N° d'ordre 769

THESES

présentées à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le grade de
Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Marc HUTTNER

1ère thèse : **FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES ET APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES.**

2ème thèse : CALCULS DES GROUPES DE GALOIS DIFFERENTIELS DES EQUATIONS HYPERGEOMETRIQUES CONFLUENTES.

Soutenues le 16 novembre 1988 devant la Commission d'Examen :

Présidente : N. ZINN-JUSTIN (Université de Lille Flandres Artois)
Rapporteurs : M. WALDSCHMIDT (Université de Paris VI)
D. BERTRAND (Université de Paris VI)
G. RHIN (Université de Metz)
Membres : J. P. RAMIS (Université de Strasbourg)
L. GRUSON (Université de Lille Flandres Artois)
M. PARREAU (Université de Lille Flandres Artois)

N° d'ordre 769

THESES

présentées à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le grade de
Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Marc HUTTNER

1ère thèse : **FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES ET APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES.**

2ème thèse : CALCULS DES GROUPES DE GALOIS DIFFERENTIELS DES EQUATIONS HYPERGEOMETRIQUES CONFLUENTES.

Soutenues le 16 novembre 1988 devant la Commission d'Examen :

Présidente : N. ZINN-JUSTIN (Université de Lille Flandres Artois)
Rapporteurs : M. WALDSCHMIDT (Université de Paris VI)
D. BERTRAND (Université de Paris VI)
G. RHIN (Université de Metz)
Membres : J. P. RAMIS (Université de Strasbourg)
L. GRUSON (Université de Lille Flandres Artois)
M. PARREAU (Université de Lille Flandres Artois)

A la mémoire de mon père

A ma femme

A ma famille.

Je remercie vivement Madame Nicole Zinn-Justin d'avoir accepté la présidence du jury de cette thèse. Sa très grand disponibilité m'a permis de bénéficier constamment de ses conseils et encouragements.

Michel Waldschmidt a dirigé cette thèse. J'ai appris de lui beaucoup de Mathématiques mais aussi une certaine façon d'en faire agréablement. Je lui exprime ici toute ma reconnaissance pour la confiance qu'il m'a témoigné.

C'est grâce à l'enseignement de Daniel Bertrand que j'ai pu acquérir une grande partie des connaissances qui m'ont permis de trouver les premiers résultats de ce travail. Je lui exprime ici toute ma gratitude.

Georges Rhin m'a encouragé à poursuivre mes travaux sur l'approximation rationnelle. J'ai eu avec lui des discussions mathématiques très enrichissantes et cette thèse lui doit beaucoup.

Jean-Pierre Ramis a bien voulu diriger ma deuxième thèse. J'ai beaucoup apprécié la gentillesse de son accueil à Strasbourg et la patience avec laquelle il m'a expliqué ses travaux sur les équations différentielles.

Laurent Gruson et Michel Parreau ont bien voulu faire partie du jury de cette thèse. C'est toujours avec un grand plaisir que je parle de mes travaux à Laurent Gruson. Michel Parreau a été pour moi le professeur qui m'a enseigné et fait aimé l'analyse, je lui dois beaucoup.

Je tiens à remercier Eric Reyssat, Patrice Philippon, Michel Langevin, Michel Laurent et toute l'équipe de l'E.R.A 979 "Problèmes Diophantiens". C'est toujours avec plaisir que je prends le train pour Paris le jeudi afin de participer au séminaire.

Je tiens à associer à mes remerciements mes collègues de l'U.F.R. de Mathématiques de l'Université de Lille I, en particulier Robert Gergondey, Laurent Gruson, Anne Duval, Rudolf Bkouche et Sabah Fakir avec qui j'ai noué des relations de travail les plus profitables.

Je tiens aussi à remercier Madame Ginette Doclot. Il est difficile de faire de la recherche en Mathématiques sans bibliothèque digne de ce nom.

Enfin pour qu'une thèse existe il faut qu'elle soit frappée et tirée. Un grand merci à Madame Claudine Evrard et au personnel de reprographie de l'U.F.R. de Mathématiques.

FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES
ET APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES

Comme son titre l'indique cette thèse étudie les liens étroits entre l'étude des fonctions hypergéométriques et des approximations diophantiennes.

Elle se compose de divers articles parus ou à paraître donnant des résultats d'approximations rationnelles concernant les valeurs prises par des expressions contenant des fonctions hypergéométriques.

1) **Introduction**

2) Approximants de Padé des fonctions binômes et mesures de l'irrationalité des racines de nombres rationnels (séminaire de théorie des nombres de Bordeaux 1982-83, exposé n°29) pages 13 à 32.

3) Problème de Riemann et irrationalité d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques de Gauss (C.R. Acad. Sc. Paris et 302 série I, n°17, 1986 p.603-606) pages 33 à 36.

4) Monodromie et approximation diophantienne d'une constante liée aux fonctions elliptiques (C.R. Acad. Sc. Paris et 304 série I n°12, 1987, p. 315-318) pages 37 à 40.

5) Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques (Journal of number theory. Vol. 26, n°2, juin 1987, p. 166-178) pages 41 à 53.

6) Equations differentielles et approximations rationnelles de ${}_2F_1\left(\left.{1,b \atop c}\right| x\right)$: Applications arithmétiques (Pub. IRMA - LILLE 1987, Vol 8 n°VI) pages 55 à 68.

7) Monodromie et approximation diophantienne des fonctions hypergéométriques (Pub. IRMA - LILLE 1987, Vol. 10 n°III) pages 69 à 109.

a) Quelques rappels sur la fonction hypergéométrique

Les séries hypergéométriques font leur apparition dans les oeuvres de Wallis (1656)) et tirent leur nom de leur analogie avec les séries géométriques.

Leur étude systématique commence au $XVIII^{\text{ème}}$ siècle avec Euler.

α, β, γ étant des paramètres réels et $-\gamma \notin \mathbf{N}$ si $n \neq 0$,on pose $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ et $\alpha)_0 = 1$. Il remarque que cette série généralise nombre de fonctions usuelles :

* $F(1,\beta,\beta,x) = 1/1-x$
* $F(\alpha,\beta\beta,x) = (1-x)^{-\alpha}$
* $F(1,1,2,-x) = \mathrm{Log}(1+x)/x$
* $F(1/2,1/2,3/2,x^2) = Arcsinx/x$
* $F(1/2,1/2,1,x^2) = 2/\pi \int_0^{\Pi/2} (1-x^2 sin^2\theta)^{-1/2} d\theta$

Nous adopterons dans la suite une autre notation, qui permet une extension aux fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur et aux fonctions hypergéométriques confluentes.

$$(1) \qquad {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix}\middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n$$

Cette série est une solution holomorphe en 0 de l'équation différentielle "hypergéométrique".

$$(2) \qquad x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

c'est à partir de l'étude de cette équation que commence l'approche "moderne" de cette fonction.

Rappelons que (2) est une équation différentielle Fuchsienne à 3 points singuliers réguliers $0, 1, \infty$.

A partir des travaux de Gauss et Kummer, Riemann étend l'étude de (1) en prenant x dans $\mathbf{C}$, et surtout remarque le caractère "multiforme" des solutions de (2).

Il introduit alors le concept de "monodromie". [voir et l'introduction de P. Cartier dans [1].) Le choix des paramètres α, β, γ amènent Gauss et Kummer à la découverte de relations fonctionnelles appelées de nos jours relations de "contiguïté".

L'une d'elle permet à Gauss de développer en fraction continue la "fraction de Gauss"

$$G(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha+1,\beta\\ \gamma+1\end{matrix}\middle| x\right) \Big/ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix}\middle| x\right)$$

Riemann utilise alors sa nouvelle approche du problème afin d'étudier la forme des réduites de (3). Ce qui lui simplifie l'étude de la convergence du développement en fraction continuée de (3) vers $G(x)$ [2].

Il semble alors naturel d'étudier les approximations rationnelles de $G(x)$, ce qui nous amène au chapitre suivant.

b) Les approximants de Padé

A la suite des travaux d'Hermite, on doit à Padé une étude détaillée des approximations rationnelles de $G(x)$ dans le cas où $\alpha = 0$, voir [2].

Définition 1) *Soit $f(x)$ une fonction analytique au voisinage de 0. On dit qu'un triplet (P, Q, R) est un approximant de Padé de $f(x)$ si et seulement si : P est un polynôme de degré $\leq p$, Q est un polynôme de degré $\leq q$, R est une fonction analytique au voisinage de 0 telle que :*

$$ord_0 R \geq p + q + 1 \quad et \quad P(x)f(x) - Q(x) = R(x)$$

L'algèbre linéaire nous montre l'existence d'un tel triplet et l'étude de Padé donne la table complète de ${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\beta\\ \gamma\end{matrix}\middle| x\right)$.

A la suite des travaux d'Hermite sur les transcendance de e, Mahler a introduit les deux généralisations suivantes :

Définition 2 : les approximants de Padé de type I *Soient $f_1, f_2, \cdots, f_n$ des fonctions analytiques en 0. Un système d'approximants de Padé de type I de $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ d'ordre N est un n-uplet $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ de polynômes non tous nuls vérifiant :*

$$(1) \qquad degA_i \leq N, \qquad (2) \quad 1 + ord_0\Big(\sum_{i=1}^{i=n} A_i f_i\Big) \geq n(N+1)$$

La fonction $R = \sum_{i=1}^{i=n} A_i f_i$ s'appelle le reste de l'approximation de Padé.

Définition 3 : les approximants de Padé de type II *Un système d'approximants de Padé de type II de $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ d'ordre N est un n-uplet $(B_1, B_2, \cdots, B_n)$ de polynômes non tous nuls, vérifiant :*

$$(3) \qquad degB_1 \leq (n-1)N$$

$$\forall k, \forall l, 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n \quad ord_0(B_l f_k - B_k f_l) \geq nN + 1 \tag{4}$$

C'est le calcul explicite d'un système d'approximants de Padé de type II pour des fonctions exponentielles qui a permis à Hermite de démontrer en 1873 la transcendance de e.

On peut également obtenir le théorème de Lindemann-Weirstrass en utilisant un système d'approximants de Padé de type I [3][4].

On passe de l'un à l'autre par un principe de "transfert" [21].

c) Approximants de Padé et équations différentielles

Soit f une fonction holomorphe au voisinage de 0 et vérifiant une équation différentielle. Peut on à partir de cette équation déterminer sa table de Padé ou au moins une partie de sa table ?

Le problème se pose de façon identique pour un système $f_1, f_2, \cdots, f_n$ de fonctions holomorphes vérifiant des équations différentielles pour la détermination explicite des approximants de Padé de type I ou II.

G.V. Chudnovski a élaboré une méthode pour attaquer ce type de problème dont nous donnons diverses applications dans cette thèse.

Avant d'en expliquer les grandes idées, rappelons en quoi consiste l'outil essentiel qu'est la "monodromie".

Partons d'une équation différentielle linéaire d'ordre n.

$$a_n(x) \cdot y^{(n)} + \cdots a_1(x) \cdot y' + a_0(x) y = 0 \tag{E}$$

à coefficients $a_i(x) \in \mathbf{C}[x]$. On notera S l'ensemble des singularités de (E) : $S \subset \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. (les zéros de $a_n(x)$ et éventuellement l'∞).

Le prolongement analytique d'un système fondamental quelconque de solutions de (E) induit une représentation du groupe fondamental de $P_1(\mathbf{C}) - S$. Sur le système $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ ceci se traduit par :

$$\big(y_1(x), y_2(x) \cdots y_n(x)\big) \stackrel{\gamma}{\longmapsto} \big(y_1(x), \cdots, y_n(x)\big) M(\gamma).$$

La matrice $M(\gamma) \in GL_n(\mathbf{C})$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ dans $\Pi_1(\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) - S)$. On a $M(\gamma_1, \gamma_2) = M(\gamma_1) \cdot M(\gamma_2)$ et l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{M(\gamma) \mid \gamma \in \Pi_1(\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) - S)\}$$

a une structure de groupe (une représentation de $\Pi_1(\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) - S)$) : que l'on appelle groupe de monodromie de l'équation (E)).

Il est clair que $\mathcal{M}$ dépend de la base choisie $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ ainsi que du point où on cherche les solutions de (E), c'est pourquoi par groupe de monodromie on entend une classe de conjugaison de $\mathcal{M}$ dans $GL_n(\mathbf{C})$. Soit $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Le groupe de monodromie $\mathcal{M}$ est alors engendré par m matrices $M(\gamma_i)$, $i = 1, 2, \cdots m$ où γ_i est un chemin fermé autour de a_j tel que $\mathrm{ind}(\gamma_i, a_j) = \delta_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (symbole de Kronecker).

On peut toujours se ramener par un bon choix de la numérotation des a_i à la relation $M(\gamma_1) \cdot M(\gamma_2) \cdots M(\gamma_m) = I$.

Si on appelle $\{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \cdots, \lambda_n^i\}$ les racines de l'équation indicielle en a_i de (E) alors les valeurs propres de $M(\gamma_i)$ sont de la forme :

$$\mu_k^j = exp(2i\pi\lambda_k^j) \quad 1 \leq j \leq n \qquad ; \quad 1 \leq k \leq n$$

G.V. Chudnovski a exploité ces propriétés de la façon suivante [5], [6]. Soit E_i $i = 1, 2, \cdots n$ une famille d'équations différentielles distinctes Fuchsiennes à points singuliers réguliers $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ qui ont toutes même groupe de monodromie $\mathcal{M}$.

On peut alors dire que les racines des équations en un point a_i diffèrent d'entiers rationnels.

Parmi les solutions de E_i on en choisit une holomorphe en 0 (on peut toujours se ramener à prendre les 3 premiers points sous la forme $a_1 = 0, a_2 = \infty$, $a_3 = 1$), que l'on notera f_i . On supposera que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont $\mathbf{C}[x]$ linéairement indépendante et que $f_i(0) = 0$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$.

Un théorème de Riemann montre que la famille $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} = \mathcal{F}$ est un $\mathbf{C}[x]\frac{d}{dx}$ module de rang n (appelé module Fuchsien).
Soit $R(x) = \sum_{i=1}^{i=n} P_i(x) f_i(x)$. La fonction $R(x)$ vérifie les mêmes conditions que la famille $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ et comme on montre facilement que tout élément d'un

module Fuchsien est solution d'une équation différentielle Fuchsienne d'ordre n, R est alors solution d'une équation différentielle Fuchsienne, ce qui permet de borner l'ordre de 0 en R (on utilise la relation de Fuchs).

Pour un bon choix des fonctions f_i on démontre que l'ordre en 0 de R est celui que l'on attend par la théorie des approximants de Padé.

Dans le cas des fonctions hypergéométriques (ou de Jordan Pochbammer) la connaissance de $\mathcal{M}$ et des ordres des singularités de R en a_i détermine complètement R. On termine alors en calculant les polynômes $P_i(x)$. On tourne autour d'une singularité. L'invariance des $P_i(x)$ sous l'action de $\mathcal{M}$ permet alors de trouver $P_i(x)$ et de remarquer que ces polynômes dépendent des autres "déterminations" de R et de f_i.

Le cas des points singuliers irréguliers n'est pas étudié ici mais cette méthode a été étendu par Daniel Bertrand et Fritz Beukers [7] en remplaçant essentiellement le groupe de monodromie $\mathcal{M}$ par le groupe de Galois différentiel.

On peut toutefois signaler que dans le cas des fonctions hypergéométriques la connaissance de systèmes de Padé donne par "confluence" un autre système pour les fonctions confluentes associées où l'∞ devient une singularité irrégulière.

Il reste à étendre ces méthodes au cas où le groupe de monodromie ne détermine pas complètement l'équation différentielle associée. L'exemple classique étant l'équation de Heun :

$$\omega'' + \Big(\gamma/x + \delta/x - 1 + \varepsilon/(x-a)\Big)\omega' + \frac{\alpha\beta x - B}{x(x-1)(x-a)}\omega = 0$$

Elle a 4 points singuliers réguliers $0, 1, a, \infty$. Le tableau des exposants en ces points (symbole de Riemann) associé est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{0} & \underline{1} & \underline{a} & \underline{\infty} & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \\ & & & & x \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\varepsilon & \beta & \end{array} \right)$$

la somme des exposants est égale à 2. Le nombre B est appelé le paramètre accessoire de l'équation. La difficulté du problème est sa détermination.

Dans la suite on particularisera les valeurs de $x \in \bar{\mathbf{Q}}$, ce qui nous amène à l'étude des approximations rationnelles prises par ces fonctions.

d) Mesures d'irrationalité et mesures d'indépendance linéaire

Définition 1 *Soit α un réel non rationnel. On dit que $\mu(\alpha)$ est une mesure effective d'irrationalité de α , si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $q_0(\varepsilon) > 0$ effectivement calculable tel que :*

$$\forall p, \forall q, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}, q > q_0(\varepsilon) \Rightarrow \mid \alpha - p/q \mid > q^{-\mu(\alpha)-\varepsilon}$$

(Par"abus de langage" on dira que $q^{-\mu(\alpha)}$ est une mesure d'irrationalité de α).

Définition 2 *Soient $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ r nombres réels non rationnels.*

On dit que $\mu = \mu(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)$ est une mesure effective d'indépendance linéaire de $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$, si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $H_0 > 0$, effectivement calculable tel que pour tout $H \in \mathbf{N}, H > H_0$

$$\mid \sum_{i=1}^{i=r} p_i \beta_i \mid \geq H^{-(\mu+\varepsilon)}$$

où $p_i \in \mathbf{Z}$, $\quad i = 1, 2, \cdots r$ et $H = \max \mid p_i \mid_{1 \leq i \leq r}$.

Remarque :

Le principe des tiroirs montre que la meilleure valeur pour μ dans le cas d'une mesure d'irrationalité est 2 et dans le cas d'une mesure d'indépendance linéaire est r.

Pour des nombres transcendants il n'est pas clair que l'on puisse trouver des mesures d'irrationalité en "q^{-c}" ou d'indépendance linéaire en "H^{-c}".

Des nombres vérifiant de telles conditions sont *appelés "normaux"* par G.V. Chudnovski [8] .

Faisons à ce sujet quelques rappels : Soit α un nombre transcendant. Sa mesure de transcendance est de la forme :

$$\mid P(\alpha) \mid > \varphi(H, d)$$

où $P \in \mathbf{Z}[X]$, $\quad P \not\equiv 0 \quad d^0 P \leq d$ et $H(P) \leq H$ la hauteur
$H(P) = \max(\mid \text{coefficientsde} P \mid)$. $\varphi(H, d)$ étant une fonction positive.

Si $\operatorname{Log}\varphi(H,d)$ est un polynôme en $\operatorname{Log} H$ et d on dit que α est de type de transcendance fini.

Pour la notion de type de transcendance et son extension au cas où on prend des nombres algébriquement indépendants voir [9] et [10].

On dira que $\varphi(H,d)$ est une mesure normale si on peut écrire $\varphi(H;d) = H^{-\alpha(d)}$ où $\alpha(d)$ est une fonction positive. Le cas $d = 1$ redonnant la notion de mesure d'irrationalité normale, les mesure d'irrationalité "normales" optimales sont de la forme $\mu(\alpha) = 2 + \varepsilon$. (Où on a écrit $\mid \alpha - p/q \mid$ au lieu de $\mid q\alpha - p \mid$).

EXEMPLES 1) D'après le théorème de Liouville tous les nombres réels algébriques sont normaux mais on ne peut pas parler de "mesure optimale" car la démonstration du théorème de Roth n'est pas "effective".

Une amélioration effective de l'exposant de Liouville est déjà intéressante (voir l'article 1 de cette thèse pour le cas $\sqrt[3]{2}$). Nous avons amélioré les mesures d'irrationalité et d'indépendance linéaires connues pour certains nombres algébriques (Articles 2 et 7).

Pour d'autres méthodes nous renvoyons aux travaux de E. Bombieri et J. Mueller [11], [12].

2) De nombreux nombres transcendants dont on connait une minoration par la théorie des formes linéaires de logarithmes de Baker ont une mesure normale [13], malheureusement loin d'être optimale.

Voici, à titre d'illustration le cas de la mesure de $\operatorname{Log} 2$.

$*\mu(\operatorname{Log} 2) = 10^{22}$ (théorie des formes linéaires de logarithmes)
$*\mu(\operatorname{Log} 2) = 12,5$ (1964 : Baker par une autre méthode)
$*\mu(\operatorname{Log} 2) = 4,622$ (1979-80 : Apery, Danilov, Beukers, Alladi-Robinson ... à la suite des travaux de Apery concernant l'irrationalité de $\xi(3)$)
$*\mu(\operatorname{Log} 2) = 4,134$ Chudnovski 1982
$*\mu(\operatorname{Log} 2) = 4,0765$ RHIN 1985 [20]
$*\mu(\operatorname{Log} 2) = 3,89$ RAKHADZE 1987

Pour une généralisation du cas "Log 2" à la famille 1, $\operatorname{Log} 2$, $(\operatorname{Log} 2)^2$ ou à $\operatorname{Log} 3$ nous renvoyons à [14].

D'autres constantes usuelles comme $\pi, \pi/\sqrt{3}\cdots$ subissent des améliorations de ce type et l'article n°5 de ce travail nous a permis de compléter la liste connue par les valeurs prises par la fraction de Gauss.

On y vérifie que pour certains nombres algébriques x assez petits $\mu(G(x)) = 2 + \varepsilon$.

L'article n°4 étend ces méthodes à la constante $\eta(\lambda)/\omega(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbf{Q}$, $0 < \lambda < 1$ et $\omega(\lambda), \eta(\lambda)$ étant la période réelle (resp. quasi-période) de la courbe elliptique :

$$(E) \qquad y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

Dans l'article n°7 nous avons montré que des familles "contiguës" de fonction hypergéométriques d'ordre supérieur avaient une mesure normale d'indépendance linéaire .

Signalons que l'on ne sait pas si e^π a une mesure normale (les seuls résultats connus dans ce sens étant du type :

$$\mid e^\pi - p/q \mid > q^{-C \operatorname{Log} \operatorname{Log} q} (\text{C constante explicite})$$

Pourtant on peut écrire que :

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1+i, -1+i \\ 3/2 \end{matrix}\middle| 1/2\right) \Big/ {}_2F_1\left(\begin{matrix} i, -i \\ 1/2 \end{matrix}\middle| 1/2\right) = \frac{e^\pi - 1}{e^\pi + 1}$$

Ce qui permet de conjecturer que la nature arithmétique des paramètres des fonctions hypergéométriques a une grand importance.

Dans le cas où $a, b, c \in \mathbf{Q}$ il s'agit de G fonction au sens de Siegel [23] et [24]. Il en est de même pour ${}_nF_{n-1}$ dans le cas où les paramètres sont rationnels. Les résultats obtenus par confluence donnent des E fonctions.

Les questions de transcendance

Les problèmes concernant la transcendance des valeurs de la fonction hypergéométrique ont été étudiés dans [15] et [16] par J. Wolfart.

L'idée consistant à comprendre la fonction hypergéométrique comme quotient de deux formes différentielles sur des courbes algébriques à multiplication complexe, de considérer leurs Jacobiennes et d'utiliser des résultats de G. Wustholz sur les variétés abéliennes [20].

Nous n'irons pas plus loin dans cette description mais nous signalons que le résultat essentiel de [16] admet une version quantitative.

Théorème *a) Soient a, b, c des paramètres rationnels avec $-c \notin \mathbf{N}$. On suppose que $G(x)$ n'est pas une fonction algébrique de x.*

Alors en dehors d'un nombre fini de points exceptionnels effectivement calculables en fonction de a, b, c de valeurs algébriques de x ($0 <\mid x \mid< 1$) $G(x)$ est transcendant [16]. *b) Dans le cas où $G(x)$ est transcendant, pour tout polynôme $P(x)$ de degré $\leq D$ et de hauteur $\leq H$, on a la version quantitative suivante*

$$\mid P(G(x)) \mid \geq \exp\bigl(-CD^n \operatorname{Log} H \operatorname{Log}(\operatorname{Log} H)^n\bigr)$$

C étant une constante effectivement calculable en fonction de a, b, c, x . n étant la dimension d'un facteur essentiel de la jacobienne de la courbe dont $\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}dt$ est l'intégrale d'une forme différentielle [15] $N =$ ppcm *des dénominateurs de a, b, c. Si on pose :*

$$A = (1-b)N; \quad B = (b+1-C)N; \quad C = aN$$

la courbe est $X(N, x)$: d'équation affine : $Y^N = X^A(1-X)^B(1-xX)^C$. Le facteur essentiel de la Jacobienne étant de dimension $\varphi(N)$. φ désignant la fonction d'Euler. c) Nous conjecturons qu'une idée de G.V. Chudnovski dans [8], *utilisant des propriétés des G fonctions doit permettre de supprimer le facteur* $\operatorname{Log}(\operatorname{Log} H)$ *dans cette estimation.*

C'est-à-dire que $G(x)$ a une mesure de transcendance normale. (Ceci sera l'objet d'un travail en commun avec N. Hirata. Disons simplement que les méthodes utilisent des résultats d'approximation diophantiennes sur les groupes algébriques commutatifs appliqués aux variétés abéliennes de type C.M. [25].*)*

REFERENCES

1 CARTIER P : Jacobiennes généralisées. Monodromie unipotentes et intégrales itérées. Séminaire Bourbaki 1987-88 n°687.

2 PADE H :Oeuvres par Claude Brezinski. Librairie A. Blanchard, Paris.

3 SIEGEL C.L : Transcendental numbers. Ann of maths Studies 16, 1949.

4 MALHER K : Lectures on transcendental numbers L.N. 546, 1976.

5 CHUDNOVSKI GV : Approximations de Padé explicites pour les solutions des équations différentielles linéaires Fuchsiennes. C.R.A.S. Paris t. 290 série A 135, 21 janvier 1980.

6 CHUDNOVSKI GV : Padé approximation and the Riemann monodromie problem. Bifurcation phenomena in Mathematical Physics and related topics 1980 Reidel p. 445-520.

7 BERTRAND D. et BEUKERS F. : Equations differentielles linéaires et majorations de multiplicités. Ann. Scient. Ecole normale sup. 4ème série, t. 18, 1985, p. 181-192.

8 CHUDNOVSKI GV : Measures of Irrationality, Transcendance and algebraic independance Recent Progress. Journées arithmétiques 1980, ARMITAGE. Cambridge University Press 1982 p. 11-82.

9 WALDSCHMIDT Michel : A lower bound for linear forms in logarithms. ACTA ARITHMETICA 37 1980, p. 257-283.

10 LANG S : Introduction to transcendantal numbers. Addison-Wesley 1966.

11 BOMBIERI E : On the Thue Siegel-Dyson theorem. Acta Mathematica 148, 1982, p. 255-296

12 BOMBIERI E and MUELLER J : On effective measures of irrationality for $\sqrt[r]{\frac{a}{b}}$ and related numbers. J. Reine Angew Math. 342, 1983, p. 173-196.

13 BAKER A : Transcendental numbers theory. Cambridge University Press. 1975.

14 REYSSAT E : Mesures de transcendance pour les logarithmes des nombres rationnels. Approximations diophantiennes et nombres transcendants. Progress in Math. Birkhauser 1983 p. 235-245.

15 WOLFART J : Werte Hypergeometrische Funktionen. Inventiones Mathematicae 92 p. 187-216, 1988.

16 WOLFART J : Values of Gauss'continued fractions. Preprint 1987.

17 WUSTHOLZ J. WOLFART : Der uberlagerungsradius gewisser Algebraisscher Kurven und die werte der Beta Funktion an rationalen Stellen. Math annalen 273, 1985, p. 1-25.

18 BEUKERS F; HECKMAN G : Monodromy for the hypergeometrie function ${}_nF_{n-1}$. Preprint University of Utrecht. 1987.

19 Equations différentielles linéaires et analyse diophantienne. Cours de D.E.A par Daniel BERTRAND, Notes de cours rédigées par René LARDON.

20 RHIN G : Approximants de Padé et Mesures effectives d'irrationalité... Séminaire de Théorie des nombres 1985-86, Paris, p.155-164. Progress in Maths Birkauser.

21 JAGER H : A multidimensional generalisation of the Padé table. Drukheris Holland N.V. Amsterdam 1964.

22 RIEMANN : Oeuvres mathématiques Blanchard Paris.

23 REYSSAT : Nature arithmétique de valeurs de G fonctions. Aperçu historique. Publication Mathématique de l'Université Pierre et Marie Curie. Problèmes diophantiens 1979-80.

24 PHILIPPON P : Indépendance algébrique par la méthode des G fonctions Publications mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie 1979-80, groupe d'étude sur les problèmes diophantiens I.H.P. Paris.

25 PHILIPPON P et WALDSHCHMIDT M : Formes linéaire de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs. Preprint U.A. 763 du C.N.R.S, Paris.

APPROXIMANTS DE PADÉ DES FONCTIONS BINÔMES ET MESURES DE L'IRRATIONALITÉ DES RACINES DE NOMBRES RATIONNELS

par

Marc HUTTNER

-:-:-:-

0. - Introduction

Soit α un nombre algébrique non nul de degré $n \geq 3$; on sait que le théorème de Liouville implique l'existence d'une constante $c(\alpha) > 0$ effectivement calculable telle que pour tout couple d'entiers (p, q) l'on ait $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c(\alpha)}{q^n}$.

On dira dans la suite que la fonction $\psi(q) = q^{-n}$ est une mesure de l'irrationalité de α , n étant l'exposant de cette mesure.

Les améliorations par Thue, Siegel et enfin par Roth de cet exposant auraient de nombreuses conséquences dans la résolution d'équations diophantiennes si les constantes données par ces théorèmes étaient "effectives".

Il y a plusieurs façons d'améliorer cet exposant de la mesure de l'irrationalité de α .

La première utilise les formes linéaires de logarithmes, la méthode de Baker donne en effet (cf. S. Gy)

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > c(\alpha)\ q^{-n+\delta}$$

où $c(\alpha)$: est une constante calculable qui ne dépend que de α

δ : dépend également de α

mais $c(\alpha)$ et δ sont des constantes très petites qui tendent vers 0 quand le discriminant de α tend vers 0 .

La deuxième méthode qui ne s'applique qu'à certains nombres et en particulier aux nombres de la forme $(\frac{a}{b})^{r/s}$ utilise les approximants de Padé de la fonction binôme et se trouve déjà dans les travaux de Thue, Siegel, Baker et enfin de Chudnovski.

Avant de donner la démonstration de Chudnovski concernant les approximations de $(\frac{a}{b})^{r/s}$ nous allons donner des exemples d'applications de ce qui va suivre aux équations diophantiennes de la forme $a x^n - b y^n = c$.

I. - Mesures d'irrationalité et résolutions d'équations diophantiennes du type $a x^n - b y^n = c$

Exemple de Baker (cf. Ba. 1). - Dans son article "Rational Approximations to $\sqrt[3]{2}$ and other Algebraic numbers", Baker donne l'exemple suivant :

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad \forall q \in \mathbb{Z}^* \quad \left|\frac{p}{q} - \sqrt[3]{2}\right| > \frac{10^{-6}}{q^{2,955\ldots}}$$

En multipliant cette inégalité par $q(p^2 + pq\sqrt[3]{2} + q^2\sqrt[3]{4})$ on trouve :

$$|p^3 - 2q^3| > 10^{-6}\, q^{0,045\ldots}$$

et il est facile d'en déduire que l'équation diophantienne

$$(1) \qquad x^3 - 2y^3 = k$$

n'a qu'un nombre fini de solutions entières (x, y).

On trouve que

$$|y| < 10^{138}\, |k|^{23} \quad \text{et} \quad \sup(|x|, |y|) \leq (3.10^5 |k|)^{23} .$$

Or Chudnovski (cf. Ch 2) trouve qu'il existe une constante $c(\varepsilon)$ effective telle que

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt[3]{2}\right| > c(\varepsilon)\, q^{-2,43\ldots+\varepsilon}$$

ce qui a pour conséquence que (1) a des solutions (x, y) vérifiant : $\sup(|x|, |y|) \leq c(\varepsilon)\, |k|^{1,76}$.

II. - Les théorèmes de Baker et Chudnovski

THÉORÈME II. 1. (Baker, Chudnovski). - Soient a et b deux entiers satisfaisant à $1 \leq b < a$ et m et n deux autres entiers tels que $1 \leq m < n$. On suppose que $n \mid (a-b)$ et on pose $\sigma_n = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ premier}}} p^{1/(p-1)}$ et μ_n un dénominateur de $\frac{a-b}{n}$ $(\mu_n \mid n)$.

Si les nombres a et b vérifient la relation

$$(1) \qquad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \sigma_n \mu_n < 1 .$$

Alors l'exposant de la mesure de l'irrationalité de $(\frac{a}{b})^{m/n}$ est $X_1 + \varepsilon$ où

$$X_1 = 1 - \frac{\operatorname{Log}\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \sigma_n \mu_n\}}{\operatorname{Log}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \sigma_n \mu_n\}}$$

c'est-à-dire que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $Q_0(\varepsilon, a, b, m, n) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall P \in \mathbb{Z}$, $\forall Q \in \mathbb{Z}^*$ avec $|Q| \geq Q_0(\varepsilon, a, b, m, n)$ on ait :

$$\left|\left(\frac{a}{b}\right)^{m/n} - \frac{P}{Q}\right| > |Q|^{-X_1-\varepsilon} .$$

THÉORÈME II. 2. (Amélioration de G. V. Chudnovski)

a) Soient a et b deux entiers positifs tels que $(a,b) = 1$ et $n \geq 3$ et s un entier tel que $(s,n) = 1$.

On pose
$$(\operatorname{ch} r)_n^2 = \frac{\pi}{\varphi(n)} \sum_{j=1}^{j=[n/2]} \operatorname{cotg} \frac{j\pi}{n}$$

(characteristic number, d'indices 2 et n , en anglais).

Si a et b vérifient la condition suivante

$$(2) \qquad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 e^{(\operatorname{ch} r)_n^2} < 1 .$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $(\frac{a}{b})^{s/n}$ a pour exposant de la mesure d'irrationalité

$$X_2 + \varepsilon \quad \text{où} \quad X_2 = 1 - \frac{\operatorname{Log}\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 e^{(\operatorname{ch} r)_n^2}\}}{\operatorname{Log}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 e^{(\operatorname{ch} r)_n^2}\}} .$$

b) Si $(a-b, n) \neq 1$. Alors soit w_p la valuation p-adique de $a-b$, pour $p \mid n$. On pose :

$$\lambda = \prod_{p \mid n} p^{\min\{w_p, (v_p(n)+1)/(p-1)\}}$$

3) Alors si $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 e^{(\operatorname{ch} r)_2^n} . \lambda^{-1} < 1$, $(\frac{a}{b})^{s/n}$ a pour exposant $X_3 + \varepsilon$ où

$$X_3 = 1 - \frac{\operatorname{Log}\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 e^{(\operatorname{ch} r)_n^2} . \lambda^{-1}\}}{\operatorname{Log}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 e^{(\operatorname{ch} r)_n^2} . \lambda^{-1}\}} .$$

Exemples. - 1) En prenant $a = 128$, $b = 125$ pour des rationnels de la forme $\frac{4p}{5q}$, on a d'après le théorème I. 1 $(\sigma_3 = \sqrt{3},\ \mu_3 = 1)$

$$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-2,94703\ldots} \qquad \text{pour } |q| \geq q_1(\varepsilon)$$

d'après le théorème 2, b) en remarquant que $(\operatorname{ch} r)_3^2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$, $\lambda = 3$,

$$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-2,429709} \qquad \text{pour } |q| \geq q_2(\varepsilon) \quad \text{(par II. b)}.$$

2) Pour $a = 9$, $b = 8$ le théorème I ne s'applique pas, mais par II. a) on trouve que :

$$\left|\sqrt[3]{3} - \frac{p}{q}\right| > q^{-2,692661} \qquad \text{pour } |q| \geq q_3(\varepsilon) .$$

3) En prenant $a = 3.18^3 = 17496$ et $b = a-3 = 3.17.7^3$, alors le théorème I donne

$$\left|\sqrt[3]{17} - \frac{p}{q}\right| > q^{-2,39\ldots} \qquad \text{pour } |q| > q_4(\varepsilon)$$

pour des rationnels de la forme $\frac{18q}{7p}$.

Le théorème II. a) donne pour $a = 5832$, $b = 5831$ $(a = 18^3,\ b = 17 \times 7^3)$.

4) $a = 10$, $b = 9$ donne :

$$\left| \sqrt[3]{30} - \frac{p}{q} \right| > q^{-2,66439\ldots}$$

Dans tous les cas les nombres a et b doivent vérifier les conditions (1), (2), (3) des théorèmes (I. 1) et (I. 2)

III. - Approximants de Padé de type I pour les fonctions binômes

DÉFINITION III. 1. - Soient $n_1, n_2, \ldots, n_m$ des entiers positifs et $f_i(x), \ldots, f_m(x)$ des fonctions analytiques en $x = 0$.

Alors il existe des polynômes $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$ de degrés respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_m$ tels que la fonction analytique

$$R(x) = \sum_{i=1}^{i=m} P_i(x)\, f_i(x)$$

ait en $x = 0$ un zéro d'ordre $N \geq \sum_{i=1}^{i=m} (n_i + 1) - 1$.

$R(x)$ est le reste de l'approximant de Padé de type I et les polynômes $P_i(x)$ sont appelés les approximants de Padé de type I de poids $n_1, n_2, \ldots, n_m$ (cf. Ja, Hu).

La détermination explicite de $R(x)$, $P_i(x)$ $1 \leq i \leq m$ dans le cas des fonctions exponentielles résulte des travaux d'Hermite, Malher, Siegel et part de l'intégrale

$$R(t, z) = \frac{(n\,!)^m}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{zt}\, dz}{Q(z)^m} \quad \text{où} \quad Q(z) = \prod_{k=0}^{k=m} (z-k) .$$

avec $k \in \mathbb{N}$.

Dans le cas des fonctions binômes en posant $n_k = \rho_k - 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$

$$f_i(x) = (1-x)^{\omega_i} \text{ avec } \omega_i - \omega_j \notin \mathbb{Z} \text{ pour } i \neq j \text{ et } i = 1, 2, \ldots, m ,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n .$$

On considère

$$R\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_m \\ \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_m \end{matrix}\right) = \frac{\Gamma(\rho_1) \ldots \Gamma(\rho_m)}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{(1-x)^z\, dz}{\prod_{j=1}^{j=m} \prod_{h=0}^{h=\rho_j - 1} (z - \omega_j - h)}$$

où $\mathcal{C}$ est un contour parcouru dans le sens positif entourant tous les pôles de la fonction sous le signe $\int$.

La détermination de $(1-x)^z$ étant celle prenant la valeur 1 en $z = 0$, le théorème des résidus donne :

$$R\left(x \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{k=m} A_k\left(x \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\end{matrix}\right)(1-x)^{\omega_k}$$

où $A_k\left(x \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\end{matrix}\right)$ sont des polynômes hypergéométriques généralisés de de degrés respectifs $\rho_k - 1$ (cf. Ja ou Hu).

Dans la suite on prendra $m = 2$ et on a la proposition suivante :

PROPOSITION III. 1. - <u>Soit</u> $\nu \in \mathbb{R}$ <u>avec</u> $1 > \nu > 0$. <u>Pour tout</u> $r \in \mathbb{N}$ <u>il existe une constante</u> c_r <u>réelle telle que</u>

$$\underset{(1)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix}-r, -\nu-r \\ -2r\end{matrix} \,\middle|\, x\right)} - (1-x)^{\nu} \underset{(2)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix}-r, \nu-r \\ -2r\end{matrix} \,\middle|\, x\right)}$$

$$= \underset{(3)}{c_r\, x^{2r+1} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\nu+r+1, r+1 \\ 2r+2\end{matrix} \,\middle|\, x\right)}.$$

(1) est un polynôme de degré r,

(2) est un polynôme de degré r

(3) est une série entière d'ordre $2r+1$.

<u>Démonstration</u>. - On pose : ${}_2F_1\left(\begin{matrix}a\ b \\ c\end{matrix} \,\middle|\, x\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)\, n!} x^n$ (A) où

$$(a,n) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) & \text{si } n \neq 0 \\ 1 \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

qu'on appelle fonction hypergéométrique de Gauss de paramètres (a, b, c) (cf. Er, Ba ; Fors)).

Elle est solution de l'équation différentielle de type de Fuchs suivante

$$x(1-x)\, y'' + \{c - (a+b+1)x\} y' - a b y = 0 \qquad (3')$$

ayant pour points singuliers $0, 1, \infty$.

La méthode de Frobenius donne pour solution générale au voisinage de 0 :

$$P(x) = A\ {}_2F_1\left({a\ b \atop c} \Big| x\right) + B\ x^{1-c}\ {}_2F_1\left({a+1-c\quad b+1-c \atop 2-c} \Big| x\right),\ A \in \mathbb{C},\ B \in \mathbb{C}\ .$$

En faisant de même au voisinage de 1 et ∞, Riemann introduit le symbole suivant (cf. Rie, Fo, Hu).

$$P = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & \underline{\infty} \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix} \qquad (I)$$

La manipulation de ce symbole résulte du théorème suivant :

THÉORÈME DE RIEMANN. - Etant donnés trois points $(a\,,b\,,c) \in P_1(\mathbb{C})$ et six nombres réels tels que

$$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2 = 1 \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} \alpha_1-\alpha_2 \notin \mathbb{Z} \\ \beta_1-\beta_2 \notin \mathbb{Z} \\ \gamma_1-\gamma_2 \notin \mathbb{Z}\ . \end{matrix}$$

Il existe une et une seule équation du type de Fuchs ayant pour singularité $(a\,,b\,,c)$ avec pour exposants locaux $(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2),(\gamma_1,\gamma_2)$ en ces points.

On note $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$ la solution générale de cette équation, c'est-à-dire que :

$$P(x) = A(x-a)^{\alpha_1} P_1(x) + B(x-a)^{\alpha_2} P_2(x)$$

où $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont holomorphes au voisinage de 0 et $P_1(a) \neq 0$, $P_2(a) \neq 0$ et de même aux points b et c .

Par une homographie on peut se ramener en $0\,,1\,,\infty$, d'où le symbole (I).

A partir de là on utilise l'astuce suivante :

Si Y est solution de $\mathcal{H}$ associée au symbole

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & \underline{\infty} \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix}.$$ Le symbole associé à $(1-x)^{a+b-c}Y$ sera :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & a+b-c & c-b \\ 1-c & 0 & c-a \end{pmatrix}$$ où l'on prend la détermination de $(1-x)^t$ qui prend la valeur 1 en $x=0$.

Il suffit alors de vérifier dans la proposition que ${}_2F_1\left({-r \quad -\nu-r \atop -2r} \middle| x\right)$, $(1-x)^\nu\ {}_2F_1\left({-r \quad \nu-r \atop -2r} \middle| x\right)$ et $x^{2r+1}\ {}_2F_1\left({-\nu+r+1 \quad r+1 \atop 2r+2} \middle| x\right)$ ont tous trois même symbole de Riemann, donc vérifient la même équation du type $\mathcal{H}$ (pour plus de détails, voir Hu 2).

Ce qui implique l'existence de $c_r \in \mathbb{R}$ vérifiant la relation de la proposition avec

$$c_r = \frac{{}_2F_1\left({-r \quad -\nu-r \atop -2r} \middle| 1\right)}{{}_2F_1\left({-\nu+r+1 \quad r+1 \atop 2r+2} \middle| 1\right)} .$$

En posant $z=1-x$ et en utilisant un raisonnement analogue on peut montrer que

1bis $$\frac{(2r)!}{r!\,(1-\nu)(2-\nu)\ldots(r-\nu)}\ {}_2F_1\left({-r \quad -r-\nu \atop -2r} \middle| 1-z\right) = {}_2F_1\left({-r \quad -r-\nu \atop 1-\nu} \middle| z\right) = X_r(z)$$

2bis $$\frac{(2r)!}{r!\,(1-\nu)(2-\nu)\ldots(r-\nu)}\ {}_2F_1\left({-r \quad -r+\nu \atop -2r} \middle| 1-z\right) = z^r\ {}_2F_1\left({-r \quad -r+\nu \atop 1-\nu} \middle| \frac{1}{z}\right) = Y_r(z) .$$

D'où la relation fondamentale

II $$z^\nu X_r(z) - Y_r(z) = (z-1)^{2r+1} R_r(z)$$

où $R_r(z) = \dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+r)}{(r+1)(r+2)\ldots(2r+1)}\ {}_2F_1\left({r+1 \quad r+1-\nu \atop 2r+2} \middle| 1-z\right)$.

Pour trouver la mesure d'irrationalité de $(\frac{a}{b})^\nu$ où $\nu = \frac{s}{n}$, il nous faut résoudre trois problèmes :

I) Trouver des estimations asymptotiques de $X_r(z)$, $Y_r(z)$ et $(z-1)^{2r+1}R_r(z)$ quand $r \to +\infty$ pour $z = \frac{a}{b}$.

II) Trouver un bon "lemme de zéros" qui permet de conclure que pour

$$z = \frac{a}{b}\ ,\quad 0<a<b\ ,\quad R_r(\tfrac{a}{b}) \neq 0 .$$

III) Déterminer une estimation asymptotique du plus petit multiple commun des dénominateurs de $X_r(z)$ et $Y_r(z)$.

(Soit Δ_r le plus petit multiple commun. Trouver les rationnels $\frac{a}{b}$ tels que

$$\lim_{r \to +\infty} \left(\frac{a-b}{b}\right)^{2r+1} \Delta_r\, b^r\, R_r\left(\frac{a}{b}\right) = 0 .$$

IV. - Résolution du Problème I

PROPOSITION IV. - On a :

a) $X_r(z) \sim (1-z)^{(2r-1)/4} \left(\frac{1}{2}\left(1+(1-z)\right)^{1/2}\right)^{2r+1}$.

b) $c_r(z-1)^{2r+1} R_r(z) \sim 2\sin \pi\nu \,(1(z)^{(2r-1)/4} \left(\frac{1}{2}(1-(1-z))^{1/2}\right)^{2r+1}$

pour $z \in \rbrack 0,1 \lbrack$.

Démonstration. - Ce résultat sera admis (cf. Rie, Hu).

On peut remarquer qu'il faut utiliser "les représentations intégrales" des fonctions hypergéométriques et pour trouver les équivalents asymptotiques, raisonner par la méthode du col.

Par exemple :

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a & b \\ & c \end{matrix} \middle| \, x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}\,dt$$

pour $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re}(c-a) > 1$ (c'est la formule utilisée par l'estimation du reste).

Pour $X_r(z)$ et $Y_r(z)$ on utilise une autre formule intégrale (cf. E. Ba).

Dans la suite on retiendra que pour $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $0<a<b$:

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \log \left| X_r\left(1-\frac{b}{a}\right) \right| = \log \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2}$$

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \log \left| Y_r\left(1-\frac{b}{a}\right) \right| = \log \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2} \qquad \text{(III)}$$

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \left| c_r \left(\frac{b}{a}\right)^{2r+1} R_r\left(1-\frac{b}{a}\right) \right| = \operatorname{Log} \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} .$$

V. - Résolution du Problème II

PROPOSITION V (Lemme de zéros). - Soit α un nombre réel.

On suppose qu'il existe $Q > 1$ et $R > 1$ tels que pour tout $r \geq r_o(\varepsilon)$ on puisse trouver p_r et q_r dans $\mathbb{Z}$ vérifiant

1) $|q_r| \leq Q^{r(1+0(1))}$

2) $|q_r\alpha - p_r| \leq R^{-r(1+0(1))}$

3) $p_r\, q_{r+1} - p_{r+1}\, q_r \neq 0$.

Alors $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $q_o(\varepsilon)$ tel que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ avec $q \geq q_o(\varepsilon)$ on ait

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{1}{|q|^{1+(\operatorname{Log} Q /\ \operatorname{Log} R)+\varepsilon}} .$$

Démonstration (Alladi-Robinson). - Soient p et q deux entiers, et $|q|$ assez grand.

Soit r_o le plus petit entier tel que :

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{2|q|} > |q_{r_o}\alpha - p_{r_o}| \quad \text{pour tout } r \geq r_o$$

d'après 3) on peut choisir p_r et q_r tels que $p q_r - p_r q \neq 0$ (on prend $r = r_o$ ou $r = r_o + 1$). Comme $q_r \neq 0$ on en déduit

$$|q_r|\ |\alpha - \frac{p}{q}| \geq |q_r|\ \{\ |\frac{p_r}{q_r} - \frac{p}{q}| - |\alpha - \frac{p_r}{q_r}|\ \} \geq \frac{1}{|q|} - \frac{1}{2|q|} = \frac{1}{2|q|}$$

et donc

$$\text{(2)} \qquad |\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{1}{2|q|\ Q^{r(1+0(1))}} .$$

Soit r_o le plus petit entier vérifiant (1) on a

$$R^{(r_o-1)(1+0(1))} \leq |q_{r_o-1}\alpha - p_{r_o-1}|^{-1} \leq 2|q|$$

et donc

$$r \leq r_o + 1 < 2 + \frac{\operatorname{Log}|2q|}{\operatorname{Log} R}\ (1 + 0(1))$$

ce qui permet d'en déduire la proposition en utilisant (2) et en faisant $r \to +\infty$.

Le corollaire suivant est plus précis :

COROLLAIRE V.2. - <u>On suppose qu'il existe</u> $k>0$, $\ell_o > \frac{1}{2}$, $Q>1$, $R>1$ <u>tels que pour tout</u> r <u>on ait</u> :

1) $|q_r| < k_o Q^r$

2) $|q_r \alpha - p_r| \leq \ell_o R^{-r}$

3) $p_{r+1} q_r - q_{r+1} p_r \neq 0$.

<u>Alors pour tout</u> $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ $|\alpha - \frac{p}{q}| > \dfrac{c}{|q|^{1+(\mathrm{Log}\, Q/\mathrm{Log}\, R)}}$ <u>où</u>

$$c = \frac{1}{2k_o} Q^{-2+(\mathrm{Log}\, 2k_o / \mathrm{Log}\, R)}$$

(Il résulte immédiatement de la proposition précédente.)

Reste à vérifier la condition (3).

LEMME V.1. - <u>Les polynômes</u> $X_r(z)$ <u>et</u> $Y_r(z)$ <u>vérifient la relation</u> :

$$X_r(z)\, Y_{r+1}(z) - X_{r+1}(z)\, Y_r(z) = d_r\, z^{2r+1} \quad \underline{\text{avec}} \quad d_r \neq 0 .$$

<u>Démonstration</u>. - On considère :

$$D_r(z) = \begin{vmatrix} X_{r+1} & Y_{r+1}(z) \\ Y_{r+1}(z) & X_{r+1}(z) \end{vmatrix}$$

qui est de degré $\leq 2r+1$, mais

$$D_r(z) = \begin{vmatrix} c_{r+1}\, I_{r+1}(z) & Y_{r+1}(z) \\ c_r\, I_r(z) & Y_r(z) \end{vmatrix}$$

où on a posé $I_r(z) = (z-1)^{2r+1} R_z(z)$.

Comme $D_r(z)$ est une série entière d'ordre $2r+1$ on peut en conclure que

$$D_r(z) = d_r(z)^{2r+1} \quad \text{avec} \quad d_r \neq 0 .$$

Résolution du problème III

VI. - Etude arithmétique des coefficients de $X_r(z)$ et $Y_r(z)$

VI.1- DÉFINITION de la "n partie de r!". - Considérons la décomposition de r! en facteurs premiers. On peut écrire :

$$r! = \prod_{p \leq r} p^{v_p(r!)} = \Big(\prod_{\substack{p|n \\ p\leq r}} p^{v_p(r!)}\Big) \times \Big(\prod_{\substack{p\nmid n \\ p\leq r}} p^{v_p(r!)}\Big) = t.M$$

$t = \prod_{\substack{p|n \\ p\leq r}} p^{v_p(r!)}$ est la n partie de r!

Par définition $(t, M) = 1$ et $(n, M) = 1$.

LEMME VI. 1. - Soit n un entier $n \geq 1$ et soit $\mu_n = \prod_{p|n} p^{1/(p-1)}$; posons :

$$\sigma_n = \prod_{p|n} p^{[r/(p-1)]} \leq \mu_n^r \; .$$

Alors la "n partie de r!" divise μ_n^r et si de plus $(n, s) = 1$ alors

$$A = \frac{(na+s)(n(a+1)+s)\ldots(n(a+r-1)+s)}{r!} * \mu_n \in \mathbb{N} \; .$$

Démonstration. - Pour tout nombre premier p, on a :

$$v_p(r!) = \sum_{r\in\mathbb{N}^*} \Big[\frac{r}{p^i}\Big] \leq \Big[\frac{r}{p-1}\Big]$$

donc si $p|n$, alors $t \,|\, \mu_n^r$.

Puisque $(n, M) = 1$ d'après le théorème de Bezout on peut trouver t' tel que $t'.n \equiv 1 \pmod{M}$ d'où :

$$t'^n (na+s)(n(a+1)s)\ldots(n(a+r-1)+s) \equiv (a+st')(a+1+st')\ldots(a+r-1+st') \pmod{M}$$

or

$$(a+st')(a+(s+1)t')\ldots(a+r-1+st') = \binom{a+st'+r-1}{r} r!$$

d'où :

$$\frac{(na+s)(n(a+1)s\ldots(n(a+r-1)s)}{r!} \equiv \binom{a+st'+r-1}{r} \pmod{M}$$

or $M|r!$, donc $(na+s)(n(a+1)s)(\ldots)\ldots(n(a+r-1)+s) \equiv 0 \pmod{M}$, ce qui permet de conclure que :

si $p|n$, $p \leq r$, alors $t|\mu_n^r$ et donc $t|A$;
si $p\nmid n$, $p \leq r$, alors $M|$ le numérateur de A, c.q.f.d.

LEMME VI. 2. - Le plus petit multiple commun des dénominateurs des coefficients des $X_r(z)$ et $Y_r(z)$ divise l'entier

$$A_{r,n} = \frac{(n-s)(2n-s)\dots(rn-s)}{r!} \cdot \mu_n^r .$$

Démonstration. - D'après le lemme I, $A_{r,n} \in \mathbb{N}$.

On calcule $A_{r,n} X_r(z)$ en développant $X_r(z)$ par III.1.A. et on fait une démonstration analogue au lemme I. Ces deux lemmes sont utilisés pour la démonstration du théorème I et ils nous seront utiles pour la démonstration du théorème II de G. V. Chudnovski qui est contenue dans le théorème suivant.

THÉORÈME III. V. - Soit Δ_r le plus petit multiple commun des dénominateurs des coefficients des $X_r(z)$ et $Y_r(z)$.

On a :

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{1}{r} \operatorname{Log} \Delta_r \leq (\operatorname{ch} r)_n^2$$

où $$(\operatorname{ch} r)_n^2 = \frac{\pi}{\varphi(n)} \sum_{\substack{j=1 \\ (j,n)=1}}^{j=[n/2]} \operatorname{cotg} \frac{\pi j}{n} .$$

Démonstration. - Elle se fait en plusieurs étapes.

1) Les lemmes I et II vont montrer que la contribution des nombres premiers $p < n\sqrt{r}$ est négligeable. On pose :

$$\Delta_r = \Delta_r^{(0)} . \Delta_r^{(1)} . \Delta_r^{(2)}$$

où :

$$\Delta_r^{(0)} = \prod_{p|n} p^{v_p(\Delta_r)}$$

$$\Delta_r^{(1)} = \prod_{\substack{p\nmid n \\ p<n\sqrt{r}}} p^{v_p(\Delta_r)}$$

$$\Delta_r^{(2)} = \prod_{\substack{p\nmid n \\ p\geq n\sqrt{r}}} p^{v_p(\Delta_r)} .$$

<u>1ère étape</u>

a) Le lemme II va permettre d'estimer $\Delta_r^{(0)} . \Delta_r^{(1)}$ car on sait que $\Delta_r^{(0)} . \Delta_r^{(1)}$ est un diviseur de $A_{r,n}$, donc si $(s,n)=1$, $\Delta_r^{(0)}$ est un diviseur de $(\mu_n^r)/r!$ et on calcule la valuation p-adique $(\mu_n^r)/r!$ d'où on en déduit :

$$\Delta_r^{(0)} \leq \prod_{p|n} p^{[\operatorname{Log} r/\operatorname{Log} p]+2} = \prod_{p|n} (r p^2) < r^{\omega(n)} n^2$$

$\omega(n)$ désignant la nombre de diviseurs de n

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \operatorname{Log} \Delta_r^{(0)} = 0 .$$

b) $\Delta_r^{(1)}$ divise $A_{r,n}$ mais comme $(\Delta_r^1, n) = 1$, alors :

$$\Delta_r^{(1)} \mid \frac{(n-s)(2n-s)\dots(nr-s)}{r!} . \qquad (2)$$

En calculant la valuation p-adique de (2) et en remarquant que si

$$p^{\mu} \mid (n-s)(2n-s)\dots(nr-s) \text{ , alors } \mu < [\frac{\operatorname{Log}(rn)}{\operatorname{Log} p}]$$

et donc que $\quad v_p(\frac{(n-s)(2n-s)\dots(nr-s)}{r!}) = v_p(\frac{k-1}{r})$ ce qui permet de montrer que

$$\Delta_r^{(1)} \leq \prod_{p \leq n\sqrt{r}} (rn) \leq (rn)^{n\sqrt{r}}$$

d'où :

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \operatorname{Log} \Delta_r^{(1)} = 0 .$$

<u>2ème étape</u>. - Estimation asymptotique de $\Delta_r^{(2)}$

On a :

$$X_r(z) = \sum_{\ell=0}^{\ell=r} \binom{r}{\ell} \frac{(r+\nu)(r+1+\nu)\dots(r-\ell+1+\nu)}{(1-\nu)(2-\nu)(\dots)(\ell-\nu)} . z^{r-\ell}$$

où $\nu = \frac{s}{n}$ en faisant $h = r-\ell$ le coefficient de degré h s'écrit :

$$\binom{r}{h} \frac{C_h^r}{B_h^r} = \binom{r}{h} \frac{(n(r-h+1)+s)\,(n(r-h)+s)\,\dots\,(nr+s)}{(n-s)(2n-s)\dots(nh-s)}$$

où on a posé :

$$C_h^r = (n(r-h+1)+s)(n(r-h)+s)\ \ldots\ (nr+s)$$

$$B_h^r = (n-s)(2n-s)\ \ldots\ (nh-s)\ .$$

Puisque d'après le lemme II il suffit de regarder les facteurs premiers p qui divisent B_h^r on va classer ces facteurs premiers suivant leur reste modulo n.

On écrit :

$$\Delta_r^{(2)} = F_r(1)\,.\,F_r(2)\ldots\ F_r(n-1)$$

où $F_r(\omega)$ = produit des facteurs premiers qui divisent $\Delta_r^{(2)}$ (multiplicité comprise) et tels que :

$$\omega\,.\,p \equiv -s \ \text{mod.}\ n \ \text{avec}\ \omega < n\ .$$

On pose $\omega p + s = kn$ et $\xi = \frac{k}{p} = \frac{\omega}{n} + \frac{s}{np}$ pour p assez grand, $\xi < 1$.

On va chercher la valuation p-adique de B_h^r et C_h^r et démontrer un lemme.

LEMME VI.1. - On suppose que $u < v$ et $p^2 > \max(|un| + s, |vn|)$ avec $\omega p + s = kn$, alors

$$v_p((nu-s)(n(u+1)-s)\ldots(nv-s)) = \left[\frac{v-k}{p}\right] - \left[\frac{v-1-k}{p}\right] = \left[\frac{-u+k}{p}\right] - \left[\frac{-v-1+k}{p}\right]$$

Démonstration. - Puisque aucun des facteurs du produit n'est divisible par p^2, il suffit de compter le nombre d'entiers j avec $u \le j \le v$ et $nj - s \equiv 0$ (mod. p), donc $n(j-k) \equiv 0$ mod. p puisque $(n,p) = 1$, alors $j \equiv k$ (mod. p).

Comme $j = k + p\ell$ et $u \le p\ell + k < v$ on en déduit

$$\frac{u-1-k}{p} < \ell < \frac{v-k}{p}$$

d'où le résultat.

Suite de la démonstration

On va montrer que $\omega < \frac{n}{2}$ et donner un encadrement pour un nombre premier p tel que $\omega p \equiv -s$ (mod. n).

D'après le lemme VI. 1 et pour $h = 0, 1, 2, \dots, r$

$$v_p(B_r^h) = [\frac{h}{p} - \xi] + 1$$

$$v_p(C_r^h) = [\frac{r+k}{p}] - [\frac{(r-h+k)}{p}]$$

pour h fixé on pose :

$$I = [\frac{h}{p}] \quad \text{et } \alpha \text{ tel que } \frac{h}{p} = \alpha + I \qquad 0 \leq \alpha < 1$$

$$J = [\frac{r-h}{p}] \quad \text{et } \beta \text{ tel que } \frac{r-h}{p} = J + \beta \qquad 0 \leq \beta < 1$$

ce qui permet d'établir que :

$$v_p(B_r^h) = I + 1 + [\alpha - \xi] \quad \text{et} \quad v_p(C_r^h) = I + [\alpha+\beta+\xi] - [\beta + \xi]$$

et donc que

$$\begin{cases} v_p(B_r^h) = I \text{ ou } I+1 \\ v_p(C_r^h) = I \text{ ou } I+1 . \end{cases}$$

Si $p \mid \Delta_r^{(2)}$ il existe h avec $0 \leq h < r$ tel que $v_p(B_r^h) = I+1$ et $v_p(C_r^h) = I$.
La relation $v_p(B_r^h) = I+1$ montre en utilisant ce qui précède que $\alpha \geq \xi$ (1).

De plus, comme il existe un tel h avec $v_p(\binom{r}{h}) = 0$, en utilisant le fait que $p^2 > r$ on en déduit que

$$[\frac{r}{p}] = [\frac{h}{p}] + [\frac{r-h}{p}] = I+J \quad \text{et ainsi que } \alpha + \beta < 1 .$$

Les relations $\alpha < 1 - \xi$, $(\beta + \xi) = 0$, $v_p(C_r^h) = I$ impliquent que $\xi < \frac{1}{2}$ et donc que $\omega < \frac{n}{2}$.

En posant $A = I+J$ on obtient :

$$A + \xi \leq \frac{r}{p} = A + \alpha + \beta < A + 1 - \xi .$$

Et d'après la définition de ξ ; $\xi > \omega/n$.

Tout cela permet de montrer qu'il existe un nombre premier p tel que : $p \equiv -s/\omega \pmod{n}$, $1 \leq \omega < n-1$ $(\omega, n) = 1$, $\frac{n}{2} > \omega$ vérifiant

$$(2) \qquad \frac{r}{A+1-(\omega/n)} < p \leq \frac{r}{A+(\omega/n)}$$

On utilise maintenant le théorème de distribution des nombres premiers dans une progression arithmétique.

Considérons donc :

$$\theta(x, n, \ell) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv \ell \ (\mathrm{mod.}\ n)}} \mathrm{Log}\, p$$

on sait (cf. Ell, M.) que $\theta(x, n, \ell) \sim \frac{x}{\varphi(n)}$ quand $x \to +\infty$ et donc si $x_1 < x_2$, quand $r \to \infty$, on a :

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv \ell \bmod n \\ x_2 r \leq p \leq x_1 r}} \mathrm{Log}\, p \sim \frac{(x_1 - x_2) r}{\varphi(n)} .$$

Utilisant (2) qui donne l contribution des nombres premiers p intervenant dans le facteur $F_r(\omega)$. On en déduit, en faisant varier h donc A :

$$\frac{1}{r} \mathrm{Log}\, F_r(\omega) \leq \frac{1+0(1)}{\varphi(n)} \sum_{A=0}^{A=+\infty} \left\{\frac{1}{A+(\omega/n)} - \frac{1}{A+1+(\omega/n)}\right\}$$

d'où finalement en utilisant la première étape

$$(3) \qquad \frac{1}{r} \mathrm{Log}\, \Delta_r \leq \frac{1+0(1)}{\varphi(n)} \sum_{\omega=1}^{\omega=[n/2]} \sum_{A=0}^{A=+\infty} \left\{\frac{1}{A+(\omega/n)} - \frac{1}{A+1+(\omega/n)}\right\} . \qquad (4)$$

Pour calculer (4) on utilise la fonction

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \{ \mathrm{Log}\, \Gamma(z) \} \qquad \text{(cf. E. Bat)}$$

d'après les propriétés de $\psi(z)$ on a :

$$\sum_{A=0}^{A=+\infty} \left\{\frac{1}{A+a} - \frac{1}{A+b}\right\} = \psi(N+a+1) - \psi(N+b+1) + \psi(b) - \psi(a)$$

d'où :

$$\mathrm{Log}\, \Delta_r \leq \frac{r}{\varphi(n)} \sum_{\substack{\omega=1 \\ (\omega, n)=1}}^{\omega=[n/2]} \left\{ \psi\left(\frac{n-\omega}{n}\right) - \psi\left(\frac{\omega}{n}\right) \right\} + 0(r)$$

et par la formule

$$\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \,\mathrm{cotg}\, \pi z$$

on a :

$$\operatorname{Log} \Delta_r \leq \frac{r\pi}{\varphi(n)} \sum_{\substack{\omega=1 \\ (\omega,n)=1}}^{\omega=[n/2]} \operatorname{cotg} \frac{\omega\pi}{n} + o(r)$$

on en déduit le théorème quand $r \to +\infty$.

<u>Exemples</u>. - $(\operatorname{ch} r)_n^2 = \frac{\pi\sqrt{6}}{6}, (\operatorname{ch} r)_n^4 = \frac{\pi}{2}$.

<u>Fin de la preuve des théorèmes I et II</u>

PROPOSITION VI. - <u>En posant</u> $\nu = \frac{s}{n}$ <u>et</u> $\mu_n = \prod_{p \mid n} p^{1/(p-1)}$. <u>Alors les coefficients des polynômes</u> $X_r(1-n\mu_n x)$ <u>et</u> $Y_r(1-n\mu_n x)$ <u>sont divisibles par</u> $n^r t$.

<u>Démonstration</u>. - On peut écrire :

$$X_r(z) = \binom{2r}{r} \frac{r!}{(1-\nu)(2-\nu)\dots(r-\nu)} \; {}_2F_1\left(\begin{matrix} -r, & -r-\nu \\ & -2r \end{matrix} \Big| \, 1-z\right)$$

$$Y_r(z) = \binom{2r}{r} \frac{r!}{(1-\nu)(2-\nu)\dots(r-\nu)} \; {}_2F_1\left(\begin{matrix} -r, & -r+\nu \\ & -2r \end{matrix} \Big| \, 1-z\right) .$$

d'où

$$P_j(x) = \binom{2r}{r} \; {}_2F_1\left(\begin{matrix} -r & -r+j/n \\ & -2r \end{matrix} \Big| \, x\right) \quad \begin{cases} j=s \text{ correspond à } Y_r(1-x) \\ j=-s \text{ correspond à } X_r(1-x) \end{cases}$$

On a : :

$$P_j(\mu_n n x) = \sum_{i=j}^{i=r} \binom{2r-i}{r} \frac{\prod_{k=r-i+1}^{k=r} (kn+j)}{i\,!} (-\mu_n x)^i .$$

En utilisant le lemme II. V on en déduit que les coefficients des polynômes $P_j(\mu_n n x)$ sont des entiers. Comme :

$$X_r(1-\mu_n n z) = \frac{r!\, n^r}{(n-s)(2n-s)\dots(rn-s)} \cdot P_{-s}(\mu_n n z)$$

$$Y_r(1-\mu_n n z) = \frac{r!\, n^r}{(n-s)(2n-s)\dots(rn-s)} \cdot P_s(\mu_n n z)$$

si $(s,n)=1$ $\quad \frac{r!\, n^r}{(n-s)(2n-s)\dots(rn-s)}$ est divisible par $t\, n^r$ pour r assez grand, $t \sim \mu_n^r$, d'où le résultat du théorème I.

Pour le théorème II, on considère :

$$p_r = \Delta_r b^r X_r(\tfrac{a}{b}) \qquad \text{d'où } (a/b)^\nu p_r - q_r = R_r$$
$$q_r = \Delta_r b^r Y_r(\tfrac{a}{b})$$

La conclusion résultant de tout ce qui précède.

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

A. BAKER, Rational approximation to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers, Quart. J. Math. Oxford 15 (1964), 375-383.

H. BATEMAN-ERDELYI, Higher transcendental Functions, Mac Graw-Hill (1953); V.1.

G. V. CHUDNOVSKI, On the Method of Thue, Siegel, Annals of Maths. 117 (1983).

G. V. CHUDNOVSKI, Formules d'Herwite pour lea approximants de Padé de logarithmes et de fonctions binômes et mesures d'irrationalité, C.R.A.S. Paris 288 (1979), A, 965-967.

M. HUTTNER, Mesures de l'irrationalité de certains nombres liés aux fonctions hypergéométriques, Thèse de 3e cycle, Lille, 1981.

B. RIEMANN, Oeuvres mathématiques, Albert Blanchard, Paris (1968), 369-377.

D. BERTRAND, Sur les équations différentielles linéaires et l'analyse diophantienne, Cours de 3e cycle, rédigé par R. Lardon et appendice de F. Beukers.

Entz BEUKERS, Rational approximations of Log 2, $\sqrt[3]{2}$ and related numbers (preprint).

ALLADI-ROBINSON, Legendre polynomials and irrationality, J. de Crelle 318 (1980), 137-155.

W. ELLISON et M. MENDÈS FRANCE, Les nombres premiers, Hermann.

M. HUTTNER (2), Symbole de Riemann et approximant de Padé, Pub. IPMA Lille, vol. V, fasc. 5, 1983 et Université de St Etienne (à paraître).

K. GYÖRY, Résultats effectifs sur la représentation d'entiers par des formes indécomposables, Queen's paper in pure and applied mathematics, n° 56.

(texte reçu le 7 juin 1983)

-:-:-:-

Marc HUTTNER
Université des Sciences et
Techniques de Lille
U.E.R. de Mathématiques
Pures et Appliquées
F - 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

THÉORIE DES NOMBRES. — *Problème de Riemann et irrationalité d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques de Gauss.* Note de **Marc Huttner**, présentée par Jacques Tits.

Suivant une idée de G. V. Chudnovski, on utilise les méthodes et les résultats de Riemann sur la fonction hypergéométrique pour prouver l'irrationalité de la fraction de Gauss $G(x)$ pour $x \in \mathbf{Q}^*$ assez petit. Dans le cas où $G(x)$ est algébrique nous donnons des familles à un paramètre d'équations dont les racines admettent de bonnes mesures d'irrationalité et qui complètent celles données par E. Bombieri et J. Mueller ([1] et [2]).

NUMBER THEORY. — On a problem of Riemann and the irrationality of Gauss'hypergeometric ratio.

Following an idea of G. V. Chudnovski we use methods and Riemann's results about hypergeometric function to prove irrationality for the Gauss hypergeometric ratio $G(x)$ with $x \in \mathbf{Q}^*$ small enough. When $G(x)$ is algebraic, we give new measures of irrationality for roots of one parameter families of equations which complete those given by E. Bombieri and J. Mueller ([1] and [2]).

0. NOTATIONS ET RAPPELS. — Soient a, b, c des nombres complexes, $c \notin \mathbf{Z}^-$. On note

(1) $$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n $$

la série hypergéométrique de Gauss où l'on a posé :

$$ (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1) \quad \text{si} \quad n>0 \quad \text{et} \quad (a)_0 = 1. $$

On sait que cette série est solution de l'équation différentielle hypergéométrique.

(2) $$ x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0. $$

On notera dans la suite

(3) $$ G(x) = \frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1, b \\ c+1 \end{matrix} \middle| x\right)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right)} $$

On dira que les paramètres a, b, c vérifient les conditions (N) si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $a \notin \mathbf{Z}$, $b \notin \mathbf{Z}$, $c-a \notin \mathbf{Z}$, $c-b \notin \mathbf{Z}$: l'équation (2) est irréductible sur $\mathbf{C}(x)$;

(ii) $c \notin \mathbf{Z}$, $a-b \notin \mathbf{Z}$, $c-a-b \notin \mathbf{Z}$: l'équation (2) ne possède pas de solutions logarithmiques.

I. IRRATIONALITÉ DE $G(x)$.

THÉORÈME. — *Soit $x \in \mathbf{Q}$, $0<|x|<1$, non racine de ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right)=0$. On suppose que les paramètres a, b, c sont rationnels et vérifient les conditions* (N).

On pose $x = 1-\alpha/\beta$ avec $(\alpha, \beta)=1$,

$$ a=\frac{l_a}{k_a}, \qquad b=\frac{l_b}{k_b}, \qquad c=\frac{l_c}{k_c}, \qquad \mu_k = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p/k}} p^{1/(p-1)}, \qquad f(k) = \frac{k}{\varphi(k)} \sum_{\substack{j=1 \\ (j,k)=1}}^{j=k} \frac{1}{j} $$

où φ est la fonction d'Euler. Soit $\delta \in \mathbf{N}^*$ tel que $\delta.(\beta-\alpha)/k_a k_b$ soit entier. Supposons que $((\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})/2)^2 \exp(2f(k_c)) \mu_{k_a} \mu_{k_b} \delta < 1$. Alors $G(x)$ est irrationnel et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante effective $Q(\varepsilon, x, a, b, c)$ telle que, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, tout $q \in \mathbf{N}^*$,

0249-6291/86/03020603 $ 2.00

$q \geqq Q(\varepsilon, x, a, b, c)$, *on ait* $|G(x)-(p/q)| > q^{-X-\varepsilon}$ *où*

$$X = 1 - \frac{\operatorname{Log}\{((\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})/2)^2 \mu_{k_a} \mu_{k_b} \delta\} + 2f(k_c)}{\operatorname{Log}\{((\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})/2)^2 \mu_{k_a} \mu_{k_b} \delta\} + 2f(k_c)}. \tag{4}$$

II. Exemples. — Dans le cas où le « quotient de Gauss » (3) est algébrique cela fournit des familles à un paramètre d'équations dont les racines ont des mesures d'irrationalité qui améliorent sensiblement l'exposant de Liouville (*voir* aussi [1] et [2]).

(1) Soit la famille d'équations du troisième degré $4wX^3 - 27X + 27 = 0$; pour w assez petit on peut écrire la racine $X(w)$ sous la forme (3) avec $a = -1/6$, $b = 1/6$, $c = 1/2$. Par exemple si l'on pose $w = 36/u$ avec u entier tel que $u \geqq 2.10^{12}$ on améliore de manière effective l'exposant de Liouville (*voir* aussi l'étude de Birch [3]).

(2) D'autres familles proviennent de la table de Schwartz donnant les solutions algébriques de (2). Dans le cas diédral on peut écrire

$$G(w) = \frac{n}{\sqrt{w}} \cdot \frac{(1+\sqrt{w})^{1/n} - (1-\sqrt{w})^{1/n}}{(1+\sqrt{w})^{1/n} + (1-\sqrt{w})^{1/n}}$$

sous la forme (3) avec $a = (1/2) - (1/2\,n)$, $b = -(1/2\,n)$, $c = (1/2)$. Ce nombre est de degré $2n$ si n est impair et de degré n sinon.

Par exemple si $n = 5$, $w = 25.2^{-23}$, $|G(w)-(p/q)| > q^{-4,636\,64\ldots+\varepsilon}$ pour $q \geqq q(\varepsilon)$ explicite.

III. Approximations rationnelles de $G(x)$. — Nous nous proposons de résoudre un problème dit de « Padé », c'est-à-dire de déterminer explicitement les polynômes $P^{(n)}(x)$ de degré n, $Q^{(p)}(x)$ de degré p et la fonction analytique $R_{n+p+1}(x)$ tels qu'au voisinage de 0, la relation suivante soit satisfaite :

$$\text{A.P} \qquad \begin{cases} P^{(n)}(x)\,{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} a+1, b \\ c+1 \end{matrix}\right| x\right) + Q^{(p)}(x)\,{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\right| x\right) = x^{n+p+1}\,R_{n+p+1}(x), \\ R_{n+p+1}(0) \neq 0, \end{cases}$$

(on dit que $x^{n+p+1} R_{n+p+1}(x)$ est le reste de l'approximant de Padé).

L'algèbre linéaire assurant l'existence d'une telle relation. L'idée consiste à regarder la relation A . P non pas seulement sur un voisinage de 0, mais sur le revêtement universel de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$. On résout alors un problème dit « de Riemann ».

1. *Détermination du reste.* — La connaissance des exposants aux singularités régulières $(0, 1, \infty)$ et apparentes permet de déterminer $R_{n+p+1}(x)$.

Nous supposons les conditions (i) de (N) vérifiées.

Seuls les cas $p = n$ et $p = n-1$ conduisent à $R_{n+p+1}(x)$ sous forme hypergéométrique. Par exemple pour $p = n$ les couples d'exposants locaux sont : en 0 : $(k_1, c+k_2-2n-1)$; en 1 : $(k_3, c-a-b+k_4)$; en l'∞ : $(n+1+a+k_5, n+1+b+k_6)$ avec $k_i \in \mathbf{N}$, $1 \leqq i \leqq 6$. La relation de Fuchs, ([4], p. 371), montre qu'il n'y a pas de singularité apparente et que $k_i = 0$ pour tout i, $1 \leqq i \leqq 6$. Le symbole de Riemann ([4] ou [6]) associé à $R_{2n+1}(x)$ est alors

$$P\left(\left.\begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & n+1+a & 0 \\ -(2n+1+c) & n+1+b & c-a-b \end{matrix}\right| x\right),$$

ce qui détermine l'équation (2) dont $R_{2n+1}(x)$ est la solution holomorphe. On trouve alors $R_{2n+1}(x) \sim {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} n+1+a, n+1+b \\ 2n+2+c \end{matrix}\right| x\right)$ (à une constante multiplicative près).

2. *Détermination des polynômes.* — Supposons de plus les conditions (ii) de (N) vérifiées. La transformation par « monodromie » de la relation A.P autour du point singulier « 1 » fait intervenir la matrice $M(a,b,c)=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22}\end{bmatrix}$. Seuls $b_{11}(a,b,c)$ et $b_{12}(a,b,c)$ interviennent dans le calcul et l'on a :

$$([5], \text{p. } 93\text{-}94)\quad \begin{cases} b_{11}(a,b,c)=1-2i\sin\pi(c-a-b)\dfrac{\sin\pi a\sin\pi b}{\sin\pi c}, \\ b_{12}(a,b,c)=-2i\exp i\pi(c-a-b)\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a)\Gamma(b)}. \end{cases}$$

On aboutit pour $p=n$ au système simplifié suivant :

$$\begin{cases} P^{(n)}(x)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1, b \\ c+1\end{matrix}\middle| x\right)+Q^{(n)}(x)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c\end{matrix}\middle| x\right)=x^{2n+1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a+n+1,\ b+n+1 \\ c+2n+2\end{matrix}\middle| x\right), \\ \dfrac{c(c-1)}{a(c-b)}P^{(n)}(x)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a-c,\ b-c+1 \\ 1-c\end{matrix}\middle| x\right)+x\,Q^{(n)}(x)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a-c+1,\ b-c+1 \\ 2-c\end{matrix}\middle| x\right) \\ \qquad =\dfrac{b_{12}(a+n+1,\ b+n+1,\ c+2n+2)}{b_{12}(a,b,c)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a-c-n,\ b-c-n \\ -2n-c\end{matrix}\middle| x\right). \end{cases}$$

Un résultat de Plemelj ([6], p. 168; *voir* aussi [11]), permet d'en calculer le déterminant. On trouve qu'il vaut

$$\frac{c(1-c)}{a(c-b)}(1-x)^{c-a-b}. \tag{4}$$

Nous retrouvons les formules de Heine ([7], 1857) pour $P^{(n)}(x)$ et $Q^{(n)}(x)$.

En posant $A_n=(c+1)_{2n+1}(c)_{2n+1}/(c-a)_{n+1}(c-b+1)_n(a+1)_n(b)_{n+1}$ et en simplifiant par la relation de Kummer (*voir* [5]), on a

$$(5)\quad \begin{cases} P^{(n)}(x)=\dfrac{a(c-b)}{c(1-c)}x^{2n+2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a+n+1,\ b+n+1 \\ c+2n+2\end{matrix}\middle| x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-a,\ 1-b \\ 2-c\end{matrix}\middle| x\right) \\ \qquad\qquad -A_n\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} -a-n,\ -b-n \\ -c-2n\end{matrix}\middle| x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c\end{matrix}\middle| x\right), \\ Q^{(n)}(x)=A_n\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} -a-n,\ -b-n \\ -c-2n\end{matrix}\middle| x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1,\ b \\ c+1\end{matrix}\middle| x\right) \\ \qquad\qquad -x^{2n+1}\cdot{}_2F_1\left(\begin{matrix} a+n+1,\ b+n+1 \\ c+2n+2\end{matrix}\middle| x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix} -a,\ 1-b \\ 1-c\end{matrix}\middle| x\right) \end{cases}$$

dont l'intérêt arithmétique réside dans le fait qu'il n'intervient que des produits de fonctions hypergéométriques (on ne garde que les coefficients de degré $\leqq n$).

Remarque. — Un calcul simple, utilisant (4) et A.P pour $n=1$ (formules de Gauss), permet de retrouver une formule peu connue (Willet 1967, [8]) :

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c\end{matrix}\middle| x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix} -a,\ -b \\ -c\end{matrix}\middle| x\right) + \frac{ab(a-c)(b-c)}{c^2(1-c^2)}x^2\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} 1+a,\ 1+b \\ 2+c\end{matrix}\middle| x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-a,\ 1-b \\ 2-c\end{matrix}\middle| x\right)=1.$$

IV. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Les formules explicites du III vont nous permettre de démontrer le théorème. Nous poserons

$$P_n(x)=A_n^{-1}P^{(n)}(x),\qquad Q_n(x)=A_n^{-1}Q^{(n)}(x),\qquad \tilde{R}_{2n+1}(x)=A_n^{-1}R_{2n+1}(x).$$

LEMME 1. — *Pour* $a\in\mathbf{Q}$, $a=l_a/k_a$, $(l_a, k_a)=1$ *on pose*

$$\binom{a}{n}=\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!}.$$

Alors $k_a^n\mu_{k_a}\binom{a}{n}$ *est un entier.*

C'est le lemme 3 de [9].

LEMME 2. — (*a*) *Pour* $c=l_c/k_c$, $(l_c, k_c)=1$ *on pose* $\Omega_n=\mathrm{ppcm}\,(l_c, l_c+k_c, \ldots, l_c+nk_c)$; *alors* $\Omega_n\binom{c}{n}^{-1}$ *est un entier.*

(*b*) *Pour* $n\to+\infty$ *on a, pour tout* $\varepsilon>0$, $\Omega_n\leqq\exp\,(f(k_c)+\varepsilon)\,n$.

Démonstration. — (*a*) résulte de

$$\binom{c}{n}^{-1}=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{c+k}.$$

(*b*) est donné par une estimation du ppcm de nombres entiers en progression arithmétique (*voir* [10]). On en déduit alors que

$$\Omega_{2n}(\delta\beta\mu_{k_a}\mu_{k_b})^n P_n\left(\frac{\beta-\alpha}{k_a k_b}\right)\qquad\text{et}\qquad \Omega_{2n}(\delta\beta\mu_{k_a}\mu_{k_b})^n Q_n\left(\frac{\beta-\alpha}{k_a k_b}\right)$$

sont des entiers.

LEMME 3. — *Quand* $n\to+\infty$ *on a les estimations asymptotiques suivantes :*

$$\operatorname{Log}|P_n(x)|\sim\operatorname{Log}|Q_n(x)|\sim 2n\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right|,$$

$$\operatorname{Log}|x^{2n+1}\tilde{R}_{2n+1}(x)|\sim 2n\operatorname{Log}\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right|.$$

On utilise essentiellement les formules intégrales pour les fonctions hypergéométriques.

On termine la démonstration en utilisant le lemme 3 de [10].

Remise le 25 novembre 1985, acceptée le 24 mars 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] E. BOMBIERI, *Acta Arithmetica*, 148, 1982, p. 255-296.
[2] F. BOMBIERI et J. MUELLER, *J. Reine Angew Math.*, 342, 1983, p. 173-196.
[3] B. J. BIRCH, Approximation to Cubic Irrationals, *Proc. Symp. Appl. Math.*, 4, A.M.S. Providence, 1971, p. 63-68.
[4] INCE, *Ordinary differential equations*, Dover.
[5] ERDELYI et BATEMAN, *Higher transcendantal functions*, MacGraw Hill, 1.
[6] PLEMELJ, Problems in the sense of Riemann and Klein, *Tracts in Math.*, n° 16, Interscience.
[7] HEINE, *J. Reine Angew Math.*, 53, 1857, p. 284.
[8] R. WILLET, *Quart J. Math. Oxford*, (2), 1967, p. 361-366.
[9] A. BAKER, Rational approximations to certain algebraic numbers, *Proc. London Math. Soc.*, (3), 14, 1964, p. 385-398.
[10] ALLADI-ROBINSON, *J. Reine Angew Math.*, 318, 1980, p. 137-155.
[11] G. V. CHUDNOVSKI, *Lecture Notes Physics*, 120, Springer, 1980, p. 103-150.
[12] G. V. CHUDNOVSKI et D. V. CHUDNOVSKI, *Lecture Notes in Math.*, n° 1052, Springer, 1982.

Université des Sciences et Techniques de Lille-I,
U.F.R. de Mathématiques pures et appliquées, 59655 *Villeneuve-d'Ascq.*

THÉORIE DES NOMBRES. — *Monodromie et approximation diophantienne d'une constante liée aux fonctions elliptiques.* Note de **Marc Huttner**, présentée par Jacques Tits.

En utilisant le principe de monodromie dans le cas « logarithmique » pour l'équation hypergéométrique, nous obtenons des approximations rationnelles de $\eta(\lambda)/\omega(\lambda)$ et nous trouvons de nouvelles mesures d'irrationalité.

NUMBER THEORY. — Monodromy and diophantine approximation for a number linked to elliptic functions.

We use the monodromy principle for the hypergeometric equation in the logarithmic case and give rational approximations for $\eta(\lambda)/\omega(\lambda)$.
We obtain new measures of irrationality for this number.

0. NOTATIONS ET RAPPELS. — Soient a, b, c des nombres complexes, $-c \notin \mathbf{N}$. On note

(1) $$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\middle| x\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n\, n!} x^n $$

la série hypergéométrique de Gauss où l'on a posé

$$ (a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) \qquad \text{et} \qquad (a)_0 = 1; $$

on sait que cette série est solution de l'équation différentielle

(2) $$ x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0. $$

Soit (E) la courbe elliptique mise sous forme de Legendre

(3) $$ y^2 = x(x-1)(x-\lambda) $$

avec $0 < |\lambda| < 1$; on peut écrire la période réelle de (E) sous la forme

(4) $$ \omega(\lambda) = \pi\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/2,\ 1/2 \\ 1 \end{matrix}\middle| \lambda\right). $$

On écrit aussi la quasi-période réelle associée

(5) $$ \eta(\lambda) = \pi\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/2,\ -1/2 \\ 1 \end{matrix}\middle| \lambda\right). $$

Nous noterons alors

(6) $$ G(\lambda) = \eta(\lambda)/\omega(\lambda). $$

I. IRRATIONALITÉ DE $G(\lambda)$.

THÉORÈME. — *Soit* $\lambda \in \mathbf{Q}$, $0 < |\lambda| < 1$. *On pose* $\lambda = \alpha/\beta$ *avec* $(\alpha, \beta) = 1$; *supposons que* λ *vérifie la condition suivante :*

(C) $$ |\beta| [2e(1-\sqrt{1-\lambda})]^2 < 1. $$

Alors le nombre $G(\lambda)$ *est irrationnel et pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une constante* $q_0(\varepsilon, \lambda)$ *effectivement calculable telle que pour tout* $p \in \mathbf{Z}$, *tout* $q \in \mathbf{N}^*$, $q \geqq q_0(\varepsilon, \lambda)$, *on ait :*

$$ |G(\lambda) - p/q| > q^{-(m(\lambda)+\varepsilon)} \qquad \textit{avec} \quad m(\lambda) = 1 - \frac{\operatorname{Log}[|\beta|(2e(2-\lambda))^2]}{\operatorname{Log}[|\beta|(2e(1-\sqrt{1-\lambda}))^2]}; $$

$m(\lambda)$ *est l'exposant de la mesure de l'irrationalité de* $G(\lambda)$.

II. CONSÉQUENCES. — (*a*) Pour $\lambda = 1/\beta$, avec $\beta \geqq 8$, nous en déduisons l'irrationalité de $G(\lambda)$ et nous améliorons un résultat de G. V. Chudnovski ([1] et [4]).

0249-6291/87/03040315 $ 2.00 © Académie des Sciences

Par exemple pour $q \geqq q_0(\varepsilon)$ assez grand nous obtenons

$$|G(1/9)-p/q|>q^{-50,2492607+\varepsilon}.$$

De même pour $\lambda=-1/\beta$, avec $\beta \geqq 7$, et pour $q \geqq q_0(\varepsilon)$ assez grand, $|G(-1/8)-p/q|>q^{-51,0954034+\varepsilon}$.

(*b*) En posant

$$K(k)=\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{2}\omega(k^2)$$

intégrale elliptique de première espèce,

$$E(k)=\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{2}\eta(k^2)$$

intégrale elliptique de deuxième espèce, on a $G(k^2)=E(k)/K(k)$, donc, pour k tel que $k^2 \in \mathbf{Q}$ et $k^2 \geqq 2\sqrt{2}$, nous obtenons encore un résultat d'irrationalité.

Le résultat demeure si l'on remplace k^2 par $-k^2$ et donne pour $k=1/\beta$ avec $\beta \geqq 11$ l'irrationalité de la fraction continue suivante :

$$F(k)=1/2\,k\,[E(2ik)/K(2ik)-1]=\frac{1}{1/k}+\frac{1}{2/k}+\frac{1}{1/3\,k}+\frac{1}{4/k}+\frac{1}{1/5\,k}+\frac{1}{6/k}+\frac{1}{\ldots}$$

Par exemple, pour $q \geqq q(\varepsilon)$,

$$|F(1/11)-p/q|>q^{-243,8859\ldots+\varepsilon}.$$

III. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.

LEMME 1. — *Il existe deux polynômes* $P_n(x)$ *et* $Q_{n-1}(x)$ *de degrés* n *et* $n-1$ *tels que*

$$P_n(x)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1,\ b+1\\ c+1\end{matrix}\middle| x\right)-Q_{n-1}(x)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix}\middle| x\right)=C_n x^{2n}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+n+1,\ b+n\\ c+2n+1\end{matrix}\middle| x\right),$$

où C_n *est une constante.*

La démonstration est analogue à celle de la « relation de Padé » de [2] et s'appuie sur le calcul des ordres des singularités de la forme linéaire

$$P_n(x)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1,\ b+1\\ c+1\end{matrix}\middle| x\right)-Q_{n-1}(x)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix}\middle| x\right)$$

et de la relation de Fuchs [5].

LEMME 2. — *Pour* $a+b=c=1$ *on a :*

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} P_n(x)&=\left[(1-x)P(x)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ 1\end{matrix}\middle| x\right)\right]_{(n)},\\ Q_{n-1}(x)&=\left[(1-x)P(x)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1,\ b+1\\ 2\end{matrix}\middle| x\right)\right]_{(n-1)},\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$P(x)=\sum_{k=0}^{k=2n}\frac{(a-2n)_k(b-2n-1)_k}{k!(-2n)_k}x^k$$

polynôme de degré $2n$, *la notation* $[\ \ ]_{(n)}$ *signifiant que l'on ne prend que les* n *premiers termes de la série.*

$$(b)\qquad C_n=\Gamma^2(a+1+n)\,\Gamma^2(b+n)/\Gamma(2n+3)\,\Gamma(2n+2).$$

Démonstration. — Comme dans [2] on utilise un raisonnement de monodromie. On considère la relation du lemme 1. Après un tour dans le sens direct autour du point singulier « 1 », les diverses solutions holomorphes en 0 de l'équation (2) se transforment et l'on voit apparaître les solutions à singularités logarithmiques.

De manière précise, en supposant que $a+b=1$:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ 1\end{matrix}\middle| x\right) \to {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ 1\end{matrix}\middle| x\right) + 2i\pi/\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)\left\{ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ 1\end{matrix}\middle| x\right)\log x + G_1^{a, b}(x)\right\}; $$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1, b+1\\ 2\end{matrix}\middle| x\right) \to {}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1, b+1\\ 2\end{matrix}\middle| x\right) $$

$$ + 2i\pi/\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)\left\{ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1, b+1\\ 2\end{matrix}\middle| x\right)\operatorname{Log} x + \frac{1}{x} + G_2^{a+1, b+1}(x)\right\}; $$

si $m \geqq 1$ m entier,

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ 1+m\end{matrix}\middle| x\right) \to {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ 1+m\end{matrix}\middle| x\right) $$

$$ + 2i\pi\left\{ x^{-m}P(x) + \frac{(-1)^m}{\pi^2 \sin\pi a \sin\pi b}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ 1+m\end{matrix}\middle| x\right)\operatorname{Log} x + G_{1+m}^{a, b}(x)\right\}, $$

où

$$ P(x) = \Gamma(m+1)\Gamma(m)/\Gamma^2(a)\Gamma^2(b) \sum_{k=0}^{k=m+1} \frac{(a-m)_k}{k!}\frac{(b-m)_k}{(1-m)_k} x^k. $$

Ici les diverses fonctions $G_e^{s, k}$ sont analytiques en 0, et la détermination du Log est réelle pour $x=1$.

On en déduit alors le système

$$ \left\{ \begin{aligned} & {}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1, b+1\\ 2\end{matrix}\middle| x\right)P_n(x) - {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ 1\end{matrix}\middle| x\right)Q_{n-1}(x) = C_n x^{2n}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1+n, b+n\\ 2n+2\end{matrix}\middle| x\right), \\ & G_2^{a+1, b+1}(x)P_n(x) - G_1^{a, b}(x)Q_{n-1}(x) \\ & \qquad = C_n\left(x^{2n}G_{2+2n}^{a+1+n, b+1+n}(x) + \frac{\Gamma(2n+3)\Gamma(2n+2)}{\Gamma^2(a+1+n)\Gamma^2(b+1+n)}P(x)\right). \end{aligned} \right. $$

Le déterminant du système est le wronskien de l'équation (2) et vaut $W(x) = -1/x(1-x)$. On termine en remarquant que les solutions sont polynomiales!

LEMME 3. — *Posons* $R_{2n}(x) = C_n x^{2n}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}a+n+1, b+n\\ 2n+2\end{matrix}\middle| x\right)$.

(*a*) *Pour x réel, $x<1$ et quand $n \to +\infty$ on a*

$$ |R_{2n}(x)| \leqq K\left|(1-\sqrt{1-x})/2\right|^{2n} \qquad \textit{avec} \quad K>0. $$

(*b*) *Pour $a=b=1/2$ on a les majorations :*

$$ |P_n(x)| \leqq \rho\left|1-\frac{x}{2}\right|^{2n}; \qquad |Q_{n-1}(x)| \leqq \rho\left|1-\frac{x}{2}\right|^{2(n-1)} \qquad \textit{avec} \quad \rho>0. $$

(*a*) Résulte du lemme 3 de [2].

(*b*) On majore les coefficients de $P(x)$.

Dans la suite on prendra $a=b=1/2$.

LEMME 4. — *(a) Si* $A_n=4^{2n}\prod_{\substack{p\leq 2n\\ p\text{ premier}}} p^{[\operatorname{Log} 2n/\operatorname{Log} p]}$, *alors* $A_n P_n(x)$ *et* $A_n Q_{n-1}(x)$ *sont dans* $\mathbf{Z}[x]$.

(b) Pour tout $\varepsilon>0$ *et quand* $n\to+\infty$, $A_n\leq 4^{2n}\exp(2+\varepsilon)n$.

Démonstration. — (*a*) On remarque que si a_s désigne le coefficient de degré s de $P(x)$ et si $b\in\mathbf{N}$ avec $b\leq[\operatorname{Log}2n/\operatorname{Log}p]$ alors $4^s\prod_{p^b\mid C_{2n}^s} p^b.a_s$ est un entier, et l'on termine en observant que ${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ a\\ c\end{matrix}\middle| 16x\right)\in\mathbf{Z}[[x]]$ pour $a=1/2$ ou $3/2$ et $c=1$ ou 2.

(*b*) Utilise le théorème des nombres premiers.

La démonstration du théorème se termine alors ainsi. On pose

$$\tilde{P}_n(x)=4^{2n}A_n P_n(x),\qquad \tilde{Q}(x)=4^{2n}A_n Q_{n-1}(x),\qquad \tilde{R}_{2n}(x)=4^{2n}A_n R_{2n}(x).$$

Le lemme 1 permet alors de vérifier la relation

$$\tilde{P}_{n+1}(x)\tilde{Q}_{n-1}(x)-\tilde{P}_n(x)\tilde{Q}_n(x)=4^{2n}A_{n+1}C_{n+1}x^{2n}.$$

Si

$$\theta={}_2F_1\left(\begin{matrix}3/2,\ 3/2\\ 2\end{matrix}\middle|\alpha/\beta\right)\Big/{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2,\ 1/2\\ 1\end{matrix}\middle|\alpha/\beta\right),\qquad p_n=\beta^n\tilde{P}_n(\alpha/\beta)$$

$$q_n=\beta^n\tilde{Q}_{n-1}(\alpha/\beta),\qquad r_n=\beta^n\tilde{R}_{2n}(\alpha/\beta)/\omega(\alpha/\beta)$$

on a $r_n=p_n\theta-q_n$. La condition (*c*) du théorème montre alors que $\lim_{n\to\infty} r_n=0$ et l'on peut conclure par le lemme 3 de [3] qui donne également la mesure de l'irrationalité.

Pour obtenir $G(x)$ on utilise la formule

$$G(x)=\frac{(1-x)x}{2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}3/2,\ 3/2\\ 2\end{matrix}\middle|x\right)\Big/{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2,\ 1/2\\ 1\end{matrix}\middle|x\right)-(2x+1).$$

Remarque. — Il n'est pas difficile d'obtenir pour $a\in\mathbf{Q}$, $b\in\mathbf{Q}$, $a\notin\mathbf{Z}$, $b\notin\mathbf{Z}$ et $a+b=1$, un résultat analogue au théorème de [2] pour la dérivée logarithmique de ${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ 1\end{matrix}\middle|x\right)$.

Reçue le 16 février 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] G. V. CHUDNOVSKI, Padé Approximations to the generalised hypergeometric function I, *J. Math. pures et appl.*, 58, 1979, p. 445-476.

[2] M. HUTTNER, Problème de Riemann et irrationalité d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques de Gauss, *Comptes rendus*, 302, série I, 1986, p. 603-606.

[3] ALLADI et ROBINSON, Legendre polynomials and irrationality, *J. reine angew Math.*, 318, 1980, p. 137-155.

[4] G. V. CHUDNOVSKI, Un système explicite d'approximants de Padé pour les fonctions hypergéométriques généralisées, *Comptes rendus*, 288, série A, 1979, p. 1001-1004.

[5] E. INCE, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1956.

U. F. R. de Mathématiques pures et appliquées,
Université des Sciences et Techniques de Lille-Flandres-Artois, 59655 Villeneuve-d'Ascq.

Reprinted from JOURNAL OF NUMBER THEORY
All Rights Reserved by Academic Press, New York and London

Vol. 26, No. 2, June 1987
Printed in Belgium

Irrationalité de certaines integrales hypergéométriques

M. HUTTNER

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, 59655, Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Communicated by M. Waldschmidt

Received April 10, 1986

Dans cet article nous appliquons la théorie des approximants de Padé à l'étude des approximations diophantiennes des intégrales hypergéométriques

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1/k \\ 1+1/k \end{matrix} \,\middle|\, \varepsilon x^k\right), $$

pour k entier $\geqslant 2$ et $\varepsilon = \pm 1$. En particulier, nous démontrons que pout tout $p \in \mathbf{Z}$ tout $q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$, on a:

$$ \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Log}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{p}{q} \right| > 10^{-6} q^{-7,13688} $$

et

$$ \left| \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \operatorname{Log} 3 - \frac{p}{q} \right| > 10^{-4} q^{-11,0401}. $$

Nous nous proposons dans ce qui suit de prouver l'irrationalité des intégrales

$$ \mathcal{J}^{(\varepsilon,k)}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{1 - \varepsilon t^k} $$

pour $\varepsilon = \pm 1$ et pour $x \in \mathbf{R}$, $0 < x < 1$ tel qu'il existe un entier $k > 0$ vérifiant $x^k \in \mathbf{Q}$.

Nous retrouvons des mesures de l'irrationalité connues pour Log 2 et $\pi/\sqrt{3}$ (voir, par exemple, [5 ou 6]) mais nous obtenons de nombreux résultats nouveaux,

$$ \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Log}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{p}{q} \right| > 10^{-6} q^{-7,13688}, $$

0022-314X/87 $3.00

$$\left|\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\operatorname{Log} 3\right)-\frac{p}{q}\right|>10^{-4} q^{-11,0401},$$

$$\left|\left(\operatorname{Log} 2+\operatorname{Arctg} \frac{3}{4}\right)-\frac{p}{q}\right|>10^{-4} q^{-3,84426},$$

pour tout $p \in \mathbf{Z}$ et tout $q \in \mathbf{Z}$, $q>0$.

I. Notations et Rappels

On note

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix} \middle| x\right)=\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n$$

la série hypergéométrique de Gauss avec

$$(a)_n=a(a+1)(a+2) \cdots(a+n-1) \qquad \text{si} \quad n \neq 0,$$
$$(a)_0=1.$$

Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où $a=1$.

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1, b\\ c\end{matrix} \middle| x\right)=\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(b)_n}{(c)_n} x^n$$

qui admet pour tout $x \in \mathbf{C}-[1,+\infty[$ un prolongement analytique que l'on peut écrire sous la forme

$${}_2\bar{F}_1\left(\begin{matrix}1, b\\ c\end{matrix} \middle| x\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}}{1-u x} d u$$

(pour plus de détails voir [7 ou 8].

Cette fonction qui satisfait à l'équation différentielle $x(1-x) y''+(c-b x) y'-b y=0$ mais aussi à l'équation différentielle du premier ordre $x(1-x) y'+(c-b x) y=c$ admet au voisinage de $x=0$ comme base de solution:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1, b\\ c\end{matrix} \middle| x\right)=y_1,$$

$$x^{1-c}{}_2F_1\left(\begin{matrix}2-c, b-c+1\\ 2-c\end{matrix} \middle| x\right)=x^{1-c}(1-x)^{c-b-1}=y_2.$$

Il est beaucoup plus intéressant de regarder les fonctions hypergéométriques non pas sur $\mathbf{C} - [1, +\infty[$ mais plutôt sur la surface de Riemann, revêtement universel de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$ (pour plus de détails voir [8]).

Un calcul évident montre que pour $0 < x < 1$ et $b = 1/k$, $c = 1 + 1/k$ on a:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, 1/k\\ 1+1/k\end{matrix}\,\middle|\, x^k\right) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{1-t^k} $$

et

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, 1/k\\ 1+1/k\end{matrix}\,\middle|\, -x^k\right) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{1+t^k}. $$

En particulier: **pour** $k = 2$,

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\, x^2\right) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2x}\operatorname{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right), $$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\, -x^2\right) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{x}\operatorname{Arctg} x; $$

pour $k = 3$,

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, \frac{1}{3}\\ \frac{4}{3}\end{matrix}\,\middle|\, -x^3\right) &= \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \\ &= \frac{1}{x}\left\{\operatorname{Log}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right) + \sqrt{3}\left(\operatorname{Arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}\right)\right\}; \end{aligned} $$

pour $k = 4$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, \frac{1}{4}\\ \frac{5}{4}\end{matrix}\,\middle|\, x^4\right) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{1-t^4} = \frac{1}{x}\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} + \frac{2}{x}\operatorname{Arctg} x. $$

Nous envisageons donc des résultats sur la fonction

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, 1/k\\ 1+1/k\end{matrix}\,\middle|\, x\right) $$

où $x \in \mathbf{C} - [1, \infty[$ dont nous montrerons l'irrationalité pour $x \in \mathbf{R}$, $0 < x < 1$, tel que $x^k \in \mathbf{Q}$ satisfait à certaines conditions arithmétiques (voir [9]).

Il n'est pas difficile d'avoir des résultats analogues pour

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, b\\ c\end{matrix}\,\middle|\, x\right), b \in \mathbf{Q}, \qquad c \in \mathbf{Q},\ b \notin \mathbf{Z},\ c \notin \mathbf{Z}. $$

I.1. THÉORÈME. *Soit $x \in \mathbf{R}$ et k entier, $k \geqslant 2$ tels que $0 < x < 1$ et $x^k \in \mathbf{Q}$; on posera $x^k = \alpha/\beta$ avec $(\alpha, \beta) = 1$. Soit $\varepsilon = \pm 1$. On définit $f(k) = k/\psi(k)$ $\sum_{(n,k)=1, 1 \leqslant n < k} 1/n$ où ψ est la fonction d'Euler, et*

$$\Delta(k) = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \mid k}} p^{1/(p-1)}$$

on suppose que x vérifie les conditions suivantes

(a) $(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta - \varepsilon\alpha})^2 \Delta(k) \exp(f(k)) < 1$

(b) $k \mid (\beta - \varepsilon\alpha)$.

Alors le nombre

$$_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1/k \\ 1 + 1/k \end{matrix} \middle| \varepsilon x^k \right)$$

est irrationnel et pour tout $\eta > 0$, il existe un entier positif $q(x, \eta, \varepsilon)$ tel que pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{Z}$, $q \geqslant q(x, \eta, \varepsilon)$, on ait

$$\left| {_2F_1}\left(\begin{matrix} 1, 1/k \\ 1 + 1/k \end{matrix} \middle| \varepsilon x^k \right) - \frac{p}{q} \right| > q^{-(X+\eta)}$$

avec

$$X = 1 - \frac{\operatorname{Log}((4\beta - 2\varepsilon\alpha)\,\Delta(k)) + f(k)}{\operatorname{Log}(|\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta - \varepsilon\alpha}|^2 \cdot \Delta(k)) + f(k)}.$$

Remarques. I.2. Si la condition (a) n'est plus vérifiée, on doit chercher un dénominateur δ de $(\beta - \alpha\varepsilon)/k$ c'est-à-dire $\delta \in \mathbf{N}^*$ tel que $\delta((\beta - \alpha\varepsilon)/k)$ soit entier. On obtient alors un théorème analogue si la condition (a) est remplacée par $(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta - \varepsilon\alpha})^2\, \Delta(k) \cdot \delta \exp f(k) < 1$. $\Delta(k)$ étant remplacé par $\delta \cdot \Delta(k)$ dans la formule donnant X.

I.3. Si k est pair et que $2k \mid (\alpha - \varepsilon\beta)$, on peut affaiblir la condition (a) qui devient $(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta - \varepsilon\alpha})^2 \exp f(k) \cdot \Delta(k) < 2$, $\Delta(k)$ étant remplacé par $\Delta(k)/2$ dans l'expression de X.

LEMME 1.1. *Approximant de Padé (n, n) pour $_2F_1\left(\begin{smallmatrix} 1, b \\ b+1 \end{smallmatrix} \middle| x\right)$. Pour $x \in \mathbf{C} - [1, +\infty[$ on a,*

$$P^{(n)}(x)\, {_2F_1}\left(\begin{matrix} 1, b \\ b+1 \end{matrix} \middle| x \right) - Q^{(n)}(x)$$

$$= -\frac{b \cdot \Gamma(b+n+1)\, n!}{\Gamma(b+2n+2)} x^{2n+1}\, {_2F_1}\left(\begin{matrix} n+1, b+n+1 \\ 2n+2+b \end{matrix} \middle| x \right)$$

où $P^{(n)}(x) = {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix}-n, -b-n\\ 1\end{smallmatrix}\middle| 1-x\right)$ *est un polynôme hypergéométrique de degré n. et*

$$Q^{(n)}(x) = \left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, -b-n\\ 1\end{matrix}\middle| 1-x\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, b\\ b+1\end{matrix}\middle| x\right)\right]_{(n)}$$

est un polynôme de degré n. Le crochet signifiant que l'on ne prend que les n premiers termes non nuls du développement en série.

Démonstration. Rappelons la relation de Padé ou de contiguité suivante (voir [10])

$$\begin{aligned}&{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, -b-n\\ -b-2n\end{matrix}\middle| x\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, b\\ b+1\end{matrix}\middle| x\right)\\ &\quad - \left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, -b-n\\ -b-2n\end{matrix}\middle| x\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, b\\ b+1\end{matrix}\middle| x\right)\right]_{(n)}\\ &\quad = \frac{-(b)_{n+1}^2\, n!^2}{(b+1)_{2n+1}\,(b)_{2n+1}}\, x^{2n+1}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}n+1, b+n+1\\ 2n+2+b\end{matrix}\middle| x\right).\end{aligned}$$

Nous allons simplifier cette relation en transformant le polynôme

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, -b-n\\ -b-2n\end{matrix}\middle| x\right).$$

Un calcul simple utilisant les propriétés du symbole de Riemann [8] ou des polynômes de Jacobi montre que

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, -b-n\\ -b-2n\end{matrix}\middle| x\right) = \frac{n!\,\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(b+2n+2)}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, -b-n\\ 1\end{matrix}\middle| 1-x\right),$$

la solution du lemme en résulte après simplifications (on aurait pu utiliser la relation

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, -b-n\\ -b-2n\end{matrix}\middle| x\right) = (-1)^n \frac{n!\,\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(b+2n+1)}\, x^n\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, 1+b+n\\ 1\end{matrix}\middle| 1-\frac{1}{x}\right)$$

ce qui donne une relation analogue). On posera

$$-\frac{b\Gamma(b+n+1)\,n!}{\Gamma(b+2n+2)}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}n+1, n+b+1\\ 2n+2+b\end{matrix}\middle| x\right) = R_{2n+1}(x).$$

LEMME 2. *Pour* $x \in \mathbf{C} - [1, +\infty[$ *on a*

$$|x^{2n+1} R_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{|x|}{|b|} \int_0^1 \frac{dt}{|1-tx|} \cdot |1 - \sqrt{1-x}|^{2n}.$$

Démonstration. On utilise les représentations intégrales pour la fonction hypergéométrique ${}_2F_1\left({n+1, b+n+1 \atop 2n+b+1} \,\middle|\, x\right)$ (voir [7, p. 293]). Après simplifications on trouve

$$x^{2n+1}R_{2n+1}(x)=\frac{x^{2n+1}}{b}\int_0^1\left(\frac{t(1-t)}{1-tx}\right)^n\frac{t^b}{1-tx}\,dt$$

d'où

$$|x^{2n+1}R_{2n+1}(x)|\leqslant\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{t(1-t)\,x^2}{1-tx}\right|\right)^n\frac{|x|}{|b|}\int_0^1\frac{dt}{|1-tx|}$$

d'où

$$|x^{2n+1}R_{2n+1}(x)|\leqslant\frac{|x|}{|b|}\int_0^1\frac{dt}{|1-tx|}\,|1-\sqrt{1-x}|^{2n}.$$

Lemme 3. *On a* $|P^{(n)}(x)|\leqslant 2^{n+1}\,|2-x|^n$.

Démonstration.

$${}_2F_1\left({-n, -b-n \atop 1}\,\middle|\,1-x\right)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-n)(-n+1)\ldots(-n+k-1)}{k!}\times\frac{(-b)-n)(-b-n+1)\ldots-b-n+k-1)}{k!}(1-x)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\,\frac{(b+n)(b+n-1)\ldots(b+n+1-k)}{k!}(1-x)^k.$$

Or si $0<b<1$,

$$\frac{(b+n)(b+n-1)\ldots(b+n+1-k)}{k!}\leqslant\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=C_k^{n+1}\leqslant 2^{n+1}$$

d'où

$$|P^{(n)}(x)|\leqslant 2^{n+1}\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(1-x)^k=2^{n+1}(1+(1-x))^n.\quad \text{C.Q.F.D.}$$

Lemma 4. *Posons* $d_n(k,l)=\operatorname{ppcm}\{km+l\mid 0\leqslant m\leqslant n\ \ (l,k)=1\}$. *Pour tout* $\eta>0$ *il existe un entier* $q(\eta)>0$ *tel que pour tout* $q\geqslant q(\eta)$ *on ait*

$$d_n(k,l)\leqslant\exp(f(k)+\eta)\,n$$

et

$$d_n(k,l) \leqslant (2{,}826)^{l(k)n}.$$

Démonstration. C'est le lemme 1 de [6] où on utilise l'estimation $\mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n) \leqslant (2{,}826)^n$.

LEMME 5. *On pose* $\tilde{\Delta}_k^n = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \mid k}} p^{[\frac{n}{p-1}]}$;

$$k^s \tilde{\Delta}_k^n \frac{(-1/k-n)_s}{s!} \in \mathbf{Z} \qquad 1 \leqslant s \leqslant n$$

c'est un lemme classique (voir, par exemple, [11, *Lemme* 3]).

LEMME 6. *On a*

$$D(x) = P^{(n)}(x)\, Q^{(n+1)}(x) - P^{(n+1)}(x)\, Q^{(n)}(x) = \rho_n x^{2n+1}$$

où $\rho_n \neq 0$.

Démonstration. $D(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant 2n+1$ mais on l'écrit sous forme de déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} P^{(n)}(x) & Q^{(n)}(x) \\ P^{(n+1)}(x) & Q^{(n+1)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P^{(n)}(x) & x^{2n+1} R_{2n+1}(x) \\ P^{(n+1)}(x) & x^{2n+3} R_{2n+3}(x) \end{vmatrix}$$

d'après le lemme 1 où on a posé

$$R_{2n+1}(x) = \frac{-b\Gamma(b+n+1)\, n!}{\Gamma(b+2n+2)}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} n+1, b+n+1 \\ 2n+2+b \end{matrix} \middle| \, x\right)$$

donc $D(x)$ est une série entière d'ordre $\geqslant 2n+1$ on en déduit que

$$\rho_n = P^{(n+1)}(0)\, \frac{b\Gamma(b+n+\ )\, n!}{\Gamma(b+2n+2)} \text{ et } P^{(n+1)}(0) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n-1, -b-n-1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \, 1\right)$$

d'où en utilisant la formule de Gauss [8],

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n-1, -b-n-1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \, 1\right) = \frac{\Gamma(b+2n+2)}{\Gamma(n+2)\,\Gamma(b+n+2)},$$

$$\rho_n = \frac{b}{(n+1)(b+n+1)}.$$

LEMME 7 (Alladi-Robinson, [6, lemme 4]). *Soit θ un nombre réel non* *nul. On suppose qu'il existe* $k_0 > 0$, $l_0 > \frac{1}{2}$, $Q > 1$, $E > 1$ *tels que pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *on puisse trouver* $p_n \in \mathbf{Z}$, $q_n \in \mathbf{Z}$ *vérifiant*

(1) $|q_n| < k_0 Q^n$

(2) $|q_n \theta - p_n| \leqslant l_0 E^{-n}$

(3) $p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbf{N}.$

Alors θ *est irrationnel et pour tout* $p \in \mathbf{Z}$, *et tout* $q \in \mathbf{N}^*$ *on a* $|\theta - p/q| > cq^{-X}$ *avec*

$$X = \frac{\operatorname{Log} QE}{\operatorname{Log} E}$$

et

$$c = \frac{1}{2k_0} Q^{-(2(\operatorname{Log} 2l_0 / \operatorname{Log} E))}.$$

Démonstration du théorème. On pose

$$q_n = \tilde{\Delta}_k^n d_n(k, 1)\, \beta^n \cdot P^n\left(\varepsilon \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$p_n = \tilde{\Delta}_k^n d_n(k, 1)\, \beta^n \cdot Q^{(n)}\left(\varepsilon \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$\theta = {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1/k \\ 1 + 1/k \end{matrix} \,\middle|\, \varepsilon \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$r_n = \beta^n \tilde{\Delta}_k^n d_n(k, 1)\, R_{2n+1}\left(\varepsilon \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Considérons

$$\begin{aligned} &{}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, -1/k - n \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, 1 - \varepsilon \frac{\alpha}{\beta}\right) \\ &= \sum_{s=0}^{s=n} C_n^s \frac{(1 + nk)(1 + (n-1)k) \cdots (1 + (n+1-s)k)}{s!} \left(\frac{\beta - \varepsilon\alpha}{k\beta}\right)^s \end{aligned}$$

d'où si $k \mid (\beta - \varepsilon\alpha)$ alors $\beta^n \Delta_k^n P^{(n)}(\varepsilon(\alpha/\beta))$ est un entier. Comme

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1/k \\ 1 + 1/k \end{matrix} \,\middle|\, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \sum_{s=0}^{s=+\infty} \frac{1}{1 + sk} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^s.$$

Si on prend les n premiers termes de la série alors

$$\beta^n \cdot \tilde{\Delta}_k^n d_n(k,1)\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1/k\\1+1/k\end{matrix}\,\middle|\,\varepsilon\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,-1/k-n\\1+1/k\end{matrix}\,\middle|\,1-\varepsilon\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]_{(n)}$$

est un entier.

D'après le lemme 2,

$$|q_n\theta-p_n|\leqslant k\left|\mathrm{Log}\left(\frac{\beta-\alpha\varepsilon}{\beta}\right)\right|\,|\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta-\alpha\varepsilon}|^{2n}\,d_n(k,1)\,\Delta_k^n$$

d'où en posant $E=(|\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta-\alpha\varepsilon}|^2\,(2,826)^{f(k)}\,\Delta_k)^{-1}$ (ou $(|\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta-\alpha\varepsilon}|^2\ \exp(f(k)+\eta)\,\Delta_k)$ si $q\geqslant q(\eta)$), $l_0=\sup(k\ |\mathrm{Log}|\ (\beta-\alpha\varepsilon)/\beta|,\frac{1}{2})$ alors $|q_n\theta-p_n|\leqslant l_0E^{-n}$,

$$|q_n|\leqslant 2((2,826)^{f(k)}\,2\cdot\Delta_k\,|2\beta-\alpha\varepsilon|)^n$$

d'après le lemme 3, d'où en posant $Q=((2,826)^{f(k)}\,2\cdot\Delta_k\,|2\beta-\varepsilon\alpha|)$

$$k_0=2$$

on en déduit le théorème en vérifiant la condition (3), ce qui est évident d'après le lemme 7.

II. Corollaires et applications numériques

II.1. *Prenons* $k=1$, $\varepsilon=1$. Comme ${}_2F_1({}^{1}{}_{2}{}^{1}\mid x)=-(1/x)\,\mathrm{Log}(1-x)$ nous retrouvons les résultats de [5, 6].

II.2. *Prenons* $k=2$.

Corollaire 1. *Pour* $x\in\mathbf{Q}$, $0<x<1$ *posons* $x=\alpha/\beta$. *Soit* δ *un dénominateur de* $(\beta-\varepsilon\alpha)/4$ $(\delta=1,2,$ *ou* $4)$. *On suppose que* $\delta\cdot(\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta-\varepsilon\alpha})^2\,e^2<1$ *alors* $f(x)=(1/\sqrt{x})\ \mathrm{Log}(1+\sqrt{x})/(1-\sqrt{x}))$ et $g(x)=(1/\sqrt{x})\,\mathrm{Arctg}\,\sqrt{x}$ *sont irrationnels d'exposant de mesure d'irrationalité*

$$X=1-\frac{\mathrm{Log}((4\beta-2\varepsilon\alpha)\,\delta)+1}{2\,\mathrm{Log}(|\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta-\varepsilon\alpha}|\,\delta)+1}$$

II.3. Exemples numériques. (1) Pour $x=\frac{1}{9}$ on retrouve une mesure d'irrationalité désormais classique pour Log 2: Pour tout $\eta > 0$, il existe $q(\eta)$ tel que pour tout $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{Z}$, $q > q(\eta)$ on ait

$$\left|\operatorname{Log} 2 - \frac{p}{q}\right| > q^{-4,622668633 + \eta}.$$

On obtient un résultat plus explicite par l'utilisation du lemme 7:

$$\left|\operatorname{Log} 2 - \frac{p}{q}\right| > 2 \cdot 10^{-4} q^{-4,870839} \qquad \text{(voir aussi [6, 13])}.$$

(2) Pour $x = \frac{1}{5}$ nous obtenons un résultat nouveau

$$\left|\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Log}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{p}{q}\right| > 10^{-6} q^{-7,1368890}$$

et aussi

$$\left|\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Log}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{p}{q}\right| > q^{-6,5117005 + \eta} \qquad \text{pour } q > q(\eta).$$

On peut remarquer que $(2/\sqrt{5}) \operatorname{Log}((1+\sqrt{5})/2)$ est le résidu de la fonction L du corps quadratique $Q(\sqrt{5})$.

(3) Pour $x = \frac{1}{8}$ on trouve

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log}\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}\right) - \frac{p}{q}\right| > q^{-493,202018 + \eta} \qquad \text{pour } q > q(\eta).$$

(4) Pour $x = 1/29 \cdot 13^2$,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{29}} \operatorname{Log}\left(\frac{1+13\sqrt{29}}{70}\right) - \frac{p}{q}\right| > 10^{-5} q^{-2,5323634}.$$

(5) Pour $x = \frac{1}{3}$ et $\varepsilon = -1$ nous retrouvons une mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ [5, 6],

$$\left|\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{p}{q}\right| > 10^{-4} q^{-9,4805039} \qquad \text{pour tout } p \in \mathbf{Z}, \text{ tout } q \in \mathbf{Z},\ q > 0$$

et

$$\left|\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{p}{q}\right| > q^{-8,318097094 + \eta} \qquad \text{pour } q > q(\eta).$$

(6) Pour $x = \frac{1}{7}$,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{p}{q}\right| > 10^{-4} q^{-5,14329123}.$$

II.4. *Prenons* $k = 3$, $\varepsilon = -1$,

$$\frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| -x^3\right).$$

COROLLAIRE 2. *Soit* $x \in \mathbf{Q}$, $0 < x < 1$; *on pose* $x = \alpha/\beta$. *Soit* δ *un dénominateur de* $(\beta+\alpha)/3$ $(\delta = 1$ *ou* $3)$. *On suppose que* x *vérifie la condition*

(a) $(\sqrt{\beta+\alpha} - \sqrt{\beta})^2 \delta \cdot \sqrt{3} \exp \frac{9}{4} < 1$.

Alors $\int_0^x dt/(1+t^3)$ *est irrationnel d'exposant de mesure d'irrationalité*

$$X = 1 - \frac{\operatorname{Log}((4\beta+2\alpha)\,\delta\sqrt{3}) + 9/4}{2(\operatorname{Log}(\sqrt{\beta+\alpha} - \sqrt{\beta})\,\delta\sqrt{3}) + 9/4}.$$

II.5. *Applications numériques.* Pour $x = \frac{1}{2}$ comme $3 \mid 2^3 + 1$ on a $\delta = 1$, et la condition (a) est vérifiée. On obtient un résultat intéressant qu'on peut rapprocher de celui de Siegel [2]

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{6}\left(\operatorname{Log} 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right);$$

on en déduit que pour tout $p \in \mathbf{Z}$, tout $q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$,

$$\left|\operatorname{Log} 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{p}{q}\right| > 10^{-3} q^{-11,040133}.$$

II.6. *Prenons* $k = 4$, $\varepsilon = 1$. En utilisant la remarque 1.3 du théorème, il n'est pas difficile d'énoncer un corollaire analogue aux précédents. Donnons plutôt des exemples numériques

(1) Pour $x = \frac{1}{3}$ on obtient

$$\left|\left(\operatorname{Log} 2 + \operatorname{Arctg} \frac{3}{4}\right) - \frac{p}{q}\right| > 10^{-4} q^{-3,84426142}.$$

(2) Pour $x = 1/\sqrt{3}$,

$$\left|\sqrt{3}\left(\operatorname{Log}(2+\sqrt{3}) + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{p}{q}\right| > 10^{-3} q^{-9,3377943}.$$

III. Amélioration des mesures de l'irrationalité

Dans le cas où $k \geqslant 3$, nous pouvons diminuer l'exposant X en utilisant un résultat de Chudnovski [12].

Pour cela il suffit de remarquer que les coefficients du polynôme $P^{(n)}(x)$ sont des produits de nombres en progression arithmétiques et sont analogues à ceux de l'étude de [12]. Comme $k \mid (\beta - \varepsilon\alpha)$, on peut alors remplacer l'exposant $\Delta(k) = \prod_{p \mid k} p^{1/(p-1)}$ du théorème par le nombre caractéristique $(1/k)\exp(chr)_k^2$ où

$$(chr)_k^2 = \frac{\pi}{\psi(k)} \sum_{\substack{j=1 \\ (j,k)=1}}^{j=[k/2]} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi j}{k}\right).$$

- Pour $k = 3$,

$$(chr)_3^2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

- Pour $k = 4$,

$$(chr)_4^2 = \frac{\pi}{4}.$$

On obtient, par exemple, que pour $q > q(\eta)$

$$\left|\left(\operatorname{Log} 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) - \frac{p}{q}\right| > q^{-4,806312319+\eta}.$$

Références

1. J. L. Lagrange, Sur l'usage des fractions continuées dans le calcul intégral, "1776—Oeuvres," Vol. IV, pp. 301–391, Gauthier-Villars, Paris.
2. C. Siegel, Transcendental numbers, Ann. of Math. Stud. Vol., Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1949.
3. A. Baker, "Transcendental Number Theory," Cambridge Univ. Press, London, 1979.
4. A. J. van der Poorten, On the arithmetic nature of definite integrals of rational functions, *Proc. Amer. Math. Soc* **29**, No. 3 (1971), 451–456.
5. G. V. Chudnovski, Approximations rationnelles des logarithmes des nombres rationnels, *C. R. Acad. Sci. Paris* **288** (1979), 607–609.
6. Alladi-Robinson, Legendre polynomials and irrationality, *J. Reine Angew. Math.* **318** (1980), 137–155.
7. E. T. Whittaker and G. N. Watson, "A Course of Modern Analysis," Cambridge Univ. Press, London, 1958.
8. Kampe de Feriet, La fonction hypergéométrique, *in* "Memorial des sciences mathématiques," Gauthiers Villars, Paris, 1937.

9. A. BAKER, Rational approximations to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers, *Quart J. Math.* **15** (1964), 376–383.
10. M. HUTTNER, Problème de Riemann et irrationalité d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques de Gauss, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **302** No. 17 (1986).
11. A. BAKER, Rational Approximations to certain algebraic numbers, *Proc. London Math. Soc (3)* **14** (1964), 385–398.
12. G. V. CHUDNOVSKI, On the method of Thue Siegel, *Ann. of Math.* **117** (1983), 325–382.
13. A. BAKER, Approximations to the logarithms of certain rational numbers, *Acta Arith.* **10** (1964), 315–323.

Printed by the St. Catherine Press Ltd., Tempelhof 41, Bruges, Belgium

PUB. IRMA - LILLE - 1987
Vol. 8 - n° VI

EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET APPROXIMATIONS RATIONNELLES DE ${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\ c\end{matrix}\middle| x\right)$: APPLICATIONS ARITHMETIQUES

par

M. HUTTNER

Résumé : On montre comment la théorie des équations différentielles Fuchsiennes donne la table de Padé complète pour la fonction hypergéométrique ${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\ c\end{matrix}\middle| x\right)$. Les singularités apparentes pour de telles équations sont liées aux approximants de "type Padé".

Nous donnons quelques applications à l'arithmétique.

Abstract : Using Fuch s theory of differential equations, we give the complete table of Padé for hypergeometric function ${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\ c\end{matrix}\middle| x\right)$.

Apparent singularities for such equations are linked to "type Padé" approximations. We give some applications to arithmetic.

CLASSIFICATION AMS : 41 A 21, 33 A 30, 33 A 20, 10 F 35.

KEYS WORDS : Padé Approximation - Simple hypergeometric functions - Differential equations in the complex domain - Irrationality and transcendance.

0. *INTRODUCTION ET RAPPELS*.

1. Introduction.

Nous allons montrer que la relation de Fuchs permet de donner sans trop de peine la table de Padé pour la fonction hypergéométrique ${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\c\end{matrix}\middle|x\right)$ et nous allons vérifier que la considération des singularités apparentes d'équation différentielles Fuchsiennes permet de retrouver des résultats de G.V. Chudonovski et G. Rhin concernant les approximations diophantiennes des constantes classiques de l'analyse [CHU1],[RM].

Nous proposons à ce sujet des conjectures concernant la fonction Eulerienne $B(\frac{1}{2},\frac{1}{r})$, r entier $r \geq 2$ ou la fonction

$$\psi(\tfrac{r+1}{2}) - \psi(\tfrac{r}{2}) \quad ; \qquad r \in \mathbb{Q}, \quad r \notin \mathbb{Z}$$

2. Rappels.

On note :

$$(0.1) \qquad {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle|x\right) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\, n!}\, x^n$$

la série hypergéométrique de Gauss où l'on a posé :

$$(0.2) \qquad (a)_n = a(a+1)\ldots.(a+n-1) \qquad \text{pour } n \neq 0 \ ; \quad (a)_o = 1$$

on sait que cette série est solution de l'équation différentielle :

$$(0.3) \qquad x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0$$

Equation différentielle Fuchsienne dont les points singuliers réguliers sont 0, 1, ∞.

I - Equations differentielles fuchsiennes et table de Padé pour la fonction hypergéométrique ${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\c\end{matrix}\middle|x\right)$.

L'algèbre linéaire nous fournit l'existence d'un triplet $P(x)$; $Q(x)$; $R(x)$ où P et Q sont des polynômes de degré au plus d_1 et d_2 et $R(x)$ est une fonction analytique en 0 tel que l'on ait :

1.1. $$P(x)\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\c\end{matrix}\middle|x\right) - Q(x) = x^{d_1+d_2+1}\ R(x).$$

L'unicité de la solution pour un tel problème va resulter de considérations sur l'équation différentielle vérifiée par ${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\c\end{matrix}\middle|x\right)$.

Ce problème a été effectivement résolu par Padé [PA] qui a d'abord déterminé explicitement les deux polynômes et a ensuite trouvé le reste : $x^{d_1+d_2+1}R(x)$ en remarquant que celui-ci vérifie la même équation différentielle que $P(x)$, voir aussi [CO].

Nous allons retrouver ce résultat par une démarche, dont l'idée de base se trouve déjà dans les oeuvres de Riemann [Rie] .

On considère $R(x)$ comme fonction "multiforme". De manière précise nous définissons ${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\c\end{matrix}\middle|x\right)$ et donc $R(x)$ non seulement sur un voisinage de 0 mais sur la surface de Riemann S, revêtement universel de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})-\{0,1,\infty\} = Z$.

Le groupe de monodromie associée à ${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\c\end{matrix}\middle|x\right)$ est le même que celui associé à $R(x)$ et on en déduit avec $R(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux dont les points singuliers réguliers sont $0,1,\infty$.

On posera

$$\sigma = d_1+d_2+1.$$

Théorème :

On suppose que $d_2 \geq d_1-1$ alors :

$$P(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -d_1,-d_2-b \\ 1-d_1-d_2-c \end{matrix}\middle| x\right)$$

$$Q(x) = [P(x)\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1,b \\ c \end{matrix}\middle| x\right)]_{(d_2)}$$

la notation $[\ \ ]_{d_2}$ signifiant que l'on ne prend que les d_2 premiers termes du développement en série

$$R(x) = C(d_1,d_2)\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} d_1+1,\ d_2+1+b \\ d_1+d_2+1+c \end{matrix}\middle| x\right)$$

où

$$C(d_1,d_2) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(d_1+1)\Gamma(d_2+1+b)\Gamma(d_2+c)\Gamma(c-b+d_1)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(d_1+d_2+1+c)\Gamma(d_1+d_2+c)}$$

Démonstration : Au voisinage de 0 l'existence même d'une solution au problème qui nous est connue par l'algèbre linéaire nous donne comme couple d'exposants $(0,\ 1-c-\sigma) \bmod \mathbb{N}^2$.

($\bmod \mathbb{N}^2$ voulant dire que ce couple est défini à (k_1,k_2) près où $k_1 \in \mathbb{N}$; $k_2 \in \mathbb{N}$).

Par un prolongement analytique au voisinage de l'∞ on trouve

$$(\inf(\sigma-d_1+1,\sigma-d_2),b-\sigma-d_1) \bmod \mathbb{N}^2.$$

De même en 1

$$(0,c-b-1) \bmod \mathbb{N}^2.$$

la relation de Fuchs [In] s'écrivant :

$$(I.1) \qquad \sum_{\alpha\in\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} \Big(\sum_{r=1}^{1=m} \varepsilon_i^\alpha - (i-1) \Big) = -m(m-1)$$

Pour $m = 2$, nous obtenons en simplifiant et en posant A l'ensemble des singularités apparentes de l'équation différentielle.

$$\sum_{\alpha\in\{0,1,\infty\}} \varepsilon_i^\alpha + \sum_{\alpha\in A} (\varepsilon_i^\alpha - 1) = 1$$

on pose alors :

$$a = \sum_{\alpha\in A} (\varepsilon_i^\alpha - 1)$$

Comme $\sum_{\alpha\in A} \varepsilon_i^\alpha \geq 2$ on en déduit que I.1 s'écrit alors

$$a - d_1 + \inf(\sigma - d_1 + \sigma - d_2) + \Lambda = 1$$

où $\Lambda \geq 0$ est un entier qui provient de la détermination mod $\mathbb{N}^2$. Si $\sigma - d_1 + 1 < \sigma - d_2$ ou $d_2 < d_1 - 1$ on aboutit à $\Lambda = a = 0$ et $\sigma = d_1 + d_2$ ce qui est impossible par hypothèse.

<u>On a donc</u> $d_2 \geq d_1 - 1$ et $a = K = 0$; $\sigma = d_1 + d_2 + 1$. Les exposants de R sont alors déterminés de manière canonique et le symbole de Riemann [HU,I] associé à $R(x)$ est :

$$P\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \sigma - d_2 & 0 & x \\ 1-\sigma-c & \sigma+b-d_1 & c-b-1 & \end{array}\right)$$

A une constante multiplication près on trouve alors que

$$R(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} d_1+1, d_2+1+b \\ d_1+d_2+1+c \end{matrix}\Big| x\right)$$

Ecrivons alors l'égalité obtenue

$$\text{(I.2)} \qquad P(x)\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1,b \\ c \end{matrix}\Big| x\right) - Q(x) = x^{d_1+d_2+1}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} d_1+1, d_2+1+b \\ \sigma+c \end{matrix}\Big| x\right)$$

On transforme I.2 par monodromie [HU I] autour du point singulier "1". En utilisant alors la matrice de monodromie en ce point, I.2 se transforme en :

$$P(x)\left\{ {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1,b \\ c \end{matrix}\Big| x\right) - \{i\pi \exp(c-1-b)\pi \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}\ x^{-c}(1-x)^{c-b-1}\right\}$$

$$- Q(x) = x^{\sigma}\left\{ {}_2F_1\left(\begin{matrix} d_1+1, d_2+1+b \\ \sigma+c \end{matrix}\Big| x\right) - x^{-c+1-\sigma}(-2i\pi \exp(c-1-b)\pi.K\right.$$

$$\left. {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-d_2-c, 1-d_1-c-b \\ 2-\sigma-c \end{matrix}\Big| x\right)\right)\Bigg\}$$

où

$$K = \frac{\Gamma(\sigma+c)\Gamma(\sigma+c-1)}{\Gamma(d_2+c)\Gamma(c-b+d_1)\Gamma(d_1+1)\Gamma(d_2+1+b)}$$

Par soustraction on obtient

$$P(x) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \cdot K(1-x)^{b-c+1}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-d_2-c,\ 1-d_1+b-c \\ 2-\sigma+c \end{matrix}\Big| x\right)$$

En utilisant la formule de Kummer [K.F],

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = (1-x)^{a+b-c}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right)
$$

on en déduit le théorème.

Conséquences arithmétiques

Le cas $d_1 = d_2 = n$ ou $d_1 = n$, $d_2 = n+1$ est bien connu et permet de retrouver en particularisant les paramètres b et c de nombreux résultats d'irrationalité voir ([Chu 2, [AL.RO], [Ba], [Hu]). La formule intégrale :

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix} d_1+1, d_2+1+b \\ d_1+d_2+1+c \end{matrix} \middle| x\right) = \frac{\Gamma(d_1+d_2+1+c)}{\Gamma(d_1+1+b)\ (d_2+c-b)} \int_0^1 \frac{u^{d_1+b}(1-u)^{d_1+c-b}}{(1-ux)^{d_1+1}}\, du
$$

permet de donner une estimation asymptotique du reste.

Malheureusement on vérifie que c'est pour le développement en fraction continue que les "Q/P" convergent le mieux vers ${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$.

Pour espérer de meilleurs résultats nous devons donc prendre des approximants qui ne seront donc plus de Padé.

II - Améliorations de l'approximation. Approximation de "type Padé"

Posons $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_t\}$ avec $\alpha_0 = 0$ et supposons que $\alpha_i \notin \{1, \infty\}$ pour $1 \leq i \leq t$. On impose en outre à R de vérifier la condition suivante :

(C)
$$
\sum_{\alpha \in S} \mathrm{ord}_\alpha R \geq 2n+1.
$$

Dans la suite on notera : $\sigma = 2n+1$.

L'algèbre linéaire nous montre l'existence de 2 polynômes P et Q de degrés n vérifiant la relation suivante :

$$(P) \qquad P(x)\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\ c\end{matrix}\,\middle|\, x\right) - Q(x) = R(x)$$

un tel triplet est appelé "Approximant de type Padé". Nous poserons

$$\tilde{R}(x) = x^{-k_0} \prod_{i=1}^{i=t} (x-\alpha_i)^{-k_i}\ R(x).$$

$\tilde{R}(x)$ n'admet que $0,1,\infty$ comme singularités régulières et $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_t$ sont donc des singularités apparentes de l'équation linéaire Fuchsienne d'ordre deux dont $\tilde{R}$ est solution.

On peut comme précédemment calculer les ordres des singularités de $\tilde{R}$. On trouve

$$\begin{array}{ll} \text{En } 0 : & (0,-k_0+1-c) \bmod \mathbb{N}^2 \\ \text{En } 1 : & (0,c-b-1) \quad " \quad " \\ \text{En } 1'\infty : & (\sigma-n,b+\sigma-n) \quad " \quad " \end{array}$$

Comme on sait que $\tilde{R}$ existe et est holomorphe en α_i, on trouve d'abord une première détermination holomorphe. En tournant par exemple autour de 0 et en revenant au voisinage de α_i l'autre détermination est alors d'ordre $-k_i$ au moins, d'où

$$\text{En } \alpha_i : (0,-k_i) \bmod \mathbb{N}^2$$

La relation de Fuchs s'écrit alors sous forme d'inégalité

$$2n+2 - \sum_{i=1}^{i=t} (k_i+1) \geq 1$$

Nous supposerons que $2n+1 = k_0 + \sum_{i=1}^{i=t} (k_i+1)$. On peut alors déterminer de manière précise une équation différentielle du 2ème ordre dont $\tilde{R}$ soit solution :

$$(E') \quad y'' + \left\{\frac{k_0+c}{x} + \frac{2+b-c}{x-1} + \sum_{i=1}^{i=t} \frac{1+k_i}{x-\alpha_i}\right\} y' + $$
$$+ \frac{(n+1)(b+n+1)x^t+\rho_1 x^{t-1}+\rho_1 x^{t-1}+\dots\ p_t}{x(x-1)\prod_{1\leq i\leq t}(x-\alpha_i)^{k_i}}\, y = 0$$

où les ρ_i sont appelés paramètres accessoires.

En général la connaissance des ordres des singularités en ces points est insuffisante pour déterminer complètement l'équation, mais dans ce cas particulier on sait que les α_i sont des singularités apparentes dont les ordres sont $(0,-k_i)$. On utilise alors une méthode classique qui permet de déterminer les ρ_i cf. [IN].

Reste à déterminer α_i, $1 \leq i \leq t$. Remarquons d'abord que nous devons pouvoir appliquer le raisonnement de monodromie précédent ce qui impose des conditions sur la dépendance des solutions $y(\alpha_1,\alpha_2,\dots,x)$ en fonction des α_i. Celles-ci sont alors sur une variété intégrable, solution d'équations aux dérivées partielles, les équations de Schlesinger [MP].

Comme pour l'équation hypergéométrique, on peut écrire les solutions de E' sous forme intégrale de type d'Euler.

Par exemple au voisinage de 0 on peut écrire

$$\tilde{R}(x) = \int_0^1 u^b(1-u)^{c-b-1}\, H(u)\left[\frac{u(1-u)}{1-ux}\right]^{n+1} du$$

où $H(u)$ est un polynôme dont les racines sont les α_i, $1 \leq i \leq t$, avec pour multiplicité k_i.

Une telle forme intégrale est la généralisation de Picard de l'intégrale hypergéométrique adaptée à notre problème.

En effet, si on pose :

$$F(\alpha_1,\alpha_2..\alpha_t,x) = \int_1^\infty u^{-\mu_o}(u-1)^{-\mu_1}(u-x)^{-\mu_{t+1}} \prod_{i=2}^{i=t} (u-\alpha_i)^{-\mu_i} \quad du$$

μ_∞ est l'ordre du pole pour la fonction sous le signe intégral , les μ_i vérifiant $\sum \mu_i = 2$.

Si on fixe ls variables $\alpha_1,\alpha_2,..\alpha_t$ on obtient la fonction obtenue par Pochhammer.

On peut comme pour la fonction hypergéométrique caractériser ses solutions comme fonctions multiformes ayant exactement $t+2$ déterminations en des points de ramifications dont les ordres sont donnés.

En chaque point de ramification il y a $t+1$ déterminations holomorphes la $t+2^{\text{ème}}$ étant "multiforme". Ce résultat subsiste en $l'\infty$ après multiplication de G par un exposant convenable de x.

Pour des valeurs des μ_i où $\mu_i \in N$, l'ordre de l'équation différentielle est diminuée de 1 et donc si tous les μ_i, $1 \leq i \leq t$ sont tels que $-\mu_i \in N$, l'équation différentielle est d'ordre deux.

III - Applications arithmétiques

Considérons donc l'intégrale suivante considérée par G. Rhin [RH]

$$I_n = \int_0^1 \frac{H_n(d-dxt)t^b(1-t)^{c-b}}{(1-tx)^{n+1}} \, dt$$

où $H_n(t)$ est un polynôme à coefficients entiers de degré $\leq [\delta n]$ où $\delta \geq 1$ $H_n(t)$ appartient à l'idéal $((t,\Delta)\, Z[t])^n$ avec $\Delta = \text{ppcm}\,(ed,d-dx)$, d étant choisi tel que $dx \in Z$ et e est un entier fonction de b et c.

Par exemple si $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{2}$

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{-1/2} H_n(d-dxt)dt}{d^n(1-tx)^{n+1}}$$

Δ = ppcm (4d, d-dx) ; $\delta = 3/2$. C'est-à-dire que

$$H_n(t) = \sum_{j=0}^{\delta=n} b_j \,\Delta^{n-j}\, t^j + \sum_{j=n+1}^{j=[3/2\, n]} b_j\, t^j, \qquad b_j \in \mathbb{Z}$$

Remarque. Il est facile de voir pourquoi une telle intégrale est la transformée par isomonodromie de ${}_2F_1\left(\begin{matrix} n+1, n+1+b \\ 2n+1+c \end{matrix} \middle| x\right)$ ou ce qui revient au même de $\int_0^1 \frac{t^b(1-t)^{c-b}}{1-tx}\, dt$.

En effet :

$$I_n = \sum_{j=0}^{j=n} b_j \left(\frac{\Delta}{d}\right)^{n-j} \int_0^1 \frac{t^b(1-t)^{c-b-1}}{(1-xt)^{n+1-j}}\, dt + \sum_{j=n+1}^{\delta=[\delta n]} b_j d^{j-n} \int_0^1 (1-xt)^{j-(n+1)} t^b (1-t)^{c-b-1} dt$$

$$= A(x) + B(x)$$

où $B(x)$ est un polynôme et $A(x)$ s'écrit $A_1(x)\; {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) + B_1(x)$, $A_1(x)$ et $B_1(x)$ étant des fonctions rationnelles.

On écrit que :

$$\int_0^1 \frac{t^b(1-t)^{c-b-1}}{(1-xt)^{n+1-j}}\, dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}\; {}_2F_1\left(\begin{matrix} n+1-j, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$$

par un raisonnement analogue à celui du théorème on détermine alors explicitement $A_1(x)$ et $B_1(x)$.

Application numérique [RH]

Pour $x = \frac{1}{3}$, $\Delta = 2$ et

$$H_n(3-t) = 144[2t(1-t)]^{[0,5n]}(5t-3)^{[0,5n]}$$

on remarque que

$$2t(1-t) = [2(t-3)+6][-2-(t-3)] \quad \text{appartient à l'idéal} \quad (t-3,12)$$

et $5t-3 = 5(t-2)+12$ [RH].

On trouve alors que $\theta = \sqrt{3}\log(2+\sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ il existe $q_o \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q \geq q_o(\varepsilon)$

$$\left|\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3}) - \frac{p}{q}\right| > q^{-17,2078896..+\varepsilon}$$

Conjectures.

Si on appelle $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{s})$, la fonction eulerienne de 1ère espace, s entier, $s \geq 2$, nous pouvons conjecturer qu'un bon choix de H_n peut permettre de démontrer l'irrationalité de $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{s})$.

En effet, ${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1,2b \\ 1+b \end{matrix} \Big| 1/2\right) = b\, B(\frac{1}{2}, b)$ pour $b \notin \mathbb{Z}$, on peut alors montrer que

$$\left|B(\tfrac{1}{2}, b) - \frac{p}{q}\right| > q^{-c(b)+\varepsilon}$$

On a déjà vérifié ce résultat pour $b = \frac{1}{2}$, $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \Pi$ et $|\Pi - \frac{p}{q}| > q^{-23,918..+\varepsilon}$ [R.H].

On peut également envisager des résultats sur

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1,b \\ b+1 \end{matrix} \Big| -1\right) = 2b\{\psi(\tfrac{b+1}{2}) - \psi(\tfrac{b}{2})\} \quad ; \quad b \notin \mathbb{Z}$$

pour $b = 1/3$ ceci donnerait une mesure d'irrationalité pour l'intégrale étudiée par Siegel [Sie]

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3}(\Pi/\sqrt{3} + \text{Log } 2).$$

La théorie des approximants de Padé étant suffisante pour démontrer l'irrationalité de

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}\left(\frac{\Pi}{\sqrt{3}} + \text{Log } 3\right). \quad [\text{M.H.2}].$$

Les nombres en question étant bien sûr connus comme transcendants, on en doit la démonstration à Schneider pour la fonction Beta. La valeur de ${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1,b \\ b+1 \end{matrix} \middle| -1\right)$ résultant de la théorie de Baker des formes linéaires de logarithmes [WAL].

Ces nombres sont en général "normaux" mais il serait souhaitable d'avoir une mesure d'irrationalité plus petite.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[INC] INCE E ordinary differential Equations. Dover

[CHU1] CHUDNOVSKI GV et DV. Lecture notes in Math n°1052, number theory - New York 1982, Springer Verlag.

[RH] RHIN G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité - Séminaire D.P.P. 1986, à paraître.

[RIE] RIEMANN. Oeuvres mathématiques. A. Blanchard, Paris.

[HU1] HUTTNER M. Problème de Riemann et Irrationalité d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques de Gauss.- C.R.A.S. Paris, t. 302, Série I n°17 1986.

[AL RO] Legendre polynomials and Irrationality. Y. Reine Angew Math 318, 1980, p. 137-155.

[CHU2] CHUDNOVSKI GV. On the method of thue Siegel - Annals of Maths 117, 1983 pp. 325-382.

[BA] BAKER A. Rational approximants do $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers - Quart J. Math. 15 (1964), p. 376-383.

[HU2] HUTTNER M. Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques. Publications Mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie. Problèmes diophantiens n°79, 1985-86. A paraître dans "Journal of Number Theory".

[Co] COHEN H. Acceleration de la convergence de certaines recurrences linéaires. Séminaire de théorie des nombres 6-13 novembre 1980 - Grenoble.

[SIE] SIEGEL. Transcendantal numbers. Annals of Mathematical studies - Princeton 1949.

[M.P] Mathématiques et Physique : séminaire de l'Ecole Normale Supérieure 1979-1982, L. Boutet de Mouvel, A. Douady, J.L. Verdier Birkhaüser

[WAL] WALDSCHMIDT M. Nombres transcendants et groupes algébriques. Astérisque 69-70 - 1979 - Société Mathématique de France.

[PA] PADE H. Oeuvres par Claude Brézinski - Libraire A. Blanchard Paris.

[KF] KAMPE DE FERIET. La fonction hypergéométrique in "Memorial des sciences mathématiques" Gauthiers-Villars - Paris 1987.

PUB. IRMA - LILLE - 1987
Vol. 10 - n°III

MONODROMIE ET APPROXIMATION DIOPHANTIENNE DES FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES

par
M. Huttner

Résumé : Utilisant le principe de Monodromie nous obtenons des formules explicites pour les approximants de Padé de type I pour des familles de fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur et nous en déduisons des applications à l'arithmétique.

En particulier pour $w \in \mathbb{Q}^*$ assez petit nous obtenons des résultats d'approximation diophantienne concernant la racine réelle équivalente à w de l'équation trinôme $X^{p+1}-X+w = 0$, et améliorons dans ce cas, de manière effective l'exposant de Liouville.

MONODROMY AND DIOPHANTINE APPROXIMATION FOR HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

Abstract : We use Monodromy principle and obtain an explicit construction for Padé Approximation of type I for families of contiguous hypergeometric functions and we give some applications in arithmetic.

In particular for $w \in \mathbb{Q}^*$ small enough we obtain results for Diophantine approximations linked with the real root $\sim w$ of trinomial equation : $X^{p+1}-X+w = 0$, and an effective amelioration for the Liouville bound.

MOTS CLES : Théorie des nombres, Approximations diophantiennes, approximations de Padé, Equations différentielles dans le champs complexe.

CLASSIFICATION AMS : 10 F 05, 10 F 25, 10 F 35, 33 A 30, 33 A 65, 33 A 20, 65 D 15, 65 D 20.

INTRODUCTION.

Soit S un ensemble fini de nombres complexes et $f_1,f_2,\dots,f_n$ n fonctions analytiques au voisiange des points de S.

L'algèbre linéaire nous apprend l'existence de polynômes $P_1,P_2,\dots,P_n$ de degrés au plus d_1,d_2 d_n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et non tous nuls tels que les ordres aux points de S de la fonction :

0.1. $$R(x) = \sum_{k=1}^{k=n} P_k(x)\ f_k(x)$$

vérifient la relation :

0.2. $$\sum_{\beta\varepsilon S} \mathrm{Ord}_\beta\ R \geqslant \sum_{k=1}^{k=n} d_k + n-1$$

Dans le cas où S est réduit à un point, on dit que le $n+1$ uplet $(P_1,P_2\dots P_n,R)$ est un approximant de Padé de type I au point considéré pour le système de fonctions $f_1,f_2,\dots,f_n$.

La fonction R désignant le "reste" de l'approximant de Padé et le cas $n=2$ redonnant la définition usuelle de ces approximants.

Les majorations du terme de gauche de 0.2 permettent d'obtenir de nombreux résultats de transcendance concernant les E fonctions (Siegel [1]) et d'irrationalité ou d'indépendance linéaire pour les G fonctions (Bombieri [2]).

Toutes ces fonctions sont solutions de systèmes ou d'équations différentielles linéaires dont la nature et le nombre de points singuliers jouent

un rôle essentiel dans la détermination explicite du reste $R(x)$ et des polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
On peut citer à ce sujet les travaux de G.V. Chudnovski [3] dans le cas où les points singuliers du système différentiel sont réguliers et la généralisation de D. Bertrand et F. Beukers [4] dans le cas où apparaissent des singularités irrégulières.

Seul C.V. Chudnovski donne dans [5] un exemple explicite avec un système "contigu" de fonctions hypergéométriques.

On peut signaler qu'il s'agit là des seules fonctions, mises à part celles de Jordan-Pochhammer où l'on peut tester la méthode. Ceci est dû au fait que l'on peut déterminer complètement le groupe de monodromie associé à une telle équation différentielle.

Nous nous proposons dans cet article d'étudier dans le cas des fonctions hypergéométriques contigues, les formes linéaires 0.1 vérifiant la relation 0.2 et d'en déduire des résultats d'approximations diophantiennes.

Dans la première partie nous montrons comment la relation de Fuchs permet de donner exactement $\mathrm{ord}_o R$ et de retrouver l'expression de R donnée dans [5] et [20]. Ceci généralise le calcul des réduites de la fraction de Gauss donnée par Heine [14]. Voir aussi [16].

Dans la deuxième partie nous compléterons l'étude de [20] en donnant explicitement une famille de polynômes vérifiant (0,1) et ceci en utilisant le principe de monodromie.

Enfin la dernière partie utilise ces préliminaires analytiques pour l'étude de l'indépendance linéaire des valeurs en $x \in \mathbb{Q}^*$ assez petit de fonctions hypergéométriques contigues et $\mathbb{C}[x]$ linéairement indépendantes.

Nous ne donnerons des résultats que dans le cas où il s'agit de G fonctions. D'autres peuvent s'obtenir pour les E fonctions en utilisant dans ce cas précis le principe de confluence.

Ceci nous donne de nombreux résultats nouveaux et permet de démontrer le théorème suivant :

Théorème.- Soient $f_o, f_1, \ldots, f_p$ des fonctions hypergéométriques linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}(x)$, contigues et à points singuliers réguliers soit $r = a/b$, a et b étant des entiers rationnels tels que $|b| > c_1 \; |a|^{p+1}$. $c_1 = c_1(p_1, f_o, \ldots, f_p)$ étant une constante explicitement calculable en fonction de p et des paramètres de $f_o, f_1, \ldots, f_p$.
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante effective $c_2(p, f_o, f_1, \ldots, f_p, \varepsilon) > 0$ telle que la propriété suivante soit vérifiée.

Soient $H_o, H_1, \ldots, H_p$ des entiers rationnels et $H = \max |H_k|$, $0 \leq k \leq p$. Alors on a :

$$\left| \sum_{k=0}^{k=p} H_k \; f_k(r) \right| > H^{-(\mu+\varepsilon)}$$

où on a posé $\mu = p.(\mathrm{Log}\; k_1 |b| \; / \; \mathrm{Log}(k_2 |b| / |a|^{p+1})$. k_1 et k_2 sont des constantes dépendant de p ,$f_o, \ldots f_p$.

Pourvu que $\sum_{k=0}^{k=p} H_k f_k(r) \neq 0$ (des points $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\sum_{k=0}^{h=p} H_k f_k(r) = 0$, sont dits exceptionnels. Ils sont finis et effectivement calculables), $H \geq c_2$ et $|b| > b_o$ $(f_o, f_1 \ldots f_p, \varepsilon)$ effective.

Corollaire 1. Soit pour $p \geq 2$, E_{p+1} l'équation trinome $X^{p+1} - X + r = 0$. Avec $r \in \mathbb{Q}^*$ et soit $\theta(r)$ la racine réelle vérifiant $\theta(r) \sim r$ quand $r \to 0$.

Alors le théorème vaut pour la famille $1, \theta(r), \theta^2(r) \ldots, \theta^p(r)$. La mesure d'indépendance linéaire étant en quelque sorte la meilleure possible. La démonstration du théorème permet de démontrer le corollaire suivant :

Corollaire 2. Soit $r = a/b$ vérifiant une condition du type $|b| > c_4(p).|a|^{1+1/p}$ où $c_4(p)$ est explicite. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Q_o(\varepsilon, r) > 0$, telle que pour tout $P \in \mathbb{Z}$, tout $Q \in \mathbb{Z}$ avec $|Q| > Q_o(\varepsilon, r)$ on ait :

$$|\theta(r) - P/Q| > Q^{-(m+\varepsilon)}$$

avec $m = m(\varepsilon, r)$ vérifiant $p < m < p+1$.

On obtient donc une amélioration effective pour les racines des équations trinomes de l'exposant de Liouville . Voir [28].

Toutes les constantes seront précisées dans la suite de l'article.

I. *Notations et rappels.*

I.1. La fonction hypergéométrique

Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ nous noterons :

1.1. $${}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \dots a_{p+1} \\ & & \\ b_1 & b_2 \dots b_{p+1} \end{matrix} \Big| x\right) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_{p+1})_k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_p)_k \ k!} x^k$$

où par convention $b_{p+1} = 1$ et où on suppose que si $1 \leq k \leq p$: $b_k \notin \mathbb{Z}$.
Cette série est appelée série hypergéométrique. Si on pose $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2 \dots a_{p+1})$; $\underset{\sim}{b} = (b_1, b_2 \dots b_{p+1})$ on la notera aussi :

1.2. $${}_{p+1}F_p(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, x)$$

On sait que pour $|x| < 1$ cette série est une fonction holomorphe solution de l'équation différentielle :

1.3. $$\theta(\theta+b_1-1)(\theta+b_2-1)\dots\dots(\theta+b_p-1) - (\theta+a_1)(\theta+a_2)\dots(\theta+a_{p+1}) = 0$$

avec $\theta = x \dfrac{\partial}{\partial x}$.

On a également posé :

1.4. $$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) \quad \text{si} \quad n \geq 1 \quad ; \quad (a)_o = 1$$

Le cas $p = 1$ est bien connu, la série hypergéométrique étant solution de l'équation :

1.5. $$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0$$

avec $a_1 = a$; $a_2 = b$; $b_1 = c$.
Les équations différentielles 1.3 et 1.5 sont du type de Fuchs à points singuliers réguliers $0,1,\infty$.

I.2. Rappels sur la monodromie

Soit $L(w) = a_o(x)\, w^{(n)} + a_1(x)w^{(n+1)} + \ldots + a_n(x)w = 0$ (E)

une équation différentielle linéaire Fuchsienne définie sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

On sait alors que les coefficients $a_j(x)$ sont des fonctions rationnelles et les singularités $b_1,b_2,\ldots,b_{t+1}$ de L sont toutes des points singuliers réguliers.

Nous poserons $Z = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{b_1,b_2,\ldots,b_{t+1}\}$ avec $b_1 = 0$; $b_2 = 1$; $b_{t+1} = \infty$.

Nous pouvons choisir un point $x = x_o$ de Z (point de base) et nous obtenons ainsi le groupe fondamental $\Pi_1(Z,x_o)$ qui est un groupe libre de rang t.

On va supposer que $t \geq 2$. On peut appliquer le théorème d'uniformisation pour identifier le revêtement universel de Z noté S avec le demi plan supérieur N.

Soit $w(x-x_o)$ un vecteur colonne dont les composantes $w_j(x-x_o)$: $1 \leq j \leq n$ forment une base de l'espace des solutions de (E) dans le voisinage de $x = x_o$. Par un prolongement analytique de $w(x-x_o)$ jusqu'au point $x = x_1$ suivant un chemin $\gamma \in Z$, nous définissons un vecteur $w(x-x_1)$ dont les composantes définissent une base de solution de (E) au voisinage de $x = x_1$.

Du classique théorème de monodromie on en déduit que $w(x-x_1,\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ notée $[\gamma]$.

Ainsi un prolongement analytique le long d'un cycle de Z dont un représentant est γ, transforme le vecteur $w(x-x_o)$ en le vecteur $w(x-x_o,\gamma)$.

$w(x-x_o)$ et $w(x-x_o,\gamma)$ étant solutions de l'équation (E) on en déduit l'existence de $m(\gamma) \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$w(x-x_o,\gamma) = m(\gamma)\, w(x-x_o)$$

une telle matrice est appelée matrice de monodromie de (E).

Comme elle ne dépend pas de la classe d'homotopie $[\gamma]$ de γ on peut définir une application de :

$$\Pi_1(Z,x_o) \to GL_n(\mathbb{C})$$

dont l'image notée M est appelée groupe de monodromie de (E).
Celui-ci n'est défini qu'à conjugaison près dans $GL_n(\mathbb{C})$ (En raison même du choix arbitraire des points de base et de la base des solutions de (E) en $x = x_o$).

I.3. Fonctions contigues

Des vecteurs $w_i(x)$ ayant mêmes singularités régulières b_k $1 \leq k \leq t+1$ et mêmes matrices de monodromie sont dites contigues.

On peut lire sur les racines des équations indicielles de w_i en b_k si elles sont contigues : il suffit qu'en chaque point les exposants locaux (racines de ces équations) diffèrent par des entiers rationnels. La construction des approximants de Padé de type I est essentiellement basée sur le théorème suivant :

Théorème de Riemann. Soient $F = \{w_1,w_2,\dots,w_n\}$ une famille de n fonctions contigues et $C[x]$ linéairement indépendantes. Soit $w_{n+1} \notin F$ et contigue à l'une des fonctions w_i. Alors la famille $\{w_1,w_2,\dots,w_1,w_{n+1}\}$ est $C[x]$ linéairement dépendante.

I.4. Equations réductibles.

Soit L un opérateur différentiel linéaire à coefficients dans $C(x)$. On dit que L est réductible s'il existe des opérateurs différentiels linéaires d'ordre inférieurs à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$ tels que $L = L_1 \circ L_2$.

Si L n'est pas réductible, on dit qu'il est irréductible.

II. *Détermination effective de l'approximation de Padé de type I pour un système particulier de fonctions hypergéométriques contigues*.

Posons $f_o(x) = {}_{p+1}F_p(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},x)$ et pour $1 \leq k \leq p$

$$\underset{\sim}{a}^k = (a_1,a_2,\dots,a_k+k,\dots,a_{p+1})$$

$$\underset{\sim}{b}^k = (b_1,b_2,\dots,b_k+k,\dots,1)$$

$$f_k(x) = {}_{p+1}F_p(\underset{\sim}{a}^k,\underset{\sim}{b}^k|x)$$

l'algèbre linéaire nous apprend l'existence $p+1$ polynômes $P_o,P_1,\dots P_p$ de degrés $N-1$ au plus telle que la forme linéaire

$$R(x) = \sum_{k=0}^{k=p} P_k(x)\, f_k(x)$$

ait un zéro d'ordre au moins $(p+1)N-1$ en 0.

Nous allons montrer l'existence d'un $p+2$ uplet unique à une constante multiplicative près $(P_o,P_1,\dots,P_p,R)$ vérifiant 0.1 et tel que l'on ait exactement

$$\mathrm{Ord}_o R = (p+1)N-1$$

une telle forme linéaire est dite parfaite.

II.1. Détermination du reste

Théorème 1.

$$R(x) = x^{(p+1)N-1} \quad {}_{p+1}F_p \left(\begin{matrix} a_1+Np, a_2+Np, \dots\dots\dots & a_{p+1}+Np \\ b_1+(p+1)N, b_2+(p+1)N+1, \dots b_j+(p+1)N+j-1, \dots, 1 \end{matrix} \middle| x \right)$$

avec $1 \leqslant j \leqslant p$.

Démonstration : Nous considérons $R(x)$ défini sur S, revêtement universel de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})-\{0,1,\infty\}$.

Pour $0 \leqslant i \leqslant p$ tous les f_i ont en $0,1,\infty$ mêmes matrices de monodromie donc que $R(x)$ a les mêmes matrices de monodromie que f_o.

Le $p+2$ uplet $(f_o,f_1,\dots,f_p,R)$ forme d'après Riemann un système "contigu". $R(x)$ est alors solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre au plus $p+1$ à points singuliers réguliers $0,1,\infty$. Notons (E) cette équation.

L'équation différentielle dont R est solution n'est pas encore déterminée de manière unique car la monodromie est un invariant de l'équation différentielle modulo $\mathbb{Z}$ et de plus cette équations différentielle peut posséder des singularités apparentes.

Nous allons lever ces indéterminations en cherchant les ordres des singularités aux points singuliers éventuels.

Posons $s = (p+1)N-1$ et $\tilde{R}(x) = x^{-s} R(x)$. Supposons que f_o soit solution d'une équation irréductible. C'est-à-dire que (E) est d'ordre exactement $p+1$. Ceci se traduit comme dans le cas $p = 1$ par des conditions sur les paramètres de f_o.

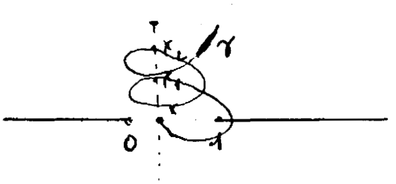
Pour $1 \leqslant i \leqslant p+1$; $a_i \notin \mathbb{Z}$, $1 \leqslant j \leqslant p$ $b_j \notin \mathbb{Z}$ et $b_i - a_i \notin \mathbb{Z}$.

Nous supposerons aussi que $\underset{\sim}{a}$ et $\underset{\sim}{b}$ sont réels.(L'extension au cas complexe se fera par un raisonnement de prolongement des identités). Les ordres des singularités en 0 pour $\tilde{R}$ sont :

$$(0, 1-b_1-s,\ 1-b_2-1-s, \ldots,\ 1-b_i-i-s, \ldots,\ 1-b_p-s-(p-1)) \bmod \mathbb{N}^{p+1}$$

En effet l'ordre 0 (mod $\mathbb{N}$) provient de l'existence même de sa solution au problème en $x = 0$.

Les autres exposants interviennent en utilisant un prolongement analytique de R sur Z. Soit x un point d'un voisinage de 0. Considérons la fibre de x, $p^{-1}(x) = \{x_1, x_2, \ldots x_j \ldots\}$ de S



Le prolongement analytique de x à x_1 par exemple le long d'un chemin γ sur S va transformer les fonctions holomorphes f_i définies au voisinage de 0 en ${}_\gamma f_i$. Les polynômes $P_1(x)$ restant bien sûr invariants. (Ceci est équivalent à faire un tour dans le sens direct par exemple autour de l'∞ et de revenir en x).

On obtient alors

$$f_i(x) \to {}_\gamma f_i(x) = \sum_{k=1}^{k=p+1} x^{1-b_k-\delta_{ki}.k} \psi_k(x)$$

où $\psi_k(x)$ holomorphe au voisinage de 0 et $\psi_k(0) \neq 0$, $\psi_k(x)$ s'écrivant comme série hypergéométrique.

$\delta_{k,i}$ désignant le symbole de Kronecker. On en déduit facilement les ordres des singularités du prolongement ${}_\gamma\tilde{R}(x)$ en 0 et donc de $\tilde{R}(x)$.

<u>En l'∞</u> :

On prend comme uniformisante locale $1/x$. En remarquant que $\mathrm{Ord}_\infty P_j = 1-N$ on obtient le résultat par prolongement analytique au voisinage de l'∞. On trouve alors :

$$(a_1+1-N+s, a_2+1-N+s, \ldots\ldots, a_{p+1}+1-N+s) \mod N^{p+1}$$

<u>En 1</u> :

On trouve : $(0,1,2,\ldots\ldots p-1,d) \mod N^{p+1}$ où

$$d = \sum_{i=1}^{i=p} b_i - \sum_{i=1}^{i=p+1} a_i \quad .$$

En utilisant la relation de Fuchs pour (E), on obtient facilement

$$\sum_{\alpha\varepsilon\{0,1,\infty\}} [\sum \text{exposants avec multiplicité en } \alpha] + \sum_{\substack{\alpha:\text{singularité}\\ \text{apparente}}} (\quad) = \frac{p(p+1)}{2}$$

Une vérification facile montre alors :

1) Il n'y a pas de singularité apparente

2) On lève l'ambiguité concernant les déterminations mod $\mathbb{N}^{p+1}$ ce qui permet de définir $\tilde{R}$ par son symbole de Riemann :

$$P \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{0} & \underline{\infty} & \underline{1} & \\ 0 & a_1+1-N+s & 0 & \\ 1-b_1-s & a_2+1-N+s & 1 & \\ 1-b_2-s-1 & \vdots & 2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & p-1 & \\ 1-b_p-s-p & a_{p+1}+1-N+s & d & \end{array} \right)$$

Une étude de Levelt [17] caractérisant les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur permet alors de conclure que :

$$\tilde{R}(x) = {}_{p+1}F_p \left(\begin{array}{c|c} a_1+Np, a_2+Np, \ldots\ldots\ldots, a_k+Np, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{p+1}+Np & \\ & x \\ b_1+(p+1)N, \ldots\ldots\ldots\ldots\ b_k+(p+1)N+k-1, \ldots\ldots\quad 1 & \end{array} \right)$$

Dans le cas où $p+1 \leqslant q$ l'∞ est un point singulier irrégulier. Le résultat précédent subsiste pour ${}_pF_q\left(\begin{matrix}\underset{\sim}{a}\\ \underset{\sim}{b}\end{matrix}\middle|x\right)$. Il suffit alors de raisonner par confluence.

II.2. <u>Remarque</u>

$\tilde{R}(0) = 1$ montre que l'ordre de R est exactement $s = (p+1)N-1$ c'est-à-dire que le système $(P_o, P_1, \ldots, P_p, R)$ est un système parfait au sens de Padé.

II.3. <u>Définition</u>.

Les $f_i(x)$ sont appelées fonctions contigues de base.

III. *Calcul effectif des polynômes.*

Nous supposerons dans ce paragraphe que les singularités de f_o ne sont pas de type logarithmique.

III.1. <u>Rappels et Notations</u>.

Nous poserons

$$(1) \qquad Y_{p+1}^{(0)}(x) = {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\alpha_1 \ \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_{p+1}\\ \beta_1 \ \beta_2 \cdots\cdots \beta_{p+1}\end{matrix}\middle|x\right), \quad \beta_{p+1} = 1.$$

Dans ce cas une base de l'espace des germes de solutions de (E) au voisinage de 0 est donnée par

$$(2) \qquad Y_j^{(0)}(x) = x^{1-\beta_j}\ {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_j, \alpha_2+1-\beta_j \cdots\cdots \alpha_{p+1}+1-\beta_j\\ \beta_1+1-\beta_j, \beta_2+1-\beta_j \cdots\cdots \beta_{p+1}+1-\beta_j\end{matrix}\middle|x\right)$$

pour $j = 1,2,\ldots,p+1$.

Au voisinage de l'∞ une base de l'espace des germes de solutions de (E) est donnée par :

$$(3) \qquad Y_k^{(\infty)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha_k} {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} \alpha_k+1-\beta_1, \alpha_k+1-\beta_2, \ldots\ldots\ldots \alpha_k+1-\beta_k, \overbrace{\alpha_k+1-\beta_{p+1}}^{\alpha_k} \\ \\ \alpha_k+1-\alpha_1, \alpha_k+1-\alpha_2, \ldots\ldots\ldots \qquad \alpha_{k+1}-\alpha_{p+1} \end{matrix} \;\middle|\; \frac{1}{x}\right)$$

avec $1 \leqslant k \leqslant p+1$.

On posera aussi

(4) $Y_j^{(0)}(x) = x^{1-\beta_j}\, y_j^{(0)}(x)$. C'est-à-dire que $y_j^{(0)}(x)$ est analytique au voisinage de 0

(5) $Y_k^{(\infty)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha_k} y_k^{(\infty)}\left(\frac{1}{x}\right)$, avec $y_k^{(\infty)}\left(\frac{1}{x}\right)$: analytique au voisinage de l'∞.

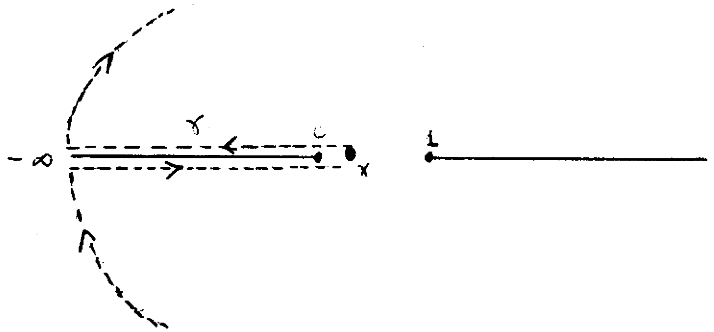
On a ainsi $y_{p+1}^{(0)}(x) = Y_{p+1}^{(0)}(x)$.

Les calculs suivants faisant intervenir de nombreux produits de fonctions Γ nous poserons :

$$(6) \qquad \Gamma\left[\begin{matrix}\alpha_\nu \\ \beta_\nu\end{matrix}\right] = \frac{\prod_{\nu=1}^{\nu=p+1} \Gamma(\alpha_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{\nu=1} \Gamma(\beta_\nu)} \quad ; \quad \underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1})$$

$$\underset{\sim}{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p+1}) \quad \text{avec} \quad \beta_{p+1} = 1$$

Soit γ le chemin suivant de Z



Nous allons chercher comment se transforme la solution holomorphe $Y_{p+1}^{(0)}(x)$ de (E) quand x parcourt γ et revient en x.

Notons ${}_{\gamma}Y_{p+1}^{(0)}(x)$ le transformé de $Y_{p+1}^{(0)}(x)$ suivant γ.

<u>*Lemme*</u> *1*.

$$ {}_{\gamma}Y_{p+1}^{(0)}(x) = \Gamma\left[\begin{matrix}\beta_\nu \\ \alpha_\nu\end{matrix}\right] \sum_{k=1}^{k=p+1} E_k \, \Gamma\left[\begin{matrix}\alpha_\nu+1-\beta_k \\ \beta_\nu+1-\beta_k\end{matrix}\right] Y_k^{(0)}(x) \; ; \qquad \beta_{p+1} = 1 $$

où $E_k = E_k(\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta})$ sont des constantes ne faisant pas intervenir de facteurs Γ et invariants modulo Z.

<u>Démonstration</u> : Suivant une étude de Norlund [18] sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, on travaille avec les solutions normalisées de (E).

On pose :

$$ \tilde{Y}_k^{(0)} = \Gamma\left[\begin{matrix}\alpha_\nu+1-\beta_k \\ \beta_\nu+1-\beta_k\end{matrix}\right] Y_k^{(0)} $$

En particulier : $\tilde{Y}{}^{0}_{p+1} = \Gamma\left[{\alpha_\nu \atop \beta_\nu}\right] Y^{(0)}_{p+1}$. $\quad \tilde{Y}{}^{(\infty)}_{k} = \Gamma\left[{\alpha_k-\beta_\nu+1 \atop \alpha_k-\alpha_\nu+1}\right] Y^{(\infty)}_k$. Quand x parcourt un chemin allant de 0 au voisinage de $l'\infty$, $\tilde{Y}{}^{0}_{p+1}(x)$ devient : $\displaystyle\sum_{j=1}^{j=p+1} C^{(\infty)}_k \tilde{Y}{}^{(\infty)}_k$ où pour $1 \leq k \leq p+1$, C^{∞}_k sont des constantes invariantes mod Z données dans [18] :

$$C^{\infty}_k = \frac{e^{2i\Pi\,\alpha_k}}{\sin \Pi.(\alpha_k+1-\beta_k)} \; \frac{\prod_{v=1}^{v=p+1} \sin \Pi(\alpha_\nu+1-\beta_k)}{\prod_{v=1}^{v=p+1}{}' \sin \Pi(\beta_\nu-\beta_k)}$$

où "'" veut dire que si $\alpha_\nu = a_k$ on remplace le terme correspondant par 1 dans le produit.

on tourne alors une fois autour de $l'\infty$ dans le sens direct et on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^{y=p+1} C^{(\infty)}_k e^{-2i\Pi a_k} \tilde{Y}{}^{(\infty)}_k .$$

Enfin on revient au voisinage de 0 au point x. En écrivant d'après [18] :

$$\tilde{Y}{}^{(\infty)}_k = \sum_{j=1}^{j=p+1} D^{(0)}_{j,k} \tilde{Y}{}^{(0)}_j$$

où

$$D^{(\infty)}_{j,k} = \frac{e^{i\Pi(\alpha_k+1-\beta_j)}}{\sin\Pi(\alpha_k+1-\beta_j)} \; \frac{\prod_{v=1}^{v=p+1} \sin \Pi(\alpha_\nu+1-\beta_j)}{\prod_{v=1}^{v=p+1}{}' \sin \Pi(\beta_v-\beta_j)}$$

également invariants mod Z.

En définitive, on trouve que :

$$ {}_{\gamma}\tilde{Y}_k^{(0)} = \sum_{j=1}^{j=p+1} \left\{ \sum_{k=1}^{k=p+1} C_k^{(\infty)} D_{j,k}^{(0)} e^{-2i\Pi\alpha_k} \right\} \tilde{Y}_j^{(0)} $$

On en déduit le lemme en posant :

$$ E_k = \sum_{k=1}^{k=p+1} C_k^{(\infty)} D_{j,k}^{(0)} e^{-2i\Pi\alpha_k} \quad . $$

Remarques.

1) On peut aussi écrire : ${}_{\gamma}Y_{p+1}^{(0)}(x) = \sum_{k=1}^{k=p+1} m_k \, y_k^{(0)} \, x^{1-\beta_k}$ avec :

$$ m_k = m_k(\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta}) = \Gamma\left[\begin{matrix}\beta_\nu \\ \alpha_\nu\end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix}\alpha_\nu+1-\beta_k \\ \beta_\nu+1-\beta_k\end{matrix}\right] E_k $$

2) Tout ceci a été possible car les solutions de (E) peuvent comme dans le cas $p = 1$ s'écrire sous forme intégrale.

3) Nous avons dû tourner autour du point singulier l'∞ au lieu de 1 (voir le cas $p = 1$ dans [16]) car dans le cas $p > 1$ la base de solutions de (E) au voisinage de 1 n'est pas "hypergéométrique" ou si l'on préfère le passage de la variable x à la variable $1-x$ ne donne plus des fonctions hypergéométriques mais font appel à l'étude de nouvelles fonctions appelées G fonctions de Meijer.

Il ne faut pas confondre celles-ci avec les G fonctions au sens de Siegel dont les fonctions hypergéométriques à points singuliers réguliers sont des cas particuliers. Le cas où l'∞ est point singulier irrégulier donnant une E fonction.

4) Nous aurions pu calculer la matrice de monodromie en tournant autour du point "1" en utilisant la relation matricielle suivante $M_o M_1 M_\infty = I$. M_o, M_1, M_∞ désignant les matrices de monodromie. D'où $M_1 = (M_\infty M_o)^{-1}$.

Il est facile de calculer M_o : c'est la matrice diagonale $(p+1 \times p+1)$ de terme général $\exp 2i\Pi(1-\beta_k)$ $1 \leq k \leq p+1$ le calcul de M_∞ utilise le même principe que celui du lemme 1. On remarque que :

$$M_\infty = \exp 2i\Pi\left(\sum_{k=1}^{k=p+1} a_k\right) .$$

III.2. Utilisation du lemme pour le calcul des polynômes

On pose $\mathcal{O} = C\{x\}$ ensemble des germes de fonctions holomorphes au voisinage de 0.

Soit M l'ensemble des fonctions définies et Z holomorphes sur Z et dont la monodromie est donnée par les exposants a_i, $1 \leq i < p+1$, $1 \leq b_j \leq p$. Cet ensemble a une structure de module sur $C(x)$.

On considère le module $O(x^{-b_1}, x^{-b_2}, \ldots, x^{-b_p})$ et on suppose d'abord que les b_j ne sont pas entiers et que (E) n'a pas de singularité logarithmique.

Dans $O(x^{-b_1}, x^{-b_2}, \ldots x^{-b_p})$ le système $(1, x^{-b_1} \ldots x^{-b_p})$ constitue alors un système libre et une base de $M \cap \mathcal{O}(x^{-b_1}, \ldots, x^{-b_p})$. On pose

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{i=p} P_i f_i = R = x^s \tilde{R}$$

Nous poserons dans la suite $f_o = f_{p+1}$. La transformation de monodromie du lemme donne :

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{i=p+1} P_i \; {}^{\gamma}f_i = {}^{\gamma}R = x^s \; {}^{\gamma}\tilde{R} \; .$$

La décomposition des 2 membres de cette égalité sur $(1, x^{-b_1}, \dots, x^{-b_p})$ donne un système de $p+1$ équations à $p+1$ inconnues dont la résolution permettra de trouver les polynômes P_i.

L'utilisation du lemme 1 permet alors décrire :

$${}^{\gamma}f_i = \sum_{i=1}^{i=p_i} m_{i,k} \; y_k^i(x) \; x^{1-b_k-\delta_{k,i}.k} + m_{p+1,k} \; f_{p+1}$$

avec $m_{p+1,k} = E_{p+1,k}$

$$m_{i,k} = \underset{(k \neq p+1)}{\Gamma} \begin{bmatrix} b_\nu + \delta_{\nu,k}.k \\ \\ a_\nu + \delta_{\nu,k}.k \end{bmatrix} \Gamma \begin{bmatrix} a_\nu - b_k + 1 + (\delta_{\nu,k} - \delta_{i,k})k \\ \\ b_\nu - b_k + 1 + (\delta_{\nu,k} - \delta_{i,k})k \end{bmatrix}$$

Transformons $x^s \tilde{R}$:

$$x^z \; {}^{\gamma}\tilde{R}(x) = E_{p+1}^o \; x^s \; \tilde{R}(x) + \sum_{k=1}^{k=p} M_k(N) \; \tilde{R}_k(x) \; x^{1-b_k-k}$$

où pour $k \neq p+1$ on a posé :

$$M_k(N) = \frac{1}{\Gamma((p+1)N+\nu-1)} \cdot \Gamma\begin{bmatrix} b_\nu+(p+1)N+\nu \\ \\ a_\nu+N_p \end{bmatrix} . \Gamma\begin{bmatrix} a_\nu-b_k+2-k-N \\ \\ b_\nu-b_k+\nu-k+1 \end{bmatrix} .$$

$$\frac{1}{\Gamma(3-b_k-k-(p+1)N)} \cdot E_k$$

$$\tilde{R}_k(x) = {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} \ldots\ldots\ a_j-b_k-N-2-k\ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ b_j-b_k+1-j-k\ldots\ldots 3-b_k-k-(p+1)N \end{matrix} \middle| x \right)$$

l'invariance de E_k et de $E_{i,k}$ mod $\mathbb{Z}$ permet alors de trouver un système de p+1 équation à p+1 inconnues dont les polynômes P_i sont solutions. On a alors en simplifiant :

$$S \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p+1} m_{i,k}\, y_k^i(x) \,.\, x^{k-\delta_{i,k}.k}\, P_i(x) = M_k(N)\, \tilde{R}_k(x) & 1 \leqslant k \leqslant p \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i+p+1} f_i(x)\, P_i(x) = x^s\, \tilde{R}(x) = x^s\, \tilde{R}_{p+1}(x) & \end{cases}$$

On notera $D(x)$ le déterminant du système S et $\delta(x)$ le déterminant obtenu en multipliant les lignes d'indices k par x^{k+b_k-1}.

Lemme 2.

$$D(x) = \left(\prod_{k=1}^{k=p+1} m_{k,k} \right) (1-x)^{d+\frac{p(p-1)}{2}} \qquad \text{avec } m_{p+1,p+1} = 1$$

$$\prod_{k=1}^{k=p+1} m_{k,k} = \prod_{k=1}^{k=p} \Gamma \begin{bmatrix} b_\nu+\delta_{\nu,k}k \\ \\ a_\nu+\delta_{\nu,k}k \end{bmatrix} \quad \Gamma \begin{bmatrix} a_\nu+1-b_k-k+\delta_{\nu,k}k \\ \\ b_\nu+1-b_k-k+\delta_{n,k}k \end{bmatrix}$$

Démonstration : Considérons la matrice $M(x)$ du système S, un prolongement analytique le long d'un chemin de 0 à 1 montre comme dans [13] p. 305 que la matrice ainsi prolongée admet $x = 1$, comme singularité et son déterminant admet 1 comme singularité d'ordre $d+p(p-1)/2$.

On en déduit que $\Delta(x) = D(x).(1-x)^{-d-p(p-1)/2}$ est analytique partout sur $\mathbb{C}$. Nous prolongeons $\Delta(x)$ sur la surface de Riemann S et nous allons déterminer $\mathrm{ord}_\infty\Delta$.

On a $\mathrm{ord}_\infty\Delta = d+p(p-1)/2 + \mathrm{ord}\, D_\infty$. Comme la multiplication de chaque ligne d'indice k du système S par x^{k-1+b_k} redonne une matrice de solutions "fondamentales" [13].

Soit $\delta(x)$ le déterminant de cette nouvelle matrice. On a

$$D(x) = x^{p(p-1)/2 + \sum_{k=1}^{k=p} b_k} \delta(x)$$

et donc

$$\mathrm{ord}_\infty \Delta = -p(p-1)/2 - \sum_{k=1}^{k=p} b_k + \mathrm{ord}_\infty \delta$$

mais :

$$\mathrm{ord}_\infty \delta = \sum_{k=1}^{k=p} a_k$$

on peut alors conclure que $\operatorname{ord}_\infty \Delta = 0$. Ce qui montre que Δ est une constante notée c.

$$D(x) = c(1-x)^{d+p(p-1)/2} \qquad \text{avec } c \in \mathbb{C}$$

le calcul de la constante c se faisant par le produit des termes diagonaux de la matrice.

Ce type de démonstration intervient dans l'étude du 21 ème problème de Hilbert. [13].

<u>ALLURE DES POLYNOMES</u>.

En résolvant le système on trouve que pour $0 \leqslant i \leqslant p$:

$$P_i(x) = \left\{ \sum_{k=1}^{k=p+1} \tilde{R}_k(x)\ S_k(x) \right\} (1-x)^{-d-\frac{p(p-1)}{2}}$$

où $S_k(x)$ est le déterminant des cofacteurs associé à $\tilde{R}_k(x)$. Sachant que $P_i(x)$ est un polynôme de degré $N-1$. On ne prend que les $N-1$ premiers termes du développement en série.

Nous devons résoudre les problèmes suivants :

a) Supposant que $a_i \in \mathbb{Q}$, $b_j \in \mathbb{Q}$, déterminer un dénominateur des $P_i(x)$ que nous noterons $D(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},N)$.

b) Déterminer un développement asymptotique des $P_i(x)$ quand $N \to +\infty$.

En vue d'une normalisation nous allons multiplier toute la relation (1) par

$$\Gamma(p+1)N+\nu)\ \Gamma\begin{bmatrix} b_\nu+(p+1)N+\nu \\ \\ a_\nu+Np \end{bmatrix}$$

Remarque : Les résultats qui vont suivre diffèrent de ceux de [20]. Ceci est essentiellement dû au fait que la matrice de monodromie de cet article est M_∞ tandis que celle de [20] est M_1.

IV. Conséquences arithmétiques

IV.1. Notations

a) Dans toute la suite des paramètres a_i , $1 \leq i \leq p+1$; b_j $1 \leq j \leq p$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$; $b_j \notin \mathbb{Z}^-$. On pose :

$$a_i = \alpha_i/\beta_i \qquad ; \qquad (\alpha_i,\beta_i) = 1$$

$$b_i = \gamma_i/\delta_i \qquad ; \qquad (\gamma_i,\delta_i) = 1$$

$$\mu_{a_i} = \prod_{\substack{q|\beta_i \\ q \text{ premier}}} q^{1/q-1} \quad ; \text{ resp. } \mu_{b_j} \quad ; \ g(b_i) = \frac{\delta_i}{\varphi(\delta_i)} \sum_{\substack{j=1 \\ (j,\delta_i)=1}}^{j=\delta_i} 1/j$$

$$D(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \left[\left(\prod_{1\leq i\leq p+1} \beta_i\mu_{a_i}\right)\left(\prod_{1\leq j\leq p} \delta_j\mu_{b_j}\right)\right]^{p+1} \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{i=p} g(b_i)\right)\Bigg]^{p+1}$$

b) Soit $t^*(x)$ une racine de l'équation :

$$x\, t^{p+1} - (p+1)t + p = 0$$

vérifiant $t^*(0) = p/p+1$.

c) On désignera aussi par $t_*(x)$ une racine de module minimal de l'équation

$$p\, t^{p+1} - (p+1)t + x = 0$$

$$(t_*(x) \sim (p+1)^{-1/p} x^{1/p} \quad \text{quand} \quad x \to 0$$

IV.2. Théorème 2.

Pour $1 \leq k \leq p+1$ soient :

$$F_k(x) = {}_{p+1}F_p \left(\begin{matrix} a_1+n_{1,k}, a_2+n_{2,k}, \ldots\ldots & a_{p+1}+n_{p+1,k} \\ \\ b_1+m_{1,k}, b_2+m_{2,k}, \ldots\ldots\ldots, b_p+m_{p,k,1} \end{matrix} \; \middle| \; x \right)$$

des fonctions hypergéométriques "contigues" dont les familles de paramètres entiers

$$\underset{\sim}{n}_k = (n_{1,k}, n_{2,k}, \ldots\ldots \; n_{p+1,k})$$

$$\underset{\sim}{m}_k = (m_{1,k}, m_{2,k}, \ldots\ldots\ldots, m_{p,k})$$

sont choisis de telle sorte que les $F_k(x)$ avec $1 \leq k \leq p+1$ soient $\mathbb{C}[x]$ linéairement indépendants.

Soit $x \in \mathbb{Q}$, $x = P/Q$ avec $(P,Q) = 1$ et $0 < |x| < 1$, on suppose que x vérifie la condition suivante :

$$|Q| > [\frac{p+1}{p^2} \cdot |P| \, D(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})^{p+1}]^{p+1}$$

et que x n'est pas au point exceptionnel*.

On pose :

$$E = \frac{\mathrm{Log}|Q| + (p+1)\mathrm{Log}\{D(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}).p.|x||t^*(x)|^p\} - \mathrm{Log}\, p}{\mathrm{Log}|Q| + (p+1)\mathrm{Log}\{D(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}).p.|x|\} - p(p+1)\mathrm{Log}(p|t_*(x)|) - \mathrm{Log}\, p}$$

Alors pour tout k, $1 \leq k \leq p+1$ les $F_k(P/Q)$ sont $\mathbb{Q}$ linéairement indépendants et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $H_o = H_o(\varepsilon,\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{m}_k,\underset{\sim}{n}_k) > 0$ effectivement calculable telle que pour tout $H > H_o$ on ait :

$$\left| \sum_{k=1}^{k=p+1} A_k \, F_k(P/Q) \right| > H^{-(M+\varepsilon)}$$

avec $A_k \in \mathbb{Z}$ et $H = \max\limits_{1 \leq k \leq p+1} |A_k|$, $M = -\frac{P}{E+p-1}$ étant l'exposant de la mesure d'indépendance linéaire des $F_k(P/Q)$.

---

* *Points exceptionnels*
Ces points vont invervenir dans la démonstration du théorème. Ils sont en nombre fini et effectivement calculables.
Dans le cas où les F_k sont des fonctions contigues de base, il n'y en a pas.

IV.3. Démonstration du théorème

Estimations asymptotiques.

a) Quand $N \to +\infty$ on a

$$\lim \frac{1}{N} R_N(x) = \mathrm{Log}|c_p . x^{p+1} \ t^*(x)^{p(p+1)}|$$

où $t = t^*(x)$ est une racine de l'équation.

(i) $x\, t^{p+1} - (p+1)t + p = 0$ telle que $t^*(0) = p/p+1$ et c_p est une constante dépendant de p et des conditions de normalisations. (dans notre étude $c_p = p^p$).

b) Quand $N \to +\infty$ on a pour tout i : $1 \leq i \leq p+1$

$$\lim \frac{1}{N} \mathrm{Log}|P_i(x)| = \mathrm{Log}|d_p \frac{x^{p+1}}{p^p t_*(x)^{p+1}}|$$

où $t_*(x)$ est une racine de module minimal de l'équation

(ii) $p\, t^{p+1} - (p+1)t + x = 0$ et $t_*(x) \sim (p+1)^{-1/p} x^{1/p}$ quand $x \to 0$ et d_p dépend également de la normalisation, ici $d_p = p^p$.

Pour la démonstration voir [20].

Elle résulte des formules intégrales pour les fonctions hypergéométriques et de la formule de Stirling.

Pour $\mathrm{Re}\, b_i > \mathrm{Re}\, a_i$ et $1 \leq i \leq p$ on a :

$${}_{p+1}F_p \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \ldots\ldots & a_{p+1} \\ & & & |x \\ b_1 & b_2 \ldots\ldots & b_p \end{matrix} \right) = \prod_{1 \leq i \leq p} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)}$$

$$\int_0^1 dt_1 \ldots \int_0^1 dt_p \prod_{1\leq i\leq p} (1-t_i)^{b_i-a_i-1}\, t_i^{a_i-1}\, (1-t_1t_2\ldots t_p\, x)^{-a_{p+1}}$$

ceci donne une estimation asymptotique de R_N.

Pour P_i on prend une intégrale portant sur une double boucle [20].

IV.4. Lemmes arithmétiques

Lemme III. Soit $a \in \mathbb{Q}$. Posons $a = \frac{\ell_a}{k_a}$ avec $(\ell_a, k_a) = 1$ et

$\mu_a = \prod_{\substack{q|k_a \\ q \text{ premier}}} q^{1/q-1}$ alors $k_a^n\, \mu_a^{[n]} \binom{a}{n}$ est un entier.

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1)}{n!}.$$

Lemme IV. a) Pour $b = \ell_b/k_b$, $(\ell_b, k_b) = 1$. On pose

$$\Omega_n^b = \mathrm{ppcm}(\ell_b, \ell_b+k_b, \ldots\ldots, \ell_b+nk_b)$$

alors $\Omega_n^b/\binom{b}{n}$ est un entier.

b) Pour $n \to +\infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\Omega_n \leq \exp(g(b)+\varepsilon)n$

où on a posé :

$$g(b) = k_b/\varphi(k_b) \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j,k_b)=1}}^{j=k_b} 1/j \right) \quad ;$$

φ représentant la fonction d'Euler.

Pour des indications sur ces 2 lemmes voir [16].

On en déduit que pour $0 \leq j \leq p$

$$\left[\left(\prod_{1\leq i\leq p+1} \mu_{a_i} \prod_{1\leq i\leq p} \mu_{b_i}\right)^{[N-1]} \prod_{1\leq i\leq p} \Omega_{N-1}^{b_i}\right]^{p+1} P_i(x) \in \mathbb{Z}$$

Il en résulte que l'on peut poser :

$$D(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \left(\prod_{1\leq i\leq p+1} \beta_i \prod_{1\leq j\leq p} \delta_j \cdot \prod_{1\leq i\leq p+1} \mu_{a_i} \cdot \prod_{1\leq i\leq p} \mu_{b_i} \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{i=p} g(b_i)\right)\right)^{p+1}$$

et dire que $C(N) \sim D(\bar{a},\bar{b})^{(N-1)(p+1)}$ quand $N \to +\infty$

Lemme 5. [22] Soient m un entier > 0 et $\lambda_1\ \lambda_2 \dots \lambda_m$ des nombres complexes tels que $\underset{\sim}{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \neq \underset{\sim}{0}$. On note $\|\underset{\sim}{x}\|_{\mathbb{C}^n} = \sup|x_i|$ on suppose qu'il existe des constantes c_1 et c_2 positives, des réels α et β supérieurs à 1 et une suite de matrices $p_{i,j}^{(n)} \in M_{m\times m}(\mathbb{Z})$ telles que pour tout n :

i) $\det(p_{ij}^{(n)}) \neq 0$

ii) $|p_{ij}^{(n)}| \leq c_1\ \beta^n$

iii) $\left|\sum_{j=1}^{j=m} p_{j,i}^{(n)}\ \lambda_j\right| \leq c_2\ \alpha^{-n} \qquad \forall i = 1,2,\dots,m.$

ce qu'on peut aussi écrire $\left\|p_{ji}^{(n)} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}\right\| \leq c_2\ \alpha^{-n}$. <u>On suppose que</u> $\alpha > \beta^{m-2}$.

Alors il existe une constante $c_3 = c_3(c_1,c_2,\alpha,\beta,m,\underset{\sim}{\lambda})$ telle que pour tout

$\underset{\sim}{q} = (q_1,q_2,\dots,q_m) \in Z^m$, $\underset{\sim}{q} \neq 0$ on ait :

$$\left| \sum_{j=1}^{j=m} q_j\lambda_j \right| > c_3 \, \|q\|^{-(m-1) / (\mathrm{Log}\alpha/\mathrm{Log}\beta \, - \, (m-2))}$$

En particulier $\lambda_1,\lambda_2,\dots \lambda_m$ sont $\mathbb{Q}$ linéairement indépendants.

Remarque. On peut noter que c'est la condition (1) qui est la plus difficile à vérifier.

Démonstration : On se donne $\underset{\sim}{q} = (q_1,q_2,\dots,q_m) \in \mathbb{Z}^m$, $\underset{\sim}{q} \neq \underset{\sim}{0}$. D'après l'hypothèse 1) et quitte à réindexer les p_{ij} il existe une matrice de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} q_1 & \cdots\cdots\cdots & q_m \\ p_{11}^{(n)} & & p_{m,1}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{1,m-1}^{(n)} & & p_{m,m-1}^{(n)} \end{pmatrix}$$ de déterminant non nul.

Comme $M \in M_{m,m}(\mathbb{Z})$ on a $|\det M| \geq 1$. Nous allons majorer $|\det M|$. Comme $\underset{\sim}{\lambda} = \underset{\sim}{0}$ l'un des λ_i est différent de 0. Supposons que $\lambda_1 \neq 0$. On multiplie la première colonne de M par λ_1 et on obtient une nouvelle matrice M' :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 q_1 & q_2 & q_m \\ \lambda_1 p_{11}^{(n)} & p_{2,1}^{(n)} & p_{m,1}^{(m)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{1,m-1}^{(n)} & \cdots\cdots & p_{m,m-1}^{(n)} \end{pmatrix} \text{ avec } \det M' = \lambda_1 \det M.$$

Pour calculer $\det M'$ on fait la combinaison suivante : on remplace la lère colonne par la somme de la lère et des $(m-1)$ autres multipliées par $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m$ alors :

$$\det M' = \begin{vmatrix} \sum q_j \lambda_j & q_2 & \cdots\cdots & q_m \\ \sum p_{j,1}^{(n)} \lambda_j & p_{2,1}^{(n)} & & p_{m,1}^{(n)} \\ & & & \\ \sum p_{j,m-1}^{(n)} \lambda_j & p_{2,m-1}^{(n)} & & p_{m,m-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

D'après l'hypothèse iii :

$$\left| \sum_{i=1}^{i=m} p_{i,k}^{(n)} \lambda_i \right| \leqslant c_2 \, \alpha^{-n} \qquad \text{pour} \quad k = 1,2,\ldots,m-1.$$

Posons $\varepsilon = \left| \sum_{i=1}^{i=m} q_i \, \lambda_i \right|$, on développe ensuite $\det M'$ par rapport à la lère colonne et on obtient pour $k = 1,2,\ldots. \; m-1$:

$$|\det M'| \leqslant \varepsilon(m-1)!\ (c_1\ \beta^n)^{m-1} + c_2\ \alpha^{-n}\ m!(c_1\ \beta^n)^{m-2}\ .\ \|\underset{\sim}{q}\|$$

ce qui donne pour $|\det M|$ une majoration de la forme :

$$|\det M| \leqslant c_4(m,c_1,c_3,\underset{\sim}{\lambda})[\varepsilon\ \beta^{n(m-1)} + \|\underset{\sim}{q}\|(\frac{\beta^{m-2}}{\alpha})^n]$$

soit un entier n tel que :

$$\frac{1}{2c_4}\ (\frac{\alpha}{\beta^{m-2}})^{n-1} \leqslant \|\underset{\sim}{q}\| \leqslant \frac{1}{2c_4}\ (\frac{\alpha}{\beta^{m-2}})^n$$

d'où

$$c_4\ \|\underset{\sim}{q}\|(\frac{\beta^{m-2}}{\alpha})^n < 1/2$$

et

$$n \geqslant \frac{\mathrm{Log}(2c_4\|q\|)}{\mathrm{Log}(\alpha/\beta^{m-2})} \qquad \text{on a donc}$$

$$1 \leqslant \det M \leqslant \frac{1}{2} + c_4\ \varepsilon\ \beta^{-(m-1)\frac{\mathrm{Log}\ 2c_4\|\underset{\sim}{q}\|}{\mathrm{Log}(\alpha/\beta^{m-2})}}$$

d'où

$$\varepsilon > \frac{1}{2c_4}\ \beta^{-(m-1)\ \frac{\mathrm{Log}\ 2c_4\|\underset{\sim}{q}\|}{\mathrm{Log}(\alpha/\beta^{m-2})}}$$

On pose alors :

$$c_3 = \frac{1}{2c_4}\ e^{(1-m)\ \frac{\mathrm{Log}\beta.\mathrm{Log}\ 2c_4}{\mathrm{Log}\alpha-(m-2)\log\beta}}$$

on en déduit alors

$$\varepsilon > \|q\|^{-(m-1)X}$$

où on a posé $X = \dfrac{1}{\operatorname{Log}\alpha/\operatorname{Log}\beta - (m-2)}$.

Fin de la démonstration du théorème 2.

Toute fonction hypergéométrique F contigue à $f_o(x)$ s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$ de $f_o(x), f_1(x), \ldots f_p(x)$.

De manière précise si $F_j(x)$; $0 \leqslant j \leqslant p$ sont des fonctions hypergéométriques contigues à $f_o(x)$ il existe des polynômes $Q_o^f, Q_1^f \ldots . Q_p^f, Q^f$ de $\mathbb{C}[x]$ tels que l'on ait :

$$Q^f(x) F_j(x) = \sum_{k=0}^{k=p} Q^f(x)\ f_k(x)$$

$Q(x)$, $Q\ (x), \ldots, Q_p(x)$ sont des polynômes effectivement calculables en utilisant la méthode de monodromie de III, sont indépendants de N et de degrés bornés par une constante absolue.

L'utilisation répétée des fonctions de bases $f_o, f_1, \ldots, f_p$ nous montre que si les $f_j(x)$ sont pour $0 \leqslant j \leqslant p$ des fonctions contigues $C(x)$ linéairement indépendantes :

$$\sum_{j=0}^{j=p} Q_j^F(x)\ F_j(x) = x^{(p+1)N-1}\ Q^F(x)\ R_N(x)$$

les degrés des polynômes Q_j^F sont de la forme $N+\alpha_j$ où α_j est un entier naturel indépendant de N (On dit que le système d'approximant est presque parfait).

Pour démontrer le théorème on commence par vérifier le lemme V et surtout la condition a).

Pour cela écrivons la relation de Padé pour $N-1, N, \ldots N+p-1$. On obtient alors le système :

$$\sum_{j=0}^{j=p} P_j^{(N+k-1)}(x)\ f_j(x) = C_{N+k-1}\ x^{(N+k)(p+1)-1}\ \tilde{R}_{N+k-1}(x)$$

avec $0 \leqslant k \leqslant p$.

Le déterminant $\Delta_N(x)$ du système est de degré inférieur ou égal à

$$(N-1+N+(N+1)+\ldots N+p-1) \quad \text{ou} \quad (p+1)N+p^2-3p+1$$

mais par combinaison linéaire, en remplaçant la première colonne par $C_{N+k-1}\ x^{(N+k)(p+1)-1}\ \tilde{R}_{N+k-1}(x)$, $k = 0,1,2, \quad p$. On vérifie alors que son ordre est supérieur à $(p+1)N+p^2-3p+1$. Donc $\Delta_N(x) = \rho\ x^{(p+1)N+p^2-3p+1}$. On en déduit alors en utilisant l'expression explicite des polynômes que $\rho \neq 0$. Ce qui permet de vérifier la condition 1) du lemme V. Pour vérifier les conditions 2 et 3 du lemme, on pose :

$$p = Q^{N-1}\ D_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}}\ .\ P_k(P/Q) \qquad 0 \leqslant k \leqslant p \qquad \theta_k = f_k(P/Q)$$

$$c_k = Q^{N-1}\ D_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}}\ R_N(P/Q) \quad ,$$

on obtient alors :

$$\sum_{k=0}^{k=p} p_k\ \theta_k = r_k\ .$$

On applique alors les lemmes II et IV.

Le cas "logarithmique" se traite de manière analogue. La difficulté réside essentiellement dans le calcul des matrices de monodromie. On y parvient en utilisant des résultats de [18] et une méthode analogue à [25].

Points exceptionnels : cas général.

Soit $x = P/Q$, supposons que pour $0 \leq j \leq p$ $F_j(P/Q)$ soient $\mathbb{Q}$ linéairement dépendants. Il existe $c_j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j \leq p$, non tous nuls tels que $\sum_{j=0}^{j=p} c_j F_j(P/Q) = 0$ la remarque du début de la démonstration montre l'existence de $b_{ij} \in \mathbb{Z}$ $\begin{array}{l} 0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq p \end{array}$ tels que :

$$F_j(P/Q) = \sum_{i=0}^{j=p} b_{ij}\, f_j(P/Q)_i ; b_{ij} = b_{ij}(P/Q)$$

or $f_j(P/Q)$ $\mathbb{Q}$ linéairement indépendants montre que :

$$B \begin{pmatrix} c_o \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ : \ B = (b_{ij}) \qquad \begin{array}{l} 0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq p \end{array}$$

Si on suppose que la matrice B a un rang égal à $p+1$ en P/Q, alors la condition 1) du théorème 2 est vérifiée.

Mais il y a au plus un nombre fini (effectivement calculable ne dépendant que du système donné F_j) tel que la matrice B soit singulière.

On appellera de tels nombres points exceptionnels. Ces points apparaissent déjà dans le cas où $p = 1$ et résultent des relation de contiguité de Gauss.

Par exemple : considérons la relation de Gauss suivante

$$c[c-1-x(2c-a-b-1)]\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix}\middle| x\right) + (c-a)(c-b)\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c+1 \end{matrix}\middle| x\right)$$

$$= c(c-1)(1-x)\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c-1 \end{matrix}\middle| x\right).$$

Pour $x = \frac{c-1}{2c-a-b-1}$ [30]. Il est facile de voir que le rang de la matrice va diminuer.

Le cas algébrique.

Pour $w \in \mathbb{Q}^*$ considérons la famille d'équations trinômes

$$E(w) : X^{p+1} - X + w = 0$$

Parmi les racines réelles de $E(w)$, il y en a une équivalente à w quand $w \to 0$. Nous noterons $X(w)$ cette racine.

On peut écrire cette racine sous forme d'une fonction hypergéométrique [25] et [26]. On trouve que :

$$X(w) = -pw\ {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} 1/p+1, & 2/p+1, \ldots\ldots\ldots, p/p+1 \\ 2/p, & 3/p, \ldots\ldots\ 1, \quad 1+1/p \end{matrix}\middle| \frac{(p+1)^{p+1}\ w^p}{p^p}\right)$$

si on désigne par (p) l'opération de dérivation, on peut appliquer le théorème précédent à la famille $X(w), X'(w) \ldots X^{(p)}(w)$.

Notons $\mathbb{C}[X(w)]$ l'extension algébrique de degré $p+1$ de polynôme minimal $E(w)$.

Il est facile de voir que pour tout k ; $1 \leq k \leq p$ $X^{(k)}(w)$ peut s'écrire comme polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}[w]$ en $X(w)$ de degré inférieur ou égal à p.

Après diverses simplifications la forme linéaire du théorème devient une forme linéaire en 1, $X(w)$, $X^2(w) \ldots X^p(w)$. On obtient alors une minoration effective de la forme linéaire

$$\sum_{k=0}^{k=p} A_k X^k(w) \qquad \text{avec} \quad A_k \in \mathbb{Z} \quad \text{pour}$$

$w = P/Q$ vérifiant $Q > K(p)|P|^p$ où $K(p)$ est une constante dépendant de p et calculable.

En faisant alors $|w| \to 0$ on obtient

$$\left|\sum_{k=0}^{k=p} A_k X^k(w)\right| > H^{-(p+\varepsilon)} \qquad \text{pour} \quad H > H_o$$

Ceci est en accord avec des résultats de Chudnovski concernant les G.C. fonctions [29].

En utilisant le lemme suivant nous en déduisons de "bonnes" mesures effectives d'irrationalité :

Lemme [27]. Soit θ un nombre complexe. On suppose que l'on a un système de formes linéaires :

$$R_N = \sum_{i=0}^{i=p} \theta^i . P_{i,N}$$

où pour $0 \leqslant i \leqslant p$ les $P_{i,N}$ sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$ vérifiant :

a) Il existe $\alpha \in R^+$, $\alpha < 1$ tel que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \text{Log } |R_N| = \text{Log } \alpha.$$

b) Pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant p$ il existe $\beta > 1$ tel que :

$$\lim \frac{1}{N} \text{Log } |P_{i,N}| \leqslant \text{Log } \beta$$

Alors pour tout rationnel p/q on a : pour q assez grand

$$|\theta - p/q| > q^{-(M+\varepsilon)}$$

avec $M = (p-1)\ [-\text{Log } \beta/\text{Log } \alpha + 1]$.

Exemples. En appliquant ce lemme aux équations du 4ème et 5ème degré on obtient une amélioration effective de l'exposant de Liouville.

Pour $p = 3$.

$$E_3(w)\ :\ X^4 - X + w = 0$$

l'exposant de Liouville est amélioré avec $w = 1/Q$ avec $|Q| > 10^{15}$.

Pour $p = 4$.

$$E_4(w)\ :\ X^5 - X + w = 0$$

Cet exposant est amélioré pour $|Q| > 10^{18}$.

Pour $w = 10^{-24}$ on obtient, (si ce point n'est pas exceptionnel) pour q assez grand :

$$|X(w) - p/q| > q^{-4,64538054+\varepsilon}$$

On peut comparer ces résultats à ceux obtenus par Bombieri [28].

Remarque. Nous aurions pu comme dans [20] obtenir des résultats pour la fonction Dilogarithme et les périodes et quasi-périodes d'intégrales elliptiques. La méthode est essentiellement la même, sauf dans le calcul des matrices de monodromie car les singularités sont de type logarithmique. Le fait d'utiliser M_∞ au lieu de M_1 donne des résultats moins bons du point de vue arithmétique mais suffisants pour obtenir de bonnes mesures d'indépendance linéaire.

REFERENCES

[1] SIEGEL : Transcendantal Numbers, Ann. of Maths Studies 16, 1949.

[2] BOMBIERI E : On G functions, Proc. Conf. on Analytic Number theory Durham 1979, Academic Press Vol. 2, chap. 24.

[3] CHUDNOVSKI G.V. : Lecture Notes in Maths n°1052, Number theory, New York 1982, Springer-Verlag.

[4] BERTRAND D et BEUKERS F. : Equations différentielles linéaires et majorations de multiplicités. Ann. Scient. Ecole Normale, Sup. 4ème série, t. 18, 1985, p. 181-192.

[5] CHUDNOVSKI G.V. : Approximations de Padé explicites pour les solutions des équations différentielles linéaires Fuchsiennes. C.R.A.S. Paris t. 290 série A, 135, 21 janvier 1980.

[6] INCE E.L. : Ordinary differential equations. Dover.

[7] RHIN G. : Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité, séminaire D.P.P. 1986, A paraître..

[8] PADE H. : Oeuvres par C. BREZINSKI, Librairie scientifique et Technique A. BLANCHARD Paris 1984 .

[9] RIEMANN : Oeuvres Mathématiques Albert BLANCHARD Paris.

[10] KAMPE DE FERIET : La fonction hypergéométrique, Memorial des Sciences Mathématiques, Gauthier)Villars, Paris, 1937.

[11] COHEN H. : Acceleration de la convergence de certaines récurrences linéaires. Seminaire de Théorie des nombres, 6-13 novembre 1980, Grenoble.

[12] HUTTNER M : Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques, Journal of Number Theory, Vol. 26, n°2, june 1987, p. 166-178.

[13] Mathematiques et Physique. Seminaire de l'Ecole Normale Supérieure 1979-1982, Progress in Mathematics, Birkhaüser.

[14] HEINE : journ. Reine Angew Math.Math. 1857, t. 53, p.284.

[15] BIRCH BJ. : Approximation to cubic inrrationals. Proc. symp App. Math. 4, AMS, Providence 1971.

[16] HUTTNER M. : Problème de Riemann et Irrationalité d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques de Gauss. C.R.A.S. Paris, t. 302, série I, n°17, 1986.

[17] LEVELT AM.M. : Hypergéometric functions Indag Math. XXIII, 1961, p.361-403.

[18] NORLUND NE. : Hypergeometric functions Acta Math. 94, 1955, p. 289-349.

[19] PLEMELJ. : Problems in the sense of Riemann and Klein. Tracts in Math, n°16, Interscience.

[20] CHUDNOVSKI G.V. : Padé approximation and the Riemann monodromy problem. Bifurcation phenomena in Mathematical Physics and Related Topics 1980, Reidel p. 449-510.

[21] Erdely BATEMAN : Higher transcendantal functions, Mc. GrawHill 3v. 1953.

[22] BERTRAND Daniel : Equations différentielles linéaires et analyse diophantienne. Cours de DEA Institut H. Poincaré 1982-83 rédigé par R. LARDON.

[23] CHUDNOVSKI G.V. : On the method of thue Siegel, Annals of Maths 117, 1983, p. 325-382.

[24] HUTTNER M. : Monodromie et approximation diophantienne d'une constante liée aux fonctions elliptiques. C.R.A.S. Paris , t. 304, Série I, n°12 p.315, 1987.

[25] KAMPE DE FERIET et APPEL P. : Fonctions hypergéométriques, Gauthier-Villars- Paris 1926.

[26] BERNARDINELLI : Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolutions analytique des équations algébriques générales. Mémorial des sciences mathématiques, gauthier Villars.

[27] CHUDNOVSKI G.V. : On the method of Thue Siegel. Annals of Mathematics 117 (1983) p. 325-382.

[28] E. BOMBIERI : On the Thue -Siegel-Dyson theorem. Acta arithmetica 148 (1982) p. 255-296.

[29] DV and GV CHUDNOVSKI : The Wronskian formalism for linear differential Equations and Padé approximations. Advances in Mathematics 53, 28-54 1984.

[30] WOLFART Jürgen : Values of Gauss' continued fractions - Preprint.

*   *

*

RESUME

Cette thèse s'intéresse particulièrement aux approximations rationnelles des valeurs prises par des expressions faisant intervenir des fonctions hypergéométriques.

Dans les divers articles qui la composent nous avons commencé par chercher des "approximants de Padé" pour ces expressions. Pour cela, nous avons appliqué une idée de G.V. Chudnovsky qui consiste essentiellement à utiliser les propriétés des équations différentielles vérifiées par ces diverses fonctions analytiques. L'idée d'utiliser les propriétés des équations différentielles pour trouver des approximations rationnelles n'est pas nouvelle et remonte aux travaux de Riemann sur la fraction de Gauss mais une étude précise du reste et des polynômes intervenant dans le calcul de ces approximants utilisant le principe de monodromie nous a permis d'établir de nouvelles formules parfaitement exploitables du point de vue de l'arithmétique.

Ceci nous a permis de trouver de nouvelles mesures d'irrationalité et d'indépendance linéaire pour des nombres algébriques qui améliorent de manière effective l'exposant de Liouville.

On obtient aussi de nouvelles mesures d'irrationalité pour les constantes classiques de l'analyse.

MOTS CLES : Théorie des nombres. Approximants diophantiennes. Approximants de Padé. Equations différentielles dans le champ complexe.

CLASSIFICATION A.M.S. : 10 F 05 - 10 F 25 - 10 F 35 - 33 A 30 - 33 A 65 - 33 A 20 - 65 D 15 - 65 D 25.