THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Jacques AKONOM

PROCESSUS TRANSFORMES D'UN ARIMA OU D'UN PROCESSUS DE WIENER. PROBLEMES D'ESTIMATION.

Soutenue le 22 juin 1988 devant la Commission d'Examen :

Président : J. GEFFROY (Université de Paris VI)

Directeur de Recherche
et Rapporteur : D. BOSQ (Université de Paris VI)

Rapporteurs : J. DELPORTE (Université Catholique de Lille)
C. GOURIEROUX (Université de Lille I)

Membres : H. REINHARD (CNAM, Paris)
P. JACOB (Université de Lille I)

Monsieur le Professeur Jean GEFFROY nous a fait le grand honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse. Nous tenons à lui exprimer notre profonde gratitude.

Monsieur le Professeur Denis BOSQ nous a proposé l'étude de processus non-stationnaires et il a su éveiller le goût de la recherche en mathématique et l'intérêt pour la statistique non-paramétrique. Nous tenons à lui exprimer notre profonde reconnaissance.

Nous remercions très vivement Monsieur le Professeur Christian GOURIEROUX. Les nombreuses discussions que nous avons eues ont permis d'améliorer en de nombreux points la présentation de ce travail.

Monsieur le Professeur Jean DELPORTE a toujours fait preuve à notre égard d'une très grande disponibilité. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre très vive reconnaissance.

Nos remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur Hervé REINHARD qui nous a aidé de ses remarques et a bien voulu faire partie de la commission d'examen.

Monsieur le Professeur Pierre JACOB a également accepté de faire partie de notre jury ; son amitié nous a été précieuse. Nous l'en remercions vivement.

Tous les membres du Laboratoire de Probabilités et Statistique de Lille I ont su nous entourer de leur sympathie pendant la genèse de ce travail et nous prodiguer leurs encouragements. Qu'ils en soient tous remerciés.

Madame Arlette LENGAIGNE a accepté avec beaucoup de gentillesse de dactylographier les manuscrits les plus obscurs. Qu'elle en soit très sincèrement remerciée.

Nous remercions enfin tout le personnel technique de l'U.F.R. qui a assuré la mise en page et la présentation finale de cet ouvrage.

TABLE DES MATIERES

Pages

Pages

INTRODUCTION

Un des problèmes les plus importants en statistique est celui de la modélisation d'un processus. L'hypothèse de stationnarité n'est pas, en général, satisfaite, cependant, on suppose usuellement la possibilité de modéliser le phénomène étudié comme transformé d'un processus stationnaire. Plusieurs types de transformation ont été étudiés.

a) Le processus peut être somme d'un processus stationnaire et d'une tendance, ou d'un processus à accroissements stationnaires et d'une tendance. Lorsque la tendance est polynômiale, les méthodes proposées ont souvent été des méthodes paramétriques, les méthodes non paramétriques étant utilisées moins fréquemment ([1], [8], [12]).

b) Une autre classe de processus est obtenue en supposant que les différences $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ sont stationnaires, ou que des différences d'ordre plus élevé sont stationnaires. Le modèle le plus utilisé dans cette classe est celui des processus ARIMA ([3], [9]). Un processus est dit ARIMA (autoregressive integrated moving average) s'il vérifie une équation aux différences : $\phi(B)\, X_t = \Theta(B)\, \varepsilon_t$, où B est l'opérateur retard, ϕ et Θ des polynômes, et (ε_t) un bruit blanc. Ces processus permettent aussi de modéliser des phénomènes saisonniers (processus SARIMA). Ces diverses séries temporelles partagent avec les processus, somme d'une série stationnaire et d'une tendance, la propriété : il existe un polynôme ϕ tel que $\phi(B)(X_t)$ soit stationnaire. Récemment, D. FINDLEY [7] a étudié la classe des transformations rendant stationnaire un processus. On peut considérer comme une extension des processus ARIMA, les processus fractionnaires ([10]), ou dans le cas d'un processus à temps continu, le mouvement brownien fractionnaire introduit par B. MANDELBROT ([14], [15])

c) E.M. ENGEL ([6]) a étudié les transformés $(\psi(X_t), t \in \mathbb{N})$ d'un processus $(X_t, t \in \mathbb{N})$ ARMA gaussien par une application ψ continue. Il établit que $(\psi(X_t))$ est un ARMA, si et seulement si, ψ est un polynôme ou si (X_t) est un processus moyenne mobile. Il ne semble pas qu'il y ait des résultats généraux sur l'image $\psi(X_t)$ lorsque l'on ne fait plus d'hypothèse de normalité sur (X_t). Si (X_t) est un processus ARMA, ou s'il peut être approché par un ARMA (p,q) la question du choix d'une fonction ψ telle que $(\psi(X_t))$ soit un ARMA de degré inférieur n'est pas résolue.

d) Ces types de transformation sont souvent associés. On rencontre assez fréquemment des modèles du type : $(\log X_t)$ est un processus ARIMA. Ce choix de modèle reçoit rarement une justification théorique. Lorsqu'un processus vérifie l'hypothèse : il existe une fonction ψ telle que $\psi(X_t)$ est un processus ARIMA d'ordre 1, nous proposons une méthode non paramétrique d'estimation de la fonction ψ. On pourrait aussi élargir la classe des modèles ARIMA usuels en considérant une famille de fonctions ψ_α indexée par un paramètre et en faisant l'hypothèse que $\psi_\alpha(X_t)$ est un ARIMA. On peut utiliser, par exemple, les familles de fonctions introduites par G. BOX et D. COX ([2]) $\psi_\lambda(x) = \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}$, $\psi_0(x) = \log x$, $x \in]0, \infty[$ et introduire une méthode paramétrique d'estimation de λ.

Dans le chapitre I, on considère une suite de variables indépendantes $(\varepsilon_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ centrées réduites et on note X_t la suite des sommes partielles : $X_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_t$. Le temps d'occupation d'un intervalle $[a,b]$ par la marche aléatoire X_t , entre les instants 1 et n, est noté $N_n(a,b)$, il est défini par : $N_n(a,b) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[a,b]}(X_t)$. Nous établissons pour ce temps d'occupation un théorème de convergence presque sûre vers le temps d'occupation d'un mouvement brownien. Les travaux classiques et notamment ceux de P. RÉVÉSZ ([16]), E. CSAKI et P. RÉVÉSZ ([4]) utilisent essentiellement la construction de SKOROKHOD. Etant donnée une variable aléatoire X centrée, ayant un moment d'ordre 2, et $(W(t),\ t \in \mathbb{R}_+)$ un processus du mouvement brownien sur un espace probabilisé, on peut construire une suite croissante de temps d'arrêt τ_j tels que $(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})\ ,\ j \in \mathbb{N}^*)$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi que X. Toutefois, dans un article récent ([5]), M. CSÖRGO et P. RÉVÉSZ utilisent un théorème de J. KOMLOS, P. MAJOR, G. TUSNADY [13] sur l'approximation forte d'une marche aléatoire par un processus du mouvement brownien pour établir un résultat sur la convergence presque sûre du temps local. Il ne semble pas que l'on puisse étendre la construction de SKOROKHOD à des variables $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ non indépendantes, aussi nous proposons d'obtenir par une méthode directe un résultat sur l'approximation forte du temps d'occupation d'une marche aléatoire. Tout d'abord, on établit que le résultat de B. GNEDENKO sur la convergence uniforme de la densité f_n de $n^{-1/2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)$ vers la densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$ s'étend aux dérivées successives de f_n. On peut alors, par un calcul direct comparer le temps d'occupation par la marche aléatoire $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ de deux intervalles $[a,\ a+\delta]$, $[b\ ,\ b+\delta]$ de même longueur. Le théorème de J. KOMLOS, P. MAJOR, G. TUSNADY permet d'en déduire le résultat suivant : si les variables (ε_i) ont un moment d'ordre p , $p > 3$, on peut construire une suite (X_t) et un processus du mouvement brownien tels que :

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \left| N_n(a, a+\delta) - \int_0^n 1_{[a,a+\delta]}(W(s))ds \right| = o(n^{(1/3)+(1/3p)+\varepsilon}) \text{ p.s.}$$

Dans le chapitre II, on définit un processus linéaire stationnaire $(\xi_t , t \in \mathbb{N})$ par $\xi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \varepsilon_{t-j}$ où $(\varepsilon_t , t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc, et on étudie le processus des sommes partielles $X_o = 0$, $X_t = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_t$. On montre qu'il est possible de construire sur un espace probabilisé assez riche, un processus du mouvement brownien $(W(t), t \in [0, +\infty[)$ et un processus $(X^*_t , t \in \mathbb{N})$ de même loi que $(X_t , t \in \mathbb{N})$ tel que , $\forall \eta > 0 \quad \sup_{0 \leq k \leq n} |X^*_k - W(k)| = o(n^{(1/p)+\eta})$ p.s. si ε_t a un moment d'ordre p , et $|\pi_j| = o(j^{-2-\eta})$.

La méthode utilisée dans le chapitre I est reprise et permet d'établir la convergence en loi du temps d'occupation normalisé du processus $(X_t , t \in \mathbb{N})$ vers le temps local d'un mouvement brownien. Dans le cas particulier d'un processus ARIMA gaussien d'ordre d'intégration 1, on obtient des résultats sur la convergence presque sûre.

Un problème d'estimation est étudié dans le chapitre III, on suppose que le processus observé $(X_t , t \in \mathbb{N})$ est le transformé par une application continue ψ d'une marche aléatoire ou d'un processus ARIMA, on propose alors un estimateur $\hat{\psi}_n$ de ψ. L'image d'un processus ARIMA d'ordre 1 $(Z_t , t \in \mathbb{N})$ par une application affine $(a Z_t + b , t \in \mathbb{N})$ étant encore un processus ARIMA d'ordre 1, nous imposons en outre les conditions $\psi(o) = o$, $\psi(1) = 1$, pour assurer l'unicité.

Si le processus (X_t) a été observé entre les instants 0 et n , on définit $\hat{\psi}_n$ par : $\hat{\psi}_n(a) = \frac{N_n(o,a)}{N_n(o,1)}$ où $N_n(o,a) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[o,a]}(X_t)$, et on montre que l'estimateur $\hat{\psi}_n(a)$ converge en probabilité vers $\psi(a)$, une majoration de l'écart entre $\psi(a)$ et $\hat{\psi}_n(a)$ est proposée.

Si $(\psi(X_t), t \in \mathbb{N})$ est un processus à accroissements indépendants et si ψ est de classe C^1 , on définit un estimateur qui converge presque sûrement vers ψ' , la convergence étant uniforme sur tout compact.

Le chapitre IV est consacré à une généralisation des processus ARIMA. Un processus $(X_t , t \in \mathbb{N})$ sera appelé un processus ARIMA fractionnaire d'ordre d s'il vérifie une équation aux différences :

$$(I-B)^d \phi(B) X_t = \Theta(B) \varepsilon_t \tag{1}$$

où (ε_t) est un bruit blanc, B l'opérateur retard, ϕ et θ des polynômes, d un nombre réel, $d - 1/2 \notin \mathbb{Z}$, et $(I-B)^d$ est défini par son développement binômial : $(I-B)^d = I - dB + \frac{d(d-1)}{2} B^2 - \dots$.

Ces processus ont été introduits pour modéliser des phénomènes fortement corrélés (encore appelés à mémoire longue). C'est le cas de phénomènes non stationnaires dont l'étendue $\sup_{0 \leq t \leq T} X_t - \inf_{0 \leq t \leq T} X_t$ est proportionnelle à T^α , $\alpha \neq 1/2$. Apparus pour la première fois dans les travaux de H. HURST [11], ils ont été l'objet d'études par B. MANDELBROT, J. VAN NESS, J. HOSKING parmi bien d'autres ([10], [14], [15]).

L'équation aux différences (1) ne suffit pas à définir $(X_t , t \in \mathbb{N})$, il faut en outre un ensemble de conditions initiales, or contrairement à ce que nous connaissons pour les ARIMA d'ordre d entier, lorsque d est fractionnaire l'influence de $(\varepsilon_j , j \leq 0)$ dans l'écriture de X_t , n'est plus asymptotiquement négligeable devant celle de $(\varepsilon_j , j > 0)$, lorsque

$t \to \infty$.

Si nous définissons (X_t) par :

$$(I-B)^d \phi(B) X_t = \Theta(B) \tilde{\varepsilon}_t \qquad \text{où} \qquad \tilde{\varepsilon}_t = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \varepsilon_t & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

et $X_t = 0$, $t \leq 0$, le processus normalisé, après changement d'échelle des temps et de l'espace défini par :

$$\left(\frac{1}{n^{d-1/2}} X_{[nt]} \ , \ t \in [0,1]\right) \quad \text{converge en loi vers}$$

$$\left(\frac{\sigma\ \theta(1)}{\phi(1)\ \Gamma(d)} \int_0^t (t-s)^{d-1}\, dW(s) \ , \ t \in [0,1]\right) \ ,$$

si ε_1 est une variance centrée, de variance σ^2 , ayant un moment d'ordre p strictement supérieur à $\max(\frac{1}{d-1/2}, 2)$.

Une application à la covariance empirique est donnée. Bien que partiels, ces résultats peuvent être une contribution au problème de l'estimation du degré d'un processus ARIMA. En effet, dans la plupart des méthodes, il s'agit soit de tester si le degré est égal à 1 , ([17]) soit de construire un estimateur, en supposant que le degré d est entier. Il peut être plus intéressant pour éviter les phénomènes de sur - ou de sous-différenciation de permettre au degré d de prendre des valeurs non entières et de choisir la classe des processus ARIMA fractionnaires.

Dans l'annexe I, sont donnés des résultats, pour la plupart classiques sur la mélangeance des processus linéaires et plus particulièrement sur celle des ARMA.

L'annexe II, qui est à l'origine de ce travail, étudie la transformée d'un processus du mouvement brownien par une application continue bijective.

B I B L I O G R A P H I E

[1] V.G. ALEKSEEV - On methods for extracting the trend of certain classes of random processes. Theory Proba and Math. Stat. N° 27, 1-8 (1983).

[2] G.E. BOX et D.R. COX - An analysis of transformations J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 26 p. 211-243 (1964).

[3] G.E. BOX et G. JENKINS - Time Series Analysis : Forecasting and Control. Holdenday (1970).

[4] E. CSAKI et P. REVESZ - Strong invariance for local times. Z. Wahrschein. verw. Geb. 62, 263-278 (1983).

[5] M. CSÖRGO et P. REVESZ - On strong invariance for local times of partial sums. Stochastic Processes and their Appl. 20, 59-84 (1985).

[6] E.M. ENGEL - A unified approach to the study of sums, products, time aggregation and others functions of ARMA processes. J.T.S.A.5, n° 3, 159-171 (1984).

[7] D.F. FINDLEY - On backshift operator polynomial transformation to stationarity for non stationary time series and their aggregates. Commun. Stat. Theor. Math. 14, 1, 49-61 (1985).

[8] L. FRANZINI et A. HARVEY - Testing for deterministic trend and seasonal components in time series models. Biometrika, 70, 673-682. (1983).

[9] C. GOURIEROUX et A. MONFORT - Cours de séries temporelles. Economica. Paris 1983.

[10] J.R. HOSKING - Fractional differencing Biometrika 68, 165-176 (1981).

[11] H.E. HURST, R.P. BLACK, Y.M. SINAIKA - Long term storage in reservoirs. An experimental study, Constable, London (1965).

[12] I.SH. IBRAMKHALILOV et A.V. SKOROKHOD - Determination of the mean of a Wiener process observed on an infinite interval. Theory of Prob. and its Appl. 18, 4, 767-771 (1973).

[13] J. KOMLOS, P. MAJOR, G. TUSNADY - An approximation of partial sums of independent R.V's and sample D.F. Z. Wahrsch. Gebiete 32, 111-131 (1975), et 34, 33-58 (1976).

[14] B. MANDELBROT - Limit theorems on the self.normalized range for weakly and strongly dependent processes. Z. Wahrsch. verw. Geb. 31, 271-285 (1975).

[15] B. MANDELBROT et J. VAN NESS - Fractional brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Review vol. 10, 4, 422-437 (1968).

[16] P. REVESZ - A strong invariance principle of the local time of R.V.'s with continuous distributions. Stud. Sci. Math. Hung.16, 219-228 (1981).

[17] V. SOLO - The order of differencing in ARIMA models. J.A.S.A. 79, 388, p. 916-921 (1984).

CHAPITRE I

TEMPS D'OCCUPATION D'UNE MARCHE ALEATOIRE.

I - INTRODUCTION.

Soit $(\varepsilon_j\ ,\ j \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Si $X_t = \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j\ ,\quad t \in \mathbb{N}^*$ désigne la marche aléatoire associée, on appelle temps local le nombre de fois, où la valeur x est atteinte par le processus (X_t) entre les instants 1 et n. Ce temps local est donc défini par :

$$N_n(x) = \sum_{t=1}^{n} 1_{\{x\}}(X_t) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad x \in \mathbb{Z} .$$

Comme la marche aléatoire converge faiblement après changement de temps vers un processus de Wiener, il est naturel de comparer le temps local précédent et celui associé à un tel processus. P. LEVY [15] a introduit les notions de temps d'occupation et de temps local d'un processus de Wiener indexé par $\mathbb{R}^+$. Soit $(W(t),\ t \geq 0)$ un tel processus de Wiener. Le temps d'occupation H est défini pour tout borélien A de $\mathbb{R}$ par :

$$H(A,t) = \lambda^+ \{s : s \leq t\ ,\ W(s) \in A\} = \int_0^t \mathbb{1}_A(W(s))\, ds ,$$

où λ^+ désigne la mesure de Lebesgue sur $[\mathbb{R}^+ , \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)]$.

Pour toute valeur donnée de t , ce temps d'occupation peut être considéré comme une mesure aléatoire sur $[\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})]$. P. LEVY [15] a montré que ce temps d'occupation est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si $(W(t), t \geq 0)$ est un processus de Wiener sur l'espace probabilisé (Ω, A, P) , H.F. TROTTER [24] a montré l'existence d'un sous-ensemble Ω_o , $\Omega_o \subset \Omega$, $P(\Omega_o) = 1$ et d'une fonction $L(x,t) = L(x,t,\omega)$ $(x \in \mathbb{R}\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\ ,\ \omega \in \Omega_o)$ continue par rapport au couple (x,t) telle que :

$$L(x,t,\omega) = \frac{d}{dx} \int_0^t 1_{]-\infty,x]} (W(s))\, ds$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{]x-\varepsilon,x]} (W(s))\, ds \quad .$$

$L(x,t)$ est appelé le <u>temps local</u> en x du processus de Wiener. Il admet une fonction de répartition donnée par :

$$\forall u \geq 0\ ,\ P(L(x,t) \leq u) = 2\Phi \left(\frac{|x|+u}{\sqrt{t}}\right) - 1 \qquad \text{(P. LEVY [15])}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{(|x|+u)/\sqrt{t}} e^{-v^2/2}\, dv\ ,$$

où ϕ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Les premiers résultats sur les comparaisons des temps locaux de marches aléatoires et de mouvements browniens ont été obtenus, lorsque le bruit ne charge que les valeurs ± 1 : $P(\varepsilon_1 = 1) = P(\varepsilon_1 = -1)$ (voir W. FELLER [10] et P. REVESZ [22]).

Ces résultats ont été étendus par E. CSAKI et P. REVESZ [5] au cas de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Leur résultat essentiel est le suivant :

Théorème (CSAKI - RÉVÉSZ, 1983) [4]

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $P(Z=k) = p_k$ $k = \pm 1 , \pm 2, \dots$ telle que

$$EZ = 0 \ , \ EZ^2 = \sigma^2 \ , \quad \text{pgcd}\ \{k \mid p_k \neq 0\} = 1 \ .$$

On peut construire un espace probabilisé (Ω, A, P), un processus de Wiener $(W(t),\ t \geq 0)$ et une suite de v.a.i.i.d. ε_j de même loi que Z , tels que,

i) Si $\mu_{2m} = \sum_k |k|^{2m}\, p_k < \infty$ avec $3/2 \leq m \leq 2$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{(-1/2m)-\varepsilon}(L(x,n\sigma^2) - \sigma^2\, N_n(x)) = 0 \quad \text{p.s.}$$

ii) Si $\mu_{m+1} = \sum |k|^{m+1}\, p_k < \infty$ avec $m > 6$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(1/4)\cdot(3/2m)-\varepsilon} \sup_{x\in\mathbb{Z}} (L(x,n\sigma^2) - \sigma^2\, N_n(x)) = 0 \quad \text{p.s.} \ .$$

En particulier si Z a des moments de tous ordres, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}} |L(x,\ n\sigma^2) - \sigma^2\, N_n(x)| = o(n^{(1/4)+\varepsilon}) \quad \text{p.s.} \ .$$

P. RÉVÉSZ [16] a étendu ce résultat à des variables aléatoires (ε_j) continues, $E\,\varepsilon_j = 0$, $E\,\varepsilon_j^2 = 1$, ayant des moments de tous ordres et donne le théorème suivant :

Théorème (P. RÉVÉSZ, 1981) [23]

Pour tout $\eta > 3/10$, il existe un processus de Wiener $(W(t),\ t \geq 0)$ et une marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ avec $X_t - X_{t-1}$ de même loi que ε_t tels que :

$$\left|\sum_{t=1}^{n} 1_{[0,1]}(X_t) - L(0,n)\right| = o(n^{\eta}) \quad \text{p.s.}$$

L'ensemble de ces travaux utilise de manière essentielle la construction de Skorohod (voir par exemple, [3] p. 276) c'est-à-dire la possibilité de construire sur un espace probabilisé assez riche, un mouvement brownien $(W(t),\ t \geq 0)$ défini sur cet espace et une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_k\ ,\ k \in \mathbb{Z})$ tels que les variables $W(\tau_k) - W(\tau_{k-1})$ soient indépendantes, de même loi et que le processus $(W(\tau_k),\ k \in \mathbb{Z})$ ait même loi que la marche aléatoire (X_k).

E. PERKINS [18] considère une suite (ε_j) de variables centrées, de variance 1, indépendantes et définit le processus (X_n, L_n) par

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^{[nt]} \varepsilon_j + (nt - [nt])\, \varepsilon_{[nt]+1} \right), \quad t \geq 0 ,$$

$$L_n(j/n, x) = 2 \sum_{i=1}^{j} 1_{A_i^n}(x)\ |X((i+1)/n) - x| ,$$

où A_i^n est l'intervalle :

$$[\min(X(i/n),\ X((i+1)/n)\ ,\ \max(X(i/n),\ (X((i+1)/n)[\ ,$$

$L_n(t,x)$ $(t \in \mathbb{R}_+\ ,\ x \in \mathbb{R})$ étant obtenu par interpolation linéaire.
Il établit, en utilisant des méthodes d'analyse non standard, le théorème : (E. PERKINS, 1982, [18], th. 1.3) :

Si les variables (ε_j) vérifient la condition de Lindeberg :

$$\forall t > 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} E(\varepsilon_j^2 \quad 1\!\!1_{\{|\varepsilon_j|>t\sqrt{n}\}}) = 0 \quad ,$$

alors pour tout k-uple $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$

$(X_n \ , \ L_n(.,x_1) \ ,\ldots, \ L_n(.,x_k))$ converge en loi

dans $C(\mathbb{R}^{k+1})$ vers $(W, \ L(.,x_1) \ ,\ldots, \ L(.,x_k))$.

De plus, A.N. BORODIN [2] a étudié la loi limite de la différence entre le temps local de la marche aléatoire et celui du mouvement brownien, convenablement normalisé.

Il ne semble pas que le procédé de construction de Skorohod puisse s'étendre au cas où les variables (ε_j) sont corrélées. Or des processus $X_t = \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j$ où les variables ε_j sont stationnaires, non indépendantes sont fréquemment étudiés, c'est en particulier le cas des processus ARIMA d'ordre d'intégration 1.

Nous nous proposons donc dans ce chapitre d'établir des résultats relatifs à la convergence forte du temps local d'une marche aléatoire par une méthode directe, sans utiliser la construction de Skorohod, mais en comparant les temps d'occupation de deux intervalles de même longueur.

De façon plus précise, notant

$$N_n(a,b) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[a,b]}(X_t) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* \quad ,$$

où X est une marche aléatoire, on établit une propriété de continuité de ce temps d'occupation : pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout δ, $0 < \delta < 1$:

$$\sup_{0 \leq h \leq k_n} |N_n(a, a+\delta) - N_n(a+h\delta, a+(h+1)\delta)| = o(k_n^{1/2} n^{(1/4)+\varepsilon}) \quad \text{p.s.} \quad .$$

Celle-ci permet en utilisant un résultat de Komlos-Major-Tusnady [14] d'établir un théorème de convergence forte du temps local de la marche aléatoire vers le temps local du mouvement brownien.

Ces résultats seront étendus dans le chapitre 2 au cas de variables corrélées et en particulier aux processus ARIMA d'ordre 1.

2 - NOTATIONS ET HYPOTHESES.-

Soit $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, de fonction de répartition F telles que

(1.1.) F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ,

il existe un entier $p \geq 3$, tel que $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \, dF(x) < \infty$ et

(1.2.) $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x) = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF(x) = 1$,

(1.3.) il existe $\alpha_o \in \mathbb{N}^*$, tel que $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^{\alpha_o} dt < \infty$, où $\psi(t) = E(\exp ite_1)$.

Dans la suite, les propriétés suivantes de la fonction caractéristique seront utilisées :

i) La fonction ψ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (RENYI [21] p. 286, th. 2).

ii) La variable aléatoire e_1 ayant une fonction de répartition F absolument continue, d'après le lemme de Riemann sur l'intégrale de Fourier, on a :

$$\lim_{|t|\to\infty} |\psi(t)| = 0 \qquad \text{(id, p. 289, th. 8)} \quad .$$

iii) Si une variable aléatoire ξ a une distribution de treillis ou latticielle, c'est-à-dire s'il existe des constantes d et r telles que $P(\xi \in \{kd+r \mid k \in \mathbb{Z}\}) = 1$, sa fonction caractéristique ψ vérifie : $\forall n \in \mathbb{Z}, |\psi(\frac{2\pi n}{d})| = 1$. Si elle n'a pas une distribution de treillis, on a :

$$\forall t \neq 0 \qquad |\psi(t)| < 1 \; . \qquad \text{(id, p. 291, th. 11)} \; .$$

iv) On en déduit, sous les hypothèses (1.1) et (1.2), que : pour tout $\eta > 0$,

$$\sup_{\mathbb{R}-[-\eta,\eta]} |\psi(t)| = q_\eta < 1 \; .$$

v) De plus d'après l'égalité de Parseval, si la variable aléatoire (e_j) a une densité f bornée et continue, donc élément de L^2 , la condition (1.3) est vérifiée avec $\alpha_o = 2$.

Dans la suite, on note :

$\#\, B$ le nombre d'éléments de la partie finie B ;

$X_n = \sum_{j=1}^{n} e_j$;

$N_n(a,b) = \# \{t \mid 1 \leqslant t \leqslant n \; , \; X_t \in [a,b]\} = \sum_{t=1}^{n} 1_{[a,b]}(X_t)$

et on désigne par F_n la fonction de répartition de X_n . La fonction caractéristique de X_n est donc $(\psi(t))^n$ et d'après la formule d'inversion, ([21], p. 294), vérifie :

$$E\, 1_{[a,b]}(X_n) = F_n(b) - F_n(a)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Re \left[(\psi(t))^n \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it}\right] dt ,$$

où $Re\, z$ désigne la partie réelle du nombre complexe z.

Nous commençons par quelques lemmes où nous comparons les temps d'occupation de deux intervalles de même longueur entre les instants 1 et n.

3 - LEMMES PRELIMINAIRES.-

Lemme 1.- Sous les hypothèses (1.1) à (1.3.), il existe une constante C_F ne dépendant que de la fonction de répartition des (e_j), telle que pour tous $a \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < 1$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$|E[N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta)]| \leq C_F[1+|a|\delta+k\delta^2] .$$

Preuve :

i) Expression développée de la quantité à majorer.

$$D_n(k,\delta) = E[N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta)]$$
$$= \sum_{j=1}^{n} [F_j(a+\delta)-F_j(a)-F_j(a+k\delta)+F_j(a+(k+1)\delta)]$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} Re\left[(\psi(t))^j \frac{e^{-iat}-e^{-i(a+\delta)t}-e^{-i(a+k\delta)t}+e^{-i(a+(k+1)\delta)t}}{it}\right] dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} Re\left[4i(\psi(t))^j e^{-i(a+(k+1)\delta/2)t} \sin\frac{\delta t}{2} \sin\frac{kt\delta}{2}\right] \frac{dt}{t} .$$

Posons :

$$\psi_j(t) = \frac{1}{t} \operatorname{Re}\left[i(\varphi(t))^j e^{-i(a+(k+1)\delta/2)t}\right] \sin\frac{\delta t}{2} \sin\frac{k\delta t}{2} .$$

ii) Majorations de $|\psi_j(t)|$

L'existence d'un moment d'ordre 3 permet d'écrire :

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} - i\, E\, e_1^3 \frac{t^3}{6} + o(t^3) ,$$

au voisinage de l'origine.

Il existe donc : $\eta > 0$ et $A > 0$ tels que : $\forall t \in [-\eta, \eta]$

$$|\varphi(t)| \leq 1 - \frac{t^2}{4} \quad \text{et} \quad |\operatorname{Arg} \varphi(t)| \leq A\, |t|^3 .$$

On en déduit :

$$|\operatorname{Re}([\varphi(t)]^j)| \leq (1 - \frac{t^2}{4})^j \leq e^{-jt^2/4} ,$$

$$|\operatorname{Im}([\varphi(t)]^j)| \leq e^{-jt^2/4} \inf(1, A\, j\, |t|^3) .$$

Ces inégalités nous permettent alors de majorer la fonction ψ_j sur l'intervalle $[-\eta, \eta]$:

$\forall t \in [-\eta, \eta]$,

$$|\psi_j(t)| \leq \frac{1}{t} \left[|\operatorname{Re}((\varphi(t))^j) \sin(a+(k+1)\delta/2)t| + |\operatorname{Im}(\varphi(t))^j|\right] \left|\sin\frac{\delta t}{2} \sin\frac{k\delta t}{2}\right|$$

$$\leq \frac{1}{t} \left[|\sin(a+(k+1)\delta/2)t| + \inf(1, A\, j\, |t|^3)\right] e^{-jt^2/4} \left|\sin\frac{\delta t}{2}\right| \left|\sin\frac{k\delta t}{2}\right| .$$

D'autre part, une majoration de cette fonction peut aussi être obtenue sur le complémentaire de cet intervalle :

$$\forall t \in \mathbb{R} - [-\eta,\eta] \quad , \quad |\psi_j(t)| \leqslant |\varphi(t)|^j \left|\frac{\sin(\delta t/2)}{t}\right| \quad .$$

D'après les propriétés rappelées de la fonction caractéristique, il existe un réel $q_\eta \in]0,1[$, ne dépendant pas de δ, tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} - [-\eta,\eta] \qquad |\varphi(t)| \leqslant q_\eta \quad .$$

On peut alors majorer $|\psi_j(t)|$:

$$\forall t \in \mathbb{R} - [-\eta,\eta] \, , \quad |\psi_j(t)| \leqslant q_\eta^{\,j-\alpha_o} \, |\varphi(t)|^{\alpha_o} \frac{\delta}{2} \leqslant q_\eta^{\,j-\alpha_o} \, |\varphi(t)|^{\alpha_o} \, .$$

iii) Majoration de $D_n(k,\delta)$.

On en déduit :

$$D_n(k,\delta) \leqslant I_1 + I_2 + I_3 \quad , \quad \text{où} \quad :$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_0^\eta e^{-jt^2/4} \, k\delta^2 \, A \, j \, t^4 \, dt \ ,$$

$$I_2 = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_0^\eta e^{-jt^2/4} \, \frac{|\sin(a+(k+1)\delta/2)t| \; |\sin k\delta t/2| \; |\sin \delta t/2|}{t} \, dt \quad ,$$

$$I_3 = \frac{4}{\pi} \left(\alpha_o + 8 \sum_{j=\alpha_o}^{n} \int_\eta^\infty q_\eta^{\,j-\alpha_o} \, |\varphi(t)|^{\alpha_o} \, dt\right) \quad .$$

On peut majorer chacune de ces quantités.

$$I_1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{Aj}{\pi} \, k\delta^2 \int_0^\infty t^4 \, e^{-jt^2/4} \, dt$$

$$\leqslant \frac{12 \; A \; k\delta^2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j\sqrt{j}}$$

$$\leqslant C_o \; k\delta^2$$

où C_o est indépendant de a, δ, k, n .

$$I_2 \leqslant \frac{2\delta}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\eta} e^{-jt^2/4} \left|\sin(a + \frac{k+1}{2}\,\delta)t \ \sin\,(\frac{k\delta t}{2})\right| dt$$

$$\leqslant \frac{2\delta}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-xt^2/4} \left|\sin(a + \frac{k+1}{2}\,\delta)t\right| \left|\sin \frac{k\delta t}{2}\right| dt\right] dx$$

$$\leqslant \frac{8\delta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\sin(a+(k+1)\delta/2)t|\ |\sin k\delta t/2|}{t^2}\, dt \ ,$$

et utilisant l'inégalité de Schwarz,

$$I_2 \leqslant \frac{8\delta}{\pi} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(a+(k+1)\delta/2)t}{t^2}\, dt\right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 k\delta t/2}{t^2}\, dt\right)^{1/2}$$

$$\leqslant 4\delta \left(\left||a| + \frac{(k+1)\delta}{2}\right| \cdot \left|\frac{k\delta}{2}\right|\right)^{1/2} \leqslant C_1\ \delta(|a| + k\delta) \ .$$

Finalement, on a :

$$I_3 \leqslant \frac{4}{2\pi} \left(\alpha_o + 4 \sum_{j=\alpha_o}^{n} q_\eta^{\,j-\alpha_o} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^{\alpha_o}\, dt\right)$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \left(\alpha_o + 4\ C' \frac{1}{1-q_\eta}\right)$$

où C' est une constante.

On obtient donc une majoration de $D_n(k,\delta)$ par

$$C_o\, k\delta^2 + C_1(|a| + k\delta)\delta + C_2$$

où C_o , C_1 , C_2 désignent des constantes indépendantes de k, δ, a, n.

Le lemme 1 s'en déduit. Q.E.D.

<u>*Remarque*</u> : Si les (e_j) suivent une loi normale $N(0,1)$ le calcul peut être mené explicitement et les majorations sont plus faciles à obtenir. En effet, on a :

$$D_n(k,\delta) = E\left[N_n(a,a+\delta) - N_n(a+k\delta, a+(k+1)\delta)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \left(\int_a^{a+\delta} e^{-x^2/2j}\, dx - \int_{a+k\delta}^{a+(k+1)\delta} e^{-x^2/2j}\, dx\right.$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \int_a^{a+\delta} \left[\exp(-x^2/2j) - \exp(-(x+k\delta)^2/2j)\right] dx$$

Supposons tout d'abord $a > 0$, on en déduit :

$$D_n(k,\delta) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \int_a^{a+\delta} (1 - e^{-(2k\delta x+k^2\delta^2)/2j})\, dx$$

$$|D_n(k,\delta)| \leqslant \delta \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \left(1 - e^{-(2k(a+\delta)+k^2\delta^2)/2j}\right)$$

$$\leqslant \delta \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(1 - \exp(-(2k(a+\delta)+k^2\delta^2)/2t)\right) dt$$

$$= \frac{\delta(2k(a+\delta)+k^2\delta^2)^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (1-e^{-1/2u}) \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \delta\left[2k(a+\delta)+k^2\delta^2\right]^{1/2} .$$

Si $a < 0 < a + \delta$ $\quad D_n(k,\delta) \leqslant \delta \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \left(1 - e^{-(a+(k+1)\delta)^2/2j}\right)$

et on obtient de même $\quad D_n(k,\delta) \leqslant \delta\left[a+(k+1)\delta\right]$.

Le cas $a < -\delta$ s'obtient de la même manière en utilisant la symétrie de la fonction $e^{-x^2/2}$.

Lemme 2.- Sous les hypothèses du lemme 1, il existe une constante $C_{2,F}$ ne dépendant que de la fonction de répartition des (e_j) telle que pour tous $a \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < 1$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$E\left[N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta)\right]^2 \leqslant C_{2,F}(1+\delta\sqrt{n})\ (1+k\delta^2)$$

Preuve

$$E[N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta)]^2 =$$

$$E[\sum_{j=1}^{n} 1_{[a,a+\delta]}(X_j)-1_{[a+k\delta,a+(k+1)\delta]}(X_j)]^2$$

$$= A + B_1 + B_2$$

où : $A = \sum_{j=1}^{n} E[1_{[a,a+\delta]\cup[a+k\delta,a+(k+1)\delta]}(X_j)]$,

$$B_1 = 2 \sum_{j=1}^{n} E[1_{[a,a+\delta]}(X_j) \sum_{j'=j+1}^{n} 1_{[a-X_j,a+\delta-X_j]}(X_{j'}-X_j) - 1_{[a+k\delta-X_j,a+(k+1)\delta-X_j]}(X_{j'}-X_j)]$$

$$B_2 = 2 \sum_{j=1}^{n} E[1_{[a+k\delta,a+(k+1)\delta]}(X_j) \sum_{j'=j+1}^{n} 1_{[a+k\delta-X_j,a+(k+1)\delta-X_j]}(X_{j'}-X_j) - 1_{[a-X_j,a+\delta-X_j]}(X_{j'}-X_j)] \quad .$$

Pour majorer B_1 (resp. B_2), on remarque que pour $j' > j$, X_j et $X_{j'}-X_j$ sont indépendants et $X_{j'}-X_j$ a même loi que $X_{j'-j}$. En outre $a - X_j < 0 < a+\delta - X_j$, si $X_j \in [a,a+\delta]$. Le lemme 1 permet donc d'écrire

$$B_1 \leq 2\, C_{1,F}(1+k\, \delta^2/2) \sum_{j=1}^{n} E\, 1_{[a,a+\delta]}(X_j) \quad .$$

Il reste à calculer

$$E\, 1_{[a,a+\delta]}(X_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Re\left[(\psi(t))^j \frac{e^{-iat}-e^{-i(a+\delta)t}}{it}\right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Re[(\psi(t))^j e^{-i(a+\delta/2)t} \sin \delta t/2] \frac{dt}{t} \quad .$$

On a utilisé dans la démonstration du lemme 1 la propriété suivante :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall t \in [-\eta,\eta] \qquad \left|\frac{(\psi(t))^j \sin \delta/2\, t}{t}\right| \leq \frac{\delta}{2}\, e^{-jt^2/4} ,$$

$$\forall t \in R -]-\eta,\eta[\quad \left|\frac{(\psi(t))^j \sin \delta/2\, t}{t}\right| \leq q_\eta^{\,j-\alpha_o}\, |\psi(t)|^{\alpha_o} .$$

On en déduit :

$$E \sum_{j=1}^{n} 1_{[a,a+\delta]}(X_j) \leq \alpha_o + \sum_{j=\alpha_o}^{n} \left(\frac{\delta}{2} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-jt^2/4}\, dt + q_\eta^{\,j-\alpha_o} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^{\alpha_o}\, dt\right)$$

$$\leq \alpha_o + \sum_{j=\alpha_o}^{n} \frac{\delta}{2\sqrt{j}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/4}\, du + C_1 ,$$

$$\leq C_2 + C_3\, \delta \sqrt{n} ,$$

On en déduit l'existence de constantes C et C' telles que :

$$A \leq C + C'\, \delta\sqrt{n}$$

$$B_i \leq C(1+k\, \delta^2)\,(1+\delta\sqrt{n}) \quad , \quad i = 1,2 .$$

En vue de la majoration de $E[N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta)]^m$ nous aurons besoin d'une extension d'un théorème de Gnedenko, il fera l'objet de la section suivante.

4 - UNE EXTENSION D'UN THEOREME DE GNEDENKO.-

GNEDENKO en 1954, a établi le résultat suivant [11] :

Théorème 1.- (cf [19], [21]).

Soit $e_1,\dots,e_n,\dots$ des variables aléatoires indépendantes de même loi, dont la densité $f(x)$ existe et est bornée, supposons de plus que $E\,e_1 = 0$, et $E\,e_1^2 = 1$, alors la densité $f_n(x)$ de $\zeta_n^* = \frac{e_1 + \ldots + e_n}{\sqrt{n}}$ vérifie :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right| = 0$$

On va établir par des méthodes proches de celle de Gnedenko des résultats de même type concernant la dérivée.

Théorème 2.- Soit $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes de même loi, ayant une fonction de répartition F absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on suppose de plus que $E\,e_1 = 0$, $E\,e_1^2 = 1$, et que la fonction caractéristique ψ vérifie :

(1.4.) il existe $\beta > 0$ tel que $\lim_{t\to+\infty} t^\beta \psi(t) = 0$.

Alors il existe un entier n_o tel que pour $n \geq n_o$, $\zeta_n^* = \frac{e_1 + \ldots + e_n}{\sqrt{n}}$ ait une densité f_n de classe C^2 et :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right| = 0 \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n^{(i)}(x) - \frac{d^i}{dx^i} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right) \right| = 0 \ , \quad i = 1,2 \ .$$

Preuve

i) Dérivabilité de f_n

La fonction caractéristique de f_n sera notée $\psi_n(t)$, $\psi_n(t) = \left[\psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$.

La condition (1.4.) implique (1.3.) , (il suffit de choisir $\alpha_o > \frac{1}{\beta}$) et $t^2 \psi_n(t) = n^{3/2}\, t^{-1} \left[\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^\beta \psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{3/\beta} \left[\psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n-3/\beta}$ sera intégrable pour $n \geq [3/\beta] + 1 = n_o$.

La densité $f_n(x)$ vérifie :

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\psi(\frac{t}{\sqrt{n}})]^n \, e^{-ixt} \, dt .$$

Pour $n \geq n_o$, $|t^2 \psi_n(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc

$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \psi_n(t) \, e^{-ixt} \, dt$ converge uniformément par rapport à x

et

$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t) \, e^{-ixt} \, dt$ est une fonction de

classe C^2, la dérivée seconde étant :

$$f''_n(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\psi(\frac{t}{\sqrt{n}})]^n \, t^2 \, e^{-ixt} \, dt .$$

ii) Approximation de la dérivée première.

Etudions :

$$|f'_n(x) - \frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2})| = \frac{1}{2\pi} \left|\int_{-\infty}^{\infty} -it([\psi(\frac{t}{\sqrt{n}})]^n - e^{-t^2/2}) \, e^{-ixt} \, dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}(I_1 + I_2 + I_3) ,$$

où :

$$I_1 = \int_{|t|<T} |t| \, |e^{-t^2/2} - \psi_n(t)| \, dt ,$$

$$I_2 = \int_{|t|\geq T} |t| \, e^{-t^2/2} \, dt = 2\exp(-T^2/2) ,$$

$$I_3 = \int_{|t|>T} |t| \, |\psi_n(t)| \, dt .$$

Pour majorer I_3 , on remarque que $\psi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$; on a établi dans la démonstration du lemme 1, l'existence de constantes $\eta > 0$ et $q_\eta \in]0,1[$ telles que :

$$\forall t \in [-\eta,\eta] \qquad |\psi(t)| \leq 1 - \frac{t^2}{4} \leq e^{-t^2/4} \ , \quad \text{d'où}$$

$$\forall t \in [-\eta\sqrt{n}, \eta\sqrt{n}] \ |\psi_n(t)| \leq e^{-t^2/4} \ ,$$

et $\forall t \in \mathbb{R} - [-\eta,\eta] \qquad |\psi(t)| \leq q_\eta \quad$ et $\quad |\psi(t)| \leq K\, t^{-\beta}$.

En écrivant

$$\int_T^\infty |t\,\psi_n(t)|\,dt \leq \int_T^{\eta\sqrt{n}} t\,e^{-t^2/4}\,dt + \int_{\eta\sqrt{n}}^\infty t\,|\psi_n(t)|\,dt$$

$$\leq \int_T^\infty t\,e^{-t^2/4}\,dt + q_\eta^{\,n-n_o} \int_{\eta\sqrt{n}}^\infty t\,|\psi\,(\frac{t}{\sqrt{n}})|^{n_o}\,dt$$

$$\leq 2e^{-T^2/4} + q_\eta^{\,n-n_o} \int_{\eta\sqrt{n}}^\infty K^{n_o}\,n^{n_o\beta/2}\,t^{1-n_o\beta}\,dt$$

$$\leq 2e^{-T^2/4} + C\,n\,q_\eta^{\,n-n_o} \ ,$$

dès que n_o est suffisamment grand.

On peut alors choisir T pour rendre arbitrairement petit I_2 , puis utiliser la convergence uniforme de $\psi_n(t)$ vers $e^{-t^2/2}$ sur le compact $[-T,T]$ pour établir la convergence de I_1 vers 0.

On a donc montré

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,x\,e^{-x^2/2}| = 0 .$$

La même méthode permet d'établir :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n''(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{d^2}{dx^2}\,(e^{-x^2/2})| = 0 . \qquad \text{Q.E.D.}$$

Théorème 3.- Sous les hypothèses du théorème 2, si en outre $E\,|e_1|^3 < \infty$, alors pour tout n suffisamment grand , la variable

$\zeta_n^* = \dfrac{e_1 + \ldots + e_n}{\sqrt{n}}$ a une densité f_n de classe C^2 et il existe une constante C telle que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_n^{(i)}(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^i}{dx^i} (e^{-x^2/2}) \right| \leq C\, n^{-1/2} \quad , \quad i = 0, 1, 2 \; .$$

Preuve :

Le cas $i = 0$ est étudié dans V.V. PETROV [19].

Nous établirons la relation pour $i = 2$, la démonstration pour $i = 1$ se faisant de la même manière.

Prenons des notations analogues à celle du théorème précédent ; on obtient :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_n''(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^2}{dx^2} (e^{-x^2/2}) \right| \leq \frac{1}{2\pi} (J_1 + J_2 + J_3) \quad .$$

avec :

$$J_1 = \int_{|t|<T} t^2 \, |\varphi_n(t) - e^{-t^2/2}| \, dt \; ,$$

$$J_2 = \int_{|t|>T} t^2 \, e^{-t^2/2} \, dt \; ,$$

$$J_3 = \int_{|t|>T} t^2 \, |\varphi_n(t)| \, dt \quad .$$

i) Majoration de J_1

$|\varphi_n(t) - e^{-t^2/2}|$ peut être majoré en utilisant un lemme de Petrov ([19], V , lemme 1).

En notant $L = E\,|e_1|^3$, on a :

pour tout $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{4L}$, $|\varphi_n(t) - e^{-t^2/2}| \leqslant 16 \frac{L}{\sqrt{n}} |t|^3 e^{-t^2/3}$.

Choisissant $T = \frac{\sqrt{n}}{4L}$, il vient :

$$J_1 \leqslant 2 \int_0^{\sqrt{n}/4L} \frac{16L}{\sqrt{n}} t^5 e^{-t^2/3} dt \leqslant C_1 n^{-1/2} .$$

ii) Majoration de J_2

$$J_2 = 2\int_{\sqrt{n}/4L}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt \leqslant \frac{4L}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n}/4L}^{\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt \leqslant C_2 n^{-1/2} .$$

iii) Majoration de J_3

$$J_3 = \int_{|t|>\sqrt{n}/4L} t^2 |\varphi(\tfrac{t}{\sqrt{n}})|^n dt$$

$$= n^{3/2} \int_{|u|>1/4L} u^2 |\varphi(u)|^n du .$$

La loi de e_1 étant non latticielle, il existe $q \in [0,1[$ tel que $\sup_{u \in [1/4L,\infty[} |\varphi(u)| = q < 1$

et il existe n_o tel que $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 |\varphi(u)|^{n_o} du = K(n_o) < \infty$.

On en déduit :

$$J_3 \leqslant K(n_o)\, n^{3/2} q^{n-n_o} = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

ce qui achève la démonstration.

5 - MAJORATION DE $|N_n(a,a+\delta) - N_n(b,b+\delta)|$.-

Lemme 3.- Sous les hypothèses (1.1.), (1.2),(1.4), il existe pour tout $p \in \mathbb{N}$, une constante $C_{p,F}$ ne dépendant que de la fonction de répartition des (e_i), telle que pour tous $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in]0,1]$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

$$E[(N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta))^{2p}] \leqslant C_{p,F} \max(1,k^p\delta^{2p})\ \delta^p\ n^{p/2}\ (\log n)^p \quad .$$

Preuve :

On pose : $B_o = [a,a+\delta]$, $B_k = [a+k\delta,a+(k+1)\delta]$,

$$Y_i = 1_{B_o}(X_i) - 1_{B_k}(X_i) \quad ,$$

et $N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Soit p un entier positif

$$E((\sum_{i=1}^{n} Y_i)^{2p}) = \sum_{(i_1,\dots,i_{2p})\in[1,\dots,n]^{2p}} Y_{i_1} \dots Y_{i_{2p}} \quad .$$

On vérifie immédiatement que

$$(4.0.) \qquad \begin{aligned} Y_i^2 &= \dots = Y_i^{2\ell} = 1_{B_o}(X_i) + 1_{B_k}(X_i) \\ Y_i &= Y_i^3 = \dots\dots = Y_i^{2\ell+1} \quad , \qquad \ell = 1,2,\dots \end{aligned}$$

On majorera $E(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^{2p}$ en regroupant les éléments $E\,Y_{i_1}\,Y_{i_2} \dots Y_{i_{2p}}$ suivant le nombre d'indices i_j distincts.

a) Majoration de $|E(\sum_{1\leqslant t_1<t_2<\dots<t_{2p}\leqslant n} Y_{t_1} \dots Y_{t_{2p}})|$

$$Y_{t_1} Y_{t_2} = 1_{B_o}(X_{t_1}) [1_{B_o}(X_{t_2})-1_{B_k}(X_{t_2})] + 1_{B_k}(X_{t_1})[1_{B_k}(X_{t_2})-1_{B_o}(X_{t_2})] \quad .$$

Notons f la densité du vecteur aléatoire $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_{2p}})$. On peut regrouper deux à deux les éléments du produit :

$$(4.1.)\quad Y_{t_1}Y_{t_2}\cdots Y_{t_{2p}} = \prod_{j=1}^{p} \{1_{B_o}(X_{t_{2j-1}})\left[1_{B_o}(X_{t_{2j}})-1_{B_k}(X_{t_{2j}})\right]$$

$$+ 1_{B_k}(X_{t_{2j-1}})\left[1_{B_k}(X_{t_{2j}})-1_{B_o}(X_{t_{2j}})\right]\} .$$

On obtient, sous l'hypothèse $t_1 < t_2 < \ldots < t_{2p} \leq n$

$$E\, Y_{t_1}Y_{t_2}\cdots Y_{t_{2p}} =$$

$$\int\cdots\int_{\mathbb{R}^{2p}} f(x_1,x_2,\ldots,x_{2p}) \prod_{j=1}^{p} \{1_{B_o}(x_{2j-1})\left[1_{B_o}(x_{2j})-1_{B_k}(x_{2j})\right]$$

$$+ 1_{B_k}(x_{2j-1})\left[1_{B_k}(x_{2j})-1_{B_o}(x_{2j})\right]\}\, dx_1 dx_2\ldots dx_{2p}$$

$$= \int\cdots\int_{\mathbb{R}^{2p}} f(x_1,x_2,\ldots,x_{2p}) \prod_{j=1}^{p} \{1_{B_o}(x_{2j-1})\left[1_{B_o}(x_{2j})-1_{B_o}(x_{2j}-k\delta)\right]$$

$$+ 1_{B_k}(x_{2j-1})\left[1_{B_k}(x_{2j})-1_{B_k}(x_{2j}+k\delta)\right]\}\, dx_1\ldots dx_{2p} .$$

$E\, Y_{t_1}\cdots Y_{t_{2p}}$ est donc la somme de 2^p quantités

$$(4.2.)\quad J_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \int\cdots\int_{\mathbb{R}^{2p}} f(x_1,\ldots,x_{2p}) \prod_{j=1}^{p} 1_{B_{\alpha_j}}(x_{2j-1})$$

$$\left[1_{B_{\alpha_j}}(x_{2j})-1_{B_{\alpha_j}}(x_{2j}-k'_j\delta)\right]\, dx_1\ldots dx_{2p} ,$$

où α_j prend la valeur 0 ou k

et où l'on convient que : $k'_j = k$ si $\alpha_j = 0$

$k'_j = -k$ si $\alpha_j = k$.

Dans la dernière expression le changement de variable $x_{2j} \longmapsto x_{2j} + k'_j\delta$ conduit à écrire l'intégrale sous la forme

$$J_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \int\limits_{\prod_1^p B_{\alpha_j}\times B_{\alpha_j}} \!\!\!\cdots\int \sum_{(i_1,\ldots,i_p)} (-1)^{i_1+\ldots+i_p}$$

$$f(x_1,x_2+i_1k_1'\delta,x_3,x_4+i_2k_2'\delta,\ldots,x_{2p-1},x_{2p}+i_pk_p'\delta)\ dx_1dx_2\ldots dx_{2p}$$

où $(i_1,\ldots,i_p)$ décrit $(\{0,1\})^p$.

La quantité sous le signe de sommation peut être majorée en utilisant le théorème 3.

Les variables $(X_{t_1},X_{t_2}-X_{t_1},\ldots,X_{t_{2p}}-X_{t_{2p-1}})$ sont indépendantes ; $f(x_1,x_2,\ldots,x_{2p})$ est donc égal à $f_1(x_1)\ f_2(x_2-x_1)\ \ldots\ f_{2p}(x_{2p}-x_{2p-1})$ où $f_j(x_j-x_{j-1})$ est la densité de $X_{t_j}-X_{t_{j-1}}$.

D'après le théorème 3, f_j est de classe C^1 dès que t_j-t_{j-1} est suffisamment grand. Un calcul immédiat donne :

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_p)} (-1)^{i_1+\ldots+i_p} f(x_1,x_2+i_1k_1'\delta,\ldots,x_{2p-1},x_{2p}+i_pk_p'\delta)$$

$$= \int\limits_{\Pi[x_{2j},x_{2j}+k'\delta]} \!\!\!\cdots\int \frac{\partial^p}{\partial x_2\partial x_4\ldots\partial x_{2p}} f(x_1,\xi_2,\ldots,\xi_{2p})\ d\xi_2\ldots d\xi_{2p} \quad .$$

On en déduit que :

$$\Big|\sum_{(i_1,\ldots,i_p)} (-1)^{i_1+\ldots+i_p} f(x_1,x_2+i_1k_1'\delta,\ldots,x_{2p-1},x_{2p}+i_pk_p'\delta)\Big| \leq$$

$$k^p\delta^p \sup_{\substack{(\xi_2,\ldots,\xi_{2p})\in[0,k\delta]^p \\ (x_1,\ldots,x_{2p-1})\in B_{\alpha_1}\times\ldots\times B_{\alpha_p}}} \Big|\frac{\partial^p}{\partial x_2\ldots\partial x_{2p}} f(x_1,\xi_2,\ldots,x_{2p-1},\xi_{2p})\Big| \qquad (4.3.)$$

d'où :

$$(4.4.)\qquad J_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \leqslant \delta^{3p}\, k^p \sup_{(x_1,\ldots,x_{2p})} \left|\frac{\partial^p}{\partial x_2\ldots\partial x_{2p}} f(x_1,x_2,\ldots,x_{2p})\right| .$$

Comme :

$f(x_1,\ldots,x_{2p}) = f_1(x_1)f_2(x_2-x_1)\ldots f_{2p}(x_{2p}-x_{2p-1})$, on a :

$$\frac{\partial^p}{\partial x_2\ldots\partial x_{2p}} f(x_1,x_2,\ldots,x_{2p}) = f_1(x_1) \prod_{j=1}^{p-1} \left[f'_{2j}(x_{2j}-x_{2j-1})f_{2j+1}(x_{2j+1}-x_{2j}) - \right.$$

$$\left. - f_{2j}(x_{2j}-x_{2j-1})f'_{2j+1}(x_{2j+1}-x_{2j})\right] f'_{2p}(x_{2p}-x_{2p-1}) .$$

Or les fonctions f_j et leurs dérivées s'écrivent :

$$f_j(x) = \frac{1}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}\, g_j\left(\frac{x}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}\right) ,$$

$$f'_j(x) = \frac{1}{t_j-t_{j-1}}\, g'_j\left(\frac{x}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}\right) ,$$

où g_j est la densité de la variable réduite $\frac{1}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}\,(X_{t_j}-X_{t_{j-1}})$.

Le théorème 3 permet d'écrire les majorations :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|g_j(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}$$

et $$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|g'_j(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x\, e^{-x^2/2}\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g_j\left(\frac{x}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{C}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}$$

et $$g_j'\left(\frac{x}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}\right) \leqslant \frac{x}{\sqrt{2\pi(t_j-t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t_j-t_{j-1})}\right) + \frac{C}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} + \frac{C}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}$$

On obtient :

$$\text{(4.5.)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_j(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j-t_{j-1})}} + O\left(\frac{1}{t_j-t_{j-1}}\right) ,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f_j'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi e}(t_j-t_{j-1})} + O((t_j-t_{j-1})^{-3/2}) .$$

Ceci conduit à :

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial x_2 \ldots \partial x_{2p}} f(x_1,x_2,\ldots,x_{2p}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma^p \, t_1^{-1/2}(t_{2p}-t_{2p-1})^{-1} \prod_{j=1}^{p-1} ((t_{2j}-t_{2j-1})^{-1}(t_{2j+1}-t_{2j})^{-1/2} +$$

$$\text{(4.6.)} \qquad + (t_{2j}-t_{2j-1})^{-1/2}(t_{2j+1}-t_{2j})^{-1}) + O\left[(t_{2j}-t_{2j-1})^{-1}(t_{2j+1}-t_{2j})^{-1} + (t_{2j}-t_{2j-1})^{-1/2}(t_{2j+1}-t_{2j})^{-3/2}\right]$$

De (4.2.), (4.5.), (4.6.) on déduit :

$$\text{(4.7.)} \qquad E|Y_{t_1}\ldots Y_{t_{2p}}| \leqslant C_p \, k^p \, \delta^{3p} \, t_1^{-1/2} \, (t_{2p}-t_{2p-1})^{-1} \prod_{j=1}^{p-1} \left[(t_{2j}-t_{2j-1})^{-1}(t_{2j+1}-t_{2j})^{-1/2}+(t_{2j}-t_{2j-1})^{-1/2}(t_{2j+1}-t_{2j})^{-1}\right]$$

et :

$$\left|\sum_{1\leqslant t_1<\ldots<t_{2p}\leqslant n} E\, Y_{t_1} Y_{t_2} \ldots Y_{t_{2p}}\right| \leqslant$$

(4.8.) $$C'_p\, k^p\, \delta^{3p} \left(\sum_{s=1}^{n} s^{-1/2}\right)^p \left(\sum_{1}^{n} s^{-1}\right)^p$$

soit :

(4.9.) $$\left|\sum_{1\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_{2p}\leqslant n} E\, Y_{t_1} Y_{t_2} \ldots Y_{t_{2p}}\right| \leqslant C_p\, k^p\, \delta^{3p}\, n^{p/2}\, (\log n)^p .$$

On pourrait aussi déduire de ce résultat une majoration de $|\sum E\, Y_{t_1} \ldots Y_{t_{2p}}|$.
On a :

$$\left|\sum E\, Y_{t_1} \ldots Y_{t_{2p}}\right| \leqslant C_p\, p!\, k^p\, \delta^{3p}\, n^{p/2}\, (\log n)^p$$

la sommation étant étendue à l'ensemble

$$\{(t_1,\ldots,t_{2p}) \mid \forall j ,\ 1 \leqslant t_j \leqslant n \quad \text{et pour } j \neq h ,\ t_j \neq t_h\}.$$

b) <u>Majoration de</u> $E(Y_{t_1} \ldots Y_{t_{2p}})$ <u>lorsque deux indices sont égaux.</u>

Supposons que $t_{2j-1} = t_{2j}$; alors dans la formule (4.1.) ,

$$Y_{t_{2j-1}} Y_{t_{2j}} = 1_{B_o}(S_{t_{2j-1}})\left[1_{B_o}(S_{t_{2j}}) - 1_{B_k}(S_{t_{2j}})\right] + 1_{B_k}(S_{t_{2j-1}})\left[1_{B_k}(S_{t_{2j}}) - 1_{B_o}(S_{t_{2j}})\right]$$

est remplacé par

$$Y^2_{t_{2j-1}} = 1_{B_o}(S_{t_{2j-1}}) + 1_{B_k}(S_{t_{2j-1}}) .$$

La formule (4.2.) sera remplacée par

(4.2'.) $$J_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \int\!\!\cdots\!\!\int_{\mathbb{R}^{2p-1}} f(x_1,\ldots,x_{2p}) \prod_{i=1}^{p}{}' \left[1_{B_{\alpha_i}}(x_{2i-1})(1_{B_{\alpha_i}}(x_{2i}) - 1_{B_{\alpha_i}}(x_{2i}-k'\delta))\right] 1_{B_{\alpha_j}}(x_{2j-1})\, dx_1\ldots dx_{2p}$$

le signe Π' indiquant que le $j^{\text{ème}}$ terme est omis et on obtient de même

$$(4.4'.)\quad J_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \leq \delta^{2p-1}\,(k\delta)^{p-1} \sup_{(x_1\ldots x_{2p})} \frac{\partial^{p-1}}{\partial x_2\ldots\partial x_{2p}}\,(')\,f(x_1,\ldots,x_{2p})$$

le signe (') indiquant l'omission du terme x_{2j}

$$(4.7'.)\quad |E\,Y_{t_1}\ldots Y^2_{t_{2j-1}}\ldots Y_{t_{2p}}| \leq C\,.\,2^{p-1}\,(k\delta)^{p-1}\,\delta^{2p-1}\,(2\pi)^{-p+1/2}$$

$$t_1^{-1/2}\,t_{2j-1}^{-1/2}\,(t_{2p}-t_{2p-1})^{-1}\prod_{i=1}^{p-1}{}'\Big[(t_{2i}-t_{2i-1})^{-1}\,(t_{2i+1}-t_{2i})^{-1/2}+$$

$$+\,(t_{2i}-t_{2i-1})^{-1/2}\,(t_{2i+1}-t_{2i})^{-1}\Big]$$

soit

$$(4.9'.)\quad \Big|\sum_{1\leq t_1<\ldots<t_{2p}\leq n}{}'\; E\,Y_{t_1}\ldots Y^2_{t_{2j-1}}\ldots Y_{2p}\Big| \leq C_p\,(k\delta)^{p-1}\,\delta^{2p-1}\,n^{p/2}\,(\log n)^{p-1}$$

c) <u>Calcul lorsque plusieurs indices sont égaux.</u>

Une méthode analogue peut être appliquée pour calculer les termes $E\,Y_{t_1}\ldots Y_{t_{2p}}$ lorsque plusieurs indices sont égaux, en particulier :

$$E\sum_{1\leq t_1<\ldots<t_p\leq n} Y^2_{t_1}\ldots Y^2_{t_p} = \sum\int\ldots\int_{(B_o\cup B_k)^p} f(x_1,\ldots,x_p)\,dx_1\ldots dx_p$$

$$\leq (2\delta)^p\,(2\pi)^{-p/2}\sum_{1\leq t_1<\ldots<t_p\leq n}\;\prod_{j=1}^{p}\Big[(t_j-t_{j-1})^{-1/2}+\;O(t_j-t_{j-1})^{-1}\Big]$$

$$\leq C_p\,n^{p/2}\,\delta^p\;.$$

d) Fin de la démonstration.

En regroupant les indices $(t_1,\dots,t_{2p})$ suivant le nombre d'éléments distincts dans $(t_1,\dots,t_{2p})$, on voit que l'on peut majorer

$E(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^{2p}$ par

$$
\begin{aligned}
& C_p \delta^{2p} (k\delta)^p n^{p/2} (\log n)^p \\
&+ C_p \delta^{2p-1} (k\delta)^{p-1} n^{p/2} (\log n)^{p-1} \\
&\dots \\
&+ C_p \delta^{2p-i} (k\delta)^{p-i} n^{p/2} (\log n)^{p-i} \\
&\dots \\
&+ C_p \delta^p \quad n^{p/2}
\end{aligned}
$$

\+ des termes d'ordre inférieur à $n^{p/2}$, en nombre fini, la valeur de la constante pouvant varier d'une ligne à l'autre. Il vient

$$E(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^{2p} \leqslant C \,|\sup(1, k\delta^2)|^p \delta^p n^{p/2} (\log n)^p \quad .$$

Q.E.D.

Remarque : La majoration obtenue dans le lemme 3 diffère légèrement de celle du lemme 2. En effet, faisant $p = 1$ on obtient :

$$E\left[N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta)\right]^2 \leqslant C \max(1,k\delta^2)\ \delta\ n^{1/2} \log n$$

au lieu de :

$$E\left[N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta)\right]^2 \leqslant C \max(1,k\delta^2) \quad (1+\delta n^{1/2}) \quad .$$

Ceci est lié au choix de la majoration (4.5.) pour f_j' .

$$|f'_j(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}\,(t_j-t_{j-1})} + C(t_j-t_{j-1})^{-3/2})$$

pourraît être remplacé par :

$$|f'_j(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (t_j - t_{j-1})^{-3/2} \left[|x| \exp(- \frac{x^2}{2(t_j-t_{j-1})}) + C\right]$$

ou $$|f'_j(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \inf(\frac{1}{\sqrt{e}(t_j-t_{j-1})} , \frac{|x| + C}{(t_j-t_{j-1})^{3/2}}) .$$

Ce choix n'a pas de conséquence sur les inégalités que nous établirons dans la suite du chapitre.

On peut alors comparer les temps d'occupation de deux intervalles par une marche aléatoire.

Proposition 1.- Soient $a \in \mathbb{R}$, (δ_n) une suite non croissante d'éléments de $]0,1]$, (k_n) une suite croissante d'entiers vérifiant la condition : il existe $r > 0$ tel que $k_n = o(n^r)$.

Sous les hypothèses (1.1.), (1.2.), (1.4.) : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq h\leq k_n} \frac{\inf(1,k_n^{-1/2}\,\delta_n^{-1})}{n^{(1/4)+\varepsilon}\,\delta_n^{1/2}} |N_n(a,a+\delta_n)-N_n(a+h\delta_n,a+(h+1)\delta_n)| = 0 \quad \text{p.s.}$$

Preuve : Soit $\beta > 0$, on note A_n l'événement :

$$A_n=\{ \sup_{0\leq h\leq k_n} |N_n(a,a+\delta_n)-N_n(a+h\delta_n , a+(h+1)\delta_n)| > \beta\, n^{(1/4)+\varepsilon}\, \delta_n^{1/2} \max(1,k_n^{1/2}\delta_n)\} ,$$

on peut majorer $P(A_n)$:

$$P(A_n) \leq \sum_{h=0}^{k_n} P(|N_n(a,a+\delta_n)-N_n(a+h\delta_n,a+(h+1)\delta_n)| > \beta\, n^{(1/4)+\varepsilon}\, \delta_n^{1/2} \max(1,k_n^{1/2}\delta_n))$$

Choisissons un entier m , tel que : $2m\varepsilon - r > 1$, on peut alors majorer le second membre, en utilisant l'inégalité de Markov à l'ordre $2m$ et le lemme 3, on obtient :

$$P(A_n) \leq k_n \frac{C_{m,F} \max(1,k\delta_n^2)^m \delta_n^m n^{m/2} (\log n)^m}{\beta^{2m} n^{(m/2)+2m\varepsilon} \delta_n^m \max(1,k\delta^2)^m}$$

$$P(A_n) \leq C \frac{n^r (\log n)^m}{\beta^{2m} n^{2m\varepsilon}} \quad .$$

La proposition résulte du lemme de Borel-Cantelli en choisissant une suite (β_n) qui converge vers 0 et telle que $\sum n^{r-2m\varepsilon} \beta_n^{-2m} (\log n)^m < \infty$.

Remarque 1 : Si nous considérons des intervalles $[a+k\delta, a+(k+1)\delta]$ de longueur δ fixée, $\delta \in]0,1]$ la proposition 1 peut s'écrire :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq h\leq k_n} n^{-(1/4)-\varepsilon} k_n^{-1/2} |N_n(a,a+\delta) - N_n(a+h\delta, a+(h+1)\delta)| = 0 \quad \text{p.s.}$$

Il ne semble pas que ce résultat puisse être amélioré. En effet, en utilisant la loi du logarithme itéré :

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1) = 1 \quad ,$$

on en déduit pour tout a :

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} N_n(a+k_n\delta, a+(k_n+1)\delta) = 0) = 1 \quad ,$$

dès que :

$$\frac{k_n}{\sqrt{n \log \log n}} \longrightarrow C > \sqrt{2} \quad ,$$

et sous cette condition :

$$N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k_n\delta,a+(k_n+1)\delta) = N_n(a,a+\delta) \quad \text{p.s.}$$
$$= O(n^{1/2}) \quad \text{p.s.}$$

donc :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k_n\delta,a+(k_n+1)\delta)|}{k_n^{1/2}\, n^{1/4+\beta}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta > 0 \\ \infty & \text{si } \beta < 0 \end{cases}.$$

Corollaire.- Sous les hypothèses de la proposition 1, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\inf(1, k_n^{-1/2}\, \delta_n^{-1})}{n^{(1/4)+\varepsilon}\, \delta_n^{1/2}} \left| N_n(a,a+\delta_n) - \frac{1}{k_n} N_n(a,a+k_n\delta_n) \right| = 0 \quad \text{p.s.}$$

En particulier, si la suite δ_n est constante : $\forall n$, $\delta_n = \delta$

$$\lim_{n\to\infty} k_n^{-1/2}\, n^{-(1/4)-\varepsilon} \left| N_n(a,a+\delta) - \frac{1}{k_n} N_n(a,a+k_n\delta) \right| = 0 \quad \text{p.s.}$$

Preuve : On remarque que :

$$\left| N_n(a,a+\delta_n) - \frac{1}{k_n} N_n(a,a+k_n\delta_n) \right|$$
$$= \left| N_n(a,a+\delta_n) - \frac{1}{k_n} \sum_{h=0}^{k_n-1} N_n(a+h\delta_n,\ a+(h+1)\delta_n) \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{k_n} \sum_{h=0}^{k_n-1} \left| N_n(a,a+\delta_n) - N_n(a+h\delta_n,\ a+(h+1)\delta_n) \right|$$
$$\leqslant \max_{0\leqslant h\leqslant k_n} \left| N_n(a,a+\delta_n) - N_n(a+h\delta_n\ ,\ a+(h+1)\delta_n) \right| .$$

Le résultat se déduit donc immédiatement de la proposition 1.

Nous avons obtenu un majorant de $|N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta)|$. Dans le cas particulier de la marche aléatoire symétrique où les ε_i sont des variables indépendantes $P(\varepsilon_i = 1) = P(\varepsilon_i) = -1$, M. CSÖRGO et P. RÉVÉSZ ([9]) ont obtenu le résultat suivant :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N_n(k) - N_n(o)}{(N_n(0) \log \log n)^{1/2}} = 2\sqrt{2k-1} \quad \text{p.s.}$$

où $N_n(k) = \sum_{t=1}^{n} 1_{\{k\}}(X_t)$.

6 - CONVERGENCE FORTE DU TEMPS LOCAL.-

La marche aléatoire $(X_t , t \in \mathbb{N})$ converge faiblement, après changement de temps vers un processus de Wiener, il est donc naturel de comparer les temps d'occupation d'un intervalle $[a,a+\delta]$ par (X_t) et par un processus de Wiener.

Théorème 4.- On suppose que les variables $(e_j , j \in \mathbb{N})$ vérifient les hypothèses (1.1), (1.2), (1.4) et on note $(X_t , t \in \mathbb{N})$ la marche aléatoire associée. On peut construire sur un espace probabilisé assez riche, un processus du mouvement brownien $(W(t), t \geq 0)$ et un processus $(X'_t , t \in \mathbb{N})$ tels que :

i) $(X'_t , t \in \mathbb{N})$ ait même loi que $(X_t , t \in \mathbb{N})$,

ii) pour $a \in \mathbb{R}$, $(\delta_n , n \in \mathbb{N})$ suite non croissante de réels tels que $n^{1/6}\,\delta_n \geq 1$,

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \lim_{n\to\infty} n^{-(1/3)-(1/3p)-\varepsilon}\left(N_n(a,a+\delta_n) - \int_0^n 1_{[a,a+\delta_n]}(W(s))ds\right) = 0 \quad \text{p.s.} ,$$

où $N_n(a,a+\delta_n) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[a,a+\delta_n]}(X'_t)$.

Preuve du théorème

a) Construction du processus (X'_t) .

La construction d'un processus $(X'_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ de même loi que $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ et suffisamment proche d'un processus de Wiener a été étudié par J. KOMLOS, P. MAJOR, G. TUSNADY (voir [5], [9], [11]) et par P. MAJOR ([16]).

Leurs résultats peuvent être énoncés de la manière suivante :

Théorème (*J. KOMLOS, P. MAJOR, G. TUSNADY, 1976*).

Soit (e_i) une suite de variables aléatoires indépendantes centrées, de variance 1, ayant un moment d'ordre p , $p > 2$. On peut construire un espace probabilisé (Ω,A,P) et sur cet espace un processus du mouvement brownien $(W(t),\ t \geq 0)$ et une suite de variables aléatoires indépendantes $(e'_j\ ,\ j \in \mathbb{N})$, ayant même loi que e_j , tels que l'inégalité :

$$P(\sup_{0\leq t\leq n} |X'_t - W(t)| \geq x_n) \leq C_1 \frac{n}{x_n^p}$$

est valable pour tout n , dès que :

$$n^{1/p} \leq x_n \leq C_2(n \log n)^{1/2} ,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes strictement positives, ne dépendant que de la loi de e_j et $X'_t = e'_1 + e'_2 + \dots + e'_t$.

En prenant $x_n = n^{(1/p)+\varepsilon}$, on montre que ce résultat implique :

$$\sup_{0\leq k\leq n} |X'_k - W(k)| = o(n^{\varepsilon+1/p}) \text{ p.s.}$$

En effet, $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} P(\sup_{2^j\leq k\leq 2^{j+1}} |X'_k - W(k)| \leq (2^j)^{\varepsilon+1/p}) \leq \sum_{j=0}^{\infty} C_1 \frac{2^{j+1}}{2^{j(1+p\varepsilon)}} < \infty$

b) Majoration de $|N_n(a,a+\delta_n) - \int_0^n 1_{[a,a+\delta_n]}(W(s))\,ds|$.

$$|N_n(a,a+\delta_n) - \int_0^n 1_{[a,a+\delta_n]}(W(s))ds| \leq A_1(n) + \frac{1}{2k_n} A_2(n) + A_3(n) \quad ,$$

où : $A_1(n) = |N_n(a,a+\delta_n) - \frac{1}{2k_n} N_n(a-k_n\delta_n,\ a+k_n\delta_n)|$,

$$A_2(n) = |N_n(a-k_n\delta_n, a+k_n\delta_n) - \int_0^n 1_{[a-k_n\delta_n, a+k_n\delta_n]}(W(s))\,ds| \ ,$$

$$A_3(n) = |\frac{1}{2k_n} \int_0^n 1_{[a-k_n\delta_n, a+k_n\delta_n]}(W(s))\,ds - \int_0^n 1_{[a,a+\delta_n]}(W(s))\,ds| \ .$$

i) Majoration de $A_1(n)$.

Elle résulte de la proposition 1 :

$$A_1(n) = o(n^{(1/4)+\varepsilon}\ \delta_n^{1/2}\ \max(1,\ k_n^{1/2}\ \delta_n)) \quad \text{p.s.}$$

ii) Majoration de A_2 .

Notons J_n , J'_n , J''_n les intervalles :

$$J_n = [a-k_n\delta_n,\ a+k_n\delta_n] \ , \qquad J'_n = [a-k_n\delta_n + n^{\varepsilon+1/p}\ ,\ a+k_n\delta_n - n^{\varepsilon+1/p}]$$

$$J''_n = [a-k_n\delta_n - n^{\varepsilon+1/p}\ ,\ a+k_n\delta_n + n^{\varepsilon+1/p}] \ .$$

En utilisant le théorème de J. KOMLOS, P. MAJOR, G. TUSNADY, on obtient :

$$P(\underline{\lim}_{n\to\infty} \{\int_0^n 1_{J'_n}(W(s))\,ds \leq N_n(J_n) \leq \int_0^n 1_{J''_n}(W(s))\,ds\}) = 1$$

d'où :

$$P(\overline{\lim}_{n\to\infty}\ \{A_2(n) \geq \int_0^n 1_{J''_n-J'_n}(W(s))\,ds\}) = 0 \quad .$$

En notant $L(x,n)$ le temps local du mouvement brownien, la dernière relation s'écrit :

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} \{A_2(n) \geq \int_{J'_n - J''_n} L(x,n)\ dx\}) = 0 \quad .$$

Or KESTEN [12] a établi une loi du logarithme itéré pour le temps local du mouvement brownien :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{L(o,n)}{\sqrt{2n \log \log n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} L(x,n)}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1 \ .$$

On en déduit :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad A_2(n) = o(n^{(1/2)+(1/p)+\varepsilon}) \quad \text{p.s.}$$

iii) Majoration de A_3 .

Pour majorer A_3 , on peut utiliser le résultat suivant de McKEAN [17] :

$$\limsup_{h\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{L(x+h,1) - L(x,1)}{h^{1/2} \log h^{-1}} = 0 \quad \text{p.s.}$$

Il implique :

$$\limsup_{h\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{L(x+h\sqrt{n},\ n) - L(x,1)}{(n^{1/2}\ h^{1/2} \log h^{-1})} = 0 \ \text{p.s.} \ .$$

On obtient donc ; sous la condition $\lim_{n\to\infty} n^{-1/2}\ k_n\ \delta_n = 0$,

$$\begin{aligned} A_3(n) &= \left|\frac{1}{2k_n} \int_{a-k_n\delta_n}^{a+k_n\delta_n} L(x,n)\ dx - \int_a^{a+\delta_n} L(x,n)\ dx\right| \\ &\leq o(\delta_n\ n^{(1/2)+\varepsilon}\ (n^{-1/2}\ k_n\delta_n)^{1/2}) \ \text{p.s.} \\ &= o(n^{(1/4)+\varepsilon}\ k_n^{1/2}\ \delta_n^{3/2}) \ \text{p.s.} \end{aligned}$$

iv) Choix de la suite (k_n) .

On déduit des majorations précédentes :

$$|N_n(a,a+\delta_n) - \int_0^n 1_{[a,a+\delta_n]}(W(s))\, ds| =$$

$$o(n^{(1/4)+\varepsilon}\, \delta_n^{1/2} \max(1,k_n^{1/2}\delta_n) + k_n^{-1}\, n^{(1/2)+(1/p)+\varepsilon}) \text{ p.s. } .$$

En choisissant $k_n = n^{(2/3p)+1/6}\, \delta_n^{-1}$, si la condition $k_n\, \delta_n^2 \geq 1$ est remplie, on obtient :

$$|N_n(a,a+\delta_n) - \int_0^n 1_{[a,a+\delta_n]}(W(s))\, ds| = o(\delta_n \,.\, n^{(1/3)+(1/3p)+\varepsilon}) \text{ p.s.}$$

Cette relation peut s'écrire :

$$|N_n(a,a+\delta_n) - \int_a^{a+\delta_n} L(x,n)\, dx| = o(\delta_n\, n^{(1/3)+(1/3p)+\varepsilon}) \quad \text{p.s.}$$

ou encore, utilisant les résultats sur la continuité du temps local par exemple : M. CSÖRGO et P. REVESZ [7] (relation 2.14)

$$\forall K,\ \exists C\ ,\quad P(\sup_{x:|x-a|\leq 1} |L(x,n) - L(a,n)| \geq n^{1/4+\varepsilon}) \leq C\, n^{-K}$$

on en déduit ; si la relation $n^{(1/6)+(2/3p)}\, \delta_n \geq 1$ est remplie :

$$|N_n(a,a+\delta_n) - \delta_n\, L(a,n)| = o(\delta_n\, n^{(1/3)+(1/3p)+\varepsilon}) \text{ p.s.} \quad ,$$

Théorème 5.- Sous les hypothèses du théorème 4, soit $a \in \mathbb{R}$, $(\delta_n)_n$ une suite de réels éléments de $[0,1]$ tels que $n^{1/6+2/3p}\, \delta_n \geq 1$ alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(a,a+\delta_n)}{n^{(1/2)+\varepsilon}\delta_n} = 0 \quad \text{p.s.} \quad , \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(a,a+\delta_n)}{n^{(1/2)-\varepsilon}\delta_n} = \infty \quad \text{p.s.} \quad .$$

Preuve :

La première relation résulte immédiatement de la loi du logarithme itéré pour le temps local :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{L(0,n)}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1 \quad \text{p.s.}$$

et de $\quad |N_n(a,a+\delta_n) - \delta_n L(a,n)| = o(n^{(1/3)+(2/3p)+\varepsilon}\ \delta_n)$ p.s. .

Pour la seconde, nous utiliserons le célèbre théorème de Paul Lévy établissant que :

$$\{ \sup_{0\leq s\leq t} W(s) \ , \ t \geq 0\} \quad \text{et} \quad \{L(o,t) \mid t \geq 0\}$$

ont même loi (cf. par exemple. F. KNIGHT [13] Th. 5.3.7.)

or $\quad P(\bigcup_{n\geq 2^{k_o}} \{ \sup_{0\leq s\leq n} W(s) < n^{1/2-\varepsilon}\})$

$$= P(\bigcup_{k\geq k_o} \bigcup_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \{ \sup_{0\leq s\leq n} W(s) < n^{1/2-\varepsilon}\})$$

$$\leq P(\bigcup_{k\geq k_o} \{ \sup_{0\leq s\leq 2^k} W(s) < (2^{k+1})^{(1/2-\varepsilon)}\})$$

$$\leq \sum_{k=k_o}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{2}.2^{-(k+1)\varepsilon}} e^{-v^2/2}\, dv$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=k_o}^{\infty} 2^{-(k+1)\varepsilon} \quad ,$$

ceci entraîne : $\quad \lim_{n\to\infty} n^{-(1/2)+\varepsilon} L(o,n) = \infty \quad$ p.s.

et $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(a,a+\delta_n)}{n^{(1/2)-\varepsilon}\ \delta_n} = \infty \quad$ p.s. $\quad$ à l'aide du théorème 4 . ∎

B I B L I O G R A P H I E

[1] A.N. BORODIN - On the asymptotic behaviour of local times of recurrent random walks with finite variance. Theory of probability and its Applications 26, 758-772 (1981).

[2] A.N. BORODIN - On the character of convergence to brownian local time. Probability Theory Rel Fields 72 (I) 231-250 ; (II) 251-277 (1986).

[3] L. BREIMAN - Probability. Reading Mass : Addison Wesley, 1968.

[4] E. CSÁKI, M. CSÖRGO, A. FÖLDES, P. RÉVÉSZ - How big are the increments of the local time of a Wiener process ? Ann. of Proba. 1983, 11, 3, p. 593-608.

[5] E. CSÁKI, P. RÉVÉSZ - Strong Invariance for local times. Z. Wahrschein. verw. Geb. 62, 263-278 (1983).

[6] M. CSÖRGO, P. HALL - Upper and lower classes for triangular arrays. Z. Wahrschein. verw. Geb. 61, 207-222 (1982).

[7] M. CSÖRGO, P. RÉVÉSZ - Three strong approximations of the local time of a Wiener process and their applications to invariance in Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai 36 (1984) Limit theorems in Probab. and Statistics Veszprém (Hungary) 1982, p. 223-254.

[8] M. CSÖRGO, P. RÉVÉSZ - On strong invariance for local times of partial sums. Stochastic Processes and their Appl. 20 59-84 (1985).

[9] M. CSÖRGO, P. RÉVÉSZ
- On the stability of the local time of a symetric random walk.
Acta Sci. Math. 48, 85-96 (1985).

[10] W. FELLER - An introduction to Probability Theory and its Applications.
Wiley New-York, 2^d Ed. (1957).

[11] B.V. GNEDENKO - Un théorème limite local pour les densités.
Dokl. Akad. Nank. SSSR 95, (1954).

[12] H. KESTEN - An iterated logarithm law for local time.
Duke Math. J. 32, 447-456, (1965).

[13] F. KNIGHT - Essentials of Brownian Motion and Diffusion.
Math. Surveys 18 AMS (1981).

[14] KOMLOS, MAJOR, TUSNADY
- An approximation of partial sums of independent R.V's and sample D.F.
Z. Wahrsch. Gebiete 32, 111-131 (1975), et 34, 33-58 (1976).

[15] P. LÉVY - Processus stochastiques et mouvement brownien
Gauthier Villars, Paris (1948).

[16] P. MAJOR - The approximation of partials sums of Independent R.V.'s. (1976).
Z. Wahrsch. verw. Gebiete 35, 213-220

[17] H.P. Mc KEAN - Hölder condition for Brownian motion paths.
J. Math. Kyoto Univ. 1, 195-201 (1962).

[18] E. PERKINS - Weak invariance principles for local times.
Z. Wahrschein. verw. Gebiete 60, 437-451 (1982).

[19] V.V. PETROV - Sums of Independent Random Variables.
Springer-Verlag Berlin New-York 1975.

[20] D.B. RAY - Sojour times of a diffusion process.
Ill. J. Math. 7, 615-630.

[21] A. RENYI - Calcul des probabilités.
Dunod Paris (1966).

[22] P. RÉVÉSZ - Local time and invariance.
Lectures Notes in Math. 861 Berlin Heidelberg.
New-York : Springer 1981.

[23] P. RÉVÉSZ - A strong invariance principle of the local time of R.V's with continuous distributions.
Stud. Sci. Math. Hung. 16, 219-228 (1981).

[24] H.F. TROTTER - A property of brownian motion paths.
Ill. J. Math. 2, 425-433 (1958).

CHAPITRE II

SOMMES PARTIELLES D'UN PROCESSUS LINEAIRE STATIONNAIRE. APPROXIMATION FORTE ET TEMPS D'OCCUPATION.

Le théorème de KOMLOS-MAJOR-TUSNADY [4] sur l'approximation forte d'une marche aléatoire par un processus du mouvement brownien nous a permis de comparer les temps d'occupation d'un intervalle par une marche aléatoire et un mouvement brownien. Ce problème est repris ici pour le processus défini par les sommes partielles d'un processus linéaire stationnaire.

On définit un processus stationnaire $(\xi_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ par

$$\xi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j\ \varepsilon_{t-j} \quad , \quad \text{où} \quad \sum |\pi_j| < \infty \quad \text{et} \quad (\varepsilon_j\ ,\ j \in \mathbb{Z})$$

est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées et de variance finie. On considère le processus $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ des sommes partielles : $X_o = 0$, $X_t = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_t$. Dans ce chapitre, on étend tout d'abord le théorème de Komlos-Major-Tusnady, afin d'avoir une approximation forte du processus $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$.

On étudie ensuite le temps d'occupation de ce processus. La dépendance des variables ξ_t impose une modification des méthodes utilisées dans le chapitre I, et on établit sous des hypothèses assez générales que le temps d'occupation d'un intervalle $[a,b]$:

$N_n([a,b]) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[a,b]}(X_t)$ convenablement normalisé tend en loi vers un temps local de mouvement brownien.

La classe de processus que nous avons envisagé englobe en particulier les processus ARIMA d'ordre d'intégration 1. Un processus $(X'_t\ , t \in \mathbb{N})$ est un ARIMA (p,1,q) s'il existe un bruit blanc $(\varepsilon_j\ , j \in \mathbb{Z})$ et des scalaires $(\psi_j)_{1 \leq j \leq p}$ et $(\theta_j)_{1 \leq j \leq q}$ tels que

$$\sum_{j=0}^{p} \psi_j \, \Delta X_{t-j} = \sum_{j=0}^{q} \theta_j \, \varepsilon_{t-j} \quad , \quad \psi_o = \theta_o = 1 \quad , \quad \psi_p \neq 0 \ , \quad \theta_q \neq 0$$

où $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$.

Dans le cas d'un processus ARIMA gaussien, la loi du vecteur $(X_{t_1}\ , X_{t_2}\ , \ldots, X_{t_n})$ peut être donnée explicitement et on établira la convergence presque sûre du temps d'occupation du processus ARIMA gaussien d'ordre 1 vers un temps local de mouvement brownien.

A - SOMMES PARTIELLES D'UN PROCESSUS LINEAIRE STATIONNAIRE.

1 - NOTATIONS.

On se donne sur un espace probabilisé (Ω,A,P) un processus linéaire stationnaire $(\xi_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ défini par :

(1.1) $$\xi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j\ \varepsilon_{t-j} \quad , \quad \text{où :}$$

$(\varepsilon_j\ ,\ j \in \mathbb{Z})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, de moyenne nulle, de variance $E\ \varepsilon_j^2 = \sigma^2$.

$(\pi_j\ ,\ j \in \mathbb{N})$ est une suite de réels telle que :

$$\pi_o = 1 \quad , \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty \quad , \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \neq 0 \ .$$

On note $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ la suite des sommes partielles

(1.2) $$X_o = 0 \quad , \quad X_t = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_t \ .$$

On souhaite construire sur un espace probabilisé, un processus ayant même loi que (X_t) et un processus du mouvement brownien, suffisamment proches.

2 - THEOREMES D'APPROXIMATION FORTE.

Dans le cas de variables aléatoires indépendantes de même loi, les théorèmes de J. KOMLOS, P. MAJOR, G. TUSNADY [4] donnent une majoration de l'écart entre une marche aléatoire et un processus du mouvement brownien.

Soit $(\varepsilon_j \;,\; j \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi centrée réduite. On note $S_o = 0$; $S_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \;,\; n \in \mathbb{N}$, la suite des sommes partielles.

Théorème 1 (J. KOMLOS, P. MAJOR, G. TUSNADY, 1976 Th. 1) [4].

Si la fonction génératrice des moments $E(\exp(t\ \varepsilon_1))$ existe dans un voisinage de l'origine, il est possible de construire un espace probabilisé suffisamment riche, un processus du mouvement brownien $(W(t), t \in [0,\infty[)$ et un processus $(T_n \;,\; n \in \mathbb{N})$ tels que :

i) $(T_n \;,\; n \in \mathbb{N})$ a même loi que le processus des sommes partielles $(S_n \;,\; n \in \mathbb{N})$.

ii) pour tout $x > 0$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(\max_{0 \leq k \leq n} |T_k - W(k)| > C \log n + x) \leq K\, e^{-\lambda x} \quad ,$$

où C , K , λ sont des constantes ne dépendant que de la loi de ε et où λ peut être choisi arbitrairement grand en prenant C assez grand.

Théorème 2 (J. KOMLOS, P. MAJOR, G. TUSNADY, 1976 Th. 1) (P. MAJOR, 1976 Th. 1) .

Si la variable ε_1 a un moment d'ordre p , où p est un réel strictement supérieur à 2 , il est possible de construire un espace probabilisé, un processus $(T_n \;,\; n \in \mathbb{N})$ de même loi que $(S_n \;,\; n \in \mathbb{N})$ et un processus du mouvement brownien $(W(t), t \in [0,\infty[)$ tels que :
pour tout h_n , $n^{1/p} < h_n < C_1 \;(n \log n)^{1/2}$,

$$P(\max_{0 \leq k \leq n} |T_k - W(k)| > h_n) \leq C_2 \frac{n}{h_n^p} \quad ,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes ne dépendant que de la loi du bruit.

Ces théorèmes d'approximation forte peuvent être étendus aux sommes partielles d'un processus stationnaire.

<u>*Théorème 3.*</u> Soit $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ un processus défini par :

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j\, \varepsilon_{k-j} \right) \quad \text{où} \quad (\varepsilon_j\ ,\ j \in \mathbb{Z})$$

est un bruit blanc indépendant.

Si la fonction génératrice des moments $E(\exp(t\ \varepsilon_1)$ existe dans un voisinage de l'origine, si la suite $(\pi_j\ ,\ j \in \mathbb{N})$ vérifie :

$$\pi_o = 1\ ,\quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \Psi \neq 0\ ,\quad \sum_{j=1}^{\infty} j\ |\pi_j|\ \log j < \infty\ ,$$

on peut construire sur un espace probabilisé un processus $(Y_n\ ,\ n \in \mathbb{N})$ de même loi que $(X_n\ ,\ n \in \mathbb{N})$ et un processus du mouvement brownien $(W(t),\ t \in \mathbb{R})$ tels que :

pour tout $x > 0$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} |Y_k - \Psi\ W(k)| > C \log n + x \right) \leq K\ e^{-\lambda x}\ ,$$

où C , K , λ sont des constantes ne dépendant que de la loi du bruit blanc.

Si on ne suppose plus l'existence de moments de tous ordres, on peut établir le :

<u>*Théorème 4.*</u> Si la variable ε_1 a un moment d'ordre p , $p \geq 2$, si la suite $(\pi_j\ ,\ j \in \mathbb{N})$ vérifie :

$$\pi_o = 1 \quad , \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \Psi \neq 0 \quad ,$$

et il existe des constantes positives A et γ telles que : $|\pi_j| \leq A\, j^{-2-\gamma}$, on peut construire sur un espace probabilisé, un processus $(Y_n\ ,\ n \in \mathbb{N})$ de même loi que $(X_n\ ,\ n \in \mathbb{N})$ et un processus du mouvement brownien $(W(t)\ ,\ t \in \mathbb{R})$ tels que :

pour tout h_n , $n^{1/p} \leq h_n \leq C_1\ (n \log n)^{1/2}$,

$$P(\max_{0 \leq k \leq n} |Y_k - \Psi\, W(k)| \geq h_n) \leq C_2 \frac{n}{h_n^p} \quad ,$$

où les constantes C_1 et C_2 ne dépendent que de la loi du bruit blanc et de la suite (π_j) .

La démonstration des théorèmes 3 et 4 utilise une décomposition moyenne mobile du processus (X_t) , on montre ensuite l'existence d'une marche aléatoire $(S_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ somme de variables indépendantes, proche de X_t , et on achève en appliquant le théorème de KOMLOS-MAJOR-TUSNADY à (S_t) .

i) *Ecriture moyenne mobile du processus* $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$

En sommant les relations (1.1.) , on obtient :

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_k\, \varepsilon_{k-j} \right)$$

$$= \pi_o\, \varepsilon_t + (\pi_o + \pi_1)\, \varepsilon_{t-1} + \ldots + (\pi_o + \pi_1 + \ldots + \pi_{t-1})\, \varepsilon_1$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (\pi_{k+1} + \ldots + \pi_{k+t})\, \varepsilon_{-k} \quad .$$

Dans la suite, on notera :

$$\psi_k = \sum_{j=0}^{k} \pi_j \quad , \qquad \psi = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \quad ,$$

X_t peut s'écrire :

$$(1.3) \qquad X_t = \sum_{k=0}^{t-1} \psi_k \, \varepsilon_{t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{k+t} - \psi_k) \, \varepsilon_{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{t} \psi_{t-k} \, \varepsilon_k + \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{k+t} - \psi_k) \, \varepsilon_{-k} \quad .$$

ii) Majoration de $\sup_{0 \leq t \leq n} |X_t - \psi \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k|$.

Ecrivons X_t sous la forme :

$$(1.4) \qquad X_t = \psi \, S_t + R'_t + R''_t \quad , \quad \text{où} :$$

$$S_t = \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k \quad ,$$

$$R'_t = \sum_{k=1}^{t} (\psi_{t-k} - \psi) \, \varepsilon_k \quad ,$$

$$R''_t = \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{t+k} - \psi_k) \, \varepsilon_{-k} \quad .$$

Le terme $\psi \, S_t + R'_t$ est lié à l'évolution du bruit blanc (ε_j) depuis l'instant $t = 0$, alors que R''_t dépend uniquement des variables $(\varepsilon_j \, , \, j \leq 0)$, c'est-à-dire des conditions initiales.

Lemme 1.- Sous les hypothèses du théorème 3, il existe des constantes C , K , λ strictement positives, telles que :

pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(\max_{1\leq t\leq n} |R'_t| \geq C \log n + x) \leqslant K\, e^{-\lambda x}$$

et
$$P(\max_{1\leq t\leq n} |R''_t| \geq C \log n + x) \leqslant K\, e^{-\lambda x} .$$

Preuve du lemme 1.

Soit λ_o un réel strictement positif tel que $E(\exp(\lambda_o |\varepsilon_1|)) < \infty$ et C une constante supérieure à $1/\lambda_o$. Posons $K_1 = E(\exp(\lambda_o |\varepsilon_1|))$, on déduit de l'inégalité de Markov :

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varepsilon_k| \geq C \log n + x) \leqslant \frac{n\, K_1}{\exp(C\,\lambda_o \log n + \lambda_o\, x)} = \frac{n\, K_1}{n^{C\lambda_o}\, e^{\lambda_o x}}$$

$$\leqslant K\, e^{-\lambda_o x}$$

a) <u>Majoration de</u> $\max_{1\leq t\leq n} |R'_t|$

(1.5)
$$\max_{1\leq t\leq n} |R'_t| \leqslant \max_{1\leq t\leq n} \sum_{k=1}^{t} |\psi_{t-k} - \psi| . \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varepsilon_k|$$

or
$$\max_{1\leq t\leq n} \sum_{k=1}^{t} |\psi_{t-k} - \psi| = \max_{1\leq t\leq n} \sum_{k=1}^{t} \Big| \sum_{j=k}^{\infty} \pi_j \Big|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (|\pi_k| + |\pi_{k+1}| + \ldots)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k\, |\pi_k| ,$$

sous l'hypothèse : $\sum_{k=1}^{\infty} k\, |\pi_k| = A < \infty$, on a :

$$P(\max_{1\leq t\leq n} |R'_t| \geq A(C \log n + x)) \leqslant K\, e^{-\lambda_o x} .$$

En posant $\lambda = \lambda_o/A$, on obtient la première relation.

b) <u>Majoration de</u> $\max\limits_{1\leq t\leq n} |R''_t|$

$$R''_t = \sum_{k=0}^{\infty} (\pi_{k+1} + \pi_{k+2} + \dots + \pi_{k+t})\, \varepsilon_{-k} \quad .$$

On a donc :

$$\max_{1\leq t\leq n} |R''_t| \leq \sum_{k=0}^{n} (|\pi_{k+1}| + |\pi_{k+2}| + \dots + |\pi_{k+n}|) \max_{1\leq k\leq n} |\varepsilon_{-k}|$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} (|\pi_{k+1}| + |\pi_{k+2}| + \dots + |\pi_{k+n}|)$$

$$(C \log k + x) \max_{k\geq n} \frac{|\varepsilon_{-k}|}{C \log k+x}$$

$$(1.6) \qquad \max_{1\leq t\leq n} |R''_t| \leq \sum_{k=0}^{2n} k\,|\pi_k| \max_{1\leq k\leq n} |\varepsilon_{-k}|$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|\pi_k|\, (C \log k + x) \max_{k\geq n} \frac{|\varepsilon_{-k}|}{C \log k+x} \quad .$$

Utilisant l'inégalité de Markov, on obtient :

$$P(\max_{1\leq k\leq n} |\varepsilon_{-k}| \geq C \log n + x) \leq K\, e^{-\lambda_o x}$$

et $$P(\sup_{k\geq n} \frac{|\varepsilon_{-k}|}{C \log k+x} \geq 1) \leq K_1\, e^{-\lambda_o x} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^{C\lambda_o}}$$

$$\leq K''\, e^{-\lambda_o x} \quad .$$

Il vient donc :

$$P(\max_{1\leq t\leq n} |R''_t| \geq \sum_{k=0}^{2n} k\,|\pi_k|\, (C \log n + x)$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} C\, k\,|\pi_k| \log k + x \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|\pi_k|) \leq K\, e^{-\lambda_o x} \; ,$$

$$P(\max_{1\leqslant t\leqslant n} |R''_t| \geqslant A\,C \log n + A'C + Ax) \leqslant K\, e^{-\lambda_o x} ,$$

où $$A = \sum k\,|\pi_k| \quad \text{et} \quad A' = \sum_1^{\infty} k\,|\pi_k| \log k$$

Q.E.D.

Lemme 2.- Sous les hypothèses du théorème 4, il existe une constante C telle que : pour toute suite $(h_n\,,\ n \in \mathbb{N})$

$$\forall n\ ,\quad P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |R'_j| \geqslant h_n) \leqslant \frac{Cn}{h_n^p} ,$$

$$\forall n\ ,\quad P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |R''_j| \geqslant h_n) \leqslant \frac{Cn}{h_n^p} .$$

Preuve du lemme 2.

Posons $C = E(|\varepsilon_1|^p)$, on déduit de l'inégalité de Markov

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varepsilon_k| \geqslant h_n) \leqslant \frac{Cn}{h_n^p} .$$

Utilisant l'inégalité (1.5)

$$\max_{1\leqslant t\leqslant n} |R'_t| \leqslant (\sum_{k=1}^{\infty} k\,|\pi_k|) \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varepsilon_k|$$

on obtient :

$$P(\max_{1\leqslant t\leqslant n} |R'_t| \geqslant A\,h_n) \leqslant \frac{Cn}{h_n^p} .$$

On a de même une relation analogue à (1.5)

$$(1.6') \qquad \max_{1\leq t\leq n} |R''_t| \leq \sum_{k=0}^{2n} k\,|\pi_k| \max_{1\leq k\leq n} |\varepsilon_{-k}|$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} n\,|\pi_k|\,(1+k)^{2/p} \sup_{k\geq n+1} \frac{|\varepsilon_{-k}|}{(1+k)^{2/p}} \quad .$$

Or $$P(\max_{1\leq k\leq n} |\varepsilon_{-k}| \geq h_n) \leq \frac{Cn}{h_n^p}$$

et $$P(\sup_{k\geq n+1} \frac{|\varepsilon_{-k}|}{(1+k)^{2/p}} \geq n^{-2/p}\, h_n) \leq \sum_{k=n+1} \frac{C\, n^2}{h_n^p\,(1+k^2)}$$

$$\leq \frac{Cn}{h_n^p} \quad .$$

On obtient donc :

$$P(\max_{1\leq t\leq n} |R''_t| \geq (\sum_{k=0}^{2n} k\,|\pi_k|)\, h_n + (\sum_{k=n+1}^{\infty} n\,|\pi_k|\,(1+k)^{2/p})\, n^{-(2/p)}\, h_n) \leq \frac{2Cn}{h_n^p} \quad .$$

Sous la condition $|\pi_k| \leq A\, k^{-2-\gamma}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,|\pi_k| \text{ converge et } \sum_{k=n+1}^{\infty} |\pi_k|\,(1+k)^{2/p} < A'\,(n^{2/p})^{-1} \quad .$$

On obtient donc :

$$P(\max_{1\leq t\leq n} |R''_t| \geq (A + A')\, h_n) \leq \frac{2Cn}{h_n^p} \quad ,$$

$$P(\max_{1\leq t\leq n} |R''_t| \geq h_n) \leq 2C\,(A+A')^p\, \frac{n}{h_n^p} \quad .$$

Q.E.D.

iii) Fin de la démonstration des théorèmes 3 et 4.

Les démonstrations étant identiques, nous donnons celle du théorème 4.

On se donne un processus du mouvement brownien $(W(t), t \geq 0)$ sur un espace (Ω, A, P) et on construit suivant la méthode de J. KOMLOS, P. MAJOR, G. TUSNADY une suite de variables aléatoires $(e_j , j \in \mathbb{N}^*)$ indépendantes telles que :

. $(e_1 , e_2 ,\ldots, e_n ,\ldots)$ ait même loi que $(\varepsilon_1 , \varepsilon_2 ,\ldots, \varepsilon_n ,\ldots)$

. le processus $(T_n , n \in \mathbb{N})$ des sommes partielles, défini par $T_k = e_1 + e_2 + \ldots + e_k$, vérifie l'inégalité :

$$P(\max_{0 \leq k \leq n} |T_k - W(k)| > h_n) \leq C_2 \frac{n}{h_n} .$$

On construit une autre suite de variables $(e_{-j} , j \in \mathbb{N})$, indépendantes entre elles et indépendantes de $(e_j , j \in \mathbb{N})$, de même loi que ε_1 .

On considère le processus $(Y_t , t \in \mathbb{N})$ défini à partir de la suite (e_j) par :

$$Y_t = \sum_{k=1}^{t} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \, e_{k-j} \right) .$$

Ce processus $(Y_t , t \in \mathbb{N})$ a même loi que $(X_t , t \in \mathbb{N})$, il admet encore la décomposition :

$$(1.4') \qquad Y_t = \psi \, T_t + R'_{e,t} + R''_{e,t} ,$$

l'indice e indiquant que dans la décomposition (1.4) de X_t , $(\varepsilon_j , j \in \mathbb{Z})$ est remplacé par $(e_j , j \in \mathbb{Z})$.

La démonstration du théorème 4 (resp. 3) résulte alors du théorème 2 (resp. th. 1) et des lemmes 1 et 2.

3 - APPLICATION AUX PROCESSUS ARIMA D'ORDRE 1.

i) Définition (*G. BOX et G. JENKINS 1970,* [1], *C. GOURIEROUX et A. MONFORT, 1983,* [3]).

On note B l'opérateur retard qui à un processus $(\xi_t , t \in \mathbb{Z})$ associe le processus $(\eta_t , t \in \mathbb{Z})$

défini par : $\forall t \in \mathbb{Z} , \quad \eta_t = B(\xi_t) = \xi_{t-1}$,

et on pose : $\Delta = I - B$:

$$\forall t \in \mathbb{Z} , \quad \Delta\xi_t = \xi_t - \xi_{t-1} .$$

$(X_t , t \in \mathbb{N})$ est un processus ARIMA d'ordre 1, plus précisément un ARIMA (p,1,q) s'il satisfait une équation :

$$\phi(B) = \Delta X_t = \Theta(B) \varepsilon_t , \quad t \in \mathbb{N} . \tag{1.7}$$

où ϕ et Θ sont des polynômes de degré respectifs p et q ayant des racines de module supérieur à 1.

$$\phi(z) = \psi_o + \psi_1 z + \ldots + \psi_p z^p \qquad \psi_o = 1 , \quad \psi_p \neq 0 ,$$

$$\theta(z) = \theta_o + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q \qquad \theta_o = 1 , \quad \theta_q \neq 0 .$$

$(\varepsilon_t , t \in \mathbb{N})$ est un bruit blanc centré.

La relation (1.7) ne définit pas X_t , il faut adjoindre des conditions initiales.

La méthode la plus fréquente est d'introduire (p+1) valeurs $x_{-p} , x_{-p+1} ,\ldots, x_o$ non aléatoires pour initialiser le processus et de faire la convention : $\varepsilon_{-q+1} = \varepsilon_{-q+2} = \ldots = \varepsilon_o = 0$.

Sous ces conditions, le processus différencié $(\Delta X_t \, , \, t \in \mathbb{N})$ n'est pas stationnaire, mais il est asymptotiquement stationnaire.

Nous ferons un choix différent sur les conditions initiales, de manière à assurer la stationnarité du processus différencié. On considère un bruit blanc indexé par $\mathbb{Z}$ $(\varepsilon_t \, , \, t \in \mathbb{Z})$ et on définit un processus ARMA stationnaire $(\xi_t \, , \, t \in \mathbb{Z})$ également indexé par $\mathbb{Z}$, par :

$$\phi(B) \, \xi_t = \Theta(B) \, \varepsilon_t \quad .$$

Le processus ARIMA $(X_t \, , \, t \in \mathbb{N})$ sera alors défini par la donnée d'une condition initiale x_o non aléatoire et de la relation : $X_t - x_o = \sum_{j=1}^{t} \xi_j$, on a :

$$\phi(B) \, \Delta X_t = \theta(B) \, \varepsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{N} \quad .$$

ii) Ecriture moyenne mobile du processus (X_t) .

Sous la condition $\psi_o = 1$, le polynôme formel ϕ est inversible et on note :

$$\pi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \, B^j \quad ,$$

d'où
$$\xi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \, \varepsilon_{t-j} \quad .$$

Si on pose : $\psi_k = \pi_o + \pi_1 + \ldots + \pi_k$, X_t est défini par :

$$X_t - x_o = \sum_{k=0}^{t-1} \psi_k \, \varepsilon_{t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{k+t} - \psi_k) \, \varepsilon_{-k} \quad . \tag{1.3}$$

Remarque : Si on définit $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ par la relation (1.7) et $p+q+1$ conditions initiales : $x_{-p}\ ,\ x_{-p+1}\ ,\ldots,\ x_o\ ,$ $\varepsilon_{-q+1} = 0\ ,\ldots,\ \varepsilon_o = 0$, non aléatoires, l'expression (1.3) devient

(1.3') $$X_t = \sum_{k=0}^{t-1} \psi_k\ \varepsilon_{t-k} + \eta_o + \eta(t)$$ où η_o est une constante

et $\eta(t)$ une fonction non aléatoire à décroissance exponentielle.

iii) Majoration des coefficients moyenne mobile π_j et ψ_j .

Le polynôme $\phi(z)$ peut s'écrire :

$$\phi(z) = (1-\lambda_1 z)\ (1-\lambda_2 z)\ \ldots\ (1-\lambda_p z^p)$$

et les coefficients λ_j vérifient : $\lambda = \max\ \{|\lambda_j|\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant p\} < 1$.

Son inverse $\dfrac{1}{\phi(z)} = \sum\limits_{j=o}^{\infty} \alpha_j\ z^j = \prod\limits_{j=1}^{p}\ (\sum\limits_{k=o}^{\infty} \lambda_j^k\ z^k)$ a ses coefficients α_j majorés en valeur absolue par ceux de

$$(\sum_{k=o}^{\infty} \lambda^k\ z^k)^p = \frac{1}{(1-\lambda z)^p}\ ,\quad \text{soit}$$

$$|\alpha_j| \leqslant \binom{j+p-1}{p-1}\ \lambda^j\ .$$

On en déduit l'existence d'une constante C telle que

$$|\alpha_j| \leqslant C\ j^p\ \lambda^j\ .$$

Notons alors $\pi(z) = \dfrac{\Theta(z)}{\phi(z)} = \sum\limits_{j=o}^{\infty} \pi_j\ z^j = (\sum\limits_{j=o}^{q} \theta_j\ z^j)\ (\sum\limits_{j=o}^{\infty} \alpha_j\ z^j)$.

On voit qu'il existe aussi une constante $\bar{C}$ telle que

$$|\pi_j| \leqslant \bar{C}\ j^p\ \lambda^j\ .$$

Remarque : Dans le cas où les racines λ_j sont simples, on peut établir l'existence d'une constante C telle que : $\forall j \in \mathbb{N}$, $|\pi_j| \leq C \lambda^j$.

On établit de même l'existence d'une constante C telle que $|\psi-\psi_j| \leq C\, j^p \lambda^j$, où $\psi = \lim\limits_{j\to\infty} \psi_j$.

Les théorèmes 3 et 4 s'appliquent en particulier aux processus ARIMA d'ordre 1.

B - TEMPS D'OCCUPATION.

Dans la section précédente, nous avons étudié un processus $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ défini par une relation de récurrence :

$$X_o = 0 \quad , \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad X_t - X_{t-1} = \sum_{j=o}^{\infty} \pi_j\, \varepsilon_{t-j}$$

où $(\varepsilon_j\ ,\ j \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc indépendant et π_j une suite de réels telle que : $\sum\limits_{j=o}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, $\sum\limits_{j=o}^{\infty} \pi_j \neq 0$.

On souhaite établir la convergence en loi du temps d'occupation du processus (X_t) , convenablement normalisé, vers le temps local d'un mouvement brownien.

X_t a l'écriture moyenne mobile :

$$(1.3) \qquad X_t = \sum_{k=o}^{t-1} \psi_k\, \varepsilon_{t-k} + \sum_{k=o}^{\infty} (\psi_{t+k} - \psi_k)\, \varepsilon_{-k} \quad , \quad t \in \mathbb{N} \ .$$

On note $\qquad \tilde{X}_t = \sum\limits_{k=o}^{t-1} \psi_k\, \varepsilon_{t-k}$.

1 - <u>CONVERGENCE UNIFORME DE LA DENSITE DE</u> : $(\sum\limits_{k=o}^{n-1} \psi_k^2)^{-1/2}\, \tilde{X}_n$.

Notons $B_n = \sum\limits_{k=o}^{n-1} \psi_j^2$ et $\psi = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k$.

Reprenant la méthode du chapitre I, nous comparons la densité de $\frac{1}{\sqrt{B_n}}\, \tilde{X}_n$ et celle de la loi normale centrée réduite.

<u>*Proposition 1*</u>. Soit f_n la densité de la variable aléatoire $\frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum\limits_{k=o}^{n-1} \psi_k\, \varepsilon_{t-k}$. On suppose que la suite $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a une limite finie ψ non nulle.

B1 - Les variables aléatoires (ε_j) sont indépendantes, de même loi, centrées, de variance 1, et elles admettent un moment d'ordre p, $p > 3$.

B2 - Leur fonction caractéristique $\psi(t) = E(\exp(it\,\varepsilon_1))$ vérifie : $\exists\ \alpha_o \in \mathbb{N}$ tel que $\lim\limits_{t\to\infty} t[\psi(t)]^{\alpha_o} = 0$.

Alors la densité f_n est de classe C^1 pour n assez grand et il existe une constante C telle que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n'(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

dès que n est assez grand.

Preuve : La démonstration analogue à celle du chapitre I n'est pas reprise. La seule modification est le remplacement du lemme V.1. de V.V. PETROV par la propriété ci-dessous.

Théorème (V.V. PETROV, 1975, p. 109) [6]. Soit $(\varepsilon_j, j \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées, de variance 1, ayant un moment d'ordre 3, et $(\psi_j, j \in \mathbb{N})$ une suite de réels.

On pose $B_n = \sum\limits_{j=o}^{n-1} \psi_j^2$ et $L_n = B_n^{-3/2} \sum\limits_{j=o}^{n-1} E(|\psi_j\,\varepsilon_j|^3)$.

Alors la fonction caractéristique $\psi_n(t)$ de $B_n^{-1/2} \sum\limits_{j=o}^{n-1} \psi_j\,\varepsilon_j$ vérifie : $|\psi_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq 16\, L_n\, |t^3|\, e^{-t^2/3}$ pour $|t| \leq \frac{1}{4L_n}$.

Notons que ce résultat de V.V. PETROV ne suppose pas que les variables (ε_j) soient équidistribuées.

2 - MAJORATION DE $|N_n(a,a+\delta) - N_n(b,b+\delta)|$.

Ayant obtenu une approximation de la densité de la variable $\tilde{X}_t$, $\tilde{X}_t = \sum_{j=0}^{t-1} \psi_j \, \varepsilon_{t-j}$, nous allons l'utiliser pour comparer les temps d'occupation de deux intervalles par le processus X_t .

Dans le chapitre I, nous avons obtenu d'abord pour tout entier p, une majoration de $E[|N_n(a,a+\delta) - N_n(a+k\delta,\ a+(k+1)\delta)|^{2p}]$ et on en a déduit successivement une majoration presque sûre de

$$|N_n(a,a+\delta) - N_n(a+k\delta,\ a+(k+1)\delta)| \ ,$$

puis de

$$|N_n(a,a+\delta) - \frac{1}{k} N_n(a,a+k\delta)| .$$

Lorsque les variables Z_t ne sont pas à accroissements indépendants, le calcul de :

$$E(|N_n(a,a+\delta) - N_n(a+k\delta,\ a+(k+1)\delta|^{2p}) \quad \text{devient}$$

extrêmement lourd pour $p > 1$. Aussi nous nous limiterons à $p = 1$ et nous étudierons directement une majoration de

$$|N_n(a,a+\delta) - \frac{1}{k} N_n(a,a+k\delta)|$$

sans la déduire de celle de

$$|N_n(a,a+\delta) - N_n(a+k\delta,\ a+(k+1)\delta)| \ .$$

Lemme 3.- Soit $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in]0,1[$ et k un réel supérieur à 1. Sous les hypothèses B_1 , B_2 de la proposition 1, il existe une constante $C(F,\pi)$ ne dépendant que de la fonction de répartition F des ε_j et de la suite (π_j) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \quad E(|N_n(a,a+\delta) - \frac{1}{k} N_n(a,a+k\delta)|^2) \leq$$
$$C(F,\pi)\ \delta \max(1,\ k\delta^2 \log n) \ . \ n^{1/2} \ .$$

Preuve :

i) écriture développée

On note $E_2 = E(|N_n(a,a+\delta) - \frac{1}{k} N_n(a,a+k\delta)|^2)$.

Il a pour écriture développée :

$$E_2 = E(|\sum_{j=1}^{n} 1_{[a,a+\delta]}(X_j) - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} 1_{[a,a+k\delta]}(X_j)|^2)$$

$$= A + A_1 + A_2$$

avec

$$A = E\sum_{j=1}^{n} (1_{[a,a+\delta]}(X_j) - \frac{1}{k} 1_{[a,a+k\delta]}(X_j))^2$$

$$A_1 = 2E\sum_{j=1}^{n} 1_{[a,a+\delta]}(X_j)\left[\sum_{j'=j+1}^{n} (1_{[a,a+\delta]}(X_{j'}) - \frac{1}{k} 1_{[a,a+k\delta]}(X_{j'}))\right]$$

$$A_2 = 2E\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k} 1_{[a,a+k\delta]}(X_j)\left[\sum_{j'=j+1}^{n} (\frac{1}{k} 1_{[a,a+k\delta]}(X_{j'}) - 1_{[a,a+\delta]}(X_{j'}))\right]$$

On utilise la décomposition :

$$X_t = \tilde{X}_t + R''_t$$

où $\tilde{X}_t = \sum_{j=o}^{t-1} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ et $R''_t = \sum_{j=o}^{\infty} (\psi_{t+j} - \psi_j)\,\varepsilon_{-j}$,

et les variables $\tilde{X}_t$ et R''_t sont, pour tout t , indépendantes. On note g_t la densité de $\tilde{X}_t$ et l'on sait que

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{B_t}} f_t(\frac{x}{\sqrt{B_t}})$$

où f_t a été défini à la proposition 1.

ii) Majoration de g_t *et* g'_t .

De la proposition 1, on déduit :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| g_t(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi B_t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2 B_t}\right)\right| \leqslant C\, B_t^{-1/2}\, t^{-1/2} \leqslant C_1\, t^{-1}$$

et donc :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_t(x)| \leqslant C_2\, t^{-1/2} .$$

On a de même :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| g'_t(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, B_t} \frac{x}{\sqrt{B_t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2 B_t}\right)\right| \leqslant C\, B_t^{-1} \quad t^{-1/2}$$

et donc :

$$| g'_t(x)| \leqslant C_3 \inf(t^{-1} , (|x|+1)\, t^{-3/2})$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g'_t(x)| \leqslant C_3\, t^{-1}$$

iii) Majoration de A .

$$A = E\Big[\sum_{j=1}^{n} (1_{[a-R''_j,\, a-R''_j+\delta]}(\tilde{X}_j) - \frac{1}{k}\, 1_{[a-R''_j,\, a+R''_j-k\delta]}(\tilde{X}_j))^2\Big|$$

$$= E\Big[\sum_{j=1}^{n} ((\frac{k-1}{k})^2\, 1_{[a-R''_j,\, a-R''_j+\delta]}(\tilde{X}_j)$$

$$+ \frac{1}{k^2}\, 1_{[a-R''_j+\delta\, ,\, a-R''_j+k\delta]}(\tilde{X}_j))\Big]$$

On sait majorer la densité de $\tilde{X}_j$, donc :

$$A \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big[(\frac{k-1}{k})^2\, \delta \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_j(x)| + \frac{(k-1)\delta}{k^2} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_j(x)|\Big] ,$$

$$A \leqslant \frac{k-1}{k}\, \delta \sum_{j=1}^{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} | g_j(x) | ,$$

$$A \leqslant C_2\, \delta \sum_{j=1}^{n} j^{-1/2} ,$$

on en déduit : $A \leqslant C\,\delta\,\sqrt{n}$.

iv) Majoration de A_1 .

Pour $j' > j$, on introduit la décomposition suivante de $X_{j'}$:

$$X_{j'} = \tilde{X}_{jj'} + R_{jj'}$$

avec $\displaystyle \tilde{X}_{jj'} = \sum_{h=j+1}^{j'} \psi_{j'-h}\,\varepsilon_h$ et $R_{jj'} = X_{j'} - \tilde{X}_{jj'}$.

On vérifie aisément que $R_{jj'}$ et $\tilde{X}_{jj'}$ sont indépendantes, que la variable $\tilde{X}_{jj'}$ a même loi que $\tilde{X}_{j'-j}$ et donc qu'elle a la densité $g_{j'-j}(x)$.

A_1 peut s'écrire :

$$A_1 = 2\,E \sum_{j=1}^{n} 1_{[a,a+\delta]}(X_j)$$

$$\sum_{j'=j+1}^{n} \left[1_{[a-R_{jj'},\,a-R_{jj'}+\delta]}(\tilde{X}_{jj'}) - \frac{1}{k}\,1_{[a-R_{jj'},\,a-R_{jj'}+k\delta]}(\tilde{X}_{jj'})\right]$$

ou encore en utilisant la densité de $\tilde{X}_{jj'}$:

$$A_1 = 2\,E \sum_{j=1}^{n} 1_{[a,a+\delta]}(X_j)$$

$$\sum_{j'=j+1}^{n} \left(\int_{a-R_{jj'}}^{a-R_{jj'}+\delta} g_{j'-j}(x)\,dx - \frac{1}{k}\int_{a-R_{jj'}}^{a-R_{jj'}+k\delta} g_{j'-j}(x)\,dx\right)$$

Un changement de variable conduit à :

$$A_1 = 2\,E \sum_{j=1}^{n} 1_{[a,a+\delta]}(X_j) \sum_{j'=j+1}^{n} \int_0^{\delta} \left(g_{j'-j}(a-R_{jj'}+x) - g_{j'-j}(a-R_{jj'}+kx)\right) dx \;,$$

utilisant le théorème des accroissements finis, on a la majoration :

$$\sup_{\substack{x\in[0,\delta] \\ y\in\mathbb{R}}} |g_{j'-j}(y+x) - g_{j'-j}(y+kx)| \leqslant (k-1)\delta \sup_{y\in\mathbb{R}} |g'_{j'-j}(y)| \quad ,$$

on a donc :

$$A_1 \leqslant 2\ E \sum_{j=1}^{n} 1_{[a,a+\delta]}(X_j) \sum_{j'=j+1}^{n} (k-1)\ \delta^2 \frac{C_3}{j'-j}$$

$$\leqslant 2\ C_3(k-1)\ \delta^2 \log n \sum_{j=1}^{n} E\ 1_{[a,a+\delta]}(X_j) \quad .$$

En utilisant la majoration de $E\ 1_{[a,a+\delta]}(X_j)$ obtenue en iii), on obtient :

$$A_1 \leqslant C'(k-1)\ \delta^3(\log n)\ \sqrt{n} \quad .$$

La majoration de A_2 est obtenue de la même manière :

$$A_2 \leqslant C'(k-1)\ \delta^3(\log n)\ \sqrt{n} \quad .$$

On en déduit :

$$E_2 \leqslant C\ \delta\ \sqrt{n} + 2\ C'\ (k-1)\ \delta^3(\log n)\ \sqrt{n} \ ,$$

$$E_2 \leqslant C(F,\pi)\ \delta\ \sqrt{n} \max(1,\ (k-1)\ \delta^2 \log n)$$

Proposition 2.- Soit $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ un processus défini par

$$X_o = 0 \quad , \quad X_t - X_{t-1} = \sum_{k=o}^{\infty} \pi_k\ \varepsilon_{t-k} \quad ,$$

où la suite (π_j) vérifie : $\pi_o = 1$, $\sum |\pi_j| < \infty$, $\sum_{j=o}^{\infty} \pi_j \neq 0$
et les variables aléatoires satisfont les hypothèses B_1 et B_2 .

Soit (k_n) et (δ_n) deux suites de réels telles que

$$\forall n \quad k_n > 1 \quad \text{et} \quad \delta_n \in\ ]0,1] \quad ,$$

alors il existe une constante C telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|N_n(a,a+\delta_n) - \frac{1}{k_n} N_n(a,a+k_n\delta_n)| \geq \max(1,(k_n \log n)^{1/2}\delta_n)\delta_n^{1/2} n^{(1/4)+\varepsilon}) \leq \frac{C}{n^{2\varepsilon}}$$

<u>*Corollaire*</u>.- Sous les mêmes hypothèses :

$$\lim_{n\to\infty} P(|N_n(a,a+\delta_n) - N_n(a+k_n\delta_n, a+(k_n+1)\delta_n)| \geq$$

$$\geq \max(1,(k_n \log n)^{1/2}\delta_n)\delta_n^{1/2} n^{(1/4)+\varepsilon}) = 0 .$$

<u>*Preuve de la proposition 2*</u> : La proposition 2 résulte immédiatement du lemme 3 et de l'inégalité de Markov à l'ordre 2.

$$P(|N_n(a,a+\delta_n) - \frac{1}{k_n} N_n(a,a+k_n\delta_n)| \geq n^{(1/4)+\varepsilon} \delta_n^{1/2} \max(1,(k_n \log n)^{1/2}\delta_n))$$

$$\leq \frac{E_2}{n^{(1/2)+2\varepsilon} \delta_n \max(1,k_n\delta_n^2 \log n)} \leq \frac{C}{n^{2\varepsilon}}$$

3 - <u>CONVERGENCE EN PROBABILITE DU TEMPS D'OCCUPATION</u>.

Nous allons comparer le temps d'occupation d'un processus X_t défini par (2.1) et celui du mouvement brownien.

<u>*Théorème 5*</u>.- Soit (π_j) une suite de réels, satisfaisant les hypothèses :

- il existe des constantes strictement positives A et γ
  $|\pi_j| \leq Aj^{-2-\gamma}$,
- $\pi_o = 1$ et $\sum_{j=o}^{\infty} \pi_j = \psi \neq o$.

On peut construire, sur un même espace probabilisé un processus du mouvement brownien $(W(t)\ ,\ t \in \mathbb{R})$ et une suite de variables aléatoires (ε_j) indépendantes, de fonction de répartition F donnée satisfaisant B_1 et B_2, tels que le temps d'occupation du processus $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ défini par :

$$X_o = 0 \quad , \quad X_t - X_{t-1} = \sum_{j=o}^{\infty} \pi_j\ \varepsilon_{t-j}$$

satisfasse à la relation :

$$\forall \delta \in]0,1] \ , \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|N_n(a,a+\delta) - \int_o^n 1_{[a,a+\delta]}(\psi W(s))\ ds| > n^{(1/3)+(1/3p)+\varepsilon}) = 0$$

où
$$N_n(a,b) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[a,b]}(X_t) \ .$$

Preuve :

i) Approximation forte du processus X_t .

On a établi dans la section A, th. 4 que si les coefficients π_j du développement moyenne mobile de $X_t - X_{t-1}$ vérifiaient

$$|\pi_j| \leq A\ j^{-2-\gamma} \quad , \quad \text{et} \quad \sum_{j=o}^{\infty} \pi_j \neq o \quad ,$$

on pouvait construire un processus du mouvement brownien $(W(t),\ t \in \mathbb{R})$ et le processus (X_t) de manière que :

$$P(\sup_{o\leq j\leq n} (|X_j - \psi\ W(j)| \geq h_n) \leq \frac{Cn}{h_n^p} \ .$$

On en déduit comme dans le chapitre I que :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \sup_{o\leq j\leq n} |X_j - \psi\ W(j)| = o(n^{(1/p)+\varepsilon}) \quad \text{p.s.}$$

ii) <u>*Majoration de*</u> $|N_n(a,a+\delta_n) - \int_o^n 1_{[a,a+\delta_n]} (\psi\ W(s))\ ds|$

L'approximation forte de X_t entraîne la majoration presque sûre :

$$|N_n(a,a+k_n\delta_n) - \int_o^n 1_{[a,a+k_n\delta_n]} (\psi\ W(s))\ ds| \leqslant$$

$$\int_o^n 1_{[a-n^{(1/p)+\varepsilon},a]} (\psi\ W(s))\ ds + \int_o^n 1_{[a+k_n\delta_n,a+k_n\delta_n+n^{(1/p)+\varepsilon}]} (\psi\ W(s))\ ds .$$

La démonstration suit celle du théorème 5 du chapitre I, la seule modification est due à l'utilisation de la proposition 2 pour majorer :

$$|N_n(a,a+\delta_n) - \frac{1}{k_n} N_n(a,a+k_n\delta_n)| .$$

On obtient :

Il existe une constante C telle que :

$$P(|N_n(a,a+\delta_n) - \int_o^n 1_{[a,a+\delta_n]} (\psi\ W(s))\ ds| \geqslant$$

$$n^{(1/4)+\varepsilon}\ \delta_n^{1/2} \max(1,(k_n \log n)^{1/2}\delta_n) + k_n^{-1}\ n^{1/2+1/p+\varepsilon}) \leqslant \frac{C}{n^{2\varepsilon}} .$$

Fixons $\delta_n = \delta$ dans $]0,1]$ et choisissons $k_n = n^{(1/6)+(2/3p)}$,

on obtient :

$$\forall\varepsilon > 0 , \quad P(N_n(a,a+\delta) - \int_o^n 1_{[a,a+\delta]} (\psi\ W(s)) > n^{(1/3)+(1/3p)+\varepsilon}) \leqslant \frac{C}{n^{2\varepsilon}}$$

iii) Remarquons que si δ_n est une suite convergeant vers 0 , la quantité $n^{(1/4)+\varepsilon} \max(\delta_n^{1/2} , k_n^{1/2}\ \delta_n^{3/2} , k_n^{-1}\ n^{(1/4)+(1/p)})$ est minimisée en choisissant :

$$k_n = n^{(1/6)+(2/3p)} \delta_n^{-1}$$

si la condition $\delta_n k_n^{1/2} \geq 1$ est vérifiée,

donc si $n^{(1/6)+(2/3p)} \delta_n \geq 1$, alors

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \lim_{n\to\infty} P(|N_n(a,a+\delta_n) - \int_o^n 1_{[a,a+\delta_n]}(\psi W(s))\, ds| \geq \delta_n n^{1/3+1/3p+\varepsilon}) = 0 .$$

On peut établir suivant les méthodes du chapitre I , le :

Corollaire.- Pour tout $\delta \in]0,1]$,

$$\frac{1}{\delta\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} 1_{[a,a+\delta]}(Z_t) \quad \text{converge en loi vers} \quad \frac{1}{\psi} L(o) ,$$

où $L(o)$ désigne le temps local à l'origine du mouvement brownien $(W(s) , s \in [0,1])$.

C - TEMPS D'OCCUPATION D'UN PROCESSUS ARIMA(p,1,q) GAUSSIEN.

Dans le cas d'un ARIMA (1,p,q) gaussien, les résultats précédents peuvent être améliorés.

On fera donc les hypothèses suivantes (C) :

- le processus $(X_t \, , \, t \in \mathbb{N})$ vérifie $(I-B)\, \phi(B)\, X_t = \Theta(B)\, e_t$,
- les variables $(e_t \, , \, t \in \mathbb{Z})$ sont indépendantes, de loi $N(0,1)$,
- les polynômes ϕ et θ satisfont les hypothèses du paragraphe A3,i .

1 - <u>MAJORATION DE</u> $|N_n(a,a+\delta) - N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta|$.

<u>Lemme 4</u>.- Sous les hypothèses précédentes, pour tout entier p, il existe une constante $C_{2p}(\phi, \Theta)$ telle que

$$E_{2p} = E\left[N_n(a,a+\delta)-N_n(a+k\delta,a+(k+1)\delta)\right]^{2p} \leqslant$$

$$C_{2p}(\phi, \Theta)\, \delta^p(\max(1,k\delta^2 \ell n\, n))^p\, n^{p/2} \quad .$$

On reprend la démonstration du lemme I.3. et on pose

$$B_o = [a,a+\delta] \qquad B_k = [a+k\delta,a+(k+1)\delta]$$

$$Y_i = 1_{B_o}(X_i) - 1_{B_k}(X_i)$$

et $E_{2p} = E(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^{2p} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{2p}} E\, Y_{i_1} Y_{i_2} \ldots Y_{i_{2p}}$.

On majorera E_{2p} en regroupant les éléments $E\, Y_{i_1} Y_{i_2} \ldots Y_{i_{2p}}$ suivant le nombre d'indices i_j distincts.

i) Calcul de la densité de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$.

On note : $f(x_1, x_2, \dots, x_{2p})$ la densité de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{2p}})$ sous l'hypothèse $t_1 < t_2 < \dots < t_{2p}$.

On sait que les coefficients ψ_j tendent exponentiellement vers ψ : il existe C et $\lambda \in]0,1[$ tels que $|\psi - \psi_j| < C \lambda^j$.

Les coefficients de la matrice de covariance de $(X_{t_1}, X_{t_2-t_1}, \dots, X_{t_{2p}} \dots X_{t_{2p-1}})$ sont :

- $$E(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 = \sum_{0}^{t_{k+1}-t_k-1} \psi_j^2 + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_j - \psi_{j+t_{k+1}-t_k})^2$$

d'où

$$|E(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)\psi^2| \leq C_1$$

- $$E[X_{t_1}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})] = \sum_{j=1}^{t_1} \psi_{t_1-j}(\psi_{t_{k+1}-j} - \psi_{t_k-j}) + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{t_1+j} - \psi_j)(\psi_{t_{k+1}+j} - \psi_{t_k+j})$$

$$|E[X_{t_1}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})]| \leq C_1 \lambda^{t_k - t_1} .$$

On obtient donc :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \psi^2 t_1 + 0(1) & 0(1) & 0(\lambda^{t_2-t_1}) & \dots\dots & 0(\lambda^{t_{2p-1}-t_1}) \\ 0(1) & \psi^2(t_2-t_1)+0(1) & 0(1) & \dots\dots & 0(\lambda^{t_{2p-1}-t_2}) \\ \dots\dots & & & & \dots\dots \\ & & & & \psi^2(t_{2p}-t_{2p-1}) + 0(1) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible, le déterminant $|\Gamma|$ est $\psi^{4p}\left[t_1(t_2-t_1)\ \dots\ (t_{2p}-t_{2p-1}) + \text{des termes d'ordre inférieur en } (t_1,\ t_2-t_1\ ,\dots,\ t_{2p}-t_{2p-1})\right]$.

Le calcul de l'inverse, par la méthode du pivot de Gauss, fastidieux, conduit à :

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{\psi^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{t_1+O(1)} & O\left(\frac{1}{t_1(t_2-t_1)}\right) & \frac{O(1)}{t_1(t_2-t_1)(t_3-t_2)} & \cdots\cdots \\ O\left(\frac{1}{t_1(t_2-t_1)}\right) & \frac{1}{t_2-t_1+O(1)} & O\left(\frac{1}{(t_3-t_2)(t_2-t_1)}\right) & \cdots\cdots \\ \frac{O(1)}{t_1(t_2-t_1)(t_3-t_1)} & \frac{O(1)}{(t_3-t_2)(t_2-t_1)} & \frac{1}{t_3-t_2+O(1)} & \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \frac{1}{t_{2p}-t_{2p-1}+O(1)} \end{pmatrix}$$

On peut alors majorer $E\, Y_{t_1} Y_{t_2} \dots Y_{t_{2p}}$ par :

$$\gamma^p\, k^p \sup_{x_1,x_2,\dots,x_{2p}} \left|\frac{\partial^p}{\partial x_2 \partial x_4 \dots \partial x_{2p}} f(x_1,x_2,\dots,x_{2p})\right| , \quad \text{où}$$

$$f(x_1,x_2,\dots,x_{2p}) = \frac{1}{(2\pi)^p|\Gamma|^{1/2}} \exp(P(x_1,x_2,\dots,x_{2p})) \qquad \text{avec :}$$

$$P(x_1,x_2,\dots,x_{2p}) = (x_1,x_2-x_1,\dots,x_{2p}-x_{2p-1})\ \Gamma^{-1}(x_1,x_2-x_1,\dots,x_{2p}-x_{2p-1})'$$

X' désignant la transposé du vecteur X et $|\Gamma|$ le déterminant de Γ.

P étant le polynôme homogène de degré 2 le calcul de la dérivée $p^{\text{ième}}$ de f conduit à :

$$\frac{\partial^p}{\partial z_2 \partial z_4 \dots \partial z_{2p}} f(z_1, z_2, \dots, z_{2p}) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^p |\Gamma|^{1/2}} \frac{\partial P}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial P}{\partial z_4} \cdots \frac{\partial P}{\partial z_{2p}} + \frac{\partial^2 P}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2}} \frac{\partial P}{\partial z_{i_3}} \cdots \frac{\partial P}{\partial z_{i_{p-1}}} + \dots$$

$$+ \sum \frac{\partial^2 P}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2}} \frac{\partial^2 P}{\partial z_{i_3} \partial z_{i_4}} \cdots \frac{\partial P}{\partial z_{i_p}} + \dots \quad \exp(P(z_1, \dots, z_{2p}))$$

les sommes étant étendues à l'ensemble des indices $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ obtenu par permutation de $\{2,4,6,\dots,2p\}$.

$$\frac{\partial P}{\partial z_2} = - \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1 + o(1)} + \frac{z_3 - z_2}{t_3 - t_2 + O(1)} + \frac{z_2 - z_1}{O(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)} + \frac{z_3 - z_2}{O((t_3 - t_2)(t_2 - t_1))}$$

$$+ \frac{z_1}{O(t_1(t_2 - t_1))} + \frac{z_4 - z_3}{O((t_4 - t_3)(t_3 - t_2))} + \dots$$

les autres termes sont d'ordre inférieur à $\frac{1}{t_2 - t_1}$ ou à $\frac{1}{t_3 - t_2}$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z_2 \partial z_4} = \frac{1}{O((t_4 - t_3)(t_3 - t_2))} + \dots \quad \text{des termes d'ordre inférieur.}$$

L'écriture de $P(z_1, \dots, z_{2p})$

$$-2\, P(z_1, \dots, z_{2p}) = \sum_{j=1}^{2p} \frac{(z_j - z_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}} + 2 \sum_{j=2}^{2p} \frac{(z_j - z_{j-1})(z_{j-1} - z_{j-2})}{O((t_j - t_{j-1})(t_{j-1} - t_{j-2})} + \dots \geq 0$$

implique que

$$\sup_{z_1, \dots, z_{2p}} \exp(P(z_1, \dots, z_{2p})) \leq 1$$

et l'existence d'une constante C indépendante de t_1 , t_2 ,..., t_{2p} telle que : si α_1 , α_2 ,..., α_ℓ sont inférieurs à p :

$$\sup_{z_1,\dots,z_{2p}} \left| \left(\frac{(z_j - z_{j-1})}{\sqrt{t_j - t_{j-1}}} \right)^{\alpha_j} \left(\frac{z_k - z_{k-1}}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}} \right)^{\alpha_k} \cdots\cdots \left(\frac{z_\ell - z_{\ell-1}}{\sqrt{t_\ell - t_{\ell-1}}} \right)^{\alpha_\ell} \exp(P(z_1,\dots,z_{2p})) \right| \leqslant C$$

on peut donc majorer

$$\frac{\partial P}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial P}{\partial z_4} \cdots \frac{\partial P}{\partial z_{2p}} \quad \text{par une somme finie de termes du type}$$

$$C \frac{1}{\sqrt{|t_2 - t_{2+\varepsilon_1}|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|t_4 - t_{4+\varepsilon_2}|}} \cdots\cdots \frac{1}{\sqrt{|t_{2p} - t_{2p+\varepsilon_p}|}} \qquad \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p = -1 \text{ ou } 1$$

on constate que le même type de majoration est valable pour

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z_2 \partial z_4} \frac{\partial P}{\partial z_6} \cdots \frac{\partial P}{\partial z_{2p}}$$

or $\qquad |\Gamma|^{-1/2} = t_1^{-1/2} \prod_{j=2}^{2p} (t_j - t_{j-1})^{-1/2} \quad (\psi^{-2p} + o(1))$

On peut alors majorer $\quad \dfrac{\partial^p}{\partial z_2 \partial z_4 \dots \partial z_{2p}} f(z_1,\dots,z_{2p})$

par une somme finie (le nombre de termes ne dépendant que de p) d'éléments du type

$$C\, t_1^{\beta_1} (t_2 - t_1)^{\beta_2} (t_3 - t_2)^{\beta_3} \cdots (t_{2p} - t_{2p-1})^{\beta_{2p}}$$

pour lesquels il y a au plus p exposants β_j prenant la valeur $-\frac{1}{2}$, les autres exposants prenant une valeur inférieure ou égale à -1.

On en déduit l'existence d'une constante C ne dépendant que de p et des polynômes ϕ et Θ qui définissent le processus ARIMA telle que

$$\sum_{1 \leqslant t_1 < \dots < t_{2p} \leqslant n} |E\, Y_{t_1} Y_{t_2} \dots Y_{t_{2p}}| \leqslant C\, n^{p/2} (\ell n\, n)^p\, \delta^{3p}\, k^p \quad .$$

Des calculs analogues à ceux du lemme 3 du chapitre I permettent de majorer

$$\sum_{1\leq t_1,\ldots,t_n\leq n} |E\, Y_{t_1} Y_{t_2} \ldots Y_{t_{2p}}| \quad \text{dans le cas où il y a } 2,3,\ldots,p$$

indices égaux par paires.

On obtient alors une majoration de E_{2p} par

$$C(\odot,\Phi,p)\; n^{p/2}\; (\ell n\; n)^p\; \delta^{3p}\; k^p \quad .$$

Remarque.- La démonstration est encore valable si

ΔX_t est un processus stationnaire linéaire

$$\Delta Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j\; e_{t-j}$$

lorsque la condition $|\pi_j| \leq A\, j^{-2-\gamma}$, $\gamma > 0$, est remplie.

Proposition 3.- Soit $a \in \mathbb{R}$,

(k_n) une suite croissante d'entiers , $k_n = o(n^2)$

(δ_n) une suite décroissante de réels éléments de $]0,1]$.

Sous les hypothèses (C) ,

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0<h<k_n} n^{-1/4-\varepsilon}\; \delta_n^{-1/2}\; \inf(1,k_n^{-1/2}\delta_n^{-1})\; |N_n(a,a+\delta_n)-N_n(a+h\delta_n,a+(h+1)\delta_n)| = 0 \quad \text{p.s.}$$

et $$\lim_{n\to\infty} n^{-1/4-\varepsilon}\; \delta_n^{-1/2}\; \inf(1,k_n^{-1/2}\; \delta_n^{-1})\; \left|N_n(a,a+\delta_n) - \frac{1}{k_n} N_n(a,a+k_n\delta_n)\right| = 0 \quad \text{p.s.}$$

En utilisant l'inégalité de Markov et lemme 4, on a :

pour $0 < h < k_n$

$$P(|N_n(a,a+\delta_n)-N_n(a+h\delta_n,a+(h+1)\delta_n)| \geqslant \max(1,k_n^{1/2}\delta_n)\ n^{(1/4)+\varepsilon}\ \delta_n^{1/2}) \leqslant \frac{C.(\log n)^p}{n^{2\varepsilon p}}$$

La démonstration analogue à celle de la proposition 2 n'est par reprise.

2 - CONVERGENCE FORTE DU TEMPS D'OCCUPATION.

Soit $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ un processus ARIMA $(p,1,q)$, défini sur un espace probabilisé (Ω,A,P) vérifiant la relation :

$$\phi(B)\ \Delta X_t = \Theta(B)\ \varepsilon_t \quad , \quad X_o = x_o \qquad \text{où} \qquad (\varepsilon_t\ ,\ t \in \mathbb{Z})$$

est un bruit blanc gaussien, réduit.

Les conditions initiales sont données par le choix de $p+1$ quantités non aléatoires $x_{-p}\ ,\ x_{-p+1}\ ,\dots,\ x_o$ et $\varepsilon_{-q+1} = \varepsilon_{-q+2} = \dots = \varepsilon_o = 0$.

Si l'espace probabilisé (Ω,A,P) est suffisamment riche, on peut construire un processus du mouvement brownien $(W(t),\ t \in \mathbb{R}_+)$ par interpolation de la suite de variables aléatoires gaussiennes $(o,\ \varepsilon_1\ ,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2\ ,\dots,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n\ ,\dots)$.

On établit le théorème :

Théorème 6.- Soit $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ un processus ARIMA défini sur un espace (Ω,A,P) , vérifiant la relaiton :

$$\phi(B)\ (I-B)\ X_t = \theta(B)\ \varepsilon_t$$

où $(\varepsilon_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ est un bruit blanc gaussien.

Il existe sur ce même espace, un processus $(W(s), s \in \mathbb{R}_+)$ du mouvement brownien tel que, pour $\delta \in]0,1]$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\left| \sum_{t=1}^{n} 1_{[o,\delta]}(X_t) - \frac{\Phi(1)}{\theta(1)} \int_o^n 1_{[o,\delta]}(W(s))\, ds \right| = o(n^{(1/3)+\varepsilon}) \text{ p.s.}$$

La démonstration analogue à celle du théorème I.5. n'est pas reprise.

Ce théorème étend le résultat de M. CSÖRGO et P. RÉVÉSZ (1984) [2], établi pour une marche aléatoire, à un processus ARIMA.

B I B L I O G R A P H I E

[1] G. BOX et G. JENKINS - Time series analysis : forecasting and control. Holdenday. (1970).

[2] M. CSÖRGO et P. REVESZ - Three strong approximations of the local time of a Wiener process and their applications to invariance in Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai (36) Limit theorems in Probab. and Stat. Veszprém (Hungary), p. 223-254 (1984).

[3] C. GOURIÉROUX et A. MONFORT - Cours de séries temporelles. Economica, ENSAE, Paris (1983).

[4] J. KOMLOS, P. MAJOR G. TUSNADY - An approximation of partial sums of independent R.V.'s and sample D.F. (II). Z. Wahrsch. verw. Gebiete 34, 33-58 (1976).

[5] P. MAJOR - An approximation of partial sums of independent R.V.'s. Z. Wahrsch. verw. Gebiete, 35, 213-220 (1976).

[6] V.V. PETROV - Sums of independent random variables Springer-Verlag, Berlin, New-York (1975).

CHAPITRE III

TRANSFORME D'UN PROCESSUS ARIMA PROBLEMES D'ESTIMATION.

Dans la modélisation d'un processus aléatoire, la classe des processus ARMA et ARIMA est l'une des plus utilisées. Cette classe est parfois étendue de la manière suivante ; on ne suppose plus que le processus observé $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$ soit lui-même un ARIMA, mais on fait l'hypothèse que son image $(\psi(X_t)\ ,\ t \in \mathbb{N})$ par une application continue est un ARIMA. Il est assez fréquent que le choix de la fonction ψ ne reçoive pas de justification théorique, nous nous proposons dans cette section, lorsque le processus observé est l'image par une application continue d'un processus ARIMA d'ordre d'intégration 1, de construire un estimateur convergent de cette fonction ψ. En outre, si les accroissements $\psi(X_t) - \psi(X_{t-1})$ sont indépendants et si ψ est de classe C^1 , nous étudierons un estimateur de ψ' .

A - TRANSFORME D'UN PROCESSUS ARIMA.

1 - NOTATIONS ET HYPOTHESES.

Soit $(Z_t \ , \ t \in \mathbb{N})$ un processus ARIMA d'ordre d'intégration 1, défini sur un espace probabilisé (Ω, A, P) et vérifiant l'équation aux différences :

(A1) $$(I-B)\ \phi(B)\ Z_t = \theta(B)\ \varepsilon_t \ ,$$

où $(\varepsilon_j \ , \ j \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc indépendant,

B l'opérateur retard ,

Φ et B deux polynômes

et l'on fait l'hypothèse que les racines de Φ sont de module strictement supérieur à 1 et que $\Phi(o) = \theta(o) = 1$.

Ce processus $(Z_t \ , \ t \in \mathbb{N})$ n'est pas directement observé, mais on observe le processus $(X_t \ , \ t \in \mathbb{N})$ défini par :

$X_t = \psi(Z_t)$ où ψ est une fonction continue strictement monotone ; sa fonction réciproque sera notée $\mathscr{Y}$:

(A2) $$\forall t \in \mathbb{N} \ , \qquad Z_t = \mathscr{Y}(X_t) \ .$$

Si $(Z_t \ , \ t \in \mathbb{N})$ est un processus ARIMA d'ordre 1, il est clair que son image par toute application affine sera encore un processus ARIMA d'ordre 1, nous pouvons donc fixer arbitrairement l'image d'un couple de points en vue d'assurer l'unicité.

Nous supposons donc que le processus $(X_t \ , \ t \in \mathbb{N})$ est observé entre les instants o et n et nous souhaitons obtenir un estimateur convergent de ψ.

Les hypothèses suivantes sont faites sur le bruit blanc $(\varepsilon_j \, , \, j \in \mathbb{Z})$:

(H1) ε_1 admet une fonction de répartition F absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ,

(H2) ε_1 a un moment d'ordre p , avec $p > 3$,

(H3) il existe un nombre réel strictement positif γ tel que :

$$\lim_{|t| \to \infty} E(\exp(it\, \varepsilon_1))\, t^{\gamma} = 0 \; .$$

Et nous supposons que ψ vérifie :

(H4) ψ est une fonction numérique d'une variable réelle, strictement croissante, telle que $\psi(o) = 0$, $\psi(1) = 1$.

(H5) Pour tout intervalle compact K de $\mathbb{R}$, il existe des constantes strictement positives m_K et M_K telles que :

$$\forall y_1 \in K \; , \quad \forall y_2 \in K \; , \quad m_K |y_2 - y_1| \leq |\psi(y_2) - \psi(y_1)| \leq M_K |y_2 - y_1| \; .$$

On note :

$$N_n^{(z)}(a,b) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[a,b]}(Z_t) \quad ,$$

(resp. $N_n^{(x)}(a,b) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[a,b]}(X_t)$) le temps d'occupation d'un intervalle $[a,b]$ par le processus $(Z_t \, , \, t \in \mathbb{N})$ (resp. $(X_t \, , \, t \in \mathbb{N})$) entre les instants 1 et n .

2 - DEFINITION D'UN ESTIMATEUR DE ψ .

Dans le chapitre II, nous avons étudié le temps d'occupation d'un processus ARIMA d'ordre 1 et obtenu des majorations concernant :

$$|N_n^{(z)}(a,\ a + \delta_n) - \frac{1}{k_n} N_n^{(z)}(a,\ a + k_n\,\delta_n)| \quad .$$

En particulier, si nous l'appliquons aux intervalles $[o,1]$ et $[o,\ \psi(a)]$, en supposant $a > 1$, nous obtenons

$$|N_n^{(z)}(o,1) - \frac{1}{\psi(a)} N_n^{(z)}(o,\ \psi(a))| = o_p(n^{(1/4)+\varepsilon}\ \log n)$$

la majoration en probabilité pouvant être remplacée par une majoration presque sûre dans le cas d'un processus ARIMA gaussien.

La relation précédente peut encore s'écrire :

$$|N^{(x)}(o,1) - \frac{1}{\psi(a)} N_n^{(x)}(o,a)| = o_p(n^{(1/4)+\varepsilon}\ \log n) \quad .$$

K étant un intervalle compact de $\mathbb{R}$, contenant l'origine, il est naturel de proposer comme estimateur de ψ :

(A3) $$\forall a \in K\ , \quad \hat{\psi}_n(a) = \frac{N_n^{(x)}(o,a)}{N_n^{(x)}(o,1)} \quad .$$

Le résultat essentiel de la section est le suivant :

Théorème 1. Sous les hypothèses (H1) à (H5), l'estimateur $\hat{\psi}_n(a)$ converge en probabilité vers $\psi(a)$, et on a :

$$\forall \varepsilon > 0\ , \quad \lim_{n\to\infty} P(|\hat{\psi}_n(a) - \psi(a)| \geq n^{(-1/4)+\varepsilon}) = 0 \quad .$$

Si on suppose en outre le processus (Z_t) gaussien, sous les mêmes hypothèses, la convergence de $\hat{\psi}_n(a)$ vers $\psi(a)$ est presque sûre.

Preuve :

a) Convergence en probabilité de $\hat{\psi}_n(a)$ vers $\psi(a)$.

La fonction ψ étant croissante, il vient :

$$N_n^{(z)}(o,\ \psi(a)) = N_n^{(x)}(o,a) \quad , \quad si \quad Z_t = \psi(X_t) \quad .$$

Nous supposons $a > 0$, une relation analogue pouvant être écrite si $a < 0$.

Etudions tout d'abord le cas $a > 1$.

D'après la proposition 2 du chapitre II.B., en prenant $\delta = 1$ et $k_n = \psi(a)$, on obtient :

$$\text{(A4)} \quad \lim_{n\to\infty} P(|N_n^{(z)}(o,1) - \frac{1}{\psi(a)} N_n^{(z)}(o,\ \psi(a))| \geq (\psi(a))^{1/2} (\log n)\ n^{(1/4)+\varepsilon}) = 0 \ .$$

Comme nous avons fait l'hypothèse $\psi(1) = 1$,

$$N_n^{(z)}(o,1) = N_n^{(x)}(o,1)$$

et : $\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|N_n^{(x)}(o,1) - \frac{1}{\psi(a)} N_n^{(x)}(o,a)| \geq (\psi(a))^{1/2}\ n^{(1/4)+\varepsilon} \log n) = 0$$

soit

$$\lim_{n\to\infty} P(|\psi(a) - \frac{N_n^{(x)}(o,a)}{N_n^{(x)}(o,1)}| \geq \frac{(\psi(a))^{3/2}\ n^{(1/4)+\varepsilon} \log n}{N_n^{(x)}(o,1)}) = 0$$

Utilisant le théorème II.B.5, et les propriétés classiques du temps d'occupation du mouvement brownien :

$$\forall\varepsilon > 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} P(n^{(1/2)-\varepsilon} \leq N_n^{(x)}(o,1) \leq n^{(1/2)+\varepsilon}) = 1 \quad .$$

On obtient donc :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} P(|\psi(a) - \frac{N_n^{(x)}(o,a)}{N_n^{(x)}(o,1)}| \geq (\psi(a))^{3/2} \log n . n^{-(1/4)+2\varepsilon}) = 0 \; .$$

Et ε étant arbitraire, on obtient :

$$\forall\varepsilon > 0 \; , \quad \lim_{n\to\infty} P(|\hat{\psi}_n(a) - \psi(a)| > n^{-(1/4)+\varepsilon}) = 0 \quad .$$

Si $0 < a < 1$, la relation 3.2 est modifiée comme suit : on fait dans la proposition II.B2 , $\delta_n = \psi(a)$ et $k_n = \frac{1}{\psi(a)}$, on obtient :

(A4') $$\lim_{n\to\infty} P(|N_n^{(z)}(o, \psi(a)) - \psi(a)\, N_n(o,1)| \geq n^{(1/4)+\varepsilon}\, \psi(a) \log n) = 0 \; ,$$

la suite de la preuve est inchangée.

b) <u>Cas d'un processus gaussien.</u>

Nous faisons l'hypothèse dans ce paragraphe que le processus ARIMA $(Z_t \; , \; t \in \mathbb{N})$ est gaussien. Afin d'établir la convergence presque sûre de $\hat{\psi}_n(a)$ vers $\psi(a)$, une première méthode serait d'étendre le lemme II.B3 , pour obtenir une majoration de :

$$E(|N_n(o,\delta_n) - \frac{1}{\lambda} N_n(o, \lambda\, \delta_n)|^{2p}) \quad .$$

Une autre méthode, que nous adoptons ici, est d'utiliser la proposition II. C3 et le développement dyadique de λ pour établir le :

<u>*Lemme 1.*</u> Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante C telle que

$$P(|N_n(o,\lambda) - \lambda\, N(o,1)| \geq n^{(1/4)+\varepsilon}) \leq \frac{C}{n^{\varepsilon p}} \quad .$$

Preuve : On note dans ce qui suit :

$$\lambda_o = [\lambda] \ ,\ldots,\ \lambda_j = 2^{-j}\ [2^j\lambda] \quad \text{et} \quad q_n = [\log_2 n] \ ,$$

où $\log_2$ désigne le logarithme de base 2.

On va établir que pour tout $\varepsilon > 0$, presque sûrement, il existe n_o , tel que pour $n \geq n_o$:

i) les quantités $N_n(o,\lambda_o) - \lambda_o\ N_n(o,1)$ et

$$N_n(\lambda_o,\ \lambda_{q_n}) - (\lambda_{q_n} - \lambda_o)\ N_n(o,1)$$

sont égales à $o(n^{(1/4)+\varepsilon})$.

ii) $N_n(\lambda_{q_n}\ ,\ \lambda)$ est p.s. nul .

iii) $(\lambda - \lambda_{q_n})\ N_n(o,1)$ tend p.s. vers 0 quand $n \to \infty$.

a) Majoration de $|N_n(o,\lambda_o) - \lambda_o\ N_n(o,1)|$.

On déduit du lemme II C4, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'une constante C telle que pour $k = o\ ,\ 1\ ,\ldots,\ \lambda_o - 1$,

$$P(|N_n(k,\ k+1) - N_n(o,1)| \geq n^{(1/4)+\varepsilon}) \leq \frac{C}{n^{\varepsilon p}} \ ,$$

ce qui établit le premier résultat par sommation.

b) Majoration de $|\ N_n(\lambda_o,\ \lambda_{q_n}) - (\lambda_{q_n} - \lambda_o)\ N_n(o,1)|$

$$N_n(\lambda_o\ ,\ \lambda_{q_n}) - (\lambda_{q_n} - \lambda_o)\ N_n(o,1) =$$

$$\sum_{j=o}^{q_n-1} (N_n(\lambda_j\ ,\ \lambda_{j+1}) - (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\ N_n(o,1)) \ .$$

Or utilisant la proposition II C3 avec $\delta_n = 2^{-j-1}$, on a :

$$P\left(\sup_{o\leq j\leq q_n-1} \left|N_n(\lambda_j\ ,\ \lambda_j + \frac{1}{2^{j+1}}) - \frac{1}{2^{j+1}}\ N_n(o,1)\right| \geq n^{(1/4)+\varepsilon}\right) \leq$$

$$\sum_{j=o}^{q_n-1} \frac{C(\log n)^p\ 2^{-jp}}{n^{\varepsilon p}} \leq \frac{C'(\log n)^p}{n^{\varepsilon p}} \ .$$

Or : $\lambda_{j+1} - \lambda_j = 0$ ou $2^{-(j+1)}$.

On en déduit :

$$P(|N_n(\lambda_o\ ,\ \lambda_{q_n}) - (\lambda_{q_n} - \lambda_o)\ N_n(o,1)| \geq q_n\ n^{(1/4+\varepsilon)}) \leq \frac{C'(\log n)^p}{n^{\varepsilon p}}$$

c) <u>Majoration de</u> $N_n(\lambda_{q_n}\ ,\ \lambda)$ <u>et de</u> $(\lambda - \lambda_{q_n})\ N_n(o,1)$.

$$N_n(\lambda_{q_n}\ ,\ \lambda) = o(n^{(1/2)+\varepsilon}(\lambda - \lambda_{q_n}))\ \text{p.s.}$$

or $o \leq \lambda - \lambda_{q_n} < \frac{2}{n}$ donc $N_n(\lambda_{q_n} - \lambda) = o(n^{-(1/2)+\varepsilon})$.

Comme cette quantité est à valeurs entières, elle est presque sûrement nulle à partir d'un certain rang.

En outre : $o \leq (\lambda - \lambda_{q_n})\ N_n(o,1) \leq \frac{2}{n}\ N_n(o,1)$

et donc $(\lambda - \lambda_{q_n})\ N_n(o,1) = o(n^{-(1/2)+\varepsilon})$ p.s.

ceci achève la démonstration du lemme 1.

On en déduit :

$$\forall\lambda > 0\ ,\quad \forall\varepsilon > 0\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty} P(|N_n(o,\lambda) - \lambda\ N_n(o,1)| > n^{(1/4)+\varepsilon}) < \infty\ .$$

Il suffit donc dans le cas gaussien, de reprendre la première partie de la démonstration en remplaçant les majorations en probabilité par des majorations presque sûres.

3 - CONVERGENCE D'UN ESTIMATEUR DE ψ SUR UN COMPACT K.

i) Mesurabilité de $\sup\limits_{x\in K} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)|$.

Soit K un intervalle compact de $\mathbb{R}$ contenant l'origine. Les fonctions $\hat{\psi}_n(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions croissantes de x et ψ est continue. Pour $x \in [x_1 , x_2]$, on a :

$$|\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)| \leq \max(|\hat{\psi}_n(x_2) - \psi(x_1)| , |\hat{\psi}_n(x_1) - \psi(x_2)|)$$

on en déduit :

$$\max_{0\leq h\leq k_n} |\hat{\psi}_n(h\delta_n) - \psi(h\delta_n)| \leq \sup_{0\leq x<k_n\delta_n} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)|$$

$$\leq \max_{0\leq h\leq k_n} |\hat{\psi}_n(h\delta_n) - \psi(h\delta_n)| + \max_{0\leq h\leq k_n-1} |\psi((k+1)\delta_n) - \psi(k\delta_n)| .$$

ψ étant une fonction continue,

$$\sup_{x\in K} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)| = \lim_{\delta_n\to 0} \max_{\substack{h\in\mathbb{N}\\ h\delta_n\in K}} |\hat{\psi}_n(h\delta_n) - \psi(h\delta_n)| ,$$

on en déduit la mesurabilité de $\sup\limits_{x\in K} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)|$.

ii) Majoration de $\sup_{x \in K} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)|$

$$P(\sup_{x \in K} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)| \geq n^{-(1/4)+\varepsilon} + M_K \, \delta_n) \leq$$

$$\frac{|K|}{\delta_n} \; P(|\hat{\psi}(a) - \psi(a)| > n^{-(1/4)+\varepsilon}) \quad .$$

Ayant établi que : $\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\psi}(a) - \psi(a)| > n^{-(1/4)+\varepsilon}) = 0$, on peut construire une suite (δ_n) qui tend vers 0 , telle que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\delta_n} \; P(|\hat{\psi}(a) - \psi(a)| > n^{-(1/4)+\varepsilon}) = 0 \quad .$$

On peut en reprenant les calculs de la proposition 2 établir que : $P(|\hat{\psi}_n(a) - \psi(a)| > n^{-(1/4)+\varepsilon}) \leq \frac{C}{n^{\varepsilon}}$.

Si on fait en outre l'hypothèse que X_t est le transformé d'un processus ARIMA d'ordre 1 gaussien, on peut établir :

$$\sum_n P(|\hat{\psi}_n(a) - \psi(a)| \geq n^{-(1/4)+\varepsilon}) < \infty \quad ,$$

il existe donc une suite δ_n tendant vers 0 , telle que :

$$\sum_n \frac{1}{\delta_n} \; P(|\hat{\psi}_n(a) - \psi(a)| \geq n^{-(1/4)+\varepsilon}) < \infty \quad .$$

On peut donc établir le :

Théorème 2.- Sous les hypothèses (H1) à (H5) l'estimateur $\hat{\psi}_n$ converge en probabilité vers ψ, la convergence étant uniforme sur tout compact.

Si on suppose en outre le processus $\psi(X_t)$ gaussien, pour tout compact K , $\lim_{n \to \infty} (\sup_{x \in K} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)|) = 0$ p.s.

Preuve : Si $\psi(X_t)$ est un processus ARIMA d'ordre 1 , on a :

$$P(\sup_{x\in K} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)| \geq n^{-(1/4)+\varepsilon} + M_K\, \delta_n) \leq \frac{C}{\delta_n \cdot n^{\varepsilon}}$$

et donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{x\in K} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)| = o_P(n^{-(1/8)+\varepsilon})$$

alors que dans le cas où $\psi(X_t)$ est un ARIMA gaussien :

$$\sup_{x\in K} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)| = o(n^{-(1/8)+\varepsilon}) \text{ p.s.}$$

4 - ESTIMATION DE LA DERIVEE.

Si nous faisons l'hypothèse que ψ est de classe C^1 et vérifie

(H6) Pour tout compact K , il existe une constante C_K telle que

$\forall y_1 \in K$, $\forall y_2 \in K$, $|\psi'(y_1) - \psi'(y_2)| \leq C_K\, |y_1 - y_2|$, il est possible d'obtenir un estimateur convergent de ψ' .

Théorème 3.- Sous les hypothèses (H1) à (H6), si la suite (δ_n) satisfait les conditions : $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} n^{-(1/4)+\varepsilon}\, \delta_n^{-1} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{N_n(a\, ,\, a+\delta_n)}{\delta_n \quad N_n(o,1)} - \psi'(a)\right| \geq C_K\, \delta_n + \delta_n^{-1}\, n^{-(1/4)+\varepsilon}\right) = 0$$

Si on suppose en outre le processus $(Z_t\, ,\, t \in \mathbb{N})$ gaussien, en choisissant $\delta_n = n^{-1/8}$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \left|\frac{N_n(a\, ,\, a+\delta_n)}{\delta_n \quad N_n(o,1)} - \psi'(a)\right| = o(n^{-(1/8)+\varepsilon}) \quad \text{p.s.}$$

Preuve : On déduit immédiatement du théorème 1 :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{N_n(o,\ a+\delta_n) - N_n(o,a)}{N_n(o,1)} + \psi(a) - \psi(a+\delta_n)\right| \geq n^{-(1/4)+\varepsilon}\right) = 0 \quad .$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in [0,1]$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{N_n(o,\ a+\delta_n) - N_n(o,a)}{N_n(o,1)} - \delta_n\ \psi'(a+\theta\ \delta_n)\right| \geq n^{-(1/4)+\varepsilon}\right) = 0 \quad ,$$

et utilisant (H6) :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{N_n(a\ ,\ a+\delta_n)}{\delta_n\ \ N_n(o,1)} - \psi'(a)\right| \geq n^{-(1/4)+\varepsilon}\ \delta_n^{-1} + C_K\ \delta_n\right) = 0 \quad .$$

On a vu dans la démonstration du théorème 4, que dans le cas d'un processus (Z_t) gaussien les majorations en probabilité pouvaient être remplacées par des majorations presque sûres.

B - TRANSFORME D'UNE MARCHE ALEATOIRE.

Lorsque le processus observé $(X_t \ , \ t \in \mathbb{N})$ est l'image par une fonction continue ψ d'un processus ARIMA $(Z_t \ , \ t \in \mathbb{N})$, c'est-à-dire : $\forall t \in \mathbb{N}$, $X_t = \psi(Z_t)$, nous avons obtenu dans la section précédente un estimateur de $\psi^{-1} = \emptyset$ et nous en avons déduit un estimateur convergent de la dérivée, $\hat{\emptyset}'_n(a)$, la convergence étant presque sûre sous une hypothèse de normalité. Nous reprenons ce problème, en ne faisant plus d'hypothèse de normalité, mais en supposant que le processus $(X_t \ , \ t \in \mathbb{N})$ est l'image d'une marche aléatoire.

1 - NOTATIONS ET HYPOTHESES.

Soit $(\varepsilon_j \ , \ j \in \mathbb{N})$ un bruit blanc indépendant, les variables ε_j vérifiant les hypothèses de la section A , (H1) étant remplacé par :

(H'1) ε_1 admet une densité de probabilité f continue et strictement positive dans un voisinage de l'origine.

On note : $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $(\varepsilon_s \ , \ s \leq t)$ et

$S_o = 0 , \ldots , S_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_t$, la suite des sommes partielles.

On suppose que le processus observé $(X_t \ , \ t \in \mathbb{N})$ est défini par

$$X_t = \psi(S_t) \quad \text{où } \psi \text{ est une fonction strictement croissante}$$

de classe C^1 et on note encore $\emptyset$ la fonction réciproque

$$\forall t \in \mathbb{N} \ , \quad S_t = \emptyset(X_t) \ .$$

On souhaite estimer directement la dérivée $\emptyset'$ sur un compact.

Les hypothèses suivantes sont faites sur $\emptyset$:

(H'4) ψ est strictement croissante, de classe C^1 , et vérifie $\psi(o) = o$, $\psi'(o) = 1$.

(H'5) Pour tout intervalle compact K de $\mathbb{R}$, il existe des constantes strictement positives m_K et M_K telles que :

$$\forall y \in K \qquad m_K \leq \psi'(y) \leq M_K$$

(H'6) ψ' vérifie une condition de Lipschitz sur tout compact K : il existe une constante C_K telle que :

$$\forall y_1 \in K \ , \ \forall y_2 \in K \qquad |\psi'(y_2) - \psi'(y_1)| \leq C_K \, |y_2 - y_1| \ .$$

Dans la suite du chapitre, par convention, on note :

$$\Delta X_t = X_{t+1} - X_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots$$

$N_n(\alpha,\beta) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[\alpha,\beta]}(S_t)$ est le temps d'occupation de l'intervalle $[\alpha,\beta]$ par la marche aléatoire (S_t) , entre les instants 1 et n (ce temps d'occupation n'est pas observé).

Enfin pour des raisons de commodité, les suites seront notées α_n ou $\alpha(n)$.

2 - DEFINITION D'UN ESTIMATEUR DE ψ' .

Soit K un intervalle compact sur $\mathbb{R}$ de centre 0. On commencera par définir un estimateur de ψ' en un point a intérieur à K. On se donne une suite (δ_n) de réels positifs tendants vers 0 , l'intervalle $[a - \delta_n \ , \ a + \delta_n]$ sera donc contenu dans K , au moins pour n assez grand.

On définit une suite aléatoire $\alpha_j = \alpha_j(a,\delta_n)$ $j = 1,2,\ldots$ par

(2.1) $\alpha_1 = \inf\{t \in \mathbb{N} \ , \ X_t \in [a - \delta_n \ , \ a + \delta_n]\}$

si $\{t \in \mathbb{N} : X_t \in [a - \delta_n \ , \ a + \delta_n]\} \neq \emptyset$

$= + \infty$ sinon

....

$\alpha_j = \inf\{ t \in \mathbb{N} : \ t > \alpha_{j-1}$ et $X_t \in [a - \delta_n \ , \ a + \delta_n]\}$

si l'ensemble est non vide

$= + \infty$ sinon .

Les $\alpha_j(a \ , \ \delta_n)$ sont donc les temps de présence successifs du processus $(X_t \ , \ t \in \mathbb{N})$ dans l'intervalle $[a - \delta_n \ , \ a + \delta_n]$. Il est immédiat de vérifier que les $\alpha_j(a \ , \ \delta_n)$ forment une suite croissante de temps d'arrêt pour les tribus $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$.

Lemme 2.- Soit (δ_n) une suite d'éléments de $]0,1]$ telle que $n^{(1/6)+(2/3p)} \ \delta_n \geq 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n_0 \to \infty} P\left(\bigcup_{n > n_0} \{\# \ \{\alpha_j(a,\delta_n) \ : \ \alpha_j \leq n\} \leq m_K \ \delta_n \ n^{(1/2)-\varepsilon}\}\right) = 0 \ .$$

Par définition,

$$\# \ \{\alpha_j(a,\delta_n) \mid \alpha_j \leq n\} = \# \ \{t \leq n : X_t \in [a - \delta_n \ , \ a + \delta_n]\}$$

et d'après le théorème des accroissements finis si

$$S_t = \psi(X_t) \in [\psi(a) - \delta_n m_K , \psi(a) + \delta_n m_K] ,$$

alors $X_t \in [a - \delta_n , a + \delta_n]$, donc :

$$\# \{\alpha_j(a,\delta_n) \mid \alpha_j \leq n\} \geq \# \{t \leq n \mid S_t \in [\psi(a) - \delta_n m_K , \psi(a) + \delta_n m_K]\}$$

soit :

$$\# \{\alpha_j(a,\delta_n) \mid \alpha_j \leq n\} \geq \sum_{t=1}^{n} 1_{[\psi(a)-\delta_n m_K, \psi(a)+\delta_n m_K]}(S_t)$$

$$\geq N_n(\psi(a) - \delta_n m_K , \psi(a)+\delta_n m_K) .$$

Or on a établi (théorème 5 du chapitre I) que pour $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(\psi(a) - \delta_n m_K , \psi(a) + \delta_n m_K)}{m_K \delta_n n^{(1/2)-\varepsilon}} = \infty \quad \text{p.s.}$$

ce qui entraîne le lemme 2.

On définit alors une suite $(\nu_n)_n$ croissante d'entiers et l'on suppose que le processus (X_t) peut être observé jusqu'à l'instant n. Si le processus $(X_t ; 1 \leq t \leq n)$ est passé plus de ν_n fois dans l'intervalle $[a - \delta_n , a + \delta_n]$ entre les instants 0 et n , c'est-à-dire si $\alpha_{\nu(n)}(a , \delta_n) \leq n$, on considère la famille

$$\{|\Delta X_{\alpha_j(a,\delta_n)}| \mid j = 1,2,\ldots,\nu_n\} \quad \text{où} \quad \Delta X_t = X_{t+1} - X_t$$

et on notera

$$|\Delta X_{\alpha(a,\delta_n)}|_j^* \qquad j = 1,2,\ldots,\nu_n$$

cette même famille ordonnée de manière croissante.

Le choix de l'estimateur repose sur l'idée suivante. Supposons φ linéaire au voisinage de 0 et au voisinage de a, c'est-à-dire : il existe des constantes $k_o = 1$ et k_a telles que :

$$S_{t+1} - S_t = \Delta S_t = k_o \, \Delta X_t \quad \text{si} \quad X_t \in [-\delta, \delta] \quad (\text{et } \Delta X_t \text{ suffisamment petit}),$$

$$S_{t+1} - S_t = \Delta S_t = k_a \, \Delta X_t \quad \text{si} \quad X_t \in [a - \delta, a + \delta] \; .$$

Les accroissements ΔS_t forment une suite de variables indépendantes et ΔS_t est indépendant de S_t , donc

$$P(|\Delta X_t| \leq x \mid X_t \in [-\delta, \delta]) = P(|\Delta X_t| \leq \frac{x}{k_a} \mid X_t \in [a - \delta, a + \delta]) \quad .$$

Il suffit donc de comparer les fonctions de répartition de $|\Delta X_t|$ conditionné respectivement par $X_t \in [-\delta, \delta]$ et par $X_t \in [a - \delta, a + \delta]$ pour obtenir k_a . Ou encore, si $(\xi_1 , \ldots , \xi_n)$ est une suite de n variables indépendantes ayant la même fonction de répartition F , si on note F_n la fonction de répartition empirique et $(\xi_1^* , \ldots , \xi_n^*)$ l'échantillon ordonné, on sait que $F_n(\xi_j^*) = j/n$; il est donc équivalent de comparer les fonctions de répartition empirique et les échantillons ordonnés.

Plus précisément, on se donne une suite décroissante (c_n) d'éléments de $]0,1[$ et on note :

$$\Delta X(a)|^*_{[c_n \nu_n]} \quad \text{le} \quad [c_n \nu_n]^e \text{ élément de l'échantillon ordonné}$$

$$|\Delta X(a)|^*_1 \leq \ldots \leq |\Delta X(a)|^*_{[c_n \nu_n]} \leq \ldots \leq |\Delta X(a)|^*_{\nu_n} \; .$$

On définit alors un estimateur $\hat{\psi}'_n(a)$ de $\psi'(a)$ par :

$$\hat{\psi}'_n(a) = \frac{|\Delta X(0)|^*_{[c_n \nu_n]}}{|\Delta X(a)|^*_{[c_n \nu_n]}} \quad \text{si} \quad \max(\alpha_{\nu_n}(0,\delta_n), \alpha_{\nu_n}(a,\delta_n)) \leqslant n$$

$$\text{et} \quad |\Delta X(a)|^*_{[c_n \nu_n]} \neq 0$$

$$= 1 \qquad \text{sinon .}$$

Le résultat essentiel de la section est :

Théorème 4.- Sous les hypothèses (H'1) à (H'6), si les conditions suivantes sont réalisées :

i) il existe $\alpha \in \left]0,1\right[$ tel que $c_n = \nu_n^{-\alpha}$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{\delta_n} = 0$,

iii) il existe $\varepsilon > 0$, $n^{1/4} \leqslant \nu_n \leqslant \delta_n\, n^{(1/2)-\varepsilon}$,

alors $\hat{\psi}'_n(a)$ converge presque sûrement vers $\psi'(a)$ lorsque $n \to \infty$.

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, si on choisit :

$$\nu_n = n^{3/8} \quad , \quad c_n = \nu_n^{-1/3} \quad , \quad \delta_n = n^{-(1/8)+\varepsilon}$$

$$|\hat{\psi}'_n(a) - \psi'(a)| = o(n^{-(1/8)+\varepsilon}) \text{ p.s.}$$

La démonstration se fera en plusieurs étapes qui feront l'objet de lemmes.

On note E_n l'événement

$$\{\alpha_{\nu(n)}(a,\delta_n) \leqslant n\} \cap \{\alpha_{\nu(n)}(o,\delta_n) \leqslant n\}$$

et
$$E = \bigcup_p \bigcap_{n \geqslant p} E_n \ .$$

i) Mesure de l'ensemble E.

Lemme 3.- Sous les conditions du théorème 1, $P(E) = 1$.

Preuve : Dans la démonstration du lemme 2, on a montré que :

$$P(\alpha_{\nu(n)}(a,\delta_n) > n) = P(\# \{\alpha_j(a,\delta_n) : \alpha_j \leq n\} < \nu_n) \quad .$$

Or s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall n \; , \qquad \nu_n \leq \delta_n \quad n^{(1/2)-\varepsilon} \; ,$$

d'après le lemme 1 ,

$$\lim_{p\to\infty} P(\bigcup_{n\geq p} \# \{\alpha_j(a,\delta_n) \mid \alpha_j \leq n\} < \nu_n\}) = 0 \quad \text{p.s.}$$

d'où $\lim\limits_{p\to\infty} P(\bigcup\limits_{n\geq p} E_n^c) = 0$ et $P(\bigcap\limits_{p} (\bigcup\limits_{n\geq p} E_n^c)) = 0$

donc $P(E) = 1$.

Dans la suite, on pourra donc supposer qu'à partir d'un certain rang (aléatoire) les événements E_n sont tous réalisés.

ii) Propriétés d'un échantillon ordonné de variables uniformes.

De nombreux résultats concernant la loi d'un échantillon ordonné $(\xi_1^* ,\ldots, \xi_n^*)$ de variables aléatoires de même loi uniforme sur $[0,1]$ sont connus.

S'il existe une constante $c \in]0,1[$ telle que $\frac{k(n)}{n} = c + O(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi^*_{k(n)} - c}{\sqrt{c(1-c)}} < \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-v^2/2}\, dv$$

(par exemple : A. RENYI [6] p. 460).

Ce résultat n'est plus valable si $\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} = 0$ (G. BAXTER ; 1965 [1]).

En remarquant que $\frac{k(n)}{n} = F_n(\xi^*_{k(n)})$, F_n étant la fonction de répartition empirique, des majorations presque sûres peuvent être obtenues à partir des résultats sur les processus empiriques.
M. CSÖRGO et P. RÉVÉSZ [3] (1975) ont établi que pour $h_n = n^{-1} \log^4 n$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2 \log\log n}} \sup_{h_n<t<1-h_n} \frac{F_n(t) - t}{\sqrt{t(1-t)}} = \sqrt{2} \text{ p.s.}$$

Si $k(n) = [n^{1-\alpha}]$, on établit le :

Lemme 4.- Soit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ une suite de n variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$.

Si $0 < \alpha \leq \beta < 1$, alors pour toute constante $\gamma \in]0, 1/2[$, il existe n_o tel que :

$$\forall n \geq n_o \qquad P(|\xi^*_{[n^{1-\alpha}]} - n^{-\alpha}| > n^{-\beta}) < 2 \exp(-\gamma\, n^{1+\alpha-2\beta}) \quad .$$

Preuve :

Notons $p_{\alpha,\beta} = P(|\xi^*_{[n^{1-\alpha}]} - n^{-\alpha}| > n^{-\beta})$,

$$p_{\alpha,\beta} \leqslant P\left(\sum_{j=1}^{n} 1_{[o,n^{-\alpha}-n^{-\beta}]}(\xi_j) > n^{1-\alpha}\right)$$

$$+ P\left(\sum_{j=1}^{n} 1_{[o,n^{-\alpha}+n^{-\beta}]}(\xi_j) < n^{1-\alpha}\right) \quad .$$

Cette somme sera majorée en utilisant une inégalité de HOEFFDING [4] (1963), (cf. V.V. PETROV [5] (1975), page 58, Ex. 9).

Si les X_i sont des variables indépendantes telles que $EX_i = 0$ et $X_i \leqslant b$ pour tout i,

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant x\right) \leqslant \exp\left(-\frac{nx}{b}\left[\left(1+\frac{\sigma^2}{bx}\right)\log\left(1+\frac{bx}{\sigma^2}\right)-1\right]\right) \quad ,$$

où x et b sont strictement positifs

et l'on a posé
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\, X_i^2 \quad ,$$

nous l'utiliserons avec :

$$X_i = 1_{[o,n^{-\alpha}-n^{-\beta}]}(\xi_i) - n^{-\alpha} + n^{-\beta}$$

$$(\text{resp. } X_i = 1_{[o,n^{-\alpha}+n^{-\beta}]}(\xi_i) - (n^{-\alpha} + n^{-\beta}))$$

$$x = n^{-\beta} \quad ; \quad b = 1$$

$$\sigma^2 = (n^{-\alpha} - n^{-\beta})\,(1 - n^{-\alpha} + n^{-\beta})$$

$$(\text{resp. } \sigma^2 = (n^{-\alpha} + n^{-\beta})\,(1 - n^{-\alpha} - n^{-\beta})$$

d'autre part, $\log\left(1+\frac{bx}{\sigma^2}\right) \geqslant \frac{bx}{\sigma^2} - \frac{b^2x^2}{2\,\sigma^4}$ $\quad (x > 0\ ,\ b > 0)$

et
$$\exp\left(-\frac{nx}{b}\left[\left(1+\frac{\sigma^2}{bx}\right)\log\left(1+\frac{bx}{\sigma^2}\right)-1\right]\right) \leqslant \exp\left(-\frac{n\,x^2}{2\,\sigma^2}\left(1-\frac{bx}{\sigma^2}\right)\right)$$

d'où $p_{\alpha,\beta} \leqslant 2 \exp(-\gamma\, n^{1+\alpha-2\beta})$ pour toute constante $\gamma \in \left]0\ ,\ \frac{1}{2}\right[$ dès que n est assez grand. ■

iii) Propriétés d'un échantillon ordonné de variables indépendantes.

Soit $\varepsilon_1\ ,\ \varepsilon_2\ ,\ldots,\ \varepsilon_n$ un échantillon de n variables aléatoires vérifiant l'hypothèse (H'1). $|\varepsilon_k|^*$ désigne la $k^{\text{ième}}$-valeur de l'ensemble $(|\varepsilon_1|,\ |\varepsilon_2|,\ldots,\ |\varepsilon_k|)$ rangé par ordre croissant. On note G la fonction de répartition de $|\varepsilon_1|$.

Lemme 5.- Soit $0 < \alpha \leqslant \beta < 1$, il existe une constante C_1 telle que pour tout $\gamma \in \left]0\ ,\ \frac{1}{2}\right[$, on ait pour n assez grand :

$$P(\,\big|\,|\varepsilon|^*_{[n^{1-\alpha}]} - G^{-1}(n^{-\alpha})\big| > C_1\, n^{-\beta}) \leqslant 2 \exp(-\gamma\, n^{1+\alpha-2\beta}) \quad .$$

Preuve :

Il existe $\eta > 0$ tel que G soit une fonction de classe C^1 sur $[0,\eta[$, strictement croissante et $G'(0^+) = 2f(0)$.

$$|\varepsilon|^*_{[n^{1-\alpha}]} > G^{-1}(n^{-\alpha}) + C\, n^{-\beta} \quad \text{équivaut à :}$$

$$G(|\varepsilon|^*_{[n^{1-\alpha}]}) > G(G^{-1}(n^{-\alpha}) + C\, n^{-\beta})$$

$$> n^{-\alpha} + C\, n^{-\beta}\, G'\ (G^{-1}(n^{-\alpha}) + \theta\, C\, n^{-\beta})$$

pour un $\theta \in \left]0,1\right[$.

Une relation analogue est obtenue pour $|\varepsilon|^*_{[n^{1-\alpha}]} < G^{-1}(n^{-\alpha}) - C\, n^{-\beta}$, et si la constante C vérifie $2f(o)\, C > 1$, $C < G'(0^+)$, on a :

$$P(\,\big|\,|\varepsilon|^*_{[n^{1-\alpha}]} - G^{-1}(n^{-\alpha})\big| > C\, n^{-\beta}) \leqslant P(|G(|\varepsilon|^*_{[n^{1-\alpha}]}) - n^{-\alpha}| > n^{-\beta})$$

pour n suffisamment grand.

Le lemme 5 se déduit donc du lemme 4 en remarquant que $G(|\varepsilon|)$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

<u>*Lemme 6*</u>.- Soit $\alpha \in \,]0,1[$ et $\alpha' \in \,]0, \frac{1-\alpha}{2}[$, il existe une constante $C_2 > 0$, telle que pour tout $\gamma \in \,]0, \frac{1}{2}[$, on ait pour n assez grand

$$P(|\varepsilon|^*_{[n^{1-\alpha}]} < C_2\, n^{-\alpha}) \leqslant 2 \exp(-\gamma\, n^{2\alpha'}) .$$

Le lemme 5 entraîne :

$$P(|\varepsilon|^*_{[n^{1-\alpha}]} < G^{-1}(n^{-\alpha}) - C_1\, n^{-\beta}) \leqslant 2 \exp(-\gamma\, n^{1+\alpha-2\beta}) .$$

Choisissant $\beta = \frac{1+\alpha}{2} - \alpha'$, on a $\beta > \alpha$;

or $$G^{-1}(n^{-\alpha}) \sim \frac{1}{2f(o)}\, n^{-\alpha} \quad \text{quand } n \to \infty ,$$

il suffit de choisir $C_2 < \dfrac{1}{2f(o)}$ pour vérifier le lemme 6.

Lemme 7.- Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ et $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n)$ deux suites indépendantes de variables aléatoires de même loi, vérifiant l'hypothèse (H'_1).

Pour $\alpha \in]0,1[$ et $\alpha' \in]0, \frac{1-\alpha}{2}[$, il existe des constantes $C > \frac{1}{f(o)}$ et $\gamma \in]0, 1/2[$ telles que, pour n assez grand :

$$P(\left| |\varepsilon|^*_{[n^{1-\alpha}]} - |\varepsilon'|^*_{[n^{1-\alpha}]} \right| > C\, n^{\alpha'-(1+\alpha)/2}) \leq 4 \exp(-\gamma\, n^{2\alpha'}) \quad .$$

Preuve : On a comme conséquence immédiate du lemme 5 :

$$P(\left| |\varepsilon|^*_{[n^{1-\alpha}]} - |\varepsilon'|^*_{[n^{1-\alpha}]} \right| > 2\, C_1\, n^{-\beta}) \leq$$

$$P(\left| |\varepsilon|^*_{[n^{1-\alpha}]} - G^{-1}(n^{-\alpha}) \right| > C_1\, n^{-\beta}) + P(\left| |\varepsilon'|^*_{[n^{1-\alpha}]} - G^{-1}(n^{-\alpha}) \right| > C_1\, n^{-\beta})$$

$$\leq 4 \exp(-\gamma\, n^{1+\alpha-2\beta}) \quad .$$

Le lemme 7 en résulte en posant $C = 2\, C_1$ et $\beta = \frac{1+\alpha}{2} - \alpha'$.

Lemme 8.- Sous les hypothèses du théorème 1, pour tout $a \in K$, pour tout $\gamma \in]0, 1/2[$,

$$P(|\Delta X(a)|^*_{[c_n \nu_n]} > \delta_n) \leq 2 \exp(-\gamma\, n^{(1-\alpha)/4})$$

dès que n est assez grand.

Les conditions $c_n = \nu_n^{-\alpha}$, $\nu_n \geq n^{1/4}$ impliquent d'après le lemme 5

$$P(\,|\,|\varepsilon|^*_{[c_n \nu_n]} - G^{-1}(\nu_n^{-\alpha})| > C\ \nu_n^{-\beta}) \leq 2\ \exp(-\ \gamma\ \nu_n^{1+\alpha-2\beta})$$

et par conséquent, pour n assez grand

$$P(|\varepsilon|^*_{[c_n \nu_n]} > G^{-1}(\nu_n^{-\alpha}) + C\ \nu_n^{-\alpha}) \leq 2\ \exp(-\ \gamma\ \nu_n^{1-\alpha})$$

$$\leq 2\ \exp(-\ \gamma\ n^{(1-\alpha)/4})$$

or $G^{-1}(x)$ est équivalent à $\frac{1}{2f(o)}\, x$ au voisinage de 0 , $(x \geq 0)$

et la condition $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\delta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n^{-\alpha}}{\delta_n} = 0$ implique :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G^{-1}(\nu_n^{-\alpha}) + C\ \nu_n^{-\alpha}}{\delta_n\ m_K} = 0$$

donc $\quad P(|\varepsilon|^*_{[c_n \nu_n]} > m_K\ \delta_n) \leq 2\ \exp(-\ \gamma\ n^{(1-\alpha)/4})$

pour n assez grand.

Sachant que sous l'hypothèse (H_5') $|\Delta X_t| \leq \frac{1}{m_K} |\varepsilon_t|$, il y a au moins $[c_n\ \nu_n]$ éléments $\Delta X_j(a)$ inférieurs à $\frac{1}{m_K} |\varepsilon|^*_{[c_n \nu_n]}$, on obtient donc :

$$P(|\Delta X(a)|^*_{[c_n \nu_n]} > \delta_n) \leq P(|\varepsilon|^*_{[c_n \nu_n]} > m_K\ \delta_n) \leq 2\ \exp(-\ \gamma\ n^{(1-\alpha)/4}) \quad \blacksquare$$

iv) Démonstration du théorème.

Dans la suite de la démonstration, on ne considérera, sauf précision contraire, que des indices t pour lesquels $X_t \in [a - \delta_n , a + \delta_n]$, (indices eux-mêmes aléatoires), la relation suivante est donc vérifiée :

$$\varepsilon_t = \psi'(X_t + \theta \Delta X_t) \Delta X_t \quad \text{où} \quad \theta \in]0,1[,$$

Si en outre la condition $|\Delta X_t| < \delta_n$ est vérifiée, il existe $\theta_1 \in]-2, 2[$ tel que $\varepsilon_t = \psi'(a + \theta_1 \delta_n) \Delta X_t$, la condition de Lipschitz vérifiée par ψ' (hypothèse H_6') permet alors d'écrire :

$$(2.3) \qquad (\psi'(a) + C_K \delta_n)^{-1} |\varepsilon_t| \leq |\Delta X_t| \leq (\psi'(a) - C_K \delta_n)^{-1} |\varepsilon_t| \quad .$$

On peut remarquer qu'il y a au moins (resp. plus de) $[c_n \nu_n]$ éléments $|\Delta X_j|$ inférieurs à :

$$(\psi'(a) - C_K \delta_n)^{-1} |\varepsilon|^*_{[c_n\nu_n]} \text{ (resp. supérieurs à } (\psi'(a) + C_K \delta_n)^{-1} |\varepsilon|^*_{[c_n\nu_n]}) \quad .$$

On déduit de cette remarque, de (2.3), et du lemme 8 que

$$(2.4) \qquad P((\psi'(a) + C_K \delta_n)^{-1} |\varepsilon|^*_{[c_n\nu_n]} \leq |\Delta X|^*_{[c_n\nu_n]} \leq (\psi'(a) - C_K \delta_n)^{-1} |\varepsilon|^*_{[c_n\nu_n]}) \geq 1 - 2 \exp(-\gamma n^{(1-\alpha)/4}) \quad .$$

On va obtenir à partir de (2.4) et du lemme 7 une majoration presque sûre de $|\hat{\psi}_n'(a) - \psi'(a)|$.

Si les intervalles $[-\delta_n , \delta_n]$ et $[a - \delta_n , a + \delta_n]$ sont disjoints, les variables $\Delta X_{\alpha_j}(o, \delta_n)$ et $\Delta X_{\alpha_k}(a, \delta_n)$, $j = 1 , 2 ,\dots, \nu_n$

$k = 1 , 2 ,\dots, \nu_n$

sont indépendantes, nous supposerons donc dans la suite, la condition $2\delta_n \leq |a|$ réalisée.

Pour simplifier les notations, on notera $\varepsilon_{o,j}$ (resp. $\varepsilon_{a,j}$) la variable associée à $\Delta X_{\alpha_j}(o, \delta_n)$ (resp. $\Delta X_{\alpha_j}(a, \delta_n)$).

Les séquences $(\varepsilon_{o,1} , \varepsilon_{o,2} ,\dots, \varepsilon_{o,\nu_n})$ et $(\varepsilon_{a,1} , \varepsilon_{a,2} ,\dots, \varepsilon_{a,\nu_n})$ sont donc indépendantes et vérifient les conditions du lemme 7.

Il existe donc une constante C , telle que pour tout $\gamma \in]0 , \frac{1}{2}[$,

$$P(\big||\varepsilon|^*_{o,[c_n\nu_n]} - |\varepsilon|^*_{a,[c_n\nu_n]}\big| > C\ \nu_n^{\alpha'-(1+\alpha)/2}) \leq 4\exp(-\gamma\ \nu_n^{2\alpha'})$$

$$\leq 4\exp(-\gamma\ n^{\alpha'/2})$$

dès que n est assez grand.

Or, en utilisant le lemme 6, il existe C_2 tel que

$$P(|\varepsilon|^*_{a,[c_n\nu_n]} < C_2\ \nu_n^{-\alpha}) \leq 2\exp(-\gamma\nu_n^{2\alpha'}) \leq 2\exp(-\gamma\ n^{\alpha'/2})$$

donc :

$$P(\left|\frac{|\varepsilon|^*_{o,[c_n\nu_n]}}{|\varepsilon|^*_{a,[c_n\nu_n]}} - 1\right| \geq C\ \nu_n^{\alpha'+(\alpha-1)/2}) \leq 6\exp(-\gamma\ n^{\alpha'/2}) \quad .$$

L'estimateur $\hat{\psi}'_n(a)$ a été défini par

$$\hat{\psi}'_n(a) = \frac{|\Delta X|^*_{o,[c_n \nu_n]}}{|\Delta X|^*_{a,[c_n \nu_n]}} \quad .$$

En utilisant, l'encadrement (2.4), on obtient avec une probabilité supérieure à $1 - 2 \exp(-\gamma \ n^{(1-\alpha)/4})$:

$$\frac{\psi'(a) - C_K \delta_n}{\psi'(o) + C_K \delta_n} \ \frac{|\varepsilon|^*_{o,[c_n \nu_n]}}{|\varepsilon|^*_{a,[c_n \nu_n]}} \leq \hat{\psi}'_n(a)$$

$$\leq \frac{\psi'(a) + C_K \delta_n}{\psi'(o) - C_K \delta_n} \ \frac{|\varepsilon|^*_{o,[c_n \nu_n]}}{|\varepsilon|^*_{a,[c_n \nu_n]}} \quad .$$

On rappelle que $\psi'(o) = 1$; il vient alors : il existe des constantes C_3 et C_4, telles que pour tout $\gamma \in \,]0, 1/2[$

$$(2.5) \quad P(|\hat{\psi}'_n(a) - \psi'(a)| \geq C_3 \ \nu_n^{\alpha'+(\alpha-1)/2} + C_4 \ \delta_n)$$

$$\leq 6 \exp(-\gamma \ n^{\alpha'/2}) + 2 \exp(-\gamma \ n^{(1-\alpha)/4})$$

ce qui implique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\hat{\psi}'_n(a) - \psi'(a)| > C_3 \ \nu_n^{\alpha'+(\alpha-1)/2} + C_4 \ \delta_n) < \infty \quad .$$

Du lemme de Borel - Cantelli, on déduit que si les conditions : $n^{1/4} \leq \nu_n \leq n^{1/2-\varepsilon} \ \delta_n$, $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \nu_n^{-\alpha} \delta_n^{-1} = 0$ sont vérifiées,

$$\lim_{n\to\infty} |\hat{\psi}'_n(a) - \psi'(a)| = 0 \quad \text{p.s.}$$

<u>Choix des suites</u> c_n , δ_n , ν_n

Pour minimiser $C_3\ \nu_n^{\alpha'-(1/2)+(\alpha/2)} + C_4\ \delta_n = C_3\ \nu^{\alpha'-1/2}\ c_n^{-1/2} + C_4\ \delta_n$, on est amené à minimiser δ_n .

Rappelons que les conditions $\lim\limits_n \frac{c_n}{\delta_n} = 0$, et $\delta_n\ n^{1/6+2/3p} \geq 1$ doivent être vérifiées.

Choisissons : $\delta_n = c_n\ \nu_n^{\alpha'}$, il reste à minimiser :

$$C_3\ c_n^{-1/2}\ \nu_n^{-1/2+\alpha'} + C_4\ \nu_n^{\alpha'}\ c_n .$$

On prendra $c_n = \nu_n^{-1/3}$, et $\nu_n = n^{3/8}$.

Le choix $\nu_n = n^{3/8}$, $\delta_n = n^{-1/8+\alpha'}$, $c_n = n^{-1/8}$ conduit à :

$$\forall \alpha' > 0 , \qquad |\hat{\psi}'_n(a) - \psi'(a)| = o(n^{-1/8+\alpha'}) \quad \text{p.s.}$$

<u>Remarque</u> : Il est possible de définir d'autres estimateurs convergents de $\psi'(a)$. En s'inspirant de l'annexe 2, on aurait pu prendre

$$\hat{\psi}'_n(a) = \left(\sum_{j=1}^{[c_n \nu_n]} |\Delta X_{\alpha(0,\delta_n)}|_j^{*2} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{[c_n \nu_n]} |\Delta X_{\alpha(a,\delta_n)}|_j^{*2} \right)^{-1/2} .$$

Les conditions de convergence presque sûres sont les mêmes.

3 - <u>CONVERGENCE PRESQUE SURE DE</u> $\hat{\psi}_n(a)$ <u>SUR UN COMPACT</u>.-

Soit K un intervalle compact de $\mathbb{R}$, on pourra sans restreindre la généralité supposer K de centre 0 .

Une suite (δ_n) de réels étant donnée, on considère les points $2k\delta_n$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ appartenant à K et on définit ψ'_n dans l'intervalle $]（2k-1)\delta_n, (2k+1)\delta_n]$ par

$$(3.1) \quad \forall x \in](2k-1)\delta_n, (2k+1)\delta_n] \qquad \hat{\psi}'_n(x) = \hat{\psi}'_n(2k\delta_n)$$

$\hat{\psi}'_n(2k\delta_n)$ étant défini par (2.2) on peut alors établir :

Théorème 5.- Sous les hypothèses (H'_1) à (H'_6), si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $\exists \alpha \in]0,1[\quad c_n = \nu_n^{-\alpha}$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{\delta_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$

iii) il existe $\varepsilon > 0 \quad n^{1/4} \leqslant \nu_n \leqslant \delta_n\, n^{1/2-\varepsilon}$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in K} |\hat{\psi}'(x) - \psi'(x)| = 0$ p.s. .

Et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir c_n , δ_n , ν_n telles que :

$$\sup_{x\in K} |\hat{\psi}'_n(x) - \psi'(x)| = o(n^{-1/8+\varepsilon}) \text{ p.s.}$$

Remarque : Les mêmes résultats sont valables, si l'on définissait $\hat{\psi}'_n$ en lui imposant d'être linéaire entre $\hat{\psi}'_n(2k\delta_n)$ et $\hat{\psi}'_n(2(k+1)\delta_n)$.

Démonstration du théorème 5.

La méthode est analogue à celle du théorème 4.

i) Nombre de retours au voisinage des points de K .

Le lemme 3 se modifie de la manière suivante :

On définit

$$E'_n = \{\max_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ 2k\delta_n \in K}} \alpha_{\nu_n}(2k\,\delta_n\,,\,\delta_n) \leq n\}$$

$$= \bigcap_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ 2k\delta_n \in K}} \{\alpha_{\nu_n}(2k\,\delta_n\,,\,\delta_n) \leq n\}$$

et
$$E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} E'_k$$

et on établit :

$$P(E'_n) \leq P(\inf_k (N_n(\psi(2k\delta_n) - m_K\delta_n\,,\,\psi(2k\delta_n) + m_K\delta_n)) \geq \nu_n)\ .$$

Une propriété de continuité des $N_n(a-\delta_n\,,\,a+\delta_n)$ établie au chapitre I , prop. I peut être utilisée : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0<h<k_n} \delta_n^{-1/2}\, n^{-1/4-\varepsilon}\, |N_n(a,a+\delta_n) - N_n(a+k\delta_n,\, a+(k+1)\delta_n)| = 0 \quad \text{p.s.}$$

On établit de même :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k\delta_n \in K}} \delta_n^{-1/2}\, n^{-1/4-\varepsilon}\, |N_n(\psi(2k\delta_n)-m_K\delta_n\,,\,\psi(2k\delta_n)+m_K\delta_n) - N_n(-m_K\delta_n\,,\,m_K\delta_n)| = 0 \quad \text{p.s.}$$

et d'après le théorème I.5 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(-m_K\delta_n\,,\,m_K\delta_n)}{m_K\,\delta_n\,n^{1/2-\varepsilon}} = \infty \quad \text{p.s.}$$

donc $\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n^{-1}\, n^{-(1/2)+\varepsilon} \inf_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k\delta_n \in K}} N_n(\psi(2k\delta_n)-m_K\delta_n, \psi(2k\delta_n)+m_K\delta_n) = +\infty \text{ p.s.}$$

ce qui entraîne $\qquad P(E') = 1$.

ii) Majoration de $|\varphi_n'(x) - \varphi'(x)|$.

Si $x \in [(2k-1)\,\delta_n\ ,\ (2k+1)\,\delta_n]$

$$|\hat{\varphi}_n'(x) - \varphi'(x)| \leq |\hat{\varphi}_n'(2k\delta_n) - \varphi'(2k\delta_n)| + |\varphi'(2k\delta_n) - \varphi'(x)|$$

$$\leq |\hat{\varphi}_n'(2k\delta_n) - \varphi'(2k\delta_n)| + C_K\,\delta_n \quad .$$

On peut supposer comme dans le théorème 1, l'événement E' réalisé et on obtient pour n assez grand :

$$(3.2) \qquad P(\sup_{x\in K} |\hat{\varphi}_n'(x) - \varphi'(x)| \geq C_3\,\nu_n^{\varepsilon+(1-\alpha)/2} + (C_4 + C_K)\,\delta_n) \leq$$

$$|K|\ \delta_n^{-1}\ [6\ \exp(-\ \gamma\ n^{\varepsilon/2}) + 2\ \exp(-\ \gamma\ n^{(1-\alpha)/4})]$$

où $|K|$ désigne le diamètre du compact K , les constantes C_3 , C_4 , γ ayant été définies en 12.5).

Les conditions (i) (ii) (iii) du théorème 4 et le lemme de Borel - Cantelli assurent la convergence presque sûre de $\sup_{x\in K} |\hat{\varphi}_n'(x) - \varphi'(x)|$ vers 0 .

Choisissant : $\nu_n = n^{3/8}$, $c_n = \nu_n^{-1/3}$, $\delta_n = n^{-(1/8)+\varepsilon}$,

on obtient : il existe des constantes C_5 , C_6 positives et $\gamma \in]0\ ,\ \frac{1}{2}[$ telles que :

$$P(\sup_{x\in K} |\hat{\varphi}_n'(x) - \varphi'(x)| \geq C_5\ n^{-(1/8)+\varepsilon}) \leq C_6\ n^{1/8}\ \exp(-\ \gamma\ n^{\varepsilon/2})$$

et donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{x\in K} |\hat{\psi}'_n(x) - \psi'(x)| = o(n^{-1/8+\varepsilon}) \quad \text{p.s.}$$

Remarque : On peut étendre le résultat à un ensemble compact K_n , si $|K_n|$ ne croît pas trop rapidement, $|K_n|$ désignant le diamètre du compact K_n .

Les conditions suivantes doivent être remplies :

$|K_n|\ \delta_n \leqslant 1$ pour la validité de la proposition 1 du chapitre I

et les nombres m_n et M_n définis par

$$\forall y \in K_n \qquad 0 < m_n \leqslant \psi'(y) \leqslant M_n$$

doivent varier assez lentement pour que

$$\lim_{n\to\infty} C_{K_n} \cdot M_n\ \delta_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{m_n\ \delta_n} = 0 \ .$$

Par ailleurs, on peut déduire d'un estimateur de la dérivée $\hat{\psi}'_n$, un estimateur de la fonction $\hat{\psi}_n$, en posant pour $x \geqslant o$

$$\hat{\psi}_n(x) = \sum_{o\leqslant k\leqslant \lfloor x/\delta \rfloor} \psi'_n(k\delta_n)\ \delta_n \ .$$

Utilisant l'inégalité :

$$\sup_{x\in K} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)| \leqslant |K| \sup_{x\in K} |\hat{\psi}'_n(x) - \psi'(x)| + M_K\ \delta_n$$

on déduit le :

Théorème 6.- Sous les hypothèses (H'1) à (H'6), on peut choisir les suites c_n , δ_n , ν_n telles que :

$$\forall \varepsilon > 0 , \qquad \sup_{x \in K} |\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)| = o(n^{-(1/8)+\varepsilon}) \text{ p.s.}$$

Remarque : Si l'on souhaite un estimateur de ψ, l'estimateur obtenu dans la partie A converge plus rapidement.

C - ELEMENTS DE COMPARAISON ENTRE ESTIMATEURS.

1 - Dans la partie A , on a supposé l'existence d'une fonction ψ telle que le processus $(\psi(X_t), t \in \mathbb{N})$ soit un ARIMA d'ordre 1 , et vérifiant $\psi(o) = o$, $\psi(1) = 1$. Si l'on fait l'hypothèse plus forte $(\psi(X_t), t \in \mathbb{N})$ est une marche aléatoire, c'est-à-dire, si l'on suppose que les accroissements $(\psi(X_t) - \psi(X_{t-1}), t \in \mathbb{N}^*)$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, on peut améliorer les résultats du théorème 1 et montrer que $\hat{\psi}_n$ converge vers $\hat{\psi}$ non seulement en probabilité, mais aussi presque sûrement. De manière plus précise, en utilisant la proposition I.1 et son corollaire, on obtient :

Si les variables $(\psi(X_t) - \psi(X_{t-1}), t \in \mathbb{N}^*)$ vérifient les hypothèses (1.1) à (1.4) du chapitre I , pour tout compact K , pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{a\in K} \left| \frac{N_n^{(X)}(o,a)}{N_n^{(X)}(o,1)} - \psi(a) \right| = o(n^{-(1/4)+\varepsilon}) \text{ p.s.}$$

2 - Dans la partie B , on a supposé l'existence d'une fonction ψ de classe C^1 telle que la suite des accroissements $(\psi(X_t) - \psi(X_{t-1}), t \in \mathbb{N}^*)$ soit une suite de variables indépendantes et vérifiant $\psi'(o) = 1$. On a proposé comme estimateur de ψ' :

$$\hat{\psi}'_n(a) = \frac{|\Delta X|^*_{a,[c_n\nu_n]}}{|\Delta X|^*_{o,[c_n\nu_n]}} .$$

Cet estimateur est basé sur la fonction de répartition empirique. Si nous modifions l'hypothèse, en supposant que la suite des accroissements

$(\psi(X_t) - \psi(X_{t-1}))$ est un processus ARMA, ou encore que $(\psi(X_t), t \in \mathbb{N})$ est un processus ARIMA d'ordre 1, on ne peut plus établir la convergence de $\hat{\psi}'_n$ vers ψ', ou plus exactement la démonstration du théorème 4 cesse d'être valable.

On note comme en B.2. (déf. (2.1)), $(\alpha_j , j \in \mathbb{N})$ la suite des temps d'arrêt définie par

$$\alpha_j = \alpha_j(a,\delta) = \inf \{t \in \mathbb{N} : t > \alpha_{j-1} , \quad X_t \in [a-\delta, a+\delta]\}$$

Et on suppose que

$Z_t = \psi(X_t)$ est un processus ARIMA d'ordre 1. Pour simplifier l'écriture, posons $\eta = \psi(a-\delta)$, $\eta' = \psi(a+\delta)$. L'ensemble $\{\Delta Z_{\alpha_j} \in [-\gamma,\gamma]\}$ est une réunion d'ensembles :

$$\{\Delta Z_{\alpha_j} \in [-\gamma, \gamma]\} =$$

$$\bigcup_{p \in \mathbb{N}} [\{\# \{k \leq p-1 : Z_k \in [\eta, \eta']\} = j-1\}$$

$$\cap \{Z_p \in [\eta, \eta']\} \cap \{\Delta Z_p \in [-\gamma, \gamma]\}] .$$

Les variables Z_k et $\Delta Z_k = Z_{k+1} - Z_k$ ne sont pas indépendantes et l'on n'aura pas en général : $E(\Delta Z_{\alpha_j}) = E(\Delta Z_1)$.

L'exemple suivant peut être éclairant :

Supposons que Z_t soit un processus ARIMA (1,1,0) vérifiant :

$$Z_o = 0 \quad , \quad \Delta Z_t = \rho \, \Delta Z_{t-1} + e_t \quad , \quad \text{où } \rho \in]0,1[$$

et qu'en outre les variables e_t soient normales, centrées, réduites et indépendantes et considérons la suite de temps d'arrêt (β_j) définie par :

$$\beta_j = \inf \{t \in \mathbb{N} : \ t > \beta_{j-1} \ , \ Z_t \geqslant d\}$$
$$= + \infty \quad \text{si} \quad \forall t > \beta_{j-1} \ , \ Z_t \leqslant d$$

où d est un réel strictement positif. On vérifie aisément que $P(\beta_1 < \infty) = 1$ et on obtient :

$$E(\Delta Z_{\beta_1}) = E \sum_{p=1}^{\infty} (Z_{p+1} - Z_p) \ \mathbb{1}_{\{Z_1<d,\ldots,Z_{p-1}<d,Z_p\geqslant d\}}$$
$$= E \sum_{p=1}^{\infty} E\left[(Z_{p+1} - Z_p) \cdot \mathbb{1}_{\{Z_1<d,\ldots,Z_{p-1}<d,Z_p\geqslant d\}} \ | \ F_p\right]$$

où F_p désigne la tribu engendrée par $\{e_t \ ; \ t \leqslant p\}$.

Or $$E\left[\Delta Z_p \ | \ F_p\right] = \rho \Delta Z_{p-1} = \rho(Z_p - Z_{p-1}) \quad ,$$

donc :

$$E \ \Delta Z_{\beta_1} = \rho \ E \sum_{p=1}^{\infty} (Z_p - Z_{p-1}) \ \mathbb{1}_{\{Z_1<d,\ldots,Z_{p-1}<d,Z_p\geqslant d\}} \ .$$

Les variables aléatoires qui figurent dans le second membre sont toutes strictement positives, donc $E(\Delta Z_{\beta_1}) > 0$ et

$$E(\Delta Z_{\beta_1}) \neq E \ \Delta Z_1 = 0 \quad .$$

De plus un majorant de la différence $|E \ \Delta Z_{\beta_j} - E \ \Delta Z_1|$ ne semble pas facile à obtenir.

D'autre part, si les variables ΔZ_k vérifient des conditions de mélangeance classique, rappelées dans l'annexe I , les conditions de mélangeance concernant les ΔZ_{α_k} sont beaucoup plus délicates à obtenir. Enfin, on peut conjecturer que :

si $\lim_{n\to\infty} \nu_n = \infty$ alors $\frac{1}{\nu_n} \sum_{j=1}^{n} 1_{[-\gamma,\gamma]}(\Delta Z_{\alpha_j})$ converge p.s. vers $F(\gamma) - F(-\gamma)$ où F est la fonction de répartition de ΔZ_1 , mais on n'a pas obtenu de majoration presque sûre de la différence.

3 - Dans la partie B , l'estimateur $\hat{\psi}'_n$ de la dérivée est basé sur la fonction de répartition empirique. Nous avons établi que la convergence presque sûre de $\hat{\psi}'_n$ vers ψ' était uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$. Il est possible d'établir la convergence sur des ensembles $[A_n , A'_n]$ possédant la propriété suivante : tout intervalle de $[A_n , A'_n]$ de longueur supérieure à δ_n contient plus de ν_n points de l'ensemble $\{X_t , 1 \leq t \leq n\}$. Par contre, un estimateur basé sur le temps d'occupation ne peut converger sur un ensemble K_n dont le diamètre croît trop rapidement avec n.

4 - La comparaison entre la méthode d'estimation de ψ proposée ici et les méthodes paramétriques reste à mener. On peut faire l'hypothèse que ψ appartient à une classe de fonctions indexées par un paramètre à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. G. BOX et D. COX ([2]) propose par exemple, la classe des fonctions

$$f_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+\lambda_2)^{\lambda_1} - 1}{\lambda_1} & , \quad \lambda_1 \neq 0 \\ \log(x + \lambda_2) & , \quad \lambda_1 = 0 \end{cases} .$$

B I B L I O G R A P H I E

[1] BAXTER - An analogue of the law of iterated logarithm.
Proc. Amer. Math. Soc. 6 177-181 (1955).

[2] G. BOX et D. COX - An analysis of transformations.
J. Roy Stat. Soc. Ser. B, 26, 211-243 (1964).

[3] M. CSÖRGO et P. RÉVÉSZ - A new method to prove Strassen type laws of invariance principle II.
Z. Wahrsch. verw. Gebiete 31, 261-269 (1975).

[4] HOEFFDING - Probability inequalities for sums of bounded random variables.
J. Amer. Stat. Assoc. 58, n° 301, 13-30 (1963).

[5] V.V. PETROV - Sums of independent random variables.
Springer-Verlag Verlin New-York (1975).

[6] A. RENYI - Calcul des Probabilités.
Dunod Paris (1966).

CHAPITRE IV

PROCESSUS ARIMA FRACTIONNAIRES.

----

1 - INTRODUCTION.

Dans l'étude des processus non stationnaires, l'idée la plus fréquente est de supposer l'existence d'un entier d, tel que le processus différencié d fois soit stationnaire. Cette modélisation a l'inconvénient de n'introduire que des différenciations entières, ce qui peut faire apparaître des phénomènes de sur - ou de sous différenciation. L'idée de supprimer la discontinuité sur les ordres de différenciation en introduisant des exposants fractionnaires est due à Mandelbrot [19] et Mandelbrot et Van Ness [21] dans le cas de processus à temps continu. Dans le cas de processus à temps discret, on peut citer en autres les travaux de Granger [12], Granger-Joyeux [13], Hosking [14], Geweke et Porter Hudak [9] Gonçalves [11] sur les processus ARIMA fractionnaires, encore appelés processus à mémoire longue. De façon plus précise, on dit qu'un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un ARIMA fractionnaire (p,d,q) s'il vérifie la relation :

$$(I-B)^d \phi(B) X_n = \Theta(B) e_n \quad , \qquad n \geq 0 \quad ,$$

où $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 ,

B est l'opérateur retard : $B X_k = X_{k-1}$,

d un nombre réel non nécessairement entier, $d - 1/2 \notin \mathbb{Z}$,

ϕ et Θ sont deux polynômes de degré respectif p et q .

On fait l'hypothèse classique que $\phi(o) = \Theta(o) = 1$, les racines de ϕ et Θ sont de module strictement supérieur à 1 et que ϕ et Θ n'ont pas de racine commune.

L'opérateur $(I-B)^d$ est défini par son développement binômial :

$$(I-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-1)^k B^k$$

$$= I - dB + \frac{d(d-1)}{2} B^2 - \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} B^3 + \dots \quad .$$

Les propriétés ergodiques de ces processus fractionnaires ont été étudiées dans le cas de processus stationnaires, correspondant à $d < 1/2$, en particulier par Rosenblatt [22] Fox et Taqqu [7,8].

Le cas des processus non stationnaires n'a pas fait l'objet de travaux aussi systématiques. Dans ce chapitre nous étudierons le comportement asymptotique du processus obtenu après changement de l'échelle des temps et réduction. Plus précisément, on établit que le processus transformé :

$$\xi_n(t) = \left(\frac{1}{n^{d-1/2}} X_{[nt]} \quad , \quad t \in [0,1]\right)$$

converge en loi vers un processus

$$\left(\int_0^t (t-s)^{d-1} \, dW(s) \; , \; t \in [0,1]\right)$$

où W est un processus de Wiener.

Dans la section 2, on étudie des processus qui admettent une décomposition moyenne mobile :

$$\left(\frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{k=o}^{[nt]-1} f\left(t - \frac{k}{n}\right) \varepsilon_{k+1} \quad , \quad t \in [0,1]\right)$$

dont les coefficients varient en fonction du temps, et on établit que, si la fonction f est suffisamment régulière, ce processus converge en loi vers le processus

$$\left(\int_0^t f(t-s)\, dW(s) \ , \ t \in [0,1]\right)$$

Cette étude utilise des méthodes indépendantes de celles de DAVYDOV [5], ce qui permet d'affaiblir de manière importante les conditions sur les moments des variables ε_k .

Y. KASAHARA et M. MAEJIMA [16a] étudient également la convergence en loi de ces processus, en supposant que les variables ε_k sont dans le domaine d'attraction d'un processus de Levy stable. La condition imposée à f (être bornée), très restrictive a pu être levée dans le dernier article [16b] paru au moment de la soutenance.

Dans la section 3, on choisit tout d'abord les conditions initiales $\varepsilon_t = 0$, $\forall t \leq 0$; on écrit alors la décomposition moyenne mobile du processus ARIMA fractionnaire. Une étude du comportement asymptotique des coefficients moyenne mobile est faite, elle permet d'utiliser les résultats de la section 2, pour établir la convergence en loi du processus normalisé.

Dans la section 4, le choix des conditions initiales dans la définition d'un processus ARIMA est discuté.

Enfin dans la section 5, une application à la covariance empirique d'un processus ARIMA est proposée.

2 - UNE APPLICATION DU THEOREME DE KOMLOS-MAJOR-TUSNADY A LA LOI LIMITE D'UN PROCESSUS LINEAIRE.

L'un des premiers résultats sur la loi limite des sommes partielles d'un processus est celui de DONSKER [6].

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, définies sur l'espace probabilisé (Ω,A,P), de moyenne nulle, de variance $E\,\varepsilon_1^2 = \sigma^2$.

On note les sommes partielles $S_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k$ et on définit pour tout n, le processus $X_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}$, on montre que la suite des processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi dans $\mathcal{D}[0,1]$ vers un processus $(W(t)\,,\ t\in[0,1])$ du mouvement brownien.

Si on suppose les variables (ε_j) pondérées, les coefficients variant en fonction du temps, le problème peut se formuler de la manière suivante.

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$, quelle est la loi limite du processus

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} f\left(t-\frac{k}{n}\right)\varepsilon_k\ ,\quad t\in[0,1]\right)\ ?$$

Des hypothèses de régularité sur f sont nécessaires. Supposons tout d'abord que f soit continue sur $[0,1]$, et admette une dérivée continue sur $]0,1]$.

La somme

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} f(t - \frac{k}{n})\, \varepsilon_k \qquad \text{peut se transformer :}$$

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} f(t - \frac{k}{n})\, (S_k - S_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{[nt]} \left[f(t - \frac{k}{n}) - f(t - \frac{k+1}{n})\right] \frac{S_k}{\sigma\sqrt{n}} + f(o)\, \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$= \int_o^{[nt]/n} f'(t-s)\, X_n(s)\, ds + f(o)\, X_n(t)\ .$$

Or l'application : $(\psi(t),\ t \in [0,1]) \mapsto (\int_o^t f'(t-s)\psi(s)\, ds,\ t \in [0,1])$ est une application continue de $\mathcal{D}[0,1]$ dans lui-même.

Utilisant le théorème de P. BILLINGSLEY (1968) sur l'image par une application continue d'une suite de processus convergeant en loi, on déduit que :

$(Y_n(t)\ ,\ t \in [0,1])$ converge en loi dans $\mathcal{D}[0,1]$ vers

$(\int_o^t f'(t-s)\, W(s)\, ds + f(o)\, W(t)\ ,\ t \in [0,1])$ ou encore, en intégrant par parties la dernière expression,

$(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} f(t - \frac{k}{n})\, \varepsilon_k\ ,\ t \in [0,1])$ converge en loi dans $\mathcal{D}[0,1]$

vers l'intégrale stochastique $(\int_o^t f(t-s)\, dW(s),\ t \in [0,1])$.

On souhaite étendre ce théorème au cas où f vérifie l'hypothèse : f est de classe C^1 sur $]0,1]$ et il existe $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\lim_{t \to 0} t^{1+\alpha} f'(t) = 0$.

L'hypothèse faite sur f assure la convergence de l'intégrale $\int_0^t f(t-s)\, dW(s)$.

Mais ne supposant plus l'intégrabilité de f' sur $[0,1]$, on ne peut plus utiliser le théorème de P. BILLINGSLEY. Une méthode de démonstration possible consiste à établir la convergence des lois de dimension finie et à vérifier une condition d'équitension de la suite des processus (voir AKONOM-GOURIEROUX (1988) pour une telle approche). Nous proposons ici une autre approche, qui utilise le procédé de construction de KOMLOS-MAJOR-TUSNADY (1975).

2. 1. - Enoncé du théorème.

Théorème 1.- Soit ε_0 une variable aléatoire de moyenne nulle $E\,\varepsilon_0 = 0$, de variance $E\,\varepsilon_0^2 = \sigma^2$. On suppose qu'elle admet un moment d'ordre p strictement supérieur à 2.

Soit f une fonction de classe C^1 sur $]0,1]$ satisfaisant les conditions suivantes :

i) il existe un réel strictement positif δ tel que l'application : $t \longmapsto f'(t)$ soit monotone sur $]0,\delta]$,

ii) $\sup\limits_{\substack{\delta \leq s < t \leq 1 \\ |t-s| \leq 1/n}} |f'(t) - f'(s)| = O(n^{-\nu})$ avec $\nu > 0$,

iii) il existe $\alpha \in]0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}[$ tel que $\lim_{t\to 0} t^{1+\alpha} f'(t) = 0$.

Alors on peut construire un espace Ω, un processus du mouvement brownien $(W(t),\ t \in \mathbb{R}_+)$ et une suite de variables aléatoires indépendantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ de même loi que ε_o tels que : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P\Big(\sup_{t\in[0,1]} \Big| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{[nt]-1} f(t-\frac{k}{n})\, \varepsilon_{k+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} f(t-\frac{s}{n})\, dW(s)\Big| \geq C_1\, n^{-\nu_1}\Big) \leq C_2\, n^{-\nu_2} .$$

où C_1, C_2, ν_1, ν_2 sont des constantes positives ne dépendant que de la loi de ε_o.

En particulier, remarquant que $(\frac{1}{\sqrt{n}} W(nt),\ t \in \mathbb{R})$ est un processus du mouvement brownien, on en déduit la convergence en loi des sommes de Riemann vers l'intégrale stochastique correspondante.

Corollaire.- Sous les hypothèses du théorème 2, le processus $\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{[nt]-1} f(t-\frac{k}{n})\, \varepsilon_{k+1},\ t \in [0,1]\Big)$ converge en loi dans $\mathcal{D}[0,1]$ vers $\Big(\int_0^t f(t-s)\, dW(s),\ t \in [0,1]\Big)$.

2.2. - *Le théorème de Komlos-Major-Tusnady.*

La démonstration du théorème 1 utilise de manière essentielle le procédé de construction de Komlos-Major-Tusnady [17] . Nous rappelons leurs résultats.

Théorème 2 (*Komlos - Major - Tusnady, 1976, th. 4*).

Soit ε_o une variable aléatoire, de moyenne nulle, de variance $E\,\varepsilon_o^2 = \sigma^2$.

Soit H une fonction telle que :

i) $H(x) > 0$ si $x > 0$;

ii) H est continue, monotone croissante sur $[0,\infty[$;

iii) $\exists \delta > 0$, $\dfrac{H(x)}{x^{3+\delta}}$ est monotone croissante pour $x > x_o$;

iv) $\dfrac{\log H(x)}{x}$ est monotone décroissante pour $x > x_o$;

v) $E\,H(|\varepsilon_o|) < \infty$.

Alors on peut construire un espace et sur cet espace, un processus du mouvement brownien $(W(t)\ ,\ t \geq 0)$ et une suite de variables aléatoires indépendantes $(\varepsilon_1\ ,\ \varepsilon_2\ ,\dots,\ \varepsilon_n)$ de même loi que ε_o possédant la propriété :

Il existe des constantes strictement positives C_1 , C_2 , a ne dépendant que de la loi de ε_o , telles que : pour tout n , pour tout x , $H^{-1}(n) < x < C_1 \sqrt{n \log n}$,

$$P\left(\sup_{0<k\leq n} \left| \frac{S_k}{\sigma} - W(k) \right| > x \right) \leq C_2 \frac{n}{H(ax)} ,$$

où $S_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k$.

Choisissant $H(x) = x^p$, avec $p > 3$, on peut énoncer le corollaire suivant :

Corollaire.- Soit ε_o une variable aléatoire telle que

$$E\ \varepsilon_o = 0 \quad , \quad E\ \varepsilon_o^2 = \sigma^2 \quad , \quad E\ |\varepsilon_o^p| < \infty \text{ pour un } p > 3 .$$

Alors on peut construire un processus du mouvement brownien $(W(t),\ t \geq 0)$ et une suite de variables aléatoires indépendantes $(\varepsilon_1\ , \varepsilon_2\ ,\ldots,\ \varepsilon_p\ ,\ldots)$ de même loi que ε_o , tels que :

pour tout $\gamma \in \left]0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right[$

$$P\left(\sup_{0 \leq k \leq n} \left|\frac{S_k}{\sigma} - W(k)\right| \geq n^{(1/p)+\gamma}\right) \leq \frac{C}{n^{p\gamma}} .$$

Ce corollaire peut être étendu au cas de variables possédant des moments d'ordre $p > 2$, en utilisant un résultat établi par Major (1976, th. 2).

2. 3. - *Résultats relatifs au module de continuité du mouvement brownien.*

Nous utiliserons également des résultats concernant le module de continuité du mouvement brownien.

On définit ce module $\omega_W(\delta)$ par :

$$(2.1) \qquad \omega_W(\delta) = \sup_{0 \leq s \leq 1-\delta}\ \sup_{0 \leq h \leq \delta} |W(s+h) - W(s)| .$$

$\omega_W(\delta)$ vérifie l'inégalité de G.R. SHORACK, J.A. WELLNER (1986 , p. 536) :

Soit $\delta \in \left]0,1\right[$, alors

$$(2.2) \qquad \forall\lambda > 0 \quad \forall\varepsilon \in \left]0,1\right[\quad P(\omega_W(\delta) > \lambda\sqrt{\delta}) \leq \frac{64}{\varepsilon^2\delta\lambda} \exp\left(- \frac{(1-\varepsilon)^2\ \lambda^2}{2}\right) .$$

On a donc, pour tout $\beta > 0$:

$$(2.3) \qquad P(\omega_W(\frac{1}{n}) \geq n^{-1/2+\beta}) \leq \frac{64\ n^{1-\beta}}{\varepsilon^2} \ \exp(-\frac{(1-\varepsilon)^2\ n^{2\beta}}{2}) \ .$$

Il est aussi intéressant de donner des résultats plus précis sur le module de continuité de W.

Lemme 1.- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que :

$$(2.4) \qquad \forall\delta \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\quad \forall\lambda > \sqrt{2}\ (1+2\varepsilon)$$

$$P(\sup_{\substack{0\leq s<t\leq 1 \\ |s-t|\leq\delta}} \frac{|W(t) - W(s)|}{\sqrt{(t-s)\ \log(1/(t-s))}} \geq \lambda) \leq \frac{C(\varepsilon)}{\delta\lambda} \exp(-\frac{(1-\varepsilon)^3}{2}\ \lambda^2 \log \frac{1}{\delta})$$

Démonstration du lemme.

Soit θ un réel strictement supérieur à 1 (que l'on choisira ultérieurement arbitrairement proche de 1). Définissons la probabilité :

$$P(\delta,\lambda) = P(\sup_{s\in[0,1-\delta[} \ \sup_{t\in[s,s+\delta[} \frac{|W(t) - W(s)|}{((t-s)\ \log(1/(t-s)))^{1/2}} \geq \lambda) \ ,$$

et introduisons la famille d'intervalles :

$$I_k = [s + \theta^{-(k+1)}\ \delta\ ,\ s + \theta^{-k}\ \delta]\ , \quad k \in \mathbb{N}\ .$$

On a :

$$P(\delta,\lambda) = P(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{ \sup_{s\in[0,1-\delta]} \ \sup_{t\in I_k} \frac{|W(t) - W(s)|}{[(t-s)\ \log(1/(t-s))]^{1/2}} \geq \lambda) \ ,$$

Comme la fonction $u \to u \log 1/u$ est croissante sur $[0,1/e]$, on en déduit :

$$P(\delta,\lambda) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P\Big(\sup_{s\in[0,1-\delta]} \ \sup_{t\in I_k} |W(t) - W(s)| \geq \lambda \ (\theta^{-(k+1)} \ \delta \ \log(\theta^{k+1} \ \delta^{-1}))^{1/2}\Big)$$

$$P(\delta,\lambda) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(\omega_W(\theta^{-k} \ \delta) \geq \lambda(\theta^{-(k+1)} \ \delta \ \log(\theta^{k+1} \ \delta^{-1}))^{1/2}) \quad .$$

Utilisant la majoration (2.2), avec $\theta^{-k}\delta$ pour δ et $\lambda \ \theta^{-1/2} \ [\log \ (\theta^{k+1} \ \delta^{-1})]^{1/2}$ pour λ , on obtient l'inégalité :

$$P(\delta,\lambda) \leq \frac{64}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k \sqrt{\theta}}{\delta\lambda \ (\log \ \theta^{k+1} \ \delta^{-1})^{1/2}} \ \exp(- \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\theta} \ \lambda^2 \ \log(\theta^{k+1} \ \delta^{-1}))$$

$$\leq \frac{64}{\varepsilon^2\delta\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{(k+1)(1-(1-\varepsilon)^2\lambda^2/2\theta)}}{\sqrt{\theta} \ ((k+1) \ \log \ \theta \ + \ \log \ \delta^{-1})^{1/2}} \exp\left[- \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\theta} \ \lambda^2 \ \log \ \delta^{-1}\right] .$$

Choisissant $\theta = 1 + \varepsilon$, on a pour $\lambda > \sqrt{2} \ (1+2\varepsilon)$:

$$P(\delta,\lambda) \leq \frac{C(\varepsilon)}{\delta\lambda} \exp(- \frac{(1-\varepsilon)^2}{2(1+\varepsilon)} \ \lambda^2 \ \log \frac{1}{\delta}) \leq \frac{C(\varepsilon)}{\delta\lambda} \exp\left[- \frac{(1-\varepsilon)^3}{2} \ \lambda^2 \ \log \frac{1}{\delta}\right] . \blacksquare$$

2. 4. - Démonstrction du théorème 1.

a) Majorations de f et f'.

La condition (iii) entraîne :

(2.6) il existe A' tel que $\forall t \in \,]0,1]$ $|f'(t)| \leq A' \ t^{-(1+\alpha)}$;

il existe donc aussi une constante A telle que :

$\forall t \in \,]0,1]$ $|f(t)| \leq A \ t^{-\alpha}$. Comme $\alpha < 1/2$, on en déduit que $\int_0^1 f^2(t) \ dt < \infty$, ce qui assure l'existence de l'intégrale stochastique

$$\int_0^t f(t-s) \ dW(s) \ .$$

b) Définition des sommes de Riemann.

On construit suivant la méthode de Komlos, Major, Tusnady, la suite de variables aléatoires indépendantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ et on pose :

$$S_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k \; .$$

La suite (S_k) vérifie : pour tout $\gamma \in \left]0 , \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right[$,

$$P\left(\sup_{o \leq k \leq n} \left|\frac{S_k}{\sigma} - W(k)\right| \geq n^{1/p+\gamma}\right) \leq \frac{C}{n^{p\gamma}} \; .$$

On introduit alors les sommes de Riemann :

$$I_n(t) = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{[nt]-1} f\left(t - \frac{k}{n}\right) \varepsilon_{k+1}$$

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{[nt]-1} f\left(t - \frac{k}{n}\right) (W(k+1) - W(k)) \; .$$

c) Majoration de $\sup_{t \in [0,1]} |I_n(t) - J_n(t)|$

i) Si $0 < t < \frac{1}{n}$, $I_n(t) = J_n(t) = 0$, il suffira donc de majorer $|I_n(t) - J_n(t)|$ pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$.

ii) On peut transformer l'écriture de $I_n(t)$:

$$I_n(t) = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{[nt]-1} f\left(t - \frac{k}{n}\right) \left[(S_{[nt]} - S_k) - (S_{[nt]} - S_{k+1})\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{[nt]-1} \left(f\left(t - \frac{k}{n}\right) - f\left(t - \frac{k-1}{n}\right)\right) (S_{[nt]} - S_k)$$

$$+ \frac{1}{\sigma} f(t) \, S_{[nt]} \; .$$

f étant de classe C^1, il existe une suite $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ d'éléments de $]0,1[$ tels que :

$$f(t-\frac{k}{n}) - f(t-\frac{k-1}{n}) = -\frac{1}{n} f'(t-\frac{k-\theta_k}{n})$$

et

$$I_n(t) = -\frac{1}{\sigma}\left(\sum_{k=1}^{[nt]-1} \frac{1}{n} f'(t-\frac{k-\theta_k}{n})(S_{[nt]} - S_k)\right) + \frac{1}{\sigma} f(t)\, S_{[nt]} .$$

On peut écrire la même transformation pour $J_n(t)$, ce qui conduit à :

$$J_n(t) = f(t)\, W([nt]) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]-1} f'(t-\frac{k-\theta_k}{n})\,(W([nt]) - W(k))$$

et

$$|I_n(t) - J_n(t)| \leq |f(t)| \left|\frac{S_{[nt]}}{\sigma} - W_{[nt]}\right|$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]-1} \left|f'(t-\frac{k-\theta_k}{n})\right| \left|W([nt]) - \frac{S_{[nt]}}{\sigma} - W_{(k)} + \frac{S_k}{\sigma}\right| .$$

Utilisant la majoration de f et de f', nous en déduisons que :

$$|I_n(t) - J_n(t)| \leq (A\, t^{-\alpha} + 2\,\frac{A'}{n} \sum_{k=1}^{[nt]-1} (t-\frac{k-\theta_k}{n})^{-1-\alpha}) \max_{0\leq k\leq n} \left|W_{(k)} - \frac{S_k}{\sigma}\right| .$$

Donc

$$\sup_{t\in[1/n,1]} |I_n(t) - J_n(t)| \leq (A\, n^{\alpha} + 2\,\frac{A'}{n} \sum_{h=1}^{n} (\frac{h}{n})^{-1-\alpha}) \max_{0\leq k\leq n} \left|W(k) - \frac{S_k}{\sigma}\right|$$

$$\sup_{t\in[1/n,1]} |I_n(t) - J_n(t)| \leq A'' .\, n^{\alpha} \max_{0\leq k\leq n} \left|W(k) - \frac{S_k}{\sigma}\right| ,$$

où A'' est une constante ne dépendant que du comportement de f.

On déduit donc du corollaire du théorème 2 que :

$$(2.7) \qquad P\Big(\sup_{t\in[1/n,1]} |I_n(t) - J_n(t)| \geq A''\, n^{\alpha+(1/p)+\gamma}\Big) \leq \frac{C}{n^{p\gamma}}$$

d) <u>Ecart entre la somme de Riemann et l'intégrale stochastique.</u>

Posons $G_n(t) = f(t)\, W(nt) - \frac{1}{n}\int_0^{nt} f'(t - \frac{s}{n})\, (W(nt) - W(s))\, ds$.

Dans le cas où $t \in [\frac{1}{n}, 1]$, nous avons :

$$|G_n(t) - J_n(t)| \leq D_1(t) + D_2(t) + D_3(t) ,$$

avec

$$D_1(t) = |f(t)|\, |W(nt) - W([nt])| ,$$

$$D_2(t) = \frac{1}{n}\, \Big| \sum_{k=1}^{[nt]-1} \int_{k-1}^{k} \Big[f'(t - \frac{s}{n})\, (W(nt) - W(s)) - f'(t - \frac{k-\theta_k}{n})\, (W([nt]) - W(k))\Big|\, ds$$

$$D_3(t) = \frac{1}{n}\, \Big|\int_{[nt]-1}^{nt} f'(t - \frac{s}{n})\, (W(nt) - W(s))\, ds\Big| .$$

On notera M_k la variable aléatoire $\sup_{k\leq s\leq k+1} |W(s) - W(k)|$.

Pour tout réel positif ε, on a alors la majoration suivante :

$$P\big(\max_{k=o,1,\dots,n-1} M_k > n^{\varepsilon}\big) \leq n\, P(M_1 > n^{\varepsilon})$$
$$\leq n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{n^{\varepsilon}}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du$$
$$\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; n^{1-\varepsilon} \exp\Big(-\frac{n^{2\varepsilon}}{2}\Big) .$$

On a également :

$$P(\max_{k=o,1,\dots,n-1} |W(k)| > n^{1/2+\varepsilon}) \leqslant P(\sup_{o\leqslant s\leqslant n} |W(s)| > n^{(1/2)+\varepsilon})$$

$$\leqslant P(M_1 > n^{\varepsilon})$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n^{-\varepsilon} \exp(-\frac{n^{2\varepsilon}}{2}) .$$

i) Majoration de $D_1(t)$.

On a : $D_1(t) \leqslant |f(t)| \max_{o\leqslant k\leqslant n-1} M_k$, donc, en utilisant la majoration de la fonction f :

$$\sup_{t\in[1/n,1]} D_1(t) \leqslant A\, n^{\alpha} \max_{o\leqslant k\leqslant n-1} M_k$$

et

$$P(\sup_{t\in[1/n,1]} D_1(t) \geqslant A\, n^{\alpha+\varepsilon}) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n^{1-\varepsilon} \exp(-\frac{n^{2\varepsilon}}{2})$$

ii) Majoration de $D_2(t)$.

$$D_2(t) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]-1} \sup_{k-1\leqslant s\leqslant k} |f'(t-\frac{s}{n})\,(W(nt)-W(s)) - f'(t-\frac{k-\theta_k}{n})\,(W([nt])-W(k))|$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]-1} \sup_{k-1\leqslant s\leqslant k} |f'(t-\frac{s}{n})\,\{W(nt)-W(s)-W([nt])+W(k)\}|$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]-1} \sup_{k-1\leqslant s\leqslant k} |f'(t-\frac{s}{n}) - f'(t-\frac{k-\theta_k}{n})|\ |W([nt])-W(k)|$$

On peut donc écrire :

$D_2(t) \leqslant D_4(t) + D_5(t) + D_6(t)$, où :

$$D_4(t) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{[nt]-1} \sup_{k-1\leqslant s\leqslant k} |f'(t - \frac{s}{n})| \max_{o\leqslant j\leqslant n-1} M_j ,$$

$$D_5(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=[nt]-[n\delta]+1}^{[nt]-1} \sup_{k-1\leqslant s\leqslant k} |f'(t - \frac{s}{n}) - f'(t - \frac{k-\theta_k}{n})| \, |W([nt]) - W(k)| ,$$

$$D_6(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]-[n\delta]} \sup_{k-1\leqslant s\leqslant k} |f'(t - \frac{s}{n}) - f'(t - \frac{k-\theta_k}{n})| \, |W([nt]) - W(k)| .$$

On adopte pour $t \in [1/n,\delta]$ la convention $D_6(t) = 0$ et $D_5(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]-1} \ldots$

Majorons alors chacun de ces termes.

- $D_4(t) \leqslant \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{[nt]-1} A' \, (t - \frac{k}{n})^{-1-\alpha} \max_{o\leqslant j\leqslant n-1} M_j$

$$\sup_{t\in[1/n,1]} D_4(t) \leqslant 2A' \, (\sum_{h=1}^{n} h^{-1-\alpha}) \, n^{\alpha} \max_{o\leqslant j\leqslant n-1} M_j$$

$$\leqslant A'' \, n^{\alpha} \max_{o\leqslant j\leqslant n-1} M_j$$

- En utilisant la monotonie de f' sur $]o,\delta]$

$$D_5(t) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=[nt]-[n\delta]+1}^{[nt]-1} |f'(t - \frac{k}{n}) - f'(t - \frac{k-1}{n})| \, |W([nt]) - W(k)|$$

Posons $\tau = \tau_n = t - \frac{[nt]}{n}$, on obtient :

$$D_5(t) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{[n\delta]-1} |f'(\tau + \frac{h}{n}) - f'(\tau + \frac{h+1}{n})| \ . \ h \max_{o \leqslant j \leqslant n-1} M_j \ .$$

Les quantités $f'(\tau + \frac{h}{n}) - f'(\tau + \frac{h+1}{n})$ sont toutes de même signe, et

$$D_5(t) \leqslant \frac{1}{n} \left| \sum_{h=1}^{[n\delta]-1} f'(\tau + \frac{h}{n}) - ([n\delta] - 1)\ f'(\tau + \frac{[n\delta]}{n})\right| \max_{o \leqslant j \leqslant n-1} M_j$$

$$\sup_{t \in [1/n,1]} D_5(t) \leqslant \frac{1}{n} \left| \sum_{h=1}^{n} A' \left(\frac{h}{n}\right)^{-1-\alpha} - n\delta\ f'(\delta)\right| \max_{o \leqslant j \leqslant n-1} M_j$$

$$\leqslant A''\ n^{\alpha} \max_{o \leqslant j \leqslant n-1} M_j \ .$$

On majore enfin D_6 par :

$$D_6(t) \leqslant \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{[nt]-[n\delta]} A_\delta\ n^{-\nu} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |W(j)|$$

$$\sup_{t \in [1/n,1]} D_6(t) \leqslant 2\ A_\delta\ n^{-\nu} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |W(j)|$$

On en déduit :

$$P(\sup_{t \in [1/n,1]} D_2(t) \geqslant 2\ A''\ n^{\alpha+\varepsilon} + 2\ A_\delta\ n^{(1/2)-\nu+\varepsilon})$$

$$\leqslant P(\max_{o \leqslant j \leqslant n-1} M_j > n^{\varepsilon}) + P(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |W(j)| > n^{1/2+\varepsilon})$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ n \exp(- \frac{n^{2\varepsilon}}{2}) \ .$$

iii) Majoration de $D_3(t)$

$$D_3(t) = \frac{1}{n} \left| \int_{[nt]-1}^{nt} f'(t - \frac{s}{n}) \, (W(nt) - W(s)) \, ds \right|$$

$$D_3(t) \leq \frac{1}{n} \int_{[nt]-1}^{nt} A'(t - \frac{s}{n})^{-1-\alpha} \, |W(nt) - W(s)| \, ds$$

Le majorant a même loi que :

$$\sqrt{n} \int_{([nt]-1)/n}^{t} A'(t-u)^{-1-\alpha} \, |W(t) - W(u)| \, du \quad ,$$

or d'après le lemme 1, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \frac{1}{2} - \alpha$:

$$(2.5) \qquad P(\sup_{\substack{o<u<t<1 \\ |t-u| \leq 2/n}} \frac{|W(t) - W(u)|}{|t-u|^{1/2-\varepsilon}} > 1) = o(\exp(- \frac{1}{2} n^{2\varepsilon'})) \, .$$

donc

$$P(\sup_{t \in [1/n,1]} D_3(t) > \sqrt{n} \sup_{t \in [1/n,1]} \int_{([nt]-1)/n}^{t} A'(t-u)^{-1/2-\alpha-\varepsilon} \, du)$$

$$= o(\exp(- \frac{1}{2} n^{2\varepsilon'}))$$

$$P(\sup_{t \in [1/n,1]} D_3(t) > \sqrt{n} \int_{o}^{2/n} A' \, v^{-1/2-\alpha-\varepsilon} \, dv) = o(\exp(- \frac{1}{2} n^{2\varepsilon'}))$$

$$P(\sup_{t \in [1/n,1]} D_3(t) > \frac{2A'}{1/2 - \alpha - \varepsilon} n^{\alpha+\varepsilon}) = o(\exp(- \frac{1}{2} n^{2\varepsilon'})) \quad .$$

iv) On obtient donc : pour tout $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, il existe des constantes c' , c''

$$(2.8) \qquad P(\sup_{t \in [1/n,1]} |G_n(t) - J_n(t)| \geq c' \, n^{\alpha+\varepsilon}) \leq c'' \exp(- \frac{1}{2} n^{2\varepsilon'}) \, .$$

v) Si $t \in [0, \frac{1}{n}]$, $|G_n(t) - J_n(t)| = G_n(t) =$

$$= f(t)\, W(nt) - \frac{1}{n} \int_o^{nt} f'(t - \frac{s}{n})\, (W(nt) - W(s))\, ds$$

G(t) a même loi que

$$\sqrt{n}\, (f(t)\, W(t) - \int_o^t f'(t - u)\, (W(t) - W(u))\, du)$$

et peut se majorer de la même manière que $D_3(t)$:

$$P(\sup_{o \leq t \leq 1/n} |G(t)| \geq \sqrt{n}\, (f(\frac{1}{n})\, .\, n^{-1/2+\varepsilon} + c'\, n^{\alpha+\varepsilon}) = o(\exp(- \frac{1}{2}\, n^{2\varepsilon'}))$$

soit

$$(2.8') \quad P(\sup_{o \leq t \leq 1/n} |G(t)| \geq C'''\, n^{\alpha+\varepsilon}) = o(\exp(- \frac{1}{2}\, n^{2\varepsilon'}))$$

où $o < \varepsilon' < \varepsilon$.

e) La démonstration s'achève en utilisant l'égalité :

$$\int_o^{nt} f(t - \frac{s}{n})\, dW(s) =$$

$$f(t)\, W(nt) - \frac{1}{n} \int_o^{nt} f'(t - \frac{s}{n})\, (W(nt) - W(s))\, ds$$

et les majorations (2.7), (2.8), (2.8'). ■

3 - PROCESSUS ARIMA FRACTIONNAIRES.

3.1. - Définition et propriétés élémentaires.

Les processus ARIMA fractionnaires ont été définis dans l'introduction. Dans le cas de processus fractionnaires stationnaires, c'est-à-dire lorsque $d < 1/2$, nous rappelons des résultats classiques, en particulier, ceux concernant la représentation moyenne mobile.

Lorsque $d > 1/2$, nous montrons qu'il est possible de construire un processus $(X_n , n \in \mathbb{N})$ vérifiant la relation :

$$(I-B)^d \phi(B) X_n = \Theta(B) e_n \quad , \quad n \geq 0$$

en utilisant le fait qu'il existe un entier h , égal à la partie entière de $d - 1/2$, tel que les différences d'ordre h de X_n forment un processus ARIMA fractionnaire stationnaire.

On établit que ces processus admettent une représentation moyenne mobile dont les coefficients dépendent du temps. Une étude précise de ces coefficients permet d'obtenir la loi limite du processus normalisé $(\frac{1}{n^{d-1/2}} X_{[nt]} , \; t \in [0,1])$.

J.R. HOSKING (1981) établit le théorème suivant concernant le processus ARIMA (o,d,o) défini par

$$(I-B)^d X_n = e_n \quad . \tag{3.1}$$

<u>*Théorème 3*</u> *(Hosking, 1981, th. 1)*

Soit $(X_n , n \in \mathbb{N})$ un processus ARIMA (o,d,o)

i) si $d < \frac{1}{2}$, il existe un processus (X_n) stationnaire satisfaisant (3.1). Ce processus admet la représentation moyenne mobile infinie :

(3.2) $$X_n = \sum_{j=o}^{\infty} \pi_k \, e_{n-k}$$

où $$\pi_o = 1 \quad , \quad \pi_k = \frac{d(d+1)\ \ldots\ (d+k-1)}{k!} \quad ,$$

et $$\pi_k \sim \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)}$$, lorsque k tend vers l'infini.

ii) Si de plus $d > -1/2$, le processus $(X_n\ ,\ n \in \mathbb{N})$ est inversible.

iii) Lorsque $-1/2 < d < 1/2$, la covariance est donnée par

(3.3) $$\gamma_k = E\ X_n\ X_{n-k} = \sigma^2 \ \frac{(-1)^k\ \Gamma(1-2d)}{\Gamma(k+1-d)\Gamma(1-k-d)} ,$$

et la corrélation par :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_o} = \frac{d(d+1)\ \ldots\ (d+k-1)}{(1-d)\ (2-d)\ \ldots\ (k-d)} , \quad k = 1\ ,\ 2\ , \ldots\ .$$

En particulier $\rho_1 = \frac{d}{1-d}$ et $\rho_k \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)}\ k^{2d-1}$ lorsque $k \to \infty$.

J.R. HOSKING a étendu ce résultat au cas des ARIMA fractionnaires.

Théorème 3^{bis} *(Hosking, 1981, th. 2)*

Considérons l'équation aux différences :

$$(I-B)^d\ \phi(B)\ X_n = \Theta(B)\ e_n$$

i) Si $d < 1/2$ et si les racines de ϕ sont hors du cercle unité, il existe un processus (X_n) stationnaire satisfaisant l'équation.

ii) Si de plus, $d < -1/2$ et si les racines de Θ sont de module strictement supérieur à 1 , le processus (X_n) est inversible.

Dans le cas $-1/2 < d < 1/2$, le processus $(X_n\ , n \in \mathbb{N})$ est fortement corrélé ; sa corrélation décroît de manière hyperbolique $\rho_k = O(k^{2d-1})$ et non pas exponentiellement, ce qui était le cas des modèles ARMA.

On souhaite étendre la définition du processus ARIMA fractionnaire d'ordre d au cas non stationnaire, c'est-à-dire pour $d > 1/2$. On va montrer qu'il est possible d'exprimer un processus d'ordre d en fonction d'un processus stationnaire d'ordre δ, où $\delta \in \left]-1/2, 1/2\right[$ et $d - \delta$ est entier.

On notera $X_n^{(\delta)}$ le processus stationnaire solution de :

$$X_n^{(\delta)} = (I-B)^{-\delta} \frac{\theta(B)}{\phi(B)} e_n \quad . \tag{3.4}$$

Dans la suite, s'il y a un risque d'ambiguïté, l'indice δ sera gardé.

Le processus d'ordre $1 + \delta$ (compris entre 1/2 et 3/2), noté $(X_n^{(1+\delta)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par l'équation :

$$X_k^{(1+\delta)} - X_{k-1}^{(1+\delta)} = X_k^{(\delta)} \qquad k = 1\ , 2\ , \ldots \tag{3.5}$$

et la condition initiale $X_o^{(1+\delta)}$.

Nous supposons dans cette étude que la condition initiale $X_o^{(1-\delta)}$ est une constante réelle et en particulier qu'elle est indépendante de l'évolution du processus X_t , aux instants t négatifs.

On peut l'interpréter de la manière suivante : l'observateur qui commence à étudier le processus à l'instant $t = 0$, ignore le comportement du processus aux instants précédents et fixe arbitrairement l'origine des espaces.

On notera $x_o^{(1+\delta)}$ la valeur initiale choisie.

En sommant les relations (3.5) pour $k = 1,2,\dots, n$, on obtient :

$$X_n^{(1+\delta)} - x_o^{(1+\delta)} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{(\delta)} = (I + B + \dots + B^{n-1})\ X_n^{(\delta)} ,$$

$$(3.5') \qquad X_n^{(1+\delta)} - x_o^{(1+\delta)} = \frac{I - B^n}{I - B}\ (I - B)^{-\delta}\ \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\ e_n ,$$

où le processus $(I-B)^{-\delta}\ \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\ e_n$ est stationnaire.

On définit plus généralement le processus A.R.I.M.A. fractionnaire d'ordre $h + \delta$, où h est entier, par la donnée d'un processus A.R.I.M.A. d'ordre $h + \delta - 1$, de l'équation aux différences :

$$X_k^{(h+\delta)} - X_{k-1}^{(h+\delta)} = X_k^{(h+\delta-1)} \qquad k = 1, 2,\dots$$

et de la condition initiale :

$$X_o^{(h+\delta)} = x_o^{(h+\delta)} ,$$

nous supposons $x_o^{(h+\delta)}$ non aléatoire.

Proposition 1.- Soit $(X_n^{(\delta)} , n \in \mathbb{Z})$ le processus stationnaire solution de :

$$(3.4) \qquad X_n^{(\delta)} = (I-B)^{-\delta}\ \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\ e_n$$

et $x_o^{(1+\delta)}$, $x_o^{(2+\delta)}$,..., $x_o^{(h+\delta)}$ h constantes réelles.

Il existe un processus A.R.I.M.A. d'ordre $h+\delta$ solution de :

. $X_k^{(j+\delta)} - X_{k-1}^{(j+\delta)} = X_k^{(j+\delta-1)}$ $\qquad j = 1,2,\dots,h$

$\qquad k \in \mathbb{N}^*$

. $X_o^{(j+\delta)} = x_o^{(j+\delta)}$ pour $j = 1,2,\dots,h$.

Ce processus $(X_n^{(h+\delta)}, n \in \mathbb{N})$ admet l'écriture moyenne mobile à coefficients dépendant du temps :

(3.6) $$X_n^{(h+\delta)} - \sum_{r=o}^{h-1} C_{n+r-1}^r \, x_o^{(h+\delta-r)} =$$

$$= \frac{\left[I - B^n \left(\sum_{r=o}^{h-1} C_{n+r-1}^r \, (I-B)^r\right)\right]}{(I-B)^h} \, (I-B)^{-\delta} \, \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \, e_n \quad .$$

Preuve :

La démonstration par récurrence est immédiate.

On fait l'hypothèse :

$$X_k^{(j+\delta-1)} = \sum_{r=o}^{j-2} C_{k+r-1}^r \, x_o^{(j-1+\delta-r)}$$

$$+ \frac{I - B^k \left(\sum_{r=o}^{j-2} C_{k+r-1}^r \, (I-B)^r\right)}{(I-B)^{j-1}} \, X_k^{(\delta)}$$

et

$$X_n^{(j+\delta)} = x_o^{(j+\delta)} + \sum_{k=1}^{n} X_k^{(j+\delta-1)}$$

$$= x_o^{(j+\delta)} + \sum_{r=o}^{j-2} \sum_{k=1}^{n} C_{k+r-1}^{r} \; x_o^{(j-1+\delta-r)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{I - B^k \left(\sum_{r=o}^{j-2} C_{k+r-1}^{r} \; (I-B)^r \right)}{(I-B)^{j-1}} \; X_k^{(\delta)}$$

d'où l'expression (3.6), en utilisant

$$\sum_{k=1}^{n} C_{k+r-1}^{r} = C_{n+r}^{r+1} \qquad \text{et} \qquad B^k X_k^{(\delta)} = B^n X_n^{(\delta)} \quad . \quad \blacksquare$$

Interprétation de l'écriture (3.6)

Le processus $(e_n \, , \, n \in \mathbb{Z})$ étant donné, on notera $(\tilde{e}_n \, , \, n \in \mathbb{Z})$ le processus associé, obtenu par mise à zéro, c'est-à-dire

$$\tilde{e}_j = \begin{cases} e_j & \text{si} \quad j > 0 \\ 0 & \text{si} \quad j \leqslant 0 \end{cases} .$$

Notons encore $d = h+\delta$, $-1/2 < \delta < 1/2$, $h \in \mathbb{N}$.

On voit que l'expression formelle :

$$\frac{B^n \sum_{r=o}^{h-1} C_{n+r-1}^{r} (I-B)^r}{(I-B)^h} \; (I-B)^{-\delta} \, \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \; e_n$$

n'est fonction que de $\{e_n \, , \, n \leqslant 0\}$, elle ne dépend que de l'histoire du processus (e_n) antérieure à l'instant $t = 0$.

On note : $\tilde{X}_n^{(d)}$ le processus défini par :

(3.7) $$\tilde{X}^{(d)} = (I-B)^{-d} \, \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \, \tilde{e}_n \quad , \quad n \geqslant 0 \; .$$

Le processus $X_n^{(d)}$ est somme de trois termes :

$$X_n^{(d)} = \tilde{X}_n^{(d)} + X'^{(d)}_n + T_n^{(d)} \quad .$$

$(\tilde{X}_n^{(d)}, n \in \mathbb{N})$ est un processus qui dépend uniquement de l'évolution du processus (e_n) depuis l'instant $t = 1$. $(X'^{(d)}_n, n \in \mathbb{N})$ où

$$X'^{(d)}_n = \frac{I - B^n \sum_{r=o}^{h-1} C_{n+r-1}^{r} (I-B)^r}{(I-B)^d} \quad \frac{\theta(B)}{\phi(B)} (e_n - \tilde{e}_n)$$

représente l'influence au temps n, de l'histoire du processus antérieure au temps 0.

Et le terme $T_n^{(d)} = \sum_{r=o}^{h-1} C_{n+r-1}^{r} \; x_o^{(h+\delta-r)}$ peut s'interpréter comme une tendance polynômiale, il dépend uniquement du choix des conditions initiales. $T_n^{(d)}$ est un polynôme de degré égal à la partie entière de $d - 1/2$. Or on verra dans les sections suivantes que la variance de $\tilde{X}_n^{(d)}$ est de l'ordre de n^{2d-1}, $T_n^{(d)}$ est donc asymptotiquement négligeable devant $X_n^{(d)}$. (On rappelle que $d - 1/2$ n'est pas un entier, donc $[d - 1/2] < d - 1/2$).

Nous étudierons tout d'abord le processus $(\tilde{X}_n^{(d)}, n \geq 0)$.

3.2. - *Propriétés des coefficients du développement moyenne mobile de* $\tilde{X}_n^{(d)}$.

L'écriture moyenne mobile de $\tilde{X}_n^{(d)}$ est a priori à coefficients dépendant du temps. Ces coefficients sont donnés par les n premiers termes du développement en série entière de

$$(1-z)^{-d} \frac{\theta(z)}{\phi(z)} .$$

Comme les racines du polynôme ϕ sont en dehors du disque unité les coefficients α_j de :

$$A(z) = \frac{\theta(z)}{\phi(z)} = \sum_{o}^{\infty} \alpha_j z^j$$ décroissent exponentiellement :

il existe des constantes $c_o > 0$ et $\rho \in]0,1[$ telles que

$$\forall j \in \mathbb{N} , \quad |\alpha_j| \leq c_o \rho^j . \tag{3.8}$$

Les coefficients du développement de $\tilde{X}_n^{(d)}$ sont donnés par

$$\sum_{k=o}^{\infty} \pi_k^{(d)} z^k = (1-z)^{-d} A(z)$$

$$= (1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(d)} z^k) \; (1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j z^j)$$

d'où

$$\pi_o^{(d)} = 1 \quad , \quad \pi_k^{(d)} = \sum_{j=o}^{k} \alpha_{k-j} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(d)} \qquad k = 1,2,\ldots \tag{3.9}$$

et

$$\tilde{X}_n^{(d)} = (\sum_{k=o}^{\infty} \pi_k^{(d)} B^k) \tilde{e}_n$$

$$\tilde{X}_n^{(d)} = \sum_{k=o}^{n-1} \pi_k^{(d)} e_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \pi_{n-k}^{(d)} e_k \tag{3.10}$$

Le comportement asymptotique des $\pi_k^{(d)}$ sera donné par un corollaire de la proposition suivante :

<u>*Proposition 2.*</u>- Soit d un nombre réel positif et (a_k) une suite de réels tels que $a_o = 1$ et

i) si $d \geq 2$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $|a_k| \leq k^{-2}$, et on impose

en outre, si $d = 2$, $\sum_k k\,|a_k| < \infty$,

ii) si $d < 2$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $|a_k| \leq k^{d-4}$,

alors, il existe une constante $C(d)$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \left|k^{d-1} \sum_{j=o}^{\infty} a_j - \sum_{j=o}^{k} a_{k-j} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)}\right| \leq C(d)\; k^{d-2} \quad .$$

Corollaire.- Il existe une constante $C = C(\theta,\phi,d)$ telle que les coefficients $\pi_k^{(d)}$ du développement moyenne mobile de $\tilde{X}_n^{(d)}$ (3.10) vérifient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \left|\pi_k^{(d)} - \frac{\theta(1)}{\phi(1)} \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)}\right| \leq C\; k^{d-2} \quad .$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition, en utilisant le fait que les coefficients α_k tendent vers 0 exponentiellement et les relations :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \; : \; \pi_k^{(d)} = \sum_{j=o}^{k} \alpha_{k-j} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\;\Gamma(d)} \quad , \quad \frac{\theta(1)}{\Phi(1)} = \sum_{j=o}^{\infty} \alpha_j \quad .$$

Démonstration de la proposition 2.-

$$(3.11) \qquad \left|k^{d-1} \sum_{j=o}^{\infty} a_j - \sum_{j=o}^{k} a_{k-j} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)}\right| \leq A_1 + A_2 + A_3 \; ,$$

où $A_1 = k^{d-1} \left|\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j\right|$

$$A_2 = \left|k^{d-1} \sum_{j=1}^{k} a_{k-j} - \sum_{j=1}^{k} a_{k-j}\; j^{d-1}\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} |a_{k-j}|\; |k^{d-1} - j^{d-1}|$$

$$A_3 = \left|\sum_{j=1}^{k} a_{k-j} \left(j^{d-1} - \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)}\right)\right| + a_k \left|k^{d-1} - \Gamma(d)\right|$$

(a) Sous l'hypothèse $0 \leqslant a_k \leqslant k^{-2}$, $\sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j| \leqslant \int_k^{\infty} x^{-2}\, dx = \frac{1}{k}$

on a donc dans les cas (i) et (ii) $A_1 \leqslant k^{d-2}$.

(b) A_2 peut se majorer en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

(i) si $d \geqslant 2$ $\quad |k^{d-1} - j^{d-1}| \leqslant (d-1)\,(k-j)\,k^{d-2}$

$$\begin{aligned} A_2 &\leqslant (d-1) \sum_{j=1}^{k} |a_{k-j}|\,(k-j)\,k^{d-2} \\ &\leqslant (d-1) \sum_{j=1}^{k} |j\,a_j|\,k^{d-2} \quad , \end{aligned}$$

(ii) si $d < 2$, $j \neq 0$,

$$|k^{d-1} - j^{d-1}| \leqslant (d-1)\,(k-j)\,j^{d-2}$$

et
$$A_2 \leqslant (d-1) \sum_{j=1}^{k} (k-j)\,|a_{k-j}|\,j^{d-2}$$

Nous utiliserons pour majorer A_2 le lemme suivant :

Lemme 2.- Soit (a_k) une suite de réels tels que $a_o = 1$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant |a_k| \leqslant k^{\delta-1} \qquad \text{où} \quad \delta < 0$$

alors il existe une constante $C_1(\delta)$ telle que

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_{k-j}\, j^{\delta}\right| \leqslant C_1(\delta)\, k^{\delta} . \tag{3.12}$$

En scindant la somme :

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_{k-j}\, j^{\delta}\right| = \left|\sum_{j=1}^{[k/2]} a_{k-j}\, j^{\delta} + \sum_{j=[k/2]+1}^{k} a_{k-j}\, j^{\delta}\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{[k/2]} |a_{k-j}| + \sum_{j=[k/2]+1}^{k} |a_{k-j}| \left(\frac{k}{2}\right)^{\delta}$$

$$\leq \sum_{j=k-[k/2]}^{k-1} j^{\delta-1} + \left(\frac{k}{2}\right)^{\delta} \left(1 + \sum_{j=1}^{[k/2]} j^{\delta-1}\right)$$

$$\leq \int_{k/2}^{\infty} x^{\delta-1}\, dx + \left(\frac{k}{2}\right)^{\delta} \left(1 + \sum_{1}^{\infty} j^{\delta-1}\right)$$

$$\leq C_1(\delta)\, k^{\delta} \quad , \quad \text{sous la condition } \delta < 0 . \ \blacksquare$$

On achève la majoration de A_2 , lorsque $d < 2$, en remplaçant δ par $d-2$ et a_j par $j\, a_j$, dans le lemme 2 , on obtient pour $d < 2$:

$$A_2 \leq (d-1)\, C_1(d-2) \quad k^{d-2} \quad .$$

(c) La majoration de A_3 repose sur la formule suivante

$$z^{b-a} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = 1 + \frac{(a-b)(a+b-1)}{2z} + o\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{pour} \quad z \to \infty .$$

(M. Abromovitz et A. Stegun, 1965, formule 6, 1, 47)

on en déduit :

$$\frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)} = j^{d-1} \left(1 + \frac{(d-1)d}{2j} + o\left(\frac{1}{j}\right)\right)$$

il existe donc une constante C_2 telle que

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \qquad \left|\frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)} - j^{d-1}\right| \leq C_2\, j^{d-2} .$$

On obtient :

$$A_3 \leq C_2 \sum_{j=1}^{k} |a_{k-j}|\, j^{d-2}$$

i) si $d \geq 2$ $\quad A_3 \leq C_2 \left(\sum_{j=o}^{\infty} |a_j|\right) k^{d-2}$

ii) si $d < 2$, utilisant (3.12)

$$A_3 \leq C_2 \,.\, C_1(d-2)\, k^{d-2} \,. \quad \blacksquare$$

3. 3. - Loi limite du processus ARIMA fractionnaire normalisé.

Nous avons défini le processus ARIMA fractionnaire d'ordre d

$$\tilde{X}_n^{(d)} = (I-B)^{-d} \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \tilde{e}_n \tag{3.7}$$

et nous avons imposé $\tilde{e}_n = 0$ pour les valeurs négatives de n afin que l'opérateur $(I-B)^{-d} \frac{\theta(B)}{\phi(B)}$ appliqué au processus $(\tilde{e}_n)$ ait toujours un sens.

Lorsque $d > 1/2$, c'est-à-dire dans le cas non stationnaire, nous étudierons le comportement asymptotique du processus $(\tilde{X}_n)$ après modification de l'échelle des temps et réduction.

Plus précisément on définit un processus à valeurs dans $\mathcal{D}[0,1]$ en posant :

$$\begin{aligned} \xi_n^{(d)}(t) &= \frac{1}{n^{d-1/2}} \tilde{X}_{[nt]}^{(d)} \\ &= \frac{1}{n^{d-1/2}} \sum_{k=o}^{[nt]-1} \pi_k^{(d)} e_{[nt]-k} \\ &= \frac{1}{n^{d-1/2}} \sum_{k=1}^{[nt]} \pi_{[nt]-k}^{(d)} e_k \,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Théorème 4.- Soit $(\tilde{X}_n)$ le processus défini par

$$\tilde{X}_n = (I-B)^{-d} \phi(B)^{-1} \theta(B) \tilde{e}_n \quad , \quad n \geq 0 \quad ,$$

où

$$\tilde{e}_n = \begin{cases} e_n & \text{si} \quad n > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et (e_n) est une suite de v.a.i.i.d. telle que $E\, e_1 = 0$, $E\, e_1^2 = \sigma^2$, ayant un moment d'ordre p strictement supérieur à $\max(\frac{1}{d-1/2} , 2)$.

Alors le processus

$$(\xi_n^{(d)}(t) = \frac{1}{n^{d-1/2}} \tilde{X}_{[nt]} \quad , \quad t \in [0,1])$$

converge en loi dans $\mathcal{D}[0,1]$ vers le processus

$$(\frac{\sigma\, \theta(1)}{\phi(1)\, \Gamma(d)} \int_0^t (t-s)^{d-1} \, dW(s) \quad , \quad t \in [0,1]).$$

Démonstration du théorème.- Le processus $\xi_n^{(d)}(t)$ s'écrit :

(3.13)
$$\xi_n^{(d)}(t) = \frac{1}{n^{d-1/2}} \sum_{k=o}^{[nt]-1} \pi_k^{(d)} \, e_{[nt]-k} \quad ,$$

or on a vu (corollaire de la proposition 2) que les coefficients $\pi_k^{(d)}$ pouvaient être approchés par $\dfrac{\theta(1)\ k^{d-1}}{\phi(1)\ \Gamma(d)}$.

Il suffira pour obtenir le résultat de comparer $\xi_n^{(d)}(t)$ et $\eta_n(t)$ où :

$$\eta_n(t) = \sum_{k=o}^{[nt]-1} \frac{\theta(1)}{\phi(1)\ \Gamma(d)} \frac{k^{d-1}}{n^{d-1/2}} \, e_{[nt]-k} \quad ,$$

puis de comparer $\eta_n(t)$ et $\dfrac{\sigma\ \theta(1)}{\phi(1)\ \Gamma(d)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{d-1}\, dW(s)$.

a) <u>Majoration de</u> $\sup_{t\in[0,1]} |\xi_n^{(d)}(t) - \eta_n(t)|$

On a :

$$|\xi_n^{(d)}(t) - \eta_n(t)| = \left|\frac{e_{[nt]}}{n^{d-1/2}} + \sum_{k=1}^{[nt]-1} \left(\frac{\pi_k^{(d)}}{n^{d-1}} - \frac{\theta(1)\ k^{d-1}}{\phi(1)\ \Gamma(d)\ n^{d-1}}\right) \frac{e_{[nt]-k}}{\sqrt{n}}\right|$$

donc

$$||\xi_n^{(d)} - \eta_n|| = \sup_{t\in[0,1]} |\xi_n^{(d)}(t) - \eta_n(t)|$$

$$\leq \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left|\pi_k^{(d)} - \frac{\theta(1)\ k^{d-1}}{\phi(1)\ \Gamma(d)}\right|\right) \max_{1\leq k\leq n} \frac{|e_k|}{n^{d-1/2}} .$$

D'après le corollaire de la proposition 2, il existe une constante C telle que

$$\left|\pi_k^{(d)} - \frac{\theta(1)\ k^{d-1}}{\phi(1)\ \Gamma(d)}\right| \leq C\ k^{d-2} \quad , \quad k \in \mathbb{N}^* \quad ,$$

donc :

$$||\xi_n^{(d)} - \eta_n|| \leq C\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^{d-2}\right) \max_{1\leq k\leq n} \frac{|e_k|}{n^{d-1/2}} .$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} |e_k| > n^{(1/p)+\varepsilon}\right) \leq n\ P(|e_1| > n^{1/p+\varepsilon}) \leq \frac{E|e_1|^p}{n^{p\varepsilon}}$$

donc

$$P(||\xi_n^{(d)} - \eta_n|| > C(1 + \sum_{k=1}^{n} k^{d-2}) \frac{n^{(1/p)+\varepsilon}}{n^{d-1/2}}) \leq \frac{C'}{n^{p\varepsilon}} .$$

a1) si $1/2 < d < 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{d-2}$ converge et il existe C_d tel que

$$P(||\xi_n^{(d)} - \eta_n|| > C_d \, n^{1/p+\varepsilon-d+1/2}) \leq \frac{C'}{n^{p\varepsilon}} ,$$

il suffit de choisir $0 < \varepsilon < d - 1/2 - 1/p$,

pour obtenir la convergence $||\xi_n^{(d)} - \eta_n|| \xrightarrow{P} 0$ lorsque $n \to \infty$, sous la condition $p > \frac{1}{d-1/2}$.

a2) si $d > 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^{d-2} = O(n^{d-1})$ et il existe C_d tel que

$$P(||\xi_n^{(d)} - \eta_n|| > C_d \, n^{1/p+\varepsilon-1/2}) \leq \frac{C'}{n^{p\varepsilon}} .$$

Si on choisit $0 < \varepsilon < 1/2 - 1/p$, ceci établit la convergence $||\xi_n^{(d)} - \eta_n|| \xrightarrow{P} 0$, lorsque $n \to \infty$, sous la condition $p > 2$.

b) <u>Convergence en loi de</u> η_n <u>vers</u> $\left(\frac{\sigma\,\theta(1)}{\phi(1)\Gamma(d)} \int_0^t (t-s)^{d-1} \, dW(s) \ , \ t \in [0,1]\right)$.

La fonction $t \mapsto t^{d-1}$ est monotone, de classe C^1 sur $]0,1]$ et la condition (iii) du théorème 1 "il existe $\alpha \in]0 , \frac{1}{2} - \frac{1}{p}[$ tel que $\lim_{t \to 0} t^{1+\alpha} f'(t) = 0$ " est vérifiée dès que $p > \max(2 , \frac{1}{d-1/2})$.

Il existe donc des constantes positives C_1 , C_2 , ν_1 , ν_2 telles que :

$$P\Big(\sup_{t\in[0,1]} \Big| \eta_n(t) - \frac{\sigma\,\theta(1)}{\phi(1)\Gamma(d)} \int_0^t (t-s)^{d-1}\, dW(s) \Big| \geq C_1\, n^{-\nu_1} \Big) \leq C_2\, n^{-\nu_2} \quad .$$

La convergence uniforme dans $\mathcal{D}[0,1]$ implique la convergence pour la topologie de Skorohod (Billingsley, 1968), on en déduit :

$$(\eta_n(t)\ ,\ t \in [0,1]) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Big(\frac{\sigma\,\theta(1)}{\phi(1)\Gamma(d)} \int_0^t (t-s)^{d-1}\, dW(s),\ t \in [0,1]\Big).$$

La démonstration s'achève en utilisant $||\xi_n^{(d)} - \eta_n|| \xrightarrow{P} 0$. ■

La condition qui lie le moment d'ordre p des variables (e_n) et l'ordre d du processus ARIMA ne peut être affaiblie, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3.- Sous la condition $1/2 < d < 1/2 + 1/p$, il existe une suite de variables aléatoires (e_n) de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable $E(|e_1|^p) < \infty$ telle que le processus normalisé

$$(\xi_n^{(d)}(t)\ ,\ t \in [0,1]) = \Big(\frac{1}{n^{d-1/2}} \sum_{k=o}^{[nt]-1} \pi_k^{(d)}\, e_{[nt]-k}\ ,\ t \in [0,1]\Big)$$

ne converge pas en loi dans $\mathcal{D}[0,1]$ vers le processus

$$\Big(\gamma \int_0^t (t-s)^{d-1}\, dW(s)\ ,\quad t \in [0,1]\Big)$$

On a plus précisément $P(\lim_{n\to\infty} ||\xi_n^{(d)}|| = \infty) = 1$.

Preuve : L'application de $\mathcal{D}[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(\phi(t),\ t \in [0,1])$ associe $\sup_{t\in[0,1]} |\phi(t)|$ est continue.

Utilisant le théorème de Billingsley (1968) (Th. 5,1) sur les fonctionnelles continues, il suffit donc pour établir la proposition de montrer l'existence d'un nombre $\varepsilon > 0$ tel que :

(a) $$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{t\in[0,1]} |\xi_n^{(d)}(t)| > n^{\varepsilon}) = 1$$

et

(b) $$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t (t-s)^{d-1}\, dW(s)\right| \geq n^{\varepsilon}) = 0 \ .$$

Soit e_1 une variable aléatoire symétrique dont la fonction de répartition F vérifie

$$F(t) = P(e_1 \leq t) = 1 - \frac{1}{t^p \log^2 t} \quad \text{pour} \quad t \geq t_o$$

alors $E(|e_1|^p) < \infty$. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{p} - d)$ et gardons les notations du théorème 4

a) $$P \sup_{0\leq t\leq 1} |\xi_n^{(d)}(t)| > n^{\varepsilon}) =$$

$$P(\sup_{1\leq k\leq n} |\tilde{X}(k)| > n^{d+\varepsilon-1/2}) =$$

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} \{e_k \geq n^{d-1/2+\varepsilon} - \sum_{\ell=1}^{k-1} \pi_{k-\ell}^{(d)} e_\ell\} \cup$$

$$\{e_k \leq -n^{d-1/2+\varepsilon} - \sum_{\ell=1}^{k-1} \pi_{k-\ell}^{(d)} e_\ell\}) \ .$$

e_k est indépendant de $(e_1, e_2, \ldots, e_{k-1})$ et la loi de e_1 étant symétrique

$$P(\sum_{\ell=1}^{k-1} \pi_{k-\ell}^{(d)} e_\ell \geq 0) = 1/2$$

donc

$$P(\{e_k \geq n^{d-1/2+\varepsilon} - \sum_{\ell=1}^{k-1} \pi_{k-\ell}^{(d)} e_\ell\}) \geq \frac{1}{2} P(e_k \geq n^{d-1/2+\varepsilon})$$

et

$$P(\sup_{0\leq t\leq 1} |\xi_n^{(d)}(t)| > n^{\varepsilon})$$

$$\geq \frac{1}{2} P(\bigcup_{k=1}^{n} \{e_k \geq n^{d-1/2+\varepsilon}\} \cup \{e_k \leq - n^{d-1/2+\varepsilon}\})$$

$$\geq P(\bigcup_{k=1}^{n} \{e_k \geq n^{d-1/2+\varepsilon}\})$$

$$= P(\bigcup_{k=1}^{n} \{e_k \geq n^{1/p-\varepsilon}\}) \quad .$$

On obtient donc :

$$P(||\xi_n^{(d)}|| > n^{\varepsilon}) \geq 1 - (1 - \frac{1}{n^{1-p\varepsilon} \log^2 (n^{1/p-\varepsilon})})^n$$

soit $\qquad \lim_{n\to\infty} P(||\xi_n^{(d)}|| > n^{\varepsilon}) = 1 \quad .$

b) $(\int_0^t (t-s)^{d-1} \, dW(s) \ , \ t \in [0,1])$ est un processus gaussien presque sûrement à trajectoires continues, donc :

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{t\in[0,1]} |\int_0^t (t-s)^{d-1} \, dW(s)| > n^{\varepsilon}) = 0 \quad .$$

On a aussi :

$(\int_0^t (t-s)^{d-1} \, dW(s) \quad , \quad t \in [0,1])$ est la limite en loi de

$(\sum_{k=0}^{[nt]-1} (t - k/n)^{d-1} \, e_k/\sqrt{n} \quad , \quad t \in [0,1])$ où (e_k) est

une suite de v.a.i. gaussiennes $N(0,1)$

et $\sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t (t-s)^{d-1}\, dW(s)\right|$ est la limite en loi de

$$\max_{1\leq j\leq n} \left|\sum_{k=o}^{j-1} \left(\frac{j-k}{n}\right)^{d-1} \frac{e_k}{\sqrt{n}}\right| .$$

Or $\sum_{k=o}^{j-1} \left(\frac{j-k}{n}\right)^{d-1} \frac{e_k}{\sqrt{n}}$ est une variable gaussienne de variance inférieure à $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{2(d-1)} = \frac{1}{2d-1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc $P\left(\sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t (t-s)^{d-1}\, dW(s)\right| > \beta(n)\right) \leq n\, P\left(|\xi| > \frac{\beta(n)}{\sqrt{2d-1}}\right)$

où ξ suit une loi $N(0,1)$,

ce qui implique $P\left(\sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t (t-s)^{d-1}\, dW(s)\right| > \log n\right) = o(1/n)$.

4 - INFLUENCE DES CONDITIONS INITIALES SUR LES SOMMES PARTIELLES D'UN PROCESSUS LINEAIRE.

4. 1. - Etude de la variance du processus intégré.

On considère une suite de variables aléatoires $(\varepsilon_i\ , i \in \mathbb{Z})$ indépendantes de même loi, définies sur un espace probabilisé (Ω,A,P) telles que $E\,\varepsilon_1 = o$, $E\,\varepsilon_1^2 = \sigma^2$. Si $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels tels que $a_o = 1$ et $\sum_{j=o}^{\infty} a_j^2 < \infty$, la somme

$$u_t = \sum_{j=o}^{\infty} a_j\, \varepsilon_{t-j} \tag{4.1}$$

converge en moyenne quadratique et définit un processus du second ordre strictement stationnaire.

On peut alors définir les sommes partielles du processus $(u_t\ ,\ t \in \mathbb{N})$:

$$X_o = 0$$

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=o}^{\infty} a_j\ \varepsilon_{k-j}\quad ,\quad n \in \mathbb{N}^*\quad ,$$

ou encore :

$$X_n = \sum_{k=o}^{n-1} (a_o+a_1+\ldots+a_k)\ \varepsilon_{n-k} + \sum_{k=o}^{\infty} (a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+n})\ \varepsilon_{-k}\quad .$$

Notons $A_k = a_o + a_1 + \ldots + a_k$, le processus intégré $(X_n\ ,\ n \in \mathbb{N})$ s'écrit encore :

(4.2) $$X_n = \sum_{k=o}^{n-1} A_k\ \varepsilon_{n-k} + \sum_{k=o}^{\infty} (A_{n+k} - A_k)\ \varepsilon_{-k}\quad .$$

En général, $(X_n\ ,\ n \in \mathbb{N})$ n'est plus un processus stationnaire et la suite $(E\ X_n^2\ ,\ n \in \mathbb{N})$ n'est pas majorée.

Le processus $(X_n\ ,\ n \in \mathbb{N})$ est somme de deux processus

$$X_n = \tilde{X}_n + X'_n \qquad \text{où}$$

(4.2') $$\tilde{X}_n = \sum_{k=o}^{n} A_k\ \varepsilon_{n-k}$$

$$X'_n = \sum_{k=o}^{\infty} (A_{n+k} - A_n)\ \varepsilon_{-k}\quad .$$

$\tilde{X}_n$ est le processus obtenu en imposant les conditions initiales $\varepsilon_k = o$ si $k \leq o$, ou encore en remplaçant le processus $(\varepsilon_k)\ k \in \mathbb{Z})$ par $(\tilde{\varepsilon}_k\ ,\ k \in \mathbb{Z})$ défini par :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k & \text{si} \quad k > o \\ \tilde{\varepsilon}_k = o & \text{si} \quad k \leq o \end{cases} .$$

X'_n représente l'influence de $\{\varepsilon_k , k \leq o\}$ au temps n. Si l'on souhaite étudier le comportement asymptotique du processus X_n, la question suivante se pose : à quelle condition, portant sur les coefficients a_i ou A_i, le processus X'_n est-il asymptotiquement négligeable devant $\tilde{X}_n$? On sait que pour un processus A.R.I.M.A. d'ordre 1, $E\, X'^2_n = O(1)$, alors que $E\, \tilde{X}^2_n = O(n)$. Il ne semble pas qu'il y ait des résultats généraux qui permettent de comparer $E\, \tilde{X}^2_n = \sum_{k=o}^{n} A_k^2$ et $E\, X'^2_n = \sum_{k=o}^{\infty} (A_{k+n} - A_k)^2$.
La proposition suivante donnera une réponse sous des hypothèses de régularité concernant les coefficients a_i.

Proposition 4.- Soit (a_i) une suite de réels tels que $a_o = 1$ et $\sum_{i=o}^{\infty} a_i^2 < \infty$. On note

$$A_k = \sum_{i=o}^{k} a_i \quad \text{et}$$

$$T_n = \left(\sum_{k=o}^{\infty} (A_{k+n} - A_k)^2\right) \left(\sum_{k=o}^{n} A_k^2\right)^{-1} .$$

a) Si la série $\sum_{i=o}^{\infty} |a_i|$ converge et $\sum_{i=o}^{\infty} a_i \neq o$,

alors $\lim_{n\to\infty} T_n = o$.

b) On suppose qu'il existe une fonction L vérifiant :

$$\forall \varepsilon > o \ , \ \exists n_o \geq o \ , \ \forall n \geq n_o \ , \ \forall \lambda > 1 \ , \ (1-\varepsilon)\, \lambda^{-\varepsilon} \leq \frac{L(\lambda_n)}{L(n)} \leq (1+\varepsilon)\, \lambda^{\varepsilon}$$

et un réel α tel que

$$\forall i \geq 1 \qquad a_i = i^{\alpha} L(i) ,$$

Si en outre l'une des deux conditions est réalisée :

i) $-\frac{3}{2} < \alpha < -1$ et $\sum_{i=o}^{\infty} a_i = o$,

ii) $\alpha \in [-1\ ,\ -1/2[$

alors T_n a une limite non nulle lorsque $n \to \infty$.

Remarque :

- La condition (a) est vérifiée par de nombreux processus stationnaires et en particulier si $u_n = \sum_{o}^{\infty} a_i\ \varepsilon_{n-i}$ est un processus ARMA.

- La classe des fonctions L vérifiant la condition (b) contient les fonctions à variation lente et en particulier les applications $t \to (\log t)^{\beta}$.

La condition (i) est vérifiée par les processus (u_n) ARIMA fractionnaires d'ordre d , $-1/2 < d < 0$, le processus intégré (X_n) étant d'ordre compris entre 1/2 et 1.

La condition (ii) est vérifiée par les processus (u_n) fractionnaires d'ordre d , $0 < d < 1/2$.

Démonstration :

a) On note $A = \lim_{k\to\infty} A_k = \sum_{i=o}^{\infty} a_i$

et $r_k = \sum_{k+1}^{\infty} |a_i|$, donc $|A_{k+n} - A_k| \leq r_k - r_{k+n}$.

$\sum_{k=o}^{n} A_k^2$ sera équivalent à nA^2 lorsque $n \to \infty$

et $\sum_{k=o}^{\infty} (A_{k+n} - A_k)^2 \leq \sum_{k=o}^{\infty} (r_k - r_{k+n})^2 \leq \sum_{k=o}^{\infty} r_k^2 - r_{k+n}^2$

$$\leq r_o^2 + r_1^2 + \ldots + r_{n-1}^2 .$$

La dernière relation utilisant $\lim_{k\to\infty} r_k^2 = 0$.

On en déduit $$T_n \sim \frac{r_o^2 + r_1^2 + \ldots + r_{n-1}^2}{n\ A^2}$$

donc $$\lim_{n\to\infty} T_n = 0 .$$

b) <u>Etude de la condition</u> (b).

b_1 - Nous commençons par donner un équivalent de A_k .

Lemme 3.- Sous la condition (b-i) ou (b-ii)

$$A_k \underset{\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} L(n) \quad \text{et} \quad A_{k+n} - A_k \sim \frac{(k+n)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1}}{\alpha+1} L(n)$$

lorsque $n \to \infty$, si $0 < \gamma < \frac{k}{n} < \gamma' < \infty$.

i) Si $\alpha \in]-1, -1/2[$, $A_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} L(i)$, par suite de la divergence de la série,

A_n est équivalent à $\sum_{n_o}^{n} i^{\alpha} L(i)$

donc $$A_n \sim n^{\alpha+1} L(n) \left[\frac{1}{n} \sum_{n_o}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{\alpha} \frac{L(i)}{L(n)}\right] .$$

En utilisant pour $n_o \leq i \leq n$, $(1-\varepsilon) \left(\frac{i}{n}\right)^{\varepsilon} \leq \frac{L(i)}{L(n)} \leq (1+\varepsilon) \left(\frac{i}{n}\right)^{-\varepsilon}$

$$(1-\varepsilon) \sum_{i=n_o}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{\alpha+\varepsilon} \leq \sum_{i=n_o}^{n_o} \left(\frac{i}{n}\right)^{\alpha} \frac{L(i)}{L(n)} \leq (1+\varepsilon) \sum_{i=n_o}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{\alpha-\varepsilon} .$$

$$(1-\varepsilon)\int_{n_o/n}^{1} u^{\alpha+\varepsilon}\,du \leq \frac{1}{n}\sum_{i=n_o}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\alpha}\frac{L(i)}{n} \leq (1+\varepsilon)\int_{0}^{1} u^{\alpha-\varepsilon}\,du$$

Les termes extrêmes de l'inégalité peuvent donc être rendus arbitrairement proches de $\frac{1}{\alpha+1}$, ce qui établit :

$$A_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} L(n) \quad \text{si} \quad \alpha \in \left]-1\,,\,-1/2\right[\quad , \text{ lorsque } \quad n \to \infty.$$

ii) Si $\alpha \in \left]-\infty, -1\right[$ et $\sum_{i=o}^{\infty} a_i = 0$, on peut écrire

$$A_k = -\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = -n^{\alpha+1} L(n)\left[\frac{1}{n}\sum_{n+1}^{\infty}\left(\frac{i}{n}\right)^{\alpha}\frac{L(i)}{L(n)}\right] \quad ,$$

et la même méthode conduit à :

$$A_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} L(n) \quad .$$

iii) On a de même :

$$A_{k+n} - A_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i+k} = n^{\alpha+1} L(n) \sum_{i=k+1}^{k+n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\alpha}\frac{L(i)}{L(n)}$$

$$(1-\varepsilon)\, n^{\alpha+1} L(n)\int_{k/n}^{1+(k/n)} u^{\alpha}\,du \leq A_{k+n} - A_k \leq (1+\varepsilon)\, L(n)\,.\,\frac{(k+n)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

pour tout k tel que $\gamma n \leq k \leq \gamma' n$ où γ et γ' sont deux constantes positives, dès que n est assez grand.

On peut aussi établir $A_{k+n} - A_k \sim \frac{(k+n)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1}}{\alpha+1} L(k)$ lorsque $k \to \infty$, pour n fixé.

b_2 - Achevons la démonstration de la partie b).

Sous les hypothèses (b-i) ou (b-ii)

$$A_k^2 \sim \frac{k^{2(\alpha+1)}}{(\alpha+1)^2} L^2(k) \quad ,$$

la série de terme général A_k^2 diverge, et utilisant la méthode (i) du lemme 3 :

$$\sum_{k=o}^{n} A_k^2 \sim \frac{n^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)(\alpha+1)^2} L^2(n) \quad .$$

On a aussi :

$$(A_{k+n} - A_k)^2 \sim \left[\frac{(k+n)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]^2 L^2(n) \qquad \text{pour} \quad \gamma n \leqslant k \leqslant \gamma' n$$

$$\sim \left[\frac{(k+n)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]^2 L^2(k) \qquad \text{pour} \quad k \geqslant n$$

et

$$\sum_{k=o}^{\infty} (A_{k+n} - A_k)^2 \sim \frac{n^{2\alpha+3}}{(\alpha+1)^2} L^2(n) \int_o^{\infty} \left[(1+u)^{\alpha+1} - u^{\alpha+1}\right]^2 du \ .$$

Remarque : La condition $\sum_{i=o}^{\infty} a_i < \infty$ n'est pas nécessaire pour obtenir $\lim_{n\to\infty} T_n = 0$.

Par exemple, si $a_k = \frac{1}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, A_k est équivalent à $\log k$.

On obtient $\sum_{k=o}^{n} A_k^2 \sim \int_1^n \log^2 x \, dx \sim n \log^2 n$

et $\sum_{k=o}^{\infty} (A_{k+n} - A_k)^2 \sim \int_o^{\infty} (\log (x+n) - \log x)^2 \, dx$

or $\displaystyle\int_o^\infty \log^2 (\frac{x+n}{x})\, dx = n \int_o^\infty \log^2 (\frac{u+1}{u})\, du$

$$\leq n \, [\int_o^1 \log^2 \frac{1}{u}\, du + \int_1^\infty \frac{du}{u^2}] \leq C\, n$$

donc $\qquad T_n = O(\log^{-2} n)$

4. 2. - Application au processus ARIMA fractionnaire.

Dans la section 3, nous avons étudié la loi limite d'un processus ARIMA fractionnaire normalisé

$$(\frac{1}{n^{d-1/2}} \; X^{(d)}_{[nt]} \;,\; t \in [0,1]) \;,$$

en faisant l'hypothèse que les conditions initiales $e_o = e_{-1} = \ldots = e_{-n} = \ldots = 0$ étaient vérifiées.

On souhaite reprendre cette étude en abandonnant cette hypothèse faite sur les conditions initiales. Cependant, on se limitera au cas de processus ARIMA fractionnaires d'ordre d , $1/2 < d < 3/2$, obtenus par intégration de processus ARIMA fractionnaires stationnaires.

On a défini le processus $X_n^{(d)}$, $1/2 < d < 3/2$, solution de

$$\begin{cases} (I-B)^d \, X_n^{(d)} = \dfrac{\theta(B)}{\phi(B)}\, e_n \\ X_o^{(d)} = x_o \end{cases}$$

par $$X_n^{(d)} = x_o + X_1^{(d-1)} + X_2^{(d-1)} + \ldots + X_n^{(d-1)} \;.$$

Le processus $X_n^{(d-1)}$ a la décomposition moyenne mobile infinie :

$$X_n^{(d-1)} = \sum_{k=o}^{\infty} \pi_k^{(d-1)} \varepsilon_{n-k} .$$

On note encore :

$$\pi_k^{(d)} = \pi_o^{(d-1)} + \pi_1^{(d-1)} + \ldots + \pi_k^{(d-1)} .$$

Le processus $X_n^{(d)}$ est somme de deux processus

$$X_n^{(d)} = \tilde{X}_n^{(d)} + X_n'^{(d)} + x_o$$

où : $$\tilde{X}_n^{(d)} = \sum_{k=o}^{n-1} \pi_k^{(d)} \varepsilon_{n-k} \quad \text{et}$$

(4.3) $$X_n'^{(d)} = \sum_{k=o}^{\infty} (\pi_{k+n}^{(d)} - \pi_k^{(d)}) \varepsilon_{-k} .$$

Les coefficients $\pi_k^{(d)}$ vérifient (corollaire de la proposition 2)

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \left|\pi_k^{(d)} - \frac{\theta(1)}{\phi(1)\ \Gamma(d)} k^{d-1}\right| \leqslant C\ k^{d-2} .$$

Pour simplifier l'écriture, on posera $A_d = \frac{\theta(1)}{\phi(1)\ \Gamma(d)}$.

On vérifie aisément que la série $\sum_{k=o}^{\infty} (\pi_{k+n}^{(d)} - \pi_k^{(d)}) e_{-k}$ converge bien en moyenne quadratique, n étant fixé.

En effet, $|\pi_{k+n}^{(d)} - \pi_k^{(d)}| \leqslant |A_d|\ |(k+n)^{d-1} - k^{d-1}| + C(k^{d-2} + (k+n)^{d-2})$

et utilisant le théorème des accroissements finis :

$$|\pi_{k+n}^{(d)} - \pi_k^{(d)}| \leqslant (|A_d\ n(d-1)| + 2\ C) \max(k^{d-2}\ , (k+n)^{d-2})$$

or pour $d < 3/2$, $\sum_1^{\infty} k^{2d-4} < \infty$.

On définit alors un processus sur $[0,1]$ en posant

$$\eta_n^{(d)}(t) = \frac{X'^{(d)}_{[nt]}}{n^{d-1/2}}$$

$$\eta_n^{(d)}(t) = \frac{1}{n^{d-1/2}} \sum_{k=o}^{\infty} (\pi^{(d)}_{k+[nt]} - \pi_k^{(d)})\, e_{-k} \quad . \tag{4.4}$$

Théorème 5.- Soit $(X_n)_n$ le processus ARIMA fractionnaire vérifiant :

$$X_n = (I-B)^d \, (\phi(B))^{-1} \, \Theta(B) \, \varepsilon_n$$

où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires, indépendantes, de même loi, telles que :

$$E\,\varepsilon_1 = o \quad ; \quad E\,\varepsilon_1^2 = \sigma^2 \quad ; \quad \text{ayant un moment d'ordre } p$$

strictement supérieur à $\max(\frac{1}{d-1/2}, 2)$, alors le processus

$$(\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{d-1/2}} X^{(d)}_{[nt]} \ , \quad t \in [0,1])$$

converge en loi dans $\mathcal{D}[0,1]$ vers le processus du mouvement brownien fractionnaire :

$$(\frac{\sigma\,\theta(1)}{\phi(1)} B_{d-1/2}(t) \ , \ t \in [0,1]) =$$

$$(\frac{\sigma\,\Theta(1)}{\phi(1)\,\Gamma(d)} (\int_o^t (t-s)^{d-1}\, dW(s) + \int_{-\infty}^{o} ((t-s)^{d-1} - (-s)^{d-1}\, dW(s)) \ , \ t \in [0,1]).$$

Le processus (ζ_n) est par définition la somme des processus indépendants $(\xi_n^{(d)})$ et $(\eta_n^{(d)})$. Pour établir le théorème, il suffira de montrer que :

$(\eta_n^d(t)\ ,\ t \in [0,1])$ converge en loi dans $\mathcal{D}[0,1]$ vers

$$(\sigma A_d \int_{-\infty}^{o} ((t-s)^{d-1} - (-s)^{d-1})\, dW(s),\ t \in [0,1]) \ .$$

On sait que l'on peut construire suivant la méthode de Komlos-Major-Tusnady une suite de variables normales centrées réduites $W(-k) - W(-k+1)$ et une suite de variables indépendantes de même loi $\varepsilon_o\ ,\ \varepsilon_{-1}\ ,\dots,\ \varepsilon_{-k}\ ,\dots$ de manière que les sommes partielles

$S_o = 0\ ,\dots,\ S_{-k} = \varepsilon_o + \varepsilon_{-1} + \dots + \varepsilon_{-k+1}$, approchent $\sigma\, W(-k)\ ,\ k \in \mathbb{N}$.

La transformation d'Abel permet d'écrire :

$$\eta_n^{(d)}(t) = \frac{1}{n^{d-1/2}} \sum_{k=o}^{\infty} (\pi_{k+[nt]}^{(d)} - \pi_k^{(d)})\ (S_{-(k+1)} - S_{-k})$$

$$= \frac{1}{n^{d-1/2}} \sum_{k=o}^{\infty} (\pi_{k+[nt]}^{(d)} S_{-k-1} - \pi_{k+[nt]}^{(d)} S_{-k} + \pi_k^{(d)} S_{-k} - \pi_k^{(d)} S_{-k-1})$$

$$= \frac{1}{n^{d-1/2}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (\pi_k^{(d-1)} - \pi_{k+[nt]}^{(d-1)})\ S_{-k}\right]$$

car $\lim\limits_{k\to\infty} \pi_k^{(d-1)}\ S_k = o$ p.s.

On peut décomposer $\eta_n^{(d)}(t)$ sous la forme :

$$\eta_n^{(d)}(t) = \eta_n'(t) + \eta_n''(t) + \eta_n^*(t) \qquad \text{où}$$

$$\eta_n'(t) = \frac{1}{n^{d-1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} (\pi_k^{(d-1)} - \pi_{k+[nt]}^{(d-1)})\ (S_{-k} - \sigma\, W(-k))$$

$$\eta_n''(t) = \frac{\sigma}{n^{d-1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\pi_k^{(d-1)} - A_{d-1}\, k^{d-2} - \pi_{k+[nt]}^{(d-1)}$$

$$+ A_{d-1}\, (k + [nt])^{d-2}\Big]\ W(-k)$$

$$\eta_n^*(t) = \sigma\, A_{d-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{d-2} - (k + [nt])^{d-2}}{n^{d-1/2}}\ W(-k)$$

On va établir successivement que

i) $\sup_{t\in[0,1]} |\eta_n'(t)| \xrightarrow{P} 0$,

ii) $\sup_{t\in[0,1]} |\eta_n''(t)| \xrightarrow{P} 0$,

iii) $(\eta_n^*(t)\ ,\ t \in [0,1]) \xrightarrow{L} (\sigma A_d \int_{-\infty}^{0} ((t-s)^{d-1} - (-s)^{d-1})\, dW(s),\ t \in [0,1])$

i) Majoration de $\sup_{t\in[0,1]} |\eta'(t)|$.

La suite $(\pi_k^{(d-1)})_{k\geq 1}$ est monotone (positive décroissante si $1 < d < 3/2$, négative croissante si $1/2 < d < 1$), donc :

$$\sup_{t\in[0,1]} |\pi_k^{(d-1)} - \pi_{k+[nt]}^{(d-1)}| \leq |\pi_k^{(d-1)} - \pi_{k+n}^{(d-1)}| .$$

On sait que : $\pi_k^{(d-1)} = A_{d-1}\, k^{d-2} + \gamma_k\, k^{d-3}$ où $|\gamma_k| \leq C$ (corollaire de la proposition 2), donc

$$\pi_k^{(d-1)} - \pi_{k+n}^{(d-1)} = A_{d-1}\, (k^{d-2} - (k+n)^{d-2}) + \gamma_k\, k^{d-3} - \gamma_{k+n}(k+n)^{d-3} ,$$

on en déduit l'existence de constantes A' , A'' telles que :

$$\text{(4.6)} \qquad \sup_{t\in[0,1]} |\pi_k^{(d-1)} - \pi_{k+[nt]}^{(d-1)}| \leq \inf(A'\, k^{d-2}\ ,\ A''\, n\, k^{d-3})$$

b) Utilisant le théorème de Komlos-Major-Tusnady (1976, th. 4) cité au début de ce chapitre, on peut construire un processus du mouvement brownien $(W(t),\ t \leq 0)$ et une suite de variables aléatoires ε_0 , ε_{-1} , ε_{-2} ,... possédant la propriété :

Il existe une constante C telle que, pour tout n ,

$$P\Big(\max_{o\leq k\leq n} \frac{|S_{-k} - \sigma\, W(-k)|}{n^{(1/p)+\gamma}}\Big) \geq 1) \leq \frac{C}{n^{p\gamma}} \quad ,$$

(4.7) $$P\Big(\sup_{k\geq n} \frac{|S_{-k} - \sigma\, W(-k)|}{k^{1/p+\gamma}}\Big) \geq 1) \leq \frac{C}{n^{p\gamma}} \quad .$$

La première relation est le corollaire du théorème 1.

La seconde peut s'obtenir de la manière suivante : soit j_o l'entier défini par $2^{j_o} \leq n < 2^{j_o+1}$

$$P(\sup_{k\geq n} \Big|\frac{S_{-k} - \sigma\, W(-k)}{k^{1/p+\gamma}}\Big| \geq 1) \leq$$

$$\leq \sum_{j=j_o}^{\infty} P\Big(\sup_{2^j\leq k<2^{j+1}} \frac{|S_{-k} - \sigma\, W(-k)|}{k^{1/p+\gamma}} \geq 1\Big)$$

$$\leq \sum_{j=j_o}^{\infty} P\Big(\sup_{k<2^{j+1}} |S_{-k} - \sigma\, W(-k)| \geq (2^j)^{1/p+\gamma}\Big)$$

$$\leq \sum_{j=j_o}^{\infty} \frac{C'}{2^{(j+1)p\gamma}} \leq \frac{C''}{n^{p\gamma}}$$

où C' , C'' désignent des constantes.

c) On peut majorer

$$\eta'_n(t) = \frac{1}{n^{d-1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \big(\pi_k^{(d-1)} - \pi_{k+[nt]}^{(d-1)}\big)\,(S_{-k} - \sigma\, W(-k))$$

par :

$$|\eta'_n(t)| \leq \frac{1}{n^{d-1/2}} \sum_{k=1}^{n} |\pi_k^{(d-1)} - \pi_{k+n}^{(d-1)}| \max_{o\leq k\leq n} \frac{|S_{-k} - \sigma\, W(-k)|}{n^{1/p+\gamma}} \,.\, n^{1/p+\gamma}$$

$$+ \frac{1}{n^{d-1/2}} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\pi_k^{(d-1)} - \pi_{k+n}^{(d-1)}|\; k^{1/p+\gamma} \sup_{k\geq n} \frac{|S_{-k} - \sigma\, W(-k)|}{k^{1/p+\gamma}}$$

Et utilisant les inégalités (4.6) et (4.7)

$$P(\sup_{t\in[0,1]} |\eta_n'(t)| \geq \frac{1}{n^{d-1/2}} [\sum_{k=1}^{n} A' \, k^{d-2} \, n^{1/p+\gamma} + \sum_{k=n+1}^{\infty} A'' \, n \, k^{d-3} \, k^{1/p+\gamma}])$$

$$\leq \frac{C_1}{n^{p\gamma}} \quad .$$

c1) Dans le cas $1 < d < 3/2$, il vient :

$$P(||\eta_n'|| \geq \frac{1}{n^{d-1/2}} (\frac{A' \, n^{d-1+\gamma+1/p}}{d-1} + \frac{A'' \, n^{d-1+\gamma+1/p}}{|d-2+\gamma+1/p|})$$

$$\leq \frac{C_1}{n^{p\gamma}} \quad ,$$

soit :

$$P(||\eta_n'|| \geq A''' \, n^{\gamma+(1/p)-(1/2)}) \leq \frac{C_1}{n^{p\gamma}} \tag{4.8}$$

c2) Dans le cas $1/2 < d < 1$, on obtient :

$$P(||\eta_n'|| \geq \frac{1}{n^{d-1/2}} \quad (A' \; (1 + \frac{1}{d-2}) \; n^{1/p+\gamma} + A'' \frac{n^{d-1+\gamma+1/p}}{|d-2+\gamma+1/p|}) \leq \frac{C_1}{n^{p\gamma}} \quad ,$$

et qui implique l'existence d'une constante A''' telle que :

$$P(||\eta_n'|| \geq A''' \, n^{\gamma+(1/p)+(1/2)-d}) \leq \frac{C_1}{n^{p\gamma}} \tag{4.8'}$$

La condition $p > \max(2 \, , \frac{1}{d-1/2})$ entraîne pour $d \in \,]1/2 \, , 3/2[\quad ||\eta_n'|| \xrightarrow{P} 0$.

<u>*Remarque*</u> : En scindant $\eta_n'(t) = \sum_{1}^{n^\beta} + \sum_{n^\beta+1}^{\infty} \ldots$ et en prenant $\beta = 1/2-d$ on montre que $||\eta_n'|| \xrightarrow{P} 0$ dès que

$p > \max(2 , \dfrac{1}{(d-1/2)(2-d)})$.

ii) Majoration de $\sup_{t\in[0,1]} |\eta''_n(t)|$.

$$\eta''_n(t) = \frac{\sigma}{n^{d-1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} (\pi_k^{(d-1)} - A_{d-1}\, k^{d-2} + A_{d-1}(k+[nt])^{d-2} - \pi_{k+[nt]}^{(d-2)})\; W(-k)$$

a) On sait que $|\pi_k^{(d-1)} - A_{d-1}\, k^{d-2}| \leqslant C\, k^{d-3}$.

On majore $W(-k)$ en utilisant

b) $$P(\sup_{s\leqslant n} W(s) \geqslant x\sqrt{n}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{x}\, e^{-x^2/2}$$

d'où $P(\sup_{t\geqslant 2^{j_o}} \dfrac{W(t)}{t^{1/2}\log t} \geqslant 1) \leqslant$

$$\sum_{j=j_o}^{\infty} P(\sup_{2^j<t\leqslant 2^{j+1}} \frac{W(t)}{2^{j/2}\; j\log 2} \geqslant 1) \leqslant \sum_{j=j_o}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}\; j\log 2} \exp(-\frac{(j\log 2)^2}{4})$$

donc

$$P(\sup_{t\geqslant n} |\frac{W(t)}{t^{1/2}\log t}| \geqslant 1) \leqslant n^{-(\log n)/C_1}$$ pour une constante C_1

positive et

$$(4.9)\quad P(\{\sup_{o\leqslant k\leqslant n^{\gamma}} \frac{|W(k)|}{n^{\gamma/2}\log n} \geqslant 1\} \cup \{\sup_{k\geqslant n^{\gamma}} \frac{|W(k)|}{k^{1/2}\log k} \geqslant 1\}) \leqslant n^{-C_{\gamma}\log n}$$

où C_{γ} désigne une constante positive.

c) On déduit de (a) et (b) que :

$$P\Big(\sup_{t\in[0,1]} |\eta''_n(t)| \geq \frac{2\,\sigma\,C}{n^{d-1/2}} \Big(\sum_{k=1}^{[n^\gamma]} k^{d-3}\, n^{\gamma/2} \log n + \sum_{k=[n^\gamma]+1}^{\infty} k^{d-3} k^{1/2} \log k\Big)\Big)$$

$$\leq n^{-C_\gamma \log n}$$

$$P(||\eta''_n|| \geq C'\, n^{1/2+\gamma/2-d}) \leq n^{-C_\gamma \log n}$$

ce qui assure $||\eta''_n|| \xrightarrow{P} 0$.

iii) Convergence en loi de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{d-2} - (k+[nt])^{d-2}}{n^{d-1/2}} W(-k)$

vers $\displaystyle\int_0^\infty (s^{d-2} - (t+s)^{d-2})\, W(-s)\, ds$.

L'intégrale :

$$\int_1^\infty \frac{s^{d-2} - (nt+s)^{d-2}}{n^{d-1/2}} W(-s)\, ds = \int_{1/n}^\infty (u^{d-2} - (t+u)^{d-2}) \frac{W(-nu)}{\sqrt{n}}\, du$$

a même loi que

$$\int_{1/n}^\infty (u^{d-2} - (t+u)^{d-2})\, W(-u)\, du .$$

a) Il suffit donc pour établir (iii) de montrer que :

$$D = \sup_{t\in[0,1]} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^{d-2} - (k+[nt])^{d-2})}{n^{d-1/2}} W(-k) -$$

$$\int_1^\infty \frac{(s^{d-2} - (nt+s)^{d-2})}{n^{d-1/2}} W(-s)\, ds \Big|$$

tend presque sûrement vers 0 .

$$n^{d-1/2} D = \sup_{t\in[0,1]} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} ([k^{d-2} - (k+[nt])^{d-2}] W(-k) -$$

$$(s^{d-2} - (nt+s)^{d-2})\, W(-s))\, ds \Big|$$

$n^{d-1/2}\, D \leqslant D_1 + D_2$ où :

$$D_1 = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} (k^{d-2} - (k+[nt])^{d-2}) \max_{k\leqslant s<k+1} |W(-k) - W(-s)|$$

et

$$D_2 = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{k\leqslant s\leqslant k+1} |k^{d-2} - s^{d-2} + (s+nt)^{d-2} - (k+[nt])^{d-2}|\,|W(-s)|$$

b) <u>Majoration de</u> D_1 .

On utilise

$$\sup_{t\in[0,1]} |k^{d-2} - (k+[nt])^{d-2}| \leqslant k^{d-2} - (k+n)^{d-2}$$

$$\leqslant \inf (n|d-2|\, k^{d-3} , k^{d-2})$$

et

$$P(\{\max_{k\leqslant n} \sup_{k\leqslant s<k+1} \frac{|W(-s) - W(-k)|}{\log n} \geqslant 1\} \cup \{\max_{k>n} \sup_{k\leqslant s<k+1} \frac{|W(-s)-W(-k)|}{\log k} \geqslant 1\})$$

$$= o(n^{-\gamma}) \text{ pour tout } \gamma > 1 .$$

Pour majorer D_1 :

$$P(D_1 \geqslant \sum_{k=1}^{n} k^{d-2} \log n + \sum_{k=n+1}^{\infty} |d-2|\, n\, k^{d-3} \log k) = o(n^{-\gamma})$$

- dans le cas $1 < d < 3/2$, il vient :

$$P(D_1 \geqslant C(d)\, n^{d-1} \log n) = o(n^{-\gamma})$$

- dans le cas $1/2 < d < 1$, il vient :

$$P(D_1 \geqslant C(d) \log n) = o(n^{-\gamma}) .$$

c) Majoration de D_2 .

On utilise : pour tout $\gamma > o$, il existe une constante C_γ telle que :

(4.10) $$P(\{\sup_{o\leq s\leq n^\gamma} \frac{|W(s)|}{n^{\gamma/2}\log n} \geq 1\} \cup \{\sup_{s\geq n^\gamma} \frac{|W(s)|}{s^{1/2}\log s} \geq 1\} \leq n^{-C_\gamma \log n} ,$$

$$\sup_{k\leq s\leq k+1} k^{d-2} - s^{d-2} \leq |d-3|\ k^{d-3}$$

pour obtenir :

$$P(D_2 \geq 2\ |d-3|\ (\sum_{k=1}^{[n^\gamma]} k^{d-3}\ n^{\gamma/2} \log n + \sum_{k=[n^\gamma]+1}^{\infty} k^{d-3}\ k^{1/2} \log k) \leq$$

$$\leq n^{-C_\gamma \log n}$$

donc, pour tout $\gamma > o$,

$$P(D_2 \geq 2\ |d-3|\ (n^{\gamma/2} \log n + n^{\gamma(d-3/2)/2} \log n)) \leq n^{-C_\gamma \log n} .$$

Des majorations de D_1 et D_2 , on tire : pour tout $\gamma > 0$, il existe $C(d)$ tel que :

si $1 < d < 3/2$ $\qquad P(D \geq C(d)\ \frac{\log n}{\sqrt{n}}) \leq o(n^{-\gamma})$

si $1/2 < d < 1$ $\qquad P(D \geq C(d)\ \frac{\log n}{n^{d-1/2}}) \leq o(n^{-\gamma})$.

On a donc établi :

On peut construire un processus du mouvement brownien sur $]-\infty, o]$ tel que :

$$\sup_{t\in[0,1]} |(\frac{1}{n^{d-1/2}} X^{(d)}_{[nt]} - \frac{\sigma A_{d-1}}{n^{d-1/2}} \int_{-\infty}^{o} ((nt-s)^{d-2} - (-s)^{d-2})\ W(s)\ ds| \xrightarrow{p.s.} 0 .$$

On en déduit que :

$$\left(\frac{1}{n^{d-1/2}} X^{(d)}_{[nt]} , t \in [0,1]\right) \text{ a même loi que :}$$

$$\left(\frac{\sigma A_{d-1}}{n^{d-1/2}} \int_0^{\infty} (nt+s)^{d-1} - (+s)^{d-2} W(-s) \, ds , t \in [0,1]\right)$$

et en faisant le changement de variables $s = - nu$, on voit que la loi limite est celle de :

$$\sigma A_{d-1} \int_{-\infty}^{0} ((-u)^{d-2} - (t-u)^{d-2}) W(u) \, du .$$

En intégrant par parties ,

$$\sigma A_{d-1} \int_{-\infty}^{0} ((-u)^{d-2} - (t-u)^{d-2}) W(u) \, du =$$

$$\frac{\sigma A_{d-1}}{d-1} \left(- \left[(-u)^{d-1} - (t-u)^{d-1}) W(u)\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} ((-s)^{d-1} - (t-s)^{d-1}) \, dW(s)\right) ,$$

or $\frac{\sigma A_{d-1}}{d-1} = A_d = \sigma \frac{\Theta(1)}{\phi(1) \Gamma(d)}$,

$$\lim_{u \to 0} u^{d-1} W(u) = 0 \quad \text{p.s.} ,$$

$$\lim_{u \to \infty} \sup_{t \in [0,1]} |u^{d-1} - (u-t)^{d-1}| \, |W(u)| = 0 \quad \text{p.s.} ,$$

donc $(\eta_n^{(d)}(t) , t \in [0,1])$ converge en loi vers
$\left(\int_{-\infty}^{0} (-s)^{d-1} - (t-s)^{d-1} \, dW(s) , t \in [0,1]\right)$.

5 - APPLICATION A LA COVARIANCE EMPIRIQUE.-

5.1. - *Processus ARIMA fractionnaire d'ordre* d , $-1/2 < d < 1/2$.

Pour un processus ARMA (X_t) ou lorsque le processus (X_t) vérifie des conditions de mélangeance, on sait que $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t^2$ tend presque sûrement vers $E\,X_t^2$ et que $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}(X_t^2-EX_t^2)$ tend en loi vers une variable aléatoire gaussienne.

Lorsque le processus (X_t) est un ARIMA fractionnaire, le théorème central limite n'est pas vérifié lorsque le coefficient de corrélation entre les variables X_t décroît trop lentement. ROSENBLATT (1961) étudie le cas d'un processus gaussien $(X_t\ ,\ t \in \mathbb{Z})$ vérifiant les hypothèses :

$$E\,X_t = 0\ ,\quad E\,X_t^2 = 1\ ,\quad E\,X_t\,X_{t+k} = (1+k^2)^{-\gamma}\ ,\quad \gamma > 0$$

et établit que sous la condition $0 < \gamma < 1/4$ la suite de variables

$Y_n = \frac{1}{n^{1-2\gamma}}\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 1)$ converge en loi vers une distribution

non gaussienne, la loi limite ayant comme fonction caractéristique

$$\exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(2it)^k\,\frac{C_k}{k}\Big)$$

où $C_k = \int\cdots\int_{[0,1]^k} |x_1-x_2|^{-2\gamma}|x_2-x_3|^{-2\gamma}\ \cdots\ |x_{k-1}-x_k|^{-2\gamma}|x_k-x_1|^{-2\gamma}\,dx_1\ldots dx_k$

FOX et TAQQU (1985, 1986, 1987) ont généralisé ce résultat de Rosenblatt et établissant les théorèmes suivants.

Soit $(X_j\ ,\ j \in \mathbb{Z})$ un processus gaussien stationnaire, de moyenne nulle, de covariance $r_k = E\ X_j\ X_{j+k} = k^{-D}\ L(k)$ où $D \in \left]0,1\right[$ et L une fonction à variation lente, c'est-à-dire telle que

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+\ ,\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1$. On notera H_m le $m^{\text{ième}}$ polynôme d'Hermite et $(a_s)_{s\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels tels que $\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} |a_s| < \infty$.

Théorème 6 (*FOX et TAQQU 1985, Th. 1*).-

Si $0 < D < 1/2$, le processus stochastique défini par

$$Z_n(t) = \frac{1}{n^{1-D}\ L(n)} \sum_{i=1}^{[nt]} \sum_{j=1}^{[nt]} a_{i-j} \left[H_m(X_i)\ H_m(X_j) - E\ H_m(X_i)\ H_m(X_j)\right]$$

converge faiblement dans $D[0,1]$ vers

$$m!\ m\Big(\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s\ r_s^{m-1}\Big)\ R(t) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty\ ,$$

où $R(t)$ désigne le processus de Rosenblatt.

Définition.- Le processus de Rosenblatt est défini par sa représentation intégrale au sens de Wiener-Itô-Dobrushin

$$R(t) = \frac{1}{2\Gamma(D)\ \cos(D\pi/2)} \int''_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i(x_1+x_2)t}}{i(x_1+x_2)}\ |x_1|^{(D-1)/2} |x_2|^{(D-1)/2} dw(x_1) dw(x_2)$$

où w est un processus du mouvement brownien complexe sur $\mathbb{R}$ et $\iint''$ signifie que l'intégrale est faite sur le plan privé des diagonales $(x_1 = \pm\ x_2)$. (Voir par exemple MAJOR 1981, TAQQU 1979, FOX et TAQQU 1985).

Les lois de dimension finie étant données par (TAQQU, 1975)

$$E \exp(i \sum_{j=1}^{p} u_j R(t_j)) =$$

$$\exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2i)^k}{k} \sum_{s_1,\dots,s_k \in \{1,2,\dots,p\}} u_{s_1} u_{s_2} \dots u_{s_p} \right.$$

$$\left. \int_0^{t_{s_1}} dx_1 \int_0^{t_{s_2}} dx_2 \dots \int_0^{t_{s_k}} dx_k \left(\prod_{j=1}^{k-1} |x_j - x_{j+1}|^{-D} \right) |x_k - x_1|^{-D} \right\} .$$

<u>*Théorème 7*</u> *(FOX et TAQQU, 1985, Th. 2).-*

Supposons $1/2 < D < 1$. Alors le processus stochastique

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt]} \sum_{k=1}^{[nt]} a_{j-k} \left[H_m(X_j) H_m(X_k) - E H_m(X_j) H_m(X_k) \right]$$

converge faiblement dans $\mathcal{D}[0,1]$ vers $\sigma_m W(t)$ où $W(t)$ est le processus du mouvement brownien et

$$\sigma_m^2 = (m!)^2 \sum_{n=1}^{m} \binom{m}{n}^2 \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{\infty} a_{s_1} a_{s_2} (r_{s_1} r_{s_2})^{m-n}$$

$$\sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^q r_{k+s_1-s_2}^q r_{k+s_1}^{n-q} r_{k-s_2}^{n-q} .$$

L'application à la covariance empirique d'un processus ARIMA fractionnaire est immédiate :

<u>*Corollaire*</u>.- Soit X_t un processus ARIMA fractionnaire vérifiant

$$(I-B)^d \phi(B) X_t = \Theta(B) e_t .$$

Si $1/4 < d < 1/2$ alors $\frac{1}{n^{2d}} \sum_{i=1}^{[nt]} (X_i^2 - E X_i^2)$ converge en loi dans $\mathcal{D}[0,1]$ vers $E X_o^2 \cdot R(t)$.

Si $-1/2 < d < 1/4$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{|nt|} (X_i^2 - E\, X_i^2)$ converge en loi vers $C_1\, W(t)$

où $C_1 = 2 \sum_{-\infty}^{\infty} r_k^2 = 4\pi \int_{-\pi}^{\pi} |1-e^{ix}|^{-4d} \left|\frac{\phi(e^{ix})}{\Theta(e^{ix})}\right|^4 dx$.

Le corollaire est immédiat, sachant que le coefficient de corrélation $r(k)$ vérifie : il existe une constante C telle que $r(k) \sim C\, k^{2d-1}$. Il suffit de prendre $D = 1 - 2d$

$$a_o = 1 \quad \text{et} \quad a_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 0 \ .$$

Par ailleurs, la densité spectrale f d'un processus ARIMA fractionnaire est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} r_k\, e^{ikx} = |e^{ix} - 1|^{-2d} \left|\frac{\phi(e^{ix})}{\Theta(e^{ix})}\right|^2$$

donc $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2$.

En particulier, si $-1/2 < d < 1/4$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - E\, X_i^2)$ tend en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance $4\pi \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$. Ce qui est un cas particulier du théorème 2 de FOX et TAQQU (1987) et pour $1/4 < d < 1/2$, $\frac{1}{n^{2d}} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - E\, X_i^2)$ tend en loi vers $E\, X_o^2\, R(1)$, résultat qui est également une conséquence du théorème 3 de TAQQU (1975).

5.2. - *Processus ARIMA d'ordre* d , d > 1/2 .

Cette section constitue une extension des résultats de AKONOM (1982), au cas d'un processus ARIMA fractionnaire. Ayant obtenu dans les sections 3 et 4 les lois limites des processus, il est aisé d'en déduire le comportement de la covariance empirique.

A - *Processus ARIMA fractionnaire d'ordre* d , 1/2 < d < 3/2.

On définit comme dans la section 4, le processus $X_n^{(d)}$ ARIMA d'ordre d , vérifiant la relation

$$(I-B)^d \phi(B) X_n^{(d)} = \theta(B) e_n \qquad \text{où} \qquad d \in]1/2 , 3/2[,$$

par la donnée

(5.1) • du processus stationnaire $X_n^{(d-1)} = (I-B)^{1-d} \frac{\theta(B)}{\phi(B)} e_n$

• de la condition initiale $X_o^{(d)} = x_o$

• de la relation $X_n^{(d)} = x_o + \sum_{k=1}^{n} X_k^{(d-1)}$.

On a établi dans le théorème 5 que $(\frac{1}{\sigma . A_d . n^{d-1/2}} X_{[nt]}^{(d)} , t \in [0,1])$ convergeait en loi vers le processus

$$(B_{d-1/2}(t) , t \in [0,1]) \equiv (\int_o^t (t-s)^{d-1} dW(s) + \int_{-\infty}^{o} ((t-s)^{d-1} - (-s)^{d-1}) dW(s), t \in [0,1])$$

On peut alors en déduire le :

Théorème 6.- Soit $(X_n^{(d)})$ un processus ARIMA d'ordre d , 1/2 < d < 3/2 vérifiant l'équation :

$$(I-B)^d \phi(B) X_n^{(d)} = \Theta(B) e_n$$

et défini par (5.1).

On suppose que les variables aléatoires e_n sont indépendantes, centrées, et admettent un moment d'ordre p, $p > \max(2, \frac{1}{d-1/2})$, leur variance sera notée σ^2.

Alors pour tout entier k

$$\frac{1}{\sigma^2 n^{2d}} \sum_{\ell=1}^{n-k} X_\ell^{(d)} X_{\ell+k}^{(d)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sigma^2 n^{2d}} \sum_{\ell=1}^{n} X^{2(d)}$$

convergent en loi vers la variable aléatoire

$$\left(\frac{\Theta(1)}{\phi(1)}\right)^2 \int_0^1 B^2_{d-1/2}(s)\, ds =$$

$$\frac{1}{(\Gamma(d))^2} \left(\frac{\Theta(1)}{\phi(1)}\right)^2 \int_0^1 \left(\int_0^s (s-t)^{d-1}\, dW_t + \int_{-\infty}^0 \left[(s-t)^{d-1} - (-t)^{d-1}\right] dW_t\right)^2 ds$$

d'espérance $\displaystyle \frac{1}{(\Gamma(d))^2} \left(\frac{\Theta(1)}{\phi(1)}\right)^2 \left[\frac{1}{2d(2d-1)} + \frac{1}{2d} \int_0^\infty \left[(1+u)^{d-1} - u^{d-1}\right]^2 du\right]$.

Démonstration : La somme $\displaystyle \frac{1}{n^{2d}} \sum_{\ell=1}^{n} (X_\ell^{(d)})^2$

s'écrit $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \zeta_n^2(\ell/n)$,

où l'on a posé $\displaystyle \zeta_n(s) = \frac{1}{n^{d-1/2}} X^{(d)}_{[ns]}$.

$\displaystyle \frac{1}{n^{2d}} \sum_{\ell=1}^{n} \left[X_\ell^{(d)}\right]^2$ est donc l'intégrale sur $[0,1]$ de la fonction $[\zeta_n(s)]^2$ élément de $\mathcal{D}[0,1]$.

On a établi que ζ_n convergeait en loi vers le processus du mouvement brownien fractionnaire $\sigma \frac{\theta(1)}{\phi(1)} B_{d-1/2}$; l'application de $\mathcal{D}[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à h associe $\int_0^1 h^2(t)\, dt$ est continue, il résulte donc du théorème 5.5. de Billingsley (1968) que :

$$\frac{1}{\sigma^2 \; n^{2d}} \sum_{\ell=1}^{n} [X_\ell^{(d)}]^2 \qquad \text{converge en loi vers}$$

$$(\frac{\Theta(1)}{\phi(1)})^2 \int_0^1 B^2_{d-1/2}(t)\; dt$$

$$= (\frac{\Theta(1)}{\Gamma(d)\;\phi(1)})^2 \int_0^1 [\int_0^t (t-s)^{d-1}\; dW(s) + \int_{-\infty}^0 ((t-s)^{d-1} - (-s)^{d-1})\, dW(s)]^2\; dt \; .$$

Vérifions ensuite que $\frac{1}{n^{2d}} \sum_{\ell=1}^{n-k} X_\ell^{(d)} \; (X_{\ell+k}^{(d)} - X_\ell^{(d)})$ tend en probabilité vers 0 ; il suffit de l'établir pour

$$\frac{1}{n^{2d}} \sum_{\ell=1}^{n-1} X_\ell^{(d)} \; (X_{\ell+1}^{(d)} - X_\ell^{(d)}) = \frac{1}{n^{2d}} \sum_{\ell=1}^{n-1} X_\ell^{(d)} \; X_{\ell+1}^{(d-1)} \; .$$

On peut aisément majorer

$$E \left| \sum_{\ell=1}^{n-1} X_\ell^{(d)} \; X_{\ell+1}^{(d-1)} \right| \qquad \text{par}$$

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} (E[X_\ell^{(d)}]^2)^{1/2} \; (E \; [X_{\ell+1}^{(d-1)}]^2)^{1/2} \; .$$

Le processus $(X_\ell^{(d-1)} \; , \; \ell \in \mathbb{N})$ est stationnaire et $E[X_\ell^{(d)}]^2 = O(\ell^{2d-1})$

donc $$\sum_{\ell=1}^{n} (E \; [X_\ell^{(d)}]^2)^{1/2} = O(n^{d+1/2})$$

et $$E[\frac{1}{n^{2d}} \left| \sum_{\ell=1}^{k} X_\ell^{(d)} \; X_{\ell+1}^{(d-1)} \right|] = O(n^{-d+1/2})$$

ce qui achève la démonstration.

B - *Processus ARIMA d'ordre* d , $d > 3/2$.

Soit $X_n = X_n^{(d)}$ un processus ARIMA d'ordre d vérifiant la relation :

$$\phi(B)\ (I-B)^d\ X_n = \Theta(B)\ e_n\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

où $(e_n\ ,\ n \in \mathbb{Z})$ est une suite de variables aléatoires, de même loi, de moyenne nulle, de variance σ^2 .

1 - Cas d *est un entier*

On peut alors définir $X_n^{(d)}$ par la donnée de $(d+1)$ relations :

$$\phi(B)\ X_n^{(o)} = \Theta(B)\ e_n$$

$$X_n^{(1)} - X_{n-1}^{(1)} = X_n^{(o)}$$

......

$$X_n^{(k)} - X_{n-1}^{(k)} = X_n^{(k-1)} \qquad k = 1,2,\dots,d \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

et de d nombres réels non aléatoires $x_o^{(1)}\ ,\dots,\ x_o^{(d)}$

$$X_o^{(k)} = x_o^{(k)} \qquad k = 1,2,\dots,d\ .$$

On sait que la loi limite du processus normalisé

$$\left(\frac{1}{n^{d-1/2}}\ X_{[nt]}^{(d)}\ ,\ t \in [0,1]\right)$$

converge vers le processus $\left(\sigma \int_o^t (t-s)^{d-1}\ dW(s)\ ,\ t \in [0,1]\right)$ qui ne dépend pas des nombres $x_o^{(1)}\ ,\dots,\ x_o^{(d)}$.

2 - Cas où d non entier, $d - 1/2$ non entier

On définit alors $(X_n^{(d)}, n \in \mathbb{N})$ par la relation

$$\phi(B)\ (I-B)^d\ X_n = \Theta(B)\ e_n ,$$

la donnée de conditions non aléatoires

$$X_o = x_o \quad , \quad X_{-1} = x_{-1} , \dots , X_{-d-p} = x_{-d-p}$$

et
$$e_o = e_{-1} = \dots = e_{-n} = \dots = 0 .$$

On a établi dans la section 3 que $\left(\frac{1}{n^{d-1/2}}\ X_{[nt]}^{(d)} , \quad t \in [0,1]\right)$ convergeait en loi vers

$$\left(\frac{\sigma\ \theta(1)}{\phi(1)\ \Gamma(d)} \int_0^t (t-s)^{d-1}\ dW(s) , \ t \in [0,1]\right) .$$

On peut alors établir le :

Théorème 7.- Soit $(X_n , n \in \mathbb{N})$ un processus ARIMA d'ordre d vérifiant l'équation aux différences :

$$\phi(B)\ (I-B)^d\ X_n = \Theta(B)\ e_n ,$$

où (e_n) est un bruit blanc.

On suppose en outre vérifiée l'une des deux hypothèses :

i) d est un entier ,

ii) d est un réel, $d > 1/2$, et on définit X_n par :

$$\phi(B)^d X_n = \Theta(B) \tilde{e}_n \qquad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{e}_n = e_n & \text{si} \quad n > 0 \\ \tilde{e}_n = 0 & \text{si} \quad n \leqslant 0 \end{cases}$$

et la donnée de conditions initiales X_o , X_{-1} ,..., X_{-p-d} non aléatoires.

Alors $\frac{1}{n^{2d}} \sum_{\ell=1}^{n} X_\ell^2$ converge en loi vers

$$\left[\frac{\sigma\ \Theta(1)}{\Gamma(d)\ \phi(1)}\right]^2 \int_0^1 \left(\int_0^t (t-s)^{d-1}\ dW(s)\right)^2 dt \ .$$

Preuve :

La démonstration est analogue à celle du théorème 6.

Dans le cas particulier où $d = 1$, la covariance empirique normalisée $\frac{1}{n^2} \left(\frac{\phi(1)}{\sigma\ \Theta(1)}\right)^2 \sum_{\ell=1}^{n} X_\ell^2$ converge vers $\int_0^1 w^2(s)\ ds$.

Cette variable aléatoire d'espérance 1/2 et de variance 1/3 (AKONOM, 1982) a pour transformée de Laplace :

$$E\left[e^{-u\int_o^1 w^2(s)ds}\right] = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\ \sqrt{2u}}} \quad \text{(JOFFE, 1964).}$$

B I B L I O G R A P H I E

[1] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN
- Handbook of Mathematical Functions. Dover (1965).

[2] J. AKONOM - Covariance empirique d'un processus ARIMA. Note CRAS t. 295, 177-180 (1982).

[3] J. AKONOM, C. GOURIÉROUX
- A functional limit theorem for fractional processes. Cepremap DP 8801 (1988).

[4] P. BILLINGSLEY - Convergence of probability measures. Wiley New-York (1968).

[5] Y. DAVYDOV - The invariance principle for stationary processes. Theory of proba and its appl. 15, n° 3, 487-498. (1970).

[6] M. DONSKER - An invariance principle for certain probability limit theorems. Four papers on probability. Mem. Amer. Math. Soc. n° 6 (1951).

[7] R. FOX et M. TAQQU
- Non central limit theorems for quadratic forms in random variables having long range dependence. The Ann. of Prob. Vol. 13, n° 2, 428-446. (1985).

[7b] R. FOX et M. TAQQU
- Large sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary gaussian time series. The Ann. of Stat. Vol. 14, n° 2, 517-532 (1986).

[8] R. FOX et M. TAQQU
- Central limit theorems for quadratic forms in random variables having long range dependence. Prob. Th. Rel. Fields 74, 213-240 (1987).

[9] J. GEWEKE et S. PORTER-HUDAK
- The estimation and application of long memory time series models. Journal of Time Series Analysis 4,221-228 (1982).

[10] E. GONÇALVES - Une généralisation des processus ARMA. Ann. d'Economie et de Statistiques, 5, 109-146 (1987).

[11] E. GONÇALVES - Processus fractionnaires. Ph. D. Thesis Université de Lille I (1988).

[12] C.W. GRANGER - New classes of time series models. Statistician 3-4, 27, 237-253 (1978).

[13] C.W. GRANGER et R. JOYEUX
- An introduction to long memory time series models and fractional differencing. Journal of Time Series Analysis 1, 15-29 (1980).

[14] J. HOSKING - Fractional differencing. Biometrika 68, 165-176 (1981).

[15] A. JOFFE - Promenades aléatoires et mouvement brownien. Presses de l'Université de Montréal (1964).

[16a] Y. KASAHARA et M. MAEJIMA
- Functional limit theorems for weighted sums of i.i.d. random variables. Prob. Rel. Fields 72, 161-183 (1986).

[16b] Y. KASAHARA et M. MAEJIMA
- Weighted sums of i.i.d. random variables attracted to integrals of stable processes. Prob. Th. Rel. Fields 78, 75-96 (1988).

[17] J. KOMLOS, P. MAJOR, G. TUSNADY -
- An approximation of partial sums of independent R.V.'s and the sample D.F. II.
Z. Warsch. verw. Gebiete 34, 33-58 (1976).

[18[a]] P. MAJOR - The approximation of partial sums of independent R.V's.
Z. Warsch. verw. Gebiete 35, 213-220 (1976).

[18[b]] P. MAJOR - Multiple Wiener Ito integrals.
Springer Lectures notes in Mathematics 849
Springer Verlag New-York (1981).

[19] B. MANDELBROT - Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi ; applications à la loi climatologique de H.E. HURST.
Note CRAS t. 260 p. 3274-3277 (1965).

[20] B. MANDELBROT - A fast fractional gaussian noise generator.
Water Resources Research 7, 543-553 (1971).

[21] B. MANDELBROT et J. VAN NESS
- Fractional brownian motion fractional noises and applications.
SIAM Review vol. 10, n° 4, 422-437 (1968).

[22] M. ROSENBLATT - Independence and dependence.
Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 431-443.
Berkeley : University of California Press. (1961).

[23] M. ROSENBLATT - Fractional integrals of stationary processes and the central limit theorem.
Journal of Applied Probability 13, 723-732 (1976).

[24] SHORACK et WELLNER - Empirical processes with applications to statistics.
Wiley New-York (1986).

[25] M.S. TAQQU - Weak convergence to fractional brownian motion and to the Rosenblatt process. Z. Wahrsch. verw. Gebiete 31, 287-302 (1975).

[26] M.S. TAQQU - Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. Z. Warsch. verw. Gebiete 50, 53-83 (1979).

ANNEXE I

PROPRIETES DE MELANGEANCE DES PROCESSUS LINEAIRES.

----

1 - DEFINITIONS.-

Un grand nombre de théorèmes établis pour des suites de variables aléatoires indépendantes sont encore valables pour une suite de variables asymptotiquement indépendantes. De nombreuses conditions ont été introduites pour exprimer cette indépendance asymptotique.

On notera X_j , $j = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles ou complexes définies sur le même espace (Ω, A, P). Pour $j \leqslant k$, on définit M_j^k la tribu engendrée par $\{X_t : j \leqslant t \leqslant k\}$, on définit de même $M_{-\infty}^j$ (resp. M_k^∞) la tribu engendrée par $\{X_t : t \leqslant j\}$ (resp. $\{X_t : t \geqslant k\}$).

Pour simplifier, on supposera en outre la suite (X_j) strictement stationnaire et on pose (voir, par exemple, BILLINGSLEY 1971 - IBRAGIMOV et LINNIK 1975 - IBRAGIMOV 1975)

$$\alpha(k) = \sup_{A \in M_{-\infty}^{o}} \sup_{B \in M_k^\infty} |P(A \cap B) - P(A)\,P(B)|$$

$$\beta(k) = E \sup_{B \in M_k^\infty} |P(B \mid M_{-\infty}^{o}) - P(B)|$$

$$\phi(k) = \sup_{A \in M_{-\infty}^{o}} \sup_{B \in M_k^\infty} |P(B \mid A) - P(B)|$$

$\rho(k) = \sup\limits_{Y,Z} |\mathrm{corr}(Y,Z)|$ où Y (resp. Z) décrit l'ensemble des fonctions $\mathcal{M}_{-\infty}^{o}$ (resp. $\mathcal{M}_{k}^{\infty}$) - mesurables réelles ayant une variance finie.

Ces coefficients $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $\phi(k)$, $\rho(k)$ sont appelés respectivement $k^{\text{ième}}$ coefficient de forte mélangeance, de complète régularité, de ϕ-mélangeance (ou mélangeance uniforme), de corrélation maximale. Un processus sera dit fortement mélangeant, complètement régulier , ϕ-mélangeant, ρ-mélangeant si $\alpha(k)$ (resp. $\beta(k)$, $\phi(k)$, $\rho(k)$) tend vers 0 lorsque $k \to \infty$.

Remarque.- Lorsque la suite (X_j) n'est pas stationnaire, on peut prendre

$$\alpha(k) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \ \sup_{A\in\mathcal{M}_{-\infty}^{n}} \ \sup_{B\in\mathcal{M}_{k+n}^{\infty}} |P(A \cap B) - P(A)\, P(B)|$$

et des définitions analogues pour les autres coefficients.

ROZANOV et VOLKONSKI (1961) ont établi que $\beta(n) = \frac{1}{2}\operatorname{Var}[P_{on}-P_{1n}]$ où P_{on} est la mesure induite par (X_t) sur $\mathcal{M}_{-\infty}^{o} \cup \mathcal{M}_{n}^{\infty}$ et P_{1n} la mesure définie par $P_{1n}[A \cap B] = P_{on}(A)\, P_{on}(B)$ si $A \in \mathcal{M}_{-\infty}^{o}$ et $B \in \mathcal{M}_{n}^{\infty}$.

Il est bien connu que

$$4\,\alpha(k) \leqslant \rho(k) \leqslant 2\sqrt{\phi(k)}$$

et

$$\alpha(k) \leqslant \beta(k) \leqslant \phi(k)$$

et que pour un processus gaussien $\rho(k)$ et $\alpha(k)$ sont équivalents (KOLMOGOROV et ROZANOV (1960)). IBRAGIMOV et ROZANOV (1974)).

IBRAGIMOV et ROZANOV (1974) donnent des conditions nécessaires et suffisantes concernant la densité spectrale d'un processus gaussien, pour qu'il soit complètement régulier.

WITHERS (1981 [b]) a introduit le coefficient de ℓ-mélangeance pour des processus réels ou complexes non stationnaires. Pour simplifier les notations, nous ne le définirons que dans le cas où le processus $(X_j)_j$ est stationnaire.

On pose pour $k \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$

$$\ell(k,u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{0\leq j\leq n-k} \sup_{(\delta)} \operatorname{covar}(e^{iuP}, e^{-iuF})$$

où $P = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{\ell=0}^{j} \delta_\ell X_\ell$, $F = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{\ell=j+k}^{n} \delta_\ell X_\ell$ et $\sigma_n^2 = \operatorname{var}(\sum_{j=0}^{n} X_j)$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des suites (δ_ℓ) telles que : $\forall \ell \quad \delta_\ell = 0$ ou $\delta_\ell = 1$.

(X_j) est dit ℓ-mélangeant si $\forall u \in \mathbb{R} \quad \lim_{k\to\infty} \ell(k,u) = 0$ et le processus (X_j) est fortement ℓ-mélangeant s'il existe une fonction bornée $K(u)$ telle que

$$\ell(k,u) \leq K(u)\, \ell(k) \qquad \text{où} \qquad \lim_{k\to\infty} \ell(k) = 0$$

WITHERS (1981 [b]) utilisant des résultats de YOSHIHARA (1978) et IBRAGIMOV et LINNIK (1971) établit

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \ell(k,u) \leq 4\, \beta(k) \qquad \text{et} \qquad \ell(k,u) \leq 16\, \alpha(k) \quad .$$

La condition de ℓ-mélangeance est donc plus faible que les conditions introduites au début de la section.

2 - THEOREME CENTRAL LIMITE ET PROCESSUS EMPIRIQUE.-

Soit (ξ_j) un processus stationnaire tel que $E\,\xi_o = 0$, $E\,\xi_o^2 < \infty$, on lui associe le processus $(X_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $D(o,1)$ défini par

$$X_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{[nt]}) \ , \quad t \in [0,1].$$

a) Cas ϕ-mélangeant.

Billingsley (1968) établit que si (ξ_n) est un processus stationnaire ϕ-mélangeant, sous la condition $\sum_n \phi_n^{1/2}$ la série $E\,\xi_o^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} E\,\xi_o\,\xi_k$ converge absolument vers σ^2 et X_n converge en loi vers W, processus du mouvement brownien. Il étend ce théorème au cas de variables fonction d'un processus stationnaire ϕ-mélangeant (Th. 21.1).

Il établit également (th. 22.1).

Si le processus ξ_n est ϕ-mélangeant et $\sum n^2\,\phi_n^{1/2} < \infty$, si ξ_o a une fonction de répartition F continue sur $[0,1]$ alors le processus empirique $\sqrt{n}\ (F_n(.) - F(.))$ converge en loi vers le processus gaussien Y défini par :

$$E\,Y(t) = 0$$

$$E\,Y(s)Y(t) = E\,g_s(\xi_o)g_t(\xi_o) + \sum_{k=1}^{\infty} E(g_s(\xi_o)g_t(\xi_k) + g_t(\xi_o)g_s(\xi_k))$$

où $g_s(\alpha) = 1_{[o,s]}(\alpha) - F(\alpha)$.

b) <u>Cas</u> β-<u>mélangeant</u>.

GASTWIRTH et RUBIN (1975) établissent un théorème central limite pour une suite de variables aléatoires stationnaires, bornées et α-mélangeantes.

Ils montrent aussi (1975, cor. 3.1.) :

Si (ξ_i) est un processus strictement stationnaire, complètement régulier, tel que $\beta_k = o(k^{-2} (\log k)^{-5})$ alors le processus empirique $\sqrt{n}\ (F_n(t) - F(t))$ converge en loi vers un processus gaussien à trajectoires p.s. continues.

c) <u>Cas</u> α-<u>mélangeant</u>.

M. PURI et L. TRAN (1980) étudient la convergence empirique dans le cas de variables α-mélangeantes.

Le théorème central limite a fait l'objet de travaux assez nombreux, par exemple WITHERS (1976, 1981 [a]) BLUM et ROSENBLATT (1956).

La vitesse de convergence dans le théorème central limite dans le cas fortement mélangeant a été étudiée par SUNKLODAS (1984).

d) <u>Cas</u> ℓ-<u>mélangeant</u>.

WITHERS (1981 [b]) démontre un théorème central limite sous des conditions plus faibles, n'exigeant pas la stationnarité du processus (ξ_j). Là encore, pour simplifier, nous l'énonçons dans le cas stationnaire.

Proposition.-

Soit (X_j) un processus strictement stationnaire tel que

- $E\,X_1 = 0 \quad E\,X_1^2 < \infty$
- il existe $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0 \quad E[|\sum_1^n X_j|^{2+\varepsilon}] = O(n^{1+\gamma+\varepsilon/2})$ quand $n \to \infty$
- (X_j) est ℓ-mélangeant et pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\ell(k,u) = O(k^{-\theta}) \quad \text{où} \quad \theta = 2\gamma/\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} E\,|\sum_{j=1}^{n} X_j|^2 = \infty \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} E(X_o\, X_j) < \infty$$

alors $\frac{1}{\sigma_N} S_N \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$ où $S_N = \sum_{j=1}^{N} X_j$ et $\sigma_N^2 = E(S_N^2)$.

3 - PROPRIETES DE MELANGEANCE.-

3.a. - Généralités.

Un processus moyenne mobile, c'est-à-dire solution de

$$X_t = e_t + \theta_1\, e_{t-1} + \dots + \theta_q\, e_{t-q} \qquad (\theta_1 ,\dots,\theta_q \text{ fixés})$$

où les variables e_t sont indépendantes et de même loi, vérifie de manière immédiate les conditions de ϕ-mélangeance, en effet $\forall k \geq q+1$, $\phi(k) = 0$.

CHANDA (1974) et WITHERS (1981 [a]) établissent des conditions de forte mélangeance pour les processus linéaires $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} W_j\, e_{t-j}$ tels que la fonction caractéristique du processus d'innovation soit Lebesgue - intégrable.

La condition sur le processus d'innovation n'est pas superflue ANDREWS (1984) construit un processus autorégressif d'ordre 1 $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j e_{t-j}$ où $\rho \in]0, 1/2[$ et les e_t sont des variables indépendantes de Bernoulli et montre que ce processus AR(1) n'est pas fortement mélangeant.

Dans un article récent, ATHREYA et PANTULA (1986) montrent que pour un processus AR(1) $X_t = \sum_{j=0}^{t} \rho^j e_{t-j} + X_o$, où $|\rho| < 1$ et les e_t sont indépendants, de même loi et indépendants de X_o si $E(\log |e_1|^+) < \infty$ et si les e_t ont une composante absolument continue non nulle, la ϕ-mélangeance équivaut au fait que les (e_t) sont presque sûrement bornées.

Ils établissent également qu'un processus ARMA stationnaire vérifiant :

$$\sum_{i=0}^{p} \phi_i X_{t-i} = \sum_{i=0}^{q} \theta_i e_{t-i} ,$$

sous les hypothèses : les variables e_t sont i.i.d,

. $E(\log |e_1|^+) < \infty$,

. la distribution de e_1 a une composante absolument continue non triviale ,

est fortement mélangeant.

Dans la section suivante, on se placera dans un cadre un peu plus large en considérant des processus à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^\ell$ et on gardera l'hypothèse que les variables ont une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ; les démonstrations sont largement inspirées de PHAM et TRAN (1986) .

3.b. - Conditions de complète régularité d'un processus ARMA.

Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^\ell$ est un processus ARMA si

(H1) il existe des matrices $\phi_o = I$, $\phi_1,\dots,\phi_p$; $\theta_o = I$; $\theta_1,\dots,\theta_q$ d'ordre $\ell \times \ell$ et une suite de vecteurs aléatoires (ε_t) dans $\mathbb{R}^\ell$, centrés, indépendants, de même loi, tels que :

(1) $$\sum_{i=0}^{p} \phi_i X_{t-i} = \sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad .$$

On note $\phi(z) = \sum_{i=0}^{p} \phi_i z^i$ et $\theta(z) = \sum_{i=0}^{q} \theta_i z^i$.

On supposera en outre que

(H2) les zéros des polynômes $\det \phi(z)$ et $\det \theta(z)$ sont de valeur absolue strictement supérieure à 1 et on note

$$\rho^{-1} = \inf \{|z| \mid \det \phi(z) = 0\} .$$

La matrice $\phi(z)$ est inversible si $|z| < \rho^{-1}$ et son inverse est développable en série entière pour $|z| < \rho^{-1}$.

On obtient de manière immédiate :

Lemme 1.

Sous les hypothèses (H1), (H2), l'équation (1) admet une solution stationnaire et une seule sous la forme

(2) $$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i}$$

où $\quad W(z) = \sum_{i=0}^{\infty} W_i z^i = (\phi(z))^{-1}\ \theta(z)$.

La suite de l'étude repose de manière essentielle sur un lemme (AKAIKE 1974).

Lemme 2.

Sous les hypothèses H1 et H2 , il existe des matrices F, G , H et un processus Y_t tels que :

$$(3) \qquad \begin{cases} Y_t = F\, Y_{t-1} + G\, \varepsilon_t \\ \\ X_t = H\, Y_t \end{cases} .$$

Notons $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $\ldots\ \varepsilon_{t-2}\ ,\ \varepsilon_{t-1}\ ,\ \varepsilon_t$.

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\varepsilon_s : s \leqslant t) \ ,$$

$X_{i|t}$ l'espérance conditionnelle $E[X_i \mid \mathcal{F}_t]$.

Il vient :

$$X_{t|t} = X_t \quad , \quad \forall i \leqslant t \quad \varepsilon_{i|t} = \varepsilon_i \quad , \quad \forall i \geqslant t+1 \quad \varepsilon_{i|t} = 0$$

par suite de l'indépendance des vecteurs ε_t .

En prenant dans (1) les espérances conditionnelles, on obtient

$$X_{t+i|t} + \phi_1\, X_{t+i-1|t} + \ldots + \phi_p\, X_{t+i-p|t}$$

$$= \varepsilon_{t+i|t} + \theta_1\, \varepsilon_{t+i-1|t} + \ldots + \theta_q\, \varepsilon_{t+i-q|t}$$

en particulier, si $i \geqslant q+1$

$$X_{t+i|t} + \phi_1 X_{t+i-1|t} + \dots + \phi_p X_{t+i-p|t} = 0 \quad .$$

Notant $\quad k = \sup(p,1+q)$

$$X_{t+k|t} + \phi_1 X_{t+k-1|t} + \dots + \phi_k X_{t|t} = 0$$

où $\phi_j = 0$ pour $j \geq p+1$, et tout élément $X_{t+i|t}$ pour $i \geq k$ est combinaison linéaire de $X_{t+k|t}$, $X_{t+k-1|t}$,..., $X_{t|t}$.

La relation $X_{t+i+1|t+1} = \sum_{j=0}^{\infty} W_j \, \varepsilon_{t+i+1-j|t+1} = \sum_{j=i}^{\infty} W_j \, \varepsilon_{t+i+1-j}$

entraîne

$$X_{t+i+1|t+1} = X_{t+i+1|t} + W_i \, \varepsilon_{t+1}$$

Ce qui peut s'écrire sous forme matricielle en posant :

$$Y_t = (X'_{t|t} \, , \, X'_{t+1|t} \, ,\dots, \, X'_{t+k|t})' \quad ,$$

$$Y_{t+1} = F \, Y_t + G \, \varepsilon_t$$

où

$$F = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \dots\dots\dots 0 \\ 0 & 0 & I \dots\dots\dots 0 \\ \dots\dots & & & \\ 0 & 0 & 0 \qquad\qquad I \\ -\phi_k & -\phi_{k-1} & -\phi_{k-2} \qquad -\phi_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} W_o \\ W_1 \\ \vdots \\ W_{k-1} \end{pmatrix}$$

on rappelle que $W_o = I$

et $X_t = H\, Y_t$

où $H = [I \quad 0 \quad 0 \, ... \, 0]$.

Exemple.- Le processus ARMA $X_t + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} = e_t + \beta\, e_{t-1}$ peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ X_{n+2|n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ X_{n+1|n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \beta - a_1 \end{pmatrix} e_{n+1}$$

On obtient

$$\text{dét}(F-zI) = \det \phi(z) \,.\, z^{(k-p)\ell}$$

et les valeurs propres non nulles de F sont les inverses des racines de $\det \phi(z)$, elles sont donc de module inférieur à ρ.

De l'écriture du système sous la forme (3), on déduit

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} F^j\, G\, \varepsilon_{t-j}$$

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} H\, F^j\, G\, \varepsilon_{t-j}$$

d'où en comparant avec (2)

(4) $$W_o = I \quad , \quad W_j = H\, F^j\, G \qquad j = 1,2,\ldots$$

En vue de l'étude de la mélangeance du processus (X_t) on notera :

$$\xi_t = \sum_{j=0}^{t-1} W_j \, \varepsilon_{t-j} = W_{t-1} \, \varepsilon_1 + W_{t-2} \, \varepsilon_2 + \ldots + W_o \, \varepsilon_t$$

(5) et

$$r_t = \sum_{j=t} W_j \, \varepsilon_{t-j} = H \, F^t \sum_{j=t}^{\infty} F^{j-t} \, G \, \varepsilon_{t-j} = H \, F^t \, Y_o$$

r_t est donc mesurable par rapport à $\mathcal{F}_o$.

Pour alléger l'écriture, notons $X_{(n,m)} = (X_n \, , \, X_{n+1} \, , \, \ldots, \, X_{n+m})$

$$R_{n,m} = (r_n \, , \, r_{n+1} \, , \ldots, \, r_{n+m})$$

$$S_{n,m} = (\xi_n \, , \, \xi_{n+1} \, , \ldots, \, \xi_{n+m})$$

on a donc $X_{(n,m)} = R_{n,m} + S_{n,m}$.

Lemme 3.

Supposons que les vecteurs aléatoires ε_t ont une densité g par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{\ell}$, alors $S_{n,m}$ admet une densité notée $f_{n,m}$ et le coefficient de complète régularité β_n est majoré par

$$2 \sup_{m \geq o} \int \ldots \int \left| f_{n,m}(z - R_{n,m}(x)) - f_{n,m}(z) \right| \, dz \, R(dx)$$

où R est la loi de $\underline{X} = (\ldots, X_{-1} \, , \, X_o)$.

Notons P la loi de $(\underline{X} \, , \, X_{n,m})$

Q la loi de $X_{n,m}$

R celle de $\underline{X}$

le coefficient de complète régularité est

$$\beta_n = \sup_m \iint |P(dz \mid x) - Q(dz)| \; R(dx) \quad .$$

Comme $\xi_t = \sum_{j=0}^{t-1} W_j \, \varepsilon_{t-j}$ et $W_o = I$

le vecteur aléatoire $(\xi_1 , \xi_2 ,\ldots, \xi_{n+m})$ admet une densité et donc $S_{n,m} = (\xi_n , \xi_{n+1} ,\ldots, \xi_{n+m})$ a une densité notée $f_{n,m}$. La relation $X_{n,m} = R_{n,m} + S_{n,m}$ entraîne :

$$P(dz|x) = f_{n,m}(z-u(x)) \; dz$$

$$Q(dz) = \int f_{n,m}(z-u(x')) \; R(dx') \; dz$$

où $R_{n,m}$ prend la valeur $u(x)$ si $\underline{X} = x$

$$\beta_n = \sup_{m\geq 0} \iint \left| f_{n,m}(z-u(x)) - \int f_{n,m}(z-u(x')) \; R(dx') \right| dz \;\; R(dx)$$

$$\beta_n \leqslant \iint |f_{n,m}(z-u(x) - f_{n,m}(z)| + \left|f_{n,m}(z) - \int f_{n,m}(z-u(x')) \; R(dx')\right| \; dz \; R(dx)$$

$$\beta_n \leqslant \iint |f_{n,m}(z-u(x)) - f_{n,m}(z)| \; R(dx) \; dz$$

$$+ \iint \left|\int f_{n,m}(z) - f_{n,m}(z-u(x')) \; R(dx')\right| \; dz \; R(dx) \quad ,$$

la 2ème intégrale étant indépendante de x ,

$$\beta_n \leqslant 2 \iint |f_{n,m}(z-u(x)) - f_{n,m}(z)| \; R(dx) \; dz \quad .$$

Le système $\xi_t = \sum_{j=0}^{t-1} W_j \, \varepsilon_{t-j}$ est inversible et

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{t-1} A_j \, \xi_{t-j} \tag{6}$$

les matrices A_j étant définies par la relation

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \, z^j = (W(z))^{-1} = \phi(z) \, (\Theta(z))^{-1} \, .$$

On vérifie aisément que $\sum_{j=0}^{\infty} ||A_j|| < \infty$.

Lemme 4.

Sous l'hypothèse : il existe une constante K telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}^{\ell}, \int |g(v-u) - g(v)| \, dv < K \, ||u|| \, ,$$

le coefficient de complète régularité β_n vérifie

$$\beta_n \leq K\left(\sum_{k=0}^{\infty} ||A_k||\right) E\left(\sum_{j=n}^{\infty} ||r_j||\right) \, .$$

Soit g la densité de e_t , en utilisant (6) , la densité de $f_{n,m}$ est donnée par :

$$f_{n,m}(z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+m}) = \int \ldots \int \prod_{t=1}^{n+m} g\left(\sum_{j=1}^{t-1} A_{t-j} \, z_j\right) dz_1 \ldots dz_{n-1}$$

et si on note

$$\delta_{n,m}(u) = \int |f_{n,m}(z-u) - f_{n,m}(z)| \, dz$$

où $z = (z_n , z_{n+1} , \ldots , z_{n+m})$

$$\delta_{n,m}(R_{n,m}(x)) = \int \ldots \int \Big| \prod_{t=1}^{n+m} g\left(\sum_{t=1}^{t} A_{t-j}(z_j - r_j)\right)$$

$$- \prod_{t=1}^{n+m} g\left(\sum_{j=1}^{t} A_{t-j} \, z_j\right) \Big| \, dz_1 \ldots dz_{n+m} \, .$$

On utilise la relation

$$\prod_j (a_i + \alpha_j) - \prod_j a_j = \sum_j \left(\prod_{i<j} a_i \right) \alpha_j \left(\prod_{j>i} (a_i + \alpha_i) \right)$$

$$\delta_{nm}(R_{nm}(x)) \leqslant \int \cdots \int \sum_{t=n+1}^{n+m} \left(\prod_{j=1}^{t-1} g\left(\sum_{k=1}^{j} A_{j-k}\, z_k \right) \right)$$

$$\left| g\left(\sum_{k=1}^{t} A_{t-k}(z_k - r_k) \right) - g\left(\sum_{k=1}^{t} A_{t-k}\, z_k \right) \right| \left(\prod_{j=t}^{n+m} g\left(\sum_{k=1}^{j} A_{j-k}(z_k - r_k) \right) dz_1 \ldots dz_{n+m} \right.$$

g est une densité, $A_o = I$ et donc

$$\int g\left(\sum_{k=1}^{j} A_{j-k}(z_k - r_k) \right) dz_j = 1$$

et

$$\int \left| g\left(\sum_{k=1}^{t} A_{t-k}(z_k - r_k) \right) - g\left(\sum_{k=1}^{t} A_{t-k}\, z_k \right) \right| dz_t \leqslant \left\| \sum_{k=n}^{t} A_{t-k}\, r_k \right\|$$

donc

$$\delta_{nm}(R_{n,m}(x)) \leqslant K \sum_{t=n+1}^{n+m} \sum_{k=n}^{t} \| A_{t-k}\, r_k \|$$

$$\leqslant K\left(\sum_{k=0}^{\infty} \| A_k \| \right) \left(\| r_n \| + \| r_{n+1} \| + \ldots + \| r_{n+m} \| \right)$$

on en déduit le lemme 4.

Théorème.

Soit X_t un processus ARMA vérifiant la relation

$$\phi(B)\, X_t = \Theta(B)\, \varepsilon_t \quad .$$

On suppose que les hypothèses H_1 et H_2 sont vérifiées, en outre : ε_t a une densité g par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^r$ telle que :

- il existe des constantes $K > 0$ et $\delta \geq 1$

$$\int |g(x-u) - g(x)| \, dx \leq K \, ||u||$$

et
$$\int ||x||^{\delta} \, g(x) \, dx < \infty$$

alors il existe $\rho \in [0,1[$ tel que $\beta_n = O(\rho^n)$.

Il suffit d'établir que sous les hypothèses du théorème

$$E(||r_n|| + ||r_{n+1}|| + \ldots + ||r_{n+m}||) = O(\rho^n) \quad .$$

La matrice F a ses valeurs propres de module inférieur ou égal à ρ, la matrice $W_j = H \, F^j \, G$ vérifie donc $||W_j|| = O(\rho^j)$

et $||r_t|| \leq \sum\limits_{j=t}^{\infty} ||W_j|| \; ||\varepsilon_{t-j}||$

donc $||r_n|| + \ldots + ||r_{n+m}|| \leq \sum\limits_{j=n}^{\infty} \Psi_j \; ||\varepsilon_{n-j}||$ où $\Psi_j = \sum\limits_{k=j}^{\infty} ||W_k|| = O(\rho^j)$

$$E(\sum_{k=n}^{\infty} ||r_k||) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \Psi_j \; E \; ||e_{t-j}|| = O(\rho^n) \quad .$$

T.D. PHAM et L.T. TRAN (1986) établissent plus généralement la complète régularité d'un processus linéaire multivarié

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \; \varepsilon_{t-i} \quad \text{sous les hypothèses :}$$

(i) e_t a une densité g_t qui vérifie : $\int ||x||^{\delta} \, g_t(x) \, dx < \infty$ pour un $\delta > 0$, et $\int g_t\,(v-u) \, dv \leq K \, ||u||$ pour tout t ,

(ii) $\sum ||A_j|| < \infty$ et $\forall z$, $|z| \leq 1$, $\det \sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j \, z^j \neq 0$,

(iii) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (\sum\limits_{k=j}^{\infty} ||A_j||)^{\delta/1+\delta} < \infty$, alors $\beta_n \leqslant K \sum_{j=n}^{\infty} (\sum_{k=j}^{\infty} ||A_j||)^{\delta/1+\delta}$.

MOKKADEM (1986) démontre la complète régularité d'un processus ARMA vectoriel en utilisant son caractère markovien et fait l'hypothèse que la loi de probabilité de $\varepsilon(t)$ est équivalente à la mesure de Lebesgue.

3.c. - Conditions de ℓ-mélangeance d'un processus linéaire.

Withers (1981^b) ne suppose plus l'existence d'une densité pour établir la ℓ-mélangeance d'un processus linéaire.

Soit $X_t = \sum_0^\infty a_j \varepsilon_{t-j}$ où les ε_t sont des variables aléatoires réelles indépendantes. Sous l'hypothèse :

il existe $\delta \in]0,1]$ tel que $E(|\varepsilon_t|^\delta) < \infty$ et $a_j = O(j^{-\lambda})$,

si $E(\sum_{t=1}^{n} X_t)^2 = O(n)$,

alors on peut choisir $\ell(k) = k^{2-d\lambda-\delta/2}$ si $\lambda \neq 2/\delta$

et $\ell(k) = k^{-\delta/2} \ell n(k)$ si $\lambda = 2/\delta$.

Si $a_j = O(\rho^j)$, on peut choisir $\ell(k) = k^{-\delta/2} \rho^{k\delta}$.

Le processus $X_t = \sum_0^\infty \rho^j \varepsilon_{t-j}$ où $\rho_j \in]0,1/2]$ et les ε_t sont des variables de Bernoulli est ℓ-mélangeant sans être fortement mélangeant.

B I B L I O G R A P H I E

AKAIKE H. (1974) - Markovian representation of stochastic processes
Ann. Inst. Stat. Math. 26, p. 363-387.

ANDREWS D.W. (1984) - Non strong mixing autoregressive processes.
J. Appl. Probab. 21, p. 930-934.

ATHREYA K.B. PANTULA S.G. (1986) - Mixing properties of Harris chains and autoregressive processes.
J. Appl. Prob. 23, p. 880-892.

BILLINGSLEY P. (1968) - Convergence of probability measures.
Wiley, New-York.

BILLINGSLEY P. (1971) - Weak convergence of measures : applications in probability,
SIAM Philadelphie.

BLUM J.R. ROSENBLATT M. (1956) - A class of stationary processes and a central limit theorem.
Proc. Nat. Acad. Sci. Vol. 42, p. 412-414.

CHANDA K.C. (1974) - Strong mixing properties of linear stochastic processes.
J. Appl. Probab. 11, p. 401-408.

GASTWIRTH J.L. RUBIN H. (1975) - The asymptotic distribution theory of the empiric CDF for mixing stochastic processes.
Ann. of Stat. 3, p. 809-824.

IBRAGIMOV I.A. (1975) - A note on the central limit theorem for dependent random variables
Theor. Probability Appl. 20, p. 135-141.

IBRAGIMOV I.A., LINNIK Y.V. (1971) - Independent and stationary sequences of random variables.
Groningen : Walters, Noordhoff Publishing.

IBRAGIMOV I.A., ROZANOV Y. (1974) - Processus aléatoires gaussiens.
Trad. Française. Editions MIR - Moscou.

KOLMOGOROV A, ROZANOV Y.V. (1960) - On strong mixing conditions for stationary Gaussian processes.
Theor. Probability Appl. 5, 204-207.

MOKKADEM A. (1986) - Sur le mélange d'un processus ARMA vectoriel note C.R.A.S. Paris, t. 303, I, 11, 519-522.

- Sur un modèle autorégressif non linéaire. Ergodicité et ergodicité géométrique
J.T.S.A. (à paraître).

PHAM D. TRAN L.T. (1986) - Some mixing properties of time series models.
Stoch. Proc. Appl. 19, p. 297-303.

PURI M.L. TRAN L.T. (1980) - Empirical distribution functions and functions of order statistics for mixing random variables.
J. of Multivariate Analysis 10, p. 405-425.

ROSENBLATT M. (1956) - A central limit theorem and a strong mixing condition.
Proc. Nat. Acad. Sci. 42, p. 43-47.

ROZANOV Y. VOLKONSKI (1959) - Some limit theorems of random functions I.
Theor. Probab. Appl. 4, p. 178-197.
(1961) II Id. , 6, p. 186-198.

SUNKLODAS J. (1984) - Rate of convergence in the central limit theorem for random variables with strong mixing conditions.
Trad. Angl. de Litovski Math. Sb. 24, p. 174-185.

TIKHOMIROV A.N. (1980) - On the rate of convergence in the central limit theorem for weakly dependent random variables.
Theory Probab. Appl. 25, p. 790-809.

WITHERS C.S. (1976) - On the convergence of empirical processes of mixing variables.
Austi. J. Stat. 18, p. 76-83.

WITHERS C.S. (1981[a]) - Conditions for linear processes to be strong mixing.
Z. Wahrsch. verw. Gebiete 57, p. 477-480.

WITHERS C.S. (1981[b]) - Central limit theorems for dependent variables I.
Z. Wahrsch. verw. Gebiete 57, p. 509-534.

YOSHIHARA K. (1978) - Probability inequalities for sums of absolutely regular processes and their applications.
Z. Wahrsch. verw. Gebiete 43, p. 319-330.

RESUME

Utilisant un résultat de Komlos Major Tusnady sur l'approximation forte des sommes partielles d'une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, on établit la convergence presque sûre du temps d'occupation d'un intervalle par une marche aléatoire vers celui du mouvement brownien.

Dans le second chapitre, on étudie les sommes partielles d'un processus linéaire stationnaire et on donne des conditions d'approximation forte de ce processus par un processus de Wiener. On en déduit la convergence en loi du temps d'occupation d'un intervalle par un processus ARIMA d'ordre 1.

Le chapitre suivant est consacré à un problème d'estimation. On étudie l'image par une application continue d'un processus ARIMA d'ordre 1. On propose lorsqu'un tel processus est observé un estimateur de la transformation réciproque, ainsi qu'un estimateur de la fonction dérivée.

Enfin on étudie les processus ARIMA fractionnaires, dans le cas non stationnaire. On discute le choix des conditions initiales et on établit que le processus obtenu après normalisation converge en loi vers le processus du mouvement brownien fractionnaire de B. MANDELBROT.

En annexe, des résultats récents sur la mélangeance des processus linéaires, et plus particulièrement les ARMA, sont donnés.

MOTS CLES

PROCESSUS ARIMA ,
ARIMA FRACTIONNAIRE ,
TEMPS LOCAL ,
APPROXIMATION FORTE ,
ESTIMATION NON PARAMETRIQUE .