USTL
FLANDRES ARTOIS

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

N° d'ordre :

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Mathématiques appliquées

par

Abdallah MAANAOUI

Les approximants de Padé-Hermite
et
les formes orthogonales

soutenue le 19 juin 1989 devant la Commission d'Examen.

Président :	**Claude Brezinski**
Rapporteur :	**André Draux**
Examinateurs :	**Jack Gilewicz** **Jeannette Van Iseghem**

Chapitre 1

Dans cette première partie on rappelera la définition des approximants de Padé-Hermite, on donnera quelques remarques concernant l'existence et l'unicité de ces approximants avant d'étudier leurs propriétés algébriques...

1. Définition des formes de Padé-Hermite :

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 1$; Soit $\{f_1, \dots, f_m\}$ un système de m séries formelles ; Soit $(n_1, \dots, n_m)$ un m-uple d'entiers tels que $n_j \geq -1$ $(j = 1, \dots, m)$

On appelle forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$ pour le système de séries $\{f_1, \dots, f_m\}$ tout système $\{P_{n_1}, \dots, P_{n_m}\}$ de polynômes vérifiant :

a) $\deg P_{n_i} \leq n_i$ si $n_i \geq 0$ et $P_{n_i} = 0$ si $n_i = -1$

$(i = 1, 2, \dots, m)$

b) $$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) P_{n_i}(x) = O\left(x^{n_1 + \dots + n_m + m - 1}\right)$$

2. Notations

$$f_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^i x^k \qquad (i = 1, \dots, m)$$

$$P_{n_i}(x) = \sum_{k=0}^{n_i} a_k^i x^k$$

$$s = n_1 + \dots + n_m$$

3. Existence

D'après b) de la définition des Padé-Hermite, les $s+m-1$ premiers termes de la serie $\sum_{i=1}^{m} f_i(x) P_{n_i}(x)$ sont nuls. Ceci permet d'obtenir $s+m-1$ équations à $s+m$ inconnues qui sont les a_k^i $\begin{array}{l}(k=0,1,\dots,n_i)\\(i=1,\dots,m)\end{array}$

Soit $$M_{(n_1,\dots,n_m)} = \begin{pmatrix}
f_0^1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & f_0^m & 0 & \cdots & 0\\
f_1^1 & f_0^1 & \cdots & 0 & & f_1^m & f_0^m & \cdots & 0\\
\vdots & & \ddots & & & \vdots & & \ddots & \\
f_{n_1}^1 & \cdots & \cdots & f_0^1 & \cdots & f_{n_m}^m & \cdots & \cdots & f_0^m\\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots\\
f_{s+m-1}^1 & \cdots & \cdots & f_{s+m-1-n_1}^1 & & f_{s+m-1}^m & \cdots & \cdots & f_{s+m-1-n_m}^m
\end{pmatrix}$$

c'est une matrice de taille $s+m$ formée de m groupes de colonnes. chaque .. i est formé de n_i+1 colonnes, $(i=1,\dots,$

Soit $j \in \{1,\dots,N\}$,

Notons X_j le vecteur colonne de composantes :

$$\left(a_0^1, \dots, a_{n_1}^1 ; \dots, a_0^{j-1}, \dots, a_{n_{j-1}}^{j-1} ; a_0^j, \dots, a_{n_j-1}^j ; a_0^{j+1}, \dots, a_{n_{j+1}}^{j+1} ; \dots ; a_0^m, \dots a_{n_m}^m\right)$$

Notons Y_j le vecteur colonne de composantes :

$$\left(0, \dots\dots\dots\dots\dots, 0 ; f_0^j, \dots, f_{m+s-n_j-2}^j\right)$$

Le système peut s'écrire : $M_{(n_1, \dots, n_{j-1}, n_j-1, n_{j+1}, \dots, n_m)} X_j = -a_{n_j}^j Y$

où pour chaque j X_j est le vecteur des inconnues.

4. Remarque 1.1

S'il existe $j \in \{1, \dots, N\}$ tel que $M_{(n_1, \dots, n_{j-1}, n_j-1, n_{j+1}, \dots, n_m)}$ est inversible alors le problème a une solution unique "à un facteur multiplicateur près", en ce sens que si $\{P_1, \dots, P_m\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$ pour le système $\{f_1, \dots, f_m\}$, alors les seules autres solutions sont de la forme $\{\alpha P_1, \dots, \alpha P_m\}$ où α est une constante.

En effet, si $M(n_1, \dots, n_{j-1}, n_j-1, n_{j+1}, \dots, n_m)$ est inversible, on considère le système $M_{(n_1, \dots, n_{j-1}, n_j-1, n_{j+1}, \dots, n_m)} X_j = -a_{n_j}^j Y_j$,

on choisit arbitrairement $a_{n_j}^j$ non nul, d'où l'existence et l'unicité de la solution de ce système de $(s+m-1)$ équations à $(s+m-1)$ inconnues.

Il est évident que toute solution d'un système $M_{(n_1,\dots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\dots,n_m)}X_i = -a^i_{n_i}Y_i$ avec $i \neq j$, est une solution du système $M_{(n_1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_m)}X_j = -a^j_{n_j}Y_j$

S. Remarque 1.2

$a^j_{n_j}$ pouvant être choisi arbitrairement dans la résolution du système $M_{(n_1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_m)}X_j = -a^j_{n_j}Y_j$, on peut déduire que si $M_{(n_1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_m)}$ est inversible alors il y a au moins un polynôme P_{n_j} de degré exact n_j dans la forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\dots,n_m)$ pour le système $\{f_1,\dots,f_m$

Remarque 1.3

Les P_{n_j} sont degré exact n_j pour tous les $j \in \{1,\dots,N\}$ pour lesquels $M_{(n_1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_m)}$ sont inversibles.

On peut normaliser la solution du problème en écrivant que le $(s+m)^{e}$ terme de la série $\sum_{i=1}^{m} f_i(x) P_{n_i}(x)$ est égale à une constante c fixée au départ. Dans ce cas le système devient : $M_{(n_1,\dots,n_m)} A = B$ où

$$A = \left(a_0^1, \dots, a_{n_1}^1 ; \dots ; a_0^m, \dots, a_{n_m}^m\right)$$

$$B = (0, \dots\dots\dots, 0, c)$$

6. Remarque 1.7

Si $\det M_{(n_1,\dots,n_m)} \neq 0$ et si on choisit $c = \det M_{(n_1,\dots,n_m)}$ alors il existe une forme de Padé-Hermite et une seule $\{P_{n_1},\dots,P_{n_m}\}$ d'ordre $(n_1,\dots,n_m)$ pour le système $\{f_1,\dots,f_m\}$. Cette forme vérifie : $\sum_{i=1}^{m} f_i(x) P_{n_i}(x) = x^{s+m-1} \sum_{k\geq 0} \rho_k(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))\, x^k$

où :

$$\rho_k(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m)) = \left|\begin{array}{ccc|c|ccc}
f_0^1 & & 0 & & f_0^m & & 0 \\
\vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \\
\vdots & & f_0^1 & \cdots & \vdots & & f_0^m \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
f_{s+m-2}^1 & \cdots & f_{s+m-2-n_1}^1 & & f_{s+m-2}^m & \cdots & f_{s+m-2-n_m}^m \\
f_{s+m-1+k}^1 & \cdots & f_{s+m-1-n_1+k}^1 & & f_{s+m-1+k}^m & \cdots & f_{s+m-1-n_m+k}^m
\end{array}\right|$$

En effet :

det $M_{(n_1,\dots,n_m)}$ étant non nul le système $M_{(n_1,\dots,n_m)} A = B$ a une solution unique. D'autre part Della Dora ([5]) a montré que pour tout système $\{f_1,\dots,f_m\}$ et tout m-uple $(n_1,\dots,n_m)$ il existe une forme de Padé-Hermite pour $\{f_1,\dots,f_m\}$ d'ordre $(n_1,\dots,n_m)$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) V_{n_i}(x) = \Big[\sum_{k\geq 0} \rho_k(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))\, x^k\Big] x^{s+m-1} \quad (*)$$

($\{V_{n_1},\dots,V_{n_m}\}$ étant cette forme de Padé-Hermite).

Comme $\rho_0(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m)\}) = \det M_{(n_1,\dots,n_m)} = C$, les coefficients des polynômes $\{V_{n_1},\dots,V_{n_m}\}$ vérifient le système $M_{(n_1,\dots,n_m)} A = B$ ■

7. Définition 1.1

La forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\dots,n_m)$ pour le système $\{f_1,\dots,f_{n_m}\}$ qui vérifie l'égalité (*) est appelée : Forme Canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\dots,n_m)$ pour le système $\{f_1,\dots,f_{n_m}\}$. ([5]).

On sait écrire les polynômes d'une forme canonique de Padé-Hermite sous forme de déterminants ([5]) :

$$V_{n_i}(x) = \begin{vmatrix}
f_0^1 & \ddots & & & f_0^i & \ddots & & & f_0^m & \ddots & \\
\vdots & & f_0^1 & & \vdots & & f_0^i & & \vdots & & f_0^m \\
\vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\
f_{s+m-2}^1 & \cdots & f_{s+m-2-n_1}^1 & & f_{s+m-2}^i & \cdots & f_{s+m-2-n_i}^i & & f_{s+m-2}^m & \cdots & f_{s+m-2-n_m}^m \\
0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 & 1 & x \cdots & x^{n_i} & 0\cdots 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}$$

8. Propriétés algébriques

Dans cette partie on essayera de démontrer certaines propriétés algébriques des formes de Padé-Hermite et de montrer chaque fois que possible que la propriété garde la condition de normalisation ;

Propriété 1 :

Soit $\{f_1, \dots, f_m\}$ un système de m séries formelles. Si $\{P_1, \dots, P_m\}$ et $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ sont deux formes de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$ pour le système $\{f_1, \dots, f_m\}$ alors $\{P_1 + Q_1, \dots, P_m + Q_m\}$ l'est aussi.

Démonstration

Si $f_1(x) P_1(x) + \dots + f_m(x) P_m(x) = O(x^{s+m-1})$

et $f_1(x) Q_1(x) + \dots + f_m(x) Q_m(x) = O(x^{s+m-1})$,

alors $f_1(x)(P_1(x) + Q_1(x)) + \dots + f_m(x)(P_m(x) + Q_m(x)) = O(x^{s+m-1})$

D'autre part on a $\deg(P_i(x) + Q_i(x)) \leq n_i \quad (i = 1, \dots, m)$

c.q.f.d.

Propriété 2

Soit $\{f_1, \dots, f_m\}$ un système de m séries formelles et $\{P_1, \dots, P_m\}$ sa forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$.

Soient : $c_1, \dots, c_m$ m constantes non nulles et $\alpha = \prod_{i=1}^{m} c_i^{n_i+1}$

Alors : le système de polynômes $\{\alpha_1 P_1, \dots, \alpha_m P_m\}$ est la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$ pour le système $\{c_1 f_1, \dots, c_m f_m\}$; $\alpha_i = \dfrac{\alpha}{c_i}$ $(i = 1, \dots, m)$

Démonstration :

$$\text{On a } f_1 P_1 + \dots + f_m P_m = x^{s+m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j(\{f_1, \dots, f_m\}; (n_1, \dots, n_m))\, x^j$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par α, on obtient :

$$c_1 f_1 (\alpha_1 P_1) + \dots + c_m f_m (\alpha_m P_m) = x^{s+m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha\, \rho_j(\{f_1, \dots, f_m\}; (n_1, \dots, n_m))\, x^j$$

Comme $\deg(\alpha_i P_i) \leq n_i$ $(i = 1, \dots, m)$ il suffira de montrer que

$$\alpha\, \rho_j(\{f_1, \dots, f_m\}; (n_1, \dots, n_m)) = \rho_j(\{c_1 f_1, \dots, c_m f_m\}; (n_1, \dots, n_m))$$

$(j = 0, 1, \dots)$

$$\rho_j(\{c_1 f_1,\dots,c_m f_m\};(n_1,\dots,n_m)\}) = \begin{vmatrix} c_1 f_0^1 & & & \vdots & c_m f_0^m & & \\ c_1 f_1^1 & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & c_1 f_0^1 & \cdots & \vdots & & c_m f_0^m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_1 f^1_{s+m-2} & \cdots & c_1 f^1_{s+m-2-n_1} & \vdots & c_m f^m_{s+m-2} & \cdots & c_m f^m_{s+m-2-n_m} \\ c_1 f^1_{s+m-1+j} & \cdots & c_1 f^1_{s+m-1+j-n_1} & \vdots & c_m f^m_{s+m-1+j} & \cdots & c_m f^m_{s+m-1-n_m+j} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{m} c_i^{n_i+1} \, \rho_j(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m)\})$$

$$= \alpha \, \rho_j(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m)\}).$$

c.q.f.d.

<u>Propriété 3</u> :

Soit $\{f_1,\dots,f_m\}$ un système de m séries formelles

et soient m séries $R_i = (\sum_{j=0}^{\infty} r_j^i x^j)\, x^{s+m-1}$ $\quad i=1,\dots,m$

Si $\{P_1,\dots,P_m\}$ est la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\dots,n_m)$ pour le système $\{f_1,\dots,f_m\}$ alors elle est aussi la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\dots,n_m)$ pour le système $\{f_1+R_1,\dots,f_m+R_m\}$

<u>Démonstration</u> :

On a : $(R_1+f_1)P_1+\cdots+(R_m+f_m)P_m = x^{s+m-1}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))x^j + \sum_{i=1}^{m}\big(\sum_{j=0}^{\infty} r^i_j x^j\big)P_i\Big)$

Calculons le 2e terme de cette égalité ;

Pour $i=1,\dots,m$ posons $r^i_j=0$ si $j<0$

On a :

$$P_i=\sum_{j=0}^{n_i} a^i_j x^j = \left|\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc}
f^1_0 & & & & f^i_0 & & & & f^m_0 & & \\
\vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \\
\vdots & & f^1_0 & & \vdots & & f^i_0 & & \vdots & & f^m_0 \\
\vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\
f^1_{s+m-2} & \cdots & f^1_{s+m-2} & & f^i_{s+m-2} & \cdots & f^i_{s+m-2-n_i} & & f^m_{s+m-2} & \cdots & f^m_{s+m-2-n_m} \\
0 & \cdots & 0 & & 1 & x \cdots & x^{n_i} & & & &
\end{array}\right|$$

$i=1,\dots,m$

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} r^i_j x^j\Big)\cdot\sum_{j=0}^{n_i} a^i_j x^j = \sum_{k=0}^{\infty} c^i_k x^k \quad \text{où} \quad c^i_k = \sum_{j=0}^{j=\min(k,n_i)} a^i_j r^i_{k-j} \qquad k\geq 0$$

$$c^i_k = \left|\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc}
f^1_0 & & & & f^i_0 & & & & f^m_0 & & \\
\vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \\
\vdots & & f^1_0 & & \vdots & & f^i_0 & & \vdots & & f^m_0 \\
\vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\
f^1_{s+m-2} & \cdots & f^1_{s+m-2-n_1} & & f^i_{s+m-2} & \cdots & f^i_{s+m-2-n_i} & & f^m_{s+m-2} & \cdots & f^m_{s+m-2-n_m} \\
0 & \cdots & 0 & & r^i_k & r^i_{k-1} \cdots & r^i_{k-n_i} & & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right|$$

Donc $\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{\infty} r_j^i x^j \right) P_i$ est égale à :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \begin{array}{ccc|c|ccc} f_0^1 & & & & f_0^m & & \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & f_0^1 & \cdots & \vdots & & f_0^m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{s+m-2}^1 & \cdots & f_{s+m-n_1-2}^1 & & f_{s+m-2}^m & \cdots & f_{s+m-n_m-2}^m \\ r_k^1 & r_{k-1}^1 \cdots & r_{k-n_1}^1 & & r_k^m & r_{k-1}^m \cdots & r_{k-n_m}^m \end{array} \right| x^k$$

En ajoutant $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))x^j$ à cette quantité on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \begin{array}{ccc|c|ccc} f_0^1 & & & & f_0^m & & \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & f_0^1 & \cdots & \vdots & & f_0^m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{s+m-2}^1 & \cdots & f_{s+m-2-n_1}^1 & & f_{s+m-2}^m & \cdots & f_{s+m-2-n_m}^m \\ (r_k^1+f_{s+m+k-1}^1) & \cdots & (r_{k-n_1}^1+f_{s+m+k-1-n_1}^1) & & (r_k^m+f_{s+m+k-1}^m) & \cdots & (r_{k-n_m}^m+f_{s+m+k-1-n_m}^m) \end{array} \right| x^k$$

Or cette série est exactement $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(\{f_1+R_1,\dots,f_m+R_m\};(n_1,\dots,n_m))x^k$ puisque les $(s+m-1)$ premiers coefficients des séries R_i $(i=1,\dots,m)$ sont nuls et que

$$(f_i+R_i)(x) = f_0^i + f_1^i x + \dots + f_{s+m-2}^i x^{s+m-2} + (f_{s+m-1}^i + r_0^i)x^{s+m-1} + (f_{s+m}^i + r_1^i)x^{s+m} + \dots$$

c.q.f.d

Remarque:

Les R_i $i=1,\dots,m$ peuvent être des polynômes dont les $s+m-1$ premiers coefficients sont nuls.

Propriété 4

Si $\{P_1,\dots,P_m\}$ est la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\dots,n_m)$ pour le système $\{f_1,\dots,f_m\}$ alors $\{b\,P_1(at), b\,P_2(at),\dots, b\,P_m(at)\}$ est la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\dots,n_m)$ pour le système $\{g_1(t),\dots,g_m(t)\}$ où : $g_i(t)=f_i(at)$ a : constante non nulle

$$b=\sqrt{a^{(s+m-2)^2-\sum_{i=1}^{m} n_i^2+m-2}}$$

Démonstration :

on a $\quad f_1(x)P_1(x)+\dots+f_m(x)P_m(x)=x^{s+m-1}\sum_{i=0}^{\infty}\rho_i(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))$

En prenant $x=at$ on obtient :

$$g_1(t)P_1(at)+\dots+g_m(t)P_m(at)=t^{s+m-1}a^{s+m-1}\sum_{i=0}^{\infty}\rho_i(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))\,a^i$$

Calculons $\rho_i(\{g_1,\dots,g_m\};(n_1,\dots,n_m))$ en fonction de $\rho_i(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))$:

Comme $g_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j f_j^i t^j$ on a, pour tout $j \geq 0$:

$$\rho_j(\{g_1,\dots,g_m\};(n_1,\dots,n_m)) = \left| \begin{array}{cccc|c|cccc} f_0^1 & & & & & f_0^m & & & \\ a f_1^1 & f_0^1 & & & & a f_1^m & f_0^m & & \\ \vdots & & \ddots & f_0^1 & \cdots & \vdots & & \ddots & f_0^m \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a^{s+m-2} \times f_{s+m-2}^1 & \cdots & & a^{s+m-2-n_1} \times f_{s+m-2-n_1}^1 & & a^{s+m-2} \times f_{s+m-2}^m & \cdots & & a^{s+m-2-n_m} \times f_{s+m-2-n_m}^m \\ a^{s+m+j-1} \times f_{s+m+j-1}^1 & \cdots & & a^{s+m+j-n_1-1} \times f_{s+m-1-n_1+j}^1 & & a^{s+m+j-1} \times f_{s+m+j-1}^m & \cdots & & a^{s+m+j-n_m-1} \times f_{s+m-1+j-n_m}^m \end{array} \right|$$

Si on multiplie les n_i colonnes de chaque groupe i (à partir de la 2^e colonne) respectivement par $a, a^2, \dots, a^{n_i}$, On divise par $\prod_{i=1}^{m} a.a^2 \dots a^{n_i}$ et on sort les constantes on trouve :

$$\rho_j(\{g_1,\dots,g_m\};(n_1,\dots,n_m)\}) = \frac{a.a^2 \dots . a^{s+m-2} . a^{s+m+j-1}}{\prod_{i=1}^{m} a^{1+2+\dots+n_i}} \rho_j(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))$$

Mais

$$\frac{a\, a^2 \cdots a^{s+m-2}\, a^{s+m+j-1}}{\prod_{i=1}^{m} a^{1+\dots+n_i}} = \frac{a^{\frac{(s+m-2)(s+m-1)}{2}}}{a^{(\sum_{i=1}^{m} n_i^2 + s)/2}}\, a^{s+m+j-1}$$

$$= \sqrt{a^{(s+m-2)^2 - \sum_{i=1}^{m} n_i^2 + sm - 2}}\; a^{s+m+j-1}$$

$$= b\, a^{s+m+j-1}$$

Donc : $g_1(t)\,(b\,P_1(at))+\cdots+g_m(t)\,(b\,P_m(at)) = t^{s+m-1}\sum_{i=0}^{\infty} b\,a^{s+m+i-1}\rho_i(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))\,t^i$

$$= t^{s+m-1}\sum_{i=0}^{\infty}\rho_i(\{g_1,\dots,g_m(t)\});(n_1,\dots,n_m))$$

c.q.f.d.

Propriété 5 :

Soit $\{f_1,\dots,f_m\}$ un système de m séries formelles

Soient $k\in\mathbb{N}$ et $i\in\{1,\dots,m\}$ tel que $\overset{i}{f_0}\neq 0$ on a :

$\{P_{n_1},\dots,P_{n_m}\}$ est la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre

$(n_1,\dots,n_m)$ pour le système $\{f_1,\dots,f_m\}$ si et seulement si :

$\{\varepsilon(\overset{i}{f_0})^k P_{n_1},\dots,\varepsilon(\overset{i}{f_0})^k P_{n_{i-1}},\varepsilon(\overset{i}{f_0})^k x^k P_{n_i},\varepsilon(\overset{i}{f_0})^k P_{n_{i+1}},\dots,\varepsilon(\overset{i}{f_0})^k P_{n_m}\}$ est la

forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\dots,n_{i-1},n_i+k,n_{i+1},\dots,n_m)$

pour le système $\{x^k f_1,\dots,x^k f_{i-1},f_i,x^k f_{i+1},\dots,x^k f_m\}$.

$\varepsilon=(-1)^{k(n_1+\cdots+n_{i-1}+i-1)}$

Démonstration

on a : $f_1P_{n_1}(x)+\cdots+f_mP_{n_m}(x) = x^{s+m-1}\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))\,x^j$

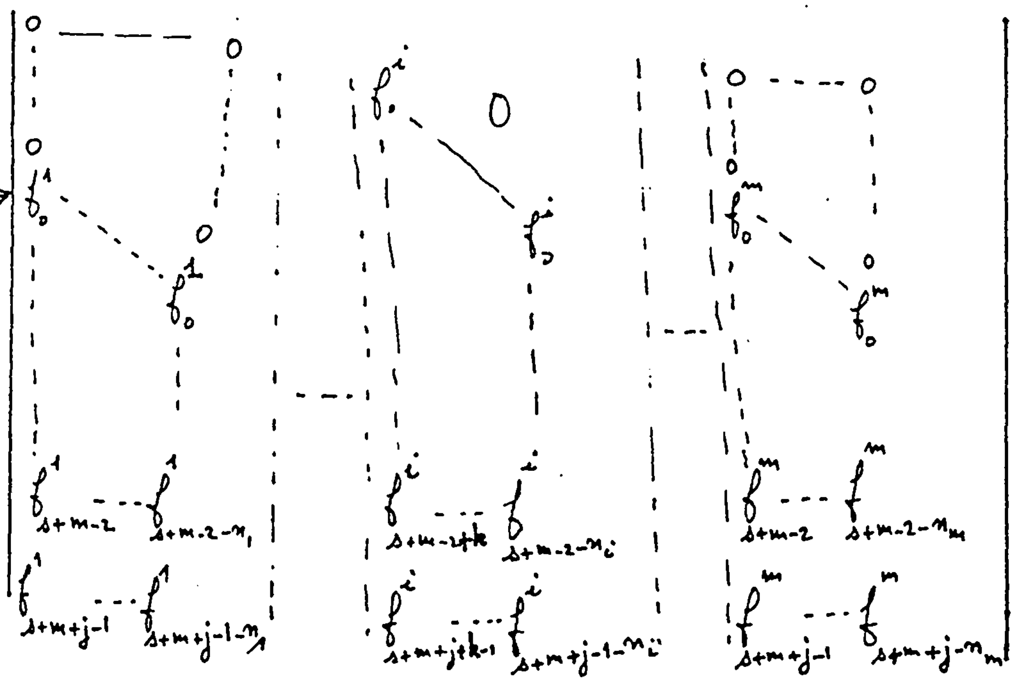
Donc :

$$(*)\quad x^k f_1 P_{n_1}(x) + \cdots + x^k f_{i-1} P_{n_{i-1}}(x) + f_i\left(x^k P_{n_i}(x)\right) + x^k f_{i+1} P_{n_{i+1}}(x) + \cdots + x^k f_m P_{n_m}(x) = x^{(s+k)+m-1} \times \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))$$

Pour $j \geq 0$ on a :

$$\rho_j(\{x^k f_1,\dots,x^k f_{i-1}, f_i, x^k f_{i+1},\dots,x^k f_m\};(n_1,\dots,n_i+k,\dots,n_m)) =$$

$(k+1)^e$ ligne



$$= \left((-1)^{n_1+\cdots+n_{i-1}+i+1} f_0^i\right)^k \rho_j(\{f_1,\dots,f_m\};(n_1,\dots,n_m))$$

D'autre part :

Comme $\deg x^k P_{n_i} \leq n_i + k$ et que $s + k + m - 1 = n_1 + \cdots + n_{i-1} + (n_i + k) + n_{i+1} + \cdots + n_m + m - 1$

l'égalité $(*)$ permet de conclure.

c.q.f.d.

Une conséquence de la propriété 5 :

Propriété 6 :

Soit $\{f_1, \dots, f_m\}$ un système de m séries formelles telles que :

$f_j(0) = f_j'(0) = \dots = f_j^{(k-1)}(0) = 0$ si $j \neq i$ et $f_i^0 \neq 0$ pour un i fixé.

Soit le système $\{g_1, \dots, g_m\}$ tel que : $g_j(t) = t^{-k} f_j(t)$ pour $j \neq i$

et $g_i(t) = f_i(t)$.

Si $\{P_{n_1}, \dots, P_{n_{i-1}}, P_{(n_i+k)}, P_{n_{i+1}}, \dots, P_{n_m}\}$ est la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_{i-1}, n_i+k, n_{i+1}, \dots, n_m)$ pour le système $\{f_1, \dots, f_m\}$ alors $\{g_1, \dots, g_m\}$ admet comme forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$ le système $\left\{\dfrac{P_{n_1}}{[\varepsilon f_0^i]^k}, \dots\dots, \dfrac{P_{n_m}}{[\varepsilon f_0^i]^k}\right\}$, avec $\varepsilon = (-1)^{n_1+\dots+n_{i-1}+i-1}$.

Démonstration

on a : $f_1(x) P_{n_1}(x) + \dots + f_i(x) P_{n_i+k}(x) + \dots + f_i(x) P_{n_m}(x) = O(x^{s+m+}$

ou $x^k g_1(x) P_{n_1}(x) + \dots + g_i(x) P_{n_i+k}(x) + \dots + x^k g_m(x) P_{n_m}(x) = O(x^{s+m}$

Comme $g_i(0) \neq 0$, x^k divise P_{n_i+k} ; Posons $P_{n_i+k} = x^k$

$\{P_{n_1}, \dots, x^k P_{n_i}, \dots, P_{n_m}\}$ est la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_i+k, \dots, n_m)$ pour le système $\{x^k g_1, \dots, g_i, \dots, x^k g_m\}$. Alors, la propriété 5 implique que $\left\{\dfrac{P_{n_1}}{[\varepsilon f_0^i]^k}, \dots, \dfrac{P_{n_m}}{[\varepsilon f_0^m]^k}\right\}$ est la forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$ pour le système $\{g_1, \dots, g_m\}$.

c.q.f.d

Propriété 7 :

Soit $\{f_1, \dots, f_m\}$ un système de m séries formelles et $g_i(t) = f_i(t^k)$ $(i=1,\dots,m)$, k entier >0. Soient $r_i \in \mathbb{N}$ $(i=1,\dots,m)$ tel que $\sum_{i=1}^{m} r_i \leq (k-1)(m-1)$

Si $\{P_{n_1}, \dots, P_{n_m}\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$ pour le système $\{f_1, \dots, f_m\}$ alors $\{P_{n_1}(t^k), \dots, P_{n_m}(t^k)\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1 k + r_1, \dots, n_m k + r_m)$ pour le système $\{g_1, \dots, g_m\}$

Démonstration :

Il existe une série φ telle que : $f_1(x) P_{n_1}(x) + \dots + f_m(x) P_{n_m}(x) = x^{s+m-1} \varphi_1(x)$

pour $x = t^k$ on a :

$$f_1(t^k)P_{n_1}(t^k)+\cdots+f_m(t^k)P_m(t^k) = (t^k)^{s+m-1}\varphi_1(t^k)$$

$$= t^{ks+km-k}\,\varphi_1(t^k)$$

$$= t^{kn_1+\cdots+kn_m+(k-1)(m-1)+m-1}\,\varphi_1(t^k).$$

$$= t^{(kn_1+r_1)+\cdots+(kn_m+r_m)+m-1+(k-1)(m-1)-\sum_{i=1}^m r_i}\,\varphi_1($$

$$= t^{(kn_1+r_1)+\cdots+(kn_m+r_m)+m-1}\,\varphi_2(t).$$

$$\text{avec } \varphi_2(t) = t^{(k-1)(m-1)-\sum_{i=1}^m r_i}\,\varphi_1(t^k)$$

Comme $\sum_{i=1}^m r_i \leq (k-1)(m-1)$, $\varphi_2(t)$ est une série formelle.

D'autre part $\deg P_{n_i}(t^k) \leqslant n_i k + r_i$

c.q.f.d.

Remarque:

Cette propriété ne conserve pas la normalisation canonique —

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq m$. Si σ est une permutation de $\{1,\dots,$
pour laquelle $f^{\circ}_{\sigma(1)} \neq 0, \dots, f^{\circ}_{\sigma(p)} \neq 0$, alors on peut trouve
p séries formelles $g_{\sigma(i)}$ $i=1,\dots,p$ telles que :

$$f_{\sigma(i)}\, g_{\sigma(i)} = 1 \qquad i=1,\dots,p.$$

Propriété 8

Si $\{P_1,\dots,P_m\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\dots,n_m)$ pour le système $\{f_1,\dots,f_m\}$ alors $\{P_{\sigma(1)},\dots,P_{\sigma(m)}\}$ est une forme de Padé-Hermite pour le système :

$$\Big\{ g_{\sigma(2)} \times\dots\times g_{\sigma(p)},\ g_{\sigma(1)} \times g_{\sigma(3)} \times\dots\times g_{\sigma(p)},\ \dots,\ g_{\sigma(1)} \times\dots\times g_{\sigma(p-1)},\ g_{\sigma(1)} \times\dots\times g_{\sigma(p)} \times f_{\sigma(p+1)},\ \dots,$$
$$\dots,\ g_{\sigma(1)} \times\dots\times g_{\sigma(p)}\, f_{\sigma(m)} \Big\}$$

d'ordre $(n_{\sigma(1)},\dots,n_{\sigma(m)})$.

Démonstration

σ étant une permutation de $\{1,\dots,m\}$ on a :

$$f_{\sigma(1)}P_{\sigma(1)} + \cdots + f_{\sigma(m)}P_{\sigma(m)} = f_1P_1 + \cdots + f_mP_m = O(x^{n_1+\cdots+n_m+m-1})$$

En multipliant le membre le plus à gauche par $g_{\sigma(1)} \times \cdots \times g_{\sigma(p)}$,

et du fait que $g_{\sigma(i)} f_{\sigma(i)} = 1 \quad (i = 1, \ldots, p)$ on obtient :

$$g_{\sigma(2)} \cdots g_{\sigma(p)} P_{\sigma(1)} + g_{\sigma(1)} g_{\sigma(3)} \cdots g_{\sigma(p)} P_{\sigma(2)} + \cdots + g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(p-1)} P_{\sigma(p)} +$$

$$g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(p)} f_{\sigma(p+1)} P_{\sigma(p+1)} + \cdots + g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(p)} f_{\sigma(m)} P_{\sigma(m)} = g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(p)} O(x^{s+m-1})$$

$$= O(x^{s+m-1})$$

$$= O(x^{n_{\sigma(1)}+\cdots+n_{\sigma(m)}+m-1})$$

c.q.f.d.

<u>Propriété 9</u>

Si $f_i^0 \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$

Si $\{P_1, \ldots, P_m\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \ldots, n_m)$ pour le système $\{f_1, \ldots, f_m\}$, alors $\{P_1, \ldots, P_m\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \ldots, n_m)$ pour le système $\{g_2 \cdots g_m, g_1 g_3 \cdots g_m, \ldots, g_1 g_2 \cdots g_{m-2} g_m, g_1 \cdots g_m$

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate de la propriété 8. En effet, il suffit de prendre la permutation de $\{1, \dots, m\}$ définie par $\sigma(i) = i$ pour $i = 1, \dots, m$.

Propriété 10

Soit $\{f_1, \dots, f_m\}$ un système de m séries formelles et $\{P_n^{(1)}, P_n^{(2)}, \dots, P_n^{(m)}\}$ une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n, \dots, n)$ pour le système $\{f_1, \dots, f_m\}$. Soit $g_i(t) = f_i\left(\frac{a t^k}{R(t)}\right)$ $(i = 1, \dots, m)$

où : $a \neq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, R un polynôme de degré $r \leq k$ tel que $R(0) \neq 0$

Alors : $\left\{ R^n(t) P_n^{(1)}\left(\frac{a t^k}{R(t)}\right), R^n(t) P_n^{(2)}\left(\frac{a t^k}{R(t)}\right), \dots, R^n(t) P_n^{(m)}\left(\frac{a t^k}{R(t)}\right) \right\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(nk, \dots, nk)$ pour le système $\{g_1, \dots, g_m\}$.

Démonstration

on a : $f_1(x) P_n^{(1)}(x) + \dots + f_m(x) P_n^{(m)}(x) = O\left(x^{mn+m-1}\right)$

En prenant $x = \frac{a t^k}{R(t)}$ on aura :

$$g_1(t)\, P_n^{(1)}\left(\frac{a t^k}{R(t)}\right) + \dots + g_m(t)\, P_n^{(m)}\left(\frac{a t^k}{R(t)}\right) = O\left(t^{k(mn+m-1)}\right)$$

* Soit $j \in \{1, \dots, m\}$ Notons $P_n^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(j)} x^k$

$$P_n^{(j)}\left(\frac{a t^k}{R(t)}\right) = a_0^{(j)} + a_1^{(j)} \frac{a t^k}{R(t)} + a_2^{(j)} \frac{a^2 t^{2k}}{R^2(t)} + \dots + a_{n-1}^{(j)} \frac{a^{n-1} t^{(n-1)k}}{R^{n-1}(t)} + a_n^{(j)} \frac{a^n t^{nk}}{R^n(t)}$$

Donc $R^n(t)\, P_n^{(j)}\left(\frac{a t^k}{R(t)}\right) = a_0^{(j)} R^n(t) + a_1^{(j)} a\, t^k R^{n-1}(t) + \dots + a_n^{(j)} a^n t^{nk}$.

c'est la somme de $(n+1)$ polynômes de degrés respectifs au plus $ik + (n-i)r$ $i = 0, 1, \dots, n$

on a $nk = (n-i)k + ik \geqslant (n-i)r + ik$ (car $k \geqslant r$)

$R^n(t)\, P_n^{(j)}\left(\frac{a t^k}{R(t)}\right)$ est donc un polynôme de degré au plus : nk.

$$* \; g_1(t)\, P_n^{(1)}\left(\frac{a t^k}{R(t)}\right) R^n(t) + \dots + g_m(t)\, P_n^{(m)}\left(\frac{a t^k}{R(t)}\right) R^n(t) = O\left(t^{k(mn+m-1)}\right)$$
$$= O\left(t^{mnk+m-1}\right).$$

c.q.f.d.

Une conséquence immédiate de cette propriété est :

Propriété 11 :

Si $\{P_n^{(1)}, \ldots, P_n^{(m)}\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n, \ldots, n)$ pour le système $\{f_1, \ldots, f_m\}$ alors :

$\left\{(1+bt)^n P_n^{(1)}\left(\frac{at}{1+bt}\right), \ldots, (1+bt)^n P_n^{(m)}\left(\frac{at}{1+bt}\right)\right\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n, \ldots, n)$ pour le système $\left\{f_1\left(\frac{at}{1+bt}\right), \ldots, f_m\left(\frac{a}{1+}\right.\right.$

Chapitre 2

Dans ce chapitre, on définira les approximants de type-Padé-Hermite qui permettront d'obtenir les "formes orthogonales" par rapport à m fonctionnelles linéaires. Une forme orthogonale obtenue par rapport à des fonctionnelles linéaires convenablement choisies donne une forme de Padé-Hermite ...

1- Rappel

On donnera la définition des approximants de type-Padé dans le cas d'une serie formelle. On se contentera de rappeler les résultats qui permettront de définir les approximants de type-Padé-Hermite. Pour plus de détails consulter [3] et [9].

Soit f une série formelle définie par $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$

Définissons C : une fonctionnelle linéaire par $C(x^k) = f_k$ si $k \geq 0$
$= 0$ si $k < 0$

Soit V un polynôme de degré fixe q

On définit le polynôme W associé à V par $W(t) = C\left(\frac{V(x)-V(t)}{x-t}\right)$

où C agit sur la variable x

W est un polynôme de degré $q-1$ au plus

On définit maintenant $\tilde{V}$ et $\tilde{W}$ par :

$\tilde{V}(t) = t^q V(t^{-1})$: polynôme de degré q au plus.

$\tilde{W}(t) = t^{q-1} W(t^{-1})$: polynôme de degre $q-1$ au plus.

On a :

$$f(x)\tilde{V}(x) - \tilde{W}(x) = x^q \sum_{k=0}^{\infty} C(x^k V(x)) x^k$$

$$= O(x^q).$$

$\dfrac{\tilde{W}(x)}{\tilde{V}(x)}$ est noté $(q-1/q)_f(x)$ et est appelé approximant de type-Padé

Le polynôme V est appelé polynôme générateur.

A partir de là on peut définir les approximants de type-Padé avec des degrés variés :

On pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n+k} x^k \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 1-q$ $\quad (q-1+n/q)_f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k x^k + x^n (q-1/q)_{f_n}(x)$

où $(q-1/q)_{f_n}(x) = \dfrac{\tilde{W}(x)}{\tilde{V}(x)}$

avec $W(x) = C^{(n)}\left(\dfrac{V(x)-V(t)}{x-t}\right)$

$C^{(n)}$ qui agit sur t est la fonctionnelle linéaire définie par $C^{(n)}(x^k) = f_{n+k}$

On convient que $\sum_{k=0}^{n-1} f_k x^k = 0$ si $n-1 < 0$.

On en déduit que :

si V est de degré n quelconque, il existe Q de degré q au plus défini par $Q(x) = (\sum_{k=0}^{q-n} f_k x^k) \times \tilde{V}(x) + x^{q-n+1} \tilde{W}(x)$

tel que $f(x)\tilde{V}(x) - Q(x) = x^{q+1} \sum_{k=0}^{\infty} C^{(q-n+1)}(x^k V(x)) x^k$

$$= O(x^{q+1}).$$

Définition des approximants de type Padé-Hermite :

Soit : $\{f_1, \dots, f_N\}$ un système de N séries formelles

où $f_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^i x^k$ $(i = 1, \dots, N)$; q un entier naturel ;

$V_1, \dots, V_N$ N polynômes de degrés respectifs $n_1, \dots, n_N$

On a : $\tilde{V}_i(x) f_i(x) - Q_i(x) = x^{q+1} \sum_{k=0}^{\infty} C_i^{h_i}(x^k V_i(x)) x^k$ $\quad i = 1, \dots, N$

$$= O(x^{q+1}).$$

avec : $h_i = q - n_i + 1$ $\qquad Q_i(x) = S_{h_i-1}(x) \times \tilde{V}_i(x) + x^{h_i} \tilde{W}_i(x)$

$$S_{h_i-1}(x) = \sum_{k=0}^{q-n_i} f_k^i x^k \quad \text{et } S_{h_i-1}(x) = 0 \text{ si } q - n_i < 0$$

$$W_i(x) = C_i^{h_i}\left(\frac{V_i(x) - V_i(t)}{x - t}\right)$$ C^{h_i} agit sur la variable t

$C_i^{h_i}$ est définie par $C_i^{h_i}(x^k) = f^i_{k+h_i}$; $f^i_k = 0$ si $k<0$

remarquons que pour chaque i Q_i est un polynôme de degré au plus égal à q.

<u>Définition 2.1</u>

Soit $\{f_1, \dots, f_N\}$ un système de N séries formelles,

Soient : $V_1, \dots, V_N$: N polynômes de degrés respectifs $n_1, \dots, n_N$

q : un entier naturel.

$Q_i(x)$ $i=1,\dots,N$ les polynômes définis comme précédemment

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{N} Q_i(x)$$

On a : $f_1(x)\tilde{V}_1(x) + \dots + f_N(x)\tilde{V}_N(x) - Q(x) = O(x^{q+1})$.

Le système $\left\{\tilde{V}_1(x), \dots, \tilde{V}_N(x), -Q\right\}$ sera par définition l'approximant de type Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_N, q)$

de système de polynômes générateurs $\{V_1(x), \dots, V_N(x)\}$.

(On dira aussi forme de type-Padé-Hermite ...).

<u>Remarque 2.1</u>

Si le système générateur est choisi tel que

$\deg V_i = n_i = k$ et si $q = k-1$ alors $Q = \sum_{i=1}^{N} \tilde{W}_i(x)$

En effet, si $\forall i \quad n_i = k$ on aura $h_i = k-1-(k)+1 = 0$

$$\text{donc} \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{N} Q_i(x) = \sum_{i=1}^{N} \left(S_{\ell_{h_i-1}}(x) \times \tilde{V}_i(x) + x^{h_i} \tilde{W}_i(x) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \tilde{W}_i(x)$$

<u>Propriété 2.1</u>

Soit $\{f_1, \ldots, f_N\}$ un système de N séries formelles et $\{V_1, \ldots, V_N\}$ un système de N polynômes de degrés respectifs $n_1, \ldots, n_N$.

Il existe un polynôme unique de degré au plus égal à q qui vérifie: $f_1 \tilde{V}_1 + f_2 \tilde{V}_2 + \cdots + f_N \tilde{V}_N - Q = O(x^{q+1})$.

<u>Démonstration</u>

Existence : le polynôme $Q(x) = \sum_{i=1}^{N} (S_{\ell_{h_i-1}}(x) \tilde{V}_i(x) + x^{h_i} W_i(x))$

est de degré au plus égal à q. De plus il

est tel que $f_1 \tilde{V}_1 + \cdots + f_N \tilde{V}_N - Q = O(x^{q+1})$ (1)

Unicité : Soit P un polynôme de degré au plus égal

à q tel que $f_1 \tilde{V}_1 + \cdots + f_N \tilde{V}_N - P = O(x^{q+1})$ (2

En retranchant l'égalité (2) de l'égalité (1) on obtient :

$P - Q = O(x^{q+1})$. Le degré de $P-Q$ étant au plus égal à q on a $P - Q = 0$.

c.q.f.d.

<u>Remarque 2.2</u>

La propriété précédente veut dire que l'approximant de type Padé-Hermite est unique dès qu'on fixe les polynômes générateurs.

3- <u>Expression de l'erreur d'approximation</u>

Nous étudions l'erreur d'approximation $f_1 \tilde{V}_1 + \cdots + f_N \tilde{V}_N - Q$ chaque fois qu'on a fixé le système de polynômes générateurs.

Notons $E(V_1, \ldots, V_N)$ cette erreur et notons les polynômes générateurs $V_i(x) = \sum_{l=0}^{m_i} a_l^i x^l \quad (i = 1, \ldots, N)$

Théorème 2.1

$$E_{(V_1,\dots,V_N)} = x^{q+1}\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}\left(\frac{V_i(t)}{1-xt}\right)$$

($C_i^{h_i}$ agit sur la variable t).

Démonstration

Pour $i=1,\dots,N$ on a $f_i(x)\tilde{V}_i(x) - Q_i(x) = x^{q+1} C_i^{h_i}\left(\frac{V_i(t)}{1-xt}\right)$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} f_i(x)\tilde{V}_i(x) - Q(x) = x^{q+1}\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}\left(\frac{V_i(t)}{1-xt}\right)$

Alors: L'erreur d'approximation $E_{(V_1,\dots,V_N)}$ est $x^{q+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}\left(\frac{V_i(t)}{1-xt}\right)$

Corollaire 2.1

$$E_{(V_1,\dots,V_N)} = x^{q+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} d_{i,k}\right) x^k \quad \text{où}$$

$$d_{i,k} = C_i^{h_i}\left(V_i(t)\,t^k\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{j=m_i} f^i_{j+k+h_i}\, a^i_j .$$

Démonstration: évidente.

4- Approximants de plus grand ordre

Le but est de trouver des approximants de type Padé-Hermi de telle sorte que l'ordre d'approximation soit plus grand q

q : degré de Q

Posons $s = n_1 + \dots + n_N$

Les polynômes générateurs dependent de $s+N$ coefficients dont un peut être fixé. Ceci car d'après l'expression donnant le polynôme Q, si on prend $\{\lambda V_1, \dots, \lambda V_N\}$ $(\lambda \neq 0)$ comme système de polynômes générateurs au lieu de $\{V_1, \dots, V_N\}$ on aura λQ au lieu de Q.

A partir de l'égalité $f_1 \tilde{V}_1 + \dots + f_N \tilde{V}_N - Q = x \sum_{k \geq 0}^{q+1} \left[\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i} (x^k V_i(x)) \right] x^k$

on peut considérer $\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i} (x^k V_i(x)) = 0 \quad 0 \leq k \leq s+N-2$

Si ce système est de rang r, on pourrait fixer r coefficients en imposant les conditions $\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i} (x^k V_i(x)) = 0 \quad 0 \leq k \leq r-1 \leq s-2$

Les $s-r$ autres coefficients resteront arbitraires.

Une conséquence immédiate est le :

Théorème 2.2

Si $V_1, \dots, V_N$ sont des polynômes tels que :

$$\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}(x^k V_i(x)) = 0 \quad 0 \le k \le r-1 \le s+N-2 \quad \text{alors :}$$

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x)\tilde{V}_i(x) - Q(x) = x^{q+r+1} \sum_{k \geq 0} \left[\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}(x^{k+r} V_i(x))\right] x^k$$

$$= O(x^{q+r+1}) .$$

5- Formes orthogonales

Dans le cas où le système :

$$\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}(x^k V_i(x)) = 0 \qquad \underset{s = n_1 + \dots + n_N}{0 \le k \le s+N-2} \qquad (*)$$

est de rang $r = s+N-1$ alors $V_1, \dots, V_N$ sont entièrement déterminés par ces $s+N-1$ équations

Remarquons que l'étude du cas particulier $N=1$ $n_1 = n$ et $q = n-1$ permet d'obtenir l'approximant de type Padé $(n-1/n)_{f_1}$ et que dans ce cas le système $(*)$

se réduit à $C_1(x^k V_1(x)) = 0$ $0 \le k \le n-1$ avec $C_1(x^k) = f_k^1$

c'est à dire les relations d'orthogonalité par rapport

à la fonctionnelle linéaire C_1. De plus si $C_1(x^k V_1(x)) = 0$

pour $0 \le k \le n-1$ on a : $(n-1/n)_{f_1} = [n-1/n]_{f_1}$, approximant de Padé.

La même remarque est valable dans le cas $N=1$, n_1 quelconque et q quelconque, en effet on obtient des approximants de Padé $[q/n]_{f_1}$ et les relations d'orthogonalité adjacente.

On a même une orthogonalité composante par composante.

Les formes de type-Padé-Hermite généralisent les approximants de type Padé ; Les formes de Padé-Hermite généralisent les approximants de Padé ; En prenant les polynômes orthogonaux comme polynômes générateurs pour les type-Padé on trouve des Padé ; Quels sont alors les polynômes qui pris comme système générateur pour les formes de type Padé-Hermite donneront les formes de Padé-Hermite tout en généralisant les polynômes orthogonaux (ou les polynômes orthogonaux adjacents) ?

A partir de la relation $\sum_{i=1}^{N} f_i(x)\tilde{V}_i(x) - Q(x) = x^{q+1} \sum_{k\geq 0} [\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}(x^k V_i(x))] x^k$

on voit qu'il suffit de prendre des polynômes qui vérifient :

$\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}(x^k V_i(x)) = 0 \quad 0 \leq k \leq s+N-2$ quand ils existent pour répondre à la question. Or ces relations généralisent les relations d'orthogonalité (et en particulier l'orthogonalité adjacente) dans le cas $N=1$, ce qui justifie l'appellation de ces vecteurs de polynômes dans la définition suivante :

__Définition__ 2.2.

Soient N fonctionnelles linéaires, $N \in \mathbb{N}^*$ notées $C_i \quad i=1,\dots,N$, S'il existe un vecteur de polynômes

$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$ dont les composantes V_i sont de degré n_i au plus

pour $i=1,\dots,N$ et vérifiant : $\sum_{i=1}^{N} C_i\left(x^k V_i(x)\right) = 0 \quad k=0,1,\dots,s+N-2$

on dira que V est une forme orthogonale d'ordre $(n_1,\dots,n_N)$

par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_i \quad i=1,\dots,N$

6- Existence et unicité des formes orthogonales :

On cherche un vecteur de polynômes $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$ pour lequel :

au moins un polynôme V_i est de degré n_i exactement tout en étant

une forme orthogonale d'ordre $(n_1,\dots,n_N)$ par rapport aux

fonctionnelles linéaires $C_1^{h_1},\dots,C_N^{h_N}$

Notons : $V_i(x) = \sum_{k=0}^{k=n_i} b_k^i x^k$

et $M_{(n_1,\dots,n_N)}^{(h_1,\dots,h_N)}$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} f^1_{h_1} & \cdots & f^1_{h_1+m_1} & \cdots & f^N_{h_N} & \cdots & f^N_{h_N+m_N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f^1_{s+h_1-1+N} & \cdots & f^1_{s+h_1+m_1-1+N} & \cdots & f^N_{s+h_N-1+N} & \cdots & f^N_{s+h_N+m_N-1+N} \end{pmatrix}$$

$M^{(h_1,\dots,h_N)}_{(m_1,\dots,m_N)}$ est une matrice de taille $(s+N)\times(s+N)$

A partir de : $\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}\left(x^k V_i(x)\right) = 0 \quad k=0,1,\dots,s+N-2$ on peut

écrire le système (S_j) suivant :

$$M^{(h_1,\dots,h_N)}_{(m_1,\dots,m_{j-1},m_j-1,m_{j+1},\dots,m_N)} \begin{pmatrix} b^1_0 \\ \vdots \\ b^1_{m_1} \\ \vdots \\ b^j_0 \\ \vdots \\ b^j_{m_j-1} \\ \vdots \\ b^N_0 \\ \vdots \\ b^N_{m_N} \end{pmatrix} = -b^j_{m_j} \begin{pmatrix} f^j_{h_j+m_j} \\ \vdots \\ \vdots \\ f^j_{h_j+m_j+s+N-2} \end{pmatrix} \qquad \text{pour tout } j=1,\dots,N$$

Cette écriture permettra de voir sous quelles conditions le système peut avoir une solution. En particulier, le choix de j sera fait plus loin.

Théorème 2.3

Si on choisit arbitrairement $b^j_{n_j}$ non nul et si $M^{(h_1,\dots,h_N)}_{(n_1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_N)}$ est inversible alors la forme orthogonale $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$ d'ordre $(n_1,\dots,n_N)$ par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_1^{h_1},\dots,C_N^{h_N}$ existe et est unique.

Démonstration

évidente ■

On sait que dans le cas des Padé le cas normal est équivalent au fait que le polynôme orthogonal cherché P_j

est de degré exact j (pour tout j). Dans notre cas si on note $\hat{V}_j$ le polynôme :

$$\hat{V}_j = \left| \begin{array}{ccc:c:ccc:c:ccc} f^1_{h_1} & \cdots & f^1_{h_1+m_1} & & f^j_{h_j} & \cdots & f^j_{h_j+m_j} & & f^N_{h_N} & \cdots & f^N_{h_N+m_N} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ f^1_{s+h_1-2+N} & \cdots & f^1_{s+h_1-2+m_1+N} & & f^j_{s+h_j-2+N} & \cdots & f^j_{s+h_j-2+m_j+N} & & f^N_{s+h_N-2+N} & \cdots & f^N_{s+h_N-2+m_N+N} \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 \quad x & \cdots & x^{m_j} & & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right|$$

(Dans ce déterminant, tous les coefficients de la $(s+N)^e$ ligne sont nuls sauf ceux de la $(m_1+\cdots+m_{j-1}+j)^e, \dots, (m_1+\cdots+m_j+j)^e$ colonne.

et si on note $\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{V}_1 \\ \vdots \\ \hat{V}_N \end{pmatrix}$ on a le théorème suivant :

Théorème 2.4

$\hat{V}$ est une forme orthogonale d'ordre $(m_1, \dots, m_N)$ par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_1^{h_1}, \dots, C_1^{h_N}$. De plus pour chaque j, $\hat{V}_j$ est de degré exact m_j si et seulement si $M^{(h_1,\dots,h_N)}_{(m_1,\dots,m_{j-1},m_j-1,m_{j+1},\dots,m_N)}$ est inversible.

<u>Démonstration</u> :

D'après la définition de $\hat{V}_j$, son degré ne dépasse pas n_j, montrons alors que $\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}\left(x^k \hat{V}_i(x)\right) = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, s+N-2$;

Soit $k \in \{0, 1, \ldots, s+N-2\}$,

$$\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}\left(x^k \hat{V}_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=0}^{j=n_i} D_{ij} \quad \text{où}$$

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} f^1_{h_1} & \cdots & f^1_{h_1+m_1} & \vdots & f^i_{h_i} & \cdots & f^i_{h_i+j} & \cdots & f^i_{h_i+n_i} & \vdots & f^N_{h_N} & \cdots & f^N_{h_N+m_N} \\ & \cdots & & \vdots & & & \cdots & & & \vdots & & \cdots & \\ f^1_{s+h_1-2+N} & \cdots & f^1_{s+h_1-2+N+m_1} & \vdots & f^i_{s+h_i-2+N} & \cdots & f^i_{s+h_i-2+N+j} & \cdots & f^i_{s+h_i-2+N+n_i} & \vdots & f^N_{s+h_N-2+N} & \cdots & f^N_{s+h_N-2+N+m_N} \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \cdots 0 & f^i_{h_i+j+k} & 0 \cdots & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}\left(x^k \hat{V}_i(x)\right) = \begin{vmatrix} f^1_{h_1} & \cdots & f^1_{h_1+m_1} & \vdots & f^N_{h_N} & \cdots & f^N_{h_N+m_N} \\ & \cdots & & \vdots & & \cdots & \\ f^1_{s+h_1-2+N} & \cdots & f^1_{s+h_1-2+N+m_1} & \vdots & f^N_{s+h_N-2+N} & \cdots & f^N_{s+h_N-2+N+m_N} \\ f^1_{h_1+k} & \cdots & f^1_{h_1+m_1+k} & \vdots & f^N_{h_N+k} & \cdots & f^N_{h_N+m_N+k} \end{vmatrix}$$

Dans ce déterminant la dernière ligne est la même que l'une des $s+N-1$ autres. Donc $\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}(x^k \hat{V}_i(x)) = 0 \quad 0 \leq k \leq s+N-2$.

Soit $j \in \{1, \ldots, N\}$, Il suffit de revenir à la définition de $M^{(h_1, \ldots, h_N)}_{(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \ldots, n_N)}$ pour voir qu'elle est inversible si et seulement si $\hat{V}_j$ est de degré exact n_j. En effet :

$$M^{(h_1, \ldots, h_N)}_{(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \ldots, n_N)} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc} f^1_{h_1} & \cdots & f^1_{h_1+n_1} & & f^j_{h_j} & \cdots & f^j_{h_j+n_j-1} & & f^N_{h_N} & \cdots & f^N_{h_N+n_N} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ f^1_{s+h_1-2+N} & \cdots & f^1_{s+h_1-2+N+n_1} & & f^j_{s+h_j-2+N} & \cdots & f^j_{s+h_j-3+N+n_j} & & f^N_{s+h_N-2+N} & \cdots & f^N_{s+h_N-2+N+n_N} \end{array}\right)$$

c.q.f.d.

<u>Remarque 2.3</u>

S'il existe j tel que $\deg \hat{V}_j = n_j$ alors $\hat{V}$ est l'unique forme orthogonale d'ordre $(n_1, \ldots, n_N)$ par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_1^{h_1}, \ldots, C_N^{h_N}$. En effet, $\deg \hat{V}_j = n_j \Rightarrow \det M^{(h_1, \ldots, h_N)}_{(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \ldots, n_N)} \neq 0$ d'où l'unicité de la forme orthogonale $\hat{V}$ (Théorème 2.3)

Remarque 2.4.

On verra plus loin que le cas normal implique l'existence d'au moins j tel que $M^{(h_1,\dots,h_N)}_{(n_1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_N)}$ soit inversible.

(On retrouve alors la propriété des Padé : Cas normal $\Leftrightarrow$ $\deg P_i = i$)

Théorème 2.5

Si $V=\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$ est une solution du système (S_j) pour un $j\in\{1,\dots,N\}$ alors $\{\tilde{V}_1,\dots,\tilde{V}_N,-Q\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\dots,n_N,q)$ pour le système $\{f_1,\dots,f_N,1\}$

Démonstration

Si on prend les composantes d'une solution $V=\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$ du système(S_j) comme polynômes générateurs pour le type de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\dots,n_N,q)$ pour le système $\{f_1,\dots,f_N,1\}$ on aura :

$f_1\tilde{V}_1+\dots+f_N\tilde{V}_N-Q = x^{q+1}\sum_{k\geq 0}\left[\sum_{i=1}^{N} c_i^{h_i}(x^kV_i(x))\right]x^k$ et

$\sum_{i=1}^{N} c_i^{h_i}(x^kV_i(x))=0 \quad 0\leq k\leq s+N-2$

Par conséquent $f_1\tilde{V}_1+\dots+f_N\tilde{V}_N-Q = x^{q+s+N}\sum_{k\geq 0}\left[\sum_{i=1}^{N} c_i^{h_i}(x^{k+s+N-1}V_i(x))\right]$

Ce qui achève la démonstration puis-que :

$$q+s+N = n_1+\cdots+n_N+q+(N+1)-1 \quad \text{et}$$

$$f_1\tilde{V}_1+\cdots+f_N\tilde{V}_N - Q = O(x^{q+s+N}).$$

c.q.f.d.

Nous allons essayer de trouver maintenant une condition qui garantira l'existence et l'unicité des formes orthogonales et par suite les formes de Padé-Hermite.

__Définition__ 2.3

Un système $\{f_1,\cdots,f_m\}$ de m séries formelles est dit parfait ([5] et [14]) si pour tout m-uple $(n_1,\cdots,n_m)$ d'entiers tels que $n_i \geq -1$ $(i=1,\cdots,m)$ $\varphi_0(\{f_1,\cdots,f_m\};(n_1,\cdots,n_m)) \neq 0$

On pose $\varphi_0(\{f_1,\cdots,f_m\};(-1,\cdots,-1)) = 1$

(Pour la définition de $\varphi_k(\{f_1,\cdots,f_m\};(n_1,\cdots,n_m))$ voir le chapitre 1).

__Remarque__:

Si $\{f_1,\cdots,f_m\}$ est parfait on a $f_0^i \neq 0$ pour $i=1,\cdots,m$

En effet $\varphi_0(\{f_1,\dots,f_m\};(-1,\dots,-1,\underset{\substack{\uparrow\\ i^e\ \text{position}}}{0},-1,\dots,-1)) = f^i_0 \neq 0$

Lemme 2.1

Soit j fixé pour lequel $g_j(x) = x f_j(x)$, on a :

$$\varphi_0(\{f_1,\dots,f_{j-1},g_j,f_{j+1},\dots,f_N,1\};(n_1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_N;q)) = \lambda \det M^{(k_1,\dots,k_N)}_{(n_1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_N)}$$

où $\lambda = (-1)^{(q+1)(s+N-1)+\frac{s-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i+N-1}{2}}$; $\lambda_i = \delta(i,j)$ si n_i est impaire
$\lambda_i = 1-\delta(i,j)$ si n_i est paire $(i=1,\dots,N)$

δ : Symbole de Kronecker

<u>Démonstration</u>

$\varphi_0(\{f_1,\dots,f_{j-1},g_j,f_{j+1},\dots,f_N,1\};(n_1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_N;q))$ est

donné par le détérminant suivant (chapitre 1) :

$$\begin{array}{c} \\ \left|\begin{array}{cccc|c|cccc|c|cccc|ccc}
f^1_0 & 0 & \cdots & 0 & & g^j_0 & 0 & \cdots & 0 & & f^N_0 & & 0 & & 1 & & 0 \\
f^1_1 & f^1_0 & \cdots & 0 & & g^j_1 & g^j_0 & \cdots & 0 & & \vdots & \ddots & & & & \ddots & \\
\vdots & & \ddots & 0 & & \vdots & & \ddots & 0 & & f^N_{n_N} & \cdots & & f^N_0 & 0 & & 1 \\
f^1_{n_1} & \cdots & & f^1_0 & \cdots & g^j_{n_j} & \cdots & & g^j_0 & \cdots & \vdots & & & \vdots & & & \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & 0 & \\
f^1_{s+N+q-1} & \cdots & & f^1_{s+N+q-n_1-1} & & g^j_{s+N+q-1} & \cdots & & g^j_{s+N+q-n_j} & & f^N_{s+N+q-1} & \cdots & & f^N_{s+N+q-n_N-1} & & &
\end{array}\right| \end{array}$$

$(q+1)$ colonnes ; $(q+1)$ lignes

en posant $g_j(x) = \sum_{k\geq 0} g^j_k x^k$.

En développant ce détérminant par rapport à ses dernières $(q+1)$

colonnes il devient :

$$(-1)^{(q+1)(s+N-1)} \left| \begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} f^1_{q+1} & \cdots & f^1_{q-n_1+1} & g^j_{q+1} & \cdots & g^j_{q-n_j+2} & & f^N_{q+1} & \cdots & f^N_{q-n_N+1} \\ & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ f^1_{s+N+q-1} & \cdots & f^1_{s+N+q-n_1-1} & g^j_{s+q+N-1} & \cdots & g^j_{s+N+q-n_j} & & f^N_{s+q+N-1} & \cdots & f^N_{s+N+q-n_N-1} \end{array} \right|$$

Remplaçons g^j_l par f^j_{l-1} $(q-n_j+2 \leq l \leq s+q+N-1)$, on obtient :

$$(-1)^{(q+1)(s+N-1)} \left| \begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} f^1_{q+1} & \cdots & f^1_{q-n_1+1} & f^j_{q} & \cdots & f^j_{q-n_j+1} & & f^N_{q+1} & \cdots & f^N_{q-n_N+1} \\ & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ f^1_{s+N+q-1} & \cdots & f^1_{s+N+q-n_1-1} & f^j_{s+q+N-2} & \cdots & f^j_{s+N+q-n_j-1} & & f^N_{s+N+q-1} & \cdots & f^N_{s+N+q-n_N-1} \end{array} \right|$$

Comme $q = h_i + m_i + 1$ ce détérminant est égal à :

$$(-1)^{(q+1)(s+N-1)}\left|\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc}
f^1_{h_1+m_1} & \cdots & f^1_{h_1} & \cdots & f^j_{h_j+m_j-1} & \cdots & f^j_{h_j} & \cdots & f^N_{h_N+m_N} & \cdots & f^N_{h_N} \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
f^1_{s+h_1+m_1+N-2} & \cdots & f^1_{s+h_1+N-2} & \cdots & f^j_{s+h_j+m_j+N-3} & \cdots & f^j_{s+h_j+N-2} & \cdots & f^N_{s+h_N+m_N+N-2} & \cdots & f^N_{s+h_N+N-2}
\end{array}\right|$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Groupe } 1}\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Groupe } j}\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Groupe } N}$$

Si on permute dans chaque groupe i de colonnes la $1^{\text{ère}}$ colonne avec la dernière, la 2^{e} avec l'avant dernière, etc..., on doit multiplier par $(-1)^{\frac{(1+m_i)-\lambda_i}{2}}$ sauf pour le groupe j où la permutation des colonnes entrainera la multiplication par $(-1)^{\frac{m_j-\lambda_j}{2}}$. Ce qui donne :

$$(-1)^{(q+1)(s+N-1)+\frac{s-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i+N-1}{2}}\left|\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc}
f^1_{h_1} & \cdots & f^1_{h_1+m_1} & \cdots & f^j_{h_j} & \cdots & f^j_{h_j+m_j-1} & \cdots & f^N_{h_N} & \cdots & f^N_{h_N+m_N} \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
f^1_{s+h_1+N-2} & \cdots & f^1_{s+h_1+m_1+N-2} & \cdots & f^j_{s+h_j+N-2} & \cdots & f^j_{s+h_j+m_j+N-3} & \cdots & f^N_{s+h_N+N-2} & \cdots & f^N_{s+h_N+m_N-2}
\end{array}\right|$$

$$= (-1)^{(q+1)(s+N-1)+\frac{s+N-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i-1}{2}} \det M^{(h_1,\dots,h_N)}_{(m_1,\dots,m_{j-1},m_j-1,m_{j+1},\dots,m_N)}.$$

c.q.f.d.

Lemme 2.2

Si $\{f_1, \dots, f_m\}$ est un système parfait de m séries formelles et $\{P_1, \dots, P_m\}$ une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$ pour le système $\{f_1, \dots, f_m\}$ alors :

i) $\{P_1, \dots, P_m\}$ est l'unique forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$ pour $\{f_1, \dots, f_m\}$

ii) Le premier terme de la série $\frac{1}{x^{s+m-1}}(f_1 P_1 + \dots + f_m P_m)$ est non nul.

Démonstration

i) Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ on a :

$$\det M(n_1, \dots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \dots, n_m) = \rho_0(\{f_1, \dots, f_m\}; (n_1, \dots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \dots, n_m))$$

Comme $\{f_1, \dots, f_m\}$ est parfait $\rho_0(\{f_1, \dots, f_m\}; (n_1, \dots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \dots, n_m)) \neq 0$

$M(n_1, \dots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \dots, n_m)$ est inversible d'où l'unicité de $\{P_1, \dots, P_m\}$ (Remarque 1.1).

ii) L'unicité de la forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$ pour le système $\{f_1, \dots, f_m\}$ implique qu'il existe $\delta \neq 0$ tel que $\{\delta P_1, \dots, \delta P_m\}$ est la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_m)$ pour le système $\{f_1, \dots, f_m\}$. Donc

$$f_1(\delta P_1) + \dots + f_m(\delta P_m) = x^{s+m-1} \sum_{k \geq 0} \rho_k(\{f_1, \dots, f_m\}; (n_1, \dots, n_m)) x^k$$

$\{f_1, \dots, f_m\}$ étant parfait, le premier terme de la série $\frac{1}{x^{s+m-1}}(f_1 P_1 + \dots + f_m P_m)$ qui est $\frac{1}{\delta} \rho_0(\{f_1, \dots, f_m\}; (n_1, \dots, n_m)) \neq 0$

Lemme 2.3

Si $\{f_1, \ldots, f_m\}$ est un système parfait de $m \geq 1$ séries formelles et si $\{P_1, \ldots, P_m\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \ldots, n_m)$ pour $\{f_1, \ldots, f_m\}$ tels que $P_i(x) = \sum_{k=0}^{n_i} \overset{i}{a}_k x^k$ $i = 1, \ldots, m$ alors :

deux au moins des coefficients $\overset{i}{a}_0$ sont non nuls.

Démonstration

On a : $f_1 P_1 + \cdots + f_m P_m = O(x^{n_1 + \cdots + n_m + m - 1})$

Si $\overset{i}{a}_0 = 0$ $\forall i = 1, \ldots, m$ on aurait $f_1 \frac{P_1}{x} + \cdots + f_m \frac{P_m}{x} = O(x^{n_1 + \cdots + n_m + m - 2})$

qui peut s'écrire aussi $f_1 \frac{P_1}{x} + \cdots + f_m \frac{P_m}{x} = x^{m-1} O(x^{(n_1 - 1) + \cdots + (n_m - 1) + m - 1})$

le degré de $\frac{P_i}{x}$ étant inférieur ou égal à $n_i - 1$, $\left\{\frac{P_1}{x}, \ldots, \frac{P_m}{x}\right\}$ est donc une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1 - 1, \ldots, n_m - 1)$ pour le système $\{f_1, \ldots, f_m\}$, ce qui n'est pas possible puisque $\{f_1, \ldots, f_m\}$ est parfait et le 1$^{\text{er}}$ terme de $\frac{1}{x^{(n_1-1)+\cdots+(n_m-1)+m-1}}\left[f_1 \frac{P_1}{x} + \cdots + f_m \frac{P_m}{x}\right]$ est nul (Lemme 2.2)

Il existe donc i tel que $\overset{i}{a}_0 \neq 0$

Comme $f_1 P_1 + \cdots + f_m P_m = O(x^{n_1 + \cdots + n_m + m - 1})$ on a

$\overset{1}{f}_0 \overset{1}{a}_0 + \cdots + \overset{m}{f}_0 \overset{m}{a}_0 = 0$

Si $\overset{k}{a}_0 = 0$ $\forall k \neq i$ on aurait $\overset{i}{a}_0 \overset{i}{f}_0 = 0 \Rightarrow \overset{i}{f}_0 = 0$ ce qui n'est pas possible pour un système parfait c.q.f.d.

Soit $\{f_1, \dots, f_N, 1\}$ un système parfait et $\{P_1, \dots, P_N, -Q\}$ sa forme canonique d'ordre $(n_1, \dots, n_N, q)$. Posons $P_j(x) = \sum_{k=0}^{k=n_j} a_k^j x^k$

D'après le lemme 2.3, deux au moins des coefficients de tête des polynômes $P_1, \dots, P_N, Q$ sont non nuls ; Aussi existe-t-il un j pour lequel $a_0^j \neq 0$. Dans toute la suite de ce chapitre un tel j est fixé.

<u>Lemme</u> 2.4

Si $\{f_1, \dots, f_N, 1\}$ est parfait et $g_j(x) = x\, f_j(x)$

alors $\rho_0(\{f_1, \dots, f_{j-1}, g_j, f_{j+1}, \dots, f_N, 1\}; (n_1, \dots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \dots, n_N, q))$ est égal à $(-1)^{n_j + \dots + n_N + q + j + N + 1} \times a_0^j$

<u>Démonstration</u>

$\rho_0(\{f_1, \dots, f_{j-1}, g_j, f_{j+1}, \dots, f_N, 1\}; (n_1, \dots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \dots, n_N, q))$ est donné par le déterminant : $\left(g_j(x) = \sum_{k \geq 0} g_k^j x^k\right)$

$$\begin{vmatrix} f_0^1 & & 0 & \vdots & g_0^j & & 0 & \vdots & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & & & & \ddots & \\ \vdots & & f_0^1 & & \vdots & & g_0^j & & 0 & & 1 \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \cdots & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & 0 & \\ f^1_{s+q+N-1} & \cdots & f^1_{s+q+N-1-n_1} & & g^j_{s+q+N-1} & \cdots & g^j_{s+q+N-n_j} & & & & \end{vmatrix}$$

En remplaçant g_l^j par f_{l-1}^j pour $0 \leq l \leq s+q+N-1$ on obtient

$$\begin{vmatrix}
f_0^1 & & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 & & 0 \\
\vdots & \ddots & & & f_0^j & \ddots & & \vdots & & & \ddots & \\
\vdots & & f_0^1 & & \vdots & & \ddots & 0 & & 0 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & & f_0^j & \cdots & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & 0 & \\
f_{s+q+N-1}^1 & \cdots & f_{s+q+N-1-n_1}^1 & \cdots & f_{s+q+N-2}^j & \cdots & \cdots & f_{s+q+N-n_j-1}^j & \cdots & & &
\end{vmatrix}$$

Or en revenant à l'expression des polynômes formant la forme canonique de Padé-Hermite écrits sous forme de déterminants (chapitre 1, page 8), il est facile de voir que le déterminant ci-dessus est égal à $(-1)^{n_j+\cdots n_N+q+N+j+1}\, a_0^j$.

c.q.f.d

Théorème 2.6

Si $\{f_1, \ldots, f_N, 1\}$ est un système parfait alors pour tout $(N+1)$-uple $(n_1, \ldots, n_N, q)$, $\det M^{(k_1,\ldots,k_N)}_{(n_1,\ldots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\ldots,n_N)} \neq$

Démonstration

Comme $\{f_1, \ldots, f_N, 1\}$ est parfait on a :

$\rho_0(\{f_1, \dots, g_j, \dots, f_N, 1\}; (n_1, \dots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \dots, n_N, q)) \neq 0$ d'après le lemme 2.4

$\det M^{(k_1, \dots, k_N)}_{(n_1, \dots, n_j - 1, \dots, n_N)}$ est donc non nul d'après le lemme 2.1

Théorème 2.7

Soit $\{f_1, \dots, f_N, 1\}$ un système parfait de séries formelles et $(n_1, \dots, n_N, q)$ un $(N+1)$-uple d'entiers $n_i \geq -1$. Il existe une forme orthogonale unique $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$ d'ordre $(n_1, \dots, n_N)$ par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_1^{k_1}, \dots, C_N^{k_N}$ telle que $\{\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_N, -Q\}$ soit une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_N, q)$ pour le système $\{f_1, \dots, f_N, 1\}$.

(avec $Q = \sum_{i=1}^{N} (S_{k_i - 1}(x) \times \tilde{V}_i(x) + x^{k_i} \tilde{W}_i(x))$ - voir Rappel -).

Démonstration

D'après le théorème 2.6 il existe j tel que $\det M^{(k_1, \dots, k_N)}_{(n_1, \dots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \dots, n}$ $\neq$

Le système (S_j) correspondant à cet indice j a une solution unique $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$.

V est alors l'unique forme orthogonale d'ordre $(n_1, \dots, n_N)$ par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_1^{k_1}, \dots, C_N^{k_N}$

V étant une solution de (S_j) le théorème 2.5 implique que

$\{\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_N, -Q\}$ est une forme de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_N, q)$ pour le système $\{f_1, \dots, f_N, 1\}$.

c.q.f.d

j étant toujours fixé comme avant, on va chercher à normaliser la solution du système (S_j). On a vu que sous certaines conditions le système (S_j) admet une solution, mais comme le choix de $b^j_{n_j}$ est arbitraire, une normalisation du système (S_j) s'impose. Une façon de normaliser le système (S_j) est de choisir $b^j_{n_j}$ de telle sorte que $\{\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_N, -Q\}$ soit la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1, \dots, n_N, q)$ pour le système $\{f_1, \dots, f_N, 1\}$;

<u>Théorème 2.8</u>

Si $M^{(k_1,\ldots,k_N)}_{(n_1,\ldots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\ldots,n_N)}$ est inversible et si on attribue

à $b^j_{n_j}$ la valeur $(-1)^{n_{j+1}+\cdots+n_N+j+N+(q+1)(s+N)+\frac{s+N-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i}{2}} \times \det M^{(k_1,\ldots,k_N)}_{(n_1,\ldots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\ldots,n_N)}$ alors $V=\begin{pmatrix}V_1\\ \vdots\\ V_N\end{pmatrix}$

solution du système (S_j) est telle que : $\{\tilde{V}_1,\ldots,\tilde{V}_N,-Q\}$

est la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $(n_1,\ldots,n_N)$

pour le système $\{f_1,\ldots,f_N,1\}$. avec $\begin{cases}\lambda_i=1 \text{ si } n_i \text{ est pair}\\ \lambda_i=0 \text{ si } n_i \text{ est impair}\end{cases}$ $(i=1,\ldots$

<u>Démonstration</u>

Comme $M^{(k_1,\ldots,k_N)}_{(n_1,\ldots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\ldots,n_N)}$ est inversible, (S_j) possède

une seule solution (à un coefficient multiplicateur près) ; Soit

$V=\begin{pmatrix}V_1\\ \vdots\\ V_N\end{pmatrix}$ la solution correspondant au choix $b^j_{n_j}=(-1)^{n_{j+1}+\cdots+n_N+j+N(q+1)(s+N)+\frac{s+N-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i}{2}} \det M^{(k_1,\ldots,k_N)}_{(n_1,\ldots,n_j-1,\ldots)}$

D'après le théorème 2.4 V est proportionnelle à $\hat{V}$ (voir page 42)

Il existe donc $\delta\neq 0$ tel que $V_i=\delta\hat{V}_i$ $\quad i=1,\ldots,N$ et

en particulier $V_j=\delta\hat{V}_j$; alors :

$$\mathcal{D}^{j}_{n_j} = S\,\gamma^{j}_{n_j} \qquad \text{avec} \qquad \hat{V}_i = \sum_{\ell=0}^{\ell=n_i} \gamma^{i}_{\ell}\, x^{\ell} \qquad i=1,\dots,N$$

donc $(-1)^{n_{j+1}+\dots+n_N+j+N+(q+1)(s+N)+\frac{s+N-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i}{2}} \det M^{(k_1,\dots,k_N)}_{(n_1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_N)}$ est égal à

$$S.(-1)^{n_{j+1}+\dots+n_N+j+N} \begin{vmatrix} f^{1}_{k_1} & \cdots & f^{1}_{k_1+n_1} & \cdots & f^{j}_{k_j} & \cdots & f^{j}_{k_j+n_j-1} & \cdots & f^{N}_{k_N} & \cdots & f^{N}_{k_N+n_N} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ & \cdots & & & & \cdots & & & & \cdots & \\ f^{1}_{s+k_1+N-2} & \cdots & f^{1}_{s+k_1+N+n_1-2} & \cdots & f^{j}_{s+k_j+N-2} & \cdots & f^{j}_{s+k_j+N+n_j-3} & \cdots & f^{N}_{s+k_N+N-2} & \cdots & f^{N}_{s+k_N+N+n_N} \end{vmatrix}$$

(d'après l'expression de $\hat{V}_j$)

On reconnait le déterminant de $M^{(k_1,\dots,k_N)}_{(n_1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_N)}$. Comme celui-ci est non nul on a : $S = (-1)^{\frac{s+N-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i}{2}+(q+1)(s+N)}$.

Pour que $\{\tilde{V}_1,\dots,\tilde{V}_N,-Q\}$ soit la forme canonique de Padé-Hermi[te] d'ordre $(n_1,\dots,n_N,q)$ pour le système $\{f_1,\dots,f_N,1\}$ il faut qu'on ait $f_1(x)\tilde{V}_1(x)+\cdots+f_N(x)\tilde{V}_i(x)-Q(x)=x^{q+s+N}\sum_{k\geq 0}\rho_k(\{f_1,\dots,f_N,1\};(n_1,\dots,n_N,q$

Comme $f_1(x)\tilde{V}_1(x)+\cdots+f_N(x)\tilde{V}_N(x)-Q(x)=x^{q+s+N}\sum_{k\geq 0}\left[\sum_{i=1}^{N}C_i^{h_i}(x^{s+N+k-1}V_i(x))\right]x^k$

il suffira de montrer que : $\sum_{i=1}^{N}C_i^{h_i}(x^{s+N+k-1}V_i(x))=\rho_k(\{f_1,\dots,f_N,1\};(n_1,\dots,n_N,q))$, $k\geq$ $(k\in\mathbb{N}$

Soit $k\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{N}C_i^{h_i}(x^{s+N+k-1}V_i(x)) = \delta\sum_{i=1}^{N}C_i^{h_i}(x^{s+N+k-1}\hat{V}_i(x))$$

$$= \delta\sum_{i=1}^{N}C_i^{h_i}\Big(x^{s+N+k-1}\sum_{l=0}^{l=n_i}\gamma_l^i x^l\Big)$$

$$= \delta\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=0}^{n_i}\gamma_l^i f_{s+N+k+l+h_i-1}$$

$$= \delta\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=0}^{n_i}\left|\begin{array}{ccc:ccccc:c}
f^1_{h_1} & \cdots & f^1_{h_1+n_1} & & f^i_{h_i} & \cdots & f^i_{h_i+l} & \cdots\ f^i_{h_i+n_i} & \\
 & \cdots & & \cdots & & & & & \cdots \\
f^1_{s+N+h_1-2} & \cdots & f^1_{s+N+h_1+n_1-2} & & f^i_{s+N+h_i-2} & \cdots & f^i_{s+N+h_i+l-2} & \cdots\ f^i_{s+N+h_i+n_i-2} & \\
0 & \cdots & 0 & & 0\ \cdots\ 0 & & f^i_{s+N+h_i+k+l-1} & 0\ \cdots\ 0 & 0\ \cdots
\end{array}\right.$$

$$= \delta\left|\begin{array}{ccc:c:ccc}
f^1_{h_1} & \cdots & f^1_{h_1+n_1} & & f^N_{h_N} & \cdots & f^N_{h_N+n_N} \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
f^1_{s+N+h_1-2} & \cdots & f^1_{s+N+h_1+n_1-2} & & f^N_{s+N+h_N-2} & \cdots & f^N_{s+N+h_N+n_N-2} \\
f^1_{s+N+h_1-1+k} & \cdots & f^1_{s+N+h_1+n_1+k-1} & & f^N_{s+N+h_N-1+k} & \cdots & f^N_{s+N+h_N+n_N+k-1}
\end{array}\right|$$

$$= \delta \begin{vmatrix} f^1_{q-n_1+1} & \cdots & f^1_{q+1} & \vdots & f^N_{q-n_N+1} & \cdots & f^N_{q+1} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ f^1_{s+N+q-n_1-1} & \cdots & f^1_{s+N+q-1} & \vdots & f^N_{s+N+q-n_N-1} & \cdots & f^N_{s+N+q-1} \\ f^1_{s+N+q-n_1+k} & \cdots & f^1_{s+N+q+k} & \vdots & f^N_{s+N+q-n_N+k} & \cdots & f^N_{s+N+q+k} \end{vmatrix}$$

(car $h_i = q-n_i+1 \quad i=1,\dots,N$)

$$= \delta.(-1)^{\frac{s+N-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i}{2}} \begin{vmatrix} f^1_{q+1} & \cdots & f^1_{q-n_1+1} & \vdots & f^N_{q+1} & \cdots & f^N_{q-n_N+1} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ f^1_{s+N+q-1} & \cdots & f^1_{s+N+q-n_1-1} & \vdots & f^N_{s+N+q-1} & \cdots & f^N_{s+N+q-n_N-1} \\ f^1_{s+N+q+k} & \cdots & f^1_{s+N+q-n_1+k} & \vdots & f^N_{s+N+q+k} & \cdots & f^N_{s+N+q-n_N+k} \end{vmatrix}$$

(En permuttant convenablement les colonnes).

$$= \delta (-1)^{\frac{s+N-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i}{2}} . (-1)^{(q+1)(s+N)} \rho_k(\{f_1,\dots,f_N,1\};(n_1,\dots,n_N,q))$$

$$= \delta^2 \rho_k(\{f_1,\dots,f_N,1\};(n_1,\dots,n_N,q))$$

$$= \rho_k(\{f_1,\dots,f_N,1\};(n_1,\dots,n_N,q)) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

chapitre 3

A la différence des approximants de Padé, les algorithmes de calcul des approximants de Padé-Hermite ne sont pas abondants. Ce n'est que pendant les dix dernières années qu'un intérêt numérique a été porté à ce sujet ([6], [12], [14], [15] et [17]).

$\frac{P}{Q}$ est un approximant $[p/q]$ pour la série f si et seulement si son numérateur P et son dénominateur Q constituent une forme de Padé-Hermite d'ordre (p,q) pour le système $\{f, 1\}$. Aussi serait-il intéressant de pouvoir calculer les formes de Padé-Hermite pour un système $\{f_1, \ldots, f_N, 1\}$.

D'ailleurs, les applications des formes de Padé-Hermite rencontrées jusqu'à maintenant sont dans le cas d'un tel type de système (c'est à dire que la dernière série formelle du système étant $f_{N+1} = 1$).

Dans le chapitre précédent on a vu que les formes de Padé-Hermite peuvent s'obtenir à partir de formes orthogonales par rapport à des fonctionnelles linéaires convenablement définies à partir du système $\{f_1, \ldots, f_N, 1\}$. On se propose ici de calculer les formes orthogonales dans le cas normal.

Soit $\{f_1, \ldots, f_N, 1\}$ un système de séries formelles. Si q est un entier naturel fixe et $(n_1, \dots, n_N)$ un N-uple d'entiers tel que $n_i \geqslant -1$ $i = 1, \dots, N$. On montrera pourquoi on peut supposer que $n_1 \leqslant \dots \leqslant n_N$. On établira d'abord des relations donnant les formes orthogonales jusqu'à l'ordre

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_1 - 1 \\ \vdots \\ n_1 - 1 \end{pmatrix}$$

en faisant évoluer le N-uple

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'une manière convenable. A partir de cela, on montrera comment atteindre l'ordre

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix}$$

en établissant les relations nécessaires.

Propriété 3.1

Si $(V_1, \dots, V_N)$ est une forme orthogonale d'ordre $(n_1, \dots, n_N)$ par rapport aux N fonctionnelles linéaires $C_1, \dots, C_N$; Si σ est une permutation de $\{1, \dots, N\}$ alors : $(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(N)})$ est une forme orthogonale d'ordre $(n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(N)})$ par rapport aux fonctionnelles $C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(N)}$

Démonstration

On a : V_i est de degré n_i au plus pour $i=1, \dots, N$; donc $V_{\sigma(i)}$ est de degré $n_{\sigma(i)}$ au plus pour $i=1, \dots, N$

D'autre part : $\sum_{i=1}^{N} C_{\sigma(i)}(x^k V_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{N} C_i(x^k V_i(x)) = 0$ pour

$k=0,1, \dots, n_1 + \dots + n_N + N-2$ et donc pour $k=0,1,\dots, n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(N)} + N-2$

c.q.f.d

Conséquence :

Dans ce qui suit on pourra supposer que $n_1 \leq \cdots \leq n_N$

En effet, Pour déterminer une forme orthogonale d'ordre $(n_1, \ldots, n_N)$ quelconque, on pourra considérer une permutation σ telle que $m_1 = n_{\sigma(1)} \leq m_2 = n_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq m_N = n_{\sigma(N)}$, Calculer la forme orthogonale d'ordre $(m_1, \ldots, m_N)$ par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_{\sigma(1)}, \ldots, C_{\sigma(N)}$ et déduire celle d'ordre $(n_1, \ldots, n_N)$ par rapport à $C_1, \ldots, C_N$.

Lemme 3.1

Si $\{f_1, \ldots, f_N, 1\}$ est un système parfait de séries formelles définies par $f_i(x) = \sum_{k \geq 0} f_k^i x^k$ $i = 1, \ldots, N$ alors :

pour tout $i = 1, \ldots, N$ et tout $k \geq 0$ on a $f_k^i \neq 0$

Démonstration :

Soit $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\varphi_0\big(\{f_1, \dots, f_N, 1\} ; (-1, \dots, -1, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}}\text{ composante}}}{0}, -1, \dots, -1)\big) = f_0^i \neq 0 \quad \text{puisque } \{f_1, \dots, f_N, 1\}$$

est parfait.

Pour $k \geqslant 0$ on a :

$$\varphi_0\big(\{f_1, \dots, f_N, 1\} ; (-1, \dots, -1, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}}\text{ composante}}}{0}, -1, \dots, -1, k)\big) = \begin{vmatrix} f_0^i & 1 & & & 0 \\ f_1^i & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ f_k^i & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ f_{k+1}^i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k+1} f_{k+1}^i$$

Comme $\{f_1, \dots, f_N, 1\}$ est parfait $\varphi_0(\{f_1, \dots, f_N, 1\} ; (-1, \dots, -1, 0, -1, \dots, -1, k)) \neq 0$

donc $f_{k+1}^i \neq 0$

c.q.f.d.

Lemme 3.2

Si le système $\{f_1, \dots, f_m, 1\}$ est parfait et si $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$ est une forme orthogonale d'ordre $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix}$ par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_i^{h_i}$ $i = 1, \dots, N$ telles que $C_i^{h_i}(x^k) = f^i_{k+h_i}$ avec $h_i = q - n_i + 1$

alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}(x^{n_1+\dots+n_N+N-1} V_i(x)) \neq 0$

Démonstration :

On sait (chapitre 2) qu'il existe un polynôme unique Q de degré q au plus tel que :

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x)\tilde{V}_i(x) - Q(x) = x^{n_1+\dots+n_N+q+N} \sum_{k\geq 0} \left[\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}(x^{k+n_1+\dots+n_N+N-1} V_i(x))\right] x^k$$

$\{f_1, \dots, f_N, 1\}$ étant parfait, la forme de Padé-Hermite $\{\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_N, -Q\}$ est proportionnelle la forme canonique de Padé-Hermite d'ordre $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \\ q \end{pmatrix}$

Il existe donc $\delta \neq 0$ tel que pour tout $k \geq 0$ on a :

$$\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}\left(x^{k+m_1+\cdots+m_N+N-1} V_i(x)\right) = \delta\, \rho_k\left(\{f_1,\ldots,f_N,1\};(m_1,\ldots,m_N,q)\right)$$

Comme $\{f_1,\ldots,f_N,1\}$ est parfait $\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}\left(x^{m_1+\cdots+m_N+N-1} V_i(x)\right) = \delta \rho_0\left(\{f_1,\ldots,f_N,1\};(m_1,\ldots,m_N,q)\right) \neq$

c.q.f.d.

<u>Lemme 3.3</u>

Si le système $\{f_1,\ldots,f_N,1\}$ est parfait et si $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$ est une forme orthogonale d'ordre $\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix}$ par rapport aux fonctionnelles $C_i^{h_i}$ telles que $C_i^{h_i}(x^k) = f^i_{k+h_i}$ $\quad h_i = q - m_i + 1 \quad i = 1,\ldots,N$,

alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}\left(x^{-1} V_i(x)\right) \neq 0$

<u>Démonstration</u>

on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}\left(x^k V_i(x)\right) = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, m_1 + \cdots + m_N + N.$

Si $\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i}(x^{-1}V_i(x)) = 0$, on aurait :

$$\sum_{i=1}^{N} C_i^{h_i-1}(x^k V_i(x)) = 0 \qquad k=0,\dots, m_1+\dots+m_N+N-1$$

Posons $e_i = h_i - 1 = (q-1) - m_i + 1$

Ce qui donne : $\sum_{i=1}^{N} C_i^{e_i}(x^k V_i(x)) = 0 \quad k=0,1,\dots, m_1+\dots+m_N+N-2$

et $$\sum_{i=1}^{N} C_i^{e_i}(x^{m_1+\dots+m_N+N-1} V_i(x)) = 0$$

V serait donc une forme orthogonale d'ordre $\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix}$

par rapport aux fonctionnelles $C_i^{e_i}$ $i=1,\dots,N$ telle

que $\sum_{i=1}^{N} C_i^{e_i}(x^{m_1+\dots+m_N+N-1} V_i(x)) = 0$ Ce qui n'est pas

possible pour un système parfait (Lemme 3.2).

Dans ce qui suit on supposera que :

- $\{f_1, \ldots, f_N, 1\}$ est un système parfait
- q est un entier naturel fixe.
- Dans le calcul des formes orthogonales l'évolution des ordres O_r $r \geq 1$ necessiste un changement de notation pour les fonctionnelles linéaires. Ainsi, on notera C_{ij} la fonctionnelle linéaire définie par $C_{ij}(x^k) = f^j_{k+q-(j^e \text{ composante de } O_i)+1}$; $V_i = \begin{pmatrix} V_{i1} \\ \vdots \\ V_{iN} \end{pmatrix}$ est donc la forme orthogonale d'ordre O_i par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_{i1}, \ldots, C_{iN}$.

Commençons par déterminer les relations permettant le calcul de $V_1, \ldots, V_N$ formes orthogonales correspondantes aux ordres respectifs : $\theta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \theta_i = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} i \text{ fois} \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \theta_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Notons $V_i = \begin{pmatrix} V_{i1} \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{iN} \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, N$

<u>Théorème 3.1</u>

On a :

$V_{11} = 1 \qquad V_{1j} = 0$ pour $j > 1$

Pour $i \in \{2, \dots, N\}$, il existe un $(i-1)$-uple $(a_1, \dots, a_{i-1})$ unique tel que :

$$a_1 = -\frac{f^i_{q+1}}{f^1_{q+1}}$$

$$a_l = -\frac{f^i_{q+l} + a_1 C_{11}(x^{l-1}V_{11}(x)) + \dots + a_{l-1}\left[C_{l-1,1}(x^{l-1}V_{l-1,1}(x)) + \dots + C_{l-1,l-1}(x^{l-1}V_{l-1,l-1}(x))\right]}{C_{l,1}(x^{l-1}V_{l,1}(x)) + \dots + C_{ll}(x^{l-1}V_{ll}(x))}$$

$(l = 2, \dots, i-1)$

$$V_{ij} = \sum_{l=j}^{l=i-1} a_l V_{lj} \quad \text{pour} \quad 1 \le j \le i-1$$

$$V_{ii} = 1$$

$$V_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i < j \le N$$

Démonstration :

D'après les relations du théorème, les degrés des V_{ij} correspondent bien à l'ordre Θ_i. Il suffit donc de montrer que V_i vérifie les relations d'orthogonalité pour qu'elle soit une forme orthogonale d'ordre Θ_i par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{iN}$. C'est à dire :

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, i-2$$

Soit $i \geqslant 2$ et $k \geqslant 0$

Appliquons C_{ij} à chaque V_{ij} $j = 1, \ldots, i$ on obtient :

$$C_{i1}(x^k V_{i1}(x)) = a_1 C_{i1}(x^k V_{11}(x)) + a_2 C_{i1}(x^k V_{21}(x)) + \cdots + a_{i-1} C_{i1}(x^k V_{i-1,1}(x))$$

$$C_{i2}(x^k V_{i2}(x)) = \qquad a_2 C_{i2}(x^k V_{22}(x)) + \cdots + a_{i-1} C_{i2}(x^k V_{i-1,2}(x))$$

$$\cdots\cdots$$

$$C_{i,i-1}(x^k V_{i,i-1}(x)) = \qquad a_{i-1} C_{i,i-1}(x^k V_{i-1,i-1}(x))$$

$$C_{i,i}(x^k V_{ii}(x)) = C_{i,i}(x^k)$$

Si $j \leq l \leq i-1$ on a $C_{ij} = C_{lj}$ En effet,

$$C_{ij}(x^k) = f^{j}_{k+q-(j^{e}\text{ composante de }\theta_i)+1}$$

$$= f^{j}_{k+q-(j^{e}\text{ composante de }\theta_l)+1}$$

Car la j^{e} composante de θ_i est la même que celle de θ_l si $j \leq l \leq i-1$

d'où $C_{ij} = C_{lj}$

Cela nous permet d'écrire :

$$C_{i1}(x^k V_{i1}(x)) = a_1 C_{11}(x^k V_{11}(x)) + a_2 C_{21}(x^k V_{21}(x)) + \cdots + a_{i-1} C_{i-1,1}(x^k V_{i-1,1}(x))$$

$$C_{i2}(x^k V_{i2}(x)) = \qquad a_2 C_{22}(x^k V_{22}(x)) + \cdots + a_{i-1} C_{i-1,2}(x^k V_{i-1,2}(x))$$

$$\cdots$$

$$C_{i,i-1}(x^k V_{i,i-1}(x)) = \qquad a_{i-1} C_{i-1,i-1}(x^k V_{i-1,i-1}(x));$$

$$C_{ii}(x^k V_{ii}(x)) = C_{ii}(x^k).$$

On a alors :

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = a_1\, C_{11}(x^k V_{11}(x)) \;+$$

$$a_2\left[C_{21}(x^k V_{21}(x)) + C_{22}(x^k V_{22}(x))\right] +$$

$$a_3\left[C_{31}(x^k V_{31}(x)) + C_{32}(x^k V_{32}(x)) + C_{33}(x^k V_{33}(x))\right] +$$

$$\cdots\cdots +$$

$$a_{i-1}\left[C_{i-1,1}(x^k V_{i-1,1}(x)) + \cdots + C_{i-1,i-1}(x^k V_{i-1,i-1}(x))\right] +$$

$$C_{ii}(x^k)$$

Sachant que $V_2, V_3, \ldots, V_{i-1}$ sont des formes othogonales d'ordres respectifs $\theta_2, \ldots, \theta_{i-1}$ et en donnant à k les valeurs successives $0, 1, \ldots, i-2$ on a les relations :

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(\;V_{ij}(x)) = a_1 f^1_{q+1} + f^i_{q+1}$$

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x\;V_{ij}(x)) = a_1 f^1_{q+2} + f^i_{q+2} + a_2\left[C_{21}(x V_{21}(x)) + C_{22}(x V_{22}(x))\right]$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^{i-2} V_{ij}(x)) = a_1 f^1_{q+i-1} + f^i_{q+i-1} + a_2\left[C_{21}(x^{i-2} V_{21}(x)) + C_{22}(x^{i-2} V_{22}(x))\right] + \cdots + a_{i-1}\left[C_{i-1,1}(x^{i-2} V_{i-1,1}(x)) + \cdots + C_{i-1,i-1}(x^{i-2} V_{i-1,i-1}(x))\right]$$

Pour que $\sum_{j=1}^{N} C_{ij}\left(x^k V_{ij}(x)\right) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, i-2$ on doit résoudre

un système triangulaire de $(i-1)$ equations à $(i-1)$ inconnues.

D'aprés le lemme 3.1 et le lemme 3.2 ce système a une solution

unique $(a_1, \dots, a_{i-1})$. De plus on a :

$$a_1 = -\frac{f^i_{q+1}}{f^1_{q+1}}$$

$$a_\ell = \frac{-[\, f^i_{q+\ell} + a_1 f^1_{q+\ell} + a_2 (C_{21}(x^{\ell-1} V_{21}(x)) + C_{22}(x^{\ell-1} V_{22}(x))) + \dots + a_{\ell-1}(C_{\ell-1,1}(x^{\ell-1} V_{\ell-1,1}(x)) + \dots + C_{\ell-1,\ell-1}(x^{\ell-1} V_{\ell-1,\ell-1}(x)}{C_{\ell,1}(x^{\ell-1} V_{\ell,1}(x)) + \dots + C_{\ell,\ell}(x^{\ell-1} V_{\ell,\ell}(x))}$$

$\ell = 2, \dots, i-1$

c.q.f.d.

Remarques

3.1 - $(a_1, \dots, a_{i-1})$ dépend de i, c'est à dire si $i < p \leq N$, les $(i-1)$ premières composantes du $(p-1)$-uple obtenu dans le Calcul de V_p ne sont pas forcément les mêmes que $a_1, \dots, a_{i-1}$ qui servent au Calcul de V_i.

3.2 - Plutôt que de prendre $V_{ii} = 1$ on peut prendre $V_{ii} = c_i$ avec $c_i \neq 0$ choisi arbitrairement ce qui pourra servir de normalisation.

Augmentons maintenant la 1ère composante de Θ_N de 1 on obtient $\Theta_{N+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; Soit $V_{N+1} = \begin{pmatrix} V_{N+1,1} \\ \vdots \\ V_{N+1,N} \end{pmatrix}$ la forme orthogonale d'ordre Θ_{N+1} par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_{N+1,1}, \dots, C_{N+1,N}$

Comme dans le théorème précédent, le théorème qui suit donne V_{N+1} en fonction des V_i $i=1,\dots,N$:

Théorème 3.2

Il existe un N-uple unique $(a_1, \dots, a_N)$ tel que:

$$a_1 = -\frac{f^2_{q+1}}{f^1_q}$$

$$a_\ell = -\frac{f^2_{q+\ell} + a_1 C_{11}(x^{\ell-1} V_{11}(x)) + a_2 \left(C_{21}(x^{\ell-1} V_{21}(x)) + C_{22}(x^{\ell-1} V_{22}(x))\right) + \dots + a_{\ell-1}\left[C_{\ell-1,1}(x^{\ell-1} V_{\ell-1,1}(x)) + \dots + C_{\ell-1,\ell-1}(x^{\ell-1} V_{\ell-1,\ell-1}\right.}{C_{\ell,1}(x^{\ell-1} V_{\ell,1}(x)) + \dots + C_{\ell\ell}(x^{\ell-1} V_{\ell\ell}(x))}$$

pour $2 \leq \ell \leq N$

$$V_{N+1,1}(x) = a_1 V_{11} + \sum_{\ell=2}^{\ell=N} a_\ell x V_{\ell 1}(x)$$

$$V_{N+1,2}(x) = 1 + \sum_{\ell=2}^{\ell=N} a_\ell V_{\ell 2}(x)$$

$$V_{N+1,j}(x) = \sum_{\ell=j}^{\ell=N} a_\ell V_{\ell j} \quad \text{pour } 3 \leq j \leq N$$

Démonstration

$\forall_{j=1,\dots,N}$ La relation donnant $V_{N+1,j}$ dans le théorème est telle que le degré de $V_{N+1,j}$ est inférieur ou égal à la j^e composante de Θ_{N+1}. Reste donc à montrer que les relations d'orthogonalité sont vérifiées pour V_{N+1} :

Soit $k \geq 0$ $C_{N+1,1}(x^k V_{N+1,1}(x)) = - a_1 C_{N+1,1}(x^k V_{11}(x)) + \sum_{\ell=2}^{\ell=N} a_\ell C_{N+1,1}(x^{k+1} V_{\ell,1}(x))$

$$C_{N+1,2}(x^k V_{N+1,2}(x)) = C_{N+1,2}(x^k) + \sum_{\ell=2}^{\ell=N} a_\ell C_{N+1,2}(x^k V_{\ell,2}(x))$$

$$C_{N+1,j}(x^k V_{N+1,j}(x)) = \sum_{\ell=j}^{\ell=N} a_\ell C_{N+1,j}(x^k V_{\ell j}(x)) \quad \text{pour } 3 \leq j \leq N$$

Comme $C_{N+1,1}(x^{k+1}) = f^1_{k+1+q-1+1} = f^1_{k+q-0+1} = C_{\ell,1}(x^k) \quad \forall 2 \leq \ell \leq N$

et $\quad C_{N+1,j}(x^k) = C_{\ell,j}(x^k) \qquad \forall \begin{array}{l} j \leq \ell \leq N \\ 2 \leq j \leq N \end{array}$;

On a : $\quad C_{N+1,1}(x^k V_{N+1,1}(x)) = \sum_{\ell=2}^{N} a_\ell C_{\ell,1}(x^k V_{\ell,1}(x)) + a_1 C_{N+1,1}(x^k)$

$$C_{N+1,2}(x^k V_{N+1,2}(x)) = C_{N+1,2}(x^k) + \sum_{\ell=2}^{\ell=N} a_\ell C_{\ell,2}(x^k V_{\ell,2}(x))$$

$$C_{N+1,j}(x^k) = \sum_{\ell=j}^{\ell=N} C_{\ell,j}(x^k V_{\ell,j}(x)) \qquad \text{pour } 3 \leq j \leq N$$

En sommant sur les j on obtient :

$$\sum_{j=1}^{N} C_{N+1,j}(x^k V_{N+1,j}(x)) = a_1 f^1_{k+q} + f^2_{k+q+1} +$$

$$a_2 \left[C_{21}(x^k V_{21}(x)) + C_{22}(x^k V_{22}(x)) \right] +$$

$$a_3 \left[C_{31}(x^k V_{31}(x)) + C_{32}(x^k V_{32}(x)) + C_{33}(x^k V_{33}(x)) \right] +$$

$$\text{-----------} +$$

$$a_N \left[C_{N1}(x^k V_{N1}(x)) + \cdots\cdots + C_{NN}(x^k V_{NN}(x)) \right]$$

Pour que V_{N+1} soit une forme orthogonale d'ordre θ_{N+1} par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_{N+1,1}, \ldots, C_{N+1,N}$ il faut avoir $\sum_{j=0}^{N} C_{N+1,j}(x^k V_{N+1,j}(x)) = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$. Si on impose ces relations et si on tient compte de l'orthogonalité de $V_2, V_3, \ldots, V_N$ on obtient le système triangulaire de N équations à N inconnues suivant :

$$a_1 f_q^1 + f_{q+1}^2 = 0$$

$$a_1 f_{q+1}^1 + a_2\left[C_{21}(x V_{21}(x)) + C_{22}(x V_{22}(x))\right] + f_{q+2}^2 = 0$$

$$a_1 f_{q+2}^1 + a_2\left[C_{21}(x^2 V_{21}(x)) + C_{22}(x^2 V_{22}(x))\right] + a_3\left[C_{31}(x^2 V_{31}(x)) + C_{32}(x^2 V_{32}(x)) + C_{33}(x^2 V_{33}(x))\right] + f_{q+3}^2 = 0$$

$$a_1 f_{q+N-1}^1 + a_2\left[C_{21}(x^{N-1} V_{21}(x)) + C_{22}(x^{N-1} V_{22}(x)\right] + \cdots + a_N\left[C_{N1}(x^{N-1} V_{N1}(x)) + \cdots + C_{NN}(x^{N-1} V_{NN}(x))\right] + f_{q+N}^2 = 0$$

Le lemme 3.1 et le lemme 3.2 permettent de voir qu'aucun coefficient de la diagonale de la matrice qui correspond à ce système triangulaire n'est nul. D'où l'unicité de sa solution $(a_1, \dots, a_N)$ donnée par :

$$a_1 = -\frac{f_{q+1}^2}{f_q^1}$$

$$a_l = -\frac{f_{q+l}^2 + a_1 C_{11}(x^{l-2} V_{11}(x)) + a_2\left[C_{21}(x^{l-1} V_{21}(x)) + C_{22}(x^{l-1} V_{22}(x))\right] + \cdots + a_{l-1}\left[C_{l-1,1}(x^{l-1} V_{l-1,1}(x)) + \cdots + C_{l-1,l-1}(x^{l-1} V_{l-1,l-1}\right.}{C_{l,1}(x^{l-1} V_{l1}(x)) + \cdots + C_{ll}(x^{l-1} V_{ll}(x))}.$$

c.q.f.d.

Remarquons que si on prenait $V_{N+1,2}(x) = b + \sum_{l=2}^{l=N} a_l V_{l2}(x)$ la démonstration du théorème resterait la même quitte à prendre $b \neq 0$ arbitraire lors de la résolution du système triangulaire.

Soit maintenant $\theta_{N+2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ordre obtenu en augmentant la 2^e composante de θ_{N+1} de 1. Soit V_{N+2} la forme orthogonale correspondante. Si $V_{N+2} = \begin{pmatrix} V_{N+2,1} \\ \vdots \\ V_{N+2,N} \end{pmatrix}$ on a :

Théorème 3.3

Il existe un $(N+1)$-uple unique $(a_1, \ldots, a_{N+1})$ tel que :

$$a_1 = f_q^2 / f_q^1$$

$$a_l = - \frac{f^2_{q+l-1} + a_1 f^1_{q+l-1} + a_2 [C_{21}(x^{l-1} V_{21}(x)) + \cdots + C_{22}(x^{l-1} V_{22}(x))] + \cdots + a_{l-1} [C_{l-1,1}(x^{l-1} V_{l-1,1}(x)) + \cdots + C_{l-1,l-1}(x^{l-1} V_{l-1,l-1}(x}{C_{l,1}(x^{l-1} V_{l,1}(x)) + \cdots + C_{ll}(x^{l-1} V_{ll}(x))}$$

$(l = 2, \ldots, N$

$$a_{N+1} = - \frac{f^2_{q+N} + a_1 f^1_{q+N} + a_2 [C_{21}(x^N V_{21}(x)) + \cdots + C_{22}(x^N V_{22}(x))] + \cdots + a_N [C_{N,1}(x^N V_{N,1}(x)) + \cdots + C_{N,N}(x^N V_{NN}(x))]}{C_{N+1,1}(x^N V_{N+1,1}(x)) + \cdots + C_{N+1,N}(x^N V_{N+1,N}(x))}$$

$$V_{N+2,1}(x) = a_1 V_{11}(x) + \sum_{l=2}^{l=N} a_l x V_{l,1}(x) + a_{N+1} V_{N+1,1}(x)$$

$$V_{N+2,2}(x) = 1 + \sum_{l=2}^{l=N+1} a_l x V_{l,2}(x)$$

$$V_{N+2,j}(x) = \sum_{l=j}^{l=N+1} a_l V_{l,j}(x) \qquad 3 \leq j \leq N.$$

Démonstration

Dans le théorème les $V_{N+2,j}$ $j=1,\dots,N$ donnés par les relations sont de degré au plus égal à la j^e composante de σ_{N+2}. Donc, il suffit que ces polynômes vérifient les relations d'orthogonalité pour que V_{N+2} soit une forme orthogonale d'ordre σ_{N+2} par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_{N+2,1};\dots;C_{N+2,N}$,

Appliquons $C_{N+2,j}$ à chaque polynôme $V_{N+2,j}$ $j=1,\dots,N$:

Soit $k\geq 0$

$$C_{N+2,1}(x^k V_{N+2,1}(x)) = a_1 C_{N+2,1}(x^k V_{11}(x)) + \sum_{l=2}^{l=N} a_l C_{N+2,1}(x^{k+1} V_{l,1}(x)) + a_{N+1} C_{N+2,1}(x^k V_{N+1,1}(x))$$

$$C_{N+2,2}(x^k V_{N+2,2}(x)) = C_{N+2,2}(x^k) + \sum_{l=2}^{l=N} a_l C_{N+2,2}(x^{k+1} V_{l,2}(x)) + a_{N+1} C_{N+2,2}(x^k V_{N+1,2}(x))$$

$$C_{N+2,j}(x^k V_{N+2,j}(x)) = \sum_{l=j}^{l=N+1} a_l C_{N+2,j}(x^k V_{l,j}(x)) \quad \text{pour } 3\leq j\leq N$$

Comme $C_{N+2,1}(x^{k+1}) = C_{\ell,1}(x^k)$ $\ell = 2,\dots,N$

$$C_{N+2,1}(x^k) = C_{N+1,1}(x^k)$$

$$C_{N+2,2}(x^{k+1}) = C_{\ell,2}(x^k) \quad \ell = 2,\dots,N+1$$

$$C_{N+2,j}(x^k) = C_{\ell,j}(x^k) \qquad 3 \le j \le N \text{ et } j \le \ell \le N+1 ,$$

on a :

$$C_{N+2,1}(x^k V_{N+2,1}(x)) = a_1 C_{N+2,1}(x^k) + \sum_{\ell=2}^{\ell=N} a_\ell C_{\ell,1}(x^k V_{\ell,1}(x)) + a_{N+1} C_{N+1,1}(x^k V_{N+1,1}(x$$

$$C_{N+2,2}(x^k V_{N+2,2}(x)) = C_{N+2,2}(x^k) + \sum_{\ell=2}^{\ell=N+1} a_\ell C_{\ell,2}(x^k V_{\ell,2}(x)).$$

$$C_{N+2,j}(x^k V_{N+2,j}(x)) = \sum_{\ell=j}^{\ell=N+1} a_\ell C_{\ell,j}(x^k V_{\ell,j}(x)) . \quad 3 \le j \le N$$

D'où : $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} C_{N+2,j}(x^k V_{N+2,j}(x)) = a_1 f^1_{k+q} + f^2_{k+q} + a_2 \left[C_{2,1}(x^k V_{21}(x)) + C_{22}(x^k V_{22}(x)) \right] + \dots$

$$\dots + a_{N+1} \left[C_{N+1,1}(x^k V_{N+1,1}(x)) + \dots + C_{N+1,N}(x^k V_{N+1,N}(x)) \right]$$

Les relations d'orthogonalité $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} C_{N+2,j}(x^k V_{N+2,j}(x)) = 0$ $k=0,\dots,N$

donnent un système triangulaire de N+1 équations à N+1 inconnues :

$$a_1 f^1_q + f^2_q = 0$$

$$a_1 f^1_{q+1} + a_2\left[C_{21}(x V_{21}(x)) + C_{22}(x V_{22}(x))\right] + f^2_{q+1} = 0$$

$$a_1 f^1_{q+2} + a_2\left[C_{21}(x^2 V_{21}(x)) + C_{22}(x^2 V_{22}(x))\right] + a_3\left[C_{31}(x^2 V_{31}(x)) + C_{32}(x^2 V_{32}(x)) + C_{33}(x^2 V_{33}(x))\right] + f^2_{q+2} = 0$$

$$a_1 f^1_{q+N} + a_2\left[C_{21}(x^N V_{21}(x)) + C_{22}(x^N V_{22}(x))\right] + \dots + a_{N+1}\left[C_{N+1,1}(x^N V_{N+1,1}(x)) + \dots + C_{N+1,N}(x^N V_{N+1,N}(x))\right] + f^2_{q+N} = 0$$

D'après le lemme 3.1 et le lemme 3.2 ce système a une solution unique :

$$a_1 = -\frac{f^2_q}{f^1_q}$$

$$a_\ell = -\frac{f^2_{q+\ell-1} + a_1 f^1_{q+\ell-1} + a_2\left[C_{21}(x^{\ell-1} V_{21}(x)) + C_{22}(x^{\ell-1} V_{22}(x))\right] + \dots + a_{\ell-1}\left[C_{\ell-1,1}(x^{\ell-1} V_{\ell-1,1}(x)) + \dots + C_{\ell-1,\ell-1}(x^{\ell-1} V_{\ell-1,\ell-1}(x))\right]}{C_{\ell,1}(x^{\ell-1} V_{\ell,1}(x)) + \dots + C_{\ell\ell}(x^{\ell-1} V_{\ell,\ell}(x))}$$

$$(\ell = 2, \dots, N)$$

$$a_{N+1} = -\frac{f^2_{q+N} + a_1 f^1_{q+N} + a_2\left[C_{21}(x^N V_{21}(x)) + C_{22}(x^N V_{22}(x))\right] + \dots + a_N\left[C_{N,1}(x^N V_{N,1}(x)) + \dots + C_{N,N}(x^N V_{NN}(x))\right]}{C_{N+1,1}(x^N V_{N,1}(x)) + \dots + C_{N+1,N}(x^N V_{N+1,N}(x))}$$

C.q

Remarquons que dans ce théorème $V_{N+2,2}(x)$ peut être pris : $V_{N+2,2}(x) = c + \sum_{\ell=2}^{\ell=N+1} a_\ell \, x \, V_{\ell,2}(x)$ où c est une constante non nulle.

Soit maintenant $\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de N entiers $m_i \geq -1$ $i = 1, \dots, N$ avec au moins un m_i différent de -1. On va faire évoluer ce vecteur d'entiers selon diverses façons et établir chaque fois les relations entre les formes orthogonales correspondantes. Ces relations serviront alors à déterminer la suite des formes orthogonales d'ordre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ jusqu'à $\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix}$.

Soient : $i \geq N+1$ $\quad l$ fixé $1 \leq l \leq N$ et $N+2$ vecteurs d'entiers :

$$\theta_{i-N-1} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_l \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} \quad \theta_{i-N} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{l-1} \\ m_l+1 \\ m_{l+1} \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} \cdots \; \theta_{i-l} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{l-1} \\ m_l+1 \\ m_{l+1}+1 \\ \vdots \\ m_N+1 \end{pmatrix} \quad \theta_{i-l+1} = \begin{pmatrix} m_1+1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{l-1} \\ m_l+1 \\ \vdots \\ m_N+1 \end{pmatrix} \cdots \; \theta_{i-1} = \begin{pmatrix} m_1+1 \\ m_2+1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_N+1 \end{pmatrix} \quad \theta_i = \begin{pmatrix} m_1+1 \\ \vdots \\ m_{l-1}+1 \\ m_l+2 \\ m_{l+1}+1 \\ \vdots \\ m_N+1 \end{pmatrix}$$

tels que :

- Pour $1 \leq j \leq N$ $\quad m_j$ est un entier

- Pour $i-N-1 \leq r \leq i$ $\quad \theta_r$ est l'ordre de la forme orthogonale

$$V_r = \begin{pmatrix} V_{r1} \\ \vdots \\ V_{rN} \end{pmatrix}$$ par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_{r1}, \ldots, C_{rN}$

définies par $C_{rj}(x^k) = f^{j}_{k+q-(j^{e}\text{ composante de }\theta_r)+1}$ $\qquad j = 1, \ldots, N$

c'est à dire : $\deg V_{rj} \leq j^{e}$ composante de θ_r et

$$\sum_{j=1}^{N} C_{rj}(x^k V_{rj}(x)) = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, s+N-2$$ où s est la somme des composantes de θ_r.

L'évolution des vecteurs représentant les ordres ci-dessus sera notée (E_1) chaque fois rencontrée.

Lemme 3.4

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

Si $1 \leq j < \ell$

$$C_{ij}(x^k) = C_{i+r-N-1,j}(x^{k-1}) \qquad \text{pour } 0 \leq r \leq N+j-\ell$$

$$C_{ij}(x^k) = C_{i+r-N-1,j}(x^{k}) \qquad \text{pour } N+j-\ell < r \leq N$$

Si $j = \ell$

$$C_{ij}(x^k) = C_{rj}(x^{k-1}) \qquad \text{pour } i-N \leq r \leq i-1$$

$$C_{ij}(x^k) = C_{i-N-1,j}(x^{k-2})$$

Si $\ell < j \leq N$

$$C_{ij}(x^k) = C_{i+r-N-1,j}(x^{k-1}) \qquad \text{pour } 0 \leq r \leq j-\ell$$

$$C_{ij}(x^k) = C_{i+r-N-1,j}(x^{k}) \qquad \text{pour } j-\ell < r \leq N$$

Démonstration :

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{1, \dots, N\}$ on a :

$$C_{ij}(x^k) = f^{j}_{k+q-(m_j+1)+1} = f^{j}_{k+q-m_j} \quad \text{si } j \neq \ell$$

$$C_{ij}(x^k) = f^{j}_{k+q-(m_j+2)+1} = f^{j}_{k+q-m_j-1} \quad \text{si } j = \ell .$$

• Si $1 \leq j < \ell$: Pour $0 \leq r \leq N+j-\ell$, $C_{i+r-N-1,j}(x^{k-1}) = f^{j}_{k-1+q-m_j+1} = f^{j}_{k+q-m_j} = C_{ij}$

Pour $N+j-l<r\leq N$ $\quad C_{i+r-N-1,j}(x^k)=f^j_{k+q-(m_j+1)+1}=f^j_{k+q-m_j}=C_{ij}(x^k)$

• Si $j=l$: $\quad$ Pour $i-N\leq r\leq i-1$ $\quad C_{rj}(x^{k-1})=f^j_{k-1+q-(m_l+1)+1}=f^j_{k+q-m_l-1}=C_{ij}(x^k)$

$$C_{i-N-1,j}(x^{k-2})=f^j_{k-2+q-m_l+1}=f^j_{k+q-m_l-1}=C_{ij}(x^k)$$

• Si $l<j\leq N$, Pour $0\leq r\leq j-l$, $C_{i+r-N-1,j}(x^{k-1})=f^j_{k-1+q-(m_j\ )+1}=f^j_{k+q-m_j}$

donc $C_{i+r-N-1,j}(x^{k-1})=C_{ij}(x^k)$

Pour $j-l<r\leq N$ $\quad C_{i+r-N-1,j}(x^k)=f^j_{k+q-(m_j+1)+1}=f^j_{k+q-m_j}=C_{ij}(x$

c. q. f. d.

Dans le cas d'une évolution des ordres du type (E_1), si le système $\{f_1,\cdots,f_N,1\}$ est parfait, on a le théorème suivant:

Posons $m_1+\cdots+m_N=s$

Théorème 3.4

Il existe un $(N+1)$-uple unique $(a_1, \ldots\ldots, a_{N+1})$ tel que :

$$a_1 = - \frac{\sum_{j=1}^{N} C_{i-N-1,j} \left(x^{-1} V_{i-N-1,j}(x) \right)}{\sum_{j=1}^{N} C_{i-N,j} \left(x^{-1} V_{i-N,j}(x) \right)}$$

$$a_2 = - \frac{\sum_{j=1}^{N} C_{i-1-N,j} \left(x^{s+N-1} V_{i-N-1,j}(x) \right)}{\sum_{j=1}^{N} C_{i-N,j} \left(x^{s+N} V_{i-N,j}(x) \right)}$$

$$a_p = - \frac{\sum_{j=1}^{N} C_{i-N-1,j} \left(x^{s+N+p-3} V_{i-N-1,j}(x) \right) + a_1 \sum_{j=1}^{N} C_{i-N,j} \left(x^{s+N+p-3} V_{i-N,j}(x) \right) + \sum_{r=2}^{p-1} a_r \sum_{j=1}^{N} C_{i-N+r-2,j} \left(x^{s+N-p-2} V_{i-N+r-2,j}(x) \right)}{\sum_{j=1}^{N} C_{i-N+p-2,j} \left(x^{s+N+p-2} V_{i-N+p-2,j}(x) \right)} .$$

$$(p = 3, \ldots, N+1)$$

$$V_{ij}(x) = V_{i-N-1,j}(x) + a_1 V_{i-N,j}(x) + x \sum_{r=2}^{N+j-l} a_r V_{r+i-N-2,j}(x) + \sum_{r=N+j-l+1}^{N+1} a_r V_{r+i-N-2,j}(x) \qquad 1 \leq j < l$$

$$V_{il}(x) = x V_{i-N-1,l}(x) + a_1 V_{i-N,l}(x) + x \sum_{r=2}^{N+1} a_r V_{r+i-N-2,l}(x)$$

$$V_{ij}(x) = V_{i-N-1,j}(x) + a_1 V_{i-N,j}(x) + x \sum_{r=2}^{j-l} a_r V_{r+i-N-2,j}(x) + \sum_{r=j-l+1}^{N+1} a_r V_{r+i-N-2,j}(x) \qquad l < j \leq N$$

Démonstration :

Pour tout V_{ij} $j = 1, \ldots, N$ donné par les relations du théorème le degré est au plus égal à la j^e composante de Θ_i. Il suffit donc de montrer que V_i vérifie les relations d'orthogonalité pour qu'il soit une forme orthogonale d'ordre Θ_i par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_{i1}, \ldots, C_{iN}$.

Soient $j \in \{1, \ldots, N\}$ et $k \geq 0$

<u>Si $1 \leq j < l$</u>

$$C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = C_{ij}(x^k V_{i-N-1,j}(x)) + a_1 C_{ij}(x^k V_{i-N,j}(x)) +$$

$$\sum_{r=2}^{N+j-l} a_r C_{ij}(x^{k+1} V_{r+i-N-2,j}(x)) + \sum_{r=N+j-l+1}^{N+1} a_r C_{ij}(x^k V_{r+i-N-2,j}(x))$$

En remplaçant $C_{ij}(x^k)$ par $C_{i+r-N-1,j}(x^{k-1})$ pour $r = 0, 1$.

$C_{ij}(x^{k+1})$ par $C_{i+r-N-2,j}(x^k)$ pour $r = 2, \ldots, N+j-l$

$C_{ij}(x^k)$ par $C_{i+r-N-2,j}(x^k)$ pour $r = N+j-l+1, \ldots, N+1$

(voir Lemme 3.4),

on obtient :

$$C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = C_{i-N-1,j}(x^{k-1} V_{i-N-1,j}(x)) + a_1 C_{i-N,j}(x^{k-1} V_{i-N,j}(x)) + \sum_{r=2}^{N+1} a_r C_{r+i-N-2,j}(x^k V_{r+i-N-2,j}(x))$$

<u>Si $j=\ell$</u>

$$C_{i\ell}(x^k V_{i\ell}(x)) = C_{i\ell}(x^{k+1} V_{i-N-1,\ell}(x)) + a_1 C_{i\ell}(x^k V_{i-N,\ell}(x)) + \sum_{r=2}^{N+1} a_r C_{i\ell}(x^{k+1} V_{i+r-N-2,\ell}(x))$$

En utilisant le lemme 3.4 on obtient :

$$C_{i\ell}(x^k V_{i\ell}(x)) = C_{i-N-1,\ell}(x^{k-1} V_{i-N-1,\ell}(x)) + a_1 C_{i-N,\ell}(x^{k-1} V_{i-N,\ell}(x)) + \sum_{r=2}^{N} a_r C_{i+r-N-2,\ell}(x^k V_{i+r-N-2,\ell}(x))$$

<u>Si $\ell < j \leq N$</u>

$$C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = C_{ij}(x^k V_{i-N-1,j}(x)) + a_1 C_{ij}(x^k V_{i-N,j}(x)) +$$

$$\sum_{r=2}^{j-\ell} a_r C_{ij}(x^{k+1} V_{i+r-N-2,j}(x)) + \sum_{r=j-\ell+1}^{N} a_r C_{ij}(x^k V_{i+r-N-2,j}(x))$$

Le lemme 3.4 permet d'écrire :

$$C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = C_{i-N-1,j}(x^{k-1} V_{i-N-1,j}(x)) + a_1 C_{i-N,j}(x^{k-1} V_{i-N,j}(x)) + \sum_{r=2}^{N} a_r C_{i+r-N-2,j}(x^k V_{i+r-N-2,j}(x))$$

Sommons maintenant sur tous les j :

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = \sum_{j=1}^{N} C_{i-N-1,j}(x^{k-1} V_{i-N-1,j}(x)) + a_1 \sum_{j=1}^{N} C_{i-N,j}(x^{k-1} V_{i-N,j}(x)) + \sum_{r=2}^{N} a_r \sum_{j=1}^{N} C_{i+r-N-2,j}(x^k V_{i+r-N-2,j}(x)) \ldots$$

Donc $\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = 0$ pour $k = 1, \ldots, s+N-1$

Pour que V_i soit une forme orthogonale d'ordre O_i par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_{i1}, \ldots, C_{iN}$ il faut : $\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, (m_1+1) + \cdots + (m_{l-1}+1) + (m_l+2) + (m_{l+1}+1) + \cdots + (m_N+1) + N-$ c'est-à-dire pour $k = 0, 1, \ldots, s+2N-1$. Il reste donc à réaliser

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = 0 \qquad k = 0, s+N, \ldots, s+2N-1.$$

Ces $N+1$ équations à $N+1$ inconnues $a_1, \ldots, a_{N+1}$ constituent un système triangulaire qui possède bien une solution unique. En effet, on a :

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(V_{ij}(x)) = \sum_{j=1}^{N} C_{i-N-1,j}(x^{-1} V_{i-N-1,j}(x)) + a_1 \sum_{j=1}^{N} C_{i-N,j}(x^{-1} V_{i-N,j}(x)) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^{s+N} V_{ij}(x)) = \sum_{j=1}^{N} C_{i-N-1,j}(x^{s+N-1} V_{i-N-1,j}(x)) + a_1 \sum_{j=1}^{N} C_{i-N,j}(x^{s+N-1} V_{i-N,j}(x)) + a_2 \sum_{j=1}^{N} C_{i-N,j}(x^{s+N} V_{i-N,j}(x)) = 0$$

$$= \sum_{j=1}^{N} C_{i-N-1,j}(x^{s+N-1} V_{i-N-1,j}(x)) + a_2 \sum_{j=1}^{N} C_{i-N,j}(x^{s+N} V_{i-N,j}(x)) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = \sum_{j=1}^{N} C_{i-N-1,j}(x^{k-1} V_{i-N-1,j}(x)) + a_1 \sum_{j=1}^{N} C_{i-N,j}(x^{k-1} V_{i-N,j}(x)) + \sum_{r=2}^{k+2-s-N} a_r \sum_{j=1}^{N} C_{i-N+r-2,j}(x^k V_{i-N+r-2,j}(x)) = 0$$

$$k = s+N+1, \ldots, k = s+2N-1$$

On obtient donc un système triangulaire de N+1 équations à N+1 inconnues. Grâce au lemme 3.2 et au lemme 3.3 on peut affirmer qu'il a une solution unique. On voit d'après les équations que cette solution est celle donnée par le théorème.

c.q.f.d.

Remarque 3.3

Dans les relations donnant les V_{ij} $j=1,\dots,N$ dans ce théorème, les $V_{i-N-1,j}$ peuvent être affectés d'un coefficient $c\neq 0$. En effet, cette affectation ne change rien à la démonstration. Il suffit d'un choix arbitraire de $c\neq 0$ pour pouvoir résoudre le système triangulaire. Dans ce cas les a_i $i=1,\dots,N+1$ se trouvent multipliés par c.

Gardons les mêmes notations pour déterminer les relations entre les formes orthogonales $V_{i-2}=\begin{pmatrix}V_{i-2,1}\\ \vdots\\ V_{i-2,N}\end{pmatrix}$; $V_{i-1}=\begin{pmatrix}V_{i-1,1}\\ \vdots\\ V_{i-1,N}\end{pmatrix}$ et $V_i=\begin{pmatrix}V_{i1}\\ \vdots\\ V_{iN}\end{pmatrix}$

correspondant aux ordres respectifs $O_{i-2} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_\ell \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix}$; $O_{i-1} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_\ell+1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix}$ et $O_i = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_\ell+2 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix}$

Notons (E_2) cette évolution où une seule composante évolue en augmentant chaque fois de 1.

Dans ces conditions, si $\{f_1, \dots, f_N, 1\}$ est parfait on a :

Théorème 3.5

Il existe un couple unique (a_1, a_2) tel que :

$$a_1 = - \frac{\sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}\left(x^{-1} V_{i-2,j}(x)\right)}{\sum_{j=1}^{N} C_{i-1,j}\left(x^{-1} V_{i-1,j}(x)\right)}$$

$$a_2 = - \frac{\sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}\left(x^{s+N-1} V_{i-2,j}(x)\right)}{\sum_{j=1}^{N} C_{i-1,j}\left(x^{s+N} V_{i-1,j}(x)\right)}.$$

$$x V_{ij}(x) = V_{i-2,j}(x) + a_1 V_{i-1,j}(x) + a_2 x V_{i-1,j}(x) \quad \text{pour } j \neq \ell$$

$$V_{i\ell}(x) = x V_{i-2,\ell}(x) + a_1 V_{i-1,\ell}(x) + a_2 x V_{i-1,\ell}(x) .$$

Démonstration :

D'après les relations du théorème chaque V_{ij} $j = 1, \dots, N$

a un degré au plus égal à la j^e composante de θ_i. Déterminons

alors l'unique couple (a_1, a_2) de telle façon que V_i vérifie

les relations d'orthogonalité :

Soit $k \in \mathbb{N}$:

• <u>Si $j \neq l$</u> on a $C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = C_{ij}(x^{k-1} V_{i-2,j}(x)) + a_1 C_{ij}(x^{k-1} V_{i-1,j}(x)) + a_2 C_{ij}(x^k V_{i-1,j}(x))$

la j^e composante de θ_i étant la même que celle de θ_{i-1} et que

celle de θ_{i-2}, on a $C_{ij} = C_{i-1,j} = C_{i-2,j}$.

Donc $C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = C_{i-2,j}(x^{k-1} V_{i-2,j}(x)) + a_1 C_{i-1,j}(x^{k-1} V_{i-1,j}(x)) + a_2 C_{i-1,j}(x^k V_{i-1,j}(x))$

• <u>Si $j = l$</u> on a :

$C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = C_{il}(x^k V_{il}(x)) = C_{il}(x^{k+1} V_{i-2,l}(x)) + a_1 C_{il}(x^k V_{i-1,l}(x)) + a_2 C_{il}(x^{k+1} V_{i-1,l}(x))$

Comme $C_{il}(x^{k+1}) = f^l_{k+1+q-(n_l+2)+1} = f^l_{k+q-n_l} = f^l_{k-1+q-n_l+1} = C_{i-2,l}(x^{k-1})$

$$C_{i\ell}(x^k) = f^{\ell}_{k+q-(n_\ell+2)+1} = f^{\ell}_{k-1+q-(n_\ell+1)+1} = C_{i-1,\ell}(x^{k-1})$$

$$C_{i\ell}(x^{k+1}) = C_{i-1,\ell}(x^k) \quad , \quad \text{on a :}$$

$$C_{i\ell}(x^k V_{i\ell}(x)) = C_{i-2,\ell}(x^{k-1}V_{i-2,\ell}(x)) + a_1 C_{i-1,\ell}(x^{k-1}V_{i-1,\ell}(x)) + a_2 C_{i-1,\ell}(x^k V_{i-1,\ell}(x))$$

Par conséquent :

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = \sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^{k-1}V_{i-2,j}(x)) + a_1 \sum_{j=1}^{N} C_{i-1,j}(x^{k-1}V_{i-1,j}(x)) +$$

$$a_2 \sum_{j=1}^{N} C_{i-1,j}(x^k V_{i-1,j}(x)) \; .$$

D'où $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, s+N-1$

Les seules relations qui manquent pour que V_i soit une forme orthogonale d'ordre θ_i par rapport $C_{i1}, \ldots, C_{iN}$ sont :

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = 0 \quad k = 0 \; , \; k = m_1 + \cdots + m_{\ell-1} + (m_\ell + 2) + m_{\ell+1} + \cdots + m_N + N - \; = s + N \, .$$

En développant ces relations on obtient :

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(V_{ij}(x)) = \sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^{-1}V_{i-2,j}(x)) + a_1 \sum_{j=1}^{N} C_{i-1,j}(x^{-1}V_{i-1,j}(x)) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^{s+N}V_{ij}(x)) = \sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^{s+N-1}V_{i-2,j}(x)) + a_2 \sum_{j=1}^{N} C_{i-1,j}(x^{s+N}V_{i-1,j}(x)) = 0$$

Le le lemme 3.2 et le lemme 3.3 permettent d'écrire :

$$a_1 = \frac{-\sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^{-1}V_{i-2,j}(x))}{\sum_{j=1}^{N} C_{i-1,j}(x^{-1}V_{i-1,j}(x))} \qquad a_2 = \frac{-\sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^{s+N-1}V_{i-2,j}(x))}{\sum_{j=1}^{N} C_{i-1,j}(x^{s+N}V_{i-1,j}(x))}$$

c.q.f.d.

<u>Remarque 3.4</u>

On peut affecter les $V_{i-2,j}$ $j=1,\dots,N$ dans ce théorè[me]

d'un coefficient $c \neq 0$ ... Et dans ce cas il faut que

a_1, a_2 soient multipliés par c

Considérons maintenant l'évolution (E_3) suivante

$$\mathcal{O}_{i-3} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{\ell-1} \\ m_\ell \\ m_{\ell+1} \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} \quad \mathcal{O}_{i-2} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{\ell-1} \\ m_\ell+1 \\ m_{\ell+1} \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} \quad \mathcal{O}_{i-1} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{\ell-1} \\ m_\ell+2 \\ m_{\ell+1} \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} \quad \mathcal{O}_{i} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{\ell-1} \\ m_\ell+2 \\ m_{\ell+1}+1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} \qquad (E_3)$$

(Seules la ℓ^e composante et $(\ell+1)^e$ composante changent)

Soient $V_{i-3} = \begin{pmatrix} V_{i-3,1} \\ \vdots \\ V_{i-3,N} \end{pmatrix}$ $V_{i-2} = \begin{pmatrix} V_{i-2,1} \\ \vdots \\ V_{i-2,N} \end{pmatrix}$ $V_{i-1} = \begin{pmatrix} V_{i-1,1} \\ \vdots \\ V_{i-1,N} \end{pmatrix}$ et $V_i = \begin{pmatrix} V_{i1} \\ \vdots \\ V_{iN} \end{pmatrix}$ les

formes othogonales correspondant respectivement aux ordres $\mathcal{O}_{i-3}, \mathcal{O}_{i-2}, \mathcal{O}_{i-1}$ et $\mathcal{O}_i$.

Si $\{f_1, \dots, f_N, 1\}$ ~~est~~ parfait on a :

Théorème 3.6

Il existe un triplet unique (a_1, a_2, a_3) tel que :

$$a_1 = -\frac{\sum_{j=1}^N C_{i-3,j}(x^{-1}V_{i-3,j}(x))}{\sum_{j=1}^N C_{i-2,j}(x^{-1}V_{i-2,j}(x))}$$

$$a_2 = -\frac{\sum_{j=1}^N C_{i-3,j}(x^{s+N-1}V_{i-3,j}(x))}{\sum_{j=1}^N C_{i-2,j}(x^{s+N}V_{i-2,j}(x))}$$

$$a_3 = -\frac{\sum_{j=1}^N C_{i-3,j}(x^{s+N}V_{i-3,j}(x)) + a_1\sum_{j=1}^N C_{i-2,j}(x^{s+N}V_{i-2,j}(x)) + a_2\sum_{j=1}^N C_{i-2}(x^{s+N+1}V_{i-2,j}(x))}{\sum_{j=1}^N C_{i-1,j}(x^{s+N+1}V_{i-1,j}(x))}$$

$$V_{i\ell}(x) = xV_{i-3,\ell}(x) + a_1V_{i-2,\ell}(x) + xa_2V_{i-2,\ell}(x) + a_3V_{i-1,\ell}(x)$$

$$V_{i,\ell+1}(x) = V_{i-3,\ell+1}(x) + a_1V_{i-2,\ell+1}(x) + xa_2V_{i-2,\ell+1}(x) + a_3V_{i-1,\ell+1}(x)$$

$$xV_{ij}(x) = V_{i-3,j}(x) + a_1V_{i-2,j}(x) + xa_2V_{i-2,j}(x) + a_3xV_{i-1,j}(x)$$

Démonstration:

D'après les relations du théorème pour tout $j=1,\dots,N$ le degré de V_{ij} ne dépasse pas la j^e composante de $\mathcal{O}_i$. Il suffit que V_i vérifie les relations d'orthogonalité pour qu'il soit une forme orthogonale d'ordre $\mathcal{O}_i$ par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_{i1},\dots,C_{iN}$.

Soit $k\in\mathbb{N}$:

$$\cdot\ C_{il}(x^k V_{il}(x)) = C_{il}(x^{k+1}V_{i-3,l}(x)) + a_1 C_{il}(x^k V_{i-2,l}(x)) + a_2 C_{il}(x^{k+1}V_{i-2,l}(x)) + a_3 C_{il}(x^k V_{i-1,l}(x)).$$

on a $C_{il}(x^{k+1}) = f^{l}_{k+1+q-(m_l+2)+1} = f^{l}_{k+q-m_l}$ et $C_{il}(x^k) = f^{l}_{k-1+q-m_l}$

donc $C_{il}(x^{k+1}) = C_{i-3,l}(x^{k-1}) = C_{i-2,l}(x^k)$ et $C_{il}(x^k) = C_{i-2,l}(x^{k-1}) = C_{i-1,l}(x^k)$

Alors : $C_{il}(x^k V_{il}(x)) = C_{i-3,l}(x^{k-1}V_{i-3,l}(x)) + a_1 C_{i-2,l}(x^{k-1}V_{i-2,l}(x)) + a_2 C_{i-2,l}(x^k V_{i-2,l}(x))$

$$a_3 C_{i-1,l}(x^k V_{i-1,l}(x)).$$

• $C_{i,\ell+1}(x^k V_{i,\ell+1}(x)) = C_{i,\ell+1}(x^k V_{i-3,\ell+1}(x)) + a_1\, C_{i,\ell+1}(x^k V_{i-2,\ell+2}(x)) +$

$$a_2\, C_{i,\ell+1}(x^{k+1} V_{i-2,\ell+1}(x)) + a_3\, C_{i,\ell+1}(x^{k+1} V_{i-1,\ell+1}(x))$$

On a $C_{i,\ell+1}(x^k) = C_{i-3,\ell+1}(x^{k-1}) = C_{i-2,\ell+1}(x^{k-1})$

et $C_{i,\ell+1}(x^{k+1}) = C_{i-2,\ell+1}(x^k) = C_{i-1,\ell+1}(x^{k+1})$

Donc $C_{i,\ell+1}(x^k V_{i,\ell+1}(x)) = C_{i-3,\ell+1}(x^{k-1} V_{i-3,\ell+1}(x)) + a_1\, C_{i-2,\ell+1}(x^{k-1} V_{i-2,\ell+1}(x)) + a_2\, C_{i-2,\ell+1}(x^k V_{i-2,\ell+1}(x))$

$$a_3\, C_{i-1,\ell+1}(x^k V_{i-1,\ell+1}(x)) .$$

• Pour $j \neq \ell$ et $j \neq \ell+1$,

$$C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = C_{ij}(x^{k-1} V_{i-3,j}(x)) + a_1\, C_{ij}(x^{k-1} V_{i-2,j}(x)) + a_2\, C_{ij}(x^k V_{i-2,j}(x)) + a_3\, C_{ij}(x^k V_{i-1,j}(x))$$

Comme $C_{ij}(x^{k-1}) = C_{i-3,j}(x^{k-1}) = C_{i-2,j}(x^{k-1})$

et $C_{ij}(x^k) = C_{i-2,j}(x^k) = C_{i-1,j}(x^k)$,

on a : $C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = C_{i-3,j}(x^{k-1} V_{i-3,j}(x)) + a_1\, C_{i-2,j}(x^{k-1} V_{i-2,j}(x)) + a_2\, C_{i-2,j}(x^k V_{i-2,j}(x)) +$

$$a_3\, C_{i-1,j}(x^k V_{i-1,j}(x)) .$$

D'où $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = \sum_{j=1}^{N} C_{i-3,j}(x^{k-1} V_{i-3,j}(x)) + a_1 \sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^{k-1} V_{i-2,j}(x)) +$

$$a_2 \sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^k V_{i-2,j}(x)) + a_3 \sum_{j=1}^{N} C_{i-1,j}(x^k V_{i-1,j}(x)).$$

Donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, s+N-1$

Ecrivons $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^k V_{ij}(x)) = 0$ pour $k = 0, s+N, s+N+1$:

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(V_{ij}(x)) = \sum_{j=1}^{N} C_{i-3,j}(x^{-1} V_{i-3,j}(x)) + a_1 \sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^{-1} V_{i-2,j}(x)) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(V \;\; V_{ij}(x)) = \sum_{j=1}^{N} C_{i-3,j}(x^{s+N-1} V_{i-3,j}(x)) + a_2 \sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^{s+N} V_{i-2,j}(x)) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(x^{s+N+1} V_{ij}(x)) = \sum_{j=1}^{N} C_{i-3,j}(x^{s+N} V_{i-3,j}(x)) + a_1 \sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^{s+N} V_{i-2,j}(x)) +$$

$$a_2 \sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^{s+N+1} V_{i-2,j}(x)) + a_3 \sum_{j=1}^{N} C_{i-1,j}(x^{s+N+1} V_{i-1,j}(x))$$

En utilisant le lemme 3.2 le lemme 3.3 on peut écrire :

$$a_1 = -\frac{\sum_{j=1}^{N} C_{i-3,j}(x^{-1} V_{i-3,j}(x))}{\sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j}(x^{-1} V_{i-2,j}(x))}$$

$$a_2 = - \frac{\sum_{j=1}^{N} C_{i-3,j} \left(x^{s+N-1} V_{i-3,j}(x)\right)}{\sum C_{i-2,j} \left(x^{s+N} V_{i-2,j}(x)\right)}$$

$$a_3 = - \frac{\sum_{j=1}^{N} C_{i-3,j} \left(x^{s+N} V_{i-3,j}(x)\right) + a_1 \sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j} \left(x^{s+N} V_{i-2,j}(x)\right) + a_2 \sum_{j=1}^{N} C_{i-2,j} \left(x^{s+N+1} V_{i-2,j}(x)\right)}{\sum_{j=1}^{N} C_{i-1,j} \left(x^{s+N+1} V_{i-1,j}(x)\right)}.$$

c.q.f.d.

Remarque 3.5

Dans les relations donnant les $V_{ij}(x)$ $j=1,\dots,N$ dans ce théorème on peut affecter les $V_{i-3,j}(x)$ $j=1,\dots,N$ d'un coefficient $c \neq 0$.

Montrons maintenant que ces théorèmes permettent de calculer toute la table des formes orthogonales.

Soit à déterminer la forme orthogonale d'ordre $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix}$ par rapport aux fonctionnelles linéaires $C_1, \dots, C_N$ définies par

$C_i(x^k) = f^i_{k+q-n_i+1}$ $i = 1, \dots, N$. Supposons que $n_1 \leq \dots \leq n_N$:

* Etape 1 :

consiste à calculer toutes les formes orthogonales précédant l'ordre $O_{n_1 N+1} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$ de la manière suivante :

- La forme orthogonale V_1 d'ordre $O_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$ est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

- Les formes orthogonales V_i $i = 2, \dots, N$ correspondant aux ordres

$$\theta_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right\} i \text{ fois} \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad i = 2, \ldots, N$$

sont calculés à partir du théorème 3.1

- V_{N+1} d'ordre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \theta_{N+1}$ est calculé à l'aide du théorème 3.2

- V_{N+2} d'ordre $\theta_{N+2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est donné par le théorème 3.3

- V_i d'ordre θ_i $i = N+3, \ldots, n_1 N+1$ où

$$\theta_{N+3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \theta_{N+4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots \theta_{2N} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \theta_{2N+1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \theta_{n_1 N} = \begin{pmatrix} n_1 - 1 \\ n_1 - 1 \\ \vdots \\ n_1 - 1 \end{pmatrix} \qquad \theta_{n_1 N+1} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_1 - 1 \\ \vdots \\ n_1 - 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque $i \in \{N+3, \ldots, n_1 N+1\}$, si on considère les ordres $\theta_{i-N-1}, \ldots, \theta_i$

on a une évolution du type (E_1) d'où l'application du théorème 3.4 pour calculer successivement $V_{N+3}, \dots, V_{n_1 N+1}$.

Appelons Etape i l'étape qui consiste à calculer successivement les formes orthogonales d'ordre $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{(i-1)} \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{(i-1)} \\ n_i \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$ pour $i=2,\dots,N$

A la fin de l'étape 2 obtient la forme orthogonale d'ordre $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$,

à la fin de l'étape 3 on obtient la forme orthogonale d'ordre $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$

et ainsi de suite jusqu'à l'étape N où à la fin on obtient la forme orthogonale d'ordre $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix}$.

* Etape 2

Consiste à calculer les formes $V_{n_1 N+2}, \dots, V_{n_1(N-1)+n_2+2}$,

correspondant aux ordres respectifs $\mathcal{O}_{n_1 N+2} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_1 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}, \dots, \mathcal{O}_{n_1(N-1)+n_2+2} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$

On calcule V_{n_1N+2} à l'aide du théorème 3.4 car en

considérant $O_{(n_1-1)N+1}, \ldots, O_{n_1N+2}$ on a une évolution de type $(E_1$

- Si $n_2 = n_1$ Fin de l'étape 2
- Si $n_2 = n_1 + k$ $k \geq 1$

Connaissant la forme V_{n_1N+1} d'ordre $O_{n_1N+1} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$ et V_{n_1N+2}

d'ordre $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_1 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$ on considère l'ordre $O_{n_1N+3} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_1+1 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$ pour

avoir une évolution de type (E_2) et calculer V_{n_1N+3} à

l'aide du théorème 3.5 , On continue ainsi jusqu'à

ce qu'on atteigne l'ordre $O_{(n_1-1)N+n_2+2} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_1+k \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$.

Cette étape demande donc une fois l'application du théorème 3.4

et $(m_2 - m_1)$ fois l'application du théorème 3.5

* <u>Etape</u> p $2 < p \leq N$

Supposons avoir calculé toutes les formes orthogonales jusqu'à l'ordre $\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{p-1} \\ m_1 - 1 \\ \vdots \\ m_1 - 1 \end{pmatrix}$, c'est à dire jusqu'à la fin de l'étape $p-1$,

- Si $\underline{m_{p-1} = m_1}$ alors $\forall j \leq p-1$ on a $m_j \quad m_1$

$$(\text{car } m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_N)$$

Il est évident que dans ce cas, on utilise le théorème 3.4 car on a une évolution du type (E_1) pour atteindre l'ordre $\left.\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_1 \\ m_1 - 1 \\ \vdots \\ m_1 - 1 \end{pmatrix}\right\}$

- Si $m_p = m_1$: Fin de l'étape p

- Si $m_p = m_1 + l$, $l \geq 1$, on applique l fois le théorème 3.5 car on a une évolution du type E_2 de ce cas.

• Si $n_{p-1} = n_1 + k \quad k \geq 1$

La $1^{\text{ère}}$ forme orthogonale à déterminer dans ce cas est d'ordre $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{p-2} \\ n_1+k \\ n_1 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$.

Elle est calculée à l'aide du théorème 3.6 en fonction

les formes d'ordres, $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{p-2} \\ n_1+k-2 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{p-2} \\ n_1+k-1 \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{p-2} \\ n_1+k \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$, lesquelles sont

calculées à l'étape p-1. En effet, l'évolution des ordres ici est

de type (E_3).

- Si $n_p = n_1$: Fin de l'étape p

- Si $n_p = n_1 + l \quad l \geq 1$, on applique le

théorème 3.5 l fois pour atteindre $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{p-1} \\ n_1+l \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{p-1} \\ n_p \\ n_1-1 \\ \vdots \\ n_1-1 \end{pmatrix}$

Références

[1] A. BAKER

- Invariance properties in Hermite-Padé approximation theory -

J. Comp. Appl. Math. 11 (1984) 49-55

[2] A. BAKER and D.S. LUBINSKY.

- Convergence theorems for rows of differential and algebriac Hermite-Padé Approximations -

J. Comp. Appl. Math. 18 (1987) 29-52

[3] C. BREZINSKI

- Padé-Type Approximation and Général Orthogonal Polynomials -

ISNM, Vol.50, Birkhaüser Verlag, Bassel, 1980

[4]. S.K. BURLEY, S.O. JOHN And J. NUTTAL

- Vector orthogonal Polynomials -

Siam J. Numer. Anal. Vol. 18 N°5 october 1981 p. 919-924.

[5] J. Della Dora and C. Di Crescenzo

– Approximants de Padé-Hermite, 1ère partie : théorie –

Num. Math. 43 (1984) 23-39

[6] J. Della Dora and C. Di Crescenzo

– Approximants de Padé-Hermite, 2e partie : programmation –

Num. Math. 43 (1984) 41-57

[7] J. Della Dora

– Contribution à l'approximation de fonctions de la variable complexe au sens de Hermite-Padé et de Hardy –

Thèse. Univ. Scientifique et Médicale de Grenoble (1980).

[8] A. DRAUX

– Polynômes orthogonaux formels. Applications –

Lectures Notes in Mathematics 974. Springer Verlag, Heidelberg 198

[9] A. DRAUX

– Approximants de type Padé et de Padé

Publication ANO-96 Février 1983

[10] J. GILEWICZ

Approximants de Padé

Lecture Notes in Mathematics 667 - Berlin 1978

[11] J. H. Loxton and A. J. Van Der Poorten
- Multi-dimensional généralizations of the Padé table -
Rocky Mountain. J. Math. Vol. 9 Number 3, Summer 1979. p. 385-393.

[12] J. Nuttal
- Hermite-Padé Approximants to Functions Meromorphic on a Riemann Surface -
J. Approx. theory 32 (1981) 233-240.

[13] H. Padé
- Sur la généralisation des fractions continues algébriques -
J. Math. pur. appl. Série 4. 10 (1894) 291-329.

[14] S. Paszkowski
- Quelques algorithmes de l'approximation de Padé-Hermite -
Publication ANO-89 - Lille I, 1982 -

[15] S. Paszkowski
- Quelques généralisations de l'approximation de Padé -
Publication ANO. N° 93 Décembre 1982

[16] S. Paszkowski
- Recurrence relations in Padé-Hermite approximation -
J. Comp. Appl. Math. 19 (1987) 99-107.

[17] - R.E. SHAFER
- On quadratic approximation -
Siam J. Numer. Anal. Vol 11. N° 2. April 1974. p. 447-460