UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

N° d'ordre :

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Mathématiques appliquées

par

Abdellah OUAFI

LA PROCEDURE-THETA APPLICATION AU E-ALGORITHME ET AUX SUITES DE POINT FIXE

Soutenue le 1989 devant la Commission d'Examen

Membres du jury :	A. LE MEHAUTE	Président
	C. BREZINSKI	Rapporteur
	B. GERMAIN-BONNE	Examinateur

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à monsieur CLAUDE BREZINSKI, professeur à l'université de lille 1, qui m'a proposé ce sujet, dont il a constamment suivi l'évolution avec grand intérêt.
Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements pour ses encouragements et conseils précieux.

Mes vifs remerciements vont également à :

Monsieur A-LE MEHAUTE, professeur à l'université de lille 1, qui me fait l'honneur de présider le jury.

Monsieur B-GERMAIN-BONNE, maître de conférance habilité à l'université de lille 1, qui a bien voulu accepter de faire partie du jury.

Je remercie aussi, mes collègues du laboratoire d'analyse numérique et optimisation de l'université de lille 1 : H-SADOK, My D-BENCHIBOUN, K-JBILOU, pour leurs encouragements.

Concernant la réalisation matérielle de cette thèse, je remercie Monsieur HENRI GLANC, pour le soin avec lequel, il l'a imprimé.

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE-III ORDRE D'ACCELERATION D'UNE TRANSFORMATION.

CHAPITRE-III ORDRE D'ACCELERATION D'UNE TRANSFORMATION.

INTRODUCTION.

Ce travail est consacré à l'étude des transformations dérivées du E-algorithme par application de la procédure-thêta. Il est composé de trois parties.

La première fait l'objet d'une étude générale des propriétés de ces transformations, de leur convergence et accélération de la convergence. Des résultats nouveaux sont établis et la connexion avec d'autres transformations, déjà connues, est faite. De même l'intérêt de l'application de la procédure-thêta au E-algorithme est mis en évidence.

Dans la deuxième partie, un des objectifs fixés est de faire une comparaison entre les transformations étudiées dans le chapitre I et sélectionner ainsi, celles qui présentent les meilleurs intérêts.

On s'est limité dans ce chapitre II, à la résolution des équations non linéaires, aux cas où les racines sont multiples.

Les résultats des méthodes construites sont comparés avec ceux obtenus par J.F. TRAUB [32], B. GERMAIN-BONNE [23], P. SABLONNIÈRE [29], S. ACHAKIR [1] et H. SADOK [30].

L'amélioration de certaines méthodes est aussi mise en évidence.

La troisième partie est consacrée à l'élaboration de quelques critères, qui nous permettent d'une part, de tester l'efficacité d'une transformation d'accélération de la convergence et d'autre part, de faire une comparaison avec d'autres. Comme dans le chapitre qui précède cette étude s'est située par rapport aux travaux de plusieurs auteurs qui ont abordé le problème sous d'autres angles.

NOTATIONS et DEFINITIONS

- Si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels (ou complexes), celle ci est notée simplement (s_n). De même $(s_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $n \mapsto s_{n,k}$ avec k fixé.

- Si $x^* \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de x^* (noté : $\mathcal{V}(x^*)$) tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant x^*.

- Si (a_n), (b_n) sont deux suites à termes réels (ou complexes) alors :

$$f(a_n, b_n) = a_n - \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \cdot b_n \quad \text{si } \Delta b_n \neq 0,$$
$$= a_n \quad \text{sinon}.$$
$$g(a_n, b_n) = -\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} b_n \quad \text{si } \Delta b_n \neq 0,$$
$$= 0 \quad \text{sinon}.$$
$$h(a_n, b_n) = -\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} b_{n+1} \quad \text{si } \Delta b_n \neq 0,$$
$$= 0 \quad \text{sinon}.$$
$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n .$$

- Pour une famille de suites $n \mapsto r_{i,n}$ $i = 1, 2, 3, \ldots$, On note :

$$\Delta r_{i,n} = r_{i,n+1} - r_{i,n}$$
$$\delta r_{i,n} = r_{i+1,n} - r_{i,n} .$$

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites de limite nulle. On dit que :

$$v_n = O(u_n) \quad \text{si : } \exists N \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : \forall n \geq N \quad |v_n| < C|u_n| .$$
$$v_n = o(u_n) \quad \text{si : } \lim_n \frac{v_n}{u_n} = 0 .$$

- Si $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ alors : $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.
$\complement A = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$.

- L'expression a/b (pour $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$) désigne la fraction $\frac{a}{b}$.

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x^* \in \mathbb{R}$. On dit que $f \in \mathscr{C}^{(m)}(x^*)$ si f est m fois dérivable en x^* ($m \in \mathbb{N}^*$) et $f^{(m)}$ est continue en x^*.

  On dit que $f \in \mathscr{C}^{(m)}$ si $f \in \mathscr{C}^{(m)}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

  $f \in \mathscr{C}^{(m)}(V)$, $V \subset \mathbb{R}$, si $f \in \mathscr{C}^{(m)}(x)$ $\forall x \in V$.

- Conv : ensemble des suites à termes réels (ou complexes) convergentes.

- $\text{Log} = \left\{ (S_n) \in \text{Conv} : \lim_n S_n = S \text{ et } \lim_n \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = 1 \right\}$;

- $\text{LOGSF} = \left\{ (S_n) \in \text{Log} : \lim_n \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 \right\}$;

- Pour $\rho \in [0, 1]$ $L_\rho = \left\{ (S_n) \in \text{Log} : \lim_n \dfrac{\left(\dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S} \right) - 1}{\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \right) - 1} = \rho \right\}$.

CHAPITRE - I

PROCEDURE-THETA :

CONVERGENCE - ACCELERATION DE LA CONVERGENCE - PROPRIETES.

I. INTRODUCTION :

On se propose dans cette partie d'étudier la convergence, l'accélération de la convergence et les propriétés des transformations : (T), (S), (A), (B), (t), (s), (a), (b), (τ), (σ), (α) et (β) ; dérivées du E-algorithme par application de la procédure-thêta ([6]).

Une comparaison entre toutes ces transformations est faite, tant dans le domaine pratique que théorique. Celle-ci nous a conduit à selectionner celles qui présentent les meilleurs intérêts.

Si (R) : $C_n = a_n + b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ est une règle d'un algorithme donné, alors on a la :

DEFINITION 1:

Appliquer la procédure-thêta à la règle (R) revient à remplacer celle-ci par :

$$(R') \begin{cases} \theta(C_n) = a_n - \dfrac{\Delta a_n}{\Delta b_n} b_n & \text{si } \Delta b_n \neq 0 . \\ \theta(C_n) = a_n & \text{sinon} . \end{cases}$$

On dira alors que (R') est la règle dérivée de (R) et que $(\theta(C_n))$ est la suite dérivée de (C_n).

Dans le cas où un algorithme contient plusieurs règles, l'application de la procédure-thêta à l'une et/ou à l'autre, donne naissance à d'autres transformations de suites. C'est le cas pour le E-algorithme où suivant les differentes formes d'ecriture de ses règles principale et auxiliaire, C. BREZINSKI ([6]) a défini les transformations ci-dessus.

II. Application de la procédure-thêta aux règles du E-algorithme.

II-1 E-algorithme : Rappels

Cette transformation a été obtenue indépendamment par C. Brezinski [5] et T. HÅVIE [24]. Elle est définie par :
Si (S_n) est une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} : S_n - S = \sum_{i=1}^{k} a_i \, g_i(n) \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

et si :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ g_1(n) & g_1(n+1) & \dots & g_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & \dots & \\ g_k(n) & g_k(n+1) & \dots & g_k(n+k) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (n \in \mathbb{N}, \; k \in \mathbb{N})$$

alors S est donné par le rapport (voir : [5]) :

$$S = \begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} & \dots & S_{n+k} \\ g_1(n) & g_1(n+1) & \dots & g_1(n+k) \\ \vdots & & & \\ g_k(n) & \dots & & g_k(n+k) \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ g_1(n) & g_1(n+1) & \dots & g_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & g_k(n+1) & \dots & g_k(n+k) \end{vmatrix} := E_k^{(n)} \quad \dots \dots \quad (2)$$

$E_k^{(n)}$ peut être déterminé (sans calcul de déterminant) par les règles :

$$(E) \begin{cases} E_0^{(n)} = S_n \quad \text{et} \quad g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, i \in \{1,2,3,\dots,k\}) \; ; \\ E_k^{(n)} = \left(E_{k-1}^{(n)} \cdot g_{k-1,k}^{(n+1)} - E_{k-1}^{(n+1)} g_{k-1,k}^{(n)} \right) / \Delta g_{k-1,k}^{(n)} \qquad \dots \quad \dots \quad (3) \\ g_{k,i}^{(n)} = \left(g_{k-1,i}^{(n)} \, g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,i}^{(n+1)} \, g_{k-1,k}^{(n)} \right) / \Delta g_{k-1,k}^{(n)} \qquad \dots \quad \dots \quad (4) \end{cases}$$

$(i > k \, , \, n \in \mathbb{N} \, , \, k \geq 1)$ et (Δ agit sur l'indice n).

les expressions (3) et (4) peuvent être écrites sous les formes :

$$E_k^{(n)} = E_{k-1}^{(n)} - \frac{\Delta E_{k-1}^{(n)}}{\Delta g_{k-1,k}^{(n)}} \cdot g_{k-1,k}^{(n)} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (5)$$

$$E_k^{(n)} = E_{k-1}^{(n+1)} - \frac{\Delta E_{k-1}^{(n)}}{\Delta g_{k-1,k}^{(n)}} \cdot g_{k-1,k}^{(n+1)} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (6)$$

$$g_{k,i}^{(n)} = g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\Delta g_{k-1,i}^{(n)}}{\Delta g_{k-1,k}^{(n)}} \, g_{k-1,k}^{(n)} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (7)$$

$$g_{k,i}^{(n)} = g_{k-1,i}^{(n+1)} - \frac{\Delta g_{k-1,i}^{(n)}}{\Delta g_{k-1,k}^{(n)}} \, g_{k-1,k}^{(n+1)} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (8)$$

L'application de la procédure-thêta aux règles : (5) et/ou (7) [resp^t : (6) et/ou (8) ; (5) et/ou (8) ; (6) et/ou (7)] détermine les transformations :

II.2 Transformations : (T), (S), (A), (B), (t), (s), (a), (b), (τ), (σ), (α), (β) :

Les expressions de ses transformations sont définies suivant le tableau ci-dessous. Les deux étiquettes d'une même colonne correspondent aux règles principale et auxiliaire de la transformation située sur cette même colonne.

[θ(5) est, par exemple, la règle obtenue par application de la procédure-thêta à : (5)].

Transformations :											
(T)	(S)	(A)	(B)	(t)	(s)	(a)	(b)	(τ)	(σ)	(α)	(β)
θ(5)		θ(5)		(5)		(5)		θ(5)		θ(5)	
	θ(6)		θ(6)		(6)		(6)		θ(6)		θ(6)
(7)			(7)	θ(7)			θ(7)	θ(7)			θ(7)
	(8)	(8)			θ(8)	θ(8)			θ(8)	θ(8)	

Explicitement, les règles de ces transformations sont :

(T) :

$$\begin{cases} T_0^{(n)} = S_n \text{ et } g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & \forall n \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, \dots, k. \\ T_k^{(n)} = f\left(T_{k-1}^{(n)}, D_k^{(n)}\right) \text{ avec : } D_k^{(n)} = g\left(T_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & \\ g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & \forall i > k,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq 1. \end{cases}$$

(S) :

$$\begin{cases} S_0^{(n)} = S_n \text{ et } g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & \forall n \in \mathbb{N},\ i = 1, k \\ S_k^{(n)} = f\left(S_{k-1}^{(n+1)}, D_k^{(n)}\right) \text{ avec : } D_k^{(n)} = h\left(S_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & n \in \mathbb{N},\ k \geq 1 \\ g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & i > k. \end{cases}$$

(A) :

$$\begin{cases} A_0^{(n)} = S_n,\ g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & i = 1, 2, \dots, k,\ n \in \mathbb{N}. \\ A_k^{(n)} = f\left(A_{k-1}^{(n)}, D_k^{(n)}\right) \text{ avec } D_k^{(n)} = g\left(A_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & n \in \mathbb{N},\ k \geq 1 \\ g_{k,i}^{(n)} = g_{k-1,i}^{(n+1)} - \dfrac{\Delta g_{k-1,i}^{(n)}}{\Delta g_{k-1,k}^{(n)}}\, g_{k-1,k}^{(n+1)} & \end{cases}$$

(B) :

$$\begin{cases} B_0^{(n)} = S_n,\ g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & \forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \geq 1 \\ B_k^{(n)} = f\left(B_{k-1}^{(n+1)}, D_k^{(n)}\right) \text{ avec : } D_k^{(n)} = h\left(B_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & \\ g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & n \in \mathbb{N}\ \ k \geq 1,\ i > k. \end{cases}$$

(t) :

$$\begin{cases} t_0^{(n)} = S_n,\ g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & n \in \mathbb{N}\ \ i \geq 1 \\ t_k^{(n)} = f\left(t_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & \\ g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n)}, D_{k,i}^{(n)}\right) \text{ avec : } D_{k,i}^{(n)} = g\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & i > k \geq 1.\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(s) :

$$\begin{cases} s_0^{(n)} = S_n,\ g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & n \in \mathbb{N}\ \ i \geq 1 \\ s_k^{(n)} = f\left(s_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & \\ g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n+1)}, D_{k,i}^{(n)}\right) \text{ avec : } D_{k,i}^{(n)} = h\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & n \in \mathbb{N},\ k \geq 1\ \ i > k. \end{cases}$$

(a) :

$$\begin{cases} a_0^{(n)} = S_n \quad g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & n \in \mathbb{N} \quad i \geq 1 \\ a_k^{(n)} = f\left(a_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right), \\ g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n+1)}, D_{k,i}^{(n)}\right) \text{ avec : } D_{k,i}^{(n)} = h\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & i > k \geq 1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(b):

$$\begin{cases} b_0^{(n)} = S_n, \quad g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & n \in \mathbb{N}, i \geq 1 \\ b_k^{(n)} = f\left(b_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) \\ g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n)}, D_{k,i}^{(n)}\right) \text{ avec : } D_{k,i}^{(n)} = g\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & i > k \geq 1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(τ):

$$\begin{cases} \tau_0^{(n)} = S_n, \quad g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & n \in \mathbb{N}, i \geq 1, \\ \tau_k^{(n)} = f\left(\tau_{k-1}^{(n)}, D_k^{(n)}\right) \text{ avec : } D_k^{(n)} = g\left(\tau_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & k \in \mathbb{N}^* \\ g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n)}, D_{k,i}^{(n)}\right) \text{ avec : } D_{k,i}^{(n)} = g\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & n \in \mathbb{N} \\ & i \geq k, k+1 \end{cases}$$

(σ):

$$\begin{cases} \sigma_0^{(n)} = S_n, \quad g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & n \in \mathbb{N}, i \geq 1 \\ \sigma_k^{(n)} = f\left(\sigma_{k-1}^{(n+1)}, D_k^{(n)}\right) \text{ avec : } D_k^{(n)} = h\left(\sigma_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) \\ g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n+1)}, D_{k,i}^{(n)}\right) \text{ avec : } D_{k,i}^{(n)} = h\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & i > k \geq 1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(α):

$$\begin{cases} \alpha_0^{(n)} = S_n, \quad g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & n \in \mathbb{N}, i \geq 1 \\ \alpha_k^{(n)} = f\left(\alpha_{k-1}^{(n)}, D_k^{(n)}\right) \text{ avec } D_k^{(n)} = g\left(\alpha_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) \\ g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n+1)}, D_k^{(n)}\right) \text{ avec : } D_{k,i}^{(n)} = h\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & i > k \geq 1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(β):

$$\begin{cases} \beta_0^{(n)} = S_n, \quad g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) & n \in \mathbb{N} \quad i \geq 1 \\ \beta_k^{(n)} = f\left(\beta_{k-1}^{(n+1)}, D_k^{(n)}\right) \text{ avec } D_k^{(n)} = h\left(\beta_{k-1}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) \\ g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n)}, D_{k,i}^{(n)}\right) \text{ avec } D_{k,i}^{(n)} = g\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right) & i > k \geq 1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Avant d'étudier les propriétés de ces douze transformations, examinons les relations qui existent entre elles, afin de réduire leur effectif.
On a d'abord la :

Remarque 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \mathbb{N} :$$
$$T_k^{(n)} = A_k^{(n)} ;$$
$$S_k^{(n)} = B_k^{(n)} ;$$
$$t_k^{(n)} = b_k^{(n)} ;$$
$$s_k^{(n)} = a_k^{(n)} .$$

Preuve :

Il suffit de consulter les expressions de ces transformations, dans les pages précédentes. Les relations (5) (resp[t]: (7)) et (6) (resp[t]: (8)) sont identiques.

Remarque 2 :

$\forall n \in \mathbb{N}$, On a :

i) $T_1^{(n)} = \tau_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)}$;

ii) $S_1^{(n)} = \sigma_1^{(n)} = \beta_1^{(n)}$;

iii) $t_1^{(n)} = s_1^{(n)} = E_1^{(n)}$.

Preuve :

i) On a : $\quad T_1^{(n)} = S_n - \dfrac{\Delta S_n}{\Delta D_1^{(n)}} \cdot D_1^{(n)}$ avec :

$$D_1^{(n)} = -\frac{\Delta S_n}{\Delta g_1^{(n)}} \, g_1^{(n)} \quad ,$$

$$\tau_1^{(n)} = S_n - \frac{\Delta S_n}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)} \qquad \text{avec : } D_1^{(n)} = - \frac{\Delta S_n}{\Delta g_1^{(n)}} g_1^{(n)} \quad \text{(page : 9)}$$

$$= T_1^{(n)} \; ;$$

$$= \alpha_1^{(n)} \; .$$

ii) $$S_1^{(n)} = S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)} \qquad \text{avec : } D_1^{(n)} = - \frac{\Delta S_n}{\Delta g_1^{(n)}} * g_1^{(n+1)} \; ,$$

$$= \sigma_1^{(n)} \; ;$$

$$= \beta_1^{(n)} \; .$$

iii) $$t_1^{(n)} = S_n - \frac{\Delta S_n}{\Delta g_1^{(n)}} g_1^{(n)} \; ;$$

$$= E_1^{(n)} \; ;$$

$$= S_{n+1} - \frac{\Delta S_n}{\Delta g_1^{(n)}} g_1^{(n+1)} \; ;$$

$$= \rho_1^{(n)} \; .$$

D'après la remarque 1, qui précède, les transformations qui restent à étudier sont données par : [*].

(T)	(τ)	(α)	(S)	(σ)	(β)	(t)	(ρ)
θ(5)	θ(5)	θ(5)				(5)	
			θ(6)	θ(6)	θ(6)		(6)
(7)	θ(7)				θ(7)	θ(7)	
		θ(8)	(8)	θ(8)			θ(8)

[*] : Avec les mêmes notations que celles du tableau précédent (§II-2).

Notons : $\mathcal{F}$ la famille des transformations (T), (S), (t), (s), (τ), (σ), (α) et (β).

Propriété 1 (voir [6]) :

> Si (W) est l'une des transformations de $\mathcal{F}$ et si $(W_k^{(n)})_n$ [resp^t : $(\overline{W}_k^{(n)})_n$] $k\in\mathbb{N}$, est le résultat obtenu par application de (W) à (S_n) et $(g_i(n))$, $(i\in\mathbb{N})$, [resp^t : (aS_n+b) et $(c_i g_i(n))$, $a\neq 0$, $c_i\neq 0$ $\forall i\in\mathbb{N}$] alors :
>
> $$\overline{W}_k^{(n)} = aW_k^{(n)}+b .$$

Preuve:

. D'abord on a (voir [6]) :

$$\forall a,b,c : c\neq 0 \qquad f(au_n+b, cv_n) = af(u_n,v_n)+b ,$$
$$g(au_n+b, cv_n) = ag(u_n,v_n) ,$$
$$h(au_n+b, cv_n) = ah(u_n,v_n) .$$

. Cas où $(W)=(T)$:

Par recurrence sur $k\in\mathbb{N}$.

. $k=1$: On a

$$T_1^{(n)} = f(S_n, D_1^{(n)}) \quad \text{avec } D_1^{(n)} = g(S_n, g_1(n)) ,$$

$$\overline{T}_1^{(n)} = f(aS_n+b, \overline{D}_1^{(n)}) \quad \text{avec } \overline{D}_1^{(n)} = g(aS_n+b, c_1g_1(n)) ,$$
$$= a\,g(S_n, g_1(n)) ,$$
$$= aD_1^{(n)}$$

Donc :
$$\overline{T}_1^{(n)} = f(aS_n+b, aD_1^{(n)})$$
$$= a\,f(S_n, D_1^{(n)})+b$$
$$= a\,T_1^{(n)}+b .$$

. Supposons que : $\overline{T}_{k-1}^{(n)} = aT_{k-1}^{(n)}+b$.

Pour montrer que cette propriété est vérifiée à l'ordre k, on a besoin du résultat :

> La suite $(\overline{g}^{(n)}_{k,i})_n$, $i>k$, $i\in\mathbb{N}^*$, $k\in\mathbb{N}$ associée à $(c_i g^{(n)}_i)_n$ $(i\in\mathbb{N}^*)$ vérifie :
> $\forall i>k$: $\overline{g}^{(n)}_{k,i}=c_i g^{(n)}_{k,i}$.

Preuve :

- Pour $k=0$ on a : $\overline{g}^{(n)}_{0,i}=c_i g^{(n)}_i=c_i g^{(n)}_{0,i}$ $(\forall i\in\mathbb{N}^*)$
- Si $\overline{g}^{(n)}_{k-1,i}=c_i g^{(n)}_{k-1,i}$ $\forall i\geq k$ alors:

$$\overline{g}^{(n)}_{k,i}=f(\overline{g}^{(n)}_{k-1,i},\overline{g}^{(n)}_{k-1,k})=f(c_i g^{(n)}_{k-1,i},c_k g^{(n)}_{k-1,k})$$: d'après l'hypothèse de recurrence.

$$=c_i f(g^{(n)}_{k-1,i},g^{(n)}_{k-1,k})$$: d'après les propriétés qui précèdent.

$$=c_i\, g^{(n)}_{k,i} \quad (\forall i>k).$$ ∎

Par suite :

$$\overline{T}^{(n)}_k=f(\overline{T}^{(n)}_{k-1},\overline{D}^{(n)}_k) \text{ avec } \overline{D}^{(n)}_k=g(\overline{T}^{(n)}_{k-1},\overline{g}^{(n)}_{k-1,k}),$$

$$=g(aT^{(n)}_{k-1}+b,\,c_k g^{(n)}_{k-1,k}),$$

$$=a\,g(T^{(n)}_{k-1},g^{(n)}_{k-1,k}),$$

$$=a D^{(n)}_k .$$

Donc : $\overline{T}^{(n)}_k=f(aT^{(n)}_{k-1}+b,\,aD^{(n)}_k)$,

$$=af(T^{(n)}_{k-1},D^{(n)}_k)+b .$$

$$=aT^{(n)}_k+b$$ ∎

D'où la propriété à l'ordre k.

- Si (W) est l'une des autres transformations de $\mathcal{F}$, on fait le même raisonnement que celui qui précède pour montrer qu'elle vérifie la propriété 1.

II-3 Quelques choix de $n \mapsto g_i(n)$ $i \geq 1$:

Plusieurs transformations d'accélération de la convergence déjà connues sont des cas particuliers des transformations citées précédemment.
En effet :

i) Si $g_1(n) = \Delta S_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad S_1^{(n)} = \theta_2^{(n)}}$$

Preuve :

On a $S_1^{(n)} = S_{n+1} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)}$ avec : $D_1^{(n)} = -\dfrac{\Delta S_n}{\Delta g_1^{(n)}} g_1^{(n+1)}$

$$D_1^{(n)} = -\frac{\Delta S_n \cdot \Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} \qquad (g_1(n) = \Delta S_n)$$

$$= -\frac{1}{\left(\dfrac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n \, \Delta S_{n+1}}\right)} \, .$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\Delta S_{n+1}} - \dfrac{1}{\Delta S_n}} = \frac{1}{\Delta\left(\dfrac{1}{\Delta S_n}\right)} \, ,$$

$$= \frac{1}{\Delta \, \theta_1^{(n)}} \, , \qquad \left(\theta_1^{(n)} = \frac{1}{\Delta S_n}\right) .$$

Donc :

$$S_1^{(n)} = \theta_0^{(n+1)} - \frac{\Delta \theta_0^{(n+1)}}{\Delta\left(\dfrac{1}{\Delta \theta_1^{(n)}}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\Delta \theta_1^{(n)}}\right) = \theta_2^{(n)} \, . \quad \square$$

$(T_1) : (S_n)_n \longmapsto (T_1^{(n)})_n$ est la transformation de B. Germain-Bonne (définie dans [23], chap I, § I-2).

Preuve :

On a $T_1^{(n)} = S_n - \dfrac{\Delta S_n}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)}$ avec $D_1^{(n)} = -\dfrac{\Delta S_n}{\Delta g_1^{(n)}} g_1^{(n)} = -\dfrac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n} = \varepsilon_2^{(n)} - S_n$

$$= S_n - \frac{\Delta S_n}{\Delta(\varepsilon_2^{(n)} - S_n)} \cdot (\varepsilon_2^{(n)} - S_n) \, ,$$

Donc :

$$T_1^{(n)} = S_n - \frac{(\varepsilon_2^{(n)} - S_n)}{\Delta(\varepsilon_2^{(n)} - S_n)/\Delta S_n} = S_n + \frac{S_n - \varepsilon_2^{(n)}}{(\Delta \varepsilon_2^{(n)}/\Delta S_n) - 1} . \boxtimes$$

ii) Si $g_i(n) = x_i^n$ avec : $x_i \neq 0, 1$; $x_j \neq x_i$ $\forall j \neq i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

Montrons que dans ce cas :

(T) et (S) coïncident avec le procédé Δ^2 d'Aitken itéré .

D'abord on a la propriété :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i > k, \forall n \in \mathbb{N} : \frac{g_{k,i}^{(n+1)}}{g_{k,i}^{(n)}} = x_i .$$

En effet :

- Pour $k=0$, On a : $\dfrac{g_{0,i}^{(n+1)}}{g_{0,i}^{(n)}} = \dfrac{g_i(n+1)}{g_i(n)} = \dfrac{x_i^{n+1}}{x_i^n} = x_i$.

- Supposons que : $\left(g_{k-1,i}^{(n+1)}/g_{k-1,i}^{(n)}\right) = x_i \quad \forall i > k$,
On a :

$$g_{k,i}^{(n)} = g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\Delta g_{k-1,i}^{(n)}}{\Delta g_{k-1,k}^{(n)}} g_{k-1,k}^{(n)} = g_{k-1,i}^{(n)} * \left\{ 1 - \frac{\left(g_{k-1,i}^{(n+1)}/g_{k-1,i}^{(n)}\right) - 1}{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right) - 1} \right\} ,$$

$$= g_{k-1,i}^{(n)} * \left\{ 1 - \frac{x_i - 1}{x_k - 1} \right\} ,$$

$$= g_{k-1,i}^{(n)} * \left\{ \frac{x_k - x_i}{x_k - 1} \right\} ,$$

Donc : $\left(g_{k,i}^{(n+1)}/g_{k,i}^{(n)}\right) = \left(g_{k-1,i}^{(n+1)}/g_{k-1,i}^{(n)}\right) = x_i$. $\boxtimes$

- Cas de la transformation (T) :

On a : $(\forall k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N})$: $T_k^{(n)} = T_{k-1}^{(n)} - \dfrac{\Delta T_{k-1}^{(n)}}{\Delta D_k^{(n)}} D_k^{(n)}$ où : $D_k^{(n)} = -\dfrac{\Delta T_{k-1}^{(n)}}{\Delta g_{k-1,k}^{(n)}} g_{k-1,k}^{(n)}$

Donc, d'après la propriété précédente on a :

$$D_k^{(n)} = -\frac{\Delta T_{k-1}^{(n)}}{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right)-1} = -\frac{\Delta T_{k-1}^{(n)}}{x_k - 1}$$

Par suite : $\Delta D_k^{(n)} = -\dfrac{\Delta^2 T_{k-1}^{(n)}}{x_k - 1}$ et :

$$\boxed{T_k^{(n)} = T_{k-1}^{(n)} - \frac{\Delta T_{k-1}^{(n)}}{\Delta D_k^{(n)}} D_k^{(n)} = T_{k-1}^{(n)} - \frac{\left(\Delta T_{k-1}^{(n)}\right)^2}{\Delta^2 T_{k-1}^{(n)}} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}}$$

. <u>Cas de la transformation (S)</u> :

On a : $S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n+1)} - \dfrac{\Delta S_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta D_k^{(n)}} D_k^{(n)}$ avec : $D_k^{(n)} = -\dfrac{\Delta S_{k-1}^{(n)}}{\Delta g_{k-1,k}^{(n)}} g_{k-1,k}^{(n+1)}$.

D'après la propriété qui précède, on a :

$$D_k^{(n)} = -\Delta S_{k-1}^{(n)} \times \frac{x_k}{x_k - 1} \quad \text{et} \quad \Delta D_k^{(n)} = -\Delta^2 S_{k-1}^{(n)} \frac{x_k}{x_k - 1}.$$

Donc :

$$\boxed{S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n+1)} - \frac{\Delta S_{k-1}^{(n+1)} \times \Delta S_{k-1}^{(n)}}{\Delta^2 S_{k-1}^{(n)}} = S_{k-1}^{(n)} - \frac{\left(\Delta S_{k-1}^{(n)}\right)^2}{\Delta^2 S_{k-1}^{(n)}} \quad k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}}$$

iii) Première et deuxième généralisation de l'ε-algorithme :

Les deuxièmes étapes de ces algorithmes sont données par : (voir : [4] et [8]).

Première généralisation :

$$\varepsilon_{1,2}^{(n)} = S_{n+1} + \frac{\Delta x_n}{\Delta\left(\frac{\Delta x_n}{\Delta S_n}\right)} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Deuxième généralisation :

$$\varepsilon_{2,2}^{(n)} = S_{n+1} + \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta\left(\frac{\Delta x_n}{\Delta S_n}\right)} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

où (x_n) est une suite de paramètres.

On remarque donc, que :

iii-1)

$$\boxed{\text{Si } \Delta x_n = \frac{\Delta g_1^{(n)}}{g_1^{(n)}} \quad \text{alors} \quad T_1^{(n)} = \varepsilon_{1,2}^{(n)} \qquad n \in \mathbb{N}.}$$

iii-2)

$$\boxed{\text{Si } \Delta x_n = \frac{\Delta g_1^{(n)}}{g_1^{(n+1)}} \quad \text{alors} \quad S_1^{(n)} = \varepsilon_{2,2}^{(n)} \qquad n \in \mathbb{N}.}$$

En effet :

Si : $\Delta x_n = \Delta g_1^{(n)} / g_1^{(n)}$ alors :

$$T_1^{(n)} = S_n - \frac{\Delta S_n}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)} \qquad \text{avec : } D_1^{(n)} = -\frac{\Delta S_n}{\Delta g_1^{(n)}} g_1^{(n)} = -\frac{\Delta S_n}{\Delta x_n}.$$

$$= S_{n+1} - \frac{\Delta S_n}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n+1)},$$

$$= S_{n+1} + \frac{\Delta x_n D_1^{(n)}}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n+1)},$$

Donc : $T_1^{(n)} = S_{n+1} + \dfrac{\Delta x_n}{\Delta\left(-\dfrac{1}{D_1^{(n)}}\right)}$ car $\dfrac{D_1^{(n)} D_1^{(n+1)}}{\Delta D_1^{(n)}} = 1/\Delta\left(-\dfrac{1}{D_1^{(n)}}\right)$.

$$= S_{n+1} + \frac{\Delta x_n}{\Delta\left(\dfrac{\Delta x_n}{\Delta S_n}\right)} ,$$

$$= \varepsilon_{1,2}^{(n)} . \boxtimes$$

__Si : $\Delta x_n = \dfrac{\Delta g_1^{(n)}}{g_1^{(n+1)}}$, alors :__

$$S_1^{(n)} = S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)}$$ avec : $D_1^{(n)} = -\dfrac{\Delta S_n}{\Delta g_1^{(n)}} g_1^{(n+1)}$,

$$= -\frac{\Delta S_n}{\Delta x_n} .$$

$$= S_{n+1} + \frac{\Delta x_{n+1} D_1^{(n)} D_1^{(n+1)}}{\Delta D_1^{(n)}} ,$$

$$= S_{n+1} + \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta\left(-\dfrac{1}{D_1^{(n)}}\right)} ,$$

$$= S_{n+1} + \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta\left(\dfrac{\Delta x_n}{\Delta S_n}\right)} ,$$

$$= \varepsilon_{2,2}^{(n)} . \boxtimes$$

III. NOYAUX DES TRANSFORMATIONS DE : $\mathcal{F}$.

Si (W) est l'une des transformations de la famille $\mathcal{F}$, on note par N_W : le noyau de (W). (ie : ensemble des suites (S_n) que (W) transforme en une constante.)

III-1 NOYAUX de (T_1), (S_1) et (t_1) :

Avant d'étudier N_{T_1}, N_{S_1} et N_{t_1} dans le cas où $(g_1(n))_n$ est quelconque, examinons le choix : $g_1(n) = \Delta S_n$ $(n \in \mathbb{N})$ qui nous semble important.

III-1-1 Cas : $g_1(n) = \Delta S_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Proposition 1 :

Soit (S_n) une suite de limite S telle que :

- $S_n = S + (a+bn)\Delta S_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$;
- $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ $\Delta^2 S_n \neq 0$.

Alors : $(S_n) \in N_{S_1} \setminus N_{T_1}$.

Preuve :

D'abord on a : $T_1^{(n)} = S_n - \dfrac{\Delta S_n}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)}$ avec $D_1^{(n)} = -\dfrac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$.

$$= \frac{S_n \cdot D_1^{(n+1)} - S_{n+1} \cdot D_1^{(n)}}{D_1^{(n+1)} - D_1^{(n)}},$$

$$= \begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} \\ D_1^{(n)} & D_1^{(n+1)} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ D_1^{(n)} & D_1^{(n+1)} \end{vmatrix},$$

Donc :

$$T_1^{(n)} = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{S_n}{\Delta S_n} & \dfrac{S_{n+1}}{\Delta S_{n+1}} \\[2em] \dfrac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_n} & \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_{n+1}} \end{vmatrix} \middle/ \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\Delta S_n} & \dfrac{1}{\Delta S_{n+1}} \\[2em] \dfrac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_n} & \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_{n+1}} \end{vmatrix}\right. ,$$

et :

$$T_1^{(n)} - S = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{S_n - S}{\Delta S_n} & \dfrac{S_{n+1} - S}{\Delta S_{n+1}} \\[2em] \dfrac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_n} & \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_{n+1}} \end{vmatrix} \middle/ \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\Delta S_n} & \dfrac{1}{\Delta S_{n+1}} \\[2em] \dfrac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_n} & \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_{n+1}} \end{vmatrix}\right. .$$

Par une méthode analogue à celle ci-dessus, on obtient :

$$S_1^{(n)} - S = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{S_{n+1} - S}{\Delta S_n} & \dfrac{S_{n+2} - S}{\Delta S_{n+1}} \\[2em] \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} & \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta^2 S_{n+1}} \end{vmatrix} \middle/ \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\Delta S_n} & \dfrac{1}{\Delta S_{n+1}} \\[2em] \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_m} & \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta^2 S_{n+1}} \end{vmatrix}\right. .$$

Montrons que : $(S_n) \in N_{S_1}$.

On a :

$$S_n - S = (a + bn)\Delta S_n \qquad \text{– hypothèse de la proposition.}$$

Donc : $\Delta S_n = (a+b+bn)\Delta S_{n+1} - (a+bn)\Delta S_n$,

ou alors : $(1+a+bn)\Delta S_n = (a + b[n+1])\Delta S_{n+1}$ ... ... (*)

- Si : $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(a + b[N_0+1]) = 0$ alors : $\forall n > N_0 \ \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \dfrac{1+a+bn}{a+b[n+1]}$.
- Sinon :

$$(*) \Longrightarrow \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{1+a+bn}{a+b[n+1]} = 1 + \frac{1-b}{a+b[n+1]} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc, dans les deux cas : $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \quad \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \frac{1-b}{a+b(n+1)}$.

Puisque : $(\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad \Delta^2 S_n \neq 0)$ - par hypothèse - ,

On a : $b \neq 1$

Par suite : pour $n \geq \max(N, N_1)$ on a :

$$S_1^{(n)} - S = \begin{vmatrix} \frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_{n+1}} \cdot \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} & \frac{S_{n+2}-S}{\Delta S_{n+2}} \cdot \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \\ \frac{\Delta S_{n+1}/\Delta S_n}{(\Delta S_{n+1}/\Delta S_n)-1} & \frac{\Delta S_{n+2}/\Delta S_{n+1}}{(\Delta S_{n+2}/\Delta S_{n+1})-1} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta S_n} & \frac{1}{\Delta S_{n+1}} \\ \frac{\Delta S_{n+1}/\Delta S_n}{(\Delta S_{n+1}/\Delta S_n)-1} & \frac{\Delta S_{n+2}/\Delta S_{n+1}}{(\Delta S_{n+2}/\Delta S_{n+1})-1} \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} a+b(n+1) & a+b(n+2) \\ \frac{a+b(n+1)}{1-b} & \frac{a+b(n+2)}{1-b} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta S_{n+1}} & \frac{1}{\Delta S_{n+2}} \\ \frac{a+b(n+1)}{1-b} & \frac{a+b(n+2)}{1-b} \end{vmatrix},$$

$$= 0 .$$

<u>D'autre part :</u>

$$T_1^{(n)} - S = \begin{vmatrix} \frac{S_n-S}{\Delta S_n} & \frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_{n+1}} \\ \frac{1}{(\Delta S_{n+1}/\Delta S_n)-1} & \frac{1}{(\Delta S_{n+2}/\Delta S_{n+1})-1} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta S_n} & \frac{1}{\Delta S_{n+1}} \\ \frac{1}{(\Delta S_{n+1}/\Delta S_n)-1} & \frac{1}{(\Delta S_{n+2}/\Delta S_{n+1})-1} \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} a+bn & a+b(n+1) \\ a+b(n+1) & a+b(n+2) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta S_n} & \frac{1}{\Delta S_{n+1}} \\ a+b(n+1) & a+b(n+2) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Réciproquement, on a la :

Propositione :

> Si $(\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad S_1^{(n)} = S)$ alors : $(\exists N' \in \mathbb{N} : \forall n \geq N'$
> $S_n = S + (a+bn)\Delta S_n \quad , a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R})$.

Preuve :

Supposons que : $(\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad S_1^{(n)} - S = 0)$.

D'après l'expression (vue precedemment) :

$$S_1^{(n)} - S = \begin{vmatrix} \frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_n} & \frac{S_{n+2}-S}{\Delta S_{n+1}} \\ \\ \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} & \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta^2 S_{n+1}} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta S_n} & \frac{1}{\Delta S_{n+1}} \\ \\ \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} & \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta^2 S_{n+1}} \end{vmatrix} ,$$

On a :

$\forall n \geq N$:

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_n} & \frac{S_{n+2}-S}{\Delta S_{n+1}} \\ \\ \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} & \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta^2 S_{n+1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_n} & \frac{S_{n+2}-S}{\Delta S_{n+1}} \\ \\ \frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_n} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} & \frac{S_{n+2}-S}{\Delta S_{n+1}} - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta^2 S_{n+1}} \end{vmatrix} ,$$

Puisque : $\frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_n} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n}\left(\frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_n} \times \frac{\Delta^3_n}{\Delta S_{n+1}} - 1\right)$,

On a :

$\forall n \geq N$:

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} \cdot \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta^2 S_{n+1}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_n} \cdot \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_{n+1}} & \frac{S_{n+2}-S}{\Delta S_{n+1}} \cdot \frac{\Delta^2 S_{n+1}}{\Delta S_{n+2}} \\ \frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_n} \cdot \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_{n+1}} - 1 & \frac{S_{n+2}-S}{\Delta S_{n+1}} \cdot \frac{\Delta^2 S_{n+1}}{\Delta S_{n+2}} - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donc :

- si $\Delta S_{n+1} = 0$ alors $0 = S_1^{(n)} - S = (S_{n+1} - S) - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)} = (S_{n+1} - S)$,

  Donc : $S_{n+1} = S = S + \underbrace{(a + b[n+1]) \cdot \Delta S_{n+1}}_{=0}$. ∎

- si $\Delta S_{n+2} = 0$ $\quad 0 = S_1^{(n+1)} - S = (S_{n+2} - S) - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta D_1^{(n+1)}} \cdot D_1^{(n+1)} = (S_{n+2} - S)$,

  Donc : $S_{n+2} = S = S + \underbrace{(a + b[n+2]) \Delta S_{n+2}}_{=0}$. ∎

- Sinon, On a :

$$\begin{vmatrix} \frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_n} \cdot \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_{n+1}} & \frac{S_{n+2}-S}{\Delta S_{n+1}} \cdot \frac{\Delta^2 S_{n+1}}{\Delta S_{n+2}} \\ \frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_n} \cdot \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_{n+1}} - 1 & \frac{S_{n+2}-S}{\Delta S_{n+1}} \cdot \frac{\Delta^2 S_{n+1}}{\Delta S_{n+2}} - 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \forall n \geq N ,$$

Donc :

$$\begin{vmatrix} \frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_n} \cdot \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_{n+1}} & \frac{S_{n+2}-S}{\Delta S_{n+1}} \cdot \frac{\Delta^2 S_{n+1}}{\Delta S_{n+2}} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \forall n \geq N ,$$

Ou alors, puisque : $\frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n \Delta S_{n+1}} = -\Delta\left(\frac{1}{\Delta S_n}\right)$:

$$\begin{vmatrix} (S_{n+1}-S)\Delta\left(\frac{1}{\Delta S_n}\right) & (S_{n+2}-S)\Delta\left(\frac{1}{\Delta S_{n+1}}\right) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \forall n \geq N ,$$

Donc :

$$\begin{vmatrix} \Delta\left(\frac{S_n - S}{\Delta S_n}\right) & \Delta\left(\frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_{n+1}}\right) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \forall n \geq N , \quad \text{car :}$$

Car :

$$\left(S_{n+1}-S\right)\times\Delta\left(\frac{1}{\Delta S_n}\right)=\Delta\left(\frac{S_n-S}{\Delta S_n}\right)-1 .$$

Donc :

$$\forall n\geq N : \Delta\left(\frac{S_{n+1}-S}{\Delta S_{n+1}}\right)=\Delta\left(\frac{S_n-S}{\Delta S_n}\right) .$$

Par suite : $\exists b ; \forall n\geq N , \ \Delta\left(\frac{S_n-S}{\Delta S_n}\right)=b$. Ce qui entraine aussi :

$$\exists b, \exists a : \forall n\geq N , \frac{S_n-S}{\Delta S_n}=a+bn \quad . \blacksquare$$

Sachant que, dans le cas : $g_1(n)=\Delta S_n$ $(n\in\mathbb{N})$, on a : $S_1^{(n)}=\theta_2^{(n)}$ $(n\in\mathbb{N})$, et d'après les propositions 1 et 2, l'expression de (θ_2) sous la forme de rapport de deux déterminants est donnée par :

<u>Corollaire 1 :</u>

$$\theta_2^{(n)}=\begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} & S_{n+2} \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} \\ \Delta S_n & 2\Delta S_{n+1} & 3\Delta S_{n+2}\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \Delta S_{n+2} \\ \Delta S_n & 2\Delta S_{n+1} & 3\Delta S_{n+2}\end{vmatrix}$$

<u>Preuve :</u>

On a $\left(\theta_2^{(n)}=S \quad \forall n\geq N\right) \Longleftrightarrow \left(\forall n\geq N : S_n=S+(a+bn)\Delta S_n\right)$, d'après les propositions (1) et (2).

$$\Longleftrightarrow\left(\forall n\geq N \ : S_n=S+a\Delta S_n+bn\Delta S_n\right) .$$

En écrivant cette dernière égalité pour les indices (n) ; $(n+1)$ et $(n+2)$, on trouve que S est donné par l'égalité du corollaire 1.

<u>N.B :</u> L'expression de (T_1) sous forme de rapport de deux déterminants n'est pas encore co

. On retrouve, d'après la proposition 1, une partie d'un résultat établi par F. CORDELLIER ([1
Celle-ci est donnée par :

Corollaire 2 : [16].

> ρ_2 - étant la deuxième étape du ρ- algorithme on a :
> $$N_{\rho_2} \cup N_{\varepsilon_2} \subset N_{\theta_2} .$$

Preuve :

- Si $(S_n)_n \in N_{\varepsilon_2}$ alors $\left(\exists N \in \mathbb{N}, \underset{\exists S}{\exists a} : \forall n \geq N \quad S_n = S + a\,\Delta S_n \right)$;

  Donc, d'après la proposition 1, On a : $(S_n)_n \in N_{\theta_2}$.

- Si $(S_n)_n \in N_{\rho_2}$ alors : $\left(\exists N \in \mathbb{N}, \exists a, b, S : \forall n \geq N \quad S_n = \dfrac{n.S + b}{n + a} \right)$;

Donc : $(a+n) S_n = b + n.S \quad \forall n \geq N$,

ou alors : $(a+n+1) S_{n+1} = (a+n) S_n + S \qquad \forall n \geq N$

Donc :

$$S_{n+1} = S - (a+n)\Delta S_n \qquad \forall n \geq N ,$$

et : $S_{n+1} - S_n = S - S_n - (a+n)\Delta S_n \quad \forall n \geq N$,

Par suite :

$$\forall n \geq N : \quad S_n = S - \big((1+a) + n \big) \Delta S_n .$$

D'après la proposition 1, on a : $(S_n)_n \in N_{\theta_2}$.

Remarque 3 :

> $$N_{\rho_2} \cap N_{T_1} = \phi .$$

Preuve :

On a $\quad N_{\rho_2} \cap N_{T_1} = \phi \iff N_{\rho_2} \subset \complement N_{T_1}$. " $\complement N_{T_1}$ = complémentaire de N_{T_1} ".

Si $(S_n)_n \in N_{\rho_2}$, montrons que : $(S_n)_n \notin N_{T_1}$.

Soit $(S_n)_n \in N_{\rho_2}$. Alors $\left(\exists N \in \mathbb{N}, \exists S : \forall n \geq N , S_n = \dfrac{S.n + b}{n + a} \right)$

D'après ce qui précède (preuve du corollaire 2 ci-dessus) On a :

$S_n - S = -(n+a+1)\Delta S_n \qquad \forall n \geq N.$

Donc : $\quad \Delta S_n = \Delta (S_n - S) = (n+a+1)\Delta S_n - (n+a+2)\Delta S_{n+1} \qquad \forall n \geq N$

Ou alors : $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \dfrac{n+a}{n+a+2} = 1 - \dfrac{2}{n+a+2}$ $\quad \forall n \geq N$.

D'autre part :

$$T_1^{(n)} - S = (S_n - S) - \frac{\Delta S_n}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)} \quad \text{avec} : D_1^{(n)} = -\frac{\Delta S_n}{(\Delta S_{n+1}/\Delta S_n) - 1}.$$

$$D_1^{(n)} = \Delta S_n \left(\frac{n+a+2}{2}\right),$$

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \times \frac{n+a+3}{n+a+2} = \left(1 - \frac{2}{n+a+2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+a+2}\right),$$

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = -\frac{n+a+4}{(n+a+2)^2},$$

Donc :

$$T_1^{(n)} - S = -(n+a+1)\Delta S_n + \Delta S_n \frac{(n+a+2)^2}{n+a+4}$$

$$= -\Delta S_n \left(\frac{n+a}{n+a+4}\right) = \frac{(n+a)\,(S_n - S)}{(n+a+4)\,(n+a+1)} \neq 0 \quad (n \geq N).$$

Dans le cas où $(g_1(n))$ est une suite quelconque, on a :

III-1-2 : Cas : $(g_1(n))$ quelconque.

Propriété 2 :

i. $N_{t_1} = N_{E_1} = \left\{ (S_n) \;:\; \exists N \in \mathbb{N}, \exists S, \exists a : \forall n \geq N \quad S_n = S + a g_1(n) \right\}$.

ii. $N_{E_1} \subsetneq N_{T_1} \cap N_{S_1}$ (inclusion stricte).

iii. $N_{T_1} \neq N_{S_1}$.

Preuve : le résultat i) est déjà connu – (voir [5]) – $(t_1^{(n)} = \varepsilon_1^{(n)} \; \forall n)$.

ii). $\underline{N_{E_1} \subsetneq N_{T_1}}$: Si $(s_n)_n \in N_{E_1}$ alors $\left(\exists N \in \mathbb{N},\ \exists a,\ \exists s : \forall n \geq N \quad s_n = s + a g_1(n)\right)$;

- Si $a = 0$: $T_1^{(n)} = s_n = s \quad \forall n \geq N$;
- si $a \neq 0$:

$$T_1^{(n)} = (s + a g_1(n)) - \frac{a \Delta g_1(n)}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)}$$

$$D_1^{(n)} = -\frac{\Delta s_n}{\Delta g_1(n)} g_1(n) = -a g_1(n) \text{ , } \Delta D_1^{(n)} = -a \Delta g_1(n) .$$

Donc : $T_1^{(n)} = s + a g_1(n) - a g_1(n) = s \qquad \forall n \geq N .$

$\underline{\text{Inclusion stricte}}$: si $s_n = \lambda^n \quad (n \in \mathbb{N})$ avec $0 < |\lambda| < 1$

$g_1(n) = \mu^n \quad (n \in \mathbb{N})$ avec $0 < |\mu| < 1$, $\mu \neq \lambda$;

alors :

- $E_1^{(n)} = \lambda^n \dfrac{(\mu - \lambda)}{\mu - 1} \neq 0$
- $$T_1^{(n)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda-1} & \frac{1}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\mu-1} & \frac{1}{\mu-1} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda^n(\lambda-1)} & \frac{1}{\lambda^{n+1}(\lambda-1)} \\ \frac{1}{\mu-1} & \frac{1}{\mu-1} \end{vmatrix} = 0 . \blacksquare$$

Donc : $(s_n)_n \in N_{T_1} \setminus N_{E_1}$.

- $\underline{N_{E_1} \subsetneq N_{S_1}}$: même méthode que celle ci-dessus, On trouve :

- Si $(s_n)_n \in N_{E_1}$:

$$S_1^{(n)} = s_{n+1} - \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)} = s + a g_1(n+1) - \frac{a \Delta g_1(n+1)}{a \Delta g_1(n+1)} \cdot a g_1(n+1) = s .$$

- Si $(s_n)_n$: $s_n = \lambda^n$ et $g_1(n) = \mu^n$ avec $\lambda \neq \mu$ et $0 < |\lambda| < 1 , 0 < |\mu| < 1$:

$$S_1^{(n)} = \lambda^{n+1} - \frac{\lambda^{n+1}(\lambda-1)}{\Delta D_1^{(n)}} D_1^{(n)} \quad \text{avec : } D_1^{(n)} = -\frac{\lambda^n (\lambda - 1) \mu}{\mu - 1}$$

$$= \lambda^{n+1} - \frac{\lambda^{n+1}(\lambda - 1)}{\lambda - 1}$$

$$= 0 . \blacksquare$$

iii). $\underline{N_{T_1} \neq N_{S_1}}$: • Si $s_n = \frac{1}{n+1}$ et $g_1(n) = n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ alors :

$$S_1^{(n)} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \times \frac{D_1^{(n)}}{\Delta D_1^{(n)}} \qquad \text{avec : } D_1^{(n)} = \frac{1}{n+2} .$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \times \left(-[n+3]\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

et : $$T_1^{(n)} = -\frac{2}{(n-1)\times(n+2)} \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 .$$

Donc :

$$(S_n) \in N_{S_1} \setminus N_1 .$$

• Si : $s_n = \frac{1}{n+1}$ et $g_1(n) = (n+2)$ alors :

$$T_1^{(n)} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \times \left(-[n+2]\right) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$S_1^{(n)} = \frac{2}{(n+2)(n+5)} \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Donc :

$$(S_n) \in N_{T_1} \setminus N_{S_1} . \blacksquare$$

En ce qui concerne la transformation (T_2), On n'a pas pu établir de résultat analogue à celui du corollaire 1 (§ III-1-1). Son noyau est donné explicitement par le théorème 1 qui suit.

Hypothèse :

Les suites (S_n) – de limite s – et $(g_1(n))$ considérées dans tout ce qui va suivre sont supposées vérifiant :

$$(H_0) : \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad g_1(n) \neq 0 \text{ et } S_n \neq s .}$$

Théorème 1 :

Une CNS que : $\exists N \in \mathbb{N} \ : \forall n \geq N \quad T_1^{(n)} = S$ est que :

$$\exists N' \in \mathbb{N}, \exists a, \exists b : \forall n \geq N' \quad S_n = S + a \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + b \frac{\Delta g_1(i)}{g_1^{(i)}}\right).$$

Preuve :

D'après iii) du paragraphe II-3 on a :

$T_1^{(n)} = \varepsilon_{1,2}^{(n)}$ si $\Delta x_n = \Delta g_1^{(n)} / g_1^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$

Donc :

le résultat du théorème est obtenu en remplaçant dans l'expression du noyau de $(\varepsilon_{1,2})$, déterminée par C. Brezinski dans [4] (théorème 66), Δx_n par $\Delta g_1^{(n)} / g_1^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Théorème 2 :

Une CNS que : $\left(\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad S_1^{(n)} = S\right)$ est que :

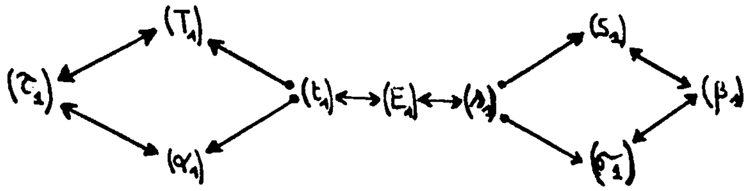
$$\exists N' \in \mathbb{N}, \exists a, \exists b : \forall n \geq N' \quad S_n = S + a \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1 + b \, \Delta g_1^{(i)} / g_1^{(i+1)}}\right).$$

Preuve :

Analogue à la preuve ci-dessus, en remplaçant Δx_n par $\Delta g_1^{(n)} / g_1^{(n+1)}$ $(n \in \mathbb{N})$ et en utilisant le résultat de [4] - théorème 67.

Pour schématiser les relations entre les noyaux des transformations de $\mathcal{F}$, à l'ordre $k = 1$ (§ III-1), on a :

schéma 1 :



Où la flèche : " $\longrightarrow$ ", signifie : inclusion du noyau de la transformation de gauche dans celui de la transformation de droite.

" $\longleftrightarrow$ ", est équivalent à : " $\longrightarrow$ " et " $\longleftarrow$ ".

Les inclusions du schéma-1 ne subsistent plus à l'ordre $k=2$. L'étude de cette Question est faite dans le paragraphe :

III-2 NOYAUX DES TRANSFORMATIONS DE $\mathcal{F}$, cas : $k=2$.

Si (W_2) est l'une des transformations : (T_2), (S_2), (t_2), (s_2), (τ_2), (σ_2), (α_2) ou (β_2), alors on a la :

Remarque 4 :

$$\boxed{N_{E_2} \not\subset N_{W_2} .}$$

Preuve :

On choisit (s_n) et $(g_i(n))_n$ $(i=1,2)$ telles que :

- $s_n = \frac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\lim_n s_n = S = 0$
- $g_1(n) = n-1$ $(n \in \mathbb{N})$,
- $g_2(n) = \frac{n^2}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

D'une part, on a : $s_n = S + a_1 g_1(n) + a_2 g_2(n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ où :

$$a_1 = -1 \text{ et } a_2 = 1 .$$

Donc : $E_2^{(n)} = S$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. (voir [5]).

et $(s_n) \in N_{E_2}$.

D'autre part, $(s_n) \notin N_{W_2}$:

En effet :

$(S_n) \notin N_{T_2}$:

On a : $\cdot\ T_1^{(n)} = \begin{vmatrix} \frac{S_n}{\Delta S_n} & \frac{S_{n+1}}{\Delta S_{n+1}} \\ g_1^{(n)}/\Delta g_1^{(n)} & g_1^{(n+1)}/\Delta g_1^{(n+1)} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta S_n} & \frac{1}{\Delta S_{n+1}} \\ g_1^{(n)}/\Delta g_1^{(n)} & g_1^{(n+1)}/\Delta g_1^{(n+1)} \end{vmatrix}$,

$$= -\frac{3}{(n-3)(n+2)} ,$$

$\cdot\ g_{1,2}^{(n)} = \dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$,

$\cdot\ \Delta T_1^{(n)} = \dfrac{6n}{(n-3)(n-2)(n+2)(n+3)}$,

Donc :

$$T_2^{(n)} = \begin{vmatrix} \frac{T_1^{(n)}}{\Delta T_1^{(n)}} & \frac{T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n+1)}} \\ g_{1,2}^{(n)}/\Delta g_{1,2}^{(n)} & g_{1,2}^{(n+1)}/\Delta g_{1,2}^{(n+1)} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta T_1^{(n)}} & \frac{1}{\Delta T_1^{(n+1)}} \\ g_{1,2}^{(n)}/\Delta g_{1,2}^{(n)} & g_{1,2}^{(n+1)}/\Delta g_{1,2}^{(n+1)} \end{vmatrix} ,$$

$$T_2^{(n)} = -\frac{15}{(n-2)(4n^2+11n+15)} \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 3 .$$

$\blacksquare$

$(S_n) \notin N_{S_2}$:

On a :

$$S_1^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{S_{n+1}}{\Delta S_n} & \frac{S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \\ g_1^{(n+1)}/\Delta g_1^{(n)} & g_1^{(n+2)}/\Delta g_1^{(n+1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta S_n} & \frac{1}{\Delta S_{n+1}} \\ g_1^{(n+1)}/\Delta g_1^{(n)} & g_1^{(n+2)}/\Delta g_1^{(n+1)} \end{vmatrix}} = -\frac{1}{(n-1)(n+2)} ,$$

$$g_{1,2}^{(n+1)}/\Delta g_{1,2}^{(n)} = -\frac{(2n+3)(n+1)}{2n} .$$

$$S_2^{(n)} = \begin{vmatrix} \frac{S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} & \frac{S_1^{(n+2)}}{\Delta S_1^{(n+1)}} \\ g_{1,2}^{(n+1)}/\Delta g_{1,2}^{(n)} & g_{1,2}^{(n+2)}/\Delta g_{1,2}^{(n+1)} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta S_1^{(n)}} & \frac{1}{\Delta S_1^{(n+1)}} \\ g_{1,2}^{(n+1)}/\Delta g_{1,2}^{(n)} & g_{1,2}^{(n+2)}/\Delta g_{1,2}^{(n+1)} \end{vmatrix} ,$$

$$= \frac{-(5n^3+6n^2+72n+49)}{4n^5+31n^4+34n^3+193n^2+79n+12} \neq 0 \qquad \forall n .$$

$\blacksquare$

$(S_n) \notin N_{t_2}$:

On a $\quad t_1^{(n)} = \dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$,

$$D_{1,2}^{(n)} = -\frac{n^3+2n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)} ,$$

$$g_{1,2}^{(n)} = \frac{4n^4+16n^3+24n^2+16n+3}{(n+1)(n+2)(n^3+6n^2+12n+2)} ,$$

Donc : $t_2^{(n)} \times \Delta g_{1,2}^{(n)} = t_1^{(n)} g_{1,2}^{(n+1)} - t_1^{(n+1)} g_{1,2}^{(n)}$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+2)^2} \times \left(P(n) - Q(n)\right) \quad \text{avec :}$$

$$P(n) = \frac{(2n+1)(4n^4+32n^3+96n^2+128n+63)}{n^3+9n^2+27n+27} \quad \text{et} \quad Q(n) = \frac{(2n+3)(4n^4+16n^3+24n^2+16\ldots}{n^3+6n^2+12n+2}$$

$\left(\Delta g_{1,2}^{(n)} \neq 0 \ , \ P(n) \neq Q(n)\right) \Longrightarrow t_2^{(n)} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. ■

$(S_n) \notin N_{s_2}$:

On a $\quad s_1^{(n)} = \dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$,

$$D_{1,2}^{(n)} = -\frac{n(n^2+3n+1)}{(n+1)(n+2)} ,$$

$$g_{1,2}^{(n)} = \frac{6n^3+21n^2+19n+5}{(n+2)(n^3+6n^2+12n+5)} ,$$

Donc : $s_2^{(n)} \times \Delta g_{1,2}^{(n)} = \dfrac{-14n^6-61n^5+50n^4+594n^3+1131n^2+726n+200}{(n+1)(n+2)^2(n+3)(n^3+6n^2+12n+5)(n^3+9n^2+27n+24)}$,

$\left(\Delta g_{1,2}^{(n)} \neq 0 \ \forall n\right) \Rightarrow s_2^{(n)} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, et $(S_n)_n \notin N_{s_2}$. ■

$(S_n) \notin N_{\tau_2}$:

On a : $\quad \tau_1^{(n)} = -\dfrac{3}{(n-3)(n+2)}$, $\Delta \tau_1^{(n)} = \dfrac{6n}{(n-3)(n-2)(n+2)(n+3)}$, $\forall n \geq 3$.

$$g_{1,2}^{(n)} = \frac{4n^4+16n^3+24n^2+16n+3}{(n+1)(n+2)(n^3+6n^2+12n+2)} , \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) .$$

$$\mathcal{D}_2^{(n)} = -\frac{\Delta \tau_1^{(n)}}{\Delta g_{1,2}^{(n)}} g_{1,2}^{(n)} = \frac{-6n\left(4n^4+16n^3+24n^2+16n+3\right)\left(n^3+9n^2+27n+21\right)}{(n-3)(n-2)(n+2)\left(20n^7+104n^6+160n^5+238n^4+341n^3+133n^2+838n-31\right)},$$

$$\tau_2^{(n)} \cdot \Delta \mathcal{D}_2^{(n)} = \tau_1^{(n)} \mathcal{D}_2^{(n+1)} - \tau_1^{(n+1)} \mathcal{D}_2^{(n)} ;$$

$$\cdot\ \tau_1^{(n+1)} \mathcal{D}_2^{(n)} = \frac{18n\left(4n^4+16n^3+24n^2+16n+3\right)\left(n^3+9n^2+27n+21\right)}{(n-2)(n^2-4)(n^2-9)\left(20n^7+104n^6+160n^5+238n^4+341n^3+133n^2+838n-31\right)}.$$

$$\cdot\ \tau_1^{(n)} \mathcal{D}_2^{(n+1)} = \frac{18(n+1)\left(4n^4+32n^3+96n^2+114n+47\right)\left(n^3+11n^2+48n+58\right)}{(n-1)(n^2-4)(n^2-9)\left(20n^7+244n^6+1204n^5+3298n^4+5673n^3+6164n^2+4643n+1643\right)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1^{(n+1)} \mathcal{D}_2^{(n)} \neq \tau_1^{(n)} \mathcal{D}_2^{(n+1)} \Rightarrow \tau_2^{(n)} \times \Delta \mathcal{D}_2^{(n)} \neq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta \mathcal{D}_2^{(n)} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \tau_2^{(n)} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

$(S_n) \notin N_{\sigma_2}$:

On a : $\sigma_1^{(n)} = -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\Delta\sigma_1^{(n)} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$;

$$g_{1,2}^{(n)} = \frac{6n^3+21n^2+19n+5}{(n+2)(n^3+6n^2+12n+5)} ;$$

$$\mathcal{D}_2^{(n)} = -\frac{\Delta\sigma_1^{(n)}}{\Delta g_{1,2}^{(n)}} g_{1,2}^{(n+1)} ,$$

$$= \frac{2\left(6n^3+39n^2+79n+51\right)\left(n^3+9n^2+27n+21\right)\left(n^3+6n^2+12n+5\right)}{(n+1)(n+3)\left(n^3+9n^2+27n+24\right)\left(16n^6+140n^5+426n^4+399n^3-276n^2-1072n-195\right)} ;$$

$$\sigma_2^{(n)} \cdot \Delta \mathcal{D}_2^{(n)} = \sigma_1^{(n+1)} \mathcal{D}_2^{(n+1)} - \sigma_1^{(n+2)} \mathcal{D}_2^{(n)} ,$$

$$\cdot\ \sigma_1^{(n+2)} \mathcal{D}_2^{(n)} = \frac{-2\left(6n^3+39n^2+79n+51\right)\left(n^3+9n^2+27n+21\right)\left(n^3+6n^2+12n+5\right)}{(n+1)(n+3)^2(n+4)\left(n^3+9n^2+27n+24\right)\left(16n^6+140n^5+426n^4+399n^3-276n^2-1072n-195\right)}$$

$$\cdot\ \sigma_1^{(n+1)} \mathcal{D}_2^{(n+1)} = \frac{-2\left(6n^3+57n^2+175n+175\right)\left(n^3+12n^2+48n+58\right)\left(n^3+9n^2+27n+24\right)}{(n+3)(n+4)(n+2)^2\left(n^3+12n^2+48n+61\right)\left(16n^6+236n^5+1336n^4+3823n^3+5117n^2+2100n-562\right)},$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1^{(n+2)} \mathcal{D}_2^{(n)} \neq \sigma_1^{(n+1)} \mathcal{D}_2^{(n+1)} \Longrightarrow \sigma_2^{(n)} \Delta \mathcal{D}_2^{(n)} \neq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta \mathcal{D}_2^{(n)} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_2^{(n)} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

$(S_n) \notin N_{\alpha_2}$:

On a : $\alpha_1^{(n)} = -\dfrac{3}{(n-3)(n+2)}$, $\Delta\alpha_1^{(n)} = \dfrac{6n}{(n^2-4)(n^2-9)}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

$$g_{1,2}^{(n)} = \frac{6n^3+21n^2+19n+5}{(n+2)(n^3+6n^2+12n+8)} ,$$

$$D_2^{(n)} = -\frac{\Delta\alpha_1^{(n)}}{\Delta g_{1,2}^{(n)}} g_{1,2}^{(n)} .$$

$$D_2^{(n)} = \frac{6n(6n^3+21n^2+19n+5)(n^3+9n^2+27n+21)}{(n^2-4)(n+3)(16n^6+140n^5+426n^4+399n^3-276n^2-1072n-195)}$$

$$\alpha_2^{(n)} \cdot \Delta D_2^{(n)} = \alpha_1^{(n)} D_2^{(n+1)} - \alpha_1^{(n+1)} D_2^{(n)} ,$$

$$\alpha_1^{(n+1)} D_2^{(n)} = \frac{-18n(6n^3+21n^2+19n+5)(n^3+9n^2+27n+21)}{(n-2)(n^2-4)(n+3)^2(16n^6+140n^5+426n^4+399n^3-276n^2-1072n-195)}$$

$$\alpha_1^{(n)} D_2^{(n+1)} = \frac{-18(n+1)(6n^3+39n^2+79n+51)(n^3+12n^2+48n+58)}{(n+1)(n^2-9)(n+2)(n+4)(16n^6+236n^5+1336n^4+3823n^3+5117n^2+2100n-562)}$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1^{(n+1)} D_2^{(n)} \neq \alpha_1^{(n)} D_2^{(n+1)} \ (\forall n \geq 4) \Longrightarrow \alpha_2^{(n)} \times \Delta D_2^{(n)} \neq 0 \\ \Delta D_2^{(n)} \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha_2^{(n)} \neq 0 \quad \forall n \geq 4, \ n \in \mathbb{N}. \ \blacksquare$$

$(S_n) \notin N_{\beta_2}$:

On a : $\beta_1^{(n)} = -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\Delta\beta_1^{(n)} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

$$g_{1,2}^{(n)} = \frac{4n^4+16n^3+24n^2+16n+3}{(n+1)(n+2)(n^3+6n^2+12n+2)} , \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$D_2^{(n)} = -\frac{\Delta\beta_1^{(n)}}{\Delta g_{1,2}^{(n)}} g_{1,2}^{(n+1)} = -\frac{2(n^3+6n^2+12n+3)(4n^4+32n^3+96n^2+114n+47)}{(n+2)(n+3)(20n^7+104n^6+160n^5+238n^4+341n^3+133n^2+838n-31)}$$

$$\beta_2^{(n)} \cdot \Delta D_2^{(n)} = \beta_1^{(n+1)} D_2^{(n+1)} - \beta_1^{(n+2)} D_2^{(n)} ,$$

- $$\beta_1^{(n+2)} D_2^{(n)} = \frac{2(n^3+6n^2+12n+3)(4n^4+32n^3+96n^2+114n+47)}{(n+2)(n+4)(n+3)^2(20n^7+104n^6+160n^5+238n^4+341n^3+133n^2+838n-31)}$$

- $$\beta_1^{(n+1)} D_2^{(n+1)} = \frac{2(n^3+9n^2+27n+21)(4n^4+48n^3+216n^2+418n+293)}{(n+2)(n+4)(n+3)^2(20n^7+244n^6+1204n^5+3298n^4+5673n^3+6104n^2+4643n+161}$$

Donc : $\beta_1^{(n+2)} D_2^{(n)} \neq \beta_1^{(n+1)} D_2^{(n+1)}$ et $\beta_2^{(n)} \cdot \Delta D_2^{(n)} \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$

Puisque : $\Delta D_2^{(n)} \neq 0$, On a :

$$\beta_2^{(n)} \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

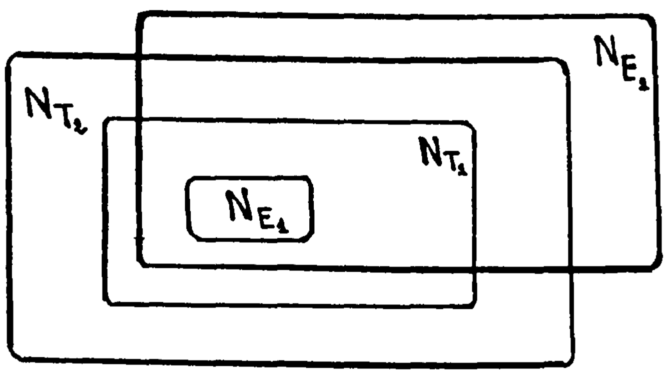
Si : N_{W_i} est, respectivement, l'un des ensembles N_{T_i} , N_{S_i} , N_{t_i} , N_{s_i} , N_{τ_i} , $N_{\bar{\sigma}_i}$, N_{α_i} , N_{β_i} $(i=1,2)$,

alors On a :

- $\left.\begin{array}{ll} N_{E_1} \subset N_{E_2} & \text{(évident)} \\ N_{E_1} \subset N_{W_1} & \text{(propriété 2)} \end{array}\right\} \Rightarrow N_{E_1} \subset N_{E_2} \cap N_{W_1} .$

- $\left.\begin{array}{l} N_{E_1} \subset N_{W_1} \subset N_{W_2} \\ N_{E_1} \subset N_{E_2} \end{array}\right\} \Rightarrow N_{E_1} \subset N_{E_2} \cap N_{W_2} .$

Plus précisément On a, pour les noyaux N_{T_i} et N_{E_i} $(i=1,2)$:



Des diagrammes semblables existent aussi pour les ensembles N_{E_i} et N_{S_i} [resp^t: N_{t_i} , N_{s_i} , N_{τ_i} , $N_{\bar{\sigma}_i}$, N_{α_i} , N_{β_i}] , $i=1,2$.

IV. ETUDE DE LA CONVERGENCE :

Soit (S_n) une suite de limite S.

IV.1 : Convergence de (T_1), (S_1) et (E_1).

Les fonctions f, g, h étant définies dans la partie notation, on a le :

Théorème 1 :

i) Si : $\exists \alpha < 1 < \beta$, $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$ $\left(g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)}\right) \notin [\alpha, \beta]$, alors :
$\lim_n E_1^{(n)} = S$;

ii) Si $\exists \alpha < 1 < \beta$, $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$ $\dfrac{g(S_{n+1}, g_1^{(n+1)})}{g(S_n, g_1^{(n)})} \notin [\alpha, \beta]$, alors :
$\lim_n T_1^{(n)} = S$;

iii) Si $\exists \alpha < 1 < \beta$, $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$ $\dfrac{h(S_{n+1}, g_1^{(n+1)})}{h(S_n, g_1^{(n)})} \notin [\alpha, \beta]$, alors :
$\lim_n S_1^{(n)} = S$.

Preuve :

Evidente, d'après les égalités :

i) $$E_1^{(n)} - S_n = \frac{-\Delta S_n}{\left(g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)}\right) - 1},$$

ii) $$T_1^{(n)} - S_n = \frac{-\Delta S_n}{\left(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}\right) - 1}, \text{ avec : } D_1^{(n)} = g(S_n, g_1^{(n)}).$$

iii) $$S_1^{(n)} - S_{n+1} = \frac{-\Delta S_{n+1}}{\left(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}\right) - 1}, \text{ avec : } D_1^{(n)} = h(S_n, g_1^{(n)}).$$

Remarque 1 :

Il est clair que les suites (S_n) et $(g_1^{(n)})$ satisfaisant :

. $\lim_n \left(\Delta S_{n+1}/\Delta S_n\right) = \rho \neq 1$,

. $\lim \left(g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)}\right) = \lambda_1 \neq \rho, 1$.

vérifient les hypothèses i), ii) et iii) de ce théorème.

($\lambda_1 \neq 0, 1$ pour l'hypothèse iii).)
Ceci est évident, d'après :

$$\bullet\ \frac{g(S_{n+1}, g_1(n+1))}{g(S_n, g_1(n))} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \times \frac{\left(g_1(n+1)/g_1(n)\right) - 1}{\left(g_1(n+2)/g_1(n+1)\right) - 1} \xrightarrow[n]{} \rho \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - 1} = \rho \neq 1 \ (\lambda_1 \neq 1)$$

$$\bullet\ \frac{h(S_{n+1}, g_1(n+1))}{h(S_n, g_1(n))} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \times \frac{\left(g_1(n+1)/g_1(n)\right) - 1}{\left(g_1(n+2)/g_1(n+1)\right) - 1} \times \frac{\left(g_1(n+2)/g_1(n+1)\right)}{\left(g_1(n+1)/g_1(n)\right)} \xrightarrow[n]{} \rho .$$

Pour une famille de suites (S_n) et $g_1(n)$, les transformations (T_1) et (S_1) peuvent converger vers $\lim_n S_n$ sans que (E_1) le fasse. L'inverse peut évidemment se produire.

Cette situation est, par exemple, réalisée sous les hypothèses des deux théorèmes suivants.

Théorème 2 :

Si (S_n) - de limite s - et $(g_1(n))$ sont telles que :

i) $\dfrac{g_1(n+1)}{g_1(n)} = \lambda_1 + \lambda_1^{(n)}$ avec : $\lambda_1^{(n)} \xrightarrow[n]{} 0$ et $\lambda_1 \neq 1$ [*],

Alors : $\lim_n E_1^{(n)} = s$.

ii) Si de plus : $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \rho_n$ avec : $\bullet\ \dfrac{\Delta S_n}{\lambda_1^{(n)}} \xrightarrow[n]{} \rho_0$;

$\bullet\ \dfrac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} \xrightarrow[n]{} \lambda$;

$\bullet\ \dfrac{\rho_n}{\lambda_1^{(n)}} \xrightarrow[n]{} \rho_1$;

Alors : $\lim_n T_1^{(n)} = s + \dfrac{\rho_0(\lambda_1 - 1)}{(\lambda - 1) - \rho_1(\lambda_1 - 1)}$ Si : $\rho_1 \neq \dfrac{\lambda - 1}{\lambda_1 - 1}$.

$\lim_n S_1^{(n)} = s + \dfrac{\rho_0 \lambda \lambda_1(\lambda_1 - 1)}{(\lambda - 1) - \rho_1 \lambda_1(\lambda_1 - 1)}$ Si : $\rho_1 \lambda_1 \neq \dfrac{\lambda - 1}{\lambda_1 - 1}$.

[*] : le cas $\lambda_1 = 1$ est étudié dans le théorème 4, qui suit.

Preuve :

i) évident.

ii) On a : $T_1^{(n)} - S_n = \dfrac{-\Delta S_n}{(1+\rho_n)\left(\dfrac{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}}{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}}\right) - 1} = \dfrac{-\Delta S_n\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)}{\lambda_1^{(n)} + \rho_n\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right) - \lambda_1^{(n+1)}}$

Donc : $$T_1^{(n)} - S_n = \frac{-\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\Delta S_n / \lambda_1^{(n)}\right)}{1 - \left(\lambda_1^{(n+1)} / \lambda_1^{(n)}\right) + \left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right)\left(\rho_n / \lambda_1^{(n)}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} - \frac{\rho_0(\lambda_1 - 1)}{1 - \lambda + \rho_0(\lambda_1 - 1)} .$$

et : $$S_1^{(n)} - S_{n+1} = - \frac{\Delta S_{n+1}}{(1+\rho_n)\left(\frac{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}}{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}}\right)\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1 + \lambda_1^{(n)}}\right) - 1} ,$$

$$= - \frac{\Delta S_{n+1}\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n)}\right)}{\lambda_1\left(\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(n+1)}\right) + \lambda_1^{(n+1)}\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right) - \lambda_1^{(n)}\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right) + \rho_n\left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right)}$$

$$= - \left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right) \times \frac{\left(\Delta S_{n+1} / \lambda_1^{(n+1)}\right) \times \left(\lambda_1^{(n+1)} / \lambda_1^{(n)}\right)}{\lambda_1\left[1 - \frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}}\right] + \frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}}\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right) - \left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right) + \frac{\rho_n}{\lambda_1^{(n)}}(*)}$$

où $(*) = \left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right)$.

Donc : $$\lim_n \left(S_1^{(n)} - S_{n+1}\right) = \frac{\rho_0 \lambda \lambda_1 (\lambda_1 - 1)}{(\lambda - 1) - \rho_0 \lambda_1 (\lambda_1 - 1)} .$$

Théorème : 3

Si (S_n) - de limite S - et $(g_1(n))$ sont telles que :

i) $\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} = 1 + \lambda_n$ avec : $\lambda_n \xrightarrow[n]{} 0$ et $(\lambda_{n+1}/\lambda_n) \xrightarrow[n]{} \lambda$ fini ;

ii) $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho + \rho_n$ avec : $\rho_n \to 0$ et $\rho \neq \lambda$;

iii) $\lim_n \frac{\Delta S_n}{\lambda_1^{(n)}} = \rho_0$;

alors : $\lim_n T_1^{(n)} = \lim S_1^{(n)} = S$,

$\lim_n E_1^{(n)} = S - \rho_0$.

Preuve :

. On a : $$T_1^{(n)} - S_n = - \frac{\Delta S_n}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \frac{(g_1(n+1)/g_1(n)) - 1}{(g_1(n+2)/g_1(n+1)) - 1} - 1} ,$$

$$= - \frac{\Delta S_n}{\rho + \rho_n - (\lambda_{n+1}/\lambda_n)} \times \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right) \xrightarrow[n]{} 0 \quad \text{(d'après: i) et ii))}.$$

• $$S_1^{(n)} - S_{n+1} = \frac{-\,\Delta S_{n+1}}{(\rho+\rho_n)\,(\lambda_n/\lambda_{n+1})\left(\frac{1+\lambda_{n+1}}{1+\lambda_n}\right) - 1} \;;$$

$$= \frac{-\,\Delta S_{n+1}}{(\lambda_n/\lambda_{n+1})\left[(\rho+\rho_n)\left(\frac{1+\lambda_{n+1}}{1+\lambda_n}\right) - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right]} \;;$$

$$= -\,\Delta S_{n+1}\,\frac{(\lambda_{n+1}/\lambda_n)}{(\rho+\rho_n)\left(\frac{1+\lambda_{n+1}}{1+\lambda_n}\right) - (\lambda_{n+1}/\lambda_n)} \xrightarrow[n.]{} 0$$

• $$E_1^{(n)} - S_n = -\frac{\Delta S_n}{\left(g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)}\right) - 1} = -\frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \xrightarrow[n.]{} -\rho_0 \quad \left(\text{d'après i) et iii)}\right).$$

<u>Un exemple de suites vérifiant les hypothèses de ce théoreme est :</u>

$$(S_n) : \; S_n = -\frac{1}{n+2} \;,\; S=0 \;,\; \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 - \frac{2}{n+3} \;,\; \rho = 1 \,;$$

$$(g_1^{(n)}) : \; g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)} = 1 - \frac{1}{(n+1)\,2^n} \;,$$

$$\lambda_n = -\frac{1}{(n+1)\,2^n} \;,\; \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda = \frac{1}{2} \neq \rho \;;$$

$$\frac{\Delta S_n}{\lambda_n} = -\frac{(n+1)\,2^n}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n.]{} \infty$$

On obtient, pour cet exemple :

$$T_1^{(n)} = -\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \;,$$

$$E_1^{(n)} = -\frac{1}{n+1} + \frac{2^n}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \;,$$

$$S_1^{(n)} = -\frac{1}{(n+2)} \times \left\{ 1 - \frac{1 - \frac{1}{(n+1)\,2^n}}{(n+3) - 4\left(\frac{n+2}{n+3}\right) + \frac{2}{(n+3)\,2^n}} \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Posons : • $e_n = S_n - S$, $S = \lim_n S_n$;

• $L_p = \left\{ (e_n) \in \log : \lim_n \dfrac{\left(\frac{e_{n+1}}{e_n}\right) - 1}{\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}\right) - 1} = p \right\}$, $p \in [0,1]$.

On dira qu'une suite (u_n) vérifie la propriété $P(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, si :

$$\exists N \in \mathbb{N} , \exists \alpha < \varepsilon < \beta : \forall n \geq N \quad u_n \notin [\alpha, \beta] .$$

Théorème 4 :

Soit (S_n) et $(g_1(n))$ deux suites, avec : $\lim_n S_n = S$.

Sous les hypothèses i) et ii) [resp^t : i) , ii) et iii) puis i) et iv)] suivantes

On a : $\lim_n T_1^{(n)} = S$ [resp^t : $\lim_n S_1^{(n)} = S$ puis $\lim_n E_1^{(n)} = S$] .

i) $\dfrac{g_1(n+1)}{g_1(n)} = 1 + \lambda_n$ avec : $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 + \mu_n$ et $\lim_n \mu_n = \lim_n \lambda_n = 0$;

$\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \rho_n$ avec : $\lim_n \rho_n = 0$ et :

La suite $\left(\dfrac{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n) - 1}{(e_{n+1}/e_n) - 1} \right)$ vérifie $P(0)$;

ii) (μ_n/ρ_n) vérifie $P(1)$;

iii) (ρ_n/λ_n) vérifie $P(0)$;

iv) (λ_n/ρ_n) vérifie $P(0)$.

Preuve :

• On a $E_1^{(n)} - S_n = - \dfrac{\Delta S_n}{(g_1(n+1)/g_1(n)) - 1}$;

$= - \dfrac{\Delta S_n}{\lambda_n}$;

$= -(\rho_n/\lambda_n) \times \left(\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1\right) \times (S_n - S) \Big/ \left(\dfrac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1\right)$;

Car : $\rho_n = (\Delta e_{n+1}/\Delta e_n) - 1$.

Donc : $E_1^{(n)} - S_n = -\frac{\rho_n}{\lambda_n} \times \frac{(S_n - S)}{\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1\right) / \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'après : i) et iv).

• $T_1^{(n)} - S_n = -\frac{\Delta S_n}{(\Delta S_{n+1}/\Delta S_n)\left(\frac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}} - 1\right)/\left(\frac{g_1^{(n+2)}}{g_1^{(n+1)}} - 1\right) - 1}$;

$$= -\frac{\Delta S_n}{\frac{1+\rho_n}{1+\mu_n} - 1} ;$$

$$= -\frac{\Delta S_n (1 + \mu_n)}{\rho_n (1 - \mu_n/\rho_n)} = -\frac{(1+\mu_n)(S_n - S)\left(\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1\right)}{\left(1 - \frac{\mu_n}{\rho_n}\right)\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1\right)} ;$$

$$= -\frac{(1+\mu_n)}{\left(1 - \frac{\mu_n}{\rho_n}\right)\left\{\frac{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n) - 1}{(e_{n+1}/e_n) - 1}\right\}} \times (S_n - S) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$, d'après i) et ii).

• $S_1^{(n)} - S_{n+1} = -\frac{\Delta S_{n+1}}{\left(\frac{1+\rho_n}{1+\mu_n}\right)\left(\frac{1+\lambda_{n+1}}{1+\lambda_n}\right) - 1}$,

$$= -\frac{(1+\lambda_n)\,\Delta S_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n + (1+\lambda_{n+1})\left(\frac{\rho_n - \mu_n}{1+\mu_n}\right)} ,$$

$$= -\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{\Delta S_n}{\rho_n} \cdot \frac{(1+\lambda_n)}{\frac{\lambda_n}{\rho_n}\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1\right) + (1+\lambda_{n+1})\left(\frac{1 - \mu_n/\rho_n}{1+\mu_n}\right)} ,$$

$$= -\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \times \frac{(1+\lambda_n)}{\frac{\lambda_n}{\rho_n}\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1\right) + (1+\lambda_{n+1})\left(\frac{1 - \mu_n/\rho_n}{1+\mu_n}\right)} \times \frac{(S_n - S)}{\left\{\frac{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n) - 1}{(e_{n+1}/e_n) - 1}\right\}}$$

Donc :

$(S_1^{(n)} - S_{n+1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'après : i), ii) et iii).

Comme exemple d'application à ce théorème, on choisit :

- (S_n) : $S_n = -\frac{1}{n+1}$ $n \in \mathbb{N}$,

  - $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 - \frac{2}{n+3}$, $\rho_n = -\frac{2}{n+3} \xrightarrow[n]{} 0$,

  - $\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1\right) \Big/ \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1\right) = \frac{2(n+2)}{(n+3)} \xrightarrow[n]{} 2$,

- $\left(g_1(n)\right)_n$: $\left(g_1(n+1)/g_1(n)\right) = 1 + \frac{1}{n+1}$ $n \in \mathbb{N}$,

  - $\lambda_n = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$,

  - $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 - \frac{1}{n+2}$, $\mu_n = -\frac{1}{n+2} \xrightarrow[n]{} 0$,

  - $\left(\mu_n/\rho_n\right) \xrightarrow[n]{} \frac{1}{2}$,

  - $\left(\rho_n/\lambda_n\right) \xrightarrow[n]{} -2$,

  - $\left(\lambda_n/\rho_n\right) \xrightarrow[n]{} -\frac{1}{2}$,

En particulier, si $(S_n) \in L_\rho$, $\rho \in]0,1]$ et $g_1(n) = \Delta S_n$ $(n \in \mathbb{N})$, avec :

- $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \rho_n$: $(\rho_{n+1}/\rho_n) = 1 + \mu_n$ $n \in \mathbb{N}$, $\lim_n \rho_n = \lim_n \mu_n = 0$;

- (μ_n/ρ_n) vérifie $\mathcal{P}(1)$,

alors, les conclusions de ce théorème 4 deviennent :

$$\lim_n \varepsilon_2^{(n)} = \lim_n \theta_2^{(n)} = \lim_n T_1^{(n)} = S.$$

IV-2 CONVERGENCE DE : (T_2), (S_2), (t_2), (Δ_2), (E_2), (τ_2), (σ_2), (α_2) et (β_2).

Pour établir les théorèmes de convergence relatifs à ces transformations, On a besoin des résultats préliminaires suivants :

Lemme 1 :

Si $(g_1^{(n)})$ et $(g_2^{(n)})$ sont telles que :

- $\dfrac{g_i(n+1)}{g_i(n)} = \lambda_i + \lambda_i^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, avec : $\lim\limits_n \lambda_i^{(n)} = 0$ et $\lambda_i \neq 1$ $i = 1,2$,
- $\exists \lambda_0, \lambda$: $\lim\limits_n \dfrac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} = \lambda_0$ et $\lim\limits_n \dfrac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} = \lambda$;

alors, la suite $(g_{1,2}^{(n)})_n$ associée à :

i) (E_2), (T_2) et (S_2), vérifie : $\lim\limits_n \dfrac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \begin{cases} \lambda_2 & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 . \\ \lambda\lambda_2 & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ et } \lambda \neq 1. \end{cases}$

ii) (t_2), (τ_2) et (β_2), vérifie : $\lim\limits_n \dfrac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \lambda_0\lambda_2$ si en plus $\begin{cases} \lambda_0 \neq 1 \,,\ \lambda_2 \neq 0 \\ \lambda \neq (\lambda_2 - 1)/(\lambda_1 - 1). \end{cases}$

iii) (Δ_2), (σ_2) et (α_2), vérifie : $\lim \dfrac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \lambda_0\lambda_2$ si en plus $\begin{cases} \lambda_0 \neq 1 \,,\ \lambda_1 \neq 0 \\ \lambda\lambda_2 \neq (\lambda_2 - 1)/(\lambda_1 - 1). \end{cases}$

Preuve :

i) On a : $g_{1,2}^{(n)} = g_2(n) \times \left\{ 1 - \dfrac{\dfrac{g_2(n+1)}{g_2(n)} - 1}{\dfrac{g_1(n+1)}{g_1(n)} - 1} \right\} = g_2(n) \times \left\{ \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)}}{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}} \right\}$;

Si en plus des hypothèses vérifiées par $(g_1(n))$ et $(g_2(n))$ on a :

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \left(\lambda_2 + \lambda_2^{(n)}\right) \times \frac{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}}{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}} \times \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1^{(n+1)} - \lambda_2^{(n+1)}}{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)}} \xrightarrow[n]{} \lambda_2 .$$

- $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda \neq 1$, alors :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \left(\lambda_2 + \lambda_2^{(n)}\right) \times \frac{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}}{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}} \times \frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} \times \frac{\left(\lambda_2^{(n+1)}/\lambda_1^{(n+1)}\right) - 1}{\left(\lambda_2^{(n)}/\lambda_1^{(n)}\right) - 1} \xrightarrow[n]{} \lambda_0\lambda_2 .$$

ii) On a :

$$g_{1,2}^{(n)} = g_2(n) \times \left\{ 1 - \frac{\left(g_2(n+1)/g_2(n)\right) - 1}{\left(D_{1,2}^{(n+1)}/D_{1,2}^{(n)}\right) - 1} \right\} \quad \text{avec : } D_{1,2}^{(n)} = -\frac{\Delta g_2^{(n)}}{\Delta g_1^{(n)}}\, g_1(n) .$$

Donc : $g_{1,2}^{(n)} = g_2^{(n)} \times \left\{ \dfrac{\left(D_{1,2}^{(n+1)}/D_{1,2}^{(n)}\right) - \left(g_2^{(n+1)}/g_2^{(n)}\right)}{\left(D_{1,2}^{(n+1)}/D_{1,2}^{(n)}\right) - 1} \right\}$,

avec :

$$\frac{D_{1,2}^{(n+1)}}{D_{1,2}^{(n)}} = \frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} \times \frac{\left(\lambda_2 - 1 + \lambda_2^{(n+1)}\right)}{\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)} \times \frac{\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right)}{\left(\lambda_2 - 1 + \lambda_2^{(n)}\right)} \xrightarrow[n]{} \lambda_2 \quad (\lambda_i \neq 1 : i = 1,2)$$

Par suite :

$$v_n := \frac{D_{1,2}^{(n+1)}}{D_{1,2}^{(n)}} - \frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} = \frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} \times \frac{\left\{ \lambda_1^{(n)}\left(\lambda_2 - 1 + \lambda_2^{(n+1)}\right) + (\lambda_1 - 1)\lambda_2^{(n+1)} - (\lambda_2 - 1)\lambda_1^{(n+1)} - \lambda_2^{(n)}\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\right\}}{\left(\lambda_2 - 1 + \lambda_2^{(n+1)}\right)\left(\lambda_2 - 1 + \lambda_2^{(n)}\right)}$$

$$= \frac{\lambda_1^{(n)}\left(\lambda_2 + \lambda_2^{(n)}\right)}{\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\lambda_2 - 1 + \lambda_2^{(n)}\right)} \times \left\{ \lambda_2 - 1 + \lambda_2^{(n+1)} + (\lambda_1 - 1)\frac{\lambda_2^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} - (\lambda_2 - 1)\frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} - \frac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}}\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right) \right\}$$

Donc : $\dfrac{v_n}{\lambda_1^{(n)}} \longrightarrow \dfrac{\lambda_2(\lambda_0 - 1)\{(\lambda_1 - 1)\lambda - (\lambda_2 - 1)\}}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)}$ si $\lambda_i \neq 1$ $i = 1,2$.

Puisque :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} \cdot \frac{\left(D_{1,2}^{(n+1)}/D_{1,2}^{(n)}\right) - 1}{\left(D_{1,2}^{(n+2)}/D_{1,2}^{(n)}\right) - 1} \cdot \frac{\left(v_{n+1}/\lambda_1^{(n+1)}\right)}{\left(v_n/\lambda_1^{(n)}\right)} \times \frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}},$$

On a : si : $\lambda_i \neq 1$ $i = 0,1,2$

$\lambda_2 \neq 0$

$\lambda \neq (\lambda_2 - 1)/(\lambda_1 - 1)$

$\lim\limits_{n} \left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}\right) = \lambda_2 \lambda_0$. ■

iii)

On a $g_{1,2}^{(n)} = g_2^{(n)} \times \left\{ 1 - \dfrac{\left(g_2^{(n+1)}/g_2^{(n)}\right) - 1}{\left(D_{1,2}^{(n+1)}/D_{1,2}^{(n)}\right) - 1} \right\}$ avec : $D_{1,2}^{(n)} = -g_2^{(n)} \times \dfrac{\left(g_2^{(n+1)}/g_2^{(n)}\right) - 1}{\left(g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)}\right) - 1} \times \dfrac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}}$,

En suivant la même démarche que celle ci-dessus et sous les conditions : $\lambda_i \neq 1$ $i = 0,1,2$,

$\lambda_1 \neq 0$

$\lambda \lambda_1 \neq \dfrac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}$,

On obtient : $\lim\limits_{n} \dfrac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \lambda_0 \lambda_2$. ■

Lemmes :

Si (S_n) et $(g_1^{(n)})$ sont telles que :

- $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho + \rho_n \quad (n \in \mathbb{N})$ avec : $\lim_n \rho_n = 0$ et $\rho \neq 1$;
- $\dfrac{g_1(n+1)}{g_1(n)} = \lambda_1 + \lambda_1^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N})$ avec : $\lim_n \lambda_1^{(n)} = 0$ et $\lambda_1 \neq 1$;
- $\exists\, \lambda_0 \neq 1$ et ρ_0 : $\lim_n \dfrac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} = \lambda_0$, et $\lim_n \dfrac{\rho_n}{\lambda_1^{(n)}} = \rho_0$.

alors :

i) $\lim_n \dfrac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} = \lambda_0 \rho$ si en plus : $\rho_0 \neq \dfrac{\rho\lambda_0 - 1}{\lambda_1 - 1}$.

ii) $\lim_n \dfrac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} = \lambda_0 \rho$ si en plus: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda \rho_0 \neq \dfrac{\rho(\lambda_0\rho - 1)}{\lambda_1 - 1}$.

On rappelle que : $\dfrac{\Delta \tau_1^{(n+1)}}{\Delta \tau_1^{(n)}} = \dfrac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} = \dfrac{\Delta \alpha_1^{(n+1)}}{\Delta \alpha_1^{(n)}}$ et $\dfrac{\Delta \sigma_1^{(n+1)}}{\Delta \sigma_1^{(n)}} = \dfrac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} = \dfrac{\Delta \beta_1^{(n+1)}}{\Delta \beta_1^{(n)}}$, $(n \in \mathbb{N})$.

Preuve:

On a : $T_1^{(n)} = S_n - \dfrac{\Delta S_n}{\left(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}\right) - 1}$ avec : $D_1^{(n)} = -\dfrac{\Delta S_n}{\Delta g_1(n)}\, g_1(n)$.

Donc :

$$\Delta T_1^{(n)} = \Delta S_n \times \left\{ 1 + \frac{1}{\left(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}\right) - 1} \right\} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\left(D_1^{(n+2)}/D_1^{(n+1)}\right) - 1} \;,$$

$$= \Delta S_{n+1} \times \left\{ \frac{\dfrac{G_{0,1}^{(n+1)}}{G_{0,1}^{(n)}} \times \left(\dfrac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}} - 1\right) - \left(\dfrac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right)}{\left(\dfrac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right) \times \left(\dfrac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}} - 1\right)} \right\} \;, \quad G_{0,1}^{(n)} = \frac{g_1(n)}{\Delta g_1(n)} .$$

Posons :

$$v_n = \frac{G_{0,1}^{(n+1)}}{G_{0,1}^{(n)}} \times \left(\frac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}} - 1\right) - \left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right)$$

alors :

- $$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = \frac{(\rho+\rho_n)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right)}{\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)} - 1 = \frac{(\rho-1)(\lambda_1-1) + \rho\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(n+1)} + \rho_n\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right)}{\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)} .$$

- en posant : $u_n = (\rho-1)(\lambda_1-1) + \rho\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(n+1)} + \rho_n\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right)$
  $=$ numérateur de : $\left(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}\right) - 1$.

On obtient :

$$v_n = \frac{\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right) \times u_{n+1} - u_n \left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+2)}\right)}{\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+2)}\right)},$$

$$= \frac{(\lambda_1 - 1)(u_{n+1} - u_n) + \lambda_1^{(n)} u_{n+1} - \lambda_1^{(n+2)} u_n}{\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+2)}\right)},$$

Or : $(u_{n+1} - u_n)/\lambda_1^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} (\lambda_0 - 1)\left(\rho - \lambda_0 + \rho_0[\lambda_1 - 1]\right)$.

Donc : $\dfrac{v_n}{\lambda_1^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{(\lambda_0 - 1) \times \{\rho_0(\lambda_1 - 1) - (\rho\lambda_0 - 1)\}}{(\lambda_1 - 1)}$,

et sous les hypothèses du lemme on a :

$$\frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} = \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \times \frac{\left(v_{n+1}/\lambda_1^{(n+1)}\right)}{\left(v_n/\lambda_1^{(n)}\right)} \times \frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} \times \frac{\left(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}\right) - 1}{\left(D_1^{(n+3)}/D_1^{(n+2)}\right) - 1} \xrightarrow[n]{} \rho\lambda_0 .$$

ii)

On a : $S_1^{(n)} = S_{n+1} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{u_n}$ avec : $u_n = \dfrac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1$, $D_1^{(n)} = -\dfrac{\Delta S_n}{\Delta g_1^{(n)}} g_1^{(n+1)}$

$$\Delta S_1^{(n)} = \Delta S_{n+1} \times \left\{ \frac{(1 + u_n) u_{n+1} - (\rho + \rho_{n+1}) u_n}{u_n \times u_{n+1}} \right\},$$

__Posons :__ $v_n = (1 + u_n) u_{n+1} - (\rho + \rho_{n+1}) u_n$,

. $1 + u_n = \dfrac{(\rho + \rho_n)\left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right)}{\left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)}$,

. $u_n = \dfrac{\lambda_1(\rho - 1)(\lambda_1 - 1) + \rho\lambda_1\lambda_1^{(n)} - \lambda_1\lambda_1^{(n+1)} + \rho\lambda_1^{(n+1)}\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right) + \rho_n\left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right) - \lambda_1^{(n)}\left(\lambda_1 - 1 + \dots\right)}{\left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)}$

__Posons :__

$$X_n = u_n \times \left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right).$$

. $(1 + u_n) \times u_{n+1} = \dfrac{(\rho + \rho_n)\left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right) \times X_{n+1}}{\left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\lambda_1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+2)}\right)}$,

$$\cdot\ (\rho+\rho_{n+1})\, u_n = \frac{(\rho+\rho_{n+1})\, X_n}{(\lambda_1+\lambda_1^{(n)})\,(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+1)})} \quad ,$$

Donc :

$$v_n = \frac{(\rho+\rho_n)(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n)})\,X_{n+1} - X_n\,(\rho+\rho_{n+1})(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+2)})}{(\lambda_1+\lambda_1^{(n)})\,(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+1)})\,(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+2)})} \quad ,$$

<u>Posons :</u>

$$R_n = (\rho+\rho_n)\,(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n)})\,X_{n+1} - X_n\,(\rho+\rho_{n+1})\,(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+2)}) \quad ,$$

$= $ numérateur de v_n .

$$R_n = \rho(\lambda_1-1)\,[X_{n+1}-X_n] + \rho\,[\lambda_1^{(n)}X_{n+1} - \lambda_1^{(n+2)}X_n] + \rho_n X_{n+1}(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n)}) - \rho_{n+1}X_n\,(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+2)})$$

On a :
$$\frac{X_{n+1}-X_n}{\lambda_1^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} (\lambda_0-1)\left\{\lambda_1(\rho-\lambda_0) + (\lambda_1-1)[\rho\lambda_0+\rho_0\lambda_1-1]\right\} \quad ,$$

$$\frac{R_n}{\lambda_1^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} (\lambda_0-1)(\lambda_1-1)\left[\lambda\rho_0\,(\lambda_1-1) - \rho\,(\lambda_0\rho-1)\right] \quad ,$$

Donc :
$$\frac{v_n}{\lambda_1^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{(\lambda_0-1)\left\{\lambda\rho_0(\lambda_1-1)-\rho(\lambda_0\rho-1)\right\}}{\lambda_1(\lambda_1-1)} \quad ,$$

Puisque :
$$\frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} = \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \cdot \frac{(v_{n+1}/\lambda_1^{(n+1)})}{(v_n/\lambda_1^{(n)})} \cdot \frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} \cdot \frac{u_n \cdot u_{n+1}}{u_{n+1}\, u_{n+2}} \quad ,$$
on a

sous les hypothèses du lemme 2 :

$$\frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho\lambda_0 \ .$$

$\llcorner$

D'après ces deux lemmes (1) et (2), on déduit le :

Théorème 1 :

Si (s_n), $(g_1(n))$ et $(g_2(n))$ sont telles que :

- $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho + \rho_n$ $(n \in \mathbb{N})$ avec : $\lim\limits_n \rho_n = 0$ et $\rho \neq 1$;

- $\dfrac{g_i(n+1)}{g_i(n)} = \lambda_i + \lambda_i^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ avec : $\lim\limits_n \lambda_i^{(n)} = 0$ et $\lambda_i \neq 1$ $(i=1,2)$;

- $\exists \lambda_0 \neq 1, \exists \lambda, \exists \rho_0 : \lim\limits_n \dfrac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} = \lambda_0$, $\lim\limits_n \dfrac{\rho_n}{\lambda_1^{(n)}} = \rho_0$ et $\lim\limits_n \dfrac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} = \lambda$;

alors, si en plus : $\lambda_0 \lambda_2 \neq 1$ et :

i) :
1) $\lambda \neq 1$: $\lim\limits_n E_2^{(n)} = S$,
2) $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda \neq \dfrac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}$: $\lim\limits_n t_2^{(n)} = S$,
3) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda\lambda_1 \neq \dfrac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}$: $\lim\limits_n \rho_2^{(n)} = S$.

ii) : $\lambda_0 \times \rho \neq 1$ et :

1) $\lambda \neq 1$, $\rho_0 \neq \dfrac{\rho\lambda_0 - 1}{\lambda_1 - 1}$: $\lim\limits_n T_2^{(n)} = S$,
2) $\lambda \neq 1$; $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda\rho_0 \neq \dfrac{\rho(\rho\lambda_0 - 1)}{\lambda_1 - 1}$: $\lim\limits_n S_2^{(n)} = S$,
3) $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda \neq (\lambda_2 - 1)/(\lambda_1 - 1)$, $\rho_0 \neq (\rho\lambda_0 - 1)/(\lambda_1 - 1)$: $\lim\limits_n \tau_2^{(n)} = S$,
4) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda\lambda_1 \neq (\lambda_2 - 1)/(\lambda_1 - 1)$, $\lambda\rho_0 \neq \rho(\lambda_0\rho - 1)/(\lambda_1 - 1)$: $\lim\limits_n \sigma_2^{(n)} = S$,
5) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda\lambda_1 \neq (\lambda_2 - 1)/(\lambda_1 - 1)$, $\rho_0 \neq (\rho\lambda_0 - 1)/(\lambda_1 - 1)$: $\lim\limits_n \alpha_2^{(n)} = S$,
6) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda \neq (\lambda_2 - 1)/(\lambda_1 - 1)$, $\lambda\rho_0 \neq \rho(\lambda_0\rho - 1)/(\lambda_1 - 1)$: $\lim\limits_n \beta_2^{(n)} = S$.

Dans le cas où : $\lambda_1 = 1$ et/ou $\lambda_2 = 1$ (dans le théorème 1) on obtient :

Théorème 2 :

Soit (S_n), de limite S et $(g_i(n))$ $i=1,2$ telles que :

i) $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho + \rho_n$ $(n \in \mathbb{N})$ avec : $\lim\limits_n \rho_n = 0$ et $\rho \neq 1$;

ii) . $\dfrac{g_i(n+1)}{g_i(n)} = \lambda_i + \lambda_i^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ avec : $\lim\limits_n \lambda_i^{(n)} = 0$ $i=1,2$;

. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \neq 1$ [*], $\lim\limits_n \dfrac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} = b \neq 0, 1, \rho, \lambda_2$;

alors : 1) $\lim\limits_n T_2^{(n)} = S$;

2) si en plus : $\exists\, a$ $\lim\limits_n \dfrac{\Delta S_n}{\lambda_1^{(n)}} = a$, alors : $\lim\limits_n E_2^{(n)} = S - a$;

3) si en plus des hypothèses i) et ii) on a :

3-1) $\lambda_2 \neq 0$, alors : $\lim\limits_n S_2^{(n)} = S$

3-2) $\lambda_2 \neq 0, \dfrac{b}{1-b}$, alors : $\lim\limits_n \tau_2^{(n)} = \lim\limits_n \sigma_2^{(n)} = \lim\limits_n \alpha_2^{(n)} = \lim\limits_n \beta_2^{(n)} = S$.

[*] : $\lambda_2 \neq 1$ peut être remplacé par : $\lambda_2 = 1$ et $(\lambda_i^{(n)})$ - $i=1,2$ - vérifiant les hypothèses de la remarque 2, ultérieure.

Preuve :

2) D'abord, d'après le théorème 3, § IV-1, on a : $\lim\limits_n E_1^{(n)} = S - a$.

D'autre part :

$$E_2^{(n)} - E_1^{(n)} = - \frac{\Delta E_1^{(n)}}{\left(g_{1,2}^{(n+1)} / g_{1,2}^{(n)}\right) - 1},$$

$$g_{1,2}^{(n)} = g_2(n) \times \left\{ 1 - \frac{(g_2(n+1)/g_2(n)) - 1}{(g_1(n+1)/g_1(n)) - 1} \right\} = g_2(n) \times \frac{-(\lambda_2 - 1) + \lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}}.$$

Donc : $$\left(g_{1,2}^{(n+1)} / g_{1,2}^{(n)}\right) = \left(g_2(n+1)/g_2(n)\right) \times \frac{\left[\lambda_1^{(n+1)} - \lambda_2^{(n+1)} - (\lambda_2 - 1)\right] \times \lambda_1^{(n)}}{\left[\lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)} - (\lambda_2 - 1)\right] \times \lambda_1^{(n+1)}},$$

et : $$\lim_n \frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \frac{\lambda_2}{b} \neq 1 .$$

Par suite : $\lim\limits_n \left(E_2^{(n)} - E_1^{(n)}\right) = 0$ car $\lim\limits_n \Delta E_1^{(n)} = 0$ $\left(E_1^{(n)} \xrightarrow[n]{} (S-a)\right)$

On a alors : $\lim\limits_n E_2^{(n)} = \lim\limits_n E_1^{(n)} = S - a$. ∎

1°) : $\lim_n T_2^{(n)} = S$:

On a : $\lim_n T_1^{(n)} = S$, d'après le théorème 3, § IV-1.

D'autre part :

$$T_2^{(n)} - T_1^{(n)} = -\frac{\Delta T_1^{(n)}}{\left(D_2^{(n+1)}/D_2^{(n)}\right) - 1} \quad \text{avec : } D_2^{(n)} = -\frac{\Delta T_1^{(n)}}{\Delta g_{1,2}^{(n)}}\, g_{1,2}^{(n)} .$$

Posons :

$$G_{0,1}^{(n)} = \frac{g_2^{(n)}}{\Delta g_1^{(n)}} \quad \text{et} \quad G_{1,2}^{(n)} = \frac{g_{1,2}^{(n)}}{\Delta g_{1,2}^{(n)}} .$$

$$\frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} \cdot \frac{G_{1,2}^{(n+1)}}{G_{1,2}^{(n)}} \ ;$$

Puisque $\lim_n \left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}\right) = \frac{\lambda_2}{b} \neq 1$ (d'après le cas 1°) qui

On a :

$$\lim_n \frac{G_{1,2}^{(n+1)}}{G_{1,2}^{(n)}} = 1. \quad \left(\text{car : } \frac{G_{1,2}^{(n+1)}}{G_{1,2}^{(n)}} = \frac{\left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}\right) - 1}{\left(g_{1,2}^{(n+2)}/g_{1,2}^{(n+1)}\right) - 1} \longrightarrow \frac{\frac{\lambda_2}{b} - 1}{\frac{\lambda_2}{b} - 1}\right.$$

Montrons que : $\lim_n \frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} = p$:

On a : $T_1^{(n)} = S_n - \frac{\Delta S_n}{\left(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}\right) - 1}$, $D_1^{(n)} = -\Delta S_n \cdot G_{01}^{(n)}$.

Donc :

$$\Delta T_1^{(n)} = \Delta S_n \left\{ 1 + \frac{1}{\left(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}\right) - 1} \right\} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\left(D_1^{(n+2)}/D_1^{(n+1)}\right) - 1}$$

$$= \frac{\Delta S_n \left\{ D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)} \right\}}{\left(D_1^{(n+1)}/D_2^{(n)}\right) - 1} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\left(D_1^{(n+2)}/D_1^{(n+1)}\right) - 1}$$

$$= \Delta S_{n+1} \left\{ \frac{\left(\frac{G_{0,1}^{(n+1)}}{G_{01}^{(n)}}\right)\left(\frac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}} - 1\right) - \left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right)}{\left[\left(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}\right) - 1\right]\left[\left(D_1^{(n+2)}/D_1^{(n+1)}\right) - 1\right]} \right\},$$

Donc :

$$\frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} = \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \times \underbrace{\frac{\left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right)}{\left(\frac{D_1^{(n+3)}}{D_1^{(n+2)}} - 1\right)}}_{:= u_n} \times \underbrace{\frac{\frac{G_{01}^{(n+2)}}{G_{01}^{(n+1)}}\left(\frac{D_1^{(n+3)}}{D_1^{(n+2)}} - 1\right) - \left(\frac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}} - 1\right)}{\frac{G_{01}^{(n+1)}}{G_{0,1}^{(n)}}\left(\frac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}} - 1\right) - \left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right)}}_{:= v_n}$$

. On a :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{G_{0,1}^{(n+1)}}{G_{0,1}^{(n)}} \longrightarrow \frac{\rho}{b} \neq 1 \quad \text{car :}$$

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \longrightarrow \rho \quad \text{et} \quad \frac{G_{0,1}^{(n+1)}}{G_{0,1}^{(n)}} = \frac{\lambda_1^{(n)}}{\lambda_1^{(n+1)}} \longrightarrow \frac{1}{b}\,.$$

Donc :

$$\lim_n u_n = 1\,.$$

. D'autre part :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\rho+\rho_n}{\lambda_1^{(n+1)}} \cdot \lambda_1^{(n)} \quad \text{et} \quad \frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = \frac{(\rho+\rho_n)\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n+1)}}\,,$$

Donc:

$$\frac{G_{0,1}^{(n+1)}}{G_{0,1}^{(n)}}\left(\frac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}}-1\right) - \left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}}-1\right) = \frac{\lambda_1^{(n)}}{\lambda_1^{(n+1)}}\left(\frac{\rho+\rho_{n+1}-\frac{\lambda_1^{(n+2)}}{\lambda_1^{(n+1)}}}{\frac{\lambda_1^{(n+2)}}{\lambda_1^{(n+1)}}}\right) - \left(\frac{\rho+\rho_n-\frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}}}{\frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}}}\right);$$

$$= \lambda_1^{(n)} \times \left\{ \frac{\rho+\rho_{n+1} - \frac{\lambda_1^{(n+2)}}{\lambda_1^{(n+1)}}}{\lambda_1^{(n+2)}} - \frac{\rho+\rho_n - \frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}}}{\lambda_1^{(n+1)}} \right\}$$

$$= \lambda_1^{(n)} \frac{\left\{ \lambda_1^{(n+1)}(\rho+\rho_{n+1}) - \lambda_1^{(n+2)} - \lambda_1^{(n+2)}\left(\rho+\rho_n - \frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}}\right)\right\}}{\lambda_1^{(n+1)}\,\lambda_1^{(n+2)}}$$

et

$$V_n = \frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} \times \frac{\lambda_1^{(n+2)}}{\lambda_1^{(n+3)}} \times \frac{\rho+\rho_{n+2} - \frac{\lambda_1^{(n+3)}}{\lambda_1^{(n+2)}} - \frac{\lambda_1^{(n+3)}}{\lambda_1^{(n+1)}}\left(\rho+\rho_{n+1} - \frac{\lambda_1^{(n+2)}}{\lambda_1^{(n+1)}}\right)}{\rho+\rho_{n+1} - \frac{\lambda_1^{(n+2)}}{\lambda_1^{(n+1)}} - \frac{\lambda_1^{(n+2)}}{\lambda_1^{(n)}}\left(\rho+\rho_n - \frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}}\right)}\,,$$

$$V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(b \times \frac{1}{b} \times \frac{\rho - b - b(\rho-b)}{\rho - b - b(\rho - b)}\right) = 1\,, \quad (b\neq 1,\, b\neq 0,\, \rho\neq b)$$

Par suite :

$$\lim_n \frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} = \rho \quad \text{et :}$$

$$\lim_n \frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \rho \neq 1$$

Donc : $\lim_n \left(T_2^{(n)} - T_1^{(n)}\right) = 0$ et par suite $\lim_n T_2^{(n)} = S$. ◻

3) : $\lim\limits_{n} S_2^{(n)} = S$:

On a : $\lim\limits_{n} S_1^{(n)} = s$ d'après le théorème 2, § V-1

D'autre part :

$$S_2^{(n)} - S_1^{(n+1)} = - \frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\left(D_2^{(n+1)}/D_2^{(n)}\right) - 1} \quad \text{avec} \quad D_2^{(n)} = - \frac{\Delta S_1^{(n)}}{\Delta g_{1,2}^{(n)}} \times g_{1,2}^{(n+1)} .$$

$$\frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} \cdot \frac{\overline{G}_{1,2}^{(n+1)}}{\overline{G}_{1,2}^{(n)}} \quad \text{avec :} \quad \overline{G}_{1,2}^{(n)} = \frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{\Delta g_{1,2}^{(n)}} = \frac{g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}}{\left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}\right) - 1} .$$

$$\lim_{n} \frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \frac{\lambda_2}{b} \neq 0, 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{G}_{1,2}^{(n+1)}}{\overline{G}_{1,2}^{(n)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \quad (\text{d'après 1° qui précède}) .$$

Montrons que : $\lim\limits_{n} \frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} = \rho$:

On a : $S_1^{(n)} = S_{n+1} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\left(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}\right) - 1}$, $\quad D_1^{(n)} = - \Delta S_n \, \overline{G}_{0,1}^{(n)}$

$\overline{G}_{01}^{(n)} = g_1^{(n+1)}/\Delta g_1^{(n)}$.

$$\Delta S_1^{(n)} = \Delta S_{n+1} \times \left\{ \frac{\left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}}\right)\left(\frac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}} - 1\right) - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right)}{\left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right)\left(\frac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}} - 1\right)} \right\}$$

$$\frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} = \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \times \frac{\left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right)\left(\frac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}} - 1\right)}{\left(\frac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}} - 1\right)\left(\frac{D_1^{(n+3)}}{D_1^{(n+2)}} - 1\right)} \times \frac{W_{n+1}}{W_n} , \quad \text{où :}$$

$$W_n = \left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}}\right)\left(\frac{D_1^{(n+2)}}{D_1^{(n+1)}} - 1\right) - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right) .$$

On a :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \frac{\overline{G}_{01}^{(n+1)}}{\overline{G}_{1,2}^{(n)}} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{\lambda_1^{(n)}}{\lambda_1^{(n+1)}} \cdot \frac{1 + \lambda_1^{(n+1)}}{1 + \lambda_1^{(n)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\rho}{b} \neq 1 .$$

$$= (\rho + \rho_n)\left(\frac{1 + \lambda_1^{(n+1)}}{1 + \lambda_1^{(n)}}\right) \times \frac{\lambda_1^{(n)}}{\lambda_1^{(n+1)}} .$$

et $W_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\frac{\rho}{b}(b-1)\left(\frac{\rho}{b} - 1\right) \neq 0$

Donc :

$$\lim_{n} \frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} = \rho .$$

Par suite :

$$\lim_n \frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \rho \neq 1 .$$

Donc : $\lim_n \left(S_2^{(n)} - S_1^{(n+1)}\right) = 0$ et $\lim_n S_2^{(n)} = S$. $\left(\lim_n S_1^{(n)} = S\right)$.

3) : $\underline{\lim_n \tau_2^{(n)} = S}$:

On a $\lim_n \tau_1^{(n)} = \lim_n T_1^{(n)} = S \qquad (\tau_1^{(n)} = T_1^{(n)} \quad \forall n)$.

D'autre part :

$$\tau_2^{(n)} - \tau_1^{(n)} = -\frac{\Delta \tau_1^{(n)}}{(D_2^{(n+1)}/D_2^{(n)}) - 1} \quad \text{avec : } D_2^{(n)} = -\frac{\Delta \tau_1^{(n)}}{\Delta g_{1,2}^{(n)}} g_{1,2}^{(n)} .$$

$$\frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \frac{\Delta \tau_1^{(n+1)}}{\Delta \tau_1^{(n)}} \times \frac{G_{1,2}^{(n+1)}}{G_{1,2}^{(n)}} , \quad G_{1,2}^{(n)} = \frac{1}{(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}) - 1} ,$$

$$= \frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} \cdot \frac{G_{1,2}^{(n+1)}}{G_{1,2}^{(n)}} .$$

On a :

$$g_{1,2}^{(n)} = g_2(n) - \frac{\Delta g_2^{(n)}}{(D_{1,2}^{(n+1)}/D_{1,2}^{(n)}) - 1} , \qquad \text{avec : } D_{1,2}^{(n)} = -\frac{\Delta g_2^{(n)}}{\Delta g_1^{(n)}} g_1(n) .$$

$$= g_2^{(n)} \times \left\{ 1 - \frac{(g_2^{(n+1)}/g_2^{(n)}) - 1}{(D_{1,2}^{(n+1)}/D_{1,2}^{(n)}) - 1} \right\}$$

$$\frac{D_{1,2}^{(n+1)}}{D_{1,2}^{(n)}} = \frac{\lambda_2 - 1 + \lambda_2^{(n+1)}}{\lambda_2 - 1 + \lambda_2^{(n)}} \times \frac{\lambda_1^{(n)}}{\lambda_1^{(n+1)}} \times \left(\lambda_2 + \lambda_2^{(n)}\right) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \frac{\lambda_2}{b} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_2 \neq 1 \\ \lambda_2 \neq b \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \lambda_2 \left(1 - \frac{b(\lambda_2 - 1)}{\lambda_2 - b}\right) \neq 1 \quad \left(\text{hypothèse : } \lambda_2 \neq \frac{b}{1-b}\right)$$

Par suite : $\displaystyle \frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \lim_n \left(\frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}}\right) \times \lim_n \left(\frac{G_{1,2}^{(n+1)}}{G_{1,2}^{(n)}}\right) = \rho \times 1 = \rho \neq 1,$

et : $\lim_n \tau_2^{(n)} = \lim_n \tau_1^{(n)} = S$.

Le reste de la preuve, se fait exactement comme dans ce qui précède (aucune difficulté).

Un exemple d'application de ce théorème 2, est donné par :

- (S_n) : $S_n = \rho^n/(n+1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, (avec $\rho = \frac{3}{4}$), $S=0$.

- $(g_1^{(n)})$: $g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)} = 1 - \dfrac{1}{2^n(n+1)}$, $n\in\mathbb{N}$;

- $(g_2^{(n)})$: $g_2^{(n+1)}/g_2^{(n)} = \lambda_2 - \dfrac{1}{(n+1)}$, $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_2 \neq 0, 1, \frac{1}{2}$ arbitraire ;

$$(\rho_n) : \rho_n = \rho\left\{\frac{\rho-1}{(\rho-1)n+\rho-2} - 2\frac{(\rho-1)n+2\rho-3}{(n+3)\left[(\rho-1)n+\rho-2\right]}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

$\lambda_1 = 1$; $b = \frac{1}{2} \neq 0, 1, \rho, \lambda_2$;

Dans ce cas :

$$\frac{\Delta S_n}{\lambda_2^{(n)}} = -\frac{(\rho-1)n+\rho-2}{n+2}\times(2\rho)^n \not\longrightarrow 0 \text{ . Donc : } \lim_n E_2^{(n)} \neq S\ (=0)$$

$$\text{et : } \lim_n T_2^{(n)} = \lim_n S_2^{(n)} = \lim_n \tau_2^{(n)} = \lim_n \sigma_2^{(n)} = \lim_n \alpha_2^{(n)} = \lim_n \beta_2^{(n)} = 0 .$$

<u>Remarque 2 :</u>

Dans le théorème 2 qui précède, la condition $\lambda_2 \neq 1$ peut être remplacée par $\lambda_2 = 1$. On obtient alors les mêmes conclusions sous les hypothèses :

<u>i) Pour les transformations : (E_2), (T_2), (S_2).</u>

- $\dfrac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} = 1 + \eta_n$, $n\in\mathbb{N}$, $\lim_n \eta_n = 0$;
- $\exists \eta \neq 1$: $\lim_n \dfrac{\eta_{n+1}}{\eta_n} = \eta$.

<u>ii) Pour les transformations : (τ_2), (ρ_2).</u>

- $\exists \mu \neq 0$: $\dfrac{\lambda_i^{(n+1)}}{\lambda_i^{(n)}} = \mu + \mu_i^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$, $(i=1,2)$, $(\mu_i^{(n)} \to 0)$;
- $\exists \varphi \neq 0$: $\lim_n \dfrac{\lambda_2^{(n)}}{\mu_1^{(n)}} = \varphi$;
- $\dfrac{\mu_2^{(n)}}{\mu_1^{(n)}} = 1 + \psi_n$, $n\in\mathbb{N}$, $(\psi_n \to 0)$, $\left(\exists \psi \neq 1 : \lim_n \dfrac{\psi_{n+1}}{\psi_n} = \psi\right)$.

iii) Pour les transformations (σ_2) et (α_2) :

On suppose, en plus des hypothèses du cas ii) qui précède, que:

$\cdot \dfrac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} = 1 + \eta_n \quad (n \in \mathbb{N})$, $\lim_n \eta_n = 0$, $\lim_n \dfrac{\eta_{n+1}}{\eta_n} = \eta$: $\eta \times \mu \neq 1$, $\eta \neq 1$.

Preuve:

Basée sur :

i) la suite $(g_{1,2}^{(n)})$ associée à : (E_2), (T_2) et (S_2) vérifie :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} \times \left\{ \frac{1 - \left(\lambda_2^{(n+1)} / \lambda_1^{(n+1)} \right)}{1 - \left(\lambda_2^{(n)} / \lambda_1^{(n)} \right)} \right\},$$

$$= \left(1 + \lambda_2^{(n)}\right) \times \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \eta \neq 1$$

ii) La suite $(g_{1,2}^{(n)})$ associée à : (τ_2) et (β_2) vérifie :

$$\cdot\ g_{1,2}^{(n)} = g_2^{(n)} \times \left\{ 1 - \frac{\left(g_2^{(n+1)} / g_2^{(n)}\right) - 1}{\left(D_{1,2}^{(n+1)} / D_{1,2}^{(n)}\right) - 1} \right\} \quad \text{avec: } D_{1,2}^{(n)} = - g_2^{(n)} \times \frac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} .$$

$$\frac{D_{1,2}^{(n+1)}}{D_{1,2}^{(n)}} - 1 = \frac{\mu_2^{(n)} - \mu_1^{(n)} + \lambda_2^{(n)}\left(\mu + \mu_2^{(n)}\right)}{\mu + \mu_1^{(n)}} ,$$

$$\cdot\ g_{1,2}^{(n)} = g_2^{(n)} \times \left\{ \frac{\left(\mu_2^{(n)} - \mu_1^{(n)}\right)\left(1 + \lambda_2^{(n)}\right)}{\left(\mu_2^{(n)} - \mu_1^{(n)}\right) + \lambda_2^{(n)}\left(\mu + \mu_2^{(n)}\right)} \right\} .$$

Donc :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \left(1 + \lambda_2^{(n)}\right) \times \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} \times \frac{1 + \lambda_2^{(n+1)}}{1 + \lambda_2^{(n)}} \times \frac{\psi_n + \dfrac{\lambda_2^{(n)}}{\mu_1^{(n)}} \times \left(\mu + \mu_2^{(n)}\right)}{\psi_{n+1} + \dfrac{\lambda_2^{(n+1)}}{\mu_1^{(n+1)}} \times \left(\mu + \mu_2^{(n+1)}\right)} ,$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \gamma \neq 1 .$$

iii) La suite $(g_{1,2}^{(n)})$ associée à : (σ_2) et (α_2) vérifie :

$$g_{1,2}^{(n)} = g_2^{(n+1)} \times \left\{ 1 - \frac{\left(g_2^{(n+2)}/g_2^{(n+1)}\right) - 1}{\left(D_{1,2}^{(n+1)}/D_{1,2}^{(n)}\right) - 1} \right\} \quad \text{avec : } D_{1,2}^{(n)} = -g_2^{(n)} \frac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} \left(1 + \lambda_1^{(n}\right.$$

$$= g_2^{(n+1)} \times \frac{u_n}{v_n} \quad \text{où :}$$

- $$v_n = \mu_1^{(n)} \times \left\{ \frac{\mu_2^{(n)}}{\mu_1^{(n)}} \left(1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)\left(1 + \lambda_2^{(n)}\right) + \mu \frac{\lambda_1^{(n)}}{\mu_1^{(n)}} \left(\frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} - 1\right) - \left(1 + \lambda_1^{(n)}\right) + \mu \frac{\lambda_2^{(n)}}{\mu_1^{(n)}} \left(1 + \lambda_2^{(n+1)}\right) \right.$$

Donc : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n.]{} \mu \quad (\mu \neq 0, \varphi \neq 0) \quad \left(\lim_n \dfrac{\mu_1^{(n+1)}}{\mu_1^{(n)}} = \mu \right).$

- $$u_n = \left(\mu + \mu_1^{(n)}\right) \times \left\{ \lambda_1^{(n+1)} - \lambda_2^{(n+1)} + \lambda_2^{(n)}\left(1 + \lambda_1^{(n+1)}\right) - \lambda_1^{(n)}\left(1 + \lambda_2^{(n+1)}\right) \right\} \; ;$$

$$= \lambda_1^{(n)}\left(\mu + \mu_1^{(n)}\right) \left\{ \eta_n \left(1 + \lambda_1^{(n+1)}\right) - \eta_{n+1}\left(\lambda_1^{(n+1)} + \mu_1^{(n)} + \mu\right) \right\} \; ;$$

donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\left(u_{n+1}/\lambda_1^{(n+1)}\eta_{n+1}\right)}{\left(u_n/\lambda_1^{(n)}\eta_n\right)} \times \dfrac{\lambda_1^{(n+1)} \cdot \eta_{n+1}}{\lambda_1^{(n)} \cdot \eta_n} \xrightarrow[n.]{} \mu \cdot \eta \rightarrow \left(\eta \cdot \mu \neq 1, \mu \neq 0 \right)$

et par suite :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \frac{g_2^{(n+2)}}{g_2^{(n+1)}} \cdot \frac{\left(u_{n+1}/u_n\right)}{\left(v_{n+1}/v_n\right)} \xrightarrow[n.]{} \eta \neq 1 . \blacksquare$$

L'étude de la convergence de ces transformations dans le cas logarithmique, sera traitée dans le paragraphe V, ultérieur.
D'autre part, on a d'une manière générale :

IV.3 Convergence des transformations de $\mathcal{F}$ pour k quelconque :

Théorème 1 :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

Si i) $\forall i = 1, 2, \ldots, k$, $\exists a_i \neq 1$: $\lim_n \frac{g_i^{(n+1)}}{g_i^{(n)}} = a_i$ et $(a_j \neq a_i \; \forall j \neq i)$;

ii) $\lim_n T_{k-1}^{(n)} = S$ $\left(\text{resp}^t : \lim_n S_{k-1}^{(n)} = S\right)$ et la suite $\left(\frac{\Delta T_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta T_{k-1}^{(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ $\left(\text{resp}^t : \left(\frac{\Delta S_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta S_{k-1}^{(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ vérifie $P(1)$;

Alors : $\lim_n T_k^{(n)} = S$ $\left(\text{resp}^t : \lim_n S_k^{(n)} = S\right.$, si en plus $\left. a_i \neq 0 \; \forall i.\right)$

Avant de faire la preuve de ce théorème, établissons un résultat préliminaire.

Lemme 3 :

Sous l'hypothèse i) du théorème 1, ci-dessus, on a :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$:

$$\lim_n \frac{g_{k,i}^{(n+1)}}{g_{k,i}^{(n)}} = a_i .$$

Preuve :

voir [5], page : 182.

Preuve du théorème 1 :

- On a : $T_k^{(n)} = T_{k-1}^{(n)} - \dfrac{\Delta T_{k-1}^{(n)}}{\left(D_k^{(n+1)}/D_k^{(n)}\right) - 1}$ avec :

$$D_k^{(n)} = -\Delta T_{k-1}^{(n)} \times G_{k-1,k}^{(n)} \quad , \quad G_{k-1,k}^{(n)} := \frac{1}{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right) - 1} .$$

D'après le lemme 3 on a :

$\lim\limits_n \left(G_{k-1,k}^{(n+1)}/G_{k-1,k}^{(n)}\right) = 1$.

Donc : $\lim\limits_n \left(D_k^{(n+1)}/D_k^{(n)}\right) = \lim\limits_n \left(\Delta T_{k-1}^{(n+1)}/\Delta T_{k-1}^{(n)}\right) \neq 1$, d'après ii).

Par suite : $\lim\limits_n T_k^{(n)} = \lim\limits_n T_{k-1}^{(n)} = S$ ▫ (d'après ii) -) .

- On a : $S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n+1)} - \dfrac{\Delta S_{k-1}^{(n+1)}}{\left(D_k^{(n+1)}/D_k^{(n)}\right) - 1}$ avec :

$$D_k^{(n)} = -\Delta S_{k-1}^{(n)} \times \overline{G}_{k-1,k}^{(n)} \quad \text{et} \quad \overline{G}_{k-1,k}^{(n)} = g_{k-1,k}^{(n+1)}/\Delta g_{k-1,k}^{(n)} .$$

$$\overline{G}_{k-1,k}^{(n)} = \frac{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right)}{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right) - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a_k}{a_k - 1} \neq 0$$ (car : $a_k \neq 0, 1$ - voir théorème -) .

Donc : $\left(\overline{G}_{k-1,k}^{(n+1)}/\overline{G}_{k-1,k}^{(n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $\lim\limits_n \dfrac{D_k^{(n+1)}}{D_k^{(n)}} = \lim\limits_n \dfrac{\Delta S_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta S_{k-1}^{(n)}} \neq 1$

(d'après ii) -) .

Par suite : $\lim\limits_n S_k^{(n)} = \lim\limits_n S_{k-1}^{(n+1)} = S$. ▫

Théorème 2 :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et (s_n), de limite s,

Si $\lim_n t_{k-1}^{(n)} = s = \lim_n s_{k-1}^{(n)}$ et la suite $\left(\frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la transformation (t) [resp^t: (s)] vérifie $P(1)$,

alors :
$$\lim_n t_k^{(n)} = s \ ,$$
$$\lim_n s_k^{(n)} = s \ .$$

Preuve : évidente, d'après :

- $$t_k^{(n)} = t_{k-1}^{(n)} - \frac{\Delta t_{k-1}^{(n)}}{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right) - 1} \qquad (n\in\mathbb{N}) \ ,$$

- $$s_k^{(n)} = s_{k-1}^{(n)} - \frac{\Delta s_{k-1}^{(n)}}{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right) - 1} \qquad (n\in\mathbb{N}) \ .$$

Théorème 3 :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

Si :
- $\lim_n \tau_{k-1}^{(n)} = s$ [resp^t: $\lim \sigma_{k-1}^{(n)} = s$, $\lim_n \alpha_{k-1}^{(n)} = s$, $\lim_n \beta_{k-1}^{(n)} = s$] ;
- $\exists\, a_k$: $\lim_n \left(\Delta \tau_{k-1}^{(n+1)}/\Delta \tau_{k-1}^{(n)}\right) = a_k$ [resp^t: $\lim_n \left(\Delta \sigma_{k-1}^{(n+1)}/\Delta \sigma_{k-1}^{(n)}\right) = a_k$, $\lim_n \left(\Delta \alpha_{k-1}^{(n+1)}/\Delta \alpha_{k-1}^{(n)}\right) = a_k$, $\lim_n \left(\Delta \beta_{k-1}^{(n+1)}/\Delta \beta_{k-1}^{(n)}\right) = a_k$] ;
- $\exists\, b_k$: $\lim_n \left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right) = b_k$;

alors :

1) Si en plus : $b_k \neq 1$, $a_k \neq 1$ alors : $\lim_n \tau_k^{(n)} = s = \lim_n \alpha_k^{(n)}$;
2) Si en plus : $b_k \neq 0,1$, $a_k \neq 1$ alors : $\lim_n \sigma_k^{(n)} = \lim_n \beta_k^{(n)} = s$;
3) Si en plus : $b_k = 1$ et la suite :
$$n \longmapsto \left(\frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}} - 1\right) \Big/ \left(\frac{g_{k-1,k}^{(n+2)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)}} - 1\right) \ ,$$
admet une limite c_k vérifiant : $a_k \times c_k \neq 1$, alors : $\lim_n \tau_k^{(n)} = \lim_n \sigma_k^{(n)} = \lim_n \alpha_k^{(n)} = \lim_n \beta_k^{(n)} = s$.

Preuve : Evidente.

V. Etude de l'accélération de la convergence :

Un des buts essentiels de ce paragraphe est de mettre en évidence l'intérêt de l'application de la procédure-théta aux règles du E-algo[rithme] tant dans le cas linéaire que logarithmique.

La section 1 est consacrée à l'étude de (T_1), (S_1) et (t_1). Dans la seconde, on établira quelques conditions pour que les deuxièmes colonnes des transformations de $\mathcal{F}$ convergent plus vite [que] les premières.

Le paragraphe sera clos par des résultats généraux.

V-1 Etude de (T_1), (S_1) et (E_1) :

Théorème 1 :

Soit (S_n) de limite S et $(g_1(n))$ telles que :

$(\exists\, a_1 \neq -1, 0, 1)$, $(\exists\, b_1 \neq 1)$: $\lim_n \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = a_1$ et $\lim_n \frac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}} = b_1$

Alors :

1) $\lim_n \frac{E_1^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{b_1 - a_1}{b_1 - 1}$;

2°) $T_1^{(n)} - S = o(S_n - S)$;

3°) si de plus $b_1 \neq 0$: $S_1^{(n)} - S = o(S_n - S)$.

Preuve :

1) On a : $$\frac{E_1^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \frac{\left(\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S}\right) - 1}{\left(\frac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}}\right) - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \left(1 - \frac{a_1 - 1}{b_1 - 1}\right) = \frac{b_1 - a_1}{b_1 - 1}$$ car

$$\left(a_1 = \lim_n \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \neq -1, 0, 1 \Rightarrow \lim_n \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = a_1\right).$$ (voir [

2) $$\frac{T_1^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \frac{\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} - 1}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{G_{0,1}^{(n+1)}}{G_{0,1}^{(n)}} - 1}$$ avec : $G_{0,1}^{(n)} = \frac{g_1^{(n)}}{\Delta g_1^{(n)}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{b_1 - 1}$

Donc : $$\lim_n \left(\frac{T_1^{(n)} - S}{S_n - S}\right) = 1 - \frac{a_1 - 1}{a_1 \times \frac{b_1 - 1}{b_1 - 1} - 1} = 0. \quad (a_1 \neq 1, b_1 \neq 1).$$

3) $\dfrac{S_1^{(n)}-S}{S_{n+1}-S} = 1 - \dfrac{(S_{n+2}-S)/(S_{n+1}-S) \;-1}{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\cdot\dfrac{\overline{G}_{0,1}^{(n+1)}}{\overline{G}_{0,1}^{(n)}} - 1}$ avec : $\overline{G}_{0,1}^{(n)} = \dfrac{g_1(n+1)}{\Delta g_1(n)}$;

On a : $$\overline{G}_{0,1}^{(n)} = \frac{(g_1(n+1)/g_1(n))}{(g_1(n+1)/g_1(n)) - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b_1}{b_1-1} .$$

Donc : $$\frac{\overline{G}_{0,1}^{(n+1)}}{\overline{G}_{0,1}^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad (b_1 \neq 0,1)$$

Par suite :

$$\frac{S_1^{(n)}-S}{S_n-S} = \frac{S_1^{(n)}-S}{S_{n+1}-S}\times\frac{S_{n+1}-S}{S_n-S} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_1\left(1-\frac{a_1-1}{a_1-1}\right)=0 .$$ ∎

Sous certaines conditions, les transformations (T_1) et (S_1) convergent plus vite que (E_1). A titre d'exemple on a le :

Théorème 2 :

Soit (S_n), de limite S et $(g_1(n))$ telles que :

i) $\dfrac{S_{n+1}-S}{S_n-S} = \rho - \varepsilon_n \quad (n\in\mathbb{N})$: $\rho \neq 1$ et $\lim \varepsilon_n = 0$;

ii) $\dfrac{g_1(n+1)}{g_1(n)} = \rho - \mu_n \quad (n\in\mathbb{N})$: $\lim\limits_n \mu_n = 0$.

Alors : 1) $E_1^{(n)} - S = o(S_n - S)$.

2) Si de plus : iii) $\left(\dfrac{\varepsilon_n}{\mu_n}\right)$ vérifie $\mathcal{P}(1)$ et $\left(\left|\dfrac{\varepsilon_n}{\mu_n}\right|\right)$ bornée ;

iv) $\lim\limits_n \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \lim\limits_n \dfrac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1$;

Alors : 2-1) : $T_1^{(n)} - S = o(E_1^{(n)} - S)$,

2-2) : $S_1^{(n)} - S = o(E_1^{(n)} - S)$ si en plus : $\rho \neq 0$.

Preuve :

1) On a : $$(E_1^{(n)}-S)/(S_n-S) = 1 - \frac{\dfrac{S_{n+1}-S}{S_n-S} - 1}{(g_1(n+1)/g_1(n)) - 1} = 1 - \frac{\rho - 1 - \varepsilon_n}{\rho - 1 - \mu_n} ,$$

Donc :

$$\frac{E_1^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{\varepsilon_n - \mu_n}{(\rho-1) - \mu_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 . \quad \boxtimes \quad (\rho \neq 1)$$

2) On a :

$$\frac{T_1^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \frac{(S_{n+1}-S)/(S_n-S) - 1}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{G_{0,1}^{(n+1)}}{G_{0,1}^{(n)}} - 1} \qquad \text{avec : } G_{01}^{(n)} = \frac{g_1(n)}{\Delta g_1(n)} = \frac{1}{\rho-1-\mu_n}$$

$$= 1 - \frac{(\rho-1) - \varepsilon_n}{(\rho-\varepsilon_n)\frac{(\rho-1-\varepsilon_{n+1})}{(\rho-1-\varepsilon_n)} \times \frac{(\rho-1-\mu_n)}{(\rho-1-\mu_{n+1})} - 1} ,$$

$$= \frac{(\rho-\varepsilon_n)\left(\frac{[\rho-1+\varepsilon_{n+1}][\rho-1-\mu_n]}{[\rho-1-\varepsilon_n][\rho-1-\mu_{n+1}]} - 1\right)}{(\rho-\varepsilon_n) \times \frac{[\rho-1-\varepsilon_{n+1}][\rho-1-\mu_n]}{[\rho-1-\varepsilon_n][\rho-1-\mu_{n+1}]} - 1}$$

$$= (\rho-\varepsilon_n) \times \frac{N_n}{D_n} \qquad \text{avec :}$$

$$N_n = [\rho-1-\varepsilon_{n+1}][\rho-1-\mu_n] - [\rho-1-\varepsilon_n][\rho-1-\mu_{n+1}] ,$$

et :

$$D_n = (\rho-\varepsilon_n)[\rho-1-\varepsilon_{n+1}][\rho-1-\mu_{n+1}] - [\rho-1-\varepsilon_n][\rho-1-\mu_{n+1}] .$$

<u>Par suite :</u>

$$\frac{T_1^{(n)} - S}{E_1^{(n)} - S} = (\rho-\varepsilon_n)\frac{(\rho-1-\mu_n)}{(\varepsilon_n-\mu_n)} \times \frac{N_n}{D_n} ,$$

$$= (\rho-\varepsilon_n)\frac{(\rho-1-\mu_n)}{D_n} \times \frac{N_n}{\varepsilon_n-\mu_n} .$$

- $$(\rho-\varepsilon_n) \times \frac{(\rho-1-\mu_n)}{D_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\rho}{(\rho-1)^2} ,$$

- $$\frac{N_n}{\varepsilon_n-\mu_n} = \frac{(N_n/\mu_n)}{(\varepsilon_n/\mu_n) - 1} ,$$

- $$\frac{N_n}{\mu_n} = \frac{(\rho-1)(\mu_{n+1}-\mu_n+\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}) + (\mu_n\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n\mu_{n+1})}{\mu_n}$$

Donc :

$$\frac{N_n}{\mu_n} = (\rho-1)\times\left\{\left(\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}-1\right) + \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}\left(1-\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right)\right\} + \left(\varepsilon_{n+1} - \mu_{n+1}\times\frac{\varepsilon_n}{\mu_n}\right).$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ : \text{ d'après iii) et iv) .}$$

Par suite : $\lim_n \dfrac{N_n}{\varepsilon_n - \mu_n} = 0$.

et :

$$\lim_n \frac{T_1^{(n)} - S}{E_1^{(n)} - S} = \lim_n (\rho - \varepsilon_n)\frac{(\rho - 1 - \mu_n)}{(D_n)} \times \frac{N_n}{(\varepsilon_n - \mu_n)} = 0 . \blacksquare$$

2.2) Pour montrer que $(S_1^{(n)} - S) = o(E_1^{(n)} - S)$, on fait exactement la même méthode que celle ci-dessus .

• Comme exemple d'application de ce théorème, on choisit :

(S_n) : $\quad S_n = S + \prod_{i=1}^{n-1}\left(\rho - \frac{1}{i(i+1)(i+2)}\right)$, $\quad \rho \in]0,1[$

$S_0, S_1 \neq 0$, arbitraires .

$(g_1(n))$: $\quad g_1(n) = x_n \quad : \quad x_n = x_1 \prod_{j=1}^{n-1}\left(\rho - \frac{1}{j(j+1)}\right)$,

$x_0, x_1 \neq 0 \quad$ arbitraires .

On a alors :

- $\dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \rho - \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

  - $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

- $\dfrac{g_1(n+1)}{g_1(n)} = \rho - \dfrac{1}{n(n+1)}$;

  - $\mu_n = 1/n(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
  - $\lim_n (\mu_{n+1}/\mu_n) = 1$.
  - $\lim_n (\varepsilon_n/\mu_n) = 0$ et $\lim_n (\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n) = 1$. $\blacksquare$

Théorème 3.

Soit (S_n) de limite s et $(g_1(n))$ telles que :

i) $\dfrac{S_{n+1}-S}{S_n-S} = 1+\rho_n$ $(n\in\mathbb{N})$: $\lim\limits_n \rho_n = 0$;

$\dfrac{g_1(n+1)}{g_1(n)} = 1+\lambda_n$ $(n\in\mathbb{N})$: $\dfrac{\rho_n}{\lambda_n} = 1+a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ et $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n \lambda_n = 0$

ii) $\dfrac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = 1+r_n$, $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1+\mu_n$ $(n\in\mathbb{N})$ et $\lim\limits_n r_n = \lim\limits_n \mu_n = 0$;

$\exists\, \mu\neq 0 : \lim\limits_n \dfrac{\lambda_n}{\mu_n} = \mu$, $\lim\limits_n \dfrac{r_n}{\mu_n} = 1$.

Alors :

1) Sous l'hypothèse i) : $E_1^{(n)} - S = o(S_n - S)$.

2) Sous les hypothèses i) et ii) : $T_1^{(n)} - S = o(S_n - S)$ et $(S_1^{(n)} - S) = o(S_n - S)$.

Preuve :

1) On a : $\dfrac{E_1^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \dfrac{\rho_n}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\left(\lim \dfrac{\rho_n}{\lambda_n} = 1\right)$.

2) On a :

$$\frac{T_1^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \frac{\rho_n(1+\mu_n)}{(1+\rho_n)(1+r_n)-(1+\mu_n)},$$

$$= (1+\rho_n)\frac{(r_n/\mu_n) - 1}{\left(\frac{r_n}{\mu_n}\right) + \frac{\rho_n}{\mu_n}(1+r_n) - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

De même :

$$\frac{S_1^{(n)} - S}{S_{n+1} - S} = 1 - \frac{\rho_{n+1}}{(1+\rho_n)\left(\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right)\left(\frac{1+\lambda_{n+1}}{1+\lambda_n}\right)\times\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} - 1},$$

$$= 1 - \frac{(\rho_{n+1}/\rho_n)\times(\rho_n/\lambda_n)(1+\lambda_n)(1+\mu_n)}{(\lambda_{n+1}/\lambda_n)+(r_n/\lambda_n)(1+\lambda_{n+1})+(\rho_n/\lambda_n)(1+r_n)(1+\lambda_{n+1})-\frac{\mu_n(1+\lambda_n)}{\lambda_n}}$$

Donc : $\lim\limits_n (S_1^{(n)} - S)/(S_{n+1} - S) = 0$.

et : $\lim\limits_n (S_1^{(n)} - S)/(S_n - S) = \lim\limits_n \left(\dfrac{S_1^{(n)} - S}{S_{n+1} - S} \times \dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S}\right) = 0$. $\square$

V.2 : ETUDE DE : (T_2), (S_2), (t_2), (s_2), (τ_2), (σ_2), (α_2) et (β_2).

Cas linéaire :

Théorème 1 :

Sous les hypothèses du théorème 1, § V.2 et si en plus : $\rho \neq 0,-1$ et $\lambda_0\rho \neq 0,1,-1$

et : (i) : $\lambda_1 = \rho$, $\lambda_1(\lambda_0 - 1) \neq (\lambda_1 - 1)(\rho_0 - 1)$ alors :

i-1) :

$$\lim_n \frac{t_2^{(n)} - S}{E_1^{(n)} - S} = \lim_n \frac{s_2^{(n)} - S}{E_1^{(n)} - S} = \frac{\lambda_0(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_0\lambda_2 - 1} \ ;$$

i-2) :

$$\lim_n \frac{E_2^{(n)} - S}{E_1^{(n)} - S} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \ . \\ \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - 1} & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \ . \end{cases}$$

(ii) : $T_2^{(n)} - S = o\left(T_1^{(n)} - S\right)$;

$\tau_2^{(n)} - S = o\left(T_1^{(n)} - S\right)$;

$\beta_2^{(n)} - S = o\left(S_1^{(n)} - S\right)$.

(iii) : $\lambda_0\lambda_2 \neq 0$

$S_2^{(n)} - S = o\left(S_1^{(n)} - S\right)$;

$\sigma_2^{(n)} - S = o\left(S_1^{(n)} - S\right)$;

$\alpha_2^{(n)} - S = o\left(T_1^{(n)} - S\right)$.

Evidemment, pour les hypothèses de ce théorème on a : (voir théorème 1, § V.1).

- $E_1^{(n)} - S = o(s_n - S)$, $\left(t_1^{(n)} = s_1^{(n)} = E_1^{(n)} \quad \forall n.\right)$,
- $T_1^{(n)} - S = o(s_n - S)$, $\left(\tau_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} = T_1^{(n)} \quad \forall n.\right)$,
- $S_1^{(n)} - S = o(s_n - S)$, $\left(\sigma_1^{(n)} = \beta_1^{(n)} = S_1^{(n)} \quad \forall n\right)$.

Preuve :

(i) On a : $E_1^{(n)} - S = (S_n - S) \times \left\{ 1 - \dfrac{(S_{n+1}-S)/(S_n-S) - 1}{\left(g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)}\right) - 1} \right\}$.

Donc : $\lim_n \dfrac{E_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 1 - \dfrac{\rho - 1}{\rho - 1} = 0 \quad \left(\lim_n g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)} = \lambda_1 = \rho \neq 1 \right)$.

et :

$$\Delta E_1^{(n)} = \Delta S_n - \frac{\Delta S_{n+1}}{\left(g_1^{(n+2)}/g_1^{(n+1)}\right) - 1} + \frac{\Delta S_n}{\left(g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)}\right) - 1} .$$

$$= \Delta S_n \times \left\{ \frac{\lambda_1 + \lambda_1^{(n)}}{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}} - \frac{\rho + \rho_n}{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}} \right\} .$$

Donc :

$$\frac{\Delta E_1^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{\lambda_1\left(\lambda_1^{(n+1)} - \lambda_1^{(n)}\right) + \lambda_1^{(n)}\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right) - \rho_n\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right)}{\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)}, \quad (\lambda_1 = \rho).$$

et :

$$\frac{\Delta E_1^{(n)}}{\lambda_1^{(n)} \cdot \Delta S_n} = \frac{\lambda_1\left(\frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} - 1\right) + \lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)} - \left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right) \times \frac{\rho_n}{\lambda_1^{(n)}}}{\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n)}\right)\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}\right)} .$$

Donc : $\lim_n \dfrac{\Delta E_1^{(n)}}{\lambda_1^{(n)} \Delta S_n} = \dfrac{\lambda_1(\lambda_0 - 1) + (\lambda_1 - 1)(1 - \rho_0)}{(\lambda_1 - 1)^2} \neq 0$ d'après i) .

Par suite : $\lim_n \dfrac{\Delta E_1^{(n+1)}}{\Delta E_1^{(n)}} = \lim_n \dfrac{\left(\Delta E_1^{(n+1)}/\lambda_1^{(n+1)}\Delta S_{n+1}\right)}{\left(\Delta E_1^{(n)}/\lambda_1^{(n)}\Delta S_n\right)} \times \dfrac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} \times \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \lambda_0 \rho = \lambda_0 \lambda_1$; $\lambda_1 = \rho$.

et :

$\lim_n \dfrac{E_1^{(n+1)} - S}{E_1^{(n)} - S} = \lambda_0 \lambda_1$ car : $\lambda_0\lambda_1 \neq 0, 1, -1$.

i-1// • $\dfrac{E_2^{(n)} - S}{E_1^{(n)} - S} = 1 - \dfrac{(E_1^{(n+1)} - S)/(E_1^{(n)} - S) - 1}{\left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}\right) - 1}$ car : $E_1^{(n)} = E_1^{(n)}$ $n \in \mathbb{N}$.

Donc : $\lim_n \dfrac{E_2^{(n)} - S}{E_1^{(n)} - S} = 1 - \dfrac{\lambda_0\lambda_1 - 1}{\lambda_0\lambda_2 - 1}$ d'après le lemme 1.§

$$= \frac{\lambda_0(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_0 \lambda_2 - 1} .$$

• Puisque :

$$\frac{s_2^{(n)}-S}{E_1^{(n)}-S} = 1 - \frac{(E_1^{(n+1)}-S)/(E_1^{(n)}-S) \;-1}{(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}) - 1} \qquad (s_1^{(n)} = E_1^{(n)} \quad \forall n)$$

On a aussi : $\displaystyle \lim_n \frac{s_2^{(n)}-S}{E_1^{(n)}-S} = \frac{\lambda_0(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_0\lambda_2 - 1}$.

i-2) : On a : $\displaystyle \frac{E_2^{(n)}-S}{E_1^{(n)}-S} = 1 - \frac{(E_1^{(n+1)}-S)/(E_1^{(n)}-S) \;-1}{(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}) - 1}$,

Donc : si $\lambda_1 = \lambda_2$ $\displaystyle \lim_n \frac{E_2^{(n)}-S}{E_1^{(n)}-S} = 1 - \frac{\lambda_0\lambda_1 - 1}{\lambda_0\lambda_1 - 1} = 0$. (Lemme 1)

si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\displaystyle \lim_n \frac{E_2^{(n)}-S}{E_1^{(n)}-S} = 1 - \frac{\lambda_0\lambda_1 - 1}{\lambda_2 - 1}$, (Lemme 1)

$$= \frac{\lambda_2 - \lambda_0\lambda_1}{\lambda_2 - 1} .$$

(ii) On a :

• $$\frac{T_2^{(n)}-S}{T_1^{(n)}-S} = 1 - \frac{\dfrac{T_1^{(n+1)}-S}{T_1^{(n)}-S} - 1}{\dfrac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} \times \dfrac{G_{1,2}^{(n+1)}}{G_{1,2}^{(n)}} - 1} ,$$

$$G_{1,2}^{(n)} = \frac{1}{(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}) - 1} .$$

• D'après le théorème 1, § III-2 : $\displaystyle \lim_n \frac{G_{1,2}^{(n+1)}}{G_{1,2}^{(n)}} = 1$,

$$\lim_n \frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} = \lambda_0\rho \neq 0, 1, -1 ,$$

• Donc : $$\lim \frac{T_1^{(n+1)}-S}{T_1^{(n)}-S} = \lambda_0\rho$$

et :

$$\lim_n \frac{T_2^{(n)}-S}{T_1^{(n)}-S} = 1 - \frac{(\lambda_0\rho - 1)}{\lambda_0\rho \times \left(\dfrac{\lambda_0\lambda_2 - 1}{\lambda_0\lambda_2 - 1}\right) - 1} = 0 . \quad \text{(voir hypothèses)}$$

• Pour montrer le reste des résultats du théorème, on fait la même méthode que celle ci-dessus, en utilisant les propriétés :

$$\bullet\ \frac{\Delta \tau_1^{(n+1)}}{\Delta \tau_1^{(n)}} = \frac{\Delta \alpha_1^{(n+1)}}{\Delta \alpha_1^{(n)}} = \frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda\rho \neq 0, 1, -1 \ ;$$

$$\bullet\ \frac{\Delta \sigma_1^{(n+1)}}{\Delta \sigma_1^{(n)}} = \frac{\Delta \beta_1^{(n+1)}}{\Delta \beta_1^{(n)}} = \frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda\rho \neq 0, 1, -1 \ ;$$

et les résultats du lemmes, § IV-2 .

Dans le cas où la suite (S_n) est à convergence logarithmique, on obtie[nt] le :

<u>Thérème 2:</u>

Si (s_n) - de limite s -, $(q_1(n))$ et $(q_2(n))$ sont telles que :

$\bullet\ \dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = 1 + \rho_n \quad (n \in \mathbb{N})$ avec :

$\bullet\ \lim \rho_n = 0$;

$\bullet\ \dfrac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = 1 + \rho_0^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N})$ et $\lim \rho_0^{(n)} = 0$;

$\bullet\ \dfrac{g_i(n+1)}{g_i(n)} = \lambda_i + \lambda_i^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N})$ avec : $\lambda_i \neq 1$, $\lim\limits_n \lambda_i^{(n)} = 0$, i=[…]

$\bullet\ \exists \lambda_0 \neq 0, 1, -1$; $\lambda_0\lambda_2 \neq 1$ et $\dfrac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} = \lambda_0 + \lambda_0^{(n)}$ (n[…]

$\lim\limits_n \lambda_0^{(n)} = 0$;

$\lim\limits_n \dfrac{\lambda_1^{(n)}}{\rho_n} = 0$;

$\bullet\ \exists \lambda : \lim\limits_n \dfrac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} = \lambda$;

• $\exists\, \rho_0 : \lim_n (\rho_0^{(n)}/\lambda_1^{(n)}) = \rho_0$;

alors :

i) Si en plus : $\rho_0 \neq \dfrac{\lambda_0 - 1}{\lambda_1 - 1}$, On a :

i-1) $T_1^{(n)} - S = o(S_n - S)$; $T_2^{(n)} - S = o(T_1^{(n)} - S)$ si $\lambda \neq 1$;

i-2) $\tau_2^{(n)} - S = o(T_1^{(n)} - S)$ si en plus : $\lambda \neq \dfrac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}$ et $\lambda_2 \neq 0$;

i-3) $\alpha_2^{(n)} - S = o(T_1^{(n)} - S)$ si en plus : $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda\lambda_1 \neq \dfrac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}$.

ii) Si en plus : $\rho_0 \neq \dfrac{\lambda_0 - 1}{\lambda_1(\lambda_1 - 1)}$, $\lambda\lambda_1 \neq 0$. On a :

ii-1) $S_1^{(n)} - S = o(S_n - S)$ et $S_2^{(n)} - S = o(S_1^{(n)} - S)$ si $\lambda \neq 1$;

ii-2) $\sigma_2^{(n)} - S = o(S_1^{(n)} - S)$ si en plus : $\lambda\lambda_1 \neq \dfrac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}$;

ii-3) $\beta_2^{(n)} - S = o(S_1^{(n)} - S)$ si en plus : $\lambda \neq \dfrac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}$.

__Preuve :__

__i-1 $T_1^{(n)} - S = o(S_n - S)$:__

On a :

$$\frac{T_1^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \frac{(S_{n+1} - S)/(S_n - S) - 1}{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \dfrac{G_{0,1}^{(n+1)}}{G_{0,1}^{(n)}} - 1} \quad \text{avec : } G_{0,1}^{(n)} = \frac{1}{(g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)}) - 1} ;$$

$$= 1 - \frac{\rho_n}{u_n + (1+u_n)\left[\rho_n + \rho_0^{(n)}(1+\rho_n)\right]} \quad \text{où :}$$

$$\bullet\ u_n = \frac{G_{0,1}^{(n+1)}}{G_{0,1}^{(n)}} - 1 = -\lambda_1^{(n)} \times \frac{\lambda_0 - 1 + \lambda_0^{(n)}}{\lambda_1 - 1 + \lambda_1^{(n+1)}} ,$$

$$\bullet\ \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \cdot \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = (1 + \rho_0^{(n)})(1 + \rho_n) = 1 + \rho_n + \rho_0^{(n)}(1 + \rho_n) ;$$

__Posons :__ $\rho_1^{(n)} = \dfrac{\rho_0^{(n)}}{\rho_n}$ et $\mu_0^{(n)} = \dfrac{\lambda_1^{(n)}}{\rho_n}$.

$$\lim_n \rho_1^{(n)} = \lim_n \frac{\rho_0^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} \times \frac{\lambda_1^{(n)}}{\rho_n} = \rho_0 \times 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_n \mu_0^{(n)} = 0 \quad \text{(hypothèses)}.$$

Donc :

$$\frac{T_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{u_n}{\rho_n}\right) + (1+u_n)\times\left\{1+\frac{\rho_0^{(n)}}{\rho_n}(1+\rho_n)\right\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad \blacksquare \qquad \left(\frac{u_n}{\rho_n}\to 0\right).$$

• $T_2^{(n)} - S = o\left(T_1^{(n)}-S\right)$.

On a :

$$T_1^{(n)} - S = (S_n - S) \times \left\{\frac{v_n}{W_n}\right\} \text{ où : } \quad (\text{d'après ce qui précède})$$

• $W_n = u_n + (1+u_n)\times\left[\rho_n + \rho_0^{(n)}(1+\rho_n)\right]$,

$$\left(\frac{W_n}{\rho_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\right) \Longrightarrow \left(\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{car } \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\to 1\right).$$

• $v_n = u_n + (1+u_n)\times\left[\rho_n + \rho_0^{(n)}(1+\rho_n)\right] - \rho_n$,

$$= u_n\times\left\{1+\rho_n+\rho_0^{(n)}(1+\rho_n)\right\} + \rho_0^{(n)}(1+\rho_n),$$

$$\frac{v_n}{\rho_n} = \rho_1^{(n)}(1+\rho_n) - \mu_0^{(n)}\times\frac{(\lambda_0-1+\lambda_0^{(n)})}{(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+1)})}\times\left\{1+\rho_n+\rho_0^{(n)}(1+\rho_n)\right\},$$

$$\frac{v_n}{\rho_n\,\mu_0^{(n)}} = (1+\rho_n)\left(\rho_1^{(n)}/\mu_0^{(n)}\right) - \frac{(\lambda_0-1+\lambda_0^{(n)})\left(1+\rho_n+\rho_0^{(n)}[1+\rho_n]\right)}{(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+1)})} \longrightarrow \rho_0 - \frac{\lambda_0-1}{\lambda_1-1},$$

car : $\frac{\rho_1^{(n)}}{\mu_0^{(n)}} \xrightarrow[n]{} \rho_0$.

Puisque : $\rho_0 \neq \frac{\lambda_0-1}{\lambda_1-1}$ (hypothèse)

$\left(\mu_0^{(n+1)}/\mu_0^{(n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0 \neq 0, 1, -1$, On a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \to \lambda_0$ et :

$$\frac{T_1^{(n+1)}-S}{T_1^{(n)}-S} = (1+\rho_n)\times\frac{v_{n+1}}{v_n}\times\frac{W_n}{W_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0 \text{ et } \frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0 \neq 0,1,-1.$$

Par suite :

$$\frac{T_2^{(n)}-S}{T_1^{(n)}-S} = 1 - \frac{\left(T_1^{(n+1)}-S\right)/\left(T_1^{(n)}-S\right) - 1}{\frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}}\cdot\frac{G_{1,2}^{(n+1)}}{G_{1,2}^{(n)}} - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(1 - \frac{\lambda_0-1}{\lambda_0-1}\right) = 0, \text{ d'après}$$

le lemme 1, § V-2 : $\lim_n \frac{G_{1,2}^{(n+1)}}{G_{1,2}^{(n)}} = 1$. $\blacksquare$

2) et i-3) : pour montrer que : $\tau_2^{(n)}-s=o(T_1^{(n)}-s)$ et $\alpha_2^{(n)}-s=o(T_1^{(n)}-s)$,
On utilise le fait que : $\tau_1^{(n)}=T_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}$ et lemme 1, §IV-2.
$\left(\lim_n \frac{\tau_1^{(n+1)}-s}{\tau_1^{(n)}-s}=\lim_n \frac{\Delta\tau_1^{(n+1)}}{\Delta\tau_1^{(n)}}=\lambda_0 \text{ et } \lim_n \frac{\alpha_1^{(n+1)}-s}{\alpha_1^{(n)}-s}=\lim_n \frac{\Delta\alpha_1^{(n+1)}}{\Delta\alpha_1^{(n)}}=\lambda_0\right)$.

-1) $S_1^{(n)}-S=o(S_{n+1}-S)$:

On a : $$\frac{S_1^{(n)}-S}{S_{n+1}-S}=1-\frac{(S_{n+2}-S)/(S_{n+1}-S)-1}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\cdot\frac{\overline{G}_{0,1}^{(n+1)}}{\overline{G}_{0,1}^{(n)}}-1}$$ avec : $\overline{G}_{0,1}^{(n)}=\frac{\lambda_1+\lambda_1^{(n)}}{\lambda_1-1+\lambda_1^{(n)}}$.

Posons : $$t_n=\frac{\overline{G}_{0,1}^{(n+1)}}{\overline{G}_{0,1}^{(n)}}-1=\lambda_1^{(n)}\frac{(\lambda_0+\lambda_0^{(n)})(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n)})-(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+1)})-\lambda_1(\lambda_0-1+\lambda_0^{(n)})}{(\lambda_1+\lambda_1^{(n)})(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+1)})}$$

$$\frac{S_1^{(n)}-S}{S_{n+1}-S}=1-\frac{\rho_{n+1}}{t_n+(1+t_n)\{\rho_n+\rho_0^{(n)}(1+\rho_n)\}},$$

$$=1-\frac{(\rho_{n+1}/\rho_n)}{\left(\frac{t_n}{\rho_n}\right)+(1+t_n)\times\left\{1+\rho_1^{(n)}(1+\rho_n)\right\}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\left(1-\frac{1}{0+1\times1}\right)=0 .\ \square$$

Car : $\frac{t_n}{\rho_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\quad\left(\frac{\lambda_1^{(n)}}{\rho_n}\to0\right),(\lambda_1\neq0,1)$.

• $S_2^{(n)}-S=o(S_1^{(n)}-S)$:

On a : $S_1^{(n)}-S=(S_{n+1}-S)\times\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ où :

$$x_n:=y_n-\rho_{n+1}\quad,\ y_n:=t_n+(1+t_n)\times\left\{\rho_n+\rho_0^{(n)}(1+\rho_n)\right\}$$

• $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{(y_{n+1}/\rho_{n+1})}{(y_n/\rho_n)}\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$, car $\frac{y_n}{\rho_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ (voir ci-dessus)

• $x_n=t_n\times\left\{1+\rho_n+\rho_0^{(n)}(1+\rho_n)\right\}+\rho_0^{(n)}(1+\rho_n)-\rho_n\rho_0^{(n)}$,

$=t_n\times\left\{1+\rho_n+\rho_0^{(n)}(1+\rho_n)\right\}+\rho_0^{(n)}$,

$$\frac{x_n}{\rho_n}=\rho_1^{(n)}+\left\{1+\rho_n+\rho_0^{(n)}(1+\rho_n)\right\}\times\mu_0^{(n)}\times\frac{(\lambda_0+\lambda_0^{(n)})(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n)})-(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+1)})-\lambda_1(\lambda_0-1+\lambda_0^{(n)})}{(\lambda_1+\lambda_1^{(n)})(\lambda_1-1+\lambda_1^{(n+1)})}$$

Donc :

$$\frac{x_n}{f_n \times \mu_0^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\rho_0 - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_1(\lambda_1 - 1)}\right) \neq 0 \quad \left(\text{hypothèse}\right),$$

et : $\frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0 \quad \left(\text{car } \frac{\mu_0^{(n+1)}}{\mu_0^{(n)}} = \frac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} \times \frac{f_n}{f_{n+1}} \to \lambda_0\right)$

Donc :

$$\frac{S_1^{(n+1)} - S}{S_1^{(n)} - S} = \frac{S_{n+2} - S}{S_{n+1} - S} \times \frac{x_{n+1}}{x_n} \times \frac{y_n}{y_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0 .$$

Par suite : $\lim_n \frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} = \lambda_0 \quad (\lambda_0 \neq 0, 1, -1)$ et :

$$\frac{S_2^{(n)} - S}{S_1^{(n+1)} - S} = 1 - \frac{\left(S_1^{(n+2)} - S\right)/\left(S_1^{(n+1)} - S\right) - 1}{\frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} \times \frac{\overline{G}_{1,2}^{(n+1)}}{\overline{G}_{1,2}^{(n)}} - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(1 - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}\right) = 0 . \boxtimes$$

$$\overline{G}_{1,2}^{(n)} = \frac{g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}}{\left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}\right) - 1},$$

$$\frac{\overline{G}_{1,2}^{(n+1)}}{\overline{G}_{1,2}^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \left(\text{d'après le lemme 1, § IV-2 et le fait que } \lambda_0\lambda_2 \neq 0, 1\right).$$

Donc : $\lim_n \frac{S_2^{(n)} - S}{S_1^{(n)} - S} = 0 . \boxtimes$

ii-2) et ii-3) : Pour montrer que : $\sigma_2^{(n)} - S = o(S_1^{(n)} - S)$ et $\beta_2^{(n)} - S = o(S_1^{(n)} - S)$, On utilise le fait que : $\sigma_1^{(n)} = \beta_1^{(n)} = S_1^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ et le lemme 1, § IV-2.

Sous les hypothèses de ce théorème, la première colonne des transformations (E), (t), (s) n'accélère pas la convergence de (S_n).

En ce qui concerne la deuxième colonne du E-algorithme, on a le :

Théorème 3 :

Si les suites (S_n) et $(g_i^{(n)})_n$, $i=1,2$, sont telles que :

i) $\dfrac{S_{n+1}-S}{S_n-S} = 1 + \rho_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_n \rho_n = 0$;

ii) $\dfrac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}} = 1 + \lambda_1^{(n)}$, $\lim_n \lambda_1^{(n)} = 0$, $\lim_n \dfrac{\lambda_1^{(n+1)}}{\lambda_1^{(n)}} = 1$;

$\cdot \dfrac{\rho_n}{\lambda_1^{(n)}} = 1 + a_n$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + b_n$, $(n \in \mathbb{N})$, $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$;

iii) $\dfrac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} = \lambda_2 + \lambda_2^{(n)}$, $\lim_n \lambda_2^{(n)} = 0$;

$\cdot \dfrac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} = 1 + \gamma_n$, $\dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = 1 + c_n$, $(n \in \mathbb{N})$, $\lim_n \gamma_n = \lim_n c_n = 0$;

alors :

- $E_1^{(n)} - S = o(S_n - S)$;
- Si $\lambda_2 \neq 1$ alors : $\lim_n \dfrac{E_2^{(n)}-S}{E_1^{(n)}-S} = 1$;
- Si $\lambda_2 = 1$ et $\left(\exists b, c \neq 1 ; e : \lim_n (\rho_n / b_n) = b, \lim_n (b_n / c_n) = e, \lim_n \dfrac{\lambda_2^{(n)}}{c_n} = c\right)$ alors :

  $\lim_n \dfrac{E_2^{(n)}-S}{E_1^{(n)}-S} = 1 - e \cdot \dfrac{1+b}{1+c}$.

Preuve :

On a : $E_1^{(n)} - S = (S_n - S) \times \left\{ 1 - \dfrac{\dfrac{S_{n+1}-S}{S_n-S} - 1}{\dfrac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}} - 1} \right\} = (S_n - S) \times \left\{ 1 - \dfrac{\rho_n}{\lambda_1^{(n)}} \right\}$;

Donc :

$$E_1^{(n)} - S = o(S_n - S)$$ puisque, par hypothèse, $\lim_n \dfrac{\rho_n}{\lambda_1^{(n)}} = 1$.

D'autre part :

$$\frac{E_1^{(n+1)}-S}{E_1^{(n)}-S} = (1+\rho_n)\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1+\rho_n)(1+b_n) = 1 + b_n + \rho_n(1+b_n) ;$$

Donc : $\dfrac{E_1^{(n+1)}-S}{E_1^{(n)}-S} - 1 = b_n \times \left\{ 1 + \dfrac{\rho_n}{b_n}(1+b_n) \right\}$, et : $$\frac{g_{1,2}^{(n)}}{g_2^{(n)}} = 1 - \frac{\lambda_2 - 1 + \lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} = \frac{\lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)} - (\lambda_2 - 1)}{\lambda_1^{(n)}} \ ;$$

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = (\lambda_2 + \lambda_2^{(n)}) \times \frac{\lambda_1^{(n)}}{\lambda_1^{(n+1)}} \times \frac{\lambda_1^{(n+1)} - \lambda_2^{(n+1)} - (\lambda_2 - 1)}{\lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)} - (\lambda_2 - 1)} \ ;$$

Si $\lambda_2 \neq 1$ alors :

- $$\lim_n \frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \lambda_2 \times \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - 1} = \lambda_2 \ .$$
- $$\lim_n \frac{E_1^{(n+1)} - S}{E_1^{(n)} - S} = \lim_n \left(1 + b_n + \rho_n (1 + b_n)\right) = 1$$

Donc : $$\lim_n \frac{E_2^{(n)} - S}{E_1^{(n)} - S} = 1 - \lim_n \frac{(E_1^{(n+1)} - S)/(E_1^{(n)} - S) - 1}{(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}) - 1} = 1 - \frac{1 - 1}{\lambda_2 - 1} = 1 .$$

Si $\lambda_2 = 1$ alors :

- $$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = (1 + \lambda_2^{(n)}) \frac{1 - (\lambda_2^{(n+1)}/\lambda_1^{(n+1)})}{1 - (\lambda_2^{(n)}/\lambda_1^{(n)})} \ ;$$
$$= (1 + \lambda_2^{(n)})(1 + c_n) \ ;$$
$$= 1 + c_n \times \left\{1 + \frac{\lambda_2^{(n)}}{c_n}(1 + c_n)\right\} ,$$

- $$\frac{(E_1^{(n+1)} - S)/(E_1^{(n)} - S) - 1}{(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}) - 1} = \frac{b_n}{c_n} \times \frac{1 + \frac{\rho_n}{b_n}(1 + b_n)}{1 + \frac{\lambda_2^{(n)}}{c_n}(1 + c_n)}$$

Donc : $$\lim_n \frac{E_2^{(n)} - S}{E_1^{(n)} - S} = 1 - \lim_n \frac{(E_1^{(n+1)} - S)/(E_1^{(n)} - S) - 1}{(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}) - 1} ,$$
$$= 1 - e \times \frac{(1 + b)}{(1 + c)} \quad (c \neq -1) \ . \blacksquare$$

Un exemple d'application de ce théorème, où l'on a : $E_2^{(n)}-S = o(E_1^{(n)}-S)$ et $E_1^{(n)}-S = o(S_n - S)$ est donné par :

(S_n) : $\quad S_n = \frac{1}{n+1} \quad n \in \mathbb{N} \quad , S=0$;

$(g_i^{(n)})$: $\quad g_i(n) = \frac{1}{n+i+1} \quad n \in \mathbb{N}, \ i=1,2$;

- $\lambda_i^{(n)} = -\frac{1}{n+i+2} \quad i=1,2, \ n \in \mathbb{N}$,
- $\rho_n = -\frac{1}{n+2}$;
- $(\rho_n / \lambda_1^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$; $a_n = \frac{1}{n+2}$; $b_m = -\frac{1}{n+3}$;
- $c_n = -\frac{1}{n+5}$;
- $\lambda_2 = \lambda_1 = b = c = e = 1$.

D'une manière générale, les résultats relatifs à l'accélération d'une colonne par rapport à une autre, sont établis dans le paragraphe :

V.3 ACCELERATION D'UNE COLONNE PAR RAPPORT A UNE AUTRE.

Théorème 1 :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si :

i) $\forall i, \exists a_i \neq 1 : (a_j \neq a_i \ \forall j \neq i)$ et $\lim\limits_n \frac{g_i(n+1)}{g_i(n)} = a_i$;

ii) $\exists b_k \neq 1 : \lim\limits_n \frac{\Delta T_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta T_{k-1}^{(n)}} = b_k \left[\text{resp}^t : \lim\limits_n \frac{\Delta S_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta S_{k-1}^{(n)}} = b_k\right]$;

alors :

1) $\lim\limits_n \frac{T_k^{(n)}-S}{T_{k-1}^{(n)}-S} = 0 \iff \lim\limits_n \frac{T_{k-1}^{(n+1)}-S}{T_{k-1}^{(n)}-S} = b_k$.

2) Si en plus $(a_i \neq 0 : \forall i)$ alors :

$$\lim_n \frac{S_k^{(n)}-S}{S_{k-1}^{(n)}-S} = 0 \iff \lim_n \frac{S_{k-1}^{(n+1)}-S}{S_{k-1}^{(n)}-S} = b_k .$$

Preuve :

1) On a :

$$\frac{T_k^{(n)} - S}{T_{k-1}^{(n)} - S} = \begin{vmatrix} \dfrac{\Delta T_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta T_{k-1}^{(n)}} & \dfrac{T_{k-1}^{(n+1)} - S}{T_{k-1}^{(n)} - S} \\ G_{k-1,k}^{(n)} & G_{k-1,k}^{(n+1)} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \dfrac{\Delta T_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta T_{k-1}^{(n)}} & 1 \\ G_{k-1,k}^{(n)} & G_{k-1,k}^{(n+1)} \end{vmatrix} ;$$

où :

$$G_{k-1,k}^{(n)} = \frac{1}{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)} / g_{k-1,k}^{(n)}\right) - 1} .$$

D'après le lemme 3, § IV-3, on a : $\lim_n G_{k-1,k}^{(n)} = \frac{1}{a_k - 1}$ $(a_k \neq 1)$ d'où le résultat 1) du théorème.

2) On a :

$$\frac{S_k^{(n)} - S}{S_{k-1}^{(n+1)} - S} = \begin{vmatrix} \dfrac{\Delta S_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta S_{k-1}^{(n)}} & \dfrac{S_{k-1}^{(n+2)} - S}{S_{k-1}^{(n+1)} - S} \\ \bar{G}_{k-1,k}^{(n)} & \bar{G}_{k-1,k}^{(n+1)} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \dfrac{\Delta S_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta S_{k-1}^{(n)}} & 1 \\ \bar{G}_{k-1,k}^{(n)} & \bar{G}_{k-1,k}^{(n+1)} \end{vmatrix} ;$$

où :

$$\bar{G}_{k-1,k}^{(n)} = \frac{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)} / g_{k-1,k}^{(n)}\right)}{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)} / g_{k-1,k}^{(n)}\right) - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{a_k}{a_k - 1} .$$ D'après le lemme 3, § IV-3. ($a_k \neq 0, 1$: voir les hypothèses i) et 2)).

D'où le résultat, d'après l'égalité :

$$\frac{S_k^{(n)} - S}{S_{k-1}^{(n)} - S} = \frac{S_k^{(n)} - S}{S_{k-1}^{(n+1)} - S} \times \frac{S_{k-1}^{(n+1)} - S}{S_{k-1}^{(n)} - S} .$$

Théorème 2 :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si :

$\exists a_k \neq 1$: $\left(g_{k-1,k}^{(n)}\right)_n$ – associée à la transformation (t) – [resp^t : (s)],

vérifie : $\lim_n \left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right) = a_k$, alors :

i) $t_k^{(n)} - S = o\left(t_{k-1}^{(n)} - S\right) \Leftrightarrow \lim_n \dfrac{t_{k-1}^{(n+1)} - S}{t_{k-1}^{(n)} - S} = a_k$;

ii) $s_k^{(n)} - S = o\left(s_{k-1}^{(n)} - S\right) \Leftrightarrow \lim_n \dfrac{s_{k-1}^{(n+1)} - S}{s_{k-1}^{(n)} - S} = a_k$.

Preuve : Evidente, d'après les égalités :

i) $$\frac{t_k^{(n)} - S}{t_{k-1}^{(n)} - S} = 1 - \frac{\left(t_{k-1}^{(n+1)} - S\right)/\left(t_{k-1}^{(n)} - S\right) - 1}{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right) - 1} ;$$

ii) $$\frac{s_k^{(n)} - S}{s_{k-1}^{(n)} - S} = 1 - \frac{\left(s_{k-1}^{(n+1)} - S\right)/\left(s_{k-1}^{(n)} - S\right) - 1}{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right) - 1} .$$

Théorème 3 :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Si : i) $\exists a_k \neq 1$: la suite $\left(g_{k-1,k}^{(n)}\right)_n$, associée à la transformation (τ), [resp^t : (σ), (α), (β)] vérifie : $\lim_n \left(g_{k-1,k}^{(n+1)}/g_{k-1,k}^{(n)}\right) = a_k$;

ii) $\exists b_k \neq 0, 1, -1$:

$$\lim_n \frac{\Delta \tau_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta \tau_{k-1}^{(n)}} = b_k \quad \left[\text{resp}^t : \lim_n \frac{\Delta \sigma_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta \sigma_{k-1}^{(n)}} = b_k ,\right.$$

$$\left.\lim_n \frac{\Delta \alpha_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta \alpha_{k-1}^{(n)}} = b_k ,\ \lim_n \frac{\Delta \beta_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta \beta_{k-1}^{(n)}} = b_k \right] ;$$

alors :

- $\tau_k^{(n)} - S = o\left(\tau_{k-1}^{(n)} - S\right)$, $\alpha_k^{(n)} - S = o\left(\alpha_{k-1}^{(n)} - S\right)$.
- Si de plus : $a_k \neq 0$ alors : $\sigma_k^{(n)} - S = o\left(\sigma_{k-1}^{(n)} - S\right)$, $\beta_k^{(n)} - S = o\left(\beta_{k-1}^{(n)} - S\right)$.

Preuve :

. $\tau_k^{(n)} - S = o\left(\tau_{k-1}^{(n)} - S\right)$:

D'après [19], l'hypothèse ii) entraine que :

$$\lim_n \frac{\tau_{k-1}^{(n+1)} - S}{\tau_{k-1}^{(n)} - S} = b_k .$$

Donc :

$$\frac{\tau_k^{(n)} - S}{\tau_{k-1}^{(n)} - S} = 1 - \frac{\dfrac{\tau_{k-1}^{(n+1)} - S}{\tau_{k-1}^{(n)} - S} - 1}{\dfrac{\Delta \tau_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta \tau_{k-1}^{(n)}} \times \dfrac{G_{k-1,k}^{(n+1)}}{G_{k-1,k}^{(n)}} - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 : \text{Car}$$

. $$G_{k-1,k}^{(n)} = \frac{1}{\left(g_{k-1,k}^{(n+1)} / g_{k-1,k}^{(n)}\right) - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{a_k - 1} \; , \quad (a_k \neq 1) ;$$

. $$\lim_n \frac{\Delta \tau_{k-1}^{(n+1)}}{\Delta \tau_{k-1}^{(n)}} = \lim_n \frac{\tau_{k-1}^{(n+1)} - S}{\tau_{k-1}^{(n)} - S} = b_k \neq 0, 1, -1 .$$

. Pour montrer les autres résultats, on fait le même raisonnement que ci-dessus - (évidents).

VI. Etude numérique.

Dans ce paragraphe, On se propose de faire une étude numérique des transformations étudiées antérieurement et d'établir une comparaison entre elles. On calculera l'ensemble des termes de (S_n) et $(g_i(n))_n$ $i \in \mathbb{N}^*$, nécessaires pour déterminer les quantités : $T_k^{(n)}$, $S_k^{(n)}$, $t_k^{(n)}$, $s_k^{(n)}$, $E_k^{(n)}$, $\tau_k^{(n)}$, $\sigma_k^{(n)}$, $\alpha_k^{(n)}$ et $\beta_k^{(n)}$.

Numériquement on étudiera quelques suites à convergence linéaire, logarithmique et de point fixe.

<u>Notation :</u> $I_k = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
$I_k^* = I_k \setminus \{0\}$.

<u>Lemme 1 :</u>

L'application de la procédure-théta aux règles (7) et (8) - (voir §II-1) -, nécessite la connaissance de :

i) $g_i(n+j)$: $j \in I_{2k}$,
$g_m(n+j)$: $j \in I_{2k}$, $m \in I_k^*$, pour calculer $g_{k,i}^{(n)}$;

ii) $g_i(n+j)$: $j \in I_{2k-1}$
$g_m(n+j)$: $m \in I_k^*$, $j \in I_{2k-1}$, pour calculer le terme : $D_{k,i}^{(n)}$.

<u>Preuve :</u> <u>par récurrence sur k.</u>

Si On applique la procédure-théta à la règle (7) alors les $(g_{k,i}^{(n)})_n$ sont données par :

$$g_{k,i}^{(n)} = f\left(g_{k-1,i}^{(n)}, D_{k,i}^{(n)}\right) \quad \text{avec} \quad D_{k,i}^{(n)} = g\left(g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n)}\right).$$

<u>• Pour $k = 1$:</u>

$$g_{1,i}^{(n)} = g_i(n) - \frac{\Delta g_i(n)}{\Delta D_{1,i}^{(n)}} D_{1,i}^{(n)} \quad \text{avec : } D_{1,i}^{(n)} = -\frac{\Delta g_i(n)}{\Delta g_1(n)} g_1(n) \ ;$$

Donc : $\cdot\ D_{1,i}^{(n)}$ nécessite la connaissance de : $g_1(n)$, $g_1(n+1)$, $g_i(n)$ et $g_i(n+1)$;

$\cdot\ g_{1,i}^{(n)}$ " " " " : $g_1(n)$, $g_1(n+1)$, $g_1(n+2)$ et $g_i(n)$, $g_i(n+1)$, $g_i(n+2)$.

• Supposons que le calcul de : $g_{k-1,i}^{(n)}$ nécessite $g_i(n+j)$, $j\in I_{2k-2}$ et $g_m(n+j)$ $j\in I_{2k-2}$ $m\in I_{k-1}^*$

et que " " : $D_{k-1,i}^{(n)}$ " $g_i(n+j)$, $j\in I_{2k-3}$ et $g_m(n+j)$, $j\in I_{2k-3}$, $m\in I_{k-1}^*$

alors :

puisque :

$$g_{k,i}^{(n)} = g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\Delta g_{k-1,i}^{(n)}}{\Delta D_{k,i}^{(n)}} D_{k,i}^{(n)} \quad \text{avec : } D_{k,i}^{(n)} = -\frac{\Delta g_{k-1,i}^{(n)}}{\Delta g_{k-1,k}^{(n)}} g_{k-1,k}^{(n)},$$

et que :

$\cdot\ g_{k,i}^{(n)}$ fait intervenir les termes : $g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,i}^{(n+1)}, g_{k-1,i}^{(n+2)}$ et : $g_{k-1,k}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n+1)}, g_{k-1,k}^{(n+2)}$

$\cdot\ D_{k,i}^{(n)}$ " " " $g_{k-1,i}^{(n)}, g_{k-1,i}^{(n+1)}, g_{k-1,k}^{(n)}, g_{k-1,k}^{(n+1)}$;

On a :

$\cdot\ g_{k,i}^{(n)}$ nécessite la connaissance de : $g_i(n+j)$, $j\in I_{2k-2+2} = I_{2k}$ et $g_m(n+j)$ $m\in I_k^*$, $j\in I_{2k}$

$\cdot\ D_{k,i}^{(n)}$ " " " " : $g_i(n+j)$ $j\in I_{2k-2+1} = I_{2k-1}$ et $g_m(n+j)$, $m\in I_k^*$ et $j\in I_{2k-1}$;

* On fait exactement le même enchainement lorsque la procédure-théta est appliquée à la règle (8).

<u>Propriété 1 :</u>

> Soit : $k\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$ fixés.
> Le calcul de $T_k^{(n)}$ ou de $S_k^{(n)}$ nécessite la connaissance de :
> • S_{n+j} , $j\in I_{2k}$;
> • $g_m(n+j)$, $j\in I_{2k-m+1}$ et $m\in I_k^*$.

Preuve : voir [3] et en utilisant le Lemme 1.

Propriété 2 :

Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$ fixés.
Le calcul de $t_k^{(n)}$ ou de $s_k^{(n)}$ nécéssite la connaissance de :

- S_{n+j} , $j\in I_k$;
- $g_m(n+j)$, $m\in I_k^*$ et $j\in I_{2k-1}$.

Preuve : voir [6] en utilisant le lemme 1.

Propriété 3 :

Si $k\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$, le calcul de $\tau_k^{(n)}$ ou de $\sigma_k^{(n)}$, $\alpha_k^{(n)}$, $\beta_k^{(n)}$, nécéssite la connaissance de :

- S_{n+j} , $j\in I_{2k}$;
- $g_m(n+j)$, $m\in I_k^*$ et $j\in I_{2k}$.

Preuve : voir [6] en utilisant le lemme 1.

Pour plus de clarté, faisons un résumé de ces propriétés, ainsi qu'une comparaison avec la transformation (E).
$k\in\mathbb{N}^*$, $n\in\mathbb{N}$ fixés :

Transformations :	Termes de (S_n) qui interviennent :	Termes de $(g_i(n))_n$ qui interviennent :
$E_k^{(n)}$	$S_n, S_{n+1}, \dots, S_{n+k}$.	$g_i(n+j)$: $i\in I_k^*$, $j\in I_k$.
$t_k^{(n)}$ et $s_k^{(n)}$	$S_n, S_{n+1}, \dots, S_{n+k}$.	$g_i(n+j)$: $i\in I_k^*$, $j\in I_{2k-1}$.
$T_k^{(n)}$ et $S_k^{(n)}$	$S_n, S_{n+1}, \dots, S_{n+k}, \dots, S_{n+2k}$.	$g_i(n+j)$: $i\in I_k^*$, $j\in I_{2k-i+1}$.
$\tau_k^{(n)}, \sigma_k^{(n)}, \alpha_k^{(n)}$ et $\beta_k^{(n)}$	$S_n, S_{n+1}, \dots, S_{n+k}, \dots, S_{n+2k}$.	$g_i(n+j)$: $i\in I_k^*$, $j\in I_{2k}$.

Essais numériques :

Notations et commentaires :

Dans les tableaux suivants, figurent à la fois les premières colonnes des transformations de F_i (dans le but de vérifier le résultat de la remarque 2, §II-2 : $T_1^{(n)} = \tau_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)}$, $S_1^{(n)} = \sigma_1^{(n)} = \beta_1^{(n)}$ et $t_1^{(n)} = s_1^{(n)} = E_1^{(n)}$ $n \in \mathbb{N}$) ; les deuxièmes et troisièmes colonnes, pour tester l'accélération de l'une par rapport à l'autre.

L'indice N (resp^t : K), dans ces tableaux, désigne la diagonale (resp^t : la colonne).
Dans le graphique 1, NCE (resp^t : NTU) désigne le nombre de chiffres exacts (resp^t : nombre des termes de (S_n) utilisés) - voir : page : 81.

Exemple ① : cas linéaire.

(S_n) : $S_{n+1} = \dfrac{2 + S_n^2}{4}$, $S_0 = 0$, $S = 2 - \sqrt{2} \simeq 0.5857\,8643\,7626905\ldots$

. $S_{n+1} = F(S_n)$ avec $F(x) = \dfrac{x^2+2}{4}$,

. $\dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \dfrac{S_n + S}{4} \xrightarrow[n \to \infty]{} \dfrac{S}{2} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1er cas : $(g_i^{(n)})_n$: $g_i(n) = \Delta S_{n+i-1}$ $\forall i, \forall n$.

K	N	TO	SIGMA	ALPHA
1	4	0.585786552037498D+00	0.585786552356081D+00	0.585786552037498D
1	5	0.585786447441802D+00	0.585786447449780D+00	0.585786447441802D
2	4	0.585786437625410D+00	0.585786437625407D+00	0.585786437624012D
2	5	0.585786437626868D+00	0.585786437626857D+00	0.585786437626832D
3	4	0.585786437626906D+00	0.585786437626906D+00	0.585786437626907D

K	N	BETTA	E	T
1	4	0.585786552356081D+00	0.585786046163774D+00	0.585786552037498D
1	5	0.585786447449780D+00	0.585786404095686D+00	0.585786447441802D
2	4	0.585786437626812D+00	0.585786437616462D+00	0.585786437625618D
2	5	0.585786437626903D+00	0.585786437626643D+00	0.585786437626872D
3	4	0.585786437626905D+00	0.585786437626905D+00	0.585786437626905D

N	S	t	s
4	0.585786552356081 D+00	0.585786046163774D+00	0.585786046163774D+00
5	0.585786447449780 D+00	0.585786404095686D+00	0.585786404095686D+00
4	0.585786437624576 D+00	0.585786437605773D+00	0.585786046097642D+00
5	0.585786437626865 D+00	0.585786437626377D+00	0.585786404094032D+00
4	0.585786437626904D+00	0.585786437626894D+00	0.585786437533735D+00

Cas : $(g_i(n))_n$: $g_i(n) = (\Delta S_n)^i$ $\forall i, n$.

garde le même exemple $(S_n)_n$ (exemple 1) pour faire la comparaison.

N	TO	SIGMA	ALPHA
4	0.585786552037498D+00	0.585786552356081D+00	0.585786552037498D+00
5	0.585786447441802D+00	0.585786447449780D+00	0.585786447441802D+00
4	0.585786437626289D+00	0.585786437626434D+00	0.585786437626356D+00
5	0.585786437626889D+00	0.585786437626893D+00	0.585786437626891D+00
4	0.585786437626905D+00	0.585786437626905D+00	0.585786437626905D+00

N	BETTA	E	T
4	0.585786552356081D+00	0.585786046163774D+00	0.585786552037498D+00
5	0.585786447449780D+00	0.585786404095686D+00	0.585786447441802D+00
4	0.585786437626204D+00	0.585786437580800D+00	0.585786437624926D+00
5	0.585786437626887D+00	0.585786437625748D+00	0.585786437626855D+00
4	0.585786437626905D+00	0.585786437626903D+00	0.58578643762[illegible]D+00

N	S	t	s
4	0.585786552356081 D+00	0.585786046163774D+00	0.585786046163774D+00
5	0.585786447449780 D+00	0.585786404095686D+00	0.585786404095686D+00
4	0.585786437623825 D+00	0.585786413291267D+00	0.585786046167144D+00
5	0.585786437625744D+00	0.585786435541037D+00	0.585786404095770D+00
4	0.585786437626905D+00	0.585786435588942D+00	0.585786413294510D+00

Pour ces deux choix de $(g_i(n))_n$, on remarque que les résultats obtenus sont semblables.

Exemple ②: suite alternées.

(S_n) : $S_n = \dfrac{(-0.95)^{n+1}}{n+1}$, $S_0 = 0.$, $S = 0.$

$(g_i^{(n)})_n$:

$$g_i(n) = \Delta S_{n+i-1} \quad n \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N}.$$

(On peut comparer ces resultats avec ceux de [6]).

K	N	TO	SIGMA	ALPHA
2	4	-0.322629644864514D-07	-0.572001570275791D-07	0.135091051523374D
2	5	0.168178360453403D-07	0.260403550308907D-07	0.369090606758678D
2	6	-0.877839975198354D-08	-0.125473458764059D-07	-0.310517394163471D
2	7	0.470763674562986D-08	0.637705897845440D-08	0.204972723943060D
3	4	0.247613252936587D-09	0.165294429995723D-09	0.196192558252670D
3	5	-0.607727439450272D-10	-0.417877341597880D-10	-0.210401454639834D
3	6	0.176119388353184D-10	0.119968016437164D-10	0.502273643787496D
3	7	-0.573559595400844D-11	-0.378520324871894D-11	-0.155013477455654D
4	4	0.675769138838447D-12	0.388112532209835D-12	0.176606331784451D
4	5	-0.122545047179136D-12	-0.707339190582493D-13	-0.142892004712904D
4	6	0.260214934587393D-13	0.129994766478671D-13	0.221725675073505D
4	7	-0.601403621514799D-14	-0.168959228383886D-14	-0.477701864529962D

K	N	BETTA	E	T
2	4	-0.102404887192953D-06	-0.104306664761495D-04	-0.116340913960077D
2	5	0.430743655680378D-07	0.506807040828001D-05	0.610802405810981D
2	6	-0.197116335413753D-07	-0.266701681608111D-05	-0.329519555335078D
2	7	0.966115907182619D-08	0.149435895429811D-05	0.184319364097474D
3	4	-0.126734689211095D-09	-0.173713509277676D-06	0.597985452725480D
3	5	0.435471126436772D-10	0.725001705359255D-07	-0.155948437298588D
3	6	-0.165782030084896D-10	-0.329960663071307D-07	0.447196144305973D
3	7	0.694470720858435D-11	0.161076167992912D-07	-0.133102113696516D
4	4	-0.262004230127299D-12	-0.339821074706624D-08	-0.460031225010694D
4	5	0.765501712827386D-13	0.126298944712244D-08	0.420011393778707D
4	6	-0.222160116985828D-13	-0.512677728594917D-09	-0.263211408627726D
4	7	0.786442969523514D-14	0.223896595565721D-09	0.173742720047679D

K	N	t	s
2	4	0.243497097646068D-04	-0.860365804948712D-03
2	5	-0.143784094209927D-04	0.512764150619036D-03
2	6	0.891083082586611D-05	-0.325563661920880D-03
2	7	-0.574799684208361D-05	0.216881517300224D-03
3	4	-0.235695170024494D-05	0.283170475731409D-04
3	5	0.131717646434645D-05	-0.162049201723277D-04
3	6	-0.774079548427739D-06	0.983376370293869D-05
3	7	0.474288897486526D-06	-0.624896533728861D-05
4	4	0.277970111528411D-06	-0.283015787090503D-05
4	5	-0.151221393340792D-06	0.154345322219635D-05
4	6	0.864302517133709D-07	-0.889863215927020D-06
4	7	-0.514139614053756D-07	0.536981993699878D-06

Remarque 1:

Comme dans le cas de l'exemple 1, les résultats de τ, σ, α et β sont meilleurs que ceux de (E), (T) et (s). Ceci est normal, puisqu'elles font intervenir plus de termes de la suite (S_n).

Exemple 3 : Cas logarithmique.

(S_n) : $S_n = \frac{1}{n+1}$, $S_0 = 1.$, $S = 0.$.

$(g_i(n))_n$: $g_i(n) = (\Delta S_n)^i = \frac{(-1)^i}{(n+1)^i \times (n+2)^i}$ $\forall i$, $\forall n$.

N	TO	SIGMA	ALPHA
4	0.185195270075107D-01	0.166891125297219D-05	0.185195270075107D-01
5	0.142822801171496D-01	-0.548386159521241D-05	0.142822801171496D-01
4	0.107008367602232D-02	-0.156096219967739D-05	0.120073552144041D-02
5	0.361934756313943D-03	0.164854427574784D-05	0.470038847599514D-03
4	0.489117458248360D-03	0.242656566370082D-06	0.580280428746331D-03
5	0.431935569421018D-03	-0.182568409296525D-05	0.519322396415098D-03
4	0.460653355538131D-03	-0.140629341753635D-05	0.580917645768967D-03
5	0.535968525140601D-03	-0.816741122372804D-06	0.657625087255393D-03
4	0.470022489477680D-03	-0.814561533735206D-06	0.583303670650386D-03
5	0.533734231372501D-03	-0.807999012495896D-06	-0.688128549248619D-04

N	BETTA	E	T
4	0.166891125297219D-05	0.833333283662796D-01	0.185195270075107D-01
5	-0.548386159521241D-05	0.714286863802371D-01	0.142822801171496D-01
4	-0.158624818409103D-05	0.576925733557542D-01	0.371515146199368D-03
5	0.166201026498162D-05	0.499992507670254D-01	-0.159394837450023D-03
4	0.221547272627767D-06	0.445040152930089D-01	0.398738828645114D-04
5	-0.182840883547544D-05	0.389725316519399D-01	0.804652395220046D-04
4	-0.145117491598585D-05	0.362067898314054D-01	-0.287255511725174D-05
5	-0.105542318722615D-06	0.319910411031966D-01	0.100635627494248D-03
4	0.506883908783873D-07	0.304101354920749D-01	-0.294803492492489D-03
5	-0.362926033382709D-07	0.271023241081539D-01	0.126410631154031D-03

N	S	t	s
4	0.166891125297219D-05	0.833333283662796D-01	0.833333283662796D-01
5	-0.548386159521241D-05	0.714286863802371D-01	0.714286863802371D-01
4	0.195463372092919D-05	0.604754494328389D-01	0.831220516910734D-01
5	0.162032759245632D-05	0.525580155522070D-01	0.712750700355963D-01
4	0.914110926228544D-05	0.481944370459128D-01	0.597899030756342D-01
5	0.841725602456022D-05	0.425324654564319D-01	0.520390698090733D-01
4	0.120088472422021D-05	0.139596387129362D-01	0.469617741268182D-01
5	0.107480841194891D-05	0.360290812709613D-01	0.413291407262927D-01
4	-0.280318481594551D-06	0.370634830168896D-01	0.473650412142720D-01
5	-0.813278119666835D-06	0.332949859609954D-01	0.353546129128282D-01

Pour terminer ce paragraphe, faisons une comparaison entre toutes ces transformations, en traçant les courbes : N.C.E en fonction de N.T.U.
N.C.E : (nombre de chiffres exacts) est déterminé en calculant la moyenne des chiffres exacts obtenus pour chaque exemple et pour chaque itération.

Les exemples testés sont :

• (S_n) : $S_n = 1/(n+1)$ $S_0 = 1$, $S = 0$;

$S_n = (n+1)/(n+2)$ $S_0 = 0.5$, $S = 1.$;

$S_n = 1/\log n$ $S_1 = S_2 = 1$, $S = 0$;

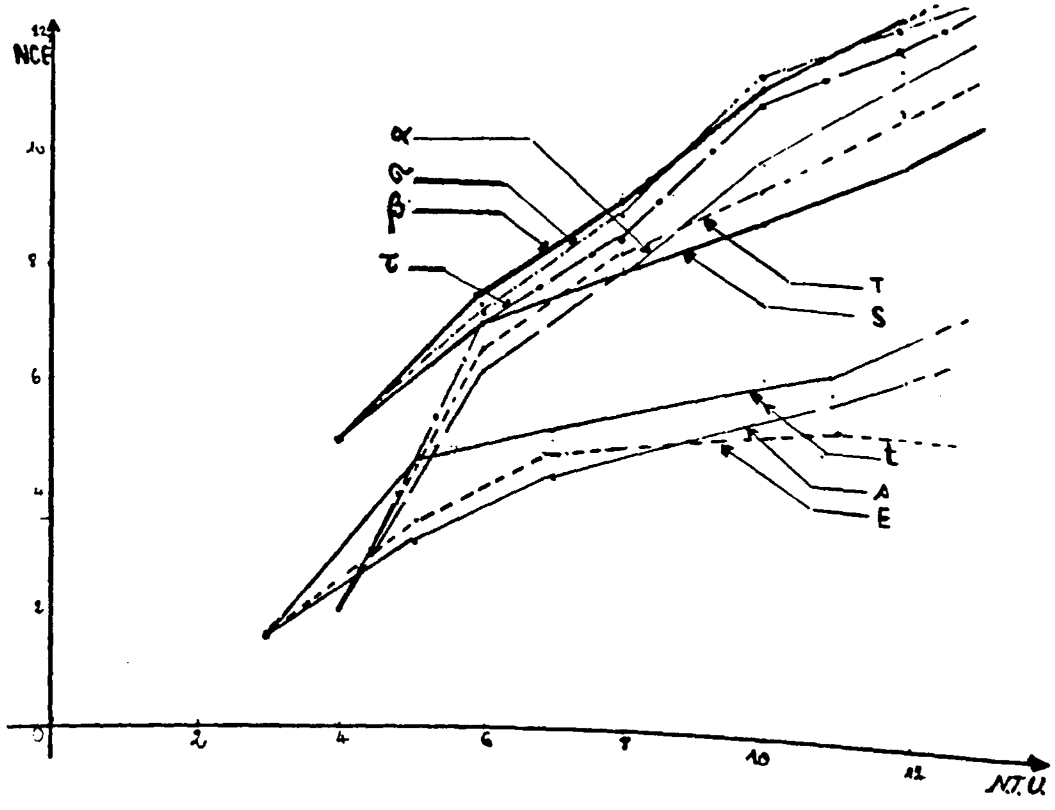
$S_n = 1/\sqrt{n}$ $S_0 = 0.5$, $S = 0$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ $S_0 = 0$, $S = \frac{\pi^2}{6}$

$S_n = \frac{(-0.99)^{n+1}}{n+1}$ $S_0 = 0$, $S = 0$

$S_n = \frac{(0.99)^{n+1}}{n+1}$ $S_0 = 0$, $S = 0$

• $(g_i(n))_n$: $g_i(n) = (\Delta S_n)^i$ $i \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$. On a obtenu :



Conclusion 1 :

On constate d'après l'étude faite dans ce chapitre que :

- Les transformations obtenues par applications de la procédure-thêta aux règles du ε-algorithme, généralisent plusieurs procédés d'accélération de la convergence déjà connus - (§II.3).
- A l'ordre $k=1$ (resp^t $k=2$) le noyau de (E_k) est strictement inclus dans celui des transformations de $\{(T),(S)\}$ (resp^t : $\mathcal{F}:= \{(T),(S),(t),(s),(\tau),(\sigma),(\alpha),(\beta)\}$) - [propriété 2 §III-1.2 et la remarque 4, §III-2].

  Seules (S_1) - dans le cas : $g_1(n) = \Delta S_n$ $(n\in\mathbb{N})$ - et $(t_1)=(s_1)=(E_1)$, sont exprimées sous forme de rapport de deux déterminants. Les autres transformations ne le sont pas.
- Dans les deux cas de convergence linéaire et logarithmique, On ne peut pas affirmer que la convergence (resp^t : l'accélération de la convergence) par (E_k) - $k\in\mathbb{N}^*$ - entraine la convergence (resp^t : l'accélération de la convergence) par les transformations de $\mathcal{F}$. L'inverse est aussi vrai - (voir : §IV, §V) -.
- Numériquement, les résultats de (τ), (σ), (α) et (β) sont meilleurs que ceux de (T) et (S) - (voir le graphique qui précède) -.

  De même, les résultats de (T) et (S) sont plus significatifs que ceux de (t), (s) et (E). Ceci est dû principalement au nombre de termes de (S_n) et $(g_i(n))$ $(i\in\mathbb{N})$ que chacune de ces transformations fait intervenir - (voir le tableau du §VI p: 81).

CHAPITRE - II

APPLICATION DE LA PROCEDURE-THETA A LA RESOLUTION DES EQUATIONS NON LINEAIRES.

I. INTRODUCTION :

Le but essentiel de ce chapitre est d'utiliser les transformations étudiées dans le chapitre I, pour construire des méthodes de résolution des équations non linéaires et de mettre en évidence comment la procédure-théta permet d'obtenir des méthodes d'ordres de convergence et d'indices d'efficacité assez élevés.

Une comparaison entre ces méthodes est faite ; ce qui permet de sélectionner les transformations qui présentent les meilleurs intérêts pratiques.

II. NOTATIONS - HYPOTHESES :

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- F soit p fois dérivable (p sera précisé ultérieurement) dans un voisinage de $x^* \in \mathbb{R}$, vérifiant : $x^* = F(x^*)$;
- x^* soit de multiplicité $m \geq 2$;

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, On pose :

$$F(x) = x - f(x) \quad \dots \quad \dots \quad (28)$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose :

- $F_n = F(x_n)$,
- $F_n^{\circ} = F^{\circ}(x_n) = x_n$,
- $F_n^{i} = F(F_n^{i-1}) \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$;
- $A_j = \dfrac{F^{(j)}(x^*)}{j!}$ avec : $F^{(j)}$ étant la $j^{\text{ième}}$ dérivée de F.
  ($j \geq 1$).

. $e_n = x_n - x^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dans toute cette étude, On se place dans le cas :

$$\boxed{g_i(n) = \Delta S_{n+i-1} \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall i \in \mathbb{N}^*.}$$

Lorsque d'autres choix de $(g_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$ $(i \in \mathbb{N})$ sont faits, ceci sera signalé.

Les méthodes proposées dans cette partie sont élaborées dans le sens de la :

<u>Définition 1 :</u>

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La méthode $M\text{-}T_k$ (resp^t: $M\text{-}S_k$) consiste à construire une suite (x_n) vérifiant :

. x_0 donné

. étape $(n+1)$: i) $V_0 = x_n$,

ii) $V_i = F(V_{i-1})$ $\forall i \in I^*_{2k+1} := \{1, 2, \dots, 2k+1\}$.

iii) On calcule $T_k^{(0)}$ (resp^t: $S_k^{(0)}$) à l'aide des V_i, puis on pose : $x_{n+1} = T_k^{(0)}$ (resp^t: $x_{n+1} = S_k^{(0)}$).

On définit de même, les méthodes : $M\text{-}\tau_k$, $M\text{-}\sigma_k$, $M\text{-}\alpha_k$, $M\text{-}\beta_k$, $M\text{-}E_k$, $M\text{-}t_k$ et $M\text{-}s_k$. Le seul changement qu'il faut apporter à la définition 1, est au niveau de ii) – étape $(n+1)$ – .
On remplace I^*_{2k+1} par :

- I^*_{3k} : pour les méthodes $M\text{-}\tau_k$, $M\text{-}\sigma_k$, $M\text{-}\alpha_k$ et $M\text{-}\beta_k$;
- I^*_{3k-1} : pour les méthodes : $M\text{-}t_k$ et $M\text{-}s_k$;

- I^*_{2k} : pour la méthode $M\text{-}E_k$.

(avec : $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $I_p := \{0,1,2,\dots,p\}$ et $I^*_p := \{1,2,\dots,p\}$).

Ordre de convergence - indice d'efficacité :

Définition 2 :

Soit (T) une transformation de suite. On dit que M-T est d'ordre (resp^t : au moins d'ordre) de convergence $r \geq 1$, si la suite (x_n) construite à l'aide de cette méthode vérifie :

$$\exists C \neq 0 \ (\text{resp}^t : \exists C) : \lim_n \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^r} = C \quad (x^* = F(x^*)).$$

Lorsque $r > 1$, son indice d'efficacité, $I(T)$, est (resp^t : au moins égal à) : $r^{\frac{1}{p}}$, où p est le nombre d'évaluations de F, par itération.

Définition 3 :

On dit que M-T est d'ordre de convergence supérieur à $r \geq 1$, si la suite (x_n), $(x^* = F(x^*))$, construite à l'aide de cette méthode vérifie :

$$x_{n+1} - x^* = o\left((x_n - x^*)^r\right).$$

Notre but, dans ce qui va suivre, est de voir, parmi toutes les méthodes : $M\text{-}T_k$, $M\text{-}S_k$, $M\text{-}t_k$, $M\text{-}\rho_k$, $M\text{-}E_k$, $M\text{-}\tau_k$, $M\text{-}\sigma_k$, $M\text{-}a_k$ et $M\text{-}\beta_k$, celles qui s'adaptent le mieux à la résolution du problème :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \text{Déterminer } x^* \text{ vérifiant : } F(x^*) = x^*, \\ x^* : \text{ de multiplicité } m \geq 2. \end{cases} \qquad \dots \quad \dots \quad (29).$$

En outre, il est important de savoir pour quel indice k, celles-ci sont plus rentables.

Posons :

$\mathcal{M}(k)$: la famille des méthodes M-T_k, M-S_k, M-t_k, M-s_k, M-E_k, M-τ_k, M-σ_k, M-α_k et M-β_k $(k \in \mathbb{N}^*)$.

– lorsque $k=1$, $\mathcal{M}(1)$ est réduit à : M-T_1, M-S_1, M-E_1, d'après la remarque 2, chap I, p : 10.

III. RESOLUTION DE : $F(x)=x$.

Supposons que F (page : 87) vérifie :

$$F_n - x^* = \sum_{i=0}^{p} A_i e_n^i + o(e_n^p) \quad \text{avec :}$$

. $A_1 = 1$: x^* est alors au moins de multiplicité 2.

En effet : d'après (28) – p : 88 – $f(x^*)=0$ et $f'(x^*) = 1 - F'(x^*) = 1-1=0$.

. $p \in \mathbb{N}^*$ sera précisé pour chaque méthode.

m étant la multiplicité de x^* $(m>1)$, nous étudions séparément les cas : $m=2$ et $m>2$.
Ce choix est fait car, d'une part, lors du développement des rapports qui interviennent dans les expressions des méthodes de $\mathcal{M}(k)$, on a constaté qu'il faut distinguer le cas : $A_2 \neq 0$ (relatif à $m=2$) et celui où $A_2 = 0$ (relatif à $m \geq 3$) et d'autre part, les démonstrations deviennent moins fastidieuses.

III-1 : Cas où la multiplicité $m=2$.

Dans ce cas : $A_1 = 1$ et $A_2 = \dfrac{F''(x^*)}{2!} \neq 0$ $\quad (F(x^*) = x^*)$.

III-1-1 : ETUDE DE LA FAMILLE $\mathcal{M}(1)$.

Pour établir l'ordre de convergence et l'indice d'efficacité de M-T
M-S_1 et M-E_1, On a besoin des résultats :

mme 1 :

Avec les notations et hypothèses de § II, III , On a :

i) $$\frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1 = A_2 e_n \left\{ 1 + \bar{A}_1 e_n + \bar{A}_2 e_n^2 + \bar{A}_3 e_n^3 + \bar{A}_4 e_n^4 + \bar{A}_5 e_n^5 + o(e_n^5) \right\} \text{ où :}$$

- $\bar{A}_i = A_{i+2}/A_2 \quad : i = 1, 2, \dots, 5.$

ii) $$\frac{F_n^2 - x^*}{F_n - x^*} - 1 = A_2 e_n \left\{ 1 + \bar{B}_1 e_n + \bar{B}_2 e_n^2 + \bar{B}_3 e_n^3 + \bar{B}_4 e_n^4 + \bar{B}_5 e_n^5 + o(e_n^5) \right\} \text{ où :}$$

- $\bar{B}_i = B_i / A_2 \quad : \quad i = 1, 2, \dots, 5.$
- $B_1 = A_3 + A_2^2 \quad , \quad B_2 = A_4 + 3A_2A_3 \quad , B_3 = A_5 + 4A_4A_2 + A_2^2A_3 + 2A_3^2.$
- $B_4 = A_6 + 5A_5A_2 + 3A_4A_2^2 + 3A_3A_4 + 2A_2A_3^2 + 2A_2A_4 \;;$
- $B_5 = A_7 + 6A_6A_2 + 6A_5A_2^2 + 6A_5A_3 + 8A_2A_3A_4 + 3A_4^2 + A_3^3 + A_4A_2^3.$

iii) $$\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1 = 2A_2 e_n \left\{ 1 + \bar{C}_1 e_n + \bar{C}_2 e_n^2 + \bar{C}_3 e_n^3 + \bar{C}_4 e_n^4 + \bar{C}_5 e_n^5 + o(e_n^5) \right\} \text{ où :}$$

les coefficients $\bar{C}_i$ $(i = 1, 2, \dots, 5)$ sont donnés par les expressions établies à la page 3 de l'annexe.

iv) $$\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1 = 2A_2 e_n \left\{ 1 + \bar{M}_1 e_n + \bar{M}_2 e_n^2 + \bar{M}_3 e_n^3 + \bar{M}_4 e_n^4 + \bar{M}_5 e_n^5 + o(e_n^5) \right\} \text{ où :}$$

. les coefficients $\bar{M}_i = M_i/A_2$ $i = 1, 2, \dots, 5$ sont donnés par les expressions établies à la pages 4 de l'annexe.

v) $$\frac{F_n^4 - F_n^3}{F_n^3 - F_n^2} - 1 = 2A_2 e_n \left\{ 1 + Z_1 e_n + Z_2 e_n^2 + Z_3 e_n^3 + Z_4 e_n^4 + Z_5 e_n^5 + o(e_n^5) \right\} \text{ où :}$$

- $Z_1 = \dfrac{3A_3 + 5A_2^2}{2A_2} \;;\; Z_2 = A_3 + 2A_2\bar{M}_1 + \bar{M}_2 \;;$
- $Z_3 = A_4 + (2A_3 + A_2^2)\bar{M}_1 + 3A_2\bar{M}_2 + \bar{M}_3 \;;$
- $Z_4 = A_5 + (2A_4 + 2A_2A_3)\bar{M}_1 + 3(A_3 + A_2^2)\bar{M}_2 + 3A_2\bar{M}_3 + \bar{M}_4 \;;$
- $Z_5 = A_6 + (2A_5 + 2A_2A_4 + A_3^2)\bar{M}_1 + (3A_4 + 6A_2A_3 + A_2^3)\bar{M}_2 + \cdots +$

$\cdots + (4A_3 + 5A_2^2)\bar{M}_3 + 5A_2\bar{M}_4 + \bar{M}_5.$

Preuve :

Voir les pages : 1, 2, 3, 4, 5 de l'annexe.

Les règles des algorithmes, des méthodes de la famille $\mathcal{M}(1)$ sont données par :

• M-T_1 :

• x_0 donné,

• Etape (n+1) : $V_0 = x_n$,

• Calculer : $V_i = F(V_{i-1})$ pour $i = 1,2,3$;

• Poser : $x_{n+1} = T_1^{(0)}$ après avoir calculé $T_1^{(0)}$ en fonction de V_0, V_1, V_2 et V_3.

• M-S_1 :

• x_0 donné,

• Etape (n+1) :

• $V_0 = x_n$,

• Calculer : $V_i = F(V_{i-1})$ pour $i = 1,2,3$;

$S_1^{(0)}$: en fonction de V_0, V_1, V_2 et V_3 ;

• Poser : $x_{n+1} = S_1^{(0)}$.

• M-t_1 :

• x_0 donné,

• Etape (n+1) : • $V_0 = x_n$

• Calculer : $V_i = F(V_{i-1})$ $i = 1,2$; $t_1^{(0)}$ en fonction de V_0, V_1, V_2 ;

• Poser : $x_{n+1} = t_1^{(0)}$.

On obtient alors la :

Proposition 1 :

> i) Les méthodes : M-T_1 et M-S_1 sont au moins d'ordre deux ;
>
> ii) La méthode M-t_1 est d'ordre : 1 .

Preuve :

ii) M-t_1 :

On a : $\dfrac{t_1^{(n)}-x^*}{x_n-x^*} = \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \dfrac{(F_n-x^*)/(x_n-x^*) \;-1}{(F_n^2-F_n)/(F_n-x_n) \;-1}$,

. $\dfrac{F_n-x^*}{x_n-x^*} - 1 = A_2 e_n\left\{1+\bar{A}_1 e_n+\bar{A}_2 e_n^2+\bar{A}_3 e_n^3+o(e_n^3)\right\}$ d'après i) du lemme 1.

. $\dfrac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n} - 1 = 2A_2 e_n\left\{1+\bar{C}_1 e_n+\bar{C}_2 e_n^2+\bar{C}_3 e_n^3+o(e_n^3)\right\}$ d'après : iii) du lemme 1.

Donc :

$$\frac{(F_n-x^*)/(x_n-x^*) \;-1}{(F_n^2-F_n)/(F_n-x_n) -1} = \frac{A_2 e_n\left\{1+\bar{A}_1 e_n+\bar{A}_2 e_n^2+\bar{A}_3 e_n^3+o(e_n^3)\right\}}{2A_2 e_n\left\{1+\bar{C}_1 e_n+\bar{C}_2 e_n^2+\bar{C}_3 e_n^3+o(e_n^3)\right\}} ,$$

$$= \frac{1}{2}\times\Big\{1+(\bar{A}_1-\bar{C}_1)e_n+(\bar{C}_1^2-\bar{C}_2-\bar{C}_1\bar{A}_1+\bar{A}_2)e_n^2+(\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{C}_1^2+2\bar{C}_1\bar{C}_2+ \dots$$
$$\dots -\bar{A}_2\bar{C}_1-\bar{A}_1\bar{C}_2-\bar{C}_3-\bar{C}_1^3)e_n^3+o(e_n^3)\Big\} .$$

- Pour plus de détails, voir la relation [*], page : 2 de l'annexe.
- Evidemment, On n'a pas besoin des coefficients de : e_n^2 et e_n^3 dans cette partie. Ceux-ci nous seront utiles pour prouver les résultats de la proposition 2, ultérieure.

On a donc :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \frac{1}{2}\left[1 + (\bar{A}_1 - \bar{C}_1)\, e_n + o(e_n)\right] = \frac{1}{2} - \frac{\bar{A}_1 - \bar{C}_1}{2}\, e_n + o(e_n) \text{ où :}$$

$$(\bar{C}_1 - \bar{A}_1) = \frac{A_3 + A_2^2}{2A_2}.$$

<u>i) M-T_1 :</u>

$$\text{On a : } \frac{T_1^{(n)} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \frac{\left(\dfrac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1\right)\left(\dfrac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)}{\left(\dfrac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right)\left(\dfrac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right) - \left(\dfrac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)},$$

D'après le lemme 1 on a :

- $\dfrac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1 = A_2 e_n \left\{1 + \bar{A}_1 e_n + \bar{A}_2 e_n^2 + \bar{A}_3 e_n^3 + \bar{A}_4 e_n^4 + \bar{A}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\};$

- $\dfrac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1 = 2A_2 e_n \left\{1 + \bar{C}_1 e_n + \bar{C}_2 e_n^2 + \bar{C}_3 e_n^3 + \bar{C}_4 e_n^4 + \bar{C}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\};$

- $\dfrac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1 = 2A_2 e_n \left\{1 + \bar{M}_1 e_n + \bar{M}_2 e_n^2 + \bar{M}_3 e_n^3 + \bar{M}_4 e_n^4 + \bar{M}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\};$

<u>En utilisant la relation :</u>

$$\left\{1 + x_1 e_n + x_2 e_n^2 + x_3 e_n^3 + x_4 e_n^4 + x_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\} \times \left\{1 + y_1 e_n + y_2 e_n^2 + y_3 e_n^3 + y_4 e_n^4 + y_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\} =$$
$$= 1 + z_1 e_n + z_2 e_n^2 + z_3 e_n^3 + z_4 e_n^4 + z_5 e_n^5 + o(e_n^5) \quad \ldots (33).$$

où :

- $z_1 = x_1 + y_1$,
- $z_2 = x_2 + x_1 y_1 + y_2$;
- $z_3 = x_3 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + y_3$;

- $z_4 = x_4 + x_3 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_3 + y_4$,
- $z_5 = x_5 + x_4 y_1 + x_3 y_2 + x_2 y_3 + x_1 y_4 + y_5$.

n obtient :

$$\left(\frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1\right)\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right) = 2A_2^2 e_n^2 \left\{1 + \bar{A}_1 e_n + \bar{A}_2 e_n^2 + \bar{A}_3 e_n^3 + \bar{A}_4 e_n^4 + \bar{A}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\} \times$$

$$\times \left\{1 + \bar{M}_1 e_n + \bar{M}_2 e_n^2 + \bar{M}_3 e_n^3 + \bar{M}_4 e_n^4 + \bar{M}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\}$$

$$= 2A_2^2 e_n^2 \left\{1 + L_1 e_n + L_2 e_n^2 + L_3 e_n^3 + L_4 e_n^4 + L_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\} \text{ où :}$$

- $L_1 = \bar{A}_1 + \bar{M}_1$,
- $L_2 = \bar{M}_2 + \bar{M}_1 \bar{A}_1 + \bar{A}_2$,
- $L_3 = \bar{M}_3 + \bar{M}_2 \bar{A}_1 + \bar{M}_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_3$,
- $L_4 = \bar{M}_4 + \bar{M}_3 \bar{A}_1 + \bar{M}_2 \bar{A}_2 + \bar{M}_1 \bar{A}_3 + \bar{A}_4$,
- $L_5 = \bar{M}_5 + \bar{M}_4 \bar{A}_1 + \bar{M}_3 \bar{A}_2 + \bar{M}_2 \bar{A}_3 + \bar{M}_1 \bar{A}_4 + \bar{A}_5$.

e même :

$$\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right)\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right) = 2A_2 e_n \left\{1 + 2A_2 e_n + C_1 e_n^2 + C_2 e_n^3 + C_3 e_n^4 + C_4 e_n^5 + o(e_n^5)\right\} \times$$

$$\times \left\{1 + \bar{C}_1 e_n + \bar{C}_2 e_n^2 + \bar{C}_3 e_n^3 + \bar{C}_4 e_n^4 + \bar{C}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\}$$

(On rappelle que : $C_i = 2A_2 \bar{C}_i$ $i = 1,2,3,4,5$.
voir "page 3 - annexe").

$$= 2A_2 e_n \left\{1 + P_1 e_n + P_2 e_n^2 + P_3 e_n^3 + P_4 e_n^4 + P_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\}$$

où :

- $P_1 = (2A_2 + \bar{C}_1)$,
- $P_2 = C_1 + 2A_2 \bar{C}_1 + \bar{C}_2 = 2A_2 \bar{C}_1 + 2A_2 \bar{C}_1 + \bar{C}_2 = (\bar{C}_2 + 4A_2 \bar{C}_1)$,
- $P_3 = C_2 + C_1 \bar{C}_1 + 2A_2 \bar{C}_2 + \bar{C}_3 = (\bar{C}_3 + 4A_2 \bar{C}_2 + 2A_2 \bar{C}_1^2)$,
- $P_4 = C_3 + C_2 \bar{C}_1 + C_1 \bar{C}_2 + 2A_2 \bar{C}_3 + \bar{C}_4 = (\bar{C}_4 + 4A_2 \bar{C}_3 + 4A_2 \bar{C}_1 \bar{C}_2)$,
- $P_5 = C_4 + C_3 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2 + C_1 \bar{C}_3 + 2A_2 \bar{C}_4 + \bar{C}_5$
  $= (\bar{C}_5 + 4A_2 \bar{C}_4 + 4A_2 \bar{C}_1 \bar{C}_3 + 2A_2 \bar{C}_2^2)$.

Par suite :

$$\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}\cdot\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}-1\right)-\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}-1\right)=2A_2e_n\left\{1+P_1e_n+P_2e_n^2+P_3e_n^3+P_4e_n^4+P_5e_n^5+o(e_n^5)\right\}+\cdots$$

$$\cdots-2A_2e_n\left\{1+\overline{M}_1e_n+\overline{M}_2e_n^2+\overline{M}_3e_n^3+\overline{M}_4e_n^4+\overline{M}_5e_n^5+o(e_n^5)\right\}$$

$$=2A_2e_n\left\{(P_1-\overline{M}_1)e_n+(P_2-\overline{M}_2)e_n^2+(P_3-\overline{M}_3)e_n^3+(P_4-\overline{M}_4)e_n^4+(P_5-\overline{M}_5)e_n^5+o(e_n^5)\right\}.$$

- $P_1-\overline{M}_1=(2A_2+\overline{C}_1)-(\overline{C}_1+A_2)=A_2$,
- $P_2-\overline{M}_2=(4A_2\overline{C}_1+\overline{C}_2)-(A_3+\overline{C}_2+2A_2\overline{C}_1)=2A_3+A_2^2$, $\left(\overline{C}_1=\frac{3A_3+A_2^2}{2A_2}\right)$
- $P_3-\overline{M}_3=A_2\overline{C}_2+2A_2\overline{C}_1^2-A_2^2\overline{C}_1-2A_3\overline{C}_1-A_4$,
- $P_4-\overline{M}_4=4A_2\overline{C}_1\overline{C}_2-3A_2^2\overline{C}_2-2A_4\overline{C}_1-3A_3\overline{C}_2-A_5-2A_2A_3\overline{C}_1$,
- $P_5-\overline{M}_5=4A_2\overline{C}_1\overline{C}_3+2A_2\overline{C}_2^2-A_6-2A_5\overline{C}_1-3A_4\overline{C}_2-2A_2A_4\overline{C}_1-4A_3\overline{C}_3-6A_2A_3\overline{C}_2$
  $-A_3^2\overline{C}_1-A_2\overline{C}_4-6A_2^2\overline{C}_3-A_2^3\overline{C}_2$.

Posons:
$$\overline{P}_i=\frac{P_{i+1}-\overline{M}_{i+1}}{A_2}\quad ;\ i=1,2,3,4$$

Alors :
$$\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}-1\right)-\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}-1\right)=2A_2^2e_n^2\left\{1+\overline{P}_1e_n+\overline{P}_2e_n^2+\overline{P}_3e_n^3+\overline{P}_4e_n^4+o(e_n^4)\right\}.$$

$$\left(\overline{P}_1=\frac{2A_3+A_2^2}{A_2}\right).$$

Par suite :
$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=\frac{T_1^{(n)}-x^*}{x_n-x^*}=1-\frac{2A_2^2e_n^2\left\{1+L_1e_n+L_2e_n^2+L_3e_n^3+L_4e_n^4+o(e_n^4)\right\}}{2A_2^2e_n^2\left\{1+\overline{P}_1e_n+\overline{P}_2e_n^2+\overline{P}_3e_n^3+\overline{P}_4e_n^4+o(e_n^4)\right\}}$$

$$=1-\left\{1+Q_1e_n+Q_2e_n^2+Q_3e_n^3+Q_4e_n^4+o(e_n^4)\right\}$$ où, d'après la relation (*) p: 2 de l'annexe, on a:

- $Q_1=L_1-\overline{P}_1=(\overline{A}_1+\overline{M}_1)-\left(\frac{2A_3+A_2^2}{A_2}\right)=\frac{A_3+A_2^2}{2A_2}$,
- $Q_2=\overline{P}_1^2-\overline{P}_2-\overline{P}_1L_1+L_2$,
- $Q_3=L_3+L_1\overline{P}_1^2+2\overline{P}_1\overline{P}_2-L_2\overline{P}_1-L_1\overline{P}_2-\overline{P}_3-\overline{P}_1^3$,
- $Q_4=\overline{P}_1^4-\overline{P}_4+\overline{P}_2^2+2\overline{P}_1\overline{P}_3-3\overline{P}_2\overline{P}_1^2+2L_1\overline{P}_1\overline{P}_2-L_1(\overline{P}_3+\overline{P}_1^3)+L_2(\overline{P}_1^2-\overline{P}_2)+L_4-L_3\overline{P}_1$

Donc : $$\frac{T_1^{(n)}-x^*}{x_n-x^*}=-Q_1e_n-Q_2e_n^2-Q_3e_n^3-Q_4e_n^4+o(e_n^4)$$

Donc :

$$\boxed{e_{n+1} = T_1^{(n)} - x^* = -Q_1 e_n^2 - Q_2 e_n^3 - Q_3 e_n^4 - Q_4 e_n^5 + o(e_n^5)} \quad \cdots \quad (34)$$

Ce qui entraîne que :

$$e_{n+1} = T_1^{(n)} - x^* = O(e_n^2) \; .$$

$$\left(Q_1 = \frac{A_3 + A_2^2}{A_2}\right).$$

i) M-S_1 (suite de la preuve de la proposition 1) :

On a :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{S_1^{(n)} - x^*}{x_n - x^*} = \left(\frac{S_1^{(n)} - x^*}{F_n - x^*}\right)\left(\frac{F_n - x^*}{x_n - x^*}\right) = \frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} \times \left\{1 - \frac{\left(\frac{F_n^2 - x^*}{F_n - x^*} - 1\right)\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)}{\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n}\right)\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right) - \left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)}\right\}.$$

D'après le lemme①, on a :

- $\dfrac{F_n^2 - x^*}{F_n - x^*} - 1 = A_2 e_n \left\{1 + \bar{B}_1 e_n + \bar{B}_2 e_n^2 + \bar{B}_3 e_n^3 + \bar{B}_4 e_n^4 + \bar{B}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\}$,
- $\dfrac{F_n - x^*}{x_n - x^*} = 1 + A_2 e_n \left\{1 + \bar{A}_1 e_n + \bar{A}_2 e_n^2 + \bar{A}_3 e_n^3 + \bar{A}_4 e_n^4 + \bar{A}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\}$,
- $\dfrac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1 = 2A_2 e_n \left\{1 + \bar{C}_1 e_n + \bar{C}_2 e_n^2 + \bar{C}_3 e_n^3 + \bar{C}_4 e_n^4 + \bar{C}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\}$,
- $\dfrac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1 = 2A_2 e_n \left\{1 + \bar{M}_1 e_n + \bar{M}_2 e_n^2 + \bar{M}_3 e_n^3 + \bar{M}_4 e_n^4 + \bar{M}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\}$.

Donc :

$$\left(\frac{F_n^2 - x^*}{F_n - x^*} - 1\right)\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right) = 2A_2^2 e_n^2 \left\{1 + \bar{B}_1 e_n + \bar{B}_2 e_n^2 + \bar{B}_3 e_n^3 + \bar{B}_4 e_n^4 + o(e_n^4)\right\} \times \left\{1 + \bar{M}_1 e_n + \bar{M}_2 e_n^2 + \bar{M}_3 e_n^3 + \bar{M}_4 e_n^4 + o(e_n^4)\right\}$$

$$= 2A_2^2 e_n^2 \left\{1 + R_1 e_n + R_2 e_n^2 + R_3 e_n^3 + R_4 e_n^4 + o(e_n^4)\right\} \text{ où :}$$

- $R_1 = \bar{B}_1 + \bar{M}_1 = \bar{B}_1 + A_2 + \bar{C}_1$,
- $R_2 = \bar{B}_2 + \bar{B}_1 \bar{M}_1 + \bar{M}_2$,
- $R_3 = \bar{B}_3 + \bar{B}_2 \bar{M}_1 + \bar{B}_1 \bar{M}_2 + \bar{M}_3$,
- $R_4 = \bar{B}_4 + \bar{B}_3 \bar{M}_1 + \bar{B}_2 \bar{M}_2 + \bar{B}_1 \bar{M}_3 + \bar{M}_4$.

$$\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n}\right)\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right) = 2A_2 e_n \left\{1 + \bar{C}_1 e_n + \bar{C}_2 e_n^2 + \bar{C}_3 e_n^3 + \bar{C}_4 e_n^4 + \bar{C}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\} \times \left\{1 + 2A_2 e_n + 2A_2 \bar{M}_1 e_n^2 + \cdots + 2A_2 \bar{M}_2 e_n^3 + 2A_2 \bar{M}_3 e_n^4 + 2A_2 \bar{M}_4 e_n^5 + o(e_n^5)\right\}.$$

$$= 2A_2 e_n \left\{1 + U_1 e_n + U_2 e_n^2 + U_3 e_n^3 + U_4 e_n^4 + U_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\} \text{ où :}$$

D'après la relation (33).

- $U_1 = \bar{C}_1 + 2A_2$
- $U_2 = \bar{C}_2 + 2\bar{C}_1A_2 + 2A_2\bar{M}_1$,
- $U_3 = \bar{C}_3 + 2A_2\bar{C}_2 + 2A_2\bar{M}_1\bar{C}_1 + 2A_2\bar{M}_2$,
- $U_4 = \bar{C}_4 + 2A_2\bar{C}_3 + 2A_2\bar{M}_1\bar{C}_2 + 2A_2\bar{M}_2\bar{C}_1 + 2A_2\bar{M}_3$,
- $U_5 = \bar{C}_5 + 2A_2\bar{C}_4 + 2A_2\bar{M}_1\bar{C}_3 + 2A_2\bar{M}_2\bar{C}_2 + 2A_2\bar{M}_3\bar{C}_1 + 2A_2\bar{M}_4$.

Donc : $$\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}\right)\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}-1\right)-\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}-1\right)=2A_2e_n\left\{1+U_1e_n+U_2e_n^2+U_3e_n^3+U_4e_n^4+U_5e_n^5+o(e_n^5)\right\}-\cdots$$
$$\cdots 2A_2e_n\left\{1+\bar{M}_1e_n+\bar{M}_2e_n^2+\cdots+\bar{M}_5e_n^5+o(e_n^5)\right\}.$$
$$=2A_2e_n\left\{(U_1-\bar{M}_1)e_n+(U_2-\bar{M}_2)e_n^2+\cdots+(U_5-\bar{M}_5)e_n^5+o(e_n^5)\right\}.$$
$$\left(U_1-\bar{M}_1=\bar{C}_1+2A_2-(\bar{C}_1+A_2)=A_2\right).$$

Posons :
$$\bar{U}_i=(U_{i+1}-\bar{M}_{i+1})/A_2 \qquad i=1,2,3,4.$$

Alors :
$$\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}\right)\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}-1\right)-\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}-1\right)=2A_2^2e_n^2\left\{1+\bar{U}_1e_n+\bar{U}_2e_n^2+\bar{U}_3e_n^3+\bar{U}_4e_n^4+o(e_n^4)\right\}.$$

et : $$\left(\frac{F_n^2-x^*}{F_n-x^*}-1\right)\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}-1\right)\Big/\left[\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}\right)\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}-1\right)-\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}-1\right)\right]=\frac{2A_2^2e_n^2\left\{1+R_1e_n+R_2e_n^2+\cdots+R_4e_n^4+o(e_n^4)\right\}}{2A_2^2e_n^2\left\{1+\bar{U}_1e_n+\bar{U}_2e_n^2+\cdots+\bar{U}_4e_n^4+o(e_n^4)\right\}},$$

$$=\frac{1+R_1e_n+R_2e_n^2+R_3e_n^3+R_4e_n^4+o(e_n^4)}{1+\bar{U}_1e_n+\bar{U}_2e_n^2+\bar{U}_3e_n^3+\bar{U}_4e_n^4+o(e_n^4)},$$

$$=1+\bar{R}_1e_n+\bar{R}_2e_n^2+\bar{R}_3e_n^3+\bar{R}_4e_n^4+o(e_n^4) \quad \text{Où :}$$

(D'après la relation (*) p: 2 de l'annexe) :

- $\bar{R}_1 = R_1-\bar{U}_1=\left(\bar{B}_2+A_2+\bar{C}_1\right)-\left(\frac{U_2-\bar{M}_2}{A_2}\right)=5\left(\frac{A_3+A_2^2}{2A_2}\right)-\frac{3(A_3+A_2^2)}{A_2}+\frac{A_3}{A_2}=\cdots$
  $=(A_3-A_2^2)/2A_2$.
- $\bar{R}_2=\bar{U}_1^2-\bar{U}_2-\bar{U}_1R_1+R_2$,
- $\bar{R}_3=R_3+R_1\bar{U}_1^2+2\bar{U}_1\bar{U}_2-R_2\bar{U}_1-R_1\bar{U}_2-\bar{U}_3-\bar{U}_1^3$,
- $\bar{R}_4=\bar{U}_1^4-\bar{U}_4+\bar{U}_2^2+2\bar{U}_1\bar{U}_3-3\bar{U}_2\bar{U}_1^2+2R_1\bar{U}_1\bar{U}_2-R_1(\bar{U}_3+\bar{U}_1^3)+R_2(\bar{U}_1^2-\bar{U}_2)+R_4$
  $-R_3\bar{U}_1$.

Par suite :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{S_1^{(n)} - x^*}{x_n - x^*} = \left(\frac{F_n - x^*}{x_n - x^*}\right) \times \left\{ 1 - \left[1 + \overline{R}_1 e_n + \overline{R}_2 e_n + \overline{R}_3 e_n^3 + \overline{R}_4 e_n^4 + o(e_n^4) \right] \right\},$$

$$= -\left\{ 1 + A_2 e_n + A_3 e_n^2 + A_4 e_n^3 + A_5 e_n^4 + o(e_n^4) \right\} \times \left\{ \overline{R}_1 e_n + \overline{R}_2 e_n^2 + \overline{R}_3 e_n^3 + \overline{R}_4 e_n^4 + o(e_n^4) \right\}$$

$$= -\overline{R}_1 e_n - (\overline{R}_2 + A_2 \overline{R}_1) e_n^2 - (\overline{R}_3 + \overline{R}_2 A_2 + \overline{R}_1 A_3) e_n^3 - (\overline{R}_4 + \overline{R}_3 A_2 + \overline{R}_2 A_3 + \overline{R}_1 A_4) e_n^4 + \cdots$$
$$\cdots + o(e_n^4).$$

Donc : $$\boxed{S_1^{(n)} - x^* = -\overline{R}_1 e_n^2 - V_1 e_n^3 - V_2 e_n^4 - V_3 e_m^5 + o(e_n^5)} \quad \ldots \quad \ldots \quad (35)$$

Avec :
- $\overline{R}_1 = \dfrac{A_3 - A_2^2}{2A_2}$,
- $V_1 = \overline{R}_2 + A_2 \overline{R}_1$,
- $V_2 = \overline{R}_3 + \overline{R}_2 A_2 + \overline{R}_1 A_3$,
- $V_3 = \overline{R}_4 + \overline{R}_3 A_2 + \overline{R}_2 A_3 + \overline{R}_1 A_4$.

D'après (35) on a évidement : $e_{n+1} = \mathcal{O}(e_n^2)$. La constante asymptotique de l'erreur est : $\dfrac{A_2^2 - A_3}{2A_2}$.

__Remarque 1 :__

Dans les relations (34) et (35), les constantes asymptotiques de l'erreur : $Q_1 = \dfrac{A_3 + A_2^2}{A_2}$ et $\overline{R}_1 = \dfrac{A_2^2 - A_3}{2A_2}$, peuvent être nulles.
Les méthodes M-T_1 et M-S_1 sont alors d'ordre $r \geq 3$.
Ce cas, se produit par exemple quand :

$$F(x) = x + f(x) \quad \text{avec :} \quad f(x) = \varphi(x - x^*)^2 + \psi(x - x^*)^3 ,$$

et :
- $\varphi^2 = -\psi \neq 0$ pour M-T_1 .
- $\varphi^2 = \psi \neq 0$ pour M-S_1 .

En effet :

• D'une part, les hypothèses des §III et §III-1 sont vérifiées :

. $F(x^*) = x^*$,

. $F'(x^*) = 1 = A_1$,

. $F''(x^*) = 2\varphi \rightarrow A_2 = \varphi$.

• D'autre part :

. $A_3 = \dfrac{F'''(x^*)}{3!} = \psi$

. $Q_1 = (A_3 + A_2^2)/A_2 = (\psi + A_2^2)/A_2 = 0$ pour $\psi = -\varphi^2$,

$\bar{R}_1 = (A_2^2 - A_3)/_{2A_2} = (A_2^2 - \psi)/A_2 = 0$ pour $\psi = \varphi^2$.

On retrouve ainsi, un résultat analogue à celui du théorème 8, chap II [30] .

Afin de pouvoir faire facilement une comparaison, de point de vue efficacité, entre ses transformations : (T_1), (S_1) et (t_1), on se propose de résumer - sous forme d'un tableau récapitulatif - les résultats de la proposition 1.

TABLEAU : 1

Méthodes:	ORDRE de convergence:	INDICE d'efficacité:
$M-T_1$	au moins : 2	au moins : $\sqrt[3]{2} \simeq 1{,}259921...$
$M-S_1$	au moins : 2	au moins : $\sqrt[3]{2}$
$M-t_1$	1	x x x x x x x x

Essais numériques :

Exemple ① :

$$F(x) = x - f(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = (0{,}09 + x^2) \cdot x^2 .$$

$$x^* = 0 \quad \text{et} \quad f(x^*) = f'(x^*) = 0 \;, \quad f''(x^*) = 0.18 \; (\neq 0)$$

$$F(0) = 0 \;, \; F'(0) = 1 = A_1 \;, \; F''(0) = -0.18 = 2A_2 \neq 0$$

$$x_0 = 0.65 \;,$$

M-T$_1$:

METHODE :M-T AVEC K= 1

N	N---) X(N)
1	-.386268460087546D-03
2	.142624711835446D-08
3	.281241408268029D-22
4	-.139753536137678D-36
5	-.139753536137678D-36

M-S$_1$:

METHODE :M-S AVEC K= 1

N	N ⟶ X(N)
1	-.170796376705938D-01
2	.123339410996366D-03
3	-.164235677016562D-10
4	.179506876704852D-24
5	.111477216472739D-36

Itérations de base : $n \mapsto x_n$.

N	N---) F(X(N))
1	.512266638845961D-02
2	.512030394584875D-02
3	.511794368236598D-02
4	.511556559499629D-02
5	.511322568073025D-02

les essais numériques relatifs à M-t$_1$ seront faits – dans la suite – sous les hypothèses de la :

Remarque 2 :

On pourrait avoir tendance, en consultant les résultats du tableau 1, à ne pas utiliser la méthode M-t$_1$, lors de la résolution du problème (P) (quand la multiplicité $m > 2$). Cependant, cette méthode peut être améliorée en choisissant convenablement la suite $n \mapsto g_1(n)$.

A titre d'exemple :

Si : $(g_1^{(n)})$: $g_1^{(n)} = \sqrt{|\Delta S_n|}$ $n \in \mathbb{N}$,
F : strictement monotone,

alors : $\boxed{\text{M-}t_1 \text{ devient d'indice d'efficacité} : \sqrt{2} \simeq 1{,}4142\ldots}$ ... [*]

. F étant supposé strictement monotone, uniquement pour que le rapport

$$\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} = \sqrt{\left|\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right|} = \sqrt{\left|\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right|} \quad \text{soit égal à :} \quad \sqrt{\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}} .$$

En effet :

Si, par exemple, F est strictement croissante on a :

$F_n > x_n \Rightarrow F(F_n) > F(x_n) \Rightarrow F_n^2 > F_n$.

$F_n < x_n \Rightarrow F(F_n) < F(x_n) \Rightarrow F_n^2 < F_n$.

Donc, le signe de $(F_n - x_n)$ est identique à celui de $(F_n^2 - F_n)$.

($F_n \neq x_n$ car, sinon : $F(x_n) = F_n = x_n \Rightarrow x^* = x_n$ est alors déterminé)

Preuve de la propriété [*] - ci-dessus - :

On a :

$$\frac{t_1^{(n)} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{(F_n - x^*)/(x_n - x^*) - 1}{\left[(F_n^2 - F_n)/(F_n - x_n)\right]^{\frac{1}{2}} - 1} ,$$

$$\cdot \frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1 = A_2 e_n \times \left\{1 + \bar{A}_1 e_n + \bar{A}_2 e_n^2 + \bar{A}_3 e_n^3 + o(e_n^3)\right\} ,$$

$$\cdot \frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1 = 2A_2 e_n \underbrace{\left\{1 + \bar{C}_1 e_n + \bar{C}_2 e_n^2 + \bar{C}_3 e_n^3 + \bar{C}_4 e_n^4 + o(e_n^4)\right\}}_{:= \mathcal{E}_n} .$$

$$\cdot \left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + A_2 e_n \mathcal{E}_n - \frac{A_2^2 e_n^2}{2} \mathcal{E}_n^2 + \frac{A_2^3 e_n^3}{2} \mathcal{E}_n^3 - \frac{5}{8} A_2^4 e_n^4 \mathcal{E}_n^4 + o(e_n^4) .$$

$$= 1 + A_2 e_n + A_2\left(\bar{C}_1 - \frac{A_2}{2}\right)e_n^2 + A_2\left(\bar{C}_2 - A_2\bar{C}_1 + \frac{A_2^2}{2}\right)e_n^3 + A_2\left(\bar{C}_3 - A_2\bar{C}_2 - \frac{A_2 \bar{C}_1^2}{2} + \frac{3}{2}A_2^2\bar{C}_1 + \dots\right.$$

$$\left.\dots - \frac{5}{8}A_2^3\right)e_n^4 + o(e_n^4).$$

$$= 1 + A_2 e_n\left\{1 + \left(\bar{C}_1 - \frac{A_2}{2}\right)e_n + \left(\bar{C}_2 - A_2\bar{C}_1 + \frac{A_2^2}{2}\right)e_n^2 + \left(\bar{C}_3 - A_2\bar{C}_2 - \frac{A_2}{2}\bar{C}_1^2 + \frac{3}{2}A_2^2\bar{C}_1 - \frac{5}{8}A_2^3\right)e_n^3 + \dots\right.$$

$$\left.\dots + o(e_n^3)\right\}.$$

Par suite :

$$\frac{t_1^{(n)} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{1 + \bar{A}_1 e_n + \bar{A}_2 e_n^2 + \bar{A}_3 e_n^3 + o(e_n^3)}{1 + \left(\bar{C}_1 - \frac{A_2}{2}\right)e_n + \left(\bar{C}_2 - A_2\bar{C}_1 + \frac{A_2^2}{2}\right)e_n^2 + \left(\bar{C}_3 - A_2\bar{C}_2 - \frac{A_2}{2}\bar{C}_1^2 + \frac{3}{2}A_2^2\bar{C}_1 - \frac{5}{8}A_2^3\right)e_n^3 + \dots + o(e_n^3)}$$

$$= 1 - \left\{1 + W_1 e_n + W_2 e_n^2 + W_3 e_n^3 + o(e_n^3)\right\} \quad \text{où :}$$

- $W_1 = \bar{A}_1 - \bar{C}_1 + \frac{A_2}{2} = -\frac{A_3}{2A_2}$;
- $W_2 = \left(\bar{C}_1 - \frac{A_2}{2}\right)^2 - \left(\bar{C}_2 - A_2\bar{C}_1 + \frac{A_2^2}{2}\right) - \bar{A}_1\left(\bar{C}_1 - \frac{A_2}{2}\right) + \bar{A}_2$;
- $W_3 = \left(\bar{C}_1 - \frac{A_2}{2}\right)^3 + A_3 + \bar{A}_1\left(\bar{C}_1 - \frac{A_2}{2}\right)^2 + 2\left(\bar{C}_1 - \frac{A_2}{2}\right)\left(\bar{C}_2 - A_2\bar{C}_1 + \frac{A_2^2}{2}\right) + \dots$

$$\dots - \bar{A}_1\left(\bar{C}_2 - A_2\bar{C}_1 + \frac{A_2^2}{2}\right) - \left(\bar{C}_3 - A_2\bar{C}_2 - \frac{A_2}{2}\bar{C}_1^2 + \frac{3}{2}A_2^2\bar{C}_1 - \frac{5}{8}A_2^3\right).$$

Donc :

$$\boxed{t_1^{(n)} - x^* = \frac{A_3}{2A_2}e_n^2 - W_2 e_n^3 - W_3 e_n^3 + o(e_n^3)} \quad \dots \quad (36)$$

M-t_1 est alors d'ordre de convergence deux et d'indice d'efficacité : $\sqrt{2}$.

D'autre part, le choix : $q_1^{(n)} = \sqrt{|\Delta S_n|}$ et F strictement monotone n'améliore pas les méthodes M-T_1 et M-S_1 .

<u>Preuve</u> : <u>voir l'annexe pages : 6,7,8,9,10.</u>

Essais numériques :

Vérifions les hypothès de cette remarque 2, pour l'exemple 1.

Posons : $a = 0.09$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$V^* =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ un voisinage de $x^* = 0$.

$$F(x) = x - ax^2 - x^4 ;$$

$$F'(x) = 1 - 2ax - 4x^3, \quad (F'(\varepsilon) = 0.41 \text{ et } F'(-\varepsilon) = 1.59);$$

$$F''(x) = -2a - 12x^2 < 0$$

$$F'''(x) = -24x$$

x	$-\varepsilon$		0		$+\varepsilon$
$F''(x)$		$-$	$-2a$	$-$	
$F'(x)$	1.59	+ ↘	1	+ ↘	0.41
$F(x)$	-0.585	↗	0	↗	0.415

F est donc croissante strictement dans V^*.

Résultats numériques de la méthode M-t_1 :

Dans cette exemple et puisque $A_3 = \frac{F'''(x^*)}{3!} = \frac{F'''(0)}{3!} = 0$, on a d'après l'expression (36) - page 104 -, M-t_1 au moins d'ordre 3. $(W_1 = 0)$

M-t_1 : $(t_1 = \Delta_1 = E_1)$:

```
F(X)=X-f(X)  :  f(X)=(0.09+X**2)*X**2     , X(0)=0.65  :
--------------------------------------------------------

METHODE :M-PT AVEC K=   1
--------------------------------
********************************
*   N*   N--->X(N)             *
********************************
*    1*  -.133292762716104D-01 *
*    2*  -.390533948369539D-04 *
*    3*  -.987686472009197D-12 *
*    4*  -.132163783908465D-26 *
*    5*  -.463965921537947D-41 *
********************************
```

Montrons à présent, que les méthodes $M\text{-}T_2$, $M\text{-}S_2$, $M\text{-}\tau_2$, $M\text{-}\sigma_2$, $M\text{-}\alpha_2$, $M\text{-}\beta_2$, $M\text{-}t_2$, $M\text{-}\rho_2$ et $M\text{-}\varepsilon_2$ ne sont meilleurs que : $M\text{-}T_1$, $M\text{-}S_1$ et $M\text{-}t_1$ car leurs indices d'efficacité deviennent plus petits.

III.1.2. ETUDE DE LA FAMILLE $\mathcal{M}(2)$:

Les règles des méthodes de cette famille sont :

$M\text{-}T_2$; $M\text{-}S_2$:

- x_0 donné,
- Etape $(n+1)$:
  - $V_0 = x_n$,
  - $V_i = F(V_{i-1})$ $\quad i = 1, 2, \dots, 5$
  - On calcule $T_2^{(0)}$ (resp^t : $S_2^{(0)}$) à l'aide des V_i : $i = 0, 1, 2, \dots, 5$ puis On pose : $x_{n+1} = T_2^{(0)}$ (resp^t : $x_{n+1} = S_2^{(0)}$),
  - On réitère.

$M\text{-}\tau_2$, $M\text{-}\sigma_2$, $M\text{-}\alpha_2$, $M\text{-}\beta_2$:

- x_0 donné,
- Etape $(n+1)$:
  - $V_0 = x_n$,
  - $V_i = F(V_{i-1})$ $\quad i = 1, 2, 3, \dots, 6$
  - On calcule $\tau_2^{(0)}$ (resp^t : $\sigma_2^{(0)}$, $\alpha_2^{(0)}$, $\beta_2^{(0)}$) en fonction des V_i $i = 0, 1, \dots, 6$ puis On pose :

    $x_{n+1} = \tau_2^{(0)}$ (resp^t : $x_{n+1} = \sigma_2^{(0)}$, $x_{n+1} = \alpha_2^{(0)}$, $x_{n+1} = \beta_2^{(0)}$) ;
  - On réitère.

$M\text{-}t_2$ et $M\text{-}\rho_2$:

- x_0 donné,
- Etape $(n+1)$: $V_0 = x_n$, $V_i = F(V_{i-1})$ $\quad i = 1, 2, 3, \dots, 5$

- On calcule $t_2^{(0)}$ (resp^t : $\rho_2^{(0)}$) en fonction des v_i $i=0,1,2,3,4,5$;
- On pose : $x_{n+1} = t_2^{(0)}$ (resp^t : $x_{n+1} = \rho_2^{(0)}$) ;
- On réitère ensuite.

M-E_2 :

- x_0 donné ;
- Étape $(n+1)$: On calcule $V_0 = x_n$, $V_i = F(V_{i-1})$, $i=1,2,3,4$;
  $E_2^{(0)}$ en fonction des V_i : $i=0,1,2,3,4$;
  On pose : $x_{n+1} = E_2^{(0)}$ puis on réitère.

On obtient alors la :

Proposition 2 :

Supposons que M-T_1 et M-S_1 soient exactement d'ordre deux.

i) Les méthodes M-T_2, M-S_2, M-τ_2, M-σ_2, M-α_2 et M-β_2 sont au moins d'ordre de convergence trois.

ii) Les méthodes M-t_2, M-ρ_2 et M-E_2 sont d'ordre un. [*]

[*] : Voir la remarque 3, ultérieure, pour un autre choix de la suite $(g_i^{(n)})_n$ $i=1,2$.

Preuve :

i-1) M-T_2 est au moins d'ordre trois :

On a : $T_2^{(n)} - x^* = (T_1^{(n)} - x^*) \times \left\{ 1 - \dfrac{(T_1^{(n+1)} - x^*)/(T_1^{(n)} - x^*) - 1}{(D_2^{(n+1)}/D_2^{(n)}) - 1} \right\}$ Où :

$$\frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}} \times \frac{(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}) - 1}{(g_{1,2}^{(n+2)}/g_{1,2}^{(n+1)}) - 1} .$$

Calcul des rapports : $\dfrac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}}$ et $\dfrac{g_{1,2}^{(n+2)}}{g_{1,2}^{(n+1)}}$ en fonction de e_n :

On a :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} \cdot \frac{\left\{\left(g_2^{(n+2)}/g_2^{(n+1)} - 1\right)/\left(g_1^{(n+1)}/g_1^{(n+1)} - 1\right)\right\} - 1}{\left\{\left(g_2^{(n+1)}/g_2^{(n)} - 1\right)/\left(g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)} - 1\right)\right\} - 1},$$

$$= \frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} \cdot \frac{\left\{\left(\dfrac{F_n^4 - F_n^3}{F_n^3 - F_n^2} - 1\right)\Big/\left(\dfrac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)\right\} - 1}{\left\{\left(\dfrac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)\Big/\left(\dfrac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right)\right\} - 1},$$

• $$\left(\frac{F_n^4 - F_n^3}{F_n^3 - F_n^2} - 1\right)\Big/\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right) = \frac{1 + Z_1 e_n + Z_2 e_n^2 + Z_3 e_n^3 + Z_4 e_n^4 + Z_5 e_n^5 + o(e_n^5)}{1 + \overline{M}_1 e_n + \overline{M}_2 e_n^2 + \overline{M}_3 e_n^3 + \overline{M}_4 e_n^4 + \overline{M}_5 e_n^5 + o(e_n^5)},$$

$$= 1 + (Z_1 - \overline{M}_1)e_n + (Z_2 - Z_1\overline{M}_1 - \overline{M}_2 - \overline{M}_1^2)e_n^2 + \left(Z_3 - Z_2\overline{M}_1 + Z_1(\overline{M}_1^2 - \overline{M}_2) + 2\overline{M}_1\overline{M}_2 - \overline{M}_3 + \right.$$
$$\left. \cdots - \overline{M}_1^3\right)e_n^3 + \left(Z_4 - Z_3\overline{M}_1 + Z_2(\overline{M}_1^2 - \overline{M}_2) + Z_1(2\overline{M}_1\overline{M}_2 - \overline{M}_3 - \overline{M}_1^3) + \overline{M}_1^4 - \overline{M}_4 + \overline{M}_2^2 + 2\overline{M}_1\overline{M}_3 + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots - 3\overline{M}_2\overline{M}_1^2\right)e_n^4 + \varphi_4 e_n^5 + o(e_n^5).$$

On pose :

• $\varphi_1 = Z_2 - Z_1\overline{M}_1 - \overline{M}_2 + \overline{M}_1^2$, $\quad \left(Z_1 - \overline{M}_1 = \dfrac{3A_3 + 5A_2^2}{2A_2} - \dfrac{3(A_3 + A_2^2)}{2A_2} = A_2\right)$

• $\varphi_2 = Z_3 - Z_2\overline{M}_1 + Z_1(\overline{M}_1^2 - \overline{M}_2) + 2\overline{M}_1\overline{M}_2 - \overline{M}_3 - \overline{M}_1^3$,

• $\varphi_3 = Z_4 - Z_3\overline{M}_1 + Z_2(\overline{M}_1 - \overline{M}_2) + Z_1(2\overline{M}_1\overline{M}_2 - \overline{M}_3 - \overline{M}_1^3) + \overline{M}_1^4 - \overline{M}_4 + \overline{M}_2^2 + 2\overline{M}_1\overline{M}_3 +$
$\quad - 3\overline{M}_2\overline{M}_1^2$.

• $\varphi_4 = Z_5 - Z_4\overline{M}_1 + Z_3(\overline{M}_1^2 - \overline{M}_2) + Z_2(2\overline{M}_1\overline{M}_2 - \overline{M}_3 - \overline{M}_1^3) + Z_1(\overline{M}_1^4 - \overline{M}_4 + \overline{M}_2^2 +$
$\quad + 2\overline{M}_1\overline{M}_3 - 3\overline{M}_2\overline{M}_1^2) + 2\overline{M}_1\overline{M}_4 + 2\overline{M}_2\overline{M}_3 - \overline{M}_5 - 3\overline{M}_1\overline{M}_2^2 - 3\overline{M}_3\overline{M}_1^2 + 4\overline{M}_2\overline{M}_1^3 - \overline{M}_1^5$.

Donc :

$$\left(\frac{F_n^4 - F_n^3}{F_n^3 - F_n^2} - 1\right)\Big/\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right) - 1 = A_2 e_n\left\{1 + \overline{\varphi}_1 e_n + \overline{\varphi}_2 e_n^2 + \overline{\varphi}_3 e_n^3 + \overline{\varphi}_4 e_n^4 + o(e_n^4)\right\} \text{ où}$$

• $\overline{\varphi}_i = \varphi_i / A_2 \quad i = 1, 2, 3, 4$.

• $$\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)\Big/\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right) = \frac{1 + \overline{M}_1 e_n + \overline{M}_2 e_n^2 + \overline{M}_3 e_n^3 + \overline{M}_4 e_n^4 + \overline{M}_5 e_n^5 + o(e_n^5)}{1 + \overline{C}_1 e_n + \overline{C}_2 e_n^2 + \overline{C}_3 e_n^3 + \overline{C}_4 e_n^4 + \overline{C}_5 e_n^5 + o(e_n^5)},$$

$$= 1 + (\overline{M}_1 - \overline{C}_1)e_n + \psi_1 e_n^2 + \psi_2 e_n^3 + \psi_3 e_n^4 + \psi_4 e_n^5 + o(e_n^5), \text{ où :}$$

• $\overline{M}_1 - \overline{C}_1 = (A_2 + \overline{C}_1) - \overline{C}_1 = A_2$

- $\Psi_1 = \bar{C}_1^2 - \bar{C}_2 - \bar{C}_1\bar{M}_1 + \bar{M}_2$,
- $\Psi_2 = \bar{M}_3 + \bar{M}_1\bar{C}_1^2 + 2\bar{C}_1\bar{C}_2 - \bar{M}_2\bar{C}_1 - \bar{M}_1\bar{C}_2 - \bar{C}_3 - \bar{C}_1^3$,
- $\Psi_3 = \bar{C}_1^4 - \bar{C}_4 + \bar{C}_2^2 + 2\bar{C}_1\bar{C}_3 - 3\bar{C}_2\bar{C}_1^2 + 2\bar{M}_1\bar{C}_1\bar{C}_2 - \bar{M}_1(\bar{C}_3 + \bar{C}_1^3) + \bar{M}_2(\bar{C}_1^2 - \bar{C}_2) + \bar{M}_4 - \bar{M}_3\bar{C}_1$.
- $\Psi_5 = \bar{M}_5 - \bar{M}_4\bar{C}_1 + \bar{M}_3(\bar{C}_1^2 - \bar{C}_2) + \bar{M}_2(2\bar{C}_1\bar{C}_2 - \bar{C}_3 - \bar{C}_1^3) + \bar{M}_1(\bar{C}_1^4 - \bar{C}_4 + \bar{C}_2^2 + 2\bar{C}_1\bar{C}_3 - 3\bar{C}_2\bar{C}_1^2) +$
$+ 2\bar{C}_1\bar{C}_4 + 2\bar{C}_2\bar{C}_3 - \bar{C}_5 - 3\bar{C}_1\bar{C}_2^2 - 3\bar{C}_3\bar{C}_1^2 + 4\bar{C}_2\bar{C}_1^3 - \bar{C}_1^5$.

Par suite :

$$\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right) \Big/ \left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right) - 1 = A_2 e_n \left\{1 + \bar{\Psi}_1 e_n + \bar{\Psi}_2 e_n^2 + \bar{\Psi}_3 e_n^3 + \bar{\Psi}_4 e_n^4 + o(e_n^4)\right\} \text{ où :}$$

- $\bar{\Psi}_i = \Psi_i / A_2 \qquad i = 1,2,3,4$.

et $$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n}\right) \times \frac{1 + \bar{\varphi}_1 e_n + \bar{\varphi}_2 e_n^2 + \bar{\varphi}_3 e_n^3 + \bar{\varphi}_4 e_n^4 + o(e_n^4)}{1 + \bar{\Psi}_1 e_n + \bar{\Psi}_2 e_n^2 + \bar{\Psi}_3 e_n^3 + \bar{\Psi}_4 e_n^4 + o(e_n^4)}$$

$$= \left\{1 + 2A_2 e_n + 2A_2\bar{M}_1 e_n^2 + 2A_2\bar{M}_2 e_n^3 + 2A_2\bar{M}_3 e_n^4 + o(e_n^4)\right\} \times \left\{1 + (\bar{\varphi}_1 - \bar{\Psi}_1)e_n + (\bar{\Psi}_1^2 - \bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_1\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)e_n^2 + \right.$$
$$\left. + (\bar{\varphi}_3 + \bar{\varphi}_1\bar{\Psi}_1^2 + 2\bar{\Psi}_1\bar{\Psi}_2 - \bar{\varphi}_2\bar{\Psi}_1 - \bar{\varphi}_1\bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_3 - \bar{\Psi}_1^3)e_n^3 + \bar{\bar{\Psi}} e_n^4 + o(e_n^4)\right\}.$$

où :

$$\bar{\bar{\Psi}} = \bar{\Psi}_1^4 - \bar{\Psi}_4 + \bar{\Psi}_2^2 + 2\bar{\Psi}_1\bar{\Psi}_3 - 3\bar{\Psi}_2\bar{\Psi}_1^2 + 2\bar{\varphi}_1\bar{\Psi}_1\bar{\Psi}_2 - \bar{\varphi}_1(\bar{\Psi}_3 + \bar{\Psi}_1^3) + \bar{\varphi}_2(\bar{\Psi}_1^2 - \bar{\Psi}_2) + \bar{\varphi}_4 - \bar{\varphi}_3\bar{\Psi}_1 .$$

Donc :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = 1 + (2A_2 + \bar{\varphi}_1 - \bar{\Psi}_1)e_n + \left(2A_2\bar{M}_1 + 2A_2(\bar{\varphi}_1 - \bar{\Psi}_1) + \bar{\Psi}_1^2 - \bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_1\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2\right)e_n^2 +$$
$$+ \left[2A_2\bar{M}_2 + 2A_2\bar{M}_1(\bar{\varphi}_1 - \bar{\Psi}_1) + 2A_2(\bar{\Psi}_1^2 - \bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_1\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) + \bar{\varphi}_3 + \bar{\varphi}_1\bar{\Psi}_1^2 + 2\bar{\Psi}_1\bar{\Psi}_2 - \bar{\varphi}_2\bar{\Psi}_1 + \right.$$
$$\left. - \bar{\varphi}_1\bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_3 - \bar{\Psi}_1^3\right] e_n^3 + \left[2A_2\bar{M}_3 + 2A_2\bar{M}_2(\bar{\varphi}_1 - \bar{\Psi}_1) + 2A_2\bar{M}_1(\bar{\Psi}_1^2 - \bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_1\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)\right.$$
$$\left. + 2A_2(\bar{\varphi}_3 + \bar{\varphi}_1\bar{\Psi}_1^2 + 2\bar{\Psi}_1\bar{\Psi}_2 - \bar{\varphi}_2\bar{\Psi}_1 - \bar{\varphi}_1\bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_3 - \bar{\Psi}_1^3) + \bar{\bar{\Psi}}\right] e_n^4 + o(e_n^4)$$

On pose :
- $\mu_1 = 2A_2\bar{M}_1 + 2A_2(\bar{\varphi}_1 - \bar{\Psi}_1) + \bar{\Psi}_1^2 - \bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_1\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2$; $2A_2 + \bar{\varphi}_1 - \bar{\Psi}_1 = 2A_2 + A_2 = 3A_2$
- μ_2 = coefficient de e_n^3 dans l'expression de : $g_{1,2}^{(n+1)} / g_{1,2}^{(n)}$.
- μ_3 = " " e_n^4 " " " " .

Donc : $$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} - 1 = 3A_2 e_n\left\{1 + \bar{\mu}_1 e_n + \bar{\mu}_2 e_n^2 + \bar{\mu}_3 e_n^3 + o(e_n^3)\right\} \text{ où :} \qquad \dots (39)$$

- $\bar{\mu}_i = \mu_i / 3A_2 \qquad i = 1,2,3$ (A_2 étant non nul).

$$\frac{\left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}\right)-1}{\left(g_{1,2}^{(n+2)}/g_{1,2}^{(n+1)}\right)-1}=\frac{3A_2e_n\left\{1+\bar\mu_1e_n+\bar\mu_2e_n^2+\bar\mu_3e_n^3+o(e_n^3)\right\}}{3A_2e_n\left\{1+(\bar\mu_1+A_2)e_n+(\bar\mu_2+A_3+2A_2\bar\mu_1)e_n^2+(\bar\mu_3+A_4+2A_3\bar\mu_1+3A_2\bar\mu_2+A_2^2\bar\mu_1)e_n^3+o(e_n^3)\right\}}.$$

$$=1-A_2e_n+\left(A_2^2-A_3-A_2\bar\mu_1\right)e_n^2+\left(2A_2A_3-A_4-A_2^3-2A_2\bar\mu_2+\bar\mu_1\left[A_2^2+2A_2\bar\mu_1-A_3\right]\right)e_n^3+\cdots+o(e_n^3).$$

tre part, d'après la relation (34):

$\bullet$ $$T_1^{(n)}-x^*=-Q_1e_n^2-Q_2e_n^3-Q_3e_n^4-Q_4e_n^5+o(e_n^5)\quad \text{avec } Q_1=\frac{A_3+A_2^2}{A_2}.$$
$$=-Q_1e_n^2\left\{1+\bar Q_1e_n+\bar Q_2e_n^2+\bar Q_3e_n^3+o(e_n^3)\right\}\quad \text{où :}$$

puisque $M-T_1$ est supposé d'ordre exactement égal à 2, on a : $Q_1\neq 0$.

$$\bar Q_i=\frac{Q_{i+1}}{Q_1}\quad i=1,2,3.$$

Par suite :

$\bullet$ $$T_1^{(n+1)}-x^*=-Q_1(F_n-x^*)^2\left\{1+\bar Q_1(F_n-x^*)+\bar Q_2(F_n-x^*)^2+\bar Q_3(F_n-x^*)^3+o\left((F_n-x^*)^3\right)\right\},$$
$$=-Q_1e_n^2\left\{1+2A_2e_n+(2A_3+A_2^2)e_n^2+2(A_4+A_2A_3)e_n^3+o(e_n^3)\right\}\times\cdots$$
$$\cdots\times\left\{1+\bar Q_1e_n+(\bar Q_2+A_2\bar Q_1)e_n^2+(\bar Q_3+2A_2\bar Q_2+A_3\bar Q_1)e_n^3+o(e_n^3)\right\},$$

$$=-Q_1e_n^2\left\{1+(\bar Q_1+2A_2)e_n+(\bar Q_2+2A_3+A_2^2+3A_2\bar Q_1)e_n^2+\left(\bar Q_3+4A_2\bar Q_2+3A_3\bar Q_1+3A_2^2\bar Q_1+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots+2[A_4+A_2A_3]\right)e_n^3+o(e_n^3)\right\}.$$

$\bullet$ $$\Delta T_1^{(n)}=\left(T_1^{(n+1)}-x^*\right)-\left(T_1^{(n)}-x^*\right)$$
$$=-2A_2Q_1e_n^3\left\{1+\left(\frac{2A_3+A_2^2+3A_2\bar Q_1}{2A_2}\right)e_n+\left(2\bar Q_2+A_3+\frac{3A_3\bar Q_1+3A_2^2\bar Q_1+2A_4}{2A_2}\right)e_n^2+o(e_n^2)\right\}.$$

$\bullet$ $$\Delta T_1^{(n+1)}=-2A_2Q_1e_n^3\left\{1+\left(\frac{2A_3+7A_2^2+3A_2\bar Q_1}{2A_2}\right)e_n+\left(2\bar Q_2+5A_2^2+8A_3+6A_2\bar Q_1+\frac{2A_4+3[A_3+A_2^2]\bar Q_1}{2A_2}\right)e_n^2+o(e_n^2)\right\}$$

$\bullet$ $$\frac{\Delta T_1^{(n+1)}}{\Delta T_1^{(n)}}=1+3A_2e_n+\left(\frac{7A_2^2+8A_3+3A_2\bar Q_1}{2}\right)e_n^2+o(e_n^2)$$

Donc :

$$\frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}}=\left\{1+3A_2e_n+\frac{(7A_2^2+8A_3+3A_2\bar Q_1)}{2}e_n^2+o(e_n^2)\right\}\times\left\{1-A_2e_n+\left(A_2^2-A_3-A_2\bar\mu_1\right)e_n^2+o(e_n^2)\right\}$$

$$=1+2A_2e_n+\left(\frac{3A_2^2+6A_3+3A_2\bar Q_1}{2}-A_2\bar\mu_1\right)e_n^2+o(e_n^2)$$

De même on a :

$$\bullet\ \frac{T_1^{(n+1)}-x^*}{T_1^{(n)}-x^*}=\frac{1+(\overline{Q}_1+2A_2)e_n+(\overline{Q}_2+2A_3+A_2^2+3A_2\overline{Q}_1)e_n^2+o(e_n^2)}{1+\overline{Q}_1e_n+\overline{Q}_2e_n^2+o(e_n^2)}$$

$$=1+2A_2e_n+(A_2^2+2A_3+A_2\overline{Q}_1)e_n^2+o(e_n^2)$$

$$\bullet\ \frac{\left(T_1^{(n+1)}-x^*\right)/\left(T_1^{(n)}-x^*\right)-1}{\left(D_2^{(n+1)}/D_2^{(n)}\right)-1}=\frac{2A_2e_n\left[1+\frac{A_2^2+2A_3+A_2\overline{Q}_1}{2A_2}e_n+o(e_n)\right]}{2A_2e_n\left[1+\left(\frac{3A_2^2+6A_3+3A_2\overline{Q}_1}{4A_2}-\frac{\overline{\mu}_1}{2}\right)e_n+o(e_n)\right]},$$

$$=1+\left(\frac{\overline{\mu}_1}{2}-\frac{A_2^2+2A_3+A_2\overline{Q}_1}{4A_2}\right)e_n+o(e_n)$$

Donc :

$$T_2^{(n)}-x^*=\left(T_1^{(n)}-x^*\right)\times\left\{1-\left[1+\left(\frac{\overline{\mu}_1}{2}-\frac{A_2^2+2A_3+A_2\overline{Q}_1}{4A_2}\right)e_n+o(e_n)\right]\right\}$$

$$=\underbrace{\left(T_1^{(n)}-x^*\right)}_{=O(e_n^2)}\times\underbrace{\left\{\left(\frac{A_2^2+2A_3+A_2\overline{Q}_1}{4A_2}-\frac{\overline{\mu}_1}{2}\right)e_n+o(e_n)\right\}}_{=O(e_n)}=O(e_n^3).\ \square$$

Le coefficient asymptotique de l'erreur $(T_2^{(n)}-x^*)$ est :

$$\frac{(A_3+A_2^2)(2A_2\overline{\mu}_1-A_2^2-2A_3-A_2\overline{Q}_1)}{4A_2^2}.$$

i-2) M-S_2, M-τ_2, M-σ_2, M-α_2 et M-β_2 : voir la partie annexe pages : 11, 12, ..., 18.

ii) M-t_2

On a : $$t_2^{(n)}-x^*=\left(t_1^{(n)}-x^*\right)\times\left\{1-\frac{\frac{t_1^{(n+1)}-x^*}{t_1^{(n)}-x^*}-1}{\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}}-1}\right\}$$ Avec :

$$\bullet\ g_{1,2}^{(n)}=g_2(n)\left\{1-\frac{\left(g_2^{(n+1)}/g_2^{(n)}\right)-1}{\left(D_{1,2}^{(n+1)}/D_{1,2}^{(n)}\right)-1}\right\}$$ et :

$$\bullet\ \frac{D_{1,2}^{(n+1)}}{D_{1,2}^{(n)}}=\frac{g_2(n+1)}{g_2(n)}\times\frac{\left(\frac{g_2(n+2)}{g_2(n+1)}-1\right)}{\left(\frac{g_2(n+1)}{g_2(n)}-1\right)}\times\frac{\left(\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)}-1\right)}{\left(\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)}-1\right)}.$$

D'après l'étude faite à la proposition ① on a :

$$\cdot\ t_1^{(n)} - x^* = \frac{1}{2}e_n + \frac{(\bar{C}_1 - \bar{A}_1)}{2}e_n^2 + \left(\frac{\bar{C}_2 + \bar{C}_1\bar{A}_1 - \bar{A}_2 - \bar{C}_1^2}{2}\right)e_n^3 + o(e_n^3)$$
$$= \frac{e_n}{2}\left\{1 + (\bar{C}_1 - \bar{A}_1)e_n + (\bar{C}_2 + \bar{C}_1\bar{A}_1 - \bar{A}_2 - \bar{C}_1^2)e_n^2 + o(e_n^2)\right\},$$

Donc : $t_1^{(n+1)} - x^* = \frac{e_n}{2}\left\{1 + A_2 e_n + A_3 e_n^2 + o(e_n^2)\right\}\left\{1 + (\bar{C}_1 - \bar{A}_1)e_n + (\bar{C}_2 + \bar{C}_1\bar{A}_1 - \bar{A}_2 - \bar{C}_1^2 + A_2\bar{C}_1 - A_1) \times \ldots\right.$
$\left.\ldots \times e_n^2 + o(e_n^2)\right\}$

$$= \frac{e_n}{2}\left\{1 + (A_2 + \bar{C}_1 - \bar{A}_1)e_n + (\bar{C}_2 + \bar{A}_1\bar{C}_1 + 2A_2\bar{C}_1 - A_3 - \bar{A}_2 - \bar{C}_1^2)e_n^2 + o(e_n^2)\right\}$$

et donc :
$$\frac{t_1^{(n+1)} - x^*}{t_1^{(n)} - x^*} = 1 + A_2 e_n + (A_2\bar{C}_1)e_n^2 + o(e_n^2).$$

Calcul du rapport : $\left(g_{1,2}^{(n+1)} / g_{1,2}^{(n)}\right)$:

On a :

$$\frac{D_{1,2}^{(n+1)}}{D_{1,2}^{(n)}} = \frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} \times \frac{\left(\dfrac{F_n^4 - F_n^3}{F_n^3 - F_n^2} - 1\right)}{\left(\dfrac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)} \times \frac{\left(\dfrac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right)}{\left(\dfrac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)},$$

On a vu que : $\left(\dfrac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right) \Big/ \left(\dfrac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right) = 1 + A_2 e_n\left\{1 + \bar{\psi}_1 e_n + \bar{\psi}_2 e_n^2 + \bar{\psi}_3 e_n^3 + \bar{\psi}_4 e_n^4 + o(e_n^4)\right\}$

$$\left(\frac{F_n^4 - F_n^3}{F_n^3 - F_n^2} - 1\right) \Big/ \left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right) = 1 + A_2 e_n\left\{1 + \bar{\varphi}_1 e_n + \bar{\varphi}_2 e_n^2 + \cdots + \bar{\varphi}_4 e_n^4 + o(e_n^4)\right\}$$

Donc :

$$\frac{D_{1,2}^{(n+1)}}{D_{1,2}^{(n)}} = \frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} \times \frac{1 + A_2 e_n + \varphi_1 e_n^2 + \varphi_2 e_n^3 + \varphi_3 e_n^4 + \varphi_4 e_n^5 + o(e_n^5)}{1 + A_2 e_n + \psi_1 e_n^2 + \psi_2 e_n^3 + \psi_3 e_n^4 + \psi_4 e_n^5 + o(e_n^5)}$$

$$= \frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} \times \left\{1 + \underbrace{(\varphi_1 - \psi_1)}_{=\lambda_2}e_n^2 + \underbrace{\left(\varphi_2 - \psi_2 - A_2(\varphi_1 - \psi_1)\right)}_{=\lambda_3}e_n^3 + \lambda_4 e_n^4 + \lambda_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\}$$

où : $\lambda_2 = \varphi_1 - \psi_1 = A_2^2 \quad , \quad \lambda_3 = \varphi_2 - \psi_2 - A_2^3 \ ,$

$$\lambda_4 = A_2^4 + \varphi_3 - \psi_3 + A_2(\psi_2 - \varphi_2) - A_2^2 \psi_1 \ ,$$

$$\lambda_5 = \varphi_4 - \varphi_3 A_2 + \varphi_2 (A_2^2 - \psi_1) + \varphi_1\left(2A_2\psi_1 - \psi_2 - A_2^3\right) + A_2\left(A_2^4 - \psi_3 + \psi_1^2 + 2A_2\psi_2 - 3A_2^2\psi_1\right)$$
$$+ 2A_2\psi_3 + 2\psi_1\psi_2 - \psi_4 - 3A_2\psi_1^2 - 3A_2^2\psi_2 + 4A_2^3\psi_1 - A_2^5 \ .$$

Donc : $$\frac{D_{12}^{(n+1)}}{D_{12}^{(n)}} = \left\{1 + 2A_2 e_n + 2A_2\overline{M}_1 e_n^2 + 2A_2\overline{M}_2 e_n^3 + 2A_2\overline{M}_3 e_n^4 + 2A_2\overline{M}_4 e_n^5 + o(e_n^5)\right\} \times \left\{1 + \lambda_2 e_n^2 + \right.$$
$$\left. + \lambda_3 e_n^3 + \lambda_4 e_n^4 + \lambda_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\}$$

$$= 1 + 2A_2 e_n + A_2(A_2 + 2\overline{M}_1)e_n^2 + \left(\lambda_3 + 2A_2^3 + 2A_2\overline{M}_2\right)e_n^3 + \left(\lambda_4 + 2A_2\lambda_3 + \right.$$
$$\left. + 2A_2\overline{M}_3 + 2A_2^3\overline{M}_1\right)e_n^4 + \left(2A_2\overline{M}_4 + 2A_2^3\overline{M}_2 + 2A_2\overline{M}_1\lambda_3 + 2A_2\lambda_4 + \lambda_5\right)e_n^5 +$$
$$+ o(e_n^5) \ .$$

ou alors : $$\frac{D_{1,2}^{(n+1)}}{D_{1,2}^{(n)}} - 1 = 2A_2 e_n\left\{1 + \left(\frac{A_2 + 2\overline{M}_1}{2}\right)e_n + \left(\frac{\lambda_3 + 2A_2^3 + 2A_2\overline{M}_2}{2A_2}\right)e_n^2 + \left(\frac{\lambda_4 + 2A_2\lambda_3 + 2A_2\overline{M}_3 + 2A_2^3\overline{M}_1}{2A_2}\right)e_n^3 \right.$$
$$\left. + \left(\overline{M}_4 + A_2^2\overline{M}_2 + \overline{M}_1\lambda_3 + \lambda_4 + \frac{\lambda_5}{2A_2}\right)e_n^4 + o(e_n^4)\right\} .$$

<u>Par suite</u> : $$g_{1,2}^{(n)} = g_2^{(n)}\left\{1 - \frac{2A_2 e_n\left\{1 + \overline{M}_1 e_n + \overline{M}_2 e_n^2 + \overline{M}_3 e_n^3 + \overline{M}_4 e_n^4 + o(e_n^4)\right\}}{2A_2 e_n\left\{1 + \left(\overline{M}_1 + \frac{A_2}{2}\right)e_n + \left(\overline{M}_2 + \frac{\lambda_3 + 2A_2^3}{2A_2}\right)e_n^2 + \left(\overline{M}_3 + \frac{\lambda_4 + 2A_2\lambda_3 + 2A_2^3\overline{M}_1}{2A_2}\right)e_n^3 + \left(\overline{M}_4 + A_2^2\overline{M}_2 + \overline{M}_1\lambda_3 + \lambda_4 + \frac{\lambda_5}{2A_2}\right)e_n^4 + o(e_n^4)\right\}}\right\}$$

$$= -g_2^{(n)}\left\{\omega_1 e_n + \omega_2 e_n^2 + \omega_3 e_n^3 + \omega_4 e_n^4 + o(e_n^4)\right\} \quad \text{où :}$$

- $\omega_1 = -\dfrac{A_2}{2} \ ,$
- $\omega_2 = \dfrac{A_2\overline{M}_1}{2} - \dfrac{2\lambda_3 + 3A_2^3}{4A_2} \ ,$
- $\omega_3 = -\left(\dfrac{\lambda_4 + A_2\lambda_3 + A_2^3\overline{M}_1 + A_2^2\overline{M}_1^2 - A_2^2\overline{M}_2 - \lambda_3\overline{M}_1}{2A_2} - \dfrac{7A_2^3}{8}\right) ,$
- $\omega_4 = \left(\overline{M}_1 + \frac{A_2}{2}\right)^4 - \left(\overline{M}_4 + A_2^2\overline{M}_2 + \overline{M}_1\lambda_3 + \lambda_4 + \frac{\lambda_5}{2A_2}\right) + \left(\overline{M}_2 + \frac{\lambda_3 + 2A_2^3}{2A_2}\right)^2 + 2\left(\overline{M}_1 + \frac{A_2}{2}\right)\left(\overline{M}_3 + \cdots\right.$
  $\cdots \left. + \frac{\lambda_4 + 2A_2\lambda_3 + 2A_2^3\overline{M}_1}{2A_2}\right) + 2\overline{M}_1\left(\overline{M}_1 + \frac{A_2}{2}\right)\left(\overline{M}_2 + \frac{\lambda_3 + 2A_2^3}{2A_2}\right) + \overline{M}_4 + \cdots$
  $\cdots - 3\left(\overline{M}_1 + \frac{A_2}{2}\right)^2\left(\overline{M}_2 + \frac{\lambda_3 + 2A_2^3}{2A_2}\right) - \overline{M}_1\left(\overline{M}_3 + \frac{\lambda_4 + 2A_2\lambda_3 + 2A_2^3\overline{M}_1}{2A_2} + \left[\overline{M}_1 + \frac{A_2}{2}\right]^3\right) + \cdots$
  $\cdots + \overline{M}_2\left(\left(\overline{M}_1 + \frac{A_2}{2}\right)^2 - M_2 - \frac{\lambda_3 + 2A_2^3}{2A_2}\right) - \overline{M}_3\left(\overline{M}_1 + \frac{A_2}{2}\right) .$

Posons : $\overline{\omega}_i = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_1}, i = 1,2,3 \qquad \left(\omega_1 = -\frac{A_2}{2} \neq 0\right)$

Alors : $g_{1,2}^{(n)} = g_2^{(n)}\left(-\omega_1 e_n\right)\left\{1 + \overline{\omega}_1 e_n + \overline{\omega}_2 e_n^2 + \overline{\omega}_3 e_n^3 + o(e_n^3)\right\} \cdot \quad \cdots$

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} \cdot \frac{(F_n - x^*)}{(x_n - x^*)} \times \frac{1 + \overline{\omega}_1 (F_n - x^*) + \overline{\omega}_2 (F_n - x^*)^2 + \overline{\omega}_3 (F_n - x^*)^3 + o(e_n^3)}{1 + \overline{\omega}_1 e_n + \overline{\omega}_2 e_n^2 + \overline{\omega}_3 e_n^3 + o(e_n^3)}$$

$$= \left\{1 + 3A_2 e_n + (A_3 + 2A_2^2 + 2A_2\overline{M}_1) e_n^2 + \left(A_4 + 2A_2A_3 + 2A_2^2\overline{M}_1 + 2A_2\overline{M}_2\right) e_n^3 + o(e_n^3)\right\} \times \cdots$$

$$\cdots \times \left\{1 + A_2\overline{\omega}_1 e_n^2 + \left(2A_2\overline{\omega}_2 + A_3\overline{\omega}_1 - A_2\overline{\omega}_1^2\right) e_n^3 + o(e_n^3)\right\}$$

Car :

- $\frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} = 1 + A_2 e_n + A_3 e_n^2 + A_4 e_n^3 + o(e_n^3)$,
- $\frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} = \frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} = 1 + 2A_2 e_n + 2A_2\overline{M}_1 e_n^2 + 2A_2\overline{M}_2 e_n^3 + o(e_n^3)$,
- $(F_n - x^*) = e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3 + o(e_n^3)$,
- $(F_n - x^*)^2 = e_n^2 + 2A_2 e_n^3 + o(e_n^3)$,
- $(F_n - x^*)^3 = e_n^3 + o(e_n^3)$.

Donc :

$$\boxed{\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = 1 + 3A_2 e_n + \left(A_3 + 2A_2^2 + 2A_2\overline{M}_1 + A_2\overline{\omega}_1\right) e_n^2 + \left(A_4 + 2A_2A_3 + 2A_2^2\overline{M}_1 + 2A_2\overline{M}_2 + 2A_2\overline{\omega}_2 + A_3\overline{\omega}_1 - A_2\overline{\omega}_1^2 + 3A_2^2\overline{\omega}_1\right) e_n^3 + o(e_n^3). \quad \cdots (40)}$$

En suite :

$$t_2^{(n)} - x^* = (t_1^{(n)} - x^*) \times \left\{1 - \frac{A_2 e_n\left\{1 + \overline{C}_1 e_n + o(e_n)\right\}}{3A_2 e_n\left\{1 + \left(\frac{A_3 + 2A_2^2 + 2A_2\overline{M}_1 + A_2\overline{\omega}_1}{3A_2}\right) e_n + o(e_n)\right\}}\right\}$$

$$= (t_1^{(n)} - x^*)\left\{1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)\left[1 + \left(\overline{C}_1 - \frac{A_3 + 2A_2^2 + 2A_2\overline{M}_1 + A_2\overline{\omega}_1}{3A_2}\right) e_n + o(e_n)\right]\right\}$$

$$= \underbrace{(t_1^{(n)} - x^*)}_{= O(e_n)}\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{A_3 + 2A_2^2 + 2A_2\overline{M}_1 + A_2\overline{\omega}_1}{3A_2} - \overline{C}_1\right) e_n + o(e_n)\right\} = O(e_n) \quad \blacksquare$$

ii) M-E_2 :

On a : $E_2^{(n)} - x^* = (E_1^{(n)} - x^*) \times \left\{1 - \frac{\frac{E_1^{(n+1)} - x^*}{E_1^{(n)} - x^*} - 1}{\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} - 1}\right\}$

D'après la relation (39) on a :

$$\bullet \quad \frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} - 1 = 3A_2 e_n \left\{ 1 + \frac{\mu}{h} e_n + o(e_n) \right\}$$

et puisque $E_1^{(n)} = t_1^{(n)}$ on a d'après l'étude qui précède :

$$\bullet \quad \frac{E_1^{(n+1)} - x^*}{E_1^{(n)} - x^*} - 1 = + A_2 e_n + A_2 \bar{C}_1 e_n^2 + o(e_n^2) = A_2 e_n \left\{ 1 + \bar{C}_1 e_n + o(e_n) \right\},$$

Donc :

$$\bullet \quad E_2^{(n)} - x^* = \left(E_1^{(n)} - x^* \right) \times \left\{ 1 - \frac{1}{3}\left[1 + (\bar{C}_1 - \bar{\mu}_1) e_n + o(e_n) \right] \right\}$$

$$= \underbrace{\left(E_1^{(n)} - x^* \right)}_{= O(e_n)} \times \left\{ \frac{2}{3} + \left(\frac{\bar{\mu}_1 - \bar{C}_1}{3} \right) e_n + o(e_n) \right\} = O(e_n).$$

ii) M-$\mathcal{A}_2$

On a :

$$\mathcal{A}_2^{(n)} - x^* = \left(\mathcal{A}_1^{(n)} - x^* \right) \times \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{\mathcal{A}_1^{(n+1)} - x^*}{\mathcal{A}_1^{(n)} - x^*} - 1 \right)}{\left(g_{1,2}^{(n+1)} / g_{1,2}^{(n)} \right) - 1} \right\}.$$

$$\bullet \quad \frac{\mathcal{A}_1^{(n+1)} - x^*}{\mathcal{A}_1^{(n)} - x^*} - 1 = A_2 e_n \left\{ 1 + \bar{C}_1 e_n + o(e_n) \right\} \quad \left(\mathcal{A}_1^{(n)} = E_1^{(n)} \right).$$

• Calculons le rapport : $g_{1,2}^{(n+1)} / g_{1,2}^{(n)}$: (voir annexe p. 5)

On a : $$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} - 1 = 3A_2 e_n \left\{ 1 + \frac{(A_3 + 2A_2^2 + 2A_2 Z_1 - A_2 \bar{C}_1)}{3A_2} e_n + o(e_n) \right\}$$

$$\bullet \quad \mathcal{A}_2^{(n)} - x^* = \left(\mathcal{A}_1^{(n)} - x^* \right) \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right) \frac{\{ 1 + \bar{C}_1 e_n + o(e_n) \}}{\left\{ 1 + \left(\frac{A_3 + 2A_2^2 + 2A_2 Z_1 - A_2 \bar{C}_1}{3A_2} \right) e_n + o(e_n) \right\}} \right\}$$

$$= \left(\mathcal{A}_1^{(n)} - x^* \right) \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left[1 + \left(\bar{C}_1 - \frac{A_3 + 2A_2^2 + 2A_2 Z_1 - A_2 \bar{C}_1}{3A_2} \right) e_n + o(e_n) \right] \right\}$$

$$= \underbrace{\left(\mathcal{A}_1^{(n)} - x^* \right)}_{= O(e_n)} \times \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{A_3 + 2A_2^2 + 2A_2 Z_1 - A_2 \bar{C}_1}{3A_2} - \bar{C}_1 \right) e_n + o(e_n) \right\} = O(e_n)$$

Pour résumer cette étude, On a le :

TABLEAU : 2.

Méthodes :	M-T_2	M-S_2	M-τ_2	M-σ_2	M-α_2	M-β_2	M-t_2	M-ρ_2	M-E_2
Ordre de la méthode	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3	1	1	1
Indice d'efficacité :	$\geq \sqrt[5]{3}$	$\geq \sqrt[5]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	x x x	x x x	x x x

$\sqrt[5]{3} \simeq 1,2457309...$; $\sqrt[6]{3} \simeq 1,2009369...$.

Remarque 3 :

En consultant les résultats des tableaux (1) et (2), On constate que les indices d'efficacité obtenus à l'aide des méthodes M-T_1 et M-S_1 sont superieurs, respectivement, à ceux de : M-T_2, M-S_2, M-τ_2, M-σ_2, M-α_2 et M-β_2.

Il est donc plus important d'appliquer les méthodes M-T_1 et M-S_1.

. En ce qui concerne les méthodes M-t_2, M-ρ_2 et M-E_2, consultez La remarque 4 ulterieure pour un autre choix des suites $(q_1^{(n)})_n$ et $(q_2^{(n)})_n$.

Essais numériques :

Afin de pouvoir faire une comparaison avec les résultats numériques précédents on conserve le même exemple (1), du paragraphe précédent. (Dans cet exemple : $A_3 = 0$)

M-T_2 :

METHODE : M-T AVEC K= 2

N	N---> X (N)
1	.1682775284297589D-04
2	.[illegible]D-18
3	-.[illegible]D-32
4	.[illegible]D-46
5	-.[illegible]D-59

M-S_2 :

METHODE : M-S AVEC K= 2

N	N---> X (N)
1	-.[illegible]D-03
2	.[illegible]D-14
3	-.[illegible]D-29
4	.[illegible]D-43
5	-.[illegible]D-57

M-τ_2 :

METHODE : M-TO AVEC K= 2

N	N---> X (N)
1	.[illegible]D-04
2	-.[illegible]D-10
3	-.[illegible]D-24
4	.[illegible]D-39
5	-.[illegible]D-54

M-σ_2 :

METHODE : N-SIGMA AVEC K= 2

N	N---> X (N)
1	-.[illegible]D-02
2	.[illegible]D-13
3	-.[illegible]D-27
4	-.[illegible]D-43
5	-.[illegible]-55

M-α_2 :

METHODE : M-ALPHA AVEC K= 2

N	N---> X (N)
1	.[illegible]D-04
2	.[illegible]D-17
3	-.[illegible]D-32
4	.[illegible]D-46
5	.[illegible]D-61

M-β_2 :

METHODE : M-BETTA AVEC K= 2

N	N---> X (N)
1	.306668769316658D-03
2	-.182547324828038D-15
3	-.101863638464856D-29
4	-.554096197578633D-44
5	-.288722992522992D-58

Remarque 4 :

Si l'on se place sous les hypothèses de la remarque 2 et si l'on choisit : $g_2(n) = \sqrt{|\Delta S_{2n}|}$ $(n \in \mathbb{N})$ alors :

- M-E_2 : devient d'ordre de convergence au moins égal à trois et d'indice d'efficacité $I(E_2) \geq \sqrt[4]{3} \simeq 1,316074...$
- M-t_2 et M-ρ_2 deviennent d'ordre de convergence au moins égal à trois et d'indice d'efficacité $I(t_2) = I(\rho_2) \geq \sqrt[5]{3} \simeq 1,2457309...$

Evidement ces indices d'efficacité sont inférieurs à ceux obtenus précédemment (remarque 2). Il est donc plus rentable d'utiliser M-t_1 (qui est identique à M-E_1 et M-ρ_1) que : M-t_2, M-ρ_2 ou M-E_2.

Pour la preuve de cette remarque, voir la partie annexe : 19, 20, ...

Essais numériques (sous les hypothèses des remarques 2 et 4) : $f(x) = (0,09 + x^2)x^2$, $x_0 = 0.65$.

M-t_2 :

METHODE :M-PT AVEC K= 2

N	N---> X(N)
1	-.107133529605891D-03
2	-.604008624524414D-17
3	.545617457877673D-32
4	-.602407756095905D-47
5	.735550416505918D-62

M-ρ_2 :

METHODE :M-PS AVEC K= 2

N	N---> X(N)
1	-.117[illegible]D-03
2	-.26[illegible]D-16
3	-.2[illegible]D-32
4	-.55[illegible]D-47
5	-.20[illegible]D-61

M-E_2

METHODE :M-E AVEC K= 2

N	N---> X(N)
1	-.389409537716279D-04
2	.101414190219868D-18
3	-.533909534143483D-34
4	.372203366854636D-49
5	-.178783736463134D-64

III.2 : CAS où la multiplicité $m > 2$.

NOTATIONS-HYPOTHESES.

La relation (28)-§II. peut s'écrire sous la forme :

$$(42) : \quad F(x) = x - (x-x^*)^m g(x) \;, \quad (m \in \mathbb{N} \text{ et } m \geq 3).$$
$$g(x^*) \neq 0.$$

Supposons que : $$g(x) = \sum_{i=0}^{m+2} B_i (x-x^*)^i + o\left((x-x^*)^{m+2}\right).$$

$$g(x^*) = B_0 \neq 0 \;,$$
$$B_i = \frac{g^{(i)}(x^*)}{i!} \quad \forall i \geq 1.$$

Posons :

$$X_{n,m} = \sum_{i=0}^{m+2} B_i e_n^i + o\left(e_n^{m+2}\right) \quad \text{où :}$$
$$e_n := x_n - x^*.$$

Pour étudier les indices d'efficacité des méthodes précédentes on a besoin du :

Lemme 2 :

i) $$\frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1 = -X_{n,m} e_n^{m-1} \;;$$

ii) $$\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1 = -mB_0 e_n^{m-1}\left\{1 + \left(\frac{m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0} e_n + \left(\frac{m+2}{m}\right)\frac{B_2}{B_0} e_n^2 + \left(\frac{m+3}{m}\right)\frac{B_3}{B_0} e_n^3 - \frac{m-1}{2}B_0 e_n^{m-1} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots - mB_1 e_n^m + o(e_n^3)\right\}.$$

iii) $$\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1 = -mB_0 e_n^{m-1}\left\{1 + \left(\frac{m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0} e_n + \left(\frac{m+2}{m}\right)\frac{B_2}{B_0} e_n^2 + \left(\frac{m+3}{m}\right)\frac{B_3}{B_0} e_n^3 - \frac{3(m-1)}{2}B_0 e_n^{m-1} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots - 3mB_1 e_n^m + o(e_n^3)\right\}.$$

Preuve : i) Evident, d'après la relation (42) ci-dessus.
ii) - iii) : voir la partie annexe : pages : 23, 24.

Proposition 3 : $(m \geq 3)$.

> Les méthodes M-T_1 et M-S_1 sont au moins d'ordre deux. Elles nécessitent, chacune, trois évaluations de fonctions, par itération.

Preuve :

1°) M-T_1 :

On a : $$T_1^{(n)} - x^* = (x_n - x^*) \times \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1\right)\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)}{\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right)\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right) - \left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)} \right\}.$$

• $$\left(\frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1\right)\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right) = m B_0^2 e_n^{2(m-1)} \left\{ 1 + \left(\frac{2m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0} e_n + \left(\frac{2B_2}{B_0} + \left(\frac{B_1}{B_0}\right)^2\right)\left(\frac{m+1}{m}\right) e_n^2 + \cdots \right.$$
$$+ \left(\frac{B_3}{B_0} + \frac{B_1 B_2}{B_0^2}\right)\left(\frac{2m+3}{m}\right) e_n^3 - \frac{3(m-1)}{2} B_0 e_n^{m-1} +$$
$$\left. - 3B_1\left(\frac{3m-1}{2}\right) e_n^m + o(e_n^3) \right\}.$$

(d'après le lemme 3.)

• $$\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right)\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right) = -m B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \left(\frac{m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0} e_n + \left(\frac{m+2}{m}\right)\frac{B_2}{B_0} e_n^2 + \left(\frac{m+3}{m}\right)\frac{B_3}{B_0} e_n^3 + \cdots \right.$$
$$\left. - \left(\frac{3m-1}{2}\right) B_0 e_n^{m-1} - (3m+2) B_1 e_n^m + o(e_n^3) \right\},$$

• $$\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right)\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right) - \left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right) = m B_0^2 e_n^{2m-2} \left\{ 1 + 2\frac{B_1}{B_0} e_n + o(e_n) \right\},$$

Donc :

$$T_1^{(n)} - x^* = e_n \times \left\{ 1 - \frac{m B_0^2 e_n^{2m-2} \left\{ 1 + \left(\frac{2m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0} e_n + o(e_n) \right\}}{m B_0^2 e_n^{2m-2} \left\{ 1 + \frac{2B_1}{B_0} e_n + o(e_n) \right\}} \right\}, \quad m \geq 3, \; B_0 = g(x^*) \neq 0$$

$$= e_n \times \left\{ 1 - \left[1 + \frac{B_1}{m B_0} e_n + o(e_n) \right] \right\}$$

$$= -\frac{B_1}{m B_0} e_n^2 + o(e_n^2). \quad \boxtimes$$

Pour chaque itération, le calcul de $T_1^{(n)}$ nécessite l'évaluation de : $F(x_n)$, $F^2(x_n)$ et $F^3(x_n)$. Donc, l'indice d'efficacité $I(T_1)$ de M-T_1 vérifie : $I(T_1) \geq \sqrt[3]{2} \simeq 1{,}26$.

• M-S_1 :

On fait la même démarche que celle qui précède. Pour plus de détails, voir la partie annexe : page 25.

Remarque 5 :

- Dans les deux cas où la multiplicité $m=2$ ou $m \geq 3$, les méthodes M-T_1 et M-S_1 restent d'ordre de convergence au moins égal à 2. Leurs indices d'efficacité $I(T_1)$ et $I(S_1)$ vérifient :
$I(T_1) = I(S_1) \geq \sqrt[3]{2} \simeq 1.26$
- Cette propriété est aussi vraie pour M-t_1 lorsque l'on choisit : $g_1(n) = |\Delta S_n|^{\frac{1}{m}}$ $(n \in \mathbb{N})$ - $\left(I(t_1) \geqslant \sqrt{2} \simeq 1{,}414\right)$-.
L'inconvénient dans ce choix est le fait qu'il dépend de m, à priori inconnu.
On remarque, d'ailleurs, que ce problème (connaissance de m) se pose souvent lors de la résolution des équations non linéaires. C'est pour apporter une réponse à cette question que nous consacrons le paragraphe suivant au calcul de la multiplicité d'une racine.

Essais numériques : ($m \geq 3$).

Exemple ① : $F(x) = x - f(x)$ avec $f(x) = (0.09 + x^2) * x^3$ et $x_0 = 0.5$ ($m=3$), ($B_1 = 0$).

M-T_1 et M-T_2 : M-S_1 et M-S_2 :

F(X)=X-F(X) -- F(X)=(0.09+X**2)*X**3 -- X(0)=0.5 ,

METHODE :M-T AVEC K= 1

N	N---) X(N)
1	-.154856676625466D-03
2	.658089561331206D-10
3	-.213497315389015D-24
4	.681591573047591D-41
5	.681591573047591D-41

METHODE :M-S AVEC K= 1

N	N---) X(N)
1	-.115819060853041D-01
2	.275298994308496D-04
3	-.369750869252252D-12
4	.502997434691548D-27
5	-.529800295957306D-42

METHODE :M-T AVEC K= 2

N	N---) X(N)
1	.166200286388905D-05
2	-.163969920679442D-20
3	-.794055617530071D-35
4	-.370591616651040D-49
5	-.176171064380743D-63

METHODE :M-S AVEC K= 2

N	N---) X(N)
1	-.711527867762774D-04
2	.309879991688385D-18
3	-.830392719307880D-33
4	.218657210454699D-47
5	-.573754844212933D-62

M-τ_2 ($\tau_1 = T_1$):

METHODE :M-TO AVEC K= 2

N	N---) X(N)
1	.160[illegible]D-04
2	.437[illegible]D-13
3	-.[illegible]D-26
4	-.[illegible]D-40
5	-.[illegible]D-54

M-σ_2 : ($\sigma_1 = S_1$).

METHODE :M-SIGMA AVEC K= 2

N	N---) X(N)
1	-.[illegible]-06
2	-.[illegible]-20
3	-.[illegible]-35
4	-.[illegible]-50
5	.[illegible]-65

M-α_2 : ($\alpha_1 = T_1$).

METHODE :M-ALPHA AVEC K= 2

N	N---) X(N)
1	-.[illegible]D-05
2	-.[illegible]D-15
3	-.[illegible]D-34
4	-.[illegible]D-49
5	-.[illegible]D-63

M-β_2 ($\beta_1 = S_1$).

METHODE :M-BETTA AVEC K= 2

N	N---) X(N)
1	-.122012688352237D-04
2	-.985700385830471D-19
3	.248452485989799D-33
4	-.647675620275662D-48
5	.167470657703537D-62

IV. CALCUL DE LA MULTIPLICITE m :

D'après l'étude anterieure, on constate que la multiplicité m de la racine x^* : $F(x^*)=x^*$, peut être déterminée comme suit :

Pour :

$$R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto R(x) = \frac{F^2(x) - 2F(x) + x}{F(x) - x},$$

On pose :

$$Y_n = \frac{1}{R(F_n)} - \frac{1}{R(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On a alors :

$$R(x_n) = \frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1 \quad \text{et} \quad R(F_n) = \frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1.$$

et :

$$Y_n = \frac{\dfrac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - \dfrac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n}}{\left(\dfrac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1\right)\left(\dfrac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1\right)}$$

D'après ii) et iii) du Lemme 2, on a :

$$Y_n = \frac{1-m}{m} \times \left\{ 1 + \frac{2B_1}{m(m-1)B_0} e_n + o(e_n) \right\}.$$

Donc :

$\lim_n Y_n := M = \frac{1-m}{m} \quad (\neq -1)$ et la multiplicité m est déterminée par :

$$\boxed{m = \frac{1}{M+1}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (43)$$

Pour calculer numériquement m, On propose l'heuristique (M) suivante, dont :

- x_0 : est le point initial, choisi voisin de x^* ;
- ε : est le test d'arrêt des itérations ;
- $E : x \mapsto E(x)$ est la fonction "partie entière".

Heuristique (M) :

1° x_0, ε donnés ;

2° Etape (n+1) :

2.1 : On pose $y_0 = x_n$;
$y_i = F(y_{i-1})$ $i=1,2,3$;

2.2 : On calcule

$$Y = \frac{\left(\frac{y_2-y_1}{y_1-y_0}\right) - \left(\frac{y_3-y_2}{y_2-y_1}\right)}{\left(\frac{y_2-y_1}{y_1-y_0}-1\right) - \left(\frac{y_3-y_2}{y_2-y_1}-1\right)} ;$$

2.3° : On pose $M = E\left(0.5 + \frac{1}{1+Y}\right)$

3° Si : $\left|M - \frac{1}{1+Y}\right| < \varepsilon$ alors on pose $m = M$.

Sinon : On calcule $T_1^{(0)}$ à l'aide de y_0, y_1, y_2, y_3 puis on pose :
$x_{n+1} = T_1^{(0)}$;
On revient à 2° en remplaçant n par (n+1) .

• A l'étape 3°, on peut choisir aussi bien (T_1) que (S_1) pour calculer x_{n+1} . Mais ce qui serait important est d'utiliser une méthode qui aux étapes 2.2° et 3°, fait intervenir moins de trois évaluations de F.

•• L'utilisation de cette heuristique rend la méthode :

* M-t_1 d'ordre $r \geq 2$ et d'indice d'efficacité $I(t_1) \geq \sqrt[3]{2}$;
* M-t_2 " $r \geq 3$ " " " $I(t_2) \geq \sqrt[5]{3}$;
* M-s_2 " $r \geq 3$ " " " $I(s_2) \geq \sqrt[5]{3}$;
* M-E_2 " $r \geq 3$ " " " $I(E_2) \geq \sqrt[4]{3}$;

La méthode de NEWTON utilise dans ce cas, 4 évaluations de fonctions, par itération (son indice $I \geq \sqrt[4]{2}$) .

Essais numériques :

$F(x) = x - f(x)$ avec :

Exemple 1 : $f(x) = \frac{1}{2}\left(0.09 + x^2\right) \cdot x^2$, $x_0 = 0.65$, $m = 2$.

Exemple 2 : $f(x) = 0.0994 \left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)$, $x_0 = 0.522$, $m = 3$.

Exemple 3 : $f(x) = -9 \times \frac{x^4}{1+x^2}$, $x_0 = 0.22$, $m = 4$.

. $n \mapsto x(n)$: est la suite calculée à l'étape 3) de l'heuristique(M), $\lim x_n = x^*$.

. $n \mapsto y(n)$: est la suite, de limite m.

Ex. 1.

F(X)=X-0.5D0*(0.09D0+X**2)*X**2 , X(0)=0.65D0

N	N---> X(N)	N---> Y(N)
0	.[illegible]D+00	-.16007[illegible]D+02
1	-.[illegible]D-01	.32824[illegible]D+01
2	.[illegible]D-02	.21465[illegible]D+01
3	-.[illegible]D-06	.20005[illegible]D+01

LA MULTIPLICITE m = 2

Ex. 2 :

F(X)=X-(0.0994)*(X**3)/(1.0D0+X**2) , X(0)=0.522D0

N	N ⟶ X(N)	N ⟶ Y(N)
0	.[illegible]D+00	.4036[illegible]D+01
1	.[illegible]D-02	.3048[illegible]D+01
2	-.[illegible]D-06	.3000[illegible]D+01

LA MULTIPLICITE m = 3

Ex. 3 :

F(X)=X+(9.0D0)*(X**4)/(1.0D0+X**2) , X(0)=0.22D0

N	N ⟶ X(N)	N ⟶ Y(N)
0	-.125147162[illegible]D+00	.25580[illegible]D+01
1	-.101160230[illegible]D-01	.43580[illegible]D+01
2	.313444344[illegible]D-05	.40014[illegible]D+01

LA MULTIPLICITE m = 4

Conclusion 2:

D'après l'étude précédente, on constate que les indices d'efficacité des méthodes : M-T_i, M-S_i, M-τ_i, M-σ_i, M-α_i, M-β_i, M-E_i, M-t_i et M-ρ_i sont plus élevés pour $i=1$ que pour $i=2$.

D'autre part, le meilleur indice que l'on a obtenu dans les deux cas :
- $g_i(n) = \Delta S_{n+i-1}$ $(n \in \mathbb{N}), (i \in \mathbb{N}^*)$,
- $g_i(n) = |\Delta S_{n+i-1}|^{\frac{1}{m}}$ $(n \in \mathbb{N})$ $(i \in \mathbb{N}^*)$, $(m \geq 2)$

est : $I \geqslant \sqrt[3]{2} \simeq 1{,}26$. ($m \geq 2$ inconnue)-

Celui-ci est relatif aux méthodes : M-T_1 et M-S_1 et à M-t_1, lorsque l'on utilise l'heuristique (M) pour déterminer m.

> M-T_1 et M-S_1 sont donc les méthodes les mieux adaptées à la résolution du problème $(\mathcal{P})$-[§II - relation 29]- : Leurs indices d'efficacité $I(T_1)$ et $I(S_1)$ sont au moins égaux à $\sqrt[3]{2} \simeq 1{,}26\ldots$ sans avoir recours à l'utilisation de l'heuristique (M).

A présent la question qui se pose est : est-il possible d'améliorer ces méthodes afin d'obtenir des indices d'efficacité supérieurs ?
On se propose dans le paragraphe V suivant d'apporter une réponse à cette question.

V : AMELIORATION DE M-T_1 et M-S_1.

La transformation qui permet cette amélioration est décrite par :

Algorithme-φ :

Si : $\varphi_0 : (S_n) \longmapsto (\varphi_0^{(n)})_n$ est une transformation d'accélération de la convergence telle que : M-φ_0 soit d'ordre $r > 1$, alors :

$$(\varphi) \begin{cases} (\varphi_0^{(n)}) & : \text{donneé}, \\ \varphi_p^{(n)} = \varphi_{p-1}^{(n)} - \dfrac{1}{(p+r-1)} \times \dfrac{\Delta \varphi_{p-1}^{(n)}}{\Delta\left(\varphi_{p-1}^{(n)} - S_n\right)} \times \left(\varphi_{p-1}^{(n)} - S_n\right) & p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

. Δ : agit sur l'indice n.

. Cet algorithme est réalisé suivant le schéma :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
\varphi_0^{(n)} \arrow[dr] & & & & & \\
 & \varphi_1^{(n)} \arrow[dr] & & & & \\
S_n \arrow[ur] & & \varphi_2^{(n)} \cdots & & & \\
 & S_n \arrow[ur] & \cdots & \cdots \varphi_{p-1}^{(n)} \arrow[dr] & & \\
 & & S_n \cdots & & \varphi_p^{(n)} & \\
 & & & S_n \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

"
$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
(1) \arrow[dr] & \\
 & (3) \\
(2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$
: (3) est calculé par application de la transformation composite des termes (1) et (2), perturbé par le coefficient : $\dfrac{1}{p+r-1}$. "

Dans la suite, la transformation (φ_0) sera, soit (T_1) ou (S_1).

Définition 4 :

La méthode M-φ_p ($p \in \mathbb{N}$) consiste à construire une suite (x_n) vérifiant :

Etape 1 : x_0 donné,

Etape (n+1) : . $V_0 = x_n$

. $V_i = F(V_{i-1})$ $i = 1, 2, \dots, (p+3)$

. On calcule $\varphi_p^{(0)}$ à l'aide des V_i : $i = 0, 1, 2, \dots, p+3$,

. On pose : $x_{n+1} = \varphi_p^{(0)}$ puis on itère.

V.1 : Amélioration de M-T₂ :

La transformation (φ_0) est telle que : $\varphi_0^{(n)} := T_1^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

On obtient la :

Proposition 4 :

Avec les mêmes hypothèses sur F, que les paragraphes II, III

On a :

Méthodes :	Ordre de convergence :	Indice d'efficacité :
$M-\varphi_0$	Au moins : 2	Au moins $\sqrt[3]{2} \simeq 1,259921...$
$M-\varphi_1$	Au moins : 3	Au moins $\sqrt[4]{3} \simeq 1,316074...$
$M-\varphi_2$	Au moins : 4	Au moins $\sqrt[5]{4} \simeq 1,3195079...$

Dans cette proposition, on s'est limité au rang $p=2$ (pour φ_p) car l'indice d'efficacité de $M-\varphi_p$ [à savoir : $(p+2)^{\frac{1}{p+3}}$, voir la partie annexe V p: 32. pour la preuve] décroît à partir de $p=2$.

Preuve :

Voir la partie annexe, pages : 26, 27, 28, 29.

Remarque 6 : Bien que le gain, en appliquant la méthode $M-\varphi_2$, ne soit pas très appréciable par rapport à $M-\varphi_0$ l'important dans cette proposition 4 est le fait que $I(\varphi_2)$ – indice d'efficacité de $M-\varphi_2$ – vérifie : $I(\varphi_2) \geq \sqrt[5]{4}$ quelle que soit la multiplicité m.

Essais numériques :

(voir [31] pour faire une comparaison).

Exemple 1 : $F(x) = x - f(x)$ où :

$$f(x) = 0.02 \frac{(x-1)^4}{1+(x-1)^4} \quad , \quad x_0 = 0.09 \, ,$$

On a : $f(1) = 0$

$f^{(i)}(1) = 0 \quad i = 1,2,3.$

$f^{(4)}(1) \neq 0$

$x^* = 1$ et $m = 4$.

$\varphi_0^{(n)} = T_1^{(n)} \ (\forall n \in \mathbb{N})$.

F(X)=X-f(X) , f(X)=((0.02)*(X-1.)**4)/(1.+(X-1.)**4) , X(0)=0.09

N ------------) X(N)

N	M-THETA : 0	M-THETA : 1	M-THETA : 2
0	.100051792167326D+01	.999976921990117D+00	.999994331430847D+00
1	.100000124513157D+01	.999999999838750D+00	.999999999982999D+00
2	.100000000000675D+01	.100000000000191D+01	.100000000000062D+01

Exemple 2 :

$$F(x) = x - 10^{-4} \cdot x^{10} \, ,$$

$x_0 = 0.08 \quad , \quad x^* = 0 \quad , \quad m = 10.$

$f^{(i)}(0) = 0 \quad \forall i = 0,1,2,\dots,9$.

$f^{(10)}(0) \neq 0$.

$\varphi_0^{(n)} = T_1^{(n)} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

F(X)=X-f(X) , f(X)=(0.0001D0)*(X**10) , X(0)=0.08D0

N-----------) X(N)

N	M-THETA : 0	M-THETA : 1	M-THETA : 2
0	-.662064576049276D-08	.964337117328642D-05	-.103617366545974D-01
1	.115454926750981D-14	-.371535333557544D-09	.855492558234709D-09
2	.253497731426689D-21	.762753956922071D-27	.202816510273134D-34

V-2 : Amélioration de M-S_1.

La transformation (φ_0) est, dans ce cas, telle que : $\varphi_0^{(n)} = S_1^{(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

On obtient la :

Propositions :

Avec les mêmes hypothèses sur F que ceux des paragraphes (II) et (III), on a :

Méthodes :	Ordre de convergence :	Indice d'efficacité :
M-S_1	Au moins : 2	Au moins : $\sqrt[3]{2}$
M-φ_1	Au moins : 3	Au moins : $\sqrt[4]{3}$
M-φ_2	Au moins : 4	Au moins : $\sqrt[5]{4}$

Preuve :

Voir : partie annexe, pages : 32, 33, 34

On a aussi, la même remarque que celle qui précède en ce qui concerne M-φ_2 lorsque $(\varphi_0) = (S_1)$.

Essais numériques :

Exemple ① : $F(x) = x - 0.02 \times \dfrac{(x-1)^4}{1+(x-1)^4}$

$x^* = 1$, $x_0 = 0.09$,

$m = 4$.

$\varphi_0^{(n)} = S_1^{(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

```
***************************************************************************
* F(X)=X-f(X)   ,f(X)=((0.02)*(X-1.)**4)/(1.+(X-1.)**4)    , X(0)=0.09    *
***************************************************************************
*   *                   N --------------) X(N)                            *
* N ***********************************************************************
*   *  M-THETA  :  0          *  M-THETA  :  1          *  M-THETA  :  2    *
***************************************************************************
*  0*  .100051040246424D+01 *  .999981155751256D+00 *  .999993747983937D+00 *
*  1*  .100000121011639D+01 *  .999999999935516D+00 *  .999999999998436D+00 *
*  2*  .100000000000698D+01 *  .100000000000014D+01 *  .999999999999993D+00 *
***************************************************************************
```

Exemples :

$$F(x) = x - A^2 x \cdot \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^4 = x\left(1 - A\left[x - \tfrac{1}{2}\right]^2\right)\left(1 + A\left[x - \tfrac{1}{2}\right]^2\right),$$

$A = 0.2$, $x_0 = -0{,}5$,

$m = 4$, $x^* \in \{0, \frac{1}{2}\}$

le point fixe x^*, déterminé dans ce tableau est : $x^* = \frac{1}{2}$,
(ceci dépend du choix de x_0).

$\varphi_0^{(n)} = S_1^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

F(X)=X*(1.+FAC*(X-0.5)**M)*(1.-FAC*(X-0.5)**M) , FAC=0.2 , X(0)=-0.5, M=2

N	M-THETA : 0	M-THETA : 1	M-THETA : 2
0	.420724406771307D+00	.425868542232455 D+00	.432568755432245D+00
1	.498764332823125D+00	.499894879928151D+00	.499999822465407D+00
2	.499964332823125D+00	.499999114344171D+00	.500000184688234D+00

Pour clore ce chapitre on a :

Remarque 7 & conclusion 3 :

On s'est interessé dans ce chapitre à la résolution de $F(x) = x$ dans le cas où la multiplicité m de $x^* = F(x^*)$ vérifie : $m \geq 2$. Le cas de racine simple a été étudié par S. ACHAKIR [1] et par J.F TRAUB [32].

Parmi les méthodes étudiées (§ III-1, III-2, III-3), M-T_1 et M-S_1 présentent les meilleurs indices d'efficacité (ceux-ci dépendent du choix de la suite $(g_i^{(n)})_n$ $i \in \mathbb{N}^*$).

La transformation (φ) - § III-4 - permet d'améliorer toutes ces méthodes, quelle que soit la multiplicité m de x^*.

D'autre part, l'indice d'efficacité de M-φ_2 ($\varphi_0 = T_1$ ou $\varphi_0 = S_1$) est supérieur aux indices de (M_{II}) et (M_{III}), établies par H. SADOK

[30] (p: 22 et 87) ainsi que ceux de : SM(1), TM(1) et EM(1) définies par S. ACHAKIR ([1] p: 117, 120, 122).

En résumé, On a obtenu :

① Dans le cas : $g_i(n) = \Delta S_{n+i} - 1$ $(n \in \mathbb{N})$, $(i \in \mathbb{N}^*)$:

$\forall m \geq 2$:

A

Méthodes :	Ordres de convergence :	Indices d'efficacité :
$M\text{-}T_1$:	Au moins : 2	Au moins $\sqrt[3]{2} \simeq 1.26$
$M\text{-}S_1$:	Au moins : 2	Au moins $\sqrt[3]{2} \simeq 1.26$
$M\text{-}t_1$:	1	× ×× × × ×

B

Méthodes:	$M\text{-}T_2$	$M\text{-}S_2$	$M\text{-}\tau_2$	$M\text{-}\sigma_2$	$M\text{-}\alpha_2$	$M\text{-}\beta_2$	$M\text{-}t_2$	$M\text{-}s_2$	$M\text{-}E_2$
Ordres:	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3	1	1	1
Indices:	$\geq \sqrt[5]{3}$	$\geq \sqrt[5]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	×××	×××	×××

Après l'amélioration, on obtient :

Pour $(\varphi_0) = (T_1)$ ou (S_1) :

C

Méthodes :	Ordres de convergence :	Indices d'efficacité :
$M\text{-}\varphi_0$:	Au moins : 2	Au moins : $\sqrt[3]{2} \simeq 1.26$
$M\text{-}\varphi_1$:	Au moins : 3	Au moins : $\sqrt[4]{3} \simeq 1.316$
$M\text{-}\varphi_2$:	Au moins : 4	Au moins : $\sqrt[5]{4} \simeq 1.32$

$\sqrt[5]{3} \simeq 1.246$, $\sqrt[6]{3} \simeq 1.201$

② Dans le cas : $g_i(n) = |\Delta S_{n+i-1}|^{\frac{1}{m}}$ $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$:

II-1 $m = 2$:

D

Méthodes :	Ordres de convergence :	Indices d'efficacité :
$M\text{-}T_1$:	Au moins : 2	au moins : $\sqrt[3]{2} \simeq 1.26$
$M\text{-}S_1$:	au moins : 2	au moins : $\sqrt[3]{2}$
$M\text{-}t_1$:	au moins : 2	au moins : $\sqrt{2} \simeq 1.414$

E

Méthodes :	$M\text{-}T_2$	$M\text{-}S_2$	$M\text{-}\tau_2$	$M\text{-}\tilde{\sigma}_2$	$M\text{-}\alpha_2$	$M\text{-}\beta_2$	$M\text{-}t_2$	$M\text{-}\rho_2$	$M\text{-}\varepsilon_2$
Ordres de conv.	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3	≥ 3
Indices d'effica.	$\geq \sqrt[5]{3}$	$\geq \sqrt[5]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	$\geq \sqrt[6]{3}$	$\geq \sqrt[5]{3}$	$\geq \sqrt[5]{3}$	$\geq \sqrt[4]{3}$

$\sqrt[5]{3} \simeq 1.246$; $\sqrt[6]{3} \simeq 1.201$; $\sqrt[4]{3} \simeq 1.316$

Après l'amélioration de $M\text{-}t_1$, on obtient :

$(\varphi_0) = (t_1)$:

F

Méthodes :	Ordres de convergence :	Indices d'efficacité :
$M-\varphi_0$:	au moins : 2	Au moins : $\sqrt{2} \simeq 1.414$
$M-\varphi_1$:	Au moins 3	$\boxed{\text{au moins : } \sqrt[3]{3} \simeq 1.442}$

II.2 : $m \geq 3$.

G

Méthodes :	Ordres de convergence :	Indices d'efficacité :
$M\text{-}T_1$:	au moins : 2	au moins : $\sqrt[3]{2}$
$M\text{-}S_1$:	au moins : 2	au moins : $\sqrt[3]{2}$
$M\text{-}t_1$:	au moins : 2	au moins : $\sqrt[3]{2}$ [*]

[*] : On utilise, dans ce cas, l'heuristique (M) pour déterminer la multiplicité m.

Lorsque M-t_1 est améliorée, à l'aide de la transformation (φ), on obtient :

<u>Pour : $(\varphi_0)=(t_1)$.</u>

Méthodes :	Ordres de convergence :	Indices d'efficacité :
M-φ_0	au moins : 2	au moins : $\sqrt[3]{2}$ [*]
M-φ_1	au moins : 3	au moins : $\sqrt[4]{3}$
M-φ_2	au moins : 4	au moins : $\sqrt[5]{4} \simeq 1.32$

On trouve alors les mêmes indices d'efficacité que ceux obtenus en améliorant M-T_1 ou M-S_1, dans le cas : $g_i(n) = \Delta S_{n+i-1}$.

Les meilleurs indices d'efficacité sont donc obtenus dans :

- le tableau : C pour le cas $g_i(n) = \Delta S_{n+i-1}$, $(n \in \mathbb{N})$, $(i \in \mathbb{N}^*)$.
- Le tableau : F pour le cas $g_i(n) = |\Delta S_{n+i-1}|^{\frac{1}{m}}$ avec $m=2$
- " " : G " " " $\forall m \in \mathbb{N} : m \geq 3$.

CHAPITRE - III

ORDRE D'ACCELERATION D'UNE TRANSFORMATION.

I - NOTATIONS :

- Conv : Ensemble des suites (à termes réels ou complexes) convergentes ;
- $\lfloor a \rfloor$: $(a \in \mathbb{R})$ partie entière de a ;
- Lin : Ensemble des suites à convergence linéaire ;
- $\mathrm{LOGSF} = \left\{ (S_n) \in \mathrm{Conv} : \lim\limits_n \left(\Delta S_{n+1} / \Delta S_n \right) = \lim\limits_n \left(\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} \right) = 1 \right\} . \left(S = \lim\limits_n S_n \right)$;
- Si $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alors :

$$\left(F \in \mathcal{D}_m \ , m \in \mathbb{N} \right) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1\text{- } \{x : F(x) = x\} \text{ est fini et est non vide ;} \\ 2\text{- } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^{(m)} \text{ dans un voisinage de } x^* \text{ vérifiant :} \\ \qquad x^* = F(x^*) . \end{cases}$$

- $P_m = \left\{ (S_n)_n \in \mathrm{Conv} : \exists F \in \mathcal{D}_m \text{ tq } S_{n+1} = F(S_n) \ (n \in \mathbb{N}) \right\} \quad (m \in \mathbb{N})$;
- $F \in \mathcal{D}_m^* \Longleftrightarrow \begin{cases} 1\text{- } F \in \mathcal{D}_m \\ 2\text{- } \exists j \in \left\{2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{m-3}{3} \right\rfloor \right\} \end{cases} : A_j \neq 0 \quad \left(A_j = \frac{F^{(j)}(x^*)}{j!} \right)$.
- Si $F \in \mathcal{D}_m$ et $S = F(S)$ alors on note : $e_n = (S_n - S)$ et $e_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} A_i e_n^i + o(e_n^m)$;
- $P_m^* = \left\{ (S_n) \in \mathrm{Conv} : \exists F \in \mathcal{D}_m^* \text{ et } S_{n+1} = F(S_n) \ (n \in \mathbb{N}) \right\}$.
- $E_\Delta = \left\{ (S_n)_n : \Delta S_n = \sum\limits_{i \geq 1} a_i h_i(n) \ ; \ \lim\limits_n h_i(n) = 0, \forall i \right\}$

I. INTRODUCTION :

Dans cette partie, on se propose de mettre en œuvre des critères, qui nous permettent de comparer l'efficacité d'une transformation d'accélération de la convergence par rapport à une autre.

Cette étude intervient, par exemple, dans le cas où deux transformations (T) et (T') accélèrent une famille de suites (S_n) - de limite S - et sous les mêmes hypothèses d'accélération, la limite du rapport :
$(T_n-S)/(T'_n-S)$ - lorsque : n tend vers ∞ -, ne peut pas être calculée (voir le plan qui suit).

Il est clair que pour affirmer que (T) est plus efficace que (T'), il faut tenir compte de plusieurs critères (voir : [14], [21], [32] en ce qui concerne quelques uns). Dans ce travail, on tiendra compte de l'ordre d'accélération d'une transformation et de son indice d'efficacité au sens des définitions :

Définition 1 :

On dit que (T) est d'ordre d'accélération $r \in \mathbb{R}^+$ (resp^t : au moins d'ordre d'accélération r, puis : d'ordre supérieur à r) si :

- $\lim T_n = \lim S_n = S$;
- $\exists\, c \neq 0 : \lim \dfrac{T_n - S}{|S_n - S|^r} = c$ (resp^t : $\exists\, c \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) : $\lim \dfrac{T_n-S}{|S_n-S|^r} = c$, puis : $(T_n-S) = o(|S_n-S|^r)$).

Définition 2 :

Si $(T) : (S_n) \longmapsto (T_n)$ est une transformation d'ordre (resp^t : au moins d'ordre) d'accélération $r > 1$;

et si le calcul de (T_n) $(n\in\mathbb{N})$ nécessite la connaissance des termes :

$s_{n+p}, s_{n+p-1}, \dots, s_n$ $(p\in\mathbb{N}^*)$;

alors : son indice d'efficacité est (resp^t : est au moins égal à) $I(T) := \sqrt[p]{r}$.

$I(T) > \sqrt[2]{r}$ si (T) est d'ordre d'accélération supérieur à $r > 1$.

Plusieurs auteurs ont abordé cette notion d'ordre d'une transformation, dans différents sens et objectifs . A titre d'exemple, on cite :

1° B. GERMAIN-BONNE ([23], page 28) : a construit, pour certaines classes de suites (s_n), une transformation (P) vérifiant :

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P_k^{(n)} - s = o\left((s_n - s)^k\right)$.

L'indice d'efficacité (au sens de la définition 2, ci-dessus) de cette transformation sera comparé ultérieurement avec celui de (E), (T), (S), (W)-d'OVERHOLT , (ρ) et (U) de LEVIN - [28], [34].

2° J.M-TROJAN ([33]) : s'est intéressé à l'optimalité de cet ordre, dans le cas des suites de point fixe : $s_{n+1} = f(s_n)$ $n\in\mathbb{N}$ et sous certaines conditions sur f - ($f \in \mathcal{C}^1$, lipschitzienne).

3° A. DRAUX [20] : est parti d'un nombre fini de transformation, d'ordres (au sens de la définition 1) supposés connus, pour construire, à l'aide de la transformation composite de suites [6], des méthodes de sélections.

4 C. BRESINSKI [14] : s'est intéressé, d'une manière générale, à l'ordre d'une suite (s_n) et sa vitesse de convergence (v_n) au sens de :

$$V_n = -\log_{10}\left|\frac{s_{n+1}-s}{s_n - s}\right| \quad (n\in\mathbb{N}) \quad , \quad s = \lim s_n \ .$$

Après la comparaison entre (T_n), (S_n), (E_2), (ρ_2), (W_2) d'OVEHOLT, (U_n) de LEVIN, dans le cas des suites de P_m et E_Δ, des propriétés d'ordre général sont établies pour compléter cette étude.

II. ORDRE D'ACCELERATION DANS LE CAS DES SUITES DE POINT FIXE :

Dans ce paragraphe, on accélère des suites de point fixe par diverses transformations et on étudie leur ordre d'accélération et leur indice d'efficacité. On se limite à la comparaison entre les premières colonnes des transformations étudiées dans le chapitre II, (ρ_2) et (W_2), vu que seules ces étapes présentent de meilleurs intérêts pratiques.

Dans tout ce qui suit, on choisit : $g_i(n) = \Delta S_{n+i-1}$ $i \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

On obtient alors la :

Proposition 1.

Si $(S_n) \in P_m \cap LIN$, $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 3$ (voir notation), alors :

Transf.	Ordre d'accel.	Indice d'efficacité	Coefficient asymptotique de l'erreur :
(ε_2)	au moins : 2	au moins : $\sqrt[2]{2}$	$\lim_n (\varepsilon_2^{(n)}-S)/(S_n-S)^2 = A_1A_2/(A_1-1)$
(ρ_2)	Au moins : 1	x x x x x	$\lim_n (\rho_2^{(n)}-S)/(S_n-S) = -A_1$
(T_1)	au moins : 2	au moins : $\sqrt[3]{2}$	$\lim_n (T_1^{(n)}-S)/(S_n-S)^2 = -A_2A_1^2/(A_1-1)$
(S_1)	Au moins : 2	Au moins : $\sqrt[3]{2}$	$\lim_n (S_1^{(n)}-S)/(S_n-S)^2 = -A_2A_1^2/(A_1-1)$
(W_2)	au moins : 3	Au moins : $\sqrt[5]{3}$	$\lim_n (W_2^{(n)}-S)/(S_n-S)^3 = \mathcal{L}(A_1, A_2, \dots, A_m)$

La constante $\mathcal{L}(A_1, A_2, \dots, A_m)$ - fonction des $A_i : i=1,2,\dots,m$ - sera précisée dans la preuve.

Preuve :

Si $(S_n) \in P_m \cap LIN$, alors on a :

$e_{n+1} := S_{n+1} - S = F(S_n) - F(S) = A_1 e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3 + o(e_n^2)$ avec :

. $A_i = F^{(i)}(S)/i!$, voir notation ;

. $e_n = S_n - S$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

. $A_1 = \lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} \neq 1$ car : $(S_n) \in LIN$.

• Transformation (ε_2) :

D'après les expressions : III-1, III-2 et III-3, page 35 de l'annexe, On a :

- $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1 = B_0\left\{1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + o(e_n^2)\right\}$, $B_0 = (A_1 - 1) \neq 0$;

- $\dfrac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1 = B_0\left\{1 + C_1 e_n + C_2 e_n^2 + o(e_n^2)\right\}$

Donc :

$$\frac{\varepsilon_2^{(n)} - S}{e_n} = 1 - \frac{(e_{n+1}/e_n) - 1}{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n) - 1} = 1 - \frac{1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + o(e_n^2)}{1 + C_1 e_n + C_2 e_n^2 + o(e_n^2)} ;$$

$$= 1 - \left[1 + (B_1 - C_1) e_n + (B_2 - C_2 - C_1 B_1 + C_1^2) e_n^2 + o(e_n^2)\right] ; \quad (B_0 \neq 0)$$

$$= (C_1 - B_1) e_n + \left(C_2 - B_2 - C_1(C_1 - B_1)\right) e_n^2 + o(e_n^2) \quad ; \quad (C_1 - B_1) = \frac{A_1 A_2}{(A_1 - 1)} \; , \; (A_1 \neq 1)$$

Par suite :

$$\boxed{\lim_n \frac{\varepsilon_2^{(n)} - S}{e_n^2} = \frac{A_1 A_2}{(A_1 - 1)} .}$$

. Transformation (ρ_2) :

$$\text{On a :} \quad \frac{\rho_2^{(n)} - S}{e_n} = \frac{\rho_2^{(n)} - S}{e_{n+1}} \cdot \frac{e_{n+1}}{e_n} \quad \text{et :}$$

- $$\frac{\rho_2^{(n)} - S}{e_{n+1}} = 1 - 2 \cdot \frac{(e_{n+2}/e_{n+1}) - 1}{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n) - 1} ;$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{1 + A_1 B_1 e_n + (A_2 B_1 + B_2 A_1^2) e_n^2 + o(e_n^2)}{1 + C_1 e_n + C_2 e_n^2 + o(e_n^2)} ;$$

$$= -1 + 2(C_1 - A_1 B_1) e_n + o(e_n) .$$

- $$\frac{e_{n+1}}{e_n} = A_1 + A_2 e_n + o(e_n) \xrightarrow[(n \uparrow \infty)]{} A_1 ,$$

Par suite :

$$\boxed{\lim_n \frac{\rho_2^{(n)} - S}{e_n} = -A_1 .}$$

· Transformation (T_1) :

On a : $\dfrac{T_1^{(n)}-S}{e_n} = 1 - \dfrac{(e_{n+1}/e_n)-1}{(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)})-1}$ avec : $D_1^{(n)} = -\dfrac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$,

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}\cdot\frac{\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}-1\right)}{\left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}}-1\right)} ,$$

$$= \left\{A_1 + B_0C_1e_n + B_0C_2e_n^2 + o(e_n^2)\right\} \times \left\{\frac{1+C_1e_n + C_2e_n^2 + o(e_n^2)}{1+A_1C_1e_n + (C_2A_1^2 + C_1A_2)e_n^2 + o(e_n^2)}\right\}$$

D'après les expressions III-2 et III-3 (page 35, annexe).

Donc : $\dfrac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \left\{A_1 + B_0C_1e_n + B_0C_2e_n^2 + o(e_n^2)\right\} \times \left\{1 - C_1B_0e_n + \left[C_2(1-A_1^2) - C_1A_2 + A_1B_0C_1^2\right]e_n^2 + o(e_n^2)\right\}$

$$= A_1 - C_1B_0^2e_n + \left[B_0C_2 - C_1^2B_0^2 - B_0A_1C_2(1+A_1) + A_1^2B_0C_1^2 - C_1A_1A_2\right]e_n^2 + o(e_n^2)$$

Par suite :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = B_0\left\{1 - B_0C_1e_n + \left[C_2 - B_0C_1^2 - A_1C_2(1+A_1) + A_1^2C_1^2 - \frac{A_1A_2C_1}{B_0}\right]e_n^2 + o(e_n^2)\right\}$$

et :

$$\frac{T_1^{(n)}-S}{e_n} = 1 - \frac{1 + B_1e_n + B_2e_n^2 + o(e_n^2)}{1 - B_0C_1e_n + \left[C_2 - B_0C_1^2 - A_1C_2(1+A_1) + A_1^2C_1^2 - \frac{A_1A_2C_1}{B_0}\right]e_n^2 + o(e_n^2)}$$

$$= (B_0B_1 - A_2 - B_1A_1^2)e_n + \Big[C_2 + A_1^2C_1^2 - B_2 - B_0C_1^2 - A_1C_2(1+A_1) - B_0B_1C_1 - B_0^2C_1^2 + \\ - \frac{A_1A_2C_1}{B_0}\Big]e_n^2 + o(e_n^2)$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{T_1^{(n)}-S}{e_n^2} = (B_0B_1 - A_2 - B_1A_1^2) = -\frac{A_2A_1^2}{B_0} = -\frac{A_2A_1^2}{(A_1-1)}}$$

. Transformation (S_1) :

On a : $\dfrac{S_1^{(n)}-S}{e_{n+1}} = 1 - \dfrac{(e_{n+2}/e_{n+1}) - 1}{(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}) - 1}$ avec : $D_1^{(n)} = -\dfrac{\Delta S_n \, \Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n}$.

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1\right)}{\left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} - 1\right)}$$

$$= \left\{A_1 + B_0 A_1 C_1 e_n + \left(C_2 A_1^2 + C_1 A_2\right) B_0 e_n^2 + o(e_n^2)\right\} \times \left\{1 - C_1 B_0 e_n + \left[C_2(1-A_1^2) - C_1 A_2 + A_1 B_0 C_1^2\right] e_n^2 + o(e_n^2)\right\}$$

D'après les relations III-2 , III-3 et les calculs faits précédemment dans le cas de la transformation (T_1).

Donc :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = B_0 \left\{1 + \overline{C} e_n^2 + o(e_n^2)\right\} \quad \text{où :}$$

$$\overline{C} = C_2 A_1^2 + C_1 A_2 - A_1 B_0 C_1^2 - A_1 C_2 (1 + A_1) + A_1^2 C_1^2 - C_1 \frac{A_1 A_2}{B_0} \quad ,$$

et : $\dfrac{S_1^{(n)}-S}{e_{n+1}} = 1 - \dfrac{1 + A_1 B_1 e_n + (A_2 B_1 + B_2 A_1^2) e_n^2 + o(e_n^2)}{1 + \overline{C} e_n^2 + o(e_n^2)}$;

$$= 1 - \left[1 + A_1 B_1 e_n + (A_2 B_1 + B_2 A_1^2 - \overline{C}) e_n^2 + o(e_n^2)\right] \; ;$$

$$= -A_1 B_1 e_n + \left(\overline{C} - A_2 B_1 - B_2 A_1^2\right) e_n^2 + o(e_n^2) \; ;$$

Donc : $\boxed{\lim_n \dfrac{S_1^{(n)}-S}{e_n^2} = \lim_n \dfrac{S_1^{(n)}-S}{e_n e_{n+1}} \times \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = -A_1^2 B_1}$ $\quad \left(\lim_n \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = A_1\right)$

Transformation (W_2) :

Le W-algorithme d'Overholt est donné par les règles :

$$(W)\begin{cases} W_0^{(n)} = S_n \quad n\in\mathbb{N} \\ W_k^{(n)} = W_{k-1}^{(n)} - \dfrac{\Delta W_{k-1}^{(n)}}{\Delta \mu_k^{(n)}} \times \mu_k^{(n)} \quad , n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{N}^* \quad \text{où :}\end{cases}$$

la suite $n \mapsto \mu_k^{(n)}$ est telle que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^* : \quad \mu_k^{(n)} = \left(\Delta S_{n+k-1}\right)^k \quad , n\in\mathbb{N}.$$

On a : $W_1^{(n)} = \varepsilon_2^{(n)} \quad \forall n\in\mathbb{N}$,

$$W_2^{(n)} - S = \left(W_1^{(n)} - S\right) \times \left\{ 1 - \frac{\left(W_1^{(n+1)} - S\right)/\left(W_1^{(n)} - S\right) - 1}{\left(\Delta S_{n+2}/\Delta S_{n+1}\right)^2 - 1} \right\},$$

D'après l'étude faite dans le cas de la transformation (ε_2), on a :

$$\varepsilon_2^{(n)} - S = e_n^2 \times \left\{ K_1 + K_2 e_n + o(e_n) \right\} \quad \text{où : } K_1 = \frac{A_1 A_2}{A_1 - 1} \text{ et } K_2 = C_2 - B_2 - C_1 \frac{A_1 A_2}{A_1 - 1}.$$

Supposons que (ε_2) est exactement d'ordre 2. (c'est à dire : $K_1 \neq 0$)

Alors :

$$\varepsilon_2^{(n)} - S = K_1 e_n^2 \times \left\{ 1 + \overline{K}_1 e_n + o(e_n) \right\} \quad \text{avec : } \overline{K}_1 = \frac{K_2}{K_1}.$$

$$\varepsilon_2^{(n+1)} - S = K_1 e_n^2 \left\{ 1 + A_1 \overline{K}_1 e_n + o(e_n) \right\} \times \left\{ A_1^2 + 2 A_1 A_2 e_n + o(e_n) \right\};$$

$$= K_1 e_n^2 \left\{ A_1^2 + \left(2 A_1 A_2 + A_1^3 \overline{K}_1\right) e_n + o(e_n) \right\};$$

$$\text{Donc : } \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = \frac{A_1^2 + \left(2 A_1 A_2 + A_1^3 \overline{K}_1\right) e_n + o(e_n)}{1 + \overline{K}_1 e_n + o(e_n)};$$

$$= A_1^2 + \left(2 A_1 A_2 - A_1^2 \overline{K}_1 + A_1^3 \overline{K}_1\right) e_n + o(e_n).$$

D'après III-3 (partie annexe : page 35) on a :

$$\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} = \frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} = 1 + B_0 \left\{ 1 + A_1 C_1 e_n + \left(C_2 A_1^2 + C_1 A_2\right) e_n^2 + o(e_n^2) \right\};$$

Donc :

$$\left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}}\right)^2 - 1 = (A_1^2-1) + 2B_0C_1A_1^2 e_n + \left(B_0^2A_1^2C_1^2 + 2B_0C_2A_1^3 + 2A_1A_2B_0C_1\right)e_n^2 + o(e_n^2).$$

<u>Posons :</u> $R_n = \dfrac{W_2^{(n)}-S}{W_1^{(n)}-S} = 1 - \dfrac{(\varepsilon_2^{(n+1)}-S)/(\varepsilon_2^{(n)}-S) - 1}{(\Delta e_{n+2}/\Delta e_{n+1})^2 - 1}$.

<u>. Si $A_1 \neq -1$ alors :</u> $1 - R_n = \dfrac{(A_1^2-1) + (2A_1A_2 - A_1^2\bar{K}_1 + A_1^3\bar{K}_1)e_n + o(e_n)}{(A_1^2-1) + 2B_0C_1A_1^2 e_n + o(e_n)}$

$$= 1 + \left(\frac{2A_1A_2 - A_1^2\bar{K}_1 + A_1^3\bar{K}_1 - 2B_0C_1A_1^2}{A_1^2-1}\right)e_n + o(e_n)$$

Par suite : $\lim_n \dfrac{W_2^{(n)}-S}{e_n^3} = \lim_n \dfrac{(\varepsilon_2^{(n)}-S)}{e_n^2}\cdot\dfrac{R_n}{e_n} = \dfrac{A_1A_2}{A_1^2-1}\times\left\{\dfrac{2A_1(B_0C_1A_1-A_2)}{A_1-1} - A_1^2\bar{K}_1\right\}$.

et :

$$\mathcal{L}(A_1, A_2, A_3) = \frac{A_1A_2}{A_1^2-1}\times\left\{\frac{2A_1(B_0C_1A_1 - A_2)}{A_1-1} - A_1^2\bar{K}_1\right\}.$$

<u>. Si $A_1 = -1$ alors :</u>

De la même façon que ci-dessus, on montre que $R_n = O(e_n)$ et par suite $W_2^{(n)}-S = \underbrace{R_n}_{O(e_n)} \times \underbrace{(\varepsilon_2^{(n)}-S)}_{O(e_n^2)} = O(e_n^3)$. (Etude facile).

<u>Lorsque $K_1 = \dfrac{A_1A_2}{A_1-1} = 0$:</u>

$W_2^{(n)}-S = R_n\times(\varepsilon_2^{(n)}-S)$ et (W_2) est au moins d'ordre d'accélération : 3.

Car :

$\varepsilon_2^{(n)}-S = e_n^3\left\{K_2 + K_3e_n + o(e_n)\right\}$,

suivant que $K_2 = 0$ ou $K_2 \neq 0$, On fait un raisonnement analogue à celui de la page 30 (de l'annexe), On trouve que (W_2) est au moins d'ordre d'accélération trois.

RESULTAT: 1.

Dans le cas linéaire (ie : $(S_n) \in \underline{P}_m \cap Lin$), les transformations (ε_2), (T_1) et (S_1) sont au moins d'ordre d'accélération : 2.
La transformation (W_2) est d'ordre d'accélération trois. Elle est plus efficace que (ε_2), (T_1) et (S_1). $\left(I(W_2) \geq 1{,}4422496\ldots\right)$

Cette propriété est évidemment plus forte que l'accélération de la convergence (voir § V).

Remarque 1 :

- La transformation $(\mathcal{P})$, construite par B. GERMAIN-BONNE ([23], chap. I, § III, p: 31) admet comme indice d'efficacité (au sens de la définition 1) : $I(\mathcal{P}_k) \geq (k-1)^{\frac{1}{k}}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
  C'est la colonne $(\mathcal{P}_5)$ qui fournit le meilleur indice.
  $I(\mathcal{P}_5) \geq \sqrt[5]{4} \simeq 1{,}3195079\ldots$.
- La transformation (U_1) de Levin est, sous les hypothèse de la proposition 1, au moins d'ordre d'accélération : 1. En effet :

$$U_1^{(n)} - S = (S_n - S) - \frac{\Delta S_n}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$$= (S_n - S)\times\left\{1 - \frac{B_0(n+1)}{1+B_0(n+1)} + \frac{B_0(n+1)}{1+B_0(n+2)}\times\left(\frac{C_1 B_0(n+2)}{1+B_0(n+2)} - B_1\right)e_n + o(e_n)\right\}.$$

Avec : $B_0 = A_1 - 1$, $B_1 = \dfrac{A_2}{B_0}$, $C_1 = \left(A_2 - A_1 B_1 + B_1 A_1^2\right)/B_0$.

Donc : $\lim\limits_n \dfrac{U_1^{(n)} - S}{e_n} = \lim\limits_n \left(1 - \dfrac{B_0(n+1)}{1+B_0(n+1)}\right) = 0$. ▫

- La transformation (t_1) (resp^t : (v_1)) de LEVIN, est au moins d'ordre d'accélération : 2 et est d'indice d'efficacité $I(t_1) \geq \sqrt{2}$ (resp^t : $I(v_1) \geq \sqrt[3]{2}$). Ceci provient du fait que $v_1^{(n+1)} = S_1^{(n)}$ et $t_1^{(n)}\big|_{Levin} = \varepsilon_2^{(n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Proposition ② :

Si $(S_n)_n \in P_m \cap LOGSF$, $(m \in \mathbb{N},\ m \geq 4)$ et $s : F(s) = s$ est de multiplicité deux, alors :

Transf.	Ordre d'accélérat.	Indice d'efficacité	Coefficient asymptotique de l'erreur :
(ε_2)	égal à : 1	x x x x x x	$\lim\limits_n \dfrac{\varepsilon_2^{(n)}-s}{(S_n-s)} = \dfrac{1}{2}$.
(ρ_2)	Au moins : 2	. $\geq \sqrt{2}$	$\lim\limits_n \dfrac{\rho_2^{(n)}-s}{(S_n-s)^2} = (A_3-A_2^2)/(2A_2)$.
(T_1)	Au moins : 2	. $\geq \sqrt[3]{2}$	$\lim\limits_n (T_1^{(n)}-s)/(S_n-s)^2 = -(A_3+A_2^2)/(2A_2)$.
(S_1)	Au moins : 2	. $\geq \sqrt[3]{2}$	$\lim\limits_n (S_1^{(n)}-s)/(S_n-s)^2 = (A_2^2-A_3)/(2A_2)$.
(W_2)	égal à : 1	x x x x x .	$\lim\limits_n (W_2^{(n)}-s)/(S_n-s) = \dfrac{3}{8}$.

Preuve :

Soit $(S_n) \in P_m \cap LOGSF$,

On a : $e_{n+1} = F(S_n) - F(s) = A_1 e_n + A_2 e_n^2 + \dots + A_m e_n^m + o(e_n^m)$, $(m \geq 4)$

$A_1 = \lim\limits_n \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = 1$ $\left((S_n) \in LOGSF\right)$

s est de multiplicité : 2 , Donc : $A_2 \neq 0$

D'après les relations : III-5 , III-6 , III-7 , pages 36 de l'annexe,

On a , pour la :

• **Transformation (ε_2) :**

$$\cdot\ \frac{e_{n+1}}{e_n} - 1 = A_2 e_n\left\{1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + B_3 e_n^3 + o(e_n^3)\right\} \qquad B_i = A_{i+2}/A_2 \qquad (A_2 \neq 0)$$

$$\cdot\ \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1 = 2A_2 e_n\left\{1 + \left(\frac{A_2^2+3A_3}{2A_2}\right)e_n + \frac{2(A_4+A_2A_3)}{A_2}e_n^2 + o(e_n^2)\right\}$$

$$\cdot\ \frac{\varepsilon_2^{(n)}-s}{e_n} = 1 - \frac{\left(\frac{e_{n+1}}{e_n}-1\right)}{\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}-1\right)} = 1 - \frac{1}{2}\times\left\{1 - \left(\frac{A_3+A_2^2}{2A_2}\right)e_n + o(e_n)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{A_3+A_2^2}{4A_2}\right)e_n + o(e_n) \xrightarrow[(n \nearrow \infty)]{} \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_n \frac{\varepsilon_2^{(n)}-s}{e_n} = \frac{1}{2}\ .}$$

. Transformation (ρ_2) :

$$\cdot\ \frac{\rho_2^{(n)}-S}{e_{n+1}} = 1-2\times\frac{(e_{n+2}/e_{n+1})-1}{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n)-1}$$

$$= 1-2\times\frac{A_2e_n\left\{1+(A_2+B_1)e_n+o(e_n)\right\}}{2A_2e_n\left\{1+\left(\frac{A_2^2+3A_3}{2A_2}\right)e_n+o(e_n)\right\}}\ ;$$

$$= 1-\left\{1-\left(\frac{A_3-A_2^2}{2A_2}\right)e_n+o(e_n)\right\}\ ;$$

$$= \frac{(A_3-A_2^2)}{2A_2}e_n+o(e_n)$$

$\cdot$ Donc : $\lim_n \frac{\rho_2^{(n)}-S}{e_n\cdot e_{n+1}} = \frac{A_3-A_2^2}{2A_2}$

Puisque : $\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$ (hypothèse), on a : $\underline{\lim_n \frac{\rho_2^{(n)}-S}{e_n^2} = \frac{A_3-A_2^2}{2A_2}}$. $\blacksquare$

. Transformation (T_1) :

$$\frac{T_1^{(n)}-S}{e_n} = 1-\frac{(e_{n+1}/e_n)-1}{(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)})-1} \quad \text{avec : } D_1^{(n)} = -\frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}.$$

$$\cdot\ \frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}\frac{\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}-1\right)}{\left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}}-1\right)}$$

$$\cdot\cdot\ \left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}-1\right)\Big/\left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}}-1\right) = \frac{1+\left(\frac{A_2^2+3A_3}{2A_2}\right)e_n+2\frac{(A_4+A_2A_3)}{A_2}e_n^2+o(e_n^2)}{1+3\frac{(A_3+A_2^2)}{2A_2}e_n+\left(2B_2+A_2^2+6A_3\right)e_n^2+o(e_n^2)}\ ;$$

$$= 1-A_2e_n-\left(\frac{5A_3-A_2^2}{2}\right)e_n^2+o(e_n^2)$$

$$\cdots\ \frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \left\{1+2A_2e_n+\left(A_2^2+3A_3\right)e_n^2+o(e_n^2)\right\}\times\left\{1-A_2e_n-\left(\frac{5A_3-A_2^2}{2}\right)e_n^2+o(e_n^2)\right\}$$

Donc :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = 1 + A_2 e_n + \left(\frac{A_3 - A_2^2}{2}\right) e_n^2 + o\left(e_n^2\right) \;;$$

et :

$$\frac{T_1^{(n)} - S}{e_n} = 1 - \frac{1 + B_1 e_n + o(e_n)}{1 + \left(\frac{A_3 - A_2^2}{2A_2}\right) e_n + o(e_n)} \;;$$

$$= 1 - \left[1 + \left(\frac{A_3 + A_2^2}{2A_2}\right) e_n + o(e_n)\right] \;;$$

Par suite : $\lim\limits_{n} \frac{(T_1^{(n)} - S)}{e_n^2} = -\frac{A_3 + A_2^2}{2A_2}$.

• Transformation : (S_1)

$$\frac{S_1^{(n)} - S}{e_{n+1}} = 1 - \frac{(e_{n+2}/e_{n+1}) - 1}{(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}) - 1} \;, \quad D_1^{(n)} = -\frac{\Delta S_n \, \Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} \;;$$

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1\right)}{\left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} - 1\right)} \;;$$

$$= \left\{1 + 2A_2 e_n + 3\left(A_3 + A_2^2\right) e_n^2 + o(e_n^2)\right\} \times \left\{1 - A_2 e_n + \left(\frac{A_2^2 - 5A_3}{2}\right) e_n^2 + o(e_n^2)\right\},$$

$$= 1 + A_2 e_n + \left(\frac{A_3 + 3A_2^2}{2}\right) e_n^2 + o\left(e_n^2\right)$$

Donc :

$$\frac{S_1^{(n)} - S}{e_{n+1}} = 1 - \frac{1 + (A_2 + B_1) e_n + o(e_n)}{1 + \left(\frac{A_3 + 3A_2^2}{2A_2}\right) e_n + o(e_n)} \,,$$

$$= \left(\frac{A_2^2 - A_3}{2A_2}\right) e_n + o(e_n) \;.$$

Par suite : $\lim_n \dfrac{S_1^{(n)} - S}{e_n \cdot e_{n+1}} = \dfrac{A_2^2 - A_3}{2A_2}$.

Puisque : $\lim_n (e_{n+1}/e_n) = 1$, On a :

$$\lim_n \frac{S_1^{(n)} - S}{e_n^2} = \frac{A_2^2 - A_3}{2A_2} .$$

. Transformation (W_2) :

$$\text{On a : } W_2^{(n)} - S = (\varepsilon_2^{(n)} - S) \times \left\{ 1 - \frac{(\varepsilon_2^{(n+1)} - S)/(\varepsilon_2^{(n)} - S) - 1}{(\Delta e_{n+2}/\Delta e_{n+1})^2 - 1} \right\} .$$

D'après l'étude faite dans le cas de la transformation (ε_2) on a :

$\varepsilon_2^{(n)} - S = \frac{1}{2} \cdot e_n \cdot \left\{ 1 + X_1 e_n + X_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\}$ avec :

$X_1 = \dfrac{A_2^2 + A_3}{2A_2}$,

$X_2 = A_3 - \dfrac{(A_4 + A_2 A_3)(A_3 + A_2^2 + A_2)}{A_2^2}$.

Donc :

$$. \quad \varepsilon_2^{(n+1)} - S = \frac{e_n}{2} \times \left\{ 1 + A_2 e_n + A_3 e_n^2 + o(e_n^2) \right\} \times \left\{ 1 + X_1 e_n + (X_2 + A_2 X_1) e_n^2 + o(e_n^2) \right\} ;$$

$$= \frac{1}{2} e_n \left\{ 1 + (A_2 + X_1) e_n + (A_3 + 2A_2 X_1 + X_2) e_n^2 + o(e_n^2) \right\} ,$$

$$. \quad \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = 1 + A_2 e_n \left\{ 1 + \left(\frac{A_3 + A_2 X_1}{A_2} \right) e_n + o(e_n) \right\} ,$$

et :

$$\left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} \right)^2 - 1 = 4 A_2 e_n \left\{ 1 + \left(\frac{3A_3 + 5A_2^2}{2A_2} \right) e_n + o(e_n) \right\} ,$$ d'après la relation III-8, page 37 de l'annexe.

Donc :

$$\frac{(\varepsilon_2^{(n+1)} - S)/(\varepsilon_2^{(n)} - S) - 1}{(\Delta e_{n+2}/\Delta e_{n+1})^2 - 1} = \frac{1}{4} \times \left\{ 1 + \frac{A_2(2X_1 - 5A_2) - A_3}{2A_2} e_n + o(e_n) \right\} .$$

$$= \frac{1}{4} \times \left\{ 1 - 2A_2 e_n + o(e_n) \right\}$$

Par suite :

$$W_2^{(n)}-S = (\mathcal{E}_2^{(n)}-S) \times \left\{ \frac{3}{4} + \frac{A_2}{2} e_n + o(e_n) \right\} .$$

$$\lim_n \frac{W_2^{(n)}-S}{e_n} = \frac{3}{4} \lim \frac{\mathcal{E}_2^{(n)}-S}{e_n} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} .$$

. Cas où la multiplicité j de S : $F(S)=S$, est telle que : $j>2$.

Proposition 3 :

Si $(S_n) \in \mathcal{P}_m$, $(m \in \mathbb{N}, m \geq 9)$, de limite S et $j \geq 3$ étant la multiplicité de S, alors :

Transformations	Ordre d'accél.	Indice d'effic.	Coefficient asymptotique de l'erreur :
$(\mathcal{E}_2)$	1	x x x x x	$\lim_n (\mathcal{E}_2^{(n)}-S)/e_n = \left(1-\frac{1}{j}\right)$.
(ρ_2)	1	x x x x x	$\lim (\rho_2^{(n)}-S)/e_n = \left(1-\frac{2}{j}\right)$.
(W_2)	1	x x x x x	$\lim_n (W_2^{(n)}-S)/e_n = \left(1-\frac{1}{j}\right)\left(1-\frac{1}{2j}\right)$.
(T_1)	Au moins : 2	Au moins : $\sqrt[3]{2}$	$\lim_n (T_1^{(n)}-S)/e_n^2 = -A_{j+1}/jA_j$.
(S_1)	Au moins : 2	Au moins : $\sqrt[3]{2}$	$\lim_n (S_1^{(n)}-S)/e_n^2 = -A_{j+1}/jA_j$.

Preuve :

Le développement des rapport : $\frac{e_{n+1}}{e_n}$, $\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}$, $\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}$ et $\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}}$ en fonction de e_n, est fait dans la partie annexe (pages : 37, 38, 39, 40 et 41), expressions : III-9, III-10, III-11 et III-12.

On a d'après ces relations :

. Transformation (ε_2) :

On a d'après les expressions III-9 et III-10 pages : 37 et 38 (annexe) :

$$\frac{\varepsilon_2^{(n)}-S}{e_n} = 1 - \frac{A_j e_n^{j-1}\left\{ \sum_{i=0}^{j+4} B_i e_n^i + o(e_n^{j+4}) \right\}}{A_j e_n^{j-1}\left\{ \sum_{i=0}^{j+4} (i+j) B_i e_n^i + \sum_{i=0}^{4} H_i e_n^{j+i} + \sum_{i=0}^{3} M_i e_n^{2j-2+i} + \sum_{i=0}^{1} L_i e_n^{3j-3+i} + o(e_n^{j+4}) \right\}},$$

« B_i, H_i, M_i et L_i sont exprimés dans la partie annexe pages : 37, 38, 39. » ($A_j \neq 0$: S est de multip. j)

$$\frac{\varepsilon_2^{(n)}-S}{e_n} = 1 - \frac{1 + \sum_{i=1}^{j+4} B_i e_n^i + o(e_n^{j+4})}{j + \sum_{i=1}^{j+4} (i+j) B_i e_n^i + \sum_{i=0}^{4} H_i e_n^{j+i} + \sum_{i=0}^{3} M_i e_n^{2j-2+i} + \sum_{i=0}^{1} L_i e_n^{3j-3+i} + o(e_n^{j+4})};$$

$$= 1 - \frac{1}{j} \times \frac{1 + \sum_{i=1}^{j+4} B_i e_n^i + o(e_n^{j+4})}{1 + \sum_{i=1}^{j+4} \left(\frac{i+j}{j}\right) B_i e_n^i + \sum_{i=0}^{4} \frac{H_i}{j} e_n^{j+i} + \sum_{i=0}^{3} \frac{M_i}{j} e_n^{2j-2+i} + \sum_{i=0}^{1} \frac{L_i}{j} e_n^{3j-3+i} + o(e_n^{j+4})}$$

$$\xrightarrow[(n \nearrow \infty)]{} \left(1 - \frac{1}{j}\right)$$

Donc : $\dfrac{\varepsilon_2^{(n)}-S}{e_n} \xrightarrow[n \nearrow \infty]{} \left(1 - \frac{1}{j}\right) \neq 0$.

. Transformation (ρ_2) :

On a : $$\frac{\rho_2^{(n)}-S}{e_{n+1}} = 1 - 2 \times \frac{(e_{n+2}/e_{n+1}) - 1}{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n) - 1}$$

$\xrightarrow[(n \nearrow \infty)]{} \left(1 - \frac{2}{j}\right)$: il suffit de suivre exactement le même enchaînement que ci-dessus, (on utilise : III-10 et III-12).

et puisque : $\lim\limits_{n} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$, on a :

$$\lim_{n} \frac{\varrho_2^{(n)} - S}{e_n} = \lim_{n} \frac{\varrho_2^{(n)} - S}{e_{n+1}} \cdot \frac{e_{n+1}}{e_n} = \left(1 - \frac{2}{j}\right) \neq 0 \quad .$$

. Transformation (T_1) :

On a : $$\frac{T_1^{(n)} - S}{e_n} = 1 - \frac{(e_{n+1}/e_n) - 1}{(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}) - 1} \quad \text{avec : } D_1^{(n)} = -\frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n} \, ,$$

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} \cdot \frac{\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1\right)}{\left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} - 1\right)} \quad ;$$

$$\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1\right) \Big/ \left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} - 1\right) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{j+1} (i+j) B_i e_n^i + \sum\limits_{i=0}^{4} H_i e_n^{j+i} + \sum\limits_{i=0}^{3} M_i e_n^{2j-2+i} + \sum\limits_{i=0}^{1} L_i e_n^{3j-3+i} + o(e_n^{j+1})}{\sum\limits_{i=0}^{j+1} (i+j) B_i e_n^i + U e_n^{j-1} + \sum\limits_{i=0}^{4} U_i e_n^{j+i} + \sum\limits_{i=0}^{3} V_i e_n^{2j-2+i} + \sum\limits_{i=0}^{1} W_i e_n^{3j-3+i} + o(e_n^{j+1})} \, ,$$

« D'après les expressions III-10 et III-11 (Annexe : pages 38 et 40), les constantes B_i, H_i, M_i, L_i, U, U_i, V_i et W_i sont exprimées dans la partie annexe, pages : 37, 39, 40 et 41.

En divisant numérateur et dénominateur par $\sum\limits_{i=0}^{j+1} (i+j) B_i e_n^i$ et en développant à l'ordre $(j+1)$ on a :

$$\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1\right) \Big/ \left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} - 1\right) = \frac{1 + \frac{H_0}{j} e_n^j + \frac{1}{j}\left[H_1 - \left(\frac{j+1}{j}\right) B_1 H_0\right] e_n^{j+1} + \frac{M_0}{j} e_n^{2j-2} + o(e_n^{j+1})}{1 + \frac{U}{j} e_n^{j-1} + \frac{1}{j}\left[U_0 - \left(\frac{j+1}{j}\right) B_1 U\right] e_n^j + \frac{1}{j}\left[U_1 - \left(\frac{j+1}{j}\right) B_1 U_0 + \left(\frac{j+1}{j}\right)^2 B_1^2 U - \left(\frac{j+2}{j}\right) B_2 U\right] e_n^{j+1} + \frac{V_0}{j} e_n^{2j-2} + o(e_n^{j+1})}$$

On pose : . $Y_1 = U_0 - \left(\frac{j+1}{j}\right) B_1 U$, $\left(U = j(j-1) A_j\right)$,

. $Y_2 = U_1 - \left(\frac{j+1}{j}\right) B_1 U_0 + \left(\frac{j+1}{j}\right)^2 B_1^2 U - \left(\frac{j+2}{j}\right) B_2 U$,

$$\left(B_i = \frac{A_{i+j}}{A_j} \quad , \quad H_0 = j A_{j+1} \right)$$

Donc :

$$\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}-1\right) / \left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}}-1\right) = \frac{1+\frac{H_0}{j}e_n^j+\frac{1}{j}\left[H_1-\frac{j+1}{j}B_1H_0\right]e_n^{j+1}+\frac{M_0}{j}e_n^{2j-2}+o(e_n^{j+1})}{1+\frac{U}{j}e_n^{j-1}+\frac{Y_1}{j}e_n^j+\frac{Y_2}{j}e_n^{j+1}+\frac{V_0}{j}e_n^{2j-2}+o(e_n^{j+1})},$$

$$= \left\{1+\frac{H_0}{j}e_n^j+\frac{1}{j}\left[H_1-\frac{(j+1)}{j}B_1H_0\right]e_n^{j+1}+\frac{M_0}{j}e_n^{2j-2}+o(e_n^{j+1})\right\} \times \left\{1-\frac{U}{j}e_n^{j-1}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots-\frac{Y_1}{j}e_n^j-\frac{Y_2}{j}e_n^{j+1}+\left(\frac{U^2}{j^2}-\frac{V_0}{j}\right)e_n^{2j-2}+o(e_n^{j+1})\right\};$$

$$= 1-(j-1)A_je_n^{j-1}+\frac{(H_0-Y_1)}{j}e_n^j+\frac{1}{j}\left[H_1-\frac{(j+1)}{j}B_1H_0-Y_2\right]e_n^{j+1}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{j}\left[M_0+\frac{U^2}{j}-V_0\right]e_n^{2j-2}+o(e_n^{j+1}); \qquad \left(U=j(j-1)A_j \neq 0\right)$$

Par suite :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \left\{1+A_je_n^{j-1}\left\{j+(j+1)B_1e_n+(j+2)B_2e_n^2\right\}+o(e_n^{j+1})\right\} \times \left\{1-(j-1)A_je_n^{j-1}\cdot\left\{1-\frac{(H_0-Y_1)}{U}e_n+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots-\frac{\left(H_1-Y_2-\frac{(j+1)}{j}B_1H_0\right)}{U}e_n^2-\frac{1}{U}\left[M_0+\frac{U^2}{j}-V_0\right]e_n^{j-1}\right\}+o(e_n^{j+1})\right\};$$

$$= 1+A_je_n^{j-1}\left\{j+(j+1)B_1e_n+(j+2)B_2e_n^2-(j-1)+\frac{(H_0-Y_1)}{jA_j}e_n+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{jA_j}\left[H_1-Y_2-\left(\frac{j+1}{j}\right)B_1H_0\right]e_n^2+\frac{1}{jA_j}\left[M_0+\frac{U^2}{j}-V_0\right]e_n^{j-1}+o(e_n^2)\right\},$$

$$= 1+A_je_n^{j-1}\left\{1+\left[(j+1)B_1+\frac{H_0-Y_1}{jA_j}\right]e_n+\left[(j+2)B_2+\frac{H_1-Y_2}{jA_j}-\frac{(j+1)}{j^2A_j}B_1H_0\right]e_n^2+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{jA_j}\left[M_0+\frac{U^2}{j}-V_0\right]e_n^{j-1}+o(e_n^2)\right\}.$$

Donc, On a :

$$\frac{T_1^{(n)}-S}{e_n} = 1-\frac{A_je_n^{j-1}\left\{1+B_1e_n+o(e_n)\right\}}{A_je_n^{j-1}\left\{1+\left[(j+1)B_1+\frac{H_0-Y_1}{jA_j}\right]e_n+o(e_n)\right\}};$$

$$= 1-\left\{1+\left[-jB_1+\frac{Y_1-H_0}{jA_j}\right]e_n+o(e_n)\right\};$$

Donc :

$$\frac{T_1^{(n)}-S}{e_n} = \left(jB_1 + \frac{H_0-Y_1}{jA_j}\right)e_n + o(e_n)$$

Ou alors :

$$\frac{T_1^{(n)}-S}{e_n^2} = jB_1 + \frac{H_0-Y_1}{jA_j} + \frac{o(e_n)}{e_n} \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} jB_1+\frac{H_0-Y_1}{jA_j}.$$

On a : $U_0 = Q_0 + (j+1)PB_1 + jP_0$, $P=(j-1)A_j$, $P_0=(j-1)A_{j+1}$

$Y_1 = U_0 - \left(\frac{j+1}{j}\right)B_1U$, $U = j(j-1)A_j$, $H_0 = jA_{j+1}$

$Q_0 = H_0 + (j+1)A_{j+1}$

Donc :

$$H_0-Y_1 = jA_{j+1} - U_0 + \left(\frac{j+1}{j}\right)B_1U = -(j^2+1)A_{j+1} ,$$

$$\left(jB_1+\frac{H_0-Y_1}{jA_j}\right) = -\frac{B_1}{j} = -\frac{A_{j+1}}{jA_j}.$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_n \frac{T_1^{(n)}-S}{e_n^2} = -\frac{A_{j+1}}{jA_j}}$$

. Transformation $(\mathcal{S}_1)$:

$$\frac{S_1^{(n)}-S}{e_{n+1}} = 1 - \frac{(e_{n+2}/e_{n+1})-1}{(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)})-1} \quad \text{avec : } D_1^{(n)} = -\frac{\Delta e_n\,\Delta e_{n+1}}{\Delta^2 e_n} ,$$

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} \cdot \frac{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}-1}{\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}}-1}$$

$$= \left\{1 + A_j e_n^{j-1}\left\{j + (j+1)B_1e_n + (j+2)B_2e_n^2 + Ue_n^{j-1} + o(e_n^2)\right\} + o(e_n^{j+1})\right\} \times \left\{1 + \cdots\right.$$

$$\cdots - (j-1)A_je_n^{j-1}\left\{1 - \frac{(H_0-Y_1)}{U}e_n - \frac{(H_1-Y_2-\frac{(j+1)}{j}B_1H_0)}{U}e_n^2 - \frac{1}{U}\left[M_0+\frac{U^2}{j}-V_0\right]e_n^{j-1}\right\} + \cdots$$

$$\left.\cdots + o(e_n^{j+1})\right\}; \quad (j\geq 3)$$

Ceci étant, d'après l'expression IV-11 (Annexe, p:40) et la relation $\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}-1\right)/\left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}}-1\right)$, précédente.

A l'ordre j on a :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = 1 + A_j e_n^{j-1}\left\{1+\left[(j+1)B_1+\frac{H_0-Y_1}{jA_j}\right]e_n+o(e_n)\right\}+o(e_n^j)\ ;$$

et :
$$\frac{S_1^{(n)}-S}{e_{n+1}} = 1-\frac{A_j e_n^{j-1}\left[1+B_1e_n+o(e_n)\right]}{A_j e_n^{j-1}\left[1+\left[(j+1)B_1+\frac{H_0-Y_1}{jA_j}\right]e_n+o(e_n)\right]},$$

$$= \left(jB_1+\frac{H_0-Y_1}{jA_j}\right)e_n+o(e_n)$$. Les développements de $\frac{T_1^{(n)}-S}{e_n}$ et $\frac{S_1^{(n)}-S}{e_{n+1}}$ ne diffèrent qu'à partir du degré deux.

<u>On a donc</u> : $\lim\limits_n \frac{S_1^{(n)}-S}{e_{n+1}} = -\frac{A_{j+1}}{jA_j}$. Puisque : $\lim\limits_n \frac{e_{n+1}}{e_n}=1$, on a :

$$\boxed{\lim_n \frac{S_1^{(n)}-S}{e_n^2} = -\frac{A_{j+1}}{jA_j}\ .}$$

.Transformation (W_2) :

D'après l'étude faite dans le cas de la transformation (ε_2), on a :

$$\frac{\varepsilon_2^{(n)}-S}{e_n} = 1-\frac{1}{j}\times\left\{\frac{1+B_1e_n+B_2e_n^2+o(e_n^2)}{1+\left(\frac{j+1}{j}\right)B_1e_n+\left(\frac{j+2}{j}\right)e_n^2+o(e_n^2)}\right\}\ ,\ B_1=\frac{A_{j+1}}{A_j}\ ,\ B_2=\frac{A_{j+2}}{A_j}\ .$$

Donc :
$$\varepsilon_2^{(n)}-S = \left(1-\frac{1}{j}\right)e_n\times\left\{1+\frac{B_1}{j(j-1)}e_n+\frac{(2B_2-[j+1]B_1^2)}{j(j-1)}e_n^2+o(e_n^2)\right\}.$$

Donc :

$$\varepsilon_2^{(n+1)} - S = \left(1-\frac{1}{j}\right) e_n \times \left\{ 1 + \frac{B_1}{j(j-1)} e_n + \frac{2B_2-(j+1)B_1^2}{j(j-1)} e_n^2 + A_j e_n^{j-1} + o(e_n^2) \right\},$$

et :

$$\frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = 1 + A_j e_n^{j-1} \times \left\{ 1 + o(1) \right\}.$$

De même, d'après l'expression III-11 (page : 40 de l'annexe) On a :

$$\left(\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}}\right)^2 = 1 + 2j A_j e_n^{j-1} + 2(j+1) A_{j+1} e_n^j + o(e_n^j)$$

$$= 1 + 2j A_j e_n^{j-1} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{j+1}{j}\right) B_1 e_n + o(e_n) \right\}$$

Donc :

$$\frac{(\varepsilon_2^{(n+1)} - S)/(\varepsilon_2^{(n)} - S) - 1}{(\Delta e_{n+2}/\Delta e_{n+1})^2 - 1} = \frac{A_j e_n^{j-1} \left\{ 1 + o(1) \right\}}{2j A_j e_n^{j-1} \left\{ 1 + o(1) \right\}}, \quad \left(o(1) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \right).$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2j}.$$

et $\lim\limits_{n} (W_2^{(n)} - S)/e_n = \lim\limits_{n} \left((\varepsilon_2^{(n)} - S)/e_n \right) \times \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = \left(1 - \frac{1}{j}\right)\left(1 - \frac{1}{2j}\right).$ ☐

Résultat : 2.

Dans le cas des suites (S_n) : $S_{n+1} = F(S_n)$ où la multiplicité j de S : $F(S) = S$, est superieur ou égale à deux, seules les transformations (T_1) et (S_1) sont d'ordre d'accélération au moins égal à deux. (ρ_2) n'est d'ordre $r \geq 2$ que lorsque $j = 2$.
(W_2) [resp^t : (ε_2)] n'est d'ordre d'accélération $r \geq 3$ [resp^t : $r \geq 2$] que si $j = 1$.

Résultat 3.

Les meilleurs indices d'efficacité des transformations (T_1), (S_1), (ε_2), (ρ_2) et (W_2), dans le cas où $(S_n) \in \mathcal{P}_m$, sont donnés par rapport à la multiplicité j de s : $F(s)=s$, par le :

TABLEAU 1.

Multiplicité :	Meilleur indice d'efficacité :	Transformation (s) associée (s) :
$j=1$	$\sqrt[3]{3} \simeq 1,4422496...$	(W_2)
$j=2$	$\sqrt{2} \simeq 1,4142136...$	(ρ_2)
$j>2$	$\sqrt[3]{2} \simeq 1,259921...$	(T_1), (S_1)

On remarque qu'il est possible d'améliorer ces indices d'efficacité à l'aide de l'algorithme (φ), établi dans le chapitre II, § III-4, dont les règles sont :

$(\varphi_0) : (S_n) \longrightarrow (\varphi_0^{(n)})$ étant la transformation à améliorer, supposée d'ordre d'accélération $r \in \mathbb{N}^*$, $r>1$.

$$(\varphi_p) : \quad \varphi_p^{(n)} = \varphi_{p-1}^{(n)} - \frac{1}{(p+r-1)} \cdot \frac{\Delta \varphi_{p-1}^{(n)}}{\Delta\left(\varphi_{p-1}^{(n)} - S_n\right)} \cdot \left(\varphi_{p-1}^{(n)} - S_n\right), \quad p \in \mathbb{N}^*, \ n \in \mathbb{N}.$$

Un premier résultat, relatif à cet algorithme est donné par le :

Théorème 1 :

Soit $(S_n) \in \mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}$: $m \geq j+2$ où $j \geq 2$ est la multiplicité de s : $F(s)=s$ et (φ_0) : d'ordre d'accélération $r \geq 2$ $(r \in \mathbb{N})$. On a :

$\forall p \in \mathbb{N}$, (φ_p) est au moins d'ordre d'accélération $(p+r)$.

Preuve : par récurrence sur p.

Soit $(S_n)_n \in \mathcal{P}_m$ avec : $m \geq j+2$.

On a :

$$e_{n+1} = F(S_n) - F(S) = A_1 e_n + A_2 e_n^2 + \cdots + A_{j-1} e_n^{j-1} + A_j e_n^j + \cdots + A_{j+2} e_n^{j+2} + o(e_n^{j+2}),$$

$$(j \geq 2) \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_j \neq 0, \\ A_2 = A_3 = \cdots = A_{j-1} = 0, \end{cases} \qquad (j \text{ est la multiplicité de } S).$$

Donc : $e_{n+1} = e_n \times \left\{ 1 + A_j e_n^{j-1} \left[1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right] \right\}$ où :

$B_i = \dfrac{A_{i+j}}{A_j}$ $i = 1, 2$ (Pour simplifier, on note B_i au lieu de $B_{i,j}$).

(φ_0) étant d'ordre $r \geq 2$, donc : $\exists\, c_0 \neq 0$ tq $\lim_n \dfrac{\varphi_0^{(n)} - S}{e_n^r} = c_0$,

ou alors : $\varphi_0^{(n)} - S = c_0 e_n^r \left\{ 1 + c_1 e_n + c_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\}$ c_1, c_2 sont des constantes.

(c_1 et c_2 sont calculées d'une façon analogue à celle faite, à la preuve de la proposition 3.)

$$\begin{aligned}
\text{Donc : } \varphi_0^{(n+1)} - S &= c_0 e_{n+1}^r \left\{ 1 + c_1 e_{n+1} + c_2 e_{n+1}^2 + o(e_{n+1}^2) \right\}; \\
&= c_0 e_n^r \left\{ 1 + r A_j e_n^{j-1} + r A_{j+1} e_n^j + C_r^2 A_j^2 e_n^{2j-2} + o(e_n^2) \right\} \times \left\{ 1 + c_1 e_n + \cdots \right. \\
&\qquad \left. \cdots + c_2 e_n^2 + c_1 A_j e_n^j + o(e_n^2) \right\}; \\
&= c_0 e_n^r \left\{ 1 + c_1 e_n + c_2 e_n^2 + r A_j e_n^{j-1} + (r A_{j+1} + r c_1 A_j + c_1 A_j) e_n^j + \cdots \right. \\
&\qquad \left. \cdots + C_r^2 A_j^2 e_n^{2j-2} + o(e_n^2) \right\}.
\end{aligned}$$

Par suite :

$$\frac{\varphi_0^{(n+1)} - S}{\varphi_0^{(n)} - S} - 1 = r A_j e_n^{j-1} \left\{ 1 + \left(B_1 + \frac{c_1}{r} \right) e_n + \frac{(r-1)}{2} A_j e_n^{j-1} + o(e_n) \right\}.$$

D'autre part :

$$\frac{\varphi_0^{(n+1)} - S}{e_{n+1}} = c_0 e_n^{r-1} \left\{ 1 + c_1 e_n + c_2 e_n^2 + (r-1) A_j e_n^{j-1} + \left[(r-1) A_{j+1} + r c_1 A_j \right] e_n^j + C_{r-1}^2 A_j^2 e_n^{2j-2} + o(e_n^2) \right\}.$$

Donc :

$$\frac{\dfrac{\varphi_0^{(n+1)}-S}{e_{n+1}}-1}{\dfrac{\varphi_0^{(n)}-S}{e_n}-1} = 1 - C_0 e_n^{r-1}\frac{\left\{(r-1)A_j e_n^{j-1} + \left[(r-1)A_{j+1} + rC_1A_j\right]e_n^{j} + C_{r-1}^2 A_j^2 e_n^{2j-2} + o(e_n^j)\right\}}{1 - C_0 e_n^{r-1} + o(e_n)},$$

$$= 1 - C_0(r-1)A_j e_n^{(r-1)+(j-1)} \times \frac{1 + \left(B_1 + \frac{rC_1}{r-1}\right)e_n + \frac{C_{r-1}^2}{r-1}A_j e_n^{j-1} + o(e_n)}{1 - C_0 e_n^{r-1} + o(e_n)},$$

$$= 1 - C_0(r-1)A_j e_n^{r+j-2}\left\{1 + \left(B_1 + \frac{rC_1}{r-1}\right)e_n + \frac{C_{r-1}^2}{r-1}A_j e_n^{j-1} + C_0 e_n^{r-1} + o(e_n)\right\}$$

et :

$$\frac{\varphi_0^{(n+1)} - S_{n+1}}{\varphi_0^{(n)} - S_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \times \frac{\left(\dfrac{\varphi_0^{(n+1)}-S}{e_{n+1}} - 1\right)}{\left(\dfrac{\varphi_0^{(n)}-S}{e_n} - 1\right)},$$

$$= \left\{1 + A_j e_n^{j-1}\left[1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + o(e_n^2)\right]\right\} \times \left\{1 - C_0(r-1)A_j e_n^{r+j-2}\left[1 + \left(B_1 + \frac{rC_1}{r-1}\right)e_n + \cdots \right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots + \frac{C_{r-1}^2}{r-1}A_j e_n^{j-1} + C_0 e_n^{r-1} + o(e_n)\right]\right\},$$

$$(r \geq 2,\ j \geq 2).$$

$$\frac{\varphi_0^{(n+1)} - S_{n+1}}{\varphi_0^{(n)} - S_n} = 1 + A_j e_n^{j-1}\left\{1 + B_1 e_n - C_0(r-1)e_n^{r-1} + o(e_n)\right\}.$$

Par suite :

$$\varphi_1^{(n)} - S = \left(\varphi_0^{(n)} - S\right) \times \left\{1 - \frac{1}{r} \times \frac{\dfrac{(\varphi_0^{(n+1)} - S)}{(\varphi_0^{(n)} - S)} - 1}{\dfrac{(\varphi_0^{(n+1)} - S_{n+1})}{(\varphi_0^{(n)} - S_n)} - 1}\right\},$$

$$= \left(\varphi_0^{(n)} - S\right) \times \left\{1 - \frac{1}{r} \cdot \frac{rA_j e_n^{j-1}\left\{1 + \left(B_1 + \frac{C_1}{r}\right)e_n + \frac{(r-1)}{2}A_j e_n^{j-1} + o(e_n)\right\}}{A_j e_n^{j-1}\left\{1 + B_1 e_n - C_0(r-1)e_n^{r-1} + o(e_n)\right\}}\right\},$$

$$= \left(\varphi_0^{(n)} - S\right) \times \left\{1 - \left[1 + \frac{C_1}{r}e_n + \frac{(r-1)}{2}A_j e_n^{j-1} + C_0(r-1)e_n^{r-1} + o(e_n)\right]\right\};$$

Donc : $\varphi_1^{(n)} - S = \left(\varphi_0^{(n)} - S\right) \times \left\{ -\frac{c_1}{r} e_n - \frac{(r-1)}{2} A_j e_n^{j-1} - c_0 (r-1) e_n^{r-1} + o(e_n) \right\}$

$$\text{et : } \lim_n \frac{\varphi_1^{(n)} - S}{e_n^{r+1}} = \lim_n \underbrace{\left\{ \frac{\varphi_0^{(n)} - S}{e_n^r} \right\}}_{\xrightarrow[n]{} C_0} \times \underbrace{\left\{ -\frac{c_1}{r} - \frac{(r-1)}{2} A_j e_n^{(j-2)} - c_0 (r-1) e_n^{r-2} + \frac{o(e_n)}{e_n} \right\}}_{\xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \text{constante}} \quad " j \geq 2,\ r \geq 2 ".$$

$$\boxed{(\varphi_1) \text{ est donc d'ordre d'accélération, au moins, } (r+1).}$$

le théorème est montré pour $p = 1$.

Supposons que : (φ_{p-1}) soit d'ordre $(p+r-1)$,

alors, en remplaçant r par $(p+r-1)$ dans ce qui précède, on obtient :

(φ_p) d'ordre $(p+r-1) + 1 = p + r$. ∎

Remarque 2:

Si : 1) (φ_0) est l'une des transformations (T_1) ou (S_1) ;
2) $j \geq 2$: la multiplicité de S : $F(S)=S$;
alors :
- $\exists C$: $\lim_n \dfrac{(\varphi_p^{(n)} - S)}{(S_n - S)^{p+2}} = C$, $(p \in \mathbb{N})$
- L'indice d'efficacité de (φ_p) est $I(\varphi_p) \geq (p+2)^{\frac{1}{p+3}}$.

Preuve:

D'après le théorème ① et puisque, si $j \geq 2$ (T_1) et (S_1) sont au moins d'ordre d'accélération $r \geq 2$. ◻

Remarque 3:

Si: $j=2$ (S : racine double de F) et $(\varphi_0) = (\varphi_2)$,
alors :
- $\exists C$: $\lim_n \dfrac{(\varphi_p^{(n)} - S)}{(S_n - S)^{p+2}} = C$, $(p \in \mathbb{N})$,
- $I(\varphi_p) \geq (p+2)^{\frac{1}{p+2}}$

Preuve :

Si $j=2$, On a, d'après le théorème 1, (φ_2) : d'ordre $r \geq 2$.

Des résultats analogues à ceux de TAB-1 sont donnés par le :

TAB-2 :

Multiplicité:	Meilleur indice obtenu	Transformation(s) φ_0, amelioreé(s)	(φ_p) associée :
$j=2$	$\sqrt[3]{3} \simeq 1,4422496$	(φ_2)	(φ_1)
$j \geq 3$	$\sqrt[5]{4} \simeq 1,3195079$	(T_1) , (S_1)	(φ_2)

Avant de lier cette notion d'ordre d'accélération d'une transformation à celle de la sur-accélération d'une famille de suites et d'amélioration de la vitesse de convergence d'une transformation, examinons les ordres d'accélération de : (T_1), (S_1), (ε_1), (U_1) et (ρ_2), dans le cas des suites de E_Δ.

III - ORDRE D'ACCELERATION - CAS DE E_Δ :

Rappelons que : $\mathbf{E}_\Delta = \left\{ (S_n) \ : \ \Delta S_n = \sum_{i\geq 1} a_i h_i(n) \, , \ \lim_n h_i(n) = 0 \ \forall i \right\}$.

Notations - hypothèses :

- On choisit : $g_i(n) = \Delta S_{n+i-1} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}$.
- On pose : $b_i = \dfrac{a_i}{a_1}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$

$r_i(n) = h_i(n+1)/h_i(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} : h_i(n) \neq 0$.

$\lambda_i(n) = h_{i+1}(n)/h_i(n) \quad$ " $\quad$ " .

$(\mu_i(n))_n : \dfrac{\lambda_{i+1}(n)}{\lambda_i(n)} = \mu_i(n) + o(1)$. On suppose que $(\exists \mu_i \in \mathbb{R}$: $\lim_n \mu_i(n) = \mu_i \quad (\forall i))$.

Remarque 4

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^* \, , \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ \lambda_i(n+1) = \frac{\lambda_i(n)}{r_i(n)} \times r_{i+1}(n) \, .}$$

Théorème 1 :

Soit $(S_n) \in E_\Delta$ telle que : $\forall i \in \mathbb{N}^*$

1°) $h_{i+1}(n) = o(h_i(n))$;

2°) $\lim_n r_i(n) = r_i$: $|r_i| < 1$,

alors : a) les transformations (T_1), $(S_1)^{[*]}$, (ε_2) et (U_1) sont d'ordre d'accélération supérieur à 1. Elles accélèrent (S_n) - (définition 1) ;

(ρ_2) est au moins d'ordre : 1

Si de plus : 3°) $r_1(n) = r_1 \quad \forall n$;

4°) $\Delta_1(n) = O(h_1(n))$;

alors : b) (T_1), $(S_1)^{[*]}$ et (ε_2) sont au moins d'ordre d'accélération : 2

(ρ_2) est au moins d'ordre 1. (U_1) est d'ordre supérieur à 1.

[*] : On suppose que $r_1 \neq 0$ pour la transformation (S_1).

Preuve :

Si $(S_n) \in E_\Delta$ alors :

- $\Delta S_n = \Delta e_n = \sum_{i \geq 1} a_i h_i(n)$, $e_n := S_n - S$;
- $(S_n - S) = -\sum_{i \geq 1} a_i H_i(n)$ où : $H_i(n) = \sum_{j \geq 0} h_i(n+j) \quad \forall i, \forall n$.

- $$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{h_1(n+1)}{h_1(n)} \times \left\{ \frac{1 + b_2 \frac{h_2(n+1)}{h_1(n+1)} + b_3 \frac{h_3(n+1)}{h_2(n+1)} \times \frac{h_2(n+1)}{h_1(n+1)} + \cdots}{1 + b_2 \frac{h_2(n)}{h_1(n)} + b_3 \frac{h_3(n)}{h_2(n)} \times \frac{h_2(n)}{h_1(n)} + \cdots} \right\},$$

$$= r_1(n) \times \left\{ \frac{1 + b_2 \Delta_1(n+1) + b_3 \Delta_1(n+1)\Delta_2(n+1) + b_4 \Delta_1(n+1)\Delta_2(n+1)\Delta_3(n+1) + \cdots}{1 + b_2 \Delta_1(n) + b_3 \Delta_1(n)\Delta_2(n) + b_4 \Delta_1(n)\Delta_2(n)\Delta_3(n) + \cdots} \right\},$$

$$= r_1(n) \times \left\{ \frac{1 + b_2 \frac{r_2(n)}{r_1(n)} \Delta_1(n) + b_3 \frac{r_3(n)}{r_1(n)} \mu_1(n) \Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n))}{1 + b_2 \Delta_1(n) + b_3 \mu_1(n) \Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n))} \right\}$$

Car : $\quad \Delta_i(n+1) = \dfrac{r_{i+1}(n)}{r_i(n)}\,\Delta_i(n)$.

Donc :

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = r_1(n) \times \left\{ 1 + b_2\left(\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right)\Delta_1(n) + L_n\,\Delta_1^2(n) + o\left(\Delta_1^2(n)\right)\right\} , \quad \left(\Delta_1(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$$

$$\text{où : } L_n = b_3\,\mu_1(n)\left(\frac{r_3(n)}{r_2(n)} - 1\right) - b_2^2\left(\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right) ,$$

Par suite :

$$(13) : \quad \boxed{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1 = \left(r_1(n) - 1\right)\left\{1 + b_2\left(\frac{r_2(n) - r_1(n)}{r_1(n) - 1}\right)\Delta_1(n) + L_n\frac{r_1(n)}{r_1(n)-1}\,\Delta_1^2(n) + o\left(\Delta_1^2(n)\right)\right\}} ,$$

$r_1(n) \neq 1$ à partir d'un certain rang.

De même :

$$(14) : \quad \boxed{\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} - 1 = \left(r_1(n+1) - 1\right)\left\{1 + b_2\left(\frac{r_2(n)}{r_1(n)}\right)\left(\frac{r_2(n+1) - r_1(n+1)}{r_1(n+1) - 1}\right)\Delta_1(n) + L_{n+1}\frac{r_2^2(n)}{r_1^2(n)}\frac{r_1(n+1)}{\left(r_1(n+1)-1\right)}\,\Delta_1^2(n) + o\left(\Delta_1^2(n)\right)\right\}} ,$$

D'autre part :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{S - S_{n+1}}{S - S_n} = \frac{\sum_{i\geq 1} a_i\,H_i(n+1)}{\sum_{i\geq 1} a_i\,H_i(n)} ,$$

$$= \frac{H_1(n+1)}{H_1(n)} \times \frac{1 + b_2\dfrac{H_2(n+1)}{H_1(n+1)} + b_3\dfrac{H_3(n+1)}{H_2(n+1)}\dfrac{H_2(n+1)}{H_1(n+1)} + \cdots}{1 + b_2\dfrac{H_2(n)}{H_1(n)} + b_3\dfrac{H_3(n)}{H_2(n)}\dfrac{H_2(n)}{H_1(n)} + b_4\dfrac{H_4(n)}{H_3(n)}\dfrac{H_3(n)}{H_2(n)}\dfrac{H_2(n)}{H_1(n)} + \cdots} ,$$

$$* \quad \frac{H_1(n+1)}{H_1(n)} = \frac{h_1(n+1)}{h_1(n)} \times \underbrace{\left\{\frac{1 + r_1(n+1) + r_1(n+1)r_1(n+2) + r_1(n+1)r_1(n+2)r_1(n+3) + \cdots}{1 + r_1(n) + r_1(n)r_1(n+1) + r_1(n)\,r_1(n+1)r_1(n+2) + \cdots}\right\}}_{:=\,R_0(n)} ,$$

$$(15) : \quad \left\|\ \lim_n R_0(n) = 1 \quad \text{car : } r_1 = \lim_n r_1(n) \text{ est tel que : } |r_1| < 1 .\right.$$

$$* \quad \frac{H_{i+1}(n)}{H_i(n)} = \frac{h_{i+1}(n)}{h_i(n)} \times \underbrace{\left\{ \frac{1 + \frac{h_{i+1}(n+1)}{h_{i+1}(n)} + \frac{h_{i+1}(n+1)}{h_{i+1}(n)} \frac{h_{i+1}(n+2)}{h_{i+1}(n+1)} + \cdots}{1 + \frac{h_i(n+1)}{h_i(n)} + \frac{h_i(n+1)}{h_i(n)} \frac{h_i(n+2)}{h_i(n+1)} + \frac{h_i(n+1)}{h_i(n)} \frac{h_i(n+2)}{h_i(n+1)} \frac{h_i(n+3)}{h_i(n+2)} + \cdots} \right\}}_{:= R_i(n) \qquad (i \geq 1)},$$

$$= \Delta_i(n) \times R_i(n)$$

$$\forall i \geq 1 \quad \lim_n R_i(n) = \frac{1 - r_i}{1 - r_{i+1}} \quad : \quad \text{car } |r_i| < 1 \quad (\forall i) .$$

Donc :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = r_1(n) \, R_0(n) \times \frac{1 + b_2 R_1(n+1) \Delta_1(n+1) + b_3 R_1(n+1) R_2(n+1) \Delta_1(n+1) \Delta_2(n+1) + \cdots}{1 + b_2 R_1(n) \Delta_1(n) + b_3 R_1(n) \, R_2(n) \Delta_1(n) \Delta_2(n) + \cdots},$$

$$= r_1(n) \, R_0(n) \times \left\{ \frac{1 + b_2 R_1(n+1) \frac{r_2(n)}{r_1(n)} \Delta_1(n) + b_3 R_1(n+1) R_2(n+1) \frac{r_3(n)}{r_1(n)} \mu_1(n) \, \Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n))}{1 + b_2 R_1(n) \Delta_1(n) + b_3 R_1(n) R_2(n) \mu_1(n) \, \Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n))} \right\},$$

$$= r_1(n) \, R_0(n) \left\{ 1 + b_2 \left(R_1(n+1) \frac{r_2(n)}{r_1(n)} - R_1(n) \right) \Delta_1(n) + M_n \Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\},$$

avec : $M_n = b_3 \left[R_1(n+1) R_2(n+1) \frac{r_3(n)}{r_1(n)} - R_1(n) R_2(n) \right] \mu_1(n) - b_2^2 R_1(n) \left[R_1(n+1) \frac{r_2(n)}{r_1(n)} - R_1(n) \right],$

Par suite :

$$(16): \quad \boxed{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1 = \left(r_1(n) R_0(n) - 1 \right) \cdot \left\{ 1 + b_2 \frac{r_1(n) R_0(n)}{(r_1(n) R_0(n) - 1)} \cdot \left(R_1(n+1) \frac{r_2(n)}{r_1(n)} - R_1(n) \right) \Delta_1(n) + N_n \Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\}}$$

- $r_1(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} r_1 \; : \; |r_1| < 1$
- $R_0(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$,
- $r_1(n) \, R_0(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} r_1$, $\quad R_0(n) \, r_1(n) \neq 1$ à partir d'un certain rang.

$$N_n = M_n \frac{r_1(n) \, R_0(n)}{r_1(n) \, R_0(n) - 1},$$

De même :

$$(17).\quad \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1 = \left(r_1(n+1)\,R_0(n+1) - 1\right)\cdot\left\{1 + b_2 \frac{r_1(n+1)R_0(n+1)}{(r_1(n+1)R_0(n+1)-1)}\cdot\left(R_1(n+2)\frac{r_2(n+1)}{r_1(n+1)} - R_1(n+1)\right)\frac{r_2(n)}{r_1(n)}\Delta_1(n) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + N_{nn}\frac{r_2^2(n)}{r_1^2(n)}\Delta_1^2(n) + o\left(\Delta_1^2(n)\right)\right\}.$$

a) Ordre de (T_1), (S_n), (ε_2), (ρ_2) et (U_2) : (sous les hyp. 1) et 2)).

a-1 : Transformation (ε_2) :

On a $$\frac{\varepsilon_2^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \frac{\left(r_1(n)R_0(n) - 1\right)\times\left\{1 + b_2\frac{r_1(n)R_0(n)}{r_1(n)R_0(n)-1}\cdot\left(R_1(n+1)\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - R_1(n)\right)\Delta_1(n) + o(\Delta_1(n))\right\}}{\left(r_1(n) - 1\right)\times\left\{1 + b_2\left(\frac{r_2(n) - r_1(n)}{r_1(n) - 1}\right)\Delta_1(n) + o(\Delta_1(n))\right\}}$$

" D'après les relations : (13) et (16) ".

Donc : $$\frac{\varepsilon_2^{(n)} - S}{S_n - S} \xrightarrow[n]{} \left(1 - \frac{r_1 - 1}{r_1 - 1}\right) = 0 \qquad (r_1 \neq 1)$$

a-2 Transformation (ρ_2) :

On a $$\frac{\rho_2^{(n)} - S}{S_{n+1} - S} = 1 - 2\cdot\frac{\left(e_{n+2}/e_{n+1} - 1\right)}{\left(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n - 1\right)}$$

$$= 1 - 2\frac{\left(r_1(n+1)R_0(n+1) - 1\right)\times\left\{1 + b_2\frac{R_0(n+1)}{[r_1(n+1)R_0(n+1) - 1]}\times\left(R_1(n+2)r_2(n+1) - R_1(n+1)r_1(n+1)\right)\Delta_1(n) + o(\Delta_1(n))\right\}}{\left(r_1(n) - 1\right)\times\left\{1 + b_2\left(\frac{r_2(n) - r_1(n)}{r_1(n) - 1}\right)\Delta_1(n) + o(\Delta_1(n))\right\}}$$

D'après les expressions (13) et (17).

Donc : $$\left(\frac{\rho_2^{(n)} - S}{e_{n+1}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 2\left(\frac{r_1 - 1}{r_1 - 1}\right) = -1$$

Par suite : $\lim_n \frac{\rho_2^{(n)} - S}{e_n} = -r_1$ $\qquad \left(\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = r_1\right)$.

a-3 Transformation (T_1) :

On a : $$\frac{T_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 1 - \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1}$$

$$* \frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\left(\frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1}\right),$$

(18) : $$* \frac{(\Delta S_{n+1}/\Delta S_n) - 1}{(\Delta S_{n+2}/\Delta S_{n+1}) - 1} = \frac{(r_1(n) - 1)}{(r_1(n+1) - 1)} \times \left\{ 1 + N_{n,1}\Delta_1(n) + N_{n,2}\Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\} :$$

$$\bullet \quad N_{n,1} = b_2\left\{ \frac{r_2(n)-r_1(n)}{r_1(n)-1} - \frac{r_2(n)}{r_1(n)}\cdot\frac{r_2(n+1)-r_1(n+1)}{r_1(n+1)-1} \right\},$$

$$\bullet\bullet \quad N_{n,2} = L_n\frac{r_1(n)}{(r_1(n)-1)} - L_{n+1}\frac{r_2^2(n)}{r_1^2(n)}\left(\frac{r_1(n+1)}{r_1(n+1)-1}\right) - b_2\frac{r_2(n)}{r_1(n)}\left[\frac{r_2(n+1)-r_1(n+1)}{r_1(n+1)-1}\right]N_{n,1}.$$

$$* \frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = r_1(n)\left(\frac{r_1(n)-1}{r_1(n+1)-1}\right) \times \left\{ 1 + \left[N_{n,1} + b_2\left(\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right)\right]\Delta_1(n) + \left(N_{n,2} + L_n + N_{n,1}b_2\left[\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right]\right)\Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\}.$$

Posons : $\varphi_n = r_1(n)\,\frac{r_1(n)-1}{r_1(n+1)-1}$, $(\varphi_n \to r_1)$

$$N_{n,3} = \varphi_n\left(N_{n,2} + L_n + b_2 N_{n,1}\left(\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right)\right),$$

Donc :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = (\varphi_n - 1)\left\{ 1 + \frac{\varphi_n}{\varphi_n - 1} \times \left[N_{n,1} + b_2\left(\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right)\right]\Delta_1(n) + \frac{N_{n,3}}{\varphi_n - 1}\Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\}$$

$\varphi_n \neq 1$ à partir d'un certain rang.

Par suite : $$\frac{T_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 1 - \frac{(r_1(n)R_0(n) - 1)}{(\varphi_n - 1)} \times \frac{\left[1 + b_2\left[R_1(n+1)\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - R_1(n)\right]\frac{r_1(n)R_0(n)}{r_1(n)R_0(n)-1}\Delta_1(n) + o(\Delta_1(n))\right]}{\left[1 + \varphi_n\left[N_{n,1} + b_2\left(\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right)\right]\cdot\frac{\Delta_1(n)}{\varphi_n - 1} + o(\Delta_1(n))\right]}$$

Donc : $\lim_{n} \dfrac{T_1^{(n)}-S}{S_n-S} = \left(1-\dfrac{r_1-1}{r_1-1}\right) = 0$ $\blacksquare$

2.4 : Transformation (S_1) :

On a : $\dfrac{S_1^{(n)}-S}{S_{n+1}-S} = 1 - \dfrac{\left(e_{n+2}/e_{n+1}\right) - 1}{\left(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}\right) - 1}$,

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} \times \frac{\left(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n\right) - 1}{\left(\Delta e_{n+2}/\Delta e_{n+1}\right) - 1},$$

$$= r_1(n+1)\frac{(r_1(n)-1)}{(r_1(n+1)-1)} \times \left\{1 + b_2\left(\frac{r_2(n+1)}{r_1(n+1)}-1\right)\frac{r_2(n)}{r_1(n)}\Delta_1(n) + L_{n+1}\frac{r_2^2(n)}{r_1^2(n)}\Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n))\right\} \times \cdots$$

$$\cdots \times \left\{1 + N_{n,1}\Delta_1(n) + N_{n,2}\Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n))\right\}.$$

$$= r_1(n+1)\frac{(r_1(n)-1)}{(r_1(n+1)-1)} \times \left\{1 + P_{n,1}\Delta_1(n) + P_{n,2}\Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n))\right\} \text{ où :}$$

D'après : (14) et (18).

. $P_{n,1} = N_{n,1} + b_2\left(\dfrac{r_2(n+1)}{r_1(n+1)} - 1\right)\dfrac{r_2(n)}{r_1(n)}$,

.. $P_{n,2} = N_{n,2} + b_2 N_{n,1}\dfrac{r_2(n)}{r_1(n)}\left(\dfrac{r_2(n+1)}{r_1(n+1)} - 1\right) + L_{n+1}\dfrac{r_2^2(n)}{r_1^2(n)}$,

On pose : $\psi_n = r_1(n+1)\left(\dfrac{r_1(n)-1}{r_1(n+1)-1}\right)$, $\left(\psi_n \xrightarrow[n]{} r_1\right)$

On a :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = (\psi_n - 1)\left\{1 + \frac{P_{n,1}\psi_n}{\psi_n - 1}\Delta_1(n) + \frac{P_{n,2}\psi_n}{\psi_n - 1}\Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n))\right\},$$

$$\frac{S_1^{(n)}-S}{S_n-S} = \frac{S_1^{(n)}-S}{S_{n+1}-S} \times \frac{S_{n+1}-S}{S_n-S} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \times \left\{1 - \frac{(r_1(n+1)R_1(n+1)-1) \times \{1 + o(1)\}}{(\psi_n - 1) \times \{1 + o(1)\}}\right\},$$

Par suite :

$$\lim_{n} \frac{S_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 0 \qquad \left(\psi_n \to r_1 \neq 1 , \ \frac{e_{n+1}}{e_n} \to r_1 , \ R_0(n) \to 1 \right).$$

a-5 Transformation (u_1) : (de Levin)

On a :

$$\frac{U_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 1 - \frac{(e_{n+1}/e_n) - 1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}\right) - 1} ,$$

et d'après les relations (13) et (16) On a :

$$\frac{U_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 1 - \frac{(r_1(n) R_0(n) - 1) \times \left\{ 1 + b_2 \frac{r_1(n) R_0(n)}{(r_1(n) R_0(n) - 1)} \left(R_1(n+1) \frac{r_2(n)}{r_1(n)} - R_1(n) \right) A_1(n) + o(A_1(n)) \right\}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right) r_1(n) \left\{ 1 + b_2 \left(\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1 \right) A_1(n) + o(A_1(n)) \right\} - 1}$$

$$\xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \left(1 - \frac{r_1 - 1}{r_1 - 1} \right) = 0 .$$

b) ORDRE DE : (T_1), (S_1), (ε_2), (ρ_2) et (u) : (sous les hyp : 1), 2), ..., 4)).

b-1 : Transformation (ε_2) :

D'après a-1) on a :

$$\frac{\varepsilon_2^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \frac{1 + b_2 \left(\frac{R_1(n+1) r_2(n) - r_1 R_1(n)}{r_1 - 1} \right) A_1(n) + o(A_1(n))}{1 + b_2 \left(\frac{r_2(n) - r_1}{r_1 - 1} \right) A_1(n) + o(A_1(n))} ,$$

$$= -b_2 \left[\frac{(R_1(n+1) - 1) r_2(n) - r_1 (R_1(n) - 1)}{r_1 - 1} \right] A_1(n) + o(A_1(n))$$

$R_0(n) = 1$ dans ce cas.

Donc :

$$\lim_n \frac{\varepsilon_2^{(n)}-S}{(S_n-S)^2} = -b_2 \lim_n \left(\frac{(R_1(n+1)-1)\, r_2(n) - r_1(R_1(n)-1)}{r_1-1}\right)\frac{\Delta_1(n)}{(S_n-S)} + \frac{\Delta_1(n)}{(S_n-S)}\cdot\frac{o(\Delta_1(n))}{\Delta_1(n)}$$

- $\lim_n \left[(R_1(n+1)-1)\, r_2(n) - r_1(R_1(n)-1)\right] = -\frac{(r_2-r_1)^2}{r_2-1}$

- $\lim_n \frac{\Delta_1(n)}{S_n-S} = -a_1 \lim \frac{\Delta_1(n)}{h_1(n)\{1+b_2 R_1(n)\Delta_1(n)+o(\Delta_1(n))\}\times\{1+r_1(n)+r_1(n)r_1(n+1)+\cdots\}}$

$$= -a_1(1-r_1)\underbrace{\lim_n \frac{\Delta_1(n)}{h_1(n)}}_{=\text{cte}} (\neq 0) \;; \quad (\text{hypothèse: } 4))\,.$$

Donc : $\lim_n \frac{\varepsilon_2^{(n)}-S}{(S_n-S)^2} = a_1 b_2 (r_1-1)\frac{(r_2-r_1)^2}{r_2-1}\cdot\lim_n \frac{\Delta_1(n)}{h_1(n)}$

$$= a_2 (r_2-r_1)^2\left(\frac{r_1-1}{r_2-1}\right)\underbrace{\lim_n \frac{\Delta_1(n)}{h_1(n)}}_{=\text{constante}} \cdot (\text{hypothèse } 4))\,.$$

b-2 : Transformation (P_2) :

On a d'après a-2) :

$\lim_n \left(\frac{P_2^{(n)}-S}{S_{n+1}-S}\right) = -1$. Ce résultat est le même que précédemment.

Par suite : $\lim_n \frac{P_2^{(n)}-S}{S_n-S} = -r_1$.

b-3 : Transformation (T_1) .

D'après a-3) on a :

$$\frac{T_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 1 - \frac{1+b_2\left[\frac{R_1(n+1)\, r_2(n) - r_1 R_1(n)}{r_1-1}\right]\Delta_1(n)+o(\Delta_1(n))}{1+b_2\left[\frac{1}{r_1-1}\right]\times\left[\frac{(2r_1-1)(r_2(n)-r_1) - r_2(n)(r_2(n+1)-r_1)}{(r_1-1)}\right]\Delta_1(n)+o(\Delta_1(n))}\,,$$

Ou alors :

$$\frac{T_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 1-\left\{1 + b_2 Q_n\, \Delta_1(n) + o(\Delta_1(n))\right\} \text{ où :}$$

$$Q_n = \frac{R_1(n+1) r_2(n) - r_1 R_1(n)}{(r_1-1)} - \frac{1}{(r_1-1)} \times \left(\frac{(2r_1-1)(r_2(n)-r_1) - r_2(n)(r_2(n+1)-r_1)}{(r_1-1)} \right),$$

$$Q_n \xrightarrow[n]{} Q := (r_2-r_1)^3 / (r_2-1)(r_1-1)^2 .$$

et donc :

$$\lim_n \frac{T_1^{(n)}-S}{(S_n-S)^2} = -b_2 \lim_n \frac{Q_n \Delta_1(n)}{(S_n-S)} - \lim_n \frac{\Delta_1(n)}{(S_n-S)} \times \frac{o(\Delta_1(n))}{\Delta_1(n)} ,$$

D'après le cas b-1) on a :

$$\lim_n \frac{\Delta_1(n)}{S_n - S} = a_1 (r_1-1) \times cte \quad , \text{ donc :}$$

$$\lim_n \frac{T_1^{(n)}-S}{(S_n-S)^2} = a_2 (1-r_1) \frac{(r_2-r_1)^3}{(r_2-1)(r_1-1)^2} \times cte = a_2 \frac{(r_2-r_1)^3}{(r_2-1)(1-r_1)} \times cte . \blacksquare$$

b-4 Transformation (S_n) :

D'après (a-4) On a :

$$\frac{S_1^{(n)}-S}{S_{n+1}-S} = 1 - \frac{1 + b_2 \left[\frac{R_1(n+2) r_2(n+1) - r_1 R_1(n+1)}{r_1 - 1} \right] \frac{r_2(n)}{r_1} \Delta_1(n) + o(\Delta_1(n))}{1 + \frac{P_{n,1}}{r_1-1} \Delta_1(n) + o(\Delta_1(n))} ,$$

$$P_{n,1} \xrightarrow[n \to \infty]{} P_1 := b_2 \left\{ \frac{(r_2-r_1)(r_1^2-r_2)}{(r_2-1) r_1^2} \right\} .$$

$r_1 \neq 0, 1.$

Donc :

$$\frac{S_1^{(n)}-S}{S_{n+1}-S} = -b_2 \left[\frac{R_1(n+2) r_2(n+1) - r_1 R_1(n+1)}{r_1 - 1} - \frac{P_{n,1}}{b_2 (r_1-1)} \right] \Delta_1(n) + o(\Delta_1(n)) .$$

Par suite :

$$\lim_n \frac{S_1^{(n)}-S}{e_n \times e_{n+1}} = a_2(r_2-r_1) \times \left\{ \frac{r_1^2-r_2}{(r_1-1)\,r_1^2} - \frac{1-r_1}{1-r_2} \right\} \times \text{cte}.$$

$$\text{et : } \lim_n \frac{S_1^{(n)}-S}{e_n^2} = a_2(r_2-r_1)r_1 \times \left\{ \frac{r_1^2-r_2}{(r_1-1)\,r_1^2} - \frac{r_1-1}{r_2-1} \right\} \times \text{cte}$$ ▫

b.5 : Transformation (U_1).

D'après a-5), On a :

$$\frac{U_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 1 - \frac{(r_1-1)\left\{1 + b_2\left(\frac{R_1(n+1)\,r_2(n) - r_1 R_1(n)}{r_1-1}\right)s_1(n) + o(s_1(n))\right\}}{P_n\left\{1 + b_2\left(\frac{r_2(n)-r_1}{r_1}\right)s_1(n) + o(s_1(n))\right\} - 1}$$

avec : $P_n = r_1\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$.

$$\text{Donc : } \frac{U_1^{(n)}-S}{S_n-S} = \underbrace{\left(\frac{P_n-r_1}{P_n-1}\right)}_{\to 0} - b_2\left(\frac{r_1-1}{P_n-1}\right)\left(\frac{R_1(n+1)r_2(n)-r_1R_1(n)}{r_1-1} - \frac{P_n}{P_n-1}\left[\frac{r_2(n)-r_1}{r_1}\right]\right)s_1(n) + o(s_1(n)).$$

et :

$$\lim_n \frac{U_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 0$$ ▫ - Sous les hypothèses 1°), 2°), 3°) et 4°),

On ne peut pas conclure, en ce qui concerne $\lim_n \frac{U_1^{(n)}-S}{e_n^2}$ -.

Pour illustrer ce théorème, On choisit comme exemples d'application :

Exemple 1 :

- $h_i(n) = p_i^n\left(1 + q_i^{(i-1)n^2}\right) \quad i \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$, avec :
- $0 < |p_i| < 1 \quad \forall i$,
- $|q_i| < 1 \quad \forall i$,

* $\left|\frac{P_{i+1}}{P_i}\right| < 1$,

* $P_i P_{i+2} \leqslant P_{i+1}^2$, $P_2 \leqslant P_1^2$.

Alors :

- $r_1(n) = p_1$
- $r_i(n) = P_i \times \dfrac{1 + q_i^{(i-1)(n+1)^2}}{1 + q_i^{(i-1)n^2}} \xrightarrow[n.]{} P_i$ $0<|P_i|<1$
- $s_i(n) = \left(\dfrac{P_{i+1}}{P_i}\right)^n \dfrac{1 + q_{i+1}^{in^2}}{1 + q_i^{(i-1)n^2}} \xrightarrow[n.]{} 0$ $|q_i| < 1$, $|P_{i+1}| < |P_i|$
- $\dfrac{s_{i+1}(n)}{s_i(n)} \xrightarrow[n]{} 0$
- $\dfrac{s_1(n)}{h_1(n)} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + q_2^{n^2}\right) \cdot \left(\dfrac{P_2}{P_1^2}\right)^n \xrightarrow[n.]{} 0$.

Exemple ② :

$h_i(n) = P_i^n \, n^{q_i}$ $i \geq 1$, avec :

* $i \longmapsto q_i \downarrow$ et $\Delta^2 q_i \leqslant 0$ et $(q_1 = 0)$,
* $i \longmapsto P_i \downarrow$ et $0 < |P_i| < 1$, $P_i P_{i+2} \leqslant P_{i+1}^2$, $P_2 \leqslant P_1^2$

Alors :

- $r_1(n) = P_1$
- $r_i(n) = P_i \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{q_i} \xrightarrow[n.]{} P_i$: $|P_i| < 1$
- $s_i(n) = \left(\dfrac{P_{i+1}}{P_i}\right)^n n^{\Delta q_i} \xrightarrow[n.]{} 0$
- $\dfrac{s_1(n)}{h_1(n)} = \left(\dfrac{P_2}{P_1^2}\right)^n n^{q_2} \xrightarrow[n.]{} 0$
- $\mu_i(n) = \left(\dfrac{P_{i+2} P_i}{P_{i+1}^2}\right)^n n^{\Delta^2 q_i} \xrightarrow[n.]{} 0$.

Examinons à présent, le cas des suites $(S_n)_n \in E_\Delta$, à convergence logarithmique.

On remarquera que, dans la plupart des cas-(ces résultats seront donnés ultérieurement en détail)- l'accélération d'ordre au moins un (respt: deux) devient, une accélération d'ordre un (respt: au moins un) lors du passage du cas linéaire au cas logarithmique.

V : Suites de E_Δ : Cas de la convergence logarithmique:

Notations-hyp:

On garde les mêmes notations du paragraphe III - qui précède - avec, en plus :

- $\forall i \geq 1$: $r_i(n) = r_i + \rho_i(n)$, $\rho_i(n) \xrightarrow[n]{} 0$ et ($\rho_i(n) \neq 0$ $\forall n$) ;
- Pour $(i,n) \longrightarrow X_i^n$ une suite donnée, on note :

$$* \ \Delta X_i^n = X_i^{n+1} - X_i^n$$

$$* \ \delta X_i^n = X_{i+1}^n - X_i^n$$

- $$R_0(n) = \frac{1 + r_1(n+1) + r_1(n+1)\, r_1(n+2) + r_1(n+1)\, r_1(n+2)\, r_1(n+3) + \cdots}{1 + r_1(n) + r_1(n)\, r_1(n+1) + r_1(n)\, r_1(n+1)\, r_1(n+2) + \cdots},$$

- $$R_i(n) = \frac{1 + r_{i+1}(n) + r_{i+1}(n)\, r_{i+1}(n+1) + r_{i+1}(n)\, r_{i+1}(n+1)\, r_{i+1}(n+2) + \cdots}{1 + r_i(n) + r_i(n)\, r_i(n+1) + r_i(n)\, r_i(n+1)\, r_i(n+2) + \cdots}, i \geq 1.$$

- $$\eta_n = \frac{r_1(n)\, \rho_1(n)}{\rho_1(n+1)},$$

- $$\bar{\eta}_n = \frac{r_1(n+1)\, \rho_1(n)}{\rho_1(n+1)},$$

- $\varepsilon_j(n) = R_j(n) - 1$, $j \geq 0$.

Théorème ⑨ :

Soit $(S_n)_n \in E_\Delta$ telle que :

- $r_i = 1 \quad \forall i \geq 1$, $\lambda_i(n) \xrightarrow[n]{} 0$,
- $\forall j \geq 1$: $\dfrac{\Delta\left(r_1(n) \cdot r_1(n+1) \cdots \cdots r_1(n+j)\right)}{\Delta\left(r_1(n) \cdot r_1(n+1) \cdots r_1(n+j-1)\right)} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \lambda_0 : \quad |\lambda_0| < 1$; [*]
- $\forall j \geq 1$, $\forall i \geq 1$: $\dfrac{\delta\left(r_i(n) r_i(n+1) \cdots \cdots r_i(n+j)\right)}{\delta\left(r_i(n) r_i(n+1) \cdots r_i(n+j-1)\right)} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \lambda_i : \quad |\lambda_i| < 1$; [*]
- $\dfrac{\rho_1(n+1)}{\rho_1(n)} \xrightarrow[n]{} \rho_1$, $\dfrac{\rho_i(n)}{\rho_1(n)} \xrightarrow[n]{} \rho_i \quad (i \geq 2)$,
- $\dfrac{\varepsilon_j(n)}{\rho_1(n)} \xrightarrow[n]{} \varepsilon_j \quad (\forall j \geq 0)$.

Alors :

i) $\displaystyle\lim_n \frac{\varepsilon_2^{(n)} - S}{S_n - S} = -\varepsilon_0$,

ii) $\displaystyle\lim_n \frac{\rho_2^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - 2\rho_1(1+\varepsilon_0)$,

iii) Si de plus : • $n \times \rho_1(n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \rho_0 \neq 0, -1$, alors : $\displaystyle\lim_n \frac{U_2^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \rho_0\left(\frac{1+\varepsilon_0}{1+\rho_0}\right)$,

• $n \times \rho_1(n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$, alors : $\displaystyle\lim_n \frac{U_2^{(n)} - S}{S_n - S} = 1$

• $n \times \rho_1(n) \xrightarrow[n]{} -1$, alors : $\displaystyle\lim_n \left|\frac{U_2^{(n)} - S}{S_n - S}\right| = +\infty$

iv) Si $\rho_1 \neq 1$ alors : $\displaystyle\lim_n \frac{T_1^{(n)} - S}{S_n - S} = \lim_n \frac{S_1^{(n)} - S}{S_n - S} = 1$,

Si $\rho_1 = 1$ alors :

iv-1) Avec les notations et hypothèses suivantes :

- $\dfrac{\rho_i(n)}{\rho_1(n)} = 1 + \mu_i(n) \quad i \geq 2$, $\mu_j(n) \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall j$,
- $\eta_n = 1 + \mu_0(n)$, $(\mu_0(n) \neq 0 \ \forall n)$ et $\dfrac{\mu_0(n+1)}{\mu_0(n)} \xrightarrow[n]{} \mu_0$,
- $\dfrac{\mu_i(n)}{\mu_0(n)} \xrightarrow[n]{} \mu_i \quad (i \geq 2)$ et $\dfrac{\mu_1(n)}{\mu_0(n)} \xrightarrow[n]{} \mu_1$,

On a : $\displaystyle\lim_n \frac{T_1^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \mu_1(1+\varepsilon_0)$.

iv-2) Avec les notations et hypothèses suivantes :

- $\bar{\eta}_n = 1 + \bar{\mu}_0(n)$, $(\bar{\mu}_0(n) \neq 0 \ \forall n)$, $\dfrac{\bar{\mu}_0(n+1)}{\bar{\mu}_0(n)} \xrightarrow[n.]{} \bar{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_0(n) \xrightarrow[n.]{} 0$;
- $\dfrac{\rho_i(n)}{\rho_1(n)} = 1 + \mu_i(n)$ $(i \geq 2)$, $\mu_j(n) \xrightarrow[n.]{} 0$ $\forall j \geq 1$, $\dfrac{\mu_i(n)}{\bar{\mu}_0(n)} \xrightarrow[n.]{} \bar{\mu}_i$ $(i \geq 2)$;
- $\dfrac{\rho_1(n)}{\bar{\mu}_0(n)} \xrightarrow[n.]{} \bar{\mu}_1$;

On a : $\lim\limits_{n} \dfrac{S_1^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \bar{\mu}_1(1+\varepsilon_0)$.

[*] : Ces deux conditions, suffisantes, peuvent être remplacées par :

$\lim\limits_{n} R_i(n)$ existe et vaut 1 $(\forall i \geq 0)$,

qui est d'ailleurs moins forte, comme le montre la preuve qui va suivre.

Preuve :

Etude préliminaire :

Soit $(s_n)_n \in E_\Delta$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.

On a : $\Delta s_n = \Delta e_n = \sum_{i\geq 1} a_i h_i(n)$.

En utilisant les calculs déjà faits à la preuve du théorème 1,

On a :

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = r_1(n) \times \left\{ 1 + b_2\left(\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right) s_1(n) + L_n s_1^2(n) + o(s_1^2(n)) \right\} ;$$

$$= r_1(n) + b_2\left(r_2(n) - r_1(n)\right) \Delta_1(n) + r_1(n) L_n \Delta_1^2(n) + \underbrace{r_1(n) \cdot o\left(s_1^2(n)\right)}_{= \rho_1(n)\, o(s_1^2(n))} ;$$

avec :

$$r_1(n) \times L_n = b_3 \mu_1(n) \left(r_3(n) - r_1(n)\right) - b_2^2 \left(r_2(n) - r_1(n)\right) ,$$
$$= b_3 \mu_1(n) \left(\rho_3(n) - \rho_1(n)\right) - b_2^2 \left(\rho_2(n) - \rho_1(n)\right) ,$$

Donc :

(19) : $$\boxed{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1 = \rho_1(n) \times \left\{ 1 + b_2 \left(\frac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)} - 1\right) s_1(n) + \frac{r_1(n) L_n}{\rho_1(n)} s_1^2(n) + o(s_1^2(n)) \right\}}$$

Par suite :

(20) : $$\boxed{\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} - 1 = \rho_1(n+1) \left\{ 1 + b_2 \left(\frac{\rho_2(n+1)}{\rho_1(n+1)} - 1\right) \cdot \frac{r_2(n)}{r_1(n)} \Delta_1(n) + \frac{r_1(n+1)\, r_2^2(n)\, L_{n+1}}{\rho_1(n+1)\, r_1^2(n)} \Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\}}$$

D'autre part :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{S - S_{n+1}}{S - S_n} = \frac{\sum_{i\geq 1} a_i H_i(n+1)}{\sum_{i\geq 1} a_i H_i(n)} ; \quad H_i(n) = \sum_{j\geq 0} h_i(n+j) ;$$

$$= \frac{H_1(n+1)}{H_1(n)} \times \frac{1 + b_2 \frac{H_2(n+1)}{H_1(n+1)} + b_3 \frac{H_3(n+1)}{H_2(n+1)} \frac{H_2(n+1)}{H_1(n+1)} + \cdots}{1 + b_2 \frac{H_2(n)}{H_1(n)} + b_3 \frac{H_3(n)}{H_2(n)} \frac{H_2(n)}{H_1(n)} + \cdots} ,$$

• $\dfrac{H_1(n+1)}{H_1(n)} = r_1(n) \times R_0(n)$ où :

$$R_0(n) = \frac{1 + r_1(n+1) + r_1(n+1)\, r_1(n+2) + r_1(n+1)\, r_1(n+2)\, r_1(n+3) + \cdots}{1 + r_1(n) + r_1(n)\, r_1(n+1) + r_1(n)\, r_1(n+1)\, r_1(n+2) + \cdots},$$

On a :

$$R_0(n) - 1 = \frac{\Delta r_1(n) + \Delta\big(r_1(n)\, r_1(n+1)\big) + \Delta\big(r_1(n)\, r_1(n+1)\, r_1(n+2)\big) + \cdots}{1 + r_1(n) + r_1(n)\, r_1(n+1) + r_1(n)\, r_1(n+1)\, r_1(n+2) + \cdots},$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\Delta\big(r_1(n) r_1(n+1)\big)}{\Delta r_1(n)} + \dfrac{\Delta\big(r_1(n) r_1(n+1) r_1(n+2)\big)}{\Delta\big(r_1(n) r_1(n+1)\big)} \times \dfrac{\Delta\big(r_1(n) r_1(n+1)\big)}{\Delta r_1(n)} + \cdots}{\dfrac{1}{\Delta r_1(n)} + \dfrac{r_1(n)}{\Delta r_1(n)} + \dfrac{r_1(n)}{\Delta r_1(n)} \cdot r_1(n+1) + \dfrac{r_1(n)}{\Delta r_1(n)} \cdot r_1(n+1)\, r_1(n+2) + \cdots},$$

dont le dénominateur tend vers : ∞ et le numérateur tend vers : $1 + \lambda_0 + \lambda_0^2 + \lambda_0^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-\lambda_0}$. (Sous les hypothèses du théorème ②).

Donc : $R_0(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$.

••

$$\frac{H_{i+1}(n)}{H_i(n)} = \frac{h_{i+1}(n)}{h_i(n)} \times R_i(n) \qquad \forall i \geq 1 \text{ , avec :}$$

$$R_i(n) = \frac{1 + \dfrac{h_{i+1}(n+1)}{h_{i+1}(n)} + \dfrac{h_{i+1}(n+1)}{h_{i+1}(n)} \cdot \dfrac{h_{i+1}(n+2)}{h_{i+1}(n+1)} + \cdots \qquad \cdots}{1 + \dfrac{h_i(n+1)}{h_i(n)} + \dfrac{h_i(n+1)}{h_i(n)}\, \dfrac{h_i(n+2)}{h_i(n+1)} + \dfrac{h_i(n+1)}{h_i(n)} \cdot \dfrac{h_i(n+2)}{h_i(n+1)}\, \dfrac{h_i(n+3)}{h_i(n+2)} + \cdots},$$

$$= \frac{1 + r_{i+1}(n) + r_{i+1}(n)\, r_{i+1}(n+1) + r_{i+1}(n)\, r_{i+1}(n+1)\, r_{i+1}(n+2) + \cdots}{1 + r_i(n) + r_i(n)\, r_i(n+1) + r_i(n)\, r_i(n+1)\, r_i(n+2) + \cdots},$$

Donc :

$$i \geq 1 : \; R_i(n) - 1 = \frac{\delta\big(r_i(n)\big) + \delta\big(r_i(n)\, r_i(n+1)\big) + \delta\big(r_i(n)\, r_i(n+1)\, r_i(n+2)\big) + \cdots}{1 + r_i(n) + r_i(n)\, r_i(n+1) + r_i(n)\, r_i(n+1)\, r_i(n+2) + \cdots},$$

ou alors :

$$R_i(n)-1=\frac{1+\frac{\delta(r_i(n)\,r_i(n+1))}{\delta r_i(n)}+\frac{\delta(r_i(n)\,r_i(n+1)\,r_i(n+2))}{\delta(r_i(n)\,r_i(n+1))}\times\frac{\delta(r_i(n)\,r_i(n+1))}{\delta(r_i(n))}+\cdots}{\frac{1}{\delta r_i(n)}+\frac{r_i(n)}{\delta r_i(n)}+\frac{r_i(n)}{\delta r_i(n)}\cdot r_i(n+1)+\frac{r_i(n)}{\delta r_i(n)}\cdot r_i(n+1)\,r_i(n+2)+\cdots},$$

Donc : $\lim_n R_i(n)-1=0$ car :

- $\lim_n r_i(n)=1$, $\delta r_i(n):=r_{i+1}(n)-r_i(n)\xrightarrow[n\cdot]{}0$,
- $\dfrac{\delta(r_i(n)\,r_i(n+1)\cdots r_i(n+j))}{\delta(r_i(n)\,r_i(n+1)\cdots r_i(n+j-1))}\xrightarrow[n\uparrow+\infty]{}\lambda_i\ :\ |\lambda_i|<1$.

<u>Posons alors :</u> $\underline{R_i(n)-1:=\varepsilon_i(n):=\varepsilon_{i,n}}\quad\forall i\geq 0$. (20) .

- Par suite :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=r_1(n)R_0(n)+b_2R_0(n)\left[R_1(n+1)r_2(n)-R_1(n)r_1(n)\right]\Delta_1(n)+M_n r_1(n)R_0(n)\Delta_1^2(n)+r_1(n)\times o(\Delta_1^2(n))$$

et en utilisant (20) et le fait que : $r_i(n)=1+\rho_i(n)$ $(\forall i)$ on a :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}-1=\rho_1(n)+\varepsilon_{0,n}(1+\rho_1(n))+b_2R_0(n)\left[R_1(n+1)r_2(n)-r_1(n)R_1(n)\right]\Delta_1(n)+M_n r_1(n)R_0(n)\Delta_1^2(n)+\rho_1(n)\,o(\Delta_1^2(n))$$

ou alors :

$$(21):\ \boxed{\frac{e_{n+1}}{e_n}-1=\rho_1(n)\times\left\{1+\frac{\varepsilon_{0,n}}{\rho_1(n)}(1+\rho_1(n))+b_2R_0(n)\left[\frac{R_1(n+1)r_2(n)-r_1(n)R_1(n)}{\rho_1(n)}\right]\Delta_1(n)+\cdots\right.\\ \left.\cdots+\frac{M_n r_1(n)R_0(n)}{\rho_1(n)}\Delta_1^2(n)+o(\Delta_1^2(n))\right\}}\ .$$

On a :

$$(22):\ \left\|\begin{array}{l}\lim_n \dfrac{R_1(n+1)r_2(n)-r_1(n)R_1(n)}{\rho_1(n)}=\varepsilon_1(\rho_1-1)+(\rho_2-1)\ ,\\[2ex] \lim_n \dfrac{M_n r_1(n)R_0(n)}{\rho_1(n)}=b_3\psi_1\left[(\rho_3-1)+(\rho_2-1)(\varepsilon_2+\varepsilon_1)\right]-b_2^2\left[\varepsilon_1(\rho_1-1)+\rho_2-1\right],\end{array}\right.$$

De même on a :

(23) : $$\boxed{\begin{aligned}\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}-1 = \rho_1(n+1)\times\Big\{1+\frac{\varepsilon_{0,n+1}}{\rho_1(n+1)}\big(1+\rho_1(n+1)\big)+b_2R_0(n+1)\left[\frac{R_1(n+2)\,r_2(n+1)-r_1(n+1)\,R_1(n+1)}{\rho_1(n+1)}\right]\frac{r_2(n)}{r_1(n)}\Delta_1(n)\\ \cdots+\frac{M_{n+1}\,r_1(n+1)\,R_0(n+1)\,r_2^2(n)}{\rho_1(n+1)\,r_1^2(n)}\Delta_1^2(n)+o(\Delta_1^2(n))\Big\}.\end{aligned}}$$

Calcul des constantes asymptotiques d'erreur :

i) Transformation (ε_2) :

On a :

$$\frac{\varepsilon_2^{(n)}-S}{e_n}=1-\frac{(e_{n+1}/e_n)-1}{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n)-1},$$

$$=1-\frac{1+\frac{\varepsilon_{0,n}}{\rho_1(n)}(1+\rho_1(n))+b_2R_0(n)\left[\frac{R_1(n+1)\,r_2(n)-r_1(n)\,R_1(n)}{\rho_1(n)}\right]\Delta_1(n)+o(\Delta_1(n))}{1+b_2\left(\frac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)}-1\right)\Delta_1(n)+o(\Delta_1(n))}:$$

D'après (21), (19).

Donc : $\lim\limits_{n}\frac{\varepsilon_2^{(n)}-S}{e_n}=1-\left(\frac{1+\varepsilon_0}{1}\right)=-\varepsilon_0$. ∎

ii) Transformation (ρ_2) :

$$\frac{\rho_2^{(n)}-S}{e_{n+1}}=1-2\,\frac{(e_{n+2}/e_{n+1})-1}{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n)-1},$$

$$=1-2\,\frac{\rho_1(n+1)}{\rho_1(n)}\cdot\frac{1+\frac{\varepsilon_{0,n+1}}{\rho_1(n+1)}(1+\rho_1(n+1))+b_2\left[\frac{R_1(n+2)\,r_2(n+1)-r_1(n+1)R_1(n+1)}{\rho_1(n+1)}\right]\frac{r_2(n)}{r_1(n)}\Delta_1(n)+\cdots}{1+b_2\left(\frac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)}-1\right)\Delta_1(n)+o(\Delta_1(n))}$$

D'après : (19), (23).

Donc : $\lim\limits_{n}\frac{\rho_2^{(n)}-S}{e_n}=\lim\limits_{n}\frac{\rho_2^{(n)}-S}{e_{n+1}}\,\frac{e_{n+1}}{e_n}=1-2\rho_1(1+\varepsilon_0)$. ∎

iii) Transformation (U_1) :

On a : $$\frac{U_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 1 - \frac{(e_{n+1}/e_n)-1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}-1} \,,$$

D'après (19) on a :

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\times\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}-1 = \rho_1(n)\times\left\{1+\frac{r_1(n)}{(n+1)\rho_1(n)}+b_2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)}-1\right)\Delta_1(n)+o(\Delta_1(n))\right\}$$

Donc, en utilisant (21), on obtient :

$$\frac{U_1^{(n)}-S}{e_n} = 1 - \frac{1+\frac{\varepsilon_{0,n}}{\rho_1(n)}(1+\rho_1(n)) + b_2 R_0(n)\frac{\left(R_1(n+1)r_2(n)-r_1(n)R_1(n)\right)}{\rho_1(n)}\Delta_1(n)+o(\Delta_1(n))}{1+\frac{r_1(n)}{(n+1)\rho_1(n)}+b_2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)}-1\right)\Delta_1(n)+o(\Delta_1(n))}$$

Par suite :

- Si $n\rho_1(n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \rho_0 \neq 0,-1$ $\qquad \left((n+1)\rho_1(n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)\times n\rho_1(n) \xrightarrow[n]{} \rho_0\right)$.

alors :

$$\frac{U_1^{(n)}-S}{e_n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \left(1-\frac{1+\varepsilon_0}{1+\rho_0}\times\rho_0\right).$$

•• Si $n\times\rho_1(n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \rho_0 = 0$ alors :

$$\lim_n \frac{U_1^{(n)}-S}{e_n} = 1.$$

••• si $n\times\rho_1(n) \xrightarrow[n]{} -1$ alors $\frac{U_1^{(n)}-S}{e_n} \xrightarrow[n]{} \left(1-\frac{1+\varepsilon_0}{1-1}\right) = \pm\infty$

iii) Transformation (T_1) :

$$\frac{T_1^{(n)}-S}{S_n-S} = 1 - \frac{(e_{n+1}/e_n) - 1}{(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}) - 1} \, ,$$

avec :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} \times \left(\frac{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n) - 1}{(\Delta e_{n+2}/\Delta e_{n+1}) - 1} \right) ,$$

(24) : $\dfrac{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n)-1}{(\Delta e_{n+2}/\Delta e_{n+1})-1} = \dfrac{\rho_1(n)}{\rho_1(n+1)} \times \left\{ 1 + Q_1(n)\, \Delta_1(n) + Q_2(n)\, \Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\}$ avec :

- $Q_1(n) = b_2\left(\dfrac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)} - 1\right) - b_2\left(\dfrac{\rho_2(n+1)}{\rho_1(n+1)} - 1\right)\dfrac{r_2(n)}{r_1(n)} \, , \qquad Q_1(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$
- $Q_2(n) = \dfrac{r_1(n) L_n}{\rho_1(n)} - \dfrac{r_1(n+1)\, r_2^2(n)\, L_{n+1}}{\rho_1(n+1)\, r_1^2(n)} - b_2\left(\dfrac{\rho_2(n+1)}{\rho_1(n+1)} - 1\right)\dfrac{r_2(n)}{r_1(n)}\, Q_1(n) \; . \quad Q_2(n) \to 0 .$

Donc :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = r_1(n)\frac{\rho_1(n)}{\rho_1(n+1)} \times \left\{ 1 + Q_1(n)\,\Delta_1(n) + Q_2(n)\,\Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\} \times \left\{ 1 + b_2\left(\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right)\Delta_1(n) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + L_n\,\Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\}$$

- voir l'étude préliminaire -

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{r_1(n)\,\rho_1(n)}{\rho_1(n+1)} \times \left\{ 1 + \left(Q_1(n) + b_2\left[\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right]\right)\Delta_1(n) + \left(Q_2(n) + L_n + b_2\left[\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right] Q_1(n)\right)\Delta_1^2(n) + \cdots + o(\Delta_1^2(n)) \right\} .$$

Posons : $\eta_n = \dfrac{r_1(n)\,\rho_1(n)}{\rho_1(n+1)}$.

- Si $\rho_1 \neq 0, 1$ alors :

   - $\eta_n \xrightarrow[n]{} \dfrac{1}{\rho_1}$ et $(\eta_n \neq 1 \;\; \forall n)$.

   - $\dfrac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = (\eta_n - 1) \times \left\{ 1 + \dfrac{\eta_n}{\eta_n - 1}\left(Q_1(n) + b_2\left[\dfrac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right]\right)\Delta_1(n) + o(\Delta_1(n)) \right\} .$

Par suite :

$$\frac{T_1^{(n)}-S}{e_n} = 1 - \underbrace{\frac{\rho_1(n)}{(\eta_n - 1)}}_{\xrightarrow[n]{} 0} \times \underbrace{\frac{1 + \frac{\varepsilon_{0,n}}{\rho_1(n)}\left(1+\rho_1(n)\right) + b_2 R_0(n) \frac{\left(R_1(n+1) r_2(n) - r_1(n) R_1(n)\right)}{\rho_1(n)} \Delta_1(n) + o(\Delta_1(n))}{1 + \frac{\eta_n}{\eta_n - 1}\left(Q_1(n) + b_2\left[\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right]\right)\Delta_1(n) + o(\Delta_1(n))}}_{\xrightarrow[n]{} (1+\varepsilon_0)}$$

Donc : $\lim_n \frac{T_1^{(n)}-S}{e_n} = 1$ ∎

..Si $\rho_1 = 0$, alors :

$$\lim_n \eta_n = \lim_n \frac{r_1(n)}{\rho_1(n+1)/\rho_1(n)} = +\infty \qquad \left(r_1(n) \xrightarrow[n]{} 1\right) .$$

Donc : $\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} +\infty$ « voir l'expression de $D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}$ à la page précédente. »

Par suite : $\lim_n \frac{T_1^{(n)}-S}{S_n - S} = 1$. ∎

Car : $\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1 \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0$ et $\left(\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} +\infty$.

... Si $\rho_1 = 1$, alors :

Avec les notations et hypothèses du théorème :

- $\eta_n = 1 + \mu_0(n)$, $(\mu_0(n) \neq 0 \ \forall n)$, $\frac{\mu_0(n+1)}{\mu_0(n)} \xrightarrow[n]{} \mu_0$;
- $\frac{\rho_i(n)}{\rho_1(n)} = 1 + \mu_i(n)$ $(i \geq 2)$, $\mu_j(n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0 \ \forall j$;
- $\frac{\mu_i(n)}{\mu_0(n)} \xrightarrow[n]{} \mu_i$ $(i \geq 2)$, $\frac{\rho_1(n)}{\mu_0(n)} \xrightarrow[n]{} \mu_1$.

On a :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \left(1 + \mu_0(n)\right) \times \left\{1 + \left(Q_1(n) + b_2\left[\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - 1\right]\right)\Delta_1(n) + o(\Delta_1(n))\right\} ;$$

$$Q_1(n) = b_2 \mu_2(n) - b_2 \mu_2(n+1) \frac{r_2(n)}{r_1(n)} \xrightarrow[n]{} 0$$

Donc :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = \mu_0(n) \left\{ 1 + b_2 \underbrace{\left(1 + \mu_0(n)\right)\left(\frac{\mu_2(n)}{\mu_0(n)} - \frac{\mu_2(n+1)}{\mu_0(n+1)} \frac{\mu_0(n+1)}{\mu_0(n)} \frac{r_2(n)}{r_1(n)} + \frac{\mu_2(n)}{r_1(n)\mu_0(n)} \left(\frac{\rho_1(n)}{\rho_1(n)} - 1 \right) \right)}_{\xrightarrow[n]{} \mu_2(1-\mu_0)} \Delta_1(n) + o(\Delta_1(n)) \right\},$$

Par suite :

$$\lim_n \frac{T_1^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 - \mu_1 (1 + \varepsilon_0) \quad \blacksquare$$

En utilisant : (21), (22) et les hypothèses qui précèdent.

v) Transformation (S_1) :

- $$\frac{S_1^{(n)} - S}{e_{n+1}} = 1 - \frac{(e_{n+2}/e_{n+1}) - 1}{(D_1^{(n+1)}/D_1^{(n)}) - 1},$$

- $$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} \times \frac{(\Delta e_{n+1}/\Delta e_n) - 1}{(\Delta e_{n+2}/\Delta e_{n+1}) - 1}$$

$$= \frac{r_1(n+1)\rho_1(n)}{\rho_1(n+1)} \times \left\{ 1 + b_2 \left(\frac{r_2(n+1)}{r_1(n+1)} - 1 \right) \frac{r_2(n)}{r_1(n)} \Delta_1(n) + L_{n+1} \frac{r_2^2(n)}{r_1^2(n)} \Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\} \times \dots$$

$$\dots \times \left\{ 1 + Q_1(n)\Delta_1(n) + Q_2(n)\Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\}.$$

D'après les expressions : (20) et (24).

- $$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} = \frac{r_1(n+1)\rho_1(n)}{\rho_1(n+1)} \times \left\{ 1 + \left(Q_1(n) + b_2 \left[\frac{r_2(n+1)}{r_1(n+1)} - 1 \right] \frac{r_2(n)}{r_1(n)} \right) \Delta_1(n) + \left(Q_2(n) + L_{n+1} \frac{r_2^2(n)}{r_1^2(n)} + \dots \right. \right.$$

$$\left. \left. \dots + b_2 \left(\frac{r_2(n+1)}{r_1(n+1)} - 1 \right) \frac{r_2(n)}{r_1(n)} Q_1(n) \right) \Delta_1^2(n) + o(\Delta_1^2(n)) \right\}.$$

Posons : $\bar{\eta}_n = r_1(n+1)\,\dfrac{\rho_1(n)}{\rho_1(n+1)}$.

• Si $\rho_1 \neq 0, 1$ alors :

$* \quad \bar{\eta}_n \xrightarrow[n.]{} \dfrac{1}{\rho_1} \neq 1 \quad , \left(\bar{\eta}_n \neq 1 \; \forall n \; : hyp.\right)$

$* \quad \dfrac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = (\bar{\eta}_n - 1)\left\{1 + \dfrac{\bar{\eta}_n}{\bar{\eta}_n - 1}\left(Q_1(n) + b_2\left[\dfrac{r_2(n+1)}{r_1(n+1)} - 1\right]\dfrac{r_2(n)}{r_1(n)}\right)A_1(n) + o(A_1(n))\right\}$

Par suite, puisque :

$* \quad \dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1 \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0$ et $\dfrac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \left(\dfrac{1}{\rho_1} - 1\right)$,

On a : $\dfrac{S_1^{(n)} - S}{S_n - S} = \dfrac{S_1^{(n)} - S}{e_{n+1}}\,\dfrac{e_{n+1}}{e_n} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 1.$ ■

• Si $\rho_1 = 0$ alors :

$* \quad \bar{\eta}_n \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} +\infty$

$* \quad \dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1 \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0$ et, $\left(\dfrac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1\right) \longrightarrow +\infty$,

Donc : $\dfrac{S_1^{(n)} - S}{S_n - S} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 1.$ ■

• Si $\rho_1 = 1$ alors :

D'après les notations du théorème on a :

$\bar{\eta}_n = 1 + \bar{\mu}_0(n)$ avec, $\bar{\mu}_0(n) \xrightarrow[n.]{} 0$ et $\left(\forall n : \; \bar{\mu}_0(n) \neq 0\right)$.

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = \bar{\mu}_0(n)\left\{1 + \frac{\bar{\eta}_n}{\bar{\mu}_0(n)}\left(Q_1(n) + b_2\left[\frac{r_2(n+1)}{r_1(n+1)} - 1\right]\frac{r_2(n)}{r_1(n)}\right)A_1(n) + o(A_1(n))\right\},$$

Ou alors :

$$\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} - 1 = \bar{\mu}_0(n) \times \left\{ 1 + b_2 \bar{\eta}_n \left[\frac{\mu_2(n)}{\bar{\mu}_0(n)} - \frac{\mu_2(n+1)}{\bar{\mu}_0(n+1)} \times \frac{\bar{\mu}_0(n+1)}{\bar{\mu}_0(n)} \times \frac{r_2(n)}{r_1(n)} + \frac{r_2(n)}{r_1(n)\, r_1(n+1)} \frac{\rho_1(n+1)}{\bar{\mu}_0(n)} \left(\frac{\rho_2(n+1)}{\rho_1(n+1)} - 1 \right) \right] \times \lambda_1(n) + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + o(\lambda_1(n)) \right\}.$$

Le coefficient de $\lambda_1(n)$ dans cette expression tend vers :

$$\bar{\mu}_2 (1 - \bar{\mu}_0) .$$

On a donc :

$$\lim_n \frac{S_1^{(n)} - S}{S_n - S} = \lim_n \frac{(S_1^{(n)} - S)}{(S_{n+1} - S)} \times \frac{(S_{n+1} - S)}{(S_n - S)} = \left(1 - \bar{\mu}_1 (1 + \varepsilon_0)\right) . \ \blacksquare$$

Remarque ⑤ :

Les hypothèses 2°) et 3°) :

2°) : $\forall j \geq 1 \quad \lim_n \frac{\Delta(r_1(n) r_1(n+1) r_1(n+2) \cdots r_1(n+j))}{\Delta(r_1(n) r_1(n+1) \cdots r_1(n+j-1))} = \lambda_0 : |\lambda_0| < 1$,

3°) : $\forall j \geq 1, \forall i \geq 1 : \lim_n \frac{\delta(r_i(n) r_i(n+1) \cdots r_i(n+j))}{\delta(r_i(n) r_i(n+1) \cdots r_i(n+j-1))} = \lambda_i : |\lambda_i| < 1$,

peuvent être remplacées par : (voir la preuve du théorème 2).

2') $\forall j \geq 1 : \lim_n \frac{\Delta(r_1(n) r_1(n+1) \cdots r_1(n+j))}{\Delta(r_1(n) r_1(n+1) \cdots r_1(n+j-1))} = \rho_j$ avec $\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \rho_j < +\infty$,

3') $\forall j \geq 1, \forall i \geq 1 \quad \lim_n \frac{\delta(r_i(n) r_i(n+1) \cdots r_i(n+j))}{\delta(r_i(n) r_i(n+1) \cdots r_i(n+j-1))} = \rho_{i,j}$ avec $\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \rho_{i,j} < \infty \ \forall i \geq 1$

Exemple d'application (th : 2) :

Prenons : $\forall n \in \mathbb{N} \quad h_1(n) = \frac{1}{(n+1)^2}$,

alors : $r_1(n) = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \xrightarrow[n]{} r_1 = 1$, donc : • $\rho_1(n) = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{n+2}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$,

• $\frac{\rho_1(n+1)}{\rho_1(n)} \xrightarrow[n]{} \rho_1 = 1$, $\quad (\rho_i = 0)\ (i \geq 2)$

• $\varepsilon_0(n) = R_0(n) - 1$,

• $$R_0(n) = \frac{1 + \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^2 + \cdots}{1 + \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^2 + \cdots},$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \times \frac{\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \frac{1}{(n+4)^2} + \cdots}{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots},$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \times \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{1}{\left\{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots\right\}},$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \times \frac{1}{\sum_{k\geq 1} \left(\frac{n+1}{n+k}\right)^2} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 1 .$$

• $$\frac{R_0(n) - 1}{\rho_1(n)} = -\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} + \frac{(n+2)^2}{(n+1)(2n+3)} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sum_{k\geq 1} \frac{n+1}{(n+k)^2}} \xrightarrow[n]{} \varepsilon_0 = -\frac{1}{2} .$$

• $$n \times \rho_1(n) = -\frac{n(2n+3)}{(n+2)^2} \xrightarrow[n]{} \rho_0 = -2$$

Pour faire la comparaison entre les transformations étudiées dans ces derniers paragraphes III et IV, l'utilisation des deux critères : Ordre d'accélération et indice d'efficacité (non défini lorsque l'ordre d'accélération est au moins égal à 1) ne permet pas de conclure. Pour cela, nous proposons de faire une comparaison entre leurs domaines d'accélération, domaines d'amélioration et domaines de contraction au sens des définitions du paragraphe V suivant.

Pour clore cette étude, utilisons cette notion d'ordre d'accélération, pour comparer d'une manière générale deux transformations de suites.

V. COMPARAISON DE DEUX TRANSFORMATIONS.

Soient : (S_n) une suite de limite S,

(T) et (T') deux transformations de suites, vérifiant :

$$\exists c, c', r \geq 0, r' \geq 0 : \lim_n \frac{T_n - S}{|S_n - S|^r} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_n \frac{T'_n - S}{|S_n - S|^{r'}} = c' \qquad \dots \quad \dots \quad (25)$$

On pose :

- $A_r(T) = \left\{ (S_n) : \exists c, \lim_n \frac{T_n - S}{|S_n - S|^r} = c \right\}$,

  Lorsque $r > 1$, $A_r(T)$ est appelé : domaine d'accélération de (T) d'ordre au moins r ;

- $A(T) = \left\{ (S_n) : T_n - S = o(S_n - S) \right\}$: domaine d'accélération de (T) ;

- $J(T) = \left\{ (S_n) : \exists c \neq 1, \lim_n \frac{T_n - S}{S_n - S} = c \right\}$: domaine d'amélioration de (T), [15] ;

- $B(T) = \left\{ (S_n) : \exists c, -1 \leq c < 1, \lim_n \frac{T_n - S}{S_n - S} = c \right\}$: domaine d'amélioration strict de (T), (voir [15]) ;

- $C(T) = \left\{ (S_n) : \exists K_1, K_2 ; -1 < K_1 \leq K_2 < 1 ; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, K_1 \leq \frac{T_n - S}{S_n - S} \leq K_2 \right\}$,

  appelé : domaine de contraction de (T), ([15]).

D'abord on a d'après la propriété 1 . §2 , [15] :

Propriété 1 :

$$A(T) \subset C(T) \subset B(T) \subset J(T) .$$

D'autre part, on a :

Propriété 2 :

i) $\forall r \geq 0 \quad A_{r+1}(T) \subset A_r(T)$,

ii) $\forall r > 1 , \forall s \in [0,1] : \quad A_r(T) \subset A(T) \subset A_1(T) \subset A_s(T)$.

Preuve :

i) Soit $r \geq 0$ et soit $(s_n) \in A_{r+1}(T)$.

puisque :
$$\lim_n \frac{T_n - s}{|s_n - s|^r} = \lim_n \frac{T_n - s}{|s_n - s|^{r+1}} \cdot |s_n - s| \text{ et que } \lim_n \frac{T_n - s}{|s_n - s|^{r+1}} = C \quad (\text{voir déf.})$$

On a : $\lim_n \frac{T_n - s}{|s_n - s|^r} = 0$. Donc $(s_n) \in A_r(T)$.

ii) Soient $r > 1$ et $s \in [0,1]$:

- Si $(s_n) \in A_r(T)$ alors : $\lim_n \left|\frac{T_n - s}{s_n - s}\right| = \lim_n \left|\frac{T_n - s}{|s_n - s|^r}\right| \times |s_n - s|^{r-1} \xrightarrow[n]{} C \times 0 = 0$

  Donc : $(s_n) \in A(T)$.

- Si $(s_n) \in A(T)$ alors : $\lim_n \frac{T_n - s}{|s_n - s|} = \lim_n \frac{T_n - s}{(s_n - s)} \times \frac{(s_n - s)}{|s_n - s|} = 0 \times \varepsilon = 0 , (\varepsilon = \pm 1)$

  Donc : $(s_n) \in A_1(T)$

- Si $(s_n) \in A_1(T)$ alors : $\lim_n \frac{T_n - s}{|s_n - s|^s} = \lim_n \frac{T_n - s}{|s_n - s|} \times |s_n - s|^{1-s} = \begin{cases} C & \text{si } s = 1 \\ 0 & \text{si } s < 1 \end{cases}$

  Donc : $(s_n) \in A_s(T)$.

Remarque 6

Avant d'étudier l'accélération d'une transformation par rapport à une autre, signalons que les ensembles construits précédemment (page: 187) ont un sens (ie : ils sont non vides). Pour cela et grâce aux inclusions établies aux propriétés 1 et 2, il suffit de montrer qu'il existe (T) vérifiant :

$$(26) : \left(\forall r > 1 \quad A_r(T) \neq \emptyset\right).$$

Or, si l'on se place dans le cas des suites de point-fixe : (S_n) : $S_{n+1} = F(S_n)$, avec $s = F(s)$ de multiplicité $j \geq 2$ et : (T) est la transformation étudiée au paragraphe II, théorème 1 (chap. III) avec $(\varphi) = (T_2)$, On a :

$$\exists c, \quad \forall p \in \mathbb{N} : \lim_n \frac{\varphi_p^{(n)} - s}{(S_n - s)^{p+2}} = c .$$

Donc : $(S_n) \in A_{p+2}(\varphi)$.

Par suite ; si $r > 1$, alors en posant $p = \lfloor r \rfloor$ (partie entière de r), On obtient :

$$(S_n) \in A_{p+2}(\varphi) \subset A_r(\varphi) . \quad \text{Car : } p+2 > r ,$$

■

A présent, supposons que deux transformations (T) et (T') vérifient : (25).

Théorème 1:

i) Si $r > r'$ alors :

i-1) $T_n - S = o\left(|S_n - S|^{r'}\right)$;

i-2) si de plus : $c' \neq 0$ alors : $T_n - S = o(T'_n - S)$.

ii) Si $r = r'$ alors :

ii-1) si $0 < |c| \leq |c'|$ et $c \neq c'$ alors : $(T'_n) \in B(T)$;

ii-2) si $c = 0$ et $c' \neq 0$, alors : $T_n - S = o(T'_n - S)$;

ii-3) si $|c| = |c'| \neq 0$, alors : $(T'_n) \in \complement C(T) \subset \complement A(T)$.

Preuve : (simple).

i) $r > r'$:

i-1) On a : $\frac{T_n - S}{|S_n - S|^{r'}} = \frac{T_n - S}{|S_n - S|^r} \cdot |S_n - S|^{r-r'} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0$ $(r > r')$ et $\frac{T_n - S}{|S_n - S|^r} \longrightarrow c$

i-2) si $c' \neq 0$:

$$\frac{T_n - S}{T'_n - S} = \frac{T_n - S}{|S_n - S|^r} \cdot \frac{|S_n - S|^{r'}}{T'_n - S} \times |S_n - S|^{r-r'} \xrightarrow[n]{} \frac{c}{c'} \times 0 = 0$$

ii) si $r = r'$:

ii-1) On a : $\frac{T_n - S}{T'_n - S} = \frac{\left(\frac{T_n - S}{|S_n - S|^r}\right)}{\left(\frac{T'_n - S}{|S_n - S|^r}\right)} \xrightarrow[n]{} \frac{c}{c'}$.

puisque : $\begin{cases} 0 < |c| \leqslant |c'| \\ c \neq c' \end{cases}$ on a : $-1 \leqslant \frac{c}{c'} < 1$,

Par suite : $(T'_n) \in \mathcal{B}(T)$. ∎

ii-2) si $c = 0$ et $c' \neq 0$ alors d'après ii-1) On a : $\frac{T_n - S}{T'_n - S} \xrightarrow[n]{} 0$

ii-3) si $|c| = |c'| \neq 0$:

Supposons que : $(T'_n) \in \mathcal{C}(T)$.

Alors : $(\exists k_1, k_2 : -1 < k_1 < k_2 < 1)$, $(\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N) : k_1 \leqslant \frac{T_n - S}{T'_n - S} \leqslant k_2$.

mais :

$$\lim_n \frac{T_n - S}{T'_n - S} = \lim_n \frac{(T_n - S)/|S_n - S|^r}{(T'_n - S)/|S_n - S|^r} = \frac{c}{c'} .$$

Donc : $\frac{c}{c'} \in [k_1, k_2] \subset]-1, 1[$.

Par suite :

$$1 = \left|\frac{c}{c'}\right| \in]-1, 1[\text{ , ce qui est faux.}$$

Donc : $(T'_n) \notin \mathcal{C}(T)$.

- Ceci veut dire que la suite $n \longmapsto T'_n$ n'est pas contractive par la transformation (T) .

Application :

Dans le cas des suites de E_4, § III et :

Sous les hypothèses : 1), 2), 3) et 4) ; théorème 1, On a :

- $\lim_n \dfrac{\varepsilon_2^{(n)} - S}{(S_n - S)^2} := c_0 = a_2 (r_2 - r_1)^2 \dfrac{(r_1 - 1)}{(r_2 - 1)} \times \gamma$ où $\gamma = \lim_n \dfrac{g_1(n)}{h_1(n)}$;

- $\lim_n \dfrac{T_1^{(n)} - S}{(S_n - S)^2} := c_1 = a_2 \dfrac{(r_2 - r_1)^3}{(r_2 - 1)(1 - r_1)} \times \gamma$;

- $\lim \dfrac{S_1^{(n)} - S}{(S_n - S)^2} := c_2 = a_2 r_1 \gamma (r_2 - r_1) \times \left\{ \dfrac{r_1^2 - r_2}{(r_1 - 1) r_1^2} - \dfrac{r_1 - 1}{r_2 - 1} \right\}$;

- $\lim_n \dfrac{U_1^{(n)} - S}{S_n - S} = 0$;

- $\lim_n \dfrac{\varphi_2^{(n)} - S}{S_n - S} = -r_1 := c_3$

a) Si les constantes c_0, c_1, c_2, c_3 sont non nulles :

On a : $I(T_1) = I(S_1) = \sqrt[3]{2}$,

$I(\varepsilon_2) = \sqrt{2}$,

Donc :
- (ε_2) est meilleur que (T_1) et (S_1) - $\left(I(\varepsilon_2) > I(T_1) = I(S_1)\right)$-
- (ε_2) est meilleur que (U_1) - (voir la partie b.S de la preuve du théorème 1, § III) -
- Pour comparer (T_1) et (S_1), on utilise ii) du théorème 1, § V. Les constantes asymptotiques c_1 et c_2 sont exprimées ci-dessus.
- (φ_2) n'accélère pas (S_n).

b) si $r_1 = 0$:

alors : (T_1) et (ε_2) sont au moins d'ordre d'accélération : 2,

(U_1) et (ρ_2) sont d'ordre d'accélération supérieur à : 1. [*]

On a :

$$c_0 = a_2 \gamma \frac{r_2^2}{1-r_2} \quad \text{et} \quad c_1 = -r_2 c_0 ,$$

si : $c_1 \neq 0$ alors : $|c_1| = |r_2| \cdot |c_0| < |c_0| \quad (|r_2|<1)$

Donc : $(\varepsilon_2^{(n)}) \in \mathcal{B}(T_1)$, d'après ii), théorème 1, §V.

Si : $c_1 = 0$ alors $c_0 = 0$

$I(T_1) > \sqrt[3]{2}$; $I(\varepsilon_2) > \sqrt{2}$ ... [*]

c) si $r_1 \neq 0$ et $c_0 \neq 0$, alors : $c_1 \neq 0$, $c_3 \neq 0$.

- (T_1), (S_1) et (ε_2) sont d'ordre d'accélération : 2,

(U_1) est d'ordre d'accélération supérieur à : 1,

(ρ_2) n'accélère pas (S_n).

Si $c_2 = 0$:

$$S_1^{(n)} - S = o\left(T_1^{(n)} - S\right)$$

$$S_1^{(n)} - S = o\left(\varepsilon_2^{(n)} - S\right) \quad \text{d'après ii-2), théorème 1, §V.}$$

si $c_2 \neq 0$: On retrouve le cas c_0, c_1, c_2, c_3 non nulles.

d) si $r_1 \neq 0$ et $c_0 = 0$, alors : $c_1 = c_2 = 0$ et $c_3 \neq 0$.

- (ε_2), (T_1) et (S_1) sont au moins d'ordre d'accélération : 2

$I(\varepsilon_2) > \sqrt{2}$, $I(T_1) > \sqrt[3]{2}$, $I(S_1) > \sqrt[3]{2}$ ... [*]

- (U_1) est d'ordre d'accélération supérieur à : 1
- (ρ_2) n'accélère pas (S_n).

[*] : Dans ce cas, la meilleur de ces transformations ne peut pas être déterminée en utilisant les critères développés dans cette étude.

Conclusion 4:

D'après l'étude faite dans ce chapitre, on constate que :

(I) Dans le cas des suites de point-fixe :

Les meilleurs indices d'efficacité (définition 2) des transformations : (T_1), (S_1), (ε_2), (ρ_2), (W_2) d'OVERHOLT, (U_1), (t_1), (V_1) de LEVIN, sont donnés relativement à la multiplicité j de s : $F(s)=s$, par le :

TAB.a:

Multiplicité	Meilleur indice d'efficacité :	Transformation (s) associée (s) :
$j=1$	$\sqrt[3]{3} \simeq 1.442$	(W_2),
$j=2$	$\sqrt{2} \simeq 1.414$	(ρ_2)
$j\geq 3$	$\sqrt[3]{2} \simeq 1.2599$	(T_1), (S_1).

Après amélioration à l'aide de la transformation (φ) (p:156) on obtient le :

TAB.aa:

Multiplicité	Meilleur indice obtenu	Transformation (s) φ_0 associée	(φ_p) associée :
$j=2$	$\boxed{\sqrt[3]{3} \simeq 1.442}$	(ρ_2) .	(φ_1) ,
$j\geq 3$	$\boxed{\sqrt[5]{4} \simeq 1.3195}$	(T_1), (S_1) .	(φ_2) ,

(II) Dans le cas des suites de E_Δ :

II-1 CAS LINEAIRE :

- Sous les hypothèses (suffisantes) 1), 2) du théorème 1, §III, on a:

Transformations :	Ordres d'accélération :
(T_1), (S_1), $(\mathcal{E}_2)$, (U_1) :	$\cdot > 1$
(P_2) :	$\cdot \geqslant 1$

Sous les hypothèses 1°), 2°), 3°) et 4°) du théorème 1, § III, on a :

Transformations :	Ordres d'accélération :
(T_1), (S_1), $(\mathcal{E}_2)$:	$\cdot \geqslant 2$
(U_1) :	$\cdot > 1$
(P_2) :	$\cdot \geqslant 1$

II.2 CAS Logarithmique :

Sous les hypothèses du théorème 1, § IV, on a :

Transformations :	Ordres d'accélération :
(T_1), (S_1), $(\mathcal{E}_2)$, (U_1), (P_2) :	Au moins : 1.

Lorsque deux transformations sont au moins d'ordre d'accélération : 1, leur comparaison se fait d'une façon analogue à l'étude de (T_1), (S_1), $(\mathcal{E}_2)$, (P_2) et (U_1) dans la partie "application, § V, p : 191".

PARTIE ANNEXE.

Preuve du Lemme 1 :

On a : $F_n - x^* = F(x_n) - F(x^*) = \sum_{i=1}^{7} A_i e_n^i + o(e_n^7)$, ($A_1 = 1$ et $A_2 \neq 0$ par hypothèse)

Donc : $\dfrac{F_n - x^*}{x_n - x^*} = 1 + A_2 e_n + A_3 e_n^2 + \cdots + A_7 e_n^6 + o(e_n^6)$.

i) : D'après cette expression, On a :

$$\frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1 = A_2 e_n \left\{ 1 + \bar{A}_1 e_n + \bar{A}_2 e_n^2 + \cdots + \bar{A}_5 e_n^5 + o(e_n^5) \right\} \text{ où } \bar{A}_i = \frac{A_{i+2}}{A_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, 5$$

ii) : On a : $$\frac{F_n^2 - x^*}{F_n - x^*} - 1 = A_2 (F_n - x^*) \left\{ 1 + \bar{A}_1 (F_n - x^*) + \bar{A}_2 (F_n - x^*)^2 + \cdots + \bar{A}_5 (F_n - x^*)^5 + o\left((F_n - x^*)^5\right) \right\}$$

- $F_n - x^* = e_n + o(e_n) \Rightarrow o\left((F_n - x^*)^5\right) = o(e_n^5)$,
- $F_n - x^* = e_n \left\{ 1 + A_2 e_n + A_3 e_n^2 + \cdots + A_6 e_n^5 + o(e_n^5) \right\}$,
- $(F_n - x^*)^2 = e_n^2 + 2A_2 e_n^3 + (2A_3 + A_2^2) e_n^4 + 2(A_4 + A_2 A_3) e_n^5 + o(e_n^5)$,
- $(F_n - x^*)^3 = e_n^3 + 3A_2 e_n^4 + 3(A_3 + A_2^2) e_n^5 + o(e_n^5)$,
- $(F_n - x^*)^4 = e_n^4 + 4A_2 e_n^5 + o(e_n^5)$.
- $(F_n - x^*)^5 = e_n^5 + o(e_n^5)$,

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{F_n^2 - x^*}{F_n - x^*} - 1 = {} & A_2 e_n \left\{ 1 + A_2 e_n + A_3 e_n^2 + \cdots + A_6 e_n^5 + o(e_n^5) \right\} \times \Big\{ 1 + \bar{A}_1 e_n + (A_2 \bar{A}_1 + \bar{A}_2) e_n^2 + \cdots \\ & \cdots + (\bar{A}_3 + 2A_2 \bar{A}_2 + A_3 \bar{A}_1) e_n^3 + (\bar{A}_4 + 3A_2 \bar{A}_3 + 2A_3 \bar{A}_2 + A_2^2 \bar{A}_1 + A_4 \bar{A}_1) e_n^4 + \cdots \\ & \cdots + (\bar{A}_5 + 4A_2 \bar{A}_4 + 3A_3 \bar{A}_3 + 3A_2^2 \bar{A}_3 + 2A_4 \bar{A}_2 + 2A_2 A_3 \bar{A}_2 + A_5 \bar{A}_1) e_n^5 + \cdots \\ & \cdots + o(e_n^5) \Big\}. \end{aligned}$$

ou alors :

$$\frac{F_n^2 - x^*}{F_n - x^*} - 1 = A_2 e_n \left\{ 1 + \bar{B}_1 e_n + \bar{B}_2 e_n^2 + \cdots + \bar{B}_5 e_n^5 + o(e_n^5) \right\} \text{ où :}$$

- $\bar{B}_i = B_i / A_2 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$;
- $B_1 = A_3 + A_2^2$;
- $B_2 = A_4 + 3A_2 A_3$

$B_3 = A_5 + 4A_2A_4 + A_3A_2^2 + 2A_3^2$;
$B_4 = A_6 + 5A_2A_5 + 3A_3A_4 + 2A_2A_4 + 3A_2^2A_4 + 2A_2A_3^2$;
$B_5 = A_7 + 6A_2A_6 + 6A_3A_5 + 6A_5A_2^2 + 9A_2A_3A_4 + 3A_4^2 + A_4A_2^3 + A_3^3$.

iii) On a :

$$\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} = \frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} \cdot \left\{ \frac{\dfrac{F_n^2 - x^*}{F_n - x^*} - 1}{\dfrac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1} \right\}$$

- $\dfrac{F_n - x^*}{x_n - x^*} = 1 + A_2 e_n \left\{ 1 + \overline{A}_1 e_n + \overline{A}_2 e_n^2 + \dots + \overline{A}_5 e_n^5 + o(e_n^5) \right\}$,
- $\dfrac{F_n^2 - x^*}{F_n - x^*} = 1 + A_2 e_n \left\{ 1 + \overline{B}_1 e_n + \overline{B}_2 e_n^2 + \overline{B}_3 e_n^3 + \dots + \overline{B}_5 e_n^5 + o(e_n^5) \right\}$,

Pour calculer le rapport : $\left(\dfrac{F_n^2 - x^*}{F_n - x^*} - 1\right) \Big/ \left(\dfrac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1\right)$ en fonction de e_n, on a besoin de l'égalité :

$$(*) : \frac{1 + x_1 e_n + x_2 e_n^2 + x_3 e_n^3 + x_4 e_n^4 + x_5 e_n^5 + o(e_n^5)}{1 + y_1 e_n + y_2 e_n^2 + y_3 e_n^3 + y_4 e_n^4 + y_5 e_n^5 + o(e_n^5)} = 1 + z_1 e_n + z_2 e_n^2 + z_3 e_n^3 + z_4 e_n^4 + z_5 e_n^5 + o(e_n^5).$$

Avec : $z_1 = x_1 - y_1$,
$z_2 = y_1^2 - y_2 - y_1 x_1 + x_2$,
$z_3 = x_3 + x_1 y_1^2 + 2y_1y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 - y_3 - y_1^3$,
$z_4 = y_1^4 - y_4 + y_2^2 + 2y_1y_3 - 3y_2y_1^2 + 2x_1y_1y_2 - x_1(y_3 + y_1^3) + x_2(y_1^2 - y_2) + x_4 - x_3 y_1$.
$z_5 = x_5 - x_4 y_1 + x_3(y_1^2 - y_2) + x_2(2y_1y_2 - y_3 - y_1^3) + x_1(y_1^4 - y_4 + y_2^2 + 2y_1y_3 - 3y_2y_1^2) + \dots$
$\dots + (2y_1y_4 + 2y_2y_3 - y_5 - 3y_1y_2^2 - 3y_3y_1^2 + 4y_2y_1^3 - y_1^5)$.

Donc :

$$\frac{\left(\dfrac{F_n^2 - x^*}{F_n - x^*} - 1\right)}{\left(\dfrac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1\right)} = \frac{1 + \overline{B}_1 e_n + \overline{B}_2 e_n^2 + \overline{B}_3 e_n^3 + \overline{B}_4 e_n^4 + \overline{B}_5 e_n^5 + o(e_n^5)}{1 + \overline{A}_1 e_n + \overline{A}_2 e_n^2 + \overline{A}_3 e_n^3 + \overline{A}_4 e_n^4 + \overline{A}_5 e_n^5 + o(e_n^5)}$$

$$= 1 + H_1 e_n + H_2 e_n^2 + H_3 e_n^3 + H_4 e_n^4 + H_5 e_n^5 + o(e_n^5) \quad \text{où :}$$

- $H_1 = \overline{B}_1 - \overline{A}_1 = A_2$,
- $H_2 = \overline{A}_1^2 - \overline{A}_2 - \overline{A}_1\overline{B}_1 + \overline{B}_2 = 2A_3$,
- $H_3 = \overline{B}_3 + \overline{B}_1\overline{A}_1^2 + 2\overline{A}_1\overline{A}_2 - \overline{B}_2\overline{A}_1 - \overline{B}_1\overline{A}_2 - \overline{A}_3 - \overline{A}_1^3$
- $H_4 = \overline{A}_1^4 - \overline{A}_4 + \overline{A}_2^2 + 2\overline{A}_1\overline{A}_3 - 3\overline{A}_2\overline{A}_1^2 + 2\overline{B}_1\overline{A}_1\overline{A}_2 - \overline{B}_1(\overline{A}_3 + \overline{A}_1^3) +$
$+ \overline{B}_2(\overline{A}_1^2 - \overline{A}_2) + \overline{B}_4 - \overline{B}_3\overline{A}_1$.

- $H_5 = \bar{B}_5 - \bar{B}_4\bar{A}_1 + \bar{B}_3(\bar{A}_1^2 - \bar{A}_2) + \bar{B}_2(2\bar{A}_1\bar{A}_2 - \bar{A}_3 - \bar{A}_1^3) + \bar{B}_1(\bar{A}_1^4 - \bar{A}_4 + \bar{A}_2^2 + 2\bar{A}_1\bar{A}_3 - 3\bar{A}_2\bar{A}_1^2) +$
$+ 2\bar{A}_1\bar{A}_4 + 2\bar{A}_2\bar{A}_3 + 4\bar{A}_2\bar{A}_1^3 - \bar{A}_5 - 3\bar{A}_1\bar{A}_2^2 - 3\bar{A}_3\bar{A}_1^2 - \bar{A}_1^5$.

<u>Par suite :</u> $\dfrac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} = \left\{1 + A_2 e_n + A_3 e_n^2 + A_4 e_n^3 + A_5 e_n^4 + A_6 e_n^5 + o(e_n^5)\right\} \times \left\{1 + H_1 e_n + H_2 e_n^2 + \right.$

$$\left. + H_3 e_n^3 + H_4 e_n^4 + H_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\},$$

$$= 1 + (A_2 + H_1)e_n + (A_3 + A_2H_1 + H_2)e_n^2 + (A_4 + A_3H_1 + A_2H_2 + H_3)e_n^3 + \cdots$$

$$\cdots + (A_5 + A_4H_1 + A_3H_2 + A_2H_3 + H_4)e_n^4 + (A_6 + A_5H_1 + A_4H_2 + A_3H_3 + A_2H_4 + H_5)e_n^5 + \cdots$$

$$\cdots + o(e_n^5)$$

<u>ou alors :</u>

$$\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1 = (A_2 + H_1)e_n + (A_3 + A_2H_1 + H_2)e_n^2 + (A_4 + A_3H_1 + A_2H_2 + H_3)e_n^3 + \cdots$$
$$\cdots + (A_5 + A_4H_1 + A_3H_2 + A_2H_3 + H_4)e_n^4 + (A_6 + A_5H_1 + A_4H_2 + A_3H_3 + A_2H_4 + H_5)e_n^5$$
$$\cdots + o(e_n^5)$$

« $A_2 + H_1 = A_2 + \bar{B}_1 - \bar{A}_1 = A_2 + \dfrac{B_1}{A_2} - \dfrac{A_3}{A_2} = A_2 - \dfrac{A_3}{A_2} + \dfrac{A_3 + A_2^2}{A_2}$
$= 2A_2$. »

<u>On pose :</u> $\dfrac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1 = 2A_2 e_n \left\{1 + \bar{C}_1 e_n + \bar{C}_2 e_n^2 + \bar{C}_3 e_n^3 + \bar{C}_4 e_n^4 + \bar{C}_5 e_n^5 + o(e_n^5)\right\}$

<u>avec :</u> $\bar{C}_1 = (A_3 + A_2H_1 + H_2)/2A_2$, $\left(\bar{C}_1 = \dfrac{3A_3 + A_2^2}{2A_2}\right)$,

- $\bar{C}_2 = (A_4 + A_3H_1 + A_2H_2 + H_3)/2A_2$,
- $\bar{C}_3 = (A_5 + A_4H_1 + A_3H_2 + A_2H_3 + H_4)/2A_2$,
- $\bar{C}_4 = (A_6 + A_5H_1 + A_4H_2 + A_3H_3 + A_2H_4 + H_5)/2A_2$,
- $\bar{C}_5 = (A_7 + A_6H_1 + A_5H_2 + A_4H_3 + A_3H_4 + A_2H_5 + H_6)/2A_2$.

[Ce terme $\bar{C}_5$ dépend de H_6 qui n'est pas calculé explicitement. Celui-ci n'intervient pas dans le calcul des coéfficients asymtotiques des erreurs.] -

<u>On pose :</u> $C_i = 2A_2\bar{C}_i$: $i = 1, 2, 3, 4, 5$. (**)

Preuve : iv) du lemme 2.

Dans iii) du lemme①, on remplace x_n par $F_n = F(x_n)$. On obtient, alors :

$$\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1 = 2A_2 (F_n - x^*) \left\{ 1 + \bar{C}_1 (F_n - x^*) + \bar{C}_2 (F_n - x^*)^2 + \bar{C}_3 (F_n - x^*)^3 + \bar{C}_4 (F_n - x^*)^4 + \bar{C}_5 (F_n - x^*)^5 + \underbrace{o((F_n - x^*)^5)}_{= o(e_n^5)} \right\}$$

- $F_n - x^* = e_n \{ 1 + A_2 e_n + A_3 e_n^2 + A_4 e_n^3 + A_5 e_n^4 + A_6 e_n^5 + o(e_n^5) \}$,
  $= e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3 + A_4 e_n^4 + A_5 e_n^5 + o(e_n^5)$,
- $(F_n - x^*)^2 = e_n^2 + 2A_2 e_n^3 + (2A_3 + A_2^2) e_n^4 + 2 (A_4 + A_2 A_3) e_n^5 + o(e_n^5)$,
- $(F_n - x^*)^3 = e_n^3 + 3A_2 e_n^4 + 3 (A_3 + A_2^2) e_n^5 + o(e_n^5)$,
- $(F_n - x^*)^4 = e_n^4 + 4A_2 e_n^5 + o(e_n^5)$,
- $(F_n - x^*)^5 = e_n^5 + o(e_n^5)$, [D'après ii), page 2 de l'annexe.]

Donc : $$\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1 = 2A_2 e_n \{ 1 + A_2 e_n + A_3 e_n^2 + A_4 e_n^3 + A_5 e_n^4 + A_6 e_n^5 + o(e_n^5) \} \times \{ 1 + \bar{C}_1 e_n + \cdots$$

$$\cdots + (\bar{C}_2 + A_2 \bar{C}_1) e_n^2 + (\bar{C}_3 + 2A_2 \bar{C}_2 + A_3 \bar{C}_1) e_n^3 + (\bar{C}_4 + 3A_2 \bar{C}_3 + (2A_3 + A_2^2) \bar{C}_2 + A_4 \bar{C}_1) e_n^4 + \cdots$$

$$\cdots + (\bar{C}_5 + 4A_2 \bar{C}_4 + 3 (A_3 + A_2^2) \bar{C}_3 + 2 (A_4 + A_2 A_3) \bar{C}_2 + A_5 \bar{C}_1) e_n^5 + o(e_n^5) \},$$

$$= 2A_2 e_n \{ 1 + \bar{M}_1 e_n + \bar{M}_2 e_n^2 + \bar{M}_3 e_n^3 + \bar{M}_4 e_n^4 + \bar{M}_5 e_n^5 + o(e_n^5) \} \text{ où :}$$

- $\bar{M}_i = M_i / A_2$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, et :
- $M_1 = A_2 (\bar{C}_1 + A_2)$,
- $M_2 = A_2 (\bar{C}_2 + 2A_2 \bar{C}_1 + A_3)$,
- $M_3 = A_2 (\bar{C}_3 + 3A_2 \bar{C}_2 + 2A_3 \bar{C}_1 + A_2^2 \bar{C}_1 + A_4)$,
- $M_4 = A_2 (A_5 + A_4 \bar{C}_1 + A_3 [\bar{C}_2 + A_2 \bar{C}_1] + A_2 [\bar{C}_3 + 2A_2 \bar{C}_2 + A_3 \bar{C}_1] + \bar{C}_4 + 3A_2 \bar{C}_3 + [2A_3 + A_2^2] \bar{C}_2 +$
  $+ A_4 \bar{C}_1$.
- $M_5 = A_2 \Big(A_6 + A_5 \bar{C}_1 + A_4 [\bar{C}_2 + A_2 \bar{C}_1] + A_3 [\bar{C}_3 + 2A_2 \bar{C}_2 + A_3 \bar{C}_1] + \cdots$
  $\cdots + A_2 [\bar{C}_4 + 3A_2 \bar{C}_3 + (2A_3 + A_2^2) \bar{C}_2 + A_4 \bar{C}_1] + \bar{C}_5 + 4A_2 \bar{C}_4 + 3 (A_3 + A_2^2) \bar{C}_3 + 2 (A_4 + A_2 A_3) \bar{C}_2 + A_5 \bar{C}_1 \Big)$.

(Le fait de poser $\bar{M}_i = M_i / A_2$ sera très commode par la suite).

Preuve : V) Lemme 1.

On a : $\dfrac{F_n^4-F_n^3}{F_n^3-F_n^2}-1=2A_2(F_n-x^*)\times\left\{1+\overline{M}_1(F_n-x^*)+\overline{M}_2(F_n-x^*)^2+\cdots+\overline{M}_5(F_n-x^*)^5+o\left((F_n-x^*)^5\right)\right\}.$

- $(F_n-x^*)=e_n\left\{1+A_2e_n+A_3e_n^2+A_4e_n^3+A_5e_n^4+A_6e_n^5+o(e_n^5)\right\}$,
  $\quad = e_n+A_2e_n^2+A_3e_n^3+A_4e_n^4+A_5e_n^5+o(e_n^5)$.
- $(F_n-x^*)^2=e_n^2+2A_2e_n^3+(2A_3+A_2^2)e_n^4+2(A_4+A_2A_3)e_n^5+o(e_n^5)$,
- $(F_n-x^*)^3=e_n^3+3A_2e_n^4+3(A_3+A_2^2)e_n^5+o(e_n^5)$,
- $(F_n-x^*)^4=e_n^4+4A_2e_n^5+o(e_n^5)$
- $(F_n-x^*)^5=e_n^5+o(e_n^5)$.

Donc :

$$\frac{F_n^4-F_n^3}{F_n^3-F_n^2}-1=2A_2e_n\left\{1+A_2e_n+A_3e_n^2+A_4e_n^3+A_5e_n^4+A_6e_n^5+o(e_n^5)\right\}\times\left\{1+\overline{M}_1e_n+(\overline{M}_2+A_2\overline{M}_1)e_n^2+\cdots\right.$$
$$\cdots+(\overline{M}_3+2A_2\overline{M}_2+A_3\overline{M}_1)e_n^3+\left(\overline{M}_4+2A_2\overline{M}_3+[2A_3+A_2^2]\overline{M}_2+A_4\overline{M}_1\right)e_n^4+\cdots$$
$$\left.\cdots+\left(\overline{M}_5+4A_2\overline{M}_4+3[A_3+A_2^2]\overline{M}_3+2[A_4+A_2A_3]\overline{M}_2+A_5\overline{M}_1\right)e_n^5+o(e_n^5)\right\}$$

$$=2A_2e_n\left\{1+Z_1e_n+Z_2e_n^2+Z_3e_n^3+Z_4e_n^4+Z_5e_n^5+o(e_n^5)\right\}\text{ où :}$$

- $Z_1=A_2+\overline{M}_1=\dfrac{3A_3+5A_2^2}{2A_2}$,
- $Z_2=A_3+2A_2\overline{M}_1+\overline{M}_2$,
- $Z_3=A_4+2A_3\overline{M}_1+3A_2\overline{M}_2+A_2^2\overline{M}_1+\overline{M}_3$,
- $Z_4=A_5+2A_4\overline{M}_1+3A_3\overline{M}_2+2A_2A_3\overline{M}_1+3A_2\overline{M}_3+3A_2^2\overline{M}_2+\overline{M}_4$,
- $Z_5=A_6+(2A_5+2A_2A_4+A_3^2)\overline{M}_1+(3A_4+6A_2A_3+A_2^3)\overline{M}_2+(4A_3+5A_2^2)\overline{M}_3+$
  $\quad +5A_2\overline{M}_4+\overline{M}_5$.
- les $\overline{M}_i$ $(i=1,2,3,4,5)$ sont donnés par les expressions de iv) du lemme 1.

Le choix : $g_1(n) = \sqrt{|\Delta S_n|}$ et F strictement monotone n'améliore pas les méthodes $M-T_1$ et $M-S_1$.

En effet :

- $$\frac{T_1^{(n)} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{\left(\frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1\right)\left(\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)} - 1\right)}{\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right)\left(\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} - 1\right) - \left(\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)} - 1\right)} \quad ;$$

D'après les résultats de la remarque 2, on a :

$$\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} = \left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$= 1 + A_2 e_n \Big\{ 1 + \left(\bar{c}_1 - \frac{A_2}{2}\right) e_n + \left(\bar{c}_2 - A_2\bar{c}_1 + \frac{A_2^2}{2}\right) e_n^2 + \cdots$$
$$\cdots + \left(\bar{c}_3 - A_2\bar{c}_2 - \frac{A_2}{2}\bar{c}_1^2 + \frac{3}{2}A_2^2\bar{c}_1 - \frac{5}{8}A_2^3\right) e_n^3 + o(e_n^3) \Big\} .$$

Donc, en posant :

- $X_1 = \bar{c}_1 - \frac{A_2}{2} = \frac{3A_3}{2A_2}$;
- $X_2 = \bar{c}_2 - A_2\bar{c}_1 + \frac{A_2^2}{2}$;
- $X_3 = \bar{c}_3 - A_2\bar{c}_2 - \frac{A_2\bar{c}_1^2}{2} + \frac{3}{2}A_2^2\bar{c}_1 - \frac{5}{8}A_2^3$.

On a :

On a : $$\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)} - 1 = A_2(F_n - x^*)\left\{1 + X_1(F_n - x^*) + X_2(F_n - x^*)^2 + X_3(F_n - x^*)^3 + o(e_n^3)\right\} ; \left(o\left((F_n - x^*)^3\right) = o(e_n^3)\right)$$

$$= A_2 e_n \left\{1 + Y_1 e_n + Y_2 e_n^2 + Y_3 e_n^3 + o(e_n^3)\right\} \text{ où :}$$

- $Y_1 = A_2 + X_1$, $\quad \left(Y_1 = \frac{3A_3 + 2A_2^2}{2A_2}\right)$,
- $Y_2 = A_3 + 2A_2X_1 + X_2$,
- $Y_3 = A_4 + 2A_3X_1 + 3A_2X_2 + A_2^2X_1 + X_3$.

$$\left(\frac{F_n - x^*}{x_n - x^*} - 1\right)\left(\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)} - 1\right) = A_2^2 e_n^2 \left\{1 + \bar{A}_1 e_n + \bar{A}_2 e_n^2 + \bar{A}_3 e_n^3 + o(e_n^3)\right\} \times \left\{1 + Y_1 e_n + Y_2 e_n^2 + Y_3 e_n^3 + o(e_n^3)\right\}$$

$$= A_2^2 e_n^2 \left\{1 + \bar{Y}_1 e_n + \bar{Y}_2 e_n^2 + \bar{Y}_3 e_n^3 + o(e_n^3)\right\} \text{ où :}$$

- $\bar{Y}_1 = Y_1 + \bar{A}_1 \quad \left(= \frac{5A_3 + 2A_2^2}{2A_2}\right)$,
- $\bar{Y}_2 = Y_2 + \bar{A}_1 Y_1 + \bar{A}_2$,
- $\bar{Y}_3 = Y_3 + \bar{A}_1 Y_2 + \bar{A}_2 Y_1 + \bar{A}_3$.

$$\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right)\left(\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} - 1\right) = A_2 e_n \left\{1 + X_1 e_n + X_2 e_n^2 + X_3 e_n^3 + o(e_n^3)\right\}\left\{1 + 2A_2 e_n + 2A_2\bar{C}_1 e_n^2 + 2A_2\bar{C}_2 e_n^3 + o(e_n^3)\right\}$$

$$= A_2 e_n \left\{1 + (X_1 + 2A_2)e_n + (X_2 + 2A_2X_1 + 2A_2\bar{C}_1)e_n^2 + (X_3 + 2A_2X_2 + 2A_2X_1\bar{C}_1 + 2A_2\bar{C}_2)e_n^3 + o(e_n^3)\right\}.$$

$$\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right)\left(\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} - 1\right) - \left(\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)} - 1\right) = A_2 e_n \left\{(X_1 + 2A_2 - Y_1)e_n + (X_2 + 2A_2X_1 + 2A_2\bar{C}_1 - Y_2)e_n^2 + (X_3 + 2A_2X_2 + 2A_2X_1\bar{C}_1 + 2A_2\bar{C}_2 - Y_3)e_n^3 + o(e_n^3)\right\}$$

On a : $X_1 + 2A_2 - Y_1 = \frac{3A_3}{2A_2} + 2A_2 - \frac{3A_3 + 2A_2^2}{2A_2} = A_2$.

<u>Posons :</u>

$$\bar{X}_1 = (X_2 + 2A_2X_1 + 2A_2\bar{C}_1 - Y_2)/A_2 .$$
$$\bar{X}_2 = (X_3 + 2A_2X_2 + 2A_2X_1\bar{C}_1 + 2A_2\bar{C}_2 - Y_3)/A_2 .$$

Alors : $$\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n}\right)\left(\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} - 1\right) - \left(\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)} - 1\right) = A_2^2 e_n^2 \left\{1 + \bar{X}_1 e_n + \bar{X}_2 e_n^2 + o(e_n^2)\right\} .$$

Par suite :

$$\frac{T_1^{(n)}-x^*}{x_n-x^*} = 1-\frac{A_2^2e_n^2\left\{1+\bar{Y}_1 e_n+\bar{Y}_2 e_n^2+o(e_n^2)\right\}}{A_2^2e_n^2\left\{1+\bar{X}_1 e_n+\bar{X}_2 e_n^2+o(e_n^2)\right\}},$$

$$= 1-\left[1+(\bar{Y}_1-\bar{X}_1)e_n+\left(\bar{X}_1^2-\bar{X}_2-\bar{Y}_1\bar{X}_1+\bar{Y}_2\right)e_n^2+o(e_n^2)\right].$$ (En utilisant la relation (*) p: 2 de l'annexe).

Donc :

$$\boxed{T_1^{(n)}-x^* = -(\bar{Y}_1-\bar{X}_1)e_n^2-\left(\bar{X}_1^2-\bar{X}_2-\bar{Y}_1\bar{X}_1+\bar{Y}_2\right)e_n^3+o(e_n^3)} \quad \ldots (37)$$

Ce qui prouve que $M-T_1$ reste toujours au moins d'ordre 2. $\left(\bar{Y}_1-\bar{X}_1=-\frac{A_3}{2A_2}\right)$.

- $$\frac{S_1^{(n)}-x^*}{x_n-x^*} = \left(\frac{F_n-x^*}{x_n-x^*}\right)\times\left\{1-\frac{\left(\frac{F_n^2-x^*}{F_n-x^*}-1\right)\left(\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)}-1\right)}{\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}\right)\cdot\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)}\cdot\frac{g_1(n)}{g_1(n+1)}\cdot\left(\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)}-1\right)-\left(\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)}-1\right)}\right\},$$

- $\frac{F_n^2-x^*}{F_n-x^*}-1 = A_2e_n\left\{1+\bar{B}_1e_n+\bar{B}_2e_n^2+\bar{B}_3e_n^3+\bar{B}_4e_n^4+\bar{B}_5e_n^5+o(e_n^5)\right\},$

- $\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n} = 1+2A_2e_n+2A_2\bar{C}_1e_n^2+2A_2\bar{C}_2e_n^3+2A_2\bar{C}_3e_n^4+2A_2\bar{C}_4e_n^5+o(e_n^5),$

- $\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)}-1 = A_2e_n\left\{1+X_1e_n+X_2e_n^2+X_3e_n^3+o(e_n^3)\right\},$

- $\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)}-1 = A_2e_n\left\{1+Y_1e_n+Y_2e_n^2+Y_3e_n^3+o(e_n^3)\right\},$

- $\frac{F_n-x^*}{x_n-x^*} = 1+A_2e_n+A_3e_n^2+A_4e_n^3+o(e_n^3).$

Donc : $$\left(\frac{F_n^2-x^*}{F_n-x^*}-1\right)\left(\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)}-1\right) = A_2^2e_n^2\left\{1+(Y_1+\bar{B}_1)e_n+(Y_2+Y_1\bar{B}_1+\bar{B}_2)e_n^2+(Y_3+Y_2\bar{B}_1+Y_1\bar{B}_2+\bar{B}_3)e_n^3+o(e_n^3)\right\}.$$

$$\frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)}\cdot\frac{g_1(n)}{g_1(n+1)} = \frac{1+A_2e_n+A_2Y_1e_n^2+A_2Y_2e_n^3+o(e_n^3)}{1+A_2e_n+A_2X_1e_n^2+A_2X_2e_n^3+o(e_n^3)},$$

$$= 1+(Y_1-X_1)A_2e_n^2+A_2(Y_2-A_2Y_1-X_2+A_2X_1)e_n^3+o(e_n^3)$$

et :

$$\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}\right)\left(\frac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}}-1\right) = A_2 e_n\left\{1+X_1e_n+X_2e_n^2+X_3e_n^3+o(e_n^3)\right\}\times\left\{1+2A_2e_n+2A_2\bar{C}_1e_n^2+2A_2\bar{C}_2e_n^3+o(e_n^3)\right\}$$

$$= A_2 e_n\left\{1+(X_1+2A_2)e_n+\left(X_2+2A_2X_1+2A_2\bar{C}_1\right)e_n^2+\left(X_3+2A_2X_2+2A_2X_1\bar{C}_1+2A_2\bar{C}_2\right)e_n^3+o(e_n^3)\right\}.$$

Donc :

$$\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}\right)\left(\frac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}}-1\right)\frac{g_1^{(n+2)}}{g_1^{(n+1)}}\cdot\frac{g_1^{(n)}}{g_1^{(n+1)}} = A_2e_n\Big\{1+(X_1+2A_2)e_n+\left[X_2+A_2Y_1+A_2X_1+2A_2\bar{C}_1\right]e_n^2+$$
$$+\left[X_3+A_2\left(X_2+2X_1\bar{C}_1+2\bar{C}_2+X_1Y_1-X_1^2+A_2Y_1-A_2X_1+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots+Y_2\right)\right]e_n^3+o(e_n^3)\Big\}.$$

$$\text{et }\underbrace{\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}\right)\left(\frac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}}-1\right)\cdot\frac{g_1^{(n+2)}}{g_1^{(n+1)}}\cdot\frac{g_1^{(n)}}{g_1^{(n+1)}}-\left(\frac{g_1^{(n+2)}}{g_1^{(n+1)}}-1\right)}_{(*)} = A_2e_n\Big\{(X_1-Y_1+2A_2)e_n+\left(X_2-Y_2+A_2Y_1+A_2X_1+2A_2\bar{C}_1\right)e_n^2+$$
$$\cdots+\left(X_3-Y_3+A_2\left[X_2+2X_1\bar{C}_1+2\bar{C}_2+X_1Y_1-X_1^2+A_2Y_1-A_2X_1+\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots+Y_2\right]\right)e_n^3+o(e_n^3)\Big\}.$$

$$\cdot\ (X_1-Y_1+2A_2)=\frac{3A_3}{2A_2}-\frac{3A_3+2A_2^2}{2A_2}+2A_2$$
$$=-A_2+2A_2=A_2\ .$$

$$\cdot\ (*) = A_2^2e_n^2\left\{1+\left(\frac{X_2-Y_2}{A_2}+Y_1+X_1+2\bar{C}_1\right)e_n+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{X_3-Y_3}{A_2}+X_2+2X_1\bar{C}_1+2\bar{C}_2+X_1Y_1-X_1^2+A_2Y_1-A_2X_1+Y_2\right)e_n^2+o(e_n^2)\right\}$$
$$=A_2^2e_n^2\left\{1+2\left(\frac{A_3+A_2^2}{A_2}\right)e_n+\left(\bar{C}_2+A_2^2+7A_3+\frac{3}{2}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)^2-\frac{A_4}{A_2}\right)e_n^2+o(e_n^2)\right\}.$$

Donc :
$$\left(\frac{S_1^{(n)}-x^*}{x_n-x^*}\right)\left(\frac{x_n-x^*}{F_n-x^*}\right)=1-\frac{1+(Y_1+\bar{B}_1)e_n+(Y_2+Y_1\bar{B}_1+\bar{B}_2)e_n^2+o(e_n^2)}{1+2\left(\frac{A_3+A_2^2}{A_2}\right)e_n+\left(\bar{C}_2+A_2^2+7A_3+\frac{3}{2}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)^2-\frac{A_4}{A_2}\right)e_n^2+o(e_n^2)},$$

$$=1-\left[1+\left(Y_1+\bar{B}_1-\frac{2(A_3+A_2^2)}{A_2}\right)e_n+\bar{\bar{Y}}e_n^2+o(e_n^2)\right]$$
$$=\left[\frac{2(A_3+A_2^2)}{A_2}-Y_1-\bar{B}_1\right]e_n-\bar{\bar{Y}}e_n^2+o(e_n^2)\quad \text{où :}$$

$$«\ \bar{\bar{Y}}=4\left(\frac{A_3+A_2^2}{A_2}\right)^2-\bar{C}_2-A_2^2-7A_3-\frac{3}{2}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)^2+\frac{A_4}{A_2}-2(Y_1+\bar{B}_1)\left(\frac{A_3+A_2^2}{A_2}\right)+Y_2+Y_1\bar{B}_1+\bar{B}_2\ .\ »$$

Par suite :
$$\frac{S_1^{(n)}-x^*}{x_n-x^*}=\left\{1+A_2e_n+A_3e_n^2+o(e_n^2)\right\}\times\left\{\left[\frac{2(A_3+A_2^2)}{A_2}-Y_1-\bar{B}_1\right]e_n-\bar{\bar{Y}}e_n^2+o(e_n^2)\right\}$$

Donc :

$$\boxed{S_1^{(n)} - x^* = \left(\frac{2(A_2^2 + A_3)}{A_2} - Y_1 - \overline{B}_1 \right) e_n^2 + \left(2\left[A_3 + A_2^2\right] - A_2\left(Y_1 + \overline{B}_1\right) - \overline{\overline{Y}} \right) e_n^3 + o(e_n^3) \ldots} \quad (38).$$

Ceci prouve que : M-S_1 reste d'ordre au moins : 2.

le coefficient $\left(\frac{2(A_2^2 + A_3)}{A_2} - Y_1 - \overline{\overline{B}}_1 \right) = - A_3 / 2A_2$.

Proposition ② : M-S₂

Calcul de $g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}$:

On a $g_{1,2}^{(n)} = g_2^{(n+1)} - \dfrac{\Delta g_2^{(n+1)}}{\Delta D_{1,2}^{(n)}} D_{1,2}^{(n)}$

$$= g_2^{(n+1)} \left\{ 1 - \frac{\left(g_2^{(n+2)}/g_2^{(n+1)} \right) - 1}{\left(D_{1,2}^{(n+1)}/D_2^{(n)} \right) - 1} \right\}$$

Avec :

$$\frac{D_{1,2}^{(n+1)}}{D_{1,2}^{(n)}} = \frac{\Delta g_2(n+1)}{\Delta g_2(n)} \cdot \frac{\Delta g_1(n)}{\Delta g_1(n+1)} \times \frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)}$$

$$= \frac{\left(\frac{g_2^{(n+2)}}{g_2^{(n+1)}} - 1 \right) \times g_2^{(n+1)}}{\left(\frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} - 1 \right) \times g_2^{(n)}} \times \frac{\left(\frac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}} - 1 \right)}{\left(\frac{g_1^{(n+2)}}{g_1^{(n+1)}} - 1 \right)} \times \frac{g_1(n)}{g_1(n+1)} \times \frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)}$$

$$= \frac{\left(\frac{F_n^4 - F_n^3}{F_n^3 - F_n^2} - 1 \right)}{\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1 \right)} \left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} \right) \frac{\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1 \right)}{\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1 \right)} \left(\frac{F_n - x_n}{F_n^2 - F_n} \right) \left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} \right)$$

On a déjà vu que:

- $$\frac{\left(\frac{F_n^4 - F_n^3}{F_n^3 - F_n^2} - 1 \right)}{\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1 \right)} = 1 + A_2 e_n \left\{ 1 + \overline{\varphi}_1 e_n + \overline{\varphi}_2 e_n^2 + \overline{\varphi}_3 e_n^3 + \overline{\varphi}_4 e_n^4 + o(e_n^4) \right\} : (*)$$

- $$\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} - 1 \right) \Big/ \left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} - 1 \right) = 1 + A_2 e_n \left\{ 1 + \overline{\varphi}_1 e_n + \overline{\varphi}_2 e_n^2 + \overline{\varphi}_3 e_n^3 + \overline{\varphi}_4 e_n^4 + o(e_n^4) \right\} : (**)$$

- $$\frac{(*)}{(**)} = 1 + A_2^2 e_n^2 + \lambda_3 e_n^3 + \lambda_4 e_n^4 + \lambda_5 e_n^5 + o(e_n^5)$$

- $$\frac{\left(\frac{F_n^3 - F_n^2}{F_n^2 - F_n} \right)}{\left(\frac{F_n^2 - F_n}{F_n - x_n} \right)} = \frac{1 + 2A_2 e_n + 2A_2 \overline{M}_1 e_n^2 + 2A_2 \overline{M}_2 e_n^3 + 2A_2 \overline{M}_3 e_n^4 + 2A_2 \overline{M}_4 e_n^5 + o(e_n^5)}{1 + 2A_2 e_n + 2A_2 \overline{C}_1 e_n^2 + 2A_2 \overline{C}_2 e_n^3 + 2A_2 \overline{C}_3 e_n^4 + 2A_2 \overline{C}_4 e_n^5 + o(e_n^5)}.$$

Donc :

$$\frac{\left(F_n^3-F_n^2\right)/\left(F_n^2-F_n\right)}{\left(F_n^2-F_n\right)/\left(F_n-x_n\right)} = 1+2A_2^2e_n^2+\delta_3e_n^3+\delta_4e_n^4+\delta_5e_n^5+o(e_n^5) \quad \text{avec}$$

- $\delta_3 = 2A_2\left(\overline{M}_2-\overline{C}_2-2A_2^2\right)$
- $\delta_4 = 2A_2\left(\overline{M}_3-\overline{C}_3+2A_2\left(\overline{C}_2-\overline{M}_2\right)-4A_2^2\overline{C}_1+2A_2\overline{C}_1^2+2A_2\overline{M}_1\left(2A_2-\overline{C}_1\right)\right.$.
- $\delta_5 = 2A_2\left(\overline{M}_4-\overline{C}_4-2A_2\overline{M}_3+\overline{M}_2\left(4A_2^2-2A_2\overline{C}_1\right)+\overline{M}_1\left(8A_2^2\overline{C}_1-2A_2\overline{C}_2-8A_2^3\right)\right.$
$\quad +16A_2^4-2A_2\overline{C}_3+4A_2^2\overline{C}_1^2+8A_2^2\overline{C}_2-24A_2^3\overline{C}_1+4C_3A_2+4A_2\overline{C}_1\overline{C}_2+$
$\quad \left.+32A_2^3\overline{C}_1-12A_2^2\overline{C}_1^2-12A_2^2\overline{C}_2-16A_2^4\right)$.

Par suite :

$$\left(D_{1,2}^{(n+1)}/D_{1,2}^{(n)}\right) = \left\{1+2A_2^2e_n^2+\delta_3e_n^3+\delta_4e_n^4+\delta_5e_n^5+o(e_n^5)\right\} \times \left\{1+2A_2e_n+A_2\left(A_2+2\overline{M}_1\right)e_n^2+\right.$$

$$+\left(\lambda_3+2A_2^3+2A_2\overline{M}_2\right)e_n^3+\left(\lambda_4+2A_2\lambda_3+2A_2\overline{M}_3+2A_2^3\overline{M}_1\right)e_n^4+$$

$$\left.+\left(2A_2\overline{M}_4+2A_2^3\overline{M}_2+2A_2\overline{M}_1\lambda_3+2A_2\lambda_4+\lambda_5\right)e_n^5+o(e_n^5)\right\}.$$

$$= 1+2A_2e_n+\overline{\delta}_2e_n^2+\overline{\delta}_3e_n^3+\overline{\delta}_4e_n^4+\overline{\delta}_5e_n^5+o(e_n^5). \quad \text{où :}$$

- $\overline{\delta}_2 = 2A_2^2+A_2\left(A_2+2\overline{M}_1\right) = 3A_2^2+2A_2\overline{M}_1$,
- $\overline{\delta}_3 = \delta_3+\lambda_3+6A_2^3+2A_2\overline{M}_2$,
- $\overline{\delta}_4 = \delta_4+\lambda_4+2A_2\lambda_3+4A_2\delta_3+2A_2\overline{M}_3+6A_2^3\overline{M}_1+2A_2^4$.
- $\overline{\delta}_5 = \delta_5+\lambda_5+2A_2\lambda_4+2A_2\lambda_3\overline{M}_1+2A_2^3\overline{M}_2+2A_2\overline{M}_4+\delta_4\left(2A_2\right)+\delta_3\left(A_2^2+2A_2\overline{M}_1\right)+$
$\quad +2A_2^2\left(\lambda_3+2A_2^3+2A_2\overline{M}_2\right)$.

et donc :

$$\left(g_{1,2}^{(n)}/g_2^{(n+1)}\right) = 1-\frac{\left(g_2^{(n+2)}/g_2^{(n+1)}\right)-1}{\left(D_{1,2}^{(n+1)}/D_{1,2}^{(n)}\right)-1}$$

$$= 1-\frac{2A_2e_n\left\{1+Z_1e_n+Z_2e_n^2+Z_3e_n^3+Z_4e_n^4+o(e_n^4)\right\}}{2A_2e_n\left\{1+\varepsilon_1e_n+\varepsilon_2e_n^2+\varepsilon_3e_n^3+\varepsilon_4e_n^4+o(e_n^4)\right\}}$$

où :

$$\varepsilon_1 = \overline{\delta}_2/2A_2 \ , \quad \varepsilon_2 = \overline{\delta}_3/2A_2 \ , \quad \varepsilon_3 = \overline{\delta}_4/2A_2 \ , \quad \varepsilon_4 = \overline{\delta}_5/2A_2 .$$

Donc :

$$\left(\frac{g_{1,2}^{(n)}}{g_2^{(n+1)}}\right) = 1 - \Big\{ 1 + (Z_1-\varepsilon_1)e_n + \big(Z_2-\varepsilon_2+\varepsilon_1(Z_1-\varepsilon_1)\big)e_n^2 + \big(Z_3+Z_1\varepsilon_1^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2 - Z_2\varepsilon_1 - Z_1\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_1^3\big)e_n^3 + \big(\varepsilon_1^4-\varepsilon_4+\varepsilon_2^2+2\varepsilon_1\varepsilon_3-3\varepsilon_2\varepsilon_1^2+2Z_1\varepsilon_1\varepsilon_2 - Z_1(\varepsilon_3+\varepsilon_1^3)+Z_2(\varepsilon_1^3-\varepsilon_2)+Z_4-Z_3\varepsilon_1\big)e_n^4+o(e_n^4)\Big\}$$

$$= -(Z_1-\varepsilon_1)e_n - \big(Z_2-\varepsilon_2+\varepsilon_1(Z_1-\varepsilon_1)\big)e_n^2 - \big(Z_3+Z_1\varepsilon_1^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2-Z_2\varepsilon_1-Z_1\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_1^3\big)e_n^3 - \big(\varepsilon_1^4-\varepsilon_4+\varepsilon_2^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2-3\varepsilon_2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2 Z_1-Z_1(\varepsilon_3+\varepsilon_1^3)+Z_2(\varepsilon_1^3-\varepsilon_2)+Z_4-Z_3\varepsilon_1\big)e_n^4 + o(e_n^4)$$

$$\cdot\ Z_1-\varepsilon_1 = \frac{3A_3+5A_2^2}{2A_2} - \frac{3A_2^2+2A_2\overline{M}_h}{2A_2}$$

$$= \frac{3A_3+2A_2^2-2A_2\overline{M}_h}{2A_2} = \frac{3A_3+2A_2^2}{2A_2} - \overline{M}_h = \frac{3A_3+2A_2^2}{2A_2} - \frac{3A_3+3A_2^2}{2A_2}$$

$$= -\frac{A_2^2}{2A_2} = -\frac{A_2}{2}$$

$$\left(g_{1,2}^{(n)}/g_2^{(n+1)}\right) = +\frac{A_2}{2}e_n\Big\{1+\overline{\varepsilon}_1 e_n+\overline{\varepsilon}_2 e_n^2+\overline{\varepsilon}_3 e_n^3+o(e_n^3)\Big\}$$ où les $\overline{\varepsilon}_i$ $(i=1,2,3)$

sont les coefficients de e_n^2, e_n^3 et e_n^4, divisés par $-(Z_1-\varepsilon_1)$, dans l'expression de $\left(g_{1,2}^{(n)}/g_2^{(n+1)}\right)$ ci-dessus.

De même : $$\left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_2^{(n+2)}\right) = \frac{A_2}{2}e_n\Big\{1+(A_2+\overline{\varepsilon}_1)e_n+(A_3+2A_2\overline{\varepsilon}_1+\overline{\varepsilon}_2)e_n^2+(A_4+2A_3\overline{\varepsilon}_1+3A_2\overline{\varepsilon}_2+\overline{\varepsilon}_3+\cdots+A_2^2\overline{\varepsilon}_1)e_n^3+o(e_n^3)\Big\}.$$

<u>Donc :</u>

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \frac{g_2(n+2)}{g_2(n+1)} \times \frac{1+(A_2+\overline{\varepsilon}_1)e_n+(A_3+2A_2\overline{\varepsilon}_1+\overline{\varepsilon}_2)e_n^2+(A_4+2A_3\overline{\varepsilon}_1+2A_2\overline{\varepsilon}_2+\overline{\varepsilon}_3+A_2^2\overline{\varepsilon}_1)e_n^3+\cdots}{1+\overline{\varepsilon}_1 e_n+\overline{\varepsilon}_2 e_n^2+\overline{\varepsilon}_3 e_n^3+o(e_n^3)}$$

$$= \Big\{1+2A_2e_n+2A_2Z_1e_n^2+2A_2Z_2e_n^3+o(e_n^3)\Big\} \times \Big\{1+A_2e_n+(A_3-A_2\overline{\varepsilon}_1)e_n^2+(A_4+A_3\overline{\varepsilon}_1+\cdots+A_2\overline{\varepsilon}_2+A_2^2\overline{\varepsilon}_2-A_2\overline{\varepsilon}_1^2)e_n^3+o(e_n^3)\Big\}$$

(41) : $$\boxed{\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = 1+3A_2e_n+(A_3+2A_2^2+2A_2Z_1-A_2\overline{\varepsilon}_1)e_n^2+(A_4+2A_2Z_2+2A_2^2Z_1+2A_2A_3-A_2^2\overline{\varepsilon}_1+A_3\overline{\varepsilon}_1-A_2\overline{\varepsilon}_1^2+A_2\overline{\varepsilon}_2)e_n^3+o(e_n^3)}$$

Proposition 2 : M-S_2 : (suite).

On a : $$S_2^{(n)} - x^* = \left(S_1^{(n+1)} - x^*\right) \times \left\{ 1 - \frac{\frac{S_1^{(n+2)} - x^*}{S_1^{(n+1)} - x^*} - 1}{\frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} - 1} \right\}$$ avec :

- $$\frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} \cdot \frac{\Delta g_{1,2}^{(n)}}{\Delta g_{1,2}^{(n+1)}} \cdot \frac{g_{1,2}^{(n+2)}}{g_{1,2}^{(n+1)}}.$$

$$= \frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} \times \frac{\left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}\right) - 1}{\left(g_{1,2}^{(n+2)}/g_{1,2}^{(n+1)}\right) - 1} \times \frac{g_{1,2}^{(n)}}{g_{1,2}^{(n+1)}} \times \frac{g_{1,2}^{(n+2)}}{g_{1,2}^{(n+1)}}.$$

- On a vu que :

$$\frac{\left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}\right) - 1}{\left(g_{1,2}^{(n+2)}/g_{1,2}^{(n+1)}\right) - 1} = 1 - A_2 e_n + \left(A_2^2 - A_3 - A_2\overline{\mu}_1\right)e_n^2 + \left(2A_2A_3 - A_4 - A_2^3 + \right.$$
$$\left. \cdots - 2A_2\overline{\mu}_2 + \overline{\mu}_1\left(A_2^2 + 2A_2\overline{\mu}_1 - A_3\right)\right)e_n^3 + o(e_n^3).$$

- De même on a :

$$\left(\frac{g_{1,2}^{(n)}}{g_{1,2}^{(n+1)}}\right)\left(\frac{g_{1,2}^{(n+2)}}{g_{1,2}^{(n+1)}}\right) = \frac{1 + 3A_2 e_n\left\{1 + (A_2 + \overline{\mu}_1)e_n + (A_3 + 2A_2\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2)e_n^2 + o(e_n^2)\right\}}{1 + 3A_2 e_n\left\{1 + \overline{\mu}_1 e_n + \overline{\mu}_2 e_n^2 + o(e_n^2)\right\}}$$

$$= \frac{1 + 3A_2 e_n + 3A_2(A_2 + \overline{\mu}_1)e_n^2 + 3A_2(A_3 + 2A_2\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2)e_n^3 + o(e_n^3)}{1 + 3A_2 e_n + 3A_2\overline{\mu}_1 e_n^2 + 3A_2\overline{\mu}_2 e_n^3 + o(e_n^3)}$$

$$= 1 + 3A_2^2 e_n^2 + (3A_2)\left(A_3 + 2A_2\overline{\mu}_1 - 3A_2^2\right)e_n^3 + o(e_n^3).$$

Donc : $$\frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} \times \left\{1 + 3A_2^2 e_n^2 + 3A_2\left(A_3 + 2A_2\overline{\mu}_1 - 3A_2^2\right)e_n^3 + o(e_n^3)\right\} \times \left\{1 - A_2 e_n + \cdots\right.$$
$$\cdots + \left(A_2^2 - A_3 - A_2\overline{\mu}_1\right)e_n^2 + \left(2A_2A_3 - A_4 - A_2^3 - 2A_2\overline{\mu}_2 + \overline{\mu}_1\left[A_2^2 + 2A_2\overline{\mu}_1 - A_3\right]\right)e_n^3$$
$$\left. + o(e_n^3)\right\}.$$

Donc :

$$\frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \frac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} \times \Big\{ 1 - A_2 e_n + \left(4A_2^2 - A_3 - A_2\overline{\mu}_1\right) e_n^2 + \Big(5A_2A_3 + (5A_2^2 + A_3)\overline{\mu}_1 - 13A_2^3 - A_4 - 2A_2\overline{\mu}_2 + \cdots$$
$$\cdots - 2A_2\overline{\mu}_1^2 \Big) e_n^3 + o(e_n^3) \Big\}.$$

D'autre part, d'après la relation (35):

- $S_1^{(n)} - x^* = -\overline{R}_1 e_n^2 - V_1 e_n^3 - V_2 e_n^4 - V_3 e_n^5 + o(e_n^5) \qquad \left(\overline{R}_1 = \frac{A_3 - A_2^2}{2A_2} \right)$

  Par hypothèse, $\overline{R}_1 \neq 0$ (voir proposition:2), donc:

$$S_1^{(n)} - x^* = -\overline{R}_1 e_n^2 \left\{ 1 + \overline{V}_1 e_n + \overline{V}_2 e_n^2 + \overline{V}_3 e_n^3 + o(e_n^3) \right\} \text{ où}$$

$$\overline{V}_1 = V_1/\overline{R}_1, \quad \overline{V}_2 = V_2/\overline{R}_1, \quad \overline{V}_3 = V_3/\overline{R}_1.$$

Par suite :

- $S_1^{(n+1)} - x^* = -\overline{R}_1 e_n^2 \Big\{ 1 + (\overline{V}_1 + 2A_2) e_n + \left(A_2^2 + 2A_3 + 3A_2\overline{V}_1 + \overline{V}_2 \right) e_n^2 +$
  $+ \left(\overline{V}_3 + 4A_2\overline{V}_2 + 3(A_3 + A_2^2)\overline{V}_1 + 2A_2A_3 + 2A_4 \right) e_n^3 + o(e_n^3) \Big\}$

et :

- $\Delta S_1^{(n)} = (S_1^{(n+1)} - x^*) - (S_1^{(n)} - x^*) = -\overline{R}_1 e_n^2 \Big\{ 2A_2 e_n + \left(A_2^2 + 2A_3 + 3A_2\overline{V}_1 \right) e_n^2 +$
  $+ \left(4A_2\overline{V}_2 + 3[A_3 + A_2^2]\overline{V}_1 + 2A_2A_3 + 2A_4 \right) e_n^3 + o(e_n^3) \Big\}$

$$= -2A_2\overline{R}_1 e_n^3 \Big\{ 1 + \frac{(A_2^2 + 2A_3 + 3A_2\overline{V}_1)}{2A_2} e_n + \left(2\overline{V}_2 + A_3 + \frac{2A_4 + 3[A_3 + A_2^2]\overline{V}_1}{2A_2} \right) e_n^2 + o(e_n^2) \Big\},$$

- $\Delta S_1^{(n+1)} = -2A_2\overline{R}_1 e_n^3 \Big\{ 1 + \left(3A_2 + \frac{A_2^2 + 2A_3 + 3A_2\overline{V}_1}{2A_2} \right) e_n + \Big[3[A_3 + A_2^2] + 2\overline{V}_2 + A_3 + \cdots$

$$\cdots + \frac{A_2^2 + 2A_3 + 3A_2\overline{V}_1}{2} + \frac{2A_4 + 3[A_3 + A_2^2]\overline{V}_1}{2A_2} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{3(A_2^2 + 2A_3 + 3A_2\overline{V}_1)}{2} \Big\} e_n^2 + o(e_n^2) \Big\}.$$

Donc:

- $\dfrac{\Delta S_1^{(n+1)}}{\Delta S_1^{(n)}} = 1 + 3A_2 e_n + \left(4A_3 + \dfrac{7A_2^2 + 3A_2\overline{V}_1}{2} \right) e_n^2 + o(e_n^2)$

- $\dfrac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \left\{ 1 + 3A_2 e_n + \left(4A_3 + \dfrac{7A_2^2 + 3A_2\overline{V}_1}{2} \right) e_n^2 + o(e_n^2) \right\} \left\{ 1 - A_2 e_n + \left(4A_2^2 - A_3 - A_2\overline{\mu}_1 \right) e_n^2 + o(e_n^2) \right.$

$$\frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = 1 + 2A_2 e_n + \left(3A_3 + \frac{3(3A_2^2 + A_2\overline{V}_1)}{2} - A_2\overline{\mu}_1\right)e_n^2 + o(e_n^2)$$

De même : $$\frac{S_1^{(n+1)} - x^*}{S_1^{(n)} - x^*} = \frac{1 + (2A_2 + \overline{V}_1)e_n + (A_2^2 + 2A_3 + 3A_2\overline{V}_1 + \overline{V}_2)e_n^2 + o(e_n^2)}{1 + \overline{V}_1 e_n + \overline{V}_2 e_n^2 + o(e_n^2)},$$

$$= 1 + 2A_2 e_n + (A_2^2 + 2A_3 + A_2\overline{V}_1)e_n^2 + o(e_n^2)$$

Donc :

$$S_2^{(n)} - x^* = (S_1^{(n+1)} - x^*)\left\{1 - \frac{2A_2 e_n\left\{1 + \frac{(A_2^2 + 2A_3 + A_2\overline{V}_1)}{2A_2}e_n + o(e_n)\right\}}{2A_2 e_n\left\{1 + \left(\frac{3A_3}{2A_2} + \frac{3(3A_2^2 + A_2\overline{V}_1)}{4A_2} - \frac{\overline{\mu}_1}{2}\right)e_n + o(e_n)\right\}}\right\},$$

$$= (S_1^{(n+1)} - x^*)\left\{1 - \left[1 + \overline{\overline{V}} e_n + o(e_n)\right]\right\}$$

où : $$\overline{\overline{V}} = \frac{\overline{\mu}_1}{2} - \frac{2A_3 + 7A_2^2 + A_2\overline{V}_1}{4A_2}$$

$$= -\underbrace{(S_1^{(n+1)} - x^*)}_{=O(e_n^2)}\underbrace{\left\{\overline{\overline{V}} e_n + o(e_n)\right\}}_{=O(e_n)} = O(e_n^3).$$ ∎

Le coefficient asymptotique de l'erreur, dans ce cas est :

$$\frac{(A_3 - A_2^2)(2A_2\overline{\mu}_1 - 2A_3 - 7A_2^2 - A_2\overline{V}_1)}{8A_2^2},$$

<u>Proposition 2 (suite) :</u>

<u>M-τ_2 :</u>

<u>On a :</u> $\tau_2^{(n)} - x^* = \left(\tau_1^{(n)} - x^*\right) \times \left\{ 1 - \dfrac{\dfrac{\tau_1^{(n+1)} - x^*}{\tau_1^{(n)} - x^*} - 1}{\dfrac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} - 1} \right\}$

$$\frac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \frac{\Delta \tau_1^{(n+1)}}{\Delta \tau_1^{(n)}} \times \frac{\Delta g_{1,2}^{(n)}}{\Delta g_{1,2}^{(n+1)}} \times \frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} .$$

$$= \frac{\Delta \tau_1^{(n+1)}}{\Delta \tau_1^{(n)}} \times \frac{\left(g_{1,2}^{(n+1)} / g_{1,2}^{(n)} \right) - 1}{\left(g_{1,2}^{(n+2)} / g_{1,2}^{(n+1)} \right) - 1}$$

D'après la relation (40) :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} - 1 = 3A_2 e_n \left\{ 1 + \eta_1 e_n + \eta_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\} \quad \text{où :}$$

$$\cdot\ \eta_1 = \frac{A_3 + 2A_2^2 + 2A_2 \overline{M}_1 + A_2 \overline{\omega}_1}{3A_2}$$

$$\cdot\ \eta_2 = \frac{A_4 + 2A_2A_3 + 2A_2^2 \overline{M}_1 + 2A_2 \overline{M}_2 + 2A_2 \overline{\omega}_2 + A_3 \overline{\omega}_1 - A_2 \overline{\omega}_1^2 + 3A_2^2 \overline{\omega}_1}{3A_2}$$

Donc :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+2)}}{g_{1,2}^{(n+1)}} - 1 = 3A_2 e_n \left\{ 1 + \left(A_2 + \eta_1\right) e_n + \left(\eta_2 + 2A_2\eta_1 + A_3\right) e_n^2 + o(e_n^2) \right\},$$

<u>Par suite :</u>

$$\frac{\left(g_{1,2}^{(n+1)} / g_{1,2}^{(n)} \right) - 1}{\left(g_{1,2}^{(n+2)} / g_{1,2}^{(n+1)} \right) - 1} = \frac{1 + \eta_1 e_n + \eta_2 e_n^2 + o(e_n^2)}{1 + \left(A_2 + \eta_1\right) e_n + \left(\eta_2 + 2A_2\eta_1 + A_3\right) e_n^2 + o(e_n^2)} ,$$

$$= 1 - A_2 e_n + \left(A_2^2 - A_2\eta_1 - A_3\right) e_n^2 + o(e_n^2) .$$

Mais puisque $\tau_1^{(n)} = T_1^{(n)}$ on a :

$$\cdot\ \frac{\Delta \tau_1^{(n+1)}}{\Delta \tau_1^{(n)}} = 1 + 3A_2 e_n + \left(\frac{7A_2^2 + 8A_3 + 3A_2 \overline{Q}_1}{2} \right) e_n^2 + o(e_n^2) ,$$

$$\cdot\ \frac{\tau_1^{(n+1)} - x^*}{\tau_1^{(n)} - x^*} = 1 + 2A_2 e_n + \left(A_2^2 + 2A_3 + A_2 \overline{Q}_1\right) e_n^2 + o(e_n^2) ,$$

Donc : $\dfrac{D_2^{(n+1)}}{D_2^{(n)}} = \left\{1+3A_2e_n+\left(\dfrac{7A_2^2+8A_3+3A_2\overline{Q}_1}{2}\right)e_n^2+o(e_n^2)\right\}\times\left\{1-A_2e_n+\left(A_2^2-A_2\eta_1-A_3\right)e_n^2+o(e_n^2)\right\}$,

$$= 1+2A_2e_n+\left(\frac{3(A_2^2+2A_3+A_2\overline{Q}_1)}{2}-A_2\eta_1\right)e_n^2+o(e_n^2)$$

Par suite :

$$\tau_2^{(n)}-x^* = (\tau_1^{(n)}-x^*)\cdot\left\{1-\frac{2A_2e_n\left\{1+\left(\frac{A_2^2+2A_3+A_2\overline{Q}_1}{2A_2}\right)e_n+o(e_n)\right\}}{2A_2e_n\left\{1+\left(\frac{3(A_2^2+2A_3+A_2\overline{Q}_1)}{4A_2}-\frac{\eta_1}{2}\right)e_n+o(e_n)\right\}}\right\},$$

$$= (\tau_1^{(n)}-x^*)\left\{1-\left[1+\overline{\overline{\eta}}\,e_n+o(e_n)\right]\right\} \text{ où :}$$

$$\overline{\overline{\eta}} = \frac{\eta_1}{2}-\frac{A_2^2+2A_3+A_2\overline{Q}_1}{4A_2}.$$

Donc : $\tau_2^{(n)}-x^* = \underbrace{(\tau_1^{(n)}-x^*)}_{=O(e_n^2)}\times\underbrace{\left\{\overline{\overline{\eta}}\,e_n+o(e_n)\right\}}_{=O(e_n)} = O(e_n^3)$ $\square$.

Le coefficient asymptotique de l'erreur $(\tau_2^{(n)}-x^*)$, dans ce cas, est :

- $\overline{\overline{\eta}}\times\left(\dfrac{A_3+A_2^2}{A_2}\right)$.

En ce qui concerne les méthodes $M\text{-}\sigma_2$, $M\text{-}\alpha_2$ et $M\text{-}\beta_2$ on fait exactement le même enchaînement que ce qui précède. Tous les calculs préliminaires sont déjà faits.

Remarque 4:

M-E_2, M-ε_2, M-ρ_2.

M-E_2 :

hypothèses : $\cdot\ g_i^{(n)} = \left|\Delta S_{n+i-1}\right|^{\frac{1}{2}} \qquad i=1,2$

$$\cdot\ \frac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}} = \sqrt{\left|\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}\right|} = \sqrt{\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}},$$

$$\cdot\ \frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} = \sqrt{\left|\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}\right|} = \sqrt{\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}},$$

On a :

$$E_2^{(n)}-x^* = \left(E_1^{(n)}-x^*\right) \times \left\{1 - \frac{\frac{E_1^{(n+1)}-x^*}{E_1^{(n)}-x^*}-1}{\left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}\right)-1}\right\},$$

D'après la remarque 2:

$$\frac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}} - 1 = A_2 e_n\left\{1+\delta_1 e_n + \delta_2 e_n^2 + \delta_3 e_n^3 + o(e_n^3)\right\} \text{ où :}$$

$$\delta_1 = \overline{c}_1 - \frac{A_2}{2}, \quad \delta_2 = \overline{c}_2 - A_2\overline{c}_1 + \frac{A_2^2}{2}; -$$
$$\delta_3 = \overline{c}_3 - A_2\overline{c}_1 - \frac{A_2}{2}\overline{c}_1^2 + \frac{3}{2}A_2^2\overline{c}_1 - \frac{5}{8}A_2^3.$$

Donc :

$$\frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} - 1 = A_2(F_n-x^*)\left\{1+\delta_1(F_n-x^*)+\delta_2(F_n-x^*)^2+\delta_3(F_n-x^*)^3+o\left((F_n-x^*)^3\right)\right\}$$
$$= A_2e_n\left\{1+A_2e_n+A_3e_n^2+A_4e_n^3+o(e_n^3)\right\}\times\left\{1+\delta_1e_n+\left(\delta_2+A_2\delta_1\right)e_n^2+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\delta_3+2A_2\delta_2+A_3\delta_1\right)e_n^3+o(e_n^3)\right\}$$
$$= A_2e_n\left\{1+\left(A_2+\delta_1\right)e_n+\left(A_3+2A_2\delta_1+\delta_2\right)e_n^2+\left(A_4+A_2^2\delta_1+2A_3\delta_1+3A_2\delta_2+\delta_3\right)e_n^3+\right.$$
$$\left.+o(e_n^3)\right\},$$

Par suite:

$$g_{1,2}^{(n)} = g_2^{(n)} \times \left\{1 - \frac{\left(g_2^{(n+1)}/g_2^{(n)}\right)-1}{\left(g_1^{(n+1)}/g_1^{(n)}\right)-1}\right\}$$

$$= g_2^{(n)} \times \left\{1 - \frac{1+(A_2+\delta_1)e_n+\left(A_3+2A_2\delta_1+\delta_2\right)e_n^2+\left(A_4+A_2^2\delta_1+2A_3\delta_1+3A_2\delta_2+\delta_3\right)e_n^3+o(e_n^3)}{1+\delta_1e_n+\delta_2e_n^2+\delta_3e_n^3+o(e_n^3)}\right.$$

$$= -g_2^{(n)}A_2e_n\left\{1+\left(\frac{A_3+A_2\delta_1}{A_2}\right)e_n+\left(\frac{A_4+\delta_1A_3+2A_2\delta_2-A_2\delta_1^2+A_2^2\delta_1}{A_2}\right)e_n^2+o(e_n^2)\right\}.$$

et :

$$g_{1,2}^{(n+1)} = -g_2^{(n+1)} A_2 e_n \left\{ 1 + \left(A_2 + \frac{A_3 + A_2\delta_1}{A_2}\right) e_n + \left(3A_3 + 2A_2\delta_1 + \frac{A_4 + A_3\delta_2 + 2A_2\delta_2 - A_2\delta_1^2 + A_2^2\delta_1}{A_2}\right) e_n^2 + o(e_n^2) \right\}$$

Donc :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} \times \left\{ 1 + A_2 e_n + \left(2A_3 + A_2\delta_1\right) e_n^2 + o(e_n^2) \right\}$$

$$= \left\{ 1 + A_2 e_n + A_2(A_2 + \delta_1) e_n^2 + o(e_n^2) \right\} \times \left\{ 1 + A_2 e_n + \left(2A_3 + A_2\delta_1\right) e_n^2 + o(e_n^2) \right\}$$

$$= 1 + 2A_2 e_n + 2\left(A_3 + A_2^2 + A_2\delta_1\right) e_n^2 + o(e_n^2).$$

D'autre part, d'après la relation (36), on a :

$$E_1^{(n)} - x^* = -w_1 e_n^2 - w_2 e_n^3 - w_3 e_n^4 + o(e_n^4) \qquad \left(E_1^{(n)} = t_1^{(n)}\right).$$

Si $w_1 \neq 0$ alors :

$$E_1^{(n)} - x^* = -w_1 e_n^2 \left\{ 1 + \overline{w}_1 e_n + \overline{w}_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\} \quad \text{avec } \overline{w}_1 = \frac{w_2}{w_1},\ \overline{w}_2 = \frac{w_3}{w_1},$$

$$E_1^{(n+1)} - x^* = -w_1 \left(F_n - x^*\right)^2 \left\{ 1 + \overline{w}_1 (F_n - x^*) + \overline{w}_2 (F_n - x^*)^2 + o\left((F_n - x^*)^2\right) \right\},$$

$$= -w_1 e_n^2 \left\{ 1 + 2A_2 e_n + \left(2A_3 + A_2^2\right) e_n^2 + o(e_n^2) \right\} \times \left\{ 1 + \overline{w}_1 e_n + \left(\overline{w}_2 + A_2 \overline{w}_1\right) e_n^2 + o(e_n^2) \right\},$$

$$= -w_1 e_n^2 \left\{ 1 + \left(\overline{w}_1 + 2A_2\right) e_n + \left(\overline{w}_2 + 3A_2\overline{w}_1 + A_2^2 + 2A_3\right) e_n^2 + o(e_n^2) \right\},$$

$$\frac{E_1^{(n+1)} - x^*}{E_1^{(n)} - x^*} = \frac{1 + (\overline{w}_1 + 2A_2) e_n + \left(\overline{w}_2 + 3A_2\overline{w}_1 + A_2^2 + 2A_3\right) e_n^2 + o(e_n^2)}{1 + \overline{w}_1 e_n + \overline{w}_2 e_n^2 + o(e_n^2)}$$

$$= 1 + 2A_2 e_n + \left(A_2^2 + 2A_3 + A_2 \overline{w}_1\right) e_n^2 + o(e_n^2)$$

Donc :

$$E_2^{(n)} - x^* = \left(E_1^{(n)} - x^*\right) \times \left\{ 1 - \frac{2A_2 e_n \left\{ 1 + \left(\frac{A_2^2 + 2A_3 + A_2\overline{w}_1}{2A_2}\right) e_n + o(e_n) \right\}}{2A_2 e_n \left\{ 1 + \left(\frac{A_3 + A_2^2 + A_2\delta_1}{A_2}\right) e_n + o(e_n) \right\}} \right\},$$

$$= \left(E_1^{(n)} - x^*\right) \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{A_2 + 2\delta_1 - \overline{w}_1}{2}\right) e_n + o(e_n) \right] \right\}$$

$$= \underbrace{\left(E_1^{(n)} - x^*\right)}_{=O(e_n^2)} \times \underbrace{\left\{ \left(\frac{A_2 + 2\delta_1 - \overline{w}_1}{2}\right) e_n + o(e_n) \right\}}_{=O(e_n)} = O(e_n^3).$$

Si $w_1 = 0$, on fait le même raisonnement qu'à la page : 30 (ie : dans ce cas M-E_1 est au moins d'ordre 3) : $E_1^{(n)} - x^* = -W_2 e_n^3 - W_3 e_n^4 + o(e_n^4)$

On refait le même raisonnement en supposant dans un premier temps que :

$$W_2 \neq 0 \quad , \text{ puis } \quad W_2 = 0 .$$

Dans le cas où $\begin{cases} W_2 \neq 0 \\ W_1 = 0 \end{cases}$, l'indice d'efficacité de M-E$_1$ est $\sqrt[2]{3} \simeq 1{,}732$.

Mais dans ce cas l'ordre de convergence de M-E$_2$ reste identique à celui de M-E$_1$. Le coefficient asymptotique de l'erreur : $(E_2^{(n)} - x^*)$ est : $\frac{W_2}{2}$.

<u>car :</u>

$$\frac{E_1^{(n+1)} - x^*}{E_1^{(n)} - x^*} = 1 + 3A_2 e_n + \left(3A_3 + 3A_2^2 + \frac{W_3 A_2}{W_2}\right) e_n^2 + o(e_n^2) \quad .$$

et $E_2^{(n)} - x^* = \frac{W_2}{2} e_n^3 + o(e_n^3)$.

M-E$_2$ est alors d'indice d'efficacité $\sqrt[4]{3} < \sqrt[2]{3}$ ($\sqrt[2]{3}$ = indice d'efficacité de M-E$_1$, dans ce cas). Il est donc, toujours plus important d'appliquer M-E$_1$ que M-E$_2$.

<u>M-t$_2$:</u>

$$\text{On a : } t_2^{(n)} - x^* = \left(t_1^{(n)} - x^*\right) \times \left\{ 1 - \frac{\left(t_1^{(n+1)} - x^*\right)/\left(t_1^{(n)} - x^*\right) - 1}{\left(g_{1,2}^{(n+1)}/g_{1,2}^{(n)}\right) - 1} \right\}$$

puisque $t_1^{(n)} = E_1^{(n)}$ et d'après ce qui précède On a :

$$\frac{t_1^{(n+1)} - x^*}{t_1^{(n)} - x^*} - 1 = 2A_2 e_n \left\{ 1 + \left(\frac{A_2^2 + 2A_3 + A_2 W_1}{2A_2} \right) e_n + o(e_n) \right\} ;$$

$$\text{et } g_{1,2}^{(n)} = g_2^{(n)} \times \left\{ 1 - \frac{\frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} - 1}{\frac{D_{1,2}^{(n+1)}}{D_{1,2}^{(n)}} - 1} \right\} ;$$

$$D_{1,2}^{(n)} = -g_2^{(n)} \times \left\{ \frac{\frac{g_2^{(n+1)}}{g_2^{(n)}} - 1}{\frac{g_1^{(n+1)}}{g_1^{(n)}} - 1} \right\} ;$$

$$= -g_2^{(n)} \times \left\{ 1 + A_2 e_n + (A_3 + A_2 \delta_1) e_n^2 + \left(A_4 + \delta_1 A_3 + 2A_2 \delta_2 - A_2 \delta_1^2 + A_2^2 \delta_1\right) e_n^3 + o(e_n^3) \right\} .$$

De même : $D_{1,2}^{(n+1)} = -g_2(n+1) \times \left\{ 1 + A_2 e_n + \left(A_2^2 + A_3 + A_2\delta_1\right) e_n^2 + \left(\bar{\bar{\delta}}_2 + 2A_2\bar{\bar{\delta}}_1 + A_2A_3\right) e_n^3 + o(e_n^3) \right\}$

avec : $\bar{\bar{\delta}}_1 = A_3 + A_2\delta_1$ et $\bar{\bar{\delta}}_2 = A_4 + A_3\delta_1 + 2A_2\delta_2 - A_2\delta_1^2 + A_2^2\delta_1$.

et :

$$\frac{g_{1,2}^{(n+1)}}{g_{1,2}^{(n)}} = \frac{g_2(n+1)}{g_2(n)} \times \left\{ 1 + A_2 e_n + \bar{\bar{A}}_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\},$$

$$= \left\{ 1 + A_2 e_n + A_2(A_2 + \delta_1) e_n^2 + o(e_n^2) \right) \times \left\{ 1 + A_2 e_n + \bar{\bar{A}}_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\},$$

$$= \left\{ 1 + 2A_2 e_n + \left(2A_2^2 + A_2\delta_1 + \bar{\bar{A}}_2\right) e_n^2 + o(e_n^2) \right\},$$

$$= 1 + 2A_2 e_n \left\{ 1 + \left(A_2 + \frac{A_2\delta_1 + \bar{\bar{A}}_2}{2A_2}\right) e_n + o(e_n) \right\},$$

Par suite :

$$t_2^{(n)} - x^* = \left(t_1^{(n)} - x^*\right) \times \left\{ 1 - \frac{2A_2 e_n \left[1 + \frac{\left(A_2^2 + 2A_3 + A_2\bar{w}_1\right)}{2A_2} e_n + o(e_n) \right]}{2A_2 e_n \left[1 + \frac{2A_2^2 + A_2\delta_1 + \bar{\bar{A}}_2}{2A_2} e_n + o(e_n) \right]} \right\},$$

$$= \underbrace{\left(t_1^{(n)} - x^*\right)}_{= O(e_n^2)} \times \underbrace{\left\{ 1 - \left[1 - \frac{A_2^2 - 2A_3 - A_2\bar{w}_1 + A_2\delta_1 + \bar{\bar{A}}_2}{2A_2} e_n + o(e_n) \right] \right\}}_{= O(e_n)},$$

$$= O(e_n^3)$$ (avec la même supposition sur $\bar{w}_1$ que le cas qui précède.).

Preuve du Lemme 2.

ii) On a :

$$\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}=\left(\frac{F_n-x^*}{x_n-x^*}\right)\cdot\frac{\left\{\dfrac{F_n^2-x^*}{F_n-x^*}-1\right\}}{\left\{\dfrac{F_n-x^*}{x_n-x^*}-1\right\}}$$

Calcul de $\frac{F_n^2-x^*}{F_n-x^*}-1$:

D'après i) on a : $\frac{F_n-x^*}{x_n-x^*}-1=-e_n^{m-1}\times\left\{\sum_{i=0}^{m+2}B_i e_n^i+o(e_n^{m+2})\right\}$,

En remplaçant x_n par F_n dans cette expression,

On obtient :

$$\frac{F_n^2-x^*}{F_n-x^*}-1=-(F_n-x^*)^{m-1}\cdot\left\{\sum_{i=0}^{m+2}B_i(F_n-x^*)^i+o\left((F_n-x^*)^{m+2}\right)\right\},$$

- $F_n-x^*=e_n\left\{1-e_n^{m-1}X_{n,m}\right\}$

- $\forall j$: $(F_n-x^*)^j=e_n^j\sum_{i=0}^{j}C_j^i(-1)^i e_n^{i(m-1)}X_{n,m}^i$

$$=e_n^j\left\{1-j\,e_n^{m-1}X_{n,m}+\frac{j(j-1)}{2}e_n^{2m-2}X_{n,m}^2+o(e_n^{m+2})\right\}\quad(m\geq 3),$$

Donc :

- $(F_n-x^*)^{m-1}=e_n^{m-1}\left\{1-(m-1)e_n^{m-1}X_{n,m}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}e_n^{2m-2}X_{n,m}^2+o(e_n^{m+2})\right\}$,

$$=e_n^{m-1}\left\{1-(m-1)B_0e_n^{m-1}-(m-1)B_1e_n^{m}-(m-1)B_2e_n^{m+1}-(m-1)B_3e_n^{m+2}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}B_0^2e_n^{2m-2}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(m-1)(m-2)B_0B_1e_n^{2m-1}+o(e_n^{m+2})\right\}.$$

- $\sum_{i=0}^{m+2}B_i(F_n-x^*)^i=\sum_{i=0}^{m+2}B_ie_n^i-X_{n,m}\sum_{i=1}^{m+2}iB_ie_n^{m+i-1}+X_{n,m}^2\sum_{i=2}^{m+2}\frac{i(i-1)}{2}B_ie_n^{2m+i-2}+o(e_n^{m+2})$

$$=X_{n,m}\cdot\left\{1-\sum_{i=1}^{m+2}iB_ie_n^{m+i-1}+X_{n,m}\sum_{i=2}^{m+2}\frac{i(i-1)}{2}B_ie_n^{2m+i-2}+o(e_n^{m+2})\right\}$$

$$=X_{n,m}\left\{1-B_1e_n^{m}-2B_2e_n^{m+1}-3B_3e_n^{m+2}+o(e_n^{m+2})\right\}\quad(m\geq 3)$$

Par suite :

$$\frac{F_n^2-x^*}{F_n-x^*}-1=-X_{n,m}e_n^{m-1}\left\{1-B_1e_n^m-2B_2e_n^{m+1}-3B_3e_n^{m+2}+o(e_n^{m+2})\right\}\times\left\{1-(m-1)B_0e_n^{m-1}-(m-1)B_1e_n^m-(m-1)B_2e_n^{m+1}+\dots\right.$$

$$\left.\dots-(m-1)B_3e_n^{m+2}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}B_0^2e_n^{2m-2}+(m-1)(m-2)B_0B_1e_n^{2m-1}+o(e_n^{m+2})\right\},$$

$$=-X_{n,m}e_n^{m-1}\left\{1-(m-1)B_0e_n^{m-1}-mB_1e_n^m-(m+1)B_2e_n^{m+1}-(m+2)B_3e_n^{m+2}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}B_0^2e_n^{2m-2}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+(m-1)^2B_0B_1\,e_n^{2m-1}+o(e_n^{m+2})\right\}.$$

et donc :

$$\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}=\left\{1-B_0e_n^{m-1}-B_1e_n^m-B_2e_n^{m+1}-B_3e_n^{m+2}+o(e_n^{m+2})\right\}\times\left\{1-(m-1)B_0e_n^{m-1}-mB_1e_n^m-(m+1)B_2e_n^{m+1}+\dots\right.$$

$$\left.\dots-(m+2)B_3e_n^{m+2}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}B_0^2e_n^{2m-2}+(m-1)^2B_0B_1e_n^{2m-1}+o(e_n^{m+2})\right\},$$

$$=1-mB_0e_n^{m-1}-(m+1)B_1e_n^m-(m+2)B_2e_n^{m+1}-(m+3)B_3e_n^{m+2}+\frac{m(m-1)}{2}B_0^2e_n^{2m-2}+m^2B_0B_1e_n^{2m-1}+$$
$$+o(e_n^{m+2}).$$

∎

iii) D'après ii) On a :

$$\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}-1=-mB_0(F_n-x^*)^{m-1}\left\{1+\left(\frac{m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0}(F_n-x^*)+\left(\frac{m+2}{m}\right)\frac{B_2}{B_0}(F_n-x^*)^2+\left(\frac{m+3}{m}\right)\frac{B_3}{B_0}(F_n-x^*)^3+\dots\right.$$

$$\left.\dots-\left(\frac{m-1}{2}\right)B_0(F_n-x^*)^{m-1}-mB_1(F_n-x^*)^m+o(e_n^3)\right\}.$$

$$=-mB_0e_n^{m-1}\left\{1-(m-1)B_0e_n^{m-1}-(m-1)B_1e_n^m+o(e_n^3)\right\}\times\left\{1+\left(\frac{m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0}e_n+\left(\frac{m+2}{m}\right)\frac{B_2}{B_0}e_n^2+\left(\frac{m+3}{m}\right)\frac{B_3}{B_0}e_n^3+\right.$$

$$\left.-\left(\frac{m-1}{2}\right)B_0e_n^{m-1}-\left(m+\frac{m+1}{m}\right)B_1e_n^m+o(e_n^3)\right\}$$

$$=-mB_0e_n^{m-1}\left\{1+\left(\frac{m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0}e_n+\left(\frac{m+2}{m}\right)\frac{B_2}{B_0}e_n^2+\left(\frac{m+3}{m}\right)\frac{B_3}{B_0}e_n^3-\frac{3(m-1)}{2}B_0e_n^{m-1}-3mB_1e_n^m+\right.$$
$$\left.+o(e_n^3)\right\}$$

<u>Proposition 3 - §III-2-</u>

(suite).

<u>M-S_1 :</u>

On a : $$S_1^{(n)} - x^* = (F_n - x^*)\left\{1 - \frac{\left(\frac{F_n^2-x^*}{F_n-x^*}-1\right)\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}-1\right)}{\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}\right)\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}-1\right)-\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}-1\right)}\right\}.$$

En utilisant les résultats du lemme 2, on a :

- $$\frac{F_n^2-x^*}{F_n-x^*}-1 = -B_0 e_n^{m-1}\left\{1+\frac{B_1}{B_0}e_n+o(e_n)\right\}$$

- $$\left(\frac{F_n^2-x^*}{F_n-x^*}-1\right)\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}-1\right) = +mB_0^2 e_n^{2(m-1)}\left\{1+\frac{B_1}{B_0}e_n+o(e_n)\right\}\times\left\{1+\left(\frac{m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0}e_n+o(e_n)\right\}.$$
$$= mB_0^2 e_n^{2m-2}\left\{1+\left(\frac{2m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0}e_n+o(e_n)\right\}.$$

- $$\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}\right)\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}-1\right) = -mB_0 e_n^{m-1}\left\{1+\left(\frac{m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0}e_n+\left(\frac{m+2}{m}\right)\frac{B_2}{B_0}e_n^2+\left(\frac{m+3}{m}\right)\frac{B_3}{B_0}e_n^3-\left(\frac{m-1}{2}\right)B_0e_n^{m-1}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots - mB_1e_n^m+o(e_n^3)\right\}\times\left\{1-mB_0e_n^{m-1}-(m+1)B_1e_n^m+o(e_n^3)\right\},$$
$$= -mB_0e_n^{m-1}\left\{1+\left(\frac{m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0}e_n+\left(\frac{m+2}{m}\right)\frac{B_2}{B_0}e_n^2+\left(\frac{m+3}{m}\right)\frac{B_3}{B_0}e_n^3-\left(\frac{3m-1}{2}\right)B_0e_n^{m-1}+\right.$$
$$\left.\cdots-(3m+2)B_1e_n^m+o(e_n^3)\right\}.$$

- $$\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}\right)\left(\frac{F_n^2-F_n}{F_n-x_n}-1\right)-\left(\frac{F_n^3-F_n^2}{F_n^2-F_n}-1\right) = mB_0^2 e_n^{2(m-1)}\left\{1+\frac{2B_1}{B_0}e_n+o(e_n)\right\}$$

<u>Donc :</u>

$$S_1^{(n)}-x^* = (F_n-x^*)\times\left\{1-\frac{1+\left(\frac{2m+1}{m}\right)\frac{B_1}{B_0}e_n+o(e_n)}{1+\frac{2B_1}{B_0}e_n+o(e_n)}\right\} = (F_n-x^*)\times\left[1-\left(1+\frac{B_1}{mB_0}e_n+o(e_n)\right)\right]$$
$$= \underbrace{(F_n-x^*)}_{=O(e_n)}\cdot\underbrace{\left(-\frac{B_1}{mB_0}e_n+o(e_n)\right)}_{O(e_n)} = O(e_n^2).$$

Le calcul de $(S_1^{(n)}-x^*)$ nécessite l'évaluation de $F_n; F_n^2; F_n^3$ par itération. L'indice d'efficacité de M-S_1 est donc $\geq \sqrt[3]{2}$.

Preuve de la proposition 4.

Cas où : $\varphi_0^{(n)} = T_1^{(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Méthodes :	Ordre de convergence :	Indice d'efficacité :
M-φ_0	Au moins : 2	Au moins : $\sqrt[3]{2}$
M-φ_1	" " : 3	" " : $\sqrt[4]{3}$
M-φ_2	" " : 4	" " : $\sqrt[5]{4}$

1) M-$\varphi_0 = M$-T_1 (car $\varphi_0^{(n)} = T_1^{n}$ $\forall n$) : est d'ordre au moins : 2 et est d'indice d'efficacité $I(T_1) \geq \sqrt[3]{2}$ - [résultat établi précédemment].

2) M-φ_1 : est au moins d'ordre : 3 et d'indice $I(\varphi_1) \geq \sqrt[4]{3}$.

Preuve :

On a :
$$\varphi_1^{(n)} - x^* = (T_1^{(n)} - x^*) \times \left\{ 1 - \frac{1}{r} \times \frac{(T_1^{(n+1)} - x^*)/(T_1^{(n)} - x^*) \; - 1}{(T_1^{(n+1)} - F_n)/(T_1^{(n)} - x_n) \; - 1} \right\},$$

où : r est l'ordre de M-T_1 $(r \geq 2)$.

Montrons qu'il existe C : $\varphi_1^{(n)} - x^* = C\,(e_n^3) + o(e_n^3)$.

D'après l'étude faite, lors des preuves des propositions (1) et (3) $(T_1^{(n)} - x^*)$ est de la forme :

$T_1^{(n)} - x^* = \Omega_2 e_n^2 + \Omega_3 e_n^3 + \Omega_4 e_n^4 + o(e_n^4)$. (Ω_2 a été déjà calculé : Voir la preuve de la proposition 1. (relation 34)).

<u>Si $T_1^{(n)} - x^*$ est exactement d'ordre 2 (ie : $\Omega_2 \neq 0$) On a :</u>

$$T_1^{(n)} - x^* = \Omega_2 e_n^2 \left\{ 1 + \overline{\Omega}_1 e_n + \overline{\Omega}_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\} \quad \text{avec } \overline{\Omega}_1 = \frac{\Omega_3}{\Omega_2},\ \overline{\Omega}_2 = \frac{\Omega_4}{\Omega_2}.$$

<u>Par suite :</u> $T_1^{(n+1)} - x^* = \Omega_2 (F_n - x^*)^2 \left\{ 1 + \overline{\Omega}_1 (F_n - x^*) + \overline{\Omega}_2 (F_n - x^*)^2 + o((F_n - x^*)^2) \right\}$,

$$= \Omega_2 e_n^2 \left\{ 1 - 2B_0 e_n^{m-1} - 2B_1 e_n^m + B_0^2 e_n^{2m-2} + o(e_n^2) \right\} \times \left\{ 1 + \overline{\Omega}_1 e_n - \overline{\Omega}_1 B_0 e_n^m + \overline{\Omega}_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\}$$

$$= \Omega_2 e_n^2 \left\{ 1 + \overline{\Omega}_1 e_n + \overline{\Omega}_2 e_n^2 - 2B_0 e_n^{m-1} - (2B_1 + 3B_0 \overline{\Omega}_1) e_n^m + B_0^2 e_n^{2(m-1)} + o(e_n^2) \right\} . \quad (m \geq 2)$$

car : $(F_n - x^*)^j = e_n^j \sum_{i=0}^{j} C_j^i (-1)^i e_n^{i(m-1)} X_{n,m}^i$ avec $X_{n,m} = \sum_{i=0}^{m} B_i e_n^i + o(e_n^m)$.
(voir §III.2.).

et : $\dfrac{T_1^{(n+1)} - x^*}{T_1^{(n)} - x^*} = 1 - 2B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \left(\dfrac{B_1}{B_0} + \dfrac{\overline{\Omega}_1}{2} \right) e_n - \dfrac{B_0}{2} e_n^{m-1} + o(e_n) \right\}$.

<u>D'autre part :</u>
$$\begin{aligned} T_1^{(n)} - x_n &= (T_1^{(n)} - x^*) - (x_n - x^*) \\ &= (T_1^{(n)} - x^*) - e_n \\ &= -e_n + \Omega_2 e_n^2 + \Omega_3 e_n^3 + o(e_n^3) \\ &= -e_n \left\{ 1 - \Omega_2 e_n - \Omega_3 e_n^2 + o(e_n^2) \right\} \end{aligned}$$

$$T_1^{(n+1)} - F_n = -(F_n - x^*) \times \left\{ 1 - \Omega_2 (F_n - x^*) - \Omega_3 (F_n - x^*)^2 + \underbrace{o((F_n - x^*)^2)}_{= o(e_n^2)} \right\}$$

$$= -e_n \left\{ 1 - B_0 e_n^{m-1} - B_1 e_n^m + o(e_n^2) \right\} \times \left\{ 1 - \Omega_2 e_n - \Omega_3 e_n^2 + \Omega_2 B_0 e_n^m + o(e_n^2) \right\}$$

$$= -e_n \left\{ 1 - \Omega_2 e_n - \Omega_3 e_n^2 - B_0 e_n^{m-1} - (B_1 - 2B_0 \Omega_2) e_n^m + o(e_n^2) \right\},$$

Donc :

$$\frac{T_1^{(n+1)}-F_n}{T_1^{(n)}-x_n} = 1 - B_0 e_n^{m-1}\left\{1+\left(\frac{B_1}{B_0}-\Omega_2\right)e_n + o(e_n)\right\} ;$$

et :

$$\varphi_1^{(n)}-x^* = \left(T_1^{(n)}-x^*\right)\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{-2B_0e_n^{m-1}\left\{1+\left(\frac{B_1}{B_0}+\frac{\overline{\Omega}_1}{2}\right)e_n-\frac{B_0}{2}e_n^{m-1}+o(e_n)\right\}}{-B_0e_n^{m-1}\left\{1+\left(\frac{B_1}{B_0}-\Omega_2\right)e_n+o(e_n)\right\}}\right\} ;$$

$$= \left(T_1^{(n)}-x^*\right)\times\left\{1-\left[1+\left(\Omega_2+\frac{\overline{\Omega}_1}{2}\right)e_n-\frac{B_0}{2}e_n^{m-1}+o(e_n)\right]\right\} ;$$

$$= -\Omega_2 e_n^2\left\{1+\overline{\Omega}_1 e_n+o(e_n)\right\}\times\left\{\left(\Omega_2+\frac{\overline{\Omega}_1}{2}\right)e_n-\frac{B_0}{2}e_n^{m-1}+o(e_n)\right\} ;$$

$$= -\Omega_2\left(\Omega_2+\frac{\overline{\Omega}_1}{2}\right)e_n^3 + o(e_n^3) ;$$

$$= -\left(\Omega_2^2+\frac{\Omega_3}{2}\right)e_n^3 + o(e_n^3). \quad \square$$

<u>Si $\Omega_2 = 0$</u>, alors M-T_1 est au moins d'ordre 3. On refait des calculs analogues à ce qui précède en séparant le cas où $\Omega_3 \neq 0$ et celui où $\Omega_3 = 0$. (L'indice de M-T_1 dans ce cas est $\geq \sqrt[3]{3} \simeq 1,44\ldots$). [Pour cette étude, voir p: 30 de l'annexe]

$\varphi_1^{(n)}-x^*$: nécessite l'évaluation de $F(x_n)$, $F^2(x_n)$, $F^3(x_n)$ et $F^4(x_n)$.

3) M-φ_2 :

On a :

$$\varphi_2^{(n)}-x^* = \left(\varphi_1^{(n)}-x^*\right)\times\left\{1-\left(\frac{1}{r+1}\right)\frac{\left(\frac{\varphi_1^{(n+1)}-x^*}{\varphi_1^{(n)}-x^*}-1\right)}{\left(\frac{\varphi_1^{(n+1)}-F_n}{\varphi_1^{(n)}-x_n}-1\right)}\right\} ;$$

On vient de voir que M-φ_1 est au moins d'ordre 3. Donc, $(\varphi_1^{(n)}-x^*)$ est de la forme :

$$\varphi_1^{(n)}-x^* = \Omega_3 e_n^3 + \Omega_4 e_n^4 + \Omega_5 e_n^5 + o(e_n^5)$$

les constantes Ω_i $i=1,2,\ldots$ ne sont dans cette démonstration que des coefficients de manœuvre.

Si $\Omega_3 \neq 0$: (sinon : on fait le même raisonnement que ce qui précède : 2°)).

Alors :

$$\varphi_1^{(n)} - x^* = \Omega_3 e_n^3 \left\{ 1 + \overline{\Omega}_1 e_n + \overline{\Omega}_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\} \quad \text{avec } \overline{\Omega}_1 = \Omega_4/\Omega_3 ,\ \overline{\Omega}_2 = \Omega_5/\Omega_2 .$$

Par suite :

$$\varphi_1^{(n+1)} - x^* = \Omega_3 (F_n - x^*)^3 \cdot \left\{ 1 + \overline{\Omega}_1 (F_n - x^*) + \overline{\Omega}_2 (F_n - x^*)^2 + \underbrace{o\left((F_n - x^*)^2 \right)}_{= o(e_n^2)} \right\}$$

$$= \Omega_3 e_n^3 \left\{ 1 + \overline{\Omega}_1 e_n + \overline{\Omega}_2 e_n^2 - 3 B_0 e_n^{m-1} - (3B_1 + 4B_0 \overline{\Omega}_1) e_n^m + 3 B_0^2 e_n^{2(m-1)} + o(e_n^2) \right\}$$

et

$$\frac{\varphi_1^{(n+1)} - x^*}{\varphi_1^{(n)} - x^*} = 1 - 3 B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \left(\frac{B_1}{B_0} + \frac{\overline{\Omega}_1}{3} \right) e_n - B_0 e_n^{m-1} + o(e_n) \right\}$$

D'autre part :

$$\varphi_1^{(n)} - x_n = \left(\varphi_1^{(n)} - x^* \right) - \left(x_n - x^* \right) ;$$

$$= - e_n + \Omega_3 e_n^3 + o(e_n^3) ;$$

$$= - e_n \left\{ 1 - \Omega_3 e_n^2 + o(e_n^2) \right\} ;$$

$$\varphi_1^{(n+1)} - F_n = -(F_n - x^*) \times \left\{ 1 - \Omega_3 (F_n - x^*)^2 + o\left((F_n - x^*)^2 \right) \right\}$$

$$= - e_n \left\{ 1 - B_0 e_n^{m-1} - B_1 e_n^m + o(e_n^2) \right\} \times \left\{ 1 - \Omega_3 e_n^2 + o(e_n^2) \right\} ,$$

$$= - e_n \left\{ 1 - \Omega_3 e_n^2 - B_0 e_n^{m-1} - B_1 e_n^m + o(e_n^2) \right\}$$

$$\frac{\varphi_1^{(n+1)} - F_n}{\varphi_1^{(n)} - x_n} = 1 - B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \frac{B_1}{B_0} e_n + o(e_n) \right\}$$

$$\varphi_2^{(n)} - x^* = \left(\varphi_1^{(n)} - x^* \right) \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right) \times \frac{-3 B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \left(\frac{B_1}{B_0} + \frac{\overline{\Omega}_1}{3} \right) e_n - B_0 e_n^{m-1} + o(e_n) \right\}}{-B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \frac{B_1}{B_0} e_n + o(e_n) \right\}} \right\} ,$$

$$= \left(\varphi_1^{(n)} - x^* \right) \times \left\{ 1 - \frac{1 + \left(\frac{B_1}{B_0} + \frac{\overline{\Omega}_1}{3} \right) e_n - B_0 e_n^{m-1} + o(e_n)}{1 + \frac{B_1}{B_0} e_n + o(e_n)} \right\} ,$$

$$= \underbrace{\left(\varphi_1^{(n)} - x^* \right)}_{= O(e_n^3)} \times \underbrace{\left\{ - \frac{\overline{\Omega}_1}{3} e_n + B_0 e_n^{m-1} + o(e_n) \right\}}_{= O(e_n)} = O(e_n^4) \quad \square .$$

Complement de M-φ_1 (proposition 4).

• Si $\Omega_2 = 0$ alors $(T_1^{(n)} - x^*)$ s'écrit sous la forme :

$$T_1^{(n)} - x^* = \Omega_3 e_n^3 + \Omega_4 e_n^4 + \Omega_5 e_n^5 + o(e_n^5).$$

Pour connaitre la valeur de Ω_3, en fonction des $B_i = g^{(i)}(x^*)/i!$, voir la proposition (1).

Supposons, dans un premier temps que $\Omega_3 \neq 0$.

Alors : $T_1^{(n)} - x^* = \Omega_3 e_n^3 \left\{ 1 + \bar{\Omega}_1 e_n + \bar{\Omega}_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\}$ avec : $\bar{\Omega}_1 = \dfrac{\Omega_4}{\Omega_3}$ et

$$\bar{\Omega}_2 = \frac{\Omega_5}{\Omega_3}.$$

et :
$$T_1^{(n+1)} - x^* = \Omega_3 e_n^3 \left\{ 1 - 3B_0 e_n^{m-1} - 3B_1 e_n^m + 3B_0^2 e_n^{2m-2} + o(e_n^2) \right\} \times \left\{ 1 + \bar{\Omega}_1 e_n + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots - \bar{\Omega}_1 B_0 e_n^m + \bar{\Omega}_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\};$$

$$= \Omega_3 e_n^3 \left\{ 1 + \bar{\Omega}_1 e_n + \bar{\Omega}_2 e_n^2 - 3B_0 e_n^{m-1} - (3B_1 + 4B_0 \bar{\Omega}_1) e_n^m + 3B_0^2 e_n^{2m-2} + o(e_n^2) \right\};$$

Donc :
$$\frac{T_1^{(n+1)} - x^*}{T_1^{(n)} - x^*} = 1 - 3B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \left(\frac{B_1}{B_0} + \frac{\bar{\Omega}_1}{3} \right) e_n - B_0 e_n^{m-1} + o(e_n) \right\}.$$

De même :
$$T_1^{(n)} - x_n = (T_1^{(n)} - x^*) - (x_n - x^*);$$
$$= -e_n + \Omega_3 e_n^3 + o(e_n^3);$$
$$T_1^{(n+1)} - F_n = -e_n \left\{ 1 - \Omega_3 e_n^2 - B_0 e_n^{m-1} - B_1 e_n^m + o(e_n^2) \right\}, \quad (m \geq 2);$$

Donc :
$$\frac{T_1^{(n+1)} - F_n}{T_1^{(n)} - x_n} = 1 - B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \frac{B_1}{B_0} e_n + o(e_n) \right\}.$$

Par suite :

$$\varphi_1^{(n)} - x^* = \left(T_1^{(n)} - x^*\right) \times \left\{ 1 - \frac{1}{3} \times \frac{-3B_0 e_n^{m-1}\left\{1 + \left(\frac{B_1}{B_0} + \frac{\overline{\Omega}_1}{3}\right)e_n - B_0 e_n^{m-1} + o(e_n)\right\}}{-B_0 e_n^{m-1}\left\{1 + \frac{B_1}{B_0} e_n + o(e_n)\right\}} \right\}$$

$$= \Omega_3 e_n^3 \left\{1 + \overline{\Omega}_1 e_n + o(e_n)\right\} \times \left\{1 - \left[1 + \frac{\overline{\Omega}_1}{3} e_n - B_0 e_n^{m-1} + o(e_n)\right] + o(e_n)\right\}$$

$$= O(e_n^4) \;. \square$$

Si $\Omega_3 = 0$ alors :

On refait le même enchainement que celui qui précède, en séparant le cas : $\Omega_4 = 0$ et celui où $\Omega_4 \neq 0$. Dans tous les cas, $M - \varphi_1$ est au moins d'ordre : 3.

§V. méthode M-φ_p $(p \in \mathbb{N})$

(Sous les hypothèses du §III sur F).

L'algorithme (φ) appliqué dans le cas où : $\varphi_0^{(n)} = T_1^{(n)}$ $\forall n$ (propo. 4),
ou $\varphi_0^{(n)} = S_1^{(n)}$ $\forall n$ (propo. 5);

peut être utilisé d'une façon générale comme suit :

Si (T) est une transformation d'accélération de la convergence telle que M-T soit d'ordre r et d'indice $I(T) = r^{\frac{1}{s}}$ alors :

M-φ_p (où $\varphi_0^{(n)} = T_n$) est d'ordre : $(p+r)$ et d'indice d'efficacité : $I(\varphi_p) \geq (p+r)^{\frac{1}{s+p}}$.

Preuve: [par récurrence sur p].

• $\underline{p=0}$ M-$\varphi_0 = M$-T est, par hypothèse, d'ordre r et d'indice d'efficacité $I(\varphi_0) = I(T) = r^{\frac{1}{s}}$.

• Supposons que M-φ_{p-1} $(p \geq 1)$ soit d'ordre de convergence $q = (p+r-1)$ et qu'elle nécessite l'évaluation de $(s+p-1)$ fonctions par itérations.

On a alors :

$$\lim_{n} \frac{\varphi_{p-1}^{(n)} - x^*}{e_n^{p+r-1}} = \Omega_1 \neq 0 \quad (= \text{cte asymtotique de l'erreur}).$$

Donc : $\varphi_{p-1}^{(n)} - x^* = \Omega_1 e_n^{p+r-1} + \Omega_2 e_n^{p+r} + \Omega_3 e_n^{p+r+1} + o(e_n^{p+r+1})$, Ω_2 et Ω_3 sont des constantes.

ou alors : $\varphi_{p-1}^{(n)} - x^* = \Omega_1 e_n^q \left\{ 1 + \bar{\Omega}_1 e_n + \bar{\Omega}_2 e_n^2 + o(e_n^2) \right\}$

avec : $\bar{\Omega}_1 = \Omega_2/\Omega_1$,
$\bar{\Omega}_2 = \Omega_3/\Omega_1$,

Donc :

$$\varphi_{p-1}^{(n+1)} - x^* = \Omega_1 (F_n - x^*)^q \left\{ 1 + \bar{\Omega}_1 (F_n - x^*) + \bar{\Omega}_2 (F_n - x^*)^2 + o\left((F_n - x^*)^2\right) \right\};$$

$$= \Omega_1 e_n^q \left\{ 1 + \bar{\Omega}_1 e_n + \bar{\Omega}_2 e_n^2 - B_0 \bar{\Omega}_1 e_n^m + o(e_n^2) \right\} \times \cdots$$

$$\cdots \times \left\{ 1 - q B_0 e_n^{m-1} - q B_1 e_n^m + \frac{q(q-1)}{2} B_0^2 e_n^{2m-2} + o(e_n^2) \right\};$$

Car : $(F_n - x^*)^j = e_n^j \sum_{i=0}^{j} C_j^i \, (-1)^i \, e_n^{i(m-1)} X_{n,m}^i$ et :

$$X_{n,m} = \sum_{i=0}^{m} B_i e_n^i + o(e_n^m) \quad , \quad B_0 = g(x^*) \neq 0 \quad , m \geq 2 .$$

$$\varphi_{p-1}^{(n)} - x^* = \Omega_1 e_n^q \left\{ 1 + \bar{\Omega}_1 e_n + \bar{\Omega}_2 e_n^2 - q B_0 e_n^{m-1} - \left(q B_1 + (q+1) B_0 \bar{\Omega}_1 \right) e_n^m + \frac{q(q-1)}{2} B_0^2 e_n^{2m-2} + o(e_n^2) \right\}$$

<u>Par suite :</u>

$$\frac{\varphi_{p-1}^{(n+1)} - x^*}{\varphi_{p-1}^{(n)} - x^*} = 1 - q B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \left(\frac{B_1}{B_0} + \frac{\bar{\Omega}_1}{q} \right) e_n - \left(\frac{q-1}{2} \right) B_0 e_n^{m-1} + o(e_n) \right\}$$

<u>D'autre part :</u>

$$\begin{aligned} \varphi_{p-1}^{(n)} - x_n &= \left(\varphi_{p-1}^{(n)} - x^* \right) - \left(x_n - x^* \right) ; \\ &= - e_n + \Omega_1 e_n^q + o(e_n^q) ; \\ &= - e_n \left\{ 1 - \Omega_1 e_n^{q-1} + o(e_n^{q-1}) \right\} \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} \varphi_{p-1}^{(n+1)} - F_n &= - (F_n - x^*) \left\{ 1 - \Omega_1 (F_n - x^*)^{q-1} + o\left((F_n - x^*)^{q-1} \right) \right\} , \\ &= - e_n \left\{ 1 - e_n^{m-1} X_{n,m} \right\} \times \left\{ 1 - \Omega_1 e_n^{q-1} + o(e_n^{q-1}) \right\} . \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\varphi_{p-1}^{(n+1)} - F_n}{\varphi_{p-1}^{(n)} - x_n} = 1 - B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \frac{B_1}{B_0} e_n + o(e_n) \right\} .$$

<u>Par conséquent :</u>

$$\varphi_p^{(n)} - x^* = \left(\varphi_{p-1}^{(n)} - x^* \right) \times \left\{ 1 - \frac{1}{q} \cdot \frac{- q B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \left(\frac{B_1}{B_0} + \frac{\bar{\Omega}_1}{q} \right) e_n - \frac{(q-1)}{2} B_0 e_n^{m-1} + o(e_n) \right\}}{- B_0 e_n^{m-1} \left\{ 1 + \frac{B_1}{B_0} e_n + o(e_n) \right\}} \right\}$$

$$= \left(\varphi_{p-1}^{(n)} - x^* \right) \times \left\{ 1 - \frac{1 + \left(\frac{B_1}{B_0} + \frac{\bar{\Omega}_1}{q} \right) e_n - \frac{(q-1)}{2} B_0 e_n^{m-1} + o(e_n)}{1 + \frac{B_1}{B_0} e_n + o(e_n)} \right\} ;$$

$$\varphi_p^{(n)} - x^* = \left(\varphi_{p-1}^{(n)} - x^*\right) \times \left\{ 1 - \left[1 + \frac{\overline{\Omega}_1}{q} e_n - \left(\frac{q-1}{2}\right) B_0 e_n^{m-1} + o(e_n) \right] \right\}$$

$$= - \underbrace{\left(\varphi_{p-1}^{(n)} - x^*\right)}_{= O(e_n^q)} \underbrace{\left\{ \frac{\overline{\Omega}_1}{q} e_n - \frac{(q-1)}{2} B_0 e_n^{m-1} + o(e_n) \right\}}_{= O(e_n)}$$

Donc :

$$\frac{\varphi_p^{(n)} - x^*}{e_n^{q+1}} \xrightarrow[n \nearrow \infty]{} - \Omega_1 \times \frac{\overline{\Omega}_1}{q} = - \frac{\Omega_2}{q}$$

$$q+1 = (p+r-1) + 1 = p+r .$$

$(\varphi_p^{(n)} - x^*)$ dépend de $\varphi_{p-1}^{(n)}$ et $\varphi_{p-1}^{(n+1)}$ qui nécessitent l'évaluation de $(r+p-1)+1$ fonctions par itération. Donc, l'indice d'efficacité de $M-\varphi_p$ est : $I(\varphi_p) \geq (p+r)^{\frac{1}{p+r}}$.

Cas où $(S_n)_n \in P_m \cap LIN$: $(m \geq 3)$

On a : $e_{n+1} = S_{n+1} - S = F(S_n) - F(S) = A_1 e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3 + o(e_n^3)$
$\left(A_1 = \lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} \neq 1\right.$ puisque (S_n) est supposée dans $\left.LIN\right)$.

Donc :
(III-1)

$$\boxed{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1 = B_0\left\{1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + o(e_n^2)\right\} \quad \text{avec : } B_0 = A_1 - 1,\ B_1 = \frac{A_2}{B_0},\ B_2 = \frac{A_3}{B_0}.}$$

et : $\Delta e_n = B_0 e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3 + o(e_n^3) = B_0 e_n\left\{1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + o(e_n^2)\right\}$,

$$\Delta e_{n+1} = B_0 e_n\left\{A_1 + (A_2 + B_1 A_1^2) e_n + (A_3 + 2A_1 B_1 A_2 + B_2 A_1^3) e_n^2 + o(e_n^2)\right\},$$

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{A_1 + (A_2 + B_1 A_1^2) e_n + (A_3 + 2A_1 B_1 A_2 + B_2 A_1^3) e_n^2 + o(e_n^2)}{1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + o(e_n^2)}, \quad B_0 = A_1 - 1 \neq 0$$

$$= \left\{A_1 + (A_2 + B_1 A_1^2) e_n + (A_3 + 2A_1 B_1 A_2 + B_2 A_1^3) e_n^2 + o(e_n^2)\right\} \times \left\{1 - B_1 e_n + (B_1^2 - B_2) e_n^2 + o(e_n^2)\right\}$$

$$= A_1 + (A_2 - A_1 B_1 + B_1 A_1^2) e_n + \left(A_3 + 2A_1 B_1 A_2 + B_2 A_1^3 - B_1[A_2 + B_1 A_1^2] + A_1(B_1^2 - B_2)\right) e_n^2 + o(e_n^2)$$

Par suite on a :

(III-2) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1 = B_0\left\{1 + C_1 e_n + C_2 e_n^2 + o(e_n^2)\right\} \quad \text{où : } C_1 = (A_2 - A_1 B_1 + B_1 A_1^2)/B_0 \text{ et} \\ C_2 = \left(A_3 + 2A_1 B_1 A_2 + B_2 A_1^3 - B_1[A_2 + B_1 A_1^2] + A_1[B_1^2 - B_2]\right)/B_0 \quad (B_0 \neq 0) \end{array}}$$

$(C_1 = B_1(A_1 + 1))$.

De même on a :

III-3

$$\boxed{\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} - 1 = B_0\left\{1 + A_1 C_1 e_n + (C_2 A_1^2 + C_1 A_2) e_n^2 + o(e_n^2)\right\}}$$

III-4

$$\boxed{\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1 = B_0\left\{1 + A_1 B_1 e_n + (A_2 B_1 + B_2 A_1^2) e_n^2 + o(e_n^2)\right\}.}$$

<u>où la multiplicité $j \in \mathbb{N}^*$ de $s : F(s) = s$ est ≥ 2 :</u>

$$\text{On a : } e_{n+1} = F(S_n) - F(s) = e_n + A_2 e_n^2 + \cdots + A_j e_n^j + \cdots + A_m e_n^m + o(e_n^m) .$$

<u>$j = 2$: (ie : $A_2 \neq 0$)</u>

$$\text{On a : } \boxed{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1 = A_2 e_n \left\{ 1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + B_3 e_n^3 + o(e_n^3) \right\} \text{ avec : } B_i = \frac{A_{i+2}}{A_2} \quad i = 1,2,3} \quad \text{III.5}$$

et $\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1 = A_2 e_{n+1} \left\{ 1 + B_1 e_{n+1} + B_2 e_{n+1}^2 + B_3 e_{n+1}^3 + o(e_{n+1}^3) \right\}$

$$= A_2 e_n \left\{ 1 + \left(A_2 + \frac{A_3}{A_2}\right) e_n + \left(\frac{A_4}{A_2} + 3A_3\right) e_n^2 + \left(4A_4 + A_2 A_3 + B_3 + 2A_2 A_3\right) e_n^3 + o(e_n^3) \right\}$$

(En remplaçant e_{n+1} en fonction de e_n)

$$\boxed{\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1 = A_2 e_n \left\{ 1 + (A_2 + B_1) e_n + (B_2 + 3A_3) e_n^2 + (4A_4 + A_2 A_3 + B_3 + 2A_2 A_3) e_n^3 + o(e_n^3) \right\}} \quad \text{III.6}$$

De même puisque :

$$\Delta e_n = A_2 e_n^2 \left\{ 1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + B_3 e_n^3 + o(e_n^3) \right\}$$

On a :

$$\Delta e_{n+1} = A_2 e_{n+1}^2 \left\{ 1 + B_1 e_{n+1} + B_2 e_{n+1}^2 + B_3 e_{n+1}^3 + o(e_{n+1}^3) \right\} ;$$

$$= A_2 e_n^2 \left\{ 1 + 2A_2 e_n + (A_2^2 + 2A_3) e_n^2 + 2(A_4 + A_2 A_3) e_n^3 + o(e_n^3) \right\} \times \left\{ 1 + B_1 e_n + (A_3 + B_2) e_n^2 + \right.$$

$$\left. + (B_3 + 2A_2 B_2 + B_1 A_3) e_n^3 + o(e_n^3) \right\} ;$$

$$= A_2 e_n^2 \left\{ 1 + (B_1 + 2A_2) e_n + (B_2 + 5A_3 + A_2^2) e_n^2 + (B_3 + 6A_4 + 5A_2 A_3 + 3A_3 B_1) e_n^3 + o(e_n^3) \right\}$$

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{1 + (B_1 + 2A_2) e_n + (B_2 + 5A_3 + A_2^2) e_n^2 + (B_3 + 6A_4 + 5A_2 A_3 + 3A_3 B_1) e_n^3 + o(e_n^3)}{1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + B_3 e_n^3 + o(e_n^3)}$$

$$= 1 + 2A_2 e_n + (A_2^2 + 3A_3) e_n^2 + 4(A_4 + A_2 A_3) e_n^3 + o(e_n^3)$$

$$\boxed{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1 = 2A_2 e_n \left\{ 1 + \left(\frac{A_2^2 + 3A_3}{2A_2}\right) e_n + \frac{2(A_4 + A_2 A_3)}{A_2} e_n^2 + o(e_n^2) \right\}} \quad \text{III-7}$$

De même on a :

$$\boxed{\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} - 1 = 2A_2 e_n\left\{1 + \frac{3(A_3+A_2^2)}{2A_2}e_n + \left(2B_2 + A_2^2+6A_3\right)e_n^2 + o(e_n^2)\right\}} \quad \text{III-8}$$

__Cas où $j \geq 3$:__

Dans ce cas : $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = \dots = A_{j-1} = 0$ et $A_j \neq 0$.

et :

$$e_{n+1} = e_n + A_j e_n^j\left\{\sum_{i=0}^{2j+3} B_i e_n^i + o\left(e_n^{2j+3}\right)\right\} + o\left(e_n^{3j+3}\right),$$

Posons :

$$B_i := B_{i,j} = A_{i+j}/A_j \qquad \text{et } X_{n,j} = A_j e_n^{j-2}\left\{\sum_{i=0}^{2j+3} B_i e_n^i + o\left(e_n^{2j+3}\right)\right\}$$

__Alors :__

$$\boxed{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1 = e_n X_{n,j} + o\left(e_n^{3j+2}\right)} \qquad \text{III-9}$$

$$\Delta e_n = e_n^2 X_{n,j} + o\left(e_n^{3j+3}\right)$$

$$\Delta e_{n+1} = e_{n+1}^2 X_{n+1,j} + o\left(e_{n+1}^{3j+2}\right) = A_j e_{n+1}^j\left\{\sum_{i=0}^{2j+3} B_i e_{n+1}^i + o\left(e_{n+1}^{2j+3}\right)\right\} + o\left(e_{n+1}^{3j+3}\right)$$

Or pour $i \in \mathbb{N}^*$ on a : $e_{n+1}^i = e_n^i\left(\sum_{k=0}^{i} C_i^k e_n^k X_{n,j}^k\right) + o\left(e_n^{3j+3}\right)$

Donc :

- $e_{n+1}^j = e_n^j\left[\sum_{k=0}^{4} C_j^k e_n^k X_{n,j}^k\right] + o\left(e_n^{3j+3}\right)$ car pour $k \geq 5$; $e_n^k X_{n,j}^k = o\left(e_n^{3j+3}\right)$

- $\sum_{i=0}^{2j+3} B_i e_{n+1}^i + o\left(e_{n+1}^{2j+3}\right) = \sum_{i=0}^{2j+3} B_i e_n^i + \sum_{i=1}^{2j+3} i B_i e_n^{i+1} X_{n,j} + \sum_{i=2}^{2j+3} B_i C_i^2 e_n^{i+2} X_{n,j}^2 + \cdots$

$$= \sum_{i=0}^{2j+3} B_i e_n^i + \sum_{i=1}^{j+4} i B_i e_n^{i+1} X_{n,j} + \sum_{i=2}^{5} B_i C_i^2 e_n^{i+2} X_{n,j}^2 +$$

$$+ B_3 e_n^6 X_{n,j}^3 + o\left(e_n^{2j+3}\right) ; (j \geq 3)$$

__Par suite :__

$$\Delta e_{n+1} = A_j e_n^j\left\{\sum_{k=0}^{4} C_j^k e_n^k X_{n,j}^k + o\left(e_n^{2j+3}\right)\right\} \times \left\{\sum_{i=0}^{2j+3} B_i e_n^i + X_{n,j}\sum_{i=1}^{j+4} i B_i e_n^{i+1} + X_{n,j}^2 \sum_{i=2}^{5} B_i C_i^2 e_n^{i+2} + \right.$$

$$\left. + B_3 e_n^6 X_{n,j}^3 + o\left(e_n^{2j+3}\right)\right\}.$$

Donc :

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{\left\{\sum_{k=0}^{4} C_j^k e_n^k X_{n,j}^k + o(e_n^{2j+3})\right\} \times \left\{\sum_{i=0}^{2j+3} B_i e_n^i + X_{n,j}\sum_{i=1}^{j+4} i B_i e_n^{i-1} + X_{n,j}^2 \sum_{i=2}^{5} B_i C_i^2 e_n^{i-2} + B_3 e_n^6 X_{n,j}^3 + o(e_n^{2j+3})\right\}}{\sum_{i=0}^{2j+3} B_i e_n^i + o(e_n^{2j+3})} ;$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{4} C_j^k e_n^k X_{n,j}^k + o(e_n^{2j+3})\right\} \times \left\{1 + A_j e_n^{j-2}\left[\sum_{i=1}^{j+4} i B_i e_n^{i-1} + X_{n,j}\sum_{i=2}^{5} B_i C_i^2 e_n^{i-2} + B_3 e_n X_{n,j}^2\right] + o(e_n^{2j+3})\right\} ;$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{4} C_j^k e_n^k X_{n,j}^k + A_j e_n^{j-2}\left(\sum_{k=0}^{4} C_j^k e_n^k X_{n,j}^k\right) \cdot \left\{\sum_{i=1}^{j+4} i B_i e_n^{i-1} + X_{n,j}\sum_{i=2}^{5} B_i C_i^2 e_n^{i-2} + B_3 e_n X_{n,j}^2\right\} + o(e_n^{2j+3}) ;$$

$$= 1 + e_n^{j-1}\left(\sum_{i=1}^{j+4} i A_{j+i} e_n^i\right) + X_{n,j}\Big[j e_n + j A_{j+1} e_n^{j+1} + (2j+1) A_{j+2} e_n^{j+2} + 3(j+1) A_{j+3} e_n^{j+3} + 2(2j+3) A_{j+4} e_n^{j+4} + \cdots$$
$$\cdots + 5(j+2) A_{j+5} e_n^{j+5}\Big] + \cdots$$
$$\cdots + X_{n,j}^2\left[\frac{j(j-1)}{2} e_n^2 + \frac{j(j-1)}{2} A_{j+1} e_n^{j+2} + j^2 A_{j+2} e_n^{j+3} + (3C_j^2 + 3j + 1) A_{j+3} e_n^{j+4}\right] + \cdots$$
$$\cdots + X_{n,j}^3\left[C_j^3 e_n^3 + C_j^3 A_{j+1} e_n^{j+3}\right] + X_{n,j}^4 C_j^4 e_n^4 + o(e_n^{2j+3}) .$$

Puisque : $X_{n,j} = A_j e_n^{j-2}\left\{\sum_{i=0}^{j+5} B_i e_n^i + o(e_n^{j+5})\right\}$ on a :

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1 = A_j e_n^{j-1}\Big\{\sum_{i=0}^{j+4} (i+j) B_i e_n^i + j A_{j+1} e_n^j + H_1 e_n^{j+1} + H_2 e_n^{j+2} + H_3 e_n^{j+3} + H_4 e_n^{j+4} + C_j^3 A_j^2 e_n^{2j-2} +$$
$$+ 3C_j^3 A_j A_{j+1} e_n^{2j-1} + 3(A_j A_{j+2} + A_{j+1}^2) C_j^3 e_n^{2j} + C_j^3 (B_4 A_{j+1}^2 + 3A_j A_{j+3} + 6 A_{j+1} A_{j+2}) e_n^{2j+1} +$$
$$+ C_j^4 A_j^3 e_n^{3j-3} + (4C_j^4 A_{j+1} A_j^2 + C_j^3 A_{j+1} A_j^2) e_n^{3j-2} + o(e_n^{j+4})\Big\} .$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1 = A_j e_n^{j-1}\Big\{&\sum_{i=0}^{j+4} (i+j) B_i e_n^i + H_0 e_n^j + H_1 e_n^{j+1} + H_2 e_n^{j+2} + H_3 e_n^{j+3} + H_4 e_n^{j+4} + \cdots \\ &\cdots + M_0 e_n^{2j-2} + M_1 e_n^{2j-1} + M_2 e_n^{2j} + M_3 e_n^{2j+1} + \cdots \\ &\cdots + L_0 e_n^{3j-3} + L_1 e_n^{3j-2} + o(e_n^{j+4})\Big\}\end{aligned}} \qquad \text{III-10}$$

où $H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, M_0, M_1, M_2, M_3, L_0$ et L_1 sont donnés par :

$H_0 = j\,A_{j+1}$;

$H_1 = (2j+1)A_{j+2} + j\,B_1 A_{j+1} + \frac{j(j-1)}{2} A_j$;

$H_2 = j(j-1)A_{j+1} + 3(j+1)A_{j+3} + (2j+1)B_1 A_{j+2} + j B_2 A_{j+1}$;

$H_3 = \frac{j(j-1)}{2} B_1 A_{j+1} + j(j-1)A_{j+2} + 2(2j+3)A_{j+4} + 3(j+1)B_1 A_{j+3} + (2j+1)B_2 A_{j+2} + j B_3 A_{j+1}$;

$H_4 = j(j-1)\left(B_2 A_{j+1} + A_{j+3}\right) + 5(j+2)A_{j+5} + 2(2j+3)B_1 A_{j+4} + 3(j+1)B_2 A_{j+3} + (2j+1)B_3 A_{j+2} + j B_4 A_{j+1}$;

$M_0 = \frac{j(j-1)(j-2)}{6} A_j^2$; $M_1 = \frac{j(j-1)(j-2)}{2} A_j A_{j+1}$; $M_2 = \frac{j(j-1)(j-2)}{2}\left(A_j A_{j+2} + A_{j+1}^2\right)$;

$M_3 = \frac{j(j-1)(j-2)}{6}\left(B_1 A_{j+1}^2 + 3A_j A_{j+3} + 6A_{j+1}A_{j+2}\right)$;

$L_0 = \frac{j(j-1)(j-2)(j-3)}{24} A_j^3$; $L_1 = \frac{j(j-1)(j-2)^2}{6} A_{j+1} A_j^2$.

Expression de $\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}}$ en fonction de e_n : (cas où $j \geq 3$)

D'après la relation III-10 (page : 38) on a :

$$\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} - 1 = A_j\, e_{n+1}^{j-1}\left\{\sum_{i=0}^{j+1}(i+j)B_i e_{n+1}^i + \sum_{i=0}^{4} H_i e_{n+1}^{i+j} + \sum_{i=0}^{3} M_i e_{n+1}^{i+2j-2} + \sum_{i=0}^{1} L_i e_{n+1}^{i+3j-3} + o\left(e_{n+1}^{j+4}\right)\right\}$$

- $e_{n+1}^{j-1} = e_n^{j-1} \times \Big\{1 + (j-1)A_j e_n^{j-1} + (j-1)A_{j+1}e_n^{j} + (j-1)A_{j+2}e_n^{j+1} + (j-1)A_{j+3}e_n^{j+2} + (j-1)A_{j+4}e_n^{j+3} + (j-1)A_{j+5}e_n^{j+4} + \cdots$
  $\cdots + \frac{(j-1)(j-2)}{2}A_j^2 e_n^{2j-2} + (j-1)(j-2)A_j A_{j+1} e_n^{2j-1} + \frac{(j-1)(j-2)}{2}A_j\left(B_1 A_{j+1} + 2A_{j+2}\right)e_n^{2j} + \cdots$
  $\cdots + (j-1)(j-2)\left(A_j A_{j+3} + A_{j+1}A_{j+2}\right)e_n^{2j+1} + C_{j-1}^3 A_j^3 e_n^{3j-3} + 3C_{j-1}^3 A_j^2 A_{j+1} e_n^{3j-2} + o\left(e_n^{j+4}\right)\Big\}$;

- $e_{n+1}^{j} = e_n^{j} + jA_j e_n^{2j-1} + jA_{j+1}e_n^{2j} + jA_{j+2}e_n^{2j+1} + \frac{j(j-1)}{2}A_j^2 e_n^{3j-2} + o\left(e_n^{j+4}\right)$;

- $e_{n+1}^{j+1} = e_n^{j+1} + (j+1)A_j e_n^{2j} + (j+1)A_{j+1}e_n^{2j+1} + o\left(e_n^{j+4}\right)$;

- $e_{n+1}^{j+2} = e_n^{j+2} + (j+2)A_j e_n^{2j+1} + o\left(e_n^{j+4}\right)$;

- $e_{n+1}^{j+3} = e_n^{j+3} + o(e_n^{j+4})$, $e_{n+1}^{j+4} = e_n^{j+4} + o(e_n^{j+4})$;

- $$\sum_{i=0}^{j+4} (i+j) B_i e_{n+1}^i + o(e_n^{j+4}) = \sum_{i=0}^{j+4} (i+j) B_i e_n^i + (j+1) A_{j+1} e_n^j + \left[2(j+2)A_{j+2} + (j+1)A_{j+1}B_1\right] e_n^{j+1} + \cdot$$
$$\cdot + \left[3(j+3)A_{j+3} + 2(j+2)A_{j+2}B_1 + (j+1)A_{j+1}B_2\right] e_n^{j+2} + \left[4(j+4)A_{j+4} + 3(j+3)A_{j+3}B_1 + 2(j+2)A_{j+2}B_2 + \right.$$
$$\left. + (j+1)A_{j+1}B_3\right] e_n^{j+3} + \left[5(j+5)A_{j+5} + 4(j+4)A_{j+4}B_1 + 3(j+3)A_{j+3}B_2 + 2(j+2)A_{j+2}B_3 + \right.$$
$$\left. + (j+1)A_{j+1}B_4\right] e_n^{j+4} + (j+2)A_j A_{j+2} e_n^{2j} + \left[2(j+2)A_{j+1}A_{j+2} + 3(j+3)A_j A_{j+3}\right] e_n^{2j+1} + o(e_n^{j+4}).$$

<u>Par suite :</u>

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\Delta e_{n+2}}{\Delta e_{n+1}} - 1 = A_j e_n^{j-1} \Big\{ & \sum_{i=0}^{j+4} (i+j) B_i e_n^i + U e_n^{j-1} + U_0 e_n^j + U_1 e_n^{j+1} + U_2 e_n^{j+2} + U_3 e_n^{j+3} + U_4 e_n^{j+4} + V_0 e_n^{2j-2} + \cdots \\ & \cdots + V_1 e_n^{2j-1} + V_2 e_n^{2j} + V_3 e_n^{2j+1} + W_0 e_n^{3j-3} + W_1 e_n^{3j-2} + o(e_n^{j+4}) \Big\}\end{aligned}} \quad \text{III-11}$$

<u>Où :</u>

- $U = j(j-1)A_j$; $U_0 = Q_0 + (j+1) P B_1 + j P_0$; $U_1 = Q_1 + (j+2) P B_2 + (j+1) P_0 B_1 + j P_1$;
- $U_2 = Q_2 + (j+3) P B_3 + (j+2) P_0 B_2 + (j+1) P_1 B_1 + j P_2$;
- $U_3 = Q_3 + (j+4) P B_4 + (j+3) P_0 B_3 + (j+2) P_1 B_2 + (j+1) P_2 B_1 + j P_3$;
- $U_4 = Q_4 + (j+5) P B_5 + (j+4) P_0 B_4 + (j+3) P_1 B_3 + (j+2) P_2 B_2 + (j+1) P_3 B_1 + j P_4$;
- $V_0 = M_0 + j P_5$; $V_1 = Q_5 + P Q_0 + (j+1) P_5 B_1 + j P_6$; $V_2 = Q_6 + P Q_1 + P_0 Q_0 + (j+5) P_5 B_2 + (j+1) P_6 B_1 + j P_7$;
- $V_3 = Q_7 + P Q_2 + P_0 Q_1 + P_1 Q_0 + (j+2) P_6 B_2 + (j+3) P_5 B_3 + (j+1) P_7 B_1 + j P_8$;
- $W_0 = Q_8 + P M_0 + j P_9$; $W_1 = Q_9 + P Q_5 + P M_0 + P_5 Q_0 + (j+1) P_9 B_1 + j P_{10}$;

<u>avec :</u>

- $P = (j-1) A_j$; $P_5 = \frac{(j-1)(j-2)}{2} A_j^2$;
- $P_0 = (j-1) A_{j+1}$; $P_6 = (j-1)(j-2) A_j A_{j+1}$;
- $P_1 = (j-1) A_{j+2}$; $P_7 = \frac{(j-1)(j-2)}{2} A_j (B_1 A_{j+1} + 2 A_{j+2})$;
- $P_2 = (j-1) A_{j+3}$; $P_8 = (j-1)(j-2)(A_j A_{j+3} + A_{j+1} A_{j+2})$;
- $P_3 = (j-1) A_{j+4}$; $P_9 = \frac{(j-1)(j-2)(j-3)}{6} A_j^3$;
- $P_4 = (j-1) A_{j+5}$; $P_{10} = \frac{(j-1)(j-2)(j-3)}{2} A_j^2 A_{j+1}$;

- $Q_0 = H_0 + (j+1)A_{j+1}$; $Q_1 = H_1 + 2(j+2)A_{j+2} + (j+1)A_{j+1}B_1$;
- $Q_2 = H_2 + 3(j+3)A_{j+3} + 2(j+2)A_{j+2}B_1 + (j+1)A_{j+1}B_2$;
- $Q_3 = H_3 + 4(j+4)A_{j+4} + 3(j+3)A_{j+3}B_1 + 2(j+2)A_{j+2}B_2 + (j+1)A_{j+1}B_3$;
- $Q_4 = H_4 + 5(j+5)A_{j+5} + 4(j+4)A_{j+4}B_1 + 3(j+3)A_{j+3}B_2 + 2(j+2)A_{j+2}B_3 + (j+1)A_{j+1}B_4$;
- $Q_5 = M_1 + jH_0A_j$; $Q_6 = M_2 + (j+1)H_1A_j + (j+2)A_jA_{j+2} + jH_0A_{j+1}$;
- $Q_7 = (j+1)H_1A_{j+1} + 2(j+2)A_{j+1}A_{j+2} + 3(j+3)A_jA_{j+3} + jH_0A_{j+2} + (j+2)H_2A_j + M_3$;
- $Q_8 = L_0 + 2(j-1)M_0A_j$; $Q_9 = L_1 + (2j-1)M_1A_j + 2(j-1)M_0A_{j+1} + \frac{j(j-1)}{2}H_0A_j^2$.

Expression de $\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}$ en fonction de e_n $(j \geq 3)$

D'après III-9 :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1 = A_j e_n^{j-1}\left\{1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + o(e_n^2)\right\} \qquad (j \geq 3)$$

Donc :

$$\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1 = A_j e_{n+1}^{j-1}\left\{1 + B_1 e_{n+1} + B_2 e_{n+1}^2 + o(e_{n+1}^2)\right\}$$

$$e_{n+1} = e_n\left\{1 + A_j e_n^{j-1} + o(e_n^2)\right\} ,$$
$$e_{n+1}^{j-1} = e_n^{j-1}\left\{1 + (j-1)A_j e_n^{j-1} + o(e_n^2)\right\} ,$$

et $$\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1 = A_j e_n^{j-1}\left\{1 + (j-1)A_j e_n^{j-1} + o(e_n^2)\right\} \times \left\{1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + o(e_n^2)\right\}$$

$$\boxed{\text{III-12 :} \quad \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1 = A_j e_n^{j-1}\left\{1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + (j-1)A_j e_n^{j-1} + o(e_n^2)\right\} .}$$

Bibliographie

[1] S. ACHAKIR, connexion entre les méthodes de point fixe et d'accélération de la convergence, thèse de 3ème cycle, univ. Lille1, (1982).

[2] F.L.BAUER, Non linear sequences transformations in approximation of functions, Garabediam, ed-Elsevier, (1965).

[3] F.L.BAUER, The g. algorithm, SIAM J, 8, (1960), p:1-17.

[4] C. BREZINSKI, Accélération de la convergence en analyse numérique, Lecture note in mathematics (LNM), n°584, Springer-verlag, Heidelberg, (1977).

[5] C. BREZINSKI, A general extrapolation algorithm, Num-Math, 35, (1980) p: 175-187.

[6] C. BREZINSKI, some new convergence acceleration, mathematics of computation, V39, n° 159, (1982) p: 134-145.

[7] C. BREZINSKI, convergence acceleration methods, the past decade, J. comp. Appl. math, 12 et 13 (1985) 19-36

[8] C. BREZINSKI, Conditions d'application et de convergence de procédés d'extrapolation, Num. Math, 20 (1972) 64-79.

[9] C. BREZINSKI, Composite sequence transformation, Math. comp. 46 (1985) 311-321.

[10] C. BREZINSKI, ERROR CONTROL IN convergence acceleration processes IMA. Journal of num-anal., 3 (1983) 65-80.

[11] C. BREZINSKI, Recursive interpolation, extrapolation and projection, J. comp. appl. math., 9 (1983) 369-376.

[12] C. BREZINSKI, Etude sur les ε et ρ-algorithmes, Num. Math, V.17, (1971) 153-162.

[13] C. BREZINSKI, Some determinal identities in vector space with applications, H. werner ed. Lecture notes in math, 1071, Springer-verlag, Berlin (1984).

[14] C. BREZINSKI, critère de convergence d'une suite, Revue Romaine de mathématiques pures et appliquées, V.30 (1985) 403-417.

[15] C. BREZINSKI, Contraction proprietées of sequence transformations, Num. math, to appear.

[16] F. CORDELLIER, caractérisation des suites que la première étape du θ-algorithme transforme en suites constantes, C.R, Acad. SC., Paris, T284 (7 Fev. 1977) 389-392.

[17] J. P. DELAHAYE, théorie de transformations de suites en analyse numérique, thèse d'état, Lille 1 (1982) France.

[18] J. P. DELAHAYE, Lien entre la suite du rapport des erreurs et celle du rapport des differences, C.R., Acad. sc, Paris, Ser-A, V.290 (1980) 343-346

[19] B. DEMIDOVITCH et I. MARON, éléments de calcul numérique, éd. MIR, Mouscou (1979).

[20] A. DRAUX, On composite sequence transformations, Trans. IMACS, 12th world congress, to appear.

[21] C. ESPINOZA, Contribution à la résolution numérique de certains systèmes, thèse de 3e cycle (1977) univ. de Grenoble.

[22] A. FDIL . Choix automatiques entre transformations de suites . thèse de 3e cycle Lille 1 (1984), France .

[23] B. GERMAIN-BONNE , Estimation de la limite de suites et formalisation de procédés d'accélération de la convergence, thèse d'état, Lille 1 (1978).

[24] T. HÅVIE , Generalized Neville type schemes, BIT, 19 (1979) 204-213.

[25] M.E. KATEB , Itérations d'algorithmes d'accélération de la convergence, thèse de 3ème cycle , Lille 1 (1983) .

[26] R.F. KING , A secant method for multipl roots , BIT, 17 (1977) pp : 321 - 328.

[27] C. KOWALEWSKI, Possibilité d'accélération de la convergence logarithmique , thèse de 3ème cycle , Lille 1 (1981) .

[28] D. LEVIN , Developement of non linear transformation for improving convergence of sequences, Inter. J. computer. math. section B , V3 (1973) 371 - 388 .

[29] P. SABLONNIERE , Convergence acceleration of logarithmic fixed point sequences , J. Comp. App. math , 19 (1987) 55-60 .

[30] H. SADOK , Accélération de la convergence de suites par utilisation des transformations composites , thèse de 3ème cycle, Lille 1 (1986)

[32] J.F. TRAUB , Iterative methods for the solution of equations, Prentice-hall , INC , Englewood cliffs , N. J. (1964) .

[31] D.A. SMITH et W.F. FORD , Acceleration of linear and logarithmic convergence , SIAM J. numer. Anal , V36 , n°2 , (1979) pp : 223 - 240 .

[33] J. M. TROJAN , An upper bound on the acceleration of convergence , Institute of mathematics , Silesian thechnical university, Gliwice Poland , 44-100 .

[34] J. WIMP , sequences transformations and their applications, Academic Press , New-york (1981).

043 965 903