

N° d'ordre : 420

50376
1989
211

50376
1989
211

THESE

présentée

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

en

PRODUCTIQUE, AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE
INDUSTRIELLE

par

Ahmed AMER



CONTRIBUTION A L'ESTIMATION DE PARAMETRES STATISTIQUES
ET STRUCTURAUX DE SYSTEMES LINEAIRES STOCHASTIQUES

soutenue le 11 Octobre 1989 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury: MM

P. VIDAL
M. NAJIM
L. POVY
R. LAURENT
M. STAROSWIECKI
D. JOLY
Y. EL-GAMAL

Président
Rapporteur
Rapporteur
Directeur de Thèse
Examineur
Examineur
Examineur



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

A MA FEMME NAGWA

A MA FILLE DINA

A MON FRERE ET MES SOEURS

A TOUT CE QUE J'AIME

AVANT-PROPOS

Ce travail a été effectué à l'Université des Sciences et Techniques de Lille 1 (France) en collaboration avec l'Académie Arabe du Transport Maritime à Alexandrie (Egypte).

C'est un vrai plaisir d'exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur P. VIDAL président du Laboratoire d'Automatique, l'Université de Lille 1, qui a bien voulu m'accueillir à Lille. Je suis particulièrement sensible à l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le Jury de thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma vive reconnaissance.

Je voudrais également exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur L. POVY, Professeur à l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille 1 et directeur de l'IMA, pour m'avoir guidé et conseillé tout au long de l'élaboration de cette thèse.

Je mentionne en particulier Monsieur le Prof. R. LAURENT qui a été constamment une source d'inspiration et d'idées; et à lui revient le mérite de la mise en forme finale de cette thèse. J'aimerais bien préciser que sans sa patience et ses conseils, ce travail n'aurait pu être effectué. Je remercie les circonstances qui nous ont réunis et qui ont converti notre relation de travail en une bonne amitié.

A ce propos, il ne m'échappe pas de présenter mes remerciements et ma reconnaissance à Monsieur le Professeur G. MOKHTAR, directeur général de l'Académie ainsi qu'à Monsieur le Professeur A. SALAMA, premier député, pour leur assistance permanente durant la période finale de la thèse.

Je voudrais exprimer aussi mes remerciements au directeur de la salle de calcul à l'Académie Monsieur le Prof. Y. EL-GAMMAL ainsi qu'au personnel pour leur coopération surtout durant la période de l'impression finale de la thèse.

J'aimerais bien remercier Monsieur le Professeur M. NAJIM à l'Université de Rabat (Le Maroc); aussi bien que Monsieur le Prof. N. SORIAL de l'Université d'Alexandrie (Egypte) pour leurs critiques constructives à l'égard du manuscrit et leurs précieux conseils. Qu'ils trouvent ici ma profonde gratitude.

LISTE DES PRINCIPALES NOTATIONS

t	temps continu
k	temps discret
$A, B, C, \dots$ $\Gamma, \Psi, \Theta, \Lambda, \Phi$	Des lettres latines majuscules ou des lettres grecques majuscules représentent des matrices
$a, b, \dots, x, u, y, z$	des lettres latines minuscules représentent des vecteurs ou des scalaires selon le cas
$\alpha, \beta, \theta, \epsilon, \omega, \nu, \lambda, \dots$	des lettres grecques minuscules representent des scalaires
$\underline{w}, \underline{v}$ $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}, \underline{\psi}, \underline{\phi}, \dots$	des lettres latines ou grecques minuscules soulignées représentent des vecteurs
s, z	Variables complexes
q^{-1} ou z^{-1}	Opérateur retard
$x(t), \dots$	des variables continues
$x(k)$ [ou x_k], $\dots$	des variables discrètes
$A(q^{-1}), B(q^{-1}), \dots$	polynômes discrets

ABBREVIATIONS

ARMA	Auto-regressive moving average
MRAS	Model-reference adaptive system
PRBS	Pseudo-binary random sequence
SAMR	Systeme adaptatif à modèle de référence

TABLE DE MATIERE

AVANT PROPOS

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I : INTRODUCTION ET PRESENTATION DES PROBLEMES

1.0 Introduction	1
1.1 Le premier problème	6
1.2 Le deuxième problème	12
1.3 Le troisième problème	16

CHAPITRE II : IDENTIFICATION DES COVARIANCES DE BRUIT DU

SYSTEME ET DE L'OBSERVATION ET OBSERVATION D'ETAT

2.0 Introduction	27
2.1 Cas continu	28
2.1.1 Description du système	28
2.1.2 Termes de correction	29
2.1.3 Les équations de filtre	31
2.1.4 Formulation du Problème	32
2.4.1a La matrice de covariance de la sortie	34
2.4.1b La matrice de covariance de l'innovation	35
2.1.5 Technique d'optimisation	39
2.1.6 Technique d'optimisation modifiée	43
2.2 Cas discret	47
2.2.1 Position de problème	49
2.2.2 La technique d'optimisation	52
2.3 Exemple numérique	56
2.4 Résultats et discussion	61
2.5 Conclusion	62

CHAPITRE III : ESTIMATEUR D'ETAT A UN ORDRE REDUIT POUR
DES SYSTEMES DE MESURE SINGULIERE

3.0 Introduction	64
3.1 Cas continu	66
3.1.1 Modèle mathématique	66
3.1.1a Propriétés statistiques du système	67
3.1.2 Analyses mathématiques	69
3.1.3 L'équation de l'observateur	72
3.1.4 Matrice de Covariance de l'erreur d'estimation et gain du filtre.	74
3.1.4a Elimination de la dérivée $y_1(t)$ de l'algorithme de filtrage	76
3.2 Cas discret	78
3.2.1 Modèle mathématique	78
3.2.2 Méthodologie	89
3.2.3 L'équation de l'observateur	80
3.2.4 Matrice de covariance de l'erreur d'estimation et gain du filtre	81
3.3 Application 1 : Système de trois réservoirs	82
3.3.1 Equation dynamique du système	.85
3.3.2 Matrices du système d'ordre réduit	.88
3.3.3 L'équation de l'observateur	.89
3.4 Simulation de résultats	89
3.5 Conclusion	92

CHAPITRE IV : IDENTIFICATEUR-OBSERVATEUR ADAPTATIF POUR DES
SYSTEMES STOCHASTIQUES UNE ENTREE-UNE SORTIE

4.0 Introduction	95
------------------	----

4.1 Cas continu	97
4.1.1 Modèle mathématique du système	97
4.1.2 Réalisation non-minimale du système inconnu.	98
4.1.2a Fonction de transfert du système	98
4.1.3 Modèle de référence à une représentation non-minimale	103
4.1.4 L'équation différentielle de l'erreur	104
4.1.5 Identification adaptative des paramètres	107
4.1.5a Lois adaptatives	108
4.1.5b La convergence et l'analyse de stabilité	108
4.1.6 Estimation du vecteur d'état	111
4.1.6a L'équation de l'observateur	112
4.1.6b Matrice de covariance de l'erreur d'estimation et gain du filtre.	114
4.2 Cas discret	116
4.2.1 Modèle mathématique du système	116
4.2.2 Réalisation non-minimale du système.	118
4.2.2a Fonction de transfert du système	118
4.2.3 Réalisation non-minimale du modèle ajustable.	120
4.2.4 L'équation d'erreur	121
4.2.5 Lois Adaptatives et identification des paramètres	122
4.2.5a Choix optimum de σ_k	123
4.2.6 Convergence de l'algorithme	125
4.2.7 Estimation de l'état	126
4.2.7a Réalisation minimale du système	127
4.2.7b L'obtention des matrices $S_1(k)$ et $S_2(k)$	129
4.2.7c Equation de l'observateur	130
4.3 Application 2 : Système de deux réservoirs	131

4.4 Application 3 : Version discrète du système de deux réservoirs	136
4.5 Résultats et discussion	140
4.6 Conclusion	146
 <u>CHAPITRE V : CONCLUSION GENERALE ET RECHERCHES FUTURES</u>	 150
REFERENCES	155

INTRODUCTION GENERALE

L'utilisation des méthodes modernes de régulation implique le plus souvent la connaissance de toutes les composantes du vecteur d'état du processus à réguler.

Toutefois, dans la réalisation de la commande d'un système réel, cette contrainte n'est pas toujours satisfaite. Il est donc important de reconstruire les états non-observés du système à partir d'un estimateur ou un observateur selon que le système soit exposé à des perturbations stochastiques ou non.

Pour avoir une fidèle réplique du vecteur d'état, il faut que le modèle du filtre (estimateur ou observateur) représentant le système soit plus ou moins exact. Ainsi, il est absolument nécessaire que :

- i) Les paramètres structuraux du système soient connus parfaitement.
- ii) Les paramètres stochastiques ainsi que les propriétés statistiques à priori soient connues correctement.

Dans la plupart des applications industrielles, une partie des paramètres de l'un ou/et de l'autre est inconnue. D'où, provient la nécessité d'en reconnaître et identifier les valeurs.

C'est dans ce cadre que les travaux présentés dans ce mémoire se situent. Dans une partie de la thèse nous nous sommes intéressés à l'identification des propriétés statistiques des systèmes stochastiques linéaires dans une étape primaire pour la reconstruction du vecteur d'état comme objectif final. Puis nous avons étendu le travail aux systèmes singuliers où une partie du

vecteur d'observation n'est pas touchée. Finalement, nous avons considéré le problème d'estimation du vecteur d'état pour des systèmes stochastiques linéaires de paramètres structuraux inconnus. Ainsi à côté de la reconstruction des états, les paramètres structuraux seront identifiés adaptativement. Puisque ce problème est assez complexe, le système considéré sera une-entrée une-sortie.

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET PRESENTATION DES PROBLEMES

1.0 Introduction :

Pour réaliser une commande optimale à des processus industriels, un modèle déterministe est nécessaire, c'est-à-dire, une connaissance parfaite des paramètres structuraux et des paramètres implicites (les variables d'état), devrait être réalisée.

Dans beaucoup d'applications industrielles, certaines composantes du vecteur d'état sont inaccessibles. Il faut donc les construire à partir d'un vecteur d'observation entaché de bruit de mesure. Ceci impose le problème crucial de l'évaluation du comportement dynamique des processus (processus chimique, thermique, nucléaire, économique, ... etc.) normalement exposé à des grandeurs perturbatrices aléatoires. Ce problème se situe dans le domaine de l'estimation stochastique optimale dont l'intérêt provient du fait que celle ci est une étape préliminaire pour l'implantation d'une commande optimale effective.

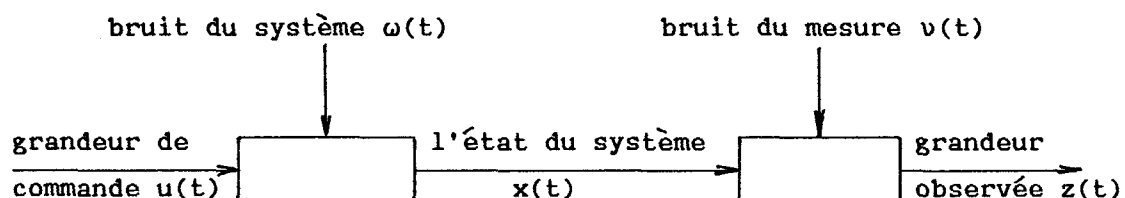


Fig.1.1 Un système exposé à des perturbations
stochastiques

Fig.1.1 montre un système physique exposé à deux sortes de grandeurs d'entrées, une grandeur de réglage $u(t)$, qui est déterministe et une entrée d'une forme imprévisible à l'avance $\omega(t)$ ne pouvant

être décrite analytiquement. Celle-ci s'attribue à la présence de phénomènes perturbateurs inhérents au système et à ses entourages. A titre d'exemple, le bruit observé aux bornes d'une résistance est lié à l'agitation thermique des électrons, la turbulence en aviation provoquée par des rafales de vent aléatoires, ... etc.

De même, les grandeurs à réguler du système sont observées à l'aide d'un ensemble de capteurs. Ceux-ci risquent d'avoir des signaux fortuits et des effets aléatoires. Par conséquent on a souvent des mesures entachées de bruit comme montré par la Fig.1.1.

Nous faisons appel au fait que l'utilisation des méthodes modernes de régulation aux systèmes stochastiques implique le plus souvent la connaissance de toutes les composantes du vecteur d'état du processus.

Toutefois, dans la réalisation de la commande d'un système réel, cette contrainte n'est pas toujours satisfaite.

Ainsi, il nous faut une étude consacrée à l'estimation de la réaction d'état à l'aide d'un filtre (estimateur ou observateur).

Ici nous nous intéressons à l'estimation d'état des systèmes stochastiques qui peuvent être décrits par des équations linéaires. Les perturbations du système et de la mesure sont modélisées par des processus stochastiques bruits blancs gaussiens de moyenne nulle.

Récemment les techniques d'estimation d'état, y compris le filtre de Kalman, ont été largement utilisées aux applications de systèmes importants : par exemple, la détermination de l'orbite d'un vaisseau spatial, la trajectoire de missile ou d'avion, ... etc.

Le filtre de Kalman fournit une solution au problème du filtrage des systèmes stochastiques linéaires mais ceci suppose un

modèle exact du système, à savoir, la connaissance parfaite des paramètres dynamiques, des caractéristiques statistiques des bruits et des conditions initiales. En pratique, le modèle est toujours une approximation d'un système et le filtre est implanté dans des calculateurs dont la précision n'est pas infinie, ce qui peut entraîner un mauvais comportement du filtre.

Ainsi, des difficultés pourraient survenir lors de l'application des algorithmes d'un estimateur ou d'un observateur d'état. Les sources principales de difficultés sont :

- Les paramètres structuraux du système où les paramètres déterministes du modèle du système sont inconnus ou mal connus.
- Les caractéristiques statistiques des bruits où les éléments des covariances de bruit du système et de l'observation Q et R , de même que les conditions initiales de l'état et de la covariance d'erreur x_0 et P_0 sont imparfaitement connues.

C'est dans ce cadre que le travail effectué ici se situe. En effet, au vu des difficultés mentionnées ci-dessus, nous voudrions aborder les trois problèmes suivants :

- La reconstruction du vecteur d'état d'un système stochastique lorsque les propriétés statistiques sont

imparfaitement connues. Dans cette partie nous traitons d'un système stochastique linéaire multidimensionnel, variable ou non dans le temps. Nous commençons par les systèmes continus. Ensuite, la prolongation de la méthode pour comprendre les systèmes discrets, est effectuée.

- Le deuxième problème à aborder apparaît lorsque l'analyse de l'erreur et de la sensibilité de notre système stochastique linéaire à l'égard des covariances de bruit Q et R montre que quelques composantes du vecteur de mesure sont entachées faiblement de bruit et même sont observées parfaitement. C'est alors que l'utilisation du filtre de Kalman ou d'un estimateur quelconque qui utilise des covariances de bruit ne seront plus utiles faute de pouvoir inverser la covariance de bruit de l'observation " R ". C'est dans ce sens que nous développons un filtre continu et discret à un ordre réduit qui, d'une part reconstruit les variables d'état inaccessibles du système et d'autre part tient compte de l'absence de l'inversion de R (problème de filtrage singulier).
- Le dernier problème à traiter est relatif aux systèmes stochastiques linéaires dont les propriétés statistiques sont plus ou moins connues assez correctement, mais qui manquent d'information à l'égard des paramètres structuraux. Dans ce cas, nous ne pouvons pas effectuer l'estimation du vecteur d'état à moins que les paramètres du système ne soient connus. C'est ainsi qu'il nous faut un identificateur pour estimer les paramètres structuraux du système avant

qu'on puisse procéder à la reconstruction du vecteur d'état. C'est dans cette direction qu'une conception d'un identificateur-observateur pour des systèmes stochastiques linéaires, continus ou discrets, est effectuée. Cependant, comme ce problème est assez complexe, nous nous limiterons ici aux systèmes mono-entrées mono-sorties

Par la suite, nous donnons un bref résumé, que nous ne prétendons pas exhaustif, des méthodes se trouvant déjà documentées dans la littérature et relatives à chaque sujet des trois problèmes.

1.1 Le premier problème

Comme signalé antérieurement, le filtre de Kalman nécessite la connaissance parfaite des propriétés stochastiques des bruits du système et de l'observation. Même la conception d'un filtre spécifique ou d'un estimateur quelconque requiert les caractéristiques statistiques du procédé.

Comme notre système manque d'information à l'égard des covariances de bruit, l'estimateur pour la reconstruction du vecteur d'état ne peut pas fonctionner d'une façon optimale. De même, l'utilisation des valeurs approchées des covariances de bruit du système et de la mesure Q et R pour l'implantation des algorithmes de filtrage risque d'entraîner des dégradations dans la conduite du filtre et une divergence éventuelle de ses performances. Ainsi, une procédure d'identification pour l'estimation de ces covariances nous est indispensable.

En général, les méthodes servant pour l'identification des

covariances de bruit Q et R sont effectuées essentiellement par l'intermédiaire des corrélations et des covariances des processus de la sortie de système z et de l'innovation $\tilde{z}$.

Les techniques de corrélation pour estimer les covariances de bruit sont originellement développées en [1-6] pour des systèmes linéaires discrets. Par de telles approches, on dispose, en principe, d'un ensemble de corrélations directes et rétrogrades de la sortie z et/ou de l'innovation $\tilde{z}$ calculées à partir de leur propriété érgodique. Un autre ensemble est obtenu depuis des expressions mathématiques qui sont substantiellement les fonctions des paramètres du système ainsi que de ses propriétés stochastiques. Ces deux ensembles doivent être identiques : un certain nombre d'équations indépendantes linéairement peut en être tiré. Celles-ci sont employées à résoudre les équations qui sont fonctions de covariances de bruit. Cette procédure est, en effet, une estimation à une seule étape, c'est-à-dire, c'est une approche non récursive vis-à-vis de l'obtention des covariances de bruit Q, R .

Bien qu'aucun problème d'initialisation n'apparaisse, l'existence d'un inverse généralisé de la matrice d'observabilité en vue de trouver l'estimé $\hat{P}_x C^T$ pourrait conduire à un problème de divergence dans cette méthode.

Cependant, les techniques de corrélation d'innovation [6] se distinguent des techniques de corrélation de sortie par les avantages suivants :

i) Puisque la corrélation du processus de sortie n'intervient pas aux algorithmes d'identification, la contrainte imposée à la matrice de système A devant être asymptotiquement stable peut être

enlevée. Ainsi, cette méthode d'identification peut se rapporter aux systèmes dont les matrices des coefficients A n'assurent pas la stabilité asymptotique. La matrice $[A-KC]$ remplaçant celle de A dans le développement des algorithmes est toujours asymptotiquement stable (condition de stabilité asymptotique du filtre).

ii) Le test de blanchissement de la séquence d'innovation sert à vérifier la convergence des valeurs estimées $\hat{Q}$, $\hat{R}$ aux valeurs réelles au bout de chaque itération des algorithmes.

Contrairement à la méthode de corrélation de sortie, la technique de corrélation d'innovation est une procédure itérative qui requiert des valeurs initiales des covariances de bruit. Le processus d'identification est effectué dans l'ordre suivant :

- Commencer par des valeurs initiales, disons Q_1 et R_1 ; établir le filtre de Kalman; calculer la covariance de l'erreur d'estimation $\tilde{P}$ et le gain du filtre K_1 .
- Accomplir l'estimé $\hat{x}$ tout en effectuant la séquence d'innovation $\{\tilde{z}\}$. Vérifier si celle-ci est bruit blanc.
- Sinon, reboucler la procédure en disposant des valeurs estimées. Le test de blanchissement s'effectue à la fin de chaque itération jusqu'à ce que le processus d'innovation devienne absolument bruit blanc.

Il faut signaler que dans les techniques de sortie aussi bien que de l'innovation, le nombre d'éléments inconnus de Q doit être limité par le nombre nm qui représente la dimension $\widehat{P_x C^T}$ (P_x est la covariance du vecteur d'état) dans la technique de sortie et $\widehat{\tilde{P}_x C^T}$ ($\tilde{P}_x$ est la covariance d'erreur d'estimation) dans le

cas de corrélation d'innovation.

La technique des covariances assorties est originalement développée en [6,9] en version discrète. Dans cette méthode, les covariances de résidus (innovation) directes et rétrogrades calculées à partir des moyennes temporelles sont rendues identiques à celles obtenues d'après les modèles mathématiques qui sont essentiellement les fonctions des paramètres du système A, C et de ses propriétés statistiques Q, R. Au cas où un écart important existe entre les deux covariances, Q et R sont estimés chacun à son tour. Un nombre d'équations indépendantes linéairement comprenant les éléments inconnus de Q et R sont tirées et résolues simultanément pour chaque covariance par les méthodes des moindres carrés.

On note ici que le problème de l'inverse généralisé n'existe plus dans cette méthode; mais d'autre part le nombre d'éléments inconnus de Q se limite à $m(m+1)/2$ qui est la dimension de la covariance d'innovation $E[\hat{z}\hat{z}^T]$.

En référence [1], des algorithmes de filtrage adaptatif ont été développés par l'intermédiaire de covariance assortie des résidus $\hat{z}(k)$. Les covariances de bruit sont des matrices diagonales et sont exprimées linéairement en fonction des facteurs correctifs α_{ij} et β_{ij} tel que :

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{Q}_{ij} \delta_{ij} \alpha_{ij},$$

$$R = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{R}_{ij} \delta_{ij} \beta_{ij}$$

où α_{ij} et β_{ij} sont définis par,

$$\alpha_{ij} = Q_{ij}/\bar{Q}_{ij} ;$$

$$\beta_{ij} = R_{ij}/\bar{R}_{ij}$$

$\bar{Q}_{ij}$ et $\bar{R}_{ij}$ sont les éléments erronés des covariances de bruit. δ^{ij} est la matrice impulsionnelle dont toutes les entrées sont nulles sauf la $ij^{\text{ème}}$ égale à 1. La covariance d'innovation modélisée ainsi, est aussi fonction linéaire en α_{ij} , β_{ij} . L'erreur entre la valeur estimée de $E[\tilde{Z}(k)\tilde{Z}^T(k)]$ selon la propriété d'ergodicité et celle modélisée, représente une matrice aléatoire bruit blanc de moyenne nulle. Cette équation est donc convertie à une équation vectorielle. La procédure d'adaptation utilise essentiellement la méthode de moindres carrés tout en minimisant une fonction coût de cet écart.

Bélangier [9] a développé un algorithme pour estimer les matrices de covariances de bruit pour un système stochastique discret linéaire et variable dans le temps. Il a exploité le fait que la corrélation de la séquence d'innovation est une fonction linéaire des covariances de bruit Q et R . Cependant, si ces matrices sont représentées par une fonction linéaire de n composantes d'un certain paramètre vecteur $\underline{\alpha}$, c'est-à-dire,

$$R = \sum_{i=1}^N R_i \alpha_i \quad ; \quad Q = \sum_{i=1}^N Q_i \alpha_i$$

la fonction de corrélation d'innovation sera aussi une fonction linéaire du même paramètre vecteur $\underline{\alpha}$. Ainsi, l'équation clé $E[\tilde{Z}(k)\tilde{Z}^T(k-l)]$, est une fonction linéaire en α_i , où $\tilde{Z}$ est l'innovation. Cette propriété rend le problème amenable à une formulation des moindres carrés dont la solution minimise le carré de l'écart entre la valeur de la corrélation d'innovation obtenue à partir de calcul statistique et celle représentée linéairement par

les paramètres α_i . En disposant de ce fait, un algorithme des moindres carrés pondérés pour estimer uniquement ces paramètres " α_i " a été effectué.

En [22], un algorithme de calcul des covariances de bruit est achevé. Il est consacré à des systèmes dynamiques stochastiques linéaires de dimensions importantes. L'efficacité du calcul devient, en fait, un impératif substantiel quand le nombre des variables d'état augmente. Un tel cas apparaît lorsqu'on traite des systèmes stochastiques des paramètres répartis qui se représentent par des équations différentielles comme le problème d'assimilation des données pour la prédiction du climat. Une approche pratique de filtrage adaptatif pour de tels systèmes est de décrire les matrices des covariances de bruit inconnues en termes d'un nombre des paramètres relativement faible de sorte que seuls ceux-ci soient estimés.

Dans cet article, le problème est reformulé de façon à rendre comparable la complexité de calcul relative au filtre non-adaptatif de Kalman-Bucy. Un algorithme d'un filtre de Kalman est utilisé. Il effectue l'estimé d'état et calcule des matrices utiles pour l'identification des covariances de bruit. Ensuite, un filtre secondaire est adapté pour calculer les paramètres intervenant dans le calcul des covariances de bruit.

Néanmoins, les techniques mentionnées ci-dessus ne contrôlent pas suffisamment le pas de correction dans chaque itération pour l'estimé de Q et R . De ce point, provient notre volonté de développer une méthode d'identification itérative procurant un tel contrôle afin d'éviter des problèmes de divergence et par conséquent une dégradation éventuelle des performances du filtre. Ceci

constitue le thème du chapitre 2 où le problème est formulé d'une procédure d'optimisation qui effectue à la fin de chaque période d'observation des incréments de matrices correctives ΔQ et ΔR .

1.2 Le deuxième problème :

Comme indiqué antérieurement, l'estimation de l'état d'un système physique qui évolue dans un environnement stochastique est un problème d'un intérêt croissant autant théorique que pratique. La performance de l'algorithme d'estimation d'état et le comportement du filtre ou de l'estimateur dépend effectivement du montant de l'information valable à l'égard des paramètres stochastiques.

Au cas idéal où la dynamique de même que la mesure du système se représentent par des modèles linéaires perturbés uniquement par des bruits blancs gaussiens des covariances connues correctement, le filtre Kalman-Bucy donne l'estimé optimal de l'état. En pratique, vu le manque d'information concernant les propriétés statistiques des bruits, la conception du filtre de Kalman-Bucy ou d'un estimateur quelconque nous oblige à effectuer une analyse d'erreur et de sensibilité du filtre selon les éléments de covariances de bruit Q et R . Parfois, cette analyse d'erreur et de sensibilité montre qu'une partie de la mesure est observée parfaitement sans aucun entachement de bruit. Dans ce cas nous sommes confrontés au problème de filtrage singulier car la non-inversion de la covariance d'observation " R " entraîne des divergences du comportement du filtre.

Nous voulons de nouveau préciser que le problème de la reconstruction des variables d'état d'un système dynamique donné des

observations des variables de sortie est d'importance fondamentale pour la conception d'une commande optimale du système considéré. Si l'on s'intéresse à la classe des systèmes linéaires, alors deux approches sont valables pour la reconstruction du vecteur d'état. Si les variables de sortie sont mesurées parfaitement et aucune perturbation stochastique ne figure, nous pouvons établir un observateur déterministe ([26],[30]). D'autre part, si toutes les variables de sortie sont entachées de bruit blanc gaussien, le filtre de Kalman-Bucy peut être donc employé ([20]-[24]).

Comme, mentionné ci-dessus, on peut trouver des applications pour lesquelles certaines variables de sortie sont non-bruitées alors que d'autres sont entachées de bruit. A titre d'exemple, le système de radar moderne où la précision de la mesure de portée est de loin supérieure à celles de l'élévation et de l'azimut. Pour de tels systèmes, nous rappelons que la matrice de covariance de l'observation est presque singulière et elle peut entraîner à des matrices mal-conditionnées et par conséquent à des problèmes de calcul.

Dans la littérature, ce problème a été abordé par deux voies différentes; notamment:

- i) Comme le système fonctionne dans des environnements stochastiques, le problème a été considéré comme étant un problème d'estimation d'état pour des mesures de bruits singulières d'où le nom de "problème de filtrage singulier" ([46]-[51]).
- ii) Puisque le filtre de Kalman ne peut trouver une solution dans ce problème, le principe de l'observateur de

Leuenberger a été adopté pour étendre son idée afin d'englober les systèmes stochastiques. De plus, comme une partie du vecteur de mesure est observée parfaitement et puisque les composantes du vecteur de sortie représentent des variables d'état ou une combinaison linéaire indépendante de ceux-ci, on n'aura plus besoin de reconstruire ces variables. Plutôt, nous en reconstruisons uniquement le reste. D'où le concept de retrouver un observateur à un ordre réduit pour les systèmes linéaires stochastiques de mesure singulière ([28 - 44]).

Ainsi, ce problème peut être mis sous les titres : problème de filtrage singulier ou observateurs à ordre réduit pour des systèmes stochastiques à mesure partiellement non-bruitée.

Il faut indiquer que le problème de filtrage singulier comprend deux notions :

- Quelques composantes du vecteur d'observation ne sont pas entachées de bruit.
- L'intensité de la covariance de bruit d'observation est si petite qu'elle peut être considérée nulle.

Nous nous sommes placés dans la première notion du problème; et nous allons suivre l'approche de l'observateur à un ordre réduit pour l'estimation du vecteur d'état de notre système stochastique à mesure de bruit partiellement singulière.

L'incorporation de l'observateur de Leuenberger pour l'estimation d'état des systèmes stochastiques linéaires a été étudiée par de nombreux chercheurs. D'abord, Aoki et Huddle [28] d'un côté, et Brammer [29] de l'autre, ont proposé l'idée de

l'utilisation de l'observateur de Leuenberger pour l'estimation optimale d'état des systèmes stochastiques. Leondes et Novack [31,34] ont optimisé l'observateur lorsque quelques composantes de mesure sont beaucoup plus précises que les autres.

Le concept de développement des observateurs/estimateurs, dans le cas où certaines variables de sortie ne sont pas entachées de bruit de mesure, a été étudié extensivement ([29-36]). Athans et Tse [29]; et Tse [33] ont utilisé ce concept en vue d'établir un filtre spécifique (un observateur à ordre réduit) dans le sens des moindres carrés qui reconstruit uniquement les états non observés pour des systèmes stochastiques discrets linéaires.

Pour des systèmes stochastiques discrets linéaires à n -dimension ayant des bruits additifs et multiplicatifs, Panossian et leondes [41] ont développé un algorithme de filtrage à un ordre inférieur à celui du filtre de Kalman-Bucy; notamment d'ordre $(n-q)$ où q représente le nombre de composantes non-bruitées du vecteur de mesure.

Un estimateur d'ordre réduit a été proposé par Fairman [35,36]. D'abord, le filtre de Kalman est introduit; puis, ce filtre est modifié à travers l'emploi de l'observateur de Leuenberger qui est choisi de sorte que les innovations dues aux variables de sortie non-bruitées ne soient plus requises pour l'estimation optimale d'état.

Nagpal, Helmick et Sims [43] ont présenté une méthode pour la conception d'un observateur à ordre réduit non biaisé optimal. L'ordre de ce filtre doit être supérieur à un certain minimum déterminé par le nombre d'observations indépendantes du système.

Contrairement aux études indiquées ci-dessus, aucune des observations n'est supposée non-bruitée. Un processus d'innovation d'ordre réduit est proposé ayant des propriétés similaires à celle d'ordre entier lorsque le filtre réduit est optimisé.

En [50], le problème a été abordé dans le domaine harmonique. La fonction de transmittance du filtre est obtenue à partir de la factorisation spectrale de l'équation algébrique de Riccati. Ainsi, le problème de filtrage singulier peut être regardé comme un cas particulier du problème d'estimation d'état lorsque la matrice de la covariance d'observation est singulière.

Dans le chapitre 3, en nous servant du principe de l'observateur asymptotique, un estimateur à un ordre réduit est proposé pour des systèmes stochastiques linéaires continus et discrets, variants ou invariants dans le temps ayant une partie non-bruitée. Notre processus stochastique linéaire est asymptotiquement stable, complètement commandable et complètement observable. Le système peut être réalisé dans une forme canonique quelconque où les variables d'états représentent des quantités physiques ou non physiques. Le filtre est conçu pour l'estimation de $(n \times l)$ états où l représente les composantes parfaites de la mesure. Une matrice de transformation inversible est employée pour l'obtention de l'estimé du vecteur d'état du système d'origine à partir de l'état estimé du filtre de même que la partie non-bruitée du vecteur d'observation.

1.3 Le troisième problème :

Les phénomènes physiques sont étudiés quantitativement par des

modèles mathématiques. En général, ces modèles sont souvent approximatifs car les phénomènes sont si compliqués qu'on ne peut pas tenir compte de toutes les variables qui interviennent. Il y a toujours un compromis entre l'erreur d'approximation et la complexité du modèle: mieux le modèle décrit une réalité physique, plus il est complexe.

Dans l'automatique, les modèles mathématiques permettent de décrire les procédés que nous voulons commander. En réalité, il n'existe pas de systèmes rigoureusement linéaires en sens mathématique, mais plutôt des systèmes non-linéaires qui, autour d'un point de fonctionnement, ont un comportement proche de celui d'un système linéaire.

L'approximation d'un système non-linéaire par un système linéaire est possible et valable uniquement au voisinage d'un point de fonctionnement (les amplitudes de signaux intervenant doivent être faibles). Mathématiquement, cette approximation peut être expliquée à l'aide de la série de Taylor. En décomposant le système non-linéaire par série de Taylor autour d'un point de fonctionnement, on s'aperçoit que, pour de petites variations, on peut négliger les termes d'ordres supérieurs et retenir uniquement la partie linéaire de la décomposition. Ainsi, un système non-linéaire peut être approché par un système linéaire autour d'un point de fonctionnement. Il peut être regardé comme étant un système linéaire à paramètres variables. A chaque point d'opération, nous pouvons associer un ensemble de paramètres qui sont propres au nouveau point de fonctionnement.

Pour réaliser un système stochastique asservi qui répond aux

spécifications de conception, une connaissance préalable de ses paramètres structuraux ainsi que de ses paramètres stochastiques devrait être disponible. Mais, un procédé réel peut être assujéti à deux types de perturbations; notamment perturbation d'état et perturbation de paramètres.

En effet, la plupart des applications industrielles peuvent se modéliser par un système linéaire qui est souvent une approximation d'un système non-linéaire. Un changement du point de fonctionnement sera donc accompagné des variations des paramètres structuraux du système et ainsi peut être considéré comme une perturbation agissant sur les paramètres du système linéaire.

Les paramètres d'un procédé peuvent varier aussi pour d'autres raisons. A titre d'exemple, la suspension d'une automobile: à la longue, le coefficient de viscosité de l'amortisseur et la constante du ressort se dégradent. Un autre exemple est l'effet des limitations technologiques du matériel du four électrique par le vieillissement de l'isolation. Il existe aussi bien des procédés dont les paramètres peuvent changer brusquement. A titre d'exemples, la charge d'un ascenseur et le changement de l'inertie de l'ensemble du moteur et de la charge pendant la fabrication des câbles électriques.

Or, si les paramètres du procédé varient au cours du temps, et si l'on utilise une commande classique à ajustements fixes, les paramètres du système asservi se dégradent à mesure que l'écart entre les valeurs réelles des paramètres du procédé et celles pour lesquels la commande avait été ajustée, augmente. Si l'on veut éviter la dégradation des performances, il faut réajuster la commande en fonction des nouvelles valeurs des paramètres du

procédé: c'est ainsi qu'apparaissent les concepts d'adaptation et de système adaptatif. Alors que la commande classique est orientée vers l'élimination des perturbations d'état, un système adaptatif est capable, en effet, de compenser les changements dans le comportement dynamique du procédé qui sont dus aux perturbations des paramètres.

Nous présentons par la suite un bref résumé concernant l'évolution des recherches effectuées sur l'identification des paramètres et l'observation d'état à travers les systèmes adaptatifs à modèle de référence. Toutefois, nous précisons le suivant :

Pour reconstruire les états inaccessibles d'un système linéaire à des paramètres connus dans des environnements déterministes, des observateurs d'état asymptotiques [55] sont employés. Lorsque le système a des paramètres inconnus ou des paramètres qui varient au cours de l'utilisation du système, des observateurs d'état adaptatifs doivent être construits.

A l'aide des techniques des systèmes adaptatifs à modèle de référence, des observateurs d'état adaptatifs peuvent être accomplis à partir d'un observateur asymptotique linéaire de Leuenberger qui permet, par l'intermédiaire d'autres moyens supplémentaires, l'observation d'état de même que l'identification des paramètres de processus.

Plusieurs méthodes ont été développées par Carroll et Lindorff [56], Luders et Narendra [58], et Kudva et Narendra [55,57] pour des observateurs adaptatifs qui concernent des systèmes linéaires continus mono-entrée mono-sortie. Les conceptions de tels observateurs sont basées sur l'emploi des signaux auxiliaires et l'analyse de stabilité asymptotique à travers la fonction de

Lyapunov. L'extension de cette approche aux systèmes multivariables linéaires continus ou discrets a été considérée en références [57,58,71,72] (Luders et Narendra 1974, Kudva et Narendra 1974, Landau 1979 et Silveria 1978). Dans ces articles, des observateurs d'état adaptatifs parallèles ont été effectués à partir de la configuration d'un observateur asymptotique linéaire avec une structure de système adaptatif à modèle de référence parallèle. De tels algorithmes offrent un fonctionnement plus robuste à la présence d'une perturbation et permettent l'adaptation du gain de l'observateur. Cette approche, en effet, correspond à un filtre de Kalman adaptatif pour un certain type de perturbation.

En [61], le problème d'identification récursive a été formulé comme étant un problème d'un modèle de poursuite. Cette formulation a permis le développement de tels algorithmes d'identification qui utilisent essentiellement des techniques de systèmes adaptatifs à modèle de référence et le concept de positivité pour des processus discrets mono-entrée mono-sortie de même que pour des processus multivariables. L'identificateur conçu ainsi assure la stabilité de l'algorithme d'identification et conduit à des estimés non-biaisés asymptotiques des paramètres de système.

Akashi et Moustafa [64] ont présenté une procédure d'identification pour l'estimation des paramètres d'un système stochastique discret linéaire à travers un système adaptatif à modèle de référence parallèle et l'utilisation de la fonction de Lyapunov. Un algorithme d'identification pratique est obtenu produisant des erreurs d'estimations bornées, en présence de bruit de mesure, à condition que l'entrée soit assez riche.

Kreiselmeier [65] a introduit la notion de l'observateur adaptatif paramétrisé pour des systèmes continus linéaires. En fait, l'observateur paramétrisé a une structure différente où l'état estimé est une fonction linéaire des paramètres de système. Ainsi, l'adaptation des paramètres de l'observateur paramétrisé isole entièrement la dynamique de l'observateur de la boucle d'adaptation.

Deux observateurs adaptatifs sont conçus par Ichikawa [74,84] et effectués à partir des filtres à variables d'état pour les signaux d'entrée et de sortie au moyen de techniques de synthèses de Lyapunov. Les algorithmes obtenus sont consacrés aux systèmes continus linéaires. Le premier algorithme est accompli selon l'observateur asymptotique de Leuenberger; tandis que, la conception de l'autre est basée sur le principe de l'observateur paramétrisé. Pour ce dernier, l'auteur a montré que la convergence de l'algorithme d'identification de paramètres est exponentielle pourvu que l'entrée soit assez riche.

Deux autres observateurs adaptatifs pour des systèmes linéaires continus et discrets ont été dérivés des techniques de systèmes adaptatifs à modèle de référence et présentés par Landau [73]. L'un exploite la structure série-parallèle à gain d'observation constant et l'autre dispose de la structure parallèle à gain constant également. Un troisième a été reporté par Silveria [69] et Sugart, Landau et Silveria [71] où la structure parallèle de SAMR à gains ajustables a été adoptée. Egalement, les algorithmes adaptatifs ont été analysés dans des environnements stochastiques où un bruit blanc gaussien de mesure a été introduit dans la dynamique du système. Les conditions de la convergence des paramètres identifiés ont été obtenues par la méthode de Ljung [68].

Sebakhy [78] a utilisé les propriétés de l'algorithme de Goodwin-Ramadge-Caines [76] en commande adaptative pour l'identification des paramètres d'un système discret linéaire. De plus, il a modifié l'algorithme de sorte que la convergence des paramètres identifiés ait été améliorée à travers le choix optimal du gain adaptatif et le maintien d'une relation linéaire des paramètres inconnus durant la période de l'achèvement de l'algorithme adaptatif.

Shahrokhi et Morrari [80] ont réclamé que la convergence de la plupart des algorithmes effectués pour des observateurs adaptatifs est lente et l'ont attribuée à l'utilisation d'une seule équation d'erreur d'observation. Dans cet effet, ils ont proposé un identificateur discret qui utilise des erreurs multiples de sortie. Basé sur cet identificateur, ils ont effectué une conception d'un observateur adaptatif pour un système discret linéaire mono-entrée mono-sortie.

Une conception d'un observateur adaptatif pour un système continu linéaire mono-entrée mono-sortie est réalisée par Inoue et Iwai [87]. La structure de l'observateur est basée sur l'observateur paramétrisé de Kreisselmeier mais la loi adaptative est déterminée à partir d'un autre système d'équations qui tient en compte une décroissance exponentielle spécifiée de l'erreur d'identification et d'observation.

Un observateur adaptatif pour un système discret linéaire mono-entrée mono-sortie dont l'ordre n'est pas connu est présenté par Murdoch et Oliveros [88]. L'observateur adaptatif discret est du type général introduit par Kreiselmeier, à savoir, l'observateur

paramétrisé. L'observateur adaptatif trouve l'ordre du système, identifie les paramètres inconnus du système et donne l'estimé du vecteur d'état à chaque période d'échantillonnage.

Un observateur adaptatif paramétrisé implicite à un ordre réduit pour un système de n -dimension mono-entrée mono-sortie est présenté en [90]. Un algorithme adaptatif de type de moindres carrés est utilisé pour l'identification des paramètres et pour assurer une convergence exponentielle.

Hori et al [91] ont proposé un observateur adaptatif pour des systèmes multivariables. Un algorithme de projection orthonormalisée est utilisé au lieu de l'approche des moindres carrés pour l'identification des paramètres inconnus du système.

Chen et Tomizuka [95], ont étendu le travail effectué relatif à la réalisation non-minimale. Ils ont considéré un système stochastique exposé à une perturbation d'entrée et de bruit de mesure de sortie. Pourtant, l'analyse a été effectuée dans un contenu déterministe. Des valeurs bornées ont été supposées pour ces perturbations.

Comme mentionné ci-dessus, la majorité des résultats théoriques des systèmes adaptatifs à modèle de référence sont conçus pour des systèmes déterministes où aucune perturbation stochastique ne se manifeste. Même dans les cas des systèmes stochastiques, on a considéré souvent le bruit d'observation. De là, nous avons voulu trouver des algorithmes d'identification des paramètres et d'observation d'état adaptatifs pour des systèmes stochastiques linéaires ayant des bruits de processus et d'observation.

En chapitre 4, nous avons étudié le problème d'observation

adaptative d'état pour des systèmes stochastiques linéaires continus et discrets dont les propriétés statistiques sont plus ou moins exactes. Pourtant ces systèmes manquent d'information concernant leurs paramètres structuraux qui peuvent varier aussi par rapport au temps. L'étude de ce problème a été faite pour le cas où le vecteur d'état du procédé n'est pas mesurable directement (vecteur d'état entièrement inaccessible). Dans ce problème nous avons considéré uniquement comme mesurable l'entrée et la sortie du procédé.

Notre système, comme la plupart des applications industrielles, est complètement commandable et complètement observable (c'est-à-dire, les polynômes du numérateur et du dénominateur sont premiers entre eux et aucune annulation ne se produit entre les pôles et les zéros de la fonction de transmittance du système). Egalement, la matrice de coefficient du système est asymptotiquement stable.

Comme notre système manque d'information à l'égard des paramètres de processus et des états inaccessibles, il nous faut donc une solution pour qu'on puisse avoir des informations supplémentaires d'un côté pour l'identification des paramètres du processus et de l'autre pour l'observation du vecteur d'état. Ici, nous adoptons la représentation non-minimale du processus. En effet, la réalisation non-minimale a la propriété incontestable de l'accessibilité du vecteur d'état entier. De là, le processus d'identification peut se séparer et s'effectuer en première étape. Puis, on procède pour l'observation d'état, et ainsi notre tâche se facilite énormément.

Pour l'étape d'identification des paramètres de système, on

dispose d'un système adaptatif à modèle de référence ayant la même représentation nonminimale. Ensuite, l'équation de l'erreur du système entier est étudiée à partir de la condition de stabilité asymptotique tout en disposant d'une fonction quadratique de Lyapunov en termes de l'erreur de système, de même que les erreurs de paramètres de système. D'où, on retire des lois adaptatives de sorte que la stabilité asymptotique du système et la propriété d'identification soient accomplies. Nous indiquons ici que deux observateurs d'état différents sont conçus. L'un pour des systèmes continus qui utilisent le principe de l'observateur asymptotique de Leuenberger, et l'autre pour le système discret qui utilise le principe de l'observateur paramétrisé.

En chapitre 5, nous terminons notre thèse par la présentation d'une conclusion générale recapitulant le travail effectué ici; ainsi que de futures recherches que nous croyons susceptibles d'être d'intérêt croissant dans le domaine d'identification et d'estimation d'une part, et dans le domaine des systèmes adaptatifs à modèle de référence de l'autre.

CHAPITRE II

IDENTIFICATION DES COVARIANCES DE BRUIT DU SYSTEME ET DE L'OBSERVATION

2.0 Introduction :

Dans ce chapitre une procédure d'identification des covariances de bruit est développée pour des systèmes linéaires continus ou discrets, variants ou invariants dans le temps. La matrice du système A est supposée être stable pour garantir la stationnarité du processus d'observation "z". Pourtant, cette contrainte peut être enlevée en considérant uniquement les covariances directes et rétrogrades du processus d'innovation $\{E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)]$ et $E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(\tau)]$ "cas continu"; $E[\tilde{z}_k\tilde{z}_k^T]$ et $E[\tilde{z}_k\tilde{z}_l^T]$, $k \geq l$ "cas discret", comme cela sera démontré ultérieurement dans le chapitre.

La technique proposée est essentiellement une procédure itérative qui fournit à chaque itération des termes correctifs ΔQ et ΔR qui mettent à jour les covariances des bruits dont on donne les notations Q et R. Ensuite, la matrice de gain du filtre K(t) est adaptée. Enfin, le processus d'innovation est effectué.

A la fin de chaque itération, il faut que le bon fonctionnement du filtre, en disposant des valeurs estimées $\hat{Q}$ et $\hat{R}$, soit vérifié. Le critère qui indique la validité du filtre est la matrice des différences entre deux ensembles de covariances de sortie :

- 1) les covariances du premier ensemble sont estimées à partir de la propriété d'ergodicité des processus stationnaires. Elles sont appelées covariances estimées ou calculées "C".
- 2) L'autre ensemble représente les mêmes covariances; mais elles sont obtenues suivant leurs modèles mathématiques.

Celles-ci sont appelées: covariances modélisées avec la notation "M". Si le plus grand élément, en valeur absolue, dans cette matrice de différence "e" devient inférieur à une valeur prescrite suffisamment petite et si le test de bruit blanc du processus d'innovation est achevé, la procédure d'identification sera arrêtée.

Remarquons que les algorithmes adaptatifs sont effectués après la disparition du régime transitoire du système et du filtre, c'est-à-dire, lorsque tout deux sont arrivés au régime permanent.

2.1. Cas continu

2.1.1 Description du système :

Considérons le système linéaire continu décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \omega(t) \\ z(t) &= Cx(t) + v(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

où

$x(t)$ est un vecteur d'état à n dimension

$z(t)$ est un vecteur d'observation à m dimension.

A est une matrice de système à coefficients constants ou variants dans le temps, de dimension $(n \times n)$

C est une matrice d'observation à coefficients constants ou variants dans le temps, de dimension $(m \times n)$

$\omega(t)$ est un vecteur de bruit de système à n dimension

$v(t)$ est un vecteur de bruit d'observation à m dimension

Les vecteurs de bruit $\{\omega(t), t \geq t_0\}$ et $\{v(t), t \geq t_0\}$ sont supposés être des processus de bruit blanc, indépendants, gaussiens et de moyenne nulle.

L'état initial x_0 est supposé être gaussien, de moyenne nulle, et indépendant des processus $\{\omega(t), t \geq t_0\}$, $\{v(t), t \geq t_0\}$.

Par suite la matrice de covariance du vecteur aléatoire $[\omega(t) \ v(t) \ x_0]$ est de la forme :

$$E \begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(\tau) & v(\tau) & x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(t) & 0 & 0 \\ 0 & R(t) & 0 \\ 0 & 0 & P_0 \end{bmatrix} \delta(t-\tau) \quad (2.2)$$

où $\delta(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } t=\tau \\ 0 & \text{si } t \neq \tau \end{cases}$

représente le symbole de kronecker.

Dans la plupart des applications, les corrélations entre les composantes de chaque vecteur de bruit ω et v sont nulles ou très faibles. Donc, la structure des matrices de covariance de bruit Q et R est supposée être de forme diagonale. Nous nous plaçons dans cet aspect. Toutefois, cette supposition est faite uniquement pour simplifier les algorithmes d'identification. Au cas où des fortes corrélations existent entre les composantes, l'extension de la technique est directe.

2.1.2 Termes de corrections :

En vue de l'indisponibilité des valeurs réelles des covariances de bruit Q et R ; des valeurs erronées $\bar{Q}, \bar{R}$ (la barre

supérieure affectée aux caractères indique des paramètres ou des signaux erronés) seront désignées à la place. Celles-ci seront modifiées en disposant des incréments des matrices de covariances ΔQ et ΔR (appelées matrices de correction ou termes correctifs) calculées au bout de chaque itération du processus d'identification tel que, à la fin de l'itération "k", nous aurons

$$\begin{aligned}\bar{Q}_k(t) &= \bar{Q}_{k-1}(t) + \Delta Q(t) \\ \bar{R}_k(t) &= \bar{R}_{k-1}(t) + \Delta R(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Les termes de corrections ΔQ et ΔR sont supposés être les covariances des séquences d'erreur aléatoires $\Delta\omega$, Δv . Par suite, les vecteurs aléatoires réels ω et v pourraient s'écrire :

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \bar{\omega}(t) + \Delta\omega \\ v(t) &= \bar{v}(t) + \Delta v\end{aligned}\tag{2.4}$$

où $\bar{\omega}$ et $\bar{v}$ représentent les vecteurs de bruit erronés qui correspondent aux covariances $\bar{Q}, \bar{R}$.

Les séquences de bruit $\Delta\omega$ et Δv sont supposées être des séquences de bruit blanc, gaussiennes, indépendantes et centrées :

$$E[\Delta\omega(t)] = E[\Delta v(t)] = 0\tag{2.5}$$

et de covariances

$$E \left[\begin{bmatrix} \Delta\omega(t) \\ \Delta v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\omega^T(\tau) & \Delta v^T(\tau) \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \Delta Q & 0 \\ 0 & \Delta R \end{bmatrix} \delta(t-\tau)\tag{2.6}$$

D'ailleurs, elles sont statistiquement indépendantes de l'état initial x_0 de même que des séquences aléatoires $\bar{\omega}$ et $\bar{v}$ telles que :

$$\begin{aligned}
E[\omega(t)\Delta\omega^T(\tau)] &= 0 \\
E[\omega(t)\Delta v^T(\tau)] &= 0 \\
E[v(t)\Delta\omega^T(\tau)] &= 0 \\
E[v(t)\Delta v^T(\tau)] &= 0 \\
E[x(t_0)\Delta\omega^T(\tau)] &= 0 \\
E[x(t_0)\Delta v^T(\tau)] &= 0
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} E[\omega(t)\Delta\omega^T(\tau)] &= 0 \\ E[\omega(t)\Delta v^T(\tau)] &= 0 \\ E[v(t)\Delta\omega^T(\tau)] &= 0 \\ E[v(t)\Delta v^T(\tau)] &= 0 \\ E[x(t_0)\Delta\omega^T(\tau)] &= 0 \\ E[x(t_0)\Delta v^T(\tau)] &= 0 \end{aligned}} \right\} \quad (2.7)$$

A la lumière de l'argument précédent, les équations du modèle de système s'écrivent (en supprimant, sans perte de généralité, le terme " $B(t)u(t)$ " entièrement connu):

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}(t) &= A(t) \bar{x}(t) + \bar{\omega}(t) + \Delta\omega(t) \\
z(t) &= C(t) \bar{x}(t) + \bar{v}(t) + \Delta v(t)
\end{aligned}
\quad (2.8)$$

2.1.3 Les équations de filtre :

Puisque les valeurs initiales des covariances de bruit Q et R sont inévitablement en erreur soit à cause du manque d'information soit à l'incertitude d'information, notre estimé ne sera plus optimal. Il sera, plutôt, un estimé moins satisfaisant (sous optimal) et donné la notation $\hat{\bar{x}}(t)$. L'équation du filtre, dans ce cas, est :

$$\dot{\hat{\bar{x}}}(t) = A\hat{\bar{x}}(t) + \bar{K}[z(t) - C\hat{\bar{x}}(t)] \quad (2.9)$$

où le gain matriciel constant $\bar{K}$ est le gain stationnaire de Kalman donné par :

$$\bar{K} = (\hat{P}_c)_s C^T \bar{R}^{-1} \quad (2.10)$$

$(\hat{P}_c)_s$ est la valeur stationnaire de la covariance d'erreur calculée

à partir de l'équation différentielle non-linéaire de Riccati :

$$\dot{\tilde{P}}_c = A\tilde{P}_c(t) + \tilde{P}_c(t)A^T - \tilde{P}_c(t)C^T\bar{R}^{-1}C\tilde{P}_c(t) + \bar{Q} \quad (2.11)$$

avec, comme conditions initiales:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= E[x(t_0)] = x_0 \\ \tilde{P}_c(t_0) &= E[x(t_0)x(t_0)] = P_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.1.4 Formulation de problème :

L'idée principale de la méthode d'identification présentée ici, est d'effectuer la corrélation directe d'un vecteur formé du processus de mesure z et du processus d'innovation $\tilde{z}$ tout en considérant uniquement les covariances diagonales s'y trouvant comme suit :

$$E \left[\begin{bmatrix} z(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix}^T \right] = \underset{\text{diag}}{\begin{bmatrix} E[z(t)z^T(t)] & 0 \\ 0 & E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)] \end{bmatrix}} \quad (2.13)$$

D'abord, les valeurs estimées des covariances sont effectuées à partir de la propriété d'ergodicité des processus stationnaires z et $\tilde{z}$. Ensuite, nous en établissons les expressions mathématiques (covariances modelisées). Celles-ci sont des fonctions des paramètres structuraux et statistiques du système (A , C , $\bar{Q}$, $\bar{R}$, ΔQ et ΔR). L'écart entre les deux ensembles de covariances "e" sera une fonction linéaire des termes de corrections ΔQ et ΔR . En minimisant une forme quadratique de ceci et à l'aide d'une technique d'optimisation statique, les covariances de bruit Q, R se reproduiront de sorte que les deux ensembles de covariances décrites ci-dessus s'approchent éventuellement.

En mettant l'argument précédent en termes mathématiques, on peut aborder le problème de la façon suivante :

Supposons que le filtre agisse dans la $i^{\text{ème}}$ période de son fonctionnement, il est souhaitable de calculer les incréments des covariances de bruit (les termes de correction) ΔQ et ΔR tels que la fonction coût J :

$$J[e(t)] = \text{Tr}[e(t)e^T(t)] \quad (2.14)$$

soit minimisée.

Comme signalé auparavant la matrice d'erreur "e" est donnée par:

$$e(t) = \left[\begin{array}{c|c} E[z(t)z^T(t)] & 0 \\ \hline 0 & E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)] \end{array} \right]_C = \left[\begin{array}{c|c} E[z(t)z^T(t)] & 0 \\ \hline 0 & E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)] \end{array} \right]_M \quad (2.15)$$

où

$[\cdot]_C$, dénote les covariances calculées qui sont estimées depuis la propriété érgodique des processus stationnaires z et $\tilde{z}$.

$[\cdot]_M$, dénote les covariances modélisées dont les valeurs sont obtenues à partir de leurs modèles mathématiques et la connaissance des paramètres du système A , C , $\bar{Q}$, et $\bar{R}$.

D'après (2.8) et (2.9), le vecteur formé de $z(t)$ et $\tilde{z}(t)$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx(t) + \bar{v}(t) + \Delta v(t) \\ \hat{C}\tilde{x}(t) + \bar{v}(t) + \Delta v(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

où $\tilde{x}(t)$ est l'erreur d'estimation qui peut être obtenue à partir des équations d'état du système et du filtre décrites par (2.8) et (2.9) respectivement :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= [A-KC]\tilde{x}(t) + \bar{\omega}(t) + \Delta\omega(t) - \bar{K}[\bar{v}(t) + \Delta v(t)] \\ \text{avec les conditions initiales :} \\ x(t_0) &= x(t_0) - x(t_0) = 0. \end{aligned} \right\} (2.17)$$

Les solutions de l'équation différentielle d'état (2.1) et celle de l'erreur d'estimation (2.17) sont connues sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)[\bar{\omega}(t-\tau) + \Delta\omega(t-\tau)]d\tau \\ \tilde{x}(t) &= \int_{t_0}^t \Phi_1(t-\tau)[\bar{\omega}(t-\tau) + \Delta\omega(t-\tau) - \bar{K}\bar{v}(t-\tau) - \bar{K}\Delta v(t-\tau)]d\tau \end{aligned} \right\} (2.18)$$

où les matrices de transitions $\Phi(t-\tau)$ et $\Phi_1(t-\tau)$ satisfont les équations différentielles :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}(t-\tau) &= A\Phi(t-\tau), \quad \Phi(0) = I \\ \dot{\Phi}_1(t-\tau) &= [A-\bar{K}C]\Phi_1(t-\tau), \quad \Phi_1(0) = I \end{aligned} \right\} (2.19)$$

2.1.4a La matrice de covariance de la sortie $E[z(t)z^T(t)]$:

Soit C_1 est la covariance estimée ou calculée du vecteur de mesure $z(t)$. Sa valeur est effectuée à partir de la propriété d'ergodicité du processus $z(t)$:

$$E[z(t)z^T(t)]_C = C_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i=0}^N z(t_i)z^T(t_i) \quad (2.20)$$

où N est le nombre d'échantillons du signal $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ dans un intervalle d'observation.

Le modèle mathématique de celle-ci est :

$$E[z(t)z^T(t)]_M = CP_X C^T + \bar{R} + \Delta R \quad (2.21)$$

où $P_X(t) = E[x(t)x^T(t)]$ est la matrice de covariance du vecteur d'état $x(t)$ qui satisfait l'équation dynamique matricielle :

$$\dot{P}_X(t) = AP_X(t) + P_X(t)A^T + \bar{Q} + \Delta Q \quad (2.22)$$

qui a pour solution :

$$P_X(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f - \tau) [\bar{Q} + \Delta Q] \Phi^T(t_f - \tau) d\tau \quad (2.23)$$

puisque l'état initial $P_X(t_0)$ est considéré nul ce qui n'enlève rien à la généralité du problème.

La borne finale t_f dans l'intégrale (2.23) est prise assez large afin que la covariance d'état ait atteint sa valeur stationnaire (P_{X_s}).

En reportant (2.22) dans l'expression (2.21), on a alors :

$$E[z(t)z^T(t)]_M = M_1 + \Delta R + C \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f - \tau) \Delta Q \Phi^T(t_f - \tau) d\tau C^T \quad (2.24)$$

où

$$M_1 = \bar{R} + C \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f - \tau) \bar{Q} \Phi^T(t_f - \tau) d\tau C^T \quad (2.25)$$

L'expression (2.25) est calculée d'avance à partir des valeurs des paramètres C , $\Phi(t-\tau) = e^{A(t-\tau)}$, $\bar{Q}$ et $\bar{R}$.

2.1.4b La matrice de covariance de l'innovation $E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)]$:

Si le filtre fonctionne d'une façon optimale, $\tilde{z}(t)$ sera une séquence de bruit blanc centré qui peut être décrite par les deux premiers moments :

$$E[\tilde{z}(t)] = 0$$

$$\text{Cov}\{\tilde{z}(t), \tilde{z}(\tau)\} = E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(\tau)] = R\delta(t-\tau)$$

$$= R \quad \text{si } t = \tau$$

$$= 0 \quad \text{si } t \neq \tau$$

Or, si le filtre ne fonctionne pas dans une optimalité, l'expression de covariance ci-dessus n'est plus valable. Une autre pourrait être obtenue en disposant de $\tilde{z}$ donné par (2.16) comme nous allons montrer en ce qui suit.

La covariance calculée ou estimée du processus d'innovation, en utilisant la propriété érgodique de $\tilde{z}(t)$, est :

$$C_2 = E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)]_C = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i=1}^N \tilde{z}(t_i)\tilde{z}^T(t_i) \quad (2.26)$$

où N est le nombre d'échantillons $\{\tilde{z}_1 \quad \tilde{z}_2 \quad \dots \quad \tilde{z}_n\}$ dans un intervalle d'observation.

Le modèle mathématique de la covariance d'innovation peut être obtenu comme :

$$\begin{aligned} E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)]_M &= E\{[C\tilde{x}(t)+\bar{v}(t)+\Delta v(t)][C\tilde{x}(t)+\bar{v}(t)+\Delta v(t)]^T\} \\ &= C\tilde{P}(t)C^T - 1/2C\bar{K}(\bar{R}+\Delta R) - 1/2(\bar{R}+\Delta R)\bar{K}^TC^T + \bar{R}+\Delta R \end{aligned} \quad (2.27)$$

où $\tilde{P}(t) \equiv E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)]$ est la variance d'erreur d'estimation qui satisfait l'équation différentielle matricielle :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}(t) &= [A-\bar{K}C]\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)[A-\bar{K}C]^T + \bar{K}(\bar{R}+\Delta R)\bar{K}^T + \bar{Q} + \Delta Q \\ \text{avec} \quad \tilde{P}(t_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

dont la solution donne la covariance d'erreur d'estimation au régime stationnaire $\tilde{P}_s$ du fonctionnement du filtre :

$$\begin{aligned}
P_S = & \int_{t_0}^{t_f} \Phi_1(t_f - \tau) [\bar{K} \bar{R} \bar{K}^T + Q] \Phi_1^T(t_f - \tau) d\tau \\
& + \int_{t_0}^{t_f} \Phi_1(t_f - \tau) [\bar{K} \Delta R \bar{K}^T + \Delta Q] \Phi_1^T(t_f - \tau) d\tau
\end{aligned} \quad (2.29)$$

Il faut préciser que, si les covariances de bruit Q et R étaient parfaitement connues et le filtre fonctionnait dans une optimalité, les trois premiers termes dans l'expression mathématique de la covariance modélisée donnée par (2.27) s'annuleraient et cette dernière se réduit à R ; ce qui conforme au fait que la séquence d'innovation du filtre optimal est un processus bruit blanc gaussien centré et de covariance R .

En utilisant (2.29) dans l'équation (2.27), nous aurons :

$$\begin{aligned}
E[\tilde{Z}(t)\tilde{Z}^T(t)]_M = & M_2 + (\Delta R - 1/2 \bar{C} \bar{K} \Delta R - 1/2 \Delta R \bar{K}^T \bar{C}^T) \\
& + \int_{t_0}^{t_f} \Phi_1(t_f - \tau) \bar{K} \Delta R \bar{K}^T \Phi_1^T(t_f - \tau) d\tau \\
& + \int_{t_0}^{t_f} \Phi_1(t_f - \tau) \Delta Q \Phi_1^T(t_f - \tau) d\tau
\end{aligned} \quad (2.30)$$

où

$$M_2 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi_1(t_f - \tau) [\bar{K} \bar{R} \bar{K}^T + Q] \Phi_1^T(t_f - \tau) d\tau - 1/2 \bar{C} \bar{K} \bar{R} - 1/2 \bar{R} \bar{K}^T \bar{C}^T + \bar{R} \quad (2.31)$$

Les matrices M_1 et M_2 dans les équations (2.25) et (2.31) sont calculées d'abord en se servant des valeurs initiales des covariances de bruit Q et R . Ce sont les covariances modélisées calculées à la base des paramètres erronés $\bar{Q}, \bar{R}$.

Celles-ci sont soustraites des covariances estimées C_1 et C_2 . Les différences sont des matrices d'erreurs qui se prêtent utilement dans la procédure d'optimisation pour l'obtention des

termes de correction ΔQ et ΔR .

Dans ce qui suit, un résumé de ce qui a été effectué est présenté :

- i) Les covariances calculées, estimées d'après la propriété d'ergodicité des processus $z(t)$ et $\hat{z}(t)$, sont :

$$C = E \left\{ \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^T(t) & \hat{z}^T(t) \end{bmatrix} \right\}_{diag} = \begin{bmatrix} E[z(t)z^T(t)] & 0 \\ 0 & E[\hat{z}(t)\hat{z}^T(t)] \end{bmatrix}_C \quad (2.32)$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/N) \sum_{i=1}^N z(t_i)z^T(t_i) & 0 \\ 0 & (1/N) \sum_{i=1}^N \hat{z}(t_i)\hat{z}^T(t_i) \end{bmatrix}$$

- ii) Les covariances modélisées, estimées selon leurs expressions mathématiques sont les fonctions des paramètres de système A , C , $\bar{Q}$ et $\bar{R}$ de même que des matrices de correction ΔQ et ΔR :

$$M = \begin{bmatrix} E[z(t)z^T(t)] & 0 \\ 0 & E[\hat{z}(t)\hat{z}^T(t)] \end{bmatrix}_M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \Delta R & 0 \\ 0 & \Delta R - 1/2 \bar{C} \bar{K} \Delta R - 1/2 \Delta R \bar{K}^T \bar{C}^T + \int_{t_0}^{t_f} \bar{C} \Phi_1(t_f - \tau) \bar{K} \Delta R \bar{K}^T \Phi_1^T(t_f - \tau) \bar{C}^T d\tau \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} C \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f - \tau) \bar{Q} \Phi^T(t_f - \tau) d\tau C^T & 0 \\ 0 & C \int_{t_0}^{t_f} \Phi_1(t_f - \tau) \Delta Q \Phi_1^T(t_f - \tau) d\tau C^T \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Nous précisons de nouveau que si nous disposons de valeurs réelles des covariances de bruit Q et R en (3.46), les deux matrices de covariance C et M s'égalisent. Néanmoins, étant donné que les valeurs initiales $\bar{Q}$ et $\bar{R}$ sont inévitablement en erreur, la covariance estimée $C(t)$ et la covariance modelisée $M(t)$ ne seront pas identiques et l'écart entre elles est la matrice d'erreur "e" où:

$$e = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta R & 0 \\ 0 & \Delta R - 1/2 C \bar{K} \Delta R - 1/2 \Delta R \bar{K}^T C^T + \int_{t_0}^{t_f} C \Phi_1(t_f - \tau) \bar{K} \Delta R \bar{K}^T \Phi_1^T(t_f - \tau) C^T d\tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f - \tau) Q \Phi^T(t_f - \tau) d\tau C^T & 0 \\ 0 & C \int_{t_0}^{t_f} \Phi_1(t_f - \tau) \Delta Q \Phi_1^T(t_f - \tau) d\tau C^T \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

2.1.5 Technique d'optimisation :

Soit,

$$S_i = C_i - M_i, \quad i = 1, 2$$

la matrice d'erreur donnée par (2.34) peut s'écrire :

$$e = S - T - U$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \Delta R & 0 \\ 0 & \Delta R - 1/2 C \bar{K} \Delta R - 1/2 \Delta R \bar{K}^T C^T + \int_{t_0}^{t_f} C \Phi_1(t_f - \tau) \bar{K} \Delta R \bar{K}^T \Phi_1^T(t_f - \tau) C^T d\tau \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} C \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f - \tau) Q \Phi^T(t_f - \tau) d\tau C^T & 0 \\ 0 & C \int_{t_0}^{t_f} \Phi_1(t_f - \tau) \Delta Q \Phi_1^T(t_f - \tau) d\tau C^T \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Equation (2.34) montre que la matrice d'erreur "e" est symétrique et fonction linéaire des incréments des matrices de covariances ΔQ et ΔR . Donc on pourrait formuler le problème comme suit :

Trouver les termes correctifs (matrices diagonales) ΔQ et ΔR tels que la fonction de coût quadratique :

$$J[e] = \text{Tr}[e(t)e^T(t)] \quad (2.36)$$

soit minimisée.

Prenons la dérivée de l'équation (2.36) par rapport aux matrices diagonales ΔQ et ΔR et en l'égalisant à zéro, deux ensembles d'équations sont obtenues.

Le critère d'écart J peut s'écrire :

$$J = \text{Tr}[S^2 + T^2 + U^2 - 2ST + 2TU - 2US] \quad (2.37)$$

En utilisant les matrices gradient, les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \partial J / \partial \Delta R &= (\partial / \partial \Delta R) \{ \text{Tr}[T^2 - 2ST + 2TU] \} \\ &= 2\Delta R - 2(\bar{C}\bar{K})_d \Delta R + 1/2 [(\bar{C}\bar{K})^T \bar{C}\bar{K}]_d \Delta R + [(\bar{C}\bar{K})^T \Delta R (\bar{C}\bar{K})^T]_d \\ &\quad + \int_{t_0}^t [(D\Delta R D^T + D^T \Delta R D)_d + (D\Delta R E^T + E^T \Delta R D)_d] d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t [D^T \int_{t_0}^t (D\Delta R D^T) d\tau \cdot D]_d d\tau + \int_{t_0}^t [D^T \int_{t_0}^t (G\Delta Q G^T) d\tau \cdot D]_d d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t [F\Delta Q F^T + G\Delta Q G^T - G\Delta Q H^T]_d d\tau - (S_1 + S_2 - S_2 \bar{C}\bar{K})_d \\ &\quad - \int_{t_0}^t (D^T \Delta R D)_d d\tau = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\partial J / \partial \Delta Q = (\partial / \partial \Delta Q) \{ \text{Tr}[U^2 + 2UT - 2SU] \}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^t \{F^T \Delta R F + G^T \Delta R G - G^T \Delta R H\}_d d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^t [G^T \int_{t_0}^t (D \Delta R D^T) d\tau \cdot G]_d d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^t [F^T \int_{t_0}^t (F \Delta Q F^T) d\tau \cdot F + G^T \int_{t_0}^t (G \Delta Q G^T) d\tau \cdot G]_d d\tau \\
&\quad - \int_{t_0}^t [F^T S_1 F + G^T S_2 G]_d d\tau = 0
\end{aligned} \tag{2.39}$$

les notations $[.]_d$ et $(.)_d$ dénotent des matrices diagonales se constituant uniquement des éléments diagonaux de la matrice entre paranthèses.

Les matrices D, E, F, G et H sont définies comme,

$$\begin{aligned}
D &\equiv D(t-\tau) \equiv C \Phi_1(t-\tau) \bar{K} \\
E &\equiv E(t-\tau) \equiv (C \bar{K})^T D = \bar{K}^T C^T C \cdot \Phi_1(t-\tau) \bar{K} \\
F &\equiv F(t-\tau) \equiv C \Phi(t-\tau) \bar{K} \\
G &\equiv G(t-\tau) \equiv C \Phi_1(t-\tau) \\
H &\equiv H(t-\tau) \equiv (C \bar{K})^T \cdot C \Phi_1(t-\tau)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Puisque ΔQ et ΔR sont supposés être diagonaux -ce qui est le cas dans la plupart des applications- les ensembles d'équations (2.38) et (2.39) peuvent s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \Psi & \Theta \\ \Theta^T & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta R \\ \delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

où les vecteurs δR et δQ se composent des éléments diagonaux des matrices diagonales ΔR et ΔQ respectivement, i.e.,

$$\delta R = \begin{bmatrix} \delta R_1 \\ \delta R_2 \\ \vdots \\ \delta R_m \end{bmatrix} ; \quad \delta Q = \begin{bmatrix} \delta Q_1 \\ \delta Q_2 \\ \vdots \\ \delta Q_n \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Ψ , est une matrice symétrique de dimension $(m \times m)$ définie par :

$$\begin{aligned} \Psi = & 2I - 2(C\bar{K})_d + 1/2[(C\bar{K})^T(C\bar{K})]_d + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [(e_i^T C \bar{K} e_j)(e_i^T C \bar{K} e_j) \\ & + \int_{t_0}^t [(e_i^T D e_j)^2 + (e_i^T D^T e_j)^2 - (e_i^T D e_j)(e_i^T E^T e_j) \\ & - (e_i^T D^T e_j)(e_i^T E e_j)]_d d\tau \} E_{ij} + \int_{t_0}^t (d_i * d_j^T)_{*} d\tau \cdot E_m(d_i * d_j^T)_{*} d\tau \end{aligned} \quad (2.43)$$

la matrice Θ est de dimension $(m \times n)$ et s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \Theta \equiv & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \{ [(e_i^T F e_j)^2 - (e_i^T G e_j)(e_i^T H e_j)] d\tau E_{ij} \\ & + \int_{t_0}^t (d_i * d_j^T)_{*} d\tau \cdot E_{mn}(g_i * g_j^T)_{*} d\tau \} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Γ = une matrice symétrique de dimension $(n \times n)$

$$\begin{aligned} \Gamma \equiv & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \{ (f_i * f_j^T)_{*} d\tau \cdot E_{nn}(f_i * f_j^T)_{*} d\tau \} \\ & + \int_{t_0}^t (g_i * g_j^T)_{*} d\tau \cdot E_{nn}(g_i * g_j^T)_{*} d\tau \} \end{aligned} \quad (2.45)$$

b_1 = un vecteur de dimension m

$$b_1 = \{ [S_1 + S_2 - S_2(C\bar{K})]_d + \int_{t_0}^t (D^T S_2 D)_d d\tau \} \underline{e} \quad (2.46)$$

b_2 = un vecteur de dimension n , où

$$b_2 = \{ \int_{t_0}^t (F^T S_1 F + G^T S_2 G)_d d\tau \} \cdot \underline{e} \quad (2.47)$$

où

m = le nombre d'éléments à identifier de ΔR

n = le nombre d'éléments à estimer de ΔQ .

2.1.6 Technique d'identification modifiée :

La contrainte de stabilité asymptotique faite à l'égard de la matrice de système A dans l'équation d'état (2.1) peut être enlevée. Dans ce cas le processus d'identification peut s'effectuer à partir d'un vecteur composé. Celui-ci est formé des résidus à deux instants décalés, c'est-à-dire, $\tilde{z}(t)$ et $\tilde{z}(\tau)$. Ensuite, les corrélations directe et rétrograde du résidu $\tilde{z}(t)$ sont effectuées de la façon suivante :

$$E \left[\begin{array}{c} \tilde{z}(t) \\ \tilde{z}(\tau) \end{array} \right] \begin{array}{c} \tilde{z}^T(t) \\ \tilde{z}^T(\tau) \end{array} \Big| \begin{array}{c} \tilde{z}^T(t) \\ \tilde{z}^T(\tau) \end{array} \Big] = \begin{array}{c|c} E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)] & 0 \\ \hline 0 & E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(\tau)] \end{array} \quad \text{diag} \quad (2.48)$$

le critère d'écart J est :

$$J = \text{Tr} [e(t) e^T(t)]$$

où

$$e(t) = \begin{array}{c|c} E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)] & 0 \\ \hline 0 & E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(\tau)] \end{array} C - \begin{array}{c|c} E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)] & 0 \\ \hline 0 & E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(\tau)] \end{array} M \quad (2.49)$$

L'expression mathématique de la covariance directe du processus d'innovation $E[z(t)z^T(t)]$ a été montrée par (2.27) :

$$E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)]_m = C\tilde{P}(t)C^T - 1/2 C\bar{K}(\bar{R}+\Delta R) - 1/2(\bar{R}+\Delta R)\bar{K}^TC^T + (\bar{R}+\Delta R) \quad (2.50)$$

Alors que celle de la covariance rétrograde est obtenue comme,

$$E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(\tau)]_m = C\Phi_1(t-\tau) \left[\int_{t_0}^{\tau} \Phi_1(\tau-\lambda) [\bar{K}\Delta R\bar{K}^T + \Delta Q] \right. \\ \left. * \Phi_1^T(\tau-\lambda) C^T d\lambda + \bar{K}\Delta R \right] \quad (2.51)$$

Il faut noter que lorsque le filtre fonctionne optimalement, les termes de correction ΔQ et ΔR seront nuls et l'équation (2.51) se réduira à zéro ce qui est conforme aux caractéristiques statistiques de la séquence d'innovation $\tilde{z}(t)$ du filtre optimal.

Les covariances calculées ou estimées en exploitant la propriété d'ergodicité de $z(t)$ sont :

$$C = E \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}^T(t) & \tilde{z}^T(\tau) \end{bmatrix} \right\}_d = \left[\begin{array}{c|c} E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)] & 0 \\ \hline 0 & E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(\tau)] \end{array} \right]_c$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} (1/N) \sum_{i=1}^N \tilde{z}(t_i)\tilde{z}^T(t_i) & 0 \\ \hline 0 & (1/N) \sum_{i=1}^N \tilde{z}(t_i)\tilde{z}^T(t_i-\tau) \end{array} \right]$$

(2.52)

où N est le nombre d'échantillons $\tilde{z}(t_1), \tilde{z}(t_2), \dots, \tilde{z}(t_N)$ dans chaque période d'observation T .

Les modèles mathématiques correspondants sont :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)] & 0 \\ \hline 0 & E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(\tau)] \end{array} \right]_M = \left[\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array} \right]$$

$$+ \left[\begin{array}{c|c} \Delta R - 1/2 \bar{C} \bar{K} \Delta R - 1/2 \Delta R \bar{K}^T C^T + \int_{t_0}^t C \Phi_1(t-\sigma) \bar{K} \Delta R \bar{K}^T \Phi_1^T(t-\sigma) C^T d\sigma & 0 \\ \hline 0 & C \Phi_1(t-\tau) \int_{t_0}^t \Phi_1(\tau-\lambda) \bar{K} \Delta R \bar{K}^T \Phi_1^T(\tau-\lambda) C^T d\lambda - C \Phi_1^T(t-\tau) K \Delta R \end{array} \right]$$

$$+ \left[\begin{array}{c|c} \int_{t_0}^t C \Phi_1(t-\sigma) \Delta Q \Phi_1^T(t-\sigma) C^T d\sigma & 0 \\ \hline 0 & \int_{t_0}^t C \Phi_1(t-\lambda) \Delta Q \Phi_1^T(t-\lambda) C^T d\lambda \end{array} \right] \quad (2.53)$$

où M_1 donné par (3.38) et M_2 égale à zéro.

En suivant la même procédure que celle du paragraphe précédent pour obtenir les matrices incréments ΔQ et ΔR , nous aurons la même forme de l'équation vectorielle (2.41)

$$\begin{bmatrix} \Psi & \Theta \\ \Theta^T & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta R \\ \delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

où

Ψ = une matrice de dimension $m \times m$

$$\begin{aligned} \equiv & [I - 2(C\bar{K})_d + 1/2[(C\bar{K})^T(C\bar{K})]_d + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (e_i^T C \bar{K} e_j)(e_i^T C \bar{K} e_j) \\ & + E_{ij} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \{ (e_i^T D(t-\sigma) e_j)^2 - (e_i^T D(t-\sigma) e_j)(e_i^T E^T(t-\sigma) e_j)_d \} E_{ij} \\ & + E_{ij} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \{ (e_i^T D^T(t-\tau) D(t-\lambda) e_j) - (e_i^T D^T(\tau-\lambda) e_j) d\lambda \} E_{ij} \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \{ \int [d_{i*}(t-\sigma) d_{j*}^T(t-\sigma)]_d E_m \int [d_{i*}(t-\sigma) d_{j*}^T(t-\sigma)]_d d\sigma \\ & + \int_{t_0}^t [d_{i*}(t-\lambda) d_{j*}^T(t-\lambda)]_d d\lambda \cdot E_m \int_{t_0}^t [d_{i*}(t-\lambda) d_{j*}^T(t-\lambda)]_d d\lambda \} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Et Θ est une matrice de dimension $(m \times n)$

$$\begin{aligned} \Theta \equiv & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \{ (e_i^T G^T(t-\sigma) e_j)^2 - (e_i^T G(t-\sigma) e_j)(e_i^T H(t-\sigma) e_j)_d d\sigma \\ & - \int_{t_0}^t [(e_i^T G(\tau-\lambda) e_j)(e_i^T G^T(t-\lambda) D(t-\lambda) e_j)]_d d\lambda \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \{ \int [d_{i*}(t-\sigma) d_{j*}^T(t-\sigma)]_d d\sigma E_{mn} \int [g_{i*}(t-\sigma) g_{j*}^T(t-\sigma)]_d d\sigma \} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{t_0}^t [d_{i*}(\tau-\lambda) d_{j*}^T(t-\lambda)]_d d\lambda E_{mn} \int_{t_0}^t [g_{i*}(\tau-\lambda) g_{j*}^T(t-\lambda)]_d d\lambda \right\} \quad (2.55)$$

Γ est une matrice de dimension $(n \times n)$ et définie par

$$\begin{aligned} \Gamma \equiv & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{t_0}^t [g_{i*}(t-\sigma) g_{j*}^T(t-\sigma)]_d E_{mn} \int_{t_0}^t [g_{i*}(t-\sigma) g_{j*}^T(t-\sigma)]_d d\sigma \right. \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{t_0}^t [g_{i*}(\tau-\lambda) g_{j*}^T(\tau-\lambda)]_d d\lambda E_{mn} \int_{t_0}^t [g_{i*}(\tau-\lambda) g_{j*}^T(\tau-\lambda)]_d d\lambda \right\} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Le vecteur b_1 est de dimension m et défini comme

$$b_1 \equiv \left\{ S_1 - S_1(\bar{K}) + \int_{t_0}^t D^T(t-\sigma) S_1 G(t-\sigma) d\sigma + \int_{t_0}^t D^T(t-\lambda) S_2 G(\tau-\lambda) d\lambda \right\} e \quad (2.57)$$

et b_2 un vecteur à n dimension et donné par

$$b_2 \equiv \left\{ \int_{t_0}^t G^T(t-\sigma) S_1 G(t-\sigma) d\sigma + \int_{t_0}^t G^T(\tau-\lambda) S_2 G(\tau-\lambda) d\lambda \right\} e \quad (2.58)$$

où d_k^* = la transposée de la $k^{\text{ème}}$ vecteur ligne de la matrice D , la même notation s'applique aux autres matrices. Les vecteurs $\underline{e}_1$, $\underline{e}_j$ ainsi que les matrices $\underline{E}_{ij}$, $\underline{E}_{mn}$ et $\underline{E}$ sont définis dans le cas discret.

2.2 Cas discret :

Le système discret peut être décrit à l'aide du modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_k x_k + \omega_k \\ z_k &= C_k x_k + v_k\end{aligned}\tag{2.59}$$

où $k \geq 0$, représente des instants successifs du temps.

x_k , l'état du système, de dimension n

z_k , la mesure du système, de dimension m

ω_k , le bruit de processus, de dimension n .

v_k , le bruit d'observation, de dimension m .

Les matrices A_k , C_k sont de dimensions respectives $(n \times n)$, $(m \times n)$.

Les séquences de bruit $\{\omega(t), t \geq t_0\}$, $\{v(t), t \geq t_0\}$ sont supposées être des séquences de bruit blanc, gaussiennes et de moyenne nulle.

$$\begin{aligned}E[\omega(k)] &= E[v(k)] = 0 \\ E[\omega(k) \omega^T(l)] &= Q \delta(k-l) \\ E[v(k) v^T(l)] &= R \delta(k-l) \\ E[\omega(k) v^T(l)] &= 0\end{aligned}\tag{2.60}$$

Egalement, nous avons,

$$E[\omega(k) x^T(0)] = E[v(k) x^T(0)] = 0$$

où la matrice R est définie positive et Q semi-définie positive.

L'état initial $x(0)$ est aussi un processus gaussien des moments :

$$E[x(0)] = x_0 ; E[x(0) x^T(0)] = P_0$$

L'équation dynamique du filtre est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{\bar{x}}_{k/k} &= \hat{\bar{x}}_{k/k-1} + \bar{K}_k^f [z_k - C_k \hat{\bar{x}}_{k/k-1}] \\ \text{et} \quad \hat{\bar{x}}(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

où $\hat{\bar{x}}(k)$ est la valeur estimée du vecteur d'état du système bruité $x(k)$. Les valeurs réelles Q et R sont inconnues et des valeurs erronées sont utilisées à la place. Ces valeurs sont mises à jour à la fin de chaque période d'observation à travers des matrices correctives ΔQ et ΔR tel que à la fin du k ème intervalle nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_k &= \bar{\omega}_{k-1} + \Delta \omega_k \\ \bar{v}_k &= \bar{v}_{k-1} + \Delta v_k \end{aligned} \quad (2.62)$$

Les corrections ΔQ_k et ΔR_k sont calculées de sorte que l'indice d'erreur J_k donné par :

$$J[e(k)] = \text{Tr}[e(k) e^T(k)] \quad (2.63)$$

soit minimisé; ou la matrice d'erreur $e(k)$ est donnée par :

$$e_k = \left[\begin{array}{c|c} E[z_k z_k^T] & 0 \\ \hline 0 & E[z_k z_k^T] \end{array} \right]_C - \left[\begin{array}{c|c} E[z_k z_k^T] & 0 \\ \hline 0 & E[z_k z_k^T] \end{array} \right]_M \quad (2.64)$$

où comme signalé antérieurement, $[.]_C$ et $[.]_M$ dénotent respectivement les covariances calculée et modelisée.

Les covariances erronées Q_k et R_k approcheraient leurs valeurs réelles éventuellement lorsque k augmente. Dans ce qui suit nous allons présenter la procédure d'identification en sa version discrète où les termes correctifs ΔQ_k et ΔR_k sont estimés successivement.

2.2.1 Position de problème

Les matrices de correction ΔQ_k et ΔR_k sont supposées être les covariances de séquences de bruit $\Delta \omega_k$ et Δv_k respectivement. Alors, les séquences de bruit réelles ω_k et v_k peuvent être écrites telles que :

$$\begin{aligned}\omega_k &= \bar{\omega}_k + \Delta \omega_k \\ v_k &= \bar{v}_k + \Delta v_k\end{aligned}\tag{2.65}$$

où $\bar{\omega}_k(k)$ et $\bar{v}_k(k)$ représentent les vecteurs erreur de bruit qui correspondent aux covariances erronnées $\bar{Q}_k$ et $\bar{R}_k$. Les séquences de bruit $\Delta \omega_k$ et Δv_k sont supposées être bruits blancs gaussiens et sont indépendantes, donc

$$\begin{aligned}E[v(k)] &= E[\omega(k)] = 0 \\ \text{et } E \left[\begin{bmatrix} \Delta \omega_k \\ \Delta v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \omega_l & \Delta v_l \end{bmatrix} \right] &= \begin{bmatrix} \Delta Q & 0 \\ 0 & \Delta R \end{bmatrix} \delta_{kl}\end{aligned}\tag{2.66}$$

De même, ces séquences de bruit sont indépendantes statistiquement des séquences $\omega(k)$ et $v(k)$ et incorrélees à l'état initial x_0 ,

$$E[\Delta \omega(k) x_0^T] = 0 ; \quad E[\Delta v(k) x_0^T] = 0\tag{2.67}$$

En nous servant des équations (2.65), le modèle de système peut se récrire comme,

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + \bar{\omega}(k) + \Delta \omega(k) \\ z(k) &= C(k)x(k) + \bar{v}(k) + \Delta v(k)\end{aligned}\tag{2.68}$$

Les équations de filtre seraient,

$$\begin{aligned}\hat{\bar{x}}(k/k) &= [I - \bar{K}^f(k)C(k)]\hat{\bar{x}}(k/k-1) + \bar{K}^f(k)z(k) \\ \hat{\bar{x}}(k+1/k) &= [A(k) - \bar{K}P(k)C(k)]\hat{\bar{x}}(k/k-1) + \bar{K}P(k)z(k)\end{aligned}\quad (2.69)$$

où $\hat{\bar{x}}(k/k)$ indique l'état filtré représentant l'étape de mise à jour du filtre tandis que $\hat{\bar{x}}(k+1/k)$ indique l'état prédit représentant l'étape de propagation.

$\bar{K}^f(k)$ est le gain stationnaire filtre de Kalman donné par,

$$\bar{K}^f(k) = \tilde{P}(k/k-1)C^T(k)[C(k)\tilde{P}(k/k-1)C^T(k) + \bar{R}(k)]^{-1}$$

et $\bar{K}P(k)$ est le gain prédit du filtre qui est, (2.70)

$$\bar{K}P(k) = \tilde{P}(k/k-1)C^T(k)[C(k)\tilde{P}(k/k-1)C^T(k) + \bar{R}(k)]^{-1}$$

où $\tilde{P}(k/k-1)$ est la covariance de l'erreur d'estimation définie comme, $\tilde{P}(k/k-1) = E[\tilde{\bar{x}}(k/k-1)\tilde{\bar{x}}^T(k/k-1)]$, qui se réduit à l'équation suivante de Riccati :

$$\tilde{P}_{k/k-1} = [A_k - \bar{K}_k^p C_k] \tilde{P}_{k-1} [A_k - \bar{K}_k^p C_k]^T + \bar{K}_{k-1}^p \bar{R}_k (\bar{K}_{k-1}^p)^T \quad (2.71)$$

Comme la plupart des applications industrielles, notre système est complètement commandable et observable; de même, la matrice de système A est stable. Sans perte de généralité, les conditions initiales x_0 et P_0 sont prises nulles. Egalement, les covariances Q et R sont de structures diagonales puisque il n'existe normalement qu'une faible corrélation ou pas, entre les composantes des vecteurs de bruit. La dynamique de l'erreur d'estimation $\tilde{\bar{x}}(k/k-1) = x(k) - \hat{\bar{x}}(k/k-1)$ peut se dériver comme,

$$\tilde{\bar{x}}_{k/k-1} = [A_k - \bar{K}_k^p C_k] \tilde{\bar{x}}_{k-1} + \bar{Q}_{k-1} - \bar{K}_{k-1}^p v_{k-1} + \Delta\omega_{k-1} - \bar{K}_{k-1}^p \Delta v_{k-1} \quad (2.72)$$

avec comme conditions initiales,

$$x(0) = x_0 = 0$$

Considérant l'indice d'erreur donné par équation (2.64), la valeur de la matrice de covariance de la sortie est obtenue depuis la propriété d'érgodicité du processus $z(t)$,

$$C_1 = \{E[z_k z_k^T]\}_C = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_k(i) z_k^T(i)$$

où N est le nombre d'échantillons dans une période d'observation.

L'expression modélisée de cette covariance est trouvée comme,

$$E[z(k) z(k)^T]_M = M_1(k) + \{C_k A_{k-1} \Delta Q A_{k-1}^T C_k^T + C_k \Delta Q C_k^T + \Delta R\} \quad (2.73)$$

$$\text{où } M_1(k) = C_k A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T C_k^T + C_k \bar{Q}_{k-1} C_k^T + \bar{R}_k$$

P_{k-1} est la covariance de l'état $x(k-1)$ telle que :

$$P_k = A(k-1)P(k-1)A^T(k-1) + \bar{Q}(k-1) + \Delta Q$$

Pour la séquence d'innovation $\tilde{z}(k-1) = z(k) - \hat{z}(k-1)$, la covariance calculée de celle-ci est

$$C_2(k) = \{E[\tilde{z}(k) \tilde{z}^T(k)]\}_C = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i=0}^N \tilde{z}_k(i) \tilde{z}_k^T(i) \quad (2.74)$$

où N est le nombre d'échantillons $\{\tilde{z}_k(1) \tilde{z}_k(2) \dots \tilde{z}_k(N)\}$ dans une fenêtre d'observation.

L'expression mathématique de cette covariance est obtenue à partir des paramètres du système comme,

$$\begin{aligned} \{E[\tilde{z}_k \tilde{z}_k^T]\}_m &\equiv M_2(k) + \{C_k [A_{k-1} - \bar{K}_{k-1}^P] \Delta Q [A_{k-1} - \bar{K}_{k-1}^P] C_k^T + C_k \Delta Q C_k^T \\ &\quad + C_k \bar{K}_{k-1}^P \Delta R (\bar{K}_{k-1}^P)^T C_k^T + \Delta R\} \end{aligned} \quad (2.75)$$

où

$$M_2(k) \equiv \{C_k [A-\bar{K}^P_{k-1} C] \tilde{P}_{k-1} [A-\bar{K}^P_{k-1} C]^T + C \bar{K}^P_{k-1} \bar{R} (\bar{K}^P_{k-1})^T C^T + C \bar{Q} C^T + \bar{R}\}$$

et

$$\tilde{P}_{k/k-1} = [A-\bar{K}^P_{k-1} C] \tilde{P}_{k-1} [A-\bar{K}^P_{k-1} C]^T + \bar{K}^P_{k-1} \bar{R} (\bar{K}^P_{k-1})^T + \bar{Q} + \bar{K}^P_{k-1} \Delta R (\bar{K}^P_{k-1})^T + \Delta Q$$

représentant la covariance de l'erreur d'estimation.

2.2.2 La technique de l'optimisation :

Soit,

$$S_i(k) \equiv C_i(k) - M_i(k), \quad i = 1, 2 \quad (2.76)$$

La matrice d'erreur donnée par (2.64) peut être réécrite comme

$$e(k) = S(k) - T(k) - U(k)$$

où

$$S(k) = \left[\begin{array}{c|c} S_1(k) & 0 \\ \hline 0 & S_2(k) \end{array} \right]$$

$$T(k) = \left[\begin{array}{c|c} \Delta R & 0 \\ \hline 0 & \Delta R + C_k \bar{K}^P_{k-1} \Delta R (\bar{K}^P_{k-1})^T C_k^T \end{array} \right]$$

$$U(k) = \left[\begin{array}{c|c} C_k A_{k-1} \Delta Q A_{k-1}^T C_k^T + C_k \Delta Q C_k^T & 0 \\ \hline 0 & C_k [A_{k-1} - \bar{K}^P_{k-1} C_{k-1}] \Delta Q [A_{k-1} - \bar{K}^P_{k-1} C_{k-1}]^T + C_k \Delta Q C_k^T \end{array} \right]$$

L'indice d'erreur sera,

$$J[e(k)] = \text{Tr}\{S^2(k) + T^2(k) + U^2(k) - 2S(k)T(k) + 2T(k)U(k) - 2U(k)S(k)\}$$

La dérivée de $J[e(k)]$ par rapport à ΔR et ΔQ , tout en utilisant de matrices de gradient, devient :

$$\begin{aligned} \partial J[e_k] / \partial R &= \{2\Delta R + (D^T \Delta R D + D \Delta R D^T + D^T D \Delta R D^T) D \\ &\quad + (2H \Delta Q C^T + B \Delta Q E^T + F \Delta Q F^T + D^T C \Delta Q C^T D + D^T F \Delta Q F^T D) D \\ &\quad - (S_1(k) + S_2(k) + D^T S_2(k) D) \text{diag} = 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned}
\partial J[e_k]/\partial \Delta Q = & \{4(C^T \Delta RC + E^T \Delta RE + D^T C \Delta RD^T D + 2F^T \Delta RF + 2F^T C \Delta RD^T D)_d \\
& + (4C^T C \Delta Q C C^T + 2C^T E \Delta Q E^T C + 2E^T C \Delta Q C^T E + 2E^T E \Delta Q E^T E \\
& + 2C^T H \Delta Q H^T C + 2H^T C \Delta Q C^T H + 2C^T C \Delta Q C^T C)_d \\
& + (C^T S_1(k) C + E^T S_1(k) E + C^T S_2(k) C + F^T S_2(k) F)\}
\end{aligned}
\tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}
\text{où} \quad D &= C \bar{K}^P(k-1) \\
E &= C A \\
F &= C [A - \bar{K}^P(k-1)C]
\end{aligned}$$

Les équations matricielles [(2.77)–(2.78)] nous donnent l'équation vectorielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \Psi & \Theta \\ \Theta & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta R \\ \delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

où les matrices Ψ , Θ et Γ sont données par,

$$\Psi_k \equiv \{2I_m + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(e_i^T D e_j)^2 + (e_i^T D^T e_j)^2 + (e_i^T D^T D e_j)^2] E_{ij}\} \delta R$$

$$\Theta_k \equiv \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [2(e_i^T C e_j)^2 + (e_i^T C^T E e_j)^2 + (e_i^T D^T C e_j + (e_i^T D^T D e_j)^2] E_{ij} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_k \equiv & \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [4(e_i^T C^T C e_j)^2 + 2(e_i^T C^T E e_j)^2 + 2(e_i^T E^T C e_j)^2 \right. \\
& \left. + 2(e_i^T E^T E e_j)^2 + 2(e_i^T F^T C e_j)^2 + 2(e_i^T C^T F e_j)^2 + 2(e_i^T F^T F e_j)^2] E_{ij} \right\}
\end{aligned}$$

Et les vecteurs $b_1(k)$ et $b_2(k)$ sont,

$$b_1(k) \equiv \sum_{i=1}^m \{e_i^T (S_1(k) + S_2(k) + D^T S_2(k) D) e_j\} E_{ii} e$$

$$b_2(k) \equiv \sum_{i=1}^n \{e_i^T (C^T S_1(k) C + E^T S_1(k) E + C^T S_2(k) C + F^T S_2(k) F) e_j\} E_{ii} e$$

Le vecteur e_i est un vecteur "un" où tous ses éléments sont

nuls sauf le $i^{\text{ème}}$ élément égal à un. Le vecteur $\underline{e}$ est le vecteur unité dont chacun de ses éléments est "un" comme montré ci-dessous,

$$\underline{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\underline{E}_{ij}$ est une matrice carrée ou rectangulaire où tous les éléments sont nuls sauf celui qui est situé à l'intersection du $i^{\text{ème}}$ rang et la $j^{\text{ème}}$ colonne égal à "un",

$$\underline{E}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

L'ordre du calcul lors de l'exécution de la procédure d'identification peut être résumé comme suit :

- 1) Assigner des valeurs initiales aux covariances de bruit, soit Q_0 et R_0 .
- 2) Résoudre pour la covariance d'erreur calculée au régime stationnaire $(\hat{P}_c)_s$ en utilisant l'équation de Riccati (2.28) et (2.76) pour le système discret. Ensuite, calculer la matrice de gain K suivant l'équation :

$$K = (\hat{P}_c)_s C^T R_0^{-1}$$

- 3) Supposer que le système et le filtre aient abouti au régime permanent de leur fonctionnement, nous considérons un échantillon d'observation de N réalisations. Nous enregistrons les vecteurs de mesures $z_i, i=1, \dots, N$ et calculons les vecteurs d'innovation correspondants aux mesures selon l'équation,

$$\tilde{z}_i = z_i - \hat{C}x_i, \quad i=1,2, \dots, N$$

- 4) Calculer C_1, C_2, M_1 et M_2 en utilisant les équations (2.20) et (2.25) pour des systèmes continus et de (2.71) à (2.76) au cas discret.
- 5) Calculer $\Psi, \Theta, \Gamma, b_1$ et b_2 en utilisant les relations de (2.43) à (2.47) pour le système continu et de (2.80) à (2.84) pour le système discret.
- 6) Obtenir δQ et δR par l'équation (2.41).
- 7) Renouveler les covariances de bruit telles que

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_o + \epsilon Q_1 \\ R_1 &= R_o + \epsilon R_1 \end{aligned}$$

où le scalaire ϵ est un facteur de convergence dont la valeur varie entre zéro et un de sorte que le critère quadratique $J(Q_1, R_1)$ soit inférieur à sa valeur précédente $J(Q_o, R_o)$ sous réserve que Q_1 et R_1 soient définis positifs.

- 8) Adapter le gain du filtre en utilisant les valeurs estimées Q_1 et R_1 à partir de la résolution de l'équation matricielle de Riccati (2.11) pour la covariance d'erreur calculée $\tilde{P}_{c1}$. D'où le gain est renouvelé selon

$$K_1 = \tilde{P}_{c1} C^T R_1^{-1}$$

- 9) Procéder à la deuxième période d'observation et répéter les étapes de 4 à 8 à partir des valeurs estimées Q_1, R_1 et le gain adapté K_1 .

10) Continuer le processus de minimisation jusqu'à ce que la plus grande valeur absolue dans la matrice d'erreur "e" soit inférieure à une valeur prescrite suffisamment petite " μ ". De même, le test de bruit blanc de la séquence d'innovation $\hat{z}(t)$ devrait être effectué. Dès que les deux conditions sont achevées, le processus d'identification sera arrêté.

2.3 Exemple numérique :

Afin d'illustrer la méthode d'identification présentée précédemment dans ce chapitre et afin d'indiquer le type de résultats ainsi obtenus, nous l'appliquons pour estimer les covariances de bruit Q,R d'un système du deuxième ordre. Après chaque itération du processus d'identification, le gain du filtre K est adapté. A la fin de la procédure d'identification le gain du filtre K est comparé au gain optimal stationnaire $(K_0)_s$.

Les équations de système sont

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega(t) \end{bmatrix} \\ z(t) &= [10 \quad 0] x(t) + v(t)\end{aligned}$$

où les séquences $\{\omega(t), t \geq t_0\}$, $\{v(t), t \geq t_0\}$ sont des processus bruits blancs centrés des covariances :

$$E \left[\begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t-\tau) \\ v(t-\tau) \end{bmatrix}^T \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(\tau)$$

Pour chaque fenêtre d'observation, 1000 mesures sont prises à un intervalle de 0,001 seconde. Une période de 0,1 seconde sépare

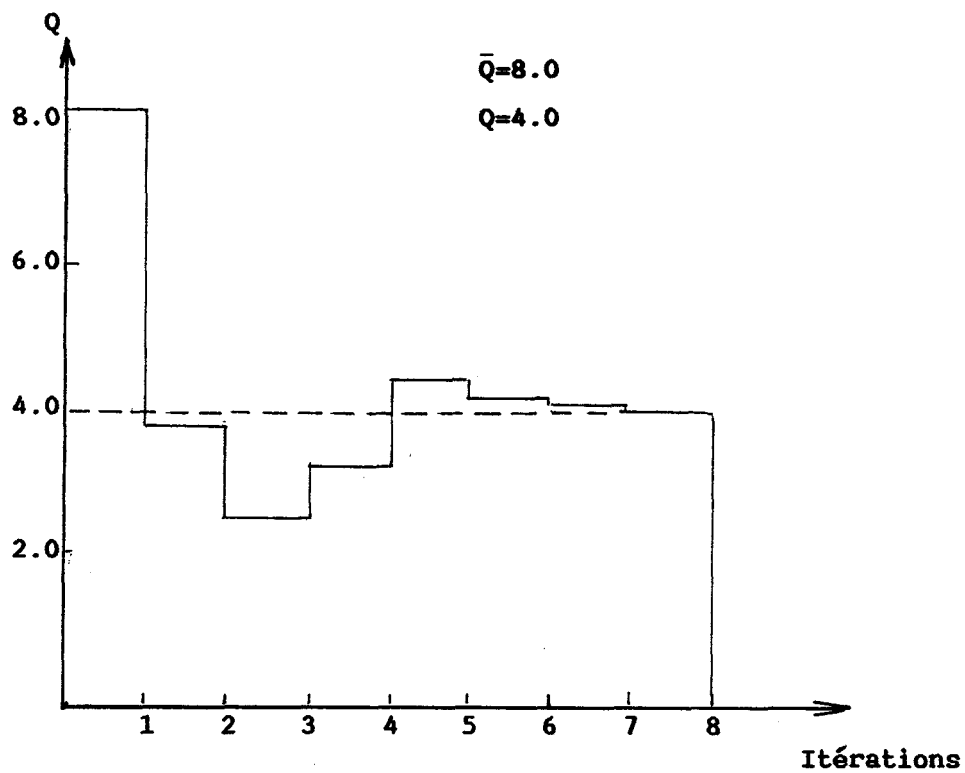


Fig.2.1 Estimation de Q

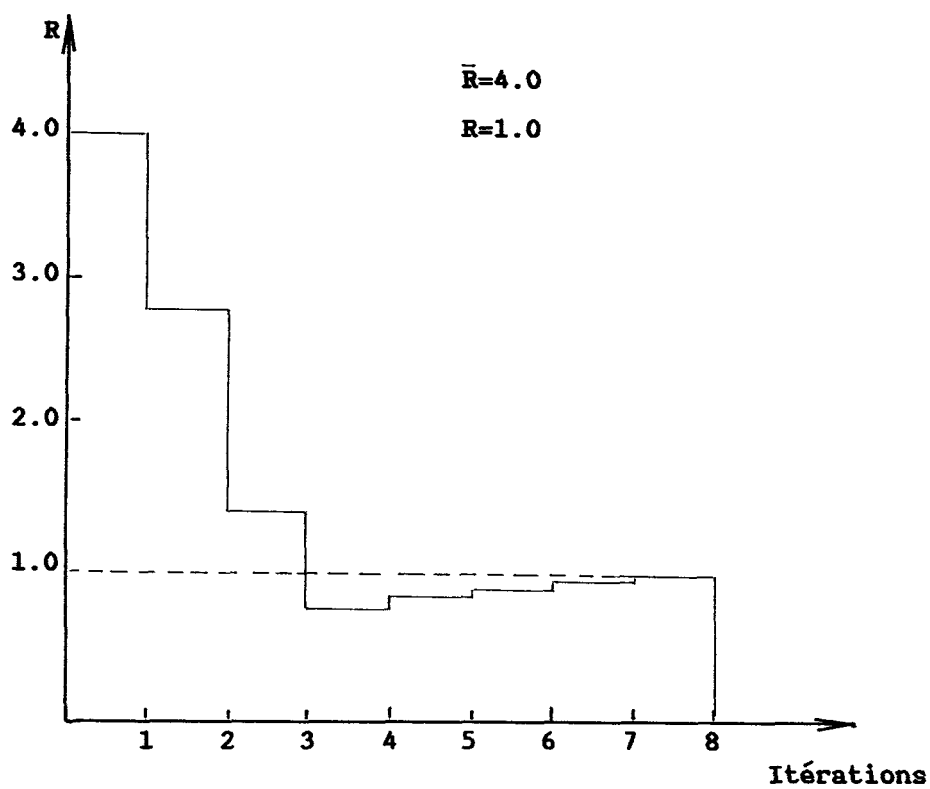


Fig.2.2 Estimation de R

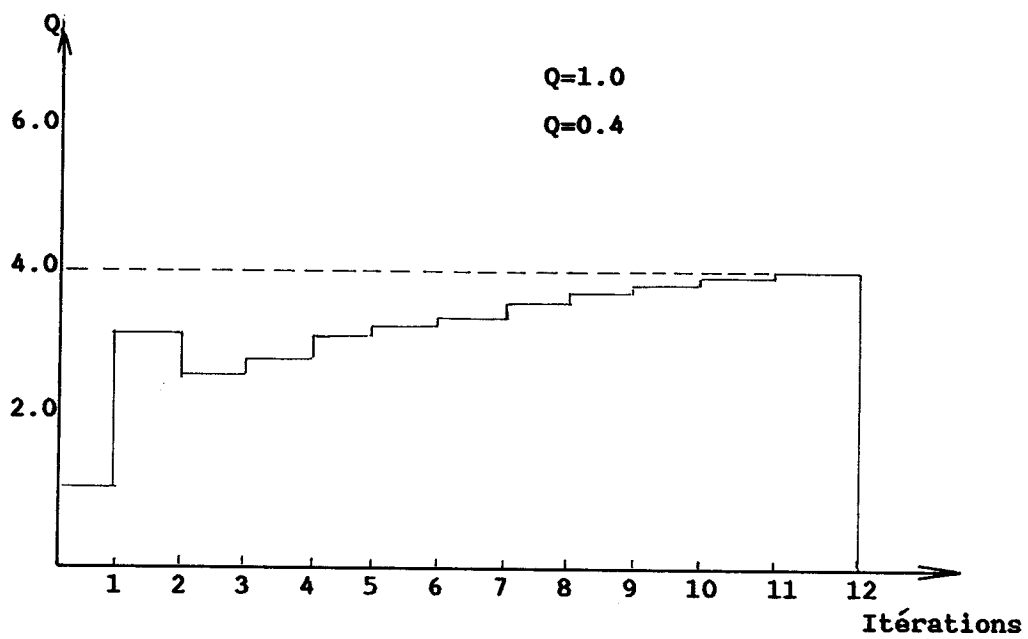


Fig.2.3 Estimation de Q

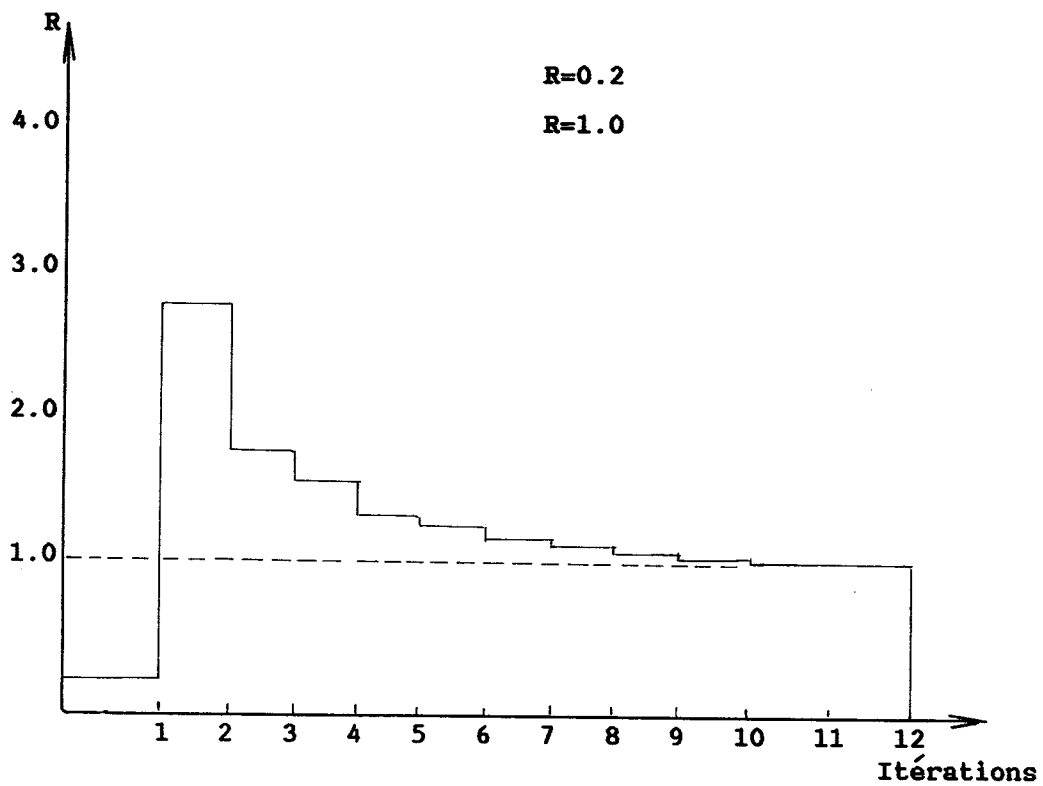


Fig.2.4 Estimation de R

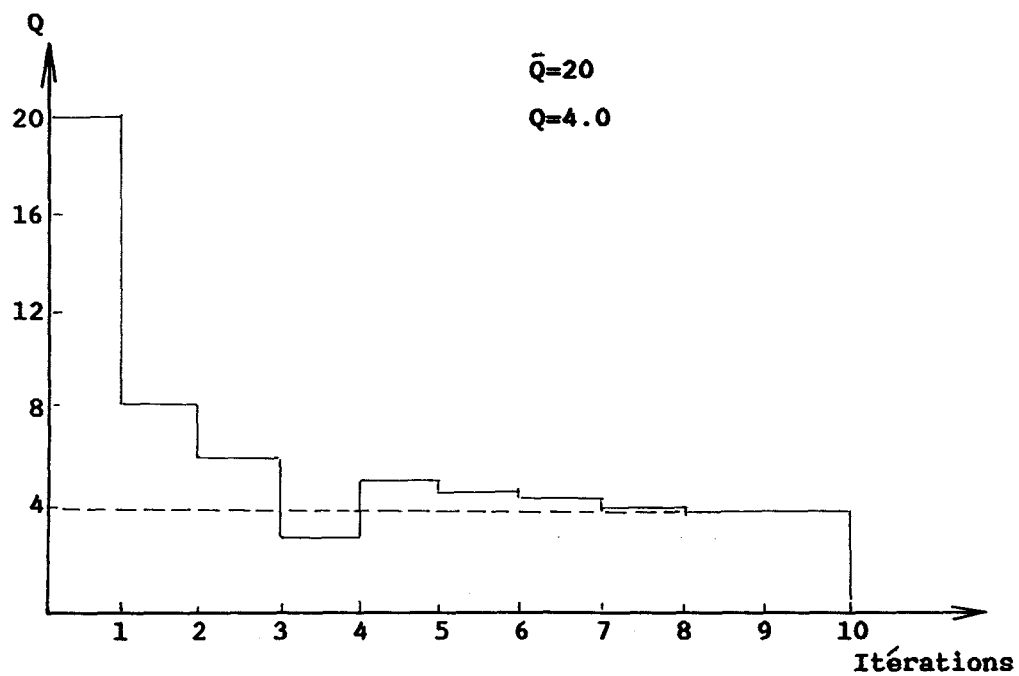


Fig.2.5 Convergence de la valeur estimée de Q

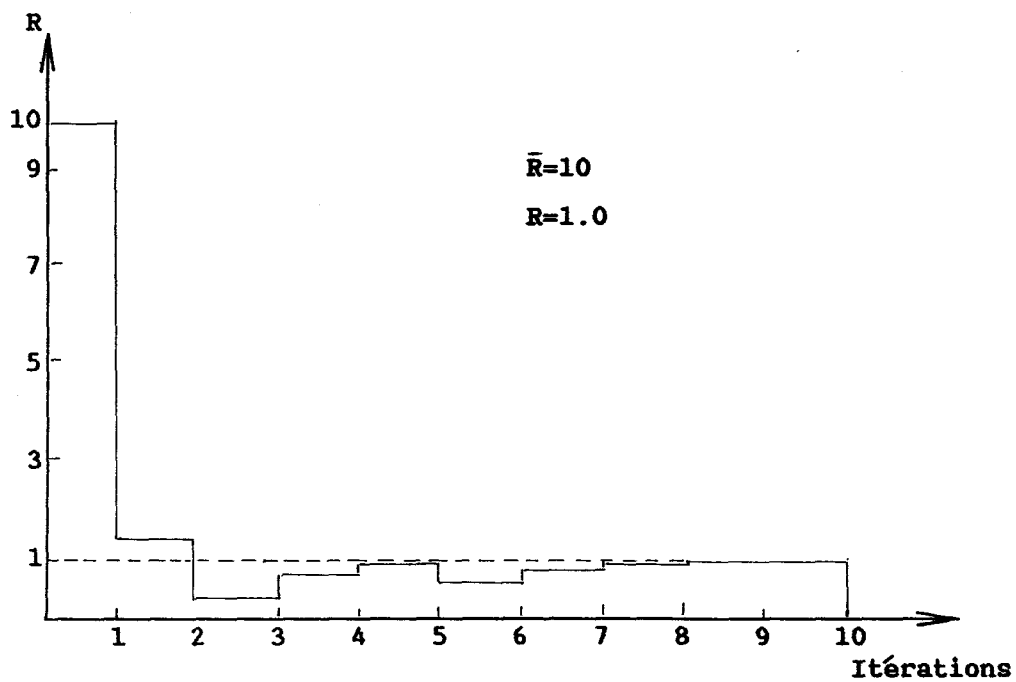


Fig.2.6 Convergence de la valeur estimée de R

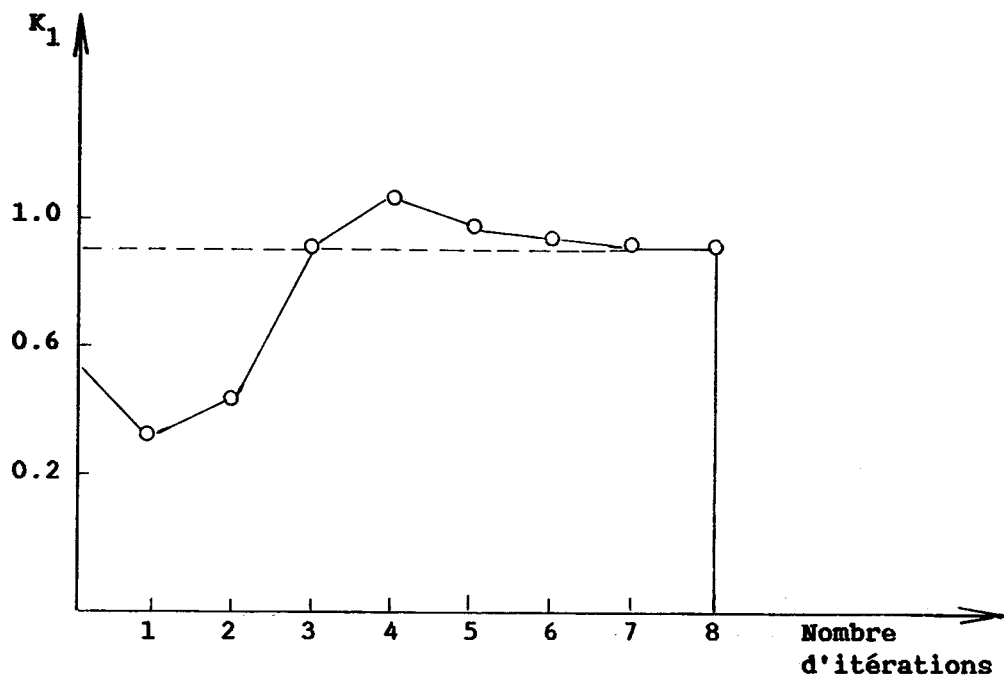


Fig.2.7 Convergence de la première composante du gain

K_1 vers sa valeur stationnaire optimale K_{01}

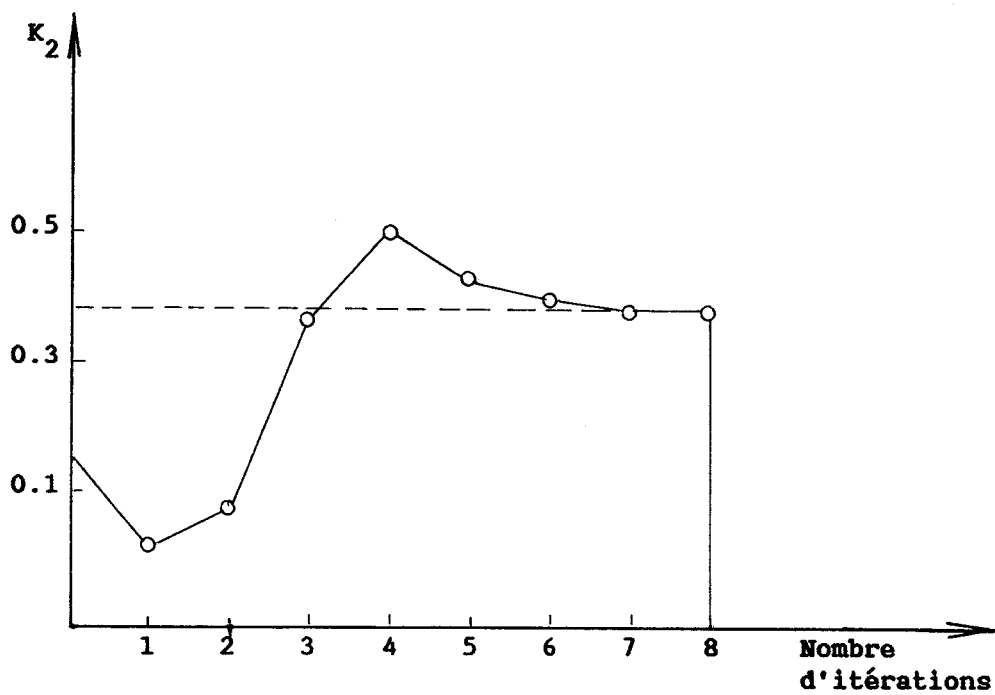


Fig.2.8 Convergence de la composante du gain K_2 vers

sa valeur stationnaire optimale K_{02}

les échantillons successifs. La Routine de Runge-Kutta de quatrième ordre a été employée pour résoudre numériquement toutes les équations différentielles trouvées lors de l'exécution du processus d'optimisation. Le scalaire " μ " est pris comme étant 0,001.

2.4 Résultats et discussion :

1- Les figures de (2.1) à (2.6) montrent que les valeurs des covariances identifiées à travers les algorithmes d'optimisation utilisés, convergent toujours vers les valeurs réelles de Q et R, même si les valeurs initiales assignées aux covariances au début du processus sont largement écartées de leurs valeurs réelles. Trois ensembles de valeurs initiales de (Q,R) sont utilisés, notamment (20,10), (8,0;4,0) et (1,0;0,2)

2- A la fin du processus d'identification, pour chaque ensemble de (Q,R), le gain stationnaire optimal du filtre de Kalman a été obtenu. Dans le cas de l'ensemble (8,0;4,0), les composantes de ce gain sont $K_1 = 0.863$ et $K_2 = 0.373$. Les figures (2.7) et (2.8) montrent la convergence de ces composantes, successivement renouvelées au bout de chaque itération. La convergence des composantes du gain s'applique aussi dans les cas des deux autres ensembles de (Q,R).

2.5 Conclusion :

La plupart des algorithmes d'identification des covariances de bruit ont été principalement développés pour des systèmes discrets. Dans ce chapitre, une procédure d'identification a été formulée pour

des systèmes discrets aussi bien que pour des systèmes continus afin d'obtenir les valeurs réelles des covariances de bruit inconnues.

Les résultats ainsi obtenus démontrent catégoriquement l'insensibilité de cette méthode à l'égard de l'écart des valeurs initiales, assignées aux covariances, de leurs valeurs réelles. Aussi, ces résultats démontrent la rapidité de la convergence vers les valeurs réelles des covariances.

La formulation du processus d'identification comme un problème d'optimisation nous donne le privilège d'introduire une matrice diagonale de pondération W dans l'indice d'erreur équation (4.14) telle que :

$$J = \|e\|_W^2 = e^T W e$$

Cette matrice W peut être choisie de sorte que le taux de convergence soit accélérée.

De plus, dans le paragraphe 2.6, nous avons traité le cas où le système matrice A est instable ou proche de l'instabilité. Le vecteur intervenant dans le processus d'identification sera donc modifié. Par suite, la covariance d'innovation rétrograde $E[\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(\tau)]$ est employée. Celle-ci remplace la covariance du processus de sortie dans l'équation (2.13) et ceci est montré par l'équation (2.48).

CHAPITRE III

ESTIMATEUR D'ETAT A UN ORDRE REDUIT POUR DES SYSTEMES DE MESURE SINGULIERE

3.0 Introduction :

Dans le chapitre précédent nous nous sommes intéressés à l'estimation optimale des systèmes stochastiques linéaires variables ou non dans le temps. Nous avons développé une méthode d'identification itérative des covariances de bruit Q , R tout en tenant compte de deux facteurs importants qui sont :

- Le contrôle sur les incréments des covariances de bruit en vue d'éviter des divergences du filtre.
- Seuls les éléments de Q et R , pour lesquels le comportement du filtre est plus sensible, sont identifiés. C'est ce qui réduit le temps du calcul et diminue la capacité mémoire.

A ce moment nous voudrions bien préciser que les systèmes stochastiques considérés jusqu'ici se caractérisent par une propriété commune : Toutes les composantes de la sortie de tels systèmes sont entachées de bruit blanc gaussien additif. Pourtant, il existe bien de systèmes où certaines composantes de sortie sont très peu entachées de bruit ou même mesurées parfaitement. Ainsi, la matrice de covariance de bruit de mesures R sera mal conditionnée et son inverse entraînerait un problème de divergence du filtre. Cela peut même entraîner à la limite, l'invertibilité de R , ce qui représente un vrai problème au cas continu.

Dans le domaine d'estimation et identification des systèmes stochastiques, le phénomène mentionné ci-dessus est connu sous le nom de "Problème de Filtrage Singulier". C'est dans ce chapitre que nous abordons ce problème en vue de construire un estimateur à un

ordre réduit pour des systèmes stochastiques ayant des bruits de mesure singuliers.

La méthode de l'observateur asymptotique d'abord proposée par Leuenberger [25,26,30] consiste à utiliser un système physique dont la dynamique est choisie arbitrairement. Cet observateur est capable de reproduire les états non mesurables d'un processus non bruité d'une manière directe et suffisamment rapide.

Dans l'esprit du développement du filtre linéaire optimal [19], nous allons étendre l'utilisation des observateurs asymptotiques en vue de construire un estimateur d'un ordre inférieur à celui du filtre de Kalman-Bucy aux systèmes stochastiques linéaires ayant une partie de mesure non bruitée. De telle façon, nous exploitons l'idée de l'observateur pour l'estimation optimale du vecteur d'état des systèmes linéaires partiellement bruités. Le travail présenté ici peut donc être considéré comme une généralisation de l'observateur de Leuenberger [29] pour des systèmes stochastiques.

Il est connu que dans des situations où les états du processus sont inaccessibles, la loi de commande de la forme :

$$u(t) = F[x(t),t]$$

ne peut pas être implantée. Cependant pour conserver les avantages des techniques de réaction d'état et effectuer une commande par retour d'état on réalisera un système dynamique capable de reproduire les états du processus à partir de la commande et des

sorties mesurées. Ces états estimés sont utilisés dans la chaîne de retour. Ce système dynamique n'est qu'un observateur dont le vecteur d'état représente une approximation à celui du système original, ce qui indique l'existence d'une transformation linéaire entre les deux vecteurs d'état.

Dans les chapitres suivants, nous présentons le développement de l'observateur analogue se rapportant aux systèmes linéaires continus variants ou non dans le temps. La version discrète de celui-ci sera également établie en vue de l'importance des algorithmes récurrents qui se prêtent mieux au calcul numérique.

3.1 Cas continu :

3.1.1 Modèle mathématique :

Le système continu peut être décrit à l'aide du modèle d'état suivant :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}(t) & \mathbf{A}_{12}(t) \\ \mathbf{A}_{21}(t) & \mathbf{A}_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(t) \\ \mathbf{B}_2(t) \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(t) \\ \mathbf{C}_2(t) \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

où - $\mathbf{x}_1(t)$, une partie non bruitée de l'état de système, est de dimension n_1 .

- $\mathbf{x}_2(t)$, la partie bruitée de l'état du système, est de dimension n_2 .

- $\mathbf{x}(t) \equiv [\mathbf{x}_1^T(t) | \mathbf{x}_2^T(t)]^T$, le vecteur d'état du système, est de dimension $n (=n_1+n_2)$.

- $u(t)$, l'entrée, est de dimension m
- $\omega(t)$, le bruit de processus est de dimension n_2 .
- $y_1(t)$, la partie de sortie non bruitée, est de dimension l .
- $y_2(t)$, la sortie entachée de bruit, est de dimension q
- $v(t)$, le bruit de mesure, est de dimension q .

la décomposition en bloc selon les équations (3.1) et (3.2) des matrices A , B et C n'enlève rien à la généralité du problème :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{bmatrix} \quad C(t) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

les matrices de système A_{11} , A_{12} , A_{21} et A_{22} sont en général fonctions du temps et de dimensions respectives $(n_1 \times n_1)$, $(n_1 \times n_2)$, $(n_2 \times n_1)$ et $(n_2 \times n_2)$.

Egalement les matrices de commande B_1, B_2 et les matrices d'observation C_1, C_2 sont déterministes et de dimensions respectives $(n_1 \times m)$, $(n_2 \times m)$, $(l \times n)$ et $(q \times n)$.

3.1.1a Propriétés statistiques du système :

Les vecteurs de bruit $\{\omega(t), t \geq t_0\}$ et $\{v(t), t \geq t_0\}$ sont supposés être des processus de bruit blanc, gaussiens, indépendants et de moyenne nulle.

L'état initial $x(t_0)$ est supposé être gaussien, de moyenne

nulle et indépendant des processus $\{\omega(t)\}$ et $\{v(t)\}$. Alors, la matrice de covariance du vecteur aléatoire composé $[\omega^T(t) | v^T(t) | x^T(t_0)]$ est sous la forme :

$$E \begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \\ x(t_0) \end{bmatrix} [\omega^T(\tau) | v^T(\tau) | x^T(t_0)] = \begin{bmatrix} Q(t) & 0 & 0 \\ 0 & R(t) & 0 \\ 0 & 0 & P(t_0) \end{bmatrix} \delta(t-\tau) \quad (3.4)$$

L'objectif final d'un tel problème est, bien entendu, d'effectuer une commande optimale $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau$, telle que la fonction du coût quadratique "J", soit minimisée,

$$J = x^T(T)S(T)x(T) + \int_{t_0}^T [x^T(t)\Phi(t)x(t) + u^T(t)\Psi(t)u(t)]dt \quad (3.5)$$

où $S(T)$, $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ sont des matrices de pondération, symétriques, définies non négatives, sauf Ψ définie positive, et de dimensions respectives $(n \times n)$, $(n \times n)$, $(m \times m)$.

Pour implanter une telle commande par retour d'état:

$$u(t) = -K(t)x(t)$$

il nous faudra trouver l'estimé $\hat{x}(t)$ du vecteur d'état du système d'origine $x(t)$.

En effet, la mesure y_1 représente une connaissance parfaite des l variables d'état (ou l combinaisons linéaires indépendantes de celles-ci). D'où, au lieu de construire un filtre à ordre n , nous construisons plutôt un estimateur qui reproduit uniquement le reste des variables d'état et qui sera d'ordre

(n-l). Ainsi, sera effectué un système physique "0" (observateur) demandant moins de calcul et de capacité mémoire que celui du filtre de Kalman-Bucy.

3.1.2 Analyses mathématiques :

Soit le vecteur d'état du système physique "0" d'ordre (n-l) $z(t)$. Le vecteur composé $\hat{x}$ où :

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{z}(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}$$

représente l'état estimé du processus. Il sera donc lié au vecteur d'état $x(t)$ par une transformation non-dégénérée linéaire $M(t)$, telle que,

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = M x(t) ; \quad \text{où } |M| \neq 0 \quad (3.6)$$

De l'équation de mesure (3.2), en admettant qu'une relation linéaire liant $x(t)$ et $z(t)$ existe, nous aurons :

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(t) x(t) \\ C_1(t) x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ C_1(t) \end{bmatrix} x(t) \quad (3.7)$$

Si la matrice d'observation C_1 est de rang l , on peut toujours fixer une matrice régulière M d'ordre n telle que :

$$M(t) = \begin{bmatrix} M_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

où M_1 est une matrice arbitraire de dimension $[(n-l) \times n]$ et de rang $(n-l)$.

Ainsi, $x(t)$ est obtenu selon l'équation (3.7) comme :

$$x(t) = M^{-1} \begin{bmatrix} z(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

En substituant celle-ci dans l'équation d'état, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{y}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

où

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \equiv M \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} M^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \equiv M \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} ; \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

L'équation (3.10) peut se diviser en deux équations vectorielles, notamment:

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}_{11}z(t) + \tilde{A}_{12}y_1(t) + \tilde{B}_1u(t) + \omega_1(t) \quad (3.11)$$

$$\dot{y}_1(t) = \tilde{A}_{21}z(t) + \tilde{A}_{22}y_1(t) + \tilde{B}_2u(t) + \omega_2(t) \quad (3.12)$$

où la dernière équation est réécrite comme

$$z_2(t) = \dot{y}_1(t) - \tilde{A}_{22}y_1(t) - \tilde{B}_2u(t) = \tilde{A}_{21}z(t) + \omega_2(t) \quad (3.13)$$

La partie gauche de (3.13) est connue puisque $y_1(t)$ et $u(t)$ sont disponibles. La nécessité de la dérivée $\dot{y}_1$ sera éliminée plus tard afin d'éviter les problèmes de divergences du filtre associés à la dérivation. Une telle équation peut être considérée comme la sortie du système représenté par (3.11).

Ainsi, le problème se réduit à un filtrage sur un système d'ordre réduit décrit par le modèle dynamique :

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}_{11}z(t) + \underline{v}(t) + \omega_1(t) \quad (3.14)$$

$$z_2(t) = \tilde{A}_{21}z(t) + \omega_2(t) \quad (3.15)$$

où $z(t) \in E^{n-l}$: $(n-l)$ composantes du vecteur d'état
 $z_2(t) \in E^l$: l composantes de sortie
 $v(t) = A_{12}y_1(t) + B_1u(t)$, $(n-l)$ composantes de commande
 $\omega_1(t) \in E^{n-l}$: $(n-l)$ composantes du bruit de système
 $\omega_2(t) \in E^l$: l composantes de bruit de sortie.

De plus, le système ci-dessus est complètement observable, c'est-à-dire, la matrice d'observabilité :

$$W_0 \equiv [A_{21}^T, A_{11}^T A_{21}^T, \dots, (A_{11}^T)^{n-l-1} A_{21}^T]$$

est de rang $(n-l)$.

Comme la partie bruitée de la mesure $y_2(t)$ contient davantage d'informations sur le système d'origine, nous nous en servons en vue d'augmenter le nombre d'équations de mesure du nouveau système.

En vertu de l'équation (3.9), y_2 peut être mis sous la forme suivante :

$$y_2(t) = C_2 x(t) + v(t) = C_2 M^{-1} \begin{bmatrix} z(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + v(t) \quad (3.16)$$

La matrice $C_2(t)M$ peut se représenter sous la forme de matrices partitionnées

$$C_2 M^{-1} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} q \\ -[n-l] \quad -l \end{matrix} \quad (3.17)$$

Alors, nous avons

$$y_2(t) = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + v$$

$$= H_1(t) z(t) + H_2(t) y_1(t) + v(t) \quad (3.18)$$

D'où, on retire une autre mesure du système d'ordre réduit [dénommée z_3] telle que :

$$z_3(t) \equiv y_2(t) - H_2 y_1(t) = H_1 z(t) + v(t) \quad (3.19)$$

où $z_3(t)$ est effectué à partir de $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

L'équation de mesure (3.15) du système d'ordre réduit sera donc modifiée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} z_a(t) &= \begin{bmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{21} z(t) + \omega_2(t) \\ H_1 z(t) + v(t) \end{bmatrix} \\ &= H_a z(t) + v_a \end{aligned} \quad (3.20)$$

où

$$H_a = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{21} \\ H_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v_a = \begin{bmatrix} \omega_2 \\ v \end{bmatrix}$$

3.1.3 L'équation de l'observateur :

Pour le système d'ordre réduit donné par l'équation d'état,

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}_{11}(t) z(t) + \underline{v}(t) + \omega_1(t)$$

et son équation de mesure,

$$z_a(t) = H_a(t) z(t) + v_a(t)$$

nous écrirons l'équation de l'estimateur sous la forme de l'observateur de Leuenberger [26], comme suit :

$$\dot{\hat{z}}(t) = K_1 \hat{z}(t) + K_2(t) z_a(t) + K_3(t) \underline{v}(t) \quad (3.21)$$

où K_1 , K_2 , et K_3 sont des matrices de l'observateur de coefficients inconnus et de dimensions respectives $[(n-l) \times (n-l)]$, $[(n-l) \times (l+q)]$ et $[(n-l) \times (n-l)]$.

L'erreur de l'estimation est définie par

$$e(t) \equiv z(t) - \hat{z}(t)$$

l'équation différentielle de celle-ci est obtenue à partir des Eqs.(3.14) et (3.21) comme :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{z}(t) - \dot{\hat{z}}(t) \\ &= [\tilde{A}_{11} - K_2 H_a]z + [I_{n-l} - K_3]\underline{v} + \omega_1 - K_2 v_a - K_1 \hat{z} \end{aligned}$$

Ajoutant et soustrayant le terme $K_1(t)z(t)$ aux deux parties de l'équation ci-dessus, elle se réduira à :

$$\dot{e}(t) = [\tilde{A}_{11} - K_2 H_a - K_1]z + K_1(t)e(t) + [I_{n-l} - K_3]\underline{v} + \omega_1 - K_2 v_a \quad (3.22)$$

où I_{n-l} représente la matrice identité de dimension $[(n-l) \times (n-l)]$.

Comme il est souhaité que l'estimateur à développer soit non-biaisé, nous aurons donc,

$$E[\dot{e}(t)] = 0 \quad \text{et} \quad E[e(t)] = 0, \quad t \geq t_0 \quad (3.23)$$

Alors,

$$\begin{aligned} E[\dot{e}(t)] &= [A_{11}(t) - K_2(t)H_a(t) - K_1(t)] \cdot E[z(t)] + K_1(t) \cdot E[e(t)] \\ &\quad + (I_{n-l} - K_3)E[\underline{v}] + E[\omega_1(t)] - K_2(t) \cdot E[v_a(t)] \equiv 0 \end{aligned}$$

Puisque $E[e(t)]$, $E[\omega_1(t)]$ et $E[v_a(t)]$ sont tous nuls, l'équation ci-dessus se réduit à :

$$[\tilde{A}_{11}(t) - K_2(t)H_a(t) - K_1(t)] \cdot E[z(t)] + (I_{n-l} - K_3(t))E[\underline{v}(t)] = 0$$

et comme

$$E[z(t)] \neq 0 \quad \text{et} \quad E[\underline{v}(t)] = E[B_1 u(t) + A_{22} y_1] \neq 0$$

pour tout "t", on conclut que :

$$K_1 = [\tilde{A}_{11} - K_2 H_a] \quad \text{et} \quad K_3 = I_{n-1} \quad (3.24)$$

Ainsi, l'équation de l'estimateur devient :

$$\dot{\hat{z}}(t) = [\tilde{A}_{11}(t) - K_2(t)H_a(t)]\hat{z}(t) + K_2(t)z_a(t) + \underline{v}(t) \quad (3.25)$$

Les conditions initiales sont :

$$\hat{z}(t_0) = M_1 \cdot E[x(t_0)] = M_1 x_0 \quad (3.26)$$

3.1.4 Matrice de covariance de l'erreur d'estimation et gain du filtre :

L'erreur d'estimation sera déduite des équations (3.14) et (3.25) :

$$\dot{e}(t) = [\tilde{A}_{11}(t) - K_2(t)H_a(t)]e(t) + \omega_1(t) - K_2(t)v_a(t) \quad (3.27)$$

La matrice de covariance de l'erreur est définie par :

$$\tilde{P}(t) \equiv E[e(t)e^T(t)] \quad (3.28)$$

Par différentiation de (3.28), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}(t) = & [\tilde{A}_{11} - K_2 H_a] \tilde{P}(t) + \tilde{P}(t) [\tilde{A}_{11} - K_2 H_a]^T + \\ & E[\omega_1 \omega_1^T] + E[\omega_1 v_a^T] - K_2 E[v_a \omega_1^T] - E[v_a v_a^T] K_2^T \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $e(t)$ est la solution de l'équation différentielle linéaire (3.27)

qui est :

$$e(t) = \Phi_1(t, t_0)e(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_1(t, \tau) [\omega_1(\tau) - K_2(\tau)v_a(\tau)] d\tau \quad (3.30)$$

où $\Phi_1(t, \tau)$ est la matrice de transition du système d'erreur satisfaisant l'équation différentielle :

$$\dot{\Phi}_1(t, \tau) = [\tilde{A}_{11}(\tau) - K_2(\tau)H_a(\tau)]\Phi_1(t, \tau) ; \quad \Phi_1(t, t) = I_{n-1}$$

Définissons,

$$\Psi_{\omega_1}(t) = E[\omega_1(t)\omega_1^T(t)]; \text{ où } \omega_1(t) = M_1(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \omega(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{n_1} \\ \overline{n_2} \end{bmatrix}$$

donc, $\Psi_{\omega}(t)$ sera :

$$\Psi_{\omega_1} = M_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q(t) \end{bmatrix} M_1^T = M_1 Q' M_1^T \quad (3.31)$$

De la même façon, nous définissons

$$\Psi_{\omega v} \equiv E[\omega_1 v_a^T] = [M_1 Q' C_1^T | 0]$$

où

$$v_a(t) = \begin{bmatrix} \omega_2(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{q} \\ \overline{q} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \omega_2(t) = C_1(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \omega(t) \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{n_1} \\ \overline{n_2} \end{bmatrix}$$

$l \times n$

Alors,

$$\Psi_{\omega v} = [M_1 Q' C_1^T | 0] \quad (3.32)$$

où $Q(t)$ est défini auparavant.

Par conséquent, l'équation (3.27) devient :

$$\begin{aligned} E[\omega_1(t)e^T(t)] &= \int_{t_0}^t \Psi_{\omega_1}(\tau) \delta(t-\tau) \Phi_1^T(t-\tau) d\tau \\ &\quad - \int_{t_0}^t \Psi_{\omega_1 v_a}(\tau) \delta(t-\tau) K_2^T(\tau) \Phi_1^T(t-\tau) d\tau \\ &\equiv \Psi_{\omega_1}(t) - \Psi_{\omega_1 v_a}(t) K_2^T(t) \\ &\equiv [M_1 Q'(t) M_1^T] - [M_1 Q(t) C_1^T | 0] K_2^T(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

En suivant les mêmes analyses conduisant à (3.32), nous aurons :

$$\begin{aligned} E[v_a(t)e^T(t)] &= E[v_a(t)e^T(t_0)] \Phi_1^T(t-t_0) + \int_{t_0}^t E[v_a(t)\omega_1^T(\tau)] \\ &\quad * \Phi_1^T(t-\tau) d\tau - \int_{t_0}^t E[v_a(t)v_a^T(\tau)] K_2^T(\tau) \Phi_1^T(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} C_1 Q'(t) M_1^T \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 Q(t) C_1^T & | & 0 \\ 0 & | & R(t) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Après avoir obtenu les expressions des diverses covariances apparues dans l'équation $\dot{\tilde{P}}(t)$ donnée par (3.29), nous construirons l'estimateur pour $z(t)$ au sens de variance minimale. Ceci requiert, comme condition nécessaire, la minimisation de la fonction trace $\text{Tr}[\dot{\tilde{P}}(t)]$ par rapport au gain du filtre, $K(t)$. En d'autres termes

$$\frac{\partial}{\partial K(t)} \text{Tr}[\dot{\tilde{P}}(t)] = \frac{\partial}{\partial K(t)} \text{Tr}[\tilde{P}(t)] \equiv 0 \quad (3.35)$$

Récrivant l'équation de $\dot{\tilde{P}}$ en fonction "trace" et compte tenu des covariances variées déjà obtenues, nous aurons [tout en supprimant l'indice affecté au gain du filtre ainsi que l'argument "t" et en nous servant de la fonction trace] :

$$\text{Tr}[\dot{\tilde{P}}(t)] = \text{Tr}\{2[\tilde{A}_{11} - K H_a] \tilde{P}(t) + 2\Psi_{\omega 1} - 2K \Psi_{\omega 1}^T v_a + 2K \Psi_{va} K^T\} \quad (3.36)$$

La dérivée de celle-ci par rapport à la matrice de gain $K(t)$ donnera

$$\frac{\partial}{\partial K} \text{Tr}[\dot{\tilde{P}}(t)] = -4\tilde{P} H_a^T - 4\Psi_{\omega 1} v_a + 4K \Psi_{va} = 0$$

$$\text{d'où,} \quad K(t) = [\tilde{P}(t) H_a^T(t) + \Psi_{\omega 1} v_a] \Psi_{va}^{-1} \quad (3.37)$$

En substituant les expressions de $\Psi_{\omega 1} v_a$ et Ψ_{va} en (3.36) nous aurons :

$$K(t) = \tilde{P}(t) H_a^T(t) + [M_1 Q'(t) C_1^T | 0] \begin{bmatrix} C_1 Q(t) C_1^T & | & 0 \\ 0 & | & R(t) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.1.4a Elimination de la dérivée $y_1(t)$ de l'algorithme de filtrage :

L'équation dynamique du filtre (l'algorithme de filtrage) est

$$\dot{\hat{z}}(t) = [\tilde{A}_{11}(t) - K(t)H_a(t)]\hat{z}(t) + \underline{v}(t) + K(t)z_a(t)$$

où

$$\underline{v}(t) \equiv \tilde{A}_{12}(t)y_1(t) + \tilde{B}_1(t)u(t)$$

et

$$z_a(t) \equiv H_a(t)z(t) + v_a(t)$$

où

$$z_a(t) \equiv \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$$

Donc, nous écrirons l'équation d'état du filtre :

$$\dot{\hat{z}}(t) = [A_{11} - K(t)H_a]\hat{z}(t) + \underline{v}(t) + K(t) \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$$

Rapportant les expressions de $z_2(t)$ et $z_3(t)$ données par (3.13) et (3.19) dans l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$\dot{\hat{z}}(t) = [\tilde{A}_{11} - K\tilde{H}_a]\hat{z} + (\tilde{A}_{12}y_1 + \tilde{B}_1u) + K \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} -\tilde{A}_{22}y_1 - \tilde{B}_2u \\ y_2 - H_2y_1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

La difficulté rencontrée pour trouver le vecteur de mesure $z_2(t)$ et par conséquent l'estimé $\hat{z}(t)$, provient de la présence de la dérivée y_1 . Bien que $y_1(t)$ soit parfaitement mesuré, sa dérivée pourrait conduire à un problème de divergence du filtre. D'où vient généralement la nécessité de l'élimination de la dérivée dans l'équation du filtre.

Redéfinissant l'état de l'estimateur :

$$\hat{w}(t) \equiv \hat{z}(t) - K(t) \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} y_1(t) = \hat{z}(t) - K'(t)y_1(t) \quad (3.40)$$

Nous pouvons tirer des équations (3.40) et celle de l'estimateur (3.39) la relation :

$$\dot{\hat{w}}(t) = [\tilde{A}_{11} - K' H_2] \hat{z} + (\tilde{A}_{12} y_1 + \tilde{B}_1 u) - \left[\frac{\tilde{A}_{22}}{H_2} \right] y_1 - K \left[\frac{\tilde{B}_2}{0} \right] u + K \left[\frac{0}{I_q} \right] y_2$$

où I_l et I_q sont les matrices identité de dimensions respectives (l, l) et (q, q) .

Soit,

$$K \left[\frac{\tilde{A}_{22}}{H_2} \right] \equiv D_1, \quad K \left[\frac{0}{I_q} \right] \equiv D_2 \quad \text{et} \quad \left[\frac{B_2}{C_1} \right] \equiv D$$

Alors, l'expression (3.40) peut être écrite comme suit :

$$\dot{\hat{w}}(t) = [\tilde{A}_{11} - K H_2] \hat{w} + [\tilde{B}_1 - K D] u + [\tilde{A}_{12} - K D_1 - \tilde{A}_{11} K' - K H_2 K'] y_1 + K D_2 y_2 \quad (3.41)$$

Cette équation du filtre est tout à fait équivalente à celle donnée par (3.39) et peut être effectuée sans recours à la dérivée $\dot{y}_1$.

L'estimé du vecteur d'état complet $\hat{x}$ sera, donc, donné par :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= M^{-1} \begin{bmatrix} \hat{z}(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \hat{w}(t) + K' y_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \\ &= M^{-1} \begin{bmatrix} I_{n-l} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{w} + \begin{bmatrix} K(t) \\ I_l \end{bmatrix} y_1(t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.2 Cas discret :

3.2.1 Modèle mathématique :

Notons que l'on peut obtenir les mêmes résultats pour le système discret avec équations initiales du système et de l'observation,

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(k) & A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(k) \\ B_2(k) \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega(k) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(k) \\ C_2(k) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

où les paramètres structuraux ainsi que les propriétés statistiques du système sont les mêmes définis par les expressions [(3.3)-(3.5)].

Comme indiqué auparavant, la fin de ce problème est la conception d'une séquence de vecteur commande optimale $u(k), k = 1, 2, \dots, N$; qui minimisera la fonction de coût J donnée par :

$$J = E[x^T(N)S_N x(N) + \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\Phi(k)x(k) + u^T(k)\Psi(k)u(k)]$$

où les matrices de pondération $S(N)$, $\Phi(k)$ et $\Psi(k)$ sont symétriques définies non-négatives sauf $\Psi(k)$ définie positive et de dimensions respectives $(n \times n), (n \times n), (m \times m)$.

Comme signalé dans le cas du système continu, il nous faut une commande de la forme :

$$u(k) = -L(k) x(k)$$

Ainsi, on doit trouver l'estimé $\hat{x}(k)$ du vecteur d'état du système d'origine $x(k)$.

3.2.2 Méthodologie

Nous allons construire un filtre à dimension réduite, à savoir, $(n-l)$, tant que l composantes non-bruyantes du vecteur de mesure sont disponibles. En suivant la même démarche des analyses du système continu, le problème peut se convertir à un filtrage d'un

système d'ordre réduit dont l'équation d'état est,

$$z(k+1) = \tilde{A}_{11}(k)z(k) + \tilde{A}_{12}(k)y_1(k) + \tilde{B}_1(k)u(k) + \omega_1(k) \quad (3.45)$$

L'équation de mesure du nouveau système sera donc donnée par le vecteur composé $z_a(k) \equiv [z_2^T(k) | z_3^T(k)]^T$ de dimension $(l+q)$ telle que :

$$z_a = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{21}(k) \\ \tilde{H}_1(k) \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} \omega_2(k) \\ v(k) \end{bmatrix} = H_a(k)z(k) + v_a(k) \quad (3.46)$$

où

$$H_a(k) \equiv \begin{bmatrix} \tilde{A}_{21}(k) \\ \tilde{H}_1(k) \end{bmatrix} \begin{matrix} l \\ q \end{matrix}, \quad \text{et} \quad v_a(k) \equiv \begin{bmatrix} \omega_2(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \begin{matrix} l \\ q \end{matrix}$$

$\leftarrow n-l \rightarrow$

3.2.3 L'équation de l'observateur :

L'équation de l'estimateur en adoptant la technique de l'observateur de Leuenberger sera,

$$\hat{z}(k+1) = K_1(k)\hat{z}(k) + K_2(k)z_a(k) + K_3(k)v(k)$$

où K_1 , K_2 , et K_3 sont des matrices de l'observateur de coefficients inconnus et de dimensions respectives $[(n-l) \times (n-l)]$, $[(n-l) \times (l-q)]$ et $[(n-l) \times (n-l)]$.

Les analyses du système continu ont montré que,

$$K_1(k) = [\tilde{A}_{11}(k) - K_2(k)H_a(k)]$$

et

$$K_3(k) = I_{n-l}$$

Ainsi, l'équation de l'observateur devient :

$$\hat{z}(k+1) = [\tilde{A}_{11}(k) - K_2(k)H_a(k)]\hat{z}(k) + K_2(k)z_a(k) + v(k) \quad (3.47)$$

avec les conditions initiales

$$\hat{z}(0) = M_1(0).E[x(0)] = M_1(0).x_0 \quad (3.48)$$

3.2.4 Matrice de covariance de l'erreur d'estimation et gain du filtre :

L'équation récurrente de l'erreur d'estimation sera :

$$e(k+1) = [\tilde{A}_{11}(k) - K_2(k)H_a(k)]e(k) + \omega_1(k) - K_2(k)v_a(k) \quad (3.49)$$

La matrice de covariance de l'erreur est définie par :

$$\tilde{P}(k+1) = \equiv E[e(k+1)e^T(k+1)]$$

En admettant que l'erreur d'estimation "e" et les bruits de système et de mesure ne sont pas corrélés; et en suivant les mêmes étapes que dans celles du système continu, la covariance de l'erreur d'estimation à l'instant k sera :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k+1) = & [\tilde{A}_{11}(k) - K_2(k)H_a(k)]\tilde{P}(k)[\tilde{A}_{11}(k) - K_2(k)H_a(k)]^T + \Psi_{\omega_1}(k) \\ & + K_2(k)\Psi_{v_a}(k)K_2^T(k) - \Psi_{\omega_1 v_a}(k)K_2^T(k) - K_2(k)\Psi_{v_a \omega_1}(k) \end{aligned} \quad (3.50)$$

La conception de l'estimateur linéaire au sens de variance minimale requiert, comme condition nécessaire, la minimisation de $\text{Tr}[\tilde{P}(k+1)]$ par rapport au gain du filtre $K(k)$, c'est-à-dire,

$$\partial \{\text{Tr}[\tilde{P}(k+1)]\} / \partial K(k) = \partial \{\text{Tr}[\tilde{P}(k)]\} / \partial K(k) = 0$$

Cette équation donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K(k)} \text{Tr}[\tilde{P}(k+1)] = & 2[K(k)H_a(k)\tilde{P}(k)H_a^T(k) - \tilde{A}_{11}(k)P(k)H_a^T(k) \\ & + K(k)\Psi_{v_a}(k) - \Psi_{v_a \omega_1}(k)] = 0 \end{aligned}$$

d'où, le gain du filtre optimal est :

$$K_0 = [\tilde{A}_{11}(k)\tilde{P}(k)H_a^T(k) + \Psi_{v_a \omega_1}(k)] [H_a(k)\tilde{P}(k)H_a^T(k) + \Psi_{v_a}(k)]^{-1} \quad (3.51)$$

Pour éliminer le terme $y_1(k+1)$ dans l'équation de l'observateur,

redéfinissons, $\underline{w}(k)$ en tant que vecteur d'état tel que :

$$\hat{\underline{w}}(k+1) = \hat{\underline{z}}(k+1) - K(k) \begin{pmatrix} I_l \\ 0 \end{pmatrix} y_1(k+1) = \hat{\underline{z}}(k+1) - K'(k) y_1(k+1) \quad (3.52)$$

En utilisant la relation (3.52), l'équation du filtre deviendra :

$$\hat{\underline{w}}(k+1) = [\tilde{A}_{11} - K(k)H_a] \hat{\underline{w}}(k) + \Omega(k)u(k) + \Omega_1(k)y_1(k) + \Omega_2(k)y_2(k) \quad (3.53)$$

où $\Omega(k) \equiv [\tilde{B}_1(k) - K(k)D(k)]$

$$\Omega_1(k) \equiv [\tilde{A}_{12} - K(k)D_1 - \tilde{A}_{11}K(k) - K(k)H_aK'] y_1(k)$$

$$\Omega_2(k) \equiv K(k)D_2(k)$$

et les matrices $D(k)$, $D_1(k)$, $D_2(k)$ sont comme définies auparavant dans le système continu. :

Cette équation du filtre est parfaitement équivalente à celle donnée par (3.47) et pourrait être résolue sans avoir la mesure $y_1(k+1)$.

L'estimé du vecteur d'état complet sera donc donné par :

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = M^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\underline{z}}(k+1) \\ y_1(k+1) \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\underline{w}}(k+1) + K'(k)y_1(k+1) \\ y_1(k+1) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = M^{-1} \begin{pmatrix} I_{n-l} \\ 0 \end{pmatrix} \hat{\underline{w}}(k) + \begin{pmatrix} K'(k) \\ I_l \end{pmatrix} y_1(k+1)$$

L'ordre du calcul lors de l'exécution de l'algorithme de l'observateur à ordre réduit et l'estimation du vecteur d'état du système d'origine sont résumés par l'organigramme montré par Fig.3.1.

3.3 Application 1 : Système de trois réservoirs

On se propose d'étudier l'évolution des niveaux H_2 et H_3

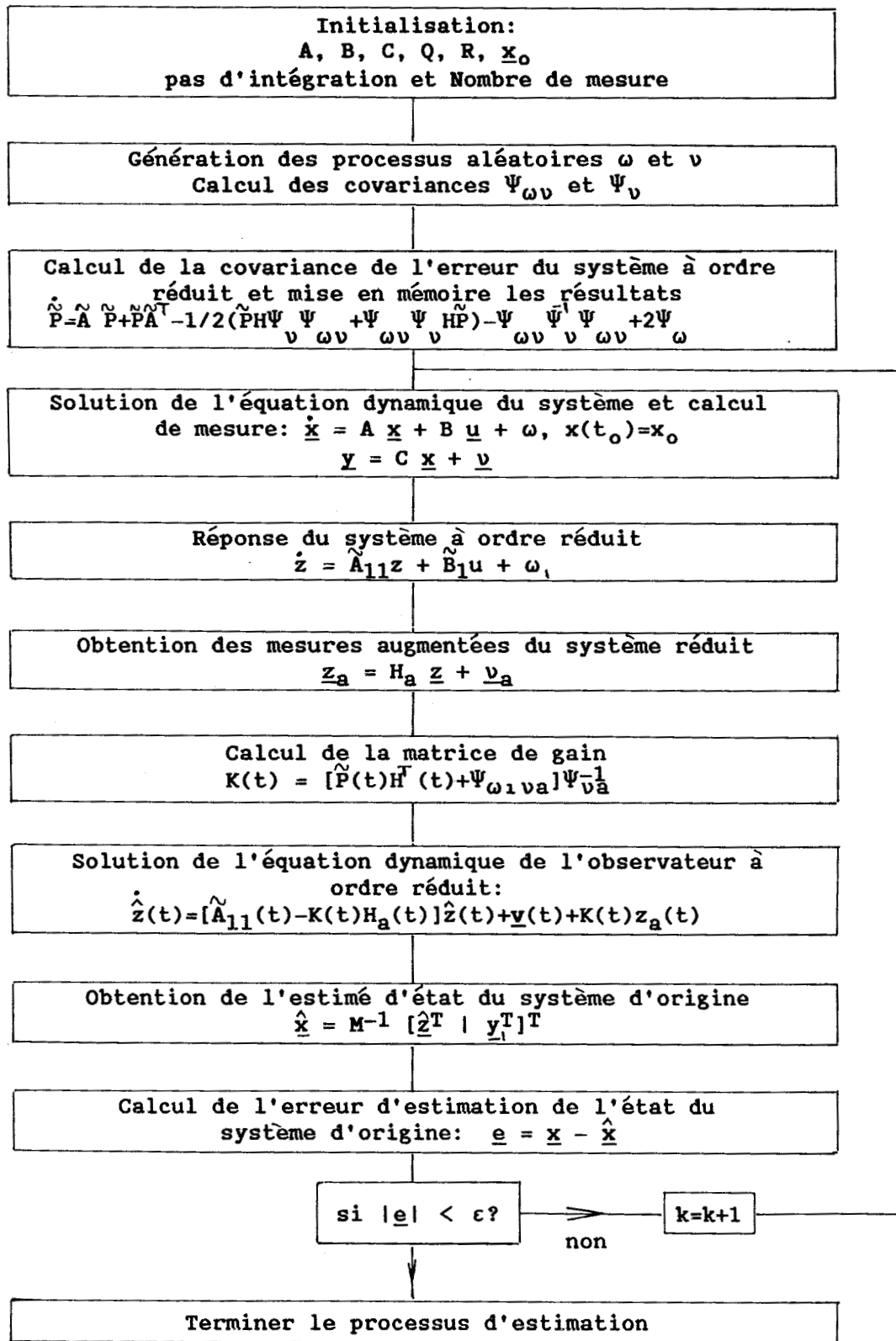


Fig.3.1 L'organigramme de l'algorithme continu de l'observateur à ordre réduit

d'un liquide qui se déverse dans les réservoirs 2 et 3 du système présenté sur la figure 3.2 ci-après. Ce système de réservoir de fluide est typiquement trouvé dans l'industrie de traitement chimique.

Cette étude portera sur les petites variations des niveaux qui résultent de changement du débit d'alimentation Q autour d'un point de fonctionnement d'une valeur Q_0 , m^3/sec . Les trois réservoirs sont cylindriques. Ils ont pour sections A_1 , A_2 et A_3 , m^2 . Egalement, les trois restrictions: R_1 , R_2 et R_3 ont pour coefficients de débits K_1 , K_2 et K_3 respectivement. Ces coefficients sont définis par l'équation :

$$Q^2 = K \cdot \Delta P \quad (1)$$

où Q est le débit qui traverse la restriction (en m^3/sec) et ΔP la différence de pression aux bornes de la restriction.

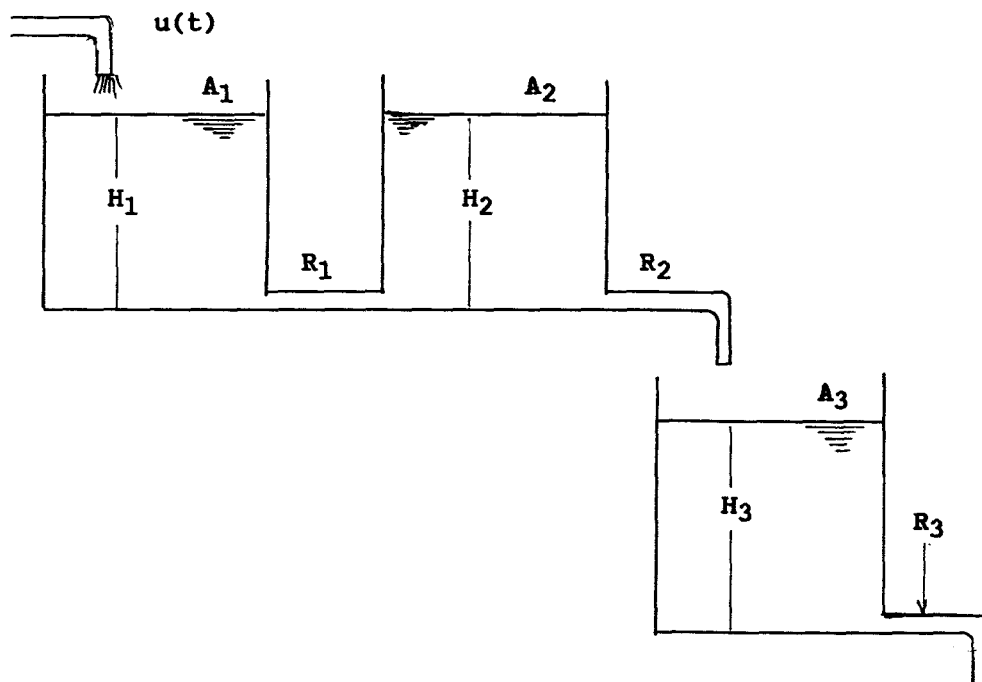


Fig.3.2 Système de niveau du fluide

3.3.1 Equation dynamique du système :

En régime stationnaire, les lois de la mécanique de fluide donnent,

$$\begin{aligned} Q_{30}^2 &= K_3 H_{30} \\ Q_{20}^2 &= K_2 H_{20} \end{aligned} \quad (2)$$

et $Q_{10}^2 = K_1 (H_{10} - H_{20})$

Lorsque Q varie autour de Q_0 et en cas de petite variation, nous posons :

$$\begin{aligned} Q &= Q + q \\ Q_1 &= Q_{10} + q_1 \\ Q_2 &= Q_{20} + q_2 \\ Q_3 &= Q_{30} + q_3 \end{aligned} \quad (3)$$

et de même

$$\begin{aligned} H_1 &= H_{10} + h_1 \\ H_2 &= H_{20} + h_2 \\ H_3 &= H_{30} + h_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Pour établir les équations dynamiques du système, nous considérons la série de Taylor autour du point de fonctionnement (Q_{10}, H_{10}) . D'où :

$$Q_{10}^2 + q_1 \cdot 2Q_{10} + q_1^2 = K_1 \cdot (H_{10} - H_{20}) + K_1 \cdot (h_1 - h_2) \quad (5)$$

En simplifiant par la relation (2), obtenue en régime permanent et en ne conservant que les termes du premier ordre, l'expression (5)

devient :

$$\begin{aligned}
 q_1 &= (K_1/2Q_{10}) \cdot (h_1 - h_2) \\
 \text{et de même, } q_2 &= (K_2/2Q_{20}) \cdot h_2 \\
 q_3 &= (K_3/2Q_{30}) \cdot h_3
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Ces relations expriment les variations des débits qui traversent les restrictions. Néanmoins, la différence entre débits entrant et sortant des réservoirs affecte les niveaux dans ceux-ci de sorte que nous aurons :

$$\begin{aligned}
 A_1 \, dh_1/dt &= Q - Q_1 = (Q_o + q) - (Q_{1o} + q_1) \\
 \text{d'où} \quad A_1 \, dh_1/dt &= q - q_1 \\
 \text{de même} \quad A_2 \, dh_2/dt &= q_1 - q_2 \\
 A_1 \, dh_1/dt &= q_2 - q_3
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

C'est à noter que les coefficients Q_{10}/K_1 , Q_{20}/K_2 et Q_{30}/K_3 représentent la résistance des trois tuyaux et ont les notations respectives R_1 , R_2 et R_3 . Ainsi, les équations différentielles représentant la dynamique de notre système seront :

$$\begin{aligned}
 A_1 \, dh_1/dt &= q_i - q_1 = q_i - (1/R_1)(h_1 - h_2) \\
 A_2 \, dh_2/dt &= q_1 - q_2 = (1/R_1)(h_1 - h_2) - (1/R_2)h_2 \\
 A_3 \, dh_3/dt &= q_2 - q_3 = (1/R_2)h_2 - (1/R_3)h_3
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

En considérant, les valeurs suivantes des paramètres :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_2 = A_3 = 1 \, \text{m}^2 \\
 R_1 &= 0.5 = 1/2 \, \text{sec/m}^2 \\
 R_2 &= 0.33 = 1/3 \, \text{sec/m}^2 \\
 R_3 &= 1/4
 \end{aligned}$$

Substituant dans l'équation (7), nous aurons :

$$dh_1/dt = -2h_1 + 2h_2 + q_1$$

$$dh_2/dt = 2h_1 - 5h_2$$

$$dh_3/dt = 3h_2 - 4h_3$$

Les deux niveaux H_2 et H_3 sont mesurés et notre système d'observation sera donné par les équations :

$$y_1 = h_2 + h_3$$

$$y_2 = h_3$$

Comme une perturbation aléatoire due à la résistance R_3 influence notre système, il sera donc décrit par le modèle dynamique stochastique suivant, (en notations générales) :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega(t)$$

et l'équation de mesure :

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$$

où $\omega(t)$ et $v(t)$ sont supposés être des processus aléatoires de moyenne nulle et de variances respectives,

$$E[\omega^2(t)] = \sigma_{\omega}^2 = 0.06 \text{ (m}^3/\text{sec)}^2$$

$$E[v^2(t)] = \sigma_v^2 = 0.002 \text{ (m)}^2$$

$$E[\omega(t)v(t)] = 0$$

Pour appliquer nos algorithmes de l'observateur à ordre réduit, il nous faut la matrice de transformation M qui se constitue comme :

$$M(t) = \begin{bmatrix} M_1 \\ \hline C_1 \end{bmatrix}$$

où C_1 représente la matrice d'observation relative à la partie

non-bruitée de la mesure,

$$C_1 = [0 \ 1 \ 1]$$

La matrice M_1 est le mapping ou la transformation d'un espace de n -dimension et un autre nouvel espace formé par le vecteur d'état du système réduit. Alors, nous choisissons M_1 tel que :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Naturellement, le choix de M_1 se détermine de sorte que les états non-observés apparaissent dans le système réduit et en même temps que son rang soit $(n-l)$ où l représente les composantes non-bruitées de mesure.

Ainsi, la matrice M et son inverse seront

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Matrices du système d'ordre réduit - La matrice du système $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = M A M^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 3 \\ \hline 2 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

La matrice de l'entrée $\tilde{B}$

$$\tilde{B} = M B = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de bruit du nouveau système

$$\tilde{\omega} = M \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \omega$$

Le nouveau système d'ordre réduit sera donc :

$$\dot{\underline{z}} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \underline{z} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega$$

Le vecteur augmenté d'observation du système réduit sera :

$$\underline{z}_a = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{z}_a + \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix}$$

3.3.3 L'équation de l'observateur -

L'équation dynamique de l'observateur (3.39) est donc :

$$\dot{\hat{\underline{z}}} = [\tilde{A}_{11} - K H_a] \hat{\underline{z}} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + K^0 \underline{z}_a$$

où la matrice de gain est obtenue à partir de l'expression :

$$K(t) = [\tilde{P}(t) H_a^T(t) + \Psi_{\omega_1 v_a}] \Psi_{v_a}^{-1}$$

Les matrices de covariances $\Psi_{\omega_1 v_a}$ et Ψ_{v_a} sont données par :

$$\Psi_{\omega_1 v_a} = E[\omega_1 v_a^T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{v_a} = E[v_a v_a^T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_v^2 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de covariance d'erreur $P(t)$ est obtenue depuis l'équation matricielle non-linéaire de Riccati :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}(t) = & \tilde{A}_{11} \tilde{P}(t) + \tilde{P}(t) \tilde{A}_{11}^T - \tilde{P}(t) H_a^T \Psi_{v_a}^{-1} \Psi_{\omega_1 v_a}^T \\ & - \Psi_{\omega_1 v_a} \Psi_{v_a}^{-1} H_a \tilde{P} + \tilde{P} H_a^T \Psi_{v_a}^{-1} H_a \tilde{P} + 2 \Psi_{\omega_1} \end{aligned}$$

3.4 Simulation de résultats :

Tout le calcul présenté dans ce chapitre aussi bien que le

chapitre 4 a été effectué sur un ordinateur PC IBM XT en précision simple. Des applications représentant des processus continus et/ou échantillonnées ont été réalisées en utilisant les algorithmes obtenus dans les deux chapitres.

Les résultats de simulation dans les deux chapitres assument que le procédé ainsi que la mesure de sortie sont entachés de bruit. Ces bruits sont blancs gaussiens de moyenne nulle. La génération de ces signaux a été faite par le sous-programme "Gauss" de la bibliothèque de programmes IBM.

Les figures de (3.3) à (3.5) représentent les résultats obtenus à travers l'algorithme continu de l'observateur à ordre réduit pour l'application du niveau de fluide considérée.

Nous constatons que les valeurs estimées convergent aux valeurs réelles des états. Les valeurs initiales des variables d'état sont considérées comme $x_1=1.2$, $x_2=2.0$ et $x_3=1.5$. Notre observateur assume des conditions initiales nulles. Bien que l'écart entre les deux ensembles des conditions initiales du système et de l'observateur soit important, nous trouvons que l'estimateur à ordre réduit approche étroitement du système d'origine et les valeurs estimées convergent toujours vers les valeurs réelles des états.

Egalement, vu le manque d'information concernant la covariance de l'erreur initiale P_0 , nous l'avons considéré zéro. Cela influence la valeur de la matrice de gain et lui accorde une valeur assez petite; ce qui cause une convergence lente au commencement du fonctionnement du filtre.

Il faut indiquer ici que la période d'échantillonnage pour la solution de l'équation de Riccati affecte sévèrement la positivité

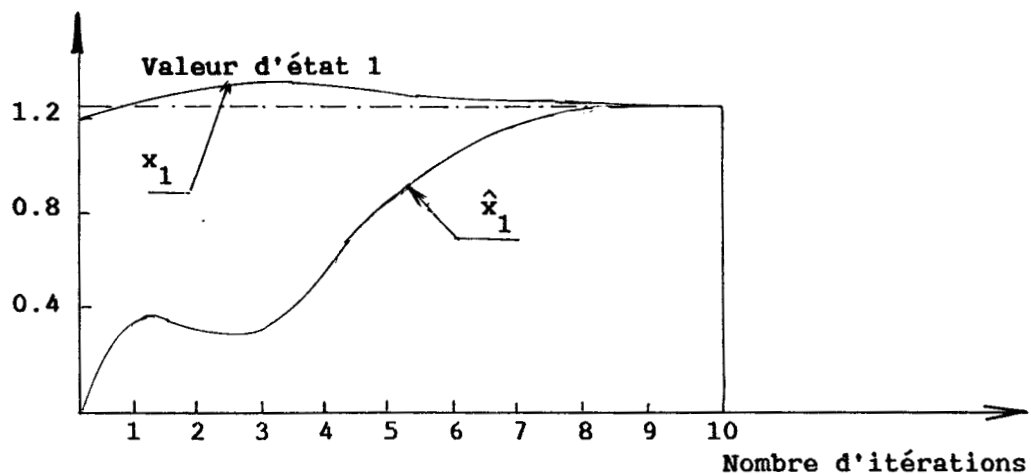


Fig.3.3 Variable d'état x_1 et son estimé $\hat{x}_1$

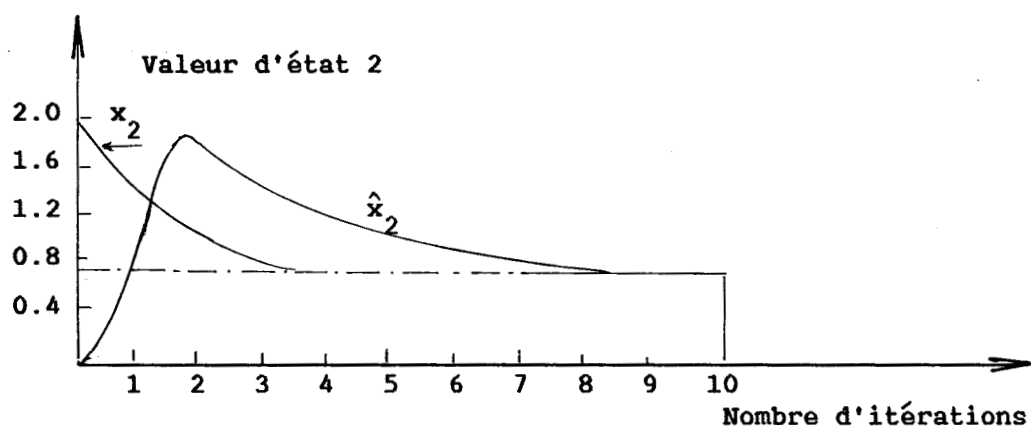


Fig.3.4 Variable d'état x_2 et son estimé $\hat{x}_2$

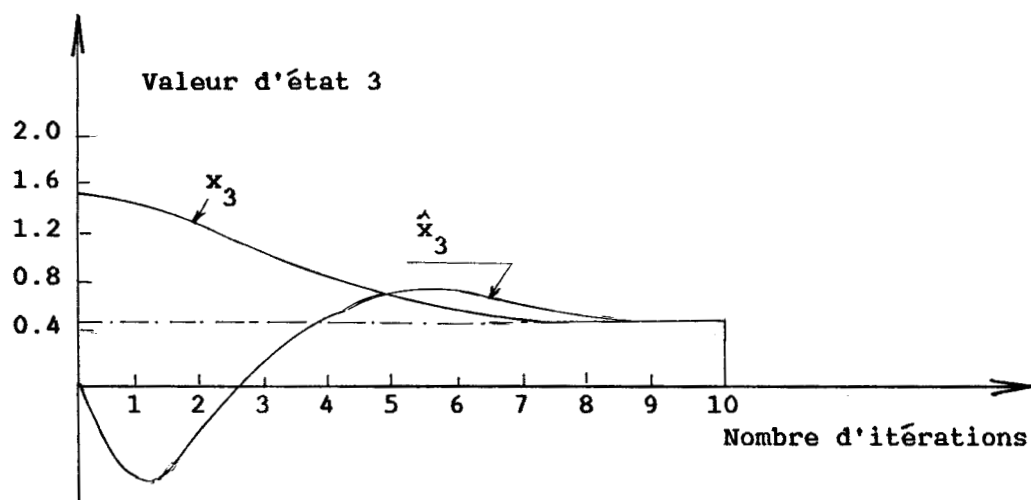


Fig.3.5 Variable d'état x_3 et son estimé $\hat{x}_3$

et la stabilité de la matrice de covariance d'erreur $\hat{P}$. Ici, nous conseillons d'avoir un pas d'intégration aussi petit que possible.

Il nous semble également que notre algorithme n'est pas sensible aux conditions initiales. Si les conditions initiales sont connues au préalable, cela accélérera la convergence des valeurs estimées et diminuera le temps d'estimation.

Suivant les étapes de conception de l'algorithme données précédemment par l'organigramme en Fig.3.1, les valeurs des variables d'état du système d'origine et les variables d'état estimées sont :

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1.29 & x_2 = 0.68 & x_3 = 0.42 \\ \hat{x}_1 = 1.23 & \hat{x}_2 = 0.70 & \hat{x}_3 = 0.40 \end{array}$$

Ainsi, les erreurs d'estimation sont:

$$\begin{array}{l} e_1 = x_1 - \hat{x}_1 = 0.06 \\ e_2 = x_2 - \hat{x}_2 = -0.02 \\ e_3 = x_3 - \hat{x}_3 = 0.02 \end{array}$$

Nous trouvons que chaque composante du vecteur d'erreur est inférieure à une petite valeur préspecifiée [$\epsilon = 0.1$]; c'est ainsi que le processus d'estimation est arrêté et les résultats sont obtenus selon la précision voulue.

3.5 Conclusion

Le problème de filtrage singulier, où certaines composantes du vecteur d'observation sont parfaitement mesurées, est présenté. Un observateur d'ordre réduit, pour des systèmes stochastiques

linéaires continus et discrets variants ou non dans le temps, est obtenu à partir de l'observateur de Leuenberger tout en se servant de la partie non-entachée de la mesure. Une matrice de transformation non dégénérée " M ", entre le vecteur d'état de l'observateur à l'ordre réduit et celui du système d'origine est établie.

Le principe de l'observateur asymptotique est adopté où un estimateur d'état non-biaisé est construit. Cela peut être regardé comme l'extension de l'observateur de Leuenberger pour englober les systèmes stochastiques.

Il faut préciser que les algorithmes obtenus se réduisent à ceux du filtre de Kalman-Bucy si toutes les composantes du vecteur de mesure sont atteintes de bruits additifs.

CHAPITRE IV

IDENTIFICATEUR-OBSERVATEUR ADAPTATIF POUR DES SYSTEMES

STOCHASTIQUES MONO-ENTREE MONO-SORTIE

4.0 Introduction :

Le travail effectué jusqu'ici traite du problème d'estimation optimale linéaire du vecteur d'état pour des systèmes continus et discrets, variants ou non dans le temps sous réserve que les paramètres structuraux de ces systèmes soient connus au préalable mais pour lesquels on manque d'informations concernant les statistiques à priori et les caractéristiques statistiques des bruits de système et d'observation. A ce propos, nous avons développé une procédure d'identification pour estimer les éléments des covariances de bruit Q et R induisant la sensibilité maximale au processus d'estimation.

Plus tard, il a été supposé qu'une étude des erreurs et de la sensibilité du filtre nous ait donné le modèle du système le plus proche de la réalité où il peut arriver que certains états et certaines composantes de la mesure ne soient pas bruités. Ainsi, nous sommes confrontés au problème de filtrage singulier

Afin d'éviter l'inversion de la matrice de covariance de bruit de la mesure R (surtout dans le cas continu), nous avons développé un estimateur d'ordre réduit tout en nous servant du principe de l'observateur de Leuenberger. Des algorithmes de gain et de la covariance d'erreur d'estimation du filtre pour ces systèmes ont été obtenus.

Dans ce chapitre, nous allons aborder le problème de l'estimation du vecteur d'état d'un système stochastique dont les statistiques à priori et propriétés statistiques sont plus ou moins connues correctement mais ce système manque d'informations au sujet

des paramètres structuraux. Le vecteur d'état, étant inaccessible, il nous faut concevoir un identificateur-observateur adaptatif en vue d'estimer les paramètres structuraux du système de même que reconstruire le vecteur d'état.

Comme ce problème est assez complexe, nous allons considérer un système stochastique une-entrée une-sortie et en identifier les paramètres structuraux ainsi que reconstruire le vecteur d'état à partir des signaux d'entrée et de sortie.

En général, si nous utilisons une méthode qui est basée sur une réalisation minimale de système pour l'élaboration d'un observateur adaptatif, des signaux stabilisants devront être ajoutés au processus en vue d'assurer la stabilité globale du système.

Une forme canonique de réalisation non-minimale [74] est adoptée dans notre travail. En effet, une telle réalisation non-minimale a une configuration telle que le vecteur d'état de cette représentation est complètement accessible. De là nous pouvons effectuer l'identification des paramètres structuraux tout en exploitant un modèle de référence adaptatif de représentation non-minimale également. Cela va nous donner des algorithmes ou des lois adaptatives pour les paramètres structuraux du système. Ensuite, ayant effectué une estimation des paramètres, nous procédons à la deuxième étape: reconstruire le vecteur d'état du système. Ceci peut être abordé de deux façons :

- Soit en élaborant un filtre de Kalman spécifique selon la nouvelle représentation du système.
- Soit en suivant la méthode du chapitre 3 qui est une généralisation de l'application de l'observateur de Leuenberger aux systèmes stochastiques.

Dans ce qui suit, nous allons présenter le développement de ce problème dans le cas continu puis dans le cas discret.

4.1 Cas continu :

4.1.1 Modèle mathématique du système :

Le système considéré est représenté par l'équation d'état dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \underline{\mathbf{b}} u(t) + \underline{\mathbf{g}} \omega(t) \\ y(t) &= \underline{\mathbf{c}}^T \mathbf{x}(t) + v(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

- où
- $\mathbf{x}(t)$, le vecteur d'état du système de dimension n
 - $u(t)$, l'entrée scalaire au système
 - $\mathbf{A}$, $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}}^T$ et $\underline{\mathbf{g}}$ sont les matrices du système à coefficients constants, ou variants lentement dans le temps. Elles sont de dimensions respectives $(n \times n)$, $(n \times 1)$, $(1 \times n)$ et $(n \times 1)$.
 - $\omega(t)$, le bruit du processus de moyenne nulle, et de variance,

$$E[\omega^2(t)] = \sigma_\omega^2$$

- $v(t)$, un bruit blanc centré de la mesure, de variance,

$$E[v^2(t)] = \sigma_v^2$$

Le système est complètement commandable et complètement observable. En outre, la matrice du système $\mathbf{A}$ est asymptotiquement stable. Ainsi, notre système peut être représenté sous la forme canonique d'observabilité de l'espace d'état,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & & & \\ -a_2 & & & \\ & \ddots & I_{n-1} & \\ & & & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \omega(t)$$

et

$$y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] x(t) + v(t) \quad (4.2)$$

4.1.2 Réalisation non-minimale du système inconnu :

Considérons un polynôme $\Lambda(s)$ asymptotiquement stable qui peut s'écrire comme :

$$\Lambda(s) = \prod_{j=2}^n (s+\lambda_j) \quad (4.3)$$

Les caractéristiques suivantes appartiennent à ce polynôme. Elles sont :

- Le polynôme $\Lambda(s)$ est premier par rapport au numérateur $N_p(s)$ et dénominateur $D_p(s)$ du processus.

- Il a des valeurs-propres distinctes, c'est-à-dire,

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j, \quad i, j=2, 3, \dots, n$$

- C'est un polynôme uniformément asymptotiquement stable,

$$\lambda_i \geq 0, \quad i=2, 3, \dots, n$$

Ainsi, le polynôme sera :

$$\Lambda(s) = \prod_{j=2}^n (s+\lambda_j) = (s+\lambda_2)(s+\lambda_3) \dots (s+\lambda_n) \quad (4.4)$$

4.1.2a Fonction de transfert du système :

En utilisant la transformée de Laplace pour les équations (4.1), nous aurons :

$$y(s) = [\underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b}] u(s) + [\underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{g}] \omega(s) + v(s) \quad (4.5)$$

La matrice A, étant sous la forme canonique d'observabilité, l'équation ci-dessus peut s'écrire comme,

$$y(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} u(s) + \frac{g_1 s^{n-1} + g_2 s^{n-2} + \dots + g_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} \omega(s) + v(s) \quad (4.6)$$

Par la division du numérateur et dénominateur de l'équation ci-dessus par le polynôme $\Lambda(s)$, celle-ci devient :

$$y(s) = \frac{\{\beta_1 + [\beta_2/(s+\lambda_2)] + \dots + [\beta_n/(s+\lambda_n)]\} u(s)}{\{s - \alpha_1 - [\alpha_2/(s+\lambda_2)] - \dots - [\alpha_n/(s+\lambda_n)]\}} + \frac{\{\gamma_1 + [\gamma_2/(s+\lambda_2)] + \dots + [\gamma_n/(s+\lambda_n)]\} \omega(s)}{\{s - \alpha_1 - [\alpha_2/(s+\lambda_2)] - \dots - [\alpha_n/(s+\lambda_n)]\}} + v(s)$$

En multipliant par le dénominateur, les deux parties de cette équation, on aura :

$$\begin{aligned} [y(s) - v(s)] &= 1/s \{ \alpha_1 y(s) + \sum_{i=2}^n [\alpha_i/(s+\lambda_i)] y(s) + \beta_1 u(s) \\ &+ \sum_{i=2}^n [\beta_i/(s+\lambda_i)] u(s) + \gamma_1 \omega(s) + \sum_{i=2}^n [\gamma_i/(s+\lambda_i)] \omega(s) \\ &- \alpha_1 v(s) - \sum_{i=2}^n [\alpha_i/(s+\lambda_i)] \omega(s) \} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Le schéma-bloc représentant l'équation ci-dessus est montré par Fig.4.1. Dans cette figure, il y a un nombre "n" d'intégrateurs,

c'est-à-dire, "n" constantes de temps. Ceci représente un système d'ordre n et devrait être une représentation minimale du système d'origine donné par l'équation (4.1). Définissons comme variables d'état les composantes spécifiées par $v_1, v_2, \dots, v_n$ en Fig.4.1, nous aurons la représentation alternative minimale d'état suivante :

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= [\alpha_1 v_1 + \beta_1 u + \gamma_1 \omega - \alpha_1 v] + v_2 + \dots + v_n \\ \dot{v}_2 &= \alpha_2 v_1 - \lambda_2 v_2 + \beta_2 u + \gamma_2 \omega - \alpha_2 v \\ &\vdots \\ \dot{v}_n &= \alpha_n v_1 - \lambda_n v_n + \beta_n u + \gamma_n \omega - \alpha_n v\end{aligned}\quad (4.8)$$

L'ensemble d'équations ci-dessus peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\dot{\underline{v}} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{h}^T \\ \hline -\Lambda \end{array} \right] \underline{v} + \underline{\beta} u(t) + \underline{\gamma} \omega(t) - \underline{\alpha} v(t) \quad (4.9)$$

où $v_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \underline{v} + v(t) = \underline{c}^T \underline{v}(t) + v(t)$

$$\underline{\alpha} = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T, \quad \underline{\beta} = [\beta_1 \ \dots \ \beta_n]^T$$

et la matrice diagonale Λ est :

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_2 \ \lambda_3 \ \dots \ \lambda_n]$$

Il faut signaler que l'expression (4.7) peut se ramener au domaine du temps, tout en considérant des conditions initiales nulles; elle s'écrira donc comme :

$$v_1 = \alpha_1 y + \underline{\alpha}^* z_1 + \beta_1 u + \underline{\beta}^* z_2 + \underline{\gamma}^T \omega - \underline{\alpha}^T v \quad (4.10)$$

où

$$\begin{aligned}\underline{\alpha}^* &= [\alpha_2 \ \alpha_3 \ \dots \ \alpha_n]^T \\ \underline{\beta}^* &= [\beta_2 \ \beta_3 \ \dots \ \beta_n]^T \\ \underline{\omega} &= \{\omega \ [1/(p+\lambda_2)]\omega \ \dots \ [1/(p+\lambda_n)]\omega\}^T \\ \underline{v} &= \{v \ [1/(p+\lambda_2)]v \ \dots \ [1/(p+\lambda_n)]v\}^T\end{aligned}$$

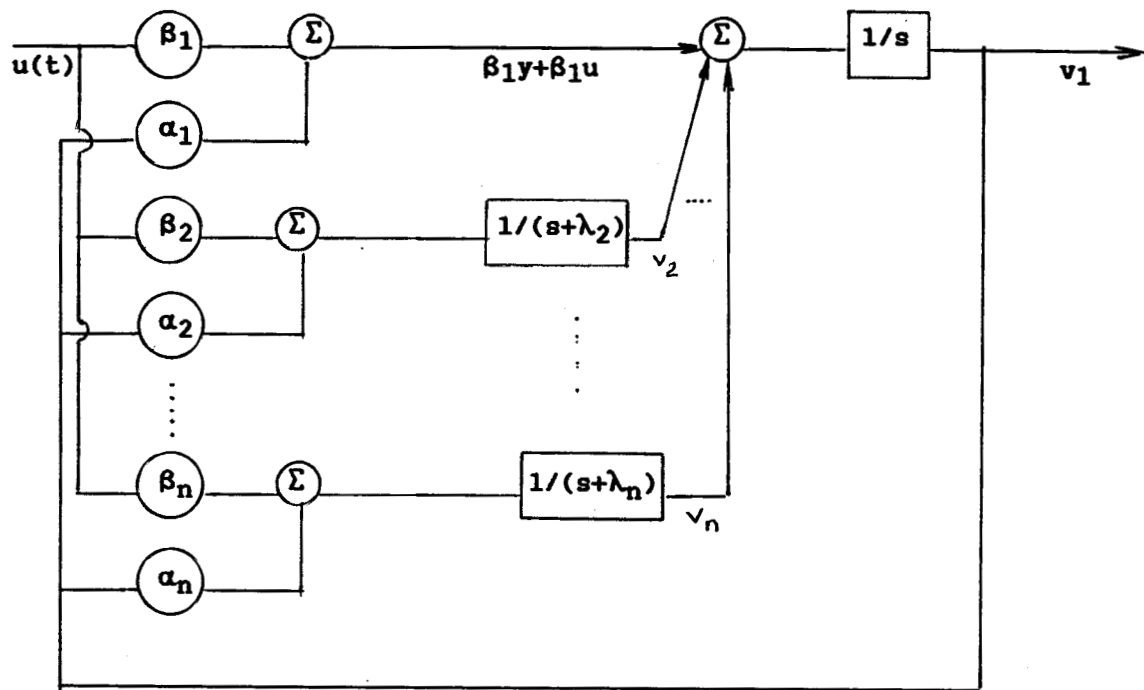


Fig.4.1 Réalisation minimale du système d'origine

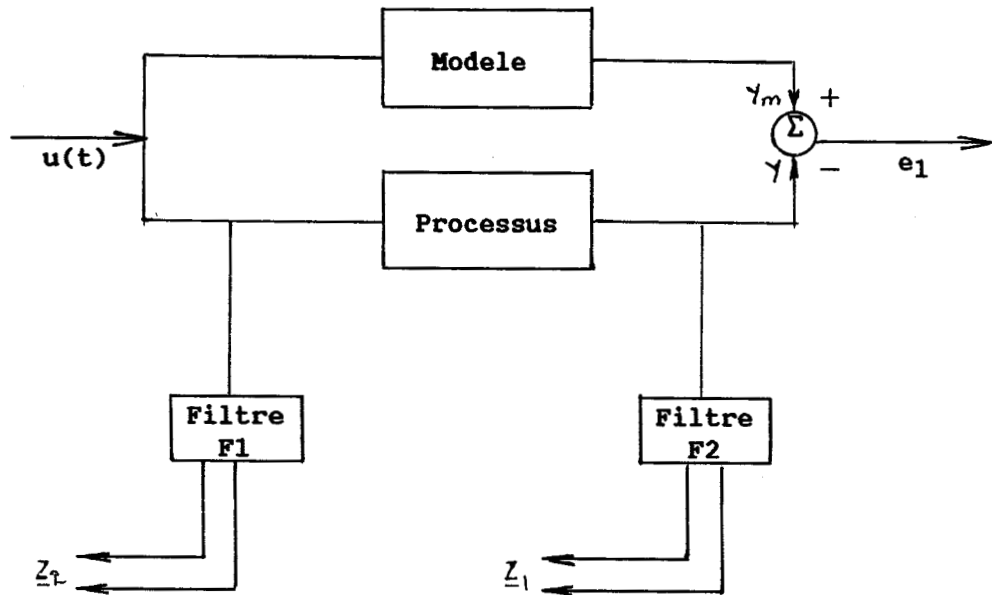


Fig.4.2 Filtres à variables d'état pour l'entrée et la sortie du système

$$\underline{z}_1(t) = \begin{bmatrix} [1/(P+\lambda_2)]y(t) \\ \vdots \\ [1/(P+\lambda_n)]y(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{z}_2(t) = \begin{bmatrix} [1/(P+\lambda_2)]u(t) \\ \vdots \\ [1/(P+\lambda_n)]u(t) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Il est à noter que la division du numérateur et du dénominateur de la transmittance du système (4.5) par le polynôme stable $\Lambda(s)$ équivaut à l'utilisation des deux filtres F_1 et F_2 pour les signaux de sortie et d'entrée respectifs; d'où proviennent les deux vecteurs d'état $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ de dimension $(n-1)$ comme cela est montré par Fig.4.2 pour le système d'origine.

Les équations des filtres peuvent être réécrites sous la forme différentielle telle que :

$$\begin{aligned} \underline{F1} : \quad \dot{\underline{z}}_1(t) &= -\Lambda \underline{z}_1(t) + \underline{h} y(t) \\ \underline{F2} : \quad \dot{\underline{z}}_2(t) &= -\Lambda \underline{z}_2(t) + \underline{h} u(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

où

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & & 0 \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \underline{h} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T$$

Par la suite, une représentation non-minimale du système d'origine est obtenue à partir des équations (4.10) et (4.12). Celle-ci est illustrée dans la Fig.4.3 et donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{v}}_1 &= \alpha_1 \underline{v} + \underline{a}^T \underline{z}_1 + \underline{\beta}_1 u + \underline{\beta}^T \underline{z}_2 + \underline{\gamma}^T \underline{\omega} - \underline{a}^T \underline{v} \\ \underline{F1} : \quad \dot{\underline{z}}_1(t) &= -\Lambda \underline{z}_1(t) + \underline{h} y(t) \\ \underline{F2} : \quad \dot{\underline{z}}_2(t) &= -\Lambda \underline{z}_2(t) + \underline{h} u(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

A ce point, il faut noter que l'équation (4.8) de la réalisation minimale et l'équation (4.13) donnant la réalisation

non-minimale représentent le même système à l'exception relative à la considération des conditions initiales. Lorsque l'équation (4.8) considère les conditions initiales données par la valeur $y(0)$ et les signaux $v_{20}, v_{30}, \dots, v_{n0}$; nous trouvons que les deux filtres F_1 et F_2 dans la réalisation non-minimale (4.13) supposent des conditions initiales nulles.

Pour que le modèle non-minimal soit une réalisation réelle du système, il faut tenir compte des conditions initiales. Cela nous ramène à la représentation non-minimale suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \underline{a}^{*T} & \beta^{*T} \\ h & -\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} y^T \underline{a} - \underline{a}^T \underline{v} + h^T e^{-\Lambda t} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

où le terme $h^T e^{-\Lambda t} v_0$ représente un terme transitoire relatif aux conditions initiales de la réalisation minimale du système d'origine.

Il est évident que le schéma-bloc Fig.4.1 a été modifié en Fig.4.3, où l'on trouve un nombre d'intégrateurs égal à $(2n-1)$. Cette figure est une représentation non-minimale du système d'origine comme signalé auparavant. Nous définissons les variables d'état telles qu'elles sont spécifiées dans la figure 4.2 et selon l'ensemble d'équations (4.13).

4.1.3 Modèle de référence à une représentation non-minimale :

La structure du modèle de référence à paramètres ajustables

est également une représentation non-minimale du processus. Les grandeurs de l'action directe et de la rétroaction au modèle sont respectivement $u(t)$ l'entrée, et $y(t)$ la sortie du processus. Le schéma-bloc Fig.4.4 représente cette réalisation du modèle de référence. Dans cette figure, λ_1 est une valeur scalaire positive arbitrairement sélectionnée. Toutes les autres λ_i , $i=2, 3, \dots, n$ sont identiques à celles utilisées pour la réalisation non-minimale du processus.

Considérant les conditions initiales nulles dans la figure 4.4, toutes les variables d'état du processus et celles du modèle de référence, à l'exception de la sortie, sont similaires. Par conséquent, la seule différence entre les deux vecteurs d'état réside dans les deux sorties y et $\hat{y}$.

De la figure 4.4, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}} &= -\lambda_1 y + [\hat{\alpha}_1(t) + \lambda_1] y + \hat{\alpha}^{*T} \underline{z}_1 + \hat{\beta}_1 u + \hat{\beta}^{*T} \underline{z}_2 \\ \text{F1 : } \dot{\hat{z}}_1(t) &= -\Lambda \hat{z}_1(t) + h y(t) \\ \text{F2 : } \dot{\hat{z}}_2(t) &= -\Lambda \hat{z}_2(t) + h u(t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Celle-ci est réécrite sous la forme vectorielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{y}} \\ \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1(t) + \lambda_1 & \hat{\alpha}^{*T}(t) & \hat{\beta}^{*T}(t) \\ h & -\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{y} \quad (4.16)$$

4.1.4 L'équation différentielle d'erreur :

En soustrayant (4.13) de (4.16) tout en admettant les égalités de $\underline{z}_1$ et $\hat{\underline{z}}_1$ d'un côté et de $\underline{z}_2$ et $\hat{\underline{z}}_2$ de l'autre,

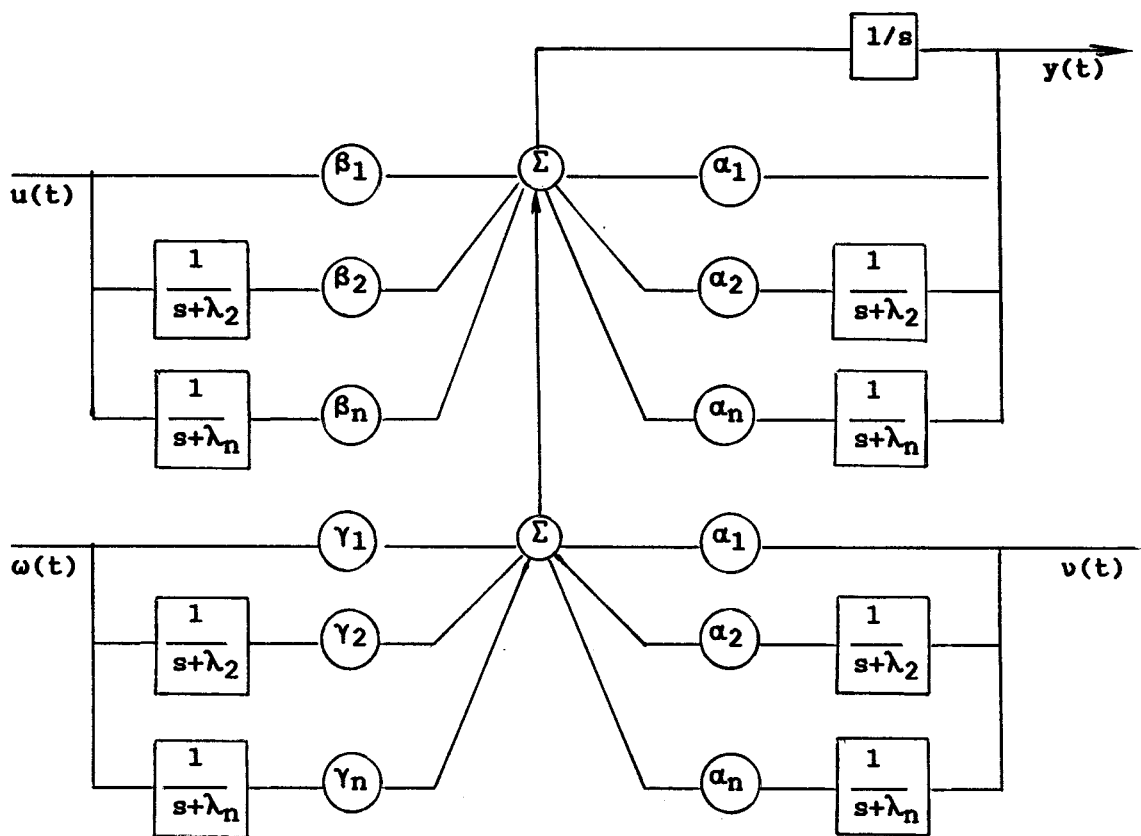


Fig.4.3 Représentation non-minimale du système d'origine

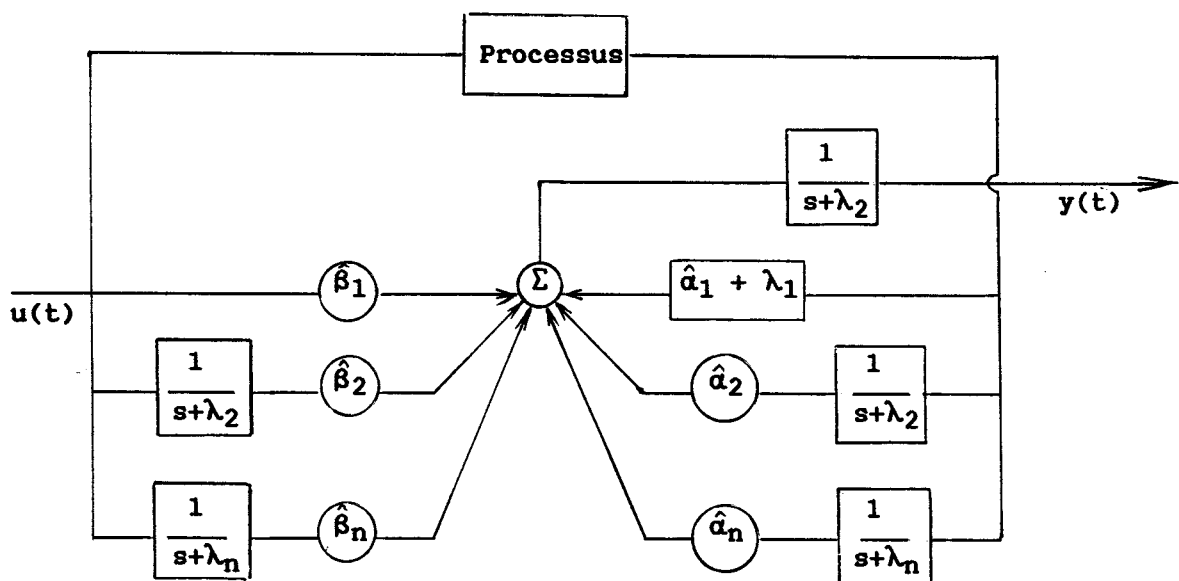


Fig.4.3 Représentation non-minimale du modèle de référence

l'autre, l'équation différentielle de l'erreur s'obtient (en omettant l'argument "t") comme :

$$\underline{\dot{e}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \hat{\underline{a}}^{*T} - \underline{a}^{*T} & \hat{\underline{\beta}}^{*T} - \underline{\beta}^{*T} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1(t) - \beta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$+ \begin{bmatrix} (\hat{a}_1 - a_1)y - \underline{\gamma}^T \underline{\omega} + \hat{\underline{a}}^T \underline{v} - h^T e^{-\Lambda t} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\dot{e}_1(t) = -\lambda_1 e_1 + [\hat{a}_1 - a_1 \quad \hat{\underline{a}}^{*T} - \underline{a}^{*T}] \begin{bmatrix} y \\ \underline{z}_1 \end{bmatrix} + [\hat{\beta}_1(t) - \beta_1 \quad \hat{\underline{\beta}}^{*T} - \underline{\beta}^{*T}] \begin{bmatrix} u \\ \underline{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ [-\underline{\gamma}^T \quad -\underline{a}^T] \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{v} \end{bmatrix} - h^T e^{-\Lambda t} v_0$$

$$\dot{e}_1(t) = -\lambda_1 e_1 + \underline{\Phi}^T \underline{\zeta}_1(t) + \underline{\Psi}^T \underline{\zeta}_2(t) - \underline{\gamma}^T \underline{\omega} + \underline{a}^T \underline{v} - h^T e^{-\Lambda t} v_0$$

(4.17)

La solution de cette équation d'erreur est donnée par :

$$e_1(t) = e^{-\lambda_1 t} e_1(0)$$

$$+ \int_0^t e^{-\lambda_1(t-\tau)} [\underline{\Phi}^T \underline{\zeta}_1 + \underline{\Psi}^T \underline{\zeta}_2 - \underline{\gamma}^T \underline{\omega} + \underline{a}^T \underline{v} - h^T e^{-\Lambda \tau} v_0] d\tau$$

(4.18)

où les paramètres vecteurs d'erreur $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$ sont

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 - a_1 \\ \hat{a}_2 - a_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n - a_n \end{bmatrix} \quad \underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 \\ \hat{\beta}_2 - \beta_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_n - \beta_n \end{bmatrix}$$

et les vecteurs $\underline{\zeta}_1$ et $\underline{\zeta}_2$ sont définis comme :

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ [1/(p+\lambda_2)]y \\ [1/(p+\lambda_3)]y \\ \vdots \\ [1/(p+\lambda_n)]y \end{bmatrix} \quad \zeta_2 = \begin{bmatrix} u \\ \vdots \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ [1/(p+\lambda_2)]u \\ [1/(p+\lambda_3)]u \\ \vdots \\ [1/(p+\lambda_n)]u \end{bmatrix}$$

4.1.5 Identification adaptative des paramètres :

Le vecteur d'erreur du système est

$$\underline{e}^T \equiv [\hat{y} \quad \hat{z}_1 \quad \hat{z}_2]^T - [y \quad z_1 \quad z_2]^T = \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et les paramètres vecteurs d'erreurs $\underline{\phi}$ et $\underline{\psi}$ sont définis comme auparavant.

En choisissant comme fonction de Lyapunov, l'équation d'écart quadratique suivante :

$$V(t) = 1/2 \cdot E[e_1^2(t) + \underline{\phi}^T \Gamma_1^{-1} \underline{\phi} + \underline{\psi}^T \Gamma_2^{-1} \underline{\psi}] \quad (4.19)$$

où Γ_1 et Γ_2 sont des matrices définies positives quelconques.

Prenant la dérivée de $V(t)$, tout en nous servant de l'équation de sortie du système, l'équation d'erreur et les propriétés statistiques des bruits, nous aurons :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \{-\lambda_1 E[e_1^2] + \sigma_\omega^2 \gamma_1^2 + \sigma_v^2 \hat{a}_1^2 - \underline{h}^T e^{-\Lambda t} \underline{v}_0 \bar{e}_1 \\ & + [\hat{\underline{a}}(t) - \underline{a}]^T \{ \Gamma_1^{-1} \hat{\underline{a}}(t) + E[\zeta_1 e_1] - [\sigma_\omega^2 \gamma_1^2 + \sigma_v^2 \hat{a}_1^2] \underline{1}_e \} \\ & + [\hat{\underline{\beta}}(t) - \underline{\beta}]^T \{ \Gamma_2^{-1} \hat{\underline{\beta}}(t) + E[\zeta_2 e_1] \} \end{aligned} \quad (4.20)$$

où $\bar{e}_1 = E[e_1(t)]$, la valeur moyenne de $e_1(t)$.

4.1.5a Lois adaptatives :

De l'équation ci-dessus nous pouvons tirer les lois adaptatives suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\alpha}}(t) &= -\Gamma_1 \{E[\underline{\zeta}_1 e_1] - [\sigma_\omega^2 \gamma_1^2 - \sigma_v^2 \alpha_1^2] \underline{e}\} \\ \dot{\underline{\beta}}(t) &= -\Gamma_2 E[\underline{\zeta}_2 e_1]\end{aligned}\quad (4.21)$$

où $\underline{e}$ est le vecteur "un" donné par :

$$\underline{e} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$$

En substituant les lois adaptatives dans l'équation $\dot{V}$, nous obtenons :

$$\dot{V}(t) = -\lambda_1 E[e_1^2] - h^T e^{-\Lambda t} \underline{v}_0 \bar{e}_1 + \sigma_\omega^2 \gamma_1^2 + \sigma_v^2 \alpha_1^2$$

4.1.5b La convergence et l'analyse de stabilité :

A l'absence de perturbations aléatoires ω et v , les lois adaptatives (5.27) se réduisent à :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\alpha}}(t) &= -\Gamma_1 E[\underline{\zeta}_1 e_1] \\ \dot{\underline{\beta}}(t) &= -\Gamma_2 E[\underline{\zeta}_2 e_1]\end{aligned}\quad (4.22)$$

Ainsi, l'expression de $\dot{V}(t)$ sera définie négative et devient :

$$\dot{V}(t) = -\lambda_1 e_1^2 - h^T e^{-\Lambda t} \underline{v}_0 \bar{e}_1(t) \quad (4.23)$$

Alors, il en résulte un système globalement stable donnant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0 \quad (4.24)$$

Or, puisque nous traitons d'un système stochastique, de l'équation (4.21), les lois adaptatives peuvent être modifiées comme suit :

$$\begin{aligned}\underline{\alpha}(t) &= 0 \\ \underline{\beta}(t) &= 0\end{aligned}\quad \text{pour } \lambda_1 E[e_1^2] \geq M_0 \quad (4.25)$$

et

$$\begin{aligned}\dot{\underline{a}}(t) &= -\Gamma_1 \{E[\underline{\zeta}_1 e_1] - [\sigma_\omega^2 \gamma_1^2 - \sigma_v^2 \alpha_1^2] \underline{e}\} \\ \dot{\underline{\beta}}(t) &= -\Gamma_2 E[\underline{\zeta}_2 e_1]\end{aligned}\quad (4.26)$$

$$\text{pour } \lambda_1 E[e_1^2] \leq M_0$$

où M_0 dénote la taille d'une zone neutre dans laquelle les lois adaptatives ne s'effectuent pas. En général, M_0 peut être supposé supérieur à une certaine valeur préspecifiée. Celle-ci peut s'obtenir de l'équation (4.21) telle que :

$$M_0 \geq \sigma_\omega^2 \gamma_1^2 - \sigma_v^2 \alpha_1^2 + \delta \quad (4.27)$$

où δ est une petite valeur à déterminer en fonction des statistiques de bruit. L'équation ci-dessus montre que plus M_0 est grand plus le système pourra tolérer l'erreur et l'adaptation s'effectue pendant des périodes plus courtes.

Des lois adaptatives (4.21) nous avons $\dot{\underline{V}}(t)$ comme :

$$\dot{\underline{V}} = -\lambda_1 E[e_1^2] + \sigma_\omega^2 \gamma_1^2 - \sigma_v^2 \alpha_1^2 - \underline{h}^T e^{-\Lambda t} \underline{v}_0 e_1 \quad (4.28)$$

Comme le processus d'adaptation n'a lieu que lorsque l'erreur du système satisfait à la condition :

$$\lambda_1 E[e_1^2] \geq \sigma_v^2 \alpha_1^2 - \sigma_\omega^2 \gamma_1^2 \quad (4.29)$$

il en résulte que

$$V \leq -\underline{h}^T e^{-\Lambda t} \underline{v}_0 E[e_1] \leq |-\underline{h}^T e^{-\Lambda t} \underline{v}_0| \cdot |e_1| \quad (4.30)$$

où $\bar{e}_1(t)$ est la valeur moyenne de l'erreur $e_1(t)$.

Nous avons aussi, de l'équation (4.19), que :

$$\sigma_e^2 \leq 2V, \quad \text{ou} \quad \sigma_e \leq \sqrt{2V} \quad (4.31)$$

σ_e étant l'écart-type de l'erreur $e_1(t)$.

En reportant (4.31) dans l'équation de $\dot{\underline{V}}$, nous obtenons :

$$\dot{\underline{V}} \leq |-\underline{h}^T \underline{e} - \Lambda t \underline{v}_0| \sqrt{2V} \quad (4.32)$$

Définissons,

$$V = W^2, \quad W > 0$$

l'inégalité ci-dessus devient,

$$\begin{aligned} 2W\dot{W} &\leq |-\underline{h}^T \underline{e} - \Lambda t \underline{v}_0| \sqrt{2} W \\ \text{d'où} \quad \dot{W} &\leq 1/\sqrt{2} |-\underline{h}^T \underline{e} - \Lambda t \underline{v}_0| \end{aligned} \quad (4.33)$$

Maintenant, puisque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (-\underline{h}^T \underline{e} - \Lambda t \underline{v}_0) = 0 \quad (4.34)$$

donc $\dot{W}$ et $\dot{\underline{V}}$ tendent vers zéro quand $t \rightarrow \infty$, ce qui implique la stabilité de notre algorithme adaptatif.

En revenant à l'équation différentielle de l'erreur (4.17); en la multipliant par $e_1(t)$ et en prenant l'espérance, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E[e_1 \dot{e}_1] &= -\lambda_1 \cdot E[e_1^2] + (\sigma_w^2 \gamma_1^2 + \sigma_v^2 \alpha_1^2) |-\underline{h}^T \underline{e} - \Lambda t \underline{v}_0 e_1| \\ &\quad + [\hat{\underline{a}}(t) - \underline{a}]^T \{E[\underline{\zeta}_1 e_1] - (\sigma_w^2 \gamma_1^2 + \sigma_v^2 \alpha_1^2) \underline{e}\} \\ &\quad + [\hat{\underline{\beta}}(t) - \underline{\beta}]^T \{E[\underline{\zeta}_2 e_1]\} = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Lorsque l'adaptation est effectuée, nous aurons :

$$-\lambda_1 \cdot E[e_1^2] + (\sigma_w^2 \gamma_1^2 + \sigma_v^2 \alpha_1^2) = 0 \quad (4.36)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{h}^T \underline{e} - \Lambda t \underline{v}_0 \bar{e}_1 = 0$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{[\hat{\underline{a}}(t) - \underline{a}]^T E[\underline{\zeta}_1 e_1] + [\hat{\underline{\beta}}(t) - \underline{\beta}]^T E[\underline{\zeta}_2 e_1]\} = 0 \quad (4.37)$$

Si l'entrée $u(t)$ est suffisamment riche et persistante, la 2n

fonctions du temps,

$$\begin{aligned} E[\zeta_1(t)e_1(t)] \\ E[\zeta_2(t)e_1(t)] \end{aligned} \quad (4.38)$$

sont linéairement indépendantes et ne peuvent être nulles. Ceci nous conduit à conclure que :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\underline{\alpha}}(t) &= \underline{\alpha} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\underline{\beta}}(t) &= \underline{\beta} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ainsi, l'identification des paramètres est achevée. Prenant les matrices définies positives Γ_1 et Γ_2 comme diagonales,

$$\Gamma_1 = \text{diag}[\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_n]; \quad \Gamma_2 = \text{diag}[\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n] \quad (4.40)$$

les lois adaptatives se réduisent à :

$$\dot{\hat{\alpha}}_1(t) = -\rho_1 E[ye_1] - \gamma_1^2 \sigma_0^2 + \alpha_1^2 \sigma_0^2; \quad (4.41)$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_i(t) = -\rho_i E[\zeta_{1i}e_1] - \gamma_i^2 \sigma_0^2 + \alpha_i^2 \sigma_0^2; \quad i=2,3,\dots,n$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\beta}}_1(t) &= -\delta_1 E[ue_1(t)]; \\ \dot{\hat{\beta}}_i(t) &= -\delta_i E[\zeta_{2i}e_1(t)]; \quad i=2,3,\dots,n \end{aligned} \quad (4.42)$$

La vérification de la convergence utilise le théorème de Lasalle; et ainsi $u(t)$, tel qu'il est supposé ici, devrait être une fonction périodique.

4.1.6 Estimation de l'état :

Le vecteur d'état à estimer est $\underline{v}(t)$ défini par l'équation (4.8). Celui-ci représente le vecteur d'état de la réalisation

minimale du système d'origine. Ayant effectué la procédure d'identification des paramètres tout en nous servant de la représentation non-minimale du système, nous pouvons en reconstruire les variables d'état. Cependant, à cette étape, on peut suivre une des deux voies suivantes :

- conception d'un filtre de Kalman spécifique correspondant à la nouvelle présentation minimale du système
- Construction de l'observateur de Leuenberger en adoptant la même procédure que celle présentée au chapitre 3.

Dans les deux approches, nous disposons des paramètres identifiés $\hat{\underline{a}}$ et $\hat{\underline{\beta}}$ au lieu de $\underline{a}$ et $\underline{\beta}$. Bien que différentes en principe, les deux approches aboutissent aux mêmes résultats. Néanmoins nous allons suivre notre approche du chapitre 3.

4.1.6a L'équation de l'observateur :

La représentation minimale du système est donnée par :

$$\dot{\underline{v}}(t) = \hat{\underline{A}}\underline{v}(t) + \hat{\underline{\beta}}u(t) + [\underline{\gamma}\omega(t) - \hat{\underline{a}}v(t)] \quad (4.43)$$

et l'équation de l'observation

$$v_1(t) = c^T \underline{v}(t) - v(t)$$

où, comme signalé auparavant,

$$\underline{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \text{le vecteur d'état du système}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{a} & \begin{array}{c|c} h^T & \\ \hline -\Lambda \end{array} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix}; \text{ et } c^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

$\{\underline{\gamma}\omega(t) - \hat{\underline{a}}v(t)\}$ est le processus vecteur aléatoire représentant le bruit de système; et $\{v\}$ est le processus de bruit de l'observation.

Construisant notre estimateur tout en adoptant le principe de l'observateur de Leuenberger, nous pouvons écrire :

$$\dot{\underline{\hat{v}}}(t) = K_1 \underline{\hat{v}}(t) + \underline{k}_2 v_1(t) + K_3 \hat{\underline{\beta}} u(t) \quad (4.44)$$

où K_1 , $\underline{k}_2$, et K_3 sont les matrices de l'observateur des paramètres inconnus et de dimensions respectives $(n \times n)$, $(n \times 1)$, $(n \times n)$.

L'équation différentielle représentant l'erreur (modèle - système) peut être obtenue à partir des équations (4.4) et (4.38).

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\varepsilon}} &= \underline{\dot{v}}(t) - \dot{\underline{\hat{v}}}(t) \\ &= [\hat{A} - \underline{k}_2 c^T] \underline{v}(t) + [\underline{I}_n - K_3] \hat{\underline{\beta}} u(t) - K_1 \underline{\hat{v}}(t) + [\underline{\gamma}\omega - (\hat{\underline{a}} - \underline{k}_2)v] \end{aligned}$$

Ajoutant et soustrayant le terme $K_1 \underline{v}(t)$ à l'équation ci-dessus, celle-ci se réduit à :

$$\underline{\dot{\varepsilon}} = K_1 \underline{\varepsilon}(t) + [\hat{A} - \underline{k}_2 c^T - K_1] \underline{v}(t) + [\underline{I}_n - K_3] \hat{\underline{\beta}} u(t) + [\underline{\gamma}\omega - (\hat{\underline{a}} - \underline{k}_2)v] \quad (4.45)$$

où $\underline{I}_n$ représente la matrice identité de dimension $(n \times n)$.

Comme il est souhaité d'avoir un estimateur non-biaisé, nous aurons :

$$E[\dot{\underline{\varepsilon}}(t)] = 0, \text{ et } E[\underline{\varepsilon}(t)] = 0, t \geq t_0 \quad (4.46)$$

Donc,

$$\begin{aligned} E[\dot{\underline{\varepsilon}}(t)] &= K_1 E[\underline{\varepsilon}(t)] + [\hat{A} - \underline{k}_2 \underline{c}^T - K_1] E[\underline{v}(t)] + \\ &[\underline{I}_n - K_3] \hat{\underline{\beta}} u(t) + \underline{\gamma} E[\omega] - (\hat{\underline{a}} - \underline{k}_2) E[v] \end{aligned} \quad (4.47)$$

Puisque les processus de bruit $\{\omega(t), t \geq t_0\}$ et $\{v(t), t \geq t_0\}$ sont centrés, cette dernière équation devient :

$$[\hat{A} - \underline{k}_2 \underline{c}^T - K_1] E[v(t)] + [\underline{I}_n - K_3] \hat{\underline{\beta}} u(t) \equiv 0 \quad (4.48)$$

Comme les deux termes constituent deux vecteurs linéairement indépendants et étant donné que l'entrée $u(t)$ est assez riche, donc $u(t)$ et $E[v(t)]$ ne peuvent être nuls pour tout t . Ainsi, chaque terme en soit est égal à zéro; et nous pouvons donc conclure que :

$$\begin{aligned} K_1 &= [\hat{A} - \underline{k}_2 \underline{c}^T] \\ \text{et} \quad K_3 &= \underline{I}_n \end{aligned} \quad (4.49)$$

Alors, l'équation de l'estimateur devient :

$$\dot{\hat{\underline{v}}}(t) = [\hat{A} - \underline{k}_2 \underline{c}^T] \hat{\underline{v}}(t) + \underline{k}_2 v_1(t) + \hat{\underline{\beta}} u(t)$$

avec les conditions initiales (4.50)

$$\hat{\underline{v}}(t_0) = \underline{v}_0$$

4.1.6b Matrice de covariance de l'erreur d'estimation et gain du filtre :

L'erreur d'estimation sera :

$$\underline{\varepsilon}(t) = [\hat{A} - \underline{k}_2 \underline{c}^T] \underline{\varepsilon}(t) + [\underline{\gamma} \omega - (\underline{k}_2 - \hat{\underline{a}}) v] \quad (4.51)$$

La matrice de covariance de l'erreur est donnée par :

$$\tilde{P}(t) = E[\underline{\varepsilon}(t) \underline{\varepsilon}^T(t)] \quad (4.52)$$

Par la différentiation de (4.52), nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}(t) &= E[\dot{\underline{\varepsilon}}(t) \underline{\varepsilon}^T(t)] + E[\underline{\varepsilon}(t) \dot{\underline{\varepsilon}}^T(t)] \\ &= [\hat{A} - \underline{k}_2 \underline{c}^T] \tilde{P} + \tilde{P} [\hat{A} - \underline{k}_2 \underline{c}^T]^T + \sigma_\omega^2 \underline{Y} \underline{Y}^T + \sigma_v^2 [\underline{k}_2 - \hat{\underline{a}}] [\underline{k}_2 - \hat{\underline{a}}]^T \end{aligned} \quad (4.53)$$

Pour obtenir le gain optimal $\underline{k}_2^0$ de l'observateur dans l'expression (4.53), il nous faudra la condition nécessaire :

$$\partial \text{Tr}[\dot{\tilde{P}}(t)] / \partial \underline{k}_2 = \partial \text{Tr}[\tilde{P}(t)] / \partial \underline{k}_2 = 0 \quad (4.54)$$

La dérivée de (4.53) par rapport à $\underline{k}_2$ tout en tenant compte de (4.54), donne :

$$\begin{aligned} & -2\tilde{P}(t)\underline{c} - 2\sigma_v^2 \hat{\underline{a}} + 2\sigma_v^2 \underline{k}_2 = 0 \\ \text{d'où} \quad & \underline{k}_2^0 = [\tilde{P}(t)\underline{c} + \sigma_v^2 \hat{\underline{a}}] / \sigma_v^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

4.2 Cas discret :

Nous rappelons que notre objectif dans cette partie est la conception d'un identificateur-observateur discret adaptatif qui identifie, à chaque période d'échantillonnage, les paramètres du système discret et reconstruit son vecteur d'état à partir d'une réalisation minimale des variables d'état.

4.2.1 Modèle mathématique du système :

Le fonctionnement du système est caractérisé par un modèle une entrée-une sortie du type auto-regressif à moyenne mobile "ARMA" suivant :

$$y(k) = A_1(q^{-1})y(k) + q^{-d}B(q^{-1})u(k) + G(q^{-1})\omega(k) + v(k) \quad (4.56)$$

Celle-ci peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned} y(k) &= q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} \omega(k) + v(k) \\ y(k) &= q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + v_1(k) + v(k) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \text{où } A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_n q^{-n} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n-1} q^{-(n-1)} \\ G(q^{-1}) &= 1 + g_1 q^{-1} + g_2 q^{-2} + \dots + g_n q^{-n} \end{aligned} \quad (4.58)$$

L'opérateur retard q^{-1} est tel que " $q^{-1}[y(k)]$ " $\equiv$ $y(k-1)$. Sans perte de généralité, les polynômes $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et $G(q^{-1})$ sont d'ordres n , $n-1$, et n respectivement, car on peut toujours

annuler des coefficients de façon à ramener ces ordres à leur valeurs réelles si différence il y a.

Dans l'équation du système (4.57), la période d'échantillonnage est prise égale à l'unité; y et u représentent respectivement la sortie et l'entrée du processus. $v_1(k)$ représente la composante aléatoire dont nous supposons qu'elle est de nature gaussienne, stationnaire et à densité spectrale rationnelle. Ainsi, elle peut être considérée comme la sortie d'un système linéaire excité par le bruit blanc $\omega(k)$, à savoir,

$$v_1(k) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} \omega(k) \quad (4.59)$$

Le terme q^{-d} dans les équations (4.56) et (4.57) représente un retard pur entre l'application du signal d'entrée et la mesure prise à la sortie du système. Ceci dépend des processus concernés, mais dans la majorité des cas, ce retard est pris égal à une seule période d'échantillonnage.

Notre système peut aussi être représenté par les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A x(k) + \underline{b} u(k) + \underline{g} \omega(k) \\ y(k) &= \underline{c}^T x(k) + v(k) \end{aligned} \quad (4.60)$$

où $x(k)$, le vecteur d'état du système de dimension "n"

$u(k)$, l'entrée du processus

$y(k)$, la sortie du processus

A , $\underline{b}$, $\underline{c}$ et $\underline{g}$ sont les matrices du système à coefficients constants ou variant lentement dans le temps de dimensions respectives $(n \times n)$, $(n \times 1)$, $(n \times 1)$ et $(n \times 1)$.

ω_k , processus de bruit blanc du système de moyenne nulle et de variance,

$$E[\omega_k^2] = \sigma_\omega^2$$

v_k , bruit blanc centré de la mesure, de variance,

$$E[v_k^2] = \sigma_v^2$$

Comme la plupart des processus industriels, notre système est complètement commandable et complètement observable. C'est ainsi que le système peut être mis sous la forme canonique d'observabilité suivante :

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -a_1 & & & \\ -a_2 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ -a_n & & & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(k-d) + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \omega_k \quad (4.61)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] x(k) + v_k$$

4.2.2 Réalisation non-minimale du système inconnu :

Considérons le polynôme discret $F(z^{-1})$ asymptotiquement stable d'ordre "n" suivant :

$$f(z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots + f_n z^{-n} \quad (4.62)$$

Ce polynôme est supposé être premier par rapport au numérateur $B(z^{-1})$ et dénominateur $A(z^{-1})$ de la fonction de transfert.

4.2.2a Fonction de transfert du système :

En utilisant la transformée en z pour les équations (4.61), nous obtenons :

$$y(k) = c^T [I - z^{-1}A]^{-1} b u(k-d) + c^T [I - z^{-1}A]^{-1} g \omega_k + v_k$$

Puisque le système est représenté sous la forme canonique d'observabilité, l'équation ci-dessus peut s'écrire comme :

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k-d) + \frac{G(z^{-1})}{A(z^{-1})} \omega_k + \frac{1}{A(z^{-1})} v_k \quad (4.63)$$

$$y(k) = z^{-d} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k) + \frac{1}{A(z^{-1})} [G(z^{-1})\omega_k + v_k]$$

Cette représentation est la réalisation auto-regressive à moyenne glissante du système donné par l'équation (4.57).

En divisant le numérateur et le dénominateur de l'équation (4.63) par $f(z^{-1})$ nous aurons :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{z^{-i}}{f(z^{-1})} y(k) + \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{z^{-i}}{f(z^{-1})} u(k-d) +$$

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{z^{-i}}{f(z^{-1})} \omega_k - \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{z^{-i}}{f(z^{-1})} v_k + v_k \quad (4.64)$$

A cette étape nous introduisons les filtres à variables d'état pour l'entrée et la sortie du système comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{F1} : \quad \underline{\zeta}_1(k+1) &= F^T \underline{\zeta}_1(k) + \underline{c} y_k \\ \underline{F2} : \quad \underline{\zeta}_2(k-d+1) &= F^T \underline{\zeta}_2(k-d) + \underline{c} u_{k-d} \end{aligned} \quad (4.65)$$

La transformée en z des équations (4.65), tout en considérant momentanément des conditions initiales nulles, donne :

$$\underline{\zeta}_1(k) = [zI - F^T]^{-1} \underline{c} y_k = \begin{bmatrix} z^{-1}/f(z^{-1}) \\ \vdots \\ z^{-n}/f(z^{-n}) \end{bmatrix} y_k \quad (4.66)$$

$$\underline{\zeta}_1(k-d) = [zI - F^T]^{-1} \underline{c} u_{k-d} = \begin{bmatrix} z^{-1}/f(z^{-1}) \\ \vdots \\ z^{-n}/f(z^{-n}) \end{bmatrix} u_{k-d}$$

Ainsi, la réalisation non-minimale du système peut être représentée à partir des équations [(4.64)-(4.66)], compte tenu des conditions initiales " $\underline{\zeta}_1(0) \equiv \underline{\zeta}_1^0$ ", nous aurons :

$$\begin{aligned} y_k &= \underline{\alpha}^T \underline{\zeta}_1(k) + \underline{\beta}^T \underline{\zeta}_2(k-d) + \underline{\gamma}^T \underline{\omega}_k - \underline{\alpha}^T \underline{v}_k + \underline{v}_k + F^k \underline{c} \underline{\zeta}_1(0) \\ \underline{\zeta}_1(k+1) &= F \underline{\zeta}_1(k) + \underline{c} y_k \\ \underline{\zeta}_2(k-d+1) &= F \underline{\zeta}_2(k-d) + \underline{c} u_{k-d} \end{aligned} \quad (4.67)$$

où

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}^T &= [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n], & \underline{\beta}^T &= [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n], \\ \underline{\gamma}^T &= [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_n] \end{aligned}$$

et

$$\underline{\omega}_k = \begin{bmatrix} z^{-1}/f(z^{-1}) \\ \vdots \\ z^{-n}/f(z^{-1}) \end{bmatrix} \omega_k ; \quad \underline{v}_k = \begin{bmatrix} z^{-1}/f(z^{-1}) \\ \vdots \\ z^{-n}/f(z^{-1}) \end{bmatrix} v_k$$

L'équation de sortie (5.71) peut donc s'écrire :

$$y_k = \underline{\theta}_0^T \underline{\zeta}(k-d) + \underline{\rho}^T \underline{\delta}(k) + v_k + \underline{\alpha}^T F^k \underline{\zeta}_1^0 \quad (4.68)$$

où

$$\underline{\theta}^T = [\underline{\alpha}^T | \underline{\beta}^T] \quad \underline{\rho}^T = [\underline{\gamma}^T | -\underline{\alpha}^T]$$

$$\underline{\zeta}(k-d) = \begin{bmatrix} \underline{\zeta}_1(k) \\ \hline \underline{\zeta}_2(k-d) \end{bmatrix}, \quad \underline{\delta}(k) = \begin{bmatrix} \underline{\omega}(k) \\ \hline \underline{v}(k) \end{bmatrix}, \quad \underline{\zeta}^0 = \begin{bmatrix} \underline{\zeta}_1^0 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

Bien que cette représentation ait l'allure statique, elle constitue une autre représentation pour la dynamique du système.

4.2.3 Réalisation non-minimale du modèle ajustable :

Le modèle de référence ajustable aura la même représentation que celle du système d'origine. Ainsi, la sortie, de même que les filtres à variables d'état du modèle ajustable s'écrivent :

$$\begin{aligned}\hat{y}_k &= \hat{\theta}_k^T \zeta(k-d) = \hat{\alpha}^T(k) \zeta_1(k) + \hat{\beta}^T(k) \zeta_2(k-d) \\ \zeta_1(k+1) &= F^T \zeta_1(k) + c y_k ; \quad \zeta_1(0) = 0 \\ \zeta_2(k-d+1) &= F^T \zeta_2(k-d) + c u_{k-d} ; \quad \zeta_2(0) = 0\end{aligned}\quad (4.69)$$

où $\hat{\theta}_k^T$ est le vecteur à paramètres ajustables qui sera modifié selon des lois adaptatives à obtenir :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^T(k) &= [\hat{\alpha}_1(k) \dots \hat{\alpha}_n(k) \hat{\beta}_1(k) \dots \hat{\beta}_n(k)] \\ \text{et} \quad \zeta(k-d) &\equiv \begin{bmatrix} \zeta_1(k) \\ \zeta_2(k-d) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

4.2.4 L'équation d'erreur

Les équations (4.67) et (4.69) nous donnent l'expression de l'erreur de sortie suivante :

$$\begin{aligned}\epsilon_k &\equiv y_k - \hat{y}_k \\ &= -\hat{\theta}^T(k) \zeta(k-d) + \rho^T \delta(k) + v_k + \alpha^T F^k \zeta_1(0)\end{aligned}\quad (4.70)$$

La différence entre les vecteurs d'état des filtres à variables d'état pour le système d'origine et ceux du modèle ajustable est due aux conditions initiales $\zeta_1(0)$, $\alpha^T F^k \zeta_1(0)$. Comme le terme représentant le bruit filtré $[\rho^T \delta(k)]$ aura une valeur négligeable par rapport à v_k et que les conditions initiales décroissent rapidement, les deux ensembles de vecteurs d'état s'approchent et s'égalisent.

Ainsi, l'équation de l'erreur devient :

$$\varepsilon(k) = -\tilde{\underline{\theta}}^T(k) \underline{\zeta}(k-d) + v_k \quad (4.71)$$

et
$$\tilde{\underline{\theta}}(k) = \hat{\underline{\theta}}(k) - \underline{\theta}_0$$

4.2.5 Lois adaptatives et identification des paramètres :

Nous considérons l'algorithme adaptatif suivant [76] :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\theta}}(k+1) &= \hat{\underline{\theta}}(k) - \frac{\sigma_k}{[1 + \underline{\zeta}^T(k-d) \underline{\zeta}(k-d)]} [y_k - \underline{\zeta}^T(k-d) \hat{\underline{\theta}}(k)] \underline{\zeta}^T(k-d) \\ &= \hat{\underline{\theta}}(k) - \frac{\sigma_k}{(1 + \|\underline{\zeta}_{k-d}\|^2)} \varepsilon_k \underline{\zeta}^T(k-d) \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\hat{y}(k) = \underline{\zeta}^T(k-d) \hat{\underline{\theta}}(k) ; \text{ et } \hat{y}(k+d) = \underline{\zeta}^T(k) \hat{\underline{\theta}}(k)$$

où σ_k représente un gain constant durant le processus d'adaptation dont la valeur s'effectue de telle sorte que la stabilité de notre algorithme soit assurée.

En soustrayant $\underline{\theta}_0$ aux deux parties de l'équation (4.71), tout en nous servant de (4.72), nous aurons :

$$\tilde{\underline{\theta}}(k+1) = \tilde{\underline{\theta}}(k) - \frac{\sigma_k}{(1 + \|\underline{\zeta}_{k-d}\|^2)} \underline{\zeta}^T(k-d) [-\tilde{\underline{\theta}}^T(k) \underline{\zeta}(k-d) + v_k] \quad (4.73)$$

Nous choisissons comme fonction de Lyapunov, l'équation quadratique suivante :

$$V(k+1) = E[\tilde{\underline{\theta}}^T(k+1) \tilde{\underline{\theta}}(k+1)] = E[\|\tilde{\underline{\theta}}(k+1)\|^2] \quad (4.74)$$

Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta V(k+1) &= V(k+1) - V(k) \\ &= E[\tilde{\underline{\theta}}^T(k+1) \tilde{\underline{\theta}}(k+1)] - E[\tilde{\underline{\theta}}^T(k) \tilde{\underline{\theta}}(k)] \end{aligned} \quad (4.75)$$

De l'équation (4.73), la forme quadratique de celle-ci tout en prenant l'espérance de ses deux parties donnera :

$$\begin{aligned} E[\|\tilde{\underline{\theta}}(k+1)\|^2] &= E[\|\tilde{\underline{\theta}}(k)\|^2] - 2 \frac{\sigma_k}{1+\|\underline{\zeta}(k-d)\|^2} (\underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k))^2 \\ &+ \sigma_k^2 \frac{\|\underline{\zeta}(k-d)\|^2}{(1+\|\underline{\zeta}(k-d)\|^2)^2} [(\underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k))^2 + \sigma_k^2] \end{aligned} \quad (4.76)$$

Ainsi, la fonction récurrente $\Delta V(k+1)$ peut être obtenue depuis les équations [(4.73)-(4.74)] telle que :

$$\begin{aligned} \Delta V(k+1) &= -2 \frac{\sigma_k}{1+\|\underline{\zeta}(k-d)\|^2} (\underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k))^2 \\ &+ \sigma_k^2 \frac{\|\underline{\zeta}(k-d)\|^2}{(1+\|\underline{\zeta}(k-d)\|^2)^2} [(\underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k))^2 + \sigma_k^2] \end{aligned} \quad (4.77)$$

4.2.5a Choix optimum de σ_k

De façon générale, l'expression $\Delta V(k+1)$ donne une mesure de la rapidité de convergence de $\hat{\underline{\theta}}(k)$ vers sa valeur réelle $\underline{\theta}_0$. Effectuant la dérivée partielle de $\Delta V(k+1)$ par rapport à σ_k et égalisant cette dérivée à zéro, ceci conduit à :

$$\frac{\partial \Delta V(k+1)}{\partial \sigma_k} = -2 \frac{(\underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k))^2}{1+\|\underline{\zeta}(k-d)\|^2} + 2\sigma_k \frac{\|\underline{\zeta}(k-d)\|^2}{[1+\|\underline{\zeta}(k-d)\|^2]^2} [(\underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k))^2 + \sigma_k^2] = 0$$

d'où

$$\sigma_k = \frac{(\underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k))^2}{[(\underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k))^2 + \sigma_k^2]} \cdot \left[1 + \frac{1}{\|\underline{\zeta}(k-d)\|^2} \right] \quad (4.78)$$

donnant une expression pour le choix optimal du gain adaptatif

σ_k .

En substituant l'expression de " σ_k " juste obtenue dans l'équation pour $\Delta V(k+1)$, nous aurons :

$$\begin{aligned}\Delta V(k+1) &= - \frac{(\underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k))^4}{\|\underline{\zeta}(k-d)\|^2 [(\underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k))^2 + \sigma_k^2]} \\ \Delta V(k+1) &< - \frac{(\underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k))^2}{\underline{\zeta}^T(k-d)\underline{\zeta}(k-d)} = - \|\tilde{\underline{\theta}}(k)\|^2\end{aligned}\quad (4.79)$$

négatif défini; et par conséquent la relation (4.72) représente une mapping de contraction. Ainsi,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{\theta}(k) \equiv 0 \quad (4.80)$$

précisant la propriété d'identification de l'algorithme.

Ecrivant l'équation de l'erreur entre la sortie du système et celle du modèle ajustable :

$$\begin{aligned}\varepsilon(k) &= y(k) - \hat{y}(k) = y(k) - \underline{\zeta}^T(k-d)\hat{\underline{\theta}}(k) \\ &= - \underline{\zeta}^T(k-d)\tilde{\underline{\theta}}(k) + v_k\end{aligned}$$

où

$$\tilde{\underline{\theta}}(k) = \tilde{\underline{\theta}}(k-1) - \frac{\sigma_{k-1}}{1 + \|\underline{\zeta}(k-d-1)\|^2} \varepsilon(k-1) \underline{\zeta}(k-d-1)$$

Par substitution successive de $\tilde{\underline{\theta}}(k)$, nous aboutissons à la relation récurrente suivante :

$$\tilde{\underline{\theta}}(k) = \tilde{\underline{\theta}}(k-d) - \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\sigma_{k-i}}{1 + \|\underline{\zeta}(k-d-i)\|^2} \varepsilon(k-i) \underline{\zeta}(k-d-i) \quad (4.81)$$

Multipliant les deux parties de l'équation ci-dessus par le terme $-\underline{\zeta}^T(k-d)$, nous aurons :

$$\varepsilon_k = -\underline{\zeta}^T(k-d)\underline{\theta}(k-d) - \sum_{i=1}^{d-1} \sigma_{k-i} \frac{\underline{\zeta}^T(k-d)\underline{\zeta}(k-d-i)}{[1+\|\underline{\zeta}(k-d-i)\|^2]} \varepsilon(k-i)$$

$$\varepsilon_k = e_k - \sum_{i=1}^{d-1} \sigma_{k-i} \frac{\underline{\zeta}^T(k-d)\underline{\zeta}(k-d-i)}{[1+\|\underline{\zeta}(k-d-i)\|^2]} \varepsilon_{k-i} \quad (4.82)$$

où $e_k \equiv -\underline{\zeta}^T(k-d)\hat{\underline{\theta}}(k-d) = y(k-d) - \hat{y}(k-d)$

et $\varepsilon_{k-i} = -\underline{\zeta}^T(k-d)\hat{\underline{\theta}}(k-i)$

4.2.6 Convergence de l'algorithme :

Pour démontrer que e_k tend vers zéro et que $\|\underline{\zeta}(k-d)\|$ est borné lors de la substitution du choix optimal de σ_k , nous empruntons la démarche de [78] comme suit :

La substitution du choix optimal de σ_k donnera

$$\varepsilon_k = e_k - \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\underline{\zeta}^T(k-d)\underline{\zeta}(k-d-i)}{\|\underline{\zeta}(k-d-i)\|^2} \varepsilon_{k-i}$$

La division des deux parties de cette équation par $\|\underline{\zeta}(k-d)\|$, tout en réarrangeant les termes de sommation, donnera :

$$\frac{\varepsilon_k}{\|\underline{\zeta}(k-d)\|} = \frac{e_k}{\|\underline{\zeta}(k-d)\|} - \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\varepsilon_{k-i}}{\|\underline{\zeta}(k-d-i)\|} \frac{\underline{\zeta}^T(k-d)\underline{\zeta}(k-d-i)}{\|\underline{\zeta}(k-d)\| \cdot \|\underline{\zeta}(k-d-i)\|} \quad (4.83)$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons :

$$\underline{\zeta}^T(k-d)\underline{\zeta}(k-d-i) \leq \|\underline{\zeta}(k-d)\| \cdot \|\underline{\zeta}(k-d-i)\|$$

D'où, l'équation (4.83) se réduit sous la forme de l'inégalité suivante :

$$\frac{e_k}{|\underline{\zeta}(k-d)|} \leq \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\epsilon_{k-i}}{|\underline{\zeta}(k-d)|}$$

et en vertu de la propriété d'identification du vecteur paramètre $\underline{\theta}$ donné par l'équation (4.80), nous aurons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_k}{|\underline{\zeta}(k-d)|} \equiv 0$$

En appliquant le lemme de [76], nous concluons que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k \equiv 0$$

et

$$\|\underline{\zeta}(k-d)\| \text{ est borné.}$$

4.2.7 Estimation de l'état :

Pour reconstruire le vecteur d'état minimal du système, nous faisons appel à l'équation d'état où l'utilisation du principe de l'observateur de Leuenberger nous permet de l'écrire de la façon suivante (ceci équivaut à l'utilisation des filtres à variables d'état comme cela sera montré) :

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= F\underline{x}(k) + (A-F)\underline{x}(k) + \underline{b}u(k-d) + \underline{g}\omega(k) \\ &= F\underline{x}(k) + (\underline{a}-\underline{f})\underline{c}^T\underline{x}(k) + \underline{b}u(k-d) + \underline{g}\omega(k) \end{aligned} \quad (4.84)$$

où F est une matrice de dimension $(n \times n)$ asymptotiquement stable mise sous la forme canonique d'observabilité suivante :

$$F = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} -f_1 \\ \vdots \\ -f_n \end{matrix} & \begin{matrix} \underline{I}_{n-1} \\ \underline{0} \end{matrix} \end{array} \right]$$

En substituant le terme $\underline{c}^T \underline{x}(k)$ par $(y(k) - v_k)$, l'équation (4.84) devient :

$$x(k+1) = Fx(k) + (\underline{a}-\underline{f})(y(k)-v_k) + \underline{b}u(k-d) + \underline{g}\omega(k)$$

avec la transformée en z, celle-ci se réduit à :

$$x(k) = (zI-F)^{-1}[(\underline{a}-\underline{f})(y(k)-v_k) + \underline{b}u(k-d) + \underline{g}\omega(k)]$$

La sortie sera :

$$y(k) = \underline{c}^T(zI-F)^{-1}[(\underline{a}-\underline{f})\underline{c}^T(y(k)-v_k) + \underline{b}u(k-d) + \underline{g}\omega(k)] + v_k \quad (4.85)$$

L'analyse de l'équation (4.85) tout en réarrangeant les termes et remplaçant $(\underline{a}-\underline{f})$ par $\underline{a}$ et $\underline{b}$ par $\underline{\beta}$, donnera :

$$\begin{aligned} y_k &= \underline{a}^T \underline{\zeta}_1(k) + \underline{\beta}^T \underline{\zeta}_2(k-d) + \underline{\gamma}^T \underline{\omega}_k - \underline{a}^T v_k + v_k \\ &= \underline{\zeta}^T(k-d) \underline{\theta} + \underline{\rho}^T \delta(k) + v(k) \end{aligned}$$

où $\underline{\zeta}_1(k)$ et $\underline{\zeta}_2(k-d)$ sont définis par l'équation (4.66).

En comparant les équations (4.64) et (4.85) il apparait que les deux formes sont identiques. La division du numérateur et dénominateur de la transmittance du système par $f(z^{-1})$ d'une part [Eq.(4.64)] et la modification de la représentation du système sous la forme de l'observateur de Leuenberger [Eq.(4.85)] de l'autre, sont équivalentes. Ces deux représentations sont équivalentes à l'utilisation des filtres à variables d'état pour l'entrée et la sortie. Ainsi, $\underline{\zeta}_1(k)$ et $\underline{\zeta}_2(k-d)$ peuvent s'exprimer à travers les filtres à variables d'état, comme précédemment indiqué tel que :

$$\begin{aligned} \underline{\zeta}_1(k+1) &= F^T \underline{\zeta}_1(k) + \underline{c} y_k ; & \underline{\zeta}_1(0) &= 0 \\ \underline{\zeta}_2(k-d+1) &= F^T \underline{\zeta}_2(k-d) + \underline{c} u_{k-d} ; & \underline{\zeta}_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.86)$$

4.2.7a Réalisation minimale du système :

L'équation d'état du système d'origine sous la forme de l'observateur de Leuenberger, équation (4.84), est :

$$x(k+1) = Fx(k) + \underline{a}y_k + \underline{\beta}u(k-d) + (\underline{\gamma}\omega_k - \underline{a}v_k)$$

où

$$\underline{a} = (\underline{a}-\underline{f}) = \begin{bmatrix} a_1-f_1 \\ a_2-f_2 \\ . \\ . \\ a_n-f_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\beta} = \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\gamma} = \underline{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ . \\ . \\ g_n \end{bmatrix}$$

En développant l'équation d'état à partir de $k=0$ par substitutions successives, nous aurons :

$$\begin{aligned} x(k) = F^k x_0 + \sum_{i=1}^k F^{k-i} [I_n y_{i-1} | I_n u_{i-d-1}] \\ + \left(\sum_{i=0}^k F^{k-i} [I_n \omega_i | I_n v_i] \right) \underline{\delta} \end{aligned} \quad (4.87)$$

où $\underline{\delta} = [\underline{\gamma}^T \mid -\underline{a}^T]^T$

Soit,

$$S(k) = \sum_{i=1}^k F^{k-i} [I_n y_{i-1} | I_n u_{i-d-1}] \quad (4.88)$$

Des équations (4.87) et (4.88), la représentation minimale du vecteur d'état du système est :

$$x(k) = S(k) \underline{\theta} + F^k x_0 + \left(\sum_{i=0}^k F^{k-i} [I_n \omega_i | I_n v_i] \right) \underline{\delta} \quad (4.89)$$

Equation (4.89) montre que $S(k)$ est une matrice polynôme en série de puissance de la matrice F et peut s'obtenir à partir de l'équation récurrente suivante :

$$S(k+1) = F S(k) + [I_n y_k | I_n u_{k-d}], \quad S(0) = 0 \quad (4.90)$$

$S(k)$, étant une matrice de dimension $n \times 2n$, peut être divisée en deux matrices carrées, à savoir, $S_1(k)$ et $S_2(k)$ telle que :

$$\begin{aligned} S_1(k+1) &= F S_1(k) + I_n y_k, & S_1(0) &= 0 \\ S_2(k+1) &= F S_2(k) + I_n u_{k-d}, & S_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

5.2.7b L'obtention des matrices $S_1(k)$ et $S_2(k)$:

Post-multipliant la transposée de l'équation (4.65) par $\underline{c}$, tout en tenant compte du fait que la matrice F qui commute avec les matrices $S_1(k)$ et $S_2(k)$ est sous forme exponentielle, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} S_1^T(k+1)\underline{c} &= F^T S_1^T(k)\underline{c} + \underline{c} y_k \\ S_2^T(k+1)\underline{c} &= F^T S_2^T(k)\underline{c} + \underline{c} u_{k-d} \end{aligned} \quad (4.92)$$

La comparaison entre celles-ci et les équations des filtres à variables d'état, équation (4.65), montre que :

$$\begin{aligned} \underline{\zeta}_1(k) &= S_1^T(k)\underline{c} & \underline{\zeta}_2(k) &= S_2^T(k)\underline{c} \\ \text{ou bien} & & & \\ \underline{c}^T S_1(k) &= \underline{\zeta}_1^T(k) & \underline{c}^T S_2(k) &= \underline{\zeta}_2^T(k-d) \end{aligned} \quad (4.93)$$

Post-multipliant les équations ci-dessus successivement par F , F^2 , ..., F^{n-1} , nous pouvons séparer $S_1(k)$ tel que :

$$\begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T F \\ \vdots \\ \underline{c}^T F^{n-1} \end{bmatrix} S_1(k) = \begin{bmatrix} \underline{\zeta}_1^T(k) \\ \underline{\zeta}_1^T(k)F \\ \vdots \\ \underline{\zeta}_1^T(k)F^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Comme, la matrice

$$W_0 = [\underline{c}^T \cdot \underline{c}^T F \cdot \dots \cdot \underline{c}^T F^{n-1}]$$

représente la matrice d'observabilité dont le rang est n, nous pouvons écrire :

$$S_1(k) = W_0^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\zeta}_1^T(k) \\ \underline{\zeta}_1^T(k)F \\ \vdots \\ \underline{\zeta}_1^T(k)F^{n-1} \end{bmatrix} \quad S_2(k) = W_0^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\zeta}_2^T(k-d) \\ \underline{\zeta}_2^T(k-d)F \\ \vdots \\ \underline{\zeta}_2^T(k-d)F^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

4.2.7c Equation de l'observateur :

Ecrivons l'équation d'état de la représentation minimale du système (4.89) sous forme plus concise :

$$\underline{x}(k) = S(k) \underline{\theta} + F^k \underline{x}_0 + R(k) \underline{\delta} \quad (4.96)$$

où

$$R(k) = \sum_{i=0}^k F^{k-i} [I_n \omega_i | I_n v_i]; \quad \underline{\delta}^T = [\underline{\gamma}^T | -\underline{\alpha}^T]$$

Ayant identifié les paramètres du système $\underline{\theta}$, nous pouvons donc reconstruire le vecteur d'état à partir de cette estimation des paramètres et de la représentation minimale statique du système (4.96). Ainsi, nous obtiendrons l'équation suivante de l'observateur paramétrisé :

$$\hat{\underline{x}}_k = S(k) \hat{\underline{\theta}}(k) = [S_1(k) | S_2(k)] \begin{bmatrix} \hat{\underline{a}}(k) \\ \hat{\underline{b}}(k) \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

L'estimation de la sortie $\hat{y}_k$ est donnée par l'équation d'observation :

$$\hat{y}_k = \underline{c}^T \hat{\underline{x}}_k = \underline{c}^T [S_1(k) \hat{\underline{a}}(k) + S_2(k) \hat{\underline{b}}(k)]$$

$$= \underline{z}_1^T(k) \hat{\underline{a}}(k) + \underline{z}_2^T(k-d) \hat{\underline{b}}(k) = \underline{z}^T(k-d) \hat{\underline{\theta}}(k) \quad (4.98)$$

Les erreurs d'estimation des variables d'état et de la sortie sont alors :

$$\left. \begin{aligned} e_k &= \hat{x}_k - x_k = S(k) \hat{\underline{\theta}}_k - [F^k x_o + R(k) \delta_k] \\ \epsilon_k &= \hat{y}_k - y_k = \underline{z}^T(k-d) \hat{\underline{\theta}}_k - \underline{c}^T [F^k x_o + R(k) \delta_k] \end{aligned} \right\} \quad (4.99)$$

où $\hat{\underline{\theta}}_k$ représente le vecteur d'erreur des paramètres.

Comme signalé antérieurement, le terme $F^k x_o$ a une décroissance exponentielle rapide et le terme stochastique $R(k) \delta_k$ est assez petit de sorte qu'il puisse être négligé, les erreurs d'estimation peuvent s'écrire comme :

$$\left. \begin{aligned} e_k &= \hat{x}_k - x_k = S(k) \hat{\underline{\theta}}(k) \\ \epsilon_k &= \hat{y}_k - y_k = \underline{z}^T(k-d) \hat{\underline{\theta}}(k) \end{aligned} \right\} \quad (4.100)$$

De la propriété d'identification précisée en Eqn.(5.87) nous concluons que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) \equiv 0 \quad (4.101)$$

et ainsi l'estimé d'état converge vers sa valeur réelle.

L'organigramme illustré en Fig.4.5 présente l'ordre du calcul de l'algorithme d'identification adaptatif continu.

4.3 Application 2 : Système de deux réservoirs :

Pour vérifier nos algorithmes de l'identificateur-observateur

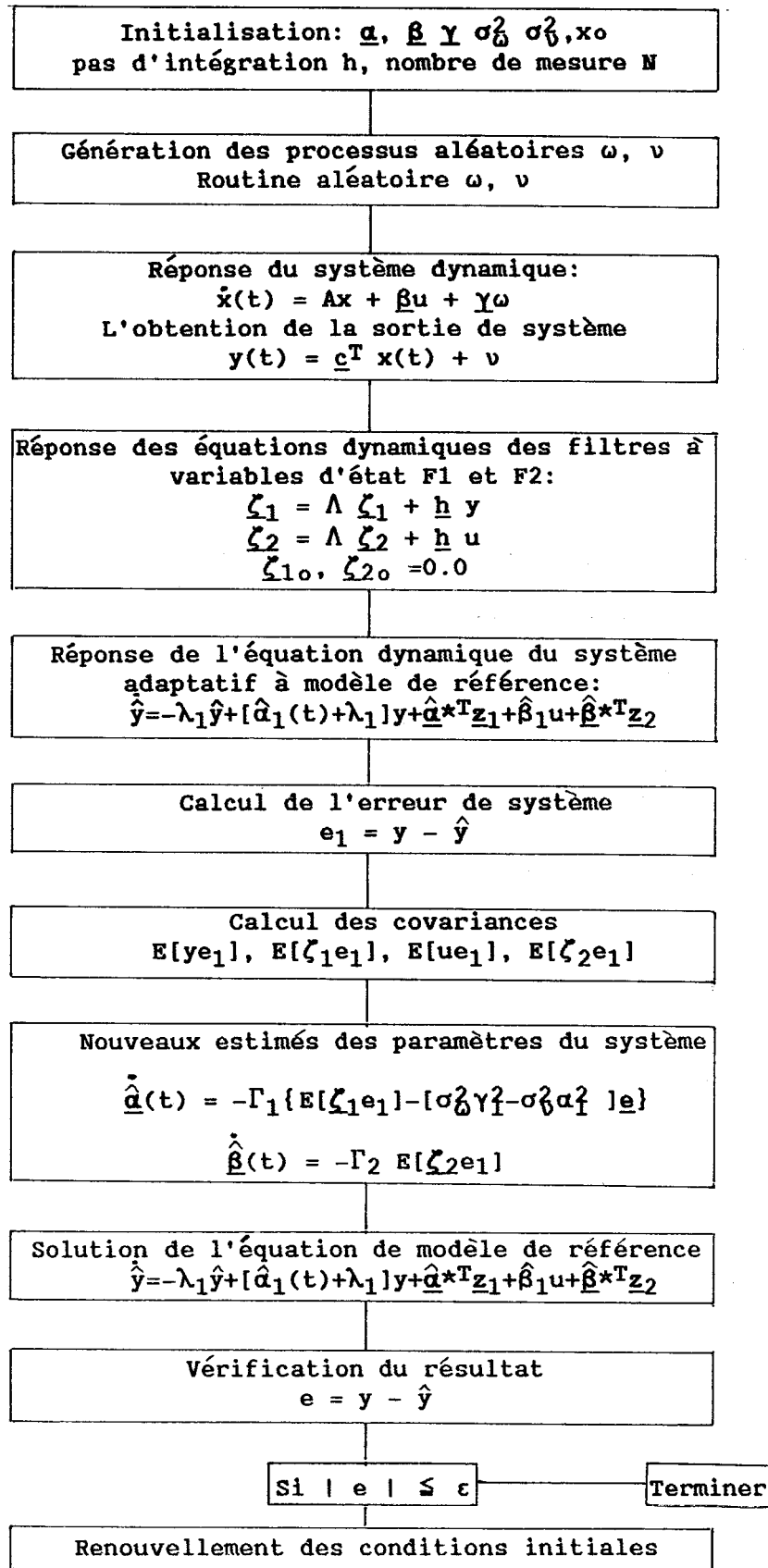


Fig.4.5 L'organigramme de l'algorithme adaptatif continu

du système stochastique continu et discret linéaire, nous avons considéré, également ici, l'application réelle déjà étudiée en chapitre 3. Néanmoins, nous nous limiterons à considérer seulement les deux premiers réservoirs; notamment les réservoirs 1 et 2, Fig.4.6.

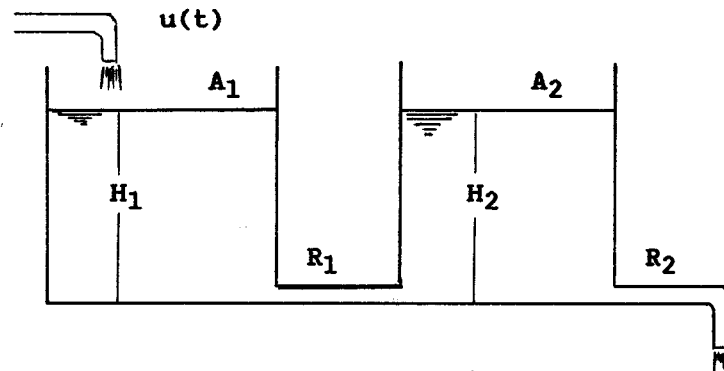


Fig.4.6 Système de réservoirs

Comme obtenu auparavant, l'application du principe de la conservation de masse pour le système ci-dessus nous donne les équations d'état suivantes :

$$dh_1/dt = -2h_1 + 2h_2 + q + \omega$$

$$dh_2/dt = 2h_1 - 5h_2$$

et l'équation de mesure :

$$h_2 = [0 \quad 1] h + v$$

où $\omega(t)$ et $v(t)$ sont des processus aléatoires de bruit blanc de moyenne nulle et de variances respectives :

$$E[\omega^2(t)] = \sigma_\omega^2 = 0.04 \quad (\text{m}^3/\text{sec})^2$$

$$E[v^2(t)] = \sigma_v^2 = 0.002 \quad (\text{m})^2$$

Comme notre analyse part depuis la forme canonique d'observabilité d'état, nous en effectuons la transformation à travers la fonction de transfert du système.

En mettant les équations ci-dessus en forme vectorielle d'état nous obtenons :

$$\dot{\underline{h}} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \underline{h} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega$$

$$h_2 = [0 \quad 1] \underline{h} + v$$

La transformée de Laplace pour cette équation donne :

$$y(s) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * [u(s) + \omega(s)] + v(s)$$

$$= \frac{2s-2}{1 + 7s^{-1} + 6s^{-2}} * [u(s) + \omega(s)] + v(s)$$

Cette équation est représentée par le schéma-bloc, Fig.4.7, mis en forme canonique d'observabilité.

En spécifiant les variables d'état comme montré dans la figure 4.7, nous aurons les équations des variables d'état suivantes (en notations générales),

$$\dot{x}_1 = -7x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -6x_1 + 2u(t) + 2\omega$$

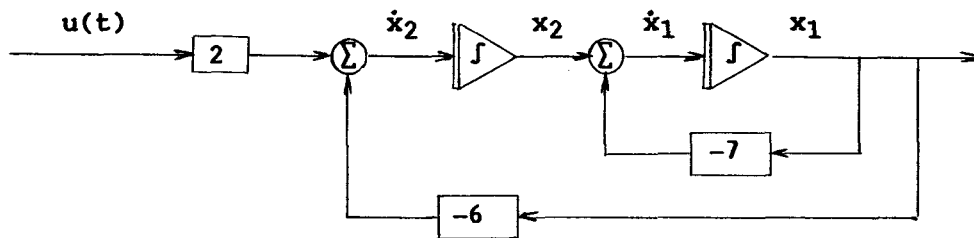
où $x_1 = h_1$; $x_2 = h_2$; et $q = u$

En forme vectorielle, nous aurons la forme canonique d'observabilité voulue :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \omega(t)$$

et l'équation de mesure

$$y(t) = [1 \quad 0] x + v(t)$$



**Fig.4.7 Schéma-bloc du système continu
de deux réservoirs**

En utilisant des filtres des variables d'état pour les signaux d'entrée et de sortie, le $(n-1)$ polynôme $\Lambda(s)$ est pris comme

$$\Lambda(s) = s + \lambda_2 = s + 3$$

La fonction de transfert du système devient,

$$y(s) = \frac{\frac{2}{s+3}}{\frac{s^2 + 7s + 6}{s+3}} * [u(s) + \omega(s)] + v(s)$$

$$= \frac{0 + \frac{2}{s+3}}{s + 4 + \frac{-6}{s+3}} * [u(s) + \omega(s)] + v(s)$$

Les paramètres devant être identifiés sont donc,

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La représentation minimale du processus sera donc

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \omega(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x} + v(t)$$

Les résultats de cette application seront discutés plus tard après la présentation de l'application du système échantillonné.

Avant de commencer notre application relative à l'algorithme adaptatif discret, nous proposons l'organigramme présenté par Fig.4.8 qui illustre la logique de calcul et les étapes devant être effectuées pour réaliser les algorithmes.

4.4 Application 3 : Version discrète du système de deux réservoirs :

Ici, nous nous proposons d'étudier la version discrète du système de niveau de liquide du deuxième ordre. Nous nous attachons à cette application puisque les constantes du temps des systèmes hydrauliques sont petites et la réponse est suffisamment rapide ce qui montre l'efficacité de nos algorithmes au cas de bons résultats.

Trouvons la matrice de transition $\underline{A}(k)$ et la matrice d'entrée $\underline{B}(k)$ pour le système discret pour une période d'échantillonnage $T = 0.25$ sec, l'équation dynamique discrète sera représentée par :

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8336 & 0.1424 \\ 0.1424 & 0.6200 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.0912 \\ 0.0080 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0.0912 \\ 0.0080 \end{bmatrix} \omega(k)$$

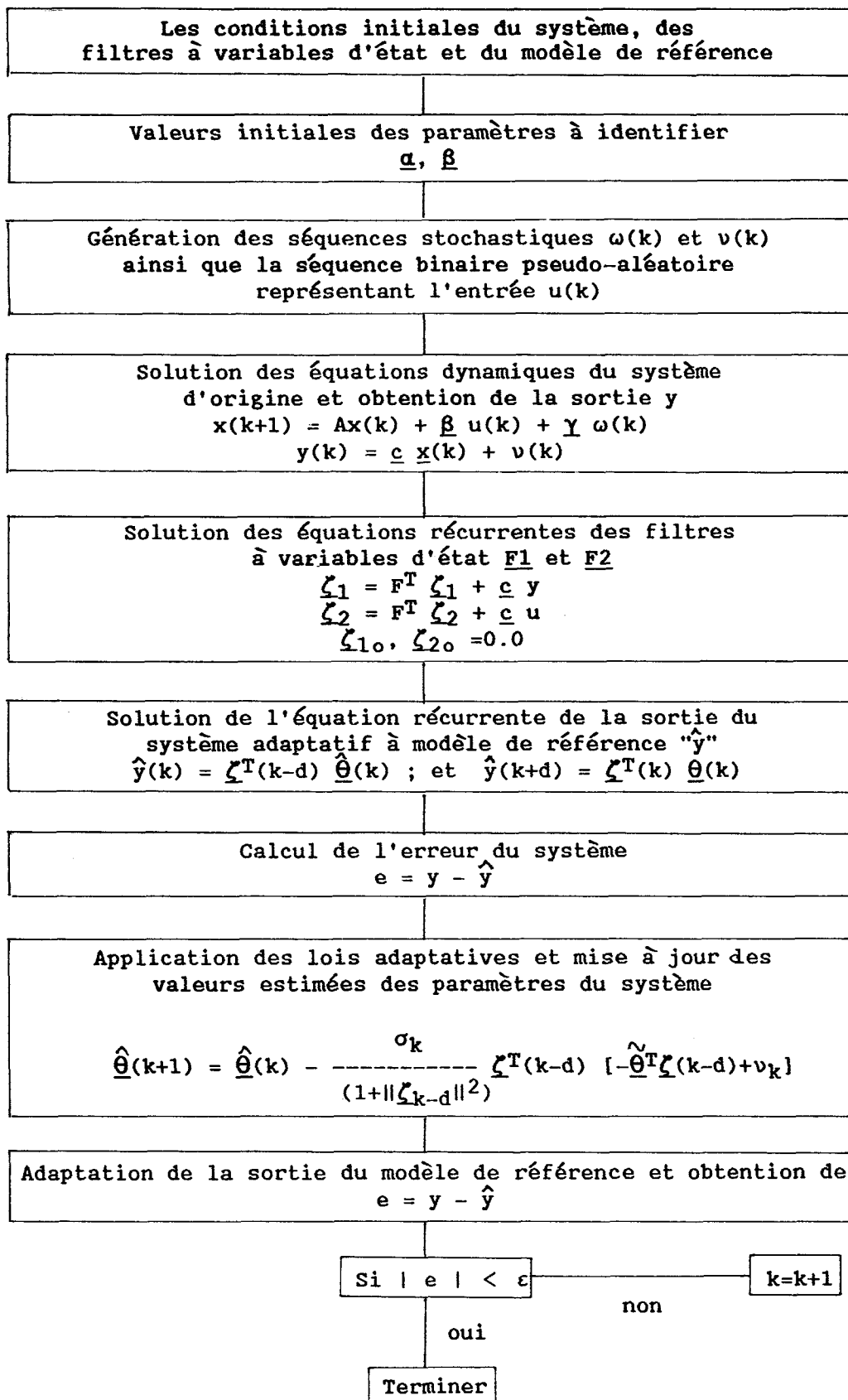


Fig.4.8 L'organigramme de l'algorithme adaptatif discret.

et la mesure entachée de bruit d'observation,

$$y_k = [0 \ 1] \underline{x}(k) + v(k)$$

où $\omega(k)$ et $v(k)$ sont des séquences stochastiques de procédé et de mesure de moyenne nulle et de variances respectives,

$$E[\omega^2(k)] = \sigma_\omega^2 = 4.0$$

$$E[v^2(k)] = \sigma_v^2 = 2 \times 10^{-3}$$

En suivant les mêmes démarches pour transformer notre système à la forme canonique d'observabilité, nous aurons par l'aide de la figure 4.9 les équations suivantes :

$$x_1(k+1) = 1.4536 x_1(k) + x_2(k) + 0.008u + 0.008\omega(k)$$

$$x_2(k+1) = -0.4966 x_1(k) + 0.0063u(k) + 0.0063\omega(k)$$

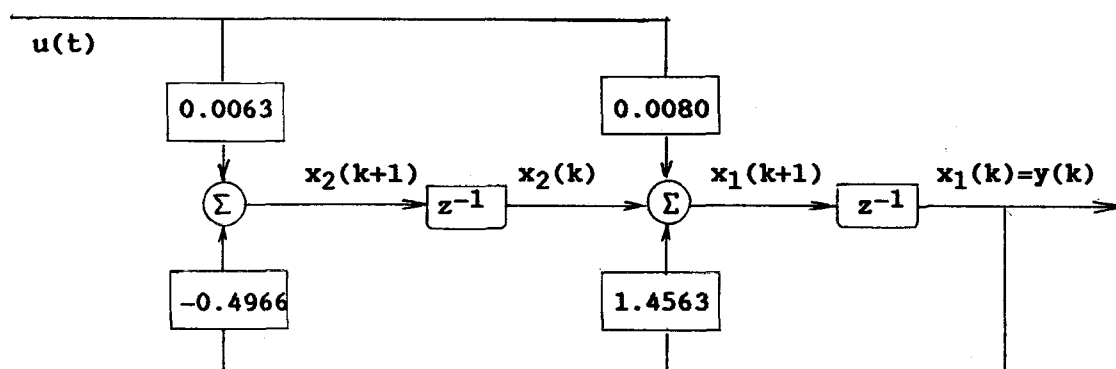


Fig.4.9 Schéma-bloc du système discret

où, en forme canonique d'observabilité nous avons,

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1.4536 & 1 \\ -0.4966 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.0080 \\ 0.0063 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0.0080 \\ 0.0063 \end{bmatrix} \omega(k)$$

$$y_k = [0 \ 1] \underline{x}(k) + v(k)$$

La matrice F pour les filtres à variables d'état est choisie de la façon suivante :

- elle est régulière d'ordre n et en forme canonique d'observabilité.
- elle est uniformément asymptotiquement stable, c'est-à-dire, les valeurs propres de F sont à l'intérieur du cercle unité.
- Le polynôme $f(z^{-1})$ est premier relatif au numérateur et dénominateur de la fonction de transfert du système.

D'où, F est pris comme

$$F = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 \\ -0.02 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, le polynôme stable $f(z^{-1})$ est obtenu comme :

$$f(z^{-1}) = |1 - z^{-1} F| = 1 - 0.3z^{-1} + 0.02z^{-2}$$

La forme finale du système à identifier est donc,

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.1536 & 1 \\ -0.47 & 0 \end{bmatrix} x(k) + 0.008 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.79 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0.0080 \\ 0.0063 \end{bmatrix} \omega(k)$$

$$y_k = [0 \ 1] x(k) + v(k)$$

et les paramètres à identifier sont :

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} -1.1536 \\ 0.47 \end{bmatrix} \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.79 \end{bmatrix}$$

L'entrée $u(t)$ doit être assez riche en fréquences et persistante. Dans notre travail nous avons considéré :

- un signal carré d'amplitude 1.0 et de période " T_1 ", 8 à 10 fois la période d'échantillonnage " T " de la solution des équations dynamiques.
- ou - un signal séquence binaire pseudo-aléatoire "PRBS" qui prend la valeur "0" ou "1" d'une façon aléatoire.

4.5 Résultats et discussion :

D'une part, les figures [(4.10)-(4.16)] représentent les résultats obtenus à travers l'identificateur adaptatif continu et la convergence éventuelle des paramètres à leurs valeurs réelles. D'autre part, les résultats du système échantillonné sont montrés par les figures [(4.17)-(4.20)] représentant la convergence de l'algorithme adaptatif discret d'identification pour des écarts paramétriques plus importants que le système continu.

Pour le système continu, les algorithmes adaptatifs sont effectués avec et sans une distance à l'état initial. Dans les deux cas, les paramètres aussi bien que les variables d'état convergent à leurs valeurs réelles, Fig. [(4.13)-(4.16)]. Néanmoins, on constate que la convergence de l'algorithme de l'observateur adaptatif est plus rapide lorsque les conditions initiales des variables d'état du système et de l'observateur sont identiques.

Il faut indiquer aussi que les facteurs $\rho_1, \dots, \rho_n$ et $\delta_1, \dots, \delta_n$ pourraient aussi influencer la rapidité de convergence. Nous avons considéré plusieurs ensembles de valeurs de ces facteurs et avons constaté un peu de différence dans la

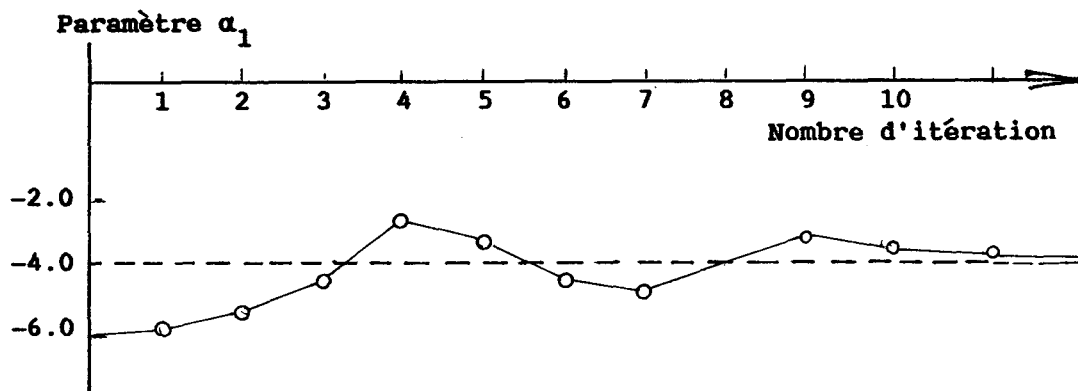


Fig.4.10 Distance de paramètre α_1

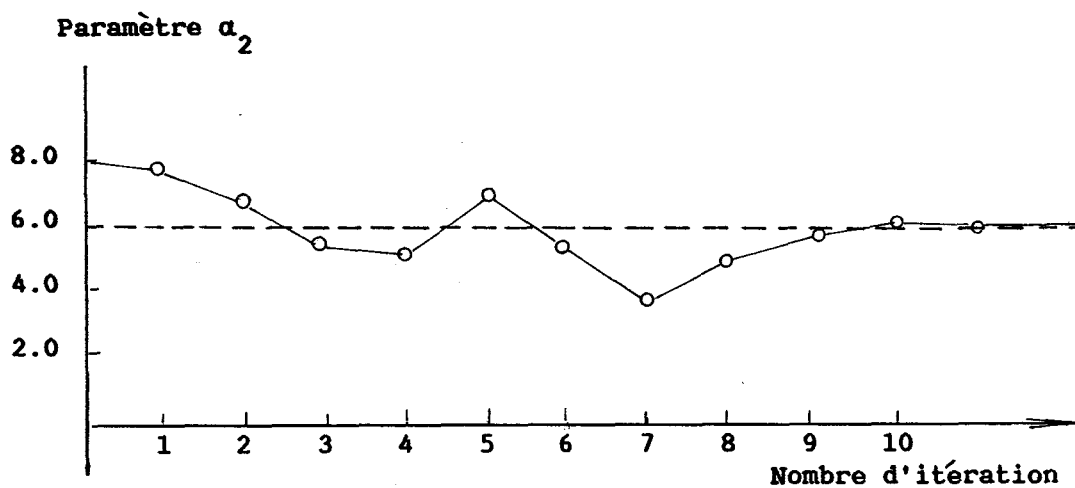


Fig.4.11 Distance de paramètre α_2

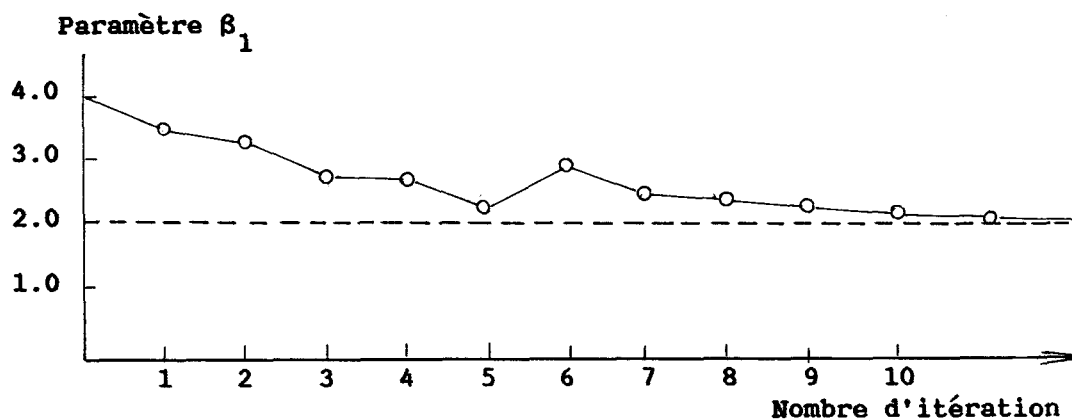


Fig.4.12 Distance de paramètre β_1

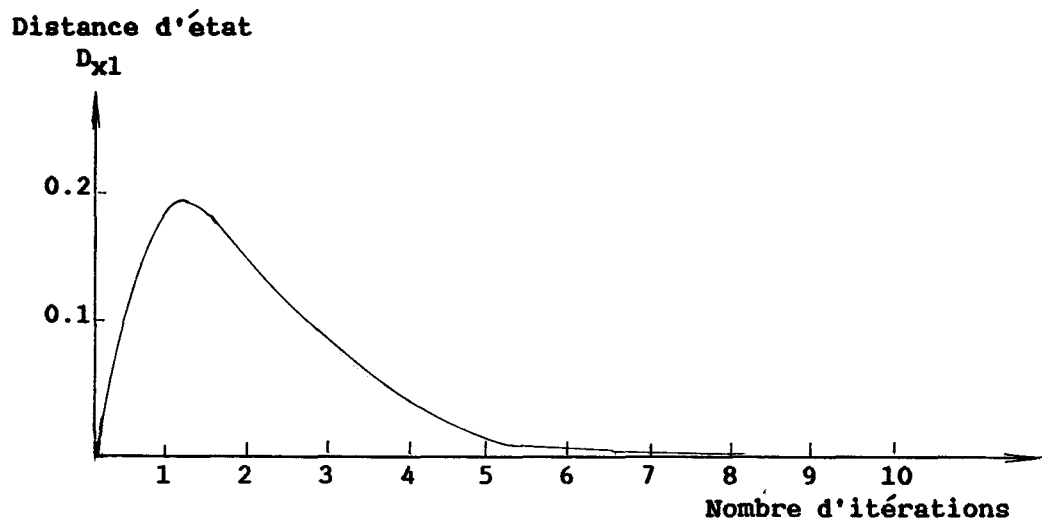


Fig.4.13 Distance d'état x_1 de l'observateur adaptatif,
cas des conditions initiales égales.

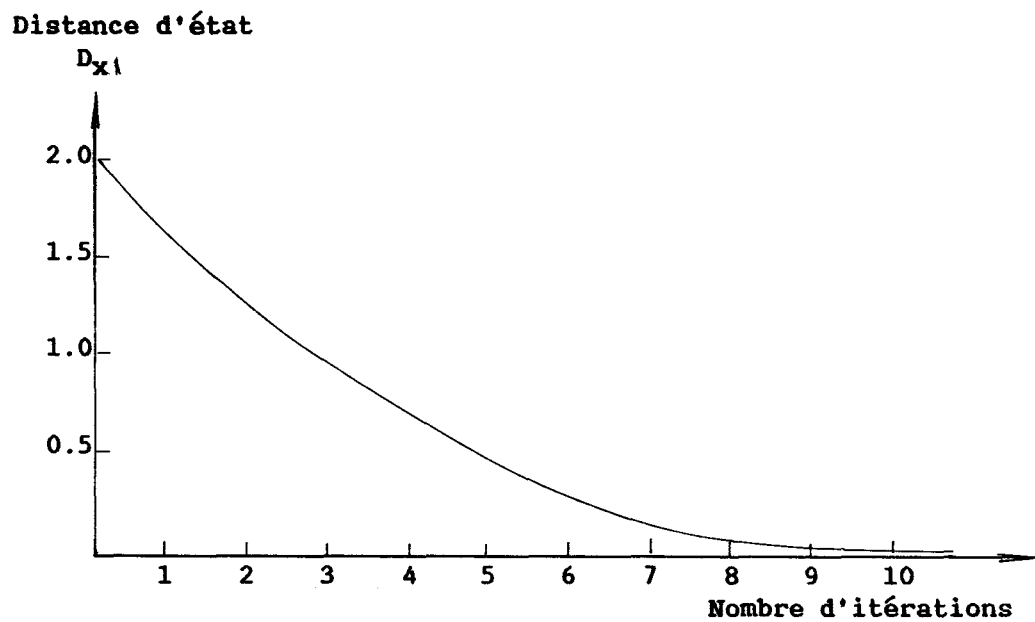


Fig.4.14 Distance d'état x_1 de l'observateur adaptatif,
cas des conditions initiales différentes

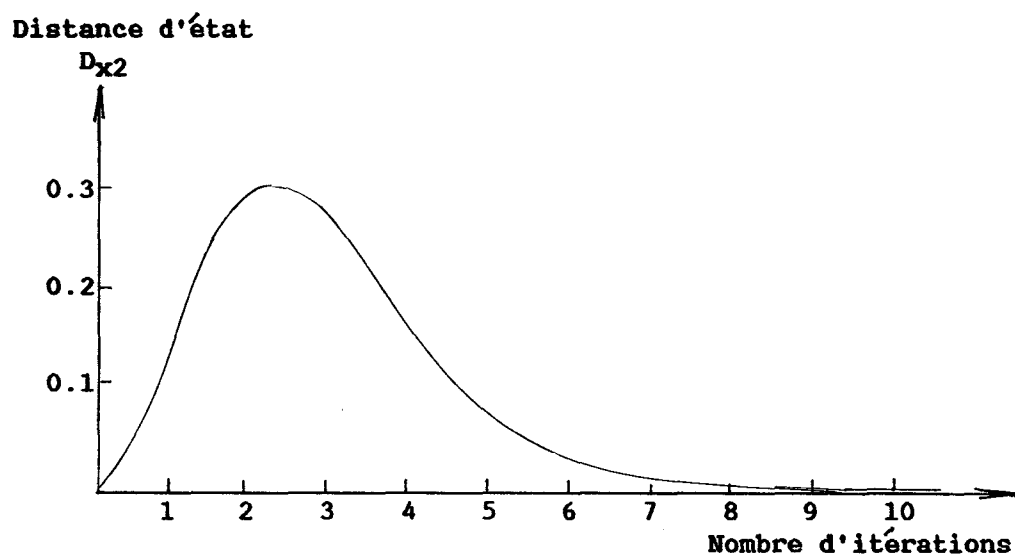


Fig.4.15 Distance d'état x_2 de l'observateur adaptatif,
cas des conditions initiales égales.

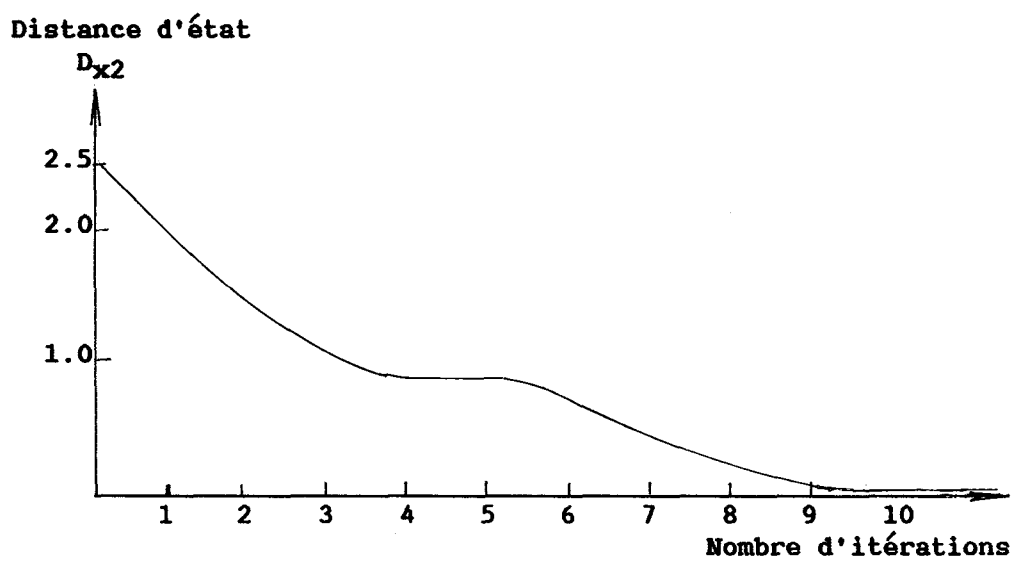


Fig.4.16 Distance d'état x_2 de l'observateur adaptatif,
cas des conditions initiales différentes

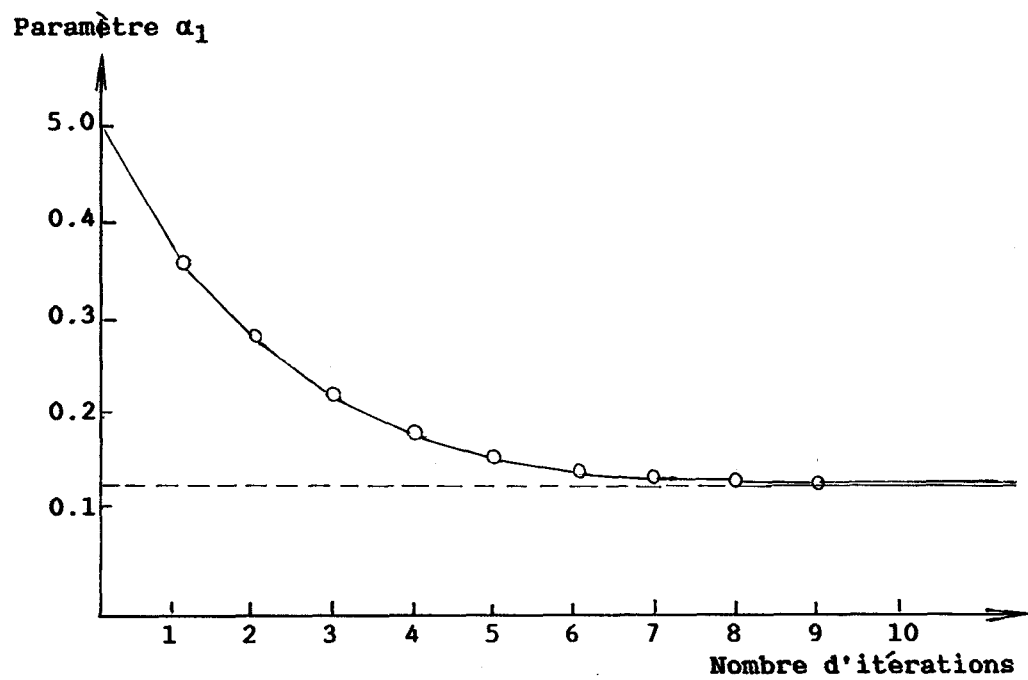


Fig.4.17 Distance de paramètre α_1 du système discret

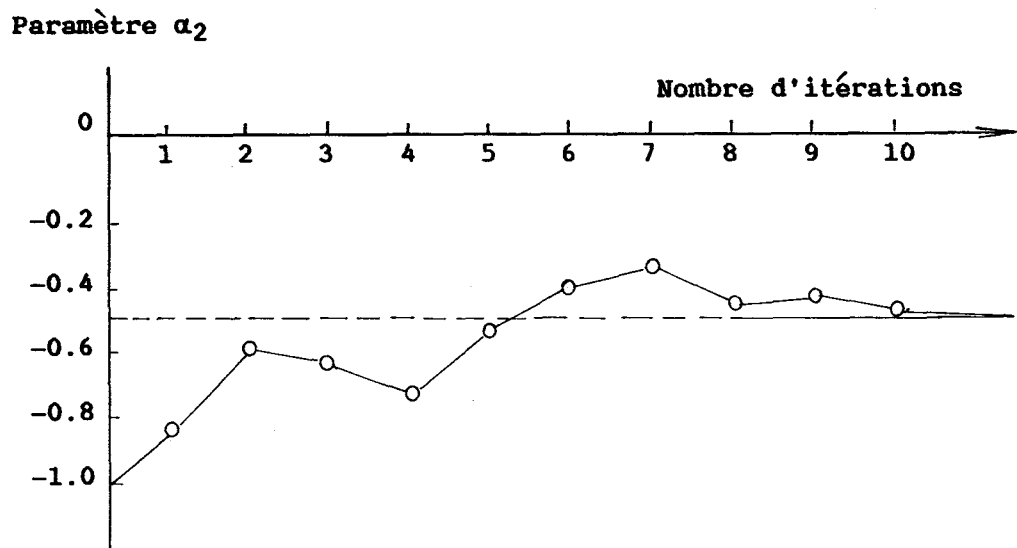


Fig.4.18 Distance de paramètre α_2 du système discret

Paramètre β_1

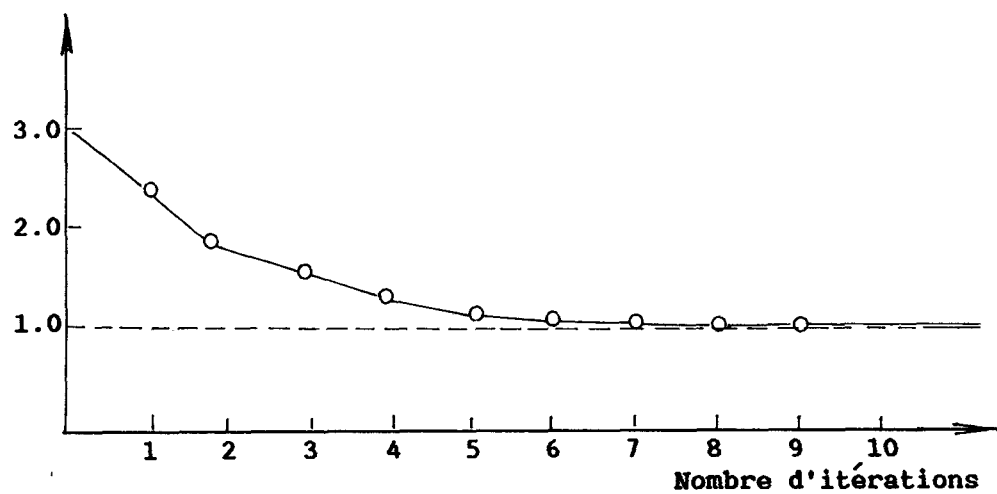


Fig.4.19 Distance de paramètre β_1 du système discret

Paramètre β_2

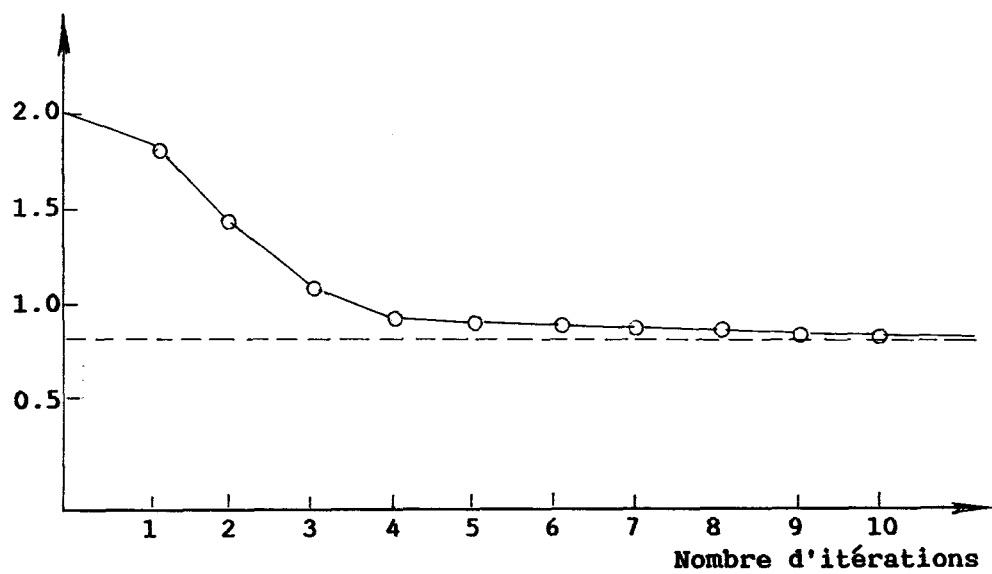


Fig.4.20 Distance de paramètre β_2 du système discret

convergence entre eux. Cependant, il reste la question du choix optimal de ceux-ci. Ce problème est résolu dans le système échantillonné pour le choix de σ_k dans l'algorithme adaptatif discret.

Dus aux effets aléatoires des processus de bruits Eq.(4.29), il faut tenir compte de la zone morte de l'algorithme adaptatif et que le processus d'identification devrait être donc arrêté avant qu'une divergence éventuelle ne soit probable.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons considéré le problème d'estimation du vecteur d'état pour un système stochastique continu et discret non variable ou lentement variable dans le temps, dont les paramètres structuraux sont imparfaitement connus. Ainsi, pour reconstruire le vecteur d'état, il nous faut l'identification des paramètres de système.

L'approche du système à modèle de référence adaptatif a été suivie pour l'étape d'identification. Le principe de la réalisation non-minimale où deux filtres à variables d'état sont employés pour l'entrée et la sortie du système d'origine est adopté en vue d'avoir assez d'information pour l'identification de $2n$ paramètres du système. Comme cette dernière représentation a une configuration importante qui est que toutes les variables d'état sont accessibles, le processus d'identification peut être achevé séparément du problème de la reconstruction d'état.

Ayant effectué l'étape d'identification, nous avons procédé à

la dernière étape concernant la reconstruction du vecteur d'état. Le principe de l'observateur asymptotique de Leuenberger est utilisé dans le système continu; et celui de l'observateur paramétrisé dans le système discret.

CHAPITRE V

CONCLUSION GENERALE ET RECHERCHES FUTURES

La régulation continue et échantillonnée des systèmes stochastiques en boucle fermée par une contre réaction proportionnelle permet, lorsque tous les états sont accessibles, d'imposer au processus à commander, un point de fonctionnement souhaité en un temps fini minimum.

Or, la réalisation d'un tel processus se heurte dans la pratique à l'impossibilité de capter toutes les variables d'état. De plus, la loi de commande par contre réaction de sortie définie par la relation vectorielle $u = -Ky(t)$ n'appartient pas en général à l'ensemble des lois de commande proportionnelles; elle doit donc contenir des états susceptibles à des variations plus rapide que les états observés.

C'est ainsi que le but de notre thèse consiste à reconstruire le vecteur d'état et à trouver un estimé aussi proche que possible du vecteur réel d'état du système d'origine.

Dans les algorithmes de filtrage optimal, nous sommes confrontés à de différentes difficultés pour l'implantation du filtre optimal. L'indisponibilité de l'information à priori (l'état initial $\underline{x}_0$ et la covariance d'erreur initiale P_0), le manque de valeurs exactes des paramètres structuraux A, B et C, de même que l'incertitude à l'égard des valeurs réelles de covariances de bruit Q, R sont les sources principales de la difficulté.

Normalement, des analyses d'erreur et de sensibilité pour des systèmes stochastiques sont effectuées et mettent en évidence un certain nombre de points importants, notamment :

- le système montre parfois plus de sensibilité aux variations de certains éléments de Q et R qu'à d'autres.

- certaines observations sont faiblement touchées de bruits ou même parfaitement mesurées.

C'est dans cet optique que l'on peut définir les éléments de Q et R qui doivent être estimés; alors que pour les autres, il suffit de désigner des valeurs conservatives issues des expériences précédentes. Ainsi, beaucoup d'efforts et temps calcul sont épargnés.

Le problème d'identification des covariances de bruit Q , R et le filtrage adaptatif constituent un point essentiel vu leur importance à l'égard de la reconstruction du vecteur d'état entier comme une étape substantielle d'une commande efficace pour le système d'origine.

L'on s'est rendu compte dès le début qu'il faut éviter autant que possible les inconvénients de certaines méthodes, notamment la divergence éventuelle et la dégradation du comportement du filtre faute du contrôle du pas de correction. C'est ainsi que notre méthode d'identification est effectuée à partir des variations incrémentales ΔQ et ΔR permettant de contrôler en permanence le pas de correction de sorte qu'une fonction coût quadratique d'erreur soit minimisée.

Durant l'analyse d'erreur et de sensibilité d'un système stochastique, nous percevons parfois, que certaines composantes de la sortie du processus sont très faiblement atteintes ou parfaitement mesurées. Ceci nous a poussés à trouver une solution pour un tel problème, à savoir, le problème de "filtrage singulier" par un autre moyen que le filtre de Kalman car celui-ci ne peut plus être utilisé à cause des matrices mal-conditionnées et des problèmes de calcul. C'est dans cet esprit qu'une partie de notre travail

s'est consacrée pour la conception d'un observateur à un ordre réduit pour des systèmes stochastiques ayant des mesures singulières de bruit.

Enfin, on a abordé le problème des systèmes stochastiques dont les propriétés statistiques sont plus ou moins connues mais qui manquent d'information concernant les paramètres structuraux. Il est évident, dans telle situation, qu'il nous faut un identificateur-observateur adaptatif pour estimer les paramètres structuraux du système et en même temps en reconstruire le vecteur d'état. C'est ce qui a été effectué dans le chapitre 4 de la thèse.

A travers notre travail dans les trois problèmes, nous avons le sentiment que ces méthodes sont importantes et cruciales pour la commande des processus industriels. Citons à titre d'exemple, les perspectives d'applications des systèmes adaptatifs à modèle de référence sans accès aux variables d'état et qui sont très encourageantes. Néanmoins, il y a un certain nombre de problèmes qui pourraient faire l'objet de futures recherches. Parmi ceux-ci, figurent les suivants :

- La possibilité de l'utilisation des filtres à variables d'état pour l'entrée et la sortie des systèmes stochastiques multivariables des paramètres structuraux inconnus en vue d'identifier les valeurs de ces paramètres et de reconstruire le vecteur d'état. Cela se considère comme une généralisation de filtre de Kalman pour les systèmes multivariables stochastiques linéaires qui n'ont pas d'information à priori à l'égard des paramètres structuraux.

- A partir des filtres à variables d'état pour les vecteurs

d'entrée et de sortie des systèmes stochastiques multivariables de représentation canonique, nous pensons possible d'effectuer :

- a) l'identification des paramètres structuraux du système.
- b) l'identification des paramètres stochastiques, c'est-à-dire, les moments statistiques des bruits.
- c) l'estimation du vecteur d'état.

En d'autres termes, rassembler le premier et le troisième problème traités dans la thèse pour des systèmes stochastiques linéaires multivariables.

- Si certaines mesures du système stochastique cité ci-dessus sont parfaitement mesurées, dans ce cas, à côté de l'identification des paramètres structuraux et stochastiques il devient possible de trouver un observateur d'ordre réduit pour estimer uniquement les variables non-observées.

- Nous proposons l'utilisation des observateurs adaptatifs pour des systèmes adaptatifs à modèle de référence parallèle pour la synthèse des structures de commande adaptative indirecte.

- Nous pensons aussi que l'identification adaptative et la commande adaptative à l'aide des observateurs de la forme canonique d'observabilité sont susceptibles d'être étendue au cas multivariable.

- L'algorithme des observateurs adaptatifs stochastiques peut être étendu pour la synthèse de commande adaptative qui tient compte, à côté des bruits, des dynamiques non-modélisées.

Enfin, nous souhaitons que le travail effectué ici soit utile à ceux qui s'intéressent aux domaines d'identification, d'estimation, et des systèmes adaptatifs.

REFERENCES

Identification des covariances de bruit

1. J.C. Schellenbarger, "A Multivariable Learning Technique for Improved Dynamic System Performance," Proc. National Electronics Conf., vol. 23, pp. 146-151, 1967.
2. A. P. Sage and G. W. Husa, "Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics," Proc. JACC Conf., pp 760-729, 1969.
3. R.K. Mehra, "On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering," IEEE Trans. on Aut. Cont., vol. Ac-15, no.2, pp. 178-184, April 1970.
4. R.K. Mehra, "Approaches to Adaptive Filtering," IEEE Trans. Aut. Cont., vol. Ac-17, no.5, pp. 693-698, Oct. 1972.
5. J.G. Lin, "The Adaptation of Observation Noise Covriances and Adaptive Kalman Filtering," Proc. 1973 IEEE Conf. on Decision and Control, Dec. 1973.
6. S.S. Godbole, "Kalman Filtering with no A Priori Information about Noise-White Noise Case. Part I: Identification of Noise Covariances. Part II: Identification of Noise Means," Proc. 1973 IEEE Decision and Control Conf., pp. 6-12.
7. B. Carew and P.R. Belanger, "Identification of Optimum Filter Steady-State Gain for Systems with Unknown Noise Covariances," IEEE Trans. Aut. Cont., vol. Ac-18, pp. 582-587, Dec. 1973.
8. M.A. Cuend, J-L. Fatio et A. Kaufmann, Cours d'Introduction aux Méthodes d'Identification, Edition Albin Michel, Paris, 1973.
9. P.R. Belanger, "Estimation of Noise Covariance Matrices for a Linear Time-Varying Stochastic Process," Automatica vol. 10, pp.267-274, 1974.
10. C.A. Bozzo, "A Discrete Suboptimal Adaptive Estimation Scheme for Linear Systems with Unknown Plant and Measurement Noise Covariances," Proc. of the 6 th IFAC World Conress, Boston, 1975.
11. C.A. Darmon, "Deux Méthodes d'Estimation-Identification de Systèmes Linéaires Bruités Multidimensionnels," Revue du Cethedec, pp. 1-13, 4 ème trimestre 1976.

12. G. Favier, G. Salut, "Réalisation d'un Filtre Quadratique Optimal des Covariances de Bruit dans un Système Linéaire Gaussien," 6^{ème} Colloque GRETSI sur le traitement du signal et ses applications, Nice, Avril 1977.
13. C.A. Darmon, J.J. Fuchs, J.D. Boissonnat, B. Le Parmentier, "Méthode d'Estimation Adaptative pour des Systèmes Stochastiques avec ou sans Commande," Rapport final de contrat DRME-Cethedec, IRISA, Rennes, Janvier 1978.
14. T. Soeda, T. Yoshimura, T. Tabushi, "A Suboptimal Identification of Noise Covariances in Discrete-Time Linear Systems," Int. J. Control, vol. 27, no 1, pp. 393-406, 1978.
15. G. Favier, G. Alengrin, P. Guillermin, "Algorithmes de Filtrage Adaptatif-Estimation des Covariance de Bruit dans un Système Linéaire Stochastique," Rapport de fin de contrat DRET-Cethedes, LASSY, Nice, mai 1979.
16. D. Perriot-Mathonna, "Le Filtrage de Kalman Adaptatif -Application à la Poursuite de Cible Manoeuvres," Revue Technique THOMSON-CSF, vol. 12, no1, pp. 143-183, Mars 1980.
17. G. Favier, P. Guillermin, "Characterization and Identification of Noise Covariances in a Stochastic Linear System," Reprints of third IFAC Conference on Systems Approach for Development, Rabat, Maroc, Nov. 1980.
18. G. Favier, Filtrage, Modélisation et Identification de Systèmes Linéaires Stochastiques à Temps Discret, 1982.
19. R. G. Brown, Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering, John Willey & Sons 1983.
20. M. Labarrere, J.P. Krrief, B. Gimonet, Le Filtrage et ses Applications, L'imprimerie Medous, Toulouse 1987.
21. D.P. Dee, S.E. Cohn, A. Dalcher and M. Chil, "An Efficient Algorithm for Estimating Noise Covariances in Distributed Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-30, pp. 1057-1064, 1985.
22. T. Soderstorm and P. Stochia, "On Some System Identification Techniques for Adaptive Filtering," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-33, pp. 457-461, 1988.

23. M. Najim, Modelisation et Identification en Traitement du Signal, Masson, Paris, 1988.
24. L. Povy, R Laurent and A. Amer, " Specific Design of a Kalman Filter and Adaptive Filtering," IASTED Conf., Grindelwald, Switzerland, Feb. 1989.

Probleme de filtrage singulier

25. D. G. Leuenberger, " Observing the State of a Linear System," IEEE Trans. Mil. Electron., vol. MIL-8, pp. 74-80, 1963.
26. D. G. Leuenberger, " Observer for Multivariable Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., pp. 190-196, 1966.
27. M. Aoki and J.R. Huddle, "Estimation of the State vector of a Linear Stochastic System with a Constrained Estimator," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-12, pp. 432-433, 1967.
28. K.G. Brammer, " Lower Order Optimal Linear Filtering of Nonstationary Random Sequences," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-15, pp. 146-162, 1967.
29. E. Tse and M. Athans, " Optimal Minimal-Order Observers-Filters for Discrete Time-Varying Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-15, pp. 416-426, 1970.
30. D. G. Leuenberger, "An Introduction to Observers," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-16, pp. 596-602, 1971.
31. C.T. Leondes and L.M. novak, " Optimal Minimal-Order Observer for Discrete Time Systems- A Unified Approach," Automatica, vol. 8, pp. 379-387, 1972.
32. E. Tse, " Observer-Estimators for Discrete Time Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-18, pp. 10-16, 1973.
33. E. Tse and M. Athans, " Observer Theory for Continuous Time Linear Systems," Inform. Contr., vol. 22, pp. 405-434, 1973.
34. C.T. Leondes and L.M. novak, " Reduced-Order Observers for Linear Discrete-Time Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-19, pp. 42-46, 1974.

35. F.W. Fairman," Reduced-Order State Estimators for Discrete-Time Stochastic Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, pp. 673-675, 1977.
36. F.W. Fairman," Hybrid Estimators for Discrete-Time Stochastic Systems," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. SMC-8, pp.849-854, 1978.
37. Y.F. Huang, E. Fogel and J.B. Thomas," An Alternative Consideration of Singular Linear State Estimation," in Proc. 23rd Midwest Symp. on Circuits Syst., August 1980.
38. E. Fogel and Y.F. Huang," Reduced Order Optimal State Estimator for Linear Systems with Partially Noise Corrupted Measurements," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, pp. 994-996, 1980.
39. J. O'Reilly," On Linear Least-Squares Estimator for Discrete-Time Stochastic Systems," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. SMC-10, pp. 276-279, 1980.
40. J. O'Reilly," Comments on two recent papers on Reduced Order Optimal State Estimator for Linear Systems with Partially Noise Corrupted Measurements," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-27, pp. 280-283, 1982.
41. H. Panossian, C. Leondes," Observers for Optimal Estimation of the State of Linear Stochastic Discrete Systems," Int. J. Control, 1983.
42. D. Chyung: "State Variable Reconstruction", Int. J. Cont., vol. 39, 955-963, 1984.
43. J. O'Reilly," Comments on 'A Duality Principle for State Estimation with Partially Noise Corrupted Measurements," Int. J. Contr., vol.39, pp. 615-617, 1984.
44. F.W. Fairman and L. Luk," On Reducing the Order of Kalman Filters for Discrete-Time Stochastic Systems having Singular Measurement Noise," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-30, pp. 112-115, 1985.
45. B. Ekstrand: "Analytical Steady-State Solution for a Continuous Time Kalman Filter", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, vol. AES-21, 746-750, 1985.

46. J.M. Schumacher, "A Geometric Approach to the Singular Filtering Problem," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-30, pp. 1057-1082, 1985.
47. U. Shaked and B. Preil: "Explicit Solutions to the Singular Discrete Finite-Time Linear Estimation Problem", Int. J. Cont., vol. 43, 285-303, 1986.
48. U. Shaked: "Solution in the z-domain to the Discrete-Time Stationary Kalman Filtering Problem for Systems with Perfect Measurements", IEEE Trans. Aut. Contr., vol. AC-31, 1156-1159, 1986.
49. K. M. Nagpal, R. E. Helmick and C. S. Sims, "Reduced-Order Estimation, Part 1. Filtering," Int. J. Contr., vol. 45, pp. 1867-1888, 1987.
50. E. Bekir, "A Unified Approach to the Singular Filtering Problem," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-33, pp. 590-591, 1988.
51. B. Preil and U. Shaked, "Mixed Mode Solution to the Partially Singular Discrete-Time Filtering Problem by Sequential Decomposition," Int. J. Cont., vol. 47, 129-141, 1988.
52. L. Povy, R. Laurent and A. Amer, "Reduced-Order Observer for Optimal Estimation of the State of a Linear Stochastic Continuous-Data System," IASTED Conf., Grindelwald, Switzerland, Feb. 1988.

Identification adaptative / Identificateur-observateur adaptif

53. K.S. Narendra and S. Tripathi: "The Choice of Adaptive Parameters in Model Reference Control Systems", Fifth Asilomar Conference on Circuits and Systems, pp.596-600, 1971.
54. A. Fossard, "Commande des Systemes Multidimensionnels," Dunod, Paris, 1972.
55. K.S. Narendra and P. Kudva: "Adaptive Control and Identification of Multivariable Systems using Lyapunov's Direct Method", Technical Report CT-56, Dept. of Eng. and Applied Science, Yale Univ., June 1973.

56. D.P. Lindorff and R.L. Carroll: "Survey of Adaptive Control Using Lyapunov Design", Int.J. Contr., vol. 18, no.5, pp.897-914, 1973.
57. K.S. Narendra and P. kudva: "Stable Adaptive Schemes for Systems Identification and Control- Part I and Part II", IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol.SMC-4, pp. 542-560, Nov. 1974.
58. G. Luders and K.S. Narendra: "Stable Adaptive Schemes for State Estimation and Identification of Linear Systems", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-19, pp. 841-847, Dec. 1974.
59. I.D. Landau: "A Survey of Model Reference Adaptive Techniques- Theory and Applications", Automatica, vol.10, Automatica, 1974
60. O.A. Sebakhy: "A Discrete Model Reference Adaptive System Design", Int.J. Contr., vol.23, 799-804, 1976.
61. I.D. Landau, " Unbiased Recursive Identification Using Model Reference Adaptive Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-21, pp. 194-202, 1976.
62. K.S. Narendra and L.S. Valvani : "Direct and Indirect Model Reference Adaptive Control", Automatica vol.15, pp.635-644, 1977.
63. C.H. Kim and D.P. Lindorff: "Generalization of Adaptive Observers and Methods of Optimizing Its Convergence Properties", ASME, pp.15-22, 1977.
64. H. Akashi, K.A. Moustafa and K. Nose: "On Stochastic System Identification Through Lyapunov Functions", Int.J. Contr., vol. 26, pp. 573-582, 1977.
65. G. Kreisselmeier, " Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, pp. 2-8, 1977.
66. J. Yuan and E. Wonham: "Probing Signals for Model Reference Identification", IEEE Trans. Automat Contr., vol. AC-22, pp. 530-538, 1977.
67. L. Ljung, " On Positive Real Transfer Functions and the Convergence of Some Recursive Schemes," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, pp. 539-550, 1977.
68. L. Ljung, " Analysis of Recursive Stochastic Algorithms," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, pp. 550-575, 1977.
69. H.M. Silveria, " Contribution à la Synthèse des Systèmes Adaptatifs avec Modèle sans Accès aux Variables d'Etats," Thèse

- de Docteur es Sciences, Univ. Grenoble, Grenoble, France, 1978.
70. R.V. Monpoli and E. M. Troiani: "Discrete Model Reference Adaptive Control Systems with Measurement Noise", IFAC, 1978.
 71. I.D. Landau and H.M. Silveria, "A Stability Theorem with Application to Adaptive Control," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-24, pp. 305-312, 1979.
 72. I.D. Landau, "Adaptive Control- The Model Reference Approach- New York : Dekker 1979.
 73. L. Dugard and I.D. Landau, "Recursive Output Error Identification Algorithms, Theory and Applications," Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 1979.
 74. K. Ichikawa : "Principles of Luders-Narendra's Adaptive Observer", Int. J. Cont., pp.351-365, 1980.
 75. K. Ichikawa : "An Approach to the Synthesis of Model Reference Adaptive Control Systems, ", Int. J Cont., vol.32, pp.175-190, 1980.
 76. G.C. Goodwin, P.J. Ramadge and P.E. Caines, "Discrete-Time Multivariable Adaptive Control," IEEE Trans. Aut. Contr., vol. AC-25, pp. 449-456, June 1980.
 77. Tor Soderstrom : "Identification of Stochastic Linear Systems in Presence of Input Noise", Automatica, vol.17, pp.713-725, 1981.
 78. O.A. Sebakhy, "An Adaptive Identifier for Discrete Time Linear Systems," J. of Alex. Univ., Alex., Egypt, 1981.
 79. R.G. Jacquet, Modern Digital Control Systems, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1981.
 80. M. Shahrokhi and M. Morari, "A Discrete Adaptive Observer and Identifier with Arbitrarily Fast Convergence," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-27, pp. 506-509, 1982.
 81. B. Peterson and K.S. Narendra: "Bounded Error Adaptive Control", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-27, pp. 1161-1167, 1982.
 82. G. Kreisselmeier and K.S. Narendra: "Stable Model Reference Adaptive Control in the Presence of Bounded Disturbances", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-27, pp. 1169-1175, 1982.
 83. I. Dugard, I.D. Landau and H.M. Silveria, "Adaptive State Estimation Using MRAS Techniques- Convergence, Analysis and Evaluations," IEEE Trans. on Automatic Contr., vol. AC-27, pp.

- 1176-1182, 1982.
84. K. Ichikawa : "Continuous Time Adaptive Identification and Control Algorithms via Newly Developed Laws", Int. J. Contr., vol.36, 819-831, 1982.
 85. K. Najim, Commande Adaptative des Processus Industriels, Masson, Paris, 1982.
 86. Z. Chen and P. Cook: "Robustness of Model Reference Adaptive Control Systems with Unmodeled Dynamics", Int. J. Contr., vol.39, pp. 201-212, 1984.
 87. A. Inoue and Z. Iwai : "Design and Application of Reduced-Order Adaptive Observer with Exponential Rate of Convergence for Single-Input Single-Output Linear Systems", Int. J. Contr., vol.30, 375-393, 1984.
 88. P. Murdoch and E.V. Oliveros, "A Discrete Adaptive Observer for a System of Unknown Order," Int. J. Contr., vol.41, pp. 477-491, 1985.
 89. P.T. Kidd: "Robustness of Model Reference Adaptive Systems in the Presence of Unmodeled Dynamics and Output Disturbances", Int. J. Contr., vol. 42, pp. 1213-1225, Nov. 1985.
 90. N. Minamide, P.N. Nikiforuk and M.M. Gupta, "Design of a Reduced Order Observer," IEE Proc., vol. 133, pp. 133-136, 1986.
 91. N. Hori, P.N. Nikiforuk and K. Kanai, "On the Similarity Transformation in the Design of an Adaptive Observer for Multivariable Systems," Int. J. Contr., vol.43, pp. 149-159, 1986.
 92. C. Fonte, Une Nouvelle Regulation pour les Processus Industriels: La Commande Adaptative a Multiples Modeles de Reference, These de Docteur Ingenieur, L'Universite des Sciences et Techniques de Lille 1, 1986.
 93. E. Yaz, "Observer Design for Stochastic-Parameter Systems," Int. J. Contr., vol.46, pp. 1213-1217, 1987.
 94. J.E. Mason, E.W. Bai, L.C. Fu, M. Bodson and S.S. Sastry, "Analysis of Adaptive Identifiers in the Presence of Unmodeled Dynamics : Averaging and Tuned Parameters," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-35, pp. 969-973, 1988.

95. Y.H. Chen and M. Tomizuka, "Design of Adaptive Observers for Plant under Input Disturbance and Measurement Noise," Int. J. Contr., vol. 47, pp. 625-632, Nov. 1988.
96. M.A. Hershen, "Adaptive Identification and Control of Time-Varying Stochastic Systems Using 'Semi-Periodic' Functions," Int. J. Contr., vol. 47, pp. 1243-1257, Nov. 1988.
97. L.Povy, R.Laurent and A. Amer: "A Discrete Stochastic Adaptive Observer-Identifier", IASTED Switzerland, Grindelwald, Feb. 1988.
98. L.Povy, R.Laurent and A. Amer: "An Observer-Identifier for Stochastic Continuous System," The IEE International Conference 'CONTROL 88', University of Oxford, UK, April 1988.
99. L.Povy, R.Laurent and A. Amer: "An Identifier-Controller for Deterministic Discrete Systems," 6 th International Conference. Coventry, England, Sept. 1988.
100. Y. El-Gamal and A. Amer: "Microcomputer-Based Control of an SCR DC Motor through an Adaptive Identifier-Controller Algorithm", MCED'89, International Workshop on Microcomputer Control of Electric Drives, Triesta (Italy), July 1989.



RESUME

Une methode d'identification des elements des matrices de covariances de bruit du systeme et de l'observation est effectuee. Nous nous sommes rendus compte d'eviter autant que possible les inconvenients de certaines methodes; notamment la divergence eventuelle et la degradation du comportement de filtre faute de controle du pas de correction. C'est ainsi que notre methode d'identification est achevee a partir des corrections incrementales permettant de controler en permanence le pas de correction de sorte qu'une fonction cout d'erreur quadratique soit minimisee.

Durant l'analyse d'erreur et de sensibilite d'un systeme stochastique, quelques fois il est percu que certaines composantes de la sortie du processus sont tres faiblement atteintes ou parfaitement mesurees. Ceci nous oblige de trouver une solution pour tel probleme, a savoir, le probleme de "filtrage singulier" d'autre moyen que le filtre de Kalman car celui-ci ne peut plus etre utilise a cause des matrices mal-conditionnees et problemes de calcul. C'est dans cet esprit qu'une partie de notre travail s'est consacree pour la conception d'un observeur a un ordre reduit pour des systemes stochastiques ayant des mesures singulieres de bruit.

Enfin, le probleme des systemes stochastiques dont les proprietes statistiques sont plus ou moins connues mais qui manquent d'information concernant ses parametres structuraux a ete aborde. C'est evident, dans telle situation, qu'il nous faut un identifieur-observeur adaptatif pour estimer les parametres structuraux du systeme et en meme temps en reconstruire le vecteur d'etat. C'est ce qui a ete effectue dans la derniere partie de la these.