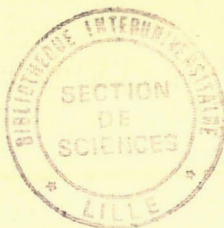


55376
1988
9

N° d'ordre 249



55376
1988
9

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

le titre de Docteur de l'Université

Spécialité : Mathématiques Pures

par

AMINOUC Adérodjou A. Rachidi

GROUPES DE LIE-POISSON ET BIGEBRES DE LIE

Soutenue le 28 juin 1988 devant la Commission d'Examen :

*Présidente : J. LEHMANN-LEJEUNE,
Université de Lille Flandres Artois*

*Directeur de Recherche : Y. KOSMANN-SCHWARZBACH
Université de Lille Flandres Artois*

*Rapporteurs : P. DAZORD, Université Claude Bernard, Lyon
F. MAGRI, Université de Milan (Italie)*

Examinateur : R. GERGONDEY, Université de Lille Flandres Artois

SCD LILLE 1



D 030 254684 1

Je remercie très vivement Madame Y. Kosmann-Schwarzbach et Monsieur R. Gergondey qui m'ont initié aux techniques des systèmes hamiltoniens complètement intégrables. Leur aide et leurs encouragements m'ont permis de mener à bien ce travail. Je suis heureux de montrer ici l'intérêt des méthodes introduites par Madame Kosmann-Schwarzbach dans l'étude des groupes de Lie-Poisson et des bigèbres de Lie.

Je tiens à remercier Madame J. Lehmann-Lejeune qui a bien voulu présider le jury de cette thèse.

Le Professeur Magri s'est penché de près sur mon travail; ses idées, ses remarques m'ont été très précieuses. Je saisis cette occasion pour lui exprimer ma profonde gratitude pour les nombreuses discussions qu'il m'a accordées du début jusqu'à la fin du travail et pour sa présence à la soutenance de cette thèse.

Le Professeur Dazord s'est déplacé de Lyon pour examiner cette thèse sur un sujet auquel il a lui-même contribué. Sa présence m'honore et je l'en remercie vivement.

J'exprime aussi ma profonde gratitude à tout le corps professoral de l'U.F.R de Mathématiques de l'Université de Lille I pour m'avoir soutenu sur tous les plans pour me permettre de poursuivre jusqu'à terme ce travail.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail et particulièrement Madame C. Evrard qui l'a dactylographié avec soin et compétence.

PLAN

INTRODUCTION

I. GROUPES DE LIE-POISSON, BIGEBRES DE LIE ET STRUCTURES BICROISEES D'ALGEBRES DE LIE

1. Préliminaires	1
2. Groupes de Lie-Poisson	4
3. Bigèbres de Lie	13
4. Structure bicroisée d'algèbre de Lie	19

II. BIGEBRES DE LIE EXACTES ET EQUATIONS DE YANG-BAXTER

1. Cocycles jacobiens et potentiels jacobiens	25
2. Condition pour que $[,]^r$ soit antisymétrique	26
3. Condition pour que $[,]^a$ vérifie l'identité de Jacobi	27
4. Double d'une bigèbre de Lie	33
5. Exemples	36

III. BIGEBRES DE LIE QUASITRIANGULAIRES ET ALGEBRES DE LIE-SEMENOV

1. Equation de Yang-Baxter modifiée	47
2. Bigèbres de Lie quasitriangulaires et algèbres de Lie-Semenov	50
3. Double d'une bigèbre de Lie quasitriangulaire	53
4. Carré d'une algèbre de Lie-Semenov	56
5. Comparaison des doubles et des carrés	58

IV. BIGEBRES DE LIE ET STRUCTURES DE POISSON SUR LES GROUPES DE LIE

1. Groupe de Lie-Poisson associé à une bigèbre de Lie	63
2. Groupes de Lie-Poisson exacts	68
3. Structures de Poisson définies par des potentiels jacobiens	70
4. Structures de Poisson définies par des solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée	76

BIBLIOGRAPHIE	81
---------------	----

INTRODUCTION

Les notions de groupe de Lie-Poisson et de bigèbre de Lie ont été introduites par Drinfeld [4] à la suite des travaux de Sklyanin sur l'équation de Yang-Baxter classique [19], eux-mêmes issus des travaux de Faddeev et de son école concernant le scattering inverse quantique. Dans le même temps, Gelfand et Dorfman [6] identifiaient l'équation de Yang-Baxter classique avec la nullité d'un crochet de Schouten. (Sur la notion de crochet de Schouten voir [15][9][3]). Indépendamment, Magri et Morosi [12] étudiaient les solutions de l'équation de Yang-Baxter classique sous le nom de cocycles de Poisson. L'étude des bigèbres de Lie et des groupes de Lie-Poisson a été développée surtout par Drinfeld [5] et Semenov-Tian-Shansky [16][17][18]. On trouvera des exposés de ce sujet dans [7] ou [21] et quelques développements plus récents, dont certains sont repris ici, dans [1][2][8][3][23][11]. La terminologie employée jusqu'ici a été variable, groupes de Lie-Hamilton [4], groupes de Poisson-Drinfeld [7], groupes de Poisson [3].

Un groupe de Lie-Poisson est un groupe de Lie G muni d'une structure de Poisson telle que la multiplication soit un morphisme de Poisson de la variété de Poisson produit $G \times G$ dans G .

L'algèbre de Lie \mathcal{G} d'un groupe de Lie-Poisson G porte une structure supplémentaire qui en fait ce qu'on appelle une bigèbre de Lie [4][16][5] [7][21][3].

Dans la première partie de notre travail, nous faisons une étude détaillée de cette structure supplémentaire. Nous étudions dans le chapitre I la structure d'algèbre de Lie de \mathcal{G}^* induite par la structure de Lie-Poisson sur le groupe de Lie G . Soit Λ le bivecteur de la structure de Poisson de G . Nous notons l l'application de G à valeurs dans $\Lambda^2\mathcal{G}$ définie par transport de Λ par translation à droite

$$l(g) = (T_g\rho_{g^{-1}} \otimes T_g\rho_{g^{-1}})\Lambda_g, \quad g \in G.$$

(G, Λ) est un groupe de Lie-Poisson si et seulement si l est un 1-cocycle du groupe G à valeurs dans $\Lambda^2\mathcal{G}$ pour l'action adjointe Ad de G . On en déduit que l'application linéaire tangente à l en l'identité e du groupe G , notée ε , est un 1-cocycle de \mathcal{G} à valeurs dans $\Lambda^2\mathcal{G}$ pour l'action adjointe ad de l'algèbre de Lie \mathcal{G} . La structure d'algèbre de Lie de \mathcal{G}^* est définie par l'application linéaire $\gamma = \varepsilon^t$. Avec cette structure d'algèbre de Lie sur \mathcal{G}^* , l'espace vectoriel $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$ porte naturellement une structure d'algèbre de Lie induisant les structures d'algèbres de Lie de \mathcal{G} et \mathcal{G}^*

et laissant invariant le produit scalaire naturel sur l'espace vectoriel \mathcal{K} . La dualité entre les espaces vectoriels \mathcal{G} et \mathcal{G}^* joue un rôle important dans ces différentes structures.

Récemment Magri et Kosmann-Schwarzbach [8] ont montré que la structure de bigèbre de Lie sur une algèbre de Lie \mathcal{G} est un cas particulier de la structure *bicroisée d'algèbre de Lie* sur deux algèbres de Lie, pas nécessairement en dualité (voir aussi [11]). Nous reprenons plus en détail l'étude de la structure bicroisée d'algèbre de Lie.

Dans le chapitre II, nous étudions les bigèbres de Lie exactes définies par un 1-cobord ε de \mathcal{G} à valeurs dans $\wedge^2 \mathcal{G}$. Si $\varepsilon = \delta r$, nous cherchons les conditions sur $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ pour que $\gamma = \varepsilon^\dagger$ définisse une structure d'algèbre de Lie sur \mathcal{G}^* . Soit $r = a + s$ la décomposition en parties antisymétrique et symétrique de r . Nous montrons que $\gamma = \varepsilon^\dagger$ définit une structure d'algèbre de Lie sur \mathcal{G}^* si et seulement si s est *ad*-invariante et le crochet de Schouten $[a, a]$ de la partie antisymétrique a de r est *ad*-invariant. Cette étude nous conduit aux définitions de bigèbres de Lie

1) *triangulaires* définies par des solutions antisymétriques de l'équation de *Yang-Baxter classique* (ou équation du triangle) $[a, a] = 0$ [4][5][6][7][8][16],

2) bigèbres de Lie-Sklyanin définies par une solution antisymétrique de l'équation de *Yang-Baxter généralisée* [4][5][7][8],

3) *quasitriangulaires* définies par un potentiel quasitriangulaire c'est-à-dire à courbure de Schouten nulle [5][8]. (Cette notion avait été introduite par Magri sous le nom de pseudococycle (1983, non publié)).

Nous explicitons la définition du *double* d'une bigèbre de Lie due à Drinfeld [5]. Nous terminons le chapitre II en donnant des exemples de bigèbres de Lie quasitriangulaires dont plusieurs sont obtenues par passage au double.

Dans le chapitre III nous nous intéressons aux bigèbres de Lie quasitriangulaires. Soit $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \delta r)$ une bigèbre de Lie exacte. Nous montrons que le potentiel r est un potentiel quasitriangulaire si et seulement si l'endomorphisme R de \mathcal{G} défini par

$$R = a \circ s^{-1},$$

est une solution de l'équation de *Yang-Baxter modifiée* [16][17][18]. Nous montrons ainsi (voir aussi [1][2]) qu'à toute bigèbre de Lie quasitriangulaire est associée une

algèbre de Lie-Semenov [17] et inversement.

Soit \mathcal{C} la catégorie des bigèbres de Lie quasitriangulaires et $\tilde{\mathcal{C}}$ la catégorie des algèbres de Lie-Semenov. Soit $(\mathcal{G}, [\ , \], R, \phi)$ une algèbre de Lie-Semenov. Nous utilisons la relation entre le crochet $[\ , \]_R$ sur \mathcal{G} et le crochet $[\ , \]_{\mathcal{G}^*}$ sur \mathcal{G}^* défini par $r = R \circ \phi^{-1} + \phi^{-1}$ pour définir les morphismes d'algèbres de Lie-Semenov de telle sorte que les catégories \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ soient isomorphes.

Dans [17] Semenov-Tian-Shansky a introduit la notion de carré d'une algèbre de Lie-Semenov. Etant donnée une bigèbre de Lie quasitriangulaire g , nous notons $g^{(2)}$ le double de g et \tilde{g} l'algèbre de Lie-Semenov associée à g . Soient ${}^{(2)}\tilde{g}$ le carré de l'algèbre de Lie-Semenov \tilde{g} et ${}^{(2)}g$ la bigèbre de Lie quasitriangulaire associée à ${}^{(2)}\tilde{g}$. Nous terminons le chapitre III en construisant un anti-isomorphisme entre les bigèbres de Lie $g^{(2)}$ et ${}^{(2)}g$. Ces résultats étaient exposés dans [2].

Dans la dernière partie (chapitre IV) nous revenons à l'étude des groupes de Lie. Le théorème d'intégration des bigèbres de Lie s'énonce : toute structure de bigèbre de Lie sur une algèbre de Lie \mathcal{G} définit une structure de Lie-Poisson sur le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie \mathcal{G} telle que la structure de bigèbre de Lie associée coïncide avec la structure de bigèbre de Lie donnée sur \mathcal{G} . Ce théorème a été énoncé par Drinfeld [4][5]. Une démonstration consistant en des calculs dus à Magri a été publiée par Kosmann-Schwarzbach [7]. Verdier en a donné une nouvelle démonstration dans [21]. Récemment, Dazord et Sondaz [3] puis Lu et Weinstein [11] ont démontré le théorème en introduisant des idées nouvelles. Nous reprenons en détail la démonstration proposée par Lu et Weinstein dans [11].

Soient r et r' des éléments de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. Nous notons Λ_r^λ (resp. $\Lambda_{r'}^\rho$) le tenseur invariant à gauche (resp. à droite) engendré par r . Soit $\Lambda_{r,r'} = \Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho$. Nous donnons les conditions pour que ce tenseur soit antisymétrique et nous étudions les structures de Poisson qu'il définit sur G lorsque son crochet de Schouten est identiquement nul. Cette étude nous conduit aux groupes de Lie-Poisson exacts associés aux bigèbres de Lie exactes considérées dans le chapitre II. Nous faisons ensuite une étude des structures de Poisson sur un groupe de Lie obtenues par translation sur le groupe de potentiels jacobiens ou de solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée. Nous retrouvons les résultats établis dans [1] avec leur généralisation.

Pour les bases de la géométrie différentielle et de la théorie des variétés de Poisson nous avons utilisé les ouvrages de Souriau [20] et de Libermann et Marle [10].

N.B. J'ai eu connaissance après la soutenance de cette thèse du preprint de Sh. H. Majid, Matched pairs of Lie groups associated to solutions of the Yang-Baxter equations, à paraître au Pacific Journal of Mathematics, dont certains résultats sont proches de ceux exposés ici.

CHAPITRE I

Groupes de Lie-Poisson, bigèbres de Lie et structures bicroisées d'algèbres de Lie

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord quelques préliminaires sur les variétés de Poisson. Nous étudions ensuite les structures de Poisson sur un groupe de Lie G telles que la multiplication soit un morphisme de Poisson de $G \times G$ dans G . Un groupe de Lie G muni d'une telle structure de Poisson est dit *groupe de Lie-Poisson*. Soit Λ le bivecteur de Poisson de G . (G, Λ) est un groupe de Lie-Poisson si et seulement si Λ vérifie une propriété que nous appelons la *propriété de Drinfeld*. Nous démontrons deux conséquences très importantes de la propriété de Drinfeld du bivecteur Λ . Après avoir défini les morphismes de groupes de Lie-Poisson, nous étudions l'application l de G à valeurs dans $\Lambda^2 \mathcal{G}$ obtenue par transport de Λ par translation à droite. Λ possède la propriété de Drinfeld si et seulement si l est un 1-cocycle pour l'action adjointe du groupe G . Il s'ensuit alors que l s'annule en e et que l'application linéaire tangente à l en e est un 1-cocycle de \mathcal{G} à valeurs dans $\Lambda^2 \mathcal{G}$ dont le transposé définit une structure d'algèbre de Lie sur \mathcal{G}^* . Nous faisons une étude détaillée de cette structure d'algèbre de Lie sur \mathcal{G}^* qui fait de l'algèbre de Lie \mathcal{G} une *bigèbre de Lie*. La notion de bigèbre de Lie est une notion auto-duale. Après avoir défini les morphismes de bigèbres de Lie, nous étudions la structure d'algèbre de Lie de l'espace vectoriel $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$ induite par la structure de bigèbre de Lie de \mathcal{G} . Cette étude nous conduit à la notion de *triplets de Manin*. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous considérons deux algèbres de Lie \mathcal{G} et \mathcal{H} qui ne sont pas nécessairement en dualité et nous étudions les conditions d'existence d'une structure d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ induisant les structures de \mathcal{G} et \mathcal{H} . Une telle structure d'algèbre de Lie est dite *structure bicroisée*. Nous revenons enfin au cas où \mathcal{G} et \mathcal{H} sont en dualité et nous montrons que la structure d'algèbre de Lie de $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$ induite par la structure de bigèbre de Lie de \mathcal{G} est un cas particulier de la structure bicroisée.

1. Préliminaires

1.1 Crochet de Schouten

Soit V une variété lisse. On note $A^p(V)$ l'espace vectoriel des multivecteurs de degré p ou p -vecteurs sur V (champs de p -tenseurs antisymétriques contravariants)

avec la convention $A^0(V) = \Omega^0(V)$ où $\Omega^0(V)$ est l'espace vectoriel des fonctions lisses sur V . Cet espace vectoriel sera noté parfois $C^\infty(V)$.

Soit $A(V)$ l'algèbre graduée $\bigoplus_{p \geq 0} A^p(V)$. On convient que $A^p(V) = \{0\}$ si p est un entier négatif.

Le crochet de Schouten dans $A(V)$ est l'unique application \mathbf{R} -bilinéaire

$$[\cdot, \cdot]: A(V) \times A(V) \rightarrow A(V)$$

de degré -1 qui est caractérisée par les propriétés suivantes :

(i) pour tout $X \in A^1(V)$, pour tout $u \in A(V)$, $[X, u]$ est la dérivée de Lie de u par rapport au champ X ,

(ii) si $u \in A^p(V)$, $v \in A^q(V)$, on a

$$[u, v] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[v, u],$$

(iii) si $u \in A^p(V)$, application linéaire $v \mapsto [u, v]$ est une dérivation de degré $p-1$ de l'algèbre graduée $A(V)$.

$(A(V), [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie graduée et l'identité de Jacobi s'écrit :

$$\oint (-1)^{(p_1-1)(p_3-1)} [X_1, [X_2, X_3]] = 0$$

où $X_1 \in A^{p_1}(V)$, $X_2 \in A^{p_2}(V)$, $X_3 \in A^{p_3}(V)$ et où \oint est la somme sur les permutations circulaires des indices 1,2,3.

Le crochet de Schouten est donc une bidérivation de l'algèbre graduée des multivecteurs sur V qui étend le crochet de Lie des champs de vecteurs.

1.2 Variétés de Poisson

Une variété de Poisson est par définition une variété lisse M munie d'un crochet de Poisson noté $\{ \cdot, \cdot \}_M$, c'est-à-dire d'une structure d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel $C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur M , satisfaisant la règle de Leibniz,

$$\forall f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M), \{f_1, f_2 f_3\}_M = f_2 \{f_1, f_3\}_M + f_3 \{f_1, f_2\}_M.$$

1.3 Bivecteurs de Poisson

Soit $(M, \{ , \}_M)$ une variété de Poisson. Le bivecteur de Poisson de M est par définition le 2-tenseur antisymétrique contravariant Λ tel que,

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M), \{f_1, f_2\}_M = \Lambda(df_1, df_2)$$

où df désigne la différentielle de $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Soit x un point de M . Notons $\#$ le morphisme de fibrés vectoriels de T^*M dans TM défini par Λ , c'est-à-dire vérifiant,

$$\begin{aligned} \forall x \in M, \forall \alpha_x \in T_x^*M, \forall \beta_x \in T_x^*M \\ \langle \alpha_x, \#_x \beta_x \rangle = -\langle \beta_x, \#_x \alpha_x \rangle = \Lambda_x(\alpha_x, \beta_x). \end{aligned}$$

La dimension du sous-espace vectoriel $\#_x(T_x^*M)$ est appelée le rang de la structure de Poisson au point x .

Exemple. Soit (M, ω) une variété symplectique. Pour toutes fonctions lisses f_1 et f_2 sur M , on définit

$$\{f_1, f_2\}_M = X_{f_2} \cdot f_1$$

où $X_f = \#df$ est le champ hamiltonien de hamiltonien f . Alors $(M, \{ , \}_M)$ est une variété de Poisson de rang constant maximum.

1.4 Produits de variétés de Poisson

Soient $(M, \{ , \}_M)$ et $(N, \{ , \}_N)$ deux variétés de Poisson. Soit f une fonction lisse sur la variété produit $M \times N$. Pour $(x, y) \in M \times N$, on note f^x (resp. f^y) l'élément de $\mathcal{C}^\infty(N)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(M)$) défini par

$$f^x(y) = f(x, y) \quad (\text{resp. } f^y(x) = f(x, y)).$$

Le crochet $\{ , \}_{M \times N}$ défini sur la variété produit $M \times N$ par

$$\{f_1, f_2\}_{M \times N}(x, y) = \{f_1^x, f_2^x\}_N(y) + \{f_1^y, f_2^y\}_M(x)$$

où f_1 et f_2 sont deux éléments de $\mathcal{C}^\infty(M \times N)$ est un crochet de Poisson.

On dit que $(M \times N, \{ , \}_{M \times N})$ est le produit des deux variétés de Poisson $(M, \{ , \}_M)$ et $(N, \{ , \}_N)$.

1.5 Morphismes de Poisson

Un morphisme de Poisson d'une variété de Poisson $(M, \{ , \}_M)$ dans une variété de Poisson $(N, \{ , \}_N)$ est une application lisse ϕ de M dans N telle que,

$$\forall f_1, f_2 \in C^\infty(N), \{f_1, f_2\}_N \circ \phi = \{f_1 \circ \phi, f_2 \circ \phi\}_M.$$

2. Groupes de Lie-Poisson

2.1 Définitions et propriétés

Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie \mathcal{G} .

Notations : Les éléments de G seront notés g, h, \dots etc et les éléments de \mathcal{G} , x, y, \dots etc.

Soit $g \in G$. On note λ_g et ρ_g la translation à gauche et la translation à droite par g . La différentielle en l'identité de l'automorphisme intérieur $\lambda_g \circ \rho_{g^{-1}}$ est notée Ad_g .

Pour toute fonction lisse f sur G , $d_g f$ est la différentielle en g de f .

Soient ϕ une application lisse d'une variété M dans une variété N et x un point de M . On note $T_x \phi$ l'application linéaire tangente à ϕ au point x .

Définition 2.1 Un groupe de Lie-Poisson est un groupe de Lie G muni d'une structure de Poisson $\{ , \}_G$ telle que la multiplication, $\pi : (g, h) \in G \times G \mapsto \pi(g, h) = gh \in G$ soit un morphisme de Poisson de $(G \times G, \{ , \}_{G \times G})$ dans $(G, \{ , \}_G)$.

Par définition, π est un morphisme de Poisson si et seulement si pour toutes $f_1, f_2 \in C^\infty(G)$,

$$\{f_1, f_2\}_G \circ \pi = \{f_1 \circ \pi, f_2 \circ \pi\}_{G \times G},$$

ou de manière équivalente, si pour tous $g, h \in G$,

$$\{f_1 \cdot f_2\}_G(gh) = \{f_1^g \cdot f_2^g\}_G(h) + \{f_1^h \cdot f_2^h\}_G(g),$$

i.e.,

$$(2.1) \quad \{f_1, f_2\}_G(gh) = \{f_1 \circ \lambda_g, f_2 \circ \lambda_g\}_G(h) + \{f_1 \circ \rho_h, f_2 \circ \rho_h\}_G(g).$$

Soit Λ le bivecteur de Poisson de G . La formule (2.1) est alors équivalente à

$$\Lambda_{gh}(d_{gh}f_1, d_{gh}f_2) = \Lambda_h(d_h(f_1 \circ \lambda_g), d_h(f_2 \circ \lambda_g)) + \Lambda_g(d_g(f_1 \circ \rho_h), d_g(f_2 \circ \rho_h)).$$

Or,

$$\begin{aligned} \Lambda_h(d_h(f_1 \circ \lambda_g), d_h(f_2 \circ \lambda_g)) &= \Lambda_h(d_{gh}f_1 \circ T_h\lambda_g, d_{gh}f_2 \circ T_h\lambda_g) \\ &= (T_h\lambda_g \otimes T_h\lambda_g)(\Lambda_h)(d_{gh}f_1, d_{gh}f_2). \\ \Lambda_g(d_g(f_1 \circ \rho_h), d_g(f_2 \circ \rho_h)) &= \Lambda_g(d_{gh}f_1 \circ T_g\rho_h, d_{gh}f_2 \circ T_g\rho_h) \\ &= (T_g\rho_h \otimes T_g\rho_h)(\Lambda_g)(d_{gh}f_1, d_{gh}f_2). \end{aligned}$$

Ainsi, la formule (2.1) est équivalente à

$$(2.2) \quad \Lambda_{gh} = (T_h\lambda_g \otimes T_h\lambda_g)(\Lambda_h) + (T_g\rho_h \otimes T_g\rho_h)(\Lambda_g).$$

La propriété (2.1) ou (2.2) est dite *propriété de Drinfeld* du bivecteur Λ .

On observe ainsi que le bivecteur Λ , s'il est non identiquement nul, n'est ni invariant à gauche, ni invariant à droite. De plus, si e est l'élément neutre de G , en posant $g = h = e$ dans (2.2) on obtient

$$(2.3) \quad \Lambda_e = 0.$$

Ainsi, toute structure de Lie-Poisson sur un groupe de Lie G est de rang zéro en e . Une telle structure ne peut jamais être une structure symplectique.

Exemple 2.1 Soit \mathcal{A} une algèbre de Lie. Le groupe additif \mathcal{A}^* muni de la structure de Lie-Poisson est un groupe de Lie-Poisson abélien.

Définition 2.2 (*Morphismes de groupes de Lie-Poisson*). Soient $(G_1, \{ , \}_{G_1})$ et $(G_2, \{ , \}_{G_2})$ deux groupes de Lie-Poisson et ϕ une application lisse de G_1 dans G_2 . On dira que ϕ est un morphisme (resp. antimorphisme) de groupes de Lie-Poisson de $(G_1, \{ , \}_{G_1})$ dans $(G_2, \{ , \}_{G_2})$ si ϕ est un homomorphisme du groupe G_1 dans le groupe G_2 et ϕ est un morphisme (resp. antimorphisme) de Poisson de $(G_1, \{ , \}_{G_1})$ dans $(G_2, \{ , \}_{G_2})$.

Proposition 2.1 Soit $(G, \{ , \}_G)$ un groupe de Lie-Poisson. On note Λ le bivecteur de Poisson de G et G' le groupe opposé de G . L'application ϕ qui, à $g \in G$, associe $g^{-1} \in G'$ est un isomorphisme de groupes de Lie-Poisson de $(G, \{ , \}_G)$ sur $(G', \{ , \}_{G'})$ où le crochet de Poisson $\{ , \}_{G'}$ est le crochet défini par le bivecteur $-\Lambda$.

■ Pour tous $g, h \in G$, on a $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ et ϕ est un isomorphisme de groupes de G sur G' . Montrons maintenant que ϕ est un morphisme de Poisson de $(G, \{, \}_G)$ dans $(G', \{, \}_{G'})$. Soient f_1, f_2 deux fonctions lisses sur G' et $g \in G$. On a :

$$\{f_1, f_2\}_{G'}(\phi(g)) = \{f_1, f_2\}_{G'}(g^{-1}) = -\Lambda_{g^{-1}}(d_{g^{-1}}f_1, d_{g^{-1}}f_2).$$

Or, Λ étant un bivecteur de Lie-Poisson, on a

$$(T_{g^{-1}}\lambda_g \otimes T_{g^{-1}}\lambda_g)(\Lambda_{g^{-1}}) = -(T_g\rho_{g^{-1}} \otimes T_g\rho_{g^{-1}})(\Lambda_g)$$

d'après les relations (2.2) et (2.3). Ainsi,

$$\begin{aligned} \{f_1, f_2\}_{G'}(g^{-1}) &= -\Lambda_{g^{-1}}(d_{g^{-1}}f_1, d_{g^{-1}}f_2) \\ &= \Lambda_g(d_{g^{-1}}f_1 \circ T_g(\lambda_{g^{-1}} \circ \rho_{g^{-1}}), d_{g^{-1}}f_2 \circ T_g(\lambda_{g^{-1}} \circ \rho_{g^{-1}})). \end{aligned}$$

Mais

$$T_g\phi = -T_e\lambda_{g^{-1}} \circ T_g\rho_{g^{-1}} = -T_g(\lambda_{g^{-1}} \circ \rho_{g^{-1}}).$$

Ainsi,

$$\{f_1, f_2\}_{G'}(g^{-1}) = \Lambda_g(d_g(f_1 \circ \phi), d_g(f_2 \circ \phi)) = \{f_1 \circ \phi, f_2 \circ \phi\}(G)$$

et ϕ est un morphisme de Poisson de $(G, \{, \}_G)$ dans $(G', \{, \}_{G'})$. ■

Proposition 2.2 Soient $(G, \{, \}_G)$ et $(H, \{, \}_H)$ deux groupes de Lie-Poisson. Alors $(G \times H, \{, \}_{G \times H})$ est un groupe de Lie-Poisson.

■ Notons π la multiplication du groupe produit $G \times H$. On a

$$\begin{aligned} \pi : ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \in (G \times H) \times (G \times H) &\mapsto \pi((g_1, h_1), (g_2, h_2)) = \\ &(g_1g_2, h_1h_2) \in G \times H. \end{aligned}$$

Soient F_1 et F_2 deux fonctions lisses sur $G \times H$. Montrons que :

$$\{F_1, F_2\}_{G \times H}(g_1g_2, h_1h_2) = \{F_1 \circ \pi, F_2 \circ \pi\}_{(G \times H) \times (G \times H)}((g_1, h_1), (g_2, h_2)).$$

On utilise essentiellement le fait que G et H sont des groupes de Lie-Poisson; on a d'une part :

$$\begin{aligned} \{F_1, F_2\}_{G \times H}(g_1g_2, h_1h_2) &= \{F_1(g_1g_2, \cdot) \circ \lambda_{h_1}, F_2(g_1g_2, \cdot) \circ \lambda_{h_1}\}_H(h_2) \\ &\quad + \{F_1(g_1g_2, \cdot) \circ \rho_{h_2}, F_2(g_1g_2, \cdot) \circ \rho_{h_2}\}_H(h_1) \\ &\quad + \{F_1(\cdot, h_1h_2) \circ \lambda_{g_1}, F_2(\cdot, h_1h_2) \circ \lambda_{g_1}\}_G(g_2) \\ &\quad + \{F_1(\cdot, h_1h_2) \circ \rho_{g_2}, F_2(\cdot, h_1h_2) \circ \rho_{g_2}\}_G(g_1). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
& \{F_1 \circ \pi, F_2 \circ \pi\}_{(G \times H) \times (G \times H)}((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \\
&= \{F_1 \circ (\lambda_{g_1} \times \lambda_{h_1})(g_2, \cdot), F_2 \circ (\lambda_{g_1} \times \lambda_{h_1})(g_2, \cdot)\}_H(h_2) \\
&+ \{F_1 \circ (\lambda_{g_1} \times \lambda_{h_1})(\cdot, h_2), F_2 \circ (\lambda_{g_1} \times \lambda_{h_1})(\cdot, h_2)\}_G(g_2) \\
&+ \{F_1 \circ (\rho_{g_2} \times \rho_{h_2})(g_1, \cdot), F_2 \circ (\rho_{g_2} \times \rho_{h_2})(g_1, \cdot)\}_H(h_1) \\
&+ \{F_1 \circ (\rho_{g_2} \times \rho_{h_2})(\cdot, h_1), F_2 \circ (\rho_{g_2} \times \rho_{h_2})(\cdot, h_1)\}_G(g_1).
\end{aligned}$$

Mais pour tout élément F de $C^\infty(G \times H)$ on a

$$\begin{aligned}
& F(g_1 g_2, \cdot) \circ \lambda_{h_1} = F \circ (\lambda_{g_1} \times \lambda_{h_1})(g_2, \cdot) \\
\text{et} \quad & F(g_1 g_2, \cdot) \circ \rho_{h_2} = F \circ (\rho_{g_2} \times \rho_{h_2})(g_1, \cdot), \\
& F(\cdot, h_1 h_2) \circ \lambda_{g_1} = F \circ (\lambda_{g_1} \times \lambda_{h_1})(\cdot, h_2) \\
\text{et} \quad & F(\cdot, h_1 h_2) \circ \rho_{g_2} = F \circ (\rho_{g_2} \times \rho_{h_2})(\cdot, h_1).
\end{aligned}$$

En conclusion

$$\{F_1, F_2\}_{G \times H}(g_1 g_2, h_1 h_2) = \{F_1 \circ \pi, F_2 \circ \pi\}_{(G \times H) \times (G \times H)}((g_1, h_1), (g_2, h_2))$$

et $G \times H$ est un groupe de Lie-Poisson. ■

2.2 Cocycle de groupe et cocycle d'algèbre d'un groupe de Lie-Poisson

Soit $(G, \{, \}_G)$ un groupe de Lie-Poisson. On identifie l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G à $T_e G$. Considérons l'application lisse l sur G à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ définie par

$$l(g) = (T_g \rho_{g^{-1}} \otimes T_g \rho_{g^{-1}})(\Lambda_g), \quad g \in G.$$

Montrons que Λ satisfait la condition (2.2) si et seulement si l est un 1-cocycle du groupe G à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ pour l'action adjointe Ad de G .

En effet, pour tous g et $h \in G$ on a

$$l(gh) = (T_{gh} \rho_{(gh)^{-1}} \otimes T_{gh} \rho_{(gh)^{-1}})(\Lambda_{gh}).$$

Les translations à gauche commutent avec les translations à droite. Aussi, pour tous $g, h \in G$,

$$\rho_{gh} = \rho_h \circ \rho_g$$

et

$$\lambda_{gh} = \lambda_g \circ \lambda_h .$$

Ainsi l'égalité (2.2) est équivalente à

$$(2.4) \quad l(gh) = l(g) + Ad_g(l(h)) ,$$

et (2.4) est la condition pour que l soit un 1-cocycle de G à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ pour l'action adjointe de G . Il est clair que $l(e) = 0$.

Soit $\varepsilon = T_e l$. Puisque l est un 1-cocycle de G à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ pour l'action adjointe Ad de G , ε est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie \mathcal{G} à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ pour l'action adjointe ad de \mathcal{G} . Explicitons cette propriété de ε . On obtient pour $x, y \in \mathcal{G}$,

$$(2.5) \quad \varepsilon([x, y]) = (ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x)(\varepsilon(y)) - (ad_y \otimes 1 + 1 \otimes ad_y)(\varepsilon(x)) .$$

La propriété de cocycle de ε est la version infinitésimale de la propriété de Drinfeld du bivecteur Λ .

2.3 Structure d'algèbre de Lie de \mathcal{G}^*

Soit \mathcal{G}^* le dual de l'espace vectoriel \mathcal{G} . On note par des lettres grecques ξ, η, \dots etc. les éléments de \mathcal{G}^* . Etant donnés deux éléments ξ_1, ξ_2 de \mathcal{G}^* , il existe des fonctions lisses f_1 et f_2 sur G telles que

$$\xi_1 = d_e f_1 , \quad \xi_2 = d_e f_2 .$$

Montrons que $d_e(\{f_1, f_2\}_G)$ ne dépend que de ξ_1 et ξ_2 . En effet, pour $x \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} & \langle d_e(\{f_1, f_2\}_G), x \rangle \\ &= \frac{d}{dt}(\{f_1, f_2\}_G)(\exp tx)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \Lambda_{\exp tx}(d_{\exp tx} f_1, d_{\exp tx} f_2)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (T_e \rho_{\exp tx} \otimes T_e \rho_{\exp tx})(l(\exp tx))(d_{\exp tx} f_1 \otimes d_{\exp tx} f_2)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} l(\exp tx)((T_e \rho_{\exp tx})^t(d_{\exp tx} f_1) \otimes (T_e \rho_{\exp tx})^t(d_{\exp tx} f_2))|_{t=0} \end{aligned}$$

où $u \mapsto u^t$ désigne la transposition des applications linéaires. En utilisant la relation $l(e) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle d_e \{f_1, f_2\}_G, x \rangle &= T_e l(x)(d_e f_1 \otimes d_e f_2) \\ &= \varepsilon(x)(\xi_1 \otimes \xi_2) = \langle \varepsilon^t(\xi_1 \otimes \xi_2), x \rangle, \end{aligned}$$

soit

$$(2.6) \quad d_e \{f_1, f_2\}_G = \varepsilon^t(\xi_1 \otimes \xi_2).$$

Posons donc

$$(2.7) \quad [\xi_1, \xi_2]_{\mathcal{G}^*} = \varepsilon^t(\xi_1 \otimes \xi_2).$$

La relation précédente montre que le crochet $[\ ,]_{\mathcal{G}^*}$ est un crochet d'algèbre de Lie sur \mathcal{G}^* puisque $\{ \ , \}_G$ est un crochet de Poisson.

2.4 Remarque

Introduisons la

Définition 2.3 Soient G un groupe de Lie et Λ un bivecteur de G tel que $\Lambda_e = 0$. On appelle linéarisé de Λ en e l'application linéaire de \mathcal{G} dans $\Lambda^2 \mathcal{G}$ notée Λ^L et définie par

$$\Lambda^L(x) = (\mathcal{L}_X \Lambda)(e), \quad x \in \mathcal{G},$$

où \mathcal{L}_X est la dérivation de Lie par un champ de vecteurs X sur G tel que $X(e) = x$.

$\Lambda^L(x)$ est bien indépendant du choix de X tel que $X(e) = x$.

Soit (G, Λ) un groupe de Lie-Poisson et $x \in \mathcal{G}$. Avec les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= T_e l(x) = \frac{d}{dt} l(\exp t x) |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (T_{\exp t x} \rho_{\exp -t x} \Lambda_{\exp t x}) |_{t=0} \\ &= (\mathcal{L}_{x^\lambda} \Lambda)(e) \end{aligned}$$

où x^λ est le champ invariant à gauche engendré par x . On voit ainsi que $\Lambda^L = \varepsilon$ et que la structure de Lie-Poisson sur $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}^*)^*$ associée à la structure d'algèbre de Lie (2.7) sur \mathcal{G}^* définie par ε^t n'est autre que la structure de Poisson linéarisée Λ^L de la structure de Poisson Λ sur G au point e où Λ s'annule. Cette idée est due à Dazord et Sondaz qui l'ont exposée dans [3].

2.5 Relations entre les crochets de Lie sur \mathcal{G} et sur \mathcal{G}^*

Soit G un groupe de Lie. On note $\beta : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ la transposée de l'application linéaire de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ dans \mathcal{G} définissant le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ de \mathcal{G} et on note $x \mapsto ad_x$ et $x \mapsto ad_x^*$ les représentations adjointe de \mathcal{G} dans \mathcal{G} et coadjointe de \mathcal{G} dans \mathcal{G}^* .

Si G est un groupe de Lie-Poisson, on désigne comme ci-dessus par ε l'application linéaire $T_e l$ définie sur \mathcal{G} à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ dont la transposée $\gamma : \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ définit le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}^*}$ de \mathcal{G}^* . On a donc par définition

$$\langle \varepsilon[x, y], \xi \otimes \eta \rangle = \langle [\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, [x, y] \rangle = \langle \beta[\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, x \otimes y \rangle .$$

On note $\xi \rightarrow ad_\xi$ et $\xi \rightarrow ad_\xi^*$ les représentations adjointe de \mathcal{G}^* dans \mathcal{G}^* et coadjointe de \mathcal{G}^* dans $(\mathcal{G}^*)^* \simeq \mathcal{G}$. La relation (2.5) exprimant la propriété de cocycle de ε peut s'exprimer des cinq manières équivalentes suivantes :

(i) ε est un 1-cocycle de \mathcal{G} à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ pour l'action adjointe $x \mapsto ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x$ de \mathcal{G} ,

(ii) les crochets $[\cdot, \cdot]$ et $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}^*}$ vérifient la condition de Drinfeld (dite encore condition de compatibilité ou condition de distributivité [5] [7])

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & \langle [\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, [x, y] \rangle \\ &= -\langle [ad_x^* \xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, y \rangle - \langle [\xi, ad_x^* \eta]_{\mathcal{G}^*}, y \rangle + \langle [ad_y^* \xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, x \rangle + \langle [\xi, ad_y^* \eta]_{\mathcal{G}^*}, x \rangle , \end{aligned}$$

(iii) les représentations coadjointes $x \mapsto ad_x^*$ et $\xi \mapsto ad_\xi^*$ vérifient la condition,

$$(2.9) \quad \begin{aligned} & \langle [\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, [x, y] \rangle \\ &= \langle ad_x^* \eta, ad_\xi^* y \rangle + \langle ad_y^* \xi, ad_\eta^* x \rangle - (\langle ad_x^* \xi, ad_\eta^* y \rangle + \langle ad_y^* \eta, ad_\xi^* x \rangle) , \end{aligned}$$

(iv) les crochets $[\cdot, \cdot]$ et $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}^*}$ vérifient la relation

$$(2.10) \quad \begin{aligned} & \langle [\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, [x, y] \rangle \\ &= \langle \xi, [ad_\eta^* x, y] \rangle + \langle \xi, [x, ad_\eta^* y] \rangle - \langle \eta, [ad_\xi^* x, y] \rangle - \langle \eta, [x, ad_\xi^* y] \rangle , \end{aligned}$$

(v) β est un 1-cocycle de \mathcal{G}^* à valeurs dans $\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ pour l'action adjointe $\xi \mapsto ad_\xi \otimes 1 + 1 \otimes ad_\xi$ de \mathcal{G}^* .

■ En effet notons δ (resp. δ^*) la codifférentielle sur les cochaînes de \mathcal{G} (resp. \mathcal{G}^*) pour l'action adjointe $x \mapsto ad_x$ (resp. $\xi \mapsto ad_\xi$). On a par définition

$$(\delta\varepsilon)(x, y) = (ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x)(\varepsilon(y)) - (ad_y \otimes 1 + 1 \otimes ad_y)(\varepsilon(x)) - \varepsilon[x, y]$$

d'où,

$$\begin{aligned} \langle \xi \otimes \eta, (\delta\varepsilon)(x, y) \rangle \\ = -\langle \varepsilon(y), ad_x^* \xi \otimes \eta + \xi \otimes ad_x^* \eta \rangle + \langle \varepsilon(x), ad_y^* \xi \otimes \eta + \xi \otimes ad_y^* \eta \rangle - \langle \xi \otimes \eta, \varepsilon[x, y] \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle [\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, [x, y] \rangle + \langle [ad_x^* \xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, y \rangle + \langle [\xi, ad_x^* \eta]_{\mathcal{G}^*}, y \rangle - \langle [ad_y^* \xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, x \rangle \\ + \langle [\xi, ad_y^* \eta]_{\mathcal{G}^*}, x \rangle \\ = -\langle \xi \otimes \eta, (\delta\varepsilon)(x, y) \rangle. \end{aligned}$$

On voit donc que (i) $\delta\varepsilon = 0$ est équivalente à (ii).

D'autre part,

$$\begin{aligned} -\langle [ad_x^* \xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, y \rangle - \langle [\xi, ad_x^* \eta]_{\mathcal{G}^*}, y \rangle + \langle [ad_y^* \xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, x \rangle + \langle [\xi, ad_y^* \eta]_{\mathcal{G}^*}, x \rangle \\ = -\langle ad_x^* \xi, ad_x^* y \rangle + \langle ad_x^* \eta, ad_x^* y \rangle + \langle ad_y^* \xi, ad_y^* x \rangle - \langle ad_y^* \eta, ad_y^* x \rangle \end{aligned}$$

et (ii) est équivalente à (iii).

Aussi,

$$(\delta^* \beta)(\xi, \eta) = (ad_\xi \otimes 1 + 1 \otimes ad_\xi)(\beta(\eta)) - (ad_\eta \otimes 1 + 1 \otimes ad_\eta)(\beta(\xi)) - \beta[\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle (\delta^* \beta)(\xi, \eta), x \otimes y \rangle = -\langle \beta(\eta), ad_\xi^* x \otimes y + x \otimes ad_\xi^* y \rangle \\ + \langle \beta(\xi), ad_\eta^* x \otimes y + x \otimes ad_\eta^* y \rangle - \langle \beta[\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, x \otimes y \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle [\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, [x, y] \rangle + \langle \eta, [ad_\xi^* x, y] + [x, ad_\xi^* y] \rangle - \langle \xi, [ad_\eta^* x, y] + [x, ad_\eta^* y] \rangle \\ = -\langle (\delta^* \beta)(\xi, \eta), x \otimes y \rangle. \end{aligned}$$

Donc (v) $\delta^* \beta = 0$ est équivalente à (iv).

On remarque que dans (iii), les rôles de $[,]$ et $[,]_{\mathcal{G}^*}$ sont symétriques. Vue l'équivalence de (iii) et de (ii) ou (i), on en déduit l'équivalence de (iii) et de (iv) ou (v). ■

Remarquons que cette condition peut encore s'écrire de manières équivalentes

$$(2.11) \quad ad_{\xi}^*[x, y] - [ad_{\xi}^*x, y] - [x, ad_{\xi}^*y] + ad_{ad_{\xi}^*x}^*y - ad_{ad_{\xi}^*y}^*x = 0$$

$$(2.12) \quad ad_x^*[\xi, \eta] - [ad_x^*\xi, \eta] - [\xi, ad_x^*\eta] + ad_{ad_x^*\xi}^*\eta - ad_{ad_x^*\eta}^*\xi = 0.$$

Identifions $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ à $\text{Hom}(\mathcal{G}^*, \mathcal{G})$. Toute application linéaire ε de \mathcal{G} dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ s'identifie alors à une application linéaire $\tilde{\varepsilon}$ de \mathcal{G} dans $\text{Hom}(\mathcal{G}^*, \mathcal{G})$ définie par

$$\langle \xi, \tilde{\varepsilon}(x)(\eta) \rangle = \langle \xi \otimes \eta, \varepsilon(x) \rangle.$$

Si ε est un 1-cocycle de \mathcal{G} dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ pour l'action adjointe, alors $\tilde{\varepsilon}$ est un 1-cocycle de \mathcal{G} dans $\text{Hom}(\mathcal{G}^*, \mathcal{G})$ où la structure de \mathcal{G} -module de $\text{Hom}(\mathcal{G}^*, \mathcal{G})$ est donnée par,

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times \text{Hom}(\mathcal{G}^*, \mathcal{G}) &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}^*, \mathcal{G}) \\ (x, \varphi) &\mapsto ad_x \circ \varphi - \varphi \circ ad_x^*. \end{aligned}$$

Etant données les définitions de $[\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}$ et de ad_{ξ}^* , on voit que

$$(2.13) \quad \tilde{\varepsilon}(x)(\xi) = ad_{\xi}^*x.$$

En effet,

$$\langle \eta, \tilde{\varepsilon}(x)(\xi) \rangle = \langle \eta \otimes \xi, \varepsilon(x) \rangle = \langle [\eta, \xi]_{\mathcal{G}^*}, x \rangle = \langle \eta, ad_{\xi}^*x \rangle.$$

De la même manière, identifions $\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ à $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$. Le 1-cocycle β s'identifie à un 1-cocycle $\tilde{\beta}$ de \mathcal{G}^* à valeurs dans $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ où la structure de \mathcal{G}^* -module de $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^* \times \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*) &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*) \\ (\xi, \psi) &\mapsto ad_{\xi} \circ \psi - \psi \circ ad_{\xi}^*. \end{aligned}$$

On a

$$(2.14) \quad \tilde{\beta}(\xi)(x) = ad_x^*\xi.$$

Avec ces identifications on a

$$(\delta\tilde{\varepsilon})(x, y) = ad_x \circ \tilde{\varepsilon}(y) - \tilde{\varepsilon}(y) \circ ad_x^* - ad_y \circ \tilde{\varepsilon}(x) + \tilde{\varepsilon}(x) \circ ad_y^* - \tilde{\varepsilon}[x, y]$$

et

$$(\delta^* \tilde{\beta})(\xi, \eta) = ad_\xi \circ \tilde{\beta}(\eta) - \tilde{\beta}(\eta) \circ ad_\xi^* - ad_\eta \circ \tilde{\beta}(\xi) + \tilde{\beta}(\xi) \circ ad_\eta^* - \tilde{\beta}[\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}.$$

2.6 Cocycles jacobiens

Définition 2.4 Soient \mathcal{G} une algèbre de Lie et ε une application linéaire de \mathcal{G} dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. ε est dit jacobien si ε est antisymétrique (c'est-à-dire à valeurs dans $\Lambda^2 \mathcal{G}$) et son transposé $\gamma = \varepsilon^t : \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ vérifie l'identité de Jacobi :

$$\oint \gamma(\xi_3 \otimes \gamma(\xi_1 \otimes \xi_2)) = 0$$

où \oint est la somme sur les permutations circulaires des indices 1, 2, 3.

2.7. Remarque

Soit Λ^L le linéarisé de Λ en e . On a vu dans la remarque 2.4 que $\Lambda^L = \varepsilon$. Or Λ^L est un bivecteur de Poisson si et seulement si ε^t définit un crochet de Lie. Donc ε est jacobien si et seulement si Λ^L est un bivecteur de Poisson sur \mathcal{G} .

3. Bigèbres de Lie

3.1 Définitions et propriétés

L'étude de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie-Poisson conduit à :

Définition 3.1 Une structure de bigèbre de Lie sur un espace vectoriel \mathcal{G} est la donnée d'une structure d'algèbre de Lie $[\cdot, \cdot]$ sur \mathcal{G} et d'un 1-cocycle jacobien ε de \mathcal{G} à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ pour l'action adjointe.

Notation : La bigèbre de Lie est notée $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \varepsilon)$.

Soit $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \varepsilon)$ une bigèbre de Lie. Les équivalences précédentes montrent que les crochets d'algèbres de Lie $[\cdot, \cdot]$ sur \mathcal{G} et $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}^*}$ vérifient la propriété de Drinfeld (2.8). Inversement on a :

Proposition 3.1 Soient $[\cdot, \cdot]$ et $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}^*}$ deux crochets d'algèbre de Lie sur \mathcal{G} et \mathcal{G}^* vérifiant la propriété de Drinfeld (2.8). Soit ε la transposée de l'application linéaire de $\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ dans \mathcal{G}^* définissant le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}^*}$. Alors $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \varepsilon)$ est une bigèbre de Lie.

3.2 Remarque

Il résulte de ce qui précède que la définition 3.1 des bigèbres de Lie coïncide avec celle donnée dans [4] [21] utilisant la notion de cogèbre de Lie.

3.3 Bigèbre de Lie duale

Soit $\beta : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ la transposée de l'application linéaire de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ dans \mathcal{G} définissant le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ de \mathcal{G} . Il résulte des équivalences démontrées ci-dessus que

Proposition 3.2 $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \varepsilon)$ est une bigèbre de Lie si et seulement si $(\mathcal{G}^*, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}^*}, \beta)$ est une bigèbre de Lie.

Définition 3.2 On dit que $(\mathcal{G}^*, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}^*}, \beta)$ est la bigèbre de Lie duale de la bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \varepsilon)$.

3.4 Morphismes de bigèbres de Lie

Définition 3.3 Soient $(\mathcal{G}_1, [\cdot, \cdot]_1, \varepsilon_1)$ et $(\mathcal{G}_2, [\cdot, \cdot]_2, \varepsilon_2)$ deux bigèbres de Lie et u une application linéaire de \mathcal{G}_1 dans \mathcal{G}_2 . On dit que u est un morphisme (resp. antimorphisme) de bigèbres de Lie de $(\mathcal{G}_1, [\cdot, \cdot]_1, \varepsilon_1)$ dans $(\mathcal{G}_2, [\cdot, \cdot]_2, \varepsilon_2)$ si u est un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G}_1, [\cdot, \cdot]_1)$ dans $(\mathcal{G}_2, [\cdot, \cdot]_2)$ et u^\dagger est un morphisme (resp. antimorphisme) d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G}_2^*, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}_2^*})$ dans $(\mathcal{G}_1^*, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}_1^*})$.

Proposition 3.3 Soit ψ un morphisme (resp. antimorphisme) de groupes de Lie-Poisson de $(G_1, \{\cdot, \cdot\}_{G_1})$ dans $(G_2, \{\cdot, \cdot\}_{G_2})$. On note $(\mathcal{G}_1, [\cdot, \cdot]_1, \varepsilon_1)$ et $(\mathcal{G}_2, [\cdot, \cdot]_2, \varepsilon_2)$ les bigèbres de Lie associées aux groupes de Lie-Poisson $(G_1, \{\cdot, \cdot\}_{G_1})$ et $(G_2, \{\cdot, \cdot\}_{G_2})$. Soient e_1, e_2 les éléments unités de G_1 et G_2 . Alors l'application linéaire tangente en e_1 à ψ est un morphisme (resp. antimorphisme) de bigèbres de Lie de $(\mathcal{G}_1, [\cdot, \cdot]_1, \varepsilon_1)$ dans $(\mathcal{G}_2, [\cdot, \cdot]_2, \varepsilon_2)$.

■ En effet soit $u = T_{e_1}\psi$. On sait que u est un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G}_1, [\cdot, \cdot]_1)$ dans $(\mathcal{G}_2, [\cdot, \cdot]_2)$. Montrons que u^\dagger est un morphisme (resp. antimorphisme) d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G}_2^*, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}_2^*})$ dans $(\mathcal{G}_1^*, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}_1^*})$. Soient $\xi, \xi' \in \mathcal{G}_2^*$ et f, f' deux fonctions lisses sur G_2 telles que $\xi = d_{e_2}f, \xi' = d_{e_2}f'$. Soit $x \in \mathcal{G}_1$. On a :

$$\begin{aligned} \langle u^\dagger([\xi, \xi']_{\mathcal{G}_2^*}), x \rangle &= \langle [\xi, \xi']_{\mathcal{G}_2^*}, u(x) \rangle = \langle d_{e_2}(\{f, f'\}_{G_2}), T_{e_1}\psi(x) \rangle \\ &= \langle d_{e_1}(\{f, f'\}_{G_2} \circ \psi), x \rangle = \sigma \langle d_{e_1}(\{f \circ \psi, f' \circ \psi\}_{G_1}), x \rangle \end{aligned}$$

où $\sigma = 1$ (resp. -1) si u^t est un morphisme (resp. antimorphisme) de variétés de Poisson. Or

$$\langle d_{e_1}(f \circ \psi), x \rangle = \langle d_{e_2}f \circ T_{e_1}\psi, x \rangle = \langle d_{e_2}f, u(x) \rangle$$

i.e.,

$$u^t(\xi) = d_{e_1}(f \circ \psi).$$

De même, $u^t(\xi') = d_{e_1}(f' \circ \psi)$. On en déduit alors que

$$u^t[\xi, \xi']_{\mathcal{G}_2^*} = \sigma[u^t(\xi), u^t(\xi')]_{\mathcal{G}_1^*}. \quad \blacksquare$$

Remarque. Soient $(\mathcal{G}_1, [\cdot, \cdot]_1, \varepsilon_1)$ et $(\mathcal{G}_2, [\cdot, \cdot]_2, \varepsilon_2)$ deux bigèbres de Lie et u une application linéaire de \mathcal{G}_1 dans \mathcal{G}_2 . u^t est un morphisme (resp. antimorphisme) d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G}_2^*, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}_2^*})$ dans $(\mathcal{G}_1^*, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}_1^*})$ si et seulement si u est un morphisme de Poisson (resp. antimorphisme de Poisson) de la variété de Lie-Poisson $(\mathcal{G}_1, \{ \cdot, \cdot \}_{\mathcal{G}_1})$ définie par ε_1 dans la variété de Lie-Poisson $(\mathcal{G}_2, \{ \cdot, \cdot \}_{\mathcal{G}_2})$ définie par ε_2 .

Donc pour que u soit un morphisme (resp. antimorphisme) de bigèbres de Lie de $(\mathcal{G}_1, [\cdot, \cdot]_1, \varepsilon_1)$ dans $(\mathcal{G}_2, [\cdot, \cdot]_2, \varepsilon_2)$ il faut et il suffit que u soit un morphisme d'algèbres de Lie et un morphisme (resp. antimorphisme) de Poisson de \mathcal{G}_1 dans \mathcal{G}_2 .

Avec cette remarque et la remarque 2.4, la démonstration de la proposition 3.3 est immédiate.

3.5 Structure d'algèbre de Lie de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$

Proposition 3.4 *Soit $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \varepsilon)$ une bigèbre de Lie. Notons \mathcal{K} l'espace vectoriel $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$. Le crochet sur \mathcal{K} défini par*

$$(3.1) \quad [(x, \xi), (y, \eta)]_{\mathcal{K}} = ([x, y] + ad_{\xi}^*y - ad_{\eta}^*x, [\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*} + ad_x^*\eta - ad_y^*\xi)$$

est un crochet d'algèbre de Lie. Réciproquement soient $[\cdot, \cdot]$ et $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}^}$ deux crochets d'algèbres de Lie sur les espaces vectoriels \mathcal{G} et \mathcal{G}^* respectivement, tels que le crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$ défini sur l'espace vectoriel $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$ par (3.1) soit un crochet d'algèbre de Lie. Si ε est la transposée de l'application linéaire définissant le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}^*}$ de \mathcal{G}^* alors, $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \varepsilon)$ est une bigèbre de Lie.*

■ Le crochet $[,]_{\mathcal{K}}$ est bilinéaire et antisymétrique quelle que soit la structure d'algèbre de Lie de \mathcal{G}^* . Le crochet $[,]_{\mathcal{K}}$ induit les crochets de \mathcal{G} et \mathcal{G}^* c'est-à-dire que pour $\xi = \eta = 0$, on a $[(x, 0), (y, 0)]_{\mathcal{K}} = ([x, y], 0)$ et pour $x = y = 0$, on a $[(0, \xi), (0, \eta)]_{\mathcal{K}} = (0, [\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*})$. Ainsi, à cause de la bilinéarité du crochet $[,]_{\mathcal{K}}$ et de l'identité de Jacobi pour les crochets $[,]_{\mathcal{G}}$ et $[,]_{\mathcal{G}^*}$, l'identité de Jacobi pour le crochet $[,]_{\mathcal{K}}$ est équivalente à la nullité des deux expressions suivantes :

$$[(0, \xi), [(x, 0), (y, 0)]]_{\mathcal{K}} + [(x, 0), [(y, 0), (0, \xi)]]_{\mathcal{K}} + [(y, 0), [(0, \xi), (x, 0)]]_{\mathcal{K}}$$

et

$$[(x, 0), [(0, \xi), (0, \eta)]]_{\mathcal{K}} + [(0, \xi), [(0, \eta), (x, 0)]]_{\mathcal{K}} + [(0, \eta), [(x, 0), (0, \xi)]]_{\mathcal{K}}.$$

D'une part

$$\begin{aligned} [(0, \xi), [(x, 0), (y, 0)]]_{\mathcal{K}} &= [(0, \xi), ([x, y], 0)]_{\mathcal{K}} = (ad_{\xi}^*[x, y], -ad_{[x, y]}^*\xi), \\ [(x, 0), [(y, 0), (0, \xi)]]_{\mathcal{K}} &= [(x, 0), (-ad_{\xi}^*y, ad_y^*\xi)]_{\mathcal{K}} \\ &= ([ad_{\xi}^*y, x] - ad_{ad_{\xi}^*y}^*x, ad_x^* \circ ad_y^*\xi), \\ [(y, 0), [(0, \xi), (x, 0)]]_{\mathcal{K}} &= [(y, 0), (ad_{\xi}^*x, -ad_x^*\xi)]_{\mathcal{K}} \\ &= ([y, ad_{\xi}^*x] + ad_{ad_{\xi}^*x}^*y, -ad_y^* \circ ad_x^*\xi) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [(0, \xi), [(x, 0), (y, 0)]]_{\mathcal{K}} + [(x, 0), [(y, 0), (0, \xi)]]_{\mathcal{K}} + [(y, 0), [(0, \xi), (x, 0)]]_{\mathcal{K}} \\ = (ad_{\xi}^*[x, y] - [x, ad_{\xi}^*y] - [ad_{\xi}^*x, y] + ad_{ad_{\xi}^*x}^*y - ad_{ad_{\xi}^*y}^*\xi x, \\ - ad_{[x, y]}^*\xi + ad_x^* \circ ad_y^*\xi - ad_y^* \circ ad_x^*\xi) \\ = (ad_{\xi}^*[x, y] - [x, ad_{\xi}^*y] - [ad_{\xi}^*x, y] + ad_{ad_{\xi}^*x}^*y - ad_{ad_{\xi}^*y}^*\xi x, 0) \end{aligned}$$

puisque $ad^* : \mathcal{G} \rightarrow \text{End}(\mathcal{G}^*)$ est un morphisme de l'algèbre de Lie \mathcal{G} dans l'algèbre de Lie $\text{End}(\mathcal{G}^*)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} [(x, 0), [(0, \xi), (0, \eta)]]_{\mathcal{K}} &= (-ad_{[\xi, \eta]}^*x, ad_x^*[\xi, \eta]) \\ [(0, \xi), [(0, \eta), (x, 0)]]_{\mathcal{K}} &= [(0, \xi), (ad_{\eta}^*x, -ad_x^*\eta)]_{\mathcal{K}} \\ &= (ad_{\xi}^* \circ ad_{\eta}^*x, -[\xi, ad_x^*\eta] - ad_{ad_{\eta}^*x}^*\xi) \\ [(0, \eta), [(x, 0), (0, \xi)]]_{\mathcal{K}} &= [(0, \eta), (-ad_{\xi}^*x, ad_x^*\xi)]_{\mathcal{K}} \\ &= (-ad_{\eta}^* \circ ad_{\xi}^*x, [\eta, ad_x^*\xi] + ad_{ad_{\xi}^*x}^*\eta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & [(x, 0), [(0, \xi), (0, \eta)]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} + [(0, \xi), [(0, \eta), (x, 0)]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} + [(0, \eta), [(x, 0), (0, \xi)]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} \\ &= (0, ad_x^*[\xi, \eta] - [ad_x^*\xi, \eta] - [\xi, ad_x^*\eta] + ad_{ad_x^*x}^*\eta - ad_{ad_x^*x}^*\xi) \end{aligned}$$

parce que $ad^* : \mathcal{G}^* \rightarrow \text{End}(\mathcal{G})$ est aussi un morphisme d'algèbres de Lie.

On voit ainsi qu'il y a équivalence entre l'identité de Jacobi pour le crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$ et la propriété de Drinfeld (2.11) ou (2.12). \blacksquare

3.6 Invariance du produit scalaire

Soit $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ le produit scalaire naturel sur l'espace vectoriel $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$:

$$\langle\langle (x, \xi), (y, \eta) \rangle\rangle = \langle \eta, x \rangle + \langle \xi, y \rangle .$$

Montrons que ce produit scalaire est invariant par le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$ c'est-à-dire que pour tout $(x, \xi) \in \mathcal{K}$,

$$ad_{(x, \xi)}^* \circ \Phi = \Phi \circ ad_{(x, \xi)} ,$$

où $\Phi : \mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{K}^* = \mathcal{G}^* \times \mathcal{G}$ est l'isomorphisme induit par $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$:

$$\langle\langle \Phi(x, \xi), (y, \eta) \rangle\rangle = \langle\langle (x, \xi), (y, \eta) \rangle\rangle .$$

Soient $(x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2) \in \mathcal{K}$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} \langle\langle (ad_{(x, \xi)}^* \circ \Phi)(x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2) \rangle\rangle &= -\langle\langle \Phi(x_1, \xi_1), [(x, \xi), (x_2, \xi_2)]_{\mathcal{K}} \rangle\rangle \\ &= -\langle\langle [\xi, \xi_2]_{\mathcal{G}^*} + ad_x^*\xi_2 - ad_{x_2}^*\xi, x_1 \rangle\rangle - \langle\xi_1, [x, x_2] + ad_x^*x_2 - ad_{x_2}^*x \rangle . \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \langle\langle \Phi \circ ad_{(x, \xi)}(x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \Phi(x_2, \xi_2), [(x, \xi), (x_1, \xi_1)]_{\mathcal{K}} \rangle\rangle \\ &= \langle\xi_2, [x, x_1] + ad_x^*x_1 - ad_{x_1}^*x \rangle + \langle[\xi, \xi_1]_{\mathcal{G}^*} + ad_x^*\xi_1 - ad_{x_1}^*\xi, x_2 \rangle \\ &= -\langle\langle [\xi, \xi_2]_{\mathcal{G}^*} + ad_x^*\xi_2 - ad_{x_2}^*\xi, x_1 \rangle\rangle - \langle\xi_1, [x, x_2] + ad_x^*x_2 - ad_{x_2}^*x \rangle , \end{aligned}$$

ce qui montre que le produit scalaire $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ est invariant par le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$.

Les deux sous-algèbres de Lie \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sont isotropes et l'on a $\mathcal{G}^\perp = \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^{*\perp} = \mathcal{G}^*$.

Proposition 3.5 Soient $(\mathcal{G}, [,])$ et $\mathcal{G}^*, [,]_{\mathcal{G}^*}$ deux algèbres de Lie dont les crochets $[,]$ et $[,]_{\mathcal{G}^*}$ vérifient la condition de Drinfeld (2.9). Le crochet $[,]_{\mathcal{K}}$ est l'unique crochet d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$ induisant les structures d'algèbres de Lie de \mathcal{G} et \mathcal{G}^* et laissant invariant le produit scalaire $\langle\langle , \rangle\rangle$.

■ En effet la condition d'invariance du produit scalaire s'écrit :

$$\langle\langle ([x_1, \xi_1], [x_2, \xi_2]), [x_3, \xi_3] \rangle\rangle + \langle\langle ([x_2, \xi_2], [(x_1, \xi_1), (x_3, \xi_3)]) \rangle\rangle = 0.$$

Posons $[(x, 0), (0, \eta)] = (-B(\eta, x), A(x, \eta))$.

a) Prenons $\xi_1 = \xi_2 = 0, x_3 = 0$. La condition d'invariance s'écrit :

$$\langle\langle ([x_1, x_2], 0), (0, \xi_3) \rangle\rangle + \langle\langle ([x_2, 0], (-B(\xi_3, x_1), A(x_1, \xi_3))) \rangle\rangle = 0,$$

soit
$$\langle \xi_3, [x_1, x_2] \rangle + \langle A(x_1, \xi_3), x_2 \rangle = 0,$$

ou encore
$$A(x_1, \xi_3) = ad_{x_1}^* \xi_3.$$

b) Prenons $x_1 = x_2 = 0, \xi_3 = 0$. La condition s'écrit :

$$\langle\langle (0, [\xi_1, \xi_2]_{\mathcal{G}^*}), (x_3, 0) \rangle\rangle + \langle\langle (0, \xi_2), (B(\xi_1, x_3), -A(x_3, \xi_1)) \rangle\rangle = 0,$$

soit
$$\langle [\xi_1, \xi_2]_{\mathcal{G}^*}, x_3 \rangle + \langle \xi_2, B(\xi_1, x_3) \rangle = 0,$$

ou encore
$$B(\xi_1, x_3) = ad_{\xi_1}^* x_3.$$

Pour que $\langle\langle , \rangle\rangle$ soit invariant, il est donc nécessaire que,

$$[(x, 0), (0, \eta)] = (-ad_{\eta}^* x, ad_x^* \eta).$$

Par bilinéarité,

$$\begin{aligned} [(x, \xi), (y, \eta)] &= [(x, 0) + (0, \xi), (y, 0) + (0, \eta)] \\ &= [(x, y), 0] + (-ad_{\eta}^* x, ad_x^* \eta) - (-ad_{\xi}^* y, ad_y^* \xi) + (0, [\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}). \end{aligned}$$

On en déduit la formule donnant le crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$,

$$[(x, \xi), (y, \eta)]_{\mathcal{K}} = ([x, y] + ad_{\xi}^* y - ad_{\eta}^* x, [\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*} + ad_x^* \eta - ad_y^* \xi). \quad \blacksquare$$

3.7 Triplets de Manin [5]

Définition 3.4 Soit \mathcal{P} une algèbre de Lie et $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ un produit scalaire invariant sur \mathcal{P} . On considère \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , deux sous-algèbres de Lie isotropes de \mathcal{P} telles que \mathcal{P} soit la somme directe des deux sous-espaces vectoriels \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . On dit que $(\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ est un triplet de Manin.

Si $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \varepsilon)$ est une bigèbre de Lie, $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ est un triplet de Manin. Inversement soit $(\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ un triplet de Manin. L'application $(0, \xi_2) \in \mathcal{P}_2 \mapsto \hat{\xi}_2 \in \mathcal{P}_1^*$ où, pour $x_1 \in \mathcal{P}_1$, $\langle\langle \hat{\xi}_2, x_1 \rangle\rangle = \langle\langle (0, \xi_2), (x_1, 0) \rangle\rangle$, est un isomorphisme de \mathcal{P}_2 sur \mathcal{P}_1^* . Puisque \mathcal{P} est la somme directe des deux sous-espaces vectoriels isotropes \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 le produit scalaire $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ s'écrit :

$$\langle\langle (x, \xi), (y, \eta) \rangle\rangle = \langle\langle (x, 0) + (0, \xi), (y, 0) + (0, \eta) \rangle\rangle = \langle\hat{\eta}, x\rangle + \langle\hat{\xi}, y\rangle.$$

\mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 étant deux sous-algèbres de Lie de \mathcal{P} , et le produit scalaire $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ étant invariant, \mathcal{P}_1 est donc munie d'une structure de bigèbre de Lie d'après les propositions 3.4 et 3.5 (et \mathcal{P}_2 est isomorphe à la bigèbre de Lie duale de \mathcal{P}_1).

Dans le paragraphe suivant, nous allons considérer plus généralement le cas d'une structure d'algèbre de Lie sur le produit de deux algèbres de Lie \mathcal{G} et \mathcal{H} pas nécessairement en dualité.

4. Structure bicroisée d'algèbre de Lie

4.1 Algèbres de Lie bicroisées

Soient \mathcal{G} et \mathcal{H} deux algèbres de Lie dont les crochets sont notés $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}}$ et $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{H}}$ ou simplement $[\cdot, \cdot]$ quand il n'y a pas de confusion possible. A quelles conditions peut-on munir l'espace vectoriel $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ d'une structure d'algèbre de Lie telle que \mathcal{G} et \mathcal{H} soient des sous-algèbres de Lie de \mathcal{K} ? Supposons qu'un crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$ satisfasse à ces conditions. Il existe alors des applications bilinéaires

$$A : \mathcal{G} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

$$B : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

telles que

$$[x, \xi]_{\mathcal{K}} = (-B(\xi, x), A(x, \xi)) .$$

(On a identifié x et $(x, 0)$, ξ et $(0, \xi)$). L'identité de Jacobi pour $[\ ,]_{\mathcal{K}}$ est équivalente aux deux conditions :

$$\begin{aligned} [x, [\xi, \eta]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} + [\xi, [\eta, x]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} + [\eta, [x, \xi]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} &= 0 \\ [\xi, [x, y]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} + [x, [y, \xi]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} + [y, [\xi, x]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} &= 0 \end{aligned}$$

qui sont équivalentes aux quatres conditions

- (1) $A([x, y], \xi) = A(x, A(y, \xi)) - A(y, A(x, \xi))$
- (2) $B(\xi, [x, y]) = B(A(y, \xi), x) + [B(\xi, x), y] - [B(\xi, y), x] - B(A(x, \xi), y)$
- (3) $B([\xi, \eta], x) = B(\xi, B(\eta, x)) - B(\eta, B(\xi, x))$
- (4) $A(x, [\xi, \eta]) = A(B(\eta, x), \xi) + [A(x, \xi), \eta] - [A(x, \eta), \xi] - A(B(\xi, x), \eta)$

La première exprime que l'application A considérée comme une application linéaire de \mathcal{G} dans $\text{End}(\mathcal{H})$ est une représentation de l'algèbre de Lie \mathcal{G} dans l'espace vectoriel \mathcal{H} ; la 3ème de même exprime que B est une représentation de l'algèbre de Lie \mathcal{H} dans l'espace vectoriel \mathcal{G} . La 2ème exprime que B , considérée comme une application linéaire de \mathcal{G} dans $\text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, est un 1-cocycle où la structure de \mathcal{G} -module de $\text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G}) &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \\ (x, \varphi) &\mapsto ad_x \circ \varphi - \varphi \circ A_x ; \end{aligned}$$

La 4ème condition exprime de même que A , considérée comme une application linéaire de \mathcal{H} dans $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, est un 1-cocycle où la structure de \mathcal{H} -module de $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \\ (\xi, \psi) &\mapsto ad_{\xi} \circ \psi - \psi \circ B_{\xi} . \end{aligned}$$

Inversement :

Théorème 4.1 *Soient \mathcal{G} et \mathcal{H} deux algèbres de Lie, $A : \mathcal{G} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ et $B : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ des applications bilinéaires définissant des représentations de \mathcal{G} dans \mathcal{H} et de \mathcal{H} dans \mathcal{G} respectivement. Soit $[\ ,]_{\mathcal{K}}$ le crochet bilinéaire anti-symétrique sur l'espace vectoriel $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ défini par*

$$[x, \xi]_{\mathcal{K}} = (-B(\xi, x), A(x, \xi)) .$$

Alors

$$(4.1) \quad [(x, \xi), (y, \eta)]_{\mathcal{K}} = ([x, y] + B(\xi, y) - B(\eta, x), [\xi, \eta] + A(x, \eta) - A(y, \xi)),$$

et l'identité de Jacobi pour $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$ est vérifiée si et seulement si les applications A et B sont des 1-cocycles respectivement de \mathcal{H} dans $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ pour la représentation B et de \mathcal{G} dans $\text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ pour la représentation A .

■ D'après les définitions, on a :

$$\begin{aligned} (\delta A)(\xi, \eta) &= ad_{\xi} \circ A_{\eta} - A_{\eta} \circ B_{\xi} - ad_{\eta} \circ A_{\xi} + A_{\xi} \circ B_{\eta} - A([\xi, \eta]) \\ (\delta B)(x, y) &= ad_x \circ B_y - B_y \circ A_x - ad_y \circ B_x + B_x \circ A_y - B([x, y]). \end{aligned}$$

Le calcul montre que

$$\begin{aligned} [x, [\eta, \xi]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} + [\eta, [\xi, x]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} + [\xi, [x, y]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} &= (0, -(\delta A)(\xi, \eta)(x)) \\ [\xi, [x, y]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} + [x, [y, \xi]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} + [y, [\xi, x]_{\mathcal{K}}]_{\mathcal{K}} &= ((\delta B)(x, y)(\xi), 0). \end{aligned}$$

D'où le théorème. ■

Définition 4.1 Soient \mathcal{G} et \mathcal{H} deux algèbres de Lie, $A : \mathcal{G} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $B : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ des applications bilinéaires vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4). La structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ définie par le crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$ (4.1) est dite structure d'algèbre de Lie bicroisée définie par A et B (en anglais "twilled extension structure").

Remarquons que si $B = 0$, la condition (4) sur A se réduit à :

$$A(x, [\xi, \eta]) = [A(x, \xi), \eta] + [\xi, A(x, \eta)],$$

i.e., A_x est une dérivation de \mathcal{H} pour tout $x \in \mathcal{G}$.

De même si $A = 0$, B vérifie (2) si et seulement si B_{ξ} est une dérivation de l'algèbre de Lie \mathcal{G} pour tout $\xi \in \mathcal{H}$. Donc les structures d'algèbres de Lie bicroisées définies par une représentation A ou B (l'autre étant nulle) sont les produits semi-directs de \mathcal{G} par \mathcal{H} ou de \mathcal{H} par \mathcal{G} .

4.2 Cas de deux algèbres de Lie en dualité

Soient \mathcal{G} et \mathcal{H} deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps \mathbf{K} et supposons qu'il existe une application bilinéaire :

$$b : \mathcal{G} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{K}$$

telle que $b(x, \xi) = 0$ pour tout x implique que $\xi = 0$ et $b(x, \xi) = 0$ pour tout ξ implique que $x = 0$. Alors \mathcal{H} à isomorphe à \mathcal{G}^* et \mathcal{G} est isomorphe à \mathcal{H}^* , par

$$\xi \in \mathcal{H} \mapsto \hat{\xi} \in \mathcal{G}^*, \quad \langle \hat{\xi}, x \rangle = b(x, \xi),$$

$$x \in \mathcal{G} \mapsto \hat{x} \in \mathcal{H}^*, \quad \langle \hat{x}, \xi \rangle = b(x, \xi).$$

On identifie donc \mathcal{H} et \mathcal{G}^* .

Supposons que \mathcal{G} et \mathcal{H} soient des algèbres de Lie pour les crochets $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}}$ et $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{H}}$ définis par des applications linéaires $\alpha : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ et $\gamma : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. On note β et ε les transposées respectives de ces applications. Soient $A : x \rightarrow ad_x^*$ et $B : \xi \rightarrow ad_{\xi}^*$ les actions coadjointes de \mathcal{G} sur \mathcal{H} et de \mathcal{H} sur \mathcal{G} . Alors A et B sont des représentations et avec les notations du paragraphe 2, on a

$$A = \tilde{\beta} \quad \text{et} \quad B = \tilde{\varepsilon}.$$

A définit un 1-cocycle de \mathcal{H} à valeurs dans $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ pour la représentation B si et seulement si β est un 1-cocycle de \mathcal{H} dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ pour l'action adjointe de \mathcal{H} et de même B définit un 1-cocycle de \mathcal{G} à valeurs dans $\text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ pour la représentation A si et seulement si ε est un 1-cocycle de \mathcal{G} dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ pour l'action adjointe de \mathcal{G} . Or on a vu dans le paragraphe 2 que si l'une de ces conditions est vérifiée, la seconde l'est aussi. Donc dans ce cas, on obtient

Théorème 4.2 *Soient \mathcal{G} et \mathcal{H} deux algèbres de Lie en dualité. Soit $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$ le crochet sur $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ défini par :*

$$[x, \xi]_{\mathcal{K}} = (-ad_{\xi}^* x, ad_x^* \xi).$$

Alors le crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$ est donné par (3.1) et l'identité de Jacobi pour $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$ est vérifiée si et seulement si la condition de Drinfeld (2.9) est satisfaite.

On obtient donc la proposition 3.4 comme corollaire de ce théorème et l'on voit que le crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$, défini sur $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$ par (3.1), est un crochet d'algèbre de Lie bicroisée. Ainsi, il est équivalent de se donner sur \mathcal{G} une structure de bigèbre de Lie ou sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$ une structure d'algèbre de Lie bicroisée définie par les représentations coadjointes de \mathcal{G} et de \mathcal{G}^* .

Définition 4.2 Soient \mathcal{G} et \mathcal{H} deux algèbres de Lie en dualité. On dit qu'une structure d'algèbre de Lie bicroisée sur $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ est une structure bicroisée duale si elle est définie par les représentations coadjointes de \mathcal{G} dans \mathcal{H} et de \mathcal{H} dans \mathcal{G} .

Avec cette définition, on obtient donc

Théorème 4.3 A tout triplet de Manin $(\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ correspond une structure d'extension duale sur $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ et inversement si $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ est muni d'une structure bicroisée duale. $(\mathcal{K}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ est un triplet de Manin.

CHAPITRE II

Bigèbres de Lie exactes et équations de Yang-Baxter

Dans tout ce chapitre on pose $\mathcal{G}^* = \mathcal{H}$. Tous les résultats peuvent se généraliser à un espace vectoriel \mathcal{H} en dualité avec \mathcal{G} telle que \mathcal{H} soit isomorphe à \mathcal{G}^* .

On étudie les bigèbres de Lie définies par un 1-cobord (1-cocycle exact) ε de \mathcal{G} à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. Soit $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ tel que $\varepsilon = \delta r$. On décompose r en sa partie symétrique s et sa partie antisymétrique a . On montre que ε est jacobien si et seulement si s et le crochet de Schouten $[a, a]$ de sa partie antisymétrique a sont ad -invariants. On s'intéresse au cas des *bigèbres de Lie triangulaires*, des *bigèbres de Lie-Sklyanin* et des *bigèbres de Lie quasitriangulaires*. Les bigèbres de Lie quasitriangulaires sont définies par l'annulation de la courbure de Schouten K^r de r . Cette annulation est équivalente à l'équation de Yang-Baxter modifiée. Après avoir fait cette remarque, on étudie le double d'une bigèbre de Lie et on termine le chapitre en donnant des exemples de bigèbres de Lie. Nous déterminons toutes les structures de bigèbre de Lie sur une algèbre de Lie de dimension 2 et nous étudions des potentiels quasitriangulaires sur $sl(2, \mathbb{C})$ et sur $gl(2, \mathbb{C})$ ainsi que les structures d'algèbres de Lie associées sur les doubles de ces bigèbres de Lie.

1. Cocycles jacobiens et potentiels jacobiens

On pose $\mathcal{G}^* = \mathcal{H}$. Soit $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ que l'on identifie à $\text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. On cherche les conditions sur r pour que le 1-cocycle $\varepsilon = \delta r$ soit jacobien. Explicitons le crochet sur \mathcal{H} défini par δr , que nous noterons $[,]^r$. Par définition, pour $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$,

$$\delta r(x) = (ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x)r, \quad x \in \mathcal{G},$$

ou, lorsqu'on considère r comme l'élément noté encore r de $\text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ défini par

$$\langle \xi, r(\eta) \rangle = r(\xi \otimes \eta), \quad \xi, \eta \in \mathcal{G}^*,$$

$$\delta r(x) = ad_x \circ r - r \circ ad_x^*.$$

D'où

$$\begin{aligned} & \langle (\delta r)^t(\xi \otimes \eta), x \rangle \\ &= \langle \xi, (ad_x \circ r - r \circ ad_x^*)(\eta) \rangle \\ &= -\langle ad_x^* \xi, r(\eta) \rangle - \langle ad_x^* \eta, r^t(\xi) \rangle \\ &= \langle ad_{r(\eta)}^* \xi, x \rangle + \langle ad_{r^t(\xi)}^* \eta, x \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(1.1) \quad [\xi, \eta]^r = ad_{r(\eta)}^* \xi + ad_{r(\xi)}^* \eta .$$

Définition 1.1 a) On appelle potentiel sur \mathcal{G} tout élément r de l'espace vectoriel $\text{Hom}(\mathcal{G}^*, \mathcal{G})$.

b) On dira que $r \in \text{Hom}(\mathcal{G}^*, \mathcal{G})$ est un potentiel jacobien si le crochet $[,]^r$ est antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi.

Vue la définition 2.4 (chapitre I), r est un potentiel jacobien si et seulement si δr est un 1-cocycle jacobien.

2. Condition pour que $[,]^r$ soit antisymétrique

Soit $r = a + s$ où a désigne la partie antisymétrique de r et s sa partie symétrique. On a alors :

$$[\xi, \eta]^r = -ad_{a(\xi)}^* \eta + ad_{s(\xi)}^* \eta + ad_{s(\eta)}^* \xi + ad_{a(\eta)}^* \xi .$$

Proposition 2.1 Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $[,]^r$ est antisymétrique

ii) $\delta s = 0$

iii) $\delta r = \delta a$

iv) $ad_{s(\xi)}^* \eta + ad_{s(\eta)}^* \xi = 0$

v) $ad_x \circ s = s \circ ad_x^*$

vi) s est *ad*-invariant.

■ En effet, $[,]^r$ est antisymétrique si et seulement si pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned} & (ad_{a(\eta)}^* \xi - ad_{a(\xi)}^* \eta) + (ad_{s(\xi)}^* \eta + ad_{s(\eta)}^* \xi) \\ & = -(ad_{a(\xi)}^* \eta - ad_{a(\eta)}^* \xi) - (ad_{s(\eta)}^* \xi + ad_{s(\xi)}^* \eta) , \end{aligned}$$

i.e.,
$$ad_{s(\xi)}^* \eta + ad_{s(\eta)}^* \xi = 0 .$$

Donc (i) est équivalent à (iv).

De plus (iv) est équivalent à (v) car $ad_{s(\xi)}^* \eta + ad_{s(\eta)}^* \xi = 0$ si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{G}$,

$$\langle ad_{s(\xi)}^* \eta, x \rangle + \langle ad_{s(\eta)}^* \xi, x \rangle = 0,$$

i.e.,
$$\langle \eta, ad_x s(\xi) - s \circ ad_x^* \xi \rangle = 0,$$

soit
$$ad_x \circ s = s \circ ad_x^* .$$

Les autres équivalences sont claires. ■

Lorsque l'une des conditions de la proposition 2.1 est vérifiée, on a :

$$[\xi, \eta]^r = ad_{a(\eta)}^* \xi - ad_{a(\xi)}^* \eta,$$

i.e.,

$$(2.1) \quad [\xi, \eta]^r = [\xi, \eta]^a .$$

3. Condition pour que $[\ ,]^a$ vérifie l'identité de Jacobi

Nous rappelons d'abord la définition suivante [8] :

Définition 3.1 (*Crochet et courbure de Schouten*). Soient \mathcal{G} et \mathcal{F} deux algèbres de Lie, A une représentation de \mathcal{G} dans l'espace vectoriel \mathcal{F} telle que pour tout $x \in \mathcal{G}$, A_x soit une dérivation de l'algèbre de Lie \mathcal{F} . Soit r une application linéaire de \mathcal{F} dans \mathcal{G} . On note $[r, r]$ et l'on appelle crochet de Schouten de r l'application bilinéaire antisymétrique de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans \mathcal{G} définie par

$$(3.1) \quad [r, r](\xi, \eta) = r(A_{r(\xi)} \eta - A_{r(\eta)} \xi) - [r(\xi), r(\eta)].$$

On appelle courbure de Schouten de r l'application bilinéaire antisymétrique K^r de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans \mathcal{G} définie par

$$(3.2) \quad K^r(\xi, \eta) = [r, r](\xi, \eta) + r([\xi, \eta]).$$

Remarquons que dans le cas où \mathcal{F} est une algèbre de Lie abélienne, on a alors $K^r = [r, r]$.

Si de plus $\mathcal{F} = \mathcal{G}^*$, A est la représentation coadjointe et r est antisymétrique, à l'application bilinéaire antisymétrique $[r, r]$ est associée la forme trilinéaire sur \mathcal{G}^* encore notée $[r, r]$ définie par

$$[r, r](\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \langle \xi_3, [r, r](\xi_1, \xi_2) \rangle.$$

La forme trilinéaire $[r, r]$ est alors antisymétrique et vérifie

$$[r, r](\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\oint \langle \xi_3, [r(\xi_1), r(\xi_2)] \rangle,$$

et elle se réduit au crochet de Schouten usuel de deux éléments de $\Lambda^2 \mathcal{G}$ (voir [9] [15]).

Notation Soit r un élément antisymétrique de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. On note $ad_x[r, r]$ l'élément $(ad_x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes ad_x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes ad_x)([r, r])$ de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$.

Proposition 3.1 Le crochet $[\ ,]^a$ vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si, pour tout x élément de \mathcal{G} ,

$$ad_x[a, a] = 0.$$

La preuve résulte du lemme suivant

Lemme 3.1 Pour tous ξ_1, ξ_2, ξ_3 éléments de \mathcal{H} et x élément de \mathcal{G} ,

$$\oint \langle [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]^a]^a, x \rangle = -(ad_x[a, a])(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

■ En effet,

$$ad_x[a, a](\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\oint [a, a](ad_x^* \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Aussi, pour tous ξ, η éléments de \mathcal{H} et x élément de \mathcal{G} ,

$$\langle [\xi, \eta]^a, x \rangle = -\langle \xi, [a(\eta), x] \rangle + \langle \eta, [a(\xi), x] \rangle.$$

D'où,

$$\begin{aligned} & \langle [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]^a]^a, x \rangle \\ &= -\langle \xi_3, [a[\xi_1, \xi_2]^a, x] \rangle + \langle [\xi_1, \xi_2]^a, [a(\xi_3), x] \rangle \\ &= -\langle \xi_3, [a[\xi_1, \xi_2]^a, x] \rangle - \langle \xi_1, [a(\xi_2), [a(\xi_3), x]] \rangle + \langle \xi_2, [a(\xi_1), [a(\xi_3), x]] \rangle \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} & \langle [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]^a]^a, x \rangle \\ &= \langle ad_x^* \xi_3, a(ad_{a(\xi_1)}^* \xi_2 - ad_{a(\xi_2)}^* \xi_1) \rangle - \langle \xi_1, [a(\xi_2), [a(\xi_3), x]] \rangle + \langle \xi_2, [a(\xi_1), [a(\xi_3), x]] \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \oint \langle [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]^a]^a, x \rangle &= \oint \langle ad_x^* \xi_3, a(ad_{a(\xi_1)}^* \xi_2 - ad_{a(\xi_2)}^* \xi_1) \rangle \\ &\quad - \langle \xi_1, [a(\xi_2), [a(\xi_3), x]] \rangle + \langle \xi_2, [a(\xi_1), [a(\xi_3), x]] \rangle \\ &\quad - \langle \xi_2, [a(\xi_3), [a(\xi_1), x]] \rangle + \langle \xi_3, [a(\xi_2), [a(\xi_1), x]] \rangle \\ &\quad - \langle \xi_3, [a(\xi_1), [a(\xi_2), x]] \rangle + \langle \xi_1, [a(\xi_3), [a(\xi_2), x]] \rangle. \end{aligned}$$

On utilise l'identité de Jacobi dans \mathcal{G} et le deuxième membre de l'égalité s'écrit :

$$\oint \langle ad_x^* \xi_3, a(ad_{a(\xi_1)}^* \xi_2 - ad_{a(\xi_2)}^* \xi_1) \rangle + \oint \langle ad_x^* \xi_3, [a(\xi_2), a(\xi_1)] \rangle,$$

i.e.,

$$\oint \langle ad_x^* \xi_3, a(ad_{a(\xi_1)}^* \xi_2 - ad_{a(\xi_2)}^* \xi_1) - [a(\xi_1), a(\xi_2)] \rangle. \quad \blacksquare$$

En résumé on a

Proposition 3.2 *Le 1-cocycle exact $\varepsilon = \delta r$ de \mathcal{G} à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ est jacobien si et seulement si la partie symétrique s de r et le crochet de Schouten $[a, a]$ de sa partie antisymétrique a sont ad-invariants.*

Définition 3.2. *Une bigèbre de Lie exacte est une bigèbre de Lie munie d'un potentiel jacobien.*

En particulier certaines bigèbres de Lie exactes sont définies par des potentiels jacobiens antisymétriques.

Définition 3.3 (Voir [7]). *Un élément antisymétrique r de $\text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ tel que $ad_x[r, r] = 0$ pour tout $x \in \mathcal{G}$ est dit solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée. Lorsque r est antisymétrique et vérifie $[r, r] = 0$ on dit que r est une solution de l'équation de Yang-Baxter classique.*

Il est clair que toute solution de l'équation de Yang-Baxter classique est une solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée. On s'intéresse aux trois cas suivants :

1) r est antisymétrique et solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée; les bigèbres obtenues sont dites *bigèbres de Lie-Sklyanin*[8].

2) r est antisymétrique et solution de l'équation de Yang-Baxter classique; les bigèbres obtenues sont dites *triangulaires* [5][8] (car l'équation de Yang-Baxter classique est aussi appelée équation du triangle).

3) Cas où $r = a + s$ et s est inversible. On transporte alors le crochet d'algèbre de Lie de \mathcal{G} sur \mathcal{H} par l'isomorphisme s . Plus précisément on définit sur \mathcal{H} un crochet d'algèbre de Lie $[\cdot, \cdot]_s$ par

$$[\xi, \eta]_s = -2s^{-1}[s(\xi), s(\eta)].$$

Proposition 3.3 *Lorsque s est ad-invariant, ad_x^* est une dérivation de l'algèbre de Lie $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot]_s)$ pour tout $x \in \mathcal{G}$, l'application bilinéaire $[s, s]$ de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans \mathcal{G} vérifie*

$$(3.3) \quad [s, s](\xi, \eta) = [s(\xi), s(\eta)], \quad \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

et $[s, s]$ est ad-invariant.

■ En effet, en utilisant l'ad-invariance de s et la propriété de dérivation de l'application linéaire ad_x , on obtient

$$\begin{aligned} & ad_x^*([\xi, \eta]_s) \\ &= -2ad_x^* \circ s^{-1}[s(\xi), s(\eta)] \\ &= -2s^{-1} \circ ad_x[s(\xi), s(\eta)] \\ &= -2s^{-1}([ad_x \circ s(\xi), s(\eta)] + [s(\xi), ad_x \circ s(\eta)]) \\ &= -2s^{-1}([s \circ ad_x^* \xi, s(\eta)] + [s(\xi), s \circ ad_x^* \eta]) \\ &= [ad_x^* \xi, \eta]_s + [\xi, ad_x^* \eta]_s, \end{aligned}$$

d'où ad_x^* est une dérivation de l'algèbre de Lie $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot]_s)$.

Aussi

$$\begin{aligned} [s, s](\xi, \eta) &= s(ad_{s(\xi)}^* \eta - ad_{s(\eta)}^* \xi) - [s(\xi), s(\eta)] \\ &= [s(\xi), s(\eta)] - [s(\eta), s(\xi)] - [s(\xi), s(\eta)] \\ &= [s(\xi), s(\eta)]. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
& (ad_x \circ [s, s])(\xi, \eta) \\
&= ad_x[s(\xi), s(\eta)] \\
&= [ad_x \circ s(\xi), s(\eta)] + [s(\xi), ad_x \circ s(\eta)] \\
&= [s \circ ad_x^* \xi, s(\eta)] + [s(\xi), s \circ ad_x^* \eta] \\
&= [s, s](ad_x^* \xi, \eta) + [s, s](\xi, ad_x^* \eta)
\end{aligned}$$

i.e.,

$$ad_x \circ [s, s] = [s, s] \circ (ad_x^* \otimes 1 + 1 \otimes ad_x^*),$$

soit $[s, s]$ est ad -invariant. ■

Définition 3.4 *Un potentiel est dit régulier si sa partie symétrique est inversible et ad -invariante.*

Lemme 3.2 *Soit r un potentiel régulier. Le crochet $[,]_s$ sur \mathcal{H} vérifie*

$$(3.4) \quad [\xi, \eta]_s = -2ad_{s(\xi)}^* \eta = ad_{s(\eta)}^* \xi - ad_{s(\xi)}^* \eta.$$

En effet

$$\begin{aligned}
[\xi, \eta]_s &= -2s^{-1}[s(\xi), s(\eta)] \\
&= -2s^{-1}ad_{s(\xi)} s(\eta) \\
&= -2ad_{s(\xi)}^* \eta = ad_{s(\eta)}^* \xi - ad_{s(\xi)}^* \eta.
\end{aligned}$$
■

Proposition 3.4 *Soit r un potentiel régulier. Lorsque \mathcal{H} est muni du crochet $[,]_s$, la courbure de Schouten K^r de r vérifie*

$$(3.5) \quad K^r = [a, a] - [s, s].$$

■ En effet

$$\begin{aligned}
K^r(\xi, \eta) &= r(ad_{r(\xi)}^* \eta - ad_{r(\eta)}^* \xi) - [r(\xi), r(\eta)] + r([\xi, \eta]_s) \\
&= r(ad_{r(\xi)}^* \eta - ad_{r(\eta)}^* \xi) - [r(\xi), r(\eta)] - 2r \circ ad_{s(\xi)}^* \eta \\
&= r(ad_{a(\xi)}^* \eta - ad_{a(\eta)}^* \xi) - [a(\xi), a(\eta)] - [s(\xi), s(\eta)] \\
&\quad + r(ad_{s(\xi)}^* \eta - ad_{s(\eta)}^* \xi - 2ad_{s(\xi)}^* \eta) \\
&\quad + (s \circ ad_{a(\xi)}^* \eta - [a(\xi), s(\eta)]) - (s \circ ad_{a(\eta)}^* \xi - [a(\eta), s(\xi)]) \\
&= [a, a](\xi, \eta) - [s(\xi), s(\eta)].
\end{aligned}$$
■

On voit donc que lorsque s est ad -invariant, K^r est ad -invariant si et seulement si le crochet de Schouten $[a, a]$ de a est ad -invariant.

Remarquons que K^r peut être défini à l'aide des formules (3.2) et (3.4) pour s ad -invariant non nécessairement inversible et que la démonstration de l'équivalence de l' ad -invariance de $[a, a]$ et de K^r n'utilise pas l'inversibilité de s . D'où

Proposition 3.5 *Le potentiel r est jacobien si et seulement si s et K^r sont ad -invariants.*

Remarquons que si r est un potentiel jacobien, r^t l'est aussi d'après la formule (3.5), valable pour s ad -invariant quelconque.

Définition 3.5 *Soit r un potentiel régulier tel que $K^r = 0$. On dit que r est un potentiel quasitriangulaire et que la bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, [,], \delta r)$ est une bigèbre de Lie quasitriangulaire [5] [8].*

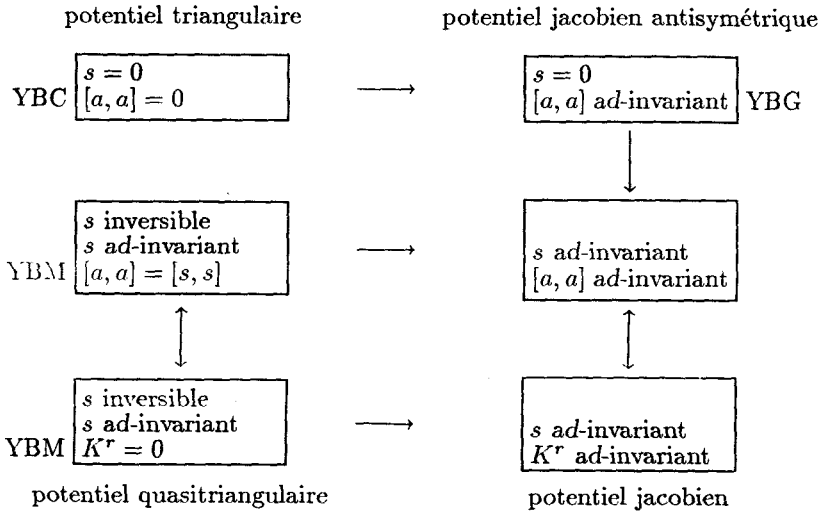
Il résulte de ce qui précède que tout potentiel quasitriangulaire est un potentiel jacobien. On montrera au chapitre III que ce cas correspond aux solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée. (Voir définition 1.2 du chapitre III).

On a le tableau récapitulatif suivant :

YBC signifie équation de Yang-Baxter classique.

YBG signifie équation de Yang-Baxter généralisée.

YBM signifie équation de Yang-Baxter modifiée.



Remarquons que lorsque $r : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ est un potentiel triangulaire ou quasitriangulaire, on a pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

$$[r(\xi), r(\eta)] = r(ad_{r(\xi)}^* \eta - ad_{r(\eta)}^* \xi + [\xi, \eta]_s).$$

L'image de r , $\text{Im } r$, est donc alors une sous-algèbre de Lie de $(\mathcal{G}, [,])$.

4. Double d'une bigèbre de Lie

A chaque bigèbre de Lie est associée une bigèbre de Lie quasitriangulaire appelée son *double* que nous allons maintenant définir. On obtient ainsi des exemples de bigèbres quasitriangulaires.

Soit $(\mathcal{G}, [,], \varepsilon)$ une bigèbre de Lie. On pose $\mathcal{G}^* = \mathcal{H}$ et on note \mathcal{K} l'espace vectoriel $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$. La structure bicroisée d'algèbre de Lie de \mathcal{K} est donnée par

$$\begin{aligned} & [(x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)]_{\mathcal{K}} \\ &= ([x_1, x_2] + ad_{\xi_1}^* x_2 - ad_{\xi_2}^* x_1, [\xi_1, \xi_2] + ad_{x_1}^* \xi_2 - ad_{x_2}^* \xi_1). \end{aligned}$$

1) Déterminons $ad_{(x,0)}^*$ et $ad_{(0,\xi)}^*$ pour $x \in \mathcal{G}$ et $\xi \in \mathcal{H}$. Soient $(\eta, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}$ et $(z, \zeta) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}$. On a $[(x, 0), (z, \zeta)]_{\mathcal{K}} = ([x, z] - ad_{\zeta}^* x, ad_x^* \zeta)$, d'où

$$\begin{aligned} & \langle (\eta, y), [(x, 0), (z, \zeta)]_{\mathcal{K}} \rangle \\ &= \langle \eta, [x, z] - ad_{\zeta}^* x \rangle + \langle ad_x^* \zeta, y \rangle \\ &= -\langle ad_x^* \eta, z \rangle + \langle \zeta, ad_{\eta}^* x - [x, y] \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(4.1) \quad ad_{(x,0)}^*(\eta, y) = (ad_x^* \eta, [x, y] - ad_\eta^* x).$$

On montre de la même manière que

$$(4.2) \quad ad_{(0,\xi)}^*(\eta, y) = ([\xi, \eta] - ad_y^* \xi, ad_\xi^* y).$$

2) Considérons l'algèbre de Lie $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}})$ et l'application linéaire m de $\mathcal{K}^* = \mathcal{H} \times \mathcal{G}$ dans \mathcal{K} définie par

$$(4.3) \quad m(\xi, x) = (x, 0).$$

Notons A la partie antisymétrique de m et S sa partie symétrique. On a alors

$$S(\xi, x) = \frac{1}{2}(x, \xi) \quad \text{et} \quad A(\xi, x) = \frac{1}{2}(x, -\xi).$$

S est inversible et $2S^{-1}$ est l'isomorphisme induit par le produit scalaire naturel $\langle\langle, \rangle\rangle$ sur $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ défini par la dualité. Donc, d'après la proposition 3.5 du chapitre I, S est ad -invariant pour le crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$.

Proposition 4.1 $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}, \delta m)$ est une bigèbre de Lie quasitriangulaire.

■ Montrons en effet que la courbure de Schouten K^m de m est identiquement nulle. On a

$$\begin{aligned} K^m((\xi, x), (\eta, y)) &= m(ad_{m(\xi, x)}^*(\eta, y) - ad_{m(\eta, y)}^*(\xi, x)) - [m(\xi, x), m(\eta, y)]_{\mathcal{K}} \\ &\quad + m([\xi, x], (\eta, y)]_S. \end{aligned}$$

Or d'après (3.4),

$$[(\xi, x), (\eta, y)]_S = ad_{S(\xi, x)}^*(\eta, y) - ad_{S(\eta, y)}^*(\xi, x).$$

d'où, en utilisant l' ad -invariance de S ,

$$\begin{aligned} K^m((\xi, x), (\eta, y)) &= -(m(ad_{m(\xi, x)}^*(\eta, y) + ad_{m(\eta, y)}^*(\xi, x)) + [m(\xi, x), m(\eta, y)]_{\mathcal{K}}). \end{aligned}$$

D'une part,

$$[m(\xi, x), m(\eta, y)]_{\mathcal{K}} = [(x, 0), (y, 0)]_{\mathcal{K}} = ([x, y], 0).$$

D'autre part,

$$ad_{m^*(\xi, x)}^*(\eta, y) = ad_{(0, \xi)}^*(\eta, y) = ([\xi, \eta] - ad_y^* \xi, ad_\xi^* y),$$

d'où

$$m(ad_{m^*(\xi, x)}^*(\eta, y)) = (ad_\xi^* y, 0).$$

Enfin,

$$ad_{m(\eta, y)}^*(\xi, x) = ad_{(y, 0)}^*(\xi, x) = (ad_y^* \xi, [y, x] - ad_\xi^* y),$$

d'où

$$m(ad_{m(\eta, y)}^*(\xi, x)) = ([y, x] - ad_\xi^* y, 0).$$

On obtient donc $K^m = 0$. ■

Définition 4.1 *On dit que la bigèbre de Lie quasitriangulaire $(\mathcal{K}, [,]_{\mathcal{K}}, \delta m)$ est le double de la bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, [,]_{\mathcal{G}}, \varepsilon)$.*

On a donc montré qu'à toute structure de bigèbre de Lie sur \mathcal{G} est associée canoniquement une structure de bigèbre de Lie quasitriangulaire sur $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$.

Explicitons la structure d'algèbre de Lie de \mathcal{K}^* . On sait qu'elle est définie par

$$[(\xi, x), (\eta, y)]^m = ad_{A(\eta, y)}^*(\xi, x) - ad_{A(\xi, x)}^*(\eta, y),$$

où A désigne la partie antisymétrique de m , $A(\xi, x) = \frac{1}{2}(x, -\xi)$. Par définition

$$-ad_{A(\xi, x)}^*(\eta, y) = \frac{1}{2}(ad_{(0, \xi)}^*(\eta, y) - ad_{(x, 0)}^*(\eta, y)).$$

Donc, d'après (4.1) et (4.2),

$$-ad_{A(\xi, x)}^*(\eta, y) = \frac{1}{2}([\xi, \eta] - ad_y^* \xi - ad_x^* \eta, [y, x] + ad_\eta^* x + ad_\xi^* y).$$

D'où

$$(4.4) \quad [(\xi, x), (\eta, y)]^m = ([\xi, \eta], -[x, y]).$$

Ainsi $(\mathcal{K}^*, [,]^m)$ est le produit direct de l'algèbre de Lie $(\mathcal{G}^*, [,]_{\mathcal{G}^*})$ et de l'algèbre de Lie opposée à \mathcal{G} .

Proposition 4.2 Soit $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \varepsilon)$ une bigèbre de Lie et soit $(\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{H}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}, \delta m)$ son double. L'injection i de \mathcal{G} dans \mathcal{K} est un morphisme de bigèbres de Lie et l'injection j de \mathcal{H} dans \mathcal{K} est un antimorphisme.

■ En effet, par définition,

$$i(x) = (x, 0) \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{G}$$

et

$$j(\xi) = (0, \xi) \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

D'où

$$i^t(\xi, x) = \xi,$$

$$j^t(\xi, x) = x.$$

Il est clair, d'après la définition du crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$ et (4.4) que

$$i([x, y]) = [i(x), i(y)]_{\mathcal{K}},$$

$$i^t([(x, y), (\eta, \zeta)]^m) = [i^t(x, y), i^t(\eta, \zeta)],$$

et que

$$j([\xi, \eta]) = [j(\xi), j(\eta)]_{\mathcal{K}},$$

$$j^t([(x, y), (\eta, \zeta)]^m) = -[j^t(x, y), j^t(\eta, \zeta)]$$

d'où la proposition. ■

5. Exemples

5.1 Remarques générales

Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie. Soit $Z_{jac}^1(\mathcal{G})$ le sous-ensemble de $Z^1(\mathcal{G}, \wedge^2 \mathcal{G})$ formé des 1-cocycles jacobiens. $Z_{jac}^1(\mathcal{G})$ est stable par homothéties mais n'est pas en général un sous-espace vectoriel de $Z^1(\mathcal{G}, \wedge^2 \mathcal{G})$.

Soit $\mathcal{P}_{jac}(\mathcal{G})$ le sous-ensemble de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ formé des potentiels jacobiens de \mathcal{G} et $\hat{\mathcal{P}}_{jac}(\mathcal{G})$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}_{jac}(\mathcal{G})$ formé des potentiels jacobiens anti-symétriques.

Enfin posons $B_{jac}^1(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{P}_{jac} \mathcal{G})$ et remarquons que

$$B_{jac}^1(\mathcal{G}) = \delta(\hat{\mathcal{P}}_{jac} \mathcal{G}).$$

On a donc en général les inclusions

$$\begin{cases} \delta(\widehat{\mathcal{P}}_{jac}\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{P}_{jac}\mathcal{G}) = B_{jac}^1(\mathcal{G}) \subset Z_{jac}^1(\mathcal{G}) \subset Z^1(\mathcal{G}, \wedge^2\mathcal{G}) \subset \text{Hom}(\mathcal{G}, \wedge^2\mathcal{G}), \\ \widehat{\mathcal{P}}_{jac}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{P}_{jac}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \end{cases}$$

Dans le cas où \mathcal{G} est abélienne, $B_{jac}^1(\mathcal{G}) = \{0\}$ et

$$Z^1(\mathcal{G}, \wedge^2\mathcal{G}) = \text{Hom}(\mathcal{G}, \wedge^2\mathcal{G}).$$

5.2 Cas d'une algèbre de Lie de dimension deux

Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie de dimension deux. Montrons que toute structure d'algèbre de Lie sur \mathcal{G}^* définit sur \mathcal{G} une structure de bigèbre de Lie.

En effet si V est un espace vectoriel de dimension deux, toute application bilinéaire antisymétrique de $V \times V$ dans V définit une structure d'algèbre de Lie sur V . Considérons donc une application bilinéaire antisymétrique γ de $\mathcal{G}^* \times \mathcal{G}^*$ dans \mathcal{G}^* et notons ε le transposé de γ . Montrons que ε est un 1-cocycle. Il y a deux cas

(i) \mathcal{G} est une algèbre de Lie abélienne ou ε est identiquement nulle. Dans ce cas, ε est évidemment un 1-cocycle.

(ii) \mathcal{G} est non abélienne et l'application linéaire ε est non identiquement nulle. Il existe alors une base (e_1, e_2) de \mathcal{G} telle que $[e_1, e_2] = e_2$ car si (f_1, f_2) est une base de \mathcal{G} telle que $[f_1, f_2] = af_1 + bf_2$ avec par exemple $b \neq 0$, la base (e_1, e_2) où $e_1 = (\frac{1}{b})f_1$ et $e_2 = (\frac{a}{b})f_1 + f_2$ vérifie $[e_1, e_2] = e_2$. Posons $\varepsilon(e_1) = \lambda e_1 \wedge e_2$ et $\varepsilon(e_2) = \mu e_1 \wedge e_2$. Montrons d'abord que si $\mu = 0$, ε est un 1-cocycle. En effet,

$$\begin{aligned} & \langle e_1^* \wedge e_2^*, \delta\varepsilon(e_1, e_2) \rangle \\ &= -\langle e_1^* \wedge e_2^*, ad_{e_2}(\varepsilon(e_1)) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarquons que si α désigne l'application bilinéaire définissant la structure d'algèbre de Lie de \mathcal{G} , l'application $\varepsilon \circ \alpha$ est identiquement nulle. On dit dans ce cas que le 1-cocycle ε est *dégénéré*.

Supposons $\mu \neq 0$. Soit (j_1, j_2) la base de \mathcal{G} telle que

$$j_1 = e_1 - \frac{\lambda}{\mu} e_2.$$

$$j_2 = e_2 .$$

Alors $[j_1, j_2] = j_2$, $\varepsilon(j_1) = 0$ et $\varepsilon(j_2) = \mu j_1 \wedge j_2$. Evaluons

$$\begin{aligned} & \langle j_1^* \wedge j_2^*, \delta \varepsilon(j_1, j_2) \rangle \\ &= \langle j_1^* \wedge j_2^*, \text{ad}_{j_1}(\varepsilon(j_2)) - \mu j_1 \wedge j_2 \rangle \\ &= 0 . \end{aligned}$$

ε est donc un 1-cocycle. L'application $\varepsilon \circ \alpha$ est non identiquement nulle dans ce cas et le 1-cocycle ε est donc non dégénéré.

En conclusion dans les deux cas, ε est un 1-cocycle.

Etudions les potentiels jacobiens sur \mathcal{G} . Pour un espace vectoriel V de dimension deux, $\wedge^3 V$ est nul. Donc pour tout élément antisymétrique a de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$, $[a, a]$ est nul.

Soit $r = a + s \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. Dans le cas où $s = 0$, r définit un potentiel jacobien sur \mathcal{G} . Supposons que $s \neq 0$. Il y a deux cas

(i) \mathcal{G} est une algèbre de Lie abélienne. Dans ce cas, tout élément symétrique $s \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ est ad -invariant et tout élément $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ définit un potentiel jacobien. Mais évidemment le cobord d'un tel potentiel est nul et il n'existe pas de structure de bigèbre de Lie non triviale sur \mathcal{G} .

(ii) \mathcal{G} est une algèbre de Lie non abélienne. Soit s un élément symétrique de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. s est ad -invariant si et seulement si s est identiquement nul.

En effet, soit $s = \begin{pmatrix} u & w \\ w & u \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} ad_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{ implique } ad_{e_1}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \\ ad_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{ implique } ad_{e_2}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

D'où

$$s \circ ad_{e_1}^* - ad_{e_1} \circ s = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ -w & -2v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s \circ ad_{e_2}^* - ad_{e_2} \circ s = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & 2w \end{pmatrix} .$$

s est donc ad -invariant si et seulement si $s = 0$. Les potentiels jacobiens sont donc les éléments de $\wedge^2 \mathcal{G}$. La structure d'algèbre de Lie exacte sur \mathcal{G}^* définie par

$a = \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ -\nu & 0 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$[c_1^*, c_2^*]_{\mathcal{G}^*} = ad_{a(e_2)}^* c_1^* - ad_{a(e_1)}^* c_2^* = -\nu c_1^* .$$

On voit donc que tous les cobords jacobiens sur \mathcal{G} sont dégénérés. Plus précisément, sur une algèbre de Lie non abélienne de dimension 2, un 1-cocycle jacobien est exact si et seulement s'il est dégénéré.

On note x (resp. ξ) l'élément $(x, 0)$ (resp. $(0, \xi)$) de $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$. Evaluons la structure d'algèbre de Lie de \mathcal{K} dans le cas non dégénéré. On obtient :

$$\begin{aligned} [j_1, j_2]_{\mathcal{K}} &= j_2, & [j_1, j_1^*]_{\mathcal{K}} &= 0, & [j_1, j_2^*]_{\mathcal{K}} &= -j_2^* \\ [j_2, j_1^*]_{\mathcal{K}} &= \mu j_2, & [j_2, j_2^*]_{\mathcal{K}} &= -\mu j_1 + j_1^*, \\ [j_1^*, j_2^*]_{\mathcal{K}} &= \mu j_2^*. \end{aligned}$$

Posons $j = \mu j_1 + j_1^*$, $j' = \mu j_1 - j_1^*$. On a alors, au sens du crochet $[\ ,]_{\mathcal{K}}$,

$$ad_j = 0, \quad [j', j_2] = 2\mu j_2, \quad [j', j_2^*] = -2\mu j_2^*, \quad [j_2, j_2^*] = -j'.$$

On en déduit que \mathcal{K} est somme directe de l'idéal abélien engendré par j et de l'algèbre de Lie simple de dimension 3 engendrée par j', j_2, j_2^* qui est isomorphe à $sl(2, \mathbf{R})$ (resp. $sl(2, \mathbf{C})$) dans le cas réel (resp. complexe) par l'isomorphisme

$$j' \mapsto \mu H, \quad j_2 \mapsto X^+, \quad j_2^* \mapsto -\mu X^-$$

où

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La structure d'algèbre de Lie de \mathcal{K}^* étant le produit direct de la structure de \mathcal{G}^* et de la structure opposée de \mathcal{G} , on a, avec les notations du paragraphe 4,

$$[j_1^*, j_2^*]^m = \mu j_2^*, \quad [j_1, j_2]^m = -j_2,$$

les autres crochets étant nuls.

5.3 Cas de $sl(2, \mathbf{C})$.

Soit l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = sl(2, \mathbf{C})$ avec la base (H, X^+, X^-) définie ci-dessus. Considérons l'application r de \mathcal{G}^* dans \mathcal{G} dont la matrice dans la base (H, X^+, X^-) et la base duale est

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient a la partie antisymétrique de r et s sa partie symétrique. On a $s = \frac{1}{2}(r + r^t)$ et $a = \frac{1}{2}(r - r^t)$, d'où

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$ad_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$ad_{X^+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ad_{X^-} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit k la forme de Killing de \mathcal{G} considérée comme une application linéaire de \mathcal{G}^* dans \mathcal{G} . La matrice de k s'écrit

$$k = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire s est inversible et $s^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. On voit que s^{-1} est proportionnelle à k et s est donc ad -invariante. Calculons la courbure de Schouten de r ,

$$K^r(H^*, X^{+*}) = -4X^- + 4X^- = 0,$$

$$K^r(H^*, X^{-*}) = 4X^+ - 4X^+ = 0,$$

$$K^r(X^{+*}, X^{-*}) = 0.$$

En conclusion $K^r = 0$ et r est un potentiel jacobien quasitriangulaire.

La sous-algèbre de Lie $\text{Im } r$ est engendrée par H et X^- .

La structure d'algèbre de Lie de \mathcal{G}^* est donnée par

$$[\xi, \eta]^r = ad_{a(\eta)}^* \xi - ad_{a(\xi)}^* \eta.$$

Des relations

$$a(H^*) = 0, \quad a(X^{+*}) = 2X^-, \quad a(X^{-*}) = -2X^+,$$

on obtient :

$$[H^*, X^{+*}]^r = 2X^{+*}, \quad [H^*, X^{-*}]^r = 2X^{-*}, \quad [X^{+*}, X^{-*}]^r = 0.$$

Déterminons le crochet d'algèbre de Lie de $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$. On a

$$ad_{H^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad ad_{X^{+*}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad_{X^{-*}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

on obtient donc le tableau suivant des crochets de Lie

	H	X^+	X^-	H^*	X^{+*}	X^{-*}
H	0	$2X^+$	$-2X^-$	0	$-2X^{+*}$	$2X^{-*}$
X^+	$-2X^+$	0	H	$2X^+ - X^{-*}$	$-2H + 2H^*$	0
X^-	$2X^-$	$-H$	0	$2X^- + X^{+*}$	0	$-2H - 2H^*$
H^*	0	$-2X^+ + X^{-*}$	$-2X^- - X^{+*}$	0	$2X^{+*}$	$2X^{-*}$
X^{+*}	$2X^{+*}$	$2H - 2H^*$	0	$-2X^{+*}$	0	0
X^{-*}	$-2X^{-*}$	0	$2H + 2H^*$	$-2X^{-*}$	0	0

Posant

$$H_1 = H - H^*, H_2 = H + H^*,$$

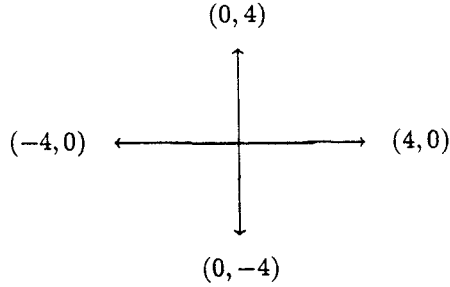
$$X_1^+ = 4X^+ - X^{-*}, X_1^- = X^{+*}, X_2^+ = X^{-*}, X_2^- = -4X^- - X^{+*}$$

on obtient le tableau des crochets de Lie,

	H_1	H_2	X_1^+	X_1^-	X_2^+	X_2^-
H_1	0	0	$4X_1^+$	$-4X_1^-$	0	0
H_2	0	0	0	0	$4X_2^+$	$-4X_2^-$
X_1^+	$-4X_1^+$	0	0	$-8H_1$	0	0
X_1^-	$4X_1^-$	0	$8H_1$	0	0	0
X_2^+	0	$-4X_2^+$	0	0	0	$-8H_2$
X_2^-	0	$4X_2^-$	0	0	$8H_2$	0

H_1, H_2 engendrent une sous-algèbre de Cartan de \mathcal{K} ; les quatre racines sont

$(\pm 4, 0)$ et $(0, \pm 4)$



Donc \mathcal{K} est l'algèbre semi-simple D_2 , isomorphe à $sl(2, \mathbf{C}) \oplus sl(2, \mathbf{C})$.

(Si $\mathcal{G} = sl(2, \mathbf{R})$, \mathcal{K} est une algèbre de Lie isomorphe à $sl(2, \mathbf{R}) \oplus sl(2, \mathbf{R})$).

La structure de \mathcal{K}^* est donnée par,

$$[H^*, X^{\pm*}]^m = 2X^{\pm*},$$

$$[H, X^{\pm}]^m = \mp 2X^{\pm},$$

les autres crochets étant nuls.

5.4 Cas de $gl(2, \mathbf{C})$.

Soit l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = gl(2, \mathbf{C})$ avec la base (e_1, e_2, e_3, e_4) où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons l'application r de \mathcal{G}^* dans \mathcal{G} dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) et la base duale est

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

s est inversible et

$$s^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$ad_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ad_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad_{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$ad_{e_1} \circ s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = s \circ ad_{e_1}^*$$

$$ad_{e_2} \circ s = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = s \circ ad_{e_2}^*$$

$$ad_{e_3} \circ s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = s \circ ad_{e_3}^*$$

$$ad_{e_4} \circ s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = s \circ ad_{e_4}^*.$$

s est donc ad -invariant.

Calculons la courbure K^r de r .

$$K^r(e_1^*, e_2^*) = e_3 - e_3 = 0, \quad K^r(e_1^*, e_3^*) = -e_2 + e_2 = 0,$$

$$K^r(e_1^*, e_4^*) = -[e_1, e_4] = 0, \quad K^r(e_2^*, e_3^*) = 0,$$

$$K^r(e_2^*, e_4^*) = e_3 - e_3 = 0, \quad K^r(e_3^*, e_4^*) = -e_2 + e_2 = 0.$$

En conclusion $K^r = 0$ et r est un potentiel quasitriangulaire.

La sous-algèbre de Lie $\text{Im } r$ est engendrée par e_1, e_2 et e_4 .

On a

$$[e_1^*, e_2^*]^r = e_2^*, \quad [e_1^*, e_3^*]^r = e_3^*, \quad [e_1^*, e_4^*]^r = 0,$$

$$[e_2^*, e_3^*]^r = 0, \quad [e_2^*, e_4^*]^r = e_2^*, \quad [e_3^*, e_4^*]^r = e_3^*,$$

d'où

$$ad_{e_1^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad_{e_2^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ad_{e_3^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad_{e_4^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et l'on obtient le tableau suivant pour le crochet d'algèbre de Lie de $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1^*	e_2^*	e_3^*	e_4^*
e_1	0	$-e_2$	e_3	0	0	e_2^*	$-e_3^*$	0
e_2	e_2	0	$-e_1 + e_4$	$-e_2$	$e_2 + e_3^*$	$-e_1 + e_4$ $-e_1^* + e_4^*$	0	$-e_2 - e_3^*$
e_3	$-e_3$	$e_1 - e_4$	0	e_3	$e_3 - e_2^*$	0	$-e_1 + e_4$ $+e_1^* - e_4^*$	$-e_3 + e_2^*$
e_4	0	e_2	$-e_3$	0	0	$-e_2^*$	e_3^*	0
e_1^*	0	$-e_2 - e_3^*$	$-e_3 + e_2^*$	0	0	e_2^*	e_3^*	0
e_2^*	$-e_2^*$	$e_1 - e_4$ $+e_1^* - e_4^*$	0	e_2^*	$-e_2^*$	0	0	e_2^*
e_3^*	e_3^*	0	$e_1 - e_4$ $-e_1^* + e_4^*$	$-e_3^*$	$-e_3^*$	0	0	e_3^*
e_4^*	0	$e_2 + e_3^*$	$e_3 - e_2^*$	0	0	$-e_2^*$	$-e_3^*$	0

On démontre dans le cas général (voir [8]) que le double d'une bigèbre de Lie quasitriangulaire est isomorphe à un produit semi-direct. On vérifie sur l'exemple ci-dessus que l'application $u : \mathcal{G} \times \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$ définie par :

$$u(x, \xi) = (x - r(\xi), \xi)$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, [,]_{\mathcal{K}})$ sur $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, [,]^{(\circ)})$ où

$$[(x, \xi), (y, \eta)]^{(\circ)} = ([x, y], 2ad_{s(\xi)}^* \eta + ad_x^* \eta - ad_y^* \xi).$$

En effet on a le tableau suivant pour le crochet $[,]^{(\circ)}$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1^*	e_2^*	e_3^*	e_4^*
e_1	0	$-e_2$	e_3	0	0	e_2^*	$-e_3^*$	0
e_2	e_2	0	$-e_1 + e_4$	$-e_2$	e_3^*	$-e_1^* + e_4^*$	0	$-e_3^*$
e_3	$-e_3$	$e_1 - e_4$	0	e_3	$-e_2^*$	0	$e_1^* - e_4^*$	e_2^*
e_4	0	e_2	$-e_3$	0	0	$-e_2^*$	e_3^*	0
e_1^*	0	$-e_3^*$	e_2^*	0	0	$2e_2^*$	$-2e_3^*$	0
e_2^*	$-e_2^*$	$e_1^* - e_4^*$	0	e_2^*	$-2e_2^*$	0	$2e_1^* - 2e_4^*$	$2e_2^*$
e_3^*	e_3^*	0	$-e_1^* + e_4^*$	$-e_3^*$	$2e_3^*$	$-2e_1^* + 2e_4^*$	0	$-2e_3^*$
e_4^*	0	e_3^*	$-e_2^*$	0	0	$-2e_2^*$	$2e_3^*$	0

et la vérification est claire.

CHAPITRE III

Bigèbres de Lie quasitriangulaires et algèbres de Lie-Semenov

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions d'une algèbre de Lie double et d'une algèbre de Lie-Semenov [17], nous définissons les morphismes d'algèbres de Lie-Semenov et nous montrons que la catégorie \mathcal{C} des bigèbres de Lie quasitriangulaires et la catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ des algèbres de Lie-Semenov sont isomorphes par un foncteur que nous noterons F . Comme précédemment, $(\mathcal{G}, [,])$ désigne une algèbre de Lie. L'image par F d'une bigèbre de Lie quasitriangulaire $g = (\mathcal{G}, [,], \delta r)$ est notée \tilde{g} .

Nous rappelons enfin la définition [17] du carré d'une algèbre de Lie-Semenov et nous montrons que l'image réciproque par F , $^{(2)}g$, du carré $^{(2)}\tilde{g}$ de l'algèbre de Lie-Semenov \tilde{g} est anti-isomorphe au double $g^{(2)}$ de la bigèbre de Lie g .

1. Equation de Yang-Baxter modifiée

Définition 1.1 Soit $(\mathcal{G}, [,])$ une algèbre de Lie et R un endomorphisme de \mathcal{G} tel que le crochet sur \mathcal{G} noté $[,]_R$ et défini par

$$(1.1) \quad [x, y]_R = \frac{1}{2}([Rx, y] + [x, Ry])$$

soit un crochet d'algèbre de Lie. On dit alors que R est une matrice R classique et que l'algèbre de Lie $(\mathcal{G}, [,]_R)$ est une algèbre de Lie double.

On note \mathcal{G}_R l'algèbre de Lie $(\mathcal{G}, [,]_R)$.

Il est clair que le crochet $[,]_R$ est bilinéaire et antisymétrique pour tout endomorphisme R de \mathcal{G} . Examinons quelle est la condition sur R pour qu'il satisfasse l'identité de Jacobi.

Proposition 1.1 Le crochet $[,]_R$ vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si

$$(1.2) \quad \oint [x_1, R([Rx_2, x_3] + [x_2, Rx_3]) - [Rx_2, Rx_3]] = 0$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{G}$.

■ On utilise l'identité de Jacobi dans \mathcal{G} et la preuve est immédiate. ■

Nous donnerons au chapitre IV une interprétation de la condition (1.2).

On déduit de la proposition 1.1 le corollaire suivant :

Corollaire 1.1 Une condition suffisante pour que le crochet $[,]_R$ vérifie l'identité de Jacobi est

$$(1.3) \quad R([Rx, y] + [x, Ry]) - [Rx, Ry] = [x, y]$$

pour tous x, y dans \mathcal{G} .

Définition 1.2 Un endomorphisme R de \mathcal{G} qui vérifie la relation (1.3) est dit une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée.

Une classe importante de solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée est obtenue comme suit [16]. Soient \mathcal{G}_+ et \mathcal{G}_- deux sous-algèbres de Lie de \mathcal{G} telles que \mathcal{G} soit la somme directe des deux sous-espaces vectoriels \mathcal{G}_+ et \mathcal{G}_- . On note P_+ (resp. P_-) la projection sur \mathcal{G}_+ (resp. \mathcal{G}_-) parallèlement à \mathcal{G}_- (resp. \mathcal{G}_+).

Proposition 1.2 Soit R l'endomorphisme de \mathcal{G} défini par

$$(1.4) \quad R = P_+ - P_- .$$

Alors R est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée.

■ Tout $x \in \mathcal{G}$ s'écrit de manière unique $x = x_+ - x_-$ où $x_+ = P_+x \in \mathcal{G}_+$ et $x_- = P_-x \in \mathcal{G}_-$. Soient x, y dans \mathcal{G} . Alors $Rx = x_+ + x_-$ et l'on a :

$$\begin{aligned} [Rx, y] + [x, Ry] &= [x_+ + x_-, y] + [x, y_+ + y_-] \\ &= 2([x_+, y_+] - [x_-, y_-]) . \end{aligned}$$

Comme \mathcal{G}_+ et \mathcal{G}_- sont des sous-algèbres de Lie de \mathcal{G} ,

$$R([Rx, y] + [x, Ry]) = 2([x_+, y_+] + [x_-, y_-])$$

et

$$\begin{aligned} R([Rx, y] + [x, Ry]) - [Rx, Ry] &= 2([x_+, y_+] + [x_-, y_-]) - [x_+ + x_-, y_+ + y_-] \\ &= [x, y] \end{aligned}$$

d'où la proposition. ■

Soit \mathcal{G}_R une algèbre de Lie double. On note I l'application identique de \mathcal{G} et R_{\pm} les endomorphismes de \mathcal{G} définis par

$$R_{\pm} = \frac{1}{2}(R \pm I) .$$

On a

Proposition 1.3 *Si R est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée, les applications R_+ et R_- sont des morphismes d'algèbres de Lie de \mathcal{G}_R dans \mathcal{G} .*

■ En effet soient $x, y \in \mathcal{G}$. On a :

$$\begin{aligned} R_+([x, y]_R) &= \frac{1}{2}(R([x, y]_R) + [x, y]_R) \\ &= \frac{1}{4}(R([Rx, y] + [x, Ry]) + [Rx, y] + [x, Ry]). \end{aligned}$$

Comme R vérifie (1.3), on obtient

$$\begin{aligned} R_+([x, y]_R) &= \frac{1}{4}([Rx, Ry] + [x, y] + [Rx, y] + [x, Ry]) \\ &= [R_+(x), R_+(y)]. \end{aligned}$$

On montre de la même manière que

$$R_-([x, y]_R) = [R_-(x), R_-(y)]. \quad \blacksquare$$

Introduisons la notation, pour x dans \mathcal{G} ,

$$x_+ = R_+(x),$$

$$x_- = R_-(x).$$

Alors la propriété précédente s'énonce, pour x, y dans \mathcal{G} ,

$$(1.5) \quad ([x, y]_R)_\pm = [x_\pm, y_\pm].$$

Etant donné que $R_+ - R_- = I$, on en déduit la formule

$$(1.6) \quad [x, y]_R = [x_+, y_+] - [x_-, y_-].$$

Remarquons que dans le cas où $R = P_+ - P_-$, alors $R_+ = P_+$ et $R_- = -P_-$. La notation x_\pm introduite ici coïncide bien avec celle que nous avons introduite plus haut.

Soit \mathcal{G} un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{G} . On suppose qu'il existe sur \mathcal{G} une forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante pour l'action adjointe Ad de \mathcal{G} . Ainsi, \mathcal{G} est une algèbre de Lie orthogonale au sens de Medina [14]. On note ϕ l'isomorphisme de \mathcal{G} sur \mathcal{G}^* induit par cette forme.

Définition 1.3 On dit que $(\mathcal{G}, [\ , \], R, \phi)$ est une algèbre de Lie-Semenov-Tian-Shansky (en abrégé algèbre de Lie-Semenov) si $(\mathcal{G}, [\ , \], R)$ est une algèbre de Lie double telle que R soit une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée antisymétrique par rapport à ϕ .

Ces algèbres ont été définies par Semenov-Tian-Shansky [17]. Dans [17], une telle algèbre de Lie double a été appelée algèbre de Lie-Baxter.

2. Bigèbres de Lie quasitriangulaires et algèbres de Lie-Semenov

Proposition 2.1 Toute structure de bigèbre de Lie quasitriangulaire sur \mathcal{G} détermine une structure d'algèbre de Lie-Semenov sur \mathcal{G} et inversement.

■ Soit $(\mathcal{G}, [\ , \], \varepsilon)$ une bigèbre de Lie quasitriangulaire. Par définition $\varepsilon = \delta r$ où r est un potentiel jacobien, dont la partie symétrique s est ad-invariante et inversible et dont la courbure est nulle, c'est-à-dire vérifie $K^r = 0$. On note a la partie antisymétrique de r . L'endomorphisme R de \mathcal{G} défini par

$$R = a \circ s^{-1}$$

vérifie l'équation de Yang-Baxter modifiée. En effet, soient $\xi \in \mathcal{G}^*$, $\eta \in \mathcal{G}^*$ et posons $s\xi = x$, $s\eta = y$. En utilisant l'ad-invariance de s , on obtient

$$\begin{aligned} K^r(\xi, \eta) &= a(ad_{a\xi}^* \eta - ad_{a\eta}^* \xi) - [a\xi, a\eta] - [s\xi, s\eta] \\ &= R(ad_{a\xi} s\eta - ad_{a\eta} s\xi) - [(R \circ s)(\xi), (R \circ s)(\eta)] - [s\xi, s\eta] \\ &= R([Rx, y] + [x, Ry]) - [Rx, Ry] - [x, y]. \end{aligned}$$

Puisque s est bijective, $K^r = 0$ si et seulement si R est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée.

De plus, il est clair que l'antisymétrie de a implique que R est antisymétrique pour le produit scalaire défini par s . Donc si r est un potentiel quasitriangulaire, $(\mathcal{G}, [\ , \], R, s^{-1})$ est une algèbre de Lie-Semenov.

On notera $F(g)$ ou \tilde{g} l'algèbre de Lie-Semenov ainsi associée à la bigèbre quasitriangulaire g .

Inversement supposons que $(\mathcal{G}, [\ , \], R, \phi)$ est une algèbre de Lie-Semenov où $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^*$ est l'isomorphisme induit par le produit scalaire invariant sur \mathcal{G} . Posons

$$s = \phi^{-1} \quad \text{et} \quad a = R \circ \phi^{-1},$$

$$r = a + s .$$

Par construction s est inversible et ad -invariante. Aussi, d'après le calcul ci-dessus, puisque R vérifie l'équation de Yang-Baxter modifiée, la courbure K^r est nulle. En conclusion $(\mathcal{G}, [,], \delta r)$ est une bigèbre quasitriangulaire. ■

Proposition 2.2 *Le crochet de Lie $[,]_R$ sur \mathcal{G} et le crochet de Lie $[,]_{\mathcal{G}^*}$ sur \mathcal{G}^* défini par le potentiel $r = R \circ \phi^{-1} + \phi^{-1}$ sont liés par la relation*

$$(2.1) \quad [x, y]_R = -\frac{1}{2}s[s^{-1}(x), s^{-1}(y)]_{\mathcal{G}^*} .$$

■ En effet en utilisant l' ad -invariance de $s = \phi^{-1}$ on obtient pour $x = s\xi$ et $y = s\eta$,

$$\begin{aligned} [x, y]_R &= \frac{1}{2}([Rx, y] + [x, Ry]) \\ &= \frac{1}{2}s(ad_{a(\xi)}^*\eta - ad_{a(\eta)}^*\xi) \\ &= -\frac{1}{2}s[s^{-1}(x), s^{-1}(y)]_{\mathcal{G}^*} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Introduisons la

Définition 2.1 *(Morphismes d'algèbres de Lie-Semenov) Soient $(\mathcal{G}_1, [,]_1, R_1, \phi_1)$ et $(\mathcal{G}_2, [,]_2, R_2, \phi_2)$ deux algèbres de Lie-Semenov et ψ une application linéaire de \mathcal{G}_1 dans \mathcal{G}_2 . On dira que ψ est un morphisme (resp. antimorphisme) d'algèbres de Lie-Semenov si ψ est un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G}_1, [,]_1)$ dans $(\mathcal{G}_2, [,]_2)$ et $\phi_1^{-1} \circ \psi \circ \phi_2$ est un morphisme (resp. antimorphisme) d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G}_2, [,]_{R_2})$ dans $(\mathcal{G}_1, [,]_{R_1})$.*

Notation : On note \mathcal{C} la catégorie des bigèbres de Lie quasitriangulaires et $\tilde{\mathcal{C}}$ la catégorie des algèbres de Lie-Semenov avec les morphismes précédemment définis.

Proposition 2.3 *Les catégories \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ sont isomorphes.*

■ D'après la proposition 2.1, on peut associer à toute bigèbre de Lie quasitriangulaire g une algèbre de Lie-Semenov \tilde{g} et inversement. Soient alors $(\mathcal{G}_1, [,]_1, \varepsilon_1)$, $(\mathcal{G}_2, [,]_2, \varepsilon_2)$ deux bigèbres de Lie quasitriangulaires et soit ψ une application linéaire de \mathcal{G}_1 dans \mathcal{G}_2 . Soient $\tilde{g}_1 = (\mathcal{G}_1, [,]_1, R_1, s_1^{-1})$ et $\tilde{g}_2 = (\mathcal{G}_2, [,]_2, R_2, s_2^{-1})$ les algèbres de Lie-Semenov associées à $(\mathcal{G}_1, [,]_1, \varepsilon_1)$ et $(\mathcal{G}_2, [,]_2, \varepsilon_2)$. Montrons

que ψ est un morphisme de bigèbres de Lie de $(\mathcal{G}_1, [,]_1, \varepsilon_1)$ dans $(\mathcal{G}_2, [,]_2, \varepsilon_2)$ si et seulement si ψ est un morphisme d'algèbres de Lie-Semenov de \tilde{g}_1 dans \tilde{g}_2 . Il suffit de montrer à cet effet que $\psi^t : (\mathcal{G}_2^*, [,]_{\mathcal{G}_2^*}) \rightarrow (\mathcal{G}_1^*, [,]_{\mathcal{G}_1^*})$ est un morphisme d'algèbres de Lie si et seulement si $s_1 \circ \psi^t \circ s_2^{-1}$ est un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G}_2, [,]_{R_2})$ dans $(\mathcal{G}_1, [,]_{R_1})$. Ceci résulte du diagramme commutatif suivant de morphismes d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}_2^*, [,]_{\mathcal{G}_2^*}) & \xrightarrow{\psi^t} & (\mathcal{G}_1^*, [,]_{\mathcal{G}_1^*}) \\ -2s_2 \downarrow \left[\begin{array}{c} \uparrow \\ -\frac{1}{2}s_2^{-1} \end{array} \right. & & -2s_1 \downarrow \left[\begin{array}{c} \uparrow \\ -\frac{1}{2}s_1^{-1} \end{array} \right. \\ (\mathcal{G}_2, [,]_{R_2}) & \xrightarrow{s_1 \circ \psi^t \circ s_2^{-1}} & (\mathcal{G}_1, [,]_{R_1}) . \end{array}$$

Plus précisément, d'après (2.1), pour $x_2, y_2 \in \mathcal{G}_2$, d'une part,

$$\psi^t[s_2^{-1}(x_2), s_2^{-1}(y_2)]_{\mathcal{G}_2^*} = -2\psi^t \circ s_2^{-1}[x_2, y_2]_{R_2} ,$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} & [\psi^t \circ s_2^{-1}(x_2), \psi^t \circ s_2^{-1}(y_2)]_{\mathcal{G}_1^*} \\ &= [s_1^{-1} \circ s_1 \circ \psi^t \circ s_2^{-1}(x_2), s_1^{-1} \circ s_1 \circ \psi^t \circ s_2^{-1}(y_2)]_{\mathcal{G}_1^*} \\ &= -2s_1^{-1}[s_1 \circ \psi^t \circ s_2^{-1}(x_2), s_1 \circ \psi^t \circ s_2^{-1}(y_2)]_{R_1} . \end{aligned}$$

Donc si $\xi_2 = s_2^{-1}(x_2)$, $\eta_2 = s_2^{-1}(y_2)$,

$$\begin{aligned} & \psi^t[\xi_2, \eta_2]_{\mathcal{G}_2^*} - [\psi^t(\xi_2), \psi^t(\eta_2)]_{\mathcal{G}_1^*} \\ &= -2s_1^{-1}(s_1 \circ \psi^t \circ s_2^{-1}[x_2, y_2]_{R_2} - [s_1 \circ \psi^t \circ s_2^{-1}(x_2), s_1 \circ \psi^t \circ s_2^{-1}(y_2)]_{R_1}) , \end{aligned}$$

d'où la propriété.

Considérons maintenant le foncteur F de \mathcal{C} dans $\tilde{\mathcal{C}}$ qui à toute bigèbre de Lie quasitriangulaire g associe l'algèbre de Lie-Semenov $F(g) = \tilde{g}$ et à tout morphisme ψ de bigèbres de Lie quasitriangulaires de g_1 dans g_2 associe $F(\psi) = \psi$, morphisme d'algèbres de Lie-Semenov de \tilde{g}_1 dans \tilde{g}_2 . La proposition 2.1 et le calcul précédent montrent que F définit un isomorphisme de \mathcal{C} sur $\tilde{\mathcal{C}}$. ■

3. Double d'une bigèbre de Lie quasitriangulaire

3.1. Considérons une bigèbre de Lie quasitriangulaire $(\mathcal{G}, [,], \varepsilon)$, $\varepsilon = \delta r$, où $r \in \text{Hom}(\mathcal{G}^*, \mathcal{G})$ est un potentiel quasitriangulaire. On pose $\mathcal{K} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$. Soit $g^{(2)} = (\mathcal{K}, [,], \delta m)$ le double de $(\mathcal{G}, [,], \varepsilon)$. On a pour $\xi, \eta \in \mathcal{G}^*, x \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} \langle \eta, ad_{\xi}^* x \rangle &= -\langle [\xi, \eta]_{\mathcal{G}^*}, x \rangle \\ &= -\langle [\xi, \eta]^r, x \rangle \\ &= -\langle ad_{a(\eta)}^* \xi - ad_{a(\xi)}^* \eta, x \rangle \\ &= \langle \xi, ad_{a(\eta)} x \rangle - \langle \eta, ad_{a(\xi)} x \rangle \\ &= -\langle \eta, a(ad_x^* \xi) + ad_{a(\xi)} x \rangle, \end{aligned}$$

i.e., $ad_{\xi}^* x = (ad_x a - a \circ ad_x^*) \xi$.

Le crochet d'algèbre de Lie bicroisée sur \mathcal{K} s'écrit alors

$$(3.1) \quad [(x, \xi), (y, \eta)]_{\mathcal{K}} = ([x, y] - ([a(\xi), y] + [x, a(\eta)])) + a(ad_x^* \eta - ad_y^* \xi), ad_{x-a(\xi)}^* \eta - ad_{y-a(\eta)}^* \xi.$$

3.2. L'algèbre de Lie-Semenov associée à la bigèbre de Lie quasitriangulaire $g^{(2)} = (\mathcal{K}, [,], \delta m)$ est $\widetilde{g^{(2)}} = (\mathcal{K}, [,], M, S^{-1})$ où l'endomorphisme M de \mathcal{K} est défini par $M = A \circ S^{-1}$ où A désigne la partie antisymétrique de m et S partie symétrique. On a donc :

$$M(x, \xi) = (x, -\xi) \quad \text{pour } (x, \xi) \in \mathcal{K}.$$

Puisque m est un potentiel quasitriangulaire, M est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée. Le crochet $[,]_M$ sur \mathcal{K} est donné par,

$$(3.2) \quad [(x, \xi), (y, \eta)]_M = ([x, y], -ad_{a(\eta)}^* \xi + ad_{a(\xi)}^* \eta).$$

En effet,

$$\begin{aligned} [(x, \xi), (y, \eta)]_M &= \frac{1}{2}([M(x, \xi), (y, \eta)]_{\mathcal{K}} + [(x, \xi), M(y, \eta)]_{\mathcal{K}}) \\ &= \frac{1}{2}([(x, -\xi), (y, \eta)]_{\mathcal{K}} + [(x, \xi), (y, -\eta)]_{\mathcal{K}}), \end{aligned}$$

$$[(x, -\xi), (y, \eta)]_{\mathcal{K}} = ([x, y] - ad_{\xi}^* y - ad_{\eta}^* x, [\eta, \xi]^r + ad_x^* \eta + ad_y^* \xi),$$

$$[(x, \xi), (y, -\eta)]_{\mathcal{K}} = ([x, y] + ad_{\xi}^* y + ad_{\eta}^* x, [\eta, \xi]^r - ad_x^* \eta - ad_y^* \xi).$$

Ainsi,

$$(3.3) \quad [(x, \xi), (y, \eta)]_M = ([x, y], -[\xi, \eta]^r)$$

d'où la formule (3.2).

L'algèbre de Lie $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, [,]_M)$ est donc le produit direct de \mathcal{G} et de l'algèbre de Lie opposée à $(\mathcal{G}^*, [,]^r)$.

3.3 On peut considérer d'autre part la bijection linéaire $I \times s$ de \mathcal{K} sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Le transport du crochet $[,]_{\mathcal{K}}$ par cet isomorphisme donne un crochet $[,]_{((R))}$ sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ tel que :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & [(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_{((R))} \\ &= ([x_1, x_2] + R([x_1, y_2] - [x_2, y_1]) - ([x_1, Ry_2] - [x_2, Ry_1]), \\ & [x_1, y_2] - [x_2, y_1] - 2[y_1, y_2]_R). \end{aligned}$$

En effet on a d'après (3.1), l' ad -invariance de s^{-1} et la définition $R = a \circ s^{-1}$,

$$\begin{aligned} & [(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_{((R))} \\ &= (I \times s)([(x_1, s^{-1}(y_1)), (x_2, s^{-1}(y_2))]_{\mathcal{K}}) \\ &= \left([x_1, x_2] - ([a \circ s^{-1}(y_1), x_2] + [x_1, a \circ s^{-1}(y_2)]) + a(ad_{x_1}^* s^{-1}(y_2) - ad_{x_2}^* s^{-1}(y_1)), \right. \\ & \quad \left. s(ad_{x_1 - a \circ s^{-1}(y_1)}^* s^{-1}(y_2) - ad_{x_2 - a \circ s^{-1}(y_2)}^* s^{-1}(y_1)) \right) \\ &= ([x_1, x_2] - ([Ry_1, x_2] + [x_1, Ry_2]) + R([x_1, y_2] - [x_2, y_1]), \\ & [x_1, y_2] - [Ry_1, y_2] - [x_2, y_1] + [Ry_2, y_1]) \end{aligned}$$

d'où la formule (3.4).

Remarque Si $R = 0$, $[,]_{((0))}$ est le crochet de Lie de produit semi-direct de $(\mathcal{G}, [,])$ par l'algèbre de Lie abélienne \mathcal{G} pour la représentation adjointe de \mathcal{G} dans \mathcal{G} .

Rappelons qu'au paragraphe 1, on a défini pour $x \in \mathcal{G}$, $x_{\pm} = \frac{1}{2}(R \pm I)(x)$.

Proposition 3.1 *L'application linéaire j_R de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ qui à (x, y) associe $(x - 2y_+, x - 2y_-)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [,]_{((R))})$ sur $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [,]_{\times})$ où $[,]_{\times}$ désigne le crochet de produit direct d'algèbres de Lie.*

■ Il est clair que j_R est une bijection. Remarquons d'abord que pour tous x_1, x_2, y_1, y_2 éléments de \mathcal{G} ,

$$[(x_1, 0), (x_2, 0)]_{((R))} = ([x_1, x_2], 0)$$

$$[(0, y_1), (0, y_2)]_{((R))} = -2(0, [y_1, y_2]_R)$$

$$[(x_1, 0), (0, y_2)]_{((R))} = (R[x_1, y_2] - [x_1, Ry_2], [x_1, y_2]).$$

Montrons maintenant en utilisant ces relations et (1.5) que j_R est un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [,]_{((R))})$ dans $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [,]_{\times})$.

On a d'une part :

$$\begin{aligned} [j_R(x, 0), j_R(y, 0)]_{\times} &= [(x, x), (y, y)]_{\times} \\ &= ([x, y], [x, y]) \\ &= j_R([x, y], 0) \\ &= j_R([(x, 0), (y, 0)]_{((R))}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} [j_R(0, x), j_R(0, y)]_{\times} &= 4[(x_+, x_-), (y_+, y_-)]_{\times} \\ &= 4([x_+, y_+], [x_-, y_-]) \\ &= 4([(x, y]_R)_+, ([x, y]_R)_-) \\ &= -2j_R(0, [x, y]_R) \\ &= j_R([(0, x), (0, y)]_{((R))}). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} [j_R(x, 0), j_R(0, y)]_{\times} &= [(x, x), (-2y_+, -2y_-)]_{\times} \\ &= ([x, -2y_+], [x, -2y_-]) \\ &= (-[x, Ry] - [x, y], [x, y] - [x, Ry]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_R([(x, 0), (0, y)]_{((R))}) &= j_R(R[x, y] - [x, Ry], [x, y]) \\ &= (R[x, y] - [x, Ry] - 2[x, y]_+, R[x, y] - [x, Ry] - 2[x, y]_-) \\ &= (-[x, Ry] - [x, y], [x, y] - [x, Ry]). \end{aligned}$$

Donc $j_R([(x, 0), (0, y)]_{((R))}) = [j_R(x, 0), j_R(0, y)]_{\times}$.

En résumé, j_R est un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [,]_{((R))})$ dans $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [,]_{\times})$. ■

4. Carré d'une algèbre de Lie-Semenov [17]

Soit $(\mathcal{G}, [\ , \], R, \phi)$ une algèbre de Lie-Semenov. On note $[\ , \]_{\times}$ le crochet de produit direct d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. La diagonale $\delta_{\mathcal{G}} = \{(x, x), x \in \mathcal{G}\}$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie de $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [\ , \]_{\times})$. D'autre part on considère $\hat{\mathcal{G}}_R = \{(x_+, x_-), x \in \mathcal{G}\}$. On sait d'après (1.5) que pour tous x, y éléments de \mathcal{G} ,

$$\begin{aligned} [(x_+, x_-), (y_+, y_-)]_{\times} &= ([x_+, y_+], [x_-, y_-]) \\ &= (([x, y]_R)_+, ([x, y]_R)_-), \end{aligned}$$

donc $\hat{\mathcal{G}}_R$ est aussi une sous-algèbre de Lie de $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [\ , \]_{\times})$. Soient $(x, y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$. On a :

$$(x, y) = (x - (x - y)_+, x - (x - y)_+) + ((x - y)_+, (x - y)_-).$$

De plus, $(a, a) = (b_+, b_-)$ si et seulement si $a = b = 0$. En résumé, $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ est la somme directe des deux sous-espaces vectoriels $\delta_{\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{G}}_R$.

Soit ${}^{(2)}R$ l'application linéaire de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ définie par,

$${}^{(2)}R = p_{\delta_{\mathcal{G}}} - p_{\hat{\mathcal{G}}_R},$$

où $p_{\delta_{\mathcal{G}}}$ et $p_{\hat{\mathcal{G}}_R}$ sont les projections sur $\delta_{\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{G}}_R$ respectivement. On sait d'après la proposition 1.2 que ${}^{(2)}R$ vérifie l'équation de Yang-Baxter modifiée. On a

$$(4.1) \quad {}^{(2)}R(x, y) = ((R + I)(y) - Rx, Ry - (R - I)(x)).$$

Soit $((,))$ le produit scalaire sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ défini par

$$(((x_1, y_1), (x_2, y_2))) = \langle \phi(x_1), x_2 \rangle - \langle \phi(y_1), y_2 \rangle.$$

On note ${}^{(2)}\phi : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{G} \times \mathcal{G})^*$ l'isomorphisme induit par ce produit scalaire. On a alors

$$(4.2) \quad \langle {}^{(2)}\phi(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle \phi(x_1), x_2 \rangle - \langle \phi(y_1), y_2 \rangle.$$

Le produit scalaire $((,))$ est ad-invariant pour le crochet $[\ , \]_{\times}$.

En effet soient $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$. On obtient en utilisant l'ad-invariance de ϕ

$$\begin{aligned}
& \langle \text{ad}_{(x,y)}^* \circ {}^{(2)}\phi(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle \\
&= -\langle {}^{(2)}\phi(x_1, y_1), [(x, y), (x_2, y_2)]_\times \rangle \\
&= -\langle {}^{(2)}\phi(x_1, y_1), ([x, x_2], [y, y_2]) \rangle \\
&= -\langle \phi(x_1), [x, x_2] \rangle + \langle \phi(y_1), [y, y_2] \rangle \\
&= \langle \text{ad}_x^* \circ \phi(x_1), x_2 \rangle - \langle \text{ad}_y^* \circ \phi(y_1), y_2 \rangle \\
&= \langle \phi \circ \text{ad}_x x_1, x_2 \rangle - \langle \phi \circ \text{ad}_y y_1, y_2 \rangle \\
&= \langle \phi(x_2), [x, x_1] \rangle - \langle \phi(y_2), [y, y_1] \rangle \\
&= \langle {}^{(2)}\phi(x_2, y_2), ([x, x_1], [y, y_1]) \rangle \\
&= \langle {}^{(2)}\phi \circ \text{ad}_{(x,y)}(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle.
\end{aligned}$$

L'application linéaire ${}^{(2)}R$ est antisymétrique par rapport à ${}^{(2)}\phi$.

En effet soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$. En utilisant l'antisymétrie de R par rapport à ϕ , on obtient,

$$\begin{aligned}
& \langle {}^{(2)}\phi \circ {}^{(2)}R(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle \\
&= \langle {}^{(2)}\phi(x_2, y_2), ((R + I)(y_1) - Rx_1, Ry_1 - (R - I)(x_1)) \rangle \\
&= \langle \phi(x_2), Ry_1 \rangle + \langle \phi(x_2), y_1 \rangle - \langle \phi(x_2), Rx_1 \rangle \\
&\quad - \langle \phi(y_2), Ry_1 \rangle + \langle \phi(y_2), Rx_1 \rangle - \langle \phi(y_2), x_1 \rangle \\
&= -\langle \phi(y_1), Rx_2 \rangle + \langle \phi(x_2), y_1 \rangle + \langle \phi(x_1), Rx_2 \rangle \\
&\quad + \langle \phi(y_1), Ry_2 \rangle - \langle \phi(x_1), Ry_2 \rangle - \langle \phi(y_2), x_1 \rangle \\
&= -\langle \phi(x_1), (R + I)(y_2) - Rx_2 \rangle + \langle \phi(y_1), Ry_2 - (R - I)(x_2) \rangle \\
&= -\langle {}^{(2)}\phi(x_1, y_1), {}^{(2)}R(x_2, y_2) \rangle.
\end{aligned}$$

On a donc montré que $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [\ , \]_\times, {}^{(2)}R, {}^{(2)}\phi)$ est une algèbre de Lie-Semenov.

Définition 4.1 On dit que $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [\ , \]_\times, {}^{(2)}R, {}^{(2)}\phi)$ est le carré de l'algèbre de Lie-Semenov $(\mathcal{G}, [\ , \], R, \phi)$.

Explicitons le crochet de Lie $[\ , \]_{{}^{(2)}R}$. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$. On a :

$$\begin{aligned}
(4.3) \quad & [(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_{(2)R} \\
& = \frac{1}{2}([(R+I)(y_1) - Rx_1, x_2] + [x_1, (R+I)(y_2) - Rx_2], \\
& [Ry_1 - (R-I)(x_1), y_2] + [y_1, Ry_2 - (R-I)(x_2)]) .
\end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned}
& [(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_{(2)R} \\
& = \frac{1}{2}([(^{(2)}R(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_{\times} + [(x_1, y_1), ^{(2)}R(x_2, y_2)]_{\times}) \\
& = \frac{1}{2}([(R+I)(y_1) - Rx_1, x_2], [Ry_1 - (R-I)(x_1), y_2]) + \\
& ([x_1, (R+I)(y_2) - Rx_2], [y_1, Ry_2 - (R-I)(x_2)])
\end{aligned}$$

d'où la formule.

5. Comparaison des doubles et des carrés

Soient $g = (\mathcal{G}, [,], \delta r)$ une bigèbre de Lie quasitriangulaire, $\tilde{g} = (\mathcal{G}, [,], R, s^{-1})$ l'algèbre de Lie-Semenov associée. On a noté $g^{(2)} = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, [,]_{\mathcal{K}}, \delta m)$ le double de la bigèbre de Lie g et l'on a vu (paragraphe 3.2) qu'à $g^{(2)}$ est associée par F une algèbre de Lie-Semenov $\widetilde{g^{(2)}} = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, [,]_{\mathcal{K}}, M, S^{-1})$.

D'autre part soit $^{(2)}\tilde{g} = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [,]_{\times}, ^{(2)}R, ^{(2)}\phi)$ le carré de l'algèbre de Lie-Semenov \tilde{g} . A $^{(2)}\tilde{g}$ est associée par F^{-1} une bigèbre de Lie quasitriangulaire notée $^{(2)}g = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [,]_{\times}, \delta m')$. On a par définition $\widetilde{^{(2)}g} = ^{(2)}\tilde{g}$. Notons $k_{R,s}$ l'application linéaire $j_R \circ (I \times s)$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ où j_R est l'application linéaire définie dans la proposition 3.1. Le transport du crochet $[,]_{\mathcal{K}}$ par l'isomorphisme $I \times s$ donne un crochet $[,]_{((R))}$ sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ et j_R est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [,]_{((R))})$ sur $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [,]_{\times})$ d'après la proposition 3.1. Donc $k_{R,s}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, [,]_{\mathcal{K}})$ sur $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [,]_{\times})$.

On se propose de montrer que $k_{R,s}$ est un anti-isomorphisme de bigèbres de Lie quasitriangulaires de $g^{(2)}$ sur $^{(2)}g$. La démonstration résulte des lemmes suivants.

Lemme 5.1 *Le potentiel jacobien $m' : \mathcal{G}^* \times \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ de la bigèbre quasitriangulaire $^{(2)}g$ est donné par,*

$$m'(\xi, \eta) = (r^t(\xi) - r(\eta), r^t(\xi) - r(\eta)) .$$

■ En effet par définition, $m' = {}^{(2)}R \circ {}^{(2)}\phi^{-1} + {}^{(2)}\phi^{-1}$. Mais pour $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ on a :

$$\langle {}^{(2)}\phi(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle s^{-1}(x_1), x_2 \rangle - \langle s^{-1}(y_1), y_2 \rangle ,$$

i.e.,

$${}^{(2)}\phi(x_1, y_1) = (s^{-1}(x_1), -s^{-1}(y_1)),$$

d'où

$${}^{(2)}\phi^{-1}(\xi, \eta) = (s(\xi), -s(\eta)) .$$

Ainsi, compte tenu de $R \circ s = a$, de $r = a + s$ et de l'expression de ${}^{(2)}R$, on obtient

$$m'(\xi, \eta) = (-a(\xi) + s(\xi) - a(\eta) - s(\eta), -a(\xi) + s(\xi) - a(\eta) - s(\eta))$$

D'où l'expression de $m'(\xi, \eta)$ (qui est un élément de la diagonale de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$). ■

Lemme 5.2 *L'application linéaire bijective $k_{R,s}^t$ de $\mathcal{G}^* \times \mathcal{G}^*$ sur $\mathcal{G}^* \times \mathcal{G}$ est donnée par*

$$k_{R,s}^t(\xi, \eta) = (\xi + \eta, r(\eta) - r^t(\xi)) .$$

■ En effet, par définition $k_{R,s}(x, \xi) = (x - r(\xi), x + r^t(\xi))$. On en déduit l'expression de $k_{R,s}^t$. ■

Lemme 5.3 *Le diagramme suivant est anti-commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}^* \times \mathcal{G}^* & \xrightarrow{m'} & \mathcal{G} \times \mathcal{G} \\ \downarrow k_{R,s}^t & & \uparrow k_{R,s} \\ \mathcal{G}^* \times \mathcal{G} & \xrightarrow{m} & \mathcal{G} \times \mathcal{G}^* \end{array}$$

c'est-à-dire

$$m' = -k_{R,s} \circ m \circ k_{R,s}^t .$$

■ En effet,

$$\begin{aligned} -k_{R,s} \circ m \circ k_{R,s}^t(\xi, \eta) &= (-k_{R,s} \circ m)(\xi + \eta, r(\eta) - r^t(\xi)) \\ &= -k_{R,s}(r(\eta) - r^t(\xi), 0) \\ &= -(r(\eta) - r^t(\xi), r(\eta) - r^t(\xi)) \\ &= m'(\xi, \eta) . \end{aligned}$$

■

Lemme 5.4 Soit $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot])$ dans $(\mathcal{A}', [\cdot, \cdot]')$. Soient p et p' des potentiels jacobiens sur \mathcal{A} et \mathcal{A}' tels que $p' = \alpha \circ p \circ \alpha^t$ (resp. $p' = -\alpha \circ p \circ \alpha^t$). Alors α est un morphisme (resp. antimorphisme) de bigèbres de Lie.

■ Soit $\varepsilon = \pm 1$. Le cas $\varepsilon = 1$ est le cas des morphismes et le cas $\varepsilon = -1$ celui des antimorphismes. On a

$$\begin{aligned}
& \langle \alpha^t[\xi', \eta']^{p'} - \varepsilon[\alpha^t(\xi'), \alpha^t(\eta')]^p, x \rangle \\
&= \langle \alpha^t(\text{ad}_{p'(\eta')}^* \xi' - \text{ad}_{p'(\xi')}^* \eta') - \varepsilon(\text{ad}_{p(\alpha^t(\eta'))}^* \alpha^t(\xi') - \text{ad}_{p(\alpha^t(\xi'))}^* \alpha^t(\eta')), x \rangle \\
&= -\langle \xi', [p'(\eta'), \alpha(x)]' \rangle + \langle \eta', [p'(\xi'), \alpha(x)]' \rangle + \langle \xi', \alpha[\varepsilon p(\alpha^t(\eta')), x] \rangle \\
&\quad - \langle \eta', \alpha[\varepsilon p(\alpha^t(\xi')), x] \rangle \\
&= -\langle \xi', [(p' - \varepsilon \alpha \circ p \circ \alpha^t)(\eta'), \alpha(x)]' \rangle + \langle \eta', [(p' - \varepsilon \alpha \circ p \circ \alpha^t)(\xi'), \alpha(x)]' \rangle \\
&= -\langle \text{ad}_{\alpha(x)}^* \xi', (p' - \varepsilon \alpha \circ p \circ \alpha^t)(\eta') \rangle + \langle \text{ad}_{\alpha(x)}^* \eta', (p' - \varepsilon \alpha \circ p \circ \alpha^t)(\xi') \rangle.
\end{aligned}$$

On en déduit le lemme. ■

D'après le lemme 5.3 et le lemme 5.4 appliqué à $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot]) = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, [\cdot, \cdot]_x)$, avec $p = m$, $(\mathcal{A}', [\cdot, \cdot]') = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [\cdot, \cdot]_x)$, $p' = m'$, et $\alpha = k_{R,s}$, on obtient

Proposition 5.1 L'application linéaire $k_{R,s} = j_R \circ (I \times s)$ est un anti-isomorphisme de bigèbres de Lie quasitriangulaires du double de \mathfrak{g} , $\mathfrak{g}^{(2)} = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, [\cdot, \cdot]_x, \delta m)$ sur ${}^{(2)}\mathfrak{g} = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [\cdot, \cdot]_x, \delta m')$.

Puisque le carré ${}^{(2)}\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ est par définition $\widetilde{{}^{(2)}\mathfrak{g}}$, on en déduit le corollaire suivant

Corollaire 5.1 L'application linéaire $k_{R,s}$ est un anti-isomorphisme d'algèbres de Lie-Semenov de $\widetilde{{}^{(2)}\mathfrak{g}} = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, [\cdot, \cdot]_x, M, S^{-1})$ sur le carré de $\tilde{\mathfrak{g}}$, ${}^{(2)}\tilde{\mathfrak{g}} = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [\cdot, \cdot]_x, {}^{(2)}R, {}^{(2)}\phi)$.

On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, [\cdot, \cdot]_x, \delta m) = \mathfrak{g}^{(2)} & \xrightarrow{k_{R,s}} & {}^{(2)}\mathfrak{g} = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [\cdot, \cdot]_x, \delta m') \\
\downarrow F & & \downarrow F \\
(\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, [\cdot, \cdot]_x, M, S^{-1}) = \widetilde{{}^{(2)}\mathfrak{g}} & \xrightarrow{k_{R,s}} & {}^{(2)}\tilde{\mathfrak{g}} = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}, [\cdot, \cdot]_x, {}^{(2)}R, {}^{(2)}\phi).
\end{array}$$

On en déduit (ce qui aurait pu être montré par des calculs directs) que l'image par $k_{R,s}$ du produit scalaire S de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$ est le produit scalaire $((\cdot, \cdot))$ sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$

(indépendant de la partie antisymétrique de r) et que

$$k_{R,s} \circ M = {}^{(2)}R \circ k_{R,s} .$$

CHAPITRE IV

Bigèbres de Lie et structures de Poisson sur les groupes de Lie

Dans la première partie de ce chapitre nous montrons (théorème 1.1) que si G est un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie \mathcal{G} , toute structure de bigèbre de Lie sur \mathcal{G} s'intègre en une structure de groupe de Lie-Poisson sur G . Ce théorème est énoncé sans démonstration par Drinfeld ([4] théorème 3, [5] théorème 1). Une démonstration, due à Magri, a été publiée dans [7]. Elle consistait à vérifier directement la nullité du crochet de Schouten du bivecteur sur le groupe défini à partir du cocycle de groupe obtenu par intégration du cocycle jacobien d'algèbre de Lie donné. Verdier [31] en a donné une nouvelle démonstration basée sur la propriété énoncée dans la proposition 1.1 ci-dessous. Plus récemment Dazord et Sondaz [3] et Lu et Weinstein [11] ont donné des démonstrations basées sur la propriété, intéressante en elle-même, qu'un multivecteur possédant la propriété de Drinfeld (définition 1.1) est nul si et seulement si son linéarisé (définition 1.2) est nul. Nous suivons ici de près en la détaillant la preuve de Lu et Weinstein.

Nous étudions ensuite les groupes de Lie-Poisson exacts et les structures de Poisson définies par des potentiels jacobiens ou des solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée.

1. Groupe de Lie-Poisson associé à une bigèbre de Lie

1.1 Théorème d'intégration des bigèbres de Lie

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{G} . Nous avons vu au chapitre I que toute structure de Lie-Poisson sur G définit une structure de bigèbre de Lie sur \mathcal{G} . Rappelons que si G est un groupe de Lie muni d'une structure de Poisson dont le bivecteur de Poisson est noté Λ , on note l l'application de G à valeurs dans $\wedge^2 \mathcal{G}$ définie par

$$l(g) = (T_g \rho_{g^{-1}} \otimes T_g \rho_{g^{-1}})(\Lambda_g), \quad g \in G,$$

et que (G, Λ) est un groupe de Lie-Poisson si et seulement si l est un 1-cocycle de G à valeurs dans $\wedge^2 \mathcal{G}$ pour l'action adjointe de G . Si ε désigne l'application linéaire tangente à l en l'identité e du groupe de Lie-Poisson G , $(\mathcal{G}, [\ , \], \varepsilon)$ est une bigèbre de Lie. Nous étudions dans ce paragraphe la réciproque de cette propriété.

Soit $A^p(G)$ l'espace vectoriel des multivecteurs de degré p sur G ou p -vecteurs (champs de p -tenseurs contravariants antisymétriques). Par abus de langage, on

notera désormais de la même manière une application linéaire et ses diverses puissances tensorielles ou extérieures. Généralisant la notion de propriété de Drinfeld introduite pour les bivecteurs (chapitre I (2.2)), on introduit la

Définition 1.1 Soient G un groupe de Lie et P un élément de $A^p(G)$. On dit que P possède la propriété de Drinfeld si, pour tous g et $h \in G$,

$$P(gh) = T_h \lambda_g(P_h) + T_g \rho_h(P_g).$$

Proposition 1.1 Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie \mathcal{G} et P un multivecteur de degré p sur G . Alors P possède la propriété de Drinfeld si et seulement si P s'annule en e et, pour tout champ de vecteurs X invariant à gauche, le multivecteur $\mathcal{L}_X P$ est invariant à gauche.

■ Supposons que P possède la propriété de Drinfeld. Alors $P_e = 0$. Soit l l'application de G à valeurs dans $\wedge^p \mathcal{G}$ définie par

$$l(g) = T_g \rho_{g^{-1}}(P_g).$$

Alors $l(gh) = l(g) + Ad_g(l(h))$ et $l(e) = 0$. Notons x^λ le champ invariant à gauche engendré par $x \in \mathcal{G}$. On a :

$$(\mathcal{L}_{x^\lambda} P)(g) = \frac{d}{dt} (T_{g \exp tx} \rho_{\exp(-tx)} P_{g \exp tx})|_{t=0}.$$

Compte tenu de la propriété de Drinfeld de P ,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{x^\lambda} P)(g) &= \frac{d}{dt} ((T_{g \exp tx} \rho_{\exp(-tx)} \circ T_{\exp tx} \lambda_g)(P_{\exp tx}) + P_g)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} T_e \lambda_g(l(\exp tx))|_{t=0} \\ &= T_e \lambda_g((\mathcal{L}_{x^\lambda} l)(e)), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{L}_{x^\lambda} P$ est invariant à gauche et

$$(\mathcal{L}_{x^\lambda} l)(g) = Ad_g((\mathcal{L}_{x^\lambda} l)(e)).$$

Inversement supposons que $\mathcal{L}_{x^\lambda} P$ est invariant à gauche pour tout $x \in \mathcal{G}$ et que $P_e = 0$. Montrons que si G est connexe, P a la propriété de Drinfeld. Comme G est connexe, il suffit de montrer que pour tout $g \in G$, tout $x \in \mathcal{G}$ et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$l(g \exp tx) = l(g) + Ad_g(l(\exp tx)).$$

On a $(\mathcal{L}_{x^\lambda} l)(g) = Ad_g((\mathcal{L}_{x^\lambda} l)(e))$ et d'une part ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} l(g \exp tx) &= (\mathcal{L}_{x^\lambda} l)(g \exp tx) \\ &= Ad_{g \exp tx}((\mathcal{L}_{x^\lambda} l)(e)) , \end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (l(g) + Ad_g(l(\exp tx))) &= Ad_g((\mathcal{L}_{x^\lambda} l)(\exp tx)) \\ &= Ad_g Ad_{\exp tx}((\mathcal{L}_{x^\lambda} l)(e)) \\ &= Ad_{g \exp tx}((\mathcal{L}_{x^\lambda} l)(e)) . \end{aligned}$$

Puisque $P_e = 0$, $l(e) = 0$, et les fonctions de t , $l(g \exp tx)$ et $l(g) + Ad_g(l(\exp tx))$ coïncident en $t = 0$. En conclusion les fonctions de t , $l(g \exp tx)$ et $l(g) + Ad_g(l(\exp tx))$ coïncident en $t = 0$ et ont même dérivée pour tout t donc sont égales pour tout t . ■

On montre de même que si G est connexe, un p -vecteur P sur G possède la propriété de Drinfeld si et seulement si P s'annule en e , et pour tout champ de vecteurs X invariant à droite, $\mathcal{L}_X P$ est invariant à droite.

Soit G un groupe de Lie. On déduit de la définition du crochet de Schouten (chapitre I, 1.1) et du fait qu'un champ de vecteurs invariant à gauche et un champ de vecteurs invariant à droite sur G commutent le

Lemme 1.1 *Le crochet de Schouten $[P, Q]$ de deux multivecteurs $P \in A^p(G)$ et $Q \in A^q(G)$ invariants respectivement à gauche et à droite est identiquement nul.*

Montrons que la propriété de Drinfeld est stable par crochet de Schouten.

Proposition 1.2 *Soient G un groupe de Lie connexe, P un p -vecteur et Q un q -vecteur qui possèdent la propriété de Drinfeld. Alors le crochet de Schouten $[P, Q]$ des éléments P et Q est un $(p + q - 1)$ -vecteur qui possède la propriété de Drinfeld.*

■ Comme $P_e = Q_e = 0$, $[P, Q]$ s'annule en e . Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche sur G . Montrons que $\mathcal{L}_X [P, Q]$ est invariant à gauche c'est-à-dire que $\mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X [P, Q]$ est identiquement nul pour tout champ de vecteurs Y

invariant à droite sur G . Soit donc Y un champ de vecteurs invariant à droite sur G . On a d'après les propriétés du crochet de Schouten

$$\mathcal{L}_X[P, Q] = [\mathcal{L}_X P, Q] + [P, \mathcal{L}_X Q]$$

et

$$\mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X[P, Q] = [\mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X P, Q] + [\mathcal{L}_X P, \mathcal{L}_Y Q] + [\mathcal{L}_Y P, \mathcal{L}_X Q] + [P, \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X Q].$$

Puisque P et Q possèdent la propriété de Drinfeld, $\mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X P = \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X Q = 0$. Aussi $\mathcal{L}_Y Q$ est invariant à droite et $\mathcal{L}_X P$ invariant à gauche, $\mathcal{L}_Y P$ est invariant à droite et $\mathcal{L}_X Q$ invariant à gauche. On a donc d'après le lemme 1.1, $[\mathcal{L}_X P, \mathcal{L}_Y Q] = [\mathcal{L}_Y P, \mathcal{L}_X Q] = 0$. En conclusion, $\mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X[P, Q] = 0$ et d'après la proposition 1.1, $[P, Q]$ possède la propriété de Drinfeld. ■

Définition 1.2 Soient G un groupe de Lie et Q un q -vecteur de G tel que $Q(e) = 0$. On appelle linéarisé de Q en e l'application linéaire de \mathcal{G} dans $\Lambda^q \mathcal{G}$ notée Q^L et définie par

$$Q^L(x) = (\mathcal{L}_X Q)(e), \quad x \in \mathcal{G},$$

où X est un champ de vecteurs sur G tel que $X(e) = x$.

On vérifie que $Q^L(x)$ est bien indépendant du choix de X tel que $X(e) = x$.

Cette définition généralise celle de Λ^L , où Λ est un bivecteur nul en e , dont il a été question au chapitre I (définition 2.3).

Proposition 1.3 Soient G un groupe de Lie connexe et Q un q -vecteur sur G possédant la propriété de Drinfeld. Alors Q est identiquement nul si et seulement si Q^L est nul.

■ Supposons que $Q^L = 0$, alors $(\mathcal{L}_{x^\lambda} Q)(e) = 0$ pour tout x élément de \mathcal{G} . Supposons de plus que Q possède la propriété de Drinfeld, alors $\mathcal{L}_{x^\lambda} Q$ est invariant à gauche. En conclusion $\mathcal{L}_{x^\lambda} Q$ est identiquement nul et Q est donc invariant à droite. Mais puisque $Q_e = 0$, Q est donc nul. ■

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème d'intégration des bigèbres de Lie.

Théorème 1.1 Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie. On note G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie \mathcal{G} . Toute structure de bigèbre de Lie sur \mathcal{G} définit une structure de Lie-Poisson sur G telle que la structure de bigèbre de Lie sur \mathcal{G} associée coïncide avec la structure de bigèbre de Lie donnée sur \mathcal{G} .

■ Soit $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \varepsilon)$ une bigèbre de Lie où $\varepsilon : \mathcal{G} \rightarrow \wedge^2 \mathcal{G}$ est le 1-cocycle pour l'action adjointe de \mathcal{G} définissant la structure d'algèbre de Lie de \mathcal{G}^* . Soit $l : G \rightarrow \wedge^2 \mathcal{G}$ le 1-cocycle du groupe G pour l'action adjointe de G tel que $T_e l = \varepsilon$. Soit Λ le bivecteur sur G défini par

$$\Lambda_g = T_e \rho_g(l(g)).$$

Puisque l est un 1-cocycle, le bivecteur Λ possède la propriété de Drinfeld. Donc d'après la proposition 1.2, le crochet de Schouten $[\Lambda, \Lambda]$ du bivecteur Λ possède la propriété de Drinfeld. On a donc $[\Lambda, \Lambda](e) = 0$ et pour montrer que $[\Lambda, \Lambda]$ est identiquement nul, il suffit d'après la proposition 1.3 de montrer que son linéarisé en e , $[\Lambda, \Lambda]^L$ est nul. Montrons donc que $[\Lambda, \Lambda]^L = 0$. Soient $g \in G$, f_1, f_2, f_3 trois fonctions lisses sur G . On sait que, avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} & [\Lambda, \Lambda]^L(x)(d_e f_1, d_e f_2, d_e f_3) \\ &= \oint \mathcal{L}_X \{f_3, \{f_1, f_2\}_G\}_G(e) \\ &= \oint \frac{d}{dt} \{f_3, \{f_1, f_2\}_G\}_G(\exp t x)|_{t=0} \\ &= \oint \frac{d}{dt} l(\exp t x)(d_e(f_3 \circ \rho_{\exp t x}) \otimes d_e(\{f_1, f_2\}_G \circ \rho_{\exp t x}))|_{t=0}. \end{aligned}$$

Comme $l(e) = 0$,

$$\begin{aligned} [\Lambda, \Lambda]^L(x)(d_e f_1, d_e f_2, d_e f_3) &= \oint \varepsilon(x)(d_e f_3 \otimes d_e \{f_1, f_2\}_G) \\ &= \oint (\varepsilon^t(d_e f_3 \otimes \varepsilon^t(d_e f_1 \otimes d_e f_2)), x). \end{aligned}$$

D'où

$$[\Lambda, \Lambda]^L(d_e f_1, d_e f_2, d_e f_3) = \oint \varepsilon^t(d_e f_3 \otimes \varepsilon^t(d_e f_1 \otimes d_e f_2)).$$

Comme $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], \varepsilon)$ est une bigèbre de Lie, $[\Lambda, \Lambda]^L = 0$. ■

1.2 Remarque

La démonstration ci-dessus montre que si ε est un 1-cocycle jacobien sur \mathcal{G} et Λ est un bivecteur sur G tel que $\varepsilon = \Lambda^L$, alors $[\Lambda, \Lambda]^L = 0$. Dans [3] Dazord et

Sondaz énoncent et démontrent un résultat plus précis : le trivecteur $[\Lambda^L, \Lambda^L]$ sur \mathcal{G} , crochet de Schouten du bivecteur linéarisé Λ^L sur \mathcal{G} , coïncide avec le trivecteur $[\Lambda, \Lambda]^L$, linéarisé du crochet de Schouten du bivecteur Λ sur G .

2. Groupes de Lie-Poisson exacts

2.1 Potentiels G -jacobiens

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{G} . Etant donné que l'invariance par la représentation adjointe de \mathcal{G} n'entraîne l'invariance par la représentation adjointe de G que si G est connexe, nous sommes amenés à introduire les définitions :

1) Un élément $r = a + s$ de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ est un *potentiel G -jacobien* si sa partie symétrique s et le crochet de Schouten $[a, a]$ de sa partie antisymétrique a sont Ad -invariants.

2) Un élément $r = a + s$ de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ est appelé un *potentiel G -quasitriangulaire* si s est inversible et Ad -invariant et $K^r = 0$.

3) Soit r un élément de $\Lambda^2 \mathcal{G}$. On dit que r est une *solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée* sur G si $[r, r]$ est Ad -invariant.

Il est clair que tout potentiel G -quasitriangulaire et toute solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée sur G sont des potentiels G -jacobiens. De plus,

(i) tout potentiel G -jacobien est jacobien au sens de la définition 1.1 du chapitre II,

(ii) tout potentiel G -quasitriangulaire est quasitriangulaire au sens de la définition 3.5 du chapitre II,

(iii) toute solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée sur G est une solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée sur \mathcal{G} au sens de la définition 3.3 du chapitre II.

Enfin les réciproques de (i) (ii) (iii) sont vraies lorsque le groupe de Lie G est connexe.

2.2 Groupes de Lie-Poisson exacts

Soit $(\mathcal{G}, [\ , \], \delta r)$ une bigèbre de Lie exacte définie par un potentiel G -jacobien r . Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie \mathcal{G} . Au 1-cocycle exact δr

sur \mathcal{G} correspond le 1-cocycle exact sur le groupe G , $l : G \rightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$, défini par

$$l(g) = Ad_g r - r, \quad g \in G.$$

Comme la partie symétrique de r est Ad -invariante, l est à valeurs dans $\Lambda^2 \mathcal{G}$. Le bivecteur de Poisson Λ_r associé à l est

$$(2.1) \quad \Lambda_r = \Lambda_r^\lambda - \Lambda_r^\rho,$$

où Λ_r^λ est le bivecteur invariant à gauche engendré par r défini par

$$\Lambda_r^\lambda(g) = (T_e \lambda_g)(r), \quad g \in \mathcal{G}$$

et Λ_r^ρ est le bivecteur invariant à droite engendré par r défini par

$$\Lambda_r^\rho(g) = (T_e \rho_g)(r).$$

Les considérations faites conduisent à la

Définition 2.1 *Un groupe de Lie-Poisson exact est un groupe de Lie G muni d'un potentiel G -jacobien.*

D'après ce qui précède, la bigèbre de Lie d'un groupe de Lie-Poisson exact est une bigèbre de Lie exacte. Inversement si G est connexe, une structure de Lie-Poisson exacte sur G est définie par la donnée d'un potentiel jacobien r sur \mathcal{G} et à toute structure de bigèbre de Lie exacte sur \mathcal{G} correspond une structure de Lie-Poisson exacte sur G . Plus généralement

Définition 2.2 a) *Lorsque r est une solution de l'équation de Yang-Baxter classique, on dira que le groupe de Lie-Poisson exact (G, Λ_r) est un groupe de Lie-Poisson triangulaire.*

b) *Lorsque r est une solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée sur G , on dira que le groupe de Lie-Poisson exact (G, Λ_r) est un groupe de Lie-Sklyanin.*

c) *Lorsque r est un potentiel G -quasitriangulaire, on dira que le groupe de Lie-Poisson exact (G, Λ_r) est un groupe de Lie-Poisson quasitriangulaire.*

Il est clair que si G est connexe, G est un groupe de Lie-Sklyanin si et seulement si \mathcal{G} est une bigèbre de Lie-Sklyanin et G est un groupe de Lie-Poisson quasitriangulaire si et seulement si \mathcal{G} est une bigèbre de Lie quasitriangulaire.

La partie symétrique d'un potentiel jacobien sur \mathcal{G} est par définition une forme bilinéaire symétrique ad -invariante. Si elle est inversible, elle définit donc sur \mathcal{G} un produit scalaire invariant. De même la partie symétrique d'un potentiel \mathcal{G} -jacobien, si elle est inversible, définit sur G une métrique biinvariante. Les structures ainsi obtenues sur les algèbres de Lie ("structures orthogonales") et sur les groupes de Lie ont été étudiées par Medina [13][14]. On peut donc dire que les structures de bigèbre quasitriangulaire sur \mathcal{G} et les structures de groupe de Lie-Poisson quasitriangulaire sur G sont subordonnées à des structures orthogonales au sens de Medina.

Plus généralement à l'aide d'un potentiel r sur \mathcal{G} on peut construire sur le groupe de Lie G d'algèbre de Lie \mathcal{G} divers tenseurs contravariants d'ordre 2 dont nous nous proposons d'étudier au paragraphe suivant l'antisymétrie et les propriétés.

3. Structures de Poisson définies par des potentiels jacobiens

3.1 Courbure et crochet de Schouten de deux éléments r et r' de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$

Soient \mathcal{G} et \mathcal{F} deux algèbres de Lie, A une représentation de \mathcal{G} dans l'espace vectoriel \mathcal{F} telle que pour $x \in \mathcal{G}$, A_x est une dérivation de l'algèbre de Lie \mathcal{F} . Soient r et r' deux applications linéaires de \mathcal{F} dans \mathcal{G} . On note $[r, r']$ l'application bilinéaire antisymétrique de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans \mathcal{G} définie par

$$(3.1) \quad \begin{aligned} [r, r'](\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(r'(A_{r(\xi)}\eta - A_{r(\eta)}\xi) + r(A_{r'(\xi)}\eta - A_{r'(\eta)}\xi) \\ &\quad - ([r(\xi), r'(\eta)] + [r'(\xi), r(\eta)])) , \end{aligned}$$

et par $K^{r, r'}$ l'application bilinéaire antisymétrique de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans \mathcal{G} définie par

$$(3.2) \quad K^{r, r'}(\xi, \eta) = [r, r'](\xi, \eta) + \frac{1}{2}(r[\xi, \eta] + r'[\xi, \eta]) .$$

On a $[r, r'] = [r', r]$ et $K^{r, r'} = K^{r', r}$.

Lorsque $r = r'$, $K^{r, r'}$ se réduit à la courbure de Schouten de r au sens du chapitre II. Aussi,

Définition 3.1 On appelle courbure de Schouten des applications linéaires r et r' l'application bilinéaire antisymétrique $K^{r,r'}$ définie par (3.2).

Supposons que \mathcal{F} est une algèbre de Lie abélienne en dualité avec \mathcal{G} et que A est la représentatikon coadjointe. Supposons que les applications linéaires r et r' de \mathcal{G}^* dans \mathcal{G} sont antisymétriques. Considérons $[r, r']$ comme la forme trilinéaire sur \mathcal{G}^* définie par

$$(3.3) \quad [r, r'](\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \langle \xi_3, [r, r'](\xi_1, \xi_2) \rangle .$$

Alors la forme trilinéaire $[r, r']$ est antisymétrique et vérifie

$$(3.4) \quad [r, r'](\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\frac{1}{2} \oint \langle \xi_3, [r(\xi_1), r'(\xi_2)] + [r'(\xi_1), r(\xi_2)] \rangle .$$

Cette formule se déduit du fait que l'application $(r, r') \mapsto [r, r']$ est bilinéaire symétrique et du fait que $[r, r']$ est obtenue par polarisation à partir de $[r, r]$.

Nous avons donc vérifié que l'élément antisymétrique $[r, r']$ de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ défini par (3.3) coïncide avec le crochet de Schouten usuel [9][15] des éléments antisymétriques r et r' de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$.

3.2 Structures de Poisson définies par des potentiels jacobiens antisymétriques

Le crochet de Schouten de deux bivecteurs invariants à gauche est invariant à gauche. Plus précisément,

Proposition 3.1 Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{G} , r et r' deux éléments de $\Lambda^2 \mathcal{G}$, $\Lambda_r^\lambda, \Lambda_{r'}^\lambda$ les bivecteurs invariants à gauche engendrés par r et r' . Le crochet de Schouten $[\Lambda_r^\lambda, \Lambda_{r'}^\lambda]$ de ces bivecteurs vérifie

$$[\Lambda_r^\lambda, \Lambda_{r'}^\lambda](g) = T_e \lambda_g [r, r'] .$$

■ On note $\#_r^\lambda$ le morphisme de fibrés vectoriels de T^*G dans TG défini par Λ_r^λ . Alors $[\Lambda_r^\lambda, \Lambda_{r'}^\lambda]$ est un trivecteur invariant à gauche et pour tous $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathcal{G}^*$, on

a

$$\begin{aligned} & [\Lambda_r^\lambda, \Lambda_{r'}^\lambda](e)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= -\frac{1}{2} \oint (\langle \mathcal{L}_{\#_r^\lambda(e)} \xi_1, \xi_2, \#_r^\lambda(e) \xi_3 \rangle + \langle \mathcal{L}_{\#_{r'}^\lambda(e)} \xi_1, \xi_2, \#_{r'}^\lambda(e) \xi_3 \rangle) \\ &= -\frac{1}{2} \oint \langle \xi_3, [r(\xi_1), r'(\xi_2)] + [r'(\xi_1), r(\xi_2)] \rangle \\ &= [r, r'](\xi_1, \xi_2, \xi_3) . \end{aligned}$$

(En fait le crochet de Schouten algébrique $[r, r']$ a été défini de sorte que la relation précédente soit satisfaite).

On en déduit que pour tout $g \in G$,

$$[\Lambda_r^\lambda, \Lambda_{r'}^\lambda](g) = T_e \lambda_g[r, r'] . \quad \blacksquare$$

On montre de la même manière que

Proposition 3.2 *Le crochet de Schouten des bivecteurs invariants à droite $\Lambda_r^\rho, \Lambda_{r'}^\rho$ vérifie*

$$[\Lambda_r^\rho, \Lambda_{r'}^\rho](g) = -T_e \rho_g[r, r'] .$$

Puisque le crochet de Schouten $[\Lambda_r^\lambda, \Lambda_{r'}^\rho]$ des bivecteurs invariant à gauche Λ_r^λ et invariant à droite $\Lambda_{r'}^\rho$ est d'après le lemme 1.1 identiquement nul, on déduit des propositions 3.1 et 3.2 les corollaires suivants :

Corollaire 3.1 *Soient r_1, r'_1, r_2, r'_2 quatre éléments de $\Lambda^2 \mathcal{G}$. Alors pour tout $g \in G$,*

$$[\Lambda_{r_1}^\lambda - \Lambda_{r'_1}^\rho, \Lambda_{r_2}^\lambda - \Lambda_{r'_2}^\rho](g) = T_e \rho_g(Ad_g[r_1, r_2] - [r'_1, r'_2]) .$$

En particulier,

Corollaire 3.2 *Soient r, r' deux éléments de $\Lambda^2 \mathcal{G}$. Les crochets de Schouten $[\Lambda_r^\lambda, \Lambda_r^\lambda], [\Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_{r'}^\rho], [\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho]$ des bivecteurs $\Lambda_r^\lambda, \Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho$ vérifient*

$$(3.5) \quad [\Lambda_r^\lambda, \Lambda_r^\lambda](g) = T_e \lambda_g[r, r]$$

$$(3.6) \quad [\Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_{r'}^\rho](g) = -T_e \rho_g[r', r']$$

$$(3.7) \quad [\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho](g) = T_e \rho_g(Ad_g[r, r] - [r', r']) .$$

Utilisant les définitions du paragraphe 2.1 on obtient donc

Proposition 3.3 *Soient r et r' deux éléments de $\Lambda^2 \mathcal{G}$. Le bivecteur $\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho$ est un bivecteur de Poisson si et seulement si r et r' sont des solutions de l'équation de Yang-Baxter généralisée sur G telles que $[r, r] = [r', r']$.*

En particulier $\Lambda_r^\lambda - \Lambda_r^\rho$ est un bivecteur de Poisson si et seulement si r est une solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée sur G .

Le corollaire 3.2 montre que si r et r' sont des solutions de l'équation de Yang-Baxter classique sur G , les bivecteurs $\Lambda_r^\lambda, \Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_r^\lambda + \Lambda_{r'}^\rho$ sont des bivecteurs de Poisson.

Si G est connexe, $\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho$ est un bivecteur de Poisson si et seulement si r et r' sont des solutions de l'équation de Yang-Baxter généralisée sur \mathcal{G} telles que $[r, r] = [r', r']$. En particulier, toute solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée sur \mathcal{G} définit un bivecteur de Poisson, $\Lambda_r = \Lambda_r^\lambda - \Lambda_r^\rho$. En résumé

Proposition 3.4 *Si r est une solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée sur G , le bivecteur $\Lambda_r = \Lambda_r^\lambda - \Lambda_r^\rho$ est un bivecteur de Poisson et vérifie la propriété de Drinfeld.*

■ En effet l'application l associée à Λ_r est un 1-cobord sur G donc un 1-cocycle sur G . ■

3.3 Structures de Poisson définies par des potentiels quasitriangulaires

Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{G} , r et r' deux éléments de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. Décomposons r (resp. r') en $a + s$ (resp. $a' + s'$) où a (resp. a') désigne la partie antisymétrique de r (resp. r') et s (resp. s') la partie symétrique de r (resp. r'). Soient $g \in G, \xi_g, \eta_g$ deux 1-formes en g . Le tenseur $\Lambda_{r,r'} = \Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho$ est antisymétrique si et seulement si, pour tout $g \in G$,

$$\Lambda_{r,r'}(g)(\xi_g, \eta_g) + \Lambda_{r,r'}(g)(\eta_g, \xi_g) = 0.$$

On utilise l'antisymétrie de a et a' , la symétrie de s et s' et cette égalité se simplifie en

$$Ad_g s = s'.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que le tenseur $\Lambda_{r,r'}$ soit un bivecteur est que r et r' aient même partie symétrique s Ad -invariante. Dans ces conditions, le bivecteur $\Lambda_{r,r'}$ coïncide avec le bivecteur $\Lambda_a^\lambda - \Lambda_{a'}^\rho$, et l'on a

Proposition 3.5 Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{G} , r_1, r'_1, r_2, r'_2 quatre éléments de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ tels que r_1 et r'_1 aient même partie symétrique Ad-invariante, r_2 et r'_2 aient même partie symétrique Ad-invariante. Le crochet de Schouten $[\Lambda_{r_1}^\lambda - \Lambda_{r'_1}^\rho, \Lambda_{r_2}^\lambda - \Lambda_{r'_2}^\rho]$ des bivecteurs $\Lambda_{r_1}^\lambda - \Lambda_{r'_1}^\rho, \Lambda_{r_2}^\lambda - \Lambda_{r'_2}^\rho$ est identiquement nul si et seulement si $[a_1, a_2] = [a'_1, a'_2]$ et $[a_1, a_2]$ est Ad-invariant.

En particulier

Corollaire 3.3 Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{G} , r et r' deux éléments de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. Le 2-tenseur $\Lambda_{r,r'} = \Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho$ est un bivecteur de Poisson si et seulement si r et r' sont des potentiels G -jacobiens tels que :

(i) r et r' ont même partie symétrique s ,

(ii) les crochets de Schouten $[a, a]$ et $[a', a']$ de leurs parties antisymétriques a et a' coïncident ou, ce qui est équivalent, les courbures de Schouten K^r et $K^{r'}$ de r et r' coïncident.

Ainsi,

Corollaire 3.4 Soient \mathcal{G} une algèbre de Lie, G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{G} , r et r' deux potentiels G -quasitriangulaires ayant même partie symétrique s . Alors le bivecteur $\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho = \Lambda_a^\lambda - \Lambda_a^\rho$ est un bivecteur de Poisson.

Choisissons en particulier $r' = r^t$ où r est un potentiel G -quasitriangulaire. On sait (chapitre II, paragraphe 3) qu'alors r^t est aussi G -quasitriangulaire. Donc $\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r^t}^\rho = \Lambda_a^\lambda + \Lambda_a^\rho$ est un bivecteur de Poisson. Si la partie antisymétrique a de r est inversible, le bivecteur de Poisson $\Lambda_a^\lambda + \Lambda_a^\rho$ est de rang maximum en l'identité e du groupe G et, par conséquent, définit une structure symplectique dans un ouvert de G contenant e .

3.4 Propriété de la multiplication

Proposition 3.6 Soient r, r', r'' des éléments de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ tels que les tenseurs $\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_{r''}^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_{r''}^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho$ soient des bivecteurs de Poisson. Alors la multiplication π est un morphisme de Poisson de $(G, \Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho) \times (G, \Lambda_{r''}^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho)$ dans $(G, \Lambda_{r''}^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho)$.

■ Notons $\{ , \}_{r,r'}, \{ , \}_{r'',r}, \{ , \}_{r'',r'}$ les crochets de Poisson sur G définis par les bivecteurs $\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_{r''}^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_{r''}^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho$. Soient f_1, f_2 deux fonctions lisses sur

G et soient g et h deux points de G . On a d'une part

$$\begin{aligned} & \{f_1, f_2\}_{r'', r'}(gh) \\ &= r''(d_e(f_1 \circ \lambda_{gh}), d_e(f_2 \circ \lambda_{gh})) - r'(d_e(f_1 \circ \rho_{gh}), d_e(f_2 \circ \rho_{gh})) . \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} & \{f_1 \circ \rho_h, f_2 \circ \rho_h\}_{r, r'}(g) \\ &= r(d_e(f_1 \circ \rho_h \circ \lambda_g), d_e(f_2 \circ \rho_h \circ \lambda_g)) - r'(d_e(f_1 \circ \rho_h \circ \rho_g), d_e(f_2 \circ \rho_h \circ \rho_g)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \{f_1 \circ \lambda_g, f_2 \circ \lambda_g\}_{r'', r'}(h) \\ &= r''(d_e(f_1 \circ \lambda_g \circ \lambda_h), d_e(f_2 \circ \lambda_g \circ \lambda_h)) - r'(d_e(f_1 \circ \lambda_g \circ \rho_h), d_e(f_2 \circ \lambda_g \circ \rho_h)) ; \end{aligned}$$

d'où puisque $\rho_h \circ \lambda_g = \lambda_g \circ \rho_h$, $\rho_h \circ \rho_g = \rho_{gh}$, $\lambda_g \circ \lambda_h = \lambda_{gh}$,

$$\begin{aligned} & \{f_1 \circ \rho_h, f_2 \circ \rho_h\}_{r, r'}(g) + \{f_1 \circ \lambda_g, f_2 \circ \lambda_g\}_{r'', r'}(h) \\ &= r''(d_e(f_1 \circ \lambda_{gh}), d_e(f_2 \circ \lambda_{gh})) - r'(d_e(f_1 \circ \rho_{gh}), d_e(f_2 \circ \rho_{gh})) \\ &= \{f_1, f_2\}_{r'', r'}(gh) . \end{aligned}$$

3.5 Remarque

Soient en particulier G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{G} , r un potentiel G -jacobien. Alors $\Lambda_r = \Lambda_r^\lambda - \Lambda_r^\rho = \Lambda_a^\lambda - \Lambda_a^\rho$. Comme a est une solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée sur G , on sait d'après la proposition 3.4 que Λ_r est un bivecteur de Poisson. La proposition 3.5 s'applique donc et donne une nouvelle démonstration du fait que Λ_r possède la propriété de Drinfeld.

3.6 Remarque

Soient r et r' deux potentiels G -quasitriangulaires ayant même partie symétrique s . Les endomorphismes R et R' de \mathcal{G} définis par

$$R = a \circ s^{-1}$$

$$R' = a' \circ s^{-1}$$

où a et a' désignent les parties antisymétriques de r et r' sont des solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée. On sait (corollaire 3.4) que le bivecteur $\Lambda_{r, r'} = \Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho = \Lambda_a^\lambda - \Lambda_{a'}^\rho$ est alors un bivecteur de Poisson. Nous nous proposons dans le paragraphe suivant de retrouver les résultats précédents en étudiant directement les structures de Poisson définies par des solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée.

4. Structures de Poisson définies par des solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée

On suppose désormais l'algèbre de Lie \mathcal{G} munie d'un produit scalaire Ad -invariant (|) et l'on note ϕ l'isomorphisme induit par ce produit scalaire.

4.1 Crochet de Schouten $[R, R']$ de deux endomorphismes R et R' de \mathcal{G}

Soient a et a' deux éléments antisymétriques de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ et soient R et R' les endomorphismes de \mathcal{G} définis par $R = a \circ \phi$, $R' = a' \circ \phi$. Alors R et R' sont antisymétriques par rapport au produit scalaire (|) et l'on a

Proposition 4.1 *Le crochet de Schouten $[a, a']$ vérifie*

$$[a, a'](\phi(x_1), \phi(x_2)) = [R, R'](x_1, x_2)$$

où $[R, R']$ est l'application bilinéaire antisymétrique de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dans \mathcal{G} définie par

$$(4.1) \quad [R, R'](x, y) = \frac{1}{2}(R([R'x, y] + [x, R'y]) + R'([Rx, y] + [x, Ry]) - [Rx, R'y] - [R'x, Ry]).$$

■ On utilise l'antisymétrie de R et R' par rapport au produit scalaire (|) et l'invariance de ce produit scalaire. On a

$$\begin{aligned} & (x_3|[R, R'](x_1, x_2)) \\ &= -\frac{1}{2}(x_3|[Rx_1, R'x_2] + [R'x_1, Rx_2]) \\ &\quad -\frac{1}{2}(x_1|[Rx_2, R'x_3] + [R'x_2, Rx_3]) \\ &\quad -\frac{1}{2}(x_2|[Rx_3, R'x_1] + [R'x_3, Rx_1]) \\ &= -\frac{1}{2} \oint (x_3|[Rx_1, R'x_2] + [R'x_1, Rx_2]). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & (x_3|[a, a'](\phi(x_1), \phi(x_2))) \\ &= \langle \phi(x_3), [a, a'](\phi(x_1), \phi(x_2)) \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \oint (\phi(x_3), [a \circ \phi(x_1), a' \circ \phi(x_2)] + [a' \circ \phi(x_1), a \circ \phi(x_2)]) \\ &= -\frac{1}{2} \oint (x_3|[Rx_1, R'x_2] + [R'x_1, Rx_2]) \end{aligned}$$

d'où la propriété. ■

Définition 4.1 Soient R et R' des endomorphismes de \mathcal{G} . On appellera crochet de Schouten des applications R et R' l'application bilinéaire antisymétrique $[R, R']$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dans \mathcal{G} définie par (4.1).

En particulier $[R, R](x, y) = R([Rx, y] + [x, Ry]) - [Rx, Ry]$.

Proposition 4.2 Pour tous x, x_1, x_2, x_3 éléments de \mathcal{G} , on a

$$\begin{aligned} ad_x([a, a'])(\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3)) \\ = \oint ([R, R'](x_1, x_2), x_3] | x) . \end{aligned}$$

■ On utilise l'invariance du produit scalaire $(|)$ et la proposition 4.1 et l'on a

$$\begin{aligned} ad_x([a, a'])(\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3)) \\ = - \oint [a, a'](\phi(x_1), \phi(x_2), ad_x^* \circ \phi(x_3)) \\ = - \oint (ad_x^* \circ \phi(x_3), [a, a'](\phi(x_1), \phi(x_2))) \\ = - \oint (\phi \circ ad_x(x_3), [a, a'](\phi(x_1), \phi(x_2))) \\ = \oint ([a, a'](\phi(x_1), \phi(x_2)) | [x_3, x]) \\ = \oint ([R, R'](x_1, x_2), x_3] | x) . \end{aligned}$$

Corollaire 4.1 $[a, a]$ est invariant par l'action adjointe de \mathcal{G} si et seulement si $\oint [[R, R](x_1, x_2), x_3] = 0$, i.e., la condition de Yang-Baxter généralisée pour a est équivalente à la condition suivante sur $R = a \circ \phi$,

$$\oint [[R, R](x_1, x_2), x_3] = 0 .$$

D'où la définition suivante :

Définition 4.2 Soit R un endomorphisme de \mathcal{G} . On dira que R est une solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée si et seulement si pour tous x_1, x_2, x_3 éléments de \mathcal{G}

$$\oint [[R, R](x_1, x_2), x_3] = 0 .$$

Avec la définition 4.1 du crochet $[R, R]$, l'équation de Yang-Baxter modifiée au sens de la définition 1.2 du chapitre III s'écrit :

$$(4.2) \quad [R, R](x, y) = [x, y]$$

et il est clair que si R est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée, R est une solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée.

4.2 Bivecteurs de Poisson définis par des solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée

On introduit la notion de gradient à gauche et à droite. Soit f une fonction lisse sur G . Sa différentielle à gauche (resp. à droite) notée $d^\lambda f$ (resp. $d^\rho f$) est définie par

$$g \in G. \quad d_g^\lambda f = d_e(f \circ \lambda_g) \quad (\text{resp. } d_g^\rho f = d_e(f \circ \rho_g));$$

son gradient à gauche (resp. à droite) noté $\nabla^\lambda f$ (resp. $\nabla^\rho f$) est défini par :

$$(\nabla_g^\lambda f|x) = \frac{d}{dt} f(g \text{ expt } x)|_{t=0}, \quad x \in \mathcal{G}$$

(resp. $(\nabla_g^\rho f|x) = \frac{d}{dt} f(\text{expt } xg)|_{t=0}$). Ainsi, $\nabla_g^\lambda f = \phi^{-1}(d_g^\lambda f)$ et $\nabla_g^\rho f = \phi^{-1}(d_g^\rho f)$.

Proposition 4.3 Soient a_1, a_2, a'_1, a'_2 des éléments antisymétriques de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ et $R_i = a_i \circ \phi, R'_i = a'_i \circ \phi$ ($i = 1, 2$) des endomorphismes de \mathcal{G} . Soient f_1, f_2, f_3 des fonctions lisses sur G . Alors

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{a_1}^\lambda - \Lambda_{a'_1}^\rho, \Lambda_{a_2}^\lambda - \Lambda_{a'_2}^\rho](df_1, df_2, df_3) \\ &= (\nabla^\lambda f_3|[R_1, R_2](\nabla^\lambda f_1, \nabla^\lambda f_2)) - (\nabla^\rho f_3|[R'_1, R'_2](\nabla^\rho f_1, \nabla^\rho f_2)). \end{aligned}$$

■ En effet on a, en utilisant la proposition 4.1,

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{a_1}^\lambda, \Lambda_{a_2}^\lambda](g)(d_g f_1, d_g f_2, d_g f_3) \\ &= \langle d_g f_3, [a_1, a_2](d_g^\lambda f_1, d_g^\lambda f_2) \rangle \\ &= \langle \phi(\nabla_g^\lambda f_3), [a_1, a_2](\phi(\nabla_g^\lambda f_1), \phi(\nabla_g^\lambda f_2)) \rangle \\ &= (\nabla_g^\lambda f_3|[R_1, R_2](\nabla_g^\lambda f_1, \nabla_g^\lambda f_2)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{a_1}^\lambda, \Lambda_{a_2}^\lambda](df_1, df_2, df_3) \\ &= (\nabla^\lambda f_3|[R_1, R_2](\nabla^\lambda f_1, \nabla^\lambda f_2)). \end{aligned}$$

On montre de la même manière que

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{a'_1}^\rho, \Lambda_{a'_2}^\rho](df_1, df_2, df_3) \\ &= -(\nabla^\rho f_3|[R'_1, R'_2](\nabla^\rho f_1, \nabla^\rho f_2)). \end{aligned}$$

Le crochet de Schouten de deux bivecteurs dont l'un est invariant à gauche et l'autre invariant à droite étant identiquement nul (lemme 1.1), on obtient la proposition. \blacksquare

D'autre part, on sait que pour tout élément $g \in G$,

$$\nabla_g^\lambda f = Ad_{g^{-1}} \nabla_g^\rho f,$$

et que le produit scalaire $(|)$ est par hypothèse Ad -invariant. On obtient donc l'important corollaire suivant :

Corollaire 4.2 *Les bivecteurs introduits vérifient la relation*

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{a_1}^\lambda - \Lambda_{a'_1}^\rho, \Lambda_{a_2}^\lambda - \Lambda_{a'_2}^\rho](g)(d_g f_1, d_g f_2, d_g f_3) \\ &= (\nabla_g^\rho f_3|Ad_g[R_1, R_2](Ad_{g^{-1}} \nabla_g^\rho f_1, Ad_{g^{-1}} \nabla_g^\rho f_2) - [R'_1, R'_2](\nabla_g^\rho f_1, \nabla_g^\rho f_2)). \end{aligned}$$

En particulier dans le cas où $R_1 = R_2, R'_1 = R'_2$, on a

Proposition 4.4 *Soient R et R' des solutions antisymétriques par rapport à ϕ de l'équation de Yang-Baxter modifiée. Alors si $a = R \circ \phi^{-1}$, $a' = R' \circ \phi^{-1}$, le bivecteur $\Lambda_a^\lambda - \Lambda_{a'}^\rho$ est un bivecteur de Poisson.*

On retrouve ainsi le corollaire 3.4.

Remarque Soient R et R' des endomorphismes de \mathcal{G} antisymétriques par rapport à ϕ , $a = R \circ \phi^{-1}$, $a' = R' \circ \phi^{-1}$. En utilisant l'antisymétrie de R et R' et l'invariance du produit scalaire $(|)$, on obtient

$$\begin{aligned} & [\Lambda_a^\lambda, \Lambda_{a'}^\rho](df_1, df_2, df_3) \\ &= (\nabla^\lambda f_3|[R, R'](\nabla^\lambda f_1, \nabla^\lambda f_2)) \\ &= -(R(\nabla^\lambda f_3)|[R(\nabla^\lambda f_1), \nabla^\lambda f_2]) - (R(\nabla^\lambda f_3)|[\nabla^\lambda f_1, R(\nabla^\lambda f_2)]) \\ &\quad - (\nabla^\lambda f_3|[R(\nabla^\lambda f_1), R(\nabla^\lambda f_2)]) \\ &= -\oint (\nabla^\lambda f_1|[R(\nabla^\lambda f_2), R(\nabla^\lambda f_3)]). \end{aligned}$$

On montre de la même manière que

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{a'}^\rho, \Lambda_{a'}^\rho](df_1, df_2, df_3) \\ &= \oint (\nabla^\rho f_1 | [R'(\nabla^\rho f_2), R'(\nabla^\rho f_3)]) \end{aligned}$$

et on obtient les formules de Semenov-Tian-Shansky établies dans [17].

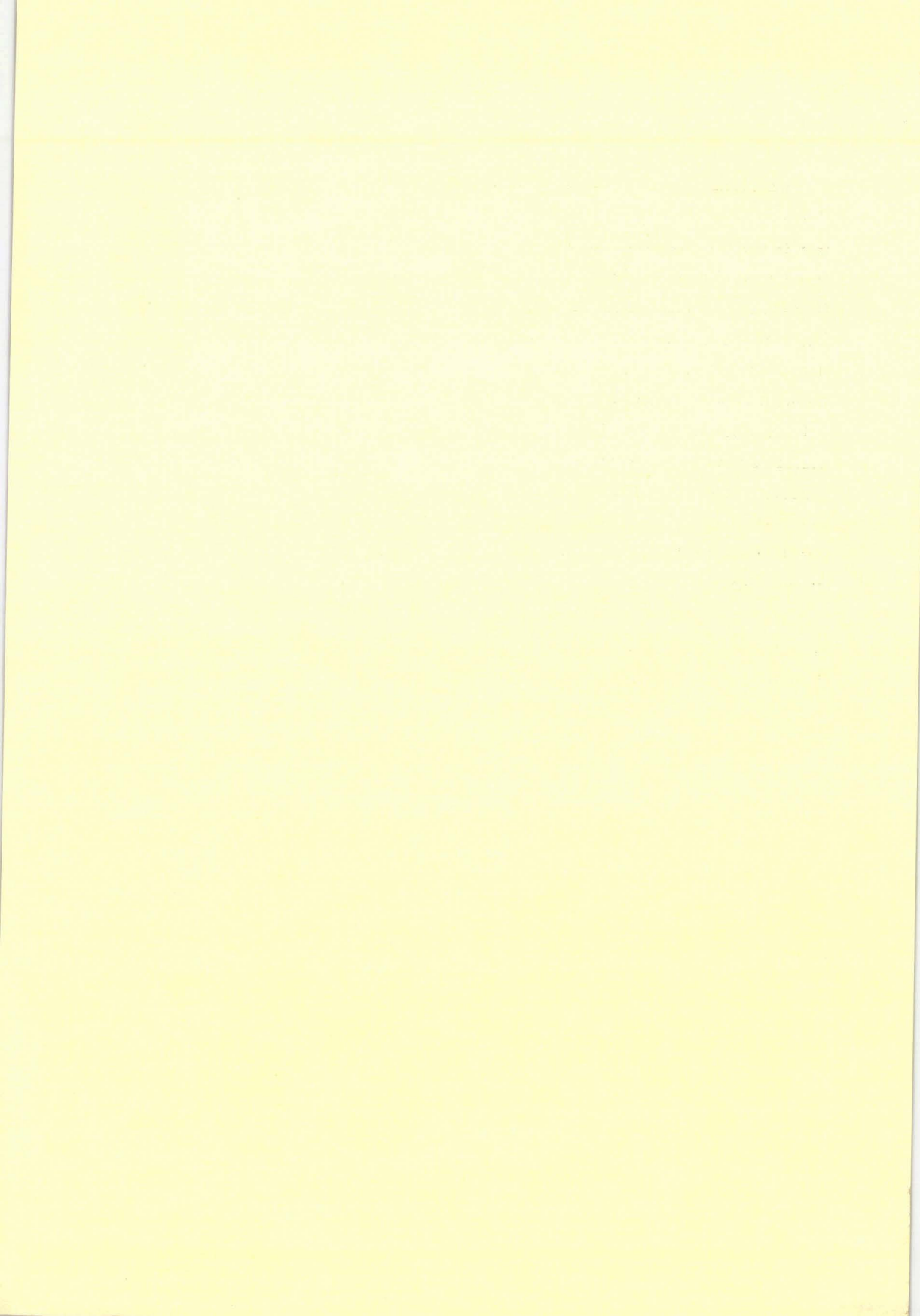
En résumé soient a et a' des solutions antisymétriques de l'équation de Yang-Baxter généralisée sur G . Pour que le bivecteur $\Lambda_a^\lambda - \Lambda_{a'}^\rho$ soit un bivecteur de Poisson, il faut et il suffit que $[a, a] = [a', a']$ donc il suffit que $a = a'$. Lorsque \mathcal{G} est une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire Ad -invariant ϕ , et que l'on considère deux endomorphismes R et R' de \mathcal{G} , solutions antisymétriques par rapport à ϕ de l'équation de Yang-Baxter modifiée, non seulement les deux potentiels a et a' définis par $a = R \circ \phi^{-1}$ et $a' = R' \circ \phi^{-1}$ sont jacobiens mais de plus leurs crochets de Schouten coïncident et le bivecteur $\Lambda_a^\lambda - \Lambda_{a'}^\rho$ est alors un bivecteur de Poisson.

En général, si a et a' sont des solutions antisymétriques de l'équation de Yang-Baxter généralisée, aucun des bivecteurs Λ_a^λ et $\Lambda_{a'}^\rho$ n'est un bivecteur de Poisson. Mais lorsque a et a' sont des solutions antisymétriques de l'équation de Yang-Baxter classique, non seulement $\Lambda_a^\lambda - \Lambda_{a'}^\rho$ est un bivecteur de Poisson, mais encore Λ_a^λ et $\Lambda_{a'}^\rho$ sont des bivecteurs de Poisson. De plus, lorsque $a = a'$, le bivecteur de Poisson $\Lambda_a^\lambda - \Lambda_a^\rho$ vérifie la propriété de Drinfeld.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMINOU R., "Bigèbres de Lie, structures de Poisson et variantes de l'équation de Yang-Baxter", *Publ. IRMA, Lille, 9. III, 1987.*
- [2] AMINOU R. et KOSMANN-SCHWARZBACH Y., "Bigèbres de Lie, doubles et carrés", *Annales Inst. Henri Poincaré, Série A (Physique Théorique), 49 (4), (1988) 461-478.*
- [3] DAZORD P. et SONDAZ. D., "Variétés de Poisson, algébroïdes de Lie", *Publ. Université de Lyon I, 1988, 1-67.*
- [4] DRINFELD V.G., "Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations", *Soviet Math. Dokl. 27 (1) (1983) 68-71 [Russian : Dokl. Akad. Nauk. SSSR 268 (2), (1983) 285-287].*
- [5] DRINFELD V.G., "Quantum groups", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California, 1986, Amer. Math. Soc. 1988.*
- [6] GELFAND I.M. and DORFMAN I. Ya., "Hamiltonian operators and the classical Yang-Baxter equation", *Funct. Anal. Appl. 16 (4), (1982) 241-246 [Russian 1-9].*
- [7] KOSMANN-SCHWARZBACH Y., "Poisson-Drinfeld groups", in *Topics in Soliton theory and exactly solvable nonlinear equations*, Ablowitz M., Fuchssteiner B. and Kruskal M., eds, *World Scientific, Singapore 1987.*
- [8] KOSMANN-SCHWARZBACH Y. and MAGRI F., "Poisson-Lie groups and complete integrability I, Drinfeld bialgebras, dual extensions, and their canonical representations", *Annales Inst. Henri Poincaré, Série A (Physique Théorique), 49 (4), (1988) 433-460.*
- [9] KOSZUL J.L., "Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie" *Soc. Math. France, Astérisque, hors série, (1985).*
- [10] LIBERMANN P. et MARLE C.M., *Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique, Tome III, Publications mathématiques de l'Université Paris VII, 1987.*

- [11] LU JIANG-HUA and WEINSTEIN A., "Poisson Lie groups, dressing transformations and Bruhat decompositions", *Department of Mathematics, University of California, Berkeley, April 1988*.
- [12] MAGRI F. and MOROSI C., "A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds", *Quaderno S. 19, 1984, Università di Milano*.
- [13] MEDINA A., "Groupes de Lie munis de métriques bi-invariantes", *Tôhoku Math. J. 37, (1985) 405-421*.
- [14] MEDINA A., "Structures de Lie-Poisson pseudo-riemanniennes et structures orthogonales", *C.R. Acad. Sc. Paris, t. 301, Série I, n°10, (1985) 507-510*.
- [15] OUZILOU R., "Hamiltonian actions on Poisson manifolds", *Symplectic Geometry, Crumeyrolle A. et Grifone J., eds, Pitman 1983*.
- [16] SEMENOV-TIAN-SHANSKY, M.A., "What is a classical r -matrix?", *Funct. Anal. Appl. 17 (4), (1983) 259-272 ([Russian : 17-33])*.
- [17] SEMENOV-TIAN-SHANSKY, M.A., "Dressing transformations and Poisson group actions", *Publ. RIMS (Kyoto University), 21, (1985) 1237-1260*.
- [18] SEMENOV-TIAN-SHANSKY, M.A., "Classical r -matrices, Lax equations, Poisson-Lie groups and dressing transformations", in *Field theory, quantum gravity and strings, II, de Vega H.J. and Sanchez N., eds., Lecture notes in Physics. 280. Springer-Verlag, Berlin 1987. 174-211*.
- [19] SKLYANIN, E.K., "Quantum version of the method of inverse scattering problem", *Journal of Soviet Math. 19, (1982) 1546-1596 [Russian : Zap. Nauch. Sem. LOMI 95, (1980) 55-128]*.
- [20] SOURIAU, J.M., "Structure des systèmes dynamiques", *Dunod Paris 1970*.
- [21] VERDIER J.L., "Groupes quantiques", *Sém. Bourbaki (1986-1987) Astérisque 152-153 (1987)*.
- [22] WEINSTEIN A., "The local structure of Poisson manifolds", *J. Diff. Geom. 18, (1983) 523-557*.
- [23] WEINSTEIN A., "Some remarks on dressing transformations", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A, Math. 36, (1988) 163-167*.



Résumé

Un groupe de Lie-Poisson est un groupe de Lie G muni d'une structure de Poisson telle que la multiplication soit un morphisme de Poisson de $G \times G$ dans G . L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie-Poisson porte une structure supplémentaire qui en fait une bigèbre de Lie. Nous étudions les bigèbres de Lie (autodualité, triplets de Manin) et les algèbres de Lie bicroisées qui généralisent les bigèbres de Lie. Nous considérons le cas des bigèbres de Lie exactes, en particulier des bigèbres de Lie quasitriangulaires et nous étudions plusieurs exemples. Nous montrons que la catégorie des bigèbres de Lie quasitriangulaires est isomorphe à la catégorie des algèbres de Lie-Semenov. Nous comparons la notion de carré d'une algèbre de Lie-Semenov due à Semenov-Tian-Shansky et la notion de double d'une bigèbre de Lie due à Drinfeld. Enfin nous démontrons le théorème d'intégration des bigèbres de Lie et nous étudions les structures de Poisson sur un groupe de Lie définies par des solutions des équations de Yang-Baxter classique, généralisée et modifiée.

Mots clés : Groupe de Lie, algèbre de Lie, variété de Poisson, équation de Yang-Baxter.