

d'ordre : 435

THÈSE

Nouveau Régime
présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Abdelhak BELANTARI

Estimation de l'erreur dans l'approximation de type Padé.

Soutenue le 28 novembre 1989 devant la Commission d'Examen.

Président : C. BREZINSKI
Rapporteurs : J. VAN ISEGHEM
A. DRAUX

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M.H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT
ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PAREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

M. A. DUBRULLE.

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCOQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. BREZINSKI Claude	Analyse Numérique

M. BRIDOUX Michel
 M. CELET Paul
 M. CHAMLEY Hervé
 M. COEURE Gérard
 M. CORDONNIER Vincent
 M. DAUCHET Max
 M. DEBOURSE Jean-Pierre
 M. DHAINAUT André
 M. DOUKHAN Jean-Claude
 M. DYMENT Arthur
 M. ESCAIG Bertrand
 M. FAURE Robert
 M. FOCT Jacques
 M. FRONTIER Serge
 M. GRANELLE Jean-Jacques
 M. GRUSON Laurent
 M. GUILLAUME Jean
 M. HECTOR Joseph
 M. LABLACHE-COMBIER Alain
 M. LACOSTE Louis
 M. LAVEINE Jean-Pierre
 M. LEHMANN Daniel
 Mme LENOBLE Jacqueline
 M. LEROY Jean-Marie
 M. LHOMME Jean
 M. LOMBARD Jacques
 M. LOUCHEUX Claude
 M. LUCQUIN Michel
 M. MACKÉ Bruno
 M. MIGEON Michel
 M. PAQUET Jacques
 M. PETIT Francis
 M. POUZET Pierre
 M. PROUVOST Jean
 M. RACZY Ladislav
 M. SALMER Georges
 M. SCHAMPS Joël
 M. SEGUIER Guy
 M. SIMON Michel
 Mlle SPIK Geneviève
 M. STANKIEWICZ François
 M. TILLIEU Jacques
 M. TOULOTTE Jean-Marc
 M. VIDAL Pierre
 M. ZEYTOUNIAN Radyadour

Chimie-Physique
 Géologie Générale
 Géotechnique
 Analyse
 Informatique
 Informatique
 Gestion des Entreprises
 Biologie Animale
 Physique du Solide
 Mécanique
 Physique du Solide
 Mécanique
 Métallurgie
 Ecologie Numérique
 Sciences Economiques
 Algèbre
 Microbiologie
 Géométrie
 Chimie Organique
 Biologie Végétale
 Paléontologie
 Géométrie
 Physique Atomique et Moléculaire
 Spectrochimie
 Chimie Organique Biologique
 Sociologie
 Chimie Physique
 Chimie Physique
 Physique Moléculaire et Rayonnements Atmosph.
 E.U.D.I.L.
 Géologie Générale
 Chimie Organique
 Modélisation - calcul Scientifique
 Minéralogie
 Electronique
 Electronique
 Spectroscopie Moléculaire
 Electrotechnique
 Sociologie
 Biochimie
 Sciences Economiques
 Physique Théorique
 Automatique
 Automatique
 Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ALLAMANDO Etienne
 M. ANDRIES Jean-Claude
 M. ANTOINE Philippe
 M. BART André
 M. BASSERY Louis

Composants Electroniques
 Biologie des organismes
 Analyse
 Biologie animale
 Génie des Procédés et Réactions Chimiques

Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques et Sociales
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie Civil
M. BOIVIN Jean-Claude	Spectroscopie
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie Appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BRASSELET Jean-Paul	Géométrie et Topologie
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CATTEAU Jean-Pierre	Chimie Organique
M. CAYATTE Jean-Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie Structurale
M. CHIVE Maurice	Composants Electroniques Optiques
M. COMYN Gérard	Informatique Théorique
M. COQUERY Jean-Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques et Sociales
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie Organique
M. CRAMPON Norbert	Tectonique Géodynamique
M. CROSNIER Yves	Electronique
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Melle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELAHAYE Jean-Paul	Informatique
M. DELORME Pierre	Physiologie Animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DEPREZ Gilbert	Physique du Solide - Cristallographie
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
Melle DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité Chimique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie Animale
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie Physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie Hertzienne
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie Hertzienne
M. DUBUS Jean-Paul	Spectrométrie des Solides
M. DUPONT Christophe	Vie de la firme (I.A.E.)
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FAUQUAMBERGUE Renaud	Composants électroniques

M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie Structurale
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démog.
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements Atmos.
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et Statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean-Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie Organique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. HENRY Jean-Pierre	Génie Mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. HOUDART René	Physique atomique
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et Statistiques
M. Jean Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme (I.A.E.)
M. JOURNAL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques
M. LATTEUX Michel	Informatique
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEBVRE Christian	Pétrologie
Melle LEGRAND Denise	Algèbre
Melle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne
M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme (I.A.E.)
M. LEROY Yves	Composants électroniques
M. LESENNE Jacques	Systèmes électroniques
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU Jean-Marie	Optique-Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques et Sociales
M. MESMACQUE Gérard	Génie Mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie Organique
M. MORTREUX André	Chimie Organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
Mme MOUYART-TASSIN Annie Françoise	Informatique
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET François	Systèmes électroniques
M. PARSY Fernand	Mécanique

M. PECQUE Marcel
M. PERROT Pierre
M. STEEN Jean-Pierre

5
Chimie organique
Chimie appliquée
Informatique

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

NOTATIONS ET DEFINITIONS

CHAPITRE I :

ESTIMATION DE L'ERREUR DES
APPROXIMANTS DE PADE' .

I. INTRODUCTION

II. Dérivation d'une classe d'estimations
de l'erreur

1. Développement diagonal de l'erreur

2. Développement vertical et horizontal
de l'erreur

III. Combinaison de Procédures d'estimation
de l'erreur

IV. Conclusion

CHAPITRE II :

APPLICATIONS DE CERTAINS
PROCÉDES D'ACCELERATION DE
CONVERGENCE A L'ESTIMATION
DE L'ERREUR

- I. Application du procédé Δ^2 d'Aitken
- II. Exemples numériques
 - 1. Application du procédé Δ^2 à la suites d'estimations diagonales.
 - 2. Application du procédé Δ^2 à la suite des estimations horizontales
 - 3. Application du Δ^2 à la suite des estimations verticales.
- III. Connexion entre accélération de convergence et estimation parfaite de l'erreur.

CHAPITRE III :

ESTIMATION DE L'ERREUR DANS L'APPROXIMATION DE TYPE-PADE'

- I. INTRODUCTION
- II. Estimation de l'erreur par méthodes d'interpolation
- III. Extension de la procédure de Kronrod par méthode d'approximation:
 - 1. Première extension
 - 2. Deuxième extension
 - 3. Troisième extension
- IV. Tableau Récapitulatif.

- V. COMPARAISONS
- VI. Cas Particulier d'Estimations
- VII. Application de la procédure. θ
à l'approximation de type-Padé.

CHAPITRE IV:

ESTIMATION DE L'ERREUR DES APPROXIMANTS DE PADE' D'UNE SERIE DE STIELTJES

- I. INTRODUCTION
- II. ESTIMATION de l'erreur par L^∞ -approximation
de la fonction génératrice.
- III. Exemples
- IV. Remarques

CHAPITRE V:

ESTIMATION DE L'ERREUR DANS L'APPROXIMATION DE PADE' NON COMMUTATIVE

- I. INTRODUCTION
- II. Extension de la procédure de Kronrod aux
approximants de Padé non commutatifs.
- III. Implémentation et Applications

CHAPITRE VI :

ESTIMATION DE L'ERREUR DES APPROXIMANTS DE PADE' VECTORIELS

I. INTRODUCTION

II. Extension de la procédure de Kronrod aux approximants de Padé vectoriels.

1. Polynômes de Stieltjes
2. Quelques propriétés algébriques des polynômes de Stieltjes.
3. Implémentation de la procédure.

III. Nouvelle Interprétation de la procédure de Kronrod:

1. Première extension
2. Deuxième extension
3. Troisième extension
4. Tableau récapitulatif

INTRODUCTION

En 1964, A.S. KRONROD a proposé dans [21] une procédure concernant les formules de quadrature classique et dont l'utilisation dans les schémas classiques d'intégration automatique, est bien connue. La motivation originale de Kronrod était le désir d'estimer économiquement l'erreur dans les formules de Gauss ou autres formules de quadrature.

Partant d'une formule de Gauss G_n ayant n noeuds et de degré d'exactitude $2n-1$, Kronrod rajoute $n+1$ nouveaux noeuds et arrive à une autre formule de quadrature K_{2n+1} de $2n+1$ noeuds, exacte pour des polynômes de degré $\leq 3n+1$ et mieux adapté à l'estimation de l'erreur sur G_n .

La formule K_{2n+1} est dite extension de la formule de quadrature gaussienne G_n . Les noeuds rajoutés sont les zéros d'un certain polynôme V_{n+1} exactement de degré $n+1$, dit polynôme de Stieltjes, orthogonal par rapport à une certaine fonction poids qui dépend également de n .

Notons que, dans le cas classique, il y a une méthode d'estimation de l'erreur très fréquente qui consiste à comparer deux approximations successives. Plus explicitement, si G_m avec $m > n$, est une autre formule de Gauss, alors $|G_m - G_n|$ est une estimation de l'erreur de G_n .

Mais l'objection la plus connue à l'utilisation des formules de Gauss dans les schémas d'intégration automatique

et lorsque l'on passe du calcul de G_m à celui de G_{m+1} , presque toute l'information obtenue en calculant G_m est déjausée. Par exemple, si $m = n+1$, pour obtenir une estimation de l'erreur sur G_m , nous avons besoin de $2n+1$ évaluations de la fonction à intégrer; et de plus la meilleure formule des deux est seulement de degré d'exactitude $2n+1$. Kronrod a donné une réponse partielle à cette objection en construisant la formule K_{2n+1} beaucoup plus précise que G_{n+1} (car de degré d'exactitude $3n+1$), et qui utilise aussi au total $2n+1$ évaluations.

Actuellement les approximants de Padé sont largement utilisés notamment dans le domaine de la physique. Sur le plan pratique, comme pour toute formule d'approximation, lorsque l'on utilise ces approximants nous avons besoin d'une méthode d'estimation de l'erreur dont le critère d'arrêt sur le plan numérique en dépendra.

Puisque les approximants de Padé peuvent être considérés comme une formule de quadrature gaussienne formelle, une extension récente de l'idée de Kronrod à l'approximation de Padé, a été mise à jour par C. BREZINSKI en [6; 7].

Il reste à signaler que dans le cas des formules de quadrature gaussienne classique, toutes les méthodes utilisées pour implémenter la formule de Gauss-Kronrod demandent trois phases distinctes: Le calcul du polynôme approprié (i.e. de Stieltjes) V_{n+1} , la recherche de ses zéros et enfin l'obtention des poids correspondants par interpolation.

Dans le cas de l'approximation de Padé on a besoin seulement de la connaissance des polynômes P_n (polynôme générateur de l'approximant $[n-1/m]_f$) et V_{n+1} . Leurs zéros sont sans utilité, ce qui conduit à une simplification importante de l'implémentation de cette procédure [6].

Le point de vue, qui sera développé ici dans ce travail, est de chercher à appliquer également l'idée de Kronrod à d'autres formules de quadrature d'interpolation formelle.

Tout au long de ce travail nous demandons une totale liberté dans le choix des "bonnes" hypothèses lors de la construction des procédures d'estimation et l'étude des propriétés théoriques, e.g. convergence, de certaines d'entre elles.

Dans le chapitre I nous nous intéressons à des cas particuliers importants de la procédure de Kronrod appliquée aux approximants de Padé. Ceci nous permet d'obtenir notamment de nouveaux développements de l'erreur et une très large classe d'estimations. L'équivalence entre le schéma de Kronrod et l'interpolation polynomiale de la fonction génératrice $(1-tx)^{-1}$, établie en [7], y est constamment employée.

Dans le chapitre II nous donnons un ensemble de remarques et d'exemples d'applications du procédé Δ^2 d'Aitken et de la procédure θ à l'estimation de l'erreur. Ce qui nous amène à établir d'une part une connexion entre accélération de convergence et estimation parfaite de l'erreur et d'autre part,

dans certains cas, d'obtenir une indication sur le type de convergence de la suite des approximants de Padé $([m-1/n]_f(t))_n$ pour une valeur de t fixée.

D'une manière générale, les approximants de type-Padé sont également des formules de quadrature formelle [3]. Ainsi en utilisant la méthode générale donnée dans [7], une extension de la procédure de Kronrod à l'approximation de type-Padé est décrite dans le chapitre III.

Dans le chapitre IV nous étudions un cas particulier important qui est celui d'une série de Stieltjes. Une estimation de l'erreur des approximants de Padé de cette série, a été obtenue en remplaçant la fonction génératrice par son polynôme de meilleure approximation sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Le chapitre V est une extension du schéma de Kronrod à l'approximation de Padé dans le cas normal non commutatif.

Le chapitre VI comporte une étude théorique de l'extension de la procédure de Kronrod aux approximants de Padé vectoriels.

Enfin, certains de ces résultats théoriques ont été comparés par des applications numériques très limitées. Nous pensons qu'un test numérique substantiel est nécessaire afin de

révéler si oui ou non ces méthodes d'estimation peuvent être utilisées dans un logiciel numérique.

Notons également qu'au niveau de chaque chapitre un certain nombre de problèmes restent largement ouverts notamment ceux de convergence.

NOTATIONS & DEFINITIONS

soit f une série formelle :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Soit c une fonctionnelle linéaire agissant sur l'espace des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} , définie par :

$$c(x^i) = c_i, \quad i=0,1,\dots$$

Nous avons formellement

$$f(t) = c((1-tx)^{-1})$$

où c agit sur x , t étant un paramètre.

Soit v un polynôme arbitraire de degré k . Nous définissons w par :

$$w(t) = c\left(\frac{v(x) - v(t)}{x - t}\right)$$

w , polynôme de degré au plus $k-1$, est dit polynôme associé à v .

Posons :

$$\tilde{v}(t) = t^k v(t^{-1}) \quad \text{et} \quad \tilde{w}(t) = t^{k-1} w(t^{-1}).$$

La fraction rationnelle $\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)}$ est appelée approximant de

type-Pade' de f [3, p 9-11]. Il est noté $(k-1|k)_f(t)$.

v est appelé le polynôme générateur de l'approximant.

Nous avons:

$$f(t) - (k-1|k)_f(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}(t)} c\left(\frac{v(x)}{1-tx}\right) = O(t^k).$$

Les approximants de type-Padé de f sont reliés à l'interpolation polynômiale par le résultat suivant:

Soit P le polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction $x \mapsto (1-tx)^{-1}$ aux zéros de v , donné par:

$$P(x) = \frac{1}{1-tx} \left(1 - \frac{v(x)}{v(t^{-1})} \right) = \frac{1}{1-tx} \left(1 - t^k \frac{v(x)}{\tilde{v}(t)} \right)$$

Alors

$$(k-1|k)_f(t) = c(P(x)).$$

Ainsi $(k-1|k)_f$ peut être considéré comme une formule de quadrature

d'interpolation formelle de $(1-tx)^{-1}$ ayant les zéros de v comme noeuds.

A partir de l'expression de l'erreur ci-dessus, nous avons:

$$f(t) - (k-1|k)_f(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}(t)} \left\{ c(v(x)) + c(xv(x)) + \dots + t^{k-1} c(x^{k-1}v(x)) + t^k c\left(\frac{x^k v(x)}{1-tx}\right) \right\}$$

Puisque v est arbitrairement choisi, nous pouvons le prendre tel que:

$$c(x^i v(x)) = 0 \quad i=0, \dots, k-1.$$

Ce choix est dit optimal. v optimal existe si le déterminant de Hankel

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{k-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1} & c_k & \dots & c_{2k-2} \end{vmatrix}$$

est non nul, condition qui sera supposée satisfaite dans toute la suite.

Si v satisfait la condition précédente, v est donc le polynôme de degré k , orthogonal par rapport à la fonctionnelle c . Il sera noté par P_k . P_k est supposé unitaire i.e. son coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1. Nous obtenons alors:

$$f(t) - \left(k-1 / k \right)_f(t) = o(t^{2k}).$$

$\left(k-1 / k \right)_f$ est alors l'approximant de Padé $[k-1 / k]_f$.

$[k-1 / k]_f$ peut être considérée comme une formule de quadrature d'interpolation formelle utilisant les zéros de P_k comme noeuds. Ainsi $[k-1 / k]_f$ est une quadrature gaussienne

formelle exacte pour des polynômes de degré $2k-1$.

La famille $\{P_k\}_k$ des polynômes orthogonaux par rapport à c satisfait

la relation de récurrence suivante :

$$P_{k+1}(x) = (x + B_{k+1}) P_k(x) - C_{k+1} P_{k-1}(x) \quad (*)$$

avec $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$

$$C_{k+1} = \frac{h_k}{h_{k-1}} \quad ; \quad B_{k+1} = \frac{1}{h_k} \left[C_{k+1} c(x^k P_{k-1}(x)) - c(x^{k+1} P_k(x)) \right]$$

où

$$h_i = c(x^i P_i(x)) \quad i = 0, 1, \dots$$

Soit $\{P_k^{(n)}\}$ la famille des polynômes orthogonaux par rapport à la fonctionnelle linéaire $c^{(n)}$ définie par :

$$c^{(n)}(x^i) = c_{n+i} \quad , \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad \text{et} \quad i = 0, 1, \dots$$

avec $c^{(0)} \equiv c$ et la convention : $c_i = 0$, $i < 0$.

Soit $\Phi_k^{(n)}$ le polynôme associé à $P_k^{(n)}$, défini par :

$$\Phi_k^{(n)}(t) = c^{(n)} \left(\frac{P_k^{(n)}(x) - P_k^{(n)}(t)}{x - t} \right) \quad , \quad \text{de degré } k-1.$$

où $c^{(n)}$ agit sur x , t étant un paramètre.

Posons

$$\tilde{P}_k^{(n)}(t) = t^k P_k^{(n)}(t^{-1}) \quad \text{et} \quad \tilde{Q}_k^{(n)}(t) = t^k Q_k^{(n)}(t^{-1}).$$

L'approximant de Padé $[n+k-1/k]_f(t)$, noté $\frac{\tilde{N}_k^{(n)}(t)}{\tilde{P}_k^{(n)}(t)}$, est donné

par:

$$[n+k-1/k]_f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i + t^n \frac{\tilde{Q}_k^{(n)}(t)}{\tilde{P}_k^{(n)}(t)}$$

avec $n+k-1 \geq 0$ et la convention que $\sum_{i=0}^{n-1} \equiv 0$ si $n-1 < 0$.

Les polynômes $\tilde{P}_k^{(n)}$ et $\tilde{N}_k^{(n)}$ ont respectivement les degrés k et $k+n-1$.

Cet approximant rationnel a la propriété caractéristique suivante :

$$f(t) - [n+k-1/k]_f(t) = O(t^{2k+n})$$

pour tout $n = 0, \pm 1, \dots$ et tout $k \geq 1$.

CHAPITRE I

ESTIMATION DE L'ERREUR

DANS L'APPROXIMATION DE

PADE'

I. INTRODUCTION :

L'application de la procédure de Kronrod à l'estimation de l'erreur des approximations de Padé $[k-1/k]_f$, a été justifiée et étudiée en détail en [6].

Une nouvelle interprétation de la procédure initiale a établi une équivalence entre cette procédure et l'interpolation polynomiale de la fonction génératrice $(1-tx)^{-1}$. Cette interprétation a conduit à une classe importante de procédures d'estimation [7].

Notons que cette classe englobe toutes les méthodes utilisées jusqu'à présent dans l'extension des formules de quadrature classique notamment celles obtenues par W. GAUTSCHI dans [18].

Plus précisément en appliquant le schéma de Kronrod GAUTSCHI obtient donc la formule de Gauss-Kronrod. Ensuite par des considérations notamment au niveau d'existence de cette formule, il est amené à proposer une extension plus générale, dite 'extension lourde de Kronrod', de la quadrature de Gauss. Cette extension correspond, dans notre cas, à la 'première extension' de la procédure initiale de Kronrod donnée dans [7].

Mais grâce à la flexibilité de l'expression de l'erreur des approximations de Padé, la classe ci-dessus comporte également des procédures d'estimation qui ne figuraient pas dans la littérature auparavant.

La procédure de Kronrod étendue à l'approximation de Padé

et basé essentiellement sur la détermination d'un certain polynôme dit polynôme de Stieltjes associé à P_k le polynôme générateur de $[k-1/k]_f$.

Un polynôme de Stieltjes est un polynôme V_{k+1} de degré $k+1$, orthogonal par rapport à une fonctionnelle linéaire e définie par $\{e(x^i) = c(x^i P_k) = e_i, i=0,1,2,\dots\}$.

Les polynômes de Stieltjes ont été étudiés dans le cas classique par MONEGATO [23] et dans le cas formel par PRÉVOST [29]

Dans ce chapitre nous abordons un point de particulier intéressant de la procédure de Kronrod qui permettra d'élargir la classe précédente en utilisant des polynômes orthogonaux $P_{k+m}^{(n)}$, $m \geq 0$, par rapport à la fonctionnelle linéaire $C^{(n)}$.

Par exemple au lieu de considérer le polynôme de Stieltjes V_{k+1} dont le calcul nécessite $(3k+2)$ coefficients de la série $f(t)$, nous proposons d'utiliser le polynôme orthogonal P_{k+1} qui n'en demande que $(2k+2)$.

Autrement dit nous rajoutons le même nombre de noeuds mais ceci d'une façon non optimale. Cela nous amène tout naturellement à trois estimations construites uniquement en fonction des $P_{k+m}^{(n)}$ et dont l'intérêt réside essentiellement dans l'observation que la structure de la table de Padé nous offre d'innombrables possibilités de développer l'erreur. Nous retenons tout particulièrement trois nouveaux développements de base, selon la diagonale, la verticale et l'horizontale. On appellera ces développements respectivement développement diagonal,

vertical et horizontal.

Enfin on suppose que, pour la valeur de t en considération, la convergence vers $f(t)$ de la suite des approximants de Padé $([p/q]_f(t))$ lorsque p ou q tend vers l'infini, est assurée.

Avec des exemples numériques vérifiant l'hypothèse ci-dessus, certaines de ces estimations ont été comparées entre elles et à la procédure de Kronrod.

II. DÉRIVATION D'UNE CLASSE D'ESTIMATIONS DE L'ERREUR:

Dans ce paragraphe nous montrons comment obtenir de nouveaux développements de l'erreur comme une conséquence immédiate de l'application de l'idée de Kronrod aux approximations de Padé.

Nous dérivons également une classe d'estimations qui pourrait être la base d'une puissante technique pour estimer économiquement l'erreur.

Rappel:

La procédure de Kronrod est une puissante méthode d'estimation de l'erreur dans les formules de quadrature de Gauss. Elle a été étendue par BREZINSKI à l'approximation de Padé [6]. Cette procédure consiste à rajouter de nouveaux noeuds aux noeuds gaussiens (dans notre cas les zéros de $P_k^{(n)}$), d'une façon optimale afin d'obtenir une nouvelle formule de quadrature ayant un degré d'exactitude le plus élevé possible. Les noeuds rajoutés sont les zéros d'un polynôme dit polynôme de Stieltjes associé à $P_k^{(n)}$. Le polynôme noté $V_{k+1}^{(n)}$ est défini par le système triangulaire suivant:

$$c^{(n)} \left(x^i P_k^{(n)} V_{k+1}^{(n)} \right) = 0 \quad i=0, \dots, k.$$

Puisque $[n+k-1/k]_f$ est une formule de quadrature gaussienne formelle nous pouvons donc lui appliquer l'idée de Kronrod pour passer à une autre formule de quadrature (meilleure) exacte pour des polynômes de degré $\leq 3k+1$. La différence des deux formules fournit une estimation de l'erreur de la formule gaussienne $[n+k-1/k]_f$. D'autre part la procédure de Kronrod utilise les coefficients c_0, c_1, \dots

C_{3k+n+1} et atteint l'ordre d'approximation $(k+2)$ (au sens des principes donnés dans [6]).

II.1. DEVELOPPEMENT DIAGONAL DE L'ERREUR:

Posons

$$E_k^{(n)}(t) = f(t) - [n+k-1 | k]_f(t)$$

Considérons l'approximant de type -Padé $(2k+n | 2k+n+1)_f$ de polynôme générateur $v(x) = x^n P_k^{(n)}(x) P_{k+1}^{(n)}(x)$.

Soit w le polynôme associé à v . Nous avons:

$$\begin{aligned} w(t) &= c \left(\frac{v(x) - v(t)}{x - t} \right) = c \left(\frac{x^n P_k^{(n)}(x) P_{k+1}^{(n)}(x) - t^n P_k^{(n)}(t) P_{k+1}^{(n)}(t)}{x - t} \right) \\ &= c \left(x^n \frac{P_k^{(n)}(x) P_{k+1}^{(n)}(x) - P_k^{(n)}(t) P_{k+1}^{(n)}(t)}{x - t} \right) + P_k^{(n)}(t) P_{k+1}^{(n)}(t) c \left(\frac{x^n - t^n}{x - t} \right). \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &c \left(x^n \frac{P_k^{(n)}(x) P_{k+1}^{(n)}(x) - P_k^{(n)}(t) P_{k+1}^{(n)}(t)}{x - t} \right) \\ &= c^{(n)} \left(\underbrace{P_{k+1}^{(n)}(x)}_{0''} \cdot \frac{P_k^{(n)}(x) - P_k^{(n)}(t)}{x - t} + P_k^{(n)}(t) \cdot \frac{P_{k+1}^{(n)}(x) - P_{k+1}^{(n)}(t)}{x - t} \right) \\ &= P_k^{(n)}(t) \Phi_{k+1}^{(n)}(t). \end{aligned}$$

où $\Phi_{k+1}^{(n)}$ est le polynôme de degré k associé à $P_{k+1}^{(n)}$.

Donc:

$$w(t) = P_k^{(n)}(t) Q_{k+1}^{(n)}(t) + P_k^{(n)}(t) P_{k+1}^{(n)}(t) C \left(\frac{x^n - t^n}{x - t} \right).$$

et

$$\tilde{w}(t) = t^{2k+n} w(t^{-1}) = t^n \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{Q}_{k+1}^{(n)}(t) + \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+1}^{(n)}(t) C \left(\frac{1-t^n x^n}{1-tx} \right)$$

$$\tilde{v}(t) = \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+1}^{(n)}(t)$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} &= \frac{\tilde{Q}_{k+1}^{(n)}(t)}{\tilde{P}_{k+1}^{(n)}(t)} \cdot t^n + C \left(\frac{1-t^n x^n}{1-tx} \right) = \left[n+k \mid k+1 \right]_f(t) \\ &= \left(2k+n \mid 2k+n+1 \right)_f(t). \end{aligned}$$

Now savons d'après [6; 7] que la différence $\left(2k+n \mid 2k+n+1 \right)_f - \left[n+k-1 \mid k \right]_f(t)$ est une estimation de l'erreur $E_k^{(n)}(t)$ telle que

$$\begin{aligned} E_k^{(n)}(t) &= \left[n+k \mid k+1 \right]_f(t) - \left[n+k-1 \mid k \right]_f(t) + E_{k+1}^{(n)}(t) \\ &= \left(2k+n \mid 2k+n+1 \right)_f(t) - \left[n+k-1 \mid k \right]_f(t) + \frac{t^{2k+n+1}}{\tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+1}^{(n)}(t)} C \left(\frac{x^n P_k^{(n)}(x)}{1-tx} \right) \end{aligned}$$

En utilisant la règle de la croix [3, p. 136], nous avons:

$$\left[n+k \mid k+1 \right]_f(t) - \left[n+k-1 \mid k \right]_f(t) = \frac{t^{2k+n} h_k^{(n)}}{\tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+1}^{(n)}(t)}$$

avec $h_k^{(n)} = C^{(n)}(x^k P_k^{(n)}(x))$.

Et

$$E_k^{(n)}(t) = \frac{t^{2k+n}}{\tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+1}^{(n)}(t)} \cdot h_k^{(n)} + E_{k+1}^{(n)}(t)$$

Le processus peut être itéré et l'on obtient :

$$E_k^{(n)}(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{t^{2i+n} h_i^{(n)}}{\tilde{P}_i^{(n)}(t) \tilde{P}_{i+1}^{(n)}(t)} \quad (1)$$

Soit $D_{k,n}^{(m)}(t)$ la somme partielle de (1), donnée par:

$$D_{k,n}^{(m)}(t) = \sum_{i=k}^{k+m} \frac{t^{2i+n} h_i^{(n)}}{\tilde{P}_i^{(n)}(t) \tilde{P}_{i+1}^{(n)}(t)} \quad \text{avec } m \geq 0.$$

Maintenant considérons l'approximant de type-Padé $(2k+m+n / 2k+m+n)$ de polynôme générateur $v(x) = x^n P_k^{(n)}(x) P_{k+m+1}^{(n)}(x)$, $m \geq 0$.

Soit \tilde{w} le polynôme associé à v . \tilde{w} est un polynôme de degré $2k+m+n$:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(t) &= c \left(\frac{v(x) - v(t)}{x - t} \right) \\ &= c \left(x^n \frac{P_k^{(n)}(x) P_{k+m+1}^{(n)}(x) - P_k^{(n)}(t) P_{k+m+1}^{(n)}(t)}{x - t} + P_k^{(n)}(t) P_{k+m+1}^{(n)}(t) \frac{x^n - t^n}{x - t} \right) \\ &= c^{(n)} \left(P_{k+m+1}^{(n)} \frac{P_k^{(n)}(x) - P_k^{(n)}(t)}{x - t} + P_k^{(n)}(t) \frac{P_{k+m+1}^{(n)}(x) - P_{k+m+1}^{(n)}(t)}{x - t} + P_k^{(n)}(t) P_{k+m+1}^{(n)}(t) \frac{x^n - t^n}{x - t} \right) \\ &= P_k^{(n)}(t) \tilde{\varphi}_{k+m+1}^{(n)}(t) + P_k^{(n)}(t) P_{k+m+1}^{(n)}(t) c \left(\frac{x^n - t^n}{x - t} \right). \end{aligned}$$

car $c^{(n)} \left(P_{k+m+1}^{(n)} \frac{P_k^{(n)}(x) - P_k^{(n)}(t)}{x - t} \right) = 0$. $\tilde{\varphi}_{k+m+1}^{(n)}$ est le polynôme de degré

$k+m$, associé à $P_{k+m+1}^{(n)}$.

Now avons :

$$\tilde{v}(t) = \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)$$

et

$$\tilde{w}(t) = t^n \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{\varphi}_{k+m+1}^{(n)}(t) + \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t) c \left(\frac{1 - t^n x^n}{1 - tx} \right).$$

D'où

$$\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} = t^n \frac{\tilde{Q}_{k+m+1}^{(n)}(t)}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} + C \left(\frac{1-t^n x^n}{1-tx} \right) = \left[n+k+m \mid k+m+1 \right]_f(t)$$

$$= (2k+m+n \mid 2k+m+n+1)_f(t).$$

On obtient ainsi l'estimation $(2k+m+n \mid 2k+m+n+1)_f(t) - [n+k-1 \mid k]_f$ qui n'est rien d'autre que la somme partielle $D_{k,n}^{(m)}(t)$. Alors:

$$E_k^{(n)}(t) = D_{k,n}^{(m)}(t) + E_{k+m+1}^{(n)}(t).$$

avec :

$$(a) E_{k+m+1}^{(n)}(t) = f(t) - \left[k+m+n \mid k+m+1 \right]_f(t)$$

$$(b) E_{k+m+1}^{(n)}(t) = f(t) - (2k+m+n \mid 2k+m+n+1)_f(t)$$

$$= \frac{t^{2k+m+n+1}}{\tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} C^{(n)} \left(\frac{P_k^{(n)}(x) P_{k+m+1}^{(n)}(x)}{1-tx} \right).$$

L'expression (b) nous amène tout naturellement à remarquer que l'erreur $E_{k+m+1}^{(n)}(t)$ peut également s'écrire :

$$(a') E_{k+m+1}^{(n)}(t) = \frac{t^{k+m+n+1}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t) \tilde{P}_n^{(n)}(t)} C^{(n)} \left(\frac{P_n^{(n)}(x) P_{k+m+1}^{(n)}(x)}{1-tx} \right)$$

$$(b') E_{k+m+1}^{(n)}(t) = \frac{t^{2(k+m+1)}}{\tilde{P}_n^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} C^{(n)} \left(\frac{x^{k+m-n+1} P_n^{(n)}(x) P_{k+m+1}^{(n)}(x)}{1-tx} \right)$$

Pour tout s variant de 0 à $k+m+1$, car :

$$c^{(n)} \left(\sum_{k+m+1}^{(n)} P_{k+m+1}^{(n)}(x) \frac{P_{\lambda}^{(n)}(x) - P_{\lambda}^{(n)}(t^{-1})}{x - t^{-1}} \right) = 0 \quad \text{pour } s=0, \dots, k+m+1$$

par l'orthogonalité de $P_{k+m+1}^{(n)}$ par rapport à $c^{(n)}$. Ce qui donne

$$c^{(n)} \left(\frac{P_{k+m+1}^{(n)}(x)}{1-tx} \right) = \frac{t^s}{P_{\lambda}^{(n)}(t)} \cdot c^{(n)} \left(\frac{P_{\lambda}^{(n)}(x) P_{k+m+1}^{(n)}(x)}{1-tx} \right).$$

On pourra ainsi construire une très large classe d'estimations en utilisant les expressions (a') et (b') ci-dessus.

La somme partielle $D_{k,n}^{(m)}(t)$ et $E_k^{(n)}(t)$ donnée par (1), seront appelés respectivement estimation diagonale et développement diagonal de l'erreur de $[n+k-1/k]_f(t)$.

En se basant sur quelques exemples numériques où la convergence de la suite $([p/q]_f(t))$ vers $f(t)$ quand $p \rightarrow \infty$ ou $q \rightarrow \infty$, est assurée il nous a semblé que l'estimation $D_{k,n}^{(m)}(t)$, pour le même nombre de coefficients utilisés, est aussi stable et efficace que la procédure de Kronrod.

Remarquons également que le passage de $D_{k,n}^{(m)}(t)$ à $D_{k,n}^{(m+1)}(t)$ ne nécessite que deux coefficients supplémentaires.

D'autre part comme le montrent les exemples numériques qui suivent, $D_{k,n}^{(m)}(t)$ donne (même pour m petit, $m=0,1,2$) des résultats : meilleurs au voisinage de zéro et bons lorsque la valeur de t est loin de l'origine.

Pour illustrer ceci, nous avons repris les exemples du logarithme et de l'exponentielle donnés en [6; 7].

2.1.1. EXEMPLES NUMÉRIQUES

Nous commençons par la fonction exponentielle.

EXEMPLE 1:

$$f(t) = e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$k=1$$

t	$e^t - [0]_1 f^{(k)}(t)$	$D_1^{(0)}(t)$	$D_1^{(1)}(t)$	$D_1^{(2)}(t)$
-3	.1000112031+00	-.2000000000+00	-.10565217D+00	-.200420
-2	.187090005D+00	-.2000000000+00	-.10696970D+00	-.190015
-1.5	.173869043D+00	-.1800470000+00	-.17656076D+00	-.176275
-1.2	.161451241D+00	-.160042781D+00	-.15324252D+00	-.153352
-1	.148148000D+00	-.1300000000+00	-.13207547D+00	-.132120
-0.8	.130026500D+00	-.1000000000+00	-.10621150D+00	-.106210
-0.5	-.60130007D-01	-.600000001D-01	-.60134795D-01	-.601360
-0.3	-.28412549D-01	-.280000028D-01	-.28412477D-01	-.284125
-0.1	-.42534011D-02	-.420047150D-02	-.42534909D-02	-.425349
0.1	-.59401930D-02	-.59017706D-02	-.59401929D-02	-.594019
0.3	-.78712621D-01	-.78078177D-01	-.78712477D-01	-.787126
0.5	-.35127673D+00	-.35294118D+00	-.35127479D+00	-.351278
0.8	-.27744591D+01	-.27906977D+01	-.27743635D+01	-.277440
1.1	.13004106D+02	.12918149D+02	.13005107D+02	.130041

$$k=2$$

t	$e^t - [112]$	$D_2^{(0)}(t)$	$D_2^{(1)}(t)$	$D_2^{(2)}(t)$
-3	.49787068D-01	.54547826D-01	.49573974D-01	.49787068D-01
-2	.24224172D-01	.25352525D-01	.24202420D-01	.24224447D-01
-1.5	.12603849D-01	.12906927D-01	.12600235D-01	.12603870D-01
-1.2	.70765649D-02	.71852845D-02	.70757383D-02	.70765686D-02
-1	.42430775D-02	.42881847D-02	.42428402D-02	.42430793D-02
-0.8	.21744926D-02	.21891838D-02	.21744433D-02	.21744927D-02
-0.5	.47005365D-03	.47127574D-03	.47005206D-03	.47005369D-03
-0.3	.77479941D-04	.77551483D-04	.77479908D-04	.77479941D-04
-0.1	.12245882D-05	.12247118D-05	.12245882D-05	.12245882D-05
0.1	.15776122D-05	.15777684D-05	.15776122D-05	.15776122D-05
0.3	.16555604D-05	.16570051D-05	.16555598D-05	.16555604D-05
0.5	.16624472D-05	.16663889D-05	.16624423D-05	.16624472D-05
0.8	.16238603D-01	.16374198D-01	.16238304D-01	.16238603D-01
1.1	.86016539D-01	.86957513D-01	.86011102D-01	.86016577D-01

$$k=3$$

t	$e^t - [213]$	$D_3^{(0)}(t)$	$D_3^{(1)}(t)$	$D_3^{(2)}(t)$
-3	-.45607577D-02	-.47738524D-02	-.45547583D-02	-.45608704D-02
-2	-.10280783D-02	-.10591050D-02	-.10280783D-02	-.10283554D-02
-1.5	-.30308236D-03	-.30869164D-03	-.30305672D-03	-.30308248D-03
-1.2	-.10871968D-03	-.10954623D-03	-.10871593D-03	-.10871970D-03
-1	-.45087130D-04	-.45324458D-04	-.45086384D-04	-.45087132D-04
-0.8	-.14691218D-04	-.14740598D-04	-.14691119D-04	-.14691218D-04
-0.5	-.12220914D-05	-.12236801D-05	-.12220902D-05	-.12220914D-05
-0.3	-.71541575D-07	-.71574828D-07	-.71541565D-07	-.71541575D-07
-0.1	-.12359203D-09	-.12359834D-09	-.12359201D-09	-.12359201D-09
0.1	-.15622037D-09	-.15622846D-09	-.15622053D-09	-.15622053D-09
0.3	-.14446783D-06	-.14453308D-06	-.14446767D-06	-.14446789D-06
0.5	-.39417645D-05	-.39466670D-05	-.39417607D-05	-.39417645D-05
0.8	-.95594774D-04	-.95893771D-04	-.95594198D-04	-.95594774D-04
1.1	-.94095559D-03	-.94641090D-03	-.94093595D-03	-.94095564D-03

EXAMPLE 2:

$$f(t) = t^{-1} \log(1+t) = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + \dots$$

$$k=1$$

t	$E^t \log(1+t) - [0 1]$	$D_1^{(0)}(t)$	$D_1^{(1)}(t)$	$D_1^{(2)}(t)$
-0.9	.74024600D+00	.52224371D+00	.67805123D+00	.72289343
-0.7	.18149701D+00	.16453952D+00	.18000147D+00	.18135312
-0.5	.15261028D-01	.53282051D-01	.52910053D-01	.52959302
-0.3	.12445992D-01	.12340601D-01	.12445034D-01	.12445335
-0.1	.39357752D-03	.37285728D-03	.37357712D-03	.37357763
0.1	.72084560D-03	.72840919D-03	.72084541D-03	.72084560
0.3	.49923308D-02	.49594974D-02	.49822300D-02	.49823304
0.5	.10930216D-01	.10810311D-01	.10928962D-01	.10930203
0.7	.17299618D-01	.16976752D-01	.17293633D-01	.17299510
0.9	.23313812D-01	.22875540D-01	.23499104D-01	.23315382
1.5	.39431916D-01	.37267081D-01	.39318480D-01	.39426062
2	.49306144D-01	.45454545D-01	.49019008D-01	.49203177
3	.62099120D-01	.54545455D-01	.61224490D-01	.61990959
5	.72637000D-01	.59348099D-01	.70028011D-01	.72164749
7	.74640853D-01	.56138233D-01	.70341659D-01	.73783464

k=2

t	$E^t \log(1+t) - [1 2]$	$D_2^{(0)}(t)$	$D_2^{(1)}(t)$	$D_2^{(2)}(t)$
-0.9	.21000235D+00	.15890752D+00	.20065172D+00	.2132223
-0.7	.16799389D-01	.15406379D-01	.16773034D-01	.1680310
-0.5	.16289715D-01	.15299010D-01	.16774503D-01	.1679931
-0.3	.15290321D-01	.14943300D-01	.15286410D-01	.1521993
-0.1	.37034900D-06	.71983210D-06	.72034870D-06	.72034900
0.1	.43604999D-06	.43611897D-06	.43604973D-06	.43604999
0.3	.27853980D-04	.27870099D-04	.27853957D-04	.27853980
0.5	.11905411D-03	.11915004D-03	.11905240D-03	.1190527
0.7	.32286368D-03	.31708066D-03	.32276330D-03	.32286368
0.9	.64012211D-03	.62356344D-03	.63984200D-03	.6402611
1.5	.14083370D-02	.20513909D-02	.21589813D-02	.21645350
2	.32159989D-02	.35050624D-02	.38306314D-02	.38300758
3	.55760558D-02	.66790353D-02	.74535043D-02	.75415010
5	.14093920D-01	.11480002D-01	.13016739D-01	.14004791
7	.19712682D-01	.14213366D-01	.17633191D-01	.19400930

k=3

t	$E^t \log(1+t) - [2 3]$	$D_3^{(0)}(t)$	$D_3^{(1)}(t)$	$D_3^{(2)}(t)$
-0.9	.62194032D-01	.44844200D-01	.57414832D-01	.60887045D-
-0.7	.14931412D-01	.13676350D-01	.14803609D-01	.14971697D-
-0.5	.50974077D-04	.49448648D-04	.50929403D-04	.50973530D-
-0.3	.83712922D-06	.85024035D-06	.83707417D-06	.83712879D-
-0.1	.51335101D-09	.51348914D-09	.51335090D-09	.51335115D-
0.1	.25480299D-09	.25463540D-09	.25480223D-09	.25480231D-
0.3	.10078730D-06	.10054819D-06	.10078559D-06	.10078749D-
0.5	.12544377D-05	.12413872D-05	.12543335D-05	.12544603D-
0.7	.37891130D-05	.36822293D-05	.37833141D-05	.37890805D-
0.9	.16786630D-04	.16278367D-04	.16697666D-04	.16788303D-
1.5	.11342680D-03	.10759237D-03	.11313266D-03	.11342147D-
2	.28653429D-03	.26534928D-03	.28301306D-03	.28642622D-
3	.67303058D-03	.77440908D-03	.86246673D-03	.87237897D-
5	.17698290D-02	.21367375D-02	.23247787D-02	.23344213D-
7	.42931737D-02	.34092244D-02	.47335091D-02	.44424310D-

Nous pouvons également obtenir une autre expression intéressante de $D_{k,n}^{(m)}(t)$ en utilisant l'équivalence entre l'interpolation polynômiale de la fonction génératrice $(1-tx)^{-2}$ et l'extension de procédure de Kronrod (voir [6; 7]).

Soit P le polynôme d'interpolation d'Hermite de $(1-tx)^{-2}$ aux zéros de P_{k+m+1} (pour simplifier nous avons pris $n=0$ et supprimé l'indice supérieur). On a :

$$P(x) = \frac{1}{1-tx} \left(1 - \frac{P_{k+m+1}(x)}{P_{k+m+1}(t^{-1})} \right).$$

Posons

$$e_k^{(m)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} c \left(P_k(x) P(x) \right)$$

Cette estimation est obtenue en remplaçant $(1-tx)^{-2}$ par $P(x)$ dans :

$$E_k(t) = f(t) - [k-1 | k]_f(t) = \frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} c \left(\frac{P_k(x)}{1-tx} \right).$$

Si l'on pose

$$W_{k+m+1}(t) = c \left(P_k(x) \frac{P_{k+m+1}(x) - P_{k+m+1}(t^{-1})}{x - t} \right)$$

nous obtenons facilement :

$$e_k^{(m)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+m+1}(t)}{\tilde{P}_{k+m+1}(t)}.$$

Nous allons montrer que $e_k^{(m)}(t)$ est identique à $D_{k,n}^{(m)}(t)$ ($n=0$). La démonstration se fait par récurrence. Mais auparavant nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1 : Soit $k \geq 1$ fixé. Pour $s \geq k$, soit W_s le polynôme de degré $s-1$, défini par :

$$W_s(t) = c \left(P_k(x) \frac{P_s(x) - P_s(t)}{x - t} \right).$$

Alors :

$$W_{s+2}(t) = (t + B_{s+2}) W_{s+1}(t) - C_{s+2} W_s(t)$$

avec : $W_k(t) \equiv 0$; $W_{k+1}(t) = c(x^k P_k(x)) = h_k$

Preuve :

Les polynômes P_s vérifient la relation de récurrence :

$$P_{s+2}(t) = (x + B_{s+2}) P_{s+1}(t) - C_{s+2} P_s(t) \quad , \quad C_{s+2} \neq 0.$$

Nous avons

$$W_{s+2}(t) = c \left(P_k(x) \frac{P_{s+2}(x) - P_{s+2}(t)}{x - t} \right)$$

$$= c \left(P_k(x) \frac{x-t}{x-t} P_{s+1}(t) + (t + B_{s+2}) \cdot P_k(x) \frac{P_{s+1}(t) - P_{s+1}(x)}{x-t} \right)$$

$$- C_{s+2} \cdot P_k(x) \frac{P_s(t) - P_s(x)}{x-t}$$

$$= c \left(P_k(x) P_{s+1}(x) + (t + B_{s+2}) W_{s+1}(t) - C_{s+2} W_s(t) \right)$$

Par les propriétés d'orthogonalité, le terme $c(P_k(x) P_{s+1}(x))$ est nul. ■

Pour $m=0$, $W_{k+1}(t) = h_k$ et $\tilde{W}_{k+1}(t) = t^k h_k$. Alors

$$e_k^{(0)}(t) = \frac{t^{2k}}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{h_k}{\tilde{P}_{k+1}(t)} = D_k^{(0)}(t).$$

Pour $m=1$, $W_{k+2}(t) = (t + B_{k+2}) h_k$ et $\tilde{W}_{k+2}(t) = t^k (1 + t B_{k+2}) h_k$

$$\text{or: } 1 + t B_{k+2} = \frac{\tilde{P}_{k+2}(t)}{\tilde{P}_{k+1}(t)} + t^2 \frac{h_{k+1}}{h_k} \cdot \frac{\tilde{P}_k(t)}{\tilde{P}_{k+1}(t)}$$

Donc

$$e_k^{(1)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+2}(t)}{\tilde{P}_{k+2}(t)} = \frac{t^{2k}}{\tilde{P}_k(t) \tilde{P}_{k+1}(t)} \cdot h_k + \frac{t^{2(k+1)}}{\tilde{P}_{k+1}(t) \tilde{P}_{k+2}(t)} \cdot h_{k+1} = D_k^{(1)}(t).$$

Nous avons le :

Théorème 2.1 : Pour tout $m \geq 0$, nous avons :

$$D_k^{(m)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+m+1}(t)}{\tilde{P}_{k+m+1}(t)}$$

et

$$\frac{E_k(t)}{D_k^{(m)}(t)} = 1 + \frac{t^{k+2(m+1)}}{\tilde{W}_{k+m+1}(t)} \cdot c \left(\frac{x^{m+1} P_k(x) P_{k+m+1}(x)}{1 - tx} \right)$$

Preuve: le premier résultat est vrai pour $m=0, 1$.

Pour $m \geq 1$, supposons que l'assertion soit vraie pour $m-1$ et m c.à.d.:

$$D_k^{(m-1)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+m}(t)}{\tilde{P}_{k+m}(t)} \quad \text{et} \quad D_k^{(m)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+m+1}(t)}{\tilde{P}_{k+m+1}(t)}$$

Par le lemme 2.1, nous avons:

$$\tilde{W}_{k+m+2}(t) = (1 + t B_{k+m+2}) \tilde{W}_{k+m+1}(t) - t^2 C_{k+m+2} \tilde{W}_{k+m}(t)$$

D'où :

$$\frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+m+2}(t)}{\tilde{P}_{k+m+2}(t)} = \frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+m+1}(t)}{\tilde{P}_{k+m+1}(t)} \left(1 + C_{k+m+2} \cdot \frac{\tilde{P}_{k+m}(t)}{\tilde{P}_{k+m+2}(t)} \right) -$$

$$t^2 C_{k+m+2} \cdot \frac{\tilde{P}_{k+m}(t)}{\tilde{P}_{k+m+2}(t)} \cdot \frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+m}(t)}{\tilde{P}_{k+m}(t)}$$

$$= \underbrace{\frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+m+1}(t)}{\tilde{P}_{k+m+1}(t)}}_{D_k^{(m)}(t)} + t^2 C_{k+m+2} \cdot \frac{\tilde{P}_{k+m}(t)}{\tilde{P}_{k+m+2}(t)} \cdot \left[\underbrace{\frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+m+1}(t)}{\tilde{P}_{k+m+1}(t)}}_{D_k^{(m)}(t)} - \underbrace{\frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+m}(t)}{\tilde{P}_{k+m}(t)}}_{D_k^{(m-1)}(t)} \right]$$

or

$$D_k^{(m)}(t) - D_k^{(m-1)}(t) = \frac{t^{2(k+m)}}{\tilde{P}_{k+m}(t) \tilde{P}_{k+m+1}(t)} \cdot h_{k+m} \quad \text{et} \quad C_{k+m+2} = \frac{h_{k+m+1}}{h_{k+m}}$$

Donc

$$\frac{t^k}{\tilde{P}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{k+m+2}(t)}{\tilde{P}_{k+m+2}(t)} = D_k^{(m)}(t) + \frac{t^{2(k+m+1)}}{\tilde{P}_{k+m+1}(t) \tilde{P}_{k+m+2}(t)} \cdot h_{k+m+1} = D_k^{(m+1)}(t) \quad \blacksquare$$

2.1.2. Comparaison de l'estimation diagonale et de la procédure de Kronrod:

Rappel : [7] :

soit $e_k^{(m)}(t)$ et $e_k^{(m')}(t)$ deux estimations quelconques de l'erreur de $[k-1/k]_f(t)$.

Considérons le rapport :

$$r(t) = \frac{\frac{e_k^{(m)}(t)}{f(t) - [k-1/k]_f(t)} - 1}{\frac{e_k^{(m')}(t)}{f(t) - [k-1/k]_f(t)} - 1}$$

Comme cela a été montré dans [6 ; 7] , si $|r(t)| < 1$, $e_k^{(m)}(t)$ est une estimation de l'erreur meilleure que $e_k^{(m')}(t)$. De même si $e_k^{(m)}(t)$ est d'ordre supérieur à celui de $e_k^{(m')}(t)$, alors $\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = 0$ et $e_k^{(m)}(t)$ est meilleure que $e_k^{(m')}(t)$ au voisinage de l'origine (au moins) . Mais si les deux estimations sont du même ordre dans ce cas il est difficile de décider entre les deux. Toutefois le calcul de $r(0) = \lim_{t \rightarrow 0} r(t)$ peut fournir une indication sur

leur comportement au voisinage de l'origine.

Rappelons également que la procédure de Kronrod est donnée par :

$$P.K = \frac{E^{2k}}{\tilde{E}_k(t)} \cdot \frac{h_k}{\tilde{V}_{k+1}(t)} = (2k|2k+1)_f(t) - [k-1/k]_f(t).$$

$$= f(t) - [k-1/k]_f(t) - \frac{3k+2}{t} \cdot c \left(\frac{x^{k+1} P_k(x) V_{k+1}(x)}{1-tx} \right)$$

$$\tilde{P}_k(t) \tilde{V}_{k+1}(t)$$

et

$$\frac{f(t) - [k-1/k]_f(t)}{(2k/2k+1)_f(t) - [k-1/k]_f(t)} = 1 + t^{k+2} \cdot c \left(\frac{x^{k+1} P_k(x) V_{k+1}(x)}{1-tx} \right) / \rho_{h_k}$$

En utilisant les résultats ci-dessus et ceux du théorème 2.1, nous pouvons faire la comparaison suivante :

La procédure de Kronrod et $D_k^{(m)}(t)$ utilisent le même nombre de coefficients et atteignent le même ordre d'approximation si $2m = k$. Pour $k \geq 2$ et $m \leq 1$, la P.K est d'ordre supérieur à celui de $D_k^{(m)}(t)$, tandis que celle dernière est d'ordre supérieur à celui de la P.K pour $m \geq 2$ et $k \leq 4$. Dans la suite nous comparons numériquement ces deux estimations. Pour cela formons le rapport :

$$z(t) = \frac{\frac{f(t) - [k+m/k+m+1]_f(t)}{f(t) - [k-1/k]_f(t)} - 1}{\frac{f(t) - (2k/2k+1)_f(t)}{f(t) - [k-1/k]_f(t)} - 1} = \frac{f(t) - (2k+m/2k+m+1)_f(t)}{f(t) - (2k/2k+1)_f(t)}$$

où $(2k/2k+1)_f$ et $(2k+m/2k+m+1)_f$ sont respectivement des polynômes générateurs $P_k V_{k+1}$ et $P_{k+m} V_{k+m+1}$ (V_{k+1} étant le polynôme de Stieltjes).

D'où :

$$r(t) = t^{2m-k} \cdot \frac{\tilde{V}_{k+1}(t)}{P_{k+m+1}(t)} \cdot \frac{C(x^{m+1} P_k(x) P_{k+m+1}(x) (1-tx)^{-2})}{C(x^{k+1} P_k(x) V_{k+1}(x) (1-tx)^{-2})}$$

Si $2m=k$, nous avons:

$$r(0) = \lim_{t \rightarrow 0} r(t) = \frac{C(x^{m+1} P_k(x) P_{k+m+1}(x))}{C(x^{k+1} P_k(x) V_{k+1}(x))}$$

car V_{k+1} et P_{k+m+1} sont supposés unitaires ($\tilde{V}_{k+1}(0) = \tilde{P}_{k+m+1}(0) = 1$).

Si le coefficient c_{3k+2} est connu, le rapport $r(0)$ est donc facile à

calculer.

Nous commençons par l'exemple de la fonction exponentielle.

$$k=1$$

t	$D_1^{(1)}(t)$	$e^t \cdot [011]$	P.k
-3	-.10068217D+00	-.20021205D+00	-.23684211D+00
-2	-.19696970D+00	-.19799805D+00	-.21428571D+00
-1.5	-.17656076D+00	-.17688984D+00	-.18461538D+00
-1.2	-.15324252D+00	-.15335124D+00	-.15734266D+00
-1.	-.13207547D+00	-.13212056D+00	-.13432836D+00
-0.8	-.10621190D+00	-.10622659D+00	-.10723861D+00
-0.5	-.60134785D-01	-.60136007D-01	-.60301508D-01
-0.3	-.28412477D-01	-.28412549D-01	-.28431527D-01
-0.1	-.42534909D-02	-.42534911D-02	-.42536097D-02
0.1	-.59401929D-02	-.59401930D-02	-.59400059D-02
0.3	-.78712477D-01	-.78712621D-01	-.78636959D-01
0.5	-.35127479D+00	-.35127873D+00	-.34951456D+00
0.8	-.27743635D+01	-.27744591D+01	-.27067669D+01
1.1	.13005107D+02	.13004165D+02	.12053127D+02

5 coefficients

mieux

4 coefficients

$$k=0$$

$$\underline{\underline{\tau(0) = -2.8181485 \cdot 10^{-2}}}$$

t	$D_2^{(1)}(t)$	$e^t \cdot [112]_f^{(t)}$	Procédure de Kronrod.
-3	.495739740-01	.497870690-01	.512535130-01
-2	.242024200-01	.242241720-01	.244553450-01
-1.5	.120002350-01	.120036440-01	.120533670-01
-1.2	.707573630-02	.707656490-02	.708997080-02
-1	.424234070-02	.424307750-02	.424749790-02
-0.8	.217444730-02	.217449260-02	.217550960-02
-0.5	.470093060-03	.470053650-03	.470093460-03
-0.3	.774799060-04	.774799410-04	.774808960-04
-0.1	.122458820-05	.122458820-05	.122458840-05
0.1	.157761220-05	.157761220-05	.157761250-05
0.3	.165558980-05	.165558940-05	.165558950-05
0.5	.166244230-05	.166244720-05	.166279150-05
0.8	.162583040-05	.162586050-05	.162581780-05
1.1	.860111020-01	.850165500-01	.864646170-01

7 coefficients
meilleure

7 coefficients

$$k=3$$

t	$D_3^{(1)}(t)$	$e^t \cdot [213]_f^{(t)}$	Procédure de Kronrod
-3	-.455475830-02	-.456075770-02	-.457965710-02
-2	-.102807830-02	-.102835310-02	-.102929700-02
-1.5	-.303056720-03	-.303082360-03	-.303168860-03
-1.2	-.108715930-03	-.108719680-03	-.108731680-03
-1	-.450863840-04	-.450871300-04	-.450893660-04
-0.8	-.146911190-04	-.146912180-04	-.146914850-04
-0.5	-.122209020-05	-.122209140-05	-.122209390-05
-0.3	-.715415650-07	-.715415750-07	-.715415870-07
-0.1	-.123592010-09	-.123592030-09	-.123592010-09
0.1	-.156220530-09	-.156220370-09	-.156220530-09
0.3	-.144467670-06	-.144467690-06	-.144467650-06
0.5	-.394176070-05	-.394176450-05	-.394174990-05
0.8	-.955941980-04	-.955947740-04	-.955903480-04
1.1	-.940935950-03	-.940955590-03	-.940698800-03

9 coefficients
meilleure

10 coefficients

Pour $m \geq 0$ et $k \leq 4$, $D_k^{(m)}(t)$ est d'ordre supérieur à celui de la procédure de Kronrod. Pour l'exponentielle nous obtenons les résultats suivants; pour $m = 0$ et $k = 1, 2, 3$:

$$k = 1$$

t	$D_1^{(0)}(t)$	$e^t - [01]$	Procédure de Kronrod
-3	-.20042603D+00	-.20021293D+00	-.23684211D+00
-2	-.19801980D+00	-.19799805D+00	-.21428571D+00
-1.5	-.17607345D+00	-.17580984D+00	-.18461538D+00
-1.2	-.15335207D+00	-.15335124D+00	-.15734266D+00
-1	-.13210080D+00	-.13212056D+00	-.13432836D+00
-0.8	-.10622664D+00	-.10622659D+00	-.10723861D+00
-0.5	-.60136009D-01	-.60136007D-01	-.60301508D-01
-0.3	-.28412549D-01	-.28412549D-01	-.28431527D-01
-0.1	-.42534911D-02	-.42534911D-02	-.42536097D-02
0.1	-.59401930D-02	-.59401930D-02	-.59400059D-02
0.3	-.78712621D-01	-.78712621D-01	-.78636959D-01
0.5	-.35127873D+00	-.35127873D+00	-.34951456D+00
0.8	-.27744594D+01	-.27744591D+01	-.27067669D+01
1.1	.13004161D+02	.13004166D+02	.12053127D+02

7 coefficients

meilleure

4 coefficients

$$k = 2$$

t	$D_2^{(2)}(t)$	$e^t - [12]_f(t)$	Procédure de Kronrod
-3	.49793068D-01	.49787068D-01	.51253515D-01
-2	.24524447D-01	.24224172D-01	.24455345D-01
-1.5	.12603870D-01	.12603844D-01	.12653367D-01
-1.2	.70765086D-02	.70765649D-02	.70899708D-02
-1	.42450783D-02	.42430775D-02	.42474079D-02
-0.8	.21744927D-02	.21744926D-02	.21755096D-02
-0.5	.47009365D-03	.47009365D-03	.47009346D-03
-0.3	.77479941D-04	.77479941D-04	.77480896D-04
-0.1	.12245882D-05	.12245882D-05	.12245884D-05
0.1	.15776122D-05	.15776122D-05	.15776125D-05
0.3	.16555604D-03	.16555604D-03	.16555895D-03
0.5	.16624472D-02	.16624472D-02	.16627015D-02
0.8	.16238603D-01	.16238603D-01	.16258178D-01
1.1	.86016577D-01	.86016558D-01	.86464617D-01

9 coefficients

meilleure

7 coefficients

$$k=3$$

t	$D_3^{(2)}(t)$	$e^t - [213]_f(t)$	Procédure de Kronrod
-3	-.45600704D-02	-.45607577D-02	-.45796571D-02
-2	-.10283554D-02	-.10283531D-02	-.10292970D-02
-1.5	-.30308248D-03	-.30308236D-03	-.30316086D-03
-1.2	-.10871970D-03	-.10871968D-03	-.10873168D-03
-1	-.45007132D-04	-.45007130D-04	-.45008936D-04
-0.8	-.14691218D-04	-.14691218D-04	-.14691485D-04
-0.5	-.12220914D-05	-.12220914D-05	-.12220939D-05
-0.3	-.71541575D-07	-.71541575D-07	-.71541587D-07
-0.1	-.12359201D-09	-.12359203D-09	-.12359201D-09
0.1	-.15622053D-09	-.15622037D-09	-.15622053D-09
0.3	-.14446763D-06	-.14446769D-06	-.14446765D-06
0.5	-.39417645D-05	-.39417645D-05	-.39417499D-05
0.8	-.95594774D-04	-.95594774D-04	-.95590348D-04
1.1	-.94095564D-03	-.94095559D-03	-.94069880D-03

11 coefficients

10 coefficients

meilleure

Pour illustrer l'efficacité de l'estimation diagonale $D_k^{(m)}(t)$, $m \geq 0$ et mettre en évidence la difficulté du choix d'une procédure d'estimation pour une série $f(t)$ donnée, nous allons considérer l'exemple du logarithme :

$$f(t) = t^{-1} \log(1+t) = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + \dots$$

t	$D_1^{(4)}(t)$	$f(t) - [011]_f(t)$	Procédure de Kronrod
-0.9	.67805123D+00	.74024606D+00	.67805123D+00
-0.7	.18000147D+00	.18149961D+00	.18000147D+00
-0.5	.52910053D-01	.52961028D-01	.52910053D-01
-0.3	.12445034D-01	.12445892D-01	.12445034D-01
-0.1	.97357712D-03	.97357763D-03	.97357712D-03
0.1	.72084541D-03	.72084566D-03	.72084541D-03
0.3	.49822300D-02	.49823308D-02	.49822300D-02
0.5	.10928962D-01	.10930216D-01	.10928962D-01
0.7	.17293833D-01	.17293818D-01	.17293833D-01
0.9	.23499104D-01	.23515312D-01	.23499104D-01
1.5	.39318480D-01	.39431916D-01	.39318480D-01
2.	.49019608D-01	.49306144D-01	.49019608D-01
3.	.61224490D-01	.62093120D-01	.61224490D-01
5.	.70028011D-01	.72637608D-01	.70028011D-01
7.	.70341659D-01	.74840855D-01	.70341659D-01

$$k = 2$$

t	$D_2^{(4)}(t)$	$f(t) - [112]$	Procédure de Kronrod
-0.9	.20065172D+00	.21800235D+00	.21973476D+00
-0.7	.16773894D-01	.16904380D-01	.16934732D-01
-0.5	.16774503D-02	.16789765D-02	.16794122D-02
-0.3	.10528410D-03	.10529098D-03	.10529309D-03
-0.1	.72034870D-06	.72034906D-06	.72034917D-06
0.1	.43646973D-06	.43646988D-06	.43646992D-06
0.3	.22832957D-04	.22833396D-04	.22833532D-04
0.5	.11939240D-03	.11940541D-03	.11940935D-03
0.7	.32276370D-03	.32286563D-03	.32289602D-03
0.9	.63934200D-03	.64027211D-03	.64039653D-03
1.5	.21593813D-02	.21648337D-02	.21663909D-02
2	.38306314D-02	.38515989D-02	.38567493D-02
3	.74535043D-02	.75326658D-02	.75732532D-02
5	.13616739D-01	.14089599D-01	.14156686D-01
7	.17055191D-01	.18712562D-01	.18805377D-01

7 coefficients

7 coefficients
meilleurs

Pour $k = 2$, $r(0) = -3.2$

$$k = 3$$

t	$D_3^{(4)}(t)$	$f(t) - [213]$	Procédure de Kronrod
-0.9	.57414852D-01	.62194832D-01	.62352951D-01
-0.7	.14869605D-02	.14981412D-02	.14984369D-02
-0.5	.50939463D-04	.50974877D-04	.50975354D-04
-0.3	.85707417D-06	.85712922D-06	.85712938D-06
-0.1	.51385090D-09	.51385101D-09	.51385115D-09
0.1	.25480233D-09	.25480290D-09	.25480231D-09
0.3	.10078759D-06	.10078759D-06	.10078759D-06
0.5	.12544677D-05	.12544677D-05	.12544682D-05
0.7	.57851120D-05	.57851120D-05	.57851235D-05
0.9	.16708770D-04	.16708770D-04	.16708770D-04
1.5	.11344195D-03	.11344195D-03	.11344195D-03
2	.28657143D-03	.28657143D-03	.28657143D-03
3	.87398164D-03	.87398164D-03	.87398164D-03
5	.26128863D-02	.26128863D-02	.26128863D-02
7	.45085570D-02	.44931957D-02	.45085570D-02

9 coefficients

10 coefficients
meilleurs

$$k=1$$

t	$D_1^{(2)}(t)$	$f(t) - [01]_f(t)$	Procédure de Kromod.
-0.9	.72307543D+00	.74024608D+00	.67805123E+00
-0.7	.10136912D+00	.10149961D+00	.10000147D+00
-0.5	.57089503E-01	.57001028E-01	.52910053E-01
-0.3	.12445085E-01	.12445892E-01	.12445054E-01
-0.1	.97357763E-03	.97357763E-03	.97357712E-03
0.1	.72084566E-03	.72084566E-03	.72084541E-03
0.3	.49822300E-02	.49822300E-02	.49822300E-02
0.5	.10930203E-01	.10930216E-01	.10928902E-01
0.7	.17292516E-01	.17292516E-01	.17293033E-01
0.9	.23313080E-01	.23313013E-01	.23499104E-01
1.5	.39420962E-01	.39431916E-01	.39318480E-01
2	.49365177E-01	.49366144E-01	.49019608E-01
3	.61598090E-01	.62008120E-01	.61224490E-01
5	.72164700E-01	.72637608E-01	.70028011E-01
7	.77303085E-01	.78040855E-01	.70341659E-01

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 7 coefficients
 meilleur

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 4 coefficients

$$k=2$$

t	$D_2^{(2)}(t)$	$f(t) - [112]_f(t)$	Procédure Kromod
-0.9	.21302257D+00	.21800235D+00	.21873476D+00
-0.7	.16895100E-01	.16904380E-01	.16934732E-01
-0.5	.16709511E-02	.16709765E-02	.16794122E-02
-0.3	.10529093E-03	.10529093E-03	.10529309E-03
-0.1	.72034906E-06	.72034906E-06	.72034917E-06
0.1	.43646987E-06	.43646988E-06	.43646992E-06
0.3	.22833394E-04	.22833396E-04	.22833332E-04
0.5	.11940527E-03	.11940541E-03	.11940935E-03
0.7	.32285308E-03	.32286568E-03	.32289602E-03
0.9	.64026110E-03	.64027211E-03	.64039653E-03
1.5	.21645350E-02	.21648357E-02	.21663909E-02
2	.38500755E-02	.38515989E-02	.38567493E-02
3	.75415020E-02	.75526650E-02	.75732532E-02
5	.14004781E-01	.14089599E-01	.14156686E-01
7	.18466933E-01	.18712502E-01	.18805377E-01

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 9 coefficients
 meilleur

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 10 coefficients

$$k=3$$

t	$D_3^{(2)}(t)$	$f(t) - [e 3]_f(t)$	Procédure de Kronrod
-0.9	.60887045D-01	.62194832D-01	.62352951D-01
-0.7	.14971697D-02	.14981412D-02	.14984309D-02
-0.5	.50973330D-04	.50974877D-04	.50975354D-04
-0.3	.85712878D-06	.85712922D-06	.85712938D-06
-0.1	.51385115D-09	.51385101D-09	.51385115D-09
0.1	.25480231D-09	.25480290D-09	.25480231D-09
0.3	.10078749D-06	.10078750D-06	.10078750D-06
0.5	.12544663D-05	.12544677D-05	.12544682D-05
0.7	.57851120D-05	.57851120D-05	.57851235D-05
0.9	.16708699D-04	.16708665D-04	.16708770D-04
1.5	.11342137D-03	.11343680D-03	.11344195D-03
2	.28642622D-03	.28653649D-03	.28657143D-03
3	.87337897D-03	.87363058D-03	.87398164D-03
5	.26944615D-02	.26995969D-02	.26128863D-02
7	.44424884D-02	.44991957D-02	.45085570D-02

11 coefficients

10 coefficients

meilleure

Pour $k=4$, $D_4^{(2)}(t)$ et la procédure de Kronrod utilisent chacune 13 coefficients. En voilà les résultats :

Pour l'exponentielle, nous avons $\pi(0) = -0.19182485 \cdot 10^{-4}$.

t	$D_4^{(2)}(t)$	$e^t - [3 4]$	Procédure de Kronrod
-3	.21309622D-03	.21309470D-03	.21319312D-03
-2	.21751997D-04	.21751883D-04	.21753385D-04
-1.5	.360927904D-05	.36092793D-05	.36093382D-05
-1.2	.82654128D-06	.82654126D-06	.82654539D-06
-1	.23732793D-06	.23732793D-06	.23732837D-06
-0.8	.49290785D-07	.49290785D-07	.49290812D-07
-0.5	.15886521D-08	.15886520D-08	.15886521D-08
-0.3	.33253239D-10	.33253239D-10	.33253239D-10
-0.1	.63330014D-14	.61062266D-14	.63330014D-14
0.1	.79341018D-14	.79936058D-14	.79341018D-14
0.3	.65386592D-10	.65386585D-10	.65386593D-10
0.5	.49025363D-08	.49025366D-08	.49025367D-08
0.8	.29899733D-06	.29899738D-06	.29899780D-06
1.1	.54553088D-05	.54553087D-05	.54553704D-05

meilleure

Pour le logarithme, nous avons $\tau(0) = -0.18427348 \cdot 10^2$.

t	$D_4^{(2)}(t)$	$t \cdot \log(1+t) - [3 4]$	Procédure de Kromod
-0.9	.10994249D-01	.17350032D-01	.17307830D-01
-0.7	.13040274D-03	.13040021D-03	.13049332D-03
-0.5	.15261091D-05	.15262289D-05	.15262316D-05
-0.3	.68880080D-08	.68888723D-08	.68888723D-08
-0.1	.36201234D-12	.36176325D-12	.36201234D-12
0.1	.14690838D-12	.14760675D-12	.14690838D-12
0.3	.43930256D-09	.43930277D-09	.43930260D-09
0.5	.13010458D-07	.13010472D-07	.13010473D-07
0.7	.10229120D-06	.10229175D-06	.10229178D-06
0.9	.43099530D-06	.43010244D-06	.43010291D-06
1.5	.58536471D-05	.58544289D-05	.58544869D-05
2	.20969544D-04	.20967509D-04	.20968156D-04
3	.99021520D-04	.99161498D-04	.99174374D-04
5	.47016647D-03	.47285940D-03	.47313815D-03
7	.10443230D-02	.10573712D-02	.10587594D-02

meilleure

II.8. DEVELOPPEMENTS VERTICAL & HORIZONTAL DE L'ERREUR:

Dans ce paragraphe nous proposons deux autres nouveaux développements obtenus en considérant le cas particulier de l'extension de la procédure de Kronrod où les noeuds rajoutés sont les zéros du polynôme orthogonal $P_j^{(i)}$ par rapport à la fonctionnelle $C^{(i)}$, $i = n \pm l$, $l = 1, 2, \dots$.

Le développement vertical est obtenu en fixant la colonne j ($j=k$) et en faisant varier i .

Considérons l'approximant de type-Padé $(2k+n | 2k+n+1)_f$ de polynôme générateur $v(x) = x^{n+1} P_k^{(n)}(x) P_k^{(n+1)}(x)$.

Le polynôme w associé à v est donné par:

$$\begin{aligned} w(t) &= c \left(\frac{x^{n+1} P_k^{(n)}(x) P_k^{(n+1)}(x) - x^{n+1} P_k^{(n)}(t) P_k^{(n+1)}(t)}{x - t} + \frac{x^{n+1} - t^{n+1}}{x - t} P_k^{(n)}(t) P_k^{(n+1)}(t) \right) \\ &= c^{(n+1)} \left(P_k^{(n+1)}(x) \frac{P_k^{(n)}(x) - P_k^{(n)}(t)}{x - t} + P_k^{(n)}(t) \frac{P_k^{(n+1)}(x) - P_k^{(n+1)}(t)}{x - t} \right) + \\ & P_k^{(n)}(t) P_k^{(n+1)}(t) c \left(\frac{x^{n+1} - t^{n+1}}{x - t} \right). \end{aligned}$$

D'où

$$w(t) = P_k^{(n)}(t) \Phi_k^{(n+1)}(t) + P_k^{(n+1)}(t) \tilde{P}_k^{(n)}(t) c \left(\frac{x^{n+1} - t^{n+1}}{x - t} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{w}(t) &= t^{2k+n} w(t^{-1}) \\ &= t^{n+1} \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{\Phi}_k^{(n+1)}(t) + \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_k^{(n+1)}(t) c \left(\frac{1 - t^{n+1} x^{n+1}}{1 - tx} \right) \end{aligned}$$

avec $\tilde{v}(t) = \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_k^{(n+1)}(t)$.

On obtient :

$$\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} = t^{n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}_k^{(n+1)}(t)}{\tilde{P}_k^{(n+1)}(t)} + c \left(\frac{1-t^{n+1}x^{n+1}}{1-tx} \right) = [n+k|k]_f$$

$$= (2k+n | 2k+n+1)_f(t)$$

On sait que la différence $(2k+n | 2k+n+1)_f(t) - [n+k-2|k]_f(t)$ une estimation de l'erreur $f(t) - [n+k-2|k]_f(t)$ telle que :

$$(2k+n | 2k+n+1)_f(t) - [n+k-2|k]_f(t) = f(t) - [n+k-2|k]_f(t) -$$

$$\frac{t^{2k+n+1}}{\tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_k^{(n+1)}(t)} \cdot c^{(n+1)} \left(\frac{P_k^{(n)}(x) P_k^{(n)}(x)}{1-tx} \right)$$

$$= f(t) - [n+k-2|k]_f(t) - E_k^{(n+1)}(t)$$

avec

$$E_k^{(n+1)}(t) = f(t) - (2k+n | 2k+n+1)_f(t) = f(t) - [n+k|k]_f(t)$$

Donc

$$E_k^{(n)}(t) = f(t) - [n+k-2|k]_f(t)$$

$$= [n+k|k]_f(t) - [n+k-2|k]_f(t) + E_k^{(n+1)}(t)$$

$$= \frac{t^{2k+n}}{\tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_k^{(n+1)}(t)} h_k^{(n)} + E_k^{(n+1)}(t)$$

car par la règle de la croix nous avons :

$$[n+k|k]_f(t) - [n+k-2|k]_f(t) = \frac{t^{2k+n}}{\tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_k^{(n+1)}(t)} h_k^{(n)}$$

En répétant le processus, nous obtenons :

$$E_k^{(n)}(t) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{t^{2k+i} f^{(i)}(t)}{\tilde{P}_k^{(i)}(t) \tilde{P}_k^{(i+1)}(t)} \quad (2)$$

Il est évident que la somme partielle $V_{k,n}^{(m)}(t)$ de (2), s'écrit :

$$\begin{aligned} V_{k,n}^{(m)}(t) &= [k+m+n | k]_f(t) - [n+k-1 | k]_f(t), \quad m \geq 0 \\ &= \sum_{i=n}^{n+m} \frac{t^{2k+i} f^{(i)}(t)}{\tilde{P}_k^{(i)}(t) \tilde{P}_k^{(i+1)}(t)} \end{aligned}$$

Mais en utilisant la technique précédente nous montrons facilement que

$$V_{k,n}^{(m)}(t) = (2k+m+n | 2k+m+n+1)_f(t) - [n+k-1 | k]_f(t)$$

où $(2k+m+n | 2k+m+n+1)_f$ est de polynôme générateur $x^{m+n+1} \tilde{P}_k^{(n)}(x) \tilde{P}_k^{(n+m+1)}(x)$.

Quant à l'ordre d'approximation de $V_{k,n}^{(m)}(t)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{V_{k,n}^{(m)}(t)}{E_k^{(n)}(t)} &= 1 - \frac{f(t) - (2k+m+n | 2k+m+n+1)_f(t)}{f(t) - [n+k-1 | k]_f(t)} \\ &= 1 - \frac{t^{m+1} c^{(n)} (x^{m+1} \tilde{P}_k^{(n)}(x) \tilde{P}_k^{(n+m+1)}(x) (1-tx)^{-2})}{\tilde{P}_k^{(n+m+1)}(t) c^{(n)} (x^k \tilde{P}_k^{(n)}(x) (1-tx)^{-2})} \end{aligned}$$

Le calcul de $V_{k,n}^{(m)}(t)$ utilise les coefficients c_0, \dots, c_{2k+n+m} .

La somme partielle $V_{k,n}^{(m)}(t)$ et $E_k^{(n)}(t)$, donnée par (2), seront appelées respectivement estimation verticale et développement vertical de l'erreur.

Maintenant faisons varier en même temps la colonne et la diagonale d'un $P_j^{(i)}$. Autrement dit pour $k \geq 1$ et $n = 0, \pm 1, \dots$, fixés, considérons l'approximant de type Padé $(2k+n-1 / 2k+n)_f$ de polynôme générateur $v(x) = x^{n-m-1} P_k^{(n)}(x) P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(x)$.

Soit w le polynôme associé à v . On a :

$$\begin{aligned} w(t) &= c \left(\frac{v(x) - v(t)}{x - t} \right) \\ &= c \left(x^{n-m-1} P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(x) \frac{P_k^{(n)}(x) - P_k^{(n)}(t)}{x - t} + P_k^{(n)}(t) \cdot x^{n-m-1} \frac{P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(x) - P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t)}{x - t} + \right. \\ &\quad \left. \frac{x^{n-m-1} - t^{n-m-1}}{x - t} \cdot P_k^{(n)}(t) P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t) \right) \\ &= P_k^{(n)}(t) \Phi_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t) + P_k^{(n)}(t) P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t) c \left(\frac{x^{n-m-1} - t^{n-m-1}}{x - t} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{w}(t) &= t^{2k+n-1} w(t^{-1}) \\ &= t^{n-m-1} \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{\Phi}_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t) + \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t) c \left(\frac{1-t^{n-m-1} x}{1-tx} \right) \end{aligned}$$

avec $\tilde{v}(t) = \tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t)$, nous obtenons :

$$\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} = t^{n-m-1} \cdot \frac{\tilde{\Phi}_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t)}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t)} + c \left(\frac{1-t^{n-m-1} x}{1-tx} \right) = [k+n-1 / k+m+1]_{\tilde{v}}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 & (2k+n-1 | 2k+n)_f(t) - [n+k-1 | k]_f(t) \\
 &= f(t) - [n+k-1 | k]_f(t) - \frac{t^{2k+n}}{\tilde{P}_k^{(n)}(t) \tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot C^{(n-m-1)} \left(\frac{P_k^{(n)}(x) P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(x)}{1-tx} \right) \\
 &= [k+n-1 | k+m+1]_f(t) - [n+k-1 | k]_f(t)
 \end{aligned}$$

D'où : $E_k^{(n)}(t) = [k+n-1 | k+m+1]_f(t) - [n+k-1 | k]_f(t) + E_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t)$

Ce qui nous amène tout naturellement à l'expression suivante de l'erreur :

$$E_k^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2k+n+i} f_{k+i}^{(n-i)}}{\tilde{P}_{k+i}^{(n-i)}(t) \tilde{P}_{k+i+1}^{(n-i-1)}(t)} \quad (3)$$

Soit $H_{k,n}^{(m)}(t)$ la somme partielle de (3). L'estimation $H_{k,n}^{(m)}(t)$ a pour ordre d'approximation $(m+1)$ et utilise les coefficients c_0, \dots, c_{2k+m+n} . Pour cela il suffit de former le rapport

$$\begin{aligned}
 \frac{H_{k,n}^{(m)}(t)}{E_k^{(n)}(t)} &= 1 - \frac{f(t) - (2k+n-1 | 2k+n)_f(t)}{f(t) - [n+k-1 | k]_f(t)} \\
 &= 1 - \frac{t^{m+1} C^{(n-m-1)} \left(x^{m+1} P_k^{(n)}(x) P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(x) (1-tx)^{-2} \right)}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t) C^{(n)} \left(x^k P_k^{(n)}(x) (1-tx)^{-2} \right)}.
 \end{aligned}$$

La somme partielle $H_{k,n}^{(m)}(t)$ et $E_k^{(n)}(t)$, donnée par (3), seront appelés respectivement estimation horizontale et développement horizontal de l'erreur.

2.2.1. Exemples Numériques :

Si l'on reprend les exemples précédents, par exemple pour $n=0$ et $m=2$, nous obtenons :

t	$e^t - [011]$	$H_1^{(2)}(t)$	$V_1^{(2)}(t)$	$e^t - [112]$	$H_2^{(2)}(t)$	$V_2^{(2)}(t)$
-3	-0.20021293D+00	-0.18893130D+00	-0.32142857D+00	0.49787068D-01	0.48959608D-01	0.54347826D-01
-2	-0.19799805D+00	-0.19047619D+00	-0.22222222D+00	0.24224172D-01	0.24024024D-01	0.24691358D-01
-1.5	-0.17686984D+00	-0.17264654D+00	-0.18409091D+00	0.12603844D-01	0.12547926D-01	0.12687970D-01
-1.2	-0.15335124D+00	-0.15100004D+00	-0.15608892D+00	0.70765649D-02	0.70581432D-02	0.70978226D-02
-1	-0.13212056D+00	-0.13076973D+00	-0.13333333D+00	0.42430775D-02	0.42361072D-02	0.42498152D-02
-0.8	-0.10622659D+00	-0.10559155D+00	-0.10666667D+00	0.21744926D-02	0.21725058D-02	0.21761013D-02
-0.5	-0.60136007D-01	-0.60031596D-01	-0.60185185D-01	0.47005365D-03	0.46993589D-03	0.47012680D-03
-0.3	-0.28412549D-01	-0.28400855D-01	-0.28416816D-01	0.77479941D-04	0.77475433D-04	0.77482287D-04
-0.1	-0.42534911D-02	-0.42534217D-02	-0.42535107D-02	0.12245882D-05	0.12245854D-05	0.12245895D-05
0.1	-0.59401930D-02	-0.59402931D-02	-0.59401709D-02	0.15776122D-05	0.15776161D-05	0.15776108D-05
0.3	-0.78712621D-01	-0.78747749D-01	-0.78706564D-01	0.16555604D-03	0.16556770D-03	0.16555245D-03
0.5	-0.35127873D+00	-0.35193133D+00	-0.35119048D+00	0.16624472D-02	0.16630207D-02	0.16622986D-02
0.8	-0.27744591D+01	-0.27863046D+01	-0.27733333D+01	0.16238603D-01	0.16263579D-01	0.16233599D-01
1.1	0.13004766D+02	0.12905534D+02	0.13010971D+02	0.86016558D-01	0.86394483D-01	0.85957824D-01

Pour la série $f(t) = t^{-1} \log(1+t)$, nous avons les résultats suivants :

t	$f(t) - [011]$	$H_1^{(2)}(t)$	$V_1^{(2)}(t)$	$f(t) - [112]$	$H_2^{(2)}(t)$	$V_2^{(2)}(t)$
-0.9	0.74024606D+00	0.48166668D+00	0.55271104D+00	0.21800235D+00	0.16162884D+00	0.17106018D+00
-0.7	0.18149961D+00	0.16066112D+00	0.16975816D+00	0.16904380D-01	0.15761315D-01	0.16076565D-01
-0.5	0.52961028D-01	0.51115651D-01	0.52083333D-01	0.16789765D-02	0.16488689D-02	0.16591252D-02
-0.1	0.97357763D-03	0.97335227D-03	0.97349352D-03	0.72034906D-06	0.72027848D-06	0.72030855D-06
0.1	0.72084566D-03	0.72100398D-03	0.72089947D-03	0.43646988D-06	0.43650741D-06	0.43649025D-06
0.3	0.49823308D-02	0.50107499D-02	0.49912342D-02	0.22833396D-04	0.22881022D-04	0.22857987D-04
0.5	0.10930216D-01	0.11210478D-01	0.11011905D-01	0.11940541D-03	0.12045867D-03	0.11992512D-03
0.9	0.23515812D-01	0.26902413D-01	0.24385525D-01	0.64027211D-03	0.66875112D-03	0.65324469D-03
3	0.62098120D-01	0.85593220D+00	0.11470588D+00	0.75526658D-02	0.15975872D-01	0.10379919D-01
7	0.74840855D-01	-0.24277662D+00	0.61868687D+00	0.18712562D-01	0.58765964D+00	0.68089614D-01

D'autre part le calcul de $D_{k,n}^{(m)}(t)$, $V_{k,n}^{(2m+1)}(t)$ et $H_{k,n}^{(2m+1)}(t)$ pour $m \geq 0$ donne nécessairement le même nombre de coefficients $c_0, \dots, c_{2k+2m+n+1}$.

A titre d'exemple, pour $n=0$ et $m=2$, si l'on considère de nouveau le logarithme nous obtenons avec $k=3$:

t	$t' \log(1+t) - [2 3]$	$H_3^{(3)}(t)$	$V_3^{(3)}(t)$	$D_3^{(4)}(t)$
-0.9	$0.62194832 \cdot 10^{-1}$	$0.53189601 \cdot 10^{-1}$	$0.54573855 \cdot 10^{-1}$	0.57414852
-0.7	$0.14981418 \cdot 10^{-2}$	$0.14640825 \cdot 10^{-2}$	$0.14726719 \cdot 10^{-2}$	0.14868605
-0.5	$0.50974877 \cdot 10^{-4}$	$0.50785952 \cdot 10^{-4}$	$0.50844888 \cdot 10^{-4}$	0.50929463
-0.1	$0.51385096 \cdot 10^{-9}$	$0.51384941 \cdot 10^{-9}$	$0.51385007 \cdot 10^{-9}$	0.51385090
0.1	$0.25480285 \cdot 10^{-9}$	$0.25480151 \cdot 10^{-9}$	$0.25480185 \cdot 10^{-9}$	0.25480223
0.5	$0.12544677 \cdot 10^{-5}$	$0.12529240 \cdot 10^{-5}$	$0.12536466 \cdot 10^{-5}$	0.12543335
0.9	$0.16708669 \cdot 10^{-4}$	$0.16538887 \cdot 10^{-4}$	$0.16624599 \cdot 10^{-4}$	0.16697666
3	$0.87363058 \cdot 10^{-3}$	$0.33885388 \cdot 10^{-3}$	$0.66955675 \cdot 10^{-3}$	0.86246673
7	$0.44991957 \cdot 10^{-2}$	$-0.35605319 \cdot 10^{-2}$	$-0.88236952 \cdot 10^{-2}$	0.42535691

Ainsi $D_3^{(4)}(t)$ est meilleure que les deux estimations $H_3^{(3)}(t)$ et $V_3^{(3)}(t)$. On remarque également que $V_3^{(3)}(t)$ donne des résultats légèrement meilleurs que ceux donnés par $H_3^{(3)}(t)$.

En général, pour $m \geq 0$ donné, $D_R^{(m)}(t)$ semble être plus stable que les estimations horizontale et verticale de l'erreur.

Pour $m \geq 0$, $H_{k,n}^{(m)}(t)$ et $V_{k,n}^{(m)}(t)$ peuvent être comparés à la procédure de Krawtchouk.

En effet les trois procédures utilisent le même nombre de coefficients et atteignent le même ordre d'approximation pour $m = k+1$.

Pour la fonction exponentielle, avec $k=1$, nous obtenons:

t	$e^t - [011]$	$H_1^{(2)}(t)$	$V_1^{(2)}(t)$	Procédure de Kronrod
-3	-0.80021893	-0.18893130	-0.32142857	-0.23684211
-2	-0.19799805	-0.19047619	-0.22222222	-0.21428571
-1.5	-0.17686984	-0.17264654	-0.18409091	-0.18461538
-1.2	-0.15335124	-0.15100004	-0.15608392	-0.15734266
-1	-0.13212056	-0.13076923	-0.13333333	-0.13432836
-0.8	-0.10622659	-0.10559155	-0.10666667	-0.10723861
-0.5	$-0.60136007 \cdot 10^{-1}$	$-0.60031596 \cdot 10^{-1}$	$-0.60185185 \cdot 10^{-1}$	$-0.60301508 \cdot 10^{-1}$
-0.3	$-0.28412549 \cdot 10^{-1}$	$-0.28400855 \cdot 10^{-1}$	$-0.28416816 \cdot 10^{-1}$	$-0.28431527 \cdot 10^{-1}$
-0.1	$-0.42534911 \cdot 10^{-2}$	$-0.42534217 \cdot 10^{-2}$	$-0.42535107 \cdot 10^{-2}$	$-0.42536097 \cdot 10^{-2}$
0.3	$-0.78712621 \cdot 10^{-1}$	$-0.78747749 \cdot 10^{-1}$	$-0.78706564 \cdot 10^{-1}$	$-0.78636959 \cdot 10^{-1}$
0.5	-0.35127873	-0.35193133	-0.35119048	-0.34951456
0.8	$-0.27744591 \cdot 10^1$	$-0.27863046 \cdot 10^1$	$-0.27733333 \cdot 10^1$	$-0.27067669 \cdot 10^1$
1.1	$0.13004166 \cdot 10^2$	$0.12905534 \cdot 10^2$	$0.13010977 \cdot 10^2$	$0.12053127 \cdot 10^2$

Pour $k=2$ et $m=3$, $H_2^{(3)}(t)$ et $V_2^{(3)}(t)$ donnent également des résultats meilleurs que ceux donnés par la procédure de Kronrod, pour la fonction exponentielle.

Pour le logarithme, nous obtenons les résultats suivants pour $k=2$ et $m=3$:

t	$t' \log(1+t) - [112]$	$H_2^{(3)}(t)$	$V_2^{(3)}(t)$	Procédure de Kronrod
-0.9				0.21873476
-0.7			0.18721340D+00	0.16934732 $\cdot 10^{-1}$
-0.5			0.16547349D-01	0.16794122 $\cdot 10^{-2}$
-0.1			0.16733757D-02	0.72034917 $\cdot 10^{-6}$
0.1			0.72034700D-06	0.43646992 $\cdot 10^{-6}$
0.3			0.43646887D-06	0.22829867D-04
0.5			0.22829867D-04	0.11940935 $\cdot 10^{-3}$
			0.11928398D-03	

0.9	$0.64027211 \cdot 10^{-3}$	$0.62601426 \cdot 10^{-3}$	$0.63501550 \cdot 10^{-3}$	0.64039651
3	$0.75526658 \cdot 10^{-2}$	$-0.51418960 \cdot 10^{-2}$	$0.41050645 \cdot 10^{-2}$	0.75732532
7	$0.18712562 \cdot 10^{-1}$	-0.18917073	-0.11801497	0.18805377

sur cet exemple on remarque la supériorité de la procédure de Kronrod.

III. COMBINAISON DE PROCÉ DU RES D'ESTIMATION DE L'ERREUR:

Dans le paragraphe précédent nous donnions des estimations de l'erreur de $[n+k-1/k]_f$ qui s'écrivent sous forme de différence de $[n+k-1/k]_f$ et d'un approximant de type-Padé (A.P.T) dont la construction utilise le polynôme $P_k^{(n)}$.

Dans ce paragraphe nous allons donner une nouvelle classe d'estimations en combinant la technique du développement de l'erreur utilisée dans le paragraphe II et celle de l'interpolation polynomiale employée dans [7]. Mais ces estimations s'écrivent sous forme de différence de $[n+k-1/k]_f$ et d'un A.P.T ne faisant pas intervenir $P_k^{(n)}$.

A titre d'exemple si l'on considère le développement diagonal de l'erreur donné par l'expression (1) du paragraphe II, on obtient:

$$E_k^{(n)}(t) = D_{k,n}^{(m)}(t) + E_{k+m+1}^{(n)}(t), \quad m \geq 0 \quad (**).$$

Ce qui nous amène à chercher à améliorer l'estimation de $E_k^{(n)}(t)$ en estimant de nouveau l'erreur $E_{k+m+1}^{(n)}(t)$. Nous disposons de plusieurs possibilités pour estimer cette dernière.

Ainsi $E_{k+m+1}^{(n)}(t)$ peut être développée selon la technique du paragraphe II qu'il s'agit de remplacer k par $k+m+1$.

Et le processus peut donc être itéré jusqu'à ce qu'on obtienne la précision désirée.

Par la suite nous examinons tout particulièrement l'estimation de

$E_{k+m+1}^{(n)}(t)$ par les procédures proposées dans [7]. Pour cela nous avons

$$E_{k+m+1}^{(n)}(t) = f(t) - [k+m+n | k+m+1]_f^{(n)}(t)$$

$$E_{k+m+1}^{(n)}(t) = \frac{t^{k+m+n+1}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot c^{(n)} \left(\frac{P_{k+m+1}^{(n)}(x)}{1-tx} \right) \quad (E1)$$

$$E_{k+m+1}^{(n)}(t) = \frac{t^{2(k+m+1)+n}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot c^{(n)} \left(\frac{x^{k+m+1} P_{k+m+1}^{(n)}(x)}{1-tx} \right) \quad (E2)$$

$$E_{k+m+1}^{(n)}(t) = \frac{t^{2(k+m+1)+n}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)e}(t)} \cdot c^{(n)} \left(\frac{P_{k+m+1}^{(n)e}(x)}{1-tx} \right) \quad (E3)$$

Considérons par exemple l'expression (E1) et désignons par $P(x)$ le polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction $x \mapsto (1-tx)^{-1}$ aux zéros d'un polynôme U_s arbitraire unitaire de degré $s \geq 1$:

$$P(x) = \frac{1}{1-tx} \left(1 - \frac{U_s(x)}{U_s(t^{-s})} \right).$$

En remplaçant $(1-tx)^{-1}$ par $P(x)$ dans l'expression (E1) nous

obtenons une estimation de l'erreur $E_{k+m+1}^{(n)}(t)$ donnée par :

$$\frac{t^{k+m+n+1}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot c^{(n)} \left(\frac{P_{k+m+1}^{(n)}(x) P(x)}{1-tx} \right).$$

Pour $k \geq 1$, $n = 0, \pm 1, \dots$ et $m \geq 0$ fixés, si l'on pose

$$W_s(t) = c^{(n)} \left(P_{k+m+1}^{(n)}(x) \cdot \frac{U_s(x) - U_s(t)}{x - t} \right), \text{ de degré } s-1 \text{ en } t.$$

alors

$$E_{k+m+1}^{(n)}(t) = \frac{t^{k+m+n+1}}{P_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{U}_s(t)} + \frac{t^{k+m+n+s+1}}{P_{k+m+1}^{(n)}(t) \tilde{U}_s(t)} \cdot c^{(n)} \left(\frac{P_{k+m+1}^{(n)}(x) U_s(x)}{1-tx} \right).$$

En reportant l'expression ci-dessus de $E_{k+m+1}^{(n)}(t)$ dans celle de l'erreur $E_k^{(n)}(t)$, nous obtenons :

$$E_k^{(n)}(t) = e_{k,n}^{(m,s)}(t) + \frac{t^{k+m+n+1+s}}{P_{k+m+1}^{(n)}(t) \tilde{U}_s(t)} \cdot c^{(n)} \left(\frac{P_{k+m+1}^{(n)}(x) U_s(x)}{1-tx} \right)$$

avec

$$e_{k,n}^{(m,s)}(t) = D_{k,n}^{(m)}(t) + \frac{t^{k+m+n+1}}{P_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{U}_s(t)}$$

Ce qui montre que $e_{k,n}^{(m,s)}(t)$ est bien une estimation de l'erreur $E_k^{(n)}(t)$:

$$\bar{E}_k^{(n)}(t) = e_{k,n}^{(m,s)}(t) + o(t^{k+m+n+s+1}).$$

Il faut remarquer que par l'orthogonalité de $P_{k+m+1}^{(n)}$ par rapport à la fonctionnelle $c^{(n)}$, le polynôme W_s est identiquement nul pour $s \leq k+m+1$. Donc par la suite on suppose que $s \geq k+m+2$.

D'autre part nous avons:

$$\frac{t^{k+m+1}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{U}_s(t)} = \left(k+m+s \mid k+m+s+1 \right)_{f_n}(t) - [k+m \mid k+m]$$

où

$$f_n(t) = c_n + c_{n+1}t + \dots$$

et

$\left(k+m+s \mid k+m+s+1 \right)_{f_n}$ l'approximant type - Padé de f_n , d
polynôme générateur $\vartheta(x) = P_{k+m+1}^{(n)} U_s(x)$.

En effet si ω est le polynôme associé à ϑ , nous avons:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= c^{(n)} \left(\frac{\vartheta(x) - \vartheta(t)}{x - t} \right) = c^{(n)} \left(\frac{P_{k+m+1}^{(n)}(x) U_s(x) - P_{k+m+1}^{(n)}(t) U_s(t)}{x - t} \right) \\ &= c^{(n)} \left(P_{k+m+1}^{(n)}(x) \cdot \frac{U_s(x) - U_s(t)}{x - t} + U_s(t) \frac{P_{k+m+1}^{(n)}(x) - P_{k+m+1}^{(n)}(t)}{x - t} \right) \\ &= W_s(t) + U_s(t) \Phi_{k+m+1}^{(n)}(t) \end{aligned}$$

Donc

$$\tilde{\omega}(t) = t^{k+m+s} \omega(t^{-1}) = t^{k+m+1} W_s(t) + \tilde{U}_s(t) \tilde{\Phi}_{k+m+1}^{(n)}(t)$$

et

$$\frac{\tilde{\omega}(t)}{\tilde{\vartheta}(t)} = \frac{t^{k+m+1}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{U}_s(t)} + \frac{\tilde{\Phi}_{k+m+1}^{(n)}(t)}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} \quad \blacksquare$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
 e_{k,n}^{(m,s)}(t) &= \mathcal{D}_{k,n}^{(m)}(t) + \frac{t^{k+m+n+1}}{P_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{U}_s(t)} \\
 &= [k+m+n | k+m+1]_f(t) - [n+k-1 | k]_f(t) + t^n \left\{ (k+m+s | k+m+s+1)_{f_n}(t) \right. \\
 &\quad \left. - [k+m | k+m+1]_{f_n}(t) \right\} \\
 &= t^n \left\{ (k+m+s | k+m+s+1)_{f_n}(t) - [k-1 | k]_{f_n}(t) \right\}.
 \end{aligned}$$

L'estimation $e_{k,n}^{(m,s)}$, $k \geq 1$, $n = 0, \pm 1, \dots$, et $m \geq 0$ fixés, possède deux versions :

- Une version générale où U_s est arbitraire.
- Une version dite optimale lorsque U_s est déterminé par le système suivant :

$$c^{(n)}(x^i P_{k+m+1}^{(n)}(x) U_s(x)) = 0 \quad i=0, \dots, s-1.$$

Pour $s = k+m+2$, le système ci-dessus est triangulaire et U_s est exactement le polynôme de Stieltjes associé à $P_{k+m+1}^{(n)}$ et l'on retrouve la procédure de Kronrod appliquée à $[k+m+n | k+m+1]_f(t)$, donnée

par :

$$\frac{t^{2(k+m+1)+2}}{P_{k+m+1}^{(n)}(t) \tilde{U}_{k+m+2}(t)} \cdot h_{k+m+1}^{(n)}.$$

Et $e_{k,n}^{(m,s)}(t)$, dans ce cas, devient :

$$e_{k,n}^{(m)}(t) = D_{k,n}^{(m)}(t) + \frac{t^{2(k+m+1)+n}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t) \tilde{U}_{k+m+2}^{(n)}(t)} \cdot h_{k+m+1}^{(n)}$$

Ce qui revient à remplacer, dans la somme partielle $D_{k,n}^{(m+1)}(t)$, le polynôme $\tilde{P}_{k+m+2}^{(n)}$ par \tilde{U}_{k+m+2} .

Il reste à remarquer que $e_{k,n}^{(m,s)}$, $s \geq k+m+2$, peut également s'écrire:

$$\begin{aligned} e_{k,n}^{(m,s)}(t) &= D_{k,n}^{(m)}(t) + \frac{t^{k+m+n+1}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{U}_s(t)} \\ &= \left(k+m+n+s \mid k+m+n+s+1 \right)_f(t) - \left[n+k-1 \mid k \right]_f(t) \end{aligned}$$

Puisque le second terme du second membre est une estimation de $E_{k+m+1}^{(n)}(t)$ telle que:

$$\frac{t^{k+m+n+1}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{U}_s(t)} = \left(k+m+n+s \mid k+m+n+s+1 \right)_f(t) - \left[k+m+n \mid k+m+1 \right]_f(t)$$

où $\left(k+m+n+s \mid k+m+n+s+1 \right)_f(t)$ est l'A.P.T de polynôme génératrice

$$v(x) = x^n P_{k+m+1}^{(n)}(x) U_s(x).$$

Donc le calcul de $e_{k,n}^{(m,s)}(t)$, cas général, utilise les coefficients $c_0, \dots, c_{k+m+n+s}$, tandis que dans le cas optimal, il demande les coefficients $c_0, \dots, c_{k+m+n+s}$.

Donnons quelques exemples numériques. Pour $n = m = 0$ nous avons :

$$E_k(t) = f(t) - [k-1 | k]_f(t) = D_k^{(0)}(t) + E_{k+1}(t)$$

avec

$$D_k^{(0)}(t) = \frac{t^{2k}}{\tilde{P}_k(t) \tilde{P}_{k+1}(t)} \quad \text{et} \quad E_{k+1}(t) = f(t) - [k | k+1]_f(t)$$

En utilisant la procédure de Kronrod pour estimer l'erreur $E_{k+1}(t)$, nous obtenons, pour la fonction logarithme, avec $k = 2$:

t	$t^{-1} \log(1+t) - [1 2]$	l'estimation de l'erreur
-0.9	0.218 002 35	0.218 160 47
-0.5	0.167 897 65 $\cdot 10^{-2}$	0.167 897 69 $\cdot 10^{-2}$
-0.3	0.105 290 98 $\cdot 10^{-3}$	0.105 290 98 $\cdot 10^{-3}$
0.9	0.640 272 11 $\cdot 10^{-3}$	0.640 272 21 $\cdot 10^{-3}$
3	0.755 266 58 $\cdot 10^{-2}$	0.755 30 169 $\cdot 10^{-2}$
5	0.140 89 599 $\cdot 10^{-1}$	0.140 92 888 $\cdot 10^{-1}$
7	0.187 125 62 $\cdot 10^{-1}$	0.187 21 9 23 $\cdot 10^{-1}$

Les résultats sont bons mais la méthode coûte cher puisque son calcul

nécessite la connaissance des coefficients $c_0, c_1, \dots, c_{3k+4}$.

Pour $k \geq 1$, $n = p, \pm 1, \dots$ et $m \geq 0$ fixés si l'on considère l'expression (***) de $E_k^{(n)}(t)$ et l'expression (E1) de $E_{k+m+1}^{(n)}(t)$, alors nous avons le :

Théorème 3.1 : si $e_{k,n}^{(m,s)}(t)$ est l'estimation obtenue précédemment alors :

$$\frac{e_{k,n}^{(m,s)}(t)}{E_k^{(n)}(t)} = 1 - \frac{t^{m+s-k+1}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot \frac{\tilde{P}_k^{(n)}(t)}{\tilde{U}_s(t)} \cdot \frac{c^{(n)} \left(P_{k+m+1}^{(n)}(x) U_s(x) (1-tx) \right)}{c^{(n)} \left(x^k P_k^{(n)}(x) (1-tx)^s \right)}$$

si U_s est choisi d'une façon optimale i.e. U_s satisfait le système linéaire

$$c^{(n)} \left(x^i P_{k+m+1}^{(n)}(x) U_s(x) \right) = 0 \quad i=0, \dots, s-1$$

le théorème ci-dessus devient :

Théorème 3.2 :

$$\frac{e_{k,n}^{(m,s)}(t)}{E_k^{(n)}(t)} = 1 - \frac{t^{m+s-k+1}}{\tilde{P}_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot \frac{\tilde{P}_k^{(n)}(t)}{\tilde{U}_s(t)} \cdot \frac{c^{(n)} \left(\frac{x^s P_{k+m+1}^{(n)}(x) U_s(x)}{1-tx} \right)}{c^{(n)} \left(x^k P_k^{(n)}(x) (1-tx)^{-s} \right)}$$

Nous avons donc le tableau récapitulatif suivant :

$$D_{k,n}^{(m)}(t) = \left[n+k+m \mid k+m+1 \right]_f(t) - \left[n+k-1 \mid k \right]_f(t)$$

E1

Pour $k \geq 1$, $n = 0, \pm 1, \dots$, et $m \geq 0$ fixés :

- $s \geq k+m+2$

- $$e_{k,n}^{(m,s)}(t) = D_{k,n}^{(m)}(t) + \frac{t^{k+m+n+1}}{P_{k+m+1}^{(n)}(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{U}_s(t)}$$

	Ordre d'approximation	Indice du dernier coefficient utilisé
Cas général : U_s est arbitraire.	$m+s-k+1$ Théorème 3.1	$k+m+n+1$
Cas optimal : U_s satisfait : $C^{(n)}(z^i P_{k+m+1}^{(n)}(z) U_s(z)) = 0$ $i = 0, \dots, s-1$	$m+2s-k+1$ Théorème 3.2	$k+m+n+2s-1$

Pour $k \geq 1$, $n = 0, \pm 1, \dots$ et $m \geq 0$ fixés, d'autres suites d'estimations

de l'erreur analogues à la suite $(e_{k,n}^{(m,s)}(t))_{s \geq k+m+2}$, peuvent

être construites à partir de l'expression (***) de l'erreur $E_k^{(n)}(t)$ en

utilisant les expressions (E2) et (E3) de l'erreur $E_{k+m+1}^{(n)}(t)$.

Un travail analogue pourrait se faire lorsque l'on considère les expressions suivantes de l'erreur $E_k^{(n)}(t)$:

$$a) \quad E_k^{(n)}(t) = H_{k,n}^{(m)}(t) + E_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t), \quad m \geq 0$$

$$\text{avec : } E_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t) = f(t) - [n+k-1 | k+m+1]_f(t)$$

$$E_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t) = \frac{t^{n+k}}{\nu^{(n-m-1)} P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t)} \cdot C^{(n-m-1)} \left(\frac{P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(x)}{1-tx} \right) \quad (a')$$

$$E_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t) = \frac{t^{2k+m+n+1}}{\nu^{(n-m-1)} P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t)} \cdot C^{(n)} \left(\frac{x^k P_{k+m+1}^{(n-m-1)}(x)}{1-tx} \right) \quad (a'')$$

$$E_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t) = \frac{t^{2k+m+n+1}}{\nu^{(n-m-1)\vartheta} P_{k+m+1}^{(n-m-1)\vartheta}(t)} \cdot C^{(n-m-1)} \left(\frac{P_{k+m+1}^{(n-m-1)\vartheta}(x)}{1-tx} \right) \quad (a''')$$

$$b) \quad E_k^{(n)}(t) = V_{k,n}^{(m)}(t) + E_k^{(n+m+1)}(t), \quad m \geq 0$$

avec $E_k^{(n+m+1)}(t) = f(t) - [k+m+n | k]_f(t)$

$$E_k^{(n+m+1)}(t) = \frac{t^{k+m+n+1}}{\tilde{P}_k^{(n+m+1)}(t)} \cdot C^{(n)} \left(\frac{x^{m+1} P_k^{(n+m+1)}(x)}{1-tx} \right) \quad (b1)$$

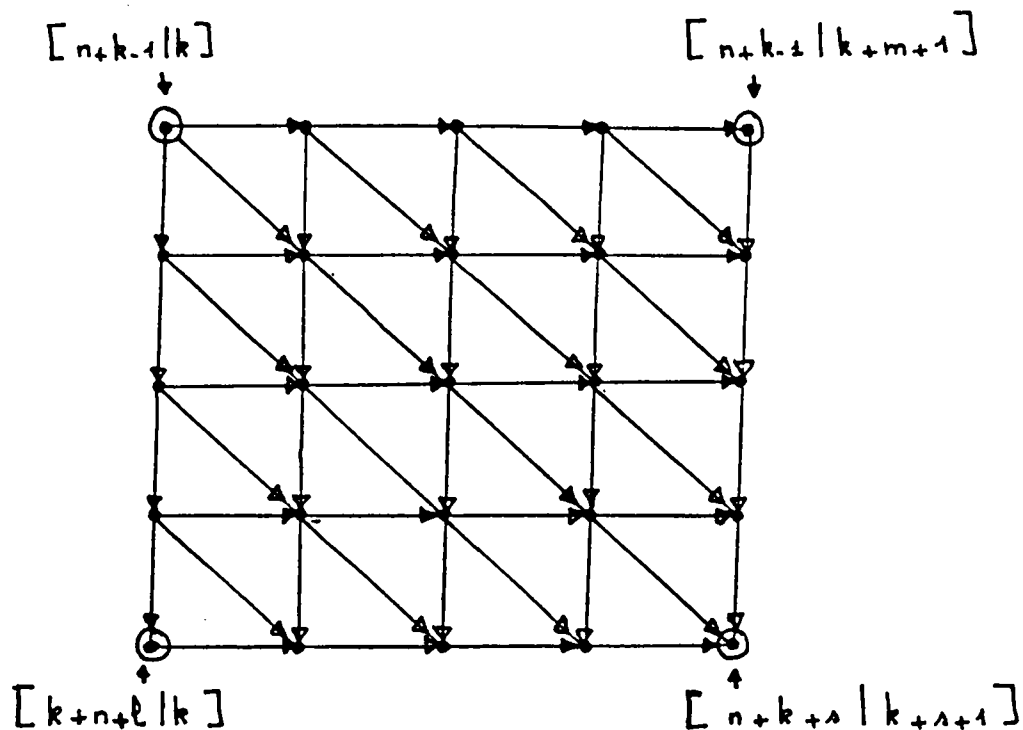
$$E_k^{(n+m+1)}(t) = \frac{t^{2k+m+n+1}}{\tilde{P}_k^{(n+m+1)}(t)} \cdot C^{(n)} \left(\frac{x^{k+m+1} P_k^{(n+m+1)}(x)}{1-tx} \right) \quad (b2)$$

$$E_k^{(n+m+1)}(t) = \frac{t^{2k+m+n+1}}{(\tilde{P}_k^{(n+m+1)}(t))^2} \cdot C^{(n+m+1)} \left(\frac{P_k^{(n+m+1)}(x)^2}{1-tx} \right) \quad (b3)$$

$H_{kin}^{(m)}(t)$ et $V_{kin}^{(m)}(t)$ sont respectivement les estimations horizontale et verticale de l'erreur $\bar{E}_k^{(n)}(t)$.

IV. CONCLUSION

Les possibilités du développement de l'erreur de $[n+k-1 | k]_f$ sont nombreuses. Nous pouvons ainsi développer cette erreur selon n'importe quel chemin dans la table de Padé comme le montre le schéma ci-dessous:



Par suite nous pouvons intervenir en n'importe quel point.
 Le schéma ci-dessus pour appliquer les différentes procédures étudiées
 ou mentionnées précédemment, ce qui nous permet d'obtenir une
 classe d'estimations de l'erreur de $[n+k-1 | k]_f$.

Enfin, nous donnons dans un schéma récapitulatif un résumé de
 l'ensemble des procédures utilisées actuellement pour estimer
 l'erreur dans l'approximation de Padé.

$$E_k^{(n)}(t) = f(t) - [n+k-1 \ k]_f(t)$$

ESTIMATION par Développement

ESTIMATION par la méthode générale de C. BREZINSKI

$$D_{k,n}^{(\lambda)}(t) \quad \lambda \geq 0$$

$$V_{k,n}^{(\ell)}(t) \quad \ell \geq 0$$

$$H_{k,n}^{(m)}(t) \quad m \geq 0$$

$$E_{k+\lambda+1}^{(n)}(t)$$

$$E_k^{(n+\ell+1)}(t)$$

$$E_{k+m+1}^{(n-m-1)}(t)$$

ESTIMATION par Développement

ESTIMATION par la méthode générale de C. BREZINSKI

ESTIMATION totale de $E_k^{(n)}(t)$: possède deux versions une version générale et une version optimale.

Un certain nombre de questions restent à étudier notamment la comparaison de toutes les possibilités précédentes et la convergence du rapport $\left(\frac{e_k^{(l)}(t)}{E_k^{(n)}(t)} \right)$ vers 1 lorsque k ou l et t tend vers $l'∞$ et où $e_k^{(l)}(t)$ est une estimation de n'importe quel type.

En particulier, si ce ci est vrai pour k tendant vers $l'∞$, la suite $\left([k-1/k]_f(t) + e_k^{(l)}(t) \right)$ converge plus vite que $\left([k-1/k]_f(t) \right)$, pour la valeur de t en considération.

Sur le plan numérique un test numérique substantiel est nécessaire pour déterminer si oui ou non ces procédures peuvent être utilisées dans un logiciel numérique.

CHAPITRE II

APPLICATION DE CERTAINS PROCÉDÉS
D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE
A L'ESTIMATION DE L'ERREUR



0. INTRODUCTION :

Ce chapitre consiste en une application de certains procédés d'accélération de la convergence à l'estimation de l'erreur dans l'approximation de Padé.

En premier lieu on applique le Δ^2 d'Aitken à une suite quelconque ω d'estimations de l'erreur de l'approximant de Padé $[k-1|k]_f$ d'une série $f(t)$. Des exemples numériques montrent l'efficacité de ce procédé notamment pour $t \notin D$, domaine de convergence de la série $f(t)$ et également lorsque t est loin de l'origine.

En second lieu nous établissons une connexion entre accélération de convergence et estimation parfaite de l'erreur.

I. APPLICATION DU PROCÉDÉ Δ^2 D'AITKEN :

Pour $k \geq 1$, posons :

$$E_k(t) = f(t) - [k-1|k]_f(t) .$$

Soit $(e_k^{(n)}(t))$ une suite d'estimations de l'erreur $E_k(t)$.

Horais l'accélération de la convergence de la suite $(e_k^{(n)}(t))$ vers $E_k(t)$ lorsque n ou k tend vers l'infini, le Δ^2 d'Aitken

permet d'améliorer la précision de l'estimation de l'erreur $E_k(t)$ en particulier lorsque $t \notin \mathbb{D}$, domaine de convergence de la série $f(t)$ lorsque t est loin de l'origine comme en témoignent les exemples numériques qui suivront.

On sait que l'application du Δ^e à la suite $(e_k^{(n)}(t))_n$, k étant fixé, donne :

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(n)}(t) &= e_k^{(n)}(t) - \frac{(e_k^{(n+1)}(t) - e_k^{(n)}(t))^2}{e_k^{(n+2)}(t) - 2e_k^{(n+1)}(t) + e_k^{(n)}(t)} \\ &= e_k^{(n)}(t) - \frac{\Delta e_k^{(n)}(t)}{\frac{\Delta e_k^{(n+1)}(t)}{\Delta e_k^{(n)}(t)} - 1} \end{aligned}$$

le symbole Δ porte sur l'indice supérieur : $\Delta e_k^{(n)}(t) = e_k^{(n+1)}(t) - e_k^{(n)}(t)$

pour une valeur de t fixée.

Par exemple, pour $k \geq 1$ fixé, le procédé Δ^e d'Aitken accélère

également la convergence de la suite $\left(\frac{e_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} \right)_{n \geq 0}$ vers 1, pour

valeur de t fixée.

En effet, s'il existe $\alpha < 1 < \beta$ et il existe n_0 tels que :

$$\frac{\Delta e_k^{(n+1)}(t)}{\Delta e_k^{(n)}(t)} \notin [\alpha, \beta] \text{ pour tout } n \geq n_0, \text{ alors pour une valeur de } t \text{ fixé}$$

nous avons le :

Théorème 1.1 : Pour $k \geq 1$ fixé, si $(\Delta_k^{(n)}(t))_{n \geq 0}$ est la suite d'estimations de l'erreur $E_k(t)$ obtenue en appliquant le procédé Δ^2 à la suite $(e_k^{(n)}(t))_{n \geq 0}$ alors :

$$\frac{\Delta_k^{(n)}(t) - 1}{E_k(t)} = \frac{\left[\frac{e_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} - 1 \right]}{\left[1 - \frac{\Delta e_k^{(n)}(t)}{\Delta e_k^{(n+1)}(t)} \right]} + \frac{\left[\frac{e_k^{(n+1)}(t)}{E_k(t)} - 1 \right]}{\left[1 - \frac{\Delta e_k^{(n+1)}(t)}{\Delta e_k^{(n)}(t)} \right]}$$

Preuve :

Nous avons :

$$\frac{\Delta e_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} = \left(\frac{e_k^{(n+1)}(t)}{E_k(t)} - 1 \right) - \left(\frac{e_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} - 1 \right)$$

Il en résulte donc que :

$$\frac{\Delta_k^{(n)}(t) - 1}{E_k(t)} = \left(\frac{e_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} - 1 \right) \cdot \underbrace{\left[1 + \frac{1}{\frac{\Delta e_k^{(n+1)}(t)}{\Delta e_k^{(n)}(t)} - 1} \right]}_1 + \frac{\left(\frac{e_k^{(n+1)}(t)}{E_k(t)} - 1 \right)}{\left(1 - \frac{\Delta e_k^{(n+1)}(t)}{\Delta e_k^{(n)}(t)} \right)}$$

$$1 - \frac{\Delta e_k^{(n)}(t)}{\Delta e_k^{(n+1)}(t)}$$

Le calcul de $\Delta_k^{(n)}(t)$ nécessite donc le même nombre de coefficients que celui de $e_k^{(n+2)}(t)$.

Au chapitre I nous avons vu que toutes les estimations obtenues en utilisant les techniques d'interpolation pouvaient se mettre sous forme d'une différence de deux approximants de type-Padé (ou de Padé). Ici nous pensons que l'application de certains algorithmes d'accélération de la convergence à l'estimation de l'erreur fournira une nouvelle façon de procéder. Cette dernière est certainement plus difficile que la première car nous avons à trouver les propriétés théoriques de l'estimation obtenue (e.g, ordre d'approximation, convergence, ...) à partir des règles de l'algorithme, d'autant plus que les conditions imposées par l'application de cet algorithme, sont en général difficiles à vérifier.

A titre d'exemple: la détermination de l'ordre d'approximation du Δ^2 lorsque $(e_k^{(n)}(t))_n$ est une suite quelconque.

Mais par voie de compensation et sur la base du nombre limité d'exemples numériques que nous avons pris il nous a semblé que le procédé Δ^2 est aussi stable et efficace que certaines procédures de la classe d'estimations étudiées au premier chapitre.

II. EXEMPLES NUMÉRIQUES :

Dans ce paragraphe on reprend l'exemple de l'exponentielle et du logarithme et sous de bonnes hypothèses on applique Δ^2 aux suites $(D_k^{(m)}(t))_{m \geq 0}$, $(H_k^{(m)}(t))_{m \geq 0}$ et $(V_k^{(m)}(t))_{m \geq 0}$ du

chapitre I, pour une valeur de t fixé.

II.1. APPLICATION DU PROCÉDÉ Δ^2 à LA SUITE $(D_k^{(m)}(t))_m$:

Si l'on considère la suite $(D_k^{(m)}(t))$ donnée par:

$$D_k^{(m)}(t) = \left[\frac{k+m}{k+m+1} \right]_f(t) - \left[\frac{k-1}{k} \right]_f(t)$$

$$= \sum_{i=k}^{k+m} \frac{t^{2i} h_i}{\tilde{P}_i(t) \tilde{P}_{i+1}(t)}$$

L'application du Δ^2 donne:

$$\boxed{n=0}$$

t	$e^t \cdot [011]_f(t)$	$\Delta_1^{(0)}(t)$	$e^t \cdot [112]_f(t)$	$\Delta_2^{(0)}(t)$
-3	-.20021293D+00	-.20004055D+00	.49787068D-01	.49783455
-2	-.19799205D+00	-.19797782D+00	.24224372D-01	.24223999
-1.5	-.17686984D+00	-.17686833D+00	.12603844D-01	.12603821
-1.2	-.15335124D+00	-.15335042D+00	.70785849D-02	.70785824
-1	-.13212056D+00	-.13212032D+00	.42430775D-02	.42430770
-0.8	-.10622659D+00	-.10622654D+00	.21744926D-02	.21744924
-0.5	-.60136007D-01	-.60136005D-01	.47005365D-03	.47005365
-0.3	-.28412549D-01	-.28412549D-01	.77479641D-04	.77479940
-0.1	-.42534911D-02	-.42534911D-02	.12245882D-05	.12245885
0.1	-.59401930D-02	-.59401930D-02	.15776122D-05	.15776123
0.3	-.78712621D-01	-.78712621D-01	.16555804D-03	.16555804
0.5	-.35127873D+00	-.35127872D+00	.16624472D-02	.16624470
0.8	-.27744591D+01	-.27744588D+01	.16238903D-01	.16238895
1.1	.13004166D+02	.13004171D+02	.86016552D-01	.86016551

t	$e^t \cdot [213]_f(t)$	$\Delta_3^{(0)}(t)$
-3	-.45807577D-02	-.45807045D-02
-2	-.10283531D-02	-.10283520D-02
-1.5	-.30308236D-03	-.30308230D-03
-1.2	-.10871968D-03	-.10871958D-03
-1	-.45087130D-04	-.45087130D-04
-0.8	-.14691218D-04	-.14691218D-04
-0.5	-.12220914D-05	-.12220914D-05
-0.3	-.71541575D-07	-.71541575D-07
-0.1	-.12359203D-09	-.12359201D-09
0.1	-.15822037D-09	-.15822033D-09
0.3	-.14446769D-06	-.14446769D-06
0.5	-.39417845D-05	-.39417845D-05
0.8	-.95394774D-04	-.95394773D-04
1.1	-.94095559D-03	-.94095557D-03

t	$t^{-1} \log(1+t) - [011]_f(t)$	$\Delta_1^{(0)}(t)$	$t^{-1} \log(1+t) - [112]_f(t)$	$\Delta_2^{(0)}(t)$
-0.9	.74024606D+00	.74101856D+00	.21800235D+00	.21811868D+00
-0.7	.18149961D+00	.18150236D+00	.16904380D-01	.16904482D-01
-0.5	.52961028D-01	.52961051D-01	.16799765D-02	.16789768D-02
-0.3	.12445892D-01	.12445892D-01	.10529099D-03	.10529099D-03
-0.1	.97357763D-03	.97357763D-03	.72034906D-06	.72034906D-06
0.1	.72084566D-03	.72084566D-03	.43646988D-06	.43646987D-06
0.3	.49823308D-02	.49823308D-02	.22833398D-04	.22833398D-04
0.5	.10930216D-01	.10930216D-01	.11940541D-03	.11940541D-03
0.7	.17299618D-01	.17299618D-01	.32286568D-03	.32286569D-03
0.9	.23515812D-01	.23515812D-01	.64027211D-03	.64027218D-03
1.5	.39431916D-01	.39432016D-01	.21648357D-02	.21648380D-02
2	.49306144D-01	.49306552D-01	.38515989D-02	.38516116D-02
3	.62098120D-01	.62100542D-01	.75526656D-02	.75527823D-02
5	.72637608D-01	.72653405D-01	.14089599D-01	.14090888D-01
7	.74840855D-01	.74883248D-01	.18712562D-01	.18717471D-01

t	$t^{-1} \log(1+t) - [213]_f(t)$	$\Delta_3^{(0)}(t)$
-0.9	.52194851D-01	.52212118D-01
-0.7	.14981432D-02	.14981457D-02
-0.5	.50974877D-04	.50974891D-04
-0.3	.85712922D-06	.85712922D-06
-0.1	.51385191D-09	.51385115D-09
0.1	.25480290D-09	.25480231D-09
0.3	.10078750D-06	.10078750D-06
0.5	.12544677D-05	.12544677D-05
0.7	.57851120D-05	.57851121D-05
0.9	.18708868D-04	.18708870D-04
1.5	.11343680D-03	.11343686D-03
2	.28653649D-03	.28653697D-03
3	.87083058D-03	.87083725D-03
5	.26095998D-02	.26097135D-02
7	.44993157D-02	.44997258D-02

Pour illustrer l'efficacité du procédé Δ^2 nous allons le composer numériquement, sur les exemples précédents, à la procédure de Kronrod. Enfin celle dernière et l'estimation $\Delta_k^{(n)}(t)$ utilisent le même nombre de coefficients si $2k + 2n + 5 = 3k + 1 \Leftrightarrow k = 2(n+1)$.

Exemple :

$$n = 1 \text{ et } k = 4$$

t	Procédure de Kronrod	$e^{-t} \cdot [3 4](t)$	$\Delta_4^{(1)}(t)$	$D_4^{(3)}(t)$
-3	.21319312D-03	.21309470D-03	.21309412D-03	.21309523D-03
-2	.21753385D-04	.21751883D-04	.21751878D-04	.21751897D-04
-1.5	.36092782D-05	.36092799D-05	.36092798D-05	.36092804D-05
-1.2	.82654535D-06	.82654126D-06	.82654126D-06	.82654128D-06
-1	.23732827D-06	.23732793D-06	.23732793D-06	.23732793D-06
-0.8	.49290812D-07	.49290785D-07	.49290785D-07	.49290785D-07
-0.5	.15886521D-08	.15886520D-08	.15886521D-08	.15886521D-08
-0.3	.32252299D-10	.32252289D-10	.32252289D-10	.32252289D-10
-0.1	.63330014D-14	.63330014D-14	.63330014D-14	.63330014D-14
0.1	.79341018D-14	.7934058D-14	.79341018D-14	.79341018D-14
0.3	.65386593D-10	.65386585D-10	.65386592D-10	.65386592D-10
0.5	.49025267D-09	.49025266D-08	.49025266D-08	.49025266D-08
0.8	.29699760D-05	.29699736D-05	.29699738D-05	.29699738D-05
1.1	.54552704D-05	.54552087D-05	.54552087D-05	.54552733D-05

meilleure

t	Procédure de Kronrod	$e^{-t} \log(1+t) - [3 4](t)$	$\Delta_4^{(1)}(t)$	$D_4^{(3)}(t)$
-0.9	.17387838D-01	.17350632D-01	.17350632D-01	.16934411D-01
-0.7	.15045333D-02	.15048821D-03	.15048821D-03	.15048821D-03
-0.5	.15262271E-05	.15262289D-05	.15262289D-05	.15262289D-05
-0.3	.68868723D-08	.68868723D-08	.68868723D-08	.68868723D-08
-0.1	.36201234D-12	.36176325D-12	.36201234D-12	.36201234D-12
0.1	.14890859D-12	.14760675D-12	.14690859D-12	.14690859D-12
0.3	.43950260D-05	.43950277D-09	.43950260D-09	.43950260D-09
0.5	.15010473D-07	.15010472D-07	.15010472D-07	.15010472D-07
0.7	.10229178D-08	.10229175D-08	.10229175D-08	.10229175D-08
0.9	.42010291D-06	.42010244D-06	.42010244D-06	.42010244D-06
1.5	.69544689D-05	.69544195D-05	.69544195D-05	.69544195D-05
2	.20967509D-04	.20967509D-04	.20967509D-04	.20967509D-04
3	.98174274D-04	.98161456D-04	.98161792D-04	.98161792D-04
5	.47215815E-02	.47228334D-02	.47228334D-02	.47228334D-02
7	.11897557D-02	.11897557D-02	.11897557D-02	.11897557D-02

meilleure

II.2 APPLICATION DU PROCÉDÉ Δ^e à la suite $(H_k^{(m)}(t))_{m \geq 0}$:

La suite $(H_k^{(m)}(t))_{m \geq 0}$ (voir chapitre I) est donnée par:

$$H_k^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^m \frac{t^{k+i} \cdot h_{k+i}^{(-i)}}{\tilde{P}_{k+i}^{(-i)}(t) \tilde{P}_{k+i+1}^{(-i-1)}(t)}$$

EXEMPLES NUMÉRIQUES :

Exemple 1: $f(t) = e^{+t}$

$$\underline{t = -3}$$

n	$e^t - [0 1]$	$\Delta_1^{(n)}(t)$	$e^t - [1 2]$	$\Delta_2^{(n)}(t)$
0	-0.200212950+00	-0.159038460+00	0.497870650-01	0.497858950-01
1	-0.200212950+00	-0.200557720-00	0.497870650-01	0.497862500-01
2	-0.200212950+00	-0.200554370+00	0.497870650-01	0.497871140-01
3	-0.200212950+00	-0.200355670-00	0.497870650-01	0.497858360-01
4	-0.200212950+00	-0.200257210+00	0.497870650-01	0.497873410-01
5	-0.200212950+00	-0.200204450+00	0.497870650-01	0.497871250-01
6	-0.200212950+00	-0.200215600+00	0.497870650-01	0.497870750-01
7	-0.200212950+00	-0.200212500+00	0.497870650-01	0.497870000-01
8	-0.200212950+00	-0.200213040+00	0.497870650-01	0.497870650-01
9	-0.200212950+00	-0.200212950+00	0.497870650-01	0.497870650-01

$$\underline{t = 0.5}$$

n	$e^t - [0 1]_f(t)$	$\Delta_1^{(n)}(t)$	$e^t - [1 2]_f(t)$	$\Delta_2^{(n)}(t)$
0	-0.351278730+00	-0.351121020+00	0.166244720-02	0.166237970-02
1	-0.351278730+00	-0.351287810+00	0.166244720-02	0.166245050-02
2	-0.351278730+00	-0.351278150+00	0.166244720-02	0.166244700-02
3	-0.351278730+00	-0.351278760+00	0.166244720-02	0.166244720-02
4	-0.351278730+00	-0.351278720+00	0.166244720-02	0.166244720-02

$$t = 1.5$$

n	$e^t - [011]$	$\Delta_1^{(n)}(t)$	$e^t - [112]$	$\Delta_2^{(n)}(t)$
0	0.44816591E+01	0.11352946E+02	0.48165907E+00	0.48165907E+00
1	0.44816591E+01	0.44816591E+01	0.48165907E+00	0.48165907E+00
2	0.44816591E+01	0.45022662E+01	0.48165907E+00	0.48165907E+00
3	0.44816591E+01	0.44812942E+01	0.48165907E+00	0.48165907E+00
4	0.44816591E+01	0.44816591E+01	0.48165907E+00	0.48165907E+00
5	0.44816591E+01	0.44816591E+01	0.48165907E+00	0.48165907E+00
6	0.44816591E+01	0.44816591E+01	0.48165907E+00	0.48165907E+00
7	0.44816591E+01	0.44816591E+01	0.48165907E+00	0.48165907E+00
8	0.44816591E+01	0.44816591E+01	0.48165907E+00	0.48165907E+00
9	0.44816591E+01	0.44816591E+01	0.48165907E+00	0.48165907E+00

Exemple 2: $f(t) = t^{-2} \log(1+t)$

$$t = -0.9$$

n	$f(t) - [011]_f(t)$	$\Delta_1^{(n)}(t)$	$f(t) - [112]_f(t)$	$\Delta_2^{(n)}(t)$
0	0.7402491E-00	0.66625481E+00	0.21800235E-00	0.21800235E-00
1	0.7402491E-00	0.66625481E+00	0.21800235E+00	0.20782523E+00
2	0.7402491E-00	0.66597478E+00	0.21800235E-00	0.21141948E-00
3	0.7402491E-00	0.7017599E+00	0.21800235E+00	0.21894607E+00
4	0.7402491E-00	0.71622907E+00	0.21800235E-00	0.21506452E+00
5	0.7402491E-00	0.70225370E+00	0.21800235E-00	0.21856845E+00
6	0.7402491E-00	0.70702438E+00	0.21800235E-00	0.21858838E+00
7	0.7402491E-00	0.70103133E+00	0.21800235E+00	0.21897493E+00
8	0.7402491E-00	0.70257220E+00	0.21800235E-00	0.21896238E+00
9	0.7402491E-00	0.70431557E+00	0.21800235E-00	0.21745425E-00

$$t = 0.5$$

n	$f(t) - [011]$	$\Delta_1^{(n)}(t)$	$f(t) - [112]$	$\Delta_2^{(n)}(t)$
0	0.10930216E-01	0.10930216E-01	0.11940541E-03	0.11940541E-03
1	0.10930216E-01	0.10930216E-01	0.11940541E-03	0.11938530E-03
2	0.10930216E-01	0.10931296E-01	0.11940541E-03	0.11940571E-03
3	0.10930216E-01	0.10930216E-01	0.11940541E-03	0.11940427E-03
4	0.10930216E-01	0.10930099E-01	0.11940541E-03	0.11940547E-03
5	0.10930216E-01	0.10930155E-01	0.11940541E-03	0.11940533E-03
6	0.10930216E-01	0.10930227E-01	0.11940541E-03	0.11940543E-03
7	0.10930216E-01	0.10930216E-01	0.11940541E-03	0.11940540E-03
8	0.10930216E-01	0.10930216E-01	0.11940541E-03	0.11940541E-03
9	0.10930216E-01	0.10930216E-01	0.11940541E-03	0.11940541E-03

III.3. APPLICATION DU PROCÉDÉ Δ^2 à La Suite $(V_k^{(m)}(t))_{m \geq 0}$:

La suite $(V_k^{(m)}(t))_{m \geq 0}$ est donné par:

$$V_k^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^m \frac{t^{2k+i} f^{(i)}(t)}{P_k^{(i)}(t) P_k^{(i+1)}(t)}$$

EXEMPLES NUMÉRIQUES :

Exemple 1: $f(t) = e^t$

$t = -3$

n	$e^t \cdot [01]_f(t)$	$\Delta_1^{(n)}(t)$	$e^t \cdot [112]_f(t)$	$\Delta_2^{(n)}(t)$
0	-0.20021255E+00	-0.18750000E+00	0.49787065E-01	0.49782276E-01
1	-0.20021255E+00	-0.18750040E+00	0.49787065E-01	0.49781184E-01
2	-0.20021255E+00	-0.18515841E+00	0.49787065E-01	0.49780092E-01
3	-0.20021255E+00	-0.18019393E+00	0.49787065E-01	0.49784657E-01
4	-0.20021255E+00	-0.20001200E+00	0.49787065E-01	0.49785040E-01
5	-0.20021255E+00	-0.20002667E+00	0.49787065E-01	0.49787432E-01
6	-0.20021255E+00	-0.20001997E+00	0.49787065E-01	0.49784557E-01
7	-0.20021255E+00	-0.20002159E+00	0.49787065E-01	0.49787082E-01
8	-0.20021255E+00	-0.20002123E+00	0.49787065E-01	0.49787084E-01
9	-0.20021255E+00	-0.20002130E+00	0.49787065E-01	0.49787065E-01

$t = 0.5$

n	$e^t \cdot [01]_f(t)$	$\Delta_1^{(n)}(t)$	$e^t \cdot [112]_f(t)$	$\Delta_2^{(n)}(t)$
0	-0.35127873E+00	-0.35128245E+00	0.16624472E-01	0.16624472E-01
1	-0.35127873E+00	-0.35127922E+00	0.16624472E-01	0.16624472E-01
2	-0.35127873E+00	-0.35127877E+00	0.16624472E-01	0.16624472E-01
3	-0.35127873E+00	-0.35127873E+00	0.16624472E-01	0.16624472E-01
4	-0.35127873E+00	-0.35127873E+00	0.16624472E-01	0.16624472E-01
5	-0.35127873E+00	-0.35127873E+00	0.16624472E-01	0.16624472E-01
6	-0.35127873E+00	-0.35127873E+00	0.16624472E-01	0.16624472E-01
7	-0.35127873E+00	-0.35127873E+00	0.16624472E-01	0.16624472E-01

$$t = 1.5$$

n	$e^t - [011]_f^{(t)}$	$\Delta_1^{(n)}(t)$	$e^t - [112]_f^{(t)}$	$\Delta_2^{(n)}(t)$
0	0.64816891D+01	0.25000000D+01	0.48168907D+00	0.48168907D+00
1	0.64816891D+01	0.64817149D+01	0.48168907D+00	0.48168907D+00
2	0.64816891D+01	0.64816071D+01	0.48168907D+00	0.48168907D+00
3	0.64816891D+01	0.64816723D+01	0.48168907D+00	0.48168907D+00
4	0.64816891D+01	0.64816867D+01	0.48168907D+00	0.48168907D+00
5	0.64816891D+01	0.64816888D+01	0.48168907D+00	0.48168907D+00
6	0.64816891D+01	0.64816890D+01	0.48168907D+00	0.48168907D+00
7	0.64816891D+01	0.64816891D+01	0.48168907D+00	0.48168907D+00

Exemple 2: $f(t) = t^{-2} \log(1+t)$

$$t = -0.9$$

n	$f(t) - [011]_f^{(t)}$	$\Delta_1^{(n)}(t)$	$f(t) - [112]_f^{(t)}$	$\Delta_2^{(n)}(t)$
0	0.74024606D+00	0.57644009D+00	0.21800235D+00	0.20553291D+00
1	0.74024606D+00	0.70227791D+00	0.21800235D+00	0.21686885D+00
2	0.74024606D+00	0.71531900D+00	0.21800235D+00	0.21684535D+00
3	0.74024606D+00	0.72452105D+00	0.21800235D+00	0.2168467D+00
4	0.74024606D+00	0.72958925D+00	0.21800235D+00	0.21683072D+00
5	0.74024606D+00	0.73294564D+00	0.21800235D+00	0.21682904D+00
6	0.74024606D+00	0.73500450D+00	0.21800235D+00	0.21726818D+00
7	0.74024606D+00	0.73647228D+00	0.21800235D+00	0.21745593D+00

$$t = 0.5$$

n	$f(t) - [011]_f^{(t)}$	$\Delta_1^{(n)}(t)$	$f(t) - [112]_f^{(t)}$	$\Delta_2^{(n)}(t)$
0	0.10930214D-01	0.10540055D-01	0.11940541D-03	0.11947105D-03
1	0.10930214D-01	0.10928451D-01	0.11940541D-03	0.11936493D-03
2	0.10930214D-01	0.10930552D-01	0.11940541D-03	0.11940734D-03
3	0.10930214D-01	0.10931130D-01	0.11940541D-03	0.11940509D-03
4	0.10930214D-01	0.10930235D-01	0.11940541D-03	0.11940550D-03
5	0.10930214D-01	0.10930214D-01	0.11940541D-03	0.11940532D-03
6	0.10930214D-01	0.10930214D-01	0.11940541D-03	0.11940541D-03
7	0.10930214D-01	0.10930214D-01	0.11940541D-03	0.11940540D-03

$$t = 1.2$$

n	$f(t) - [01t]_f(t)$	$\Delta_1^{(n)}(t)$	$f(t) - [1t]_f(t)$	$\Delta_2^{(n)}(t)$
0	0.32047800E-01	0.32284412E-01	0.13100954E-02	0.131550e5E-02
1	0.32047800E-01	0.31540097E-01	0.13100954E-02	0.13081441E-02
2	0.32047800E-01	0.32028000E-01	0.13100954E-02	0.13102227E-02
3	0.32047800E-01	0.32024405E-01	0.13100954E-02	0.13097409E-02
4	0.32047800E-01	0.32060515E-01	0.13100954E-02	0.13102772E-02
5	0.32047800E-01	0.32035573E-01	0.13100954E-02	0.13099934E-02
6	0.32047800E-01	0.32053484E-01	0.13100954E-02	0.13101565E-02
7	0.32047800E-01	0.32042254E-01	0.13100954E-02	0.13100561E-02
8	0.32047800E-01	0.32050523E-01	0.13100954E-02	0.13101219E-02
9	0.32047800E-01	0.32045297E-01	0.13100954E-02	0.13100765E-02

III. CONNEXION ENTRE ACCELERATION DE CONVERGENCE

ESTIMATION PARFAITE DE L'ERREUR:

Partant de l'observation qu'accélérer une suite équivaut à estimer l'erreur, C. BREZINSKI a introduit la notion de 'estimation parfaite de l'erreur' d'une suite donnée [9]. Cette nouvelle façon de repenser le problème d'accélération de la convergence a permis d'expliquer et d'établir un lien entre plusieurs concepts, idées et procédures algorithmiques dans ce domaine, souvent développés indépendamment les uns des autres.

Ainsi nous pensons que l'application de cette notion à l'approximation de Padé pourra ouvrir des voies importantes notamment dans l'étude du problème de convergence des approximants de Padé.

Dans ce paragraphe nous donnons un exemple d'application de l'idée ci-dessus, en considérant la procédure- Θ qui est une puissante méthode d'accélération de la convergence.

Auparavant nous avons besoin de la définition suivante:

DEFINITION:

Soit $(e_k^{(n)}(t))$ une suite d'estimations de l'erreur de $[k-1/k]_f$, t étant fixe.

On pose

$$r(t) = \frac{e_k^{(n)}(t)}{f(t) - [k-1/k]_f(t)}, \quad n \text{ étant fixé}$$

si $r(t)$ n'a pas de limite quand $k \rightarrow \infty$ ou s'il tend vers 0 ou l' ∞ , $e_k^{(n)}(t)$ est dite une mauvaise estimation de l'erreur $f(t) - [k-1/k]_f(t)$.

Si $r(t)$ admet une limite α

- $\alpha \neq 1$, $e_k^{(n)}(t)$ est dite bonne estimation
- $\alpha = 1$, $e_k^{(n)}(t)$ est dite estimation parfaite.

D'autre part nous savons que pour prouver la convergence d'une suite donnée, on a besoin d'une information asymptotique de l'erreur. Ici nous montrons que sous certaines hypothèses l'erreur $f(t) - [k-1/k]_f(t)$ admet un développement asymptotique par rapport à une certaine échelle de comparaison.

Pour cela considérons le développement diagonal de l'erreur $f(t) - [k-1/k]_f(t)$, donné par:

$$E_k(t) = f(t) - [k-1/k]_f(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{t^{z_i} h_i}{\tilde{P}_i(t) \tilde{P}_{i+1}(t)}$$

avec $h_i = c(x^i P_i(x))$, $\forall i$.

si l'on pose

$$\begin{aligned} R_i^{(k)}(t) &= \left[\frac{k+i-1}{k+i} \right]_f(t) - \left[\frac{k+i-2}{k+i-1} \right]_f(t) \\ &= \frac{t^{2(k+i-1)}}{\tilde{P}_{k+i-1}^{(k)}(t) \tilde{P}_{k+i}^{(k)}(t)} \cdot h_{k+i-1}, \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Alors

$$E_k(t) = R_1^{(k)}(t) + R_2^{(k)}(t) + \dots + R_n^{(k)}(t) + \dots$$

et

$$\begin{aligned} D_k^{(m)}(t) &= R_1^{(k)}(t) + \dots + R_{m+1}^{(k)}(t) \\ &= \left[\frac{k+m}{k+m+1} \right]_f(t) - \left[\frac{k-1}{k} \right]_f(t). \end{aligned}$$

Maintenant fixons $m \geq 0$ et formons le rapport :

$$\frac{D_k^{(m)}(t)}{E_k(t)} = 1 - \frac{f(t) - \left[\frac{k+m}{k+m+1} \right]_f(t)}{f(t) - \left[\frac{k-1}{k} \right]_f(t)}$$

On sait, par le chapitre I, que $D_k^{(m)}(t)$ est d'ordre d'approximation $2(m+1)$ et que dans le cas où on a convergence de la suite $\left(\left[\frac{p}{q} \right]_f(t) \right)_{p,q}$, $D_k^{(m)}(t)$ est une bonne estimation

De plus si la suite $\left(\left[\frac{k+m}{k+m+1} \right]_f(t) \right)_{k \geq 1}$ converge

vers $f(t)$ plus vite que $\left(\left[\frac{k-1}{k} \right]_f(t) \right)$, alors $(D_k^{(m)}(t))$ est

une estimation parfaite de l'erreur $E_k(t)$.

Exemple : pour $m=0$, $(D_k^{(0)}(t) = [k/k+1]_f(t) - [k-1/k]_f(t))$

est une estimation parfaite de l'erreur $E_k(t)$ si la suite $([k-1/k]_f(t))_{k \geq 1}$ est à convergence superlinéaire.

Considérons la nouvelle expression de la série $f(t)$:

$$f(t) = [k-1/k]_f(t) + R_1^{(k)}(t) + \dots + R_n^{(k)}(t) + \dots$$

Si l'on pose :

$$T_n^{(k)}(t) = [k-1/k]_f(t) + R_1^{(k)}(t) + \dots + R_n^{(k)}(t)$$

Nous obtenons donc une transformation de la suite $([k-1/k]_f(t))$ en $(T_1^{(k)}(t))$, \dots , $(T_n^{(k)}(t))$, \dots , par l'algorithme :

$$\begin{cases} T_0^{(k)}(t) = [k-1/k]_f(t) \\ T_{n+1}^{(k)}(t) = T_n^{(k)}(t) + R_{n+1}^{(k)}(t) \end{cases}$$

Si chaque transformation converge plus vite que la précédente

i.e. pour $n=0, 1, \dots$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(t) - T_{n+1}^{(k)}(t)}{f(t) - T_n^{(k)}(t)} = 0$$

alors $(R_{n+1}^{(k)}(t))$ est une estimation parfaite de l'erreur de $(T_n^{(k)}(t))$ et pour tout $i \geq 2$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_{n+i}^{(k)}(t)}{R_{n+1}^{(k)}(t)} = 0$$

ce qui signifie que $R_{n+i}^{(k)}(t) = o(R_n^{(k)}(t))$, $\forall n$, ($k \rightarrow \infty$)

et l'erreur $E_k(t)$ admet un développement asymptotique par rapport à $\bar{a} \{ (R_1^{(k)}(t)), (R_2^{(k)}(t)), \dots \}$.

Exemple: pour $i=2$, on a:

$$\frac{R_{n+2}^{(k)}(t)}{R_{n+1}^{(k)}(t)} = 1 - (1 + t B_{k+n+2}) \cdot \frac{\tilde{P}_{k+n+1}^2(t)}{\tilde{P}_{k+n+2}^2(t)}$$

D'où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_{n+2}^{(k)}(t)}{R_{n+1}^{(k)}(t)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + t B_{k+n+2}) \cdot \frac{\tilde{P}_{k+n+1}^2(t)}{\tilde{P}_{k+n+2}^2(t)} = 0$$

Maintenant nous allons donner un exemple d'application de procédure - 0.

Reprenons la suite $(R_i^{(k)}(t))$ et supposons que :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{R_i^{(k)}(t)}{E_k(t)} = a \neq 0 \text{ et } 1.$$

Posons

$$B_i^{(k)}(t) = - \frac{R_1^{(k)}(t)}{R_i^{(k+1)}(t) - R_i^{(k)}(t)} \cdot R_i^{(k)}(t), \quad \forall i \geq 1.$$

et

$$S_k(t) = \left[\cdot k-1 / k \right]_f(t)$$

Pour une valeur de t fixé, posons :

$$R_1^{(k)}(t) = \left[k / k+1 \right]_f(t) - \left[k-1 / k \right]_f(t) = \Delta S_k(t)$$

$$\Delta R_i^{(k)}(t) = R_i^{(k+1)}(t) - R_i^{(k)}(t)$$

Alors

$$B_i^{(k)}(t) = - \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta R_i^{(k)}(t)} \cdot R_i^{(k)}(t)$$

et l'on remplace ainsi la transformation $\left[k-1 / k \right]_f(t) + R_i^{(k)}(t)$

par la transformation $[k-1|k]_f(t) + B_i^{(k)}(t)$.

Par exemple pour $i=1$ nous obtenons :

$$B_1^{(k)}(t) = - \frac{R_1^{(k)}(t)}{\Delta R_1^{(k)}(t)} \cdot R_1^{(k)}(t) = - \frac{(\Delta S_k(t))^2}{\Delta^2 S_k(t)}$$

car

$$\Delta R_1^{(k)}(t) = R_1^{(k+1)}(t) - R_1^{(k)}(t)$$

$$= [k+1|k+2]_f(t) - [k|k+1]_f(t) = [k|k+1]_f(t) + [k-1|k]_f(t) - [k|k+1]_f(t)$$

$$= \Delta^2 S_k(t)$$

On obtient la transformation $S_k(t) - \frac{(\Delta S_k(t))^2}{\Delta^2 S_k(t)}$ qui est de

d'Aitken appliqué à la suite $(S_k(t))_{k \geq 1}$.

Supposons que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_i^{(k)}(t)}{E_k(t)} = a \neq 0$ et $\neq 1$.

s'il existe $\alpha < 1 < \beta$ et il existe k_0 tels que :

$$\frac{R_i^{(k+1)}(t)}{R_i^{(k)}(t)} = \frac{P_{k+i}}{P_{k+i-1}} \cdot \frac{P_{k+i-1}^{(k-1)}}{P_{k+i}^{(k-1)}} \notin [\alpha, \beta]$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B_i^{(k)}(t)}{E_k(t)} = 1$$

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{B_i^{(k)}(t)}{E_k(t)} &= - \frac{R_i^{(k)}(t)}{E_k(t)} \cdot \frac{R_i^{(k)}(t)}{\Delta R_i^{(k)}(t)} = - \frac{R_i^{(k)}(t)}{E_k(t)} \cdot \frac{[k|k+1]_f(t) - [k-1|k]_f(t)}{R_i^{(k+1)}(t) - R_i^{(k)}(t)} \\ &= \frac{R_i^{(k)}(t)}{E_k(t)} \cdot \frac{\frac{R_i^{(k+1)}(t)}{R_i^{(k)}(t)} \cdot \frac{E_{k+1}(t)}{R_i^{(k+1)}(t)} - \frac{E_k(t)}{R_i^{(k)}(t)}}{\frac{R_i^{(k+1)}(t)}{R_i^{(k)}(t)} - 1} \end{aligned}$$

Remarquons que la condition $\frac{R_i^{(k+1)}(t)}{R_i^{(k)}(t)} \notin [\alpha, \beta]$, $\forall k \geq k_0$, peut être

remplacé par $\frac{E_{k+1}(t)}{E_k(t)} \notin [\alpha, \beta]$ à partir d'un certain rang. Donc

$$\frac{B_i^{(k)}(t)}{E_k(t)} = \frac{R_i^{(k)}(t)}{E_k(t)} \cdot \frac{\frac{E_{k+1}(t)}{E_k(t)} - 1}{\frac{R_i^{(k+1)}(t)}{E_{k+1}(t)} \cdot \frac{E_{k+1}(t)}{E_k(t)} - \frac{R_i^{(k)}(t)}{E_k(t)}} \cdot$$

Et si $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_i^{(k)}(t)}{E_k(t)} = a \neq 0 \text{ et } 1$

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B_i^{(k)}(t)}{E_k(t)} = 1.$$

$(B_i^{(k)}(t))$ est donc une estimation parfaite de l'erreur $E_k(t)$ et la suite $(S_k(t) + B_i^{(k)}(t))_{k \geq 1}$ converge vers $f(t)$ plus vite que $(S_k(t))_{k \geq 1}$, pour une valeur de t fixé.

Enfin, la procédure θ peut être également appliquée à toute suite $(e_k^{(n)}(t))_k$ telle que :

$$e_k^{(n)}(t) = (k+n-1 | k+n)_f(t) - [k-1 | k]_f(t)$$

où

$(k+n-1 | k+n)_f(t)$ est l'approximant de type - Padé de polynôme générateur $U_n(x) \tilde{T}_k(x)$, U_n un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$.

Nous avons

$$\frac{e_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} = 1 - \frac{f(t) - (k+n-1 | k+n)_f(t)}{f(t) - [k-1 | k]_f(t)}$$

$(e_k^{(n)}(t))$ est une estimation parfaite de l'erreur $E_k(t)$ si

$(\binom{k+n-1}{k} f(t))_k$ converge vers $f(t)$ plus vite que $(\binom{k-1}{k} f(t))_k$.

Pour n fixe, le calcul de $e_k^{(n)}(t)$ nécessite la connaissance des

coefficients c_0, \dots, c_{k+n-1} . Pour tout k si c_{k+n} est connu à

l'aide de la procédure Θ on peut bâtir, à partir de $e_k^{(n)}(t)$, une

estimation parfaite de l'erreur $E_k(t)$. Pour cela posons:

$$B_k^{(n)}(t) = - \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta e_k^{(n)}(t)} \cdot e_k^{(n)}(t)$$

avec

$$\begin{cases} \Delta S_k(t) = S_{k+1}(t) - S_k(t) = \binom{k}{k+1} f(t) - \binom{k-1}{k} f(t) \\ \Delta e_k^{(n)}(t) = e_{k+1}^{(n)}(t) - e_k^{(n)}(t). \end{cases}$$

Supposons que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} = a \neq 0 \text{ et } \neq \pm 1$$

s'il existe $\alpha < \pm 1 < \beta$ et il existe k_0 tels que:

$$\frac{e_{k+1}^{(n)}(t)}{e_k^{(n)}(t)} \notin [\alpha, \beta] \text{ pour } k \geq k_0$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} = 1, \quad \text{Car } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta e_k^{(n)}(t)} = \frac{1}{a}.$$

s'il pose

$$T_k^{(n)}(t) = (k+n-1 | k+n)_f(t)$$

nous obtenons

$$B_k^{(n)}(t) = S_k(t) \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta T_k^{(n)}(t) - \Delta S_k(t)} - T_k^{(n)}(t) \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta T_k^{(n)}(t) - \Delta S_k(t)}$$

et l'on remplace ainsi la transformation $S_k(t) + e_k^{(n)}(t) = T_k^{(n)}$

par la transformation :

$$B_k^{(n)}(t) + S_k(t) = S_k(t) \frac{\Delta T_k^{(n)}(t)}{\Delta T_k^{(n)}(t) - \Delta S_k(t)} - T_k^{(n)}(t) \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta T_k^{(n)}(t) - \Delta S_k(t)}$$

le symbole Δ porte sur l'indice k .

La suite $(B_k^{(n)}(t) + S_k(t))_k$ converge vers $f(t)$ plus vite que

la suite $(S_k(t))_k$, n et t étant fixés.

CHAPITRE III

ESTIMATION DE L'ERREUR DANS

L'APPROXIMATION DE TYPE - PADE'

I. INTRODUCTION:

Dans ce chapitre nous étudions des possibilités d'obtenir des procédures d'estimation de l'erreur de l'approximant de type - Padé $(k-1/k)_f$, de polynôme générateur v_k .

En premier lieu nous donnons une classe d'estimations obtenue par interpolation de la fonction génératrice $(1-tx)^{-1}$ au sens d'Hermite.

En second lieu nous considérons une approximation de la fonction $t \mapsto g(t) = c\left(\frac{v_k(x)}{1-tx}\right)$ par son approximant de Padé (ou de type - Padé); ce qui nous amène à proposer une extension de la procédure de Kronrod en utilisant la méthode générale d'interpolation employée dans [7].

Une troisième technique consiste à estimer l'erreur de $(k-1/k)_f$ en utilisant l'approximant de type - Padé $(k+n/k+n+1)_f$ dont on connaît le polynôme générateur v_{k+n+1} .

Certains procédés bien connus en accélération de la convergence à savoir le Δ^2 d'Aitken et la procédure - θ ont été appliqués à l'estimation de l'erreur.

Enfin les propriétés théoriques e.g. convergence de ces procédures n'ont pas été examinées. Certains résultats théoriques ont été confortés par des applications numériques. ■

II. ESTIMATION DE L'ERREUR PAR MÉTHODES D'INTERPOLATION

soit $v_k, k \geq 1$, le polynôme générateur de l'approximant type-Padé

$(k-1/k)_f$ de la série $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = c (1-tx)^{-2}$ avec

$c_i = c(x^i), i=0, 1, \dots$ et t un paramètre.

L'erreur de $(k-1/k)_f$ s'écrit :

$$f(t) - (k-1/k)_f(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} c \left(\frac{v_k(x)}{1-tx} \right).$$

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'étudier des estimations de l'erreur ci-dessus, obtenues en remplaçant la fonction $(1-tx)^{-2}$ par son polynôme d'interpolation d'Hermite aux zéros d'un polynôme arbitraire.

Soit V_n un polynôme arbitraire unitaire de degré $n \geq 1$. Le polynôme d'interpolation d'Hermite de $(1-tx)^{-2}$ aux zéros de V_n est donné

$$P(x) = \frac{1}{1-tx} \left(1 - \frac{V_n(x)}{V_n(t^{-2})} \right) \quad [6; 7]$$

En remplaçant dans l'expression de l'erreur $(1-tx)^{-2}$ par $P(x)$

nous obtenons l'estimation :

$$e_k^{(n)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot c \left(v_k(x) \left(1 - \frac{V_n(x)}{V_n(t)} \right) \frac{1}{1-tx} \right).$$

si l'on pose

$$W_n(t) = c \left(v_k(x) \frac{V_n(x) - V_n(t)}{x - t} \right) \quad \text{de degré } n-1 \text{ en } t.$$

alors

$$e_k^{(n)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_n(t)}{\tilde{V}_n(t)}$$

et

$$E_k(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{V}_n(t)} \cdot c \left(\frac{v_k(x) V_n(x)}{1-tx} \right)$$

Nous énonçons le :

Théorème 1. Soit V_n un polynôme arbitraire unitaire de degré $n \geq 1$.

Alors

$$e_k^{(n)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_n(t)}{\tilde{V}_n(t)}$$

est une estimation de l'erreur de $(k-1|k)_f(t)$:

$$\frac{e_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} = 1 - \frac{t^n}{\tilde{V}_n(t)} \cdot \frac{c \left(v_k(x) V_n(x) (1-tx)^{-2} \right)}{c \left(v_k(x) (1-tx)^{-2} \right)}$$

avec $E_k(t) = f(t) - (k-1|k)_f(t)$

Lorsque V_n est arbitraire, $e_k^{(n)}(t)$ est dite version générale; son calcul nécessite la connaissance de $c_0, c_1, \dots, c_{k+n-1}$.

Nous savons par [6] qu'un approximant de type-Padé est une formule de quadrature formelle obtenue en interpolant la fonction $(1-tx)^{-1}$ aux zéros de son polynôme générateur.

Nous allons donc montrer que l'estimation $e_k^{(n)}(t)$ peut se mettre sous forme d'une différence de deux formules de quadrature formelle.

Soit $(k+n-1|k+n)_f$ l'approximant type-Padé de polynôme générateur $\vartheta(x) = \vartheta_k(x) V_n(x)$.

si ω est le polynôme associé à ϑ , nous avons:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= c \left(\frac{\vartheta(x) - \vartheta(t)}{x - t} \right) \\ &= c \left(\vartheta_k(x) \frac{V_n(x) - V_n(t)}{x - t} + V_n(t) \frac{\vartheta_k(x) - \vartheta_k(t)}{x - t} \right) \\ &= W_n(t) + V_n(t) \omega_k(t) \end{aligned}$$

avec $\omega_k(t) = c \left(\frac{\vartheta_k(x) - \vartheta_k(t)}{x - t} \right)$, le polynôme associé à ϑ_k .

D'où

$$\tilde{\omega}(t) = t^{k+n-1} \omega(t^{-1}) = t^k \tilde{W}_n(t) + \tilde{V}_n(t) \tilde{\omega}_k(t)$$

et

$$\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{w}_n(t)}{\tilde{v}_n(t)} + \frac{\tilde{w}_k(t)}{\tilde{v}_k(t)}$$

$$e_k^{(n)}(t) = \underbrace{\frac{\tilde{w}_n(t)}{\tilde{v}_n(t)}}_{e_k^{(n)}(t)} + \underbrace{\frac{\tilde{w}_k(t)}{\tilde{v}_k(t)}}_{(k-1|k)_f(t)}$$

D'où

$$e_k^{(n)}(t) = (k+n-1|k+n)_f(t) - (k-1|k)_f(t) \quad \blacksquare$$

L'ordre d'approximation de $e_k^{(n)}(t)$, version générale, est n puisque

$$\underline{e_k^{(n)}(t)} = 1 + o(t^n).$$

$E_k(t)$

Ainsi pour augmenter l'ordre d'approximation le polynôme V_n peut être choisi d'une façon optimale i.e. V_n satisfait le système suivant:

$$c(x^i v_k(x) V_n(x)) = 0 \quad i=0, \dots, n-1.$$

Lorsque V_n satisfait le système ci-dessus, $e_k^{(n)}(t)$ est dite version optimale.

Pour $k \geq 1$ fixé, V_n optimal existessi le déterminant

$$H_n(\tilde{c}_0) = \begin{vmatrix} \tilde{c}_0 & \dots & \dots & \dots & \tilde{c}_{n-1} \\ \vdots & & & & \\ \tilde{c}_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \tilde{c}_{2n-2} \end{vmatrix}$$

est non nul.

avec :

$$\tilde{c}_i = c(x^i v_k(x)) \quad i=0, 1, \dots$$

Nous avons le :

Théorème 2 : si V_n satisfait le système :

$$c(x^i v_k(x) V_n(x)) = 0 \quad i=0, \dots, n-1$$

alors :

$$\frac{e_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} = 1 - \frac{t^{2n}}{\tilde{V}_n(t)} \cdot \frac{c(v_k(x) x^n V_n(x) (1-tx)^{-2})}{c(v_k(x) (1-tx)^{-2})}$$

Le calcul de $e_k^{(n)}(t)$, version optimale, nécessite n coefficients

supplémentaires i.e. $c_0, c_1, \dots, c_{k+2n-1}$, mais on double

l'ordre d'approximation car :

$$\frac{e_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} = 1 + o(t^{2n}).$$

$E_k(t)$

Calcul de l'estimation $E_k^{(n)}(t)$:

Posons

$$v_k(x) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{k-1} t^{k-1} + t^k$$

$$V_n(x) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n$$

Nous avons

$$\begin{aligned} W_n &= c \left(v_k(x) \frac{V_n(x) - V_n(t)}{x - t} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} d_i t^i \end{aligned}$$

avec

$$d_i = \sum_{j=0}^{n-i-1} c(x^j v_k(x)) a_{i+j+1}, \quad i=0, 1, \dots, n-1.$$

Donc

$$\tilde{W}_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-i-1} c(x^j v_k(x)) a_{i+j+1} \right) t^{n-i-1}.$$

Le choix optimal de V_n aboutit au système :

$$\sum_{j=0}^n a_j c(x^{i+j} v_k(x)) = 0 \quad i=0, \dots, n-1 \quad \text{avec } a_n = 1.$$

Pour k fixé, V_n apparaît donc comme étant le polynôme orthogonal

par rapport à la fonctionnelle linéaire F définie par :

$$F_i = c(x^i v_k(x)) \quad i=0, 1, \dots$$

EXEMPLES NUMÉRIQUES :

Pour les essais numériques nous considérerons l'exemple étudié dans

[33] Il consiste en la suite des approximations de type -Padé

$(k-1/k)_f$ et (k/k) de la série $f(t) = e^{-t}$, dont le dénominateur

est $(1 + \frac{t}{k})^k$:

$$(k-1/k)_f(t) = \frac{\tilde{w}_k(t)}{\tilde{v}_k(t)} = \frac{\tilde{w}_k(t)}{(1 + \frac{t}{k})^k}$$

avec

\tilde{w}_k le polynôme associé à \tilde{v}_k

$$\tilde{v}_k(t) = (1 + \frac{t}{k})^k = b_k + b_{k-1}t + \dots + b_0 t^k$$

$$b_{k-1} = b_k = 1$$

$$b_i = (1 - \frac{1}{k})(1 - \frac{2}{k}) \dots \dots (1 - \frac{k-i-1}{k}) \cdot \frac{1}{(k-i)!}$$

$$i = 0, \dots, k-2$$

De plus :

$$b_i = b_{i+1} \left(1 - \frac{k-i-1}{k}\right) \cdot \frac{1}{k-i}$$

$$i = 0, \dots, k-1$$

Cas optimal de l'estimation $e_R^{(n)}(t)$:

$k=2$

t	$e^{-t} \cdot (1 2)_f(t)$	$e_2^{(1)}(t)$	$e_2^{(2)}(t)$	$e_2^{(3)}(t)$
0.1	-0.21920604D-02	-0.21944262D-02	-0.21920612D-02	-0.21920604D-02
0.3	-0.15325447D-01	-0.15466575D-01	-0.15325842D-01	-0.15325445D-01
0.5	-0.33469340D-01	-0.34285714D-01	-0.33475177D-01	-0.33469276D-01
0.9	-0.69054597D-01	-0.74087625D-01	-0.69152106D-01	-0.69051357D-01
1.	-0.76565003D-01	-0.83333333D-01	-0.76719577D-01	-0.76558746D-01
1.2	-0.89430788D-01	-0.10044643D+00	-0.89760638D-01	-0.89412009D-01
1.5	-0.10340045D+00	-0.12244898D+00	-0.10417301D+00	-0.10333369D+00
e.	-0.11466472D+00	-0.15000000D+00	-0.11666667D+00	-0.11436758D+00
2.5	-0.11544587D+00	-0.16835017D+00	-0.11912497D+00	-0.11461080D+00
3.	-0.11021293D+00	-0.18000000D+00	-0.11571429D+00	-0.10843572D+00

$k=3$

t	$e^{-t} \cdot (2 3)_f(t)$	$e_3^{(1)}(t)$	$e_3^{(2)}(t)$	$e_3^{(3)}(t)$
0.1	0.33953902D-04	0.33992086D-04	0.33953907D-04	0.33953902D-04
0.3	0.77314179D-03	0.78058681D-03	0.77314984D-03	0.77314178D-03
0.5	0.30321174D-02	0.31098154D-02	0.30323303D-02	0.30321166D-02
0.9	0.12850952D-01	0.13847308D-01	0.12858277D-01	0.12850862D-01
1.	0.16316941D-01	0.17857143D-01	0.16330259D-01	0.16316741D-01
1.2	0.24226282D-01	0.27439547D-01	0.24262556D-01	0.24225514D-01
1.5	0.37944975D-01	0.45584046D-01	0.38060993D-01	0.37941263D-01
2.	0.63335283D-01	0.85333333D-01	0.63795477D-01	0.63310374D-01
2.5	0.88846832D-01	0.13660269D+00	0.90049049D-01	0.88749588D-01
3.	0.11228707D+00	0.20000000D+00	0.11472176D+00	0.11201492D+00

III. EXTENSION DE LA PROCEDURE DE KRONROD PAR METHODE D'APPROXIMATION

Les deux versions : générale et optimale, de l'estimation étudiée au paragraphe II, nous amènent tout naturellement à l'idée de remplacer la fonction $t \mapsto g(t) = c(\sigma_k(x)(1-tx)^{-2})$ par son approximant de type -Padé $(n-1|n)_g$ ou son approximant de Padé $[n-1|n]_g$ s'il existe. Dans ce paragraphe nous étudierons le dernier cas. Le même travail pourra se faire lorsque l'on remplace $g(t)$ par $(n-1|n)_g(t)$.

Soit F la fonctionnelle linéaire définie par :

$$F_i = F(x^i) = c(x^i \sigma_k(x)) \quad i = 0, 1, \dots$$

k étant fixé.

Nous avons formellement :

$$g(t) = F\left(\frac{1}{1-tx}\right)$$

On désigne par P_n le polynôme de degré n , orthogonal par rapport à F et

par Q_n son polynôme associé de degré $n-1$:

$$[n-1 | n]_g(t) = \frac{Q_n^2(t)}{P_n^2(t)}$$

Nous avons :

$$g(t) - [n-1 | n]_g(t) = \frac{t^n}{P_n^2(t)} F\left(\frac{P_n(x)}{1-tx}\right) \quad (E1)$$

$$g(t) - [n-1 | n]_g(t) = \frac{t^{2n}}{P_n^2(t)} \cdot F\left(\frac{x^n P_n(x)}{1-tx}\right) \quad (E2)$$

$$g(t) - [n-1 | n]_g(t) = \frac{t^{2n}}{P_n^2(t)} \cdot F\left(\frac{P_n^2(x)}{1-tx}\right) \quad (E3)$$

D'autre part

$$E_k(t) = f(t) - (k-1 | k)_f(t) = \frac{t^k}{Q_k^2(t)} g(t) \quad (1)$$

En utilisant les expressions E1, E2 et E3, on obtient ainsi une extension

aux approximants de type-Padé de la procédure de Kronrod en utilisant les techniques de la méthode générale d'interpolation

présentées dans [7].

III.1. PREMIERE EXTENSION :

En utilisant l'expression E1 nous obtenons :

$$E_k(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot g(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot \left[\frac{\tilde{Q}_n(t)}{\tilde{P}_n(t)} + \frac{t^n}{\tilde{P}_n(t)} \cdot F\left(\frac{P_n(x)}{1-tx}\right) \right]$$

Posons

$$e_k^{(n)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{Q}_n(t)}{\tilde{P}_n(t)}$$

alors

$$E_k(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+n}}{\tilde{v}_k(t)\tilde{P}_n(t)} \cdot F\left(\frac{P_n(x)}{1-tx}\right) \quad (2)$$

$e_k^{(n)}(t)$ est exactement la version optimale de l'estimation étudiée

de la section II, Théorème 2. Mais cette méthode présente encore

intérêt car on peut améliorer davantage l'ordre d'approximation

Pour cela deux techniques sont possibles : Une consiste à remplacer

dans l'expression (2) la fonction $t \mapsto F\left(\frac{P_n(x)}{1-tx}\right)$ par son

approximant de Padé $[s-1|s]$ s'il existe ou son approximant de type-Padé $(s-1|s)$. Et ainsi le processus peut être itéré jusqu'à ce que l'on obtienne l'ordre d'approximation désiré.

Enfin une seconde technique qui consiste à remplacer dans (8) la fonction $(1-tx)^{-2}$ par son polynôme d'interpolation d'Hermite aux zéros d'un polynôme arbitraire.

Posons

$$h(t) = F(P_n(x) (1-tx)^{-2})$$

Soit $(s-1|s)_h$ l'approximant type-Padé de h , de polynôme

générateur $V_s, s \geq 1$. V_s est supposé unitaire. Nous avons

$$h(t) - (s-1|s)_h(t) = \frac{t^s}{\tilde{V}_s(t)} \cdot F\left(\frac{P_n(x) V_s(x)}{1-tx}\right).$$

si l'on pose

$$(s-1|s)_h(t) = \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)}$$

avec

$$W_n(t) = F \left(P_n(x) \frac{V_n(x) - V_n(t)}{x - t} \right)$$

alors l'expression (2) de l'erreur devient:

$$E_k(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \left[\frac{\tilde{W}_n(t)}{\tilde{V}_n(t)} + \frac{t^n}{\tilde{V}_n(t)} \cdot F \left(\frac{P_n(x) V_n(x)}{1 - tx} \right) \right]$$

Posons

$$B_k^{(n,s)}(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_n(t)}{\tilde{V}_n(t)}$$

Donc

$$E_k(t) = B_k^{(n,s)}(t) + o(t^{k+n+s})$$

Par l'orthogonalité de P_n par rapport à la fonctionnelle F , le poly-

me W_n est identiquement nul pour $s \geq n+1$ et la procédure n'a

aucun intérêt. Dans la suite nous supposons que $s \geq n+1$.

D'autre part l'estimation $B_k^{(n,s)}(t)$ se met également sous forme d'une

différence de deux formules de quadrature lamelle. Pour cela considérons

l'approximant type-Padé $(k+n+1-1 / k+n+1)_f(t)$ de polynôme

générateur $v(x) = v_k(x) P_n(x) V_n(x)$.

Soit ω le polynôme associé à ν par rapport à c . ω est de degré $k+n+s-1$:

$$\omega(t) = c \left(\frac{v(x) - v(t)}{x - t} \right)$$

$$= c \left(\frac{v_k(x) P_n(x) V_s(x) - v_k(t) P_n(t) V_s(t)}{x - t} \right)$$

$$= c \left(v_k(x) P_n(x) \frac{V_s(x) - V_s(t)}{x - t} + v_k(x) V_s(t) \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} + \right. \\ \left. P_n(t) V_s(t) \frac{v_k(x) - v_k(t)}{x - t} \right)$$

$$= F \left(P_n(x) \frac{V_s(x) - V_s(t)}{x - t} \right) + V_s(t) F \left(\frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} \right) + P_n(t) V_s(t) c \left(\frac{v_k(x) - v_k(t)}{x - t} \right)$$

$$= W_s(t) + V_s(t) \varphi_n(t) + P_n(t) V_s(t) \omega_k(t)$$

Donc

$$\tilde{\omega}(t) = t^{k+n+s-1} \omega(t^{-1}) = t^{k+n} \tilde{W}_s(t) + t^k \tilde{V}_s(t) \tilde{\varphi}_n(t) + \tilde{P}_n(t) \tilde{V}_s(t) \tilde{\omega}_k(t)$$

$$\frac{\tilde{\omega}(t)}{\tilde{v}(t)} = \frac{t^{k+n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)} + \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \tilde{\varphi}_n(t) + \frac{\tilde{\omega}_k(t)}{\tilde{v}_k(t)}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{B_k^{(n,s)}(t)} \qquad \underbrace{\hspace{5em}}_{\substack{e_k^{(n)}(t) \\ (k-1|k)_f(t)}}$

D'où

$$B_k^{(n,s)}(t) = (k+n+s-1|k+n+s)_f(t) - (k-1|k)_f(t) \quad \blacksquare$$

Nous avons le

Théorème 3 : soit V_n un polynôme arbitraire de degré $n \geq n+1$, unitaire

Alors :

$$\frac{B_k^{(n,s)}(t)}{E_k(t)} = 1 - \frac{t^{n+s} c \left(v_k(x) P_n(x) V_n(x) (1-tx)^{-2} \right)}{\tilde{P}_n(t) \tilde{V}_n(t) c \left(v_k(x) (1-tx)^{-2} \right)}$$

Le calcul de $B_k^{(n,s)}(t)$ utilise les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_{k+n+1}$. Et

$$\frac{B_k^{(n,s)}(t)}{E_k(t)} = 1 + o(t^{n+1})$$

$E_k(t)$

Le polynôme V_n peut être choisi d'une façon optimale. Nous avons

$$F \left(\frac{P_n(x) V_n(x)}{1-tx} \right) = F \left(P_n(x) V_n(x) \left(1 + tx + \dots + t^{n+1} x^{n+1} + \frac{t^n x^n}{1-tx} \right) \right)$$

Nous avons immédiatement le :

Théorème 4 : si V_n satisfait le système :

$$F(x^i P_n(x) V_n(x)) = 0 \quad i=0, \dots, n-1$$

alors :

$$\frac{B_k^{(n,s)}(t)}{E_k(t)} = 1 - \frac{t^{n+2s}}{\tilde{P}_n(t) \tilde{V}_s(t)} \cdot \frac{c \left(v_k(x) x^n P_n(x) V_s(x) (1-tx)^{-2} \right)}{c \left(v_k(x) (1-tx)^{-2} \right)}$$

le calcul de $B_k^{(n,s)}(t)$ nécessite donc la connaissance des coefficients $c_0, c_1, \dots, c_{k+n+2s-1}$.

De plus nous avons

$$f(t) - (k+n+2s-1 | k+n+2s)_f(t) = \frac{t^{k+n+2s}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n(t) \tilde{V}_s(t)} \cdot c \left(\frac{x^k v_k(x) P_n(x) V_s(x)}{1-tx} \right)$$

et

$$h(t) - (s-1 | s)_h(t) = \frac{t^{2s}}{\tilde{V}_s(t)} \cdot F \left(x^n P_n(x) V_s(x) (1-tx)^{-2} \right)$$

Donc lorsque V_s est optimal, $(s-1 | s)_h(t)$ est identique à $[s-1 | s]_h(t)$.

V_s optimal existe si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} F(P_n(x)) & \dots & \dots & F(x^{s-1} P_n(x)) \\ \vdots & & & \\ F(x^{s-1} P_n(x)) & \dots & \dots & F(x^{2s-2} P_n(x)) \end{vmatrix} \neq 0$$

L'estimation $B_k^{(n,s)}$ possède donc deux versions : une version générale

où V_s est arbitraire et une version dite optimale où V_s satisfait :

$$F(x^i P_n(x) V_s(x)) = 0 \quad i = 0, \dots, s-1.$$

Cas particulier :

s'il coïncide la plus petite valeur de s à savoir $n+1$,
obtenons l'estimation :

$$\left\{ \begin{aligned} B_k^{(n)}(t) &= e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{\sigma}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \frac{h_n}{\tilde{V}_{n+1}(t)} \\ e_k^{(n)}(t) &= \frac{t^k}{\tilde{\sigma}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \tilde{Q}_n(t) \end{aligned} \right.$$

Car

$$\left\{ \begin{aligned} W_{n+1}(t) &= F\left(P_n(x) \frac{V_{n+1}(x) - V_{n+1}(t)}{x - t} \right) = F(x^n P_n(x)) = h_n \\ V_{n+1} &\text{ étant unitaire de degré } n+1 \text{ exactement} \end{aligned} \right.$$

V_{n+1} est dit polynôme de Stieltjes associé à P_n par rapport à la

fonctionnelle F s'il satisfait le système :

$$F(x^i P_n(x) V_{n+1}(x)) = 0 \quad i = 0, \dots, n$$

Et l'estimation $B_k^{(n)}(t)$ est dite 'Extension de la procédure de Kronrod aux approximants de type-Padé $(k-1|k)_f, k \geq 1$ '.

Comme le montreront les exemples numériques, cette méthode est très efficace et facile à mettre en oeuvre pourvu que P_n existe.

Calcul de l'estimation $B_k^{(n,s)}(t)$, $s \geq n+1$:

Posons

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

$$V_s(x) = a'_0 + a'_1 x + \dots + a'_{n-1} x^{n-1} + x^s$$

Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} W_s(t) = F\left(P_n(x) \frac{V_s(x) - V_s(t)}{x - t} \right) = \sum_{j=0}^{s-1} \beta_j t^j \\ \beta_j = \sum_{i=0}^{s-j-1} a'_{i+j+1} e_i \quad j = 0, \dots, s-1 \\ e_i = F(x^i P_n(x)) \quad i = 0, 1, \dots \\ e_i = 0 \quad i \leq n-1 \end{array} \right.$$

D'où :

$$\tilde{W}_s(t) = \sum_{j=0}^{s-1} \left(\sum_{i=n+j+1}^s d_i e_{i-j-1} \right) t^{s-j-1}.$$

Le choix optimal de V_s aboutit au système:

$$\sum_{j=n-i}^s d_j e_{i+j} = 0 \quad i=0, \dots, s-1$$

Ce système est triangulaire si $s = n+1$ et l'on retrouve la procédure de Kronrod appliquée aux approximations de type-Padé.

Tableau récapitulatif:

		<u>Ordre d'approximation</u>	<u>Indice du dernier coefficient</u>
	$e_k^{(n)}$	$2n$	$k+2n-1$
{	$B_k^{(n,s)}$ cas général	$n+s \geq 2n+1$	$k+n+s-1 \geq k+2n$
	cas optimal	$2s+n \geq 3n+2$	$k+n+2s-1 \geq k+3n$

• $s \geq n+1$

• $n \geq 1$

L'estimation $B_k^{(n,s)}(t)$ peut être également obtenue en utilisant une

seconde technique qui consiste à remplacer, dans l'expression (2) de

l'erreur $E_k(t)$, la fonction $(1-tx)^{-2}$ par son polynôme d'interpolation

d'Hermite aux zéros d'un polynôme V_s arbitraire unitaire de degré s :

$$P(x) = \frac{1}{1-tx} \left(1 - \frac{V_s(x)}{V_s(t^{-1})} \right)$$

Et l'on obtient ainsi l'estimation

$$\begin{aligned} e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{p}_n(t)} \cdot F(P_n(x) P(x)) &= e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{p}_n(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)} \\ &= B_k^{(n,s)}(t) \end{aligned}$$

avec

$$W_s(t) = F\left(P_n(x) \frac{V_s(x) - V_s(t)}{x - t}\right), \text{ polynôme de degré } s-1 \text{ en } t.$$

Puisque

$$E_k(t) = B_k^{(n,s)}(t) + \frac{t^{k+n+s}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{p}_n(t) \tilde{V}_s(t)} \cdot F\left(\frac{P_n(x) V_s(x)}{1-tx}\right)$$

La procédure ci-dessus peut être également itérée.

III.2. DEUXIEME EXTENSION :

En utilisant l'expression (E2) de l'erreur de $[n-1/n]_g(t)$:

obtenons une nouvelle expression de l'erreur $E_k(t)$:

$$E_k(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{u}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot F\left(\frac{x^n P_n(x)}{1-tx}\right) \quad (3)$$

Posons

$$\varphi(t) = F\left(\frac{x^n P_n(x)}{1-tx}\right)$$

d'une façon analogue à celle utilisée dans le paragraphe III.1,

remplaçons φ par son approximant de type - Padé $(s-1/s)_\varphi$ et

l'expression (3) ci-dessus devient,

$$E_k(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{u}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \left[\frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)} + \frac{t^s}{\tilde{V}_s(t)} \cdot F\left(\frac{x^n P_n(x) V_s(x)}{1-tx}\right) \right]$$

avec

$$(s-1/s)_\varphi(t) = \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)}$$

$$W_s(t) = F\left(x^n P_n(x) \frac{V_s(x) - V_s(t)}{x - t}\right), \text{ de degré } s-1$$

Posons

$$B_{k,e}^{(n,s)}(t) = E_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)}$$

On note également par $B_{k,1}^{(n,s)}(t)$ l'estimation $B_k^{(n,s)}$ étudiée au paragraphe III.1.

Ainsi

$$E_k(t) = B_{k,e}^{(n,s)}(t) + o(t^{k+2n+s}).$$

L'estimation $B_{k,e}^{(n,s)}(t)$ se met aussi sous forme:

$$B_{k,e}^{(n,s)}(t) = (k+2n+s-1 | k+2n+s)_f(t) - (k-1 | k)_f(t)$$

où $(k+2n+s-1 | k+2n+s)_f$ est l'approximant de type -Padé de

polynôme générateur $v(x) = x^n P_n(x) v_k(x) V_s(x)$.

En effet, si w désigne le polynôme associé à v par rapport à c

nous avons :

$$\begin{aligned} w(t) &= c \left(\frac{v(x) - v(t)}{x - t} \right) \\ &= c \left(\frac{x^n P_n(x) v_k(x) V_s(x) - t^n P_n(t) v_k(t) V_s(t)}{x - t} \right) \end{aligned}$$

$$w(t) = F\left(x^n P_n(x) \frac{V_0(x) - V_0(t)}{x - t} + V_0(t) P_n(x) \frac{x^n - t^n}{x - t} + t^n V_0(t) \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t}\right) \\ + C \left(t^n V_0(t) P_n(t) \frac{v_k(x) - v_k(t)}{x - t} \right)$$

$$= W_0(t) + t^n V_0(t) Q_n(t) + t^n V_0(t) P_n(t) w_k(t)$$

avec : Q_n le polynôme associé à P_n par rapport à F

w_k le polynôme associé à v_k par rapport à C

$$F\left(P_n(x) \frac{x^n - t^n}{x - t}\right) = 0$$

Donc

$$\tilde{w}(t) = t^{k+2n+d-1} w(t^{-1})$$

$$= t^{k+2n} \tilde{W}_0(t) + t^k \tilde{V}_0(t) \tilde{Q}_n(t) + \tilde{V}_0(t) \tilde{P}_n(t) \tilde{w}_k(t)$$

Et

$$\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} = \frac{t^k \tilde{Q}_n(t)}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n(t)} + \frac{t^{k+2n} \tilde{W}_0(t)}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n(t) \tilde{V}_0(t)} + \frac{\tilde{w}_k(t)}{\tilde{v}_k(t)}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\substack{(n,d) \\ B_{k,c}(t)}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{(k-d|k)_f(t)}}$

Nous avons le :

Théorème 5 : soit V_n un polynôme arbitraire de degré $n \geq 1$. Alors :

$$\frac{B_{k,z}^{(n,s)}(t)}{E_k(t)} = 1 - \frac{t^{2n+s}}{t} \cdot \frac{c \left(v_k(x) x^n P_n(x) V_n(x) (1-tx)^{-2} \right)}{\tilde{P}_n(t) \tilde{V}_n(t) c \left(v_k(x) (1-tx)^{-2} \right)}$$

Le calcul de l'estimation $B_{k,z}^{(n,s)}$, version générale, nécessite la connaissance des coefficients $c_0, \dots, c_{2n+k+s-1}$. Son ordre

d'approximation est $(2n+s)$ puisque :

$$\frac{B_{k,z}^{(n,s)}}{E_k(t)} = 1 + o(t^{2n+s}).$$

$E_k(t)$

Le polynôme V_n peut être choisi optimal. Nous avons

$$F \left(\frac{x^n P_n(x) V_n(x)}{1-tx} \right) = F \left(x^n P_n(x) V_n(x) \left(1+tx + \dots + t^{s-1} x + \frac{t^s x^s}{1-tx} \right) \right)$$

Nous obtenons immédiatement le :

Théorème 6 : si V_n satisfait le système :

$$F(x^{n+i} P_n(x) V_n(x)) = 0 \quad i=0, \dots, n-1$$

alors :

$$\frac{B_{k,z}^{(n,s)}(t)}{E_k(t)} = 1 - \frac{z^{n+z}}{t} \cdot \frac{c(V_n(x) \sum_{i=0}^{n-1} P_n(x) V_n(x) (1-tx)^{-i})}{\tilde{P}_n(t) \tilde{V}_n(t) c(V_n(x) (1-tx)^{-i})}$$

Dans ce cas le calcul de $B_{k,z}^{(n,s)}(t)$ utilise les coefficients c_0, \dots, c_{2n}

Nous avons le tableau récapitulatif suivant :

		<u>Ordre d'approximation</u>	<u>Indice du dernier coefficient utilisé</u>
$\left\{ \begin{array}{l} B_{k,z}^{(n,s)} \\ \end{array} \right.$	cas général	$2n+s \geq 2n+1$	$k+2n+s-1 \geq k+2n$
	cas optimal	$2n+s \geq 2n+2$	$k+2n+s-1 \geq k+2n+1$

Reste à remarquer que V_n optimal existe si et seulement si le déterminant :

$$\left| \begin{array}{cccc} F(x^n P_n(x)) & \dots & \dots & F(x^{n+\lambda-1} P_n(x)) \\ \vdots & & & \vdots \\ F(x^{n+\lambda-1} P_n(x)) & \dots & \dots & F(x^{n+2\lambda-2} P_n(x)) \end{array} \right|$$

est non nul.

Calcul de l'estimation $B_{k,2}^{(n,\lambda)}(t)$:

Pour $n \geq 1$ fixé, posons :

$$V_\lambda(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + x^\lambda \quad \lambda \geq 1$$

Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} W_\lambda(t) = F\left(x^n P_n(x) \frac{V_\lambda(x) - V_\lambda(t)}{x - t}\right) = \sum_{i=0}^{\lambda-1} \beta_i t^i \\ \beta_i = \sum_{j=0}^{\lambda-i-1} a_{i+j+1} F(x^{n+j+1} P_n(x)) \quad , \quad i=0, 1, \dots, \lambda-1. \\ F(x^{n+j} P_n(x)) = \sum_{i=0}^n a_i F(x^{n+j+i}) = \sum_{i=0}^n a_i c(x^{n+j+i} v_n(x)) \\ P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \quad a_n = 1. \end{array} \right.$$

$$\tilde{W}_s(t) = \sum_{i=0}^{s-1} \left(\sum_{j=0}^{s-i-1} \alpha_{i+j+1} F(x^{n+j} P_n(x)) \right) t^{s-i-1}$$

Le choix optimal de V_s conduit au système :

$$\sum_{j=0}^s \alpha_j F(x^{n+j+i} P_n(x)) = 0 \quad i=0, \dots, s-1.$$

D'une manière analogue à l'estimation $B_{k,1}^{(n,s)}(t)$, l'estimation $B_{k,2}^{(n,s)}$ s'obtient également lorsque l'on remplace, dans l'expression (3), $(1-tx)^{-1}$ par un polynôme d'interpolation d'Hermite $P(x)$ aux zéros d'un polynôme arbitraire

V_s :

$$P(x) = \frac{1}{1-tx} \left(1 - \frac{V_s(x)}{V_s(t^s)} \right)$$

Nous obtenons l'estimation :

$$e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot F(x^n P_n(x) P(x))$$

$$= e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)}$$

$$= B_{k,2}^{(n,s)}(t) \cdot$$

III.3. TROISIEME EXTENSION :

De la même manière qu'aux paragraphes III.1 et III.2, une

troisième expression de l'erreur $E_k(t)$ s'obtient en utilisant

l'expression (E3) de l'erreur de $[n-1 | n]_g$ l'approximant de Padé de

la série $g(t) = c \left(\frac{\sigma_k(x)}{1-tx} \right)$, k étant fixé.

Donc

$$E_k(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+\varepsilon_n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n^e(t)} \cdot F \left(\frac{P_n^e(x)}{1-tx} \right) \quad (4)$$

Soit V_s un polynôme arbitraire unitaire de degré s et P le polynôme d'interpolation d'Hermite de $(1-tx)^{-2}$ aux zéros de V_s :

$$P(x) = (1-tx)^{-2} \left(1 - \frac{V_s(x)}{V_s(t^{-s})} \right).$$

En remplaçant $(1-tx)^{-2}$ par $P(x)$ dans l'expression (4) ci-dessus

nous obtenons l'estimation :

$$B_{k,s}^{(n,s)}(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+\varepsilon_n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n^e(t)} \cdot F(P_n^e(x) P(x))$$

Donc

$$B_{k,3}^{(n,s)}(t) = E_k(t) \frac{t^{k+2n+1}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n^2(t) \tilde{V}_s(t)} \cdot F\left(\frac{v_k(x) P_n^2(x) V_s(x)}{1-tx}\right)$$

Posons

$$W_s(t) = F\left(P_n^2(x) \frac{V_s(x) - V_s(t)}{x-t}\right), \text{ degre' } s-1 \text{ en } t.$$

Alors

$$B_{k,3}^{(n,s)}(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n^2(t) \tilde{V}_s(t)} \cdot \tilde{W}_s(t)$$

si nous construisons l'approximant de type - Padé $(k+2n+s-1 | k+2n)$

de polynôme générateur $v(x) = v_k(x) P_n^2(x) V_s(x)$, alors :

$$B_{k,3}^{(n,s)}(t) = (k+2n+s-1 | k+2n)_f(t) - (k-1 | k)_f(t).$$

En effet si w désigne le polynôme associé à v par rapport à c

nous avons :

$$\begin{aligned} w(t) &= c \left(\frac{v(x) - v(t)}{x-t} \right) \\ &= c \left(\frac{v_k(x) P_n^2(x) V_s(x) - v_k(t) P_n^2(t) V_s(t)}{x-t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= c \left(v_k(x) P_n^e(x) \frac{V_\Delta(x) - V_\Delta(t)}{x - t} + v_k(x) P_n(x) \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} V_\Delta(t) + \right. \\
&\quad \left. v_k(x) \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} P_n(t) V_\Delta(t) + P_n^e(t) V_\Delta(t) \frac{v_k(x) - v_k(t)}{x - t} \right) \\
&= F \left(P_n^e(x) \frac{V_\Delta(x) - V_\Delta(t)}{x - t} \right) + V_\Delta(t) F \left(P_n(x) \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} \right) + \\
&\quad P_n(t) V_\Delta(t) F \left(\frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} \right) + P_n^e(t) V_\Delta(t) c \left(\frac{v_k(x) - v_k(t)}{x - t} \right) \\
&= W_\Delta(t) + P_n(t) V_\Delta(t) Q_n(t) + P_n^e(t) V_\Delta(t) \omega_k(t)
\end{aligned}$$

car par l'orthogonalité de P_n par rapport à F le terme $F \left(P_n(x) \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} \right)$

est identiquement nul.

$$\tilde{\omega}(t) = t^{k+2n+1} \omega(t^{-1}) = t^{k+2n} \tilde{W}_\Delta(t) + t^k \tilde{P}_n(t) \tilde{V}_\Delta(t) \tilde{Q}_n(t) + \tilde{P}_n^e(t) \tilde{V}_\Delta(t) \tilde{\omega}_k(t)$$

Donc

$$\frac{\tilde{\omega}(t)}{\tilde{Q}(t)} = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{Q}_n(t)}{\tilde{P}_n(t)} + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n^e(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_\Delta(t)}{\tilde{V}_\Delta(t)} + \frac{\tilde{\omega}_k(t)}{\tilde{v}_k(t)}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{e_k^{(n)}(t)} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{(k-1|k)_f(t)}$

$$\underbrace{\hspace{20em}}_{B_{k,3}^{(n,\Delta)}(t)}$$

Nous avons le

Théorème 7 : si V_s est un polynôme arbitraire de degré $s \geq 1$, alors :

$$\frac{B_{k,3}^{(n,s)}(t)}{E_k(t)} = 1 - \frac{t^{2n+s}}{\tilde{P}_n^e(t) \tilde{V}_s(t)} \cdot \frac{c \left(v_k(x) P_n^e(x) V_s(x) (1-tx)^{-s} \right)}{c \left(v_k(x) (1-tx)^{-s} \right)}$$

Le calcul de $B_{k,3}^{(n,s)}(t)$, version générale, utilise les coefficients c_0, \dots, c_{k-1} .

D'autre part on peut essayer également de choisir V_s d'une façon adéquate.

Nous avons

$$F \left(\frac{P_n^e(x) V_s(x)}{1-tx} \right) = F \left(P_n^e(x) V_s(x) \left(1+tx + \dots + t^{s-1}x^{s-1} + \frac{t^s x^s}{1-tx} \right) \right)$$

Donc nous avons immédiatement le

Théorème 8 : si V_s satisfait le système :

$$F(x^i P_n^e(x) V_s(x)) = 0 \quad i=0, \dots, s-1$$

alors

$$\frac{B_{k,3}^{(n,s)}(t)}{E_k(t)} = 1 - \frac{t^{2n+es}}{\tilde{P}_n^e(t) \tilde{V}_s(t)} \cdot \frac{c \left(\frac{x^s v_k(x) P_n^e(x) V_s(x)}{1-tx} \right)}{c \left(v_k(x) (1-tx)^{-s} \right)}$$

Le calcul de $B_{k,3}^{(n,s)}(t)$, version optimale, nécessite donc la connaissance des coefficients $c_0, \dots, c_{k+2n+2s-1}$.

Nous avons le tableau récapitulatif suivant:

		<u>Ordre d'approximation</u>	<u>Indice du dernier coefficient utilisé</u>
$\left\{ \begin{array}{l} B_{k,3}^{(n,s)} \\ \end{array} \right.$	cas général	$2n+s \geq 2n+1$	$k+2n+s-1 \geq k+2n$
	cas optimal	$2n+2s \geq 2n+2$	$k+2n+s-1 \geq k+2n+1$

Il faut remarquer que V_s optimal existe si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} F(P_n^e(x)) & \dots & F(x^{1-s} P_n^e(x)) \\ F(x^{1-s} P_n^e(x)) & \dots & F(x^{2s-2} P_n^e(x)) \end{vmatrix}$$

est non nul.

Calcul de l'estimation $B_{k,3}^{(n,s)}(t)$:

Posons

$$V_s(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{s-1} x^{s-1} + x^s, \quad s \geq 1$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n, \quad n \geq 1$$

$$\left\{ \begin{aligned} W_A(t) &= F \left(P_n^e(x) \frac{V_A(x) - V_A(t)}{x - t} \right) = \sum_{i=0}^{s-1} \beta_i t^i \\ \beta_i &= \sum_{j=0}^{s-i-1} \alpha_{i+j+1} F(x^j P_n^e(x)) \quad i=0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} F(x^j P_n^e(x)) &= \sum_{m=0}^n a_m e_{m+j} \quad j=0, 1, 2, \dots \\ e_i &= F(x^i P_n(x)) \quad i=0, 1, \dots \end{aligned} \right.$$

Le choix optimal de V_A conduit au système suivant:

$$\sum_{j=0}^{s-1} \alpha_j \left(\sum_{m=0}^n a_m e_{m+i+j} \right) = 0 \quad i=0, \dots, s-1.$$

IV. TABLAU RECAPITULATIF

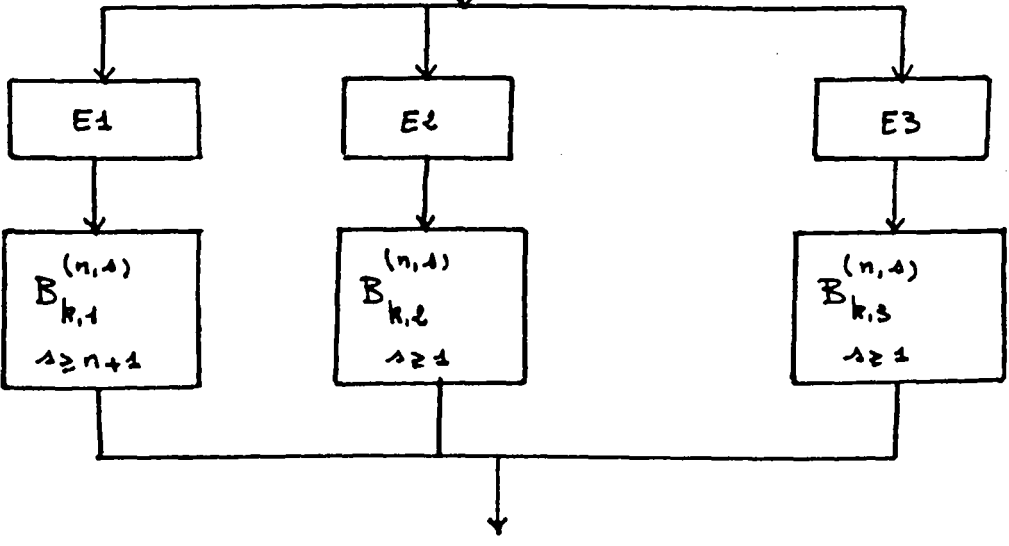
$$E_k(t) = \frac{t^k}{\tilde{u}_k(t)} c \left(\frac{v_k(x)}{1-tx} \right) = f(t) - (k-2|k)_f(t)$$

k fixé. $g(t) = c \left(\frac{v_k(x)}{1-tx} \right) = F((1-tx)^{-2})$

Approximation de $g(t)$ par $[n-2|n]_g^{(k)}$ à l'exécute

ESTIMATION : $e_k^{(n)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{u}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{\varphi}_n(t)}{\tilde{p}_n(t)}$

Interpolation de $(1-tx)^{-2}$



		Ordre d'approximation	Indice du dernier coefficient utilisé
$B_{k,1}^{(n,1)}$	Cas général	$n + s \geq 2n + 1$ Théorème 3	$k + n + s - 1 \geq k + 2n$ Théorème 3
	Cas optimal: $F(x^i P_n(x) V_s(x)) = 0$ $i = 0, \dots, s-1.$	$2n + s \geq 3n + 1$ Théorème 4	$k + 2s + n - 1 \geq k + 3n + 1$ Théorème 4
$B_{k,2}^{(n,2)}$	Cas général	$2n + s \geq 2n + 1$ Théorème 5	$k + 2n + s - 1 \geq k + 2n$ Théorème 5
	Cas optimal: $F(x^{n+i} P_n V_s) = 0$ $i = 0, \dots, s-1$	$2n + 2s \geq 2n + 2$ Théorème 6	$k + 2n + 2s - 1 \geq k + 2n + 2$ Théorème 6
$B_{k,3}^{(n,1)}$	Cas général	$2n + s \geq 2n + 1$ Théorème 7	$k + 2n + s - 1 \geq k + 2n$ Théorème 7
	Cas optimal: $F(x^i P_n^2 V_s) = 0$ $i = 0, \dots, s-1$	$2n + 2s \geq 2n + 2$ Théorème 8	$k + 2n + 2s - 1 \geq k + 2n + 2$ Théorème 8

V. COMPARAISONS

Bien évidemment les estimations étudiées précédemment ne sont pas indépendantes. Si les approximants de type-Padé qui interviennent dans leur calcul sont les mêmes alors ces estimations atteignent le même ordre d'approximation [7].

Donc ces estimations peuvent être comparées entre elles. A titre d'exemple pour $k \geq 1$ et $n \geq 1$ fixés, nous allons comparer numériquement les estimations $B_{k,1}^{(n,s)}$ et $B_{k,3}^{(n,s')}$ telles que $s \geq n+1$ et $s' \geq 1$.

Rappelons que $B_{k,1}^{(n,s)}(t)$ et $B_{k,3}^{(n,s')}(t)$ sont données par :

$$B_{k,1}^{(n,s)}(t) = (k+n+s-1 | k+n+s)_f(t) - (k-1 | k)_f(t)$$

$$B_{k,3}^{(n,s')}(t) = (k+2n+s'-1 | k+2n+s')_f(t) - (k-1 | k)_f(t)$$

où $(k+n+s-1 | k+n+s)_f$ et $(k+2n+s'-1 | k+2n+s')_f$ sont

respectivement de polynôme générateur $u_k(x) \Gamma_n(x) V_s(x)$ et $u_k(x) \Gamma_n(x) U_{s'}(x)$.

Les polynômes V_s et $U_{s'}$ sont supposés unitaires de degré respectivement $s \geq n+1$ et $s' \geq 1$.

En premier lieu nous considérons la plus petite valeur de s et de s' i.e. $s = n+1$ et $s' = 1$. Nous obtenons :

$$B_{k,1}^{(n,n+1)}(t) = B_{k,1}^{(n)}(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \frac{h_n}{\tilde{V}_{n+1}(t)}$$

car

$$F\left(P_n(x) \frac{V_{n+1}(x) - V_{n+1}(t)}{x - t}\right) = F(x^n P_n(x)) = h_n.$$

et

$$B_{k,3}^{(n,1)}(t) = B_{k,3}^{(n)}(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{P}_n^e(t)} \cdot \frac{h_n}{\tilde{U}_1(t)}$$

car

$$F\left(P_n^e(x) \frac{U_1(x) - U_1(t)}{x - t}\right) = F(P_n^e(x)) = F(x^n P_n(x)) = h_n.$$

Dans ce cas les estimations $B_{k,1}^{(n)}(t)$ et $B_{k,3}^{(n)}(t)$, version générale, i.e.

lorsque V_{n+1} et U_1 sont arbitraires, ont le même ordre d'approximation $2n+1$ (voir tableau récapitulatif) et utilisent également le même nombre de coefficients à savoir c_0, \dots, c_{k+2n} .

Nous avons :

$$\frac{B_{k,1}^{(n)}(t)}{\bar{E}_k(t)} = 1 - \frac{t^{2n+1}}{t} \cdot \frac{c(v_k(x) P_n(x) V_{n+1}(x) (1-tx)^{-2})}{\tilde{P}_n(t) \tilde{V}_{n+1}(t) c(v_k(x) (1-tx)^{-2})}$$

et

$$\frac{B_{k,3}^{(n)}(t)}{E_k(t)} = 1 - \frac{t^{2n+1}}{t} \cdot \frac{c(v_k(x) P_n^e(x) U_1(x) (1-tx)^{-2})}{\tilde{P}_n^e(t) \tilde{U}_1(t) c(v_k(x) (1-tx)^{-2})}$$

Faisons le rapport

$$z(t) = \frac{\frac{B_{k,3}^{(n)}(t)}{E_k(t)} - 1}{\frac{B_{k,4}^{(n)}(t)}{E_k(t)} - 1} = \frac{\tilde{V}_{n+1}(t)}{\tilde{P}_n(t) \tilde{U}_1(t)} \cdot \frac{c \left(\frac{v_k(x) P_n(x) U_1(x)}{1-tx} \right)}{c \left(v_k(x) P_n(x) V_{n+1}(x) (1-tx)^{-1} \right)}$$

si $|z(t)| < 1$ l'estimation $B_{k,3}^{(n)}(t)$ est meilleure que $B_{k,4}^{(n)}(t)$, [6].

si c_{k+2n+1} est connu, $z(0)$ peut être calculé afin de déterminer le

comportement de ces deux estimations au voisinage de l'origine:

$$z(0) = \lim_{t \rightarrow 0} z(t) = \frac{c(v_k(x) P_n(x) U_1(x))}{c(v_k(x) P_n(x) V_{n+1}(x))} = \frac{\alpha h_n + d_1}{\alpha_n e_n + e_{n+1}}$$

où :

- $U_1(x) = x + \alpha$, si U_1 est optimal, $\alpha = -\frac{d_1}{h_n}$

- $V_{n+1}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + x^{n+1}$

V_{n+1} optimal étant le polynôme de Stieltjes associé à P_n par rapport à F .

- $e_i = F(x^i P_n(x)) \quad i=0, \dots, \quad d_i = F(x^i \tilde{P}_n(x)) \quad i=0, 1, \dots$

EXEMPLES NUMÉRIQUES :

Nous reprenons l'exemple de la série $f(t) = e^{-t}$ et l'approximant type-Padé $(k-1/k)_f^{(k)}$ de polynôme générateur $v_k(t) = (t + \frac{1}{k})^k$.

1. Comparaison de $B_{k,1}^{(n)}(t)$ et $B_{k,3}^{(n)}(t)$: Cas général

avec $V_{n+1}(x) = (x + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ et $U_1(x) = x + 1$

$$\boxed{k=e}$$

• n=1 z(0) = 0.14761905 \cdot 10^4

t	$B_{e,1}^{(1)}(t)$	$e^{-t} - (1/2)_f^{(1)}(t)$	$B_{e,3}^{(1)}(t)$
0.1	-0.219221030-02	-0.219206040-02	-0.219228110-02
0.3	-0.153479170-01	-0.153254470-01	-0.153584170-01
0.5	-0.336548380-01	-0.334693400-01	-0.337414970-01
0.9	-0.706348260-01	-0.690545970-01	-0.713880760-01
1.	-0.787910550-01	-0.765650030-01	-0.798611110-01
1.2	-0.933206250-01	-0.894307880-01	-0.952284320-01
1.5	-0.110613760+00	-0.103400450+00	-0.114285710+00
2.	-0.128861790+00	-0.114664720+00	-0.136666670+00
2.5	-0.137094070+00	-0.115445870+00	-0.150130450+00
3.	-0.138584070+00	-0.110212930+00	-0.157500000+00

meilleure

• n=2 z(0) = 0.20137931 \cdot 10^4

t	$B_{2,1}^{(2)}(t)$	$e^{-t} - (1/2)_f(t)$	$B_{2,3}^{(2)}(t)$
0.100000E+00	-0.21920604D-02	-0.21920604D-02	-0.21920605D-02
0.300000E+00	-0.15325469D-01	-0.15325447D-01	-0.15325501D-01
0.500000E+00	-0.33469732D-01	-0.33469340D-01	-0.33470483D-01
0.900000E+00	-0.69059477D-01	-0.69054597D-01	-0.69081242D-01
0.100000E+01	-0.76571112D-01	-0.76565003D-01	-0.76609347D-01
0.120000E+01	-0.89434825D-01	-0.89430768D-01	-0.89532764D-01
0.150000E+01	-0.10336739D+00	-0.10340045D+00	-0.10365747D+00
0.200000E+01	-0.11432641D+00	-0.11466472D+00	-0.11537037D+00
0.250000E+01	-0.11420389D+00	-0.11544587D+00	-0.11675007D+00
0.300000E+01	-0.10718000D+00	-0.11021293D+00	-0.11209821D+00

meilleure

$$k = 3$$

$n = 1$

$$\underline{r(0) = 0.82436709}$$

t	$B_{3,1}^{(1)}(t)$	$e^{-t} - (2/3)_f(t)$	$B_{3,3}^{(1)}(t)$
0.100000E+00	0.33956367D-04	0.33953902D-04	0.33955903D-04
0.300000E+00	0.77435377D-03	0.77314179D-03	0.77409491D-03
0.500000E+00	0.30502412D-02	0.30321174D-02	0.30458914D-02
0.900000E+00	0.13174972D-01	0.12850952D-01	0.13078213D-01
0.100000E+01	0.16842888D-01	0.16316941D-01	0.16677296D-01
0.120000E+01	0.25410309D-01	0.24226282D-01	0.24996400D-01
0.150000E+01	0.40988180D-01	0.37944975D-01	0.39745781D-01
0.200000E+01	0.72775758D-01	0.63335283D-01	0.67792593D-01
0.250000E+01	0.11008883D+00	0.88846832D-01	0.95577532D-01
0.300000E+01	0.15183884D+00	0.11228707D+00	0.11675000D+00

meilleure

$n = 2$

$$\underline{r(0) = 0.14097259 \cdot 10^2}$$

t	$B_{3,1}^{(2)}(t)$	$e^{-t} - (2/3)_f(t)$	$B_{3,3}^{(2)}(t)$
0.100000E+00	0.33953903D-04	0.33953902D-04	0.33953903D-04
0.300000E+00	0.77314309D-03	0.77314179D-03	0.77314363D-03
0.500000E+00	0.30321668D-02	0.30321174D-02	0.30321876D-02
0.900000E+00	0.12853315D-01	0.12850952D-01	0.12854375D-01
0.100000E+01	0.16321448D-01	0.16316941D-01	0.16323505D-01
0.120000E+01	0.24239498D-01	0.24226282D-01	0.24245751D-01
0.150000E+01	0.37990473D-01	0.37944975D-01	0.38013278D-01
0.200000E+01	0.63527719D-01	0.63335283D-01	0.63634776D-01
0.250000E+01	0.89360664D-01	0.88846832D-01	0.89680543D-01
0.300000E+01	0.11332300D+00	0.11228707D+00	0.11404993D+00

meilleure

e. Comparison de $B_{k,1}^{(n)}(t)$ et $B_{k,3}^{(n)}(t)$: version optimale

Dans le cas optimal $B_{k,1}^{(n)}$ est d'ordre $3n+2$ qui est supérieur à celui de $B_{k,3}^{(n)}$ à savoir $2n+2$.

Donc numériquement $B_{k,1}^{(n)}(t)$ devrait donner des résultats meilleurs que ceux donnés par $B_{k,3}^{(n)}(t)$. En voici les résultats :

$$k=2$$

$$\underline{\underline{n=1}}$$

t	$B_{2,1}^{(1)}(t)$	$e^{-t} - (1/2)_f(t)$	$B_{2,3}^{(1)}(t)$
0.1	-0.21920604D-02	-0.21920604D-02	-0.21920587D-02
0.3	-0.15325447D-01	-0.15325447D-01	-0.15324550D-01
0.5	-0.33469096D-01	-0.33469340D-01	-0.33455552D-01
0.9	-0.69046316D-01	-0.69054597D-01	-0.68799848D-01
1.	-0.76549993D-01	-0.76565003D-01	-0.76149425D-01
1.2	-0.89390135D-01	-0.89430788D-01	-0.88488520D-01
1.5	-0.10327138D+00	-0.10340045D+00	-0.10096670D+00
2.	-0.11415771D+00	-0.11466472D+00	-0.10714286D+00
2.5	-0.11413111D+00	-0.11544587D+00	-0.98783983D-01
3.	-0.10756539D+00	-0.11021293D+00	-0.80000000D-01

$$n=2$$

t	$B_{2,1}^{(2)}(t)$	$e^{-t} - (1/2)_f(t)$	$B_{2,3}^{(2)}(t)$
0.1	-0.21920604D-02	-0.21920604D-02	-0.21920604D-02
0.3	-0.15325447D-01	-0.15325447D-01	-0.15325446D-01
0.5	-0.33469338D-01	-0.33469340D-01	-0.33469319D-01
0.9	-0.69054329D-01	-0.69054597D-01	-0.69053372D-01
1.	-0.76564390D-01	-0.76565003D-01	-0.76562564D-01
1.2	-0.89428358D-01	-0.89430788D-01	-0.89423024D-01
1.5	-0.10338861D+00	-0.10340045D+00	-0.10337054D+00
2.	-0.11458935D+00	-0.11466472D+00	-0.11451593D+00
2.5	-0.11517792D+00	-0.11544587D+00	-0.11499000D+00
3.	-0.10954176D+00	-0.11021293D+00	-0.10917600D+00

$$n = 3$$

t	$B_{2,1}^{(3)}(t)$	$e^{-t} - (1/2)_f(t)$	$B_{2,3}^{(3)}(t)$
0.1	-0.21920604D-02	-0.21920604D-02	-0.21920604D-02
0.3	-0.15325447D-01	-0.15325447D-01	-0.15325447D-01
0.5	-0.33469340D-01	-0.33469340D-01	-0.33469341D-01
0.9	-0.69054597D-01	-0.69054597D-01	-0.69054717D-01
1.	-0.76565004D-01	-0.76565003D-01	-0.76565287D-01
1.2	-0.89430791D-01	-0.89430788D-01	-0.89431996D-01
1.5	-0.10340048D+00	-0.10340045D+00	-0.10340705D+00
2.	-0.11466511D+00	-0.11466472D+00	-0.11471631D+00
2.5	-0.11544842D+00	-0.11544587D+00	-0.11567356D+00
3.	-0.11022341D+00	-0.11021293D+00	-0.11092461D+00

$k = 3$

$n = 1$

t	$B_{3,1}^{(1)}(t)$	$e^{-t} - (2/3)_f^{(1)}(t)$	$B_{3,3}^{(1)}(t)$
0.1	0.339539020-04	0.339539020-04	0.339538650-04
0.3	0.773141450-03	0.773141790-03	0.773078300-03
0.5	0.303210140-02	0.303211740-02	0.303035040-02
0.7	0.128498530-01	0.128509520-01	0.127822030-01
1.	0.163146630-01	0.163169410-01	0.161874950-01
1.2	0.242184570-01	0.242262820-01	0.238465540-01
1.5	0.379112570-01	0.379449750-01	0.365740030-01
2.	0.631328990-01	0.633352830-01	0.565241270-01
2.5	0.860942440-01	0.868468320-01	0.659817030-01
3.	0.110193760+00	0.112287070+00	0.513303170-01

$n = 2$

t	$B_{3,1}^{(2)}(t)$	$e^{-t} - (2/3)_f^{(2)}(t)$	$B_{3,3}^{(2)}(t)$
0.1	0.339539020-04	0.339539020-04	0.339539020-04
0.3	0.773141790-03	0.773141790-03	0.773141790-03
0.5	0.303211740-02	0.303211740-02	0.303211720-02
0.7	0.128509490-01	0.128509520-01	0.128509170-01
1.	0.163169320-01	0.163169410-01	0.163168590-01
1.2	0.242262330-01	0.242262820-01	0.242259410-01
1.5	0.379446410-01	0.379449750-01	0.379431360-01
2.	0.633319220-01	0.633352830-01	0.633210590-01
2.5	0.868294770-01	0.868468320-01	0.867648750-01
3.	0.112227590+00	0.112287070+00	0.112098190+00

$n = 3$

t	$B_{3,1}^{(3)}(t)$	$e^{-t} - (2/3)_f^{(3)}(t)$	$B_{3,3}^{(3)}(t)$
0.1	0.339539020-04	0.339539020-04	0.339539020-04
0.3	0.773141790-03	0.773141790-03	0.773141790-03
0.5	0.303211740-02	0.303211740-02	0.303211740-02
0.7	0.128509520-01	0.128509520-01	0.128509520-01
1.	0.163169410-01	0.163169410-01	0.163169410-01
1.2	0.242262820-01	0.242262820-01	0.242262820-01
1.5	0.379449750-01	0.379449750-01	0.379449780-01
2.	0.633352940-01	0.633352830-01	0.633353780-01
2.5	0.868469310-01	0.868468320-01	0.868477170-01
3.	0.112287620+00	0.112287070+00	0.112291610+00

3. Comparison de $B_{k,1}^{(n,s)}(t)$ et $B_{k,3}^{(n,s')}(t)$: Cas général :

Pour $s = s' \geq n+1$, l'estimation $B_{k,3}^{(n,s)}(t)$ est d'ordre supérieur à

celui de $B_{k,1}^{(n,s)}(t)$, (voir tableau récapitulatif).

Exemple: $\boxed{s = 3}$

$\boxed{k = 2}$

$\boxed{n = 1}$

t	$B_{2,1}^{(1,3)}(t)$	$e^{-t} - (1/2)_f(t)$	$B_{2,3}^{(1,3)}(t)$
0.1	-0.219206160-02	-0.219206040-02	-0.219206040-02
0.3	-0.153259700-01	-0.153254470-01	-0.153254150-01
0.5	-0.334760520-01	-0.334693400-01	-0.334685550-01
0.9	-0.691405810-01	-0.690545970-01	-0.690302710-01
1.	-0.766927080-01	-0.765650030-01	-0.765218100-01
1.2	-0.896696690-01	-0.894307880-01	-0.893182530-01
1.5	-0.103854880+00	-0.103400450+00	-0.103061220+00
2.	-0.115440000+00	-0.114664720+00	-0.113424000+00
2.5	-0.116175530+00	-0.115445870+00	-0.112402570+00
3.	-0.110250000+00	-0.110212930+00	-0.104343750+00

$\boxed{n = 2}$

t	$B_{2,1}^{(2,3)}(t)$	$e^{-t} - (1/2)_f(t)$	$B_{2,3}^{(2,3)}(t)$
0.1	-0.219206040-02	-0.219206040-02	-0.219206040-02
0.3	-0.153254750-01	-0.153254470-01	-0.153254470-01
0.5	-0.334699670-01	-0.334693400-01	-0.334693350-01
0.9	-0.690693120-01	-0.690545970-01	-0.690540710-01
1.	-0.765893680-01	-0.765650030-01	-0.765638710-01
1.2	-0.894658610-01	-0.894307880-01	-0.894267110-01
1.5	-0.103533350+00	-0.103400450+00	-0.103382550+00
2.	-0.114986670+00	-0.114664720+00	-0.114562670+00
2.5	-0.115921270+00	-0.115445870+00	-0.115106860+00
3.	-0.110651790+00	-0.110212930+00	-0.109400920+00

k = 3

n = 1

t	$B_{3,1}^{(1,3)}(t)$	$e^{-t} - (2/3)_f^{(1)}(t)$	$B_{3,3}^{(1,3)}(t)$
0.1	0.339539290-04	0.339539020-04	0.339539010-04
0.3	0.773180830-03	0.773141790-03	0.773136400-03
0.5	0.303306160-02	0.303211740-02	0.303188620-02
0.9	0.128788980-01	0.128509520-01	0.128369490-01
1.	0.163661410-01	0.163169410-01	0.162886280-01
1.2	0.243525980-01	0.242262820-01	0.241329720-01
1.5	0.383190880-01	0.379449750-01	0.375614410-01
2.	0.646741330-01	0.633352830-01	0.611340190-01
2.5	0.920782060-01	0.888468320-01	0.807383280-01
3.	0.118437500+00	0.112287070+00	0.892678570-01

n = 2

t	$B_{3,1}^{(2,3)}(t)$	$e^{-t} - (2/3)_f^{(2)}(t)$	$B_{3,3}^{(2,3)}(t)$
0.1	0.339539030-04	0.339539020-04	0.339539020-04
0.3	0.773143220-03	0.773141790-03	0.773141800-03
0.5	0.303217400-02	0.303211740-02	0.303211790-02
0.9	0.128538520-01	0.128509520-01	0.128510120-01
1.	0.163225530-01	0.163169410-01	0.163170760-01
1.2	0.242431810-01	0.242262820-01	0.242268100-01
1.5	0.380052780-01	0.379449750-01	0.379475040-01
2.	0.636046580-01	0.633352830-01	0.633508900-01
2.5	0.896052100-01	0.888468320-01	0.889002650-01
3.	0.113901950+00	0.112287070+00	0.112414620+00

4. Exemple de la version optimale de l'estimation $B_{k,3}^{(n,2)}(t)$:

Exemple: $s=2$

Ve optimal est donné par: $V_2(x) = x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$

avec: $\alpha_0 = \frac{d_1 d_3 - d_2^2}{\Delta}$; $\alpha_1 = \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{\Delta}$

$\Delta = d_0 d_2 - d_1^2$

où

$d_i = F(x^i P_n^e(s))$ $i=0, 1, \dots$

$B_{k,3}^{(n,2)}(t) = \underbrace{(k+2n+1 | k+2n+2)_f(t) - (k-1 | k)_f(t)}$

de polynôme générateur $\sigma_k(t) P_n^e(t) V_2(t)$

$k=2$

$n=1$

$n=2$

t	$B_{2,3}^{(1,2)}(t)$	$e^{-t} - (1 2)_f(t)$	$B_{2,3}^{(2,2)}(t)$
0.1	-0.21919816D-02	-0.21920604D-02	-0.21920604D-02
0.3	-0.15311332D-01	-0.15325447D-01	-0.15325407D-01
0.5	-0.33333213D-01	-0.33469340D-01	-0.33468318D-01
0.9	-0.67540955D-01	-0.69054597D-01	-0.69020284D-01
1.	-0.74301475D-01	-0.76565003D-01	-0.76502990D-01
1.2	-0.85001024D-01	-0.89430788D-01	-0.89263988D-01
1.5	-0.93785986D-01	-0.10340045D+00	-0.10287836D+00
2.	-0.90657458D-01	-0.11466472D+00	-0.11270775D+00
2.5	-0.69956285D-01	-0.11544587D+00	-0.11104054D+00
3.	-0.37150998D-01	-0.11021293D+00	-0.10739349D+00

$k=3$ $n=1$ $n=2$

t	$B_{3,3}^{(1,2)}(t)$	$e^{-(2 3)}(t)$	$B_{3,3}^{(2,2)}(t)$
0.1	0.339543800-04	0.339539020-04	0.339539020-04
0.3	0.773420990-03	0.773141790-03	0.773141050-03
0.5	0.303697390-02	0.303211740-02	0.303208340-02
0.9	0.129631020-01	0.128509520-01	0.128486930-01
1.	0.165096100-01	0.163169410-01	0.163123160-01
1.3	0.247089270-01	0.242262820-01	0.242109630-01
1.5	0.393812750-01	0.379449750-01	0.378918000-01
2.	0.688717330-01	0.633352830-01	0.628592190-01
2.5	0.103962530+00	0.888468320-01	0.872387540-01
3.	0.145879040+00	0.112287070+00	0.108040020+00

5. Comparaison de $B_{k,2}^{(n)}(t)$ et $B_{k,3}^{(n)}(t)$: version optimale :

Rappelons que les estimations $B_{k,2}^{(n)}(t)$ et $B_{k,3}^{(n)}(t)$ sont données par :

$$B_{k,2}^{(n)}(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{p}_n(t)} \cdot \frac{p_{h_n}}{\tilde{v}_1(t)}$$

$$B_{k,3}^{(n)}(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{t^{k+2n}}{\tilde{v}_k(t) \tilde{p}_n^2(t)} \cdot \frac{p_{h_n}}{\tilde{v}_1(t)}$$

avec : $p_{h_n} = F(x^n P_n(x))$

$v_1(x) = x + \alpha$, lorsque v_1 est optimal, $\alpha = -\frac{e_{n+1}}{p_{h_n}}$

• $U_1(x) = x + \beta$, lorsque U_1 est optimal, $\beta = -\frac{d_1}{h_n}$

• $e_i = F(x^i P_n(x)) \quad i=0,1,\dots \quad d_i = F(x^i P_n^e(x)) \quad i=0,1,\dots$

• $F\left(x^n P_n(x) \frac{V_1(x) - V_1(t)}{x - t}\right) = F\left(P_n^e(x) \frac{U_1(x) - U_1(t)}{x - t}\right) = F(x^n P_n(x)) = h_n.$

Pour comparer ces deux estimations on forme le rapport :

$$z(t) = \frac{\frac{B_{k,3}^{(n)}(t)}{E_k(t)} - 1}{\frac{B_{k,2}^{(n)}(t)}{E_k(t)} - 1} = \frac{\tilde{V}_1(t)}{\tilde{P}_n(t) \tilde{U}_1(t)} \cdot \frac{C\left(\frac{\sigma_k(x) x P_n^e(x) U_1(x)}{1 - tx}\right)}{C\left(\frac{\sigma_k(x) x^{n+1} P_n(x) V_1(x)}{1 - tx}\right)}$$

si le coefficient C_{k+n+2} est connu, on peut calculer $z(0)$:

$$z(0) = \frac{d_2 + d \cdot d_1}{e_{n+2} + \beta \cdot e_{n+1}} \quad \text{avec } d = -\frac{e_{n+1}}{h_n} \quad \text{et } \beta = -\frac{d_1}{h_n}.$$

si $|z(0)| < 1$, l'estimation $B_{k,3}^{(n)}(t)$ est meilleure que $B_{k,2}^{(n)}(t)$ au moins au voisinage de l'origine.

Exemple :

$$\boxed{k=3}$$

n = 1 : $\tau(0) = 0.20272298 \cdot 10^2$

t	$B_{3,2}^{(1)}(t)$	$e^{-t} - (2/3)_f(t)$	$B_{3,3}^{(1)}(t)$
0.100000E+00	0.339538640-04	0.339539020-04	0.339538650-04
0.300000E+00	0.773110430-03	0.773141790-03	0.773079300-03
0.500000E+00	0.303124740-02	0.303211740-02	0.303035040-02
0.900000E+00	0.128175910-01	0.128509520-01	0.127822030-01
0.100000E+01	0.162544490-01	0.163169410-01	0.161874950-01
0.120000E+01	0.240451430-01	0.242262820-01	0.238465540-01
0.150000E+01	0.373051390-01	0.379449750-01	0.365740030-01
0.200000E+01	0.603001900-01	0.633352830-01	0.565241270-01
0.250000E+01	0.792332490-01	0.888468320-01	0.659817030-01
0.300000E+01	0.883967390-01	0.112287070+00	0.513303170-01

meilleure

n = 2 : $\tau(0) = 0.55658240 \cdot 10^2$

t	$B_{3,2}^{(2)}(t)$	$e^{-t} - (2/3)_f(t)$	$B_{3,3}^{(2)}(t)$
0.100000E+00	0.339539020-04	0.339539020-04	0.339539020-04
0.300000E+00	0.773141750-03	0.773141790-03	0.773141790-03
0.500000E+00	0.303211410-02	0.303211740-02	0.303211720-02
0.900000E+00	0.128506030-01	0.128509520-01	0.128509170-01
0.100000E+01	0.163161690-01	0.163169410-01	0.163168590-01
0.120000E+01	0.242233380-01	0.242262820-01	0.242259410-01
0.150000E+01	0.379308260-01	0.379449750-01	0.379431380-01
0.200000E+01	0.632408350-01	0.633352830-01	0.633210590-01
0.250000E+01	0.884781110-01	0.888468320-01	0.887848750-01
0.300000E+01	0.111250120+00	0.112287070+00	0.112098190+00

meilleure

n = 3 : $\tau(0) = -0.23954402 \cdot 10^2$

t	$B_{3,2}^{(3)}(t)$	$e^{-t} - (2/3)_f(t)$	$B_{3,3}^{(3)}(t)$
0.100000E+00	0.339539020-04	0.339539020-04	0.339539020-04
0.300000E+00	0.773141790-03	0.773141790-03	0.773141790-03
0.500000E+00	0.303211750-02	0.303211740-02	0.303211740-02
0.900000E+00	0.128509580-01	0.128509520-01	0.128509520-01
0.100000E+01	0.163169570-01	0.163169410-01	0.163169410-01
0.120000E+01	0.242263630-01	0.242262820-01	0.242262820-01
0.150000E+01	0.379455930-01	0.379449750-01	0.379449780-01
0.200000E+01	0.633421760-01	0.633352830-01	0.633353780-01
0.250000E+01	0.888857760-01	0.888468320-01	0.888477170-01
0.300000E+01	0.112441840+00	0.112287070+00	0.112291610+00

meilleure

VI. CAS PARTICULIER D'ESTIMATIONS :

Soit $(v_k)_{k \geq 1}$ une suite de polynômes, telle que pour tout k , v_k est unitaire de degré k . On désigne par $(k-1|k)_f$ l'approximant de type-Padé de polynôme générateur v_k .

Pour $n \geq 0$, connaissant l'approximant de type-Padé $(k+n|k+n+1)_f$ de polynôme générateur v_{k+n+1} appartenant à la suite précédente, on se propose de construire une estimation de l'erreur de $(k-1|k)_f$.

Posons

$$E_k(t) = f(t) - (k-1|k)_f(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot \left(\frac{v_k(x)}{1-tx} \right)$$

Nous avons

$$E_k(t) = (k|k+1)_f(t) - (k-1|k)_f(t) + E_{k+1}(t)$$

Ainsi pour $n \geq 0$ nous obtenons :

$$E_k(t) = (k+n|k+n+1)_f(t) - (k-1|k)_f(t) + E_{k+n+1}(t)$$

où

$$E_{k+n+1}(t) = \frac{t^{k+n+1}}{\tilde{U}_{k+n+1}^{\sim}(t)} \cdot c \left(\frac{U_{k+n+1}(x)}{1-tx} \right)$$

Si l'on pose

$$R_k^{(n)}(t) = (k+n | k+n+1)_f(t) - (k-1 | k)_f(t)$$

alors

$$E_k(t) = R_k^{(n)}(t) + o(t^{k+n+1}).$$

Nous avons le

Théorème 9 : Pour $n \geq 0$, l'estimation $R_k^{(n)}(t)$ est telle que :

$$\frac{R_k^{(n)}(t)}{E_k(t)} = \frac{1-t^{n+1}}{\tilde{U}_{k+n+1}^{\sim}(t)} \cdot \frac{c \left(\frac{U_{k+n+1}(x) (1-tx)^{-1}}{1-tx} \right)}{c \left(\frac{U_k(x) (1-tx)^{-1}}{1-tx} \right)}$$

L'estimation $R_k^{(n)}(t)$ est d'ordre d'approximation $(n+1)$; son calcul nécessite la connaissance des coefficients c_0, c_1, \dots, c_{k+n} .

• Remarques :

- $R_k^{(n)}(t)$ peut être comparé à n'importe quelle autre estimation $E_k^{(n)}(t)$:

$$\bar{E}_k(t) = E_k^{(n)}(t) + o(t^{k+n+1}).$$

- Autre point d'intérêt qui consisterait à améliorer l'ordre d'approximation en estimant l'erreur $E_{k+n+1}(t)$ par les méthodes étudiées dans les paragraphes II et III, quitte à remplacer k par $k+n+1$.

Cas particulier :

Pour $n \geq 0$, on suppose que :

$$v_{k+n+1}(x) = v_k(x) u(x)$$

où

$U(x)$ polynôme de degré $n+1$ satisfaisant le système :

$$c(x^i v_k(x) U(x)) = 0 \quad i = 0, \dots, n.$$

Alors $R_k^{(n)}(t)$ est exactement la version optimale de la procédure étudiée dans le paragraphe II. i.e :

$$R_k^{(n)}(t) = e_k^{(n+1)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{Q}_{n+1}(t)}{\tilde{P}_{n+1}(t)}.$$

En effet

$$R_k^{(n)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot c \left(\frac{v_k(x)}{1-tx} \left(1 - \frac{U(x)}{U(t^{-1})} \right) \right) = \frac{t^k}{\tilde{v}_k(t)} \cdot [n|n+1]_g(t)$$

où

$$g(t) = c \left(\frac{v_k(x)}{1-tx} \right) = F \left((1-tx)^{-1} \right) \quad (\text{voir paragraphes II et III}). \blacksquare$$

Exemples numériques :

• $R_k^{(n)}(t) = (k+n | k+n+1)_f(t) - (k-1 | k)_f(t)$

• $(v_k)_{k=1} ; v_k(t) = (t + \frac{1}{k})^k$

• Application du Δ^2 d'Aitken à la suite $(R_k^{(n)}(t))_{n \geq 0}$.

$k=1$

t	$e^{-t} - (0 1)_f(t)$	$R_1^{(0)}(t)$	$R_1^{(1)}(t)$	$R_1^{(2)}(t)$
0.1	-0.42534911D-02	-0.20614306D-02	-0.42874450D-02	-0.42538286D-02
0.3	-0.28412549D-01	-0.13087102D-01	-0.29185690D-01	-0.28433045D-01
0.5	-0.60136007D-01	-0.26666667D-01	-0.63168124D-01	-0.60255042D-01
0.9	-0.11974613D+00	-0.50691533D-01	-0.13259708D+00	-0.12045963D+00
1.	-0.13212056D+00	-0.55555556D-01	-0.14843750D+00	-0.13306667D+00
1.2	-0.15335124D+00	-0.63920455D-01	-0.17757752D+00	-0.15483606D+00
1.5	-0.17686984D+00	-0.73469388D-01	-0.21481481D+00	-0.17925005D+00
2.	-0.19799805D+00	-0.83333333D-01	-0.26133333D+00	-0.20164609D+00
2.5	-0.20362929D+00	-0.88183422D-01	-0.29247612D+00	-0.20765913D+00
3.	-0.20021293D+00	-0.90000000D-01	-0.31250000D+00	-0.20335277D+00

$k=2$

t	$e^{-t} - (1 2)_f(t)$	$R_2^{(0)}(t)$	$R_2^{(1)}(t)$	$R_2^{(2)}(t)$
0.1	-0.21920604D-02	-0.22260143D-02	-0.21923980D-02	-0.21920513D-02
0.3	-0.15325447D-01	-0.16098588D-01	-0.15345943D-01	-0.15323647D-01
0.5	-0.33469340D-01	-0.36501458D-01	-0.33588376D-01	-0.33450418D-01
0.9	-0.69054597D-01	-0.81905550D-01	-0.69768096D-01	-0.68811823D-01
1.	-0.76565003D-01	-0.92881944D-01	-0.77511111D-01	-0.76190629D-01
1.2	-0.89430788D-01	-0.11365707D+00	-0.90915606D-01	-0.88655689D-01
1.5	-0.10340045D+00	-0.14134543D+00	-0.10578066D+00	-0.10159034D+00
2.	-0.11466472D+00	-0.17800000D+00	-0.11831276D+00	-0.10968148D+00
2.5	-0.11544567D+00	-0.20429270D+00	-0.11947571D+00	-0.10528121D+00
3.	-0.11021293D+00	-0.22250000D+00	-0.11335277D+00	-0.92956696D-01

$k=1$

$n=0$

t	$R_1^{(2)}(t)$	$e^{-t} - (0 1)_f^{(2)}(t)$	$\Delta_1^{(0)}(t)$
0.1	-0.42538286E-02	-0.42534911E-02	-0.42543287E-02
0.3	-0.28433045E-01	-0.28412549E-01	-0.28466661E-01
0.5	-0.60255042E-01	-0.60136007E-01	-0.60470345E-01
0.9	-0.12045963E+00	-0.11974613E+00	-0.12202612E+00
1.	-0.13306667E+00	-0.13212056E+00	-0.13524917E+00
1.2	-0.15483606E+00	-0.15335124E+00	-0.15862770E+00
1.5	-0.17925005E+00	-0.17686984E+00	-0.18639974E+00
2.	-0.20164609E+00	-0.19799805E+00	-0.21663456E+00
2.5	-0.20765913E+00	-0.20362929E+00	-0.23254215E+00
3.	-0.20335277E+00	-0.20021293E+00	-0.23927382E+00

$n=1$

t	$R_1^{(3)}(t)$	$e^{-t} - (0 1)_f^{(3)}(t)$	$\Delta_1^{(1)}(t)$
0.1	-0.42534819E-02	-0.42534911E-02	-0.42534783E-02
0.3	-0.28410749E-01	-0.28412549E-01	-0.28410068E-01
0.5	-0.60117085E-01	-0.60136007E-01	-0.60110227E-01
0.9	-0.11950336E+00	-0.11974613E+00	-0.11942157E+00
1.	-0.13174618E+00	-0.13212056E+00	-0.13162208E+00
1.2	-0.15257614E+00	-0.15335124E+00	-0.15232679E+00
1.5	-0.17505972E+00	-0.17686984E+00	-0.17450007E+00
2.	-0.19301482E+00	-0.19799805E+00	-0.19155565E+00
2.5	-0.19346463E+00	-0.20362929E+00	-0.19061166E+00
3.	-0.18295670E+00	-0.20021293E+00	-0.17826943E+00

$n=2$

t	$R_1^{(4)}(t)$	$e^{-t} - (0 1)_f^{(4)}(t)$	$\Delta_1^{(2)}(t)$
0.1	-0.42534911E-02	-0.42534911E-02	-0.42534908E-02
0.3	-0.28412562E-01	-0.28412549E-01	-0.28412426E-01
0.5	-0.60136265E-01	-0.60136007E-01	-0.60133924E-01
0.9	-0.11975308E+00	-0.11974613E+00	-0.11970137E+00
1.	-0.13213287E+00	-0.13212056E+00	-0.13204528E+00
1.2	-0.15338376E+00	-0.15335124E+00	-0.15317113E+00
1.5	-0.17697280E+00	-0.17686984E+00	-0.17637316E+00
2.	-0.19842122E+00	-0.19799805E+00	-0.19633902E+00
2.5	-0.20481202E+00	-0.20362929E+00	-0.19977076E+00
3.	-0.20281207E+00	-0.20021293E+00	-0.19301774E+00

$$k=2$$

$$n=0$$

t	$R_2^{(2)}(t)$	$e^{-t} - (1/2)_f(t)$	$\Delta_2^{(0)}(t)$
0.1	-0.21920513D-02	-0.21920604D-02	-0.21920477D-02
0.3	-0.15323647D-01	-0.15325447D-01	-0.15322966D-01
0.5	-0.33450418D-01	-0.33469340D-01	-0.33443560D-01
0.9	-0.68811823D-01	-0.69054597D-01	-0.68730038D-01
1.	-0.76190629D-01	-0.76565003D-01	-0.76066528D-01
1.2	-0.88655689D-01	-0.89430788D-01	-0.88406332D-01
1.5	-0.10159034D+00	-0.10340045D+00	-0.10103068D+00
2.	-0.10968148D+00	-0.11466472D+00	-0.10822232D+00
2.5	-0.10528121D+00	-0.11544587D+00	-0.10242824D+00
3.	-0.92956696D-01	-0.11021293D+00	-0.88269434D-01

$$n=1$$

t	$R_2^{(3)}(t)$	$e^{-t} - (1/2)_f(t)$	$\Delta_2^{(1)}(t)$
0.1	-0.21920604D-02	-0.21920604D-02	-0.21920602D-02
0.3	-0.15325460D-01	-0.15325447D-01	-0.15325324D-01
0.5	-0.33469599D-01	-0.33469340D-01	-0.33467258D-01
0.9	-0.69061548D-01	-0.69054597D-01	-0.69009838D-01
1.	-0.76577314D-01	-0.76565003D-01	-0.76489727D-01
1.2	-0.89463306D-01	-0.89430788D-01	-0.89250677D-01
1.5	-0.10350341D+00	-0.10340045D+00	-0.10290377D+00
2.	-0.11508789D+00	-0.11466472D+00	-0.11300569D+00
2.5	-0.11662860D+00	-0.11544587D+00	-0.11158734D+00
3.	-0.11281207D+00	-0.11021293D+00	-0.10301774D+00

VII. APPLICATION DE LA PROCÉDURE- θ A L'APPROXIMATION DE TYPE

PADÉ .

Dans ce paragraphe nous donnerons quelques exemples d'application des résultats développés dans le chapitre II concernant la procédure- θ , à l'estimation de l'erreur dans l'approximation de type-Padé.

EXEMPLE 1 : Application de la procédure- θ à la suite $(R_k^{(n)}(t))_k$:

Considérons la suite $(R_k^{(n)}(t))$ étudiée au paragraphe VI.

Fixons $n=0$. Alors $R_k^{(0)}(t) = (k|k+1)_f(t) - (k-1|k)_f(t)$.

Pour une valeur de t fixée, l'application de la procédure- θ à la suite

$(R_k^{(0)}(t))_k$ donne :

$$\theta_k^{(0)}(t) = - \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta R_k^{(0)}(t)} \cdot R_k^{(0)}(t)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} S_k(t) = (k-1|k)_f(t) \\ \Delta S_k(t) = (k|k+1)_f(t) - (k-1|k)_f(t) = R_k^{(0)}(t) \\ \Delta R_k^{(0)}(t) = R_{k+1}^{(0)}(t) - R_k^{(0)}(t) = \Delta^2 S_k(t) \end{array} \right.$$

D'où

$$\theta_k^{(1)}(t) = - \frac{(\Delta S_k(t))^2}{\Delta^2 S_k(t)}$$

et la transformation $S_k(t) \mapsto S_k(t) + \theta_k^{(1)}(t)$ n'est autre que le Δ^2

d'Aitken appliqué à la suite $(S_k(t))_k$, t étant fixé.

.

• Exemples numériques :

$$\theta_k^{(0)}(t) = - \frac{(k|k+1)_f(t) - (k-1|k)_f(t)}{R_{k+1}^{(0)}(t) - R_k^{(0)}(t)} \cdot R_k^{(0)}(t)$$

• Une valeur de t voisine de l'origine : t = 0.5

k	$e^{-k} - (k-1 k)_f(t)$	$\theta_k^{(0)}(t)$
1	-0.601360070-01	0.723056650-01
2	-0.334693400-01	-0.338036780-01
3	0.303211740-02	0.305789750-02
4	0.119035470-03	0.121118250-03
5	-0.189218900-04	-0.189589120-04
6	0.258364660-06	0.266442250-06
7	0.344380310-07	0.344974260-07
8	-0.129346440-08	-0.129532640-08
9	-0.152486910-10	-0.153788100-10
10	0.163591360-11	0.163696350-11

. Une valeur de t loin de l'origine : $t = 3$.

k	$\tilde{e}^k - (k+1)k_f(t)$	$\theta_k^{(0)}(t)$
1	-0.200212930+00	0.611320750-01
2	-0.110212930+00	-0.149273820+00
3	0.112287070+00	0.134230570+00
4	0.313983800-02	0.103350270-01
5	-0.172562360-01	-0.182712400-01
6	0.259913970-02	0.512238380-02
7	0.877657120-03	0.931380210-03
8	-0.265285790-03	-0.276328200-03
9	-0.566669790-05	-0.926104670-05
10	0.100320380-04	0.102363540-04
11	-0.880722310-06	-0.983083490-06
12	-0.159619780-06	-0.164417450-06
13	0.325461260-07	0.330707200-07
14	0.114607410-09	0.334297610-09
15	-0.512239980-09	-0.517683710-09
16	0.363253180-10	0.375784250-10
17	0.360153570-11	0.367862550-11
18	-0.625950680-12	-0.630807910-12

Exemple 2:

Considérons l'estimation $(e_k^{(n)}(t))$ donnée par:

$$e_k^{(n)}(t) = \frac{t^k}{\tilde{g}_k(t)} \cdot \frac{\tilde{\Phi}_n(t)}{\tilde{P}_n(t)} = (k+n-1 | k+n)_f(t) - (k-1 | k)_f(t)$$

où

$(k+n-1 | k+n+1)_f(t)$ est de polynôme générateur $\mathcal{G}(x) = \mathcal{G}_k(x) \tilde{P}_n(x)$.

Si l'on pose:

$$T_k^{(n)}(t) = (k+n-1 | k+n)_f(t)$$

Alors:

Pour $n \geq 1$ et t tous deux fixés, nous obtenons:

$$\Delta e_k^{(n)}(t) = e_{k+1}^{(n)}(t) - e_k^{(n)}(t) = T_{k+1}^{(n)}(t) - (k | k+1)_f(t) -$$

$$(T_k^{(n)}(t) - (k-1 | k)_f(t))$$

d'où

$$\Delta e_k^{(n)}(t) = \Delta T_k^{(n)}(t) - \Delta S_k(t), \text{ avec } S_k(t) = (k-1 | k)_f(t).$$

Par conséquent:

$$\Theta_k^{(n)}(t) = - \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta e_k^{(n)}(t)} \cdot e_k^{(n)}(t)$$

$$= - \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta T_k^{(n)}(t) - \Delta S_k(t)} \cdot (T_k^{(n)}(t) - S_k(t))$$

ou

$$\theta_k^{(n)}(t) = S_k(t) \cdot \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta T_k^{(n)}(t) - \Delta S_k(t)} - T_k^{(n)}(t) \cdot \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta T_k^{(n)}(t) - \Delta S_k(t)}$$

Il en résulte que la transformation $T: (S_k(t)) \mapsto (T_k^{(n)}(t))$

est remplacée par la transformation:

$$(S_k(t)) \mapsto (\theta_k^{(n)}(t) + S_k(t)) \quad \text{ou}$$

$$S_k(t) + \theta_k^{(n)}(t) = S_k(t) \cdot \frac{\Delta T_k^{(n)}(t)}{\Delta T_k^{(n)}(t) - \Delta S_k(t)} - T_k^{(n)}(t) \cdot \frac{\Delta S_k(t)}{\Delta T_k^{(n)}(t) - \Delta S_k(t)}$$

Remarque :

Cette technique peut être étendue à toutes les estimations

faisant intervenir un approximant type-Padé, ce qui est le cas des

estimations étudiées aux paragraphes précédents.

EXEMPLES NUMÉRIQUES

$$t = 0.5$$

k	$e^{-t} \cdot (k-1/k)_f^{(t)}$	$\theta_k^{(1)}(t)$
2	-0.334693400-01	-0.334659930-01
3	0.303211740-02	0.303363500-02
4	0.119035470-03	0.119559890-03
5	-0.189218900-04	-0.188976660-04
6	0.258364660-06	0.254924400-06
7	0.344380310-07	0.344384890-07
8	-0.129346440-08	-0.129369430-08
9	-0.152486910-10	-0.152735600-10
10	0.163591360-11	0.163577490-11
11	-0.173194790-13	-0.172739210-13
12	-0.888178420-15	-0.864334330-15

$$t = 1.5$$

k	$e^{-t} \cdot (k-1/k)_f^{(t)}$	$\theta_k^{(1)}(t)$
2	-0.103400450+00	-0.103001200+00
3	0.379449750-01	0.382990260-01
4	0.238021140-02	0.265562990-02
5	-0.181011610-02	-0.161681530-02
6	0.102960150-03	0.826111690-04
7	0.270465530-04	0.270555490-04
8	-0.347451400-05	-0.348647150-05
9	-0.832357440-07	-0.868977820-07
10	0.367509500-07	0.366418520-07
11	-0.136060840-08	-0.134718580-08
12	-0.162146380-09	-0.162220140-09
13	0.146693770-10	0.146962640-10
14	0.106747940-12	0.115365640-12
15	-0.620059560-13	-0.620008340-13
16	0.199940140-14	0.200665230-14
17	0.111022300-15	0.154489170-15

$$t = 3.$$

k	$e^{-k} - (k-1)k_f(t)$	$\theta_k^{(4)}(t)$
2	-0.110212930+00	-0.105394740+00
3	0.112287070+00	0.117398360+00
4	0.313983800-02	0.854244010-02
5	-0.172562360-01	-0.223567260-01
6	0.259913970-02	0.118773420-02
7	0.877657120-03	0.879578180-03
8	-0.265285790-03	-0.270100950-03
9	-0.566669790-05	-0.817921790-05
10	0.100320380-04	0.973261130-05
11	-0.890722310-06	-0.831823980-06
12	-0.159619780-06	-0.160156840-06
13	0.325461260-07	0.328703260-07
14	0.114607410-09	0.289999060-09
15	-0.512239980-09	-0.509886760-09
16	0.363253180-10	0.361379300-10
17	0.360153570-11	0.361397180-11
18	-0.625950680-12	-0.631441490-12
19	0.480171460-14	-0.658181940-17

CHAPITRE IV

ESTIMATION DE L'ERREUR DES
APPROXIMANTS DE PADE' D'UNE
SERIE DE STIELTJES

I. Introduction :

Une série de Stieltjes est une série formelle $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$$

où : $c_i = \int_0^{\infty} x^i d\alpha(x)$, $i = 0, 1, \dots$

avec α réelle , bornée , non décroissante et prenant une infinité

de valeurs distinctes pour $x \geq 0$.

Nous avons , formellement :

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{d\alpha(x)}{1-tx} = c \left(\frac{1}{1-tx} \right) .$$

La suite $(c_i)_{i \geq 0}$ est appelée suite des moments de Stieltjes .

si la série $f(t)$ a un rayon de convergence $R > 0$, α est constante

pour $x > \frac{1}{R}$ et $f(t) = \int_0^{1/R} \frac{d\alpha(x)}{1-tx}$ est analytique dans tout

le plan complexe coupé selon le segment $[R, +\infty[$.

Rappel de quelques Résultats Sur les approximants de Padé

de $f(t)$:

Théorème 1, [4]

La table de Padé d'une série de Stieltjes non rationnelle, est normale.

Théorème 2, [39]

La suite $([k-1/k]_f(t))_{k \geq 1}$, des approximants de Padé de $f(t)$, converge uniformément vers une fonction analytique sur tout compact du plan complexe coupé selon le segment $[R, \infty[$.

Si la condition de Carleman, $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{c_i}\right)^{\frac{1}{2i}} = \infty$,

est satisfaite, cette limite est $f(t)$. En particulier,

si $f(t)$ a un rayon de convergence $R > 0$, la

condition $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{c_i}\right)^{\frac{1}{2i}} = \infty$ est satisfaite.

II. ESTIMATION DE L'ERREUR PAR L'∞-APPROXIMATION DE LA

Fonction GÉNÉRATRICE:

Dans ce paragraphe nous étudions l'estimation de l'erreur de $[k-1]_f$,

obtenue en remplaçant la fonction $x \mapsto (1-tx)^{-1}$ par son polynôme de

meilleure approximation sur $[0, \frac{1}{R}]$, R étant le rayon de convergence

de la série $f(t)$. Pour cela nous allons nous ramener à l'intervalle

standard d'intégration $[-1, 1]$ par l'application τ :

$$\begin{array}{ccc} [0, \frac{1}{R}] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & [-1, 1] \\ x & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \tau(x) = 2xR - 1 = X \end{array}$$

D'où :

$$f(t) = \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{d\alpha(x)}{1-tx} = 2Rt^{-1} \int_{-1}^1 \frac{d\beta(x)}{\varphi - X}$$

avec :

$$\varphi = \varphi(t) = \tau(t^{-1}) = 2Rt^{-1} - 1.$$

Pour $t \in [R, +\infty[$ on a $\varphi \in [-1, 1]$

$$d\alpha(x) = d\alpha(\tau^{-1}(x)) = d\beta(x).$$

ce qui donne : pour $t \in]-\infty, R[$

$$f(t) = (1+\varphi) \int_{-1}^1 \frac{d\beta(x)}{\varphi-x}$$

. Pour $t \in]0, R[$: $\varphi = \varphi(t) > 1$

. Pour $t \in]-\infty, 0[$: $\varphi = \varphi(t) < -1$

donc , $\forall t \in]-\infty, R[$, nous avons $|\varphi| > 1$.

Posons

$$\Psi = \varphi(t) = \varphi - \text{sign}(\varphi) \sqrt{\varphi^2 - 1}$$

il en résulte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{t}{R}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{t}{R}}} \quad , \quad t \in]0, R[\\ \text{ou} \\ \varphi = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{t}{R}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{t}{R}}} \quad , \quad t \in]-\infty, 0[\end{array} \right.$$

. $t \in]0, R[$, on a : $0 < \varphi < 1$

. $t \in]-\infty, 0[$, on a : $-1 < \varphi < 0$

donc , $\forall t \in]-\infty, R[$, $|\Psi| = |\varphi(t)| < 1$.

soit $(P_k)_k$ la suite des polynômes orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$, par rapport à la distribution $d\beta$.

si $[k-1 | k]_f$ est l'approximant de Padé de f , l'expression de l'erreur est donnée par :

$$f(t) - [k-1 | k]_f(t) = \frac{(1+\varphi)}{P_k(\varphi)} \int_{-1}^1 \frac{P_k(x)}{\varphi-x} d\beta(x), \quad [30].$$

Comme pour les approximants de Padé d'une série formelle quelconque,

l'erreur ci-dessus peut être estimée par différentes méthodes,

notamment par la méthode obtenue en remplaçant la fonction

$x \longmapsto (x-\varphi)^{-1}$, par son polynôme de meilleure approximation

sur $[-1, 1]$, ce polynôme est donné par

$$P(x) = \frac{1}{x-\varphi} \left(1 - \frac{V_{n+1}(x)}{V_{n+1}(\varphi)} \right) \quad [30]$$

où la suite $(V_{n+1})_n$ est donnée par la relation

de récurrence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{n+1}(x) = 2x V_n(x) - V_{n-1}(x) \quad , \quad n \geq 2 \\ V_1(x) = \psi x - 1 \\ V_2(x) = \frac{x^2}{\psi} - x + (\psi - \varphi) \end{array} \right.$$

Nous avons également :

$$V_{n+1}(x) = \frac{1}{2\psi} T_{n+1}(x) - T_n(x) + \frac{\psi}{2} T_{n-1}(x)$$

où T_n est le polynôme de Tchebychev de 1^{ère} espèce, de degré n , et

de coefficient de tête 2^{n-1} , [25].

En remplaçant, dans l'expression de l'erreur de $[k-1|k]_f$, la

fonction $x \mapsto (x-\varphi)^{-1}$ par son polynôme de meilleure approximation P_k

nous obtenons l'estimation de l'erreur suivante :

$$e_k^{(n)}(t) = \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi)} \cdot \int_{-1}^1 \frac{P_k(x)}{\varphi-x} \left(1 - \frac{V_{n+1}(x)}{V_{n+1}(\varphi)} \right) d\beta(x)$$

$$= \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi)} \cdot \frac{W_{n+1}(\varphi)}{V_{n+1}(\varphi)} \quad , \quad \text{avec} \quad W_{n+1}(\varphi) = \int_{-1}^1 P_k(x) \frac{V_{n+1}(x) - V_{n+1}(\varphi)}{x-\varphi}$$

Nous avons :

$$f(t) = (1+\varphi) \int_{-1}^1 \frac{d\beta(x)}{\varphi-x}$$

Si l'on considère l'approximant de type - Padé $(n+k | n+k+1)_f$ de $f(t)$, de

polynôme générateur $P_k V_{n+1}$, alors :

$$\begin{aligned} (k+n | k+n+1)_f(t) &= (1+\varphi) \int_{-1}^1 \frac{d\beta(x)}{\varphi-x} \left(1 - \frac{V_{n+1}(x) P_k(x)}{V_{n+1}(\varphi) P_k(\varphi)} \right) \\ &= \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi) V_{n+1}(\varphi)} \int_{-1}^1 \frac{P_k(x) V_{n+1}(x) - P_k(\varphi) V_{n+1}(\varphi)}{x-\varphi} d\beta(x) \\ &= \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi) V_{n+1}(\varphi)} \left[\int_{-1}^1 P_k(x) \cdot \frac{V_{n+1}(x) - V_{n+1}(\varphi)}{x-\varphi} d\beta(x) + \right. \\ &\quad \left. V_{n+1}(\varphi) \int_{-1}^1 \frac{P_k(x) - P_k(\varphi)}{x-\varphi} d\beta(x) \right] \\ &= \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi) V_{n+1}(\varphi)} \cdot \frac{W_{n+1}(\varphi)}{V_{n+1}(\varphi)} + (1+\varphi) \cdot \frac{\Phi_k(\varphi)}{P_k(\varphi)} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{e_k^{(n)}(t)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{[k-1 | k]_f(t)} \end{aligned}$$

d'où :

$$e_k^{(n)}(t) = (n+k | n+k+1)_f(t) - [k-1 | k]_f(t) \cdot$$

Le polynôme $\frac{V_{n+1}(x) - V_{n+1}(\psi)}{x - \psi}$ est de degré n en x . Par l'orthogonalité

de P_k , W_{n+1} est identiquement nul pour $n \leq k-1$, et par conséquent

$(n+k | k+n+1)_\psi$ est identique à $[k-1 | k]_\psi$. Pour la même raison, pour

$n \geq k$, W_{n+1} est de degré $n-k$ en x . Ainsi la plus petite valeur possible de

est k .

Le coefficient de tête de V_{n+1} étant $\frac{e^n}{e\psi} = \frac{e^{n-1}}{\psi}$, il en résulte que

pour le cas $n=k$, nous obtenons l'estimation:

$$e_k^{(k)}(\psi) = \frac{1+\psi}{\psi} \cdot \frac{e^{k-1} h_k}{P_k(\psi) V_{k+1}(\psi)}, \quad \text{avec } h_k = \int_{-1}^1 x^k P_k(x) d\beta(x)$$

Car :

$$W_{k+1}(\psi) = \int_{-1}^1 P_k(x) \cdot \frac{V_{k+1}(x) - V_{k+1}(\psi)}{x - \psi} \cdot d\beta(x) = \frac{e^{k-1}}{\psi} \cdot h_k$$

où P_k est supposé unitaire, $k \geq 1$.

Lemme 1: La suite $(W_n)_n$ suit une relation de récurrence à trois

termes:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{n+1}(\varphi) = 2\varphi W_n(\varphi) - W_{n-1}(\varphi) + 2 \int_{-1}^1 P_k(x) V_n(x) d\beta(x) \\ n \geq k \end{array} \right.$$

Preuve: Il suffit d'écrire, grâce à la relation de récurrence

satisfaite par la suite (V_n) , que:

$$V_{n+1}(x) - V_{n+1}(\varphi) = 2(x - \varphi)V_n(x) + 2\varphi(V_n(x) - V_n(\varphi)) + (V_{n-1}(\varphi) - V_{n-1}(x)) .$$

d'où :

$$\begin{aligned} W_{n+1}(\varphi) &= \int_{-1}^1 P_k(x) \frac{V_{n+1}(x) - V_{n+1}(\varphi)}{x - \varphi} d\beta(x) \\ &= 2 \int_{-1}^1 P_k(x) V_n(x) d\beta(x) + 2\varphi \int_{-1}^1 P_k(x) \frac{V_n(x) - V_n(\varphi)}{x - \varphi} d\beta(x) \\ &\quad + \int_{-1}^1 P_k(x) \frac{V_{n-1}(\varphi) - V_{n-1}(x)}{x - \varphi} d\beta(x) \end{aligned}$$

$$W_{n+1}(\varphi) = 2\varphi W_n(\varphi) - W_{n-1}(\varphi) + 2 \int_{-1}^1 P_k(x) V_n(x) d\beta(x) \quad \blacksquare$$

Nous avons également le :

Lemme 2 : La suite d'estimations $(e_k^{(n)}(t))_n, t \in]-\infty, R[$,
 suit la relation :

$$e_k^{(n+1)}(t) = 2\varphi e_k^{(n)}(t) - \varphi^2 e_k^{(n-1)}(t) + \frac{2\varphi(1+\varphi)}{P_k(\varphi)V_{n+1}(\varphi)} \cdot \int_{-1}^1 P_k(x) V_{n+1}(x) d\beta(x)$$

$n \geq k-1.$

Preuve : Nous avons :

$$e_k^{(n+1)}(t) = \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi)} \cdot \frac{W_{n+2}(\varphi)}{V_{n+2}(\varphi)}$$

En utilisant le lemme 1, on obtient :

$$e_k^{(n)}(t) = \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi)} \left[2\varphi \cdot \frac{W_{n+1}(\varphi)}{V_{n+1}(\varphi)} \cdot \frac{V_{n+1}(\varphi)}{V_{n+2}(\varphi)} - \frac{W_n(\varphi)}{V_n(\varphi)} \cdot \frac{V_n(\varphi)}{V_{n+2}(\varphi)} + 2 \cdot \frac{V_{n+1}(\varphi)}{V_{n+2}(\varphi)} \cdot \frac{1}{V_{n+1}(\varphi)} \cdot \int_{-1}^1 P_k(x) V_{n+1}(x) d\beta(x) \right]$$

Comme $V_n(\varphi) = \frac{\varphi^n - 1}{\varphi^{n-1}}$,

alors :

$$e_k^{(n+1)}(t) = \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi)} \cdot \left[2\varphi\psi \cdot \frac{W_{n+1}(\varphi)}{V_{n+1}(\varphi)} - \psi^2 \cdot \frac{W_n(\varphi)}{V_n(\varphi)} + \frac{2\varphi}{V_{n+1}(\varphi)} \cdot \int_{-1}^1 P_k(x) V_{n+1}(x) d\rho(x) \right]$$

$$= 2\varphi\psi \cdot \underbrace{\frac{(1+\varphi) W_{n+1}(\varphi)}{P_k(\varphi) V_{n+1}(\varphi)}}_{e_k^{(n)}(t)} - \psi^2 \cdot \underbrace{\frac{(1+\varphi) W_n(\varphi)}{P_k(\varphi) V_n(\varphi)}}_{e_k^{(n-1)}(t)} + 2\varphi \cdot \frac{(1+\varphi)}{P_k(\varphi) V_{n+1}(\varphi)} \cdot \int_{-1}^1 P_k(x) V_{n+1}(x) d\rho(x)$$

d'où la relation cherchée avec $e_k^{(n)}(t) \equiv 0$, $n \leq k-1$ ■

Maintenant, puisque V_{n+1} vérifie les inégalités suivantes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| V_{n+1}(x) \right|^{1/n} \leq 1, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| V_{n+1}(x) \right|^{1/n} \geq \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right|, \quad \forall |x| > 1$$

nous pouvons énoncer le:

Théorème 3: Pour $k \geq 1$ fixe, si $e_k^{(n)}(t)$ est l'estimation obtenue en remplaçant $(x-\varphi)^{-1}$ par son polynôme de meilleure approximation sur $[-1, 1]$, alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| E_k(t) - e_k^{(n)}(t) \right|^{1/n} \leq |\varphi| (< 1).$$

Preuve :

$$E_k(t) - e_k^{(n)}(t) = \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi) V_{n+1}(\varphi)} \int_{-1}^1 \frac{P_k(x) V_{n+1}(x)}{\varphi - x} d\beta(x)$$

et

$$\left| E_k(t) - e_k^{(n)}(t) \right| \leq \frac{|1+\varphi|}{|P_k(\varphi)| |V_{n+1}(\varphi)|} \cdot M \cdot \sup_{-1 \leq x \leq 1} |V_{n+1}(x)|$$

où

$$M = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{\varphi - x} \right| \cdot \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P_k(x)| \cdot \int_{-1}^1 d\beta(x)$$

Le polynôme V_{n+1} satisfait les conditions du théorème principal de

[28,30], ce qui donne:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| E_k(t) - e_k^{(n)}(t) \right|^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sup_{-1 \leq x \leq 1} |V_{n+1}(x)| \right|^{1/n} \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{V_{n+1}(\varphi)} \right|^{1/n}$$

où

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{V_{n+1}(\varphi)} \right|^{1/n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |V_{n+1}(\varphi)|^{1/n}} \leq \frac{1}{|\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 1}|} = |\varphi|$$

pour tout $t \in]-\infty, R[$. ■

Théorème 4 : Pour $k \geq 1$ fixé, la suite d'estimations $(E_k^{(n)}(t))_n$ converge vers l'erreur $E_k(t)$ uniformément sur tout compact de $] -\infty, R [$.

Preuve :

Ce résultat peut être démontré à partir du théorème 2.6 de [28], ou en utilisant le corollaire 5 de [17].

En effet, pour cette dernière méthode, posons :

$$\sigma(x, y) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{V_{n+1}(x)}{V_{n+1}(y^{-2})} \right|^{\frac{1}{n}}.$$

Le polynôme V_{n+1} n'a aucune racine à l'extérieur de l'intervalle $[-1, 1]$,

donc σ est continue sur $\Lambda = \{ (x, y) \mid |y| < 1 \}$ un ouvert

contenant le plan $\{ (x, 0) : x \in \mathbb{C} \}$.

D'autre part nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| V_{n+1}(x) \right|^{\frac{1}{n}} \leq 1, \quad |x| \leq 1 \\ \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| V_{n+1}(x) \right|^{\frac{1}{n}} \geq \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right|, \quad |x| > 1. \end{array} \right.$$

Pour k fixe, posons : $g(\varphi) = \int_{-1}^1 \frac{P_k(x)}{\varphi-x} d\beta(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_i}{\varphi^{i+1}}$

avec : $h_i = \int_{-1}^1 x^i P_k(x) d\beta(x)$, $i=0, 1, 2, \dots$

si l'on considère l'approximant de type-Padé deg, de polynôme générateur

V_{n+1} , tel que :

$$h(P) = \int_{-1}^1 \frac{P_k(x)}{\varphi-x} \cdot \left(1 - \frac{V_{n+1}(x)}{V_{n+1}(\varphi)} \right) d\beta(x)$$

où :

$$P(x) = \frac{1}{\varphi-x} \left(1 - \frac{V_{n+1}(x)}{V_{n+1}(\varphi)} \right)$$

alors :

$$E_k(t) - e_k^{(n)}(t) = \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi)} \cdot \left(g(\varphi) - h(P) \right)$$

Puisque pour tout $t \in]-\infty, R[$, on a $|\varphi| > 1$, donc :

$$\sigma(x, \varphi^{-1}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{V_{n+1}(x)}{V_{n+1}(\varphi)} \right|^{1/n} \leq \frac{1}{|\sqrt{\varphi^2 - 1} + \varphi|} = |\varphi|^{-1} (< 1)$$

pour tout $|\varphi| > 1$ et $|x| \leq 1$.

si $D = \{ \psi : |\psi| > 1 \}$

le corollaire 5 [17] permet de conclure, à savoir que $(h(P))$

converge vers $g(\psi)$ sur D . Cette convergence est uniforme et géométrique

sur tout compact de D . D'où le résultat cherché car si t parcourt

un compact K de $] -\infty, R[$, ψ parcourt un compact K' de D . ■

Ainsi les théorèmes 3 et 4 signifient que, pour $t \in] -\infty, R[$,

la suite d'estimations $(e_k^{(n)}(t))_{n \geq k}$ converge uniformément vers

l'erreur $E_k(t)$, $k \geq 1$, aux moins aussi vite que la série géométrique

de rapport $|\psi| = |\psi(t)|$.

III. Exemples Numériques :

Considérons l'exemple :

$$f(t) = -t^{-1} \text{Log}(1-t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i, \quad c_i = \frac{1}{i+1} = \int_0^1 x^i dx.$$

Dans ce paragraphe, nous allons comparer l'estimation étudiée dans le paragraphe II, à la procédure de Kronrod utilisée dans [6] pour estimer l'erreur de $[k-1|k]_f$. Celle-ci est donnée par l'expression :

$$PK = \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi)} \cdot \frac{h_k}{V_{k+1}(\varphi)}, \quad h_k = \int_{-1}^1 x^k P_k(x) d\beta(x)$$

où :

V_{k+1} est le polynôme de Stieltjes associé à P_k par rapport à la distribution $d\beta$ sur $[-1, 1]$, [29].

Nous avons :

$$e_k^{(n)}(t) = \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi)} \cdot \frac{W_{n+1}(\varphi)}{V_{n+1}(\varphi)}$$

si l'on pose :

$$e_i = \int_{-1}^1 x^i d\beta(x),$$

le calcul de la P.K nécessite la connaissance de e_0, \dots, e_{3k+1} , tandis que celui de $e_k^{(n)}(t)$ en utilise e_0, \dots, e_k .

III. 1. Comparison de $e_k^{(n)}(t)$, $n = k$ et la procédure de Kronrod:

Pour $k = m$, nous avons:

$$e_k^{(k)}(t) = E.N.A = \frac{1+\varphi}{\varphi} \cdot \frac{e^{-k-1} P_k}{P_k(\varphi) V_{k+1}(\varphi)}$$

• Résultats numériques:

k	P_k	$f(t) = [0,1]_{\frac{1}{\varphi}}$	E.N.A
-7	0.703416590-01	0.749403650-01	0.113425930+00
-5	0.700280110-01	0.726375680-01	0.992063490-01
-3	0.612244900-01	0.620981200-01	0.750000000-01
-2	0.490196080-01	0.493051440-01	0.555555560-01
-1	0.264550260-01	0.26468140-01	0.27777780-01
-0,9	0.234991040-01	0.235152120-01	0.245609070-01
-0,5	0.109289620-01	0.109302160-01	0.11111110-01
-0,3	0.498223000-02	0.498233060-02	0.501672240-02
-0,1	0.720845410-03	0.720845660-03	0.721500720-03
0,1	0.973577120-03	0.973577630-03	0.974659870-03
0,3	0.124450340-01	0.124459920-01	0.126050420-01
0,5	0.529100530-01	0.529510280-01	0.555555560-01
0,9	0.673051230+00	0.740246060+00	0.122727270+01

k	P_k	$f(t) = [1,2]_{\frac{1}{\varphi}}$	E.N.A
-7	0.183053770-01	0.187125620-01	0.281467950-01
-5	0.141566860-01	0.140695920-01	0.191049770-01
-3	0.757325320-02	0.755266580-02	0.909090910-02
-2	0.385674930-02	0.385159890-02	0.493045200-02
-1	0.899706100-03	0.899498250-03	0.879860900-03
-0,9	0.640396530-03	0.640272110-03	0.666604030-03
-0,5	0.119409350-03	0.119405410-03	0.121046860-03
-0,3	0.228333320-04	0.228333560-04	0.229681820-04
-0,1	0.436463920-05	0.436453630-05	0.436355430-05
0,1	0.720349170-05	0.720349060-06	0.721134770-06
0,3	0.105293020-03	0.105290880-03	0.106619170-03
0,5	0.187641220-02	0.187667650-02	0.175972130-02
0,9	0.218734780+00	0.218002350+00	0.358109170+00

$$\underline{k=3}$$

t	P. K	$f(t) - [e]_f(t)$	E. M. A
-7	0.450855700-02	0.449919570-02	0.673870500-02
-5	0.261288630-02	0.260959690-02	0.353264290-02
-3	0.873981640-03	0.873630580-03	0.104956270-02
-2	0.286571430-03	0.286536490-03	0.321778240-03
-1	0.254876770-04	0.254874380-04	0.267004550-04
-0.5	0.167087700-04	0.167086690-04	0.173887270-04
-0.5	0.125446820-05	0.125446770-05	0.127464720-05
-0.3	0.100787500-06	0.100787500-06	0.101463810-06
-0.1	0.254802310-09	0.254802850-09	0.255027420-09
0.1	0.513851150-09	0.513850740-09	0.514405960-09
0.3	0.857129380-06	0.857129220-06	0.857783090-06
0.5	0.509753540-04	0.509748770-04	0.534009100-04
0.5	0.623529510-01	0.621948320-01	0.101636930+00

III.2. Comparaison de $e_k^{(n)}(t)$, $n = 2k+1$, et la procédure de Kronrod:

Pour $n = 2k+1$, les deux estimations $e_k^{(n)}$ et la procédure Kronrod utilisent le même nombre de coefficients à savoir e_0, \dots, e_{3k+1} et atteignent le même ordre d'approximation, $k+2$.

Posons également :

$$e_k^{(n)}(t) = \frac{1+\varphi}{P_k(\varphi)} \cdot \frac{W_{n+1}(\varphi)}{V_{n+1}(\varphi)} = \text{E.M.A}, \text{ avec } n=2k+1$$

si l'on considère le même exemple que précédemment, nous

obtenons les résultats suivants :

k = 1

t	P. K	$f(t) - [011]_f(t)$	E. П. А
-7	0.703415550-01	0.748438550-01	0.720310240-01
-5	0.700230110-01	0.726375080-01	0.711791290-01
-3	0.612244900-01	0.620981200-01	0.616666670-01
-2	0.490195080-01	0.493051440-01	0.491736200-01
-1	0.264550260-01	0.264805140-01	0.264694550-01
-0.9	0.234991040-01	0.235158120-01	0.235066050-01
-0.5	0.109289620-01	0.109302160-01	0.109296860-01
-0.3	0.498223000-02	0.498233080-02	0.498228960-02
-0.1	0.720845410-03	0.720845650-03	0.720845560-03
0.1	0.973577120-03	0.973577630-03	0.973577420-03
0.3	0.124450340-01	0.124458920-01	0.124455310-01
0.5	0.529100530-01	0.529610280-01	0.529391100-01
0.9	0.678051230+00	0.740246060+00	0.697338600+00

meilleur

k = 2

t	P. K	$f(t) - [112]_f(t)$	E. П. А
-7	0.188053770-01	0.187125620-01	0.188948000-01
-5	0.141566860-01	0.140895990-01	0.141665080-01
-3	0.757325320-02	0.755266580-02	0.756774090-02
-2	0.385674930-02	0.385159390-02	0.385466660-02
-1	0.839706100-03	0.839488250-03	0.839595500-03
-0.9	0.640396530-03	0.640272110-03	0.640332320-03
-0.5	0.119409350-03	0.119405410-03	0.119407200-03
-0.3	0.228335320-04	0.228333960-04	0.228334560-04
-0.1	0.436469920-06	0.436468380-06	0.436469900-06
0.1	0.720349170-06	0.720349060-06	0.720349110-06
0.3	0.105290390-03	0.105290390-03	0.105291930-03
0.5	0.167941220-02	0.167897650-02	0.167919100-02
0.9	0.218734760+00	0.218992350+00	0.221149590+00

k = 3

t	P. K	$f(t) - [213]_f(t)$	E. П. А
-7	0.450855700-02	0.449919570-02	0.449291770-02
-5	0.261288860-02	0.260959690-02	0.260810410-02
-3	0.873331640-03	0.873630580-03	0.873523050-03
-2	0.286571430-03	0.286536490-03	0.286527740-03
-1	0.254878770-04	0.254874330-04	0.254873890-04
-0.9	0.167087730-04	0.167086690-04	0.167086490-04
-0.5	0.125446770-05	0.125446770-05	0.125446760-05
-0.3	0.100787530-06	0.100787530-06	0.100787500-06
-0.1	0.254802310-09	0.254802350-09	0.254802310-09
0.1	0.513851150-09	0.513850740-09	0.513851150-09
0.3	0.857129300-06	0.857129220-06	0.857129160-06
0.5	0.509753540-04	0.509748770-04	0.509747730-04
0.9	0.623513510-01	0.621948320-01	0.620350130-01

meilleur

IV. REMARQUES:

R1: Comme toutes les procédures d'estimation de l'erreur étudiées jusqu'à présent, la procédure étudiée dans ce chapitre peut également être itérée. En voici un exemple.

Exemple: 1^{ère} itération

Nous avons

$$E_k(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{(1+\varphi)}{P_k(\varphi)V_{n+1}(\varphi)} \cdot \int_{-1}^1 \frac{P_k(x)V_{n+1}(x)}{\varphi-x} d\beta(x), \quad (1)$$

Soit $P(x)$ le polynôme de meilleure approximation de $(x-\varphi)^{-1}$ donné par:

$$P(x) = \frac{1}{x-\varphi} \left(1 - \frac{\binom{(1)}{V_{m+1}}(x)}{\binom{(1)}{V_{m+1}}(\varphi)} \right)$$

En remplaçant $(x-\varphi)^{-1}$ par $P(x)$, l'expression (1) ci-dessus

devient:

$$(2) \quad E_k(t) = I_{k,1}^{(n,m)}(t) + \frac{(1+\varphi)}{P_k(\varphi)V_{n+1}(\varphi)\binom{(1)}{V_{m+1}}(\varphi)} \cdot \int_{-1}^1 \frac{P_k(x)V_{n+1}(x)\binom{(1)}{V_{m+1}}(x)}{\varphi-x} d\beta$$

avec

$$I_{k,1}^{(n,m)}(t) = e_k^{(n)}(t) + \frac{(1+\varphi)}{P_k(\varphi) V_{n+1}(\varphi)} \cdot \frac{W_{m+1}^{(1)}(\varphi)}{V_{m+1}^{(1)}(\varphi)} .$$

avec

$$W_{m+1}^{(1)}(\varphi) = \int_{-1}^1 P_k(x) V_{n+1}(x) \frac{V_{m+1}^{(1)}(x) - V_{m+1}^{(1)}(\varphi)}{x - \varphi} d\beta(x) .$$

On montrera également que

$$I_{k,1}^{(n,m)}(t) = (k+n+m+1 | k+n+m+e)_f(t) - [k-1 | k]_f(t) .$$

où $(k+n+m+1 | k+n+m+e)_f$ est l'approximant de type-Padé

de f , de polynôme générateur $P_k V_{n+1} V_{m+1}^{(1)}$.

Re: On peut également appliquer les méthodes étudiées dans le

chapitre I et obtenir ainsi une combinaison de procédures

d'estimation de l'erreur.

Exemple: Estimation de l'erreur à partir d'un développement de celle-ci :

Nous avons

$$\begin{aligned}
 E_k(t) &= [k | k+1]_f(t) - [k-1 | k]_f(t) + E_{k+1}(t) \\
 &= \frac{(1+\varphi)}{P_k(\varphi) P_{k+1}(\varphi)} \cdot h_k + E_{k+1}(t)
 \end{aligned}$$

avec : $h_k = \int_{-1}^1 x^k P_k(x) d\beta(x)$ et $E_{k+1}(t) = f(t) - [k | k+1]_f(t)$

En répétant le processus nous obtenons :

$$E_k(t) = D_k^{(m)}(t) + E_{k+m+1}(t), \quad m \geq 0$$

avec

$$D_k^{(m)}(t) = [k+m | k+m+1]_f(t) - [k-1 | k]_f(t)$$

$$= \sum_{i=k}^{k+m} \frac{(1+\varphi)}{P_i(\varphi) P_{i+1}(\varphi)} \cdot h_i$$

$$E_{k+m+1}(t) = \frac{(1+\varphi)}{P_{k+m+1}(\varphi)} \cdot \int_{-1}^1 \frac{P_{k+m+1}(x)}{\varphi - x} d\beta(x)$$

$$= f(t) - [k+m | k+m+1]_f(t)$$

Une estimation de l'erreur $E_{k+m+1}(t)$ est obtenue en remplaçant la

fonction $x \mapsto (x-\varphi)^{-2}$ par son polynôme de meilleure approximation

$P(x)$:

$$P(x) = \frac{1}{x-\varphi} \left(1 - \frac{V_s(x)}{V_s(\varphi)} \right),$$

par suite nous obtenons une estimation totale de l'erreur $E_k(t)$

donnée par:

$$e_k^{(m,s)}(t) = D_k^{(m)}(t) + \frac{(1+\varphi)}{P_{k+m+1}(\varphi) V_s(\varphi)} \cdot W_s(\varphi)$$

avec

$$W_s(\varphi) = \int_{-1}^1 P_{k+m+1}(x) \frac{V_s(x) - V_s(\varphi)}{x - \varphi} d\beta(x), \quad s \geq k+m+2$$

puisque

$$\frac{(1+\varphi)}{P_{k+m+1}(\varphi) V_s(\varphi)} \cdot W_s(\varphi) = \underbrace{\left(k+m+s \mid k+m+s+1 \right)_f(t)}_{\text{de polynôme générateur } P_{k+m+1} V_s} - \left[k+m \mid k+m+1 \right]_f(t)$$

nous avons donc:

$$e_k^{(m,s)}(t) = (k+m+s | k+m+s+1)_f(t) - [k+1 | k]_f(t) .$$

l'expression de l'erreur $E_k(t)$ devient :

$$E_k(t) = e_k^{(m,s)}(t) + \frac{(1+\varphi)}{P_{k+m+1}(\varphi) V_s(\varphi)} \int_{-1}^1 \frac{P_{k+m+1}(x) V_s(x)}{\varphi - x} d\beta(x) .$$

Et le processus peut ainsi être itéré. ■

R3: On pourra faire le même travail en remplaçant la fonction génératrice par son polynôme de meilleure approximation sur $[-1, 1]$ en norme L^p , $p=1, 2$.

Il restera également à comparer toutes ces possibilités et à étudier les problèmes de convergence.

CHAPITRE V

ESTIMATION DE L'ERREUR DANS
L'APPROXIMATION DE PADE' NON
COMMUTATIVE

I. INTRODUCTION :

Ce chapitre consiste en une extension au cas normal non commutatif des résultats obtenus par C. BREZINSKI [6] concernant l'adaptation à l'approximation de Padé, du schéma de Kronrod utilisé pour estimer l'erreur dans les formules de Quadrature.

L'introduction des approximants de Padé et de type-Padé dans

le cas normal non commutatif, est due à A. DRAUX [14].

Puisque ces approximants sont également des formules de quadrature formelle, nous nous proposons de leur appliquer la procédure de Kronrod.

RÉSULTATS ET NOTATIONS [13;14] :

Soit A une algèbre non commutative, supposée normée, sur un corps commutatif K , d'élément unité 1 .

soit f une série formelle à une indéterminée $t \in K$ et à coefficients

dans A:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i, \quad c_i \in A, \quad t \in K$$

Sur le A - module des polynômes à une indéterminée $x \in K$ (à élément unité) deux fonctionnelles $c^{(g)}$ et $c^{(d)}$ peuvent être définies par:

$$c^{(g)}(I x^i) = c^{(d)}(I x^i) = c_i, \quad i \geq 0 \quad \text{avec la convention } c_i = 0, \quad i < 0$$

$$c^{(g)}(\lambda x^i) = c_i \lambda \quad \text{et} \quad c^{(d)}(\lambda x^i) = \lambda c_i, \quad \lambda \in A.$$

Nous avons formellement

$$f(x) = c^{(g)}((1-tx)^{-1} \cdot I) = c^{(d)}((1-tx)^{-1} \cdot I)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} c^{(g)}(x^i t^i \cdot I) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i.$$

On suppose que $c^{(g)}$ et $c^{(d)}$ sont définies et désignons par $\{P_k^{(g)}\}_k$

et $\{P_k^{(d)}\}_k$ les familles des polynômes orthogonaux respectives.

L'orthogonalité de $P_k^{(g)}$ par rapport à $c^{(g)}$ est définie par:

$$c^{(g)}\left(x^i P_k^{(g)}(x)\right) = 0 \quad i = 0, \dots, k-1$$

ou

$$c^{(g)}\left(P_k^{(g)} P_i^{(g)}\right) = 0 \quad \text{pour } k > i$$

On a des relations analogues pour $\overset{(d)}{P}_k$ par rapport à $\overset{(d)}{c}$.

Nous désignons par $[k-1|k]_f^{(g)}$, comme ça été défini dans [14],

l'approximant de Padé à gauche et $[k-1|k]_f^{(d)}$ l'approximant de

Padé à droite. Nous avons la propriété remarquable suivante ($\overset{(g)}{c}$ étant

définie) :

$$[k-1|k]_f^{(g)} \equiv [k-1|k]_f^{(d)} \equiv [k-1|k]_f, \quad [14, p193]$$

Expression de l'erreur de $[k-1|k]_f^{(g)}$:

Comme dans le cas normal commutatif, l'erreur de $[k-1|k]_f^{(g)}$ possède

également trois expressions :

$$E1: \quad f(t) - [k-1|k]_f^{(g)}(t) = t^k \overset{(g)}{c} \left(\overset{(g)}{P}_k(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot \left(\overset{(g)}{\tilde{P}}_k(t) \right)^{-1}$$

$$E2: \quad f(t) - [k-1|k]_f^{(g)}(t) = t^{2k} \overset{(g)}{c} \left(x^k \overset{(g)}{P}_k(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot \left(\overset{(g)}{\tilde{P}}_k(t) \right)^{-1}$$

$$E3: \quad f(t) - [k-1|k]_f^{(g)}(t) = t^{2k} \overset{(g)}{c} \left(\left(\overset{(g)}{P}_k(x) \right)^e \cdot (1-tx)^{-1} \right) \cdot \left(\overset{(g)}{\tilde{P}}_k(t) \right)^{-1}.$$

II. Extension de la procédure de Kronecker aux approximations de Padé non commutatives.

Lemme 1: soit v un polynôme arbitraire de degré k et $\lambda \in A$.
alors:

$$c^{(g)}(v(x) \cdot \lambda) = c^{(g)}(v(x)) \cdot \lambda$$

Preuve: si $v(x) = \sum_{j=0}^k b_j x^j$, on a:

$$\begin{aligned} c^{(g)}(v(x) \cdot \lambda) &= c^{(g)}\left(\left(\sum_{j=0}^k b_j x^j\right) \lambda\right) = c^{(g)}\left(\sum_{j=0}^k (b_j \lambda) x^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^k c^{(g)}(b_j \lambda x^j) \\ &= \sum_{j=0}^k c_j b_j \lambda = \left(\sum_{j=0}^k c_j b_j\right) \lambda. \end{aligned}$$

or par définition de la fonctionnelle $c^{(g)}$, nous avons:

$$c^{(g)}(v(x)) = c^{(g)}\left(\sum_{j=0}^k b_j x^j\right) = \sum_{j=0}^k c^{(g)}(b_j x^j) = \sum_{j=0}^k b_j c_j$$

d'où l'égalité cherchée.

Lemme 2 :

si $[k-1|k]_f$ est l'approximant de Padé non commutatif de polynôme générateur $\overset{(g)}{P}_k$, alors :

$$[k-1|k]_f(t) = C^{(g)}(P(x))$$

où :

$$P(x) = (I - t^k \overset{(g)}{P}_k(x) (\overset{(g)}{\tilde{P}}_k(t))^{-1}) (1-tx)^{-1}.$$

Preuve : Posons :

$$P(x) = (I - t^k \overset{(g)}{P}_k(x) (\overset{(g)}{\tilde{P}}_k(t))^{-1}) (1-tx)^{-1}.$$

P est un polynôme de degré $k-1$ en x . En effet :

$$\begin{aligned} P(x) (\overset{(g)}{\tilde{P}}_k(t)) &= (\overset{(g)}{\tilde{P}}_k(t) - t^k \overset{(g)}{P}_k(x)) (1-tx)^{-1} \\ &= t^k (\overset{(g)}{P}_k(t^{-1}) - \overset{(g)}{P}_k(x)) (1-tx)^{-1} \\ &= t^{k-1} (\overset{(g)}{P}_k(t^{-1}) - \overset{(g)}{P}_k(x)) (t^{-1} - x)^{-1}. \end{aligned}$$

Et $(\overset{(g)}{P}_k(t^{-1}) - \overset{(g)}{P}_k(x)) (t^{-1} - x)^{-1}$ est un polynôme de degré $k-1$

en x .

D'autre part, nous avons :

$$f(t) - [k-1|k]_f(t) = t^k \cdot c^{(g)} \left(P_k^{(g)}(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot \left(\tilde{P}_k^{(g)}(t) \right)^{-1}.$$

En utilisant le lemme 1, l'expression ci-dessus s'écrit :

$$\begin{aligned} f(t) - [k-1|k]_f(t) &= c^{(g)} \left(P_k^{(g)}(x) (1-tx)^{-1} \left(\tilde{P}_k^{(g)}(t) \right)^{-1} \right) \\ &= c^{(g)} \left(P_k^{(g)}(x) \left(\tilde{P}_k^{(g)}(t) \right)^{-1} (1-tx)^{-1} \right) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} [k-1|k]_f(t) &= c^{(g)} \left(\left(I - P_k^{(g)}(x) \left(\tilde{P}_k^{(g)}(t) \right)^{-1} \right) (1-tx)^{-1} \right) \\ &= c^{(g)} \left(P(x) \right) \bullet \end{aligned}$$

ainsi le lemme 2 montre que l'approximant de Padé non commutatif

$[k-1|k]_f$ est également une formule de quadrature de degré

d'exactitude $2k-1$, bien qu'elle ne soit pas de type d'interpolation

formelle vu que le polynôme $P_k^{(g)}$ peut ne pas avoir de racines

du tout (prendre l'exemple de l'algèbre des opérateurs linéaires)

Notre idée est d'essayer d'adapter certaines méthodes utilisées pour estimer l'erreur dans les formules de quadrature dans le cas commutatif, à celles dans le cas non commutatif. Autrement dit nous allons bâtir \tilde{a} à partir de la formule de quadrature $[k-1|k]_f$ une autre telle que la différence entre les deux donne une estimation de l'erreur de $[k-1|k]_f$.

Pour cela, considérons l'approximant de type-Padé à gauche

$$\left(k+n-1 \mid k+n \right)_f^{(g)}, \text{ de polynôme générateur } \vartheta(x) = P_k^{(g)}(x) V_n(x),$$

où V_n est un polynôme arbitraire et unitaire de degré n .

Donc, par [14], nous pouvons écrire :

$$\left(k+n-1 \mid k+n \right)_f^{(g)}(t) = \tilde{w}^{(g)}(t) (\tilde{\vartheta}(t))^{-1}$$

où $\tilde{w}^{(g)}$ est le polynôme associé à gauche à ϑ donné

$$\text{par : } \tilde{w}^{(g)}(t) = C^{(g)} \left((\vartheta(x) - \vartheta(t))(1-tx)^{-1} \right).$$

Posons:

$$W_n(t) = c^{(g)} \left(P_k^{(g)}(x) \cdot (V_n(x) - V_n(t)) (x-t)^{-1} \right)$$

Nous avons:

$$w^{(g)}(t) = W_n(t) + \Phi_k^{(g)}(t) V_n(t)$$

où $\Phi_k^{(g)}$ est le polynôme associé à $P_k^{(g)}$ par rapport à $c^{(g)}$.

En effet:

$$\begin{aligned} w^{(g)}(t) &= c^{(g)} \left((v(x) - v(t)) (x-t)^{-1} \right) = \\ &= c^{(g)} \left(\left(P_k^{(g)}(x) V_n(x) - P_k^{(g)}(x) V_n(t) \right) (x-t)^{-1} \right) \\ &= c^{(g)} \left(P_k^{(g)}(x) (V_n(x) - V_n(t)) (x-t)^{-1} \right) + \\ &\quad c^{(g)} \left(\left(P_k^{(g)}(x) - P_k^{(g)}(t) \right) V_n(t) (x-t)^{-1} \right) \\ &= W_n(t) + \Phi_k^{(g)}(t) V_n(t) \end{aligned}$$

car par le lemme 1, on a:

$$\begin{aligned} &c^{(g)} \left(\left(P_k^{(g)}(x) - P_k^{(g)}(t) \right) V_n(t) (x-t)^{-1} \right) \\ &= c^{(g)} \left(\left(P_k^{(g)}(x) - P_k^{(g)}(t) \right) (x-t)^{-1} \right) V_n(t) = \Phi_k^{(g)}(t) V_n(t). \end{aligned}$$

De plus :

$$\tilde{v}(t) = t^{k+n} v(t^{-1}) = \tilde{P}_k^{(g)}(t) \tilde{V}_n(t) \quad \text{avec} \quad \tilde{P}_k^{(g)}(t) = t^k P_k^{(g)}(t^{-1})$$

$$\tilde{V}_n(t) = t^n V_n(t^{-1}) .$$

$$\tilde{w}^{(g)}(t) = t^{k+n-1} w^{(g)}(t^{-1}) = t^k \tilde{W}_n(t) + \tilde{\Phi}_k^{(g)}(t) \tilde{V}_n(t)$$

$$\text{avec} \quad \tilde{\Phi}_k^{(g)}(t) = t^{k-1} \Phi_k^{(g)}(t^{-1}) \quad \text{et} \quad \tilde{W}_n(t) = t^{n-1} W_n(t^{-1}) .$$

D'où le :

Théorème 1.

soit $(k+n-1 | k+n)_f^{(g)}(t)$ l'approximant de type Padé à gauche de polynôme générateur $v(x) = P_k^{(g)}(x) V_n(x)$.

Alors :

$$\bullet \quad (k+n-1 | k+n)_f^{(g)}(t) - [k-1 | k]_f^{(g)}(t) = t^n \tilde{W}_n(t) (\tilde{V}_n(t))^{-1} (\tilde{P}_k^{(g)}(t))^{-1} .$$

$$\bullet \quad f(t) - (k+n-1 | k+n)_f^{(g)}(t) =$$

$$t^{k+n} c^{(g)} \left(P_k^{(g)}(x) V_n(x) (1-tx)^{-1} \right) (\tilde{V}_n(t))^{-1} (\tilde{P}_k^{(g)}(t))^{-1}$$

Le polynôme $(V_n(x) - V_n(t))(x-t)$ est de degré $n-1$ en t et en x .

D'autre part le polynôme $W_n^{(g)}$ est de degré $n-1$ en t . Par l'orthogonalité

de $P_k^{(g)}$ par rapport à la fonctionnelle $C^{(g)}$, W_n est identiquement

nul pour $n \leq k$ et dans ce cas $(n+k-1 | k+n)_f^{(g)}$ est identique

à $[k-1 | k]_f$

Ainsi la plus petite valeur possible de n est $k+1$.

Posons :

$$e_k^{(g)(n)}(t) = (k+n-1 | k+n)_f^{(g)} - [k-1 | k]_f^{(g)}(t)$$

l'estimation $e_k^{(g)(n)}(t)$ possède deux versions : Une version dite générale lorsque V_n est arbitraire et une version optimale lorsque V_n est choisi tel que :

$$C^{(g)}(x^i P_k^{(g)}(x) V_n(x)) = 0 \quad i=0, \dots, n-1.$$

La procédure de Kronrod correspond au cas $n=k+1$ et V_{k+1} optimal

$$C^{(g)}(x^i P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(x)) = 0 \quad i=0, \dots, k$$

Nous appelons un tel polynôme, le polynôme de Stieltjes à

gauche associé à $P_k^{(g)}$ relativement à la fonctionnelle $C^{(g)}$.

Ce polynôme existe et unique si et seulement si $C^{(g)}(x^k P_k^{(g)}(x))$

est inversible, car le système définissant V_{k+1} est triangulaire

de terme diagonal $C^{(g)}(x^k P_k^{(g)}(x))$.

Nous avons le :

Théorème 2 : si le polynôme générateur $\phi(x) = P_k^{(g)}(x) \cdot V_{k+1}^{(g)}(x)$

de $(2k | 2k+1)_f^{(g)}(t)$ est tel que :

$$C^{(g)}(x^i \phi(x)) = 0, \quad i = 0, \dots, k$$

alors :

$$f(t) = (2k | 2k+1)_f^{(g)}(t) = t^{2k+2} C^{(g)}(x^{k+1} \phi(x) (1-tx)^{-1}) \times (\tilde{V}(t))^{-1}$$

$$(2k | 2k+1)_f^{(g)}(t) - [k-1 | k]_f^{(g)}(t) =$$

$$t^{2k} C^{(g)}(x^k P_k^{(g)}(x)) \cdot (\tilde{V}(t))^{-1}$$

$$\text{avec } (\tilde{V}(t))^{-1} = (\tilde{V}_{k+1}^{(g)}(t))^{-1} (P_k^{(g)}(t))^{-1}.$$

Preuve : Nous avons :

$$c^{(g)} \left(P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(x) (1-tx)^{-1} \right) =$$

$$c^{(g)} \left(P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(x) \left(I + Itx + \dots + It^k x^k + It^{k+1} x^{k+1} (1-tx)^{-1} \right) \right)$$

$$= t^{k+1} c^{(g)} \left(x^{k+1} P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(x) (1-tx)^{-1} \right).$$

Et le premier résultat découle du théorème 1.

D'autre part, puisque le polynôme V_{k+1} est unitaire, nous avons :

$$W_{k+1}^{(g)}(t) = c^{(g)} \left(P_k^{(g)}(x) \left(V_{k+1}(x) - V_{k+1}(t) \right) (x-t)^{-1} \right)$$

$$= c^{(g)} \left(P_k^{(g)}(x) \left(It^k + Ix^k + U_{k-1}(t, x) \right) \right)$$

où U_{k-1} polynôme de degré $k-1$ en t et en x .

$$\text{Donc : } W_{k+1}^{(g)}(t) = c^{(g)} \left(P_k^{(g)} x^k \right) + \underbrace{c^{(g)} \left(P_k^{(g)}(x) \left(It^k + U_{k-1}(t, x) \right) \right)}_{0''}$$

$$= c^{(g)} \left(x^k P_k^{(g)}(x) \right).$$

$$\tilde{W}_{k+1}^{(g)}(t) = t^k W_{k+1}^{(g)}(t^{-1}) = t^k c^{(g)} \left(x^k P_k^{(g)}(x) \right).$$

et par le théorème 1, on obtient le second résultat du théo

Le théorème 2 est donc une extension de la procédure de Kronrod étudiée dans [6], aux approximations de Padé dans le cas non commutatif.

Définition 1 :

soit $R(t)$ une approximation quelconque de $f(t)$.

On dit que R est d'ordre α et que :

$$f(t) - R(t) = O(t^\alpha)$$

si :

il existe ρ et M appartenant à \mathbb{R} avec $0 < \rho < 1$ tels que :

$$\|f(t) - R(t)\| \leq M \|t\|^\alpha, \quad \forall t \in B(0, \rho).$$

$B(0, \rho)$ étant la boule ouverte de K de rayon ρ et de centre 0 :

$$B(0, \rho) = \{ t \in K \mid \|t\| < \rho \}.$$

En utilisant les principes généraux donnés dans [6], nous pouvons poser la définition suivante :

Définition 2:

Soient X_1 et X_2 deux estimations de l'erreur $f(t) - R(t)$, R est une approximation quelconque de f .

On pose:

$$z(t) = \left[X_1(t) (f(t) - R(t))^{-1} - I \right] \cdot \left[X_2(t) (f(t) - R(t))^{-1} - I \right]^{-1}$$

si $\|z(t)\| < 1$, $X_1(t)$ est dite meilleure que l'estimation X_2 .

Il faut remarquer que tous les principes généraux de [6] peuvent s'étendre sans difficulté au cas non commutatif.

En les appliquant à la procédure de Kronrod dans le cas non commutatif nous obtenons le :

Théorème 3:

si $v(x) = P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(x)$ est le polynôme générateur de $(2k | 2k+1)_f^{(g)}$, tel que:

$$c(x^i v(x)) = 0 \quad i = 0, \dots, k$$

alors:

$$(2k | 2k+1)_f^{(g)}(t) - [k-1 | k]_f(t) = f(t) - [k-1 | k]_f(t) - t^{3k+2} c^{(g)}(x^{k+1} v(x)) \cdot (\tilde{V}(t))^{-1}$$

$$\left[(2k | 2k+1)_f^{(g)}(t) - [k-1 | k]_f(t) \right] \left[f(t) - [k-1 | k]_f(t) \right]^{-1} =$$

$$I - t^{k+2} c^{(g)}(x^{k+1} v(x) (1-tx)^{-1}) \cdot (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1} \cdot c^{(g)}(x^k P_k^{(g)}(x) (1-tx)^{-1})$$

Et en utilisant le premier résultat, on obtient:

$$\begin{aligned} & \left[\binom{(g)}{2k | 2k+1}_f(t) - [k-1 | k]_f(t) \right] \left[f(t) - [k-1 | k]_f(t) \right]^{-1} = \\ & \mathbb{I} - t^{3k+2} \binom{(g)}{c} \left(x^{k+1} P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1} \cdot (\tilde{P}_k^{(g)}(t))^{-1} x^{-2k} P_k^{(g)}(t) x \\ & \quad \left(\binom{(g)}{c} \left(x^k P_k^{(g)}(x) (1-tx)^{-1} \right) \right)^{-1} \\ & = \mathbb{I} - t^{k+2} \binom{(g)}{c} \left(x^{k+1} P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1} \cdot \left(\binom{(g)}{c} \left(x^k P_k^{(g)}(x) (1-tx)^{-1} \right) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

si l'on pose :

$$e_i = \binom{(g)}{c} \left(x^i P_k^{(g)}(x) \right), \quad i=0,1,\dots$$

$$= e^{(g)}(x^i)$$

et $g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j t^j$, $e_j \in A$

Par définition V_{k+1} est le polynôme orthogonal de degré

$k+1$ par rapport à la fonctionnelle linéaire $e^{(g)}$ et W_{k+1} est son

polynôme associé. Ce qui implique :

$$\tilde{W}_{k+1}^{(g)}(t) \cdot (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1} = [k | k+1]_g^{(g)}(t).$$

Bien que V_{k+1} soit orthogonal par rapport à $e^{(g)}$, il ne vérifie pas, en général une relation de récurrence à trois termes, car $e^{(g)}$ dépend de k [6; 29].

Preuve:

Par le théorème 2, nous avons:

$$\begin{aligned}
 (2k \mid 2k+1)_f^{(g)}(t) - [k-1 \mid k]_f(t) &= t^k \tilde{W}_{k+1}^{(g)}(t) \cdot (\tilde{Q}(t))^{-1} \\
 &= t^k \left[c^{(g)} \left(P_k(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot \tilde{V}_{k+1}(t) - t^{2k+2} c^{(g)} \left(x^{k+1} P_k(x) V_{k+1}(x) (1-tx)^{-1} \right) \right] \cdot (\tilde{Q}(t))^{-1} \\
 &= \underbrace{t^{2k} c^{(g)} \left(x^k P_k(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot (\tilde{P}_k(t))^{-1}}_{f(t) - [k-1 \mid k]_f(t)} - t^{2k+2} c^{(g)} \left(x^{k+1} V(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot (\tilde{Q}(t))^{-1}
 \end{aligned}$$

avec $(\tilde{Q}(t))^{-1} = (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1} \cdot (\tilde{P}_k(t))^{-1}$.

Pour le second résultat du théorème, il suffit de montrer que l'expression $f(t) - [k-1 \mid k]_f(t)$ est inversible. En effet:

$$\begin{aligned}
 f(t) - [k-1 \mid k]_f(t) &= t^k \sum_{j=0}^{\infty} c^{(g)} \left(x^j P_k(x) \right) t^j \\
 &= t^{2k} \sum_{j=0}^{\infty} c^{(g)} \left(x^{k+j} P_k(x) \right) t^j
 \end{aligned}$$

puisque $c^{(g)}$ est définie, le terme constant de cette série, à savoir $c^{(g)} \left(x^k P_k(x) \right)$ est inversible, donc la série formelle $f(t) - [k-1 \mid k]_f(t)$ a un inverse dans l'algèbre des séries formelles:

$$\left[f(t) - [k-1 \mid k]_f(t) \right]^{-1} = t^{-2k} \tilde{P}_k(t) \cdot \left(c^{(g)} \left(x^k P_k(x) (1-tx)^{-1} \right) \right)^{-1}$$

Posons: $h(t) = f(t) \cdot \tilde{P}_k^{(g)}(t)$

Nous avons le résultat suivant:

$$\tilde{W}^{(g)}(t) \cdot (\tilde{V}_{k+1}^{(g)}(t))^{-1} = [2k \mid 2k+1]_h^{(g)}(t)$$

où: $\tilde{W}^{(g)}(t) = c^{(g)} ((v(x) - v(t))(x-t)^{-1})$ le polynôme associé

à $v(x) = \tilde{P}_k^{(g)}(x) V_{k+1}^{(g)}(x)$, par rapport à la fonctionnelle $c^{(g)}$.

Définissons la fonctionnelle linéaire $h^{(g)}$ par:

- $h^{(g)}(\mathbb{I} x^i) = h_i$, $i \geq 0$ avec la convention $h_i = 0$ $i < 0$
et
- $h^{(g)}(p(x)) = c^{(g)}(\tilde{P}_k^{(g)}(x) \cdot p(x))$ où p est un polynôme arbitraire.

Formellement, nous obtenons:

$$h(t) = h^{(g)}((1-tx)^{-1} \mathbb{I}) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i t^i$$

où les moments h_i sont donnés par:

$$h_0 = c_0$$

$$h_i = c_i + \sum_{j=1}^{\min(k,i)} c_{i-j} \lambda_j^{(g)}, \quad i \geq 1$$

avec $P_k^{(g)}(x) = \sum_{i=0}^k \lambda_{k-i}^{(g)} x^i$, $\lambda_0^{(g)} = I$.

Donc:

$$\begin{aligned} h(t) - [2k | k+1]_h^{(g)}(t) &= t^{2k+1} h^{(g)} \left(V_{k+1}(x) \cdot (1-tx)^{-1} \right) \cdot (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1} \\ &= t^{3k+2} h^{(g)} \left(x^{k+1} V_{k+1}(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1} \end{aligned}$$

En utilisant la relation liant $c^{(g)}$ et $h^{(g)}$, nous obtenons:

$$h(t) - [2k | k+1]_h^{(g)}(t) = t^{3k+2} c^{(g)} \left(x^{k+1} P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1}$$

D'autre part:

$$\tilde{w}^{(g)}(t) (\tilde{v}^{(g)}(t))^{-1} = \tilde{w}^{(g)}(t) \cdot (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1} \cdot (\tilde{P}_k^{(g)}(t))^{-1} = (2k | 2k+1)_f^{(g)}(t)$$

et

$$f(t) - \underbrace{(2k | 2k+1)_f^{(g)}(t)}_{\tilde{w}^{(g)}(t) (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1} (\tilde{P}_k^{(g)}(t))^{-1}} = t^{3k+2} c^{(g)} \left(x^{k+1} P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1}$$

En multipliant à droite par $\tilde{P}_k^{(g)}(t)$, on obtient:

$$\underbrace{f(t) \cdot \tilde{P}_k^{(g)}(t)}_{h(t)} = \tilde{w}^{(g)}(t) (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1} + t^{3k+2} c^{(g)} \left(x^{k+1} P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot (\tilde{V}_{k+1}(t))^{-1}$$

Par l'unicité de l'approximant de Padé $[2k | k+1]_h^{(g)}$, on a:

$$\overset{(g)}{\tilde{W}}(t) \cdot (\overset{(g)}{\tilde{V}}_{k+1}(t))^{-1} = [z^k | k+1]_{\tilde{P}_k}(t) .$$

Il reste à noter également que certaines propriétés des polynômes de Skieltyes dans le cas formel commutatif [6], peuvent s'étendre au cas non commutatif.

Pour cela, puisque $\{ \overset{(g)}{P}_k \}$ forme une base du A -module des polynômes à coefficients dans A (car $\overset{(g)}{C}$ est définie [13]),

on peut écrire :

$$\overset{(g)}{P}_k(x) V_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{2k+1} \overset{(g)}{P}_j(x) \alpha_j, \quad \alpha_j \in A \quad \text{et} \quad \alpha_{2k+1} = I$$

les α_j sont des constantes dépendant de l'indice k .

Par définition de V_{k+1} , nous avons :

$$\overset{(g)}{C} (x^j \overset{(g)}{P}_k(x) V_{k+1}(x)) = \sum_{j=0}^{2k+1} \overset{(g)}{C} (x^j \overset{(g)}{P}_j(x)) \alpha_j = 0 \quad ; \quad 0 \leq j \leq k$$

Ainsi pour $j=0$:

$$\begin{aligned} \overset{(g)}{C} (\overset{(g)}{P}_0(x)) \alpha_0 + \overset{(g)}{C} (\overset{(g)}{P}_1(x)) \alpha_1 + \dots + \overset{(g)}{C} (\overset{(g)}{P}_{2k+1}(x)) \alpha_{2k+1} &= 0 \\ &= \overset{(g)}{C} (\overset{(g)}{P}_0(x)) \alpha_0 \end{aligned}$$

$\overset{(g)}{C} (\overset{(g)}{P}_0(x))$ étant inversible, donc $\alpha_0 = 0$.

Pour $j=1$

$$\overset{(g)}{C} (x \overset{(g)}{P}_1(x)) \alpha_1 + \dots + \overset{(g)}{C} (x \overset{(g)}{P}_{2k+1}(x)) \alpha_{2k+1} = 0 = \overset{(g)}{C} (x \overset{(g)}{P}_1(x)) \alpha_1$$

$\overset{(g)}{C} \left(x \overset{(g)}{P}_1(x) \right)$ est inversible, donc $\alpha_1 = 0$.

On continue ainsi jusqu'au $j=k$:

$$\begin{aligned} \overset{(g)}{C} \left(x^k \overset{(g)}{P}_k(x) \right) \alpha_k + \overset{(g)}{C} \left(x^k \overset{(g)}{P}_k(x) \right) \alpha_{k+1} + \dots + \overset{(g)}{C} \left(x^k \overset{(g)}{P}_{k+1}(x) \right) \alpha_{k+1} &= 0 \\ &= \overset{(g)}{C} \left(x^k \overset{(g)}{P}_k(x) \right) \alpha_k \end{aligned}$$

$\overset{(g)}{C}$ étant définie implique $\alpha_k = 0$.

D'où :

$$\overset{(g)}{P}_k(x) V_{k+1}(x) = \sum_{j=k+1}^{2k+1} \overset{(g)}{P}_j(x) \alpha_j.$$

Il restera à regarder l'expression déterminantale de $V_{k+1}(x)$ et celle de $\overset{(g)}{P}_k(x) V_{k+1}(x)$ s'il y en a une.

Enfin remarquons un point de différence avec le cas commutatif

concernant $V_{k+1} [G]$: si

$$V_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \overset{(g)}{P}_j(x) \beta_j, \quad \beta_j \in A, \quad \beta_{k+1} = I$$

Les β_j sont des constantes dépendant de k .

Par définition de V_{k+1} , nous avons:

$$\overset{(g)}{C} \left(\overset{(g)}{P}_k(x) V_{k+1}(x) \right) = \sum_{j=0}^{k+1} \overset{(g)}{C} \left(\overset{(g)}{P}_k(x) \overset{(g)}{P}_j(x) \right) \beta_j = 0$$

si $\binom{(g)}{c}$ est définie, on a:

$$\binom{(g)}{c} \begin{pmatrix} \binom{(g)}{P_i(x)} & \binom{(g)}{P_j(x)} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour } i > j$$

et

$$\binom{(g)}{c} \begin{pmatrix} \binom{(g)}{P_k(x)} & p(x) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour tout polynôme } p \text{ de degré } \leq k-1.$$

Donc :

$$\binom{(g)}{c} \begin{pmatrix} \binom{(g)}{P_k(x)} & V_{k+1}(x) \end{pmatrix} = \binom{(g)}{c} \begin{pmatrix} \binom{(g)}{P_k(x)} & \beta_k \end{pmatrix} + \binom{(g)}{c} \begin{pmatrix} \binom{(g)}{P_k(x)} & \binom{(g)}{P_{k+1}(x)} \end{pmatrix} = 0$$

comme on peut rien dire de la quantité $\binom{(g)}{c} \begin{pmatrix} \binom{(g)}{P_k(x)} & \binom{(g)}{P_{k+1}(x)} \end{pmatrix}$, alors:

$$\beta_k = - \left[\binom{(g)}{c} \begin{pmatrix} \binom{(g)}{P_k(x)} & \beta_k \end{pmatrix} \right]^{-1} \binom{(g)}{c} \begin{pmatrix} \binom{(g)}{P_k(x)} & \binom{(g)}{P_{k+1}(x)} \end{pmatrix}.$$

Or dans le cas formel commutatif, β_k est identiquement nul,

et V_{k+1} s'exprime uniquement en fonction de $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_{k+1}$.

Notons également que le même travail pourra se faire en utilisant les expressions E_2, E_3 qui présentent la même flexibilité.

Il restera donc à comparer toutes ces possibilités d'estimation.

III. Implementation et Applications:

L'implémentation de la procédure de Kronrod dans le cas normal non commutatif utilise une technique analogue à celle employée dans le cas commutatif.

Le polynôme $P_k^{(g)}$ est d'abord calculé à l'aide de la relation de récurrence à trois termes suivante;

$$P_{k+1}^{(g)}(x) = P_k^{(g)}(x) (I x + B_{k+1}^{(g)}) + P_{k-1}^{(g)}(x) C_{k+1}^{(g)}$$

$$\text{avec } P_{-1}^{(g)} = 0 \text{ et } P_0^{(g)} = I, \quad C_{k+1}^{(g)} \text{ inversible.}$$

$B_{k+1}^{(g)}$ et $C_{k+1}^{(g)}$ appartiennent à A et sont donnés par:

$$C_{k+1}^{(g)} = - \left(C^{(g)} \left(x^{k-1} P_{k-1}^{(g)}(x) \right) \right)^{-1} \cdot C^{(g)} \left(x^k P_k^{(g)}(x) \right)$$

$$B_{k+1}^{(g)} = - \left(C^{(g)} \left(x^k P_k^{(g)}(x) \right) \right)^{-1} \left[C^{(g)} \left(x^{k+1} P_k^{(g)}(x) \right) + C^{(g)} \left(x^k P_{k-1}^{(g)}(x) \right) C_{k+1}^{(g)} \right]$$

Et le polynôme V_{k+1} peut être facilement obtenu. Si

$$V_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{k+1} x^i a_i, \quad a_i \in A, \quad a_{k+1} = I$$

$$Q(x) = P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(x)$$

En écrivant la relation d'orthogonalité définissant V_{k+1} et en

utilisant l'orthogonalité de $P_k^{(g)}$, nous obtenons:

$$C^{(g)}(v(x)) = 0 = C^{(g)}(x^k P_k^{(g)}(x)) a_k + C^{(g)}(x^{k+1} P_k^{(g)}(x))$$

$$C^{(g)}(x v(x)) = 0 = C^{(g)}(x^k P_k^{(g)}(x)) a_{k-1} + C^{(g)}(x^{k+1} P_k^{(g)}(x)) a_k + C^{(g)}(x^{k+2} P_k^{(g)}(x))$$

$$C^{(g)}(x^k v(x)) = 0 = C^{(g)}(x^k P_k^{(g)}(x)) a_0 + \dots + C^{(g)}(x^{2k} P_k^{(g)}(x)) a_k + C^{(g)}(x^{2k+1} P_k^{(g)}(x))$$

Le système ci-dessus est triangulaire de terme diagonal $C^{(g)}(x^k P_k^{(g)}(x))$.

si l'on pose: $e_i = C^{(g)}(x^i P_k^{(g)}(x))$, $i = 0, 1, \dots$

alors:

$$\begin{cases} a_{k-i} = -(e_k)^{-1} \cdot \sum_{j=0}^i e_{k+i-j+1} a_{k+1-j} \\ i = 0, 1, \dots, k \end{cases}$$

$$e_i = C^{(g)}(x^i P_k^{(g)}(x)) = C^{(g)}\left(x^i \sum_{j=0}^k b_j x^j\right), \quad b_k = I$$

$$= c_i b_0 + c_{i+1} b_1 + \dots + c_{k+i} b_k$$

avec $e_i = 0$, $i < k$.

Pour illustrer cette théorie, nous considérons l'exemple des opérateurs linéaires de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , munie de la norme $\| \cdot \|$:

$$\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|, \quad A \text{ matrice carrée'}$$

Prenez également l'exemple de l'exponentielle d'une matrice qui est d'une certaine importance dans la théorie du contrôle ou les équations différentielles ordinaires.

Pour $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, la fonction exponentielle $\exp(tA)$ est définie par:

$$\exp(tA) = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} A^n + \dots$$

Exemple 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, avec λ comme valeur propre d'ordre de multiplicité 2.

les valeurs de λ sont prises au voisinage de l'origine.

λ	$\ (2 3) - [0 1]\ $	$\ e^{\lambda A} - [0 1]\ $	$\ (4 5) - [1 2]\ $	$\ e^{\lambda A} - [1 2]\ $
0.1	.136355E+00	.136292E+00	.244573E-03	.244566E-03
0.25	.232783E+01	.232292E+01	.159078E-01	.154908E-01
0.3	.522277E+01	.521530E+01	.378066E-01	.377230E-01
0.65	.236576E+02	.231154E+02	.245506E+01	.234852E+01
0.75	.139592E+02	.125156E+02	.568866E+01	.524956E+01
0.9	.112530E+02	.125156E+02	.167479E+02	.139735E+02
1	.112500E+02	.200000E+02	.315439E+02	.232889E+02
-0.1	.540826E-01	.541204E-01	.125874E-03	.125869E-03
-0.9	.508629E+00	.144395E+01	.872504E-01	.469670E-01
-1.	.515306E+00	.207407E+01	.102967E+00	.369981E-01

λ	$\ (6 7) - [2 3]\ $	$\ e^{\lambda A} - [2 3]\ $	$\ (8 9) - [3 4]\ $	$\ e^{\lambda A} - [3 4]\ $
0.1	.140425E-06	.140425E-06	.374477E-10	.374477E-10
0.25	.520919E-04	.520900E-04	.841226E-07	.841224E-07
0.3	.175091E-03	.175076E-03	.411974E-06	.411971E-06
0.65	.506868E-01	.505850E-01	.505519E-03	.505283E-03
0.75	.160491E+00	.139998E+00	.208023E-02	.207810E-02
0.9	.749753E+00	.746766E+00	.134627E-01	.134254E-01
1	.191264E+01	.190740E+01	.411890E-01	.409650E-01
-0.1	.812922E-07	.812923E-07	.225519E-10	.225519E-10
-0.9	.559831E-02	.613808E-02	.141544E-03	.139391E-03
-1	.829838E-02	.981684E-02	.261575E-03	.258279E-03

Exemple 2: A la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

λ	$\ (2 3) - [0 1]\ $	$\ e^{\lambda A} - [0 1]\ $	$\ (4 5) - [1 2]\ $	$\ e^{\lambda A} - [1 2]\ $
0.1	.154812E-01	.154812E-01	.110386E-06	.110386E-06
0.25	.137131E-01	.137124E-01	.472189E-05	.472185E-05
0.3	.205742E-01	.205701E-01	.100942E-04	.100942E-04
0.5	.679181E-01	.678584E-01	.880626E-04	.880596E-04
0.65	.131584E+00	.131503E+00	.276031E-03	.275904E-03
0.9	.327519E+00	.327227E+00	.116653E-02	.116611E-02
1	.453762E+00	.453125E+00	.192530E-02	.192527E-02
-0.1	.167737E-12	.167737E-12	.979331E-07	.979331E-07
-0.9	.315701E-01	.316889E-01	.484172E-04	.484153E-04
-0.9	.805669E-01	.804859E-01	.404806E-03	.404835E-03

t	$\ (6 7) - [2 3]\ $	$\ e^{tA} - [2 3]\ $	$\ (8 9) - [3 4]\ $	$\ e^{tA} - [3 4]\ $
0.1	.249943E-11	.249944E-11	.304066E-16	.304066E-16
0.25	.665103E-09	.665103E-09	.504585E-13	.504585E-13
0.3	.204408E-08	.204408E-08	.223136E-12	.223136E-12
0.5	.491971E-07	.491970E-07	.148693E-10	.148693E-10
0.65	.259159E-06	.259198E-06	.132048E-09	.132048E-09
0.9	.211596E-05	.211596E-05	.205694E-08	.205694E-08
1	.422471E-05	.422462E-05	.506003E-08	.506002E-08
-0.1	.223016E-11	.223016E-11	.272042E-16	.272042E-16
-0.9	.278245E-07	.278245E-07	.852387E-11	.852387E-11
-1	.756684E-06	.756699E-06	.755566E-09	.755565E-09

Exemple 3: $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ avec 2 et -2 comme valeurs propres.

t	$\ (2 3) - [0 1]\ $	$\ e^{tA} - [0 1]\ $	$\ (4 5) - [1 2]\ $	$\ e^{tA} - [1 2]\ $
0.1	.551470E-01	.651111E-01	.802449E-04	.602436E-04
0.25	.173528E+01	.172917E+01	.715571E-02	.715193E-02
0.3	.357067E+01	.355725E+01	.184306E-01	.184104E-01
0.65	.375888E+02	.399122E+02	.125518E+01	.122448E+01
0.75	.319648E+02	.361125E+02	.288239E+01	.275542E+01
0.9	.254824E+02	.386891E+02	.844112E+01	.764090E+01
1	.282857E+02	.426667E+02	.157863E+02	.134265E+02
-0.1	.851470E-01	.651111E-01	.802447E-04	.602434E-04
-0.9	.294824E+02	.386891E+02	.844127E+01	.764069E+01
-1	.282856E+02	.426667E+02	.157866E+02	.134265E+02

t	$\ (8 9) - [3 4]\ $	$\ e^{tA} - [3 4]\ $
0.1	.309298E-07	.309298E-07
0.25	.198957E-07	.198957E-07
0.3	.105366E-06	.105366E-06
0.65	.150084E-03	.150045E-03
0.75	.613606E-03	.613246E-03
0.9	.388243E-02	.387611E-02
1	.116436E-01	.116096E-01
-0.1	.619882E-11	.615882E-11
-0.9	.087464E-02	.388828E-02
-1	.116199E-01	.115854E-01

La procédure de Kronrod nécessite la connaissance de $c_0, c_1, \dots, c_{3k+1}$

et atteint un ordre d'approximation égal à $k+2$.

À ordre égal elle peut être comparée à n'importe quelle estimation de l'erreur de $[k-1|k]_f$ utilisant le même nombre de coefficients.

Ainsi si $R_2(t)$ est une approximation de type quelconque de $f(t)$:

$$R_2(t) = f(t) + O(t^{3k+2}), \text{ alors } R_2(t) - [k-1|k]_f(t) \text{ est}$$

également une estimation de l'erreur $f(t) - [k-1|k]_f(t)$.

$R_2(t)$ peut être un approximant de Padé $[m|n]_f$ avec

$m+n=3k+1$ ou un approximant de type -Padé $(m|n)_f^{(3)}$ avec $m=3k+1$

ou tout simplement l'approximation :

$$R_2(t) = \sum_{j=0}^{3k+1} c_j t^j = f_{3k+1}(t).$$

Dans la suite nous allons comparer numériquement la

procédure de Kronrod et l'estimation $f_{3k+1}(t) - [k-1|k]_f(t)$.

Pour cela utilisons la définition 2 et formons le rapport $z(t)$:

$$z(t) = \frac{\left[\left((2k | 2k+1)_f^{(g)} - [k-1 | k]_f(t) \right) \cdot \left(f(t) - [k-1 | k]_f(t) \right)^{-1} - I \right] \times \left[\left(f_{3k+1}(t) - [k-1 | k]_f(t) \right) \cdot \left(f(t) - [k-1 | k]_f(t) \right)^{-1} - I \right]^{-1}}$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} & \cdot \left((2k | 2k+1)_f^{(g)} - [k-1 | k]_f(t) \right) \left(f(t) - [k-1 | k]_f(t) \right)^{-1} - I \\ & = \left((2k | 2k+1)_f^{(g)} - f(t) \right) \left(f(t) - [k-1 | k]_f(t) \right)^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \cdot \left[\left(f_{3k+1}(t) - [k-1 | k]_f(t) \right) \left(f(t) - [k-1 | k]_f(t) \right)^{-1} - I \right]^{-1} \\ & = \left[f(t) - [k-1 | k]_f(t) \right]^{-1} \cdot \left[f_{3k+1}(t) - f(t) \right]^{-1} \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} z(t) &= \left[(2k | 2k+1)_f^{(g)} - f(t) \right] \left[f_{3k+1}(t) - f(t) \right]^{-1} \\ &= \binom{g}{c} \left(x^{k+1} \tilde{P}_k(x) V_{k+1}(x) (1-tx)^{-1} \right) \cdot \left(\tilde{V}_{k+1}(t) \right)^{-1} \cdot \left(\tilde{P}_k(t) \right)^{-1} \times \\ & \quad \left[\binom{g}{c} \left(x^{3k+2} (1-tx)^{-1} \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{avec } f_{3k+1}(t) - f(t) = - \sum_{j=3k+2}^{\infty} c_j t^j = - \binom{g}{c} \left(x^{3k+2} (1-tx)^{-1} \right) \cdot t^{3k+2}$$

si C_{3k+2} est connu et inversible, on peut avoir une indication sur le comportement de ces deux estimations au voisinage de l'origine en calculant $z(0)$:

$$z(0) = \lim_{t \rightarrow 0} z(t) = C^{(g)} (x^{k+1} P_k^{(g)}(x) V_{k+1}(0)) \cdot (\tilde{V}_{k+1}(0))^{-1} \cdot (\tilde{P}_k^{(g)}(0))^{-1} \cdot (C_{3k+2})$$

si $\|z(0)\| < 1$, la procédure de Kronrod fournit une

estimation de l'erreur de $[k-1|k]_f$ meilleure que l'estima-

-tion $f_{3k+1}(t) - [k-1|k]_f(t)$, au moins au voisinage de l'origine.

Exemple 1:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$f(t) = e^{tA} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^i}{i!}$$

k = 1

$$\|z(t)\|_{\infty} = 1.77778$$

t	$\ (2/3) - [0 \ 1]\ $	$\ e^{tA} - [0 \ 1]\ $	$\ f_4(t) - [0 \ 1]\ $
-1	.938003E-01	.943287E-01	.933321E-01
-0.9	.805660E-01	.808855E-01	.802773E-01
-0.8	.675878E-01	.677694E-01	.674202E-01
-0.7	.550172E-01	.551125E-01	.549271E-01
-0.6	.431117E-01	.431132E-01	.431100E-01
-0.5	.316773E-02	.316773E-02	.316775E-02
0.1	.194812E-02	.194812E-02	.194836E-02
0.25	.137131E-01	.137124E-01	.137138E-01
0.5	.679181E-01	.678964E-01	.679572E-01
0.6	.107227E+00	.107173E+00	.107334E+00
1.	.453762E+00	.453125E+00	.455986E+00
1.1	.621384E+00	.620424E+00	.625520E+00

k = 2

$$\|z(t)\|_{\infty} = 1.01602$$

t	$\ (4/5) - [1 \ 2]\ $	$\ e^{tA} - [1 \ 2]\ $	$\ f_7(t) - [1 \ 2]\ $
-1.	.583495E-03	.583112E-03	.583351E-03
-0.9	.404808E-03	.404635E-03	.404716E-03
-0.8	.267342E-03	.267272E-03	.267386E-03
-0.7	.165850E-03	.165825E-03	.165761E-03
-0.6	.704826E-05	.704923E-05	.721216E-05
-0.5	.979331E-07	.979331E-07	.119209E-06
0.1	.110366E-06	.110386E-06	.238419E-06
0.25	.472188E-05	.472188E-05	.452995E-05
0.5	.880626E-04	.880596E-04	.877380E-04
0.6	.194271E-03	.194258E-03	.194192E-03
1	.192630E-02	.192527E-02	.192618E-02
1.1	.300477E-02	.300244E-02	.300336E-02

$$\cdot \underline{\underline{k=3}}$$

$$\cdot \|r(0)\|_{\infty} = 0.487148$$

t	$\ (6/7) - [2/3]\ $	$\ e^{tA} - [2/3]\ $	$\ f_{10}(t) - [2/3]\ $
-1.	.135169E-05	.135174E-05	.125170E-05
-0.9	.758684E-06	.758699E-06	.774860E-06
-0.8	.395352E-06	.395356E-06	.397628E-06
-0.7	.187490E-06	.187491E-06	.238419E-06
-0.3	.145206E-08	.145206E-08	.566048E-07
-0.1	.223016E-11	.223016E-11	.119209E-06
0.1	.249943E-11	.249944E-11	.119209E-06
0.25	.665103E-09	.665103E-09	.000001E+00
0.5	.491971E-07	.491970E-07	.238419E-06
0.6	.155724E-06	.155724E-06	.357628E-06
1.	.422471E-05	.422462E-05	.405312E-05
1.1	.794318E-05	.794291E-05	.798702E-05

meilleure

Exemple 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ de valeur propre } \lambda \text{ d'ordre de multiplicité } 2.$$

$$\cdot \underline{\underline{k=1}}$$

$$\cdot \|r(0)\|_{\infty} = 1.77778$$

t	$\ (2/3) - [0/1]\ $	$\ e^{tA} - [0/1]\ $	$\ f_4(t) - [0/1]\ $
-2.	.498446E+00	.260267E+02	.456533E+02
-1.	.515306E+00	.207407E+01	.177776E+01
-0.9	.508829E+00	.144395E+01	.100638E+01
-0.8	.495381E+00	.106035E+01	.481906E+00
-0.7	.473546E+00	.795683E+00	.339189E+00
-0.3	.249310E+00	.256641E+00	.243225E+00
-0.1	.540826E-01	.541204E-01	.540446E-01
0.1	.136355E+00	.136292E+00	.136467E+00
0.25	.232763E+01	.232292E+01	.233417E+01
0.6	.525000E+02	.512640E+02	.523008E+02
1.1	.115157E+02	.238031E+02	.331488E+02
2.	.700590E+01	.841481E+02	.188444E+03

$$\underline{\underline{k=2}}$$

$$\cdot \|z(0)\|_{\infty} = 1.01616$$

t	$\ (415) - [112]\ $	$\ e^{tA} - [112]\ $	$\ f_2(t) - [112]\ $
-2.	.234886E+00	.960830E+01	.169564E+02
-1.	.102967E+00	.369981E+01	.478718E-01
-0.9	.872504E-01	.469870E+01	.592248E-01
-0.8	.707784E-01	.491265E-01	.556376E-01
-0.7	.542519E-01	.444565E-01	.488948E-01
-0.6	.571777E-02	.568608E-02	.570854E-02
-0.5	.129874E-03	.129869E-03	.129849E-03
-0.4	.244573E-03	.244566E-03	.244237E-03
0.25	.155078E-01	.154908E-01	.155014E-01
0.6	.154441E-01	.149553E-01	.152000E-01
1.1	.580972E+02	.350623E+02	.394984E+02
2.	.774257E+02	.219067E+03	.398222E+03

• Il faut remarquer qu'au voisinage de l'origine, les deux estimations donnent pratiquement les mêmes résultats.

$$\underline{\underline{k=3}}$$

$$\cdot \|z(0)\|_{\infty} = 0.506278$$

t	$\ (617) - [213]\ $	$\ e^{tA} - [213]\ $	$\ f_3(t) - [213]\ $
-2.	.596361E+01	.108559E+01	.162615E+01
-1.	.829838E-02	.981684E-02	.733001E-02
-0.9	.559831E-02	.613808E-02	.528762E-02
-0.8	.351876E-02	.368655E-02	.343147E-02
-0.7	.201988E-02	.206385E-02	.199923E-02
-0.6	.347800E-04	.347868E-04	.347644E-04
-0.5	.812922E-07	.812923E-07	.823517E-07
-0.4	.140425E-06	.140425E-06	.102331E-06
0.25	.520919E-04	.520900E-04	.520915E-04
0.6	.271004E-01	.270592E-01	.271252E-01
1.1	.462671E+01	.463569E+01	.476736E+01
2.	.731581E+03	.683347E+03	.694817E+03

Exemple 3:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}, \text{ de valeurs propres } 2 \text{ et } -2.$$

$$\underline{\underline{k=1}}$$

$$\bullet \|z(0)\|_{\infty} = 1.7779$$

t	$\ z(t) - [0 \ 1]\ $	$\ e^{tA} - [0 \ 1]\ $	$\ f_4(t) - [0 \ 1]\ $
-1.	.282858E+02	.426667E+02	.480000E+02
-0.9	.284824E+02	.386891E+02	.429069E+02
-0.8	.308425E+02	.363388E+02	.396987E+02
-0.7	.338874E+02	.369869E+02	.397880E+02
-0.3	.357067E+01	.355725E+01	.361800E+01
-0.1	.851470E-01	.851111E-01	.852003E-01
0.25	.173528E+01	.172917E+01	.175000E+01
0.6	.459440E+02	.477556E+02	.505832E+02
1.	.282857E+02	.426667E+02	.480000E+02
1.1	.268350E+02	.478605E+02	.545710E+02
2.	.124933E+02	.145067E+03	.179200E+03
2.5	.877707E+01	.247396E+03	.312500E+03

$$\underline{\underline{k=2}}$$

$$\|z(0)\|_{\infty} = 1.01730$$

t	$\ (415) - [112]\ $	$\ e^{tA} - [112]\ $	$\ f_1(t) - [112]\ $
-1.	.157868E+02	.134265E+02	.141715E+02
-0.9	.844127E+01	.764088E+01	.793993E+01
-0.8	.421054E+01	.396784E+01	.407197E+01
-0.7	.192716E+01	.186330E+01	.189398E+01
-0.6	.184305E-01	.184104E-01	.184230E-01
-0.4	.802447E-04	.802434E-04	.799000E-04
0.1	.802449E-04	.802436E-04	.799000E-04
0.25	.715571E-02	.715193E-02	.715423E-02
0.6	.793791E+00	.779774E+00	.787172E+00
1.	.157863E+02	.134265E+02	.141715E+02
1.1	.281180E+02	.217055E+02	.233442E+02
2.	.611321E+02	.210018E+03	.303094E+03

meiPewr

$$\underline{\underline{k=3}}$$

$$\|z(0)\|_{\infty} = 0.498421$$

t	$\ (617) - [213]\ $	$\ e^{tA} - [213]\ $	$\ f_{10}(t) - [213]\ $
-1.	.653280E+00	.650522E+00	.660065E+00
-0.9	.264158E+00	.263073E+00	.265668E+00
-0.8	.992351E-01	.989130E-01	.994959E-01
-0.7	.336562E-01	.337809E-01	.338943E-01
-0.6	.602088E-04	.602029E-04	.598431E-04
-0.4	.309342E-07	.309342E-07	.894070E-07
0.1	.309296E-07	.309298E-07	.208616E-06
0.25	.163161E-04	.163154E-04	.161231E-04
0.6	.101471E-01	.101336E-01	.101511E-01
1.	.653152E+00	.650444E+00	.660043E+00
1.1	.152587E+01	.152212E+01	.155421E+01
2.	.299156E+03	.536009E+03	.632302E+03

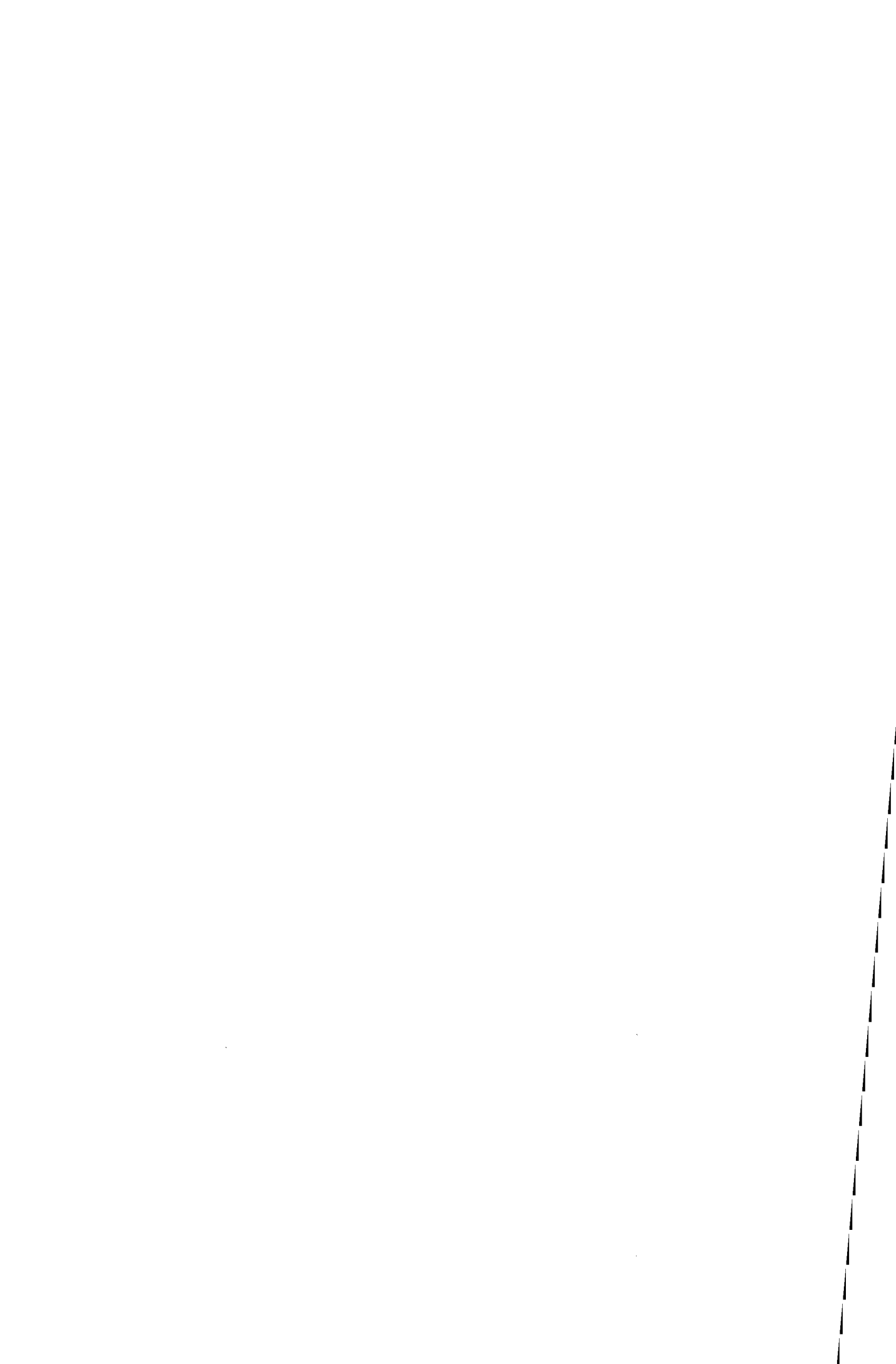
meiPewr

CHAPITRE VI

ESTIMATION DE L'ERREUR

DES APPROXIMANTS DE

PADE' VECTORIELS.



I. INTRODUCTION:

Dans ce chapitre nous étudions l'extension de la procédure de Kronrod aux approximants de Padé vectoriels. Ces approximants ont été définis par J. VAN ISEGHEM en [35].

Nous définissons les polynômes de Stieltjes qui interviennent dans la construction de la procédure de Kronrod, et donnons quelques propriétés algébriques de ces polynômes.

Nous donnons également d'autres procédures d'estimation de l'erreur en considérant une nouvelle interprétation de la procédure de Kronrod. Pour cela on utilise trois expressions de l'erreur vectorielle.

Les résultats sont assez parallèles à ceux obtenus dans le cas scalaire [6; 7].

Rappelons quelques propriétés fondamentales des approximants de Padé vectoriels.

Ces approximants ont été étudiés en détail dans [35; 36].

Soit $F(t)$ une fonction vectorielle de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^d :

$$F(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t))^t$$

On suppose $F(t)$ développable en série entière au voisinage de zéro :

$$F(t) = \sum_{i \geq 0} \Gamma_i t^i, \quad \Gamma_i \in \mathbb{C}^d$$

et Γ la fonctionnelle linéaire de $\mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}^d : \Gamma(x^i) = \Gamma_i$

On a formellement :

$$F(t) = \Gamma((1-tx)^{-1}).$$

I.1. Approximants de type - Padé [35, p.8] :

soit $v(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ où les x_i sont arbitraires, $\tilde{v}(t) = t^n v(t^{-1})$

On pose

$$w(t) = \Gamma\left(\frac{v(x) - v(t)}{x - t}\right) \text{ et } \tilde{w}(t) = t^{n-1} w(t^{-1}) \text{ qui est un}$$

polynôme vectoriel de degré au plus $n-1$, (Γ agit sur x , t étant un paramètre).

On a comme dans le cas scalaire, si $P(t)$ est le polynôme d'interpolation de $(1-tx)^{-1}$ en x_i , $i=1, \dots, n$, alors :

$$\Gamma(P)(t) = \frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)}$$

et

$$F(t) - \Gamma(P)(t) = \frac{t^n}{\tilde{v}(t)} \Gamma\left(\frac{v(x)}{1-tx}\right) = O(t^n) = \frac{t^n}{\tilde{v}(t)} \sum_{i \geq 0} D_i t^i$$

$$\text{avec } D_i = \Gamma(x^i v(x)).$$

si l'on note $\Gamma_i = (c_i^1, \dots, c_i^d)$, on définit ainsi des fonctionnelles linéaires composantes c^α , $\alpha=1, \dots, d$:

$$c^\alpha(x^i) = c_i^\alpha, \text{ et } f_\alpha \text{ étant la composante de } F :$$

$$c^\alpha((1-tx)^{-1}) = f_\alpha(t).$$

La composante α de $\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)}$ est l'approximant de type-Padé $(n-1/m)$ de f_α .

La fraction rationnelle vectorielle $\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)}$ est par définition l'approximant de type-Padé $(n-1/m)_F$ de $F(t)$.

v étant arbitraire, mais il peut être choisi tel que :

$$M(x^i v(x)) = 0 \quad i=0, \dots, \left[\frac{n}{d} \right] - 1.$$

où

$\left[\frac{n}{d} \right]$ est la partie entière de n .

Par le théorème 3.1 de [], nous avons :

$$F(t) - (n-1/n)_F(t) = \frac{t^{n + \left[\frac{n}{d} \right]} \Gamma \left(\frac{\left[\frac{n}{d} \right] v(x)}{1-tx} \right)}{\tilde{v}(t)}.$$

I.2. Approximants de Padé vectoriels :

Soit r un entier : $r = nd + k$, $n \geq 0$, $0 \leq k < d$

et P_r l'unique polynôme unitaire déterminé par :

$$(R) \begin{cases} M(x^i P_r(x)) = 0 & i = 0, \dots, n-1. \\ C^d(x^n P_r(x)) = 0 & d = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Les approximants de Padé type-Padé de polynôme générateur P_r approximent $F(t)$ à l'ordre maximal $r+n-1$. De plus les k premières composantes ont pour ordre d'approximation $r+n$.

Ce sont ces approximants qu'on appellera approximants de Padé vectoriels.

Les équations (R) définissent un système linéaire. Posons

$$P_r(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i, \quad a_r = 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \Gamma_0 + \dots + a_r \Gamma_r = 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_0 \Gamma_{n-1} + \dots + a_r \Gamma_{r+n-1} = 0 \\ a_0 \Gamma_n^{(k)} + \dots + a_r \Gamma_{r+n}^{(k)} = 0 \end{array} \right.$$

Chaque ligne vectorielle représente les d lignes scalaires $a_0 C_i^\alpha + \dots + a_r C_{i+r}^\alpha = 0$
 $\alpha = 1, \dots, d$ et $i = 0, \dots, n-1$.

et la dernière ligne représente les k premières lignes scalaires de
 $(a_0 \Gamma_n + \dots + a_r \Gamma_{r+n} = 0)$.

On appelle $H_r(\Gamma_0)$ le déterminant de ce système.

Le polynôme P_r existe si et seulement si $H_r(\Gamma_0)$ est non nul.

P_r admet alors une expression explicite :

$$P_r(x) = \frac{1}{H_r(\Gamma_0)} \begin{vmatrix} \Gamma_0 & \dots & \Gamma_{r-1} & \Gamma_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{n-1} & \dots & \Gamma_{r+n-1} & \Gamma_{r+n-1} \\ \Gamma_n^{(k)} & \dots & \Gamma_{r+n}^{(k)} & \Gamma_{r+n}^{(k)} \\ 1 & \dots & x^{r-1} & x^r \end{vmatrix}$$

Si un tel polynôme P_r existe, il est dit le polynôme de degré r orthogonal par rapport à la fonctionnelle vectorielle \mathcal{M} .

Relation de récurrence entre les P_r (Théorème I.1, [35, p. 27]) :

les polynômes P_r vérifient une relation de récurrence à $d+1$ termes de la forme :

$$(d) \quad P_{r+1}(x) = (x - \beta_{r+1}) P_r(x) + \sum_{\mu=1}^d \gamma_{\mu}^{r+1} P_{r-\mu}(x)$$

$$\gamma_d^{r+1} \neq 0, \quad r \geq d.$$

Si r est inférieur à d , la relation existe encore et le dernier terme est non nul c.à.d. $\gamma_r^r \neq 0$.

Soit $[r-1 | r]_F$, $r \geq 1$, l'approximant de Padé vectoriel de polynôme générateur P_r :

$$[r-1 | r]_F(t) = \frac{\tilde{\Phi}_r(t)}{\tilde{P}_r(t)}$$

où Φ_r est le polynôme vectoriel associé à P_r : $\Phi_r(t) = \mathcal{M}\left(\frac{P_r(x) - P_r(t)}{x - t}\right)$

avec :

$$\tilde{\Phi}_r(t) = E^{r-1} \Phi_r(t^{-1})$$

$$= E^{r-1} \mathcal{M}\left(\frac{P_r(x) - P_r(t^{-1})}{x - t^{-1}}\right)$$

$$= \mathcal{M}\left(\frac{E^r P_r(E^{-1}) - E^r P_r(x)}{1 - tx}\right) = \mathcal{M}\left(\frac{\tilde{P}_r(t) - E^2 P_r(x)}{1 - tx}\right)$$

$$= \tilde{P}_r(t) F(t) - E^r \mathcal{M}\left(\frac{P_r(x)}{1 - tx}\right).$$

De cette expression nous obtenons le terme de l'erreur vectorielle :

$$F(t) - \frac{\tilde{\Phi}_r(t)}{\tilde{P}_r(t)} = \frac{t^r}{\tilde{P}_r(t)} \mathcal{M} \left(\frac{P_r(x)}{1-tx} \right)$$

En développant en série entière $\frac{P_r(x)}{1-tx}$ et en utilisant l'orthogonalité de P_r , nous obtenons formellement :

$$F(t) - [r-1|r]_F(t) = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_r(t)} \cdot \mathcal{M} \left(\frac{x^n P_r(x)}{1-tx} \right).$$

De même si P_n est le polynôme unitaire de degré n , orthogonal par rapport à \mathcal{M} , alors :

$$F(t) - [r-1|r]_F(t) = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_r(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \mathcal{M} \left(\frac{P_r(x) P_n(x)}{1-tx} \right).$$

Pour cela il suffit d'écrire :

$$\mathcal{M} \left(P_r(x) \frac{P_n(x) - P_n(t^{-1})}{x - t^{-1}} \right) = 0, \text{ par l'orthogonalité de } P_r.$$

$$\mathcal{M} \left(P_r(x) P_n(x) \frac{1}{1-tx} \right) = P_n(t^{-1}) \mathcal{M} \left(\frac{P_r(x)}{1-tx} \right)$$

$$\text{donc } \mathcal{M} \left(\frac{P_r(x)}{1-tx} \right) = \frac{t^n}{\tilde{P}_n(t)} \cdot \mathcal{M} \left(\frac{P_r(x) P_n(x)}{1-tx} \right) \quad \bullet$$

II. EXTENSION DE LA PROCÉDURE DE KRONROD AUX APPROXIMANTS

DE PADÉ VECTORIELS :

Le but de ce paragraphe est d'étendre la procédure de Kronrod [6] aux approximations de Padé vectoriels de telle sorte qu'on obtienne une estimation uniforme sur toutes les composantes et que lorsque l'on passe au cas scalaire on retrouve les résultats de [6; 7].

Comme l'approximant de Padé vectoriel $[r-1|r]_F$ peut être considéré également comme une formule de quadrature gaussienne formelle "généralisée", nous pourrions appliquer l'idée de Kronrod en rajoutant s nouveaux noeuds aux r noeuds précédents (zéros de P_r). En d'autres termes nous considérerons l'approximant de type-Padé $(r+s-1|r+s)_F$ de polynôme générateur $v(x) = P_r(x) V_s(x)$ où V_s est un polynôme arbitraire, unitaire de degré $s \geq 1$.

Posons :

$$W_s(t) = \prod \left(P_r(x) \frac{V_s(x) - V_s(t)}{x - t} \right)$$

Magit sur x , t étant un paramètre.

W_s est un polynôme vectoriel de degré au plus $s-1$ en t .

Le polynôme vectoriel w associé à v est donné par :

$$\begin{aligned} w(t) &= \prod \left(\frac{P_r(x) V_s(x) - P_r(t) V_s(t)}{x - t} \right) \\ &= W_s(t) + V_s(t) \Phi_2(t) . \end{aligned}$$

où Q_r est le polynôme vectoriel de degré $r-1$, associé à P_r .

Nous avons:

$$\tilde{v}(t) = t^{r+s} v(t^{-1}) = \tilde{P}_r(t) \tilde{V}_s(t) \text{ avec } \tilde{P}_r(t) = t^r P_r(t^{-1}), \tilde{V}_s(t) = t^s V_s(t)$$

$$\tilde{w}(t) = t^{2+s-1} w(t^{-1}) = t^2 \tilde{W}_s(t) + \tilde{V}_s(t) \tilde{Q}_r(t)$$

avec

$$\tilde{W}_s(t) = t^{s-1} W_s(t^{-1}) \text{ et } \tilde{Q}_r(t) = t^{r-1} Q_r(t^{-1}).$$

Nous avons ainsi prouvé le :

Théorème 2.1 :

soit $(r+s-1 | r+s)_F$ l'approximant de type-Padé de F de polynôme générateur $v(x) = P_r(x) V_s(x)$. Alors:

$$(r+s-1 | r+s)_F(t) - [r-1 | r]_F(t) = \frac{t^r}{\tilde{P}_r(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)}$$

$$F(t) - (r+s-1 | r+s)_F(t) = \frac{t^{r+s}}{\tilde{P}_r(t) \tilde{V}_s(t)} \cdot \Gamma \left(\frac{P_r(x) V_s(x)}{1-tx} \right).$$

$\frac{V_s(x) - V_s(t)}{x-t}$ est un polynôme de degré $s-1$ en x . Par l'orthogonalité de

P_r par rapport à Γ , W_s est identiquement nul pour $s \leq n$ et par conséquent $(s+r-1 | s+r)_F$ est identique à $[r-1 | r]_F$. Pour $s > n$, W_s est de degré $s-n-1$. Ainsi la plus petite valeur possible de s est $n+1$.

II.1. Polynômes de Stieltjes:

Parallèlement au cas scalaire nous allons procéder à une construction canonique du polynôme de Stieltjes qui joue un rôle important dans l'efficacité de la procédure de Kronrod.

Pour cela reprenons l'estimation $e_2^{(s)}(t) = \frac{t^2}{\tilde{P}_2(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)}$ dont les

composantes sont données par:

$$e_{2,\alpha}^{(s)}(t) = \frac{t^2}{\tilde{P}_2(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s^\alpha(t)}{\tilde{V}_s(t)}, \quad \alpha = 1, \dots, d.$$

où:

$$\tilde{W}_s^\alpha(t) = t^{\alpha-1} W_s^\alpha(t^{-1}) \text{ avec } W_s^\alpha(t) = C^\alpha \left(P_2(x) \frac{V_s(x) - V_s(t)}{x - t} \right).$$

Maintenant pour $r = nd + k$, fixe, nous allons construire de proche en proche le meilleur entier $s(r)$ de telle sorte que le polynôme $V_{s(r)}$ correspondant, réponde à la question formulée au début du paragraphe.

• Cas $s = n+1$:

Si l'on considère la plus petite valeur de s à savoir $n+1$ alors par les relations (R) définissant P_r , nous avons $W_s^\alpha \equiv 0$, pour $\alpha = 1, \dots, k$ et par conséquent les k premières composantes de $e_2^{(s)}(t)$ sont identiquement nulles, et donc le choix d'un certain polynôme optimal de degré $n+1$, n'aurait aucun intérêt.

• Cas $s > n+1$:

Deux cas se présentent:

• $s < d$: On écarte ce cas car il ne répond bien évidemment pas à la question.

• $s \geq d$: $s = md + \nu$, $m \geq 1$, $0 \leq \nu < d$.

Compte-tenu de la définition du polynôme de Stieltjes dans le cas scalaire le premier choix raisonnable est :

• $s = (n+1)d = r+d-k$

Puisque l'on exige de la nouvelle formule de quadrature $(r+s-1 | r+s)_F$ d'être la meilleure possible i.e d'atteindre l'ordre d'approximation le plus élevé possible, on peut imposer à $V_{(n+1)d}$ de satisfaire :

$$M(x^i P_r(x) V_{(n+1)d}(x)) = 0 \quad i=0, \dots, n.$$

En développant en série entière $\frac{P_r(x) V_{(n+1)d}(x)}{1-tx}$ et en utilisant la relation ci-dessus par le théorème 2.1, on obtient :

$$E_r^{(s)}(t) = F(t) - [r-1 | r]_F(t) - \frac{t^{r+(n+1)d+n+1}}{\tilde{P}_r(t) \tilde{V}_{(n+1)d}(t)} M\left(\frac{x^{n+1} P_r(x) V_{(n+1)d}(x)}{1-tx}\right).$$

Et l'on obtient ainsi l'ordre d'approximation voulu sauf que ce choix du polynôme $V_{(n+1)d}$ n'est ^{pas} le meilleur dans le sens que plusieurs polynômes P_i successifs peuvent avoir des polynômes de Stieltjes associés ayant le même degré.

Nous avons également le :

• cas $s = (n+1)d + k'$ avec $0 \leq k' < d$, fixé.

On peut imposer à V_k de satisfaire : $M(x^i P_r(x) V_k(x)) = 0 \quad i=0, \dots, n$
 $C^{\alpha}(x^{n+1} P_r(x) V_k(x)) = 0 \quad \alpha=1, \dots, k'$.

Nous obtenons aussi une estimation uniforme telle que :

$$e_n^{(s)}(t) = F(t) - [r-1/r]_F(t) + O(t^{r+s+n+1})$$

De plus les k' premières composantes de $e_n^{(s)}(t)$ ont pour ordre d'approximation

$$r+s+n+1 = r + (n+1)d + k' + n + 1 = (n+1)d + n + 1 + k + k'$$

Mais c'est aussi un choix de polynôme qui ne dépend pas uniquement de r , par conséquent on rencontre le même problème que précédemment.

Définition : On appelle polynôme de Stieltjes associé à P_r , l'unique polynôme V_{r+d} unitaire de degré $r+d = (n+1)d + k$, déterminé par :

$$\begin{cases} M(x^i P_r(x) V_{r+d}(x)) = 0 & i=0, \dots, n \\ C^\alpha(x^{n+1} P_r(x) V_{r+d}^{(\alpha)}(x)) = 0 & \alpha=1, \dots, k \end{cases}$$

Ce choix de polynôme dépend uniquement de r et assure une estimation uniforme d'ordre d'approximation $r+d+n+1$. De plus les k premières composantes de cette estimation ont pour ordre d'approximation $r+d+n+1$.

Pour cela nous énonçons le :

Théorème 2.2 :

soit $(r-1/r)_{r+d}$ l'approximant de type-Padé de F , de polynôme générateur $v(x) = P_r(x) V_{r+d}(x)$.

si v est choisi tel que :

$$\begin{cases} M(x^i v(x)) = 0 & i=0, \dots, n \\ C^\alpha(x^{n+1} v(x)) = 0 & \alpha=1, \dots, k \end{cases}$$

Alors:

$$F(t) - (2r+d-1 | 2r+d)_F(t) = \frac{t^{2r+d+n+1}}{\tilde{P}_r(t) \tilde{V}_{r+d}(t)} \Gamma\left(\frac{x^{n+1} P_r(x) V_{r+d}(x)}{1-tx}\right)$$

$$(2r+d-1 | 2r+d)_F(t) - [r-1 | r]_F(t) = F(t) - [r-1 | r]_F(t) - \frac{t^{2r+d+n+1}}{\tilde{V}(t)} \Gamma\left(\frac{x^{n+1} V(x)}{1-tx}\right)$$

ou

$$(2r+d-1 | 2r+d)_{f_\alpha}(t) - [r-1 | r]_{f_\alpha}(t) = \frac{f_\alpha(t)}{f_\alpha} - [r-1 | r]_{f_\alpha}(t) - \frac{t^{2r+d+n+\varepsilon+1}}{\tilde{V}(t)} C^\alpha\left(\frac{x^{n+\varepsilon+1} V}{1-tx}\right)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \varepsilon = 1, & \alpha = 1, \dots, k \\ \varepsilon = 0, & \alpha = k+1, \dots, d. \end{cases}$$

Preuve: Par le théorème 2.1, nous avons :

$$e_n^{(2+d)}(t) = \frac{t^2}{\tilde{P}_2(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{2+d}(t)}{\tilde{V}_{2+d}(t)} = (2r+d-1 | 2r+d)_F(t) - [r-1 | r]_F(t)$$

avec

$$W_{2+d}(t) = \Gamma\left(P_2(x) \frac{V_{2+d}(x) - V_{2+d}(t)}{x - t}\right)$$

$$\tilde{W}_{2+d}(t) = t^{2+d-1} W_{2+d}(t^{-1}) = t^{2+d-1} \Gamma\left(P_2(x) \frac{V_{2+d}(x) - V_{2+d}(t^{-1})}{x - t^{-1}}\right)$$

$$= t \tilde{V}_{2+d}(t) \Gamma\left(\frac{P_r(x)}{1-tx}\right) - t^{2+d} \Gamma\left(\frac{P_r(x) V_{2+d}(x)}{1-tx}\right)$$

$$= \tilde{V}_{2+d}(t) \Gamma\left(\frac{P_r(x)}{1-tx}\right) - t^{2+d+n+1} \Gamma\left(\frac{x^{n+1} P_r(x) V_{2+d}(x)}{1-tx}\right) \quad \blacksquare$$

Si $d=1$, on retrouve les résultats du théorème 2 [7].

On peut définir un produit $(a_1, \dots, a_d)^t \cdot (b_1, \dots, b_d)^t = (a_1 b_1, \dots, a_d b_d)^t$ par identification d'un vecteur à la diagonale d'une matrice diagonale. Ayant un produit et un quotient classique composante à composante, on retrouve de manière évidente les résultats obtenus dans l'estimation de l'erreur des approximations de Padé composante à composante.

D'autre part en étendant également les principes généraux donnés en [6], au cas vectoriel, nous pouvons énoncer le :

Théorème 2.3 :

$$\begin{aligned}
 & (2r+d-1 | 2r+d)_F(t) - [r-1 | r]_F(t) \\
 &= F(t) - [r-1 | r]_F(t) - \frac{t^{2r+d+n+1}}{\tilde{P}_r(t) \tilde{V}_{r+d}(t)} \cdot \Gamma \left(\frac{x^{n+1} P_r(x) V_{r+d}(x)}{1-tx} \right) \\
 & \{ F(t) - [r-1 | r]_F(t) \} \left\{ (2r+d-1 | 2r+d)_F(t) - [r-1 | r]_F(t) \right\}^{-1} \\
 &= \mathbb{1}_d + t^{2r+d+n+1} \Gamma \left(\frac{x^{n+1} P_r(x) V_{r+d}(x)}{1-tx} \right) \cdot (\tilde{W}_{r+d}(t))^{-1}
 \end{aligned}$$

Preuve : La démonstration est assez parallèle à celle donnée dans le cas scalaire dans [6].

Soit Λ la fonctionnelle vectorielle définie par :

$$\Lambda(x^i) = \Gamma(x^i P_r(x)) = \Lambda_i, \quad i=0, 1, \dots$$

$$\text{et } g(t) = \sum_{i \geq 0} \Lambda_i t^i .$$

Par définition V_{r+d} est le polynôme de degré $r+d$, orthogonal par rapport à Λ et W_{r+d} est son polynôme associé. Ainsi :

$$\frac{\tilde{W}_{r+d}(t)}{\tilde{V}_{r+d}(t)} = [r+d-1 | r+d]_g(t) .$$

Mais par l'orthogonalité de P_r par rapport à Γ , $\Lambda_i = 0$, $i=0, \dots, n-1$.

Posons :

$$g(t) = t^n g_n(t)$$

$$\text{où : } g_n(t) = \Lambda_n + \Lambda_{n+1}t + \dots$$

Par les propriétés algébriques des approximants de Padé, nous avons :

$$[r+d-1 | r+d]_g(t) = t^n [r+d-n-1 | r+d]_{g_n}(t)$$

$$g(t) - [r+d-1 | r+d]_g(t) = \frac{t^{r+d}}{\tilde{V}_{r+d}(t)} \Lambda \left(\frac{V_{r+d}(x)}{1-tx} \right)$$

Donc

$$[r+d-n-1 | r+d]_{g_n}(t) = g_n(t) - \frac{t^{r+d+1}}{\tilde{V}_{r+d}(t)} \Lambda \left(\frac{x^{n+1} P_2(x) V_{r+d}(x)}{1-tx} \right)$$

et

$$\underbrace{t^{r+n} [r+d-n-1 | r+d]_{g_n}(t)}_{''} = t^{r+n} g_n(t) - \frac{t^{r+d+n+1}}{\tilde{V}_{r+d}(t)} \Lambda \left(\frac{x^{n+1} P_2(x) V_{r+d}(x)}{1-tx} \right)$$

$$\underbrace{t^r [r+d-1 | r+d]_g(t)}_{\tilde{W}_{r+d}(t) (\tilde{V}_{r+d}(t))^{-1}}$$

D'où

$$\begin{aligned} (2r+d-1)(2r+d) \underset{F}{(t)} - [r-1|r] \underset{F}{(t)} &= \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_r(t)} \cdot g_n(t) + O(t^{2r+d+n+1}) \\ &= \frac{t^r}{\tilde{P}_r(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{n+d}(t)}{\tilde{V}_{n+d}(t)}. \end{aligned}$$

D'autre part nous savons que :

$$F(t) - [r-1|r] \underset{F}{(t)} = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_r(t)} \Gamma\left(\frac{x^n P_r(x)}{1-tx}\right) = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_r(t)} g_n(t).$$

et les résultats s'ensuivent ■

Expression explicite des V_{r+d} : $r+d = (n+1)d + k$, $n \geq 0$, $0 \leq k < d$

Les équations $\Gamma(x^i P_r(x) V_{r+d}(x)) = 0$ et $c^\alpha (x^{n+1} P_r(x) V_{r+d}(x)) = 0$ définissent un système linéaire. Posons :

$$V_{r+d}(x) = \sum_{i=0}^{r+d} a_i x^i, \quad a_{r+d} = 1.$$

$$a_n \Gamma(x^n P_r(x)) + \dots + a_{r+d} \Gamma(x^{r+d} P_r(x)) = 0$$

$$a_{n-1} \Gamma(x^{n-1} P_r(x)) + a_n \Gamma(x^{n+1} P_r(x)) + \dots + a_{r+d} \Gamma(x^{r+d+1} P_r(x)) = 0$$

.....

$$a_0 \Gamma(x^n P_r(x)) + \dots + a_{r+d} \Gamma(x^{r+d+n} P_r(x)) = 0$$

$$a_0 \Gamma^{(k)}(x^{n+1} P_r(x)) + \dots + a_{r+d} \Gamma^{(k)}(x^{r+d+n+1} P_r(x)) = 0$$

Chaque ligne vectorielle représente les d lignes scalaires : $i=0, \dots, n$

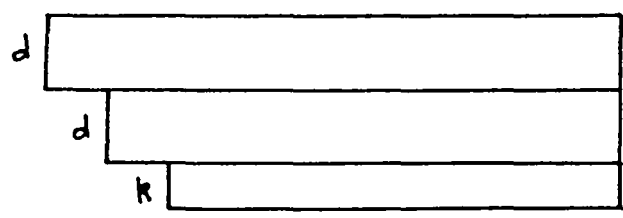
et j tel que : $i+j = n+1$

$$a_j c^\alpha (x^{i+j} P_r(x)) + \dots + a_{r+d} c^\alpha (x^{r+d+i} P_r(x)) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k$$

$$a_{j-1} c^\alpha (x^{i+j-1} P_r(x)) + a_j c^\alpha (x^{i+j} P_r(x)) + \dots + a_{r+d} c^\alpha (x^{r+d+i} P_r(x)) = 0 \quad \alpha = k+1, \dots, d$$

et la dernière ligne représente les k premières lignes scalaires $\alpha = 1, \dots, k$
 $a_0 c^\alpha (x^{n+1} P_r(x)) + \dots + a_{r+d} c^\alpha (x^{r+d+n+1} P_r(x)) = 0$

Et d'on obtient donc un système linéaire de la forme:



On appelle H_{r+d}^* le déterminant de ce système :

$$H_{r+d}^* = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \Gamma(x^n P_r) & \dots & \Gamma(x^{r+d-1} P_r) \\ 0 & \dots & \Gamma(x^n P_r) & \dots & \dots & \Gamma(x^{r+d+n-1} P_r) \\ \Gamma(x^n P_r) & \dots & \dots & \dots & \dots & \Gamma(x^{r+d+n} P_r) \\ \Gamma^{(k)}(x^{n+1} P_r) & \dots & \dots & \dots & \dots & \Gamma^{(k)}(x^{r+d+n} P_r) \end{vmatrix}$$

Théorème 2.4 : Une condition nécessaire et suffisante pour que V_{n+d} existe est que H_{r+d}^* soit non nul, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k < d$.
 V_{n+d} admet alors l'expression explicite:

$$V_{n+d}(x) = \frac{1}{H_{r+d}^*} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \Gamma(x^n P_r) & \dots & \Gamma(x^{r+d} P_r) \\ 0 & \dots & \Gamma(x^n P_r) & \dots & \dots & \Gamma(x^{r+d+n} P_r) \\ \Gamma(x^n P_r) & \dots & \dots & \dots & \dots & \Gamma(x^{r+d+n} P_r) \\ \Gamma^{(k)}(x^{n+1} P_r) & \dots & \dots & \dots & \dots & \Gamma^{(k)}(x^{r+d+n} P_r) \\ 1 & x & \dots & \dots & \dots & x^{r+d} \end{vmatrix}$$

preuve: V_{n+d} étant le polynôme de degré $n+d$, orthogonal par rapport à la fonctionnelle vectorielle Λ définie par:

$$\Lambda_i = \Lambda(x^i) = \Gamma(x^i P_r(x)), \quad i=0,1,\dots$$

II.2. Quelques Propriétés Algébriques des Polynômes de Stieltjes:

les polynômes P_i ont été supposés unitaires, ils forment donc une base. Ainsi pour avoir plus d'information sur V_{n+d} , le produit $P_r(x) V_{n+d}(x)$ peut s'exprimer dans la base $\{P_i\}$:

$$P_r(x) V_{n+d}(x) = \sum_{i=0}^{n+d} \gamma_i P_i(x), \quad \gamma_{n+d} = 1.$$

où les γ_i sont des constantes dépendant de l'indice r .

Par définition de V_{n+d} nous avons:

$$\Gamma(x^j P_r(x) V_{n+d}(x)) = \sum_{i=0}^{n+d} \gamma_i \Gamma(x^j P_i(x)) = 0 \quad j=0, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+d} \gamma_i C^\alpha(x^j P_i(x)) = 0 \quad \begin{array}{l} j=0, \dots, n \\ d=1, \dots, d \end{array}$$

et $C^\alpha(x^j P_i(x)) = 0$ pour $i \geq j d + \alpha$

d'où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{n+d} \gamma_i C^\alpha(x^j P_i(x)) = \sum_{i=0}^{j d + \alpha - 1} \gamma_i C^\alpha(x^j P_i(x)) = 0 \\ d=1, \dots, d \quad \text{et} \quad j=0, \dots, n. \end{array} \right.$$

D'autre part $C^\alpha(x^i P_{i d + \alpha - 1}(x)) = \frac{H_{i d + \alpha}}{H_{i d + \alpha - 1}} \neq 0.$

$j=0$:

$$\sum_{i=0}^{d-1} \gamma_i c^\alpha(P_i) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 c^1(P_0) = 0 \\ \gamma_0 c^2(P_0) + \gamma_1 c^2(P_1) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \gamma_0 c^d(P_0) + \dots + \gamma_{d-1} c^d(P_{d-1}) = 0 \end{array} \right.$$

$j=1$:

$$\sum_{i=0}^{d+\alpha-1} \gamma_i c^\alpha(x P_i) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 c^1(x P_0) + \dots + \gamma_d c^1(x P_d) = 0 \\ \vdots \\ \gamma_0 c^d(x P_0) + \dots + \gamma_{2d-1} c^d(x P_{2d-1}) = 0 \end{array} \right.$$

$j=n-2$:

$$\sum_{i=0}^{(n-2)d+\alpha-1} \gamma_i c^\alpha(x^{n-2} P_i) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 c^1(x^{n-2} P_0) + \dots + \gamma_{(n-2)d} c^1(x^{n-2} P_{(n-2)d}) = 0 \\ \vdots \\ \gamma_0 c^d(x^{n-2} P_0) + \dots + \gamma_{(n-2)d} c^d(x^{n-2} P_{(n-2)d}) + \dots + \gamma_{(n-1)d-1} c^d(x^{n-2} P_{(n-1)d-1}) = 0 \end{array} \right.$$

$j=n-1$:

$$\sum_{i=0}^{(n-1)d+\alpha-1} \gamma_i c^\alpha(x^{n-1} P_i) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 c^1(x^{n-1} P_0) + \dots + \gamma_{(n-1)d} c^1(x^{n-1} P_{(n-1)d}) = 0 \\ \vdots \\ \gamma_0 c^d(x^{n-1} P_0) + \dots + \gamma_{(n-1)d} c^d(x^{n-1} P_{(n-1)d}) + \dots + \gamma_{nd-1} c^d(x^{n-1} P_{nd-1}) = 0 \end{array} \right.$$

$j=n$:

$$\sum_{i=0}^{nd+\alpha-1} \gamma_i c^\alpha(x^n P_i) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 c^1(x^n P_0) + \dots + \gamma_{(n+1)d} c^1(x^n P_{(n+1)d}) = 0 \\ \vdots \\ \gamma_0 c^d(x^n P_0) + \dots + \gamma_{nd} c^d(x^n P_{nd}) + \dots + \gamma_{(n+1)d-1} c^d(x^n P_{(n+1)d-1}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\sum_{i=0}^{(n+1)d+d-1} \delta_i c^\alpha(x^{n+1} P_i) = 0$$

$$\delta = 1, \dots, k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_0 c^1(x^{n+1} P_0) + \dots + \delta_{(n+1)d} c^1(x^{n+1} P_{(n+1)d}) = 0 \\ \vdots \\ \delta_0 c^k(x^{n+1} P_0) + \dots + \delta_{(n+1)d} c^k(x^{n+1} P_{(n+1)d}) + \dots + \delta_{(n+1)d+k-1} c^k(x^{n+1} P_{(n+1)d+k-1}) = 0 \end{array} \right.$$

On a finalement un système triangulaire en $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{(n+1)d+k-1}$ dont le déterminant est :

$$\prod_{d=1}^k \left[c^\alpha(P_{\alpha-1}) \cdot c^\alpha(x P_{d+\alpha-1}) \cdot \dots \cdot c^\alpha(x^{n-1} P_{(n-1)d+d-i}) \cdot c^\alpha(x^n P_{nd+\alpha-1}) \right] \cdot \prod_{d=1}^k c^\alpha(x^{n+1} P_{(n+1)d+\alpha-1})$$

En reprenant l'expression explicite des P_i :

$$c^\alpha(x^h P_{hd+\alpha-1}) = \frac{1}{H_{hd+\alpha-1}(\Gamma_0)} \cdot \left| \begin{array}{ccc} \Gamma_0 & \dots & \Gamma_{hd+\alpha-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{h-1} & \dots & \Gamma_{(h-1)+hd+\alpha-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_h^{(\alpha-1)} & \dots & \Gamma_{h+hd+\alpha-1}^{(\alpha-1)} \\ c_h^\alpha & \dots & c_{h+hd+\alpha-1}^\alpha \end{array} \right| = \frac{H_{hd+\alpha}(\Gamma_0)}{H_{hd+\alpha-1}(\Gamma_0)}$$

Donc le déterminant est non nul dans l'hypothèse où tous les P_i existent ($H_i \neq 0 \quad \forall i$), donc :

$$\delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_{(n+1)d+k-1} = 0$$

Finalement le produit $P_n(x) V_{n+d}(x)$ s'écrit :

$$P_n(x) V_{n+d}(x) = \sum_{i=(n+1)d+k}^{2n+d} \delta_i P_i(x) = \sum_{n+d}^{2n+d} \delta_i P_i(x)$$

C'est une extension au cas vectoriel d'un résultat obtenu dans le cas scalaire en [6], et qui généralise une propriété bien connue des polynômes quasi-orthogonaux [11].

Nous avons également la :

Propriété :

Soit Λ la fonctionnelle linéaire définie par :

$$\Lambda(x^i) = \Gamma(x^i P_r) = \Lambda_i \quad i=0, 1, \dots$$

On note H_i^* les déterminants de Hankel généralisés associés à Λ . Alors :

$\gamma_{n+d} \neq 0$ si et seulement si V_{n+d} admet une expression explicite et $H_{n+d+1}^* \neq 0$.

Preuve : si l'on note $\Lambda_i = (\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^d)$, on définit ainsi d fonctionnelles linéaires $\varphi^1, \dots, \varphi^d$ telles que :

$$\varphi^\alpha(x^i) = C^\alpha(x^i P_r) \quad i=0, 1, \dots \quad \text{et } \alpha=1, \dots, d.$$

En utilisant l'orthogonalité des P_j par rapport à Λ et celle de V_{n+d} par rapport à Λ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(x^i V_{n+d}) = \sum_{r+d}^{2r+d} \delta_j M(x^i P_j) = 0, \quad i=0, \dots, n \\ \varphi^\alpha(x^{n+1} V_{n+d}) = \sum_{r+d}^{2r+d} \delta_j C^\alpha(x^{n+1} P_j) = 0, \quad \alpha=1, \dots, k \end{array} \right.$$

Mais pour $\alpha = k+1$, nous avons :

$$\varphi^{k+1}(x^{n+1} V_{n+d}) = \sum_{r+d}^{2r+d} \delta_i C^{k+1}(x^{n+1} P_i) = \delta_{n+d} C^{k+1}(x^{n+1} P_{n+d})$$

car $C^{k+1}(x^{n+1} P_i) = 0$ pour $i \geq r+d+1 = (n+1)d + k+1$.

Puisque $C^{k+1}(x^{n+1} P_{r+d}) = \frac{H_{r+d+1}^0}{H_{r+d}}$ est supposé non nul, on a :

$\delta_{r+d} \neq 0$ si et seulement si $\varphi^{k+1}(x^{n+1} V_{r+d}) \neq 0$, avec $r+d = (n+1)d+k$.

Si V_{r+d} admet l'expression explicite :

$$V_{r+d}(x) = \frac{1}{H_{r+d}^*} \cdot \begin{vmatrix} \circ & \circ & \Lambda_n & \dots & \Lambda_{r+d} \\ \circ & \circ & \Lambda_n & \dots & \Lambda_{r+d} \\ \Lambda_n & \dots & \dots & \dots & \Lambda_{r+d+n} \\ \Lambda_{n+1}^{(k)} & \dots & \dots & \dots & \Lambda_{r+d+n+1}^{(k)} \\ 1 & x & \dots & \dots & x^{r+d} \end{vmatrix}$$

alors : $\varphi^{k+1}(x^{n+1} V_{r+d}) = \frac{H_{r+d+1}^*}{H_{r+d}^*}$, d'où le résultat ■

Remarques : • Si $H_{r+d+1}^* \neq 0$ donc V_{r+d+1} existe et s'écrit sous forme de rapport de deux déterminants .

• Si $\delta_{r+d} = 0$, soit $H_{r+d+1}^* = 0$, soit le polynôme V_{r+d}

ne s'exprime pas par l'expression déterminantale ci-dessus.

Maintenant nous allons donner une autre expression du polynôme de Stieltjes V_{r+d} sous forme de rapport de deux déterminants.

Pour cela on développe V_{r+d} sur la base $\{P_i\}$:

$$V_{r+d}(x) = \sum_{i=0}^{r+d} \beta_i P_i(x), \quad \beta_{r+d} = 1.$$

Les équations $M(x^i P_r V_{r+d}) = 0$ et $C^\alpha(x^{n+1} P_r V_{r+d}) = 0$ définissent le système linéaire :

$$\begin{aligned} \beta_n M(P_n P_r) + \dots + \beta_{r+d} M(P_{r+d} P_r) &= 0 \\ \beta_{n-1} M(x P_{n-1} P_r) + \beta_n M(x P_n P_r) + \dots + \beta_{r+d} M(x P_{r+d} P_r) &= 0 \\ \dots & \\ \beta_0 M(x^n P_0 P_r) + \dots + \beta_{r+d} M(x^n P_{r+d} P_r) &= 0 \\ \beta_0 M^{(k)}(x^{n+1} P_0 P_r) + \dots + \beta_{r+d} M^{(k)}(x^{n+1} P_{r+d} P_r) &= 0 \end{aligned}$$

Chaque ligne vectorielle représente des d lignes scalaires : $j = 0, \dots, n$ et i tels que : $i+j = n+1$.

$$\begin{aligned} \beta_i C^\alpha(x^j P_i P_r) + \dots + \beta_{r+d} C^\alpha(x^j P_{r+d} P_r) &= 0, \quad \alpha = 1, \dots, k \\ \beta_{i-1} C^\alpha(x^j P_{i-1} P_r) + \beta_i C^\alpha(x^j P_i P_r) + \dots + \beta_{r+d} C^\alpha(x^j P_{r+d} P_r) &= 0, \quad \alpha = k+1, \dots, \end{aligned}$$

Et la dernière ligne représente les k premières lignes scalaires :

$$\beta_0 C^\alpha(x^{n+1} P_0 P_r) + \dots + \beta_{r+d} C^\alpha(x^{n+1} P_{r+d} P_r) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k.$$

Si le déterminant de ce système est non nul, alors V_{r+d} admet une expression explicite :

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc}
 0 & \dots & 0 & \Gamma(P_m P_n) & \dots & \dots & \Gamma(P_{n+d} P_n) \\
 \vdots & & \vdots & \Gamma(x P_{n-1} P_n) & \dots & \dots & \Gamma(x P_{n+d} P_n) \\
 0 & & 0 & & & & \\
 \Gamma(x^n P_0 P_n) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Gamma(x^n P_n P_{n+d}) \\
 \Gamma^{(k)}(x^{n+k} P_0 P_n) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Gamma^{(k)}(x^{n+k} P_{n+d} P_n) \\
 P_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & P_{n+d}
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$V_{n+d}(x) = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc}
 0 & \dots & 0 & \Gamma(P_m P_n) & \dots & \dots & \Gamma(P_{n+d-1} P_n) \\
 \vdots & & \vdots & \Gamma(x P_{n-1} P_n) & \dots & \dots & \Gamma(x P_{n+d} P_n) \\
 0 & & 0 & & & & \\
 \Gamma(x^n P_0 P_n) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Gamma(x^n P_{n+d-1} P_n) \\
 \Gamma^{(k)}(x^{n+k} P_0 P_n) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Gamma^{(k)}(x^{n+k} P_{n+d} P_n)
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Si x_1, \dots, x_ν sont les racines de P_n d'ordre de multiplicité respectifs m_1, \dots, m_ν : $r = m_1 + \dots + m_\nu$, alors nous avons le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l}
 P_n^{(l)}(x_j) V_{n+d}^{(l)}(x_j) = \sum_{i=r+d}^{2r+d} \gamma_i P_i^{(l)}(x_j) = 0 \\
 j = 1, \dots, \nu \text{ et } l = 0, \dots, m_j - 1
 \end{array} \right.$$

Ce système a pour déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_{r+d}(x_1) & \dots & P_{r+d-1}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{r+d}^{(m_1-1)}(x_1) & \dots & P_{r+d-1}^{(m_1-1)}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{r+d}^{(m_\nu-1)}(x_\nu) & \dots & P_{r+d-1}^{(m_\nu-1)}(x_\nu) \end{vmatrix}$$

On définit la fonctionnelle linéaire Λ par :

$$\Lambda_i = \Lambda(x^i) = \Gamma(x^i P_r), \quad i = 0, 1, \dots$$

Nous énonçons la :

Proposition: Si P_{r+d} et V_{r+d} admettent une expression explicite sous forme de rapport de déterminants. Alors le système (S) a son déterminant Δ non nul.

Preuve: On désigne par Φ^α , $\alpha = 1, \dots, d$, les composantes de Λ définie par :

$$\Phi^\alpha(x^i) = C^\alpha(x^i P_r), \quad i = 0, 1, \dots$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que Δ est nul. Alors il existe des constantes β_i , non toutes nulles telles que :

$$\sum_{i=r+d}^{r+d-1} \beta_i P_i^{(\ell)}(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, \nu \text{ et } \ell = 0, \dots, m_j - 1.$$

Posons :

$$u(x) = \beta_{r+d} P_{r+d}(x) + \dots + \beta_{2r+d-1} P_{2r+d-1}(x)$$

alors :

$$u^{(j)}(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, \nu \text{ et } j = 0, \dots, m_i - 1.$$

Donc

$$u(x) = P_r(x) R_{r+d-1}(x) = \beta_{r+d} P_{r+d}(x) + \dots + \beta_{2r+d-1} P_{2r+d-1}(x)$$

où

R_{r+d-1} est le polynôme complémentaire de degré $r+d-1$ exactement.

De plus on a la relation :

$$M(x^i u(x)) = \Lambda(x^i R_{r+d-1}(x)) = \sum_{j=r+d}^{2r+d-1} \beta_j M(x^i P_j(x))$$

Par l'orthogonalité des P_j , on a :

$$\text{Pour } i = 0, \dots, n, \quad M(x^i P_j) = 0 \quad \text{pour } j \geq r+d$$

$$\text{Pour } \alpha = 1, \dots, k, \quad C^\alpha(x^{n+1} P_j) = 0 \quad \text{pour } j \geq r+d$$

Donc :

$$M(x^i P_r R_{r+d-1}) = \Lambda(x^i R_{r+d-1}) = 0, \quad i = 0, \dots, n$$

$$C^\alpha(x^{n+1} P_r R_{r+d-1}) = C^\alpha(x^{n+1} R_{r+d-1}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k$$

R_{r+d-1} est donc un polynôme orthogonal par rapport à Λ , tel que :

$$\Phi^k(x^{n+1} R_{(n+1)d+k-1}) = 0$$

avec

$$\Phi^k(x^{n+1} R_{(n+1)d+k-1}) = \frac{H_{(n+1)d+k}^*}{H_{(n+1)d+k-1}^*}$$

Dans ces conditions V_{z+d} ne peut pas admettre une expression explicite.

Remarquons que la proposition montre que :

$$\Delta = 0 \Rightarrow H_{z+d}^* = 0.$$

Nous pouvons maintenant une généralisation du théorème de Christoffel. La démonstration est une adaptation de celle de SZEGO et PATTERSON [26].

Théorème 2.5 :

Si P_{z+d} et V_{z+d} admettent une expression explicite sous forme de rapport de déterminants alors :

$$P_z(x) V_{z+d}(x) = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} P_{z+d}(x) & \dots & P_{z+d}(x) \\ P_{z+d}(x_1) & \dots & P_{z+d}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{z+d}^{(m_x-1)}(x_1) & \dots & P_{z+d}^{(m_x-1)}(x_1) \end{vmatrix}$$

Preuve :

On couple le système (S) avec la relation donnant $P_{n+d}(x) V_{n+d}(x)$
on obtient :

$$\begin{pmatrix} P_{n+d}(x) & \dots & P_{2n+d-1}(x) & -1 \\ P_{n+d}(x_1) & \dots & P_{2n+d-1}(x_1) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n+d}^{(m_p-1)}(x_p) & \dots & P_{2n+d-1}^{(m_p-1)}(x_p) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{n+d} \\ \vdots \\ \gamma_{2n+d-1} \\ P_{n+d}(x) V_{n+d}(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P_{2n+d}(x) \\ P_{2n+d}(x_1) \\ \vdots \\ P_{2n+d}(x_p) \end{pmatrix}$$

D'où en calculant le terme $P_{n+d}(x) V_{n+d}(x)$ de ce système on obtient la relation proposée.



II.3. Implémentation de la procédure :

Des méthodes comparables à celles employées pour calculer les procédures d'estimation de l'erreur dans le cas scalaire, permettent d'implémenter la procédure de Kronrod dans le cas vectoriel.

Le polynôme P_r est d'abord calculé récursivement à l'aide de la relation de récurrence à $d+2$ termes satisfaite par les polynômes vectoriellement orthogonaux.

Le polynôme V_{r+d} est déterminé par l'utilisation d'une méthode de résolution de systèmes linéaires.

$$\text{Posons : } V_{r+d}(x) = \sum_{i=0}^{r+d} a_i x^i, \quad a_{r+d} = 1.$$

$$P_r(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_r x^r, \quad b_r = 1.$$

$$\begin{aligned} u_{\ell}^{\alpha} &= C^{\alpha}(x^{\ell} P_r(x)) \\ &= b_0 C_{\ell+\alpha}^{\alpha} + \dots + b_r C_{\ell+r}^{\alpha} \end{aligned}$$

En écrivant les relations d'orthogonalité définissant V_{r+d} et en utilisant l'orthogonalité de P_r par rapport à la fonctionnelle Γ , nous obtenons pour $i=0, \dots, n$ et j tels que : $i+j = n+1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=j}^{r+d} a_{\ell} u_{\ell+i}^{\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k. \\ \sum_{\ell=j-1}^{r+d} a_{\ell} u_{\ell+i}^{\alpha} = 0 \quad \alpha = k+1, \dots, d \end{array} \right.$$

et

$$\sum_{\ell=0}^{r+d} a_{\ell} u_{n+\ell+1}^{\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k.$$

L'estimation $e_z^{(r+d)}(t)$ est donnée par:

$$e_z^{(r+d)}(t) = \frac{t^z}{\tilde{P}_r(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_{r+d}(t)}{\tilde{V}_{r+d}(t)}$$

où $W_{r+d}(t) = \Gamma \left(P_r(x) \frac{V_{r+d}(x) - V_{r+d}(t)}{x - t} \right)$

$$= \sum_{i=0}^{r+d-n-1} \beta_i t^i$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_i = \sum_{j=n}^{r+d-i-1} a_{i+j+1} \Gamma(x^j P_r(x)) \\ i = 0, \dots, r+d-n-1 \end{array} \right.$$

Nous avons :

$$\tilde{W}_{r+d}(t) = t^{r+d-1} W_{r+d}(t^{-1})$$

$$= t^{r+d-1} \sum_0^{r+d-n-1} \beta_j t^{-j}$$

$$= \beta_0 t^{r+d-1} + \dots + \beta_{r+d-n-1} t^n$$

$$= t^n \left[\beta_0 t^{r+d-n-1} + \dots + \beta_{r+d-n-1} \right]$$

$$= t^n \sum_{j=0}^{r+d-n-1} \beta_{r+d-n-j-1} t^j$$

Et

$$e_r^{(r+d)}(t) = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_r(t)} \cdot \left(\sum_{j=0}^{r+d-n-1} \beta_{r+d-n-j-1} t^{d_j} \right) \cdot \frac{1}{\tilde{V}_{r+d}(t)}$$

C'est ce qu'on appellera extension de la procédure de Kronecker au cas vectoriel.

III. Nouvelle Interprétation de la procédure de Kronrod:

L'erreur vectorielle peut s'exprimer sous trois formes différentes:

$$\underline{E1}: F(t) - [r-1 | r]_F(t) = \frac{t^r}{\tilde{P}_r(t)} \cdot \Gamma\left(\frac{P_r(x)}{1-tx}\right)$$

$$\underline{E2}: F(t) - [r-1 | r]_F(t) = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_r(t)} \cdot \Gamma\left(\frac{x^n P_r(x)}{1-tx}\right)$$

$$\underline{E3}: F(t) - [r-1 | r]_F(t) = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_r(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \Gamma\left(\frac{P_n(x) P_r(x)}{1-tx}\right)$$

avec $r = nd + k$, $0 \leq k < d$.

Parallèlement au cas scalaire, et comme le montrent les résultats du paragraphe précédent, la procédure de Kronrod est donc une méthode qui consiste à remplacer dans E1 la fonction $(1-tx)^{-1}$ par son polynôme P d'interpolation d'Hermite. Cette nouvelle interprétation permet d'établir une équivalence entre cette procédure et l'interpolation polynômiale de la fonction génératrice $(1-tx)^{-1}$. En d'autres termes l'équivalence, dans le cas scalaire, entre les deux techniques qui consistent respectivement à rajouter de nouveaux noeuds ou à interpoler $(1-tx)^{-1}$ au sens d'Hermite, reste valable dans le cas vectoriel. Dans les deux cas on obtient une estimation de l'erreur vectorielle sous forme d'une différence de deux formules de quadrature formelle.

Maintenant en utilisant ces trois expressions de l'erreur nous allons donner trois variantes de la procédure initiale.

III.1. Première Extension:

Dans l'expression E1, remplaçons la fonction $(1-tx)^{-2}$ par son polynôme P d'interpolation d'Hermite aux zéros d'un polynôme arbitraire V_s , unitaire de degré $s \geq 1$:

$$P(x) = \frac{1}{1-tx} \left(1 - \frac{V_s(x)}{V_s(t^{-1})} \right).$$

Posons :

$$e_r^{(s)}(t) = \frac{t^r}{\tilde{P}_r(t)} \Gamma(P_r(x)P(x))$$

$$\text{On a : } e_r^{(s)}(t) = \frac{t^r}{\tilde{P}_r(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)}$$

avec

$$W_s(t) = \Gamma\left(P_r(x) \frac{V_s(x) - V_s(t)}{x - t}\right) \text{ et } \tilde{W}_s(t) = t^{s-1} W_s(t^{-1})$$

et

$s \geq n+1$, par l'orthogonalité de P_r .

$$\tilde{W}_s(t) = t^{s-1} W_s(t^{-1}) = t^{s-1} \Gamma\left(P_r(x) \frac{V_s(x) - V_s(t^{-1})}{x - t^{-1}}\right)$$

$$= \tilde{V}_s(t) \Gamma\left(\frac{P_r(x)}{1-tx}\right) - t^s \Gamma\left(\frac{P_r(x)V_s(x)}{1-tx}\right)$$

et

$$\Gamma\left(\frac{P_r(x)}{1-tx}\right) = \frac{t^{r+n}}{1-tx} \Gamma\left(\frac{x^n P_r(x)}{1-tx}\right).$$

Ainsi nous avons le :

Théorème 3.1 :

Pour $\alpha = nd + k$, $0 \leq k < d$, $n \geq 0$ et $s \geq n+1$:

$$e_r^{(s)}(t) = F(t) - \left[\alpha - 1 \mid \alpha \right]_F(t) - \frac{t^{r+s}}{\tilde{P}_r(t)\tilde{V}_s(t)} \Gamma\left(\frac{P_r(x)V_s(x)}{1-tx}\right)$$

$$e_r^{(s)}(t) \left\{ F(t) - [r-1|r]_F(t) \right\}^{-1} = \frac{t^{s-r}}{\tilde{V}_s(t)} \cdot \Gamma \left(\frac{P_r(x) V_s(x)}{1-tx} \right) \cdot \left(\Gamma \left(\frac{x^r P_r(x)}{1-tx} \right) \right)^{-1}.$$

Cette méthode n'est en fait qu'une mise en parallèle de calcul simultané d'estimations de l'erreur des approximants de Padé des fonctions f_1, \dots, f_d .

Remarquons que le calcul de $e_r^{(s)}(t)$, version générale, nécessite la connaissance des vecteurs $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{r+s-1}$.

Comme ça été montré dans le paragraphe II, nous avons :

$e_r^{(s)}(t) = (r+s-1|r_{r+s})_F(t) - [r-1|r]_F(t)$, où $(r+s-1|r_{r+s})_F$ est l'approximant de type-Padé de polynôme générateur $v(x) = P_r(x) V_s(x)$.

Le polynôme V_s étant arbitraire. Mais on peut imposer à V_s de satisfaire certaines conditions d'optimalité afin d'atteindre le meilleur ordre d'approximation possible, selon la valeur de s , avec $s \geq n+1$.

Pour cela deux cas se présentent : $s < d$ et $s \geq d$.

Posons : $V_s(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_s x^s$, $a_s = 1$.

Cas I : $s < d$:

Deux cas également à distinguer :

• $s \leq k$:

V_s peut être choisi tel que : $C^\alpha(P_r V_s) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, s$.

Cette équation définit le système :

$$\sum_{i=0}^s a_i C^\alpha(x^i P_r) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, s$$

Puisque pour tout $d \leq s \leq k$, $C^\alpha(x^i P_r) = 0$, $i = 0, \dots, n$, ce système se réduit à :

$$\sum_{i=n+1}^s a_i C^\alpha(x^i P_r) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, s.$$

Ainsi si V_s existe, il n'est pas unique.

• $s > k$:

Si V_s satisfait $C^\alpha(P_2 V_s) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, s$, on obtient le système :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i C^\alpha(x^i P_2) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, s$$

En utilisant le fait que $C^\alpha(x^i P_2) = 0$ pour tout $\alpha \leq k$ et $i = 0, \dots, n-1$,

le système ci-dessus se réduit à :

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i C^\alpha(x^i P_2) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, s$$

qui peut se décomposer en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i C^\alpha(x^i P_2) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k \\ \sum_{i=n}^{\infty} a_i C^\alpha(x^i P_2) = 0 \quad \alpha = k+1, \dots, s \end{array} \right.$$

Donc si V_s existe, il n'est pas unique.

Cas II : $d \leq s$: $s = md + k'$, $0 \leq k' < d$.

V_s optimal peut être déterminé par : $\Gamma(x^i P_2 V_s) = 0 \quad i = 0, \dots, m-1$
 $C^\alpha(x^m P_2 V_s) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k'$

Ces équations définissent le système :

$$a_n \Gamma(x^n P_2) + \dots + a_0 \Gamma(x^0 P_2) = 0$$

$$a_0 \Gamma(x^{m-1} P_2) + \dots + a_0 \Gamma(x^{m+d-1} P_2) = 0$$

$$a_0 \Gamma^{(k')}(x^m P_2) + \dots + a_0 \Gamma^{(k')}(x^{m+d} P_2) = 0$$

Ou :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^s a_i c^\alpha(x^{i+j} P_r) = 0, \alpha = 1, \dots, d \text{ et } j = 0, \dots, m-1. \\ \sum_{i=0}^s a_i c^\alpha(x^{m+i} P_r) = 0, \alpha = 1, \dots, k' \end{array} \right.$$

On peut distinguer également (toujours $d \leq s$) deux cas: $r \leq d$ et $r \geq d$.

• $r < d$: $n = 0$

Nous avons $\Gamma(P_r) \neq 0$ et les équations $\Gamma(x^i P_r V_s) = 0$ et $c^\alpha(x^m P_r V_s) = 0$, définissent le système :

$$\begin{aligned} a_0 \Gamma(P_r) + \dots + a_s \Gamma(x^s P_r) &= 0 \\ \dots & \\ a_0 \Gamma(x^{m-1} P_r) + \dots + a_s \Gamma(x^{s+m-1} P_r) &= 0 \\ a_0 \Gamma^{(k')}(x^m P_r) + \dots + a_s \Gamma^{(k')}(x^{s+m} P_r) &= 0 \end{aligned}$$

Donc si V_s existe, il est unique.

• $r \geq d$:

Dans ce cas si V_s optimal existe, il n'est pas souvent unique.

Il suffit de prendre le cas $s \leq r$.

Pour illustrer ceci nous donnons quelques exemples utilisant les deux cas $r < d$ et $r \geq d$ pour $s \geq d$ et $s \geq n+1$.

Exemples: • $d=2$, $r=3$, $s=3$: $r \geq d$

On a : $m=1$ et $k'=1$.

$$\text{si } V_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3$$

en utilisant l'orthogonalité de P_3 , nous obtenons le système :

$$a_2 c^1(x^2 P_3) = -c^1(x^3 P_3)$$

$$a_1 c^0(x P_3) + a_2 c^1(x^2 P_3) = -c^1(x^2 P_3)$$

$$a_1 c^1(x^2 P_3) + a_2 c^2(x^3 P_3) = -c^1(x^4 P_3)$$

Donc si V_3 optimal existe, il n'est pas unique.

• $d=2$, $r=1$, $s=3$: $r < d$

On a : $m=1$ et $k'=1$.

si V_3 optimal satisfait : $\Gamma(P_1(x) V_3(x)) = 0$ et $c^1(x P_1(x) V_3(x)) = 0$,

On obtient le système :

$$a_1 c^1(x P_1) + a_2 c^1(x^2 P_1) = -c^1(x^3 P_1)$$

$$a_0 c^0(P_1) + a_1 c^1(x P_1) + a_2 c^2(x^2 P_1) = -c^2(x^3 P_1)$$

$$a_0 c^1(x P_1) + a_1 c^2(x^2 P_1) + a_2 c^3(x^3 P_1) = -c^1(x^4 P_1)$$

Dans ce cas si V_3 existe, il est donc unique.

Now avons le :

Théorème 3.2 :

Pour $r = nd + k$, $n \geq 0$, $0 \leq k < d$ et $s \geq n+1$:

$s = md + k'$, $0 \leq k' < d$

V_s optimal peut être choisi tel que :

$$\Gamma(x^i P_r(x) V_d(x)) = 0 \quad i=0, \dots, m-1$$

$$C^\alpha(x^m P_r(x) V_d(x)) = 0 \quad \alpha=1, \dots, k'$$

Si ce polynôme optimal existe, alors:

$$e_r^{(s)}(t) = F(t) - [z^{-1}|z]_F(t) - \frac{t^{z+1+m}}{\tilde{P}_r(t)\tilde{V}_d(t)} \cdot \Gamma\left(\frac{x^m P_r(x) V_d(x)}{1-tx}\right)$$

$$e_{r,\alpha}^{(s)}(t) = \frac{t^{\alpha}}{t_d} [z^{-1}|z]_{t_d}(t) - \frac{t^{z+s+m+\alpha}}{\tilde{P}_r(t)\tilde{V}_d(t)} C^\alpha\left(\frac{x^{m+\alpha} P_r(x) V_d(x)}{1-tx}\right)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha=1, \dots, k' \\ \alpha=k'+1, \dots, d \end{array} \right.$

et

$$e_r^{(s)}(t) \{F(t) - [z^{-1}|z]_F(t)\}^{-1} = \mathbb{1}_d - \frac{t^{s+m-n}}{\tilde{V}_d(t)} \Gamma\left(\frac{x^m P_r(x) V_d(x)}{1-tx}\right) \cdot \left(\Gamma\left(\frac{x^n P_r(x)}{1-tx}\right)\right)^{-1}$$

Le calcul de $e_r^{(s)}(t)$, version optimale, nécessite la connaissance des vecteurs $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{r+s+m-1}$ et des coefficients $C_{m+r+\alpha}^\alpha$, $\alpha=1, \dots, k'$.

Pour $s=(n+1)d+k$, on retrouve la procédure de Kramrod qui utilise les vecteurs $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{2r+d+n}$ et les coefficients $C_{2r+d+n+\alpha}^\alpha$, $\alpha=1, \dots, k$.

La procédure de Kramrod coûte donc cher, car en pratique les vecteurs Γ_i sont souvent difficiles à calculer. Mais par voie de compensation on obtient une bonne approximation de l'erreur vectorielle :

$$e_r^{(r+d)} \left\{ F(t) - [r-1]_r F(t) \right\}^{-1} = \mathbb{1}_d - \frac{t^{2+d+1}}{\tilde{V}_{r+d}(t)} \prod \left(\frac{x^{n+1} P_r(x) V_{r+d}^{(z)}}{1-tx} \right) \cdot \left(\prod \left(\frac{x^n P_r(x)}{1-tx} \right) \right)^{-1}.$$

Pour $d=1$, on retrouve les résultats du théorème 2 de [7].

Nous allons maintenant étudier deux autres variantes de la procédure initiale en utilisant les expressions E_2 et E_3 de l'erreur.

III.2. Deuxième Extension:

Utilisons l'expression E2 de l'erreur et remplaçons également $(1-tx)^{-1}$ par son polynôme d'interpolation P d'Hermite aux zéros d'un polynôme arbitraire, unitaire de degré $s \geq 1$:

Posons

$$e_r^{(s)}(t) = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_r(t)} \Gamma(x^n P_r(x) P(x))$$

On montre facilement que

$$e_r^{(s)}(t) = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_r(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)}$$

avec :

$$W_s(t) = \Gamma\left(x^n P_r(x) \frac{V_s(x) - V_s(t)}{x - t}\right), \quad \tilde{W}_s(t) = t^{s-1} W_s(t).$$

Nous avons le :

Théorème 3.3 :

$$e_r^{(s)}(t) \left\{ F(t) - [r-1/r]_F(t) \right\}^{-1} =$$

$$\frac{1}{\tilde{V}_s(t)} = \frac{t^s}{\tilde{V}_s(t)} \Gamma\left(\frac{x^n P_r(x) V_s(x)}{1-tx}\right) \cdot \left(\Gamma\left(\frac{x^n P_r(x)}{1-tx}\right) \right)^{-1}.$$

Preuve: Nous avons :

$$\tilde{W}_s(t) = t^{s-1} \Gamma\left(x^n P_r(x) \frac{V_s(x) - V_s(t^{-1})}{x - t^{-1}}\right)$$

$$= \tilde{V}_s(t) \Gamma\left(\frac{x^n P_r(x)}{1-tx}\right) - t^s \Gamma\left(\frac{x^n P_r(x) V_s(x)}{1-tx}\right)$$

et le résultat s'ensuit. ■

Le calcul de $e_r^{(s)}(t)$ utilise les vecteurs $M_0, \dots, M_{r+s+n-1}$.

On peut également essayer de choisir V_s de façon optimale. Deux cas peuvent se présenter.

Cas I: $s < d$

Posons $V_s(x) = a_0 + \dots + a_s x^s$, $a_s = 1$.

• $s \leq k$

On peut imposer à V_s de satisfaire $C^\alpha(x^n P_r(x) V_s(x)) = 0$ $\alpha = 1, \dots, s$.

On obtient le système :

$$\sum_{j=1}^s a_j C^\alpha(x^{n+j} P_r) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, s$$

• avec

$$C^\alpha(x^n P_r(x)) = 0 \quad \text{pour } \alpha = 1, \dots, s \leq k.$$

Donc si V_s optimal existe, il n'est pas unique.

• $s > k$

Les relations $C^\alpha(x^n P_r(x) V_s(x)) = 0$, $\alpha = 1, \dots, s$, définissent le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^s a_j C^\alpha(x^{n+j} P_r(x)) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k \\ \sum_{j=0}^s a_j C^\alpha(x^{n+j} P_r(x)) = 0 \quad \alpha = k+1, \dots, s. \end{array} \right.$$

Si V_s optimal existe, alors il est unique.

En ce qui concerne l'ordre d'approximation, nous obtenons :

$$e_r^{(s)}(t) = F(t) - [r-1]_F(t) + O(t^{r+n+1})$$

Les s premières composantes ont pour ordre d'approximation $r+n+1$.

Cas II: $s \geq d$: $s = md + k'$, $0 \leq k' < d$

V_s optimal peut être choisi tel que:

$$P(x^{n+i} P_r) V_s(x) = 0 \quad i=0, \dots, m-1$$

$$C^\alpha(x^{n+m} P_r) V_s(x) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k'$$

Ces équations définissent le système:

$$a_0 P(x^n P_r) + \dots + a_{s-1} P(x^{n+s-1} P_r) = - P(x^{n+s} P_r)$$

$$a_0 P(x^{n+m-1} P_r) + \dots + a_{s-1} P(x^{n+m+s-2} P_r) = - P(x^{n+m+s-1} P_r)$$

$$a_0 P^{(k')}(x^{n+m} P_r) + \dots + a_{s-1} P^{(k')}(x^{n+m+s-1} P_r) = - P^{(k')}(x^{n+m+s} P_r)$$

Chaque ligne vectorielle représente les d lignes scalaires, $\alpha = 1, \dots, d$:

$$a_0 C^\alpha(x^{n+i} P_r) + \dots + a_{s-1} C^\alpha(x^{n+s+i-1} P_r) = - C^\alpha(x^{n+s+i} P_r)$$

$$i=0, \dots, m-1$$

sauf la dernière qui représente les k' premières lignes de

$$a_0 P(x^{n+m} P_r) + \dots + a_{s-1} P(x^{n+m+s-1} P_r) = - P(x^{n+m+s} P_r)$$

Et V_s optimal existe si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} P(x^n P_r) & \dots & P(x^{n+s-1} P_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ P(x^{n+m-1} P_r) & \dots & P(x^{n+m+s-2} P_r) \\ P^{(k')}(x^{n+m} P_r) & \dots & P^{(k')}(x^{n+m+s-1} P_r) \end{vmatrix}$$

est non zéro.

Nous résumons tout dans le

Théorème 3.4 : Soit $r = nd + k$ et $s = md + k'$
 avec $n \geq 0, 0 \leq k < d, m \geq 0$ et $k' < d$.
 Si V_n satisfaisant les relations:
 $\Gamma(x^i P_r(x) V_n(x)) = 0 \quad i = 0, \dots, m-1$
 $C^\alpha(x^m P_r(x) V_n(x)) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k'$
 existe, alors:

$$e_r^{(s)}(t) = F(t) - \left[\begin{matrix} r-1 \\ r \end{matrix} \right]_F(t) - \frac{t^{r+n+s+m}}{\tilde{P}_r(t) \tilde{V}_s(t)} \Gamma\left(\frac{x^{n+m} P_r(x) V_n(x)}{1-tx}\right)$$

$$F(t) - \left(\begin{matrix} r+s+n-1 \\ r+s+n \end{matrix} \right)_F(t) = \frac{t^{r+s+n+m}}{\tilde{P}_r(t) \tilde{V}_s(t)} \Gamma\left(\frac{x^{n+m} P_r(x) V_n(x)}{1-tx}\right)$$

Les k' premières composantes de l'estimation $e_r^{(s)}(t)$ ont un ordre d'approximation $r+s+n+m+1$.

Preuve:

$$\text{On a } e_r^{(s)}(t) = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_r(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)}$$

avec

$$\tilde{W}_s(t) = t^{s-1} \Gamma\left(x^n P_r(x) \frac{V_n(t^{-1}) - V_n(x)}{t^{-1} - x}\right)$$

$$= \tilde{V}_s(t) \Gamma\left(\frac{x^n P_r(x)}{1-tx}\right) - t^s \Gamma\left(\frac{x^n P_r(x) V_n(x)}{1-tx}\right)$$

et le premier résultat s'ensuit avec

$$\Gamma\left(\frac{x^n P_r(x) V_n(x)}{1-tx}\right) = t^m \Gamma\left(\frac{x^{n+m} P_r(x) V_n(x)}{1-tx}\right)$$

si $(z+s+n-1 | z+s+n)_F$ est l'approximant de type-Padé, de polynôme générateur $v(x) = x^n P_r(x) V_s(x)$, alors :

$$e_r^{(s)}(t) = (z+s+n-1 | z+s+n)_F(t) - [z-1 | z]_F(t).$$

soit w le polynôme vectoriel associé à v :

$$\begin{aligned} w(t) &= \mathcal{M} \left(\frac{x^n P_r(x) V_s(x) - t^n P_r(t) V_s(t)}{x - t} \right) \\ &= \mathcal{M} \left(x^n P_r(x) \frac{V_s(x) - V_s(t)}{x - t} + P_r(x) \frac{x^n - t^n}{x - t} V_s(t) + t^n V_s(t) \frac{P_r(x) - P_r(t)}{x - t} \right) \\ &= W_s(t) + t^n V_s(t) \Phi_r(t) \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{M} \left(P_r(x) \frac{x^n - t^n}{x - t} \right) = 0 \text{ et } \Phi_r(t) = \mathcal{M} \left(\frac{P_r(x) - P_r(t)}{x - t} \right).$$

$$\tilde{w}(t) = t^{z+s+n-1} w(t') = t^{z+n} \tilde{W}_s(t) + \tilde{V}_s(t) \tilde{\Phi}_r(t)$$

$$\text{et } \tilde{v}(t) = t^{z+s+n} v(t') = \tilde{P}_r(t) \tilde{V}_s(t)$$

$$\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} = \frac{t^{z+n}}{\tilde{P}_r(t)} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)}}_{e_r^{(s)}(t)} + \underbrace{\frac{\tilde{\Phi}_r(t)}{\tilde{P}_r(t)}}_{[z-1 | z]_F(t)}$$

De plus nous avons :

$$F(t) - (z+s+n-1 | z+s+n)_F(t) = \frac{t^{z+s+n+m}}{\tilde{v}(t)} \mathcal{M} \left(\frac{x^m v(x)}{1-tx} \right)$$

et comme $c^d(x^m v(x)) = 0 \quad d=1, \dots, k'$, on a :

$$f_{k'}(t) - (z+s+n-1 | z+s+n)_{f_{k'}}(t) = \frac{t^{z+s+n+m+1}}{\tilde{v}(t)} c^d \left(\frac{x^{m+1} v(x)}{1-tx} \right) \quad \blacksquare$$

Calcul de l'estimation $e_n^{(s)}(t)$:

Posons : $V_n(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$, $a_n = 1$

$P_n(x) = b_0 + \dots + b_n x^n$, $b_n = 1$

$u_i^\alpha = C^\alpha (x^i P_n(x)) = b_0 C_i^\alpha + \dots + b_n C_{n+i}^\alpha$

$u_i^\alpha = 0$ pour $i=0, \dots, n-1$ et $\alpha=1, \dots, d$

$u_n^\alpha = 0$ pour $\alpha=1, \dots, k$.

Now avons :

$$\tilde{W}_n(t) = t^{s-1} \Gamma \left(x^n P_n(x) \frac{V_n(t') - V_n(x)}{t' - x} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \left(\sum_{j=0}^{s-i-1} a_{i+j+1} \Gamma(x^{n+j} P_n(x)) \right) t^{s-i-1}$$

\Leftrightarrow

$$\sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{s-i-1} a_{i+j+1} u_{n+j}^\alpha t^{s-i-1}, \quad \alpha=1, \dots, d.$$

Le choix optimal de V_n conduit aux systèmes

• $s \leq k < d$: $\sum_{j=1}^s a_j u_{n+j}^\alpha = 0 \quad \alpha=1, \dots, s \quad \text{et } a_s = 1.$

• $k < s < d$: $\begin{cases} \sum_{j=1}^s a_j u_{n+j}^\alpha = 0 & \alpha=1, \dots, k \\ \sum_{j=0}^s a_j u_{n+j}^\alpha = 0 & \alpha=k+1, \dots, s. \end{cases}$

Exemple: $d > 1$, $r = nd$ et $s = 1$, la plus petite valeur possible de s .

si $C^1(x^n P_1) \neq 0$, nous obtenons V_1 optimal, donné par:

$$V_1(x) = x - \frac{C^1(x^{n+1} P_2)}{C^1(x^n P_2)} \quad \bullet$$

• $s \geq d$: $s = md + k'$, $0 \leq k' < d$

$$\sum_{j=0}^s a_j U_{n+j+i}^\alpha = 0 \quad \text{avec } \alpha = 1, \dots, d \text{ et } i = 0, \dots, m-1.$$

$$\sum_{j=0}^s a_j U_{n+m+j}^\alpha = 0 \quad \text{avec } \alpha = 1, \dots, k'.$$

Exemple: $s = d$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^d a_j U_{n+j}^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad a_d = 1. \\ \sum_{j=0}^d a_j U_{n+j}^\alpha = 0, \quad \alpha = k+1, \dots, d. \end{array} \right.$$

Le calcul de $e_2^{(s)}(t)$, version optimale, utilise les vecteurs $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{r+s+n+m-1}$ et les coefficients $C_{r+s+n+m}^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, k'$.

III. 3. Troisième Extension:

D'une manière analogue, une troisième extension est obtenue en remplaçons $(1-tx)^{-1}$ par $P(x)$ dans l'expression E3 de l'erreur.

$$P(x) = (1-tx)^{-1} (1 - V_0(x) (V_0(t^{-1}))^{-1}).$$

Si l'on pose

$$e_r^{(s)}(t) = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_2(t)} \Gamma(P_n(x) P_2(x) P(x))$$

On a :

$$e_r^{(s)}(t) = \frac{t^{r+n}}{\tilde{P}_2(t) \tilde{P}_n(t)} \cdot \frac{\tilde{W}_s(t)}{\tilde{V}_s(t)}$$

où V_s est un polynôme arbitraire, unitaire de degré $s \geq 1$ et

$$W_s(t) = \Gamma(P_n(x) P_m(x) \frac{V_0(x) - V_0(t)}{x-t}) \quad , \quad \tilde{W}_s(t) = t^{s-1} W_s(t^{-1})$$

$$\tilde{W}_s(t) = \tilde{V}_s(t) \Gamma\left(\frac{P_n(x) P_2(x)}{1-tx}\right) - t^0 \Gamma\left(\frac{P_n(x) P_2(x) V_0(x)}{1-tx}\right).$$

Nous avons le :

Théorème 3.5 : Pour $r = nd + k$, $n \geq 0$, $k < d$ et $s \geq 1$, On a :

$$e_r^{(s)}(t) = F(t) - [r-1/r]_F(t) - \frac{t^{r+s+n}}{\tilde{P}_2(t) \tilde{P}_n(t) \tilde{V}_s(t)} \Gamma\left(\frac{P_n(x) P_2(x) V_0(x)}{1-tx}\right)$$

$$e_r^{(s)}(t) \left\{ F(t) - [r-1/r]_F(t) \right\}^{-1} =$$

$$1/d - \frac{t^0}{\tilde{V}_s(t)} \Gamma\left(\frac{P_n(x) P_2(x) V_0(x)}{1-tx}\right) \cdot \left(\Gamma\left(\frac{P_n(x) P_2(x)}{1-tx}\right) \right)^{-d}$$

On montre aussi que

$$e_r^{(s)}(t) = (r+n+s-1 | r+s+n)_F(t) - [r-1 | r]_F(t)$$

où $(r+s+n-1 | r+s+n)_F$ est de polynôme générateur $v(x) = P_n(x)P_r(x)V_s(x)$.

Comme dans les paragraphes précédents, V_s pourrait être choisi de façon optimale. Il y a également deux cas qui se présentent :

Cas I : $s < d$:

Posons : $V_s(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$, $a_n = 1$.

$$P_r(x) = b_0 + \dots + b_n x^n, \quad b_n = 1$$

$$P_n(x) = v_0 + \dots + v_n x^n, \quad v_n = 1.$$

$$u_i^\alpha = c^\alpha (x^i P_r(x)) \quad i=0, 1, \dots$$

$$\begin{aligned} d_i^\alpha &= c^\alpha (x^i P_n(x) P_r(x)) \\ &= v_0 u_i^\alpha + \dots + v_n u_{n+i}^\alpha \end{aligned}$$

• $s \leq k$:

Si V_s satisfait $c^\alpha (P_n(x) P_r(x) V_s(x)) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, s$.

On obtient le système :

$$\sum_{j=1}^s a_j d_j^\alpha = 0 \quad \alpha = 1, \dots, s.$$

• $k < s$:

L'équation $c^\alpha (P_n(x) P_r(x) V_0(x)) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, s$

définit le système :

$$\sum_{j=1}^s a_j d_j^\alpha = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k$$

et

$$\sum_{j=0}^s a_j d_j^\alpha = 0 \quad \alpha = k+1, \dots, s.$$

- Pour
- $s \leq k$: si V_n optimal existe, il n'est pas unique.
 - $s > k$: si V_n optimal existe, alors il est unique.

Cas II : $s \geq d$: $s = md + k'$, $0 \leq k' < d$.

V_n optimal pourrait être choisi tel que: $M(x^i P_n P_r V_n) = 0 \quad i=0, \dots, m-1$
 $C^\alpha(x^m P_n P_r V_n) = 0 \quad \alpha=1, \dots, k'$

Ces équations définissent le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^s a_j d_{i+j}^\alpha = 0 \quad \text{avec } \alpha=1, \dots, d \text{ et } i=0, \dots, m-1. \\ \sum_{j=0}^s a_j d_{m+j}^\alpha = 0 \quad \text{avec } \alpha=1, \dots, k'. \end{array} \right.$$

Ainsi V_n existe et il est unique si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} M(P_n P_r) & \dots & M(x^{s-1} P_n P_r) \\ M(x P_n P_r) & \dots & M(x^s P_n P_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ M(x^{m-1} P_n P_r) & \dots & M(x^{d+m-2} P_n P_r) \\ M^{(k')} (x^m P_n P_r) & \dots & M^{(k')} (x^{s+m-1} P_n P_r) \end{vmatrix} \quad \text{est non nul.}$$

Now avons également :

$$\tilde{W}_s(t) = t^{s-1} \Gamma \left(P_n(x) P_r(x) \frac{V_n(x) - V_n(t^{-1})}{x - t^{-1}} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \left(\sum_{j=0}^{s-i-1} a_{i+j+1} \Gamma(x^j P_n P_r) \right) t^{s-i-1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{s-1} \left(\sum_{j=0}^{s-i-1} a_{i+j+1} d_j^\alpha \right) t^{s-i-1}, \quad \alpha = 1, \dots, d.$$

Now énonçons le :

Théorème 3.6 :

$$\text{Powers } r = nd + k, \quad n \geq 0, \quad 0 \leq k < d$$

$$s = md + k', \quad m \geq 0, \quad 0 \leq k' < d$$

Si V_s satisfaisant

$$\Gamma(x^i P_n(x) P_r(x) V_n(x)) = 0 \quad i = 0, \dots, m-1$$

$$\tilde{C}^\alpha(x^m P_n(x) P_r(x) V_n(x)) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k'.$$

existe, alors :

$$E_r^{(s)}(t) = F(t) - [r-1 | r]_F(t) - \frac{t^{r+s+n+m}}{\tilde{P}_r(t) \tilde{P}_n(t) \tilde{V}_s(t)} \Gamma \left(\frac{x^m P_n(x) P_r(x) V_n(x)}{1-tx} \right)$$

Les k' premières composantes de $E_r^{(s)}(t)$ ont pour ordre d'approximation $r+s+n+m+1$.

$$F(t) - (r+s+n-1 | r+s+n)_F(t) = \frac{t^{r+s+n+m}}{\tilde{P}_r(t) \tilde{P}_n(t) \tilde{V}_s(t)} \Gamma \left(\frac{x^m P_n(x) P_r(x) V_n(x)}{1-tx} \right)$$

III. 4. Tableau Récapitulatif :

Dans les paragraphes précédents nous donnions trois différentes méthodes pour estimer l'erreur dans l'approximation de Padé vectorielle, chaque méthode possède deux versions : une version générale où le polynôme V_0 est arbitraire et une version dite optimale où V_0 est choisi de telle sorte que $e_n^{(s)}(t)$ soit la meilleure estimation possible de l'erreur vectorielle $F(t) - [r-s/r]_F(t)$. Pour ces six procédures nous comparons l'ordre d'approximation et le nombre de vecteurs utilisés pour calculer $e_n^{(s)}(t)$. Pour cela $r = nd + k'$, $n \geq 0$, $0 \leq k' < d$, $s = md + k'$, $0 \leq k' < d$.

	<u>Ordre d'approximation</u>	<u>Indice du dernier vecteur utilisé</u>
cas général	$s - n \geq 1$	$r + s - 1 \geq r + n$
<u>1^{ère} extension</u>		
cas optimal	$s + m - n \geq m + 1$	$r + s + m - 1 \geq r + m + n$
cas général	$s \geq 1$	$r + s + n - 1 \geq r + n$
<u>2^{ème} extension</u>		
cas optimal	$s + m \geq m + 1$	$r + s + m + n - 1 \geq r + n + m$
cas général	$s \geq 1$	$r + s + n - 1 \geq r + n$
<u>3^{ème} extension</u>		
cas optimal	$s + m \geq m + 1$	$r + s + m + n - 1 \geq r + n + m$

REFERENCES

- [1] G.A. BAKER
Essentials of Padé approximants. Academic Press, New-York, 1975.
- [2] S. BASU and N.K. BOSE
Matrix Stieltjes series and Network models.
Siam. J. Math. Anal. , 14 (1983) , n° 2, 209 - 222.
- [3] C. BREZINSKI
Padé - type approximation and general orthogonal polynomials.
ISNN 50, Birkhäuser - Verlag, Basel, 1980.
- [4] C. BREZINSKI
Padé approximants : Old and new
Jahrbuch überblicke mathematik 1983, 37-63.
- [5] C. BREZINSKI
Outlines of Padé approximation
Computational aspects of complex analysis
H. Werner ed., Reidel Publishing Company, 1983, 1-50.
- [6] C. BREZINSKI
Error estimate in Padé approximation in "orthogonal
polynomials and their applications" LNM 1329, Springer-Verlag
Heidelberg 1988.

- [7] C. BREZINSKI
Procedures for estimating the error in Padé approximation.
Math. Comp., to appear.
- [8] C. BREZINSKI
Partial Padé approximation
J. Approx. Theory, to appear
- [9] C. BREZINSKI
A new approach to convergence acceleration methods.
in "Nonlinear numerical methods and rational approximation"
A. Cuyt and L. Wuytack eds, Reidel, Dordrecht, to appear.
- [10] C. BREZINSKI
Error control in convergence acceleration processes.
IMA J. Numer. Anal., 3 (1983) 65-80.
- [11] T. S. CHIHARA
An introduction to orthogonal polynomials.
Gordon and Breach, New-York, 1978.
- [12] A. DRAUX
The epsilon algorithm in a non-commutative algebra.
J. Comp. Appl. Math., 19 (1987), 9-21.

- [13] A. DRAUX
Polynômes orthogonaux formels dans une algèbre non commutative
Publication ANO 92, Lille I, 1982.
- [14] A. DRAUX
Approximants de type-Padé et de Padé
Publication ANO 96, Lille I, 1983.
- [15] A. DRAUX
Bibliographie - Index, Publication ANO 145, Lille I, 1984.
- [16] P.J. DAVIS
Interpolation and approximation
Blaisdell, New-York, 1963
- [17] H. EIERMANN
On the convergence of Padé-type approximants to analytic
functions.
J. Comp. App. Math., 10(1984) 219-227.
- [18] W. GAUTSCHI
Gauss-Kronrod Quadrature - A survey
Department of Computer Sciences
Purdue University, West Lafayette, INDIANA, U.S.A.

- [19] W. B. GRAGG
Truncations Error Bounds for g. Fractions
Numer. Math., 11(1968) 370-379
- [20] J. KAUTSKY
Matrices related to interpolatory quadratures.
Numer. Math., 36(1981), 309-318.
- [21] A. S. KRONROD
Nodes and Weights of quadrature formulas.
Consultants Bureau, New-York, 1965.
- [22] G. MEINARDUS
Approximation of functions. Theory and Numerical
methods.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.
- [23] G. HONEGATO
Skeltjes polynomials and related quadrature rules.
Siam. rev., 24(1982), 137-158.
- [24] G. HONEGATO
On polynomials orthogonal with respect to particular
variable - signed weight function.
J. Appl. Math. phys. (ZAMP), 31(1980), 449-555.

[25] S. PASZKOWSKI

Polynômes et Séries de Tchebychev

Publication ANO 140, Lille I, 1984.

[26] T.N.L. PATTERSON

The optimum addition of points to quadrature formulae.

Math. Comp. , 22 (1968) , 847- 856.

[27] T.N.L. PATTERSON

On some Gauss and Lobatto based integration formulae.

Math. Comp. , 22 (1968) , 877- 881.

[28] M. PRÉVOST

Padé - type approximants with orthogonal generating polynomials.

J. Comp. App. Math. , 9 (1983) 333-346

[29] M. PRÉVOST

Stieltjes and Geronimus - type polynomials.

J. Comp. App. Math. , 21 (1988) , 133- 144.

[30] M. PRÉVOST

Sommation de certaines séries formelles par approximation de la fonction génératrice.

Thèse de 3^{ème} cycle , Université de Lille I, 1983.

- [31] Y. STARKAND
Explicit formulae for matrix-valued Padé approximants.
J. Comp. Appl. Math., 5 (1979), 63-66.
- [32] G. SZÉGO
Orthogonal polynomials.
AMS Colloquium publications, Vol. 23, Providence, 1939.
- [33] J. VAN ISEGHEM
Padé-type approximants of $\exp(-z)$ whose denominators
are $(1 + \frac{z}{n})^2$.
Numer. Math., 43 (1984), 283-292.
- [34] J. VAN ISEGHEM
Applications des approximants de type-Padé
Thèse 3^{eme} cycle, Université de Lille I, 1983.
- [35] J. VAN ISEGHEM
Approximants de Padé vectoriels.
Thèse, Lille (1987).
- [36] J. VAN ISEGHEM
Vector orthogonal relations.
Vector $\mathbb{Q}D$ -algorithm
J. Comp. Appl. Math., 19 (1987), 141-150

[37] J. VAN ISEGHEM

An extended cross rule for vector Padé approximants.
Appl. Numer. Math., 2 (1986), 143-155.

[38] B. VON SYDOW

Error estimates for gaussian quadrature formulae.
Numer. Math., 29 (1977), 59-64.

[39] B. VON SYDOW, J. KARLSSON

The convergence of Padé approximants to series
of Stieltjes.
Ark. Mat., 14 (1976), 43-53.

[40] A. WRAGG, C. DAVIES

Computation of the exponential of a matrix.
I. Theoretical considerations
J. Inst. Math. Appl., 11 (1973), 369-375.

[41] A. WRAGG, C. DAVIES

Computation of the exponential of a matrix.
II. Practical considerations.
J. Inst. Math. Appl., 15 (1975), 273-278.