numéro d'ordre 416 50376 1989 177



THESE

dontée à

L'Université des Sciences et Techniques de Lille

pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences des Matériaux

par

Bertrand DUBUS

Ingénieur ISEN



ANALYSE DES LIMITATIONS DE PUISSANCE DES TRANSDUCTEURS PIEZOELECTRIQUES

Soutenue le 27 Septembre 1989 devant la commission d'examen :

Président	Monsieur	R. FOURET
Rapporteurs	Monsieur Monsieur	J.C. DAMIEN O.B. WILSON
Examinateurs	Monsieur Monsieur Monsieur Monsieur	D. BOUCHER J.C. DEBUS J.N. DECARPIGNY B. TOCQUET

à mes parents,

à Dominique, Camille et Emilie,

à ma famille et à tous mes amis.

Cette thèse a été préparée au Laboratoire d'Acoustique de l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord. Le code élément finis ATILA qui a permis cette étude a été conçu pour le Groupe d'Etude et de Recherche en Détection Sous-Marine et son développement a été financé par la Direction des Constructions et Armes Navales de Toulon. J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur R. FOURET qui a accepté la présidence de ce jury.

Monsieur J.C. DAMIEN a bien voulu juger ce travail dans une version provisoire, avec un sérieux et une disponibilité dont je le remercie.

J'assure Monsieur le Professeur O.B. WILSON de ma gratitude pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse, et de mon admiration pour la minutie dont il a fait preuve malgré la barrière de la langue.

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur B. TOCQUET, qui est à l'origine de ma formation en Acoustique, de sa participation à ce jury.

Monsieur D. BOUCHER a été l'instigateur de ce travail. Il l'a suivi, au cours de ces années, avec une compétence et une bonne humeur que j'ai particulièrement appréciées.

Ce travail n'aurait vraisemblablement pas abouti sans Messieurs J.C. DEBUS et J.N. DECARPIGNY qui m'ont apporté un soutien permanent, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. Je leur exprime mon très sincère attachement.

Je remercie Monsieur M. LANNOO qui m'a accueilli au sein de son laboratoire et l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord qui a encouragé ce travail. Enfin je tiens à associer à cette thèse l'ensemble des membres du laboratoire pour leur aide efficace, et particulièrement R. BOSSUT pour ses interventions multiples et variées, B. HAMONIC pour la pertinence de ses conseils, H. TOURNEUR à qui je dois l'ensemble des mesures thermiques et A.C. HENNION-HLADKY pour son voisinage souriant et sa dextérité au collage.

SOMMAIRE

INTRODUCTION1
CHAPITRE I : ETUDE DU COMPORTEMENT EN PUISSANCE DES TRANSDUCTEURS4 PIEZOELECTRIQUES
I.1 Présentation de modèles classiques de transducteurs
I.1.1 Les transducteurs Tonpilz5
I.1.2 Les transducteurs flextensionnels
I.1.3 Les transducteurs annulaires à immersion libre
I.1.4 Synthèse des problèmes de puissance associés aux14 transducteurs
I.2 Limites de puissance d'origine mécanique dans les transducteurs18
I.2.1 Fracture et non-linéarité des matériaux
a) Définitions18
b) Limites unidimensionelles18
c) Critères tridimensionnels20
I.2.2 Fatigue des matériaux21
a) Résultats expérimentaux21
b) Critère et modèles analytiques de fatigue24
I.2.3 Modèles analytiques d'évaluation des limites mécaniques26 des transducteurs piézoélectriques
a) Modèles à constantes localisées
b) Modèles à constantes réparties

ţ

c,) Conclusion et remarques28
I.3 Limites de p	puissance d'origine thermique dans les transducteurs29
I.3.1 Po p:	ertes dans les matériaux élastiques et
a	a) Aspects théoriques29
b) Pertes mécaniques31
C.	e) Pertes diélectriques32
đ	1) Pertes piézoélectriques32
e	e) Techniques expérimentales de détermination des pertes33
f	?) Modélisation des pertes dans les transducteurs33
I.3.2 A	application aux transducteurs piézoélectriques
a	a) Problèmes thermiques liés aux transducteurs
b	b) Modélisation de l'échauffement des transducteurs36
I.4 Limites de	puissance d'origine électrique dans les transducteurs37
I.4.1 D	Dépolarisation des céramiques37
I.4.2 N	Non-linéarité électrique
I.4.3 I	Isolation électrique
I.5 Limite de p la cavitati	puissance d'origine acoustique dans les transducteurs :38 ion
I.5.1 D	Description du phénomène physique
I.5.2 M	Modèles théoriques
I.5.3 F	Résultats expérimentaux
I.5.4 T	Transducteurs et cavitation41

I.6 Variation des constantes des matériaux à fort niveau d'excitation42
I.6.1 Excitation mécanique à fort niveau42
I.6.2 Excitation électrique à fort niveau44
I.6.3 Conclusion45
I.7 Conclusion
CHAPITRE II : CALCUL DES CONTRAINTES STATIQUES ET DYNAMIQUES DANS LES47 TRANSDUCTEURS PIEZOLECTRIQUES A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
II.1 Formulation théorique du calcul des contraintes
I.1.1 Rappels sur la méthode des éléments finis appliquée à48 la modélisation des transducteurs piézoélectriques
a) Les équations du problème48
b) Formulation variationnelle
c) Discrétisation : la méthode des éléments finis52
d) Description du code éléments finis ATILA55
e) Description de la bibliothèque ATILA
I.1.2 Calcul des contraintes par la méthode des éléments61 finis
a) Eléments élastiques isotropes
b) Eléments piézoélectriques65
c) Elément de coque mince à symétrie axiale65
d) Eléments de plaque et de coque minces

Π.2.1	Eléments élastiques isotropes73
	a) Poutre encastrée chargée à son extrémité73
	b) Coque en forme d'ellipsoïde de révolution soumise à84 une pression hydrostatique
II.2.2	Eléments piézoélectriques
	a) Analyse statique d'un barreau piézoélectrique
	b) Analyse dynamique d'un barreau piézoélectrique
I.2.3	Eléments plaques et coques
	a) Coque cylindrique soumise à une charge répartie sur91 une section circulaire
	b) Coque cylindrique sous pression uniforme96
	c) Flexion d'une plaque mince sous une charge101 concentrée
	d) Flexion d'une plaque mince sous pression uniforme102
I.3 Modélisat transduct	ion du comportement mécanique de différents
I.3.1	Etude de la structure test T2106
	a) Etude statique : application d'une précontrainte106
	b) Etude dynamique106
I.3.2	Etude de la structure test T3113
	a) Etude statique : transducteur sous pression113 hydrostatique
• • •	b) Etude dynamique113
II.4 Mesure de	s contraintes dans différents transducteurs
Π.4.1	Principe de la mesure123
Π.4.2	Mesure sur la structure test T2123

,

Π.3

a) Application d'une précontrainte
b) Etude dynamique128
II.4.3 Mesures sur la structure test T3
I.5. Conclusion
CHAPITRE II : MODELISATION DES PERTES DANS LES TRANSDUCTEURS
I.1 Formulation théorique retenue pour la prise en compte des pertes136 dans le code éléments finis ATILA
I.1.1 Eléments élastiques et piézoélectriques dissipatifs136
I.1.2 Le stockage par colonnes actives par blocs139
II.1.3 Analyse harmonique à vide d'une structure mécanique ou142 piézoélectrique
II.1.4 Analyse harmonique dans l'eau d'une structure143 mécanique ou piézoélectrique
II.1.5 Calcul de la puissance dissipée145
I.2 Validation des éléments et des algorithmes développés146
I.2.1 Analyse harmonique à vide146
a) Cylindre métallique excité à une extrémité146
 b) Barreau piézoélectrique polarisé perpendiculairement153 à sa longueur
c) Transducteur simple à symétrie axiale157
I.2.2 Analyse harmonique dans l'eau
a) Céramique rayonnant dans un tube
b) Sphère piézoélectrique pulsante rayonnant dans l'eau170

II.3 Etude expérimentale des pertes 173
II.3.1 Principe de la mesure173
II.3.2 Résultats expérimentaux175
I.4 Analyse harmonique de différents transducteurs rayonnant dans179 l'eau
II.4.1 Etude du transducteur T4
II.4.2 Etude du transducteur T1184
II.5 Conclusion 198
CONCLUSION GENERALE
REFERENCES
ANNEXES
ANNEXE 1. Définition des caractéristiques classiques des223 transducteurs sonores et ultrasonores
ANNEXE 2. Définitions relatives à la théorie de l'élasticité225 et à la résistance des matériaux
ANNEXE 3. Les équations constitutives de la piézoélectricité227
ANNEXE 4. Formulation utilisée dans les éléments du code ATILA229
ANNEXE 5. Application d'une pression sur une face d'élément233

NOTATIONS

[Be]	:	matrice formée par les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées d'espace (annexe 3),
$\left[B_{\Phi}^{e} \right]$:	matrice formée par les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées d'espace (annexe 3),
$\left[B_{1}^{e} \right]$:	matrice formée par les dérivées des monômes d'interpolation par rapport aux coordonnées d'espace,
[c ^D]	:	tenseur de rigidité à excitation électrique constante condensé ou non,
[c ^E]	:	tenseur de rigidité à champ électrique constant condensé ou non,
С	:	vitesse de propagation du son dans le fluide,
C _M	:	capacité reproduisant la branche motionelle du transducteur,
C_p	:	capacité parallèle du transducteur,
Co	:	capacité bloquée de la colonnes de céramiques,
[D]	:	matrice reliant contraintes et déformations,
[D _∞] (et	$\left[\mathtt{D}_{\infty}^{'} ight]$: matrices résultant de l'assemblage des éléments rayonnants,
[d]	:	tenseur piézoélectrique condensé ou non,
Ð	:	vecteur excitation du champ électrique,
D	:	endommagement,
[e]	:	tenseur piézoélectrique condensé ou non,
Ę	:	vecteur champ électrique,
E	:	module d'Young ou d'élasticité,
е	:	élasticité ou compliance,
F ₹	:	vecteur des forces nodales appliquées,
£	:	densité superficielle de force connue,
F	:	force,

...

f : fréquence d'antirésonance,

f_r : fréquence de résonance,

[g] : tenseur piézoélectrique,

[H] : matrice de compressibilité du domaine fluide,

[h] : tenseur piézoélectrique,

h : épaisseur de la plaque ou de la coque,

I : courant électrique,

I : intensité acoustique maximale avant cavitation,

I_n : intensité du courant entrant dans la structure piézoélectrique,

[J] : matrice de Jacobi,

[K_{uu}] : matrice de rigidité mécanique,

 $[K_{u\phi}]$: matrice piézoélectrique,

 $[K_{\phi\phi}]$: matrice diélectrique,

k : nombre d'onde,

k_{em} : coefficient de couplage électromécanique du transducteur,

[L] : matrice de couplage à l'interface fluide-solide,

L : quantité variationnelle,

 $\rm L_{_M}$: self reproduisant la branche motionelle du transducteur,

[M] : matrice de masse cohérente du domaine solide,

[M₁] : matrice de masse du domaine fluide,

M : vecteur formé par les mônomes d'interpolation de l'élément,

 M_x , M_y , M_{xy} : moments de flexion d'une plaque mince,

m : masse,

[N^e] : matrice ligne formée par les fonctions d'interpolation de l'élément,

n

: vecteur unitaire normal orienté vers l'intérieur du domaine solide,

- N : rapport de transformation,
- N_R : nombre de cycles à rupture,

P : vecteur des valeurs nodales du champ de pression,

- p : champ de pression,
- P_a : puissance acoustique totale rayonnée par le transducteur,
- P_d : puissance dissipée totale,
- P : puissance électrique fournie par la source au transducteur,
- P_R : puissance acoustique rayonnée par le transducteur,

P_{TOT} : puissance mécanique totale du transducteur,

- p_c : seuil de cavitation,
- p' : pression connue,
- p_e : densité de puissance dissipée d'origine électrique,
- p_m : densité de puissance dissipée d'origine mécanique,
- p_p : densité de puissance dissipée d'origine piézoélectrique,
- p_{tot} : densité de puissance dissipée,
- Q : vecteur des valeurs nodales de la charge électrique,
- Q_M : coefficient de qualité mécanique du transducteur,
- Q_p : charge électrique portée par l'électrode,
- Q_x , Q_v : efforts tranchants sur une plaque mince,
- R : rayon de la sphère frontière,
- R₀ : résistance décrivant les pertes diélectriques,
- R_M : résistance décrivant l'amortissement du aux pertes mécaniques,
- R_R : partie réelle de l'impédance électrique décrivant le rayonnement,
- R_m : amortissement du transducteur du aux pertes mécaniques,

- R_p : résistance parallèle du transducteur,
- R_r : partie réelle de l'impédance mécanique de rayonnement,
- R_o : résistance décrivant les pertes diélectriques,
- [S] : tenseur des déformations,
- [s^D] : tenseur d'élasticité à excitation électrique constante condensé ou non,
- [s^E] : tenseur d'élasticité à champ électrique constant condensé ou non,
- S : tenseur condensé ou vecteur des déformations,
- S, : surface frontière entre le domaine solide et le domaine fluide,
- $S_{\tt m}$: surface du domaine piézoélectrique recouverte d'une électrode,
- S_n, : surface du domaine fluide où la pression est connue,
- $S_{\scriptscriptstyle \rm T}$: surface pour laquelle la contrainte est connue en tout point,
- S. : surface pour laquelle le déplacement est connu en tout point,
- S. : réponse par volt du transducteur,
- S_σ : surface limitant le domaine piézoélectrique sur laquelle il n'y a pas d'électrode,
- S_ψ : surface du domaine fluide sur laquelle la dérivée normale de la pression est connue,
- S_{∞} : surface frontière limitant le domaine fluide,
- [T] : tenseur des contraintes,
- T : tenseur condensé ou vecteur des contraintes,
- t : temps,
- U : vecteur des valeurs nodales du champ de déplacement,
- u : champ de déplacement,
- U : énergie électrique stockée dans le transducteur,
- ${\tt U}_{\tt m}$: énergie élastique stockée dans le transducteur,
- u; : déplacement imposé dans la direction i,

V : vitesse

: vecteur déplacement généralisé pour une plaque mince, W : déplacement perpendiculaire au plan médian pour une plaque mince, w l'impédance électrique décrivant le X_R : partie imaginaire de rayonnement, : partie imaginaire de l'impédance mécanique de rayonnement, X_ x, y, z : système de coordonnées spatiales, x₁, x₂, x₃ : système de coordonnées spatiales, Y : admittance électrique, Ζ : impédance électrique, : impédance mécanique, Z : impédance électrique décrivant le rayonnement, Zp Z_ : impédance mécanique décrivant le rayonnement, $[\beta^{S}]$: tenseur diélectrique à déformation constante, $[\beta^T]$: tenseur diélectrique à contrainte constante, $\boldsymbol{\gamma}_{x\,y},\;\boldsymbol{\gamma}_{x\,z},\;\boldsymbol{\gamma}_{y\,z}$: déformations transversales, $\gamma_{\phi\,\theta}$, $\gamma_{\phi\,z}$, $\gamma_{\theta\,z}$: déformations transversales sur une coque mince à symétrie axiale. δ : angle de perte diélectrique, δ__ : angle de perte mécanique, [ϵ^{s}] : tenseur diélectrique à déformation constante, [\mathcal{E}^{T}] : tenseur diélectrique à contrainte constante, déformation généralisée dans le cas des plaques et coques 3 : vecteur minces. : déformation unidimensionnelle, 3 ຼ3 : déformation élastique, : déformation plastique, <mark>3</mark>

 ε_x , ε_y , ε_z : déformations longitudinales,

 $\epsilon_{\phi}, \, \epsilon_{\theta}, \, \epsilon_z$: déformations longitudinales sur une coque mince à symétrie axiale,

η : rendement électroacoustique du transducteur,

η_{ma} : rendement mécanoacoustique du transducteur,

ξ, η, ζ : système de coordonnées réduites,

ν : coefficient de Poisson,

ρ : masse volumique,

- $\underline{\sigma}$: vecteur contrainte généralisée dans le cas des plaques et coques minces,
- σ : contrainte unidimensionnelle,
- σ_1 : contrainte limite de fatigue ou d'endurance,

 σ_{c} : contrainte limite d'élasticité,

 $\sigma_{\rm x}$, $\sigma_{\rm y}$, $\sigma_{\rm z}$: contraintes normales,

 $\sigma_{\!\varphi},~\sigma_{\!\theta},~\sigma_{\!z}$: contraintes normales sur une coque mince à symétrie axiale,

 σ_1 , σ_2 , σ_3 : contraintes principales,

 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: contraintes de cisaillement,

 $\tau_{\phi \, \theta} \,, \, \tau_{\phi_{\, Z}} \,, \, \tau_{\theta_{\, Z}}$: contraintes de cisaillement sur une coque mince à symétrie axiale,

 Φ : vecteur des valeurs nodales du potentiel électrique,

- Φ : potentiel électrique appliqué à l'entrée du transducteur
- Φ_{n} : potentiel électrique de l'électrode,
- Ψ : vecteur des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression sur $S_{\infty},$

 $\Omega_{\rm f}$: domaine fluide,

 Ω_{p} : domaine piézoélectrique,

 Ω_{c} : domaine solide,

- ω : pulsation,
- ω_{r} : pulsation de résonance,
- ∂ : symbole de dérivation partielle.

INTRODUCTION

Les transducteurs piézoélectriques permettent la conversion réciproque d'un signal électrique en signal acoustique. Leur domaine d'utilisation recouvre notamment l'acoustique sous-marine [1] (systèmes sonar, d'imagerie ou de télécommunication, sondeurs), les applications industrielles des ultrasons [2] (usinage, soudage, nettoyage, génération d'aérosols...), le contrôle non destructif [3] et l'imagerie médicale [4] (échographie). Dans le cas d'un transducteur d'émission, une tension électrique imposée au matériau piézoélectrique provoque la mise en vibration de l'ensemble de la structure et le rayonnement de l'onde acoustique dans le milieu environnant. La description du comportement de ce système nécessite la prise en compte simultanée de trois problèmes, respectivement électrique, mécanique et acoustique. A partir des analogies électromécaniques classiques [5], des schémas électriques équivalents peuvent être élaborés pour modéliser des transducteurs de géométrie simple. d'accéder aux caractéristiques du Leur exploitation permet alors transducteur dans une bande de fréquence réduite. Quand la géométrie est complexe ou la bande de fréquence large, il devient nécessaire de mettre en oeuvre des techniques numériques qui produisent une information beaucoup plus riche. C'est notamment le cas du code ATILA [6-13] qui exploite la méthode des éléments finis et qui a été développé à l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord pour le Groupe d'Etude et de Recherche en Détection Sous-Marine (DCAN-Toulon).

En acoustique sous-marine, pour le sonar et l'océanographie, la conception de sources acoustiques basse fréquence de forte puissance est un thème de recherche actuel et prioritaire. Ces sources permettent en effet d'augmenter la portée de détection ou d'activer des antennes linéaires. Par ailleurs, dans les applications industrielles, une augmentation de la puissance correspond souvent à une amélioration notable des rendements de fabrication. En imagerie, l'accroissement de la puissance est lié à une extension du domaine d'observation et à un gain de qualité des images produites. De tels exemples illustrent clairement l'intérêt de développer des transducteurs électroacoustiques de forte puissance et de répondre aux difficiles questions que pose leur conception. Celle-ci suppose de fait la maîtrise de problèmes physiques complexes et de natures différentes [14-17]. Ainsi, les phénomènes liés à la fatigue et au comportement non-linéaire des matériaux peuvent conduire à une rupture du transducteur et définissent une limite mécanique de puissance. Les problèmes de dépolarisation des céramiques sous champ électrique élevé, de non-linéarité électrique et d'isolation définissent une limite électrique. Une limite thermique provient, quant à elle, de l'échauffement induit par les dissipations d'énergie dans le transducteur. Enfin, l'apparition de la cavitation dans le milieu fluide de propagation et l'interaction entre élémentaires d'une même antenne [18, 19] doivent être projecteurs considérées en acoustique sous-marine et déterminent une limite d'origine acoustique. La résolution de ces problèmes conduit à explorer différents de recherche : étude de nouveaux matériaux actifs (céramiques axes monolithiques [20], alliages de terres rares magnétostrictifs [21]) et amélioration de la qualité des matériaux piézoélectriques existants [22-24], mise en oeuvre de nouvelles architectures de transducteurs [18, 25, 26] et de circuits électroniques de contrôle [27-30], développement de méthodes numériques permettant une analyse plus fine du comportement physique des transducteurs de puissance [31-34].

-

L'objet de cette thèse est, dans le contexte général décrit précédemment, d'apporter une contribution à la description et à l'analyse des différents phénomènes physiques limitant la puissance d'un transducteur piézoélectrique. Ce travail a permis d'incorporer de nouveaux outils de calcul au sein du code ATILA. Dans un premier temps, le problème mécanique a été abordé. La détermination précise du comportement mécanique d'un transducteur supposant la connaissance du champ de contraintes sur l'ensemble de la structure, le calcul de ce champ a été développé et testé pour les différents éléments de la bibliothèque du code ATILA : éléments élastiques isotropes, éléments piézoélectriques, éléments basés sur la des plaques et coques minces. Les mesures effectuées pour théorie différentes géométries de transducteurs ont permis d'évaluer la précision des résultats fournis par les différentes modélisations. Dans un second temps. les pertes internes aux matériaux ont été prises en compte. L'influence des dissipations qu'elles induisent sur les caractéristiques électriques et acoustiques des projecteurs peut être importante. Plusieurs variétés de transducteurs ont été étudiées et leurs rendements ont été Des mesures ont également permis une validation globale. calculés. Parallèlement, le calcul de la puissance dissipée a été effectué. Les résultats qu'il produit renseignent sur le comportement thermique du et constitue transducteur une première étape pour le calcul de l'échauffement [32, 33].

Ce rapport est divisé en trois parties. Le premier chapitre décrit les principales géométries de transducteurs piézoélectriques de basse ou moyenne fréquence et récapitule les phénomènes physiques qui peuvent

2

altérer leur fonctionnement à forte puissance. Une présentation des modèles analytiques existants met en évidence leurs limitations quand la géométrie calcul contraintes dans les transducteurs est complexe. Le des piézoélectriques est présenté dans le second chapitre. Après un rappel des fondements de la méthode des éléments finis et de son application à la modélisation de structures piézoélectriques rayonnantes, la formulation du calcul des contraintes est détaillée. La précision des résultats est alors évaluée à partir de quelques tests simples. Finalement, le comportement mécanique de transducteurs réels est étudié et comparé à des mesures effectuées à l'aide de jauges d'extensométrie. Le troisième chapitre a pour objet la prise en compte des dissipations d'énergie dans les matériaux. Il décrit le principe retenu et les différentes techniques de calcul utilisées. Il présente également le calcul de la puissance dissipée. Ces développements sont validés par quelques tests simples. Puis, les pertes variété particulière sont dans une de céramique déterminées expérimentalement. Enfin, deux géométries de transducteurs sont étudiées, un transducteur annulaire à immersion libre et un transducteur Tonpilz à excitation différenciée. La comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux est discutée. En conclusion, une démarche globale de conception d'un transducteur, compte tenu des techniques développées, est proposée et plusieurs extensions, notamment au calcul thermique, à la prise en compte de l'interaction et à celle des matériaux nouveaux sont suggérées.

CHAPITRE I

ETUDE DU COMPORTEMENT EN PUISSANCE DES TRANSDUCTEURS PIEZOELECTRIQUES

Après avoir présenté les géométries des transducteurs utilisés classiquement en émission dans les systèmes sonar ou pour certaines applications industrielles (Tonpilz, flextensionnels, anneaux à immersion libre), ce chapitre décrit les phénomènes physiques qui sont à l'origine de leur limitation en puissance : fatigue, échauffement, cavitation... A partir d'une bibliographie détaillée, il cherche notamment à dégager des lois simples permettant de concevoir un prototype. De plus, il résume les caractéristiques des principaux modèles employés, dont les limitations conduisent naturellement à proposer l'utilisation de la méthode des éléments finis et notamment du code ATILA pour décrire le comportement de transducteurs de puissance de géométrie complexe.

I.1 DESCRIPTION ET MODELISATION DES TRANSDUCTEURS PIEZOELECTRIQUES CLASSIQUES⁺

Les projecteurs électroacoustiques employés actuellement utilisent en majorité l'effet piézoélectrique pour convertir une excitation électrique en une onde sonore ou ultrasonore. Les géométries utilisées étant extrémement variées [18], seuls quelques types de transducteurs, qui serviront de structures tests, sont présentés ci-après.

I.1.1 Les transducteurs Tonpilz

Le transducteur le plus couramment utilisé pour convertir l'énergie électrique en énergie acoustique dans un système sonar est le transducteur Tonpilz [35]. Il est constitué de quatre éléments (figure I.1):

- une colonne motrice, formée d'un empilement de céramiques polarisées parallèlement à l'axe du transducteur, alternativement dans un sens puis dans l'autre, séparées par des électrodes qui permettent l'excitation électrique,

- un pavillon, souvent constitué d'un matériau léger, qui est en contact avec le milieu fluide et assure une adaptation d'impédance partielle,

- une contremasse, formée d'un matériau dense, destinée à minimiser la vibration arrière de la colonne motrice,

- une tige de précontrainte, qui assure la liaison et maintient constamment les céramiques en état de compression.



+ Les caractéristiques classiques des transducteurs sonores et ultrasonores sont définies en annexe 1. Monté dans un boîtier, ce transducteur, excité à sa fréquence de résonance fondamentale, vibre suivant un mode de dilatation-compression longitudinal. Cette résonance est fortement amortie par le rayonnement de l'énergie acoustique. Les transducteurs T1 et T2, présentés aux figures I.2 et I.3 serviront d'exemples tests tout au long de ce travail. Le transducteur T1 est un transducteur Tonpilz multifréquences utilisé dans des applications de détection sous-marine [18]. Il est constitué de 13 paires de céramiques, qui peuvent être excitées séparement, et fixé dans un boitier au niveau de la contremasse à l'aide d'un disque de caoutchouc. Dans la bande de fréquence utile, les modes harmoniques de dilatation-compression de la colonne de céramiques et les modes de flexion du pavillon viennent s'ajouter au mode fondamental du transducteur, justifiant ainsi le nom de transducteur multifréquences. La structure T2 est utilisée dans l'industrie pour l'usinage de pièces par ultrasons [2, 31, 36]. C'est un transducteur sandwich à symétrie axiale dont le fonctionnement est identique à celui d'un transducteur Tonpilz. Il est constitué d'un empilement de quatre céramiques, précontraint par un boulon d'acier entre une contremasse et un corps métallique servant d'amplificateur de déplacement, et est prolongé par une sonotrode au bout de laquelle est monté l'outil d'usinage. Ce transducteur peut être considéré comme divisé en trois parties (la colonne, le corps, la sonotrode), chacune vibrant en demi longueur d'onde à la fréquence de fonctionnement. Cette fréquence correspond au troisième mode de résonance de la structure





La description du comportement acoustique de telles structures est possible à l'aide de nombreux modèles analytiques. Un premier circuit équivalent à constantes localisées a été proposé par K.S. VAN DYKE [37]. Ce circuit (figure I.4), valable uniquement autour de la fréquence de résonance fondamentale, utilise les analogies électromécaniques classiques résumées figure I.5 [5]. C_o est la capacité bloquée de la colonne de céramiques. Les éléments série R_M , L_M et C_M reproduisent la branche motionnelle du tranducteur. Pour décrire ce même transducteur Tonpilz mais rayonnant dans l'eau, un modèle à constantes localisées incluant l'amortissement dû au rayonnement (figure I.6) a été proposé par O. BRANDT [35] . Il permet généralement un calcul satisfaisant du niveau d'émission autour de la résonance fondamentale, ainsi que des énergies mécanique, électrique. acoustique et du rendement du transducteur. Cependant, l'approximation des impédances localisées atteint sa limite de validité autour du mode fondamental du transducteur (mode en $\lambda/2$, λ étant la longueur d'onde), et il est souvent nécessaire d'utiliser un modèle d'ondes planes.

Pour tenir compte du caractère réparti du comportement élastique des différents éléments constituant le transducteur, W.P. MASON [38] a proposé d'utiliser une méthode de matrices de transfert qui conduit à un circuit équivalent spécifique pour chaque géométrie et repose sur les hypothèses d'ondes planes pour le champ de déplacement. Ces travaux, généralisés par G.E. MARTIN [39], sont à la base de codes de simulation de

7



	I
Mécanique	Electrique
Force (f)	Tension $({f \phi})$
Vitesse (v)	Courant (i)
Déplacement (u)	Charge (q)
Masse (m)	Inductance (L)
Elasticité (e = $1/k$)	Capacité (C)
Amortissement (c)	Résistance (R)



transducteurs : SEADUCER [40], ASTRE [31, 41] ou TEA [42]. Dans ce cas, la propagation de l'onde est supposée parallèle à l'axe, l'amplitude de l'onde étant uniforme dans tout plan de section droite, et le transducteur est modélisé par tranches. Pour chaque tranche, la vitesse et la force sur la face de gauche sont reliées à la vitesse et la force sur la face de droite à l'aide d'une matrice découlant du modèle de MASON. Il devient alors possible de représenter le transducteur par une succession de tranches mises en parallèle ou en série, le rayonnement étant pris en compte par une condition d'impédance spécifique à l'extrémité (ondes planes, piston bafflé). Ce type de modélisation apporte une aide importante à la conception des transducteurs électroacoustiques et permet la prise en compte de phénomènes aussi complexes que les pertes dues aux joints de colle [43, 44]. Cependant les effets bi et tridimensionnels, comme les flexions de pavillon, sont totalement ignorés.

I.1.2 Les transducteurs flextensionnels

Le principe du transducteur flextensionnel est l'utilisation d'un effet de levier pour transformer le mouvement de dilatation-compression d'une colonne de céramiques piézoélectriques en un mouvement de flexion de coque. Ce concept, proposé par W.J. TOULIS [45, 46], a conduit à définir cinq classes de transducteurs flextensionnels (figure I.7), suivant leur géométrie. Ces structures présentent un faible encombrement par rapport à la longueur d'onde correspondant à la fréquence de leur premier mode de résonance, avantage particulièrement significatif lorsque l'on considère l'évolution des pertes de propagation en mer avec la fréquence ou les applications activation en acoustique des antennes linéaires. Le flextensionnel de classe IV est le plus couramment utilisé, notamment à cause de sa facilité de montage en antenne. Le Transducteur "Olive", 1.8, n'est pas exactement un transducteur présenté à la figure flextensionnel, puisque les contraintes mises en jeu par ses vibrations sont essentiellement tangentielles [47] mais il en a de nombreuses caractéristiques et il servira de transducteur test, noté T3 tout au long de ce travail. Il est constitué d'un empilement de 38 céramiques piézoélectriques, maintenu par une tige de précontrainte, et monté dans une coque mince métallique [9, 18].

Il n'existe pas actuellement de modèle analytique simple permettant la description du comportement de telles structures. Dans l'ensemble des travaux publiés [48], les différentes parties du transducteur (moteur, coque, fluide) sont étudiées séparément, puis leurs modèles sont reliés à l'aide de conditions d'interface mécaniques ou acoustiques appropriées. De manière générale, les modèles proposés dépendent directement de la géométrie de la structure étudiée et font souvent appel à des outils de simulation numérique.





I.1.3 Les transducteurs annulaires à immersion libre

Ces transducteurs sont des anneaux de céramique piézoélectrique qui peuvent être :

- soit moulés d'une seule pièce, quand leurs dimensions ne sont pas trop importantes. Dans ce cas, leur polarisation est radiale (figure I.9),

- soit constitués de plusieurs secteurs de céramique polarisés tangentiellement et montés alternativement dans un sens puis dans l'autre (figure I.10), quand la taille de l'anneau ne permet pas une fabrication en une seule pièce. En fonctionnement dans l'eau, quand la géométrie est judicieusement calculée, le mode radial de l'anneau et le mode de cavité fluide interne sont généralement obtenus très voisins pour créer une large bande. Ces transducteurs présentent l'avantage d'une construction simple et surtout d'une aptitude à l'immersion à grande profondeur, sans compensation interne. Leur association en antenne est possible pour augmenter la directivité dans le plan contenant l'axe de symétrie. La structure test T4 est un anneau de céramique X9 (Pons Alcatel), formé d'une seule pièce, polarisé radialement, de hauteur 40 mm, de rayon moyen 42 mm et d'épaisseur 4 mm [7].

Le schéma équivalent le plus simple (figure I.11), développé à partir du modèle de W.P. MASON [49], permet d'obtenir une valeur raisonable de la fréquence de résonance du mode radial, bien que l'effet du fluide soit uniquement contenu dans la résistance de rayonnement r. La prise en compte des résonances de la cavité fluide et du couplage entre modes conduit à développer des modèles semi-analytiques [50] qui nécessitent des résolutions numériques et ne permettent plus une représentation simple du transducteur.



12





I.1.4 Synthèse des problèmes de puissance associés aux transducteurs

Le schéma équivalent de la figure I.4 a été repris par R.S. WOOLLETT [14, 15] pour caractériser les différentes causes de limitation de puissance dans un transducteur piézoélectrique. Les pertes peuvent être décrites à l'aide des résistances R_0 (pertes diélectriques) et R_M (pertes mécaniques) représentées sur le schéma de la figure I.12 [16]. Pour la commodité de la description, il est parfois utile d'isoler la partie mécanique du transducteur dans le modèle équivalent. Dans ce cas, le schéma électrique utilisé décrit le couplage électromécanique à l'aide d'un transformateur parfait (figure I.13). A partir de ces deux schémas, deux expressions complémentaires de la puissance rayonnée peuvent être obtenue, qui autorisent une discussion simple.





La pulsation de résonance $\boldsymbol{\omega}_{_{\mathbf{r}}}$ du circuit I.12 est définie par la relation :

$$\omega_{\rm r} \ {\rm L}_{\rm M} - \frac{1}{\omega_{\rm r} \ {\rm C}_{\rm M}} + {\rm X}_{\rm R} = 0$$
 (I.1)

et le coefficient de qualité mécanique ${\rm Q}_{\rm M}$ par :

$$Q_{M} = \frac{1}{\omega_{r} C_{M} (R_{M} + R_{R})}$$
 (I.2)

Si l'on note ${\bf k}_{\rm em}$ le coefficient de couplage électromécanique tel que :

$$k_{em}^{2} = \frac{\text{énergie stockée dans la branche motionnelle}}{\text{énergie totale stockée}}$$
(I.3)

on peut écrire :

$$k_{em}^{2} = \frac{C_{M}}{C_{0} + C_{M}}$$
(I.4)

L'énergie électrique stockée dans le transducteur vaut :

$$U_{e} = \frac{1}{2} |\Phi^{2}| C_{0}$$
 (I.5)

où Φ est la tension appliquée au transducteur. A la résonance, la puissance mécanique totale s'exprime par :

$$P_{TOT} = \frac{1}{2} \frac{|\Phi^2|}{R_R + R_M}$$
(I.6)

et la puissance délivrée à la charge par :

$$P_{R} = \frac{1}{2} \frac{|\Phi^{2}|}{R_{R}}$$
(I.7)

soit, en introduisant le rendement mécanoacoustique $\eta_{m\,a}$:

$$\eta_{ma} = \frac{P_R}{P_{TOT}} = \frac{R_R}{R_R + R_M}$$
 (1.8)

par :

$$P_{R} = \frac{1}{2} \eta_{ma} \frac{|\Phi^{2}|}{R_{R} + R_{M}}$$
(I.9)

Dès lors, P_{R} et U_s sont reliés par la relation :

$$P_{\rm R} = \eta_{\rm ma} \, \omega_{\rm r} \, \frac{k_{\rm em}^2}{1 - k_{\rm em}^2} \, Q_{\rm M} \, U_{\rm e}$$
 (I.10)

Ainsi, la puissance rayonnée par un transducteur peut être limitée par l'énergie électrique maximale stockée dans ce transducteur, limite d'autant plus critique que le coefficient de qualité est faible.

De la même manière, on peut considérer le schéma de la figure I.13 et exprimer la puissance rayonnée par :

$$P_{\rm R} = \frac{1}{2} |V^2| R_{\rm r}$$
 (I.11)

où V est la vitesse de la face parlante du pavillon. L'énergie élastique stockée dans le transducteur vaut :

$$U_{\rm m} = \frac{1}{2} \frac{|V^2|}{\omega_{\rm r}^2 e}$$
(I.12)

En utilisant l'expression de Q_M et de η_{ma} en fonction des paramètres de la figure I.13, la puissance rayonnée s'exprime par :

$$P_{\rm R} = \frac{\eta_{\rm ma} \, \omega_{\rm r} \, U_{\rm m}}{Q_{\rm M}} \tag{I.13}$$

La puissance rayonnée par le transducteur est donc aussi limitée par l'énergie mécanique maximale stockée dans le transducteur, limite d'autant plus critique que le coefficient de qualité est élevé. La comparaison des expressions (I.10) et (I.13) conduit à définir un coefficient de qualité optimal :

$$Q_{M} = \sqrt{\frac{(U_{m})_{max}}{\frac{k_{em}^{2}}{1 - k_{em}^{2}}} (U_{e})_{max}}$$
(I.14)

A partir de ces résultats, il est possible de représenter l'évolution de l'intensité acoustique maximale en fonction du coefficient de qualité mécanique pour des géométries simples de transducteurs (Tonpilz, anneau). Ces courbes (figure I.14) laissent apparaître des zones où le transducteur est limité mécaniquement (Q_M élevé) ou électriquement (Q_M faible). En outre, si l'on tient compte des pertes, la puissance dissipée dans les résistances R_0 et R_M provoque un échauffement de la structure qui peut devenir un phénomène prépondérant, ce qui conduit alors à définir un transducteur limité thermiquement.



Cette étude rapide d'un transducteur piézoélectrique, à l'aide d'un modèle analytique simple, laisse apparaître différentes causes de limitation en puissance :

- la limite mécanique, qui peut correspondre à la rupture, à la fatigue ou au comportement non-linéaire d'un des matériaux constituant le transducteur,

- la limite électrique, qui regroupe les problèmes de dépolarisation des céramiques sous champ électrique élevé et de non-linéarités électriques, mais aussi d'éventuels problèmes d'isolation,

- la limite thermique, souvent négligée dans les transducteurs travaillant avec des impulsions courtes [17], qui provient de l'échauffement provoqué par les pertes internes et qui peut conduire, elle aussi, à la dépolarisation des céramiques, sinon à un phénomène d'emballement,

Dans ces trois cas, il paraît utile de déterminer l'évolution des caractéristiques des différents matériaux avec la contrainte, le champ électrique et la température ainsi que les problèmes de fonctionnement qui peuvent en résulter. Enfin, il convient aussi de mentionner la limite acoustique, qui correspond soit à l'apparition de la cavitation et qui dépend à la fois du milieu fluide considéré et du transducteur, soit aux interactions.

La suite de ce chapitre présente les différents phénomènes physiques liés aux problèmes de puissance dans les transducteurs ainsi que les modèles analytiques ou numériques qui les décrivent.

I.2 LIMITES DE PUISSANCE D'ORIGINE MECANIQUE DANS LES TRANSDUCTEURS*

Les limitations mécaniques du fonctionnement des transducteurs piézoélectriques de forte puissance sont liées à la fracture et à la non-linéarité des matériaux dans le cas statique (application de la précontrainte, forte immersion), à la fatigue dans le cas dynamique fort niveau). (excitation à Ces phénomènes sont essentiellement caractérisés de manière expérimentale et leur interprétation physique se rattache à la théorie des dislocations et de la déformation plastique, même lorsque l'élongation reste dans le domaine élastique. L'application de ces résultats aux transducteurs sonores et ultrasonores a conduit un certain nombre d'auteurs à proposer des modèles analytiques permettant de déterminer une puissance maximale correspondant à la limite mécanique de ces structures.

I.2.1 Fracture et non-linéarité des matériaux

a) Définitions

La limite d'élasticité qui sépare le domaine linéaire élastique du domaine plastique (notée $\sigma_{\rm g}$ sur la figure I.15) est caractérisée par l'apparition des premiers mouvements irréversibles des dislocations. Le dépassement de cette limite d'élasticité linéaire correspond donc à l'observation de phénomènes non-linéaires dans le comportement mécanique des matériaux. La fracture intervient après application de charges, en général statiques, d'importance croissante, et se situe dans le domaine plastique.

b) Limites unidimensionnelles

Dans le cas des métaux et des alliages, les valeurs de contraintes limites (rupture), concernant des déformations de dilatation-compression ou de cisaillement, ainsi que les limites d'élasticité sont connues avec précision. Le tableau I.1 regroupe ces valeurs pour les métaux utilisés classiquement dans la fabrication de projecteurs sonores. Le cas de la céramique piézoélectrique est particulier. En effet, la céramique est un matériau fritté et sa résistance à la compression (420 à 700 MPa) excède considérablement sa résistance à la traction (de l'ordre de 90 MPa). Une étude expérimentale, en fonctionnement dynamique, menée par R. GERSON et al a confirmé ces propriétés et attribué la cause de ces fractures à [51] l'existence de défauts et de fortes contraintes localisées. La limite de traction peut être sensiblement réduite pour des céramiques de qualité non optimale, de 25 à 28 MPa d'après D.A. BERLINCOURT et al [49]. D'un point de vue pratique, le problème de la faible résistance à la traction des céramiques a été résolu par H.B. MILLER [52], grâce à l'application d'une forte compression statique initiale (précontrainte) qui oblige la céramique à fonctionner en compression et qui conserve intacts le coefficient de couplage et la bande passante.

+ Les termes de résistance des matériaux utilisés dans cette partie sont définis en annexe 2.
| Métal | Limite d'élasticité (MPa) | Limite de rupture (MPa) |
|-----------|--|--------------------------------|
| Acier | 240 | 400 |
| Aluminium | 120 | 200 |
| Cuivre | 340 | 350 |
| Laiton | 120 | 350 |
| | | |
| (Ce: | s valeurs sont indicatives ca
fortement du type d'a | ar elles dépendent
alliage) |



c) Critères tridimensionnels

Pour les applications réelles, le seuil de non-linéarité ou de rupture déterminé dans le cas unidimensionnel doit être généralisé au cas de structures tridimensionnelles sollicitées suivant plusieurs directions. Cette généralisation conduit à définir des domaines autorisés dans l'espace des contraintes. Les critères les plus communément utilisés pour les matériaux ductiles sont ceux de Von Mises et de Tresca [54]. Ils supposent l'isotropie du seuil d'élasticité (même valeur en traction et en compression). Le critère de Von Mises est basé sur l'énergie de déformation et il est donné par :

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \leq \sigma_s$$
 (I.15)

 σ_1 , σ_2 , σ_3 étant ces contraintes et σ_s le seuil d'élasticité. Dans l'espace des contraintes principales, l'équation I.15 décrit un cylindre à base circulaire dont l'axe est la trissectrice du repère (σ_1 , σ_2 , σ_3) et dont le rayon vaut (figure I.16) :

$$R = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s \tag{I.16}$$

Le critère de Tresca suppose que la non-linéarité intervient quand la contrainte de cisaillement maximale atteint une valeur fixée. Il est donné par :

$$SUP_{i\neq i} \mid \sigma_i - \sigma_i \mid \leq \sigma_s \tag{I.17}$$

Dans l'espace des contraintes principales, le critère de Tresca est représenté par un prisme droit à base hexagonale (figure I.17) dont l'axe est la trissectrice du repère (σ_1 , σ_2 , σ_3). Il est inscrit dans le cylindre





de Von Mises. Pour les matériaux fragiles, le critère de Rankine est habituellement appliqué. Dans ce cas, le seuil critique est atteint pour une valeur donnée de la contrainte principale maximale :

$$SUP_{i} | \sigma_{i} | \leq \sigma_{i} \qquad (I.18)$$

Des critères plus complexes, comme le critère de Stassi pour les matériaux anisotropes, ont été développés [55]. Ils demeurent peu usités car ils exigent la connaissance de caractéristiques physiques des matériaux qui sont souvent difficiles à déterminer, sinon indéterminées. Ces critères, associés à la connaissance de la limite d'élasticité, permettent d'évaluer la limite de non-linéarité mécanique d'une structure dont le champ de contrainte est connu en chaque point.

I.2.2 Fatigue des matériaux

a) Résultats expérimentaux

Les phénomènes de fatigue dans les matériaux, sous excitation périodique, sont liés à la formation et à la propagation de dislocations et intervenir dans un domaine de fonctionnement élastique. Le peuvent comportement d'un matériau sous sollicitation cyclique est décrit par sa courbe d'endurance ou "courbe de Wöhler", qui indique le nombre de cycles à rupture N_{R} en fonction de l'amplitude de la contrainte [54, 56-58]. Cette courbe, de forme logarithmique, laisse souvent apparaître une amplitude en dessous de laquelle aucune fracture n'est possible (figure I.18). A l'opposé, dans le domaine des grandes amplitudes, la fatigue oligocyclique est due à l'amorçage et à la croissance de micro-fissures avec des déformations plastiques et correspond à un nombre de cycles très inférieur à celui indiqué. L'établissement des courbes d'endurance pour différents types de matériaux a permis l'étude de l'influence de divers paramètres : moyenne, fréquence, milieu ambiant, état de surface, contrainte



température. Cependant, les résultats donnés par les références classiques [56, 57] correspondent à des fréquences trop faibles pour être appliqués directement aux transducteurs sonores ou ultrasonores. Il est donc intéressant de rassembler des résultats plus spécifiques pour des fréquences variant de 1 à 100 kHz.

Dans le cas des transducteurs d'émission sonar, la contrainte moyenne correspond à la précontrainte appliquée sur les céramiques, augmentée éventuellement de la pression due à l'immersion. Une expérience menée par V.A. KUZ'MENKO [59] sur différents alliages a mis en évidence une augmentation de l'endurance avec la contrainte moyenne en compression. Cette évolution traduit l'influence de l'inversion des effets dans le processus de fatigue. Au niveau de l'amorçage, l'effet de la contrainte moyenne s'explique par son action sur l'ouverture des fissures [58]. La variation de la dissipation d'énergie mécanique avec la contrainte dynamique appliquée a été mesurée par V.A. KUZ'MENKO [59] puis par M.C. JON et al [60] pour différentes précontraintes statiques appliquées sur le matériau.

V.A. KUZ'MENKO [59] et W.P. MASON et al [61-63] ont étudié l'influence de la fréquence sur l'endurance de différents métaux. A température constante, le nombre de cycles à rupture, N_R, augmente avec la fréquence pour la plupart des métaux. Si l'on tient compte de la dissipation d'énergie dans le matériau, la variation de N_R apparaît beaucoup moins marquée, jusqu'à provoquer une décroissance à plus haute fréquence. L'observation microscopique des métaux étudiés permet d'interpréter cette évolution [63]. De fait, les matériaux cristallins sont formés de grains séparés par des joints de grains. A basse fréquence, on observe l'apparition de dislocations isolées. Si la contrainte augmente, ces dislocations changent de plan de glissement, se répandent dans le grain, se rejoignent et donnent naissance à une macro-fissure de fatigue. A

haute fréquence, ces dislocations traversent directement le grain, et la fatigue a lieu aux limites du grain. Si la contrainte est importante, l'activation thermique permet à la dislocation de changer de plan et de se répandre dans tout le grain. On retrouve un comportement proche de la basse fréquence.

Sous une sollicitation cyclique, les micro-fissures de fatigue s'amorcent toujours dans les couches superficielles. Le rôle de la surface est donc prépondérant dans la détermination de l'endurance d'un échantillon. Tout traitement modifiant la structure de la couche superficielle a, sur l'amorçage, un effet très important [58, 64]. Des études expérimentales menées par M.C. JON et al [60] puis par A. PUSKAR [65] ont mis en évidence l'augmentation du frottement interne et de la variation du module d'Young avec l'épaisseur du grain.

Les transducteurs d'émission sonar fonctionnent en immersion et sont parfois pressurisés. L'influence du milieu ambiant sur l'endurance du matériau doit donc être considérée. L'effet de l'environnement [58] est d'autant plus grand que le niveau de sollicitation est faible. Il se manifeste sur la durée de vie, la vitesse de propagation des dislocations et le seuil de non propagation, et dépend essentiellement du matériau considéré. L'agent le plus actif est l'humidité pour l'aluminium, l'oxygène pour le cuivre. S. PURUSHOTHAMAN et al [66] ont montré qu'au delà d'une fréquence limite, l'élément corrosif (en général l'oxygène de l'air) n'a plus le temps d'agir. Le temps d'exposition de la fissure est alors trop court, et la limite d'endurance devient indépendante du milieu ambiant.

L'influence de la température sur la propagation des dislocations est décrite par la théorie de l'activation thermique [67]. Au niveau microscopique, elle met en jeu des mécanismes nombreux et complexes. Expérimentalement V.A. KUZ'MENKO [59], S. PURUSHOTHOMAN et al [66] ont montré qu'une baisse de la température conduit à une amélioration de l'endurance à toutes les fréquences. A. PUSKAR [68] observe une augmentation du frottement interne et de la variation du module d'Young avec une température croissante. D'une manière générale, les effets de la température peuvent être très importants lorsqu'ils sont couplés avec une sollicitation mécanique.

L'ensemble des études expérimentales sur la fatigue citées précédemment ont été effectuées sur des métaux. En ce qui concerne les céramiques piézoélectriques, G.G. PISARENKO [69] obtient une rupture à 10^8 cycles pour une contrainte d'environ 40 MPa à 17.6 kHz. Ces résultats recoupent les valeurs limites d'utilisation proposées par D.A. BERLINCOURT et al [49], à savoir de 25 à 28 MPa.

b) Critères et modèles analytiques de fatigue

La dépendance de la limite d'endurance d'un matériau avec la contrainte moyenne est exprimée par la relation linéaire de Goodman [54] :

$$\sigma_1 = \overline{\sigma} + \sigma_{10} (1 - b \overline{\sigma}) \tag{I.19}$$

où σ_1 est le seuil d'endommagement, σ_{10} le seuil d'endommagement à contrainte moyenne nulle, b un coefficient caractéristique du matériau et σ la contrainte moyenne. La généralisation du seuil d'endommagement aux structures tridimensionnelles conduit, comme précédemment, à définir des critères limites de fatigue qui dépendent de la valeur de la contrainte moyenne au cours du cycle [54]. Le critère de Sihes est donné par :

$$\frac{(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2}{2} \le \sigma_{10} (1 - b \bar{\sigma}_{H})$$
(I.20)

et le critère de Crossland par :

$$\frac{(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2}{2} \le \sigma_{10} \frac{1 - b \sigma_{HM}}{1 - b \sigma_1}$$
(I.21)

avec :

$$a_{i} = \frac{\sigma_{i \max} - \sigma_{i \min}}{2}$$
(I.22)

 $\sigma_{\rm H}$ est la pression hydrostatique moyenne au cours du cycle, $\sigma_{\rm HM}$ la pression hydrostatique maximale au cours du cycle et b un coefficient caractéristique du matériau.

En utilisation normale, la sollicitation d'un échantillon au cours de sa "vie" n'a lieu ni de manière continue, ni à niveau constant. L'évaluation du dommage accumulé par un échantillon se fait suivant la règle de Miner [54, 56-58]. L'endommagement accumulé, noté D, durant une sollicitation continue d'amplitude constante est proportionnel au rapport du nombre de cycles subis au nombre de cycles à rupture, N_i/N_{Ri} (figure I.19), i désignant cette sollicitation à amplitude constante. La rupture intervient après plusieurs sollicitations lorsque :

$$D = \sum_{i} \left[\frac{N_{i}}{N_{Ri}} \right] = 1$$
 (I.23)

Bien que très approchée, cette règle est la plus couramment utilisée. Elle

diminution du nombre de cycles à rupture pour les faibles intensités après exposition à de fortes intensités, ni d'"understressing", c'est à dire d'augmentation du nombre de cycles à rupture pour les fortes intensités après exposition à de faibles intensités [68].

Dans le domaine de la fatigue oligocyclique, les déformations plastiques deviennent prépondérantes et le nombre de cycles à rupture est fonction de l'amplitude de la déformation plastique selon la loi de Manson-Coffin [54, 58] :

$$N_{R} = \left[\frac{\Delta \varepsilon_{p}}{C_{1}}\right]^{-\gamma_{1}}$$
(I.24)

où $\Delta \varepsilon_p$ est l'amplitude de la déformation plastique, C_1 et γ_1 des constantes caractéristiques du matériau. L'addition, à cette relation, d'une loi d'élasticité linéaire permet d'obtenir la relation empirique :

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{e} + \Delta \varepsilon_{p} = \frac{C_{2}}{E} N_{R}^{-1/\gamma_{2}} + C_{1} N_{R}^{-1/\gamma_{1}} \qquad (I.25)$$

où $\Delta \varepsilon$, $\Delta \varepsilon_{e}$ et E désignent respectivement l'amplitude de la déformation totale, l'amplitude de la déformation élastique et le module d'Young. Les coefficients C_1 , γ_1 , C_2 , γ_2 varient en fonction de la température et du matériau.



I.2.3 Modèles analytiques d'évaluation des limites mécaniques des transducteurs piézoélectriques

a) Modèles à constantes localisées

L'expression de la limite mécanique d'un transducteur sonore ou ultrasonore, proposée par R.S. WOOLLETT [14, 15] a été décrite en détail dans le chapitre I.1.4. Dans le cas particulier du Tonpilz et suivant D.A BERLINCOURT et al [49, 70], la puissance fournie aux éléments mécaniques, notée P_{TOT}, est donnée par :

$$P_{TOT} = \omega_r Q_M \frac{k_{em}^2}{1 - k_{em}^2} U_e$$
 (I.26)

soit, compte tenu de l'équation (I.5) :

$$P_{\text{TOT}} = \frac{1}{2} \omega_{\text{r}} Q_{\text{M}} \frac{k_{\text{em}}^2}{1 - k_{\text{em}}^2} C_0 \Phi^2$$
 (I.27)

Sachant que la capacité bloquée du transducteur est reliée à la capacité basse fréquence C_{BF} par la relation :

$$C_0 = C_{BF} (1 - k_{em}^2)$$
 (I.28)

(I, 29)

et que :

$$k_{em}^2 = \frac{d^2}{s^E \epsilon_{33}^T}$$
 (I.29)

où d et s^E sont les constantes piézoélectrique et élastique du mode considéré, et $\varepsilon_{3,3}^{T}$ la permittivité diélectrique à contrainte constante, on peut exprimer la puissance mécanique totale sous la forme :

$$P_{TOT} = \omega_r \ Q_M \ \frac{d^2}{s^E} \ \Omega \ E_3^2$$
 (1.30)

ou encore :

$$P_{\text{TOT}} = \Omega \,\omega_{\text{r}} \,k_{\text{em}}^2 \,\varepsilon_{33}^{\text{T}} \,E_3^2 \tag{I.31}$$

où E, représente la valeur efficace du champ électrique, supposé uniforme, et Ω le volume de matière active. Par ailleurs, à l'aide du schéma électrique de la figure I.13, on montre que :

$$T = \frac{E_3 d Q_M}{s^E}$$
(I.32)

où T est la contrainte dynamique dans la colonne motrice. Dans ces conditions :

$$P_{\text{TOT}} = \Omega \frac{\omega_r \ s^E \ T^2}{Q_M}$$
(I.33)

Les relations (I.31) et (I.33) déterminent un coefficient de qualité optimal pour lequel le champ électrique maximal admissible E_{max} et la contrainte maximale admissible T_{max} engendrent une même puissance mécanique P_{TOT} :

$$Q_{\rm M} = \frac{{\bf s}^{\rm E} {\bf T}_{\rm max}}{{\bf d} {\bf E}_{\rm max}}$$
(I.34)

L'équation (I.34) proposée par D.A. BERLINCOURT est similaire à l'expression obtenue par R.S. WOOLLETT (équation (I.14)) qui fait intervenir les énergies électriques et mécaniques stockées dans le transducteur. Si, suivant O. BRANDT [35], la contrainte dynamique est limitée arbitrairement à partir de la relation :

$$F_p \ge 5 F$$
 (I.35)

où F_p est la force statique engendrée par la tige de précontrainte et F la force dynamique, on obtient pour la puissance rayonnée :

$$P_{\rm R} = \eta_{\rm ma} \frac{s^{\rm E} \omega_{\rm r}}{Q_{\rm M}} \Omega \left(\frac{F_{\rm p}}{5 \rm A}\right)^2$$
(I.36)

où A est la surface de la section droite d'une céramique.

b) Modèles à constantes réparties

A partir de la distribution des déformations et des contraintes dans un disque de céramique vibrant en flexion, R.N. HOUSE [71] a relié la puissance rayonnée maximale avant rupture à la contrainte maximale admissible dans le matériau considéré, en obtenant une bonne correspondance avec des résultats expérimentaux. F.V. HUNT [72] a généralisé ce travail en définissant, pour un certain nombre de structures en vibration à la résonance, une impédance de transfert reliant la contrainte au noeud où elle est maximale à la vitesse au point où elle est maximale. A partir de valeurs tabulées de la contrainte maximale tolérée, il est alors possible de déterminer la vitesse maximale qui puisse être atteinte par un point de la structure. Le travail de F.V. HUNT a été étendu par S.H. CRANDALL [73] à des formes plus complexes, puis par E.A. NEPPIRAS [74, 75] au cas des transducteurs ultrasonores, différentes géométries étant alors étudiées à l'aide d'un modèle d'onde plane, en appliquant les conditions de continuité de vitesse et de force à chaque rupture d'impédance. L'auteur obtient ainsi l'expression de grandeurs caractéristiques du transducteur parmi lesquelles le facteur de forme F_f tel que :

$$\frac{T_{max}}{V_{max}} = \frac{F_f}{\rho_a C_a}$$
(I.37)

où T_{max} représente la contrainte maximale dans la structure (plan nodal ou zone de rupture d'impédance), V_{max} la vitesse maximale dans la structure (face parlante), ρ_a la masse volumique du matériau actif et C_a la vitesse de propagation longitudinale dans le matériau actif. La connaissance de la contrainte maximale tolérée dans la structure T_{max} permet d'obtenir l'intensité acoustique maximale I d'un transducteur limité mécaniquement :

$$I = \frac{(\rho C)\zeta}{2} \left(\frac{F_{f} T_{max}}{\rho_{a} C_{a}}\right)^{2}$$
(I.38)

où ρ et C représentent respectivement la masse volumique et la vitesse longitudinale du milieu de propagation, et ζ un facteur de correction dû à la valeur complexe de la charge. Les résultats obtenus par E.A. NEPPIRAS pour les transducteurs de type Tonpilz ou anneau constituent un outil précieux d'optimisation du point de vue du comportement mécanique de ces structures.

c) Conclusion et remarques

A l'aide des modèles simplifiés, à constantes localisées ou réparties, présentés précédemment, l'évaluation des limites mécaniques des transducteurs piézoélectriques apparaît possible pour des structures simples (Tonpilz, anneau). Pour une structure réellement tridimensionnelle, la description du comportement mécanique nécessite une connaissance complète du champ de contraintes couplée à une utilisation de critères de non-linéarité ou de fatigue. Dans ce cas, les modèles analytiques traditionnels s'avèrent insuffisants. Finalement, il faut aussi remarquer que :

- la limitation d'origine mécanique, qui intervient essentiellement à la résonance, peut pénaliser la courbe de réponse du transducteur dans toute la bande utile. Cet inconvénient est évité par une contre-réaction (feedback) électroacoustique [27, 28] qui consiste à réagir sur la puissance électrique à l'entrée lorsque la vitesse vibratoire du pavillon atteint une valeur limite.

- le problème lié à l'excitation de modes parasites dans les structures vibrantes, qui a été observé expérimentalement pour un transducteur d'usinage [76], semble avoir uniquement été étudié à l'aide d'une modélisation par éléments finis [2, 31].

I.3 LIMITES DE PUISSANCE D'ORIGINE THERMIQUE DANS LES TRANSDUCTEURS

Dans un transducteur piézoélectrique, l'émission d'énergie par rayonnement de l'onde sonore est toujours accompagnée de dissipations parasites provoquées par les pertes intrinsèques aux matériaux (pertes d'origine mécanique, diélectrique ou piézoélectrique) et par les frottements aux interfaces des différentes pièces constituant la structure. Ces pertes ont pour conséquences un rendement toujours inférieur à l'unité et un échauffement du transducteur. En particulier, pour un projecteur fonctionnant à forte puissance, ces dissipations d'énergie peuvent imposer limitation thermique de fonctionnement (emballement thermique, une contraintes, variations des caractéristiques). L'évaluation de cette limite nécessite donc l'examen des phénomènes physiques à l'origine de ces l'étude des problèmes thermiques spécifiques aux dissipations et transducteurs.

I.3.1 Pertes dans les matériaux élastiques et piézoélectriques

a) Aspects théoriques⁺

Dans transducteur piézoélectrique, les frottements aux un interfaces entre les différentes pièces peuvent être à l'origine de pertes non négligeables. Bien que ces phénomènes non-linéaires aient fait l'objet d'une tentative de modélisation [77], leur description reste difficile et ils seront négligés dans la suite de ce travail. L'utilisation de diélectriques complexes pour décrire les élastiques et constantes dissipations d'énergie d'origine mécanique ou électrique en fonctionnement linéaire est une technique classique. Dans un milieu piézoélectrique, ces phénomènes physiques sont liés et il devient nécessaire de tenir compte d'un angle de perte associé à la constante piézoélectrique, même si sa signification n'est pas évidente. La description des différents matériaux s'effectue selon la convention suivante :

- pour un matériau élastique isotrope :

$$E = E' + j E''$$
 (I.39)

- pour un matériau piézoélectrique :

$$s_{mn}^{E} = s_{mn}^{E}' + j s_{mn}^{E}''$$
 (I.40)

$$d_{im} = d'_{im} + j d''_{im}$$
 (I.41)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{T}}' + j \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{T}}'' \qquad (I.42)$$

Les phénomènes considérés dans la suite de ce paragraphe sont supposés avoir une dépendance temporelle en $\exp(+j\omega t)$. A partir du flux d'un vecteur de Poynting généralisé, R. HOLLAND [78] exprime la densité de puissance

+ Cette partie utilise les équations constitutives de la piézoélectricité décrites en annexe 3.

30

 $p_{t\,o\,t}$ dissipée dans un matériau piézoélectrique sous la forme :

$$p_{tot} = \frac{1}{2} \omega \operatorname{Im} \left(\underline{E} \cdot \underline{D}^* + \underline{T} \cdot \underline{S}^* \right)$$
 (I.43)

soit en utilisant les équations constitutives de la piézoélectricité (annexe 3) et les tenseurs définis précédemment :

$$p_{tot} = \frac{1}{2} \omega \operatorname{Im} \left(E_{i} d_{in}^{*} T_{n}^{*} + E_{i} \varepsilon_{ij}^{T} E_{j}^{*} + T_{m} s_{mn}^{E} T_{n}^{*} + T_{m} d_{jm}^{*} E_{j}^{*} \right) \quad (I.44)$$

les indices i et j variant de 1 à 3, m et n de 1 à 6. Si l'on définit un vecteur généralisé des forces appliquées :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\mathbf{m}} \\ \mathbf{E}_{\mathbf{i}} \end{bmatrix}$$
(I.45)

et une matrice des constantes physiques :

$$\begin{bmatrix} M_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{mn}^{E} & d_{mj} \\ d_{jm} & \varepsilon_{ij}^{T} \end{bmatrix}$$
(1.46)

où les indices p et q varient de 1 à 9, l'expression de p_{tot} peut être réduite à :

$$p_{tot} = \frac{1}{2} \omega \operatorname{Im} \left(F_{p} M_{pq}^{*} F_{q}^{*} \right)$$
 (I.47)

Si l'on note alors θ_{pq} le déphasage entre les composantes F_p et F_q , l'équation (I.47) devient, en abandonnant la notation d'Einstein :

$$p_{tot} = \frac{1}{2} \omega \sum_{p,q=1}^{9} |F_p| |F_q| \left(M'_{pq} \sin \theta_{pq} - M''_{pq} \cos \theta_{pq} \right) \quad (I.48)$$

avec :

$$M_{pq} = M'_{pq} + j M''_{pq}$$
 (I.49)

La double sommation fait apparaître des termes en θ_{pq} et en θ_{qp} , ce qui élimine les termes où intervient sin θ_{pq} . Finalement :

$$p_{tot} = -\frac{1}{2}\omega \sum_{p,q=1}^{9} |F_{p}| |F_{q}| M_{pq}' \cos \theta_{pq}$$
(1.50)

En repartant des définitions du vecteur $[F_p]$ et de la matrice $[M_{pq}]$, et en utilisant à nouveau la notation d'Einstein, l'expression précédente fait apparaître des pertes d'origine purement mécanique :

$$p_m = -\frac{1}{2} \omega |\mathbf{T}_m| |\mathbf{T}_n| \mathbf{s}_{mn}^{\mathrm{E}} \cos \theta_{mn} \qquad (I.51)$$

ainsi que des pertes d'origine purement électrique :

$$p_e = -\frac{1}{2} \omega |\mathbf{E}_i| |\mathbf{E}_j| \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{T}} \cos \boldsymbol{\theta}_{ij} \qquad (I.52)$$

Les termes restants sont fonction à la fois du champ électrique et de la contrainte mécanique et sont appelés pertes piézoélectriques :

$$p_{p} = -\frac{1}{2} \omega |E_{i}| |T_{m}| d_{im}^{"} \cos \theta_{im}$$
 (I.53)

Pour que le matériau soit passif, il doit dissiper de l'énergie pour l'ensemble des configurations de chargement envisageables. Les composantes de $[F_p]$ étant des variables indépendantes, il est possible de choisir $\theta_{pq} = 0$ ou π pour tous les p et q. Dans ce cas, l'équation (I.50) devient :

$$p_{tot} = -\frac{1}{2} \omega F_{p} M_{pq}^{"} F_{q}$$
 (1.54)

et, pour que la valeur de p_{tot} soit positive, il est nécessaire que la matrice $-\left[M_{pq}^{''}\right]$ soit définie positive ce qui implique, en particulier, que les termes diagonaux des tenseurs [s^E "] et [ϵ^{T} "] soient négatifs. Par contre, aucune contrainte de signe sur les termes de [d"] n'apparaît de manière évidente. Cette propriété de la matrice $-\left[M_{pq}^{"}\right]$ implique également vérification d'un la certain nombre d'inégalités où interviennent simultanément les parties imaginaires des constantes élastiques. piézoélectriques et diélectriques. Dans le cas des matériaux élastiques, le même type de raisonnement, en ne considérant que les pertes d'origine mécanique, impose :

$$\mathbf{E}^{"} \ge \mathbf{0} \tag{I.55}$$

pour que le matériau reste passif.

b) Pertes mécaniques

Les pertes d'origine mécanique, dues au frottement moléculaire, constituent classique bien connu pour les matériaux un phénomène élastiques. Dans les milieux piézoélectriques, cette dissipation est étroitement liée aux domaines qui constituent la céramique. Ces domaines sont des grains ayant une direction de polarisation fixe, distribués de manière aléatoire dans le matériau. L'application d'un champ électrique intense les oriente et donne à la céramique son caractère piézoélectrique. GERSON [51] a mis en évidence l'augmentation des pertes mécaniques R. au mouvement des parois de domaines sous une contrainte associées extérieure dynamique. K. LUBITZ et al [79] ont déterminé l'existence d'un seuil de contrainte à partir duquel ces variations deviennent beaucoup plus rapides. La valeur de ce seuil dépend de la composition de la céramique et de la stabilisation des domaines. Un comportement semblable a été observé dans les métaux [60, 80]. R.R. WHYMARK et al [81] ont confirmé ces résultats et observé une diminution des pertes mécaniques dans les céramiques après application d'une excitation dynamique préalable.

Quand la puissance disponible est limitée par le rendement du transducteur, la contribution des pertes mécaniques est négligeable. Ainsi, pour une céramique ayant un coefficient de qualité mécanique Q_M de 100 et un transducteur tel que $Q_M = 5$, la contribution des pertes mécaniques au rendement n'est que de 5 % [51]. Dans le cas de la limite thermique, la contribution des pertes mécaniques, négligeable pour les transducteurs non résonants [82], devient, à la résonance, équivalente à celle des pertes diélectriques pour les transducteurs de type sonar à faible coefficient de qualité mécanique Q_M [49, 82], et même prépondérante dans les transducteurs d'usinage à fort Q_M [83].

c) Pertes diélectriques

Les pertes diélectriques proviennent essentiellement, en fonctionnement linéaire, de l'hystérésis champ-charge [49, 82, 83]. La non-linéarité champ-déformation apparaît à des champs électriques beaucoup plus élevés. Ces pertes ont tendance à augmenter avec un fort champ électrique, et à diminuer avec l'âge du matériau [84]. Leur variation avec la température est parfois positive [82, 85] et parfois négative [86]. Elle semble dépendre du type de céramique utilisé et de la gamme de température considérée [87]. Le titano-zirconate de plomb possède cependant une stabilité thermique correcte. Dans les transducteurs sonores et ultrasonores, les pertes diélectriques interviennent comme limitation principale du rendement et contribuent aussi, de par la chaleur qu'elles produisent, à une éventuelle limite thermique [49]. Dans le cas des transducteurs non résonants, les pertes diélectriques sont prépondérantes [82] . Lorsqu'on se situe à la résonance, elles apparaissent équivalentes aux pertes mécaniques pour les transducteurs à faible coefficient de qualité mécanique et négligeables pour les transducteurs à fort Q_M comme les transducteurs d'usinage [82, 83]. Les pertes diélectriques ont été reliées aux pertes mécaniques par P. GERTHSEN et al [88] au moyen d'un coefficient de proportionalité ne dépendant que des propriétés du matériau et de la configuration des parois des domaines.

d) Pertes piézoélectriques

Contrairement aux pertes d'origine diélectrique ou mécanique, les pertes associées à la constante piézoélectrique n'ont pas d'interprétation physique simple. D'après C.E. LAND et al [89], un matériau ayant des constantes diélectriques et élastiques complexes doit avoir des constantes piézoélectriques complexes. Considérant l'évolution des pertes avec la polarisation, ils attribuent ces pertes piézoélectriques, non pas au mouvement des parois des domaines, mais à une imparfaite conversion électromécanique. Une modélisation du mouvement des parois des domaines a permis à J.G. SMITS [90, 91] de proposer une relation entre les perturbations apportées par ces mouvements à la constante piézoélectrique et les perturbations apportées aux constantes élastiques et diélectriques. Pour chaque structure, cet auteur a montré l'existence théorique de modes de vibration présentant la propriété d'être "sans perte". R.S. LAKES [91, 92] a étudié la contribution des pertes piézoélectriques à l'angle de perte de la constante élastique. Pour une excitation en dessous de toute résonance mécanique, la relation entre coefficients complexes est alors fonction de la géométrie de l'échantillon. Il n'existe aucune contrainte de signe sur l'angle de perte de la constante piézoélectrique.

e) Techniques expérimentales de détermination des pertes

La méthode standard de l'Institute of Radioelectricity Engineers [94, 95] utilisée pour mesurer les constantes physiques des matériaux piézoélectriques ne permet pas de déterminer la partie complexe des coefficients et néglige la perturbation qui peut être apportée par l'angle de perte de la constante piézoélectrique. A partir de ces observations. R. HOLLAND et E.P. EER NISSE [96] ont mis au point une méthode "gain - bande" tenant compte du caractère complexe des constantes pour en déterminer la partie réelle, puis l'ont étendue à la détermination de leur partie imaginaire [97]. Cette méthode est applicable lors de faibles résonances qu'en présence de certaines réponses parasites. ainsi J.G. SMITS [90, 98, 99] a développé une méthode itérative permettant, à partir de quatre géométries d'échantillons et de trois mesures d'admittance, de déterminer l'ensemble coefficients des complexes d'un matériau piézoélectrique, même lorsque le couplage est faible.

f) Modélisation des pertes dans les transducteurs

La prise en compte des pertes dans des modèles de transducteurs à constantes localisées [49] conduit, pour des géométries simples, à des résultats déjà contenus dans les équations (I.51) et (I.52). En effet, pour un transducteur de type Tonpilz, les pertes mécaniques s'expriment sous la forme :

$$p_m = -\frac{1}{2} \omega T_3^2 s_{33}^E \tan \delta_m$$
 (I.56)

et les pertes diélectriques :

$$p_e = -\frac{1}{2}\omega E_3^2 \varepsilon_{33}^{\mathrm{T}} \operatorname{tg} \delta_e \qquad (I.57)$$

Les circuits équivalents proposés aux figures (I.12) et (I.13) ne peuvent décrire correctement l'évolution du coefficient de qualité mécanique entre les conditions électriques de circuit ouvert et de court-circuit. Pour décrire ce phénomène, H. SHIMIZU et al [100] ont proposé un circuit

équivalent amélioré incluant les pertes diélectriques. Différents modèles de résonateurs acoustiques à constantes réparties ont été développés par G.E MARTIN, intégrant, soit les pertes mécaniques seules [101], soit les pertes d'origine mécanique, diélectrique et piézoélectrique [39, 102]. Les schémas équivalents proposés, pour une géométrie particulière, peuvent être assemblés sous forme d'un réseau électrique pour reconstituer un transducteur complet. A partir d'un calcul analytique du rendement dans des structures de géométries différentes vibrant longitudinalement, R.W. BENSON et al [103] ont mis en évidence l'importance des pertes dues à une rupture d'impédance. Y.V. BOGORODSKI et al [104] ont évalué les pertes mécaniques à partir de considérations sur l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de chaque élément constituant le transducteur. Le rendement est alors exprimé sous la forme :

$$\eta_{tot} = \sum_{i}^{n} \frac{\eta_{i}}{e_{i}} e \qquad (I.58)$$

où $\boldsymbol{\eta}_i$ représente le rendement de l'élément i, \boldsymbol{e}_i la compliance de l'élément i, e la compliance du transducteur, et η_{tot} le rendement du transducteur. différents auteurs [43, 104] soulignent l'importance des pertes Ces générées aux joints de colle qui assurent l'adhésion entre les céramiques. De plus, les techniques utilisées pour assurer l'étanchéité (vulcanisation...) ou, dans certains cas, pour fixer le transducteur dans son boitier (écrou amortisseur, électrode porteuse...), peuvent provoquer des dissipations d'énergie supplémentaires d'importance comparable aux pertes intrinsèques des matériaux constituant le projecteur.

I.3.2 Application aux transducteurs piézoélectriques

a) Problèmes thermiques liés aux transducteurs

Les effets thermiques ont longtemps été négligés dans l'étude des transducteurs sonar de puissance [15] dans la mesure où les impulsions étaient courtes et espacées. Cette approximation ne peut plus être appliquée aux transducteurs basse fréquence actuels. L'échauffement, provoqué par les différents types de perte, peut être à l'origine de phénomènes physiques préjudiciables au fonctionnement du transducteur : dépolarisation des céramiques au delà de la température de Curie, contraintes dues à la dilatation thermique et aux dilatations différentielles, variation des caractéristiques des différents matériaux avec la température.

D.A. BERLINCOURT et al [82, 85] ont mis en évidence l'influence de la température sur la dépolarisation de la céramique à champ électrique élévé (figure I.20). La limite thermique liée à cette dépolarisation



n'intervient que pour des transducteurs ayant un coefficient de qualité mécanique supérieur à 5 [49]. Elle est fonction des pertes mécaniques et diélectriques, ainsi que du dessin du transducteur. Ces travaux ont permis de déterminer des valeurs maximales de puissance par unité de volume, pour différentes géométries de transducteurs et différents coefficients de qualité mécaniques.

De nombreuses publications [49, 82, 85-87, 105-107] rendent compte d'études expérimentales sur l'influence de la température sur les caractéristiques électriques de la céramique, constatant, de manière générale, une augmentation de la permittivité diélectrique, de la tangente de l'angle de perte et de la constante piézoélectrique. L'influence de la température sur les constantes élastiques a été étudiée pour différents métaux [59, 68, 108] et céramiques [86, 109]. Quand la température augmente, le matériau a tendance à devenir moins rigide et donc à augmenter son amplitude de vibration, donc ses pertes mécaniques. Ce phénomène est non linéaire et laisse apparaître un risque d'emballement thermique. Il est à noter que la céramique possède une mémoire thermique [86] et que son comportement peut être modifié par une exposition antérieure à une température élevée. Les conséquences classiques de ces variations pour des transducteurs sonores sont une baisse de la fréquence de résonance, du coefficient de couplage et, à température plus élevée, du coefficient de qualité mécanique. C.L. GOODHART et al [43] ont montré que, dans certains cas, cette détérioration de fonctionnement du transducteur peut avoir pour principale origine la variation de l'élasticité de la colle avec la température et, accessoirement, la dilatation de la tige de précontrainte En particulier, l'évolution de la fréquence de résonance est, dans ces cas,

inverse de celle attendue compte tenu de l'évolution des caractéristiques de la céramique avec la température.

La dilatation thermique est un phénomène bien connu dans les matériaux isotropes. Dans les céramiques, la dilatation thermique apparaît être une combinaison de la distribution anisotrope des domaines et de leur réorientation durant l'échauffement [110]. Ce phénomène physique pose, pour les transducteurs piézoélectriques, des problèmes spécifiques :

- la modification de la masse volumique associée à la variation du module de Young peut entraîner une variation de la fréquence de résonance et du coefficient de couplage,
- l'augmentation de la température peut introduire des contraintes supplémentaires à l'interface céramique-métal de par la différence des coefficients de dilatation thermique [111].

Les techniques utilisées pour remédier à ces inconvénients sont variées : stabilisation thermique du transducteur par utilisation d'un chauffage interne [112], d'un refroidissement par écoulement liquide [113], ou de capacités thermiques montées en parallèle [114], utilisation de joints de matière différente [115, 116] ou de ressorts [117] pour éviter une fracture à l'interface céramique-métal.

b) Modélisation de l'échauffement des transducteurs

Des études théoriques complètes ont été menées sur des géométries simples : déformation induite par une distribution de température dans une sphère piézoélectrique [118], dérive en fréquence d'un résonateur acoustique [119], échauffement d'un anneau piézoélectrique [120]. Les schémas équivalents des transducteurs peuvent être modifiés pour prendre en compte les phénomènes thermiques. Ainsi, la variation des propriétés physiques des matériaux avec l'âge et la température peut être décrite en déterminant pour chaque élément du schéma équivalent des figures (I.12) et (I.13), une loi d'évolution de forme exponentielle [121]. Cependant, la majorité des études du comportement thermique des transducteurs utilise des outils de simulation numérique : matrices de transfert [43], méthode des différences finies [122], méthode des éléments finis [32, 33, 123]. Dans la plupart des cas, la dissipation est supposée uniforme dans la céramique. Les conditions aux limites thermiques font intervenir des coefficients d'échange souvent mal connus [123]. Ces approximations conduisent à une description qualitative du phénomène. Les mesures, lorsqu'elles ont été effectuées, présentent un écart important avec les résultats numériques.

1.4 LIMITES DE PUISSANCE D'ORIGINE ELECTRIQUE DANS LES TRANSDUCTEURS

La limite d'origine électrique d'un transducteur piézoélectrique peut avoir deux origines. La première, relative au comportement de la céramique, provient de la dépolarisation ou d'un fonctionnement non-linéaire. La seconde dépend des éventuels court-circuits pouvant apparaître dans le transducteur, essentiellement entre les électrodes.

I.4.1 Dépolarisation des céramiques

La dépolarisation est liée à la réorientation des domaines à 180° sous champ électrique élevé opposé à la polarisation [124]. La valeur limite de dépolarisation est fortement dépendante de la température [49] (figure I.20). Les valeurs du champ coercitif peuvent dépasser 10⁶ V/m pour les céramiques classiquement utilisées dans les transducteurs de puissance [84].

I.4.2 Non-linéarité électrique

Une céramique piézoélectrique excitée à fort niveau électrique laisse apparaître à partir d'une tension limite un phénomène de "saut" sur la courbe d'admittance [76, 109, 125]. Il devient alors impossible de la faire travailler à sa fréquence de résonance réelle. Ainsi, lorsque la fréquence augmente, on assiste, sur le diagramme d'admittance, à un saut de C vers D (figure I.21). Par contre, lorsqu'elle diminue, le saut s'effectue de A vers B. Ce comportement est attribué à l'augmentation de l'élasticité de la céramique quand la déformation augmente. Une simulation numérique du



phénomène [109] où l'élasticité est exprimée sous forme d'un développement limité au second ordre par rapport à la déformation a permis de retrouver les résultats expérimentaux.

I.4.3 Isolation électrique

La limite électrique relative à l'isolation du transducteur est essentiellement dépendante de l'atmosphère présente dans le boitier. Une étude très détaillée [126] a permis de constater que la rupture électrique est provoquée par une étincelle se propageant, à travers le gaz, le long de la surface de la céramique. Les mesures effectuées sur différents gaz ont conduit à une expression empirique de la tension de rupture :

$$\Phi_{rupt} = K d^{n} p^{m}$$
(1.59)

où d'est la distance entre les électrodes, p la pression du gaz, K, n et m des paramètres dépendant du type de gaz. L'augmentation de l'humidité relative, lorsqu'elle reste inférieure à 20 %, augmente la tension de rupture. Pour des humidités plus importantes, la tension de rupture diminue. Les gaz de type "électronégatif" (SF₆, C_2F_6 , C_3F_8 , et C_4F_{10}) ont un caractère beaucoup plus isolant que l'air, l'azote ou le gaz carbonique, ainsi qu'une bonne stabilité mécanique sous arc électrique.

La connaissance de la tension maximale applicable au transducteur, liée à l'un des phénomènes décrit précédemment, permet une détermination immédiate de la puissance maximale à l'aide de l'équation (I.10).

I.5 LIMITE DE PUISSANCE D'ORIGINE ACOUSTIQUE DANS LES TRANSDUCTEURS : LA CAVITATION

I.5.1 Description du phénomène physique

La cavitation correspond à l'apparition, dans les liquides soumis à de brusques variations de pression, de bulles qui croissent rapidement puis implosent provoquant des phénomènes optiques (luminescence), acoustiques (bruit de cavitation), mécaniques (érosion) et chimiques. Son action est particulièrement importante autour des hélices marines, dans les turbines hydrauliques, les écoulements non stationnaires, mais aussi au voisinage immédiat des transducteurs d'acoustique sous-marine. Un projecteur ultrasonore fonctionnant à faible immersion est ainsi limité en puissance par le risque de cavitation, c'est-à-dire la formation de bulles à la surface de son pavillon, pouvant entraîner une diminution de la puissance émise et son endommagement par désadaptation de sa charge. De plus, une érosion notable de la partie du transducteur en contact avec le fluide peut se produire [127]. La grandeur physique qui intéresse l'utilisateur de transducteurs est le seuil de cavitation qui correspond à la pression acoustique requise pour produire la cavitation [128].

I.5.2 Modèles théoriques

Le mouvement d'une microbulle de cavitation peut être décrit précisement [129]. Lorsque la pression diminue, la volume de la bulle augmente selon la loi de compressibilité des gaz. A chaque instant, il y a équilibre entre la pression intérieure, qui tend à dilater la bulle, et la pression extérieure à laquelle s'ajoute la tension superficielle de l'interface qui tend à la comprimer. Les variations de la pression extérieure modifient cet équilibre mécanique. Au-delà d'un rayon critique, la tension superficielle ne peut plus équilibrer les autres pressions et la bulle croît indéfiniment. Quand la pression appliquée redevient supérieure à la pression critique, la bulle implose en un temps très court $(10^{-4}$ à 10⁻⁵ s). Ce modèle, le plus simple qui puisse être défini, permet de définir un seuil de cavitation statique. Des modèles dynamiques plus élaborés ont été développés [130-133] . Dans tous les cas, ils supposent l'existence de microbulles stabilisées dans le liquide appelées "germes de cavitation". Cette supposition est justifiée par la différence entre la pression interne du liquide, qui exprime sa cohésion (plusieurs milliers de fois la pression atmosphèrique), et le seuil de cavitation effectivement mesuré (de l'ordre d'une centaine de fois la pression atmosphèrique au maximum pour de l'eau pure dégazée). Les différents modèles théoriques de stabilisation proposés [134-140] permettent de décrire l'évolution du seuil de cavitation de manière qualitative. Les paramètres essentiels de ces modèles sont le nombre et la taille des germes de cavitation présents dans le liquide. Leur détermination fait appel à un traitement statistique de la cavitation [141-145].

I.5.3 Résultats expérimentaux

Les principes d'une méthode expérimentale d'analyse de la cavitation peuvent être définis de la manière suivante [128] :

- connaître le liquide,
- connaître le champ sonore,
- savoir quand il se passe quelque chose.

La connaissance du liquide consiste à préciser sa nature, sa préparation, son pourcentage de saturation gazeuse, sa température. La connaissance du champ sonore peut être son intensité, sa fréquence mais aussi sa distribution dans la zone de mesure. La principale différence entre les méthodes proposées concerne le plus souvent la détection du phénomène de cavitation. Les mesures sont généralement de type acoustique ou optique [146-151], chacune ayant avantages et inconvénients (difficulté de déterminer la contribution acoustique de la cavitation, difficulté de voir l'implosion de cavités de faible rayon). La détermination d'un seuil de cavitation n'est pas absolue mais dépend des caractéristiques du liquide et du champ sonore. L'influence des différents paramètres étudiés peut être justifiée théoriquement par l'action sur les germes de cavitation.

Le seuil de cavitation est souvent déterminé pour de l'eau distillée ou de l'eau du robinet, mais il a été mesuré pour un grand nombre de liquide (huile, acétone, éther, benzène...) [148, 152, 153]. E. YILMAZ et al [154] ont étudié l'effet de l'addition de particules dans l'eau et expliqué les variations observées à l'aide d'un modèle théorique de germe de cavitation.

Le seuil de cavitation augmente quand la pression augmente mais l'importance de la variation dépend du sens d'évolution de la pression [134]. Cette augmentation a été justifiée théoriquement par R.E. APFEL [135]. L'évolution du seuil de cavitation avec la profondeur, mesurée en mer par V.L. KORETS et al [155], laisse apparaître des lignes brisées. Ce résultat conduit les auteurs à envisager une stratification de l'océan, due à une plus grande stabilisation des germes dans les couches profondes.

Lorsque le pourcentage de saturation gazeuse augmente, le seuil de cavitation tend à diminuer. Cette évolution a été constatée expérimentalement par différents auteurs pour de l'eau du robinet [135, 139, 155] et de l'eau distillée [157]. Elle apparaît linéaire sauf dans le cas de l'eau distillée. La variation du seuil de cavitation avec la contenance gazeuse apparaît beaucoup plus faible lorsque le liquide a été filtré. R.E. APFEL [136] a justifié ce résultat en soulignant l'influence de taille maximale des germes de cavitation.

Le seuil de cavitation augmente lorsque la fréquence augmente mais il apparaît indépendant de la fréquence en dessous d'un seuil de l'ordre de 10 kHz. Les principaux résultats ont été mesurés sur une gamme de 0 à 3,3 MHz [146-148] (figure I.22).

L'influence de la température s'explique par la variation de différentes caractéristiques du liquide qui interviennent dans l'expression du seuil de cavitation statique [135]. Elle a fait l'objet de plusieurs déterminations expérimentales [154, 156].

Il est possible de trouver dans la littérature scientifique, de nombreux articles décrivant l'évolution du seuil de cavitation avec le temps de repos du liquide, la durée d'impulsion dans le cas d'excitation non continue... L'ensemble de ces résultats démontre qu'il est impossible de déterminer un seuil de cavitation absolu mais qu'il est toujours nécessaire de se référer à des conditions expérimentales précises.



I.5.4 Transducteurs et cavitation

C.H. SHERMAN [157] a exprimé l'intensité acoustique maximale émise par un transducteur avant cavitation par :

$$I_{c} = \left(\frac{r}{\rho CA |\zeta_{m}|^{2}}\right) \left(\frac{|p_{c}|^{2}}{2\rho C}\right)$$
(I.60)

où ρ et C représentent respectivement la masse volumique et la vitesse de propagation du son dans le liquide, r la résistance de rayonnement, A la surface du pavillon, p_c la pression de cavitation dans le liquide sous champ uniforme et ζ_m l'impédance acoustique de transfert, c'est-à-dire le rapport de la vitesse maximale à la vitesse de référence de la source. Le second facteur de l'équation (I.60) caractérise le milieu de propagation tandis que le premier facteur, γ , peut s'écrire :

$$\gamma = \left(\frac{\mathbf{r}}{\rho C \mathbf{A} |\boldsymbol{\zeta}_{m}|^{2}}\right) = \Phi \left|\frac{\mathbf{\bar{p}}_{s}}{\mathbf{p}_{m}}\right|^{2}$$
(I.61)

où Φ désigne la tension électrique appliquée au transducteur et $\left| \mathbf{p}_{s} \right| / \mathbf{p}_{m} \right|$ caractérise l'uniformité du champ sonore. La valeur de Υ a été déterminée pour différentes formes de pavillons (piston plat, piston hémisphérique, plaque circulaire avec différentes conditions d'encastrement, sphère). Le modèle peut être développé pour le cas de plusieurs sources. L'ensemble de ces résultats a permis l'établissement d'une formule empirique utilisée

dans la conception de transducteurs d'acoustique sous-marine [158] :

$$I_c = 0.15 \left(p_c(0) + \frac{h}{33} \right)^2 W/cm^2$$
 (I.62)

ou encore

$$I_{c} = 0.15 (p_{c}(0) + 0.1 h')^{2} W/cm^{2}$$
 (I.63)

où h est la profondeur d'immersion en pieds, h' la profondeur d'immersion en métres et $p_{c}(0)$ la pression de cavitation à profondeur nulle.

I.6 VARIATION DES CONSTANTES DES MATERIAUX A FORT NIVEAU D'EXCITATION

Classiquement, les constantes physiques des céramiques piézoélectriques utilisées dans les transducteurs sont mesurées à faible niveau (faible déformation, faible champ électrique). Une description précise des limites de fonctionnement en puissance des transducteurs sonores et ultrasonores nécessite de déterminer ces constantes dans des conditions proches de leur utilisation, c'est-à-dire sous forte contrainte ou/et sous champ électrique élevé.

I.6.1 Excitation mécanique à fort niveau

La variation des constantes de la céramique sous contrainte mécanique extérieure correspond à différentes situations relatives au transducteur :

- contrainte statique :

. application de la précontrainte,

. forte immersion.

- contrainte dynamique :

. excitation à fort niveau.

L'application d'une contrainte unidimensionnelle parallèle à la direction de polarisation a fait l'objet d'études de la part de nombreux auteurs [105, 106, 124, 159-163]. L'évolution des constantes diélectriques, piézoélectriques, des coefficients de couplage et de la tangente de l'angle de perte de la constante diélectrique avec la contrainte a été mesurée, mettant en évidence l'influence de la température [105, 163], du vieillissement [105, 163], du champ électrique [124, 159, 160] ou d'une combinaison de ces facteurs. Les résultats de mesures pour les céramiques utilisées classiquement dans les tranducteurs piézoélectriques de puissance montrent une augmentation de la permittivité et une diminution de la constante piézoélectrique d_{33} ainsi que l'existence d'une hystérésis lors d'un cycle de pression [106]. Les valeurs extrémales de cette hystérésis se stabilisent après plusieurs cycles. La tangente de l'angle de perte de la constante diélectrique augmente avec la contrainte. La plupart des céramiques présentent des variations comparables, qui peuvent être considérablement augmentées par la tension électrique ou la température. L'application de ces résultats au cas de la précontrainte ou de l'immersion d'un transducteur conduit à plusieurs remarques :

- à faible champ électrique, la contrainte maximale que l'on puisse tolérer sans changement important des caractéristiques dépend du type de céramiques utilisées (84 MPa pour les PZT4 [49]),

- sous forte contrainte et fort champ électrique, l'augmentation importante de la permittivité peut entraîner une perte d'accord, celle de la tangente de l'angle de perte de la constante diélectrique une perte de rendement et un échauffement préjudiciable,

- lorsque la contrainte est appliquée depuis longtemps (deux à trois semaines), ces constantes tendent à retourner près de leurs valeurs initiales,

- H.H.A. KRUEGER [164] a montré que la permittivité des céramiques pouvait être stabilisée par traitement thermique pour des contraintes inférieures à 70 MPa.

Ces phénomènes peuvent être interprétés comme une tendance des domaines à se réorienter dans le plan perpendiculaire à la force appliquée, suivant la direction autorisée la plus proche [124]. Le vieillissement provient d'une recherche de position plus stable pour les domaines.

Diverses études expérimentales de l'influence d'une contrainte perpendiculaire à l'axe de polarisation sur les constantes électriques des céramiques ont été publiées [105, 106, 124, 162, 165]. Les résultats obtenus montrent que la permittivité décroît contrairement au cas où la contrainte est parallèle à l'axe de polarisation. Les autres constantes gardent le même sens d'évolution. Si, de manière générale, les variations obtenues pour les constantes diélectriques sont moins importantes que dans le cas de la contrainte parallèle, H.H.A. KRUEGER [104] obtient une détérioration des constantes piézoélectriques beaucoup plus importante, ainsi qu'une perte de symétrie (d₃₁ diminue, d₃₂ augmente, au retour à zéro d₃₁ \neq d₃₂).

L'étude expérimentale d'une contrainte bidimensionnelle perpendiculaire à la polarisation [166] correspond au cas d'une sphère polarisée radialement sous pression extérieure uniforme. Elle met en

43

évidence une très importante variation des constantes, surtout à fort champ électrique, ainsi qu'une évolution rapide avec l'âge. Ce phénomène s'explique par la commutation des domaines perpendiculairement à l'axe de compression, s'effectuant de préférence dans la direction "anti-parallèle" à la polarisation, qui minimise l'énergie.

La connaissance du comportement des céramiques sous pression hydrostatique présente un grand intérêt dans la mesure où il correspond à un transducteur en immersion libre. Dans ce cas, la faible variation des caractéristiques des céramiques (par rapport au cas de la contrainte unidimensionnelle) correspond à une faible réorientation des domaines, de par l'isotropie de la contrainte [167]. R.Y. NISHI [159] a montré que la d'une pression hydrostatique superposition à une contrainte uni-dimensionnelle a des effets négligeables, dans la mesure où cette contrainte est appliquée depuis plus d'une semaine. Cette faible variation des constantes de la céramique avec la pression hydrostatique a été confirmée pour différentes températures et différents champs électriques [106] . A.C. TIMS [168] a mis en évidence une plus grande stabilité des caractéristiques pour des tubes de céramique de faible rapport diamètre/épaisseur.

Les études menées en fonctionnement dynamique [51, 81] renseignent sur l'évolution des pertes mécaniques sous fortes contraintes. En effet, si les constantes diélectriques et piézoélectriques sont inchangées et si le module d' Young varie d'environ 5 % jusque 20 MPa, les pertes mécaniques sont multipliées par un facteur trois dans cette même zone. Ces pertes proviennent de la commutation des domaines qui cherchent à aligner leur axe de polarisation dans la direction de tension maximale (ou à l'éloigner de la direction de compression maximale). Cette évolution a peu de conséquences sur le rendement (faible contribution des pertes mécaniques) mais peut contribuer à l'échauffement du transducteur. N.P. KHOKHLOV et al [169] ont observé l'évolution du module d'Young avec une forte pression, en régime transitoire, et mis en évidence l'existence de plusieurs extréma correspondant à différents processus de relaxation.

I.6.2 Excitation électrique à fort niveau

Les variations des constantes des céramiques piézoélectriques sous champ électrique élevé peuvent être étudiées pour un champ statique et pour un champ dynamique qui correspond à un fonctionnement à fort niveau.

Les variations de la permittivité et de la tangente de l'angle de perte de la constante diélectrique ont été mesurées par de nombreux auteurs, soit en fonction d'un champ électrique statique [84, 124], soit en fonction d'un champ électrique statique et d'une contrainte extérieure [106, 159, 160, 163]. Pour tous les types de céramiques étudiés, la permittivité et la tangente de l'angle de perte de la constante

44

diélectrique augmentent avec le champ électrique jusqu'à atteindre une permittivité augmentée de 30 % et une tangente de l'angle de perte multipliée par 10 pour un champ électrique de 5000 V/cm. La superposition d'une action mécanique accentue ces effets dans le cas d'une contrainte unidimensionnelle [159, 160, 163] et reste sans effet pour une pression hydrostatique [106]. Ces phénomènes peuvent être interprétés physiquement comme une réorientation des domaines, à 90° dans le cas d'un champ électrique dans le sens de la polarisation, à 90° et 180° dans le cas d'un

M. DAVINET [163] a étudié le comportement de transducteurs utilisant différents types de céramiques sous champ électrique alternatif élevé, mettant en évidence une variation des constantes plus importante que dans le cas d'un champ statique.

I.6.3 Conclusion

Les variations des constantes des céramiques piézoélectriques proviennent de la réorientation des domaines sous contrainte ou champ électrique extérieur. Les principales variations constatées sont :

- les variations de la permittivité avec une contrainte uni ou bidimensionnelle statique ou un champ électrique statique ou dynamique,

- les variations de la constante piézoélectrique avec une contrainte uni ou bidimensionnelle statique.

- l'augmentation des pertes diélectriques avec une contrainte uni ou bidimensionnelle statique ou un champ électrique statique ou dynamique,

- l'augmentation des pertes mécaniques avec une contrainte dynamique.

Ces résultats ont été résumés par D.A. BERLINCOURT et al [49, 70], puis par R.S. WOOLLETT et al [125]. Lorsque les céramiques sont utilisées dans les transducteurs ultrasonores, différents problèmes de fonctionnement peuvent apparaître à fort niveau :

- une perte d'accord, essentiellement à cause de la variation de la permittivité,

- une baisse de rendement, correspondant à l'augmentation des pertes diélectriques,

- un échauffement, provenant de l'augmentation des pertes diélectriques et mécaniques,

La configuration dans laquelle les céramiques sont soumises à une pression hydrostatique apparaît être la moins préjudiciable du point de vue mécanique (cas du transducteur annulaire à immersion libre).

I.7 CONCLUSION

Chaque phénomène physique limitant la puissance fournie par un transducteur piézoélectrique de géométrie simple peut être décrit à partir d'un modèle analytique. Dans le cas des limites d'origine électrique et acoustique, les informations données par ces modèles (tension maximale admissible, intensité acoustique maximale sur la face parlante) suffisent pour déterminer la puissance maximale rayonnée par le transducteur. De même, les constantes des matériaux mesurées à fort niveau peuvent être utilisées dans les modèles analytiques des transducteurs. Pour des géométries plus complexes, ces différents résultats sont exploitables directement par des outils de simulation numérique.

Dans le cas des limites d'origine mécanique et thermique, les modèles analytiques d'évaluation sont utilisables pour des transducteurs de géométrie simple. L'exploitation dans des logiciels de simulation n'est plus immédiate car elle nécessite :

- le calcul des contraintes dans toute la structure pour la limite mécanique,
- la prise en compte des pertes, la détermination de la puissance dissipée localement et la résolution du problème de la conduction thermique pour la limite thermique.

Ces différents développements, hormis la résolution de la conduction thermique, font l'objet de la suite de ce travail. Ils ont été effectués dans le code de calcul ATILA qui utilise la méthode des éléments finis pour décrire le comportement de transducteurs piézoélectriques de géométrie quelconque [6-13]. La prise en compte des pertes doit y permettre, outre le calcul de l'échauffement, une description plus précise des caractéristiques classiques des transducteurs ultrasonores car elle intégre la notion de rendement.

CHAPITRE II

CALCUL DES CONTRAINTES STATIQUES ET DYNAMIQUES DANS LES TRANSDUCTEURS PIEZOELECTRIQUES A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Ce chapitre a pour objet le calcul des contraintes dans un transducteur piézoélectrique de forme complexe, sous une sollicitation statique ou harmonique. Après une présentation de la méthode des éléments finis appliquée à l'étude de transducteurs piézoélectriques et une rapide description du code ATILA, la formulation du calcul des contraintes est détaillée pour des éléments mécaniques classiques (élastiques, plaques, coques) ou piézoélectriques. Quelques tests simples permettent alors d'évaluer la précision des résultats et d'examiner des points particuliers liés au calcul par éléments finis : discontinuité des contraintes aux frontières d'éléments, influence du maillage et convergence... Ensuite, le comportement mécanique des structures tests T2 et T3 présentées au chapitre I est décrit, en analyse statique et dynamique : application de la précontrainte sur le transducteur T2 et d'une pression hydrostatique sur le transducteur T3, excitation de chacune des structures à différentes fréquences de résonance. Les résultats de calcul sont, dans une dernière partie, comparés aux mesures.

II.1 FORMULATION THEORIQUE DU CALCUL DES CONTRAINTES

I.1.1 Rappels sur la méthode des éléments finis appliquée à la modélisation des transducteurs piézoélectriques

Les résultats repris dans cette partie ont été présentés en détail dans la thèse de J.N. DECARPIGNY [6] et sont volontairement reproduits de manière condensée.

a) Les équations du problème

La description du comportement d'un transducteur piézoélectrique rayonnant dans un fluide suppose la résolution d'un problème électrique, mécanique et acoustique. Le problème électrique est couplé au problème mécanique à l'intérieur du domaine piézoélectrique Ω_p (figure II.1). Le problème mécanique est couplé au problème acoustique par l'intermédiaire d'une surface S_i , interface entre le milieu solide Ω_s et le milieu fluide Ω_f . Enfin, le domaine fluide est limité par une surface frontière S_{∞} sur laquelle une condition de rayonnement particulière est imposée. Dans la suite, seuls les effets linéaires sont considérés, pour les problèmes électrique, mécanique et acoustique, ce qui exclut les non-linéarités de grands déplacements ou de comportement. Sont également exclus, pour l'instant, les effets dissipatifs. Enfin, chaque phénomène physique est



supposé avoir une dépendance temporelle en $\exp(+j\omega t)$, où ω désigne la pulsation. Dans le domaine Ω_p , le couplage entre les grandeurs électriques et mécaniques est décrit par les équations constitutives de la piézoélectricité détaillée en annexe 3 :

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijk1}^{E} S_{k1} - e_{kij} E_{k} \\ D_{i} = e_{ik1} S_{k1} + \varepsilon_{ij}^{S} E_{j} \end{cases}$$
(II.1)

où [T] est le tenseur des contraintes, [S] le tenseur des déformations, \underline{E} le vecteur champ électrique, \underline{D} le vecteur excitation électrique, $[c^E]$ le tenseur de rigidité à champ électrique constant, [e] le tenseur piézoélectrique et $[\epsilon^S]$ le tenseur diélectrique à déformation constante. A partir de l'équation (II.1), la notation d'Einstein est utilisée systématiquement. Le tenseur des déformations peut être relié au vecteur déplacement \underline{u} par :

$$S_{k1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right)$$
(II.2)

et le vecteur champ électrique au potentiel électrique Φ par :

$$E_{i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_{i}} \qquad (II.3)$$

A ces équations s'ajoutent l'équation du mouvement :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$
(II.4)

où ρ désigne la masse volumique, et l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \tag{II.5}$$

s'il n'y a pas de charges libres en volume dans les matériaux considérés. A partir des équations (II.1), (II.4) et (II.5), on obtient le système :

$$\begin{cases} -\rho \omega^{2} u_{i} = \frac{\partial}{\partial x_{j}} \left(c_{ijkl}^{E} S_{kl} - e_{kij} E_{k} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^{S} E_{j} \right) = 0 \end{cases}$$
(II.6)

Pour un domaine purement élastique, les équations se déduisent des équations précédentes en ignorant les termes où intervient une grandeur

électrique. Les conditions aux limites associées à ces équations sont mécaniques ou électriques. Les conditions mécaniques peuvent porter sur le champ de déplacement, en tous points d'une surface appelée S_u (condition du type Dirichlet). Alors :

$$\mathbf{u}_{i} = \mathbf{u}_{i}^{\prime} \tag{II.7}$$

où u' est un déplacement connu. Elles peuvent aussi porter sur le champ de contrainte en tous points d'une surface S_T (condition du type Neumann). Alors :

$$\mathbf{T}_{i} \mathbf{n}_{i} = -\mathbf{f}_{i} \tag{II.8}$$

où <u>n</u> est un vecteur unitaire normal à la surface, orienté vers l'intérieur et <u>f</u> une densité superficielle de force connue. Les conditions électriques s'appliquent sur des surfaces du domaine Ω_p . Pour une surface S_σ limitant Ω_p et sur laquelle il n'y a pas d'électrode, l'absence de charges superficielles impose :

$$D_i n_i = 0 \tag{II.9}$$

compte tenu de la valeur élévée de la permittivité diélectrique des matériaux piézoélectriques considérés. Pour une surface quelconque S_p de Ω_p recouverte d'une électrode, il est possible d'imposer soit le potentiel de cette électrode :

$$\Phi = \Phi_{\rm p} \tag{II.10}$$

où Φ_p représente un potentiel électrique connu, soit la charge portée par l'électrode :

$$-\iint_{S_p} D_i n_i dS_p = Q_p \qquad (II.11)$$

où Q est une charge électrique connue.

De la même façon le fluide est supposé homogène, compressible et, pour l'instant, non dissipatif. En tout point du domaine fluide $\Omega_{\rm f}$, le champ de pression p vérifie l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{p} + \mathbf{k}^2 \mathbf{p} = 0 \tag{II.12}$$

où k = ω/C , C désignant la vitesse du son dans le fluide. Pour le fluide seul, on considère des conditions sur le champ de pression de la forme :

$$p = p'$$
 (II.13)

où p' est une pression connue, pour des surfaces notées S_p,, ou des conditions sur la dérivée normale du champ de pression du type :

$$n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \psi \qquad (II.14)$$

où ψ est une quantité connue, pour des surfaces notées $S_{\psi}.$ En tout point de l'interface entre le solide et le fluide S_i , des conditions de continuīté dynamique :

$$\mathbf{T}_{ij} \mathbf{n}_{j} = -\mathbf{p} \mathbf{n}_{i} \tag{II.15}$$

et cinématique :

$$n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho_f \omega^2 n_i u_i \qquad (II.16)$$

sont appliquées, où ρ_f désigne la masse volumique du fluide. Enfin, sur la surface S_∞ , la condition de rayonnement de Sommerfeld [169, 170] impose :

$$\lim_{r \to \infty} (rp) \text{ finite} \qquad (II.17)$$

et :

$$\lim_{\mathbf{r} \to \infty} \left[\mathbf{r} \left(\mathbf{i} \mathbf{k} \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] = 0 \qquad (II.18)$$

uniformément dans toutes les directions, r étant la distance à tout point fixé.

b) Formulation variationnelle

Les équations (II.6) et (II.12) d'une part, (II.7) à (II.11) et (II.13) à (II.16) d'autre part, sont respectivement les équations d'Euler et les conditions aux limites associées à la quantité stationnaire L définie par :

$$L = \iiint_{\Omega_{s}} \frac{1}{2} \left(S_{ij} c_{ijkl}^{E} S_{kl} - \rho \omega^{2} u_{i}^{2} \right) d\Omega_{s}$$

-
$$\iint_{S_{u}} \left(u_{i} - u_{i}' \right) n_{j} \left(c_{ijkl}^{E} S_{kl} - e_{kij} E_{k} \right) dS_{u}$$

-
$$\iint_{S_{T}} f_{i} u_{i} dS_{T}$$

-
$$\iiint_{\Omega_{p}} \frac{1}{2} \left(2 S_{kl} e_{ikl} E_{i} + E_{i} \varepsilon_{ij}^{S} E_{j} \right) d\Omega_{p}$$

$$-\sum_{p=0}^{M} \iint_{S_{p}} (\Phi - \Phi_{p}) n_{i} \left(e_{ik1} S_{k1} + \varepsilon_{ij}^{S} E_{j}\right) dS_{p}$$

$$+ \sum_{p=0}^{M} \Phi_{p} Q_{p}$$

$$+ \frac{1}{\rho_{f} \omega^{2}} \iiint_{\Omega_{f}} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_{i}}\right)^{2} - k^{2} p^{2}\right] d\Omega_{f}$$

$$- \frac{1}{\rho_{f} \omega^{2}} \iint_{S_{p}} (p - p') n_{i} \frac{\partial p}{\partial x_{i}} dS_{p},$$

$$- \frac{1}{\rho_{f} \omega^{2}} \iint_{S_{\psi}} p \Psi dS_{\psi}$$

$$- \iint_{S_{i}} p u_{i} n_{i} dS_{i} \qquad (II.19)$$

Les trois premières intégrales concernent le solide élastique. Le premier terme peut être associé au potentiel de déformation et à l'énergie cinétique, le second terme aux déplacements imposés et le troisième terme au travail des forces extérieures. Si l'on ajoute à ces intégrales les trois termes suivants, on obtient la fonctionnelle correpondant aux équations et aux conditions aux limites d'un milieu piézoélectrique [172-177]. Les trois intégrales suivantes s'appliquent, quant à elles, au domaine fluide seul. Elles peuvent être associées, dans l'ordre, à l'équation d'Helmholtz et aux conditions aux limites (II.13) et (II.14). le dernier terme décrit le couplage entre le domaine solide et le Enfin. domaine fluide. L'intégrale concernant la surface S_{∞} n'apparaît pas directement. Elle est en fait contenue dans l'avant-dernier terme de l'équation (II.19) pour lequel une valeur particulière de ψ est choisie, comme décrit dans le paragraphe II.1.1.d. L'annulation de L au premier ordre implique la vérification des équations (II.6) et (II.12) et des conditions aux limites (II.7) à (II.11) et (II.13) à (II.16).

c) Discrétisation : la méthode des éléments finis

Lors de la résolution d'un problème à l'aide de la méthode des éléments finis [178-182], le domaine étudié est découpé en sous-domaines appelés éléments, interconnectés par des points appelés noeuds (figure II.2). Si l'on considère alors, par exemple, une structure élastique, le déplacement d'un point quelconque situé à l'intérieur de l'élément peut être relié aux valeurs nodales du déplacement U^e à l'aide de fonctions d'interpolation dont la description est donnée à l'annexe 4 :



$$\underline{u} = [N^e] \underline{U}^e$$
 (II.20)

où $[N^e]$ est une matrice ligne regroupant les fonctions d'interpolation. L'état de déformation \underline{S} de ce même point s'exprime en fonction des dérivées des fonctions d'interpolation, regroupées dans la matrice $[B^e]$, sous la forme :

$$\underline{S} = [B^e] \underline{U}^e \qquad (II.21)$$

A partir de la loi de Hooke, l'état de contrainte <u>T</u> s'écrit :

$$\underline{\mathbf{T}} = [\mathbf{D}] \underbrace{\mathbf{S}} \tag{II.22}$$

où [D] s'obtient par condensation du tenseur c_{ijkl} (annexe 3). Le report des équations (II.20) à (II.22) dans l'équation (II.19) permet d'exprimer la partie élastique de la fonctionnelle sous la forme :

$$L = \sum_{e} \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_{e}} \underbrace{\mathbb{U}^{e^{T}}}_{e^{T}} \begin{bmatrix} B^{e} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{e} \end{bmatrix} \underbrace{\mathbb{U}^{e}}_{e^{T}} d\Omega_{e}$$
$$- \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_{e}} \omega^{2} \rho \underbrace{\mathbb{U}^{e^{T}}}_{e^{T}} \begin{bmatrix} N^{e} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} N^{e} \end{bmatrix} \underbrace{\mathbb{U}^{e}}_{e^{T}} d\Omega_{e}$$
$$- \iint_{S_{Te}} \underbrace{\mathbb{U}^{e^{T}}}_{e^{T}} \begin{bmatrix} N^{e} \end{bmatrix}^{T} \underbrace{\mathbf{f}}_{e^{T}} dS_{Te} \qquad (II.23)$$

Dans cette quantité, l'intégrale relative à la surface S_u a été éliminée. En effet, le déplacement d'un point d'une face d'élément est uniquement fonction des déplacements des noeuds de cette face, compte tenu des propriétés des fonctions d'interpolation choisies (annexe 4). L'expression de cette intégrale sur un élément :

$$\iint_{S_{ue}} \left(u_i - u'_i \right) n_j T_{ij} dS_{ue} \qquad (II.24)$$

ne dépend donc que des valeurs prises par <u>u</u> sur les noeuds de S_{ue} , à l'exclusion des autres noeuds de l'élément. Par conséquent, si, dans l'équation (II.23), on impose aux déplacements des noeuds de S_u les valeurs fixées par les conditions aux limites (II.7), toutes les intégrales (II.24) s'annulent. Les conditions aux limites de type Dirichlet sur le champ de déplacement sont donc bien prises en compte dans l'expression (II.23).

En définissant la matrice élémentaire de rigidité mécanique $\left[K^e_{u\,u}\right]$:

$$\begin{bmatrix} K_{uu}^{e} \end{bmatrix} = \iiint_{\Omega_{e}} \begin{bmatrix} B^{e} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{e} \end{bmatrix} d\Omega_{e}$$
(II.25)

la matrice élémentaire de masse cohérente [M^e] :

$$[M^{e}] = \iiint_{\Omega_{e}} \rho [N^{e}]^{T} [N^{e}] d\Omega_{e}$$
(II.26)

et le vecteur élémentaire des forces nodales appliquées $\underline{F}^{\rm e}$:

$$\mathbf{\tilde{F}}^{e} = \iint_{\mathbf{S}_{Te}} [\mathbf{N}^{e}]^{T} \mathbf{f} d\mathbf{S}_{Te}$$
(II.27)

il est alors possible d'exprimer la fonctionnelle L sous la forme :

$$L = \sum_{e} \frac{1}{2} \left(\underbrace{U}^{eT} \left[K_{uu}^{e} \right] \underbrace{U}^{e} \right) - \frac{1}{2} \omega^{2} \left(\underbrace{U}^{eT} \left[M^{e} \right] \underbrace{U}^{e} \right) - \underbrace{U}^{eT} \underbrace{F}^{e} \quad (II.28)$$

L'application du principe variationnel conduit à minimiser L par rapport aux valeurs nodales de <u>u</u>. Le système d'équations linéaires obtenu est :

 $\left(\begin{bmatrix} K_{uu} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \right) \underbrace{U} = \underbrace{F} \qquad (II.29)$

où $[K_{uu}]$ est la matrice de rigidité mécanique et [M] la matrice de masse. Ces matrices réelles symétriques proviennent de la sommation sur l'ensemble des éléments des matrices de rigidité et de masse élémentaires. Cette opération est appelée assemblage. U est le vecteur des valeurs nodales du champ de déplacement et F le vecteur des valeurs nodales des forces appliquées. Pour des problèmes faisant intervenir un domaine piézoélectrique ou un domaine fluide, l'utilisation de la formulation
éléments finis et l'application du principe variationnel conduisent, de manière similaire, à d'autres systèmes d'équations linéaires [6]. Ces systèmes et les types de problèmes physiques qui leur sont associés sont détaillés dans la présentation du code ATILA, à la section suivante.

d) Description du code éléments finis ATILA

Le code éléments finis ATILA a été développé pour permettre la modélisation de transducteurs piézoélectriques rayonnant dans un fluide [6-13]. Il peut être utilisé pour effectuer l'analyse statique, modale ou harmonique de structures élastiques ou piézoélectriques, immergées ou non [183]. Ces différentes analyses sont détaillées dans la suite de cette section.

Analyse statique d'une structure élastique

La structure est soumise sur sa frontière à une force mécanique. Le système à résoudre se déduit de l'équation (II.29) en posant $\omega = 0$:

$$[K_{uu}] \underbrace{U} = \underbrace{F} \qquad (II.30)$$

La résolution de ce système permet de déterminer le déplacement à l'équilibre en tout point de la structure. Les déformations et les contraintes peuvent être calculées a posteriori à partir des équations (I.21) et (I.22).

Analyse statique d'une structure piézoélectrique

Dans ce cas, la structure étudiée est soit purement piézoélectrique, soit simultanément élastique et piézoélectrique. La structure piézoélectrique est supposée posséder plusieurs électrodes dont l'une peut servir de référence de potentiel, les autres étant appelées électrodes chaudes. Le système d'équations à résoudre s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ \\ \\ [K_{u\phi}]^{T} & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbb{Y}} \\ \underline{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbb{F}} \\ -\underline{\mathbb{Q}} \end{bmatrix}$$
(II.31)

où $[K_{u\phi}]$ et $[K_{\phi\phi}]$ sont respectivement la matrice piézoélectrique et la matrice diélectrique obtenues de la même manière que la matrice $[K_{uu}]$, Φ le vecteur des valeurs nodales du potentiel électrique et Q le vecteur des valeurs nodales de la charge électrique. Les degrés de liberté du potentiel électrique non reliés à une électrode sont associés à des charges électriques nodales nulles et peuvent être condensés. Le potentiel de l'électrode de référence est nul. L'équation (II.31) devient :

où $\left[\bar{K}_{uu}\right]$, $\left[\bar{K}_{u\phi}\right]$ et $\left[\bar{K}_{\phi\phi}\right]$ sont respectivement les matrices de rigidité mécanique, piézoélectrique et diélectrique après condensation. Φ_p et Q_p désignent les vecteurs des potentiels électriques et des charges électriques des électrodes chaudes. Dans le cas où la structure est isolée électriquement et où une force mécanique statique est appliquée sur sa frontière, la condition d'isolement électrique implique que la somme des valeurs nodales de la charge sur les électrodes chaudes soit nulle et permet ainsi la condensation des lignes correspondantes sous la forme :

$$\left(\left[\overline{K}_{uu}\right] - \left[\overline{K}_{u\phi}\right]\left[\overline{K}_{\phi\phi}\right]^{-1}\left[\overline{K}_{u\phi}\right]^{T}\right) \underbrace{U}_{}= \underbrace{F}_{} \qquad (II.33)$$

Après résolution, le champ de déplacement est connu en tout point de la structure. Le vecteur des potentiels électriques sur les électrodes est alors donné par :

$$\Phi_{p} = - \left[\overline{K}_{\varphi\varphi}\right]^{-1} \left[\overline{K}_{u\varphi}\right]^{T} \underbrace{U} \qquad (II.34)$$

Analyse modale d'une structure élastique

Les modes d'une structure élastique libre sont les vecteurs propres du système :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \right) \underbrace{U} = \underbrace{O} \qquad (II.35)$$

qui se déduit de l'équation (II.29) en posant $\underline{F} = 0$. Les pulsations propres sont les valeurs propres de (II.35), racines de l'équation :

 $| [K_{uu}] - \omega^2 [M] | = 0$ (II.36)

Ces pulsations propres sont aussi appelées pulsations de résonance.

Analyse modale d'une structure piézoélectrique

Les modes propres d'une structure piézoélectrique, libre mécaniquement, sont donnés par le système d'équations déduit de (I.32) en posant $\underline{F} = 0$ et en ajoutant le terme cinétique :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{K}_{uu} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{K}_{u\varphi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{K}_{u\varphi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U} \\ \Phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q} \\ -\underline{Q}_p \end{bmatrix}$$
(II.37)

Si toutes les électrodes sont à la masse (court-circuit), leurs potentiels électriques sont nuls. Les valeurs propres du système d'équations obtenu sont appelées pulsations de résonance. Si le système est électriquement isolé (circuit ouvert), la somme des charges nodales sur chaque électrode est nulle. Les valeurs propres du système obtenu sont appelées pulsations d'antirésonance.

Analyse harmonique d'une structure élastique

Dans ce cas, la structure est soumise, sur sa frontière, à une force mécanique sinusoïdale de pulsation ω . Le système d'équations est donné par (I.29). Il est singulier pour les pulsations propres de la structure.

Analyse harmonique d'une structure piézoélectrique

Si la structure piézoélectrique étudiée est mécaniquement libre et excitée sinusoïdalement par l'intermédiaire de ses électrodes, le système d'équations se déduit de (II.32) en posant $\underline{F} = 0$ et en ajoutant la matrice de masse :

$$\left(\left[\overline{K}_{uu}\right] - \omega^2 \left[M\right]\right) \underbrace{U}_{} = -\left[\overline{K}_{u\varphi}\right] \underbrace{\Phi}_{p} \qquad (II.38)$$

Connaissant U, il est possible de déterminer le vecteur ${\tt Q}_{\tt p}$:

$$Q_{p} = - \left[\vec{K}_{\varphi\varphi} \right] \Phi_{p} - \left[\vec{K}_{u\varphi} \right]^{T} U$$
(II.39)

Si la structure possède une seule électrode chaude, l'intensité du courant électrique qui la pénètre peut s'écrire :

$$\mathbf{I}_{\mathbf{p}} = \mathbf{j} \, \boldsymbol{\omega} \, \mathbf{Q}_{\mathbf{p}} \tag{II.40}$$

et il est possible de calculer l'admittance Y par la relation :

$$Y = -j \omega \left(\overline{K}_{\varphi\varphi} + \frac{\left[\overline{K}_{u\varphi} \right]^{T}}{\Phi_{p}} \underline{U} \right)$$
(II.41)

Analyse harmonique d'une structure piézoélectrique rayonnant dans un fluide

Ce type d'analyse correspond au cas le plus général. Le système d'équations linéaires s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \overline{K}_{uu} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{K}_{u\varphi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{K}_{u\varphi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ -\rho_f^2 C^2 \omega^2 \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi_p \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Q_p \\ \rho_f C^2 \Psi \end{bmatrix} (II.42)$$

où [L], [H] et [M₁] représentent respectivement la matrice de couplage à l'interface solide-fluide, la matrice de compressibilité et la matrice de masse cohérente du fluide. P est le vecteur des valeurs nodales de la pression et Ψ le vecteur des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression sur la surface S_{∞} . Le système d'équations n'est plus symétrique à cause des conditions aux limites sur l'interface solide-fluide. Le vecteur Ψ dépend de la condition de rayonnement imposée sur la surface S_{∞} . La condition de non-réflexion valable quelle que soit la forme de l'onde se propageant dans le fluide, et sa formulation est analysée en détail dans l'article de R. BOSSUT et al [184]. Sachant que la surface S_{∞} est une sphère, le champ de pression sur cette surface admet le développement multipolaire [171, 185] :

$$p(R,\theta,\phi) = \frac{e^{-jkR}}{kR} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta,\phi)}{(jkR)^n}$$
(II.43)

où R est le rayon de la sphère frontière, k le nombre d'onde et F_n une fonction angulaire se déduisant de F_{n-1} par une relation différentielle. Les éléments de type dipolaires développés dans le code ATILA sont conçus pour absorber totalement les ondes associées aux deux premiers termes de ce développement [7, 184, 186, 187]. Dans ce cas, le vecteur Ψ s'écrit sous la forme :

$$\Psi = -\frac{1}{\rho_{f} C} \left(\frac{1}{R} + j \frac{\omega}{C}\right) \left[D_{\infty}\right] \Psi + \frac{1}{\rho_{f} C} \frac{\frac{1}{R} - j \frac{\omega}{C}}{1 + \frac{\omega^{2} R^{2}}{C^{2}}} \left[D_{\infty}\right] \Psi \qquad (II.44)$$

où $[D_{\infty}]$ et $[D'_{\infty}]$ sont des matrices résultant de l'assemblage des éléments de la sphère rayonnante. Comme précédemment, l'admittance de la structure rayonnante peut être calculée.

e) Description de la bibliothèque ATILA

Les éléments du code ATILA sont, en majorité, des éléments isoparamétriques à interpolation quadratique [179-181] qui permettent une



description simple de surfaces courbes. Pour ces éléments, il est nécessaire de distinguer le repère global, le repère local et le repère réduit. Les coordonnées des noeuds du maillage sont exprimées dans le repère global. Le repère local est un repère intermédiaire attaché à l'élément considéré. Le repère réduit est utilisé pour calculer les intégrales des équations (II.25) à (II.27) à l'aide d'une méthode de Gauss [179, 180]. Le repère local se déduit du repère global à l'aide d'une matrice de rotation. La transformation des coordonnées des noeuds du repère réduit au repère local (figure II.3) est réalisée à l'aide d'une transformation ponctuelle utilisant les fonctions d'interpolation (annexe 4). Les éléments disponibles dans le code peuvent être à deux ou trois dimensions et de formes variées. Il sont répertoriés ci-après.

Eléments mécaniques

Ces éléments peuvent décrire le comportement de structures élastiques isotropes. Ils peuvent être bidimensionnels (triangle à 6 noeuds ou quadrilatère à 8 noeuds) ou tridimensionnels (prisme à 15 noeuds ou hexaèdre à 20 noeuds) [6]. Les éléments à deux dimensions permettent des analyses en contraintes planes, déformations planes ou à symétrie axiale. Un élément linéaire à 2 noeuds, de type ressort, est aussi disponible. Les éléments de type plaque (triangle à 6 noeuds ou quadrilatère à 8 noeuds) ou coque (quadrilatère à 8 noeuds ou élément de coque mince à symétrie axiale à 3 noeuds) sont basés sur les hypothèses classiques de Love-Kirchhoff [9]. Un élément particulier à 5 noeuds a été développé pour décrire avec précision l'interface coque-solide [9].

Eléments composites

Ces éléments permettent la modélisation de structure en matériau composite verre-résine. Les éléments à deux dimensions (quadrilatère à 8 noeuds à symétrie axiale) et trois dimensions (hexaèdre à 20 noeuds) sont basés sur une procédure d'homogénéisation de Halpin et Tsai [188-190].

Eléments piézoélectriques

Ces éléments décrivent des structures constituées d'un matériau piézoélectrique. Ils peuvent être bidimensionnels (triangle à 6 noeuds ou quadrilatère à 8 noeuds) ou tridimensionnels (prisme à 15 noeuds ou hexaèdre à 20 noeuds) [6, 10]. Les éléments bidimensionnels permettent des analyses en déformations planes ou à symétrie axiale. Des éléments spécifiques de type trilame permettent la modélisation d'une structure composite classique formée de plaques minces piézoélectriques collées sur une âme métallique [10]. Tout type de matériau piézoélectrique, quel que soit son tenseur représentatif, peut être décrit.

Eléments fluides

Ces éléments servent à modéliser un fluide homogène. Ils peuvent être soit à deux dimensions (triangle à 6 noeuds ou quadrilatère à 8 noeuds), soit à trois dimensions (prisme à 15 noeuds ou hexaèdre à 20 noeuds) [6]. Les éléments bidimensionnels permettent l'analyse d'un champ de pression ne dépendant que de deux coordonnées d'espace ou à symétrie axiale.

Eléments interfaces

Ces éléments imposent les équations de continuité cinématique et dynamique à l'interface des maillages solide et fluide. Ils peuvent être bidimensionnels (élément à 6 noeuds) ou tridimensionnels (triangle à 12 noeuds ou quadrilatère à 16 noeuds) [6]. Les éléments bidimensionnels permettent des analyses en déformations planes ou à symétrie axiale.

Eléments rayonnants

Ces éléments imposent une condition de rayonnement monopolaire ou dipolaire sur la surface fluide limitant le maillage [6, 7, 184, 186, 187]. Ils permettent des modélisations à deux dimensions (élément à 3 noeuds à symétrie axiale) ou à trois dimensions (triangle à 6 noeuds ou quadrilatère à 8 noeuds).

a) Eléments élastiques isotropes

Dans un matériau élastique, les déformations peuvent être définies à partir des déplacements à l'aide de l'équation (II.2). En résistance des matériaux, on est amené à distinguer les déformations de dilatationcompression des déformations de cisaillement et les contraintes de dilatation-compression des contraintes de cisaillement (annexe 2). Le calcul des contraintes dans un élément fini élastique isotrope s'effectue à l'aide des relations (II.21) et (II.22). Dans la suite, ce calcul est détaillé pour un élément de type quadrilatère à 8 noeuds. Pour cet élément, les coordonnées dans le repère local x et y sont reliées aux coordonnées dans le repère réduit ξ et η par la transformation (annexe 4) :

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}_{1} + \mathbf{C}_{2} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{C}_{3} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{C}_{4} \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{C}_{5} \boldsymbol{\xi}^{2} + \mathbf{C}_{6} \boldsymbol{\eta}^{2} + \mathbf{C}_{7} \boldsymbol{\xi}^{2} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{C}_{8} \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\eta}^{2}$$
(II.45)

$$y = C'_{1} + C'_{2} \xi + C'_{3} \eta + C'_{4} \xi \eta + C'_{5} \xi^{2} + C'_{6} \eta^{2} + C'_{7} \xi^{2} \eta + C'_{8} \xi \eta^{2}$$
(II.46)

ou encore :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$
(II.47)

où M, C et C' sont respectivement le vecteur des monômes d'interpolation et les vecteurs des constantes des monômes d'interpolation. En écrivant l'équation (II.47) pour chaque noeud de l'élément, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \underline{X}^{e} \\ \underline{Y}^{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}' \end{bmatrix}$$
(II.48)

soit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{M}^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{x}} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{e}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{X}^{\mathrm{e}}}_{\mathbf{x}^{\mathrm{e}}} \\ \underbrace{\mathbf{Y}^{\mathrm{e}}}_{\mathbf{x}^{\mathrm{e}}} \end{bmatrix}$$
(II.49)

où $[A^e]^{-1}$ est la matrice inverse des valeurs prises par les monômes d'interpolation aux noeuds de l'élément, X^e et Y^e les vecteurs des coordonnées nodales de l'élément. Il est possible d'exprimer les déplacements de manière identique :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{M}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{e}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underbrace{U}^{\mathrm{e}} \\ \underbrace{V}^{\mathrm{e}} \end{bmatrix}$$
(II.50)

où u et v sont les composantes du déplacement au point considéré, \underline{U}^e et \underline{V}^e les vecteurs des valeurs nodales de ces mêmes composantes. Cette expression correspond à l'équation (II.20). Le calcul de la déformation nécessite de différencier l'équation précédente par rapport à x et y. En remarquant que :

$$\frac{\partial \underline{M}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{x}} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{M}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \\ \frac{\partial \underline{M}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix}$$
(II.51)

où [J] est la matrice de Jacobi de la transformation :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$
 (II.52)

le vecteur de déformation S s'exprime alors par :

$$\underbrace{S}_{x} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x} \\ \varepsilon_{y} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1}^{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A^{e}]^{-1} & 0 \\ 0 & [A^{e}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}^{e} \\ \underline{V}^{e} \end{bmatrix}$$
(II.53)

où ε_x , ε_y et γ_{xy} représentent respectivement les déformations de dilatation-compression et la déformation de cisaillement suivant les axes du repère local, et :

$$\begin{bmatrix} B_{1}^{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{M}^{T}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \underline{M}^{T}}{\partial y} \\ \frac{\partial \underline{M}^{T}}{\partial y} & \frac{\partial \underline{M}^{T}}{\partial x} \end{bmatrix}$$
(II.54)

L'expression (II.53) peut être comparée à l'équation (II.21). Le vecteur des contraintes <u>T</u> s'écrit :

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathbf{x}} \\ \sigma_{\mathbf{y}} \\ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}} \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \end{bmatrix}$$
(II.55)

La matrice [D] reliant les contraintes aux déformations est déterminée par le matériau utilisé et particulièrement par le degré de symétrie de son réseau cristallin. Ainsi, les propriétés élastiques d'un matériau isotrope sont complétement définies par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν . Cette matrice dépend aussi du type d'analyse considéré. Dans une analyse en contraintes planes, les contraintes dans la direction non modélisée supposées sont nulles [191]. Ce cas correspond à l'étude d'une plaque mince soumise à des efforts de membrane exercés sur son contour. La matrice [D] s'écrit :

$$\begin{bmatrix} D \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$
(II.56)

où E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau considéré. Dans uneanalyse en déformations planes, les déformations dans la direction perpendiculaire au plan de modélisation sont supposées nulles. Ce type d'analyse s'applique à des structures de très grande dimension dans la direction non modélisée et soumises à des efforts situés dans le plan de modélisation et identiques sur toute la structure (barreau long soumis à une pression transversale). La matrice [D] devient :

г

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$
(II.57)

Dans le cas d'une analyse en symétrie axiale, il faut ajouter au vecteur déformation une composante de déformation tangentielle perpendiculaire au plan de modélisation et égale à :

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{v}{r} \tag{II.58}$$

où v représente le déplacement radial et r la distance du point considéré à l'axe de symétrie. Dans ce cas, la matrice $\begin{bmatrix} B_1^e \end{bmatrix}$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} B_{1}^{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{M}^{T}}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial \underline{M}^{T}}{\partial y}\\ \frac{\partial \underline{M}^{T}}{\partial y} & \frac{\partial \underline{M}^{T}}{\partial x}\\ \frac{\underline{M}^{T} \sin \alpha}{r} & \frac{\underline{M}^{T} \cos \alpha}{r} \end{bmatrix}$$
(II.59)

où α est l'angle entre l'axe x global et l'axe x local. La matrice [D] devient :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\nu & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}$$
(II.60)

Dans le vecteur des contraintes apparaît une composante supplémentaire correspondant à la contrainte tangentielle perpendiculaire au plan de modélisation.

Dans le cas d'éléments tridimensionnels, le principe de calcul exposé précédemment peut être étendu. la matrice $\begin{bmatrix} B_1^e \end{bmatrix}$ s'exprime par :

$$\begin{bmatrix} B_{1}^{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M^{T}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M^{T}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M^{T}}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial M^{T}}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial M^{T}}{\partial z} & \frac{\partial M^{T}}{\partial y} \\ \frac{\partial M^{T}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M^{T}}{\partial x} \\ \frac{\partial M^{T}}{\partial y} & \frac{\partial M^{T}}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

(I.61)

et la matrice [D] par :

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$
(II.62)

Les vecteurs contrainte et déformation comportent chacun six composantes. Le vecteur des contraintes s'écrit plus rigoureusement sous forme d'un tenseur de rang 2 :

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{z} \end{bmatrix}$$
(II.63)

$$\begin{bmatrix} \Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{z} \end{bmatrix}$$
(II.63)

Si l'on désire comparer les contraintes de dilatation-compression ou de cisaillement aux limites mécaniques des matériaux, il est nécessaire d'utiliser des critères conformément au paragraphe I.2. Ces critères font intervenir les contraintes principales qui sont les valeurs propres de $[\Sigma]$. Ces valeurs peuvent être obtenues graphiquement par la méthode du cercle de Mohr [191].

b) Eléments piézoélectriques

Les équations (II.1) à (II.3) montrent que la connaissance du champ de déplacement et du potentiel électrique en chaque noeud suffit à déterminer les contraintes dans un matériau piézoélectrique. A partir de l'équation (II.50), le potentiel électrique en un point quelconque s'exprime en fonction de ses valeurs nodales par :

$$\Phi = \underline{M}^{\mathrm{T}} [A^{\mathrm{e}}]^{-1} \underline{\Phi}^{\mathrm{e}} \qquad (\mathrm{II}.64)$$

Le terme supplémentaire de contrainte introduit par l'effet piézoélectrique devient :

$$T'_{ij} = e_{mij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}$$
(II.65)

soit, sous forme matricielle :

$$[T'] = [e] \begin{vmatrix} \frac{\partial M^{T}}{\partial x} \\ \frac{\partial M^{T}}{\partial y} \\ \frac{\partial M^{T}}{\partial z} \end{vmatrix} [A^{e}]^{-1} \Phi^{e} \qquad (II.66)$$

Les termes de la matrice [T'] viennent s'ajouter à ceux de la matrice des contraintes d'origine mécanique. Les contraintes d'origine élastique se calculent comme précédemment en remplaçant la matrice [D] par le tenseur de rigidité réduit [c^E] défini en annexe 3, qui tient compte de la symétrie particulière du matériau.

c) Elément de coque mince à symétrie axiale

Un élément fini de coque mince de révolution à double courbure, ayant un rayon de courbure constant le long de sa génératrice, peut être représenté par le schéma de la figure II.4. Si la déformation de la coque est à symétrie axiale, alors u_c est nul. En notant ε_{φ} et ε_{θ} (respectivement $\varepsilon_{\varphi\theta}$) les déformations de dilatation-compression (respectivement de cisaillement) suivant les directions définies à la figure II.4, σ_{φ} et σ_{θ} (respectivement $\tau_{\varphi\theta}$) les contraintes qui leur sont associées, on obtient, pour un point de la coque situé à une distance z de la ligne neutre, les relations suivantes [192, 193]:

$$\varepsilon_{\varphi} = \dot{u}_{1} + \frac{u_{n}}{r_{s} + z} - z \left(\frac{1}{1 + \frac{z}{r_{s}}}\right) \ddot{u}_{n} \qquad (II.67)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{(r_s + z) \sin\varphi} \left[\left(1 + \frac{z}{r_s} \right) \cos\varphi u_1 + \sin\varphi u_n - z \cos\varphi u_n \right] \quad (II.68)$$

$$\gamma_{\varphi\theta} = 0 \qquad (II.69)$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\varepsilon_{\varphi} + \nu \varepsilon_{\varphi} \right) \tag{II.70}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\varepsilon_{\theta} + \nu \ \varepsilon_{\varphi} \right) \tag{II.71}$$

 $\tau_{\varphi\theta} = 0 \qquad (II.72)$

où le point au dessus d'une fonction symbolise la dérivation partielle par rapport à s.



A partir de l'expression de l'effort tranchant Q_{ϕ} :

$$Q_{\varphi} = \frac{Eh^{3}}{12 (1 - \nu^{2})} \left(\ddot{u}_{n} - \frac{\ddot{u}_{1}}{r_{s}} - \frac{\cos^{2}\varphi \dot{u}_{n}}{r^{2}} - \frac{\cos^{2}\varphi u_{1}}{r_{s} r^{2}} \right)$$
(II.73)

on obtient la contrainte de cisaillement, maximale sur la ligne neutre, nulle sur les surfaces supérieures et inférieures :

$$\tau_{\varphi_{z \max}} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\varphi}}{h} \tag{II.74}$$

La matrice des contraintes en un point de la coque s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\varphi} & 0 & \tau_{\varphi_z} \\ 0 & \sigma_{\theta} & 0 \\ \tau_{\varphi_z} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(II.75)

Dans l'élément de coque mince à symétrie axiale du code ATILA [15], les composantes du champ de déplacement s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_n \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1^{\mathrm{T}}(s) \cos(m\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_n^{\mathrm{T}}(s) \cos(m\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_c^{\mathrm{T}}(s) \sin(m\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_n \\ \alpha_n \\ \alpha_c \end{bmatrix}$$
(II.76)

où les $\underline{P}_i(s)$ sont des vecteurs dont les composantes sont les puissances successives de l'abscisse curviligne et les $\underline{\alpha}_i$ des vecteurs dont les composantes sont les coefficients du polynôme constitutif de la fonction d'interpolation qui représente \underline{u}_i . Dans le cas d'une déformation à symétrie axiale, les termes $\cos(m\theta)$ et $\sin(m\theta)$ qui correspondent à une analyse de Fourier sont tels que $\underline{m} = 0$. Un vecteur de pseudo-déformation contenant l'ensemble des termes utiles au calcul des contraintes peut être formé :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \underline{P}_{1}(\mathbf{s}) & 0 \\ 0 & \underline{P}_{n}(\mathbf{s}) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \underline{P}_{1}(\mathbf{s}) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \underline{P}_{n}(\mathbf{s}) \\ 0 & \frac{\partial^{2}}{\partial \mathbf{s}^{2}} \underline{P}_{n}(\mathbf{s}) \\ \frac{\partial^{2}}{\partial \mathbf{s}^{2}} \underline{P}_{1}(\mathbf{s}) & 0 \\ 0 & \frac{\partial^{3}}{\partial \mathbf{s}^{3}} \underline{P}_{n}(\mathbf{s}) \end{bmatrix}$$
(II.77)

Le calcul des contraintes est alors possible à partir des différents termes du vecteur de pseudo-déformation et des équations (II.67) à (II.74).

d) Eléments de plaque et de coque minces

En considérant une plaque mince dont le déplacement normal au plan médian (plan neutre) est noté w, il est possible de définir des déformations et des contraintes généralisées [179] qui s'expriment en fonction de w uniquement et dont le produit scalaire est le travail interne (figure II.5). Les déformations généralisées sont données par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$
(II.78)

et les contraintes généralisées par :

$$\sigma = [D] \varepsilon = \begin{bmatrix} M_{x} \\ M_{y} \\ M_{xy} \end{bmatrix}$$
(II.79)



avec, pour une plaque isotrope :

$$\begin{bmatrix} D \end{bmatrix} = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$
(II.80)

où h est l'épaisseur de la plaque. Ces contraintes sont en fait les moments linéiques de flexion et de torsion en x et en y. Les véritables contraintes varient linéairement dans l'épaisseur de la plaque en fonction de la cote z, dont l'origine est prise sur le plan neutre, et peuvent être calculées de la manière suivante :

$$\sigma_{\rm x} = \frac{12 \,\,{\rm M}_{\rm x}}{{\rm h}^3} \,\,{\rm z} \tag{II.81}$$

$$\sigma_{\mathbf{y}} = \frac{12 \, \mathrm{M}_{\mathbf{y}}}{\mathrm{h}^3} \, \mathbf{z} \tag{II.82}$$

$$\tau_{xy} = \frac{12 M_{xy}}{h^3} z$$
 (II.83)



Les forces de cisaillement Q_x et Q_y (figure II.6) peuvent être dérivées des équations classiques d'équilibre [192] :

$$Q_{x} = \frac{\partial M_{x}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$
(II.84)

$$Q_{y} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{y}}{\partial y}$$
(II.85)

Les contraintes de cisaillement sont réparties à travers la plaque suivant une loi parabolique :

$$\tau_{xz} = \frac{3 Q_x}{2 h} \left[1 - \left(\frac{2 z}{h}\right)^2 \right]$$
(II.86)

$$\tau_{yz} = \frac{3 Q_y}{2 h} \left[1 - \left(\frac{2 z}{h}\right)^2 \right]$$
(II.87)

Pour l'élément fini quadrilatère plaque à 8 noeuds du code ATILA, les coordonnées d'un point dans le repère local sont reliées au coordonnées nodales par l'équation (II.49). Par ailleurs, le déplacement w perpendiculaire au plan médian peut être développé en fonction des coordonnées réduites, sous la forme d'un polynôme contenant 18 termes pour l'élément triangulaire (II.88) et 24 termes pour l'élément quadrilatère (II.89) :

$$w = \alpha_{1} + \xi \alpha_{2} + \eta \alpha_{3} + \xi \eta \alpha_{4} + \xi^{2} \alpha_{5} + \eta^{2} \alpha_{6} + \xi^{2} \eta \alpha_{7} + \xi \eta^{2} \alpha_{8} + \xi^{3} \alpha_{9} + \eta^{3} \alpha_{10} + \xi^{3} \eta \alpha_{11} + \xi \eta^{3} \alpha_{12} + \xi^{4} \alpha_{13} + \eta^{4} \alpha_{14} + \xi^{5} \alpha_{15} + \eta^{5} \alpha_{16} + \xi^{4} \eta \alpha_{17} + \xi \eta^{4} \alpha_{18}$$
(II.88)
$$w = \alpha_{1} + \xi \alpha_{2} + \eta \alpha_{3} + \xi \eta \alpha_{4} + \xi^{2} \alpha_{5} + \eta^{2} \alpha_{6} + \xi^{2} \eta \alpha_{7} + \xi \eta^{2} \alpha_{8} + \xi^{3} \alpha_{9} + \eta^{3} \alpha_{10} + \xi^{3} \eta \alpha_{11} + \xi \eta^{3} \alpha_{12} + \xi^{4} \alpha_{13} + \eta^{4} \alpha_{14} + \xi^{5} \alpha_{15} + \eta^{5} \alpha_{16} + \xi^{4} \eta \alpha_{17} + \xi \eta^{4} \alpha_{18} + \xi^{3} \eta^{2} \alpha_{19} + \xi^{2} \eta^{3} \alpha_{20} + \xi^{4} \eta^{2} \alpha_{21} + \xi^{2} \eta^{4} \alpha_{22} + \xi^{5} \eta \alpha_{23} + \xi \eta^{5} \alpha_{24}$$
(II.89)

soit, sous forme matricielle :

$$w = M_{+}^{T} \alpha_{+} \qquad (II.90)$$

où M_{+} et α_{+} représentent respectivement le vecteur des monômes d'interpolation et le vecteur des coefficients des monômes d'interpolation. Il est alors possible de définir un vecteur généralisé déplacement M en chaque point de l'élément :

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$
(II.91)

et, pour les n noeuds de l'élément, un vecteur déplacement généralisé global \underline{W}^e :

$$\underline{W}^{e} = \begin{bmatrix} \underline{W}_{1} \\ \underline{W}_{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{W}_{n} \end{bmatrix}$$
(II.92)

En utilisant l'équation (II.90), on obtient :

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} M_{+}^{\bullet} \end{bmatrix} \underline{\alpha}_{+}$$
(II.93)

où $[M^*_{\star}]$ est une matrice formée à partir de M_{\star} et de ses dérivées par rapport à ξ et à η . En écrivant l'équation (II.93) en chacun des noeuds de l'élément :

$$\underline{W}^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} A^{\bullet}_{+} & \mathbf{e} \end{bmatrix} \underline{\alpha}_{+} \tag{II.94}$$

on obtient finalement l'équation :

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} M_{+}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{+}^{*} & e \end{bmatrix}^{-1} \underline{W}^{e}$$
(II.95)

Par ailleurs, on peut définir un vecteur de déformation :

$$\underline{K}_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2 \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \underline{P}_{\xi^+}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} & \underline{P}_{\xi^+}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} & \underline{P}_{\xi^+}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} & \underline{P}_{\xi^+}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2 \eta} & \underline{P}_{\xi^+}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\xi^+}^* & e \end{bmatrix}^{-1} & \underline{W}^e \qquad (II.96)$$

Les déformations ainsi définies dans le repère réduit peuvent être reliées aux déformations dans le repère local par la relation :

$$K_{\xi\eta} = [C] K_{xy} \qquad (II.97)$$

avec :

	dx dt	<u> २५</u> २६	0	0	0	
	$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{\eta}}$	<u> </u>	0	0	0	
[C] =	<u>∂²x</u> ∂ξ²	$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$	$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{\xi}}\right)^2$	$\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2$	$2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\xi}}$	
	$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \eta^2}$	$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}\right)^2$	$\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$	$2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta}$	
	$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \mathbf{\xi} \ \partial \mathbf{n}}$	$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}$	$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{\xi}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{n}}$	$\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial n}$	$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{E}}$	

et :

$$\mathbf{K}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \end{bmatrix}$$

(1.99)

(II.98)

A partir des équations (II.79) et (II.97), il est alors possible d'obtenir les moments de flexion. Le calcul des forces de cisaillement s'effectue de manière identique en ajoutant des dérivées du troisième ordre dans le calcul du vecteur de déformation généralisée.

Un élément de coque mince peut être constitué par la superposition d'un élément dit de "membrane" (élément élastique bidimensionnel en contraintes planes) et d'un élément de plaque mince. Le calcul des contraintes dans cet élément est équivalent au calcul successif des contraintes dans les deux éléments superposés.

II.2 TEST DU CALCUL DES CONTRAINTES DEVELOPPE POUR DIFFERENTS ELEMENTS DU CODE ATILA

Cette partie présente quelques tests du calcul des contraintes pour différents éléments élastiques isotropes, piézoélectriques, plaques et coques. Ces résultats constituent une partie des tests qui ont été effectués systématiquement sur l'ensemble des éléments du code ATILA [194, 195].

II.2.1 Eléments élastiques isotropes

a) Poutre encastrée chargée à son extrémité

L'étude de la réponse statique linéaire d'une poutre encastrée de faible épaisseur, chargée paraboliquement à son extrémité (figure II.7), est un test classique du calcul des contraintes dans les codes éléments finis [196]. Les résultats théoriques sont fournis par la théorie de l'élasticité [191]. La flèche maximale w est donnée par :

$$w = -\frac{P L^3}{3 E I}$$
(II.100)

Les contraintes de dilatation-compression $\sigma_{\rm x}$ et $\sigma_{\rm y}$ et la contrainte de cisaillement τ_{xy} s'écrivent :

$$\sigma_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{P} (\mathbf{L} - \mathbf{x}) \mathbf{y}}{\mathbf{I}} \tag{II.101}$$

$$\sigma_{y} = 0 \tag{II.102}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2I} \left(\left[\frac{H}{2} \right]^2 - y^2 \right)$$
 (II.103)

où I représente le moment d'inertie d'une section droite par rapport à l'axe zOz' donné par :

$$I = \frac{2}{3} \left[\frac{H}{2}\right]^{3} e$$
 (II.104)



L'analyse a été effectuée en contraintes planes. Les différents maillages utilisent, soit des éléments quadrilatères (maillages M1 et M2), soit des éléments triangulaires (maillages M3 et M4). Le maillage M2 tient compte des propriétés de symétrie du problème. Pour chacun des maillages, la structure déformée à l'équilibre est représentée à la figure II.8. La flèche calculée est comprise entre le résultat de la théorie de l'élasticité et la valeur incluant des termes correctifs de cisaillement. L'erreur, d'environ 4%, correspond aux résultats donnés par d'autres codes de calcul [196], pour des maillages équivalents.

La figure II.9 représente la contrainte τ_{xy} calculée sur l'arête supérieure pour le maillage M1. Elle laisse apparaître une discontinuité des valeurs calculées aux frontières d'éléments. Ce phénomène s'explique à la fois par la technique de calcul employée et par les fonctions d'interpolation utilisées :

- le calcul des contraintes présenté au paragraphe II.1.2 est effectué de manière locale, c'est à dire élément par élément. Pour un noeud appartenant à plusieurs éléments, le calcul des contraintes à ce noeud doit donc être effectué à partir des déplacements de chacun de ces éléments,

- les fonctions d'interpolation des éléments utilisés sont de continuité C_0 . Par conséquent, la continuité des déplacements est assurée aux frontières d'éléments, mais pas la continuité de leur dérivée.

Comme le calcul des contraintes par éléments finis utilise les dérivées des fonctions d'interpolation, il est normal que les valeurs de contraintes calculées ne soient pas continues aux frontières d'éléments. Récemment, cette caractéristique a été utilisée pour évaluer l'erreur de calcul due à la discrétisation du maillage éléments finis et sélectionner le maillage optimal correspondant à une erreur donnée [197-200] . Pour déterminer le tenseur des contraintes au noeud, la technique de lissage la plus simple consiste à effectuer la moyenne des contraintes calculées pour les différents éléments auxquels ce noeud appartient. Cette technique donne généralement de bons résultats [201]. Cependant, auteurs différents [179, 202-205] ont montré que le calcul des contraintes est optimal aux points de Gauss d'intégration réduite, les valeurs nodales des contraintes pouvant être obtenues alors par un simple algorithme d'extrapolation. Cette technique, naturelle lorsqu'une intégration réduite a été utilisée lors de l'assemblage, semble aussi améliorer les résultats dans le cas d'un assemblage avec intégration normale. Elle n'a cependant pas été utilisée dans le cadre de cette étude. Dans la suite, les contraintes représentées correspondent à une moyenne sur l'ensemble des éléments auxquels le noeud appartient, quand un lissage a été effectué.

Pour les maillages M1 et M2, la contrainte σ_x (figures II.10 et II.11) est obtenue avec une précision meilleure que 4 %. La contrainte σ_v



Théorie de l'élasticité avec correction due aux termes de cisaillement : $w = -3.67 \ 10^{-4} m$





 $w = -3.55 \ 10^{-4} \ m$

 $w = - 3.55 \ 10^{-4} \ m$

Maillage M1

Maillage M2



 $w = -3.54 \ 10^{-4} \ m$

HARE

 $w = -3.55 \ 10^{-4} \ m$

Maillage M3

Maillage M4

Figure I.8 Représentation schématique des champs de déplacement pour les différents maillages



(figures I.12 et I.13) s'écarte de la valeur théorique au voisinage de l'encastrement, sur l'arête supérieure. Sur le reste de la poutre et sur la ligne neutre, l'erreur reste faible. Pour τ_{xy} (figures II.14 et II.15), l'écart est très important à l'encastrement et à l'extrémité libre. Une erreur plus faible subsiste sur l'ensemble du barreau. Les contraintes obtenues à l'encastrement sont représentées à la figure II.16. La contrainte σ_y présente une erreur importante sur les arêtes supérieure et inférieure. Les valeurs obtenues pour τ_{xy} sont sans rapport avec la théorie. On retrouve des valeurs satisfaisantes pour τ_{xy} quand on s'éloigne de l'encastrement, particulièrement avec le maillage M2.

Pour comprendre les écarts observés, il faut noter que le modèle théorique élastique utilisé [191] suppose un chargement parabolique à l'extrémité libre et un mode de fixation, à l'autre extrémité, qui ne s'oppose pas à la distorsion du plan de cette extrémité. Si ces conditions ne sont pas parfaitement vérifiées, des modifications notables peuvent intervenir dans les contraintes locales. Toutefois, les valeurs obtenues loin du chargement et de l'encastrement restent valables, d'après le principe de Saint-Venant. Les hypothèses simplificatrices du modèle théorique utilisé expliquent donc la différence entre résultats du calcul éléments finis et résultats analytiques au voisinage de l'encastrement.

Les résultats obtenus avec les éléments triangulaires sont

présentés aux figures II.17 à II.22. Pour le maillage M3, l'erreur sur σ_x , sur la ligne neutre, s'avère beaucoup plus importante que pour l'élément quadrilatère. Cette erreur est due à une dissymétrie de la contrainte calculée entre les parties supérieure et inférieure de la poutre (figure II.23). Le maillage M4 donne de meilleurs résultats car, pour chaque noeud de la ligne neutre, la géométrie des éléments auxquels ce noeud appartient est symétrique.

















 $\sigma_{\rm v}$ à l'encastrement

-2

•

.

0 y (mm)

Analytique

Maillage M1 Maillage M2

2

4

6







 $\tau_{\rm xy}$ au milieu de la plaque

Figure II.16 Contraintes à l'encastrement et au milieu de la plaque

25 20

15

10

5 0

-5

-10

-15

-20 -25

- 6

-4

Contrainte (MPa)















b) Coque en forme d'ellipsoîde de révolution soumise à une pression hydrostatique

Le problème d'une coque en forme d'ellipsoïde de révolution (figure II.24), soumise à une pression hydrostatique a été traité analytiquement [192, 206] . L'utilisation des équations d'équilibre conduit à l'expression des forces :

$$N_{\varphi} = \frac{p r_2}{2}$$
 (II.105)

$$N_{\theta} = p \left(r_2 - \frac{r_2^2}{2 r_1} \right)$$
 (II.106)

Les contraintes s'expriment simplement par :

$$\sigma_{\varphi} = \frac{N_{\varphi}}{h} \tag{II.107}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{h} \tag{II.108}$$

La modélisation de la coque utilise 24 éléments quadrilatères à symétrie axiale (figure II.25). Elle correspond au maillage M5. L'application d'une pression sur une face d'élément suppose le calcul des forces nodales équivalentes, comme décrit en annexe 5. La comparaison des contraintes calculées analytiquement et par éléments finis montre que le comportement de la coque sous pression hydrostatique est correctement décrit (figures II.26 et II.27).









II.2.2 Eléments piézoélectriques

a) Analyse statique d'un barreau piézoélectrique

Le barreau (figure II.28) a une de ses dimensions l (suivant x_1) grande devant les deux autres w et τ (suivant x_2 et x_3). Une des extrémités est en appui simple. L'autre est chargée par une pression uniforme. A l'équilibre, la contrainte suivant x_1 est donnée par :

$$T_1 = \frac{F}{S} \tag{II.109}$$

où F représente la force appliquée et S la surface d'application de cette force. Le comportement du barreau est décrit par le système d'équations [49] :

$$\begin{cases} S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3 \\ D_3 = d_{31} T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3 \end{cases}$$
(II.110)

Dans le cas d'un circuit ouvert, la densité superficielle de charge est nulle $(D_3 = 0)$. Il vient :

$$S_1 = s_{11}^E \left(1 - k_{31}^2\right) T_1$$
 (II.111)

avec :

$$k_{31}^{2} = \frac{d_{31}^{2}}{s_{11}^{E} \epsilon_{33}^{T}}$$
(II.112)

et :

$$u_1 = s_{11}^E \left(1 - k_{31}^2\right) T_1 x_1$$
 (II.113)

où u_1 représente le déplacement parallèle à la longueur du barreau. La différence de potentiel entre électrodes est donnée par :

 $\Phi = \int_0^{\tau} E_3 dx \qquad (II.114)$

$$\Phi = -\frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^{T}} T_{1} \tau$$
 (II.115)

Dans le cas d'électrodes en court-circuit, il n'y a pas de champ électrique dans le barreau $(E_3 = 0)$. Le déplacement est donné par :

$$u_1 = s_{11}^E T_1 x_1$$
 (II.116)

Le maillage M6 utilise 4 éléments hexaèdres à 20 noeuds et tient compte des symétries du problème. La comparaison des valeurs théoriques aux résultats du calcul par éléments finis montrent une précision meilleure que 1 % pour



	M6	Analytique	Δ%
Circuit ouvert			
T ₁ (Pa)	-3.605 10 ⁶	-3.600 10 ⁶	-0.1
u _{l max} (m)	-4.105 10 ⁻⁶	-4.101 10 ⁻⁶	-0.1
Φ (V)	3.990 10 ²	3.987 10 ²	+0.1
Court-circuit			
T ₁ (Pa)	-3.605 10 ⁶	-3.600 10 ⁶	-0.1
u _{1 max} (m)	-4.576 10 ⁻⁶	-4.572 10 ⁻⁶	-0.1

l'ensemble des valeurs (tableau II.1).

Tableau II.1 Analyse statique d'un barreau piézoélectrique

b) Analyse dynamique d'un barreau piézoélectrique

En analyse harmonique, le barreau est décrit par les mêmes équations que précédemment. Le déplacement s'exprime sous la forme [49] :

$$u_{1} = \left[A \sin\left(\frac{\omega x_{1}}{v_{b}^{E}}\right) + B \cos\left(\frac{\omega x_{1}}{v_{b}^{E}}\right) \right] e^{j\omega t} \qquad (II.117)$$

où :

$$v_{b}^{E} = \sqrt{\frac{1}{\rho \ s_{11}^{E}}}$$
 (II.118)

est la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans le barreau, à champ électrique constant. A partir des conditions aux limites (appui simple en $x_1 = 0$ ($u_1 = 0$), libre en $x_1 = l$ ($T_1 = 0$)) et des équations du système (II.110), la contrainte s'exprime sous la forme :

$$T_{1} = \frac{d_{31}}{s_{11}^{E}} \left| \frac{\cos\left(\frac{\omega x_{1}}{v_{b}^{E}}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{v_{b}^{E}}\right)} - 1 \right| \frac{\Phi}{\tau} e^{j\omega t}$$
(II.119)



Le maillage éléments finis est identique à celui de l'analyse statique. Le champ de déplacement du barreau est obtenue à 8 kHz et à 16 kHz (figures II.29 et II.30). La correspondance entre les valeurs théoriques de la contrainte et les valeurs calculées en différents points du barreau (figures II.31 et II.32) est satisfaisante sur toute la longueur, pour chacune des fréquences.

Figure II.30 Représentation du champ de déplacement du barreau piézoélectrique à 16 kHz




II.2.3 Eléments plaques et coques

a) Coque cylindrique soumise à une charge répartie sur une section circulaire

On considére une coque cylindrique d'épaisseur h, formée d'un matériau de module d'Young E et de coefficient de Poisson v (figure II.33). P est une charge uniformément répartie sur la section circulaire. Le déplacement suivant y est donné par [192] :

$$w = \frac{P}{8 \beta^3 D} \varphi(\beta x) \qquad (II.120)$$

avec :

$$\varphi(\beta x) = e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \qquad (II.121)$$

$$\beta^4 = \frac{3 (1 - \nu^2)}{r^2 h^2}$$
(II.122)

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - v^2)}$$
(II.123)

Sur la ligne neutre, on obtient :

$$\sigma_{\varphi} = 0 \tag{II.124}$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{E w}{r} \tag{II.125}$$

$$\tau_{\varphi_z} = -\frac{3 P}{4 h} \theta(\beta x) \qquad (II.126)$$

avec :

$$\theta(\beta x) = e^{-\beta x} \cos \beta x$$
 (II.127)

Sur la surface intérieure de la coque, il faut prendre en compte l'effet des moments de flexion :

$$\sigma_{\varphi} = \frac{3 P}{2 \beta h^2} \psi(\beta x) \qquad (II.128)$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{E w}{\left(r - \frac{h}{2}\right)} + \frac{3 P v}{2 \beta h^2} \psi(\beta x) \qquad (II.129)$$

 $\tau_{\varphi_{\mathbf{Z}}} = 0 \tag{II.130}$

avec :

$$\psi(\beta x) = e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \qquad (II.131)$$

Le maillage M7 de la coque cylindrique utilise 14 éléments de coque à symétrie axiale et tient compte de la symétrie du problème. La structure déformée, à l'équilibre, est représentée à la figure II.34. L'erreur sur la flèche au point d'application de la charge est inférieure à 1 %. L'évolution des différentes contraintes le long de la coque est représentée sur la ligne neutre (figures II.35 à II.37) et sur la surface intérieure (figures II.38 et II.39). Les résultats du modèle analytique sont approchés avec une grande précision sur l'ensemble de la coque, même pour σ_{φ} (figure II.35) dont les valeurs doivent être comparées à l'ordre de grandeur des autres contraintes (valeur analytique nulle).















b) Coque cylindrique sous pression uniforme

Le cas d'une coque cylindrique sous une pression interne uniforme (figure II.40) a été étudié analytiquement pour différents types de conditions aux limites [192]. Dans le cas d'extrémités libres, la pression interne ne produit qu'une contrainte circonférencielle σ_{θ} :

$$\sigma_{\theta} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{h}} \tag{II.132}$$

où p est la pression appliquée, r le rayon du cylindre et h l'épaisseur de la coque. Si les bords sont en appui simple, le déplacement perpendiculaire à la coque s'écrit :

$$w = -\frac{p \, 1^4}{64 \, D \, \alpha^4} \left(1 - \frac{2 \sin \alpha \, \sinh \alpha}{\cos 2\alpha \, + \, \cosh 2\alpha} \sin \beta x \, \sinh \beta x - \frac{2 \cos \alpha \, \cosh \alpha}{\cos 2\alpha \, + \, \cosh 2\alpha} \cos \beta x \, \cosh \beta x \right) \quad (II.133)$$

où 1 est la longueur de la coque et :

$$\alpha = \frac{\beta 1}{2} \tag{II.134}$$

On obtient, sur la ligne neutre :

$$\sigma_{\varphi} = 0 \qquad (II.135)$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{E w}{r} \qquad (II.136)$$

$$\tau_{\varphi_{z}} = \frac{3 \text{ p } 1}{4 \alpha \text{ h}} \left(\frac{\cos \alpha \cosh \alpha - \sin \alpha \sinh \alpha}{\cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} \cos \beta x \sinh \beta x + \frac{\cos \alpha \cosh \alpha + \sin \alpha \sinh \alpha}{\cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} \sin \beta x \sinh \beta x \right) (II.137)$$

et sur la surface intérieure :

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{3 p l^2}{2 \alpha^2 h^2} \left(\frac{\sin \alpha \sinh \alpha}{\cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} \cos \beta x \cosh \beta x - \frac{\cos \alpha \cosh \alpha}{\cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} \sin \beta x \sinh \beta x \right) \quad (II.138)$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{\mathbf{E} \mathbf{w}}{\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{h}}{2}\right)} + \nu \sigma_{\varphi} \qquad (II.139)$$

$$\tau_{\varphi_z} = 0 \tag{II.140}$$

Les résultats, obtenus avec un maillage de 6 éléments de coque à symétrie axiale, noté M8, montrent pour chaque type de condition aux limites un très bon accord entre modèle analytique et calcul éléments finis (figures II.41 à II.47).

















c) Flexion d'une plaque mince sous une charge concentrée

On considére une plaque rectangulaire simplement appuyée, de côté a suivant x et b suivant y (figure II.48). Les moments de flexion sur l'axe central (y=0) s'écrivent [192] :

$$\begin{cases} M_{x} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right)}{m} \left[(1+\nu) \tanh\alpha_{m} - \frac{(1-\nu)\alpha_{m}}{\cosh^{2}\alpha_{m}} \right] \sin\left(\frac{m\pi_{x}}{a}\right) \\ M_{y} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right)}{m} \left[(1+\nu) \tanh\alpha_{m} + \frac{(1-\nu)\alpha_{m}}{\cosh^{2}\alpha_{m}} \right] \sin\left(\frac{m\pi_{x}}{a}\right) \end{cases}$$
(II.141)

où P est la charge appliquée au point $x = \xi$, et :

$$\alpha_{\rm m} = \frac{\rm m\pi b}{2\rm a} \tag{II.142}$$

Quand $b \ge a$, on peut écrire :

$$M_{x} = M_{y} = \frac{(1+\nu)}{2\pi} P \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi\chi}{a}\right)$$
(II.143)

Cette série se somme analytiquement pour une charge au milieu de la bande $(\xi = a/2)$:

$$M_{x} = M_{y} = \frac{P(1+\nu)}{8\pi} \ln \left(\frac{1 + \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)} \right)$$
(II.144)

La différence entre les séries (II.141) et (II.143) converge rapidement et permet de calculer numériquement M_x et M_y pour un rapport b/a quelconque. Dans le cas d'une plaque carrée, la symétrie du problème permet une modélisation d'un quart de la plaque. Cette modélisation (figure II.49) a été conduite en utilisant des éléments quadrilatères (maillage M9) et triangulaires (maillage M10). L'évolution des moments de flexion le long de l'axe central est représentée aux figures I.50 et I.51, les moments de flexion tendant vers l'infini au voisinage de la charge. Les valeurs obtenues par le calcul éléments finis représentent le comportement réel des moments de flexion sur l'élément en valeur moyenne [179]. Les valeurs obtenues pour la modélisation utilisant les éléments quadrilatères sont en bonne correspondance avec les résultats analytiques. Les valeurs données par les éléments triangulaires mettent en évidence le problème posé par la discontinuité aux frontières d'éléments. La technique qui consiste à effectuer la moyenne sur les différents éléments auxquels appartient le noeud apparaît particulièrement délicate. Pour ce cas particulier, le de calcul plus complexe discutée au développement d'une technique paragraphe I.2.2.a s'avère nécessaire. Il faut cependant remarquer que les contraintes obtenues renseignent directement sur l'erreur de discrétisation et montrent donc la nécessité de raffiner le maillage utilisant des éléments triangulaires.

d) Flexion d'une plaque mince sous pression uniforme

Une solution analytique a été développée [192] pour résoudre le problème de la flexion de plaques rectangulaires en appui simple et uniformément chargées par une pression q. Les moments de flexion s'écrivent en y = 0 par :

$$M_{r} = \beta' q a^{2} \qquad (II.145)$$

$$M_{\rm u} = \beta_1' q a^2$$
 (II.146)

où β' et β'_1 varient avec x suivant des valeurs tabulées pour différents rapports b/a. Les maillages utilisés sont identiques au cas précédent. L'évolution des moments de flexion est correctement décrite sur l'ensemble de la plaque (figures II.52 et II.53) quand des éléments quadrilatères sont utilisés. L'ensemble des remarques du paragraphe précédent reste valables, en particulier pour le maillage utilisant des éléments triangulaires.













II.3 MODELISATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE DE DIFFERENTS TRANSDUCTEURS PIEZOELECTRIQUES

Le logiciel de calcul des contraintes développé dans le code ATILA a été validé par comparaison à différents modèles analytiques connus, c'est à dire pour des géométries simples. Pour étendre cette validation à des structures réelles, deux géométries différentes de transducteurs présentés au chapitre I ont été étudiées :

- un transducteur sandwich simple à symétrie axiale, qui est la structure test T2,

- un transducteur à coque mince et à symétrie axiale de type Olive, qui est la structure test T3.

II.3.1 Etude de la structure test T2

a) Etude statique : application d'une précontrainte

Une précontrainte est toujours utilisée pour ce type de transducteur, afin de maintenir les céramiques en compression lors de l'excitation électrique. Le maillage élaboré pour modéliser cet effet est représenté à la figure I.54. Les forces ont été appliquées sur la tête du boulon et l'interface entre la tête du boulon et la contremasse a été supposé fixe. Le champ de déplacement calculé et les contraintes principales sont représentés aux figures I.55 et I.56. Il apparaît que le champ de contrainte n'est pas uniforme dans l'empilement de céramiques. Les contraintes maximales ne sont pas parallèles à l'axe de symétrie et elles décroissent quand on s'éloigne de cet axe. Ce comportement peut être imputé à la faible longueur de l'empilement de céramiques (figure II.57). Il peut avoir des conséquences néfastes sur la tenue du transducteur à forte puissance d'excitation s'il n'est pas pris en compte dans la détermination de la précontrainte.

b) Etude dynamique

Le comportement mécanique de ce transducteur d'usinage monté avec sa sonotrode a été étudié dans l'air pour une large gamme de fréquences (2.5-20.7 kHz). Le transducteur posséde trois modes propres de résonance dans cette gamme (figure II.58) [2, 31, 36]. La contrainte longitudinale et le critère de Von Mises ont été représentés pour chacune des résonances (figures II.59 à II.64). Le critère de Von Mises, défini au paragraphe I.2.1, est basé sur l'énergie de déformation et il détermine l'état de fatigue du matériau. Il prend en compte le tenseur des contraintes dans son ensemble et la limite de fatigue du matériau. Les valeurs de limites de fatigue















10450 Hz



20420 Hz

figure I.58 Modes de résonance du transducteur T2



Figure II.60 Critère de Von Mises (mode 1)

contrainte maximale positive (1.1 10^5 Pa) : + contrainte maximale négative (-1.2 10^5 Pa) : -Figure I.61 Contrainte longitudinale (mode 2) J valeur maximale du critère : + Figure I.62 Critère de Von Mises (mode 2)





adoptées dans les modélisations sont reproduites au tableau II.2. Pour le troisième mode de résonance, la contrainte longitudinale maximale et la plus grande fatigue sont localisées au milieu de la sonotrode. Toutefois, comme cette partie du transducteur peut être aisément changée, il est utile d'observer en détail le comportement du moteur du transducteur dont la longévité est plus critique. Dans cette partie (figures II.65 et II.66), la contrainte longitudinale est maximale dans la tige de précontrainte et la fatigue n'est pas uniforme dans l'empilement de céramiques, avec une fatigue maximale dans la quatrième céramique (numérotation de la figure I.3). Dans ce calcul, la résistance à la fatigue des céramiques a été supposée constante à travers l'empilement et dans toute les directions. Cette supposition est toutefois partiellement inexacte car la précontrainte statique qui augmente cette résistance a été trouvée non uniforme à travers l'empilement dans le calcul précédent. De plus, aucune précontrainte radiale n'est appliquée.

II.3.2 Etude de la structure test T3

a) Etude statique : transducteur sous pression hydrostatique

Lorsque ce transducteur est immergé, la pression hydrostatique induit des contraintes statiques qu'il faut connaître pour définir la profondeur maximale d'utilisation. Une pression uniforme a été appliquée sur la surface extérieure du maillage utilisé (figure I.67). Le champ de déplacement et les contraintes principales obtenus sont représentés aux figures I.68 et I.69. La contrainte maximale dans le plan de la modélisation est située dans la coque. Il est intéressant de noter que, pour ce transducteur, l'immersion tend à augmenter la précontrainte appliquée sur la colonne de céramiques et permettrait ainsi une augmentation du niveau d'émission, contrairement au résultat classique observé pour les flextensionnels de type IV [25].

b) Etude dynamique

Ce transducteur a été étudié dans l'air, dans une gamme de fréquences qui recouvre les 5 premiers modes de résonance de la structure [9, 34, 47, 206, 207] (figure Π.70). La contrainte prépondérante (longitudinale ou perpendiculaire au plan de modélisation) et le critère de Von Mises ont été représentés pour chacun de ces modes (figure I.71 à I.80). Pour le premier mode, qui correspond à la fréquence de la colonne de céramiques vibre en fonctionnement du transducteur, Dans la coque, un léger mouvement de flexion se dilatation-compression. superpose membrane prépondérant. La contrainte à un mouvement de longitudinale maximale est située sur la surface intérieure de la coque, près de l'embout. Une importante contrainte longitudinale décroît du milieu de la colonne de céramiques jusqu'à l'extrémité. La fatigue maximale est

localisée au milieu de la colonne de céramiques. La coque est peu sollicitée. Pour ce cas particulier, la limite mécanique de fonctionnement est fixée par la résistance à la fatigue des céramiques piézoélectriques.

	Matériau	Limite de fatigue (MPa)	
	Acier	240	
	AU4G	120	
	CU312	240	
	Céramique X51 05 (1)	54	
	Céramique X51 05 (2)	34	
Les valeurs de limite de fatigue des céramiques sont augmentées de la précontrainte appliquée sur le transducteur : (1) transducteur T2 (2) transducteur T3			

Tableau II.2 Limites de fatigue des matériaux













3.37 f₀

Figure II.70 Modes de résonance du transducteur T3





















II.4 MESURE DES CONTRAINTES DANS DIFFERENTS TRANSDUCTEURS

II.4.1 Principe de la mesure

Un dispositif expérimental a été mis au point de manière à vérifier la validité des résultats obtenus par le calcul éléments finis. La mesure utilise des jauges d'extensométrie, formées d'un fil conducteur trés fin collé sur un support. La variation de la résistance provoquée par la déformation est mesurée à l'aide d'un pont de Wheatstone. La connaissance du champ de déformation et des propriétés élastiques du matériau étudié permet alors de déterminer la contrainte.

Le système de mesure présenté à la figure II.81 autorise l'étude des déformations statiques et dynamiques jusqu'à des fréquences de plusieurs dizaines de kilohertz. Pour le cas dynamique, le signal électrique, généré par un synthétiseur de fréquences (HP 3330B) et amplifié (BK 2713), excite les céramiques piézoélectriques et conduit à la vibration de la structure. Le signal provenant de la jauge d'extensométrie est amplifié (Vishay 2120 ou 2310) et filtré par un analyseur de réseau (HP 3570) qui détecte amplitude et phase. La déformation est déterminée par une mesure comparative (avec et sans excitation de la jauge), de manière à tenir compte des effets capacitifs et des courants induits. Pour une mesure statique, les ponts de jauges sont équilibrés avant application de la force extérieure. Le système Vishay 2100 relève alors directement le déséquilibre du pont de Wheatstone et affiche la déformation.

Le choix des jauges utilisées (série WK Vishay avec support en . époxy-phénolique renforcé de fibres de verre et trame en nickel-chrome) a été conduit par la recherche d'un bon comportement en fatigue et en température. Les compensations thermiques, nécessaires pour les mesures statiques, sont de différents types suivant les matériaux. La répartition jauges sur la structure a été effectuée de manière à permettre la des vérification de la symétrie axiale du champ de déformation, qui garantit la validité de la comparaison modélisation-mesure, et le relevé des déformations en des points caractéristiques de la structure (ventres et noeuds de vibration en analyse dynamique). L'ensemble des techniques relatives à ce type de mesures est détaillé dans l' "Encyclopédie Vishay d'analyse des contraintes" [55].

II.4.2 Mesure sur la structure test T2

a) Application d'une précontrainte

Les jauges ont été collées sur le boulon (deux jauges collées longitudinalement au milieu du boulon) et sur chacune des céramiques (une jauge collée suivant la circonférence sur chaque céramique). La



Structure

Figure II.81 Dispositif de mesure des déformations dynamiques

précontrainte est appliquée à l'aide d'une clef, le transducteur étant serré dans un étau. La tension relevée aux bornes d'une capacité connue, montée en parallèle avec les céramiques, permet la comparaison entre déformations relevées et résultats numériques, à l'aide du modèle analytique développé ci-après.

Pour une céramique du tranducteur d'usinage, on considère que les contraintes T_1 et T_2 sont nulles et que le champ électrique est dirigé suivant l'axe Ox_3 (figure II.82). Dans ce cas, on peut écrire le système d'équations (annexe 3) :

$$\begin{cases} S_3 = s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \\ D_3 = d_{33} T_3 + \varepsilon_{33}^T E_3 \end{cases}$$
(II.147)

Dans le cas de la modélisation éléments finis, la colonne de céramiques est en circuit ouvert. La charge sur les électrodes est nulle, ce qui donne :

$$D_3 = 0$$
 (II.148)

$$E_{3} = -\frac{d_{33}}{\epsilon_{33}^{T}} T_{3}$$
 (II.149)

Le potentiel calculé s'exprime sous la forme :

$$\Phi_{\text{mod}} = -\frac{d_{33}}{\epsilon_{33}^{\text{T}}} e T_3$$
 (II.150)

et la déformation par :

$$S_{mod} = s_{33}^{E} \left(1 - \frac{d_{33}^{2}}{\epsilon_{33}^{T} s_{33}^{E}} \right) T_{3}$$
 (II.151)

Expérimentalement, il apparaît sur la capacité C montée en parallèle (figure II.83), une charge q telle que :

$$q = C \Phi_{mes}$$
(II.152)

Si la charge est positive, le vecteur D₃ est orienté de la céramique vers l'électrode et vaut :

$$D_{3} = -\frac{C \Phi_{mes}}{4 S}$$
(II.153)

où S est la surface de l'électrode. On peut alors calculer le potentiel et la déformation en fonction de T_3 :




$$E_{3} = -\frac{d_{33}}{\epsilon_{33}^{T}} T_{3} - \frac{C \Phi_{mes}}{4 \ s \ \epsilon_{33}^{T}}$$
(II.154)

$$\Phi_{mes} = E_3 e \qquad (II.155)$$

soit, en posant :

$$C_{cér} = \frac{4 \varepsilon_{33}^{T} S}{e}$$
(II.156)

les relations :

$$\Phi_{\rm mes} = -\frac{d_{33}}{\epsilon_{33}^{\rm T}} \left(\frac{1}{1 + \frac{C}{C_{\rm cer}}} \right) e T_3 \qquad (II.157)$$

$$S_{3} = S_{33}^{E} \left(1 - \frac{d_{33}^{2}}{s_{33}^{E} \epsilon_{33}^{T}} \frac{1}{1 + \frac{C}{C_{cer}}} \right) T_{3}$$
(II.158)

En comparant les équations (I.150) et (I.157) d'une part, (I.151) et (I.158) d'autre part, on peut établir, pour une même contrainte T_3 , la correspondance entre valeurs analytiques (mod) et expérimentales (mes) sous la forme :

$$\frac{\Phi_{\text{mod}}}{\Phi_{\text{mes}}} = 1 + \frac{C}{C_{\text{cér}}}$$
(II.159)

$$\frac{S_{mod}}{S_{mes}} = \frac{1 - k_{em}^2}{1 - \frac{k_{em}^2}{1 + \frac{C}{C_{cer}}}}$$
(II.160)

en posant :

$$\mathbf{k}_{em}^{2} = \frac{\mathbf{d}_{33}^{2}}{\mathbf{s}_{33}^{E} \ \varepsilon_{33}^{T}}$$
(II.161)

De manière générale, on a C \geq C $_{\rm c\,\acute{e}\,r}$, ce qui donne :

$$\frac{\Phi_{mod}}{\Phi_{mes}} = \frac{C}{C_{cer}}$$
(II.162)

$$\frac{S_{mod}}{S_{mes}} = 1 - k_{em}^2$$
(II.163)

Cette correspondance a été exploitée pour présenter les résultats théoriques (éléments finis) et expérimentaux sur le même graphique (figure II.84).

Les valeurs mesurées des déformations augmentent moins rapidement que les valeurs calculées. Sur les céramiques, la variation des déformations est bien reproduite, malgré la dispersion des résultats. L'erreur constatée sur le boulon peut être attribuée à l'imprécision du calcul de la capacité de la colonne de céramiques, dont les faces ne sont pas métallisées. La dispersion des mesures peut provenir de différences d'orientation ou de collage des jauges ou d'un centrage imparfait des céramiques. Malgré les imprécisions de mesure, la concordance entre valeurs mesurées et valeurs calculées reste satisfaisante.

b) Etude dynamique

Les déformations sur la surface du transducteur en fonctionnement ont été mesurées dans une large gamme de fréquence, mais le faible niveau de déformation ne permet pas d'atteindre des résultats quantitatifs hors des résonances. Les résultats de mesure ont donc été comparés au champ de déformation calculé pour les modes propres de la structure (figures II.85 à II.87). Les imperfections de collage ou d'orientation des jauges sont les principales causes d'erreurs. L'importance des courants induits (plusieurs centaines de fois supérieurs au signal de déformation) rend la mesure difficile pour les jauges collées sur les céramiques.

II.4.3 Mesure sur la structure test T3

Les mesures sur le transducteur Olive ont porté uniquement sur le cas dynamique car l'étude du transducteur sous pression hydrostatique nécessite l'utilisation d'une cuve à eau et pose des problèmes d'isolation au niveau des jauges. Les déformations ont été mesurées le long de la coque jusqu'au cinquième mode propre de la structure (figures II.88 à II.92). Pour le premier mode (figure II.88), les déformations de membrane et les au plan đe modélisation, déformations perpendiculaires notées respectivement (a) et (b) sur les figures, conservent une valeur à peu près constante le long de la coque. Pour les second, quatrième et cinquième modes, l'accord entre valeurs calculées et mesurées est satisfaisant. En particulier, pour le cinquième mode, la variation des déformations le long de la coque est correctement décrite (figure I.92). Pour le troisième mode (figure II.90), les résultats expérimentaux sont nettement différents des calculées. Le décalage apparaissant le long de la coque pour la valeurs déformation perpendiculaire au plan de modélisation peut être attribué à l'erreur sur le calcul de la fréquence et à l'influence des modes



adjacents. Des mesures de déplacement à l'aide d'un accélérométre confirment l'existence de ce décalage.

















II.5 CONCLUSION

Le calcul des contraintes a été développé et testé pour l'ensemble des éléments élastiques, piézoélectriques, plaques et coques du code éléments finis ATILA. Le comportement mécanique de différents transducteurs piézoélectriques a été décrit. Le calcul de grandeurs caractéristiques du transducteur telles que précontrainte maximale, immersion maximale, excitation électrique maximale ou nombre de cycles à rupture devient possible à condition de connaître précisement le comportement mécanique des matériaux utilisés. La validation de cette étude théorique a été effectuée par des mesures de déformations sur des structures réelles. Le logiciel développé a été appliqué avec succés à la description du comportement de transducteurs piézoélectriques divers [209], à l'étude de l'influence de la planéité des céramiques lors de l'application d'une précontrainte [2, 31] et au calcul des déformations d'un accéléromètre à quartz [210]. Il est actuellement utilisé pour optimiser des transducteurs d'acoustique sousmarine tridimensionnels.

Plusieurs extensions de ce travail peuvent être envisagées. La première consiste à exploiter une technique de calcul des contraintes aux points de Gauss d'intégration réduite avec un algorithme d'extrapolation des valeurs nodales présenté au paragraphe I.2.1. Cette méthode permet de

décrire correctement la variation des contraintes dans certains problèmes plus délicats [179, 202-205]. La seconde est l'extension du calcul des contraintes aux éléments composites existant dans le code ATILA. Ce travail suppose une analyse préalable du comportement mécanique des matériaux composites (limite de rupture, limite d'élasticité, fatigue) [190]. La troisième est l'utilisation des contraintes calculées pour déterminer, dans un premier temps, l'erreur due à la discrétisation éléments finis, puis, dans un second temps, le maillage optimal correspondant à une erreur donnée [197-200]. La dernière consiste à adapter les logiciels de post-traitement existant dans le code ATILA pour permettre l'édition d'un niveau maximal d'émission du transducteur limité par le comportement mécanique des matériaux.

CHAPITRE I

MODELISATION DES PERTES DANS LES TRANSDUCTEURS PIEZOELECTRIQUES DE PUISSANCE

Ce chapitre a pour objet la modélisation de transducteurs rayonnants compte tenu des dissipations d'énergie dans les matériaux. La première partie précise le principe retenu pour la prise en compte des pertes et décrit les nouvelles techniques de calcul qui ont dû être incorporées au code ATILA. Elle présente également le mode d'évaluation de la puissance dissipée. Dans une seconde partie, les résultats obtenus par éléments finis sont comparés aux valeurs fournies par des modèles analytiques, pour des structures simples. Des mesures électriques et thermiques décrites dans une troisième partie permettent alors d'évaluer les constantes complexes d'une variété particulière de céramique. Enfin, les caractéristiques des transducteurs tests T1 et T4 rayonnant dans l'eau sont déterminées et la concordance entre résultats théoriques et expérimentaux est discutée.

II.1 FORMULATION THEORIQUE RETENUE POUR LA PRISE EN COMPTE DES PERTES DANS LE CODE ELEMENTS FINIS ATILA

Dans la version initiale du code ATILA, aucun élément de la bibliothèque ne permettait la prise en compte des pertes internes aux matériaux. Par ailleurs, la technique d'assemblage frontal exploitée, limitée à des maillages de petites tailles, était peu appropriée à la représentation complexe habituelle des phénomènes de perte. Le développement d'éléments dissipatifs a donc été conduit parallèlement à la mise au point d'un algorithme de résolution utilisant une technique de stockage particulière, appelée stockage par colonnes actives par blocs. Ces travaux sont exposés dans cette partie.

I.1.1 Eléments élastiques et piézoélectriques dissipatifs

La description des dissipations d'énergie d'origine mécanique, piézoélectrique ou diélectrique à l'aide de constantes complexes a été présentée au paragraphe I.3. Ainsi, pour un matériau élastique isotrope, on considère que :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{j} \mathbf{E}'' \tag{II.1}$$

où E est le module d'Young. De même, pour un matériau piézoélectrique :

$$\mathbf{s}_{mn}^{E} = \mathbf{s}_{mn}^{E'} + \mathbf{j} \, \mathbf{s}_{mn}^{E''} \qquad (II.2)$$

$$\mathbf{d}_{im} = \mathbf{d}'_{im} + \mathbf{j} \mathbf{d}''_{im} \qquad (II.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{T}}' + j \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{T}}'' \qquad (\mathbb{I}.4)$$

où $[s^E]$, [d] et $[\epsilon^T]$ représentent respectivement le tenseur des constantes élastiques à champ électrique constant, le tenseur des constantes piézoélectriques et le tenseur des constantes diélectriques à contrainte constante. Les parties imaginaires de ces constantes ne sont généralement pas connues pour les céramiques utilisées dans les transducteurs que nous avons étudiés. Leur détermination a donc fait l'objet d'une procédure expérimentale spécifique, qui est décrite dans le paragraphe II.3.

Dans le cas de l'analyse harmonique d'une structure élastique non dissipative, le système d'équations à résoudre est donné par l'équation (II.29). Si l'on tient compte des pertes internes des matériaux, les modules d'élasticité ou de rigidité deviennent complexes et la matrice de rigidité mécanique $[K_{nu}]$ peut s'écrire :

$$[K_{uu}] = [K'_{uu}] + j [K''_{uu}] \qquad (II.5)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} K_{uu}^{"} \end{bmatrix} = \sum_{e} \iiint_{\Omega_{e}} \begin{bmatrix} B^{e} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} D^{"} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{e} \end{bmatrix} d\Omega_{e} \qquad (II.6)$$

où [D"] est la partie imaginaire de la matrice [D] donnée, suivant les cas, par les équations (II.56), (II.57), (II.60) ou (II.62). Le système d'équations à résoudre devient :

$$\left(\begin{bmatrix} K'_{uu} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} K''_{uu} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \right) \underbrace{U} = \underbrace{F}_{} \qquad (III.7)$$

Cette équation montre clairement que les valeurs nodales du champ de déplacement <u>U</u> sont complexes, même si la force appliquée sur la structure est réelle.

Si l'on effectue l'analyse harmonique d'une structure piézoélectrique, le système d'équations à résoudre se déduit de (II.37), et se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2 [M] & [K_{u\phi}] \\ \\ [K_{u\phi}]^T & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ -\underline{Q} \end{bmatrix}$$
(II.8)

Dans cette équation, les degrés du potentiel électrique non reliés à une électrode n'ont pas été condensés. Si le matériau est dissipatif, la matrice $[K_{uu}]$ est donnée par l'équation (II.5) et les autres matrices peuvent se décomposer ainsi :

$$[K_{u\phi}] = [K'_{u\phi}] + j [K''_{u\phi}] \qquad (II.9)$$

$$[K_{\varphi\varphi}] = [K'_{\varphi\varphi}] + j [K''_{\varphi\varphi}] \qquad (II.10)$$

en posant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^{"} \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{e}} \iiint_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{e}}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{e}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{e}} \end{bmatrix} d\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{e}}$$
(II.11)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{u}^{"} \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{e}} \iiint_{\Omega_{\mathbf{e}}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Phi}^{\mathbf{e}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{"} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{e}} \end{bmatrix} d\Omega_{\mathbf{e}} \qquad (\mathbb{I}.12)$$

$$\begin{bmatrix} K_{\varphi\varphi}^{"} \end{bmatrix} = \sum_{e} - \iiint_{\Omega_{e}} \begin{bmatrix} B_{\Phi}^{e} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \varepsilon^{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{\Phi}^{e} \end{bmatrix} d\Omega_{e} \qquad (\mathbb{I}.13)$$

où [c^E "], [e"] et [$\epsilon^{\rm S}$ "] sont les parties imaginaires des tenseurs

élastique, piézoélectrique et diélectrique définis en annexe 3, $[B^e]$ et $\begin{bmatrix} B^e_{\Phi} \end{bmatrix}$ dépendent de l'élément fini considéré et sont détaillées en annexe 4. Les constantes physiques complexes utilisées dans les intégrales s'écrivent :

$$c_{mn}^{E} = c_{mn}^{E}' + j c_{mn}^{E}''$$
 (II.14)

$$e_{im} = e'_{im} + j e''_{im}$$
 (II.15)

$$\varepsilon_{ij}^{s} = \varepsilon_{ij}^{s}' + j \varepsilon_{ij}^{s}'' \qquad (II.16)$$

Le calcul des matrices élémentaires de rigidité et de masse peut s'effectuer en utilisant une intégration de Gauss [179, 180]. Ainsi, pour un élément élastique isotrope à symétrie axiale, le calcul des matrices :

$$[B^e]^T[D][B^e] \qquad (II.17)$$

et

 $[N^e]^T[N^e]$ (II.18)

qui apparaissent dans les équations (II.25), (II.26) et (II.6) s'effectue à chaque point d'intégration (7 pour un triangle, 16 pour un quadrilatère). Ce calcul peut être accéléré en utilisant soit une intégration analytique de la matrice de masse dans le cas d'un triangle ou d'un rectangle (côtés droits), soit une intégration numérique de la matrice de rigidité, tenant compte de l'existence de zéros dans la matrice $[B^e]$ et de la symétrie de la matrice [D]. L'intégration analytique de la matrice de masse dans le cas du rectangle et du triangle a été effectuée à l'aide du logiciel de calcul symbolique **REDUCE** [211], qui autorise la matrice de rigidité pour un élément à symétrie axiale peut être résumée en utilisant les notations suivantes :

$$\begin{bmatrix} D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & B \\ B & A & 0 & B \\ 0 & 0 & \frac{A-B}{2} & 0 \\ B & B & 0 & A \end{bmatrix}$$
(III.19)

$$\frac{\partial [N^{e}]^{T}}{\partial x} = \underline{X}$$
 (II.20)

$$\frac{\partial [N^{e}]^{T}}{\partial y} = \underline{Y}$$
 (II.21)

$$[N^e]^T \sin \alpha = \S$$
 (II.22)

 $[N^{e}]^{T} \cos \alpha = \mathcal{L} \qquad (II.23)$

où α est l'angle entre l'axe des x global et l'axe des x local de l'élément. La matrice $[B^e]^T[D][B^e]$ peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} A\left(\underline{X}\underline{X}^{T}+\underline{S}\underline{S}^{T}\right)+B\left(\underline{X}\underline{S}^{T}+\underline{S}\underline{X}^{T}\right)+\left(\frac{A-B}{2}\right)\underline{Y}\underline{Y}^{T} & A\underline{S}\underline{C}^{T}+B\left(\underline{X}\underline{Y}^{T}+\underline{X}\underline{C}^{T}+\underline{S}\underline{Y}^{T}\right)+\left(\frac{A-B}{2}\right)\underline{Y}\underline{X}^{T} \\ A\underline{C}\underline{S}^{T}+B\left(\underline{Y}\underline{X}^{T}+\underline{C}\underline{X}^{T}+\underline{Y}\underline{S}^{T}\right)+\left(\frac{A-B}{2}\right)\underline{X}\underline{Y}^{T} & A\left(\underline{Y}\underline{Y}^{T}+\underline{C}\underline{C}^{T}\right)+B\left(\underline{Y}\underline{C}^{T}+\underline{C}\underline{Y}^{T}\right)+\left(\frac{A-B}{2}\right)\underline{X}\underline{X}^{T} \end{bmatrix}$$
(III.24)

Dans un premier temps, les matrices du type XX^T sont évaluées. Ensuite, les différents blocs de l'expression (II.24) sont calculés à partir des matrices précédentes. La matrice finale est symétrique. Elle est calculée et stockée sous forme triangulaire supérieure. Ce type de calcul est d'autant plus intéressant que la matrice [B^e] est creuse ou qu'elle comporte un grand nombre de termes égaux (cas des éléments tridimensionnels). Pour des éléments piézoélectriques, le calcul des matrices élastique, piézoélectrique et diélectrique est similaire, bien que la symétrie des tenseurs soit moins importante.

II.1.2 Le stockage par colonnes actives par blocs

L'assemblage est l'opération qui consiste à fabriquer les matrices de rigidité et de masse globales à partir de l'ensemble des matrices de rigidité et de masse élémentaires. Chaque élément est "assemblé" dès que ses matrices élémentaires sont calculées, comme décrit à la figure II.1. Un exemple simple de la technique d'assemblage est schématisé à la figure II.2. Pour chaque élément à quatre noeuds, la matrice élémentaire contient des coefficients symbolisés par l'un des symboles o, o, + ou x, qui sont reproduits dans la matrice globale dans la position où ils sont stockés. Quand plusieurs symboles sont présents dans une même case, la somme des différents termes est effectuée lors de l'assemblage. Si l'ordre des degrés de liberté matrice globale présente deux est bien choisi, la caractéristiques intéressantes sur le plan numérique [6] :

- les termes concernant un degré de liberté peuvent être tous assemblés avant la fin de l'assemblage global (l'assemblage lié au noeud 1 est terminé à la fin de l'assemblage de l'élément e₁),
- la largeur de bande W peut être notablement inférieure à l'ordre N de la matrice.

Pour exploiter la première de ces caractéristiques, une technique dite d'assemblage frontal peut être couplée à une élimination par substitution en analyse statique ou une à réduction de Guyan en analyse modale ou harmonique [179, 180]. Elle permet ainsi d'éliminer les degrés de liberté en cours d'assemblage et d'obtenir un système d'équations d'ordre inférieur





au nombre total de degrés de liberté dans la structure. Cette technique, utilisée initialement dans le code ATILA, présente l'inconvénient d'être mal adaptée à la manipulation de termes complexes ainsi qu'à des maillages atteignant ou dépassant plusieurs milliers de degrés de liberté (temps d'assemblage prohibitif, perte de précision). Pour exploiter la seconde caractéristique, les matrices assemblées peuvent être stockées par colonnes actives. Cette méthode consiste à ne conserver, colonne par colonne, que les coefficients placés au dessus de la diagonale supérieure et à l'intérieur d'une bande de coefficients non nuls [180] (figure II.3). Son application à de très gros systèmes rend nécessaire le stockage des coefficients par blocs sur des fichiers à accès direct [212]. Si l'on considère un système d'équations de la forme :

$$[K] \underline{U} = \underline{F} \qquad (II.25)$$

où [K] est une matrice de rigidité symétrique, \underline{U} le vecteur des déplacements inconnus et \underline{F} le vecteur des forces appliquées, la résolution consiste, dans un premier temps, à factoriser la matrice de rigidité sous la forme :

$$[K] = [L] [D] [L]^T$$
 (II.26)

où [D] est une matrice diagonale, et :



Pour une matrice stockée par colonnes actives, cette factorisation s'effectue par colonnes, à l'aide de l'algorithme de la figure $I\!I.4$. Après factorisation, la solution U peut être obtenue à partir du chargement F. Cet algorithme, implanté récemment dans le code ATILA [213], a été modifié pour résoudre l'analyse harmonique dans l'air ou dans l'eau d'une structure piézoélectrique avec prise en compte des pertes.



I.1.3 Analyse harmonique à vide d'une structure mécanique ou piézoélectrique

L'analyse harmonique d'une structure piézoélectrique nécessite la résolution du système d'équations (\mathbb{II} .8). Ce système peut être réécrit en isolant le potentiel appliqué, choisi comme référence de phase, et en tenant compte du fait que les forces appliquées et les charges électriques associées aux potentiels internes sont nulles. Alors :

$$\begin{bmatrix} K_{uu} \end{bmatrix} - \omega^{2} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{u\varphi} \end{bmatrix} \underbrace{K_{u\varphi}}_{0} \\ \begin{bmatrix} K_{u\varphi} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \underbrace{K_{\varphi\varphi}}_{0} \\ \underbrace{\Phi}_{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underbrace{U} \\ \underbrace{\Phi}_{0} \\ - \underbrace{I}_{j\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{0} \\ \underbrace{0} \\ - \underbrace{I}_{j\omega} \end{bmatrix}$$
(III.28)

où Φ_0 est le potentiel appliqué et I le courant entrant dans la structure piézoélectrique. Une partie de l'équation (II.28) peut être transformée en isolant les termes connus dans le second membre de l'équation :

$$\begin{bmatrix} K_{uu} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{u\varphi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{u\varphi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{u\varphi} & \Phi_0 \\ K_{u\varphi} \end{bmatrix}$$
(II.29)

Pour ne pas modifier la taille des tableaux traités, le système à résoudre est alors écrit :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2 [M] [K_{u\varphi}] Q \\ [K_{u\varphi}]^T [K_{\varphi\varphi}] Q \\ Q^T Q^T 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - K_{u\varphi} \Phi_0 \\ - K_{\varphi\varphi} \Phi_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
(II.30)

Ce système d'équations linéaires a exactement la même taille que la matrice de départ et comporte un degré de liberté imposé. Sa résolution, à l'aide de l'algorithme par colonnes actives exposé précédemment, permet la détermination des déplacements et potentiels électriques nodaux. L'impédance électrique de la structure peut ensuite se calculer à l'aide de la relation :

$$\frac{1}{Z} = -\frac{j\omega}{\Phi_0} \left(\underbrace{K}_{u}^{T}\varphi_0 \underbrace{U}_{} + \underbrace{K}_{\phi\phi_0}^{T}\varphi_0 \underbrace{\Phi}_{} + K_{\phi_0\phi_0}\Phi_0 \right) \qquad (II.31)$$

Le principe de calcul reste inchangé quand les matériaux sont sans pertes, c'est à dire que toutes les grandeurs traitées sont réelles.

II.1.4 Analyse harmonique dans l'eau d'une structure mécanique ou piézoélectrique

Le système d'équations qui décrit ce type d'analyse se déduit directement de l'équation (II.42). Dans le cas d'un stockage par colonnes actives, la condensation des degrés de libertés associés aux potentiels électriques internes n'est pas effectuée et le degré d'excitation électrique peut être isolé :

Comme précédemment, les termes connus peuvent être reportés dans le vecteur chargement et le degré d'excitation électrique peut être considéré comme un degré de liberté imposé :

$$\begin{bmatrix} K_{uu} \end{bmatrix} - \omega^{2} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{u\varphi} \end{bmatrix} \underbrace{\mathcal{Q}} - \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{u\varphi} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \underbrace{\mathcal{Q}} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ 1 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \underbrace{K}_{u\varphi} & \Phi_{0} \\ - \underbrace{K}_{\varphi\varphi} & \Phi_{0} \\ - \underbrace{K}_{\varphi\varphi\varphi} & \Phi_{0} \\ 1 \\ P \end{bmatrix} \quad (\mathbb{I}.33)$$

$$- \rho_{f}^{2} C^{2} \omega^{2} \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}^{T} \underbrace{\mathcal{Q}} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} - \omega^{2} \begin{bmatrix} M_{1} \end{bmatrix}$$

L'impédance électrique de la structure est donnée par l'équation (II.31). La matrice intervenant dans le système linéaire à résoudre n'est plus symétrique mais le profil des matrices triangulaires supérieures et inférieures est identique. Les parties supérieures et inférieures de la matrice sont donc stockées séparément par colonnes actives et par blocs sur des fichiers à accés direct de structures identiques. Dans ce cas, la résolution du système (II.25), où [K] est une matrice non symétrique, nécessite la décomposition cette matrice sous la forme [182] :

[K] = [L] [D] [W] (II.34)

où [D] est une matrice diagonale, [L] est donnée par (II.27) et [W] est une matrice triangulaire supérieure donnée par :

$$[W] = \begin{bmatrix} 1 & w_{1,2} & w_{1,3} & \cdot & \cdot & w_{1,n} \\ & 1 & w_{2,3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & & 1 & w_{n-1,n} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$
(III.35)

Après factorisation, le vecteur U peut être obtenu à partir du chargement

Factorisation	Substitutions arrières
j = 2, , n	$U_1 = F_1$
i = m _j ,, j-1	i = 2,, n
$\mathbf{k_{ji}} = \mathbf{k_{ji}} - \sum_{\mathbf{r} = \mathbf{m}_{m}}^{i-1} \mathbf{k_{jr}} \mathbf{k_{ri}}$	$U_i = F_i - \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} U_j$
$k_{ij} = k_{ij} - \sum_{r = m_m}^{i-1} k_{ir} k_{rj}$	$U_n = \frac{U_n}{k_{nn}}$
$k_{ji} = \frac{k_{ji}}{k_{ii}}$	$\begin{bmatrix} i = n-1, \dots, 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ $
Figure II.5 Algorithme de factorisation et de résolution pour une	
matrice non symétrique stockée par colonnes actives	

F. L'algorithme de résolution d'un système linéaire non symétrique stocké par colonnes actives est rappelé à la figure II.5.

${\rm I\!I}.1.5$ Calcul de la puissance dissipée

L'expression de la densité de puissance dissipée dans un matériau piézoélectrique est donnée par l'équation (I.41). Dans un élément fini, les différentes grandeurs physiques intervenant dans (I.41) s'expriment en fonction des degrés de liberté (déplacements et potentiel électrique) et des fonctions d'interpolation de l'élément (annexe 4). Pour l'élément e :

$$\mathbf{\underline{E}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{\underline{F}}} \end{bmatrix} \mathbf{\underline{\Phi}}$$
(III.36)

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^e \end{bmatrix} \underbrace{U} - \begin{bmatrix} \varepsilon^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^e_{\Phi} \end{bmatrix} \underbrace{\Phi}$$
 (II.37)

$$S = [B^e] U$$
 (III.38)

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{B}^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} \underbrace{\mathrm{U}}_{*} + \begin{bmatrix} \mathbf{e} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathrm{B}^{\mathrm{e}}_{\Phi} \end{bmatrix} \underbrace{\Phi}_{*} \qquad (\mathbb{II}.39)$$

En supposant alors les différents tenseurs complexes, l'expression finale de la puissance dissipée dans cet élément est obtenue en reportant les équations (II.36) à (II.39) dans l'équation (I.43):

$$P_{d} = \frac{1}{2} \omega \left\{ \underbrace{\mathcal{Y}_{r}^{T}}_{r} \begin{bmatrix} K_{uu}^{e} \\ \end{bmatrix} \underbrace{\mathcal{Y}_{r}}_{r} + \underbrace{\mathcal{Y}_{i}^{T}}_{r} \begin{bmatrix} K_{uu}^{e} \\ \end{bmatrix} \underbrace{\mathcal{Y}_{i}}_{r} + \underbrace{\Phi_{i}^{T}}_{r} \begin{bmatrix} K_{\phi_{u}}^{e} \\ \end{bmatrix} \underbrace{\mathcal{Y}_{i}}_{i} \right\}$$
$$+ \underbrace{\Phi_{r}^{T}}_{r} \begin{bmatrix} K_{\phi\phi}^{e} \\ \end{bmatrix} \underbrace{\Phi_{r}}_{r} + \underbrace{\Phi_{i}^{T}}_{i} \begin{bmatrix} K_{\phi\phi}^{e} \\ \end{bmatrix} \underbrace{\Phi_{i}}_{i} \right\} \qquad (\mathbb{I}.40)$$

où \underline{U}_r et \underline{U}_i sont des vecteurs constitués des parties réelle ou imaginaire des valeurs nodales du champ de déplacement, $\underline{\Phi}_r$ et $\underline{\Phi}_i$ sont des vecteurs constitués des parties réelle ou imaginaire des valeurs nodales du potentiel électrique, et $\begin{bmatrix} K^e_{uu} \\ uu \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} K^e_{\phi u} \\ \phi^e \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} K^e_{\phi \phi} \\ \phi^e \end{bmatrix}$ sont les intégrales élémentaires données aux équations (II.11) à (II.13). La première ligne de l'équation (II.40) correspond aux pertes d'origine mécanique, la seconde aux pertes d'origine piézoélectrique et la troisième aux pertes d'origine diélectrique. Pour un élement élastique isotrope, l'expression de la puissance dissipée se réduit à :

$$P_{d} = \frac{1}{2} \omega \left\{ \underbrace{U}_{r}^{T} \left[K_{uu}^{e}^{"} \right] \underbrace{U}_{r} + \underbrace{U}_{i}^{T} \left[K_{uu}^{e}^{"} \right] \underbrace{U}_{i} \right\}$$
(II.41)

où $\left[K_{uu}^{e}\right]$ est donné par l'équation (**II**.6).

II.2 VALIDATION DES ELEMENTS ET DES ALGORITHMES DEVELOPPES

Cette partie présente l'analyse harmonique dans l'air et dans l'eau de quelques structures simples. Ces résultats sont une partie des tests effectués systématiquement pour valider l'ensemble des éléments dissipatifs et des algorithmes de résolution développés [214].

I.2.1 Analyse harmonique à vide

a) Cylindre métallique excité à une extrémité

Le cylindre métallique choisi a des dimensions tranversales suffisamment faibles pour que l'on puisse considérer que seule la contrainte longitudinale T_3 est non nulle (figure II.6). Bloqué longitudinalement en $x_3 = 0$, il est sollicité à l'autre extrémité par une force harmonique F uniformément répartie. L'équation du mouvement dans le cylindre est donnée par :

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \qquad (II.42)$$

avec :

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{T_3}{E}$$
(II.43)

On peut donc écrire, en éliminant la dépendance temporelle en e^{jut} :

$$u_3(x_3) = A \cos kx_3 + B \sin kx_3 \qquad (II.44)$$

En x₃ = 0, le déplacement est nul, ce qui implique :

$$A = 0 \qquad (III.45)$$

En $x_3 = l$, on a :

$$T_3 = \frac{F}{S} = E B k \cos kl \qquad (II.46)$$

soit :

$$B = \frac{F}{S \ E \ k \ \cos \ kl} \tag{II.47}$$

ce qui conduit à :

$$u_3(x_3) = \frac{F}{S E k \cos kl} \sin kx_3 \qquad (II.48)$$

Cette solution reste valable quand les dissipations d'énergie sont prises en compte, c'est à dire quand E est complexe. Dans ce cas, il est possible de déterminer la puissance dissipée P_d à partir de l'impédance mécanique Z_m :

$$Z_{m} = \frac{F}{V(l)} = -\frac{k E S}{j \omega \tan kl}$$
(II.49)

et :

$$P_{d} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_{m}}\right) F^{2} \qquad (II.50)$$

La modélisation du cylindre utilise des éléments quadrilatères ou triangulaires dissipatifs à symétrie axiale (figure II.7). L'analyse harmonique de la structure conduit à résoudre le système d'équations (II.7). Dans la gamme 1-10 kHz, qui contient la première fréquence de résonance du cylindre, le déplacement de l'extrémité du cylindre a été comparé au résultat analytique, à la fois dans le cas sans pertes (figures II.8) et avec pertes (figures II.9 et II.10). La puissance dissipée est représentée à la figure II.11. L'ensemble de ces résultats montre un excellent accord entre résultats analytiques et numériques.







Figure II.8 Cylindre sans pertes. Variation avec la fréquence du déplacement axial de l'extrémité



Figure II.9 Cylindre avec pertes. Variation avec la fréquence de la partie réelle du déplacement axial de l'extrémité



Figure II.10 Cylindre avec pertes. Variation avec la fréquence de la partie imaginaire du déplacement axial de l'extrémité



Figure **I.11**

Cylindre avec pertes. Variation avec la fréquence de la puissance dissipée

b) Barreau piézoélectrique polarisé perpendiculairement à sa longueur

Cette structure a été décrite au paragraphe II.2.2. A partir des équations constitutives (équation (II.110)) et de l'expression de la contrainte T_1 (équation (II.119)), l'excitation électrique s'écrit :

$$D_{3} = \frac{\Phi}{\tau} \left(\frac{d_{31}^{2}}{s_{11}^{E}} \left(\frac{\cos kx_{1}}{\cos kl} - 1 \right) + \varepsilon_{33}^{T} \right)$$
(II.51)

avec :

$$k = \frac{\omega}{v_b^E}$$
(II.52)

En intégrant D_3 sur la surface de l'électrode, on obtient la charge électrique portée par la structure :

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{j} \ \omega} = \frac{\mathbf{w} \ \mathbf{l} \ \Phi}{\mathbf{\tau}} \left(\frac{\mathbf{d}_{31}^2}{\mathbf{s}_{11}^{\mathrm{E}}} \left(\frac{\tan \ \mathbf{kl}}{\mathbf{kl}} - 1 \right) + \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{\mathrm{T}} \right)$$
(II.53)

qui permet de calculer l'admittance :

$$Y = \frac{j \omega l w}{\tau} \varepsilon_{33}^{T} \left(1 + k_{31}^{2} \left(\frac{\tan kl}{kl} - 1 \right) \right)$$
(II.54)

où k_{31} est donné par l'équation (II.112). La modélisation utilise le maillage M6 défini au paragraphe II.2.2. L'étude a été effectuée pour différents barreaux de céramique, dans la gamme de fréquence 3-12 kHz qui contient le premier mode de résonance de la structure. Les céramiques notées MAT1, MAT2 et MAT3 sont fictives et dérivées de la céramique X51-05 (Pons Alcatel) en remplaçant :

. s_{11}^E par s_{11}^E - 0.1 j s_{11}^E pour la céramique MAT1, les autres constantes étant inchangées,

. $\rm d_{31}~par~d_{31}$ - 0.1 j $\rm d_{31}$ pour la céramique MAT2, les autres constantes physiques étant inchangées,

. $\epsilon_{33}^{\rm T}$ par $\epsilon_{33}^{\rm T}$ - 0.1 j $\epsilon_{33}^{\rm T}$ pour la céramique MAT3, les autres constantes physiques étant inchangées.

L'évolution de l'admittance est reproduite parfaitement autour de la première résonance pour chaque matériau (figures II.12 à II.17).













c) Transducteur simple à symétrie axiale

Ce transducteur est une structure de test simplifiée, décrite à la figure II.18. Ses dimensions transversales étant négligeables par rapport à sa longueur, seules les composantes longitudinales de la contrainte et de l'excitation électrique sont non nulles. L'équation de Poisson :

$$\frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0 \qquad (II.55)$$

implique alors que D₃ soit constant le long de la céramique. Les équations qui décrivent le problème dans la partie piézoélectrique sont (annexe 3) :

$$\begin{cases} S_3 = S_{33}^{D} T_3 + g_{33} D_3 \\ E_3 = -g_{33} T_3 + \beta_{33}^{T} D_3 \end{cases}$$
(II.56)

et l'équation du mouvement :

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial T_3}{\partial x_3}$$
(II.57)



On en déduit, en omettant la dépendance temporelle en $e^{j\omega t}$:

$$u_3(x_3) = A \sin kx_3 + B \cos kx_3$$
 (II.58)

Les conditions aux limites sur la céramique permettent d'écrire :

$$u_3(0) = 0$$
 (II.59)

ce qui implique :

$$B = 0 \tag{II.60}$$

et, en $x_3 = l$:

$$\frac{F(l)}{V(l)} = Z_m(l) = j \rho' C' S' \tan k' l' \qquad (II.61)$$

où $Z_m(l)$ est l'impédance mécanique ramenée par la contremasse métallique. Il est possible alors d'exprimer F(l) et V(l) sous la forme :

$$V(l) = -j \omega A \sin kl \qquad (II.62)$$

$$F(l) = S T_3(l) = \frac{S}{s_{33}^{D}} (S_3 - g_{33} D_3)$$
 (II.63)

$$F(l) = \frac{S}{s_{33}^{D}} (k A \cos kl - g_{33} D_{3})$$
(II.64)

ce qui donne, en reportant les équations (II.62) et (II.64) dans l'équation (II.61) :

$$A = \frac{\frac{g_{33} S}{s_{33}^{D}} D_{3}}{\left(\frac{k S \cos kl}{s_{33}^{D}} - \rho' C' S' \tan k'l' \omega \sin kl\right)} = \alpha D_{3} \quad (II.65)$$

On obtient finalement l'expression du déplacement dans la céramique sous la forme :

$$u_3(x_3) = \alpha D_3 \sin kx_3$$
 (II.66)

Pour pouvoir déterminer l'impédance électrique présentée par la structure et la puissance dissipée, on exprime le champ électrique, à partir des équations $(\Pi.56)$ et $(\Pi.66)$, sous la forme :

$$E_{3} = -\frac{g_{33} k \alpha D_{3}}{s_{33}^{D}} \cos kx_{3} + \left(\beta_{33}^{T} + \frac{g_{33}^{2}}{s_{33}^{D}}\right) D_{3} \qquad (II.67)$$

Le potentiel Φ de l'électrode centrale, défini en supposant les contremasses au potentiel zéro, s'écrit donc :

$$\Phi = -\frac{g_{33} k \alpha D_3}{s_{33}^D} \frac{\sin kl}{k} + \left(\beta_{33}^T + \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D}\right) l D_3 \qquad (II.68)$$

Or, le courant entrant dans la structure est donné par :

$$I = j \omega D_3 S \qquad (II.69)$$

L'impédance électrique est donc :

$$Z = \frac{1}{j \omega S} \left(-\frac{g_{33} \alpha \sin kl}{s_{33}^{D}} + \left(\beta_{33}^{T} + \frac{g_{33}^{2}}{s_{33}^{D}} \right) l \right)$$
(II.70)

Si les grandeurs s_{33}^D , g_{33} ou β_{33}^T sont complexes, le résultat reste valable et la puissance dissipée dans toute la structure, peut s'écrire :

$$P_{d} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) \Phi^{2} \qquad (II.71)$$

Ce transducteur a été modélisé (figure II.19) en utilisant différentes céramiques fictives dérivées de la céramique X51-05 et obtenues en remplaçant :

. $s^{\rm D}_{33}~$ par $s^{\rm D}_{33}$ – 0.1 j $s^{\rm D}_{33}$ pour la céramique notée MAT4, les autres constantes physiques étant inchangées,

. ${\rm g}_{33}\,$ par ${\rm g}_{33}^{-}$ O.1 j ${\rm g}_{33}$ pour la céramique notée MAT5, les autres constantes physiques étant inchangées,

. β_{33}^T par β_{33}^T + 0.1 j β_{33}^T pour la céramique notée MAT6, les autres constantes physiques étant inchangées.

L'évolution de l'admittance du transducteur autour de la première fréquence de résonance est représentée aux figures $\mathbb{I}.20$ à $\mathbb{I}.25$. Les résultats obtenus par éléments finis reproduisent les résultats analytiques avec un décalage de quelques dizaines de Hz, négligeable devant la valeur de la fréquence de résonance (environ 11 kHz). Les variations de l'admittance autour de la résonance (valeur maximale, largeur de bande) sont parfaitement décrites. Le déplacement axial de l'interface céramique-métal, quand une tension d'un volt est appliquée à l'entrée du transducteur, est reporté aux tableaux $\mathbb{I}.1$ à I.3 pour chacun des matériaux. Les fréquences retenues correspondent, pour le déplacement considéré, à un maximum de la partie imaginaire de l'admittance, à un maximum de la partie réelle de l'admittance ou à un minimum de la partie imaginaire de l'admittance. La puissance dissipée est calculée avec une très bonne précision pour chaque matériau (figures I.26 à I.28).














		Analytique	Alémente finie	1
	(a)	indry crque	erements rinis	
	fréquence (Hz)	10750.	10800.	
	u _r (m)	1.600 10-8	1.605 10 ⁻⁸	
	u _i (m)	-1.504 10 ⁻⁸	-1.496 10 ⁻⁸	
	(b)			
	fréquence (Hz)	11080.	11130.	
	u _r (m)	1.149 10-9	7.631 10 ⁻¹⁰	
	u _i (m)	-2.982 10 ⁻⁸	-2.993 10 ⁻⁸	
	(c)			
	fréquence (Hz)	11420.	11480.	
	u _r (m)	-1.386 10 ⁻⁸	-1.392 10 ⁻⁸	
	u _i (m)	-1.501 10 ⁻⁸	-1.477 10 ⁻⁸	
Tableau II.1	Céramique MAT4	. Déplacem	ent de l'int	erface céramique-
	métal pour les	fréquence	s correspond	ant à un :
	(a) maximum de	la partie	imaginaire	de l'admittance
	(b) maximum de	la partie	réelle de l	admittance
	(c) minimum de	la partie	imaginaire	de l'admittance

		Analytique	éléments finis	
	(a)			
	fréquence (Hz)	10750.	10800.	
	u _r (m)	1.555 10 ⁻⁸	1.560 10 ⁻⁸	
	u _i (m)	-1.595 10 ⁻⁸	-1.593 10 ⁻⁸	
	(b)			
	fréquence (Hz)	11080.	11130.	
	u _r (m)	-3.534 10 ⁻¹⁰	-8.064 10 ⁻¹⁰	
	u _i (m)	-3.220 10 ⁻⁸	-3.232 10 ⁻⁸	
	(c)			
	fréquence (Hz)	11420.	11480.	
	u _r (m)	-1.666 10 ⁻⁸	-1.673 10 ⁻⁸	
	u _i (m)	-1.584 10 ⁻⁸	-1.607 10 ⁻⁸	
Tableau II.2 Cé	eramique MAT5	. Déplaceme	ent de l'inte	rface céramique-
mé	étal pour les	fréquences	corresponda	nt à un :
(8	a) maximum de	la partie	imaginaire d	e l'admittance
(1	o) maximum de	la partie	réelle de l'	admittance
(0	c) minimum de	la partie	imaginaire d	e l'admittance

······				
		Analytique	éléments finis	
	(a)			
	fréquence (Hz)	10930.	10980.	
	u _r (m)	2.999 10 ⁻⁸	3.016 10 ⁻⁸	
	u _i (m)	-3.142 10 ⁻⁸	-3.219 10 ⁻⁸	
	(b)			
	fréquence (Hz)	11100.	11140.	
	u _r (m)	-3.197 10 ⁻⁹	-1.952 10 ⁻⁹	
	. u _i (m)	-6.423 10 ⁻⁸	-6.461 10 ⁻⁸	
	(c)			
·	fréquence (Hz)	11250.	11290.	
	u _r (m)	-3.432 10 ⁻⁸	-3.452 10 ⁻⁸	
	u _i (m)	-3.147 10 ⁻⁸	-3.257 10 ⁻⁸	
				·
Tableau II.3	Céramique MAT6	. Déplacem	ent de l'int	erface céramique-
	métal pour les	fréquence	s correspond	ant à un :
	(a) maximum de	la partie	imaginaire	de l'admittance
	(b) maximum de	la partie	réelle de l	'admittance
	(c) minimum de	la partie	imaginaire	de l'admittance







I.2.2 Analyse harmonique dans l'eau

a) Céramique rayonnant dans un tube

Cette structure test est constituée d'une plaque de céramique encastrée latéralement, libre en face arrière et surmontée en face avant d'une colonne d'eau infinie (figure II.29) [6]. Cette plaque, excitée électriquement, rayonne une onde plane dans le fluide. En notant ρ_s et ρ_f les masses volumiques du solide et du fluide, C_s et C_f les vitesses de propagation dans le solide et le fluide, u(x) le champ de déplacement dans le solide et p(x) le champ de pression dans le fluide, on obtient [215]:

$$p(x) = p_1(x) + j p_2(x)$$
 (II.72)

avec, en x = L:

$$p_1(L) = -\alpha \left(\nu X_1 \sin kL - Y_1 \cos kL\right) \Phi_0 \qquad (II.73)$$

$$p_{2}(L) = -\alpha \left(X_{2} \cos kL + \nu Y_{2} \sin kL \right) \Phi_{0} \qquad (II.74)$$

où :

$$v = \frac{\rho_{\rm s} C_{\rm s}}{\rho_{\rm f} C_{\rm f}} \tag{II.75}$$

$$k = \frac{\omega}{C_s}$$
(II.76)

$$\alpha = \frac{h_{33} (\cos kL - 1)}{\omega A (\cos^2 kL + \nu^2 \sin^2 kL)}$$
(II.77)

A étant la surface de la plaque, X_a et Y_a les parties réelle et imaginaire de l'admittance électrique. L'impédance électrique de la structure vaut :

$$Z = \frac{1}{j C_0 \omega} \left(1 - j \frac{k_t^2}{kL} \frac{2 \nu (1 - \cos kL) - j \sin kL}{\cos kL + j \sin kL} \right)$$
(II.78)

avec :

$$C_{0} = \frac{A}{L \beta_{33}^{S}}$$
(II.79)

$$k_{t}^{2} = \frac{h_{33}^{2}}{c_{33}^{D} \beta_{33}^{S}}$$
(II.80)



Les maillages utilisés sont tridimensionnels (figure \mathbb{II} .30). Ils comportent soit des éléments hexaèdriques et quadrilatères, soit des éléments prismatiques et triangulaires. La longueur des éléments fluides dans la direction de propagation est inférieure au quart de la longueur d'onde de manière à garantir la précision des résultats [6]. Le matériau est supposé sans pertes. L'impédance calculée pour chacun des maillages correspond exactement au modèle analytique autour de la première résonance (figures $\mathbb{II}.31$ et $\mathbb{II}.32$).







b) Sphère piézoélectrique pulsante rayonnant dans l'eau

L'étude d'une sphère piézoélectrique mince en vibration à vide (figure II.33) peut être développée analytiquement [10, 49]. Le circuit électrique équivalent est représenté à la figure II.34. En posant :

$$Z_{\rm m} = j \left(\omega \, {\rm m} - \frac{1}{\omega \, {\rm e}} \right) \tag{II.81}$$

l'admittance Y de la sphère s'écrit :

$$Y = j \omega C_0 + \frac{N^2}{Z_m}$$
 (II.82)

Si la sphère est immergée, l'impédance apportée par le fluide environnant vaut [216] :

$$Z_{r} = j \frac{4 \pi \rho_{f} C_{f} k a^{3}}{1 + j k a}$$
(II.83)

Dans ce cas, l'admittance de la sphère piézoélectrique est alors donnée par :

$$Y = j \omega C_0 + \frac{N^2}{Z_m + Z_r}$$
 (II.84)

Le calcul par éléments finis a été effectué en utilisant une modélisation bidimensionnelle à symétrie axiale (figure II.35) ou une modélisation tridimensionnelle (figure II.36). Le matériau est supposé sans pertes. L'admittance calculée reproduit avec précision l'évolution donnée par le modèle analytique (figures II.37 et II.38).













III.3 ETUDE EXPERIMENTALE DES PERTES

La prise en compte des pertes intrinsèques aux matériaux dans la modélisation des transducteurs piézoélectriques est possible si les constantes physiques intervenant dans les équations (II.2) à (II.4) sont connues, en particulier sous précontrainte, à fort niveau d'excitation et dans la gamme de fréquence ad'hoc. La détermination expérimentale complète des différents tenseurs fait intervenir une procédure longue et fastidieuse [90, 98, 99], qui ne satisfait pas, en outre, aux conditions posées. Une technique de mesure simplifiée a été mise en place de manière à évaluer les termes indispensables pour la céramique utilisée dans les transducteurs étudiés à la section II.4

II.3.1 Principe de la mesure

Les céramiques étudiées sont de type X51-05, fabriquées par la société Pons, dont la caractérisation a déjà été conduite, en négligeant les pertes, par P. TIERCE [8]. Dans le travail que décrit cette section, le

tenseur piézoélectrique (équation (II.3)) a été supposé réel, compte tenu de la difficulté à interpréter physiquement les pertes qui lui sont associées. On a considéré en outre que tous les termes du tenseur diélectrique (équation (II.4)) ont le même angle de perte, angle fourni directement par une étude détaillée antérieure de la céramique X51-05 à fort niveau [106]. On a considéré également que les termes du tenseur élastique ont même angle perte. Le dispositif expérimental proposé vise donc à déterminer de uniquement ce dernier angle. Pour ce faire, différents transducteurs sandwichs sont excités à leur fréquence de résonance fondamentale, les pertes d'origine mécanique étant alors prépondérantes. La quantité de chaleur qu'ils dissipent est mesurée et, parallèlement, calculée à l'aide du code ATILA pour différentes valeurs de l'angle. La comparaison de ces deux résultats permet ainsi de déterminer l'angle recherché. Une vérification est finalement possible, en comparant les déplacements calculés par éléments finis et mesurés sur les structures réelles.

Plusieurs méthodes ont été envisagées pour mesurer la puissance dissipée dans le transducteur. Une première technique consiste à monter le transducteur dans une enceinte adiabatique. Après interruption de l'excitation. l'ensemble transducteur-enceinte atteint un équilibre thermique. La mesure de la température d'équilibre et la connaissance préalable des capacités calorifiques du transducteur et de l'enceinte permettent de déterminer la quantité de chaleur dissipée. Cette solution a été abandonnée car il est apparu que la constante de temps thermique de l'enceinte est du même ordre de grandeur que la durée nécessaire pour atteindre l'équilibre thermique. La seconde méthode utilise une mesure de l'évolution de la température à la surface du transducteur durant l'excitation. Parallèlement, une modélisation de l'échauffement de la structure est effectuée par éléments finis [217]. La comparaison des températures mesurées et calculées permet de déterminer la puissance dissipée dans la structure. Cette technique donne de bons résultats pour un transducteur non excité, chauffé par une résistance thermique interne. Quand le transducteur est excité, l'échauffement provoque une dérive de la fréquence de résonance et il n'est pas possible de maintenir la puissance puissance dissipée varie et la comparaison injectée constante. La modélisation-mesure n'est plus possible. La technique retenue finalement consiste à mesurer la tension d'excitation et le courant entrant dans le transducteur (figure II.39). Si l'on suppose que l'énergie acoustique rayonnée dans l'air est nulle, la puissance injectée dans le transducteur est la puissance dissipée. La puissance injectée a été maintenue constante en faisant varier la fréquence d'excitation. Cette méthode a été utilisée pour déterminer la dissipation d'énergie dans deux transducteurs tests. Les résultats sont présentés au paragraphe suivant.



I.3.2 Résultats expérimentaux

Les mesures ont été effectuées sur deux transducteurs sandwichs à symétrie axiale. Ces transducteurs sont constitués de quatre ou six céramiques, précontraintes entre deux contremasses d'aluminium identiques par une tige en acier (figure II.40). L'étude des deux premiers modes de résonance, à faible niveau d'excitation (tableaux II.4 et II.5), permet de vérifier que chaque structure est bien décrite par le calcul éléments finis, avec un décalage de fréquence systématique qui peut être attribué à la dispersion sur les constantes physiques de la céramique entre différents lots. Les mesures absolues de déplacement ont été effectuées à l'aide d'un La comparaison des valeurs calculées et mesurées de accéléromètre. l'admittance et du déplacement est présentée aux tableaux II.6 et II.7. L'excitation électrique des transducteurs a été limitée à 5 volts efficaces par la saturation en courant de l'amplificateur utilisé et ne satisfait donc pas l'exigence du fort niveau d'excitation. Les résultats obtenus mettent en évidence :

- la cohérence entre les mesures de déplacement et d'admittance pour un même mode de résonance,
- l'insuffisance d'un angle de perte unique pour caractériser le matériau sur une large bande de fréquence, au vu des résultats obtenus sur le transducteur à 4 céramiques.



Cependant, l'ordre de grandeur des pertes dans la céramique X51-05 peut être estimé. Globalement, les valeurs retenues sont :

$$d'_{1m} = 0$$
 (II.85)

$$\frac{\varepsilon_{1j}^{T}}{\varepsilon_{1j}^{T}} = de \ 0.005 \ a \ 0.02 \qquad (II.86)$$

et :

$$\frac{s_{mn}^{E}}{s_{mn}^{E}} = 0.004 a 0.011 \qquad (II.87)$$

Il est évident que ces résultats ne constituent pas une caractérisation fine des tenseurs complexes de la céramique étudiée, mais il permettent d'évaluer les grandeurs nécessaires à la description, à l'aide de la méthode des éléments finis, des dissipations d'énergie dans les transducteurs piézoélectriques.

	Mesure	Calcul		Mesure	Calcul
f _r (Hz)	14150	15820	f _r (Hz)	27680	29583
f _a (Hz)	14275	16030	f _a (Hz)	28440	30220
k _{em}	0.13	0.16	k _{em}	0.23	0.20
	Mode 1			Mode 2	

	Mesure	Calcul]		Mesure	Calcul
f _r (Hz)	13925	15174	-	f _r (Hz)	26240	28000
f _a (Hz)	14170	15502		f _a (Hz)	27390	28837
k _{em}	0.18	0.20		k _{em}	0.29	0.24
	Mode 1				Mode 2	

Mode 1		
Mesure	11.7	293.0
Calcul avec 1.1%	10.3	318.0
le pertes mécaniques		
Mode 2		
Mesure	50.0	270.0
Calcul avec 0.4%	49.0	326.0
le pertes mécaniques		

	Admittance (ms)	
Mode 1		
Mesure	30.0	497.0
Calcul avec 0.3%	30.4	615.7
de pertes mécaniques		
Mode 2		
Mesure	83.0	327.0
Calcul avec 0.4%	68.3	366.2
de pertes mécaniques		
		L

II.4 ANALYSE HARMONIQUE DE DIFFERENTS TRANSDUCTEURS PIEZOELECTRIQUES RAYONNANT DANS L'EAU

I.3.1 Etude du transducteur T4

Ce transducteur annulaire à immersion libre a déjà fait l'objet d'une étude compléte par éléments finis, dans le cadre de la thèse de R. BOSSUT [7, 184]. Les résultats obtenus lors d'une modélisation sans prise en compte des pertes sont reproduits aux figures II.41 à II.44. La réponse par volt dans la direction radiale présente plusieurs maxima. Le premier, situé autour de 8.5 kHz, correspond au mode fondamental de cavité. Le second, aux environs de 15.5 kHz, peut être associé au mode radial de l'anneau. La réponse par volt du transducteur est, globalement, correctement décrite sur toute la bande de fréquence étudiée, à l'exception d'une résonance parasite, située autour de 18 kHz, qui correspond au premier mode de flexion de l'anneau. Ce mode apparaît beaucoup plus amorti expérimentalement. La capacité parallèle calculée présente également une résonance trop importante à cette fréquence. Son comportement est décrit avec un décalage attribué à la dispersion sur les constantes physiques entre différents lots. La résistance parallèle mesurée est beaucoup plus faible que la valeur calculée, même si l'évolution générale est bien reproduite. Cette erreur peut être attribuée aux pertes diélectriques qui ont été négligées. L'étude par éléments finis de ce transducteur rayonnant dans l'eau a donc été reprise (figure II.45) en définissant, à partir de mesures déjà effectuées sur ce type de céramique [106], des pertes mécaniques et diélectriques telles que :

$$\frac{s_{mn}^{E}}{s_{mn}^{E}} = 0.02$$
 (II.88)

et :

$$\frac{\varepsilon_{ij}^{\mathrm{T}}}{\varepsilon_{ij}^{\mathrm{T}}} = 0.02 \qquad (II.89)$$

Les résultats obtenus (figures II.46 à II.49) montrent que la résonance de flexion de l'anneau est correctement amortie et que la résistance parallèle est calculée de manière satisfaisante sur toute la bande de fréquence. La prise en compte des pertes d'origine mécanique et diélectrique permet donc une meilleure description du rayonnement de ce transducteur annulaire.



















II.4.2 Etude du transducteur T1

Ce transducteur tonpilz multifréquence a déjà fait l'objet de nombreuses modélisations par éléments finis [6, 218, 219] et de plusieurs caractérisations expérimentales [220-222]. Le maillage utilisé pour décrire la structure rayonnante suppose que le transducteur est monté dans un baffle plan infini et rigide (figure I.50). Cette condition de rayonnement diffère de la condition expérimentale où le transducteur est monté dans un d'acier. Pour l'ensemble des résultats concernant cette structure, boîtier les fréquences sont normées à la fréquence du premier mode de résonance calculé par élément finis. Lorsque ce transducteur est excité normalement, la réponse par volt est correctement décrite (figure I.51), à l'exception de la première résonance pour laquelle le maximum calculé est à la fois trop large et trop élevé d'environ 7 dB. La largeur excessive peut être attribuée à la différence entre les conditions de rayonnement de la modélisation et de la mesure [6]. Le niveau trop élevé du maximum s'explique en terme de rendement électroacoustique du transducteur et provient de l'absence de prise en compte des pertes dans la modélisation.

Dans un premier temps, une analyse harmonique dans l'air du transducteur a été effectuée et les pertes d'origine mécanique dans la céramique ont été ajustées de manière à retrouver l'impédance du transducteur nu, mesurée autour de la résonance (tableau II.8). Les constantes élastiques utilisées sont telles que :

$$\frac{s_{mn}^{E}}{s_{mn}^{E}} = 0.03 \qquad (II.90)$$

La réponse par volt calculée avec prise en compte de ces pertes est alors représentée à la figure II.52. Il apparaît clairement que les pertes d'origine mécanique dans la céramique ne suffisent pas à expliquer l'erreur de niveau constatée précédemment.





Partie réelle (mS) Partie imaginaire (mS) Maximum Maximum Minimum Mesure 5.120 3.225 -1.920 Calcul avec 3% 5.087 3.028 -2.055 de pertes mécaniques Tableau I.8 Admittance du transducteur T1 à sa résonance fondamentale





Le troisième mode, non représenté, est un mode de dilatation-compression de la tige de précontrainte

Figure II.53 Modes de résonance du transducteur T1. Représentation schématique des champs de déplacement

De fait, le transducteur est fixé dans son boîtier, au niveau de la contremasse, à l'aide d'un écrou, lequel doit être à l'origine d'une part non négligeable de l'amortissement du transducteur. L'observation des champs de déplacement associés aux premiers modes de résonance de la structure (figure I.53) confirme cette hypothèse. Le déplacement de la contremasse est en effet important pour le premier mode de résonance et négligeable pour les modes suivants, ce qui explique la bonne description des second et troisième maxima sur la courbe représentative de la réponse par volt. Le transducteur a donc été étudié en modélisant la fixation à l'aide d'un ressort reliant la contremasse à un point fixe (figure II.54) et les pertes dans ce ressort ont été ajustées de manière à retrouver le niveau d'émission du premier maximum. Le niveau d'émission calculé est représenté pour une excitation normale des céramiques (figure II.55). La modélisation de la fixation utilisée permet de décrire correctement le niveau d'émission sur toute la gamme de fréquence, bien que la fréquence théorique du premier maximum soit un peu trop élevée, à cause de la rigidification apportée.





D'autre part, les céramiques de ce transducteur ont été montées de manière à pouvoir être excitées électriquement par couple de deux céramiques (figure II.56). Différentes excitations de ce type, appelées excitations différenciées, ont été testées à fin de validation :

- l'excitation E1, pour laquelle les paires 1 à 7 sont en phase et les paires 8 à 13 sont en opposition de phase avec les précédentes,
- l'excitation E2, pour laquelle les paires 1 à 3 sont en phase et les paires 4 à 13 sont en opposition de phase avec les précédentes,
- l'excitation E3, pour laquelle les paires 1 à 3 et 11 à 13 sont en phase et les paires 4 à 10 sont en opposition de phase avec les précédentes,
- l'excitation E4, pour laquelle les paires 1 et 10 à 13 sont en phase et les paires 2 à 9 sont en opposition de phase avec les précédentes,



Pour chacune de ces excitations, la réponse par volt calculée en utilisant la modélisation de la fixation définie précédemment a été comparée aux valeurs mesurées ainsi qu'aux valeurs calculées sans pertes et sans fixation (figures II.57 à II.60). La comparaison est satisfaisante sur l'ensemble des courbes, d'autant que, lorsqu'une différence importante est constatée sur un maximum (par exemple le quatrième maximum de la figure II.60), elle a pour origine un glissement de fréquence entre minima calculés et mesurés. Par ailleurs, si la première résonance dans le cas de l'excitation E1 a disparu à cause de l'introduction de la fixation, il faut cependant remarquer que le niveau d'émission pour ce maximum est très faible. En conséquence, la principale différence réside dans la largeur excessive de la première résonance pour l'excitation normale et les excitations différenciées E1 à E4.









Pour mettre en évidence l'influence des conditions de rayonnement, le transducteur a finalement été modélisé dans son boîtier, supposé rigide (figure II.61). Les pertes dans la fixation ont été modifiées de manière à ajuster le premier maximum pour une excitation normale. Les réponses par volt obtenues sont comparées aux résultats de calcul en condition de baffle dur et aux valeurs expérimentales (figures II.62 à II.65). Les résultats expérimentaux sont aussi reproduits avec un décalage de fréquence de manière à permettre une comparaison plus aisée avec les résultats de calcul. L'évolution autour du premier maximum est cette fois parfaitement décrit si l'on exclut le décalage en fréquence dû à la fixation. Enfin, il faut noter que la directivité est correctement calculée pour différentes fréquences (figures II.66 à II.70), l'hypothèse de la rigidité du boîtier expliquant l'écart de quelques dB observé vers l'arrière.





















II.5 CONCLUSION

La prise en compte des pertes dans le code éléments finis ATILA a conduit au développement d'éléments élastiques isotropes et ^{*} piézoélectriques dissipatifs. Parallèlement, de nouvelles techniques numériques ont permis d'augmenter la taille des problèmes traités. Les tests effectués sur des structures simples ont tous montré une parfaite concordance avec les modèles analytiques existants. L'étude du rayonnement dans l'eau de différents transducteurs piézoélectriques a permis une description satisfaisante du rendement sur une large bande de fréquence, à condition de prendre en compte tous les mécanismes susceptibles de contribuer à l'amortissement [223]. Par ailleurs, les éléments et les été utilisés dans l'étude de problèmes algorithmes développés ont acoustiques variés (diffraction par un réseau de tubes compliants enrobés d'élastomères [224-226]). La modélisation de matériaux viscoélastiques ou de matériaux piézoélectriques présentant de fortes pertes (polyfluorure de vinylidène) peut être également envisagée [227].

Le développement de ce travail peut se poursuivre dans deux directions. La première a trait à la caractérisation expérimentale des constantes physiques complexes des céramiques. Sur ce point, le travail effectué dans cette thèse a permis d'évaluer un ordre de grandeur de ces valeurs. Une détermination précise de chacune des constantes suppose des
géométries d'échantillons variées et une technique de mesure sophistiquée [90, 98, 99]. La seconde concerne la description de l'échauffement d'un transducteur qui suppose le couplage du logiciel développé, qui permet d'obtenir la puissance dissipée dans chaque élément, avec un logiciel de calcul thermique par éléments finis [32, 33]. Cette procédure nécessite toutefois la réactualisation des constantes physiques, au fur et à mesure que la température s'éléve, pour permettre une description correcte du comportement thermique global du transducteur.



CONCLUSÍON /

L'application de ces développements théoriques à la modélisation de transducteurs variés a confirmé l'aptitude de la méthode des éléments finis à décrire précisément leur comportement, quelle que soit leur géométrie. Cette validation a été menée en comparant les résultats de simulation avec des mesures de déformation en régime statique ou dynamique, dans le cas mécanique, ou avec les caractéristiques de transducteurs connus dans le cas de la prise en compte des pertes internes des matériaux. De plus, la richesse de l'information obtenue par calcul a permis une analyse fine du comportement de ces transducteurs [209, 223, 228] : existence d'un champ de contrainte non uniforme dans la colonne de céramiques lors de l'application de la précontrainte, localisation de zones de fatigue ou de concentration de contrainte en fonctionnement à fort niveau d'excitation, importance de la contribution du système de fixation dans le boitier au rendement global du transducteur...

Les perspectives d'extension de ce travail peuvent être divisées en trois thèmes majeurs : meilleure description des matériaux existants. modélisation de matériaux nouveaux, augmentation de la taille et des possibilités de modélisation. Ainsi, la précision des résultats obtenus à l'aide des logiciels développés au cours de cette thèse est conditionnée par la bonne connaissance des caractéristiques physiques des matériaux utilisés, et en particulier des céramiques. La mise en oeuvre d'une détermination expérimentale systématique de leurs limites mécaniques et de leurs pertes internes apparaît donc primordiale. La modélisation des matériaux nouveaux a déjà été entreprise à l'aide du code ATILA pour les matériaux composites [188-190] et magnétostrictifs [229, 230], qui sont de plus en plus utilisés dans la conception de transducteurs basse fréquence de forte puissance. Le calcul des contraintes et la prise en compte des pertes internes dans ces matériaux apparaissent alors également comme des développements indispensables dans le cadre de l'optimisation de ces transducteurs. Enfin, deux axes de développements théoriques peuvent être évoqués. Le premier concerne la modélisation du comportement thermique des transducteurs à partir des sources de chaleur calculées. Il ne pose aucun problème de principe mais suppose une connaissance précise des conditions aux limites thermiques, et en particulier des coefficients d'échange. Le second a trait à la description de l'interaction entre projecteurs élémentaires d'une antenne. Il implique une augmentation significative de la taille des problèmes traités par le calcul éléments finis [213, 214], ainsi que le couplage de ce calcul avec une méthode d'équations intégrales [231, 232] pour décrire le rayonnement de l'onde acoustique.

REFERENCES

- O.B. WILSON, "Introduction to theory and design of sonar transducers", Ed. Peninsula Publishing Co, (1989), reprinted from first edition (1985).
- J.N. DECARPIGNY, P. TIERCE, "Application des sons et ultrasons aux processus industriels de fabrication", colloque sur les matériaux piézoélectriques, les ultrasons et leurs applications, CAST-INSA, Lyon, (1986).
- 3. B. NONGAILLARD,

"L'instrumentation ultrasonore appliquée au contrôle non destructif", journées d'études acoustiques Région Nord/Pas de Calais, Villeneuve d'Ascq, (1987).

- 4. M. NAILLON, R.H. COURSANT, F. BESNIER, Acta Electronica 25, 4, (1983).
- 5. H.F. OLSON,

dans "American Institute of Physics Handbook", Ed. McGraw-Hill, (1972).

6. J.N. DECARPIGNY,

"Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piézoélectriques", Thèse de Doctorat d'Etat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1984).

7. R. BOSSUT,

"Modélisation de transducteurs piézoélectriques annulaires immergés par la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat-Ingénieur, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, (1985).

8. P. TIERCE,

"Modélisation du transducteur Isabelle par la méthode des éléments finis", Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, (1985).

9. B. HAMONIC,

"Contribution à l'étude du rayonnement de transducteurs utilisant les vibrations de coque mince", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1987)

10. K. ANIFRANI,

"Contribution à l'étude de structures piézoélectriques à l'aide de la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1988).

- 11. J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, B. TOCQUET, D. BOUCHER, "In-air analysis of piezoelectric Tonpilz transducers in a wide frequency band using a mixed finite element-plane wave method", J. Acoust. Soc. Am. 78, 1499, (1985).
- 12. J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, B. HAMONIC, R. BOSSUT, P. TIERCE, D. MOREL, D. BOUCHER, B. TOCQUET, "Finite element analysis of low frequency sonar transducers", Proceedings of the two-day conference on sonar transducers, Birmingham, (1987).
- 13. J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, R. BOSSUT, B. HAMONIC, B. DUBUS, P. TIERCE, D. MOREL, K. ANIFRANI, D. BOUCHER, "Analyse de transducteurs piézoélectriques par éléments finis : le code ATILA", Actes du congrès international Strucome 88, Ed. Hermes, (1988).
- 14. R.S. WOOLLETT,
 "Theorical power limits of sonar transducers", I.R.E. Int. Con. Rec.
 6, 90, (1962).
- 15. R.S. WOOLLETT, "Power limitations of sonic transducers", IEEE SU 15, 218, (1968).
- 16. **O.B. WILSON**,

"Power limitations of piezoelectric length expander transducers", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille, (1988)

- 17. R.S. WOOLLETT, "Trends and problems in sonar transducer design", IEEE SU 10, 116, (1963).
- 18. D. BOUCHER,

"Trends and problems in low frequency sonar projectors design", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille, (1988).

19. S.A. HUDSON,

"Numerical models used in design and analysis of volumetric transducer arrays", J. Acoust. Soc. Am. 84, S101, (1988).

20. W.B. HARRISON,

"Monolithic piezoelectric transducers", J. Acoust. Soc. Am. 85, S60, (1989).

21. A.E. CLARK,

"Highly magnetostrictive rare earth compounds for high power acoustic projectors", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille, (1988).

22. L. EYRAUD

"The material for piezoelectric power transducers", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille, (1988).

23. P. GONNARD, P. CHAMP, L. EYRAUD,

"Characterization of piezoelectric ceramics for high power", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille, (1988).

24. P. GONNARD, L. EYRAUD,

"Characterization of piezoelectric ceramics for high power transducers", J. Acoust. Soc. Am. 85, S76, (1989).

25. J. OSWIN, J. DUNN,

"Frequency, power and depth performance of class IV flextensionnal transducers", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Ed. Decarpigny, Springer Verlag, Lille, (1988).

26. J.A. GALLEGO-JUAREZ,

"High power ultrasonic transducers for use in gases and interphases", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille, (1988).

27. D.L. CARSON,

"Diagnosis and cure of erratic velocity distributions in sonar arrays", J. Acoust. Soc. Am. 34, 1191, (1962).

28. R.S. WOOLLETT,

"Basic problems caused by depth and size contraints in low frequency underwater transducers", J. Acoust. Soc. Am. 68, 1031, (1980).

29. C. POHLENZ,

"Power electronic devices for sonar systems", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille, (1988). 30. B. THIRION,

"The electronic driving sources for ultrasonic machining", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille, (1988).

31. P. TIERCE, J.N. DECARPIGNY,

"Design of high power ultrasonic transducers for use in macrosonics", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille, (1988).

- 32. G. VANDERBORCK, W. STEICHEN, Y. LAGIER, "Application of finite element method for the prediction of power limitation in high frequency transducers", J. Acoust. Soc. Am. 80, S95, (1986).
- 33. W. STEICHEN, G. VANDERBORCK, Y. LAGIER,

"Determination of the power limits of a high frequency transducer using the finite element method", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille, (1988).

34. B. HAMONIC,

"Application of the finite element method to the design of power piezoelectric sonar transducers", Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille, (1988).

35. **O. BRANDT**,

"Le transducteur de type Tonpilz", rapport LDSM, DCAN-Toulon, n°14 505 DSM/B, (1966).

36. J. POULIQUEN, C. GRANGER,

Compte-rendus des journées d'étude sur l'utilisation des ultrasons dans les techniques de production, Lille, (1980).

37. K.S. VAN DYKE,

"The piezoelectric resonator and its equivalent network", Proc. I.R.E. 16, 742, (1928).

38. W.P. MASON,

"Electromechanical transducers and wave filters", Ed. Van Nostrand, (1948).

- 39. G.E. MARTIN, "Vibrations of coaxially segmented longitudinally polarized ferroelectric tubes", J. Acoust. Soc. Am. 36, 1496, (1964).
- 40. M.J. EARWICKER, "Mathematical modelling of piezoelectric transducers", A.U.W.E. Technical Note 482/73, (1973).
- 41. P. TIERCE, K. ANIFRANI, J.N. DECARPIGNY, B. HAMONIC, D. BOUCHER "Piezoelectric transducer analysis using the transfer matrix method and a new versatile computer code", J. Acoust. Soc. Am. 84, S102, (1988).
- 42. S.C. THOMPSON, M.P. JOHNSON, "Transducer element analysis - Technical reference manual", Contract N00140-84-D-BA95 N403, Gould Inc., Ocean Systems Division, (1987).
- 43. C.L. GOODHART, G.L. KINNISON, C.I. BOHMAN, C.W. BENTHIEN, "Temperature effects in ceramic resonators containing cement joints", NOSC Tech. Rep. 716, (1982).
- R.L. SMITH,
 "Interpreting piezoelectric oscillator dissipation effects in terms of the underlying materials viscoelastic relaxation phenomena", J. Acoust. Soc. Am. 82, S95, (1987).
- 45. W.J. TOULIS, US Patent 3, 277, 433, (1963).
- 46. W.J. TOULIS, US Patent 3, 274, 537, (1963).
- 47. B. HAMONIC, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, D. BOUCHER, "Analysis of radiating flexural shell sonar transducers using the finite element method", accepté pour publication à J. Acoust. Soc. Am., (1989).
- 48. Ces travaux sont présentés dans la référence 9.
- 49. D.A. BERLINCOURT, D.R. CURRAN, H. JAFFE, dans "Physical Acoustics principles and methods", vol. 1 part A, éd. par W.P. Mason, Ed. Academic Press, (1964).
- 50. Ces modèles sont présentés dans la référence 7.
- 51. R. GERSON, S.R. BURLAGE, D.A. BERLINCOURT, "Dynamic tensile strength of ferroelectric a ceramic", J. Acoust. Soc. Am. 33, 1483, (1961).

- 52. H.B. MILLER, "Origin of mechanical bias for transducers", J. Acoust. Soc. Am. 35, 1455, (1963).
- 53. H.M. TRENT, D.E. STONE, L.A. BEAUBIEN, dans "American Institute of Physics Handbook", Ed. McGraw-Hill, (1972).
- 54. J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE, "Mécanique des matériaux solides", Ed. Dunod, (1985).
- 55. J. AVRIL, "Encyclopédie Vishay d'analyse des contraintes", Vishay-Micromesures, (1974).
- 56. R. CAZAUD, "La fatigue des métaux", Ed. Dunod, (1969).
- 57. A. BRAND, J.F. FLAVENOT, R. GREGOIRE, C. TOURNIER, "Recueil de données technologiques sur la fatigue", Cetim, (1980).
- 58. J. DE FOUQUET, dans "Dislocations et déformations plastiques", les éditions de physique, (1979)
- 59. V.A. KUZ'MENKO, "Fatigue strength of structural materials at sonic and ultrasonic loading frequencies", Ultrasonics 13, 21, (1975).
- 60. M.C. JON, W.P. MASON, D.N. BESHERS,
 "Internal friction during ultrasonic deformation of α-brass", J.A.P.
 47, 2337, (1976).
- 61. W.P. MASON, W.A. WOOD,
 "Fatigue mechanism in Fcc metals at ultrasonic frequencies", J.A.P.
 39, 5581, (1968).
- 62. W.A. WOOD, W.P. MASON, "Fatigue mechanism in iron at ultrasonic frequencies", J.A.P. 40, 4514, (1969).
- 63. W.P. MASON, D.E. MAC DONALD,
 "The use of high power ultrasonics in studying fatigue in metals", J. Acoust. Soc. Am. 51, 894, (1972).
- 64. A. PUSKAR, "A new method of increasing the fatigue strength of metals", Ultrasonics 14, 123, (1976).

- 65. A. PUSKAR, "Cyclic stress-strain curves and internal friction of steel at ultrasonic frequencies", Ultrasonics 20, 118, (1982).
- 66. S. PURUSHOTOMAN, J.P. WALLACE, J.K. TIEN, "High power ultrasonic fatigue", Ultrasonics Int. Conf. Proc., 244, (1973).
- 67. M. CAGNON, dans "Dislocations et déformations plastiques", les éditions de physique, (1979).
- 68. A. PUSKAR,
 "The thermal activation of cummulative fatigue damage at ultrasonic frequencies", Ultrasonics 15, 124, (1977)
- 69. G.G. PISARENKO, V.M. CHUSHKO, S.P. KOVALEV,
 "Cyclic strength of piezoelectric ceramics for transducers", J. Am. Ceram. Soc. 68, 259, (1985).
- 70. D.A. BERLINCOURT, dans "Ultrasonic transducer materials", éd. par O.E. Mattiat, Ed. Plenum Press, (1971).
- 71. R.N. HOUSE, "Maximum power-criterion for the vibrating free-edge disk", J. Acoust. Soc. Am. 33, 561, (1961).
- 72. F.V. HUNT, "Stress and strain limits on attainable velocity in mechanical vibration", J. Acoust. Soc. Am. 32, 1123, (1960).
- 73. S.H. CRANDALL, "Relation between strain and velocity in resonant vibration", J. Acoust. Soc. Am. 34, 1960, (1962).
- 74. E.A. NEPPIRAS, "The effect of shape and internal impedance on the power handling capacity and efficiency of ultrasonic transducers", Acustica 15, 58, (1965).
- 75. E.A. NEPPIRAS, "Some remarks on the maximum power handling capacity of resonant electromechanical transducers", Acustica **19**, 54, (1967/68).
- 76. H. TOURNEUR, Rapport interne ISEN, (1985).

- 77. J.M. CUSCHIERI, V.R. DESAI, "Friction damping due to interfacial slip", Int. Conf. on Advances in Structural Dynamics, Southampton, (1988).
- 78. R. HOLLAND, "Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients", IEEE SU 14, 18, (1967).
- 79. K. LUBITZ, W. WERSING,

"Automatic performance testing of piezoelectric ceramics for power transducers", Ferroelectrics 40, 237, (1982).

- 80. A. GRANATO, K. LUCKE, "Application of dislocation theory to internal friction phenomena at high frequencies", J.A.P. 27, 789, (1956).
- 81. R.R. WHYMARK, K.J. TRIEBES, "Effect of large-amplitude static and dynamic stress on the mechanical loss of lead zirconate titanate transducer ceramic", J. Acoust. Soc. Am. 45, 587, (1969).
- 82. D.A. BERLINCOURT, "Piezoelectric and ferroelectric energy conversion", IEEE SU 15, 89, (1968).
- 83. D.A. BERLINCOURT, "Piezoelectric ceramics : characteristics and applications", J. Acoust. Soc. Am. 70, 1586, (1981).
- 84. "Céramiques à pertes stabilisées sous champ élevé X5105, vieillissement des céramiques à hautes performances", Rapport Alcatel 1215, (1969).
- 85. D.A. BERLINCOURT, B. JAFFE, H. JAFFE, H.H.A. KRUEGER, "Transducer properties of lead titanate zirconate ceramics", I.R.E. UE 7, 1, (1960).
- 86. A.M. BOLKISEV, V.L. KARLASH, N.A. SHUL'GA, "Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics", traduit de Prikladnaya Mekhanika, 20-7, 70, (1984).
- 87. "Variation des coefficients en fonction de la température", catalogue de la société Quartz et Silice, (1987).
- 88. P. GERTHSEN, K.H. HARDTL, N.A. SCHMIDT, "Correlation of mechanical and electrical losses in ferroelectric ceramics", J.A.P. 51, 1131, (1980).

- 89. C.E. LAND, G.W. SMITH, C.R. WESTGATE, "The dependence of the small signal-parameters of ferroelectric ceramic resonators upon state of polarization", IEEE SU 11, 8, (1964).
- 90. J.G. SMITS,

"Eigenstates of coupling factor and loss factor of piezoelectric ceramics", Thèse à l'université de Twente (Hollande), (1978).

91. J.G. SMITS,

"Influence of moving domain wall and jumping lattice defects on complex material coefficients of piezoelectrics", IEEE SU 23, 168, (1976).

92. R.S. LAKES,

"Prediction of anelastic loss in piezoelectric solids : effect of geometry", Appl. Phys. Lett. 34, 729, (1979).

- 93. R.S. LAKES, "Shape dependent damping in piezoelectric solids", IEEE SU 27, 208, (1980).
- 94. "IRE standards on piezoelectric crystals the piezoelectric vibrator : definitions and methods of measurement, 1957", Proc. I.R.E. 45, 353, (1957).
- 95. "IRE standards on piezoelectric crystals measurement of piezoelectric ceramics, 1961", Proc. I.R.E. 49, 1161, (1961).

96. R. HOLLAND, E.P. EER NISSE, "Accurate measurement of coefficients in ferroelectric ceramic", IEEE SU 16, 173, (1969).

97. R. HOLLAND,

"Measurement of piezoelectric phase angles in a ferroelectric ceramic", IEEE SU 17, 123, (1970).

98. J.G. SMITS,

"Iterative method for accurate determination for the real and imaginary parts of the materials coefficients of the piezoelectric ceramics", IEEE SU 23, 393, (1976).

99. J.G. SMITS,

"High accuracy determination of real and imaginary parts of elastic, piezoelectric and dielectric constants of ferroelectric PLZT (11/55/45) ceramics with iterative method", Ferroelectrics 64, 275, (1985). 100. H. SHIMIZU, S. SAITO, "An improved equivalent circuit of piezoelectric transducers including the effect of dielectric loss", J. Acoust. Soc. Jpn. 6, 225, (1985).

101. G.E. MARTIN,

"Determination of equivalent-circuit constants of piezoelectric resonators of moderately low Q by absolute admittance measurements", J. Acoust. Soc. Am. 26, 413, (1954).

102. G.E. MARTIN,

"Dielectric, elastic and piezoelectric losses in piezoelectric materials", IEEE Ultras. Symp., 613, (1974).

103. R.W. BENSON,

"Distribution of losses in longitudinally excited vibrators", J. Acoust. Soc. Am. **36**, 1479, (1964).

- 104. Y.V. BOGORODSKII, E.A. KOREPIN, M.V. RUCHEV, "Estimation of losses in electromechanical transducers", Sov. Phys. Ac. 23, 308, (1977).
- 105. H.H.A. KRUEGER, D.A. BERLINCOURT, "Effects of high static stress on the piezoelectric properties of transducer materials", J. Acoust. Soc. Am. 33, 1139, (1961).
- 106. M.T. MUNIER, J.P. BESOMBES, "Caractéristiques d'emploi en tension, pression et température des céramiques piézoélectriques à usage de transducteurs", Etude CIT Alcatel 418 554, (1979).
- 107. M.H. SLAYTON, P.A. ANGLETON, W. JANICKY, "Influence of elevated temperature on some piezoelectric materials", Ultrasonics Symp., 559, (1983).
- 108. B.S. HOCKENHULL, C.N. OWSTON, R.G. HACKING, "Techniques and equipment for fatigue testing in some aluminium alloys, with constant force, or constant amplitude control", Ultrasonics 9, 26, (1971).
- 109. I. FLINN, J.D. DOWNES, "The electromechanical properties of piezoelectric ceramics at high drive levels", Ultrasonics Int., 145, (1977).
- 110. W.R. COOK, D.A. BERLINCOURT, F.J. SCHOLZ, Thermal expansion and pyroelectricity in lead titanate zirconate and barium titanate", J.A.P. 34, 1392, (1963).

- 111. A.J. POINTON, "Piezoelectric devices", IEE Proc. A 129, 285, (1982).
- 112. C.R. BIGBEE, E.A. PENCE, "Spherical electroacoustic transducer with internal heater", J. Acoust. Soc. Am. 33, 1162, (1961).
- 113. P.A. BURGO, C.W. PIERSON, "Ultrasonic transducer", J. Acoust. Soc. Am. 48, 61, (1970).
- 114. B.A. SHOOR, "Transducer", J. Acoust. Soc. Am. 38, 905, (1965).
- 115. J. ELLIOT, J.W. HALLOWAY, "Transducer", J. Acoust. Soc. Am. 40, 542, (1966).
- 116. J. ELLIOT, J.W. HALLOWAY, "Apparatus for securing a ferroelectric stack to a weighter projection surface", J. Acoust. Soc. Am. 69, 1857, (1981).
- 117. E.M. ZACHARIAS, "Dampened ultrasonic transducer", J. Acoust. Soc. Am. 75, 1935, (1984).
- 118. D.K. SINHA, "Note on the radial deformation of a piezoelectric polarized spherical shell with symetrical temperature distribution", J. Acoust. Soc. Am. 34, 1073, (1962).
- 119. V.M. BOGOMOL'NYI, N.A. ZHIDYAEV, "Influence of harmonic excitation on the temperature of piezoelectric ceramic transducers", Sov. Phys. Tech. Phys. 29, 505, (1984).
- 120. L.W. CASPERSON, L.M. DAVIS, J.D. HARVEY, "Thermal hysteresis in acoustic resonators", J. Acoust. Soc. Am. 71, 1412, (1982).
- 121. P.M. LEUNG, "Performance characteristics of Langevin type sonar transducer made from PZT type 1 ceramic", Ferroelectrics 28, 355, (1980).
- 122. F.B. STULEN, N. SENAPATI, R. GOULD, "Temperature distribution in an ultrasonic power transducer", Ultrasonics Int. 83 Conf. Proc., Halifax, 301, (1983).
- 123. E. DUBOIS, Rapport interne ISEN, (1985).

- 124. D.A. BERLINCOURT, H.H.A. KRUEGER, "Domain processes in lead titanate zirconate and barium titanate ceramics", J.A.P. 30, 1804, (1959).
- 125. R.S. WOOLLETT, C.L. LEBLANC, "Ferroelectric nonlinearities in transducer ceramics", IEEE SU 20, 24 (1973).
- 126. L.P. BROWDER, "Flashover voltage of some electronegative gases in underwater sound transducers", NRL Report 8285, (1979).
- 127. E.A. NORFOLK, C.A. KING, "Problems encountered in the repair and maintenance of magnetostrictive sonar transducers", U.S. Navy Journal of Underwater Acoustics 17, 215, (1967).
- 128. R.E. APFEL, "Acoustic cavitation inception", Ultrasonics 22, 167, (1984).
- 129. M. AUCHER, "La cavitation", La Recherche 168, 864, (1985).
- 130. H.G. FLYNN, dans "Physical Acoustics principles and methods", vol. 1 part B, éd. par W.P. Mason, Academic Press, (1964).
- 131. D.Y. HSIEH, M.S. PLESSET, "Theory of rectified diffusion of mass into gas bubbles", J. Acoust. Soc. Am. 33, 206, (1961).
- 132. E.A. NEPPIRAS, "Acoustic cavitation threshold and cyclic processes", Ultrasonics 18, 201, (1980).
- 133. R.E. APFEL, "Acoustic cavitation prediction", J. Acoust. Soc. Am. 69, 1624, (1981).
- 134. M. STRASBERG, "Onset of ultrasonic cavitation in tap water", J. Acoust. Soc. Am. 31, 163, (1959).
- 135. R.E. APFEL, "The role of impurities in cavitation threshold determination", J. Acoust. Soc. Am. 48, 1179, (1970).

- 136. L.A. CRUM, dans "Cavitation and inhomogeneities", éd. par W. Lauterborn, Ed. Springer Verlag, (1980).
- 137. F.E. FOX, K.F. HERZFELD, "Gas bubbles with organic skin as cavitation nuclei", J. Acoust. Soc. Am. 26, 984, (1954).
- 138. D.E. YOUNT, "Skins of varying permeability : a stabilization mechanism for gas cavitation nuclei", J. Acoust. Soc. Am. 65, 1429, (1979).
- 139. M.G. SIROTYUK,
 "Stabilization of gas bubbles in water", Sov. Phys. Ac. 16, 137,
 (1970).
- 140. M.G. SIROTYUK, dans "High intensity ultrasonics fields", éd. par L.D. Rozenberg, Ed. Plenum Press, (1971).
- 141. D. MESSINO, D. SETTE, F. WANDERLINGH, "Statistical approach to ultrasonic cavitation", J. Acoust. Soc. Am. 35, 1575, (1963).
- 142. V.A. AKULICHEV, L.D. ROZENBERG, "Certain relations in a cavitation region", Sov. Phys. Ac. 11, 246, (1966).
- 143. M.G. SIROTYUK, "Cavitation strength of water and its distribution of cavitation nuclei", Sov. Phys. Ac. 11, 318, (1966).
- 144. L.R. GAVRILOV, "On the size distribution of gas bubbles in water", Sov. Phys. Ac. 15, 22, (1969).
- 145. A. CARDO, M. CESCHIA, "Nuclei e soglia d'innesco della cavitazione", Tec. Ital. 3, 131, (1979).
- 146. R. ESCHE, "Untersuchung der schwingugskavitation in flüssigkeiten", Acustica 2, AB 208, (1952).
- 147. V.A. AKULICHEV, V.I. IL'ICHEV, "Spectral indication of the origin of ultrasonic cavitation in water", Sov. Phys. Ac. 9, 128, (1963).

- 148. Y. KIKUCHI, "Ultrasonic transducers", Ed. Corona publishing company, (1969).
- 149. Y. KIKUCHI, H. SHIMIZU, "On the variation of acoustic radiation resistance in water under ultrasonic cavitation", J. Acoust. Soc. Am. **31**, 1385, (1959).
- 150. E.A. NEPPIRAS, "Measurement of acoustic cavitation", IEEE SU 15, 81, (1968).
- 151. R.A. ROY, A.A. ATCHLEY, L.A. CRUM, J.B. FOWLKES, J.J. REIDY, "A precise technique for the measurement of acoustic cavitation threshold and some preliminary results", J. Acoust. Soc. Am. 78, 1799, (1985).
- 152. I.G. MIKHAILOV, V.A. SHUTILOV, "A simple method for observing cavitation in liquids", Sov. Phys. Ac. 5, 385, (1960).
- 153. H.B. BRIGGS, J.B. JOHNSON, W.P. MASON, "Properties of liquids at high sound pressure", J. Acoust. Soc. Am. 19, 664, (1947).
- 154. E. YILMAZ, F.G. HAMMITT, A. KELLER, "Cavitation inception thresholds in water and nuclei spectra by light scattering technique", J. Acoust. Soc. Am. 59, 329, (1976).
- 155. V.L. KORETS, N.P. MEL'NIKOV, "Dependence of the cavitation threshold on the static pressure", Sov. Phys. Ac. 29, 115, (1983).
- 156. W.J. GALLOWAY, "An experimental study of acoustically induced cavitation in liquids", J. Acoust. Soc. Am. 26, 849, (1954).
- 157. C.H. SHERMAN, "Effect of the nearfield on the cavitation limit of transducers", J. Acoust. Soc. Am. 35, 1409, (1963).
- 158. R.J. URICK, "Principles of underwater sound", Ed. McGraw-hill, (1975).
- 159. R.Y. NISHI,

"Effects of one-dimensional pressure on the properties of several transducer ceramics", J. Acoust. Soc. Am. 40, 486, (1966).

- 160. H.H.A. KRUEGER,
 "Stress sensitivity of piezoelectric ceramics : part 1 sensitivity to compressive stress parallel to the polar axis", J. Acoust. Soc. Am. 42, 636, (1967).
- 161. L.P. BROWDER, S.W. MEEKS, "Effects of one dimensional stress on MIL STD 1376 piezoelectric ceramic materials, type I, II and II", NRL Report 8159, (1977).
- 162. V.A. DOROSHENKO, M.A. UGRYUMOVA, "Influence of strong uniaxial and biaxial compression on the properties of PZT type piezoelectric ceramics", Sov. Phys. Ac. 24, 345, (1978).
- 163. M. DAVINET, "Etude des variations des caractéristiques d'un transducteur de type Tonpilz sous l'effet d'un champ électrique alternatif", Etude Sintra-Alcatel CA 417 757, (1982).
- 164. H.H.A. KRUEGER, "Stress sensitivity of piezoelectric ceramics : part 2 heat treatment", J. Acoust. Soc. Am. 43, 576, (1968).
- 165. H.H.A. KRUEGER, "Stress sensitivity of piezoelectric ceramics : part 3 sensitivity to compressive stress perpendicular to the polar axis", J. Acoust. Soc. Am. 43, 585, (1968).
- 166. R.F. BROWN, G.W. MAC MAHON, "Properties of transducer ceramics under maintained planar stress", J. Acoust. Soc. Am. 38, 570, (1965).
- 167. R.Y. NISHI, R.F. BROWN, "Behaviour of piezoceramic projector materials under hydrostatic pressure", J. Acoust. Soc. Am 36, 192, (1964).
- 168. A.C. TIMS, "Effects of multidimensional stress on radially polarized ceramic tubes", J. Acoust. Soc. Am. 70, 21, (1981).
- 169. N.P. KHOKHLOV, V.N. MINEEV, A.G. IVANOV, V.I. LUCHININ, "Dynamic piezoelectric modulus of TsTS19 lead zirconate titanate ceramic", Comb. Expl. and Shock Waves 14, 532, (1979).
- 170. A. SOMMERFELD, "Partical differential equations in physics", Ed. Academic Press, (1949).

- 171. F.V. ATKINSON, "On Sommerfeld's radiation condition", Phil. Mag. 40, 645, (1949).
- 172. J.A. LEWIS, B.S.T.J. 60, 1259, (1961).
- 173. E.P. EER NISSE, "Variational method for electroelastic vibration analysis", IEEE SU 14, 153, (1967).
- 174. R. HOLLAND, E.P. EER NISSE, "Variational evaluation of admittances of multielectroded threedimensionnal piezoelectric structures", IEEE SU 15, 119, (1968).
- 175. R. HOLLAND, E.P. EER NISSE, "Design of resonant piezoelectric devices", Research Monograph n°56, M.I.T. Press, (1969).
- 176. H. ALLIK, T.J.R. HUGHES, "Finite element method for piezoelctric vibrations", Int. J. Num. Meth. Engng. 2, 151, (1970).
- 177. D. BOUCHER, "Calcul des modes de vi

"Calcul des modes de vibration de transducteurs piézoélectriques par une méthode de perturbation appliquée à l'analyse par éléments finis", Thèse, Université du Maine, (1979).

- 178. H.C. MARTIN, G. CAREY, "The finite element method", Ed. McGraw-Hill, (1973).
- 179. O.C. ZIENKIEWICZ, "La méthode des éléments finis", Ed. McGraw-Hill, (1979).
- 180. K.J. BATHE, "Finite element procedures in engineering analysis", Ed. Prentice Hall, (1982).
- 181. R.H. GALLAGHER, "Introduction aux éléments finis", Ed. Pluralis, (1976).
- 182. G. DHATT, G. TOUZOT, "Introduction à la méthode des éléments finis", Collection Université de Compiègne, Ed. Maloine, (1982).
- 183. "ATILA version 4.02, notice d'utilisation", G.E.R.D.S.M. convention C.86.48.826.334, commande 014, (1989).

- 184. R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY, "Finite element modeling of radiating structures using dipolar damping elements", accepté pour publication à J. Acoust. Soc. Am., (1989).
- 185. L.H. WILCOX, "A generalization of the theorem of Rellich and Atkinson", Proc. Am. Math. Soc. 7, 271, (1956).
- 186. R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY, "An improvement of the finite radiating formulation. Application to the modeling of a radiating free-flooded transducer", J. Acoust. Soc. Am. 74, S23, (1983).
- 187. R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY, B. TOCQUET, D. BOUCHER, "Application of damping elements to the modeling of underwater radiating structures", J. Acoust. Soc. Am. **79**, S51, (1986).
- 188. J.C. DEBUS, B. HAMONIC, H. TOURNEUR, J.N. DECARPIGNY, "Caractérisation acoustique d'un composite GRP", G.E.R.D.S.M. convention C.86.48.826.334, commande 012, (1988).
- 189. B. HAMONIC, J.C. DEBUS, H. TOURNEUR, D. BOUCHER, "Composite structure vibration analysis using the finite element method", J. Acoust. Soc. Am. 83, S20, (1988).
- 190. B. HAMONIC, J.C. DEBUS, H. TOURNEUR, J.N. DECARPIGNY, D. BOUCHER, "Finite element modeling of GRP composite shells used in lowfrequency flextensional transducers", soumis à J. Acoust. Soc. Am., (1989).
- 191. S. TIMOSHENKO, J.N. GOODIER, "Théorie de l'élasticité", Ed. Librairie Polytechnique Béranger, (1961).
- 192. S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, "Théorie des plaques et coques", Ed. Librairie Polytechnique Béranger, (1961).
- 193. W. FLUGGE, "Stresses in shells", Ed. Springer Verlag, (1962).
- 194. B. DUBUS, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY,
 "Application du code éléments finis ATILA au calcul des contraintes statiques et dynamiques dans les transducteurs piézoélectriques", G.E.R.D.S.M. convention C.83.48.826.163, commande 022, (1987).

- 195. B. DUBUS, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, "Etude de la distribution des contraintes dans différents transducteurs piézoélectriques", G.E.R.D.S.M. convention C.86.48.826. 334, commande 004, (1988).
- 196. "IPSI club SAP", vol. III n°2, journée du 13/05/84, Paris.
- 197. O.C. ZIENKIEWICZ, I. BABUSKA, D.W. KELLY, J.P. GAGO,
 "A posteriori error analysis and adaptative processes in the finite element method. Part 1 : error analysis", Int. J. Num. Met. Engng. 19, 1593, (1983).
- 198. O.C. ZIENKIEWICZ, I. BABUSKA, D.W. KELLY, J.P. GAGO, "A posteriori error analysis and adaptative processes in the finite element method. Part 2 : adaptative mesh refinements", Int. J. Num. Met. Engng. 19, 1621, (1983).
- 199. M. LADEVEZE, M. PELLE, M. ROUGEOT, "Post-processeur de calcul d'erreur et optimisation des maillages", Actes du congrès international Strucome 88, Ed. Hermes, (1988).
- 200. O.C. ZIENKIEWICZ, J.Z. ZHU, "A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis", Int. J. Num. Met. Engng 24, 337, (1987).
- 201. P.W. SHARMAN,

"NAFEMS membrane stress concentration benchmark and the PAFEC elements", Finite Element News 3, 36, (1986).

202. T. MOAN,

"Experiences with orthogonal polynomials and best numerical integration formulas on a triangle, with particular reference to finite element approximations", Z.A.M.M. 54, 501, (1974).

203. E. HINTON, J.S. CAMPBELL,

"Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method", Int. J. Num. Meth. Engng. 8, 461, (1974).

- 204. E. HINTON, F.C. SCOTT, E. RICKETTS, "Local least squares stress smoothing for parabolic isoparametric elements", Int. J. Num. Meth. Engng. 9, 235, (1975).
- 205. J. BARLOW, "Optimal stress locations in finite element models", Int. J. Num. Meth. Engng. 10, 243, (1976).

- 206. D. BOUCHER, "Transducteur Olive, étude de la résistance mécanique de la coque", rapport interne G.E.R.D.S.M., (1987).
- 207. B. HAMONIC, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, "Modélisation d'un transducteur Olice à l'aide du code éléments finis ATILA", G.E.R.D.S.M. convention C.83.48.826.163, commande 013, (1986).
- 208. B. HAMONIC, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, "Analysis of radiating flexural shell sonar transducers using the finite element method", J. Acoust. Soc. Am. 80, S26, (1986).
- 209. B. DUBUS, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, D. MOREL, D. BOUCHER, "Determination of the mechanical limits of piezoelectric transducers using the finite element method", J. Acoust. Soc. Am. 81, S88, (1987).
- 210. Cette étude a été effectuée en collaboration avec P. Leblois du laboratoire de physique et métrologie des oscillateurs (LPMO, Besançon).
- 211. "REDUCE user's manual, version 3.2", éd. par A.C. HEARN, Rand corporation, (1985).
- 212. E.L. WILSON, H.H. DOVEY, dans "Microcomputers in finite element analysis", vol. 2, éd. par H.A. Kamel et E.L. Wilson, IPSI, (1986).
- 213. J.C. DEBUS, D. MOREL, J.N. DECARPIGNY, "Incorporation au code éléments finis ATILA d'une méthode de stockage par colonnes actives et d'un algorithme de diagonalisatiuon de Lanczos", G.E.R.D.S.M. convention C.83.48.826.163, commande 016, (1986).
- 214. B. DUBUS, J.N. DECARPIGNY, "Analyse et modélisation des pertes dans les transducteurs piézoélectriques de puissance", G.E.R.D.S.M. convention C.86.48.826. 334, commande 013, (1988).
- 215. J.L. CARTON, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, G.E.R.D.S.M., T.S.M. S.80.48.826.329.T, (1982).
- 216. F. MASSA, dans "American Institute of Physics Handbook", Ed. McGraw-Hill, (1972).
- 217. "ADINAT user's manual", (1981).

220

- 218. J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, "Modélisation par ATILA de tonpilz bifréquences avec excitation différenciée des céramiques", G.E.R.D.S.M., T.S.M. S.82.48.826.513.T, (1985).
- 219. D. BOUCHER, B. TOCQUET, J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, P. TIERCE, "Effect of a voltage shading of the ceramic stack on the bandwidth of a radiating tonpilz transducer", J. Acoust. Soc. Am. 80, S27, (1986).
- 220. C. LASSALLE, "Optimisation de l'excitation des céramiques piézoélectriques d'un transducteur de type tonpilz", rapport de stage effectué au G.E.R.D.S.M., n° 41162 ET/LD, (1983).
- 221. P.V. de mesure n° 82.979, G.E.R.D.S.M., Groupe "Emission Interfaces", (1982).
- 222. P.V. de mesure n° 82.885, G.E.R.D.S.M., Groupe "Acoustique Interne", (1982).
- 223. B. DUBUS, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, D. BOUCHER, "Finite element modeling of piezoelectric transducers including internal losses", J. Acoust. Soc. Am. 85, S91, (1989).
- 224. A.C. HENNION, R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY, "Modélisation d'un réseau de tubes compliants enrobés dans une couche d'élastomère", G.E.R.D.S.M. convention C.87.48.826.644, (1989).
- 225. A.C. HENNION, R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY, C. AUDOLY, "Application of the finite element method to the modeling of plane wave scattering from compliant tube gratings at oblique incidence", J. Acoust. Soc. Am. 85, S139, (1989).
- 226. A.C. HENNION, R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY, C. AUDOLY, "Analysis of the scattering of a plane acoustic wave by a periodic structure using the finite element method : application to compliant tube gratings", soumis à J. Acoust. Soc. Am., (1989).
- 227. M.D. DELODDERE,

"Contribution à la caractérisation des matériaux piézoplastiques : étude de leurs propriétés élastiques, diélectriques et piézoélectriques", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1989).

- 228. B. DUBUS, B. HAMONIC, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, D. BOUCHER, "Analysis of power limitations of sonic and ultrasonic transducers using the finite element method", Ultrasonics Int. Conf. Proc. 89, Madrid, (1989).
- 229. F. CLAEYSSEN, D. BOUCHER, K. ANIFRANI, R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY, "Analysis of magnetostrictive transducers by ATILA finite element code", J. Acoust. Soc. Am. 85, S90, (1989).
- 230. F. CLAEYSSEN, "Conception et réalisation de transducteurs sonar basse fréquence à base d'alliages magnétostrictifs terres rares-fer", Thèse de Doctorat à l'I.N.S.A. de Lyon, (1989).
- 231. B. STUPFEL, A. LAVIE, J.N. DECARPIGNY, "Combined integral equation formulation and null field method for the exterior acoustic problem", J. Acoust. Soc. Am. 83, 927, (1988).
- 232. A. LAVIE,

"Modélisation du rayonnement ou de la diffraction acoustique par une méthode mixte équations intégrales-champ nul", Thèse de Doctorat à l'Université des Sciences et Techniques de Lille, (1989).

- 233. R.J. BOBBER, "Underwater electroacoustic measurement", N.D.L. Tech. Report, Dpt. of Defense, USA, (1970).
- 234. J.F. NYE, "Physical properties of crystals", Clarendon Press, Ed. Oxford Univ. Press, (1957).

ANNEXE 1

DEFINITION DES CARACTERISTIQUES CLASSIQUES DES TRANSDUCTEURS SONORES ET ULTRASONORES

Cette annexe définit les termes utilisés au cours de cette thèse pour caractériser les tranducteurs électroacoustiques. Leur signification précise et les moyens classiquement utilisés pour les mesurer sont détaillés dans le livre de R.J. BOBBER [233].

a) La réponse par volt

L'onde de pression rayonnée par un transducteur est, à partir d'une certaine distance, une onde sphérique divergente qui semble provenir d'une source ponctuelle, appelée centre acoustique, et dont l'amplitude de pression décroît suivant une loi en inverse de la distance à ce centre. La zone de l'espace où l'onde n'est pas sphérique est le champ proche et celle où l'onde est sphérique est le champ lointain. Dans le champ lointain, la pression émise par le transducteur varie suivant la direction considérée. Elle présente un maximum suivant l'axe principal du transducteur. On appelle réponse par volt, notée S., le rapport de la valeur de la pression acoustique à une distance de référence du centre acoustique (généralement un mètre), dans la direction de l'axe principal du transducteur, et de la valeur de la tension appliquée à l'entrée du transducteur. Si la distance de référence est située dans le champ proche, la valeur de la pression est mesurée dans le champ lointain, puis ramenée à la distance de référence par une règle de trois déduite de la loi en inverse de la distance. De plus, la pression est généralement repérée sur une échelle logarithmique par rapport à une pression de référence, généralement 1 micropascal. Dans ce cas, la réponse par volt s'exprime en décibels, référence un micropascal par volt, à un mètre. Enfin. la réponse par volt peut être déterminée dans une différente de l'axe principal. Cette direction est alors direction explicitement mentionnée.

b) Le diagramme de directivité

Le niveau sonore émise par un transducteur est fonction de la direction considérée. Cette fonction est généralement exprimée par rapport à un système de coordonnées sphériques dont l'axe est l'axe principal du transducteur. Elle s'exprime suivant une relation du type $f(\theta, \phi)$, appelée fonction de directivité. Si, à partir d'une origine, on reporte dans la direction (θ, ϕ) un vecteur dont le module est proportionnel à $f(\theta, \phi)$, l'extrémité du vecteur décrit la surface de directivité. Enfin, la courbe obtenue en coupant la surface de directivité par un plan contenant l'axe principal du transducteur est le diagramme de directivité.

c) L'impédance électrique

La représentation électrique équivalente de l'impédance du transducteur, vue entre ses bornes d'entrée, correspond généralement au schéma :



où $\rm R_p$ et $\rm C_p$ sont respectivement la résistance parallèle et la capacité parallèle du transducteur.

d) Le rendement électroacoustique

La puissance électrique P_e fournie par la source au transducteur est liée à la tension d'excitation Φ et à la résistance parallèle par :

$$P_e = \frac{\Phi^2}{R_p}$$

La puissance acoustique totale P_R s'obtient en intégrant l'intensité acoustique rayonnée sur toute sphère entourant le projecteur, quand les pertes de propagation dues à l'absorption par le fluide sont négligées. Le rendement électroacoustique η est le rapport de la puissance acoustique à la puissance électrique :

$$\eta = \frac{P_R}{P_e}$$

ANNEXE 2

DEFINITIONS RELATIVES A LA THEORIE DE L'ELASTICITE ET A LA RESISTANCE DES MATERIAUX

a) Contrainte et déformation unidimensionnelles

Si l'on considère une pièce allongée, de section constante, soumise à une force suivant sa plus grande direction, la *contrainte* est définie comme le rapport de la force appliquée et de la section de la pièce et la *déformation* comme le rapport de l'allongement de la pièce suivant sa plus grande direction et de sa longueur.

b) Contraintes et déformations tridimensionnelles

Si on considère le cube élémentaire représenté ci-dessous, les forces exercées ses faces peuvent être décomposées en forces normales et forces tangentes à la face considérée. Comme dans le cas unidimensionnel, les forces peuvent être reliées aux contraintes, par l'intermédiaire de la surface, pour chaque face. Les contraintes normales sont désignées par la lettre σ et les contraintes tangentes à la face appelées contraintes de cisaillement par la lettre τ . Ces contraintes sont, par définition, positives dans les directions indiquées sur la figure. La contrainte normale est considérée comme positive lorsqu'elle agit à la traction, et comme négative lorsqu'elle agit à la compression.



On exprime généralement les déplacements d'un corps ayant subi une déformation à l'aide des composantes u, v et w, respectivement parallèles aux trois axes de coordonnées x, y et z. La lettre ε désigne les déformations longitudinales définies par :

$$\varepsilon_{x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
 $\varepsilon_{y} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\varepsilon_{z} = \frac{\partial w}{\partial z}$

et la lettre γ les déformations transversales rapportées à l'unité d'angle :

$$\Upsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
 $\Upsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ $\Upsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$

Ces notations, issues de la résistance des matériaux, sont légérement différentes des notations de l'acoustique. Dans ce second cas, les axes x, y et z deviennent respectivement x_1 , x_2 , x_3 , les composantes de la déformation sont désignées par la lettre S et les composantes de la contrainte par la lettre T. La correspondance s'établit comme suit :

$S_{11} = \varepsilon_x$	$S_{22} = \varepsilon_y$	$S_{33} = \varepsilon_z$
$S_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$	$S_{13} = \frac{1}{2} \gamma_{xz}$	$S_{23} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}$
$T_{11} = \sigma_x$	$T_{22} = \sigma_y$	$T_{33} = \sigma_z$
$T_{12} = T_{xy}$	$T_{13} = \tau_{xz}$	$T_{23} = \tau_{vz}$

Il est possible de définir en chaque point d'un solide un système d'axes, appelés *axes principaux*, dans lequel les contraintes de cisaillement sont nulles. Les contraintes normales dans ce système d'axes sont les *contraintes principales*. Ainsi, la direction des axes principaux et la grandeur des trois contraintes principales définissent complétement la contrainte en un point.

ANNEXE 3

LES EQUATIONS CONSTITUTIVES DE LA PIEZOELECTRICITE

a) Relations constitutives pour un matériau piézoélectrique

Dans un matériau piézoélectrique, les tenseurs de déformation [S] et de contrainte [T] et les vecteurs champ électrique <u>E</u> et excitation du champ électrique <u>D</u> sont liés par quatre couples équivalents de relations constitutives [49, 234]. En choisissant [S] et <u>E</u> comme variables indépendantes, on obtient :

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijk1}^{E} S_{k1} - e_{kij} E_{k} \\ D_{i} = e_{ik1} S_{k1} + \varepsilon_{ij}^{S} E_{j} \end{cases}$$

où $[c^E]$ est le tenseur d'ordre quatre des rigidités à champ électrique constant, [e] le tenseur d'ordre trois des constantes piézoélectriques et $[\epsilon^S]$ le tenseur d'ordre deux des constantes diélectriques à déformation constante, les indices i, j, k et l variant de 1 à 3. Les propriétés remarquables des tenseurs [S] et [T] permettent de condenser leur notations sous forme de vecteurs à six composantes [49]. La relation précédente devient alors :

$$\begin{cases} T_{m} = c_{mn}^{E} S_{n} - e_{jm} E_{j} \\ \\ D_{i} = e_{in} S_{n} + \varepsilon_{ij}^{S} E_{j} \end{cases}$$

où les indices m et n varient de 1 à 6 et les indices i et j de 1 à 3. Les éléments c_{mn}^{E} et e_{jm} se déduisent simplement des éléments c_{ijkl}^{E} et e_{kij} [49]. En choissisant [S] et <u>D</u> comme variables indépendantes, on substitue à la relation précédente :

$$\begin{cases} T_m = c_{mn}^D S_n - h_{jm} D_j \\ E_i = -h_{in} S_n + \beta_{ij}^S D_j \end{cases}$$

En choisissant [T] et E, on obtient :

$$\begin{cases} S_m = S_{mn}^E T_n + d_{jm} E_j \\ \\ D_i = d_{in} T_n + \varepsilon_{ij}^T E_j \end{cases}$$

Enfin, en choisissant [T] et D, on obtient :

$$\begin{cases} S_{m} = S_{mn}^{D} T_{n} + g_{jm} D_{j} \\ E_{i} = -g_{in} T_{n} + \beta_{ij}^{T} D_{j} \end{cases}$$

b) Cas d'une céramique ferroélectrique

Les céramiques ferroélectriques sont des composés obtenus par frittage d'oxydes et de sels de plomb, de zirconium et de titane [82]. Après polarisation, réalisée en soumettant la céramique à un champ électrique élevé (quelques dizaines de kV/cm), généralement à une température proche de la température de Curie, apparaît un effet piézoélectrique. La symétrie des tenseurs caractéristiques est celle de la classe 6mm [49]. En adoptant une présentation générale qui regroupe les trois tenseurs dans une notation symbolique matricielle unique, on a :



Les petits points indiquent les termes nuls, les lignes joignent les termes égaux et la croix représente, selon les cas, 2 $(s_{11}-s_{22})$ ou $(c_{11}-c_{22})/2$. Comme on le voit, l'axe $0x_3$, qui est l'axe de polarisation, est privilégié. Le matériau est isotrope dans le plan $0x_1x_2$. L'axe de polarisation correspond à la direction du champ électrique polarisant.

ANNEXE 4

FORMULATION UTILISEE DANS LES ELEMENTS DU CODE ATILA

A l'intérieur de chaque élément fini, les variables champ de déplacement, potentiel électrique ou champ de pression sont définies de manière unique par les valeurs qu'elles prennent aux noeuds de l'élément. Cette définition est assurée à l'aide de fonctions d'interpolation. Cette annexe présente les fonctions d'interpolation utilisées dans les éléments du code ATILA, ainsi que la formulation des différents tenseurs qui en découle.

a) Les fonctions d'interpolation

On considère un élément triangulaire dont les trois sommets sont les trois noeuds et Φ_1^e , Φ_2^e et Φ_3^e les valeurs nodales du potentiel électrique sur ces trois noeuds. A partir de ces valeurs et des coordonnées des sommets, il est possible d'exprimer la valeur de Φ par une interpolation linéaire :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} N_{i}^{e}(x,y) \Phi_{i}^{e}$$

dont les coefficients N_i^e , appelés fonctions d'interpolation ou de pondération, sont représentés ci-après.



Ces fonctions sont des polynômes en x et en y dont les neuf coefficients constants (3x3) sont définis par les relations :

$$N_i^{e}(x_j, y_j) = 1 \quad \text{si} \quad i = j$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

où les indices i et j varient de 1 à 3. Pour ce même élément, si on s'intéresse au champ de déplacement \underline{u} dont les valeurs nodales sont \underline{U}_1 , \underline{U}_2 et \underline{U}_3 , on a :

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{3} \left[N_{i}^{e} \right] \underline{U}_{i}^{e} = \left[N^{e} \right] \underline{U}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} N_{i}^{e} \end{bmatrix} = N_{i}^{e}(x,y) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour un élément quadrilatère dont les quatre coins sont les noeuds, les relations précédentes restent valables à condition de faire varier les indices i et j de 1 à 4. Les fonctions d'interpolation restent linéaires sur les côtés de l'élément mais deviennent quadratiques à l'intérieur.

Pour un élément quadrilatère dont les quatre coins et les milieux des quatre côtés sont les huit noeuds, les relations précédentes restent valables en faisant varier les indices i et j de 1 à 8. Cette fois, les fonctions d'interpolation deviennent quadratiques sur les côtés.





Cette procédure est évidemment généralisable à des interpolations d'ordre plus élevé ou à des éléments tridimensionnels. Tous les détails peuvent être trouvés dans le livre de O.C. ZIENKIEWICZ [179].

b) Formulation des différents tenseurs

Dans le cas d'un problème tridimensionnel, le champ électrique s'écrit :

 $\vec{E} = - \vec{grad} \Phi$

ou encore, pour un élément à p noeuds :

$$\underline{E} = - \left[\overrightarrow{\text{grad}} N_1^e, \dots, \overrightarrow{\text{grad}} N_p^e \right] \underline{\Phi}$$

En posant :

$$\mathbb{B}_{\Phi_{1}}^{e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{1}^{e}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{1}^{e}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{1}^{e}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

et :

$$\begin{bmatrix} B^{e}_{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}^{e}_{\Phi_{1}}, \mathbb{B}^{e}_{\Phi_{2}}, \dots, \mathbb{B}^{e}_{\Phi_{p}} \end{bmatrix}$$

le champ électrique peut s'écrire :

$$\mathbf{E} = - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Phi}^{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \mathbf{\Phi}$$

Pour les déformations, on obtient, en utilisant la notation à six composantes définies à l'annexe 3 :

S = [B^e] Ŭ

avec :

$$[B^e] = \left[B_1^e \right], B_2^e \right], \dots, B_p^e \right]$$

et :

$$\begin{bmatrix} B_{i}^{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{i}^{e}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{i}^{e}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_{i}^{e}}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_{i}^{e}}{\partial z} & \frac{\partial N_{i}^{e}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{i}^{e}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_{i}^{e}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{i}^{e}}{\partial y} & \frac{\partial N_{i}^{e}}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

Dès lors, les relations constitutives de la piézoélectricité s'écrivent dans l'élément sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{I}} = [\mathbf{c}^{\mathbf{E}}] [\mathbf{B}^{\mathbf{e}}] \tilde{\mathbf{U}} + [\mathbf{e}]^{\mathrm{T}} [\mathbf{B}^{\mathbf{e}}_{\Phi}] \Phi \\\\ \tilde{\mathbf{D}} = [\mathbf{e}] [\mathbf{B}^{\mathbf{e}}] \tilde{\mathbf{U}} - [\varepsilon^{\mathbf{S}}] [\mathbf{B}^{\mathbf{e}}_{\Phi}] \Phi \end{cases}$$

où $[c^E]$ et [e] sont respectivement le tenseur de rigidité à champ électrique constant condensé et le tenseur piézoélectrique condensé (annexe 3).

ANNEXE 5

APPLICATION D'UNE PRESSION SUR UNE FACE D'ELEMENT

Dans certains problèmes, comme celui du comportement statique d'un transducteur en immersion, la sollicitation connue, appliquée à la structure, est une pression. La résolution de ces problèmes à l'aide de la méthode des éléments finis implique alors un calcul des forces nodales équivalentes. Pour des formes géométriques simples, ces forces équivalentes se calculent analytiquement mais, dans le cas de structures plus complexes, ce calcul devient rapidement fastidieux et le développement d'un logiciel fournissant ces forces nodales équivalentes s'avère nécessaire.

L'évaluation de la contribution des forces de surface peut se faire à partir de l'intégrale [179] :

$$\mathbf{f} = - \int_{\mathbf{A}} [\mathbf{N}^{\mathbf{e}}]^{\mathrm{T}} \ \mathbf{\bar{t}} \ \mathbf{dA}$$

où $[N^e]$ est la matrice construite à partir des fonctions d'interpolation (annexe 4), t désigne la traction appliquée, et A la surface de l'élément sur laquelle la traction s'applique. En général, l'élément d'aire dA appartient à une surface pour laquelle l'une des coordonnées réduite est constante. Pour calculer l'intégrale, on considére alors dA comme un vecteur orienté suivant la normale à la surface. Dans le cas d'un problème tridimensionnel, on forme le produit vectoriel :

$$dA = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{array} \right\} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{array} \right\} d\xi \ d\eta$$

pour une surface à ζ constant. Dans le cas d'un problème bidimensionnel, on utilise un élément de longueur dS dont le vecteur normal s'écrit, pour une surface à η constant :



L'intégrale se calcule numériquement sur le domaine $-1 < \xi < +1$ et $-1 < \eta < +1$ pour le cas tridimensionnel et $-1 < \xi < +1$ pour le cas bidimensionnel.

Résumé de thèse

La conception de transducteurs piézoélectriques de forte puissance est un thème de recherche actuel et prioritaire en acoustique sous-marine et pour certaines applications industrielles des ultrasons. Elle suppose la maîtrise de problèmes de natures différentes qui limitent la puissance disponible : problèmes d'origine mécanique (fracture, non-linéarité ou fatigue des matériaux), électrique (court-circuit, dépolarisation des céramiques), thermique (échauffement induit par les dissipations d'énergie dans la structure) ou acoustique (cavitation, interaction entre projecteurs d'une antenne).

L'objet de cette thèse est d'apporter une contribution à l'analyse de tels phénomènes, grâce à la création de nouveaux outils de calcul au sein du code éléments finis ATILA. Dans un premier temps, l'étude des limitations mécaniques des transducteurs a conduit à développer et à valider le calcul des contraintes pour les éléments élastiques et piézoélectriques de la bibliothèque du code ATILA. Deux géométries de transducteurs ont été modélisées et les résultats obtenus ont été comparés à des mesures statiques et dynamiques effectuées à l'aide de jauges d'extensométrie. Dans un second temps, les pertes internes aux matériaux ont été prises en compte et, ces pertes ayant été déterminées expérimentalement pour une variété de céramique, l'étude de différents projecteurs rayonnants a montré que le rendement électroacoustique peut être correctement décrit dans une large bande de fréquence. Le calcul de la répartition de l'énergie dissipée dans la structure permet alors d'envisager une modélisation de l'échauffement du transducteur. L'ensemble de ces résultats conduit à proposer une démarche globale de conception d'un transducteur piézoélectrique de puissance.

Mots-clés

Transducteurs piézoélectriques Piezoelectric transducers

Transducteurs de puissance Power transducers

Acoustique sous-marine Underwater Acoustics

Applications industrielles des ultrasons Macrosonics Méthode des éléments finis Finite element method

Champ de contraintes Stress field

Pertes internes Internal losses