

Cache : 434.

50 37

198

34

EXCL  
DO  
FRE

Consultation sur place  
uniquement  
Thèse de Doctorat Ingénieur

de ALI ZERROUKI Meftah.

13 Juillet 1989

Etude expérimentale d'un  
jet turbulent radial confiné  
entre deux disques coaxiaux  
parallèles en rotation.

Exemplaire pour soie

SCD LILLE 1



D 030 330260 6

## TABLE DES MATIERES

|  | Pages |
|--|-------|
| NOTATIONS .....  | IV    |
| INTRODUCTION .....   | 1     |
| CHAPITRE I : EQUATIONS DE BASE ET CONDITIONS AUX LIMITES .....     | 4     |
| I.1.- Présentation du problème .....                               | 4     |
| I.2.- Equation de l'écoulement instantané .....                    | 4     |
| I.3.- Equation de l'écoulement moyen .....                         | 6     |
| I.4.- Conditions aux limites .....                                 | 9     |
| I.5.- Approximation de la couche limite .....                      | 11    |
| CHAPITRE II : DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET TECHNIQUE DE MESURE ..... | 21    |
| II.1.- Installation d'expérimentation .....                        | 21    |
| II.2.- Technique de mesure .....                                   | 22    |
| II.2.1.- Appareils de mesure .....                                 | 22    |
| II.2.2.- Acquisition et traitement des<br>résultats .....          | 24    |
| II.2.3.- Données et essais .....                                   | 24    |
| CHAPITRE III : RESULTATS EXPERIMENTAUX .....                       | 28    |
| III.1.- Vitesses moyennes .....                                    | 29    |
| III.1.1.- Vitesse radiale moyenne .....                            | 29    |
| III.1.2.- Vitesse tangentielle moyenne .....                       | 32    |
| III.1.3.- Similitude des profils de vitesses<br>moyennes .....     | 33    |

|   |    |
|---|----|
| 111.2.- Contraintes de Reynolds .....                             | 35 |
| 111.2.1.- Intensités de turbulence .....                          | 35 |
| 111.2.2.- Contraintes de cisaillement .....                       | 36 |
| 111.2.3.- Validation de l'approximation de<br>couche limite ..... | 37 |
| CONCLUSION .....  | 41 |
| ANNEXE A .....  | 48 |

## NOTATIONS

On représente ici les notations principales, les autres sont définies dans le texte.

| Symbole      | Grandeur   | Dimensions physiques |
|--------------|--|----------------------|
| $u, v, w$    | Composante moyenne de la vitesse radiale, tangentielle et axiale respectivement. | $[LT^{-1}]$          |
| $u', v', w'$ | Composante fluctuante de la vitesse radiale, tangentielle et axiale.             | $[LT^{-1}]$          |
| $u_m$        | Valeur maximale de la vitesse radiale, $u$ .                                     | $[LT^{-1}]$          |
| $U_0$        | Vitesse radiale moyenne à la sortie, $r=R$ .                                     | $[LT^{-1}]$          |
| $p, p', p_a$ | La pression moyenne fluctuante et atmosphérique respectivement.                  | $[MLT^{-1}]$         |
| $T$          | Température.   | $[^{\circ}K]$        |
| $Q$          | Débit volumétrique.  | $[L^3T^{-1}]$        |
| $e$          | Energie interne spécifique.  | $[L^2T^{-2}]$        |
| $\Omega_0$   | Taux de rotation du disque inférieur.  | $[T^{-1}]$           |
| $\Omega_u$   | Taux de rotation du disque supérieur.  | $[T^{-1}]$           |
| $\omega$     | Paramètre de rotation.   | $[T^{-1}]$           |
| $H$          | Ecartement entre les deux disques.   | $[L]$                |
| $R$          | Rayon des deux disques.  | $[L]$                |

|  |   |                   |
|--|---|-------------------|
| $\varepsilon$                          | Rapport de l'écartement entre les deux disques au rayon. $\varepsilon = \frac{H}{R}$        |                   |
| $S$                                    | Nombre de rotation. $S = \frac{\omega R}{U_0}$  |                   |
| $G$                                    | Glissement relatif. $G = \frac{\Omega_H}{\Omega_0}$   |                   |
| $Re_H$                                 | Nombre de Reynolds à base de l'écartement. $Re_H = \frac{\omega H^2}{\nu}$                  |                   |
| $Re_Q$                                 | Nombre de Reynolds à base de débit. $Re_Q = \frac{Q}{2\pi \nu H} = \frac{U_0 \cdot R}{\nu}$ |                   |
| $Re_T$                                 | Nombre de Reynolds à base de rotation. $Re_T = \frac{\omega R^2}{\nu}$                      |                   |
| $\delta$                               | Rapport de l'épaisseur de la couche limite au rayon.  |                   |
| $\mu$                                  | Viscosité dynamique.  | $[ML^{-1}T^{-1}]$ |
| $\nu$                                  | Viscosité cinématique.  | $[L^2T^{-1}]$     |
| $\tau$                                 | Contrainte de cisaillement.   | $[ML^{-1}T^{-2}]$ |
| $\rho$                                 | Masse volumique.  | $[ML^{-3}]$       |
| $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ | Vecteurs unitaires en coordonnées cylindriques.   |                   |
| $\delta^*$                             | Epaisseur de la couche limite.  | $[L]$             |
| $\delta$                               | Rapport de l'épaisseur de couche limite au rayon. $\delta = \frac{\delta^*}{R}$             |                   |

## INTRODUCTION

L'écoulement d'un fluide visqueux entre deux disques parallèles est un phénomène étudié depuis fort longtemps, essentiellement pour deux raisons différentes :

L'une est que cette géométrie simule avec un réalisme suffisant de nombreuses applications que l'on rencontre dans la mécanique des fluides : dans les pompes et compresseurs à entraînement visqueux, les paliers à air, les butées fluides etc...

L'autre raison est que c'est un des problèmes pour lesquels, il est possible d'obtenir la solution des équations de Navier-Stokes.

L'écoulement entre deux disques parallèles en rotation avec débit radial présente une certaine complexité en raison de la combinaison des deux effets que l'on rencontre séparément dans l'écoulement entre deux disques parallèles en rotation sans débit radial [3], [13], [20], [24], [28] et dans l'écoulement radial entre deux disques fixes [32], [33], [34], etc...

Dans l'écoulement entre deux disques parallèles en rotation, on note l'existence d'une composante tangentielle résultant d'un cisaillement créé par le mouvement des disques, bien que les forces centrifuges agissent radialement sur les particules fluides au voisinage des disques. La vitesse radiale moyenne diminue en s'éloignant de l'axe de rotation et par ailleurs le vecteur vitesse est tangentiel sur les surfaces des disques en rotation à cause de l'adhérence.

Le premier à avoir étudié un écoulement laminaire sur, un disque tournant est Von KARMAN (1921). Il a supposé la composante axiale de la vitesse indépendante du rayon du disque, et a transformé les équations de Navier-Stokes en un système d'équations différentielles ordinaires. La première tentative de résolution de ce système a été faite par COCHRAN [30] qui a constaté que le

disque agit comme un ventilateur aspirant de l'air vers la surface et le refoulant radialement vers l'extérieur.

BATCHELOR [21], en se basant sur les transformations par similitude de Von Karman, a élargi le problème à un écoulement entre deux disques parallèles infinis en rotation. Il généralise l'analyse de Von Karman en introduisant deux paramètres dans la résolution de ses équations; le rapport des vitesses de rotation  $G = \frac{\Omega_1 H}{\Omega_2 H}$  caractérisant la rotation et le nombre de Reynolds  $Re_H = \frac{\Omega_1 H^2}{\nu}$  basé sur l'écartement entre les deux disques. Il affirme que pour un grand nombre de Reynolds et pour  $G \geq 0$ , il existe une couche limite sur chacun des deux disques et qu'ailleurs le fluide tourne en bloc.

Ce type de solution a été contesté par STEWARTSON [24] qui prévoit que dans le cas où les deux disques tournent dans le sens inverse, comme dans le cas où l'un des disques est fixe, le fluide est immobile en dehors de la couche limite et cette dernière se forme seulement sur le disque en rotation.

Plus tard, ROGER et LANCE [29] ont montré que seule la solution de Batchelor semble être à retenir. Les travaux de PEARSON [31] vont dans le même sens. NGUYEN, RIBAUT et FLORENT [22], ont affirmé l'existence de plusieurs solutions pour une même configuration donnée : une solution de type Batchelor est trouvée pour des nombres de Reynolds modérés, et pour des grands nombre de Reynolds une solution de type Stewartson est obtenue numériquement.

L'écoulement laminaire entre deux disques a fait l'objet également de plusieurs recherches expérimentales. Citons notamment celles de MOLLER et Co. [12], NGUYEN et Co. [22], E. SZERI, SCHEINDER, F. LABBE [6].

Quand à l'écoulement entre disques en rotation avec débit radial, rares les publications qui sont apparues sur ce sujet. Néanmoins, on peut citer celle de E. BAKKE, J.F. KRIDDER, F. KREITH [1] qui traite seulement un cas d'un nombre de Reynolds à base de débit petit, pour un glissement relatif  $G = 1$ .

Pour notre part la motivation de ce travail consiste à l'élargissement du problème à plusieurs valeurs des nombres de Reynolds formés avec la vitesse de rotation et avec la vitesse de débit, et aux cas où les deux disques tournent dans le même sens et également dans le sens opposé.

Notre plan de travail a été donc le suivant :

- Les équations régissant l'écoulement écrites dans le Chapitre I avec les conditions aux limites ne peuvent pas être résolues analytiquement. A l'aide de l'approximation de la couche limite, on met en évidence les paramètres sans dimensions significatifs du problème et on simplifie la formulation, sans pour autant arriver à rendre les équations accessibles à une intégration analytique.
- La description de l'installation expérimentale et la définition des conditions d'essais font l'objet du deuxième Chapitre.
- Le troisième Chapitre est réservé à l'interprétation des résultats expérimentaux et également à une discussion sur l'ordre des termes négligés dans l'approximation de la couche limite.



## CHAPITRE I

EQUATIONS DE BASE ET CONDITIONS AUX LIMITES1.1.- Présentation du problème

On considère deux disques coaxiaux parallèles de même rayon  $R$  distants de  $H$  l'un de l'autre (figure 1 et 2). Le disque de cote  $z=0$  tourne à une vitesse angulaire  $\Omega$ , le disque de cote  $z=H$  tourne à une vitesse angulaire  $\Omega_H$  différente qui peut être dans le même sens ou au sens inverse. Sur l'axe  $Oz$  à  $z=H$  sort un débit de fluide pour s'écouler radialement entre les deux disques. On utilise dans notre étude le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  comme système de référence, il sera fixe par rapport au fluide et son origine coïncidera avec le centre du disque de cote  $z=0$ .

1.2.- Equations de l'écoulement instantané

La solution de ce type d'écoulement de fluide newtonien à propriétés physiques constantes résultant d'une telle configuration s'obtient par la résolution des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et des conditions aux limites qui seront définis plus loin.

$$(1) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \phi = 0$$

$$(2) \quad \rho \left( \frac{DU}{Dt} - \frac{v^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \Delta U - \frac{U}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \phi}{\partial r} + F_r.$$

$$(3) \quad \mathcal{L}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{UV}{r}\right) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left( \Delta V - \frac{V}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} + F_{\theta}$$

$$(4) \quad \mathcal{L}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \Delta W + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \phi}{\partial z} + F_z$$

$$(5) \quad \mathcal{L}\frac{De}{Dt} = -k \Delta T - P\phi + \Phi$$

$$(6) \quad P = \mathcal{L}RT,$$

avec

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + W \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\mu \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{r \partial \theta} + \frac{\partial V}{r \partial r} \right)^2 \right] \\ & - \frac{2}{3} \mu \phi. \end{aligned}$$

On introduit les hypothèses spécifiques à notre problème à savoir :

Ecoulement stationnaire

Fluide incompressible

Température constante

Forces extérieures négligeables.

Le phénomène étudié étant purement dynamique, on se limite à la résolution du système d'équations suivant :

$$(7) \quad U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta U - \frac{U}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$$

$$(8) \quad U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta V - \frac{V}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)$$

$$(9) \quad U \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta W$$

$$(10) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

### 1.3.- Equations de l'écoulement moyen

La méthode classique pour décrire un écoulement turbulent est celle de Reynolds, qui consiste à décomposer toute grandeur instantanée  $f$  en une grandeur moyenne  $\bar{f}$  et une autre grandeur fluctuante  $f'$  :

On appelle valeur moyenne  $\bar{f}$  entre les instants  $t_0$  et  $t_0 + \tau$  la quantité :

$$\bar{f} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} f dt.$$

Si  $\tau$  est assez grand, la valeur moyenne  $\bar{f}$  ne dépend pas de  $t_0$ , l'écoulement est dit permanent en moyenne.

Par définition la moyenne de la grandeur fluctuante est nulle :

$$\overline{f'} = 0.$$

En appliquant ce procédé les composantes de la vitesse et la pression d'un point de l'écoulement situé entre les deux disques seraient :

$$U = \bar{u} + u'$$

$$V = \bar{v} + v'$$

$$W = \bar{w} + w'$$

$$P = \bar{p} + p'$$

Remplaçons les quantités dans les équations (7), (8), (9), (10), et en prenant la moyenne de ces équations, on obtient les équations dites de l'écoulement moyen.

$$(11) \quad \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \theta} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \frac{\overline{v}^2}{r} = -\frac{1}{s} \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2} \right. \\ \left. - \frac{\overline{u}}{r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \overline{v}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u}^{\prime 2}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{u} \overline{v}^{\prime}) \\ - \frac{\partial (\overline{u} \overline{w}^{\prime})}{\partial z} + \frac{\overline{v}^{\prime 2}}{r}$$

$$(12) \quad \overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial r} + \frac{\overline{v}}{r} \frac{\partial \overline{v}}{\partial \theta} + \overline{w} \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \frac{\overline{u} \overline{v}}{r} = -\frac{1}{s} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial r^2} + \frac{\partial \overline{v}}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial z^2} \right. \\ \left. - \frac{\overline{v}}{r} - 2 \frac{\partial \overline{u}}{r^2 \partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{u} \overline{v}^{\prime}) - \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{v}^{\prime 2}}{\partial \theta} \\ - \frac{\partial \overline{v} \overline{w}^{\prime}}{\partial z} - 2 \frac{\overline{u} \overline{v}^{\prime}}{r}$$

$$(13) \quad \overline{u} \frac{\partial \overline{w}}{\partial r} + \frac{\overline{v}}{r} \frac{\partial \overline{w}}{\partial \theta} + \overline{w} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = -\frac{1}{s} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial z^2} \right) \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u} \overline{w}^{\prime}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{u} \overline{w}^{\prime}) - \frac{\partial \overline{w}^{\prime 2}}{\partial z}$$

$$(14) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (\overline{u} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0$$

Notre problème peut être ramené à un problème plus simple du fait de la symétrie radiale; en effet les composantes de la vitesse et la pression ne dépendent pas de la coordonnée angulaire :  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ .

Les équations (11), (12), (13), (14) redeviennent après élimination des barres sur les valeurs moyennes pour éviter l'encombrement de l'écriture :

$$(15) \quad u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{S} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) - \frac{\overline{v'^2}}{r} \right]$$

$$(16) \quad u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\overline{uv'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'}) + 2 \frac{\overline{u'v'}}{r} \right]$$

$$(17) \quad u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{S} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u'w'}) + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right]$$

$$(18) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_z)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

#### 1.4.- Conditions aux limites

Les conditions aux limites auxquelles doivent satisfaire les vitesses moyennes et les composantes fluctuantes se déduisent de la condition d'adhérence du fluide sur les parois du domaine (figure 2).

Disque supérieur :  $z = H$ ,  $R_0 \leq r \leq R$  :

$$u = w = \overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{u'v'} = \overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0 ; v = \pm \Omega r$$

Disque inférieur :  $z = 0$ ,  $R_0 \leq r \leq R$

$$u = w = \overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{u'v'} = \overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0 ; v = \Omega r$$

$$\begin{aligned} \text{Frontière des disques : } r &= R \\ \phi &= \phi_a. \end{aligned}$$

$R_0$  est la valeur de  $r$  à partir de laquelle les équations (15 à 18) sont valables.

Les équations du mouvement turbulent moyen (15 à 18) forment un système d'équations ouvert très compliqué à résoudre car aux quatre inconnues  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\phi$  viennent s'ajouter les six composantes turbulentes, appelées contraintes de Reynolds et formant un tenseur symétrique défini par :

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{su^2} & \overline{su'v'} & \overline{su'w'} \\ \overline{su'v'} & \overline{sv'^2} & \overline{sv'w'} \\ \overline{su'w'} & \overline{sv'w'} & \overline{sw'^2} \end{pmatrix}$$

L'apparition de ces contraintes est liée au caractère non linéaire des équations de Navier-Stokes. La résolution analytique d'un tel système oblige à le fermer : il faut fournir un nombre d'hypothèses qui permettent d'exprimer certaines inconnues en fonctions d'autres, ou rajouter d'autres équations au système.

### 1.5.- Approximation de la couche limite

On rappelle que le problème examiné représente des écoulements avec de grandes valeurs du nombre de Reynolds. On pourrait à première vue négliger les forces de viscosité par rapport aux forces d'inertie : cependant les écoulements résultants ne peuvent pas satisfaire aux conditions d'adhérence du fluide sur les disques. La nature de tels écoulements dépend des deux paramètres d'approximation;  $\varepsilon = \frac{H}{R}$  et le nombre de Reynolds caractéristique

$$Re^* = \frac{\Omega R^2}{\nu}$$

où  $\Omega$  est l'ordre de grandeur des taux de rotation.

$Re^*$  étant très grand; deux cas se présentent suivant que  $\varepsilon \sim 1$ , où  $\varepsilon \ll 1$ . Si  $\varepsilon \sim 1$  : c'est le cas général d'un écoulement à grand Reynolds dans un domaine étendu, avoisinant un obstacle. Il se forme alors, sur une partie de l'obstacle tout au moins, une couche limite : c'est une zone de très faible épaisseur située dans le cas présent sur les parois des deux disques. Dans cette zone l'influence de la viscosité est aussi importante que l'influence de toutes les autres forces.

Une autre zone plus grande, comprenant le reste du domaine où l'influence de la viscosité est négligeable. Ici cette zone est située entre les deux couches limites.

Si  $\varepsilon \ll 1$  : différents cas se présentent qui ont été étudiés en laminaire en [3] et qu'on examinera un par un par la suite. On se propose de rechercher les simplifications que peuvent apporter les caractères propres à telle configuration. En suivant la méthode due à Prandtl, on va étudier l'ordre de grandeur des différents termes des équations du mouvement en vue d'obtenir les équations de première approximation, plus simples.

Pour voir nettement les simplifications possibles de ces équations, il est commode de les écrire à l'aide des grandeurs normalisées. La méthode consiste à introduire pour chaque grandeur physique une grandeur de référence de même nature et tel que leur rapport soit de l'ordre de l'unité.



Dans les équations sous la forme réduite apparaissent des quantités appelées paramètres d'approximations; c'est en fonction de ces paramètres quand ils prennent des valeurs limites qu'on peut discuter les simplifications des équations du mouvement.

En raison du cisaillement de l'écoulement, les dimensions dans le sens radial et orthoradial sont plus grandes que dans le sens axial. On prend donc comme longueurs de référence le rayon  $R$  et la longueur  $\varepsilon R$  respectivement suivant les directions radiale et axiale.

Les vitesses de référence sont les vitesses  $U_0$ ,  $\omega R$ ,  $W$  respectivement suivant les directions  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_z$ .

La pression sera normalisée par  $E \rho U_0^2$ ,  $E$  étant un paramètre inconnu à priori.

On pose donc :

$$\hat{r} = \frac{r}{R}; \quad \hat{z} = \frac{z}{\varepsilon R}; \quad \hat{u} = \frac{u}{U_0}; \quad \hat{v} = \frac{v}{\omega R}; \quad \hat{w} = \frac{w}{W}; \quad \hat{\phi} = \frac{\phi}{E \rho U_0^2}.$$

En ce qui concerne les contraintes de Reynolds, les mesures expérimentales dans de tels écoulements [1], [4] ont montré qu'elles sont du même ordre de grandeur et qu'elles peuvent toutes être réduites à la même valeur de référence  $\gamma U_0^2$ , où  $\gamma$  est également un paramètre très petit à déterminer.

On pose :

$$\hat{u}_i \hat{u}_j = \frac{\overline{u_i u_j}}{\gamma U_0^2}$$

En définitive si on note  $Re_Q = \frac{Q}{2\pi \gamma H} = \frac{U_0 \cdot R}{\nu}$ ,  $Re_T = \frac{\omega R^2}{\nu}$ , l'équation de continuité (18) n'est pas dégénérée si  $W = \varepsilon U_0$  et le choix des nouvelles variables normalisées fournit le système d'équations réduites suivantes :

$$(19) \quad \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} - \left( \frac{Re_T}{Re_Q} \right)^2 \frac{\hat{v}^2}{\hat{r}} = E \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{Re_Q} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left( \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial (\hat{u} \hat{r})}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{1}{Re_Q \cdot E^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \\ - \nu \left[ \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (r u^2) - \frac{\hat{v}^2}{\hat{r}} \right] - \frac{\nu}{E} \frac{\partial \hat{u} \hat{w}}{\partial \hat{y}}$$

$$(20) \quad \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{u} \hat{v}}{\hat{r}} = \frac{1}{Re_Q} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left( \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial (\hat{r} \hat{v})}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{1}{Re_Q \cdot E^2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} \\ - \nu \frac{Re_Q}{Re_T} \left[ \frac{\partial \hat{u} \hat{v}}{\partial \hat{r}} + 2 \frac{\hat{u} \hat{v}}{\hat{r}} \right] - \frac{\nu}{E} \frac{\partial \hat{u} \hat{w}}{\partial \hat{y}}$$

$$(21) \quad \hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} = - \frac{E}{E^2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{Re_Q} \left( \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{1}{Re_Q \cdot E^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2} \\ - \frac{\nu}{E} \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial (r u \hat{w})}{\partial \hat{r}} - \frac{\nu}{E^2} \frac{\partial \hat{w}^2}{\partial \hat{y}}$$

$$(22) \quad \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial (\hat{r} \hat{u})}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} = 0$$

Avec  $Re_Q$  nombre de Reynolds dû au débit radial.

$Re_T$  nombre de Reynolds dû à la rotation.

Le rapport de ces deux nombres  $Re_T/Re_Q$  est simplement le rapport des deux vitesses, de rotation et radiale que l'on appelle le nombre de rotation désigné par :  $S = \frac{\omega R}{U_0}$ .

On peut discuter l'ordre de grandeur des termes des équations de Navier-Stokes (19 à 22) suivant les paramètres d'approximations introduits ci-dessus, mais déjà on peut noter qu'on ne peut pas avoir  $S \ll 1$  car cela

signifierait que  $v \ll u$  ; ce qui implique que les effets de rotation seront négligés. De même que le cas  $S \gg 1$  est à rejeter puisqu'il conduit à un écoulement provoqué par la rotation des disques sans alimentation radiale. Il faut donc considérer le cas général  $S \sim 1$ .

En supposant  $\epsilon \ll 1$ , avec les conditions  $Re_0 \epsilon^2 \gg 1$  et  $\gamma \ll 1$ , le système d'équations (19 à 22) devient après avoir négligé les termes petits à l'égard des termes retenus :

$$(23) \quad \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} - \frac{\hat{v}^2}{\hat{r}} = -E \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{Re_0 \epsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} - \frac{\gamma}{\epsilon} \cdot \frac{\partial(\hat{u}\hat{w}')}{\partial \hat{y}}$$

$$(24) \quad \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \frac{\hat{u}\hat{v}}{\hat{r}} = \frac{1}{Re_0 \epsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} - \frac{\gamma}{\epsilon} \cdot \frac{\partial(\hat{v}\hat{w}')}{\partial \hat{y}}$$

$$(25) \quad \hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} = -\frac{E}{\epsilon^2} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{Re_0 \epsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2} - \frac{\gamma}{\epsilon} \cdot \frac{1}{\hat{r}} \cdot \frac{\partial(\hat{r}\hat{w}')}{\partial \hat{r}}$$

$$(26) \quad \frac{\partial(\hat{r}\hat{u})}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial(\hat{r}\hat{w}')}{\partial \hat{y}} = 0.$$

Ainsi dans un écoulement entre deux disques parallèles en rotation les seuls termes du tenseur de Reynolds non négligeables sont  $\hat{u}\hat{w}'$ ,  $\hat{v}\hat{w}'$  et  $\overline{w'^2}$ .

On doit élucider comment se comporte le produit  $(Re_0 \epsilon^2)^{-1}$ , le rapport  $\frac{\gamma}{\epsilon}$  et  $E$  de manière à obtenir des formes limites significatives du problème. Plusieurs cas vont se présenter, mais nous écartons dès à présent celui correspondant à  $Re_0 \epsilon^2 \ll 1$ .

Dans ce cas les forces de viscosité sont prépondérantes devant les forces d'inertie : il est évident qu'il faut  $E = (Re_0 \cdot \varepsilon^2)^{-1}$  pour obtenir une solution compatible avec cette hypothèse et avoir un équilibre entre les forces de pression et les forces de viscosité. Ce cas ne nous intéresse pas puisqu'il correspond à un écoulement de fluide fortement visqueux.

Il reste à considérer les cas :  $Re_0 \cdot \varepsilon^2 \sim 1$  et  $Re_0 \cdot \varepsilon^2 \gg 1$

Dans ces deux cas l'équation (25) se simplifie pour s'écrire :  $E \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} = 0$

En effet pour l'écoulement avec noyau central la pression est transmise axialement à la couche limite et ses variations sont du même ordre que celles de la pression cinétique. En ce qui concerne le cas de l'écoulement entièrement visqueux entre les disques la pression varie très peu axialement car l'écartement entre les deux disques est petit [3]. D'où la nécessité de prendre  $E=1$  pour répondre à ces conditions.

Les équations (23 à 26) se simplifient pour s'écrire donc :

$$(27) \quad \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} - \frac{\hat{r}^2}{\hat{r}} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{Re_0 \cdot \varepsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} - \frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial \hat{y}}$$

$$(28) \quad \hat{u} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \hat{y}} + \frac{\hat{u} \hat{v}}{\hat{r}} = \frac{1}{Re_0 \cdot \varepsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{r}}{\partial \hat{y}^2} - \frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial (\overline{v'w'})}{\partial \hat{y}}$$

$$(29) \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \hat{y}} = 0$$

$$(30) \quad \frac{\partial (\hat{r} \hat{u})}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial (\hat{r} \hat{w})}{\partial \hat{y}} = 0.$$

Ici, les seuls termes du tenseur de Reynolds non négligeables sont  $\overline{u'w'}$  et  $\overline{v'w'}$ .

1er cas : Turbulence négligeable,  $\frac{\nu}{\epsilon} \ll 1$  .

Pour un écoulement entre parois, on a nécessairement  $Re_a \cdot \epsilon^2 \sim 1$  .  
Ceci caractérise un écoulement laminaire, ce cas n'est pas considéré dans le cadre de l'étude effectuée ici.

Si on suppose que la turbulence est toujours présente, il reste deux possibilités.

2ème cas :  $Re_a \cdot \epsilon^2 \sim \frac{\nu}{\epsilon} \sim 1 \Rightarrow \nu \sim (Re_a)^{-\frac{1}{2}}$  .

Dans ce cas les frottements laminaires et turbulent sont du même ordre de grandeur dans toute l'épaisseur d'ordre  $(R/\sqrt{Re_a})$  . Ce cas n'est pas celui des expériences [1], [4], [11] car ces derniers indiquent que le frottement laminaire ne doit pas être retenu qu'au voisinage immédiat des parois des deux disques.

3ème cas :  $Re_a \cdot \epsilon^2 \gg 1$  et  $\nu \sim 1$  .

Bien que l'écoulement soit turbulent, le terme visqueux contenant  $Re_a \cdot \epsilon^2$  au dénominateur ne doit pas être négligé, car sans lui on ne peut pas satisfaire aux conditions d'adhérence : ce terme est à prendre en compte dans la partie avoisinant la paroi.

On se trouve donc en présence d'un problème de perturbation singulière et il faut chercher une autre approximation au voisinage des parois, dans des épaisseurs de dimension axiale inconnue, soit  $\delta H$  , avec  $\delta \ll 1$  .

Il faut noter que  $\delta$  peut être  $\sim \epsilon$  ou  $\delta \ll \epsilon$  .

a -  $\delta \sim \epsilon$  : l'épaisseur de la couche limite est de l'ordre de l'écartement entre les deux disques  $H$  , les caractéristiques spécifiques de la couche limite sont valables dans tout l'espace entre les deux disques.

Les grandeurs sans dimensions s'écrivent :

$$\hat{r} = \frac{r}{R} ; \quad \hat{z} = \frac{z}{\varepsilon R} ; \quad \hat{u} = \frac{u}{WR} ; \quad \hat{v} = \frac{v}{WR} ; \quad \hat{w} = \frac{w}{\varepsilon(WR)} ; \quad \hat{p} = \frac{p}{S(WR)^2} \text{ et}$$

$$\frac{\hat{u}_i \hat{u}_j}{\hat{\rho}} = \frac{\overline{u_i u_j}}{\varepsilon(WR)^2}.$$

et les équations gouvernant un tel écoulement s'écrivent en variables physiques :

$$(31) \quad u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{S} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{rz} - \overline{u'w'})$$

$$(32) \quad u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{rz} - \overline{v'w'})$$

$$(33) \quad \frac{\partial}{\partial z} (p/S) = 0$$

$$(34) \quad \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial}{\partial z} (rw) = 0$$

où  $\tau_{rz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$  et  $\tau_{rz} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$  représentent les tensions visqueuses.

b -  $\delta \ll \varepsilon$ : Dans ce cas on est en présence de deux régions I et II (figure 2); l'une se trouvant dans un voisinage des surfaces des deux disques, où s'imposent les caractéristiques typiques de l'écoulement de parois. L'autre est un noyau central où dominent des caractères propres à l'écoulement libre.

Pour la couche limite sur le disque  $z=0$ , on doit donc substituer à  $\hat{z}$  la nouvelle variable normalisée  $\xi = \frac{\hat{z}}{\delta}$  et il faut changer également la normalisation relative à  $W$  de façon que (18) n'ait pas de solution triviale. Dans ce but on pose  $\gamma = \frac{\hat{W}}{\xi}$ .

Après avoir reporté dans (27), (28), (29), (30) on constate qu'il faut prendre :

$$\frac{\gamma}{\varepsilon \delta} \sim \left( (\varepsilon \delta)^2 \cdot Re \alpha \right)^{-1} \sim 1,$$

afin que les forces de viscosité ne s'éliminent pas. Cela montre que l'épaisseur de la couche limite est d'ordre  $R \cdot Re \alpha^{-1/2}$ . On obtient ainsi des équations analogues à (31), (32), (33), (34).

En ce qui concerne la couche limite sur le disque supérieur, on remplace  $\xi$  par  $1-\xi$  et  $\gamma$  par  $1-\gamma$  ce qui laisse invariante les équations générales.

Dans le noyau central l'écoulement est régi par les équations simplifiées suivantes :

$$(35) \quad u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{S} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'})$$

$$(36) \quad u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'})$$

$$(37) \quad \frac{\partial}{\partial z} (\phi/S) = 0$$

$$(38) \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 w) = 0$$

Les conditions aux frontières sont d'une part les conditions d'adhérence à la paroi et d'autre part, les conditions de raccord entre les deux domaines.

L'étude faite dans ce paragraphe, montre qu'au voisinage des parois, dans la couche limite, seuls les termes  $\overline{u'w'}$ ,  $\overline{v'w'}$  liés au tenseur de Reynolds restent. Malgré les simplifications dues à l'approximation de la couche limite, les équations régissant le mouvement restent toujours ouvertes. Pour les résoudre il faut introduire une modélisation de la turbulence, par exemple le concept de la viscosité turbulente et de la longueur de mélange, qui sont les modèles les plus largement utilisés dans les écoulements cisailés.

BOUSSINESQ fut le premier à proposer un modèle semi-empirique pour les contraintes de Reynolds en introduisant le concept de la viscosité turbulente. Il suppose que les contraintes de Reynolds agissent comme des contraintes visqueuses, c'est-à-dire sont proportionnelles au gradient de la vitesse moyenne. Le coefficient de proportionnalité, appelé la viscosité turbulente, n'est pas une propriété intrinsèque du fluide, mais dépend de l'écoulement.

Le tenseur de Reynolds est défini par :

$$(39) \quad \overline{R_{ij}} = -\overline{\rho u_i u_j} = \rho \gamma_t^* \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Une procédure plus précise peut être retenue pour les contraintes de Reynolds :

$$(40) \quad R_{ij} = \frac{1}{3} q^2 \delta_{ij} - \gamma_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

où  $q^2$  représente l'énergie cinétique de turbulence,



et

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La théorie de Prandtl de la longueur du mélange consiste à écrire :

$$(41) \quad \nu_t = l^2 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

où  $l$  est l'échelle de longueur de la turbulence.

En principe l'équation (41) pourrait compléter et fermer les équations de Navier-Stokes pour un écoulement turbulent, cependant il est nécessaire de faire encore des hypothèses sur la viscosité turbulente suivant qu'on se trouve dans la couche limite, ou à la région extérieure à la couche limite dans les problèmes sur parois. Par exemple dans des écoulements turbulents pariétaux, n'est pas constante dans la couche limite, mais varie d'une manière approximative linéairement avec la distance à la paroi  $z$  [26].

## CHAPITRE II

DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET TECHNIQUES DE MESURE

Le dispositif expérimental est composé essentiellement de deux parties : une installation d'expérimentation.

Des appareils de mesure et de calcul.

D'autres appareils assurant la disponibilité, le filtrage et le maintien à une température constante de l'air sont nécessaires au bon fonctionnement des expériences.

Avant de pénétrer entre les deux disques, l'air provenant de l'atmosphère est mis en surpression par un compresseur. Il passe ensuite à travers un filtre pour être débarrassé de ses impuretés, et il est acheminé par des conduites au banc d'essais. Le réglage du débit d'alimentation se fait par une micro-vanne; le débit est mesuré à l'aide d'un rotamètre.

Une climatisation permet de garder l'air du local à une température constante, égale à 20° C.

II.1.- Installation expérimentale

Elle est constituée de deux disques en aluminium lisses coaxiaux de diamètre commun 30 cm, rigoureusement parallèles, car un défaut de parallélisme pourrait entraîner une modification non négligeable des caractéristiques de l'écoulement. Trois prises de pression sont disposées sur le disque supérieur à une distance de 2 cm de la sortie et font un angle de 120° entre elles. Le parallélisme des deux disques est contrôlé grâce à la différence de pression entre deux prises. Cette différence a été trouvée de l'ordre de 1 à 3 % .

Les deux disques sont espacés de  $H = 14.5$  mm. L'introduction de la sonde se fait horizontalement et par conséquent cette géométrie ne permet de prendre un écartement plus petit que celui de  $H = 14.5$  mm. Le disque inférieur peut coulisser verticalement à l'aide d'un système mécanique. Trois micromètres fixés au disque supérieur sont utilisés pour mesurer l'écartement entre les deux disques.

L'alimentation en air se fait au travers d'un orifice situé sur le disque supérieur.

Les deux disques peuvent tourner dans le même sens ainsi que dans le sens opposé. Ils sont solidaire chacun d'un palier et peuvent être entraînés à l'aide de deux moteurs de puissance 2 Kw, équipés chacun d'un variateur de vitesse et d'un système de poulies. La vitesse de rotation de chaque disque peut atteindre 5000 tr/min. Deux capteurs électro-magnétique à affichage numérique utilisant des compteurs de signaux, de précision  $\pm 3$  tr/min., sont utilisés pour mesurer les vitesses de rotation des deux disques.

L'ensemble de l'installation est fixée solidement sur une structure rigide et lourde afin d'éviter les vibrations.

## II.2. - Technique de Mesure

### II.2.1.- Appareils de mesure

Avant de procéder aux mesures propres les sondes à fil chaud utilisées pour l'expérience ont été étalonnées dans un noyau potentiel d'un jet circulaire obtenu à l'aide d'une soufflerie indépendante (Annexe A).

Nous avons utilisé lors de nos expériences pour les mesures des vitesses moyennes et les contraintes de Reynolds des sondes à fil chaud simple

incliné à  $\pm 45^\circ$ , de 1.2 mm de longueur et de 5  $\mu\text{m}$  de diamètre fabriqué à partir de "Platinum Plated Tungsten". La sonde est reliée à l'aide d'un câble électrique de 5 m de longueur à un anémomètre DANTEC à température constante (56 C01 CTA) dont le signal de sortie passe à travers un linéarisateur (56 N 21), avant d'être envoyé à un multiprogrammeur de type (HP 5940 B) qui a pour fonction de transmettre au disque dur les mesures choisies pour être stockées.

Les déplacements radial, vertical, et en rotation de la sonde sont assurés par un système de déplacement du type DANTEC 56 H 00. Ces mouvements sont accomplis pas à pas par trois mini-moteurs, de type 57 H 10 pour le déplacement radial et 56 H 01 pour le déplacement vertical et en rotation. Le pas de ces mouvements est de 0.04 mm pour la translation et de  $0.3^\circ$  pour la rotation. La vitesse de ces déplacements peut atteindre jusqu'à 30 mm/sec.

Le système de déplacement est commandé automatiquement par l'unité 57 G 185 "Traversing Central Board", soit par un système à multi-canaux où on peut afficher et exécuter séparément ou en même temps tous les déplacements de la sonde, soit par ordinaire au même titre que les autres éléments constituant la chaîne de mesure. Le système comprend également une boîte à commande manuelle qui sert généralement à faire tangenter la sonde. On estime avoir une bonne tangence avec les parois des disques quand l'image réelle et l'image fictive des deux broches de la sonde se superposent. Les mesures sont faites à partir de 0.1 mm de la surface des disques pour éviter la détérioration du fil quand les disques tournent.

### II.2.2.- Acquisition et traitement des résultats

Le schéma de la figure (3) distingue les fonctions à réaliser par la programmation : acquisition, stockage, traitement et sortie des résultats.

Pour qu'il n'y ait pas de perte d'information, acquisition et stockage doivent être simultanés; un seul programme regroupe ces deux opérations. Le temps nécessaire au traitement étant trop important l'exécution de celui-ci est différée.

L'ensemble des programmes est écrit en Basic II. Le programme de traitement des résultats calcule les vitesses moyennes et les contraintes de Reynolds selon les formules données en Annexe A.

### II.2.3.- Données et essais

Les essais ont consisté à mesurer les vitesses moyennes et les contraintes de Reynolds à plusieurs positions radiales à partir d'un rayon  $R_0 = 50$  mm jusqu'au bord du disque. Pour chaque position radiale un balayage de la sonde dans la direction verticale ( $Oz$ ) est accompli. Le pas du déplacement de la sonde dans cette direction est de 0.1 mm près des parois où le gradient de la vitesse est très élevé, et il est de 0,3 mm entre les deux couches limites. Trois débits correspondant à 120 m<sup>3</sup>/h, 160 m<sup>3</sup>/h et 200 m<sup>3</sup>/h sont jugés suffisant pour chaque valeur du glissement relatif

$$G = \frac{\Omega_H}{\Omega_0} .$$

Six valeurs de  $G$  ont été testées grâce à la combinaison des différentes vitesses de rotation des deux disques : trois positifs correspondant au même sens de rotation des deux disques (tableau 1) et trois négatifs correspondant au sens inverse (tableau 2). Les vitesses de rotation

sont  $\pm 1500$ ,  $\pm 2000$ ,  $\pm 3000$  en tr/min. pour le disque supérieur et de 1500 tr/min. pour le disque inférieur.

Notons enfin qu'on a considéré une seule valeur du rapport  $\epsilon = \frac{H}{R}$  égale à 0.097 et que les conditions  $Re^* \cdot \epsilon^2 \gg 1$  sont bien vérifiées (tableau 3).

|   |             | $Re_Q \cdot 10^{-4}$ |       |      |
|---|-------------|----------------------|-------|------|
|   |             | 2.49                 | 3.32  | 4.15 |
| G | $U_0$ (m/s) | 2.44                 | 3.25  | 4.06 |
|   | 1           | 9.65                 | 7.25  | 5.80 |
|   | 1.33        | 12.0                 | 9.0   | 7.23 |
|   | 2           | 16.72                | 12.56 | 10   |
|   |             |                      |       | S    |

Tableau 1

|   |             | $Re_Q \cdot 10^{-4}$ |       |      |
|---|-------------|----------------------|-------|------|
|   |             | 2.49                 | 3.32  | 4.15 |
| G | $U_0$ (m/s) | 2.44                 | 3.25  | 4.06 |
|   | - 1         | 9.65                 | 7.25  | 5.80 |
|   | - 1.33      | 12.0                 | 9.0   | 7.23 |
|   | - 2         | 16.72                | 12.56 | 10   |
|   |             |                      |       | S    |

Tableau 2

| $\epsilon = 0.097$      |      |      |      |
|-------------------------|------|------|------|
| $Re_T \cdot 10^{-5}$    | 2.40 | 3.0  | 4.16 |
| $Re_Q \cdot 10^{-4}$    | 2.49 | 3.32 | 4.15 |
| $Re_T \cdot \epsilon^2$ | 2262 | 2822 | 3918 |
| $Re_Q \cdot \epsilon^2$ | 234  | 306  | 382  |

Tableau 3



## CHAPITRE III

RESULTATS EXPERIMENTAUX

Dans cette partie nous abordons la discussion des résultats expérimentaux obtenus. On tente de tirer quelques conclusions en comparant nos résultats à certains d'autres relatifs aux jets pariétaux, correspondant à des valeurs asymptotiques des paramètres caractérisant l'écoulement. Nous rappelons que ces paramètres sans dimensions sont : le nombre de Reynolds de débit  $Re_Q$  le nombre de rotation  $S$ , le glissement relatif  $G = \frac{\Omega_H}{\Omega_0}$  et le facteur de forme  $E = \frac{H}{R}$ .

La partie terminale de la conduite d'alimentation est solidaire au disque animé de la rotation  $\Omega_H$ , ce qui produit une pré-rotation du fluide pénétrant entre les disques. Ce fait justifie que la rotation  $\Omega_H$  joue un rôle privilégié dans la définition du paramètre de rotation

$$\omega = \left[ \frac{\Omega_H}{2} \left( \Omega_H + \Omega_0 \cdot \frac{G}{|G|} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous utilisons ici un procédé introduit dans l'étude d'un écoulement libre entre deux disques en rotation [5] et aussi dans l'étude de jets co-courants [35].

Il convient de noter que l'usage a consacré l'utilisation de

$$Re_H = \frac{\omega H^2}{\nu} = Re_Q \cdot E^2 \quad \text{comme paramètre. C'est le cas des articles}$$

[6], [9], [10], [13] qui ont prouvé que  $Re_H$  a une influence prépondérante sur le problème des écoulements entre disques infinis en rotation. Ce problème asymptotique présente la possibilité d'avoir des solutions de similitude partout dans l'interstice entre les deux disques. De plus, puisque  $H \ll R$ , les effets de bord ont une influence relative moindre sur l'écoulement entre les

deux disques et la solution asymptotique obtenue en négligeant ces effets s'approche davantage de la réalité physique.

Le paramètre  $Re_H = \frac{\omega H^2}{\nu}$  a une valeur qui n'est pas très grande dans notre problème, mais à cause de la distorsion du domaine de l'écoulement;  $E = 0.097$ , le nombre de Reynolds de rotation  $Re_T = \frac{\omega R^2}{\nu}$  est très grand et physiquement c'est plutôt ce dernier qui est le véritable nombre de Reynolds significatif du phénomène, car il associe la vitesse caractéristique  $\omega R$  à la longueur représentative qui est l'ordre de grandeur des distances parcourues avec cette vitesse.

Le minimum de la rotation est choisi pour obtenir un écoulement turbulent. SCHLICHTING [25] a indiqué qu'à partir d'un nombre de Reynolds supérieur à  $Re_T = 3.10^5$  l'écoulement devient turbulent.

Notre intention ici est de tracer les profils de chacune de deux composantes moyennes de la vitesse, radiale et tangentielle, et des cinq contraintes de Reynolds, à savoir  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{u'w'}$ ,  $\overline{v'w'}$ , pour différentes valeurs d'un paramètre en tenant fixées les autres. Ceci fournit une idée sur l'influence de chaque paramètre.

Les résultats ont été représentés sous forme adimensionnelle pour déceler éventuellement l'existence d'une solution de similitude.

Les tableaux (1) et (2) présentent les données qui ont été utilisées dans nos expériences.

### III.1.- Vitesses moyennes

#### III.1.1.- Vitesse radiale moyenne

Les figures (4 à 8) montrent la distribution de la vitesse radiale adimensionnelle  $u/u_m$  en fonction de la distance adimensionnelle  $z/H$  pour

pour un glissement relatif  $1 \leq |G| \leq 2$  et pour plusieurs valeurs de  $S$ . On constate que les profils sont loin d'être symétriques et qu'ils ont tous un maximum près du disque inférieur.

Sur les figures 4, 5 et 6  $u/u_m$  est donnée pour trois positions radiales à différentes valeurs de  $S$  et pour deux valeurs de  $G$  de signes opposés. On note l'existence d'une solution de similitude pour toutes les valeurs de  $S$  et pour des positions radiales fixes  $r/H$ , sauf près de la surface du disque supérieur où on constate un écartement entre les profils. Cet écartement s'accroît lorsque  $G$  augmente et/ou lorsque  $r$  augmente. Ceci s'explique par le fait que le disque supérieur fournit une énergie au fluide se trouvant dans le voisinage de sa surface. Ce fluide est d'autant plus accéléré que la rotation du disque est grande.

Sur les figures 7 et 8 sont tracés les profils  $u/u_m$  en fonction de  $r/H$  pour une seule valeur de  $S$  et de  $Re\Omega$  et à différentes positions radiales. On voit que des grands écarts existent entre les profils : cependant loin des bords de deux disques, on constate l'existence d'une solution de similitude sur une distance radiale telle que  $r/H \leq 6.21$ . Ce résultat indiqué en [24], est commun à tous les auteurs qui ont prouvé l'existence d'une solution de similitude pour des disques infinis en rotation. La seule explication à cette absence de similitude est la grande valeur du gradient radial de pression [1].

Quand  $S$  augmente en gardant  $Re\Omega$  fixe, ce qui implique une augmentation importante des forces centrifuges d'entraînement par rapport aux forces d'inertie, on constate que le champ d'écoulement est dominé par les forces centrifuges spécialement au voisinage de la surface du disque supérieur : les profils s'écartent de la solution de similitude. La position à laquelle la

similitude cesse s'approche du disque inférieur quand on augmente le glissement relatif  $G$  et/ou la position radiale.

Les figures 9 et 10 représentent  $U_0/u_m$  en fonction de  $r/H$  pour différentes valeurs de  $S$ . On constate que  $U_0/u_m$  est une fonction sensiblement linéaire de  $r/H$ , la même quel que soit  $S$  est bien approchée par la loi  $U_0/u_m = 0,065 (r/H - 1,78)$ . Cette loi empirique est valable évidemment en dehors du domaine de l'impact de jet :  $6 \leq r/H \leq 10$ .

Sur la figure 11, les profils  $u/u_h$ , où  $u_h = \frac{1}{H} \int_0^H u(r, z) dz$  sont comparés à celui de BAKKE, KRIEDER, KRIETH [1], pour le même nombre de Reynolds de rotation. On constate une légère différence entre les profils pour la même position radiale  $r/H = 0,96$ . Cette différence s'explique par le fait que  $\varepsilon$  n'est pas le même et par conséquent le glissement relatif  $G$  et/ou le nombre de rotation  $S$  ont beaucoup plus d'influence quand l'écartement entre les deux disques est petit.

En étudiant un écoulement radial entre deux disques MOLLER [36], a suggéré que la tendance de la vitesse moyenne vers un profil parabolique est une indication significative de la nature laminaire de l'écoulement. BAKKE, KREITH et KREIDER [1] ont constaté, en étudiant l'écoulement pour deux différents écartements des deux disques sans rotation que le profil de la vitesse radiale moyenne devient d'autant plus rapidement parabolique que l'écartement entre les deux disques est petit.

Quant à notre problème, en plus du couplage entre les phénomènes d'écoulement radial et les phénomènes de rotation l'écartement entre les deux disques est important : on ne peut donc pas s'attendre à avoir un profil parabolique de la vitesse et les profils obtenus sont loin d'avoir cette forme.

### III.1.2.- Vitesse tangentielle moyenne.

On a porté sur les figures 12, 13 et 14 le profil de la vitesse tangentielle adimensionnelle  $v/\omega r$  en fonction de  $z/H$ , pour une position radiale  $r/H$  fixée et pour plusieurs valeurs de  $S$  correspondant à différentes valeurs de  $Re_q$ . On constate qu'à l'entrée de la section d'essai l'écoulement développe un profil presque symétrique (figure 12a). Lorsque  $S$  diminue la vitesse tangentielle adimensionnelle  $v/\omega r$  augmente dans la zone centrale et cela d'autant plus que  $r/H$  est petit. Pour les grandes positions radiales la symétrie disparaît et  $v/\omega r$  tend à avoir un profil unique.

Une grande différence existe entre les profils dans le cas où le glissement relatif  $G$  est positif et le cas où il est négatif comme le montre la comparaison entre les figures 12a, 13a, 14a et 12b, 13b, 14b. On remarque que  $v/\omega r$  augmente avec  $S$  quand les deux disques tournent dans le même sens  $G > 0$ , mais diminue et tend vers zéro du côté du disque supérieur quand les deux disques tournent en sens opposé.

La relation entre la vitesse moyenne radiale, le débit et la vitesse de rotation est complexe. En effet les profils de la vitesse radiale et tangentielle moyenne dépendent de la position radiale, de  $Re_q$  et de  $S$ . Par conséquent aucune loi universelle de distribution de ces deux vitesses n'existe.

Cependant, il y a exception pour la vitesse tangentielle à grands nombres de rotation  $S$  : en effet, l'influence des conditions d'entrée diminue vite en fonction de  $r$  lorsque  $S$  est grand. Cette constatation est vérifiée en traçant le rapport des vitesses  $(\omega r - v)/(\omega r - v_h)$  en fonction de  $z/H$ , où  $v_h = \frac{1}{H} \int_0^H v(r, z) dz$ . Comme le montrent les figures 15 et 16, les profils deviennent légèrement de la loi en puissance  $1/7$  surtout près du disque inférieur à cause de l'injection faite par le haut.

Les résultats tendent à s'accorder avec cette loi du côté du disque supérieur pour les petites valeurs de  $Re_\theta$  et les grandes valeurs de  $S$ .

La représentation de  $(\omega r - v) / (\omega r - v_h)$  en fonction de  $z/H$  est intéressante dans la mesure où tous les résultats se regroupent sur une courbe unique.

La figure 17 montre le rapport  $U_m/\omega r$ , appelé degré de rotation local, en fonction de  $r/H$ . Ce rapport est important au voisinage de l'axe  $Oz$ , où la vitesse radiale moyenne maximale est importante et la vitesse de rotation petite. En raison de l'importance de la vitesse de rotation et la diminution de la vitesse radiale, il tend asymptotiquement aux grandes distances radiales vers la valeur de 0,11 correspondant au cas de Von Karman.

D'après les figures (4,12), (5,13), et (6,14) la résultante des deux vitesses radiale et tangentielle moyennes permet de donner la direction et la vitesse globale de l'écoulement en négligeant la vitesse axiale. On définit l'épaisseur de la couche limite comme la distance à la paroi où  $V \cong V_{maxi}$ ; avec  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ . Cette épaisseur augmente en fonction de la position radiale  $r/H$  sur le disque inférieur et de la position radiale  $r/H$  et du nombre de rotation  $S$  sur le disque supérieur.

### III.1.3.- Similitude des profils des vitesses moyennes

Si les profils de vitesses moyennes étaient en similitude ils devraient pouvoir être reportés sur une courbe unique, reliant des grandeurs sans dimensions convenables. Ici, d'après les résultats expérimentaux on peut constater :

Pour les profils de  $u$  :

- Une absence totale de similitude suivant la direction radiale c'est-à-dire qu'il existe des écarts importants entre deux profils de même  $Re_T$ , à deux positions radiales différentes.

- Pour une position radiale fixe et pour un même nombre de Reynolds de rotation  $Re_T$ , quel que soit le paramètre  $Re_\Omega$ , les profils correspondant sont semblables.

- Pour une position radiale fixe, les profils correspondant au nombres de rotation  $S$  variable sont presque complètement semblables. La différence se situe dans la partie des profils au voisinage du disque supérieur; mais il faut dire que dans cette zone, la vitesse radiale est petite et qu'on ne peut pas ignorer l'incertitude de la méthode de mesure sur les petites vitesses.

Pour les profils de  $v$  :

La représentation des profils en  $v/\omega r$  en fonction de  $z/H$  ne permet pas de donner des profils semblables reliant des paramètres sans dimension  $Re_\Omega$ ,  $S$  et  $r/H$ . Toutefois on remarque par comparaison entre les figures 12 et 14 que les profils se serrent en fonction de  $r/H$ . On peut affirmer qu'il y a une similitude pour des grandes distances radiales.

La représentation des profils  $(\omega r - v)/(\omega r - v_h)$  en fonction de  $z/H$  permet d'avoir une bonne similitude pour les grands rayons.

### III.2.- Contraintes de Reynolds

#### III.2.1.- Intensités turbulentes

Les figures 18 à 27 montrent les distributions des deux composantes adimensionnelles  $\overline{u'^2}/U_m^2$ ,  $\overline{v'^2}/U_m^2$  de l'intensité de turbulence en fonction de  $z/H$ , à différentes valeurs de  $S$  et pour plusieurs positions radiales. On note que l'intensité de turbulence  $\overline{u'^2}/U_m^2$  augmente avec  $\alpha$  (figures 21, 22). La diminution importante de la pression dans le sens radial est à l'origine de cette augmentation de turbulence, de même que l'énergie fournie par les deux disques en rotation augmente avec  $\alpha$ , et une partie de cette énergie est transformée en énergie de turbulence.

on constate également qu'en première approximation que  $\overline{u'^2}/U_m^2$  en fonction de  $z/H$  diminue quand le nombre de rotation  $S$  augmente (figures 18, 19, 20).  $\overline{u'^2}/U_m^2$  diminue nettement quand  $S$  augmente, en gardant  $Re\alpha$  constant : ceci signifie que la rotation est pour beaucoup dans le niveau de la turbulence. Cela étant, on peut dire que l'intensité turbulente  $\overline{u'^2}/U_m^2$  diminue en fonction de  $z/H$  quand  $S$  augmente pour une même position radiale; par contre, elle augmente avec  $\alpha$  pour un nombre de rotation  $S$  constant.

A proximité de l'axe de rotation les profils de  $\overline{u'^2}/U_m^2$  et ceux de  $\overline{v'^2}/U_m^2$  sont semblables quelle que soit la valeur des paramètres. Le niveau de l'intensité de turbulence de  $\overline{u'^2}/U_m^2$  y est plus élevé que celui de  $\overline{v'^2}/U_m^2$ .

On constate sur les figures 23, 24, 25 où  $\overline{v'^2}/U_m^2$  est représentée en fonction de  $z/H$ , qu'il y existe une légère différence entre les points expérimentaux pour les différentes valeurs de  $S$ . Cette différence ne nous donne pas d'indications précises sur l'évolution de l'intensité tangentielle de turbulence; car elle est de l'ordre de l'erreur de mesure.



Les intensités de turbulence relatives  $\overline{u'^2}/u_m^2$  et  $\overline{v'^2}/u_m^2$  ont des maxima au voisinage du disque inférieur. Le déplacement de fluide étant de l'axe de rotation vers l'extérieur, on note que la position de l'intensité maximale s'éloigne de la paroi inférieure en fonction de  $\alpha$ .

La position des intensités maximales de turbulence représente le lieu de production maximale de l'énergie turbulente : ceci se produit juste au-dessus de la surface du disque inférieur, où théoriquement les forces visqueuses sont prépondérantes et où les effets de rotation sont importants.

On remarque qu'à petites valeurs de  $S$ , la forme du profil de  $\overline{u'^2}/u_m^2$  est peu différente de celle du profil trouvé par TABATABAI et POLLARD [11] qui traitent le même problème sans rotation dans le cas d'un nombre de Reynolds  $Re_a$  modéré. Par ailleurs, nos résultats se rapprochent de ceux de [11] quand  $Re_a$  tend à devenir petit.

### III.2.2.- Contraintes de cisaillement

Les figures 28 à 38 représentent la distribution des contraintes de cisaillement  $\overline{u'v'}/u_m^2$ ,  $\overline{u'w'}/u_m^2$ ,  $\overline{v'w'}/u_m^2$  en fonction de  $z/H$  pour différentes valeurs de  $S$  et à  $r/H$  constant. On constate que près de l'axe de rotation les paramètres  $S$ ,  $Re_a$  et  $G$  n'ont pas d'influence sur les contraintes de cisaillement, et que tous les résultats sont presque condensés en une seule courbe (figures 28, 33, 36). Quand on s'éloigne de l'axe de rotation l'influence de ces paramètres devient notable.

Comme pour les intensités turbulentes, les contraintes de cisaillement varient très fortement avec la distance radiale;  $\overline{u'v'}/u_m^2$ ,  $\overline{u'w'}/u_m^2$  et

$\overline{v'w'}/u_m^2$  augmentent avec  $\Omega$ . Ce n'est pas le cas dans [11], où il est trouvé que  $\overline{u'v'}/u_m^2$  diminue en fonction de  $\Omega$ . Le nombre de Reynolds  $Re_T$ , c'est-à-dire la rotation, joue un rôle important dans la variation du niveau de turbulence dans notre problème.  $\overline{u'w'}$ ,  $\overline{v'w'}$  sont à peu près de même ordre de grandeur et elles sont notablement plus grandes que  $\overline{u'v'}$ . Les mesures effectuées révèlent la nature non isotropique de la turbulence dans ce type d'écoulement et montrent qu'il faut tenir compte de l'influence de  $S$ , de  $Re_\Omega$  et du signe de  $G$  pour modéliser la turbulence. On remarque sur les figures 28, 29, 30 que la distribution de la composante  $\overline{u'v'}/u_m^2$  en fonction de  $r/H$  a la même forme que celle trouvée par TABATABAI et POLLARD [11] lorsque le nombre de rotation  $S$  devient petit. Quand le nombre de Reynolds  $Re_\Omega$  diminue, nos résultats concernant  $\overline{u'v'}/u_m^2$  s'approchent de ceux d'un écoulement radial turbulent entre disques parallèles [11].

Selon les figures 33 à 38 les composantes  $\overline{u'w'}$  et  $\overline{v'w'}$  varient fortement en fonction de  $S$ . Les profils de  $\overline{u'w'}$  sont sensiblement symétriques par rapport à la demi-hauteur  $H$  et leur maxima sont atteints autour de la même position.

Il faut noter que très près des parois des deux disques les mesures de  $\overline{u'w'}$  et  $\overline{v'w'}$  n'ont pas pu être exécutés à cause des contraintes d'encombrement imposées par le support de la sonde.

### III.2.3.- Validité de l'approximation de couche limite

Afin de justifier la validité des équations approchées (31), (32), (33) et (34), on se propose d'évaluer les ordres de grandeur des termes négligés dans le cadre de l'approximation de couche limite, en se servant de

résultats expérimentaux obtenus.

L'équation (17) peut s'écrire sous la forme :

$$(41) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( w + \overline{w'^2} - \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r (uw + \overline{u'w'}) \right] = 0$$

De l'équation de continuité, on déduit que  $w$  est de l'ordre de  $\frac{s \cdot R}{r} \cdot u_m$ . Le rapport  $\frac{s \cdot R}{r}$  est borné par  $\frac{H}{R}$ , donc  $w \lesssim 0.097 u_m$ . Pour comparer le terme de viscosité au terme  $w^2$ , on évalue l'ordre de grandeur du rapport  $\frac{w^2}{\nu \frac{\partial w}{\partial z}}$  :

$$\frac{w^2}{\nu \frac{\partial w}{\partial z}} \sim \frac{s \cdot R}{r} \cdot \frac{u_m}{\nu} \cdot s R \sim 0.097 Re_m ; \text{ avec } Re_m = \frac{u_m \cdot s R}{\nu} \sim Re_H,$$

dont la valeur est de l'ordre de  $10^3$ . On en conclut que le rapport  $\frac{w^2}{\nu \frac{\partial w}{\partial z}}$  est de l'ordre de  $10^2$ . Donc on peut négliger dans (41) le terme de viscosité par rapport au terme  $w^2$ . L'intégration de l'équation ainsi obtenue de zéro à  $z$  donne :

$$(42) \quad \frac{P_0 - P}{s} = \frac{1}{r} \int_0^z \frac{\partial}{\partial r} \left[ r (uw + \overline{u'w'}) \right] dz + (w^2 + \overline{w'^2}).$$

Pour évaluer l'ordre de grandeur de la pression on considère généralement dans les écoulements turbulents de cisaillement [35], que l'intensité turbulente  $\overline{w'^2}$  est de même ordre de grandeur que  $\overline{u'^2}$ . En se basant sur les résultats expérimentaux, on relève que  $\overline{u'w'} \sim 0.035 u_m^2$ ,  $uw \sim 0.097 u_m^2$  et  $\overline{w'^2} \sim 0.1 u_m^2$ . La vitesse  $u_m$  est fonction seulement de  $r$  : elle est de la forme :  $u_m = \frac{cte}{r}$ . En remplaçant chaque terme par son ordre

de grandeur et en intégrant on obtient que le terme de pression est de l'ordre de 0,10. Le terme  $\frac{1}{\lambda} \int_0^z \frac{\partial}{\partial \lambda} [\lambda (uw + \overline{u'w'})] dz$  est petit devant la somme  $(w^2 + \overline{w'^2})$  et la pression serait alors de l'ordre de  $(w^2 + \overline{w'^2})$ .

L'équation (15) peut s'écrire également sous la forme :

$$(43) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{2} u^2 + \overline{u'^2} - w^2 + \overline{w'^2} \right) + w \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v^2}{\lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) + \frac{\overline{v'^2} - \overline{u'^2}}{\lambda}.$$

Nos mesures montrent que  $\overline{v'^2} \sim 0,5 \overline{u'^2}$  ; on en déduit

$\frac{\overline{v'^2} - \overline{u'^2}}{\lambda} \sim \frac{-0,05 u_m^2}{\lambda}$  . En négligeant les termes  $(\overline{v'^2} - \overline{u'^2})$  et  $\overline{u'^2}$  on commet un erreur de 15 % ce qui est considérable.

De la même manière l'équation (16) s'écrit :

$$(44) \quad \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \lambda^2 (uv + \overline{u'v'}) \right] + \frac{\partial (vw)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial z} - \overline{v'w'} \right).$$

Les mesures effectuées ont montré que le terme  $\overline{u'v'}$  est de l'ordre de 0,03  $u_m^2$  . Le rapport  $\frac{\overline{u'v'}}{uv}$  est alors de l'ordre de 0,03  $\frac{u_m}{v_m}$  . Or au voisinage de la paroi  $v_m$  est toujours supérieur à  $u_m$  . Par conséquent,

$\overline{u'v'} \sim 0,03 u_m^2$  , donc en négligeant  $\overline{u'v'}$  , on commet une erreur de 3 % .

En tirant profit de cette analyse des ordres de grandeur des différents termes des équations du mouvement, on peut dire que l'approximation de couche limite faite dans le chapitre I entraîne des erreurs assez grandes en particulier pour l'équation suivant la direction radiale.

Pour une meilleure précision les équations (31), (32), (33) doivent être remplacées par :

$$(45) \quad u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2 + v'^2}{r} = -\frac{1}{s} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tau_{rz}}{s} - \overline{u'w'} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial (r u'^2)}{\partial r}$$

$$(46) \quad u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tau_{\theta z}}{s} - \overline{v'w'} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \overline{u'v'})$$

$$(47) \quad \frac{\partial}{\partial z} (p/s + \overline{w'^2}) = 0$$

## CONCLUSION

Notre objectif était d'étudier l'écoulement turbulent qui se produit entre deux disques coaxiaux en rotation lorsqu'il existe une injection axiale. Les paramètres du problème sont :  $Re$ , nombre de Reynolds caractéristique,  $S$  nombre de rotation,  $G$  glissement relatif et  $\varepsilon$  paramètre de forme.

L'étude expérimentale a été conduite à des distances radiales telles que les effets du changement de direction du flux d'injection sont encore sensibles : autrement dit l'écoulement n'est pas établi, c'est-à-dire n'est pas indépendant de la manière dont l'alimentation est faite. Nous avons pu déterminer à l'aide de la méthode de l'anémométrie à fil chaud, les vitesses moyennes radiale  $u$  et tangentielle  $v$ , ainsi que les cinq contraintes de Reynolds  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{u'w'}$  et  $\overline{v'w'}$ .

Les résultats expérimentaux sur  $u$  ont confirmé que le paramètre  $S = \frac{\omega R}{U_0}$  est un paramètre de similitude, mais l'état de similitude est perturbé du côté du disque supérieur pour des grandes distances radiales et/ou à grands nombres de rotation  $S$ . La similitude entre les profils n'existe pratiquement pas suivant la direction radiale au-delà de  $r/H > 6.21$ .

L'expérience a montré que pour  $6 \leq r/H \leq 10$ , le maximum  $u_m$  de  $u$  est tel que  $U_0/u_m$  varie linéairement suivant la relation :  $U_0/u_m = 0.065 (r/H - 1.78)$ .

La représentation de  $(\omega r - v)/(\omega r - v_h)$  en fonction de  $r/H$  s'avère intéressante puisqu'elle offre la possibilité d'avoir des profils

presque semblables pour une position radiale fixe et à plusieurs valeurs de  $S$ . Les résultats présentés sous cette représentation tendent à s'accorder avec la loi en puissance  $1/7$  à grandes distances radiales quand le nombre de Reynolds débitant est petit et que  $Re_T$  est grand.

Les intensités de turbulence radiale et tangentielle dépendent du nombre de rotation  $S$ . L'influence de  $S$  sur l'intensité de turbulence radiale est plus importante que sur l'intensité de turbulence tangentielle.

Les paramètres  $S$ ,  $Re_G$  et  $G$  n'ont pas d'influence sur les contraintes de cisaillement à proximité de l'axe de rotation, mais l'influence de ces paramètres devient notable en s'éloignant. Par comparaison des résultats de  $\overline{u'v'}/u_m^2$  avec [11], on peut dire que la rotation a une importance capitale dans la variation de  $\overline{u'v'}$  en particulier et des contraintes de Reynolds en général.

En ce qui concerne les équations du problème, elles ont été formulées d'abord dans le cadre de l'approximation de couche limite. Nos résultats expérimentaux nous ont permis d'affiner cette approximation en examinant l'influence des quatre paramètres de similitude : en effet l'évolution des différents termes des équations de Reynolds a montré que certaines contraintes turbulentes et leurs dérivées radiales, qui négligées lors de l'approximation de couche limite, doivent être réintégrées si on souhaite une précision satisfaisante.

Enfin les études théorique et expérimentale sont d'accord pour une modélisation de la turbulence, où il faut tenir compte de l'influence de  $S$ , de  $Re_G$  et du signe de  $G$ .

## REFERENCES

- [1] E. BAKKE, J.F. KREIDER and F. KREITH. "Turbulent source flow between parallel stationary and co-rotating disks". J.F.M. (1973), vol. 58, par. 2.
- [2] M. ADAMS, A.Z. SZERI. "Incompressible flow between finite Disks". J.A.M. (1982), vol. 49.
- [3] A. DYMENT. "Formulation asymptotique des écoulements d'un fluide incompressible entre deux disques coaxiaux voisins en rotation". 1981. C. R. Acad. Sci. Paris, série II.
- [4] H. MUHE. "Jet tournant libre et pariétal". Thèse de Docteur-Ingénieur (1982). U.S.T.L.
- [5] H. MUHE. "Propriétés moyennes de l'écoulement dans un jet tournant libre". C. R. Acad. Sci. Paris, t. 303, série II, n° 16, 1986.
- [6] A.Z. SZERI, S.J. SCHNEIDER, F. LABBE. "Flow between rotating disks". Part 1 et 2, J.F.M. (1983), vol. 134.
- [7] D. DIJKSTRA and G.J.F. VAN HEIJST. "The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder". J.F.M. (1983) vol. 128.
- [8] John F. BRADY and Louis DURLOFSKY. "On rotating disk flow". J.F.M. (1987). vol. 175.



- [9] S.M. ROBERTS, J.S. SHIPMAN. "Computation of the flow between a rotating and stationary disk". J.M.F. (1976), vol. 73.
- [10] M. HOLODNIOK, M. KUBICEK and HLAVACEK. "Computation of the flow between two rotating coaxial disks multiplicity of steady state solution". J.F.M. (1981), vol. 108.
- [11] M. TABATABAI and POLLARD. "Turbulence in radial flow between parallel disks at medium and low Reynolds numbers". J.F.M. (1987), vol. 185.
- [12] G.L. MELLOR, P.J. CHAPPLE and V.K. STOKES. "On the flow between a rotating and stationary disk". J.F.M. (1968), vol. 31.
- [13] M. HOLODNIOK, M. KUBICEK and N. HLAVACEK. "Computation of the flow between two rotating coaxial disk". J.F.M. (1977), vol. 81.
- [14] P.O. WITZE and H.A. DWIYER. "The turbulent radial jet". J.F.M. (1976), vol. 75.
- [15] M.B. GLAUER. "The wall jet". J.F.M. (1956), vol. 1.
- [16] T.S. CHAM and M.R. HEAD. "Turbulent boundary-Layer flow on a rotating disk". J.F.M. (1969), vol. 37.
- [17] K. H. SCHWARZ and W.P. COSART. "The turbulent wall jet". Dept. of Chemical engineering, Stanford University Palo-Alto, California.

- [18] F.F. ERIAN and T.H. TONG. "Turbulent flow. Due to a rotating disk".  
Physics of fluids. 1971, vol. 14, n° 12.
- [19] M. Michel LEYDET. "Etude théorique et expérimentale de l'écoulement  
turbulent entre un disque fixe et un disque en rotation avec soufflage  
à travers un orifice situé au centre". C. R. Acad. Sci. (1973), t. 277.
- [20] ADAMS and RICE. "Experimental investigation of the flow between  
co-rotating disk". J. Appl. Mec. (1970), vol. 92.
- [21] G.K. BATCHELOR. "Note on a classe of solutions of the Navier-Stokes  
equations representing steady rotationally-symmetric flow". Quart.  
J. Mech. Appl. Math. 4, 29.
- [22] NGUYEN N.D., EIBAULT J.P. and FLORENT P. "Multiple solution for  
flow between coaxial disks". J.F.M. (1975), vol. 68.
- [23] PEUBE J.L. & KREITH F. "Ecoulement permanent d'un fluide visqueux  
incompressible entre deux disques parallèles en rotation". J.M.  
(1966), vol. 5.
- [24] K. STEWARTSON. "On the flow between two rotating co-axial disks".  
Proc. Camb. Phil. Soc. 49.333.
- [25] SCHLICHTING. "Boundary-Layer theorie". Mc - Graw-Hill 1968.
- [26] T. CEBECI, A.M.O. SMITH. "Analyse of turbulent Boundary layers".  
Applied Mathematics and Mechanics, 15.

- [27] R. DUMAS, E. ARZOUMANIAN, L. FULACHIER. "Couche limite turbulente sur paroi mobile". Journal de Mécanique théorique et appliquée, vol. 7, n° 5, 1988.
- [28] L.A. DORFMAN. "Hydrodynamique resistance an heat of rotating solids". 1963, Oliver and Boyd L.T.D.
- [29] G.N. LANCE et M.H. ROGERS. "The axial symmetric flow of viscous fluid between two infinite rotating disks". Proc. Roy. Soc. 1962. A 266, 109.
- [30] W.G. COCHRAN. "The flow due to rotating disk". 1934. Proc. Camb. Phil. Soc. 30 365.
- [31] C.E. PEARSON. "Numerique solution for the time-dependant viscous flow between two rotating coaxial disks". (1965), J.F.M., vol. 21.
- [32] R. COMOLET. "Ecoulement d'un fluide entre deux plans parallèles. Contributions à l'étude des butées d'air". Publ. Scien. et Techniq. du Minis. de l'Air, n° 334, p. 23.
- [33] J.L. PEUBE. "Sur l'écoulement radial permanent d'un fluide visqueux incompressible entre deux plans parallèles fixes". J.M. (1963), vol. 2.

- [34] CHEN CHE PEN. "Etude expérimental de l'écoulement radial". J.M., (1966), vol. 5.
- [35] N. RAJARATNAM. "Turbulent jet", Elsevier Sc. Publishing Company, 1976.
- [36] P.S. MOLLER. "Radial flow without swirl between parallel disks. Aero. Quart. 24, (1963).

## ANNEXE A

## ANEMOMETRIE A FIL CHAUD

L'anémométrie à fil chaud fonctionnant à la température constante est une technique de mesure très utilisée en mécanique des fluides. L'anémomètre est constitué d'un fil métallique très fin susceptible de mesurer les vitesses les plus petites d'un écoulement de fluide sans y apporter de perturbations notables, et des appareils électroniques associés.

La seule grandeur dont on sache bien enregistrer les fluctuations au sein de l'écoulement par cet appareil est la vitesse du fluide.

## A.1. PRINCIPE DE LA METHODE.

La sonde est placée dans un écoulement, elle est plus ou moins inclinée sur la direction des lignes de courant. Le fil la constituant est surchauffé par rapport à la température ambiante par le passage d'un courant électrique délivré par l'intermédiaire de l'anémomètre. Le passage du fluide sur la partie sensible du fil, qui constitue l'une des branches d'un pont de Wheastone, crée un échange thermique qui déséquilibre ce pont. A chaque instant une tension proportionnelle à celle nécessaire au rééquilibrage peut être mesurée aux bornes du pont.

L'étalonnage préalable de la sonde permet de relier cette tension (E) à la vitesse du fluide ( $U_e$ ) par une relation du type Loi de King.

$$E^2 = A + B U_e^n \quad (a-1)$$

A, B, n sont des constantes dépendant des propriétés physiques du fil et de la nature du fluide.

$U_e$  : la vitesse de refroidissement du fil (figure A ) s'exprimant par :

$$U_e^2 = U_N^2 + K^2 U_T^2 + h^2 U_B^2 \quad (a-2)$$

$U_N$  : la composante de la vitesse normale au fil.

$U_T$  : la composante de la vitesse tangentielle au fil.

$U_B$  : la composante de la vitesse perpendiculaire à  $U_N$  et  $U_T$  .

K et T sont des constantes qui caractérisent les sensibilités directionnelles du fil respectivement pour les vitesses  $U_T$  et  $U_B$  .

La tension de sortie de l'anémomètre à température constante est une fonction non linéaire de la vitesse du fluide d'après l'équation (a-1) , et si encore l'écoulement est fortement turbulent, alors on est pas en mesure de déterminer les mesures exactes de la vitesse sans interposer un linéarisateur à la sortie de l'anémomètre. L'opération réalisée par le linéarisateur est de transformer le signal d'entrée en un signal normalisé X, puis de calculer la tension de sortie Y suivant l'expression.

$$Y = 10^{A+BX+EY} + CX + D \quad (a-3)$$

Quand la vitesse du jet varie de 0 à  $U_{max}$ , le signal d'entrée change de  $E_0$  à  $E_{max}$ , et le signal normalisé varie de 0 à 10 v.

A, B, C, D, E sont des constantes, un programme basé sur des itérations a été fait qui nous permet de déterminer ces constantes à partir des couples (vitesses, tensions) de l'étalonnage.

## A.2. ETALONNAGE DE LA SONDE

Avant de procéder aux mesures propres les fils chauds doivent être étalonnés; dans le cas qui nous concerne la sonde a été étalonnée dans un noyau d'un jet circulaire. La sonde et un tube de pitôt sont placés sur la même section et perpendiculairement à la direction de l'écoulement pour qu'on puisse mesurer la même vitesse.

La relation liant la vitesse de refroidissement du fil à la hauteur du liquide dans le manomètre est :

$$U_c = \sqrt{\frac{\rho_f \cdot g \cdot h}{\rho_a}} \quad (a-4)$$

- $\rho_f$  : densité du fluide dans le manomètre
- $\rho_a$  : densité de l'air
- $g$  : accélérateur de la pesanteur.

En faisant varier la vitesse de sortie du jet, à l'aide du manomètre et d'un voltmètre relié à la sonde, on relève les couples (vitesse, tension) qui seront introduits par la suite dans le calculateur afin de calculer les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  de l'équation (a-3). Une fois que ces constantes sont déterminées, on les place ainsi que  $E_0$  et  $E_{max}$  dans le module 56 N 21. Les appareils sont prêts alors à donner des valeurs exactes lors du déroulement de l'expérience.

$E_0$  : tension pour une vitesse nulle du jet.

$E_{max}$  : tension pour une vitesse maximale du jet.

## A.3. EQUATIONS DE BASE

Pour déterminer les vitesses moyennes et les composantes de Reynolds, on utilise deux sondes de types 55 P 15 coupées l'une à  $45^\circ$  et l'autre à  $-45^\circ$ . pour mesurer  $u$ ,  $v$ ,  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{u'v'}$  on place la sonde de telle façon que le plan formé par ses broches soit parallèles au plan du disque.

La valeur de  $U_b$  est très petite, son influence est négligeable l'équation (a-2) se limite à :

$$U_e^2 = U_N^2 + K^2 U_T^2 \quad (a-5)$$

En écrivant l'équation (a-5) pour chaque cas de figures (a) et (b)

on obtient :

$$U_{eai}^2 = U_{Ni}^2 + K^2 U_{Ti}^2$$

$$U_{ebi}^2 = U_{Ti}^2 + K^2 U_{Ni}^2 \quad (a-6)$$

L'indice (i) signifie que pour chaque point plusieurs mesures ont été relevées.

De cette dernière équation (a-6) on peut expliciter  $U_{Ni}$  et  $U_{Ti}$ .

$$U_{Ni}^2 = \frac{K^2 U_{ebi}^2 - U_{eai}^2}{K^4 - 1}$$

$$U_{Ti}^2 = \frac{K^2 U_{eai}^2 - U_{ebi}^2}{K^4 - 1} \quad (a-7)$$



La projection de  $U_N$  et  $U_T$  sur les axes ( $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$ ) donne :

$$u_i = \frac{U_{Ni} + U_{Ti}}{\sqrt{2}} \quad (a-8)$$

$$v_i = \frac{U_{Ni} - U_{Ti}}{\sqrt{2}}$$

les vitesses moyennes et les contraintes de Reynolds s'obtiennent de la manière suivante :

$$u = \frac{\sum_{i=1}^N u_i}{N} ; \quad v = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{N} \quad (a-9)$$

$$\overline{u'^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (u - u_i)^2}{N} , \quad \overline{v'^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (v - v_i)^2}{N}$$

$$\overline{u'v'} = \frac{\sum_{i=1}^N (u - u_i)(v - v_i)}{N}$$

Pour déterminer les tensions de Reynolds  $\overline{u'w'}$  et  $\overline{v'w'}$ , on fait tourner la sonde dans plusieurs plans. Ceci permet d'obtenir un système d'équations, qu'on peut résoudre (DISA INFORMATION 23).

Quatre positions sont nécessaires pour pouvoir déduire les relations suivantes :

$$\overline{u'w'} = \frac{\overline{e_2^2} - \overline{e_1^2}}{2(1 - k^2) \sin 2\alpha} \quad (a-10)$$

$$\overline{r_{W'}} = \frac{\sqrt{2} (\overline{e_3^2} - \overline{e_4^2}) + \overline{e_1^2} - \overline{e_2^2}}{2\sqrt{2} (\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha)} \quad (\text{a-11})$$

$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}$  sont des tensions fluctuantes obtenues dans des positions de la sonde correspondant à un angle  $\beta$  entre le plan formé par les broches de la sonde et le plan  $(xOz)$ .

On a pris pour  $e_1$  : une position  $\beta = 90^\circ$

$e_2$  : " "  $\beta = -90$

$e_3$  : " "  $\beta = 45$

$e_4$  : " "  $\beta = -45.$

$\alpha$ , est l'angle de la sonde, dans notre cas une seule sonde de type 55 P 15 est utilisée à  $\alpha = 45^\circ$ .

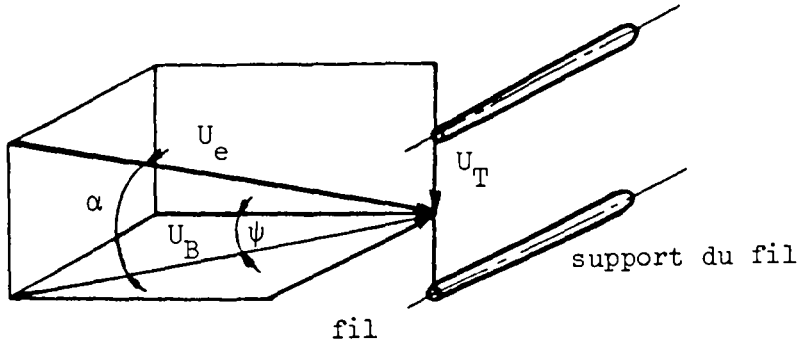


Figure A

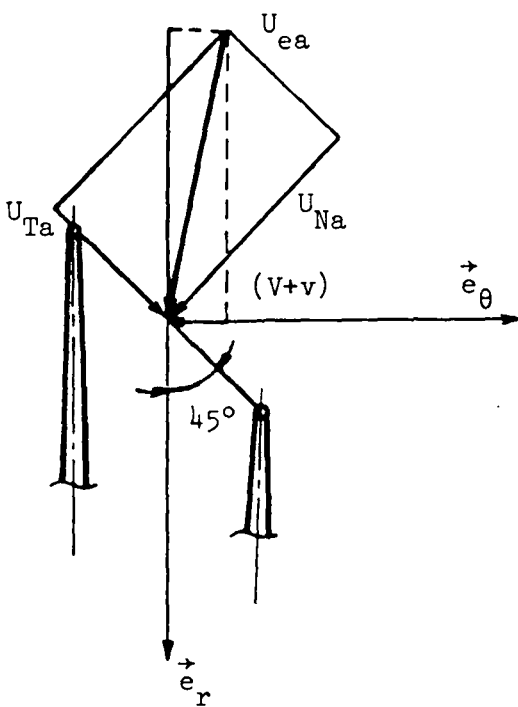


Figure a

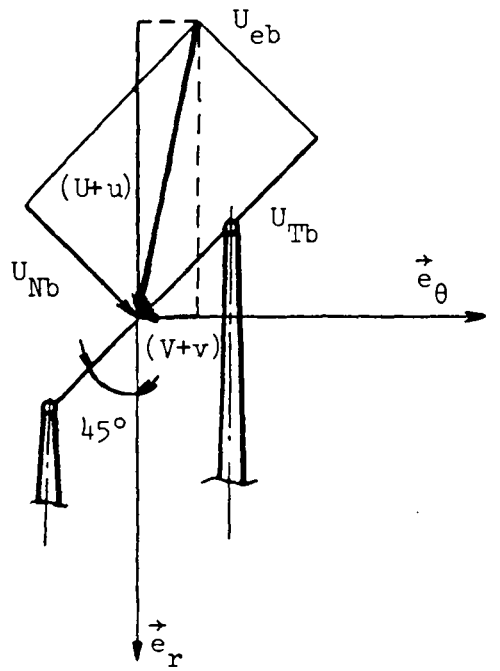


Figure b

55

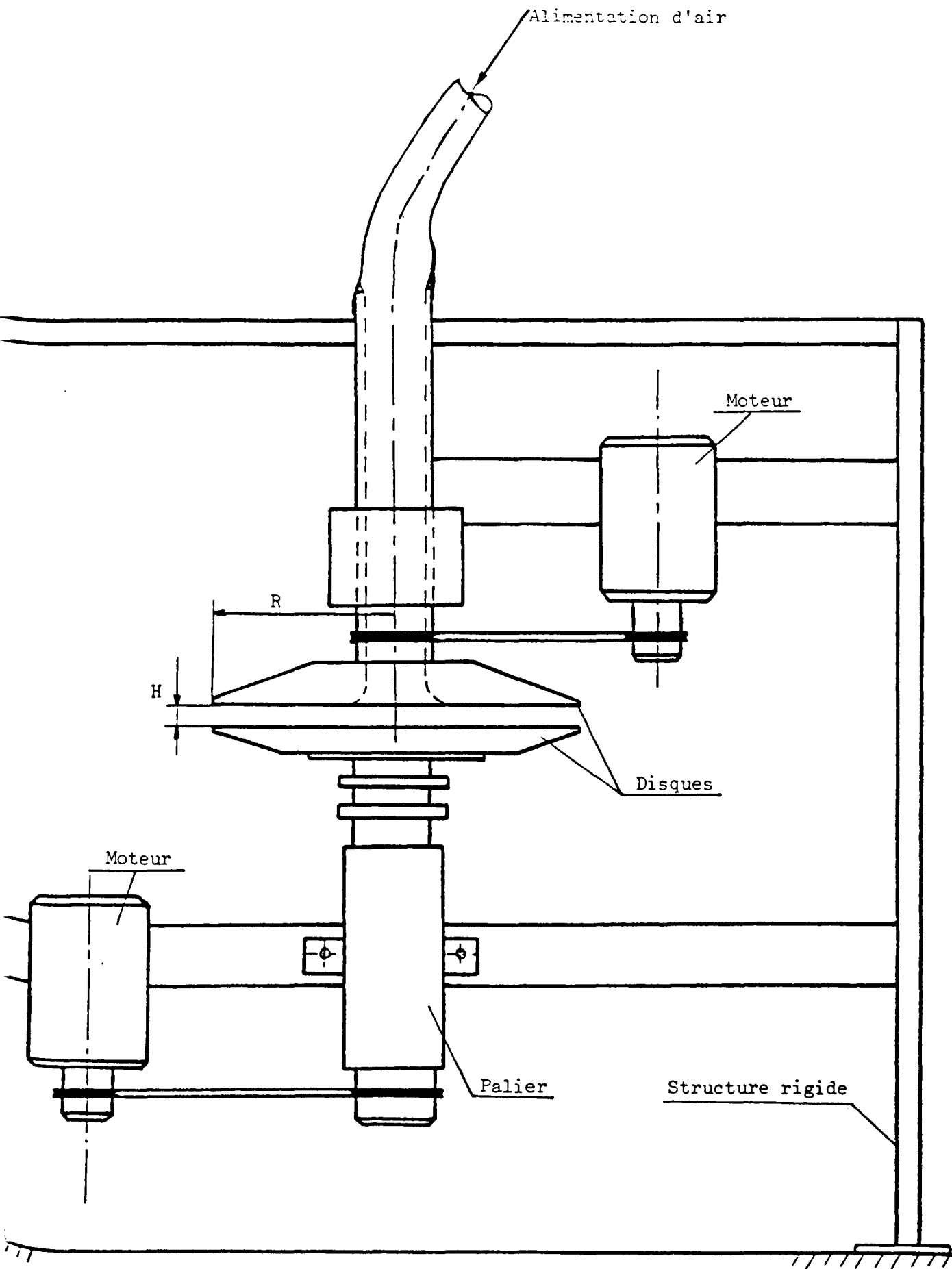


Figure 1

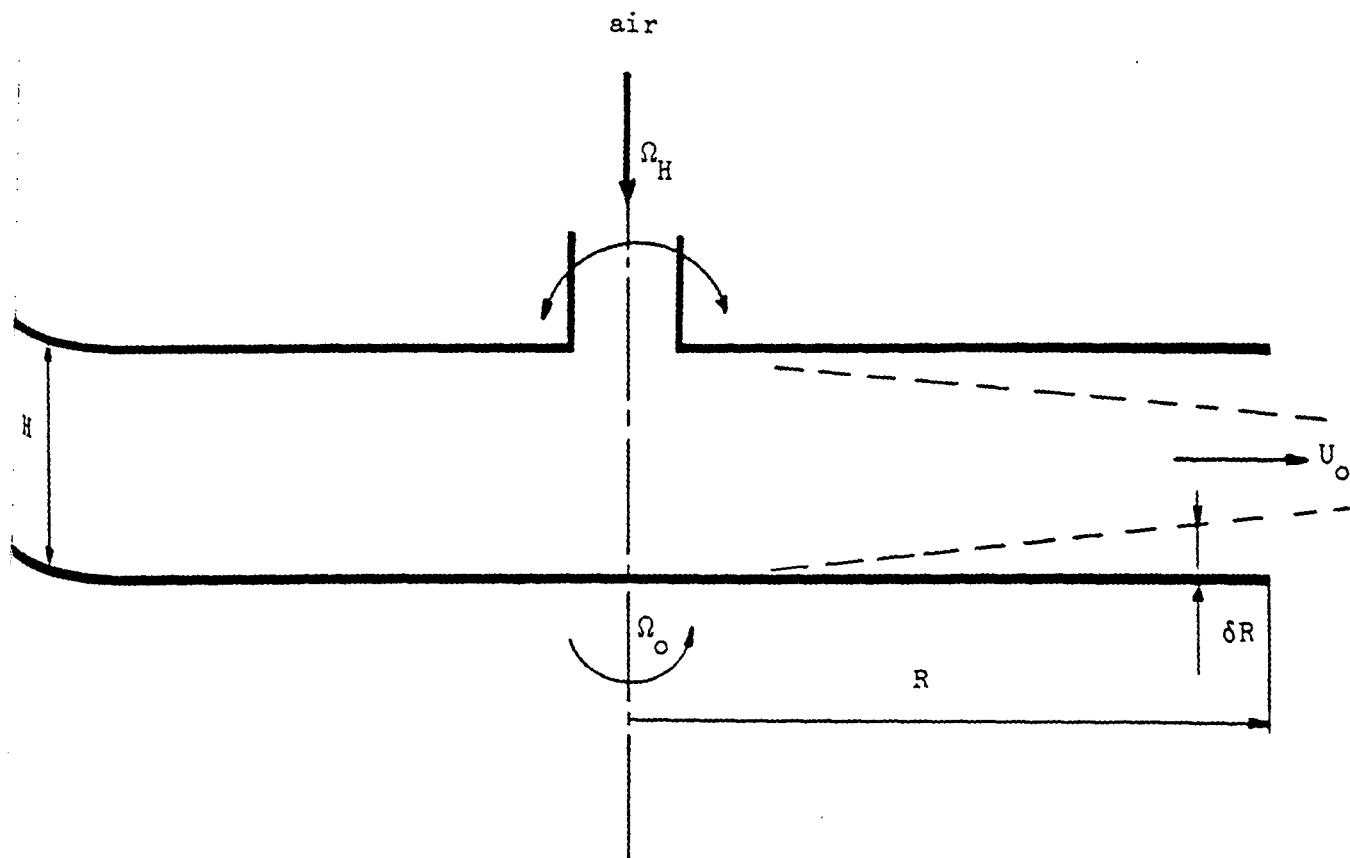


Figure 2

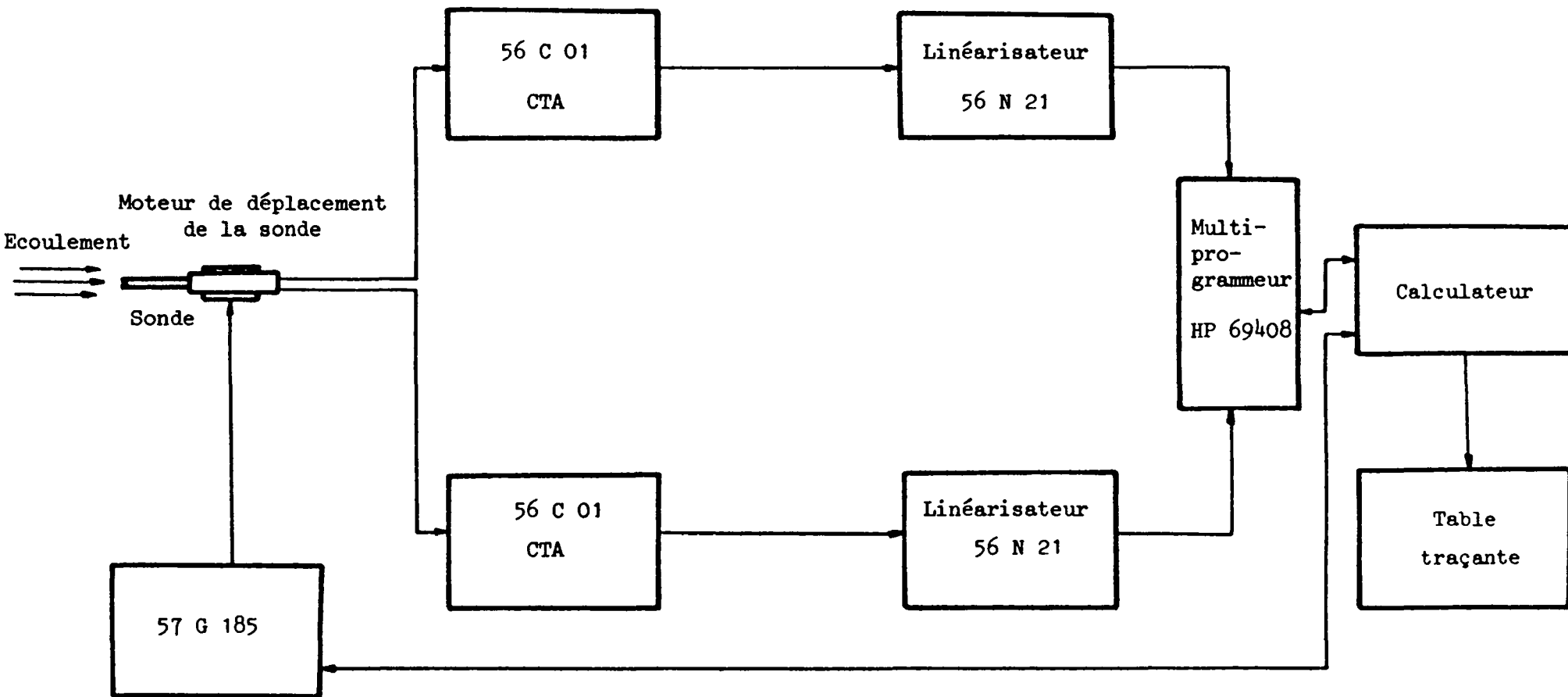
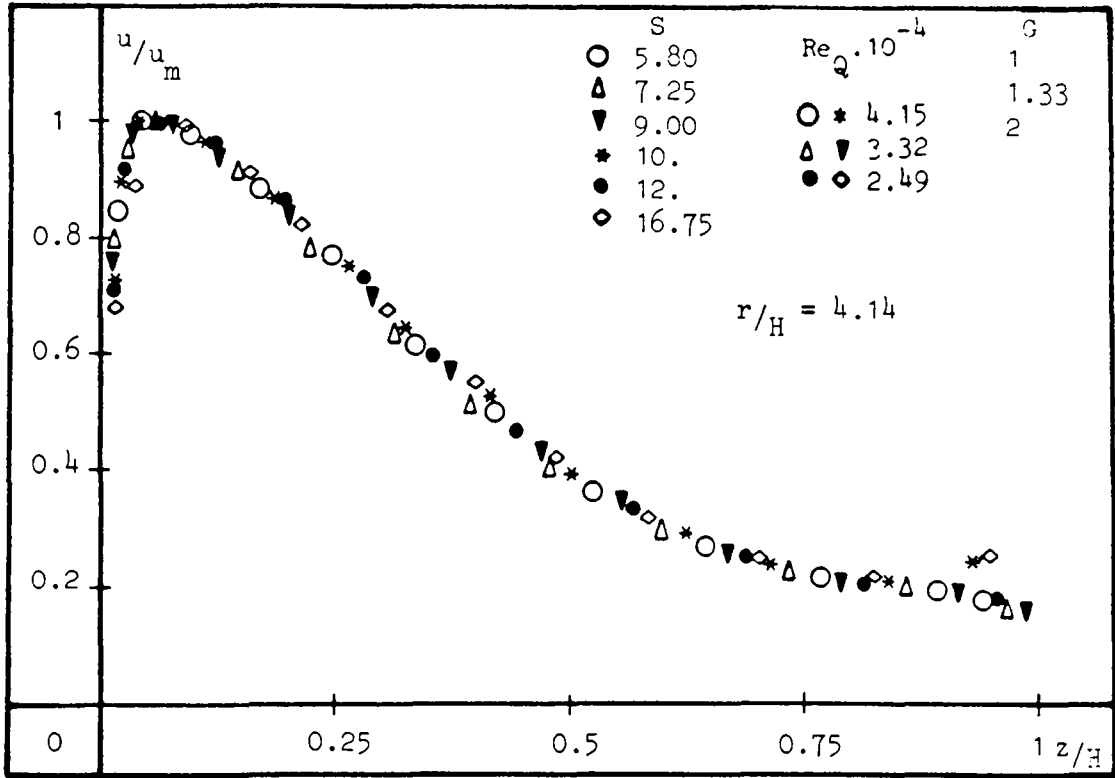
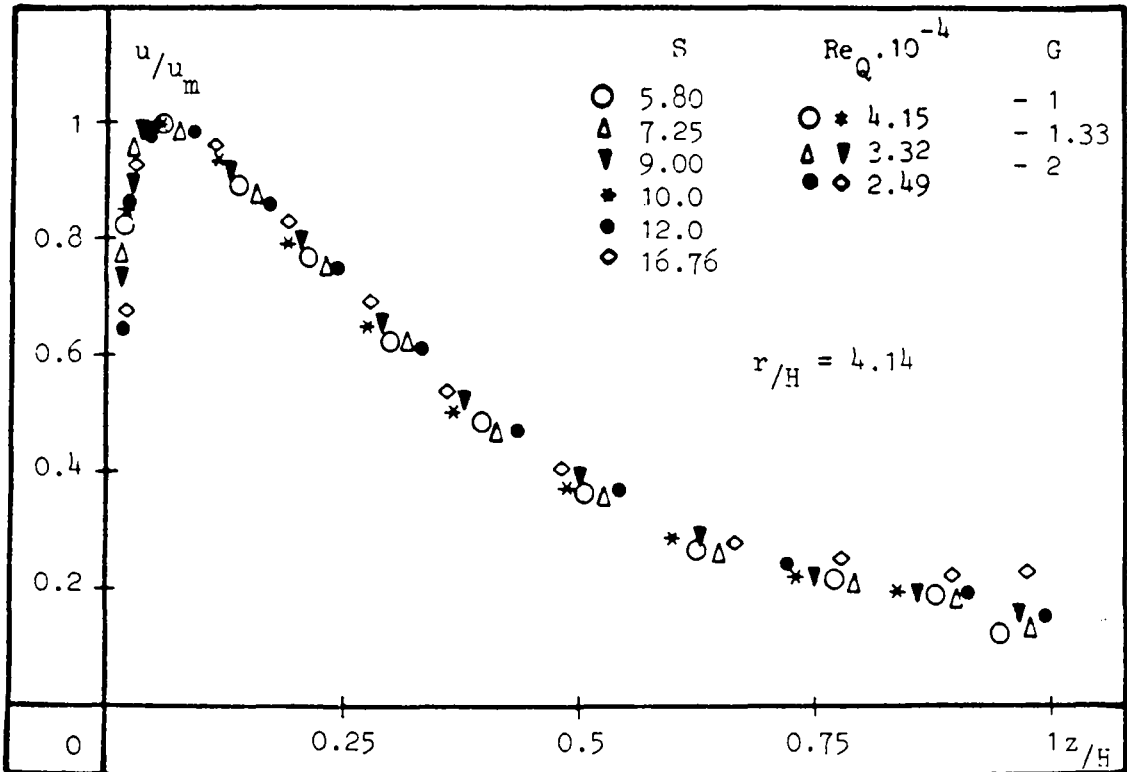


Figure 3

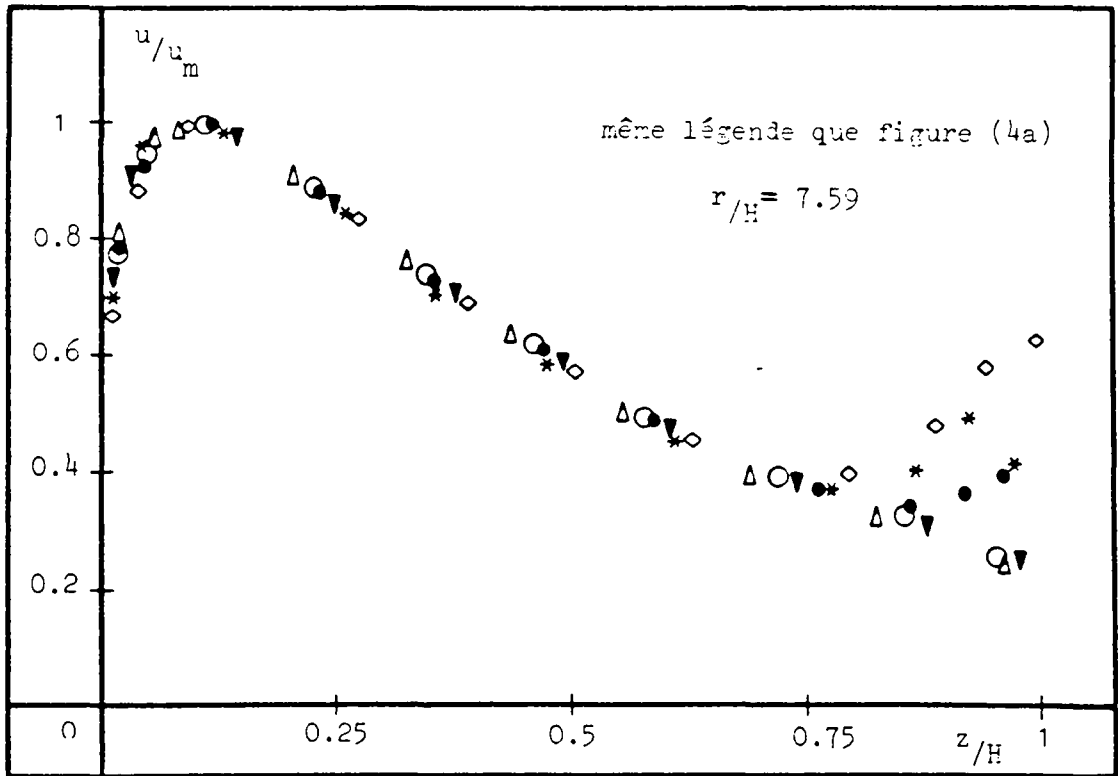


(a)

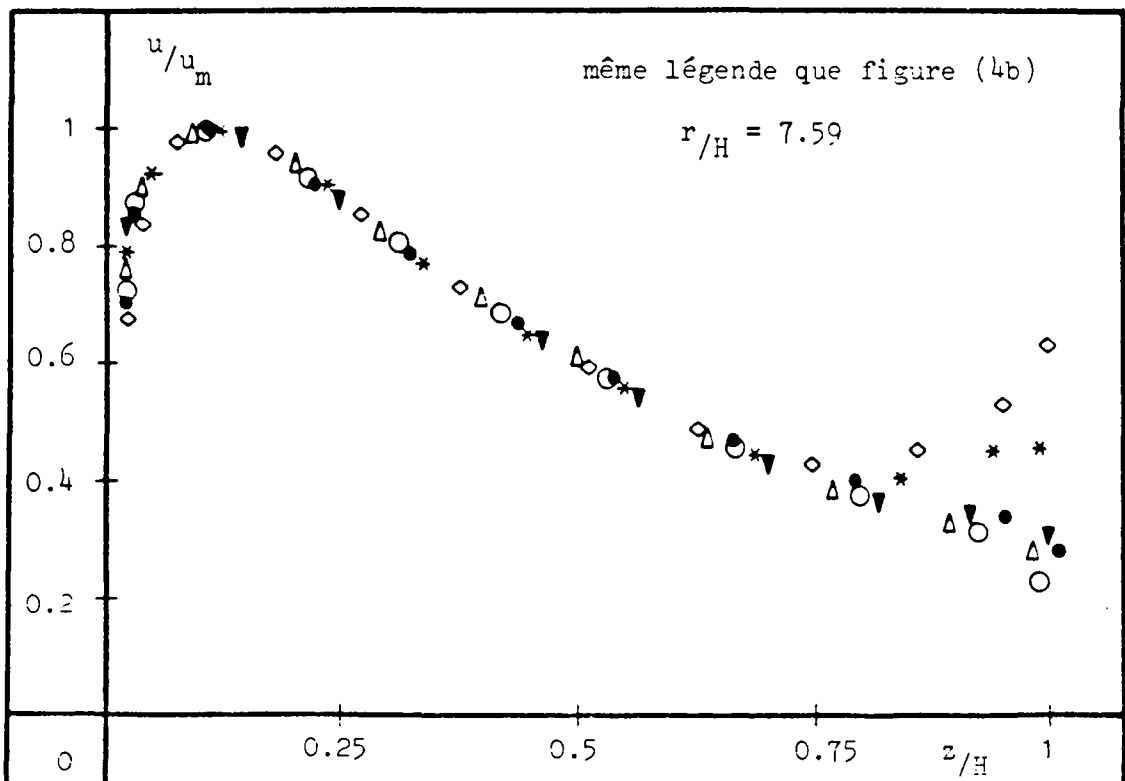


(b)

Figure 4



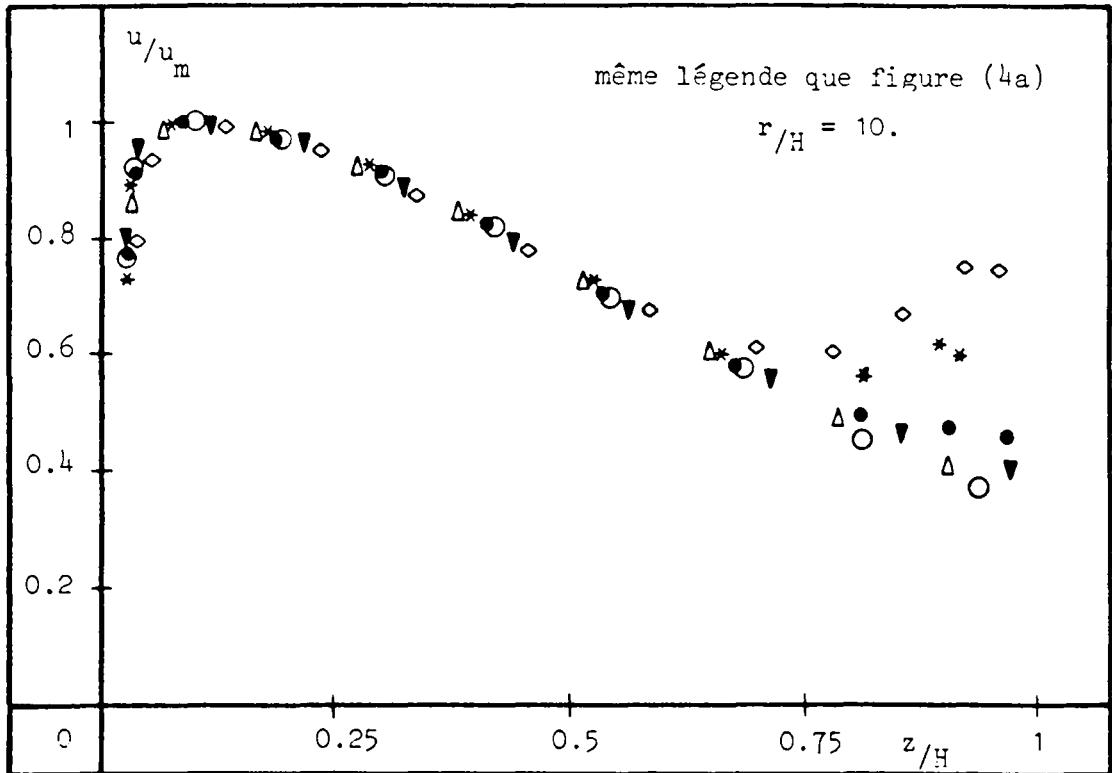
(a)



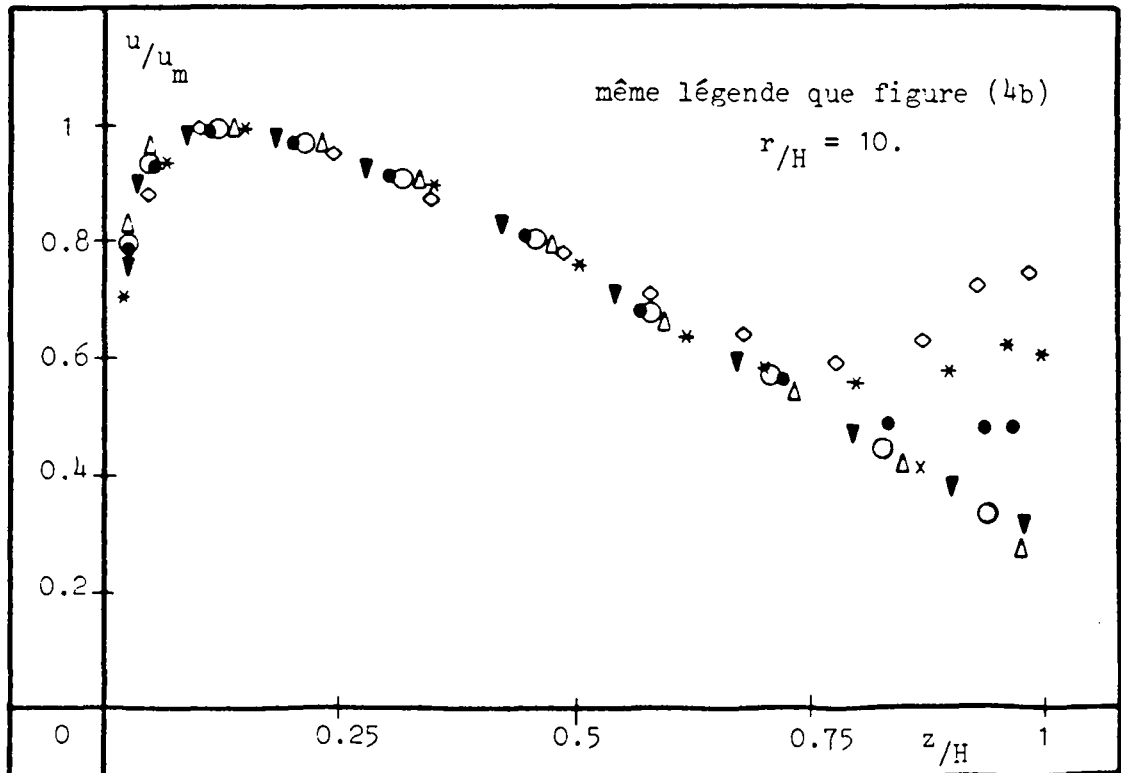
(b)

figure 5



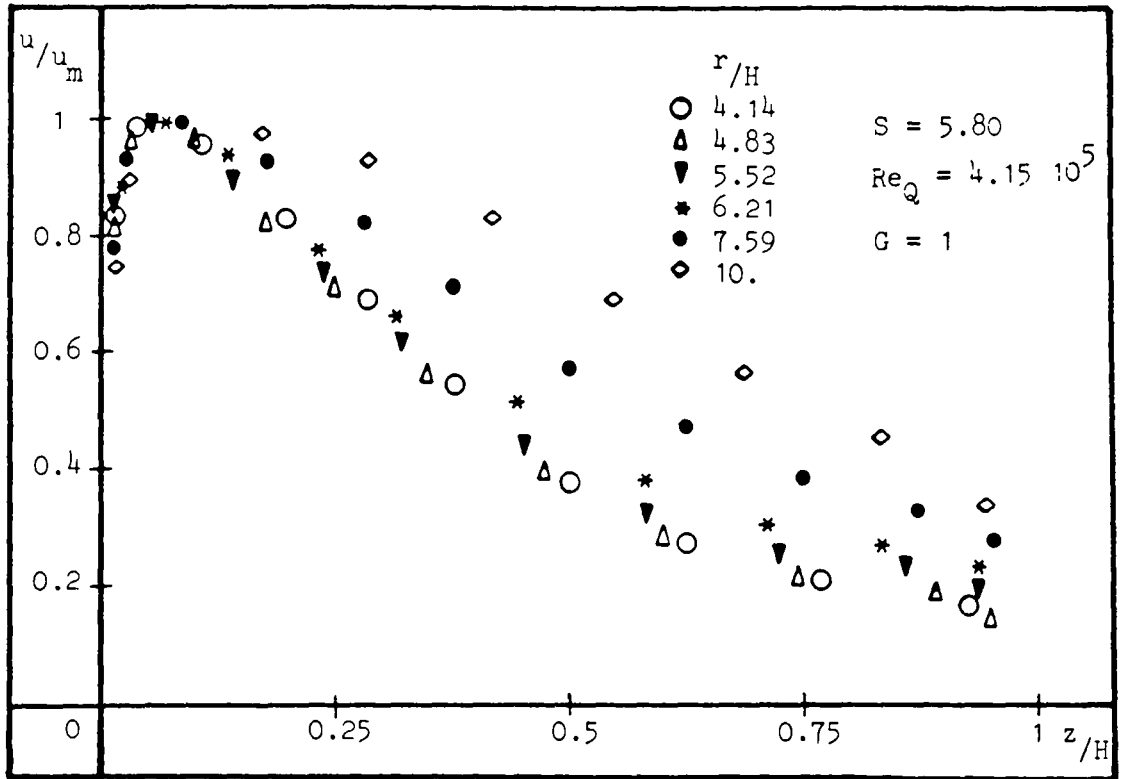


(a)

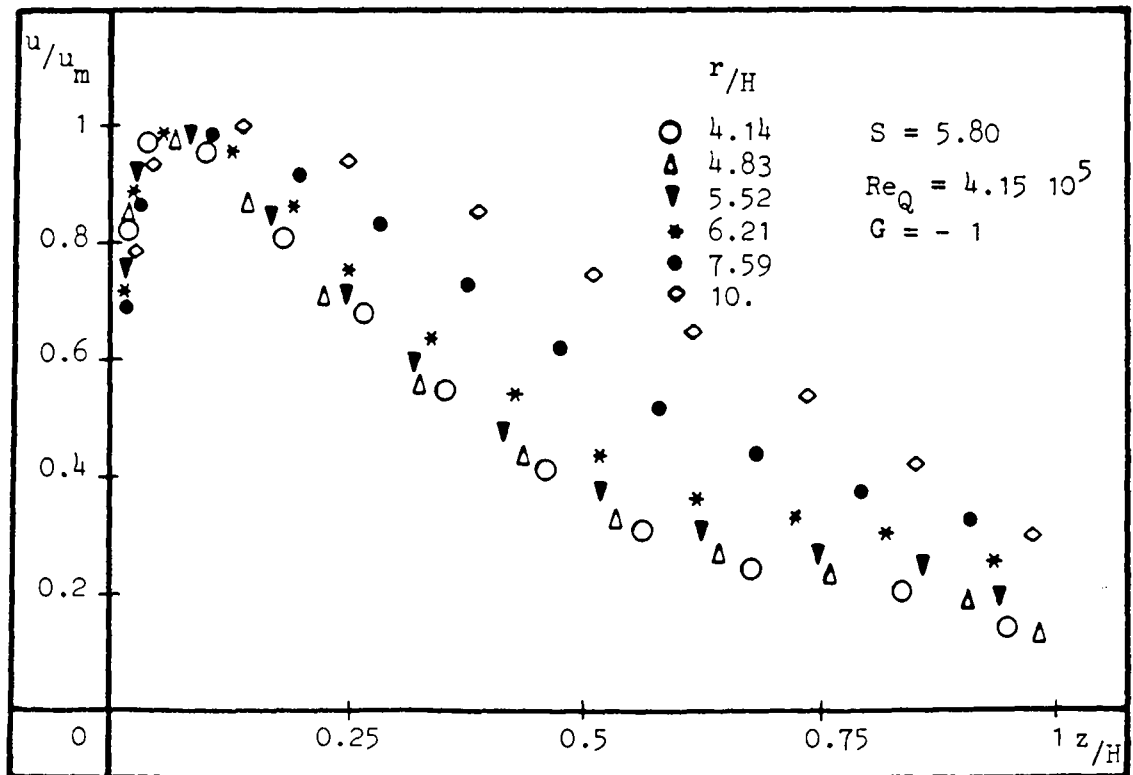


(b)

Figure 6

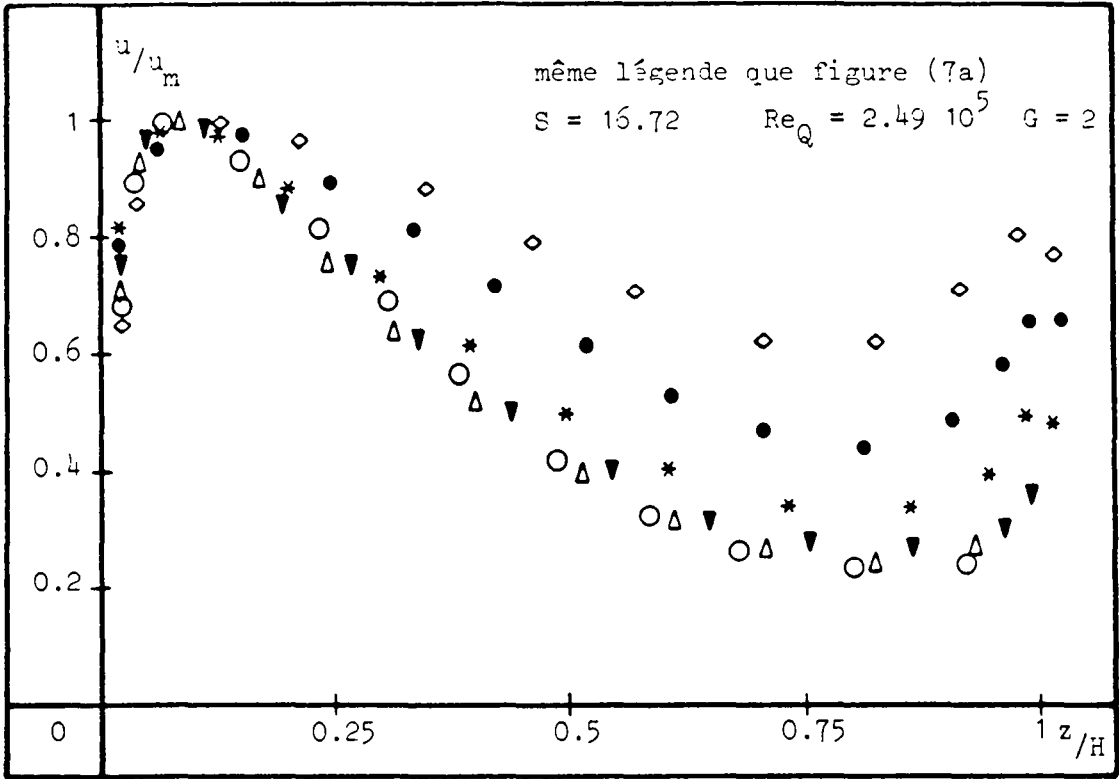


(a)

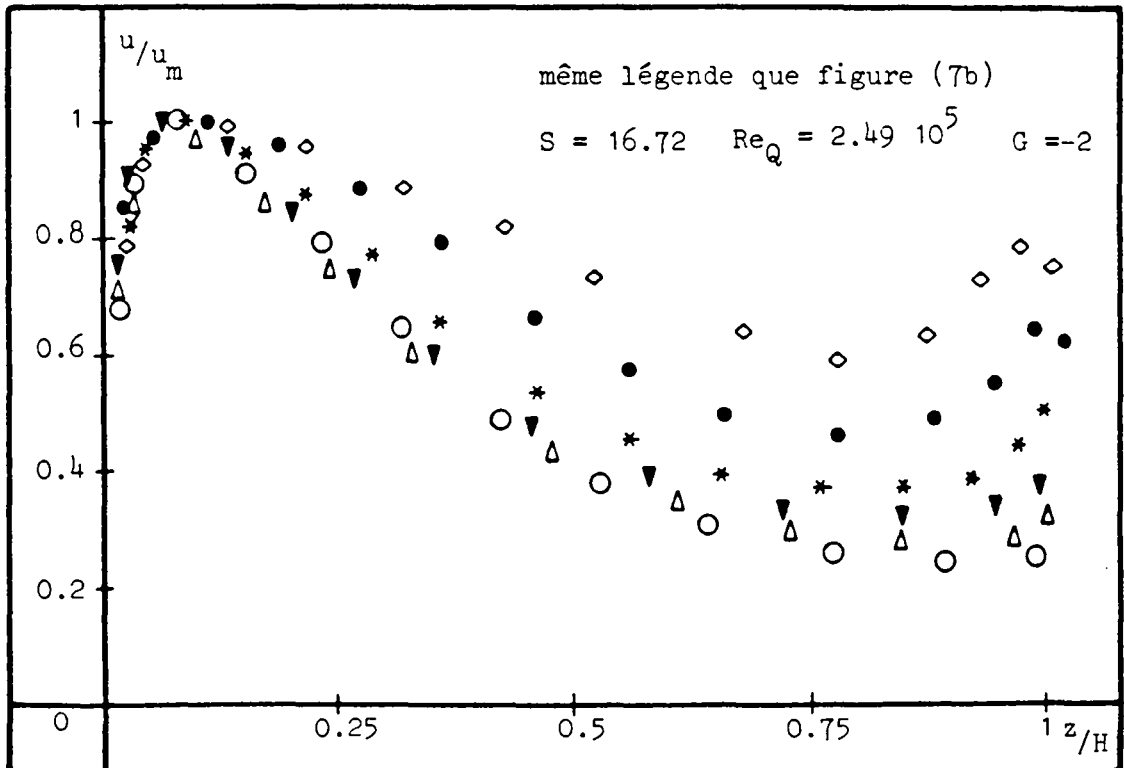


(b)

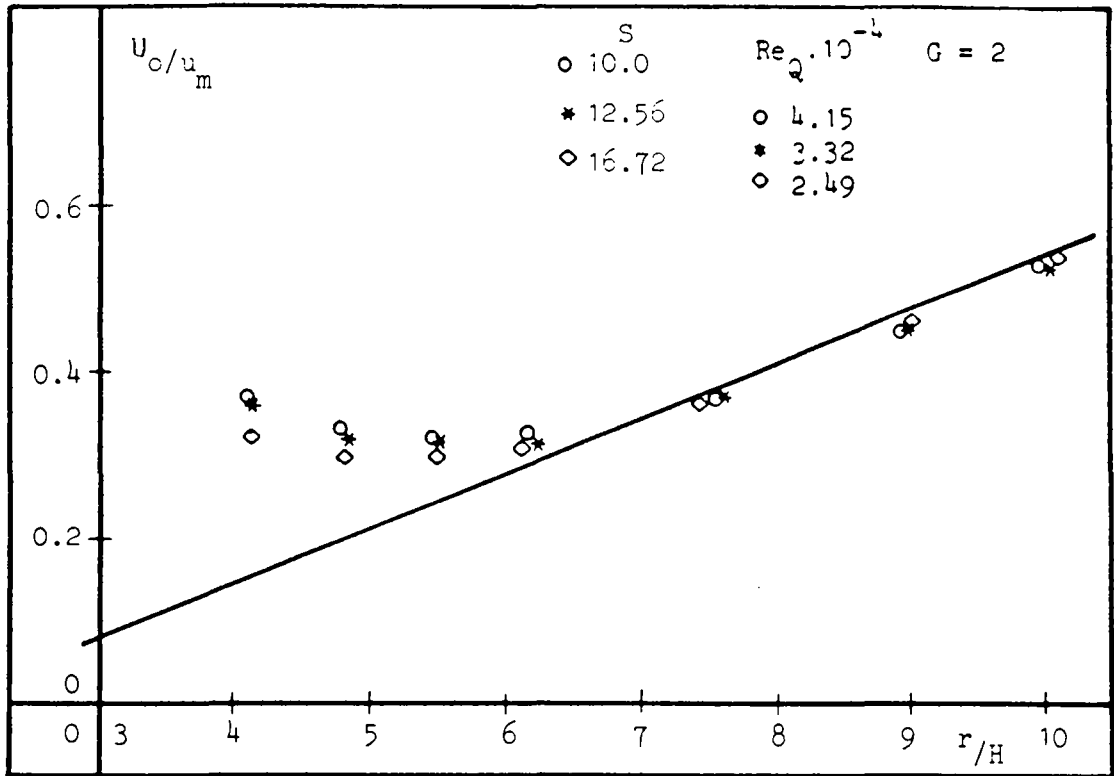
Figure 7



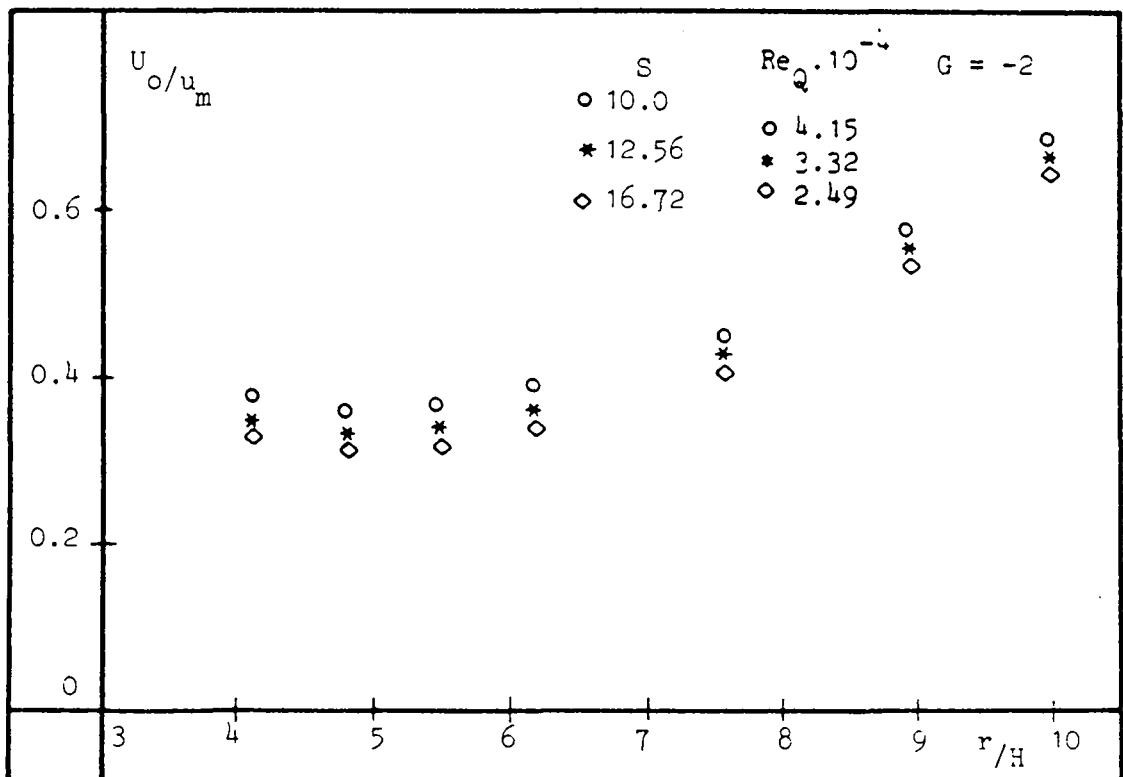
(a)



(b)

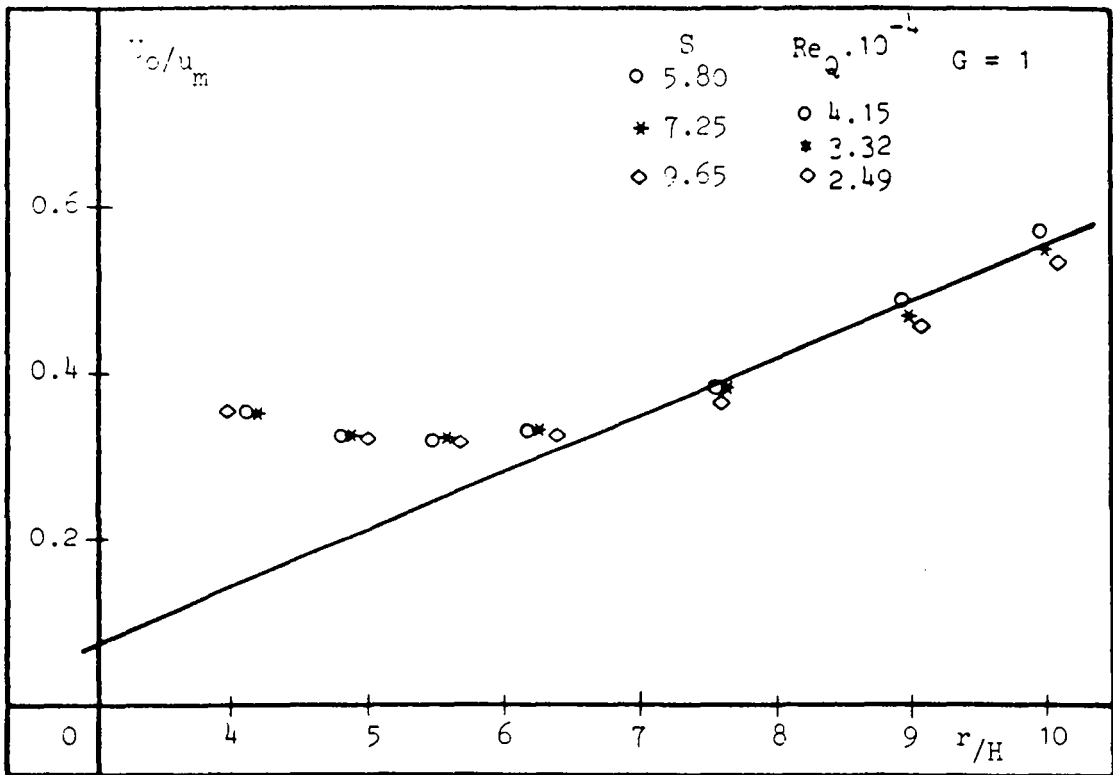


(a)

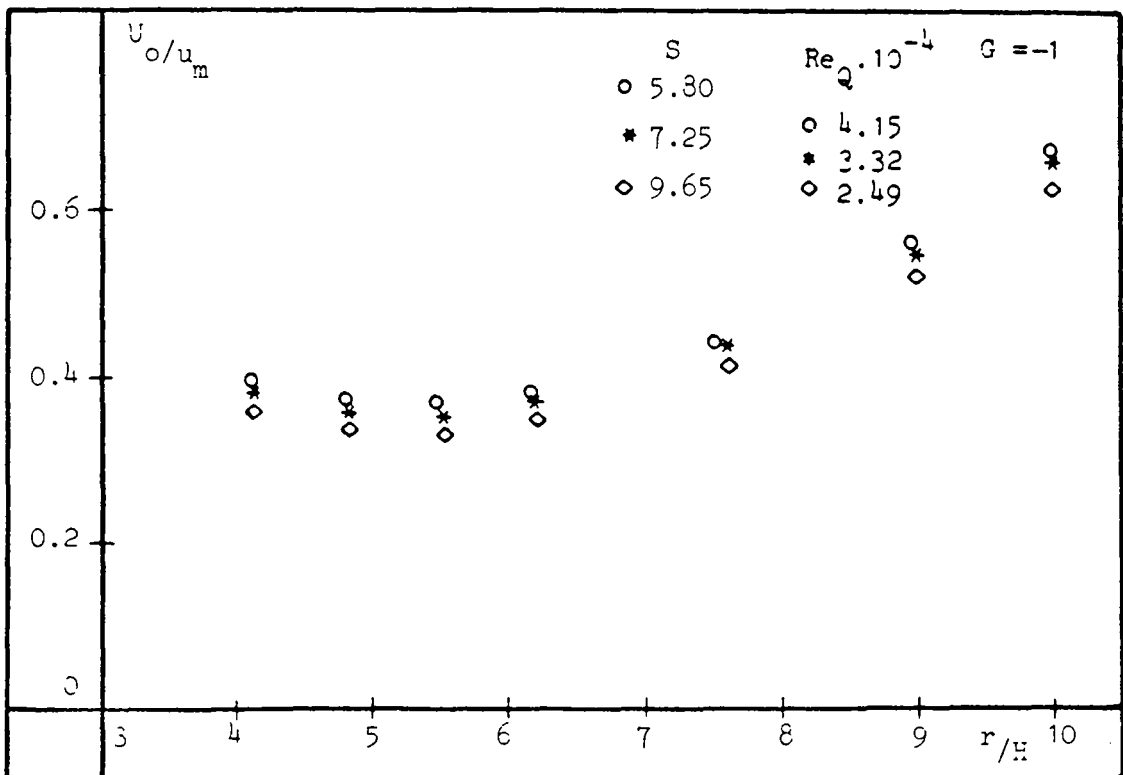


(b)

Figure 9



(a)



(b)

Figure 10

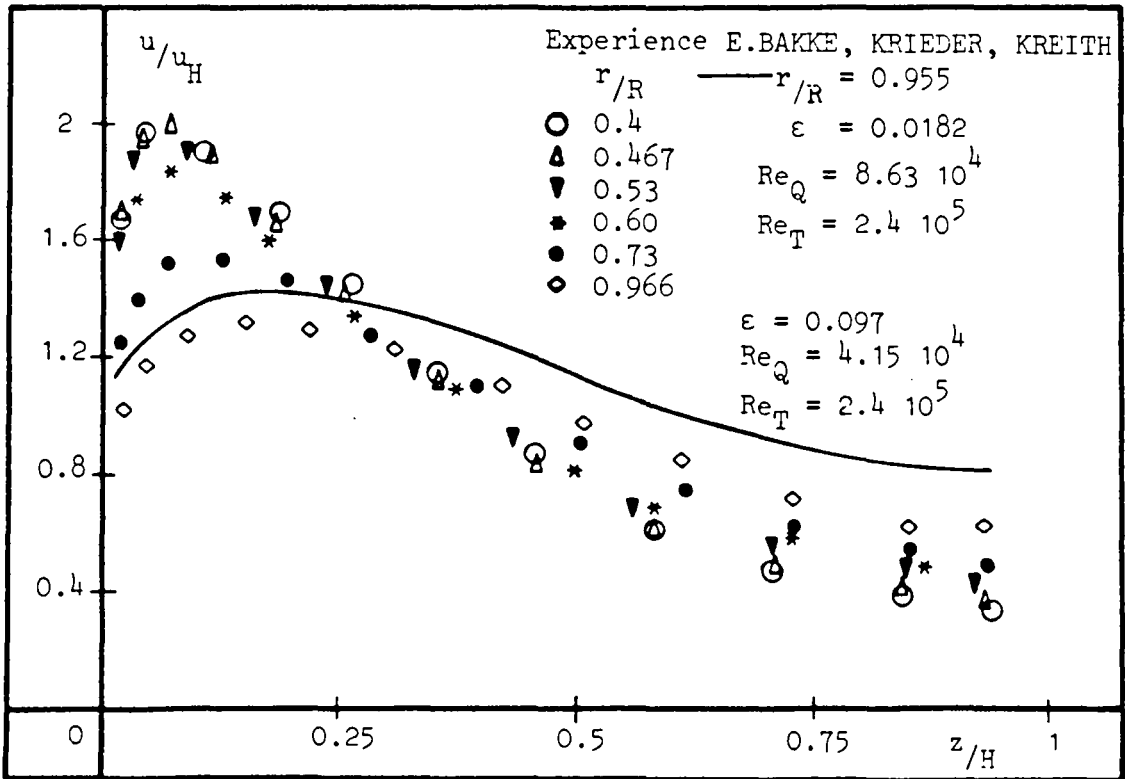
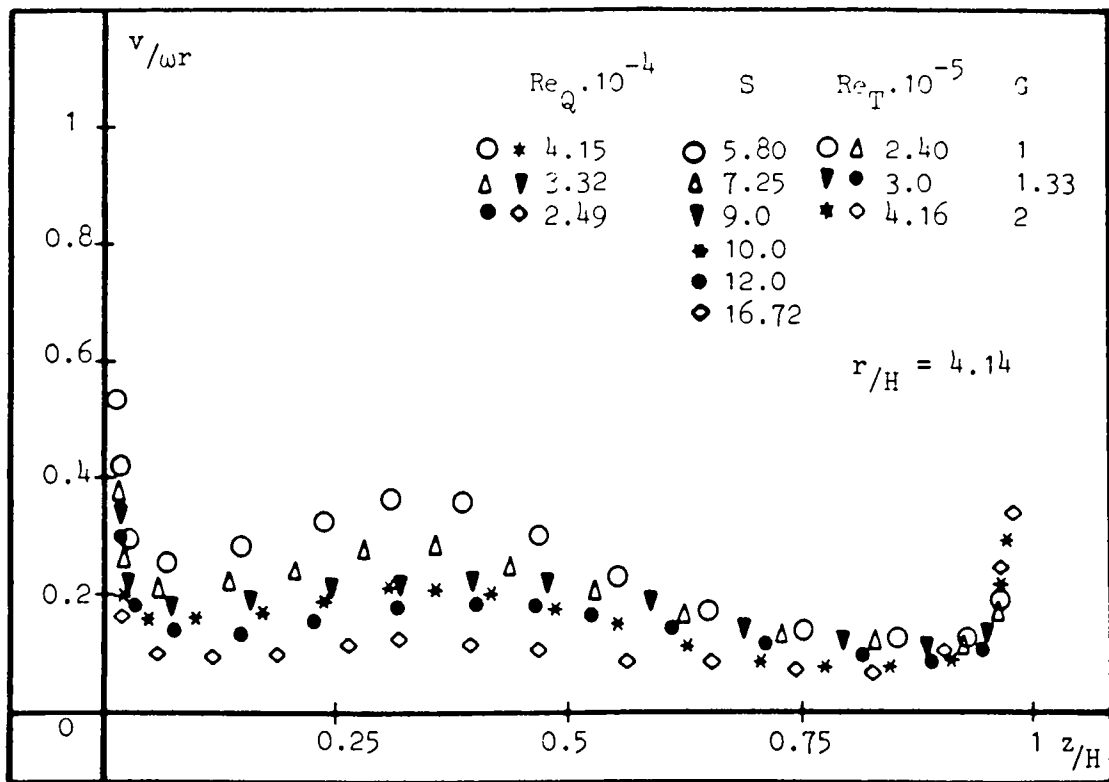
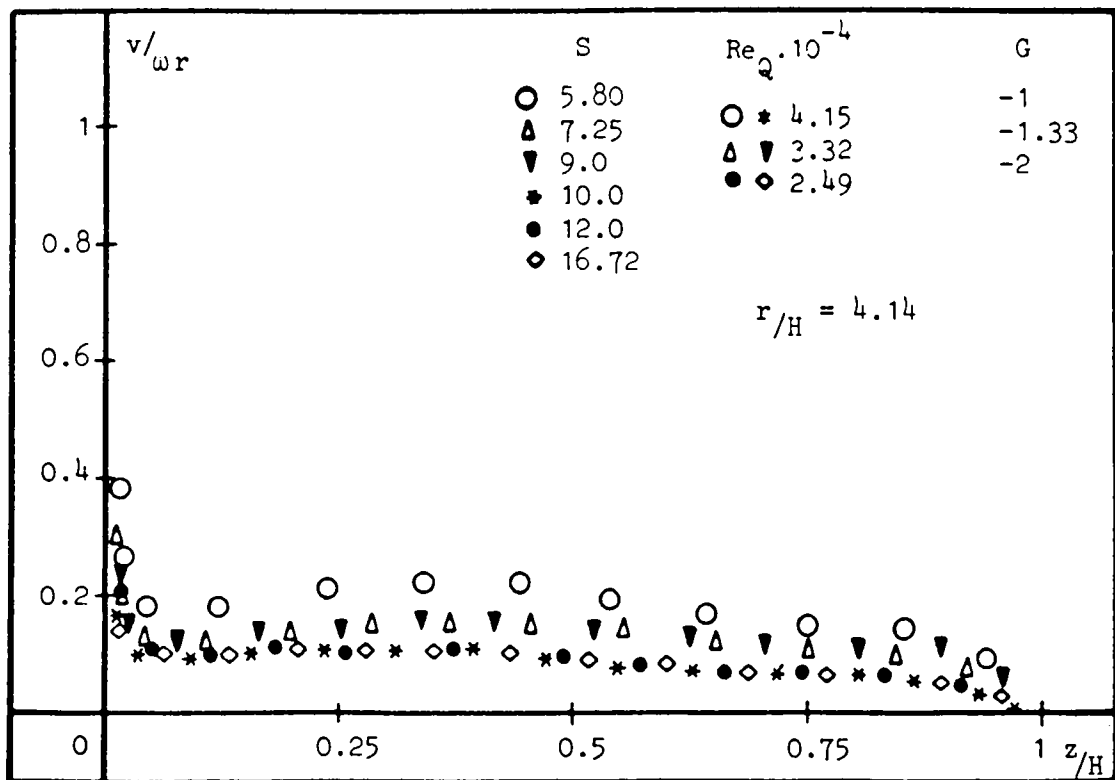


Figure 11

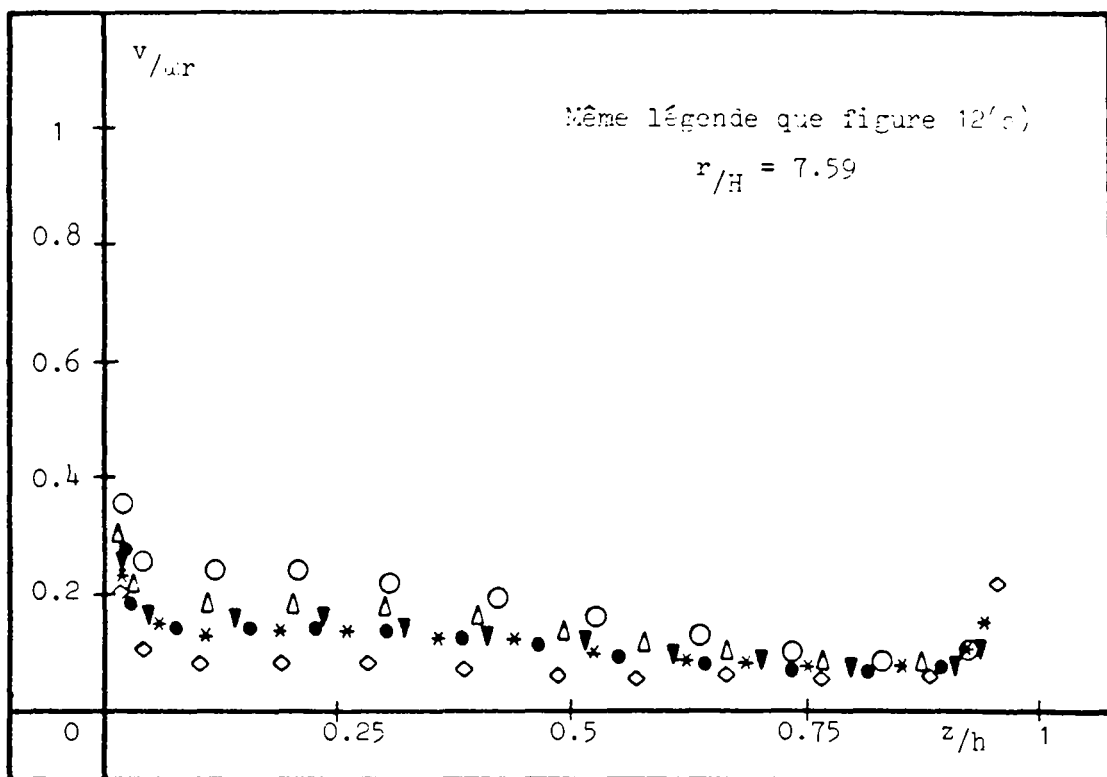


(a)

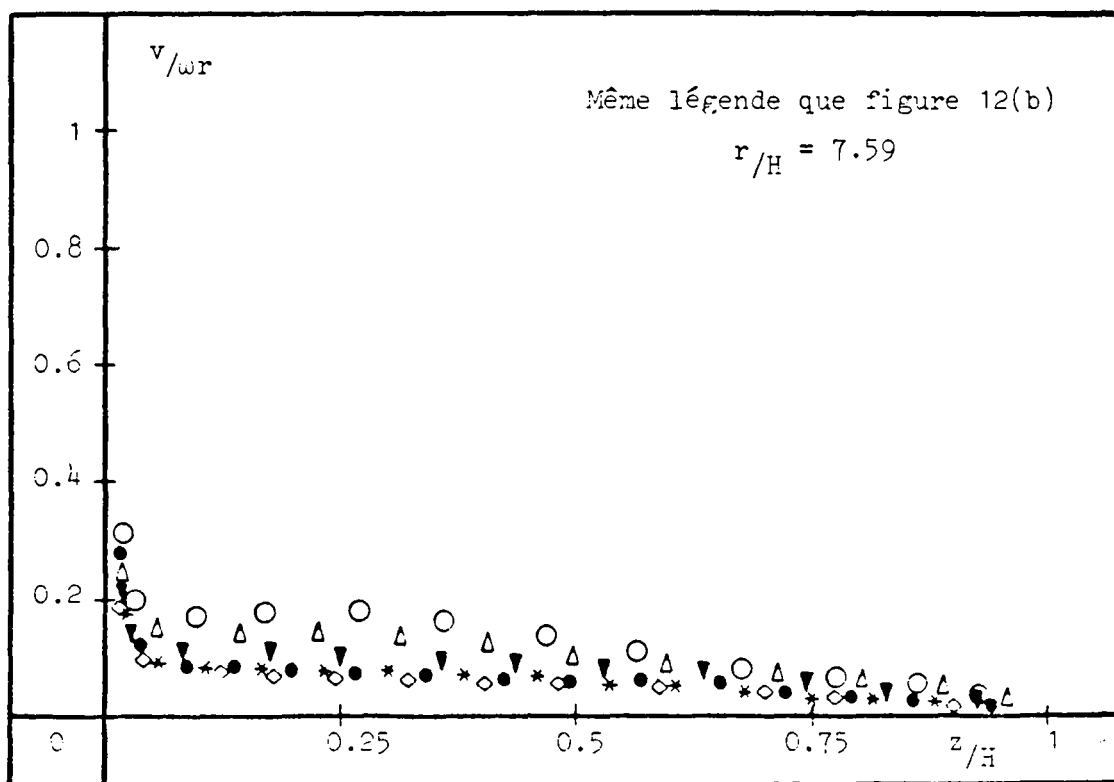


(b)

Figure 12



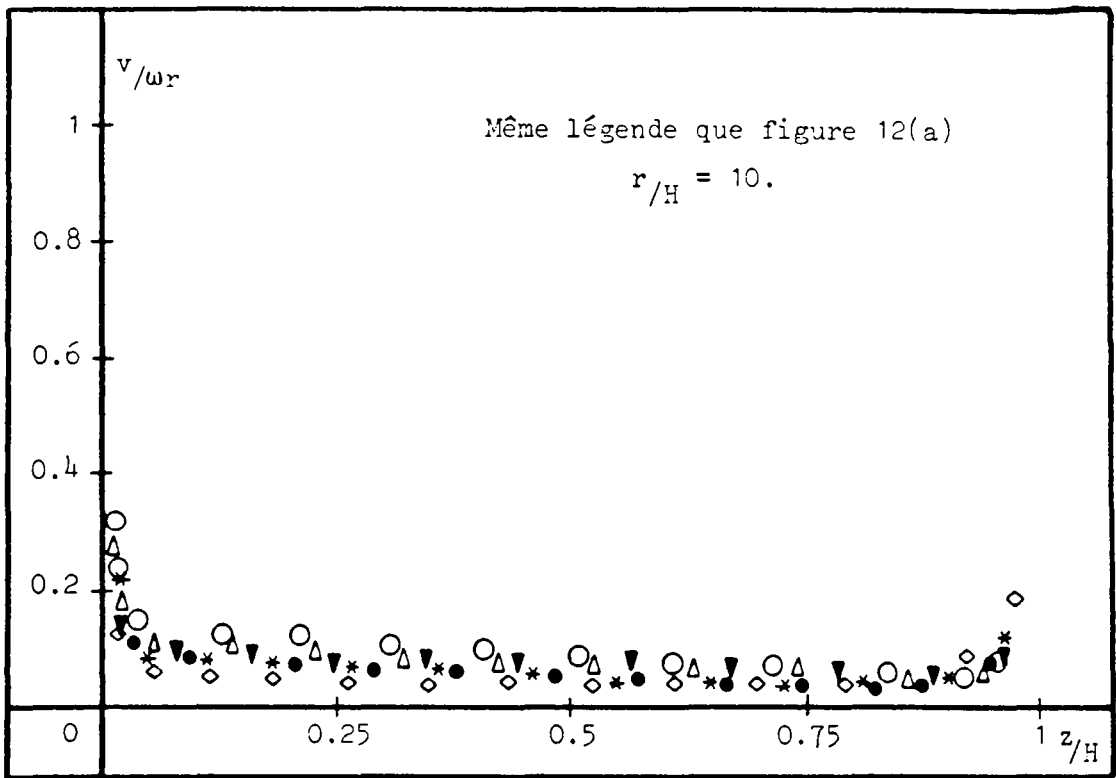
(a)



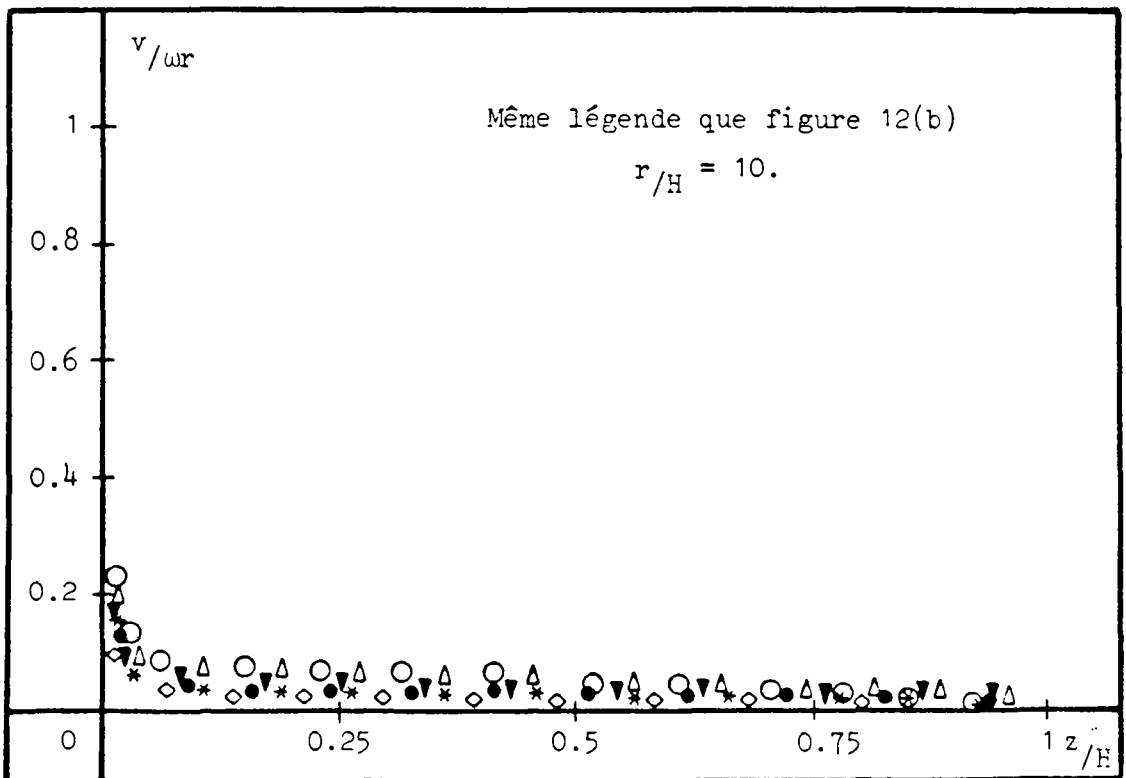
(b)

Figure 13





(a)



(b)

Figure 14

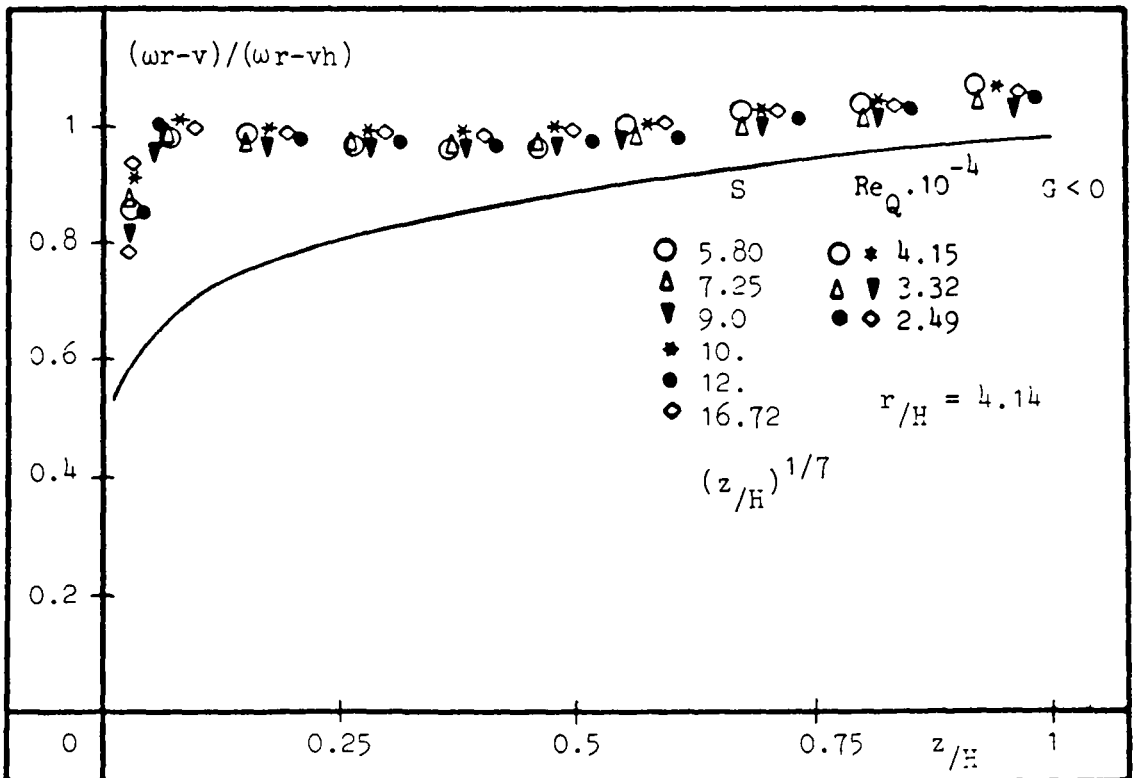
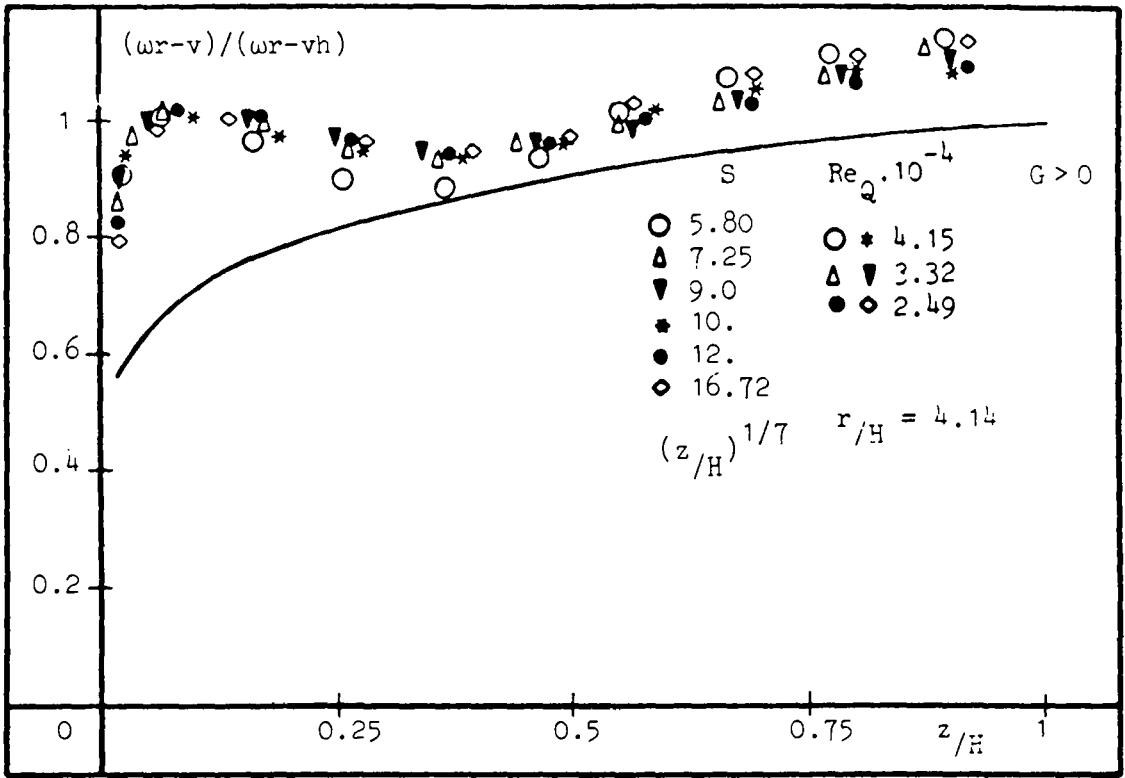


Figure 15

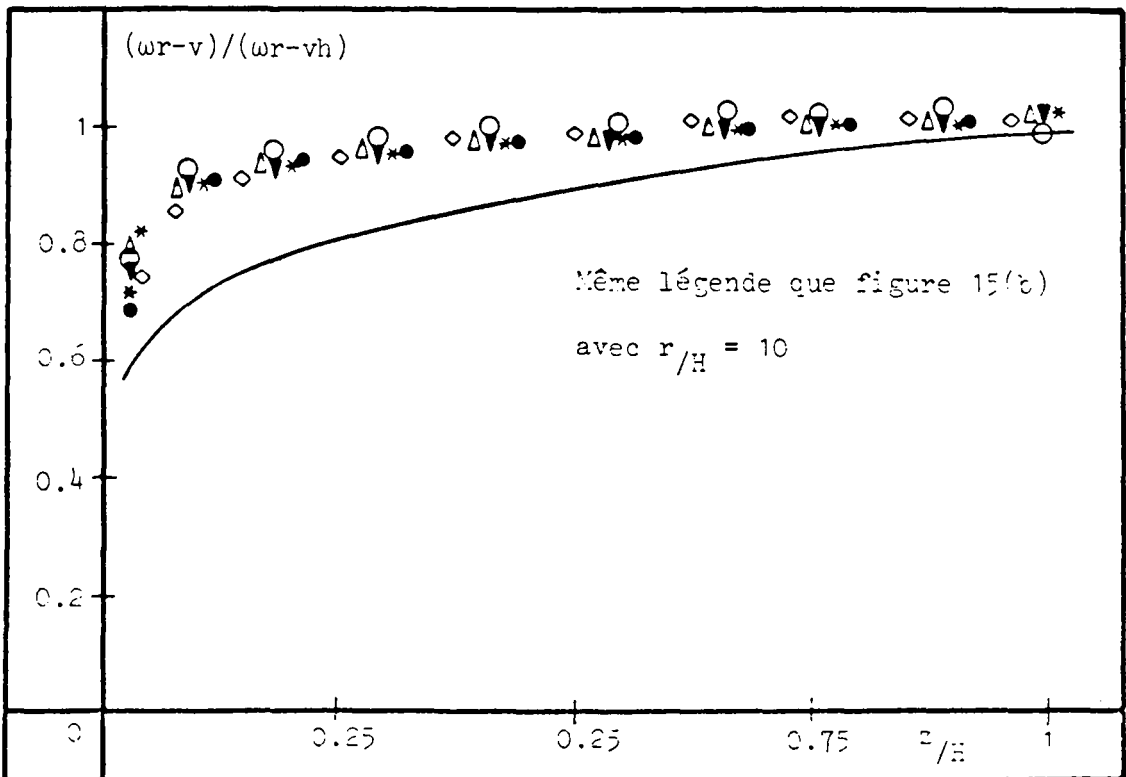
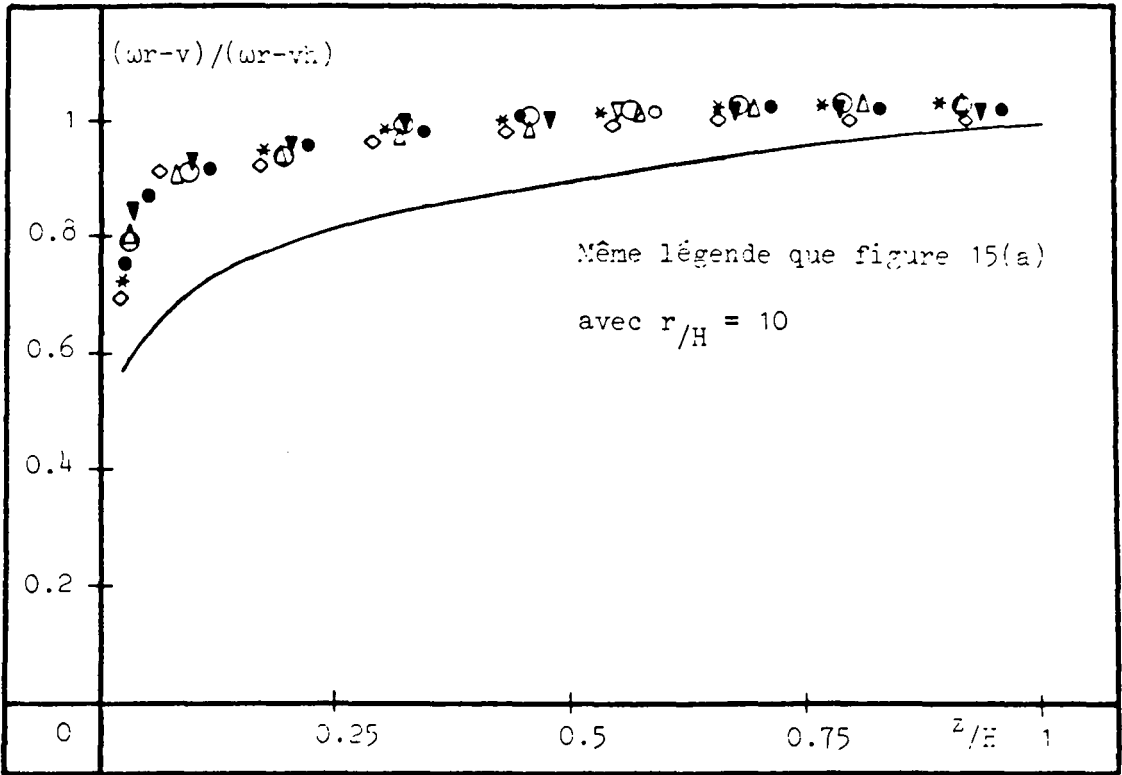
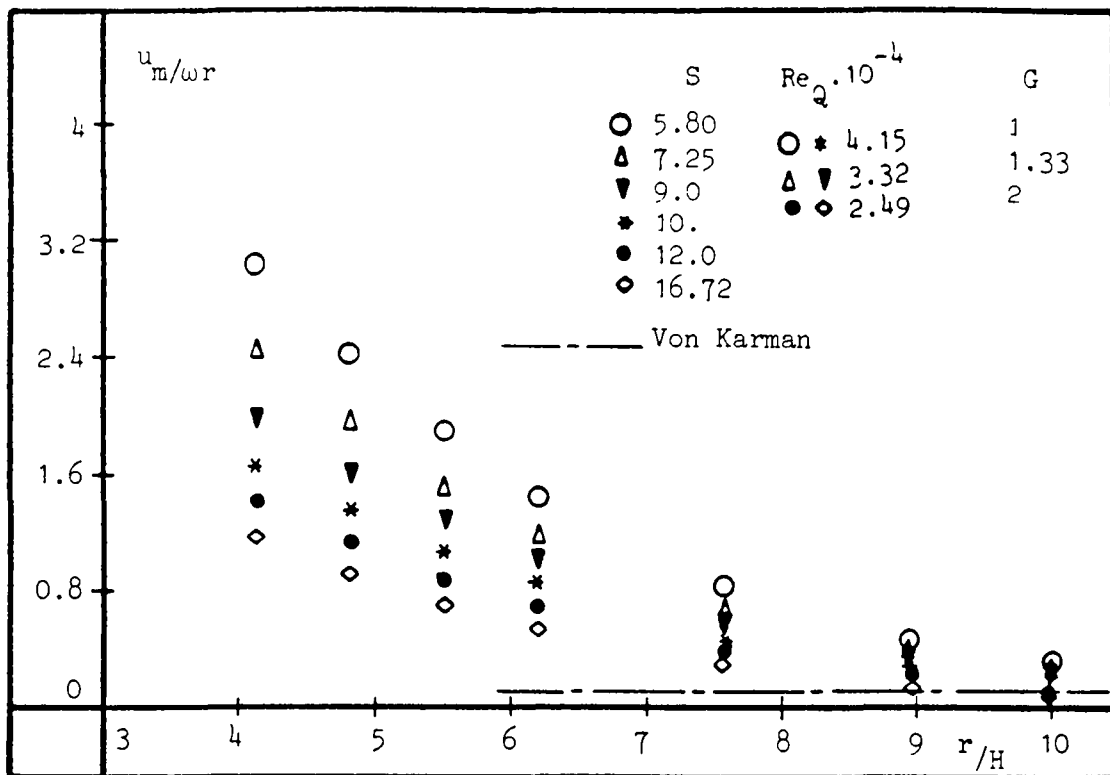
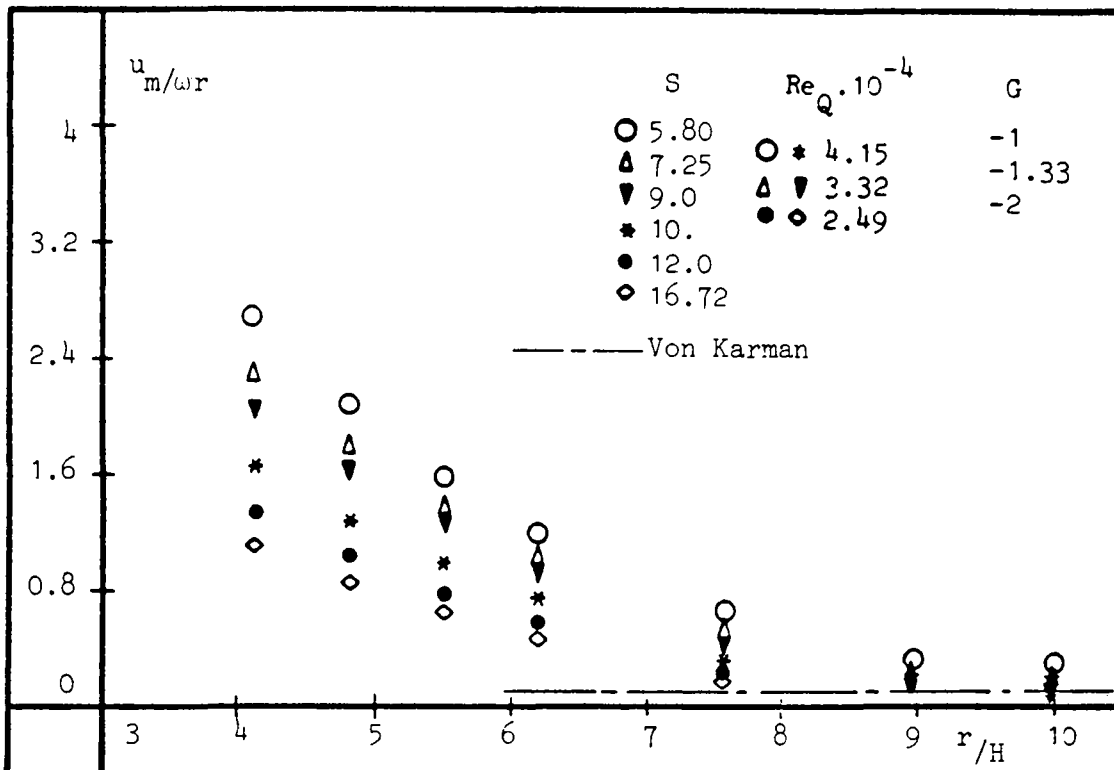


Figure 16

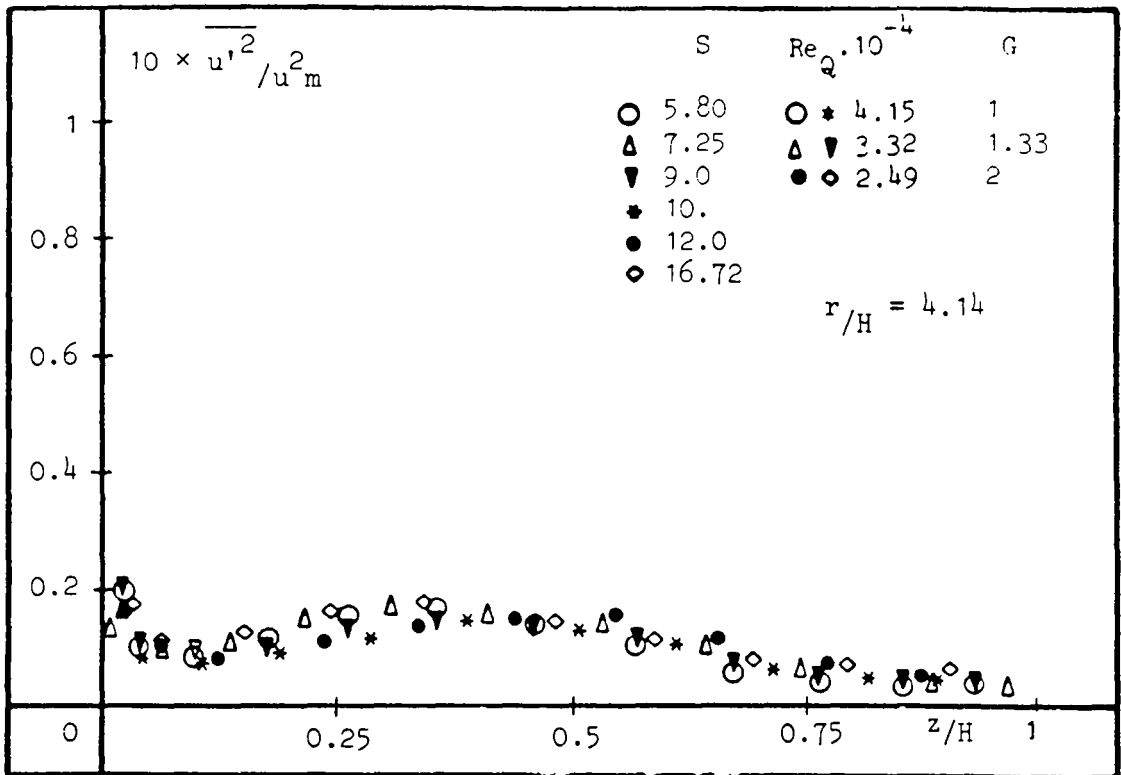


(a)

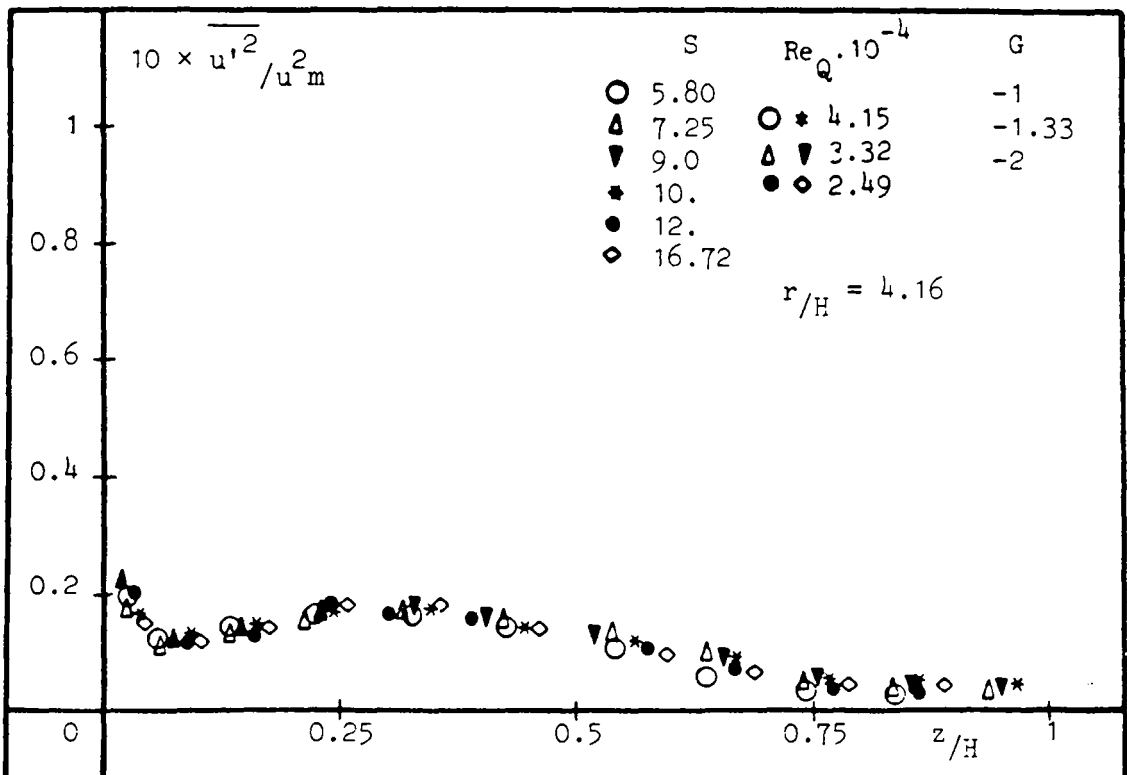


(b)

Figure 17

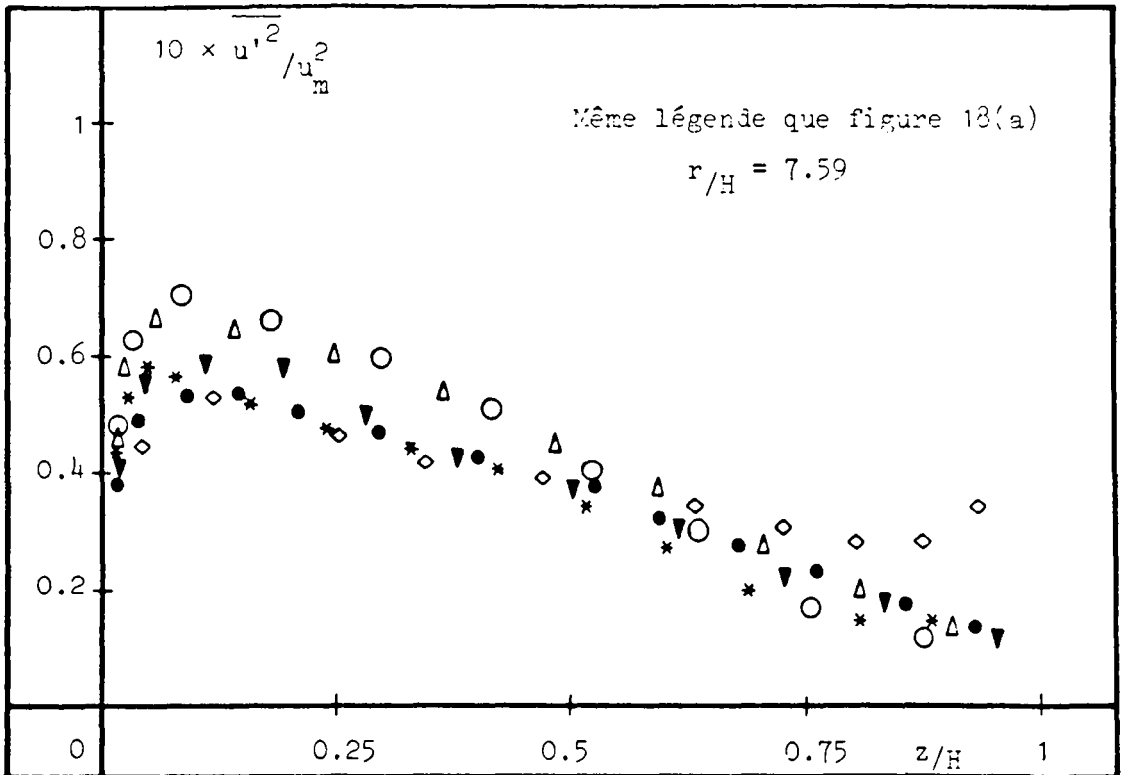


(a)

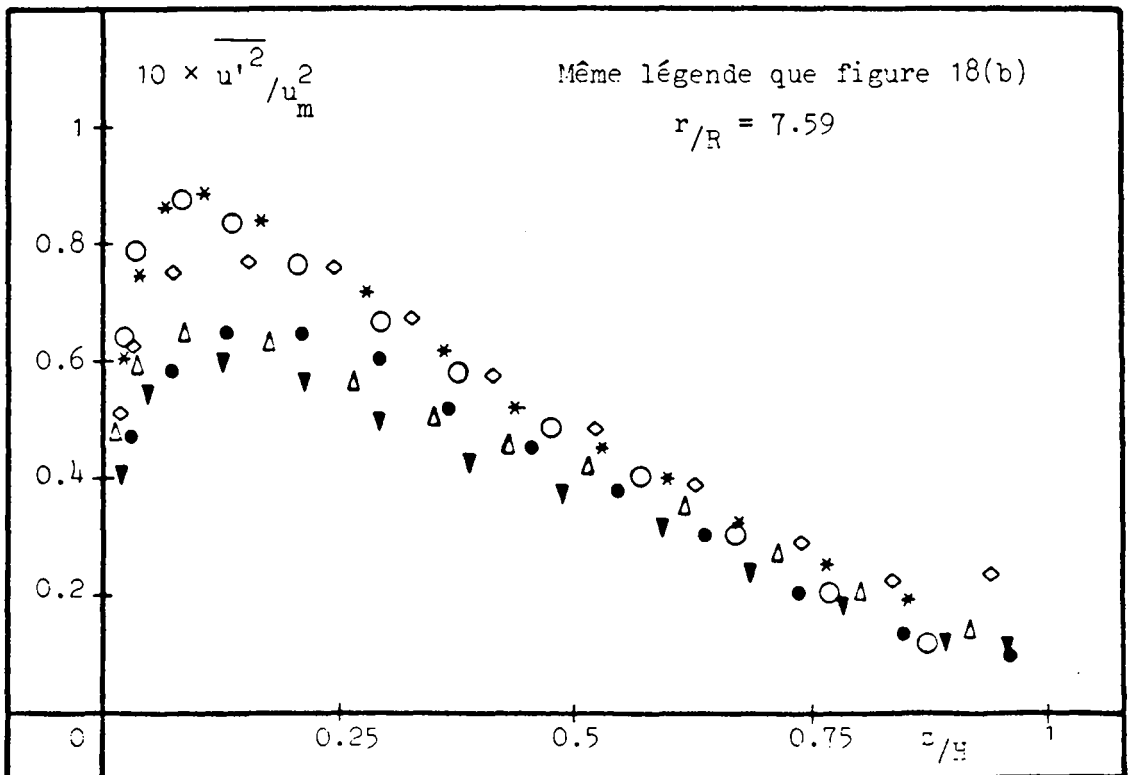


(b)

Figure 18

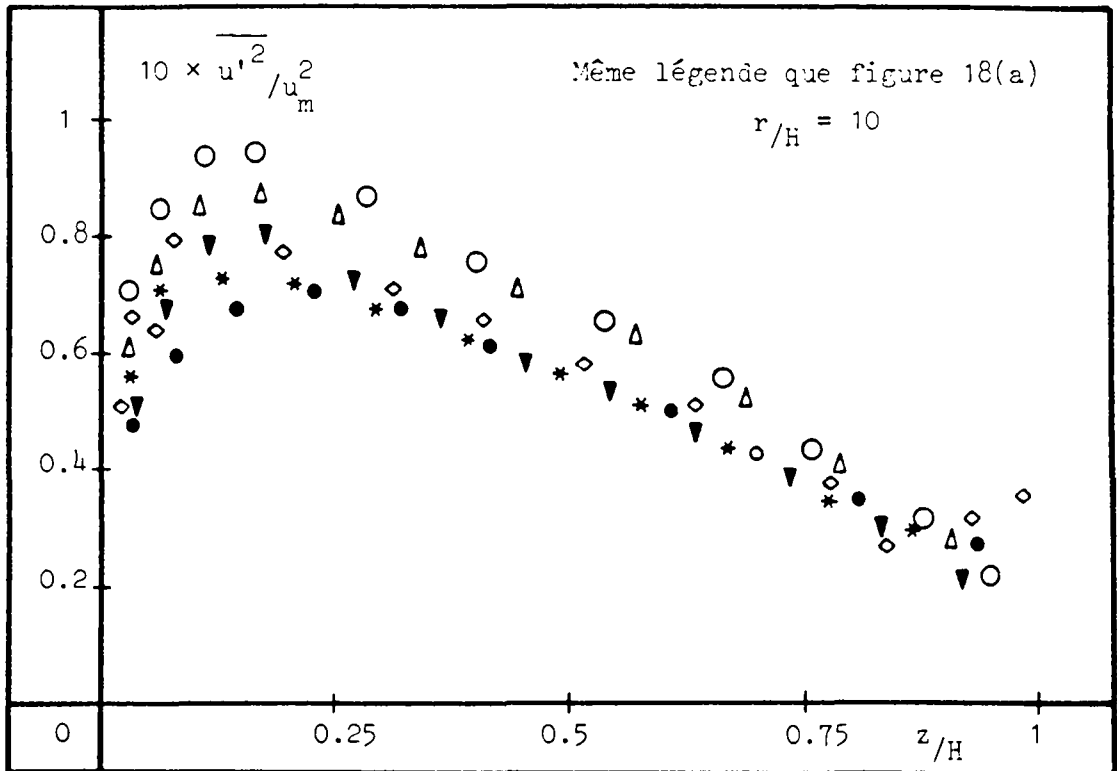


(a)

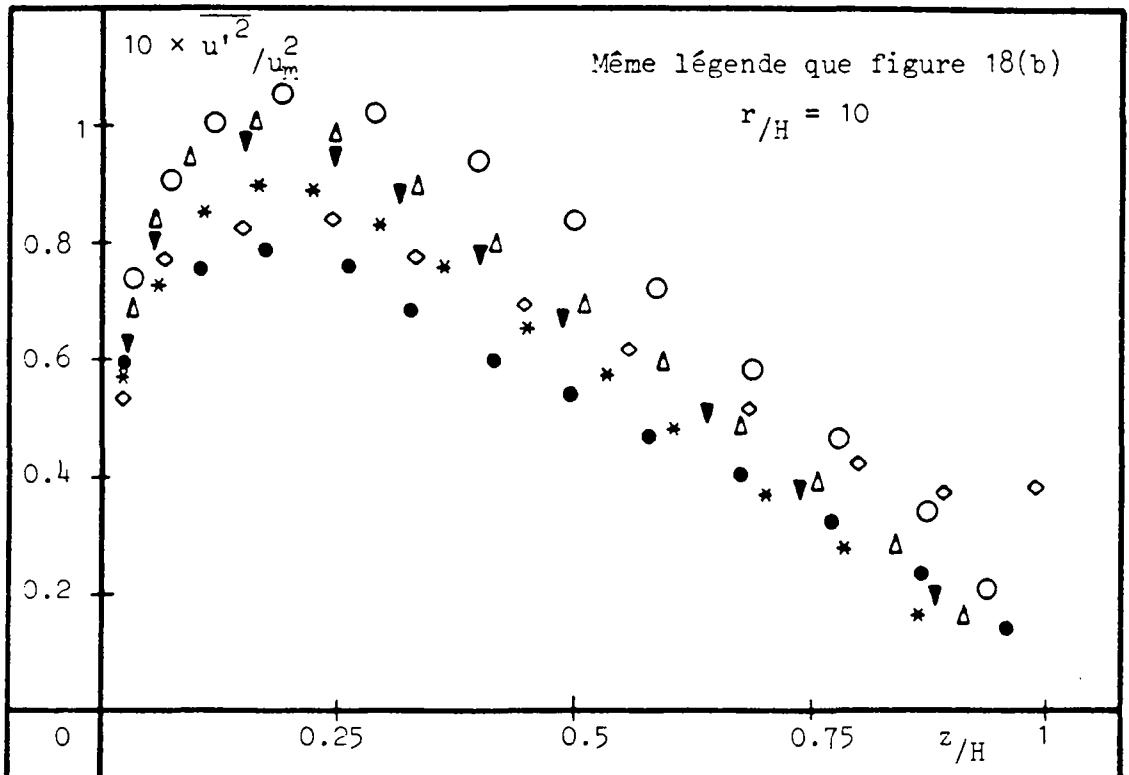


(b)

Figure 19

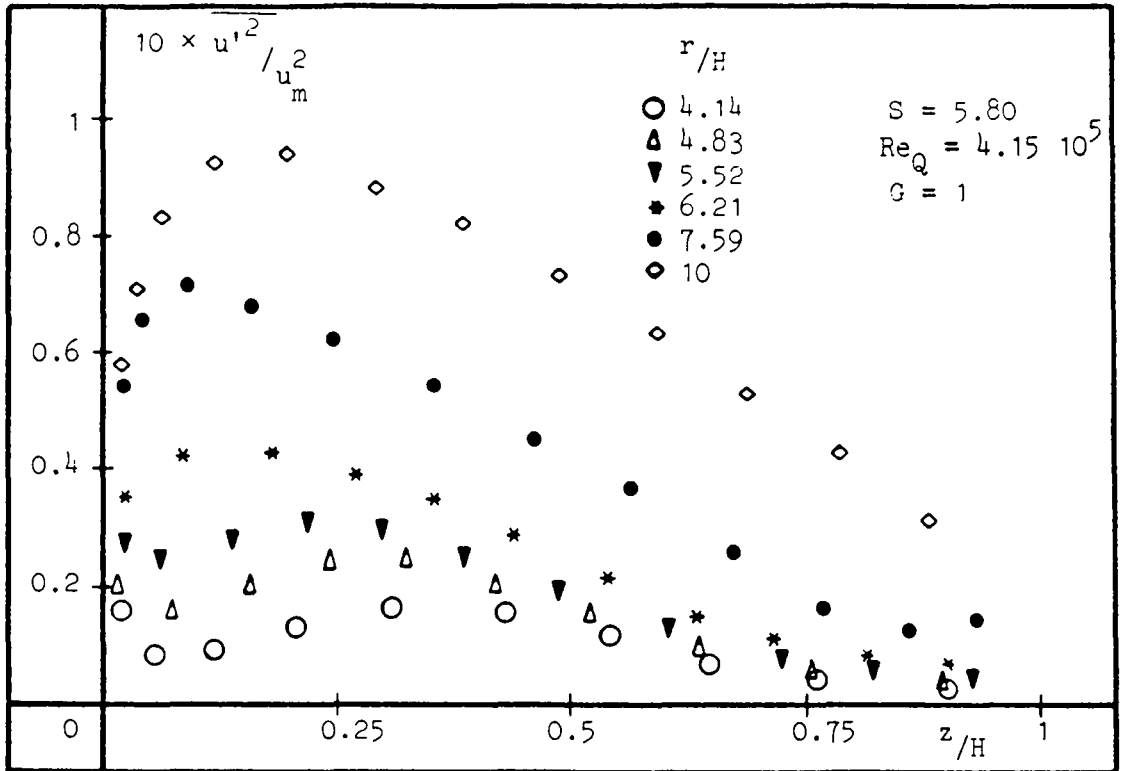


(a)

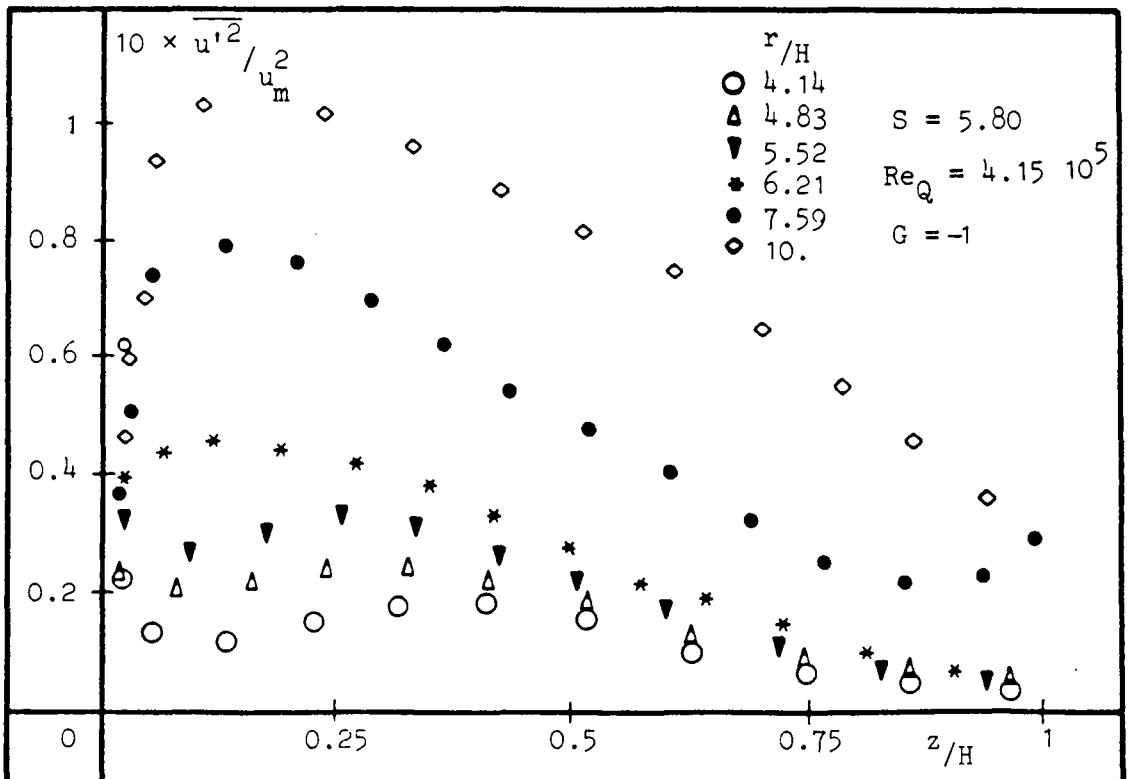


(b)

Figure 20



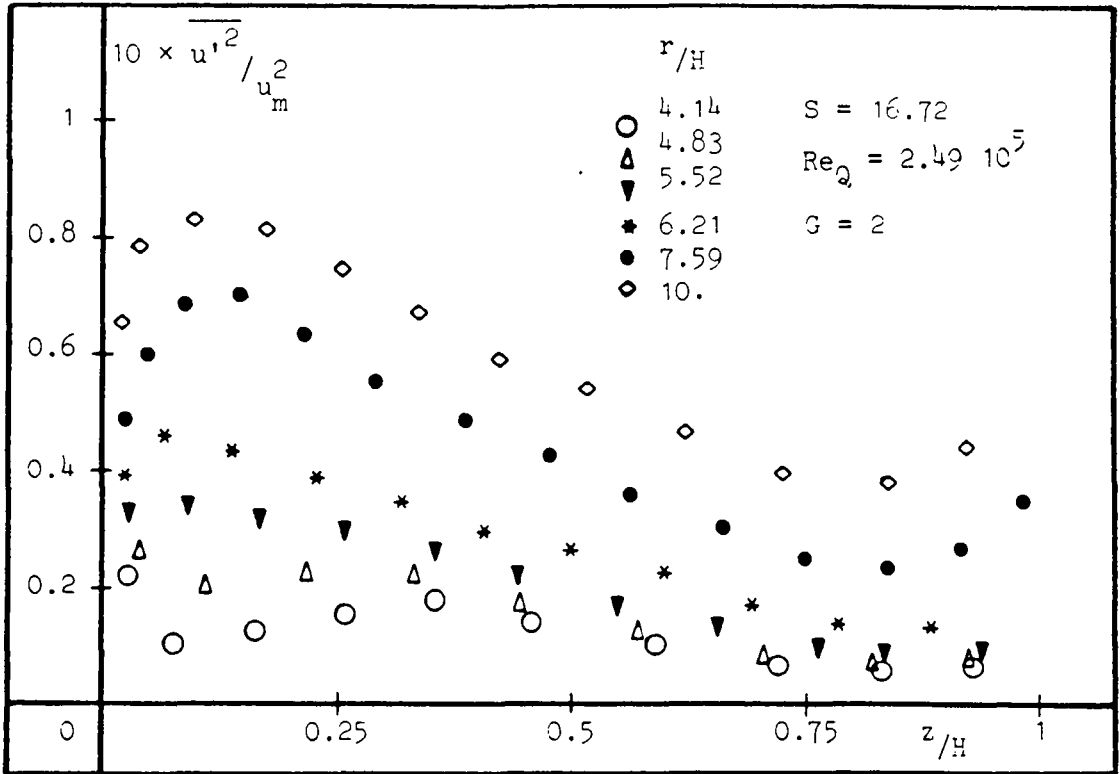
(a)



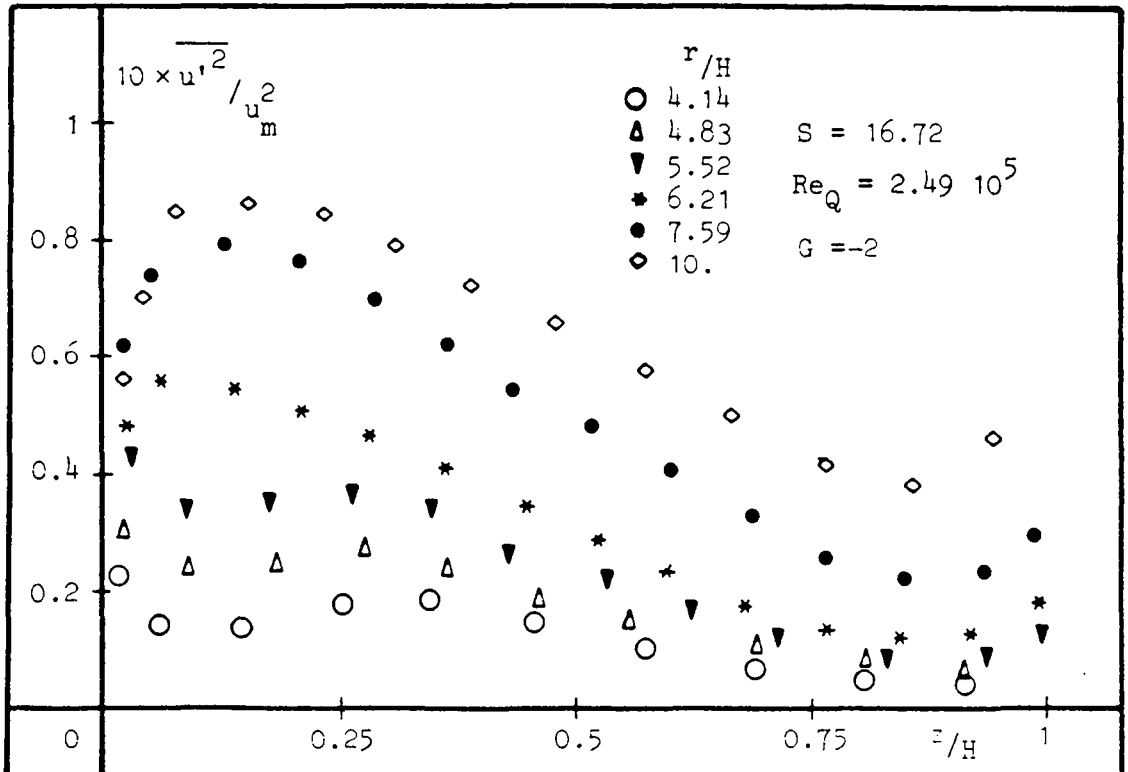
(b)

Figure 21



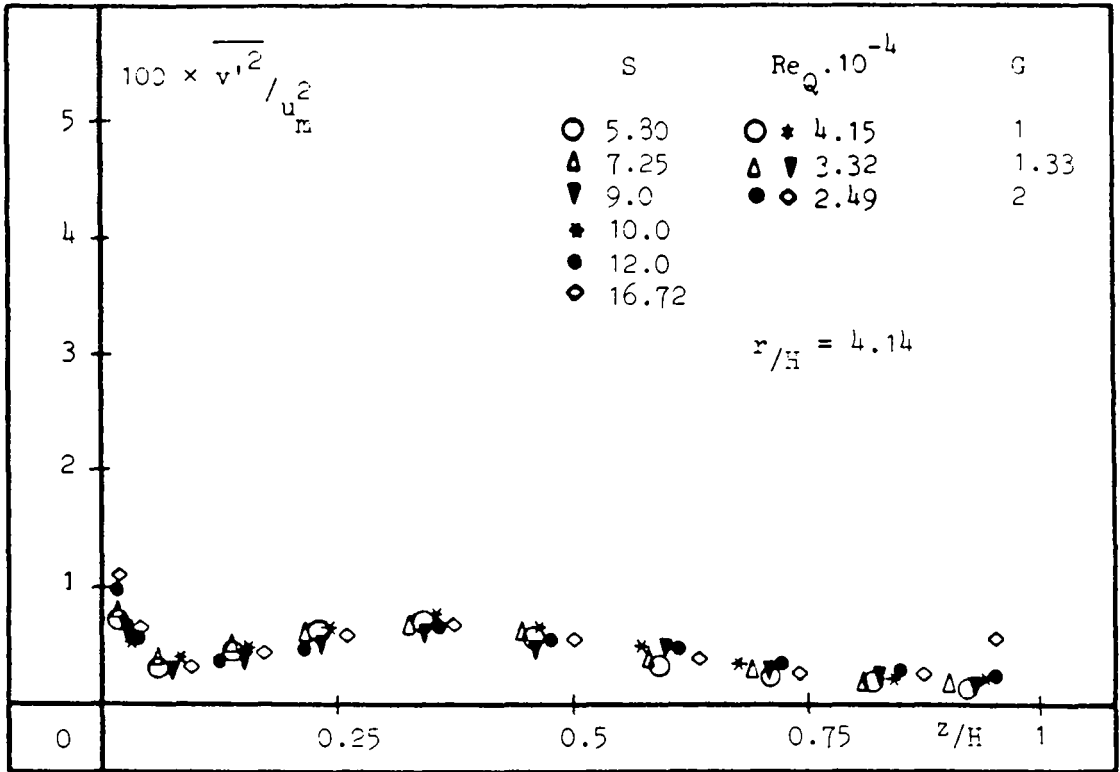


(a)

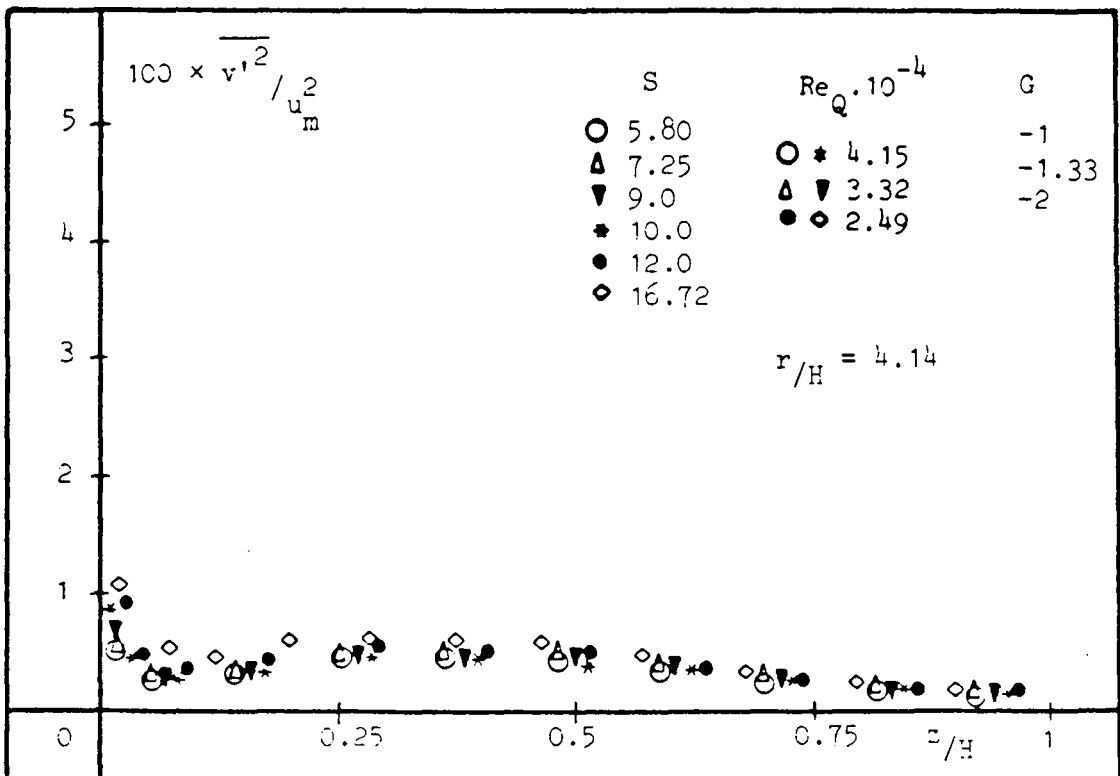


(b)

Figure 22

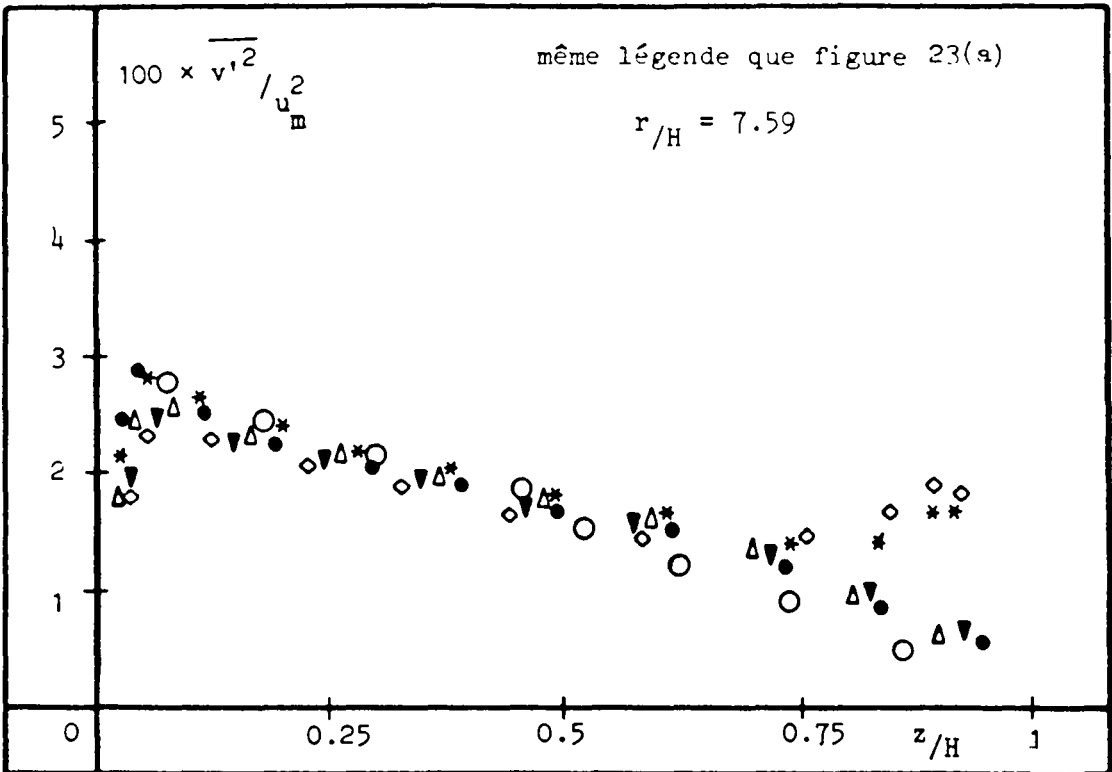


(a)

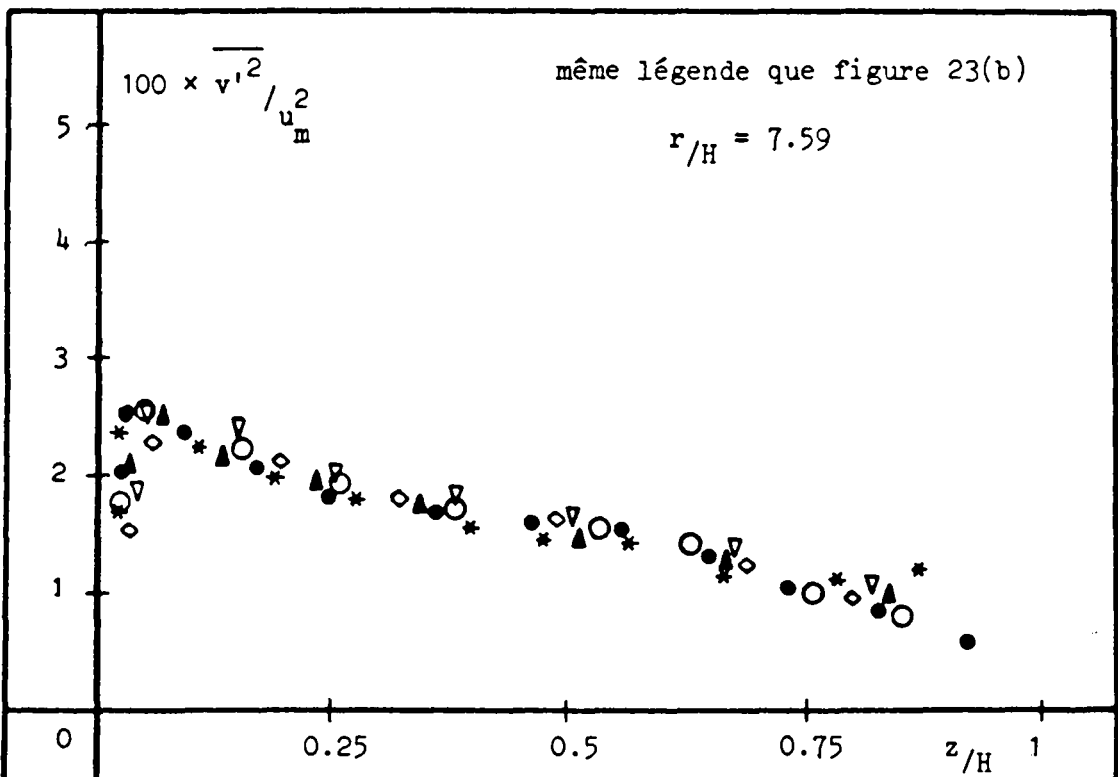


(b)

Figure 23

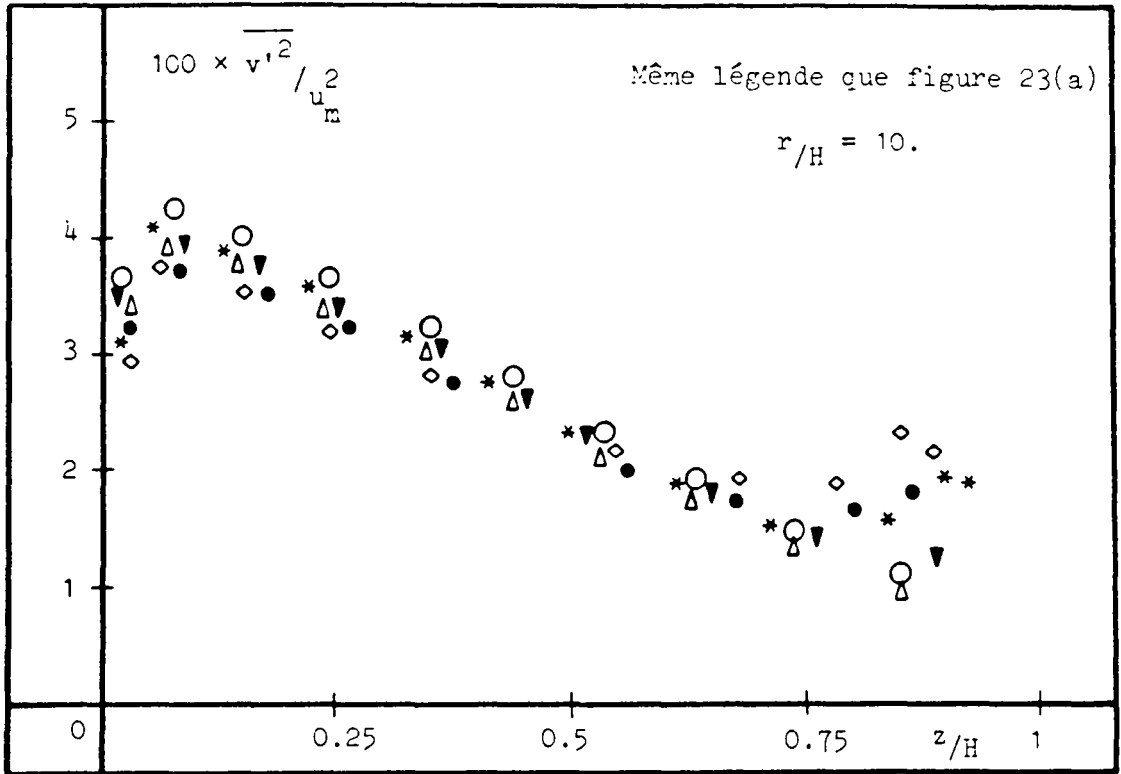


(a)

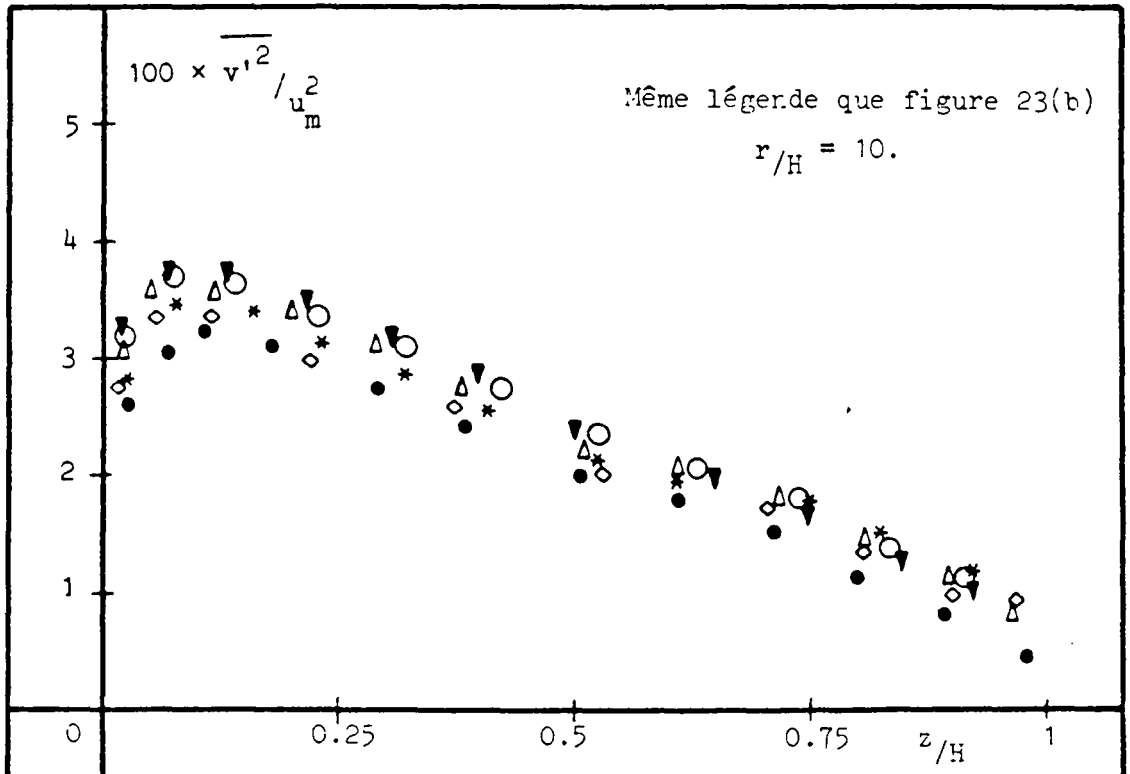


(b)

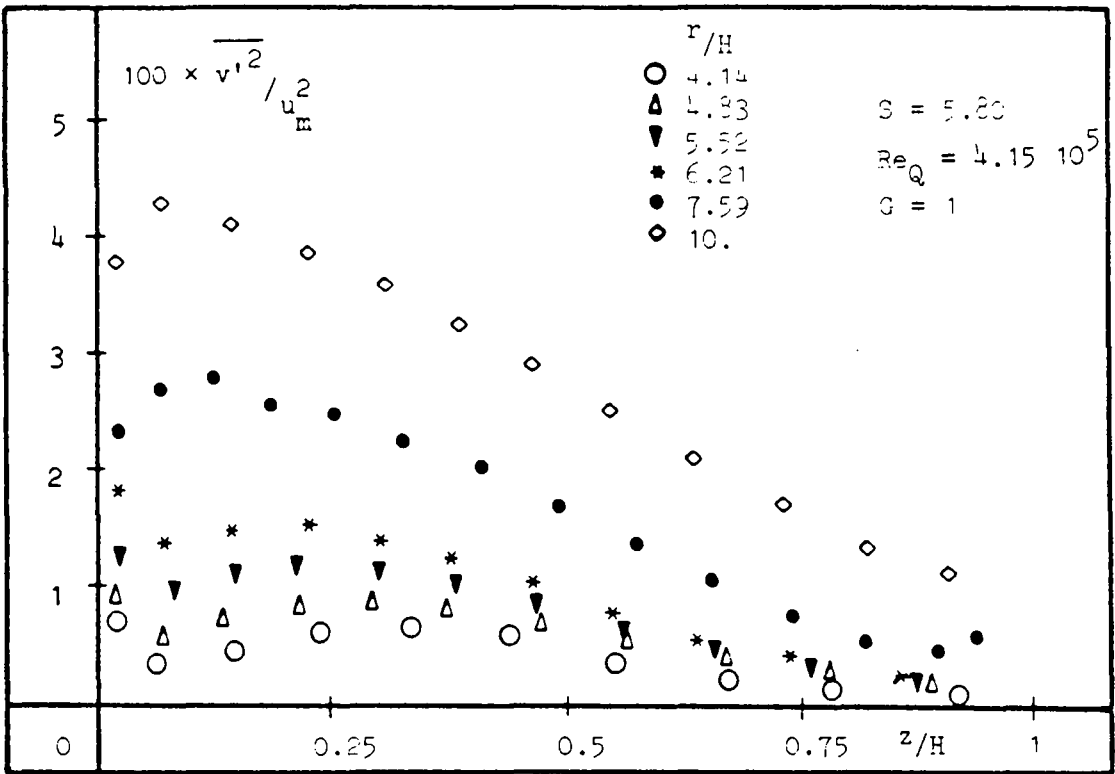
Figure 24



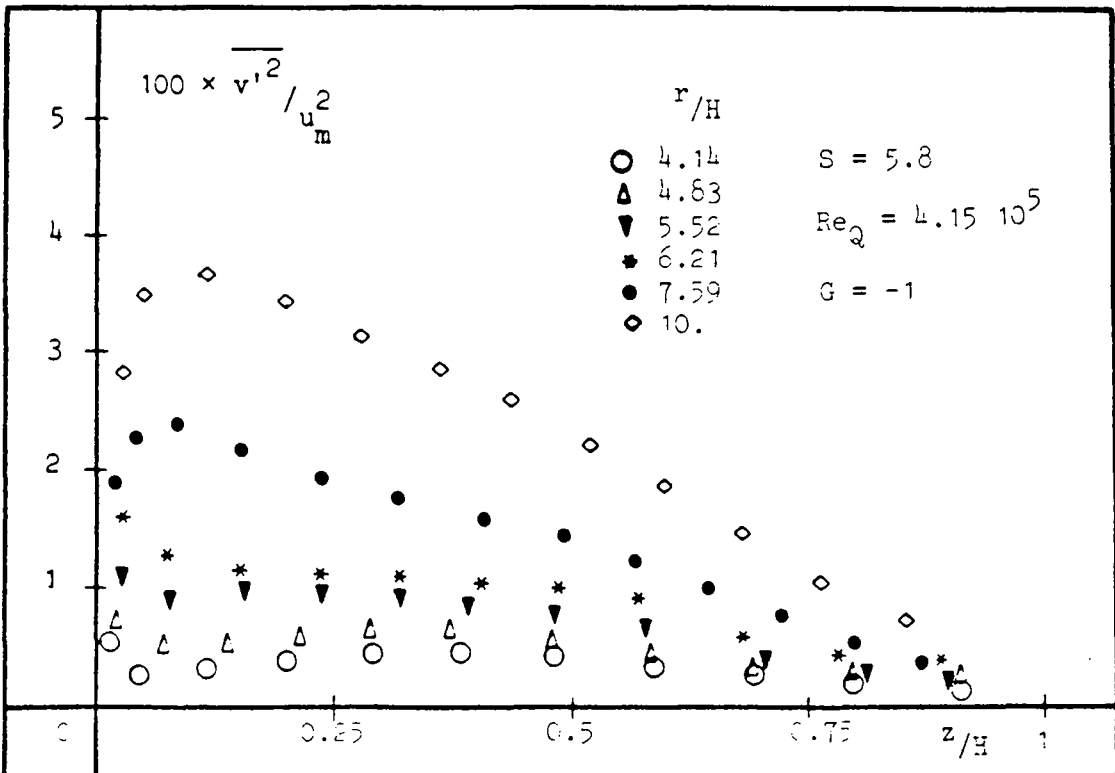
(a)



(b)

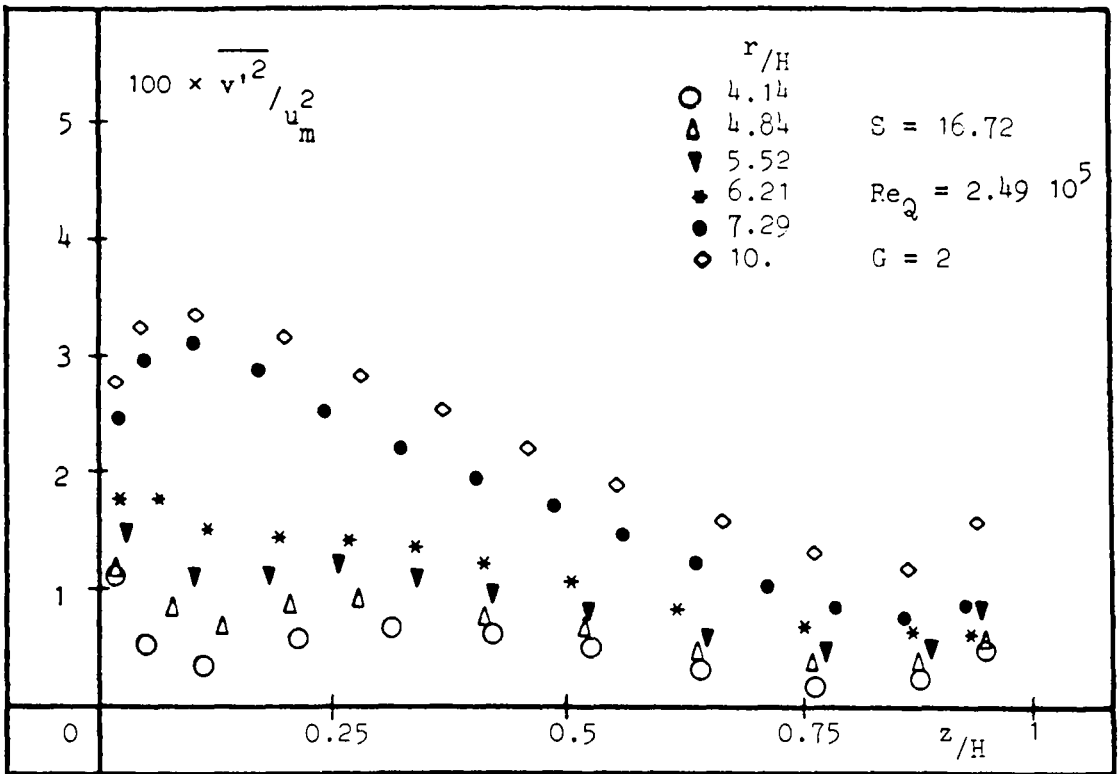


(a)

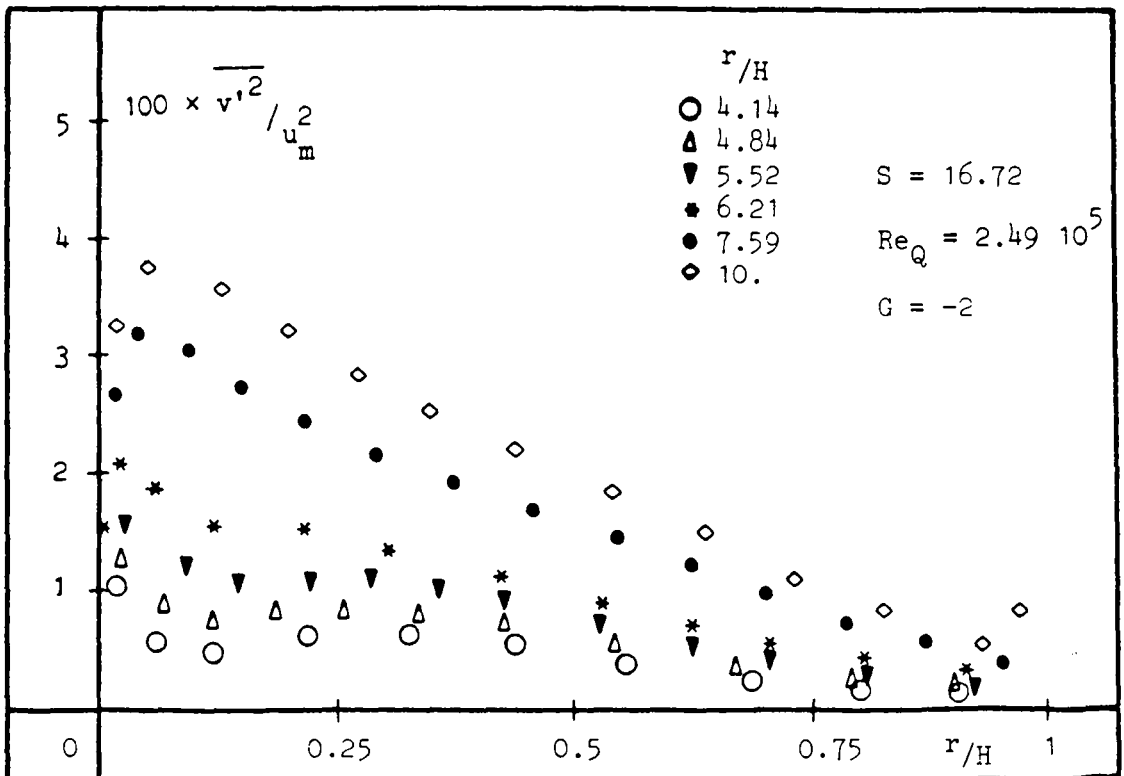


(b)

Figure 26

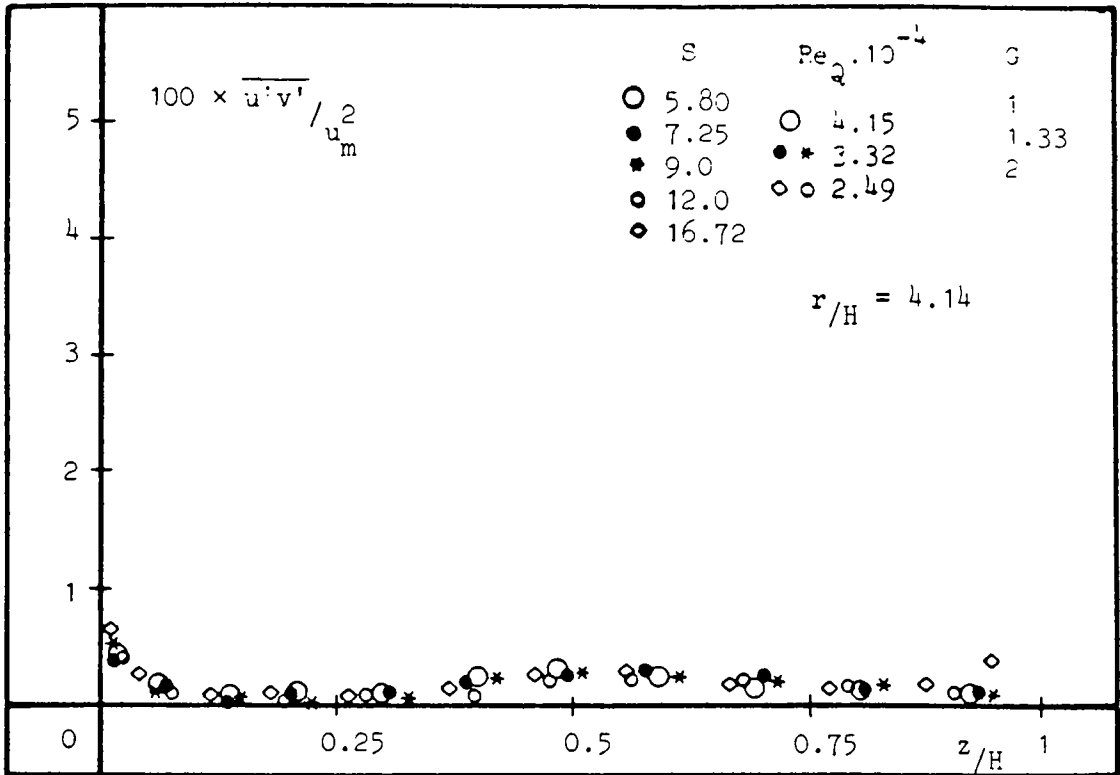


(a)

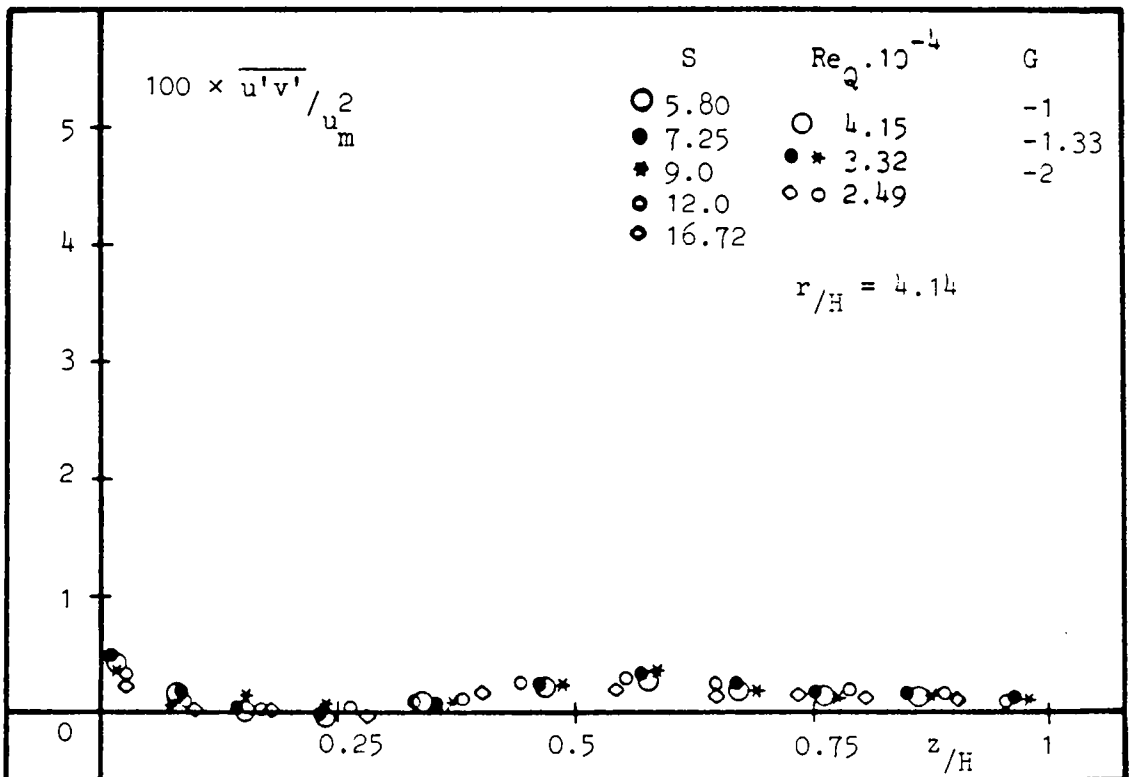


(b)

Figure 27

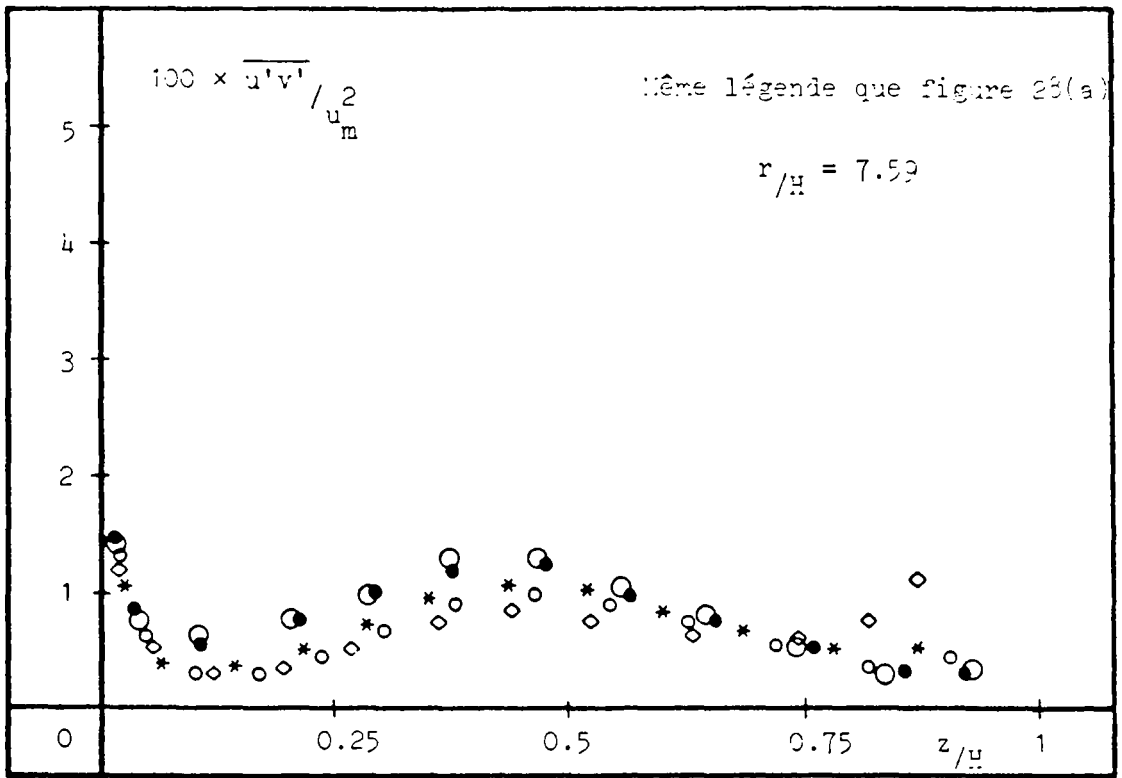


(a)

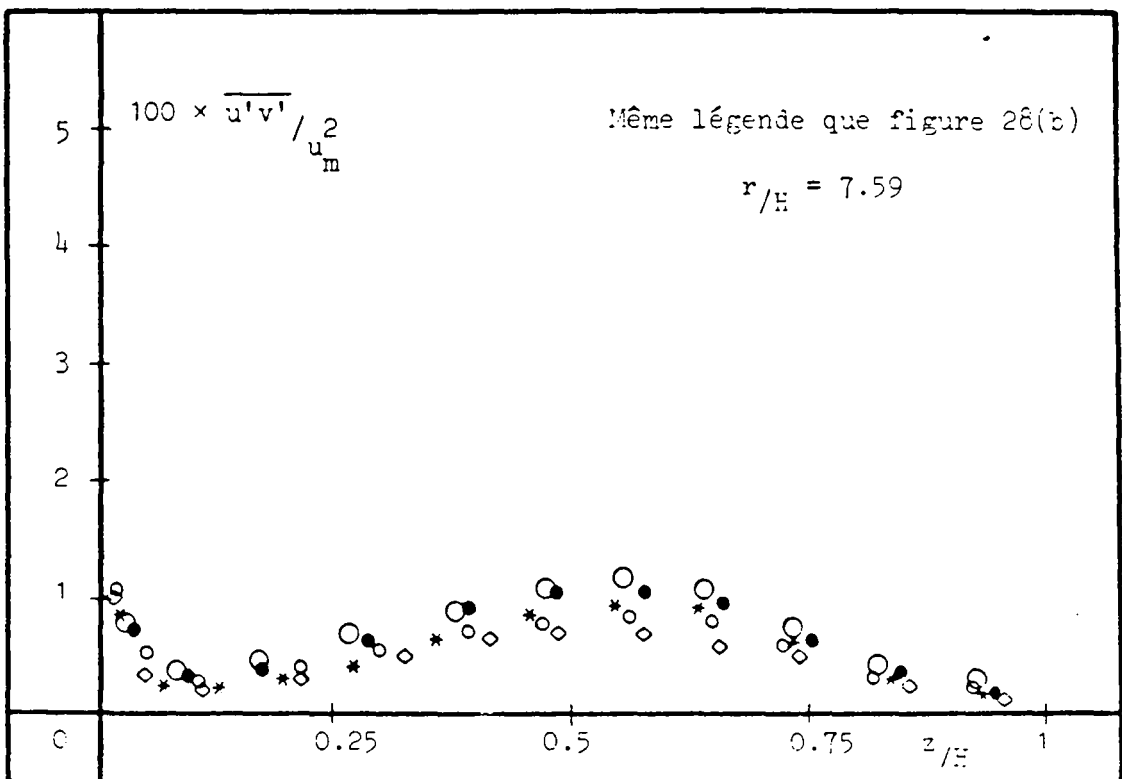


(b)

Figure 28



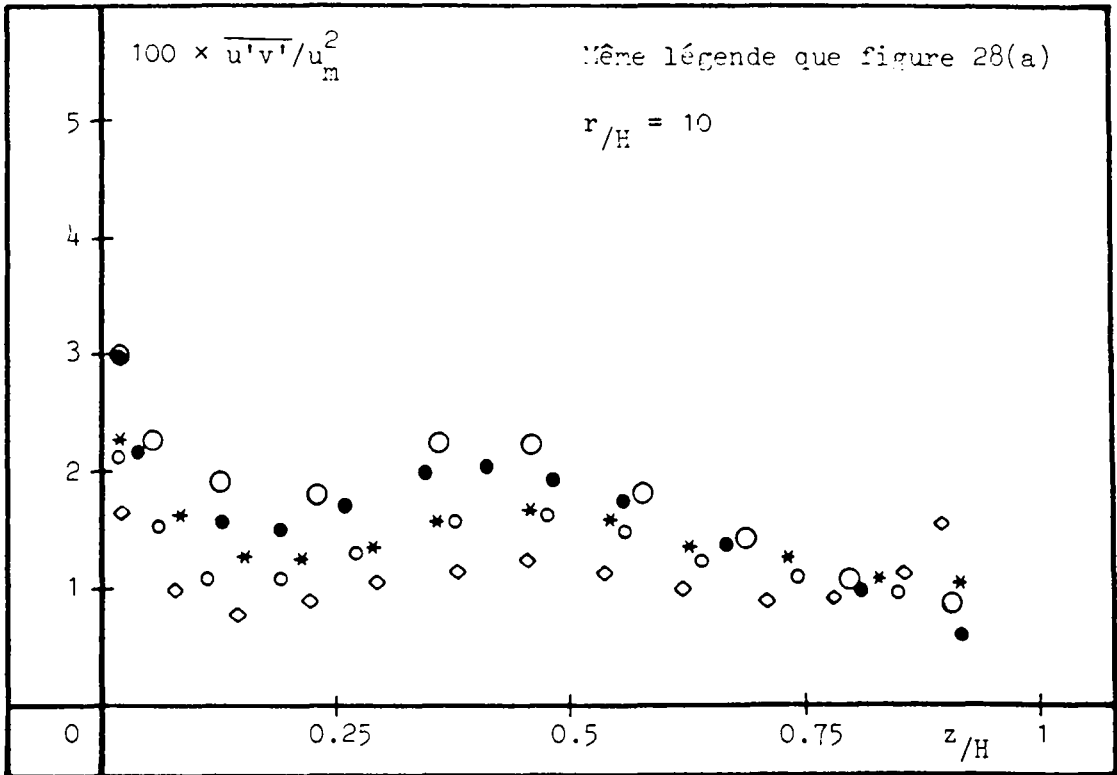
(a)



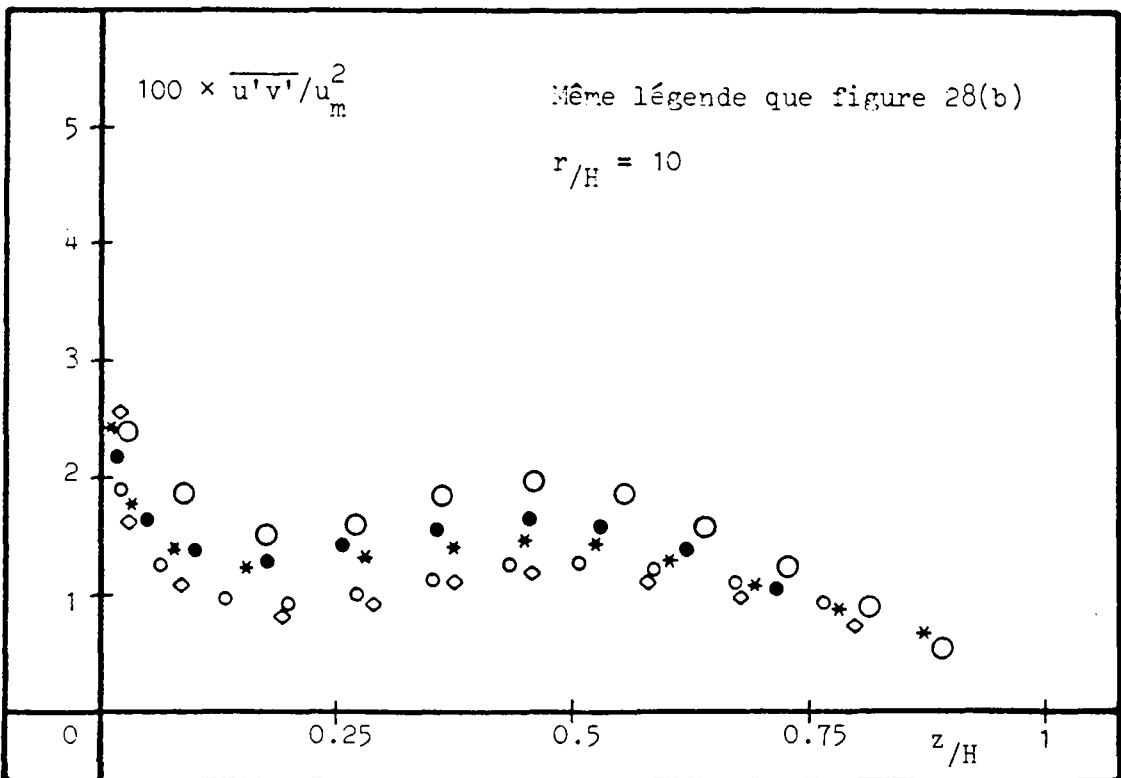
(b)

Figure 29



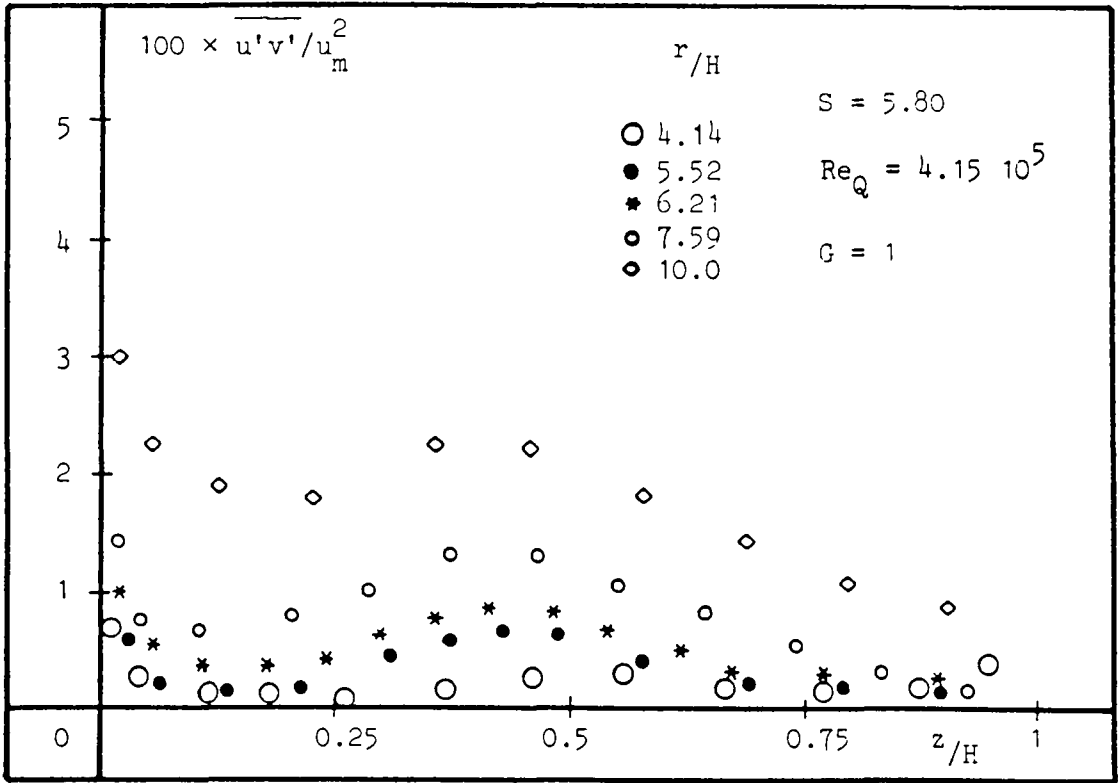


(a)

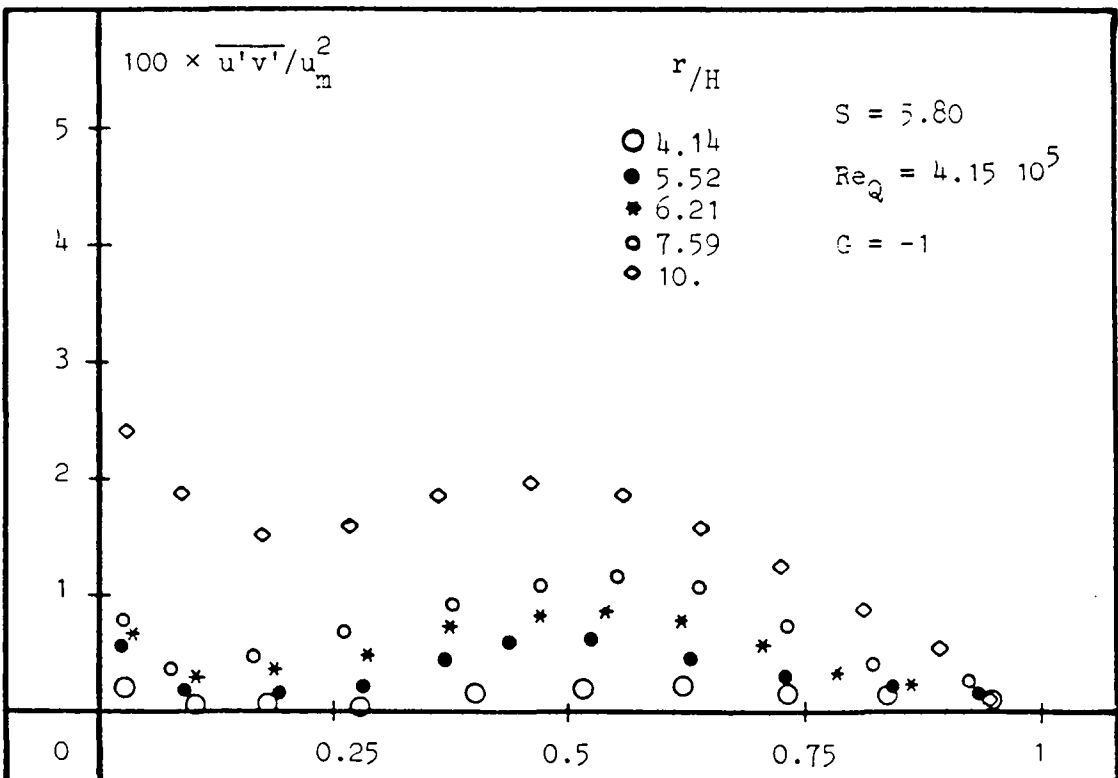


(b)

Figure 30

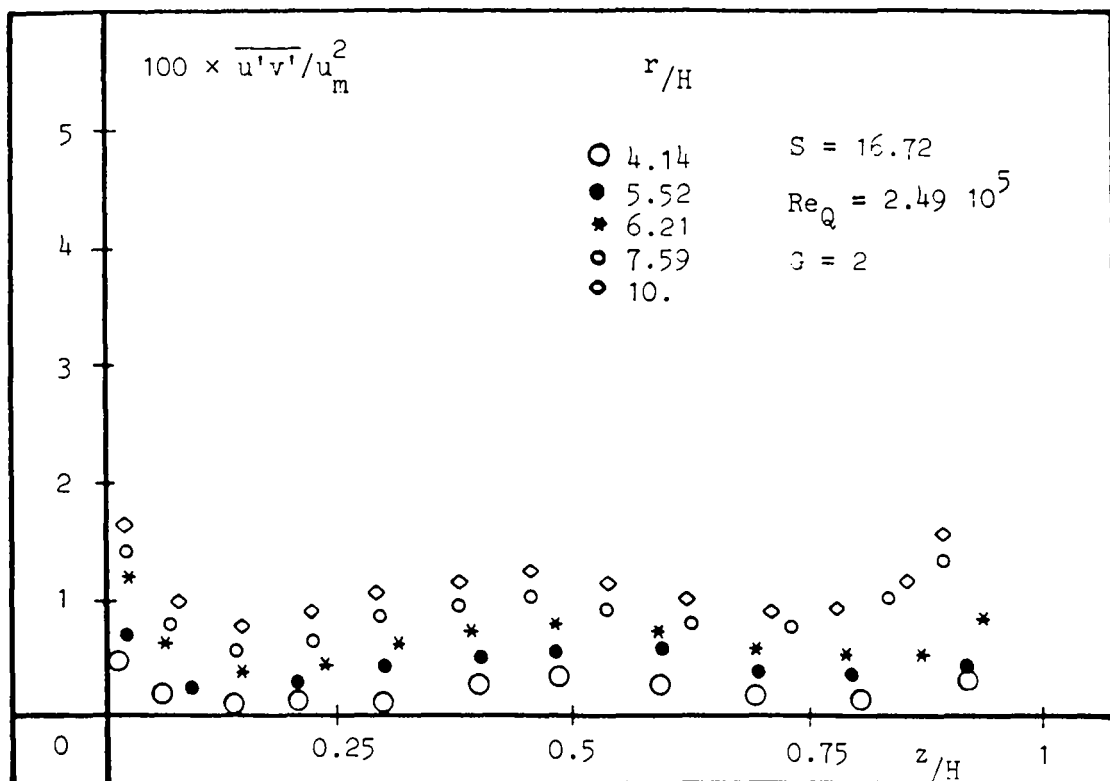


(a)

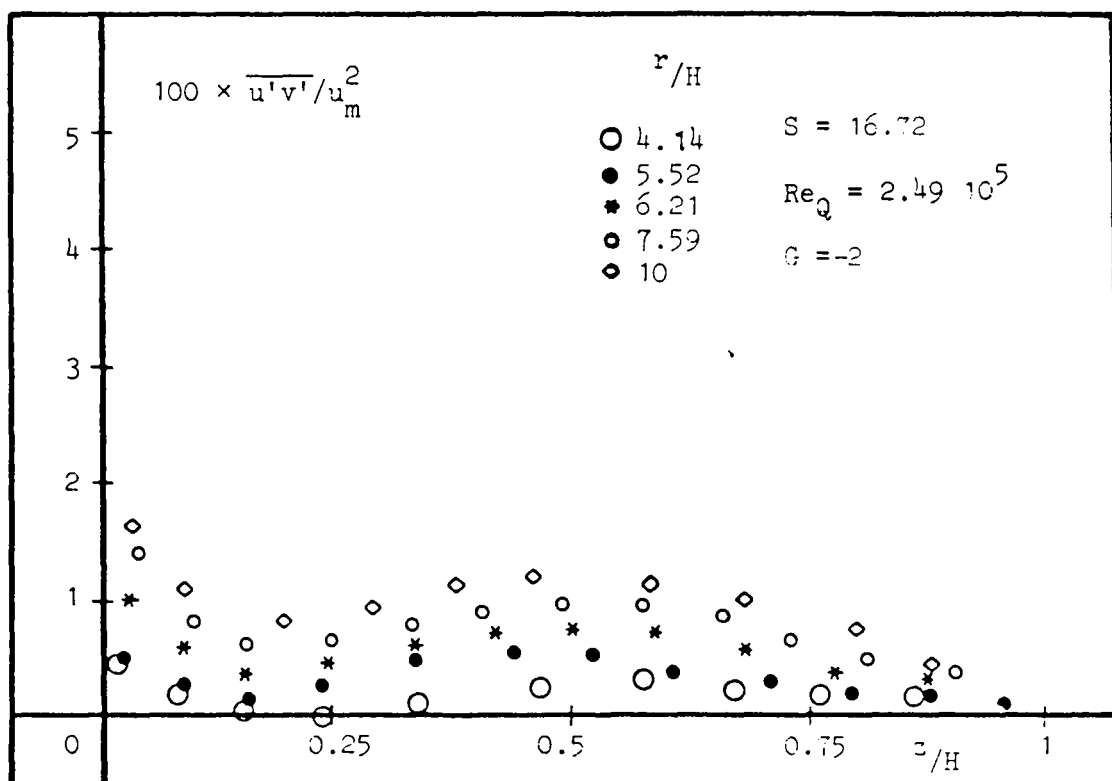


(b)

Figure 31

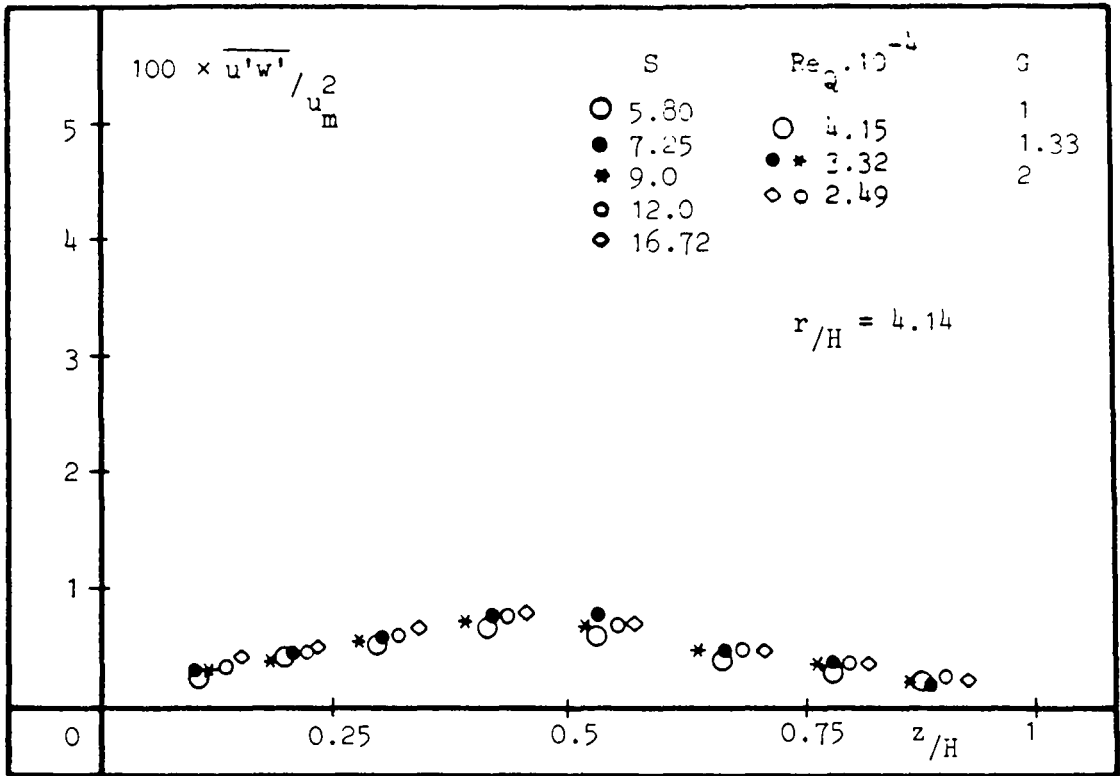


(a)

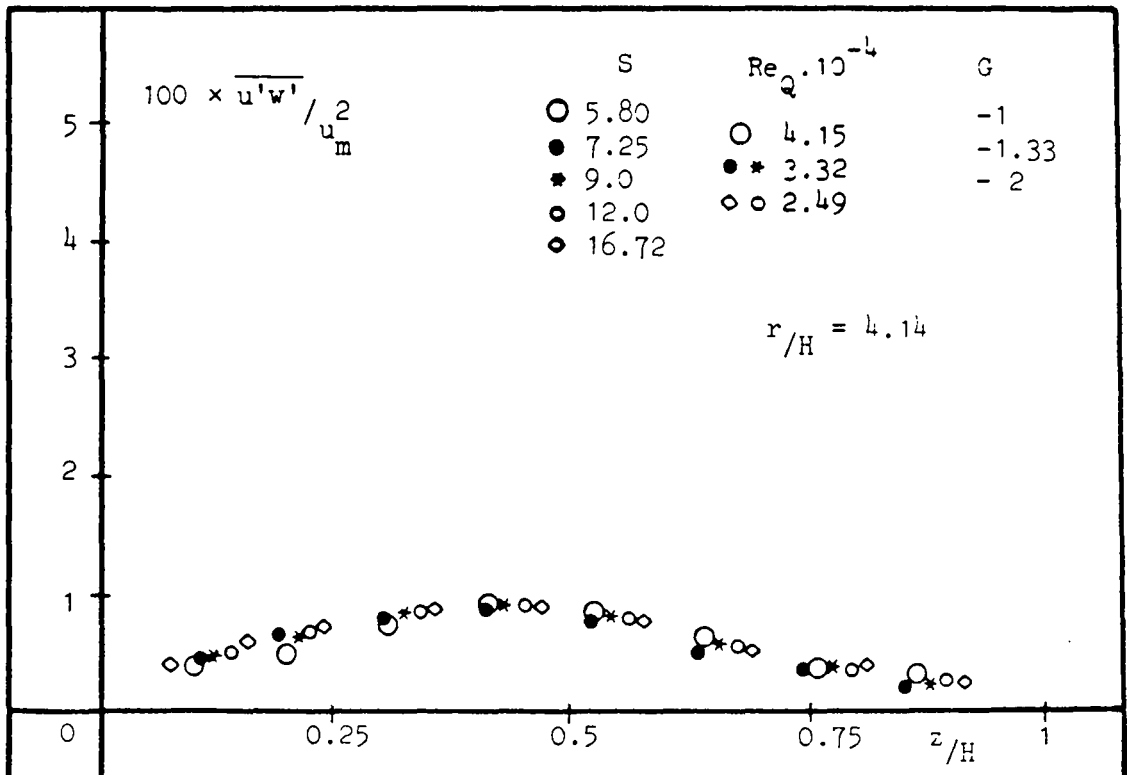


(b)

Figure 32

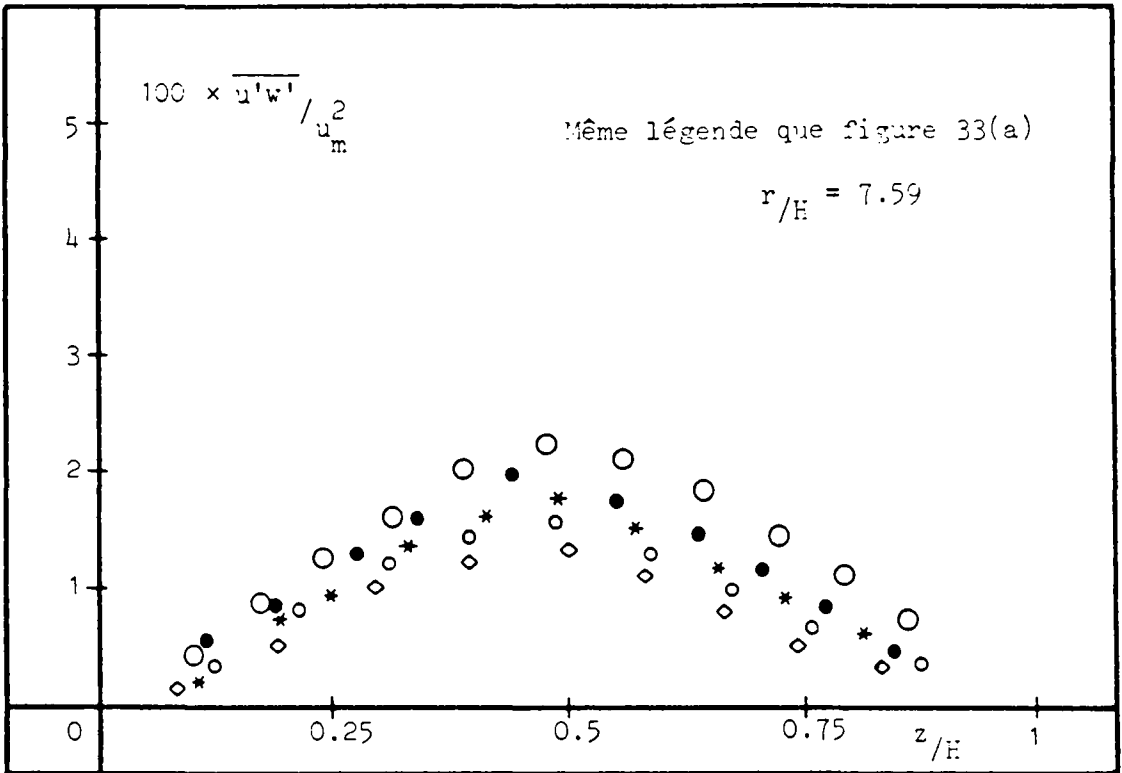


(a)

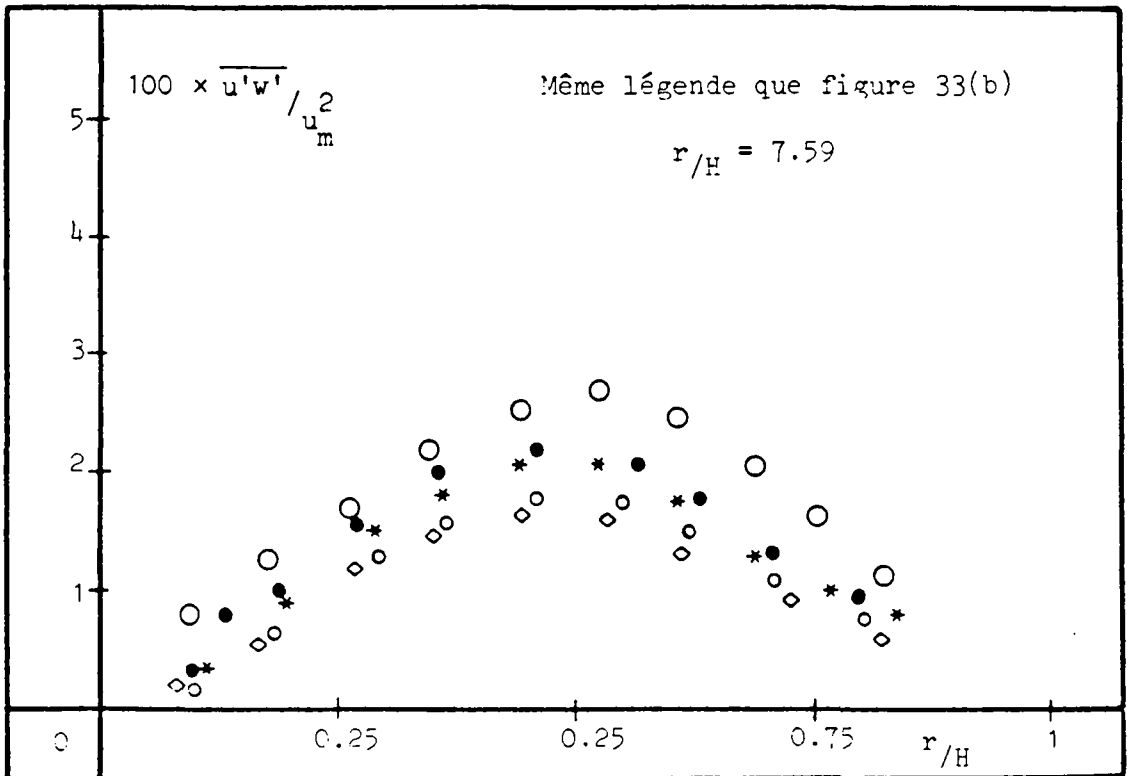


(b)

Figure 33

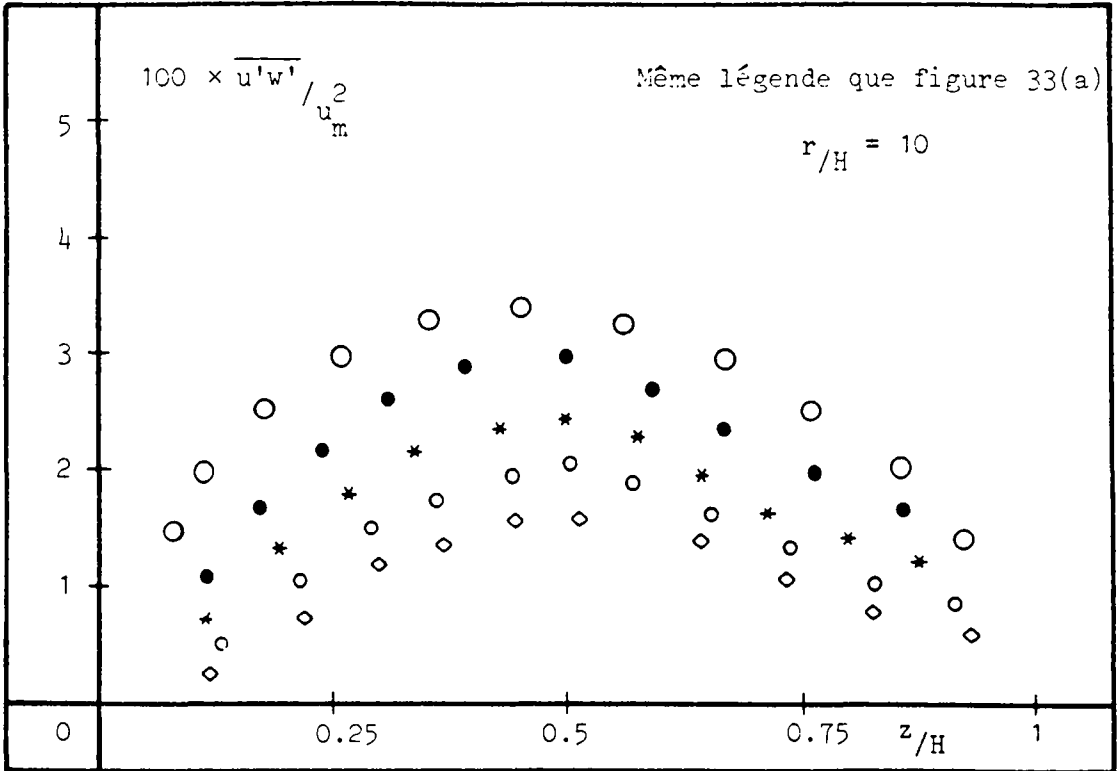


(a)

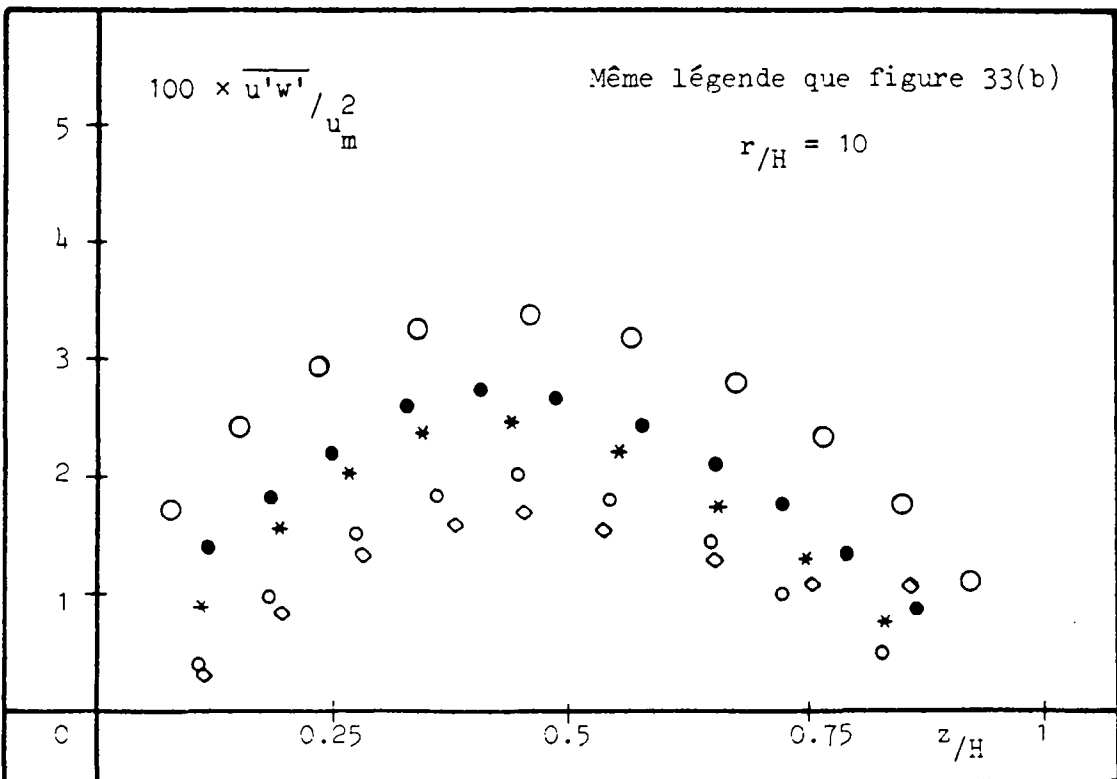


(b)

Figure 34

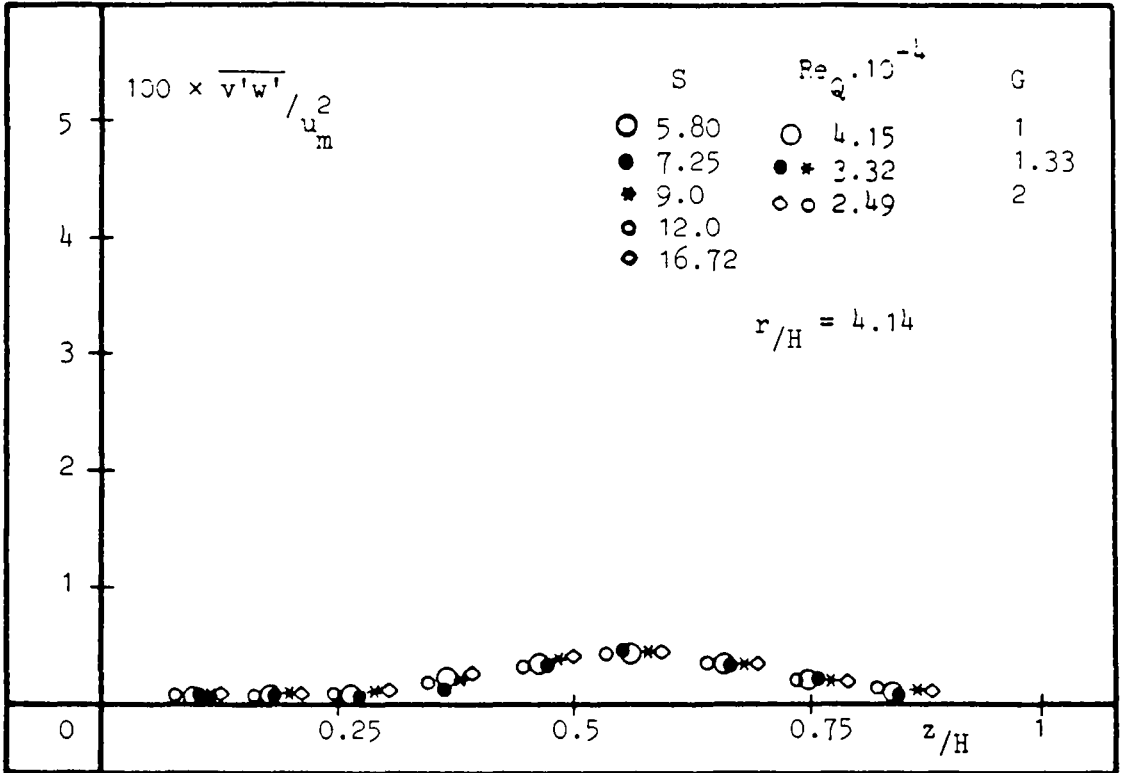


(a)

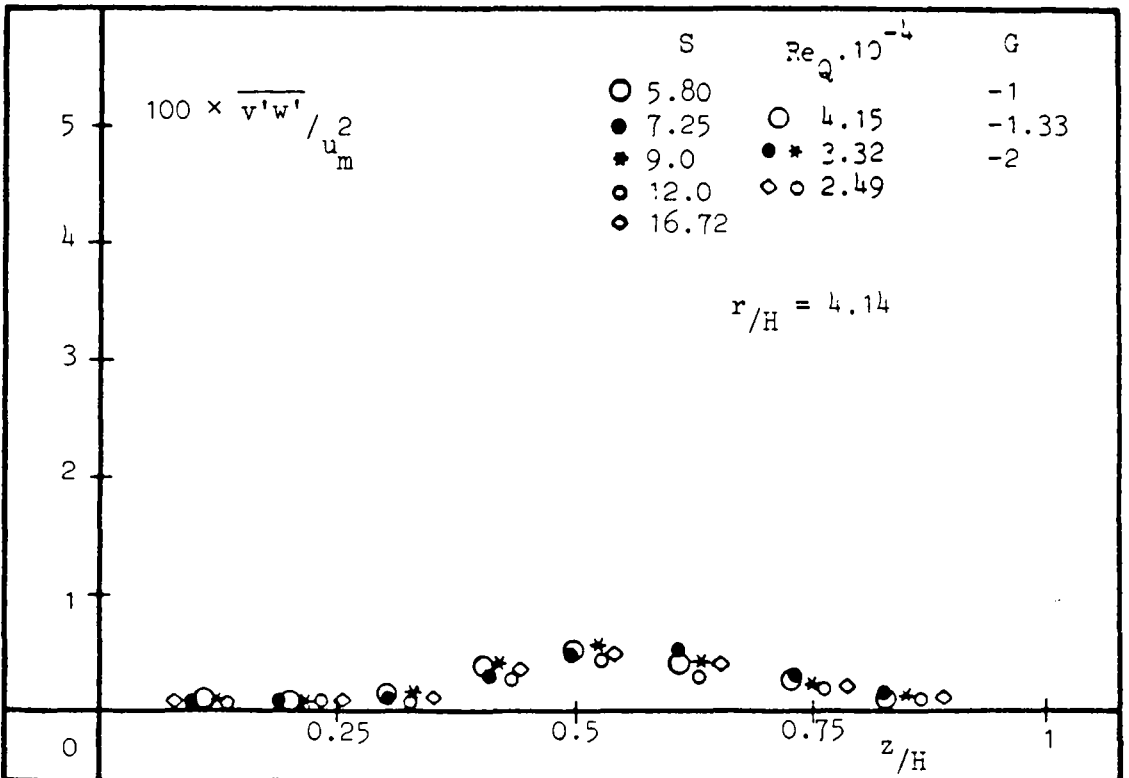


(b)

Figure 35

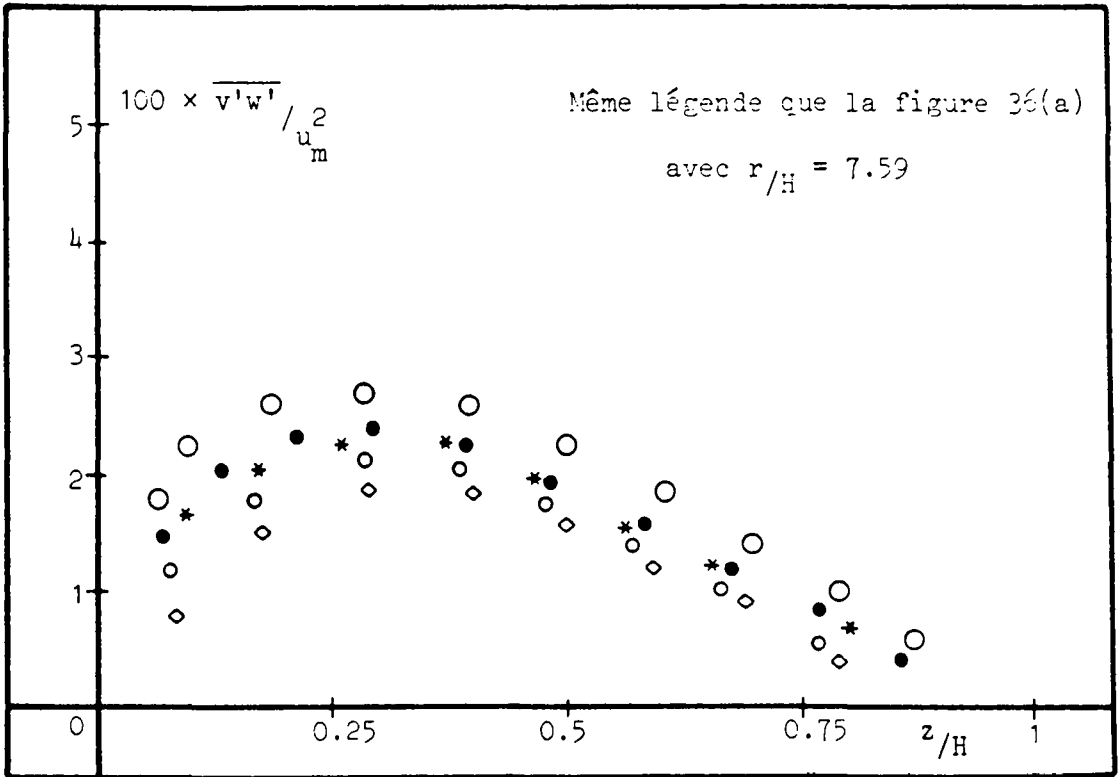


(a)

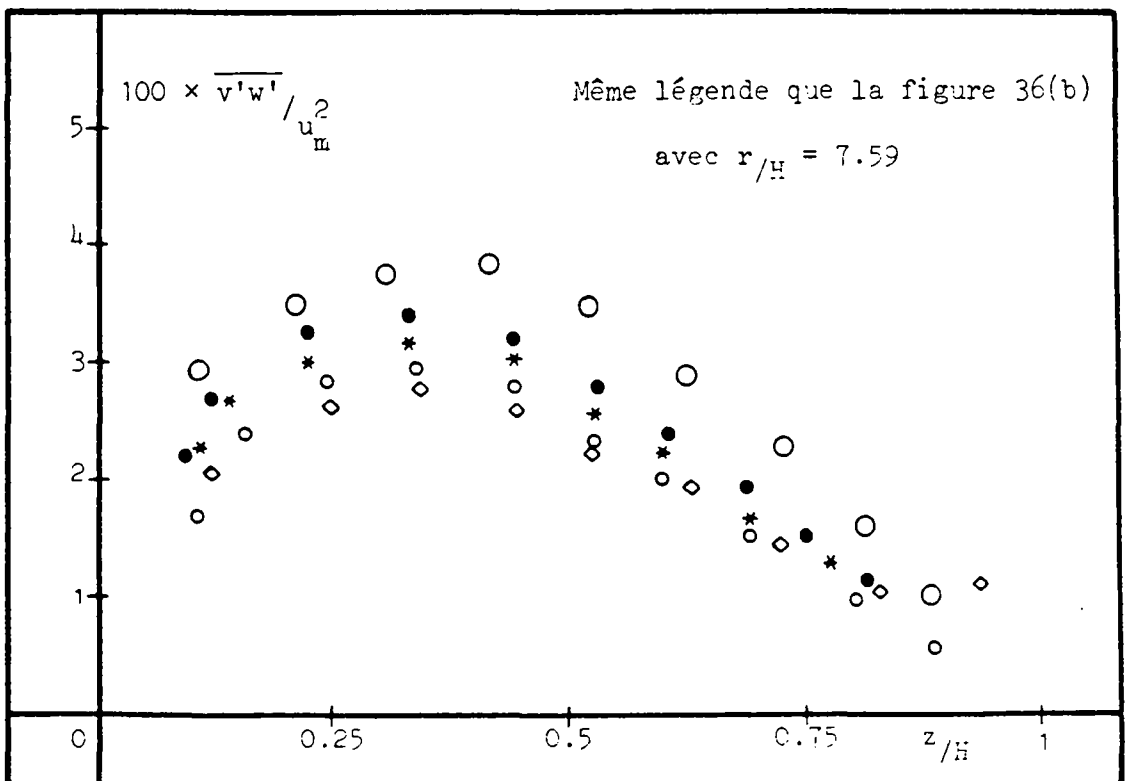


(b)

Figure 36



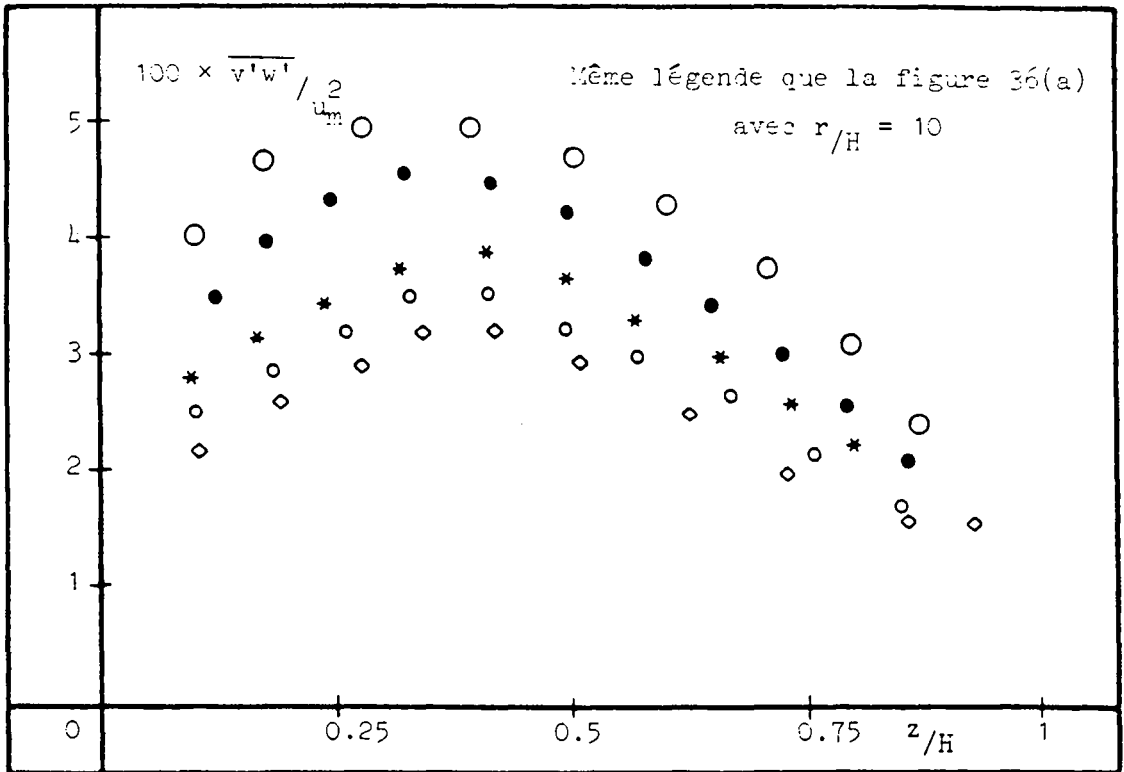
(a)



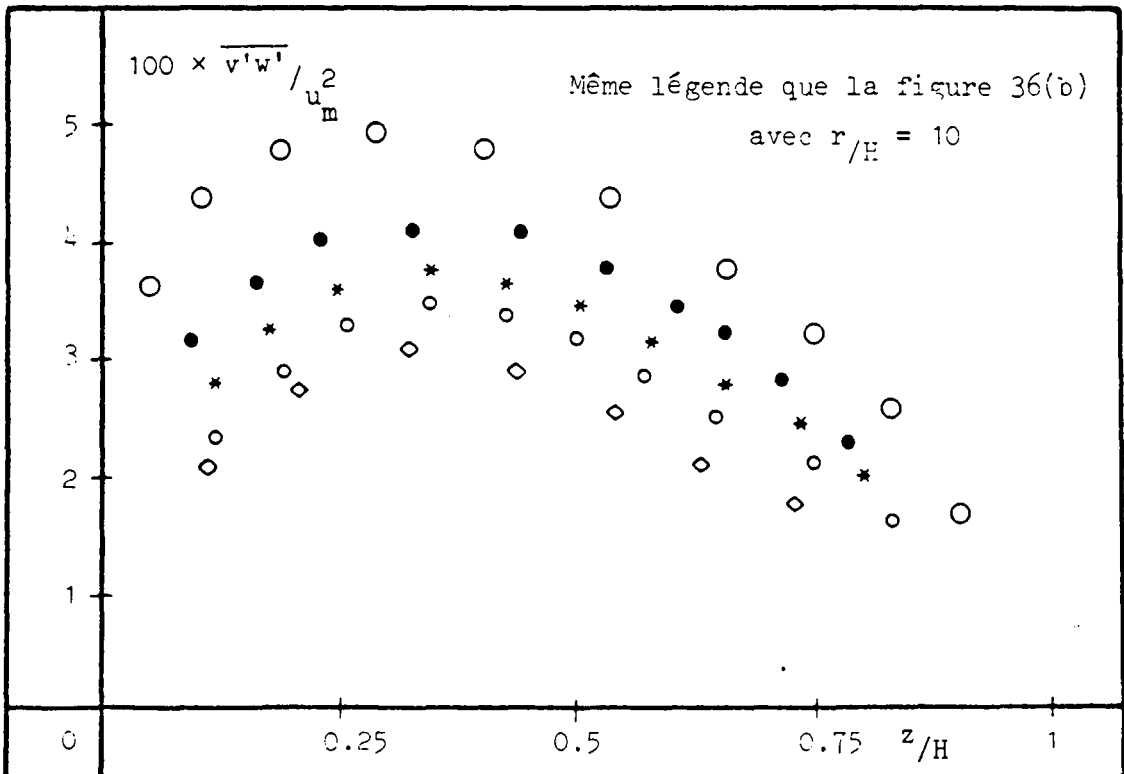
(b)

Figure 37





(a)



(b)

Figure 38