

N° d'ordre : 234



THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Nicolas J. DARAS

**DOMAINE DE CONVERGENCE D'UNE TRANSFORMATION
DE LA SUITE DES SOMMES PARTIELLES D'UNE FONCTION
HOLOMORPHE ET APPLICATIONS AUX
APPROXIMANTS DE TYPE PADÉ**

B.U. LILLE I



D 030 091240 2

Soutenue le 16 Juin 1988 devant la Commission d'Examen

Président :

Rapporteurs :

Examineur :

G.

J.J.

M.

C.

COEURE

LOEB

EIERMANN

BREZINSKI

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT
ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER,
DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF,
LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL,
PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

M. A. DUBRULLE.

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène
M. FOURET René
M. GABILLARD Robert
M. MONTREUIL Jean
M. PARREAU Michel
M. TRIDOT Gabriel

Electronique
Physique du solide
Electronique
Biochimie
Analyse
Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCOQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie végétale
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie-Physique
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DHAINAUT André	Biologie animale
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOCT Jacques	Métallurgie
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GRANELLE Jean Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie organique
M. LACOSTE Louis	Biologie végétale
M. LAVEINE Jean Pierre	Paléontologie
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique atomique et moléculaire
M. LEROY Jean Marie	Spectrochimie
M. LHOMME Jean	Chimie organique biologique
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie physique
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M. PAQUET Jacques	Géologie générale
M. PETIT Francis	Chimie organique
M. POUZET Pierre	Modélisation - Calcul scientifique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joel	Spectroscopie moléculaire
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
Mlle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. TILLIEU Jacques	Physique théorique
M. TOULOTTE Jean Marc	Automatique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ALLAMANDO Etienne	Composants électroniques
M. ANDRIES Jean Claude	Biologie des organismes
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie animale
M. BASSERY Louis	Génie des procédés et réactions chimiques
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique atomique et moléculaire
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques et Sociales
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie végétale
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie civil
M. BOIVIN Jean Claude	Spectrochimie
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie animale
M. CATTEAU Jean pierre	Chimie organique
M. CAYATTE Jean Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie structurale
M. CHIVE Maurice	Composants électroniques optiques
M. CONYN Gérard	Informatique théorique
M. COQUERY Jean Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques et Sociales
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique nucléaire et corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie organique
M. CRAMPON Norbert	Tectonique Géodynamique
M. CROSNIER Yves	Electronique
M. CURGY Jean jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELORME Pierre	Physiologie animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DEPRez Gilbert	Physique du solide - Cristallographie
M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
Mle DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DHAMELIN COURT Paul	Chimie physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides

M. DUPONT Christophe
 Mme EVRARD Micheline
 M. FAKIR Sabah
 M. FAUQUEMBERGUE Renaud
 M. FONTAINE Hubert
 M. FOUQUART Yves
 M. FOURNET Bernard
 M. GAMBLIN André
 M. GLORIEUX Pierre
 M. GOBLOT Rémi
 M. GOSSELIN Gabriel
 M. GOUDMAND Pierre
 M. GOURIEROUX Christian
 M. GREGORY Pierre
 M. GREMY Jean Paul
 M. GREVET Patrice
 M. GRIMBLOT Jean
 M. GUILBAULT Pierre
 M. HENRY Jean Pierre
 M. HERMAN Maurice
 M. HOUDART René
 M. JACOB Gérard
 M. JACOB Pierre
 M. JEAN Raymond
 M. JOFFRE Patrick
 M. JOURNAL Gérard
 M. KREMBEL Jean
 M. LANCRAND Claude
 M. LATTEUX Michel
 Mme LECLERCQ Ginette
 M. LEFEBVRE Jacques
 M. LEFEVRE Christian
 Mlle LEGRAND Denise
 Mlle LEGRAND Solange
 M. LEGRAND Pierre
 Mme LEHMANN Josiane
 M. LEMAIRE Jean
 M. LE MAROIS Henri
 M. LEROY Yves
 M. LESENNE Jacques
 M. LHENAFF René
 M. LOCQUENEUX Robert
 M. LOSFELD Joseph
 M. LOUAGE Francis
 M. MAHIEU Jean Marie
 M. MAIZIERES Christian
 M. MAURISSON Patrick
 M. MESMACQUE Gérard
 M. MESSELYN Jean
 M. MONTEL Marc
 M. MORCELLET Michel
 M. MORTREUX André
 Mme MOUNIER Yvonne
 M. NICOLE Jacques
 M. NOTELET Francis
 M. PARSY Fernand
 M. PECQUE Marcel
 M. PERROT Pierre

Vie de la firme (I.A.E.)
 Génie des procédés et réactions chimiques
 Algèbre
 Composants électroniques
 Dynamique des cristaux
 Optique atmosphérique
 Biochimie structurale
 Géographie urbaine, industrielle et démographie
 Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
 Algèbre
 Sociologie
 Chimie physique
 Probabilités et statistiques
 I.A.E.
 Sociologie
 Sciences Economiques
 Chimie organique
 Physiologie animale
 Génie mécanique
 Physique spatiale
 Physique atomique
 Informatique
 Probabilités et statistiques
 Biologie des populations végétales
 Vie de la firme (I.A.E.)
 Spectroscopie hertzienne
 Biochimie
 Probabilités et statistiques
 Informatique
 Catalyse
 Physique
 Pétrologie
 Algèbre
 Algèbre
 Chimie
 Analyse
 Spectroscopie hertzienne
 Vie de la firme (I.A.E.)
 Composants électroniques
 Systèmes électroniques
 Géographie
 Physique théorique
 Informatique
 Electronique
 Optique - Physique atomique
 Automatique
 Sciences Economiques et Sociales
 Génie Mécanique
 Physique atomique et moléculaire
 Physique du solide
 Chimie organique
 Chimie organique
 Physiologie des structures contractiles
 Spectrochimie
 Systèmes électroniques
 Mécanique
 Chimie organique
 Chimie appliquée

M. PERTUZON Emile
 M. PONSOLLE Louis
 M. PORCHET Maurice
 M. POSTAIRE Jack
 M. POVY Lucien
 M. RICHARD Alain
 M. RIETSCH François
 M. ROBINET Jean Claude
 M. ROGALSKI Marc
 M. ROY Jean Claude
 Mme SCHWARZBACH Yvette
 M. SLIWA Henri
 M. SONME Jean
 M. STAROSWIECKI Marcel
 M. STERBOUL François
 M. TAILLIEZ Roger
 M. THERY Pierre
 M. THIEBAULT François
 M. THUMERELLE Pierre
 Mme TJOTTA Jacqueline
 M. TOURSEL Bernard
 M. TREANTON Jean René
 M. TURREL Georges
 M. VANDORPE Bernard
 M. VASSEUR Christian
 M. VAST Pierre
 M. VERBERT André
 M. VERNET Philippe
 M. WACRENIER Jean Marie
 M. WALLART Francis
 M. WARTEL Michel
 M. WATERLOT Michel
 M. WEINSTEIN Olivier
 M. WERNER Georges
 M. WOZNIAK Michel
 Mme ZINN JUSTIN Nicole

Physiologie animale
 Chimie physique
 Biologie animale
 Informatique industrielle
 Automatique
 Biologie animale
 Physique des polymères
 EUDIL
 Analyse
 Psychophysiologie
 Géométrie
 Chimie organique
 Géographie
 Informatique
 Informatique
 Génie alimentaire
 Systèmes électroniques
 Sciences de la terre
 Démographie - Géographie Humaine
 Mathématiques
 Informatique
 Sociologie du Travail
 Spectrochimie infrarouge et Raman
 Chimie minérale
 Automatique
 Chimie inorganique
 Biochimie
 Génétique
 Electronique
 Spectrochimie infrarouge et Raman
 Chimie inorganique
 Géologie générale
 Analyse économique de la recherche et développement
 Informatique théorique
 Spectrochimie
 Algèbre

Claude Brezinski a choisi le sujet de ma thèse. Ses articles sur l'approximation de type Padé constituaient pour moi le premier contact sérieux avec cette matière passionnante. Les discussions mathématiques et autres que j'ai eues avec lui ont été très enrichissantes parce que d'une part elles m'ont permis de bénéficier constamment de ses conseils et encouragements et que d'autre part elles m'ont rendu conscient de la valeur éducatrice des mathématiques. Je le remercie chaleureusement d'avoir guidé mon travail.

Je suis heureux de pouvoir exprimer à Gérard Coeuré toute ma reconnaissance pour sa collaboration, son intérêt et son aide. Sa philosophie, ses conseils et ses méthodes m'ont beaucoup aidé pour la préparation de ma thèse. Toutes les discussions que j'ai eues avec lui m'ont fait la preuve de son souci de qualité et de son profond dévouement à son travail. Ce fut un grand honneur pour moi de pouvoir connaître et apprécier ce grand mathématicien.

Je voudrais remercier tout spécialement Jean Jacques Loeb, pour son aide, son soutien constant et ses plusieurs remarques déterminantes. Ma thèse lui doit beaucoup.

M. Eiermann, dont l'article sur la convergence des approximations de type Padé vers des fonctions holomorphes a exercé une grande influence sur ma thèse, a bien voulu rapporter sur mes résultats. Je lui exprime toute ma gratitude.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction et Notations

Chapitre I. Domaine de convergence d'une transformation de la suite des sommes partielles d'une fonction holomorphe

- § 1. Préliminaires
- § 2. Les cas d'un polydisque de centre 0 et de $\mathbb{C}^n$
- § 3. Le cas général
- § 4. Le théorème d'Okada, Gawronski et Trautner
dans le cas de plusieurs variables complexes

Chapitre II. Applications à quelques exemples d'approximants de type Padé

- § 1. Un théorème concernant la convergence des
approximants de type Padé vers les fonctions
holomorphes
- § 2. Quatre exemples de convergence des approximants
de type Padé

Références

Introduction et Notations

L'efficacité de la notion des approximants de type Padé a été étudiée dans l'article "On the convergence of Padé-type approximants to analytic functions", ([9]). Le critère d'estimation de cette efficacité est la convergence des ces approximants vers des fonctions qui sont holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. L'outil pour cette estimation était un théorème, dû à M. Eiermann ([9], Theorem 3.) Le théorème constitue la généralisation naturelle du théorème classique de Y. Okada ([25], [26] ou [11]).

Dans le cas de plusieurs variables complexes, il y a deux versions du théorème d'Eiermann, mais ces versions ne sont plus toujours valables. Il existe même des ouverts d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$, pour lesquels les versions précédentes ne sont pas vraies. Lorsque $n=1$, toutes les démonstrations se basent sur l'utilisation de la formule intégrale de Cauchy. Or, il est logique de chercher à réaliser la généralisation du théorème d'Eiermann en examinant d'abord les cas d'un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$, de centre 0 et de $\mathbb{C}^n$ tout entier. Dans le paragraphe 1.2. on verra que dans ces cas on obtient les deux versions du théorème d'Eiermann. La méthode choisie pour obtenir cette conclusion s'inspire directement de celle qu'Eiermann utilise dans le cas d'un disque de centre 0. Dans le paragraphe 1.3., on examinera le cas général d'un ouvert quelconque de $\mathbb{C}^n$, contenant l'origine. On aura l'occasion de souligner quelques différences entre les cas où $n=1$ et $n>1$.

La deuxième version est plus compliquée que la première, mais, par contre, beaucoup plus utile pour l'application aux approximations de type Padé. Les applications sont présentées dans le deuxième chapitre. L'existence d'ouverts d'holomorphie et d'ouverts de Runge, ne vérifiant aucune de versions du théorème d'Eiermann nous conduit vers d'autres idées et d'autres résultats, afin de pouvoir sortir de ce comportement exceptionnel de plusieurs variables. Les idées se trouvent à la fin du paragraphe I.3. Le paragraphe I.4. est consacré à la généralisation du théorème d'Okada dans le cas de $\mathbb{C}^n$. Dans le deuxième chapitre on étudiera la convergence des approximations de type Padé vers les fonctions holomorphes dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$, qui vérifie la deuxième version du théorème d'Eiermann et on donnera quatre exemples.

Puisque d'une part il y a une analogie absolue entre les cas de 2 et de n variables (en ce qui concerne la méthodologie des démonstrations et la validité des résultats) et que d'autre part le formalisme utilisé dans le cas de 2 variables est plus simple et plus clair que le formalisme utilisé pour le cas de n variables, il semble plus pédagogique d'accorder une importance supplémentaire à la présentation du cas de 2 variables. Ainsi, dans les démonstrations où le formalisme devient compliqué, on préférera considérer premièrement le cas de 2 variables.

Pour les points génériques de $\mathbb{C}^n$, on utilise la notation $z = (z_1, \dots, z_n)$, avec $z_j \in \mathbb{C}$ ($j = 1, 2, \dots, n$). On note $\Delta^n(w; r) = \Delta^n(w_1, \dots, w_n; r_1, \dots, r_n)$ et $\frac{\Delta^n(w; r)}{r_1, \dots, r_n}$ les polydisques ouverts et fermés (respectivement)

de $\mathbb{C}^n$ dont le centre se trouve au point $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ et dont la polyrayon est $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. $\partial \Delta^n(w; r)$ sera le bord de $\Delta^n(w; r)$ (ou de $\overline{\Delta^n(w; r)}$). Si $n=1$, on utilisera $\Delta(w; r)$, $\overline{\Delta(w; r)}$ et $\partial \Delta(w; r)$, au lieu de $\Delta^1(w; r)$, $\overline{\Delta^1(w; r)}$ et $\partial \Delta^1(w; r)$. Si X est un ensemble de $\mathbb{C}^n$, alors on note $\text{int}(X)$ son intérieur. La fonction $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ sera la distance euclidienne. $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ est la notation utilisée pour désigner l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ étant un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Dans le cas où w est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ fortement inclus dans $\mathcal{U}$, c'est-à-dire $\overline{w}$ compact et $\overline{w} \subset \mathcal{U}$, on écrira $w \subset\subset \mathcal{U}$. Si $j=1, 2, \dots, n$, $\text{pr}_j(\mathcal{U})$ sera la j -projection de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire l'ensemble $\{ \zeta \in \mathbb{C} ; \exists (z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \text{ tel que } (z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_n) \in \mathcal{U} \}$. La fin d'une démonstration sera notée par $\blacksquare$ et les références par [...].

CHAPITRE PREMIER

DOMAINE DE CONVERGENCE D' UNE TRANSFORMATION DE LA SUITE DES SOMMES PARTIEL- LES D'UNE FONCTION HOLOMORPHE.

§ 1. Préliminaires

Soit $\mathbb{I}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $0 \in \mathbb{I}$ et $n+1$ matrices infinies $\mathcal{N}(z) := (\sigma_{m,k}(z))_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots}$, $\mathcal{N}_j(z) := (\sigma_{m,k}^j(z))_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots}$, où $\sigma_{m,k}$ et $\sigma_{m,k}^j$ ($j=1,2,\dots,n$) sont de fonctions complexes de $\mathbb{C}^n$, pour tout $m=0,1,2,\dots$ et pour tout $k=0,1,2,\dots$. Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{I})$ et f s'écrit dans un voisinage de 0 , sous la forme $f(w_1, \dots, w_n) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^f w_1^{\nu_1} \dots w_n^{\nu_n}$, alors la $\mathcal{N}(z)$ -transformation de la suite des sommes partielles de f , dans un voisinage de 0 , sera la suite:

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{m,k}(z) \cdot \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^k a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^f z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n} ; \quad z = (z_1, \dots, z_n) , \quad m = 0, 1, 2, \dots \right\},$$

pour $z \in \mathbb{C}^n$, tandis que la $(\mathcal{N}_1(z), \dots, \mathcal{N}_n(z))$ -transformation de la suite des sommes partielles de f , dans un voisinage de 0 , sera la suite :

$$\left\{ \sum_{k_1=0}^{\infty} \sigma_{m_1, k_1}^1(z) \cdot \sum_{\nu_1=0}^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \sigma_{m_2, k_2}^2(z) \cdot \sum_{\nu_2=0}^{k_2} \left(\dots \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} \sigma_{m_n, k_n}^n(z) \cdot \sum_{\nu_n=0}^{k_n} a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^f z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n} \right) \dots \right) \right);$$

$$z = (z_1, \dots, z_n) , \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots, m_2 = 0, 1, 2, \dots, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

pour $z \in \mathbb{C}^n$. Considérons les ensembles :

$$P_{\mathcal{N}(\cdot)}^{\mathbb{I}} := \left\{ P' \subseteq \mathbb{I} ; \text{ la } \mathcal{N}(z)\text{-transformation de la suite des sommes partielles de toute } f \in \mathcal{O}(\mathbb{I}), \text{ dans un voisinage de } 0, \text{ est définie et converge vers } f(z), \text{ uniformément dans tout compact de } P' \text{ (si } m \rightarrow \infty) \right\},$$

$$P_{\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu(\cdot)}}^{\mathbb{I}} := \left\{ P' \subseteq \mathbb{I} ; \text{ la } (\mathcal{N}_{\lambda_1}(z), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(z))\text{-transformation de la suite des sommes partielles de toute } f \in \mathcal{O}(\mathbb{I}), \text{ dans un voisinage de } 0, \text{ est définie et converge vers } f(z), \text{ uniformément dans tout compact de } P', \text{ lorsque } m_{\lambda_1} \rightarrow \infty, \dots, m_{\lambda_\mu} \rightarrow \infty \right\}.$$

Introduisons maintenant les notations qu'on utilisera dans la suite. Posons :

$$E_{\mathcal{N}(\cdot)}^n(\mathcal{O}(\mathbb{I})) := \bigcup_{P' \in P_{\mathcal{N}(\cdot)}^{\mathbb{I}}} P',$$

$$E_{\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu(\cdot)}}^n(\mathcal{O}(\mathbb{I})) := \bigcup_{P'' \in P_{\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu(\cdot)}}^{\mathbb{I}}} P''.$$

Dans ce chapitre on essaiera de préciser quelques domaines, qui sont contenus dans $E_{\mathcal{N}(\cdot)}^n(\mathcal{O}(\mathbb{I}))$ ou dans $E_{\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu(\cdot)}}^n(\mathcal{O}(\mathbb{I}))$.

Pour l'instant, rappelons que si $n=1$ et si $\mathcal{M} = (\pi_{m,k})_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,\dots,m}$ est une matrice triangulaire de constantes complexes, on a le résultat suivant ([11]):

$$(G.T.) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si la suite } \left\{ \sum_{k=0}^m \pi_{m,k} \cdot \sum_{v=0}^k z^v ; m=0,1,2,\dots \right\} \text{ converge vers } (1-z)^{-1}, \\ \text{uniformément dans tout compact d'un ouvert } H \subseteq \mathbb{C}, \text{ qui contient } 0, \text{ alors} \\ \bigcap_{\mathfrak{J} \notin \mathbb{I}} \mathfrak{J} \cdot H := \bigcap_{\mathfrak{J} \notin \mathbb{I}} \{ \mathfrak{J} \cdot \eta ; \eta \in H \} = E_{\mathcal{M}}^1(\mathcal{O}(\mathbb{I})). \end{array} \right.$$

§2. Les cas d'un polydisque de centre 0 et de $\mathbb{C}^n$.

Soit $(n+1)$ matrices infinies de fonctions complexes sur $\mathbb{C}^n$ $\mathcal{N}(z) := (\sigma_{m,k}(z))$
 $m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots$, $\mathcal{N}_j(z) := (\sigma_{m,k}^j(z))_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots}$ ($j=1,2,\dots,n$). Considérons
 les suites de fonctions à $2n$ variables complexes $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n$:

$$(1.1.) \quad \left\{ p_m(x; z) = p_m(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_n) \quad ; \quad m=0,1,2,\dots \right\},$$

$$(1.2.) \quad \left\{ q_{m_1, \dots, m_n}(x; z) = q_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_n) \quad ; \quad m_1, \dots, m_n = 0,1,2,\dots \right\},$$

où on a posé :

$$(1.3.) \quad p_m(x; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{m,k}(z) \cdot \sum_{\substack{v_1, \dots, v_n=0 \\ v_1+\dots+v_n=k}}^k x_1^{v_1} z_1^{v_1} \dots x_n^{v_n} z_n^{v_n},$$

$$(1.4.) \quad q_{m_1, \dots, m_n}(x; z) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sigma_{m_1, k_1}^1(z) \cdot \sum_{v_1=0}^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \sigma_{m_2, k_2}^2(z) \cdot \sum_{v_2=0}^{k_2} \left(\dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} \sigma_{m_n, k_n}^n(z) \cdot \sum_{v_n=0}^{k_n} x_1^{v_1} z_1^{v_1} \dots x_n^{v_n} z_n^{v_n} \right) \dots \right) \right).$$

Evidemment, si les matrices $\mathcal{N}(z)$ et $\mathcal{N}_j(z)$ sont triangulaires ($j=1,2,\dots,n$), alors

$$(1.3)' \quad p_m(x; z) = \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(z) \cdot \sum_{\substack{v_1, \dots, v_n=0 \\ v_1+\dots+v_n=k}}^k x_1^{v_1} z_1^{v_1} \dots x_n^{v_n} z_n^{v_n}$$

$$(1.4)' \quad q_{m_1, \dots, m_n}(x; z) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sigma_{m_1, k_1}^1(z) \sum_{v_1=0}^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{m_2} \sigma_{m_2, k_2}^2(z) \cdot \sum_{v_2=0}^{k_2} \left(\dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots \left(\sum_{k_n=0}^{m_n} \sigma_{m_n, k_n}^n(z) \cdot \sum_{v_n=0}^{k_n} x_1^{v_1} z_1^{v_1} \dots x_n^{v_n} z_n^{v_n} \right) \dots \right) \right).$$

Dans la suite on supposera que $\omega(\mathcal{N}(\cdot))$ est l'ouvert maximal de $\mathbb{C}^{2n} \setminus \{ (x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) ; x_j \cdot z_j = 1 \}$, dans lequel les fonctions $p_m(x; z)$ sont définies, continues et convergent vers $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$ (si $m \rightarrow \infty$) uniformément dans tout compact, tandis que $\omega(\mathcal{N}_1(\cdot), \dots, \mathcal{N}_p(\cdot))$ l'ouvert maximal de $\mathbb{C}^{2n} \setminus \{ (x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) ; x_j \cdot z_j = 1 \}$, dans lequel les fonctions $q_{m_1, \dots, m_n}(x; z)$ sont définies, continues et convergent vers $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$, lorsque $m_1 \rightarrow \infty, \dots, m_p \rightarrow \infty$, uniformément dans tout compact.

1.2.1. Proposition

(a) . Soit $\Delta^n(0; \delta) = \Delta^n(0, \dots, 0; \delta_1, \dots, \delta_n)$ un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$, de centre 0 et de polyrayon $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$.

Alors, pour toute matrice $\mathcal{N}(z)$,

$$\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; (\zeta_1, \dots, \zeta_n, z_1, \dots, z_n) \in \omega(\mathcal{N}(\cdot)), \text{ si } |\zeta_1| \leq \frac{1}{\delta_1}, \dots, |\zeta_n| \leq \frac{1}{\delta_n}\}$$

est un ouvert sousensemble de $\Delta^n(0; \delta)$.

(b) . Soit $\Delta^n(0; \delta) = \Delta^n(0, \dots, 0; \delta_1, \dots, \delta_n)$ un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$, de centre 0 et de polyrayon $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$.

Alors, pour toute matrice $\mathcal{N}_j(z)$ ($j = 1, 2, \dots, n$),

$$\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; (\zeta_1, \dots, \zeta_n, z_1, \dots, z_n) \in \omega(\mathcal{N}_1(\cdot), \dots, \mathcal{N}_n(\cdot)), \text{ si } |\zeta_1| \leq \frac{1}{\delta_1}, \dots, |\zeta_n| \leq \frac{1}{\delta_n}\}$$

est un ouvert sousensemble de $\Delta^n(0; \delta)$.

Démonstration

Pour $\omega = \omega(\mathcal{N}(\cdot)), \omega(\mathcal{N}_1(\cdot), \dots, \mathcal{N}_n(\cdot))$, posons

$$g(\omega; \Delta^n(0; \delta)) := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; (\zeta_1, \dots, \zeta_n, z_1, \dots, z_n) \in \omega, \text{ si } |\zeta_1| \leq \frac{1}{\delta_1}, \dots, |\zeta_n| \leq \frac{1}{\delta_n}\}.$$

Considérons premièrement le cas de 2 variables complexes. Posons

$$[(\Delta(0; \delta_1))^c]_*^{-1} [(\Delta(0; \delta_2))^c]_*^{-1} := \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2; 0 \leq |\zeta_1| \leq \frac{1}{\delta_1}, 0 \leq |\zeta_2| \leq \frac{1}{\delta_2}\}.$$

On peut alors écrire $g(\omega; \Delta^2(0; \delta)) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; (\zeta_1, \zeta_2, z_1, z_2) \in \omega, \forall (\zeta_1, \zeta_2) \in [(\Delta(0; \delta_1))^c]_*^{-1} \times [(\Delta(0; \delta_2))^c]_*^{-1}\}.$

$(\omega = \omega(\mathcal{N}(\cdot), \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p}(\cdot)))$). Soit $z = (z_1, z_2) \in g(\omega; \Delta^2(0; \delta))$. Puisque ω est un ouvert de $\mathbb{C}^4$, on constate que si $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) \in [(\Delta(0; \delta_1))^c]^{-1} \times [(\Delta(0; \delta_2))^c]^{-1}$, alors il existe $\varepsilon_1(\mathcal{Z}) > 0, \varepsilon_2(\mathcal{Z}), \eta_1(\mathcal{Z}) > 0, \eta_2(\mathcal{Z}) > 0$, tels que

$$\left. \begin{array}{l} \forall (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) \in \mathbb{C}^2, \text{ avec } |\mathcal{Z}_1 - \bar{\mathcal{Z}}_1| < \varepsilon_1(\mathcal{Z}), \\ \quad \quad \quad |\mathcal{Z}_2 - \bar{\mathcal{Z}}_2| < \varepsilon_2(\mathcal{Z}), \\ \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \text{ avec } |(z_0)_1 - z_1| < \eta_1(\mathcal{Z}), \\ \quad \quad \quad |(z_0)_2 - z_2| < \eta_2(\mathcal{Z}), \end{array} \right\} \Rightarrow (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, z_1, z_2) \in \omega,$$

où $\omega = \omega(\mathcal{N}(\cdot), \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p}(\cdot)))$. Comme $[(\Delta(0; \delta_1))^c]^{-1} \times [(\Delta(0; \delta_2))^c]^{-1}$ est un compact de $\mathbb{C}^2$, on peut trouver $\mathcal{Z}^1 = (\mathcal{Z}^1_1, \mathcal{Z}^1_2) \in [(\Delta(0; \delta_1))^c]^{-1} \times [(\Delta(0; \delta_2))^c]^{-1}, \dots, \mathcal{Z}^N = (\mathcal{Z}^N_1, \mathcal{Z}^N_2) \in [(\Delta(0; \delta_1))^c]^{-1} \times [(\Delta(0; \delta_2))^c]^{-1}$, tels que

$$[(\Delta(0; \delta_1))^c]^{-1} \times [(\Delta(0; \delta_2))^c]^{-1} \equiv \bigcup_{i=1}^N \Delta^2((\mathcal{Z}^i_1, \mathcal{Z}^i_2); \varepsilon_1(\mathcal{Z}^i), \varepsilon_2(\mathcal{Z}^i)).$$

En choisissant

$$r_1 = \min \{ \eta_1(\mathcal{Z}^i) ; i = 1, 2, \dots, N \}, \quad r_2 = \min \{ \eta_2(\mathcal{Z}^i) ; i = 1, 2, \dots, N \},$$

on obtient $(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, z_1, z_2) \in \omega$, $\forall (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) \in [(\Delta(0; \delta_1))^c]^{-1} \times [(\Delta(0; \delta_2))^c]^{-1}$ et $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, tel que $|(z_0)_1 - z_1| < r_1$, $|(z_0)_2 - z_2| < r_2$, c'est-à-dire

$$\Delta^2((z_0)_1, (z_0)_2; r_1, r_2) = g(\omega; \Delta^2(0; \delta)).$$

Donc, $g(\omega; \Delta^2(0; \delta))$ est un ouvert de $\mathbb{C}^2$ ($\omega = \omega(\mathcal{N}(\cdot), \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p}(\cdot)))$).

Soit maintenant $z = (z_1, z_2) \notin \Delta^2(0; \delta)$. Supposons sans restreindre la généralité que $\delta_1 \leq |z_1| \leq \infty$. Si $z \in g(\omega; \Delta^2(0; \delta))$ ($\omega = \omega(\mathcal{N}(\cdot), \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p}(\cdot)))$), alors $(\mathcal{Z}_1^{-1}, \mathcal{Z}_2^{-1}, z_1, z_2) \in \omega$, pour $\delta_1 \leq |\mathcal{Z}_1^{-1}| \leq \infty$, $\delta_2 \leq |\mathcal{Z}_2^{-1}| \leq \infty$. En choisissant $\mathcal{Z}_1 = z_1$, on constate que la suite $p_m(\mathcal{Z}_1^{-1}, \mathcal{Z}_2^{-1}; z_1, z_2)$ (ou si $\omega = \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p}(\cdot))$, la suite $q_{m_1, m_2}(\mathcal{Z}_1^{-1}, \mathcal{Z}_2^{-1}; z_1, z_2)$) converge vers $(1 - \mathcal{Z}_1^{-1} z_1)^{-1} (1 - \mathcal{Z}_2^{-1} z_2)^{-1}$, lorsque $m \rightarrow \infty$ (respectivement lorsque $m_{\lambda_1} \rightarrow \infty, \dots, m_{\lambda_p} \rightarrow \infty$). Ceci est absurde et par conséquent $z \notin g(\omega; \Delta^2(0; \delta))$.

Si $n > 2$, la démonstration reste pareille. ■

Dans la démonstration de la Proposition 1.2.1., on a défini l'ensemble $g(w; \Delta^n(0, \delta))$, pour $w = w(\mathcal{N}(\cdot)), w(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot))$. On peut généraliser la définition d'un tel ensemble, dans le cas d'un ouvert quelconque de $\mathbb{C}^n$, qui contient l'origine : si $\mathbb{I}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, tel que $0 \in \mathbb{I}$, choisissons :

$$(1.5.) \quad g(w; \mathbb{I}) := \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \left(\overline{z_1}^{-1}, \dots, \overline{z_n}^{-1} \right) \in \omega, \right. \\ \left. \forall z_i \in \mathbb{C} \setminus pr_i(\mathbb{I}), \dots, \forall z_n \in \mathbb{C} \setminus pr_n(\mathbb{I}) \right\}$$

$$(w = w(\mathcal{N}(\cdot), w(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)))$$

Il est clair que si $n=1$ et $\mathbb{I}$ est connexe, alors pour obtenir le résultat (G.I.) il suffit de choisir $w(\mathcal{N}(\cdot)) = w(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)) = \{(x, z) \in \mathbb{C}^2; x, z \in H\}$, car dans ce cas, $g(w(\mathcal{N}(\cdot))) = g(w(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot))) = \bigcap_{z \notin \mathbb{I}} z.H$. Notre intention est de donner quelques réponses à la question naturelle de savoir si les inclusions

$$g(w(\mathcal{N}(\cdot); \mathbb{I})) \subseteq E_{\mathcal{N}(\cdot)}^n(\partial(\mathbb{I})), \quad g(w(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot); \mathbb{I})) \subseteq E_{\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)}^n(\partial(\mathbb{I}))$$

restent ou non valables dans le cas de plusieurs variables complexes. Rappelons que si $n=1$, M. Eiermann a démontré que ces inclusions sont toujours valables, sous la seule condition que $\mathbb{I}$ est connexe ([9]). Dans ce paragraphe on étudiera les cas d'un polydisque $\Delta^n(0, \delta) = \Delta^n(0, \dots, 0; \delta_1, \dots, \delta_n)$ de $\mathbb{C}^n$, de centre 0 et de polyrayon $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ et de $\mathbb{C}^n$. Ensuite, dans le paragraphe 3., on examinera le cas général d'un ouvert quelconque de $\mathbb{C}^n$, contenant 0. Pour l'instant remarquons que :

$$g(w; \Delta^n(0, \delta)) = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \left(\overline{z_1}^{-1}, \dots, \overline{z_n}^{-1} \right) \in \omega, \text{ si } |\overline{z_i}| \leq \frac{1}{\delta_i}, \dots, |\overline{z_n}| \leq \frac{1}{\delta_n} \right\},$$

$$g(w; \mathbb{C}^n) = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; (0, \dots, 0, z_1, \dots, z_n) \in \omega \right\}$$

$$(w = w(\mathcal{N}(\cdot), w(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)))$$

Le premier théorème essentiel de ce paragraphe est le suivant :

1.2.2. Théorème

Soit $\Delta^n(0; \delta) = \Delta^n(0, \dots, 0; \delta_1, \dots, \delta_n)$ un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$, de centre 0 et de polyrayon $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$. Si les matrices $\mathcal{N}(z), \mathcal{N}_j(z)$ ($j=1, 2, \dots, n$) sont triangulaires, alors :

$$(a) \quad g(w(\mathcal{N}^{(1)}); \Delta^n(0; \delta)) = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; (z_1, \dots, z_n, z_1, \dots, z_n) \in w(\mathcal{N}^{(1)}), \right. \\ \left. \forall |z_1| \leq \frac{1}{\delta_1}, \dots, \forall |z_n| \leq \frac{1}{\delta_n} \right\}$$

$\equiv$

$$E_{\mathcal{N}^{(1)}}^n(0(\Delta^n(0; \delta))) ;$$

$$(b) \quad g(w(\mathcal{N}_{\lambda_1}^{(1)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}^{(1)}); \Delta^n(0; \delta)) = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; (z_1, \dots, z_n, z_1, \dots, z_n) \in \right. \\ \left. w(\mathcal{N}_{\lambda_1}^{(1)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}^{(1)}), \forall |z_1| \leq \frac{1}{\delta_1}, \dots, \forall |z_n| \leq \frac{1}{\delta_n} \right\}$$

$\equiv$

$$E_{\mathcal{N}_{\lambda_1}^{(1)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}^{(1)}}^n(0(\Delta^n(0; \delta))) .$$

Démonstration

Soit $w = w(\mathcal{N}^{(1)})$, $w(\mathcal{N}_{\lambda_1}^{(1)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}^{(1)})$ et soit K un sousensemble compact de $g(w; \Delta^n(0; \delta))$. Par définition de $g(w; \Delta^n(0; \delta))$, le produit $\overline{\Delta^n(0, \dots, 0; \frac{1}{\delta_1}, \dots, \frac{1}{\delta_n})} \times K$ est un compact contenu dans l'ouvert w . Il existe donc $(\delta'_1, \dots, \delta'_n)$ ($0 < \delta'_1 < \delta_1, \dots, 0 < \delta'_n < \delta_n$), tel que le produit $\overline{\Delta^n(0, \dots, 0; \frac{1}{\delta'_1}, \dots, \frac{1}{\delta'_n})} \times K$ soit contenu dans w . Le résultat

du théorème est une conséquence immédiate du Lemme suivant :

I.2.3. Lemme

Soit $\Delta^n(0; \delta) = \Delta^n(0, \dots, 0; \delta_1, \dots, \delta_n)$ un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$, de centre 0 et de polyrayon $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$. Si K est un compact de $\Delta^n(0; \delta)$, alors on peut trouver un autre polydisque $\Delta^n(0; \delta') = \Delta^n(0, \dots, 0; \delta'_1, \dots, \delta'_n)$, tel que $K \subset \overline{\Delta^n(0; \delta')} \subset \Delta^n(0; \delta)$.

(a). Supposons que $\mathcal{N}(z)$ soit une matrice triangulaire et que les fonctions $p_m(x; z)$ soient définies et continues sur $[\partial \Delta^n(0; \delta')]^{-1} \times K := \{(t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}); (t_1, \dots, t_n) \in \partial \Delta^n(0; \delta')\} \times K$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Si $f \in \mathcal{O}(\Delta^n(0; \delta))$, alors on a

$$\sup_{z \in K} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{m, k}(z) \cdot \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^k a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^f z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n} \right| \leq L(f; \partial \Delta^n(0; \delta')) \cdot \sup_{(t, z) \in [\partial \Delta^n(0; \delta')]^{-1} \times K} \left| (1-t_1 z_1)^{-1} \dots (1-t_n z_n)^{-1} - p_m(t; z) \right|,$$

$\forall m = 0, 1, 2, \dots$, où $L(f; \partial \Delta^n(0; \delta'))$ est une constante positive qui dépend de f et de $\partial \Delta^n(0; \delta')$, mais qui est indépendante de m et de K .

(b). Supposons que $\mathcal{N}_j(z)$, $j = 1, 2, \dots, n$, soient des matrices triangulaires et que les fonctions $q_{m_1, \dots, m_n}(x; z)$ soient continues sur $[\partial \Delta^n(0; \delta')]^{-1} \times K$, $m_1 = 0, 1, 2, \dots, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots$. Si $f \in \mathcal{O}(\Delta^n(0; \delta))$, alors $\forall m_i = 0, 1, 2, \dots$ ($i = 1, 2, \dots, n$), on a

$$\sup_{z \in K} \left| f(z) - \sum_{k_1=0}^{\infty} \sigma_{m_1, k_1}^1(z) \sum_{\nu_1=0}^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \sigma_{m_2, k_2}^2(z) \sum_{\nu_2=0}^{k_2} \left(\dots \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} \sigma_{m_n, k_n}^n(z) \sum_{\nu_n=0}^{k_n} a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^f z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n} \right) \dots \right) \right) \right| \leq$$

$$M(f; \partial \Delta^n(0; \delta')) \cdot \sup_{(t, z) \in [\partial \Delta^n(0; \delta')]^{-1} \times K} \left| (1-t_1 z_1)^{-1} \dots (1-t_n z_n)^{-1} - q_{m_1, \dots, m_n}(t; z) \right|,$$

où $M(f; \partial \Delta^n(0; \delta'))$ est une constante positive dépendante de f et de $\partial \Delta^n(0; \delta')$, mais qui ne dépend pas de $m_1, \dots, m_n, K$.

La démonstration du Lemme 1.2.3.

(a). Soit $f \in \mathcal{O}(\Delta^n(0; \delta))$. Il existe une série entière $\sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} a_{v_1, \dots, v_n}^f u_1^{v_1} \dots u_n^{v_n}$ (et une seule), telle que $f(u) = \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} a_{v_1, \dots, v_n}^f u_1^{v_1} \dots u_n^{v_n}$ ($u = (u_1, \dots, u_n) \in \Delta^n(0; \delta)$). Associons à f une forme linéaire Λ_f , définie sur l'espace des polynômes à n variables complexes :

$$(1.6.) \quad \Lambda_f(x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n}) := a_{v_1, \dots, v_n}^f \quad (v_i = 0, 1, 2, \dots).$$

Remarquons que Λ_f est une forme continue. En effet, si $\sum_{v_1=0}^{i_1} \dots \sum_{v_n=0}^{i_n} b_{v_1, \dots, v_n} x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n}$ est un polynôme à n variables complexes $x_1, \dots, x_n$, alors

$$|\Lambda_f(\sum_{v_1=0}^{i_1} \dots \sum_{v_n=0}^{i_n} b_{v_1, \dots, v_n} x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n})| \stackrel{(1.6.)}{=} |\sum_{v_1=0}^{i_1} \dots \sum_{v_n=0}^{i_n} b_{v_1, \dots, v_n} a_{v_1, \dots, v_n}^f| =$$

(en appliquant la formule intégrale de Cauchy)

$$= |\sum_{v_1=0}^{i_1} \dots \sum_{v_n=0}^{i_n} b_{v_1, \dots, v_n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^n} \cdot \int_{|z_j|=p_j} \frac{f(z)}{z_1^{v_1+1} \dots z_n^{v_n+1}} dz_1 \dots dz_n| \leq$$

$$\leq C_f(p_1, \dots, p_n) \cdot \sup_{|x_1|=p_1, \dots, |x_n|=p_n} |\sum_{v_1=0}^{i_1} \dots \sum_{v_n=0}^{i_n} b_{v_1, \dots, v_n} x_1^{-v_1} \dots x_n^{-v_n}| \leq$$

$$\leq C_f(p_1, \dots, p_n) \cdot \sup_{|x_1| \leq p_1^{-1}, \dots, |x_n| \leq p_n^{-1}} |\sum_{v_1=0}^{i_1} \dots \sum_{v_n=0}^{i_n} b_{v_1, \dots, v_n} x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n}|.$$

Ainsi, par densité, Λ_f se prolonge continuellement dans $\mathcal{O}(\overline{\Delta^n(0, \dots, 0; \delta_1^{-1}, \dots, \delta_n^{-1})})$. Par conséquent, si $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Delta^n(0; \delta)$ et z est fixé, on peut définir le nombre $\Lambda_f((1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1})$. Puisque $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1} = \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} x_1^{v_1} z_1^{v_1} \dots x_n^{v_n} z_n^{v_n}$ et grâce à la continuité du fonctionnel Λ_f , dans un ensemble $\mathcal{O}(\Delta^n(0, \dots, 0; p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}))$ convenablement choisi, on constate que si $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Delta^n(0; \delta)$ est fixé, alors $\Lambda_f(\sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} x_1^{v_1} z_1^{v_1} \dots x_n^{v_n} z_n^{v_n}) = \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} \Lambda_f(x_1^{v_1} z_1^{v_1} \dots x_n^{v_n} z_n^{v_n})$. Donc, pour

$z = (z_1, \dots, z_n) \in \Delta^n(0, \delta)$ fixé, on a

$$(1.7.) \quad \Lambda_f \left((1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1} \right) = f(z).$$

Soit maintenant $z = (z_1, \dots, z_n) \in K$. Grâce à la triangularité de la matrice $N(z)$, on a $p_m(x; z) = \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(z) \cdot \sum_{\substack{y_1, \dots, y_n=0 \\ y_1, \dots, y_n}}^k \frac{x_1^{y_1} \dots x_n^{y_n}}{x_1 z_1 \dots x_n z_n} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$ et, par conséquent la linéarité de Λ_f , par rapport à $(x_1, \dots, x_n)$ implique que :

$$(1.8.) \quad \Lambda_f(p_m(x; z)) = \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(z) \cdot \sum_{\substack{y_1, \dots, y_n=0 \\ y_1, \dots, y_n}}^k \frac{f(x_1^{y_1} \dots x_n^{y_n} z_1^{y_1} \dots z_n^{y_n})}{f(x_1^{y_1} \dots x_n^{y_n} z_1^{y_1} \dots z_n^{y_n})} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(z) \cdot \sum_{\substack{y_1, \dots, y_n=0 \\ y_1, \dots, y_n}}^k \frac{f(x_1^{y_1} \dots x_n^{y_n} z_1^{y_1} \dots z_n^{y_n})}{f(x_1^{y_1} \dots x_n^{y_n} z_1^{y_1} \dots z_n^{y_n})} \right| &= \text{(en appliquant la formule intégrale de Cauchy)} \\ &= \left| \Lambda_f \left(\left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \cdot \int_{\text{set}[\Delta^n(0, \delta')^{-1}]} \frac{(1-s_1 z_1)^{-1} \dots (1-s_n z_n)^{-1}}{(s_1 - x_1) \dots (s_n - x_n)} ds_1 \dots ds_n - \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \cdot \int_{\text{set}[\Delta^n(0, \delta')^{-1}]} \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{p_m(s; z)}{(s_1 - x_1) \dots (s_n - x_n)} ds_1 \dots ds_n \right) = \left| \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \cdot \int_{\text{set}[\Delta^n(0, \delta')^{-1}]} \left[\Lambda_f \left(\frac{s_1^{-1} \dots s_n^{-1}}{(1-x_1 s_1^{-1}) \dots (1-x_n s_n^{-1})} \right) \cdot ((1-s_1 z_1)^{-1} \dots (1-s_n z_n)^{-1} - p_m(s; z)) \right] ds_1 \dots ds_n \right| \leq$$

$$\leq \ell([\partial \Delta^n(0, \delta')^{-1}]) \cdot \sup_{(s_1, \dots, s_n) \in \partial \Delta^n(0, \delta')} \left| s_1 \dots s_n \cdot f(s_1, \dots, s_n) \right|.$$

$$\sup_{s=(s_1, \dots, s_n) \in [\partial \Delta^n(0, \delta')^{-1}]} \left| (1-s_1 z_1)^{-1} \dots (1-s_n z_n)^{-1} - p_m(s; z) \right|,$$

d'où le résultat.

(b). En répétant la démonstration faite dans la partie (a), pour $q_{m_1, \dots, m_n}(x; z)$ au lieu de $p_m(x; z)$, on trouve le résultat. ■

Dans le Théorème 1.2.2 la triangularité des matrices $\mathcal{N}(z)$, $\mathcal{N}_j(z)$ ($j=1,2,\dots,n$) n'a été utilisée que pour obtenir les relations

$$(1.8.) \quad \Lambda_f(p_m(x; z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{m,k}^{(1)}(z) \cdot \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^k a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^f \cdot z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n} \quad (, m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(1.9.) \quad \Lambda_f(q_{m_1, \dots, m_n}(x; z)) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sigma_{m_1, k_1}^{(1)}(z) \cdot \sum_{\nu_1=0}^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \sigma_{m_2, k_2}^{(2)}(z) \cdot \sum_{\nu_2=0}^{k_2} \left(\dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} \sigma_{m_n, k_n}^{(n)}(z) \cdot \sum_{\nu_n=0}^{k_n} a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^f \cdot z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n} \right) \dots \right) \right) \quad (, m_1, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots),$$

dans la démonstration du Lemme 1.2.3. On se demandera bien sûr, ce qui se passerait si les matrices $\mathcal{N}(z)$ et $\mathcal{N}_j(z)$ ($j=1,2,\dots,n$) étaient quelconques.

Dans ce cas si on note par $\Pi_{f,p}$ le sousensemble de $\Delta^n(0; \delta)$ dans lequel la relation (1.8.) est vraie et par $\Pi_{f,q}$ le sousensemble de $\Delta^n(0; \delta)$ dans lequel (1.9) est vraie alors on doit remplacer l'ensemble K du Lemme 1.2.3.(a) par un autre ensemble $\tilde{K}_a$, tel que

$$\tilde{K}_a : \text{compact} = \Delta^n(0; \delta), \quad \tilde{K}_a \subset \Pi_{f,p},$$

et l'ensemble K du Lemme 1.2.3.(b). par un ensemble $\tilde{K}_b$, tel que

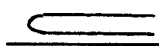
$$\tilde{K}_b : \text{compact} = \Delta^n(0; \delta), \quad \tilde{K}_b \subset \Pi_{f,q}.$$

Il est facile de voir que

$$\mathfrak{Z}(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta)) := \{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \quad] 0 < r_1(z) < \delta_1, \dots$$

$$\dots,] 0 < r_n(z) < \delta_n, \text{ tels que } (x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) \in \omega(\mathcal{N}(\cdot))$$

$$\text{si } |x_1| \leq \frac{1}{r_1(z)}, \dots, |x_n| \leq \frac{1}{r_n(z)} \quad \}$$

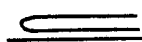


$$\Pi_{f,p},$$

$$\mathfrak{Z}(\omega(\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu(\cdot)}) ; \Delta^n(0; \delta)) := \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; \right. \\ \left. \dots, \right\} 0 < r_1(z) < \delta_1, \\ \dots, \left\} 0 < r_n(z) < \delta_n, \text{ tels que}$$

$$(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) \in \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu(\cdot)})$$

$$\text{si } \left\{ |x_1| \leq \frac{1}{r_1(z)}, \dots, |x_n| \leq \frac{1}{r_n(z)} \right\}$$



$\mathbb{I}_{f, g}$

Effectivement, si $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{Z}(\omega ; \Delta^n(0; \delta))$ ($\omega = \omega(\mathcal{N}(\cdot)), \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu(\cdot)})$), alors il existe $0 < r_1(z) < \delta_1, \dots, 0 < r_n(z) < \delta_n$, tels que $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) \in \omega$, pour tout $|x_1| \leq \frac{1}{r_1(z)}, \dots, |x_n| \leq \frac{1}{r_n(z)}$. Dans la démonstration du **Lemme I.2.3.**, on a vu que le fonctionnel Λ_f se prolonge continuellement dans $\mathcal{O}(\Delta^n(0, \dots, 0; p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}))$, pour tout $(p_1, \dots, p_n)$, tel que $0 < p_1 < \delta_1, \dots, 0 < p_n < \delta_n$. En particulier, Λ_f se prolonge continuellement dans $\mathcal{O}(\Delta^n(0, \dots, 0; \frac{1}{r_1(z)}, \dots, \frac{1}{r_n(z)}))$. Mais, d'après la définition de $\mathfrak{Z}(\omega; \Delta^n(0; \delta))$ et la définition de ω , la fonction $p_m(x; z)$ (respectivement la fonction $q_{m_1, \dots, m_n}(x; z)$) est continue en x et forcément holomorphe en x , lorsque $|x_1| \leq \frac{1}{r_1(z)}, \dots, |x_n| \leq \frac{1}{r_n(z)}$, pour tout $m = 0, 1, 2, \dots$ (respectivement pour tout $m_1, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots$). Autrement dit, $p_m(x; z)$ (resp. $q_{m_1, \dots, m_n}(x; z)$) $\in \mathcal{O}(\Delta^n(0, \dots, 0; \frac{1}{r_1(z)}, \dots, \frac{1}{r_n(z)}))$, et par conséquent $\Lambda_f(p_m(x; z))$ (resp. $\Lambda_f(q_{m_1, \dots, m_n}(x; z))$) est bien défini. D'autre part, grâce à la continuité de Λ_f , on a

$$\Lambda_f(p_m(x; z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{m, k}(z) \cdot \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^k \alpha_{v_1, \dots, v_n}^f \cdot z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\left(\Lambda_f(q_{m_1, \dots, m_n}(x; z)) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sigma_{m_1, k_1}^1(z) \cdot \sum_{v_1=0}^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \sigma_{m_2, k_2}^2(z) \sum_{v_2=0}^{k_2} \left(\dots \right. \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} \sigma_{m_n, k_n}^n(z) \cdot \sum_{v_n=0}^{k_n} \alpha_{v_1, \dots, v_n}^f \cdot z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} \right) \dots \right) \right) \right) \quad (m_1, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots),$$

c'est-à-dire $z \in \Pi_{f,p}$ (, resp. $z \in \Pi_{f,q}$).

En plus, remarquons que les ensembles $\mathfrak{S}(w(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta))$ et $\mathfrak{S}(w(\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p(\cdot)}); \Delta^n(0; \delta))$ sont deux ouverts contenus dans $\Delta^n(0; \delta)$. En raisonnant maintenant comme dans la démonstration du **Théorème 1.2.2.** on obtient :

1.2.4. Théorème

Soit $\Delta^n(0; \delta) = \Delta^n(0, \dots, 0; \delta_1, \dots, \delta_n)$ un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$ de centre 0 et de polyrayon $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$. Alors

(a) . $\left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; \exists 0 < r_1(z) < \delta_1, \dots, \exists 0 < r_n(z) < \delta_n, \text{ tels que} \right.$

$$(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) \in w(\mathcal{N}(\cdot)) ,$$

$$\left. \text{si } |x_1| \leq \frac{1}{r_1(z)} , \dots , |x_n| \leq \frac{1}{r_n(z)} \right\}$$

$\equiv$

$$E_{\mathcal{N}(\cdot)}^n (0(\Delta^n(0; \delta)))$$

(b) . $\left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; \exists 0 < r_1(z) < \delta_1, \dots, \exists 0 < r_n(z) < \delta_n, \text{ tels que} \right.$

$$(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) \in w(\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p(\cdot)}) ,$$

$$\left. \text{si } |x_1| \leq \frac{1}{r_1(z)} , \dots , |x_n| \leq \frac{1}{r_n(z)} \right\}$$

$\equiv$

$$E_{\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p(\cdot)}}^n (0(\Delta^n(0; \delta))) .$$

On peut passer au cas de $\mathbb{C}^n$, grâce au théorème suivant :

1.2.5. Théorème

Si les matrices $\mathcal{N}(z), \mathcal{N}_1(z), \dots, \mathcal{N}_n(z)$ sont triangulaires, alors

$$(a) \quad \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; (0, \dots, 0, z_1, \dots, z_n) \in w(\mathcal{N}(\cdot)) \right\}$$

$$\subseteq$$

$$E_{\mathcal{N}(\cdot)}^n(0(\mathbb{C}^n)) \quad ;$$

$$(b) \quad \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; (0, \dots, 0, z_1, \dots, z_n) \in w(\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p(\cdot)}) \right\}$$

$$\subseteq$$

$$E_{\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p(\cdot)}}^n(0(\mathbb{C}^n))$$

Démonstration

Montrons d'abord (a). Comme dans la démonstration du Théorème 1.2.2., il suffit de démontrer que pour tout $z^* = (z^*_1, \dots, z^*_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $(0, \dots, 0, z^*_1, \dots, z^*_n) \in w(\mathcal{N}(\cdot))$, il existe un polydisque fermé $\Delta^n(z^*; r^*)$, dans lequel : $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \sigma_{n,k}(z) \cdot \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^k a_{v_1, \dots, v_n}^f \cdot z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} = f(z)$, uniformément sur $\Delta^n(z^*; r^*)$, pour toute $f \in 0(\mathbb{C}^n)$ (s'écrivant dans un voisinage de 0 sous la forme $f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} a_{v_1, \dots, v_n}^f u_1^{v_1} \dots u_n^{v_n}$). Posons :

$$(1.10.) \quad g(w(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{C}^n) := \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; (0, \dots, 0, z_1, \dots, z_n) \in w(\mathcal{N}(\cdot)) \right\}$$

Il existe une suite de polydisques ouverts de $\mathbb{C}^n$, $\{\Delta^n(0; \delta^i) ; i = 1, 2, \dots\}$, telle que

$$\Delta^n(0; \delta^i) \subset \Delta^n(0; \delta^{i+1}) \quad (i=1, 2, \dots) \text{ et } \mathbb{C}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta^n(0; \delta^i).$$

Comme à la relation (1.5.), posons :

$$g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^i)) := \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; (z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}, z_1, \dots, z_n) \in \omega(\mathcal{N}(\cdot)), \right. \\ \left. \forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus \Delta(0; (\delta^i)_1), \dots, \forall z_n \in \mathbb{C} \setminus \Delta(0; (\delta^i)_n) \right\} \\ (i=1, 2, \dots)$$

On peut voir facilement que

$$g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^i)) \subset g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{C}^n) \quad \text{et que}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^i)) = g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{C}^n).$$

(Effectivement, comme il est clair que $g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^i)) \subset g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^{i+1})) \subset g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{C}^n)$, il suffit de montrer $g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{C}^n) = \bigcup_{i=1}^{\infty} g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^i))$. Puisque $g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^i)) \subset g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{C}^n)$, $\forall i=1, 2, \dots$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^i)) \subset g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{C}^n)$. Soit maintenant $z = (z_1, \dots, z_n) \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^i))$. Par définition, $\forall i=1, 2, \dots$ $\exists (z_1^i)^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \Delta(0; (\delta^i)_1), \dots, \exists (z_n^i)^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \Delta(0; (\delta^i)_n)$ tels que $((z_1^i)^{-1}, \dots, (z_n^i)^{-1}, z_1, \dots, z_n) \notin \omega(\mathcal{N}(\cdot))$. Evidemment $\lim_{j \rightarrow \infty} (z_j^i)^{-1} = \infty, j=1, \dots, n$. Par conséquent, $z \notin g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{C}^n)$. Donc, $g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{C}^n) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^i))$.)

Soit $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{C}^n)$ et $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Il existe i_0 , tel que $z^0 \in g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^{i_0}))$. Puisque $g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^{i_0}))$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (voir Proposition I.2.1.), il existe $\overline{\Delta^n(z^0; r^0)} \subset g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \Delta^n(0; \delta^{i_0})) \subset g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{C}^n)$. D'autre part $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(\Delta^n(0; \delta^{i_0}))$. En appliquant le Théorème I.2.2. pour le polydisque $\Delta^n(0; \delta^{i_0})$ et le compact $\overline{\Delta^n(z^0; r^0)}$, on trouve que $\lim_m (\Lambda_f(p_m(x; z))) = f(z)$, uniformément sur $\overline{\Delta^n(z^0; r^0)}$, d'où le résultat. De la même façon on démontre la partie (b). du théorème. ■

§ 3. Le cas général

Soit $\mathbb{I}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $0 \in \mathbb{I}$ et $(n+1)$ matrices triangulaires de fonctions complexes sur $\mathbb{C}^n$ $\mathcal{N}(z) := (\sigma_{m,k}(z))_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots}$, $\mathcal{N}_j(z) := (\sigma_{m,k}^j(z))_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots}$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Considérons les suites de fonctions à $2n$ variables complexes $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n$, $\{p_m(x; z) = p_m(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_n); m = 0, 1, 2, \dots\}$ et $\{q_{m_1, \dots, m_n}(x; z) = q_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_n); m_1, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots\}$, comme elles sont définies dans le paragraphe 2., par les relations (1.3.)' et (1.4.)'. Supposons aussi que $\omega(\mathcal{N}(\cdot))$ est l'ouvert maximal de $\mathbb{C}^{2n}$, dans lequel les fonctions $p_m(x; z)$ sont continues et convergent vers $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$ (si $m \rightarrow \infty$) uniformément dans tout compact, tandis que $\omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot))$ l'ouvert maximal de $\mathbb{C}^{2n}$, dans lequel les fonctions $q_{m_1, \dots, m_n}(x; z)$ sont continues et convergent vers $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$, lorsque $m_{\lambda_1} \rightarrow \infty, \dots, m_{\lambda_\mu} \rightarrow \infty$, uniformément dans tout compact. Posons :

$$g(\omega; \mathbb{I}) := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; (\zeta_1^{-1}, \dots, \zeta_n^{-1}, z_1, \dots, z_n) \in \omega,$$

$$\forall \zeta_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_1(\mathbb{I}), \dots, \forall \zeta_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_n(\mathbb{I}) \}$$

$$(\omega = \omega(\mathcal{N}(\cdot)), \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)))$$

Dans le paragraphe 2., on a montré que dans le cas où $\mathbb{I} = \Delta^n(0; \delta)$ et $\mathbb{I} = \mathbb{C}^n$, alors $g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{I}) \equiv E_{\mathcal{N}(\cdot)}^n(0(\mathbb{I}))$ et $g(\omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)); \mathbb{I}) \equiv E_{\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)}^n(0(\mathbb{I}))$. Dans le paragraphe 3., notre intention est de donner quelques réponses à la question naturelle de savoir si ces deux inclusions restent ou non valables si $\mathbb{I}$ est un ouvert quelconque de $\mathbb{C}^n$. Mais avant de passer aux détails et pour comprendre mieux les ensembles définis jusqu'ici, examinons la forme des ensembles $E_{\mathcal{N}(\cdot)}^n(0(\mathbb{I}))$, $E_{\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)}^n(0(\mathbb{I}))$ et $g(\omega; \mathbb{I})$ ($\omega = \omega(\mathcal{N}(\cdot)), \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot))$), lorsque $n = 2$:

— $n=2$

Soit $\mathbb{I}$ un ouvert de $\mathbb{C}^2$, $0 \in \mathbb{I}$ et

$$\mathcal{N}(z) := (\sigma_{m,k}(z))_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots} \quad (\sigma_{m,k} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}) ,$$

$$\mathcal{N}_j^i(z) := (\sigma_{m,k}^j(z))_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots} \quad (\sigma_{m,k}^j : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, j=1,2)$$

trois matrices triangulaires et infinies de fonctions complexes dans $\mathbb{C}^2$. Alors

$$\mathbb{P}_{\mathcal{N}(\cdot)}^{\mathbb{I}} := \{ P' \subseteq \mathbb{I} ; \forall f \in \mathcal{O}(\mathbb{I}) ,$$

$$\lim_m \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(z) \cdot \sum_{\substack{y_1, y_2=0 \\ y_1, y_2=0}}^k \alpha_{y_1, y_2}^F z_1^{y_1} z_2^{y_2} = f(z) ,$$

uniformément dans tout compact de P' (où α_{y_1, y_2}^F sont des coefficients définis par l'expression de f dans un voisinage de 0 : $f(w) = \sum_{y_1, y_2=0}^{\infty} \alpha_{y_1, y_2}^F w_1^{y_1} w_2^{y_2}$) }.

Ainsi ,

$$E_{\mathcal{N}(\cdot)}^2(\mathcal{O}(\mathbb{I})) := \bigcup_{P' \in \mathbb{P}_{\mathcal{N}(\cdot)}^{\mathbb{I}}} P' .$$

Autre part ,

$$\omega_{\mathcal{N}(\cdot)} := \text{int} \left\{ (x_1, x_2, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^4 ; \right.$$

$$(i). \quad \lim_m \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(z) \cdot \sum_{\substack{y_1, y_2=0 \\ y_1, y_2=0}}^k x_1^{y_1} z_1^{y_1} x_2^{y_2} z_2^{y_2} = (1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1} ,$$

uniformément dans tout compact
(ii). les fonctions $\left(\sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(z) \cdot \sum_{\substack{y_1, y_2=0 \\ y_1, y_2=0}}^k x_1^{y_1} z_1^{y_1} x_2^{y_2} z_2^{y_2} \right), m=0,1,\dots$, sont continues }

et

$$g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{I}) := \left\{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; (\zeta_1^{-1}, \zeta_2^{-1}, z_1, z_2) \in \omega(\mathcal{N}(\cdot)) , \right. \\ \left. \forall \zeta_1 \in \mathbb{C} \setminus \text{pr}_1(\mathbb{I}) , \forall \zeta_2 \in \mathbb{C} \setminus \text{pr}_2(\mathbb{I}) \right\} .$$

Les ensembles $P_{\mathcal{N}_1(\cdot)}^{\mathbb{I}}$ et $P_{\mathcal{N}_2(\cdot)}^{\mathbb{I}}$ sont définis de la même façon que $P_{\mathcal{N}(\cdot)}^{\mathbb{I}}$.
Par définition, on a

$$E_{\mathcal{N}_1(\cdot)}^2(\mathcal{O}(\mathbb{I})) := \bigcup_{P_1'' \in P_{\mathcal{N}_1(\cdot)}^{\mathbb{I}}} P_1'', \quad E_{\mathcal{N}_2(\cdot)}^2(\mathcal{O}(\mathbb{I})) := \bigcup_{P_2'' \in P_{\mathcal{N}_2(\cdot)}^{\mathbb{I}}} P_2''.$$

L'ensemble $P_{\mathcal{N}_1(\cdot), \mathcal{N}_2(\cdot)}^{\mathbb{I}}$ est de la forme suivante :

$$P_{\mathcal{N}_1(\cdot), \mathcal{N}_2(\cdot)}^{\mathbb{I}} := \{ P_{1,2}'' \equiv \mathbb{I} ; \quad \forall f \in \mathcal{O}(\mathbb{I}),$$

$$\lim_{\substack{m_1 \\ m_2}} \left(\sum_{k_1=0}^{m_1} \sigma_{m_1, k_1}^1(z) \cdot \sum_{j_1=0}^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{m_2} \sigma_{m_2, k_2}^2(z) \sum_{j_2=0}^{k_2} a_{j_1, j_2}^f \cdot z_1^{j_1} \cdot z_2^{j_2} \right) \right) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de $P_{1,2}''$ (où a_{j_1, j_2}^f sont des coefficients définis par l'expression de f dans un voisinage de 0 : $f(w) = \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} a_{j_1, j_2}^f \cdot w_1^{j_1} \cdot w_2^{j_2}$)

et par conséquent,

$$E_{\mathcal{N}_1(\cdot), \mathcal{N}_2(\cdot)}^2(\mathcal{O}(\mathbb{I})) := \bigcup_{P_{1,2}'' \in P_{\mathcal{N}_1(\cdot), \mathcal{N}_2(\cdot)}^{\mathbb{I}}} P_{1,2}''.$$

Considérons maintenant la suite

$$\{ q_{m_1, m_2}(x; z) := \sum_{k_1=0}^{m_1} \sigma_{m_1, k_1}^1(z) \cdot \sum_{j_1=0}^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{m_2} \sigma_{m_2, k_2}^2(z) \sum_{j_2=0}^{k_2} \chi_{j_1, j_2}^1 \cdot z_1^{j_1} \cdot z_2^{j_2} \right); (x, z) = (x_1, x_2, z_1, z_2) \in \mathcal{C}^4; m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots \}$$

et les ensembles

$$\omega(\mathcal{N}_1(\cdot)) := \text{int} \left\{ (x_1, x_2, z_1, z_2) \in \mathcal{C}^4; \lim_{m_1} q_{m_1, m_2}(x; z) = (1-x_1 \cdot z_1)^{-1} \cdot (1-x_2 \cdot z_2)^{-1}, \text{ uniformément dans tout compact et les fonctions } q_{m_1, m_2} (m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots) \text{ sont continues} \right\},$$

$$\omega(\mathcal{N}_2(\cdot)) := \text{int} \left\{ (x_1, x_2, z_1, z_2) \in \mathcal{C}^4; \lim_{m_2} q_{m_1, m_2}(x; z) = (1-x_1 \cdot z_1)^{-1} \cdot (1-x_2 \cdot z_2)^{-1}, \text{ uniformément dans tout compact et les fonctions } q_{m_1, m_2} (m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots) \text{ sont continues} \right\},$$

$$\omega(\mathcal{N}_1(\cdot), \mathcal{N}_2(\cdot)) := \text{int} \left\{ (x_1, x_2, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^4; \lim_{m_1, m_2} q_{m_1, m_2} = (1-x_1, z_1)^{-1} (1-x_2, z_2)^{-1}, \text{ uniformément dans tout compact et les fonctions } q_{m_1, m_2} (m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots) \text{ sont continues} \right\},$$

$$g(\omega''; \mathbb{I}) := \left\{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; (\bar{z}_1^{-1}, \bar{z}_2^{-1}, z_1, z_2) \in \omega'' \right. \\ \left. \forall \bar{z}_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_1(\mathbb{I}), \forall \bar{z}_2 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_2(\mathbb{I}) \right\}$$

$$(\text{où } \omega'' = \omega(\mathcal{N}_1(\cdot)), \omega(\mathcal{N}_2(\cdot)), \omega(\mathcal{N}_1(\cdot), \mathcal{N}_2(\cdot))) .$$

Donc, dans la dimension 2 le problème dont on s'occupera est la validité des inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{I}) &\equiv E_{\mathcal{N}(\cdot)}^2 (0(\mathbb{I})) \\ g(\omega(\mathcal{N}_1(\cdot)); \mathbb{I}) &\equiv E_{\mathcal{N}_1(\cdot)}^2 (0(\mathbb{I})) \\ g(\omega(\mathcal{N}_2(\cdot)); \mathbb{I}) &\equiv E_{\mathcal{N}_2(\cdot)}^2 (0(\mathbb{I})) \\ g(\omega(\mathcal{N}_1(\cdot), \mathcal{N}_2(\cdot)); \mathbb{I}) &\equiv E_{\mathcal{N}_1(\cdot), \mathcal{N}_2(\cdot)}^2 (0(\mathbb{I})) . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Il est clair que si $n=1$, $\omega(\mathcal{N}(\cdot)) = \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot))$ et pour obtenir le résultat (G.T.) (voir § 1. de ce chapitre), il suffit de choisir $\omega(\mathcal{N}(\cdot)) = \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)) = \{(x, z) \in \mathbb{C}^2; x, z \in H\}$, parce que dans ce cas

$$g(\omega(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{I}) = g(\omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)); \mathbb{I}) = \bigcap_{\lambda \notin \mathbb{I}} \lambda \cdot H .$$

(Remarquons que $\omega(\mathcal{N}(\cdot)) = \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot))$ contient l'ensemble $\mathbb{C} \times \{0\}$ si et seulement si $0 \in H$.)

En plus, lorsque $n=1$, $g(\omega; \mathbb{I})$ est un ouvert sousensemble de $\mathbb{I}$ (voir [9], Lemma 11.) , $\omega = \omega(\mathcal{N}(\cdot), \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)))$.

Si $n > 1$, on a la proposition suivante :

1.3.1. Proposition

Si $\omega = \omega(\mathcal{N}(\cdot), \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)))$, alors

$$(a) . \quad g(\omega; \mathbb{I}) \equiv \text{pr}_1(\mathbb{I}) \times \dots \times \text{pr}_n(\mathbb{I}) ;$$

$$(b) . \quad g(\omega; \mathbb{I}) \text{ est un ouvert } \subset \mathbb{C}^n ;$$

$$(c) . \quad \omega(\mathcal{N}(\cdot)) = \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \iff \lim_m \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(0) = 1 ;$$

$$\omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)) = \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \iff \lim_{\substack{m_{\lambda_1} \\ \dots \\ m_{\lambda_\mu}}} \sum_{k_1=0}^{m_1} \sigma_{m_1, k_1}^{(1)}(0) \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} \sigma_{m_n, k_n}^{(n)}(0) = 1 ;$$

(d) . si $\mathbb{I} = \mathbb{I}_1 \times \dots \times \mathbb{I}_n$ est un produit cartésien de n ouverts de $\mathbb{C}$, $0 \in \mathbb{I}$ et si $\{\mathbb{I}^i = \mathbb{I}_1^i \times \dots \times \mathbb{I}_n^i ; i=1, 2, \dots\}$ est une suite de produits cartésiens d'ouverts bornés de $\mathbb{C}$, $0 \in \mathbb{I}^i$, telle que

$$\mathbb{I} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}^i, \quad \mathbb{I}^i \subseteq \mathbb{I}^{i+1},$$

alors

$$g(\omega; \mathbb{I}^i) \equiv g(\omega; \mathbb{I}^{i+1}) \equiv g(\omega; \mathbb{I}), \quad i=1, 2, \dots,$$

$$g(\omega; \mathbb{I}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} g(\omega; \mathbb{I}^i).$$

Démonstration

Evidemment les parties (a). et (b). de la proposition constituent la généralisation de la Proposition 1.2.1.. Pour simplifier les notations, posons

$$\omega' := \omega(\mathcal{N}(\cdot)) \quad \text{et} \quad \omega'' := \omega(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)).$$

(a). Soit $z = (z_1, \dots, z_n) \notin p_r(\mathbb{I}) \times \dots \times p_r(\mathbb{I})$. Supposons sans restreindre la généralité que $z_1 \notin p_r(\mathbb{I})$ et $z_i \in \mathbb{C}$. Si $z \in g(w; \mathbb{I})$, alors $(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}) \in w \quad \forall z_i \in \mathbb{C} \setminus p_r(\mathbb{I})$, $\forall z_i \in \mathbb{C} \setminus p_r(\mathbb{I})$. En choisissant $z_1 = z_i$, on constate que la suite $p_m(z_1^{-1}, z_2^{-1}, \dots, z_n^{-1}; z_1, z_2, \dots, z_n)$ ou si $w = w''$, la suite $q_{m_1, \dots, m_n}(z_1^{-1}, z_2^{-1}, \dots, z_n^{-1}; z_1, z_2, \dots, z_n)$ converge vers $(1 - z_1^{-1} \cdot z_1)^{-1} \cdot (1 - z_2^{-1} \cdot z_2)^{-1} \dots (1 - z_n^{-1} \cdot z_n)^{-1}$, lorsque $m \rightarrow \infty$ (ou si $w = w''$, lorsque $m_{q_1} \rightarrow \infty, \dots, m_{q_n} \rightarrow \infty$). Ceci est absurde.

(b). Considérons premièrement le cas de 2 variables.

— Soit que $n = 2$. Posons :

$$[p_r(\mathbb{I})]^{-1} \times [p_r(\mathbb{I})]^{-1} := \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; z_1 \in \mathbb{C} \setminus p_r(\mathbb{I}), z_2 \in \mathbb{C} \setminus p_r(\mathbb{I}) \}$$

On peut alors écrire

$$g(w; \mathbb{I}) = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; (z_1, z_2, z_1, z_2) \in w, \right. \\ \left. \forall (z_1, z_2) \in [p_r(\mathbb{I})]^{-1} \times [p_r(\mathbb{I})]^{-1} \right\}.$$

Soit $z_0 = (z_{0,1}, z_{0,2}) \in g(w; \mathbb{I})$. Puisque w est un ouvert de $\mathbb{C}^4$, on constate que si $z = (z_1, z_2) \in [p_r(\mathbb{I})]^{-1} \times [p_r(\mathbb{I})]^{-1}$, alors il existe $\varepsilon_1(z) > 0, \varepsilon_2(z) > 0, \delta_1(z) > 0, \delta_2(z) > 0$, tels que

$$\left. \begin{aligned} \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \text{ avec } |z_1 - z_1| < \varepsilon_1(z) \\ |z_2 - z_2| < \varepsilon_2(z) \\ \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \text{ avec } |z_{0,1} - z_1| < \delta_1(z) \\ |z_{0,2} - z_2| < \delta_2(z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (z_1, z_2, z_1, z_2) \in w.$$

D'autre part, remarquons que l'ensemble $[p_r(\mathbb{I})]^{-1} \times [p_r(\mathbb{I})]^{-1}$ est un fermé de $\mathbb{C}^2$, car $p_r(\mathbb{I}), p_r(\mathbb{I})$ sont des ouverts.

En plus, c'est un ensemble borné, parce que chaque projection $p_{r_1}(\mathcal{I})$, $p_{r_2}(\mathcal{I})$ contient un voisinage de 0. Par conséquent, $[(p_{r_1}(\mathcal{I}))^c]^{-1} \times [(p_{r_2}(\mathcal{I}))^c]^{-1}$ est un compact de $\mathbb{C}^2$. On peut alors trouver $\mathfrak{z}^1 = ((\mathfrak{z}^1)_1, (\mathfrak{z}^1)_2) \in [(p_{r_1}(\mathcal{I}))^c]^{-1} \times [(p_{r_2}(\mathcal{I}))^c]^{-1}$,
 $\dots$, $\mathfrak{z}^N = ((\mathfrak{z}^N)_1, (\mathfrak{z}^N)_2) \in [(p_{r_1}(\mathcal{I}))^c]^{-1} \times [(p_{r_2}(\mathcal{I}))^c]^{-1}$,
 tels que

$$[(p_{r_1}(\mathcal{I}))^c]^{-1} \times [(p_{r_2}(\mathcal{I}))^c]^{-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^N \Delta^2(\mathfrak{z}^i; \varepsilon(\mathfrak{z}^i))$$

En choisissant

$$r_1 = \min \{ \delta_1(\mathfrak{z}^i) ; i = 1, 2, \dots, N \} ,$$

$$r_2 = \min \{ \delta_2(\mathfrak{z}^i) ; i = 1, 2, \dots, N \} ,$$

on obtient $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, z_1, z_2) \in \omega$, $\forall (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \in [(p_{r_1}(\mathcal{I}))^c]^{-1} \times [(p_{r_2}(\mathcal{I}))^c]^{-1}$
 et $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, tel que $|(z_0)_1 - z_1| < r_1$, $|(z_0)_2 - z_2| < r_2$,
 c'est-à-dire

$$\Delta^2((z_0)_1, (z_0)_2 ; r_1, r_2) \subseteq g(\omega; \mathcal{I})$$

Donc $g(\omega; \mathcal{I})$ est un ouvert de $\mathbb{C}^2$.

— Supposons maintenant que $n \geq 2$. On généralisera la démonstration faite pour $n=2$. Posons :

$$\bigcap_{j=1}^n [(p_{r_j}(\mathcal{I}))^c]^{-1} := \{ (\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n) \in \mathbb{C}^n ; \mathfrak{z}_j^{-1} \in \bar{\mathbb{C}} \setminus p_{r_j}(\mathcal{I}) , j = 1, 2, \dots, n \}$$

On peut alors écrire $g(\omega; \mathcal{I}) = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ;$
 $(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n, z_1, \dots, z_n) \in \omega , \forall (\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n) \in \bigcap_{j=1}^n [(p_{r_j}(\mathcal{I}))^c]^{-1} \}$.

Soit $z_0 = (z_0)_1, \dots, (z_0)_n) \in g(w; \mathcal{I})$. Puisque w est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on constate que si $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \bigcap_{j=1}^n \left[(\text{pr}_j(\mathcal{I}))^c \right]^{-1}$, alors il existe $\varepsilon_1(\xi) > 0, \dots, \varepsilon_n(\xi) > 0, \delta_1(\xi) > 0, \dots, \delta_n(\xi) > 0$, tels que $\forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, avec $|\xi_j - \xi_j| < \varepsilon_j(\xi)$ ($j=1, 2, \dots, n$) et $\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, avec $|(z_0)_j - z_j| < \delta_j(\xi)$ ($j=1, 2, \dots, n$), on ait :

$$(\xi_1, \dots, \xi_n, z_1, \dots, z_n) \in w.$$

D'autre part, remarquons que l'ensemble $\bigcap_{j=1}^n \left[(\text{pr}_j(\mathcal{I}))^c \right]^{-1}$ est un fermé de $\mathbb{C}^n$, car $\text{pr}_1(\mathcal{I}), \dots, \text{pr}_n(\mathcal{I})$ sont des ouverts. En plus c'est un ensemble borné, parce que $\forall j=1, 2, \dots, n$ la projection $\text{pr}_j(\mathcal{I})$ contient un voisinage de 0. Par conséquent $\bigcap_{j=1}^n \left[(\text{pr}_j(\mathcal{I}))^c \right]^{-1}$ est un compact de $\mathbb{C}^n$. On peut alors trouver $\xi^1 = ((\xi^1)_1, \dots, (\xi^1)_n) \in \bigcap_{j=1}^n \left[(\text{pr}_j(\mathcal{I}))^c \right]^{-1}, \dots, \xi^N = ((\xi^N)_1, \dots, (\xi^N)_n) \in \bigcap_{j=1}^n \left[(\text{pr}_j(\mathcal{I}))^c \right]^{-1}$, tels que

$$\bigcap_{j=1}^n \left[(\text{pr}_j(\mathcal{I}))^c \right]^{-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^N \Delta^n(\xi^i; \varepsilon(\xi^i)).$$

Si l'on prend $r_1 = \min \{ \delta_1(\xi^i) ; i=1, 2, \dots, N \}, \dots, r_n = \min \{ \delta_n(\xi^i) ; i=1, 2, \dots, N \}$, alors on obtient $(\xi_1, \dots, \xi_n, z_1, \dots, z_n) \in w$, $\forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \bigcap_{j=1}^n \left[(\text{pr}_j(\mathcal{I}))^c \right]^{-1}$ et $\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, tel que $|(z_0)_1 - z_1| < r_1, \dots, |(z_0)_n - z_n| < r_n$, c'est-à-dire $\Delta^n((z_0)_1, \dots, (z_0)_n; r_1, \dots, r_n) \subseteq g(w; \mathcal{I})$. Donc $g(w; \mathcal{I})$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

(c). En tenant compte du fait que w' est l'ouvert maximal dans lequel les fonctions $p_m(x; z)$ convergent (uniformément dans tout compact) vers $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$, lorsque $m \rightarrow \infty$ et que w'' est l'ouvert maximal dans lequel les fonctions $q_{m_1, \dots, m_n}(x; z)$ convergent (uniformément dans tout compact) vers $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$, lorsque $m_1 \rightarrow \infty, \dots, m_n \rightarrow \infty$, on arrive facilement à démontrer (c).

(d). Comme il est clair que $g(w; \mathbb{I}^i) \subseteq g(w; \mathbb{I}^{i+1}) \subseteq g(w; \mathbb{I})$, $\forall i=1, 2, \dots$, il reste à montrer que

$$g(w; \mathbb{I}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} g(w; \mathbb{I}^i).$$

Puisque $g(w; \mathbb{I}^i) \subseteq g(w; \mathbb{I})$, $\forall i=1, 2, \dots$, alors

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} g(w; \mathbb{I}^i) \subseteq g(w; \mathbb{I}).$$

Soit maintenant $z = (z_1, \dots, z_n) \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} g(w; \mathbb{I}^i)$. Par définition $\forall i=1, 2, \dots$ il existe $(z_1)^i \notin \mathbb{I}_1^i, \dots, (z_n)^i \notin \mathbb{I}_n^i$ et $(z_1)^i \in \bar{\mathbb{C}}, \dots, (z_n)^i \in \bar{\mathbb{C}}$, tels que $((z_1)^i, \dots, (z_n)^i, z_1, \dots, z_n) \notin w$.

Pour $j=1, 2, \dots, n$, considérons la suite $S_j = \{(z_j)^i; i=1, 2, \dots\} \subset \bar{\mathbb{C}}$. Comme $\bar{\mathbb{C}}$ est un espace compact, S_j a un point limite et par conséquent il existe une sous-suite $\{(z_j)^{\alpha_k}; \alpha_k=1, 2, \dots\}$ de S_j , telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} (z_j)^{\alpha_k}$ (dans $\bar{\mathbb{C}}$). Posons $\bar{z}_j := \lim_{k \rightarrow \infty} (z_j)^{\alpha_k}$. Il est clair que $\bar{z}_j \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{I}_j$ et que $((\bar{z}_1)^{-1}, \dots, (\bar{z}_n)^{-1}, z_1, \dots, z_n) \notin w$. On constate que $z \notin g(w; \mathbb{I})$, c'est-à-dire

$$g(w; \mathbb{I}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} g(w; \mathbb{I}^i),$$

et par conséquent,

$$g(w; \mathbb{I}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} g(w; \mathbb{I}^i).$$

1.3.2. Remarques

(a). La relation $w = \mathbb{C}^n \times \{0\}$, dans la partie (c). de la proposition précédente, constitue la généralisation de la relation $0 \in \mathbf{H}$ dans (G.T.).

(b). La partie (d). de la proposition précédente a été déjà démontrée pour $\mathbb{I} = \mathbb{C}^n$ et $\{\mathbb{I}^i = \Delta^n(0; \delta^i); i=1, 2, \dots\}$ dans la démonstration du

Théorème 1.2.5.

(c). On se demandera bien sûr, si l'on peut avoir aussi les inclusions

$$g(w(\mathcal{M}(\cdot)); \mathbb{I}) \subseteq \mathbb{I} \quad \text{et} \quad g(w(\mathcal{N}_1(\cdot), \dots, \mathcal{N}_p(\cdot)); \mathbb{I}) \subseteq \mathbb{I}$$

(, pour $n > 1$). La réponse est négative. Effectivement, choisissons l'ouvert de $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{I} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; 0 < |z_1| < |z_2| < 1\} \cup \Delta^2(0, 0; \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ et considérons la matrice

$$\mathcal{M} = (\pi_{m,k})_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

et l'ouvert $w(\mathcal{M}) = \{(x_1, x_2, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^4; (x_1, z_1, x_2, z_2) \in F_{\mathcal{M}}^2\}$, où $F_{\mathcal{M}}^2 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \text{la } \mathcal{M}\text{-transformation de la suite des sommes partielles de la série géométrique converge (uniformément dans tout compact), vers } (1-z_1)^{-1} \cdot (1-z_2)^{-1}\}$. On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} 0 &\in \mathbb{I}, \\ 0 &\in F_{\mathcal{M}}^2 \iff \lim_m \sum_{k=0}^m \pi_{m,k} = 1 \iff w(\mathcal{M}) = \mathbb{C}^4 \times \{0\}, \\ g(w(\mathcal{M}); \mathbb{I}) &= \Delta^2(0; 1). \end{aligned}$$

Par conséquent, $g(w(\mathcal{M}); \mathbb{I}) \not\subseteq \mathbb{I}$.

En considérant l'ouvert $w(\mathcal{M}, \mathcal{M}) = \{(x_1, x_2, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^4; (x_1, z_1, x_2, z_2) \in F_{\mathcal{M}, \mathcal{M}}^2\}$, où $F_{\mathcal{M}, \mathcal{M}}^2 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \text{la } (\mathcal{M}, \mathcal{M})\text{-transformation de la suite des sommes partielles de la série géométrique } \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2} \text{ converge (uniformément dans tout compact), vers } (1-z_1)^{-1} \cdot (1-z_2)^{-1}, \text{ si } m_1 \rightarrow \infty, m_2 \rightarrow \infty\}$, on vérifie de la même façon que :

$$g(w(\mathcal{M}, \mathcal{M}); \mathbb{I}) \not\subseteq \mathbb{I}.$$

1.3.3. Définitions

- (a). On dit que l'ouvert $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{C}^n$ ($0 \in \mathbb{I}$) vérifie la première version du théorème d'Eiermann, si $\mathbb{I} \cap g(w(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{I}) \subseteq E_{\mathcal{N}(\cdot)}^n(0(\mathbb{I}))$, pour toute matrice triangulaire et infinie de fonctions complexes sur $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{N}(z) := (\sigma_{m,k}(z))_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots}$.
- (b). On dit que l'ouvert $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{C}^n$ ($0 \in \mathbb{I}$) vérifie la deuxième version du théorème d'Eiermann, si $\mathbb{I} \cap g(w(\mathcal{N}_1(\cdot), \dots, \mathcal{N}_n(\cdot)); \mathbb{I}) \subseteq E_{\mathcal{N}_1(\cdot), \dots, \mathcal{N}_n(\cdot)}^n(0(\mathbb{I}))$, pour tout système de n matrices triangulaires et infinies $(\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n)$, avec $\mathcal{N}_j(z) := (\sigma_{m,k}^j(z))_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots}$ ($j=1,2,\dots,n$) et pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 1, 2, \dots, n$, avec $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$, si $\alpha \neq \beta$.

Il est clair que lorsque $n=1$, il n'y a qu'une version du théorème d'Eiermann. Dans [9], M. Eiermann a démontré que tout ouvert et connexe sous-ensemble de $\mathbb{C}$, contenant l'origine, vérifie cette version. On pourrait espérer que les deux versions du théorème d'Eiermann restent aussi valables pour un ouvert quelconque de $\mathbb{C}^n$. Mais cette espoir est une utopie parce que, comme on va le voir tout de suite, il existe même des ouverts d'holomorphie de $\mathbb{C}^2$, pour lesquels ce n'est pas possible d'avoir ces versions. En effet, on a la

1.3.4. Proposition

Soit $\mathbb{I}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $0 \in \mathbb{I}$, tel que :

$$(1.10.) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{f_j}(\mathbb{I}) = \Delta(0;1) \quad (, \text{ pour } j=1,2,\dots,n) , \\ (\mathbb{I}, \Delta^n(0;1)) : \text{ ne soit pas une paire de Runge } . \end{array} \right.$$

Alors $\mathbb{I}$ ne vérifie aucune version du théorème d'Eiermann.

(Rappelons que si $\mathbb{I}$ et $\mathbb{I}'$ sont deux ouverts de $\mathbb{C}^n$, tels que $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{I}'$ et que

$\mathcal{O}(\mathbb{I}')$ soit un sous-ensemble dense de $\mathcal{O}(\mathbb{I})$ (au sens que si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{I})$ alors il existe une suite $\{F_m \in \mathcal{O}(\mathbb{I}'); m=1,2,\dots\}$ telle que $\lim_m F_m(z) = f(z)$, uniformément dans tout compact de $\mathbb{I}$), alors on dit que $(\mathbb{I}, \mathbb{I}')$ est une paire de Runge).

Démonstration

Choisissons $\mathcal{N}(z) = \mathcal{N}_1(z) = \dots = \mathcal{N}_n(z) = \mathcal{M}$, avec $\mathcal{M} = (\pi_{m,k})_{m \geq 0, k \geq 0} = (\delta_{m,k})_{m \geq 0, k \geq 0}$ (où $\delta_{m,k}$ est le symbole de Kronecker) et $w(\mathcal{M}) := \{(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{2n}; (x_1, z_1, \dots, x_n, z_n) \in F_{\mathcal{M}}^n\}$, avec $F_{\mathcal{M}}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \text{la } \mathcal{M}\text{-transformation de la suite des sommes partielles de la série géométrique converge vers } (1-z_1)^{-1} \dots (1-z_n)^{-1}, \text{ uniformément dans tout compact}\}$. Comme on l'a fait dans la Remarque 1.3.2. (c), on vérifie que $g(w(\mathcal{M}); \mathbb{I}) = \Delta^n(0;1)$. Montrons que $\mathbb{I}$ ne vérifie pas la première version du théorème d'Eiermann. Si la première version du théorème d'Eiermann était vraie pour $\mathbb{I}$, alors $\mathbb{I} \cap g(w(\mathcal{M}); \mathbb{I}) \subseteq E_{\mathcal{M}}^n(\mathcal{O}(\mathbb{I})) \implies E_{\mathcal{M}}^n(\mathcal{O}(\mathbb{I})) = \mathbb{I}$. Donc, pour toute $f \in \mathcal{O}(\mathbb{I})$, qui s'écrit, dans un voisinage de 0, $f(w) = \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} a_{v_1, \dots, v_n}^f \cdot w_1^{v_1} \dots w_n^{v_n}$, on aurait

$$\lim_m \sum_{k=0}^m \pi_{m,k} \cdot \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^k a_{v_1, \dots, v_n}^f \cdot z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} = f(z),$$

uniformément dans tout compact de $\mathbb{I}$ et, par conséquent, f serait la limite de la suite de fonctions holomorphes dans $\Delta^n(0;1)$, $\{\sum_{k=0}^m \pi_{m,k} \cdot \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^k a_{v_1, \dots, v_n}^f \cdot z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n}; m=0,1,2,\dots\}$. Or, $(\mathbb{I}, \Delta^n(0;1))$ serait une paire de Runge, ce qui est contraire à l'hypothèse (1.10.1). On constate que $\mathbb{I}$ ne vérifie pas la première version du théorème d'Eiermann.

En considérant $w(\mathcal{M}, \dots, \mathcal{M}) := \{(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{2n}; (x_1, z_1, \dots, x_n, z_n) \in F_{\mathcal{M}, \dots, \mathcal{M}}^n\}$, où $F_{\mathcal{M}, \dots, \mathcal{M}}^n := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \text{la } (\mathcal{M}, \dots, \mathcal{M})\text{-transformation de la suite des sommes partielles de la série géométrique } \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} \text{ converge vers } (1-z_1)^{-1} \dots (1-z_n)^{-1}, \text{ si } m_{\lambda_1} \rightarrow \infty, \dots, m_{\lambda_p} \rightarrow \infty, \text{ uniformément dans tout compact}\}$, on peut, de la même façon, constater que dans $\mathbb{I}$ la deuxième version du théorème d'Eiermann n'est pas vraie. ■

Donnons maintenant un exemple d'un ouvert de $\mathbb{C}^2$, qui satisfait les conditions (1.10.). Soit

$$\mathbb{I} = \Delta^2(0;1) \setminus \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_1 + z_2 = 1 \}$$

Remarquons que

$$0 \in \mathbb{I} \quad \text{et que}$$

$$pr_1(\mathbb{I}) = pr_2(\mathbb{I}) = \Delta(0;1)$$

(Effectivement, si $z_1 \in \Delta(0;1)$, choisissons $z_2 \in \Delta(0;1)$, tel que $z_1 + z_2 \neq 1$; alors $(z_1, z_2) \in \mathbb{I}$. Donc, $pr_1(\mathbb{I}) \supseteq \Delta(0;1) \Rightarrow$ (puisque $pr_1(\mathbb{I}) \subseteq \Delta(0;1)$) $pr_1(\mathbb{I}) = \Delta(0;1)$. Sans difficulté, on montre, de la même façon, que $pr_2(\mathbb{I}) = \Delta(0;1)$.) D'autre part, $\mathbb{I}$ est pseudoconvexe, car $\Delta^2(0;1)$ est un ouvert pseudoconvexe et $\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_1 + z_2 = 1 \}$ est une hypersurface. Montrons que $(\mathbb{I}, \Delta^2(0;1))$ n'est pas une paire de Runge. Il suffit de trouver un compact K de $\mathbb{I}$, tel que $\hat{K}_{\mathcal{O}(\Delta^2(0;1))} \cap \mathbb{I}$ ne soit pas un compact de $\mathbb{I}$, où on a posé $\hat{K}_{\mathcal{O}(\Delta^2(0;1))} := \{ (z_1, z_2) \in \Delta^2(0;1); |f(z_1, z_2)| \leq \sup_{w \in K} |f(w)|, \forall f \in \mathcal{O}(\Delta^2(0;1)) \}$ ([15], Theorem 4.3.3.). Choisissons :

$$K = \{ (z_1, z_2) \in \Delta^2(0;1); |z_1| = |z_2| = e^{i0} \}$$

L'enveloppe holomorphiquement convexe de K , par rapport au bidisque $\Delta^2(0;1)$ est l'ensemble $\hat{K}_{\mathcal{O}(\Delta^2(0;1))} := \{ (z_1, z_2) \in \Delta^2(0;1); |f(z_1, z_2)| \leq \sup_{w \in K} |f(w)|, \forall f \in \mathcal{O}(\Delta^2(0;1)) \} = \{ (z_1, z_2) \in \Delta^2(0;1); |z_1| \leq e^{i0}, |z_2| \leq e^{i0} \}$. Il est clair que

$$\hat{K}_{\mathcal{O}(\Delta^2(0;1))} \ni \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \in \partial \mathbb{I}$$

Donc, $\hat{K}_{\mathcal{O}(\Delta^2(0;1))} \cap \mathbb{I}$ n'est pas un compact de $\mathbb{I}$ et $(\mathbb{I}, \Delta^2(0;1))$ n'est pas une paire de Runge.

I.3.5. Remarques

Rappelons qu'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}^n$ se dit pseudo-convexe ([15], Définition 2.6.8.) si

$\forall \delta: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty[$, continue et telle que

$$\begin{aligned} \delta(z) &> 0, \quad \text{si } z \neq 0, \\ \delta(t.z) &= |t|. \delta(z) \quad (t \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n), \end{aligned}$$

la fonction $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}; z \mapsto -\log \left(\inf_{w \notin \mathcal{U}} \delta(z-w) \right)$ est plurisousharmonique sur $\mathcal{U}$ ([15],

Définition 2.6.1.) c'est-à-dire :

- (i). $-\log \left(\inf_{w \notin \mathcal{U}} \delta(z-w) \right) \neq -\infty$ (sur $\mathcal{U}$);
- (ii). $-\log \left(\inf_{w \notin \mathcal{U}} \delta(z-w) \right)$: semi-continue supérieure-ment dans $\mathcal{U}$;
- (iii). pour tout sous-espace $\pi(z, a) = \{ \zeta = z + u.a ; u \in \mathbb{C}, \|a\| = 1 \}$ la fonction

$$u \mapsto -\log \left(\inf_{w \notin \mathcal{U}} \delta(z + u.a - w) \right)$$
 est sous-harmonique (au sens large) ([15], Définition 1.6.1.) dans chaque composante connexe de $\mathcal{U} \cap \pi(z, a)$.

(Une fonction $f: D (\subset \mathbb{C}) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ s'appelle sous-harmonique (au sens large) si

(a). f est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire $\{z \in D; f(z) < s\}$ est un ouvert, $\forall s \in \mathbb{R}$;

(b). $\forall K$ compact $\subset D$ et $\forall$ fonction h , qui est

continue sur K ,
 .. harmonique dans $\text{int}(K)$ ($\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} h \in \mathbb{C}^2, \text{ dans } \text{int}(K), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} = 0, \text{ dans } \text{int}(K) \end{array} \right.),$$

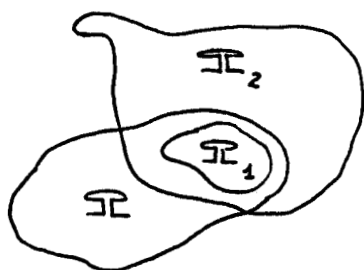
 ... $h \geq f$, sur la frontière de K

on a aussi

$$h \geq f, \text{ dans } K.$$

Si $f \not\equiv -\infty$, alors f s'appelle sous-harmonique.)

La grande valeur des domaines pseudoconvexes consiste à leur propriété d'être les seuls vrais domaines d'existence de fonctions holomorphes: si $\mathcal{D}$ est un ouvert pseudoconvexe alors on ne peut pas trouver d'ouvert plus grand dans lequel toute fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$ se prolonge analytiquement et inversement, si $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et si l'on ne peut trouver deux ouverts non-vides $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathbb{C}^n$, tels que



- (i). $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_2$,
 (ii). $\mathcal{D}_2$ est connexe et $\mathcal{D}_2 \cap (\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset$,

(iii). $\forall f \in O(\mathbb{I}) \quad \exists f_2 \in O(\mathbb{I}_2)$, telle que $f = f_2$ dans $\mathbb{I}$

(autrement dit, si $\mathbb{I}$ est un domaine d'holomorphie ([15], Definition 2.5.1.), alors $\mathbb{I}$ est pseudoconvexe ([15], Theorem 4.2.8.)).

Après donc l'exemple précédent, il existe même des ouverts pseudoconvexes dans lesquels aucune version du théorème d'Eiermann n'est vraie. Il faut noter que dans le cas d'une variable, Eiermann avait utilisé un théorème, concernant la décomposition des fonctions holomorphes, dû à Aronszajn [1] :

(A₁) "Si $\{\mathbb{I}_j ; j=1,2,\dots,M\}$ est une famille finie de domaines de $\mathbb{C}$, telle que $\bigcap_{j=1}^M \mathbb{I}_j \neq \emptyset$, alors $\forall f \in O(\bigcap_{j=1}^M \mathbb{I}_j)$ il existe $f_1 \in O(\mathbb{I}_1), \dots, f_M \in O(\mathbb{I}_M)$ vérifiant : $f(z) = \sum_{j=1}^M f_j(z)$ ($z \in \bigcap_{j=1}^M \mathbb{I}_j$). "

Plus précisément, il avait appliqué le résultat (A₁) pour " $\mathbb{I}_j =$ disque ouvert de $\mathbb{C}$, $j=1,\dots,M$ " et pour " $\mathbb{I}_j = \mathbb{C} \setminus (\text{disque ouvert de } \mathbb{C})$, $j=1,\dots,M$ ". Lorsque $n > 1$, en appliquant M fois successivement la solution du premier problème de Cousin ([15], Theorem 5.5.1.), on trouve

(A_n) "Si $\{\mathbb{I}_j ; j=1,2,\dots,M\}$ est une famille finie de domaines de $\mathbb{C}^n$, telle que $\bigcap_{j=1}^M \mathbb{I}_j \neq \emptyset$ et que $\bigcup_{j=1}^l \mathbb{I}_j$ soit pseudoconvexe $\forall l=2,\dots,M$, alors $\forall f \in O(\bigcap_{j=1}^M \mathbb{I}_j)$, il existe $f_1 \in O(\mathbb{I}_1), \dots, f_M \in O(\mathbb{I}_M)$ vérifiant : $f(z) = \sum_{j=1}^M f_j(z)$ ($z \in \bigcap_{j=1}^M \mathbb{I}_j$). "

Donc, si $n > 1$, on ne peut plus appliquer le théorème (A_n) comme Eiermann l'avait fait dans le cas où $n=1$. Dans la Proposition I.3.4. nous avons vu que si $\mathbb{I}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, contenant 0 et tel que $(\mathbb{I}; \Delta^n(0;1))$ ne soit pas une paire de Runge et que $\text{pr}_j(\mathbb{I}) = \Delta(0;1)$ ($j=1,2,\dots,n$), alors $\mathbb{I}$ ne vérifie aucune version du théorème d'Eiermann. La question qui se pose maintenant est de savoir si une version du théorème d'Eiermann est vraie dans un ouvert $\mathbb{I}$ de $\mathbb{C}^n$, dans le cas où il existe un autre ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{I}'$, vérifiant cette version, contenant $\mathbb{I}$ et tel que $(\mathbb{I}, \mathbb{I}')$ soit une paire de Runge. L'exemple qui suit montre que la réponse à cette question est négative.

Soit l'ensemble $\mathcal{I} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_1 + z_2| < 1\}$. Il est clair que $\mathcal{I}$ est un ouvert sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$, vérifiant $\text{pr}_1(\mathcal{I}) = \text{pr}_2(\mathcal{I}) = \Delta(0, 1)$ et $0 \in \mathcal{I}$. En plus, on peut voir facilement que $(\mathcal{I}, \Delta^2(0; 1))$ est une paire de Runge. Considérons la matrice $\mathcal{M} = (\delta_{m,k})_{m \geq 0, k \geq 0}$ et l'ouvert $w(\mathcal{M}) = \{(x_1, x_2, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^4; (x_1, z_1, x_2, z_2) \in \mathbb{F}_{\mathcal{M}}^2\}$, comme dans la Proposition 1.3.4. On montrera qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathcal{I})$, telle que $\sum_{v_1, v_2=0}^{\infty} \alpha_{v_1, v_2}^f z_1^{v_1} z_2^{v_2} \neq f(z)$, pour un $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{I}$ (où α_{v_1, v_2}^f sont les coefficients de la série de Taylor de f , autour de 0), parce que dans ce cas $z \notin E_{\mathcal{M}}^n(\mathcal{O}(\mathcal{I}))$. Si la première version du théorème d'Eiermann était vraie dans $\mathcal{I}$, alors $E_{\mathcal{M}}^n(\mathcal{O}(\mathcal{I})) \equiv g(w(\mathcal{M}); \mathcal{I}) \cap \mathcal{I} = (\text{comme dans la Proposition 1.3.4.}) \mathcal{I}$ et, par conséquent on aurait $z \in \mathcal{I}$, ce qui est absurde. Choisissons

$$f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}; (z_1, z_2) \longmapsto f(z_1, z_2) := \frac{1}{1 - (z_1 + z_2)} \in \mathcal{O}(\mathcal{I}).$$

Evidemment, cette fonction s'écrit dans un voisinage de 0, sous la forme

$$\begin{aligned} f(w_1, w_2) &= \sum_{v=0}^{\infty} (w_1 + w_2)^v = \sum_{v=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^v \binom{v}{p} w_1^p w_2^{v-p} \right] \stackrel{m=v-p}{=} \\ &= \sum_{m, p=0}^{\infty} \binom{m+p}{m} w_1^m w_2^p. \end{aligned}$$

Pour $(z_1, z_2) \in \mathcal{I}$, posons :

$$S_k(z_1, z_2) = \sum_{m, p=0}^k \binom{m+p}{m} z_1^m z_2^p \quad (, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Si $\lim_k S_k(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - (z_1 + z_2)}$, uniformément dans tout compact de $\mathcal{I}$, alors, $\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{I}$ on aurait $\lim_k (S_{k+1}(z_1, z_2) - S_k(z_1, z_2)) = 0$. Etudions la différence $S_{k+1}(z_1, z_2) - S_k(z_1, z_2)$. On a :

$$\begin{aligned} S_{k+1}(z_1, z_2) - S_k(z_1, z_2) &= \sum_{p=0}^k \binom{p}{k+1+p} z_1^{k+1} z_2^p + \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m+k+1} z_1^m z_2^{k+1} + \\ &+ \binom{k+1}{2k+2} z_1^{k+1} z_2^{k+1}. \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $z_2 = -z_1$, on a

$$S_{k+1}(z_1, -z_1) - S_k(z_1, -z_1) = \sum_{p=0}^k \binom{k}{k+1+p} z_1^{k+1+p} \cdot (-1)^p + \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m+k+1} z_1^{m+k+1} \cdot (-1)^{k+1} + \binom{k+1}{2k+2} z_1^{2k+2} \cdot (-1)^{k+1}.$$

Supposons maintenant que $(k+1)$ soit un nombre pair, c'est-à-dire $(k+1) = 2 \cdot k'$. Alors $(S_{k+1}(z_1, -z_1) - S_k(z_1, -z_1))$ devient :

$$S_{k+1}(z_1, -z_1) - S_k(z_1, -z_1) = S_{2k'}(z_1, -z_1) - S_{2k'-1}(z_1, -z_1) = \sum_{p=0}^{2k'-1} \binom{p}{2k'+p} z_1^{2k'+p} \cdot (-1)^p + \sum_{m=0}^{2k'-1} \binom{2k'}{2k'+m} z_1^{2k'+m} + \binom{2k'}{4k'} z_1^{4k'}.$$

Si on se restreint au cas où $z_1 > 0$, alors il est facile de voir que :

$$\sum_{p=0}^{2k'-1} \binom{p}{2k'+p} z_1^{2k'+p} \cdot (-1)^p + \sum_{m=0}^{2k'-1} \binom{2k'}{2k'+m} z_1^{2k'+m} > 0,$$

que

$$\binom{2k'}{4k'} z_1^{4k'} > 0,$$

et par conséquent, si $\lim_k (S_{k+1}(z_1, -z_1) - S_k(z_1, -z_1)) = 0$, pour $0 < z_1 < 1$, alors le terme

$$\left(\binom{2k'}{4k'} z_1^{4k'} \right)$$

doit converger (nécessairement) vers 0, lorsque $k' \rightarrow \infty$. Mais :

$$\binom{2k'}{4k'} z_1^{4k'} = \frac{(4 \cdot k')!}{[(2 \cdot k')!]^2} \cdot z_1^{4k'}.$$

D'autre part, d'après la formule de Stirling, on a :

$$\lim_v \frac{v!}{\left(\frac{v}{e}\right)^v \cdot \sqrt{2\pi v}} = 1.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \lim_{k'} \left(\binom{2k'}{4k'} \cdot z_1^{4k'} \right) &= \lim_{k'} \left(\frac{\left(\frac{4k'}{e}\right)^{4k'} \cdot \sqrt{8\pi k'}}{\left(\frac{2k'}{e}\right)^{4k'} \cdot (\sqrt{4\pi k'})^2} \cdot z_1^{4k'} \right) = \\ &= \lim_{k'} \left(2^{4k'} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi k'}} \cdot z_1^{4k'} \right) \end{aligned}$$

On constate que pour $z_1 > 0$, assez près de 1, $\lim_{k'} \left(\binom{2k'}{4k'} \cdot z_1^{4k'} \right) \neq 0$ et, par conséquent, ce n'est pas possible d'avoir

$$\lim_k \left(S_{k+1}(z_1, -z_1) - S_k(z_1, -z_1) \right) = 0.$$

Donc, le point $(z_1, -z_1)$ ($0 < z_1 < 1$, z_1 assez proche de 1), vérifie $f(z_1, -z_1) \neq \sum_{\substack{v_1, v_2=0 \\ v_1+v_2=0}}^{\infty} a_{v_1, v_2}^f \cdot z_1^{v_1} \cdot (-z_1)^{v_2}$ et $\mathcal{H}$ ne vérifie pas la première version du théorème d'Eiermann. De la même façon on démontre que $\mathcal{H}$ ne vérifie pas la deuxième version du théorème d'Eiermann.

Le problème qui se pose maintenant est de savoir si, en modifiant la forme de l'ensemble $g(w; \mathcal{H})$, défini dans (1.5.) et en raisonnant comme dans le paragraphe 2., on peut trouver une classe $\mathcal{A}$ d'ouverts $\mathcal{H}$ de $\mathbb{C}^n$, suffisamment large, telle que $g(w(\mathcal{N}_{(1)}); \mathcal{H}) \equiv E_{\mathcal{N}_{(1)}}(\mathcal{O}(\mathcal{H}))$ et $g(w(\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p(\cdot)}); \mathcal{H}) \equiv E_{\mathcal{N}_{\lambda_1(\cdot)}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p(\cdot)}}(\mathcal{O}(\mathcal{H}))$, $\forall \mathcal{H} \in \mathcal{A}$. Dans la suite notre intention consiste à donner quelques réponses à cette question, dans le cas de $(n+1)$ matrices $\mathcal{N}_1(z), \mathcal{N}_2(z), \dots, \mathcal{N}_n(z)$, qui sont triangulaires. Posons :

(1.11.) $\mathcal{A} := \{ \mathbb{I} \text{ ouvert } \subseteq \mathbb{C}^n; 0 \in \mathbb{I} \text{ et pour tout } z \in \mathbb{I} \text{ il existe un polydomaine } D_z, \text{ simplement connexe à frontière régulière, tel que}$

$$0 \in D_z, \quad z \in D_z, \quad D_z \subset \subset \mathbb{I} \quad \}$$

On notera

(1.12.) $bD_z :=$ le produit cartésien des frontières des domaines de $\mathbb{C}$ composant D_z .

Il est clair que si $\mathbb{I}$ est un polydomaine $\mathbb{I}_1 \times \dots \times \mathbb{I}_n$ de $\mathbb{C}^n$ (c'est-à-dire $\mathbb{I}_j$ est un domaine de $\mathbb{C}$, $j=1,2,\dots,n$), tel que $0 \in \mathbb{I}$ ou si $\mathbb{I}$ est un domaine de Reinhardt complet (au sens que si $z \in \mathbb{I}$, alors tout $w=(w_1,\dots,w_n) \in \mathbb{C}^n$, vérifiant $|w_1| < |z_1|, \dots, |w_n| < |z_n|$, appartient à $\mathbb{I}$), alors $\mathbb{I} \in \mathcal{A}$. Soit, de nouveau, $(n+1)$ matrices infinies et triangulaires de fonctions complexes sur $\mathbb{C}^n$ $\mathcal{N}(z) := (\sigma_{m,k}(z))_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots,m}$, $\mathcal{N}_j(z) := (\sigma_{m,k}^j(z))_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots,m}$ ($j=1,2,\dots,n$). Considérons les suites de fonctions à $2n$ variables complexes $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n$, $\{p_m(x;z) = p_m(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n); m=0,1,2,\dots\}$ et $\{q_{m_1, \dots, m_n}(x;z) = q_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n); m_1, \dots, m_n=0,1,2,\dots\}$, comme elles sont définies dans le paragraphe 2., par les relations (1.3.)' et (1.4.)'. Supposons aussi que $\omega(\mathcal{N}(\cdot))$ est l'ouvert maximal de $\mathbb{C}^{2n}$, dans lequel les fonctions $p_m(x;z)$ sont définies, continues et elles convergent vers $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$ (si $m \rightarrow \infty$) uniformément dans tout compact, tandis que $\omega(\mathcal{N}_1(\cdot), \dots, \mathcal{N}_n(\cdot))$ l'ouvert maximal de $\mathbb{C}^{2n}$, dans lequel les fonctions $q_{m_1, \dots, m_n}(x;z)$ sont définies, continues et elles convergent vers $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$, lorsque $m_1 \rightarrow \infty, \dots, m_n \rightarrow \infty$, uniformément dans tout compact. Pour $\omega = \omega(\mathcal{N}(\cdot)), \omega(\mathcal{N}_1(\cdot), \dots, \mathcal{N}_n(\cdot))$ et pour $\mathbb{I} \in \mathcal{A}$, posons :

$$(1.13.) \quad \omega_z := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n; (x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) \in \omega\}, \quad \forall z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

et

$$(1.14.) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{g}(\omega; \mathbb{I}) &:= \{z \in \mathbb{I}; \text{il existe } D_z, \text{ tel que } [bD_z]^{-1} \subset \omega_z\}, \\ \text{où on a posé } [bD_z]^{-1} &:= \{(t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}); (t_1, \dots, t_n) \in bD_z\}. \end{aligned} \right.$$

On a le théorème suivant :

1.3.6. Théorème

Si $\mathbb{I} \in \mathcal{A}$, alors

$$(a) . \quad \tilde{g}(w(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{I}) \equiv E_{\mathcal{N}(\cdot)}^{\mathbb{I}}(0(\mathbb{I})) ,$$

$$(b) . \quad \tilde{g}(w(\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p}(\cdot)); \mathbb{I}) \equiv E_{\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_p}(\cdot)}^{\mathbb{I}}(0(\mathbb{I})) .$$

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, on va présenter et démontrer un lemme dont on aura besoin. Le lemme constitue la généralisation du Lemme 1.2.3.

1.3.7. Lemme

Soit $\mathbb{I} \in \mathcal{A}$ et $w \in \mathbb{I}$.

(a) . Supposons qu'il existe D_w , tel que les fonctions $p_m(x; z)$ soient continues sur $[bD_w]^{-1} \times \{w\} := \{(t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}); (t_1, \dots, t_n) \in bD_w\} \times \{w\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Si $f \in 0(\mathbb{I})$, alors $\forall m = 0, 1, 2, \dots$ on a

$$\left| f(w) - \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(w) \sum_{\substack{v_1, \dots, v_n=0 \\ y_1, \dots, y_n=0}}^k \alpha_{y_1, \dots, y_n}^f w_1^{v_1} \dots w_n^{v_n} \right| \leq L(f; D_w) \cdot \sup_{t \in [bD_w]^{-1}} \left| (1-t_1 w_1)^{-1} \dots (1-t_n w_n)^{-1} - p_m(t; w) \right| ,$$

où $L(f; D_w)$ est une constante positive qui dépend de f et de D_w , mais qui est indépendante de m .

(b) . Supposons qu'il existe D_w , tel que les fonctions $q_{m_1, \dots, m_n}(x; z)$ soient continues sur $[bD_w]^{-1} \times \{w\}$. Si $f \in 0(\mathbb{I})$, alors $\forall m_i = 0, 1, 2, \dots$ ($i = 1, \dots, n$), on a

$$\begin{aligned}
& \left| f(w) - \sum_{k_1=0}^{m_1} \sigma_{m_1, k_1}(w) \sum_{y_1=0}^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{m_2} \sigma_{m_2, k_2}^{(w)} \sum_{y_2=0}^{k_2} \left(\dots \left(\sum_{k_n=0}^{m_n} \sigma_{m_n, k_n}^{(w)} \sum_{y_n=0}^{k_n} a_{y_1, \dots, y_n} \cdot w_1^{y_1} \dots w_n^{y_n} \right) \dots \right) \right) \right| \\
& \leq M(f; D_w) \cdot \sup_{t \in [bD_w]^{-1}} \left| (1-t, w_1)^{-1} \dots (1-t, w_n)^{-1} - q_{m_1, \dots, m_n}(t; w) \right|,
\end{aligned}$$

où $M(f; D_w)$ est une constante positive dépendante de f et de D_w , mais qui ne dépend pas de $m_1, \dots, m_n$.

Démonstration

La démonstration est une conséquence directe de la formule intégrale de Cauchy; en effet, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
f(w) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \cdot \int_{\mathbb{S} \in bD_w} \frac{f(\mathbb{S})}{(\mathbb{S}_1 - w_1) \dots (\mathbb{S}_n - w_n)} d\mathbb{S}_1 \dots d\mathbb{S}_n = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^n} \cdot \int_{\mathbb{S} \in [bD_w]^{-1}} f(\mathbb{S}^{-1}) \cdot \left(\frac{1}{(1 - w_1 \mathbb{S}_1) \dots (1 - w_n \mathbb{S}_n)} \right) \cdot \mathbb{S}_1 \dots \mathbb{S}_n d\mathbb{S}_1 \dots d\mathbb{S}_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \sum_{k=0}^m \sigma_{m, k}(w) \cdot \sum_{y_1, \dots, y_n=0}^k a_{y_1, \dots, y_n} \cdot w_1^{y_1} \dots w_n^{y_n} = \sum_{k=0}^m \sigma_{m, k}(w) \cdot \sum_{y_1, \dots, y_n=0}^k \frac{1}{(2\pi i)^n} \cdot \int_{\mathbb{S} \in bD_w} \frac{f(\mathbb{S})}{\mathbb{S}_1^{y_1+1} \dots \mathbb{S}_n^{y_n+1}} d\mathbb{S}_1 \dots d\mathbb{S}_n \cdot w_1^{y_1} \dots w_n^{y_n} = \\
& \frac{1}{(2\pi i)^n} \cdot \int_{\mathbb{S} \in bD_w} f(\mathbb{S}) \cdot \left(\sum_{k=0}^m \sigma_{m, k}(w) \cdot \sum_{y_1, \dots, y_n=0}^k \frac{1}{\mathbb{S}_1^{y_1+1} \dots \mathbb{S}_n^{y_n+1}} \left(\frac{w_1^{y_1}}{\mathbb{S}_1} \right) \dots \left(\frac{w_n^{y_n}}{\mathbb{S}_n} \right) \right) \cdot \mathbb{S}_1 \dots \mathbb{S}_n d\mathbb{S}_1 \dots d\mathbb{S}_n = \\
& \frac{1}{(2\pi i)^n} \cdot \int_{\mathbb{S} \in [bD_w]^{-1}} f(\mathbb{S}^{-1}) \cdot \left(\sum_{k=0}^m \sigma_{m, k}(w) \cdot \sum_{y_1, \dots, y_n=0}^k \frac{1}{w_1^{y_1+1} \dots w_n^{y_n+1}} \cdot \mathbb{S}_1^{y_1} \dots \mathbb{S}_n^{y_n} \right) \cdot \mathbb{S}_1 \dots \mathbb{S}_n d\mathbb{S}_1 \dots d\mathbb{S}_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \sum_{k_1=0}^{m_1} \sigma_{m_1, k_1}^1(w) \sum_{j_1=0}^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{m_2} \sigma_{m_2, k_2}^2(w) \sum_{j_2=0}^{k_2} \left(\dots \left(\sum_{k_n=0}^{m_n} \sigma_{m_n, k_n}^n(w) \sum_{j_n=0}^{k_n} \alpha_{j_1, \dots, j_n}^f w_1^{j_1} \dots w_n^{j_n} \right) \dots \right) \right) = \\
& \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{S \in [bD_w]^{-1}} f(S^{-1}) \cdot \left(\sum_{k_1=0}^{m_1} \sigma_{m_1, k_1}^1(w) \sum_{j_1=0}^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{m_2} \sigma_{m_2, k_2}^2(w) \sum_{j_2=0}^{k_2} \left(\dots \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \dots \left(\sum_{k_n=0}^{m_n} \sigma_{m_n, k_n}^n(w) \sum_{j_n=0}^{k_n} S_1^{j_1} w_1^{j_1} \dots S_n^{j_n} w_n^{j_n} \right) \dots \right) \right) \right) \cdot S_1 \dots S_n dS_1 \dots dS_n \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

La démonstration du Théorème 1.3.6.

Montrons d'abord (a). Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ et $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in \tilde{g}(w(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{H})$. D'après la définition de l'ensemble $\tilde{g}(w(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{H})$, il existe D_{z^0} , tel que $[bD_{z^0}]^{-1} \subset (w(\mathcal{N}(\cdot)))_{z^0}$. Par conséquent, le compact $\{(x_1, \dots, x_n, z_1^0, \dots, z_n^0) \in \mathbb{C}^{2n}; (x_1, \dots, x_n) \in [bD_{z^0}]^{-1}\}$ est contenu dans l'ouvert $w(\mathcal{N}(\cdot))$. En appliquant le Lemme 1.3.7. pour $w = z^0$, on trouve que

$$\begin{aligned}
& \left| f(z^0) - \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(z^0) \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^k \alpha_{j_1, \dots, j_n}^f (z_1^0)^{j_1} \dots (z_n^0)^{j_n} \right| \leq \\
& L(f; D_{z^0}) \sup_{t \in [bD_{z^0}]^{-1}} \left| (1-t_1(z_1^0))^{-1} \dots (1-t_n(z_n^0))^{-1} - p_m(t; z^0) \right|,
\end{aligned}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Comme $\tilde{g}(w(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{H})$ est un ouvert on peut choisir un voisinage compact de z^0 $\overline{U}_{z^0} \subset \tilde{g}(w(\mathcal{N}(\cdot)); \mathbb{H})$. Le même raisonnement qu'avant pour tout point $z = (z_1, \dots, z_n) \in \overline{U}_{z^0}$ montre que :

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(z) \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^k \alpha_{j_1, \dots, j_n}^f z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \right| \leq$$

$$L(f; D_z) \cdot \sup_{t \in [bD_z]^{-1}} \left| (1-t_1 z_1)^{-1} \dots (1-t_n z_n)^{-1} - p_m(t; z) \right|,$$

$m = 0, 1, 2, \dots$ et pour tout $z = (z_1, \dots, z_n) \in \overline{U_z}$.

Par conséquent :

$$\sup_{z \in \overline{U_z}} \left| f(z) - \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(z) \cdot \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^k \alpha_{v_1, \dots, v_n}^f z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} \right| \leq$$

$$\sup_{z \in \overline{U_z}} (L(f; D_z)) \cdot \sup_{z \in \overline{U_z}} \left(\sup_{t \in [bD_z]^{-1}} \left| (1-t_1 z_1)^{-1} \dots (1-t_n z_n)^{-1} - p_m(t; z) \right| \right),$$

pour $m = 0, 1, 2, \dots$. En passant à la limite lorsque $m \rightarrow \infty$, on trouve que $\lim_m \sum_{k=0}^m \sigma_{m,k}(z) \cdot \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^k \alpha_{v_1, \dots, v_n}^f z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} = f(z)$, uniformément dans $\overline{U_z}$, d'où le résultat.

Si on procède de la même façon, on démontre facilement la partie (b). du théorème. ■

En particulier, on a le :

I. 3.8. Corollaire

(a). Si $\mathbb{I} = \mathbb{I}_1 \times \dots \times \mathbb{I}_n$ est un polydomaine de $\mathbb{C}^n$, contenant 0, alors $\tilde{g}(w(\mathcal{N}_{(1)}); \mathbb{I}) \subseteq E_{\mathcal{N}_{(1)}}^n(\mathcal{O}(\mathbb{I}))$ et $\tilde{g}(w(\mathcal{N}_{\lambda_1^{(1)}}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu^{(1)}}); \mathbb{I}) \subseteq E_{\mathcal{N}_{\lambda_1^{(1)}}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu^{(1)}}}^n(\mathcal{O}(\mathbb{I}))$.

(b). Si $\mathbb{I}$ est un domaine de Reinhardt complet de $\mathbb{C}^n$, alors $\tilde{g}(w(\mathcal{N}_{(1)}); \mathbb{I}) \subseteq E_{\mathcal{N}_{(1)}}^n(\mathcal{O}(\mathbb{I}))$ et $\tilde{g}(w(\mathcal{N}_{\lambda_1^{(1)}}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu^{(1)}}); \mathbb{I}) \subseteq E_{\mathcal{N}_{\lambda_1^{(1)}}, \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu^{(1)}}}^n(\mathcal{O}(\mathbb{I}))$. ■

§4. Le théorème d'Okada, Gawronski et Trautner dans le cas de plusieurs variables complexes

Le dernier théorème de ce chapitre est la généralisation dans le cas de plusieurs variables du théorème d'Okada, Gawronski et Trautner (G.T.). Posons :

$F_{\mathcal{N}(\cdot)}^n := \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; \text{ la } \mathcal{N}(z)\text{-transformation de la suite des sommes partielles de la série } \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} \text{ converge vers } (1-z_1)^{-1} \dots (1-z_n)^{-1}, \text{ uniformément dans tout compact } \right\}$,

$F_{\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)}^n := \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; \text{ la } (\mathcal{N}_1(z), \dots, \mathcal{N}_n(z))\text{-transformation de la suite des sommes partielles de la série } \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} \text{ converge vers } (1-z_1)^{-1} \dots (1-z_n)^{-1}, \text{ lorsque } m_{\lambda_1} \rightarrow \infty, \dots, m_{\lambda_\mu} \rightarrow \infty, \text{ uniformément dans tout compact } \right\}$.

Pour $H \equiv F_{\mathcal{N}(\cdot)}^n$ (, resp. pour $H \equiv F_{\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)}^n$) et pour $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}^n$, vérifiant $\text{pr}_j(\mathcal{I}) \neq \mathbb{C}$ (, $j=1, 2, \dots, n$) , posons

$$B_{\mathcal{N}(\cdot); H}^n(\mathcal{I}) := \overbrace{(z_1, \dots, z_n) \in H}^{z_j \in \mathbb{C} \setminus \text{pr}_j(\mathcal{I}) \text{ (} j=1, 2, \dots, n \text{)}}.$$

$$\text{(resp. } B_{\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot); H}^n(\mathcal{I}) := \overbrace{(z_1, \dots, z_n) \in H}^{z_j \in \mathbb{C} \setminus \text{pr}_j(\mathcal{I}) \text{ (} j=\lambda_1, \dots, \lambda_\mu \text{)} \\ z_i \in \mathbb{C} \text{ (} i \neq \lambda_1, \dots, \lambda_\mu \text{)} \text{)},$$

où $(z_1, \dots, z_n) \in H$ désigne l'ensemble $\{(t_1, z_1, \dots, t_n, z_n) \in \mathbb{C}^n ; (t_1, \dots, t_n) \in H\}$.

En particulier, lorsque $H = F_{\mathcal{N}(\cdot)}^n$ (, resp. $H = F_{\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)}^n$) , on notera

$$B_{\mathcal{N}(\cdot)}^n(\mathcal{I}) := B_{\mathcal{N}(\cdot); F_{\mathcal{N}(\cdot)}^n}^n(\mathcal{I}),$$

$$B_{\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)}^n(\mathcal{I}) := B_{\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot); F_{\mathcal{N}_{\lambda_1}(\cdot), \dots, \mathcal{N}_{\lambda_\mu}(\cdot)}^n}^n(\mathcal{I}).$$

On a le théorème suivant :

1.4.1. Théorème

(a). Soit $M = (m_{m,k})_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots}$ une matrice triangulaire et infinie de constantes complexes. Soit aussi $\mathbb{I}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $0 \in \mathbb{I}$, vérifiant la première version du théorème d'Eiermann et tel que $\text{pr}_j(\mathbb{I}) \neq \mathbb{C}$, $\forall j=1,2,\dots,n$.

(i). Supposons que H soit un ouvert de F_M^n , $0 \in H$. Alors

$$B_{M,H}^n(\mathbb{I}) \cap \mathbb{I} \equiv E_M^n(\sigma(\mathbb{I}))$$

(ii). Si F_M^n est un ouvert, contenant 0, alors

$$B_M^n(\mathbb{I}) \cap \mathbb{I} = E_M^n(\sigma(\mathbb{I}))$$

(b). Soit $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$, où $M = (m_{m,k})_{m=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots}$ est une matrice triangulaire et infinie de constantes complexes. Soit aussi $\mathbb{I}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $0 \in \mathbb{I}$, vérifiant la deuxième version du théorème d'Eiermann et tel que $\text{pr}_j(\mathbb{I}) \neq \mathbb{C}$, $\forall j=1,2,\dots,n$.

(i). Soit $\mu=1,2,\dots,n$ et $\lambda_j=1,2,\dots,n$ ($j=1,2,\dots,\mu$) tels que $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$, si $\alpha \neq \beta$. Supposons que H soit un ouvert de $F_{M_{\lambda_1}, \dots, M_{\lambda_\mu}}^n$, $0 \in H$. Alors

$$B_{M_{\lambda_1}, \dots, M_{\lambda_\mu}}^n(\mathbb{I}) \cap \mathbb{I} \equiv E_{M_{\lambda_1}, \dots, M_{\lambda_\mu}}^n(\sigma(\mathbb{I}))$$

(ii). Soit $\mu=1,2,\dots,n$ et $\lambda_j=1,2,\dots,n$ ($j=1,2,\dots,\mu$) tels que $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$, si $\alpha \neq \beta$. Si $F_{M_{\lambda_1}, \dots, M_{\lambda_\mu}}^n$ est un ouvert contenant 0, alors

$$B_{M_{\lambda_1}, \dots, M_{\lambda_\mu}}^n(\mathbb{I}) \cap \mathbb{I} = E_{M_{\lambda_1}, \dots, M_{\lambda_\mu}}^n(\sigma(\mathbb{I}))$$

Démonstration

(a). (i.).

Associons à l'ouvert H , l'ouvert $w' = \{(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{2n}; (x_1, z_1, \dots, x_n, z_n) \in H\}$. Il est clair que $0 \in H \iff \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \subset w'$. D'autre part on peut facilement voir que les fonctions $p_m(x; z)$ (voir (1.3)'), $m=0, 1, 2, \dots$ sont continues sur w' et convergent vers $(1-x_1, z_1)^{-1} \dots (1-x_n, z_n)^{-1}$, lorsque $m \rightarrow \infty$, uniformément dans tout compact. On peut donc appliquer la première version du théorème d'Eiermann. Il suffit de remarquer que :

$$\Lambda_f(p_m(x; z)) = \sum_{k=0}^m \pi_{m,k} \cdot \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^k a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^f \cdot z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n},$$

si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{I})$ et s'écrit dans un voisinage de 0, sous la forme $f(w_1, \dots, w_n) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^f \cdot w_1^{\nu_1} \dots w_n^{\nu_n}$ et que

$$\begin{aligned} g(w'; \mathbb{I}) &= \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; (z_1^{-1}, z_1, \dots, z_n^{-1}, z_n) \in H, \right. \\ &\quad \left. \forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus pr_1(\mathbb{I}), \dots, \forall z_n \in \mathbb{C} \setminus pr_n(\mathbb{I}) \right\} = \\ &= \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; (z_1, \dots, z_n) \in (z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}) \cdot H, \right. \\ &\quad \left. \forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus pr_1(\mathbb{I}), \dots, \forall z_n \in \mathbb{C} \setminus pr_n(\mathbb{I}) \right\} = \\ &= \mathbf{B}_{\mathcal{M}, H}^n(\mathbb{I}). \end{aligned}$$

(ii). En appliquant la partie (i). (a). pour $H = \mathbf{F}_{\mathcal{M}}^n$, on trouve que :

$$(1.15.) \quad \mathbf{B}_{\mathcal{M}}^n(\mathbb{I}) \cap \mathbb{I} \subseteq \mathbf{E}_{\mathcal{M}}^n(\mathcal{O}(\mathbb{I})).$$

Soit $z = (z_1, \dots, z_n) \notin \mathbf{B}_{\mathcal{M}}^n(\mathbb{I})$, $z \in \mathbb{I}$. D'après la

définition de $\mathbf{B}_{\mathcal{M}}^n(\mathbb{I})$, il existe $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \text{pr}_1(\mathbb{I}), \dots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \text{pr}_n(\mathbb{I})$, tels que $(z_1, z_1^{-1}, \dots, z_n, z_n^{-1}) \notin \mathbf{F}_{\mathcal{M}}^n$, c'est-à-dire la suite des sommes partielles de la série $\sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^{\infty} (z_1)^{\nu_1} (z_1^{-1})^{\nu_1} \dots (z_n)^{\nu_n} (z_n^{-1})^{\nu_n}$ n'est pas $\mathcal{M}$ -sommable vers $(1 - \frac{z_1}{z_1})^{-1} \dots (1 - \frac{z_n}{z_n})^{-1}$. Considérons la fonction

$$h: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{C}; w = (w_1, \dots, w_n) \mapsto h(w) := \left(1 - \frac{w_1}{z_1}\right)^{-1} \dots \left(1 - \frac{w_n}{z_n}\right)^{-1}.$$

C'est une fonction holomorphe car on peut trouver un polydisque ouvert $\Delta^n(0; r) \subseteq \mathbb{I}$, tel que $\left(1 - \frac{w_1}{z_1}\right)^{-1} \dots \left(1 - \frac{w_n}{z_n}\right)^{-1} = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^{\infty} \left(\frac{w_1}{z_1}\right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{w_n}{z_n}\right)^{\nu_n}$, $\forall (w_1, \dots, w_n) \in \Delta^n(0; r)$. Pour cette fonction holomorphe la suite des sommes partielles de la série $\sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^h \cdot z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n}$, où $a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^h = (z_1)^{\nu_1} \dots (z_n)^{\nu_n}$, n'est pas $\mathcal{M}$ -sommable vers $h(z)$. Donc, $z \notin \mathbf{E}_{\mathcal{M}}^n(\mathbb{I}(\mathbb{I}))$; on constate que

$$(1.16.) \quad \mathbf{E}_{\mathcal{M}}^n(\mathbb{I}(\mathbb{I})) \subseteq \mathbf{B}_{\mathcal{M}}^n(\mathbb{I}) \cap \mathbb{I}.$$

La combinaison de (1.14.) et de (1.15) conduit au résultat.

La démonstration de (b). (i). est pareille à celle de (a). (i)., tandis celle de (b). (ii). est semblable à la démonstration de (a). (ii).



On a évité d'utiliser la méthode, qu'Okada avait appliqué ([25]), même dans le cas où $\mathbb{I} = \Delta^n(0; \delta)$ et $\mathcal{N}(z)$ est une matrice infinie de constantes $\mathcal{M} = (\pi_{m,k})_{m,k=0,1,2,\dots}$. Okada dans sa démonstration avait considéré l'ensemble $[(\mathbf{F}_{\mathcal{M}}^1)^c]^{-1} := \{w = (\frac{1}{z}) ; z \notin \mathbf{F}_{\mathcal{M}}^1\}$ et en profitant de deux

conditions (pas très fortes) qu'il avait posé au début (que F_M^1 est un ouvert de $\mathbb{C}$, contenant $\Delta(0;1)$, il a utilisé plus tard le fait que $[(F_M^1)^c]^{-1}$ est un fermé $\equiv \overline{\Delta(0;1)}$. Dans le cas de plusieurs variables complexes il n'y a pas d'analogue : on peut considérer un ensemble $[(F_M^n)^c]^{-1} = \{z = (z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}) \in \mathbb{C}^n; (z_1, \dots, z_n) \notin F_M^n \text{ et } z_j \neq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n\}$, on peut admettre que F_M^n est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$, contenant $\Delta^n(0;1)$, mais on perd la possibilité d'avoir $[(F_M^n)^c]^{-1}$: fermé $\equiv \overline{\Delta^n(0;1)}$.

Quelques remarques générales sur le premier chapitre.

Les références classiques pour les notions et les résultats de base de l'analyse des plusieurs variables complexes sont [12] et [15]. Le **Lemme 1.2.2.** et le **Théorème 1.2.1.** sont été démontrés par M. Eiermann, dans le cas où $n=1$ ([9], Lemma 2 et Theorem 3 respectivement). L'idée de l'introduction de la forme linéaire Λ_f , dans le paragraphe 2., est à C. Brezinski ([2], [3] ou [6]). L'exemple d'ouvert de $\mathbb{C}^2$, qui satisfait les conditions (1.12.), dans le paragraphe 3., est dû à G. Coeuré. La forme et la démonstration du théorème classique d'Okada, lorsque $n=1$, se trouvent dans [25] ou [26].

CHAPITRE DEUXIÈME

APPLICATIONS À QUELQUES EXEMPLES

D'APPROXIMANTS DE TYPE PADÉ

§ 1. Un théorème concernant la convergence des approximants de type Padé vers les fonctions holomorphes

Soit $\mathcal{M}_1 := (\pi_{m,k}^1)_{m \geq 0, 0 \leq k \leq m}, \dots, \mathcal{M}_n := (\pi_{m,k}^n)_{m \geq 0, 0 \leq k \leq m}$ n matrices infinies triangulaires $(\pi_{m,k}^j \in \mathbb{C})$. Soit aussi $(m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$ (où on a posé $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) et $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ fixé et tel que $z_j \neq (\pi_{m_j,k}^j)^{-1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m_j$, $j = 1, 2, \dots, n$). Pour $j = 1, 2, \dots, n$, considérons le polynôme $Q_{m_j}(x_j, z_j)$, qui interpôle la fonction $(1 - x_j \cdot z_j)^{-1}$ aux points $(\pi_{m_j,0}^j, z_j), (\pi_{m_j,1}^j, z_j), \dots, (\pi_{m_j,m_j}^j, z_j)$, c.à.d. qui satisfait

$$(2.1.) \quad Q_{m_j}(\pi_{m_j,k}^j, z_j) = (1 - \pi_{m_j,k}^j \cdot z_j)^{-1} \quad (k = 0, 1, \dots, m_j).$$

Rappelons que

$$(2.2.) \quad Q_{m_j}(x_j, z_j) = \frac{1}{1 - x_j \cdot z_j} \cdot \left(1 - \frac{v_{m_j+1}(x_j)}{v_{m_j+1}(z_j^{-1})} \right),$$

où $v_{m_j+1}(t) = \gamma \cdot \prod_{k=0}^{m_j} (t - \pi_{m_j,k}^j)$ ($\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).
 autre part remarquons que le degré de Q_{m_j} par

rapport à la variable x_j est m_j .

Si $P_{(m_1, \dots, m_n)}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n)$ est le produit des polynômes $Q_{m_1}(x_1, z_1), Q_{m_2}(x_2, z_2), \dots, Q_{m_n}(x_n, z_n)$, alors $P_{(m_1, \dots, m_n)}$ sera le polynôme d'interpolation de la fonction $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$, aux points $(\pi_{m_1, k_1}^{(1)}, \dots, \pi_{m_n, k_n}^{(n)}, z_1, \dots, z_n)$ ($k_j = 0, 1, 2, \dots, m_j$).⁽¹⁾

Soit maintenant $\mathcal{U}$ ouvert $\subseteq \mathbb{C}^n$ et $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. Supposons que f s'écrive dans un voisinage U_0 de 0 (on peut supposer que $0 \in \mathcal{U}$), sous la forme $f(w_1, \dots, w_n) = \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} \alpha_{v_1, \dots, v_n}^f w_1^{v_1} \dots w_n^{v_n}$. Associons à f une forme linéaire Λ_f , définie sur l'espace des polynômes à n variables complexes, comme dans le premier chapitre, c.à.d.

$$(2.3.) \quad \left\| \begin{array}{l} \text{pour tout } v_i = 0, 1, 2, \dots, \\ \Lambda_f(x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n}) := \alpha_{v_1, \dots, v_n}^f. \end{array} \right.$$

Voir aussi la relation (1.6.) du premier chapitre. La fonction

$$(2.4.) \quad \Lambda_f(P_{(m_1, \dots, m_n)}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n))$$

⁽¹⁾ Puisque le degré de $P_{(m_1, \dots, m_n)}$, par rapport à chaque variable x_j , est m_j , son degré par rapport à la variable $(x_1, \dots, x_n)$ est $(m_1, \dots, m_n)$, d'où l'explication du choix de la notation $P_{(m_1, \dots, m_n)}$.

s'appelle un approximant de type Padé de f . Le polynôme

$$(2.5.) \quad \left\| \begin{aligned} V_{(m_1+1, \dots, m_n+1)}(x_1, \dots, x_n) &:= \gamma \cdot \prod_{j=1}^n v_{m_j+1}(x_j), \\ \text{où } \gamma &\in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ v_{m_j+1}(x_j) &:= \gamma_j \cdot \prod_{k=0}^{m_j} (x_j - \pi_{m_j, k}^j), \\ \gamma_j &\in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \end{aligned} \right.$$

s'appelle le polynôme générateur de cet approximant. L'introduction de ces deux notions et des propriétés des objets qu'elles représentent est due à Brezinski⁽¹⁾.

On peut trouver une expression précise pour un approximant de type Padé de f :

$$\begin{aligned} \Lambda_f \left((1-x_1 z_1^{-1}) \dots (1-x_n z_n^{-1}) \cdot \left(1 - \frac{v_{m_1+1}(x_1)}{v_{m_1+1}(z_1^{-1})} \right) \dots \left(1 - \frac{v_{m_n+1}(x_n)}{v_{m_n+1}(z_n^{-1})} \right) \right) &= \\ = \Lambda_f \left((1-x_1 z_1^{-1}) \dots (1-x_n z_n^{-1}) \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^n \frac{v_{m_j+1}(x_j)}{v_{m_j+1}(z_j^{-1})} + \right. \right. \\ + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{v_{m_i+1}(x_i) \cdot v_{m_j+1}(x_j)}{v_{m_i+1}(z_i^{-1}) \cdot v_{m_j+1}(z_j^{-1})} &- \left. \sum_{\substack{i, j, l=1 \\ i \neq j \neq l \neq i}}^n \frac{v_{m_i+1}(x_i)}{v_{m_i+1}(z_i^{-1})} \right). \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Voir [2], [3], [4], [5] et [6].

$$\begin{aligned}
& \frac{U_{m_j+1}(x_j) \cdot U_{m_\ell+1}(x_\ell)}{U_{m_j+1}(z_j^{-1}) \cdot U_{m_\ell+1}(z_\ell^{-1})} + \sum_{\substack{i, j, \ell, \mu = 1 \\ i \neq j \neq \ell \neq \mu \neq i \neq \ell \\ j \neq \mu}}^n \frac{U_{m_i+1}(x_i) \cdot U_{m_j+1}(x_j)}{U_{m_i+1}(z_i^{-1}) \cdot U_{m_j+1}(z_j^{-1})} \\
& \left(\frac{U_{m_\ell+1}(x_\ell) \cdot U_{m_\mu+1}(x_\mu)}{U_{m_\ell+1}(z_\ell^{-1}) \cdot U_{m_\mu+1}(z_\mu^{-1})} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{U_{m_1+1}(x_1) \cdot \dots \cdot U_{m_n+1}(x_n)}{U_{m_1+1}(z_1^{-1}) \cdot \dots \cdot U_{m_n+1}(z_n^{-1})} \right) = \\
& = \Lambda_f \left(\frac{1}{z_1 \cdot \dots \cdot z_n} \cdot \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(x_1 - z_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (x_n - z_n^{-1})} \cdot \frac{U_{m_1+1}(x_1)}{U_{m_1+1}(z_1^{-1})} \dots \right. \right. \\
& \dots \frac{U_{m_n+1}(x_n)}{U_{m_n+1}(z_n^{-1})} + \dots - \frac{1}{(x_1 - z_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (x_n - z_n^{-1})} \cdot \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i \neq j}}^n \\
& \frac{U_{m_1+1}(z_1^{-1}) \cdot \dots \cdot U_{m_{i-1}+1}(z_{i-1}^{-1}) \cdot U_{m_i+1}(x_i) \cdot U_{m_{i+1}+1}(z_{i+1}^{-1}) \cdot \dots \cdot U_{m_{j-1}+1}(z_{j-1}^{-1})}{U_{m_1+1}(z_1^{-1}) \cdot \dots \cdot U_{m_n+1}(z_n^{-1})} \\
& \left. \frac{U_{m_j+1}(x_j) \cdot U_{m_{j+1}+1}(z_{j+1}^{-1}) \cdot \dots \cdot U_{m_n+1}(z_n^{-1})}{(x_1 - z_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (x_n - z_n^{-1})} \right. \\
& \left. \cdot \sum_{i=1}^n \frac{U_{m_1+1}(z_1^{-1}) \cdot \dots \cdot U_{m_{i-1}+1}(z_{i-1}^{-1}) \cdot U_{m_i+1}(x_i) \cdot U_{m_{i+1}+1}(z_{i+1}^{-1}) \cdot \dots \cdot U_{m_n+1}(z_n^{-1})}{U_{m_1+1}(z_1^{-1}) \cdot \dots \cdot U_{m_n+1}(z_n^{-1})} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{(x_1 - z_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (x_n - z_n^{-1})} \cdot \frac{U_{m_1+1}(z_1^{-1}) \cdot \dots \cdot U_{m_n+1}(z_n^{-1})}{U_{m_1+1}(z_1^{-1}) \cdot \dots \cdot U_{m_n+1}(z_n^{-1})} \right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z_1^{m_1+1} \dots z_n^{m_n+1} \cdot v_{m_1+1}(z_1^{-1}) \dots v_{m_n+1}(z_n^{-1})} \cdot z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n} \cdot \Lambda_f \left(\frac{(-1)^{n+1} v_{m_1+1}(x_1) \dots v_{m_n+1}(x_n)}{+ \dots} \right. \\ \left. \dots + \frac{\sum_{i=1}^n v_{m_1+1}(z_1^{-1}) \dots v_{m_{i-1}+1}(z_{i-1}^{-1}) \cdot v_{m_i+1}(x_i) \cdot v_{m_{i+1}+1}(z_{i+1}^{-1}) \dots}{(x_1 - z_1^{-1}) \dots (x_n - z_n^{-1})} \right. \\ \left. \dots \frac{v_{m_{n+1}+1}(z_n^{-1}) - v_{m_1+1}(z_1^{-1}) \dots v_{m_n+1}(z_n^{-1})}{+ \dots} \right),$$

$$\text{c.à.d.} \quad \Lambda_f(P_{(m_1, \dots, m_n)}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n)) = \frac{\hat{W}_{(m_1, \dots, m_n)}(z_1, \dots, z_n)}{\hat{V}_{(m_1+1, \dots, m_n+1)}(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1})},$$

où on a posé

$$\hat{W}_{(m_1, \dots, m_n)}(z_1, \dots, z_n) := z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n} \cdot \Lambda_f \left(\frac{(-1)^{n+1} v_{m_1+1}(x_1) \dots}{+ \dots} \right. \\ \left. \dots \frac{\sum_{i=1}^n v_{m_1+1}(z_1^{-1}) \dots v_{m_{i-1}+1}(z_{i-1}^{-1}) \cdot v_{m_i+1}(x_i) \cdot}{(x_1 - z_1^{-1}) \dots (x_n - z_n^{-1})} \right. \\ \left. \dots \frac{v_{m_{i+1}+1}(z_{i+1}^{-1}) \dots v_{m_n+1}(z_n^{-1}) - v_{m_1+1}(z_1^{-1}) \dots v_{m_n+1}(z_n^{-1})}{+ \dots} \right),$$

$$\hat{V}_{(m_1+1, \dots, m_n+1)}(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}) := z_1^{m_1+1} \dots z_n^{m_n+1} \cdot V_{(m_1+1, \dots, m_n+1)}(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}).$$

$\frac{\hat{W}_{(m_1, \dots, m_n)}(z_1, \dots, z_n)}{\hat{V}_{(m_1+1, \dots, m_n+1)}(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1})}$ est une fraction, dont le numérateur

est un polynôme de degré $\leq (m_1, \dots, m_n)$ (par rapport à la variable $(z_1, \dots, z_n)$) et le dénominateur est un polynôme de degré $\leq (m_1+1, \dots, m_n+1)$ (par rapport à la variable $(z_1, \dots, z_n)$). Au lieu donc de noter $\Lambda_f(P_{(m_1, \dots, m_n)}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n))$ pour un approximant de type Padé de f , on notera

$$(m_1, \dots, m_n \mid m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z_1, \dots, z_n).$$

Exemple ($n = 2$)

Soit $M_1 = (\pi_{m_1, k_1}^1)_{m_1 \geq 0, 0 \leq k_1 \leq m_1}$, $M_2 = (\pi_{m_2, k_2}^2)_{m_2 \geq 0, 0 \leq k_2 \leq m_2}$ deux matrices infinies triangulaires $(\pi_{m_j, k_j}^j \in \mathbb{C})$.

Si $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $z_1 \neq (\pi_{m_1, k_1}^1)^{-1}$, $k_1 = 0, 1, \dots, m_1$,

$$z_2 \neq (\pi_{m_2, k_2}^2)^{-1}, k_2 = 0, 1, \dots, m_2,$$

soit $Q_{m_1}(x_1, z_1) \cdot Q_{m_2}(x_2, z_2)$ le polynôme de degré $\leq (m_1, m_2)$ qui interpôle la fonction $(1 - x_1 \cdot z_1)^{-1} \cdot (1 - x_2 \cdot z_2)^{-1}$ aux $(m_1+1) + (m_2+1)$ points : $(\pi_{m_1, 0}^1, z_1), (\pi_{m_1, 1}^1, z_1), \dots, (\pi_{m_1, m_1}^1, z_1)$, $(\pi_{m_2, 0}^2, z_2), (\pi_{m_2, 1}^2, z_2), \dots, (\pi_{m_2, m_2}^2, z_2)$, c'est-à-dire

$$Q_{m_1}(\pi_{m_1, k_1}^1, z_1) \cdot Q_{m_2}(\pi_{m_2, k_2}^2, z_2) = (1 - \pi_{m_1, k_1}^1 \cdot z_1)^{-1} \cdot (1 - \pi_{m_2, k_2}^2 \cdot z_2)^{-1},$$

$$k_1 = 0, 1, \dots, m_1, \quad k_2 = 0, 1, \dots, m_2.$$

Soit maintenant $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^2$, $0 \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$.

Supposons que f s'écrive dans un voisinage de 0 sous la forme $f(w_1, w_2) = \sum_{\nu_1, \nu_2=0}^{\infty} a_{\nu_1, \nu_2}^f w_1^{\nu_1} w_2^{\nu_2}$. Associons à f un fonctionnel linéaire Λ_f définie sur l'espace des polynômes à 2 variables complexes :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{pour tout } \nu_i = 0, 1, 2, \dots, \quad (i = 1, 2), \\ \Lambda_f (x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}) := a_{\nu_1, \nu_2}^f. \end{array} \right.$$

La fonction $\Lambda_f (Q_{m_1}(x_1, z_1), Q_{m_2}(x_2, z_2))$ s'appelle un approximant de type Padé de f . Le polynôme

$$\left\| \begin{array}{l} V_{(m_1+1, m_2+1)}(x_1, x_2) := \gamma \cdot \prod_{j=1}^2 v_{m_j+1}(x_j), \\ \text{où} \\ \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ v_{m_j+1}(x_j) := \gamma_j \cdot \prod_{k=0}^{m_j} (x_j - \pi_{m_j, k}^j), \quad \gamma_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{array} \right.$$

est le polynôme générateur de cet approximant.
Si l'on pose

$$\hat{W}_{(m_1, m_2)}(z_1, z_2) := z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdot \Lambda_f \left(\frac{-v_{m_1+1}(x_1) \cdot v_{m_2+1}(x_2) + v_{m_1+1}(z_1^{-1}) \cdot v_{m_2+1}(x_2) + v_{m_1+1}(x_1) \cdot v_{m_2+1}(z_2^{-1}) - v_{m_1+1}(z_1^{-1}) \cdot v_{m_2+1}(z_2^{-1})}{(x_1 - z_1^{-1}) \cdot (x_2 - z_2^{-1})} \right),$$

$$\hat{V}_{(m_1+1, m_2+1)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) := z_1^{m_1+1} z_2^{m_2+1} \cdot V_{(m_1+1, m_2+1)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}),$$

on trouve facilement que

$$\Lambda_f(q_{m_1}(x_1, z_1), q_{m_2}(x_2, z_2)) = \frac{\hat{W}_{(m_1, m_2)}(z_1, z_2)}{\hat{V}_{(m_1+1, m_2+1)}(z_1^{-1}, z_2^{-1})},$$

$$(\text{, parce que } q_{m_1}(x_1, z_1) \cdot q_{m_2}(x_2, z_2) = \frac{1}{(1-x_1, z_1) \cdot (1-x_2, z_2)} \cdot \left(1 - \frac{v_{m_1+1}(x_1)}{v_{m_1+1}(z_1^{-1})}\right) \cdot \left(1 - \frac{v_{m_2+1}(x_2)}{v_{m_2+1}(z_2^{-1})}\right)).$$

On vérifie donc que $\Lambda_f(q_{m_1}(x_1, z_1), q_{m_2}(x_2, z_2))$ est une fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme de degré $\leq (m_1, m_2)$ et le dénominateur est un polynôme de degré $\leq (m_1+1, m_2+1)$. ■

Étant donné une suite $\{V_{(m_1, \dots, m_n)}(x_1, \dots, x_n) ; m_1=1, 2, \dots, m_2=1, 2, \dots, \dots, m_n=1, 2, \dots\}$ de polynômes générateurs, on étudiera la convergence de la suite $\{(m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f ; m_1=1, 2, \dots, m_2=1, 2, \dots, \dots, m_n=1, 2, \dots\}$. Il est facile de voir que

$$(2.6.) \quad (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z_1, \dots, z_n) = \\ = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sigma_{m_1, k_1}^1(z) \cdot \sum_{k_2=0}^{m_2} \left(\dots \left(\sum_{k_n=0}^{m_n} \sigma_{m_n, k_n}^n(z) \cdot \sum_{v_n=0}^{k_n} a_{v_1, \dots, v_n}^f z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} \right) \dots \right),$$

où $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $m_i = 0, 1, 2, \dots, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots$ et $\sigma_{m_1, k_1}^1, \dots, \sigma_{m_n, k_n}^n$ sont de fonctions rationnelles de z , déterminées par les coefficients de $V_{(m_1, \dots, m_n)}$. On a donc,

$$(2.7.) \quad (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = \Lambda_f(q_{m_1, \dots, m_n}(x; z)),$$

et on peut appliquer les résultats du premier chapitre, pour les approximations de type Padé. On a le théorème suivant :

II.1.1. Théorème

Supposons que $\mathbb{I}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant 0 et vérifiant la deuxième version du théorème d'Eiermann.

(i). Soit $\{V_{(m_1+1, \dots, m_n+1)}(x_1, \dots, x_n) := \gamma \cdot \prod_{j=1}^n v_{m_j+1}(x_j) ;$
 $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, v_{m_j+1}(x_j) := \gamma_j \cdot \prod_{k=0}^{m_j+1} (x_j - \pi_{m_j, k}), \gamma_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\};$
 $m_1=0, 1, 2, \dots, m_2=0, 1, 2, \dots, \dots, m_n=0, 1, 2, \dots\}$
 une suite de polynômes générateurs, telle que

$$\begin{aligned}
 (2.8.) \quad & \lim_{m_1, \dots, m_n} \frac{\sum_{i=1}^n v_{m_1}(z_1^{-1}) \dots v_{m_{i-1}}(z_{i-1}^{-1}) \cdot v_{m_i}(x_i) \cdot v_{m_{i+1}}(z_{i+1}^{-1}) \dots}{\dots v_{m_n}(z_n^{-1}) - \sum_{i,j=1, i \neq j}^n v_{m_i}(z_i^{-1}) \dots} \\
 & \frac{\dots v_{m_{i-1}}(z_{i-1}^{-1}) \cdot v_{m_i}(x_i) \cdot v_{m_{i+1}}(z_{i+1}^{-1}) \dots}{V_{(m_1, \dots, m_n)}(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1})} \\
 & \frac{\dots v_{m_{j-1}}(z_{j-1}^{-1}) \cdot v_{m_j}(x_j) \cdot v_{m_{j+1}}(z_{j+1}^{-1}) \dots}{\dots v_{m_n}(z_n^{-1}) + \dots} \\
 & \dots + (-1)^{n+1} v_{m_1}(x_1) \dots v_{m_n}(x_n) = 0,
 \end{aligned}$$

uniformément dans tout compact d'un ouvert $w \subset \mathbb{C}^{2n}$,
 contenant $\mathbb{C}^n \times \{0\}$. Alors,

$$(2.9.) \quad \lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de :

$$\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n\}$$

$$\lim_{m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_\mu}} \frac{\sum_{i=1}^n v_{m_1}(z_1^{-1}) \dots v_{m_{i-1}}(z_{i-1}^{-1}) \cdot v_{m_i}(\xi_i^{-1}) \cdot v_{m_{i+1}}(z_{i+1}^{-1}) \dots}{\dots v_{m_n}(z_n^{-1}) - \sum_{i,j=1, i \neq j}^n v_{m_i}(z_i^{-1}) \dots}$$

$$\dots v_{m_{i-1}}(z_{i-1}^{-1}) \cdot v_{m_i}(\xi_i^{-1}) \cdot v_{m_{i+1}}(z_{i+1}^{-1}) \dots$$

$$V_{(m_1, \dots, m_n)}(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1})$$

$$\dots v_{m_{j-1}}(z_{j-1}^{-1}) \cdot v_{m_j}(\xi_j^{-1}) \cdot v_{m_{j+1}}(z_{j+1}^{-1}) \dots v_{m_n}(z_n^{-1}) +$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} \cdot v_{m_1}(\xi_1^{-1}) \dots v_{m_n}(\xi_n^{-1}) = 0,$$

$$\forall \xi_i \in \bar{\mathbb{C}} \setminus p_{r_i}(\mathcal{I}) \dots \forall \xi_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus p_{r_n}(\mathcal{I}) \} \cap \mathcal{I}$$

(ii). Supposons que la fonction

$$\varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\mu}(x, z) = \varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\mu}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) := \overline{\lim_{m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_\mu}}} \frac{\sum_{i=1}^n v_{m_1}(z_1^{-1}) \dots v_{m_{i-1}}(z_{i-1}^{-1}) \cdot v_{m_i}(x_i) \cdot v_{m_{i+1}}(z_{i+1}^{-1}) \dots}{V_{(m_1, \dots, m_n)}(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}) - \dots + (-1)^{n+1} \cdot v_{m_1}(x_1) \dots v_{m_n}(x_n)} \Bigg|_{\substack{z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}}}^{\frac{1}{m_{\lambda_1} \dots m_{\lambda_\mu}}}$$

est continue sur un ouvert $\omega \subset \mathbb{C}^{2n}$, qui contient $\mathbb{C}^n \times \{0\}$.

Si $r < 1$, alors

$$\lim_{m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_\mu}} \left| f(z) - (m_1, \dots, m_n, m_{\lambda_1+1}, \dots, m_{\lambda_\mu+1})_f(z) \right|^{\frac{1}{m_{\lambda_1} \dots m_{\lambda_\mu}}} \leq r,$$

$$\forall z \in \left\{ w \in \mathbb{C}^n; \quad \varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\mu}(\bar{z}, w) \leq r \quad \forall \bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \right.$$

$$\left. \bar{z}_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus p_{r_1}(\mathbb{I}\mathbb{L}), \dots, \bar{z}_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus p_{r_n}(\mathbb{I}\mathbb{L}) \right\}.$$

Démonstration

(i). Soit $P_{(m_1, \dots, m_n)}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n)$ le polynôme d'interpolation de la fonction $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$, aux points $(\pi_{m_1, \kappa_1}, \dots, \pi_{m_n, \kappa_n}, z_1, \dots, z_n)$, $\kappa_j = 0, 1, 2, \dots, m_j$. Comme on l'a déjà vu au début de ce paragraphe

$$P_{(m_1, \dots, m_n)}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) = (1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{v_{m_1+1}(x_1)}{v_{m_1+1}(z_1^{-1})}\right) \dots \left(1 - \frac{v_{m_n+1}(x_n)}{v_{m_n+1}(z_n^{-1})}\right).$$

En faisant les calculs, on trouve grâce à (2.8.) que la suite $\{P_{(m_1, \dots, m_n)}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n); m_1 = 0, 1, 2, \dots, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots\}$ converge vers $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$ (uniformément dans tout compact de w) lorsque $m_{\lambda_1} \rightarrow \infty, m_{\lambda_2} \rightarrow \infty, \dots, m_{\lambda_\mu} \rightarrow \infty$.
~~Donc~~ après les résultats du premier chapitre, (2.9.) est vraie dans les compacts de $g(w; \mathbb{I}\mathbb{L}) =$

$$= \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; (\zeta_1^{-1}, \dots, \zeta_n^{-1}, z_1, \dots, z_n) \in w, \right. \\ \left. \forall \zeta_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_1(\mathcal{I}) , \dots , \forall \zeta_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_n(\mathcal{I}) \right\} .$$

Mais

$$g(w; \mathcal{I}) = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; \right.$$

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} \frac{\sum_{i=1}^n v_{m_i}(z_1^{-1}) \dots v_{m_{i-1}}(z_{i-1}^{-1}) \cdot v_{m_i}(\zeta_i^{-1}) \cdot v_{m_{i+1}}(z_{i+1}^{-1}) \dots}{V_{(m_1, \dots, m_n)}(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}) - \dots + (-1)^{n+1} v_{m_1}(\zeta_1^{-1}) \dots v_{m_n}(\zeta_n^{-1})} = 0$$

$$\forall \zeta_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_1(\mathcal{I}) , \dots , \forall \zeta_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_n(\mathcal{I}) \} ,$$

d'où le résultat .

La partie (ii). est une conséquence immédiate de la partie (i) .



Dans la suite , on donnera quelques exemples d'approximants de type Padé et on appliquera le théorème II.1.1. à ces exemples .

Mais auparavant , présentons un corollaire immédiat , mais utile du théorème II.1.1. :

Théorème (II.1.1.)'

Soit f une fonction holomorphe dans $\Delta^2(0; \delta)$ (ou dans $\mathbb{C}^2$). Si les polynômes générateurs $V_{(m_1, m_2)}(x_1, x_2) = \gamma \cdot v_{m_1+1}(x_1) \cdot v_{m_2+1}(x_2)$ (, où $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $v_{m_j+1}(x_j) = (x_j - \pi_{m_j,0}^i)(x_j - \pi_{m_j,1}^i) \dots (x_j - \pi_{m_j,m_j}^i)$,) vérifient :

$$\lim_{\substack{m_{\lambda_1} \rightarrow \infty \\ \dots \dots \dots \\ m_{\lambda_\mu} \rightarrow \infty}} \frac{v_{m_1}(z_1^{-1}) \cdot v_{m_2}(z_2) + v_{m_1}(x_1) \cdot v_{m_2}(z_2^{-1}) - v_{m_1}(x_1) \cdot v_{m_2}(x_2)}{V_{(m_1, m_2)}(z_1^{-1}, z_2^{-1})} = 0 ,$$

uniformément dans tout compact d'un ouvert $\omega \subseteq \mathbb{C}^4$, qui contient $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$, alors

$$\lim_{\substack{m_{\lambda_1} \rightarrow \infty \\ \dots \dots \dots \\ m_{\lambda_\mu} \rightarrow \infty}} (m_1, m_2 / m_1+1, m_2+1) f(z) = f(z) ,$$

uniformément dans tout compact de

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \lim_{\substack{m_{\lambda_1} \rightarrow \infty \\ \dots \dots \dots \\ m_{\lambda_\mu} \rightarrow \infty}} \frac{v_{m_1}(z_1^{-1}) \cdot v_{m_2}(\bar{z}_2^{-1}) + v_{m_1}(\bar{z}_1^{-1}) \cdot v_{m_2}(z_2^{-1}) - v_{m_1}(\bar{z}_1^{-1}) \cdot v_{m_2}(\bar{z}_2^{-1})}{V_{(m_1, m_2)}(z_1^{-1}, z_2^{-1})} = 0 ,$$

$$\left. \begin{aligned} &\forall \bar{z}_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus p_{r_1}(\Delta^2(0; \delta)) , \quad \forall \bar{z}_2 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus p_{r_2}(\Delta^2(0; \delta)) \\ &(\text{resp. si } \bar{z}_1^{-1} = 0 , \quad \bar{z}_2^{-1} = 0) \end{aligned} \right\} .$$



Il est bien évident que la présentation des hypothèses dans les **Théorèmes II.1.1.** et **(II.1.1.)'** est implicite. Si $n=1$, la relation (2.8.) devient tout simplement

$$\lim_m \frac{v_m(x)}{v_m(z^{-1})} = 0,$$

tandis que l'ensemble dans lequel, pour toute $f \in \mathcal{O}(\mathbb{I})$ on a $\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z)$ (uniformément dans tout compact), est de la forme :

$$\left\{ z \in \mathbb{C}; \lim_m \frac{v_m(\zeta^{-1})}{v_m(z^{-1})} = 0, \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{I} \right\}.$$

Donc lorsque $n=1$, on a tout intérêt pratique à considérer et à utiliser ces théorèmes et à ne pas changer les énoncés de leurs hypothèses. Pourtant dans le cas où $n>1$, on préférera modifier les énoncés des **Théorèmes II.1.1.** et **(II.1.1.)'**. Ainsi, dans ce cas le **Théorème II.1.1.** sera remplacé par le **Théorème II.1.2.**, dont la forme est relativement plus simple.

II.1.2. Théorème

Soit $\mathbb{I}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$ ($n>1$), contenant 0 et vérifiant la deuxième version du théorème d'Eiermann. Soit aussi $P_{(m_1, \dots, m_n)}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n)$ le polynôme d'interpolation de la fonction $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$ aux points $(\pi_{m_1, \kappa_1}^1, \dots, \pi_{m_n, \kappa_n}^n, z_1, \dots, z_n)$, $\kappa_j = 0, 1, 2, \dots, m_j$.

Supposons que la suite $\{P_{(m_1, \dots, m_n)}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n)\}$, $m_1 = 0, 1, 2, \dots, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots\}$ converge vers $(1-x_1 z_1)^{-1} \dots (1-x_n z_n)^{-1}$,

uniformément dans tout compact d'un ouvert $\omega \subset \mathbb{C}^{2n}$, contenant $\mathbb{C}^n \times \{0\}$, lorsque $m_{\lambda_1} \rightarrow \infty, \dots, m_{\lambda_\mu} \rightarrow \infty$.
 Alors ,

$$\lim_{m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_\mu}} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z) ,$$

uniformément dans tout compact de $g(\omega; \mathcal{I}) \cap \mathcal{I}$, où on a posé

$$g(\omega; \mathcal{I}) := \{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; (\zeta_1^{-1}, \dots, \zeta_n^{-1}, z_1, \dots, z_n) \in \omega$$

$$\forall \zeta_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_1(\mathcal{I}), \dots, \forall \zeta_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_n(\mathcal{I}) \} . \blacksquare$$

§ 2. Quatre exemples de convergence des approximants de type Padé

1^{er} Exemple

Soit la suite de polynômes générateurs d'une approximation de type Padé donnée par :

$$(2.10.) \quad \left\{ \begin{aligned} V_{(m_1+1, \dots, m_n+1)}(x_1, \dots, x_n) &= \gamma \cdot \prod_{j=1}^n v_{m_j+1}(x_j) \quad ; \\ \gamma &\in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad v_{m_j+1}(x_j) = (x_j - b_j)^{m_j+1}, \quad b_j \in \mathbb{C} ; \\ m_1 &= 0, 1, 2, \dots, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}.$$

On a la proposition suivante :

II.2.1. Proposition

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, comme dans le théorème II.1.1. ; soit aussi la suite (2.10.) et $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$.

Supposons que les approximants de type Padé de f , dont la suite des polynômes générateurs est donnée par (2.10.), soient notés

$$(m_1, \dots, m_n \mid m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z)$$

$$m_1 = 0, 1, 2, \dots, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots$$

Alors

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de $\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{D}^n ;$
 $|z_j^{-1} - b_j| > \sup_{z_j \in \mathbb{C} \setminus \text{pr}_j(\mathbb{D})} |z_j^{-1} - b_j|, \quad j = 1, 2, \dots, n\}.$

(La démonstration est une application directe du théorème II.1.1.)



On voit donc que les approximants de type Padé convergent vers $f(z_1, \dots, z_n)$, si $z_j^{-1} \notin \Delta(b_j; \sup_{z_j \in \mathbb{C} \setminus \text{pr}_j(\mathbb{D})} |z_j^{-1} - b_j|)$.

Ainsi lorsque $n = 2$ et les polynômes générateurs d'une approximation de type Padé sont donnés par :

$$V_{(m_1+1, m_2+1)}(x_1, x_2) = \gamma \cdot (x_1 - b_1)^{m_1+1} \cdot (x_2 - b_2)^{m_2+1}$$

$$(\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b_i \in \mathbb{C})$$

et si $f \in \mathcal{O}(\Delta^2(0; \delta))$, alors

$$\lim_{\substack{m_1 \rightarrow \infty \\ m_2 \rightarrow \infty}} (m_1, m_2 / m_1+1, m_2+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de $\{z = (z_1, z_2) \in \Delta^2(0; \delta);$
 $|z_i^{-1} - b_i| > \sup_{|z_i| \geq \delta_i} |z_i^{-1} - b_i|, \quad i = 1, 2\}.$

Si $f \in O(\mathbb{C}^2)$, alors

$$\lim_{\substack{m_1 \rightarrow \infty \\ m_2 \rightarrow \infty}} (m_1, m_2 / m_1+1, m_2+1)_f(z) = f(z)$$

uniformément dans tout compact de

$$\left\{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \quad |z_i^{-1} - b_i| > |b_i|, \quad i=1,2 \right\} =$$

$$\left\{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \quad z_i^{-1} \notin \Delta(b_i; b_i), \quad i=1,2 \right\}.$$

De la proposition II.2.1. découle facilement
le

II.2.2. Corollaire

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, comme dans le théorème II.1.1., vérifiant

$$(2.11.) \quad \text{pr}_j(\mathcal{U}) = \left\{ z_j \in \mathbb{C}; \quad \text{Re}(z_j \cdot b_j) < \frac{1}{2} \right\},$$

$b_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $j=1,2,\dots,n$; soit aussi la suite
(2.10.) et $f \in O(\mathcal{U})$.

Supposons toujours que les approximants de type Padé de f , dont la suite des polynômes générateurs est donnée par (2.10.), sont notés

$$(m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z),$$

$$m_1 = 0, 1, 2, \dots, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots$$

Alors

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de $\mathbb{D}$. En plus,

$$\overline{\lim_{m_1, \dots, m_n}} \left| (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) - f(z) \right|^{\frac{1}{m_1 \dots m_n}} \leq r < 1,$$

$$\forall z \in \mathbb{D} \cap \underbrace{\Delta \left(-\frac{r^2 |b_1|^{-1}}{1-r^2}; \frac{r \cdot |b_1|^{-1}}{1-r^2} \right) \times \dots \times \Delta \left(-\frac{r^2 |b_n|^{-1}}{1-r^2}; \frac{r \cdot |b_n|^{-1}}{1-r^2} \right)}_{n \text{ fois}}.$$

Démonstration

Puisque $\{ \overline{b_j}^{-1}; \overline{b_j} \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_j(\mathbb{D}) \} = \overline{\Delta(b_j; |b_j|)}$ on constate, d'après la proposition II.2.1., que

$$(12.) \quad \lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de $\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{D}; |z_j^{-1} - b_j| > |b_j|, j = 1, 2, \dots, n \}$. Mais
comme

$$|w^{-1} - b| > |b| \iff \operatorname{Re}(wb) < \frac{1}{2},$$

$$(w \in \mathbb{C} \text{ et } b \in \mathbb{C}),$$

la limite (2.12.) est uniforme dans tout compact de $\mathbb{I}$ (et égale à $f(z)$).

Pour le reste de la démonstration, il suffit de rappeler que ⁽¹⁾

$$\left\{ z_j / \frac{|b_j|}{|z_j^{-1} - b_j|} \leq r \right\} = \Delta \left(-\frac{r^2 \cdot b_j^{-1}}{1 - r^2} ; \frac{r \cdot |b_j|^{-1}}{1 - r^2} \right)$$

2^e Exemple

Soit la suite de polynômes générateurs d'une approximation de type Padé donnée par :

$$(2.13.) \quad \left\{ V_{(m_1+1, \dots, m_n+1)}(x_1, \dots, x_n) = \gamma \cdot \prod_{j=1}^n v_{m_j+1}(x_j) ; \right. \\ \left. \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad v_{m_j+1}(x_j) = \prod_{i=0}^{m_j} (x_j - b_j^{(i)}) , \quad b_j^{(i)} \in \mathbb{C}, \right. \\ \left. m_1 = 0, 1, 2, \dots, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

On a la proposition suivante :

II.2.3. Proposition

⁽¹⁾ Voir [13] , Lemme 5.4 a.

Supposons que $\mathcal{U}$ soit un ouvert de $\mathbb{C}^n$, comme dans le théorème II.1.1. et que les approximants de type Padé de $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ soient notés

$$(m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z),$$

$m_1 = 0, 1, 2, \dots$, ..., $m_n = 0, 1, 2, \dots$; la suite des polynômes générateurs de ces approximants est la suite (2.13.).

(i). Si $\mathcal{U} = \mathbb{C}^n$ et

$$(2.14.) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} b_j^{(i)} = b_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

alors

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de $\mathbb{C}^n$.

(ii). Si $\mathcal{U} = \mathbb{C}^n$ et

$$(2.15.) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} b_j^{(i)} = b_j \neq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

alors

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de

$$\{z_1 \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z_1 \cdot b_1) < \frac{1}{2}\} \times \dots \times \{z_n \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z_n \cdot b_n) < \frac{1}{2}\}.$$

De plus ,

$$\overline{\lim}_{m_1, \dots, m_n} \left| f(z) - (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) \right|^{\frac{1}{m_1 \dots m_n}} \leq r \quad (r < 1)$$

$$\forall z \in \overline{\Delta\left(-\frac{r^2 \cdot b_1^{-1}}{1-r^2}; \frac{r \cdot |b_1|^{-1}}{1-r^2}\right)} \times \dots \times \overline{\Delta\left(-\frac{r^2 \cdot b_n^{-1}}{1-r^2}; \frac{r \cdot |b_n|^{-1}}{1-r^2}\right)}.$$

(iii). Si , pour $j = 1, 2, \dots, n$,

$$(2.16.) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} b_j^{(i \cdot \kappa_j + s)} = \gamma_j^{(s)} \quad (s = 0, 1, 2, \dots, \kappa_j - 1),^{(1)}$$

alors

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z) ,$$

uniformément dans tout compact de

$$\{z_1 \in \mathbb{C} ; z_1^{-1} \notin \overline{\mathcal{L}(\rho_1^0)}\} \times \dots \times \{z_n \in \mathbb{C} / z_n^{-1} \notin \overline{\mathcal{L}(\rho_n^0)}\}$$

$$\cap$$

$$\mathbb{H} ,$$

où

⁽¹⁾ , c.à.d. la suite $\{b_j^{(i)} / i = 0, 1, 2, \dots\}$ a κ_j points limites $\gamma_j^{(0)}, \dots, \gamma_j^{(\kappa_j-1)}$, pas obligatoirement distincts .

$$\cdot \mathcal{L}(p_j) := \left\{ z_j \in \mathbb{C} \ ; \ \left| \prod_{i=0}^{\kappa_j-1} (z_j - \gamma_j^{(i)}) \right| < p_j \right\}$$

(, p_j : réel positif) ,

$$\cdot p_j^{\circ} := \sup_{\zeta_j \in \bar{\mathbb{C}} \setminus p_j(\mathcal{L})} \left| \prod_{i=0}^{\kappa_j-1} (\zeta_j^{-1} - \gamma_j^{(i)}) \right| .$$

Démonstration

(i). Puisque f est une fonction entière,

$$\begin{aligned} & \left\{ (\zeta_1^{-1}, \dots, \zeta_n^{-1}) \ ; \ \zeta_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus p_{r_1}(\mathcal{L}), \dots, \zeta_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus p_{r_n}(\mathcal{L}) \right\} = \\ &= \left\{ (\zeta_1^{-1}, \dots, \zeta_n^{-1}) \ ; \ \zeta_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C}, \dots, \zeta_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C} \right\} = \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

D'après la première partie du théorème II.1.1.,

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} \left| f(z) - (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) \right| = 0 ,$$

uniformément dans tout compact de :

$$\left\{ z_1 \in \mathbb{C} \ ; \ \left[i_1^{\circ} = 0, 1, 2, \dots, \text{t.q. } |b_1^{(i)}| < |z_1^{-1} - b_1^{(i)}| \ \forall i \geq i_1^{\circ} \right] \times \right.$$

x . . . x

$$\times \left\{ z_n \in \mathbb{C} \ ; \ \left[i_n^{\circ} = 0, 1, 2, \dots, \text{t.q. } |b_n^{(i)}| < |z_n^{-1} - b_n^{(i)}| \ \forall i \geq i_n^{\circ} \right] \right\}$$

et grâce à (2.14.), uniformément dans tout compact de $\mathbb{C}^n$.

(ii). Comme dans (i), on trouve

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} \left| f(z) - (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) \right| = 0,$$

uniformément dans tout compact de

$$\{ z_1 \in \mathbb{C}; \quad] i_1^0 = 0, 1, 2, \dots, \text{t.q. } |b_1^{(i)}| < |z_1^{-1} - b_1^{(i)}| \quad \forall i \geq i_1^0 \} \times$$

$\times \dots \times$

$$\times \{ z_n \in \mathbb{C}; \quad] i_n^0 = 0, 1, 2, \dots, \text{t.q. } |b_n^{(i)}| < |z_n^{-1} - b_n^{(i)}| \quad \forall i \geq i_n^0 \}.$$

Dans la démonstration du corollaire II.2.2., on a vu que

$$|w^{-1} - \gamma| > |\gamma| \iff \operatorname{Re}(w \cdot \gamma) < \frac{1}{2}$$

$$(\quad, w \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \mathbb{C} \quad).$$

Donc, pour $j = 1, 2, \dots, n$,

$$|z_j^{-1} - b_j^{(i)}| > |b_j^{(i)}| \quad \forall i \geq i_j^0 \iff$$

$$\operatorname{Re}(z_j \cdot b_j^{(i)}) < \frac{1}{2} \quad \forall i \geq i_j^0 \iff$$

$$\operatorname{Re}(z_j \cdot b_j) < \frac{1}{2}.$$

On constate que

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} \left| f(z) - (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) \right| = 0,$$

uniformément dans tout compact de

$$\{z_1 \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z_1 \cdot b_1) < \frac{1}{2}\} \times \dots \times \{z_n \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z_n \cdot b_n) < \frac{1}{2}\}.$$

Le reste de la démonstration de la partie (ii). est une conséquence du corollaire II.2.2.

(iii). Σ après le théorème II.1.1,

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de

$$\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \Sigma\};$$

$$\begin{aligned} \lim_{m_1, \dots, m_n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{m_j} (\xi_j^{-1} - b_j^{(i)})}{\prod_{i=0}^{m_j} (z_j^{-1} - b_j^{(i)})} - \sum_{\substack{j, \kappa=1 \\ (j \neq \kappa)}}^n \right. \\ \frac{\prod_{i=0}^{m_j} (\xi_j^{-1} - b_j^{(i)}) \cdot \prod_{i=0}^{m_\kappa} (\xi_\kappa^{-1} - b_\kappa^{(i)})}{\prod_{i=0}^{m_j} (z_j^{-1} - b_j^{(i)}) \cdot \prod_{i=0}^{m_\kappa} (z_\kappa^{-1} - b_\kappa^{(i)})} + \dots \\ \left. \dots + (-1)^{n+1} \frac{\prod_{j=0}^n \prod_{i=0}^{m_j} (\xi_j^{-1} - b_j^{(i)})}{\prod_{j=0}^n \prod_{i=0}^{m_j} (z_j^{-1} - b_j^{(i)})} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\left\{ \forall \zeta_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_1(\mathcal{D}), \dots, \forall \zeta_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_n(\mathcal{D}) \right\}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de

$$\left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{D} \quad ; \text{ pour tout } j = 1, 2, \dots, n \right.$$

on a

$$(2.17.) \quad \lim_{m_j \nearrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{m_j} (\zeta_j^{-1} - \beta_j^{(i)})}{\prod_{i=0}^{m_j} (z_j^{-1} - \beta_j^{(i)})} < 1$$

$$\left\{ \forall \zeta_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_1(\mathcal{D}), \dots, \forall \zeta_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_n(\mathcal{D}) \right\}.$$

Mais

$$(2.17.) \iff \frac{\left| \prod_{i=0}^{k_j-1} (\zeta_j^{-1} - \gamma_j^{(i)}) \right|}{\left| \prod_{i=0}^{k_j-1} (z_j^{-1} - \gamma_j^{(i)}) \right|} < 1 \quad (, \quad \forall \zeta_j \in$$

$$\in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_j(\mathcal{D}), \dots, \forall \zeta_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_n(\mathcal{D})) \iff$$

$$\iff \frac{\sup_{\zeta_j \in \bar{\mathbb{C}} \setminus pr_j(\mathcal{D})} \left| \prod_{i=0}^{k_j-1} (\zeta_j^{-1} - \gamma_j^{(i)}) \right|}{\left| \prod_{i=0}^{k_j-1} (z_j^{-1} - \gamma_j^{(i)}) \right|} \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow \left| \prod_{i=0}^{k_j-1} (z_j^{-1} - \gamma_j^{(i)}) \right| \geq \sup_{\xi_j \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_j(\mathbb{D})} \left| \prod_{i=0}^{k_j-1} (\xi_j^{-1} - \gamma_j^{(i)}) \right|$$

$$\Longleftrightarrow z_j^{-1} \notin \overline{\mathcal{L}(p_j^0)}, \text{ d'où le résultat.}$$



3° Exemple

Soit la suite de polynômes générateurs d'une approximation de type Padé donnée par

$$(2.18.) \quad \left\{ V_{(m_1+1, \dots, m_n+1)}(x_1, \dots, x_n) := \gamma \cdot \prod_{j=1}^n v_{m_j+1}(x_j) ; \right. \\ \left. \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, v_{m_j+1}(x_j) := (x_j - b_{m_j+1})^{m_j+1}, \right. \\ \left. b_{m_j+1} \in \mathbb{C}, m_1 = 0, 1, 2, \dots, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

La démonstration de la proposition qui suit est tout à fait semblable à celle II.2.3. des parties (i). et (ii). de la proposition :

II.2.4. Proposition

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Supposons que les approximants

de type Padé de f , dont la suite des polynômes générateurs est donnée par (5.18.) soient notés

$$(m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) \quad (, m_1=0,1,2,\dots, \dots, m_n=0,1,2,\dots).$$

(i). Si

$$(2.19.) \quad \lim_{m_j \rightarrow \infty} b_{m_j} = b_j = 0 \quad (, j=1,2,\dots,n),$$

alors

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de $\mathbb{C}^n$.

(ii). Si

$$(2.20.) \quad \lim_{m_j \rightarrow \infty} b_{m_j} = b_j \neq 0 \quad (, j=1,2,\dots,n),$$

alors

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de

$$\{z_1 \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z_1 \cdot b_1) < \frac{1}{2}\} \times \dots \times \{z_n \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z_n \cdot b_n) < \frac{1}{2}\}$$

En plus,

$$\overline{\lim_{m_1, \dots, m_n}} \left| f(z) - (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) \right|^{\frac{1}{m_1, \dots, m_n}} \leq r \quad (< 1)$$

$$\forall z \in \Delta\left(-\frac{r^2 \cdot b_1^{-1}}{1-r^2}; \frac{r \cdot |b_1|^{-1}}{1-r^2}\right) \times \dots \times \Delta\left(-\frac{r^2 \cdot b_n^{-1}}{1-r^2}; \frac{r \cdot |b_n|^{-1}}{1-r^2}\right)$$

4 $\equiv$ Exemple

Comme dernier exemple choisissons pour chaque coordonnée x_j ($j=1, 2, \dots, n$) les zéros

$$(2.21.) \quad b_{m_j, i} := \cos \left[\frac{2i+1}{2(m_j+1)} \pi \right] \quad (i=0, 1, \dots, m_j),$$

$m_j = 0, 1, 2, \dots$, des polynômes de Chebyshev :

$$(2.22.) \quad T_{m_j+1}(x_j) := \cos(m_j \arccos x_j).$$

Autrement dit, choisissons la suite des polynômes générateurs de l'approximation de type Padé, comme dans (2.23.) :

$$(2.23.) \quad \left\{ \begin{aligned} V_{(m_1+1, \dots, m_n+1)}(x_1, \dots, x_n) &:= \gamma \prod_{j=1}^n T_{m_j+1}(x_j); \\ \gamma &\in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad T_{m_j+1}(x_j) := \prod_{i=0}^{m_j} (x_j - b_{m_j, i}), \\ b_{m_j, i} &\text{ comme dans (2.21)}; \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots, \\ m_2 = 0, 1, 2, \dots, \dots, \quad m_n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}$$

II.2.5. Proposition

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Supposons que les approximants de type Padé de f , dont la suite des polynômes générateurs est donnée par (2.23.) soient notés

$(m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z)$ ($m_1=0, 1, 2, \dots, m_n=0, 1, 2, \dots$).
 Alors

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z),$$

uniformément dans tout compact de

$$\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{D} ; \left(|z_1^{-1}-1| + |z_j^{-1}-1| \right) > \sup_{j \in \mathbb{C} \setminus \text{pr}_j(\mathbb{D})} (|z_j^{-1}-1| + |z_j^{-1}+1|),$$

$$j = 1, 2, \dots, n \}.$$

Démonstration

$\mathcal{D}$, après la première partie du théorème II.A.A.,

$$\lim_{m_1, \dots, m_n} (m_1, \dots, m_n / m_1+1, \dots, m_n+1)_f(z) = f(z)$$

uniformément dans tout compact de

$$\left\{ z_1 \in \mathbb{C} ; \frac{\prod_{i=0}^{m_1} (|z_1^{-1}-1| - \cos\left(\frac{2i+1}{2(m_1+1)}\pi\right))}{\prod_{i=0}^{m_1} (|z_1^{-1}-1| - \cos\left(\frac{2i+1}{2(m_1+1)}\pi\right))} > 1, \forall z_1 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_1(\mathbb{D}) \right\} \times$$

$\times \dots \times$

$$\times \left\{ z_n \in \mathbb{C} ; \frac{\prod_{i=0}^{m_n} (|z_n^{-1}-1| - \cos\left(\frac{2i+1}{2(m_n+1)}\pi\right))}{\prod_{i=0}^{m_n} (|z_n^{-1}-1| - \cos\left(\frac{2i+1}{2(m_n+1)}\pi\right))} > 1, \forall z_n \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_n(\mathbb{D}) \right\} \times$$

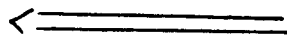


Mais

$$\frac{\prod_{i=0}^{m_j} \left(\zeta_j^{-1} - \cos \left(\frac{2i+1}{2(m_j+1)} \pi \right) \right)}{\prod_{i=0}^{m_j} \left(z_j^{-1} - \cos \left(\frac{2i+1}{2(m_j+1)} \pi \right) \right)} < 1, \quad \forall \zeta_j \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_j(\mathbb{D}),$$

$$\forall m_j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(, j = 1, 2, \dots, n)$$



$$\sup_{\zeta_j \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_j(\mathbb{D})} \left| \zeta_j^{-1} - \cos \left(\frac{2i+1}{2(m_j+1)} \pi \right) \right| <$$

$$\left| z_j^{-1} - \cos \left(\frac{2i+1}{2(m_j+1)} \pi \right) \right|,$$

$$i = 0, 1, \dots, m_j, \quad m_j = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Puisque,

$$\sup_{\zeta_j \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_j(\mathbb{D})} \left| \zeta_j^{-1} - \cos \left(\frac{2i+1}{2(m_j+1)} \pi \right) \right| <$$

$$\sup_{\zeta_j \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \text{pr}_j(\mathbb{D})} \left(\left| \zeta_j^{-1} - 1 \right| + \left| \zeta_j^{-1} + 1 \right| \right) \quad \text{et}$$

$$\left| z_j^{-1} - \cos \left(\frac{2i+1}{2(m_j+1)} \pi \right) \right| < \left(\left| z_j^{-1} - 1 \right|, \left| z_j^{-1} + 1 \right| \right),$$

$$i = 0, 1, \dots, m_j, \quad m_j = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

on trouve le résultat .



Quelques remarques sur le deuxième chapitre

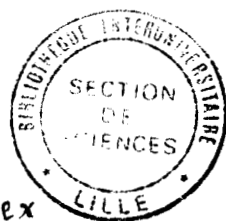
Les notions et les relations du premier paragraphe de ce chapitre, concernant les approximants de type Padé constituent une généralisation immédiate et condensée, des notions et des relations, qui correspondent aux cas $n=1$ et $n=2$ et qui sont déjà étudiées systématiquement dans [2], [3], [4], [5] et [6].

Le théorème II.1.1. a été présenté et démontré, dans le cas où $n=1$ et pour un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, contenant 0, dans [9] (: théorème 4. et son corollaire 5.). Les quatre exemples proposés correspondent aux exemples du paragraphe 4., de [9]. Dans ce travail, Eiermann présente aussi une série de remarques et de références (pour $n=1$) que le lecteur intéressé peut consulter.

Références

- [1] N. Aronszajn, "Sur les décompositions des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications", Acta Math. 65 (1935) 1-156.
- [2] C. Brezinski, "Rational Approximation to Formal Power Series", J. of Approx. Theory 25 (1979) 295-317.
- [3] C. Brezinski, "Padé-type approximants for Double Power Series", J. of the Indian Math. Soc 42 (1978) 267-282.
- [4] C. Brezinski, "Outlines of Padé approximation", Computational aspects of complex analysis, H. Werner ed., Reidel Publishing Company, 1983, 1-50.
- [5] C. Brezinski, "Padé Approximants: Old and New", Jahrbuch überblicke Mathematik 1983, 37-63.
- [6] C. Brezinski, "Padé-type Approximation and General Orthogonal Polynomials", ISNM 50 (Birkhäuser, Basel, 1980).
- [7] P.J. Davis, "Interpolation and Approximation", (Blaisdell, New York, 1963).
- [8] J. Depree et C. Vehring, "Elements of Complex Analysis", (Addison-Wesley Series in Mathematics, 1969).
- [9] M. Eiermann, "On the convergence of Padé-type approximants to analytic functions", J. of Computat. and Applied Mathematics 10 (1984) 219-227.

- [10] J. P. Ferrier, "Spectral Theory and Complex Analysis" (, North-Holland, Mathematics Studies, 1973)
- [11] W. Gawronski et R. Trautner, "Verschärfung eines Satzes von Borel-Okada über Summierbarkeit von Potenzreihen" , Periodica Math. Hungar. 7 (1976) 201-211 .
- [12] R. Gunning et H. Rossi, "Analytic Functions of Several Complex Variables" (, Prentice-Hall Series in Modern Analysis, 1965) .
- [13] P. Henrici, "Applied and Computational Complex Analysis I" (, Wiley, New York, 1974) .
- [14] M. Hervé, "Les Fonctions Analytiques" (, Presses Universitaires de France, 1982) .
- [15] L. Hörmander, "An Introduction to Complex Analysis in Several Variables" (, North-Holland Mathematical Library, 1973) .
- [16] J. Van Iseghem, "Applications des approximants de type Padé" , Thèse 3^{ème} cycle, Université de Lille I (1982) .
- [17] P. Kergin, "A natural Interpolation of C^k functions", J. of Approximation Theory 29 (1980) 278-293
- [18] J. Kelley, "General Topology" (, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 27) .
- [19] C. Kuratowski, "Topologie I et II" (, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1961) .
- [20] Al. Magnus, "Rate of convergence of sequences of Padé-type approximants and pole detection in complex plane" (, M.G. de Bruin et H. Van Rossum, Eds. "Padé Approximation and its Applications" , Lecture Notes in Mathematics 888 (Springer-Heidelberg, 1981) 300-308) .



- [21] A. Markushевич, "Theory of Functions of a Complex Variable", Volumes I et III. (, Prentice-Hall, INC., 1967).
- [22] C. Michelli et P. Milman, "A Formula for Kergin Interpolation in $\mathbb{R}^n$ ", J. of Approx. Theory 23 (1980) 294-296.
- [23] R. Narasimhan, "The Levi problem for complex spaces", Math. Annalen 142 (1961) 355-365.
- [24] R. Narasimhan, "The Levi problem for complex spaces II", Math. Annalen 146 (1962) 195-216.
- [25] Y. Okada, "Über die Annäherung analytischer Functionen", Math. Zeitsc. 23 (1925) 62-71.
- [26] R. Powell et S. Shah, "Summability Theory and its applications", (, Van Nostrand Reinhold, London 1972).
- [27] W. Rudin, "Real and Complex Analysis", (, Tata McGraw-Hill, 1973).
- [28] J. Wimp, "Sequence Transformations and their Applications", (, Academic Press, New York, 1981).

RESUME

Le principal objet de ce travail est l'étude de la convergence d'une suite d'approximants de type Padé vers une fonction holomorphe dans un ouvert D de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Dans le cas où $n=1$, des résultats ont été apportés par M. Eiermann, grâce à son théorème qui constitue la généralisation du théorème de Y. Okada et qui précise le domaine de convergence d'une transformation de la suite des sommes partielles d'une fonction holomorphe, dans un voisinage de 0. Si $n \geq 1$, il y a deux versions du théorème d'Eiermann, qui ne sont pas toujours valables. Ce travail comprend :

- a) une démarche qui consiste à s'intéresser en premier lieu à certains cas typiques à savoir : D est un polydisque ouvert de centre 0, $D=\mathbb{C}^n$. Nous montrons que dans ces cas les deux versions du théorème d'Eiermann sont vraies ;
- b) L'étude d'un exemple d'ouvert pseudoconvexe de $\mathbb{C}^2$, dans lequel aucune version du théorème d'Eiermann n'est vraie, ainsi que l'étude de quelques cas particuliers ;
- c) Le théorème d'Okada dans le cas de plusieurs variables complexes ;
- d) La réponse au problème de l'approximation d'une fonction holomorphe par une suite d'approximants de type Padé, lorsque la deuxième version du théorème d'Eiermann est vraie ;
- e) Quatre exemples de convergence des approximants de type Padé vers des fonctions holomorphes.

MOTS-CLES : OUVERT PSEUDOCONVEXE
 PAIRE DE RUNGE
 APPROXIMATION DE TYPE PADE
 DOMAINE DE REINHARDT