N° d'ordre : 431

MECANIQUE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES-ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR INGENIEUR

par

LAINĒ Annie-Claude épouse BAYEUL

ANALYSE DES PHENOMENES CONVECTIFS AU SEIN D'UNE CAVITE ANNULAIRE HORIZONTALE AU COURS DE LA FUSION D'UN MATERIAU

Soutenue le 15 février 1989

JURY :

Président	P.A. BO.	U.S.T.L.F.A.
Rapporteur	J.P. BARRAND	E.N.S.A.M. Lille
Membres	Ph. BATIGNY	ARBEL Industrie
	J.P. CALTAGIRONE	E.N.S.A.M. Bordeaux
	D. DELAUNAY	E.N.S.M. Nantes
	B. DESMET	E.N.S.I.M.E.V.

AVANT PROPOS

Cette étude a été effectuée dans le laboratoire de Mécanique de l'Ecole Nationale Supérieure d' Arts et Métiers de Lille, sous la direction de Monsieur le Professeur J.P. BARRAND.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur J.P. BARRAND, mon directeur de thèse qui, grâce à ses encouragements, m'a permis de persévérer. Je lui témoigne toute ma gratitude pour les précieux conseils qu'il m'a donnés tout au long de cette étude et pour son aide dans la rédaction de cette thèse.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur P.A. BOIS de l'Université des Sciences et Techniques de Lille de l'intérêt qu'il a manifesté pour mes recherches et de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Je remercie particulièrement Mr le Professeur B. DESMET de l'E.N.S.I.M.E.V. pour l'attention avec laquelle il a suivi ces travaux et en qui j'ai trouvé conseils et encouragements.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me font Messieurs CALTAGIRONE, professeur à l'ENSAM de BORDEAUX et DELAUNAY, chargé de recherches au CNRS, à l'ENSM de Nantes de bien vouloir être membres de mon jury.

Je tiens à remercier M. BATIGNY, de Arbel Industrie, dont les travaux sont à l'origine de mon sujet, d'avoir accepté de faire partie du jury.

J'adresse mes remerciements à Messieurs OULD SIDI FALL, MOREL, DESCAMPS, et à Madame ROBBE pour leur contribution à la mise en forme de ce document.

1. INTRODUCTION

La présente étude a pour origine une motivation technologique importante, à savoir l'optimisation des techniques de réchauffage utilisées dans les transports de produits divers par wagons citernes.

Ces produits sont introduits dans la citerne à l'état liquide mais se solidifient au moins partiellement au cours du transport, du fait du refroidissement par la paroi. Arrivé à destination, il est donc nécessaire de réchauffer la citerne pour la vider complètement. Le problème qui se pose est de choisir la technique de réchauffage la plus performante.

Plusieurs méthodes sont couramment employées ou envisagées. On peut citer l'utilisation de tubes immergés parcourus par un courant de vapeur en condensation ou le chauffage d'une partie ou de la totalité de la surface extérieure de la citerne par courant d'air chaud, ou de vapeur ou résistances chauffantes.

Un programme de recherche concernant l'optimisation de ces techniques a été entrepris par la société industrielle concernée et par le laboratoire de Mécanique de l'ENSAM (Laboratoire de Mécanique de Lille). Ce programme a fait l'objet d'un rapport AFME (référence [1]).

Il nous a paru intéressant, dans ce cadre, d'étudier de façon plus approfondie le comportement des produits autour des tubes de rechauffage.

Une préétude permettant la visualisation des phénomènes de convection et l'enregistrement de l'évolution de la température en régime instationnaire a été réalisée par deux étudiants de l'ENSAM dans le cadre d'un projet (référence [2]).

Ces travaux préliminaires ont mis en évidence toute la complexité du problème posé.

Dans le présent mémoire nous nous sommes attachés à :

- faire une analyse bibliographique (chap II) la plus exhaustive possible concernant les études aussi bien expérimentales que théoriques sur la fusion d'un solide dans une enceinte. Il nous a paru intéressant de considérer des travaux quelquefois assez éloignés du cadre strict de notre travail.

- présenter les équations complètes du problème dans l'hypothèse d'une géométrie bidimensionnelle (chap III).

- donner les équations linéarisées correspondantes à l'aide de l'analyse asymptotique dans l'hypothèse des petites perturbations (chap IV).

- résoudre au chapitre V les équations précédentes et donner les expressions littérales exactes de la température ainsi que de la fonction de courant et la composante normale au plan du rotationnel de la vitesse de convection, les développements auxilliaires étant renvoyés en annexe.

- donner les résultats numériques correspondants sous forme de courbes permettant d'étudier l'influence de la nature du fluide sur l'évolution du phénomène et sur le nombre de termes nécessaires à l'obtention d'une solution approchée satisfaisante (chap VI).

Nous tentons pour finir d'ouvrir les perspectives d'une solution généralisée correspondant à des phases plus avancées du réchauffage.

2. SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

Le changement de phase solide-liquide intéresse de nombreux problèmes rencontrés dans la nature ou dans la technique. Ils ont fait l'objet d'un grand nombre d'études depuis les travaux de Stefan en 1981 sur la modélisation de la fusion de la calotte glaciaire. Ce problème est à rapprocher de celui de la fusion des sols congelés qu'il s'agisse du phénomène naturel lié aux cycles climatiques ou des techniques mise en oeuvre pour la consolidation des sols lors des travaux de génie civil. L'optimisation des procédés de mise en forme par les moulages utilisés en fonderie nécessite une compréhension des matériaux approfondie aussi bien de la liquéfaction que de la solidification proprement dite. De même les procédures de fusion dirigée employées dans l'élaboration des matériaux de haute pureté, les techniques de soudure l'analyse des impacts ou de la découpe par faisceau laser sont autant d'incitations à la recherche. Il en est de même en ce qui concerne la protection thermique des surfaces par ablation de matériau soumis à des densités de flux de chaleur très élevées notamment dans les tuyères ou les coiffes de protection utilisées par l'industrie spatiale.

Des travaux importants été motivés ces dernières années par la mise au point de méthodes de stockage d'énergie par chaleur latente.

Dans la grande majorité des cas les modèles de simulation de changement d'état purement conductifs ne conviennent pas du fait de la présence de convection naturelle dans le liquide. Le problème est très complexe car la frontière mobile se déforme au cours du temps. La mise en évidence du rôle de la convection lors du changement d'état solide-liquide a fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux [3 à 17].

L'influence des mouvements convectifs sur le processus de fusion ou de solidification est envisagé autour d'un cylindre vertical noyé dans un milieu à changement de phase [13] autour d'un cylindre horizontal [5,6,10,18 à 25] ou dans un cylindre horizontal [7,8,26], le long d'une plaque plane verticale [3,4,11,14,15,27 à 30] et dans une cellule rectangulaire [31].

Dans le cas de la fusion autour d'un cylindre horizontal délivrant un flux constant, Sparrow fait état de résultats expérimentaux qui montrent [16] :

- que la valeur limite du coefficient de transfert à la surface du cylindre est atteinte lorsque la distance de l'interface au cylindre à la partie supérieure est environ égale à 3 fois le diamètre du cylindre.

- que cette valeur limite est égale à 12 % près à celle mesurée dans une expérience de convection naturelle pure.

Les différentes expériences réalisées montrent que la convection se développe dans des volumes à frontière mobile irrégulière et qu'elle est caractérisée par des couches limites séparées dans une grande partie de la cavité (cf GOBIN et DELAUNAY).

Le problème global de changement de phase avec convection est donc complexe et sa résolution numérique nécessite la mise en oeuvre de moyens numériques très lourds et des temps de calcul prohibitifs.

Nous résumons ci-après les principales méthodes numériques mises en oeuvre pour la résolution de ce problème.

L'analyse du problème complet a été proposée autour d'un cylindre vertical, autour d'un cylindre horizontal [20], dans un cylindre horizontal [25] et dans une cavité rectangulaire [3 et 4]. Dans la plupart de ces travaux, le solide est maintenu isotherme à la température de fusion, donc le mouvement du front est entièrement déterminé par le couplage du transfert d'énergie par convection naturelle avec la condition d'interface.

Certains auteurs font l'hypothèse, dite de quasi-stationnarité, que la vitesse de progression du front n'affecte pas la structure de l'écoulement: le calcul de convection est donc fait dans une série de cavités irrégulières fixes (GOBIN).

L'espace physique est transformé en un espace de calcul rectangulaire ou circulaire soit par une transformation algrébrique [4] soit par une méthode numérique de génération de maillage curviligne [7,18,20]. Les méthodes de différences finies utilisées emploient la formulation rotationnel-fonction de courant [18,20] ou la résolution en variable primitives [4].

D. DELAUNAY [3] étudie le couplage de la convection naturelle et de la conduction avec changement de phase dans une cellule rectangulaire et sur de la paraffine en vue d'une application au stockage périodique de l'énergie. Il traite les phénomènes de convection en utilisant des corrélations donnant d'une part la distribution des nombres de Nusselt locaux sur le front de fusion et d'autre part la stratification du noyau liquide. Les corrélations ont été déterminées par expérimentation. Le changement de phase couplé avec la conduction dans la phase solide est modélisé par l'ablation du solide sous l'effet du flux convectif ainsi calculé. La résolution de l'équation de chaleur dans la phase solide est un problème non linéaire du fait du déplacement de l'interface.

L'auteur utilise une méthode à trois niveaux de temps initialement développée pour traiter les non linéarités associées aux variations des caractéristiques thermophysiques) et spécialement adaptée au cas d'une frontière mobile. La particularité de ce schéma à trois niveaux réside dans le fait que les coefficients des dérivés d'espace sont exprimés au pas de temps connu, comme dans un schéma explicite. Il est cependant inconditionnellement stable.

D. GOBIN [4] étudie l'évolution temporelle du couplage entre la convection naturelle dans la phase liquide et la conduction dans la phase solide. L'auteur découple le problème de fusion de celui de la convection naturelle, le processus de fusion est considéré comme une succession d'états quasi-stationnaires. L'hypothèse de quasi-stationnairité est justifiée par le fait que l'auteur disposait d'ordre de grandeur de vitesses (3.10^{-6} m/s pour la vitesse moyenne de déplacement du front pour 10^{-3} m/s pour les vitesses d'écoulement en convection naturelle). La cavité liquide est donc immobilisée à chaque pas de temps. Elle est transformée en un espace de calcul rectangulaire par une méthode algébrique. Les équations de la convection naturelle en variables primitives sont discrétisées par un schéma implicite de différences finies. La solution stationnaire est obtenue itérativement en résolvant le système d'équations linéaires (issu de la discrétisation) par une méthode de directions alternées. L'auteur utilise un maillage irrégulier afin de diminuer les temps de calcul. Contrairement à l'étude de la convection naturelle dans la phase liquide, le mouvement du front est pris en compte dans le calcul de la conduction dans la phase solide. L'espace solide est transformé de la même manière que l'espace liquide. L'expression linéaire obtenue par discrétisation est résolue par une méthode de directions alternées sachant que contrairement à la convection, la solution doit conduire à un régime transitoire. L'évolution temporelle de la forme et de la position de l'interface résulte du couplage entre les transferts d'énergie dans les deux phases. Ce couplage est décrit par l'équation de changement d'état.

C. J. HO et VISKANTA [7] étudient expérimentalement et numériquement la fusion pénétrante dans une capsule cylindrique horizontale. Ils utilisent la formulation rotationnel-fonction de courant qu'ils résolvent par une méthode numérique aux différences finies. Les équations sont discrétisés dans un maillage mobile qui transforme la demi-cavité en un espace rectangulaire de coordonnées physiques orthogonales (13 noeuds dans la direction radiale, 21 noeuds dans la direction polaire).

Les auteurs adoptent deux types d'approximations : quasi-statique et quasi-stationnaire. L'hypothèse de quasi-stationnarité est effectuée en négligeant le mouvement de l'interface dans le calcul des champs de vitesses et de températures du liquide, la position de l'interface étant effectuée grâce au champ de températures du pas précédent. L'approximation quasi-statique simplifie l'approximation quasi-stationnaire en négligeant les termes transitoires dans les équations de base. La combinaison de ces deux approximations est réalisée en adoptant l'hypothèse de quasi-stationnarité au début du processus et l'hypothèse de quasi-staticité en fin. La position de l'interface est déterminée à partir de l'équation d'équilibre d'énergie basée sur la distribution de température de l'instant précédent. Pour éviter les problèmes numériques au démarrage, on suppose un domaine liquide d'épaisseur uniforme très mince initialement (< 5 % du rayon du tube). On suppose également une distribution de température linéaire dans la direction radiale dans le liquide. Signalons que pour le maillage adopté relativement grossier, le temps de calcul d'une expérience est de l'ordre de 12 heures sur un ordinateur CDC 6500. Les calculs sont comparés à des expériences et sont trouvés en bon accord.

H. RIEGER et BEER [8] étudient expérimentalement et numériquement l'influence de la densité de l'eau sur le processus de fusion de la glace dans un cylindre horizontal. Ils appliquent une méthode de différences finies pour résoudre le problème composé de cinq équations différentielles partielles non linéaires couplées. Tous les termes, y compris les termes de convection sont discrétisés par des opérateurs de différences finies centrées du second ordre dans l'espace et par des approximations de différences décentrées à gauche dans le temps. Cela conduit à une procédure implicite totale. Les résultats sont en bon accord avec les expériences.

M. OKADA [12] analyse le transfert de chaleur pendant la fusion à partir d'un mur vertical. Le mécanisme de fusion avec convection naturelle et la région de fusion variable dans le temps sont analysés au moyen d'une méthode aux différences finies. Les résultats analytiques sur la forme du front de fusion et sur la distribution de température dans la région de fusion s'accordent bien avec les résultats expérimentaux pour des x-octadécane.

PRUSA et YAO [18] présentent l'analyse de la fusion autour d'un cylindre horizontal dans une enceinte quelconque à l'aide de la formulation rotationnel fonction de courant. Le maillage est transformé de façon que la cavité liquide soit représentée par un cercle dont le centre représente le cylindre chauffant et l'extérieur l'interface liquide-solide et la cavité est également représentée par un cercle dont la frontière externe est le pôle. Cela conduit à un système d'équation lourd à mettre en oeuvre.

RIEGER, PROJAHN et BEER [20] partent également de la formulation rotationnel-fonction de courant pour traiter le problème de la fusion autour d'un cylindre horizontal. On ne résoud numériquement que la moitié du problème. Pour cela on utilise un maillage mobile qui transforme la demie cavité en un espace rectangulaire de coordonnées physiques orthogonales obtenues en résolvant numériquement un système d'équations elliptiques où apparaît l'opérateur de transformée de Laplace avec des conditions de Dirichlet aux frontières. Les auteurs montrent que dans la gamme des nombres de Rayleigh étudiés (10 000 à 150 000), l'état quasi-permanent du processus de fusion, autour d'un cylindre circulaire peut être corrélé par :

$$Nu = C\ Ra^{n}$$

avec $C \sim 0,13$

$n = 1/3$ pour le cylindre

et $C \sim 0,14$

$n = 1/4$ pour l'interface.

PANNU, JOGLEKAR et RICE [25] calculent les profils de température et de vitesse ainsi que les vitesses de transfert de chaleur et la vitesse de déplacement de l'interface pour des cylindres horizontaux et verticaux contenant du produit à changement de phase. Ils utilisent la formulation rotationnel-fonction de courant avec des méthodes aux différences finies qui sont résolues par un schéma itératif de relaxation. Les résultats de calculs sont comparés à des mesures. On montre que le temps total de fusion prévu par le modèle de convection naturelle pour le cylindre horizontal est environ supérieur de 20 % au temps mesuré expérimentalement. Cette différence peut être due aux effets d'extrémité qui sont négligés.

BAREISS et BEER [26] déterminent expérimentalement la forme géométrique instantanée, les vitesses de fusion et les densités de flux thermique de la fusion d'un matériau dans un tube horizontal. Ils obtiennent une solution analytique du problème à partir du bilan des forces dans une fine couche liquide limitée par la base du noyau du solide noyé et la paroi du tube chaud (bilan entre les forces de pression et la force gravitationnelle sur le solide). Les vitesses de fusion et les coefficients de transfert thermique sont en bon accord avec les expériences.

G. GAU et VISKANTA [31] étudient le rôle de la convection naturelle sur le mouvement de l'interface solide-liquide pendant la fusion et la solidification du métal de Lipowitz dans une cavité rectangulaire. La convection naturelle est modélisée par une corrélation en Nusselt et est introduite au niveau de l'équation d'interface.

P. G. KROEGER et S. OSTRACH [32] considèrent les champs de température et de vitesse durant la solidification d'un métal pur dans une plaque mobile pour application au processus de coulée continue. L'analyse considère la convection naturelle dans le noyau liquide. Les auteurs reprennent les équations de base du problème (équation de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie, équilibre d'énergie à l'interface, condition aux limites) qu'ils résolvent par des méthodes numériques de différences finies. Ils montrent que pour une convection naturelle très intense, l'effet de champ de vitesse sur le champ de température reste relativement réduit.

J. YOO et B. RUBINSKY [33] ont développé une nouvelle technique numérique pour l'analyse d'un processus de solidification transitoire bidimensionnel en présence de convection naturelle dans la phase liquide. La méthode peut résoudre des profils d'interface liquide-solide irréguliers et transitoires en utilisant une formulation de Galerkine pour l'équation d'équilibre à l'interface. La solution élément fini de la formulation de Galerkine fournit les déplacements de chaque noeud de l'interface.

L'équation de quantité de mouvement est résolue par une méthode (penalty) de tir.

La revue des différentes méthodes numériques met en évidence que la résolution du problème complet est :

- complexe
- lourde à mettre en oeuvre
- chère en temps calcul.

L'analyse expérimentale et numérique a conduit certains auteurs à établir des corrélations pour la modélisation de la convection naturelle. Le transfert de chaleur à l'interface par convection naturelle peut être représentée par une corrélation de couches limites.

$$Nu = cte \times Ra^{n}$$

d'après réf [20] les valeurs sont :

cte = 0,13, n = 1/3 pour le cylindre
 = 0,14 n = 1/4 pour l'interface...)

En utilisant des corrélations donnant à la fois la température du noyau liquide et le nombre de Nusselt sur le front de fusion, il a été montré [11] que l'on peut calculer durant toute la durée du processus, la densité de flux à l'interface. Les auteurs pouvaient donc, sans résoudre les équations de la convection naturelle dans la phase fondue, effectuer une modélisation 2D du couplage entre la convection naturelle, la fusion et la conduction dans le solide.

D'autre part les auteurs montrent que l'on peut, en utilisant un modèle 1D simplifié, bien rendre compte de l'évolution du volume fondu, ainsi que de l'enthalpie instantannée.

On retrouve également des corrélations concernant le volume fondu dans l'article [11].

Il ressort toutefois des articles qu'une réserve est à apporter à l'utilisation des corrélations [22] quand les systèmes ont des conditions thermiques ou des propriétés thermophysiques différentes ayant servi à les établir.

D'autres auteurs [19-21] ont montré que la convection naturelle dans la phase liquide à très faible Rayleigh peut être prise en compte par une méthode de perturbation dans la phase initiale de la fusion.

YAO et CHEN [19] utilisent une méthode approchée pour étudier la fusion autour d'un cylindre horizontal. La convection naturelle à très faible Rayleigh est prise en compte par une méthode de perturbation. L'analyse est valable lorsque le transfert par conduction est dominant et ne peut s'appliquer que dans la phase initiale de la fusion.

YAO et CHERNEY [21] traitent également la convection naturelle par une méthode de perturbation. Une des différences avec l'article précédent est le fait que l'on prend en compte l'effet de sous refroidissement du solide.

SAITOH et HIROSE [23] traitent le problème de flux de convection, au dessus d'un cylindre de glace par une méthode de perturbation. En comparant les résultats obtenus à ceux obtenus par des méthodes numériques, ils en concluent que la méthode de perturbation ne convient pas à des problèmes qui comportent des inversions de densité.

Le problème de convection naturelle dans des cavités et notamment dans des cavités annulaires a été étudié par différents auteurs [34 à 39] par des méthodes asymptotiques.

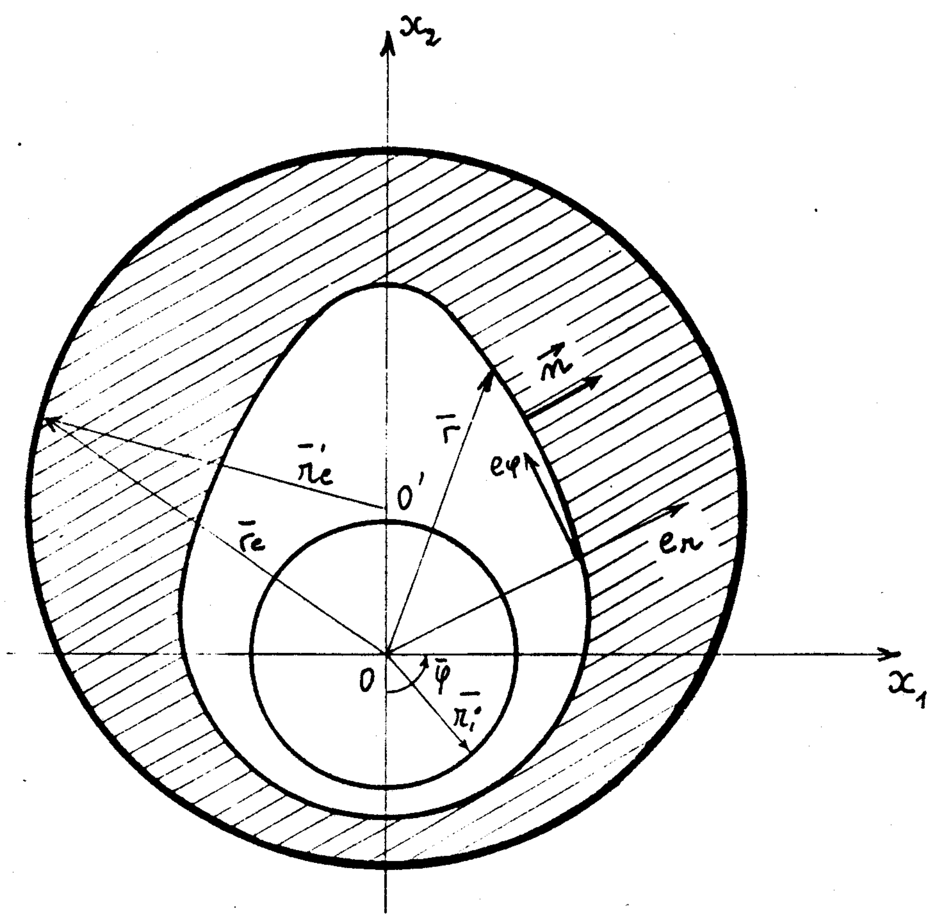
La recherche de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode de perturbation a conduit certains auteurs (MOJTABI et CALTAGIRONE [38], BURNS et TIEN [37]) à exprimer la température et la fonction de courant sous forme de séries entières du nombre de Rayleigh. En fait seuls MOJTABI et CALTAGIRONE se rapprochent le plus de notre problème en ce qui concerne la phase liquide.

3. FORMULATION DU PROBLEME

Nous envisageons l'étude de la fusion d'un produit à l'aide d'un tube de réchauffage noyé dans le produit. La longueur est supposée suffisamment grande pour que le problème soit considéré bidimensionnel.

Compte tenu de la symétrie géométrique par rapport à l'axe x_2, nous pourrons limiter l'étude du problème au demi plan x_1 positif.

Le système étudié se ramène à un tube de réchauffage noyé dans un réservoir cylindrique, les deux cylindres étant désaxés.



3.1. Equations dimensionnelles

Pour alléger les équations adimensionnelles on utilise la notation surlignée pour distinguer les variables dimensionnées.

On suppose que la partie liquide du problème est un fluide Newtonien : le tenseur des contraintes dépend linéairement des vitesses de déformation.

On utilise l'approximation de Boussinesq : les effets de compressibilité sont négligés et les propriétés physiques sont supposées constantes. La densité varie seulement dans le terme de poussée hydrostatique : il s'agit de l'équation d'état.

Dans ces conditions, les équations régissant le problème sont les suivantes :

3.1.1. Coordonnées cartésiennes

Liquide :

* conservation de la masse

$$\frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{C}_2}{\partial \bar{x}_2} = 0 \qquad (3.1.1\text{-}1)$$

* conservation de l'énergie

$$\bar{\rho}_\ell \, \bar{C}p_\ell \left(\frac{\partial \bar{T}_\ell}{\partial \bar{t}} + \bar{C}_1 \frac{\partial \bar{T}_\ell}{\partial \bar{x}_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial \bar{T}_\ell}{\partial \bar{x}_2} \right) = \bar{\lambda}_\ell \left(\frac{\partial^2 \bar{T}_\ell}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_\ell}{\partial \bar{x}_2^2} \right)$$

(3.1.1-2)

* <u>équations de quantité de mouvement</u>

$$\bar{\rho}_\ell\left(\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial \bar{t}}+\bar{c}_1\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial \bar{x}_1}+\bar{c}_2\frac{\partial \bar{c}_2}{\partial \bar{x}_2}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_1}+\bar{\eta}\left(\frac{\partial^2 \bar{c}_1}{\partial \bar{x}_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{c}_1}{\partial \bar{x}_2^2}\right)$$

(3.1.1-3)

$$\bar{\rho}_\ell\left(\frac{\partial \bar{c}_2}{\partial \bar{t}}+\bar{c}_1\frac{\partial \bar{c}_2}{\partial \bar{x}_1}+\bar{c}_2\frac{\partial \bar{c}_2}{\partial \bar{x}_2}\right)=-\bar{\rho}_\ell\bar{g}-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2}+\bar{\eta}\left(\frac{\partial^2 \bar{c}_2}{\partial \bar{x}_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{c}_2}{\partial \bar{x}_2^2}\right)$$

(3.1.1-4)

* <u>équation d'état</u>

$$\bar{\rho}_\ell=\bar{\rho}_f\left[1-\beta(\bar{T}_\ell-\bar{T}_f)\right] \qquad (3.1.1\text{-}5)$$

<u>Solide</u> :

* <u>conservation de l'énergie</u> :

dans le solide l'équation d'énergie se réduit à :

$$\bar{\rho}_s\,\bar{C}_{P_s}\frac{\partial \bar{T}_s}{\partial \bar{t}}=\bar{\lambda}_s\left(\frac{\partial^2 \bar{T}_s}{\partial \bar{x}_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{T}_s}{\partial \bar{x}_2^2}\right) \qquad (3.1.1\text{-}6)$$

<u>Interface</u> :

* <u>conservation de l'énergie</u> :

$$\bar{\lambda}_s\frac{\partial \bar{T}_s}{\partial \bar{n}}-\bar{\lambda}_\ell\frac{\partial \bar{T}_\ell}{\partial \bar{n}}=\bar{\rho}_s\bar{L}_f\frac{d\bar{s}}{d\bar{t}} \qquad (3.1.1\text{-}7)$$

<u>Condition initiale</u> :

$$\bar{T}_s(0, x_1, x_2) = T_0 \tag{3.1.1-8}$$

(supposée uniforme)

<u>Conditions aux limites</u> :

$$\bar{T}_\ell = \bar{T}_i \quad \text{sur} \quad ri \tag{3.1.1-9}$$

$$\bar{T}_s = \bar{T}_e \quad \text{sur} \quad re$$

$$\bar{T}_\ell = \bar{T}_s = \bar{T}_f \quad \text{à l'interface} \tag{3.1.1-10}$$

$$\bar{\vec{C}} = \vec{0} \quad \text{sur} \quad ri \tag{3.1.1-11}$$

(conditions de non glissement)

$$\bar{\vec{C}} = \vec{0} \quad \text{sur} \quad re \tag{3.1.1-12}$$

<u>Bilan des inconnues</u> :

- 5 variables dans le liquide $\bar{T}_\ell$, $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{P}$, $\bar{\rho}_\ell$

- 1 variable dans le solide $\bar{T}_s$

- 1 variable à interface $\frac{d\bar{s}}{dt}$ (vitesse de déplacement du front)

===> 7 variables, 7 équations

3.1.2. Coordonnées cylindriques

En utilisant les formules de transformation ([40] GERMAIN), les équations deviennent :

Liquide :

* conservation de la masse :

$$\frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{C}_r}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{\varphi}} = 0 \qquad (3.1.2\text{-}1)$$

* conservation de l'énergie :

$$\bar{\rho}_\ell \bar{C}p_\ell \left(\frac{\partial \bar{T}_\ell}{\partial \bar{t}} + \bar{C}_r \frac{\partial \bar{T}_\ell}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}_\ell}{\partial \bar{\varphi}} \right) = \bar{\lambda}_\ell \left(\frac{\partial^2 \bar{T}_\ell}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}_\ell}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_\ell}{\partial \bar{\varphi}^2} \right)$$

* quantité de mouvement : (3.1.2-2)

$$\bar{\rho}_\ell \left(\frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{t}} + \bar{C}_r \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{\bar{C}_\varphi^2}{\bar{r}} \right) = \bar{\rho}_\ell \bar{g} \cos\bar{\varphi} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{r}}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 \bar{C}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}^2} - \frac{\bar{C}_r}{\bar{r}^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{\varphi}} \right] \bar{\eta} \qquad (3.1.2\text{-}3)$$

$$\bar{\rho}_\ell \left(\frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{t}} + \bar{C}_r \frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{\varphi}} + \bar{C}_\varphi \frac{\bar{C}_r}{\bar{r}} \right) = -\bar{\rho}_\ell \bar{g} \sin\bar{\varphi} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\varphi}} \qquad (3.1.2\text{-}4)$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{\varphi}^2} - \frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}} \right] \bar{\eta}$$

L'équation d'état (3.1.1-5) reste la même

Solide :

$$\bar{\rho}_s \bar{C}p_s \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial \bar{t}} = \bar{\lambda}_s \left(\frac{\partial^2 \bar{T}_s}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_s}{\partial \bar{\varphi}^2} \right)$$

Interface :

(3.1.2-5)

L'équation (3.1.1-7) reste valable.

3.1.3. Prise en compte de l'équation d'état

Reprenons l'expression vectorielle des équations de quantité de mouvement :

$$\bar{\rho}_\ell \frac{d\vec{\bar{C}}}{d\bar{t}} = \bar{\rho}_\ell \vec{\bar{g}} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\bar{p} + \bar{\eta}\,\vec{\Delta}(\vec{\bar{C}})$$

avec $\vec{\bar{g}} = - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\bar{g}\,\bar{x}_2)$

Remplaçons $\bar{\rho}_\ell$ par $\bar{\rho}_f [\, 1 - \bar{\beta}\,(\bar{T}_\ell - \bar{T}_f\,)]$

Nous obtenons :

$$\bar{\rho}_f\,[\,1 - \bar{\beta}\,(\bar{T}_\ell - \bar{T}_f\,)]\,\frac{d\vec{\bar{c}}}{d\bar{t}} = \bar{\beta}\,\bar{g}\,\bar{\rho}_f\,(\bar{T} - \bar{T}_f\,)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\bar{x}_2 - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\bar{p} + \bar{\rho}_f\,\bar{g}\,\bar{x}_2) + \bar{\eta}\,\vec{\Delta}\,(\vec{\bar{c}}\,)$$

Posons $\bar{P}_g = \bar{p} + \bar{\rho}_f\,\bar{g}\,\bar{x}_2$

En convection naturelle, le premier membre représentant les actions d'inertie est toujours petit devant le second membre représentant les actions de pression et de viscosité.

Or dans ce terme petit, on néglige $\bar{\beta}\,(\bar{T}_\ell - \bar{T}_f\,)$ devant 1.

$$\bar{\rho}_f \frac{d\vec{\bar{C}}}{d\bar{t}} = \bar{\beta}\,\bar{g}\,\bar{\rho}_f\,(\,\bar{T}_\ell - \bar{T}_f)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\bar{x}_2 - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\bar{P}_g + \bar{\eta}\,\vec{\Delta}(\vec{\bar{C}})$$

(3.1.3-1)

3.1.4 Formulation du problème à l'aide du rotationnel et de la fonction de courant.

On pose $$\bar{C}_r = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\varphi}}$$

$$\bar{C}_\varphi = - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{r}}$$

Ψ est appelée fonction de courant

Dans ce cas l'équation de continuité est automatiquement vérifiée.

Soit $\bar{\omega}$, la composante suivant $\vec{x}_3$ de $\vec{rot}\, \vec{c}$, alors :

$$\bar{\omega} = - \Delta \bar{\Psi}$$

En éliminant la pression p entre les projections suivant x_1 et x_2 de l'équation de quantité de mouvement (annexe 1) et en introduisant la composante $\bar{\omega}$ du rotationnel de la vitesse, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{t}} = \frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}_f} \Delta \bar{\omega} - \left(\bar{C}_r \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\varphi}} \right) + \bar{\beta} \bar{g} \left(\frac{\cos \bar{\varphi}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\varphi}} + \sin \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \tag{3.1.4-1}$$

avec $$\bar{C}_r = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\varphi}} \tag{3.1.4-2}$$

$$\bar{C}_\varphi = - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{r}} \tag{3.1.4-3}$$

$$\bar{\omega} = - \Delta \bar{\Psi} \tag{3.1.4-4}$$

auxquelles s'ajoute l'équation d'énergie :

$$\frac{\partial \bar{T}_\ell}{\partial \bar{t}} = \Delta \bar{T}_\ell - \frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\varphi}}\frac{\partial \bar{T}_\ell}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{r}}\frac{\partial \bar{T}_\ell}{\partial \bar{\varphi}}\right) \qquad (3.1.4\text{-}5)$$

Les conditions aux limites sur $\bar{\Psi}$ sont issues des conditions sur la vitesse :

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\varphi}} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \text{en } \bar{r} = \bar{r}_e \text{ et } \bar{r} = \bar{r}_i \qquad (3.1.4\text{-}6)$$

soit Ψ = cte = 0

3.2. Adimensionnement des équations

3.2.1 Grandeurs de référence

- longueur de référence $\bar{r}_i$
- température de référence $\bar{T}_f$

avec les caractéristiques correspondantes :
$\bar{\rho}_f$, $\bar{\lambda}_f$, $\bar{\eta}_f$, $\bar{\nu}_f = \bar{\eta}_f / \bar{\rho}_f$

- vitesse de référence $\bar{\nu}_f / \bar{r}_i$
- temps de référence $\bar{r}_i^{\,2} / \bar{\nu}_f$
- masse de référence $\bar{\rho}_f \; \bar{r}_i^{\,3}$
- pression de référence $\bar{\rho}_f \; \bar{\nu}_f^{\,2} / \bar{r}_i^{\,2}$

Nous avons choisi ici d'utiliser la viscosité cinématique pour l'adimensionnement de la vitesse, du temps, de la masse et de la pression. Dans certaines références bibliographiques, $\bar{\nu}_f$ est remplacé par la diffusivité thermique.

3.2.2 Variables adimensionnées

- $x = \bar{x} / \bar{r}_i$ (3.2.2-1)

- $T = (\bar{T} - \bar{T}_f) / \Delta \bar{T}$ (3.2.2-2)

  avec $\Delta \bar{T} = \bar{T}_i^\circ - \bar{T}_F$

- $\vec{c} = \vec{\bar{c}} / (\bar{\nu}_f / \bar{r}_i)$ (3.2.2-3)

- $t = \bar{t} / (\bar{r}_i^2 / \bar{\nu}_f)$ (3.2.2-4)

- $p = \bar{p} / (\bar{\rho}_f \, \bar{\nu}_f^2 / \bar{r}_i^2)$ (3.2.2-5)

3.2.3 Nombres caractéristiques

Prandtl : $$P_r = \frac{\bar{c}_{pe} \, \bar{\eta}_e}{\bar{\lambda}_e} = \frac{\bar{c}_{pe} \, \bar{\nu}_e \, \bar{\rho}_e}{\bar{\lambda}_e} = \frac{\bar{\nu}_e}{\bar{a}_e} \qquad (3.2.3\text{-}1)$$

Grashof : $$G_r = \frac{\bar{g} \, \bar{\beta} \, \Delta \bar{T} \, \bar{r}_i^3}{\bar{\nu}_e^2} \qquad (3.2.3\text{-}2)$$

Nusselt : $$N_u = \frac{\bar{h} \, \bar{r}_i}{\bar{\lambda}} \qquad (3.2.3\text{-}3)$$

Stefan : $$Ste = \frac{\bar{c}_{pe} \, \Delta \bar{T}}{\bar{L}_f} \qquad (3.2.3\text{-}4)$$

Rayleigh : $$R_a = G_r \, P_r \qquad (3.2.3\text{-}5)$$

3.2.4 Coordonnées cartésiennes

Liquide :

* Conservation de la masse :

$$\mathrm{div}\,\vec{c} = \vec{0} \qquad (3.2.4\text{-}1)$$

* Conservation de l'énergie :

L'équation de l'énergie adimensionnée est donc :

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} + c_1 \frac{\partial T_l}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial T_l}{\partial x_2} = \frac{1}{P_r}\left(\frac{\partial^2 T_l}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial x_2^2} \right)$$

(3.4.2-2)

avec l'hypothèse de caractéristiques constantes.

* Quantité de mouvement :

Les projections de l'équation de quantité de mouvement deviennent :

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + c_1 \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial c_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial P_g}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + c_1 \frac{\partial c_2}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial c_2}{\partial x_2} = G_r T - \frac{\partial P_g}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial x_2^2}$$

(3.2.4-3)

Solide :

La diffusivité thermique du solide étant

$$\bar{a}_s = \frac{\bar{\lambda}_s}{\bar{\rho}_s \, \bar{C}_{p_s}} \qquad \text{et en posant} \qquad a^* = \frac{\bar{a}_s}{\bar{a}_\ell}$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{a^*}{P_r} \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial x_2^2} \right) \tag{3.2.4-4}$$

Interface :

En posant

$$\lambda^* = \frac{\bar{\lambda}_s}{\bar{\lambda}_\ell}$$

$$\rho^* = \frac{\bar{\rho}_s}{\bar{\rho}_\ell}$$

$$\lambda^* \frac{\partial T_s}{\partial n} - \frac{\partial T_\ell}{\partial n} = \rho^* \frac{P_r}{S T_e} \frac{ds}{dt} \tag{3.2.4-5}$$

Condition initiale :

$$T_s(0, x_1, x_2) = \frac{\bar{T}_o - \bar{T}_f}{\Delta \bar{T}} \tag{3.2.4-6}$$

Conditions aux limites :

$$T_\ell = \frac{\overline{T}_i - \overline{T}_f}{\Delta \overline{\overline{T}}} = 1 \qquad \text{en } r = r_i \qquad (3.2.4\text{-}7)$$

$$T_s = \frac{\overline{T}_e - \overline{T}_f}{\Delta \overline{\overline{T}}} = T_e \qquad \text{en } r = r_e \qquad (3.2.4\text{-}8)$$

$$T_\ell = T_s = 0 \qquad \text{à interface } (3.2.4\text{-}9)$$

3.2.5 Coordonnées cylindriques :

Liquide :

* Conservation de la masse :

$$\frac{\partial C_r}{\partial r} + \frac{C_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \qquad (3.2.5\text{-}1)$$

* Conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial t} + C_r \frac{\partial T_\ell}{\partial r} + \frac{C_\varphi}{r}\frac{\partial T_\ell}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial^2 T_\ell}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_\ell}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_\ell}{\partial \varphi^2} \right) / P_r$$

(3.2.5-2)

* <u>Quantité de mouvement</u> :

$$\frac{\partial C_r}{\partial t} + C_r \frac{\partial C_r}{\partial r} + \frac{C_\varphi}{r} \frac{\partial C_r}{\partial \varphi} - \frac{C_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial P_g}{\partial r} + G_r T \cos\varphi$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 C_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C_r}{\partial \varphi^2} - \frac{C_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

(3.2.5-3)

$$\frac{\partial C_\varphi}{\partial t} + C_r \frac{\partial C_\varphi}{\partial r} + \frac{C_\varphi}{r} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{C_\varphi C_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P_g}{\partial \varphi} - G_r T_s \sin\varphi$$
$$+ [\frac{\partial^2 C_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{C_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial C_r}{\partial \varphi}$$

(3.2.5-4)

<u>Solide</u> :

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{a^*}{P_r} \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_s}{\partial \varphi^2} \right)$$

(3.2.5-5)

Le bilan à l'interface ne change pas.

Les conditions initiales et aux limites sont identiques.

3.2.6. Equations adimensionnelles de la formulation rotationnel-fonction de courant.

La formulation qui suit, concerne uniquement la partie liquide.

$$C_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

$$C_\varphi = - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\omega = - \Delta \psi$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \Delta \omega - \left(C_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{C_\varphi}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) + Gr\left(\sin\varphi \frac{\partial T_l}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial T_l}{\partial \varphi} \right)$$

(3.2.6-1)

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} = \frac{\Delta T_l}{P_r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial T_l}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)$$

(3.2.6-2)

avec $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

<u>Conditions aux limites</u> :

en r = 1 et r = a : $$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0 \qquad (3.2.6\text{-}3)$$

<u>Condition initiale</u> :

pour t = 0 : $$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0 \qquad (3.2.6\text{-}4)$$

4. ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU PROBLEME DANS LA PHASE LIQUIDE.

Un des problèmes rencontrés lors de la simulation de la fusion d'un produit (quelle que soit l'enceinte considérée et quel que soit le type de réchauffage) est le démarrage du calcul. Or YAO et CHEN [19] et YAO et CHERNEY [21] ont montré que l'analyse de la convection naturelle à très faible Rayleigh, prise en compte par une méthode de perturbation peut être appliquée dans la phase initiale de la fusion. Nous allons donc essayer d'analyser le démarrage du problème par une méthode de perturbation.

La recherche de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode de perturbation a conduit certains auteurs (MOJTABI et CALTAGIRONE [38], BURNS et TIEN [37]) à exprimer la température et la fonction de courant sous forme de séries entières du nombre de Rayleigh.

En fait seuls MOJTABI et CALTAGIRONE se rapprochent de notre problème en ce qui concerne la phase liquide.

Dans la suite de cette étude asymptotique, nous utilisons quatre équations de base :

- l'équation de continuité
- l'équation d'énergie
- les deux projections de l'équation de quantité de mouvement.

4.1 Recherche des équations perturbées par rapport à l'état au repos

4.1.1. Coordonnées cartésiennes

Reprenons les équations adimensionnelles :

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} = 0 \qquad (4.1.1\text{-}1)$$

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial t} + C_1 \frac{\partial T_\ell}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial T_\ell}{\partial x_2} = \frac{1}{P_r}\left(\frac{\partial^2 T_\ell}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_\ell}{\partial x_2^2} \right) \qquad (4.1.1\text{-}2)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} + C_1 \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_2} = - \frac{\partial P_g}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial x_2^2} \qquad (4.1.1\text{-}3)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} + C_1 \frac{\partial C_2}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial C_2}{\partial x_2} = G_r T_\ell - \frac{\partial P_g}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial x_2^2}$$

(4.1.1-4)

Dans la suite du problème, nous supposons que la température du tube de réchauffage $\bar{T}_i$ est telle que :

$$\bar{T}_i - \bar{T}_f = \varepsilon \bar{T}_f \qquad \text{avec} \quad \varepsilon << 1$$

La validité de cette hypothèse sera vérifiée ultérieurement lors des résultats.

L'état de référence est celui du milieu liquide au repos à la température uniforme T_f (0 en variable adimensionnelle).

Cet état existe pour $\varepsilon = 0$

Dans ce cas

$$c_{10} = 0$$

$$c_{20} = 0$$

$$T_{\ell o} = 0$$

Les équations de quantité de mouvement donnent :

$$P_{go} = P_i + \rho_f \; g \; x_2$$

où l'indice o représente l'état de référence

A présent, nous recherchons les solutions au problème, en cas de réchauffage où $T_i \neq T_f$, donc $\varepsilon \neq 0$

Si c_1^* , c_2^* , T_ℓ^* , P_g^* sont les champs perturbés de vitesse, de température et de pression, on écrit :

$$C_1^* = C_{10} + \Delta C_{10}$$

$$C_2^* = C_{20} + \Delta C_{20}$$

$$T_\ell^* = T_{\ell 0} + \Delta T_\ell$$

$$P_g^* = P_{go} + \Delta P_{go}$$

où ΔC_{10}, ΔC_{20}, ΔT_ℓ et Δ_{Pg0} sont les perturbations de vitesse, de température et de pression que nous pouvons encore écrire :

$$\Delta C_{10} = \varepsilon . C_1$$

$$\Delta C_{20} = \varepsilon . C_2$$

$$\Delta T_\ell = \varepsilon . T_\ell$$

$$\Delta P_{g0} = \varepsilon . P_{g0}$$

Si nous intégrons ces grandeurs perturbées dans les équations (4.1.1-1) à (4.1.1.-4), nous obtenons :

$$\varepsilon \left(\frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$\varepsilon \frac{\partial T_\ell}{\partial t} + \varepsilon^2 \left(c_1 \frac{\partial T_\ell}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial T_\ell}{\partial x_2} \right) = \frac{\varepsilon}{P_r} \left(\frac{\partial^2 T_\ell}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_\ell}{\partial x_2^2} \right)$$

$$\varepsilon \frac{\partial c_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \left(c_1 \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial c_1}{\partial x_2} \right) = - \varepsilon \frac{\partial P_g}{\partial x_1} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2} \right)$$

$$\varepsilon \frac{\partial c_2}{\partial t} + \varepsilon^2 \left(c_1 \frac{\partial c_2}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial c_2}{\partial x_2} \right) = \varepsilon\, G_r T_\ell - \varepsilon \frac{\partial P_g}{\partial x_2} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 c_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial x_2^2} \right)$$

En ne conservant que les termes du premier ordre en ε :

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} = 0 \qquad (4.1.1\text{-}5)$$

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial t} = \frac{1}{P_r} \left(\frac{\partial^2 T_\ell}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_\ell}{\partial x_2^2} \right) \qquad (4.1.1\text{-}6)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = - \frac{\partial P_g}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial x_2^2} \right) \qquad (4.1.1\text{-}7)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = G_r T_\ell - \frac{\partial P_g}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 C_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial x_2^2} \right) \qquad (4.1.1\text{-}8)$$

On combine les équations (4.1.1-7) et (4.1.1-8) de façon à éliminer la pression :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-\frac{\partial}{\partial x_2}\ (4.1.1\text{-}7) + \frac{\partial}{\partial x_1}\ (4.1.1\text{-}8)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 C_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial C_1}{\partial x_1}\right)\right) = Gr\frac{\partial^2 T\ell}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2}\left[\frac{\partial C_2}{\partial x_2} - \frac{\partial C_1}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial^4 C_2}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\left(\frac{\partial C_1}{\partial x_1}\right) \qquad (4.1.1\text{-}9)$$

On remplace dans cette équation :

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_1} \quad \text{par} \quad -\frac{\partial C_2}{\partial x_2} \qquad (4.1.1\text{-}5)$$

et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta C_2) = Gr\frac{\partial^2 T\ell}{\partial x_1^2} + \Delta(\Delta C_2) \qquad (4.1.1\text{-}10)$$

avec

$$\Delta(\Delta C_2) = \frac{\partial^4 C_2}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 C_2}{\partial x_2^4} + 2\frac{\partial^4 C_2}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$$

Le système se réduit à deux équations (4.1.1-10) et (4.1.1-6) à deux inconnues C_2 et $T\ell$. La vitesse C_1 se déduit de la vitesse C_2 par l'équation (4.1.1-5).

Aux équations précédentes s'ajoutent :

- les conditions initiales

$$T_\ell = 0 \qquad (4.1.1\text{-}11)$$

$$\vec{c} = \vec{0} \qquad (4.1.1\text{-}12)$$

- les conditions aux limites

$$T_\ell = T_{\ell i} = \frac{1}{\varepsilon}$$ à la frontière intérieure (4.1.1-13)

$$T_\ell = 0$$ à la frontière extérieure (4.1.1-14)

$$\vec{c} = \vec{0}$$ aux deux frontières (4.1.1-15)
(conditions de non glissement)

pour les perturbations de température et de vitesse.

4.1.2 Coordonnées cylindriques

La procédure est la même qu'en coordonnées cartésiennes. On reprend les équations adimensionnées en coordonnées cylindriques. On substitue dans ces équations les valeurs perturbées et en ne conservant que les termes du premier ordre en ε , on obtient :

$$\frac{\partial C_r}{\partial r} + \frac{C_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \qquad (4.1.2\text{-}1)$$

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial t} = \frac{1}{P_r}\left(\frac{\partial^2 T_\ell}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_\ell}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_\ell}{\partial \varphi^2} \right) \qquad (4.1.2\text{-}2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_r}{\partial t} = & -\frac{\partial P_g}{\partial r} + G_r T_\ell \cos\varphi + \frac{\partial^2 C_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_r}{\partial r} \\ & + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C_r}{\partial \varphi^2} - \frac{C_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned} \qquad (4.1.2\text{-}3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_\varphi}{\partial t} = & -\frac{1}{r}\frac{\partial P_g}{\partial \varphi} - G_r T_\ell \sin\varphi + \frac{\partial^2 C_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_\varphi}{\partial r} \\ & + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{C_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial C_r}{\partial \varphi} \end{aligned} \qquad (4.1.2\text{-}4)$$

On élimine la pression entre les équations 4.1.2-3 et 4.1.2-4 de la même manière que celle utilisée en annexe 1 :

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\ (4.1.2\text{-}3) + \frac{1}{r}\ (4.1.2\text{-}4) + \frac{\partial}{\partial r}\ (4.1.2\text{-}4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{C_\varphi}{r} + \frac{\partial C_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial C_r}{\partial \varphi} \right) = & \ G_r \left[\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \sin\varphi \frac{\partial T}{\partial r} \right] \\ & + \frac{C_\varphi}{r^3} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial C_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial C_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C_r}{\partial \varphi \partial r} \\ & + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 C_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 C_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 C_r}{\partial \varphi^3} \\ & - \frac{1}{r}\frac{\partial^3 C_r}{\partial \varphi \partial r^2} + \frac{\partial^3 C_\varphi}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 C_\varphi}{\partial r \partial \varphi^2} \end{aligned}$$

(4.1.2-5)

L'élimination de C_r ou de C_φ entre (4.1.2-1) et (4.1.2-5) ne semble pas évidente.

Seule l'utilisation de la fonction de courant nous paraît intéressante et l'équation 4.1.2-5 devient donc

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi) = -Gr\left(\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \Delta(\Delta\psi)$$

(4.1.2-6)

Ce qui nous ramène à un système de deux équations (4.1.2-6) et (4.1.2-2) équivalent à celui obtenu en coordonnées cartésiennes.

Les conditions initiales et les conditions aux limites sont identiques. Mais elles semblent plus évidentes à appliquer en coordonnées cylindriques.

4.2 Choix du domaine d'analyse

Le problème qui se pose en coordonnées cartésiennes est la prise en compte des conditions aux limites sur la frontière du tube de réchauffage et sur la frontière correspondant à l'interface.

On pourrait faire une transformation du domaine d'étude telle que celle proposée par RIEGER, PROJAHN et BEER [20]. Mais dans ce cas, ce sont les équations différentielles qui se compliquent de façon significative.

En coordonnées cylindriques, le problème de la prise en compte des conditions aux limites subsiste sur la frontière extérieure correspondant à l'interface.

Notre premier objectif étant l'analyse du démarrage du problème, nous nous proposons d'adopter une frontière extérieure de forme circulaire et coaxiale au cylindre de réchauffage.

Le domaine d'analyse se ramène donc à une enceinte annulaire.

5. SOLUTION ANALYTIQUE DES EQUATIONS PERTURBEES.

5.1. Distribution des températures :

Rappelons le problème à résoudre :

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 T_\ell}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\ell}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_\ell}{\partial \varphi^2} \right) \cdot \frac{1}{P_\ell} \qquad (5.1\text{-}1)$$

avec

$$T_\ell = T_{\ell i} \quad \text{pour } r = 1 \qquad (5.1\text{-}2)$$

$$T_\ell = 0 \quad \text{pour } r = r_a \qquad (5.1\text{-}3)$$

et

$$T_\ell = 0 \quad \text{pour } t = 0 \qquad (5.1\text{-}4)$$

L'équation différentielle est linéaire et homogène. Seule la condition en r = 1 n'est pas homogène. Nous allons donc rendre le problème homogène. Pour cela, nous recherchons la solution au problème stationnaire.

Comme la géométrie et les conditions aux limites sont axisymétriques, la température T_ℓ possède cette même propriété et ne dépend pas de φ . Les conditions initiales étant supposées uniformes, la solution au problème transitoire est également axisymétrique.

Le problème stationnaire est défini par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tilde{T}_\ell}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{T}_\ell}{\partial r} = 0 & (5.1\text{-}5) \\ \text{avec} \quad \tilde{T}_\ell = 0 \quad \text{pour } r = r_a & (5.1\text{-}6) \\ \tilde{T}_\ell = T_{\ell i} \quad \text{pour } r = 1 & (5.1\text{-}7) \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\tilde{T}_\ell = T_{\ell i} \left[1 - \frac{Ln\, r}{Ln\, r_a} \right] \qquad (5.1\text{-}8)$$

La solution au problème transitoire non homogène T_ℓ peut s'écrire comme la somme de la solution au problème stationnaire $\tilde{T}_\ell$ et de la solution au problème transitoire homogène T_{ℓ_1}

$$T_\ell(r,t) = \tilde{T}_\ell + T_{\ell_1} \qquad (5.1\text{-}9)$$

En combinant les équations (5.1-1) à (5.1-9) on aboutit au problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_{\ell_1}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\ell_1}}{\partial r} = P_r \dfrac{\partial T_{\ell_1}}{\partial t} & (5.1\text{-}10) \\ \text{avec} \quad T_{\ell_1}(1,t) = 0 & (5.1\text{-}11) \\ T_{\ell_1}(r_a,t) = 0 & (5.1\text{-}12) \\ T_{\ell_1}(r,0) = T_{\ell i} \left[\dfrac{Ln\, r}{Ln\, r_a} - 1 \right] & (5.1\text{-}13) \end{cases}$$

Ce problème est homogène et linéaire (pour l'équation différentielle et pour les conditions aux limites). Nous pouvons donc le résoudre par la méthode de séparation des variables.

Posons $T_{\ell_1} = T_{\ell r} \, . \, T_{\ell t}$, ce qui nous permet de transformer l'équation différentielle (5.1-10) en :

$$\frac{1}{T_{\ell t}} \frac{dT_{\ell t}}{dt} = \frac{1}{T_{\ell r}} \frac{1}{P_r} \left(\frac{d^2 T_{\ell r}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_{\ell r}}{dr} \right) \qquad (5.1\text{-}11)$$

Pour que ces deux fonctions soient égales, il faut qu'elles soient égales à une même constante. Soit α cette constante.

Il s'ensuit que :

$$T_{\ell t} = A_\alpha e^{\alpha t} \qquad (5.1.1\text{-}12)$$

est une solution particulière pour $T_{\ell t}$

L'équation en $T_{\ell r}$ devient :

$$r \frac{d^2 T_{\ell r}}{dr^2} + \frac{dT_{\ell r}}{dr} - \alpha r P_r T_{\ell r} = 0 \qquad (5.1.1\text{-}13)$$

avec $T_{\ell r}(1) = 0$ et $T_{\ell r}(r_a) = 0$ (5.1.1-14)

C'est une équation du type Bessel dont la solution dépend du signe de la constante α .

5.1.1 Constante négative

soit $\alpha = -\lambda^{T^2}$

La solution $T_{\ell r\alpha}$ est :

$$T_{\ell r\alpha} = B_\alpha . J_0\left(\lambda^T \sqrt{P_r}\, r\right) + C_\alpha\, Y_0\left(\lambda^T \sqrt{P_r}\, r\right)$$

(5.1.1-15)

Les conditions aux limites doivent être satisfaites :

$$B_\alpha\, J_0\left(\lambda^T \sqrt{P_r}\right) + C_\alpha\, Y_0\left(\lambda^T \sqrt{P_r}\right) = 0 \qquad (5.1.1\text{-}16)$$

$$B_\alpha\, J_0\left(\lambda^T \sqrt{P_r}\, ra\right) + C_\alpha\, Y_0\left(\lambda^T \sqrt{P_r}\, ra\right) = 0 \qquad (5.1.1\text{-}17)$$

Une solution autre que la solution triviale $B_\alpha = C_\alpha = 0$ ne peut être obtenue que dans le cas où le déterminant du système est nul.

$$J_0\left(\lambda^T \sqrt{P_r}\right) Y_0\left(\lambda^T \sqrt{P_r}\, ra\right) - J_0\left(\lambda^T \sqrt{P_r}\, . ra\right) Y_0\left(\lambda^T \sqrt{P_r}\right) = 0$$

(5.1.1-18)

Cette équation donne les conditions pour lesquelles les valeurs λ^T sont déterminées. Ces valeurs sont appelées valeurs propres de (5.1.1-18).

Compte tenu de l'allure de J_0 et Y_0 (voir annexe 2), il existe une infinité de λ^T résolvant (5.1.1-18).

On trouve en annexe 4, la méthode de recherche des valeurs de λ^T.

Soit λ_m^T une solution particulière, alors (5.1.1-15) devient :

$$T_{\ell r m} = B_m J_o(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r) + C_m Y_o(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r)$$

où B_m et C_m sont liés par : $\dfrac{C_m}{B_m} = \dfrac{-J_o(\lambda_m^T \sqrt{P_r})}{Y_o(\lambda_m^T \sqrt{P_r})}$

$$\begin{cases} T_{\ell r m} = B_m C_o^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r) & (5.1.1\text{-}19) \\ \text{avec} \quad C_o^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}) = J_o(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r) - \dfrac{J_o(\lambda_m^T \sqrt{P_r})}{Y_o(\lambda_m^T \sqrt{P_r})} Y_o(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r) & \end{cases}$$

(5.1.1-20)

La solution générale $T_{\ell 1}$ peut s'écrire :

$$T_{\ell 1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_o^T(\lambda_n^T \sqrt{P_r}\, r) e^{-\lambda^{T^2}_n t} \qquad (5.1.1\text{-}21)$$

Elle satisfait la condition initiale :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n C_o^T(\lambda_n^T \sqrt{P_r}\, r) = T_{\ell i}\left(\frac{Ln r}{Ln r_a} - 1\right) \qquad (5.1.1\text{-}22)$$

On multiplie de chaque côté par $r C_o^T(\lambda_m \sqrt{P_r}\, r)$ et on intègre entre 1 et r_a. Les termes pour $n \neq m$ sont nuls du fait de l'orthogonalité de C_o^T (annexe 3)

On a donc :

$$A_m \int_1^{r_a} r\, C_o^{T^2}(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r)\, dr = \int_1^{r_a} T_{\ell i}\left(\frac{Ln r}{Ln r_a} - 1\right) r\, C_o^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r)\, dr$$

(5.1.1-23)

<u>1er membre</u> :

En utilisant les tables A.2-3 et A.2-5 (Annexe 2), le premier membre devient :

$$I_1 = A_m \left[\frac{1}{2} r^2 \left(C_1^{T^2} (\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r) + C_o^{T^2} (\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r) \right) \right]_1^{ra}$$

or $C_o^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}) = 0$ et $C_o^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r_a) = 0$ du fait des conditions aux limites.

Il s'ensuit :

$$I_1 = A_m \left[\frac{ra^2}{2} C_1^{T^2} (\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, ra) - \frac{1}{2} C_1^{T^2} (\lambda_m^T \sqrt{P_r}) \right]$$

(5.1.1-24)

<u>2ème membre</u> :

Nous décomposons ce terme en une somme de deux termes :

$$T_{\ell i} \left\{ \frac{1}{\ln ra} \int_1^{ra} \ln(ra)\, r\, C_o^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r)\, dr - \int_1^{ra} r\, C_o^T(\lambda_m \sqrt{P_r}\, r)\, dr \right\}$$

(5.1.1-25)

En intégrant le premier terme par parties et en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel (annexe 2), on trouve :

$$\frac{T_{\ell i}}{\ln r_a} \int_1^{ra} \ln r\; r\; C_o^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r)\, dr = \frac{ra}{\lambda_m^T} \frac{T_{\ell i}}{\sqrt{P_r}} C_1^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, ra)$$

(5.1.1-26)

On intègre le second terme en utilisant la table A.2.5.

$$-\int_1^{ra} T_{\ell i}\, r\, C_o^T\left(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\right) dr = -\frac{1}{\lambda_m^T \sqrt{P_r}}\left[ra\, C_1^T\left(\lambda_m \sqrt{P_r}\, ra\right) - C_1^T\left(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\right)\right] \tag{5.1.1-27}$$

En combinant les équations (5.1.1-23) à (5.1.1-27) on en déduit

$$A_m = \frac{2\, T_{\ell i}\, C_1^T\left(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\right)}{\lambda_m^T \sqrt{P_r}\left[ra^2\, C_1^{T^2}\left(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, ra\right) - C_1^{T^2}\left(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\right)\right]} \tag{5.1.1-28}$$

La température dans l'enceinte est donnée par :

$$T_\ell(r,t) = T_{\ell i}\left\{ \left(-\frac{\ln r}{\ln ra} + 1\right) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^T\, C_o^T\left(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r\right) e^{-\lambda_m^{T^2} t} \right\} \tag{5.1.1-29}$$

avec $A_m^T = A_m / T_{\ell i}$

C_o^T étant la fonction définie par 5.1.1-20.

5.1.2 Constante positive

$$\alpha = \lambda^{T^2}$$

La solution $T_{\ell r \alpha}$ est :

$$T\ell_{r\alpha} = B'_\alpha \, I_0(\lambda^T \sqrt{Pr}\, r) + C'_\alpha \, K_0(\lambda^T \sqrt{Pr}\, r)$$

(5.1.2-1)

Les conditions aux limites doivent être satisfaites :

$$\begin{cases} B'_\alpha \, I_0(\lambda^T \sqrt{Pr}) + C'_\alpha \, K_0(\lambda^T \sqrt{Pr}) = 0 & \text{(5.1.2-2)} \\ \\ B'_\alpha \, I_0(\lambda^T \sqrt{Pr}\, ra) + C'_\alpha \, K_0(\lambda^T \sqrt{Pr}\, ra) = 0 & \text{(5.1.2-3)} \end{cases}$$

Pour éviter la solution triviale $B'_\alpha = C'_\alpha = 0$, il faut que le déterminant soit nul :

$$I_0(\lambda^T \sqrt{Pr}) . K_0(\lambda^T \sqrt{Pr}\, r_a) = I_0(\lambda^T \sqrt{Pr}\, ra) \, K_0(\lambda^T \sqrt{Pr})$$

$$f_1(\lambda^T) = f_2(\lambda^T)$$

La fonction K_0 est décroissante et positive, on peut donc dire pour tout r_a supérieur à 1 :

$$0 < K_0(r_a x) < K_0(x) \qquad \text{avec } x = \lambda^T \sqrt{Pr}$$

$$\forall x > 0$$

La fonction I_o est croissante et positive, nous avons donc :

$$I_o(r_a x) > I_o(x) > 0$$

$$\forall x > 0$$

En multipliant ces deux inégalités, nous avons :

$$K_o(x)\, I_o(r_a x) > I_o(x)\, K_o(r_a x) > 0$$

$$\forall x > 0$$

ou encore

$$\beta_2(\lambda^T) > \beta_1(\lambda^T) \qquad \forall x > 0 \quad \text{donc } \forall \lambda^T > 0$$

Il n'y a donc pas de solution à :

$$\beta_2(\lambda^T) = \beta_1(\lambda^T)$$

5.2 Etude du champ des vitesses

L'étude des champs de vitesse passe par l'étude de la fonction de courant.

Reprenons l'équation (4.1.2-6) en posant :

$$g(r,\varphi,t) = -Gr\left(\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\partial T}{\partial r}\right) \qquad (5.2\text{-}1)$$

Le problème à résoudre est donc :

$$\frac{\partial(\Delta\Psi)}{\partial t} = g(r,\varphi,t) + \Delta(\Delta\Psi) \qquad (5.2\text{-}2)$$

avec

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = 0 \qquad \text{pour } r = 1 \text{ et } r = r_a, \forall t \quad (5.2\text{-}3)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = 0 \qquad \text{pour } t = 0, \forall r, \forall\varphi \quad (5.2\text{-}4)$$

Compte tenu de l'expression de la température (5.1.1.-29) trouvée précédemment, le terme source g devient :

$$g(r,\varphi,t) = \sin\varphi . Gr . Te_i \left\{ \frac{1}{r \ln r_a} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^T \lambda_m^T \sqrt{Pr}\, C_1^T(\lambda_m^T \sqrt{Pr}\, r) e^{-\lambda_m^{T^2} t} \right\}$$

(5.2-5)

Le problème en ψ est linéaire mais non homogène à cause du terme source g.

Nous allons rechercher les solutions par la méthode de variation des paramètres. Pour ce faire, il nous faut trouver les fonctions propres du problème homogène associé :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial(\Delta\psi)}{\partial t} = \Delta(\Delta\psi) & & (5.2\text{-}6) \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial r} = \dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0 & \text{en } r = 1 \text{ et } r = ra & (5.2\text{-}7) \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial r} = \dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0 & \text{pour } t = 0 & (5.2\text{-}8) \end{array}\right.$$

On procède d'abord à la séparation des variables d'espace et de temps. Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{\psi_t}\frac{d\psi_t}{dt} = \frac{1}{\Delta\psi_{r\varphi}}\Delta(\Delta\psi_{r\varphi}) = \alpha$$

la solution en ψ_t est du type :

$$\psi_t = A_\alpha . e^{\alpha t} \qquad (5.2\text{-}9)$$

Posons $\omega_{r\varphi} = -\Delta\psi_{r\varphi}$ alors $\Delta\omega_{r\varphi} = \alpha\,\omega_{r\varphi}$

ou encore

$$\frac{\partial^2\omega_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\omega_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega_{r\varphi}}{\partial\varphi^2} = \alpha\,\omega_{r\varphi}$$

Séparons $\omega_{r\varphi}$: $\omega_{r\varphi} = \omega_r \; \omega_\varphi$

Il s'ensuit que :

$$\frac{r^2}{\omega_r}\frac{d^2\omega_r}{dr^2} + \frac{r}{\omega_r}\frac{d\omega_r}{dr} - \alpha r^2 = -\frac{1}{\omega_\varphi}\frac{d^2\omega_\varphi}{d\varphi^2} = \beta$$

Equation en ω_φ

$$\frac{d^2\omega_\varphi}{d\varphi^2} + \beta\omega_\varphi = 0$$

1er cas $\beta < 0$ la solution est du type

$$\omega_\varphi = e^{-\sqrt{|\beta|}\varphi} \text{ ou } \omega_\varphi = e^{\sqrt{|\beta|}\varphi}$$

elle n'est pas périodique en φ

2ème cas $\beta > 0$ la solution est du type

$$\omega_\varphi = \sin(\sqrt{\beta}\varphi) \text{ ou } \omega_\varphi = \cos(\sqrt{\beta}\varphi)$$

pour que la solution soit périodique, il faut que $\sqrt{\beta}$ soit un entier, donc $\beta = n^2$

$$\omega_\varphi = B_n \sin n\varphi + B'_n \cos n\varphi$$

où B_n et B'_n sont des constantes.

Equation en ω_r

$$r^2\frac{d^2\omega_r}{dr} + r\frac{d\omega_r}{dr} - (\alpha r^2 + n^2)\omega_r = 0$$

C'est une équation du type Bessel d'ordre n , dont les solutions dépendent du signe de α .

5.2.1 Constante négative $\alpha = -\lambda^2$

a/ recherche des valeurs et fonctions propres

$$\omega_r = D_n J_n(\lambda r) + D'_n Y_n(\lambda r) \tag{5.2.1-1}$$

où D_n et D'_n sont des constantes.

Revenons à la fonction de courant :

$$\begin{aligned} \Delta\Psi_{r\varphi} &= \left(B_n J_n(\lambda r) + B'_n Y_n(\lambda r)\right) \sin n\varphi \\ &\quad + \left(D_n J_n(\lambda r) + D'_n Y_n(\lambda r)\right) \cos n\varphi \end{aligned} \tag{5.2.1-2}$$

où B_n, B'_n, D_n, D'_n sont des constantes.

Nous avons utilisé les mêmes noms que précédemment pour ne pas alourdir le texte avec les noms des constantes.

L'équation (5.2.1-2) est résolue en utilisant la solution générale à l'équation sans second membre (annexe 6) et la solution particulière à l'équation avec second membre (annexe 5).

Dans ce cas l'expression de $\Psi_{r\varphi}$ est :

$$
\begin{aligned}
\Psi_{r\varphi} = & -[\,(B_n . J_n(\lambda r) + B'_n Y_n(\lambda r))\sin n\varphi \\
& + (D_n J_n(\lambda r) + D'_n Y_n(\lambda r))\cos n\varphi\,]/\lambda^2 \\
& + \alpha_o \ln r + \alpha'_o \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k r^k + \alpha'_k r^{-k}) \sin k\varphi \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k r^k + \beta'_k r^{-k}) \cos k\varphi
\end{aligned}
$$

(5.2.1-3)

Pour trouver les valeurs et fonctions propres, il nous faut utiliser les conditions aux limites.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_{r\varphi}}{\partial r}(r=1) = & \Big[\, B_n \Big(\frac{J_{n+1}(\lambda)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2} J_n(\lambda) \Big) \\
& + B'_n \Big(\frac{Y_{n+1}(\lambda)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2} Y_n(\lambda) \Big) \Big] \sin n\varphi \\
& + \Big[\, D_n \Big(\frac{J_{n+1}(\lambda)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2} J_n(\lambda) \Big) \\
& + D'_n \Big(\frac{Y_{n+1}(\lambda)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2} Y_n(\lambda) \Big) \Big] \cos n\varphi \\
& + \alpha_o \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} k (\alpha_k - \alpha'_k) \sin k\varphi \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} k (\beta_k - \beta'_k) \cos k\varphi = 0
\end{aligned}
$$

(5.2.1-4)

$$\frac{\partial \Psi_{n\varphi}}{\partial \varphi}(r=1) = \left[B_n \left(-\frac{J_n(\lambda) n}{\lambda^2}\right) + B'_n \left(-\frac{Y_n(\lambda)\cdot n}{\lambda^2}\right)\right] \cos n\varphi$$

$$+ \left[D_n \left(\frac{J_n(\lambda) n}{\lambda^2}\right) + D'_n \left(\frac{Y_n(\lambda) n}{\lambda^2}\right)\right] \sin n\varphi$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\alpha_k + \alpha'_k\right) \cos k\varphi$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\beta_k + \beta'_k\right) \sin k\varphi = 0$$

(5.2.1-5)

$$\frac{\partial \Psi_{n\varphi}}{\partial r}(r=r_a) = \left[B_n \left(\frac{J_{n+1}(\lambda r_a)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2 r_a} J_n(\lambda r_a)\right)\right.$$

$$\left. + B'_n \left(\frac{Y_{n+1}(\lambda r_a)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2 r_a} Y_n(\lambda r_a)\right)\right] \sin n\varphi$$

$$+ \left[D_n \frac{J_{n+1}(\lambda r_a)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2 r_a} J_n(\lambda r_a)\right)$$

$$\left. + D'_n \left(\frac{Y_{n+1}(\lambda r_a)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2 r_a} Y_n(\lambda r_a)\right)\right] \cos n\varphi$$

$$+ \frac{\alpha_0}{a}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\alpha_k r_a^{k-1} - \alpha'_k r_a^{-k-1}\right) \sin k\varphi$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\beta_k r_a^{k-1} - \beta'_k r_a^{-k-1}\right) \cos k\varphi = 0$$

(5.2.1-6)

$$\frac{\partial \Psi_{r\varphi}}{\partial \varphi}(r=r_a) = \left[B_n \left(-\frac{n \cdot J_n(\lambda r_a)}{\lambda^2}\right) + B'_n \left(\frac{-n Y_n(\lambda r_a)}{\lambda^2}\right)\right] \cos n\varphi$$

$$+ \left[D_n \left(\frac{-n J_n(\lambda r_a)}{\lambda^2}\right) + D'_n \left(\frac{-n Y_n(\lambda r_a)}{\lambda^2}\right)\right] \sin n\varphi$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} k(\alpha_k r_a^{k} + \alpha'_k r_a^{-k}) \cos k\varphi$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} k(\beta_k r_a^{k} + \beta'_k r_a^{-k}) \sin k\varphi = 0$$

(5.2.1-7)

On multiplie (5.2.1-4) et (5.2.1-6) par $\sin \ell\varphi \, d\varphi$ et on intègre entre 0 et 2π . On multiplie (5.2.1-5) et (5.2.1-7) par $\cos \ell\varphi \, d\varphi$ et on intègre entre 0 et 2π .

pour $\ell = k \neq n$, on trouve $\alpha_\ell = \alpha'_\ell = 0$

pour $\ell = k = n$, on trouve

$$B_n\left[\frac{J_{n+1}(\lambda)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2} J_n(\lambda)\right] + B'_n\left[\frac{Y_{n+1}(\lambda)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2} Y_n(\lambda)\right] + \alpha_n[n] + \alpha'_n[-n] = 0$$

(5.2.1-8)

$$B_n\left[-\frac{n J_n(\lambda)}{\lambda^2}\right] + B'_n\left[-\frac{n}{\lambda^2} Y_n(\lambda)\right] + \alpha_n[n] + \alpha'_n[n] = 0$$

(5.2.1-9)

$$B_n\left[\frac{J_{n+1}(\lambda r_a)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2 r_a} J_n(\lambda r_a)\right] + B'_n\left[\frac{Y_{n+1}(\lambda r_a)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda^2 r_a} Y_n(\lambda r_a)\right] + \alpha_n[n r_a^{n-1}] + \alpha'_n[-n r_a^{-n-1}] = 0$$

(5.2.1-10)

$$B_n\left[-\frac{n}{\lambda^2} J_n(\lambda r_a)\right] + B'_n\left[-\frac{n}{\lambda^2} Y_n(\lambda r_a)\right] + \alpha_n[n r_a^{n}] + \alpha'_n[n r_a^{-n}] = 0$$

(5.2.1-11)

système de 4 équations à 4 inconnues : B_n , B'_n, α_n , α'_n

Si on multiplie (5.2.1-4) et (5.2.1-6) par $\cos l\varphi \, d\varphi$ et qu'on intègre entre 0 et 2π et si on multiplie (5.2.1-5) et (5.2.1-7) par $\sin l\varphi \, d\varphi$ et qu'on intègre entre 0 et 2π, on trouve
pour $l = k \neq n$ $\quad \beta_l = \beta'_l = 0$
pour $l = k = n$, un système de 4 équations à 4 inconnues dont les coefficients sont exactement les mêmes que ceux des équations (5.2.1-8) et (5.2.1-11). Nous avons donc les mêmes résultats .

Si on multiplie (5.2.1-4) et (5.2.1-6) par $d\varphi$ et qu'on intègre entre 0 et 2π , on trouve $\alpha_0 = 0$

Revenons à notre système de quatre équations à quatre inconnues (5.2.1-8 à 5.2.1-11).

Pour éviter la solution triviale $B_n = B'_n = \alpha_n = \alpha'_n = 0$, il faut que le déterminant soit nul

Après calculs, on aboutit à :

$$F^{\Psi}(\lambda) = \frac{8.n}{\pi \lambda ra} + \lambda ra^{-n} \left(Y_{n+1}(\lambda) J_{n-1}(\lambda ra) - J_{n+1}(\lambda) Y_{n-1}(\lambda ra) \right) + \lambda ra^{n} \left(Y_{n+1}(\lambda . ra) J_{n-1}(\lambda) - J_{n+1}(\lambda ra) Y_{n-1}(\lambda) \right) = 0$$

(5.2.1-12)

Les valeurs de λ annulant $F^{\Psi}(\lambda)$ sont les valeurs propres du problème. On donne en annexe 7 la méthode de recherche de ces valeurs.

Si $\quad C_{1mn} = \dfrac{B'_n}{B_n}$

$$C_{2mn} = \frac{\alpha_n}{B_n}$$

et $$C_{3mn} = \frac{\alpha'_n}{B_n}$$

et en posant ,

$$C_n^{\omega}(\lambda r) = J_n(\lambda r) + C_{1mn} Y_n(\lambda r)$$

On obtient :

$$C_{1mn} = -\frac{J_{n+1}(\lambda . ra) - ra^{-n-1} J_{n+1}(\lambda)}{Y_{n+1}(\lambda ra) - ra^{-n-1} Y_{n+1}(\lambda)} \tag{5.2.1-13}$$

$$C_{2mn} = \frac{C_n^{\omega}(\lambda)}{\lambda^2} - \frac{C_{n+1}^{\omega}(\lambda)}{2.n\lambda} = \frac{C_n^{\omega}(\lambda . ra)}{\lambda^2 . ra^n} - \frac{C_{n+1}^{\omega}(\lambda . ra)}{2.n.\lambda ra^{n-1}} \tag{5.2.1-14}$$

$$C_{3mn} = \frac{C_{n+1}^{\omega}(\lambda)}{2.n.\lambda} = \frac{C_{n+1}^{\omega}(\lambda . ra)}{2.n.\lambda . ra^{-n-1}} \tag{5.2.1-15}$$

On définit les fonctions $F_{mn}(r)$ par :

$$F_{mn}(r) = -\frac{C_n^{\omega}(\lambda_{mn} r)}{\lambda_{mn}^2} + C_{2mn} r^n + C_{3mn} r^{-n}$$

Comme les fonctions Ψ_φ sont du type $\sin n\varphi$ ou $\cos n\varphi$, on a :

$$\frac{\partial^2 \Psi_\varphi}{\partial \varphi^2} = -m^2 \Psi_\varphi$$

et $$\Delta \Psi_{r\varphi} = \Psi_\varphi \left[\frac{d^2 \Psi_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_r}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \Psi_r \right]$$

En notant :

$$\mathcal{D}_n \Psi_r = \frac{d^2\Psi_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_r}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\Psi_r \qquad (5.2.1\text{-}16)$$

On obtient :

$$\Delta(\Delta\Psi_{r\varphi}) = \Psi_\varphi \mathcal{D}_n(\mathcal{D}_n \Psi_r)$$

Or

$$\Delta(\Delta\Psi_{r\varphi}) = -\lambda^2 \Delta\Psi_{r\varphi}$$

Les fonctions propres Ψ_r sont donc solutions de :

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{D}_n \Psi_r) = -\lambda^2 \mathcal{D}_n \Psi_r \qquad (5.2.1\text{-}17)$$

avec les conditions aux limites

$$\left.\begin{array}{ll} \Psi_r = 0 & (5.2.1\text{-}18) \\ \dfrac{d\Psi_r}{dr} = 0 & (5.2.1\text{-}19) \end{array}\right\} \text{ en } r = 1 \text{ et } r = r_a$$

issues de 5.2-7 et 5.2-8

Les fonctions solutions à ce problème sont les fonctions $F_{mn}(r)$

Nous montrons en annexe 8 que les fonctions solutions sont telles que :

$$\int_1^{r_a} r\, F_{mn}(r)\, \mathcal{D}_n\left(F_{\ell n}(r)\right) dr = 0 \qquad (5.2.1\text{-}20)$$

$$\ell \neq m$$

Nous recherchons une solution en Ψ de la forme :

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{mn}(t) \sin n\varphi + B_{mn}(t) \cos n\varphi \right) F_{mn}(r)$$

(5.2.1-21)

On montre que :

$$\Delta\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{mn}(t) \sin n\varphi + B_{mn}(t) \cos n\varphi \right) \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right)$$

(5.2.1-22)

b) Recherche des fonctions $A_{mn}(t)$

Nous utilisons pour rechercher A_{mn} (t) les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres.

On multiplie les deux membres de l'équation (5.2.1-16) par $\sin n'\varphi \, d\varphi$ et on intègre entre 0 et 2π

$$\int_0^{2\pi} \Delta\Psi \sin n'\varphi \, d\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn'}(t) \left(\mathcal{D}_n F_{mn'}(r) \right) \int_0^{2\pi} \sin^2 n'\varphi \, d\varphi$$

1er cas n' = n = 0

Dans ce cas A_{m0} (t) est multiplié par $\sin 0$ et ce terme n'existe pas dans les équations (5.2.1-21) et (5.2.1-22).

<u>2ème cas $n' = n \neq 0$</u>

$$\int_0^{2\pi} \Delta\psi \sin n\varphi \, d\varphi = \pi \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}(t) \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right)$$

A présent, on multiplie par $r F_{m'n}(r)\,dr$ et on intègre entre 1 et r_a.

$$\int_1^{ra} \int_0^{2\pi} \Delta\psi \, r F_{mn}(r) \sin n\varphi \, dr \, d\varphi$$

$$= \pi \ A_{mn}(t) \int_1^{ra} r \ F_{mn}(r) \ \mathcal{D}_n \left(F_{\ell n}(r) \right) dr = 0$$

car les termes $A_{m'n}$ (t) pour $m \neq m'$ disparaissent du fait de l'orthogonalité (Equation 5.2.1-20).

Si on pose

$$Z_{mn} = 1 / \left(\int_1^{ra} r \ F_{mn}(r) \left(\mathcal{D}_n \ F_{mn}(r) \right) dr \right.,$$

(5.2.1-23)

on a

$$A_{mn}(t) = \frac{Z_{mn}}{\pi} \int_1^{ra} \int_0^{2\pi} \Delta\psi \, r F_{mn}(r) \sin n\varphi \, dr \, d\varphi$$

(5.2.1-24)

Dérivons (5.2.1-24) par rapport à t

$$\frac{d\,A_{mn}(t)}{dt} = \frac{Z_{mn}}{\pi} \int_{1}^{ra} \int_{0}^{2\pi} \frac{\partial\,(\Delta\Psi)}{\partial t}\; r\; F_{mn}(r)\, \sin n\varphi\, d\varphi\, dr$$

(5.2.1-25)

On remplace

$$\frac{\partial\,(\Delta\Psi)}{\partial t} \quad \text{par} \quad g(r,\varphi,t) + \frac{\partial^2\,(\Delta\Psi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,\Delta\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\Delta\Psi}{\partial\varphi^2}$$

(5.2.1-26)

On a donc :

$$\frac{d\,A_{mn}(t)}{dt} = \left[J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \right]$$

(5.2.1-27)

avec

$$J_1 = \left\{ \int_{1}^{ra} \int_{0}^{2\pi} \frac{\partial^2\,\Delta\Psi}{\partial r^2}\; r\; F_{mn}(r)\, \sin n\varphi\, d\varphi\, dr \right\} \frac{Z_{mn}}{\pi}$$

$$J_2 = \left\{ \int_{1}^{ra} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{r}\;\frac{\partial\,\Delta\Psi}{\partial r}\; r\; F_{mn}(r)\, \sin n\varphi\, d\varphi\, dr \right\} \frac{Z_{mn}}{\pi}$$

$$J_3 = \left\{ \int_{1}^{ra} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{r^2}\;\frac{\partial^2\,\Delta\Psi}{\partial\varphi^2}\; r\; F_{mn}(r)\, \sin n\varphi\, d\varphi\, dr \right\} \frac{Z_{mn}}{\pi}$$

$$J_4 = \left\{ \int_{1}^{ra} \int_{0}^{2\pi} g(r,\varphi,t)\; r\; F_{mn}(r)\, \sin n\varphi\, d\varphi\, dr \right\} \frac{Z_{mn}}{\pi}$$

En intégrant J_1, J_2, J_3 par parties et en utilisant les conditions aux limites de F_{mn} (r), on trouve :

$$J_1 = \frac{Z_{mn}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^{ra} \Delta\psi \left[r \frac{d^2 F_{mn}(r)}{dr^2} + 2 \frac{dF_{mn}(r)}{dr} \right] \sin n\varphi \, dr \, d\varphi$$

$$J_2 = - \frac{Z_{mn}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^{ra} \Delta\psi \frac{dF_{mn}(r)}{dr} \sin n\varphi \, dr \, d\varphi$$

$$J_3 = \frac{Z_{mn}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^{ra} \Delta\psi \left(-n^2 \frac{F_{mn}(r)}{r} \right) \sin n\varphi \, dr \, d\varphi$$

$$J_1 + J_2 + J_3 = \frac{Z_{mn}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^{ra} \Delta\psi \; r \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right) \sin n\varphi \, dr \, d\varphi$$

Si on remplace

$$\Delta\psi \quad \text{par} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

On a :

$$J_1 + J_2 + J_3 = J'_1 + J'_2 + J'_3$$

avec

$$J'_1 = \left\{ \int_1^{ra} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \, r \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right) \sin n\varphi \, d\varphi \, dr \right\} \frac{Z_{mn}}{\pi}$$

$$J_2' = \left\{ \int_1^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \, r \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right) \sin n\varphi \, d\varphi \, dr \right\} \frac{Z_{mn}}{\pi}$$

$$J_3' = \left\{ \int_1^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \, r \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right) \sin n\varphi \, d\varphi \, dr \right\} \frac{Z_{mn}}{\pi}$$

On intègre J'_1, J'_2, J'_3 par parties et compte tenu des conditions aux limites de Ψ, on obtient :

$$J_1' + J_2' + J_3' = \frac{Z_{mn}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^{r_a} \Psi \, r \, \mathcal{D}_n \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right) \sin n\varphi \, d\varphi \, dr$$

(5.2.1-28)

En utilisant l'équation (5.2.1-17), on remplace :

$\mathcal{D}_n \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right)$ par $-\lambda^2_{mn} \mathcal{D}_n F_{mn}(r)$

On a

$$J_1 + J_2 + J_3 = -\lambda^2_{mn} \left\{ \frac{Z_{mn}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^{r_a} \Psi \, r \cdot \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right) \sin n\varphi \, d\varphi \, dr \right\}$$

Or si nous reprenons l'équation (5.2.1-21) que nous multiplions de chaque côté par $\sin n'\varphi \, d\varphi$ et que nous intégrons entre 0 et 2π, puis si nous multiplions par $r \, \mathcal{D}_{n'} F_{m'n'}(r) dr$ et si nous intégrons entre 1 et r_a, nous trouvons :

$$A_{mn}(t) = \frac{Z_{mn}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^{r_a} \Psi r \cdot \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right) \sin n\varphi \, d\varphi \, dr$$

Il s'ensuit que :

$$J_1 + J_2 + J_3 = -\lambda^2_{mn} \, A_{mn}(t) \qquad (5.2.1\text{-}29)$$

L'intégrale J_4 est obtenue en utilisant les propriétés des fonctions Bessel et les égalités (5.2.1-14) et (5.2.1-15).

$$\left.\begin{aligned} & J_4^{\cdot} = 0 && \text{pour } n \neq 1 \\ & J_4 = N_m + \sum_{\ell=1}^{\infty} L_{m\ell}\, e^{-\lambda_\ell^{T^2} t} && \text{pour } n = 1 \end{aligned}\right\} \quad (5.2.1\text{-}30)$$

avec

$$N_m = \frac{G_r T_{\ell i} Z_{m1}}{\ln ra} \left\{ \frac{C_{2m1}}{2} \left(ra^2 - 1 \right) + C_{3m1} \ln ra \right\}$$

(5.2.1-31)

$$\begin{aligned} L_{m\ell} = {} & G_r T_{\ell i} Z_{m1} A_\ell^T \lambda_\ell^T \sqrt{P_r} \Big\{ -\Big[r \big(\lambda_{m1} C_2^{\omega}(\lambda_{m1} r) C_1^T(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, r) \\ & - \lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, C_1^{\omega}(\lambda_{m1} r) C_2^T(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, r) \big) \Big]_1^{ra} \Big/ \left[\lambda_{m1}^2 \left(\lambda_{m1}^2 - \lambda_\ell^{T^2} P_r \right) \right] \\ & + C_{2m1} \left[r^2 \, \frac{C_2^T(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, r)}{\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}} \right]_1^{ra} - \frac{C_{3m1}}{\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}} \left[C_0^T(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, r) \right]_1^{ra} \Big\} \end{aligned}$$

(5.2.1-32)

$$\begin{aligned} Z_{m1} = -2\lambda_{m1}^2 \Big/ \Big[& r_a^2 \, C_1^{\omega 2}(\lambda_{m1} ra) - C_1^{\omega 2}(\lambda_{m1}) - \frac{2}{r_a} C_0^{\omega}(\lambda_{m1} ra) C_2^{\omega}(\lambda_{m1} ra) \\ & + C_0^{\omega}(\lambda_{m1}) C_2^{\omega}(\lambda_{m1}) \Big] \end{aligned}$$

(5.2.1-33)

Il s'ensuit que :

$$\frac{d\,A_{mn}(t)}{dt} = -\lambda^2_{mn}\,A_{mn}(t) \qquad \text{pour } n \neq 1 \tag{5.2.1-34}$$

$$\frac{d\,A_{m1}(t)}{dt} = -\lambda^2_{m1}\,A_{m1}(t) + N_m + \sum_{\ell=1}^{\infty} L_{m\ell}\,e^{-\lambda_\ell^{T^2} t} \qquad \text{pour } n = 1 \tag{5.2.1-35}$$

La résolution des équations conduit à :

$$A_{mn}(t) = C_{te}\,e^{-\lambda^2_{mn} t} \tag{5.2.1-36}$$

$$A_{m1}(t) = \frac{N_m}{\lambda^2_{m1}} + \sum_{\ell=1}^{\infty} L_{m\ell}\,\frac{e^{-\lambda_\ell^{T^2} t}}{\lambda^2_{m1} - \lambda_\ell^{T^2}} + C_{te}\,e^{-\lambda^2_{mn} t} \tag{5.2.1-37}$$

c/ Recherche des fonctions $B_{mn}(t)$

On multiplie les membres de l'équation (5.2.1-21) par $\cos n'\varphi\, d\varphi$ et on intègre entre 0 et 2π, puis on multiplie par $r\,F_{m'n'}(r)\,dr$ et on intègre entre 1 et r_a.

On en déduit :

$$B_{mn}(t) = \frac{\alpha \cdot Z_{mn}}{\pi} \int_1^{r_a}\int_0^{2\pi} \Delta\Psi_r\,F_{mn}(r)\,\cos n\varphi\,d\varphi\,dr$$

$$\alpha = 2 \quad \text{pour } n \neq 0 \tag{5.2.1-38}$$

$$\alpha = 1 \quad \text{pour } n = 0$$

Par analogie avec le calcul de A_{mn} (t), on peut dire que les intégrales J_1, J_2 et J_3 sont les mêmes à l'exception du terme en sinus que l'on remplace par un cosinus.

L'intégrale J_4 est nulle car :

$$J_4 = -\int_1^{ra} Gr \frac{\partial T}{\partial r} r\, F_{mn}(r) \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos n\varphi \, d\varphi \right]}_{0} dr$$

donc

$$\frac{d}{dt}\left[B_{mn}(t) \right] + \lambda_{mn}^2 B_{mn}(t) = 0 \qquad (5.2.1\text{-}39)$$

Cette équation se résoud comme l'équation (5.2.1-34)

$$B_{mn}(t) = Cte \,.\, e^{-\lambda^2_{mn} t} \qquad \forall\, n \qquad (5.2.1\text{-}40)$$

d/ Conditions initiales de $A_{mn}(t)$ et $B_{mn}(t)$

$$A_{mn}(0) = \frac{Z_{mn}}{\pi} \int_1^{ra}\int_0^{2\pi} \Delta\Psi(t=0)\, r \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right) \sin n\varphi \, d\varphi \, dr$$

$$= \frac{Z_{mn}}{\pi} \left\{ \int_1^{ra}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}\, r \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right) \sin n\varphi \, d\varphi \, dr \right.$$

$$+ \int_1^{ra}\int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial r}}_{0 \text{ pour } t=0} \left(\mathcal{D}_n F_{mn}(r) \right) \sin n\varphi \, d\varphi \, dr$$

$$\left. + \int_1^{ra}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \left(\mathcal{D}_n \frac{F_{mn}(r)}{r} \right) \sin n\varphi \, d\varphi \, dr \right\}$$

En intégrant par parties, on montre que A_{mn} (o) est nul.

De la même manière, on montre que B_{mn} (o) est nul.

L'application des conditions initiales aux équations (5.2.1-36) et (5.2.1-40) conduit à une constante nulle.

L'application à l'équation (5.2.1-37) conduit à :

$$Cte = -\frac{N_m}{\lambda_{m1}^2} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{L_{m\ell}}{\lambda_{m1}^2 - \lambda_\ell^{T^2}}$$

et il s'ensuit que :

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - e^{-\lambda^2_{m1} t}\right) \frac{N_m}{\lambda_{m1}^2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} L_{m\ell} \left(\frac{e^{-\lambda_\ell^{T^2} t} - e^{-\lambda^2_{m1} t}}{\lambda^2_{m1} - \lambda_\ell^{T2}} \right) \right\} \sin\varphi .$$
$$\left(-\frac{C_1^w(\lambda_{m1} r)}{\lambda^2_{m1}} + C_{2m1} r + C_{3m1} r^{-1} \right)$$

(5.2.1-34)

5.2.2. Constante positive $\alpha = \lambda^2$

a/ Recherche des valeurs et fonctions propres

Les solutions en ω_r sont du type :

$$\omega_r = D_n I_m(\lambda r) + D'_n K_n(\lambda r) \qquad (5.2.2\text{-}1)$$

En revenant à la fonction de courant, on a :

$$\Delta \Psi_{r\varphi}' = \left(B_n I_n(\lambda r) + B'_n K_n(\lambda r)\right) \sin n\varphi + \left(D_n I_n(\lambda r) + D'_n K_n(\lambda r)\right) \cos n\varphi \tag{5.2.2-2}$$

Cette équation est résolue de la même manière que l'équation (5.2.1-2) en utilisant la solution générale à l'équation sans second membre (annexe 6) et la solution particulière à l'équation avec second membre (annexe 9).

$\Psi_{r\varphi}$ devient

$$\begin{aligned}\Psi_{r\varphi} = & \left[\left(B_n . I_n(\lambda r) + B'_n K_n(\lambda r)\right) \sin n\varphi \right. \\ & \left. + \left(D_n I_n(\lambda r) + D'_n K_n(\lambda r)\right) \cos n\varphi\right] / \lambda^2 \\ & + \alpha_0 \ln r + \alpha_0' \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_k r^k + \alpha'_k r^{-k}\right) \sin k\varphi \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_k r^k + \beta'_k r^{-k}\right) \cos k\varphi \end{aligned} \tag{5.2.2-3}$$

En utilisant les conditions aux limites en r = 1 et r = r_a et en multipliant par les fonctions orthogonales appropriées, on aboutit à un système de quatre équations à quatre inconnues $B_n, B'_n, \alpha'_n, \alpha_n$ dont l'annulation du déterminant conduit à :

$$\begin{aligned} F^{\Psi}(\lambda) = & -\frac{4n}{\lambda r_a} + \lambda r_a^{n} \left[K_{n+1}(\lambda r_a) I_{n-1}(\lambda) - I_{n+1}(\lambda r_a) K_{n-1}(\lambda) \right] \\ & + \lambda r_a^{-n} \left[K_{n+1}(\lambda) I_{n-1}(\lambda r_a) - K_{n-1}(\lambda r_a) I_{n+1}(\lambda)\right] \end{aligned} \tag{5.2.2-4}$$

Cette expression n'étant pas simple, on discutera au chapitre suivant de l'existence ou non des valeurs propres λ.

Par analogie aux fonctions de Bessel J_n et Y_n, on pose :

$$E_n^{\omega}(\lambda r) = I_n(\lambda r) + C_{1mn} K_n(\lambda r)$$

et

$$\bar{E}_n^{\omega}(\lambda r) = I_n(\lambda r) - C_{1mn} K_n(\lambda r)$$

Si C_{1mn}, C_{2mn}, C_{3mn} sont les mêmes constantes qu'au paragraphe (5.2.1).

$$C_{1mn} = \frac{I_{n+1}(\lambda \cdot ra) - ra^{-n-1} I_{n+1}(\lambda)}{K_{n+1}(\lambda ra) - ra^{-n-1} K_{n+1}(\lambda)}$$

(5.2.2-5)

$$C_{2mn} = -\frac{E_n^{\omega}(\lambda)}{\lambda^2} - \frac{\bar{E}_{n+1}^{\omega}(\lambda)}{2n\lambda}$$

$$= -\frac{E_n^{\omega}(\lambda r_a)}{\lambda^2 ra^n} \quad \frac{\bar{E}_{n+1}^{\omega}(\lambda ra)}{2n\lambda ra^{n-1}}$$

(5.2.2-6)

$$C_{3mn} = \frac{\bar{E}_{n+1}^{\omega}(\lambda)}{2n\lambda} = \frac{\bar{E}_{n+1}^{\omega}(\lambda ra)}{2n\lambda ra^{-n-1}}$$

(5.2.2-7)

On montre que Ψ_r est solution de :

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{D}_n \Psi_r) = \lambda^2 \mathcal{D}_n \Psi_r$$

Les fonctions propres en Ψ_r sont :

$$F_{mn}(r) = \frac{E_n^{\omega}(\lambda_{mn} r)}{\lambda^2_{mn}} + C_{2mn} r^n + C_{3mn} r^{-n}$$

(5.2.2-8)

Les propriétés d'orthogonalité sont démontrées de la même manière que pour la constante positive.

b/ Recherche des fonctions $A_{mn}(t)$

On procède de la même manière que pour le cas où la constante est négative et on aboutit à :

$$\frac{d}{dt}[A_{mn}(t)] = \lambda^2_{mn} A_{mn}(t)$$

$$\frac{d}{dt}[A_{m1}(t)] = \lambda^2_{m1} A_{m1}(t) + J_4(t)$$

avec

$$J_4 = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \neq 1$$

$$J_4 = \int_1^{ra}\int_0^{2\pi} g \sin n\varphi \, r \, F_{m1}(r) \sin n\varphi \, d\varphi \, dr$$

pour $n = 1$

c/ Recherche des fonctions $B_{mn}(t)$

Le calcul de $B_{mn}(t)$ conduit à :

$$\frac{d}{dt}[B_{mn}(t)] = \lambda^2_{mn} B_{mn}(t)$$

d/ Conditions initiales de $A_{mn}(t)$ et $B_{mn}(t)$

Les conditions initiales sont les mêmes que dans le cas de la constante négative.

Elles conduisent à :

$A_{mn}(t) = 0$ pour $n \neq 1$

$B_{mn}(t) = 0$ $\forall n$

Seul subsiste $A_{m1}(t)$

Nous n'irons pas plus avant pour le cas de la constante positive, car nous verrons dans le chapitre résultats que nous ne trouvons pas de solution à (5.2.2-) pour $n = 1$.

5.3. Bilan des solutions analytiques obtenues.

La température est donnée par :

$$T_\ell(r,t) = T_{\ell i} \left\{ \left(-\frac{\ln r}{\ln r_a} + 1 \right) + \sum_{\ell=1}^{\infty} A_\ell^T \, C_0^T(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, r)\, e^{-\lambda_\ell^{T^2} t} \right.$$

avec

$$A_\ell^T = \frac{2 \, C_1^T(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r})}{\lambda_\ell^T \sqrt{P_r} \left[r_a^2 \, C_1^{T^2}(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, r_a) - C_1^{T^2}(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}) \right]}$$

$$C_j^T(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, r) = J_j(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, r) - \frac{J_0(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r})}{Y_0(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r})} \, Y_j(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, r)$$

où λ_ℓ^T est solution de :

$$F^T(\lambda_\ell^T) = J_0(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}) \, Y_0(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, r_a) - J_0(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r}\, r_a) \, Y_0(\lambda_\ell^T \sqrt{P_r})$$

La fonction de courant est donnée par :

$$\Psi(r,\varphi,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(1-e^{-\lambda_{m1}^2 t})\frac{N_m}{\lambda_{m1}^2}+\sum_{\ell=1}^{\infty}L_{m\ell}\,\frac{e^{-\lambda_\ell^{T2}t}-e^{-\lambda_{m1}^2 t}}{\lambda_{m1}^2-\lambda_\ell^{T2}}\right\}\cdot\sin\varphi .$$

$$\left\{-\frac{C_1^\omega(\lambda_{m1}r)}{\lambda_{m1}^2}+C_{2m1}\,r+\frac{C_{3m1}}{r}\right\}$$

avec

$$N_m=\frac{G_r T_{\ell i} Z_{m1}}{\mathrm{Ln}\, r_a}\left\{\frac{C_{2m1}}{2}(r_a^2-1)+C_{3m1}\,\mathrm{Ln}\, r_a\right\}$$

$$L_{m\ell}=G_r\, T_{\ell i}\, Z_{m1}\, A_\ell^T\,\lambda_\ell^T\sqrt{P_r}\,.$$

$$\left\{\frac{\lambda_{m1}\left[C_2^\omega(\lambda_{m1})C_1^T(\lambda_\ell\sqrt{P_r})-r_a C_2^\omega(\lambda_{m1}r_a)C_1^T(\lambda_\ell\sqrt{P_r}\,r_a)\right]-\lambda_\ell^T\sqrt{P_r}\left[C_1^\omega(\lambda_{m1})C_2^T(\lambda_\ell^T\sqrt{P_r})-r_a C_1^\omega(\lambda_{m1}r_a)C_2^T(\lambda_\ell^T\sqrt{P_r}\,r_a)\right]}{\lambda_{m1}^2\,(\lambda_{m1}^2-\lambda_\ell^{T2}P_r)}\right.$$

$$+\,C_{2m1}\,\frac{r_a^2\,C_2^T(\lambda_\ell^T\sqrt{P_r}\,r_a)-C_2^T(\lambda_\ell^T\sqrt{P_r})}{\lambda_\ell^T\sqrt{P_r}}$$

$$\left.-\,C_{3m1}\,\frac{C_0^T(\lambda_\ell^T\sqrt{P_r}\,r_a)-C_0^T(\lambda_\ell^T\sqrt{P_r})}{\lambda_\ell^T\sqrt{P_r}}\right\}$$

$$Z_{m1}=\frac{-2\lambda_{m1}^2}{r_a^2\left(C_1^{\omega 2}(\lambda_{m1}r_a)-C_0^\omega(\lambda_{m1}r_a)C_2^\omega(\lambda_{m1}r_a)\right)-\left(C_1^{\omega 2}(\lambda_{m1})-C_0^\omega(\lambda_{m1})C_2^\omega(\lambda_{m1})\right)}$$

$$C_j^\omega(\lambda_m r)=J_j(\lambda_m r)+C_{1m1}\,Y_j(\lambda_m r)$$

$$C_{1m1}=-\frac{J_2(\lambda_m r_a)-J_2(\lambda_m)/r_a^2}{Y_2(\lambda_m r_a)-Y_2(\lambda_m)/r_a^2}$$

$$C_{2m1}=\frac{C_1^\omega(\lambda_m)}{\lambda_m^2}-\frac{C_2^\omega(\lambda_m)}{2\lambda_m}$$

$$C_{3m1}=\frac{C_2^\omega(\lambda_m)}{2\lambda_m}$$

où λ_m est solution de :

$$F^\Psi(\lambda_m)=\frac{8}{\pi\lambda_m r_a}+\frac{\lambda_m}{r_a}\left[Y_2(\lambda_m)J_0(\lambda_m r_a)-J_2(\lambda_m)Y_0(\lambda_m r_a)\right]+\lambda_m r_a\left[Y_2(\lambda_m r_a)J_0(\lambda_m)-J_2(\lambda_m r_a)Y_0(\lambda_m)\right]$$

6. APPLICATIONS

6.1. Nature des produits étudiés

Nous avons appliqué le modèle théorique à l'étude de la fusion des produits suivants:

- Soufre
- Naphtalène
- Cytoparaffine
- Acide sulfurique

Les caractéristiques de ces produits sont données dans le tableau ci-après ainsi que les valeurs de ε.

On constate que l'hypothèse de petites valeurs de ε pour l'acide sulfurique est très discutable. Mais nous conservons toutefois ce produit à titre de comparaison.

Produit	Soufre	Naphtalène	Cytoparaffine	Acide sulfurique
Tf = Température fusion (K)	393	351	328	281
température tube chauffe (K)	416	406	360	393
ε	0.058	0.157	0.089	0.399
Masse volumique à Tf (kgm^{-3})	1810	962	800	1830
Conductivité thermique à Tf ($Wm^{-1}K^{-1}$)	0,132	0,130	0,2	0,325
Chaleur massique à Tf ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)	919,6	1755,6	125,0	1442,0
Chaleur latente fusion ($J\ kg^{-1}$)	39292	148390	240000	109000
Coefficient de dilatabilité (K^{-1})	$4{,}3.10^{-4}$	5.10^{-4} (1)	$4{,}3\ 10^{-4}$	$5{,}7\ 10^{-4}$
Viscosité dynamique (Pl)	$1{,}125\ 10^{-2}$	$8{,}56\ 10^{-4}$	$8\ 10^{-3}$	$1{,}32\ 10^{-2}$
Viscosité cinématique ($m^2\ s^{-1}$)	$6{,}22\ 10^{-6}$	$8{,}9\ 10^{-7}$	$1\ 10^{-5}$	$7{,}2\ 10^{-6}$
Diffusivité thermique ($m^2\ s^{-1}$)	$7.93\ 10^{-8}$	$7{,}70\ 10^{-8}$	$2{,}00\ 10^{-6}$	$1{,}23\ 10^{-7}$
Prandtl (2)	78,4	11,6	5,0	58,5
Grashof (2)	$4{,}64\ 10^5$	$6{,}31\ 10^7$	$2{,}50\ 10^5$	$2{,}24\ 10^6$

(1) Estimé car pas de référence
(2) rayon tube = 57 mm

6.2 Distribution de température

Nous avons appliqué la formule 5.1.1-29 aux différents produits. Le choix du nombre de termes de la série est expliqué en annexe 10. Nous avons adopté m = 500. Les expressions analytiques étant valables pour de petits rayons, nous avons choisi $r_a = 1,3$.

Nous avons tracé les courbes $\mathcal{E}T(t)$ et $\mathcal{E}T(r)$ pour chacun des produits en variables adimensionnelles :

- figure 6.2-1 et 6.2-2 pour le soufre
- figure 6.2-3 et 6.2-4 pour le naphtalène
- figure 6.2-5 et 6.2-6 pour la cytoparaffine
- figure 6.2-7 et 6.2-8 pour l'acide sulfurique

Afin de pouvoir effectuer des comparaisons entre les différents produits, nous avons appliqué les conversions suivantes entre temps adimensionné et temps réel.

produit	t	$\bar{t}$ (s)
soufre	1	522,34
naphtalène	1	3650,6
cytoparaffine	1	324,9
Acide sulfurique	1	451,4

Le tracé $\mathcal{E}T(\bar{t})$ est représenté sur la figure 6.2-9 pour l'ensemble des produits.

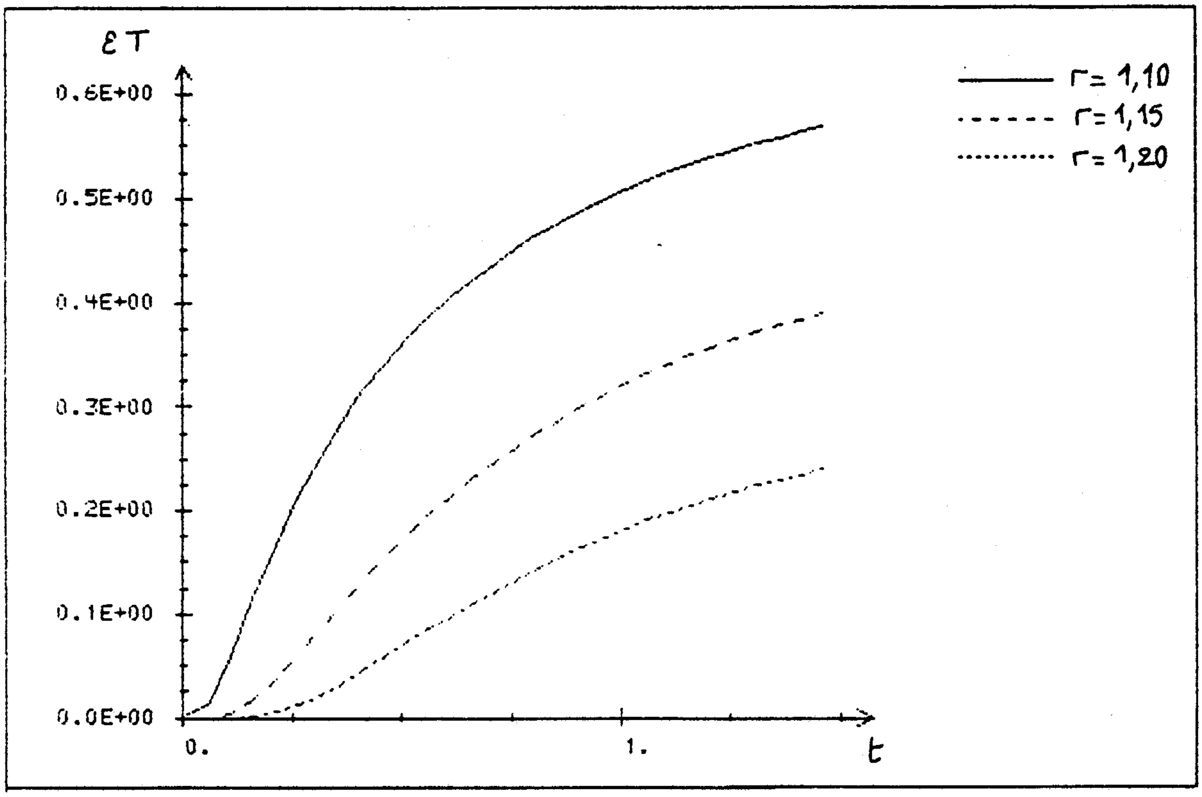


Figure 6.2-1 $\varepsilon T(t)$ SOUFRE $r_a = 1,3$

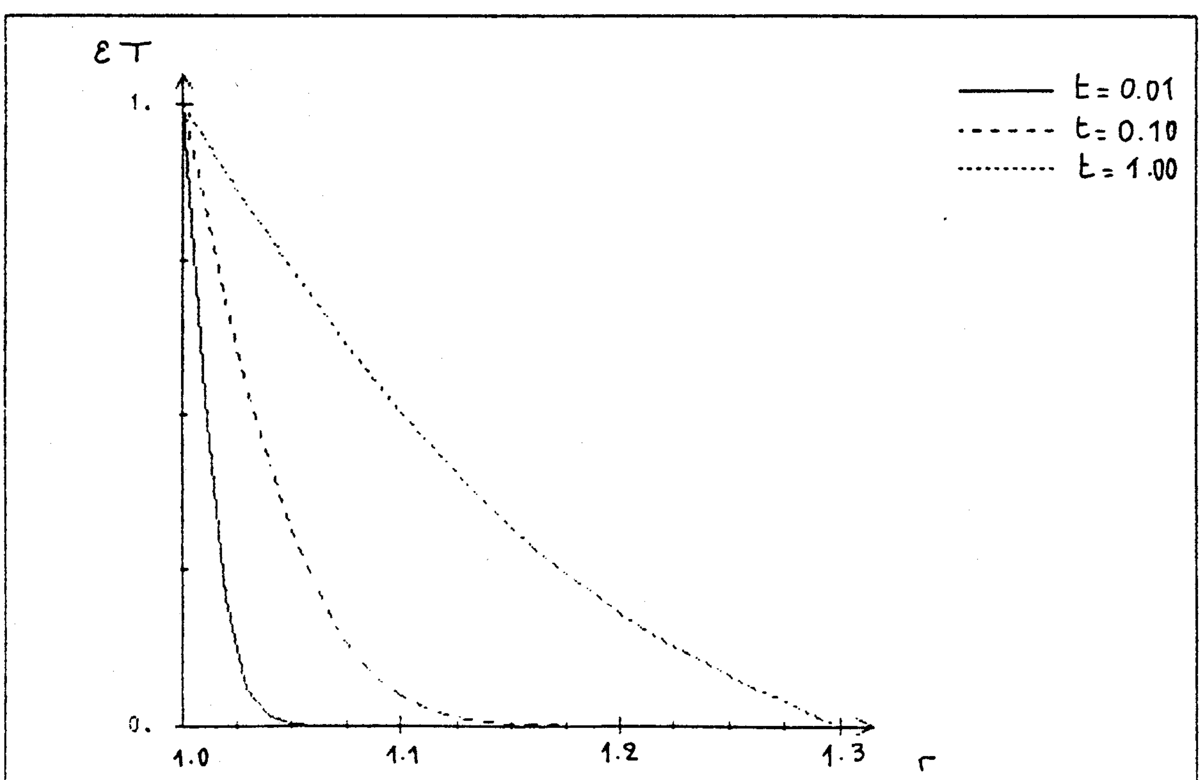


Figure 6.2-2 $\varepsilon T(r)$ SOUFRE $r_a = 1,3$

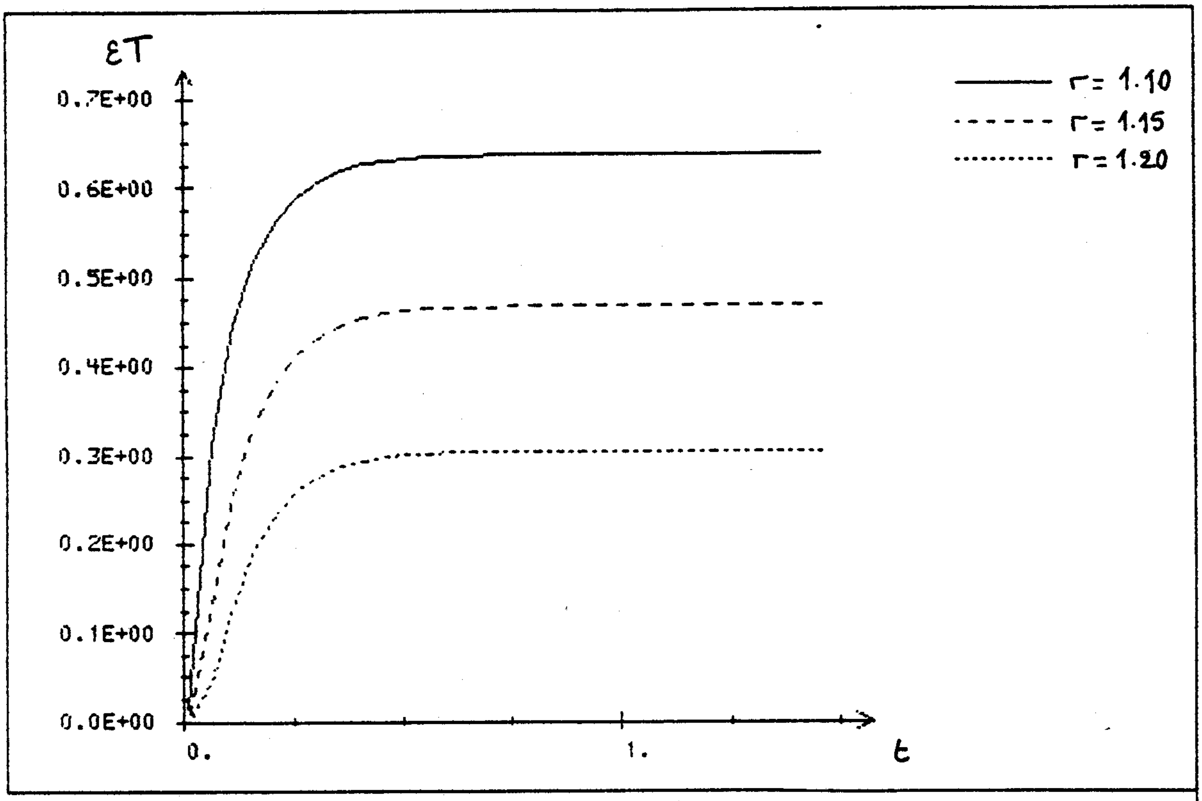


Figure 6.2-3 $\varepsilon T(t)$ NAPHTALENE $r_a = 1,3$

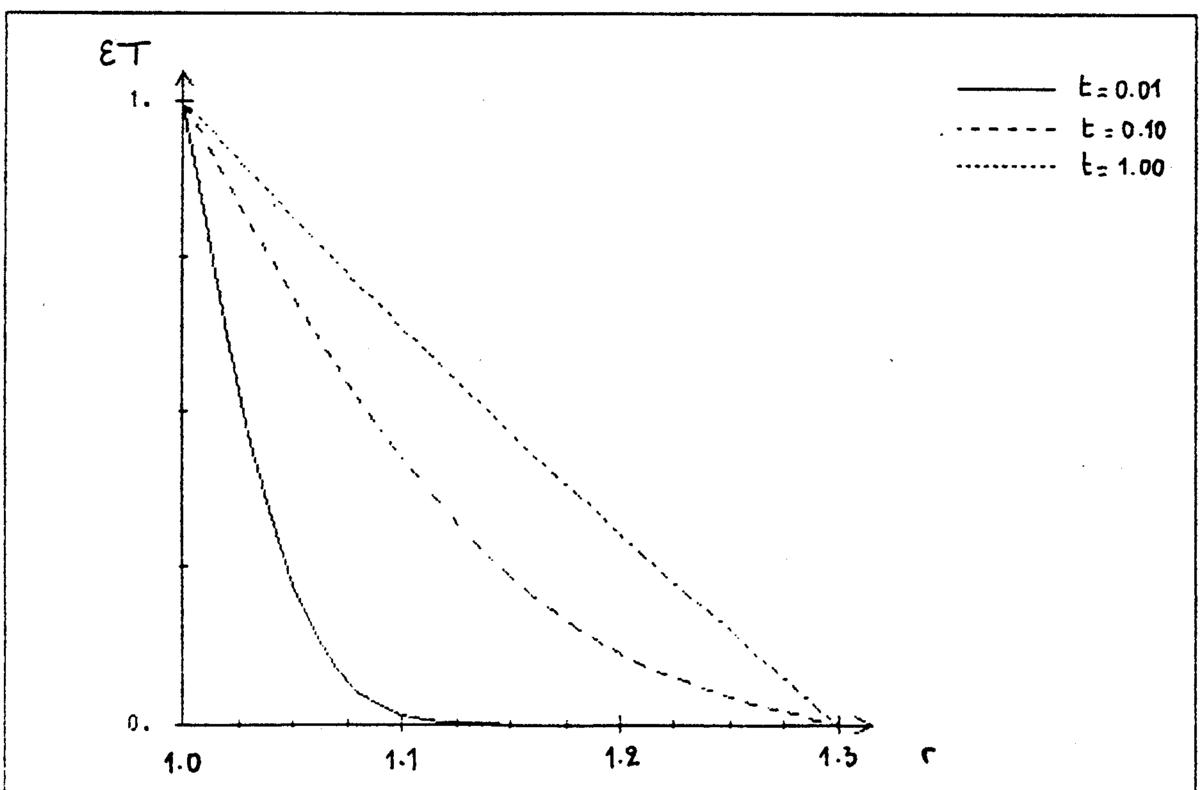


Figure 6.2-4 $\varepsilon T(r)$ NAPHTALENE $r_a = 1,3$

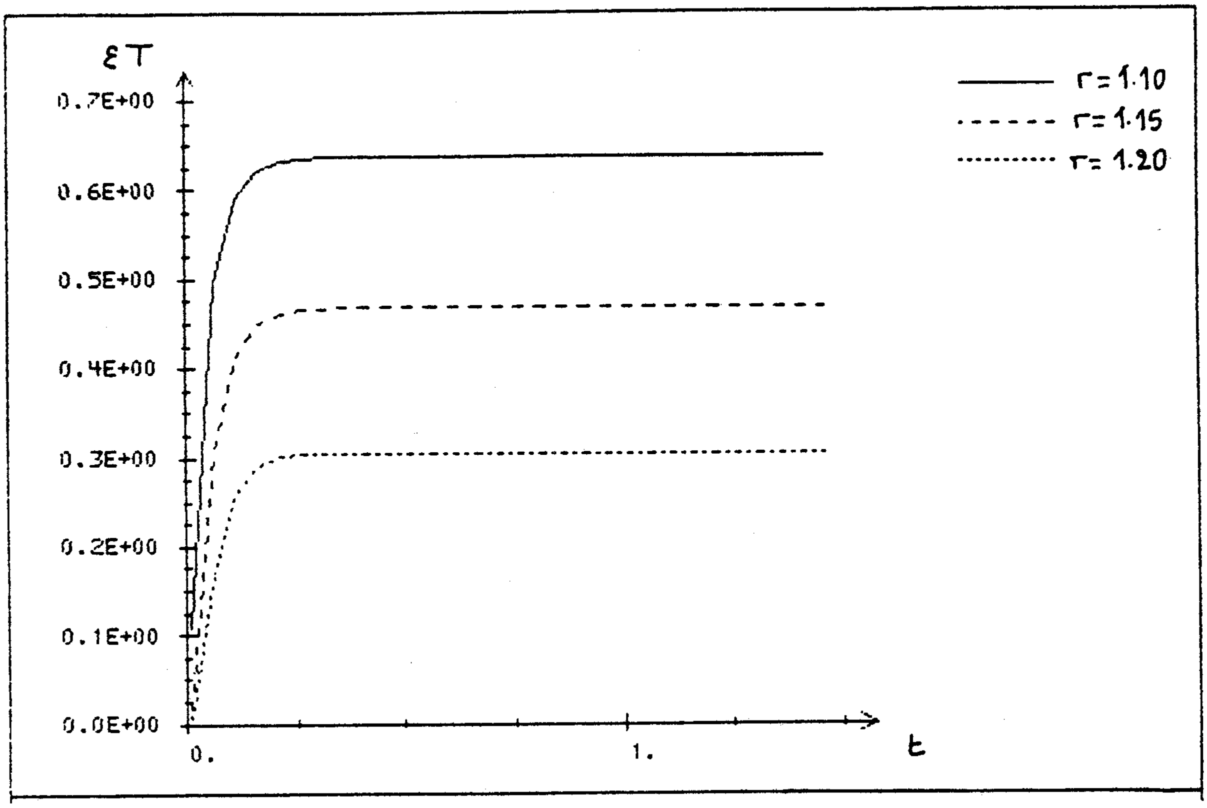


Figure 6.2-5 $\varepsilon T(t)$ CYTOPARAFFINE $r_a = 1,3$

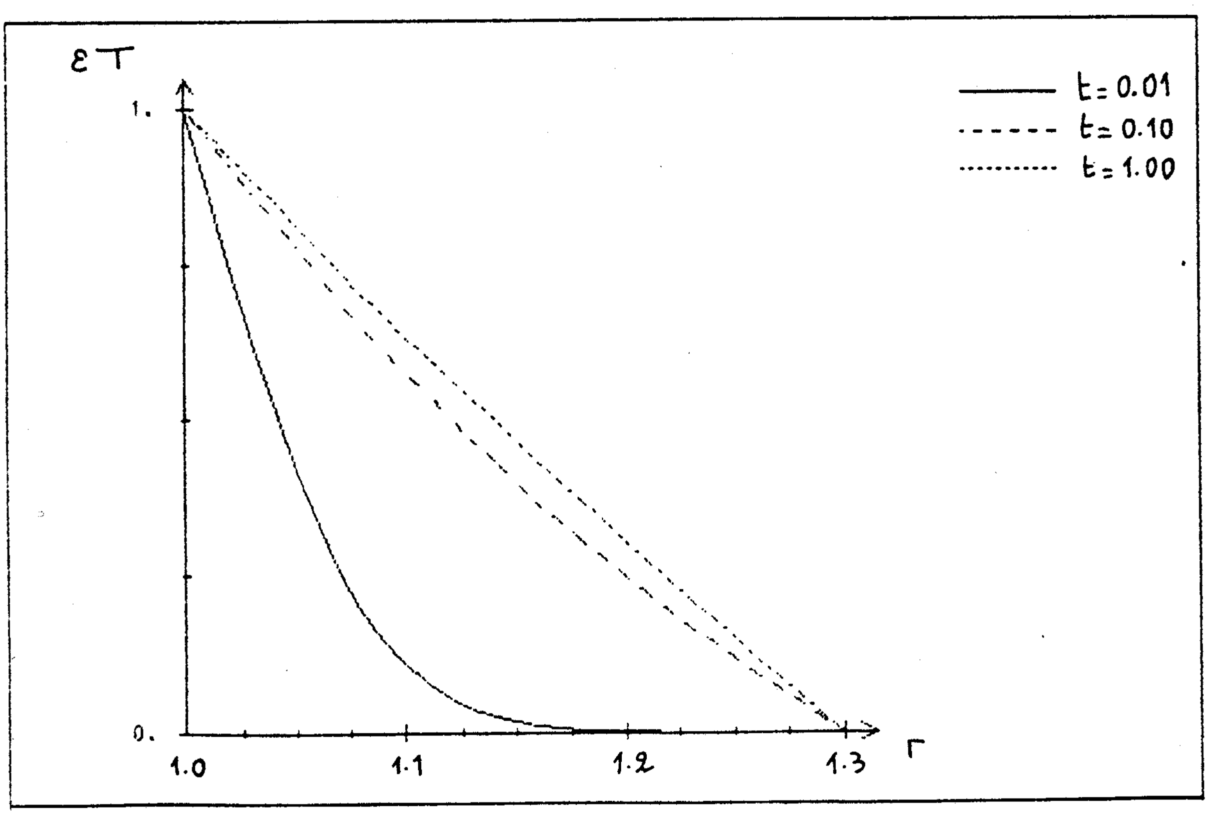


Figure 6.2-6 $\varepsilon T(r)$ CYTOPARAFFINE $r_a = 1,3$

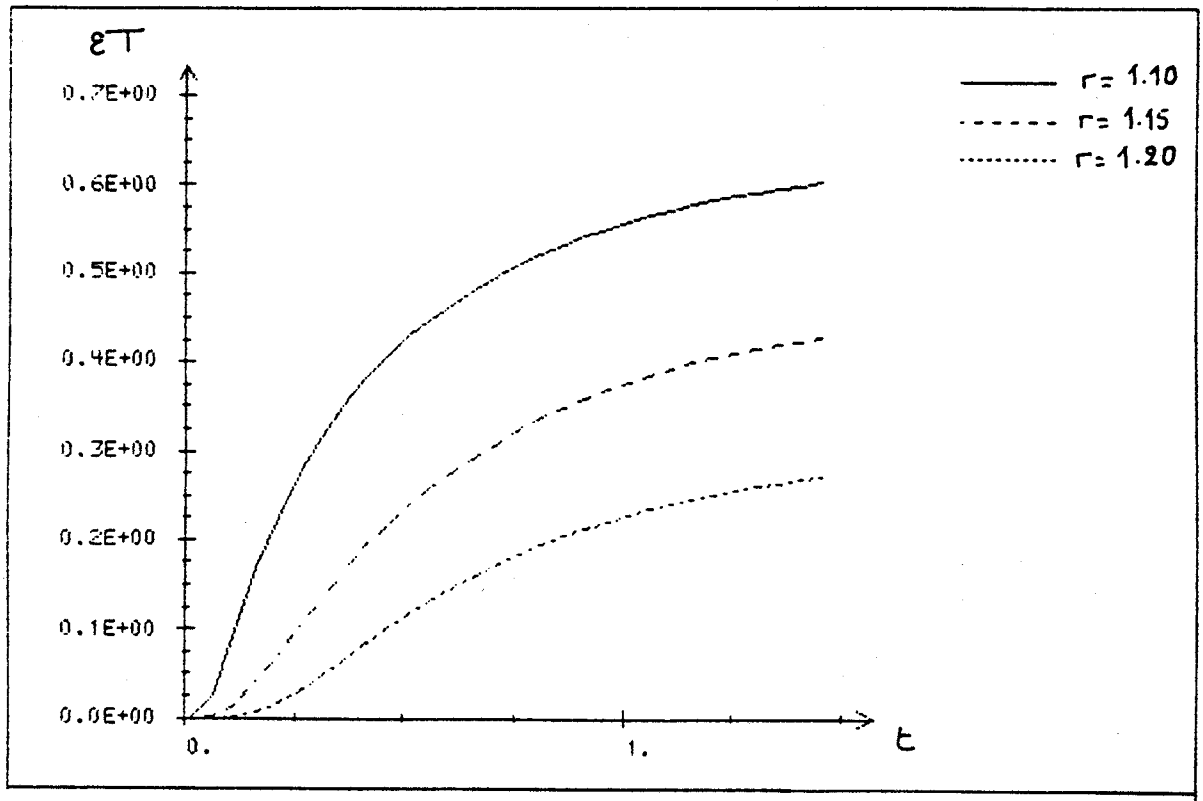


Figure 6.2-7 ε T(t) ACIDE SULFURIQUE $r_a = 1,3$

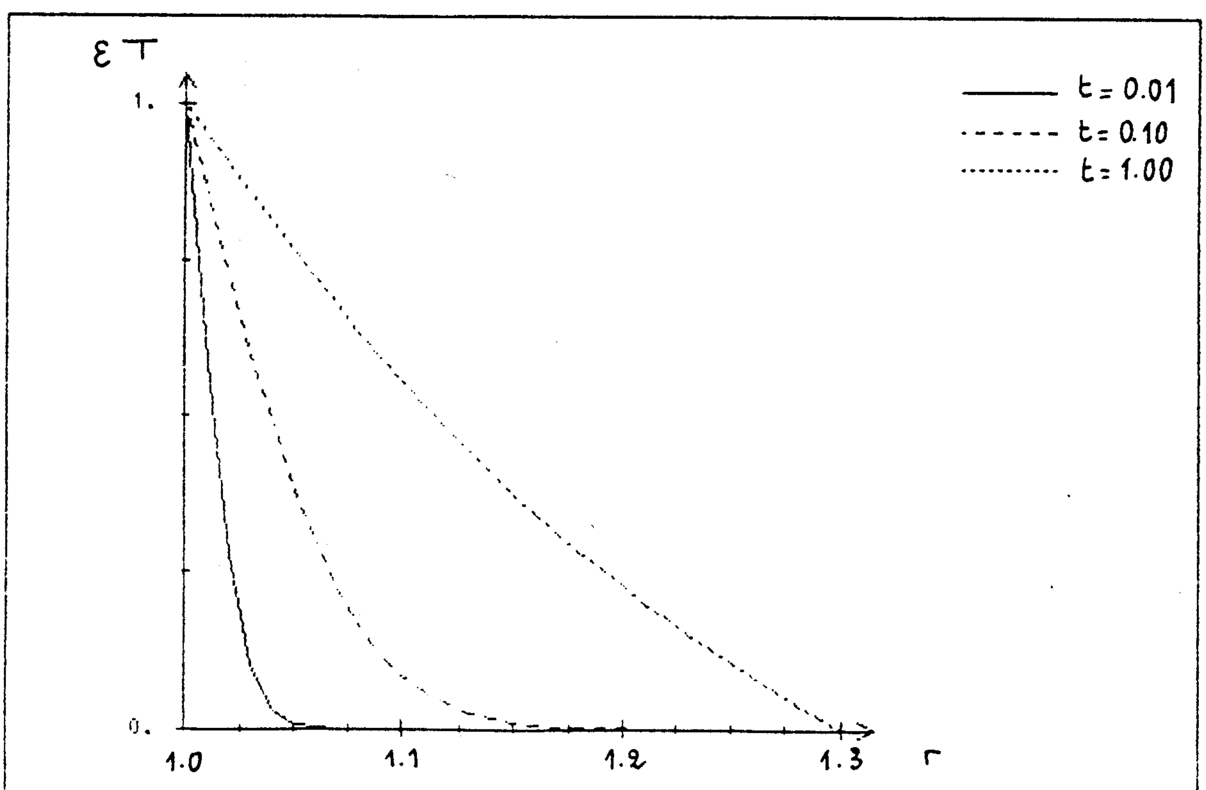


Figure 6.2-8 εT(r) ACIDE SULFURIQUE $r_a = 1,3$

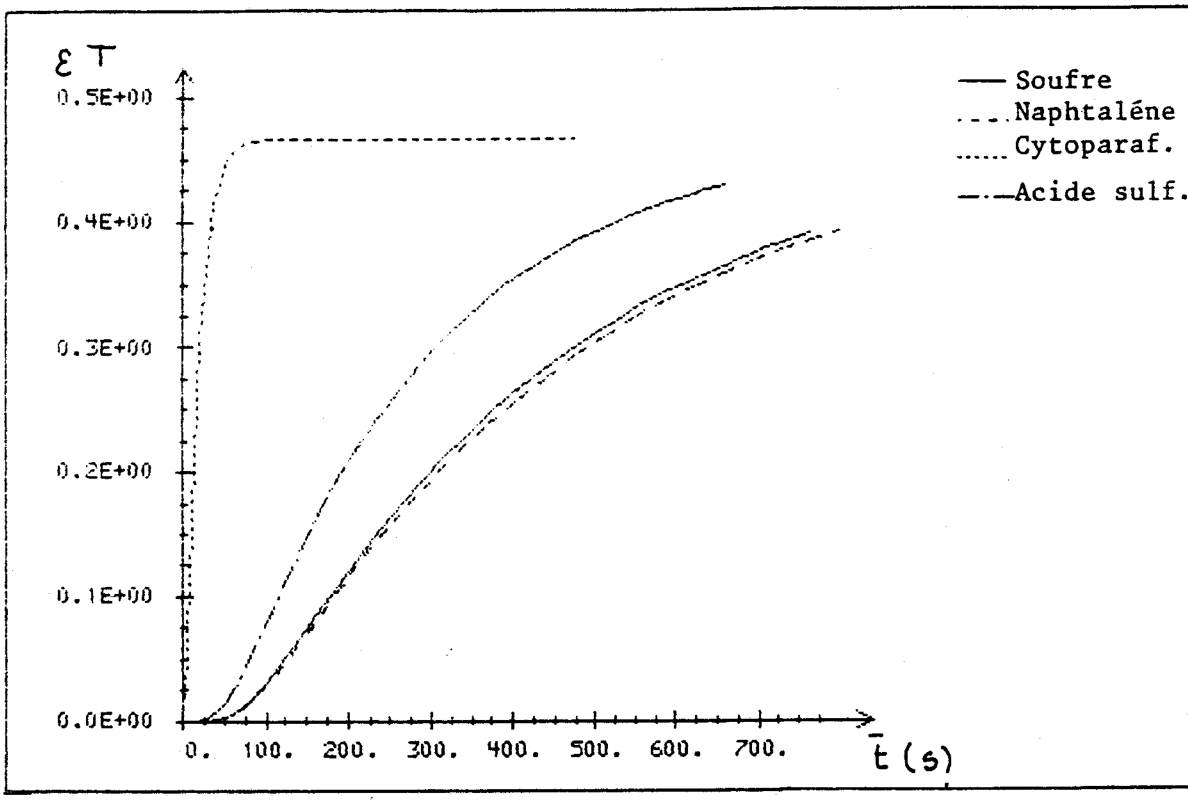


Figure 6.2-9 ε T en fonction du temps réel pour les différents produits. $r_a = 1,3$ $r = 1,15$

6.3. Distribution du champ des vitesses

a/ Constante négative

En ce qui concerne la distribution du champ des vitesses, nous avons utilisé une partie des résultats de A. MOJTABI et J.P. CALTAGIRONE ([38]) comme critère de comparaison en ce qui concerne le régime permanent, régime atteint dans nos calculs pour des valeurs de t suffisamment grandes.

Le problème repris dans l'article [38] est :

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ \Delta(\Delta\Psi) = -\left(\dfrac{\partial T}{\partial r}\sin\varphi' + \dfrac{\partial T}{\partial \varphi'}\dfrac{\cos\varphi'}{r}\right) \\ \text{avec} \\ T = 1 \qquad \Psi = \dfrac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \qquad \text{en } r = 1 \\ T = 0 \qquad \Psi = \dfrac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \qquad \text{en } r = r_a \end{cases}$$

$$\varphi' = \pi - \varphi$$

et les solutions sont :

$$T = 1 - \operatorname{Ln} r / \operatorname{Ln} r_a$$

$$\Psi = (B_1 r^3 + B_2 r + B_3/r + r^3 \operatorname{Ln} r/(16 \operatorname{Ln} r_a) + B_4 r \operatorname{Ln} r)\sin\varphi'$$

où B_1, B_2, B_3, B_4 sont des constantes dépendant uniquement de r_a.

Ce problème est à comparer à :

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \\ \Delta(\Delta\Psi) = G_r \left(\frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial\varphi} + \sin\varphi \frac{\partial T}{\partial r} \right) & \\ T = T_{li} \quad \frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \Rightarrow \Psi = cte = 0 \text{ en } r = 1 & \text{(formule 3.1.4-6)} \\ T = 0 \quad \frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \Rightarrow \Psi = cte = 0 \text{ en } r = r_a & \text{(formule 3.1.4-6)} \end{cases}$$

Par analogie aux résultats de l'article [38], nous avons trouvé :

$$T = T_{li} \left(1 - \operatorname{Ln} r / \operatorname{Ln} r_a \right)$$

$$\Psi = -G_r T_{li} \left[B_1 r^3 + B_2 r + B_3/r + r^3 \operatorname{Ln} r/16/\operatorname{Ln} r_a + B_4 r \operatorname{Ln} r \right] \sin\varphi$$

avec

$$B_1 = \frac{\operatorname{Ln} r_a \left(2 r_a^4 - 4 r_a^2 + 2 - 4 r_a^2 \operatorname{Ln} r_a \right) + \left(r_a^4 - 2 r_a^2 + 1 \right)}{64 \operatorname{Ln} r_a \left(-r_a^4 + 2 r_a^2 - 1 - \operatorname{Ln} r_a + r_a^4 \operatorname{Ln} r_a \right)}$$

$$B_2 = \left(r_a^2 - 1 \right) B_1 + \frac{r_a^4}{16 (r_a^2 - 1)} + \frac{r_a^2}{32 \operatorname{Ln} r_a}$$

$$B_3 = -B_1 - B_2$$

$$B_4 = -\frac{1}{16 \operatorname{Ln} r_a} - 3 B_1 - B_2 + B_3$$

Nous avons tracé les profils de vitesse dans une demi-cavité avec pour chaque tracé la référence du régime permanent issu de l'article [38]. Ces tracés sont représentés sur les figures :

- 6.3-1 pour le soufre et pour $r_a = 1,3$
- 6.3-2 pour le soufre et pour $r_a = 1,6$
- 6.3-3 pour la naphtalène et pour $r_a = 1,3$
- 6.3-4 pour la cytoparaffine et pour $r_a = 1,3$
- 6.3-5 pour l'acide sulfurique et pour $r_a = 1,3$

Les tracés ont été effectués à différents instants jusqu'à obtention du régime quasi-permanent.

Les figures 6.3-1 à 6.3-5 mettent en évidence le bon accord entre les deux méthodes pour le régime permanent.

Nous avons également tracé les composantes de vitesse adimensionnées εC_r et εC_φ dans différents plans à $\varphi = 30, 60, 90$ degrés pour les temps t = 0.05, t = 0.1, t = 0.3, t = 0.5 pour le soufre. Les vitesses réelles sont obtenues en multipliant les vitesses adimensionnées par 1,09 10^{-4}.

Ces résultats sont représentés sur les figures 6.3-6 à 6.3-11.

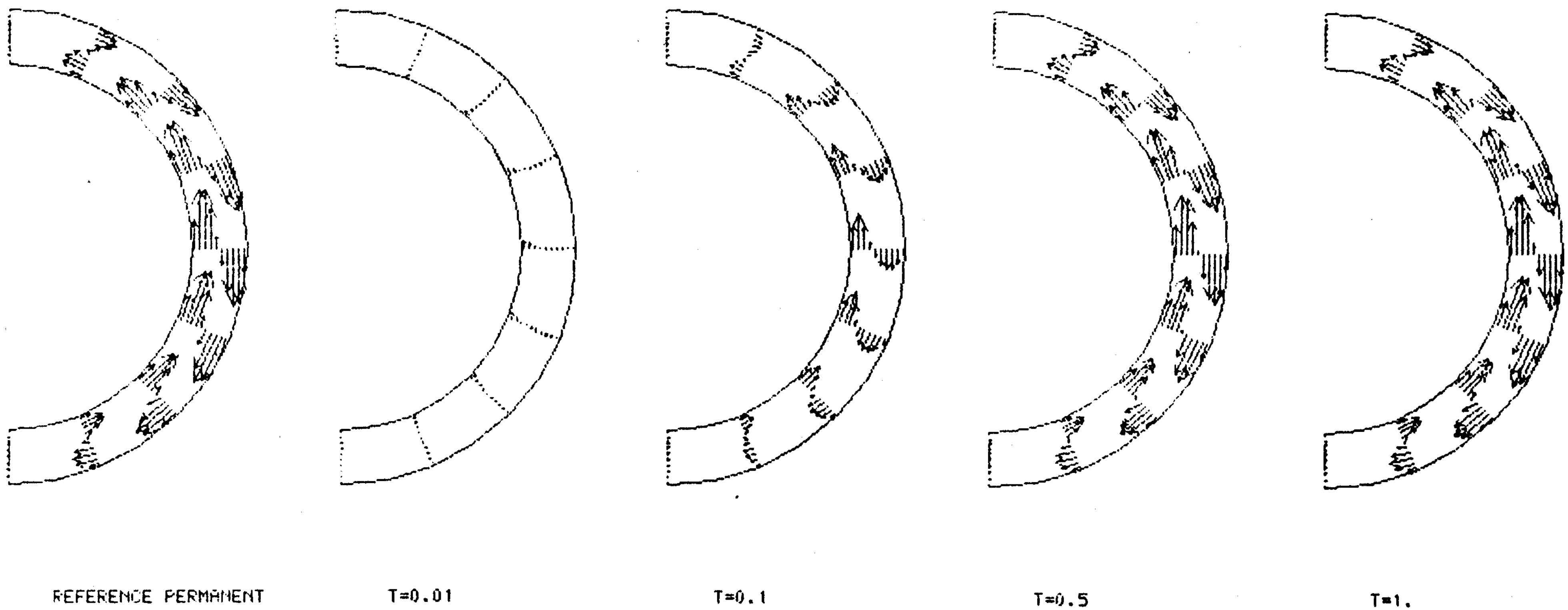


Figure 6.3-1 PROFILS DE VITESSE ($\mathcal{E}c$) SOUFRE

r_a = 1,3 $\overline{C_\varphi}$ maxi (permanent) = 0,036 m/s

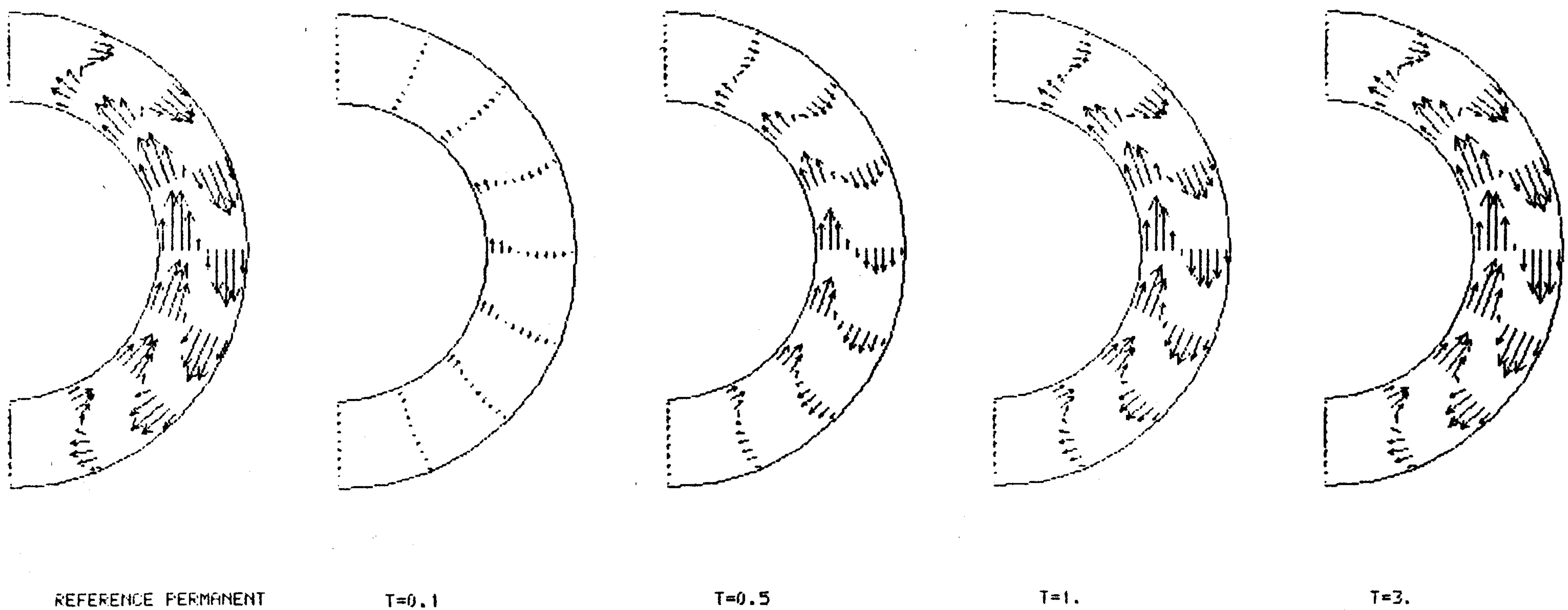


Figure 6.3-2 PROFILS DE VITESSE ($\mathcal{E}c$) SOUFRE

r_a = 1,6 $\overline{C\varphi}$ maxi (permanent) = 0,14 m/s

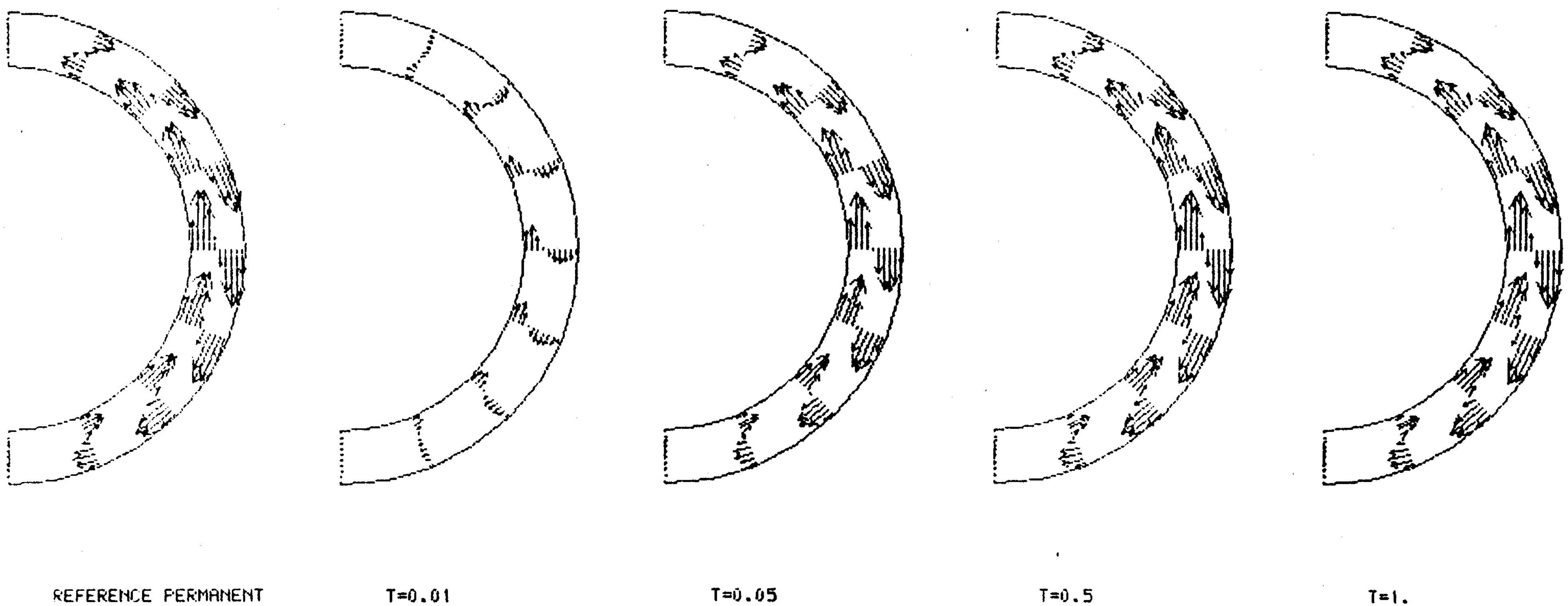
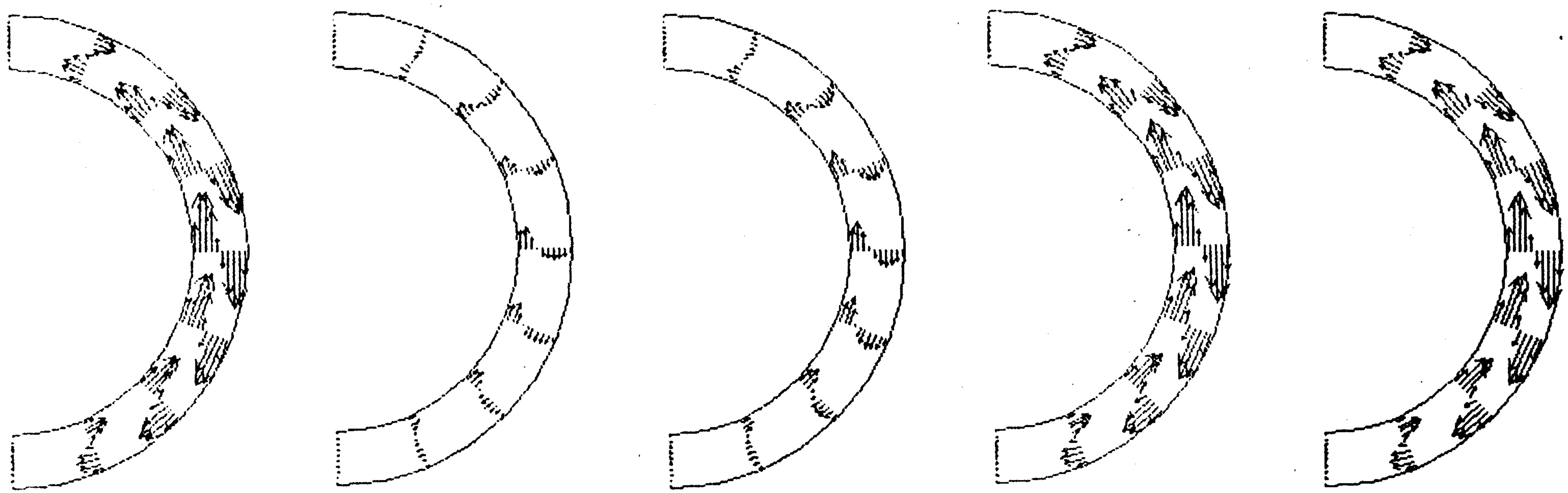


Figure 6.3-3 **PROFILS DE VITESSE ($\mathcal{E}c$) NAPHTALENE**

r_a = 1,3 $\overline{C}\varphi$ maxi (permanent) = 0,69 m/s



REFERENCE PERMANENT   T=0.005   T=0.007   T=0.01   T=0.5

Figure 6.3-4   PROFILS DE VITESSE ($\mathcal{E}_c$) CYTOPARAFFINE

$r_a = 1,3$ $\overline{C\varphi}$ maxi (permanent) = 0,03 m/s

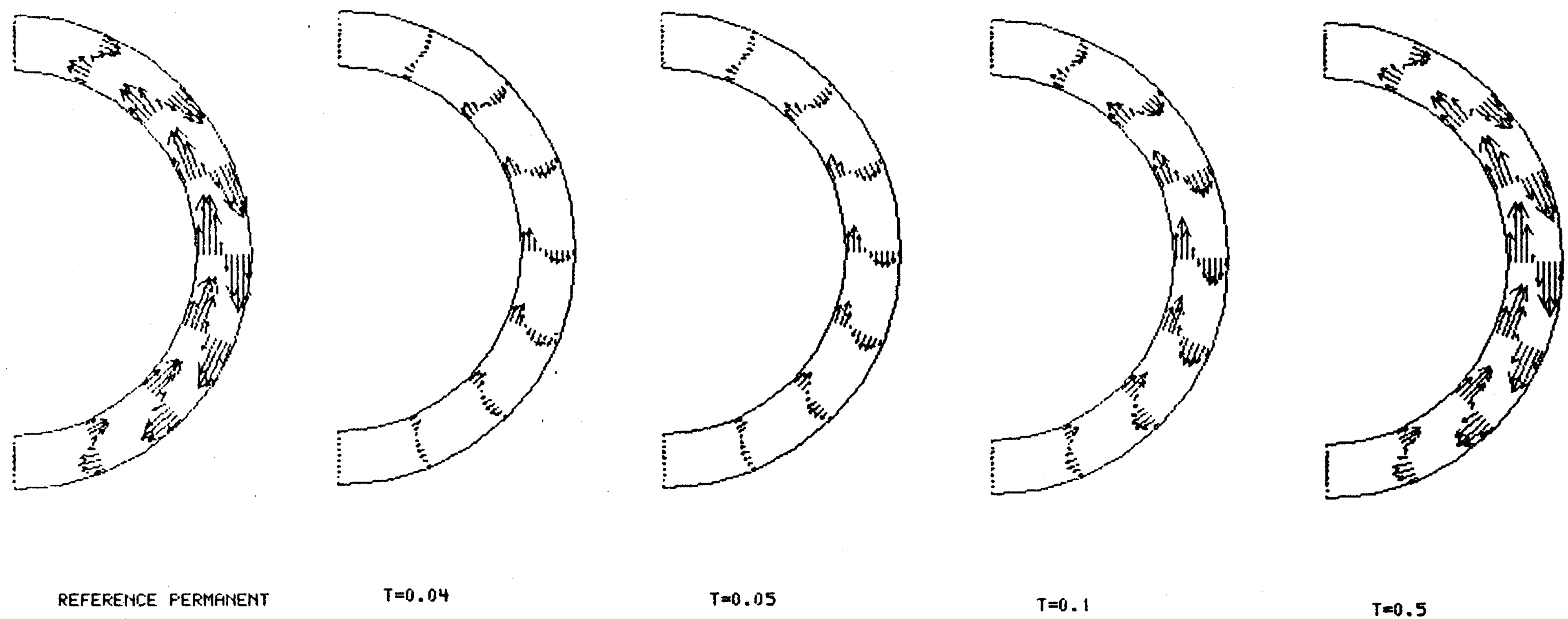


Figure 6.3-5 PROFILS DE VITESSE ($\mathcal{E}c$) ACIDE SULFURIQUE

r_a = 1,3 $\overline{C\varphi}$ maxi (permanent) = 0,2 m/s

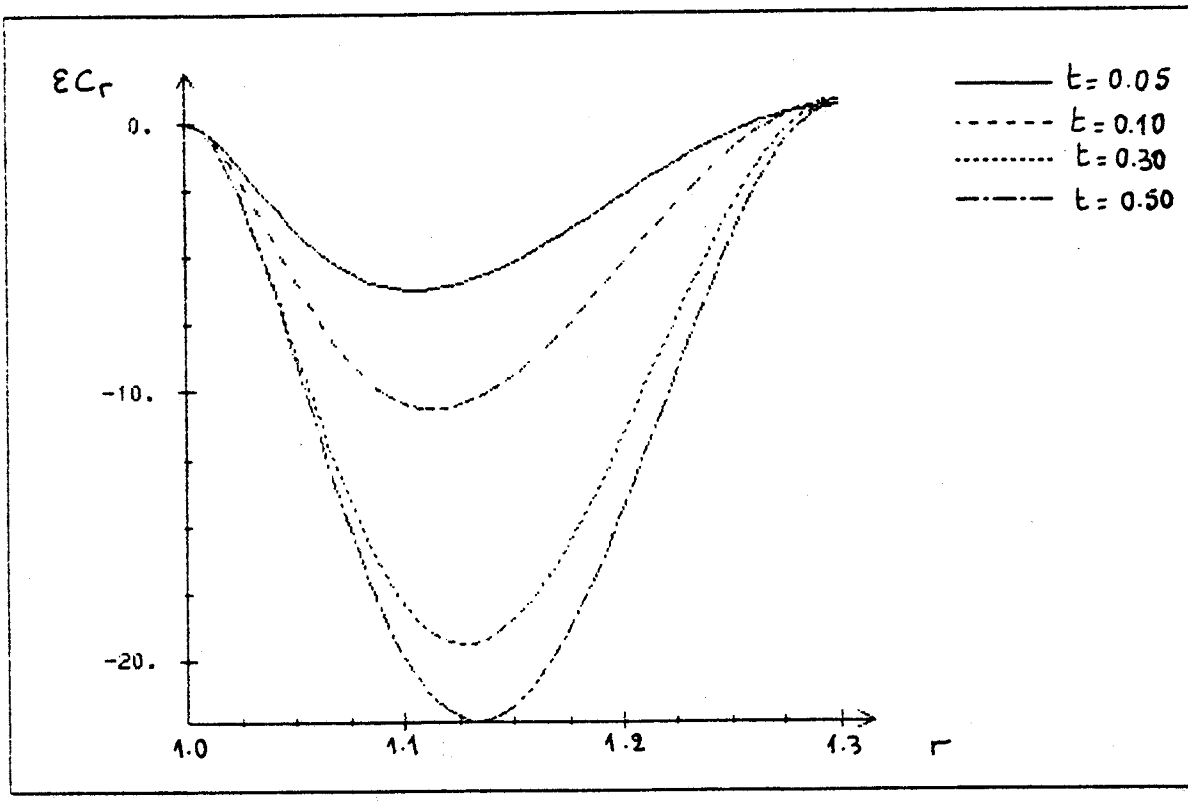


Figure 6.3-6 εC_r (r) SOUFRE φ = 30 DEGRES

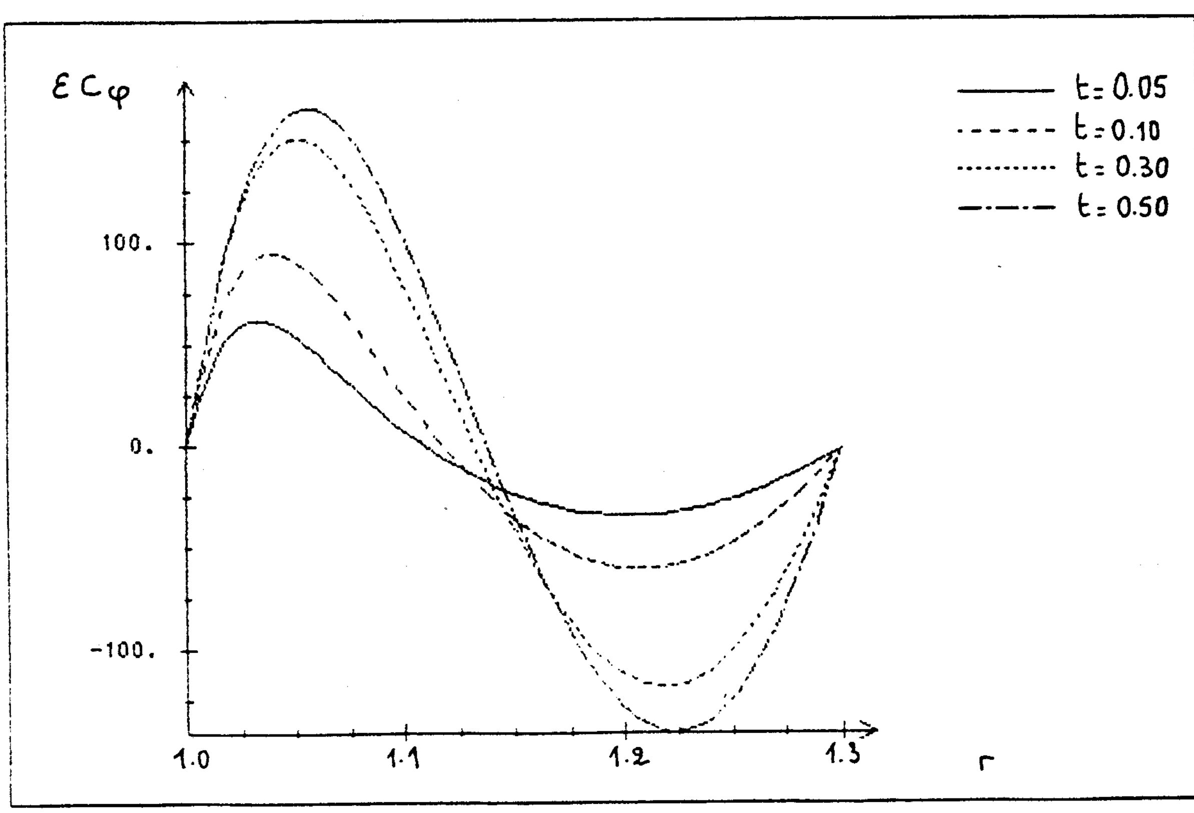


Figure 6.3-7 εC_φ (r) SOUFRE φ = 30 DEGRES

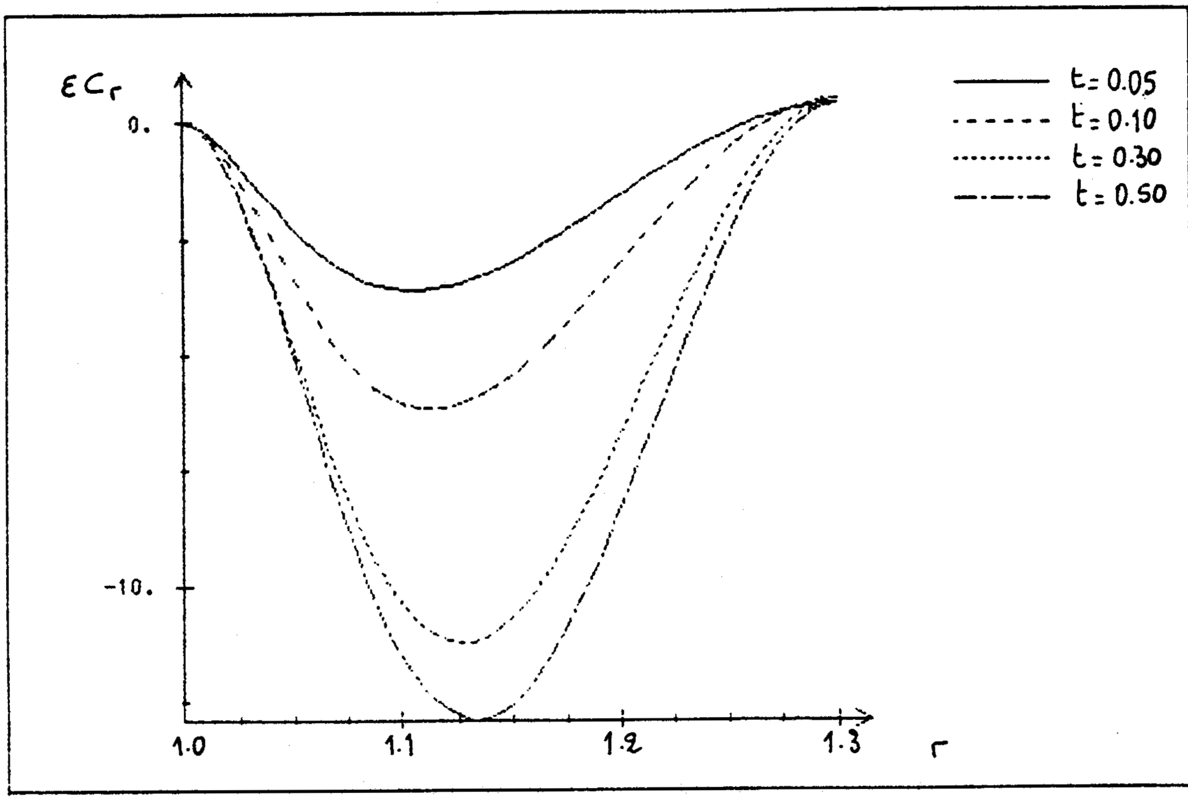


Figure 6.3-8 ε Cr (r) SOUFRE φ = 60 DEGRES

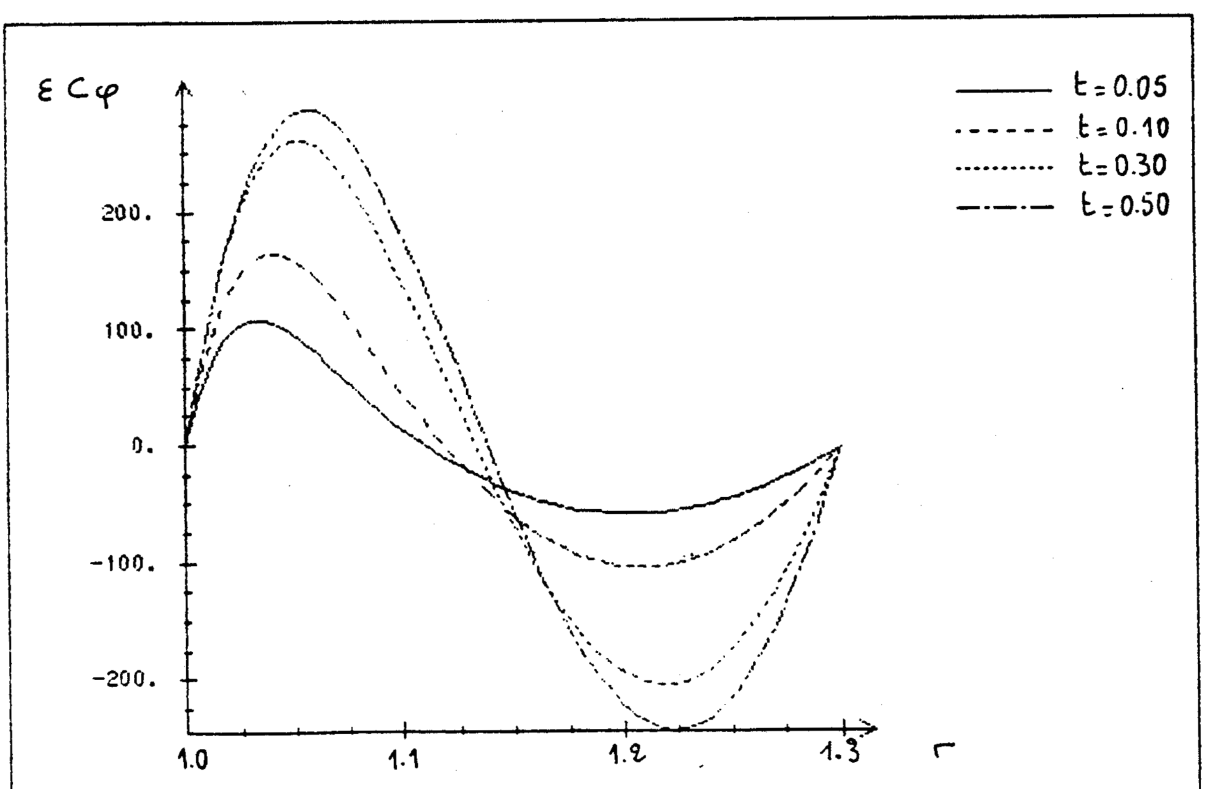


Figure 6.3-9 ε Cφ (r) SOUFRE φ = 60 DEGRES

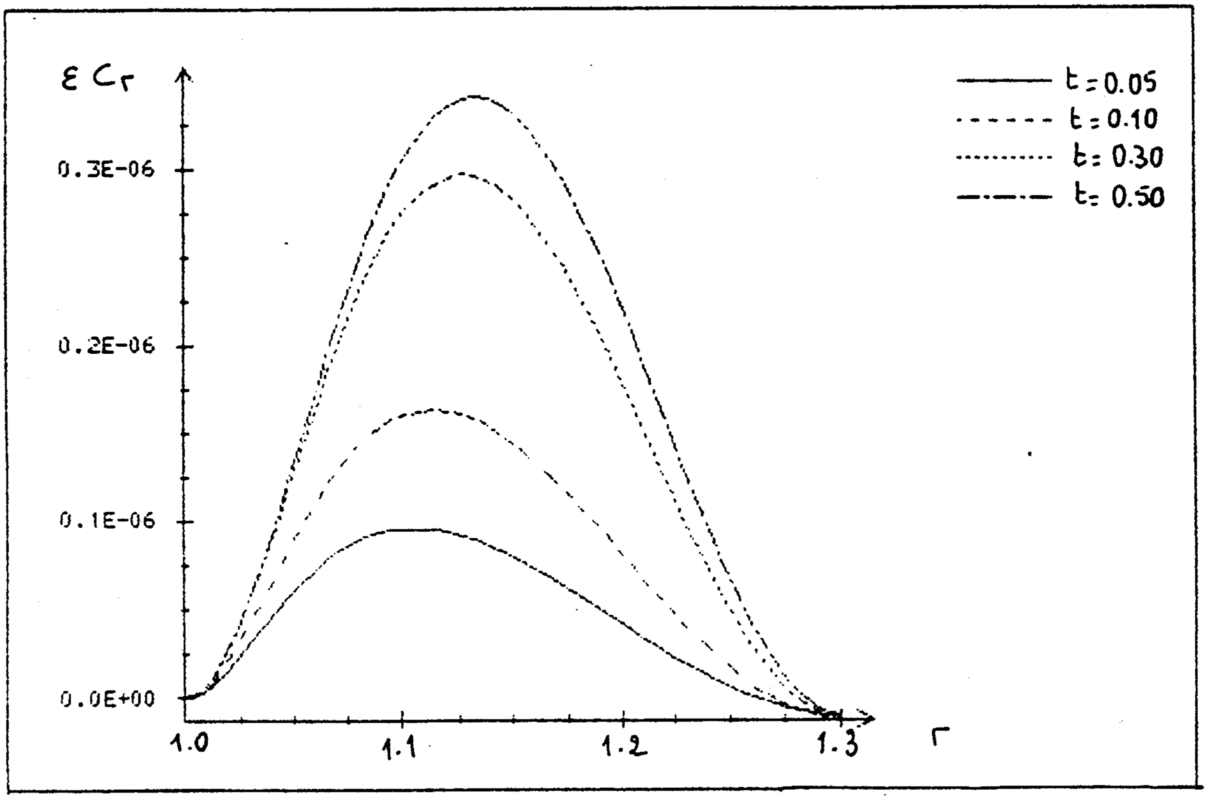


Figure 6.3-10 $\varepsilon C_r(r)$ SOUFRE φ = 90 DEGRES

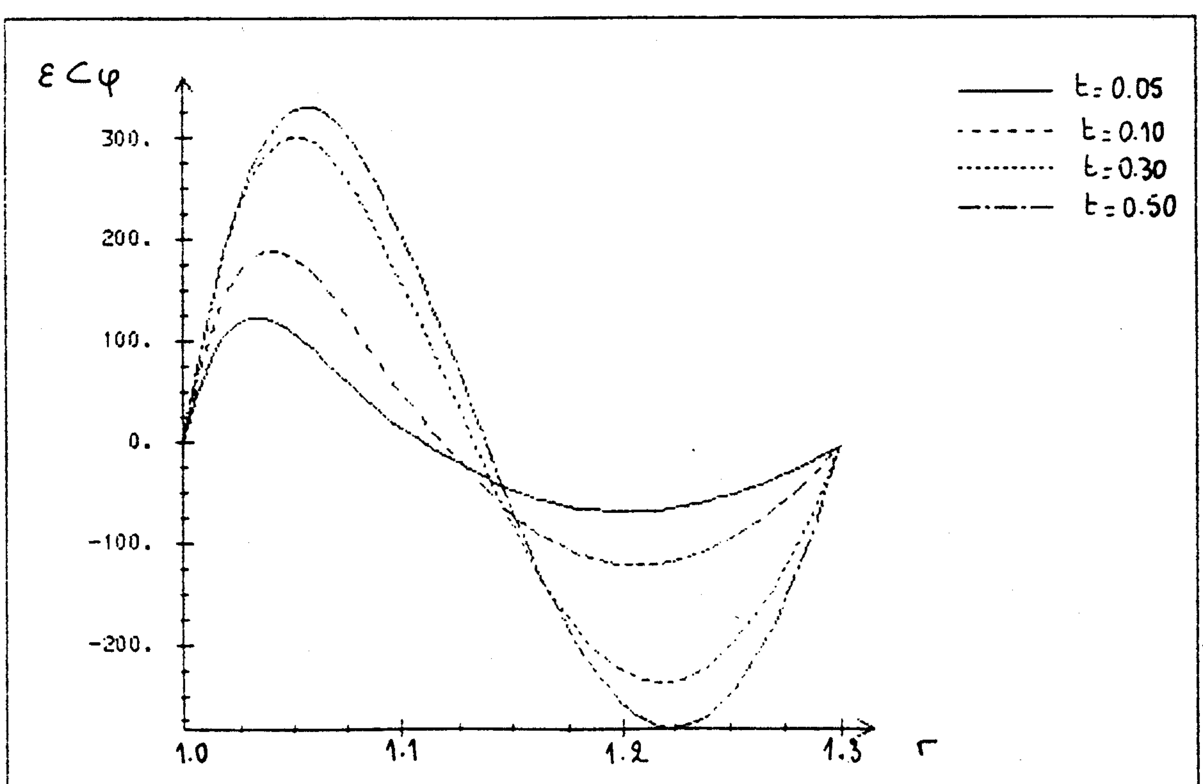
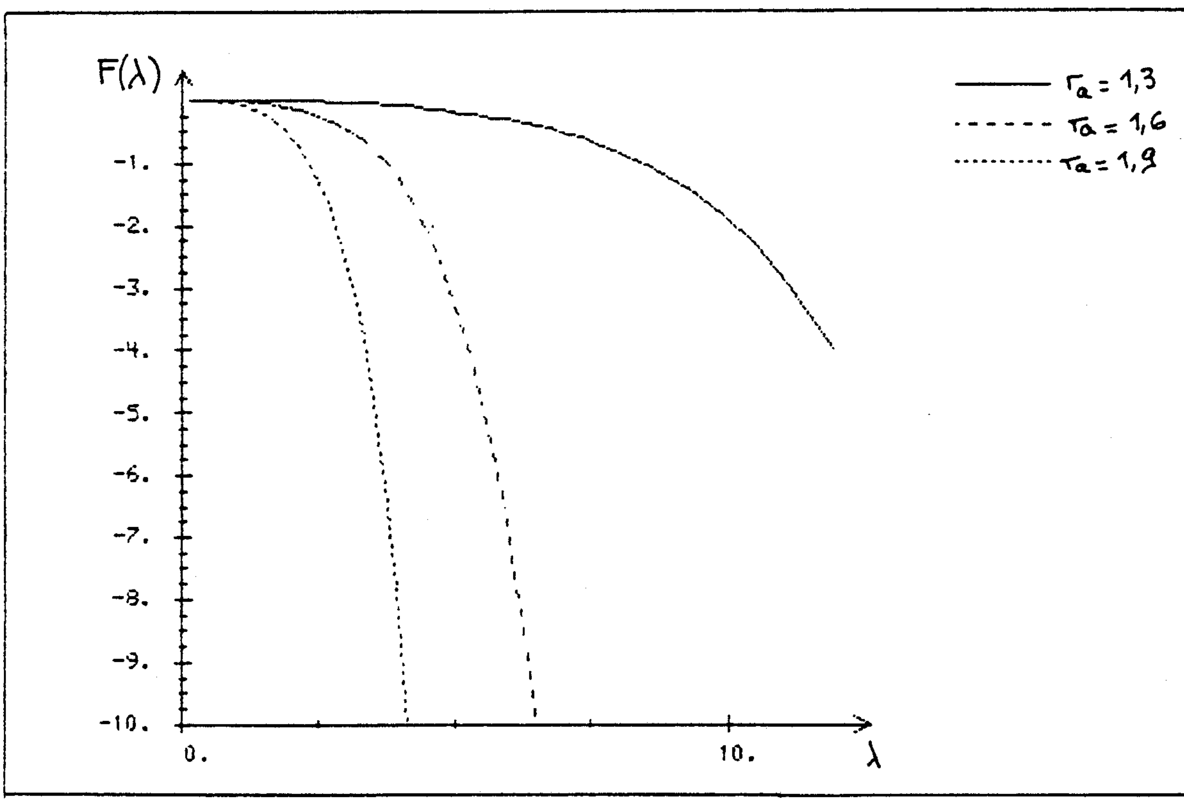


Figure 6.3-11 $\varepsilon C\varphi(r)$ SOUFRE φ = 90 DEGRES

b/ Constante positive

Nous avons tracé la fonction F (λ) pour différents rayons. Ces tracés mettent en évidence qu'il n'y a pas de solution à F (λ) = 0 sauf pour λ = 0, solution qui est à éliminer.



7. CONCLUSION

Dans les différentes publications analysées dans notre étude bibliographique, le problème de fusion est principalement abordé sous les aspects de l'expérience et du calcul numérique. Chacun de ces travaux s'attache donc à résoudre un problème particulier en ce qui concerne la géométrie, la nature du produit et le type de conditions aux limites.

Ces études mettent en évidence le rôle prépondérant de la convection naturelle sur le développement de la zone fondue.

Dans notre étude exclusivement théorique , nous avons plus particulièrement analysé le phénomène de convection dans la phase liquide au démarrage de la fusion lors du réchauffage du produit par un barreau cylindrique horizontal et nous nous sommes attachés principalement à dégager des solutions exactes susceptibles de mettre en évidence les principaux phénomènes et l'incidence du type de produit sur l'efficacité de ce système.

Nous avons donc établi les équations de base décrivant les champs de température et de vitesse dans le fluide dans le plan vertical perpendiculaire au barreau en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques. Les équations ont été adimensionnalisées à l'aide des variables, rayon du barreau, température de fusion, masse volumique et viscosité cinématique à la température de fusion.

Nous avons utilisé la technique de l'analyse asymptotique pour obtenir un système d'équations linéarisées du problème pour lesquelles on a pu trouver des solutions analytiques sous forme de développements en séries.

Les variables retenues sont la température du liquide, et la fonction de courant.

Du fait de l'hypothèse simplificatrice de petite perturbation, le champ de température obtenu est axisymétrique et corrobore le choix qui a été fait de donner une forme cylindrique concentrique au barreau, à la cavité renfermant le liquide. Il est donc logique de penser qu'à ce cas correspond une interface liquide-solide circulaire concentrique au tube de chauffe ce qui permet une représentation convenable des phénomènes au début de la fusion et tant que l'écart de température entre tube de chauffe et la température de fusion du liquide reste assez faible.

Les solutions exactes ont été fournies et leur application au calcul du début du réchauffage de quatre produits (soufre, naphtalène, cytoparaffine et acide sulfurique) a été effectuée.

Seul le problème de convection a été analysé dans notre étude. En couplant l'équation correspondant au bilan thermique à l'interface liquide-solide à nos résultats, il serait possible de décrire le développement de la zone fondue au cours du temps.

En vue de traiter le cas réel où cette interface se présente sous une forme non axisymétrique, la prise en compte de termes petits du second ordre s'avère indispensable ainsi que la représentation de la surface à l'aide d'un développement en série de Fourier par rapport à l'angle polaire.

Il s'agit là d'un problème beaucoup plus complexe que celui que nous venons de traiter. Il est certain que la solution numérique directe des équations du mouvement peut apparaître comme une méthode à laquelle il sera nécessaire de recourir. En ce cas les résultats obtenus dans le présent travail peuvent constituer de bonnes conditions de démarrage du calcul susceptibles d'éviter les problèmes d'instabilité numérique que l'on rencontre fréquemment dans cette phase du calcul.

FORMULATION DES EQUATIONS DE QUANTITE DE MOUVEMENT A L'AIDE DE ROTATIONNEL ET DE LA FONCTION DE COURANT

La procédure consiste à reprendre les deux équations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{t}} + \bar{C}_r \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{\bar{C}_\varphi^2}{\bar{r}} = -\frac{1}{\rho_F} \frac{\partial \bar{P}_g}{\partial \bar{r}} - \beta \bar{g} (\bar{T} - \bar{T}_F) \cos \bar{\varphi}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 \bar{C}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}^2} - \frac{\bar{C}_r}{\bar{r}^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{\varphi}} \right] \frac{\bar{\eta}}{\rho_F}$$

(A.1-1)

$$\frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{t}} + \bar{C}_r \frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\bar{C}_\varphi \bar{C}_r}{\bar{r}} = -\frac{1}{\rho_F} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{P}_g}{\partial \bar{\varphi}} + \beta \bar{g} (\bar{T} - \bar{T}_F) \sin \bar{\varphi}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{\varphi}^2} - \frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{C}_\varphi} \right] \frac{\bar{\eta}}{\rho_F}$$

(A.1-2)

On dérive (A.1-1) par rapport à $\bar{\varphi}$ et (A.1-2) par rapport à $\bar{r}$ et on effectue la combinaison linéaire

$$\frac{1}{\bar{r}} \text{ (A.1-2)} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \text{ (A.1-1)} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \text{ (A.1-2)}$$

En utilisant l'équation de continuité et la troisième composante du rotationnel de la vitesse :

$$\bar{\omega} = -\Delta \psi = \frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}}$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{r}} = -\frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial^2 \bar{C}_r}{\partial \bar{r}\,\partial \bar{\varphi}}$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\varphi}} = \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial^2 \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}\,\partial \bar{\varphi}} - \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial^2 \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}^2}$$

$$\begin{aligned}\Delta \bar{\omega} = {} & \frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}^3} - \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}} + \frac{2}{\bar{r}}\frac{\partial^2 \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial^3 \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}^3} \\ & + \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2 \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}\,\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^3}\frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial^3 \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}\,\partial \bar{r}^2} \\ & + \frac{1}{\bar{r}^3}\frac{\partial^2 \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{\varphi}^2} + \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^3 \bar{C}_\varphi}{\partial \bar{r}\,\partial \bar{\varphi}^2} - \frac{1}{\bar{r}^3}\frac{\partial^3 \bar{C}_r}{\partial \bar{\varphi}^3}\end{aligned}$$

On aboutit à :

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{t}} + \bar{C}_r\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{C}_\varphi}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\varphi}} = \beta \bar{g}\left(\frac{\cos\bar{\varphi}}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\varphi}} + \sin\bar{\varphi}\,\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}}\right) + \frac{\eta}{\rho_F}\,\Delta \bar{\omega}$$

FONCTIONS DE BESSEL

Les relations suivantes sont extraites de [41] et [42].

Table A.2-1 : Définition des fonctions.

- **fonction de Bessel de première espèce d'ordre k.**

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n}}{n!\,(n+k)!}$$

- **fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre k.**

$$Y_k(x) = \frac{1}{\pi}\left\{ 2\left[Ln\frac{x}{2} + \gamma\right] J_k(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n}}{(k+n)!\,n!} \left[\sum_{m=1}^{k+n} m^{-1} + \sum_{m=1}^{n} m^{-1} \right] - \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{-k+2n} \frac{(k-n-1)!}{n!} \right\}$$

- **fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre k.**

$$I_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n}}{n!\,(n+k)!}$$

- fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre k.

$$K_k(x) = (-1)^{k+1}\left[\operatorname{Ln}\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right] I_k(x)$$

$$+\ \frac{1}{2}(-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n}}{n!\,(k+n)!}\left[\sum_{m=1}^{k+n}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]$$

$$+\ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{-k+2n}\frac{(k-n-1)!}{n!}$$

avec : constante d'Euler = 0.5772 = γ

<u>Table A.2-2: Expression asymptotique des fonctions de Bessel (x grand)</u>

$$J_k(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos\left(x-(2k+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_k(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin\left(x-(2k+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

$$I_k(x) \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

$$K_k(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\ e^{-x}$$

Table A.2-3 : Dérivées des fonctions de Bessel

$$J'_k(x) = J_{k-1}(x) - \frac{k}{x} J_k(x) = -J_{k+1}(x) + \frac{k}{x} J_k(x)$$

$$Y'_k(x) = Y_{k-1}(x) - \frac{k}{x} Y_k(x) = -Y_{k+1}(x) + \frac{k}{x} Y_k(x)$$

$$I'_k(x) = I_{k-1}(x) - \frac{k}{x} I_k(x) = I_{k+1}(x) + \frac{k}{x} I_k(x)$$

$$K'_k(x) = -K_{k-1}(x) - \frac{k}{x} K_k(x) = -K_{k+1}(x) + \frac{k}{x} K_k(x)$$

Table A.2-4 : Relation entre les fonctions de Bessel

$$J_{k+1}(x) = -J_{k-1}(x) + \frac{2k}{x} J_k(x)$$

$$Y_{k+1}(x) = -Y_{k-1}(x) + \frac{2k}{x} Y_k(x)$$

$$I_{k+1}(x) = I_{k-1}(x) - \frac{2k}{x} I_k(x)$$

$$K_{k+1}(x) = K_{k-1}(x) + \frac{2k}{x} K_k(x)$$

$$J_k(ix) = i^k I_k(x)$$

$$Y_k(ix) = i^k \left(i I_k(x) - \frac{2}{\pi} (-1)^k K_k(x) \right)$$

$$J_k(x) . Y'_k(x) - Y_k(x) . J'_k(x) = \frac{2}{\pi x}$$

$$I_k(x) . K'_k(x) - K_k(x) . I'_k(x) = -\frac{1}{x}$$

Table A.2-5 : Intégrales des fonctions de Bessel

Si C_k et $\bar{C}_k$ désignent deux fonctions générales de Bessel, de la forme :

$$C_k(x) = a . J_k(x) + b . Y_k(x)$$

$$\bar{C}_k(x) = \bar{a} . J_k(x) + \bar{b} . Y_k(x)$$

a, b, $\bar{a}$, $\bar{b}$ étant des constantes arbitraires.

$$\int x^{k+1} C_k(x)\, dx = x^{k+1} C_{k+1}(x)$$

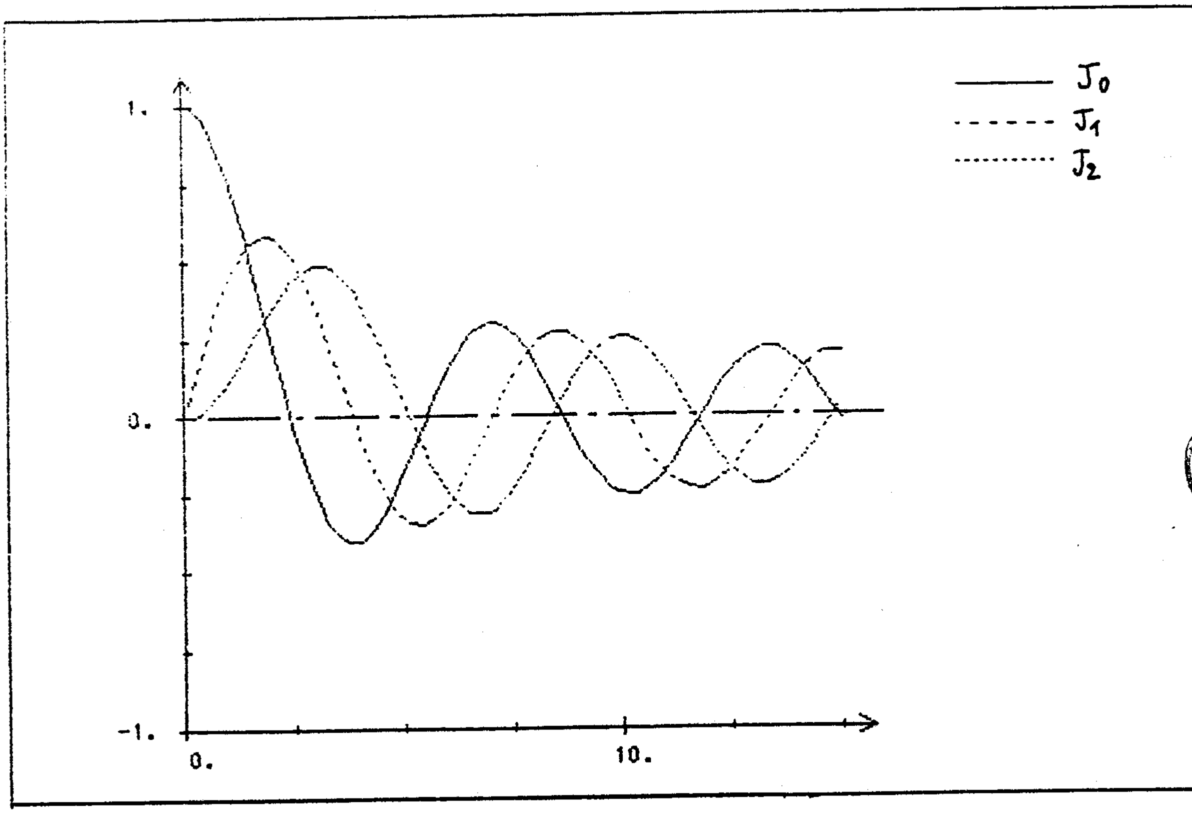
$$\int x^{1-k} C_k(x)\, dx = - x^{1-k} C_{k-1}(x)$$

$$\int x\, C_k(hx)\, \bar{C}_k(gx)\, dx = (h^2-g^2)^{-1} x \Big[h\, C_{k+1}(hx)\, \bar{C}_k(gx) - g\, C_k(hx)\, \bar{C}_{k+1}(gx) \Big]$$

$$\int x\, C_k(hx)\, \bar{C}_k(hx)\, dx = -\frac{1}{4} x^2 \Big[C_{k-1}(hx)\, \bar{C}_{k+1}(hx) - 2\, C_k(hx)\, \bar{C}_k(hx) + C_{k+1}(hx)\, \bar{C}_{k-1}(hx) \Big]$$

$$\int x^{-1} C_m(hx)\, \bar{C}_k(hx)\, dx = (m^2-k^2)^{-1} \Big[(m-k)\, C_m(hx)\, \bar{C}_k(hx) - hx\, C_{m+1}(hx)\, \bar{C}_k(hx) + hx\, C_m(hx)\, \bar{C}_{k+1}(hx) \Big]$$

Table A.2-6 : allure des fonctions de Bessel



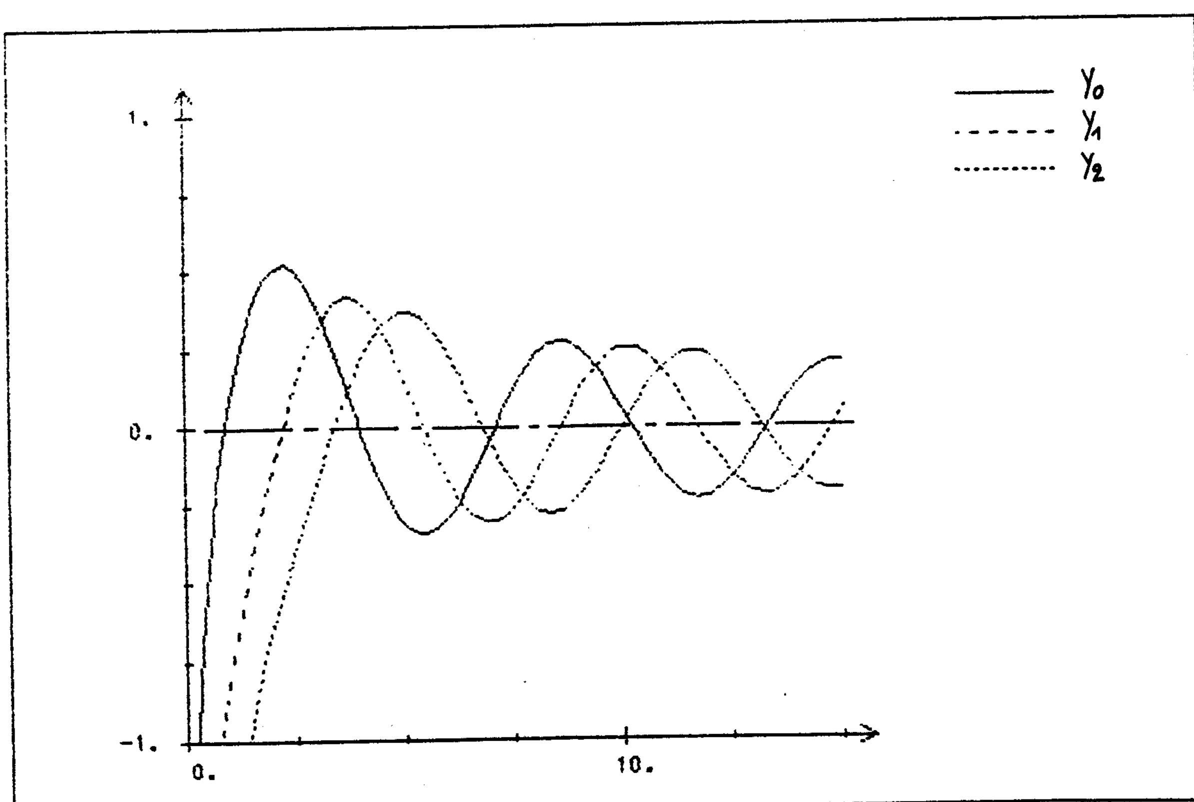
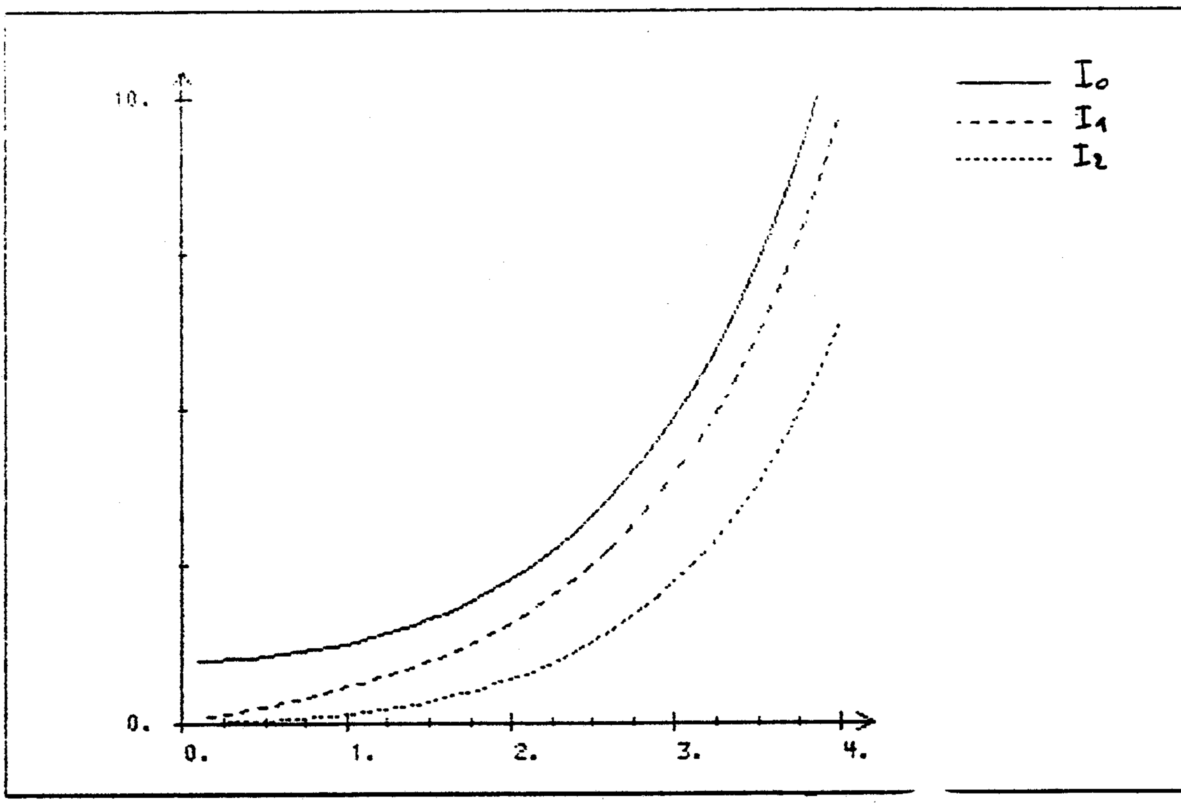
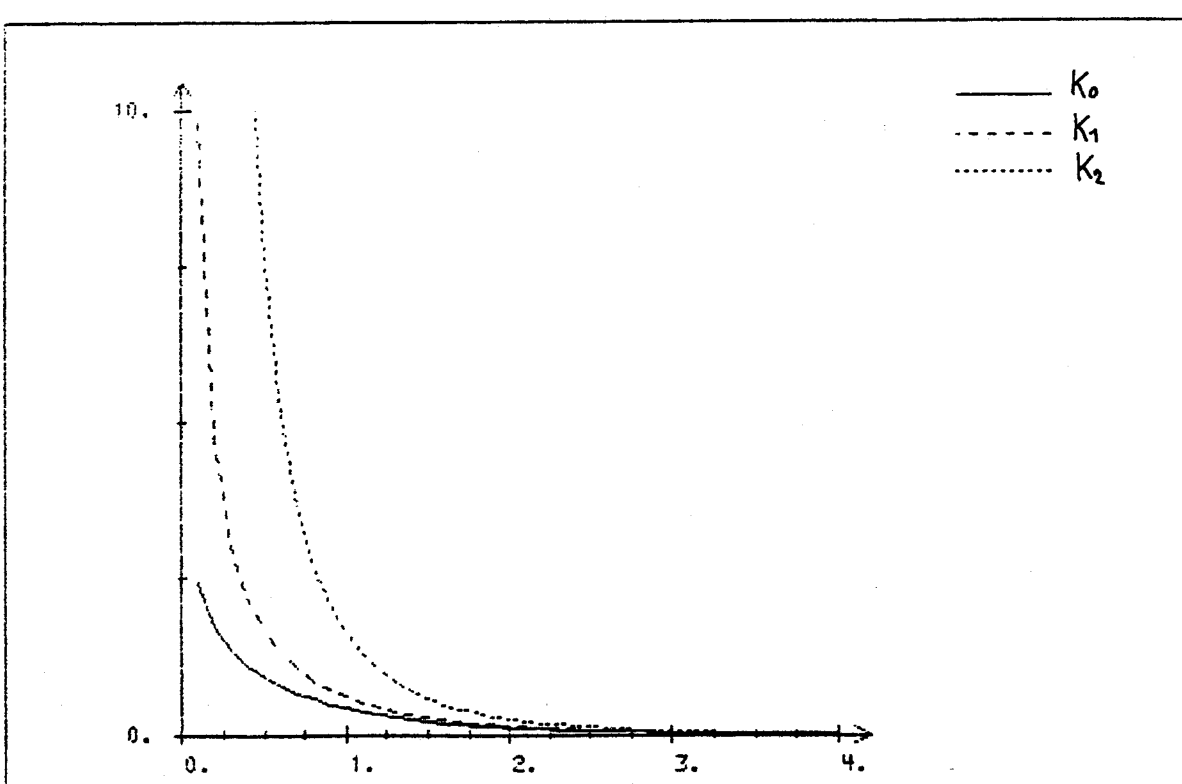


Table A.2-7 : Allure des fonctions de Bessel modifiées





ANNEXE 3 - 1/2 -

ORTHOGONALITE DES SOLUTIONS DE

$$r \cdot \frac{d^2 T_{\ell r}}{dr^2} + \frac{d T_{\ell r}}{dr} + \lambda^2 r \, P_r \, T_{\ell r} = 0$$

Reprenons l'équation avec ses conditions aux limites :

$$r \cdot \frac{d^2 T_{\ell r}}{dr^2} + \frac{d T_{\ell r}}{dr} + \lambda^2 r \, P_r \, T_{\ell r} = 0 \qquad \text{(A.3-1)}$$

$$T_{\ell r}(1) = 0 \qquad\qquad T_{\ell r}(r_a) = 0 \qquad \text{(A.3-2)}$$

La solution à ce problème est du type :

$$T_{\ell r n} = A_n \, C_o\left(\lambda_n \sqrt{P_r} \; r\right) \qquad \text{(A.3-3)}$$

Soient $T_{\ell r n}$ et $T_{\ell r m}$ les fonctions propres correspondants à λ_n et λ_m Elles satisfont l'équation différentielle (A.3-1) et les conditions aux limites (A.3-2).

Donc :

$$r \cdot \frac{d^2 T_{\ell r m}}{dr^2} + \frac{d T_{\ell r m}}{dr} + \lambda_m^2 \, r \, P_r \, T_{\ell r m} = 0 \qquad \text{(A.3-4)}$$

et

$$r \cdot \frac{d^2 T_{\ell r n}}{dr^2} + \frac{d T_{\ell r n}}{dr} + \lambda_n^2 \, r \, P_r \, T_{\ell r n} = 0 \qquad \text{(A.3-5)}$$

En multipliant la première de ces équations par $T_{\ell r m}$ et la deuxième

par $T_{\ell r n}$ et par différence, on trouve :

$$r\left(T_{\ell r n}\frac{d^2 T_{\ell r m}}{dr^2} - T_{\ell r m}\frac{d^2 T_{\ell r n}}{dr^2}\right) + \left(T_{\ell r n}\frac{dT_{\ell r m}}{dr} - T_{\ell r m}\frac{dT_{\ell r n}}{dr}\right)$$

$$+\left(\lambda_m^2 - \lambda_n^2\right) r\, P_r\, T_{\ell r m}\, T_{\ell r n} = 0 \qquad \text{(A.3-6)}$$

ou encore :

$$\frac{d}{dr}\left[r\left(T_{\ell r n}\frac{dT_{\ell r m}}{dr} - T_{\ell r m}\frac{dT_{\ell r n}}{dr}\right)\right] = -\left(\lambda_n^2 - \lambda_m^2\right) r\, P_r\, T_{\ell r m}\, T_{\ell r n} \qquad \text{(A.3-7)}$$

En intégrant :

$$\left[r\left(T_{\ell r n}\frac{dT_{\ell r m}}{dr} - T_{\ell r m}\frac{dT_{\ell r n}}{dr}\right)\right]_1^{r_a} = -\left(\lambda_n^2 - \lambda_m^2\right) P_r \int_1^{r_a} r\, T_{\ell r m}\, T_{\ell r n}\, dr$$

(A.3-8)

Le premier terme est égal à zéro car :

$$T_{\ell r n}(1) = T_{\ell r m}(1) = 0$$

$$T_{\ell r n}(r_a) = T_{\ell r m}(r_a) = 0$$

Donc

$$\left(\lambda_n^2 - \lambda_m^2\right) P_r \int_1^{r_a} r\, T_{\ell r m}\, T_{\ell r n}\, dr = 0 \qquad \text{(A.3-9)}$$

pour n $\neq$ m

$$\int_1^{r_a} r\, T_{\ell r m}\, T_{\ell r n}\, dr = 0 \qquad \text{(A.3-10)}$$

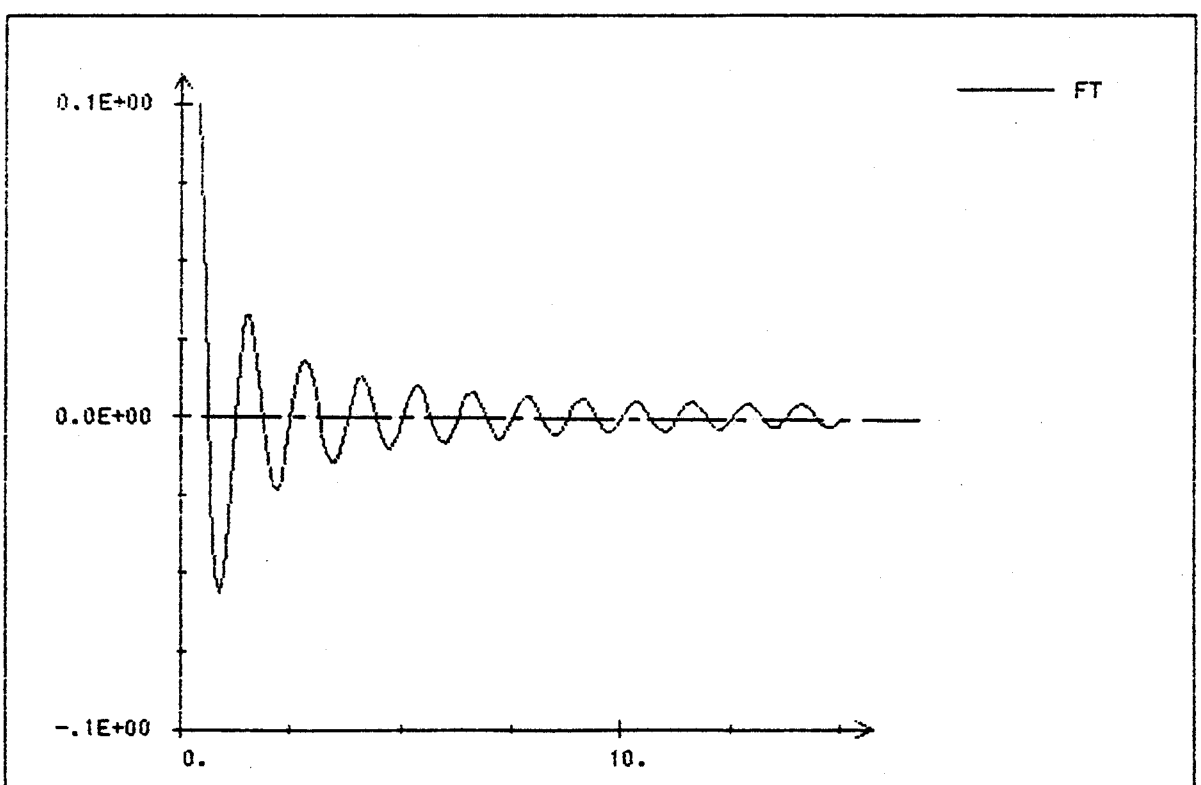
ANNEXE 4 - 1/2 -

RECHERCHE DES RACINES DE $F_T(\lambda)$

$$F_T(\lambda^T) = J_0(\lambda^T\sqrt{P_r}) \cdot Y_0(\lambda^T\sqrt{P_r}\, r_a) - J_0(\lambda^T\sqrt{P_r}\, r_a) \cdot Y_0(\lambda^T\sqrt{P_r}) \tag{A.4-1}$$

Il s'agit de trouver les valeurs de λ^T annulant F_T

La fonction F_T a l'allure suivante :



Nous nous proposons de rechercher les racines de $F_T(\lambda^T)$ en utilisant en première approximation les racines de l'expression asymptotique.

En remplaçant J_o et Y_o par leurs expressions asymptotiques, on aboutit à :

$$F_T(\lambda^T) \sim \frac{2 \cdot \sin\left((r_a - 1)\lambda^T \sqrt{P_r}\right)}{\pi \, \lambda^T \sqrt{P_r} \, \sqrt{r_a}} \qquad \text{(A.4-2)}$$

Les racines de cette équation sont :

$$\lambda^T = \frac{k\pi}{(r_a - 1)\sqrt{P_r}} \qquad \text{(A.4-3)}$$

Compte tenu de l'allure de $F_T(\lambda^T)$, la solution k = 0 est à éliminer.

La méthode de recherche des racines réelles consiste à encadrer la valeur recherchée par :

$$\lambda^T_{ka} = \frac{\pi}{(r_a - 1)\sqrt{P_r}} \left[k - 0{,}2 \right] \qquad \text{(A.4-4)}$$

et

$$\lambda^T_{kb} = \frac{\pi}{(r_a - 1)\sqrt{P_r}} \left[k + 0{,}2 \right] \qquad \text{(A.4-5)}$$

et à utiliser la méthode de la sécante pour la résolution.

SOLUTION PARTICULIERE A

$$\Delta\psi = \begin{array}{l} \sin n\varphi \,.\, J_n(\lambda r) \\ \sin n\varphi \,.\, Y_n(\lambda r) \\ \cos n\varphi \,.\, J_n(\lambda r) \\ \cos n\varphi \,.\, Y_n(\lambda r) \end{array}$$

Si $\psi = -\dfrac{\sin n\varphi}{\lambda^2} J_n(\lambda r)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{\sin n\varphi}{\lambda^2}\left[-\lambda J_{n+1}(\lambda r) + \frac{n}{r} J_n(\lambda r)\right]$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = -\frac{\sin n\varphi}{\lambda^2}\left[\left(-\lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{n}{r^2}\right) J_n(\lambda r) + \frac{\lambda}{r} J_{n+1}(\lambda r)\right]$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = \frac{n^2}{\lambda^2} \sin n\varphi \; J_n(\lambda r)$$

En sommant on vérifie que :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = \sin n\varphi \; J_n(\lambda r)$$

L'expression de la dérivée de Y_n étant du même type que celle de J_n, on vérifie que $\psi = -\dfrac{\sin n\varphi}{\lambda^2} Y_n(\lambda r)$ est solution particulière de $\Delta\psi = \sin n\varphi \,.\, Y_n(\lambda r)$

ANNEXE 5 - 2/2 -

On peut montrer de la même façon que $\Psi = -\dfrac{\cos n\varphi}{\lambda^2} J_n(\lambda r)$

est solution particulière de $\Delta\Psi = J_n(\lambda r).\cos n\varphi$

et que $\Psi = -\dfrac{\cos n\varphi}{\lambda^2} Y_n(\lambda r)$

est solution particulière de $\Delta\Psi = \cos n\varphi \,.\, Y_n(\lambda r)$

SOLUTIONS A $\Delta\Psi = 0$

Nous proposons de résoudre ce problème par la méthode de variation des paramètres. Pour cela, il faut rechercher les valeurs et fonctions propres en séparant les variables :

$$\Psi = \Psi_r . \Psi_\varphi$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{r^2}{\Psi_r} \frac{d^2\Psi_r}{dr^2} + \frac{r}{\Psi_r} \frac{d\Psi_r}{dr} = - \frac{1}{\Psi_\varphi} \frac{d^2\Psi_\varphi}{d\varphi^2} = \alpha$$

L'équation en Ψ_φ est :

$$\frac{d^2\Psi_\varphi}{d\varphi^2} + \alpha \Psi_\varphi = 0$$

<u>1er cas</u> : $\alpha < 0$ Les solutions sont du type :

$$e^{\sqrt{|\alpha|}.\varphi} \quad \text{ou} \quad e^{-\sqrt{|\alpha|}.\varphi}$$

Ce type de solution ne convient pas au problème étudié, car la solution doit être périodique.

2ème cas $\alpha > 0$ Les solutions sont du type

$$\cos\left(\sqrt{\alpha}\,\varphi\right) \quad ou \quad \sin\left(\sqrt{\alpha}\,\varphi\right)$$

pour que la solution soit périodique, il faut que $\sqrt{\alpha}$ soit un entier, ainsi $\alpha = n^2$

. Les valeurs propres en Ψ_φ sont donc n = 0,1,2... et les fonctions propres $\cos n\varphi$ et $\sin n\varphi$

Il s'ensuit que la fonction Ψ est du type :

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(r) \cdot \Psi_k(\varphi)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi \right)$$

$$= A_o(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi \right) \qquad \text{(A.6-1)}$$

Recherche de Ao(r)

On multiplie l'équation (A.6-1) par $d\varphi$ et on intègre entre 0 et 2π, on en déduit :

$$A_o(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi \, d\varphi \qquad \text{(A.6-2)}$$

On dérive ensuite (A.6-2) par rapport à r une fois et deux fois et on introduit leurs expressions dans $\Delta\psi = 0$. Il en résulte une équation différentielle en Ao dont la solution est :

$$A_0(r) = \alpha_0 \log r + \alpha_0' \qquad \text{(A.6-3)}$$

Recherche de Al(r)

On multiplie (A.6-1) par $\cos l\varphi \, d\varphi$ et on intègre entre 0 et 2π , on en déduit :

$$A_l(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi \cos l\varphi \, d\varphi \qquad \text{(A.6-4)}$$

En dérivant cette expression par rapport à r et en combinant avec l'équation $\Delta\psi = 0$, on en déduit une équation différentielle en A_l du type Euler dont la solution est :

$$A_l(r) = \alpha_l r^l + \alpha_l' r^{-l}$$

Recherche de $B_\ell(r)$

En multipliant l'équation (A.6-1) par $\sin \ell\varphi \; d\varphi$ et en intégrant entre 0 et 2π, on aboutit à une équation en $B_\ell(r)$ similaire à celle obtenue en $A_\ell(r)$:

$$B_\ell(r) = \beta_\ell r^\ell + \beta'_\ell r^{-\ell}$$

La solution à $\Delta\Psi = 0$ est donc du type :

$$\Psi = \left(\alpha_0 \log r + \alpha'_0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k r^k + \alpha'_k r^{-k}\right) \cos k\varphi$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_k r^k + \beta'_k r^{-k}\right) \sin k\varphi$$

ANNEXE 7 - 1/2 -

RECHERCHE DES RACINES DE $F^{\Psi}(\lambda)$

$$F^{\Psi}(\lambda) = \lambda^3 \left\{ \frac{8n}{\pi \lambda r_a} + \lambda r_a^{-n} \left(Y_{n+1}(\lambda) J_{n-1}(\lambda r_a) - J_{n+1}(\lambda) Y_{n-1}(\lambda r_a) \right) \right.$$
$$\left. + \lambda r_a^{n} \left(Y_{n+1}(\lambda r_a) J_{n-1}(\lambda) - J_{n+1}(\lambda r_a) Y_{n-1}(\lambda) \right) \right\}$$

En remplaçant J_n et Y_n par leurs expressions asymptotiques, $F^{\Psi}(\lambda)$ devient :

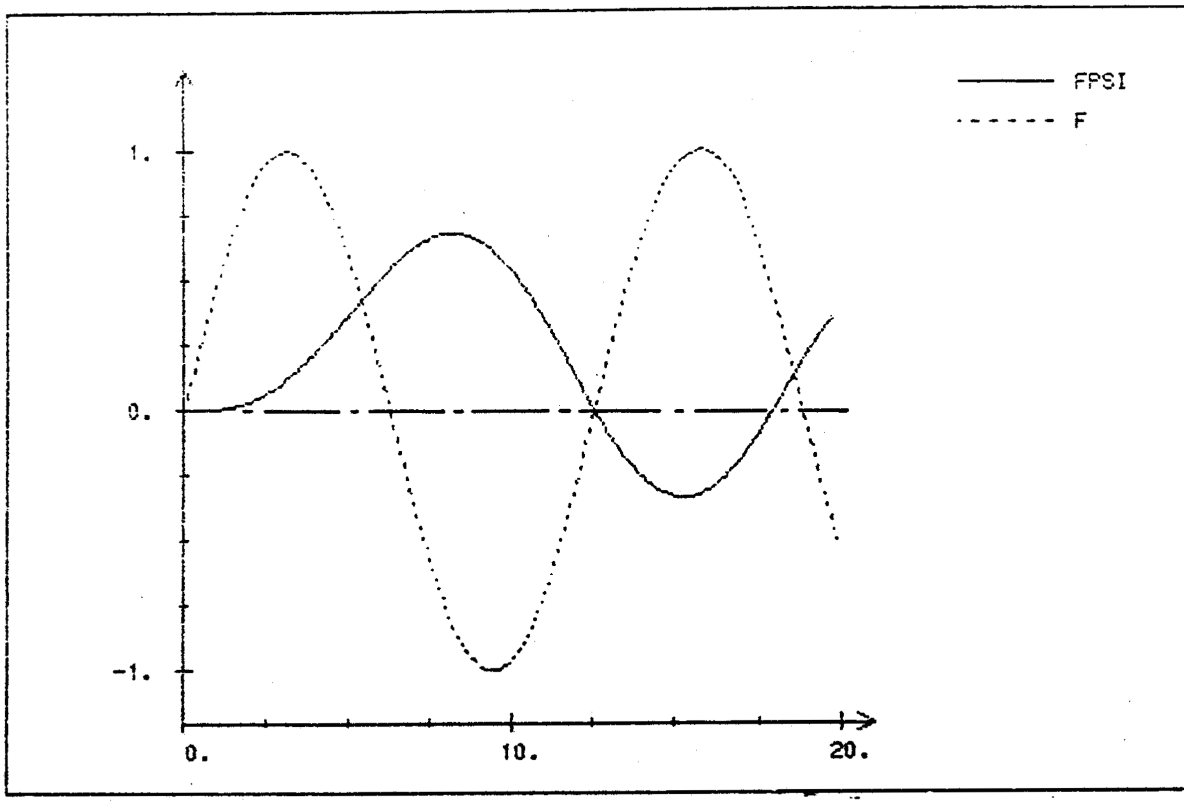
$$F^{\Psi}(\lambda) \longrightarrow \frac{8n}{\lambda \pi r_a} - \frac{2}{\pi \sqrt{r_a}} \left(r_a^{n} - r_a^{-n} \right) . \sin(\lambda r_a - \lambda)$$

$$F^{\Psi}(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} - \frac{2}{\pi \sqrt{r_a}} \left(r_a^{n} - r_a^{-n} \right) \sin(\lambda r_a - \lambda)$$

Les racines à l'infini sont du type :

$$\lambda = \frac{k \pi}{r_a - 1}$$

La figure ci-après représente la fonction F^{ψ} et la fonction $F = \sin\left(\lambda\left(r_a - 1\right)\right)$ pour n = 1 et r_a = 1.5.



On constate que les racines des deux fonctions sont très proches. On peut donc utiliser comme pour la recherche des racines de $F_T(\lambda)$, la méthode de la sécante en adoptant les bornes :

$$\lambda_{ka} = \frac{\pi}{r_a - 1}\left[k - 0{,}2\right]$$

$$\lambda_{kb} = \frac{\pi}{r_a - 1}\left[k + 0{,}2\right]$$

avec en plus une sécurité pour les premières valeurs de k car la première racine de $F_{\psi}(\lambda)$ correspond dans le cas de la figure à k = 2.

Orthogonalité des fonctions Solutions en Ψ_r

Reprenons le problème

$$\mathcal{D}_n \left(\mathcal{D}_n \Psi_{rk} \right) = - \lambda_k^2 \mathcal{D}_n \Psi_r \qquad \text{(A.8.1)}$$

avec

$$\left.\begin{array}{ll} \Psi_r = 0 & \text{(A.8.2)} \\ \dfrac{d\Psi_r}{dr} = 0 & \text{(A.8.3)} \end{array}\right\} \quad \text{en } r = 1 \text{ et } r = r_a$$

On montre que si f est une fonction définie et continue dans l'intervalle 1 et r_a et que si y satisfait les conditions aux limites (A.8.2) et (A.8.3) que :

$$\int_1^{r_a} r.y \left(\mathcal{D}_n f \right) dr = \int_1^{r_a} r f \left(\mathcal{D}_n y \right) dr \qquad \text{(A.8.4)}$$

Soient Ψ_{rm} et $\Psi_{r\ell}$ deux solutions différentes au problème correspondant à λ_m et λ_ℓ . Elles satisfont l'équation différentielle (A.8.1) et les conditions aux limites (A.8.2) et (A.8.3).

Donc :

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{D}_n \Psi_{rm}) = -\lambda_m^2 (\mathcal{D}_n \Psi_{rm}) \qquad (A.8.5)$$

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{D}_n \Psi_{r\ell}) = -\lambda_\ell^2 (\mathcal{D}_n \Psi_{r\ell}) \qquad (A.8.6)$$

En multipliant la première de ces équations par $r\,\Psi_{r\ell}$ et la deuxième par $r.\Psi_{rm}$ et en intégrant entre 1 et r_a, on obtient:

$$\int_1^{ra} r.\mathcal{D}_n(\mathcal{D}_n \Psi_{rm})\Psi_{r\ell}\,dr = -\lambda_m^2 \int_1^{ra} r(\mathcal{D}_n \Psi_{rm})\Psi_{r\ell}\,dr \qquad (A.8.7)$$

$$\int_1^{ra} r\,\mathcal{D}_n(\mathcal{D}_n \Psi_{r\ell})\Psi_{rm}\,dr = -\lambda_\ell^2 \int_1^{ra} r\,(\mathcal{D}_m \Psi_{r\ell})\Psi_{rm}\,dr \qquad (A.8.8)$$

En utilisant l'équation (A.8.4)
avec $y = \Psi_{r\ell}$ et $f = \mathcal{D}_n \Psi_{rm}$
on trouve

$$\int_1^{ra} r\,\Psi_{r\ell}\,\mathcal{D}_n(\mathcal{D}_n \Psi_{rm})\,dr = \int_1^{ra} r\,(\mathcal{D}_n \Psi_{rm})(\mathcal{D}_n \Psi_{r\ell})\,dr \qquad (A.8.9)$$

et avec $y = \Psi_{rm}$ et $f = \mathcal{D}_n \Psi_{r\ell}$
on trouve

$$\int_1^{ra} r\, \Psi_{rm}\, \mathcal{D}_n \left(\mathcal{D}_n \Psi_{r\ell} \right) dr = \int_1^{ra} r \left(\mathcal{D}_n \Psi_{r\ell} \right) \left(\mathcal{D}_n \Psi_{rm} \right) dr \qquad \text{(A.8.10)}$$

En combinant les équations (A.8.7) et (A.8.10), on obtient :

$$-\lambda_m^2 \int_1^{ra} r \left(\mathcal{D}_m \Psi_{rm} \right) \Psi_{r\ell}\, dr = -\lambda_\ell^2 \int_1^{ra} r \left(\mathcal{D}_n \Psi_{r\ell} \right) \Psi_{rm}\, dr \qquad \text{(A.8.11)}$$

En utilisant de nouveau l'équation (A.8.4) avec

$y = \Psi_{r\ell}$ et $f = \Psi_{rm}$

$$\int_1^{ra} r \left(\mathcal{D}_n \Psi_{rm} \right) \Psi_{r\ell}\, dr = \int_1^{ra} r\, \Psi_{rm} \left(\mathcal{D}_n \Psi_{r\ell} \right) dr$$

et (A.8.11) devient

$$\left(\lambda_\ell^2 - \lambda_m^2 \right) \int_1^{ra} r\, \Psi_{rm} \left(\mathcal{D}_n \Psi_{r\ell} \right) dr = 0$$

Comme $\lambda_\ell \neq \lambda_m$

On a :

$$\int_1^{ra} r\, \Psi_{1m} \left(\mathcal{D}_m \Psi_{r\ell} \right) dr = 0$$

ANNEXE 9 - 1/3 -

RECHERCHE DE SOLUTIONS PARTICULIERES A :

$$\Delta\Psi = \sin n\varphi \; I_n(\lambda r)$$

$$\cos n\varphi \; I_n(\lambda r)$$

$$\sin n\varphi \; K_n(\lambda r)$$

$$\cos n\varphi \; K_n(\lambda r)$$

1/ $\underline{\Delta\Psi = \sin n\varphi \; I_n(\lambda r)}$

Supposons une solution du type :

$$\Psi = \alpha \sin n\varphi \; I_n(\lambda r)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \alpha \sin n\varphi \left[\lambda \, I_{n+1}(\lambda r) + \frac{n}{r} I_n(\lambda r) \right]$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} = \alpha \sin n\varphi \left[\left(\lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{n}{r^2} \right) I_n(\lambda r) - \frac{\lambda}{r} I_{n+1}(\lambda r) \right]$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} = -n^2 \alpha \sin n\varphi \; I_n(\lambda r)$$

$$\Delta\Psi = \lambda^2 \alpha \sin n\varphi \; I_n(\lambda r)$$

Solution particulière à $\Delta\Psi = \sin n\varphi \; I_n(\lambda r)$:

$$\Psi = \frac{\sin n\varphi \; I_n(\lambda r)}{\lambda^2}$$

2/ $\underline{\Delta\Psi = \cos n\varphi \; I_n(\lambda r)}$

On montre de la même manière que pour le cas précédent que $\Psi = \dfrac{\cos n\varphi \; I_n(\lambda r)}{\lambda^2}$ est solution

3/ $\underline{\Delta\Psi = \sin n\varphi \quad K_n(\lambda r)}$

Supposons une solution du type :

$$\Psi = \alpha \sin n\varphi \; K_n(\lambda r)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \alpha \sin n\varphi \left[-\lambda K_{n+1}(\lambda r) + \frac{n}{r} K_n(\lambda r) \right]$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} = \alpha \sin n\varphi \left[\left(\lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{n}{r^2} \right) K_n(\lambda r) + K_{n+1}(\lambda r) \cdot \frac{\lambda}{r} \right]$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} = -\alpha n^2 \sin n\varphi \; K_n(\lambda r)$$

$$\Delta\Psi = \alpha \lambda^2 \sin n\varphi \; K_n(\lambda r)$$

Solution particulière à $\Delta\Psi = \sin n\varphi \; K_n(\lambda r)$

$$\Psi = \frac{\sin n\varphi \; K_n(\lambda r)}{\lambda^2}$$

4/ $\underline{\Delta\Psi = \cos n\varphi \;\; K_n(\lambda r)}$

On montre de la même manière que $\Psi = \dfrac{\cos n\varphi \;\; K_n(\lambda r)}{\lambda^2}$

est solution particulière.

EVALUATION DU NOMBRE DE TERMES DES SERIES NECESSAIRES POUR LE CALCUL DE LA TEMPERATURE ET DES VITESSES.

A 10-1 Température

Nous avons tracé les courbes $A_m \; C_o^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\; r)$ en fonction de m afin de pouvoir estimer le nombre de termes nécessaires. Vous trouverez sur la figure A.10-1 les courbes pour Pr = 78.4 (soufre) et r_a = 1,3, pour les valeurs de rayon de 1.05 , 1.15 et 1.25.

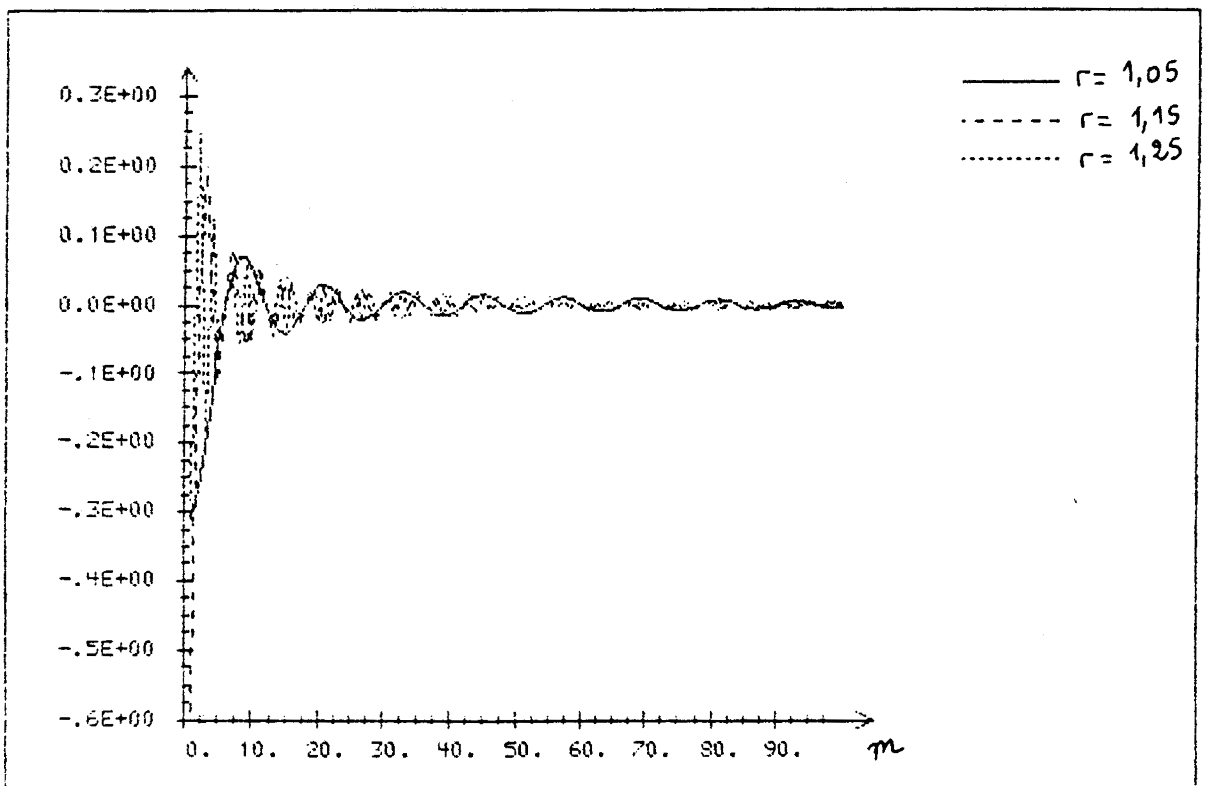


Figure A.10-1 Tracé de $A_m \; C_o^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\; r)$ en fonction de m pour t = 10.

SOUFRE r_a = 1,3

Nous avons constaté que ces courbes étaient contenues dans deux courbes enveloppes type hyperboles. Nous avons également constaté qu'elles étaient indépendantes du type de produit (après calculs).

La précision obtenue est de :

$5\ 10^{-3}$ pour 300 termes
$2\ 10^{-3}$ pour 500 termes

Les termes $A_m \ C_o^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r)\, e^{-\lambda_m^{T2} t}$ intervenant dans l'expression (5.1.1-29) sont majorés par $A_m \ C_o^T(\lambda_m^T \sqrt{P_r}\, r)$. Aussi si nous nous fixons une précision de 2.10^{-3}, donc un nombre de termes de 500 au temps t = 0, cette précision est automatiquement obtenue pour des temps plus grands.

A.10-2 Vitesse

Nous avons tracé les courbes $\partial \Psi_n / \partial r$ et $\partial \Psi_n / \partial \varphi$ pour le soufre pour r_a = 1,3 pour r = 1,05 et r = 1,15 pour t = 10. et pour t = 0.01, temps minimum utilisé pour ce produit.

Les figures A.10-2 à A.10-5 montrent qu'on obtient une bonne convergence pour n = 60

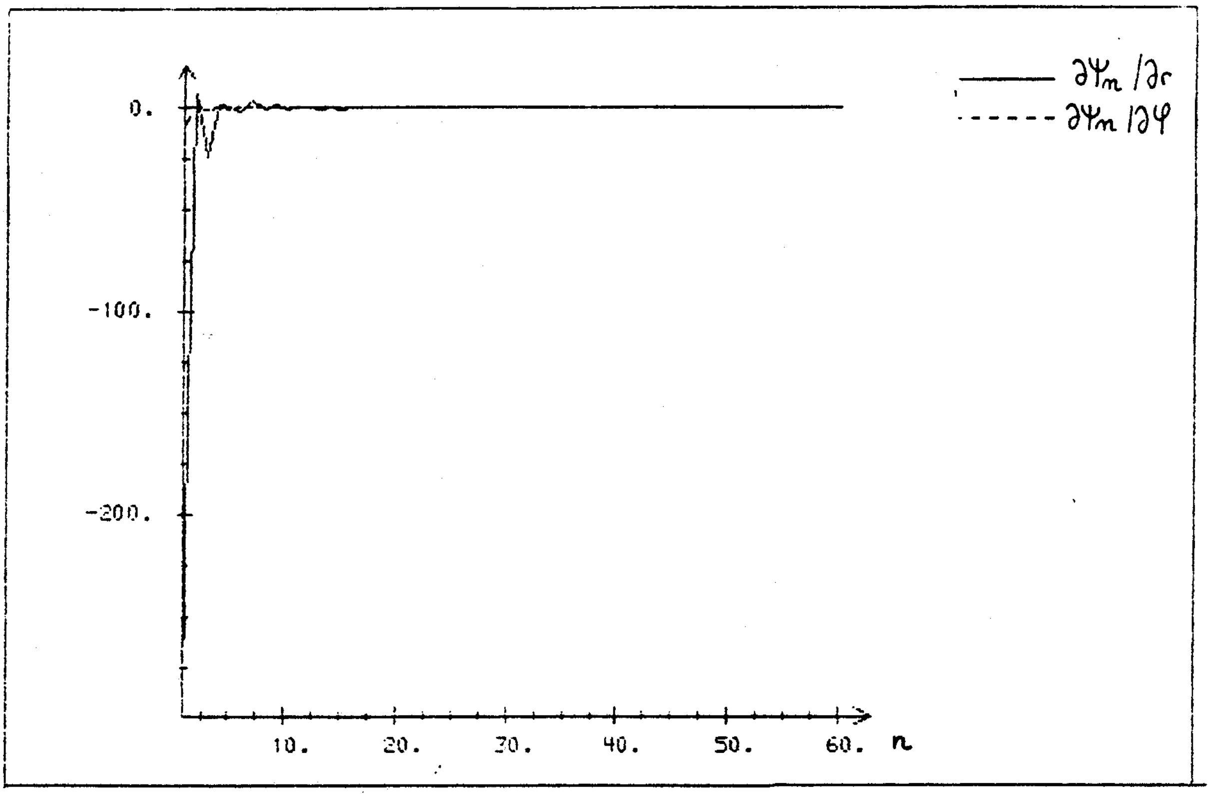


Figure A.10-2 Tracé de $\partial\Psi_n/\partial r$ et $\partial\Psi_n/\partial\varphi$ en fonction de n pour $t = 10$.
SOUFRE $r = 1,05$ $r_a = 1,3$

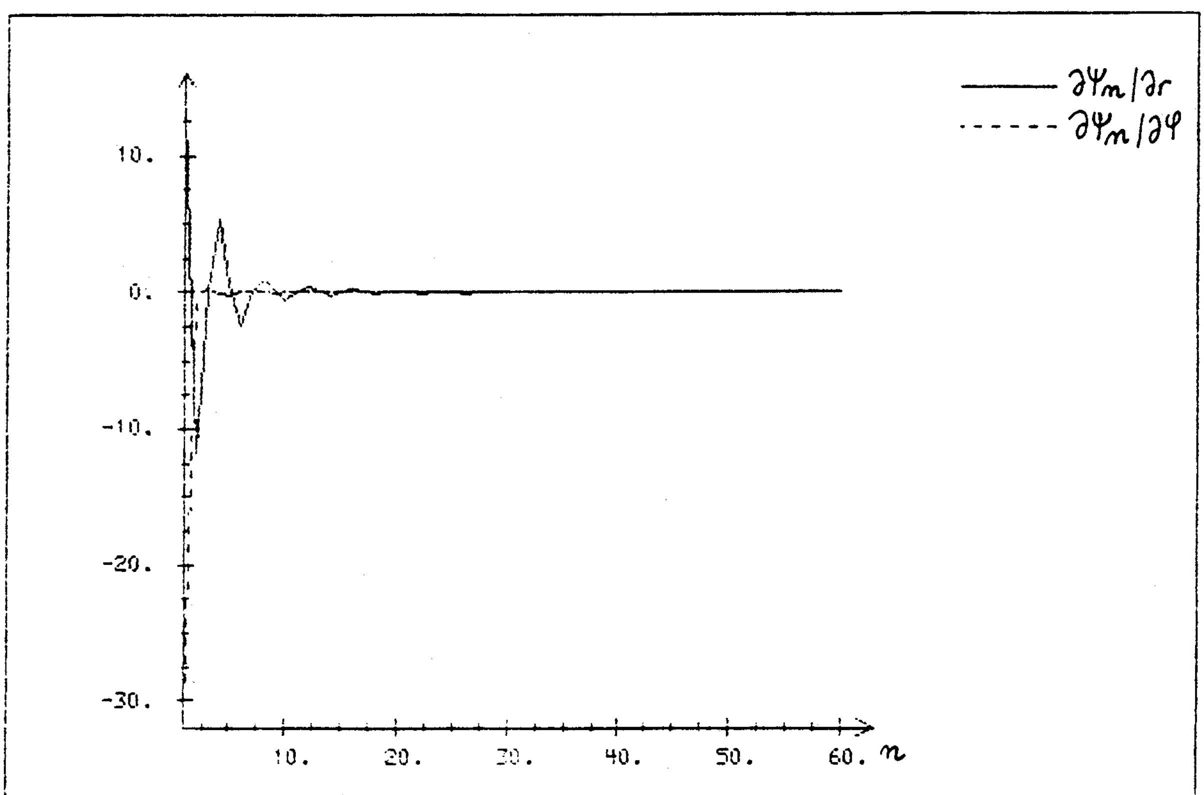


Figure A.10-3 Tracé de $\partial\Psi_n/\partial r$ et $\partial\Psi_n/\partial\varphi$ en fonction de n pour $t = 10$.
SOUFRE $r = 1,15$ $r_a = 1,3$

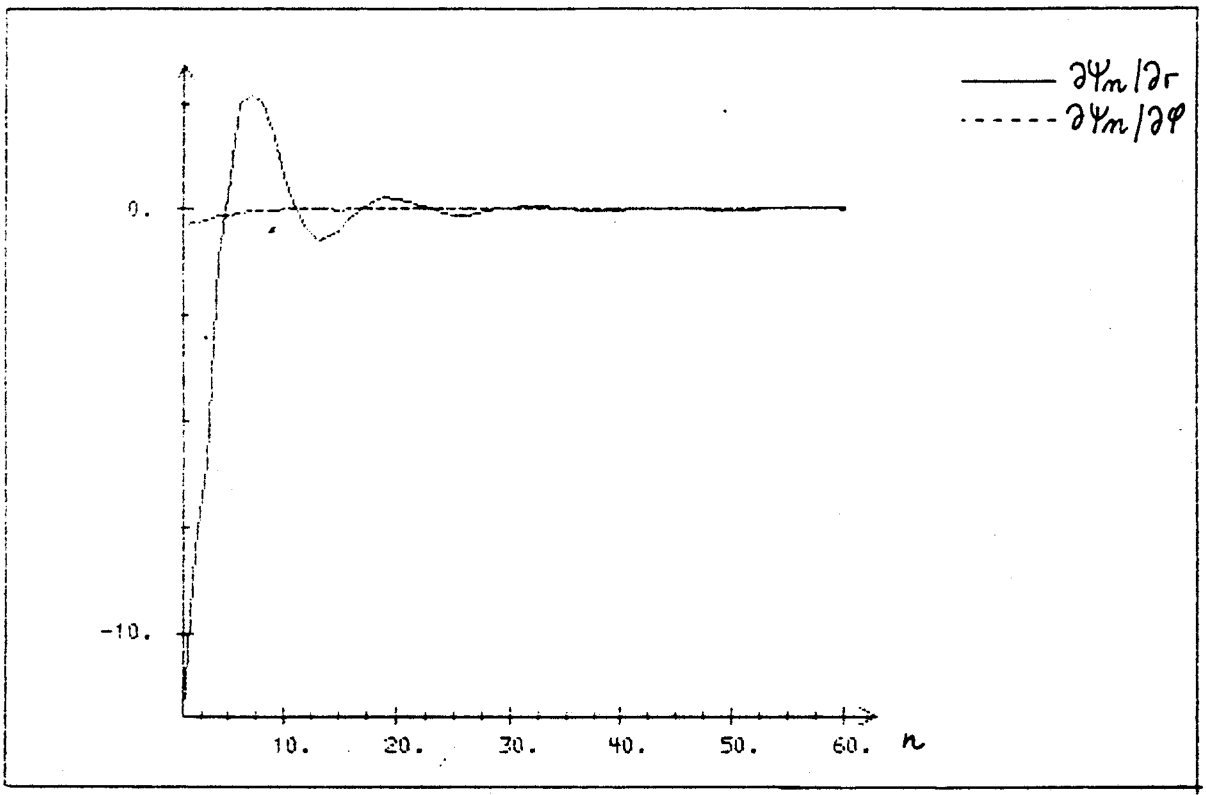


Figure A.10-4 Tracé de $\partial\Psi_n/\partial r$ et $\partial\Psi_n/\partial\varphi$ en fonction de n pour t = 0.01
SOUFRE r = 1,05 r_a = 1,3

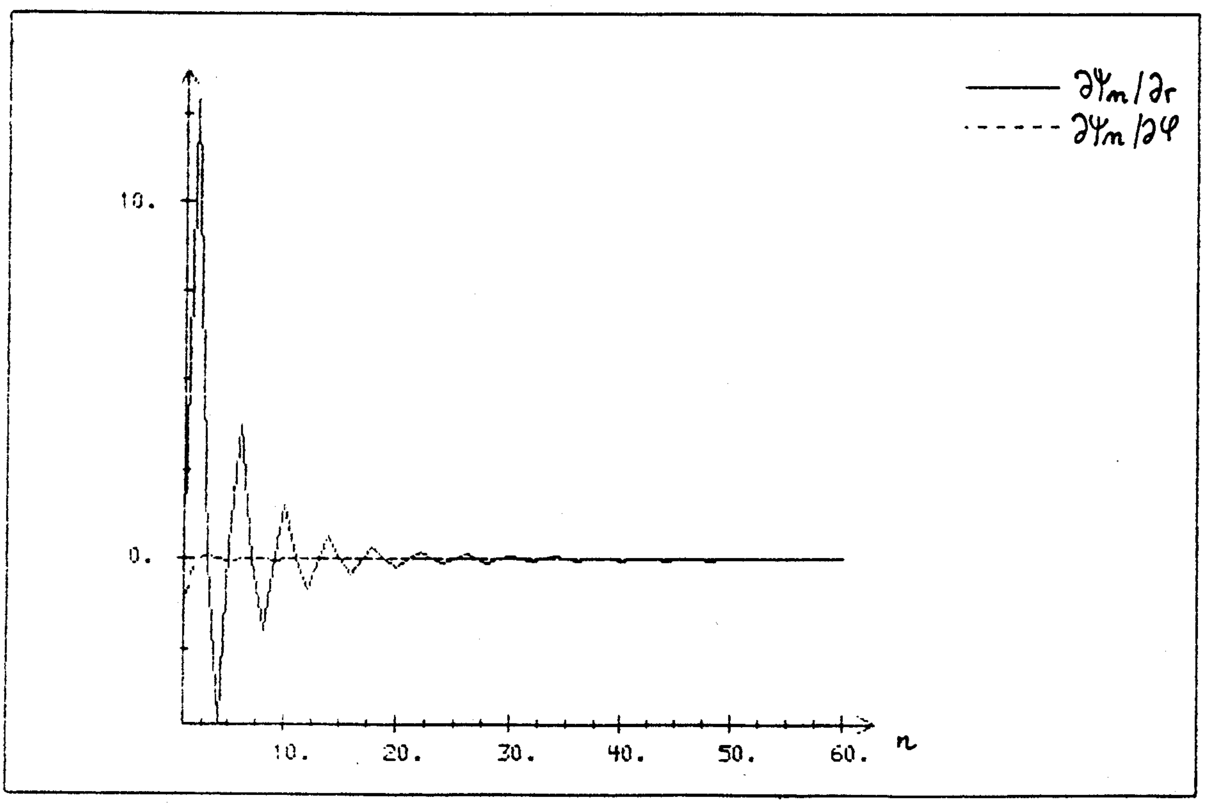


Figure A.10-5 Tracé de $\partial\Psi_n/\partial r$ et $\partial\Psi_n/\partial\varphi$ en fonction de n pour t = 0.01
SOUFRE r = 1,15 r_a = 1,3

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] **J.P. BARRAND, A.C. BAYEUL, G. CARETTE,**
Optimisation du réchauffage des produits transportés par wagon-citerne.
Rapport AFME- Lille 26 Juin 1987.

[2] **PAPROCKI, SACCO,**
Mise au point expérimentale sur la convection naturelle.
Rapport de projet lourd - Lille 1986.

[3] **D. DELAUNAY,**
Etude du couplage convection naturelle. Conduction avec changement de phase. Application au stockage périodique de l'énergie.
Thèse de doctorat d'état présentée à l'Université de Nantes-UER de physique - 29 Mars 1985.

[4] **D. GOBIN,**
Changement d'état solide-liquide : Evolution temporelle du couplage entre la convection naturelle dans la phase liquide et la conduction dans la phase solide. Etude numérique et expérimentale.
Thèse d'état. Université PARIS VI-Juin 1984.

[5] **A.G. BATHELT, R. VISKANTA,**
An experimental investigation of natural convection in the melt region around a heated horizontal cylinder.
J. Fluid Mech, vol 90 part 2, pp 227-239.

[6] **R.M. ABDEL-WAHED, J.W. RAMSEY, E.M. SPARROW,**
Photographic study of melting about an embedded horizontal heating cylinder.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 22, 1979, pp 171-173.

[7] **C.J. HO, R. VISKANTA,**
Heat transfer during inward melting in a horizontal tube.
Int. J. Heat Mass transfer, vol 27, n°5, 1984, pp 705-716.

[8] **H. RIEGER, H. BEER,**
The influence of density anomaly of water on the melting process of ice inside a horizontal cylinder.
ASME 84 HT 10.

[9] **M. BAREISS, H. BEER,**
Experimental investigation of melting heat transfer with regard to different geometrie arrangements.
Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol 11, 1984, pp 323-333.

[10] **A.G. BATHELT,**
Experimental study of heat transfer during solid-liquid phase change around a horizontal heat source/sink.
ph.D. Thesis, Purdue University, School of Mechanical Engineering, West Lafayette, Indiana (1979).

[11] **D. DELAUNAY, D. GOBIN,**
Couplage convection naturelle/conduction avec changements de phase-aspects fondamentaux.
SFT. Journée d'études sur les phénomènes de conduction-convection couplés avec changement de phase. Application aux accumulateurs de chaleur. Paris. 11 Décembre 1985.

[12] **M. OKADA,**
Analysis of heat transfer during melting from a vertical wall.
Int. J. Heat Mass Transfer, vol 27, n° 11, pp 2057 à 2066, 1984.

[13] **A.C. PINHO BRASIL J.R., P.R. SOUZA MENDES,**
Outward melting from a vertical cylinder with natural convection effects.
ASME, 85, WA/HT5.

[14] **D. DELAUNAY, J.P. BARDON,**
Méthode de mesure du coefficient de transfert local par convection à l'aide d'une technique ultra-sonore.
ATP 25250 pp 35 à 42.

[15] **J.P. BARDON, E. VRIGNAUD, D. DELAUNAY,**
Etude expérimentale de la fusion et de la solidification périodique d'une plaque de paraffine.
Revue générale de thermique. N° 212-213 - Août-Septembre 1979, pp 501 à 510.

[16] **E.M. SPARROW, R.R. SCHMIDT, J.W. RAMSEY,**
Experiments on the roles of natural convection in the melting of solids.
Journal of Heat Transfer, février 1978, vol 100, pp 11 à 16.

[17] **B.W. WEBB, R. VISKANTA,**
Natural convection dominated melting heat transfer in an inclined rectangular enclosure.
International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 29 n° 2, pp 183 à 192, 1986.

[18] **J. PRUSA, L.S. YAO,**
Effects of density change and subcooling on the melting around a horizontal heated cylinder.
J. Fluid Mech, 1985, vol 155, pp 193-212.

[19] **L.S. YAO, F.F CHEN,**
Effects of natural convection in the melting region around a heated horizontal cylinder.
Journal of Heat Transfer, vol 102. Novembre 1980, pp 667 à 672.

[20] **H.RIEGER, U. PROJAHN, H. BEER,**
Analysis of the heat transport mechanisms during melting around a horizontal circular cylinder.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 25, n°1, 1982, pp 137-147.

[21] **L.S. YAO, W. CHERNEY,**
Transient phase around a horizontal cylinder.
Int J. Heat Mass Transfer, Vol 24, n° 12, 1981, pp 1971-1981.

[22] **A.G. BATHELT, R. VISKANTA,**
Heat Transfer at the solid-liquid interface during melting from a horizontal cylinder.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 23, 1980, pp 1493-1503.

[23] **T. SAITOH, K. HIROSE,**
Thermal Instability of natural convection flow-over a horizontal ice cylinder encompassing a maximum density point.
Journal of Heat Transfer, vol 102, mai 1980, oo 261-267.

[24] **L. CHEN CHIEN,**
Modified differential quadrature method for numerical solution on heat transfer from an impulsively started circular cylinder, Numerical methods in thermal problems.
Proceedings of the fluid international conference held in Seattle USA, Août 1983, pp 440-450.

[25] **J. PANNU, G. JOGLEKAR, P.A. RICE,**
Natural convection heat transfer to cylinders of phase change material used for thermal storage, AICHE Symposium Series, Fundamentals and application of solar energy, N° 198, vol 76, 1980, pp 47 à 55.

[26] **M. BAREISS, H. BEER,**
An analytical solution of the heat transfer process during, melting of an unfixed solid phase change material inside a horizontal tube.
Int. J. Heat Mass Transfer, vol 27 , n° 5, 1984, pp 739-746.

[27] **A. GADGIL, D. GOBIN,**
Analysis of two dimensionnal melting in rectangular enclosures in presence of convection.
ASME, Journal of Heat Transfer, Vol 106, Février 1984, pp 20 à 26.

[28] **D. GOBIN, A. GADGIL,**
Contribution de la convection naturelle au transfert de chaleur dans un matériau en fusion.
Revue générale de thermique, n° 254, Février 1983, pp 137-142.

[29] **C. BENARD, F. MARTINEZ, D. GOBIN, A. ZANOLI, Y. BODY,**
Evolution temporelle du couplage entre convection naturelle et changement d'état dans la cavité liquide d'un matériau en fusion.
C.R. Académie des sciences, Paris, t. 298, Série II, n° 18, 1984, pp 771 à 774.

[30] **C. BENARD, D. GOBIN,**
Solution du problème de Stefan en présence de convection naturelle dans le liquide, en géométrie rectangulaire bidimensionnelle.
C.R. Académie des sciences, Paris, t 300, série II, n° 2, 1985, pp 55 à 58.

[31] **G. GAU, R. VISKANTA,**
Melting and solidification of a metal system in a rectangular cavity.
Int. J. Heat and Mass Transfer, vol 27, n° 1, 1984, pp 113-123.

[32] **P.G. KROEGER, S. OSTRACH,**
The solution of a two-bidimensionnal freezing problem including convection effects in the liquid region.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 17, pp 1191 à 1207, 1974.

[33] **JAISUK YOO, B. RUBINSKY,**
A finite element method for the study of solidification processes in the presence of natural convection.
International Journal for numerical methods in engineering, vol 23, pp 1785-1805, 1986.

[34] **G.P. MERKER, L.G. LEAL,**
Natural convection in a shallow annular cavity.
International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 23, pp 677-686, 1980.

[35] **D.E. CORMACK, G.P. STONE, L.G. LEAL,**
The effect of upper surface conditions on convection in a shallow cavity with differentially heated end-walls.
International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol 18, pp 635-648, 1975.

[36] **T.H. KUEHN, R.J. GOLDSTEIN,**
Numerical solutions of the Navier-Stokes equations for laminar natural convection about a horizontal isothermal circular cylinder.
International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol 23, pp 971-979, 1980.

[37] **P. J. BURNS, C.L. TIEN,**
Natural convection in porous Media bounded by concentric spheres and horizontal cylinders.
International of Heat and Mass Transfer, Vol 22, pp 929-939, 1979.

[38] **MOJTABI, J.P. CALTAGIRONE,**
Etude de la stabilité d'un écoulement de convection naturelle dans un espace annulaire horizontal.
Journal de Mécanique, Vol 18, n° 2, 1979.

[39] **D.E. CORMACK, L.G. LEAL, J. IMBERGER,**
Natural convection in a shallow cavity with differentially heated and walls.
Part 1 : Asymptotic theory p 209-229
Part 2 : Numerical solutions p 231-246
Part 3 : Experimental results p 247-260.
Journal of fluid Mechanics p 209-229.

[40] **P. GERMAIN,**
Mécanique des Milieux Continus.
Ed Masson - 1962.

[41] **G.E MYERS,**
Analytical methods in conduction heat transfer.
Mc Graw-Hill book company- 1971.

[42] **S. COLOMBO,**
Fonctions spéciales.
Techniques de l'ingénieur. Fiche A 153, 1971.

BIBLIOGRAPHIE

B. BRENIER, B. ROUX, P. BONTOUX,
Comparaison des méthodes de Tau-Chebyshev et Galerkin dans l'étude de stabilité des mouvements de convection naturelle.
Problème des valeurs propres. Journal de Mécanique théorique et appliquée. Vol 5 n°1, 1986, p 95 à 119.

H.S. CARSLAW, J.C. JAEGER,
Conduction of heat in solids clarendon Press-Oxford.

S. CHANDRASEKHAR,
Hydrodynamic and hydromagnetic stability.
Dover publications Inc New York.

A.J. DALHUIJSEN, A. SEGAL,
Comparison of finite element techniques for solidification problems.
International Journal for numerical methods in engineering, vol 23, pp 1807-1829 1986.

J.L. DUDA, H.F. MALONE, R.H. NOTTER,
Analysis of two dimensionnal diffusion controlled moving boundary problems.
International Journal Heat Transfer, Vol 18, pp 901 à 910, 1975.

K. KATAYAMA, A. SAITO, Y. UTAKA,
Heat Transfer characteristics of the latent heat thermal energy storage capsule.
Solar Energy, vol 27 n°2, pp 91 à 97, 1981.

R. KRISHNAMURTHY, B. GEBHART,
Mixed convection from a horizontal line source of heat International Journal of heat and Mass Transfer, vol 29 n° 2, pp 344 à 347, 1986.

T.H. KUEHN, R.J. GOLSTEIN,
Correlating equations for natural convection heat transfer between horizontal cylinders, International Journal Heat Mass Transfer, vol 19, 1979, pp 1127-1134.

S. NAKAI et T. OKAZAKI,
Heat Transfer from a horizontal circular wire at small Reynolds and Goshof numbers pure convection.
International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol 18, pp 387-396, 1975.

J.M. NELSEN, R.W. DOUGLASS,
On partial spectral expansion with natural convection in spherical annules enclosures as an example.
Numerical Heat Transfer, Vol 6, pp 67-84, 1983.

P. PALIER,
Accumulateur à chaleur latente de fusion couplée à un générateur de vapeur.
SFT, Journée d'étude sur les phénomènes de conduction-Convection couplés avec changement de phase. Application aux accumulateurs de chaleur. Paris, 11 Décembre 1985.

NOTATIONS

Les variables dimensionnelles sont surlignées d'une barre. On utilise la même notation non surlignée pour la variable adimensionnelle. Elle n'est donc pas rappelée ici (voir § 32).

$\bar{a}$	: diffusivité thermique (m^2/s)
A_m, A_m^T, A_α	: constantes
$A_{mn}(t)$	: fonction dépendant du temps utilisé dans la méthode de variation des paramètres.
B_m, B_n, B'_n, B_α	: constantes
$B_{mn}(t)$	: fonction dépendant du temps de même type que Amn(t).
C_m, C_α , C_{1mn}, C_{2mn}, C_{3mn}	: constantes
C_n^T , C_n^ω	: combinaison linéaire des fonctions de calcul de Bessel de première et deuxième espèce d'ordre n.
$\bar{C}_p$	: chaleur massique à pression constante (J/kg/K).
$\bar{c}_r$	: composante radiale de la vitesse dans le repère cylindrique (m/s)

$\overline{c}_{\varphi}$	: composante axiale de la vitesse dans le repère cylindrique (m/s)
$\overline{c}_1$	: composante de la vitesse suivant x_1 dans le repère cartésien 0 x1 $^{x}2$ (m/s)
$\overline{c}_2$	: composante de la vitesse suivant x_2 dans le repère cartésien 0 x_1 x_2 (m/s)
D_n, D'_n	: constantes
E_n^{ω}	: combinaison linéaire des fonctions de Bessel modifiées d'ordre n
F_{mn} (r)	: fonction propre en
$F^T(\lambda^T)$	: fonction de λ^T dont les zéros sont les valeurs propres du problème en température.
$F^{\Psi}(\lambda)$	: fonction de λ dont les zéros sont les valeurs propres du problème en fonction du courant.
f_1, f_2	: fonctions
$\overline{g}$	: accélération pesanteur (m/s^2)
G_r	: nombre de Gashof
$\overline{h}$	: coefficient de convection thermique (W/m^2/K)
I_n	: fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre n

J_n	: fonction de Bessel de première espèce d'ordre n
J_1, J_2, J_3, J_4	: notation d'intégrale
k	: constante entière de sommation
K_n	: fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre n
$\overline{Lf}$	: chaleur latente de fusion (J/kg)
L_{ml}	: variable intermédiaire
$\vec{n}$	: vecteur normal à l'interface
N_m	: variable intermédiaire
N_u	: nombre de Nusselt
$\overline{p}$	: pression (P_a)
$\overline{p_g}$	: pression totale (P_a)
P_r	: nombre de Prandtl
$\overline{r}$	: rayon (m)
R_a	: nombre de Rayleigh
r_a	: rayon extérieur adimensionnel de l'enceinte annulaire
$\overline{s}$	: déplacement du front de fusion (m)
Ste	: nombre de Stefan

$\overline{T}$	: température (K)
$\overline{t}$	: temps (s)
$\alpha, \alpha_k, \alpha'_k$	: constantes
β, β_k, β'_k	: constantes
$\overline{\beta}$	: coefficient de dilatibilité (K^{-1})
ε	: critère de perturbation
λ	: coefficient de conductivité thermique (W/m/K)
λ^T, λ_m^T	: valeurs propres du problème en température
λ, λ_{mn}	: valeurs propres du problème fonction de courant
$\overline{\eta}$	: viscosité dynamique (Pl)
$\overline{\nu}$	: viscosité cinématique $\overline{\nu} = \frac{\overline{\eta}}{\overline{\rho}}$ (m^2/s)
$\overline{\rho}$	: masse volumique (kg/m^3)
ψ	: fonction de courant
ω	: troisième composante du rotationnel de la vitesse.

Indices

e	: extérieur
f	: interface
i	: intérieur
l	: liquide
s	: solide
t	: température
r	: rayon
o	: état de référence
φ	: angle

Indices supérieurs :

T	: relatif à la température
*	: rapport entre caractéristiques de liquide et caractéristiques de solide.
*	: champs perturbés.
ω	: relatif à
ψ	: relatif à fonction courant

TABLE DES MATIERES