &= - 4\pi E_x(M) - \int_V E_x(M') \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G_1(R') dV \quad (V-14) \end{aligned}$$

Le calcul des termes $G\check{Y}_y$ et $G\check{Z}_z$ est exactement le même que pour $G\check{X}_x$. En introduisant les résultats de ces calculs dans le système (V-12), on obtient pour le champ total dans l'anomalie :

$$\frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} E_x(M) = E_x^0(M) + \Lambda_0 \left[- \int_V E_x(M') g\check{X}_x(R') dV + \int_V E_y(M') G\check{Y}_x(R') dV + \int_V E_z(M') G\check{Z}_x(R') dV \right]$$

$$\frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} E_y(M) = E_y^0(M) + \Lambda_0 \left[\int_V E_x(M') G\check{Y}_y(R') dV - \int_V E_y(M') g\check{Y}_y(R') dV + \int_V E_z(M') G\check{Z}_y(R') dV \right]$$

$$\frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} E_z(M) = E_z^0(M) + \Lambda_0 \left[\int_V E_x(M') G\check{Z}_z(R') dV + \int_V E_y(M') G\check{Y}_z(R') dV - \int_V E_z(M') g\check{Z}_z(R') dV \right] \quad (V-15)$$

$$g\check{X}_x(R') = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G_1(R')$$

$$g\check{Y}_y(R') = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G_1(R')$$

$$g\check{Z}_z(R') = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G_1(R')$$

Comme nous le verrons dans le sous-paragraphe (V.2.2), le fait de remplacer les fonctions de Green par les dérivées secondes permet de transformer les intégrales triples en intégrales doubles. Ces intégrations se font sur des domaines où les fonctions ne présentent pas de singularité.

V.2 - RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES

V.2.1 - Transformation du système intégrale en système linéaire

Pour la résolution du système d'équations intégrales (V-15), nous allons appliquer la méthode des moments avec la technique point-segment. Les fonctions base et test sont respectivement des crêneaux et des Diracs qui ont pour domaine de définition les éléments de volume dV de l'anomalie [28]. Pour simplifier les calculs, envisageons une anomalie parallélépipédique que l'on découpe en N éléments de volume $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, figure (V-3). D'autre part l'anomalie est divisée en N_x , N_y et N_z éléments respectivement suivant les axes x , y et z , d'où le nombre total de volumes élémentaires est $N = N_x \cdot N_y \cdot N_z$.

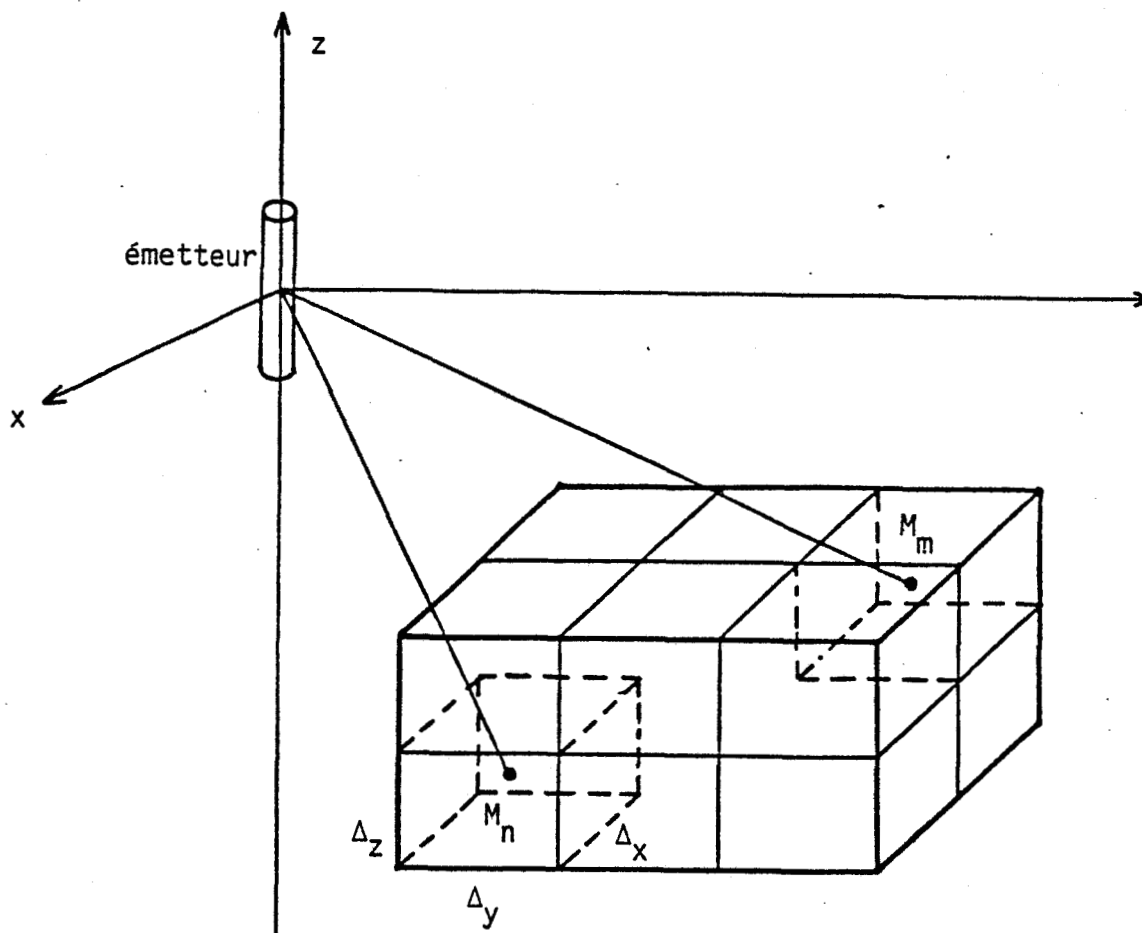


Figure V-3 : Anomalie découpée en N volumes élémentaires.

Chaque maille est identifiée par les coordonnées de son centre $M_i(x_i, y_i, z_i)$. De plus les dimensions des mailles sont telles que l'on peut supposer le champ constant dans chacune d'elles. Avec cette approximation liée au choix de la fonction base, on obtient, après projection sur les fonctions test, le champ électrique dans la maille M_m

$$\frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} E_x(M_m) = E_x^e(M_m) + \Lambda_0 \left(\sum_{n=1}^N \dots \right. \\ \left. -E_x(M_n) \int_{\Delta V_n} g_{xx}^x(R') dV + E_y(M_n) \int_{\Delta V_n} G_{yx}^y(R') dV + E_z(M_n) \int_{\Delta V_n} G_{zx}^z(R') dV \right)$$

$$\frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} E_y(M_m) = E_y^e(M_m) + \Lambda_0 \left(\sum_{n=1}^N \dots \right. \\ \left. E_x(M_n) \int_{\Delta V_n} G_{xy}^x(R') dV - E_y(M_n) \int_{\Delta V_n} g_{yy}^y(R') dV + E_z(M_n) \int_{\Delta V_n} G_{zy}^z(R') dV \right)$$

$$\frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} E_z(M_m) = E_z^e(M_m) + \Lambda_0 \left(\sum_{n=1}^N \dots \right. \\ \left. E_x(M_n) \int_{\Delta V_n} G_{xz}^x(R') dV + E_y(M_n) \int_{\Delta V_n} G_{yz}^y(R') dV - E_z(M_n) \int_{\Delta V_n} g_{zz}^z(R') dV \right)$$

(V-15)

Le calcul du champ dans les N mailles nous donne un système linéaire de $3N$ équations à $3N$ inconnues. Le système est exprimé sous une forme matricielle par :

$$\frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} \vec{E} = \vec{E}^e + \Lambda_0 [A] \vec{E} \quad (V-17)$$

\vec{E} : Champ électrique inconnu qui se met sous la forme d'une matrice.
Colonne de $3N$ éléments.

E^e : Champ électrique rayonné par l'émetteur dans l'anomalie qui aura la même forme matricielle que E .

[A] : Matrice (3Nx3N) des intégrales des fonctions de Green sur les éléments de volume ΔV_n .

V.2.2 - Calcul des éléments de la matrice

On distingue deux types d'intégrales dans les éléments de la matrice [A] qui sont donnés par (V-16). Les intégrales sont de la forme

$$\int_{\Delta V_n} g_{1a}^a (R') dV \quad (V-18)$$

ou

$$\int_{\Delta V_n} G_{1a}^b (R') dV \quad (V-19)$$

Les premières sont des intégrales de dérivées secondes de fonctions de Green par rapport à la même variable, les deuxièmes sont des intégrales de dérivées de fonctions de Green par rapport à des variables différentes.

Traitons comme exemple de premier type d'intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V_n} g_{1x}^x (R') dV &= \int_{\Delta V_n} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G_1(R') dV \\ &= \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_1(R') dV + \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1(R') dV \end{aligned}$$

On remarque que cette intégrale est elle-même composée de deux intégrales qui peuvent être calculées de façon similaire. Calculons donc

$$J_1 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_1(R') dV = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right) dx' dy' dz' \quad (V-20)$$

$$x_{n1} = x_{n-\Delta/2} \quad y_{n-1} \dots$$

$$x_{n2} = x_{n+\Delta/2} \quad \dots\dots\dots$$

Si l'on fait appel à la propriété de réciprocité entre les points d'émission M_n et de réception M_m qui revient à écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial j} = - \frac{\partial}{\partial y'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z'} \quad (V-21)$$

l'intégrale J_1 devient :

$$J_1 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[\int_{y_{n1}}^{y_{n2}} - \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right] dy' \right] dx' dz'$$

soit

$$J_1 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[- \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-\gamma_1 R'} y_{n2}}{R'} \right]_{y_{n1}} dx' dz'$$

Après dérivation on obtient :

$$J_1 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[\frac{(y_m - y_{n2})}{R_2^3} (\gamma_1 R'_2 + 1) e^{-\gamma_1 R'_2} - \frac{(y_m - y_{n1})}{R_1^3} (\gamma_1 R'_1 + 1) e^{-\gamma_1 R'_1} \right] dx' dz' \quad (V-22)$$

avec :

$$R_1' = [(x_n - x')^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m - z')^2]^{1/2}$$

$$R_2' = [(x_n - x')^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m - z')^2]^{1/2}$$

L'intégrale triple est de ce fait réduite en intégrale double, et ne présente aucune singularité. Le calcul de toutes les autres intégrales du même genre suit une démarche analogue à celle que nous venons d'effectuer.

Pour le calcul des intégrales du type (V-19) nous allons traiter l'exemple suivant :

$$J_2 = \int_{\Delta V_n} \frac{y}{1x} G(R') dV = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G_1(R') dV \quad (V-23)$$

De la même façon que précédemment nous allons nous servir de la propriété de réciprocité (V-20) :

$$J_2 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \left[\int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \frac{\partial}{\partial y'} \left[\int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right) dx' \right] dy' \right] dz'$$

$$J_2 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \left[\frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right]_{x_{n1}}^{x_{n2}} \Big|_{y_{n1}}^{y_{n2}} dz'$$

Après les deux intégrations le résultat est :

$$J_2 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \left[\left(\frac{e^{-\gamma_1 R'_{22}}}{R'_{22}} - \frac{e^{-\gamma_1 R'_{21}}}{R'_{21}} \right) - \left(\frac{e^{-\gamma_1 R'_{12}}}{R'_{12}} - \frac{e^{-\gamma_1 R'_{11}}}{R'_{11}} \right) \right] dz' \quad (V-24)$$

$$R'_{11} = [(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m - z')^2]^{1/2}$$

$$R'_{12} = [(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m - z')^2]^{1/2}$$

$$R'_{21} = [(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m - z')^2]^{1/2}$$

$$R'_{22} = [(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m - z')^2]^{1/2}$$

On remarque comme précédemment que ces intégrales ne présentent aucune singularité et que de plus elles ont été réduites dans ce cas à des intégrales simples.

Toutes les intégrales, doubles ou simples, sont évaluées numériquement en pratiquant un découpage automatique des domaines d'intégration

$$\left[z_n - \frac{\Delta}{2}, z_n + \frac{\Delta}{2} \right], \left[y_n - \frac{\Delta}{2}, y_n + \frac{\Delta}{2} \right] \text{ et } \left[x_n - \frac{\Delta}{2}, x_n + \frac{\Delta}{2} \right]$$

V.2.3 - Optimisation du calcul de la matrice

Au vu du système (V-16) on s'aperçoit que la matrice [A] peut être décomposée en 9 sous-matrices (NxN), et représentée comme suit :

	N		
N	A_{XX}	A_{XY}	A_{XZ}
	A_{YX}	A_{YY}	A_{YZ}
	A_{ZX}	A_{ZY}	A_{ZZ}

Les éléments d'une matrice $[A_{\alpha\beta}^0]$ correspondent aux effets mutuels que produisent les dipôles équivalents de direction β sur ceux de direction α . Ces éléments sont tous de la forme :

$$e_{mn} = \int_{\Delta V_n} G_{\alpha\beta}(R') dV$$

m : indice de la maille d'observation

n : indice de la maille d'émission.

Ces différents éléments e_{mn} peuvent être décomposés en somme ou différences d'intégrales qui peuvent être communes à plusieurs sous-matrices. Cette décomposition permettra donc de minimiser le temps de calcul des éléments.

* sous-matrices $[A_x^x]$ $e_{mn} = -I_2 - I_3$ (V-25)

$$I_2 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right) dx' dy' dz'$$

$$I_3 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right) dx' dy' dz'$$

* sous-matrices $[A_y^y]$ $e_{mn} = -I_1 - I_3$ (V-26)

$$I_1 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right) dx' dy' dz'$$

* sous-matrices $[A_z^z]$ $e_{mn} = -I_1 - I_2$ (V-27)

* sous-matrices $[A_{X'}^Y]$ et $[A_{Y'}^X]$ $e_{mn} = I_4$ (V-28)

$$I_4 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{e^{-Y_1 R'}}{R'} \right) dx' dy' dz' = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{e^{-Y_1 R'}}{R'} \right) dx' dy' dz'$$

* sous-matrices $[A_{X'}^Z]$ et $[A_{Z'}^X]$ $e_{mn} = I_5$ (V-29)

$$I_5 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{e^{-Y_1 R'}}{R'} \right) dx' dy' dz' = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{e^{-Y_1 R'}}{R'} \right) dx' dy' dz'$$

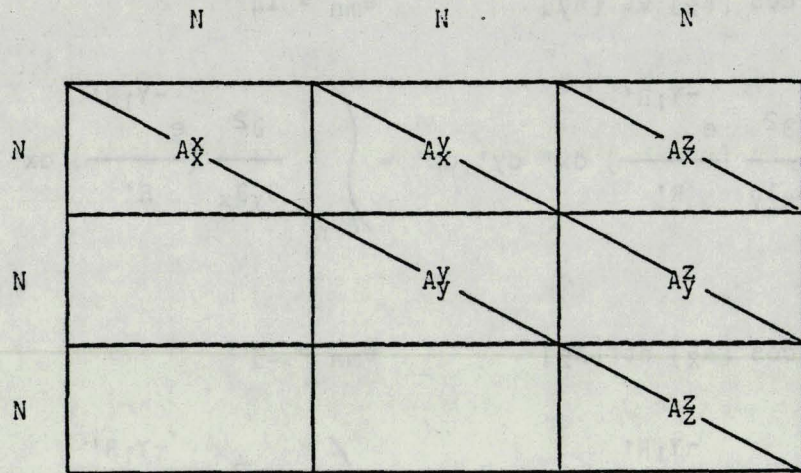
* sous-matrices $[A_{Y'}^Z]$ et $[A_{Z'}^Y]$ $e_{mn} = I_6$ (V-30)

$$I_6 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{e^{-Y_1 R'}}{R'} \right) dx' dy' dz' = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left(\frac{e^{-Y_1 R'}}{R'} \right) dx' dy' dz'$$

R' étant la distance entre les points d'émission et de réception.

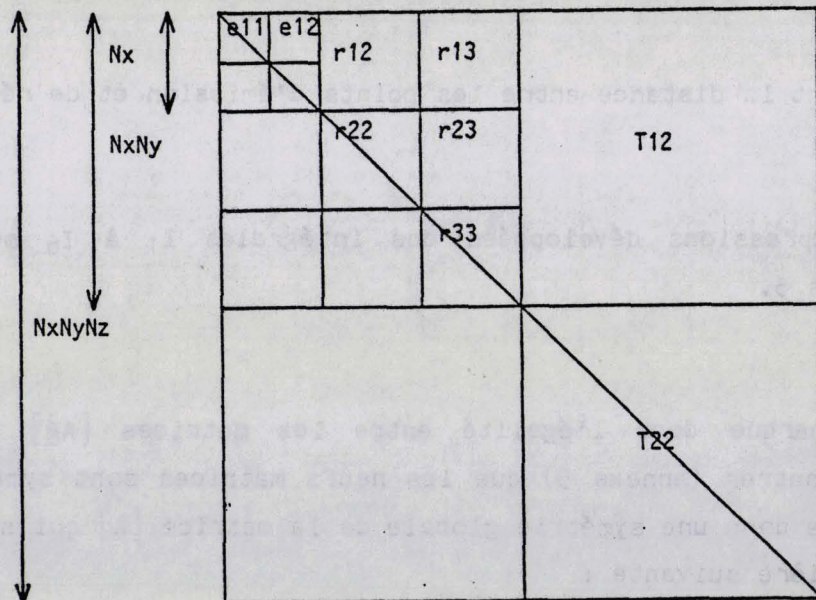
Les expressions développées des intégrales I_1 à I_6 sont données en annexes 5.

On remarque donc l'égalité entre les matrices $[A_{X'}^Z]$ et $[A_{Z'}^X]$ et on peut montrer (annexe 5) que les neuf matrices sont symétriques. Il en résulte donc une symétrie globale de la matrice $[A]$ qui se représente de la manière suivante :



où l'on a fait figurer les éléments des sous-matrices triangulaires supérieures qu'il suffit de calculer. Ceci réduit le nombre d'éléments à calculer à $3N(N+1)/2$. Enfin un gain de temps est réalisé du fait de la décomposition des intégrales, comme nous l'avons vu précédemment.

Ces sous-matrices peuvent être elles-mêmes décomposées en sous-matrices selon le découpage de l'anomalie. Prenons comme exemple une anomalie découpée en $N = N_x \cdot N_y \cdot N_z = 2 \times 3 \times 2$, fig. (V-4). Dans ce cas les matrices $[A_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{Q}}]$ se décomposent toutes sous la forme :



En premier la matrice est découpée en sous-matrices $[T_{ij}]$ correspondant aux effets mutuels entre les tranches T_i et T_j de l'anomalie. Ces matrices $[T_{ij}]$ sont elles-mêmes découpées en sous-matrices $[r_{kl}]$

correspondant aux interactions entre la rangée k et la rangée l. Enfin les matrices $[r_{kl}]$ sont découpées en éléments e_{nm} représentant l'effet de l'élément n sur l'élément m.

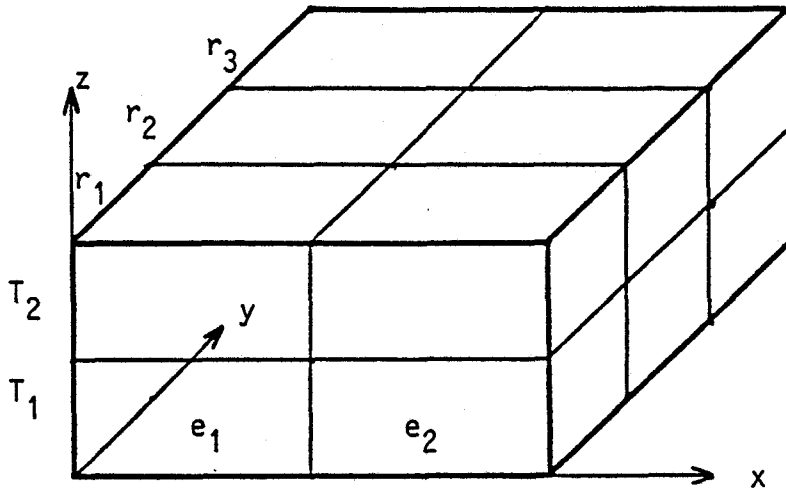


Figure V-4 : découpage d'une anomalie.

Dans l'annexe 5 nous avons montré que ces différentes matrices possèdent des propriétés de symétrie et d'anti-symétrie et que certains éléments sont nuls. Tout ceci permet de réduire le nombre d'éléments à calculer qui reste, dans toutes les configurations, inférieur à $6N$. Ce nombre est donné par : $6N - 2(N_x N_y + N_x N_z + N_y N_z) + (N_x + N_y + N_z)$.

V.2.4 - Calcul du champ total à l'extérieur de l'anomalie

Nous avons vu que le champ en un point de l'espace est composé du champ primaire provenant de l'émetteur et du champ rayonné par les dipôles équivalents à l'anomalie. Les expressions du rayonnement du dipôle source sont données par (V-9) et sont détaillées dans l'annexe 5. Quant aux mailles, chacune d'elles rayonne comme trois dipôles élémentaires positionnés dans les trois directions de bases $(\vec{o}\hat{x}, \vec{o}\hat{y}, \vec{o}\hat{z})$. On applique donc, pour ces trois dipôles, les mêmes relations que pour un émetteur électrique en introduisant respectivement comme moment électrique les termes $(\sigma_2^* - \sigma_1^*) E_x(M') dV$, $(\sigma_2^* - \sigma_1^*) E_y(M') dV$ et $(\sigma_2^* - \sigma_1^*) E_z(M') dV$.

Si on prend une maille d'indice m , le champ rayonné est :

$$E_x^m(M) = \Lambda_0 \, dV \left[K_{1m} \frac{x-x_m}{R'^2} \psi_m - K_{2m} E_x^m(M') \right] \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'^3}$$

$$E_y^m(M) = \Lambda_0 \, dV \left[K_{1m} \frac{y-y_m}{R'^2} \psi_m - K_{2m} E_y^m(M') \right] \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'^3} \quad (V-31)$$

$$E_z^m(M) = \Lambda_0 \, dV \left[K_{1m} \frac{z-z_m}{R'^2} \psi_m - K_{2m} E_z^m(M') \right] \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'^3}$$

avec $\psi_m = (x-x_m) \frac{E_x^m(M')}{x} + (y-y_m) \frac{E_y^m(M')}{y} + (z-z_m) \frac{E_z^m(M')}{z}$

$$K_{1m} = \gamma_1^2 R'^2 + 3 \gamma_1 R' + 3$$

$$K_{2m} = \gamma_1^2 R'^2 + \gamma_1 R' + 1$$

R' étant la distance entre la maille m et le point M

(x_m, y_m, z_m) : coordonnées de la maille m

(x, y, z) : coordonnées du point M

et le champ total en un point M est alors :

$$E_x(M) = E_x^e(M) + \sum_{m=1}^N E_x^m(M)$$

$$E_y(M) = E_y^e(M) + \sum_{m=1}^N E_y^m(M) \quad (V-32)$$

$$E_z(M) = E_z^e(M) + \sum_{m=1}^N E_z^m(M)$$

V. 3 - APPLICATION A LA DIFFRACTION PAR UNE ANOMALIE PARALLELEPIPEDIQUE

Dans l'application du procédé de tomographie électromagnétique entre forages, de nombreux paramètres électriques et géométriques peuvent varier d'un site à l'autre. Afin de distinguer l'influence de chacun d'eux sur l'amplitude et la phase du signal de réception, nous allons étudier successivement l'effet de la fréquence, de la dimension de l'anomalie et des décalages de l'anomalie par rapport à l'emplacement des antennes d'émission et de réception.

V.3.1 - Configuration de référence

La configuration géométrique choisie est celle représentée sur la Figure ci-dessous :

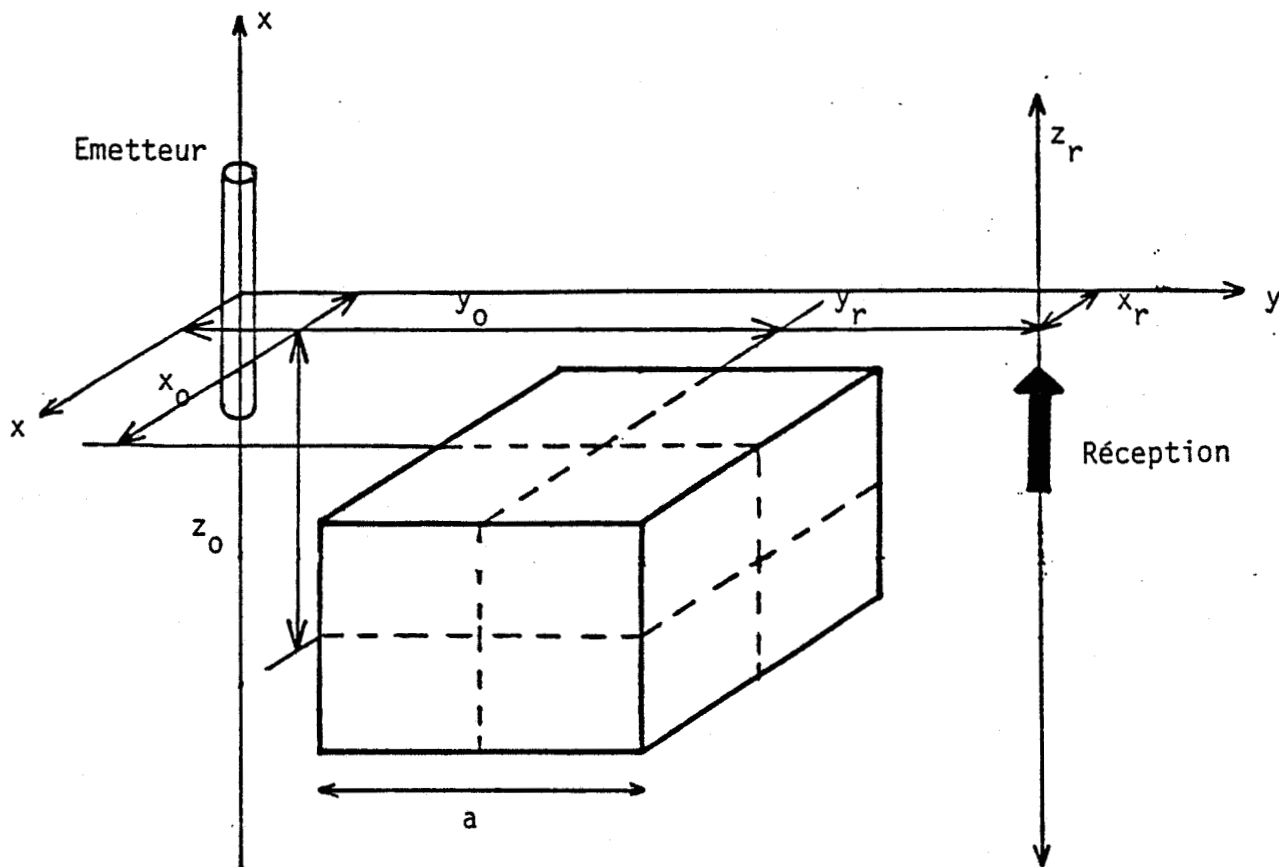


Figure V.5 : Configuration de référence.

L'anomalie est un vide ($\sigma_a = 0$ S/m, $\epsilon_{ra} = 1$) de forme cubique de côté a . Elle est située dans un milieu encaissant homogène de conductivité $\sigma = 10^{-2}$ S/m et de permittivité relative $\epsilon_r = 5$. Afin de disposer d'un élément de comparaison entre toutes les courbes qui seront présentées, nous avons choisi une configuration de référence qui est celle d'une anomalie de 1 m^3 centrée par rapport à la droite reliant l'émetteur au récepteur ($x_0 = z_0 = 0$).

De plus la distance entre forages est de 10 m. L'antenne d'émission est un dipole demi-onde accordé à la fréquence de 200 MHz. Les différentes courbes que nous allons présenter montreront soit la variation du taux d'anomalie en amplitude ϕ_a défini de la façon suivante :

$$\phi_a = \left| \frac{E_{zt}}{E_{zh}} \right| - 1$$

où E_{zt} est la composante verticale du champ total en présence de l'anomalie et E_{zh} le champ que l'on obtiendrait si le milieu était homogène et infini.

Soit l'écart de phase $\Delta\phi$ défini par :

$$\Delta\phi = \text{Phase}(E_{zt}) - \text{Phase}(E_{zh})$$

La courbe de la Figure (V-6) correspond ainsi à la variation de ϕ_a et de $\Delta\phi$ en fonction de la profondeur z du récepteur. Comme indiqué sur la Figure (V-5), l'émetteur et le centre de l'anomalie se situent à la cote $z = 0$. On note une fluctuation du champ au voisinage de la profondeur de l'hétérogénéité et un taux d'anomalie négatif lorsque $z = 0$ donc un champ en présence de la cavité inférieur à celui que l'on aurait en milieu homogène. Ce résultat peut se visualiser sur la Figure (V-7) où les variations de E_{zh} , E_{za} et E_{zt} ont été représentées, E_{za} étant le champ vertical dû aux dipôles équivalents à l'anomalie. Il existe une opposition de phase entre E_{za} et E_{zh} lorsque l'émetteur, le récepteur et l'hétérogénéité sont alignés, ce qui explique la diminution d'amplitude du champ total. La différence de marche entre les rayons issus de l'émetteur et ceux des dipôles équivalents à l'anomalie variant en

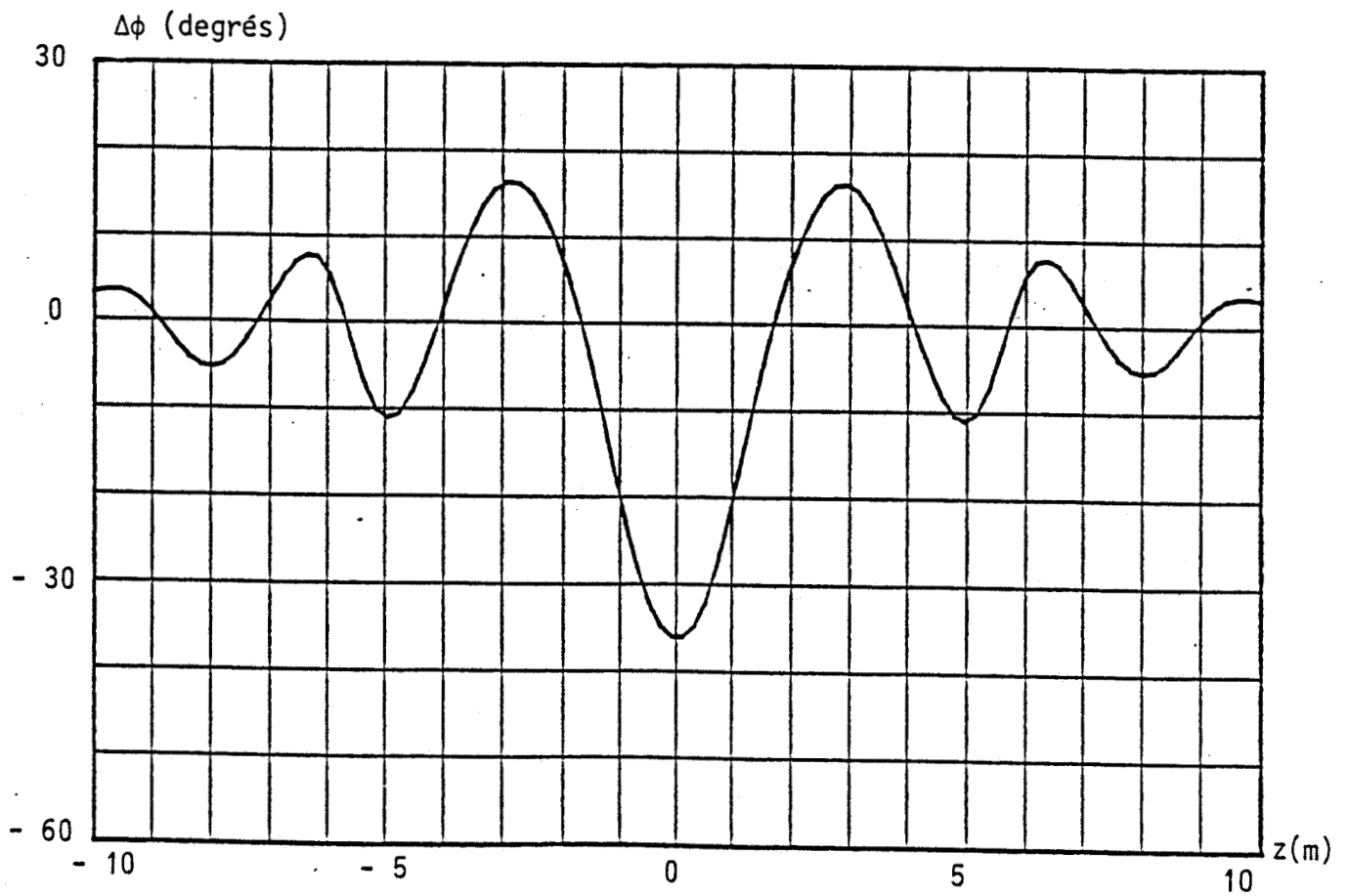
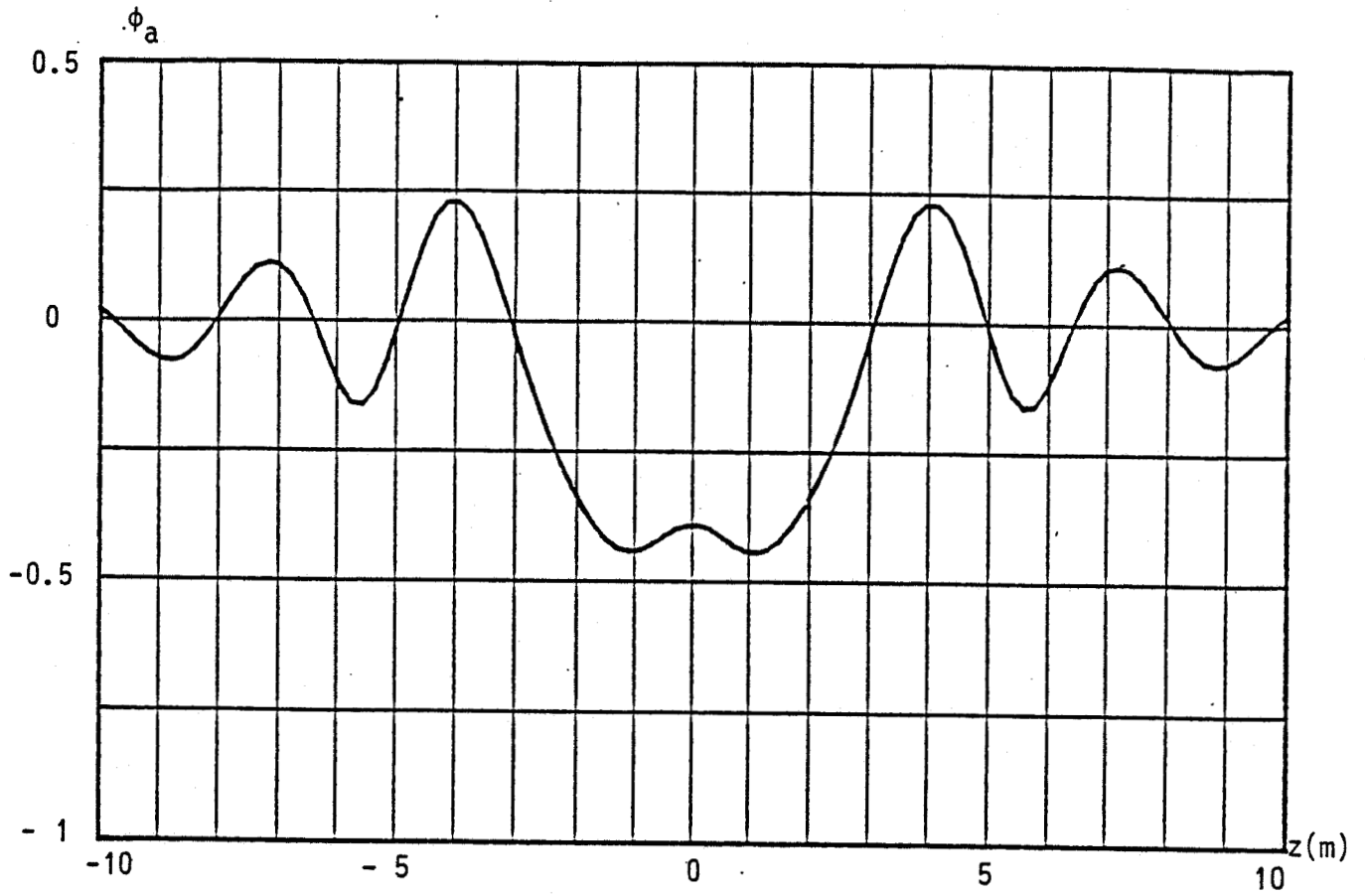
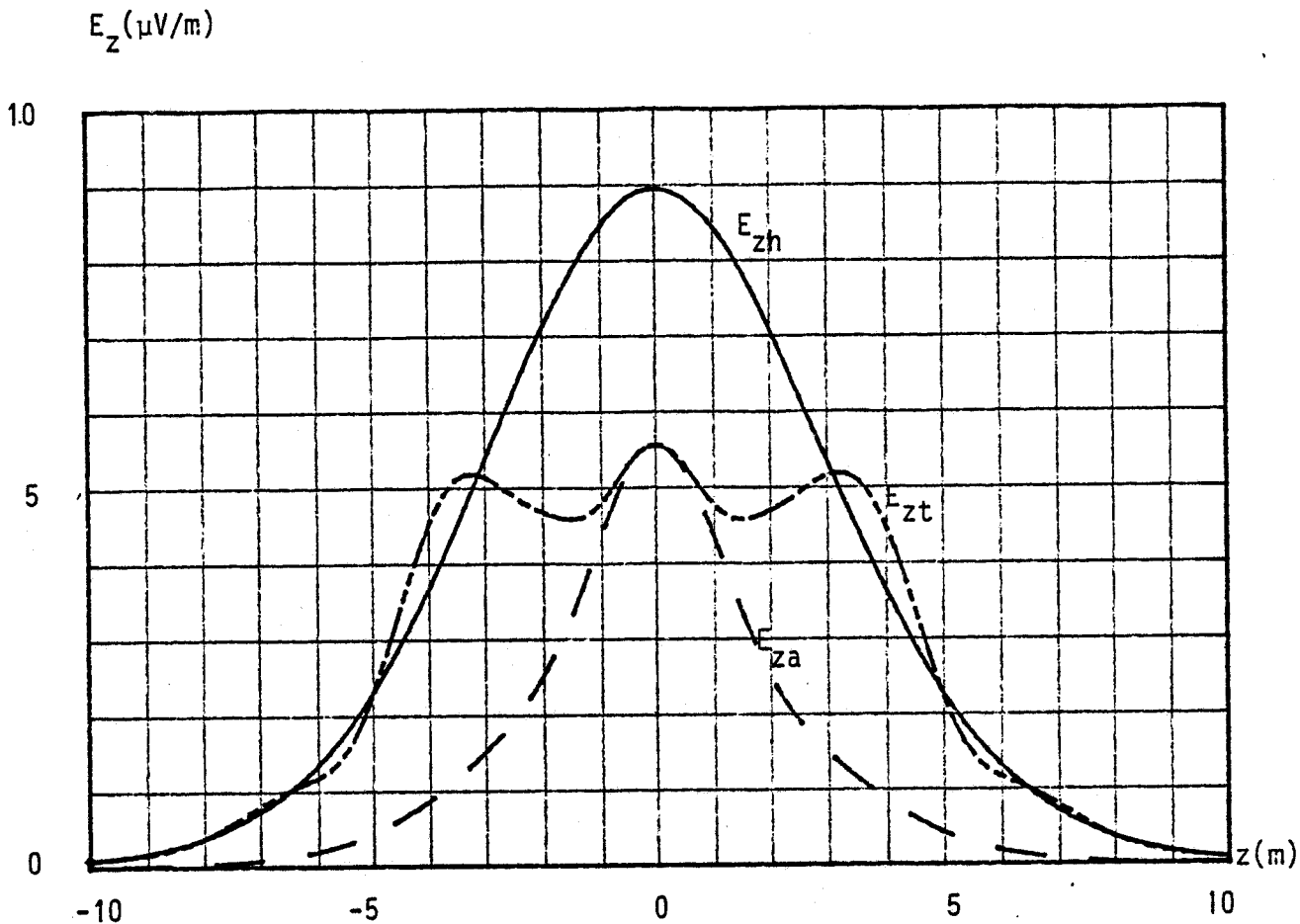


Figure (V-6)



E_{zh} : Composante verticale du champ en milieu homogène

E_{za} : Composante rayonnée par l'anomalie

E_{zt} : Composante du champ total : $E_{zt} = E_{za} + E_{zh}$

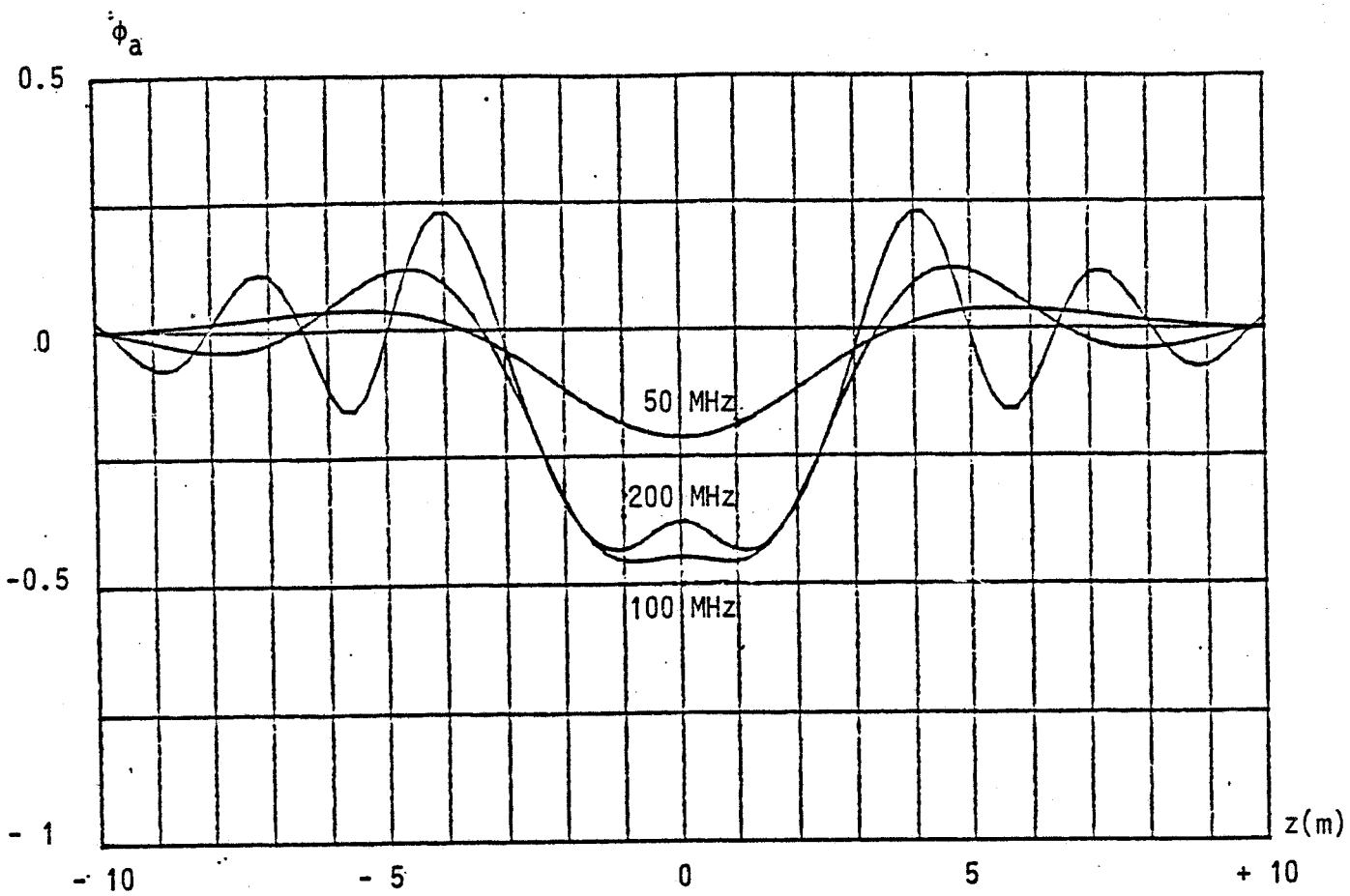
Figure (V-7)

fonction de la profondeur du récepteur, des mises en phase ou en opposition de phase se produiront successivement, entraînant des oscillations du champ total.

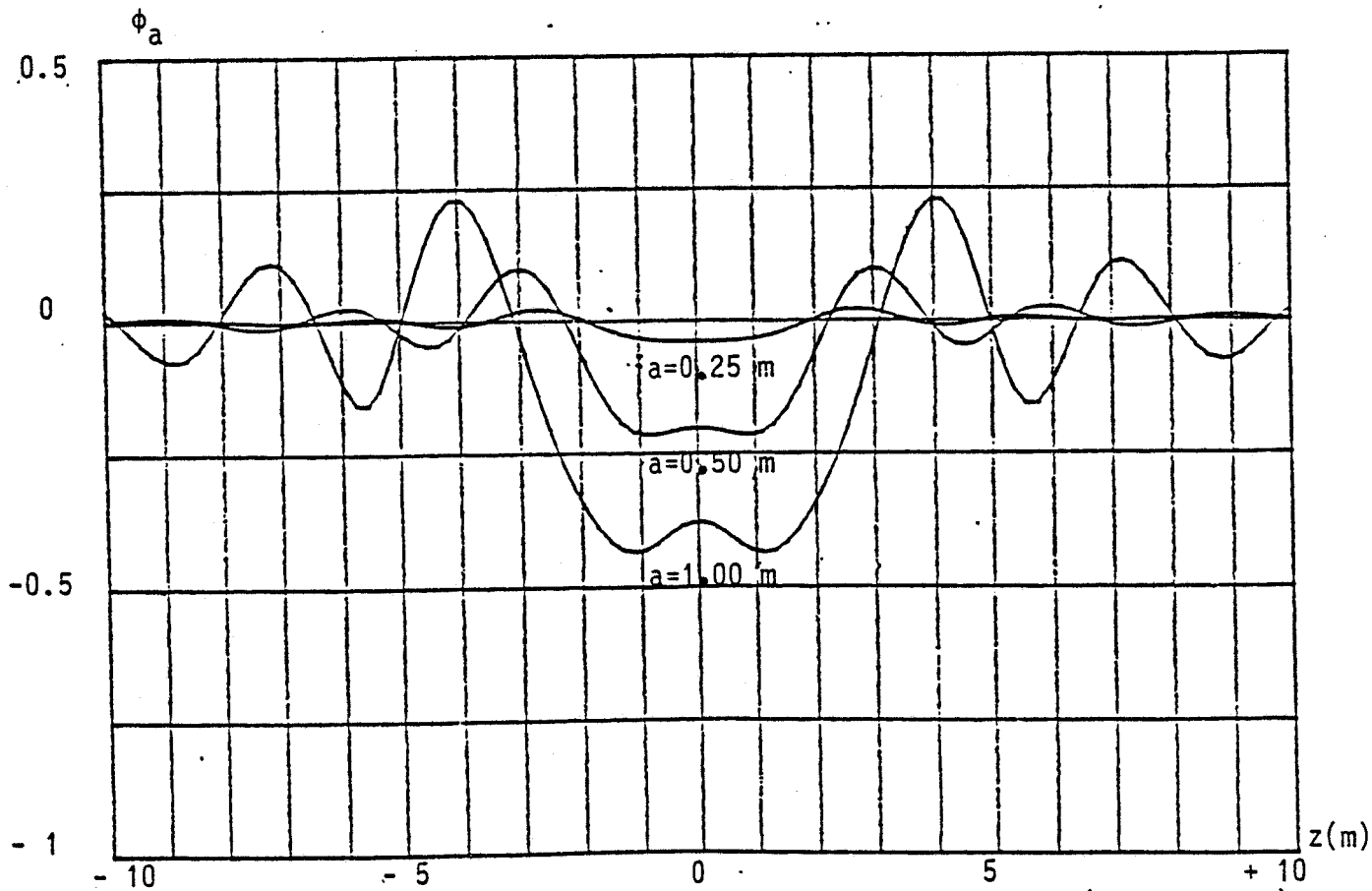
On constate donc une diminution de la composante verticale du champ électrique à "l'ombre" de la cavité. Nous allons d'abord faire une étude paramétrique et nous essaierons ensuite d'interpréter ce résultat, d'une part à l'aide d'un modèle bi-dimensionnel basé sur la théorie des rayons et d'autre part en calculant la réponse de l'anomalie non seulement sur la composante E_z mais également sur l'amplitude du champ total. De plus une exploitation basse fréquence de ce modèle permettra de comprendre les déformations des lignes de champ électrique provoquées par l'hétérogénéité.

V.3.2 - Influence de la fréquence et de la dimension de l'anomalie

Pour l'anomalie de référence décrite précédemment, les courbes de la Figure (V-8) montrent la variation de ϕ_a pour 3 fréquences : 50 MHz, 100 MHz et 200 MHz lorsque la sonde de réception varie de 10 m de part et d'autre de la profondeur de la cavité. Pour ce volume à détecter, ϕ_a augmente d'un facteur 2 lorsque la fréquence passe de 50 MHz à 100 MHz, puis devient pratiquement indépendant de la fréquence. Il faut cependant faire une remarque importante qui concerne la convergence et qui restera valable lors de la présentation de l'ensemble des résultats. En effet la résolution du système d'équations intégrales nécessite le découpage de l'anomalie en N mailles et, si on les choisit cubiques de côté Δ , les exemples numériques montrent que la convergence est atteinte si Δ a un ordre de grandeur compris entre le dixième ou le cinquième de la longueur d'onde dans l'anomalie. A 200 MHz la cavité de 1 m^3 doit être découpée de telle façon que $\Delta \approx 25 \text{ cm}$ ce qui correspond à 64 mailles. Le système à résoudre étant $3N \times 3N$, on aboutit à une matrice (192, 192). Le programme de calcul est implanté actuellement sur un mini ordinateur HP 1000 et cette taille de matrice, compte tenu des éléments à calculer et de l'inversion à effectuer, est la limite pour des précisions et des temps calculs raisonnables.

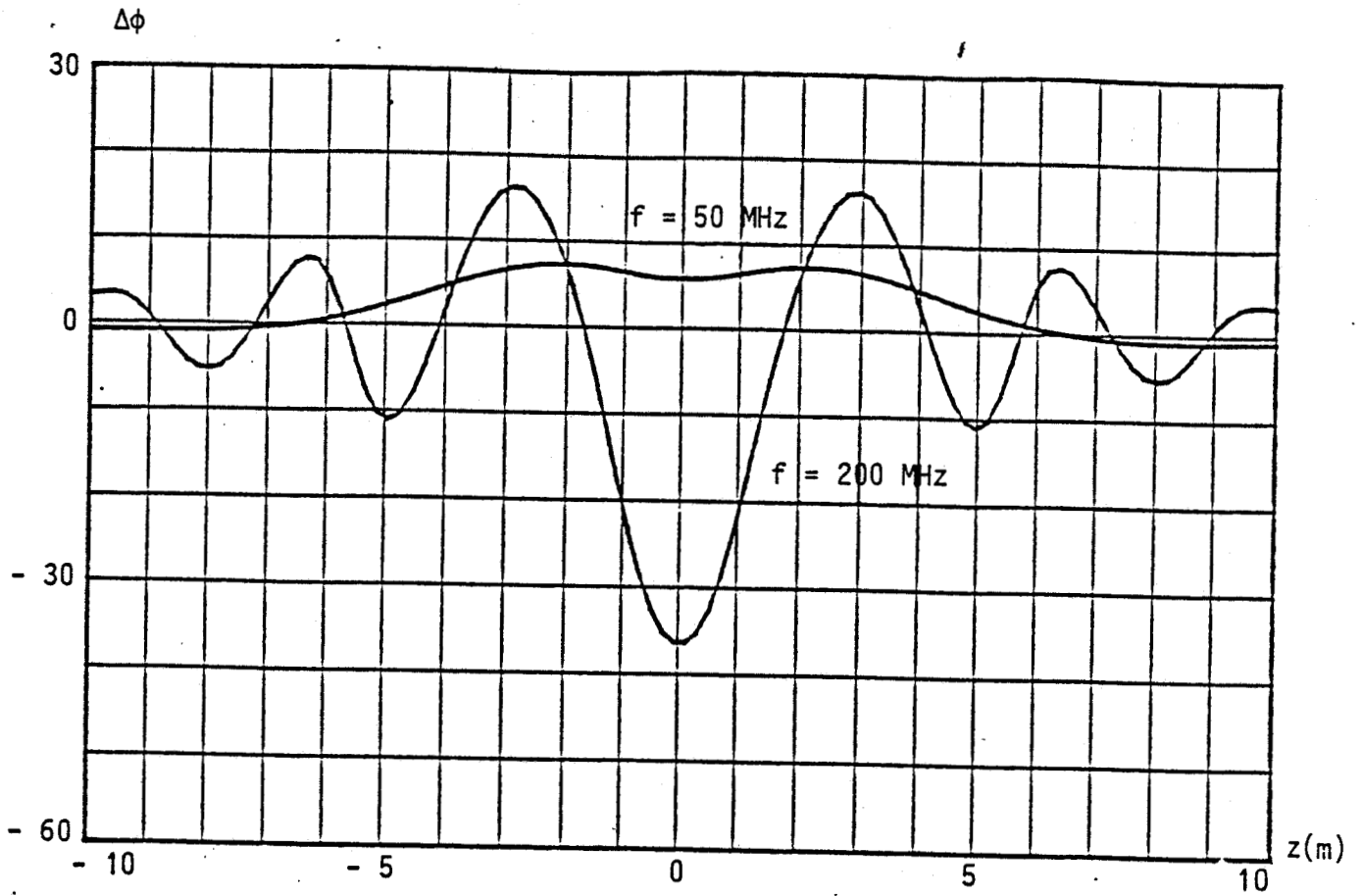


-a- Influence de la fréquence

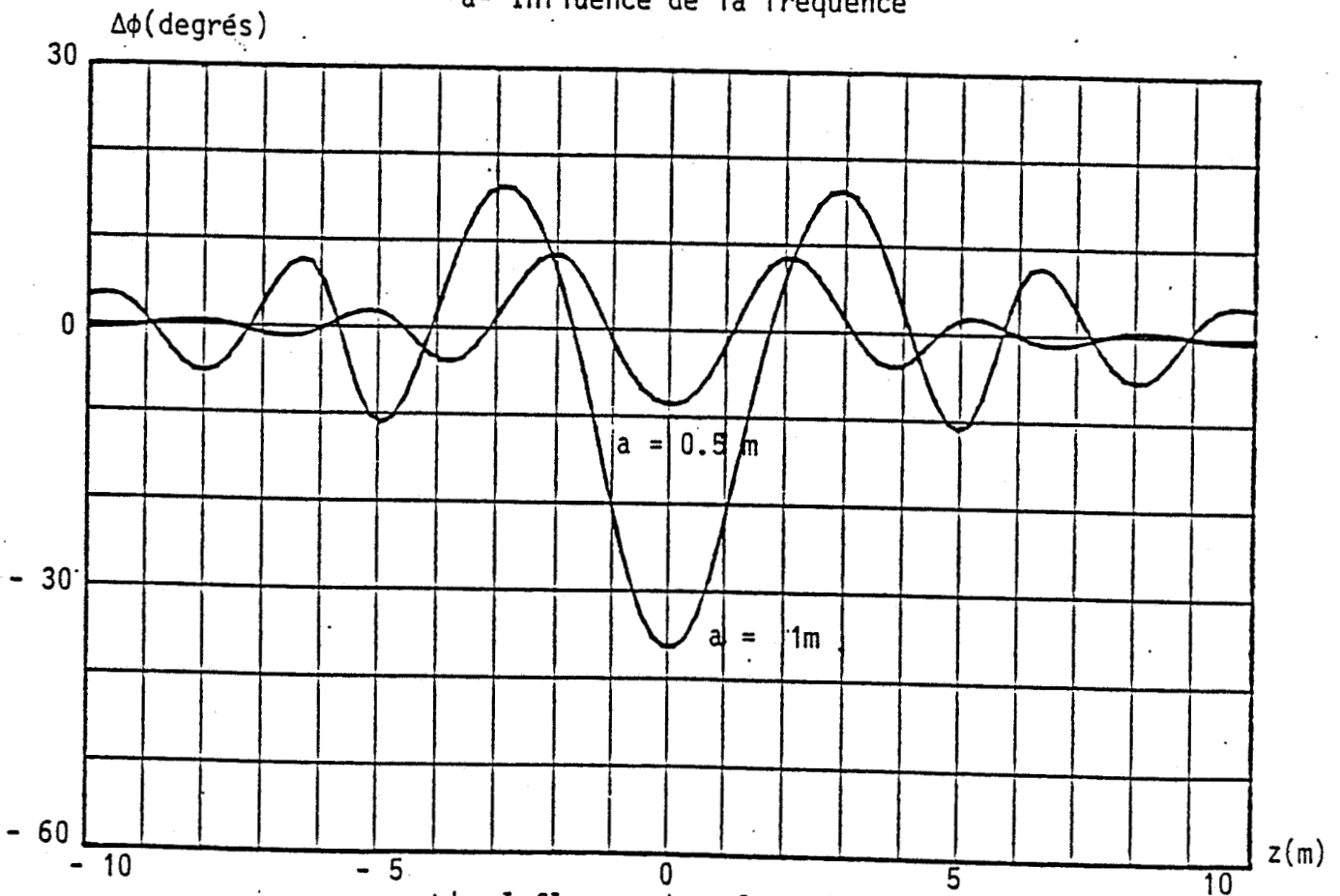


-b- Influence du volume de l'anomalie ($f = 200$ MHz)

Figure (V-8)



-a- Influence de la fréquence



-b- Influence du volume de l'anomalie ($f = 200$ MHz)

Figure (V-9)

Dans l'état actuel d'implantation, on ne pourra donc pas simuler des anomalies à la résonance ou très conductrices qui nous amèneraient à des découpages plus importants. Il serait nécessaire dans l'avenir de transférer ces programmes sur l'ordinateur DPS 8 de l'Université et d'utiliser des procédures d'inversion des matrices par blocs de façon à pouvoir repousser notablement les limites d'utilisation du programme. Dans certains cas nous donnerons cependant des exemples n'ayant certainement pas convergé sur le HP 1000 mais qui permettent néanmoins de voir le comportement "global" du taux d'anomalie : augmentation, diminution, inversion de signe...

Pour la fréquence de 200 MHz qui est celle de référence, les courbes de la Figure (V-8b) montrent l'influence de la taille de la cavité. Elle est totalement invisible si elle a un côté "a" de 25 cm tandis que le taux d'anomalie est de 25 % lorsque $a = 50$ cm et atteint 40 % lorsque $a = 1$ m. Des cavités plus grandes ne peuvent être testées pour les raisons mentionnées précédemment.

Sur les Figures (V-9a) et (V-9b) nous avons tracé les variations de phase $\Delta\phi$ dues à la présence de la cavité. Des conclusions à peu près similaires à celles évoquées précédemment s'appliquent puisque une anomalie de 1 m^3 provoque un $\Delta\phi$ de 35° à 200 MHz mais est invisible à 50 MHz. Cependant, pour la fréquence de 200 MHz, $\Delta\phi$ devient très faible pour une cavité cubique de 0.5 m de côté alors que le taux d'anomalie sur l'amplitude n'était pas négligeable.

V.3.3 - Influence de la position de l'anomalie et de la distance entre forages

V.3.3.1 - Distance entre forages

Reprenons l'anomalie de référence de 1 m^3 et une fréquence d'émission de 200 MHz. Les courbes de la Figure (V-10a) ont été obtenues en supposant une distance entre forages $y_f = 10$ m, une cavité située dans l'axe des forages, mais pour différentes distances y_0 entre l'émetteur et le centre de la cavité ($y_0 = 3$ m, 5 m, 7 m) (cf. Figure

(V-5)). On note sur cette figure que si l'anomalie se rapproche de l'émetteur ($y_0 = 3$ m), ϕ_a prend une valeur importante sur une grande zone de profondeur du récepteur (+ 4 m à - 4 m). On conçoit assez facilement qu'une cavité proche de l'émetteur déformera les lignes de champ sur une zone importante derrière elle tandis que lorsque la cavité est proche du récepteur ($y_0 = 7$ m) la déformation est beaucoup plus locale puisqu'elle se produit sur un écart de profondeur de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de l'anomalie.

Les courbes d'écart de phase $\Delta\phi$, tracées sur la Figure (V-10b), montrent également que la position de l'anomalie entre les deux forages n'a d'influence que sur la "largeur" de la variation de phase.

V.3.3.2 - Décalage latéral

Si on maintient fixe la distance entre l'émetteur et la cavité, et que l'on introduit en paramètre la distance y_r entre les forages d'émission et de réception, les courbes des Figures (V-11a) et (V-11b) montrent évidemment un résultat identique au précédent. Lorsque le sondage de réception passe au voisinage de l'anomalie ($y_r = 7,5$ m) l'effet de celle-ci est très localisé contrairement au cas de grandes distances entre forages ($y_r = 15$ m).

Envisageons maintenant un décalage de la cavité par rapport au plan passant par les forages (Figure (V-12)). Le cas $x_0 = 0$ correspond à une anomalie centrée. On remarque sur les courbes de la Figure (V-12a) que si $x_0 = 1$ m c'est-à-dire lorsque la direction émetteur-récepteur passe à 0.5 m du côté le plus proche de la cavité, le taux d'anomalie reste encore important, de l'ordre de 30 %. Par contre si le décalage devient plus important ($x_0 = 2$ m), les courbes deviennent difficilement interprétables. La variation de phase (Figure (V-12b)) semble être dans ce cas plus sensible à la présence d'une cavité décalée.

Considérons enfin le cas où le forage contenant l'antenne d'émission est centré par rapport à la cavité mais où le forage de réception est décalé d'une quantité x_r (cf. Figure (V-13)). Les courbes de cette figure montrent que ce décalage n'est pas critique puisque même si $x_r = 2$ m, le taux d'anomalie ne subit que peu de variation. Ceci

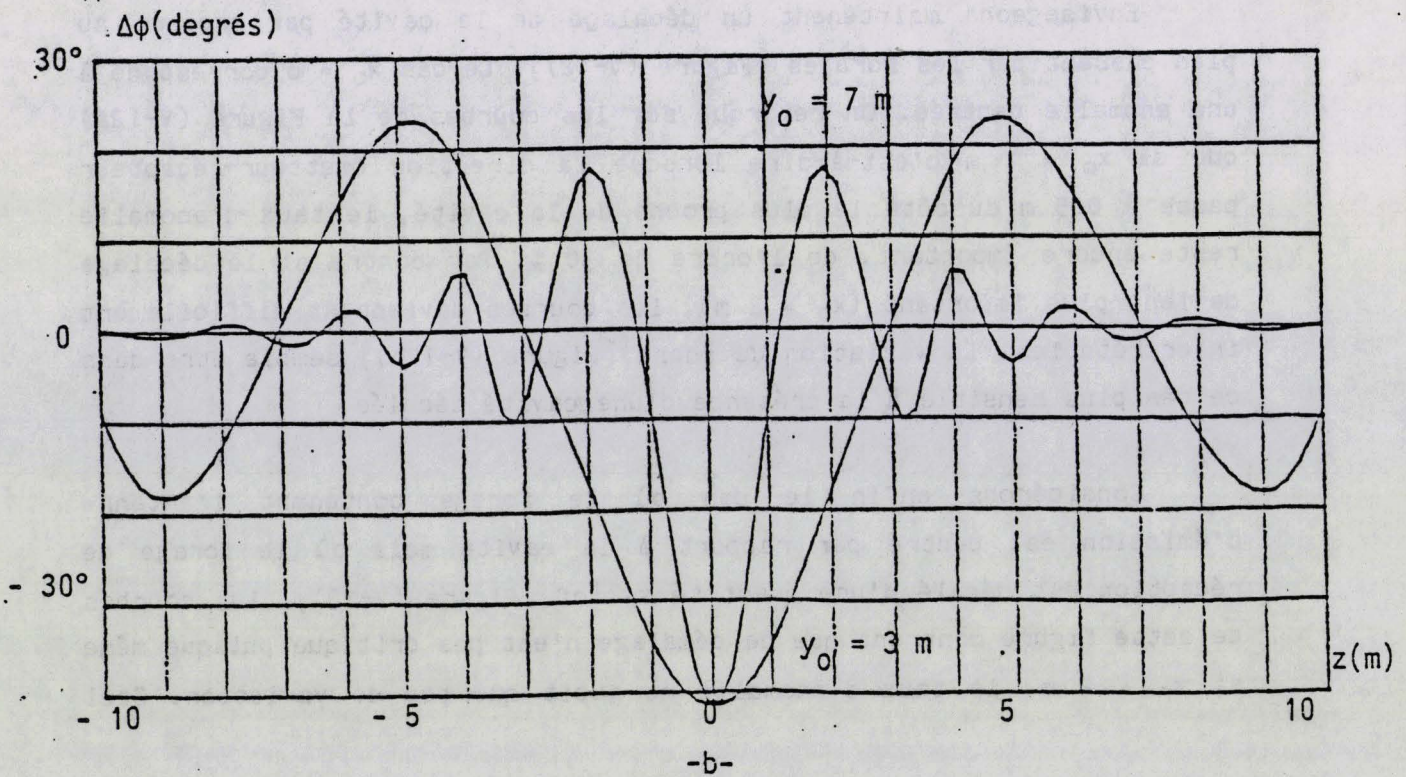
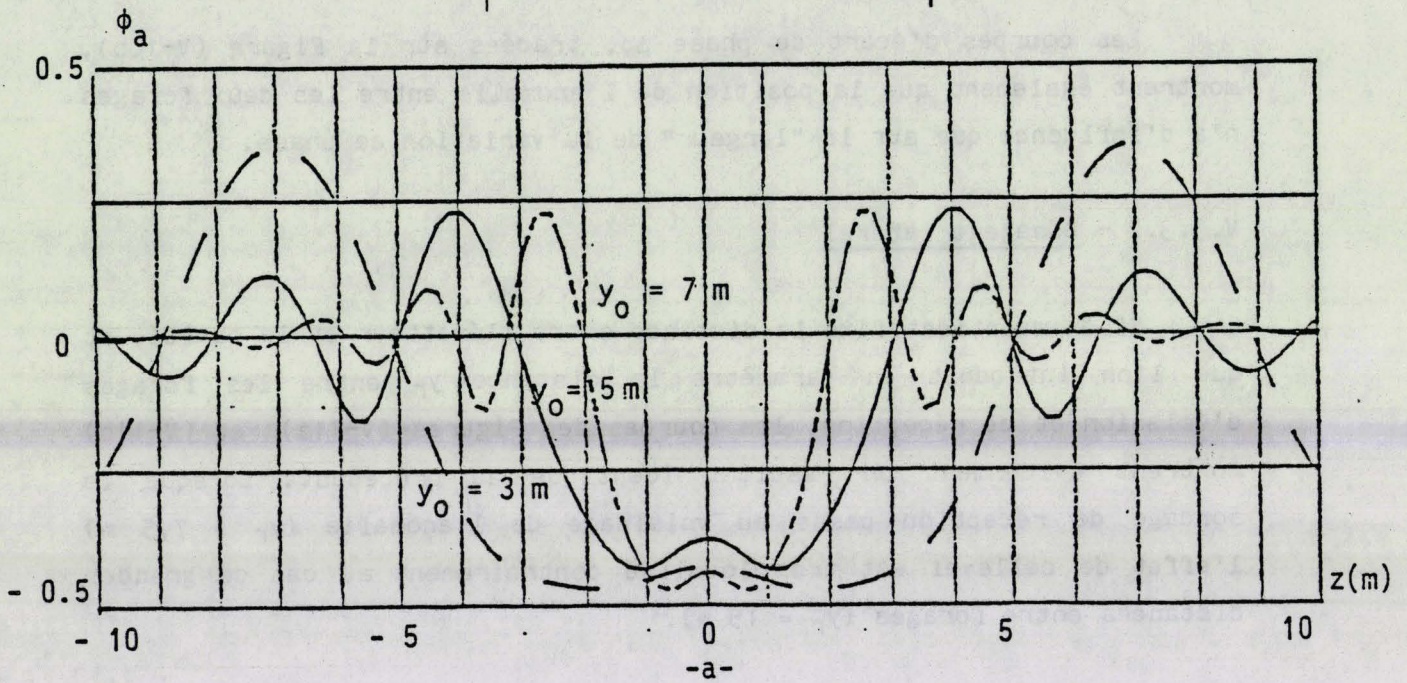
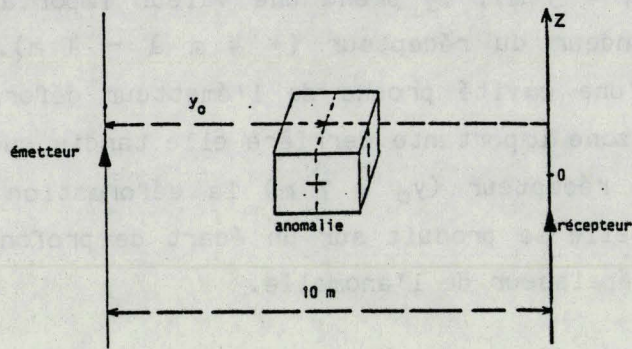


Figure (V-10)

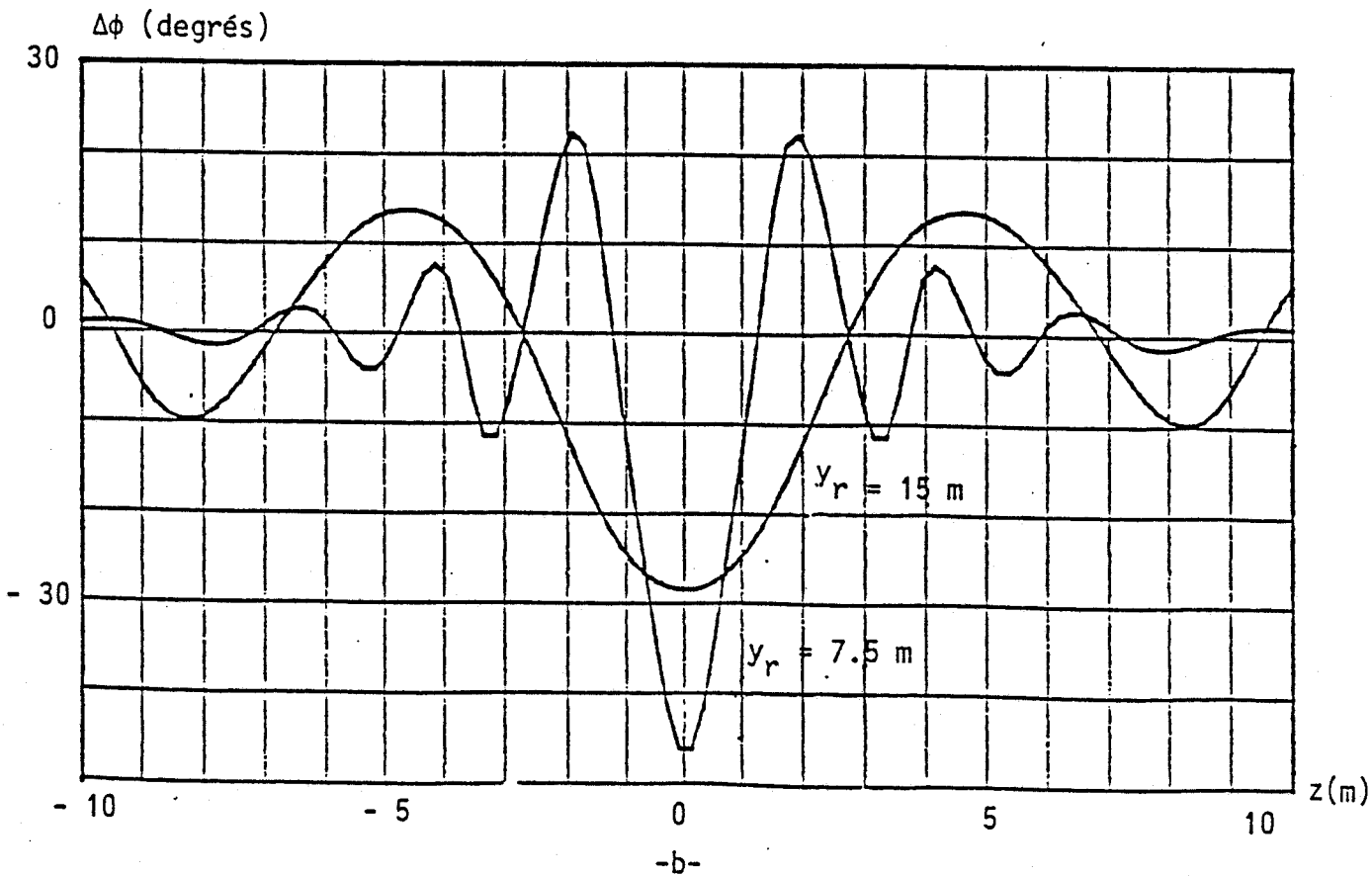
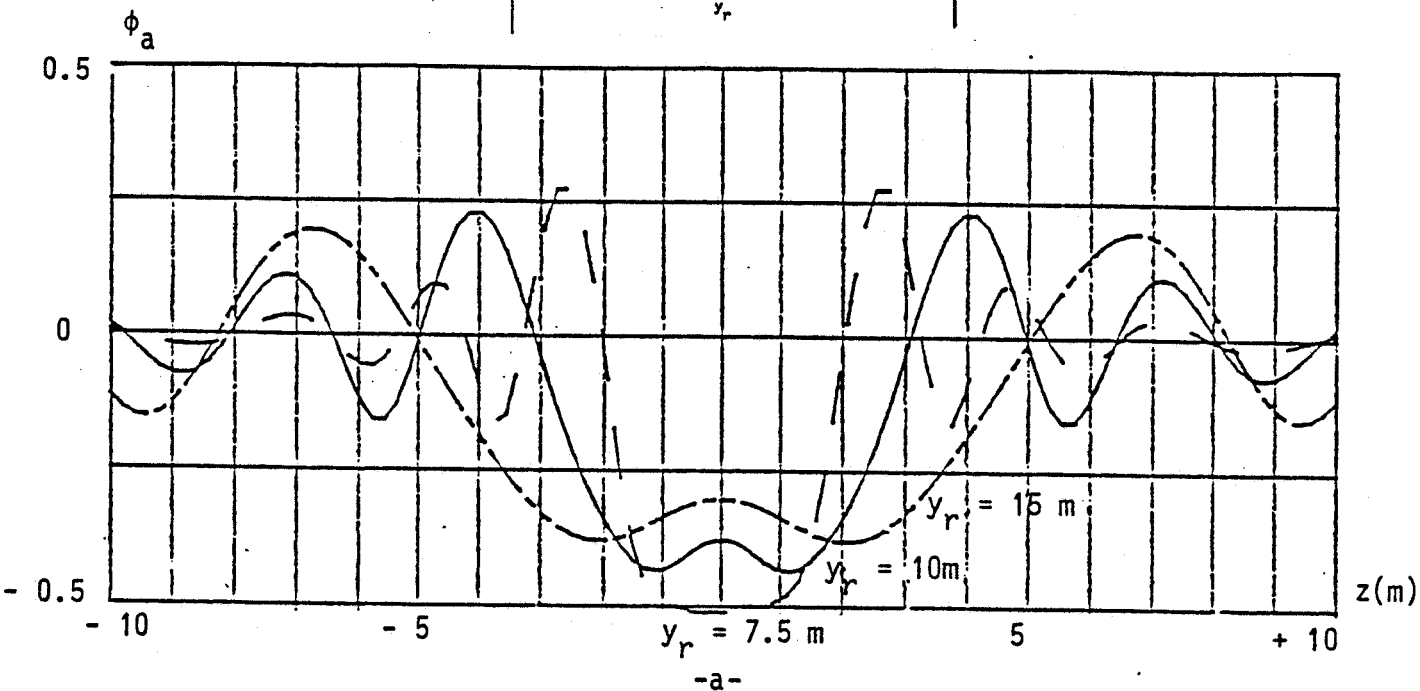
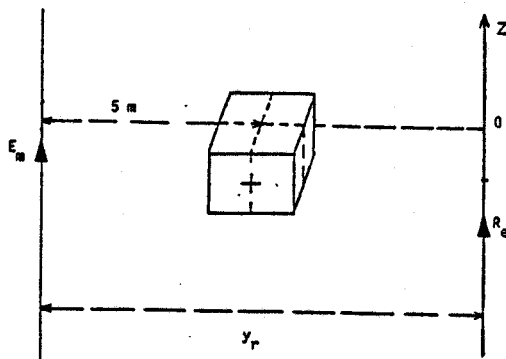


Figure (V-11)

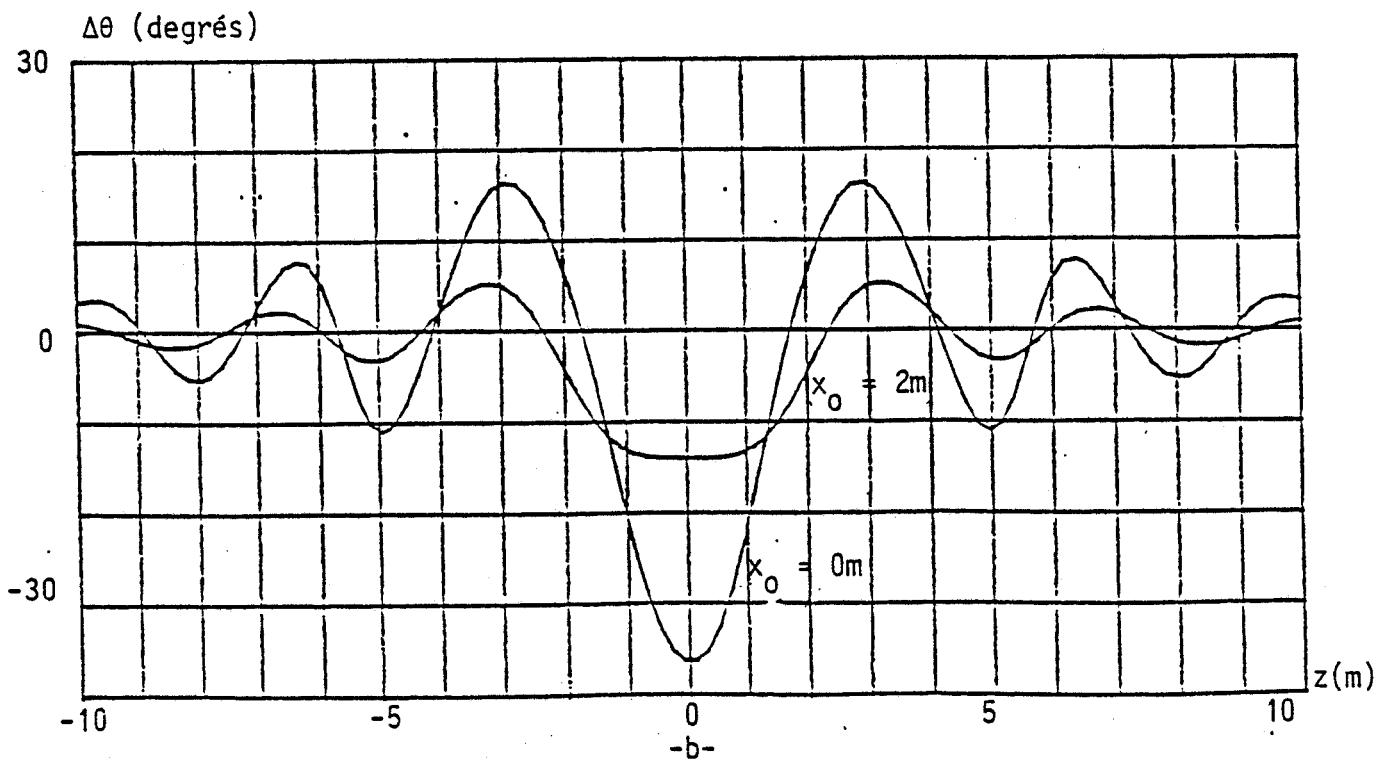
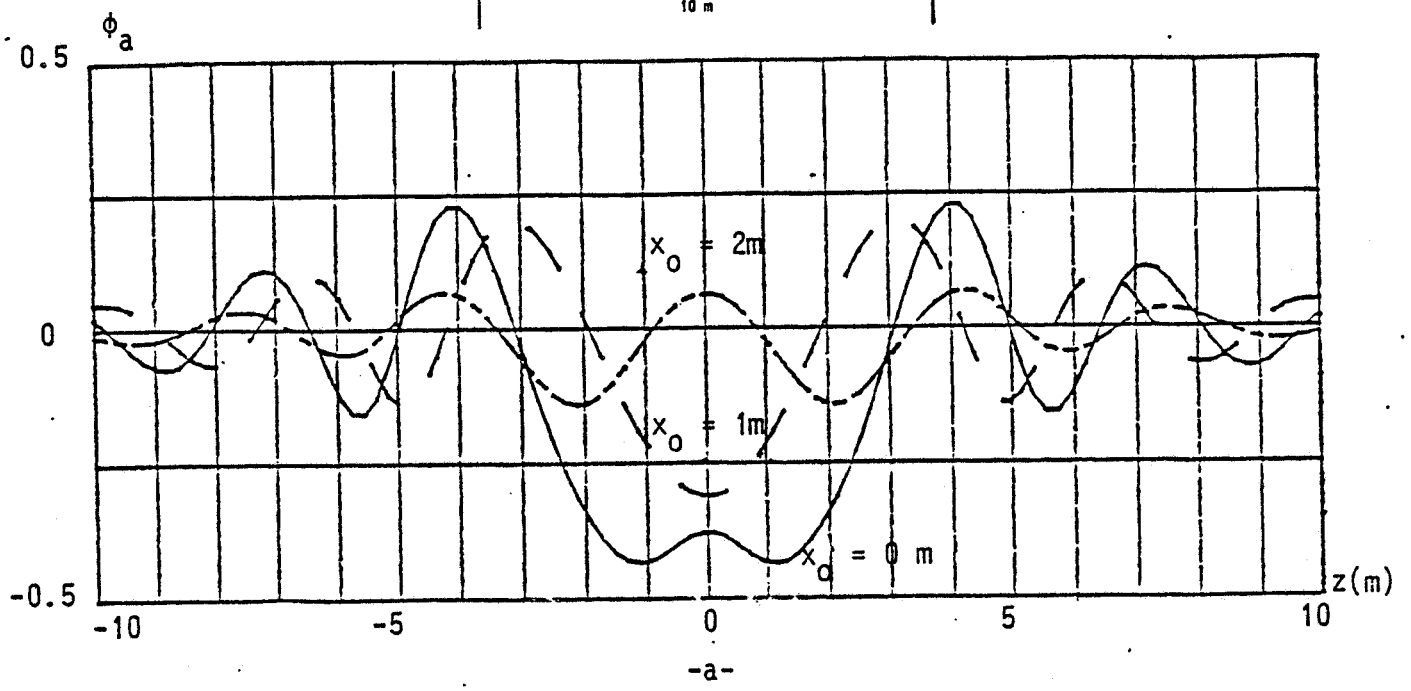
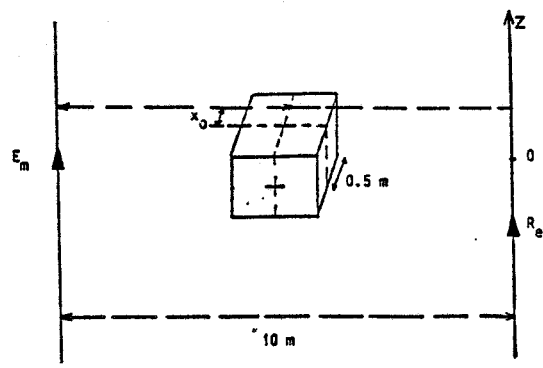


Figure (V-12)

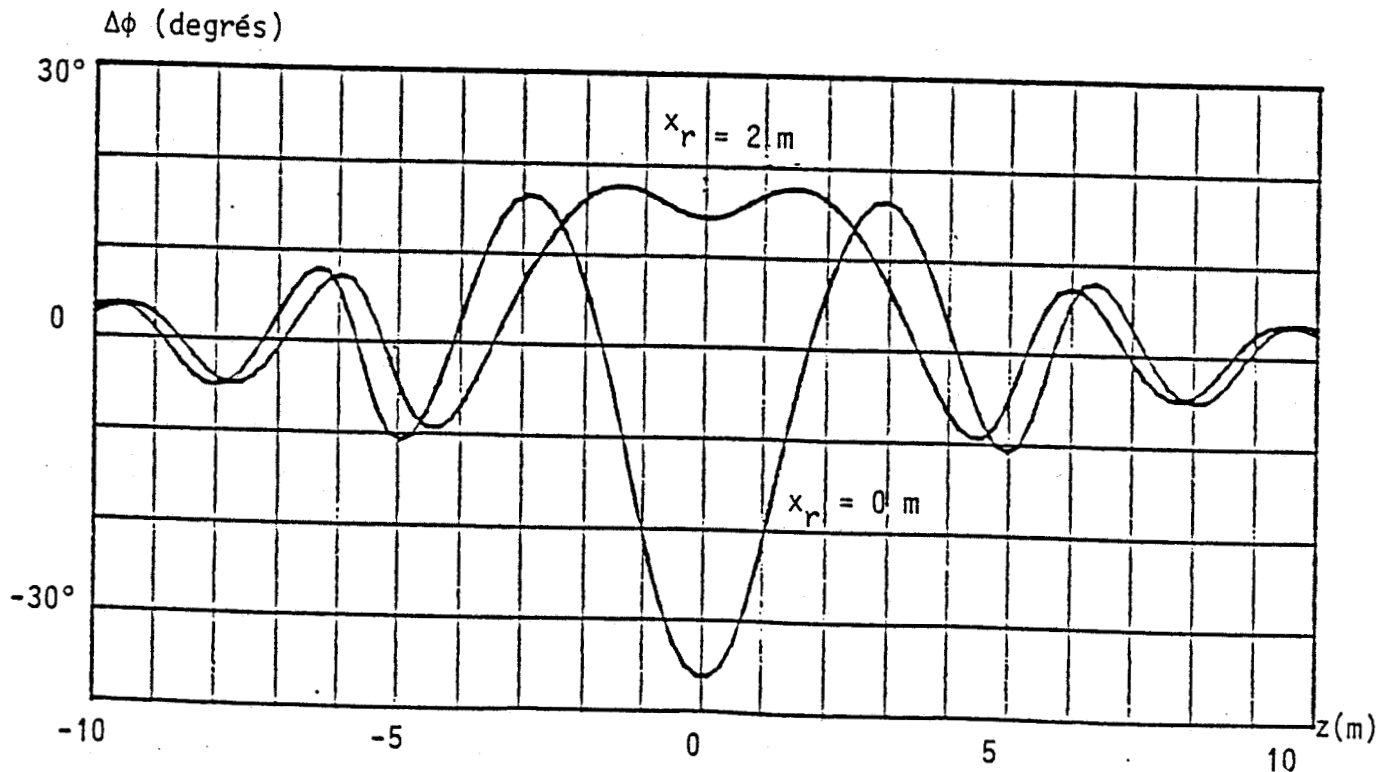
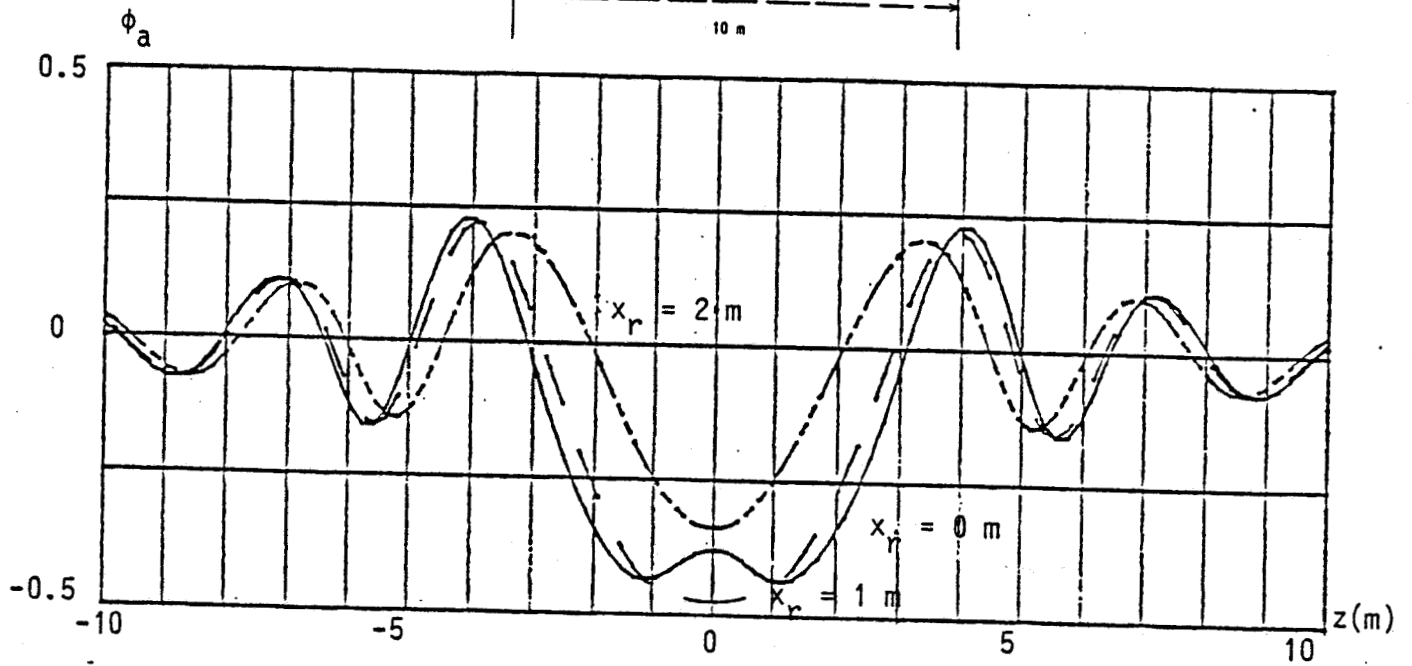
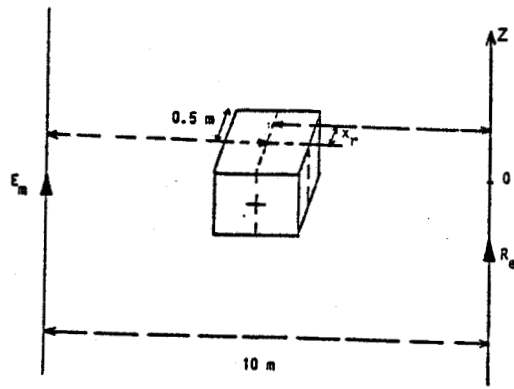


Figure (V-13)

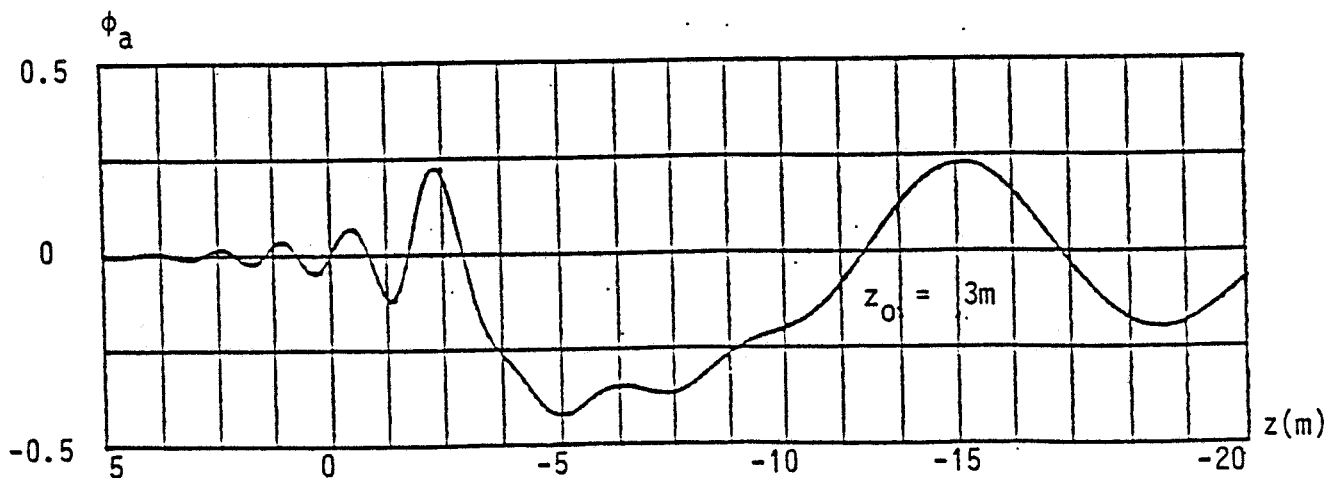
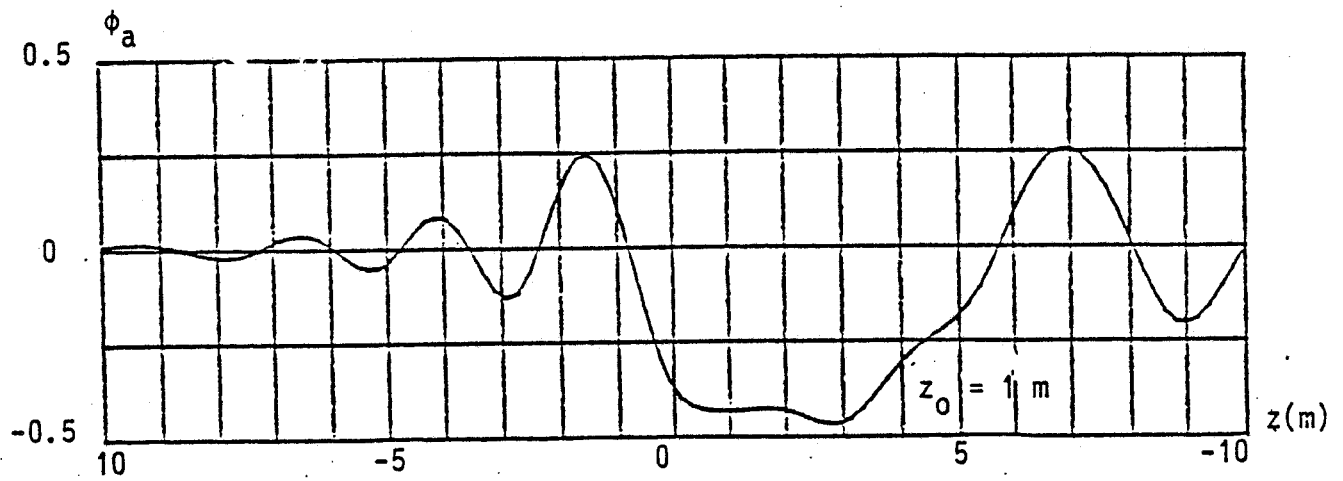
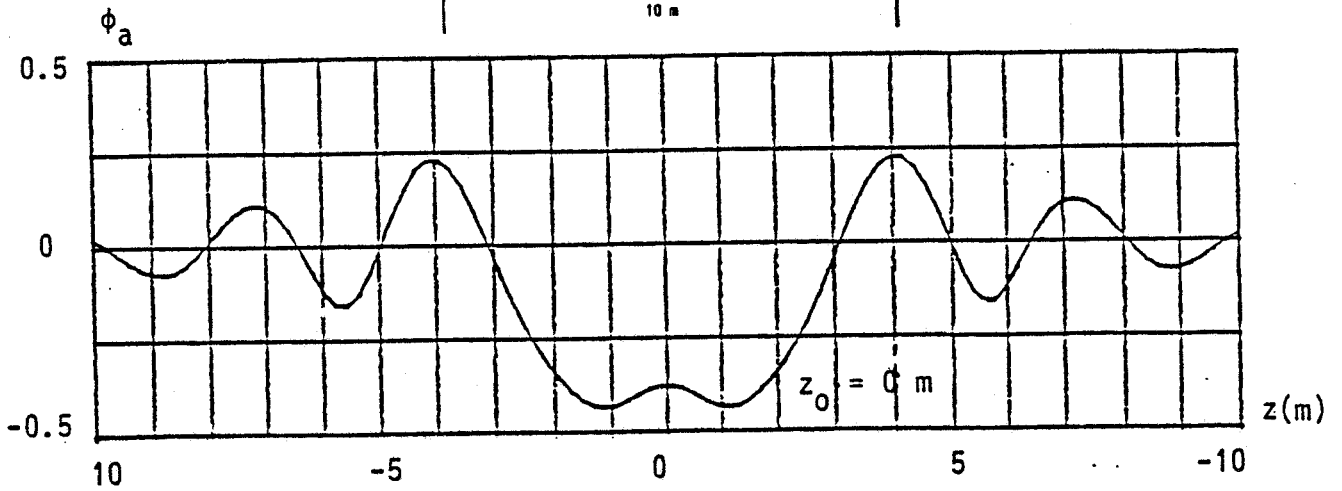
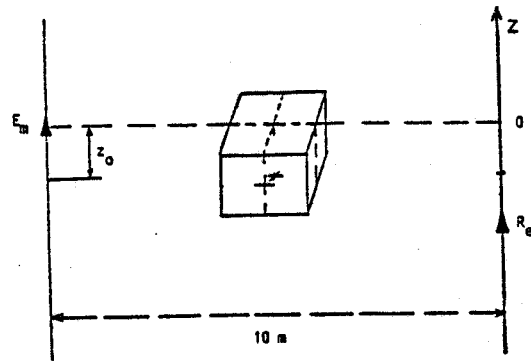


Figure (V-14)

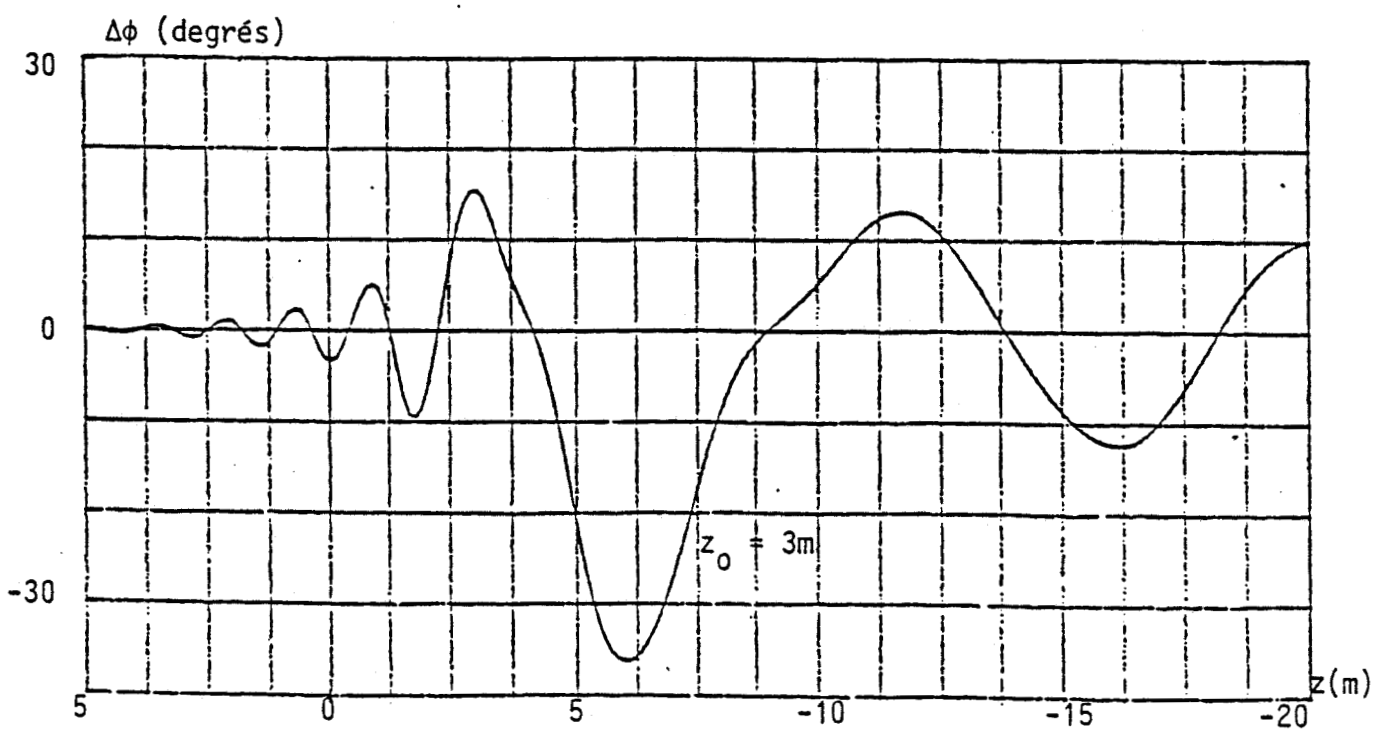
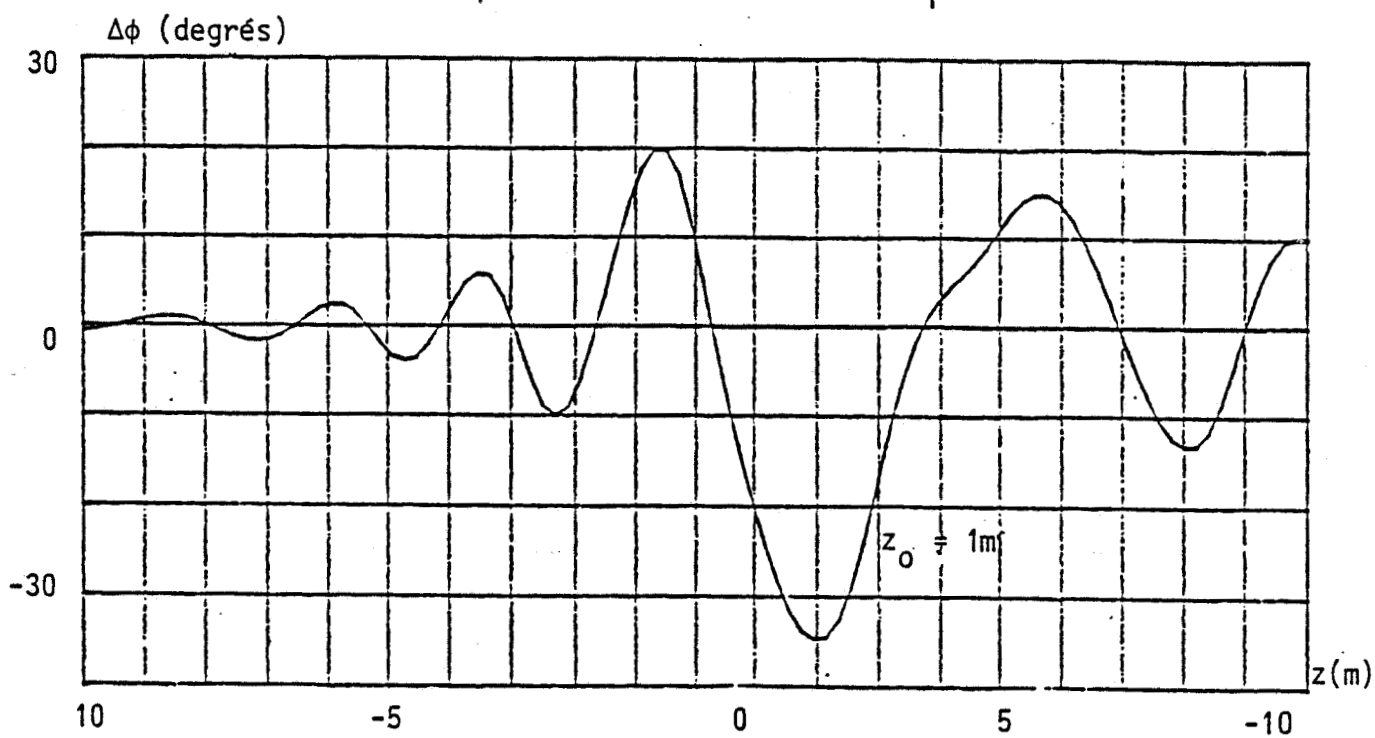
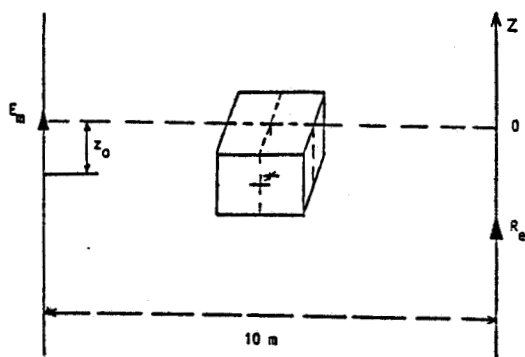


Figure (V-15)

s'explique évidemment par le fait que les lignes de champ électrique sont déformées de façon importante, l'émetteur étant centré. La même conclusion s'applique aux courbes de variation de phase.

V.3.3.3 - Décalage en profondeur

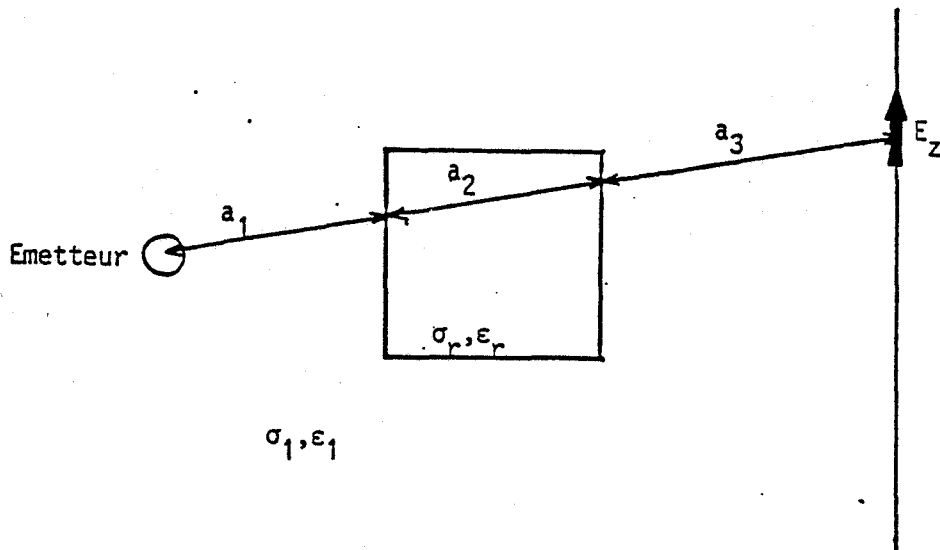
Dans les exemples précédents, l'antenne d'émission a toujours été supposée placée dans le plan médiateur horizontal de l'anomalie ($z_0=0$). Sur les figures (V-14) et (V-15), nous avons envisagé une cavité centrée entre les deux forages mais décalée en profondeur par rapport à l'antenne d'émission ($z_0 = 1$ m, $z_0 = 3$ m). On remarque que les courbes d'amplitudes et de phases ne subissent qu'une déformation dans leurs variations mais que le taux d'anomalie maximum reste pratiquement constant tout au moins tant que la profondeur relative de la cavité par rapport à l'émetteur n'est pas supérieure à 3 m.

Afin d'interpréter ces résultats, envisageons une approche basée sur la théorie des rayons.

V.4 - THEORIE DES RAYONS APPLIQUEE A UNE ANOMALIE CUBIQUE

V.4.1 - Contraste de conductivité

Reprenons l'exemple type d'une anomalie cubique de 1 m^3 située à une distance de deux forages éloignés de 10 m l'un de l'autre. Le sol a une conductivité $\sigma = 10^{-2}$ S/m et une permittivité relative $\epsilon_r = 5$. Supposons tout d'abord que la permittivité de l'hétérogénéité soit la même que celle du sol et que sa conductivité σ_a vaille 10^{-4} S/m, 10^{-3} S/m ou 10^{-1} S/m. La composante verticale du champ E_z reçue est calculée soit par la théorie "exacte" soit par une théorie des rayons supposant des trajets en ligne droite et un affaiblissement exponentiel dont l'exposant est proportionnel aux distances parcourues dans les différents milieux ainsi qu'il est indiqué sur la Figure ci-après.

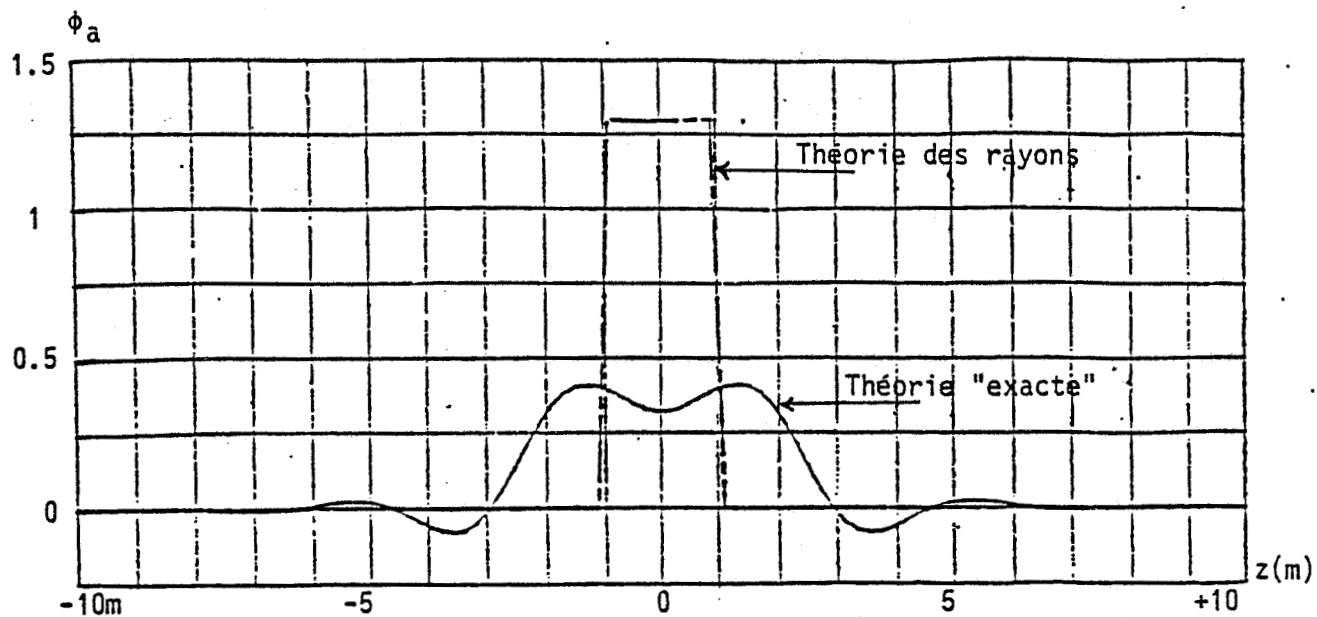


Cette approche est bidimensionnelle, et le champ E_z est donné par :

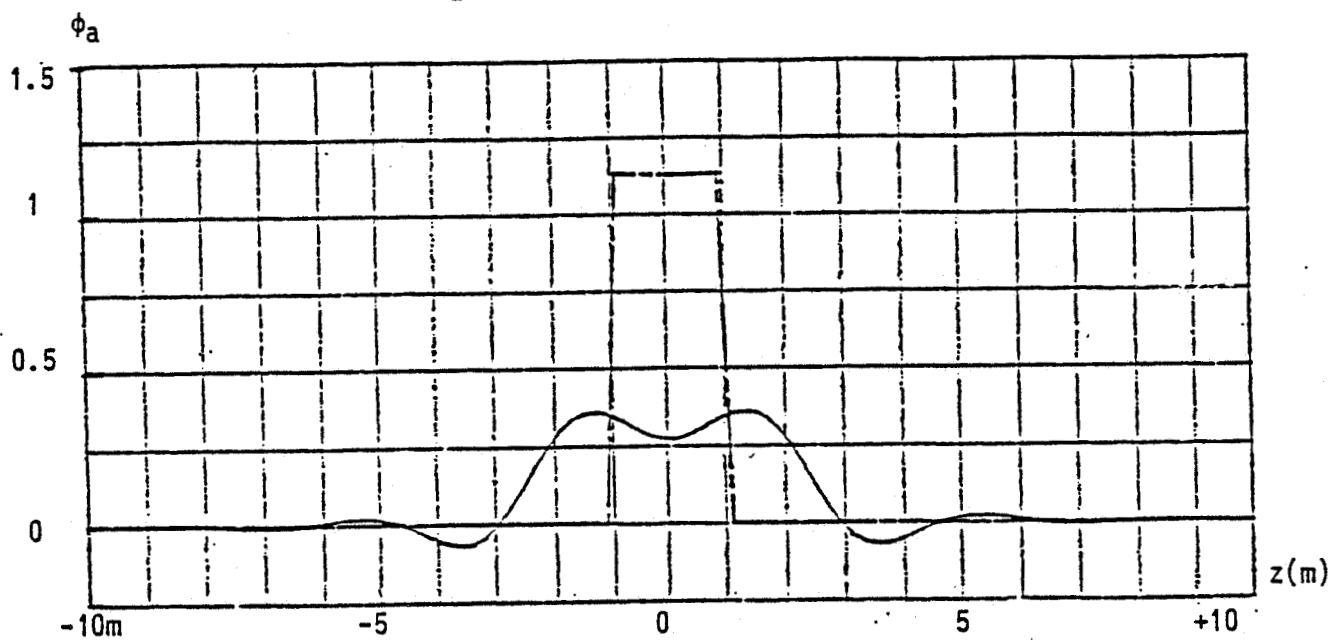
$$E_z = K e^{-\gamma_1 a_1 - \gamma_a a_2 - \gamma_1 a_3}$$

où γ_1 et γ_a sont respectivement les constantes de propagation dans le milieu encaissant et dans l'anomalie. Les courbes représentées étant celles du taux d'anomalie ϕ_a donc faisant intervenir le rapport du champ E_z avec anomalie du champ E_z en milieu homogène, le facteur de proportionnalité K n'intervient pas.

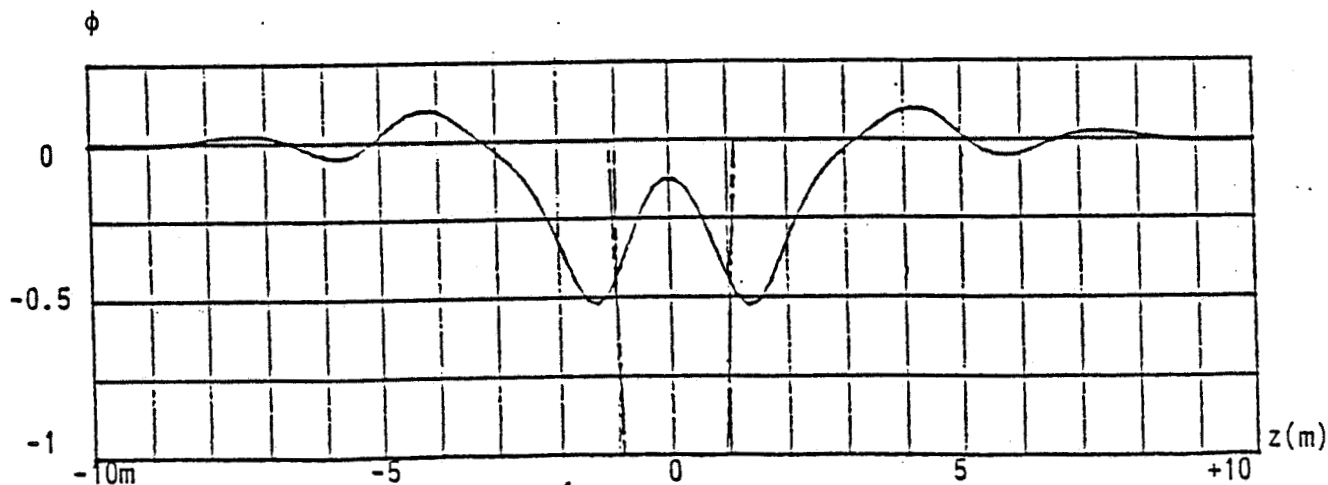
La Figure (V-16) montre une comparaison sur le calcul de ϕ_a déterminé avec les deux approches. Les courbes en trait mixte correspondent à la théorie des rayons, celles en trait plein à la théorie "exacte". On constate des allures tout à fait similaires bien que la théorie des rayons surestime notablement l'influence de l'anomalie. Il ne faut pas oublier que cette théorie est limitée à un modèle à 2 dimensions, ce qui peut expliquer cet écart important. Afin d'affiner cette comparaison, il faudrait agrandir l'anomalie tridimensionnelle suivant une dimension mais on se heurte au problème numérique du découpage déjà évoqué. A l'ombre d'une hétérogénéité isolante la composante E_z en présence de l'anomalie a une amplitude plus importante que celle qui serait obtenue dans un milieu homogène, l'effet contraire ayant lieu si l'hétérogénéité est très conductrice. Il faut noter que si $\sigma_a = 10^{-1}$ S/m, les courants de déplacement sont de l'ordre de grandeur des courants de conduction et un découpage plus fin serait certainement nécessaire pour obtenir la convergence. On peut cependant considérer que la courbe -c- de la Figure (V-16) donne l'allure de $\phi_a(z)$.



-a- $\sigma_a = 10^{-4}$ S/m



-b- $\sigma_a = 10^{-3}$ S/m



-c- $\sigma_a = 10^{-1}$ S/m

Figure (V-16)

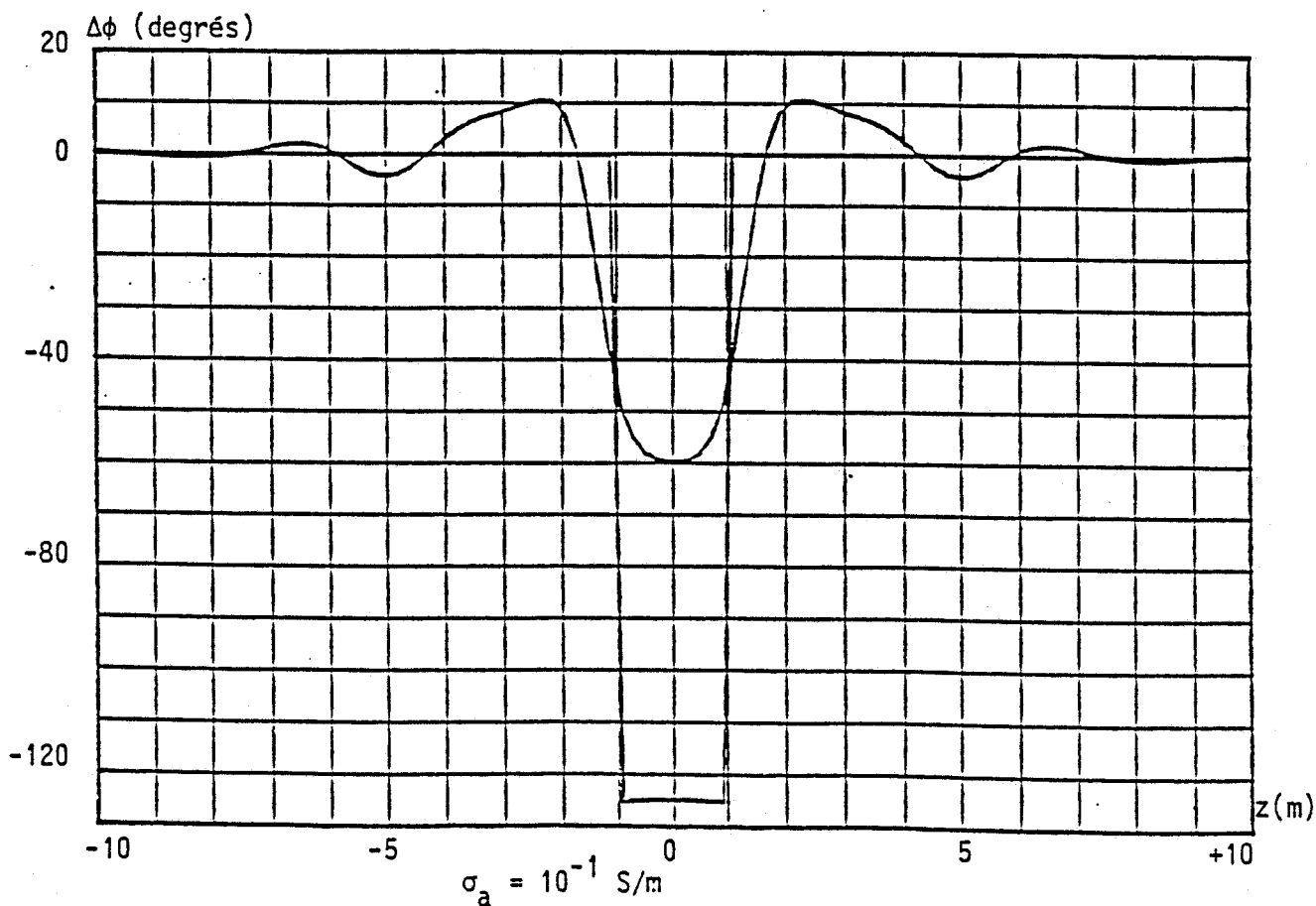
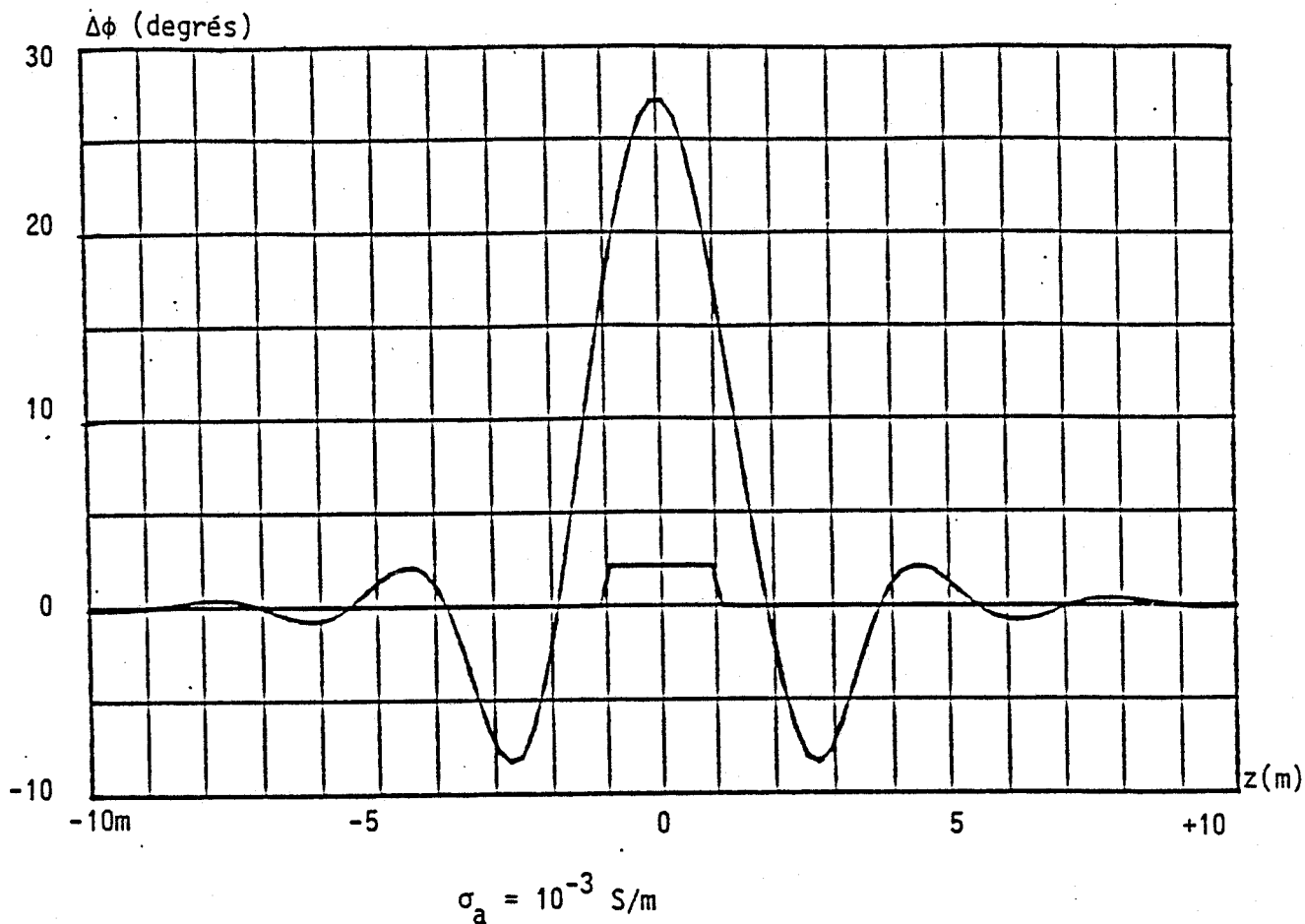


Figure (V-17)

La Figure (V-17) montre le comportement de l'écart de phase $\Delta\phi$ dû à l'hétérogénéité. Ici encore, il y a une corrélation satisfaisante entre les deux approches mais on note cette fois que si l'anomalie a une faible conductivité ($\sigma = 10^{-3}$ S/m) l'écart de phase déduit de la théorie des rayons est nettement plus faible que celui obtenu par la théorie exacte. Un résultat inverse est obtenu par $\sigma = 10^{-1}$ S/m. Ces écarts sont à relier aux effets de réfraction et de diffraction.

V.4.2 - Contraste de permittivité

Les différents milieux ont une conductivité identique de 10^{-2} S/m et seule la permittivité relative de l'anomalie ϵ_{ra} est différente. Les courbes de la Figure (V-18) ont été obtenues pour $\epsilon_{ra} = 1$ et $\epsilon_{ra} = 2.5$. On remarque qu'à l'ombre de l'hétérogénéité le taux d'anomalie est négatif, la composante verticale du champ E_z est donc plus faible qu'en milieu homogène. De plus l'accord entre les deux théories reste satisfaisant. Les écarts de phase $\Delta\phi$ pour la même configuration sont donnés sur la Figure (V-19). Dans le cas où $\epsilon_{ra} = 2.5$, on note une erreur importante entre les deux approches (200°), compte tenu de l'incertitude de 2 km .

V.4.3 - Contraste de permittivité et de conductivité

La cavité de 1 m^3 qui a servi de référence dans la première partie de chapitre présente à la fois un contraste de conductivité et de permittivité par rapport au milieu environnant. La Figure (V-20) montre que dans ce cas les deux approches donnent des résultats opposés. En effet la théorie des rayons telle qu'elle est mise en oeuvre ne fait intervenir que la conductivité du terrain et un vide sur le trajet ne peut entraîner qu'une augmentation du champ. Nous avons vu précédemment que l'utilisation du modèle "exact" fait apparaître une augmentation de E_z en l'absence de contraste de ϵ_r mais une diminution de cette quantité E_z si les conductivités sont identiques et les ϵ_r différents. Le résultat global est, comme on le voit sur la Figure (V-20), une

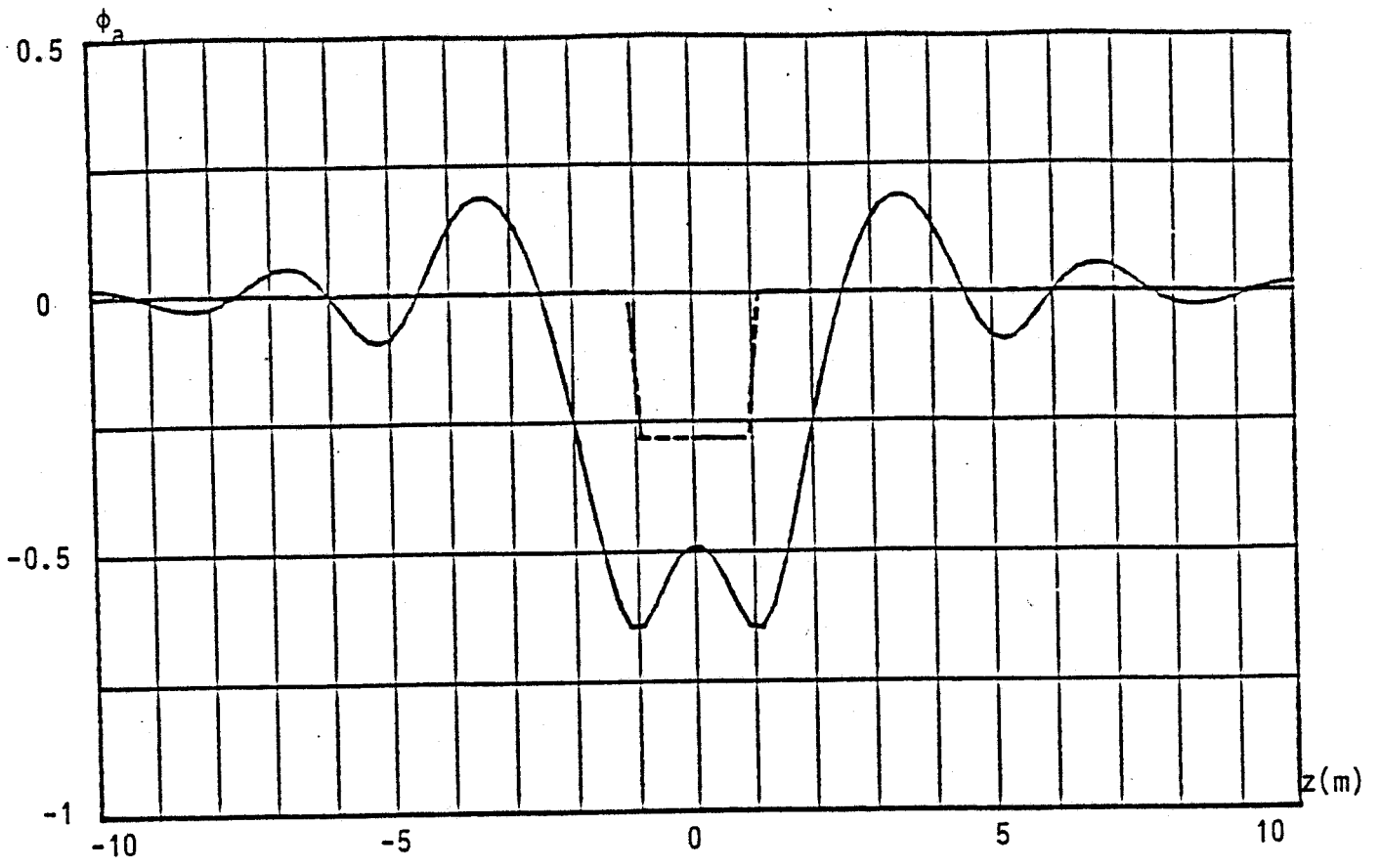
diminution de E_z . On se rend ainsi compte de la limitation de la théorie des rayons, de la théorie succincte tout au moins exposée précédemment, et qui exclut tout phénomène de diffraction par le volume. Pour cela reprenons la définition de l'affaiblissement engendré sur le trajet. Dans le domaine des hautes fréquences, l'atténuation sur une longueur l est proportionnelle à $\exp(-l/L_c)$ où L_c est la longueur caractéristique du milieu donnée par :

$$L_c = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

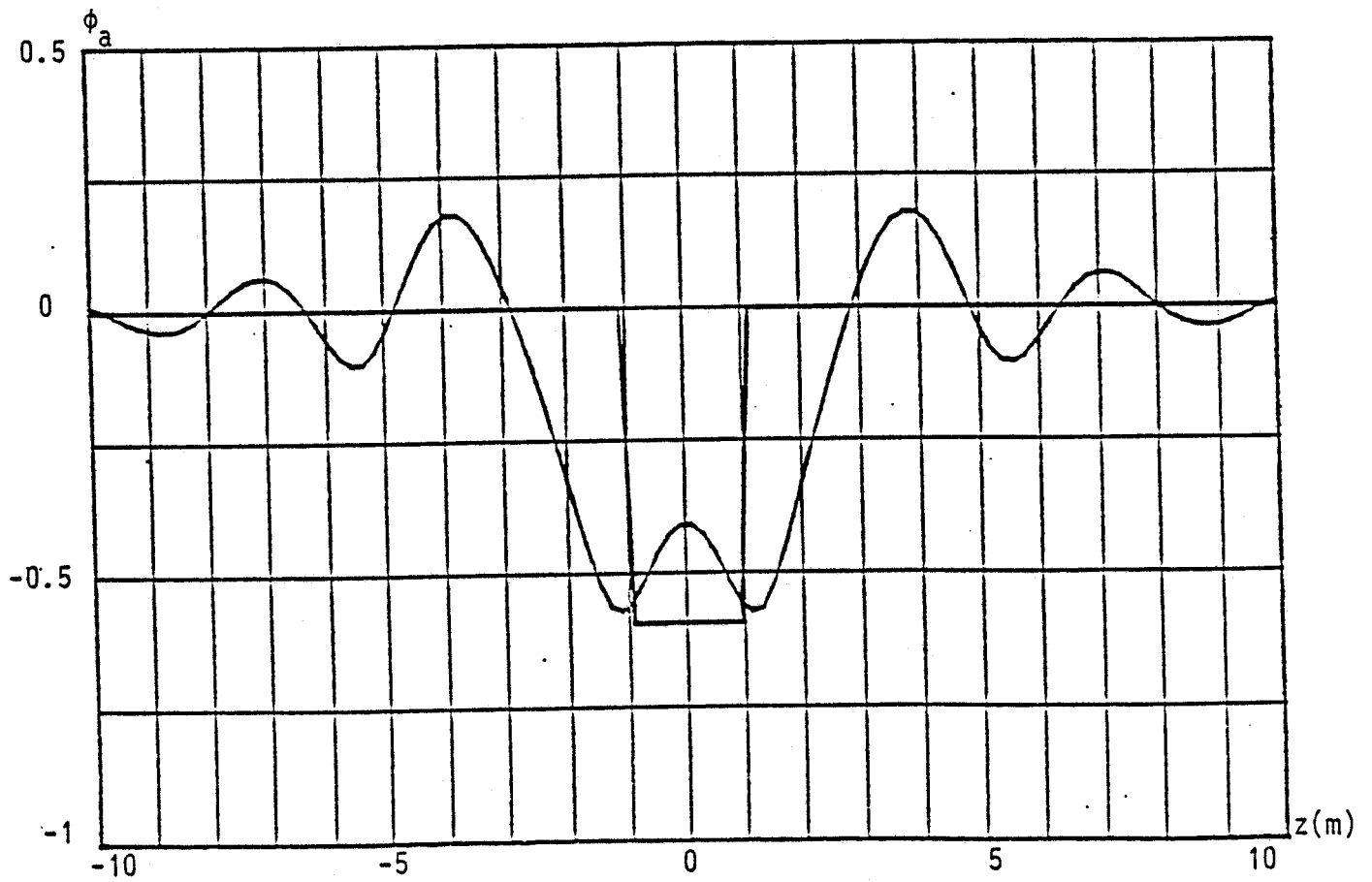
Supposons comme dans les exemples précédents que le milieu encaissant ait une conductivité $\sigma = 10^{-2}$ S/m et une permittivité relative $\epsilon_r = 5$. Les rayons allant en ligne droite, imaginons que sur une partie du trajet les caractéristiques électriques du milieu soient changées tout en maintenant L_c constant. Les valeurs particulières seraient ainsi $\epsilon_{r2} = 1$ et $\sigma_2 = 4.47 \cdot 10^{-3}$ S/m. Ce contraste en permittivité et en conductivité ne provoquera pas de taux d'anomalie sur le trajet puisque le facteur d'atténuation est le même dans les deux milieux.

Les courbes de la Figure (V-21) montrent que les effets de diffraction calculés par la théorie exacte ne sont pas négligeables bien que la relation entre σ et ϵ soit respectée pour l'hétérogénéité de 1 m³. Contrairement au taux d'anomalie sur l'amplitude, la variation de phase est prévue par la théorie des rayons puisqu'il existe un contraste de permittivité qui est la principale cause, en haute fréquence, du déphasage (l'effet de la conductivité est négligeable si $\omega \epsilon \gg \sigma$).

En ce qui concerne le taux d'anomalie, on voit donc la difficulté inhérente à l'utilisation de la théorie simplifiée des rayons lorsqu'à la fois σ et ϵ sont des fonctions de points. Suivant les valeurs associées à chaque terme de ce couple on pourra avoir une longueur caractéristique dans l'hétérogénéité inférieure, égale ou supérieure à celle du milieu encaissant et changer ainsi la réponse de l'anomalie. Les effets dus à la réfraction et à la diffraction ne suivent cependant pas les mêmes lois et on pourra obtenir des réponses opposées suivant



$\epsilon_{ra} = 2.5$



$\epsilon_{ra} = 1$

Figure (V-18)

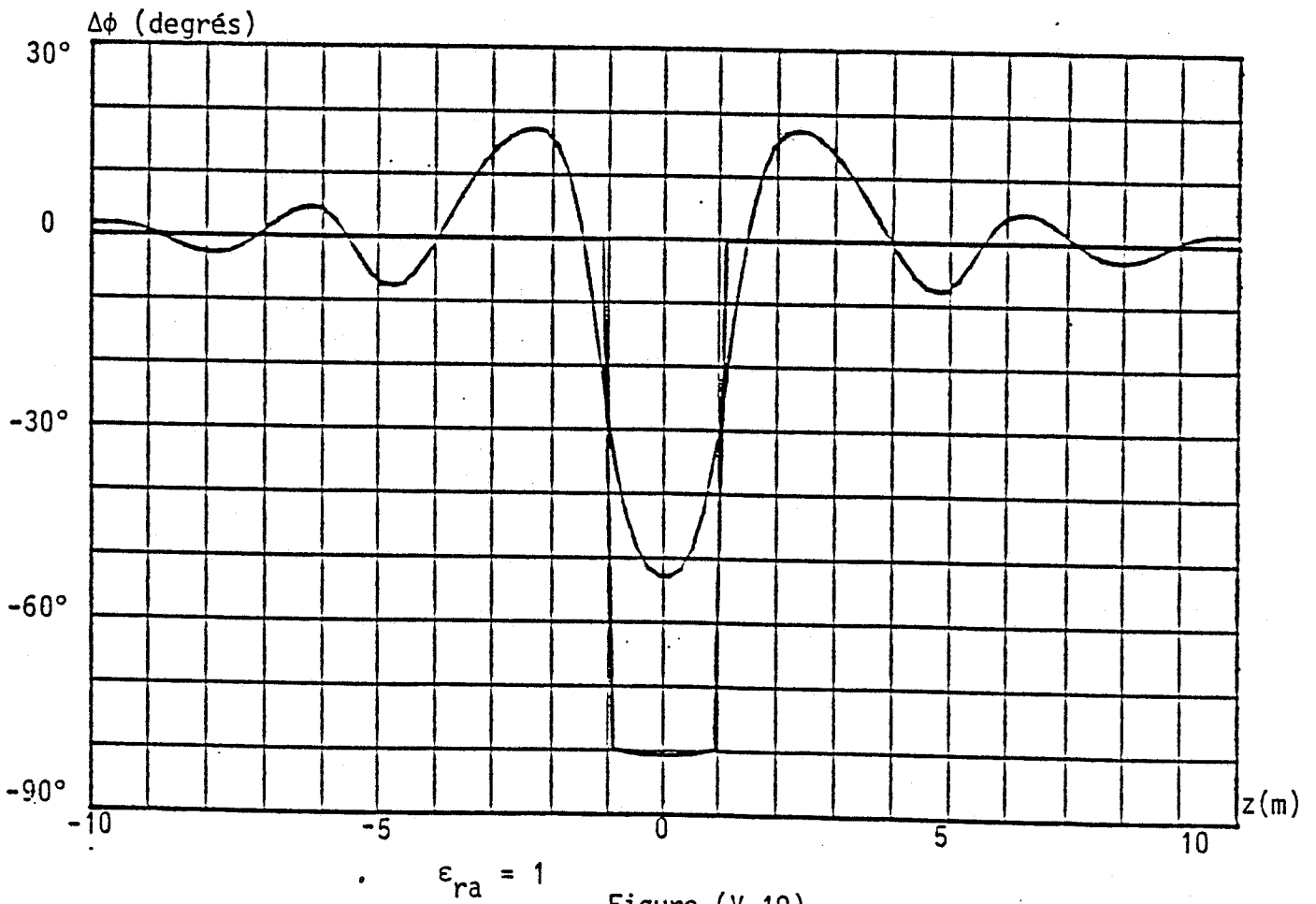
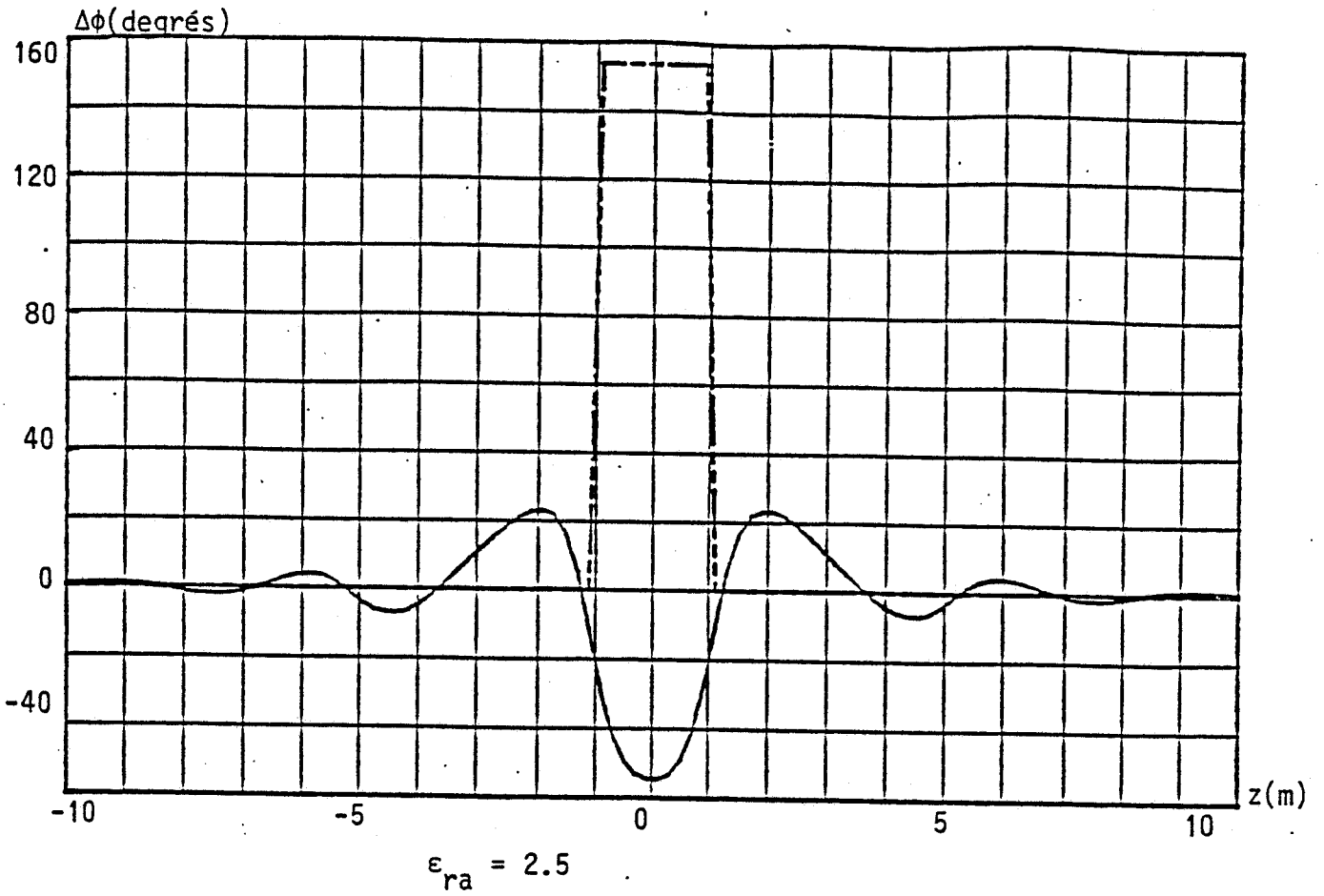


Figure (V-19)

Réponse d'une cavité

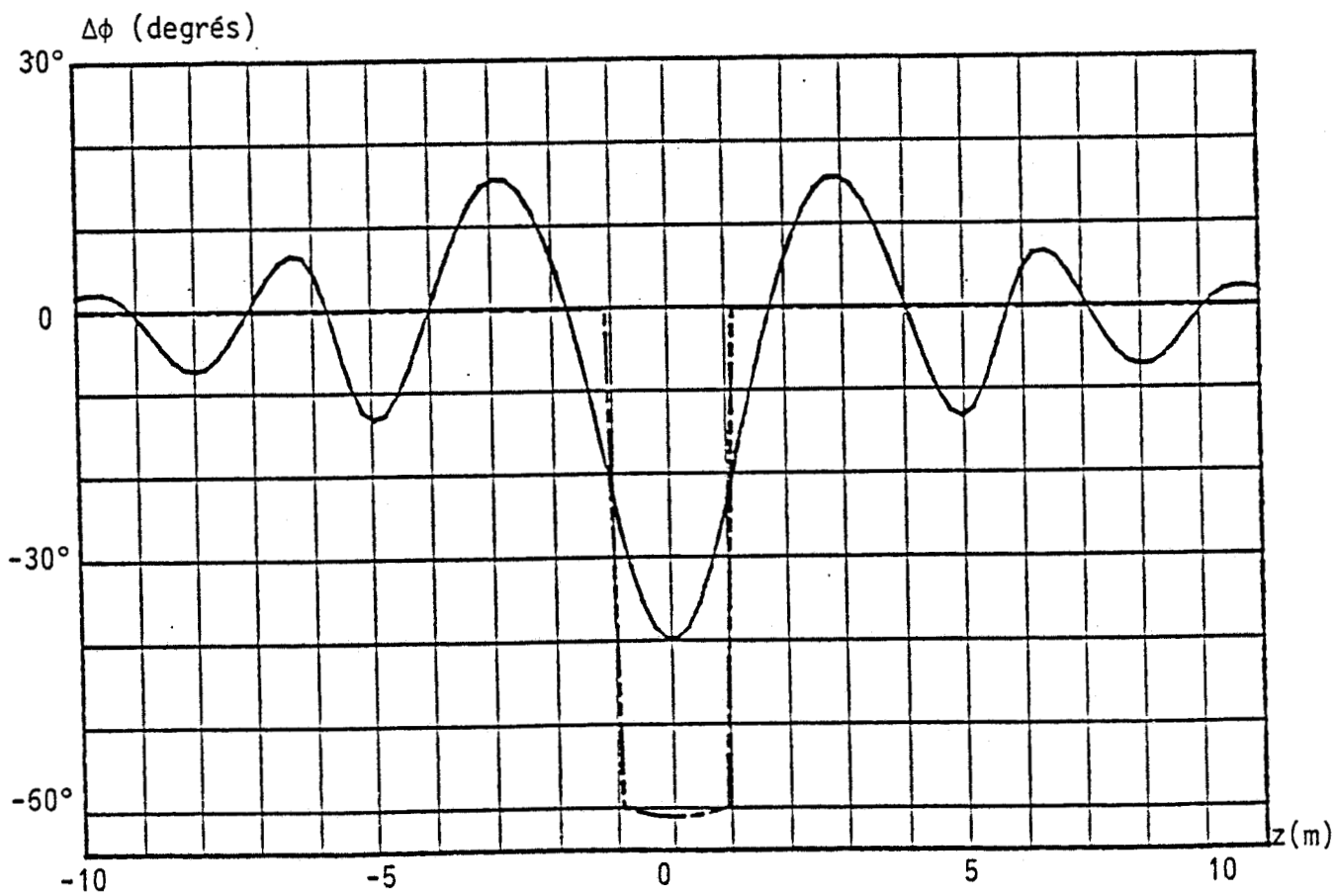
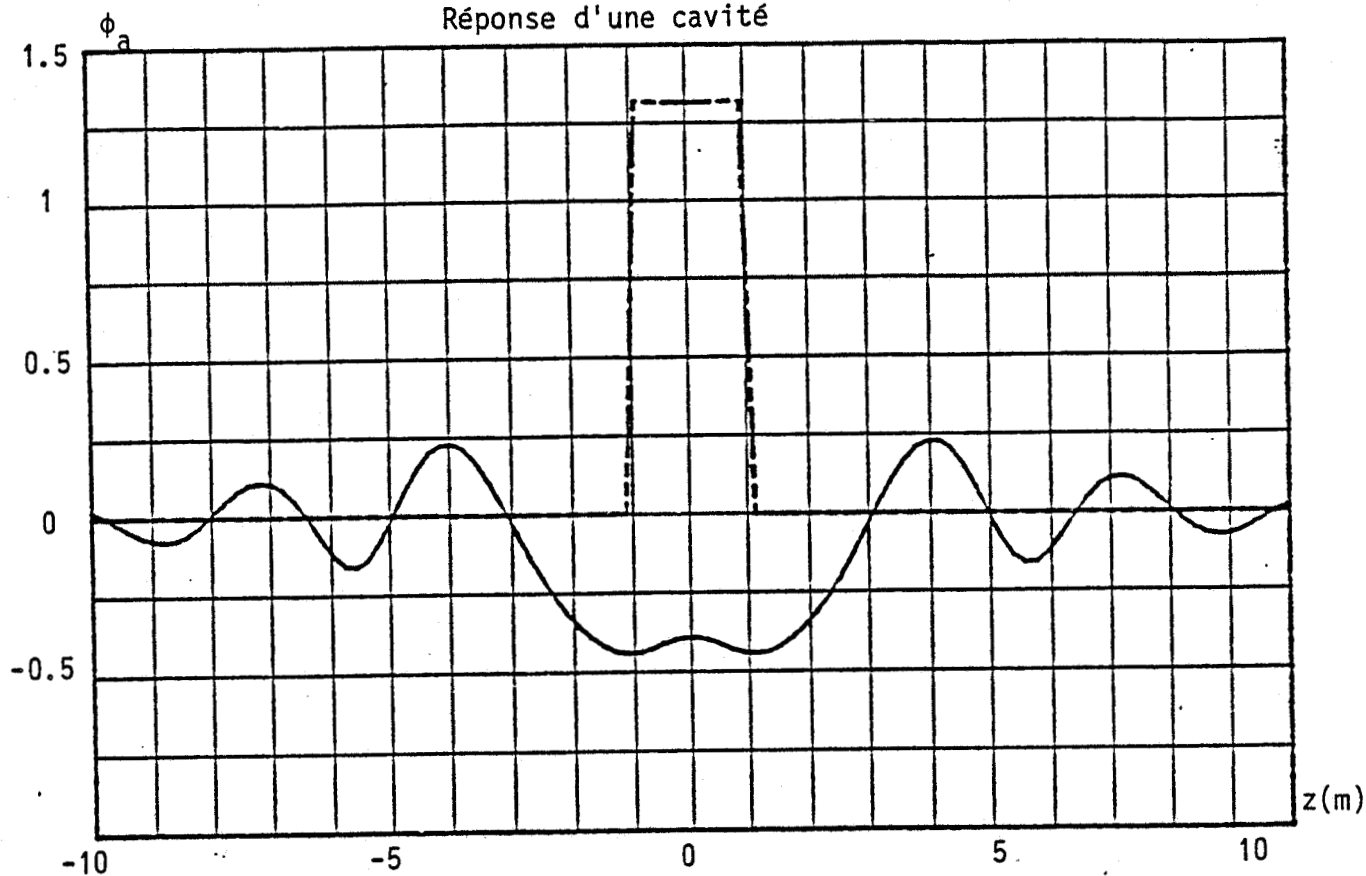
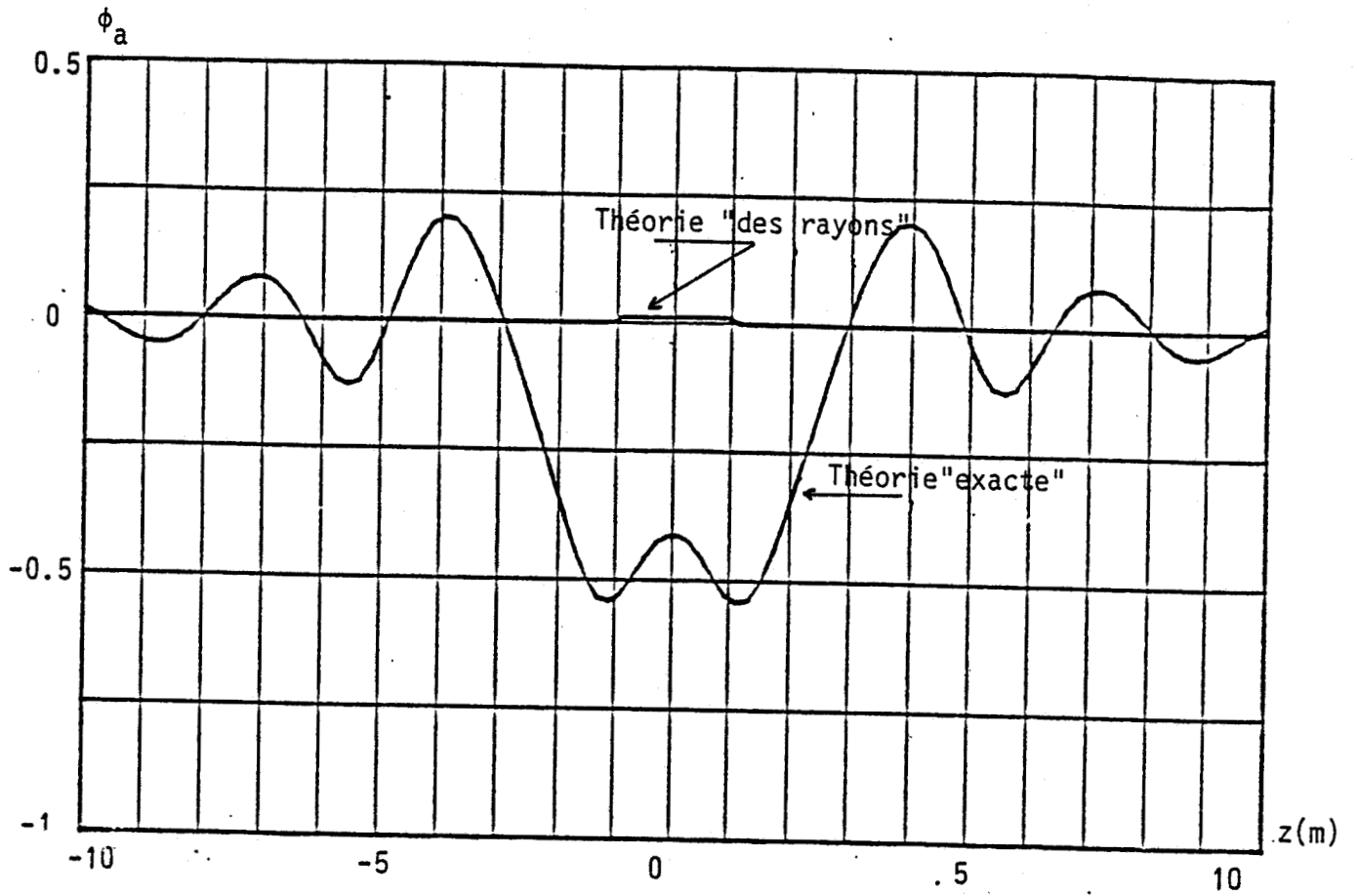


Figure (V-20)



$\epsilon_{ra} = 1$ $\sigma_a = 4.47 \cdot 10^{-3} \text{ S/m}$

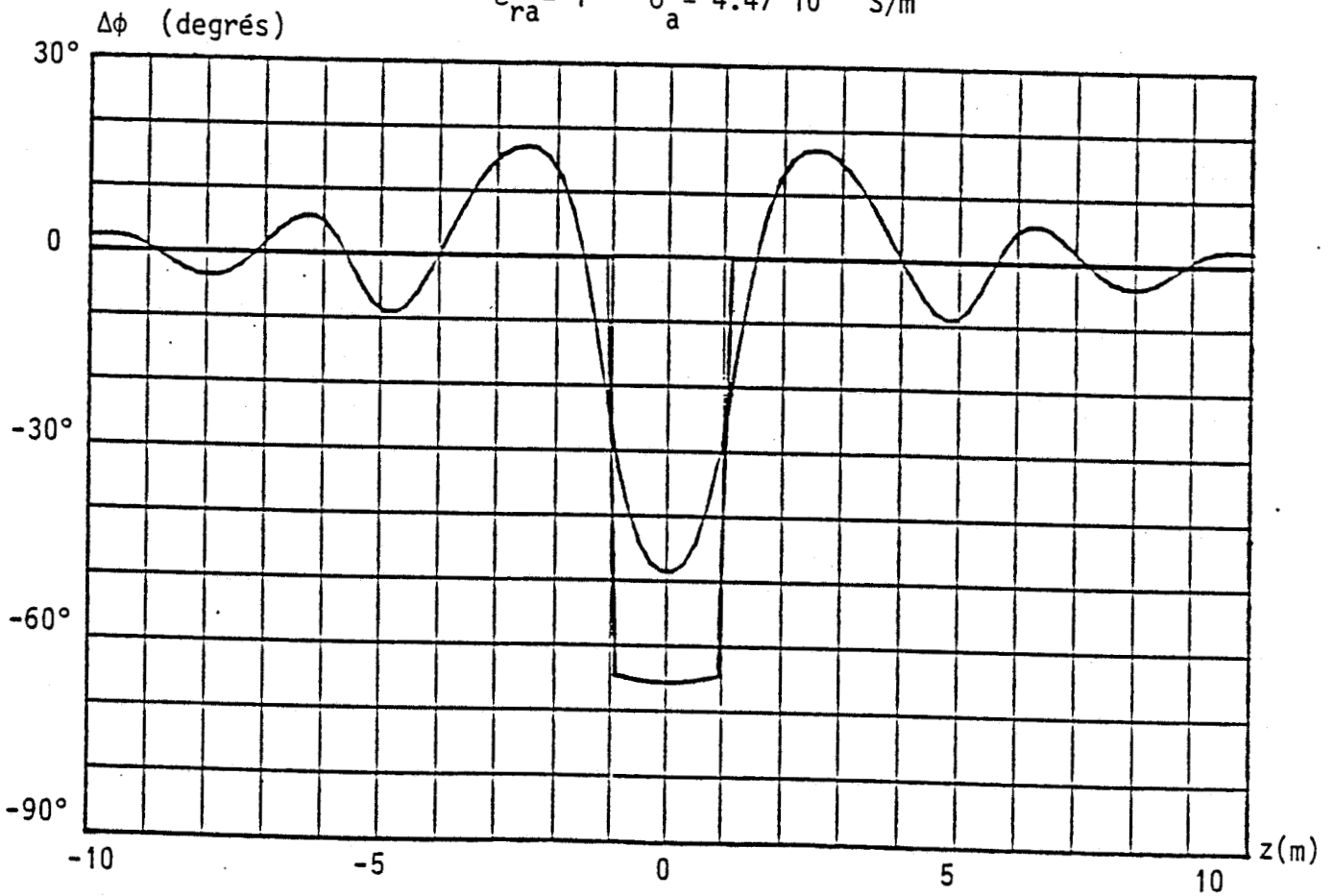


Figure (V-21)

les approches suivies. La théorie élémentaire des rayons telle qu'elle a été pratiquée ne peut donc être utilisée que si un seul des deux paramètres σ , ϵ varient d'un point à un autre.

Il est difficile d'interpréter physiquement les résultats d'une façon exacte et simple car l'anomalie étant de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, elle n'est ni surdimensionnée (côté $a \gg \lambda$) ni de dimensions très faibles permettant d'obtenir des expressions analytiques. Dans le paragraphe suivant on va donc envisager le cas basse fréquence qui permet un raisonnement basé sur la circulation des courants dans le sol.

V.5 - REPONSE BASSE FREQUENCE D'UNE ANOMALIE

Considérons une anomalie cubique de 4 m de côté, une anomalie de 1 m³ comme celle présentée précédemment n'engendrerait que des variations négligeables du champ électromagnétique. La distance entre forages est de 9 m, le milieu encaissant étant caractérisé par $\sigma = 10^{-2}$ S/m et $\epsilon_r = 5$.

Les courbes de la Figure (V-22) ont été obtenues pour une conductivité de l'hétérogénéité $\sigma_a = 10^{-4}$ S/m, la permittivité ne jouant évidemment aucun rôle en basse fréquence (100 Hz dans cet exemple). On remarque tout d'abord que la composante verticale E_z du champ en présence de l'anomalie est, lorsque le récepteur est à l'ombre de celle-ci, inférieure à la composante verticale que l'on obtiendrait en milieu homogène et qui est notée E_z^h . Ceci est également vrai pour le champ total puisque la variation de l'amplitude de E_{ht} en fonction de la profondeur de la sonde de réception montre qu'elle reste supérieure à celle de E^t qui est le champ total en présence de l'anomalie.

Sur ce profil vertical à 9 m du forage contenant l'émetteur nous avons également indiqué au bas de la Figure (V-22) les directions du champ électrique dans ce plan suivant que l'anomalie est présente ou non. La position de l'émetteur n'est pas figurée mais serait située en haut de

la figure. On constate que sur ce profil le champ électrique est plus proche de la verticale lorsque l'hétérogénéité est présente. La diminution de E_z n'est donc pas due, bien au contraire, à un changement d'orientation des lignes de champ, mais à une valeur plus faible du champ total.

Les courbes de la Figure (V-23) correspondent à une configuration géométrique identique à la précédente mais pour une hétérogénéité conductrice ($\sigma_a = 0.1 \text{ S/m}$). Celle-ci a tendance à augmenter notablement la composante verticale aussi bien que le champ total. On remarque sur la direction de E que celle-ci aurait tendance à diminuer la composante verticale mais c'est l'augmentation importante de l'amplitude du champ total qui impose l'augmentation de E_z .

Les Figures (V-24) et (V-25) montrent les directions des vecteurs densités de courant (ou champ électrique) en tout point du sol. Compte tenu de la grande dynamique entre les amplitudes relatives aux différents points, la longueur des vecteurs tracés sur ces figures est proportionnelle au logarithme de l'amplitude du champ réel. On visualise ainsi les déformations des lignes de courant provoquées par la présence d'une hétérogénéité.

Cependant, nous avons détaillé sur les Figures (V-26) et (V-27) le comportement des champs électriques pour des distances au forage d'émission comprises entre 5 m et 9 m. Dans ce cas les échelles sont linéaires et permettent d'avoir un aperçu à la fois des variations d'amplitude et d'orientation des courants circulant dans le sol.

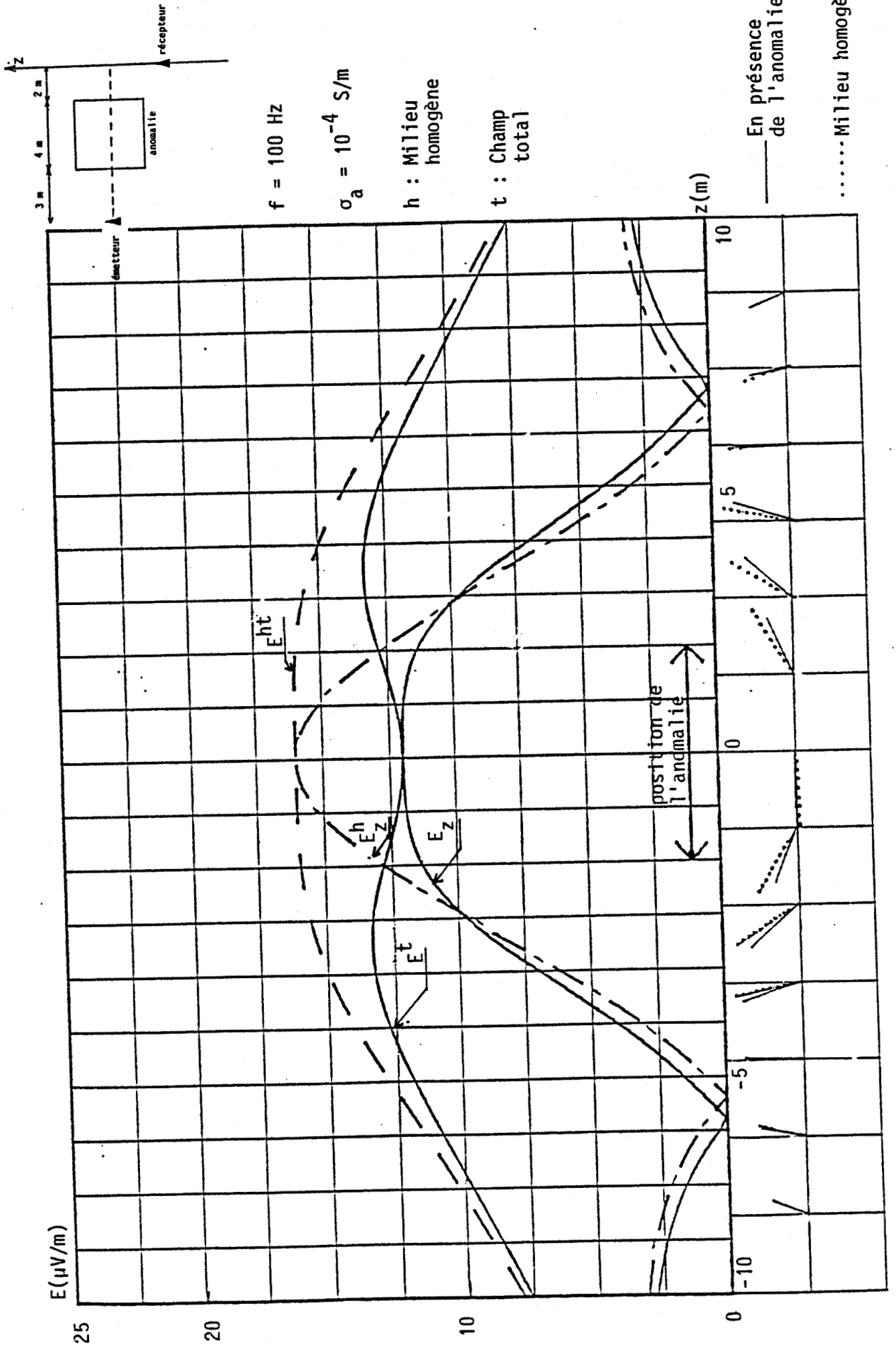
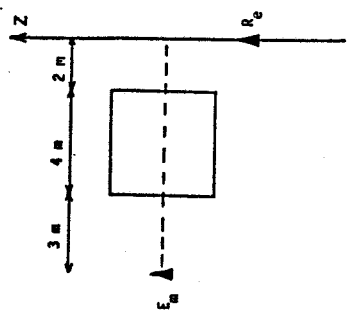


Figure (V-22)



$f = 100 \text{ Hz}$

$\sigma_a = 10^{-1} \text{ S/m}$

h : Milieu homogène

t : Champ total

— En présence de l'anomalie

..... Milieu homogène

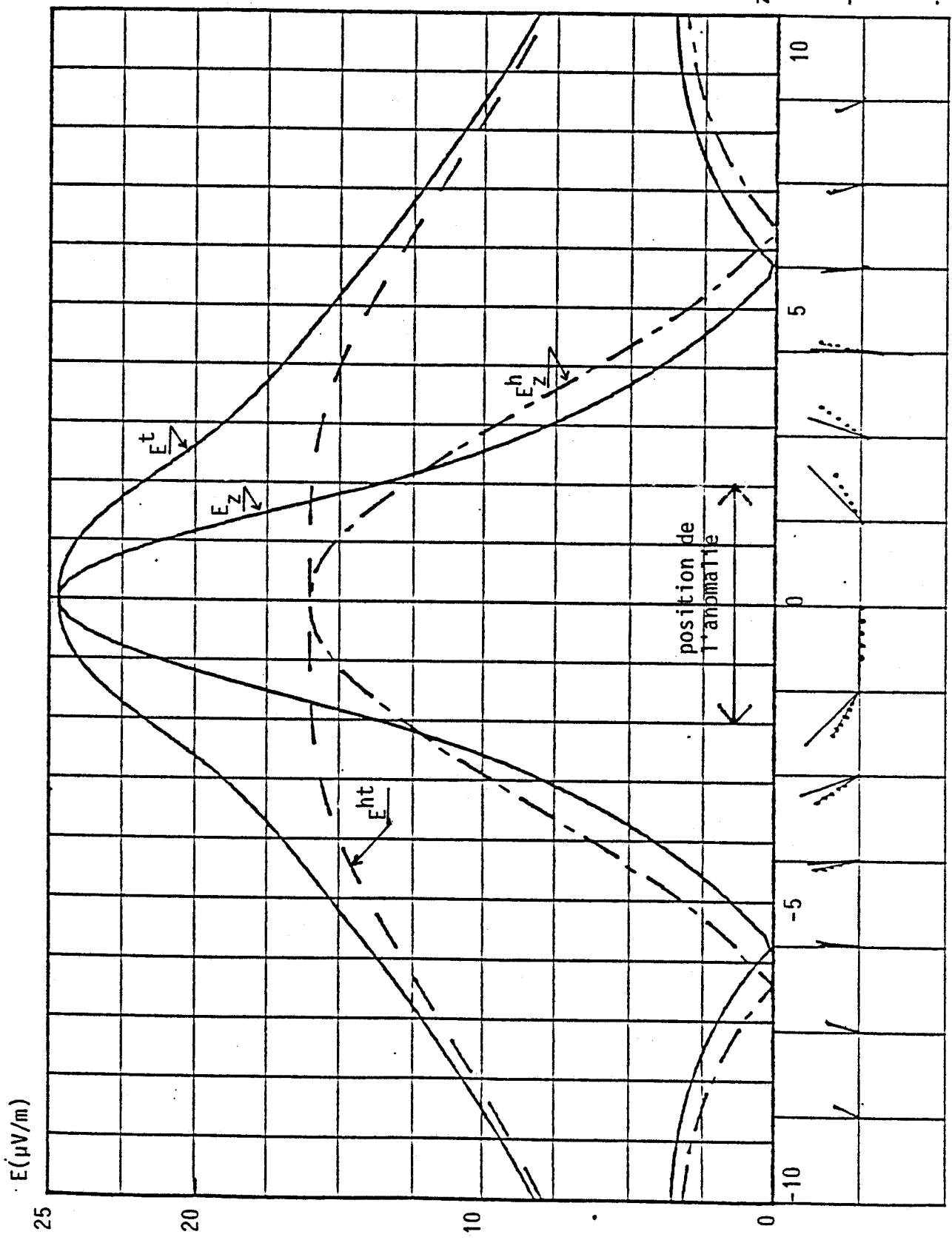


Figure (V-23)

$\sigma_a = 10^{-4} \text{ S/m}$

— Milieu homogène
..... En présence de l'anomalie

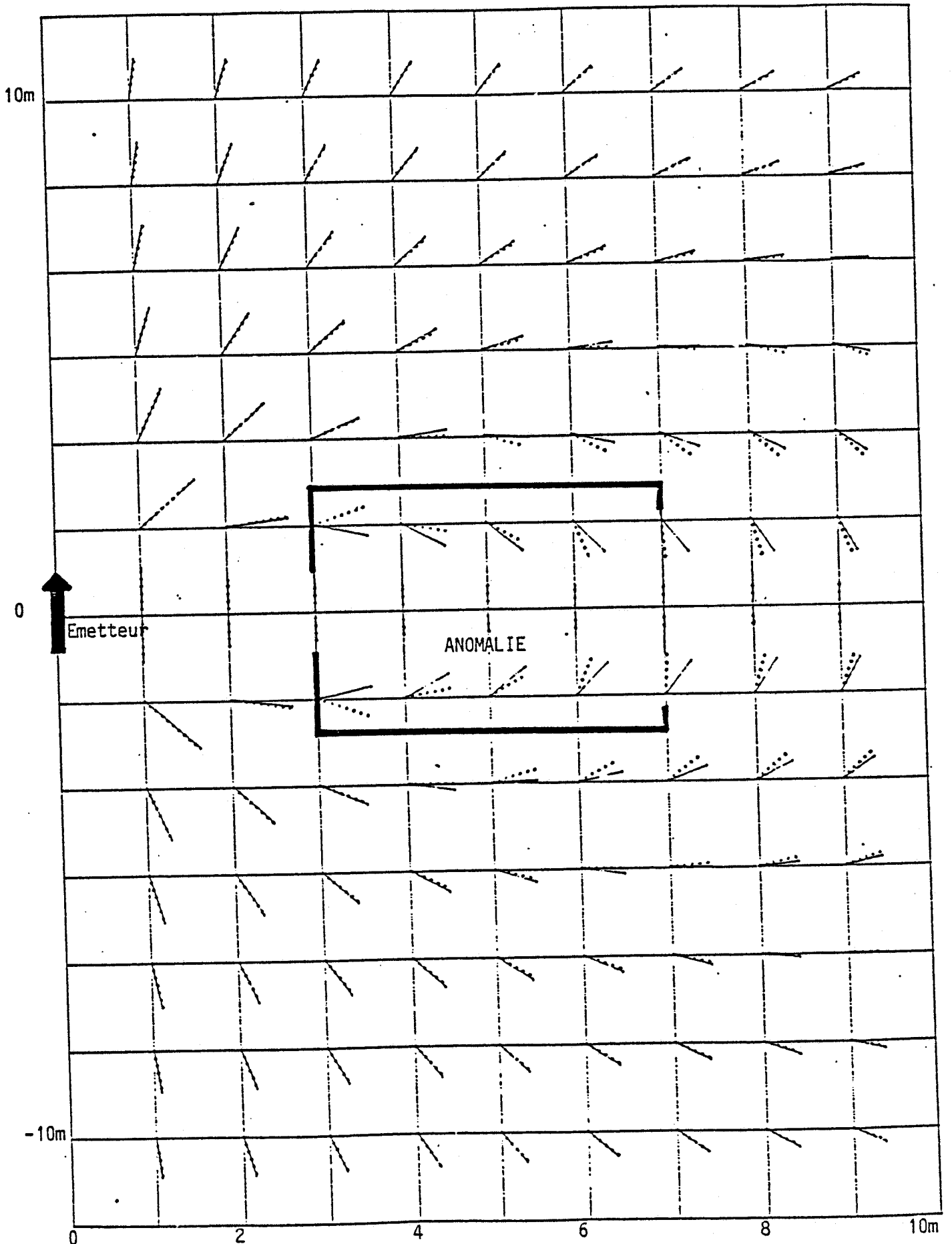


Figure (V-24)

$\sigma_a = 10^{-1} \text{ S/m}$

— Milieu homogène
..... En présence de l'anomalie

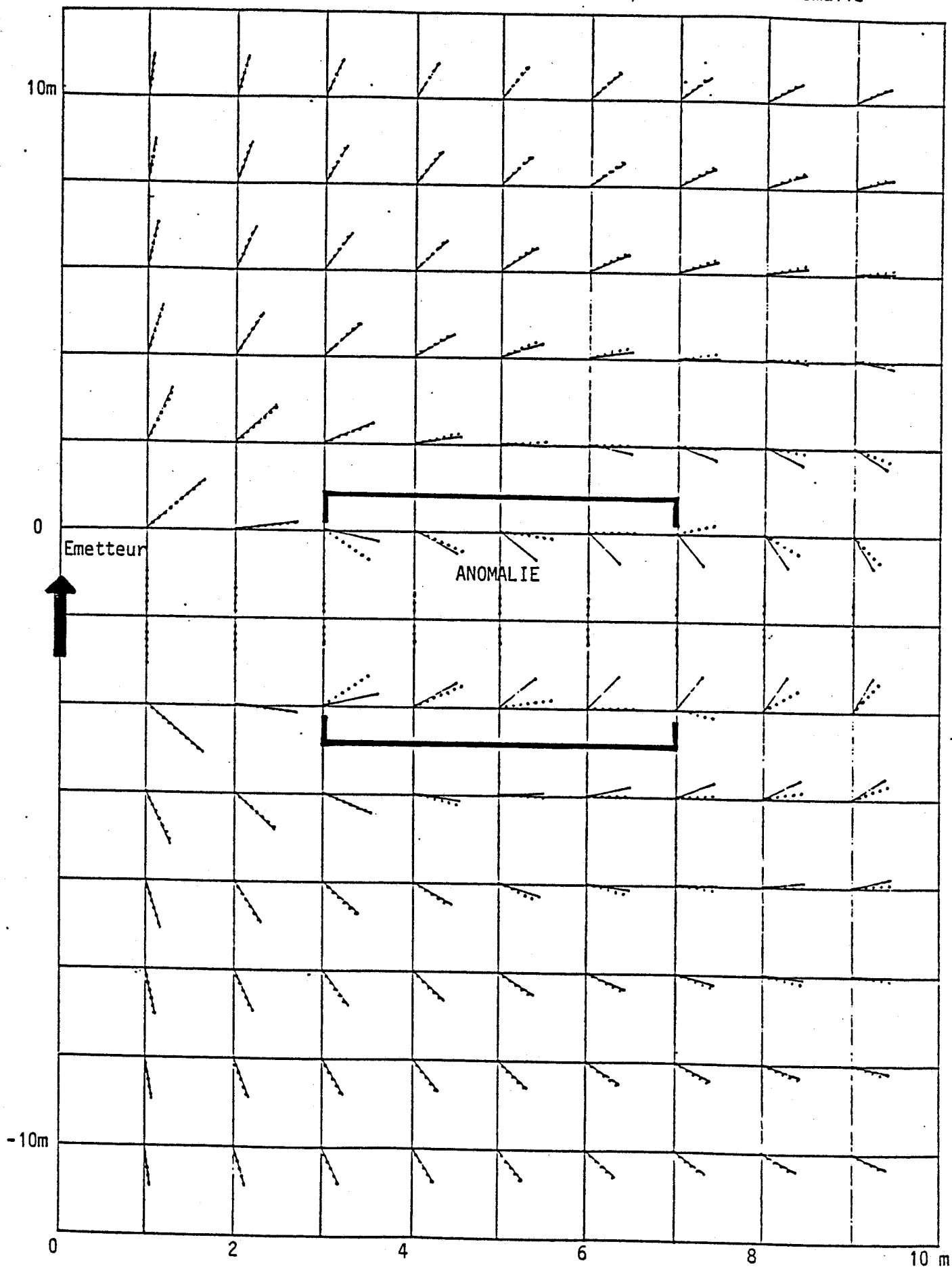


Figure (V-25)

$$\sigma_a = 10^{-4} \text{ S/m}$$

— Milieu homogène

..... En présence de l'anomalie

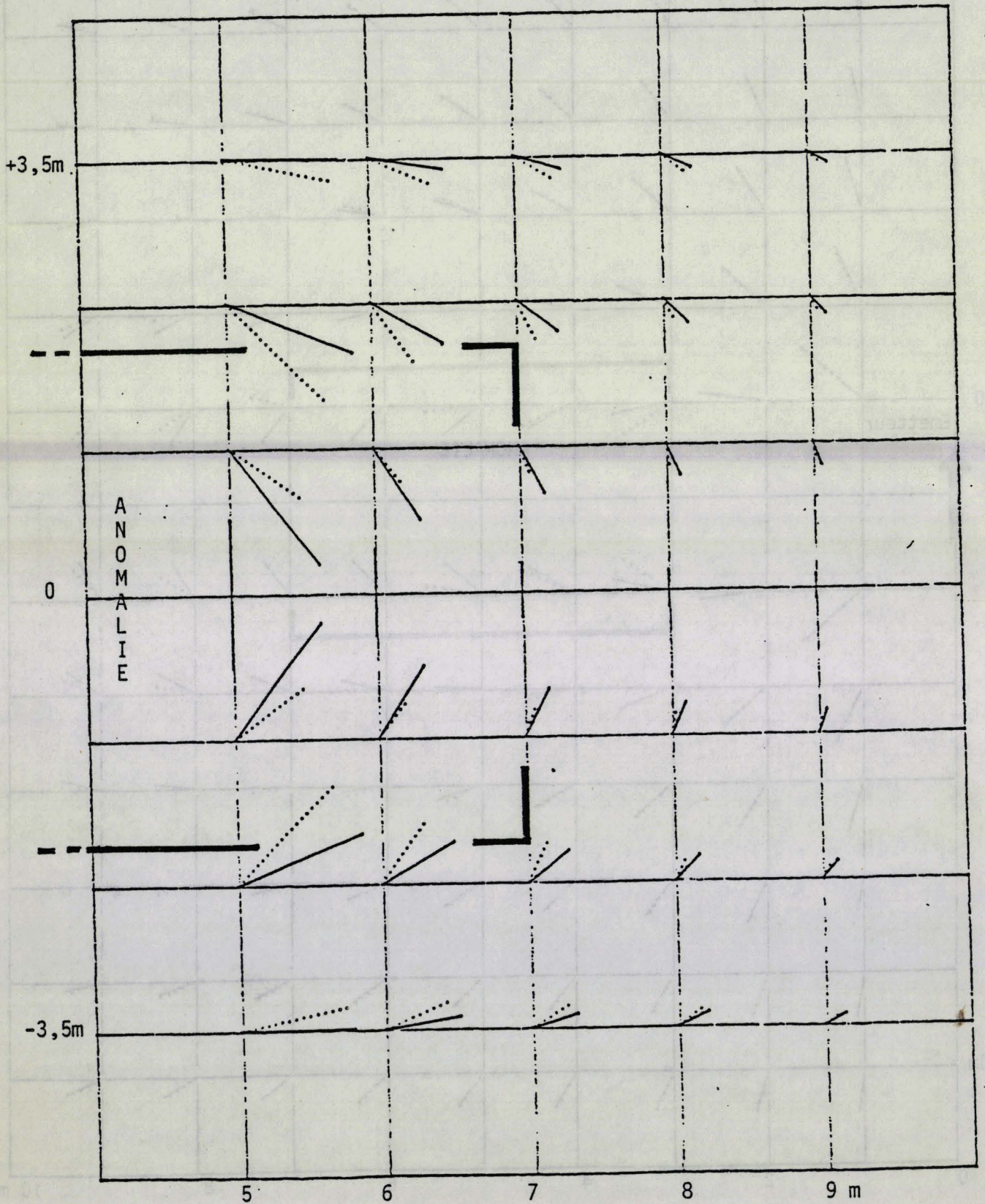


Figure (V-26)

$$\sigma_a = 10^{-1} \text{ S/m}$$

— Milieu homogène

..... En présence de l'anomalie

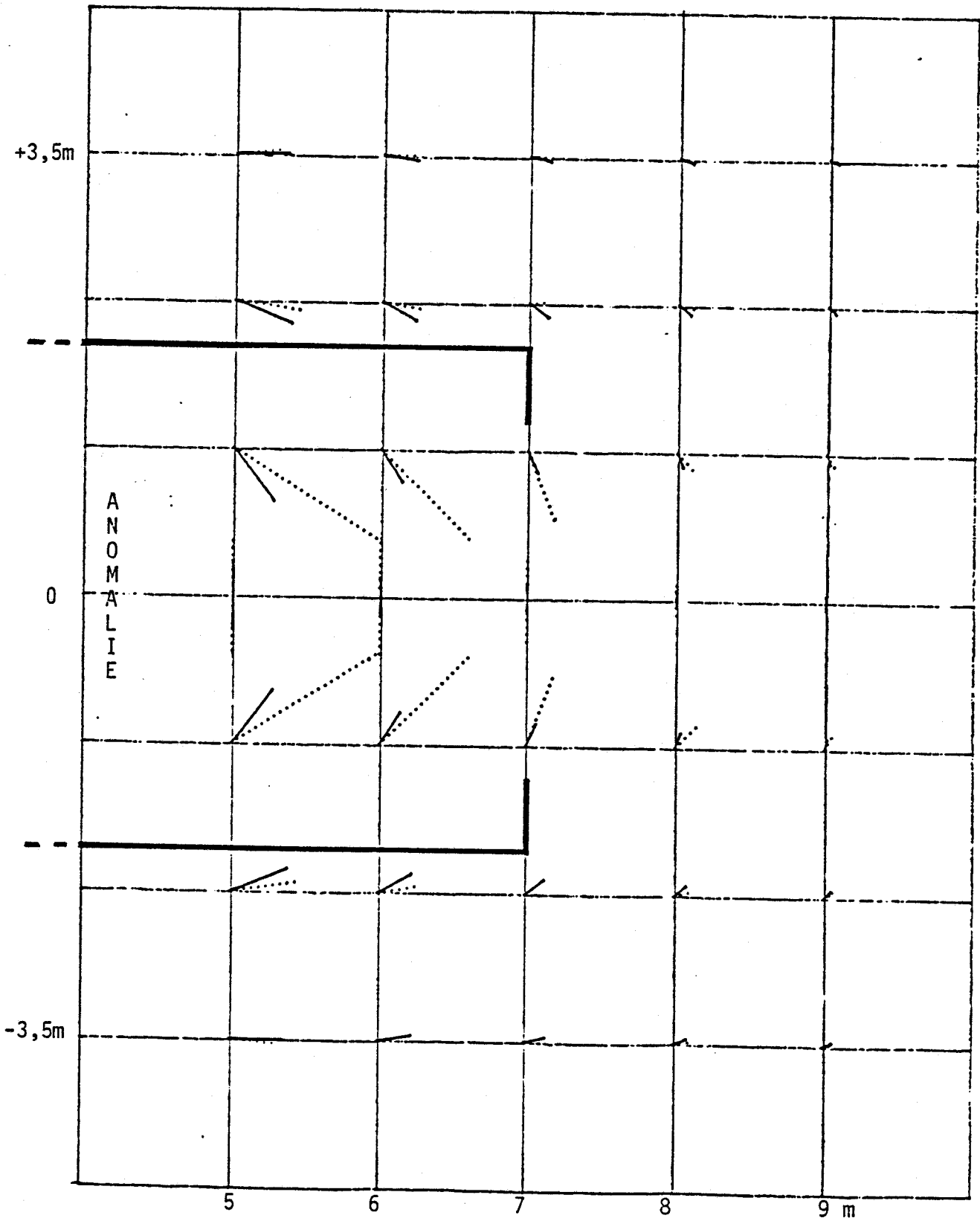


Figure (V-27)

CONCLUSION

La modélisation d'une anomalie par une distribution de dipôles électriques équivalents est une approche permettant l'évaluation des variations du champ électrique. Mais le découpage de l'anomalie en éléments de volume nécessite la manipulation de matrices d'ordres importants, ce qui augmente les temps de calculs et présente donc une limitation pour les grands volumes.

Les résultats montrent que le rapport entre le champ reçu en la présence de l'anomalie et en son absence est de 50 % tant que les dimensions de l'anomalie sont du même ordre que la longueur d'onde, et que le contraste entre anomalie et milieu encaissant reste important.

Une comparaison entre les résultats du modèle et ceux d'une théorie simplifiée des rayons a été effectuée. Cette théorie est basée sur la propagation en ligne droite et néglige donc tous les effets de diffraction et de réfraction. Le sens de variation, positif ou négatif, du taux d'anomalie ne peut être prévu d'une façon certaine que s'il n'existe soit qu'un contraste de conductivité, soit qu'un contraste de permittivité entre l'hétérogénéité et le milieu encaissant. De plus il résulte généralement de l'hypothèse de la propagation en ligne droite une augmentation sensible du taux d'anomalie prévu.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] R. GABILLARD, P. DEGAUQUE, J.R. WAIT
"Subsurface Electromagnetic telecommunication".
IEEE - Décembre 1972.
- [2] A. BANOS
"Dipole radiation in the presence of a conducting half-space.
- [3] R.J. LYTLE, D.L. LAGER
"Numerical evaluation of Sommerfeld integrals".
Lawrence Livermore Laboratory, University of California, UCLR -
51688, 1974.
- [4] Y. RAHMAT-SAMII, P. PARHAMI, R. MITTRA
"An efficient approach for evaluating Sommerfeld integrals
encountered in the problem of a current element radiating over
lossy ground".
IEEE Transaction on antennas and propagation, Vol. 28, n° 1, 1980.
- [5] J.L. FAURE
"Intégrales de Sommerfeld".
Rapport interne EDF, 1977.
- [6] F. PALADIAN
"Diffraction d'une onde électromagnétique par des conducteurs
filaires en présence d'un sol imparfaitement conducteur.
Application à une ligne de télécommunication".
Thèse, Université de Clermont II, 1985.
- [7] A. ZEDDAM
"Etude théorique et expérimentale du rayonnement d'une impulsion
de courant se propageant sur un fil parallèle à la surface du sol.
Application à l'exploration des terrains de subsurface".
Thèse, Université de Lille 1, 1980.

- [8] P. DEGAUQUE, M. KASSI-LAHLOU, B. DEMOULIN
"Diagraphie Haute Fréquence entre forages".
1^{er} Rapport d'avancement du contrat LCPC/USTL -
Université de Lille 1, Avril 1985.
- [9] R.F. HARRINGTON
"Matrix methods for field problems"
Proceedings of the IEEE, Vol. 55, n° 2, Fev. 1967.
- [10] R.F. HARRINGTON
"Field computation by moment Methods".
Editeur Mac Millan - New York, 1963.
- [11] C.M. BUTLER, D.R. WILTON
"Analysis of various numerical techniques applied to thin-wire
scatterers".
IEEE Transactions on antenna and propagation, Juil. 1975.
- [12] D.R. WILTON, C.M. BUTLER
"Efficient numerical Techniques for solving Pocklington Equations
and their relationships to other methods".
IEEE Transactions on antenna and propagation, Janv. 1976.
- [13] D. ROUBERTOU
"Application de la méthode des moments au calcul de l'impédance
d'entrée d'une antenne cylindrique dans un demi-milieu
conducteur".
DEA, Université de Clermont-II, 1982.
- [14] F. MOLINET
"Compatibilité Electromagnétique".
Chap. 9, couplage d'une onde plane à des antennes filaires -
Collection Scientifique et Technique des Annales des Télé-
communications (à paraître).
- [15] R.W.P. KING
"The linear Antenna - Eighty years of progress".
Proceeding of the IEEE, Vol. 55, n° 1, Janv. 1967.

- [16] W.A. IMBRIALE, P.G. INGERSON
"On numerical Convergence of Moment Solutions of Moderately Thick
wire Antennas Using Sinusoidal Basis Functions".
IEEE Transactions and antennas and propagation, Mai 1973.
- [17] J.H. RICHMOND
"Digital Computer of the rigorous Equations for scattering
problems".
Proceeding of IEEE, Vol. 53, 1965.
- [18] E. ROUBINE, J. CH. BOLOMEY
"Antennes".
Masson, Paris, 1986.
- [19] S.A. SCHELKUNOFF, H.T. FRIIS
"Antennas theory and practice".
Wiley, 1952.
- [20] D.R. WILTON, C.M. BUTLER
"Effective Methods for Solving integral and integro-differential
equations".
Electromagnetics, Vol. 1, n° 3, Jul.-Sept. 1981.
- [21] R. MITTRA, W.L. KO
"A finite difference approach to the wire junction problem".
IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Mai 1975.
- [22] J.R. WAIT
"Electromagnetic probing in Geophysics".
The Golem Press, Colorado, 1971.
- [23] W.A. JOHNSON
"Analysis of a vertical tubular cylinder with penetration on air-
dielectric interface and which is excited by an azimuthally
symmetric source".
Radio Science, Vol. 18, n° 6, Nov.-Dec. 1983.

- [24] O. AHERMOUCH
"Etude en haute fréquence d'une antenne filaire verticale en partie enterrée".
Thèse, Université de Clermont II, 1984.
- [25] P. DEGAUQUE, A. LORTHIOIR et D. DEGARDIN
"Diagraphie haute-fréquence entre forages : Etude et réalisation des dispositifs d'émission et de réception".
2^{ème} Rapport d'avancement du contrat LCPC/USTL, Université de Lille 1, Janvier 1986.
- [26] P. DEGAUQUE et M. KASSI-LAHLOU
"Tomographie électromagnétique - Transmission forage-forage - Compte-rendu des mesures effectuées à St-Brieux".
Rapport final du contrat LCPC/USTL, Université de Lille 1, Octobre 1986.
- [27] R. LAGABRIELLE, P. DEGAUQUE, Ph. COTE et M. KASSI-LAHLOU
"Comparaison between Attenuation Seismic Tomography and Hole to Hole Electromagnetic Measurement at 200 MHz in Granite Sites".
SEG Symposium, New Orleans, Octobre 1987.
- [28] M. CAUTERMAN
"Etude théorique de l'influence d'une anomalie de résistivité de forme quelconque sur le champ électromagnétique créé par un dipôle en milieu absorbant. Application à l'évaluation in situ de l'étendue de gisement de gaz et d'hydrocarbures".
Thèse d'Etat, Université de Lille 1, 1975.
- [29] J.L. MARTIN .
"Etude théorique de l'influence d'une hétérogénéité de conductivité et de forme quelconque sur le champ électromagnétique rayonné par un dipôle magnétique vertical en milieu stratifié".
Thèse, Université de Lille 1, 1978.

[30] D.L. LAGER, R.J. LYTLE

"Determining a subsurface electromagnetic profile from high-frequency measurements by applying reconstitution-technique algorithms".

Radio Science, Vol. 12, n° 2, Mars-Avril 1977.

[31] C.A. BALAINS, J.D. BARTLEY

"Algorithm and filter Selection in Geophysical tomography".

IEEE Transactions on Geoscience, vol. GE 24, n° 6, Nov. 1986.

ANNEXE 1

Expressions développées des composantes du champ électromagnétique dans le cas d'un D.E.V. placé dans le milieu (1) :

- point d'observation dans le milieu (1) :

$$E_{1r} = \frac{j\omega\mu_0 p}{4\pi\gamma_1^2} \left[\frac{r(z'+z)}{R_1^2} (\gamma_1^2 R_1^2 + 3\gamma_1 R_1 + 3) \frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1^3} + \frac{r(z'-z)}{R_2^2} (\gamma_1^2 R_2^2 + 3\gamma_1 R_2 + 3) \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2^3} - 2\gamma_1^2 \int_0^\infty u_1 \frac{e^{-u_1(z'-z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_1^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda \right]$$

$$E_{1z} = \frac{j\omega\mu_0 p}{4\pi\gamma_1^2} \left[\frac{(z'+z)^2}{R_1^2} (\gamma_1^2 R_1^2 + 3\gamma_1 R_1 + 3) - (\gamma_1^2 R_1^2 + \gamma_1 R_1 + 1) \right] \frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1^3} - \left[\frac{(z'-z)^2}{R_2^2} (\gamma_1^2 R_2^2 + 3\gamma_1 R_2 + 3) - (\gamma_1^2 R_2^2 + \gamma_1 R_2 + 1) \right] \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2^3}$$

$$+ 2 \gamma_2^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_1(z'-z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^3 J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$H_{1\psi} = \frac{P}{4\pi} r(\gamma_1 R_1 + 1) \frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1^2} - r(\gamma_1 R_2 + 1) \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2^2}$$

$$+ 2\gamma_2^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_1(z'-z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda$$

* $z' \geq 0$ et $z \leq 0$

- point d'observation dans le milieu (2) :

$$E_{2r} = \frac{j\omega\mu_0 P}{2\pi} \int_0^{\infty} u_2 \frac{e^{-u_1 z'} e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$E_{2z} = \frac{j\omega\mu_0 P}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_1 z'} e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^3 J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$H_{2\psi} = \frac{\gamma_2^2 p}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_1 z'} e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda$$

* $z' \geq 0$ et $z \geq 0$

$$R_1 = [r^2 + (z' + z)^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [r^2 + (z' - z)^2]^{1/2}$$

Pour un D.E.V. placé dans le milieu (2) :

- point d'observation dans le milieu (1)

$$E_{1r} = \frac{j\omega\mu_0 p}{2\pi} \int_0^{\infty} u_1 \frac{e^{-u_2 z'} e^{+u_1 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$E_{1z} = \frac{j\omega\mu_0 p}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_2 z'} e^{u_1 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^3 J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$H_{1\psi} = \frac{\gamma_1^2 p}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_2 z'} e^{u_1 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda$$

* $z' \geq 0$ et $z \leq 0$

point d'observation dans le milieu (2) :

$$E_{2r} = \frac{j\omega\mu_0\rho}{4\pi\gamma_2^2} \frac{r(z'-z)}{R_2^2} (\gamma_2^2 R_2^2 + 3\gamma_2 R_2 + 3) \frac{e^{-\gamma_2 R_2}}{R_2^2}$$

$$+ \frac{r(z'+z)}{R_1^2} (\gamma_2^2 R_1^2 + 3\gamma_2 R_1 + 3) \frac{e^{-\gamma_2 R_1}}{R_1^2}$$

$$- 2\gamma_2^2 \int_0^\infty \frac{e^{-u_2(z'+z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$E_{2z} = \frac{j\omega\mu_0\rho}{4\pi\gamma_2^2} \left[\frac{(z'-z)^2}{R_2^2} (\gamma_2^2 R_2^2 + 3\gamma_2 R_2 + 3) - (\gamma_2^2 R_2^2 + \gamma_2 R_2 + 1) \right] \frac{e^{-\gamma_2 R_2}}{R_2^2}$$

$$- \left[\frac{(z'+z)}{R_1^2} (\gamma_2^2 R_1^2 + 3\gamma_2 R_1 + 3) - (\gamma_2^2 R_1 + \gamma_2 R_1 + 1) \right] \frac{e^{-\gamma_2 R_1}}{R_1^2}$$

$$+ 2\gamma_2^2 \int_0^\infty \frac{e^{-u_2(z'+z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^3 J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$H_2 \Psi = \frac{P}{4\pi} r(\gamma_2 R_2 + 1) \frac{e^{-\gamma_2 R_2}}{R_2^3} - r(\gamma_2 R_1 + 1) \frac{e^{-\gamma_2 R_1}}{R_2^3}$$

$$+ 2\gamma_1^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_1(z'+z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda$$

* $z' \geq 0$ et $z \geq 0$

ANNEXE 2

A - Calcul des zéros des termes exponentiels :

Soit un complexe $z = a + jb$

$$e^z = e^a (\cos b + j \sin b)$$

$\operatorname{Re}(e^z)$ est nulle pour $b = (2k + 1) \frac{\pi}{2} = n \frac{\pi}{2}$, avec n impair

$J_m(e^z)$ est nulle pour $b = 2k \frac{\pi}{2} = n \frac{\pi}{2}$, avec n pair

si $z = \sqrt{c+jd} = a+jb$ avec $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ ($a \geq 0$)

$$b = \left[\frac{[c^2+d^2]^{1/2} - c}{2} \right]^{1/2} \quad \text{et} \quad a = \left[\frac{[c^2+d^2]^{1/2} + c}{2} \right]^{1/2}$$

dans notre cas le terme exponentiel est

$$e^{-u_1(z'-z)} \quad \text{avec} \quad u_1 = [\lambda^2 + \gamma_f^2]^{1/2} = [\lambda^2 + \operatorname{Re}(\gamma_f^2) + j \operatorname{Im}(\gamma_f^2)]^{1/2}$$

$$\text{donc} \quad a + jb = -(z'-z) [\lambda^2 + \operatorname{Re}(\gamma_f^2) + j \operatorname{Im}(\gamma_f^2)]^{1/2}$$

$$\text{et} \quad b = -\frac{(z'-z)}{\sqrt{2}} \left[\left[(\lambda^2 + \operatorname{Re}(\gamma_f^2))^2 + \operatorname{Im}^2(\gamma_f^2) \right]^{1/2} - (\lambda^2 + \operatorname{Re}(\gamma_f^2)) \right]^{1/2} = n \frac{\pi}{2}$$

d'où les valeurs λ_n de λ pour lesquelles on a des zéros

$$\lambda_n = \left[\left[\frac{(z'-z) \operatorname{Im}(\gamma_f^2)}{n\pi} \right]^2 - \left[\frac{n\pi}{2(z'-z)} \right]^2 - \operatorname{Re}(\gamma_f^2) \right]^{1/2}$$

d'autre part il ne peut exister de zéros que si

$$\left[\frac{(z'-z) \operatorname{Im}(\gamma_f^2)}{n\pi} \right]^2 - \left[\frac{n\pi}{2(z'-z)} \right]^2 - \operatorname{Re}(\gamma_f^2) \geq 0$$

Cette équation s'annule pour

$$n_0 = \frac{(z'-z)}{\pi} \left[2(|\gamma_1^2| - \operatorname{Re}(\gamma_1^2)) \right]^{1/2}$$

donc le nombre de zéros est : $N = E(n_0)$, $E(x)$ = partie entière de x et la fonction n'admet de zéros que si $n_0 \geq 1$.

Notons également que la décroissance du terme exponentiel se fait en

$$- \frac{(z'-z)}{\sqrt{2}} \left[\left[(\lambda^2 + \operatorname{Re}(\gamma_1^2))^2 + \operatorname{Im}(\gamma_1^2)^2 \right]^{1/2} + (\lambda^2 + \operatorname{Re}(\gamma_1^2)) \right]^{1/2}$$

Remarque : les valeurs λ_n ne sont que des valeurs approchées des zéros de la fonction car le terme exponentiel est multiplié par un autre complexe.

B - Calcul des valeurs limites et leurs intégrales pour les fonctions intervenant dans les intégrales de Sommerfeld :

Les valeurs limites de toutes ces fonctions quand λ tend vers l'infini sont :

$$1. \quad u_1 \frac{e^{-u_1(z'-z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) \quad \text{---->} \quad \frac{e^{-\lambda(z'-z)}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \lambda^2 J_1(\lambda r)$$

$$2. \quad \frac{e^{-u_1(z'-z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^3 J_0(\lambda r) \quad \text{---->} \quad \frac{e^{-\lambda(z'-z)}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \lambda^2 J_0(\lambda r)$$

$$3. \quad \frac{e^{-u_1(z'-z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) \quad \text{---->} \quad \frac{e^{-\lambda(z'-z)}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \lambda J_1(\lambda r)$$

$$4. \quad u_2 \frac{e^{-u_1 z'} e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) \quad \text{---->} \quad \frac{e^{-\lambda(z'+z)}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \lambda^2 J_1(\lambda r)$$

$$5. \quad \frac{e^{-u_1 z'} e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^3 J_0(\lambda r) \quad \text{--->} \quad \frac{e^{-\lambda(z'+z)}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \lambda^2 J_0(\lambda r)$$

$$6. \quad \frac{e^{-u_1 z'} e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda^2 J_1(\lambda r) \quad \text{--->} \quad \frac{e^{-\lambda(z'+z)}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \lambda J_1(\lambda r)$$

et peuvent être rassemblées en trois sortes de limites

$$a. \quad \frac{e^{-\lambda d}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \lambda^2 J_0(\lambda r)$$

$$b. \quad \frac{e^{-\lambda d}}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \lambda J_1(\lambda r)$$

$$c. \quad \frac{e^{-\lambda d}}{\gamma_1^2 + \gamma_1^2} \lambda^2 J_1(\lambda r)$$

$$d = z' - z \text{ ou } z' + z \\ d \geq 0$$

Les intégrales de ces limites sont établies grâce aux relations mathématiques suivantes :

$$I_V = \int_0^{\infty} e^{-\lambda d} J_V(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2}} \left[\frac{\sqrt{d^2 + r^2} - d}{r} \right]^V$$

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2}} \quad I_1 = \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2}} \left[\frac{\sqrt{d^2 + r^2} - d}{r} \right]$$

$$I_V^1 = - \frac{\partial I_V}{\partial d} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda d} \lambda J_V(\lambda r) d\lambda$$

$$I_0^1 = - \frac{d}{(d^2+r^2)^{3/2}}$$

$$I_1^1 = \frac{r}{(d^2+r^2)^{3/2}}$$

$$I_V^2 = \frac{\partial^2 I_V}{\partial d^2} = \int_0^\infty e^{-\lambda d} \lambda^2 J_V(\lambda r) d\lambda$$

$$I_0^2 = \frac{2d^2-r^2}{(d^2+r^2)^{5/2}}$$

$$I_1^2 = \frac{3dr}{(d^2+r^2)^{5/2}}$$

ANNEXE 3

Les calculs que nous développons dans cette annexe sont utilisés pour différentes applications et c'est pour cette raison que nous allons les établir de façon très générale.

1. Nous aurons souvent à calculer l'intégrale résultante de la projection sur les fonctions test :

$$I = \int_{z_m - \Delta}^{z_m + \Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_I^2 \right) f(z) t_m(z) dz = \int_{z_m - \Delta}^{z_m + \Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_I^2 \right) f(z) \frac{\Delta - |z - z_m|}{\Delta} dz$$

que nous décomposons en une somme de trois intégrales :

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = -\gamma_I^2 \int_{z_m - \Delta}^{z_m + \Delta} f(z) \frac{\Delta - |z - z_m|}{\Delta} dz \cong -\gamma_I^2 f(z_m) \int_{z_m - \Delta}^{z_m + \Delta} \frac{\Delta - |z - z_m|}{\Delta} dz$$

$$= -\gamma_I^2 \Delta f(z_m)$$

avec l'approximation que Δ est suffisamment petit pour que $f(z)$ reste pratiquement constante sur l'intervalle d'intégration.

$$I_2 = \int_{z_m - \Delta}^{z_m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z) \frac{\Delta - z_m + z}{\Delta} dz = \left[\frac{\partial f(z)}{\partial z} - \frac{\Delta - z_m + z}{\Delta} f(z) \right]_{z_m - \Delta}^{z_m} - \frac{1}{\Delta} \int_{z_m - \Delta}^{z_m} \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz$$

$$I_2 = \frac{\partial f(z_m)}{\partial z} - \frac{1}{\Delta} \left[f(z) \right]_{z_m - \Delta}^{z_m} = \frac{\partial f(z_m)}{\partial z} - \frac{1}{\Delta} f(z_m) + \frac{1}{\Delta} f(z_m - \Delta)$$

De la même façon que pour I_2 , c'est-à-dire au moyen d'une intégration par partie, l'intégrale I_3 donne :

$$I_3 = \int_{z_m}^{z_m+\Delta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z) \frac{\Delta+z_m-z}{\Delta} dz = \left[\frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\Delta+z_m-z}{\Delta} \right]_{z_m}^{z_m+\Delta} + \frac{1}{\Delta} \int_{z_m}^{z_m+\Delta} \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz$$

$$I_3 = - \frac{\partial f(z_m)}{\partial z} + \frac{1}{\Delta} \left[f(z) \right]_{z_m}^{z_m+\Delta} = - \frac{\partial f(z_m)}{\partial z} + \frac{1}{\Delta} f(z_m+\Delta) - \frac{1}{\Delta} f(z_m)$$

Il résulte que l'intégrale :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = - \gamma_1^2 \Delta f(z_m) + \frac{\partial f(z_m)}{\partial z} - \frac{1}{\Delta} f(z_m) + \frac{1}{\Delta} f(z_m-\Delta) - \frac{\partial f(z_m)}{\partial z} - \frac{1}{\Delta} f(z_m) + \frac{1}{\Delta} f(z_m+\Delta)$$

$$I = - \gamma_1^2 \Delta f(z_m) - \frac{2}{\Delta} f(z_m) + \frac{1}{\Delta} f(z_m-\Delta) + \frac{1}{\Delta} f(z_m+\Delta)$$

d'où :

$$\int_{z_m-\Delta}^{z_m+\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) f(z) t_m(z) dz = \frac{1}{\Delta} [f(z_m-\Delta) - (2+\gamma_1^2 \Delta^2) f(z_m) + f(z_m+\Delta)]$$

1.a

$f(z)$ est égale soit à des fonctions de Green, soit à des intégrales de Sommerfeld.

L'intégrale précédente est elle-même intégrée sur l'intervalle $[z_m-\Delta, z_m+\Delta]$ du fait de la projection de $f(z)$ sur les fonctions base. Par application de la formule 1.a on obtient donc :

$$\int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left[\int_{z_m-\Delta}^{z_m+\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) f(z) t_m(z) dz \right] b_n(z') dz' =$$

$$\frac{1}{\Delta} \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [f(z_m-\Delta) - (2+\gamma_1^2\Delta^2) f(z_m) + f(z_m+\Delta)] b_n(z') dz'$$

1.b

2. Dans le cas où $f(z)$ est une intégrale de Sommerfeld qui s'exprime par :

$$V(z, z') = -2 \int_0^{\infty} e^{az} e^{bz'} \beta(\lambda) d\lambda$$

avec $a = \pm u_1, \pm u_2$

$$\beta(\lambda) = \frac{\lambda J_0(\lambda r_0)}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1}$$

$b = u_1, u_2$

on a donc à calculer :

$$I = \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left[\int_{z_m-\Delta}^{z_m+\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) V(z, z') t_m(z) dz \right] b_n(z') dz'$$

par application de la formule 1.b on obtient :

$$I = \frac{1}{\Delta} \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [V(z_m-\Delta, z') - (2+\gamma_1^2\Delta^2) V(z_m, z') + V(z_m+\Delta, z')] \frac{\Delta - |z' - z_m|}{\Delta} dz'$$

En remplaçant V par son expression citée plus haut :

$$I = \frac{1}{\Delta} \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \left[-2 \int_0^{\infty} e^{a(z_m - \Delta)} e^{bz'} \beta(\lambda) d\lambda + 2(2 + \gamma_I^2 \Delta^2) \int_0^{\infty} e^{az_m} e^{bz'} \beta(\lambda) d\lambda - 2 \int_0^{\infty} e^{a(z_m + \Delta)} e^{bz'} \beta(\lambda) d\lambda \right] \frac{\Delta - |z' - z_n|}{\Delta} dz'$$

$$I = -\frac{2}{\Delta^2} \int_0^{\infty} \left[\left(e^{a(z_m - \Delta)} - (2 + \gamma_I^2 \Delta^2) e^{az_m} + e^{a(z_m + \Delta)} \right) \left(\int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} e^{bz'} (\Delta - |z' - z_n|) dz' \right) \right] \beta(\lambda) d\lambda$$

calculons d'abord l'intégrale :

$$\int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} e^{bz'} (\Delta - |z' - z_n|) dz' = \int_{z_n - \Delta}^{z_n} e^{bz'} (\Delta + z' - z_n) dz' + \int_{z_n}^{z_n + \Delta} e^{bz'} (\Delta - z' - z_n) dz'$$

les deux termes de cette intégrale sont calculés à l'aide d'une intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_{z_n - \Delta}^{z_n} e^{bz'} (\Delta + z' - z_n) dz' &= \left[\frac{e^{bz'}}{b} (\Delta - z_n + z') \right]_{z_n - \Delta}^{z_n} - \int_{z_n - \Delta}^{z_n} \frac{e^{bz'}}{b} dz' \\ &= \Delta \frac{e^{bz_n}}{b} - \left[\frac{e^{bz'}}{b^2} \right]_{z_n - \Delta}^{z_n} = \Delta \frac{e^{bz_n}}{b} - \frac{e^{bz_n} - e^{b(z_n - \Delta)}}{b^2} \end{aligned}$$

de même :

$$\int_{z_n}^{z_n+\Delta} e^{bz'} (\Delta - z' - z_n) dz' = -\Delta \frac{e^{bz_n}}{b} + \frac{e^{b(z_n+\Delta)} - e^{bz_n}}{b^2}$$

et

$$\int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} e^{bz'} (\Delta - |z' - z_n|) dz' = \frac{e^{b(z_n-\Delta)} - 2e^{bz_n} + e^{b(z_n+\Delta)}}{b^2}$$

tout ceci nous donne donc :

$$\int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) V(z, z') t_m(z) dz \right] b_n(z') dz' =$$

$$= \frac{-2}{\Delta^2} \int_0^\infty \frac{e^{az_m} e^{bz_n}}{b^2} \left[e^{a\Delta} + e^{-a\Delta} - (2 + \gamma_1^2 \Delta^2) \right] \left[e^{b\Delta} + e^{-b\Delta} - 2 \right] \frac{\lambda J_0(\lambda r_0)}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} d\lambda$$

2.a

L'ensemble des formules établies jusqu'à maintenant est applicable dans le cas d'une antenne placée dans l'air ou dans le sol ainsi que pour les éléments se trouvant entièrement dans le sol ou dans l'air d'une antenne traversant l'interface air sol. Dans ce dernier cas nous avons à calculer les intégrales sur les intervalles $[-\Delta, 0]$ et $[0, \Delta]$ correspondant aux influences de l'élément de l'interface.

3. Influence de l'élément de l'interface sur un autre élément de l'antenne :

$$I = \int_0^{\Delta} \left[\int_{z_m-\Delta}^{z_m+\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_I^2 \right) V(z, z') t_m(z) dz \right] \frac{\Delta - z'}{\Delta} dz'$$

en appliquant la formule 1.a pour la première intégrale et en remplaçant $V(z, z')$ par son expression on obtient :

$$I = \frac{1}{\Delta^2} \int_0^{\Delta} \left[-2 \int_0^{\infty} e^{a(z_m-\Delta) - bz'} e^{-\beta(\lambda)} d\lambda + 2(2+\gamma_I^2\Delta^2) \int_0^{\infty} e^{az_m - bz'} e^{-\beta(\lambda)} d\lambda - 2 \int_0^{\infty} e^{a(z_m+\Delta) - bz'} e^{-\beta(\lambda)} d\lambda \right] (\Delta - z') dz'$$

$$I = -\frac{2}{\Delta^2} \int_0^{\infty} \left[\left(e^{a(z_m-\Delta)} - (2+\gamma_I^2\Delta^2) e^{az_m} + e^{a(z_m+\Delta)} \right) \left(\int_0^{\Delta} e^{bz} (\Delta - z') dz' \right) \right] \beta(\lambda) d\lambda$$

avec :

$$\int_0^{\Delta} e^{bz} (\Delta - z') dz' = \left[\frac{e^{bz'}}{b} (\Delta - z') \right]_0^{\Delta} + \int_0^{\Delta} e^{bz'} dz'$$

$$= -\frac{\Delta}{b} + \left[\frac{e^{bz'}}{b^2} \right]_0^{\Delta} = -\frac{\Delta}{b} + \frac{e^{b\Delta}}{b^2} - \frac{1}{b^2}$$

$$= \frac{e^{b\Delta} - b\Delta - 1}{b^2}$$

d'où :

$$\int_0^{\Delta} \left[\int_{z_m-\Delta}^{z_m+\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) V(z, z') t_m(z) dz \right] \frac{\Delta - z'}{\Delta} dz' =$$

$$= -\frac{2}{\Delta^2} \int_0^{\infty} \left[e^{a\Delta} + e^{-a\Delta} - (2 + \gamma_1^2 \Delta^2) \right] \left[e^{b\Delta} - b\Delta - 1 \right] \frac{e^{az_m} \lambda J_0(\lambda r_0)}{b^2 (\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1)} d\lambda$$

3.a

4. Pour l'influence d'un élément de l'antenne sur l'élément de l'interface nous avons à calculer :

$$I_1 = \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [A_1 + A_2] b_n(z') dz' \quad : \text{ l'élément } n \text{ est situé dans le milieu } 1$$

$$I_2 = \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [C_1 + C_2] b_n(z') dz' \quad : \text{ l'élément } n \text{ est situé dans le milieu } 2$$

$$I_{\text{int}} = \int_0^{\Delta} [B_1 + B_2] \frac{\Delta - z'}{\Delta} dz' \quad : \quad \begin{array}{l} \text{l'élément } n \text{ est l'élément de} \\ \text{l'interface lui même} \end{array}$$

Les expressions A_i , B_i et C_i sont données dans le chapitre III. Avant de calculer l'une de ces intégrales établissons d'abord quelques formules dont nous aurons besoin :

$$\int_{-\Delta}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) f(z) \frac{\Delta + z}{\Delta} dz = \frac{1}{\Delta} \left[\int_{-\Delta}^0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z) (\Delta + z) dz - \gamma_1^2 \int_{-\Delta}^0 f(z) (\Delta + z) dz \right]$$

la première intégrale est à calculer par partie :

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta}^0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z) (\Delta + z) dz &= \left[\frac{\partial f(z)}{\partial z} (\Delta + z) \right]_{-\Delta}^0 - \int_{-\Delta}^0 \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz \\ &= \Delta \frac{\partial f(z=0)}{\partial z} - [f(z)]_{-\Delta}^0 = \Delta \frac{\partial f(z=0)}{\partial z} - f(0) + f(-\Delta) \end{aligned}$$

pour la deuxième intégrale on suppose que Δ est suffisamment petit pour que la fonction reste constante :

$$\int_{-\Delta}^0 f(z) (\Delta + z) dz \cong f(0) \int_{-\Delta}^0 (\Delta + z) dz = f(0) \left[\Delta z + \frac{z^2}{2} \right]_{-\Delta}^0 = \frac{\Delta^2}{2} f(0)$$

ces calculs nous mènent donc à la formule suivante :

$$\int_{-\Delta}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) f(z) \frac{\Delta+z}{\Delta} dz = \frac{1}{\Delta} \left[f(-\Delta) - \left(1 + \frac{\gamma_f^2 \Delta^2}{2} \right) f(0) + \Delta \frac{\partial f(z=0)}{\partial z} \right]$$

4.a

de manière tout à fait semblable on peut établir :

$$\int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) f(z) \frac{\Delta-z}{\Delta} dz = \frac{1}{\Delta} \left[f(\Delta) - \left(1 + \frac{\gamma_f^2 \Delta^2}{2} \right) f(0) - \Delta \frac{\partial f(z=0)}{\partial z} \right]$$

4.b

Prenons maintenant pour exemple de calcul l'intégrale :

$$I_1 = \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [A_1 + A_2] b_n(z') dz' =$$

$$= \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left[\frac{1}{\gamma_f^2} \int_{-\Delta}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) gV_1(z, z') \frac{\Delta+z}{\Delta} dz \right.$$

$$\left. - \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_f^2 \right) v_{12}(z, z') \frac{\Delta-z}{\Delta} dz \right] b_n(z') dz'$$

avec :

$$gV_1(z, z') = G_{11}(z, z') - G_{12}(z, z') - \gamma_f^2 V_{11}(z, z')$$

commençons d'abord par les intégrales qui sont à calculer sur les intervalles $[-\Delta, 0]$ et $[0, \Delta]$:

$$q = \frac{1}{\gamma_1^2} \int_{-\Delta}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right) [G_{11}(z, z') - G_{12}(z, z') - \gamma_2^2 V_{11}(z, z')] \frac{\Delta+z}{\Delta} dz$$

$$- \gamma_1^2 \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) V_{12}(z, z') \frac{\Delta-z}{\Delta} dz$$

en appliquant les formules 4.a et 4.b :

$$q = \frac{1}{\gamma_1^2 \Delta} \left[G_{11}(-\Delta, z') - \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2} \right) G_{11}(0, z') + \Delta \frac{\partial G_{11}(z=0, z')}{\partial z} \right.$$

$$- G_{12}(-\Delta, z') + \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2} \right) G_{12}(0, z') - \Delta \frac{\partial G_{12}(z=0, z')}{\partial z}$$

$$- \gamma_2^2 \left(V_{11}(-\Delta, z') - \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2} \right) V_{11}(0, z') + \Delta \frac{\partial V_{11}(z=0, z')}{\partial z} \right)$$

$$\left. - \gamma_1^2 \left(V_{12}(\Delta, z') - \left(1 + \frac{\gamma_2^2 \Delta^2}{2} \right) V_{12}(0, z') - \Delta \frac{\partial V_{12}(z=0, z')}{\partial z} \right) \right]$$

le calcul des dérivées donne :

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial z} = - \frac{z'+z}{R_1^3} (1 + \gamma_1 R_1) e^{-\gamma_1 R_1}$$

$$R_1 = [r_0^2 + (z'+z)^2]^{1/2}$$

$$\frac{\partial G_{12}}{\partial z} = - \frac{z'-z}{R_2^3} (1 + \gamma_1 R_1) e^{-\gamma_1 R_2}$$

$$R_2 = [r_0^2 + (z'-z)^2]^{1/2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2 \int_0^{\infty} a e^{az} e^{bz'} \beta(\lambda) d\lambda$$

pour $z = 0$:

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial z} = -\frac{z'}{R_1^3} (1+\gamma_1 R_1) e^{-\gamma_1 R_1}$$

$$R_1 = [r_0^2 + z'^2]^{1/2}$$

$$\frac{\partial G_{12}}{\partial z} = \frac{z'}{R_2^3} (1+\gamma_1 R_2) e^{-\gamma_1 R_2}$$

$$R_2 = [r_0^2 + z'^2]^{1/2}$$

$$\frac{\partial V_{11}}{\partial z} = -2 \int_0^{\infty} u_1 e^{-u_1 z'} \beta(\lambda) d\lambda$$

on pose $R_1 = R_2 = R$

$$\frac{\partial V_{12}}{\partial z} = 2 \int_0^{\infty} u_2 e^{-u_2 z'} \beta(\lambda) d\lambda$$

ce qui nous donne pour la somme de ces dérivées :

$$\left[\frac{\partial G_{11}(z, z')}{\partial z} - \frac{\partial G_{12}(z, z')}{\partial z} - \gamma_2^2 \frac{\partial V_{11}(z, z')}{\partial z} + \gamma_1^2 \frac{\partial V_{12}(z, z')}{\partial z} \right]_{z=0}$$

$$= -\frac{z'}{R^3} (1+\gamma_1 R) e^{-\gamma_1 R} + \frac{z'}{R^3} (1+\gamma_1 R) e^{-\gamma_1 R} + 2\gamma_2^2 \int_0^{\infty} u_1 e^{-u_1 z'} \beta(\lambda) d\lambda + 2\gamma_1^2 \int_0^{\infty} u_2 e^{-u_2 z'} \beta(\lambda) d\lambda$$

$$= -\frac{2z'}{R^3} (1+\gamma_1 R) e^{-\gamma_1 R} + 2 \int_0^{\infty} (\gamma_2^2 u_1 + \gamma_1^2 u_2) \frac{e^{-u_1 z'}}{\gamma_2^2 u_1 + \gamma_1^2 u_2} \lambda J_0(\lambda r_0) d\lambda$$

$$= -\frac{2z'}{R^3} (1+\gamma_1 R) e^{-\gamma_1 R} - 2 \frac{\partial}{\partial z'} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_1 z'}}{u_1} \lambda J_0(\lambda r_0) d\lambda$$

$$= -\frac{2z'}{R^3} (1+\gamma_1 R) e^{-\gamma_1 R} - 2 \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{e^{-\gamma_1 R}}{R} \right) = 0$$

d'autre part comme pour $z=0$ $R_1=R_2$ alors $G_{11}(0,z')=G_{12}(0,z')$ l'ensemble de ces calculs nous permet d'écrire :

$$q = \frac{1}{\gamma_1^2 \Delta} \left[G_{11}(-\Delta, z') - G_{12}(-\Delta, z') - \gamma_2^2 \left(V_{11}(-\Delta, z') - \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2}\right) V_{11}(0, z') \right) \right. \\ \left. - \gamma_1^2 \left(V_{12}(\Delta, z') - \left(1 + \frac{\gamma_2^2 \Delta^2}{2}\right) V_{12}(0, z') \right) \right]$$

L'intégrale I_1 devient donc :

$$I_1 = \frac{1}{\gamma_1^2 \Delta} \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \left[G_{11}(-\Delta, z') - G_{12}(-\Delta, z') \right. \\ \left. - \gamma_2^2 \left(V_{11}(-\Delta, z') - \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2}\right) V_{11}(0, z') \right) \right. \\ \left. - \gamma_1^2 \left(V_{12}(\Delta, z') - \left(1 + \frac{\gamma_2^2 \Delta^2}{2}\right) V_{12}(0, z') \right) \right] b_n(z') dz'$$

$$I_1 = \frac{1}{\gamma_1^2 \Delta^2} \left[\int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} (G_{11}(-\Delta, z') - G_{12}(-\Delta, z')) (\Delta - |z' - z_n|) dz' \right. \\ \left. - \gamma_2^2 \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \left(V_{11}(-\Delta, z') - \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2}\right) V_{11}(0, z') \right) (\Delta - |z' - z_n|) dz' \right. \\ \left. - \gamma_1^2 \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \left(V_{12}(\Delta, z') - \left(1 + \frac{\gamma_2^2 \Delta^2}{2}\right) V_{12}(0, z') \right) (\Delta - |z' - z_n|) dz' \right]$$

Il reste maintenant à calculer les intégrales où interviennent les intégrales de Sommerfeld et qui se présentent sous la forme :

$$\int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left[V(\pm\Delta, z') - \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2}\right) V(0, z') \right] (\Delta - |z' - z_n|) dz'$$

en remplaçant $V(z, z')$ par son expression générale on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left[-2 \int_0^{\infty} e^{\pm az} e^{bz'} \beta(\lambda) d\lambda + 2 \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2}\right) \int_0^{\infty} e^{bz'} \beta(\lambda) d\lambda \right] (\Delta - |z' - z_n|) dz' \\ &= -2 \int_0^{\infty} \left[\left(e^{\pm a\Delta} - \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2}\right) \right) \left(\int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} e^{bz'} (\Delta - |z' - z_n|) dz' \right) \right] \beta(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

l'intégrale sur $[z_n-\Delta, z_n+\Delta]$ est calculée par la formule 2.a, il résulte donc :

$$\begin{aligned} & \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left[V(\pm\Delta, z') - \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2}\right) V(0, z') \right] (\Delta - |z' - z_n|) dz' = \\ & -2 \int_0^{\infty} \left[e^{\pm a\Delta} - \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2}\right) \right] \left[e^{bz} + e^{-bz} - 2 \right] \frac{e^{bz_n} \beta(\lambda)}{b^2} d\lambda \end{aligned}$$

4.c

Finalement nous obtenons :

$$I_1 = \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} [A_1 + A_2] b_n(z') dz'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\gamma_1^2 \Delta^2} \left[\int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} (G_{11}(-\Delta, z') - G_{12}(-\Delta, z')) (\Delta - |z' - z_n|) dz' \right. \\
&\quad + 2 \gamma_2^2 \int_0^\infty \left(e^{-u_1 \Delta} - \left(1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2}\right) \left(e^{-u_1 \Delta} + e^{u_1 \Delta} - 2 \right) \frac{e^{-u_1 z_n} \lambda J_0(\lambda r_0)}{u_1^2 (\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1)} d\lambda \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \gamma_1^2 \int_0^\infty \left(e^{-u_2 \Delta} - \left(1 + \frac{\gamma_2^2 \Delta^2}{2}\right) \left(e^{-u_1 \Delta} + e^{u_1 \Delta} - 2 \right) \frac{e^{-u_1 z_n} \lambda J_0(\lambda r_0)}{u_2^2 (\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1)} d\lambda \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} [A_1 + A_2] b_n(z') dz' = \\
&= \frac{1}{\gamma_1^2 \Delta^2} \left[\int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} (G_{11}(-\Delta, z') - G_{12}(-\Delta, z')) (\Delta - |z' - z_n|) dz' \right. \\
&\quad + 2 \int_0^\infty \left(\frac{\gamma_2^2}{u_1^2} \left(e^{-u_1 \Delta} - 1 - \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2} \right) + \frac{\gamma_1^2}{u_2^2} \left(e^{-u_2 \Delta} - 1 - \frac{\gamma_2^2 \Delta^2}{2} \right) \right) \dots \\
&\quad \left. \dots \left(e^{-u_1 \Delta} + e^{u_1 \Delta} - 2 \right) \frac{e^{-u_1 z_n} \lambda J_0(\lambda r_0)}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} d\lambda \right]
\end{aligned}$$

4.d

Le calcul est similaire pour $I_2 = \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} [C_1 + C_2] b_n(z') dz'$

et pour $I_{int} = \int_0^{\Delta} [B_1 + B_2] \frac{\Delta - z'}{\Delta} dz'$ sauf que dans cette dernière on

calcule :

$$\int_0^{\Delta} [V(\pm\Delta, z') - (1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2}) V(0, z')] (\Delta - z') dz' \text{ et c'est égal à :}$$

$$- 2 \int_0^{\infty} [e^{\pm a \Delta} - (1 + \frac{\gamma_1^2 \Delta^2}{2})] [e^{bz} - b\Delta - 1] \frac{\beta(\lambda)}{b^2} d\lambda$$

ANNEXE 4

Calcul de la tension V_r créée par une antenne placée à l'interface de deux milieux :

$$V_{r2} = \int_a^\infty \int_0^{Z_s} dE_{r22} dz' dy + \int_a^\infty \int_{Z_i}^0 dE_{r12} dz' dy = V_{r22} + V_{r12}$$

calculons d'abord V_{r22} :

$$V_{r22} = \int_a^\infty \int_0^{Z_s} \frac{j\omega\mu_0 I(z')}{4\pi\gamma_2^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (G_{22} - G_{21} - \gamma_1^2 V_{22}) \right] dz' dr$$

$$V_{r22} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_2^2} \int_0^{Z_s} \left[\int_a^\infty \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (G_{22} - G_{21} - \gamma_1^2 V_{22}) dr \right] I(z') dz'$$

$$V_{r22} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_2^2} \int_0^{Z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left([G_{22} - G_{21} - \gamma_1^2 V_{22}]_a^\infty \right) I(z') dz'$$

$$V_{r22} = - \frac{j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_2^2} \int_0^{Z_s} \frac{\partial}{\partial z} (G_{22}(a) - G_{21}(a) - \gamma_1^2 V_{22}(a)) I(z') dz'$$

Les expressions de G_{22} , G_{21} et V_{22} sont données dans l'annexe 1. Le calcul des dérivées nous donne :

$$\frac{\partial G_{22}(a)}{\partial z} = \frac{z'-z}{R_2^3} (\gamma_2 R_2 + 1) e^{-\gamma_2 R_2}$$

$$R_2 = [a^2 + (z'-z)^2]^{1/2}$$

$$\frac{\partial G_{21}(a)}{\partial z} = - \frac{z'+z}{R_1^3} (\gamma_2 R_1 + 1) e^{-\gamma_2 R_1} \quad R_1 = [a^2 + (z'+z)^2]^{1/2}$$

$$\frac{\partial V_{22}(a)}{\partial z} = 2 \int_0^{\infty} u_2 \frac{e^{-u_2(z'+z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda J_0(\lambda a) d\lambda$$

En introduisant ces expressions dans V_{r22} on obtient :

$$V_{r22} = - \frac{j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_2^2} \left[\int_0^{z_s} \left(\frac{z'-z}{R_2^3} (\gamma_2 R_2 + 1) e^{-\gamma_2 R_2} + \frac{z'+z}{R_1^3} (\gamma_2 R_1 + 1) e^{-\gamma_2 R_1} \right) I(z') dz' \right. \\ \left. - 2\gamma_1^2 \int_0^{z_s} \int_0^{\infty} u_2 \frac{e^{-u_2(z'+z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda J_0(\lambda a) d\lambda I(z') dz' \right]$$

L'extrapolation linéaire du courant entre deux éléments successifs $I(z') = Az' + B$ pour $z' \in [z_i, z_i + \Delta]$ avec :

$$A = \frac{I(z_i + \Delta) - I(z_i)}{\Delta} \quad \text{et } B = \left(1 + \frac{z_i}{\Delta}\right) I(z_i) - \frac{z_i}{\Delta} I(z_i + \Delta)$$

permet d'écrire :

$$V_{r22} = - \frac{j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_2^2} \sum_{i=1}^{N_2} \left[\int_{z_i}^{z_i + \Delta} \left(\frac{z'-z}{R_2^3} (\gamma_2 R_2 + 1) e^{-\gamma_2 R_2} + \frac{z'+z}{R_1^3} (\gamma_2 R_1 + 1) e^{-\gamma_2 R_1} \right) (Az' + B) dz' \right. \\ \left. - 2\gamma_1^2 \int_0^{\infty} \frac{u_2 e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda J_0(\lambda a) \int_{z_i}^{z_i + \Delta} e^{-u_2 z'} (Az' + B) dz' d\lambda \right]$$

N_2 : nombre d'éléments dans le milieu 2.

Avec une intégration par partie on obtient :

$$\int_{z_i}^{z_i+\Delta} e^{-u_2 z'} (Az'+B) dz' = \frac{e^{-u_2 z_i}}{u_2} \left(\left(\frac{A}{u_2} + B \right) (1 - e^{-u_2 \Delta}) + A(z_i - (z_i + \Delta)) e^{-u_2 \Delta} \right)$$

d'où :

$$V_{r22} = - \frac{j\omega\mu_0}{4\pi\gamma_2^2} \sum_{i=1}^{N_2} \left[\int_{z_i}^{z_i+\Delta} \frac{z'-z}{R_2^3} (\gamma_2 R_2 + 1) e^{-\gamma_2 R_2} + \frac{z'+z}{R_1^3} (\gamma_2 R_1 + 1) e^{-\gamma_2 R_1} \right] (Az'+B) dz'$$

$$- 2\gamma_1^2 \int_0^\infty \frac{e^{-u_2(z_i+z)}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \left[\left(\frac{A}{u_2} + B \right) (1 - e^{-u_2 \Delta}) + A(z_i - (z_i + \Delta)) e^{-u_2 \Delta} \right] \lambda J_0(\lambda a) d\lambda$$

Calculons maintenant V_{r12} :

$$V_{r12} = \int_a^\infty \int_{z_i}^0 - \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial r \partial z} I(z') dz' dr$$

$$V_{r12} = - \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{z_i}^0 \left(\int_a^\infty \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial r \partial z} dr \right) I(z') dz'$$

$$V_{r12} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{z_i}^0 \frac{\partial V_{12}(a)}{\partial z} I(z') dz'$$

la dérivée par rapport à z donne :

$$\frac{\partial V_{12}}{\partial z} = 2 \int_0^{\infty} u_2 \frac{e^{-u_1 z'} e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda J_0(\lambda a) d\lambda$$

$$V_{r12} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \int_{z_i}^0 \left(\int_0^{\infty} u_2 \frac{e^{-u_1 z'} e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda J_0(\lambda a) d\lambda \right) I(z') dz'$$

$$V_{r12} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(u_2 \frac{e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda J_0(\lambda a) \int_{z_i}^0 e^{-u_1 z'} I(z') dz' \right) d\lambda$$

De même que précédemment on pose : $I(z') = Az' + B$ si $z' \in [z_i, z_i - \Delta]$ et V_{r12} devient :

$$V_{r12} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_1} \int_0^{\infty} u_2 \frac{e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \lambda J_0(\lambda a) \left(\int_{z_i}^{z_i - \Delta} e^{-u_1 z'} (Az' + B) dz' \right) d\lambda$$

N_1 : nombre d'éléments dans le milieu 1.

Après l'intégration par partie on obtient :

$$V_{r12} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_1} \int_0^{\infty} \frac{u_2}{u_1} \frac{e^{-u_1 z_i} e^{-u_2 z}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \left(\left(\frac{A}{u_1} + B \right) (1 - e^{-u_1 \Delta}) + A(z_i - (z_i - \Delta)) e^{-u_1 \Delta} \right) \dots \lambda J_0(\lambda a) d\lambda$$

ANNEXE 5

A. CHAMP RAYONNE PAR UN DIPOLE ELECTRIQUE :

Le champ rayonné par un dipôle électrique orienté suivant oz , dans un milieu homogène et infini a pour composantes en coordonnées cartésiennes :

$$E_x^e(M) = \frac{Idl}{4\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \frac{(x-x_0)(z-z_0)}{R^5} (\gamma_1^2 R^2 + 3\gamma_1 R + 3) e^{-\gamma_1 R}$$

$$E_y^e(M) = \frac{Idl}{4\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \frac{(y-y_0)(z-z_0)}{R^5} (\gamma_1^2 R^2 + 3\gamma_1 R + 3) e^{-\gamma_1 R}$$

$$E_z^e(M) = \frac{Idl}{4\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \left[\frac{(z-z_0)^2}{R^2} (\gamma_1^2 R^2 + 3\gamma_1 R + 3\gamma_1 R + 3) - (\gamma_1^2 R^2 + \gamma_1 R + 1) \right]$$

$$\dots \frac{e^{-\gamma_1 R}}{R^3}$$

$$R = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$$

x_0, y_0, z_0 : coordonnées du point d'émission

x, y, z : coordonnées du point de réception

B. EXPRESSIONS DEVELOPPEES DES INTEGRALES I₁ A I₆

* intégrales doubles :

$$I_i = \int_{a_n - \Delta/2}^{a_n + \Delta/2} \int_{b_n - \Delta/2}^{b_n + \Delta/2} \left[\frac{c_m - (c_n + \Delta/2)}{R'^3} (\gamma_1 R'^2 + 1) e^{-\gamma_1 R'^2} - \frac{c_m - (c_n - \Delta/2)}{R'^3} (\gamma_1 R'^2 + 1) e^{-\gamma_1 R'^2} \right] db' da'$$

$$R_1 = [(c_m - c_n + \Delta/2)^2 + (b_m - b')^2 + (a_m - a')^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [(c_m - c_n - \Delta/2)^2 + (b_m - b')^2 + (a_m - a')^2]^{1/2}$$

pour $i = 1$: $(a, b, c) = (z, y, x)$

pour $i = 2$: $(a, b, c) = (z, x, y)$

pour $i = 3$: $(a, b, c) = (y, x, z)$

m : indice du point d'émission

n : indice du point de réception

* **intégrales simples :**

$$I_i = \int_{a_n - \Delta/2}^{a_n + \Delta/2} \left[\left(\frac{e^{-\gamma_1 R'_{22}}}{R'_{22}} - \frac{e^{-\gamma_1 R'_{21}}}{R'_{21}} \right) - \left(\frac{e^{-\gamma_1 R'_{12}}}{R'_{12}} - \frac{e^{-\gamma_1 R'_{11}}}{R'_{11}} \right) \right] da'$$

$$R'_{11} = [(c_m - c_n + \Delta/2)^2 + (b_m - b_n + \Delta/2)^2 + (a_m - a')^2]^{1/2}$$

$$R'_{12} = [(c_m - c_n + \Delta/2)^2 + (b_m - b_n - \Delta/2)^2 + (a_m - a')^2]^{1/2}$$

$$R'_{21} = [(c_m - c_n - \Delta/2)^2 + (b_m - b_n + \Delta/2)^2 + (a_m - a')^2]^{1/2}$$

$$R'_{22} = [(c_m - c_n - \Delta/2)^2 + (b_m - b_n - \Delta/2)^2 + (a_m - a')^2]^{1/2}$$

pour $i = 4$: $(a, b, c) = (z, y, x)$

pour $i = 5$: $(a, b, c) = (y, z, x)$

pour $i = 6$: $(a, b, c) = (x, y, z)$

C. OPTIMISATION DES CALCULS :

La matrice $[A]$ se décompose, comme nous l'avons vu dans le chapitre (V.2.3), selon le schéma suivant :

$$|A| =$$

A_x^x	A_x^y	A_x^z
A_y^x	A_y^y	A_y^z
A_z^x	A_z^y	A_z^z

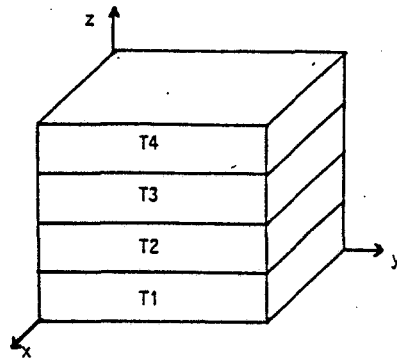
Les sous-matrices $A_{\alpha\alpha}^{\alpha}$, représentant les effets mutuels entre deux dipôles équivalents de même direction, sont composées d'intégrales doubles. Les autres, représentant les effets entre les dipôles équivalents orthogonaux, sont composées d'intégrales simples. Dans le chapitre V nous avons vu que $[A_{\alpha\beta}^{\beta}] = [A_{\beta\alpha}^{\alpha}]$ ($\alpha \neq \beta$) d'où $[A]$ est symétrique par blocs.

Ces différents blocs sont décomposés à leur tour en sous-matrices selon le schéma suivant :

1. Découpage en tranches

Du fait du découpage de l'anomalie en tranches suivant où toutes les matrices $[A_{\alpha\alpha}^{\alpha}]$ peuvent être décomposées comme suit :

T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}
T_{21}			
			T_{44}



découpage de l'anomalie en tranches

$[T_{ij}]$: la matrice d'influence de la tranche i sur la tranche j .

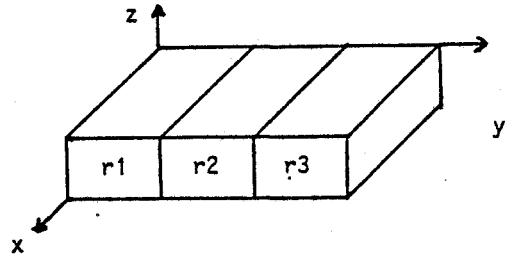
$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

2. Découpage en rangée

Chacune des matrices $[T_{ij}]$ est décomposée en blocs $[r_{kl}]$ représentant l'influence d'une rangée k sur une rangée l .

r_{11}	r_{12}	r_{13}
		r_{33}



découpage d'une tranche T_i en rangée

3. Découpage en éléments

Enfin chaque rangée est décomposée en éléments et les matrices $[r_{kl}]$ sont composées des éléments e_{mn} correspondant à l'effet mutuel entre m et n .

L'ensemble de ces matrices et sous-matrices possède des propriétés de symétrie ($e_{mn} = e_{nm}$) ou d'anti-symétrie ($e_{mn} = -e_{nm}$) qu'on démontre en intervertissant les coordonnées de l'élément d'émission et de réception dans les intégrales I_i citées en B. On démontre aussi une symétrie de translation ($e_{mn} = e_{(m+k)(n+k)}$) en augmentant de la même quantité les coordonnées des points de réception et d'émission.

Dans ce qui suit nous allons résumer les différentes étapes de découpages et les propriétés des différents blocs.

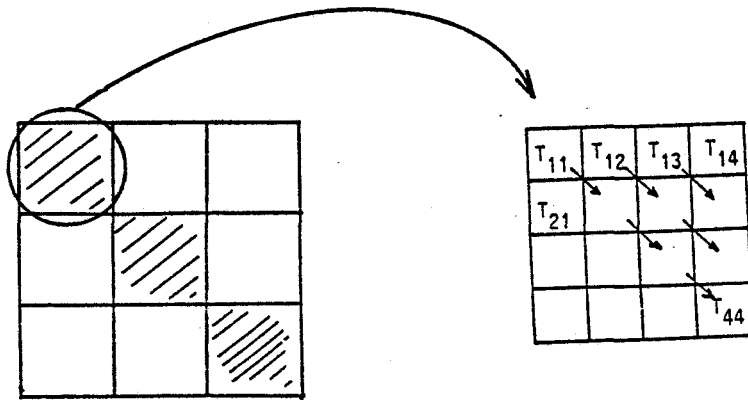
1^e étape

A_x^x	A_x^y	A_x^z
A_y^x	A_y^y	A_y^z
A_z^x	A_z^y	A_z^z

symétrie par bloc A_{ij}^k

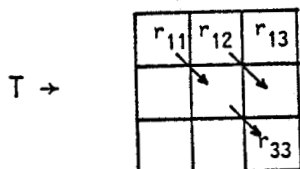
I) Blocs dont la diagonale coïncide avec la diagonale principale A_{ij}^k

2^e étape



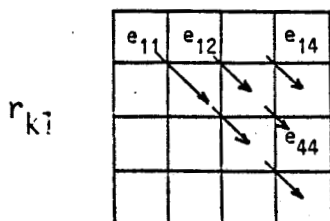
- . Symétrie de translation par blocs.
- . Symétrie par bloc par rapport à la diagonale principale de la matrice A_{α}^{α} , $T_{12} = T_{21}$. Il en résulte que les matrices T_{33} sont symétriques.

3^e étape : Chaque matrice T est représentée ci-dessous :



- . Symétrie de translation par bloc.
- . Symétrie par blocs par rapport à la diagonale principale de la matrice T.

4^e étape : Chaque matrice r_{kl} est redivisée



- . Symétrie de translation par élément.
- . Symétrie des éléments par rapport à la diagonale principale de la matrice r_{kl} .

Ces différentes étapes étant effectuées, on trouve bien que les matrices A_{α}^{α} sont symétriques.

II) Blocs hors de la diagonale

II.1) Bloc A_{α}^{α}

2^e étape : même propriété que pour les matrices A_{α}^{α}

3^e étape : même propriété que pour les matrices A_{α}^{α}

4^e étape : chaque matrice r_{kl} se présente sous la forme

r_{kl}

e_{11}	e_{12}		e_{14}
-			
-	-		e_{44}
-	-	-	

- . Symétrie de translation par élément.
- . Antisymétrie des éléments par rapport à la diagonale principale de cette matrice. Il en résulte donc que sa diagonale principale est nulle. De plus les matrices r_{kl} sont nulles puisqu'elles correspondent au cas où $y_m = y_n$.

La matrice T_{ij} a donc l'allure suivante :

T_{ij}

\emptyset	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	\emptyset	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	\emptyset

II.2) Bloc A_{α}^{α}

2^e étape : même propriété que les matrices A_{α}^{α}

3^e étape : chaque matrice T a les propriétés suivantes :

T

r_{11}	r_{12}	r_{13}
-		
-	-	r_{33}

- . Symétrie de translation par bloc.
- . Antisymétrie par bloc.

Remarque : On a vu que les matrices T_{33} sont symétriques et que dans ce cas toutes les matrices T sont antisymétriques par blocs. Il en résulte que les matrices T_{33} sont nulles.

4^e étape : la matrice r_{kl} est :

r_{kl}

e_{11}	e_{12}		e_{14}
-			
-	-		e_{44}
-	-	-	

- . Symétrie de translation par élément.
- . Antisymétrie des éléments par rapport à la diagonale donc tous les éléments de la diagonale sont nuls.

$$T_{ij} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline \end{array} \quad \text{et } T_{ij} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline \end{array} \quad j \neq i$$

II.3) Bloc $A_{\vec{y}}$

2^e étape : même propriété que les matrices $A_{\vec{x}}$.

3^e étape : la matrice T a les propriétés suivantes (semblables à celles du bloc $A_{\vec{x}}$)

$$T \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ \hline - & & \\ \hline - & - & r_{33} \\ \hline \end{array}$$

- . Symétrie de translation par bloc
- . Antisymétrie par bloc
- . Nullité des matrices $T_{\beta\beta}$

4^e étape : la matrice r_{kl} a les propriétés suivantes :

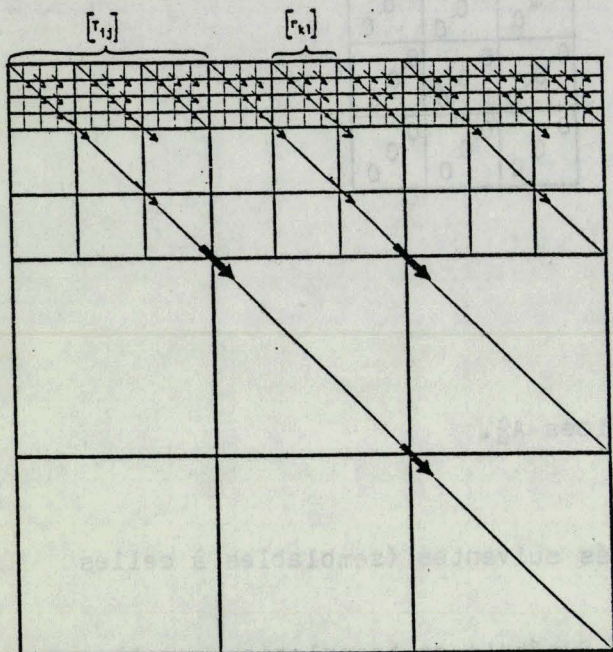
$$r_{kl} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline e_{11} & e_{12} & e_{14} \\ \hline & & \\ \hline & & e_{44} \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

- . Symétrie de translation par élément
- . Symétrie des éléments par rapport à la diagonale.

Remarque : La matrice T étant antisymétrique par bloc et la matrice r_{kl} étant symétrique, il en résulte que les matrices r_{11} seront nulles.

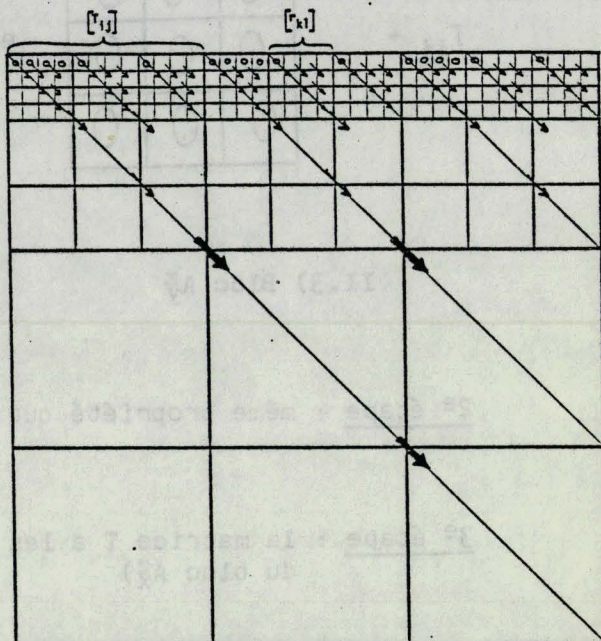
$$T_{ij} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \emptyset & & \\ \hline & \emptyset & \\ \hline & & \emptyset \\ \hline \end{array}$$

Modèles des différentes matrices $[A_{\vec{y}}]$



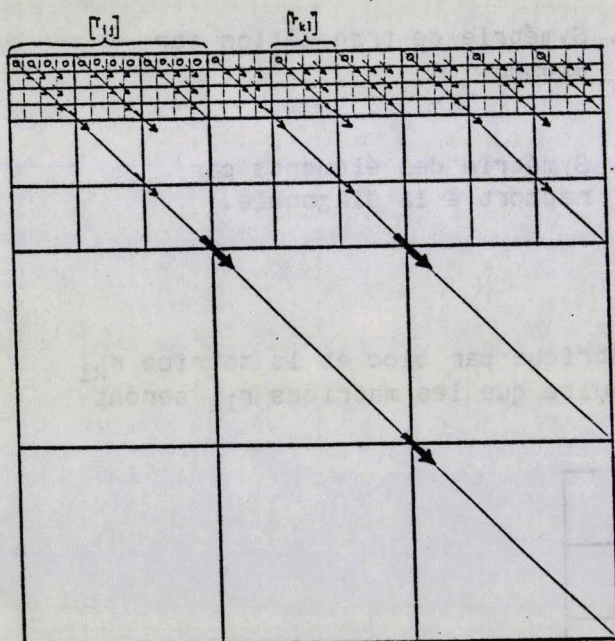
Modèle des matrices $[A_{\alpha}^{\alpha}]$

- la matrice $[A_{\alpha}^{\alpha}]$ est symétrique par bloc
- les sous-matrices $[r_{ij}]$ sont symétriques par bloc
- les sous-matrices $[r_{kl}]$ sont symétriques



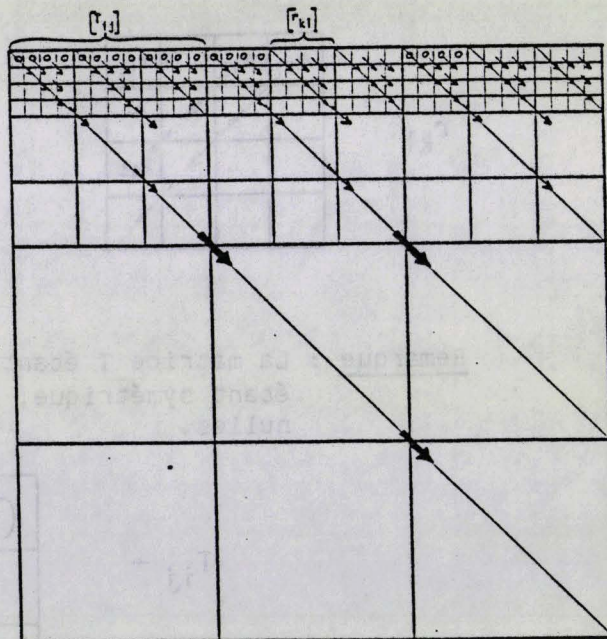
Modèle de la matrice $[A_x^x]$:

- la matrice $[A_x^x]$ est symétrique par bloc
- les sous-matrices $[r_{ij}]$ sont symétriques par bloc
- les sous-matrices $[r_{kl}]$ sont anti-symétriques
- il y a $(N_x + N_y - 1) N_x$ éléments nuls



Modèle de la matrice $[A_x^{\zeta}]$:

- la matrice $[A_x^{\zeta}]$ est symétrique par bloc
- les sous-matrices $[r_{ij}]$ sont anti-symétriques par bloc
- les sous-matrices $[r_{kl}]$ sont anti-symétriques
- il y a $(N_x + N_z - 1) N_y$ éléments nuls



Modèle de la matrice $[A_{\zeta}^{\zeta}]$:

- la matrice $[A_{\zeta}^{\zeta}]$ est symétrique par bloc
- les sous-matrices $[r_{ij}]$ sont anti-symétriques par bloc
- les sous-matrices $[r_{kl}]$ sont symétriques
- il y a $(N_y + N_z - 1) N_x$ éléments nuls