

50376  
1989  
39



50376  
1989  
39

**T H E S E**

N° d'ordre 311

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE  
FLANDRES-ARTOIS

pour obtenir le grade de

**Docteur en Mécanique**

par

**Antoine LAVIE**

**MODELISATION DU RAYONNEMENT OU DE  
LA DIFFRACTION ACOUSTIQUE  
PAR UNE METHODE MIXTE  
EQUATIONS INTEGRALES-CHAMP NUL**



\*0300159494\*

Soutenue le 12 Janvier 1989 devant la commission d'Examen

Président	M. DYMENT
Rapporteurs	M. DECARPIGNY M. FILIPPI
Examineurs	M. ANCEY M. DEBUS M. QUEVAT M. STUPFEL

*A la Mémoire de mon Père,*

*A ma Mère,*

*A Lydia, Mathilde et Lucien,*

*A ma Famille et à mes Amis.*

Cette thèse a été préparée dans le laboratoire d'Acoustique de

l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord.

Le code équations intégrales **EQI** qui a permis cette étude

a été conçu pour le **GERDSM**

(Groupe d'Etude et de Recherche en Détection Sous Marine).

Son développement a été financé par la **DCAN**

(Direction des Constructions et Armes Navales).

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur A. DYMENT pour avoir largement participé à ma formation universitaire et accepté la Présidence de ce jury.

Je tiens à remercier Monsieur P. FILIPPI d'avoir accepté le rôle de rapporteur et d'avoir jugé ce travail dans une version provisoire.

Je remercie Monsieur R. ANCEY, Chef du Groupe Connaissance du Milieu et Cibles du GERDSM, pour le soutien qu'il apporte à nos activités et pour sa participation au jury.

J'assure à Monsieur J.P. QUEVAT ma reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour sa participation au jury.

Je tiens à exprimer à Monsieur J.C. DEBUS toute ma gratitude pour m'avoir initié aux techniques numériques et ouvert les portes du laboratoire de l'ISEN.

Monsieur J.N. DECARPIGNY a, par ses nombreuses suggestions et sa compétence, contribué grandement à l'élaboration de ce document. Je lui témoigne mon sincère attachement et espère être digne de la confiance qu'il m'accorde.

C'est à Monsieur B. STUFFEL que je dois ma formation aux méthodes utilisées dans ce mémoire. Je lui suis sincèrement reconnaissant de m'avoir fait profiter de sa compétence.

Je remercie l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord pour m'avoir proposé des conditions exceptionnelles de travail.

J'assure de ma reconnaissance tous les membres du laboratoire pour leur disponibilité et leur aide et plus particulièrement Monsieur R. BOSSUT et Monsieur C. GRANGER.

De la société SINAPTEC, je remercie vivement et amicalement Monsieur D. MOREL pour sa participation efficace au développement informatique du code EQI, ainsi que Monsieur K. ANIFRANI pour sa contribution lors du couplage fluide-structure.

## SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	1
-------------------	---

### CHAPITRE I

<u>ANALYSE THEORIQUE DES PROBLEMES DE RAYONNEMENT.....</u>	4
--	---

#### ET DE DIFFRACTION ACOUSTIQUE

I - 1 DESCRIPTION DU PROBLEME A RESOUDRE.....	5
---	---

I - 1.1 <u>Généralités.....</u>	5
---------------------------------	---

I - 1.2 <u>Equations de conservation.....</u>	6
---	---

I - 1.3 <u>Construction de l'équation de Helmholtz.....</u>	8
---	---

I - 2 FORMULATIONS INTEGRALES.....	12
------------------------------------	----

I - 2.1 <u>Fondement théorique.....</u>	12
---	----

I - 2.1.1 <i>Fonctions de Green.....</i>	12
--	----

I - 2.1.2 <i>Forme générale des représentations intégrales.....</i>	14
---	----

I - 2.2 <u>Représentation de Helmholtz extérieure.....</u>	15
--	----

I - 2.3 <u>Autres représentations intégrales.....</u>	19
---	----

I - 2.3.1 <i>Représentation de Helmholtz intérieure.....</i>	19
--	----

I - 2.3.2 <i>Représentation par potentiel de simple couche.....</i>	19
---	----

I - 2.3.3 <i>Représentation par potentiel de double couche.....</i>	20
---	----

I - 2.3.3.1	Approche classique.....	20
I - 2.3.3.2	Formulation variationnelle de Hamdi.....	21
I - 2.3.4	<i>Méthode du potentiel hybride.....</i>	22
I - 2.3.5	<i>Méthode de Burton et Miller.....</i>	23
I - 2.3.6	<i>Cas particulier des structures bafflées.....</i>	23
I - 2.4	<u>Existence des k à problème.....</u>	25
I - 2.4.1	<i>Alternative de Fredholm.....</i>	26
I - 2.4.2	<i>Identification des k à problème.....</i>	27
I - 2.4.2.1	Caractérisation des k à problème.....	27
I - 2.4.2.2	Calcul des k à problème.....	28
I - 3	<b>METHODE DE CHAMP NUL.....</b>	33
I - 3.1	<u>Formalisme.....</u>	33
I - 3.1.1	<i>Rappels.....</i>	33
I - 3.1.2	<i>Etablissement des équations de champ nul.....</i>	34
I - 3.1.3	<i>Cas particulier de la diffraction.....</i>	36
I - 3.2	<u>Méthode de la matrice de transition.....</u>	38
I - 4	<b>TECHNIQUES DE SUPPRESSION DES FREQUENCES IRREGULIERES.....</b>	40
I - 4.1	<u>Méthode de Schenck.....</u>	41
I - 4.2	<u>Méthode de Jones.....</u>	42

I - 5	ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES AUTRES METHODES DE RESOLUTION.....	44
I - 5.1	<u>Méthode des éléments finis</u> .....	44
I - 5.2	<u>Séparation des variables</u> .....	49
I - 5.3	<u>Décomposition de la pression en série de fonctions</u> .....	50
	<u>solutions de l'équation de Helmholtz</u>	
I - 6	CONCLUSION.....	52

## CHAPITRE II

	<u>RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME</u> .....	53
II - 1	ELEMENTS FINIS DE SURFACE.....	54
II - 1.1	<u>Principe</u> .....	54
II - 1.2	<u>Eléments et fonctions d'interpolation utilisés</u> .....	55
II - 1.2.1	<i>Cas du problème tridimensionnel</i> .....	56
II - 1.2.2	<i>Cas du problème à symétrie axiale</i> .....	58
II - 1.3	<u>Représentation de la surface</u> .....	59
II - 1.3.1	<i>Cas du problème tridimensionnel</i> .....	59
II - 1.3.2	<i>Cas du problème à symétrie axiale</i> .....	60
II - 2	TRAITEMENT DE L'EQUATION INTEGRALE DE HELMHOLTZ.....	62
II - 2.1	<u>Discrétisation</u> .....	62
II - 2.2	<u>Calcul des intégrales</u> .....	64
II - 2.2.1	<i>Cas du problème tridimensionnel</i> .....	65

II - 2.2.1.1	Intégrales non diagonales.....	66
II - 2.2.1.2	Intégrales diagonales.....	66
II - 2.2.2	<i>Cas du problème à symétrie axiale.....</i>	69
II - 2.3	<u>Facteur de directivité.....</u>	71
II - 3	TRAITEMENT DES EQUATIONS DE CHAMP NUL.....	72
II - 3.1	<u>Discrétisation.....</u>	72
II - 3.2	<u>Calcul des intégrales.....</u>	75
II - 3.2.1	<i>Paramétrisation de la surface.....</i>	75
II - 3.2.1.1	Cas du problème tridimensionnel.....	75
II - 3.2.1.2	Cas du problème à symétrie axiale.....	76
II - 3.2.2	<i>Description des intégrands.....</i>	77
II - 3.2.2.1	Cas du problème tridimensionnel.....	77
II - 3.2.2.2	Cas du problème à symétrie axiale.....	78
II - 3.3	<u>Limitations numériques.....</u>	78
II - 3.3.1	<i>Technique de renormalisation.....</i>	79
II - 3.3.2	<i>Domaine de validité.....</i>	80
II - 4	COMBINAISON EQUATIONS INTEGRALES-CHAMP NUL.....	82
II - 4.1	<u>Principe de la démarche.....</u>	82
II - 4.2	<u>Coefficients du changement de représentation.....</u>	83

II - 4.2.1	<i>Cas du problème tridimensionnel</i>	83
II - 4.2.2	<i>Cas du problème à symétrie axiale</i>	84
II - 5	<b>COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE</b>	85
II - 5.1	<u>Formulation variationnelle d'un problème de structure</u>	86
II - 5.2	<u>Formulation variationnelle du problème couplé</u>	88
II - 5.3	<u>Couplage éléments finis-équations intégrales</u>	88
II - 5.3.1	<i>Utilisation de la matrice impédance</i>	88
II - 5.3.2	<i>Minimisation de la fonctionnelle et résolution</i>	92
II - 5.3.3	<i>Calcul de l'admittance</i>	93

### **CHAPITRE III**

<u>TESTS DE VALIDATION</u>	94	
III - 1	<b>PROPOS LIMINAIRES</b>	95
III - 2	<b>PROBLEME A SYMETRIE AXIALE</b>	98
III - 2.1	<u>Résolution de problèmes de rayonnement simples</u>	98
III - 2.1.1	<i>Utilisation de la représentation de Helmholtz extérieure</i>	100
III - 2.1.2	<i>Utilisation de la méthode de champ nul</i>	101
III - 2.2	<u>Combinaison équations intégrales-champ nul</u>	111
III - 2.2.1	<i>Suppression des fréquences irrégulières</i>	111
III - 2.2.2	<i>Lien entre le nombre d'équations supplémentaires et la position de l'origine</i>	115

III - 2.3	<u>Conclusion</u> .....	130
III - 3	PROBLEME TRIDIMENSIONNEL.....	133
III - 3.1	<u>Validation du rayonnement</u> .....	133
III - 3.1.1	<i>Modélisation par la représentation de</i> .....	133
	<i>Helmholtz extérieure</i>	
III - 3.1.1.1	Structure cubique.....	134
III - 3.1.1.2	Structure cylindrique.....	137
III - 3.1.2	<i>Modélisation par la méthode de champ nul</i> .....	137
III - 3.1.3	<i>Modélisation par la méthode combinée</i> .....	142
	<i>équations intégrales-champ nul</i>	
III - 3.1.3.1	Introduction.....	142
III - 3.1.3.2	Tests.....	145
III - 3.2	<u>Validation de la diffraction</u> .....	159
III - 3.2.1	<i>Introduction</i> .....	159
III - 3.2.2	<i>Représentation de Helmholtz extérieure</i> .....	160
III - 3.2.3	<i>Méthode de champ nul</i> .....	167
III - 3.2.4	<i>Couplage équations intégrales-champ nul</i> .....	170
III - 3.3	<u>Validation du couplage entre éléments finis</u> .....	172
	<u>et équations intégrales</u>	
III - 3.4	<u>Conclusion</u> .....	177

## CHAPITRE IV

<u>APPLICATIONS</u> .....	180
IV - 1 RAYONNEMENT D'UN PISTON CIRCULAIRE BAFFLE DUR.....	181
IV - 2 RAYONNEMENT HAUTE FREQUENCE D'UN TRANSDUCTEUR ANNULAIRE.....	189
MONTE DANS UN BAFFLE CYLINDRIQUE RIGIDE	
IV - 2.1 <u>Description du problème et de sa modélisation</u> .....	189
IV - 2.2 <u>Résultats et conclusions</u> .....	192
IV - 3 RAYONNEMENT D'UN TRANSDUCTEUR FLEXTENSIONNEL DE CLASSE I.....	203
IV - 3.1 <u>Objectif de cette étude</u> .....	203
IV - 3.2 <u>Modélisation par éléments finis</u> .....	205
IV - 3.3 <u>Modélisation par équations intégrales</u> .....	206
<u>et comparaison des résultats</u>	
IV - 4 RAYONNEMENT D'UN PROJECTEUR UNIDIRECTIONNEL BASSE FREQUENCE....	212
IV - 4.1 <u>Présentation du problème</u> .....	212
IV - 4.2 <u>Modélisation du rayonnement</u> .....	214
IV - 4.3 <u>Analyse des résultats</u> .....	215
IV - 5 MODELISATION D'UN HYDROPHONE CARDIOIDE.....	233
IV - 5.1 <u>Généralités</u> .....	233
IV - 5.2 <u>Nouvelle approche de résolution</u> .....	235
IV - 5.2.1 <i>Définition des termes d'autodiffraction et des...</i>	235
<i>impédances de rayonnement par utilisation des</i>	
<i>équations intégrales</i>	

IV - 5.2.2 Cas particulier de l'hydrophone.....	236
IV - 5.3 <u>Résolution du problème par équations intégrales.....</u>	236
<b>CONCLUSION.....</b>	241
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	243
<b>LEGENDE DES FIGURES.....</b>	254
<b>ANNEXE I</b>	
<u>JUSTIFICATION THEORIQUE DE LA REPRESENTATION INTEGRALE DE HELMHOLTZ.....</u>	261
<b>ANNEXE II</b>	
<u>CALCUL DES INTEGRALES DE HELMHOLTZ.....</u>	264
<b>ANNEXE III</b>	
<u>CALCUL DU FACTEUR DE DIRECTIVITE.....</u>	272

## NOTATIONS

- $a_p^q$  : coefficients de la décomposition en série de la pression,
- [A] : matrice du premier membre du système d'équations intégrales,
- [B] : matrice du second membre du système d'équations intégrales,
- $c_0$  : célérité du son dans le fluide,
- $c_m^l$  : coefficients de la décomposition en série de la pression incidente,
- D : distance  $|\underline{r} - \underline{r}'|$  entre les points  $\underline{r}$  et  $\underline{r}'$ ,
- div : opérateur divergence,
- $d\underline{r}$  : élément de surface des intégrales de champ nul,
- $d\underline{r}'$  : élément de surface des intégrales de Helmholtz,
- EQM : erreur quadratique moyenne,
- $f_0$  : facteur de directivité,
- $\tilde{F}$  : vecteur du second membre du système d'équations de champ nul,
- g : fonction de Green associée à l'espace infini,
- G : fonction de Green soumise aux conditions aux limites,
- grad : opérateur gradient,
- $h_m$  : fonction de Hankel,
- i : nombre complexe de carré -1,
- $j_m$  : fonction de Bessel sphérique de première espèce,

$J_\lambda$  : fonction de Bessel,

$k$  : nombre d'onde,

$k_n$  : nième  $k$  à problème,

$[L]$  : matrice du premier membre du système d'équations de champ nul,

$m,l$  : couple indicateur de l'équation de champ nul,

$M-1$  : degré maximum des équations de champ nul,

$\underline{n}$  : normale au point  $\underline{r}$  à la surface orientée positivement vers l'extérieur,

$\underline{n}'$  : normale au point  $\underline{r}'$  à la surface orientée positivement vers l'extérieur,

$N_i$  : fonction de forme,

$NE$  : nombre d'éléments  $\Gamma_j$  du maillage,

$NEQCN$  : nombre d'équations supplémentaires de champ nul,

$NG$  : nombre de points de Gauss,

$NN$  : nombre de noeuds du maillage,

$NNE$  : nombre de noeuds par élément  $\Gamma_j$ ,

$O,X,Y,Z$  : repère global cartésien,

$p$  : pression,

$p_d$  : pression diffractée,

$p_i$  : pression incidente,

$P,Q$  : paramètres de troncature de la décomposition en série de la pression,

$P_m$  : polynôme de Legendre,

$P_m^1$  : fonction de Legendre,

$r, \theta, \varphi$  : coordonnées sphériques,

$r$  : distance entre l'origine du repère et le point  $\underline{r}$ ,

$r'$  : distance entre l'origine du repère et le point  $\underline{r}'$ ,

$\underline{r}$  : point de calcul,

$\underline{r}'$  : point courant sur la surface,

rot : opérateur rotationnel,

[S] : matrice de changement de représentation des équations de champ nul,

t : variable temps,

$v_n$  : vitesse normale de vibration sur la surface,

x, y, z : coordonnées cartésiennes,

$y_m$  : fonction de Bessel sphérique de seconde espèce,

$Y_m^1$  : harmonique sphérique,

[Z] : matrice impédance,

$\alpha$  : angle solide,

$\alpha_{nq}$  : q-ème racine de la fonction de Bessel sphérique  $j_n$ ,

$\alpha_{\lambda n}$  : n-ème racine de la fonction de Bessel  $J_\lambda$ ,

$\Gamma$  : surface mouillée de la structure,

$\Gamma_j$  : élément du maillage,

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker,

$\Delta$  : opérateur laplacien,

$\varepsilon^{\max}$  : module des erreurs relatives maximales sur le calcul des parties réelle et imaginaire de la pression,

$\varepsilon_I^{\max}$  : erreur relative maximum sur le calcul de la partie imaginaire de la pression,

$\varepsilon_R^{\max}$  : erreur relative maximum sur le calcul de la partie réelle de la pression,

$\xi, \eta$  : coordonnées réduites,

$\lambda$  : longueur d'onde,

$\rho$  : masse volumique du fluide,

$\rho, \varphi, z$  : coordonnées cylindriques,

$\Psi$  : solution du problème de Dirichlet intérieur,

$\Psi_m^1$  : fonction d'onde sphérique divergente,

$\tilde{\Psi}_m^1$  : fonction d'onde sphérique régulière à l'origine,

$\omega$  : pulsation,

$\Omega_f$  : domaine fluide d'extension infinie,

$\Omega_i$  : structure,

$\frac{\partial}{\partial n}$  : dérivée normale au point  $\underline{r}$  à la surface,

$\frac{\partial}{\partial n'}$  : dérivée normale au point  $\underline{r}'$  à la surface.

## INTRODUCTION

Le rayonnement d'une onde acoustique par une structure mécanique ou électromécanique vibrante, de même que la diffraction d'une onde acoustique par une structure élastique, sont deux problèmes essentiels et très actuels, notamment dans les domaines du SONAR, de la discrétion acoustique, et de l'imagerie sous-marine [1-3]. Ces deux problèmes ont reçu très tôt une attention considérable sur le plan théorique. Ainsi, d'une part, des solutions analytiques ou quasi-analytiques ont été apportées pour des géométries simples [4-6], fournissant les bases fondamentales d'une compréhension physique. D'autre part, des théorèmes généraux et des propriétés remarquables étaient démontrés, dans le domaine spécifique de l'Acoustique ou dans celui, voisin mais souvent plus complexe, de l'Electromagnétisme [4,7-9]. Néanmoins, la résolution précise de problèmes concrets, lorsque la structure rayonnante ou diffractante est de forme géométrique complexe ou lorsque son champ de déplacement est lui-même complexe, n'a pu être entreprise qu'après l'avènement de méthodes numériques performantes. Parmi celles-ci, on peut citer la méthode des équations intégrales [4,10-13], la méthode de champ nul ou de la matrice de transition [14,15], la méthode des éléments finis [16-20], les méthodes utilisant le développement de la pression en séries convergentes de fonctions spéciales [4,21-24], les méthodes asymptotiques [25-27] et la théorie géométrique de la diffraction [28-30]. Le choix de l'une de ces approches est évidemment lié à l'application traitée, en particulier aux valeurs respectives de la longueur d'onde et des dimensions de la structure ainsi qu'à l'importance des effets élastiques. Au laboratoire, les premiers travaux de modélisation numérique concernant les transducteurs SONAR ont conduit d'abord à l'exploitation de la méthode des éléments finis et au développement du code ATILA [20,31-37]. Cependant, la nécessité d'étudier l'association de ces transducteurs en antenne, pour préciser notamment les effets d'interaction, a rendu rapidement indispensable le recours au couplage éléments finis-équations intégrales et donc le développement et l'exploitation de codes utilisant les équations intégrales, en symétrie axiale ou à trois dimensions [38-41]. Ce développement qui a, en l'occurrence, ouvert également le domaine de

l'interaction élastoacoustique pour les problèmes de diffraction à basse et moyenne fréquence, constitue le thème de cette thèse.

Les formulations intégrales bénéficient toutes de riches développements mathématiques [4,7,42-44] et s'adaptent à une grande variété de problèmes. Parmi elles, la représentation de Helmholtz extérieure est remarquable par sa relative facilité d'emploi et de mise en oeuvre et ses multiples exemples d'applications [10,45-55]. Toutefois, l'existence de fréquences irrégulières, pour lesquelles existe une infinité de solutions, constitue son défaut majeur. Deux techniques classiques de surdétermination peuvent assurer alors l'unicité de la solution : la méthode de Schenck [10] et la méthode de Jones [56]. La première est couramment employée [10,52-54] mais son bon fonctionnement est subordonné, dans la plupart des cas, à un choix judicieux du nombre et de la position de points spécifiques, intérieurs à la structure, choix qui devient de plus en plus hasardeux quand la fréquence augmente. Par contre, la seconde fournit une condition suffisante pour supprimer toute fréquence irrégulière considérée et, en théorie, n'est pas limitée par la valeur de la fréquence. A cet égard, la méthode de Jones paraît être une solution séduisante au problème mais, paradoxalement et à notre connaissance, aucun auteur ne s'est penché sur son application. Cette thèse est axée sur la modélisation du rayonnement ou de la diffraction acoustique par la représentation de Helmholtz extérieure, surdéterminée, si nécessaire, par des équations de champ nul, c'est-à-dire la méthode de Jones. Dans le cas du rayonnement, la vitesse vibratoire sur la surface de l'émetteur est supposée connue (condition de Neumann). Dans le cas d'un problème de diffraction, l'onde incidente est supposée plane et la surface de l'obstacle parfaitement rigide. La résolution doit alors permettre de déterminer la pression pariétale, la pression en tout point du fluide et la directivité en champ lointain. Dans tous les cas, la discrétisation de la surface du corps est assurée par des éléments isoparamétriques et la pression, la vitesse surfacique et la géométrie de la surface sont approchées par des fonctions de forme à variation quadratique [16]. Par contre, dans les équations de champ nul, la variable pression est décomposée en série convergente de fonctions formant un système complet.

Globalement, l'approche théorique retenue a été développée par B. STUPFEL [39,40] dans le cas de problèmes admettant la symétrie axiale, problèmes pour lesquelles des critères de convergence ont été établis et testés. L'apport concret de notre travail a été double. Il a, d'une part,

concerné le développement d'un code reposant sur la même approche mais permettant d'aborder les problèmes tridimensionnels, du fait de la géométrie de la structure ou de la direction d'incidence de l'onde dans le cas de la diffraction. Il a, parallèlement, comporté une validation détaillée de l'ensemble, soit par les tests classiques de sources ponctuelles, soit par comparaison à des résultats antérieurs, analytiques ou non. Suite à cette contribution théorique, plusieurs problèmes pratiques ont été résolus et discutés, notamment le rayonnement d'une antenne cylindrique, le rayonnement d'un transducteur basse fréquence unidirectionnel et l'autodiffraction d'un hydrophone directif. Enfin, le couplage au code éléments finis ATILA a été partiellement développé et testé.

Ce rapport est découpé en quatre chapitres. Le premier contient la formulation théorique des problèmes de rayonnement et de diffraction ainsi que l'exposé des principales méthodes de résolution. Chacune d'entre elles est détaillée, pour étayer le choix de la représentation de Helmholtz extérieure combinée, éventuellement, avec la méthode de champ nul. Après un rappel du principe d'utilisation des éléments de surface, le second chapitre présente la résolution numérique du problème par la méthode choisie et discute le principe du couplage éléments finis-équations intégrales. Le troisième chapitre illustre l'efficacité des deux codes de résolution décrits et mesure leur aptitude à supprimer l'indétermination inhérente à l'existence des fréquences irrégulières. De plus, dans l'hypothèse d'une symétrie de révolution, les deux améliorations apportées par B. STUPFEL à la méthode de Jones [39,40], à savoir la technique de renormalisation des équations de champ nul et le nouveau critère de sélection des équations supplémentaires de champ nul, sont discutées. Le dernier chapitre propose plusieurs applications et la contribution apportée à la résolution de problèmes physiques concrets. Enfin, en conclusion, les principaux résultats obtenus au cours de ce travail de recherche sont rappelés et les extensions futures sont indiquées.

## CHAPITRE I

### ANALYSE THEORIQUE DES PROBLEMES DE RAYONNEMENT ET DE DIFFRACTION ACOUSTIQUE

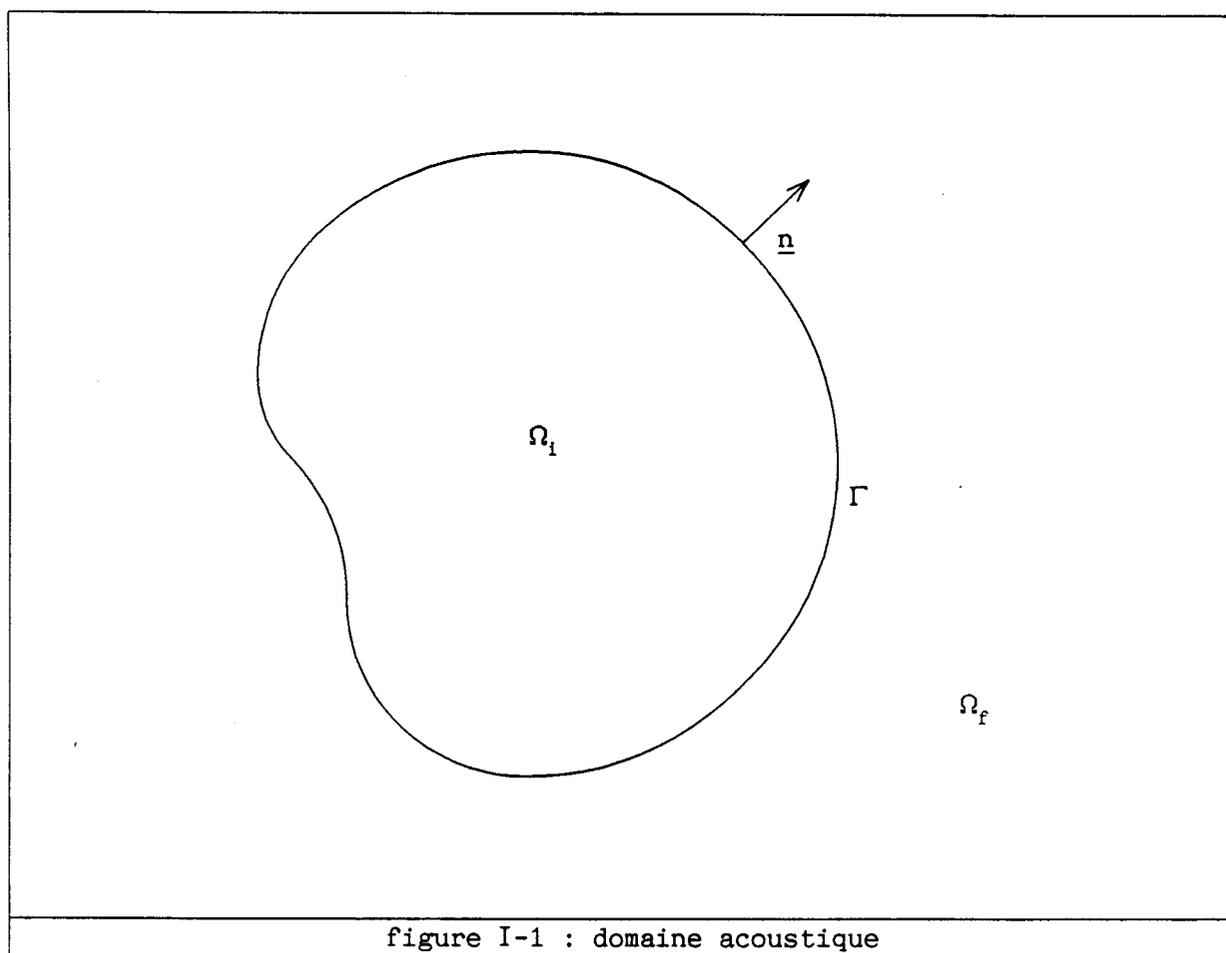
*L'objet de ce chapitre est de présenter la théorie permettant de modéliser le rayonnement ou la diffraction acoustique à partir d'une structure immergée dans un milieu fluide d'extension infini. Dans un premier temps, après l'établissement des équations du problème, nous proposons les différentes formulations intégrales possibles. Ensuite, nous présentons la méthode de champ nul. Nous détaillons ces méthodes et discutons de leur domaine de validité, avec la perspective de leur couplage ultérieur. Ce couplage est abordé dans la partie suivante, dans laquelle nous introduisons les techniques de suppression des fréquences irrégulières et justifions le choix de la méthode de Jones. Pour terminer, nous donnons un aperçu des autres possibilités de modélisation du problème à résoudre.*

## I - 1 DESCRIPTION DU PROBLEME A RESOUDRE

I - 1.1 Généralités

L'Acoustique est une composante de la Physique qui contient l'étude de la dynamique des petites perturbations d'un fluide compressible. Cette étude doit permettre l'analyse de trois phénomènes physiques importants : la propagation d'onde dans le milieu fluide ; le rayonnement et la diffraction dus à la présence d'un corps dans le fluide ; l'absorption et la dispersion des ondes. Le premier phénomène est décrit par l'équation des ondes, le second par l'écriture des conditions aux limites. Le troisième phénomène nécessite l'introduction des théories de la Thermodynamique.

Le domaine concerné est décrit par la figure I-1 :



où  $\Omega_f$  est le domaine fluide,  $\Omega_i$  le corps immergé et  $\Gamma$  sa frontière.

L'établissement des équations du problème s'ordonne selon les étapes suivantes : la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, l'équation d'état du fluide, la linéarisation au premier ordre des variables du problème et les conditions aux limites. Les hypothèses de travail communément admises et posées pour toute l'étude sont :

- . le fluide est idéal,
- . le fluide est barotrope,
- . le fluide est irrotationnel,
- . la vitesse d'écoulement est nulle,
- . la dépendance temporelle des variables est suivant  $e^{-i\omega t}$ .

### I - 1.2 Equations de conservation

Dans ce paragraphe, on reprend quelques notions élémentaires de la Mécanique des Fluides [57]. Les grandeurs physiques qui sont manipulées dépendent de la position du point  $\underline{r}$  dans  $\Gamma \cup \Omega_f$  et de la variable temps  $t$ .

#### - Conservation de la masse :

On considère un volume fluide contenant une source de débit caractérisé par une grandeur  $q$  exprimée par unité de temps. A un instant  $t$ , la masse du domaine fluide est :

$$\iiint_{\Omega_f} \rho \, dV \quad (\text{I-1})$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide. Le principe de conservation de la masse s'applique alors à l'augmentation de la masse du fluide par unité de temps :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_f} \rho \, dV = \iiint_{\Omega_f} \rho \, q \, dV \quad (\text{I-2})$$

En rappelant la définition de la dérivée matérielle d'une intégrale de volume, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega_f} \rho \, dV + \iint_{\Gamma} \rho \, \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\Omega_f} \rho \, q \, dV \quad (\text{I-3})$$

où  $\underline{v}$  est le champ des vitesses et  $\underline{n}$  est la normale en un point de  $\Gamma$  orientée positivement vers le fluide. De plus,  $\rho$  et  $\underline{v}$  étant continus partout dans  $\Omega_f$ , le théorème de Green donne :

$$\int \int_{\Gamma} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \int \int \int_{\Omega_f} \operatorname{div} (\rho \underline{v}) \, dV \quad (\text{I-4})$$

Comme  $\Omega_f$  est quelconque, l'équation locale de la conservation de la masse s'exprime par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{v}) = \rho q \quad \text{dans } \Omega_f \quad (\text{I-5})$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

La quantité de mouvement est :

$$\int \int \int_{\Omega_f} \underline{v} \rho \, dV \quad (\text{I-6})$$

Sachant que le torseur dérivée matérielle de la quantité de mouvement d'un domaine est égal au torseur des forces extérieures qui s'appliquent à ce domaine :

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega_f} \underline{v} \rho \, dV = \int \int \int_{\Omega_f} \underline{F} \rho \, dV + \int \int_{\Gamma} \underline{T} \, dS \quad (\text{I-7})$$

où  $\underline{F}$  est le champ des forces volumiques et  $\underline{T}$  est le champ des forces de contact sur  $\Gamma$ . Le vecteur contrainte  $\underline{T}$  est décomposable ainsi :

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad (\text{I-8})$$

avec  $\underline{\underline{\sigma}}$  le tenseur des contraintes. Le fluide étant idéal, le tenseur des contraintes se simplifie et alors :

$$\underline{T} = - p \underline{n} \quad (\text{I-9})$$

où  $p$  est la pression. Sachant que :

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega_f} \underline{v} \rho \, dV = \int \int \int_{\Omega_f} \frac{d\underline{v}}{dt} \rho \, dV \quad (\text{I-10})$$

et que :

$$\int \int_{\Gamma} p \underline{n} \, dS = \int \int \int_{\Omega_f} \text{grad } p \, dV \quad (\text{I-11})$$

il vient l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{dv}{dt} + \text{grad } p = \rho \underline{F} \quad (\text{I-12})$$

Dans cette équation intervient l'accélération qui peut se mettre sous la forme de l'expression de Helmholtz :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \text{rot } \underline{v} \wedge \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad } \underline{v}^2 \quad (\text{I-13})$$

Donc :

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \text{rot } \underline{v} \wedge \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad } \underline{v}^2 \right) + \text{grad } p = \rho \underline{F} \quad (\text{I-14})$$

Avec l'hypothèse de fluide idéal, la conservation du moment cinétique n'apporte rien car elle est équivalente à la conservation de la quantité de mouvement.

- Equation d'état :

On simplifie grandement l'étude en posant que le fluide est barotrope. Cette hypothèse est justifiée quand le fluide est idéal et permet de ne pas introduire les équations de la Thermodynamique. Elle consiste à définir une relation entre la pression et la masse volumique :

$$p = f(\rho) \quad (\text{I-15})$$

### I - 1.3 Construction de l'équation de Helmholtz

A partir des équations de conservation de la masse, d'Euler et d'état et après linéarisation en tenant compte des dernières hypothèses du paragraphe I - 1.1, on s'attache à établir l'équation de Helmholtz [58]. Le fluide étant supposé irrotationnel :

$$\text{rot } \underline{v} = \underline{0} \quad (\text{I-16})$$

L'équation d'Euler se simplifie alors :

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } \underline{v}^2 \right) + \text{grad } p = \rho \underline{F} \quad (\text{I-17})$$

Dans le cadre de l'Acoustique linéaire, on linéarise les grandeurs physiques du problème jusqu'au premier ordre :

$$p = p_0 + \varepsilon p'$$

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho'$$

$$\underline{v} = \varepsilon \underline{v}' \quad (\text{I-18})$$

$$\underline{F} = \underline{F}_0 + \varepsilon \underline{F}'$$

$$q = q_0 + \varepsilon q'$$

Les grandeurs indicées par 0 correspondent à l'état de repos, celles surmontées par un prime les variations du premier ordre. La vitesse d'écoulement est nulle, on linéarise donc  $\underline{v}$  autour de 0. L'hypothèse de barotropie autorise le développement suivant :

$$p = p_0 + \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 (\rho - \rho_0) \quad (\text{I-19})$$

Le terme :

$$\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0$$

est homogène au carré d'une vitesse. On définit alors la vitesse du son par :

$$c_0 = \left( \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \right)_0 \quad (\text{I-20})$$

Avec (I-20), l'équation (I-19) se réduit à :

$$p' = c_0^2 \rho' \quad (\text{I-21})$$

On linéarise les équations (I-5) et (I-17) et on ne conserve que les termes de premier ordre. En considérant que l'influence des facteurs  $\underline{F}_0 \rho'$  et  $q_0 \rho'$  est négligeable :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \underline{v}' = \rho_0 q' \quad (\text{I-22.a})$$

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{v}'}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = \rho_0 \underline{F}' \quad (\text{I-22.b})$$

On dérive (I-22.a) par rapport au temps et on y injecte (I-21) :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \underline{v}') = \rho_0 \frac{\partial q'}{\partial t} \quad (\text{I-23})$$

On applique l'opérateur divergence à l'équation (I-22.b) :

$$\rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \underline{v}'}{\partial t} + \operatorname{div} \operatorname{grad} p' = \rho_0 \operatorname{div} \underline{F}' \quad (\text{I-24})$$

En rappelant que le laplacien est égal à la divergence du gradient, la comparaison de (I-23) et (I-24) conduit à l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \rho_0 \left( \frac{\partial q'}{\partial t} - \operatorname{div} \underline{F}' \right) \quad (\text{I-25})$$

Pour simplifier les notations, on remplace la variation  $p'$  par  $p$  et, par abus de langage, on désigne  $p$  comme la pression. On définit le nombre d'onde :

$$k = \frac{\omega}{c_0} \quad (\text{I-26})$$

Avec la convention de dépendance temporelle des variables indiquée précédemment, on aboutit à l'écriture de l'équation de Helmholtz inhomogène avec un changement de notation évident du second membre :

$$\Delta p(\underline{r}) + k^2 p(\underline{r}) = -\nu(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Omega_f \quad (\text{I-27})$$

A cette équation, il faut ajouter les conditions aux limites sur la surface  $\Gamma$ . Elles peuvent être de type Dirichlet ou Neumann :

$$p(\underline{r}) = f(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-28.a})$$

$$\frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} = h(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-28.b})$$

où les fonctions  $f$  et  $h$  sont connues. On peut également définir une condition aux limites de type mixte qui est la combinaison linéaire des conditions de Dirichlet et de Neumann.

Une dernière condition à imposer est la condition de Sommerfeld :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial r} - ik p(\underline{r}) \right) = 0 \quad (\text{I-29.a})$$

$$r \rightarrow \infty \quad p(\underline{r}) \sim \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{I-29.b})$$

où  $r$  est le rayon du vecteur reliant  $\underline{r}$  à l'origine du repère. Cette condition implique qu'à l'infini, le flux d'énergie qui traverse une sphère  $S$  centrée sur la structure et de rayon infini est positif et fini. La première relation présente une autre forme équivalente :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_S \left| \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial r} - ik p(\underline{r}) \right| d\underline{r} = 0 \quad (\text{I-30})$$

*Remarque :*

Dans la suite, les dérivées normales des fonctions figurent fréquemment dans les équations employées. La signification mathématique précise de la dérivée normale d'une fonction  $f$  en un point  $\underline{r}$  est :

$$\frac{\partial f(\underline{r})}{\partial n} = \lim_{\underline{r}' \rightarrow \underline{r}} \text{grad} (f(\underline{r}')) \cdot \underline{n} \quad (\text{I-31})$$

## I - 2 FORMULATIONS INTEGRALES

Après avoir introduit les fonctions de Green qui tiennent un rôle fondamental dans cette étude, on propose une formulation intégrale générale. Ensuite, sont présentées les principales représentations intégrales, en insistant particulièrement sur la représentation de Helmholtz extérieure. On discute alors du gros défaut de cette représentation intégrale qui est constitué par l'existence des  $k$  à problème.

I - 2.1 Fondement théoriqueI - 2.1.1 *Fonctions de Green*

La fonction de Green, appelée aussi fonction d'influence, a été introduite initialement en électrostatique et a ensuite trouvé application dans de nombreux domaines. Dans l'introduction de la théorie des fonctions de Green, on privilégie l'aspect physique [4,7] : la fonction de Green  $G(\underline{r}, \underline{r}')$  symbolise le champ créé au point  $\underline{r}$  par une source ponctuelle située en  $\underline{r}'$ . Si on est en présence de plusieurs sources suivant une distribution  $\tau(\underline{r}')$ , le champ au point  $\underline{r}$  est l'intégrale sur toutes ces sources du produit :

$$\tau(\underline{r}') G(\underline{r}, \underline{r}')$$

De la même façon, on peut raisonner sur l'influence des conditions aux limites. En supposant qu'en tout point de la surface  $\Gamma$  on ait une condition de Dirichlet ou de Neumann nulle partout sauf en un point  $\underline{r}'$ , où le champ est comparable à une fonction de Dirac, le champ au point d'observation  $\underline{r}$  est encore  $G(\underline{r}, \underline{r}')$ . Si on a une condition de Dirichlet ou de Neumann du type (I-28), alors le champ au point  $\underline{r}$  est respectivement l'intégration de :

$$f(\underline{r}') G(\underline{r}, \underline{r}') \quad \text{ou} \quad h(\underline{r}') G(\underline{r}, \underline{r}')$$

sur  $\Gamma$ . Dans ce cas, on assimile  $\Gamma$  à un ensemble de sources suivant une certaine distribution. La fonction de Green est donc une solution quand on a homogénéité partout sauf en un point.

La transcription mathématique du problème à résoudre fait intervenir la fonction de Green associée aux équations (I-27), (I-28) et (I-29) qui

doit vérifier les propositions suivantes :

- l'équation d'Helmholtz inhomogène :

$$\Delta G(\underline{r}, \underline{r}') + k^2 G(\underline{r}, \underline{r}') = -\delta(\underline{r}, \underline{r}') \quad \underline{r} \in \Omega_f \quad \underline{r}' \in \Omega_f \quad (\text{I-32})$$

où  $\delta$  est la fonction de Dirac,

- la relation de symétrie :

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = G(\underline{r}', \underline{r}) \quad (\text{I-33})$$

- la condition homogène de surface suivant les cas (Dirichlet ou Neumann) :

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = 0 \quad \underline{r} \in \Gamma \quad \underline{r}' \in \Gamma \cup \Omega_f \quad (\text{I-34.a})$$

$$\frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} = 0 \quad \underline{r} \in \Gamma \quad \underline{r}' \in \Gamma \cup \Omega_f \quad (\text{I-34.b})$$

- la condition de Sommerfeld :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial r} - ik G(\underline{r}, \underline{r}') \right) = 0 \quad (\text{I-35})$$

La fonction G possède les propriétés suivantes :

$$\underline{r} \longrightarrow \underline{r}' \quad G(\underline{r}, \underline{r}') \longrightarrow \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (\text{I-36.a})$$

$$|\underline{r} - \underline{r}'| \longrightarrow \infty \quad G(\underline{r}, \underline{r}') \longrightarrow f(\theta, \varphi) \frac{e^{ik|\underline{r} - \underline{r}'|}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (\text{I-36.b})$$

où  $f$  est fonction uniquement de la direction définie par les coordonnées sphériques  $\theta$  et  $\varphi$ . En employant la théorie des fonctions de Green, il est possible d'obtenir une solution de l'équation homogène de Helmholtz avec des conditions aux limites inhomogènes, ou de l'équation inhomogène avec des conditions aux limites homogènes. Par linéarité des équations, on peut aussi résoudre l'équation inhomogène avec des conditions aux limites inhomogènes en superposant les solutions précédentes. La recherche de G est un problème difficile et ne peut être mené à bien que pour des géométries simples comme le

plan infini ou une famille de plans infinis parallèles [4]. La fonction G est tributaire d'hypothèses trop restrictives qui ne lui permettent pas d'être employée en général. La fonction G peut être séparée en deux parties : une partie continue partout dans  $\Omega_f$  et qui dépend des conditions imposées sur  $\Gamma$  et une partie continue partout dans  $\Omega_f$  excepté pour  $\underline{r} = \underline{r}'$ . Cette dernière partie est la fonction de Green g :

$$\Delta g(\underline{r}, \underline{r}') + k^2 g(\underline{r}, \underline{r}') = -\delta(\underline{r}, \underline{r}') \quad \underline{r} \in \Omega_f \quad \underline{r}' \in \Omega_f \quad (\text{I-37})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial r} - ik g(\underline{r}, \underline{r}') \right) = 0 \quad (\text{I-38})$$

Cette fonction g est la fonction de Green associée à l'espace infini car, étant indépendante de la surface  $\Gamma$ , elle n'est pas soumise aux conditions aux limites sur  $\Gamma$ . La solution de ces deux dernières équations est connue [4]. Dans l'espace tridimensionnel, la solution fondamentale est une onde sphérique divergente :

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\underline{r} - \underline{r}'|}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (\text{I-39})$$

#### I - 2.1.2 Forme générale des représentations intégrales

J. GIROIRE [12], dans le cas du rayonnement acoustique, a synthétisé sous une seule formulation différentes représentations possibles. Au lieu de résoudre le problème classique de propagation, il prolonge la fonction p dans  $\Omega_i$  et n'impose aucune condition de raccord sur  $\Gamma$  :

$$\Delta p(\underline{r}) + k^2 p(\underline{r}) = 0 \quad \underline{r} \in \Omega_f$$

$$\Delta p(\underline{r}) + k^2 p(\underline{r}) = 0 \quad \underline{r} \in \Omega_i \quad (\text{I-40})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial r} - ik p(\underline{r}) \right) = 0$$

Le raccordement entre  $\Omega_i$  et  $\Omega_f$  se fait par l'intermédiaire des grandeurs :

$$[p(\underline{r})] = p_2(\underline{r}) - p_1(\underline{r}) \quad \text{et} \quad \left[ \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} \right] = \frac{\partial p_2(\underline{r})}{\partial n} - \frac{\partial p_1(\underline{r})}{\partial n}$$

qui sont le saut de pression et de sa dérivée normale entre l'extérieur  $\Omega_f$  et l'intérieur  $\Omega_i$  caractérisés respectivement par l'indice 2 et 1. Le point de départ est l'application du second théorème de Green aux fonctions  $p$  et  $g$  dans le volume  $V$  de surface  $S$  :

$$\begin{aligned} \int \int \int_V (p(\underline{r}') \Delta' g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}') \Delta' p(\underline{r}')) d\underline{r}' \\ = \int \int_S \left( p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \right) d\underline{r}' \end{aligned} \quad (\text{I-41})$$

où  $\Delta'$  est le laplacien suivant la variable  $\underline{r}'$  et  $\frac{\partial}{\partial n'}$  est la dérivée normale au point  $\underline{r}'$ .

Après calculs, GIROIRE obtient :

$$p(\underline{r}) = \int \int_{\Gamma} \left( [p(\underline{r}')] \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - \left[ \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \right] g(\underline{r}, \underline{r}') \right) d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_f \cup \Omega_i \quad (\text{I-42})$$

$$\frac{p_1(\underline{r}) + p_2(\underline{r})}{2} = \int \int_{\Gamma} \left( [p(\underline{r}')] \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - \left[ \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \right] g(\underline{r}, \underline{r}') \right) d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Gamma$$

Si le point  $\underline{r}$  est un point de discontinuité de la tangente à la surface, on introduit l'angle solide  $\alpha(\underline{r})$  normé à  $4\pi$  à la place du coefficient  $1/2$  dans l'équation intégrale sur  $\Gamma$ . Une formule permet le calcul de  $\alpha(\underline{r})$  pour n'importe quel type de surface [50] :

$$\alpha(\underline{r}) = 4\pi + \int \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-43})$$

Suivant la condition de raccord imposée sur  $\Gamma$ , on définit différentes représentations intégrales possibles où  $p_2$  est l'inconnue de surface. Elles apportent toutes l'avantage de modéliser complètement la propagation dans le domaine  $\Gamma \cup \Omega_f$  par une intégrale de surface où la condition de Sommerfeld est exactement prise en compte.

## I - 2.2 Représentation de Helmholtz extérieure

Elle découle de (I-42) en identifiant la fonction  $p$  et la fonction nulle dans  $\Omega_i$ . Les calculs sont détaillés dans l'annexe I et aboutissent à :

$$\int \int_{\Gamma} \left( p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') \right) d\underline{r}'$$

$$= \begin{cases} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Omega_f \\ \frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Gamma \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(I-44.a)} \\ \text{(I-44.b)} \end{matrix}$$

Il est important de préciser que les équations (I-44) ne permettent de résoudre que les problèmes de rayonnement. La mise en équation du phénomène de diffraction se fait en reprenant la démonstration de l'annexe I avec comme point de départ l'équation de Helmholtz inhomogène :

$$\Delta p(\underline{r}) + k^2 p(\underline{r}) = -v(\underline{r}) \quad \text{(I-45)}$$

où  $v$  représente tout l'effet de l'onde incidente. Ce procédé est valable à condition de considérer que, avant d'introduire la structure dans le fluide, l'espace  $\Omega_f$  soit soumis à un champ  $p_i$  généré par une source et que l'introduction de la structure dans le milieu ne perturbe en rien les caractéristiques de cette source. On choisit d'exprimer l'effet de la fonction source dans le second membre de l'équation de Helmholtz quand il n'apparaît pas dans les conditions aux limites. Dans l'équation finale, il apparaît alors un nouveau terme qui est une intégrale de volume et qui tient le rôle de la pression incidente [58] :

$$p_i(\underline{r}) = \int \int \int_V v(\underline{r}) g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \quad \text{(I-46)}$$

Quand on ne précise pas sa nature, on suppose que la source est suffisamment éloignée pour que l'onde incidente soit plane. Il vient donc :

$$p_i(\underline{r}) + \int \int_{\Gamma} \left( p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') \right) d\underline{r}'$$

$$= \begin{cases} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Omega_f \\ \frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Gamma \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(I-47.a)} \\ \text{(I-47.b)} \end{matrix}$$

où (I-47.b) est l'équation intégrale sur  $\Gamma$  et (I-47.a) est la représentation de  $p$  dans  $\Omega_f$ . La démarche à suivre est simple : la résolution de (I-47.b)

détermine les valeurs de l'inconnue sur la surface  $\Gamma$  (la pression pour une condition de Neumann, sa dérivée normale pour une condition de Dirichlet) et après injection dans l'équation (I-47.a), on récupère la pression en tout point du fluide.

La représentation de Helmholtz extérieure est une des plus employées dans la littérature pour résoudre des problèmes de propagation acoustique. Des applications nombreuses et variées existent. Elles portent sur des calculs de rayonnement à partir de structures vibrantes telles que :

- . la sphère [10,50,52-54],
- . le cylindre fini [10,50,51,54],
- . le cube [50],
- . le parallélépipède rectangle [10].

Des calculs de diffraction sur des corps rigides ont également été menés. L'hypothèse de rigidité parfaite de la surface est précisée par :

$$\frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} = 0 \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-48})$$

Cette relation élémentaire est combinée avec (I-47) qui se résume à :

$$p_i(\underline{r}) + \iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}' = \begin{cases} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Omega_f \\ \frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Gamma \end{cases} \quad (\text{I-49.a})$$

$$(\text{I-49.b})$$

Les corps diffractants suivants ont été étudiés :

- . la sphère [50,51],
- . deux sphères dont l'axe commun est perpendiculaire au plan d'onde incidente [51],
- . le sphéroïde [49],
- . le parallélépipède rectangle [47],
- . la plaque rectangulaire finie d'épaisseur nulle [47].

L'inconvénient de cette méthode est que, pour certaines valeurs de  $k$  appelées  $k$  à problème, l'équation (I-47.b) admet une infinité de solutions : elle est insuffisante pour déterminer la solution unique du problème.

L'existence de ces  $k$  à problème et puis des solutions de (I-47.b) est discutée dans le paragraphe I - 2.4.

*Remarque :*

En supposant connue la fonction  $G$  pour une géométrie particulière, L.L. FOLDY [59] a appliqué le théorème de Green aux fonctions  $p - p_i$  et  $G$  pour obtenir une autre représentation intégrale. Cette démarche conduit à :

- Condition de Dirichlet ( $G(\underline{r}, \underline{r}') = 0 \quad \underline{r}' \in \Gamma$ ) :

$$- \int \int_{\Gamma} p_i(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}' + \int \int_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}'$$

$$= \begin{cases} p(\underline{r}) - p_i(\underline{r}) & \underline{r} \in \Omega_f \\ \frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} (p(\underline{r}) - p_i(\underline{r})) & \underline{r} \in \Gamma \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(I-50.a)} \\ \text{(I-50.b)} \end{matrix}$$

- Condition de Neumann ( $\frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} = 0 \quad \underline{r}' \in \Gamma$ ) :

$$p_i(\underline{r}) + \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p_i(\underline{r}')}{\partial n'} G(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' - \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} G(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}'$$

$$= p(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Gamma \cup \Omega_f \quad \text{(I-51)}$$

La simplicité de ces dernières équations permet de préciser le rôle des termes apparaissant dans chacune d'entre elles. En particulier, dans le cas important du problème de Neumann extérieur, si le corps est parfaitement rigide, alors la pression solution  $p$  est la somme de deux termes : le premier est la pression incidente  $p_i$  qui serait présente en l'absence du corps ; le second est la conséquence de la présence du corps et caractérise la diffraction sur sa surface rigide. Si la surface n'est pas rigide alors la seconde intégrale représente l'effet induit par la vibration de  $\Gamma$ .

Dans le cas d'une condition de Dirichlet, la résolution des équations (I-50) se fait comme celle des équations (I-47). Par contre, dans le cas d'une condition de Neumann, le calcul dans  $\Gamma \cup \Omega_f$  se fait par simple sommation du premier membre de (I-51). La fonction de Green  $G$  n'étant, en général, pas connue, cette formulation n'est employée que dans des cas particuliers comme celui traité au paragraphe I - 2.3.6.

## I - 2.3 Autres représentations intégrales

### I - 2.3.1 *Représentation de Helmholtz intérieure*

Elle est directement liée à la représentation de Helmholtz extérieure et est démontrée dans l'annexe I :

$$p_1(\underline{r}) + \int \int_{\Gamma} \left( p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') \right) d\underline{r}' = 0 \quad \underline{r} \in \Omega_i \quad (I-52)$$

Sa résolution fournit la fonction inconnue sur la surface à partir de laquelle on calcule la pression dans  $\Omega_f$  grâce à l'équation (I-47.a). L'unicité de la solution est assurée si et seulement si  $\underline{r}$  n'appartient pas aux surfaces nodales des fonctions propres de l'équation homogène associée [10]. Le choix de ces points  $\underline{r}$  est aléatoire dans la majorité des cas car les surfaces nodales ne sont pas connues, à moins que le problème intérieur ne soit soluble. L.G. COPLEY [45] a appliqué cette technique au calcul du rayonnement d'un cylindre et d'un sphéroïde avec une distribution surfacique des vitesses à symétrie axiale. La représentation de Helmholtz intérieure est essentiellement employée dans le cadre de la méthode de Schenck abordée au paragraphe I - 4.1.

### I - 2.3.2 *Représentation par potentiel de simple couche*

La représentation par potentiel de couche simple (monopole) fait intervenir une distribution  $\sigma$  [11,12] telle que :

$$p(\underline{r}) = p_1(\underline{r}) + \int \int_{\Gamma} \sigma(\underline{r}') g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_f \cup \Gamma \quad (I-53)$$

Elle est équivalente à la relation (I-42) avec :

$$[p(\underline{r})] = 0 \quad \underline{r} \in \Gamma$$

dans laquelle on fait apparaître le terme de pression incidente.

D'après les résultats de O.D. KELLOG [43] :

$$\frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} = \frac{\partial p_1(\underline{r})}{\partial n} + \int \int_{\Gamma} \sigma(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} d\underline{r}' - \frac{\sigma(\underline{r})}{2} \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (I-54)$$

Dans l'hypothèse d'une condition de Neumann, l'équation (I-54) détermine la valeur de  $\sigma$  sur  $\Gamma$  qui est ensuite injectée dans (I-53) pour calculer la pression dans  $\Omega_f$ . Par contre, une condition de Dirichlet nécessite uniquement l'emploi de l'équation (I-53). Le défaut est encore l'existence des  $k$  à problème. Cette technique de résolution a servi à modéliser la diffraction acoustique sur une structure rigide de forme variée :

- . le cylindre infini de section circulaire, elliptique ou carrée [46],
- . le parallélépipède rectangle [10].

Ce type de problème réclame d'abord la résolution de l'équation :

$$-\frac{\partial p_1(\underline{r})}{\partial n} = \int \int_{\Gamma} \sigma(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} d\underline{r}' - \frac{\sigma(\underline{r})}{2} \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-55})$$

### I - 2.3.3 Représentation par potentiel de couche double

#### I - 2.3.3.1 Approche classique

Si la condition de raccord injectée dans (I-42) est telle que :

$$\left[ \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} \right] = 0 \quad \underline{r} \in \Gamma$$

alors on obtient la représentation par potentiel de double couche (dipole) que l'on exprime habituellement sous la forme [11,12] :

$$p(\underline{r}) = p_1(\underline{r}) + \int \int_{\Gamma} \mu(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_f \quad (\text{I-56.a})$$

$$p(\underline{r}) = p_1(\underline{r}) + \int \int_{\Gamma} \mu(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}' + \frac{\mu(\underline{r})}{2} \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-56.b})$$

Une condition de Neumann est prise en compte par [43] :

$$\frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} = \frac{\partial p_1(\underline{r})}{\partial n} + \int \int_{\Gamma} \mu(\underline{r}') \frac{\partial^2 g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n \partial n'} d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-57})$$

Cette dernière intégrale doit être prise en valeur principale selon la formule suivante :

$$\int \int_{\Gamma} \mu(\underline{r}') \frac{\partial^2 g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n \partial n'} d\underline{r}' = \lim_{\underline{r}'' \rightarrow \underline{r}} \frac{\partial}{\partial n''} \int \int_{\Gamma} \mu(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}'', \underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}' \quad (\text{I-58})$$

où  $\underline{r}'' \rightarrow \underline{r}$  suivant la normale à  $\Gamma$ . La résolution de (I-56.b) ou (I-57), suivant le type de conditions aux limites sur  $\Gamma$ , fournit la valeur de  $\mu$  sur la surface  $\Gamma$ . Ensuite, connaissant  $\mu$  sur  $\Gamma$ , on utilise (I-56.a) pour déterminer la pression dans  $\Omega_f$ . Dans le cas d'une condition de Neumann, l'équation (I-56.b) permet de calculer la pression sur  $\Gamma$ . Cette méthode souffre également de la présence des  $k$  à problème.

Dans le cas de la diffraction acoustique sur un objet rigide,  $\mu$  est solution de :

$$-\frac{\partial p_1(\underline{r})}{\partial n} = \int \int_{\Gamma} \mu(\underline{r}') \frac{\partial^2 g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n \partial n'} d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-59})$$

L'évaluation de la partie finie de cette intégrale est délicate et a été entreprise par T. TERAJ [47]. Dans l'hypothèse de la diffraction sur une bande rigide de longueur infinie, P.J.T. FILIPPI [48] a étudié la variation de la densité  $\mu$  et a estimé l'erreur commise lors de ce calcul.

### I - 2.3.3.2 Formulation variationnelle de Hamdi

M.A. HAMDI [60] a formulé le problème par différentes représentations intégrales utilisant diverses densités de surface suivant le type de conditions aux limites et la présence ou non d'un écoulement uniforme subsonique. Ce travail a trouvé des prolongements dans le domaine qui nous intéresse, en particulier la diffraction acoustique représentée par le potentiel de couche double  $\mu$  [55]. Il a proposé une formulation variationnelle où  $\mu$  est la solution de l'équation :

$$\delta \mathcal{L}(\mu) = 0 \quad (\text{I-60})$$

avec :

$$\mathfrak{L}(\mu) = \frac{1}{2} \int \int_{\Gamma} \int \int_{\Gamma} \left\{ k^2 (\underline{n} \cdot \underline{n}') \mu(\underline{r}) \mu(\underline{r}') - (\underline{n} \wedge \nabla \mu(\underline{r})) \cdot (\underline{n}' \wedge \nabla' \mu(\underline{r}')) \right\} \\ g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r} d\underline{r}' - \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p_i(\underline{r})}{\partial n} \mu(\underline{r}) d\underline{r} \quad (\text{I-61})$$

où  $\nabla$  et  $\nabla'$  sont les opérateurs gradient aux points  $\underline{r}$  et  $\underline{r}'$ . Cette contribution est double : elle permet d'éviter le calcul de la partie finie d'intégrales singulières et elle conduit, après discrétisation, à un système symétrique d'équations linéaires.

#### I - 2.3.4 Méthode du potentiel hybride

C'est une combinaison des représentations de Helmholtz extérieure et de couche simple. Cette représentation est issue de la formulation (I-42) dans laquelle on impose une condition de raccord mixte :

$$i\eta [p(\underline{r})] = \left[ \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} \right]$$

sur  $\Gamma$  où  $\eta$  est un nombre complexe quelconque. Il vient :

$$p(\underline{r}) = p_i(\underline{r}) + \int \int_{\Gamma} \gamma(\underline{r}') \left( i\eta - \frac{\partial}{\partial n'} \right) g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_f \quad (\text{I-62.a})$$

$$p(\underline{r}) = p_i(\underline{r}) + \int \int_{\Gamma} \gamma(\underline{r}') \left( i\eta - \frac{\partial}{\partial n'} \right) g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' - \frac{\gamma(\underline{r})}{2} \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-62.b})$$

Pour une condition de Neumann [43] :

$$\frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} = \frac{\partial p_i(\underline{r})}{\partial n} + \int \int_{\Gamma} \gamma(\underline{r}') \left( i\eta - \frac{\partial}{\partial n'} \right) \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} d\underline{r}' - i\eta \frac{\gamma(\underline{r})}{2} \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-63})$$

Etant donnée la complexité du noyau de (I-63) et sa forte singularité :

$$\frac{\partial^2 g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n \partial n'}$$

sa mise en oeuvre n'est pas simple mais la résolution admet une solution unique pour toute valeur de  $k$  à condition que la partie réelle de  $\eta$  soit non

nulle.

### I - 2.3.5 Méthode de Burton et Miller

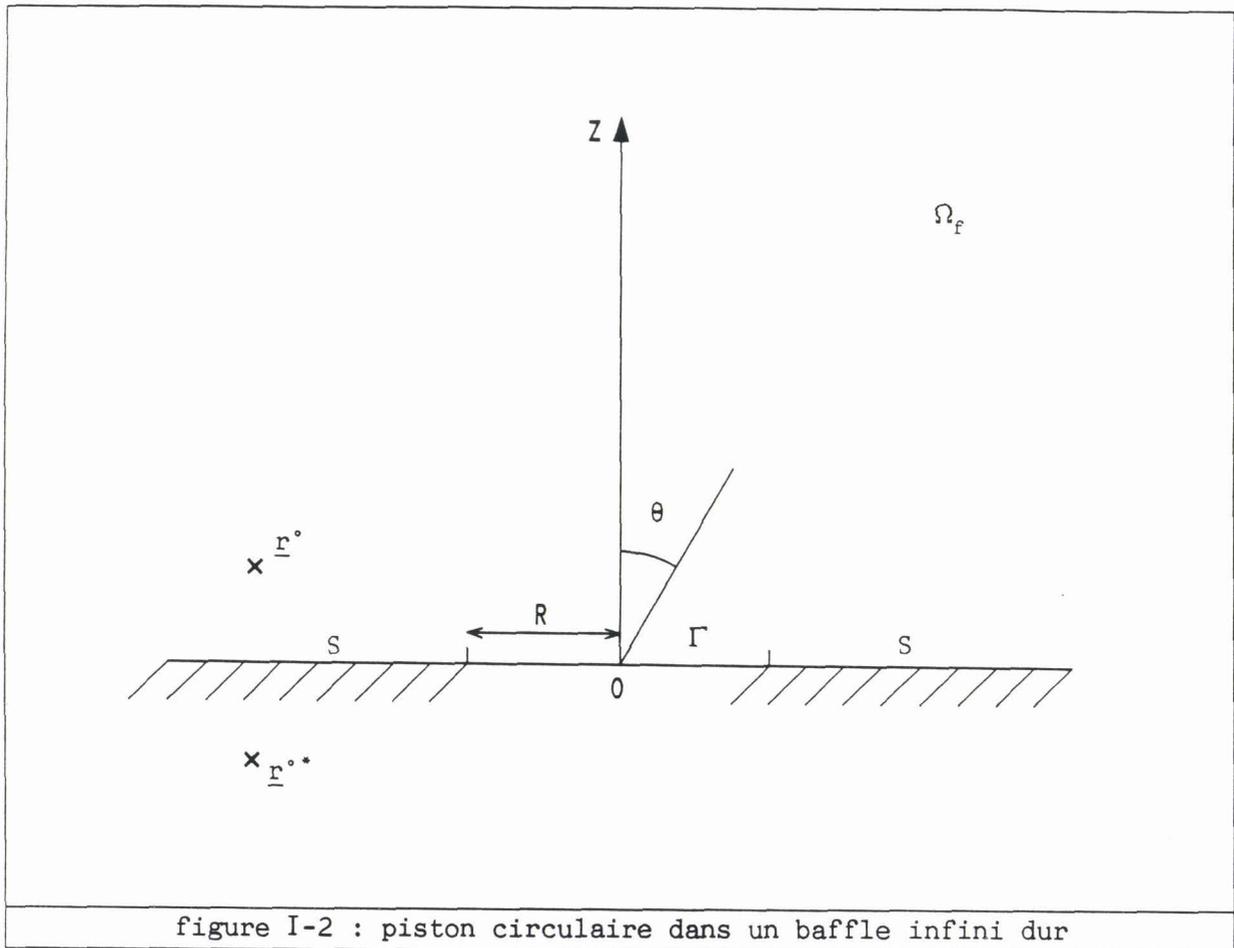
A.J. BURTON et G.F. MILLER [61] ont proposé une autre formulation intégrale qui repose sur la représentation de Helmholtz extérieure et sa forme différenciée. On différencie terme à terme l'équation (I-47.b) au point  $\underline{r}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left( p_i(\underline{r}) + \int \int_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}' - \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \right) \\ = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r}) \right) \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (I-64) \end{aligned}$$

La formulation de Burton et Miller résulte de la somme membre à membre de l'équation (I-47.b) et de l'équation (I-64) après avoir multiplié cette dernière par un coefficient C. Ses auteurs ont prouvé l'unicité de la solution pour toute valeur de k à condition que le coefficient de couplage C soit strictement complexe. Avec la connaissance des solutions de cette formulation de surface, la pression dans le fluide est obtenue par sommation de l'équation (I-47.a). Quelques résultats numériques [52,62], en particulier des calculs de diffraction sur une sphère, soulignent les difficultés rencontrées lors de l'utilisation de cette méthode. Les résultats sont sensibles au choix de la valeur de C et aucun choix précis ne semble donner entière satisfaction. Un problème d'intégration numérique intervient quand on veut estimer correctement la valeur de la seconde intégrale de (I-64) qui fait intervenir un noyau fortement singulier du même type que celui de la méthode du potentiel hybride.

### I - 2.3.6 Cas particulier des structures bafflées

Le rayonnement des structures bafflées est un problème important car il correspond à de nombreux modèles physiques simples et peut être étendu à l'analyse des phénomènes d'interactions dans les antennes. Dans cette section, est retenu le cas du piston circulaire inscrit dans un baffle infini dur schématisé sur la figure I-2. Ce cas particulier correspond au cas concret de nombreux transducteurs Tonpitz [20]. La méthode des équations intégrales se prête parfaitement à de telles applications.



La pression acoustique est calculée dans le demi-espace supérieur limité par l'écran  $Z = 0$ ,  $(OZ)$  étant l'axe de symétrie axiale. Ce problème se résume à l'équation de Helmholtz homogène avec une condition aux limites inhomogène sur  $\Gamma$ . La fonction de Green  $G$  doit vérifier la condition de Neumann homogène :

$$\frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} = 0 \quad \underline{r}' \in S \cup \Gamma \quad (\text{I-65})$$

L'écran  $S$  étant rigide, la représentation intégrale (I-51) se simplifie et il reste :

$$p(\underline{r}) = - \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} G(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_f \cup \Gamma \quad (\text{I-66})$$

La recherche de la fonction  $G$  est basée sur la méthode des images [4]. Soit  $\underline{r}$  le point d'observation quand une source est située en  $\underline{r}'$ . L'introduction de l'écran  $Z = 0$  crée des réflexions qui doivent être ajoutées à l'onde issue de

$\underline{r}'$ . Il existe donc une fonction  $F$  qui représente l'effet causé par la frontière et telle que :

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = g(\underline{r}, \underline{r}') + F(\underline{r}, \underline{r}') \quad (\text{I-67})$$

où  $g$  est la fonction de Green associée à l'espace infini (I-39). La fonction  $F$  est le champ de source  $\underline{r}''$  reçu en  $\underline{r}$  si les points  $\underline{r}'$  et  $\underline{r}''$  sont symétriques par rapport à l'écran. Avec la condition (I-65), on détermine facilement la fonction  $F$  et :

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = g(\underline{r}, \underline{r}') + g(\underline{r}, \underline{r}'') \quad (\text{I-68})$$

Les sources  $\underline{r}'$  étant situées sur le plan  $Z = 0$ , on a :

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = 2 g(\underline{r}, \underline{r}') \quad (\text{I-69})$$

Finalement :

$$p(\underline{r}) = - \frac{1}{2\pi} \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \frac{e^{ik|\underline{r} - \underline{r}'|}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_f \cup \Gamma \quad (\text{I-70})$$

Connaissant  $\partial p(\underline{r}')/\partial n'$  sur la surface  $\Gamma$ , le calcul de la pression se limite à une sommation sur  $\Gamma$ . A ce titre, elle ne comporte plus, évidemment, de fréquences irrégulières. Le rayonnement d'un piston bafflé dur est modélisé par une équation intégrale très facilement exploitable et admettant une solution unique pour toutes les fréquences. La généralisation de ce genre de raisonnement à des structures plus complexes et faisant appel à plusieurs transducteurs en interaction est envisageable et serait particulièrement intéressante.

#### I - 2.4 Existence des k à problème

Les auteurs, dans leur grande majorité, ont privilégié l'utilisation de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure. Cette formulation se développe numériquement sans difficulté mais présente l'inconvénient d'admettre une infinité de solutions pour les k à problème. L'existence des k à problème et des solutions de l'équation intégrale concernée est régie par l'alternative de Fredholm qui est présentée dans la section suivante. Une

caractérisation pratique des  $k$  à problème de cette représentation est ensuite proposée.

#### I - 2.4.1 *Alternative de Fredholm*

La théorie exposée dans la suite peut être trouvée dans les ouvrages de référence [10,42,44]. On étudie la famille des équations de seconde espèce à laquelle appartient l'équation (I-47.b). Elles s'écrivent sous la forme générale suivante :

$$\Phi(\underline{r}) - \lambda \int \int_{\Gamma} K(\underline{r}, \underline{r}') \Phi(\underline{r}') d\underline{r}' = f(\underline{r}) \quad (\text{I-71})$$

où  $\Phi$  est l'inconnue,  $K$  est le noyau et  $f$  est donnée. L'équation homogène associée est :

$$\Phi(\underline{r}) - \lambda \int \int_{\Gamma} K(\underline{r}, \underline{r}') \Phi(\underline{r}') d\underline{r}' = 0 \quad (\text{I-72})$$

On définit l'équation homogène adjointe :

$$\Psi(\underline{r}) - \bar{\lambda} \int \int_{\Gamma} \overline{K(\underline{r}', \underline{r})} \Psi(\underline{r}') d\underline{r}' = 0 \quad (\text{I-73})$$

où on a conjugué  $\lambda$  et  $K$ . L'alternative de Fredholm s'énonce comme suit :

- (1) ou bien (I-72) n'admet que la solution nulle et (I-71) admet une solution unique,
- (2) ou bien (I-72) admet un nombre fini  $n$  de solutions  $\Phi_i$  linéairement indépendantes. Alors :

. si :

$$\int \int_{\Gamma} f(\underline{r}) \overline{\Psi(\underline{r})} d\underline{r} = 0$$

où  $\Psi$  est une solution quelconque de (I-73) alors (I-71) possède une infinité de solutions que l'on peut mettre sous la forme :

$$\Phi(\underline{r}) = \Phi_0(\underline{r}) + \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i(\underline{r})$$

où  $\Phi_0$  est une solution particulière quelconque de (I-71) et les  $c_i$  sont des constantes arbitraires,

. sinon (I-71) n'est pas soluble.

Dans l'alternative (2),  $\lambda$  est une valeur caractéristique de  $K(\underline{r}, \underline{r}')$ . De plus, si  $\lambda$  est valeur caractéristique de  $K(\underline{r}, \underline{r}')$  alors  $\bar{\lambda}$  est valeur caractéristique de  $K(\underline{r}', \underline{r})$ . Dans le cas contraire,  $\lambda$  est valeur régulière de  $K$ .

Les équations intégrales que nous considérons font intervenir un noyau  $K$  qui est fonction de  $k$ . Pour chaque  $k$ , il existe des valeurs caractéristiques  $\lambda$  de  $K$ . On choisit d'écrire les équations intégrales de la forme (I-71) avec  $\lambda = 1$ . Chaque  $k$  pour lequel  $\lambda = 1$  est une valeur caractéristique de  $K$  est appelé  $k$  à problème.

#### I - 2.4.2 Identification des $k$ à problème

##### I - 2.4.2.1 Caractérisation des $k$ à problème

J. GIROIRE [12] a montré que, pour une condition de Dirichlet sur la surface  $\Gamma$ , les  $k$  à problème des représentations de Helmholtz extérieure et de couche simple sont les valeurs propres du problème de Dirichlet intérieur :

$$\Delta \Psi(\underline{r}) + k^2 \Psi(\underline{r}) = 0 \quad \underline{r} \in \Omega_i \quad (\text{I-74.a})$$

$$\Psi(\underline{r}) = 0 \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-74.b})$$

Dans l'hypothèse d'une condition de Neumann, l'équation homogène associée à (I-47.b) et l'équation homogène adjointe associée à (I-54) sont du même type et possèdent le même noyau égal à :

$$\frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'}$$

Les  $k$  à problème des représentations de Helmholtz extérieure et de couche simple sont donc identiques [63]. En reprenant la démonstration de GIROIRE, on déduit que, pour une condition de Neumann sur la surface, les  $k$  à problème de

ces deux représentations sont également les valeurs propres du problème de Dirichlet intérieur.

On peut aussi démontrer que les  $k$  à problème de la représentation par potentiel de couche double avec une condition de Dirichlet sont les valeurs propres du problème de Neumann intérieur :

$$\Delta \Psi(\underline{r}) + k^2 \Psi(\underline{r}) = 0 \quad \underline{r} \in \Omega_1 \quad (\text{I-75.a})$$

$$\frac{\partial \Psi(\underline{r})}{\partial n} = 0 \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{I-75.b})$$

*Remarque :*

Dans la seconde alternative de Fredholm, la représentation intégrale choisie ne permet pas de résoudre le problème. On a vu que l'équation intégrale est soluble et admet une infinité de solutions si les fonctions  $f$  et  $\bar{\Psi}$  sont orthogonales. L'équation intégrale (I-47.b) pour laquelle nous avons optée vérifie toujours cette condition [12].

#### I - 2.4.2.2 Calcul des $k$ à problème

Il s'agit ici de calculer ou d'approcher les valeurs des  $k$  à problème de la représentation de Helmholtz extérieure pour le problème de Neumann extérieur. Ceci se fait par résolution du problème associé de Dirichlet intérieur. La solution analytique de ce système n'est connue que lorsque la géométrie de la structure est composée de surfaces de coordonnée constante. Cette condition est vérifiée simplement pour le parallélépipède rectangle, le cylindre et la sphère. Dans chacun des trois systèmes de coordonnées liés à ces trois géométries, la solution de l'équation de Helmholtz pour le problème intérieur peut être représentée par une solution à trois variables séparées. La résolution des trois équations différentielles obtenues fournit la solution générale du problème intérieur.

Pour le parallélépipède rectangle, les coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont représentées sur la figure I-3.

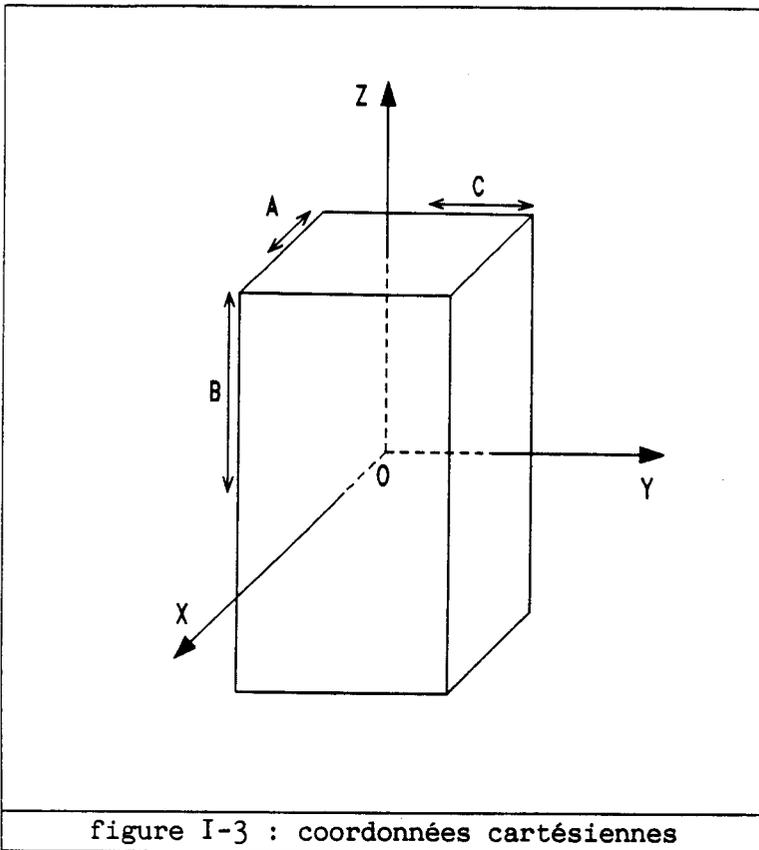


figure I-3 : coordonnées cartésiennes

La solution de (I-74.a) est :

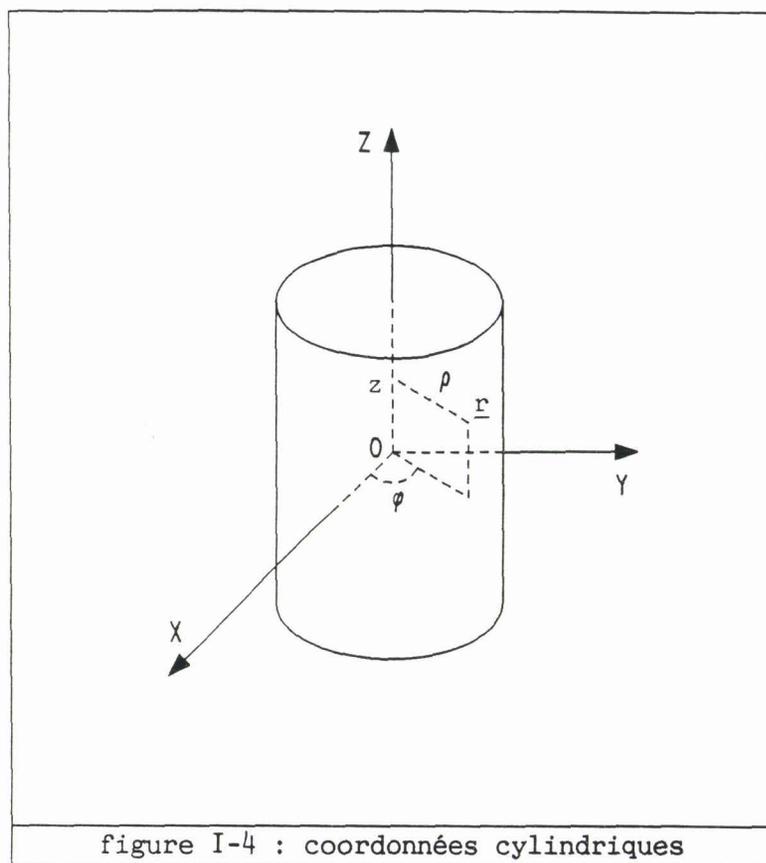
$$\Psi(x,y,z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (A_{\lambda} \cos\lambda x + B_{\lambda} \sin\lambda x) (C_{\mu} \cos\mu y + D_{\mu} \sin\mu y) \\ (E_{\lambda\mu} \cos z\sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2} + F_{\lambda\mu} \sin z\sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2}) \quad (\text{I-76})$$

La condition de Dirichlet homogène (I-74.b) fournit les valeurs des  $k$  à problème [10] :

$$k_{mnq} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2 + \left(\frac{q}{C}\right)^2} \quad (\text{I-77})$$

où  $m, n, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B$  et  $C$  sont les composantes suivant  $X, Z$  et  $Y$ .

Pour le cylindre,  $\rho, \varphi$  et  $z$  sont les coordonnées cylindriques de la figure I-4.



$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

figure I-4 : coordonnées cylindriques

la solution générale de (I-74.a) est :

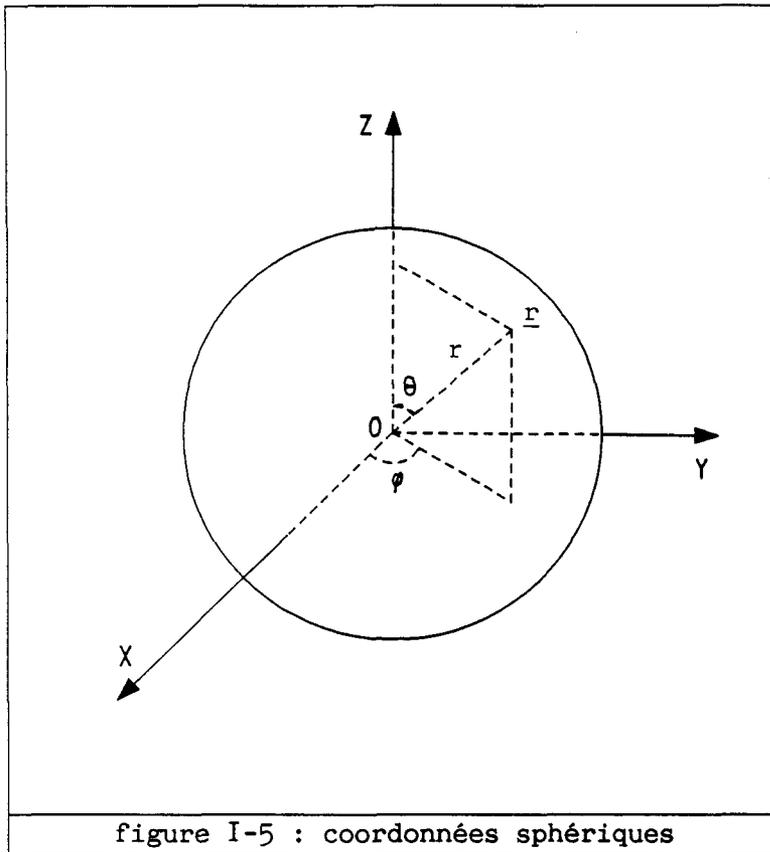
$$\Psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (C_{\lambda} \cos \lambda \varphi + D_{\lambda} \sin \lambda \varphi) (A_{\mu} \cos \mu z + B_{\mu} \sin \mu z) J_{\lambda}(\rho \sqrt{k^2 - \mu^2}) \quad (\text{I-78})$$

où  $C_{\lambda}$ ,  $D_{\lambda}$ ,  $A_{\mu}$  et  $B_{\mu}$  sont des constantes complexes et  $J_{\lambda}$  est la fonction de Bessel de première espèce et de degré  $\lambda$ . En appliquant la condition de champ nul (I-74.b) sur la surface [10] :

$$k_{m\lambda n} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{2B}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_{\lambda n}}{A}\right)^2} \quad (\text{I-79})$$

où  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A$  est le rayon du cylindre,  $B$  la demi-hauteur et  $\alpha_{\lambda n}$  est la  $n$ ème racine de  $J_{\lambda}$ .

Pour la sphère,  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  sont les coordonnées sphériques représentées sur la figure I-5.



$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

la solution générale de (I-74.a) est donnée par :

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^n (A_{n\lambda} \cos\lambda\varphi + B_{n\lambda} \sin\lambda\varphi) P_n^\lambda(\cos\theta) j_n(kr) \quad (\text{I-80})$$

où  $A_{n\lambda}$ ,  $B_{n\lambda}$  sont des constantes complexes,  $P_n^\lambda$  est la fonction de Legendre associée de première espèce de degré  $n$  et d'ordre  $\lambda$ ,  $j_n$  est la fonction de Bessel sphérique de première espèce de degré  $n$ . La condition aux limites (I-74.b) donne [10] :

$$k_{nq} = \frac{\alpha_{nq}}{R} \quad (\text{I-81})$$

où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $R$  est le rayon de la sphère et  $\alpha_{nq}$  est la  $q$ ème racine de  $j_n$ .

En général, la condition d'utilisation du calcul analytique n'est pas vérifiée et on se contente d'une approximation des  $k$  à problème. Une technique simple consiste à borner le domaine  $\Omega$  de surface  $\Gamma$  par un volume intérieur  $\Omega_1$

et un volume extérieur  $\Omega_2$  tel que :

$$\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2 \quad (\text{I-82})$$

Notant  $k_n$  la nième valeur propre rangée par ordre croissant du problème de Dirichlet intérieur associé à  $\Omega$ , R. COURANT et D. HILBERT [7] ont montré que, si  $k_{n_1}$  (resp.  $k_{n_2}$ ) est la nième valeur propre associée à  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ) alors :

$$k_{n_2} \leq k_n \leq k_{n_1} \quad (\text{I-83})$$

Cette inégalité est très simplement applicable quand les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  représentent une géométrie respectant la condition du calcul analytique. Dans la pratique,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont soit un cylindre, soit une sphère. Il est évident que l'encadrement gagne en précision quand le volume compris entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  est diminué.

Il existe une formule asymptotique qui donne approximativement le nombre  $n$  de fréquences irrégulières pour une géométrie quelconque. Malgré sa fiabilité contestable, elle fournit un ordre de grandeur :

$$n = \frac{V k^3}{6 \pi^2} \quad (\text{I-84})$$

où  $V$  est le volume intérieur du corps.

*Remarque :*

Quand le problème de Dirichlet intérieur est soluble, on connaît exactement les valeurs des  $k$  à problème. Il semble alors judicieux de travailler à des fréquences différentes mais encadrant les fréquences irrégulières (correspondantes aux valeurs des  $k$  à problème) et, pour celles-ci, de prolonger la solution par continuité. Cette astuce est malheureusement vouée à l'échec pour les deux motifs suivants :

- l'imprécision due aux calculs numériques engendre des intervalles critiques autour de chaque fréquence,
- les  $k$  à problème forment un ensemble discret de valeurs dont la densité croît avec la fréquence.

Ces deux raisons font que, à partir d'un certain  $k$ , les intervalles critiques se chevauchent et la solution est toujours indéterminée [11].

## I - 3 METHODE DE CHAMP NUL

I - 3.1 FormalismeI - 3.1.1 *Rappels*

La mise en équation de la méthode de champ nul ou méthode E.B.C. ("Extended Boundary Condition") requiert la connaissance des solutions naturelles de l'équation de Helmholtz. Ces solutions ne sont connues que lorsque la méthode de séparation des variables est applicable au problème extérieur. Pour ce faire, on est amené à travailler dans un système de coordonnées orthogonales adéquat (cf I - 5.2). La majorité des auteurs, soucieux d'éviter les complications de calcul qui deviennent vite dissuasives pour des systèmes plus évolués, choisissent le système des coordonnées sphériques. Avec les coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  définies précisément dans le paragraphe I - 2.4.2.2, une solution à variables séparées de l'équation de Helmholtz est [4] :

$$\Psi(\underline{r}) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (\text{I-85})$$

avec :

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + l^2\Phi = 0 \quad (\text{I-86.a})$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( m(m+1) - \frac{l^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0 \quad (\text{I-86.b})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{m(m+1)}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{I-86.c})$$

Les solutions de (I-86.a) sont  $\sin l\varphi$  et  $\cos l\varphi$  ou  $e^{\pm i l \varphi}$ . Les solutions de (I-86.b) sont les fonctions de Legendre  $P_m^l(\cos\theta)$ . Les solutions de (I-86.c) sont les  $h_m(kr)$  qui sont les fonctions de Bessel sphériques de 3ème espèce communément appelées fonctions de Hankel, telles que :

$$h_m(kr) = j_m(kr) + i y_m(kr) \quad (\text{I-87})$$

où  $j_m$  et  $y_m$  sont les fonctions de Bessel sphériques de première et seconde

espèce.

Il faut également noter que :

$$Y_m^1(\theta, \varphi) = (-1)^l \sqrt{\gamma_{m1}} P_m^1(\cos\theta) e^{i1\varphi} \quad (\text{I-88})$$

avec :

$$\gamma_{m1} = \frac{2m+1}{4\pi} \frac{(m-1)!}{(m+1)!}$$

Les  $Y_m^1$  sont les harmoniques sphériques.

### I - 3.1.2 Etablissement des équations de champ nul

Le point de départ est la formulation intégrale de Helmholtz intérieure (I-52). Dans une sphère  $S$  dont le centre est l'origine du repère, de rayon  $R$  et inscrite dans la frontière  $\Gamma$ , on décompose la fonction de Green  $g$  sous la forme de la série suivante qui converge uniformément en  $\underline{r}$  et  $\underline{r}'$  [64,65] :

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{ik}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|l| \leq m} \Psi_m^l(\underline{r}') \tilde{\Psi}_m^l(\underline{r}) \quad \underline{r}' \in \Gamma \quad \underline{r} \in S \quad (\text{I-89})$$

avec :

$$\begin{cases} \Psi_m^l(\underline{r}') = h_m(kr') Y_m^l(\theta', \varphi') \\ \tilde{\Psi}_m^l(\underline{r}) = j_m(kr) \bar{Y}_m^l(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (\text{I-90})$$

Les  $\Psi_m^l$  sont les ondes sphériques divergentes, les  $\tilde{\Psi}_m^l$  les ondes sphériques convergentes régulières à l'origine. La pression incidente est également décomposée :

$$p_i(\underline{r}) = ik \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|l| \leq m} c_m^l \tilde{\Psi}_m^l(\underline{r}) \quad \underline{r} \in S \quad (\text{I-91})$$

La transformation de (I-52) à l'aide de (I-89) et (I-91) donne :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|l| \leq m} c_m^l \tilde{\Psi}_m^l(\underline{r}) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|l| \leq m} \frac{\tilde{\Psi}_m^l(\underline{r})}{4\pi} \int \int_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial \Psi_m^l(\underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}' \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|l| \leq m} \frac{\tilde{\Psi}_m^l(\underline{r})}{4\pi} \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \Psi_m^l(\underline{r}') d\underline{r}' = 0 \quad \underline{r} \in S \quad (\text{I-92}) \end{aligned}$$

On compose alors (I-92) par  $Y_p^q(\theta, \varphi)$  et on intègre  $\underline{r}$  sur la surface de S. D'après les propriétés d'orthonormalité des  $Y_p^q$  :

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi} Y_p^q(\theta, \varphi) \bar{Y}_m^l(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta \right) d\varphi = \delta_{mp} \delta_{lq}$$

il vient :

$$\begin{aligned} j_m(kR) \int \int_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial \Psi_m^l(\underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}' - j_m(kR) \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \Psi_m^l(\underline{r}') d\underline{r}' \\ = -4\pi j_m(kR) c_m^l \quad m = 0, \dots, \infty \quad |l| \leq m \quad (\text{I-93}) \end{aligned}$$

En choisissant S telle que  $kR$  ne soit pas un zéro de  $j_m$  (sinon (I-93) est triviale), on obtient :

$$\begin{aligned} \int \int_{\Gamma} p(\underline{r}) \frac{\partial \Psi_m^l(\underline{r})}{\partial n} d\underline{r} - \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} \Psi_m^l(\underline{r}) d\underline{r} \\ = -4\pi c_m^l \quad m = 0, \dots, \infty \quad |l| \leq m \quad (\text{I-94}) \end{aligned}$$

Cette technique de résolution permet donc, à partir d'une condition sur  $\Gamma$  de type Neumann ou Dirichlet, de calculer la pression ou sa dérivée normale sur  $\Gamma$  pour un problème de rayonnement ou de diffraction. La solution existe et est unique pour tout nombre d'onde. On peut alors en déduire la pression en tout point du fluide  $\Omega_f$  par application de la représentation (I-47.a).

La méthode de champ nul, contrairement à celle de la matrice de transition qui en est proche et qui est détaillée dans un paragraphe suivant, n'est pas, jusqu'à maintenant exploitée par les acousticiens. Elle a été appliquée dans le domaine de l'Electromagnétisme par J.C. BOLOMEY et A. WIRGIN [46] qui ont déterminé des densités de courant sur des cylindres infinis de

diverses sections. Ils ont remarqué sa limite d'application à des cylindres dont la section n'est pas trop éloignée du cercle, sous peine d'obtenir des résultats faux.

La prise en compte d'une symétrie axiale du problème suivant  $\varphi$  simplifie grandement les équations de champ nul. Cette propriété se traduit par l'utilisation de nouvelles fonctions sphériques  $\Psi_m$  et  $\tilde{\Psi}_m$  qui se déduisent des précédentes en annulant 1 :

$$\begin{aligned}\Psi_m(\underline{r}) &= h_m(kr) Y_m(\theta) \\ \tilde{\Psi}_m(\underline{r}) &= j_m(kr) \bar{Y}_m(\theta)\end{aligned}\tag{I-95}$$

avec :

$$Y_m(\theta) = \sqrt{\frac{2m+1}{4\pi}} P_m(\cos\theta)\tag{I-96}$$

Les fonctions  $P_m$  sont les polynômes de Legendre. Les fonctions sphériques employées ne font plus intervenir  $\varphi$ . La variable  $\varphi$  est uniquement localisée dans l'élément de surface  $d\underline{r}'$  et prend ses valeurs entre 0 et  $2\pi$ . Cette remarque permet de supprimer l'intégration suivant  $\varphi$  et de récupérer des intégrales simples que l'on multiplie alors par  $2\pi$ .

### I - 3.1.3 Cas particulier de la diffraction

Considérant l'équation (I-94), on constate que dans le cas de la diffraction, il faut déterminer les coefficients  $c_m^1$  servant à la décomposition de la pression incidente en ondes sphériques régulières à l'origine. En reprenant l'équation (I-91), on compose chaque membre par  $Y_p^q(\theta, \varphi)$  et on intègre sur S :

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi p_i(\underline{r}) Y_p^q(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi \\ &= ik \sum_{m=0}^{\infty} j_m(kR) \sum_{|l| \leq m} c_m^1 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi Y_p^q(\theta, \varphi) \bar{Y}_m^1(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi\end{aligned}\tag{I-97}$$

On simplifie en tenant compte des propriétés d'orthonormalité des  $Y_p^q$  :

$$c_m^1 = - \frac{i}{k j_m(kR)} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi p_i(\underline{r}) Y_m^1(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi \quad (I-98)$$

Une telle relation sous-entend que la position de S soit fixée. Néanmoins, les quelques manipulations mathématiques suivantes suppriment totalement ce défaut.

Classiquement, la pression incidente  $p_i$  est portée par une onde plane d'amplitude A dans une direction définie par les angles  $\Theta$  et  $\Phi$  :

$$p_i(\underline{r}) e^{-i\omega t} = A e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \quad (I-99)$$

Sur la sphère S,  $\underline{k} \cdot \underline{r}$  s'écrit de façon simplifiée :

$$\underline{k} \cdot \underline{r} = k R K(\theta, \varphi) \quad \underline{r} \in S \quad (I-100)$$

où :

$$K(\theta, \varphi) = \sin\theta \cos\varphi \sin\Theta \cos\Phi + \sin\theta \sin\varphi \sin\Theta \sin\Phi + \cos\theta \cos\Theta$$

Après un développement de  $e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}}$  en série de Taylor, on a :

$$p_i(\underline{r}) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik K)^n}{n!} R^n \quad (I-101)$$

De plus, on connaît une forme équivalente à  $j_m(kR)$  quand R est petit [5] :

$$R \longrightarrow 0 \quad j_m(kR) \sim \frac{k^m m! 2^m}{(2m+1)!} R^m \quad (I-102)$$

Si on reprend (I-98) en considérant (I-101) et (I-102) et qu'on identifie suivant les puissances de R, alors :

$$c_m^1 = - \frac{i^{m+1} (2m+1)!}{k 2^m (m!)^2} A \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi (K(\theta, \varphi))^m Y_m^1(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi \quad (I-103)$$

I - 3.2 Méthode de la matrice de transition

La méthode de la matrice de transition, communément appelée matrice T, est uniquement adaptée à la diffraction acoustique et présente de grandes similitudes avec celle de champ nul. Elle a été proposée par P.C. WATERMAN [14]. Il suffit d'adapter la démonstration du I - 3.1.2 en y apportant les modifications suivantes :

- le point de départ est la représentation de Helmholtz extérieure :

$$\int \int_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}' - \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' = p_d(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Omega_f \quad (\text{I-104})$$

où :

$$p(\underline{r}) = p_i(\underline{r}) + p_d(\underline{r})$$

- on considère un volume S' constitué du domaine  $\Omega_f$  auquel on a ôté la sphère de centre l'origine du repère, de rayon R' et circonscrite à  $\Gamma$ ,

- la fonction de Green est écrite sous la forme d'une série :

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{ik}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{||l|| \leq m} \tilde{\Psi}_m^l(\underline{r}') \Psi_m^l(\underline{r}) \quad \underline{r}' \in \Gamma \quad \underline{r} \in S' \quad (\text{I-105})$$

- la pression diffractée  $p_d$  est décomposée suivant les ondes sphériques divergentes :

$$p_d(\underline{r}) = ik \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{||l|| \leq m} d_m^l \Psi_m^l(\underline{r}) \quad \underline{r} \in S' \quad (\text{I-106})$$

Par analogie, il vient :

$$\begin{aligned} \int \int_{\Gamma} p(\underline{r}) \frac{\partial \tilde{\Psi}_m^l(\underline{r})}{\partial n} d\underline{r} - \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} \tilde{\Psi}_m^l(\underline{r}) d\underline{r} \\ = 4\pi d_m^l \quad m = 0, \dots, \infty \quad ||l|| \leq m \quad (\text{I-107}) \end{aligned}$$

Le principe de la méthode consiste à éliminer l'inconnue  $p$  sur  $\Gamma$ . Pour cela, WATERMAN a initialement exprimé la pression sur  $\Gamma$  sous la forme d'une série de fonctions  $\psi_p^q$  formant un système complet :

$$p(\underline{r}) = \sum_p \sum_q a_p^q \psi_p^q(\underline{r}) \quad (\text{I-108})$$

Le choix de ces fonctions conditionne l'efficacité numérique de la méthode. En combinant les équations (I-94) et (I-107) après y avoir injecté (I-108), on élimine l'inconnue de surface  $a_p^q$  et on obtient la matrice de transition reliant les coefficients de la pression diffractée  $d_m^1$  à ceux de la pression incidente  $c_m^1$ .

Cette méthode a servi à calculer la pression diffractée à l'infini lorsque l'onde incidente est plane et d'angle d'incidence quelconque pour les surfaces élastiques ou inélastiques suivantes :

- . la sphère [66],
- . le sphéroïde [15,66-69],
- . le cylindre infini de section elliptique (avec décomposition en fonctions d'ondes sphériques [70] ou cylindriques [71]), de section carrée [70] ou intersection de deux cercles [70],
- . le cylindre fini avec calottes hémisphériques [15,68],
- . l'ensemble cône-hémisphère [15],
- . le disque circulaire d'épaisseur nulle [69,72],
- . la bande plane infinie d'épaisseur nulle [14].

Comme pour la méthode de champ nul, ses applications sont limitées à des calculs de diffraction sur des objets dont la forme n'est pas trop éloignée de la sphère. W. TOBOCMAN [66] a vérifié que cette méthode converge plus rapidement que la formulation intégrale de Helmholtz quand la structure est proche d'une sphère. Il a ensuite constaté la dégradation rapide de la méthode de la matrice  $T$  quand l'excentricité augmente alors que la représentation de Helmholtz extérieure n'est pas affectée de façon significative. Il a alors suggéré, comme de nombreux auteurs, de remplacer les fonctions sphériques par des fonctions sphéroïdales que l'on caractérise en faisant apparaître les solutions séparées de l'équation de Helmholtz pour le problème extérieur dans le système des coordonnées sphéroïdales. De telles fonctions permettent de mieux décrire une surface présentant une forte excentricité. D'autres améliorations ont été proposées. Parmi celles-ci, la

procédure décrite par G.C. GAUNAURD et M.F. WERBY [73] a permis le calcul de la diffraction par un sphéroïde rigide pour lequel :

$$\frac{L}{D} = 30$$

où L est la longueur et D le diamètre. La méthode de la matrice T permet de prendre en compte le caractère élastique d'une structure. Malgré la non séparabilité de l'équation vectorielle de Helmholtz dans le système des coordonnées sphéroïdales, une technique, basée sur la troisième identité de Betti et un choix approprié d'une base de fonctions sphéroïdales vectorielles, a permis des calculs sur des surfaces excentrées. R.H. HACKMAN et al [74,75] ont ainsi obtenu des résultats de diffraction par un cylindre fini élastique avec calottes hémisphériques tel que :

$$\frac{L}{D} = 10$$

Les difficultés numériques, qui interviennent quand le degré des fonctions d'ondes augmente, sont dues au comportement délicat de ces fonctions qui peuvent faire apparaître au cours du calcul des valeurs en dehors des limites acceptées par l'ordinateur.

#### I - 4 TECHNIQUES DE SUPPRESSION DES FREQUENCES IRREGULIERES

L'existence des fréquences irrégulières est liée au type de la représentation intégrale envisagée. Certaines formulations intégrales permettent théoriquement de calculer la solution du problème de propagation étudié à toute fréquence, au détriment toutefois, en particulier dans le cas du problème de Neumann, de la simplicité des calculs numériques. Le traitement numérique de cette classe de représentations intégrales est alors délicat. Par exemple, la représentation par potentiel hybride contient un noyau ayant une forte singularité qui est :

$$\frac{\partial^2 g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n \partial n'}$$

La représentation de Helmholtz extérieure a été choisie pour sa simplicité de

mise en oeuvre et le comportement satisfaisant de ses intégrales. Dans la littérature, deux méthodes de suppression des fréquences irrégulières appliquées à cette formulation existent : la méthode de Schenck et la méthode de Jones. La première technique [10] est employée depuis plus de vingt ans et est contenue dans le code de calcul CHIEF [76]. Si la méthode de Schenck a fait école, celle de Jones [56], plus précisément la seconde méthode qu'il propose ("an alternative method"), n'avait encore jamais été utilisée. A l'initiative de B. STUPFEL [39,40], cette méthode a été adoptée et développée au laboratoire. Contrairement à CHIEF, elle présente l'avantage de fixer le nombre d'équations supplémentaires à fournir au système final d'équations en fonction du numéro du  $k$  à problème qui peut toujours être estimé (cf le paragraphe I - 2.4.2.2).

#### I - 4.1 Méthode de Schenck

Depuis la première introduction de la méthode jusqu'aux plus récents calculs effectués [54], leurs auteurs se sont souvent limités au cas du rayonnement acoustique d'un corps de forme quelconque soumis à une condition de Neumann. L'extension aux calculs de diffraction ne présente aucune difficulté. Le point de départ est la représentation de Helmholtz extérieure. Aux fréquences irrégulières, cette équation admet une infinité de solutions de la forme :

$$p(\underline{r}) + A u(\underline{r})$$

où  $u(\underline{r})$  est une solution non nulle de l'équation homogène associée à (I-47.b) et  $A$  est une constante arbitraire.

H.A SCHENCK [10] a associé à l'équation (I-47.b) l'équation intégrale de Helmholtz intérieure (I-52). Il a prouvé qu'une solution de (I-47.b) est également solution de (I-52) à condition que le point intérieur  $\underline{r}$  ne soit pas situé sur l'une des surfaces nodales de la fonction propre  $\Psi$  associée à la fréquence irrégulière considérée définie par :

$$\Psi(\underline{r}) = \int \int_{\Gamma} u(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_1 \quad (\text{I-109})$$

où  $\Psi$  est également solution de (I-74). Dans le cas contraire, (I-52) est l'équation triviale. Cette technique de surdétermination présente de sérieux

inconvenients :

- on ne connaît pas à priori la position des surfaces nodales sauf dans le cas particulier où le problème intérieur est soluble,
- la densité de ces surfaces ne peut que croître avec la fréquence [7] : pour la nième fréquence irrégulière, les surfaces nodales découpent le domaine intérieur en au plus n sous-domaines.

Par conséquent, il est nécessaire d'imposer plusieurs points intérieurs pour qu'au moins, l'un d'entre eux ne soit pas sur une surface nodale ou en soit suffisamment éloigné. Le nombre de ces points et leur position sont alors soumis au hasard et ce choix devient de plus en plus aléatoire quand la fréquence augmente.

La méthode a été mise à l'épreuve avec succès mais pour des corps de géométrie simple et peu excentrés et des fréquences irrégulières ne dépassant pas  $kL = 10$  (L est une longueur caractéristique de l'objet). On peut citer des calculs de rayonnement de structures telles que :

- . la sphère [10,54],
- . le cylindre [10,54],
- . le parallélépipède rectangle [10].

On peut y ajouter des calculs de diffraction par une sphère rigide [52].

#### I - 4.2 Méthode de Jones

Dans son article de référence [56], D.S. JONES propose une méthode de surdétermination de la représentation de Helmholtz extérieure qui garantit l'unicité de la solution aux fréquences irrégulières de calcul. Elle consiste à surdéterminer l'équation (I-47.b) par une ou des équations de champ nul que l'on rappelle ici :

$$\int \int_{\Gamma} p(\underline{r}) \frac{\partial \Psi_m^1(\underline{r})}{\partial n} d\underline{r} - \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} \Psi_m^1(\underline{r}) d\underline{r} = -4\pi c_m^1 \quad m = 0, \dots, M-1 \quad ||l|| \leq m \quad (\text{I-110})$$

où  $\Psi_m^1$  est une onde sphérique divergente et  $c_m^1$  est un coefficient de la décomposition de la pression incidente en série d'ondes sphériques convergentes régulières à l'origine.

JONES a démontré qu'il suffit de surdéterminer (I-47.b) par les premières équations (I-110) de degré inférieur ou égal à  $M - 1$  pour assurer l'unicité de la solution aux  $M$  premières fréquences irrégulières. Sachant toujours calculer ou estimer l'ordre de la fréquence irrégulière, on dispose ainsi d'une condition suffisante qui permet la levée de l'indétermination à la fréquence de travail. Pour la  $M$ ème fréquence irrégulière, on sait que les surfaces nodales correspondantes découpent  $\Omega_1$  en au plus  $M$  sous-domaines. En pratique, leur nombre est souvent très inférieur à  $M$ , surtout dans la gamme des hautes fréquences où  $M$  est grand. D'après la démonstration de JONES, dans ce cas, le critère de détermination du nombre des équations supplémentaires est beaucoup trop large car il suffit alors d'un nombre d'équations très inférieur à celui qu'il préconise.

B. STUPFEL [39,40] a proposé et démontré, dans le cas de la symétrie axiale, un nouveau critère beaucoup plus strict qui permet de limiter considérablement ce nombre : si, pour la  $M$ ème fréquence irrégulière, la pression sur  $\Gamma$  est solution des équations (I-47.b) et (I-110), alors les surfaces nodales de la fonction propre correspondante, définie par (I-109) et vérifiant le problème de Dirichlet intérieur, se comportent, au voisinage de l'origine des coordonnées, comme un nombre fini de surfaces régulières, tangentes aux cônes lieux des points  $\underline{r}(r, \theta, 0)$  :

$$Y_M(\theta) = 0$$

Ceci implique que toutes les fonctions propres ne possédant pas cette propriété sont nécessairement nulles et les fréquences irrégulières associées sont alors supprimées. Par extension, si, pour une fréquence irrégulière donnée, l'origine du repère appartient à  $n$  surfaces nodales différentes, la surdétermination du système par toutes les équations de champ nul de degré  $m$  tel que  $m \leq n$  assure l'unicité du système.

En conclusion, cette méthode évite le choix arbitraire du nombre de points intérieurs et de leur position et fournit un critère simple fixant le nombre d'équations supplémentaires. On sait qu'avec l'utilisation de fonctions d'ondes sphériques, la méthode de champ nul ne donne pas de résultats

satisfaisants pour des objets trop excentrés. Cet inconvénient est grandement atténué par le couplage avec la formulation intégrale (I-47.b) qui, elle, n'est nullement pénalisée par l'excentricité de l'objet [66].

*Remarque :*

En injectant les valeurs  $m = 1 = 0$  dans l'équation (I-110), on retrouve la représentation intégrale de Helmholtz intérieure quand le point intérieur coïncide avec l'origine du repère géométrique.

## I - 5 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES AUTRES METHODES DE RESOLUTION

Dans cette étude, qui ne se veut pas exhaustive, on répertorie les principales méthodes de modélisation du rayonnement et de la diffraction acoustique autres que les formulations intégrales et le champ nul [77]. On les classe dans trois catégories différentes : la méthode des éléments finis, la séparation des variables, la décomposition de la pression en série de fonctions solutions de l'équation de Helmholtz. Pour chacune d'entre elles, on donne son principe de base ainsi que son domaine d'application, ses avantages et ses défauts. On détaille particulièrement la méthode des éléments finis en prévision de l'analyse du couplage fluide-structure qui est développée dans le paragraphe II - 5. Les méthodes asymptotiques et la méthode approchée de la théorie géométrique de la diffraction, développée originellement par J.B. KELLER [28-30] et uniquement valable pour les hautes fréquences, ne sont pas abordées ici car elles sortent du thème de cette thèse.

### I - 5.1 Méthode des éléments finis

Cette méthode est très puissante puisque, outre la résolution du problème fluide, elle permet, par intégration simultanée des équations de l'élasticité, de modéliser toute structure rayonnante, hétérogène et de forme complexe [16]. Elle est notamment opérationnelle au laboratoire d'Acoustique de l'I.S.E.N. où elle a été introduite et développée par J.N. DECARPIGNY et al [20,31-37] sous la forme du code de calcul ATILA [78]. Dans ce qui suit, on utilise les conventions d'Einstein. Lorsqu'il y a ambiguïté, on exprime les sommations par la notation  $\Sigma$ . Est succinctement décrit ici la résolution du problème fluide ouvert, dont les équations sont :

- en tout point du domaine fluide  $\Omega_f$ , l'équation de Helmholtz (I-27),

- en tout point de l'interface  $\Gamma$ , la condition de couplage cinématique :

$$n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \omega^2 n_i u_i \quad (\text{I-111})$$

- sur certaines surfaces, la condition aux limites de Dirichlet :

$$p = p' \quad (\text{I-112})$$

où  $p'$  est une quantité connue. On note  $\Gamma_p$  l'ensemble des éléments soumis à cette condition.

- sur certaines surfaces, la condition aux limites de Neumann :

$$n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \psi \quad (\text{I-113})$$

où  $\psi$  est une quantité connue. On note  $\Gamma_n$  l'ensemble des éléments soumis à ces conditions.

- la condition de Sommerfeld (I-29).

A l'équation de Helmholtz (I-27) et aux conditions aux limites du problème fluide, on associe la quantité stationnaire  $L_f$  :

$$\begin{aligned} L_f = & \frac{1}{\rho \omega^2} \int \int \int_{\Omega_f} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^2 - k^2 p^2 \right) d\Omega_f - \frac{1}{\rho \omega^2} \int \int_{\Gamma_p} (p - p') n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Gamma_p \\ & - \frac{1}{\rho \omega^2} \int \int_{\Gamma_n} p \psi d\Gamma_n - \int \int_{\Gamma} p u_i n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{I-114})$$

dont elles sont les équations d'Euler. Une condition aux limites de flux nul, déduite de (I-113) en posant  $\psi = 0$ , n'apparaît pas dans la formulation dont elle est, de ce fait, la condition aux limites naturelles.

Le domaine fluide étant décomposé en éléments simples, la pression et le déplacement peuvent être calculés dans chaque élément  $e$  à partir de leurs valeurs nodales par l'intermédiaire des fonctions de forme [16] :

$$p = [N_p^e] \tilde{p}^e$$

$$\underline{u} = [N^e] \tilde{u}^e \quad (\text{I-115})$$

$$\text{grad } p = [B^e] \tilde{p}^e$$

où  $N_p^e$ ,  $N^e$  et  $B^e$  sont les matrices d'interpolation,  $\tilde{p}^e$  et  $\tilde{u}^e$  sont les valeurs nodales de la pression et du déplacement sur un élément  $e$  de l'interface. Cette discrétisation est détaillée dans le paragraphe II - 1.  $L_f$  s'exprime par:

$$L_f = \frac{1}{\rho \omega^2} \sum_e \left( \frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega_f^e} \tilde{p}^{eT} [B^e]^T [B^e] \tilde{p}^e d\Omega_f^e \right. \\ \left. - \frac{1}{2} k^2 \int \int \int_{\Omega_f^e} \tilde{p}^{eT} [N^e]^T [N^e] \tilde{p}^e d\Omega_f^e - \int \int_{\Gamma_n^e} \tilde{p}^{eT} [N^e]^T \psi d\Gamma_n^e \right) \\ (2) \\ - \sum_e \int \int_{\Gamma^e} \tilde{u}^{eT} [N^e]^T \tilde{u} [N^e] \tilde{p}^e d\Gamma^e \quad (\text{I-116})$$

où la première sommation concerne les éléments fluides  $e$  volumiques ou surfaciques, alors que la seconde concerne les éléments interfaces entre les éléments solides et fluides. On pose :

$$[H^e] = \int \int \int_{\Omega_f^e} K [B^e]^T [B^e] d\Omega_f^e$$

$$[M_1^e] = \int \int \int_{\Omega_f^e} \rho [N^e]^T [N^e] d\Omega_f^e$$

(I-117)

$$\tilde{\psi}^e = \int \int_{\Gamma_n^e} [N^e]^T \psi d\Gamma_n^e$$

$$[L^e] = \int \int_{\Gamma^e} [N^e]^T \tilde{u} [N^e] d\Gamma^e$$

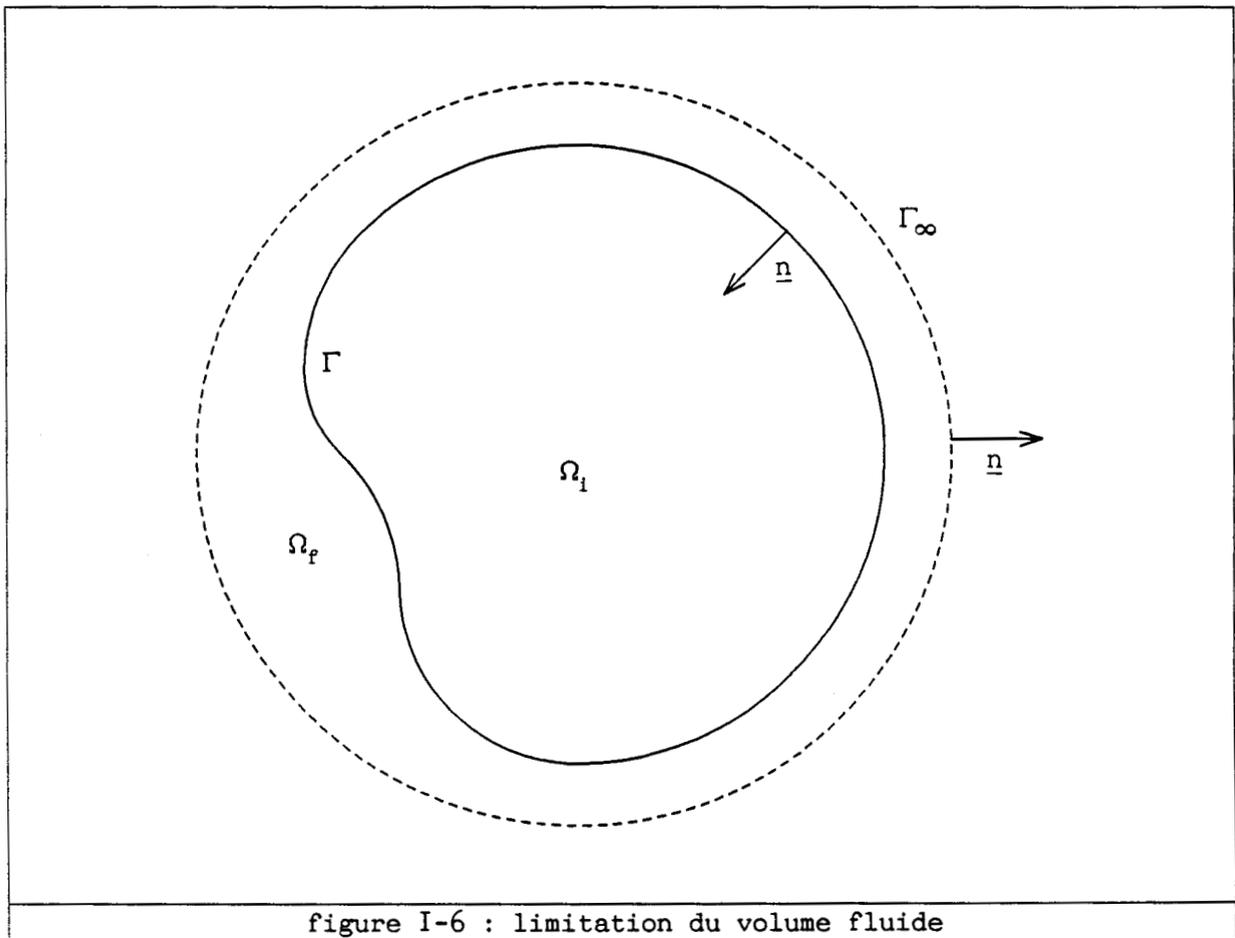
où  $K$  est le coefficient de compressibilité du fluide,  $[H^e]$  et  $[M_1^e]$  sont respectivement appelées matrice de rigidité et de masse fluide et  $[L^e]$  est la

matrice de connectivité ou de couplage d'un élément interface. On note  $\underline{\tilde{u}}$  le vecteur des valeurs nodales du déplacement sur toute l'interface  $\Gamma$  et  $\underline{\tilde{p}}$  le vecteur des valeurs nodales de la pression sur tout le domaine  $\Gamma \cup \Omega_f$ . L'application du principe variationnel conduisant à minimiser  $L_f$  par rapport aux valeurs nodales de  $\underline{\tilde{u}}$  et  $\underline{\tilde{p}}$ , on obtient :

$$\left( [H] - \omega^2 [M_1] \right) \underline{\tilde{p}} = \rho^2 c^2 \omega^2 [L]^T \underline{\tilde{u}} + \rho c^2 \underline{\tilde{\Psi}} \quad (\text{I-118})$$

où  $[H]$ ,  $[M_1]$ ,  $[L]$  et  $\underline{\tilde{\Psi}}$  résultent de l'assemblage [16,20] des matrices et vecteurs élémentaires décrits en (I-117).

La prise en compte de la condition de Sommerfeld (I-29) est un problème délicat pour la méthode des éléments finis car il faut, à l'évidence, limiter le fluide à un volume intérieur d'une surface  $\Gamma_\infty$  qui peut, suivant les applications, être assez proche de la structure rayonnante (figure I-6).



Sur  $\Gamma_\infty$ , on impose alors une condition d'amortissement appropriée, qui doit

jouer le rôle du fluide extérieur [17,79]. En général,  $\Gamma_\infty$  est choisie comme étant une frontière sphérique, de rayon R, sur laquelle on impose la condition [17] :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \left( \frac{1}{R} + ik \right) p \quad (\text{I-119})$$

En fait, à l'extérieur de la sphère circonscrite à la structure, en un point  $\underline{r}$  de coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$  :

$$p(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{-ikr}}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta, \varphi)}{(kr)^n} \quad (\text{I-120})$$

où la dépendance en temps est suivant  $e^{i\omega t}$ . Cette série converge absolument et uniformément [8]. Il existe par ailleurs une relation de récurrence sur les coefficients  $F_n$  :

$$F_n(\theta, \varphi) = \frac{i}{2^n} (n(n-1) + Q) F_{n-1}(\theta, \varphi) \quad (\text{I-121})$$

où Q est l'opérateur de Beltrami pour la sphère :

$$Q. = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial.}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2.}{\partial\varphi^2} \quad (\text{I-122})$$

La condition (I-119) n'est donc exacte que dans le cas où le champ de pression sur  $\Gamma_\infty$  est à caractère monopolaire, i.e. donné par :

$$p(R, \theta, \varphi) = \frac{e^{-ikR}}{kR} F_0(\theta, \varphi) \quad (\text{I-123})$$

La zone de validité de cette approximation est classiquement [80] :

$$\begin{aligned} R &\gg 5 \delta' \\ R &\gg \frac{\delta^2}{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{I-124})$$

où  $\delta$  est la plus grande dimension de la source dans le plan normal à la direction de propagation et  $\delta'$  est la taille de la source dans la direction de propagation. Dans le cas contraire, il faut soit éloigner  $\Gamma_\infty$  de  $\Gamma$ , soit considérer d'autres termes dans le développement en série de la pression donné

par (I-120). R. BOSSUT [31] a prouvé l'efficacité de la prise en compte de l'élément dipolaire. La pression est alors composée des deux termes :

$$p(R, \theta, \varphi) = \frac{e^{-1kR}}{kR} \left( F_0(\theta, \varphi) + \frac{F_1(\theta, \varphi)}{kR} \right) \quad (\text{I-125})$$

Des techniques de développement multipolaire peuvent également être envisagées.

Le fluide compris entre  $\Gamma$  et  $\Gamma_\infty$  est maillé par des éléments finis volumiques. La taille du problème devient vite considérable quand on augmente la fréquence et l'excentricité de la géométrie. L'utilisation de la méthode des éléments finis devient irréaliste pour des nombres  $ka$  ( $a$  : dimension caractéristique de la structure) de quelques unités. Une technique de couplage entre éléments finis et équations intégrales est une solution qui est actuellement en cours de développement et qui est détaillée dans le paragraphe II - 5. Elle consiste à modéliser la structure interne par la méthode des éléments finis et le fluide par la représentation de Helmholtz extérieure surdéterminée, si nécessaire, par des équations de champ nul. Le couplage se fait sur l'interface par une matrice impédance reliant la pression et la vitesse normale. Sa mise au point est délicate mais ouvre des perspectives séduisantes pour deux raisons essentielles : la suppression du maillage volumique du fluide et la prise en compte exacte de la condition de Sommerfeld. L'effet du domaine fluide infini est alors complètement contenu dans la matrice impédance. Avec la connaissance de cette matrice, la méthode des éléments finis se limite à la résolution du problème mécanique ou électromécanique (cf [18,19,62,81]).

### I - 5.2 Séparation des variables

C'est une méthode exacte qui consiste à décomposer la pression sous la forme d'une série de fonctions convergeant normalement :

$$p(\underline{r}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Phi_j(\underline{r}) \quad (\text{I-126})$$

Pour un problème de diffraction, on remplace  $p$  par  $p_d$  dans (I-126). Cette méthode est utilisable sous certaines conditions qui limitent énormément son

champ d'action :

- la surface  $\Gamma$  est composée de surfaces de coordonnée constante dans l'un des systèmes de coordonnées orthogonales [4],
- les fonctions  $\Phi_j$  sont les solutions naturelles divergentes de l'équation d'onde dans ce système de coordonnées et vérifient la condition de Sommerfeld,
- les fonctions  $\Phi_j$  sont tabulées et d'un maniement le plus simple possible.

Après avoir déterminé les fonctions  $\Phi_j$ , les conditions aux limites fournissent les valeurs des coefficients  $a_j$ .

Une surface  $\Gamma$  vérifiant la première condition est décrite par l'équation :

$$\frac{x^2}{\xi - a} + \frac{y^2}{\xi - b} + \frac{z^2}{\xi - c} = 1 \quad (\text{I-127})$$

où  $a, b, c$  sont des nombres réels,  $x, y, z$  les coordonnées cartésiennes et  $\xi$  un paramètre réel. Des cas simples comme le rayonnement ou la diffraction par un cylindre infini ou la sphère sont répertoriés [4]. Des calculs de diffraction sur des sphéroïdes pénétrables ont été entrepris [21,22]. Le traitement complètement tridimensionnel par cette technique ne s'applique raisonnablement qu'à la sphère.

La méthode de séparation des variables est pénalisée par deux aspects numériques : les séries sont tronquées et les fonctions  $\Phi_j$  sont calculées par approximations. Malgré ceci, des algorithmes extrêmement précis et performants pour le calcul de fonctions spéciales permettent à cette méthode, dans le cas où son utilisation est justifiée, de servir de référence aux autres méthodes approchées.

### I - 5.3 Décomposition de la pression en série de fonctions solutions de l'équation de Helmholtz

Quand on ne dispose pas d'une géométrie simple permettant un calcul analytique, on peut faire appel à cette technique qui consiste encore à

développer la pression sous la forme d'une série de fonctions  $\Phi_j$  solutions de l'équation de Helmholtz et vérifiant la condition de Sommerfeld. Les conditions nécessaires à l'utilisation de la méthode de séparation des variables ne le sont plus ici. La difficulté réside dans le calcul des coefficients  $a_j$  qui peuvent être obtenus directement par une méthode de collocation. Pour cela, on limite le développement de la pression à ses  $N$  premiers termes. On injecte ensuite cette pression approchée dans l'équation aux limites sur  $\Gamma$ . En écrivant cette équation en  $N$  points  $\underline{r}_i$  de la surface, on aboutit à la résolution d'un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues qui, pour une condition de Neumann, est :

$$\frac{\partial p(\underline{r}_i)}{\partial n} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \frac{\partial \Phi_j(\underline{r}_i)}{\partial n} \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{I-128})$$

En général, les  $\Phi_j$  sont les fonctions sphériques divergentes.

On sait qu'en dehors de la sphère circonscrite à  $\Gamma$ , la série des ondes sphériques divergentes converge uniformément. Par contre, dans le volume compris entre cette sphère et la surface  $\Gamma$ , celle-ci incluse, on ne connaît pas sa convergence. Dans l'alternative où la série converge uniformément dans  $\Gamma \cup \Omega_f$ , on dit que l'hypothèse de Rayleigh est satisfaite. Dans le cas contraire, R.F. MILLAR [24] a montré qu'il existe des coefficients  $a_j$  dépendant de  $N$  qui sont tels que :

$$\begin{aligned} N \longrightarrow \infty \quad \iint_{\Gamma} \left| \sum_{j=0}^{N-1} a_j \Phi_j(\underline{r}) - p(\underline{r}) \right|^2 d\underline{r} &= 0 \\ N \longrightarrow \infty \quad \sum_{j=0}^{N-1} a_j \Phi_j(\underline{r}) &= p(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Omega_f \end{aligned} \quad (\text{I-129})$$

Pour une condition de Neumann, il en déduit le calcul des  $a_j$  par :

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left( \iint_{\Gamma} \left| \sum_{j=0}^{N-1} a_j \frac{\partial \Phi_j(\underline{r})}{\partial n} - \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} \right|^2 d\underline{r} \right) = 0 \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (\text{I-130})$$

On peut utiliser d'autres fonctions que les fonctions sphériques, à condition qu'elles forment une série de fonctions complètes. Dans le cas d'une condition de Neumann, les dérivées normales de ces fonctions doivent vérifiées la même

propriété. Un exemple important d'application est le cylindre fini traité par J.L. BUTLER [23]. Ce problème ne peut être résolu par séparation des variables que dans le cas du problème intérieur (les  $\Phi_j$  sont des fonctions d'ondes cylindriques convergentes). BUTLER a donc appliqué la technique au calcul du champ rayonné par un cylindre fini avec une vitesse normale constante sur les deux extrémités et nulle ailleurs (symétrie axiale) en prenant des fonctions d'ondes sphériques divergentes vérifiant la condition de Sommerfeld :

$$\Phi_j(\underline{r}) = h_j(kr) P_j(\cos\theta) \quad (I-131)$$

Il faut remarquer que, dans le cas habituel de la décomposition en fonctions d'ondes sphériques divergentes, cette méthode est peu fiable pour des géométries éloignées de la sphère et présentant des discontinuités de la normale sur la surface.

## I - 6 CONCLUSION

Il ressort de cette présentation théorique que, pour la résolution du problème de Neumann extérieur en milieu fluide infini, la représentation de Helmholtz extérieure combinée, si nécessaire, avec la méthode de champ nul présente la plus grande palette d'avantages vis à vis des autres méthodes. De toutes les formulations intégrales possibles, elle est à priori une des plus simples d'utilisation et de mise en oeuvre. Contrairement à la méthode de la matrice T ou de champ nul, elle s'applique raisonnablement à toute forme géométrique. Sa supériorité sur la méthode des éléments finis est indiscutable dans la prise en compte de la condition de Sommerfeld. Enfin, la méthode de séparation des variables ou celle de la décomposition de la pression en série de fonctions solutions de l'équation de Helmholtz ont un domaine d'application très limité et des exemples d'utilisation dans la littérature beaucoup trop clairsemés pour envisager sereinement leur pratique dans cette étude. Le défaut de la représentation de Helmholtz extérieure est la présence des fréquences irrégulières. Une solution prometteuse à ce problème et, théoriquement, meilleure que la méthode de Schenck, est la méthode de Jones. Dans les chapitres suivants, la méthode choisie à l'issue de cette étude théorique est abordée numériquement et est ensuite soumise à différents tests et applications qui mettent en évidence son efficacité.

## CHAPITRE II

### RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME

*Ce chapitre contient l'ensemble des étapes à entreprendre pour, de l'aspect purement formel des équations de base, aboutir à une forme directement exploitable par l'outil informatique. Après un rappel du principe de discrétisation par des éléments finis, son application à la représentation intégrale de Helmholtz extérieure et aux équations de champ nul pour une condition de Neumann est présentée. Parallèlement, des techniques numériques améliorant la précision des calculs ou diminuant le temps de calcul sont décrites. Quand des différences notoires apparaissent, une séparation entre le cas du problème tridimensionnel et celui du problème à symétrie de révolution est effectuée. Ensuite, la technique de suppression des fréquences irrégulières par combinaison de l'équation intégrale de Helmholtz et de la méthode de champ nul est présentée. Dans une dernière partie, sont fournis tous les éléments nécessaires à la modélisation du couplage du fluide et de la structure interne.*

## II - 1 ELEMENTS FINIS DE SURFACE

### II - 1.1 Principe

La résolution des équations (I-47.b) et (I-94) se fait classiquement par l'utilisation des éléments finis de surface. Le principe est simple et se résume sommairement à découper  $\Gamma$  en domaines surfaciques élémentaires reliés entre eux par un nombre finis de points communs appelés noeuds. Un tel découpage forme un maillage (figure II-1).

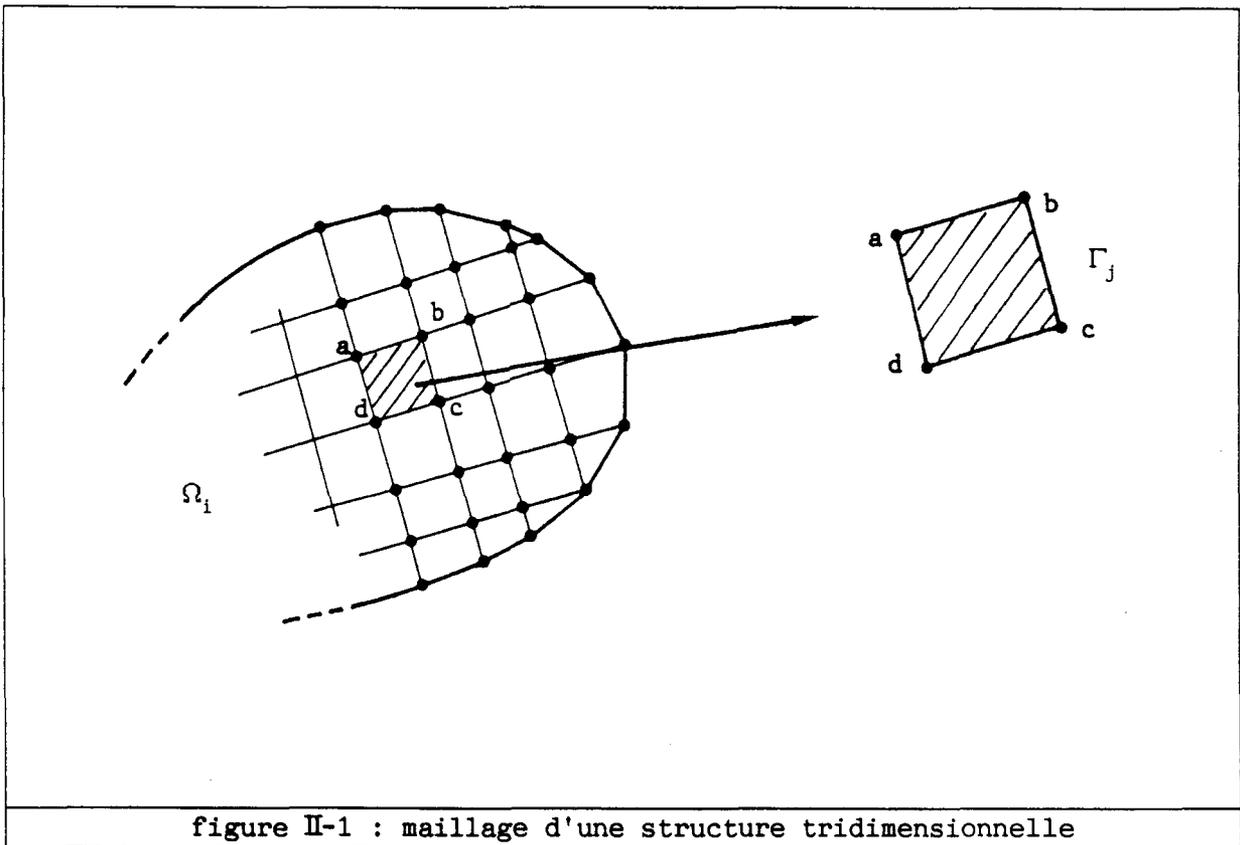


figure II-1 : maillage d'une structure tridimensionnelle

Sur chaque élément  $\Gamma_j$ , les variables du problème, c'est à dire la pression et sa dérivée normale, dépendent uniquement des valeurs qu'elles prennent aux noeuds de l'élément. Leurs valeurs sont fournies par l'intermédiaire des fonctions de forme ou d'interpolation, qui dépendent, elles, des coordonnées. Après discrétisation des équations, on aboutit alors à un système linéaire dont les inconnues sont les valeurs nodales des pressions et dont la résolution est la dernière étape du problème. La géométrie des éléments, le nombre de noeuds par élément et la loi de variation des champs de variable à l'intérieur de l'élément sont intimement liés.

## II - 1.2 Eléments et fonctions d'interpolation utilisés

Les éléments utilisés sont des éléments isoparamétriques [16]. La pression et sa dérivée normale sur un élément  $\Gamma_j$  comportant  $n$  noeuds sont approchées par les fonctions de forme  $N_i$ , suivant les relations :

$$p(\underline{r}(\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) p_{ji} \quad (\text{II-1.a})$$

$$\underline{r} \in \Gamma_j$$

$$\frac{\partial p(\underline{r}(\xi, \eta))}{\partial n} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \quad (\text{II-1.b})$$

où  $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées réduites de l'élément de surface. Les coefficients  $p_{ji}$  et  $\partial p_{ji}/\partial n$  sont les valeurs de la pression et de sa dérivée normale au noeud numéro  $i$  de l'élément  $\Gamma_j$ . Sur un élément, le nombre de fonctions de forme est égal au nombre de noeuds. Soient deux noeuds de coordonnées réduites  $(\xi_i, \eta_i)$  et  $(\xi_j, \eta_j)$  d'un même élément, on a alors :

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij} \quad (\text{II-2})$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Pour faciliter le couplage entre le code de calcul ATILA [78] et celui développé dans cette étude, les mêmes interpolations ont été utilisées. Ce sont des interpolations quadratiques. Les fonctions de forme quadratiques permettent de décrire proprement toute géométrie complexe et avec une très bonne précision des calculs sous réserve de respecter le "critère en  $\lambda/4$ ". Ce critère de convergence signifie que les dimensions latérales des éléments de surface doivent être inférieures ou égales au quart de la longueur d'onde, à la fréquence maximale de la bande étudiée. Il faut noter que ce type d'interpolation peut engendrer des discontinuités fictives de la surface en certains noeuds communs à plusieurs éléments, dues justement à la différence de courbure de ces éléments. Ces discontinuités fictives sont négligeables si le découpage est bien conditionné mais ont néanmoins, dans un souci de précision, été intégrées dans la résolution numérique du problème. Par ailleurs, une discrétisation classique basée sur la méthode des rectangles, qui consiste à approcher les variables du problème par une constante sur chaque élément  $\Gamma_j$  n'a pas été exploitée, du fait de son manque de précision et de sa consommation excessive de temps de calcul.

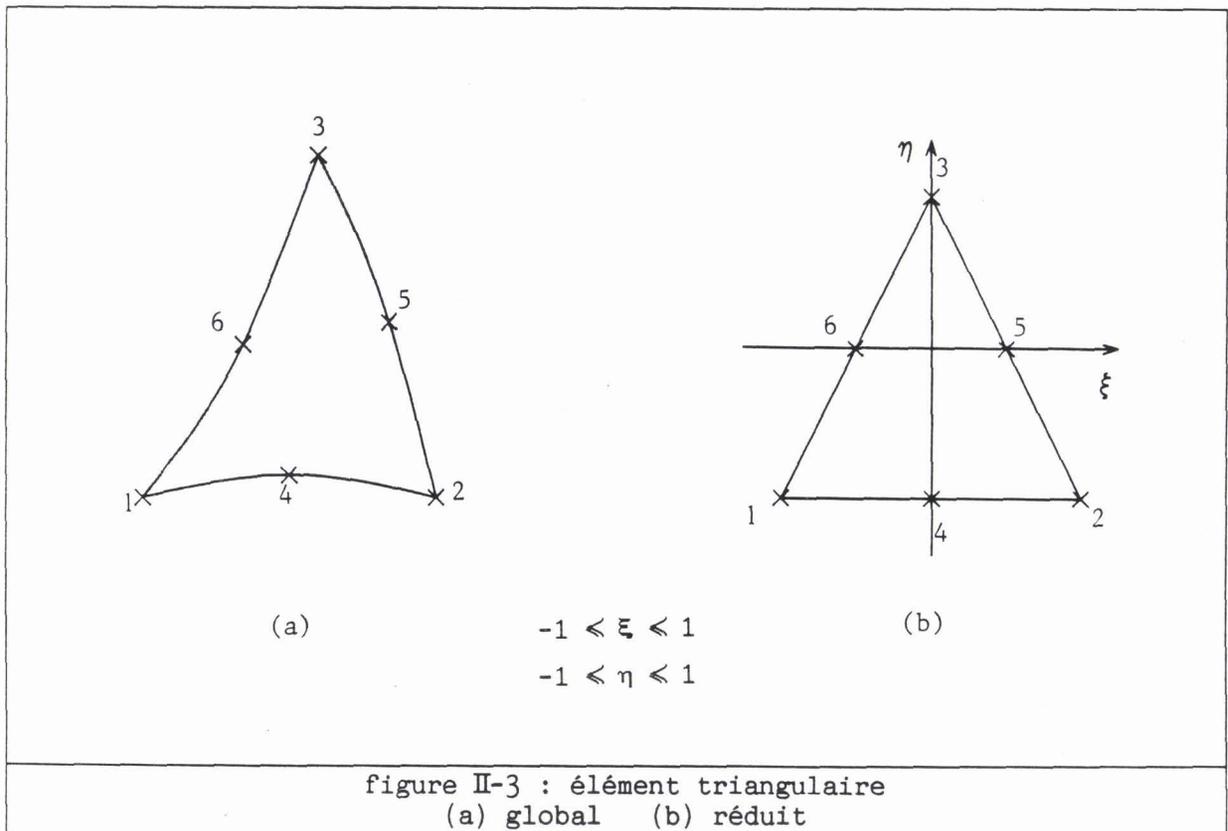
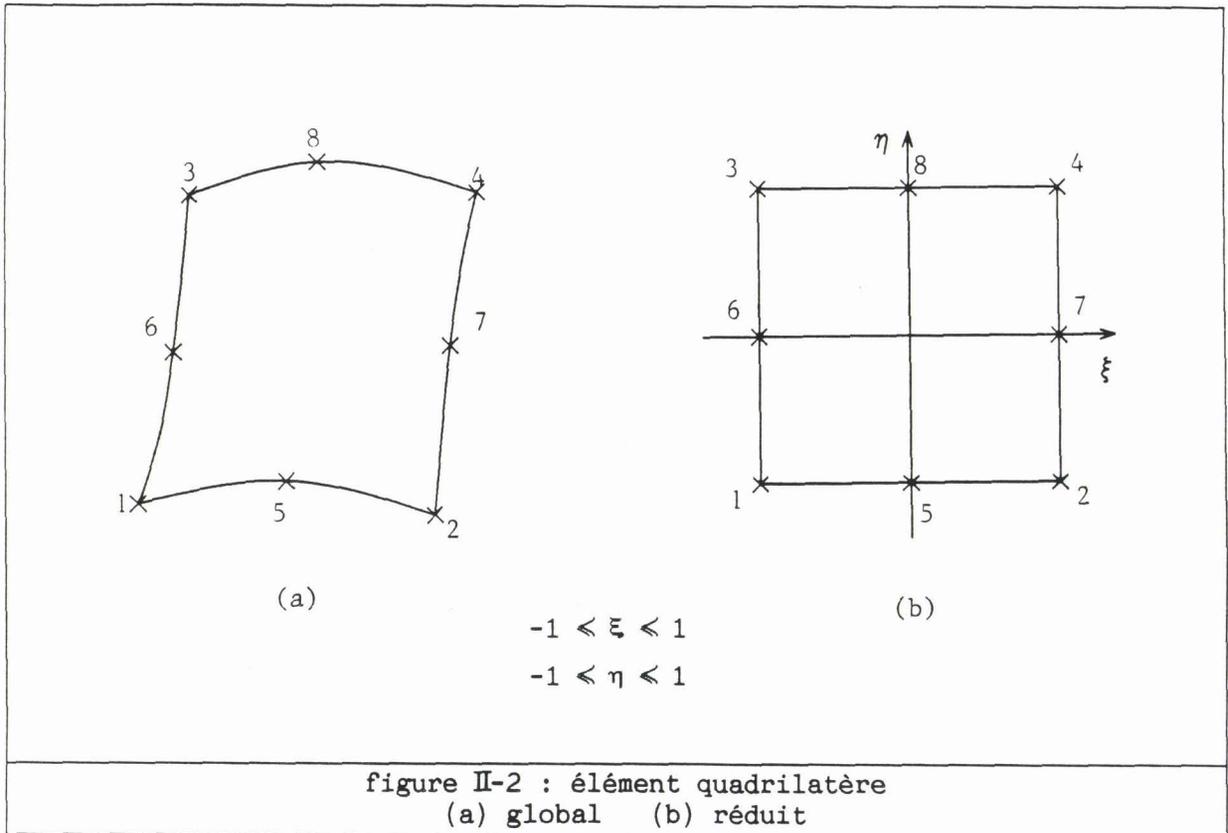
### II - 1.2.1 Cas du problème tridimensionnel

Il existe deux types d'élément de surface : les éléments quadrilatères à 8 noeuds et les éléments triangulaires à 6 noeuds. Pour l'élément quadrilatère décrit sur la figure II-2, les fonctions déduites de cette représentation sont :

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (\xi - 1) (1 - \eta) (\xi + \eta + 1) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (\xi - \eta - 1) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (\eta - \xi - 1) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta - 1) \\
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \\
 N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 - \xi) \\
 N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi) \\
 N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta)
 \end{aligned} \tag{II-3}$$

Pour l'élément triangulaire décrit sur la figure II-3, les fonctions de forme sont :

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{8} (2\xi + \eta + 1) (2\xi + \eta - 1) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{8} (2\xi - \eta + 1) (2\xi - \eta - 1) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \eta (1 + \eta) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (2\xi - \eta + 1) (1 - 2\xi - \eta) \\
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 + \eta) (2\xi + 1 - \eta) \\
 N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 + \eta) (1 - 2\xi - \eta)
 \end{aligned} \tag{II-4}$$



### II - 1.2.2 Cas du problème à symétrie axiale

Dans le cas du problème à symétrie axiale, le maillage se simplifie considérablement puisqu'il se limite au découpage d'une génératrice, dans un plan contenant l'axe de révolution (OZ), en arcs de parabole qui sont des éléments isoparamétriques à 3 noeuds, comme décrit sur la figure II-4. Sur chaque élément  $\Gamma_j$ , les fonctions de forme ne dépendent plus que d'une seule variable  $\xi$  qui donne la position sur la génératrice :

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \\ N_2(\xi) &= 1 - \xi^2 \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \end{aligned} \quad (\text{II-5})$$

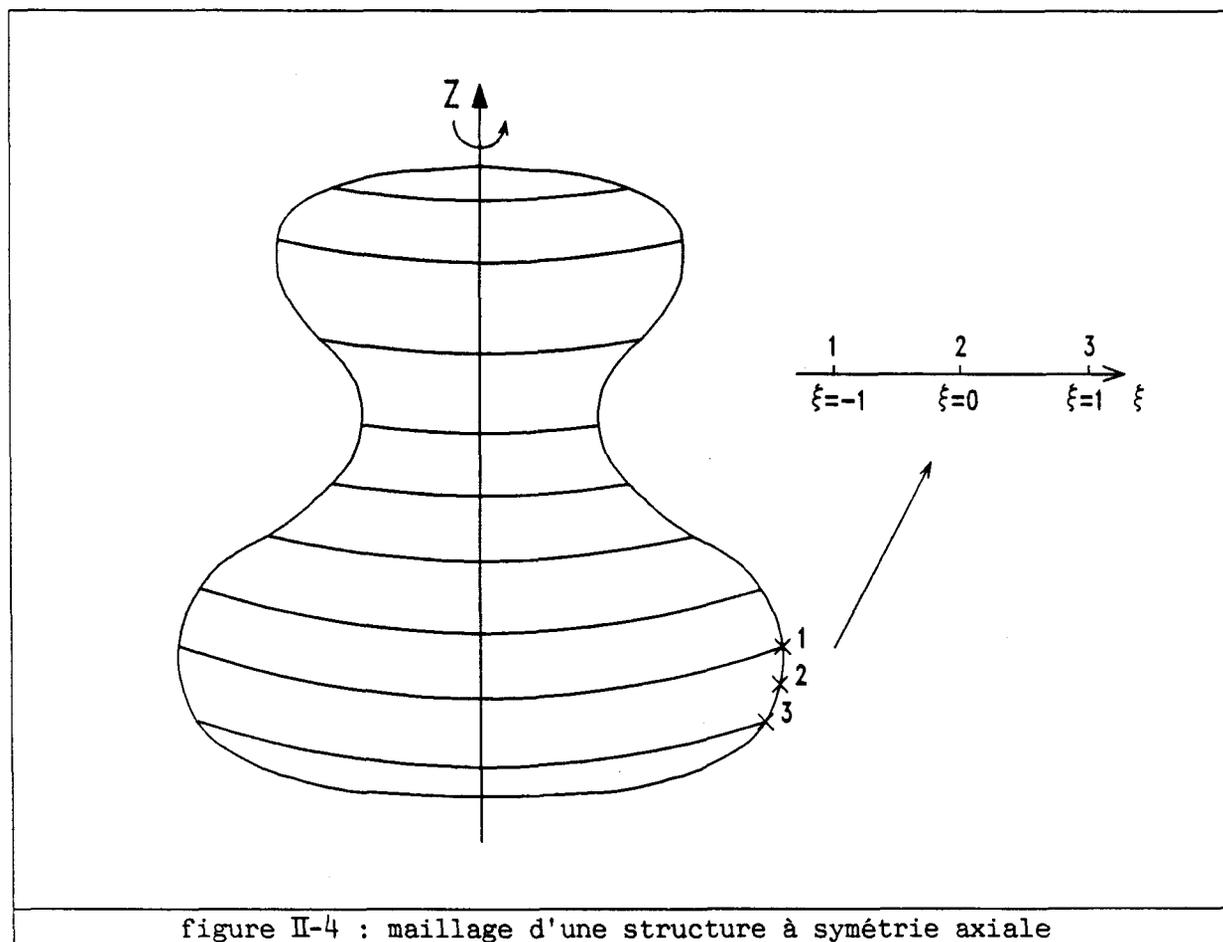


figure II-4 : maillage d'une structure à symétrie axiale

La pression et sa dérivée normale sont alors déterminées, de façon similaire à

(II-1), par les approximations suivantes :

$$p(\underline{r}(\underline{\xi})) = \sum_{i=1}^3 N_i(\underline{\xi}) p_{j_i} \quad (\text{II-6.a})$$

$$\underline{r} \in \Gamma_j$$

$$\frac{\partial p(\underline{r}(\underline{\xi}))}{\partial n} = \sum_{i=1}^3 N_i(\underline{\xi}) \frac{\partial p_{j_i}}{\partial n} \quad (\text{II-6.b})$$

### II - 1.3 Représentation de la surface

Pour rester cohérent avec le type d'approximation choisi, on interpole la géométrie par les fonctions de forme quadratiques  $N_i$  déjà définies. Dans ce paragraphe, il est nécessaire de traiter séparément le cas tridimensionnel et celui de la symétrie axiale.

#### II - 1.3.1 *Cas du problème tridimensionnel*

Le problème ne comportant aucune symétrie, il est donc indiqué de travailler dans le système des coordonnées cartésiennes  $(O,X,Y,Z)$ . On introduit l'interpolation suivant la relation suivante :

$$\underline{OM'} = \sum_{i=1}^{\text{NNE}} N_i(\underline{\xi}, \eta) \underline{OM}_{j_i} \quad (\text{II-7})$$

où  $\text{NNE} = 6$  ou  $8$  est le nombre de noeuds par élément,  $M'(x',y',z')$  est un point courant de l'élément  $\Gamma_j$ ,  $M_{j_i}(x_{j_i}, y_{j_i}, z_{j_i})$  est le noeud  $i$  de l'élément  $\Gamma_j$ . On projette alors ce vecteur sur les trois axes du repère :

$$\begin{aligned} x' &= \sum_{i=1}^{\text{NNE}} N_i(\underline{\xi}, \eta) x_{j_i} \\ y' &= \sum_{i=1}^{\text{NNE}} N_i(\underline{\xi}, \eta) y_{j_i} \\ z' &= \sum_{i=1}^{\text{NNE}} N_i(\underline{\xi}, \eta) z_{j_i} \end{aligned} \quad (\text{II-8})$$

Suivant une telle démarche, la normale à la surface au point  $\underline{r}'(\xi, \eta)$  est donnée par [44] :

$$\underline{n}'(\xi, \eta) = \frac{1}{\omega(\xi, \eta)} \left( \frac{\partial \underline{r}'}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \underline{r}'}{\partial \eta} \right) \quad (\text{II-9})$$

avec :

$$\omega(\xi, \eta) = \left| \frac{\partial \underline{r}'}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \underline{r}'}{\partial \eta} \right|$$

et :

$$\frac{\partial \underline{r}'}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z'}{\partial \xi} \end{pmatrix}$$

La même définition est adoptée pour  $\partial \underline{r}' / \partial \eta$ . La normale  $\underline{n}'$  est orientée vers le fluide de façon que  $(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{n}')$  forme un trièdre direct, où  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\eta}$  sont les vecteurs directeurs des axes du repère réduit de  $\Gamma_j$ .

L'élément de surface élémentaire est [44] :

$$d\underline{r}'(\xi, \eta) = \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{II-10})$$

### II - 1.3.2 Cas du problème à symétrie axiale

Le repère global  $(0, X, Y, Z)$  est fixé de telle sorte que l'axe  $(OZ)$  soit confondu avec l'axe de rotation. La symétrie axiale permet de ne mailler qu'une génératrice par des éléments isoparamétriques à trois noeuds. On simplifie le problème en plaçant cette génératrice dans le plan  $(OXZ)$ . La totalité de la surface est alors décrite par une rotation autour de l'axe  $(OZ)$  en faisant varier l'angle azimuthal  $\varphi$ , compté à partir de  $(OX)$ , de 0 à  $2\pi$ .

Soit un élément  $\Gamma_j$  de la génératrice, les coordonnées des trois noeuds

de  $\Gamma_j$  sont données par :  $(x_{j1}, 0, z_{j1})$  où  $i = 1, 2, 3$ . Un point courant  $\underline{r}'(x', y', z')$  de  $\Gamma$  est représenté par :

$$\begin{aligned} x'(\xi, \varphi) &= \sum_{i=1}^{NNE} N_i(\xi) x_{j1} \cos\varphi \\ y'(\xi, \varphi) &= \sum_{i=1}^{NNE} N_i(\xi) x_{j1} \sin\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z'(\xi) &= \sum_{i=1}^{NNE} N_i(\xi) z_{j1} & -1 \leq \xi \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

où  $NNE = 3$ . La normale au point  $\underline{r}'$  de  $\Gamma$  a pour expression :

$$\underline{n}'(\xi, \varphi) = \frac{1}{R(\xi)} \begin{vmatrix} -\frac{dz'(\xi)}{d\xi} \cos\varphi \\ -\frac{dz'(\xi)}{d\xi} \sin\varphi \\ \frac{dx'(\xi, 0)}{d\xi} \end{vmatrix} \quad (\text{II-12})$$

avec :

$$R(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx'(\xi, 0)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz'(\xi)}{d\xi}\right)^2}$$

L'élément de surface est :

$$d\underline{r}'(\xi, \varphi) = w(\xi) d\xi d\varphi \quad (\text{II-13})$$

avec :

$$w(\xi) = x'(\xi, 0) R(\xi)$$

## II - 2 TRAITEMENT DE L'EQUATION INTEGRALE DE HELMHOLTZ

### II - 2.1 Discrétisation

Dans la suite de l'étude, on convient d'adopter les notations suivantes :

- . NE : nombre d'éléments  $\Gamma_j$  composant la surface  $\Gamma$  de la structure,
- . NN : nombre total de noeuds du maillage,
- . NNE : nombre de noeuds par élément  $\Gamma_j$ .

Dans le cas du problème à symétrie axiale, NNE = 3. Sinon, NNE = 6 ou 8 selon que  $\Gamma_j$  est un triangle ou un quadrangle.

Pour établir les équations discrétisées, on raisonne dans le cas le plus général possible (pas de symétrie de rotation). En injectant les interpolations (II-1) dans l'équation (I-47.b) écrite au noeud  $\underline{r}_m$  du maillage, il vient :

$$\begin{aligned} \gamma_m p_m &= p_{i_m} + \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} p_{j_i} \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial g(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi, \eta))}{\partial n'} N_i(\xi, \eta) d\underline{r}'(\xi, \eta) \\ &- \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} \frac{\partial p_{j_i}}{\partial n} \iint_{\Gamma_j} g(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi, \eta)) N_i(\xi, \eta) d\underline{r}'(\xi, \eta) \quad m = 1, \dots, NN \quad (\text{II-14}) \end{aligned}$$

où  $\gamma_m$  est l'angle solide normé à  $4\pi$  au noeud  $\underline{r}_m$ ,  $p_{i_m}$  est la pression incidente au noeud  $\underline{r}_m$ ,  $p_m$  est la pression totale au noeud  $\underline{r}_m$ . Il faut remarquer que les grandeurs indicées par  $m$  correspondent à une numérotation globale alors que celles indicées par  $j_i$  correspondent à une numérotation localisée. Pour éviter toute ambiguïté de notation, on décide alors d'adopter uniquement la numérotation globale. A cet effet, on note :

$$\begin{aligned} I1_{m, \Gamma_j}(i) &= \iint_{\Gamma_j} g(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi, \eta)) N_i(\xi, \eta) d\underline{r}'(\xi, \eta) \\ I2_{m, \Gamma_j}(i) &= \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial g(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi, \eta))}{\partial n'} N_i(\xi, \eta) d\underline{r}'(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (\text{II-15})$$

Avec cette nouvelle notation, la relation (II-14) est remplacée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \gamma_m p_m &= p_{i_m} + \sum_{k=1}^{NN} p_k \left( \sum_{j/k \in \Gamma_j} I_{2_{m, \Gamma_j}}(\beta(k)) \right) \\ &- \sum_{k=1}^{NN} \left( \sum_{j/k \in \Gamma_j} \frac{\partial p_k}{\partial n} \Big|_{k \in \Gamma_j} I_{1_{m, \Gamma_j}}(\beta(k)) \right) \quad m = 1, \dots, NN \quad (\text{II-16}) \end{aligned}$$

où  $\beta(k)$  avec  $k \in \Gamma_j$  est le numéro associé au noeud  $k$  dans la numérotation locale de  $\Gamma_j$ ,

$$\sum_{j/k \in \Gamma_j}$$

est la sommation sur tous les éléments de surface  $\Gamma_j$  qui admettent le noeud  $k$  comme noeud commun. Cette relation peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{NN} p_k \left( \sum_{j/k \in \Gamma_j} I_{2_{m, \Gamma_j}}(\beta(k)) - \delta_{mk} \gamma_m \right) \\ = \sum_{k=1}^{NN} \sum_{j/k \in \Gamma_j} \frac{\partial p_k}{\partial n} \Big|_{k \in \Gamma_j} I_{1_{m, \Gamma_j}}(\beta(k)) - p_{i_m} \quad m = 1, \dots, NN \quad (\text{II-17}) \end{aligned}$$

Adoptant la notation condensée :

$$\begin{aligned} A_{mk} &= \sum_{j/k \in \Gamma_j} I_{2_{m, \Gamma_j}}(\beta(k)) - \delta_{mk} \gamma_m \\ B_{mkj} &= I_{1_{m, \Gamma_j}}(\beta(k)) \end{aligned} \quad (\text{II-18})$$

on obtient :

$$\sum_{k=1}^{NN} A_{mk} p_k = \sum_{k=1}^{NN} \sum_{j/k \in \Gamma_j} B_{mkj} \frac{\partial p_k}{\partial n} \Big|_{k \in \Gamma_j} - p_{i_m} \quad m = 1, \dots, NN \quad (\text{II-19})$$

On en déduit finalement la forme matricielle :

$$[A] \underline{p} = [B] \frac{\partial p}{\partial n} - \underline{p}_i \quad (\text{II-20})$$

où les termes encadrés par [ ] sont des matrices alors que ceux soulignés par  $\sim$  sont des vecteurs de valeurs nodales. C'est un système de NN équations à NN inconnues que l'on peut modifier pour identifier la matrice impédance de rayonnement [Z]. Sachant que :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = i \omega \rho v_{\sim n} \quad (\text{II-21})$$

où  $v_{\sim n}$  est le vecteur des valeurs nodales de la vitesse normale à  $\Gamma$ . Si [A] est inversible :

$$\underline{p} = [Z] v_{\sim n} - [A]^{-1} \underline{p}_i \quad (\text{II-22})$$

La matrice impédance est alors donnée par :

$$[Z] = i \omega \rho [A]^{-1} [B] \quad (\text{II-23})$$

## II - 2.2 Calcul des intégrales

Dans les paragraphes II - 1.2 et II - 1.3, on a explicité les quantités  $\underline{r}'$ ,  $d\underline{r}'$ ,  $\underline{n}'$  et  $N_i$ . Il reste à préciser les termes :

$$g(\underline{r}, \underline{r}') \text{ et } \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'}$$

On note :

$$D = |\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

La fonction de Green et sa dérivée normale sont :

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikD}}{D} \quad (\text{II-24})$$

$$\frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikD}}{D^2} \left( ik - \frac{1}{D} \right) (\underline{r}' - \underline{r}) \cdot \underline{n}'$$

Quand on utilise une représentation intégrale pour modéliser un problème de rayonnement ou de diffraction, la précision du résultat et le temps de calcul sont en grande partie tributaires de la méthode de calcul des intégrales. Pour satisfaire au mieux ces deux critères, toutes les intégrations numériques dans le code développé reposent sur la méthode de Gauss-Legendre avec des variantes directement adaptées. Son extension aux calculs d'intégrales doubles se fait par l'intermédiaire de la formule :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(u,v) du dv = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m U_i V_j h(u_i, v_j) \quad (\text{II-25})$$

avec :

$$-1 \leq u_i, v_j \leq 1 \quad 0 \leq U_i, V_j \leq 2$$

Les coefficients  $u_i$  et  $v_j$  sont les points de Gauss suivant les variables  $u$  et  $v$ ,  $U_i$  et  $V_j$  leurs poids associés.

### II - 2.2.1 Cas du problème tridimensionnel

Les intégrales à calculer sont simplement identifiables par la forme générale :

$$I = \int \int_{\Gamma_j} f(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (\text{II-26})$$

La fonction  $f$  est différente suivant que l'intégrale  $I$  contribue au calcul des coefficients de la matrice  $[A]$  ou  $[B]$ . Deux cas distincts sont alors à considérer :

$\underline{r} \notin \Gamma_j$  : l'intégrale est dite non diagonale et est calculée par la formule de quadrature directe de Gauss-Legendre (cf (II-25)).

$\underline{r} \in \Gamma_j$  : l'intégrand est singulier en un point. On emploie encore la même technique d'intégration mais avec un découpage adapté de l'élément  $\Gamma_j$ . L'intégrale est dite diagonale.

### II - 2.2.1.1 Intégrales non diagonales

Le noeud de calcul  $\underline{r}$  n'appartenant pas à l'élément  $\Gamma_j$ , ces intégrales n'interviennent pas dans la diagonale des matrices [A] ou [B]. La technique d'intégration de Gauss-Legendre est transposable directement suivant les deux cas, quadrangle ou triangle. Si  $\Gamma_j$  est un quadrangle, l'intégrale se présente, sans étape supplémentaire sous une forme immédiatement exploitable :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (\text{II-27})$$

Si  $\Gamma_j$  est un triangle, en se reportant aux système de coordonnées réduites du triangle (figure II-3), on a :

$$I = \int_{-1}^1 \left( \int_{\frac{\eta-1}{2}}^{\frac{1-\eta}{2}} f(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)) d\xi \right) d\eta \quad (\text{II-28})$$

Il faut transformer cette intégrale pour que la variable  $\xi$  prenne ses valeurs entre -1 et 1. Un changement de variables élémentaire s'impose :

$$u = \frac{2\xi}{1-\eta}$$

et (II-28) devient :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)) \frac{1-\eta}{2} du d\eta \quad (\text{II-29})$$

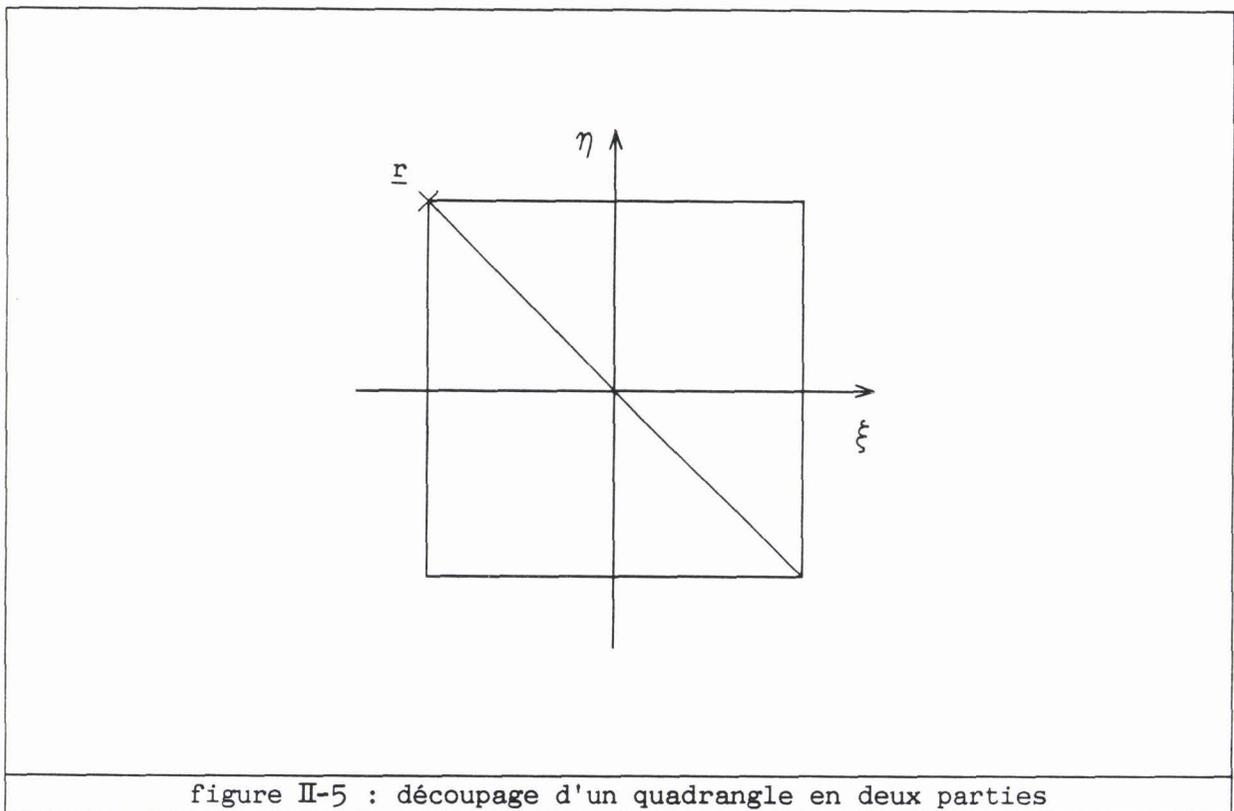
### II - 2.2.1.2 Intégrales diagonales

Comme indiqué précédemment, si le noeud de calcul  $\underline{r}$  appartient à l'élément de surface  $\Gamma_j$ , les intégrales correspondantes sont dites diagonales. Cette dénomination peut paraître abusive car, en réalité, la seule intégrale qui influence la diagonale des matrices [A] et [B] est celle pour laquelle  $\underline{r}$  coïncide avec un des noeuds de la topologie de  $\Gamma_j$ . Toutefois, qu'elles soient ou non véritablement diagonales, ces intégrales présentent toutes un point commun, à savoir que la distance D est petite et engendre de grandes variations de la fonction de Green et de sa dérivée normale (cf (II-24)). Leur calcul réclame donc une attention particulière dont le principe se résume ainsi : le domaine d'intégration  $\Gamma_j$  est découpé en éléments triangulaires, de

telle sorte que le sommet commun à ces triangles soit le noeud  $\underline{r}$ . Sur chacun de ces triangles, la méthode d'intégration est la méthode de Gauss-Legendre. Cette méthode s'applique à des intégrales doubles dont les bornes inférieures et supérieures sont respectivement  $-1$  et  $1$ . Pour ce faire et pour augmenter la densité des points de Gauss au voisinage de  $\underline{r}$ , on procède aux changements de variables adéquats. Cette démarche est inspirée de celles contenues dans les références [82-84] et est détaillée sur un exemple dans la première partie de l'annexe II.

Dans le cas d'un quadrangle, deux alternatives se présentent suivant la position de  $\underline{r}$  :

- si le noeud de calcul  $\underline{r}$  est un sommet du quadrilatère, l'élément  $\Gamma_j$  est découpé en deux parties (figure II-5),



- si le noeud de calcul est au milieu d'un côté,  $\Gamma_j$  est découpé en trois parties (figure II-6).

Dans le cas d'un triangle, l'élément de surface  $\Gamma_j$  est toujours découpé en deux parties, comme indiqué sur la figure II-7.

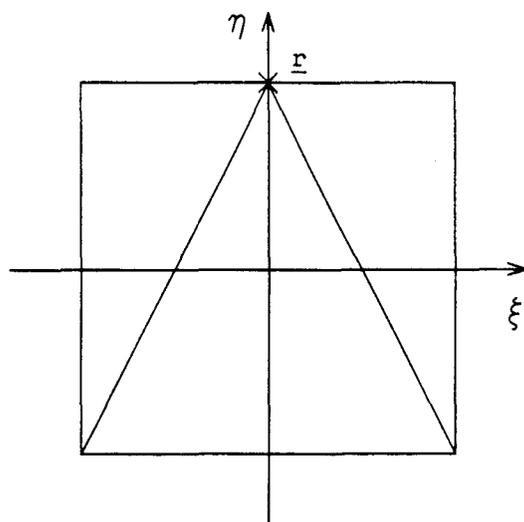


figure II-6 : découpage d'un quadrangle en trois parties

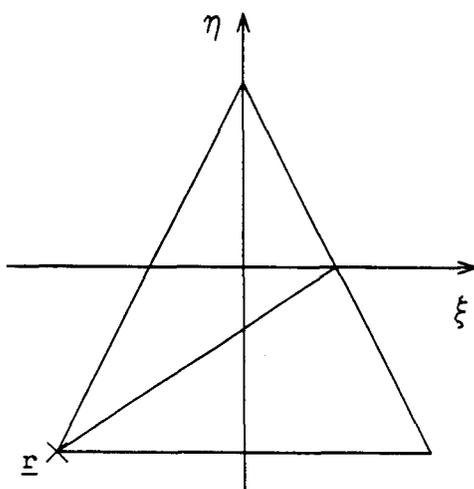


figure II-7 : découpage d'un triangle en deux parties

Dans tous les cas, la décomposition des intégrales diagonales conduit à des intégrales du type :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 \mp v) f(u,v) du dv \quad (\text{II-30})$$

où la singularité de l'intégrand se situe au point  $v = \pm 1$ .

Il faut remarquer que la partie singulière de  $f(u,v)$  est contenue dans la fonction de Green ou sa dérivée normale. En développant  $D$  en fonction de  $u$  et  $v$ , on a :

$$v \longrightarrow \pm 1 \quad D \sim 1 \mp v \quad (\text{II-31})$$

Le traitement des intégrales diagonales permet de diminuer la singularité de l'intégrand d'un ordre un, par l'intermédiaire du jacobien introduit dans le changement de variables.

### II - 2.2.2 Cas du problème à symétrie axiale

La technique décrite dans cette partie [38] est pratiquement identique à celle décrite dans la référence [51]. Sans faire de distinction entre intégrales diagonales ou non, les intégrales définies par (II-15) en supprimant la variable  $\eta$  sont modifiées en tenant compte de (II-13) et (II-24). Une notation allégée conduit à remplacer ces intégrales respectivement par  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_1(\xi) w(\xi) A d\xi \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_1(\xi) w(\xi) B d\xi \end{aligned} \quad (\text{II-32})$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^\pi \frac{e^{i k D}}{D} d\varphi \\ B &= 2 \int_0^\pi \frac{e^{i k D}}{D^2} \left( i k - \frac{1}{D} \right) (\underline{r}' - \underline{r}) \cdot \underline{n}' d\varphi \end{aligned} \quad (\text{II-33})$$

où  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $A$ ,  $B$  et  $D$  sont fonctions de  $\xi$  et  $\varphi$ . Dans le cas où  $D$  est petit, ce sont les parties réelles des intégrands de  $A$  et  $B$  qui sont les plus

singulières. On choisit de ne traiter que les parties réelles des intégrales A et B et on les décompose de telle sorte que l'éventuelle singularité soit isolée dans A' et B' :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A) &= 2 \int_0^\pi \frac{\cos kD - 1}{D} d\varphi + 2 A' \\ \operatorname{Re}(B) &= -2 \int_0^\pi \left( \frac{\cos kD - 1}{D} + k \operatorname{sinc} D \right) \frac{1}{D^2} (\underline{r}' - \underline{r}) \cdot \underline{n}' d\varphi - 2 B' \end{aligned} \quad (\text{II-34})$$

avec :

$$\begin{aligned} A' &= \int_0^\pi \frac{1}{D} d\varphi \\ B' &= \int_0^\pi \frac{1}{D^3} (\underline{r}' - \underline{r}) \cdot \underline{n}' d\varphi \end{aligned} \quad (\text{II-35})$$

Il est important de soigner particulièrement le calcul de A' et B'. Après quelques développements formulés dans l'annexe II, on a :

$$\begin{aligned} A' &= \frac{2}{\sqrt{a+b}} F\left(\frac{\pi}{2}, R\right) \\ B' &= \frac{2}{\sqrt{a+b}} \left( \frac{\alpha + \beta a/b}{a-b} E\left(\frac{\pi}{2}, R\right) + \frac{\beta}{b} F\left(\frac{\pi}{2}, R\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II-36})$$

avec :

$$R = \sqrt{\frac{2b}{a+b}}$$

où a, b,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des grandeurs fonctions de  $\xi$ , F et E sont respectivement les intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèce [65,85]. Ces intégrales sont calculées économiquement et avec une bonne précision par l'intermédiaire des approximations suivantes [85] :

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{2}, R\right) &= \sum_{n=0}^N a_n m^n - \sum_{n=0}^N b_n m^n \operatorname{Log}(m) + \varepsilon_K \\ E\left(\frac{\pi}{2}, R\right) &= 1 + \sum_{n=0}^N a_n' m^n - \sum_{n=0}^N b_n' m^n \operatorname{Log}(m) + \varepsilon_E \end{aligned} \quad (\text{II-37})$$

où, pour  $N = 4$  :

$$m = \frac{a - b}{a + b} \quad |\varepsilon_K|, |\varepsilon_E| \ll 2.10^{-8}$$

Cette technique est plus avantageuse qu'une simple application de la méthode de Gauss-Legendre aux intégrales (II-35). Elle permet de converger plus vite, donc, en principe, de minimiser le temps de calcul. Ceci étant, on termine le calcul de  $A'$  et  $B'$  par l'intégration en  $\xi$  des relations (II-36) suivant la méthode de Gauss-Legendre, avec un nombre invariant NG de points de Gauss sur chaque  $\Gamma_j$ . Le calcul des parties imaginaires se fait suivant  $\xi$  et  $\varphi$  par intégration de Gauss-Legendre. Toutes les intégrales, diagonales ou non, sont calculées selon ce procédé. On apporte un soin supplémentaire aux intégrales pour lesquelles le noeud de calcul  $\underline{r}$  coïncide avec le noeud milieu de  $\Gamma_j$  : le nombre de points de Gauss sur  $\xi$  est alors le majorant de NG et de 40. Quand  $\underline{r}$  est sur l'extrémité de  $\Gamma_j$ , on n'augmente pas le nombre de points de Gauss sur  $\xi$ . Ce choix est justifié car la densité des points de Gauss est beaucoup plus importante vers les extrémités du segment d'intégration plutôt qu'au centre et on encadre donc mieux les extrémités.

### II - 2.3 Facteur de directivité

Le facteur de directivité, tel que nous l'avons défini, est une fonction  $f_0(\theta, \varphi)$  où  $(r, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées sphériques, qui présente la propriété suivante :

$$r \longrightarrow \infty \quad p(\underline{r}) - p_i(\underline{r}) \sim f_0(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{II-38})$$

Il caractérise le comportement de la pression en champ lointain et correspond au premier terme du développement multipolaire de la pression. Sa mise en évidence est obtenue à partir de (I-47.a) après un passage à la limite et une identification avec (II-38) :

$$f_0(\theta, \varphi) = - \frac{ik}{4\pi} \int \int_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}' - \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}' \quad (\text{II-39})$$

Cette formulation est démontrée dans l'annexe III. Après discrétisation de la surface  $\Gamma$ , et avec les notations du II - 2.1 :

$$f_0(\theta, \varphi) = -\frac{ik}{4\pi} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} p_{ji} \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}'(\xi, \eta) - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}'(\xi, \eta) \quad (\text{II-40})$$

Les intégrales sont encore calculées par la technique de Gauss-Legendre. Une éventuelle symétrie axiale du problème permet de gagner de la précision et de diminuer le temps d'exécution par l'emploi d'une méthode détaillée dans la seconde partie de l'annexe III.

## II - 3 TRAITEMENT DES EQUATIONS DE CHAMP NUL

### II - 3.1 Discrétisation

Avant d'aborder le problème de discrétisation, il faut signaler qu'une pré-étude de la convergence des valeurs de la pression a permis de montrer que, dans le cadre des équations de champ nul, une décomposition en série de fonctions formant un système complet est plus efficace qu'une interpolation quadratique. En conséquence, on note :

$$p(\underline{r}) = \sum_{p=0}^P \sum_{q=-Q}^Q a_p^q \cos(p\theta) e^{-iq\varphi} \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{II-41})$$

où  $(r, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées sphériques fixant la position du point de surface  $\underline{r}$ ,  $P$  et  $Q$  sont des coefficients laissés au choix de l'opérateur. Le rayon polaire  $r$  est une fonction de  $\theta$  et  $\varphi$ . A l'aide de la formule (II-41), l'équation (I-94) devient :

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=-Q}^Q a_p^q \iint_{\Gamma} \cos(p\theta) e^{-iq\varphi} \frac{\partial \Psi_m^l(\underline{r})}{\partial n} d\underline{r} = \iint_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} \Psi_m^l(\underline{r}) d\underline{r} - 4\pi c_m^l \quad m = 0, \dots, M-1 \quad |l| < m \quad (\text{II-42})$$

Afin de simplifier l'écriture, on pose alors :

$$L_{mp}^{1q} = \int \int_{\Gamma} \cos(p\theta) e^{-iq\varphi} \frac{\partial \Psi_m^1(\underline{r})}{\partial n} d\underline{r}$$

$$F_m^1 = \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} \Psi_m^1(\underline{r}) d\underline{r}$$
(II-43)

et l'équation (II-42) se met sous la forme :

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=-Q}^Q L_{mp}^{1q} a_p^q = F_m^1 - 4\pi c_m^1 \quad m = 0, \dots, M-1 \quad |l| \leq m \quad (II-44)$$

Il en découle la notation matricielle :

$$[L] \underline{a} = \underline{F} - \underline{c} \quad (II-45)$$

La discrétisation se fait en rappelant que l'approximation sur la dérivée normale de la pression est celle déjà définie dans (II-1). Avec les notations du paragraphe II - 2.1, on a :

$$L_{mp}^{1q} = \sum_{j=1}^{NE} \int \int_{\Gamma_j} \cos(p\theta) e^{-iq\varphi} \frac{\partial \Psi_m^1(\underline{r})}{\partial n} d\underline{r}(\xi, \eta)$$
(II-46)

$$F_m^1 = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \int \int_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) \Psi_m^1(\underline{r}) d\underline{r}(\xi, \eta)$$

où  $\theta$  et  $\varphi$  sont maintenant des fonctions de  $\xi$  et  $\eta$  à définir sur chaque élément  $\Gamma_j$ .

Le système final (II-45) est un système de  $M^2$  équations à  $(P+1)(2Q+1)$  inconnues  $a_p^q$ . Une résolution par la méthode de champ nul seule nécessite que :

$$M^2 \gg (P+1)(2Q+1)$$

Si le nombre des équations est supérieur au nombre des inconnues, une méthode de surdétermination par moindres carrés permet la résolution du système. La méthode des moindres carrés consiste à multiplier membre à membre le système

défini en (II-45) par la matrice transposée conjuguée de  $L_{mq}^{1P}$  :

$$[L^*]^T [L] \underline{a} = [L^*]^T \underline{F} - [L^*]^T \underline{c} \quad (\text{II-47})$$

Cette technique fournit un système carré d'ordre  $(P+1)(2Q+1)$  dont la matrice du premier membre est hermitique. Un programme disponible au laboratoire réalise cette opération.

Dans le cas d'un problème à symétrie axiale, la pression est décomposée en série de Fourier :

$$p(\underline{r}) = \sum_{p=0}^P a_p \cos(p\theta) \quad (\text{II-48})$$

Le rayon polaire est fonction de  $\theta$ . L'intégration suivant  $\varphi$  est équivalente à un facteur  $2\pi$ . Un rappel de la formule (II-13) conduit, après discrétisation et simplification par  $2\pi$ , à :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^P a_p \sum_{j=1}^{NE} \int_{-1}^1 \cos(p\theta) \frac{\partial \Psi_m(\underline{r})}{\partial n} w(\xi) d\xi \\ & = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \int_{-1}^1 N_i(\xi) \Psi_m(\underline{r}) w(\xi) d\xi - 2 c_m \quad m = 0, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (\text{II-49})$$

où  $\theta$  est une fonction de  $\xi$  à définir sur chaque élément  $\Gamma_j$ . On pose :

$$\begin{aligned} L_{mp} &= \sum_{j=1}^{NE} \int_{-1}^1 \cos(p\theta) \frac{\partial \Psi_m(\underline{r})}{\partial n} w(\xi) d\xi \\ F_m &= \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \int_{-1}^1 N_i(\xi) \Psi_m(\underline{r}) w(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (\text{II-50})$$

Donc :

$$\sum_{p=0}^P L_{mp} a_p = F_m - 2 c_m \quad m = 0, \dots, M-1 \quad (\text{II-51})$$

On en tire une notation matricielle identique à (II-45). La symétrie axiale autorise le remplacement des intégrales doubles par des intégrales simples. Cette propriété minimise le temps de calcul nécessaire et allège grandement le traitement informatique des équations.

## II - 3.2 Calcul des intégrales

Le calcul des intégrales se fait par la technique d'intégration de Gauss-Legendre avec un même nombre de points d'intégration sur chaque élément  $\Gamma_j$  et indépendamment du degré des équations de champ nul. Son principe est simple car, contrairement aux intégrales de Helmholtz, la fonction à intégrer n'est jamais singulière. Cependant, le comportement délicat de l'intégrand oblige à mener le calcul avec quelques précautions et quelques développements supplémentaires.

### II - 3.2.1 *Paramétrisation de la surface*

Le calcul des intégrales de champ nul demande une bonne maîtrise des relations permettant de passer du système des coordonnées globales sphériques à celui des coordonnées réduites de l'élément d'intégration  $\Gamma_j$ . D'après les relations (II-8) et (II-11), il suffit de savoir exprimer les coordonnées sphériques  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  en fonction des coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  qui sont elles-mêmes fonctions des coordonnées réduites.

#### II - 3.2.1.1 Cas du problème tridimensionnel

De la définition du repère sphérique donnée dans le paragraphe I - 2.4.2.2, on tire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{z}{r} & \sin\theta &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \\ \cos\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \sin\varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (\text{II-52})$$

On en conclut immédiatement que :

$$\theta = \operatorname{Arcos} \frac{z}{r} \tag{II-53}$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{Arcos} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } y \geq 0 \\ 2\pi - \operatorname{Arcos} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

où :

$$x = x(\xi, \eta) \quad y = y(\xi, \eta) \quad z = z(\xi, \eta)$$

et :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sur chaque élément  $\Gamma_j$ .

### II - 3.2.1.2 Cas du problème à symétrie axiale

Dans ce cas, on sait que les intégrales mises en jeu sont curvilignes. La seule variable est  $\theta$  telle que :

$$\theta = \operatorname{Arcos} \frac{z}{r} \tag{II-54}$$

où :

$$z = z(\xi)$$

et :

$$r = \sqrt{x^2(\xi, 0) + z^2(\xi)}$$

sur chaque élément  $\Gamma_j$ .

## II - 3.2.2 Description des intégrands

L'expression de l'élément de surface  $d\mathbf{r}$  a déjà été détaillée par les formules (II-10) ou (II-13) suivant les cas. Les autres quantités restant à définir sont les fonctions d'ondes sphériques divergentes et leurs dérivées normales. Dans ce paragraphe, on n'explicite pas dans le détail le calcul des dérivées normales mais on indique les éléments nécessaires à leur construction.

### II - 3.2.2.1 Cas du problème tridimensionnel

On rappelle que :

$$\Psi_m^1(\underline{r}) = h_m(kr) P_m^1(\cos\theta) e^{i1\varphi} \quad (\text{II-55})$$

où  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  sont données par (II-53). Le calcul de la dérivée normale de  $\Psi_m^1(\underline{r})$  est fastidieux et nécessite le rappel des résultats suivants [85], concernant la dérivation des fonctions spéciales :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(h_m(z)) &= \frac{m}{z} h_m(z) - h_{m+1}(z) \\ \frac{d}{dz}(P_m^1(z)) &= \frac{1}{1-z^2} \left( (m+1) z P_m^1(z) - (m-1+1) P_{m+1}^1(z) \right) \end{aligned} \quad (\text{II-56})$$

et la définition du gradient en coordonnées sphériques :

$$\text{grad.} = \frac{\partial}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi \quad (\text{II-57})$$

où  $\underline{e}_r$ ,  $\underline{e}_\theta$  et  $\underline{e}_\varphi$  sont les vecteurs orthonormaux de la base locale, obtenus en dérivant les coordonnées sphériques par respectivement  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ . En reprenant la formule (I-31), on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_m^1(\underline{r})}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n}(h_m(kr)) P_m^1(\cos\theta) e^{i1\varphi} + h_m(kr) \frac{\partial}{\partial n}(P_m^1(\cos\theta)) e^{i1\varphi} \\ &\quad + h_m(kr) P_m^1(\cos\theta) \frac{\partial}{\partial n}(e^{i1\varphi}) \end{aligned} \quad (\text{II-58})$$

où :

$$\frac{\partial}{\partial n}(h_m(kr)) = \left( \frac{m}{kr} h_m(kr) - h_{m+1}(kr) \right) k \underline{e}_r \cdot \underline{n}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(P_m^1(\cos\theta)) = \left( (m-1+1) P_{m+1}^1(\cos\theta) - (m+1) \cos\theta P_m^1(\cos\theta) \right) \frac{1}{r \sin\theta} \underline{e}_\theta \cdot \underline{n}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(e^{i1\varphi}) = \frac{i1}{r \sin\theta} e^{i1\varphi} \underline{e}_\varphi \cdot \underline{n}$$

En regroupant convenablement ces éléments et en utilisant les formules (II-52), (II-53) et (II-9), on en vient à reconstituer la quantité :

$$\frac{\partial \Psi_m^1(\underline{r})}{\partial n}$$

en fonction de  $\xi$  et  $\eta$ .

### II - 3.2.2.2 Cas du problème à symétrie axiale

Les calculs sont simplifiés en annulant la variable  $\varphi$  et l'entier 1. Les fonctions d'onde sont :

$$\Psi_m(\underline{r}) = h_m(kr) P_m(\cos\theta) \quad (\text{II-59})$$

où  $r$  et  $\theta$  sont données par (II-54). Le calcul de la dérivée normale de  $\Psi_m(\underline{r})$  se fait facilement en reprenant les résultats (II-12), (II-54) et (II-58), après y avoir annulé  $\varphi$  et 1 :

$$\frac{\partial \Psi_m(\underline{r})}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}(h_m(kr)) P_m(\cos\theta) + h_m(kr) \frac{\partial}{\partial n}(P_m(\cos\theta)) \quad (\text{II-60})$$

### II - 3.3 Limitations numériques

W. TOBOCMAN [66] a montré numériquement les déficiences de la méthode de la matrice T lorsque l'excentricité de l'objet à modéliser augmente. Le même phénomène est attendu avec la méthode de champ nul [46]. Le domaine de validité de la méthode de champ nul, ainsi que les problèmes numériques rencontrés lors de l'utilisation des fonctions de Hankel sphériques  $h_m(kr)$  (apparition de grands nombres non pris en compte par l'ordinateur utilisé), ont été définis et résolus par ailleurs [39,40], dans le cas d'un problème

admettant une symétrie de révolution. Nous reproduisons ici les principaux résultats obtenus.

### II - 3.3.1 Technique de renormalisation

Après avoir étudié le comportement des fonctions mises en jeu dans la relation (II-59), il s'avère indispensable de souligner le rôle important tenu par  $y_m(kr)$  dont le développement asymptotique est [85] :

$$\left\{ \begin{array}{l} m \longrightarrow \infty \\ kr \ll m + \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad y_m(kr) \sim - \frac{\sqrt{2e}}{2m+1} \left( \frac{2m+1}{ekr} \right)^{m+1} \quad (\text{II-61})$$

Si on note  $10^A$  le plus grand nombre accepté par l'ordinateur, il existe un majorant  $\bar{M}$  des  $m$  tel que :

$$\sup_{r \in \Gamma} \log |y_{\bar{M}}(kr)| < A \quad (\text{II-62})$$

Dans l'intention de ne pas dépasser les limites des ressources informatiques quand  $m$  est supérieur à  $\bar{M}$ , il est convenu de normer  $y_m(kr)$  par un terme du même ordre. La renormalisation intervient par l'introduction des deux fonctions suivantes :

$$m > \bar{M} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{j}_m(kr) = 0 \\ \bar{y}_m(kr) = \frac{2m+1}{\sqrt{2e}} \left( \frac{ekr}{2m+1} \right)^{m+1} y_m(kr) \end{array} \right. \quad (\text{II-63})$$

où  $\bar{r}$  est une grandeur fixée comprise entre le rayon minimum et le rayon maximum des points de la surface. On peut choisir  $\bar{r}$  tel que :

$$\bar{r} = \sqrt{r_{\max} r_{\min}}$$

Finalement, on se débarrasse ainsi du problème des grands nombres en définissant un nouveau système d'équations de champ nul :

$$[\bar{L}] [a] = [\bar{F}] - [\bar{c}] \quad (\text{II-64})$$

$$\begin{aligned}
m < \bar{M} \quad \bar{L}_{mp} &= L_{mp} \\
\bar{F}_m &= F_m \\
\bar{c}_m &= c_m
\end{aligned} \tag{II-65}$$

$$\begin{aligned}
m \geq \bar{M} \quad \bar{L}_{mp} &= \sum_{j=1}^{NE} \int_{-1}^1 \cos(p\theta) \frac{\partial}{\partial n} \left( \bar{y}_m(kr) P_m(\cos\theta) \right) w(\xi) d\xi \\
\bar{F}_m &= \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \int_{-1}^1 N_i(\xi) \bar{y}_m(kr) P_m(\cos\theta) w(\xi) d\xi \tag{II-66} \\
\bar{c}_m &= -i \frac{2m+1}{\sqrt{2e}} \left( \frac{ekr}{2m+1} \right)^{m+1} c_m
\end{aligned}$$

### II - 3.3.2 Domaine de validité

Si  $S$  est le nombre de chiffres significatifs pris en compte par l'ordinateur, l'écart maximum entre les deux valeurs extrêmes de  $y_M(kr)$  apparaissant dans les intégrales de champ nul, où  $M-1$  est l'ordre le plus élevé, doit être tel que :

$$\log \left| \frac{y_M(kr_{\min})}{y_M(kr_{\max})} \right| < S \tag{II-67}$$

En reprenant (II-61), on déduit que :

$$kr_{\max} < M + \frac{1}{2} \quad (M+1) \log E < S \tag{II-68}$$

où :

$$E = \frac{r_{\max}}{r_{\min}}$$

Si on veut avoir une précision minimum sur la pression calculée  $p_c$ , intuitivement, on impose une valeur minimum à  $M$ . Soit  $p$  la solution exacte de (I-94), il faut que :

$$\int \int_{\Gamma} \varepsilon(\underline{r}) \frac{\partial \Psi_{M-1}(\underline{r})}{\partial n} d\underline{r} = 0 \tag{II-69}$$

où :  $\varepsilon(\underline{r}) = p(\underline{r}) - p_c(\underline{r})$ . Cette égalité permet d'affirmer que l'erreur  $\varepsilon(\underline{r})$  est petite quand la quantité suivante est grande :

$$\frac{\partial \Psi_{M-1}(\underline{r})}{\partial n}$$

Une étude du comportement de cette dérivée normale en fonction de  $r$ ,  $M$  et  $k$  est alors menée. Il en ressort que ce terme est maximum au voisinage  $\Delta$  du point où  $r$  est minimum. Cet intervalle  $\Delta$  est d'autant plus étendu que  $M$  est grand ou que  $k$  diminue. On en déduit que la partie  $\Delta$  de  $\Gamma$  où la pression  $p_c$  est calculée précisément croît avec  $M$  et que  $M$  doit croître avec la fréquence. De plus, une condition nécessaire pour que la pression soit calculée avec précision sur toute la surface est :

$$kr_{\max} < M \quad (\text{II-70})$$

Quand la condition d'utilisation de (II-68) n'est pas vérifiée, l'inégalité de droite est remplacée par (II-67). La relation (II-68) permet de situer, en fonction des limites de l'ordinateur, la plus grande valeur de  $M$  à ne pas dépasser, sous peine de perte de précision due aux arrondis survenant alors dans les calculs. L'inégalité (II-70) fournit une condition nécessaire mais non suffisante sur  $M$  pour assurer une bonne précision sur toute la surface  $\Gamma$ . Ces relations prouvent que la méthode de champ nul est limitée aux structures d'excentricité modérée, pour des fréquences pas trop élevées. Dans la perspective où la géométrie est excentrée, la pression est calculée correctement aux points de la surface  $\Gamma$  proches de la sphère inscrite dans  $\Gamma$  et de centre l'origine. Cette remarque montre l'intérêt de répéter le calcul en considérant plusieurs origines, de telle sorte que les sphères correspondantes couvrent au mieux la totalité de  $\Gamma$ .

Une autre source d'imprécision est due à la troncature du développement en série de la pression. Aucun critère précis ne permet de définir le nombre de termes composant la série. Ce nombre est subordonné au type de problème et à l'expérience acquise. Les inégalités (II-68) et (II-70) ne reposent pas sur des démonstrations mathématiques strictes mais de nombreux tests effectués démontrent qu'elles délimitent correctement le domaine de validité de la méthode de champ nul.

## II - 4 COMBINAISON EQUATIONS INTEGRALES-CHAMP NUL

Cette section concerne l'exploitation de la méthode de Jones. On décrit les différentes étapes et les résultats importants qui permettent de mettre en place le système final d'équations linéaires à résoudre. Les simplifications dues à la prise en compte d'une symétrie axiale sont également indiquées.

### II - 4.1 Principe de la démarche

Il s'agit de surdéterminer le système d'équations intégrales de Helmholtz par un nombre NEQCN d'équations de champ nul. Les inconnues sont les pressions nodales  $\underline{p}$  de la surface, qui apparaissent directement dans le système (II-20). Cependant, dans le système (II-45), la pression n'est plus soumise à une interpolation quadratique mais est décomposée en série de fonctions dont les coefficients sont les inconnues. En réunissant (II-20) et (II-45), on obtient le système surdéterminé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} [A] \underline{p} = [B] \frac{\partial p}{\partial n} - \underline{p}_i \\ [L] \underline{a} = \underline{F} - \underline{c} \end{array} \right. \quad (\text{II-71})$$

En inversant la formule (II-41), on exprime les coefficients  $\underline{a}$  en fonction des pressions  $\underline{p}$  par l'intermédiaire d'une matrice de changement de représentation [S] dont le calcul est détaillé dans le paragraphe suivant :

$$\underline{a} = [S] \underline{p} \quad (\text{II-72})$$

Après injection de (II-72) dans (II-71), le système final est un système de  $NN + \text{NEQCN}$  équations à  $NN$  inconnues, que l'on résout par une méthode de surdétermination par moindres carrés du type de celle explicitée dans le paragraphe II - 3.1. Après mise en carré du système, il est possible de déterminer la matrice impédance à condition d'avoir préalablement séparé les vitesses normales et la matrice du second membre qui ont servi à calculer  $\underline{F}$  dans (II-45).

## II - 4.2 Coefficients du changement de représentation

Quand tous les éléments nécessaires à l'établissement des systèmes d'équations (II-19) et (II-44) ou (II-51) sont réunis, il reste à définir la matrice de changement de représentation [S].

### II - 4.2.1 Cas du problème tridimensionnel

On veut inverser la formule (II-41) en définissant une matrice [S] telle que :

$$a_p^q = \sum_{k=1}^{NN} S_{pk}^q p_k \quad 0 \leq p \leq P \quad -Q \leq q \leq Q \quad (\text{II-73})$$

Dans ce but, on multiplie membre à membre (II-41) par  $\cos(p'\theta)$  et  $e^{-iq'\varphi}$  et on intègre suivant  $\theta$  et  $\varphi$ , en rappelant que :

$$\int_0^{\pi} \cos(p\theta) \cos(p'\theta) d\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } p = p' \neq 0 \\ \pi & \text{si } p = p' = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II-74})$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-iq\varphi} e^{-iq'\varphi} d\varphi = \begin{cases} 2\pi & \text{si } q = -q' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il vient :

$$a_p^q = \frac{1}{(1 + \delta_{0p}) \pi^2} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi} p(\underline{r}(\theta, \varphi)) \cos(p\theta) d\theta \right) e^{iq\varphi} d\varphi \quad (\text{II-75})$$

En discrétisant la surface, en interpolant la pression sous forme quadratique et en développant  $\theta$  et  $\varphi$  en fonction des coordonnées réduites  $\xi$  et  $\eta$  sur  $\Gamma_j$ , on a :

$$a_p^q = \frac{1}{(1 + \delta_{0p}) \pi^2} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} p_{ji} \int \int_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) \cos(p\theta(\xi, \eta)) e^{iq\varphi(\xi, \eta)} |J| d\xi d\eta \quad (\text{II-76})$$

où l'expression de  $\theta$  et  $\varphi$  en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , donc de  $\xi$  et  $\eta$ , est donnée par (II-53). Le jacobien est :

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (\text{II-77})$$

Après quelques dérivations élémentaires des relations (II-52), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( \frac{z}{r^2} \left( x \frac{\partial x}{\partial \xi} + y \frac{\partial y}{\partial \xi} + z \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{1}{x^2 + y^2} \left( x \frac{\partial y}{\partial \xi} - y \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (\text{II-78})$$

Par analogie, ces relations permettent de définir  $\partial \theta / \partial \eta$  et  $\partial \varphi / \partial \eta$ . Finalement, en adaptant la numérotation globale déjà définie dans le paragraphe II - 2.1 :

$$S_{pk}^q = \frac{1}{(1 + \delta_{0p}) \pi^2} \sum_{j/k \in \Gamma_j} \iint_{\Gamma_j} N_{\beta(k)}(\xi, \eta) \cos(p\theta(\xi, \eta)) e^{iq\varphi(\xi, \eta)} |J| d\xi d\eta \quad (\text{II-79})$$

Le calcul de l'intégrale est encore effectué par la méthode d'intégration de Gauss-Legendre, après avoir précisé les bornes d'intégration :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \xi, \eta \leq 1 && \text{si } \Gamma_j \text{ est un quadrangle,} \\ -1 &\leq \eta \leq 1 && \frac{\eta-1}{2} \leq \xi \leq \frac{1-\eta}{2} && \text{si } \Gamma_j \text{ est un triangle.} \end{aligned}$$

#### II - 4.2.2 Cas du problème à symétrie axiale

Comparativement au cas général, des simplifications notables sont relevées. On veut obtenir la relation suivante :

$$a_p = \sum_{k=1}^{NN} S_{pk} p_k \quad 0 \leq p \leq P \quad (\text{II-80})$$

L'inversion de (II-48) ne se fait que sur la variable  $\theta$  et, sans aucune difficulté, on obtient :

$$a_p = \frac{2 - \delta_{0p}}{\pi} \int_0^\pi p(\underline{r}(\theta)) \cos(p\theta) d\theta \quad (\text{II-81})$$

La forme développée de (II-81) est :

$$a_p = \frac{2 - \delta_{0p}}{\pi} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 p_{ji} \int_{-1}^1 N_i(\xi) \cos(p\theta(\xi)) \frac{d\theta}{d\xi} d\xi \quad (\text{II-82})$$

où  $\theta$  est donnée en fonction de  $\xi$  par (II-54). Le terme de dérivation est :

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{x} \left( \frac{z}{r} \frac{dr}{d\xi} - \frac{dz}{d\xi} \right) \quad (\text{II-83})$$

Une numérotation globale inspirée de (II-79) donne :

$$S_{pk} = \frac{2 - \delta_{0p}}{\pi} \sum_{j/k \in \Gamma_j} \int_{-1}^1 N_{\beta(k)}(\xi) \cos(p\theta(\xi)) \frac{d\theta}{d\xi} d\xi \quad (\text{II-84})$$

*Remarque :*

Dans le paragraphe II - 3.3.2, les deux inégalités (II-68) et (II-70) permettent d'estimer M en fonction des paramètres du problème. La seconde inégalité n'est plus nécessaire ici car les équations de champ nul servent uniquement à surdéterminer le système d'équations intégrales.

## II - 5 COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE

La méthode des éléments finis a la capacité de résoudre le problème complet de rayonnement ou de diffraction : elle permet de modéliser simultanément le comportement de la structure interne et du fluide qui l'entoure. Dans le paragraphe I - 5.1, on propose, en précisant les avantages, de décrire le volume fluide par la représentation de Helmholtz extérieure, éventuellement surdéterminée par des équations de champ nul. Disposant des outils pour le faire, le couplage éléments finis-équations intégrales est un aboutissement logique.

## II - 5.1 Formulation variationnelle d'un problème de structure

On s'intéresse à une structure hétérogène, de forme géométrique complexe, constituée de matériaux métalliques divers et de céramiques piézoélectriques anisotropes. Les effets élastiques et piézoélectriques sont pris en compte, en excluant les non-linéarités de grands déplacements ou de comportement et les effets dissipatifs. Une présentation détaillée de ce problème peut se trouver dans la référence [20]. Après un découpage de la structure  $\Omega$  en domaines élémentaires  $e$ , la quantité variationnelle  $L_s$  associée à  $\Omega$  est, avec les notations d'Einstein qui restent en pratique jusqu'à la fin de ce paragraphe :

$$L_s = \sum_e \left( \frac{1}{2} \tilde{U}^{eT} [K_{uu}^e] \tilde{U}^e - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{U}^{eT} [M^e] \tilde{U}^e + \tilde{U}^{eT} [K_{u\phi}^e] \tilde{\Phi}^e + \frac{1}{2} \tilde{\Phi}^{eT} [K_{\phi\phi}^e] \tilde{\Phi}^e - \tilde{U}^{eT} \tilde{F}^e \right) + \tilde{\Phi}^T \tilde{Q} \quad (\text{II-85})$$

où  $\tilde{U}^e$  et  $\tilde{\Phi}^e$  sont les vecteurs des valeurs nodales du déplacement et du potentiel électrique dans l'élément  $e$ ,  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{Q}$  les valeurs nodales du potentiel et de la charge électrique en tous les noeuds de  $\Omega$ . On développe les termes de cette équation :

$$\begin{aligned} [K_{uu}^e] &= \int \int \int_{\Omega^e} [B^e]^T [c^E] [B^e] d\Omega^e \\ [M^e] &= \int \int \int_{\Omega^e} \rho_s [N^e]^T [N^e] d\Omega^e \\ [K_{u\phi}^e] &= \int \int \int_{\Omega^e} [B^e]^T [e] [B_{\phi}^e] d\Omega^e \\ [K_{\phi\phi}^e] &= - \int \int \int_{\Omega^e} [B_{\phi}^e]^T [\varepsilon^S] [B_{\phi}^e] d\Omega^e \\ \tilde{F}^e &= \int \int_{S_T^e} [N^e]^T \tilde{f} dS_T^e \end{aligned} \quad (\text{II-86})$$

où  $[B^e]$ ,  $[B_{\phi}^e]$  et  $[N^e]$  sont les matrices d'interpolation caractéristiques de l'élément  $e$ ,  $[c^E]$  le tenseur des constantes élastiques à champ électrique constant,  $\rho_s$  la masse volumique,  $[e]$  le tenseur des constantes piézoélectriques,  $[\varepsilon^S]$  le tenseur des constantes diélectriques à déformation

constante,  $S_T$  l'ensemble des éléments soumis à une condition sur le champ de contrainte  $[T]$  telle que :

$$T_{ij} n_j = f_i \quad (\text{II-87})$$

où  $f_i$  est connue. Les matrices  $[K_{uu}^e]$ ,  $[K_{u\phi}^e]$  et  $[K_{\phi\phi}^e]$  sont les matrices élémentaires de rigidité, respectivement mécanique, piézoélectrique et diélectrique. La matrice  $[M^e]$  est la matrice élémentaire de masse cohérente. Après assemblage de tous les éléments de  $\Omega$ , et en notant  $\underline{U}$  le vecteur des valeurs nodales du déplacement en tous les noeuds de  $\Omega$ , l'expression de  $L_s$  devient :

$$L_s = \frac{1}{2} \underline{U}^T \left( [K_{uu}] - \omega^2 [M] \right) \underline{U} + \underline{U}^T [K_{u\phi}] \underline{\Phi} + \frac{1}{2} \underline{\Phi}^T [K_{\phi\phi}] \underline{\Phi} - \underline{U}^T \underline{F} + \underline{\Phi}^T \underline{Q} \quad (\text{II-88})$$

où  $[K_{uu}]$ ,  $[M]$ ,  $[K_{u\phi}]$ ,  $[K_{\phi\phi}]$  et  $\underline{F}$  résultent de l'assemblage [16,20] des matrices et vecteurs élémentaires décrits en (II-86). L'application du principe variationnel consiste à minimiser  $L_s$  par rapport aux valeurs nodales de  $\underline{U}$  et  $\underline{\Phi}$  pour obtenir deux équations que l'on regroupe sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2 [M] & [K_{u\phi}] \\ [K_{u\phi}]^T & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ -\underline{Q} \end{bmatrix} \quad (\text{II-89})$$

Les valeurs nodales de la charge étant nulles sur les noeuds internes aux matériaux piézoélectriques, les degrés de liberté du potentiel correspondant peuvent être condensés. Par ailleurs, le potentiel de référence étant choisi nul, les lignes et colonnes associées aux noeuds des électrodes qui sont à ce potentiel peuvent être éliminées. Enfin, si les électrodes d'excitation de la structure sont toutes au même potentiel  $\Phi_0$ , les lignes et colonnes des noeuds correspondant peuvent être condensées. Alors, l'équation (II-89) devient :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2 [M] & K_{u\phi} \\ K_{u\phi}^T & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \Phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ -Q_0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-90})$$

où  $\Phi_0$  est le potentiel électrique et  $Q_0$  la charge correspondante.

## II - 5.2 Formulation variationnelle du problème couplé

La fonctionnelle totale du problème fluide-structure est :

$$L = L_s + L_f \quad (\text{II-91})$$

La quantité  $L_s$  caractérise le problème électromécanique et est exprimée par la relation (II-88). Au problème fluide, est associée la quantité  $L_f$  déjà définie par (I-116). Si on s'intéresse uniquement à l'effet du fluide sur la structure, i.e. au couplage, la quantité  $L_f$  peut se réduire à  $L_c$  telle que :

$$L_c = - \sum_e \int \int_{\Gamma^e} \underline{u}^{eT} [N^e]^T \underline{n} [N^e] \underline{p}^e d\Gamma^e \quad (\text{II-92})$$

En posant alors :

$$[D^e] = - \int \int_{\Gamma^e} [N^e]^T \underline{n} [N^e] d\Gamma^e \quad (\text{II-93})$$

on a :

$$L_c = \sum_e \underline{u}^{eT} [D^e] \underline{p}^e \quad (\text{II-94})$$

Après assemblage de tous les éléments :

$$L_c = \underline{u}^T [D] \underline{p} \quad (\text{II-95})$$

où  $\underline{p}$  (respectivement  $\underline{u}$ ) est le vecteur formé par les pressions (respectivement déplacements) en tous les noeuds de l'interface et  $[D]$  est la matrice formée après assemblage des  $[D^e]$ .

## II - 5.3 Couplage éléments finis-équations intégrales

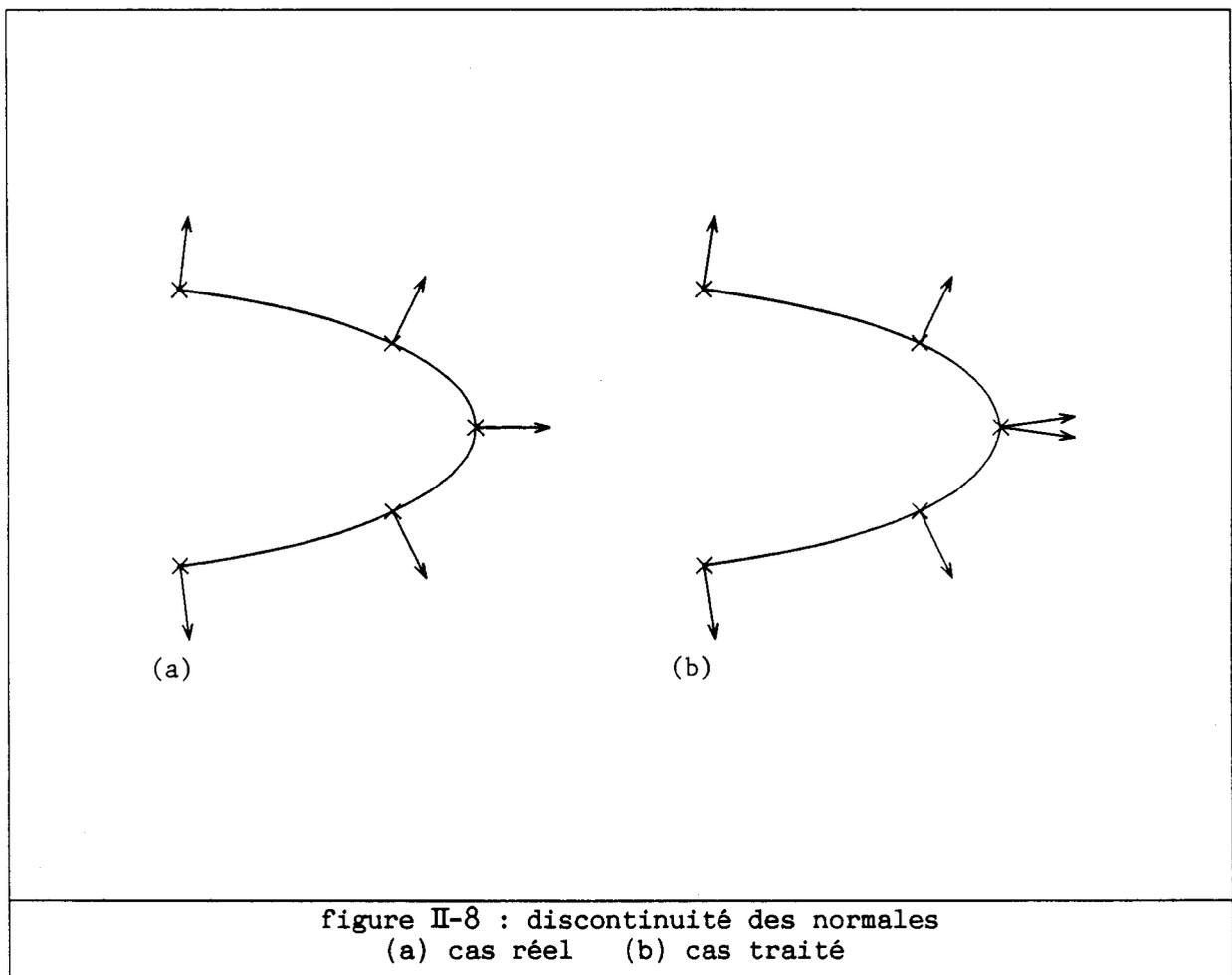
### II - 5.3.1 *Utilisation de la matrice impédance*

La matrice impédance de rayonnement  $[Z]$  est issue de la relation (II-22). Sachant que dans les équations développées ici, la dépendance en temps

est en  $e^{i\omega t}$  :

$$\underline{\tilde{p}} = i \omega [Z] \underline{\tilde{u}_n} \quad (\text{II-96})$$

où  $\underline{\tilde{u}_n}$  est le vecteur-colonne des valeurs nodales des déplacements normaux à  $\Gamma$ . Le découpage de la surface en éléments isoparamétriques peut entraîner, en plus des discontinuités réelles, des discontinuités fictives des normales aux noeuds de la frontière commune à plusieurs éléments. Un exemple est donné sur la figure II-8.



Même si elles sont minimales, elles existent et doivent être prises en compte dans les calculs. En conséquence,  $\underline{\tilde{u}_n}$  a un nombre de lignes supérieur au nombre de noeuds  $N$  de l'interface  $\Gamma$ , compte tenu de la multiplicité des normales sur certains noeuds. Par exemple, sur la figure II-8, le nombre de noeuds est 5, le nombre de normales est 6. En reprenant (II-23) et (II-19), on précise la

relation (II-96) en identifiant la pression au noeud  $j$  de  $\Gamma$  :

$$p_j = i\omega \left( i\omega\rho A_{jk}^{-1} \sum_{p/l \in \Gamma_p} B_{k1p} \right) u_{n_1} \Big|_{1 \in \Gamma_p} \quad (\text{II-97})$$

où  $A_{jk}^{-1}$  est le terme général de la matrice  $[A^{-1}]$ , le symbole de sommation s'interprète comme en (II-16) et  $u_{n_1}$  est la composante normale du déplacement en un noeud  $l$  de  $\Gamma_p$ . Cette formule est simplifiée en décomposant le déplacement normal en un noeud  $l$  de  $\Gamma_p$  suivant les trois axes X, Y et Z du repère global cartésien :

$$\begin{aligned} u_{n_1} &= \underline{u}_1 \cdot \underline{n}_1 \\ &= u_{x_1} n_{x_1} + u_{y_1} n_{y_1} + u_{z_1} n_{z_1} \end{aligned} \quad (\text{II-98})$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} p_j = -\omega^2\rho A_{jk}^{-1} &\left( \left( \sum_{p/l \in \Gamma_p} B_{k1p} n_{x_1} \Big|_{1 \in \Gamma_p} \right) u_{x_1} + \left( \sum_{p/l \in \Gamma_p} B_{k1p} n_{y_1} \Big|_{1 \in \Gamma_p} \right) u_{y_1} \right. \\ &\left. + \left( \sum_{p/l \in \Gamma_p} B_{k1p} n_{z_1} \Big|_{1 \in \Gamma_p} \right) u_{z_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{II-99})$$

En notant :

$$\begin{aligned} Z_{j1}^X &= -A_{jk}^{-1} \sum_{p/l \in \Gamma_p} B_{k1p} n_{x_1} \Big|_{1 \in \Gamma_p} \\ Z_{j1}^Y &= -A_{jk}^{-1} \sum_{p/l \in \Gamma_p} B_{k1p} n_{y_1} \Big|_{1 \in \Gamma_p} \\ Z_{j1}^Z &= -A_{jk}^{-1} \sum_{p/l \in \Gamma_p} B_{k1p} n_{z_1} \Big|_{1 \in \Gamma_p} \end{aligned} \quad (\text{II-100})$$

on a :

$$p_j = \omega^2\rho \left( Z_{j1}^X u_{x_1} + Z_{j1}^Y u_{y_1} + Z_{j1}^Z u_{z_1} \right) \quad (\text{II-101})$$

En regroupant les trois matrices carrées  $[Z^X]$ ,  $[Z^Y]$  et  $[Z^Z]$  en une seule matrice  $[\bar{Z}]$ , on obtient :

$$\underline{p} = \omega^2 \rho [\bar{Z}] \underline{u} \quad (\text{II-102})$$

où :

$$\underline{u}^T = [u_{X_1} \ u_{Y_1} \ u_{Z_1} \ \dots \ u_{X_N} \ u_{Y_N} \ u_{Z_N}]$$

et :

$$[\bar{Z}] = \begin{bmatrix} Z_{11}^X & Z_{11}^Y & Z_{11}^Z & \dots & Z_{1N}^X & Z_{1N}^Y & Z_{1N}^Z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{N1}^X & Z_{N1}^Y & Z_{N1}^Z & \dots & Z_{NN}^X & Z_{NN}^Y & Z_{NN}^Z \end{bmatrix}$$

En injectant (II-102) dans (II-95) et en posant :

$$[\bar{D}] = \rho [D]$$

on élimine l'inconnue pression et :

$$L_c = \omega^2 \underline{u}^T [\bar{D}] [\bar{Z}] \underline{u} \quad (\text{II-103})$$

On note maintenant  $\underline{U}$  le vecteur formé par les déplacements de tous les noeuds de l'interface et de la structure. Ce vecteur contient  $\underline{u}$ . On peut construire, en rangeant les termes de manière convenable, la matrice de couplage  $[\mathfrak{Z}]$  telle que :

$$\underline{U}^T [\mathfrak{Z}] \underline{U} = \underline{u}^T [\bar{D}] [\bar{Z}] \underline{u} \quad (\text{II-104})$$

A partir de (II-88) et (II-103), l'expression L peut être réarrangée sous la forme :

$$L = \frac{1}{2} \underline{U}^T \left( [K_{uu}] - \omega^2 [M] \right) \underline{U} + \underline{U}^T [K_{u\phi}] \underline{\Phi} + \frac{1}{2} \underline{\Phi}^T [K_{\phi\phi}] \underline{\Phi} + \underline{\Phi}^T \underline{Q} \\ - \underline{U}^T \underline{F} + \omega^2 \underline{U}^T [\mathfrak{Z}] \underline{U} \quad (\text{II-105})$$

### II - 5.3.2 Minimisation de la fonctionnelle et résolution

L'application du principe variationnel conduit à minimiser L par rapport aux valeurs nodales de  $\underline{\underline{U}}$  et  $\underline{\underline{\Phi}}$  :

$$\left( [K_{uu}] - \omega^2 [M] + \omega^2 [\mathfrak{Z}] \right) \underline{\underline{U}} + [K_{u\phi}] \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{F}} \quad (\text{II-106})$$

$$[K_{u\phi}]^T \underline{\underline{U}} + [K_{\phi\phi}] \underline{\underline{\Phi}} = - \underline{\underline{Q}}$$

En condensant les termes électriques, comme décrit en II - 5.1, en affectant d'un coefficient R les grandeurs liées à un déplacement d'un noeud de la structure interne et d'un coefficient Z celles liées à un déplacement d'un noeud de l'interface, on décompose les deux équations (II-106) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [KM]_{RR} & [KM]_{RZ} & K_{R\phi} \\ [KM]_{RZ}^T & [KM]_{ZZ} + \omega^2 [\mathfrak{Z}] & K_{Z\phi} \\ K_{R\phi}^T & K_{Z\phi}^T & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{U}}_R \\ \underline{\underline{U}}_Z \\ \underline{\underline{\Phi}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{Q}}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-107})$$

où :

$$[KM] = [K_{uu}] - \omega^2 [M]$$

et la force  $\underline{\underline{F}}$  a été supprimée en considérant que l'excitation de la structure est uniquement électrique. On sépare les parties réelles et imaginaires des termes suivants :

$$\underline{\underline{U}}_R = \underline{\underline{U}}_{R1} + i \underline{\underline{U}}_{R2}$$

$$\underline{\underline{U}}_Z = \underline{\underline{U}}_{Z1} + i \underline{\underline{U}}_{Z2} \quad (\text{II-108})$$

$$[\mathfrak{Z}] = [\mathfrak{Z}_1] + i [\mathfrak{Z}_2]$$

Après quelques manipulations, la résolution des deux premières équations de (II-107) fournit :

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_{Z1} &= ([A] + [B] [A]^{-1} [B])^{-1} C \\
 \tilde{U}_{Z2} &= - [A]^{-1} [B] \tilde{U}_{Z1} \\
 \tilde{U}_{R1} &= - [KM]_{RR}^{-1} ([KM]_{RZ} \tilde{U}_{Z1} + K_{R\Phi}) \\
 \tilde{U}_{R2} &= - [KM]_{RR}^{-1} [KM]_{RZ} \tilde{U}_{Z2}
 \end{aligned}
 \tag{II-109}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 [A] &= [KM]_{ZZ} + \omega^2 [\mathfrak{Z}_1] - [KM]_{RZ}^T [KM]_{RR}^{-1} [KM]_{RZ} \\
 [B] &= \omega^2 [\mathfrak{Z}_2] \\
 [C] &= [KM]_{RZ}^T [KM]_{RR}^{-1} K_{R\Phi} - K_{Z\Phi}
 \end{aligned}$$

### II - 5.3.3 Calcul de l'admittance

Le courant total I est la dérivée par rapport au temps de  $Q_0$  :

$$I = i \omega Q_0 \tag{II-110}$$

D'autre part :

$$\frac{I}{\Phi_0} = X + i Y \tag{II-111}$$

En combinant (II-110) , (II-111) et la troisième équation de (II-107), on montre que les parties réelle et imaginaire de l'admittance sont :

$$\begin{aligned}
 X &= \omega \left( K_{R\Phi}^T \tilde{U}_{R2} + K_{Z\Phi}^T \tilde{U}_{Z2} \right) \\
 Y &= - \omega \left( K_{\Phi\Phi} + K_{R\Phi}^T \tilde{U}_{R1} + K_{Z\Phi}^T \tilde{U}_{Z1} \right)
 \end{aligned}
 \tag{II-112}$$

## CHAPITRE III

### TESTS DE VALIDATION

Dans cette section, chaque problème présenté possède une solution analytique. De ce fait, la validation des codes de calcul dans le cas d'un problème à symétrie axiale ou tridimensionnel, par comparaison entre la solution calculée et la solution analytique, se fait sans ambiguïté. Après avoir testé séparément la représentation de Helmholtz extérieure et la méthode de champ nul, la combinaison de ces deux approches a été mise à l'épreuve. L'expérience acquise durant la conduite de ces tests a permis de mieux cerner le domaine de validité de ces méthodes et, en fonction des limitations dégagées, de passer aux applications.

### III - 1 PROPOS LIMINAIRES

Les deux codes de calcul développés lors de cette thèse et susceptibles de résoudre les problèmes de rayonnement ou de diffraction acoustique se nomment HELNUL et EQI. Le premier s'applique aux problèmes présentant une symétrie de révolution [38-40] alors que le second s'applique aux problèmes tridimensionnels [41,86]. Ils ont en commun de pouvoir résoudre les problèmes de rayonnement par la représentation de Helmholtz extérieure ou la méthode de champ nul ou la combinaison des deux, avec une condition de Neumann sur la surface. Néanmoins, ils diffèrent sur deux points essentiels : le traitement des équations de champ nul et le type d'application traité. La technique de renormalisation des équations de champ nul et la limitation de son domaine de validité ne sont, suivant l'étude menée dans les références [39,40] et résumée au paragraphe II - 3.3, exploitées que pour les problèmes à symétrie axiale. Par contre, la diffraction d'une onde acoustique plane par une structure rigide n'est traitée que par EQI.

La validation de ces deux codes dans le cas du rayonnement se fait essentiellement par le test de source ponctuelle. Ce test consiste à placer une source ponctuelle d'amplitude  $\pm a$  à l'intérieur du corps, à l'abscisse  $\underline{r}^\circ$ . La pression en un point  $\underline{r}$  de la surface due à la source est alors donnée par :

$$p(\underline{r}) = \pm a \frac{e^{ikD}}{D} \quad (\text{III-1})$$

où :

$$D = |\underline{r} - \underline{r}^\circ|$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} = \pm a \frac{e^{ikD}}{D^2} \left( ik - \frac{1}{D} \right) (\underline{r} - \underline{r}^\circ) \cdot \underline{n} \quad (\text{III-2})$$

En injectant dans les équations intégrales ou de champ nul discrétisées les valeurs nodales définies par (III-2), on résout le système d'équations final et on compare alors les valeurs nodales de la pression solution du système à celles définies analytiquement par (III-1). On peut également effectuer ce calcul en plaçant plusieurs sources à l'intérieur de la même surface car les effets de celles-ci sont additifs. Le test de source ponctuelle n'est pas

favorable car, si la position d'une source est proche d'une partie de la surface, alors, de par la formule (III-2), de grandes variations du champ des vitesses peuvent intervenir sur cette partie. En présence d'une seule source, le diagramme de directivité est celui d'une source ponctuelle, il est sphérique. Il est intéressant de disposer des erreurs relatives  $\varepsilon_R$  et  $\varepsilon_I$  respectivement sur la partie réelle  $Re$  et imaginaire  $Im$  de la pression aux noeuds  $\underline{r}$  de la surface, erreurs qui sont définies dans toute la suite par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_R(\underline{r}) &= \left| \frac{Re(p_c(\underline{r})) - Re(p_a(\underline{r}))}{\max(Re(p_a))} \right| \\ \varepsilon_I(\underline{r}) &= \left| \frac{Im(p_c(\underline{r})) - Im(p_a(\underline{r}))}{\max(Im(p_a))} \right|\end{aligned}\quad (\text{III-3})$$

où  $p_c(\underline{r})$  est la pression solution des calculs,  $p_a(\underline{r})$  la pression analytique donnée par (III-1),  $\max(Re(p_a))$  et  $\max(Im(p_a))$  sont les valeurs absolues maximales des parties réelle et imaginaire de la pression analytique sur la surface. A partir de (III-3), on définit le module des erreurs par :

$$\varepsilon(\underline{r}) = \sqrt{(\varepsilon_R(\underline{r}))^2 + (\varepsilon_I(\underline{r}))^2} \quad (\text{III-4})$$

Les erreurs maximales correspondantes sont :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{R \max} &= \max_{\underline{r} \in \Gamma} \varepsilon_R(\underline{r}) \\ \varepsilon_{I \max} &= \max_{\underline{r} \in \Gamma} \varepsilon_I(\underline{r}) \\ \varepsilon \max &= \max_{\underline{r} \in \Gamma} \varepsilon(\underline{r})\end{aligned}\quad (\text{III-5})$$

Une autre indication instructive est l'erreur quadratique moyenne EQM définie par :

$$EQM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N |p_c(\underline{r}_i) - p_a(\underline{r}_i)|^2}{\sum_{i=1}^N |p_a(\underline{r}_i)|^2}} \quad (\text{III-6})$$

où  $N$  est le nombre total de noeuds du maillage.

Sauf indication contraire, tous les calculs sont menés en respectant le critère en  $\lambda/4$ , condition nécessaire à une bonne représentation de la pression, de sa dérivée normale et de la géométrie de la surface quand on discrétise les équations à l'aide des éléments isoparamétriques (cf II - 1.2). De plus, ce critère est respecté au plus juste pour ne pas grossir artificiellement la taille du problème numérique à résoudre. On rappelle également que le calcul des intégrales se fait toujours avec un nombre suffisant de points de Gauss pour assurer une bonne convergence de l'intégration. Les calculs sont conduits sur un ordinateur IBM 4341 modèle 2 avec 8 Mo de mémoire centrale, sous VM-CMS, à partir de programmes écrits en FORTRAN 77. Les programmes d'équations de champ nul sont écrits en double précision avec un nombre de chiffres significatifs  $S = 17$ . Le coefficient  $A$  défini au paragraphe II - 3.3.1 est égal à 76.

Dans ce chapitre et le chapitre suivant, les unités ne sont pas toujours précisées, en particulier sur les tracés de courbes. Il faut donc savoir que, par défaut, les pressions sont exprimées en Pascal (Pa), les longueurs en mètres (m) et les fréquences en Hertz (Hz). Les diagrammes de directivité sont tracés en fonction de la valeur maximale de la pression en champ lointain (cf (II-38)) qui correspond au niveau 0. Cette pression est repérée sur une échelle logarithmique par rapport à une pression de référence  $p_0$ , ici 1 Pa, suivant la relation :

$$20 \log_{10} \left( \frac{p}{p_0} \right)$$

En conséquence, le niveau d'émission correspond à la valeur maximale de l'intensité sonore et est exprimé en décibels (db), référence 1 Pa, à 1 m.

Un dernier point abordé est la suppression de certaines fréquences irrégulières due à la prise en compte des éventuelles symétries du problème. Quand un problème admet une quelconque symétrie, seules sont irrégulières les fréquences dont les fonctions propres admettent la même symétrie. Dans le cas d'un problème symétrique par rapport au plan (XOY), on définit un domaine  $\Omega_1'$  inclus dans le domaine  $\Omega_1$  tel que  $Z > 0$ . Alors, les fréquences irrégulières du problème sont solutions de (I-74) dans  $\Omega_1'$  avec :

$$\frac{\partial \Psi(\underline{r})}{\partial n} = 0 \quad \underline{r} \in (XOY) \quad (\text{III-7})$$

Les fréquences irrégulières d'un problème antisymétrique par rapport au plan (XOY) se caractérisent de la même façon en remplaçant la condition (III-7) par :

$$\Psi(\underline{r}) = 0 \quad \underline{r} \in (XOY) \quad (\text{III-8})$$

Si les géométries sont cylindriques ou sphériques, une éventuelle symétrie axiale du problème modifie la solution générale du problème intérieur qui se réduit alors aux expressions (I-78) ou (I-80) dans lesquelles  $\lambda$  ne prend que la valeur nulle. Les  $k$  à problème du cylindre sont donc soumis à une nouvelle distribution définie par (I-79) où  $\lambda = 0$ . Les fréquences irrégulières des structures admettant simultanément plusieurs symétries seront précisées, si nécessaire, dans des cas particuliers de l'étude.

### III - 2 PROBLEME A SYMETRIE AXIALE

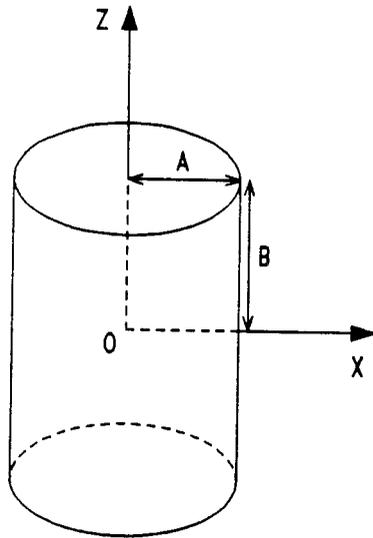
#### III - 2.1 Résolution de problèmes de rayonnement simples

Dans cette section, on veut valider le code de calcul dans le cas d'une utilisation séparée de la représentation de Helmholtz extérieure et de la méthode de champ nul. La validation repose sur le test de la source ponctuelle. Les fréquences de travail sont choisies dans une gamme où les fréquences irrégulières n'interviennent pas, i.e. où la solution des équations intégrales de Helmholtz est unique. Les géométries impliquées sont représentées sur la figure III-1 : le cylindre de rayon A et de demi-hauteur B, la sphère de rayon R, le sphéroïde de demi-petit axe A et de demi-grand axe B et le cône de hauteur H et dont la base circulaire est de rayon R. Sauf indication contraire, et en vue d'une bonne utilisation des équations de champ nul, l'origine du repère est située au point où le rapport E du rayon minimum au rayon maximum, par rapport à ce point, est le plus proche de l'unité. Pour le cône, l'origine est située sur l'axe (OZ), à une distance D de la base circulaire exprimée en fonction de l'excentricité minimum E :

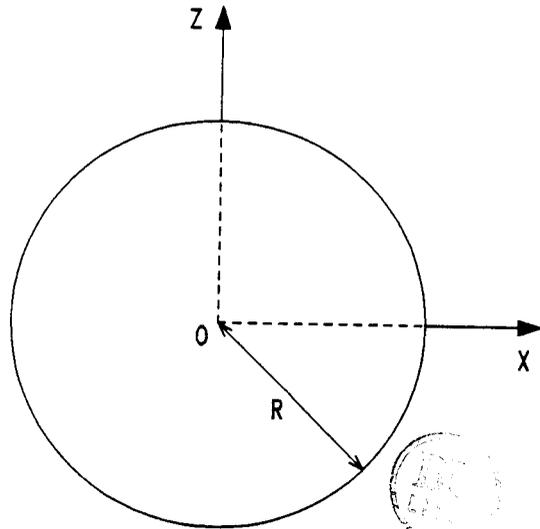
$$D = \frac{H}{1 + E} \quad (\text{III-9})$$

$$E = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}}$$

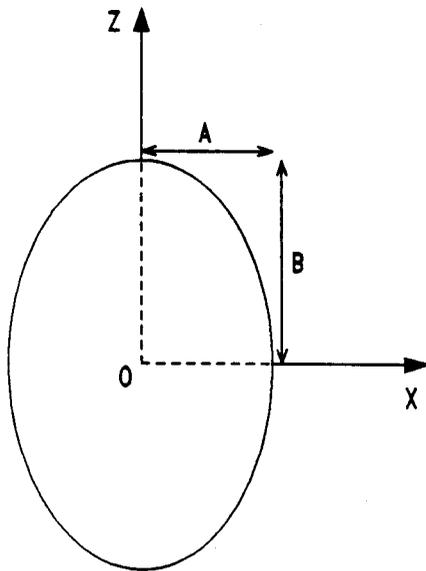
Le critère en  $\lambda/4$  implique que si L est la longueur d'arc d'un élément



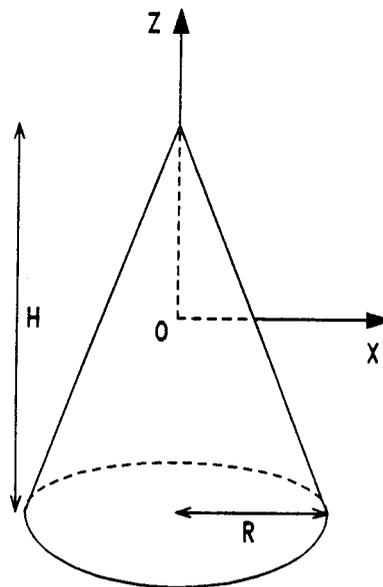
Cylindre



Sphère



Sphéroïde



Cône

figure III-1 : géométries à symétrie axiale

de génératrice, alors :

$$L < \frac{\pi}{2k} \quad \text{ou} \quad L < \frac{c}{4f} \quad (\text{III-10})$$

où  $c$  est la vitesse du son dans le fluide. On rappelle que, le problème étant à symétrie axiale, on ne maille que la génératrice du plan (XOZ) en éléments isoparamétriques à 3 noeuds.

### III - 2.1.1 Utilisation de la représentation de Helmholtz extérieure

Une première série de test consiste à placer une source ponctuelle à l'origine des coordonnées. Dans le cas du cylindre, de la sphère et du sphéroïde, le plan (XOY) est un plan de symétrie du problème. Cette symétrie est prise en compte dans les calculs pour permettre une nette diminution du temps CPU. On modélise ainsi les problèmes de rayonnement suivants :

- . le cylindre tel que  $k_A = 2$ ,  $k_B = 12$ ,
- . la sphère telle que  $k_R = 2$ ,
- . le sphéroïde tel que  $k_A = 2$ ,  $k_B = 8$ ,
- . le cône tel que  $k_R = 3$ ,  $k_H = 6$ .

Le découpage du cylindre est constitué de 2 éléments sur le rayon A et de 8 éléments sur la demi-hauteur B. La sphère comporte 3 éléments sur la demi-génératrice située dans le premier quadrant alors que le sphéroïde en compte 6. La génératrice du cône comprend un segment incliné composé de 5 éléments alors que le rayon est découpé en 2 éléments. Pour chaque structure, les éléments du maillage sont, si possible, de même longueur. Les résultats sont regroupés dans le tableau III-1 où, pour chacun de ces problèmes, sont inscrits les maxima  $\varepsilon_R \max$  et  $\varepsilon_I \max$  (cf (III-5)), ainsi que l'erreur quadratique moyenne EQM (cf (III-6)) alors obtenue et le temps de calcul total  $t$ .

	$\varepsilon_R \max$	$\varepsilon_I \max$	EQM	$t$
cylindre	1,8%	0,5%	0,9%	40s
sphère	1,3%	0,6%	0,5%	4s
sphéroïde	1,5%	0,5%	0,8%	15s
cone	1,6%	1,5%	0,9%	10s

tableau III-1

Etant donné sa géométrie trop favorable à une modélisation par équations de champ nul, la sphère est un cas peu intéressant qui n'est pas répertorié ici. Tous les tests sont menés avec un nombre de coefficients  $a_p$  de (II-51) égal au nombre d'équations :

$$M = P + 1 \quad (\text{III-11})$$

Dans le cas du problème symétrique par rapport au plan (XOY), il est primordial de préciser qu'un développement élémentaire des équations (II-51) montre que les équations de champ nul telles que  $m$  soit impair sont triviales. De même, la décomposition de la pression en série de Fourier (II-48) se limite aux termes d'indice pair. Ceci étant, (II-48) est remplacée par :

$$p(\underline{r}) = \sum_{0 \leq 2j \leq P} a_{2j} \cos(2j\theta) \quad (\text{III-12})$$

(II-51) est remplacée par :

$$\sum_{0 \leq 2j \leq P} L_m \ a_{2j} = F_m \quad m = 2j' \quad 0 \leq 2j' \leq M-1 \quad (\text{III-13})$$

Par analogie, si le plan (XOY) est un plan d'antisymétrie, alors :

$$p(\underline{r}) = \sum_{1 \leq 2j+1 \leq P} a_{2j+1} \cos((2j+1)\theta) \quad (\text{III-14})$$

et :

$$\sum_{1 \leq 2j+1 \leq P} L_m \ a_{2j+1} = F_m \quad m = 2j'+1 \quad 0 \leq 2j'+1 \leq M-1 \quad (\text{III-15})$$

Ces simplifications sont intégrées dans le programme.

Le cylindre choisi est découpé en 2 éléments sur le rayon  $A$  et 2 éléments sur la demi-hauteur  $B$ . N'étant pas trop excentré, il permet d'illustrer les critères (II-68) et (II-70) qui se traduisent ici par :

$$3 \leq M \leq 111 \quad (\text{III-16})$$

La technique de renormalisation est mise en oeuvre à partir de  $M = 55$ . La distribution de vitesse est issue d'une source ponctuelle située à l'origine

Ces résultats sont obtenus avec un nombre de points d'intégration égal à 20. Cette valeur assure la convergence des intégrales de Helmholtz et, sauf mention du contraire, n'est plus modifiée dans la suite de ce document.

Dans un second temps, on reprend exactement les mêmes structures cylindriques, sphériques et sphéroïdales sur lesquelles est appliquée une distribution de vitesse antisymétrique. Ce type de distribution est créé en plaçant symétriquement par rapport à l'origine du repère et sur l'axe de révolution deux sources identiques dont les amplitudes sont de signes opposés. Ces sources sont situées à une distance  $d$  de l'origine telle que :

- .  $d = B/2$  pour le cylindre,
- .  $d = R/2$  " la sphère,
- .  $d = B/2$  " le sphéroïde.

Les conditions de calcul étant identiques à celles décrites dans le cas du problème symétrique, les résultats sont présentés dans le tableau III-2.

	$\epsilon_R \text{ max}$	$\epsilon_I \text{ max}$	EQM	t
cylindre	1,6%	0,5%	0,8%	40s
sphère	0,8%	0,2%	0,4%	4s
sphéroïde	1,1%	0,6%	0,8%	15s

tableau III-2

Ces premiers calculs montrent que la représentation de Helmholtz extérieure s'applique indifféremment à toute sorte de géométrie et pour tout type de distribution de vitesse avec une excellente précision. Le problème des fréquences irrégulières a été volontairement écarté pour le moment.

### III - 2.1.2 Utilisation de la méthode de champ nul

Dans cette section, les corps rayonnants étudiés sont :

- . le cylindre tel que  $k_A = 2$ ,  $k_B = 2$ ,
- . le sphéroïde tel que  $k_A = 2$ ,  $k_B = 8$ ,
- . le cône tel que  $k_R = 3$ ,  $k_H = 6$ .

des coordonnées. Le problème est donc symétrique et différentes décompositions de la pression sont testées :

. M = 7 et :

$$p(\underline{r}) = a_0 + \dots + a_{2j} \cos(2j\theta) + \dots + a_6 \cos(6\theta)$$

. M = 49 et :

$$p(\underline{r}) = a_0 + \dots + a_{2j} \cos(2j\theta) + \dots + a_{48} \cos(48\theta)$$

. M = 79 et :

$$p(\underline{r}) = a_0 + \dots + a_{2j} \cos(2j\theta) + \dots + a_{78} \cos(78\theta)$$

. M = 109 et :

$$p(\underline{r}) = a_0 + \dots + a_{2j} \cos(2j\theta) + \dots + a_{108} \cos(108\theta)$$

Les résultats sont inscrits dans le tableau III-3 où, en plus des erreurs relatives maximales  $\epsilon_{R \max}$  et  $\epsilon_{I \max}$ , de l'erreur quadratique moyenne EQM et du temps de calcul t, on indique le nombre NG de points d'intégration des intégrales de champ nul.

	$\epsilon_{R \max}$	$\epsilon_{I \max}$	EQM	t	NG
M = 7	7,2%	24,7%	10,3%	<1s	6
M = 49	0,2%	5,6%	1,9%	6s	20
M = 79	0,9%	4,1%	1,4%	22s	30
M = 109	54,8%	1,3%	13,7%	103s	80

tableau III-3

Sur la figure III-2, est représenté le module de la pression calculée avec les quatre décompositions que l'on compare au résultat analytique obtenu en prenant le module de la formule (III-1). Dorénavant, les courbes de pression sont tracées, sauf indication contraire, en reliant chaque point par une interpolation linéaire. L'abscisse correspond à la numérotation des noeuds. Sur la même figure, est indiqué les numéros du noeud sur l'axe (OZ), du noeud sur le coin et du noeud sur le plan de symétrie.

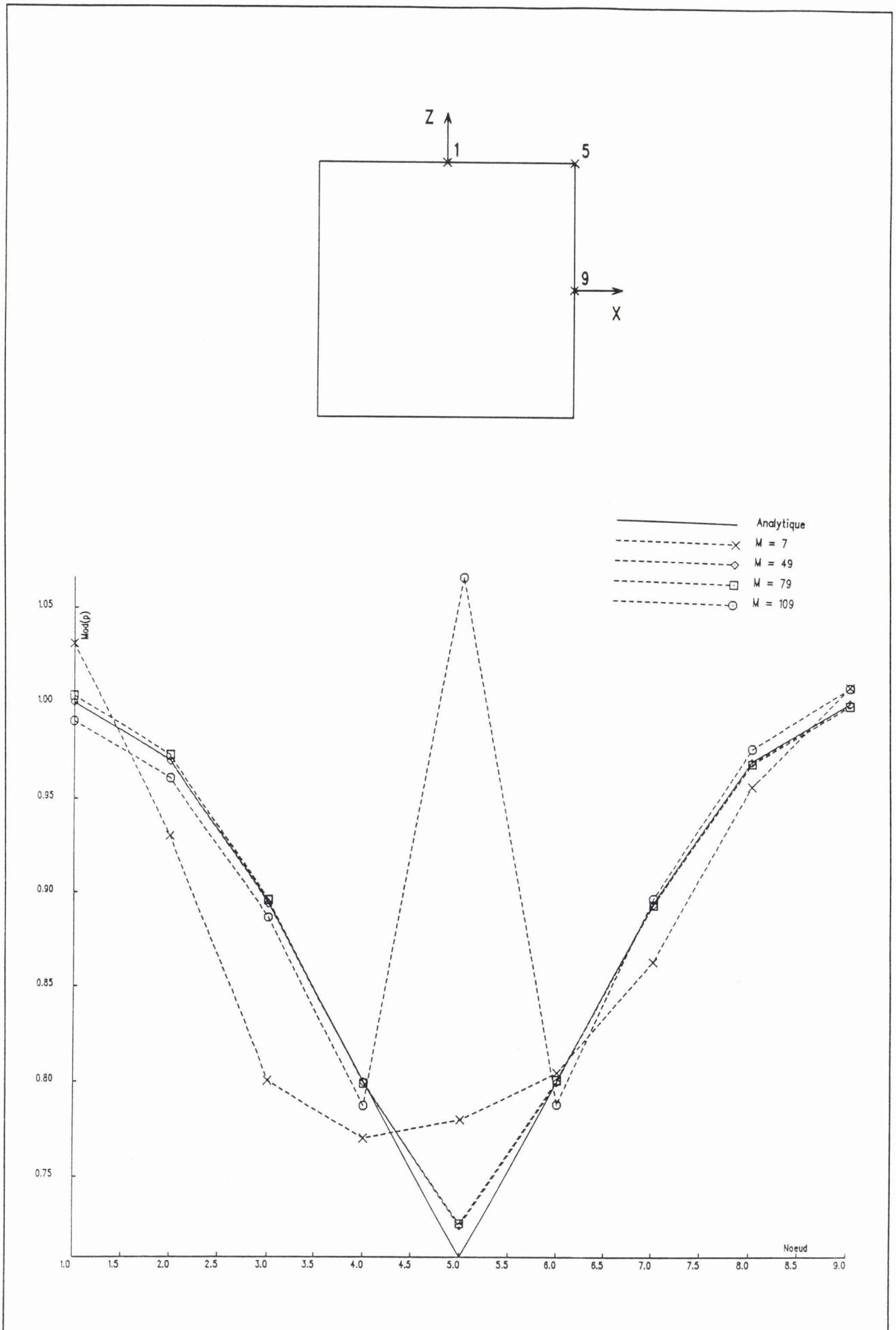


figure III-2 : rayonnement du cylindre symétrique :  $k_A = k_B = 2$

En plaçant deux sources ponctuelles sur l'axe (OZ), symétriquement par rapport à l'origine O du repère et dont les amplitudes sont de signes opposés, le problème est antisymétrique. Chaque source est à une distance d de l'origine telle que :

$$d = B/2$$

Les calculs sont effectués dans 4 conditions différentes :

. M = 8 et :

$$p(\underline{r}) = a_1 + \dots + a_{2j+1} \cos((2j+1)\theta) + \dots + a_7 \cos(7\theta)$$

. M = 50 et :

$$p(\underline{r}) = a_1 + \dots + a_{2j+1} \cos((2j+1)\theta) + \dots + a_{49} \cos(49\theta)$$

. M = 80 et :

$$p(\underline{r}) = a_1 + \dots + a_{2j+1} \cos((2j+1)\theta) + \dots + a_{79} \cos(79\theta)$$

. M = 110 et :

$$p(\underline{r}) = a_1 + \dots + a_{2j+1} \cos((2j+1)\theta) + \dots + a_{109} \cos(109\theta)$$

Par analogie avec le problème précédent, les résultats sont condensés dans le tableau III-4 et, de nouveau, la variation du module de la pression est schématisée sur la figure III-3.

	$\varepsilon_R \text{ max}$	$\varepsilon_I \text{ max}$	EQM	t	NG
M = 8	13,2%	6,0%	6,7%	<1s	6
M = 50	3,1%	1,8%	1,6%	6s	20
M = 80	1,1%	1,3%	0,9%	22s	30
M = 110	51,5%	3,6%	22,2%	103s	80

tableau III-4

Que ce soit la résolution du problème symétrique ou antisymétrique, on constate, conformément au paragraphe II - 3.3.2, une dégradation des résultats

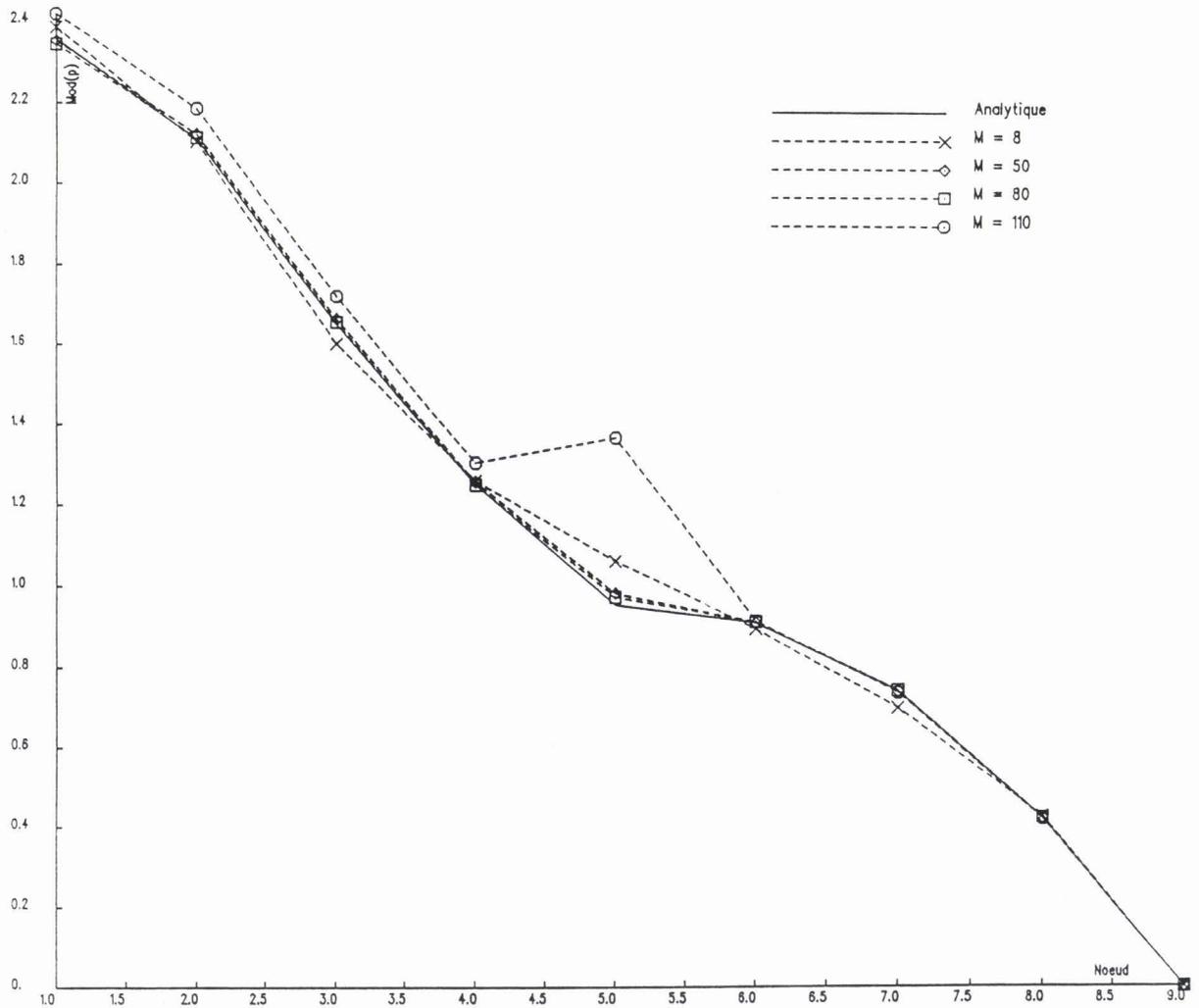
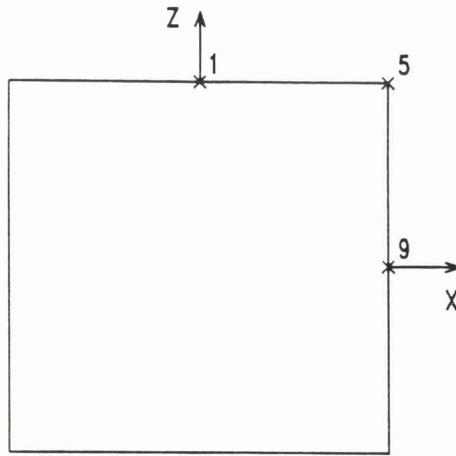


figure III-3 : rayonnement du cylindre antisymétrique :  $k_A = k_B = 2$

quand les bornes de l'intervalle (III-16) sont approchées. De plus, l'erreur maximale est localisée au noeud de la surface le plus éloigné de l'origine, c'est-à-dire au coin du cylindre.

La seconde géométrie test est le sphéroïde du paragraphe III - 2.1.1, avec le même maillage de surface. D'après le paragraphe II - 3.3.2, cet objet étant relativement excentré, on peut s'attendre à n'obtenir de bons résultats qu'aux noeuds de la surface  $\Gamma$  proches de la sphère inscrite dans  $\Gamma$  et de centre l'origine du repère. Avec cette contrainte, deux calculs avec deux origines différentes sont menés. Le premier est le calcul habituel où l'origine est située au point de la structure où l'excentricité  $E$  est minimum. La valeur de  $M$  est alors fixée par :

$$9 < M < 27 \quad (\text{III-17})$$

Dans le second calcul, l'origine est décalée sur l'axe (OZ) au point de coordonnée  $Z = B/2$ . Cette augmentation de l'excentricité resserre considérablement l'intervalle encadrant  $M$  :

$$13 < M < 14 \quad (\text{III-18})$$

Une source ponctuelle coïncidant avec l'origine du premier calcul définit une distribution de vitesse symétrique par rapport à (XOY). Dans le second calcul, la simplification due au plan de symétrie est perdue. Les deux sphères inscrites dans  $\Gamma$  et centrées aux deux origines définies permettent un bon recouvrement de la surface. Par extension, cette manoeuvre doit permettre une bonne description de la pression sur la surface. La figure III-4 représente la variation du module de la pression sur la partie de génératrice inscrite dans le premier quadrant. Le noeud 1 est sur l'axe (OZ) alors que le noeud 13 est sur le plan (XOY). Le premier calcul est obtenu avec  $NG = 16$  et  $M = 19$  qui est une valeur intermédiaire de la fourchette (III-17). Le second est effectué avec  $NG = 12$  et  $M = 11$  pour être suffisamment éloigné de la borne supérieure de (III-18). Le non-respect de la valeur minimale de  $M$  n'est pas pénalisant car on sait que cette condition, nécessaire pour une bonne précision sur toute la surface, n'est pas suffisante ici. Les temps CPU sont respectivement de 2s et 1s. Les résultats présentés sur la figure III-4 sont conformes aux prévisions : le rayonnement de ce sphéroïde excentré peut être modélisé convenablement par la méthode de champ nul en dupliquant les calculs par translation de l'origine sur l'axe de symétrie.

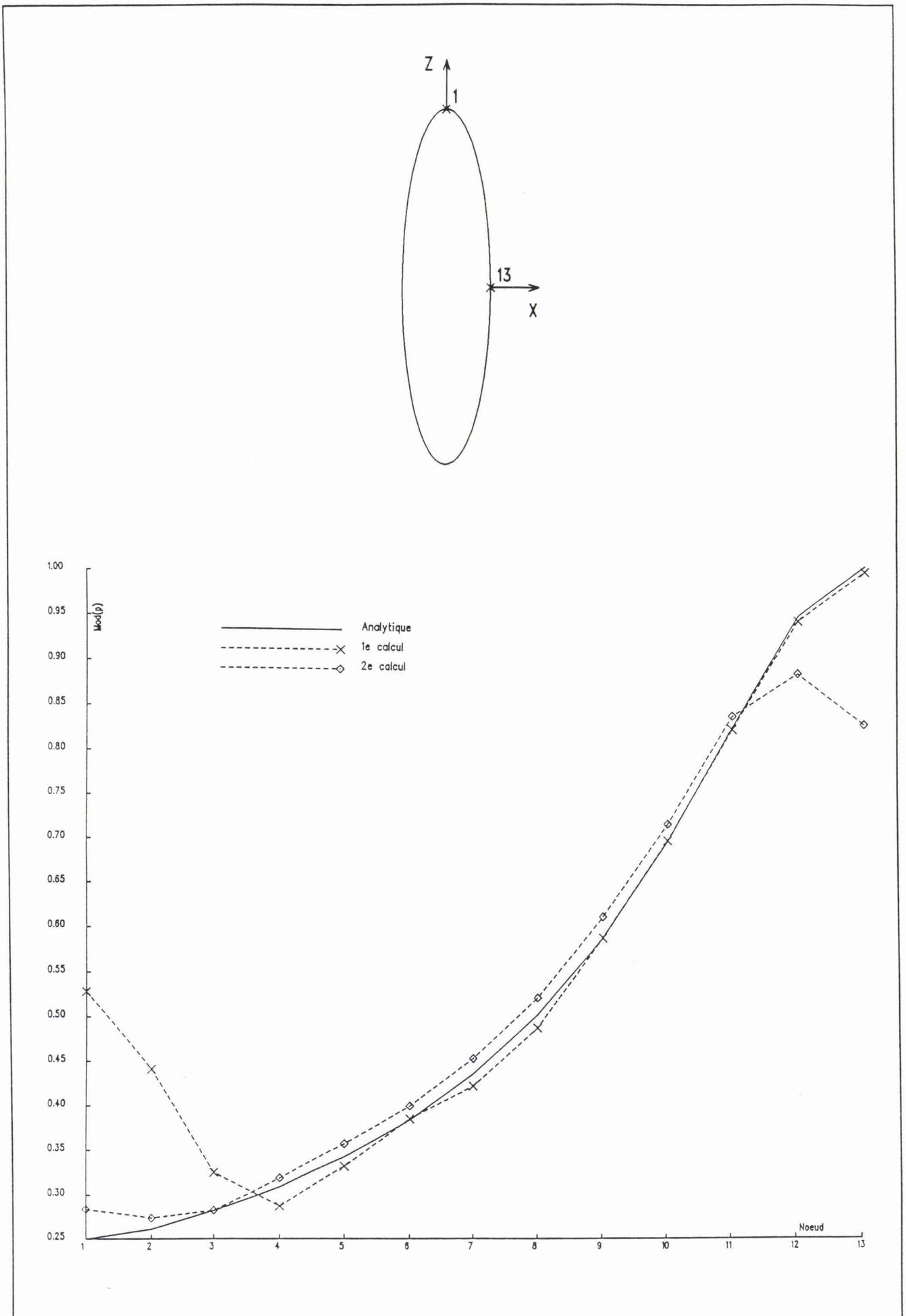


figure III-4 : rayonnement du sphéroïde :  $k_A = 2$   $k_B = 8$

Le dernier test proposé porte sur le cône déjà modélisé par la représentation de Helmholtz extérieure. Cette géométrie limite le domaine de validité de M à :

$$5 < M < 47 \quad (\text{III-19})$$

Le calcul est entrepris avec  $M = 40$  et  $NG = 28$ . Sur la figure III-5 est dessinée la variation du module de la pression. Deux zones sont éloignées de la sphère inscrite dans  $\Gamma$  et centrée sur l'origine définie par (III-9). Ces zones sont localisées autour du noeud situé au sommet du cône, et du noeud situé à l'extrémité du rayon de la base. On constate, comme prévu, que l'erreur maximale est obtenue au point le plus excentré, c'est-à-dire au sommet du cône et qu'une seconde zone d'incertitude est également observée à l'extrémité du rayon. Le temps CPU est de 32s.

Finalement, les tests effectués dans cette section confirment les limitations posées au paragraphe II - 3.3.2 :

- les relations (II-68) et (II-70) fournissent un bon encadrement de la valeur de M en fonction de l'excentricité et de la fréquence,
- une augmentation de l'excentricité altère fortement la précision, qui reste néanmoins correcte aux noeuds de la surface voisins de la sphère inscrite dans  $\Gamma$  et centrée à l'origine. Une utilisation des équations de champ nul avec plusieurs origines est une parade possible, sous réserve de ne pas inverser les limites haute et basse de (II-68) et (II-70) en décentrant les origines.

Pour des structures plus excentrées et des fréquences plus élevées, la méthode de champ nul n'est pas envisageable dans sa forme actuelle. Un recours à des fonctions d'ondes sphéroïdales au lieu de fonctions d'ondes sphériques devrait améliorer la convergence des calculs. Une autre amélioration immédiate mais coûteuse serait un accès à un système informatique plus performant qui permettrait d'augmenter les coefficients A et S des paragraphes II - 3.3.1 et II - 3.3.2.

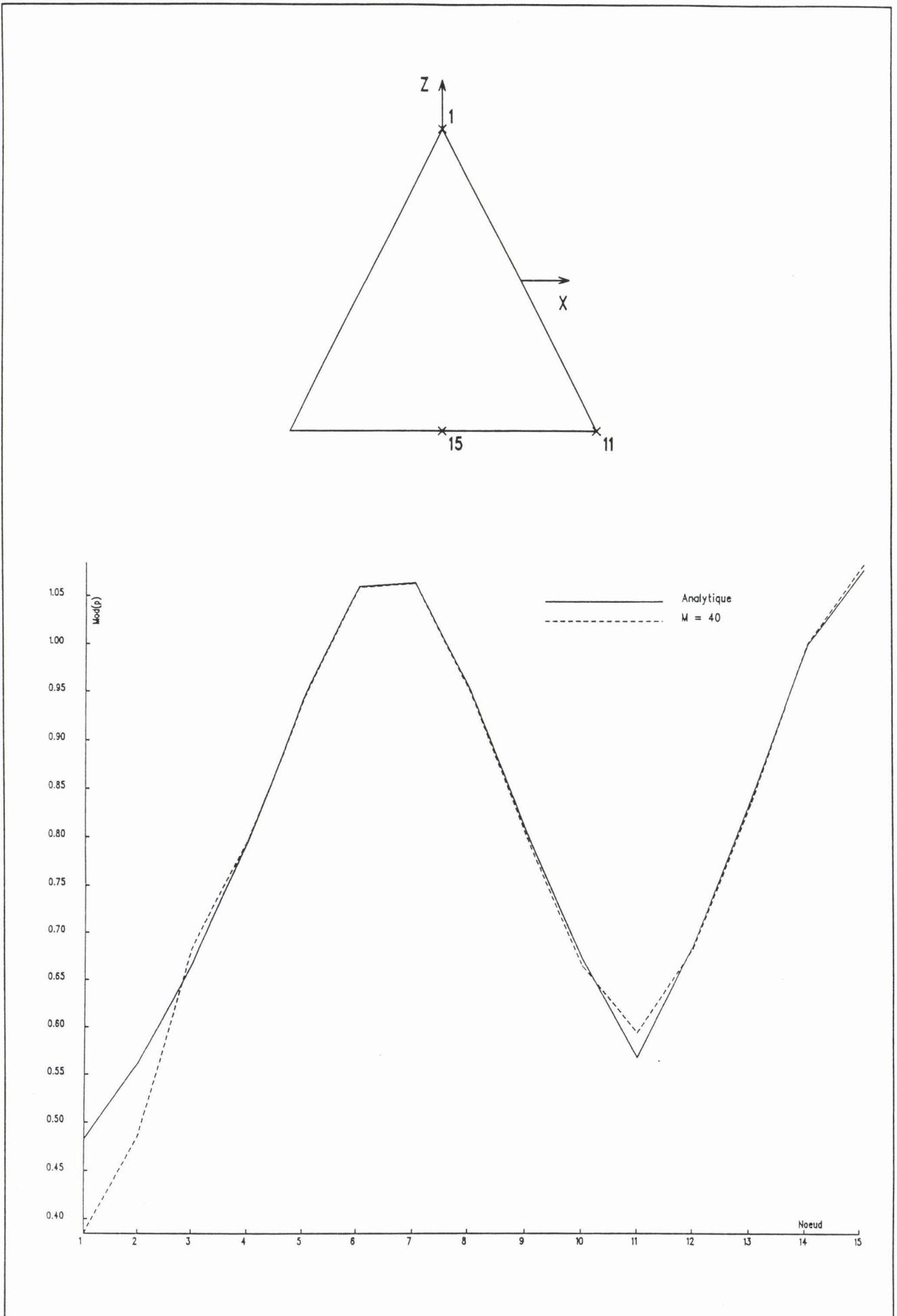


figure III-5 : rayonnement du cône :  $kR = 2$   $kB = 8$

### III - 2.2 Combinaison équations intégrales-champ nul

La représentation de Helmholtz extérieure permet de modéliser le rayonnement ou la diffraction par des corps de forme quelconque. Elle est mise en échec quand la fréquence de travail coïncide avec une fréquence irrégulière. A ces fréquences, il existe théoriquement une infinité de solutions. D.S. JONES [56] a prouvé qu'une condition suffisante pour assurer l'unicité de la solution jusqu'à la nième fréquence irrégulière est de surdéterminer le système d'équations intégrales par toutes les équations de champ nul de degré inférieur ou égal à  $n-1$ . C'est ce que nous allons valider dans la suite en discutant du comportement de la solution pour plusieurs objets. Ensuite, à partir de géométries simples, dont l'une est très excentrée, est mis en évidence le caractère trop large du critère de Jones qui est alors comparé à celui rappelé dans le paragraphe I - 4.2 . Avant d'entreprendre ces calculs, on s'est assuré que les valeurs de  $M$  des équations de champ nul utilisées concordent avec l'inégalité (II-67) ou (II-68). A partir de maintenant, le rôle des équations de champ nul étant uniquement de surdéterminer les équations intégrales, la condition (II-70) est caduque.

#### III - 2.2.1 *Suppression des fréquences irrégulières*

Dans l'intention d'éprouver la méthode de Jones, on étudie les deux objets suivants :

- . le cylindre tel que  $B = 6A$ ,
- . le cône tel que  $H = 2R$ .

Une source ponctuelle placée à l'origine du repère sert encore de référence. Compte tenu de la symétrie axiale et de la symétrie plane du problème, les  $k$  à problème du cylindre, formulés en (I-79), se limitent à :

$$k_{m0n} = \frac{1}{A} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{12}\right)^2 + (\alpha_{0n})^2} \quad m \text{ impair} \quad (\text{III-20})$$

Les  $k$  à problème du cône sont déterminés en calculant les valeurs propres du problème de Dirichlet intérieur à l'aide du code ATILA. A une fréquence donnée, on modélise le rayonnement du cylindre et du cône par la

représentation de Helmholtz extérieure. Ce premier calcul est suivi d'une surdétermination de ces équations intégrales par des équations de champ nul. Pour le cylindre, et conformément au critère de Jones, le nombre NEQCN d'équations supplémentaires de champ nul non triviales est choisi en fonction du nombre d'onde  $k$ . Soit  $k_n$  le nième  $k$  à problème du cylindre, on décide que :

$$\text{si } k_{n-1} < k \leq k_n \text{ alors NEQCN} = n \quad (\text{III-21})$$

Etant donné la symétrie du problème, les  $n$  équations de champ non triviales sont de degré  $m$  tel que :

$$m = 2j \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (\text{III-22})$$

Pour le cône, on a délibérément fixé la valeur de NEQCN à :

$$\text{NEQCN} = 10$$

On balaye finement la gamme de fréquences incluant les 1ère et 7ème fréquences irrégulières du cylindre et les 1ère et 4ème fréquences irrégulières du cône. On trace alors sur la figure III-6 (respectivement III-7) en fonction du produit  $kA$  (respectivement  $kH/3$ ), l'évolution de l'erreur maximale  $\varepsilon_{\max}$  (cf (III-5)) sur la surface du cylindre (respectivement cône) calculée sans et avec équations supplémentaires de champ nul. Dans la suite de cet ouvrage, les intégrales de champ nul sont calculées avec un nombre de points de Gauss  $NG$  égal au nombre de coefficients de la décomposition de la pression en série de Fourier (II-48), i.e. :

$$NG = P + 1 \quad (\text{III-23})$$

Ici, on a  $P = 49$ . Quand la fréquence augmente, le maillage est raffiné afin de respecter le critère en  $\lambda/4$ . A titre indicatif, le découpage du cylindre varie entre 2 et 3 éléments sur  $A$  et entre 8 et 17 éléments sur  $B$ , pour un temps de calcul compris entre 39s et 154s sans équation de champ nul et entre 49s et 175s quand  $\text{NEQCN} = n$ . Le découpage du cône varie entre 3 et 13 éléments sur le segment incliné et entre 1 et 6 éléments sur  $R$ , pour un temps de calcul compris entre 3s et 69s sans équation de champ nul et entre 29s et 192s quand  $\text{NEQCN} = 10$ . Après examen des figures III-6 et III-7, on conclut que la méthode de Jones est efficace et que la surdétermination par trop d'équations de champ

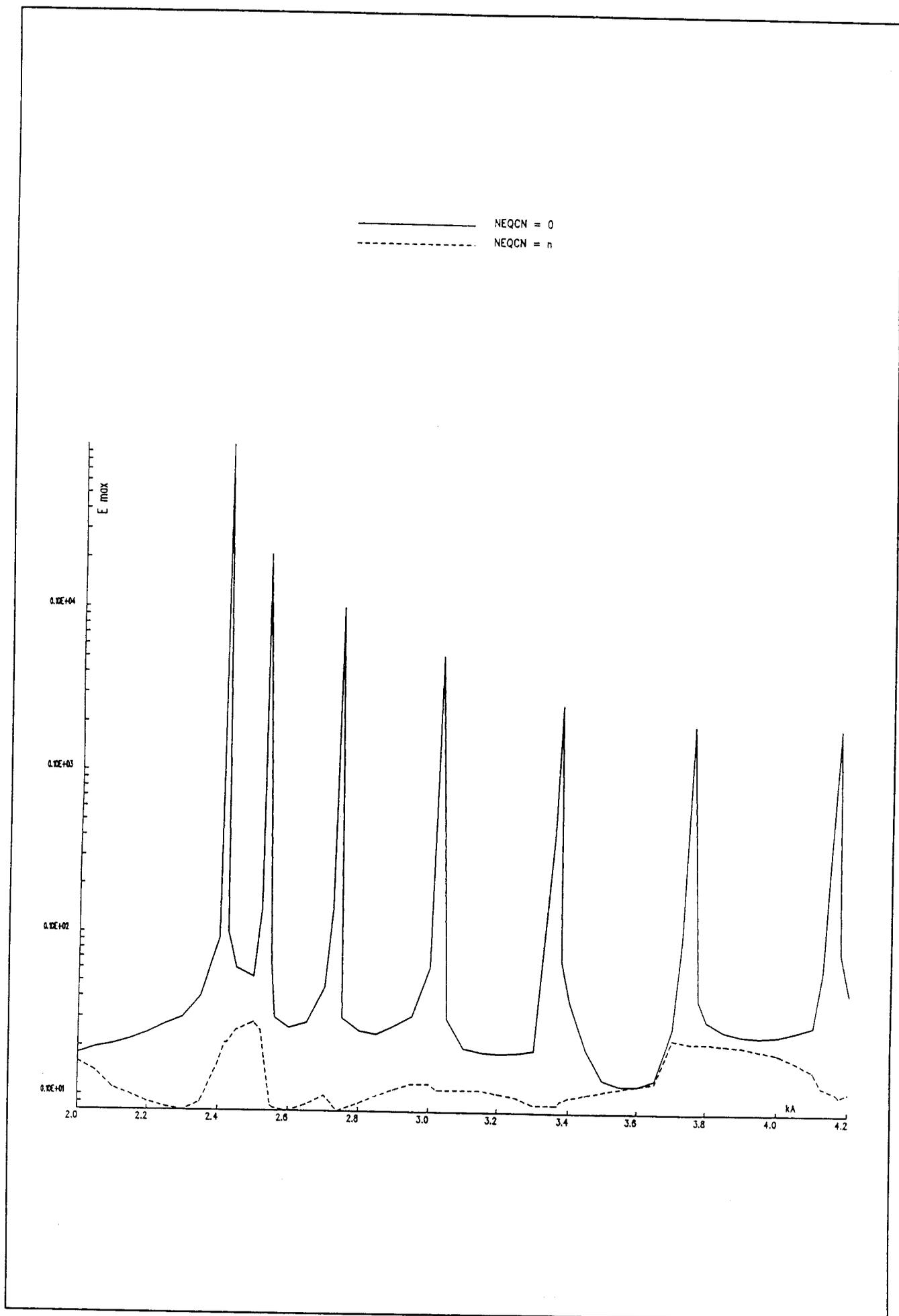


figure III-6 : erreur maximale sur le cylindre quand  $NEQCN = 0$  ou  $n$

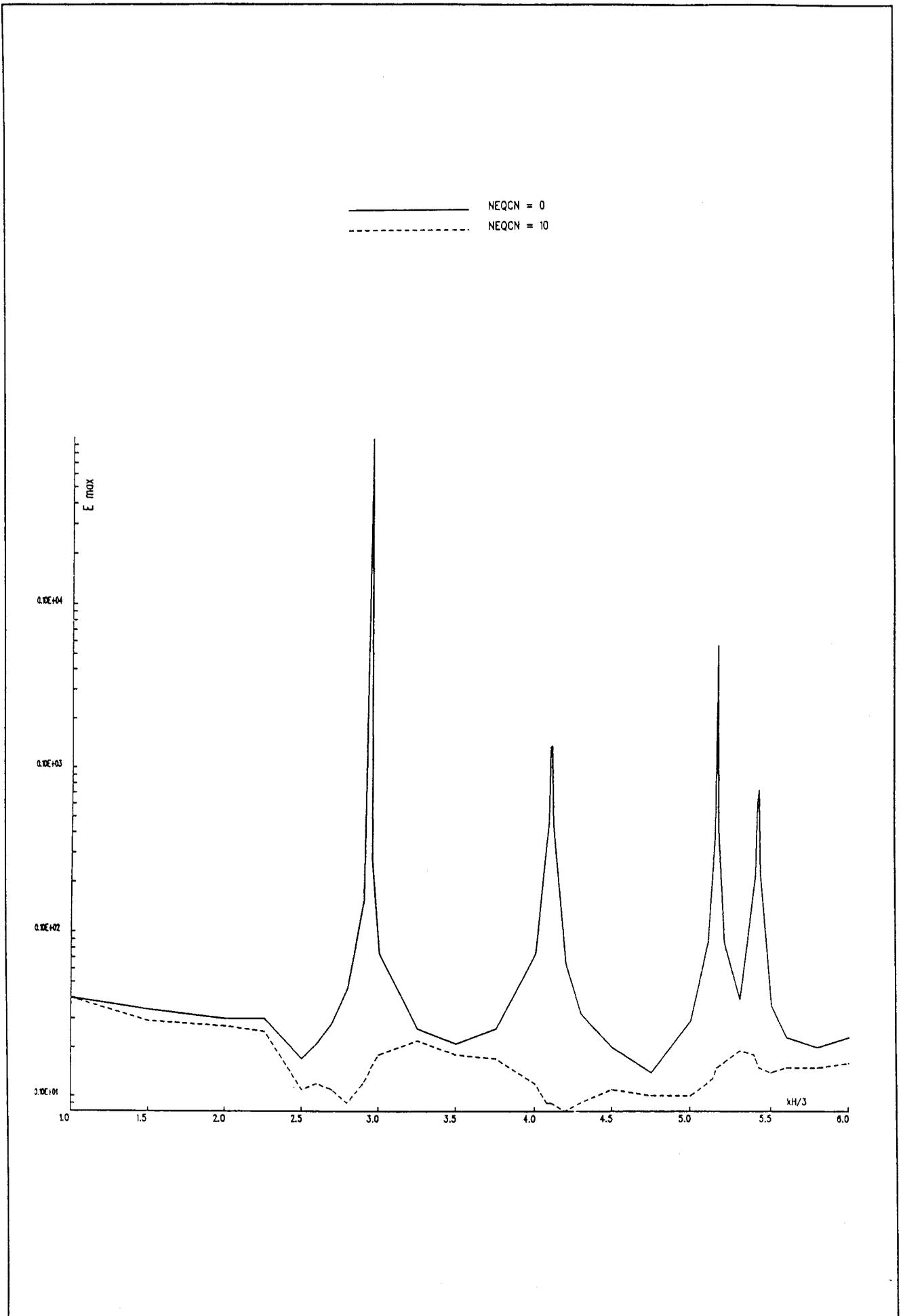


figure III-7 : erreur maximale sur le cône quand NEQCN = 0 ou 10

nul ne nuit pas à la précision du résultat. Cette dernière remarque est importante quand on ne connaît pas précisément l'ordre  $n$  des bornes de l'encadrement (III-21), car on peut alors prendre  $NEQCN > n$ .

### III - 2.2.2 Lien entre le nombre d'équations supplémentaires et la position de l'origine

Le critère de Jones fournit une condition suffisante pour assurer l'unicité de la solution à une quelconque fréquence irrégulière. Dans le paragraphe I - 4.2 est rappelé un autre critère beaucoup plus strict qui, d'un point de vue pratique et pour mémoire, se résume à l'énoncé suivant : si, pour une fréquence irrégulière donnée, l'origine du repère appartient à  $n$  surfaces nodales différentes, la surdétermination du système d'équations intégrales par toutes les équations de degré  $m$  tel que  $m \leq n$  assure l'unicité de la solution. Dans les exemples traités dans cette partie, on s'attache à montrer la supériorité de ce nouveau critère sur le critère de Jones.

On reprend le cylindre de la section III - 2.2.1 avec la même distribution de vitesse. Les  $k$  à problème sont donnés par (III-20). Pour appliquer le nouveau critère, la connaissance des surfaces nodales nécessite de savoir résoudre le problème de Dirichlet intérieur. Dans le cas du cylindre modélisé en tenant compte de la symétrie axiale et du plan de symétrie, la solution (I-78) se réduit à :

$$\Psi(\rho, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} \cos(\mu z) J_0(\rho \sqrt{k^2 - \mu^2}) \quad (\text{III-24})$$

Pour un  $k$  à problème  $k_{m0n}$ , la condition de Dirichlet permet d'établir (III-20) où :

$$\frac{m\pi}{12A} = \mu \quad m \text{ impair} \quad (\text{III-25})$$

En utilisant (III-20) et (III-25), les surfaces nodales sont solutions de :

$$\cos \frac{m\pi z}{12A} J_0 \left( \frac{\rho \alpha_{0n}}{A} \right) = 0 \quad m \text{ impair} \quad (\text{III-26})$$

Après résolution de (III-26), les surfaces nodales sont définies par :

$$z = 6A \left( \frac{1}{m} + \frac{2q}{m} \right) \quad q \in \mathbb{Z} \quad m \text{ impair} \quad (\text{III-27})$$

$$\rho = A \frac{\alpha_{0p}}{\alpha_{0n}} \quad p \in \mathbb{N}^*$$

où  $\rho$  est défini sur la figure I-4. Les valeurs de  $p$  et  $q$  qui conviennent sont celles pour lesquelles les surfaces ainsi déterminées sont incluses dans le volume intérieur. Les trois premiers  $k$  à problème sont, dans l'ordre :  $k_{101}$ ,  $k_{301}$  et  $k_{501}$ . Les surfaces nodales associées à ces trois  $k$  à problème sont définies par :

. pour  $k_{101}$  :

$$z = \pm 6A$$

$$\rho = A$$

. pour  $k_{301}$  :

$$z = \pm 6A, \pm 2A$$

$$\rho = A$$

. pour  $k_{501}$  :

$$z = \pm 6A, \pm \frac{18A}{5}, \pm \frac{6A}{5}$$

$$\rho = A$$

Les surfaces nodales sont représentées sur la figure III-8. L'origine n'étant pas sur une surface nodale, le nouveau critère indique qu'une seule équation de champ nul de degré  $m = 0$  garantit l'unicité de la solution pour toutes les fréquences irrégulières du problème symétrique. En faisant coïncider successivement les trois fréquences de travail avec ces trois fréquences irrégulières, le problème de rayonnement est résolu par équations intégrales sans équation de champ nul et avec équations de champ nul en respectant le nouveau critère et celui de Jones. Dorénavant, dans les équations de champ nul, la pression est décomposée en série de Fourier (II-48) avec  $P = 77$ . L'erreur maximale  $\varepsilon_{\max}$  ainsi que l'erreur quadratique moyenne EQM sont

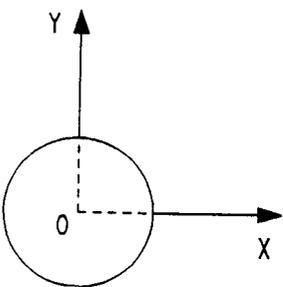
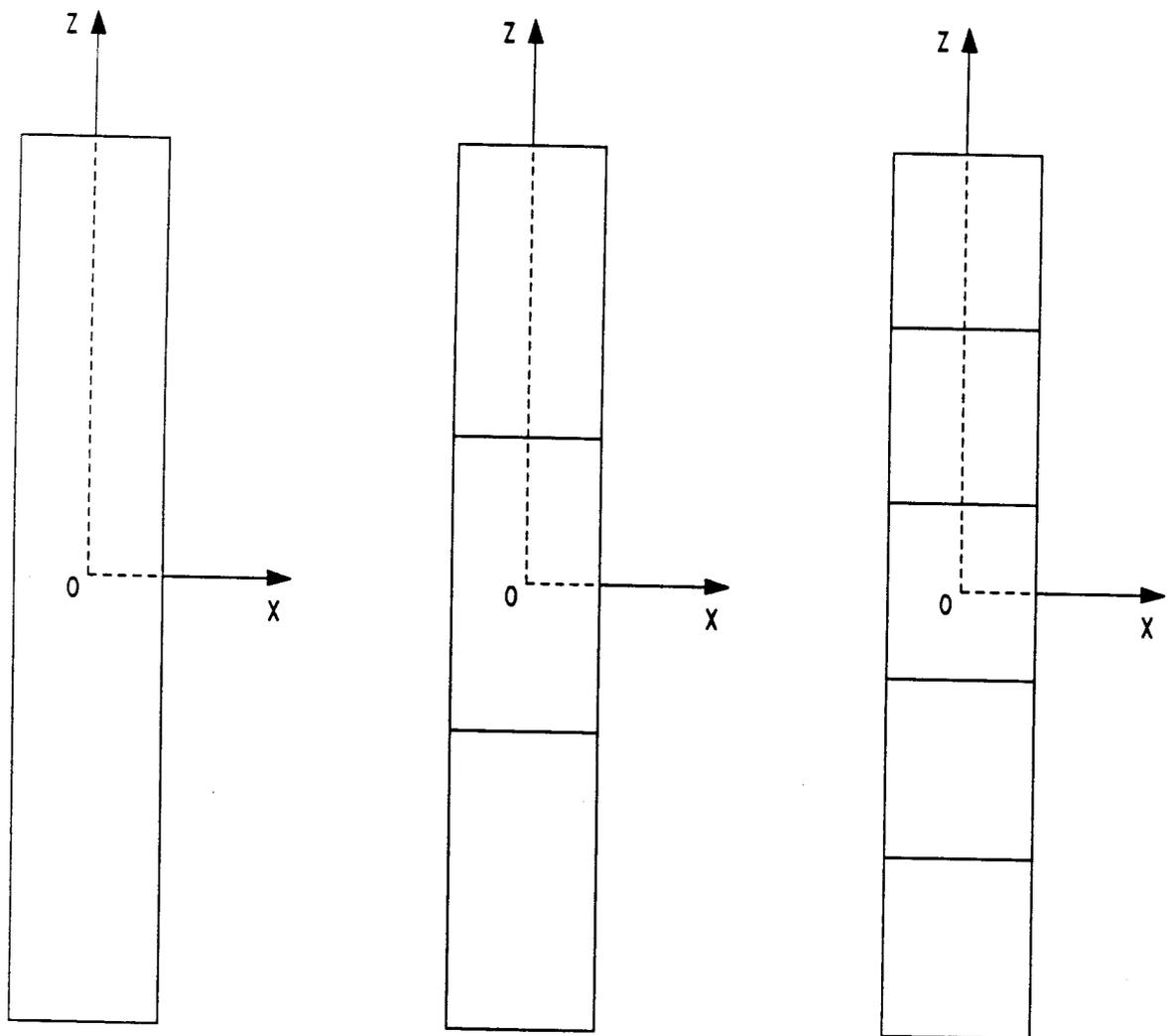
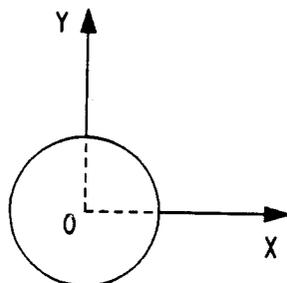
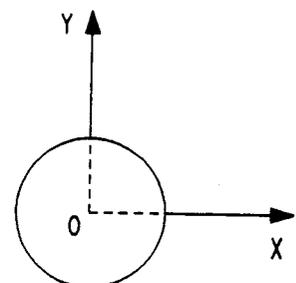

 $k_{101}$ 

 $k_{301}$ 

 $k_{501}$ 

figure III-8 : surfaces nodales du cylindre symétrique :  $B = 6A$

inscrites dans le tableau III-5. Pour la fréquence la plus élevée, les produits  $k_A$  et  $k_B$  sont égaux à 2,7 et 16,4. La génératrice du cylindre est constituée de 2 éléments sur A, de 10 éléments sur B que l'on divise en 11 éléments quand  $k = k_{501}$ .

	NEQCN	$\epsilon$ max	EQM
$k_{101}$	0	>1000%	>1000%
"	1	2,2%	2,4%
$k_{301}$	0	>1000%	>1000%
"	1	1,7%	1,9%
"	2	1,7%	1,8%
$k_{501}$	0	>1000%	726,1%
"	1	1,3%	1,3%
"	3	1,0%	1,0%

tableau III-5

Aucune différence remarquable n'est à noter sur la précision des résultats quand le nouveau critère est employé au lieu du critère de Jones. La première équation de champ nul,  $m = 0$ , est équivalente à l'équation intégrale de Helmholtz intérieure quand le point intérieur est placé à l'origine. Dans ce cas précis, les traitements des  $k$  à problème par application du nouveau critère ou par la méthode de Schenck sont équivalents.

La même géométrie cylindrique est alors considérée, mais la distribution de vitesse testée est maintenant antisymétrique par rapport au plan (XOY). Pour ce faire, deux sources ponctuelles identiques dont les amplitudes sont de signes opposés sont situées symétriquement sur l'axe (OZ), à une distance  $d$  de 0 telle que :

$$d = \frac{B}{2}$$

Avec cette antisymétrie, la relation (III-24) est remplacée de façon évidente par :

$$\Psi(\rho, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} B_{\mu} \sin(\mu z) J_0(\rho \sqrt{k^2 - \mu^2}) \quad (\text{III-28})$$

Les  $k$  à problème sont solutions de (III-20) où  $m$  est pair. De même, (III-25) est

remplacée par :

$$\frac{m\pi}{12A} = \mu \quad m \text{ pair} \quad (\text{III-29})$$

Les surfaces nodales sont alors décrites par les équations suivantes :

$$z = A \frac{12q}{m} \quad q \in \mathbb{Z} \quad m \text{ pair} \quad (\text{III-30})$$

$$\rho = A \frac{\alpha_{0p}}{\alpha_{0n}} \quad p \in \mathbb{N}^*$$

Comme précédemment, on distingue les trois premiers  $k$  à problème qui sont :  $k_{201}$ ,  $k_{401}$  et  $k_{601}$ . Les surfaces nodales sont alors :

. pour  $k_{201}$  :

$$z = \pm 6A, 0$$

$$\rho = A$$

. pour  $k_{401}$  :

$$z = \pm 6A, \pm 3A, 0$$

$$\rho = A$$

. pour  $k_{601}$  :

$$z = \pm 6A, \pm 4A, \pm 2A, 0$$

$$\rho = A$$

Ces surfaces nodales sont visualisées sur la figure III-9. L'origine étant située sur une surface nodale, le nouveau critère indique qu'une seule équation de champ nul de degré  $m = 1$  garantit l'unicité de la solution pour toutes les fréquences irrégulières du problème antisymétrique. Dans les conditions de travail définies auparavant, les résultats sont répertoriés dans le tableau III-6. Pour la fréquence la plus élevée, les produits  $kA$  et  $kB$  sont égaux à 2,9 et 17,2. La génératrice est découpée en 2 éléments sur A, en 10 éléments sur B pour le premier  $k$  à problème et en 11 éléments pour les deux suivants.

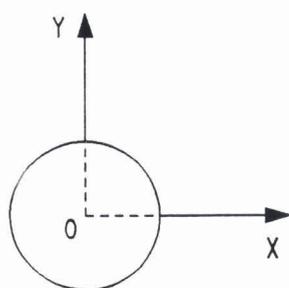
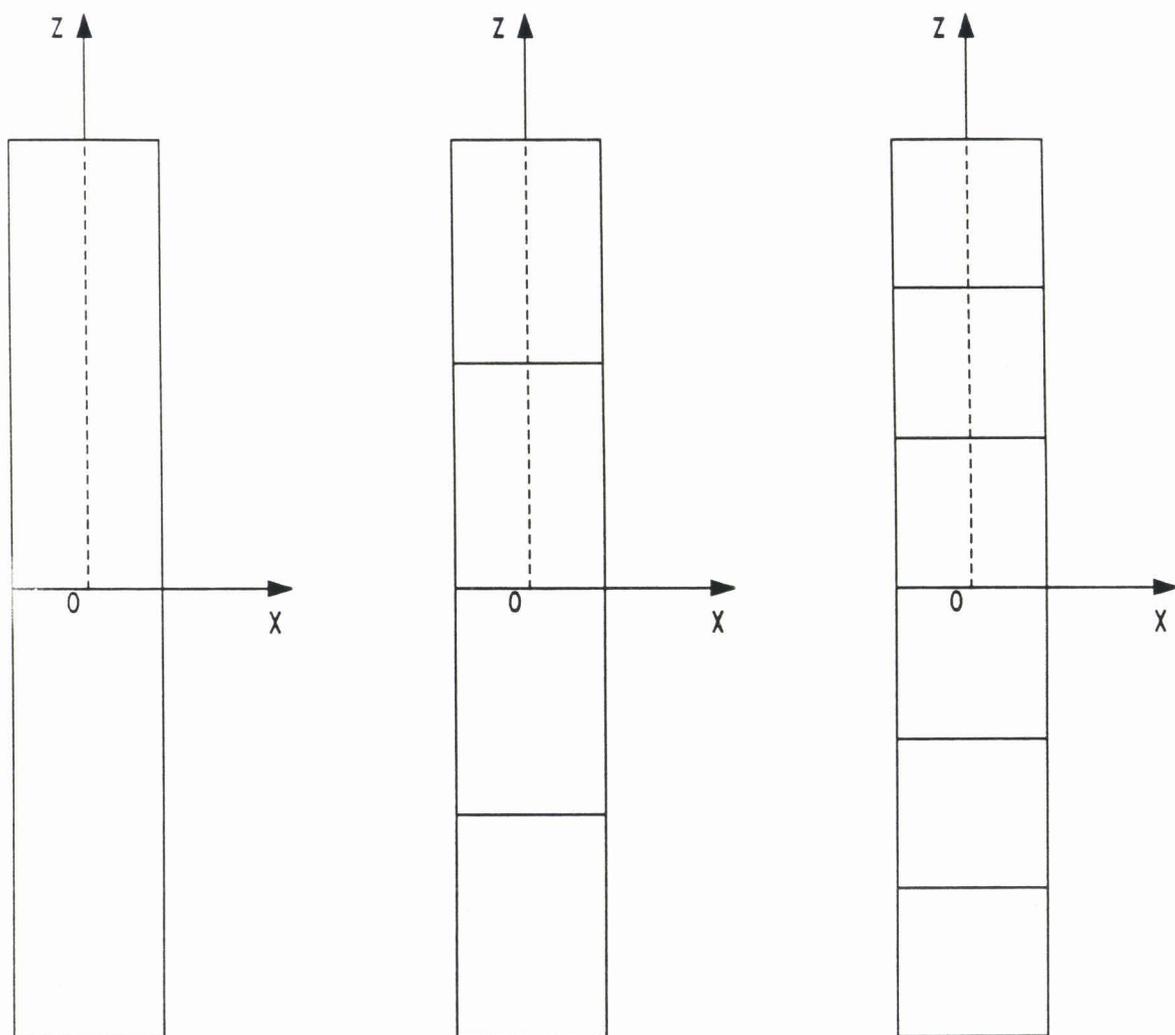
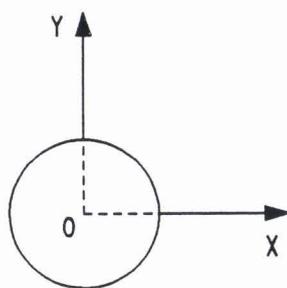
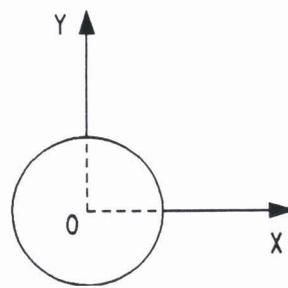

 $k_{201}$ 

 $k_{401}$ 

 $k_{601}$ 

figure III-9 : surfaces nodales du cylindre antisymétrique :  $B = 6A$

	NEQCN	$\epsilon$ max	EQM
$K_{201}$	0	>1000%	>1000%
"	1	2,8%	1,5%
$k_{401}$	0	103,8%	89,3%
"	1	5,0%	3,2%
"	2	4,5%	2,7%
$k_{601}$	0	919,8%	566,2%
"	1	1,3%	1,2%
"	3	1,1%	0,8%

tableau III-6

Comme pour le problème symétrique, on conclut que le nouveau critère est aussi efficace que le critère de Jones. Résoudre un tel problème par la méthode de Schenck nécessiterait de placer le point de la représentation de Helmholtz intérieure ailleurs que sur le plan d'antisymétrie confondu avec une surface nodale. Connaissant la disposition géométrique des surfaces nodales, le choix de la position du point intérieur ne pose théoriquement aucune difficulté. Pour des fréquences plus élevées, la densité des surfaces nodales augmentent et celles-ci risquent alors de perturber numériquement la méthode de Schenck.

Pour des fréquences irrégulières plus élevées, l'application du nouveau critère, au détriment de celui de Jones, se justifie amplement pour deux raisons : un abaissement du temps CPU et une simplification des calculs dûs à la diminution du nombre des équations de champ nul et de leur degré maximum. Cet avantage est confirmé en traçant sur la figure III-10 le temps de calcul nécessaire à la détermination des pressions sur le même cylindre avec la distribution de vitesse symétrique, en fonction du produit  $kA$  où  $k$  prend les valeurs des 9 premiers  $k$  à problème. Les trois courbes sont obtenues avec  $NEQCN = 0, 1$  et  $n$  indiqué par le critère de Jones. A chaque fréquence de calcul, on s'est assuré de l'indétermination de la solution quand  $NEQCN = 0$  et de la bonne précision des résultats dans les deux autres cas.

La sphère est un test présentant un intérêt quant à la position des surfaces nodales qui, pour certaines fréquences irrégulières, se croisent à l'origine. Une génératrice de la sphère étant découpée en éléments isoparamétriques à 3 noeuds, elle est donc constituée de morceaux de parabole juxtaposés. Cette différence entre la surface exacte et la surface interpolée

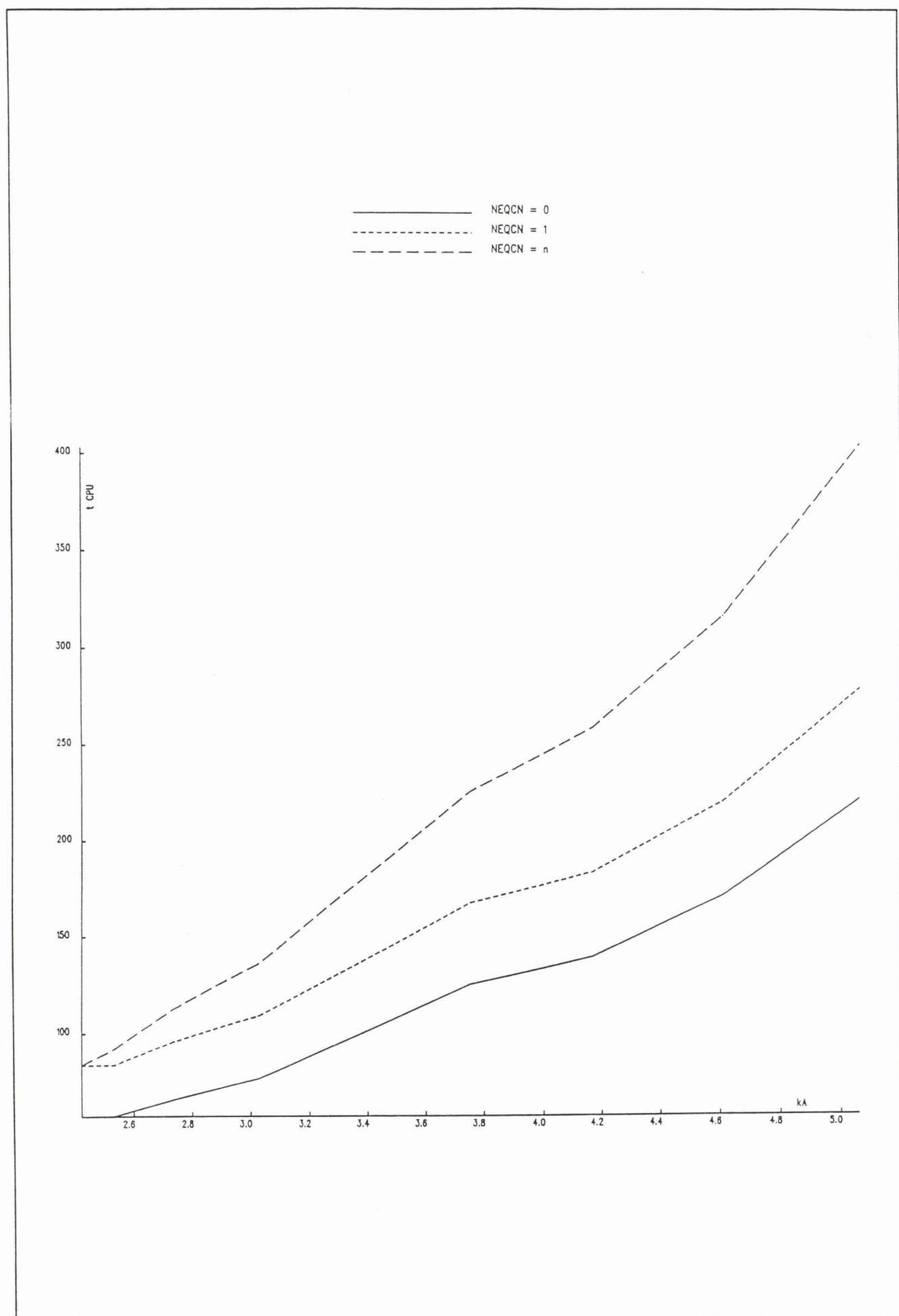


figure III-10 : temps de calcul avec 0, 1 et n équations de champ nul

ne modifie pas de façon significative les  $k$  à problème du problème interpolé par rapport à ceux du problème exact. Une distribution de vitesse antisymétrique est imposée sur la surface par deux sources ponctuelles d'amplitudes opposées placées sur l'axe (OZ) symétriquement par rapport à 0 et à une distance  $d$  de 0 telle que :

$$d = \frac{R}{2}$$

Etant données la symétrie axiale et l'antisymétrie plane du problème, la solution (I-80) se simplifie en :

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta) j_{2n+1}(kr) \quad (\text{III-31})$$

En appliquant la condition de Dirichlet sur  $\Gamma$ , les surfaces nodales sont solutions de :

$$P_{2n+1}(\cos\theta) j_{2n+1}(kr) = 0 \quad (\text{III-32})$$

D'après (I-81), les  $k$  à problème du problème antisymétrique sont :

$$k_{2n+1 \ q} = \frac{\alpha_{2n+1 \ q}}{R} \quad (\text{III-33})$$

Finalement, les surfaces nodales sont les points de coordonnées  $r$  et  $\theta$  tels que :

$$r = \frac{\alpha_{2n+1 \ p}}{\alpha_{2n+1 \ q}} R \quad p, q \in \mathbb{N}^* \quad (\text{III-34})$$

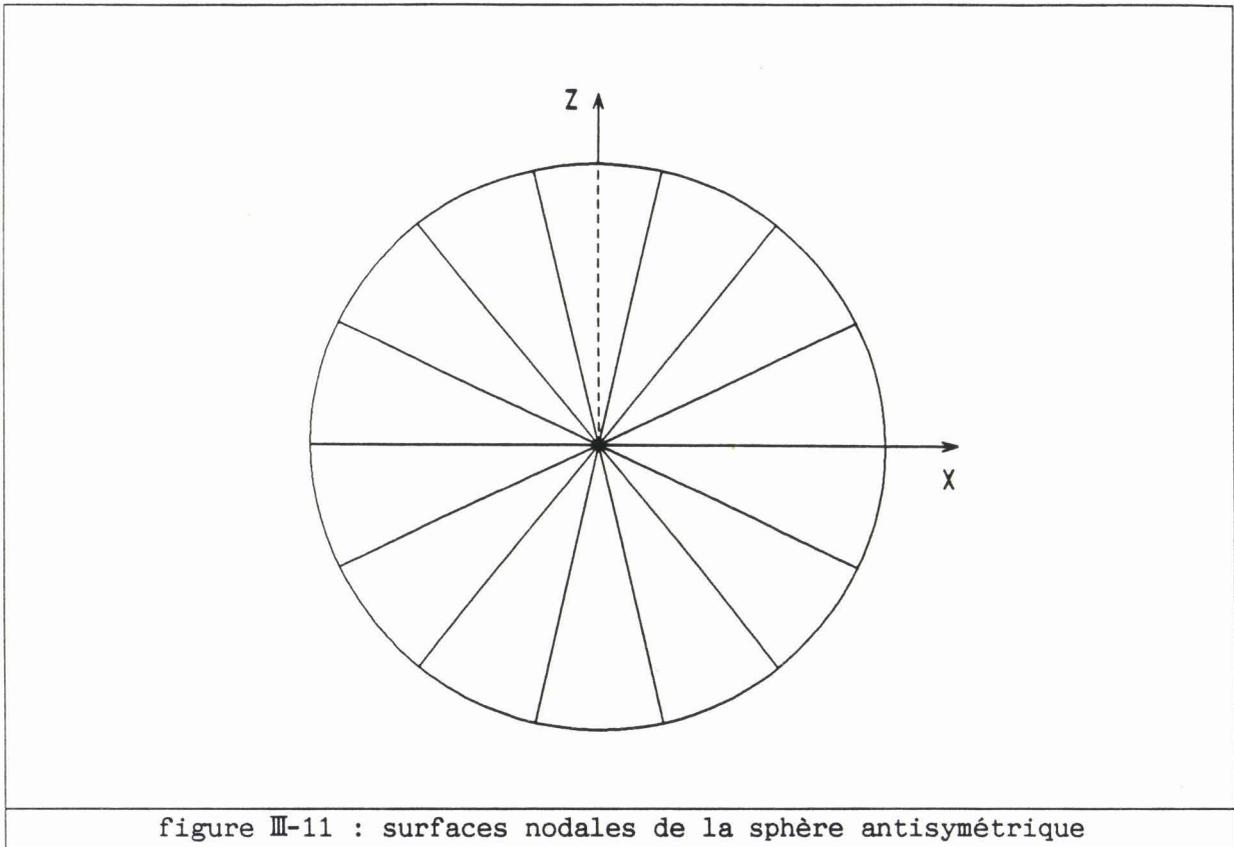
$$P_{2n+1}(\cos\theta) = 0$$

Le 8ème  $k$  à problème,  $k_{71}$ , est particulièrement intéressant par la géométrie des surfaces nodales associées qui sont :

$$\begin{aligned} r &= R \\ P_7(\cos\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III-35})$$

Le polynôme de Legendre  $P_7(\cos\theta)$  admet 7 zéros qui caractérisent 7 surfaces. Sans connaître exactement leurs orientations, leurs formes sont schématisées

sur la figure III-11.



Le nouveau critère indique qu'une surdétermination par les équations de champ nul de degré inférieur ou égal à 7 garantit l'unicité de la solution. Ces équations non triviales sont au nombre de 4 et de degré  $m = 1, 3, 5$  et 7. Le produit  $kR$  est de 11,7. La partie de génératrice contenue dans le premier quadrant est maillée par 12 éléments. Dans le tableau III-7, sont présentés, en fonction du nombre d'équations de champ nul supplémentaires, les erreurs maximales  $\epsilon_R \max$  et  $\epsilon_I \max$ , l'erreur quadratique moyenne EQM et le temps de calcul  $t$ .

NEQCN	$\epsilon_R \max$	$\epsilon_I \max$	EQM	$t$
0	227,5%	570,6%	307,9%	57s
1	227,0%	571,6%	308,3%	84s
2	244,8%	574,5%	312,4%	91s
3	245,0%	573,7%	312,1%	99s
4	1,1%	1,0%	0,7%	106s
8	1,1%	1,0%	0,7%	136s

tableau III-7

Ce test illustre parfaitement l'efficacité du nouveau critère pour des précisions équivalentes à celles du critère de Jones.

Une dernière validation de la combinaison équations intégrales-champ nul porte sur un cylindre très excentré dont les dimensions A et B sont reliées par :

$$B = 10A$$

Dans un premier temps, il est soumis à une distribution de vitesse symétrique due à une source ponctuelle confondue avec l'origine. Par analogie avec (III-20) et (III-27), les  $k$  à problème sont donnés par :

$$k_{m0n} = \frac{1}{A} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{20}\right)^2 + (\alpha_{0n})^2} \quad m \text{ impair} \quad (\text{III-36})$$

et les surfaces nodales par :

$$z = 10A \left( \frac{1}{m} + \frac{2q}{m} \right) \quad q \in \mathbb{Z} \quad m \text{ impair} \quad (\text{III-37})$$

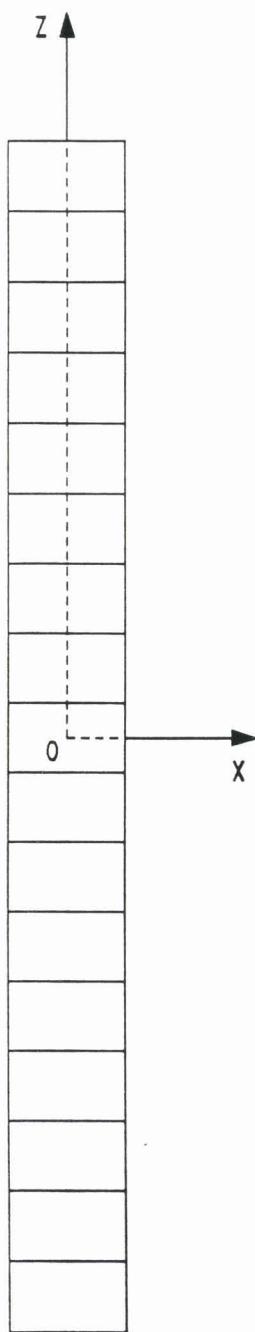
$$\rho = A \frac{\alpha_{0p}}{\alpha_{0n}} \quad p \in \mathbb{N}^*$$

Le 9ème  $k$  à problème est  $k_{17 \ 0 \ 1}$ . Dans ce cas, les surfaces nodales sont décrites par les équations :

$$z = \pm \frac{10A}{17}, \pm \frac{30A}{17}, \pm \frac{50A}{17}, \pm \frac{70A}{17}, \pm \frac{90A}{17}, \pm \frac{110A}{17}, \pm \frac{130A}{17}, \pm \frac{150A}{17}, \pm 10A$$

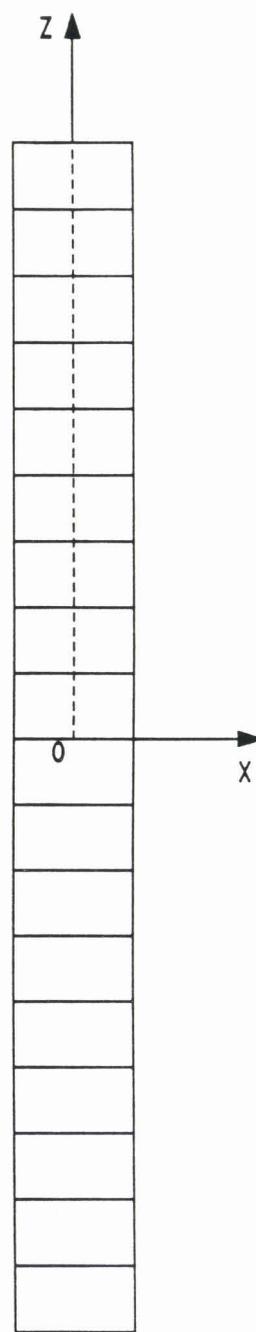
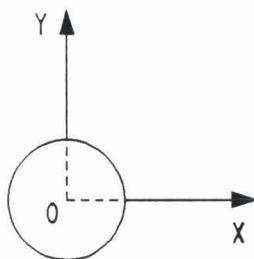
$$\rho = A$$

et sont représentées sur la figure III-12.a. Les produits  $kA$  et  $kB$  sont respectivement égaux à 3,6 et 35,9. Le maillage est composé de 3 éléments sur A et de 24 éléments sur B. Les résultats sont regroupés dans le tableau III-8 où apparaissent les erreurs maximales  $\epsilon_{R \max}$  et  $\epsilon_{I \max}$ , l'erreur quadratique moyenne EQM et le temps de calcul  $t$ . Les résultats sont obtenus par trois calculs : sans équation de champ nul, avec une équation de champ nul déduite du nouveau critère, enfin avec 9 équations de champ nul comme le veut le critère de Jones.



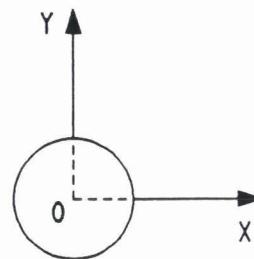
symétrique

(a)



antisymétrique

(b)

figure III-12 : surfaces nodales du cylindre :  $B = 10A$

NEQCN	$\varepsilon_R \text{ max}$	$\varepsilon_I \text{ max}$	EQM	t
0	50,6%	155,7%	131,0%	261s
1	1,1%	2,0%	1,9%	324s
9	0,8%	1,0%	1,0%	462s

tableau III-8

La variation des parties réelle et imaginaire de la pression aux noeuds de la surface est représentée sur les figures III-13 et III-14 quand NEQCN = 0 ou NEQCN = 1.

Pour terminer, le même cylindre est soumis à une distribution de vitesse antisymétrique engendrée classiquement par deux sources opposées et distantes de l'origine de  $d$  :

$$d = \frac{B}{2}$$

Les  $k$  à problème sont donnés par (III-36) où  $m$  est pair. En s'inspirant de (III-30), les surfaces nodales associées au  $k$  à problème  $k_{m0n}$  sont solutions de :

$$z = A \frac{20q}{m} \quad q \in \mathbf{Z} \quad m \text{ pair} \quad (\text{III-38})$$

$$\rho = A \frac{\alpha_{0p}}{\alpha_{0n}} \quad p \in \mathbf{N}^*$$

Le 9ème  $k$  à problème est  $k_{1801}$ . Dans ce cas, les surfaces nodales sont décrites par les équations :

$$z = 0, \pm \frac{10A}{9}, \pm \frac{20A}{9}, \pm \frac{10A}{3}, \pm \frac{40A}{9}, \pm \frac{50A}{9}, \pm \frac{20A}{3}, \pm \frac{70A}{9}, \pm \frac{80A}{9}, \pm 10A$$

$$\rho = A$$

et sont représentées sur la figure III-12.b. Les produits  $kA$  et  $kB$  sont de l'ordre de 3,7 et 37,1. De manière comparable au problème symétrique, les résultats sont inscrits dans le tableau III-9.

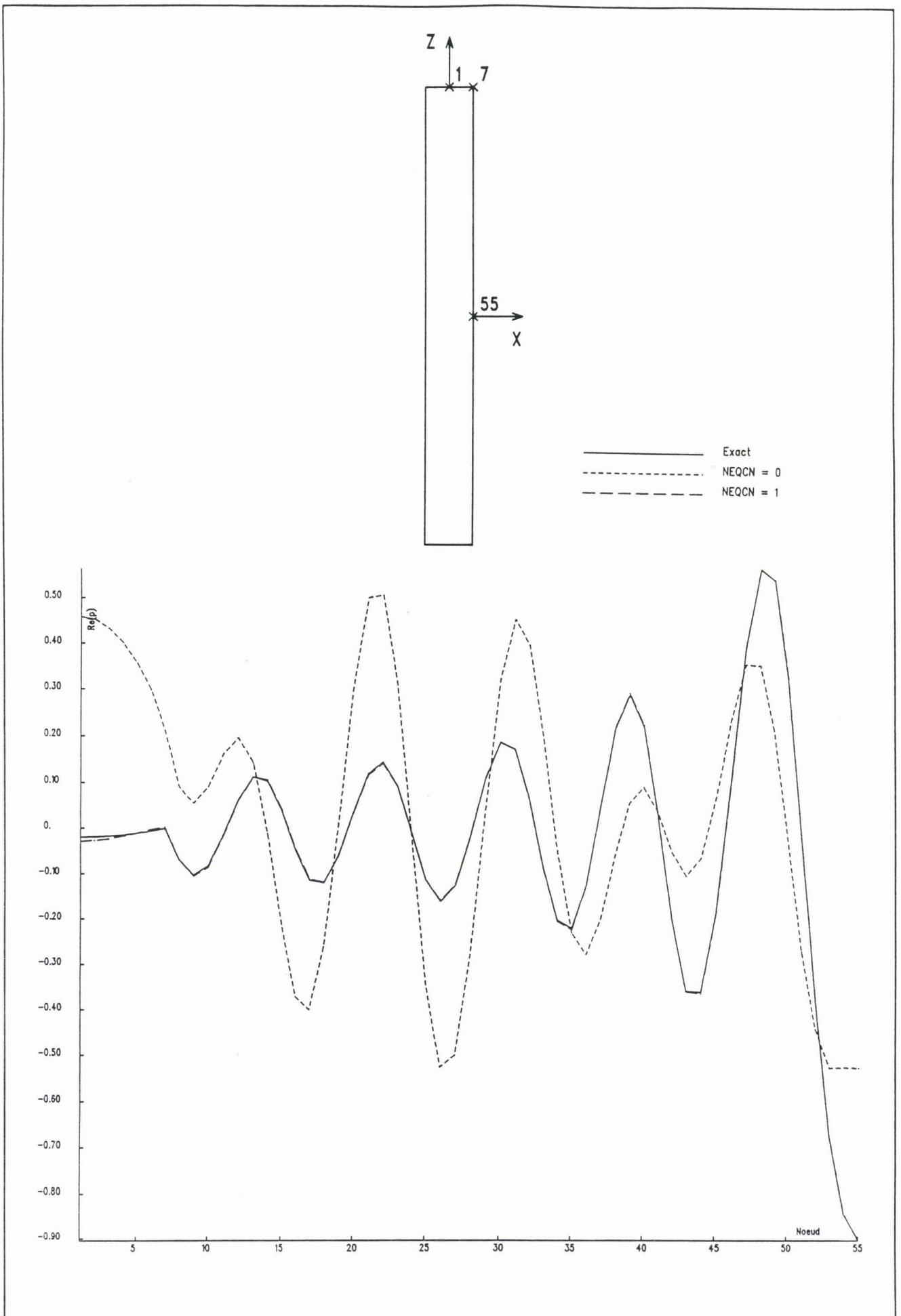


figure III-13 : partie réelle de la pression sur le cylindre symétrique et le 9ème k à problème

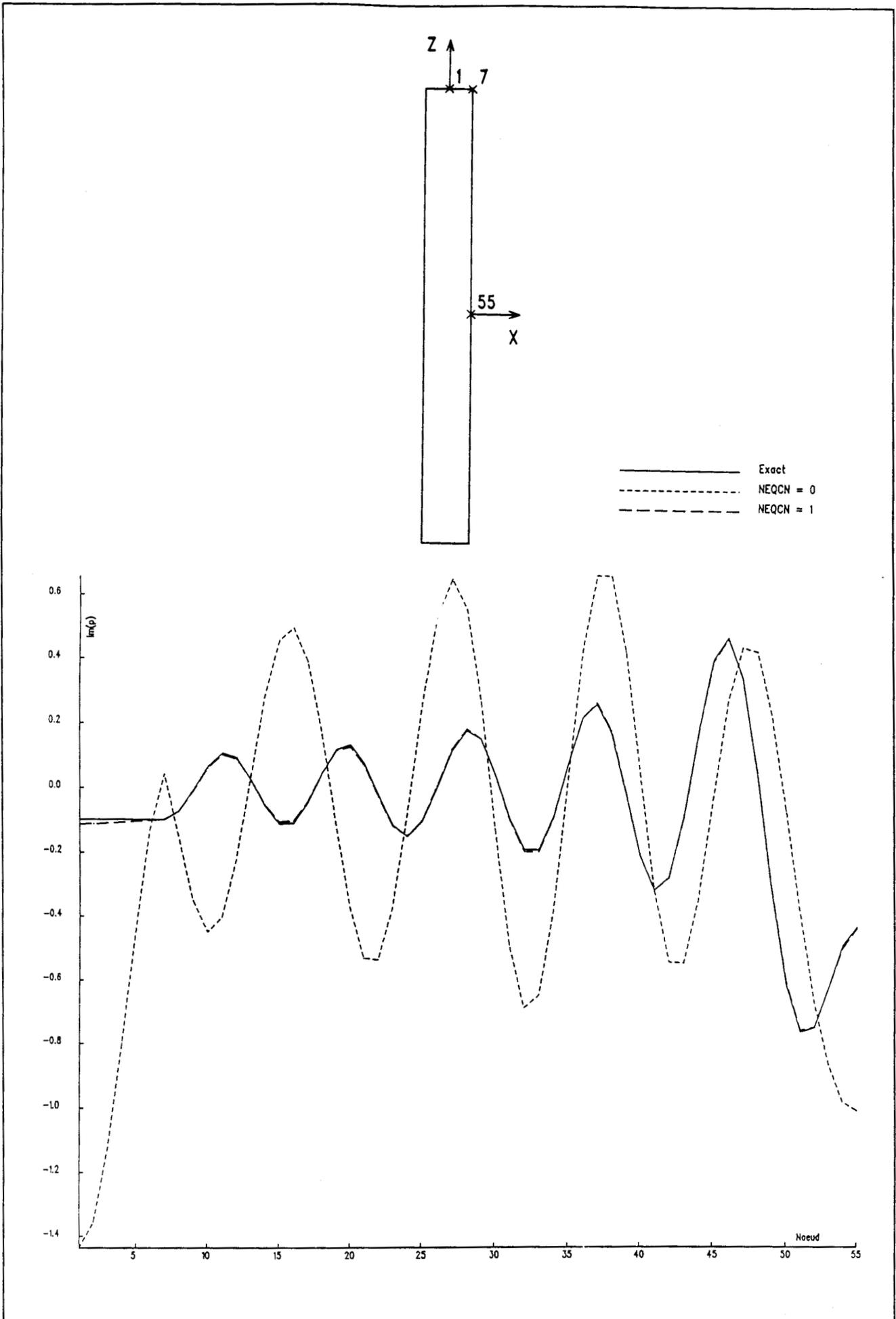


figure III-14 : partie imaginaire de la pression sur le cylindre symétrique et le 9ème k à problème

NEQCN	$\epsilon_R$ max	$\epsilon_I$ max	EQM	t
0	104,8%	220,6%	158,6%	282s
1	0,9%	0,6%	0,8%	347s
9	0,9%	0,6%	0,8%	490s

tableau III-9

Les parties réelles et imaginaires des pressions sur la surface sont représentées sur les figures III-15 et III-16 quand NEQCN = 0 et NEQCN = 1.

Ce paragraphe a permis de mettre en évidence l'efficacité du nouveau critère et les avantages qu'il procure sur le critère de Jones, surtout pour des fréquences irrégulières élevées. Quand on connaît la solution du problème de Dirichlet intérieur, ce critère fournit exactement le nombre d'équations supplémentaires de champ nul nécessaires et suffisantes pour lever l'indétermination de la solution, compte tenu de l'inégalité de droite de la relation (II-68). Dans l'éventualité où le problème intérieur n'est pas analytique, la résolution de ce problème intérieur par la méthode des éléments finis est toujours possible.

Enfin, il faut remarquer que, dans les tests précédents, aucun diagramme de directivité n'est présenté. La directivité d'une source ponctuelle étant sphérique, son tracé n'apporte aucune information supplémentaire. Néanmoins, les directivités sont systématiquement examinées dans le but de valider le sous-programme de calcul du facteur de directivité. En règle générale, l'erreur sur la directivité est inférieure à l'erreur sur la pression surfacique.

### III - 2.3 Conclusion

Les exemples traités dans le paragraphe III-2 ont permis de valider la modélisation du problème à symétrie axiale du rayonnement acoustique par la représentation de Helmholtz extérieure, la méthode de champ nul et la combinaison de ces deux méthodes. Au vu de ces tests, la représentation de Helmholtz extérieure est la méthode de résolution qui s'impose au détriment de la méthode des équations de champ nul car, elle s'applique indifféremment à

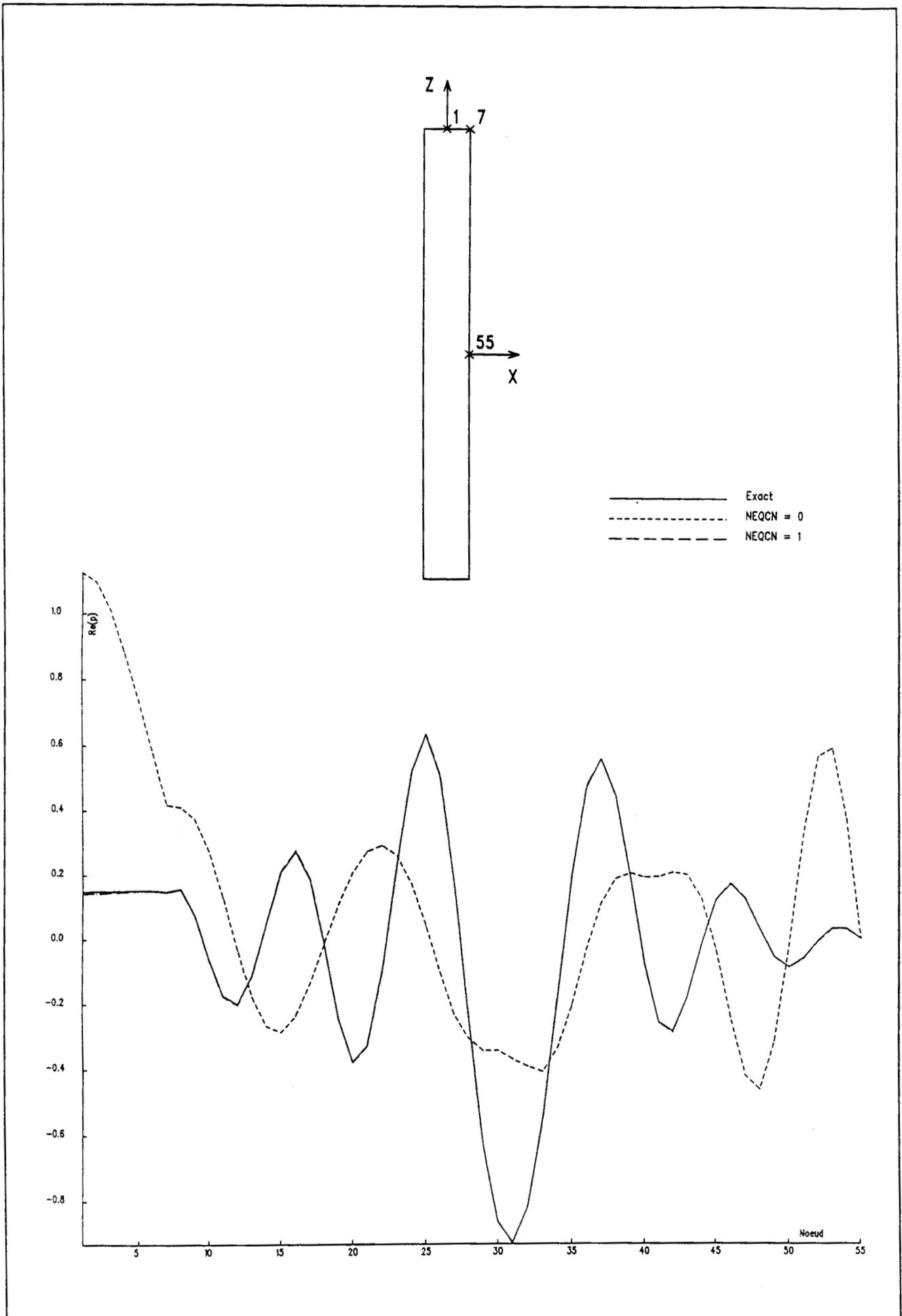


figure III-15 : partie réelle de la pression sur le cylindre antisymétrique et le 9ème k à problème

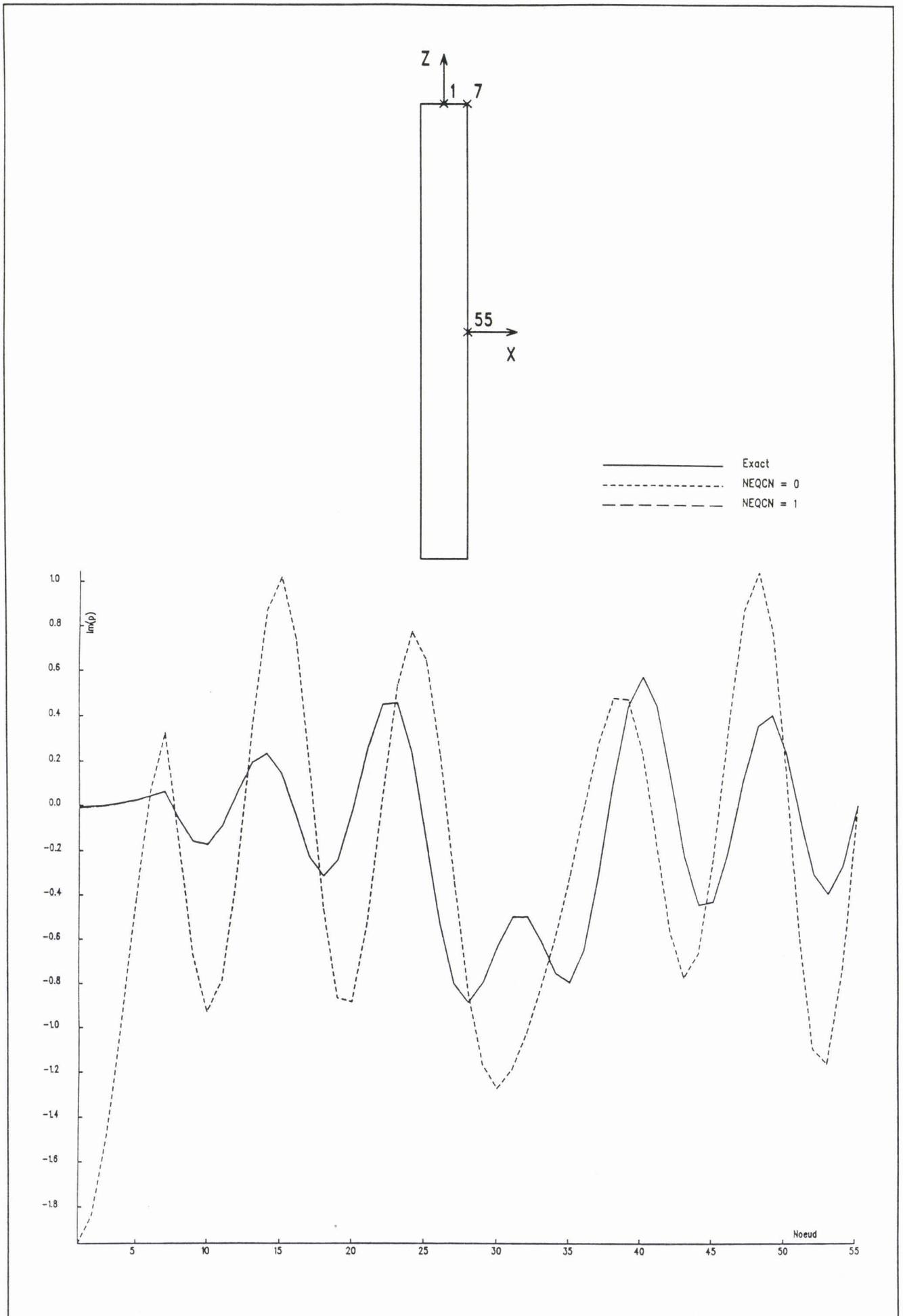


figure III-16 : partie imaginaire de la pression sur le cylindre antisymétrique et le 9ème k à problème

toute géométrie. Le défaut causé par l'existence des fréquences irrégulières est efficacement éliminé par la combinaison de ces deux méthodes. On a pu constater que, malgré l'utilisation de fonctions d'ondes sphériques dans les équations de champ nul, des géométries très excentrées peuvent également être traitées par ce couplage. De plus, avec l'emploi de la technique de renormalisation et du nouveau critère sur le choix des équations supplémentaires de champ nul, cette méthode combinée est exploitée au mieux par le code de calcul HELNUL. Toutes ces raisons font que le domaine des hautes fréquences devrait être accessible à la méthode combinée développée ici. D'ailleurs, une application au rayonnement haute fréquence est détaillée dans le chapitre IV. Toutefois, une optimisation de la structure informatique de ce code est souhaitable et doit aboutir à, sinon une meilleure précision, du moins une nette réduction du temps de calcul consommé. Son extension à la diffraction par des corps rigides est également en projet et devrait être réalisée sans aucune difficulté.

### III - 3 PROBLEME TRIDIMENSIONNEL

#### III - 3.1 Validation du rayonnement

Au stade actuel de développement, le code de calcul EQI ne prend pas en compte les éventuelles symétries du problème. Dans un souci de limitation du temps CPU, et bénéficiant de l'expérience des problèmes à symétrie axiale, le nombre des géométries testées a été volontairement restreint. Ces géométries sont le parallélépipède rectangle, le cylindre et la sphère et sont décrites sur les figures III-1 et III-17. Sauf mention contraire, l'origine du repère est toujours placée au point où l'excentricité  $E$  est minimum. Le test analytique de référence est encore le test de la source ponctuelle décrit au paragraphe III - 1.

##### III - 3.1.1 *Modélisation par la représentation de Helmholtz extérieure*

Les fréquences de travail sont suffisamment éloignées des fréquences irrégulières pour ne pas subir leurs effets. Les structures rayonnantes sont de formes cubique et cylindrique.

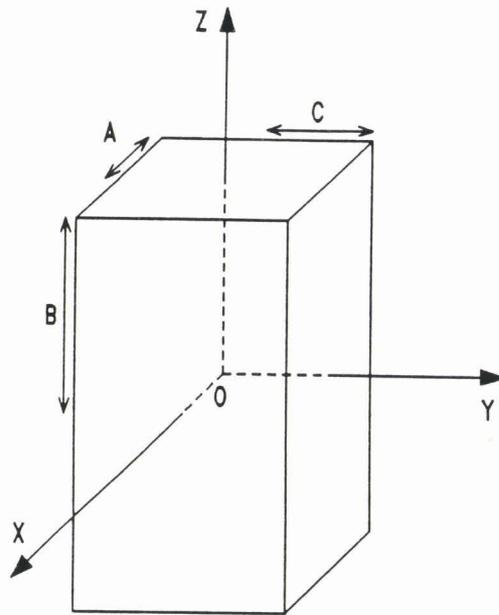


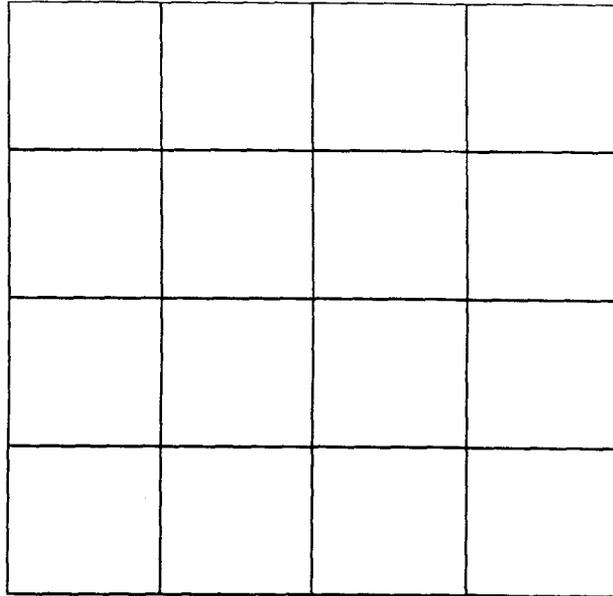
figure III-17 : description du parallélépipède rectangle

### III - 3.1.1.1 Structure cubique

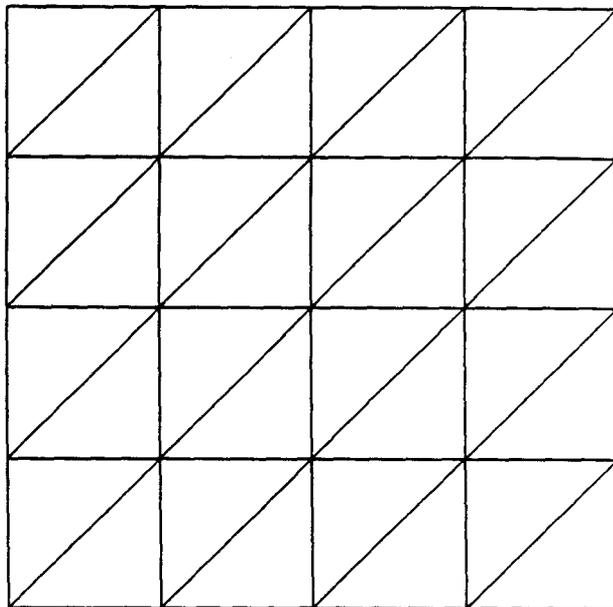
Le parallélépipède rectangle considéré est le cube tel que :

$$k_A = k_B = k_C = 3$$

Cette géométrie simple permet, par un maillage exclusivement composé d'éléments quadrilatères à 8 noeuds, de valider ce type d'élément isoparamétrique. Ensuite, la même démarche est suivie mais avec uniquement des éléments triangulaires à 6 noeuds. Sur la figure III-18, chaque maillage est visualisé perpendiculairement à une face du cube : le premier est constitué de 96 quadrilatères (290 noeuds) et le second de 192 triangles (386 noeuds). Le critère en  $\lambda/4$  doit être respecté sur les longueurs reliant les noeuds 5 et 8 et les noeuds 6 et 7 de la figure II-2 pour un élément quadrilatère, et sur les longueurs reliant les noeuds 3 et 4 et les noeuds 1 et 2 de la figure II-3 pour un élément triangulaire. Dans un premier temps, une source ponctuelle est



quadrangles



triangles

placée à l'origine des coordonnées. Le tableau III-10 contient les erreurs maximales  $\varepsilon_R \max$ ,  $\varepsilon_I \max$ , l'erreur quadratique moyenne EQM, le temps d'assemblage  $t_a$  et le temps de résolution  $t_r$  du système linéaire. Les structures tridimensionnelles traitées par EQI comptent un grand nombre d'éléments donc un grand nombre de noeuds et la distinction de ces deux temps de calcul est une information intéressante.

	$\varepsilon_R \max$	$\varepsilon_I \max$	EQM	$t_a$	$t_r$
quadrangles	1,8%	3,2%	1,3%	87s	217s
triangles	2,6%	5,3%	2,1%	185s	507s

tableau III-10

Le problème admet 3 plans de symétrie que l'on retrouve sur les résultats obtenus. La source ponctuelle est maintenant déplacée sur l'un des axes du repère à une distance  $d$  de l'origine telle que :

$$d = \frac{A}{2}$$

Une telle distribution de vitesse engendre un problème avec 2 plans de symétrie que l'on retrouve sur les résultats. Les résultats sont donnés dans le tableau III-11.

	$\varepsilon_R \max$	$\varepsilon_I \max$	EQM	$t_a$	$t_r$
quadrangles	7,3%	2,7%	1,5%	87s	217s
triangles	8,3%	2,5%	2,1%	185s	507s

tableau III-11

L'erreur maximale semble, comparativement aux tests antérieurs, importante, mais elle est vraiment localisée au seul point du maillage le plus proche de la source. Ceci s'explique par la grande variation de la pression et de la vitesse exprimées en (III-1) et (III-2) qui est alors décrite moins précisément par les fonctions de pondération quadratiques. Ces deux exemples confirment la validité des deux types d'éléments de surface et, à précision équivalente, font ressortir une convergence nettement plus rapide des résultats avec des éléments quadrilatères au lieu d'éléments triangulaires. La convergence des intégrales de Helmholtz est obtenue avec 4 points de Gauss sur chacun des éléments : 2 suivant la variable  $\xi$  et 2 suivant  $\eta$ . A partir de maintenant, ce

critère de convergence est adopté.

### III - 3.1.1.2 Structure cylindrique

Le cylindre considéré est tel que :

$$k_A = 2 \quad k_B = 8$$

La surface est décomposée en 112 éléments (cf figure III-19) : 96 quadrilatères et 16 triangles (322 noeuds). Deux distributions de vitesse sont envisagées : l'une issue d'une source ponctuelle centrée et l'autre d'une source ponctuelle décentrée. Dans le premier cas, le problème admet une symétrie axiale et un plan de symétrie alors que, dans le second cas, le problème perd ces symétries. Dans le second cas, la source est située au point de coordonnées :

$$x = \frac{A}{3} \quad y = 0 \quad z = \frac{B}{3}$$

Les résultats de ces 2 calculs sont contenus dans le tableau III-12.

	$\epsilon_R$ max	$\epsilon_I$ max	EQM	$t_a$	$t_r$
1er cas	1,3%	1,7%	1,0%	109s	298s
2ème cas	2,5%	1,4%	0,9%	109s	298s

tableau III-12

Les résultats sont tout à fait satisfaisants et valident la partie de EQI qui concerne la modélisation du rayonnement par équations intégrales.

### III - 3.1.2 Modélisation par la méthode de champ nul

Ayant remarqué dans le paragraphe III - 2.1.2 la difficulté rencontrée par la méthode de champ nul à modéliser le rayonnement de structures excentrées, la validation est basée sur le test de la sphère avec une source ponctuelle excentrée. La sphère considérée est telle que :

$$k_R = 2$$

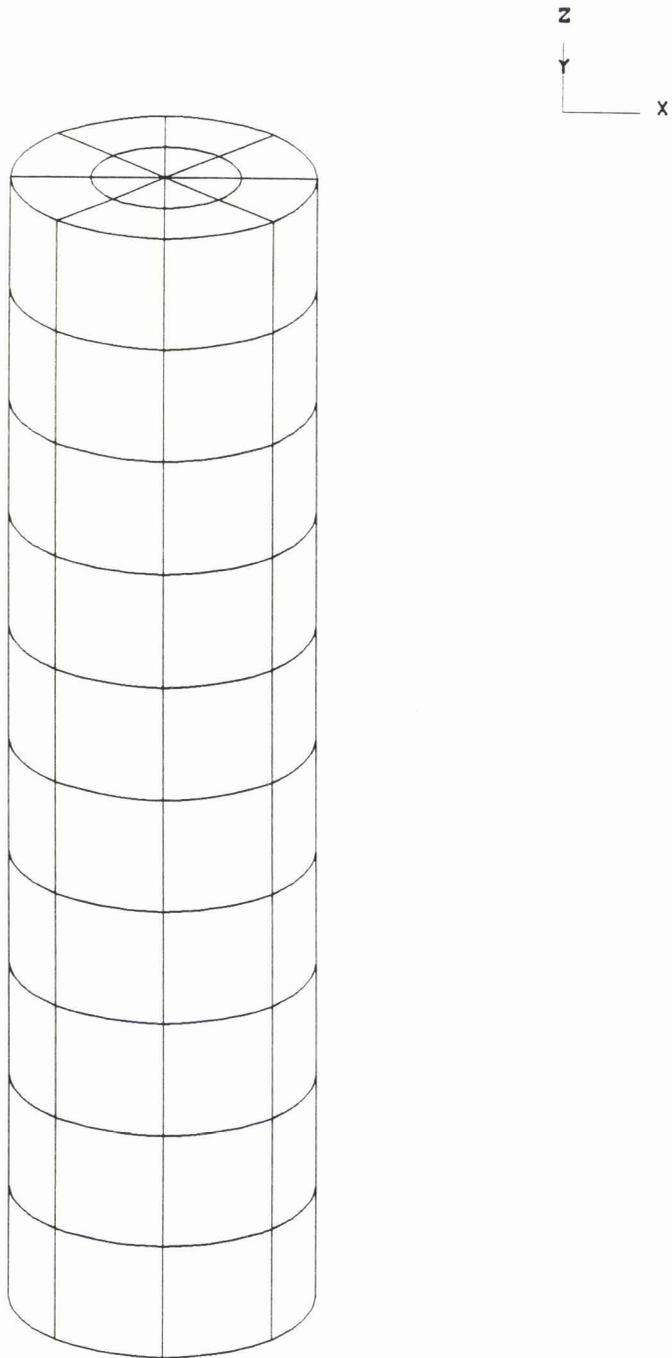


figure III-19 : maillage du cylindre

La source ponctuelle est située au point de coordonnées cartésiennes :

$$x = \frac{R}{3} \quad y = 0 \quad z = \frac{R}{5}$$

Dans le même esprit qu'au paragraphe III - 3.1.1.1 , la sphère est d'abord maillée par des éléments quadrilatères à 8 noeuds et ensuite des éléments triangulaires à 6 noeuds. Le maillage est alors composé de 24 quadrangles (74 noeuds) ou de 48 triangles (98 noeuds) et est visualisé sur la figure III-20. Dans le cas de géométries à symétrie axiale avec une distribution de vitesse quelconque, le choix des paramètres P et Q de la série (II-41) et des couples (m,1) de (II-42) ne doit pas être laissé au hasard. En effet, les équations triviales de champ nul doivent être éliminées pour ne pas perturber le comportement numérique du système final à résoudre. Un développement élémentaire des équations (II-42) à l'aide de (II-55) et (II-58), l'utilisation de la propriété d'orthogonalité des vecteurs  $\underline{e}_\varphi$  et  $\underline{n}$  en rappelant que :

$$d\underline{r} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \quad (\text{III-39})$$

permet d'isoler dans les deux membres de (II-42) les termes dépendant de la variable  $\varphi$  sous une seule intégrale curviligne. En particulier, celle du premier membre est :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(1-q)\varphi} \, d\varphi = \begin{cases} 2\pi & 1 = q \\ 0 & 1 \neq q \end{cases}$$

On en déduit que, l'équation de champ nul (m,1) ne fait intervenir que les coefficients :

$$a_0^1, a_1^1, \dots, a_p^1$$

Par conséquent, les équations de champ nul telles que  $||l|| > Q$  sont triviales. Après cette mise en garde, les calculs sont menés en faisant varier les paramètres P et Q. Pour chaque décomposition de la pression, on précise ci-dessous les équations de champ nul utilisées :

- pour P = Q = 1 :

$$(m,1) \in \{(m,1) / ||l|| \leq m \quad m = 0,1\} \text{ et}$$

$$(m,1) \in \{(2,-1), (2,1)\}$$

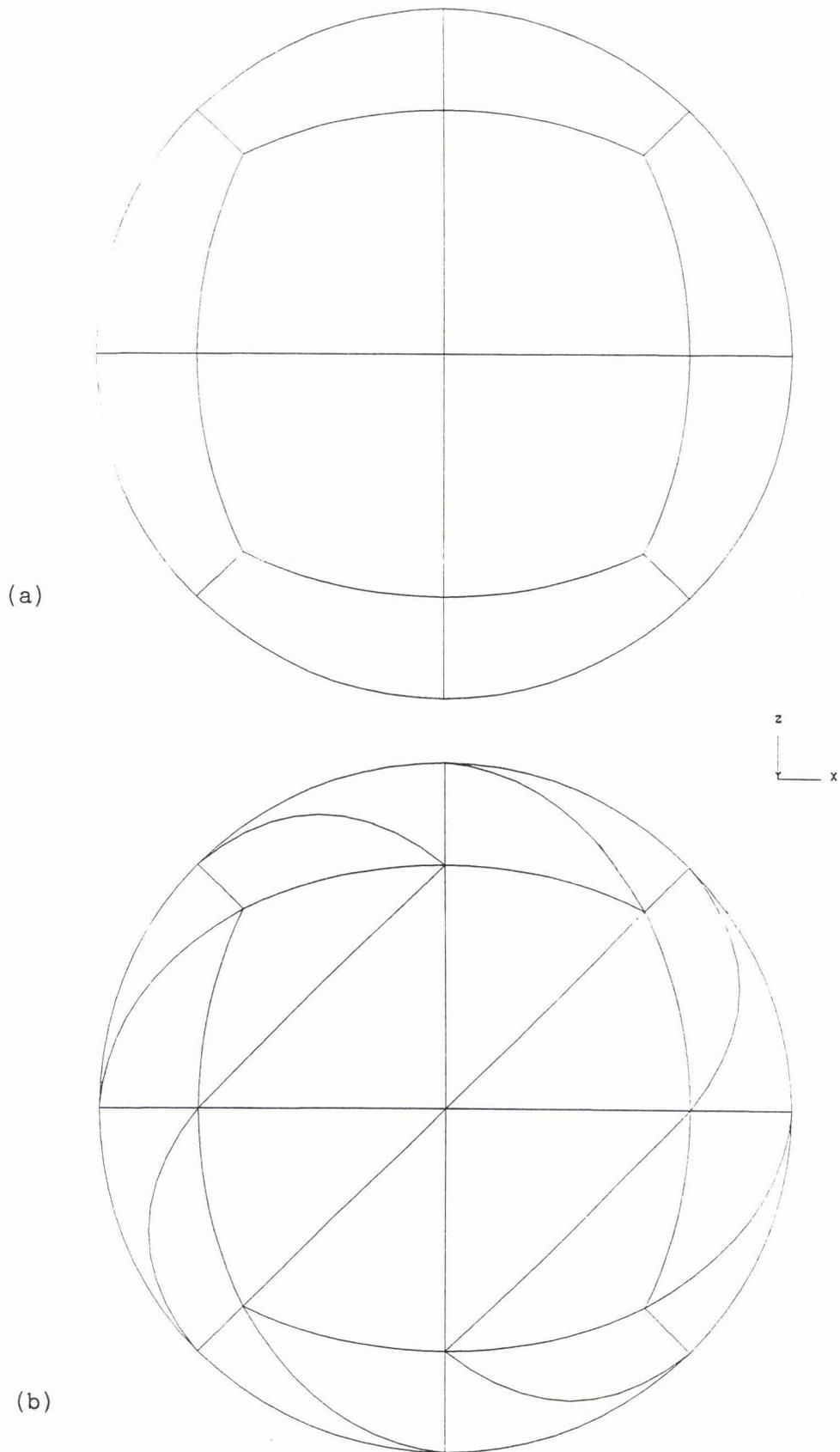


figure III-20 : maillages de la sphère

- pour  $P = Q = 2$  :

$$(m,1) \in \{(m,1) / |l| \leq m \quad m = 0,1,2\} \text{ et}$$

$$(m,1) \in \{(3,-2), (3,-1), (3,1), (3,2), (4,-2), (4,2)\}$$

- pour  $P = Q = 3$  :

$$(m,1) \in \{(m,1) / |l| \leq m \quad m = 0,1,2,3\} \text{ et}$$

$$(m,1) \in \{(4,-3), (4,-2), (4,-1), (4,1), (4,2), (4,3),$$

$$(5,-3), (5,-2), (5,2), (5,3), (6,-3), (6,3)\}$$

- pour  $P = Q = 4$  :

$$(m,1) \in \{(m,1) / |l| \leq m \quad m = 0,1,2,3,4\} \text{ et}$$

$$(m,1) \in \{(5,-4), (5,-3), (5,-2), (5,-1), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4),$$

$$(6,-4), (6,-3), (6,-2), (6,2), (6,3), (6,4),$$

$$(7,-4), (7,-3), (7,3), (7,4), (8,-4), (8,4)\}$$

Dans les tableaux III-13 et III-14, sont indiqués les erreurs maximales  $\varepsilon_R \max$ ,  $\varepsilon_I \max$ , l'erreur quadratique moyenne EQM, le nombre de points d'intégration NG des intégrales de champ nul et le temps d'assemblage  $t_a$ . Le temps de résolution du système final, dont les coefficients  $a_p^q$  sont les inconnues, est négligeable par rapport au temps d'assemblage.

quadrangles	$\varepsilon_R \max$	$\varepsilon_I \max$	EQM	NG	$t_a$
$P = Q = 1$	103,7%	34,0%	16,6%	2	3s
$P = Q = 2$	81,0%	16,4%	8,4%	2	8s
$P = Q = 3$	41,6%	13,8%	5,0%	3	42s
$P = Q = 4$	23,4%	7,1%	2,7%	4	174s

tableau III-13

triangles	$\varepsilon_R \max$	$\varepsilon_I \max$	EQM	NG	$t_a$
$P = Q = 1$	105,5%	35,1%	16,1%	2	4s
$P = Q = 2$	81,8%	18,0%	7,8%	2	13s
$P = Q = 3$	34,9%	13,4%	4,5%	3	81s
$P = Q = 4$	22,7%	13,7%	4,1%	4	346s

tableau III-14

A précision équivalente, la comparaison des temps d'assemblage confirme l'avantage de construire des maillages constitués d'une majorité d'éléments isoparamétriques quadrilatères à 8 noeuds. Dans le cas du maillage en quadrangles, on a tracé sur les figures III-21 et III-22 l'évolution de la convergence des parties réelle et imaginaire de la pression sur la ligne fermée contenue dans le plan (XOZ). L'axe des abscisses représente l'angle  $\theta$  des coordonnées sphériques dont on a prolongé, de manière évidente, l'intervalle de définition de  $[0, 180^\circ]$  à  $[0, 360^\circ]$ . On conclut immédiatement que la convergence de la pression vers la valeur analytique s'améliore quand le nombre de termes de la décomposition en série de la pression augmente. Cette augmentation de P et Q doit s'accompagner d'une augmentation de NG (fonctions de plus en plus oscillantes), donc d'un accroissement du temps d'assemblage.

### III - 3.1.3 *Modélisation par la méthode combinée équations intégrales-champ nul*

#### III - 3.1.3.1 Introduction

Pour tester l'efficacité de cette méthode, la fréquence de travail doit coïncider avec une fréquence irrégulière. Dans le paragraphe I - 2.4.2.2, on a défini ces fréquences irrégulières pour des géométries particulières : le parallélépipède rectangle, le cylindre et la sphère. Les éléments de surface étant des quadrangles à 8 noeuds ou des triangles à 6 noeuds, le type de variation de ces éléments ne permet pas d'interpoler exactement une géométrie courbe telle que la sphère ou le cylindre. Cette différence minime est négligeable du point de vue du comportement de la structure exacte et de la structure interpolée mais existe. Ceci signifie que, dans ce cas, les fréquences irrégulières du problème exact et celles du problème effectivement modélisé sont très voisines mais différentes. De nombreux tests ont montré que cette petite différence ne permet pas de mettre en évidence de façon assez nette l'indétermination due aux  $k$  à problème du cylindre et de la sphère. C'est pourquoi le parallélépipède rectangle est la géométrie de référence. Les  $k$  à problème associés à ce problème sont solutions de (I-77). Dans l'hypothèse où le code de résolution tiendrait compte des symétries du problème, on a déjà rappelé que, seules seraient irrégulières les fréquences dont les fonctions propres admettent les mêmes symétries que celles du problème extérieur. Dans le cas contraire, les valeurs de  $k$  correspondant aux valeurs propres du

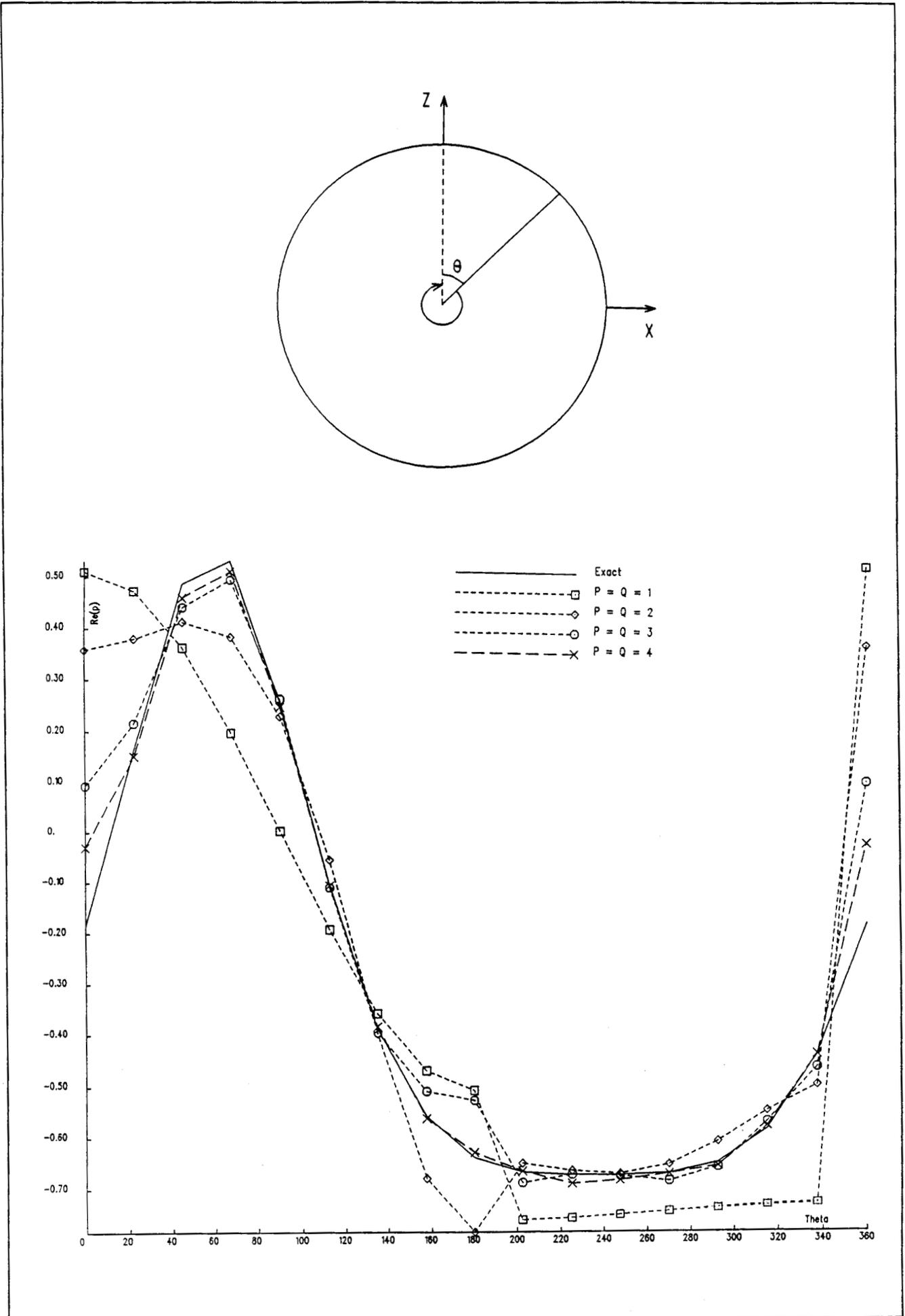


figure III-21 : partie réelle de la pression sur la sphère

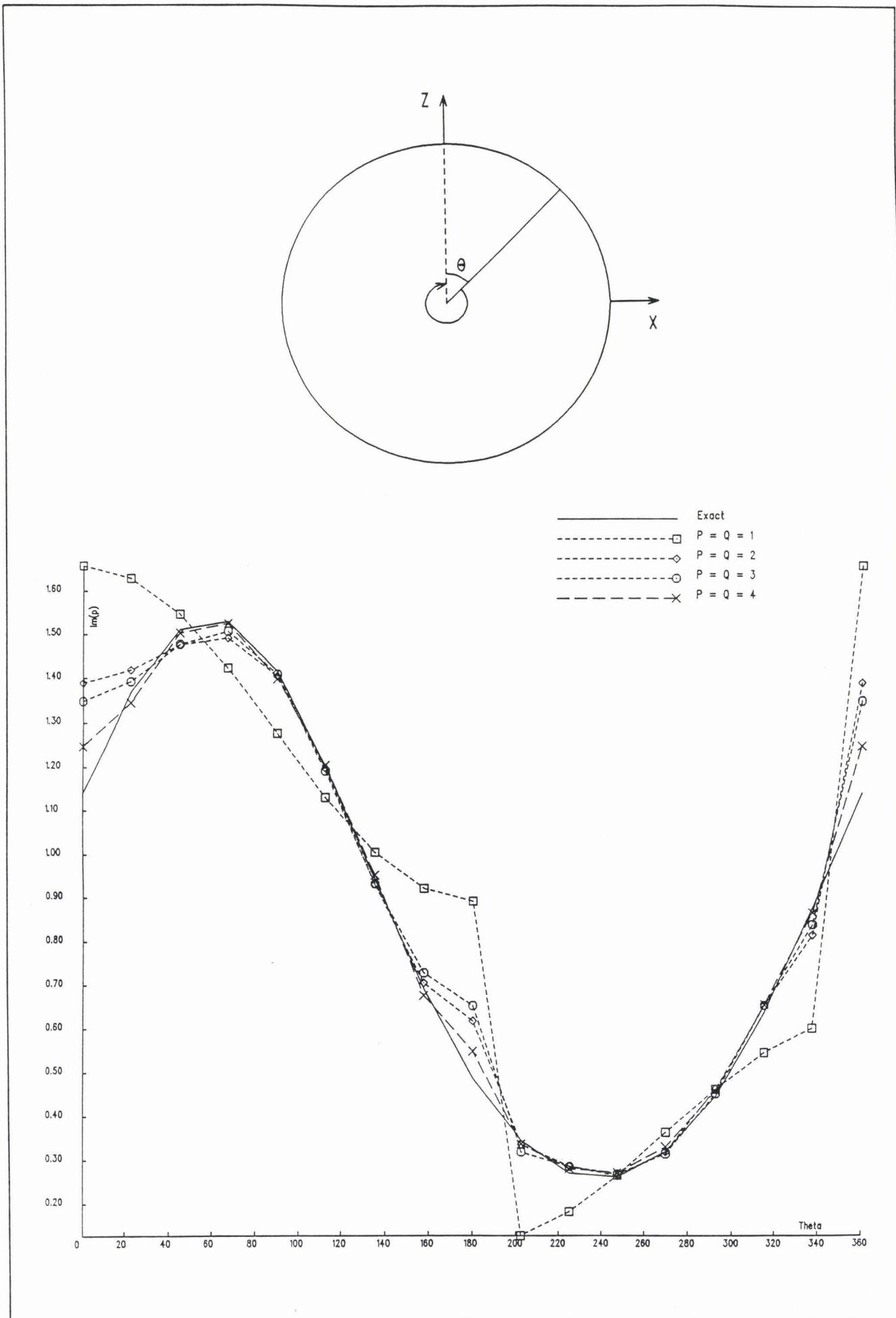


figure III-22 : partie imaginaire de la pression sur la sphere

problème de Dirichlet intérieur ne seraient pas les  $k$  à problème du problème extérieur. En reprenant (I-76), on peut définir les correspondances entre la parité des entiers  $m$ ,  $n$  et  $q$  et le type de distribution de vitesse :

- .  $m$  impair (ou pair)  $\longleftrightarrow$  symétrie (ou antisymétrie) des vitesses par rapport au plan (YOZ)
- .  $n$  impair (ou pair)  $\longleftrightarrow$  symétrie (ou antisymétrie) des vitesses par rapport au plan (XOY)
- .  $q$  impair (ou pair)  $\longleftrightarrow$  symétrie (ou antisymétrie) des vitesses par rapport au plan (XOZ)

Précisons que, le code ne prenant pas en compte les symétries du problème, toutes les fréquences issues de (I-77) sont des fréquences irrégulières du problème, ceci indépendamment du type de distribution de vitesse surfacique. Les maillages des corps étudiés dans le paragraphe suivant sont exclusivement composés d'éléments quadrilatères à 8 noeuds car, d'après les tests précédents, à précision égale, ils réclament moins de temps de calcul que les éléments triangulaires à 6 noeuds.

### III - 3.1.3.2 Tests

. Cube :

Une première structure étudiée est le cube défini dans le paragraphe III - 3.1.1.1 avec le même maillage de 96 quadrangles. Les  $k$  à problème du cube sont déduits de (I-77) :

$$k_{mnq} = \frac{\pi}{2A} \sqrt{m^2 + n^2 + q^2} \quad (\text{III-40})$$

La première fréquence irrégulière de travail correspond à  $k_{111}$ . On choisit de placer une source ponctuelle à l'origine des coordonnées. Le nouveau critère de sélection des équations de champ nul rappelé au paragraphe I - 4.2 suppose de connaître le nombre des surfaces nodales qui se croisent à l'origine. Sans étudier dans le détail la position des surfaces nodales, on peut se contenter d'utiliser le théorème de R. COURANT et D. HILBERT [7] qui indique que pour la  $n$ ième fréquence irrégulière, les surfaces nodales découpent le domaine intérieur en au plus  $n$  sous-domaines. Dans le cas présent, la seule surface

nodale est évidemment la surface  $\Gamma$ . L'origine du repère n'appartenant donc à aucune surface nodale, une seule équation supplémentaire de champ nul de degré  $m = 0$  garantit l'unicité de la solution. Un premier calcul sans aucune équation supplémentaire de champ nul, c'est-à-dire  $NEQCN = 0$ , est effectué. Ensuite, le même calcul est repris en surdéterminant le système d'équations intégrales par l'équation de champ nul  $m = 1 = 0$ . La pression apparaissant dans l'équation de champ nul est décomposée suivant (II-41) avec  $P = Q = 6$ . Les intégrales de champ nul sont calculées avec un nombre de points d'intégration  $NG = 6$ . Le produit  $kA$  est de 2,7. Les erreurs maximales  $\varepsilon_R \max$ ,  $\varepsilon_I \max$ , l'erreur quadratique moyenne EQM, les temps d'assemblage  $t_a$  et de résolution  $t_r$  sont contenus dans le tableau III-15.

NEQCN	$\varepsilon_R \max$	$\varepsilon_I \max$	EQM	$t_a$	$t_r$
0	413,2%	261,3%	260,6%	88s	219s
1	3,5%	5,7%	3,3%	301s	429s

tableau III-15

Une augmentation des coefficients  $P$  et  $Q$  améliore encore ces résultats mais, en parallèle, nécessite l'augmentation de  $NG$ . Cette manoeuvre se chiffre par une augmentation importante du temps de calcul. La variation des parties réelle et imaginaire de la pression sur la ligne contenue dans le plan  $(XOZ)$  et dans le premier quadrant est tracée sur les figures III-23 et III-24.

La seconde fréquence de travail correspond au second  $k$  à problème  $k_{121}$ . La distribution de vitesse précédente admettant trois plans de symétrie, on décide arbitrairement de placer deux sources ponctuelles de même amplitude et de signes opposés sur l'axe  $(OZ)$  symétriquement par rapport à l'origine et à une distance  $d$  de celle-ci. La distribution engendrée est alors symétrique par rapport aux plans  $(YOZ)$  et  $(XOZ)$  et antisymétrique par rapport au plan  $(XOY)$ . On choisit  $d$  telle que :

$$d = \frac{A}{2}$$

D'après le théorème précédent, le domaine intérieur est découpé en au plus deux sous-domaines. On en déduit que l'origine appartient à au plus une seule surface nodale. Dans ce cas, l'unicité de la solution est assurée avec les équations supplémentaires de champ nul de degré  $m \leq 1$  qui sont définies par :

$$(m,1) \in \{(0,0), (1,-1), (1,0), (1,1)\}$$

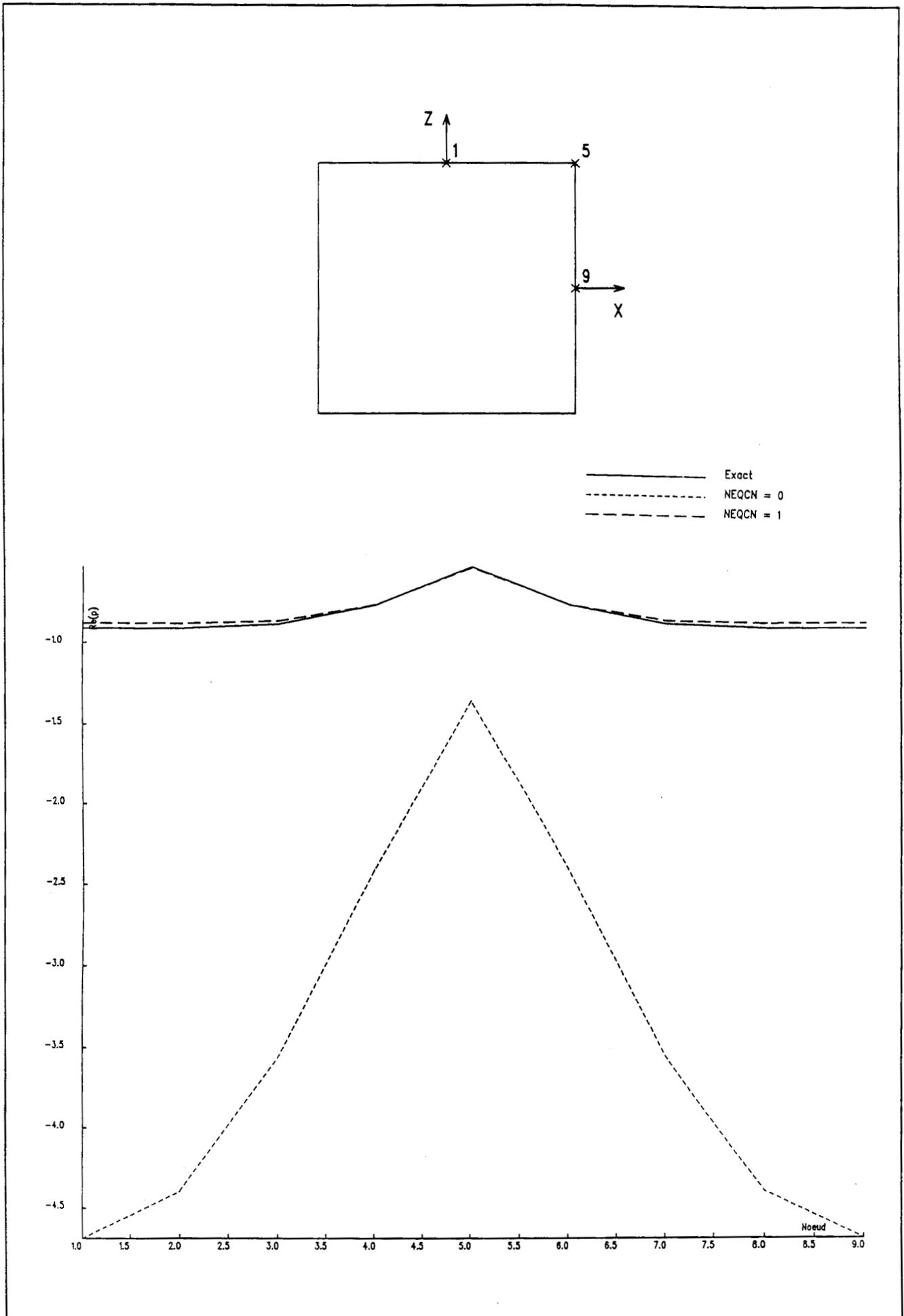


figure III-23 : partie réelle de la pression sur le cube pour  $k_{111}$

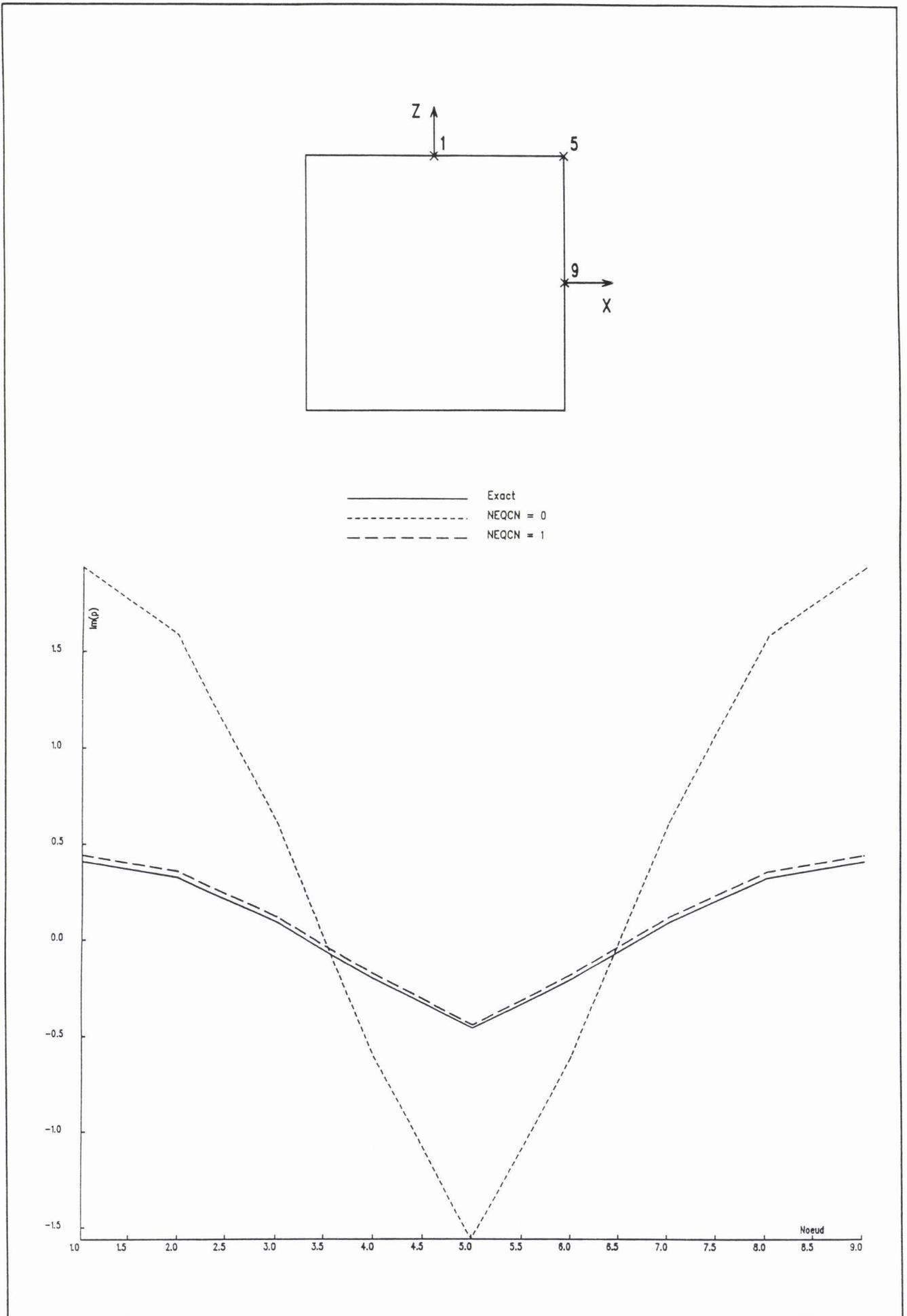


figure III-24 : partie imaginaire de la pression sur le cube pour  $k_{111}$

On pourrait, en définissant explicitement les fonctions propres associées à cette fréquence, confirmer qu'il existe bien une surface nodale passant par l'origine. Le produit  $kA$  est de 3,8. On reprend de nouveau le maillage en 96 quadrangles. Avec ce maillage, le critère en  $\lambda/4$  n'est plus vérifié : la longueur caractéristique des éléments est alors d'environ  $\lambda/3$ . On peut compenser, en partie, ce manque de raffinement du maillage en augmentant le nombre de points de Gauss des intégrales de Helmholtz, pour passer de 4 points d'intégration par élément à 9 points : 3 suivant la variable  $\xi$  et 3 suivant  $\eta$ . Après un premier calcul avec  $NEQCN = 0$ , le même calcul est repris avec les 4 équations de champ nul supplémentaires précisées ci-dessus. Dans ces équations, la pression est décomposée avec  $P = Q = 7$ . Les intégrales de champ nul sont calculées avec  $NG = 6$ . Les résultats sont inclus dans le tableau III-16.

NEQCN	$\epsilon_R$ max	$\epsilon_I$ max	EQM	$t_a$	$t_r$
0	102,5%	57,5%	62,5%	177s	219s
4	7,0%	2,8%	2,5%	943s	430s

tableau III-16

La remarque formulée à la suite du tableau III-15 est encore valable ici. De plus, le respect du critère en  $\lambda/4$ , par un raffinement du maillage, doit améliorer le résultat du couplage. Les figures III-25 et III-26 sont analogues aux figures III-23 et III-24.

. Parallélépipède rectangle :

Le parallélépipède rectangle tel que :

$$C = A \quad B = 2A$$

est maintenant étudié. D'après (I-77), les  $k$  à problème sont :

$$k_{mnq} = \frac{\pi}{2A} \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{4} + q^2} \quad (\text{III-41})$$

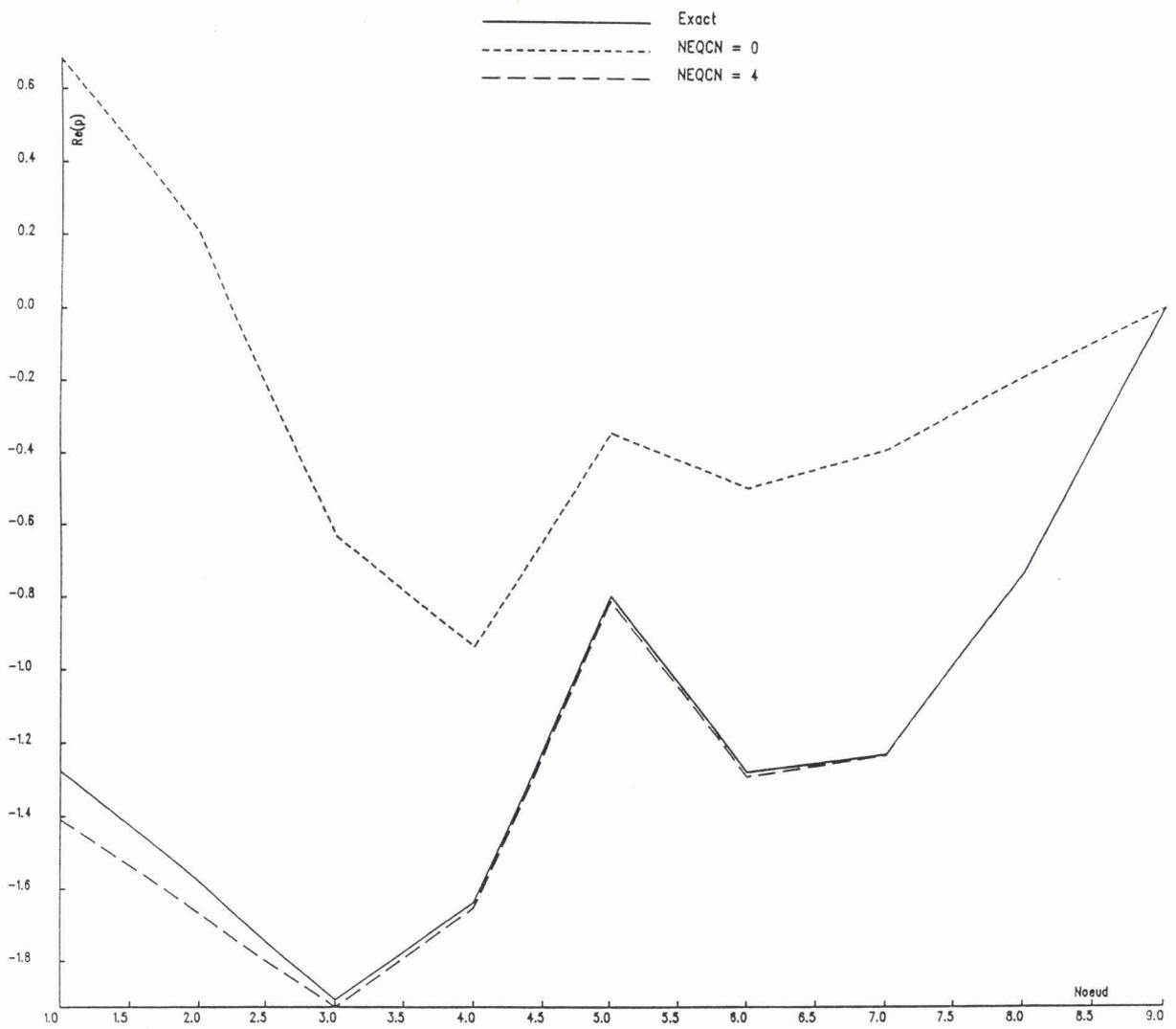
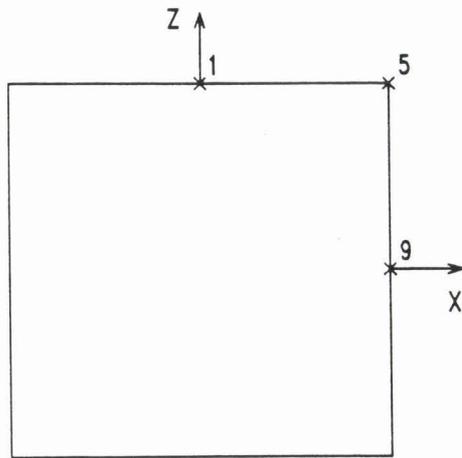


figure III-25 : partie réelle de la pression sur le cube pour  $k_{121}$

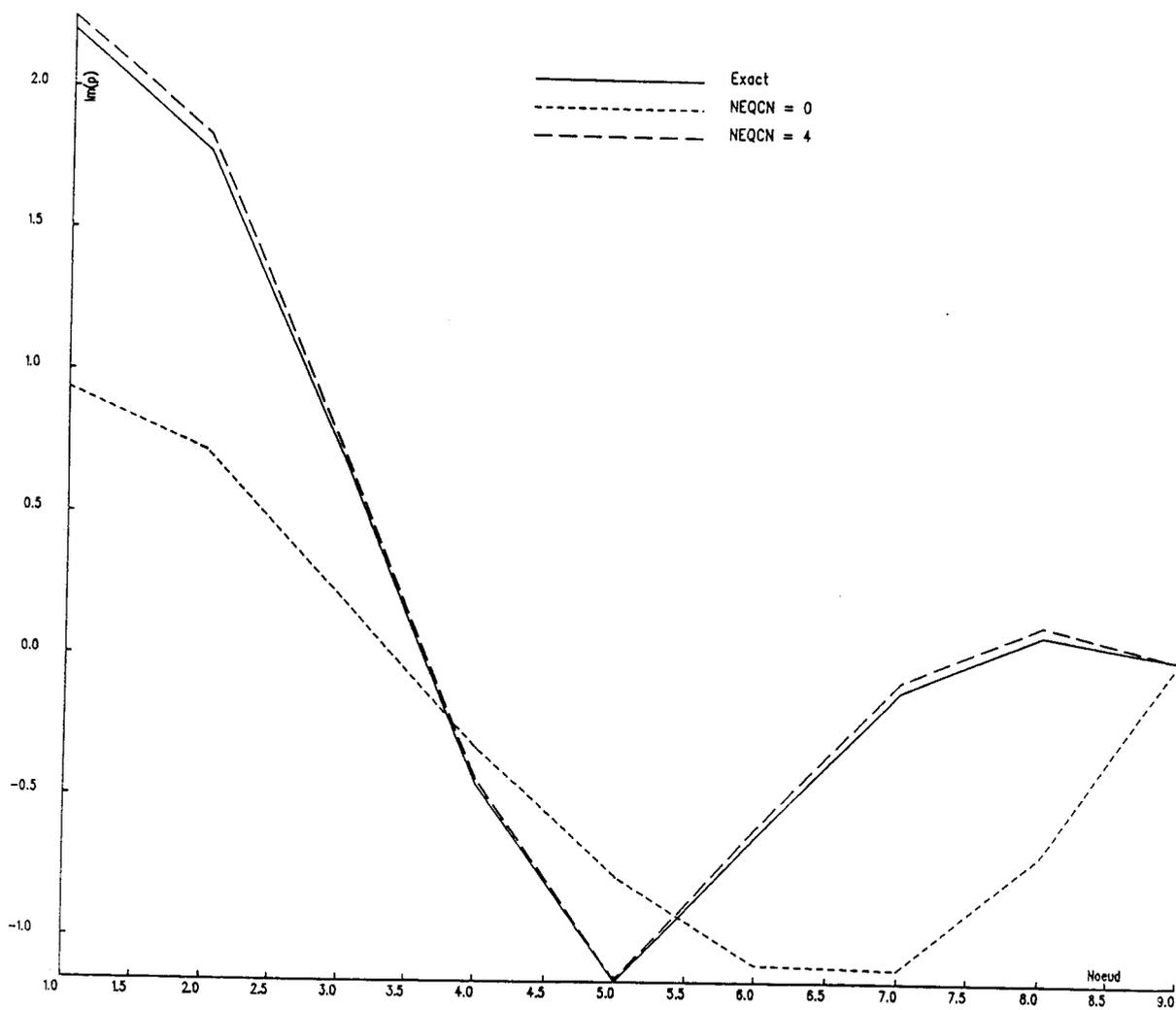
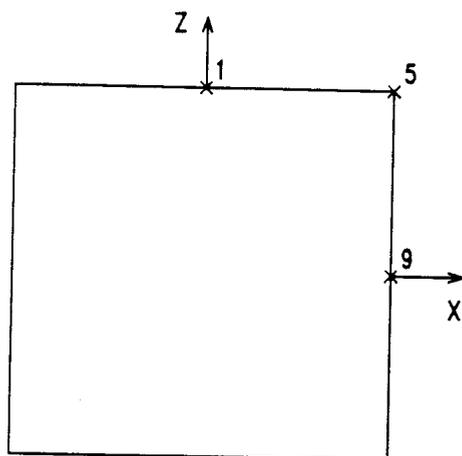


figure III-26 : partie imaginaire de la pression sur le cube pour  $k_{121}$

Le premier  $k$  à problème est  $k_{111}$ . Une source ponctuelle est placée au centre du cube et correspond à une distribution de vitesse symétrique par rapport aux 3 plans (YOZ), (XOY) et (XOZ). A la première fréquence irrégulière, la structure est découpée en 90 quadrangles (272 noeuds) et schématisée sur la figure III-27.a. Quand le système linéaire d'équations intégrales est surdéterminé par la première équation de champ nul, la pression est décomposée avec  $P = 8$  et  $Q = 4$ . Les intégrales de champ nul sont calculées avec  $NG = 8$ . Les produits  $kA$  et  $kB$  sont égaux à 2,4 et 4,7. A l'instar du premier test de ce paragraphe, les résultats sont donnés dans le tableau III-17.

NEQCN	$\varepsilon_R$ max	$\varepsilon_I$ max	EQM	$t_a$	$t_r$
0	252,9%	139,5%	154,9%	78s	182s
1	1,9%	2,1%	1,0%	401s	359s

tableau III-17

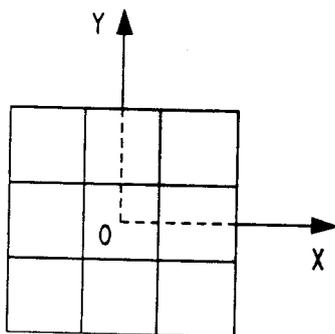
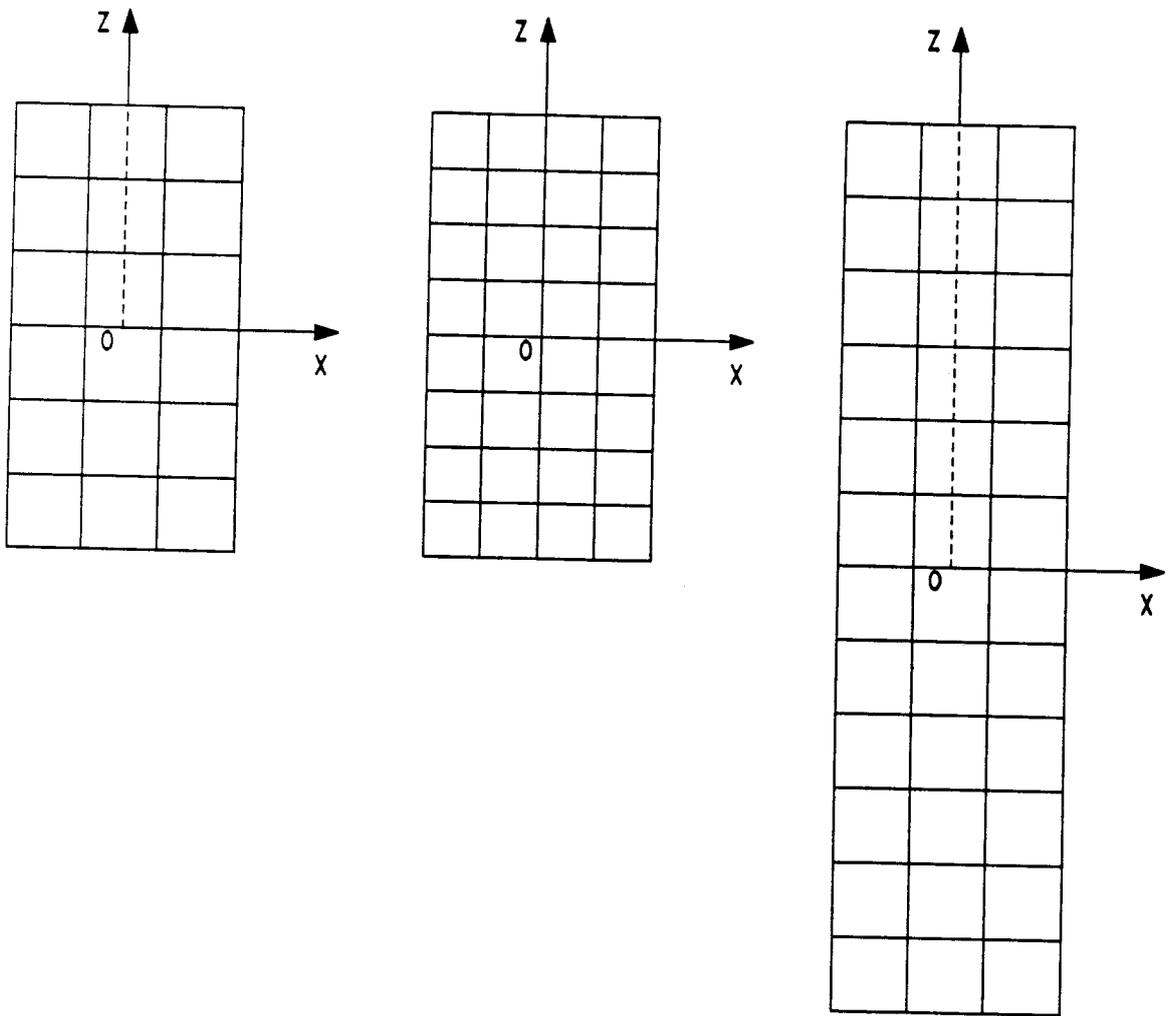
Le second  $k$  à problème est  $k_{121}$ . Deux sources ponctuelles de même amplitude et de signes opposés sont placées symétriquement par rapport à 0 et à une distance  $d$  de 0 telle que :

$$d = \frac{B}{2}$$

La vitesse est symétrique par rapport aux plans (YOZ) et (XOZ) et antisymétrique par rapport à (XOY). A la seconde fréquence irrégulière, le maillage précédent est repris. La dimension des éléments de surface est légèrement supérieure à  $\lambda/4$ . Les produits  $kA$  et  $kB$  sont égaux à 2,7 et 5,4. Les intégrales de Helmholtz sont alors encore calculées avec 9 points d'intégration : 3 suivant chaque variable  $\xi$  et  $\eta$ . Les 4 équations supplémentaires de champ nul sont précisées au second test de ce paragraphe dans lesquelles  $P = 8$ ,  $Q = 4$  et  $NG = 8$ . Le tableau III-18 contient les résultats.

NEQCN	$\varepsilon_R$ max	$\varepsilon_I$ max	EQM	$t_a$	$t_r$
0	65,6%	90,0%	66,8%	157s	182s
4	2,1%	8,7%	4,1%	1039s	356s

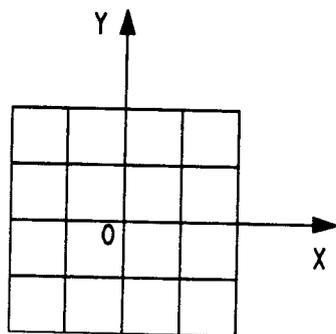
tableau III-18



$C = A \quad B = 2A$

90 quadrangles

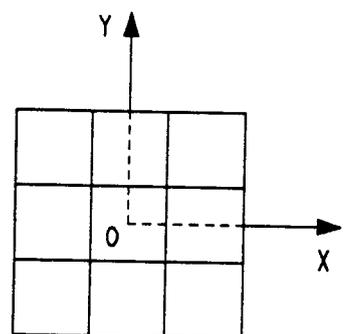
(a)



$C = A \quad B = 2A$

160 quadrangles

(b)



$C = A \quad B = 4A$

162 quadrangles

(c)

figure III-27 : maillages des parallélépipèdes rectangles

La valeur de  $\varepsilon_I \max$  et de EQM du tableau III-18 quand NEQCN = 4 peut être diminuée en se plaçant dans les conditions du critère en  $\lambda/4$ , ou en augmentant simultanément P, Q et NG. Ces deux derniers tableaux indiquent clairement la levée de l'indétermination inhérente aux 2 premières fréquences irrégulières. Un facteur essentiel influence énormément la précision du résultat et le temps de calcul, à savoir les valeurs des paramètres P et Q. Avec le même objet, la nouvelle fréquence de travail choisie est celle correspondant à  $k_{131}$ . On décide, de façon arbitraire, de situer une source ponctuelle au point de coordonnées cartésiennes :

$$x = \frac{A}{3} \quad y = \frac{C}{3} \quad z = \frac{B}{3}$$

La distribution de vitesse ainsi engendrée est quelconque. Etant donné les 3 plans de symétrie de la géométrie, ce problème peut être décomposé en 8 problèmes canoniques dont chacun d'entre eux admet soit une symétrie, soit une antisymétrie des vitesses par rapport à chacun des 3 plans (YOZ), (XOY) et (XOZ). Une combinaison linéaire des solutions de ces 8 problèmes fournit la solution du problème considéré. L'un de ces 8 problèmes admet une symétrie par rapport aux 3 plans et, dans l'hypothèse où le code EQI tiendrait compte des symétries,  $k_{131}$  serait alors le k à problème de celui-ci et uniquement de celui-ci. Le problème est modélisé dans son ensemble, sans décomposition canonique. Le maillage comporte 160 quadrangles (482 noeuds) et est visualisé sur la figure III-27.b. Le produit  $kA$  est de 3,2 et  $kB$  de 6,5. Le calcul est mené sans équation supplémentaire de champ nul. Dans le tableau III-19 sont condensés les résultats.

NEQCN	$\varepsilon_R \max$	$\varepsilon_I \max$	EQM	$t_a$	$t_r$
0	14,4%	21,2%	16,7%	230s	984s

tableau III-19

L'examen de ce tableau montre que l'indétermination de la solution est moins flagrante qu'habituellement. Cette impression est confirmée par l'examen des figures III-28 à III-31 où est illustrée successivement la variation des parties réelle et imaginaire de la pression sur les lignes fermées de surface incluses dans les plans (XOZ) et (XOY).

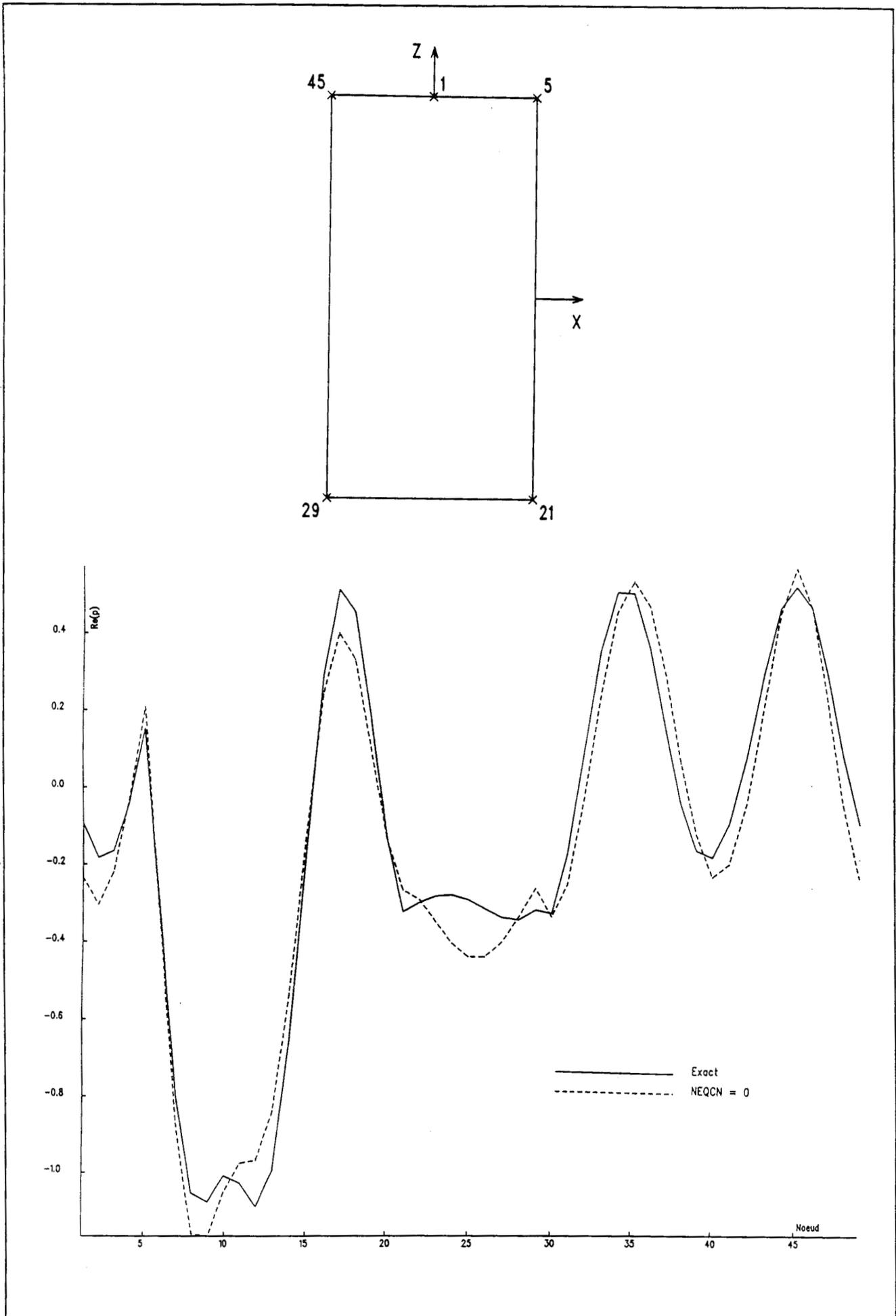


figure III-28 : partie réelle de la pression sur le parallélépipède rectangle dans le plan  $(XOZ)$

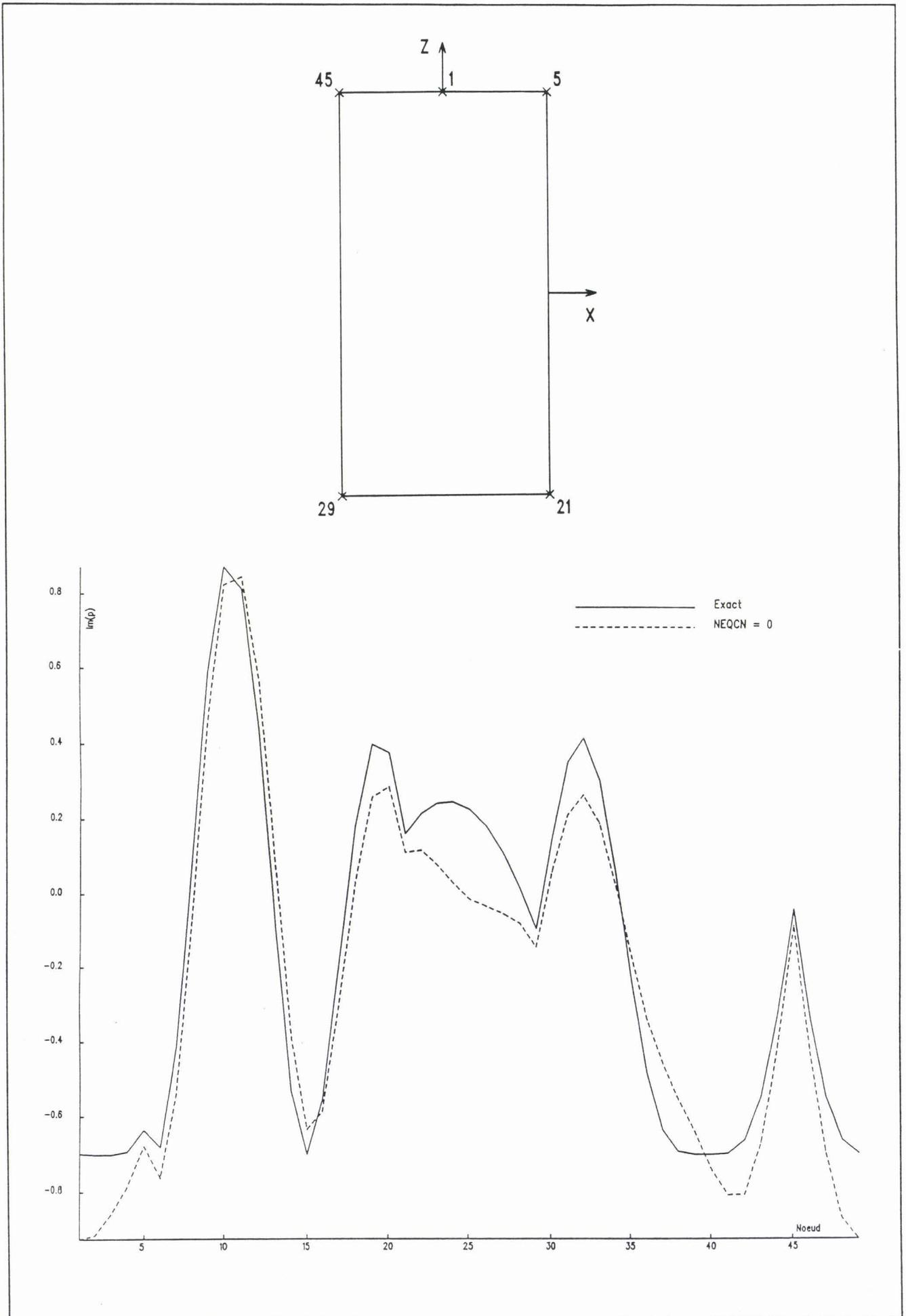


figure III-29 : partie imaginaire de la pression sur le parallélépipède rectangle dans le plan (XOZ)

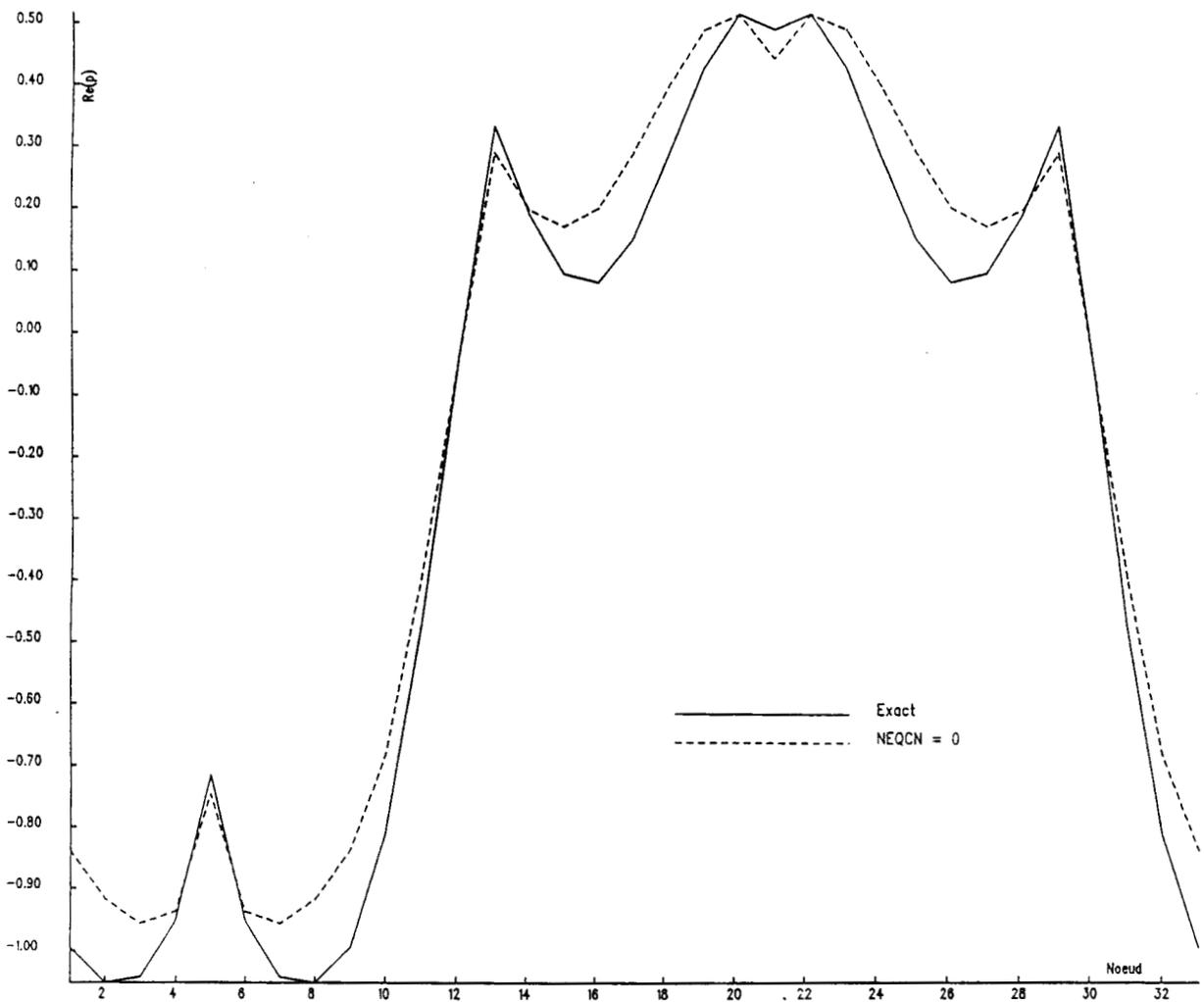
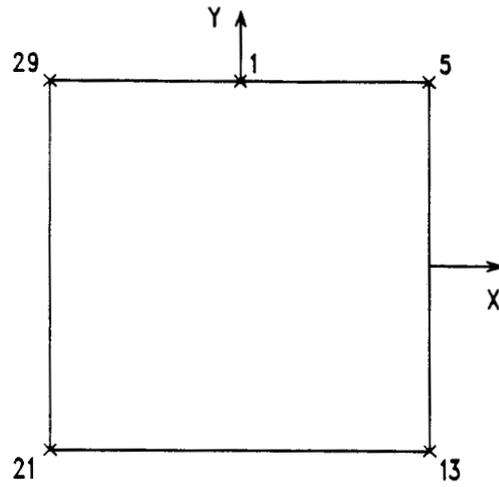


figure III-30 : partie réelle de la pression sur le parallélépipède rectangle dans le plan ( $XOY$ )

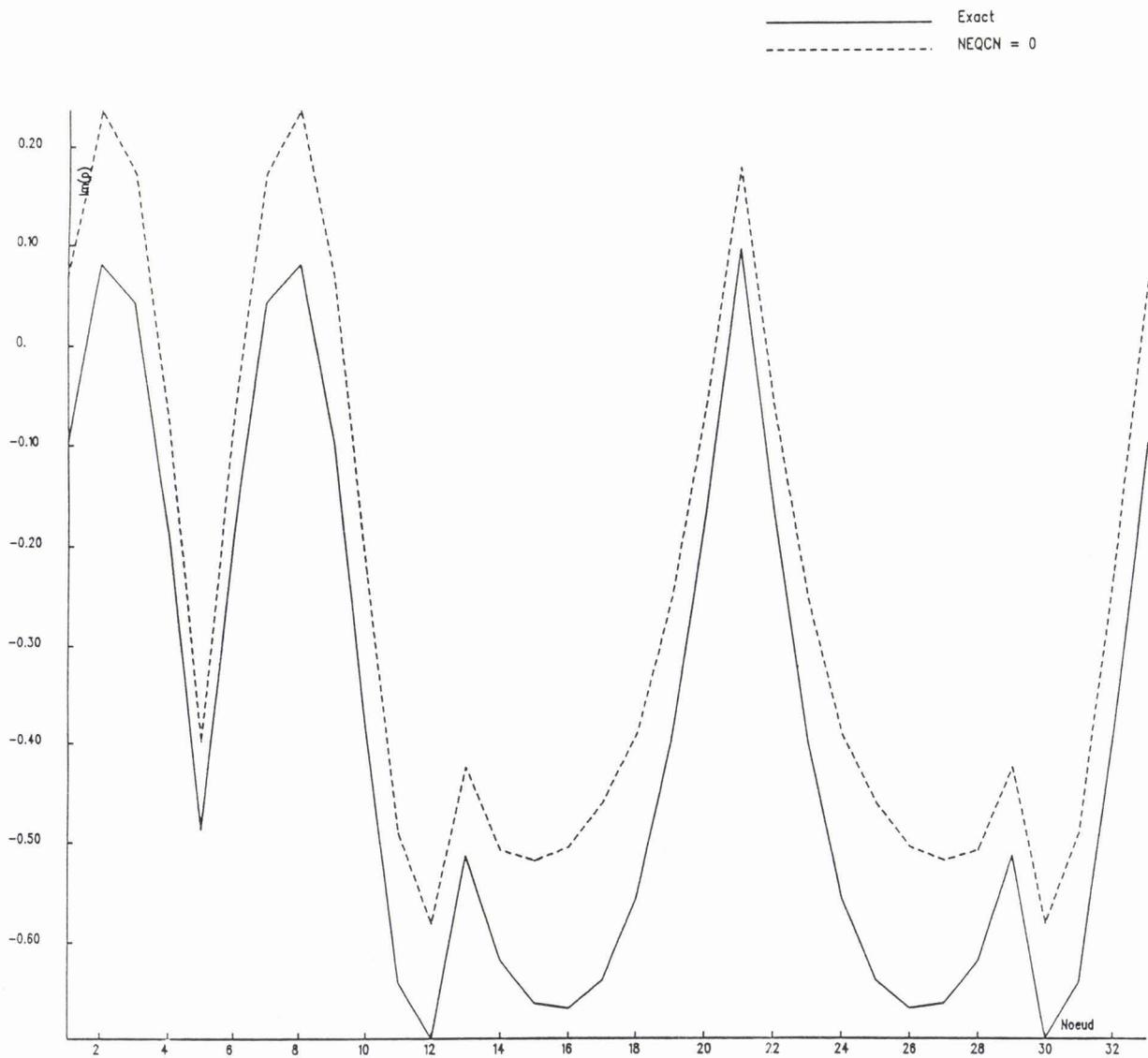
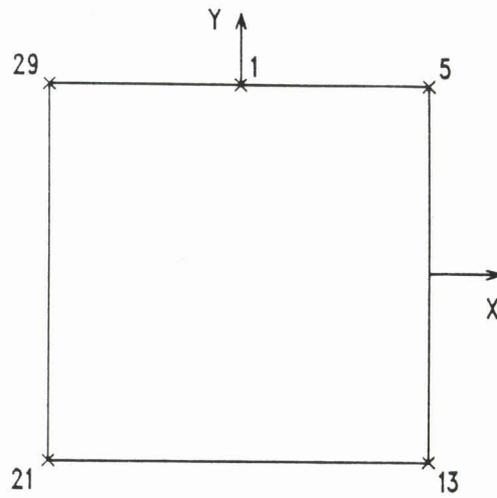


figure III-31 : partie imaginaire de la pression sur le parallélépipède rectangle dans le plan (XOY)

Un parallélépipède plus excentré tel que :

$$C = A \quad B = 4A$$

est également étudié. les  $k$  à problème vérifient :

$$k_{mnq} = \frac{\pi}{2A} \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{16} + q^2} \quad (\text{III-42})$$

La fréquence de travail coïncide avec la première fréquence irrégulière. La distribution de vitesse est issue d'une source ponctuelle centrée. Le maillage est constitué de 162 quadrangles (488 noeuds) schématisé sur la figure III-27.c. Les produits  $kA$  et  $kB$  sont de l'ordre de 2,3 et 9. L'équation de champ nul supplémentaire ( $m = l = 0$ ) est déterminée avec  $P = 12$ ,  $Q = 6$  et  $NG = 10$ . Les résultats peuvent être consultés dans le tableau III-20.

NEQCN	$\epsilon_R \text{ max}$	$\epsilon_I \text{ max}$	EQM	$t_a$	$t_r$
0	254,9%	212,0%	252,1%	235s	1014s
1	3,6%	3,5%	2,8%	2034s	1999s

tableau III-20

Ce tableau montre que les temps de calcul deviennent importants et sont, en grande partie, imputables à la mise en oeuvre de l'équation de champ nul.

### III - 3.2 Validation de la diffraction

#### III - 3.2.1 *Introduction*

Le code EQI permet la modélisation de la diffraction par un corps rigide de forme quelconque soumis à une onde incidente plane. On rappelle que les éventuelles symétries du problème ne sont pas prises en compte par le code. Dans le cas tridimensionnel, le seul test analytique disponible est celui de la diffraction par une sphère rigide qui nous servira de test de référence. Avec une telle géométrie, le problème test est à symétrie axiale d'axe perpendiculaire au plan de propagation. Pour simplifier la définition du problème, on décide que le plan de propagation est orthogonal à l'axe (OZ), la

propagation s'effectuant dans le sens des Z croissants. La pression incidente est alors :

$$p_i(\underline{r}) e^{-i\omega t} = A e^{ikz} e^{-i\omega t} \quad (\text{III-43})$$

Avec cette pression incidente, la pression diffractée est [5] :

$$p_d(\underline{r}) e^{-i\omega t} = -A \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) i^{m+1} e^{-i\delta_m} \sin\delta_m P_m(\cos\theta) h_m(kr) e^{-i\omega t} \quad (\text{III-44})$$

où les angles  $\delta_m$  sont tabulés [5]. On décide de limiter cette série à ses 30 premiers termes. La pression totale ainsi obtenue, somme de la pression incidente  $p_i$  et de la pression diffractée  $p_d$ , est la valeur de référence. La sphère traitée est découpée en 24 ou en 96 quadrilatères à 8 noeuds (cf figure III-20.a et III-32) selon la fréquence de travail. Les sous-programmes de calcul appelés par EQI dans le cas d'un problème de diffraction sont également appelés dans le cas d'un problème de rayonnement. Les deux types d'éléments de surface ayant déjà été validés dans le paragraphe III - 3.1, il est inutile de réitérer cette opération. Le choix des quadrangles au détriment des triangles se justifie par une baisse du temps CPU.

### III - 3.2.2 Représentation de Helmholtz extérieure

La sphère (cf figure III-1) est soumise à 2 fréquences de travail différentes telles que :

$$kR = 2 \quad \text{et} \quad kR = 4$$

A la fréquence la plus basse, le maillage en 24 éléments est suffisant. Par contre, la seconde fréquence réclame un maillage plus fin composé de 96 éléments. A la première fréquence, sont représentées sur les figures III-33 et III-34 les parties réelles et imaginaires des valeurs nodales de la pression dans le plan (XOZ) en fonction de l'angle  $\theta$ . De manière équivalente et pour la seconde fréquence, les figures III-35 et III-36 illustrent les résultats. Une très bonne concordance entre les résultats de référence et les résultats du calcul est observée. Pour ces deux fréquences, la directivité à l'infini est calculée avec un point de directivité tous les degrés et dessinée sur la figure III-37.

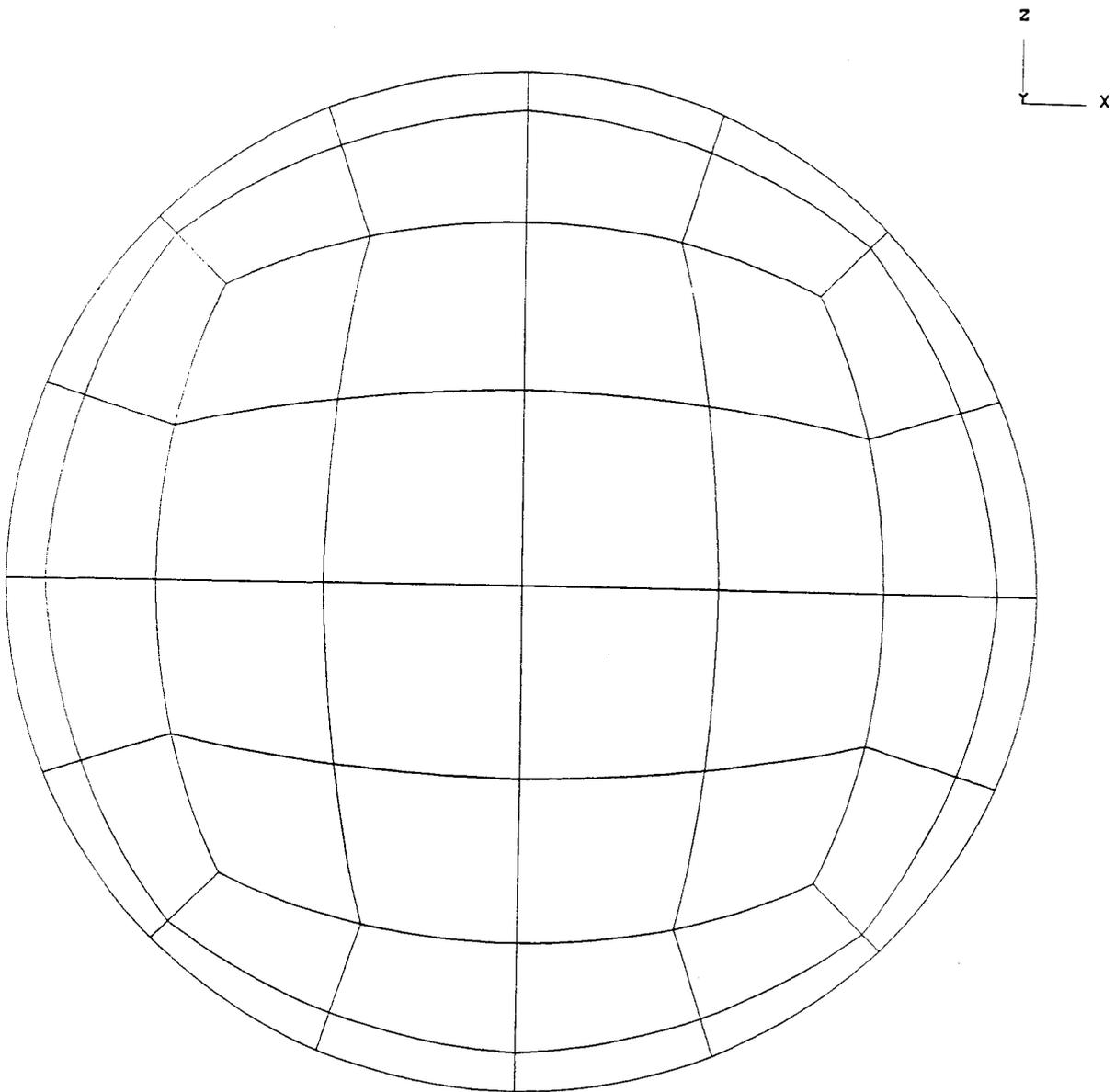


figure III-32 : maillage de la sphère diffractante

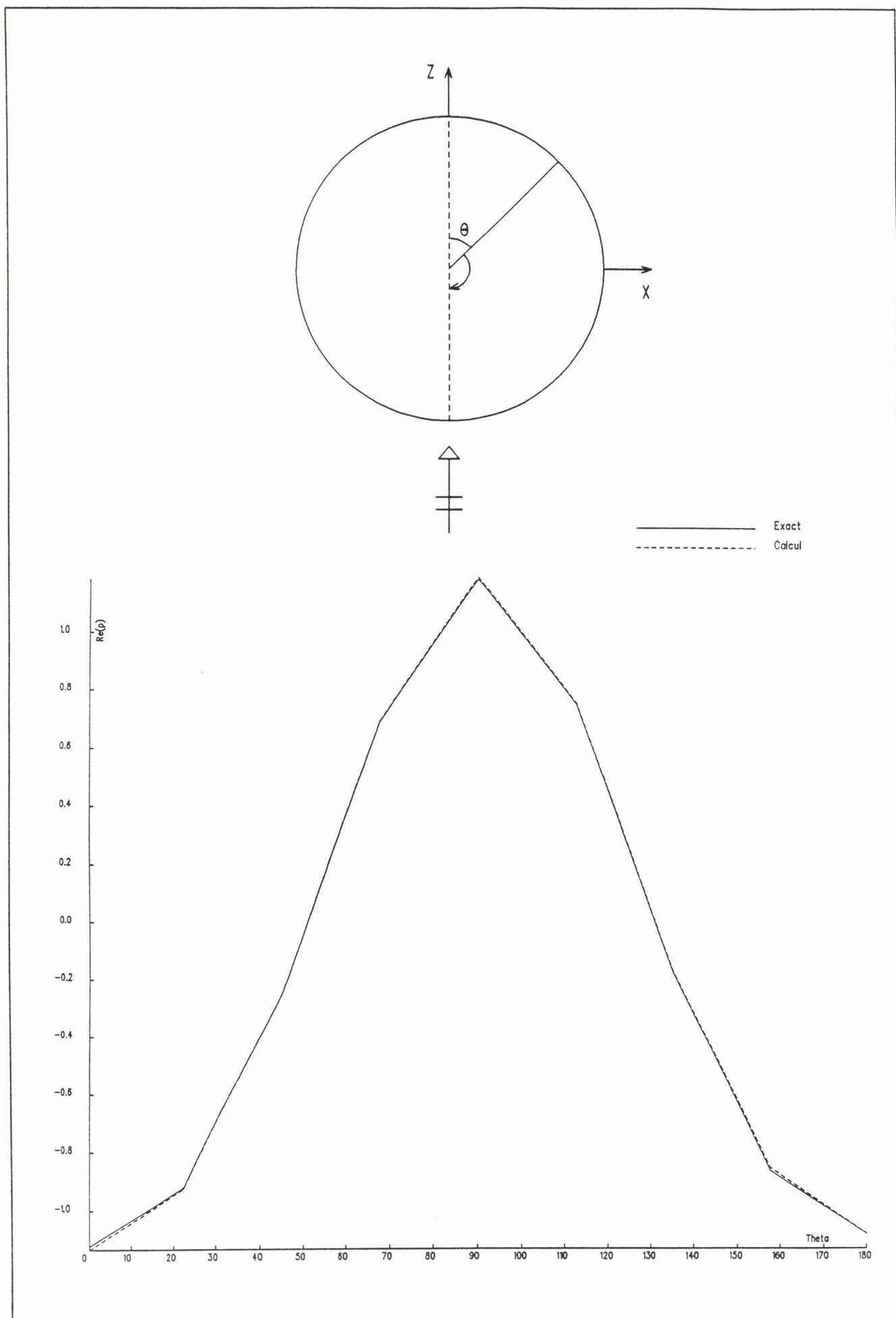


figure III-33 : partie réelle de la pression sur la sphère par équations intégrales et pour  $kR = 2$

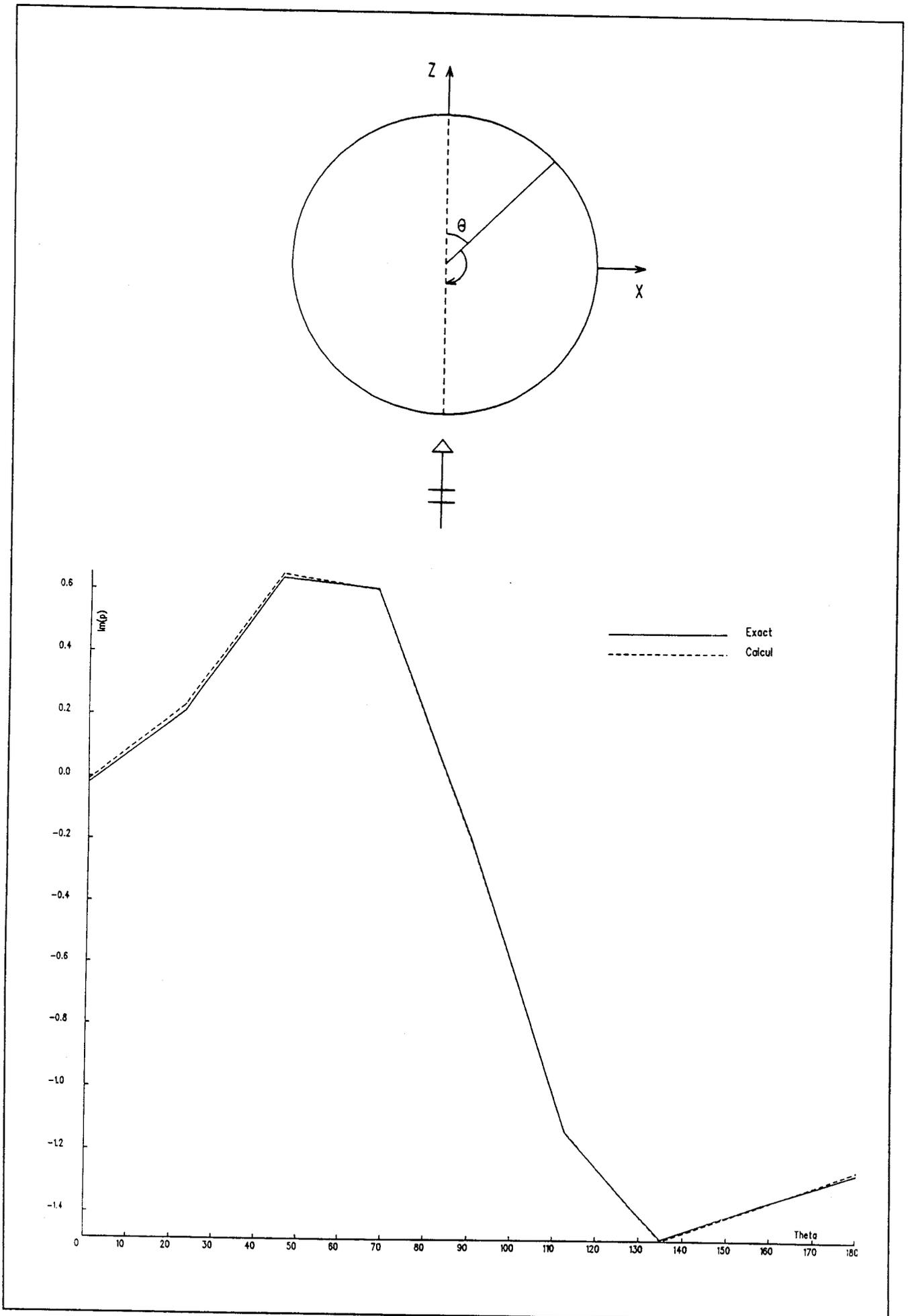


figure III-34 : partie imaginaire de la pression sur la sphère par équations intégrales et pour  $kR = 2$

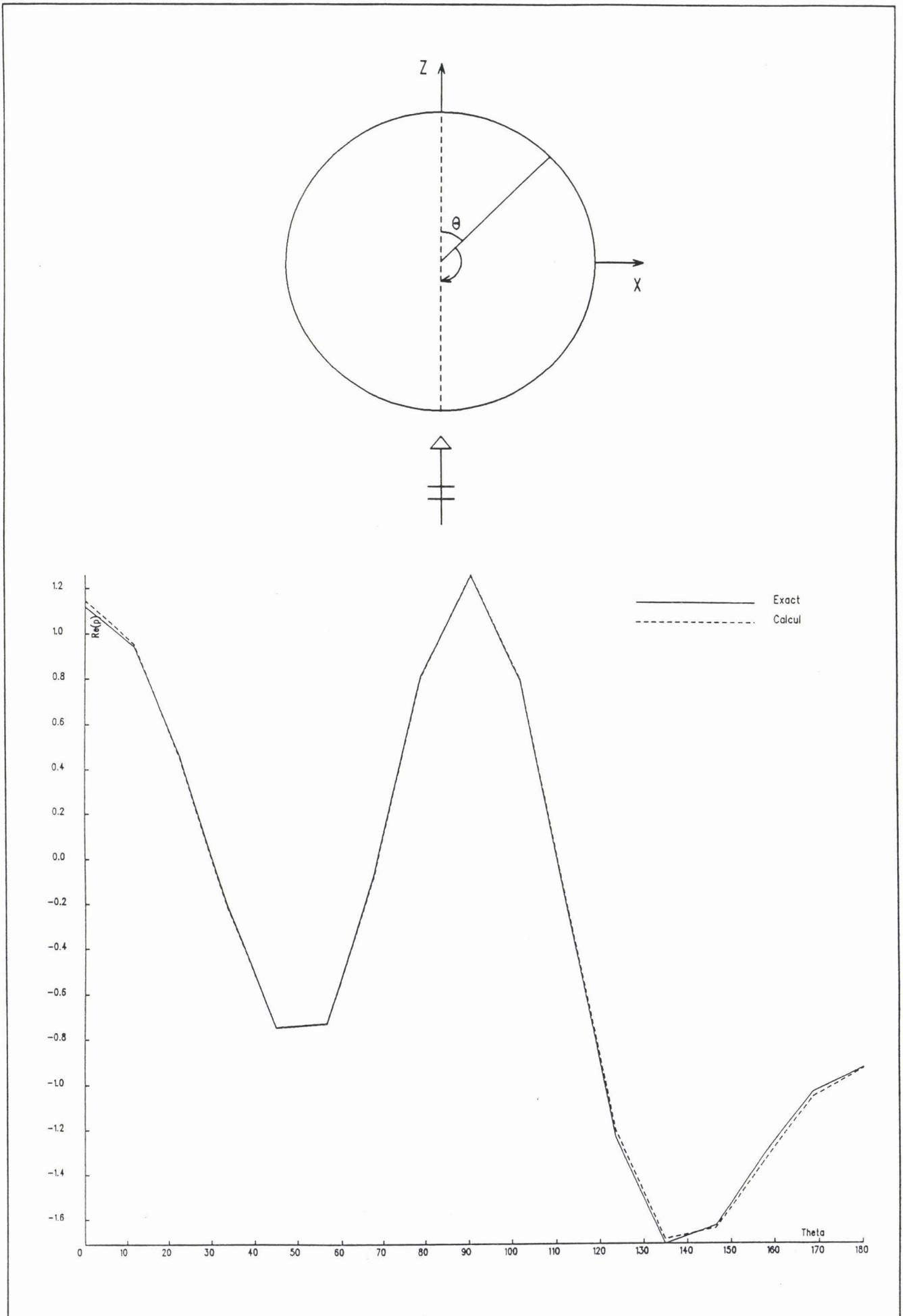


figure III-35 : partie réelle de la pression sur la sphère par équations intégrales et pour  $kR = 4$

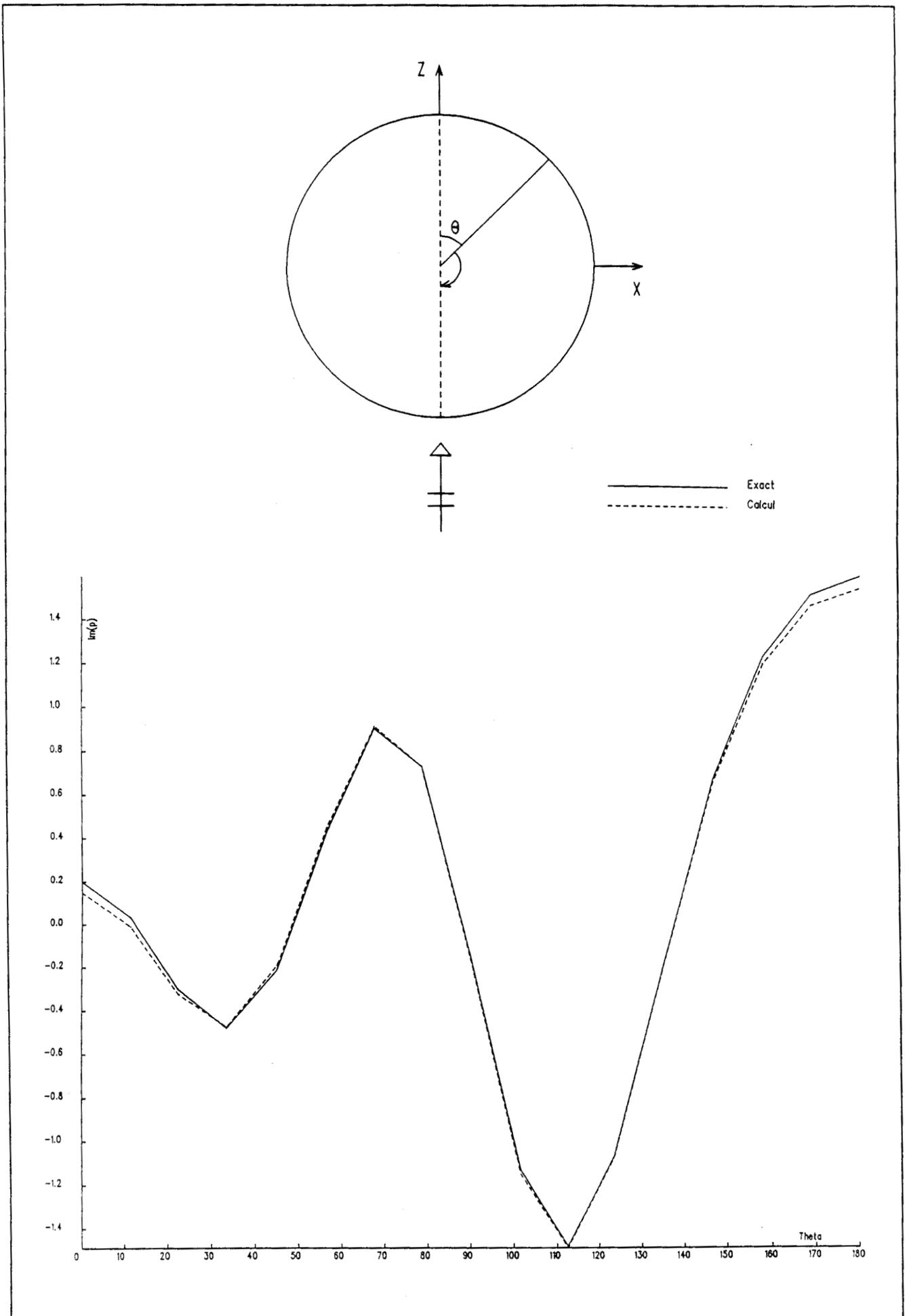


figure III-36 : partie imaginaire de la pression sur la sphère par équations intégrales et pour  $kR = 4$

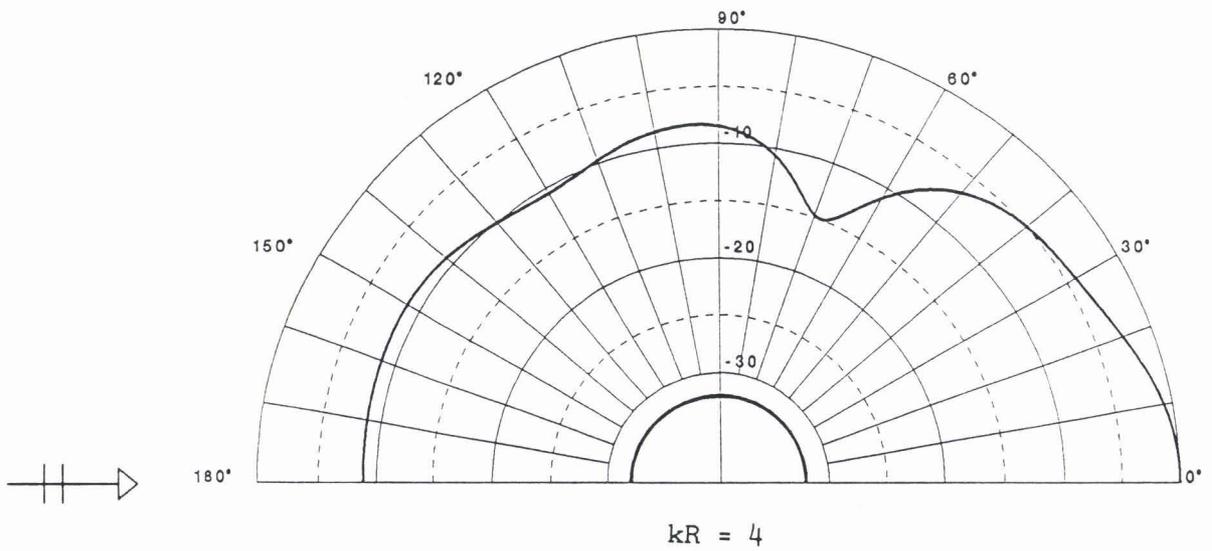
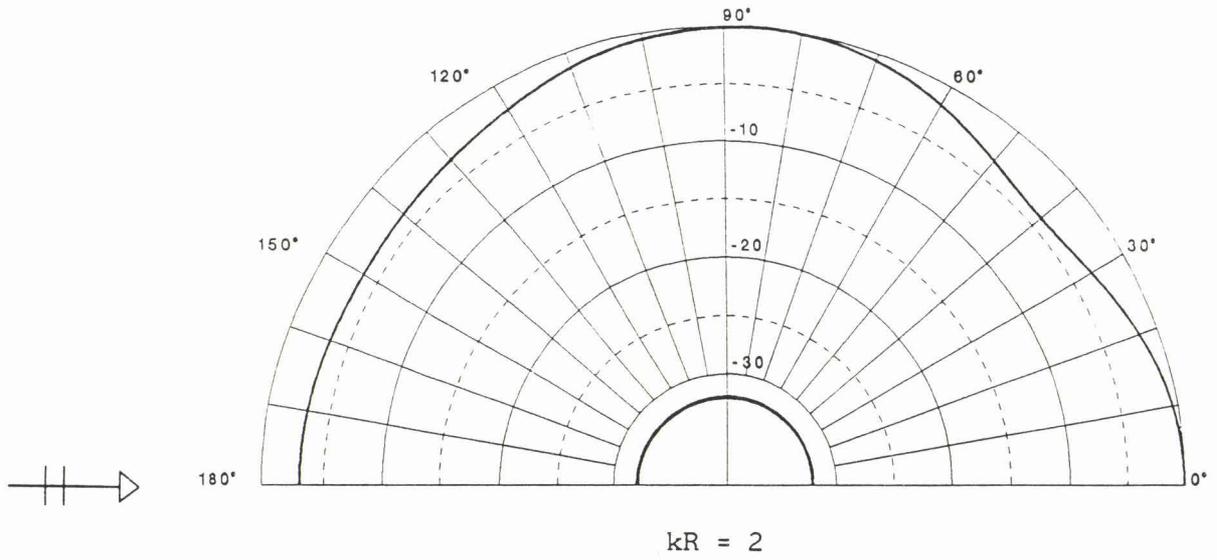


figure III-37 : directivités de la sphère diffractante

Contrairement au tracé des courbes de pression, les points des diagrammes de directivité ne sont pas reliés par une interpolation linéaire, mais par une interpolation cubique. Les temps d'assemblage  $t_a$  et de résolution  $t_r$  sont contenus dans le tableau III-21.

	$t_a$	$t_r$
kR = 2	13s	4s
kR = 4	89s	217s

tableau III-21

Outre le temps nécessaire à l'assemblage de l'équation (II-14), le temps  $t_a$  comprend le temps passé à assembler l'équation (II-40).

Il faut noter que les intégrales de directivité apparaissant dans l'équation (II-40) sont calculées comme les intégrales de Helmholtz de (II-14), avec 2 points de Gauss suivant chaque variable  $\xi$  et  $\eta$ , c'est-à-dire 4 points par élément  $\Gamma_j$ .

### III - 3.2.3 Méthode de champ nul

Le problème sphérique considéré est tel que :

$$kR = 2$$

Le maillage à 24 éléments est alors adapté. Le calcul est mené avec différentes valeurs des paramètres P et Q définissant la série (II-41) et qui sont :

$$\begin{aligned} P = Q &= 2 \\ P = Q &= 3 \\ P = Q &= 4 \end{aligned}$$

Pour chacun de ces choix, les couples  $(m,1)$  de (II-42) ne doivent pas être quelconques et sont ceux indiqués dans le paragraphe III - 3.1.2. Sur les courbes III-38 et III-39, sont présentées les variations des parties réelle et imaginaire de la pression dans le plan (XOZ) pour les 3 décompositions en série de la pression. On constate une amélioration de la convergence de la

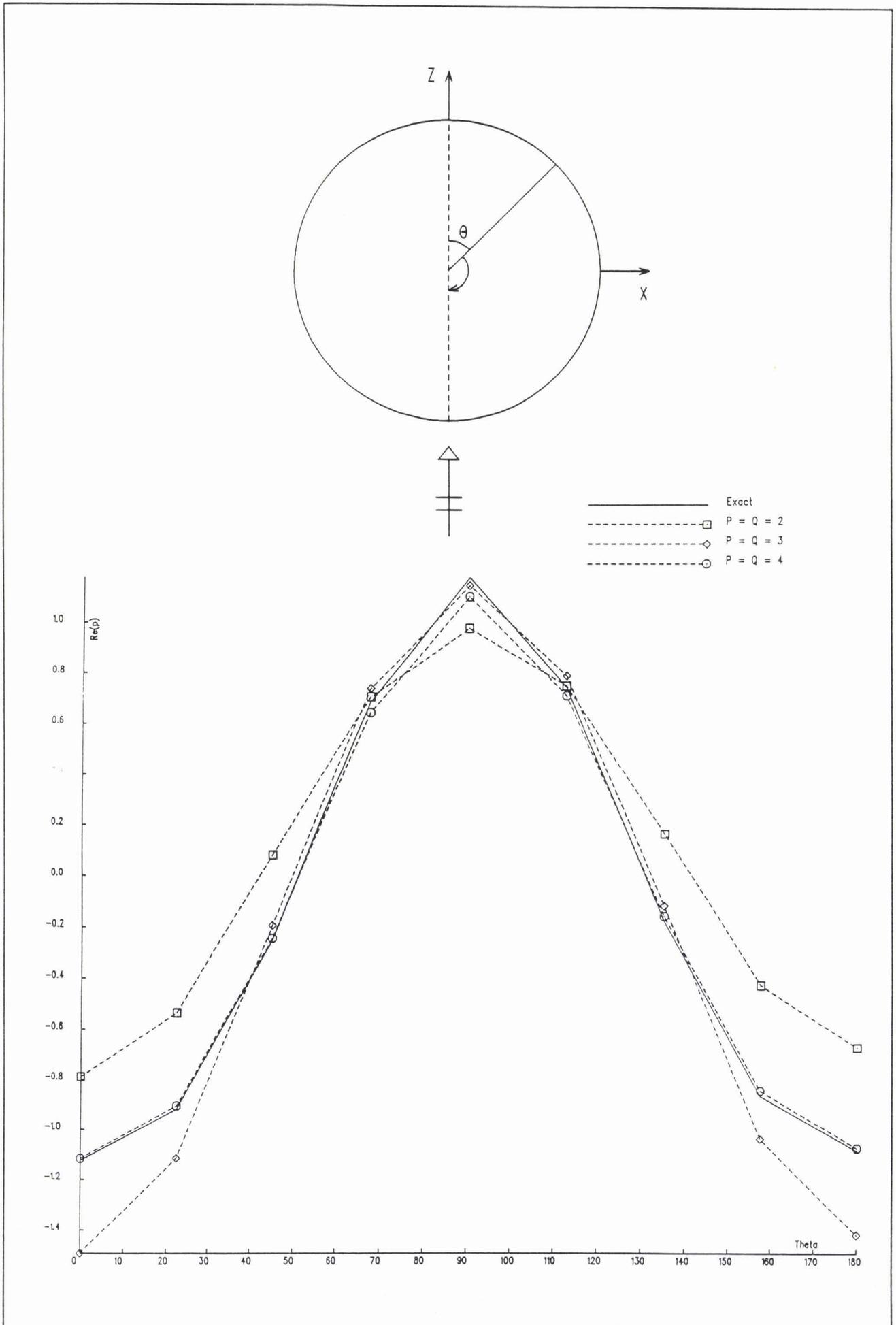


figure III-38 : partie réelle de la pression sur la sphère par champ nul et pour  $kR = 2$

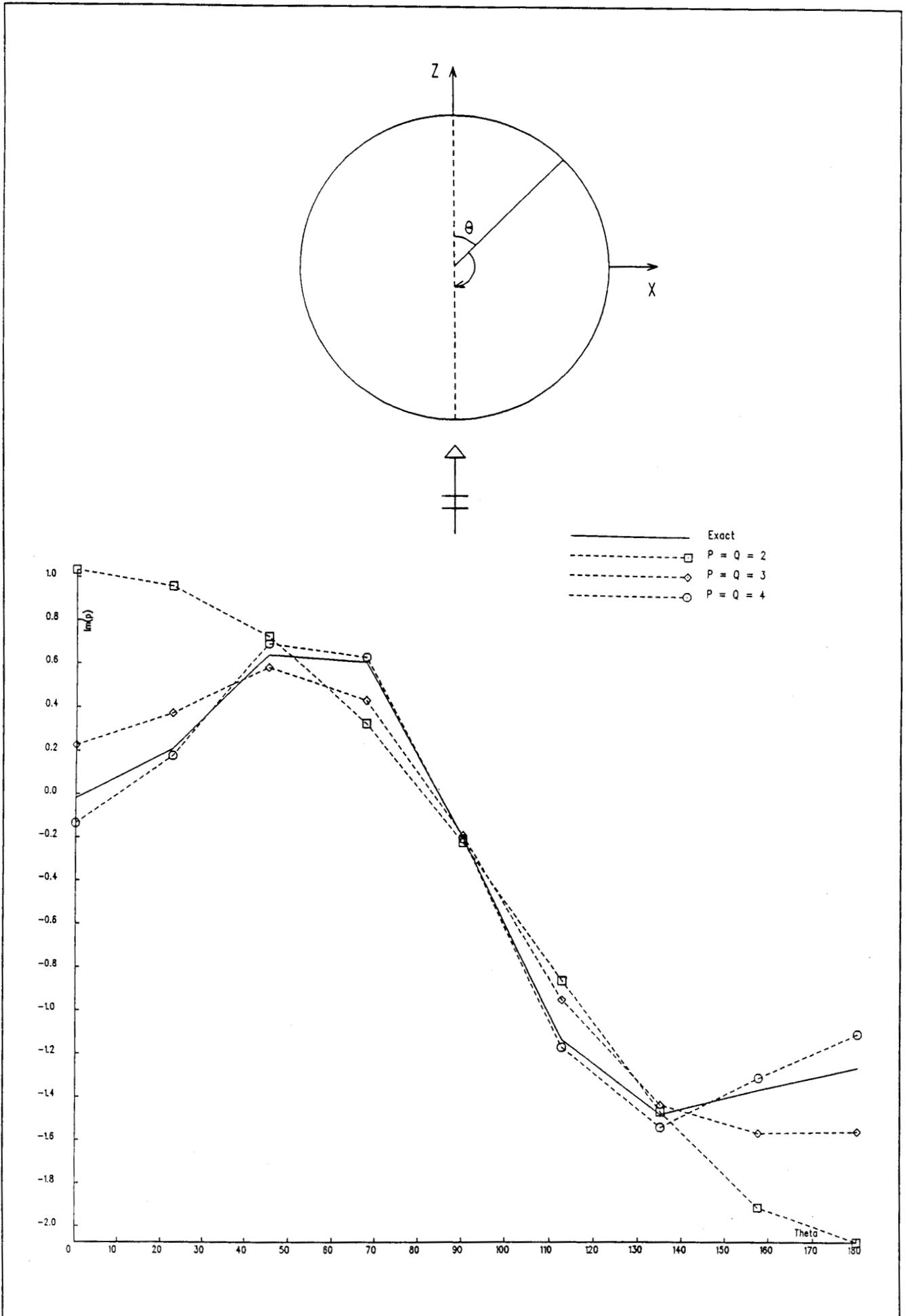


figure III-39 : partie imaginaire de la pression sur la sphère par champ nul et pour  $kR = 2$

pression calculée vers la pression de référence quand les paramètres P et Q augmentent. Les temps d'assemblage  $t_a$  et de résolution  $t_r$  et le nombre de points d'intégration NG des intégrales de champ nul par élément sont donnés dans le tableau III-22.

	$t_a$	$t_r$	NG
P = Q = 2	22s	<1s	4
P = Q = 3	104s	<1s	5
P = Q = 4	368s	2s	6

tableau III-22

### III - 3.2.4 Couplage équations intégrales-champ nul

D'après les remarques formulées au paragraphe III - 3.1.3.1, la sphère interpolée par des quadrangles est très légèrement différente de la sphère exacte. Quoique minime, cette incertitude entraîne une différence entre les  $k$  à problème de la sphère exacte et ceux du problème effectivement considéré. L'interpolation dans les éléments isoparamétriques, en particulier les éléments quadrilatères à 8 noeuds, fait que la sphère modélisée par 96 quadrangles est de volume légèrement inférieure à la sphère exacte. Les  $k$  à problème sont donc supérieurs à ceux de la formule (I-81). Le premier  $k$  à problème analytique est  $k_{01}$  :

$$k_{01} = \frac{\alpha_{01}}{R} = \frac{\pi}{R} \quad (\text{III-45})$$

La recherche du  $k$  à problème réel est basée sur la variation du déterminant du système final d'équations intégrales en fonction de la fréquence. Une chute du déterminant est caractéristique de la présence d'une fréquence irrégulière. Sur la figure III-40, est tracée la valeur du déterminant pour des fréquences entourant la fréquence irrégulière réelle  $f_r$ . Le déterminant est normé par rapport à celui obtenu à la fréquence  $f_r$ . Cette fréquence  $f_r$  correspond à l'abscisse nulle et a été déterminée au  $1/10^e$  de Hz près. Si on note  $f_{01}$  la fréquence irrégulière analytique, on a :

$$f_r \simeq f_{01} + 3,6 \text{ Hz}$$

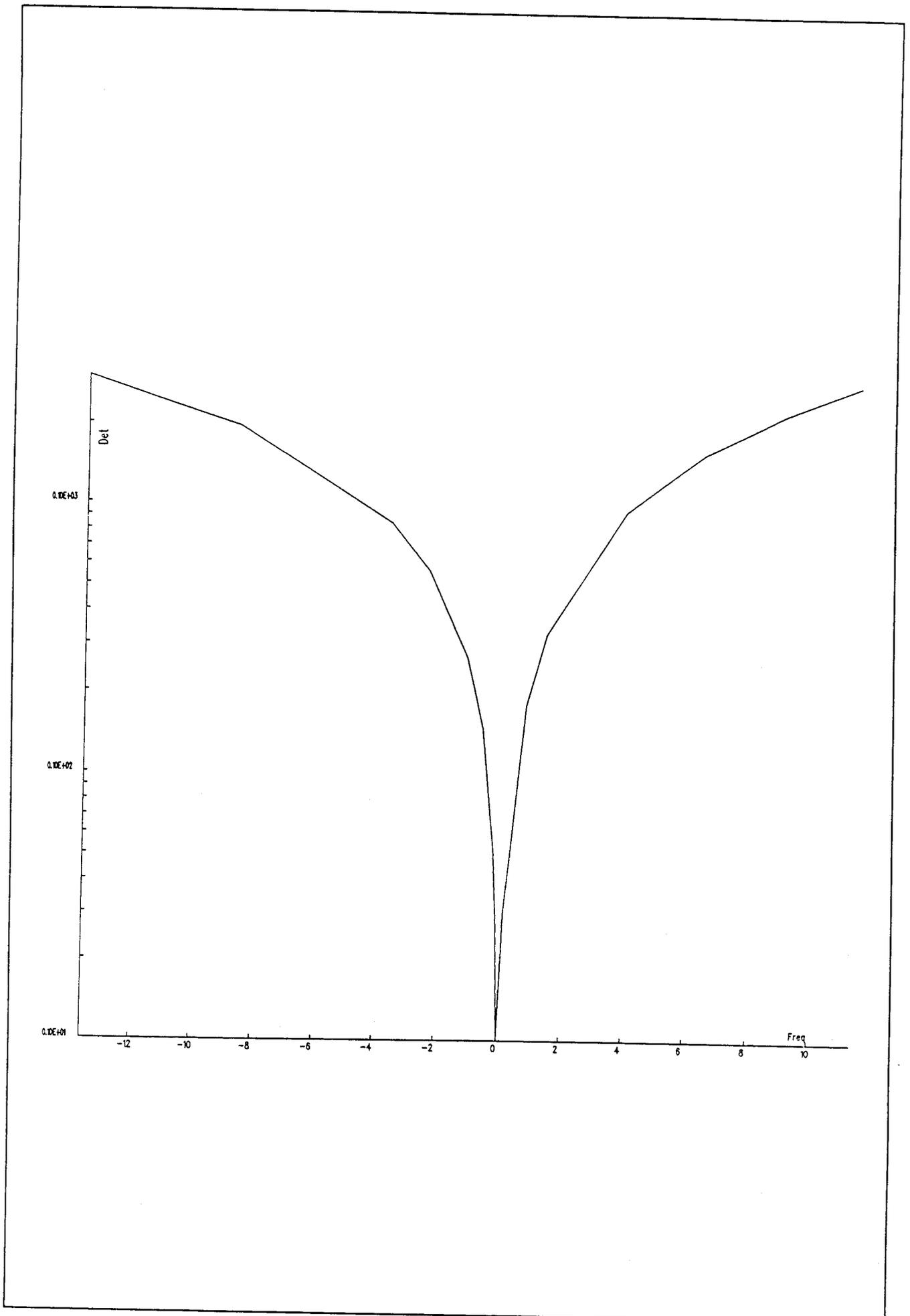


figure III-40 : variation du déterminant au voisinage de la première fréquence irrégulière

Pour ressentir les effets dus à l'indétermination de la solution, la fréquence de travail doit être au voisinage de  $f_r$  avec une marge inférieure à 0,5 Hz. Ayant repéré précisément la valeur de  $f_r$ , le calcul est repris avec surdétermination du système d'équations intégrales par l'équation de champ nul  $m = l = 0$ . Cette seule équation suffit car, d'après le théorème de COURANT et HILBERT [7], aucune surface nodale ne passe par l'origine. Dans l'équation de champ nul, on choisit :

$$P = Q = 7 \quad NG = 8$$

Les parties réelle et imaginaire de la pression dans le plan (XOZ), calculées sans et avec une équation de champ nul, sont comparées aux valeurs de référence sur les figures III-41 et III-42. On constate que la solution indéterminée varie parallèlement à la solution obtenue avec  $NEQCN = 1$ , mais avec un niveau nettement différent, et que cette dernière courbe et la courbe de référence sont quasiment superposables. L'efficacité du couplage équations intégrales-champ nul est donc prouvée. De même, sur la figure III-43, on peut observer la directivité à l'infini quand  $NEQCN = 0$  et  $NEQCN = 1$ . Le tableau III-23 précise les temps de calcul.

	$t_a$	$t_r$
NEQCN = 0	89s	217s
NEQCN = 1	574s	426s

tableau III-23

### III - 3.3 Validation du couplage entre éléments finis et équations intégrales

La validation porte sur une structure sphérique creuse composée de matériau piézoélectrique. L'excitation électrique est obtenue à l'aide de deux électrodes : l'une sur la surface externe et l'autre sur la surface interne. L'excitation ainsi créée est radiale. Le rayon interne est de 0,9 m et le rayon externe de 1 m (cf figure III-44). Trois fréquences différentes sont utilisées :

$$f = 100 \text{ Hz}, 250 \text{ Hz}, 500 \text{ Hz}$$

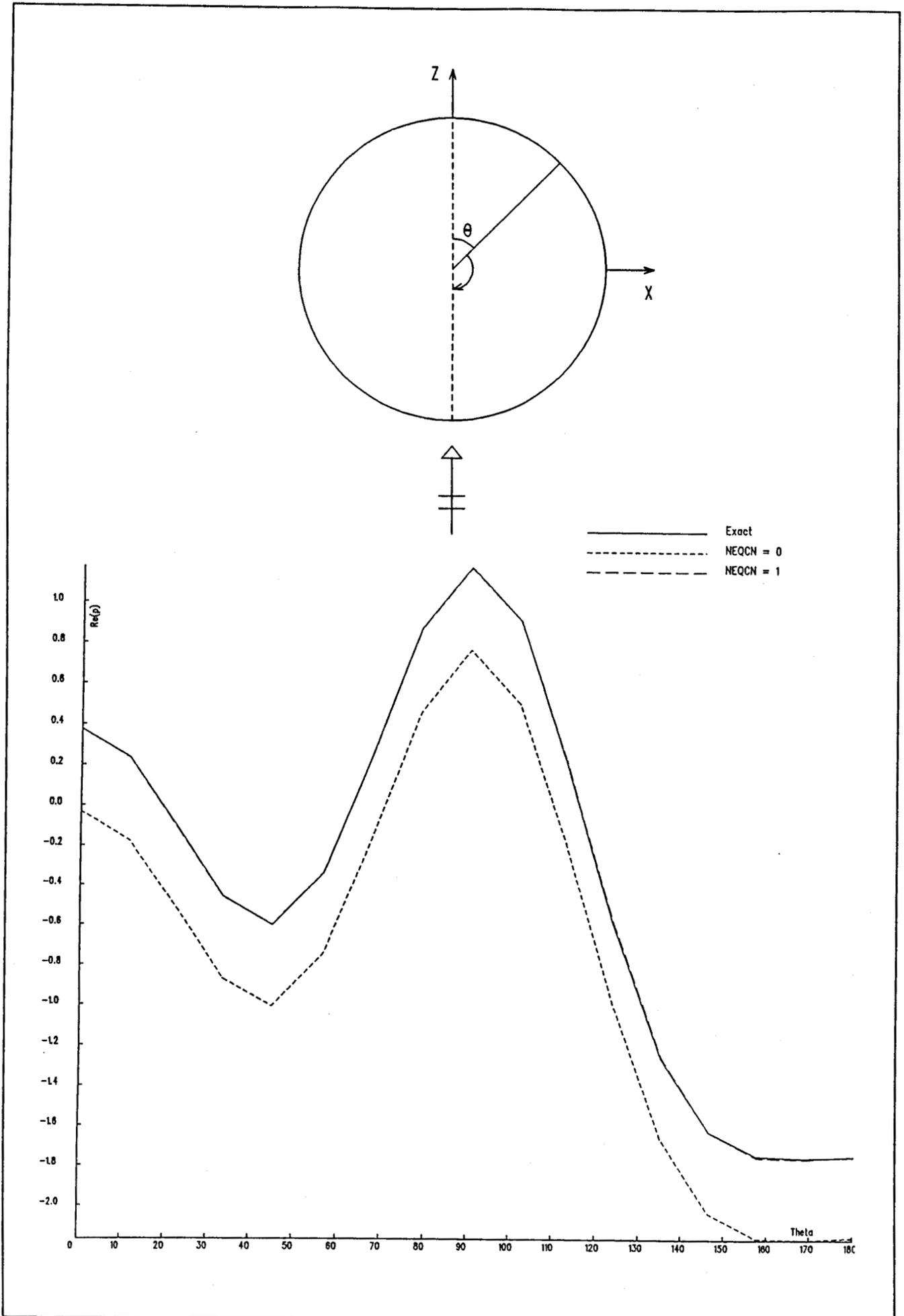


figure III-41 : partie réelle de la pression sur la sphère pour la première fréquence irrégulière

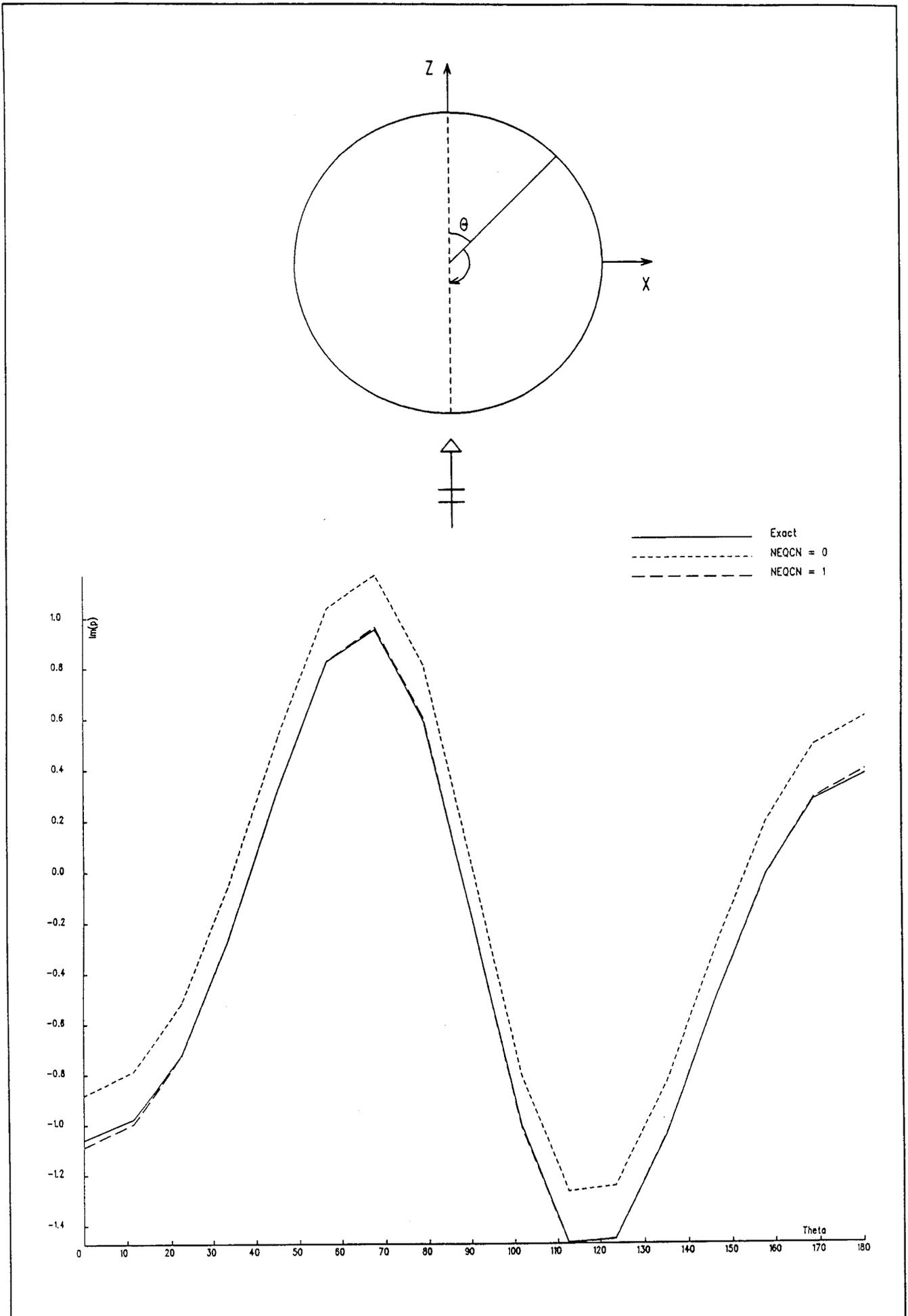


figure III-42 : partie imaginaire de la pression sur la sphère pour la première fréquence irrégulière

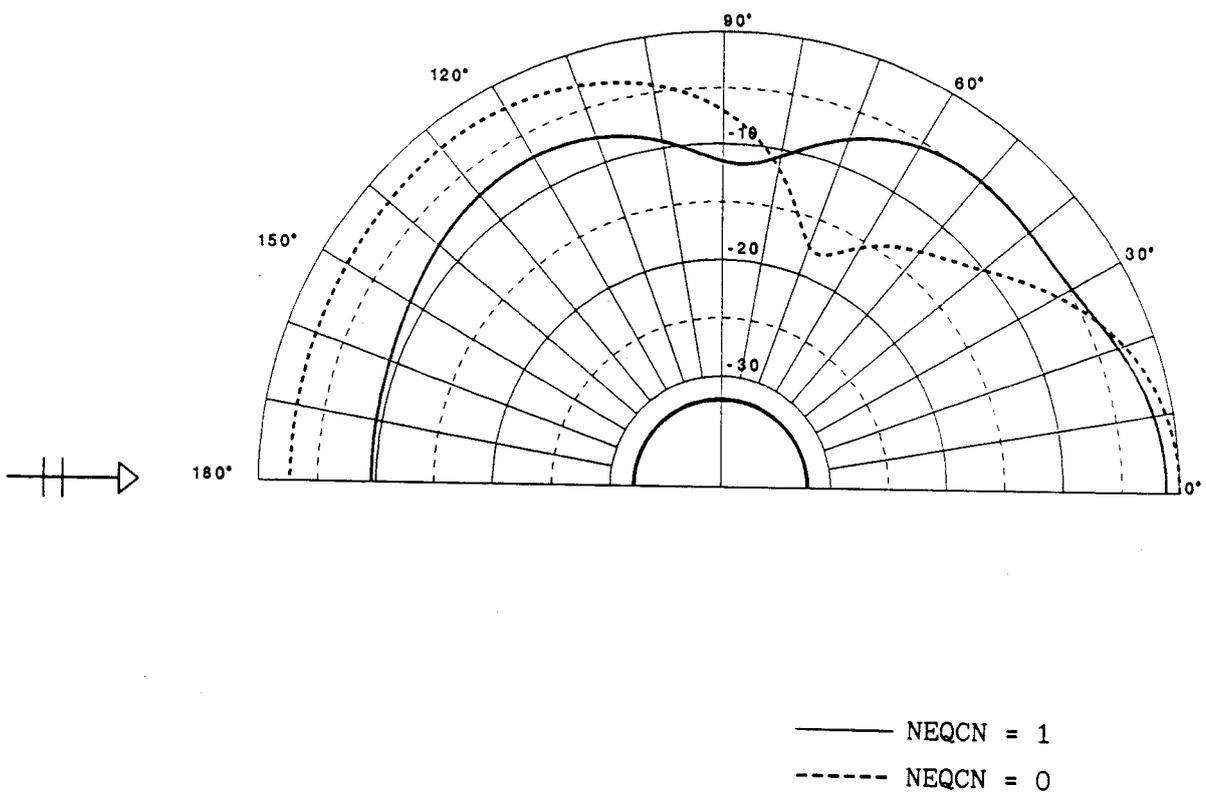
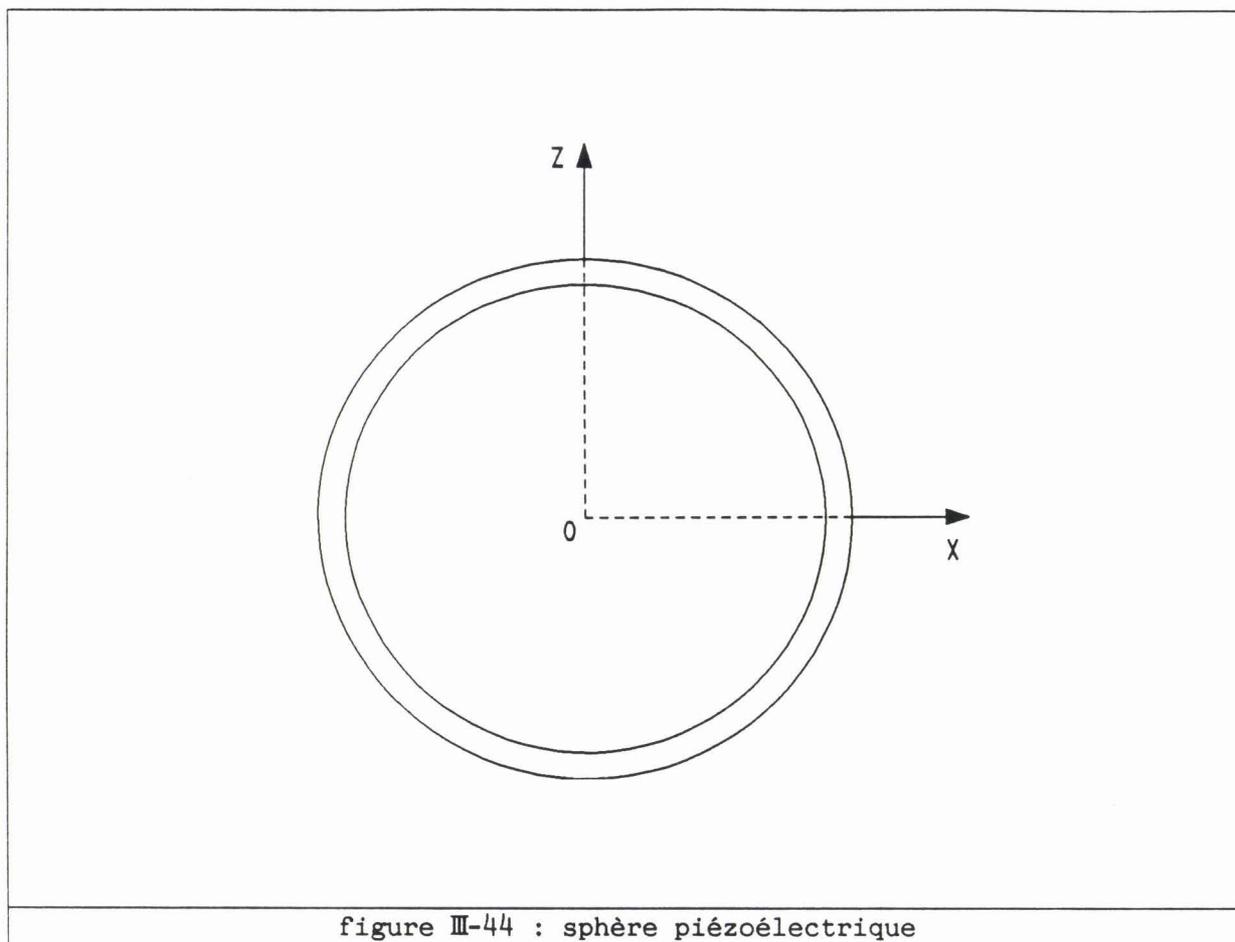


figure III-43 : directivité de la sphère diffractante pour la première fréquence irrégulière



Le code de calcul éléments finis ATILA modélise le problème couplé fluide-structure. La méthode employée est exposée dans le paragraphe I - 5.1 et les paragraphes II - 5.1 et II - 5.2. La résolution par éléments finis de ce problème est abordée de deux façons différentes :

- première approche : maillage tridimensionnel partiel. Les 3 plans de symétrie réduisent la taille du problème d'un facteur 8. Avec un maillage adapté, ce volume est découpé en 3 tranches. Finalement, on ne maille ainsi que  $1/24^{\text{e}}$  de la structure et du fluide.
- seconde approche : maillage à symétrie axiale. La symétrie axiale et le plan de symétrie du problème réduisent le maillage de la structure à une demi-génératrice et le maillage du fluide à un quart de plan.

Pour chacune de ces approches, le volume fluide est limité par une sphère  $\Gamma_{\infty}$  d'un rayon de 5 m. Dans la seconde approche, le développement dipolaire de la pression est utilisé. Du point de vue du couplage éléments finis-équations

intégrales, EQI fournit la matrice impédance  $[\bar{Z}]$  de (II-102), sans tenir compte des symétries, sur toute la surface de la sphère. Le maillage étant constitué de 74 noeuds (24 quadrangles), cette matrice est d'ordre  $74 \times (3 \times 74)$ . En fonction de ces données, un nouveau maillage de la structure est effectué. L'interface de ce maillage coïncidant avec le maillage de surface en 24 quadrangles, la démarche développée dans le paragraphe II - 5.3 est appliquée. A la fréquence de 500 Hz, une comparaison des déplacements calculés sur l'interface par la seconde approche éléments finis et par le couplage est faite. Les valeurs du déplacement normal aux noeuds de la surface interne et externe situés sur les 3 axes sont indiquées sur la figure III-45. Dans le tableau III-24, une comparaison entre les valeurs des admittances électriques, exprimées en  $\Omega^{-1}$  (cf (II-112)), est menée.

	1ère approche		2nde approche		couplage	
	X	Y	X	Y	X	Y
f = 100 Hz	$9,57 \cdot 10^{-8}$	$2,51 \cdot 10^{-4}$	$9,35 \cdot 10^{-8}$	$2,52 \cdot 10^{-4}$	$8,96 \cdot 10^{-8}$	$2,50 \cdot 10^{-4}$
f = 250 Hz	$2,42 \cdot 10^{-6}$	$6,40 \cdot 10^{-4}$	$2,34 \cdot 10^{-6}$	$6,41 \cdot 10^{-4}$	$2,27 \cdot 10^{-6}$	$6,35 \cdot 10^{-4}$
f = 500 Hz	$2,50 \cdot 10^{-5}$	$1,38 \cdot 10^{-3}$	$2,48 \cdot 10^{-5}$	$1,38 \cdot 10^{-3}$	$2,37 \cdot 10^{-5}$	$1,37 \cdot 10^{-3}$

tableau III-24

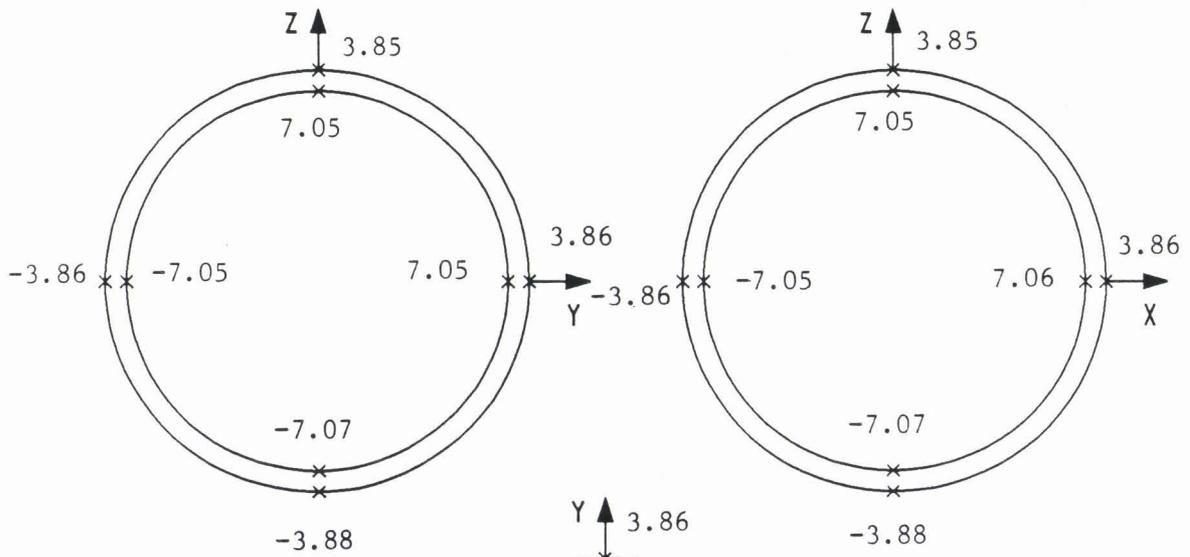
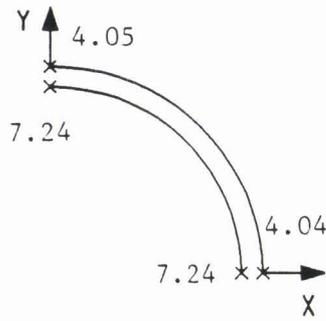
Ce test confirme la bonne concordance des résultats purement éléments finis et des résultats du couplage et laisse entrevoir des applications prometteuses.

### III - 3.4 Conclusion

Les tests des paragraphes III - 3.1 et III - 3.2 prouvent que le code EQI permet de modéliser tout problème tridimensionnel de rayonnement ou de diffraction acoustique dans le domaine des basses et moyennes fréquences. Il en ressort que la méthode de base est la représentation de Helmholtz extérieure et que, si nécessaire, on surdétermine par des équations de champ nul. Dans sa forme actuelle, EQI ne permet pas d'aborder des fréquences plus élevées pour une raison double : la limitation des capacités informatiques et du temps de calcul. Plusieurs remèdes à ces limitations sont prévus :

- la prise en compte des éventuelles symétries du problème,

seconde approche



couplage

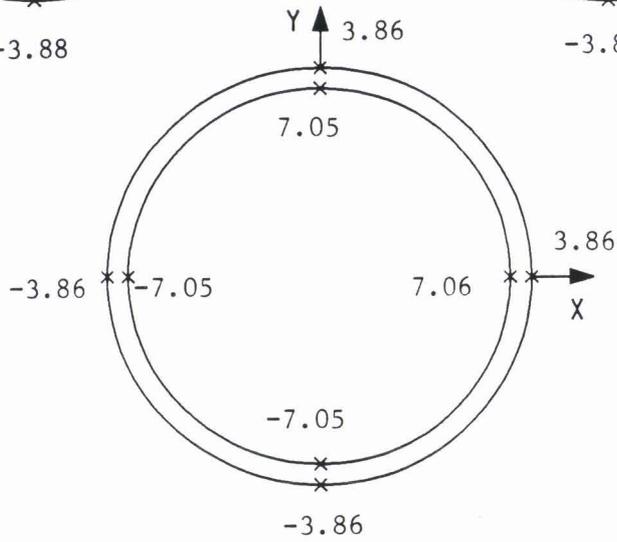


figure III-45 : comparaison des déplacements calculés en  $10^{-10}m$

- le recours à un algorithme de résolution par blocs pour les très gros maillages,
- une étude de la convergence de la série (II-41) et des intégrales de (II-42) pour, d'une part, estimer de façon plus rationnelle les paramètres P et Q et, d'autre part, faire varier le nombre de points d'intégration des intégrales de champ nul en fonction de P, Q, m et l.

Une forte augmentation des fréquences de travail doit s'accompagner d'une technique de renormalisation des équations de champ nul, du type de celle développée dans le code HELNUL. La consultation des temps d'assemblage et de résolution montrent qu'ils augmentent considérablement quand on fait appel à des équations supplémentaires de champ nul. On pourrait envisager de ne plus décomposer la pression dans les équations de champ nul suivant (II-41) mais de l'approcher classiquement par des fonctions de forme quadratiques suivant la relation (II-1.a). Cette modification devrait être prise en compte uniquement dans le cas du couplage avec les équations intégrales, et non pas dans le cas de l'utilisation de la méthode de champ nul seule sous peine de non convergence de la pression. Dans la perspective où cette modification serait efficace, la manipulation des équations supplémentaires de champ nul serait simplifiée et mieux maîtrisée, d'où un gain probable sur le temps d'assemblage. Le nouveau critère de sélection des équations de champ nul n'a pas pu être mis en valeur par rapport au critère de Jones, car les fréquences irrégulières sont peu nombreuses dans la gamme des fréquences étudiées. Néanmoins, le cas échéant, l'indétermination de la solution a toujours été levée avec succès et devrait continuer à l'être pour des fréquences irrégulières plus élevées.

## CHAPITRE IV

### APPLICATIONS

Dans ce dernier chapitre, les codes décrits précédemment sont appliqués à la résolution de problèmes acoustiques concrets, à symétrie axiale ou complètement tridimensionnels. Les résultats sont commentés et, quand il y a lieu, sont comparés soit à un calcul analytique, soit à un calcul par éléments finis, soit à des mesures. Les exemples traités correspondent à des problèmes rencontrés au laboratoire d'acoustique de l'ISEN lors de la conception de transducteurs d'émission utilisés en SONAR. Le premier est l'étude maintenant classique du rayonnement d'un transducteur de type Torpiz, assimilable au problème de rayonnement d'un piston bafflé dur. Le second est l'étude de l'effet d'un baffle cylindrique sur la directivité d'un transducteur annulaire haute fréquence. Le troisième est la validation du modèle éléments finis d'un transducteur flexionnel de classe I. Le quatrième est l'analyse détaillée du rayonnement d'un transducteur basse fréquence unidirectionnel, problème complètement tridimensionnel dont la solution a contribué au développement d'un nouveau type de transducteur. Enfin, le dernier porte sur la modélisation d'un hydrophone cardioïde. La diversité de ces exemples laisse entrevoir la possibilité de modéliser le rayonnement ou la diffraction par tout corps, même de forme complexe, ceci dans une large gamme de fréquences.

#### IV - 1 RAYONNEMENT D'UN PISTON CIRCULAIRE BAFFLE DUR

De nombreux transducteurs SONAR de type Tonpilz (figure IV-1), animés par le mouvement en dilatation-compression d'une colonne de céramiques piézoélectriques, ont le même comportement acoustique qu'un piston circulaire monté dans un baffle infini dur. La modélisation du rayonnement de telles structures peut se faire par la formulation intégrale (I-70). Le problème, schématisé par la figure I-2, admet alors une symétrie axiale. En plus de la simplicité de sa mise en oeuvre, cette équation intégrale ne connaît théoriquement aucune limitation en fréquences puisqu'aucune fréquence irrégulière ne vient troubler sa résolution. La validation des calculs a été réalisée par comparaison avec des solutions analytiques exactes, qui existent quand le piston est soumis à une excitation uniforme ou parabolique [5,6,87]. Dans la référence [20], J.N. DECARPIGNY a modélisé le même problème par la méthode des éléments finis pour ces deux types d'excitation et a montré qu'à maillage identique, des résultats plus précis sont obtenus dans le cas de l'excitation parabolique. Compte tenu de cette constatation, on n'a donc retenu ici que le cas le plus défavorable, correspondant à une distribution uniforme des vitesses sur le piston. Cet exemple doit être relié à de nombreuses applications possibles, comprenant le calcul du champ de pression rayonné pour un champ de déplacement complexe de la face avant du pavillon, dans le cas du papillonnage (flexion), le calcul du champ de pression rayonné par un pavillon n'ayant pas la symétrie axiale [20], et enfin le calcul des impédances de rayonnement propres et mutuelles de pavillons assemblés en antennes [88].

Dans l'exemple retenu, l'amplitude de la vitesse vibratoire du piston étant arbitrairement fixée à l'unité, on dispose de plusieurs relations analytiques [6]. Ainsi, les parties réelle et imaginaire de la pression,  $p_1$  et  $p_2$ , en tout point de l'axe de révolution (OZ), sont :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= -\rho c \left( \cos \left( k \sqrt{z^2 + R^2} \right) - \cos(kz) \right) \\
 p_2 &= -\rho c \left( \sin \left( k \sqrt{z^2 + R^2} \right) - \sin(kz) \right)
 \end{aligned}
 \tag{IV-1}$$

Les parties réelle et imaginaire de la pression,  $p_1$  et  $p_2$ , en tout point du

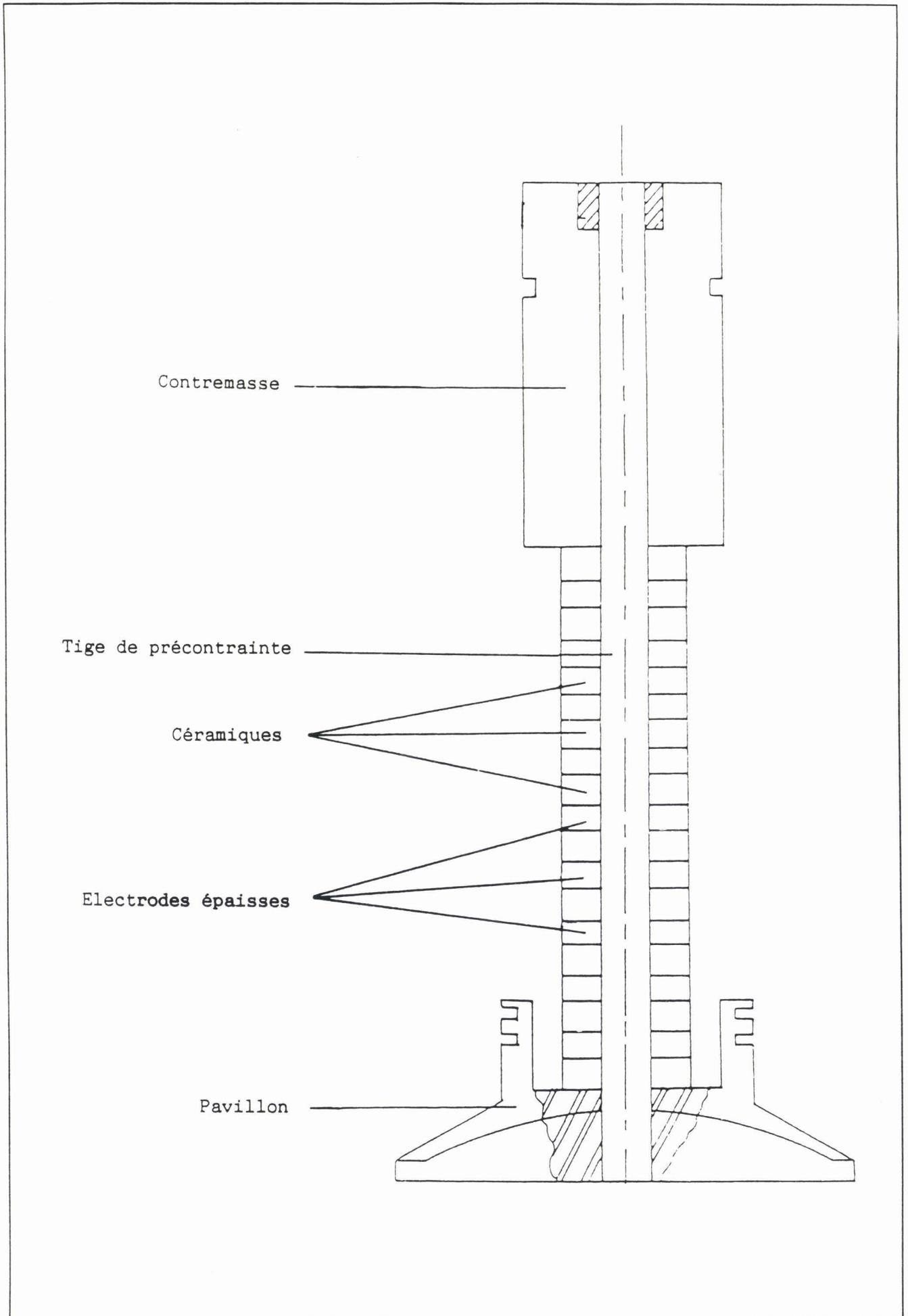


figure IV-1 : transducteur de type Tonpilz

bord du piston, sont :

$$p_1 = \frac{\rho c}{2} (1 - J_0(2kR))$$

$$p_2 = - \frac{\rho c}{2} \mathcal{H}_0(2kR)$$
(IV-2)

où  $J_n$  et  $\mathcal{H}_n$  sont les fonctions de Bessel et de Struve de degré  $n$  [85]. Enfin, le facteur de directivité  $f_0(\theta)$ , défini par (II-38), est :

$$f_0(\theta) = - \frac{ik\rho c R^2}{2} \frac{2J_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}$$
(IV-3)

Le pavillon choisi ayant un rayon  $R = 0.075$  m, le calcul a été réalisé pour 4 fréquences égales à 5000 Hz, 10000 Hz, 15000 Hz et 20000 Hz. Le maillage suivant le rayon est le même pour chacune de ces fréquences. Il est composé de 4 segments identiques à 3 noeuds et vérifie le critère en  $\lambda/4$  jusqu'à 20 kHz. D'après les tests du paragraphe III - 2.1.1, le nombre de points d'intégration sur chaque élément de surface est fixé à 20. Des calculs, on extrait les informations suivantes :

- . la pression aux 9 noeuds du maillage,
- . la pression sur l'axe (OZ), de cm en cm, entre 0 et 20 cm,
- . la directivité pour  $\theta$  variant entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , avec un pas de  $1^\circ$ .

Pour chaque fréquence, le temps total consommé est d'environ 17 s. La lecture du tableau IV-1 permet la comparaison des pressions analytiques et calculées au bord du piston.  $p_{1a}$  est la partie réelle de la pression analytique au bord du piston et  $p_{1c}$  la partie réelle de la pression calculée, exprimées en pascals. Une définition similaire est adoptée pour  $p_{2a}$  et  $p_{2c}$ .

fréquences	$p_{1a}$	$p_{1c}$	$p_{2a}$	$p_{2c}$
5000 Hz	$9,761.10^5$	$9,760.10^5$	$-3,792.10^5$	$-3,789.10^5$
10000 Hz	$5,744.10^5$	$5,743.10^5$	$8,963.10^4$	$9,018.10^4$
15000 Hz	$8,880.10^5$	$8,880.10^5$	$-1,788.10^5$	$-1,780.10^5$
20000 Hz	$6,184.10^5$	$6,183.10^5$	$7,171.10^4$	$7,279.10^4$

tableau IV-1

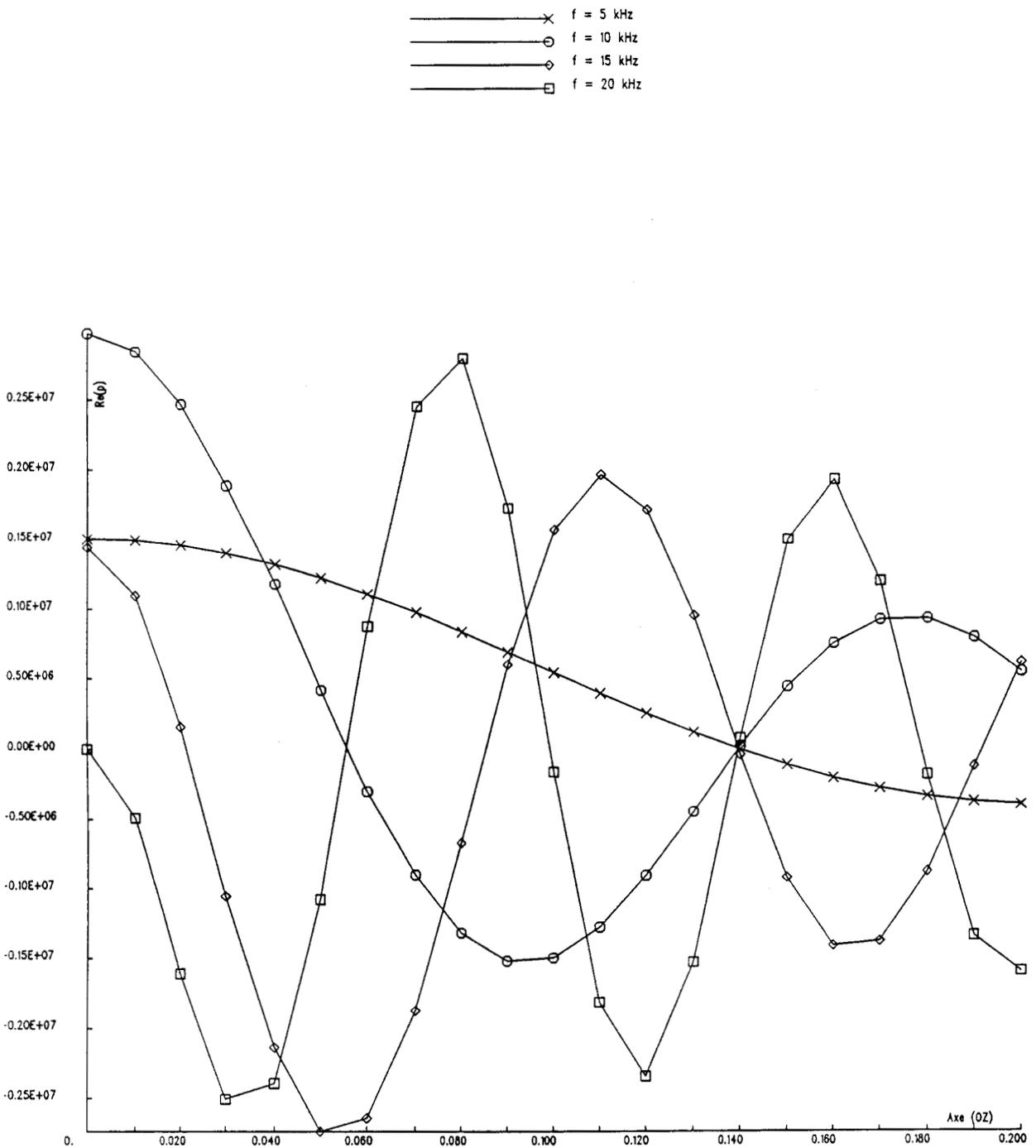


figure IV-2 : partie réelle de la pression sur l'axe (OZ)

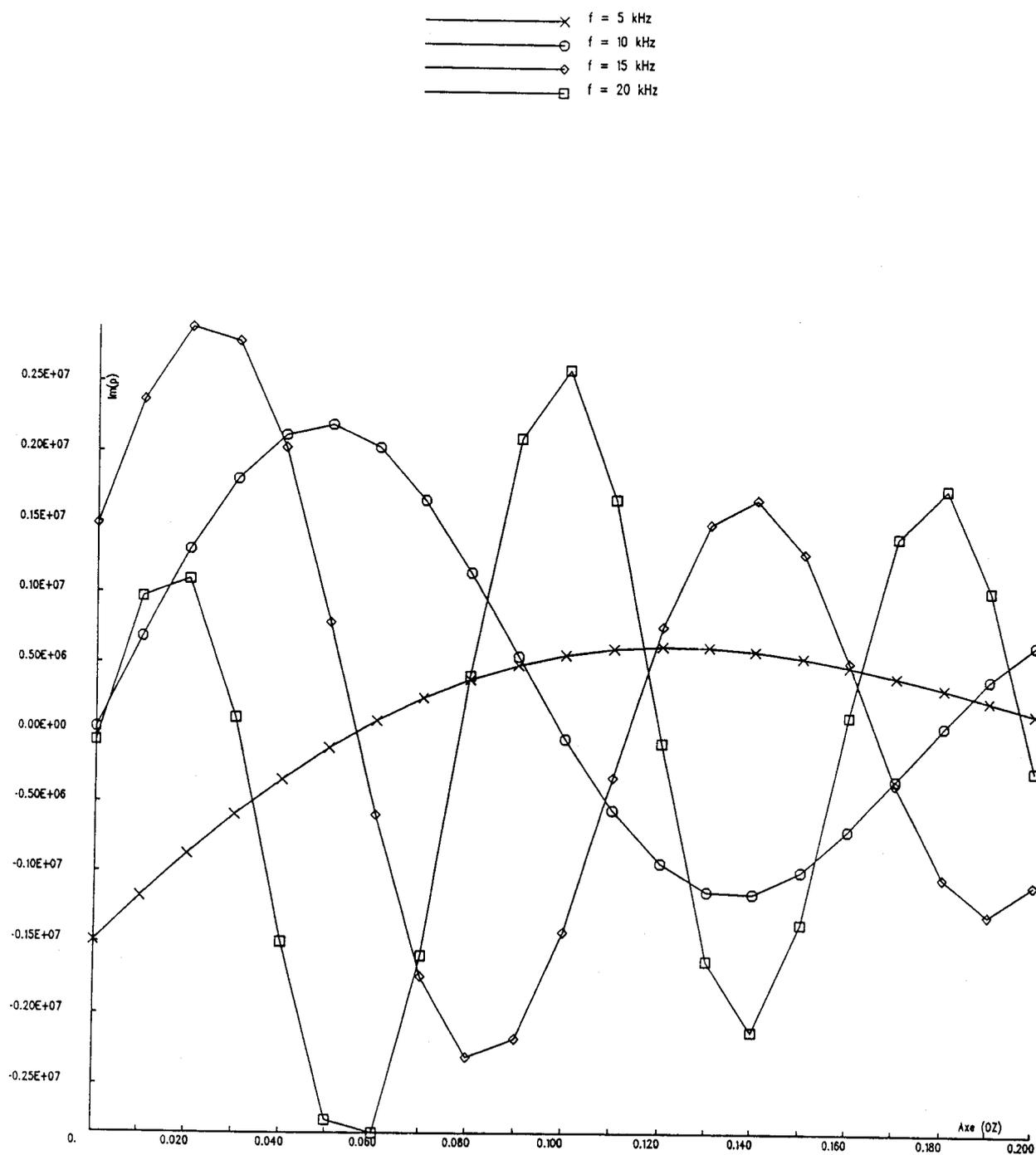


figure IV-3 : partie imaginaire de la pression sur l'axe (OZ)

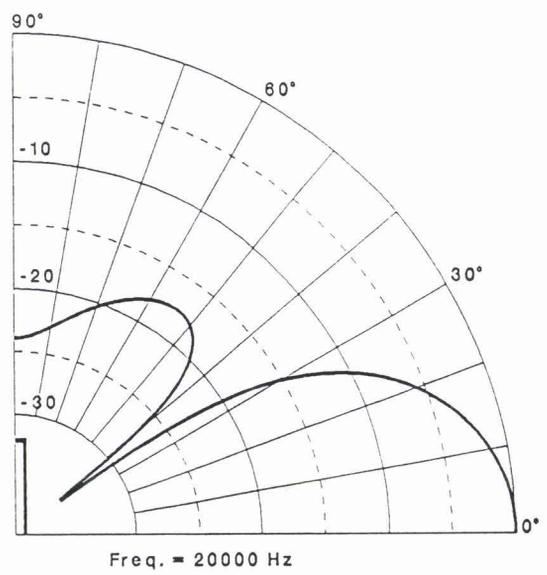
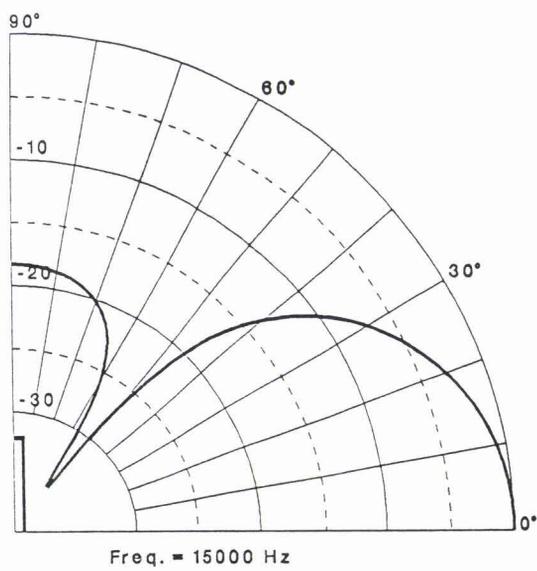
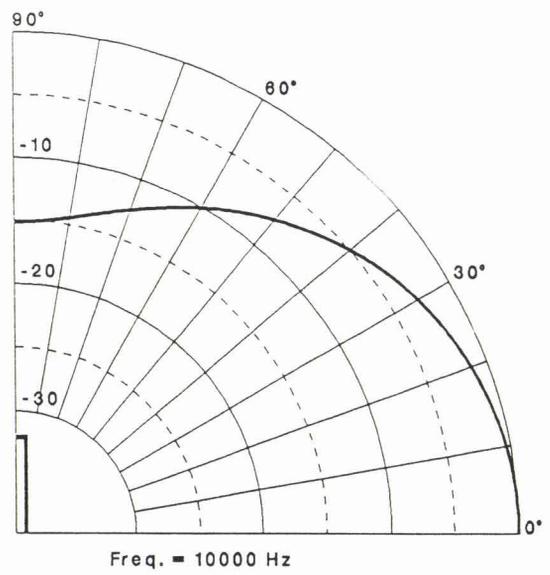
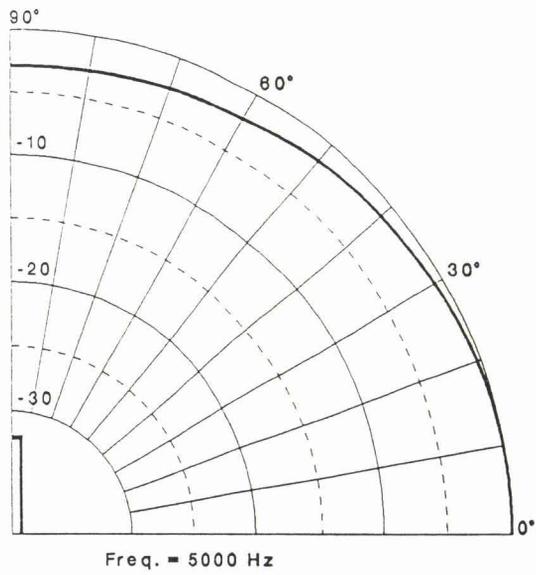


figure IV-4 : directivités du piston

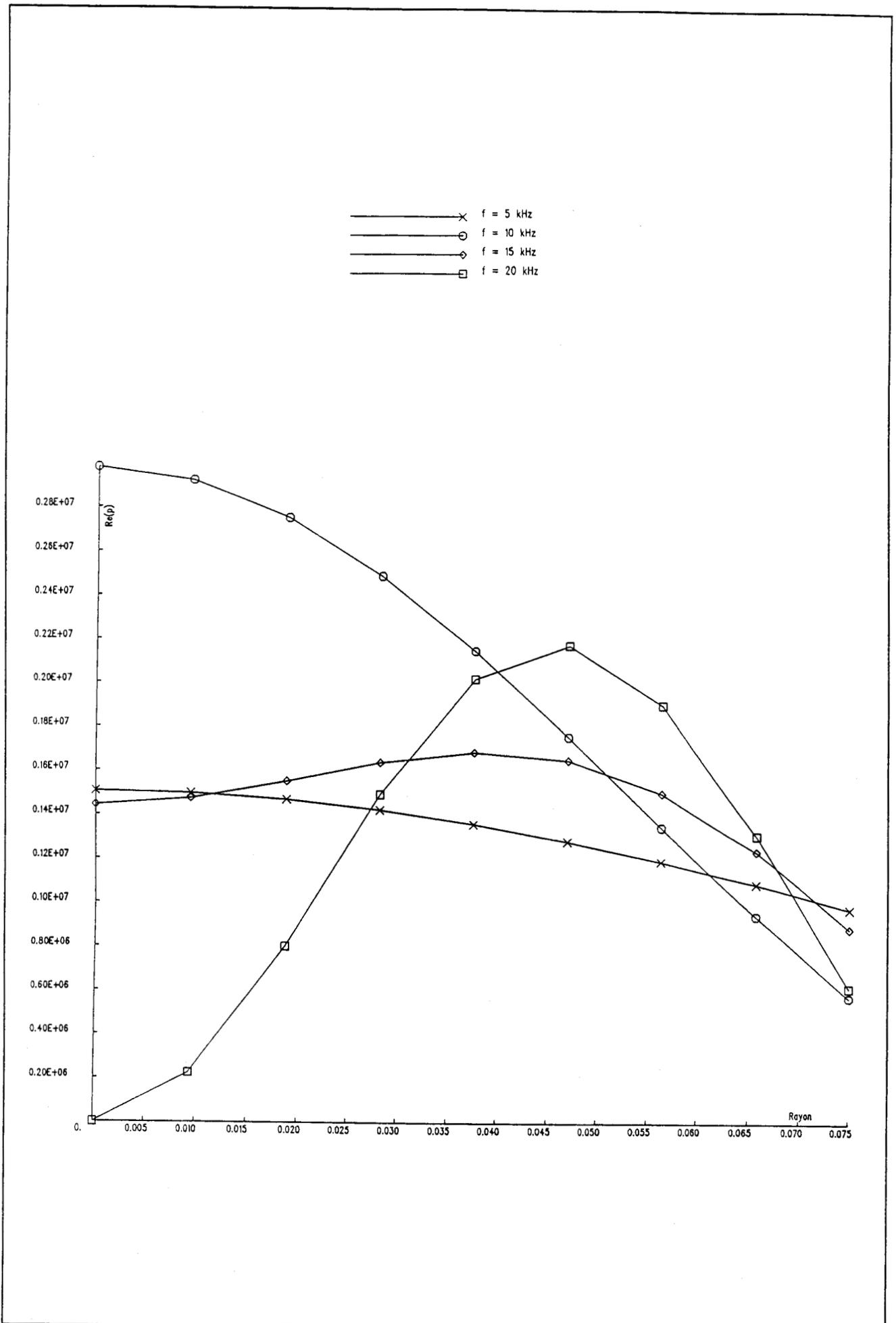


figure IV-5 : partie réelle de la pression sur le piston

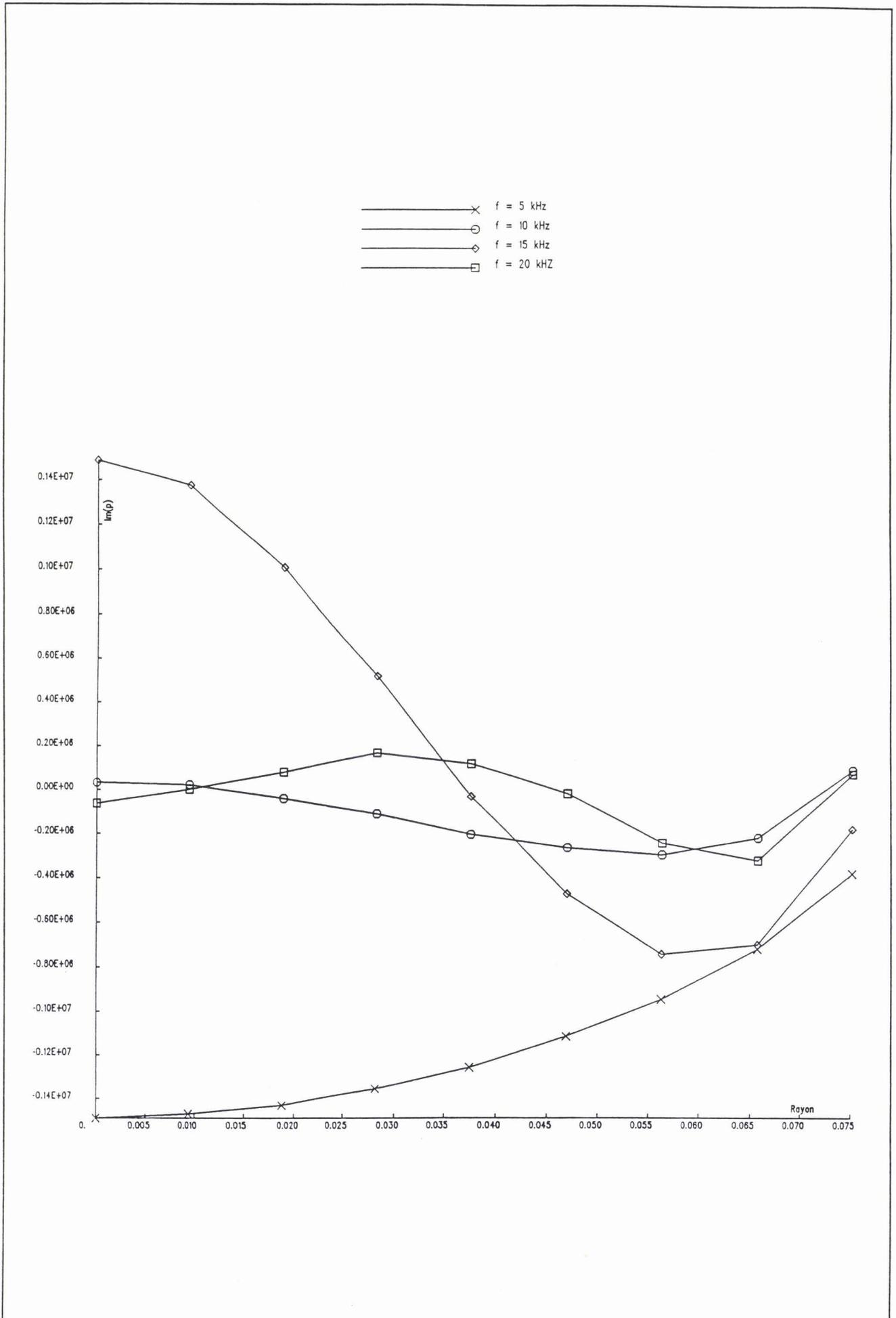


figure IV-6 : partie imaginaire de la pression sur le piston

L'erreur sur les résultats calculés est quasiment négligeable. Ce tableau atteste de l'excellente précision des calculs pour chacune de ces fréquences. Sur les figures IV-2 et IV-3, sont représentées les variations de la partie réelle et de la partie imaginaire de la pression sur l'axe (OZ), aux 4 fréquences de travail. La figure IV-4 regroupe, elle, les diagrammes de directivité. La superposition parfaite des courbes analytiques et calculées nous a autorisé à supprimer le tracé des courbes analytiques. A également été représentée la variation de la pression sur le rayon du piston (figure IV-5 et IV-6). L'ensemble de ces résultats atteste que, pour ce type de problème, la formulation intégrale employée ici permet une excellente description du champ de pression en tout point du fluide et pour une consommation minime de temps de calcul.

## IV - 2 RAYONNEMENT HAUTE FREQUENCE D'UN TRANSDUCTEUR ANNULAIRE MONTE DANS UN BAFFLE CYLINDRIQUE RIGIDE

### IV - 2.1 Description du problème et de sa modélisation

On considère dans cette section un transducteur annulaire dont la face externe, en contact avec le fluide, est un cylindre de rayon A et de hauteur H tels que [39,40] :

$$A = 0,2665 \text{ m} \quad H = 0,073 \text{ m}$$

Ce transducteur vibre radialement et uniformément. Il est monté dans un baffle cylindrique rigide (vitesse vibratoire nulle en tout point), la demi-hauteur totale étant égale à B. L'étude porte sur le comportement acoustique de cette antenne en fonction de la hauteur du baffle. Le problème est à symétrie axiale, avec un plan de symétrie (XOY). Trois cas différents sont analysés (figure IV-7) :

$$B = 0,6295 \text{ m}, 0,333 \text{ m}, 0,0365 \text{ m}$$

Dans le dernier cas, le baffle est en fait réduit aux seuls couvercles. Numériquement, l'amplitude de vitesse vibratoire est prise égale à une unité. La fréquence d'analyse est de 30000 Hz. Avec une vitesse de propagation du son dans le fluide égale à 1500 m/s, les produits kA et kB de l'antenne montée avec le grand baffle sont alors de l'ordre de 33,5 et 79,1. De plus, la

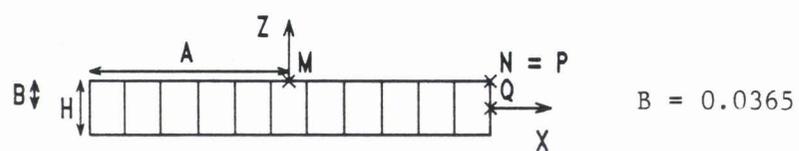
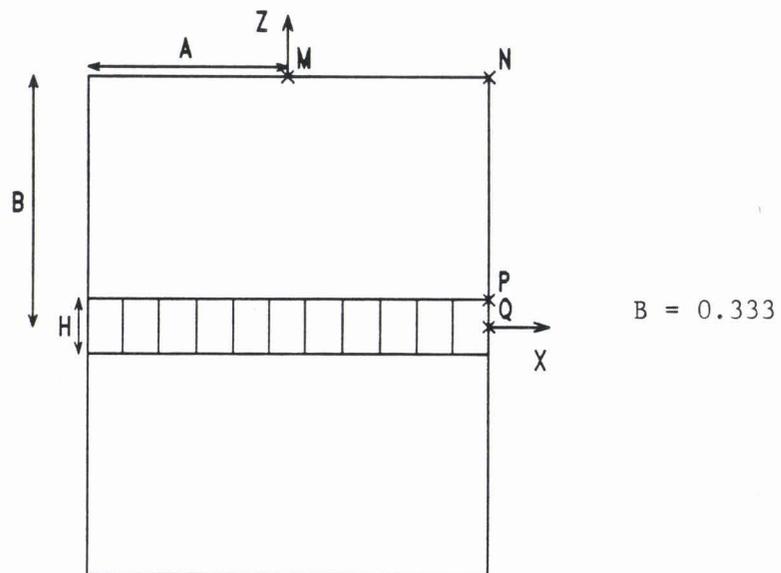
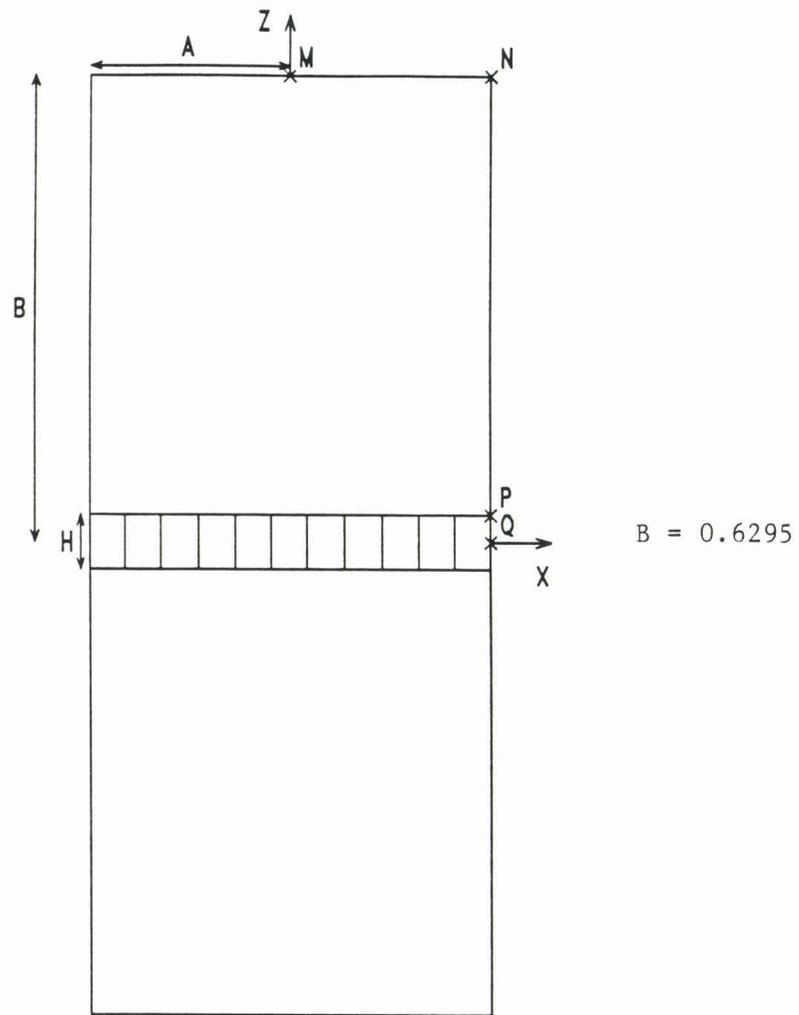


figure IV-7 : antenne cylindrique

fréquence de travail se situe entre la 202ème et la 203ème fréquence irrégulière. Suivant la valeur de B, plusieurs maillages de la génératrice sont prévus, où les éléments sont numérotés par ordre croissant de l'axe (OZ) vers l'axe (OX) :

- . B = 0,6295 m : le segment MN est découpé en 22 éléments de longueur  $\lambda/4$ , le segment NP est découpé en 49 éléments de longueur  $\lambda/4$ , sauf les 2 derniers de longueur  $\lambda/8$ , le segment PQ est découpé en 6 éléments de longueur  $\lambda/8$ .
- . B = 0,333 m : le segment MN est découpé en 22 éléments de longueur  $\lambda/4$ , le segment NP est découpé en 25 éléments de longueur  $\lambda/4$ , sauf les 2 derniers de longueur  $\lambda/8$ , le segment PQ est découpé en 6 éléments de longueur  $\lambda/8$ .
- . B = 0,0365 m : le segment MN est découpé en 23 éléments de longueur  $\lambda/4$ , sauf les 2 derniers de longueur  $\lambda/8$ , le segment PQ est découpé en 6 éléments de longueur  $\lambda/8$ .

Le raffinement du maillage à la frontière entre le bord du baffle et l'émetteur permet une meilleure description de la pression sur cette zone de transition. Chacun de ces trois problèmes est modélisé par la représentation de Helmholtz extérieure surdéterminée par des équations de champ nul dans les conditions suivantes :

- . les intégrales de Helmholtz et de directivité, apparaissant respectivement dans (II-14) et (II-40), sont calculées avec 40 points d'intégration par élément  $\Gamma_j$ ,
- . les équations de champ nul supplémentaires sont définies par (II-51) avec  $M = 39$  (20 équations de champ nul non triviales),
- . la décomposition en série de Fourier de la pression, selon la forme (II-48), est tronquée à  $P = 77$ ,
- . les intégrales de champ nul (II-50) sont calculées avec 78 points de Gauss par élément  $\Gamma_j$ .

Outre la méthode générale de résolution exposée précédemment, une approche très simplifiée est également testée. Elle consiste à admettre qu'en tout point de l'antenne, la pression p et la vitesse normale v sont reliées par :

$$p = \rho c v \quad (\text{IV-4})$$

ce qui constitue une approximation haute fréquence classique. Le calcul du facteur de directivité est alors conduit directement, en injectant (IV-4) dans la relation (II-40). Dans tous les cas de figure, on veut identifier :

- . le champ de pression acoustique en tout point de l'antenne,
- . le diagramme de directivité en champ lointain, de degré en degré.

#### IV - 2.2 Résultats et conclusions

Pour valider la méthode générale par rapport à une solution analytique, un calcul avec une distribution de vitesse (III-2) issue d'une source ponctuelle centrée a été entrepris dans le cas présumé le plus défavorable, celui de la plus grande structure. La représentation de Helmholtz extérieure est d'abord appliquée seule (NEQCN = 0) puis couplée avec les 20 premières équations de champ nul (NEQCN = 20). Dans le tableau IV-2, les erreurs  $\epsilon_{R,max}$  et  $\epsilon_{I,max}$  (cf (III-5)), l'erreur quadratique moyenne EQM (cf (III-6)) et le temps de calcul total  $t$  sont indiqués.

NEQCN	$\epsilon_{R,max}$	$\epsilon_{I,max}$	EQM	$t$
0	17,9%	12,0%	9,5%	10000s
20	7,8%	9,5%	6,2%	11200s

tableau IV-2

La variation des parties réelle et imaginaire de la pression sur la surface en fonction de la position des noeuds est présentée sur les figures IV-8 et IV-9. On constate que, malgré l'encadrement très serré de la fréquence de travail par deux fréquences irrégulières, la méthode des équations intégrales donne des résultats acceptables, qui sont encore améliorés avec une surdétermination par des équations de champ nul. Dans ce dernier cas, l'erreur maximale sur la directivité est de 1,3 db. Sur la foi de ces résultats, l'application au problème décrit au paragraphe IV - 2.1 a alors été entreprise.

Pour chacune des trois structures, les résultats de la méthode générale et de l'approximation (IV-4) sont présentés sous forme de courbes. Sur les figures IV-10 et IV-11, IV-12 et IV-13, IV-14 et IV-15, sont respectivement tracées les variations des parties réelle et imaginaire de la

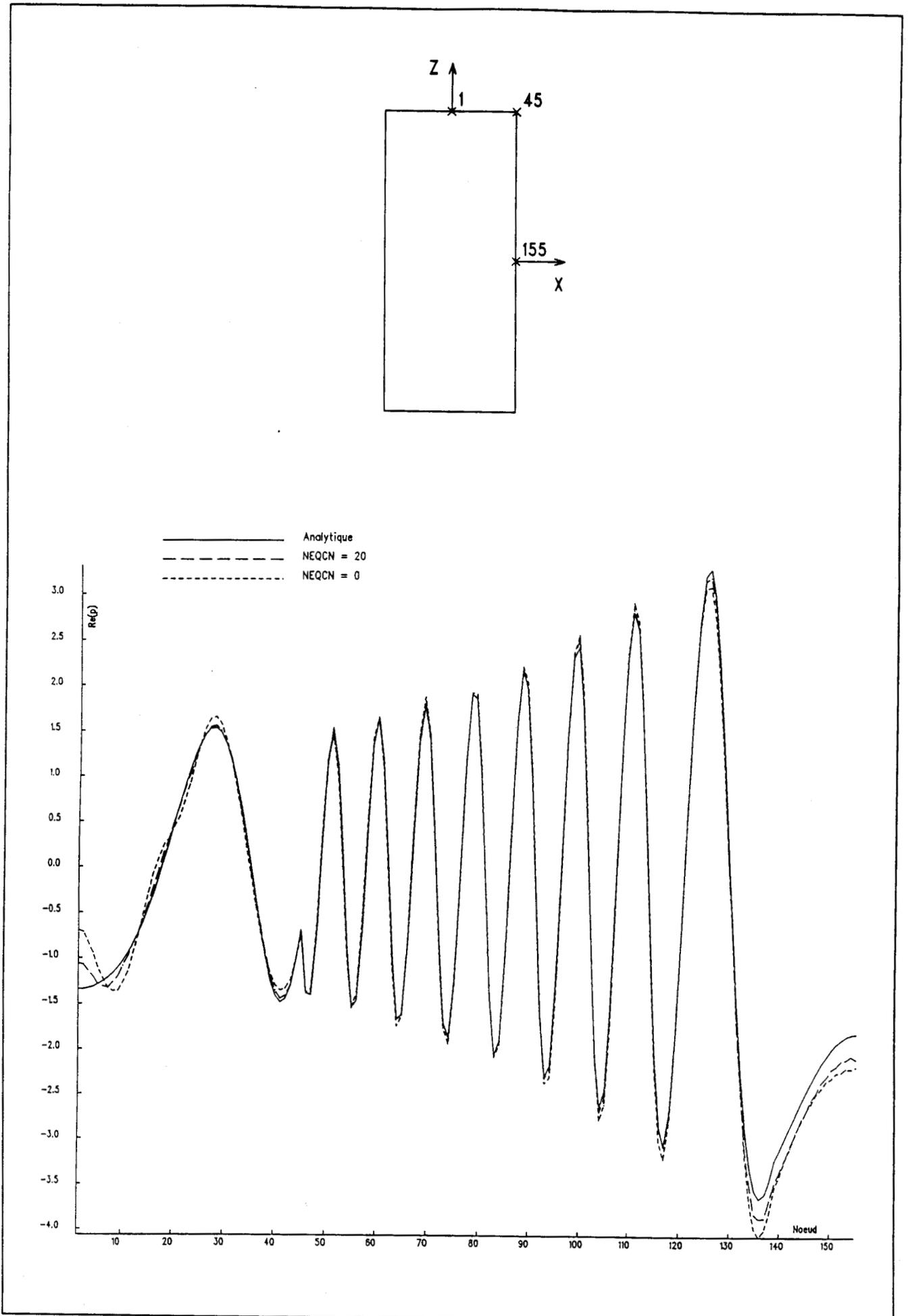


figure IV-8 : partie réelle de la pression sur le grand cylindre

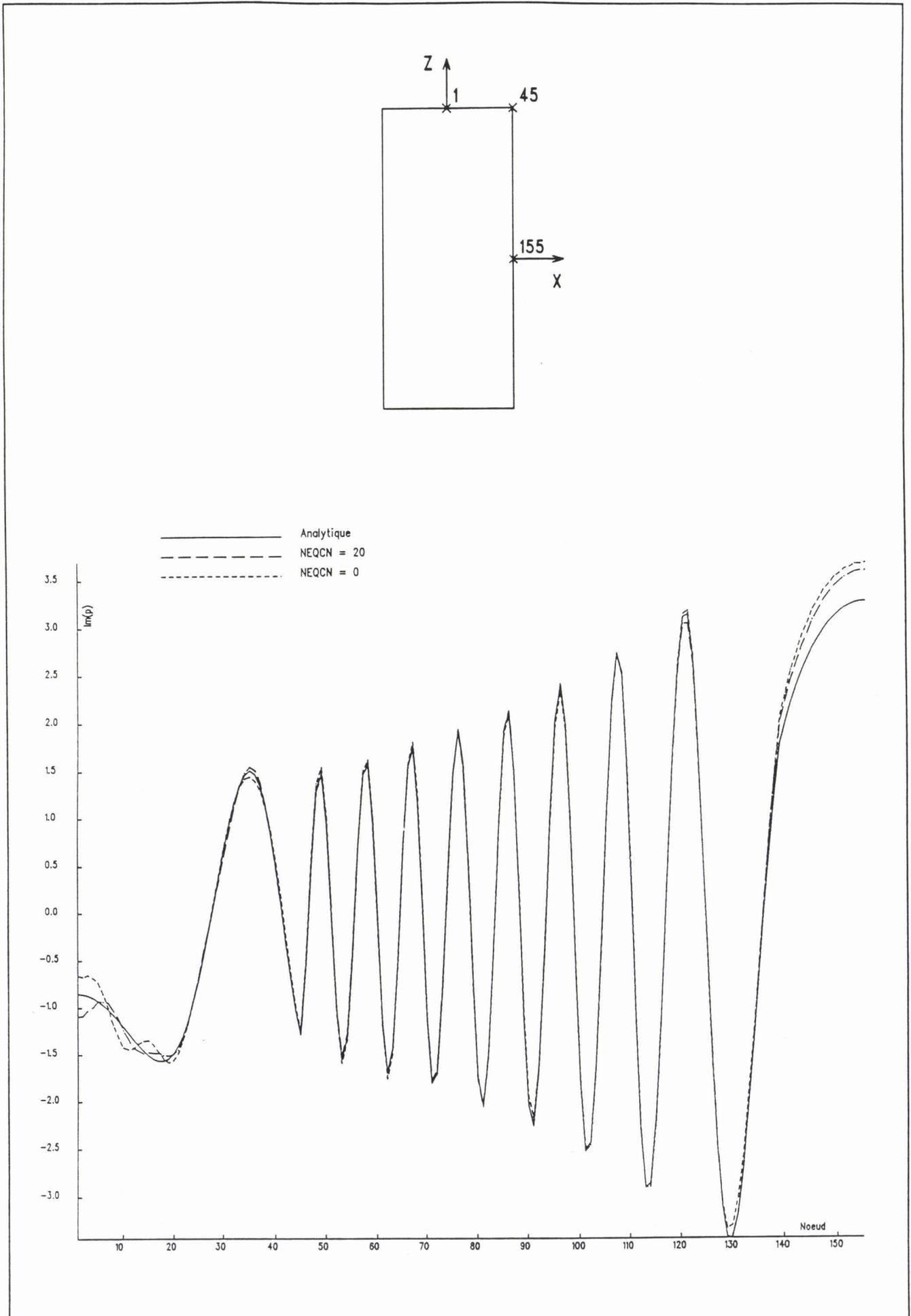


figure IV-9 : partie imaginaire de la pression sur le grand cylindre

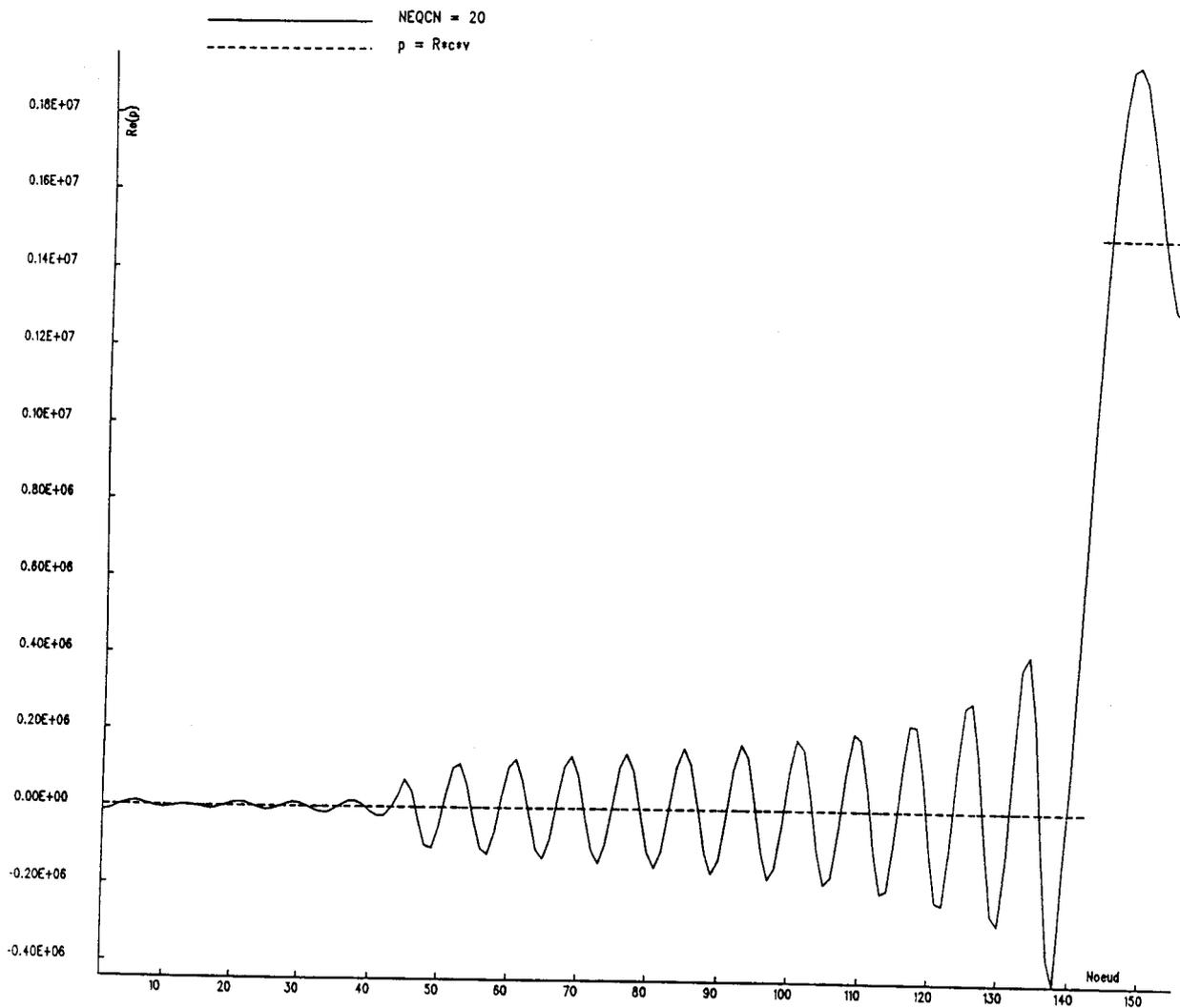
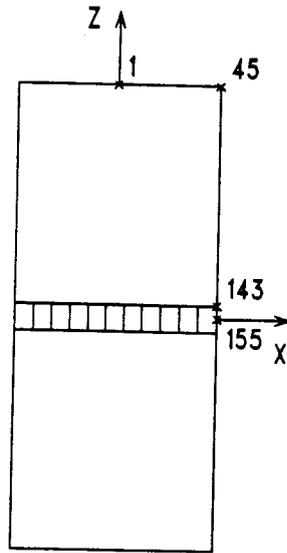


figure IV-10 : partie réelle de la pression sur l'antenne quand  $B = 0,6295$

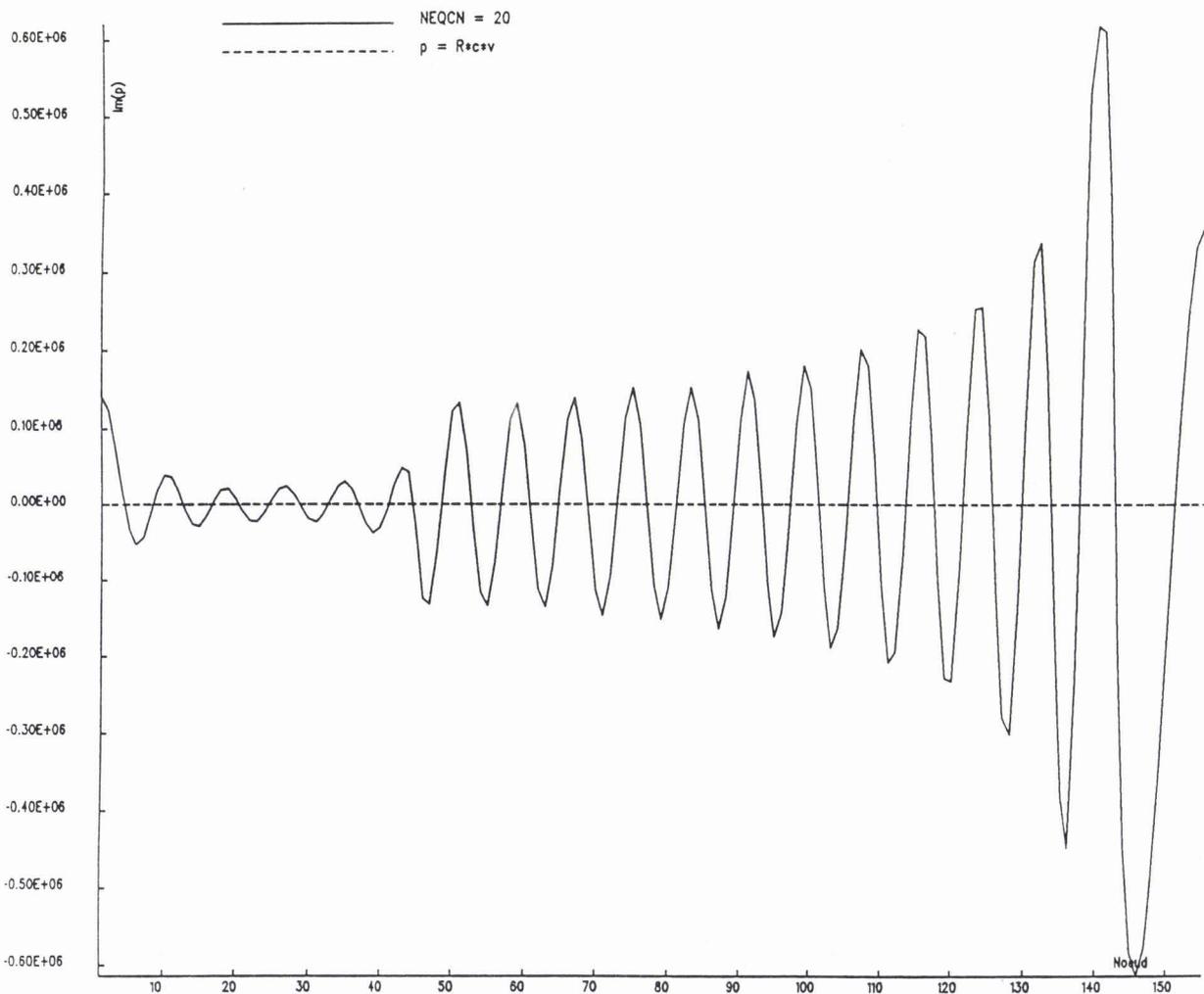
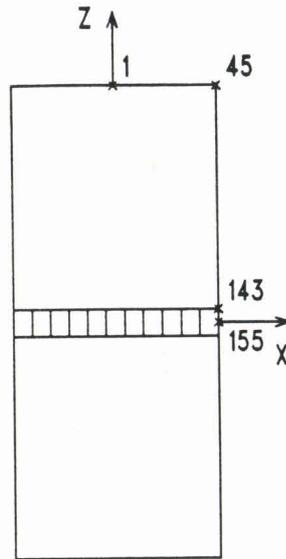


figure IV-11 : partie imaginaire de la pression sur l'antenne quand  $B = 0,6295$

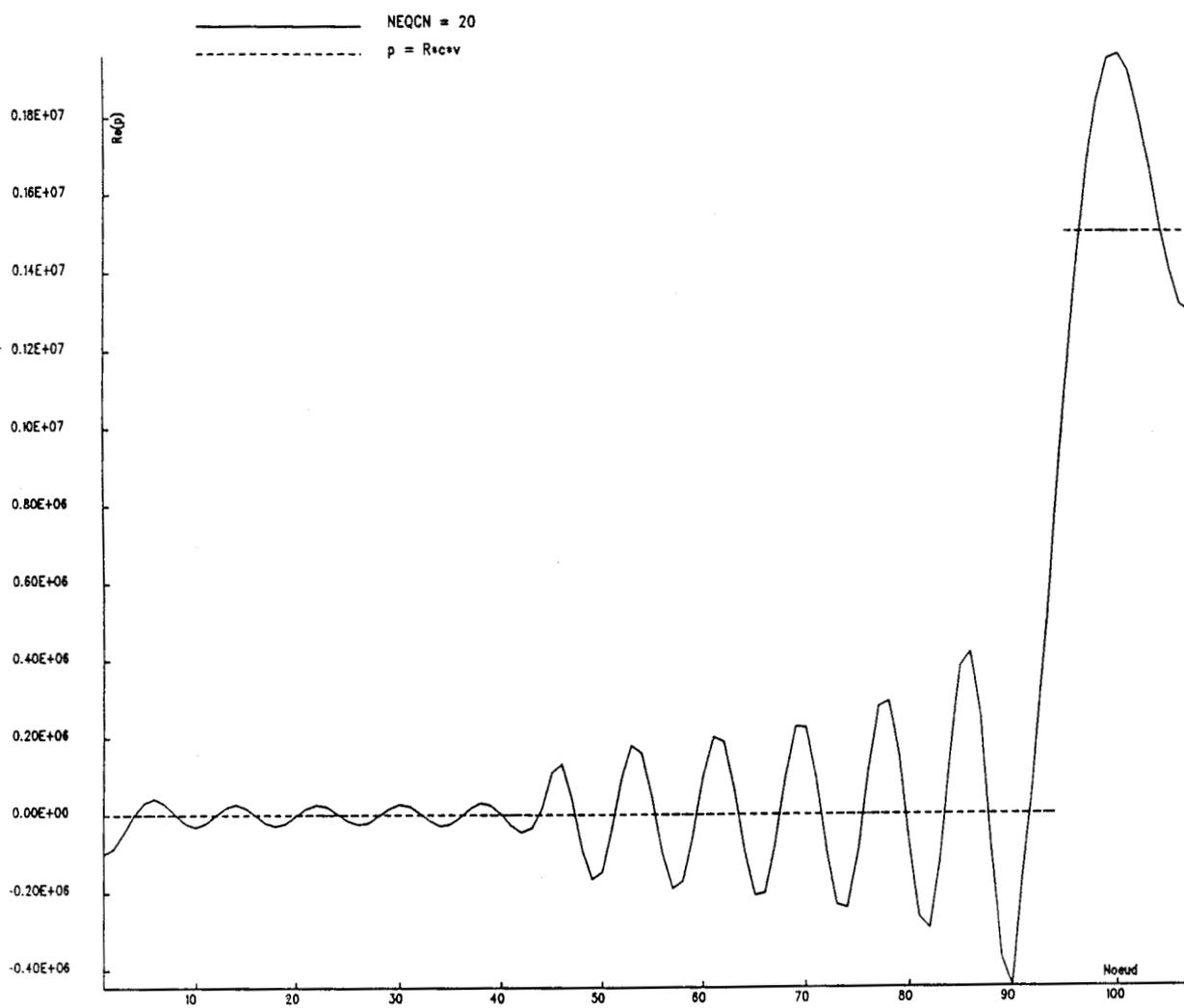
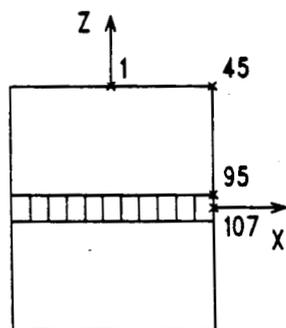


figure IV-12 : partie réelle de la pression sur l'antenne quand  $B = 0,333$

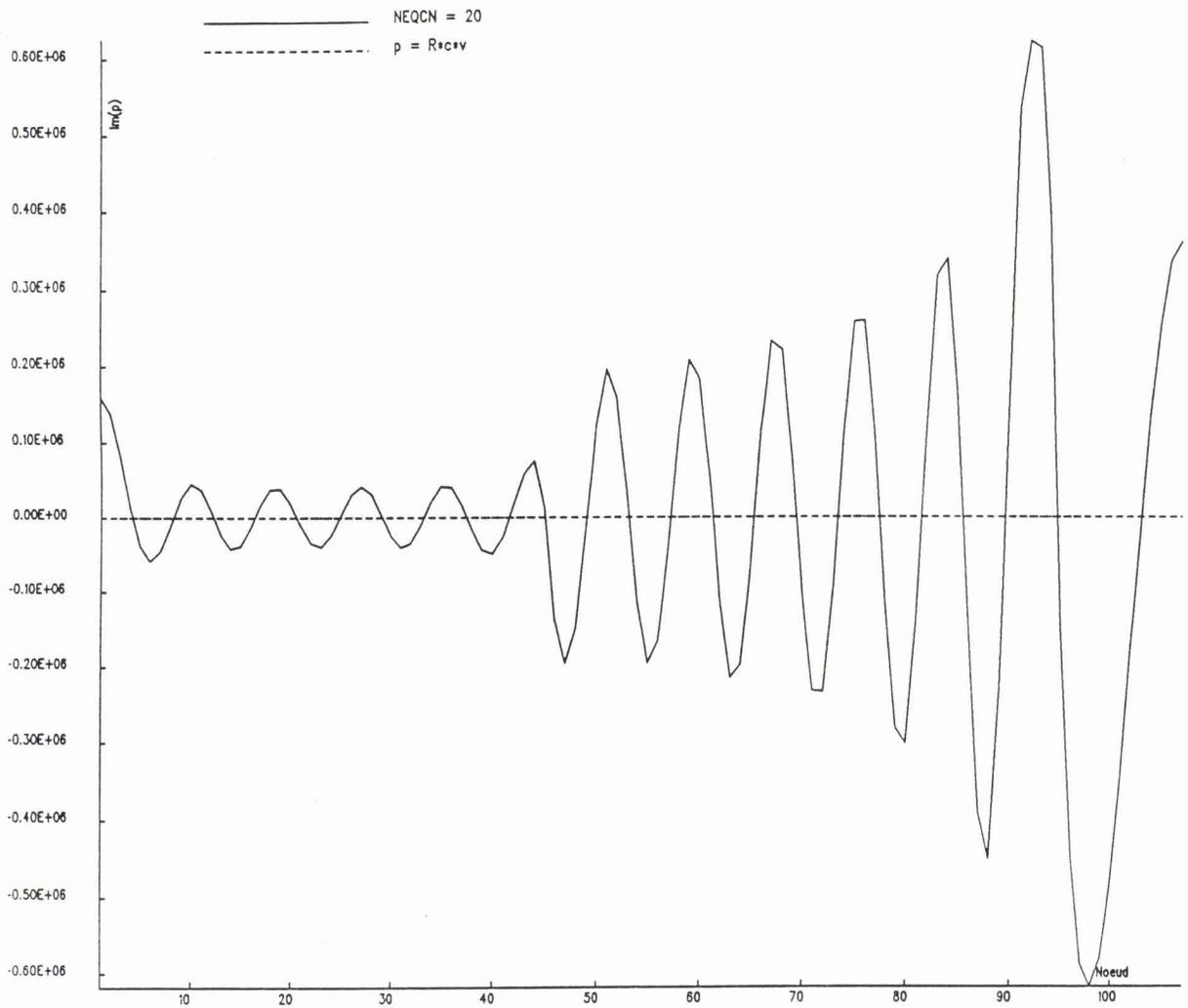
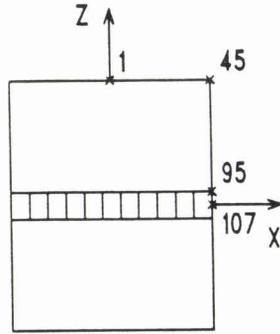


figure IV-13 : partie imaginaire de la pression sur l'antenne quand  $B = 0,333$

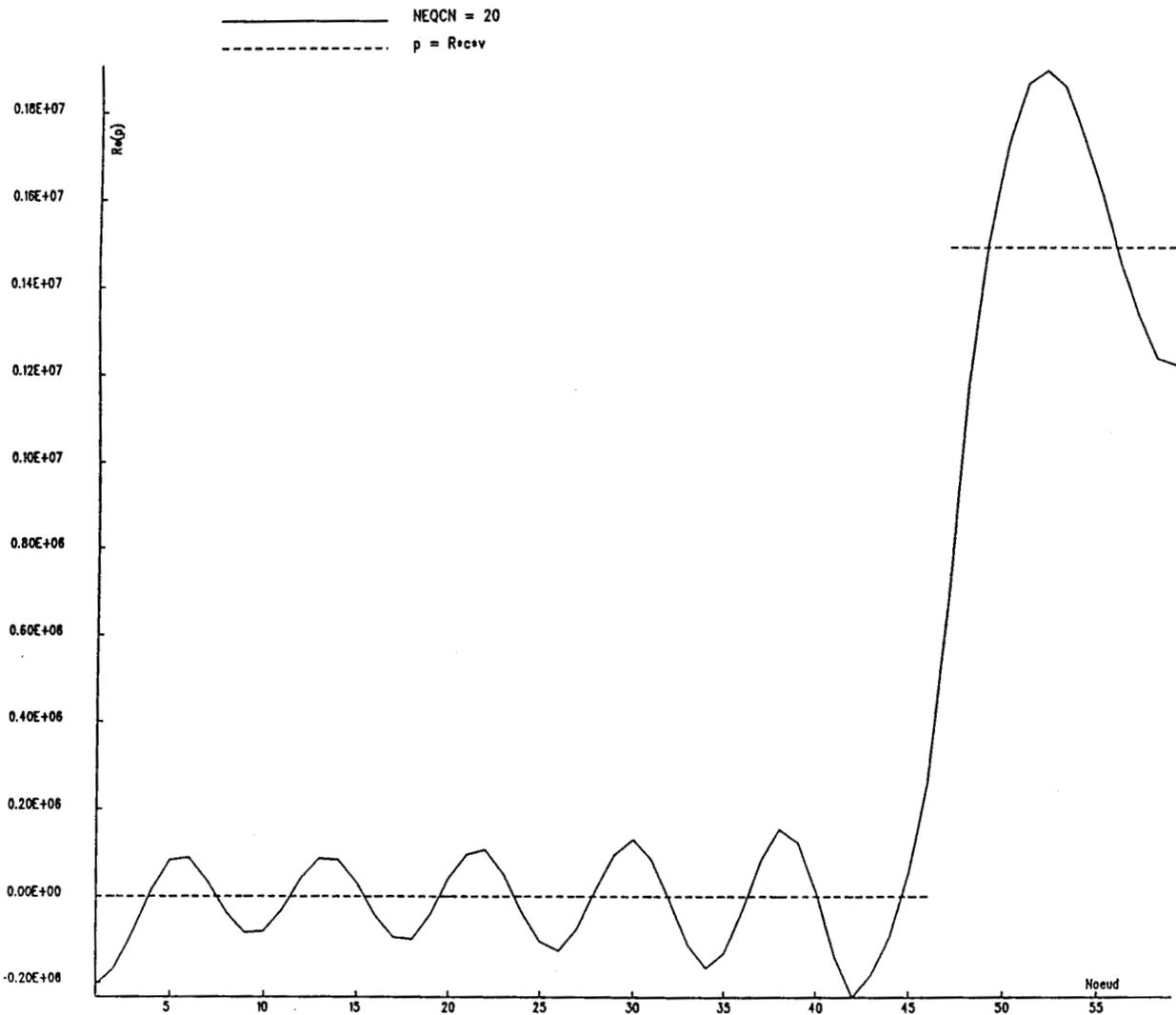
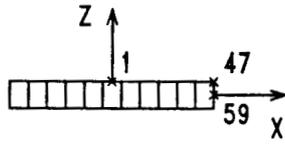


figure IV-14 : partie réelle de la pression sur l'antenne quand  $B = 0,0365$

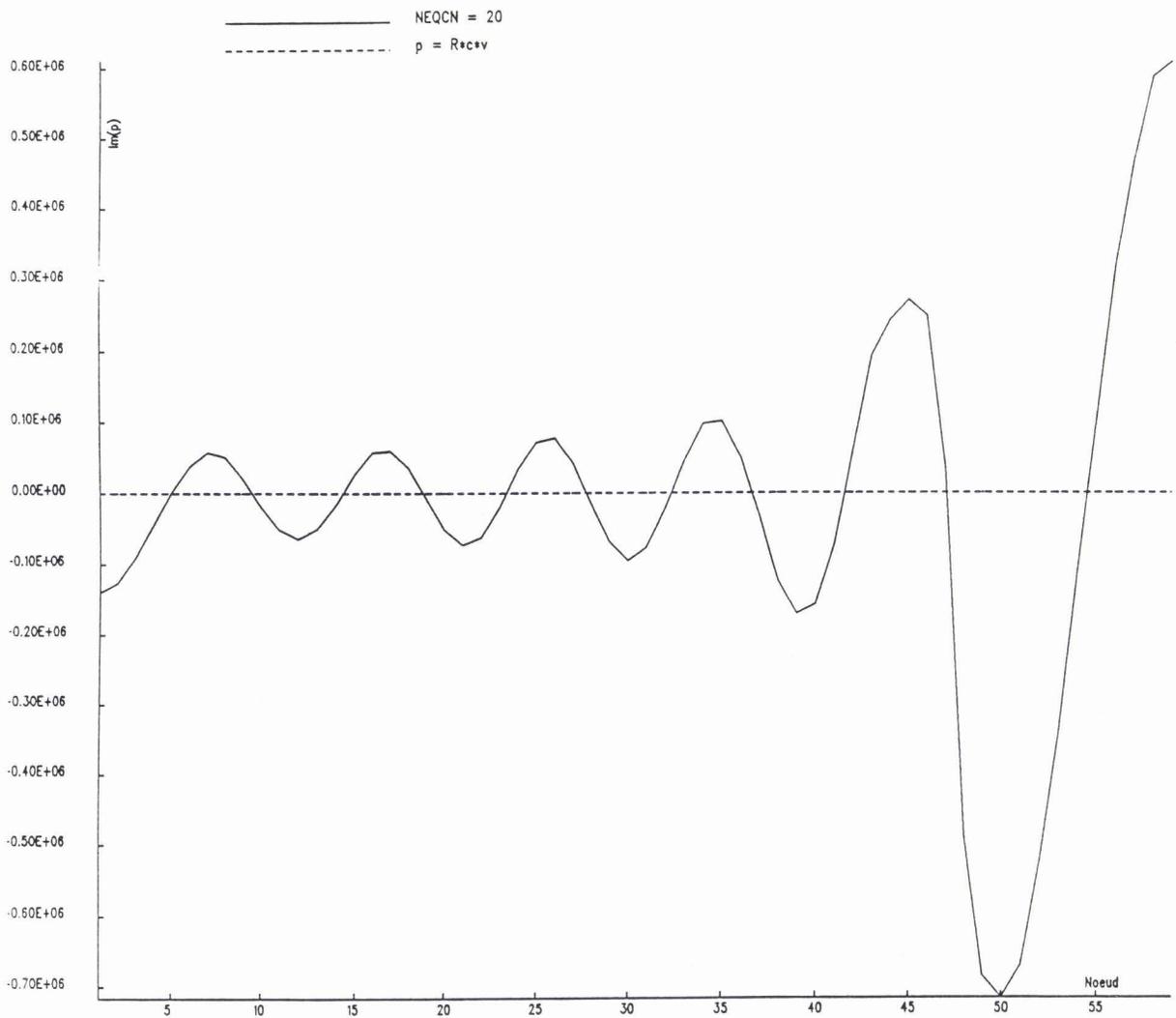
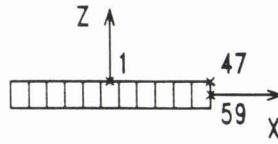
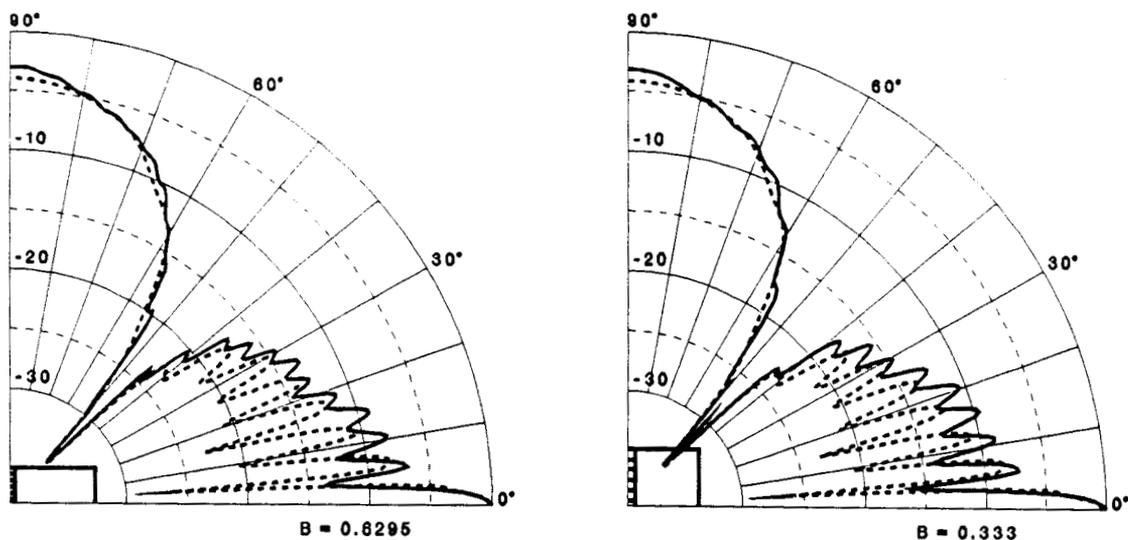


figure IV-15 : partie imaginaire de la pression sur l'antenne quand  $B = 0,0365$



————— NEQCN = 20  
 - - - - - p = R\*c\*v

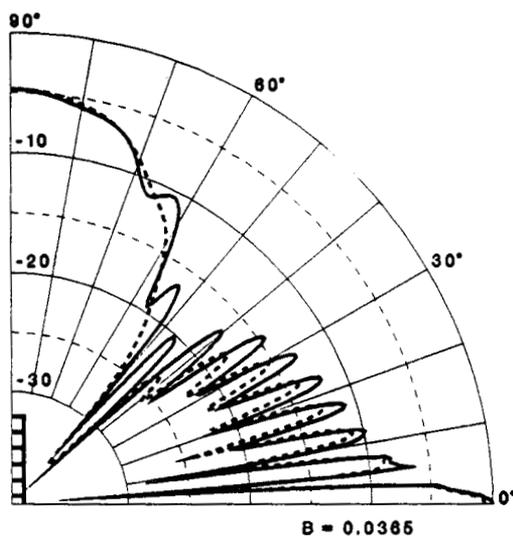


figure IV-16 : directivités de l'antenne cylindrique

pression sur la surface, dans le cas où B est égale à 0,6295 m, 0,333 m et 0,0365 m. Sur la figure IV-16 sont reportées les directivités correspondantes. Les temps de calcul totaux sont contenus dans le tableau IV-3, en fonction de la valeur de B.

B	méthode générale	approximation (IV-4)
0,6295 m	11200 s	1900 s
0,333 m	5800 s	1250 s
0,0365 m	2050 s	600 s

tableau IV-3

Des tracés de pression pariétale, on déduit que :

- il existe une oscillation importante de la pression, dont la longueur d'onde est quasiment la longueur d'onde de la propagation libre dans l'eau. Elle pourrait être associée à une onde rampante [77]. La décroissance de l'oscillation sur la face latérale, quand on s'éloigne de l'anneau, surtout dans le cas du grand et du moyen baffle, est caractérisée par une enveloppe en racine carrée qui pourrait être assimilée à l'atténuation de l'onde due à son rayonnement tangentiel.
- l'approximation (IV-4) est vraie en valeur moyenne mais est, point par point, très grossière, sinon fausse. Qualitativement, l'intégrale de la pression sur la surface vibrante déduite de cette relation doit toutefois être valable, et permettre ainsi une première modélisation simple de l'interaction fluide-structure, en terme d'impédance de rayonnement.

Des diagrammes de directivité, on déduit que :

- l'effet du baffle sur le lobe principal, autour du plan de symétrie, est négligeable, le niveau comme l'angle d'ouverture restant identiques dans les trois cas.
- l'effet du baffle est aussi négligeable sur le lobe étroit, dans l'axe (OZ) du système.
- l'effet du baffle est plus important sur les lobes secondaires, en

particulier sur les valeurs des minima qui les séparent.

- l'approximation (IV-4) est tout à fait justifiée.

*Remarque :*

Une pré-étude a montré que le nombre de points d'intégration par élément, fixé au paragraphe III - 2.1.1, n'est pas suffisant ici, dans le domaine des hautes fréquences. C'est pourquoi on est passé de 20 à 40 points pour assurer la convergence des intégrales de Helmholtz et de directivité. Une diminution de ce nombre de points de Gauss (suffisant mais certainement surabondant) et l'amélioration informatique du code HELNUL, proposée dans le paragraphe III - 2.3, devrait permettre une réduction importante du temps de calcul qui peut paraître ici excessif.

#### IV - 3 RAYONNEMENT D'UN TRANSDUCTEUR FLEXTENSIONNEL DE CLASSE I

##### IV - 3.1 Objectif de cette étude

Dans sa thèse [33], B. HAMONIC a procédé à la modélisation par éléments finis, à l'aide du code ATILA, du couplage fluide-structure pour un transducteur flexionnel de classe I (figure IV-17). Ce transducteur est constitué d'un moteur de céramiques piézoélectriques connecté par deux pièces de transition à une coque mince. Une précontrainte mécanique est appliquée aux céramiques grâce à une tige centrale. Pour cette étude, il convient de remarquer que le transducteur est à symétrie de révolution et que, par ailleurs, la structure admet un plan de symétrie normal à l'axe de révolution. L'analyse du comportement du transducteur en vibration dans l'air (analyse modale) puis dans l'eau (analyse harmonique) a été conduite de façon détaillée par B. HAMONIC et les résultats numériques ont été comparés avec succès à de nombreux résultats expérimentaux : fréquences de résonance et coefficients de couplage mesurés électriquement, champs de déplacement mesurés par holographie interférométrique en temps moyenné, champs de pression lointain mesurés en bassin d'essais acoustiques. Toutefois, aucune validation du champ proche n'a pu être obtenue, compte tenu de la complexité de telles mesures, en particulier pour ce qui concerne la pression pariétale. Cette validation est d'autant plus importante que l'approche par éléments finis ne prend en compte la condition de rayonnement que de façon approximative et qu'un effet d'interférence en champ proche entre l'onde réelle émise et une onde fictive

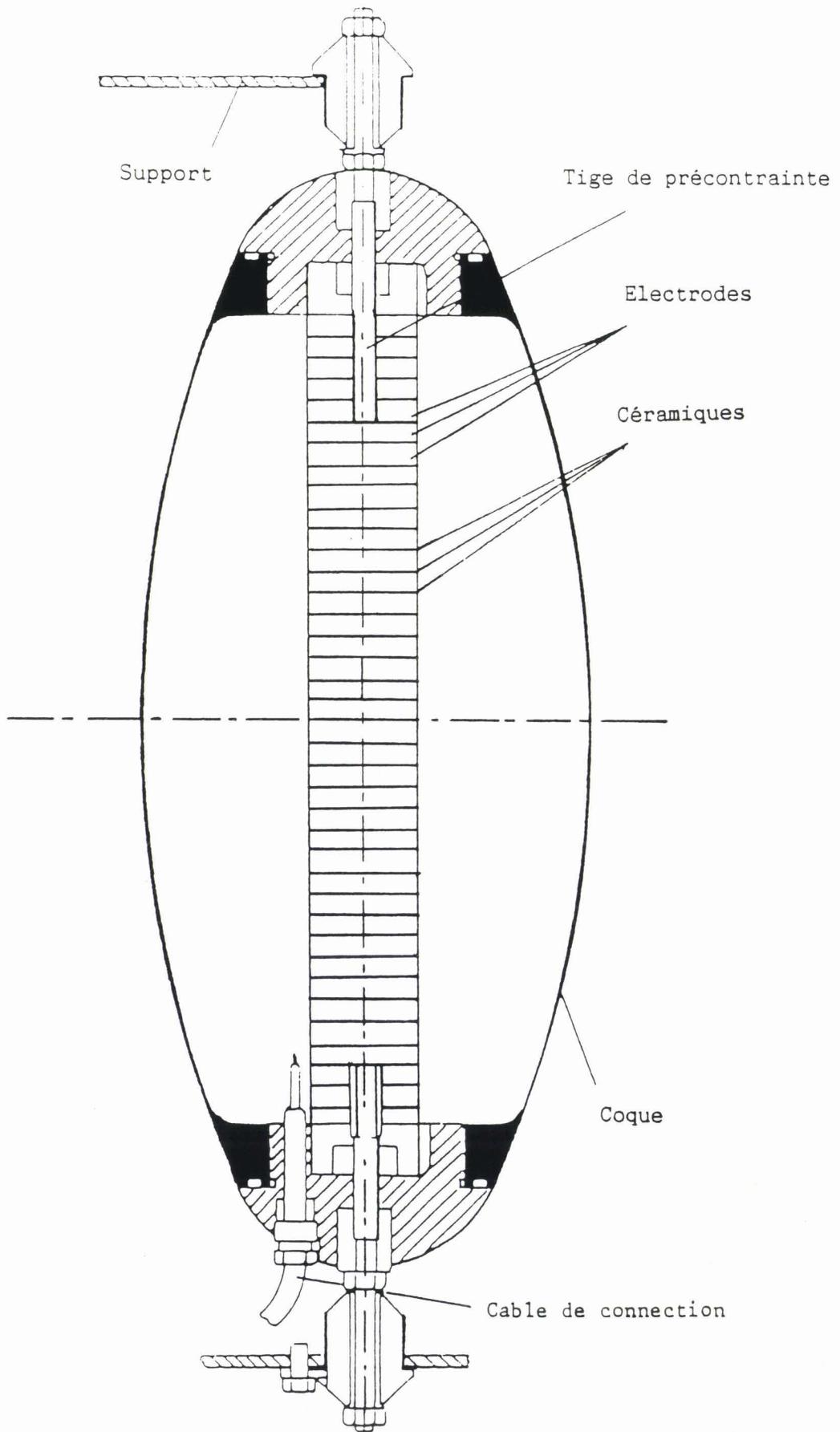
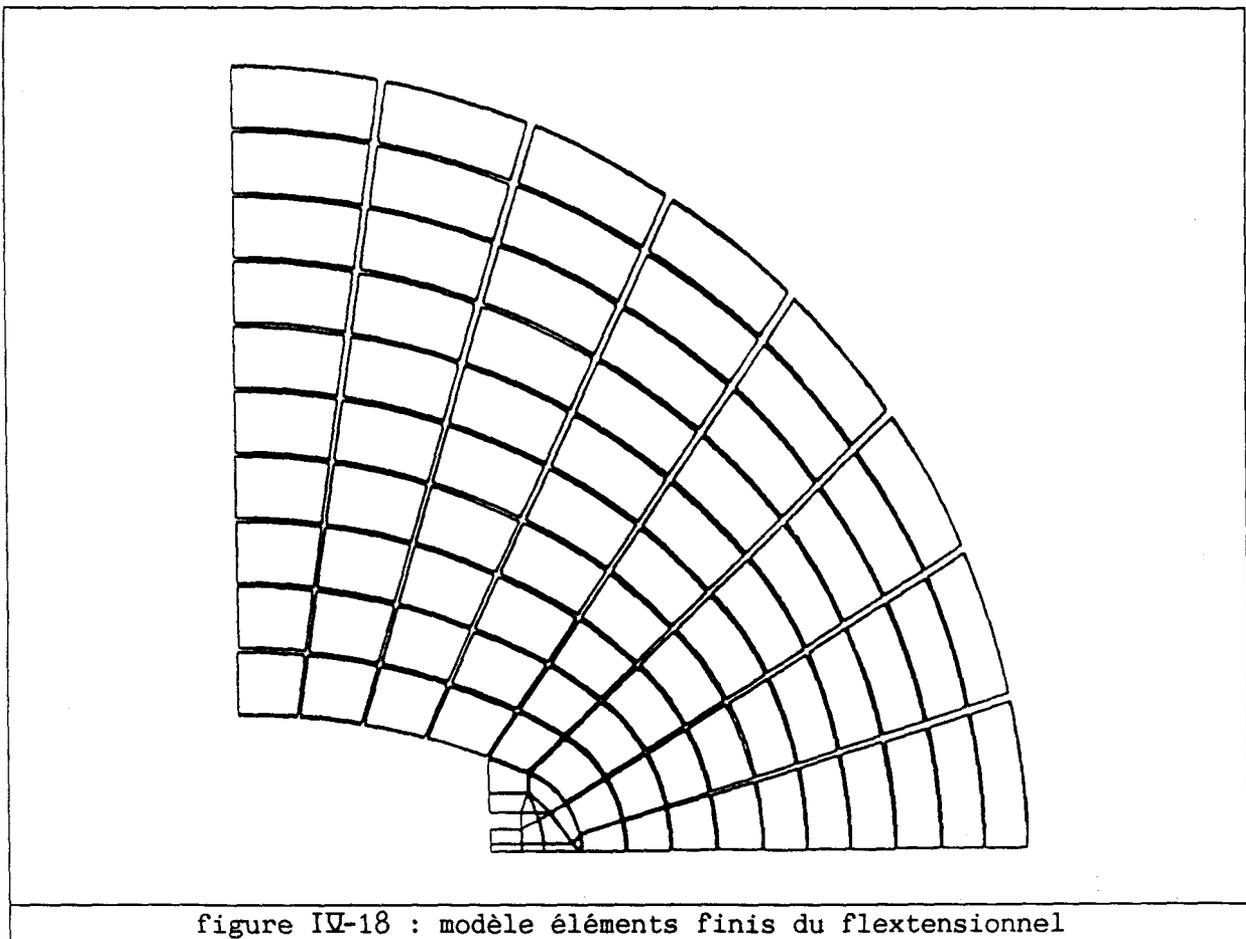


figure IV-17 : transducteur flexensionnel de classe I

plus faible, réfléchi par la surface externe du maillage, reste possible. Le calcul à l'aide des équations intégrales du champ de pression rayonné par ce transducteur a donc été conduit, en prenant comme champ de déplacement sur la structure le champ de déplacement fourni par le calcul éléments finis, afin de garantir définitivement la validité des résultats. Les deux paragraphes suivants décrivent respectivement le modèle éléments finis puis le modèle équations intégrales. Le second paragraphe produit également les comparaisons.

#### IV - 3.2 Modélisation par éléments finis

Le modèle éléments finis utilisé par B. HAMONIC est présenté sur la figure IV-18.



Le maillage du domaine fluide est réalisé par des éléments isoparamétriques à 8 noeuds dont les dimensions respectent le critère classique en  $\lambda/4$  à la limite supérieure de la bande de fréquence analysée. La surface extérieure du

maillage, situé dans le champ proche, est rendue non réfléchissante par l'utilisation d'une condition de rayonnement particulière, dite condition dipolaire [20,31,79]. Cette condition est incorporée concrètement à la formulation d'éléments rayonnants dipolaires développés par R. BOSSUT [31,89]. A partir des résultats du calcul, le champ lointain a été déterminé à l'aide d'un algorithme d'extrapolation, également développé par R. BOSSUT [31,89], en utilisant les dix premiers termes du développement multipolaire de la pression rayonnée.

#### IV - 3.3 Modélisation par équations intégrales et comparaison des résultats

La formulation intégrale de Helmholtz extérieure, éventuellement couplée avec la méthode de champ nul, est exploitée en utilisant comme données les valeurs de la vitesse normale déduites du calcul par éléments finis de la réponse du transducteur immergé en analyse harmonique. En reprenant le même maillage de l'interface sont calculés les valeurs nodales des pressions sur la surface et le facteur de directivité tous les  $5^\circ$ . Les intégrales de Helmholtz et de directivité, apparaissant respectivement dans les équations (II-14) et (II-40), sont évaluées avec 20 points d'intégration par élément  $\Gamma_j$ . Pour toutes les fréquences sauf une, aucune équation supplémentaire de champ nul n'intervient (NEQCN = 0) et le temps total de calcul est de 50 s. A la fréquence de  $2,41f_0$ , où  $f_0$  est la fréquence de résonance fondamentale du transducteur dans l'air, utilisée comme norme, la proximité d'une fréquence irrégulière nécessite la surdétermination des équations intégrales par des équations de champ nul. Dans ce cas, on choisit NEQCN = 6, et dans la décomposition (II-48) de la pression P vaut 77. Les intégrales de champ nul (II-50) sont alors calculées avec 78 points de Gauss par élément  $\Gamma_j$ , le temps de calcul total étant d'environ 100 s. Sur la figure IV-19 sont regroupés les diagrammes de directivité pour six fréquences normées différentes. Par ailleurs, les figures IV-20 à IV-23 présentent, pour quatre fréquences normées différentes, une comparaison en champ proche des parties réelle et imaginaire de la pression obtenue, en fonction de la coordonnée Z de l'axe de révolution. Sur ces figures, les résultats éléments finis sont en trait plein, les résultats équations intégrales en pointillés. L'accord remarquable permet un recouvrement de deux méthodes différentes de modélisation du problème fluide et valide définitivement l'approche éléments finis.

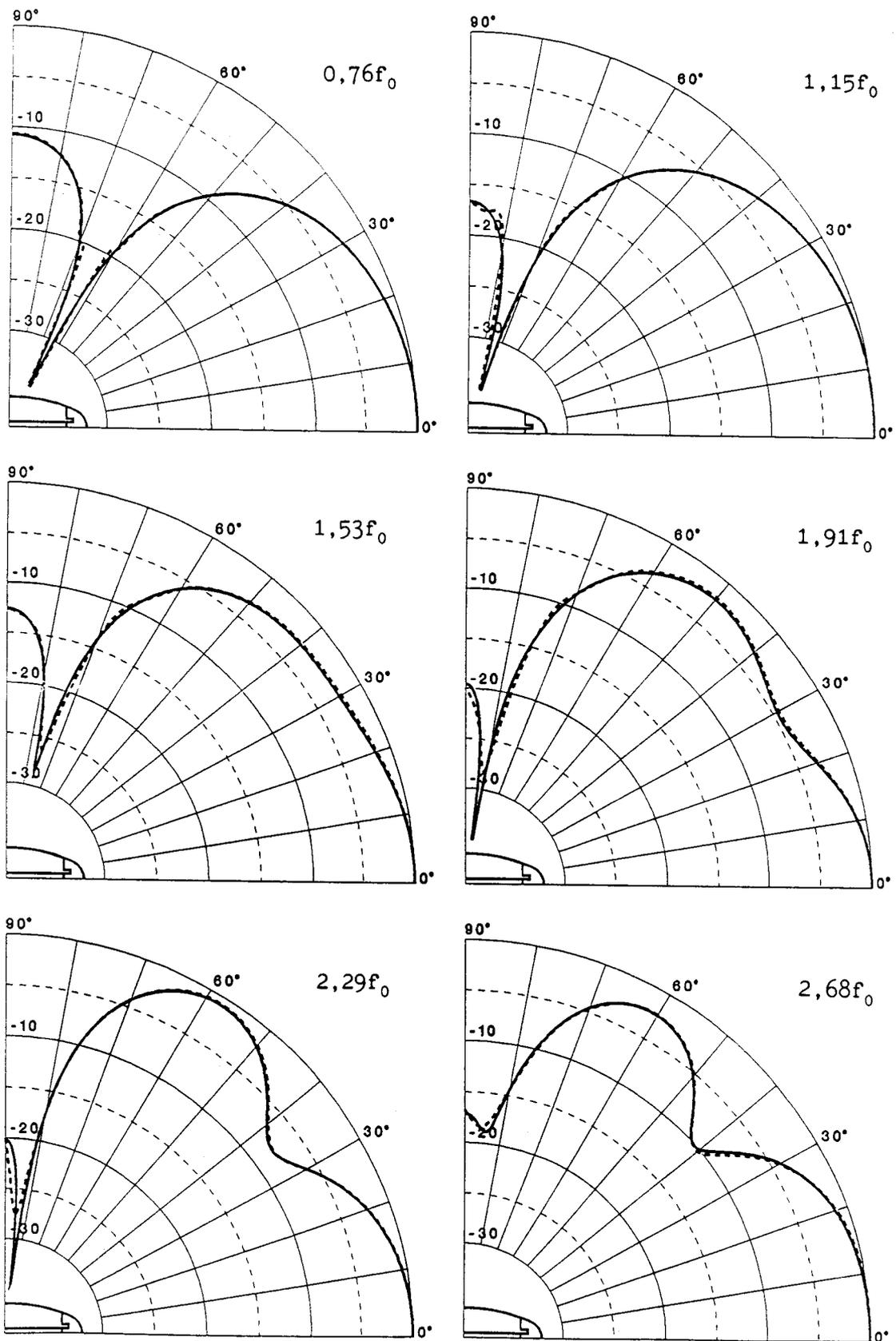


figure IV-19 : directivités du flexion-extensionnel

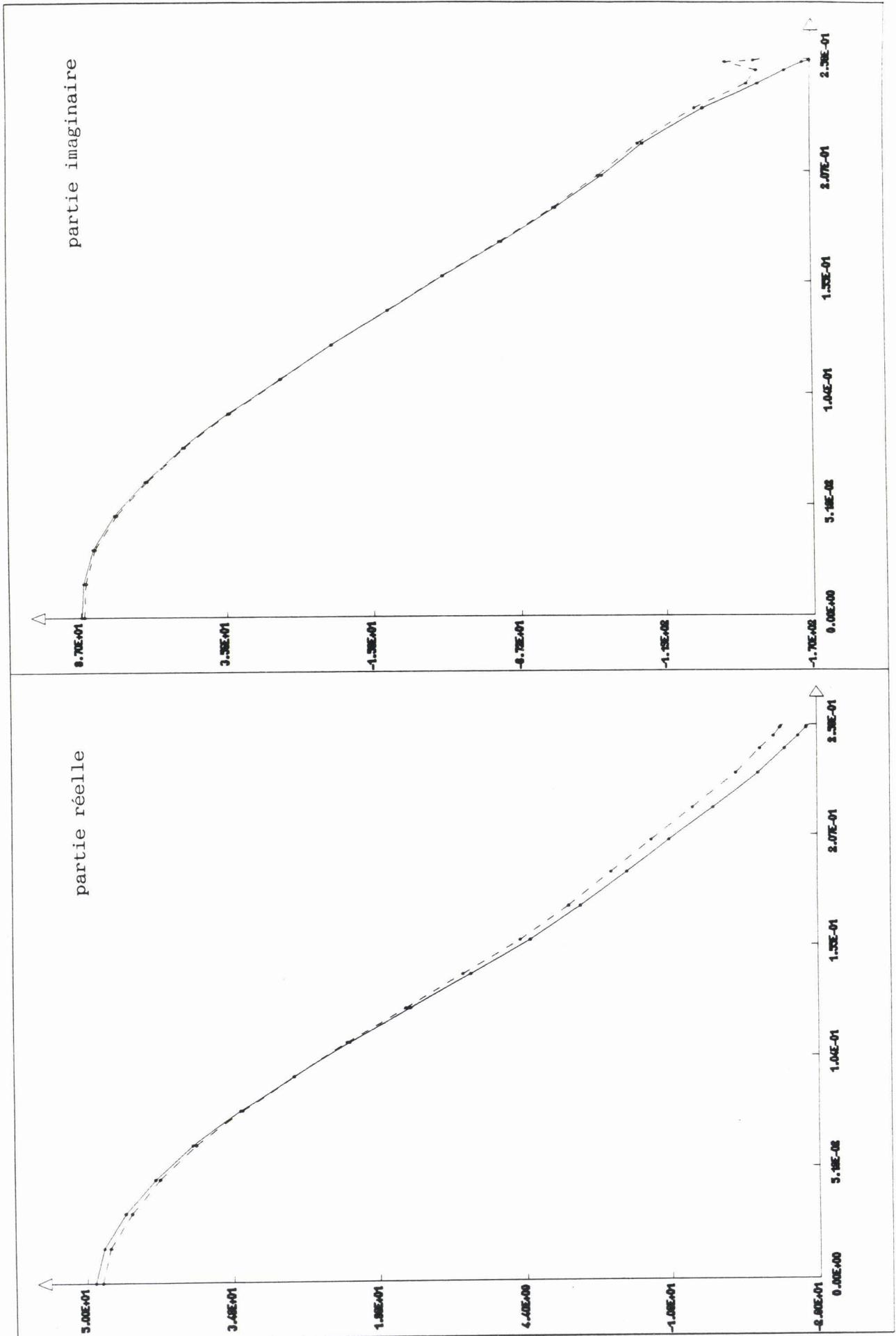


figure IV-20 : pression sur la surface du flexionnel à  $0,95f_0$

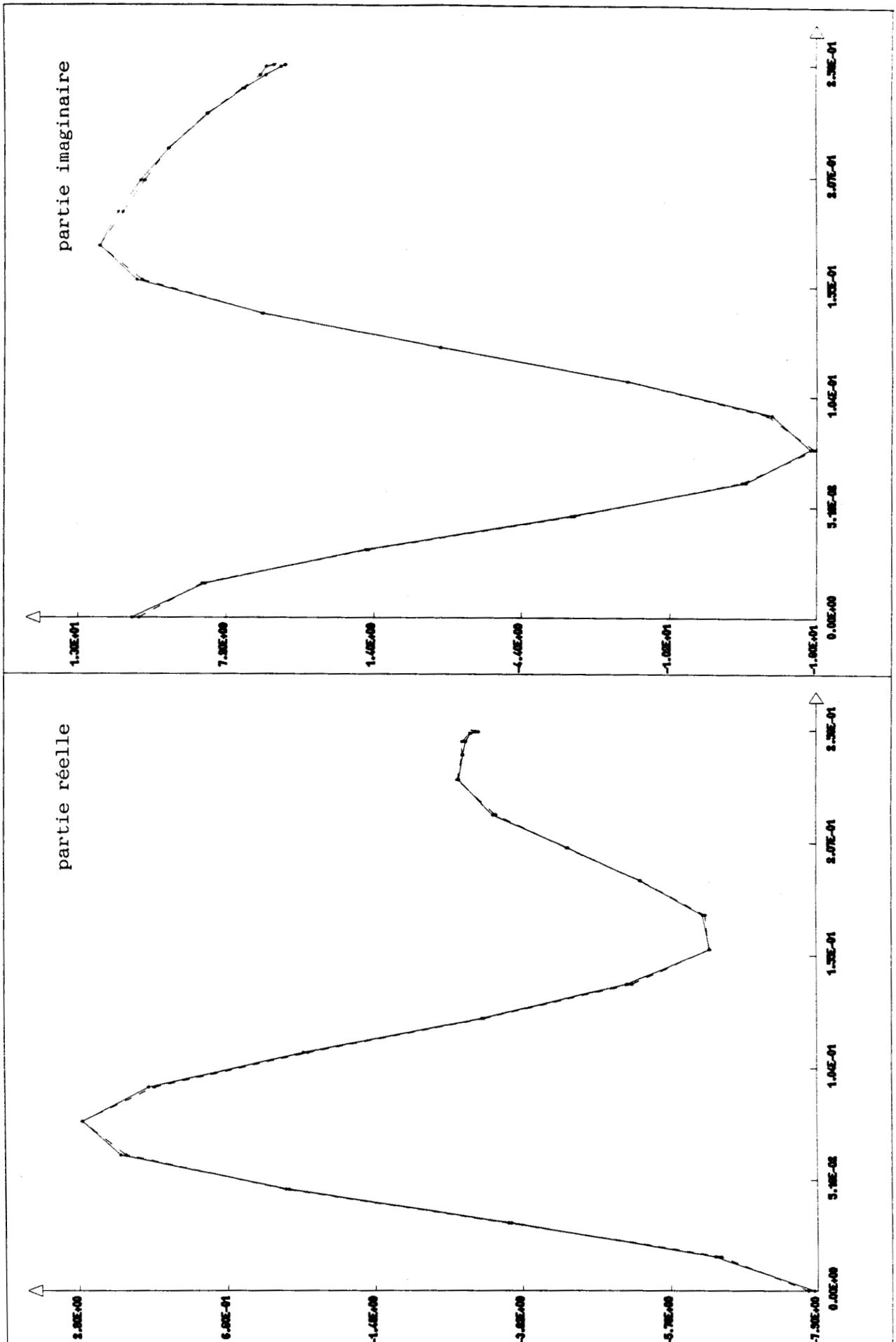


figure IV-21 : pression sur la surface du flexionnel à  $1,99f_0$

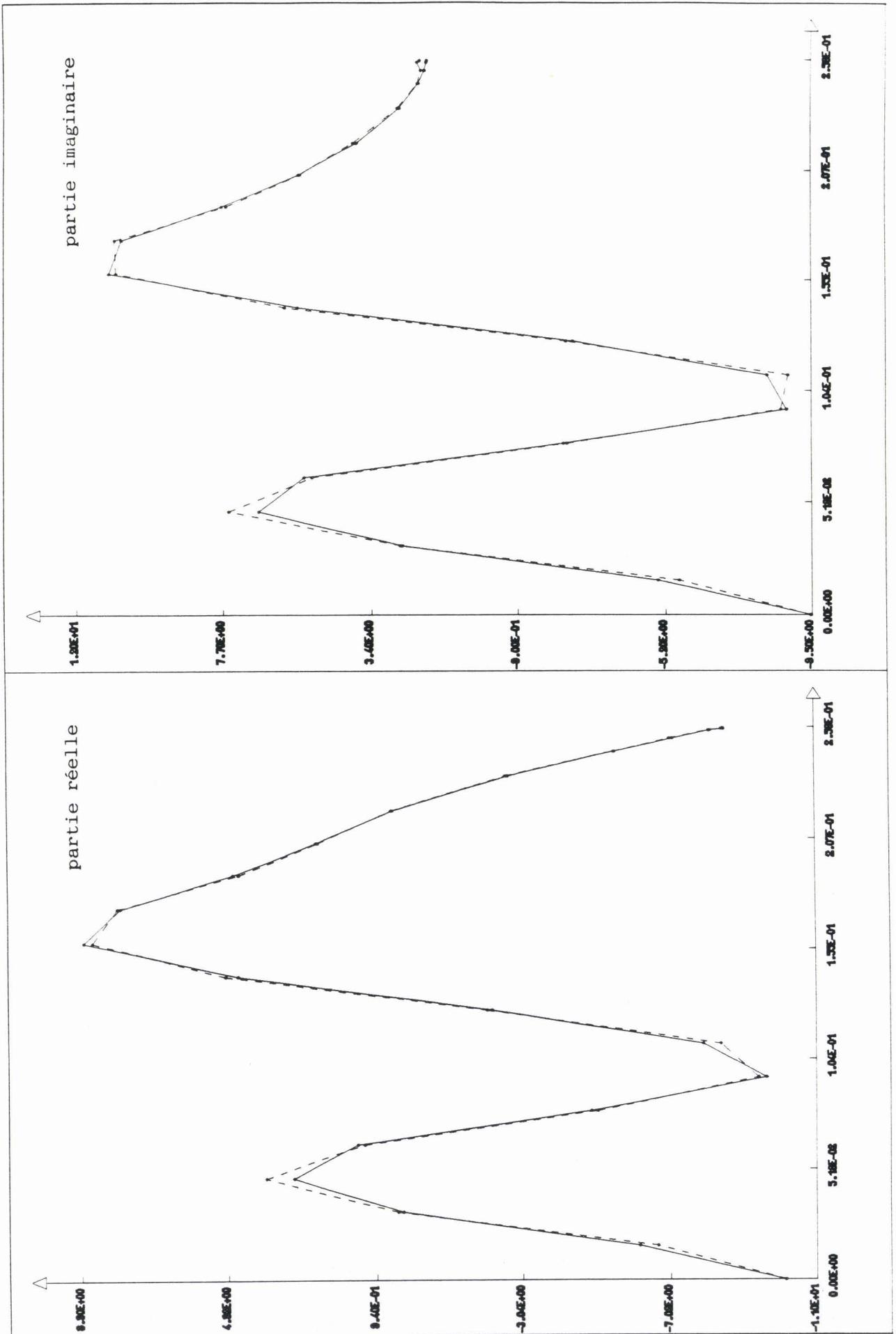


figure IV-22 : pression sur la surface du flexionnel à  $2,41f_0$

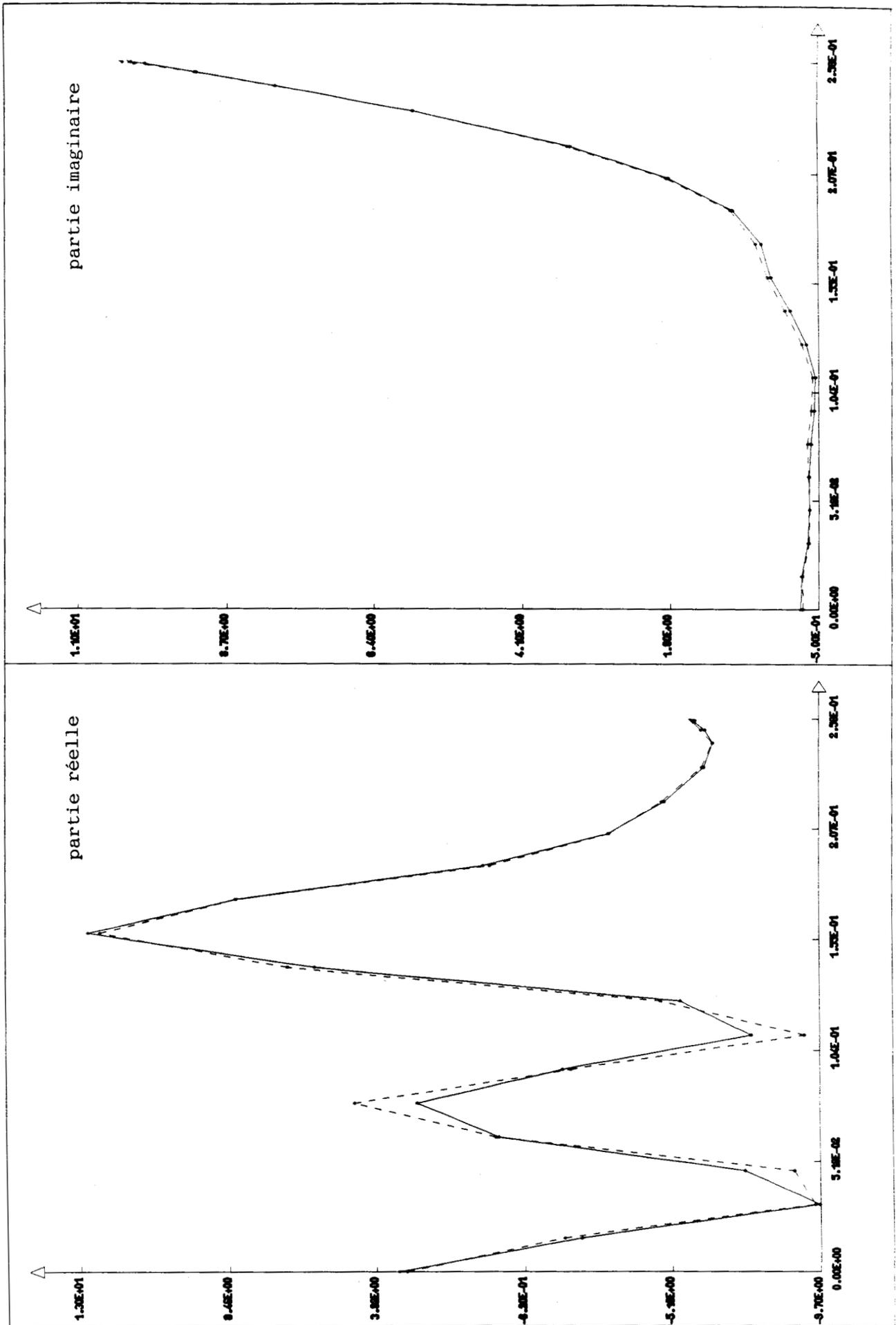


figure IV-23 : pression sur la surface du flexionnel à  $2,91f_0$

## IV - 4 RAYONNEMENT D'UN PROJECTEUR UNIDIRECTIONNEL BASSE FREQUENCE

### IV - 4.1 Présentation du problème

Le projecteur étudié (figure IV-24.a) est un cylindre, de section quasi-elliptique, utilisé pour l'émission SONAR basse fréquence. Une conception originale permet à ce transducteur d'avoir une face parlante limitée pratiquement à la moitié de sa surface latérale et d'espérer ainsi, en champ lointain, une directivité importante requise par de nombreuses applications. L'étude réalisée a d'abord constitué une validation de ce concept de projecteur unidirectionnel puis, après fabrication du transducteur au GERDSM et mesure de son champ de pression rayonné, un test du code dans un cas de structure tridimensionnelle.

Le maillage de surface utilisé est décrit sur la figure IV-24.b. Il est constitué de 8 éléments triangulaires à 6 noeuds et de 88 éléments quadrilatères à 8 noeuds (282 noeuds au total). La surface parlante est schématisée sur la partie centrale, délimitée par les points 1, 2, 3 et 4, et est composée de 16 quadrangles. L'origine du repère est au centre de la structure. Les dimensions sont telles que :

$$A = 0,242 \text{ m} \quad B = 0,287 \text{ m} \quad C = 0,105 \text{ m}$$

Un tel maillage vérifie le critère en  $\lambda/4$  jusqu'à une fréquence de 3000 Hz. Il a été validé par le test classique de source ponctuelle avec une excellente précision. Les fréquences de travail sont 1500 Hz, 1800 Hz, 2200 Hz et finalement 2600 Hz, des mesures de directivité en gisement (plan (XOY)) et en site (plan (YOZ)) étant en effet disponibles à ces fréquences [90]. Ne connaissant pas les valeurs nodales du déplacement sur la surface parlante, un déplacement de type parabolique a été considéré. Cette hypothèse n'est pas dénuée de tout fondement car une analyse modale du transducteur par éléments finis [91] produit globalement ce type de champ dans la gamme de fréquence concernée et, de plus, de nombreux tests effectués [92] démontrent une insensibilité certaine du comportement acoustique en champ lointain de cette structure au type de déplacement envisagé. Le déplacement parabolique choisi est précisé par les deux schémas suivants, après projection sur les deux plans de coupe (XOY) et (YOZ) :

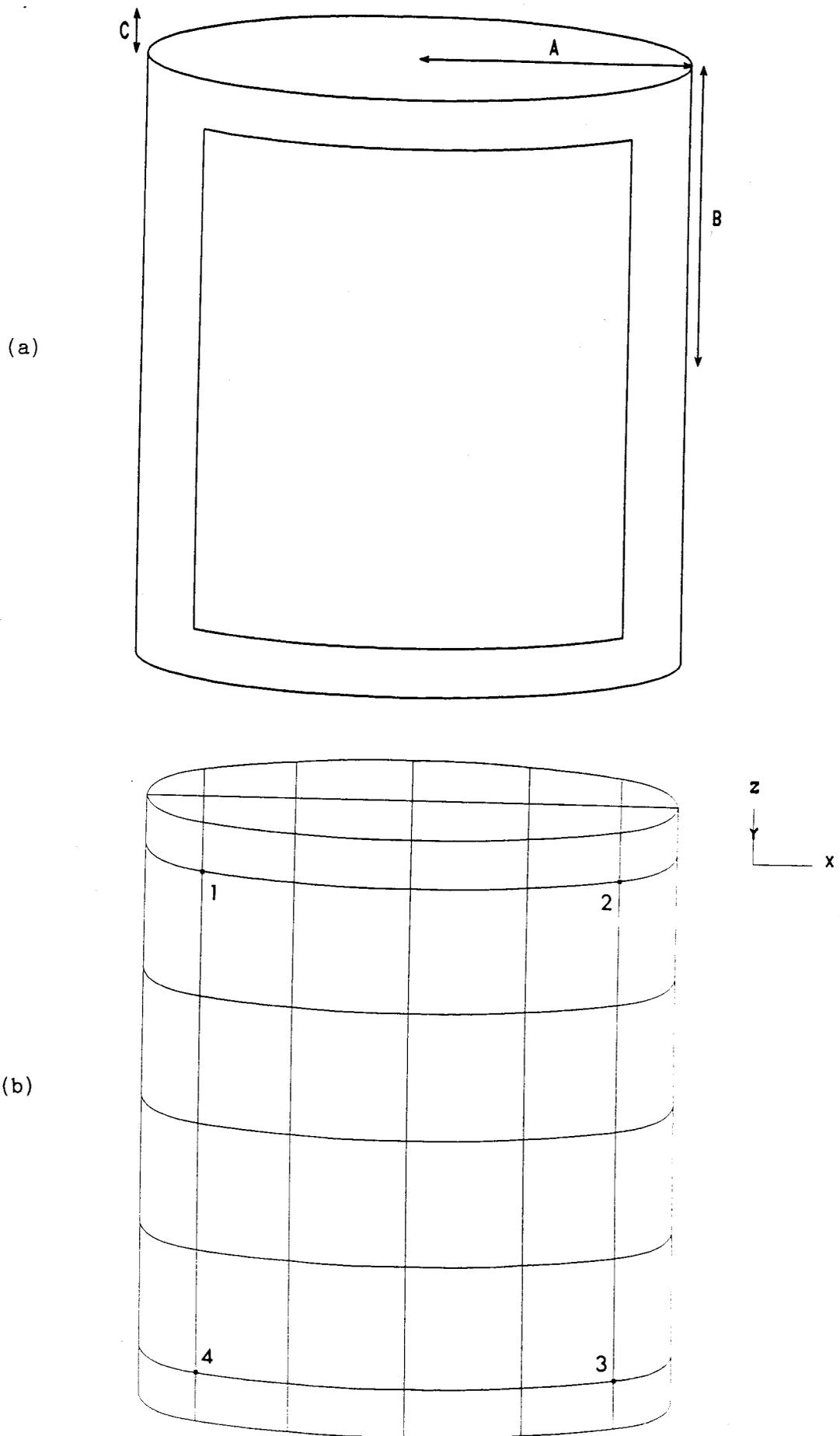
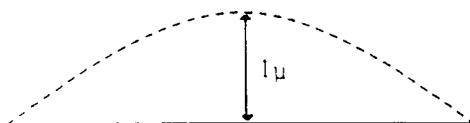
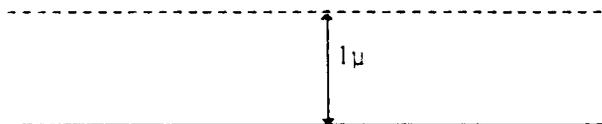


figure IV-24 : projecteur unidirectionnel

- coupe dans le plan (XOY) :



- coupe dans le plan (YOZ) :



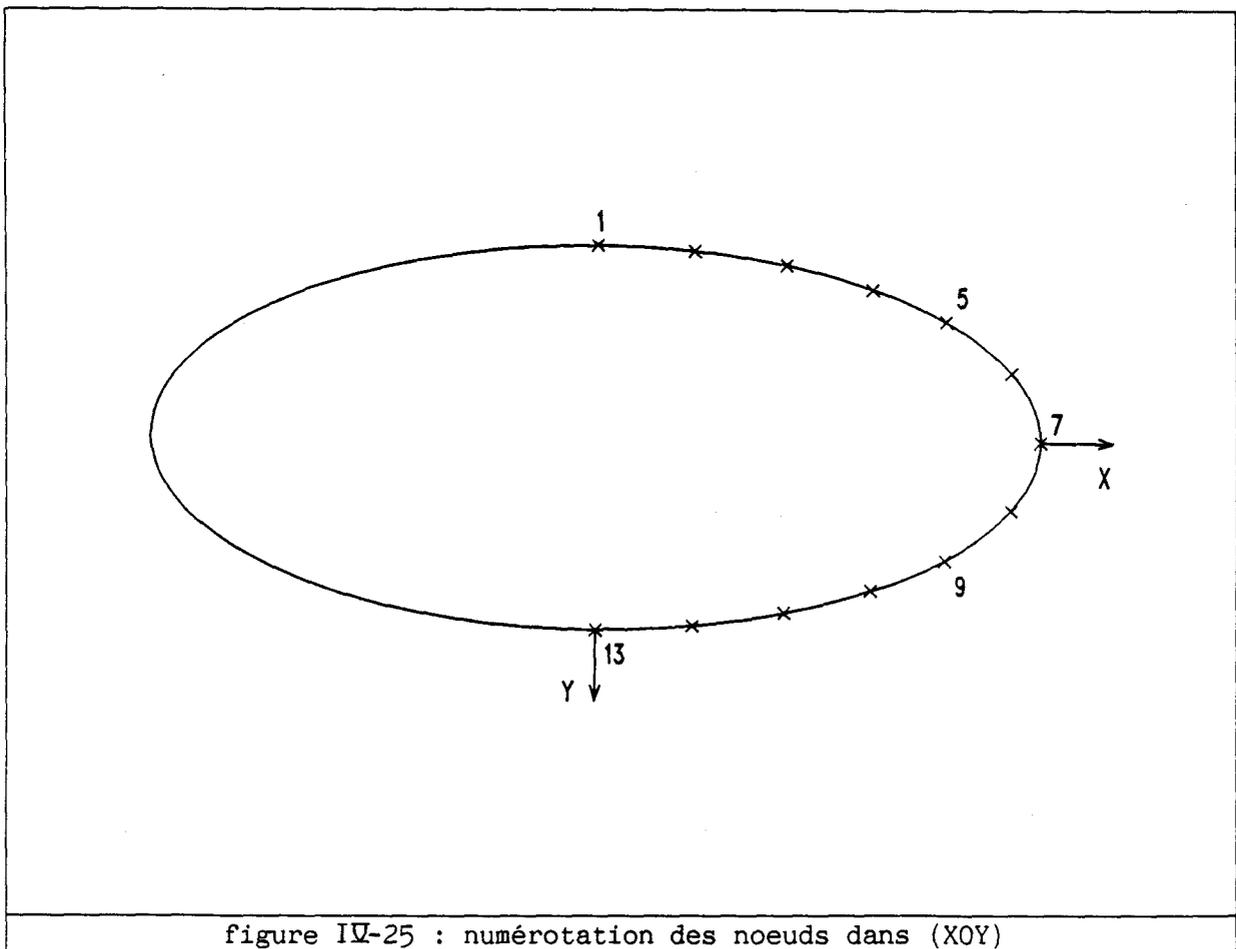
#### IV - 4.2 Modélisation du rayonnement

L'outil de résolution utilisé est le code tridimensionnel EQI. On rappelle qu'il ne tient pas compte des symétries liées à la structure et au type de déplacement adopté. Pour définir correctement le problème, en vue d'une utilisation optimale du programme, on a procédé à l'estimation de la première fréquence irrégulière du projecteur. La première fréquence irrégulière du cylindre circonscrit à la structure est un minorant large de celle de la structure. D'après la relation (I-79), ce minorant est égal à 3973 Hz. Cette valeur est donc située à l'extérieur de la fourchette des fréquences de calcul. L'emploi de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure, sans couplage avec la méthode de champ nul, est ainsi tout à fait adapté et justifié. Les intégrales de Helmholtz apparaissant dans (II-14) et les intégrales de directivité de (II-40) sont calculées avec 2 points de Gauss suivant chaque variable  $\xi$  et  $\eta$ , i.e. 4 points par élément  $\Gamma_j$ . Après résolution, EQI fournit la pression aux noeuds du maillage ainsi que le facteur de directivité tous les 5°. Les temps d'assemblage et de résolution du système linéaire final sont respectivement de 120 s et 200 s.

### IV - 4.3 Analyse des résultats

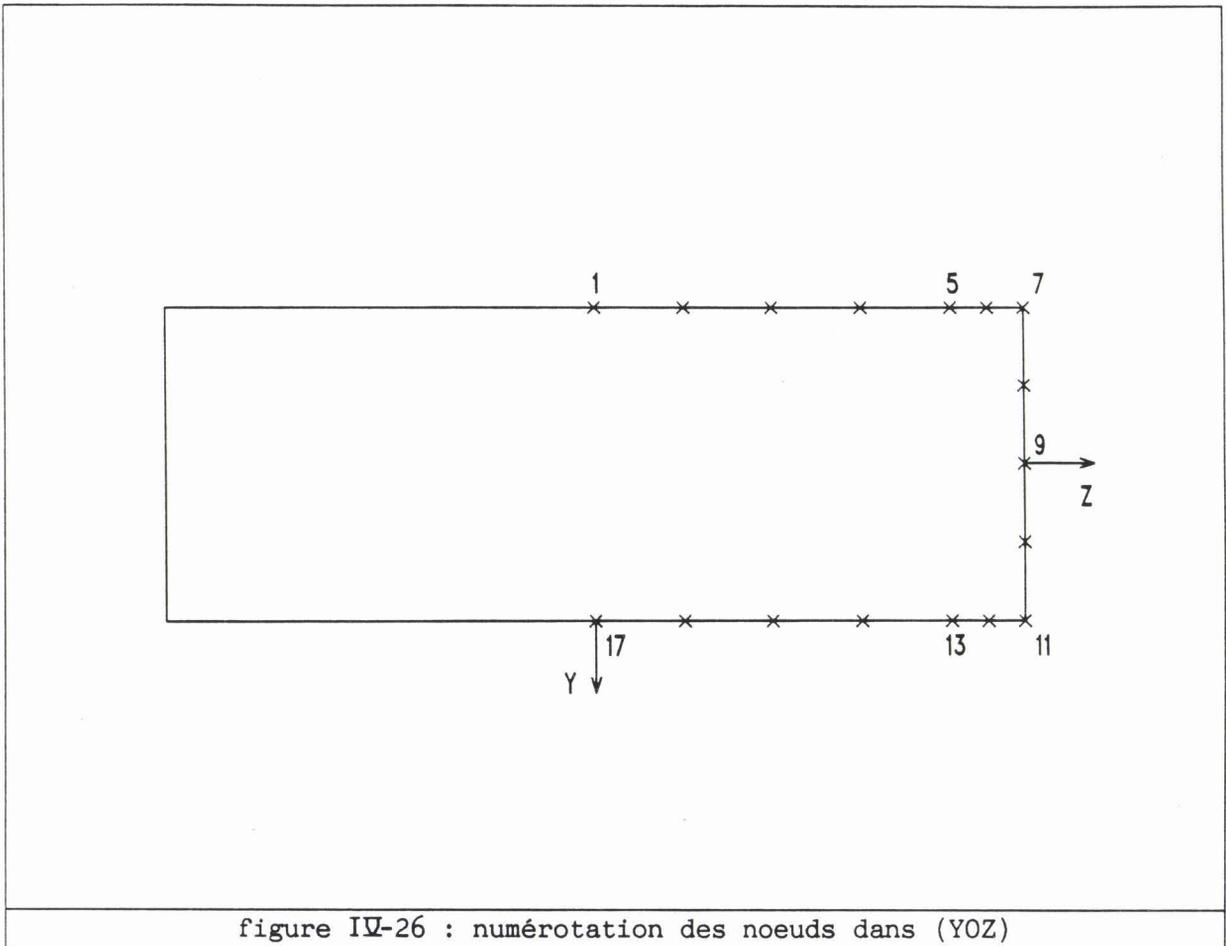
A chaque fréquence, les résultats sont illustrés par :

- *des diagrammes de directivité.* Ils définissent le comportement de la pression à l'infini en gisement et en site (figure IV-27 à IV-30). Les diagrammes en trait plein correspondent aux valeurs expérimentales [90] alors que ceux en pointillés correspondent aux résultats de EQI.
- *des courbes de pression.* Sur les figures IV-31 à IV-34 (respectivement IV-35 à IV-38) sont reportées les variations des parties réelle et imaginaire de la pression pariétale dans le plan (XOY) (respectivement (YOZ)), en fonction de la numérotation des noeuds précisée sur la figure IV-25 (respectivement IV-26).



- *des représentations tridimensionnelles des pressions.* Les figures IV-39 à IV-42 représentent la variation du module de la pression sur la partie

active du projecteur, projetée sur le plan (XOZ).



Avant de commenter ces différentes figures, il faut noter que les courbes expérimentales de directivité qui nous ont été transmises sont reproduites par digitalisation tous les  $5^\circ$ . Leur forme ne rend pas toujours parfaitement compte des symétries du problème et témoigne ainsi des incertitudes de la mesure. La juxtaposition des courbes de directivité expérimentale et théorique se fait après ajustement sur le niveau d'émission maximum. On observe un excellent accord d'ensemble, la convergence s'améliorant quand la fréquence augmente. Le recouvrement moins bon constaté en basse fréquence, à 1500 Hz, est probablement dû aux raisons suivantes :

- . l'hypothèse sur la variation du déplacement est trop grossière à cette fréquence,
- . les incertitudes de mesure augmentent quand la fréquence diminue.

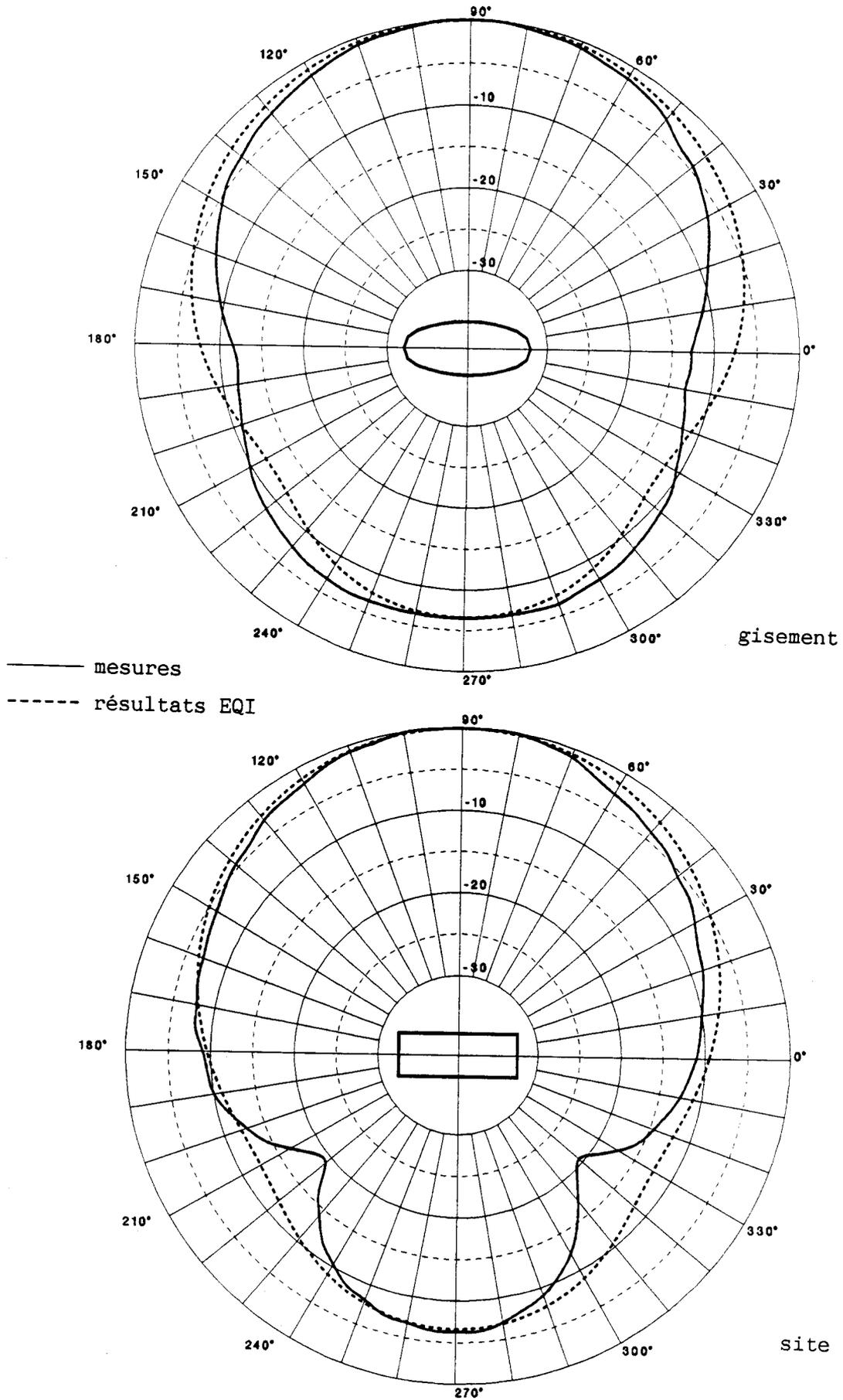
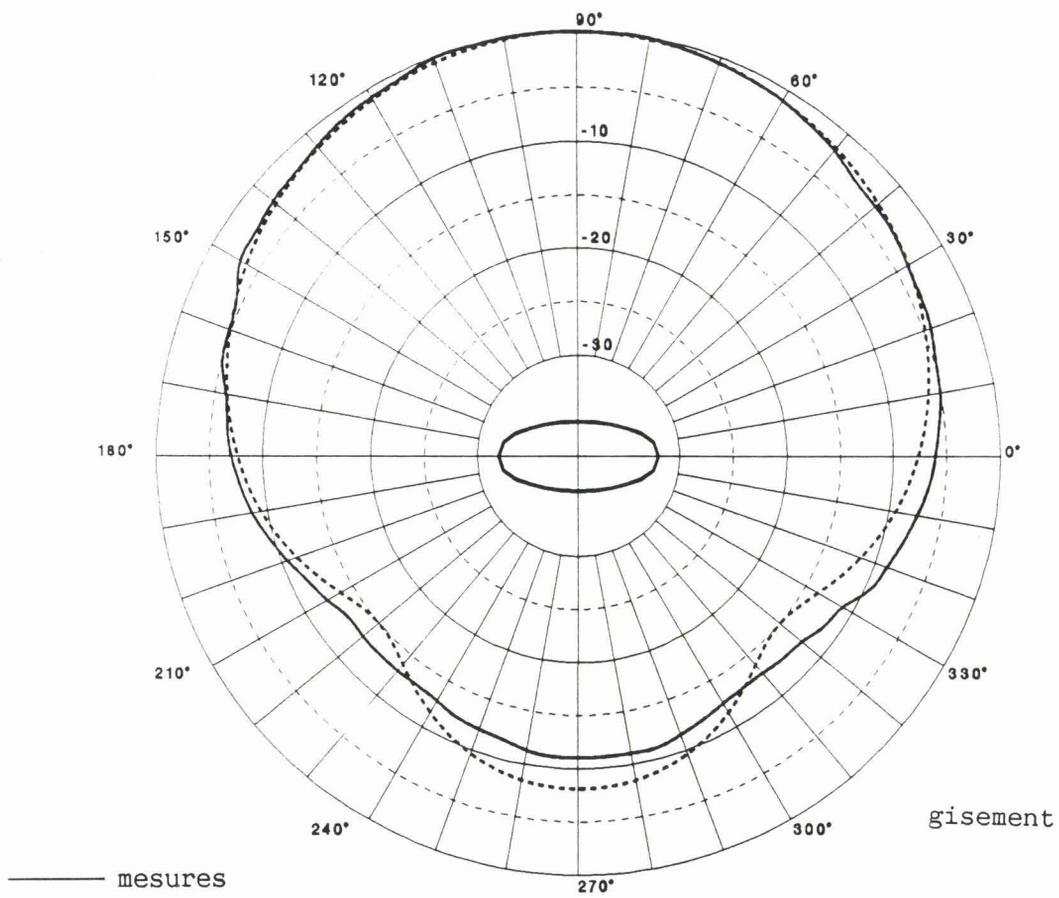


figure IV-27 : directivités à 1500 Hz



—— mesures  
 ---- résultats EQI

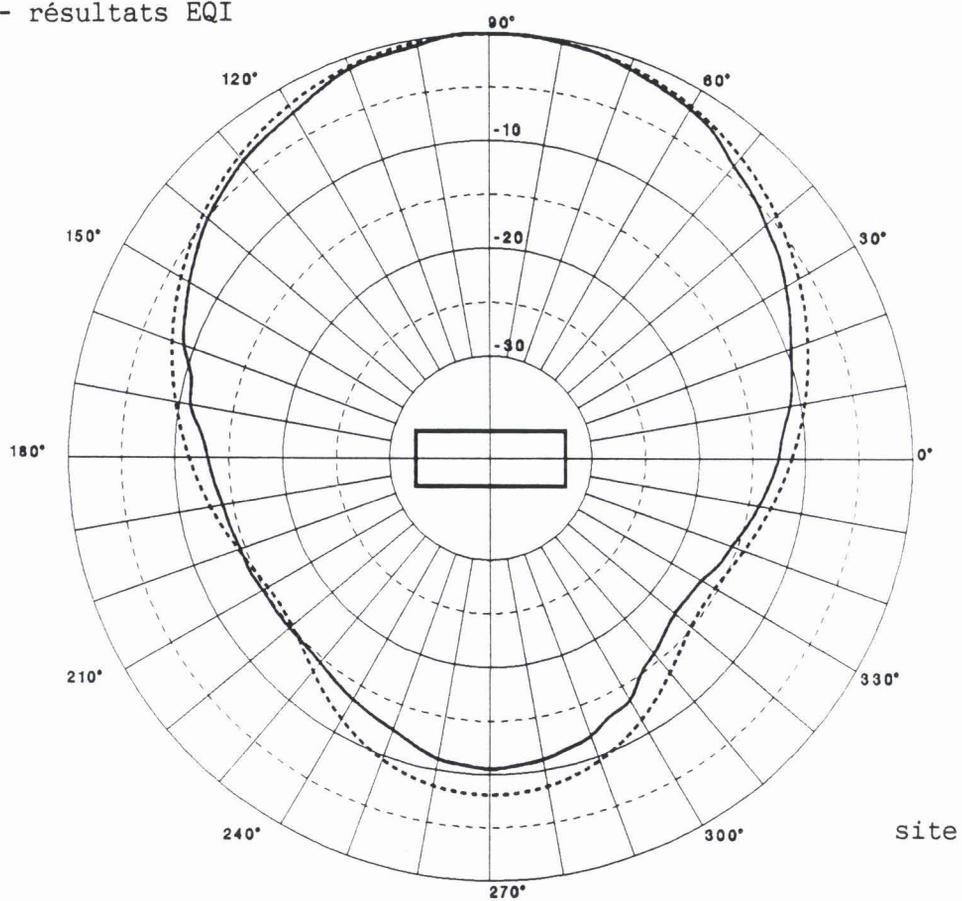


figure IV-28 : directivités à 1800 Hz

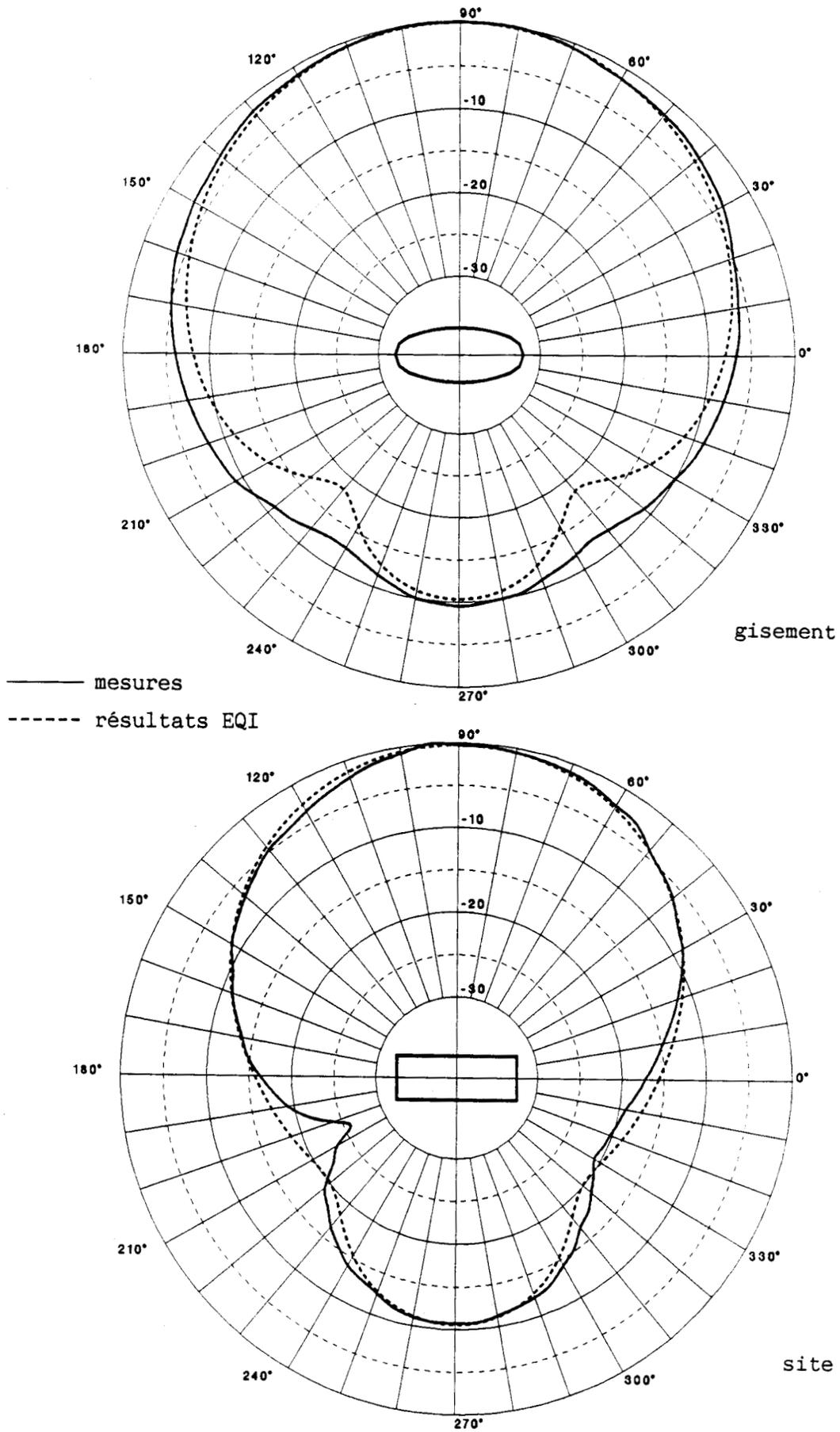


figure IV-29 : directivités à 2200 Hz

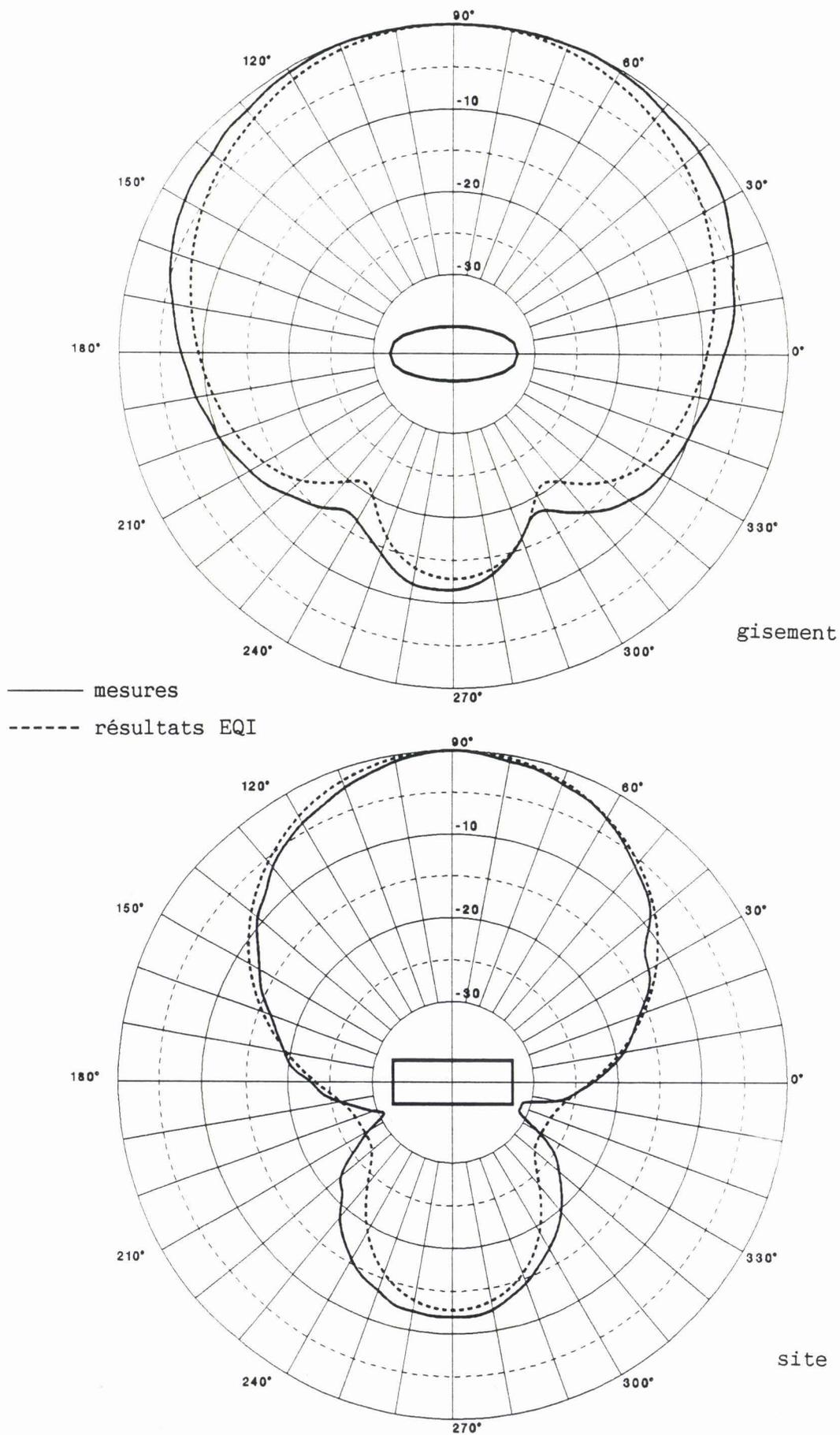


figure IV-30 : directivités à 2600 Hz

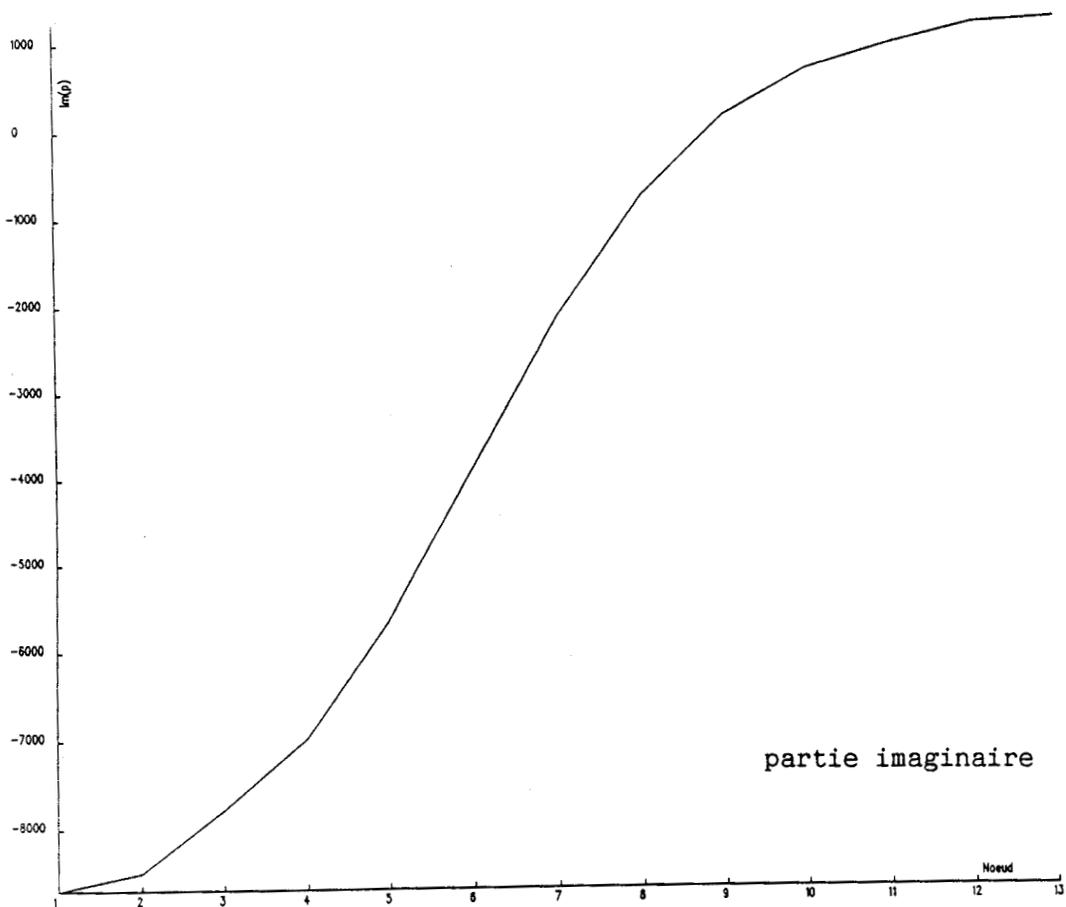
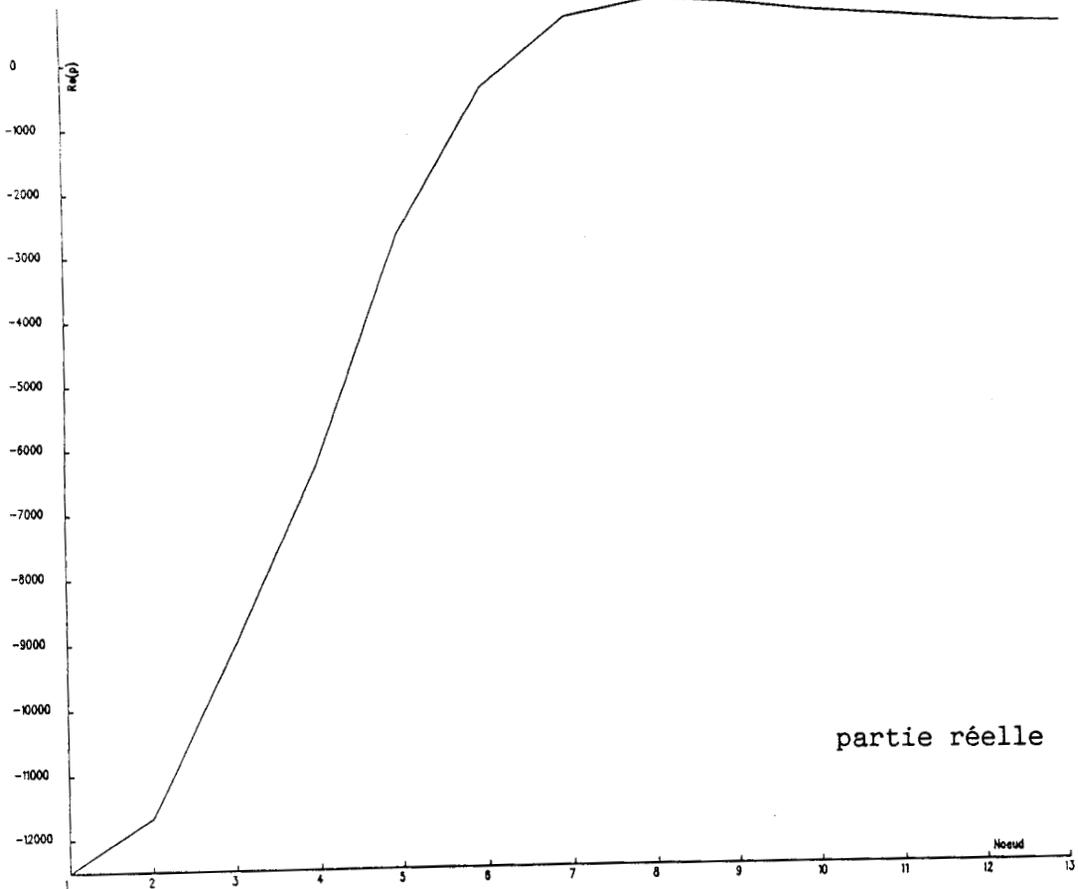


figure IV-31 : pression dans le plan (XOY) à 1500 Hz

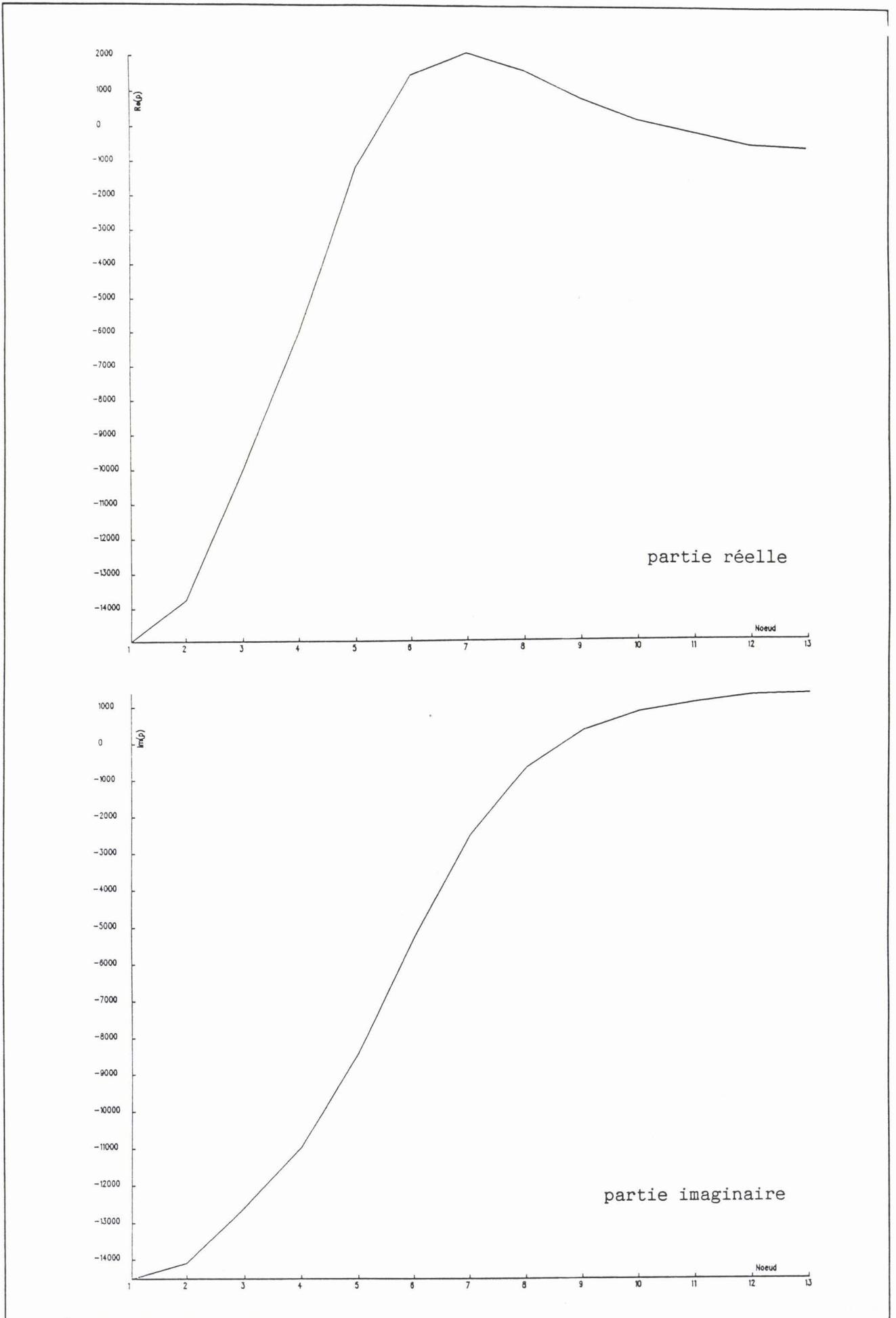


figure IV-32 : pression dans le plan (XOY) à 1800 Hz

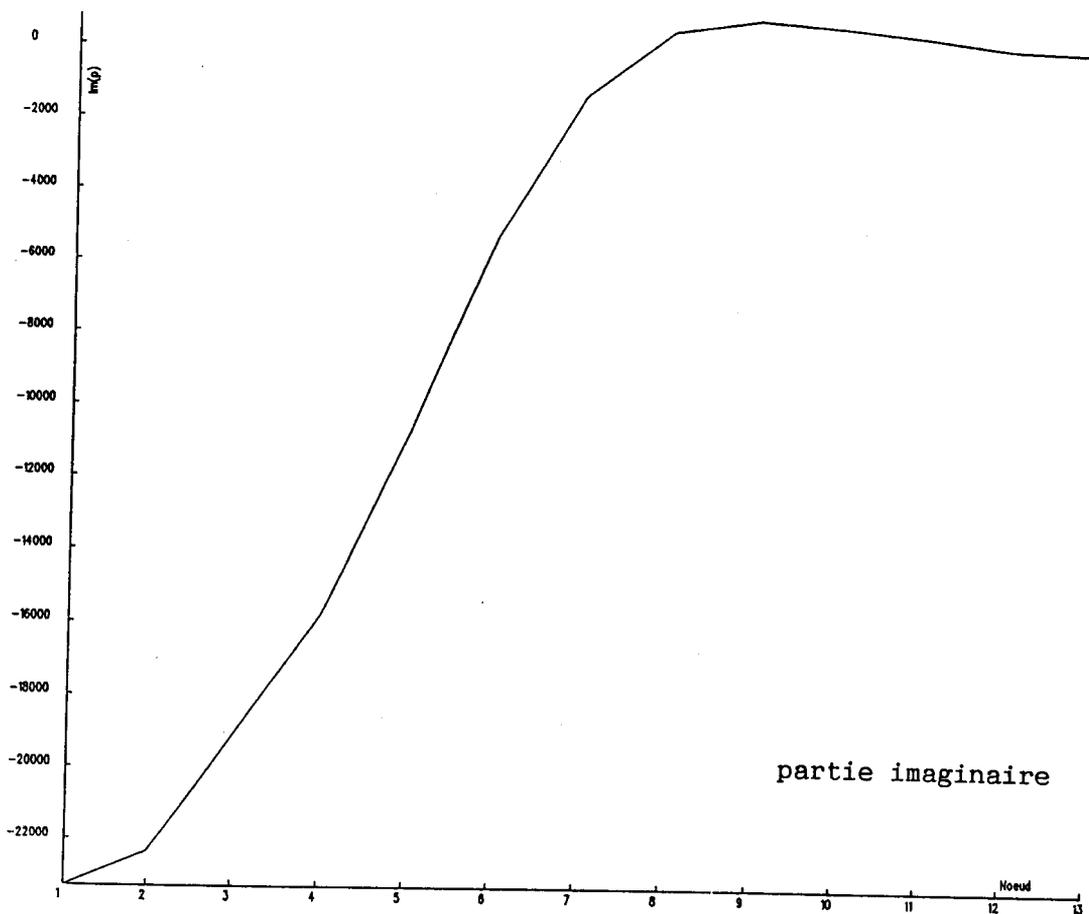
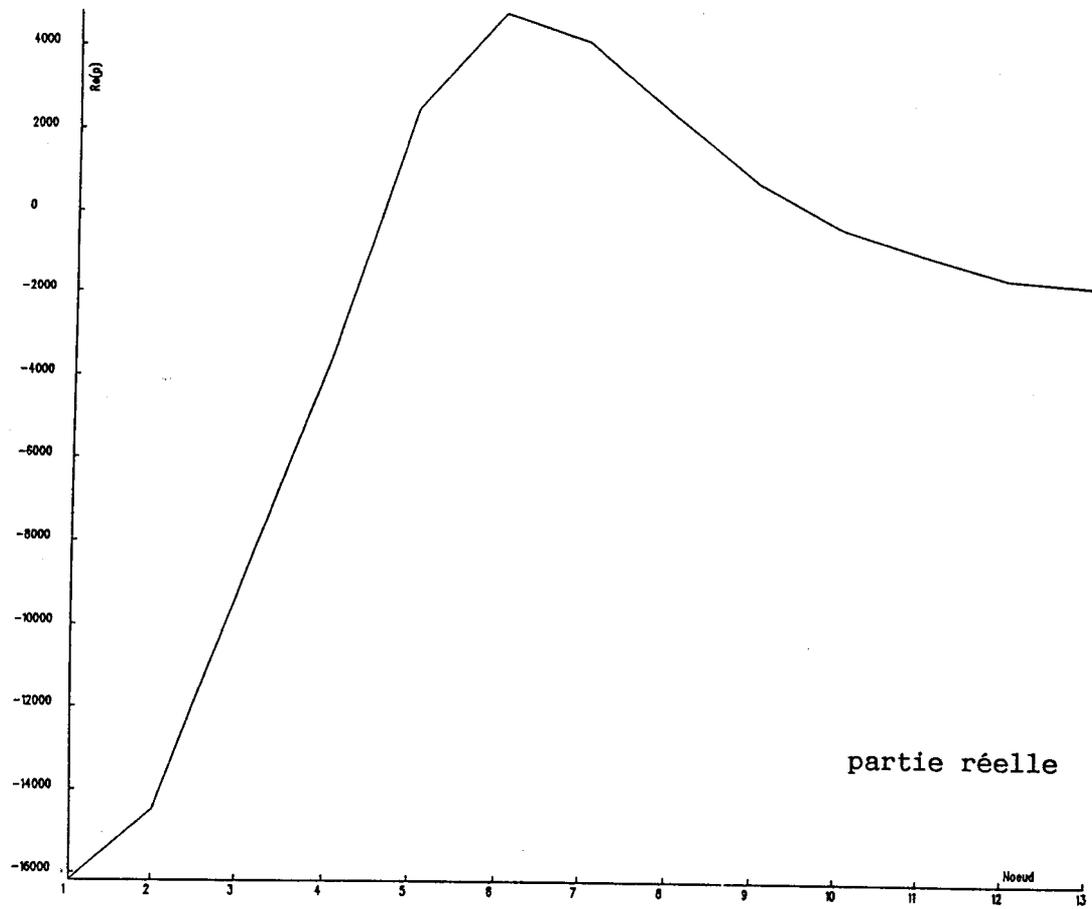


figure IV-33 : pression dans le plan (XOY) à 2200 Hz

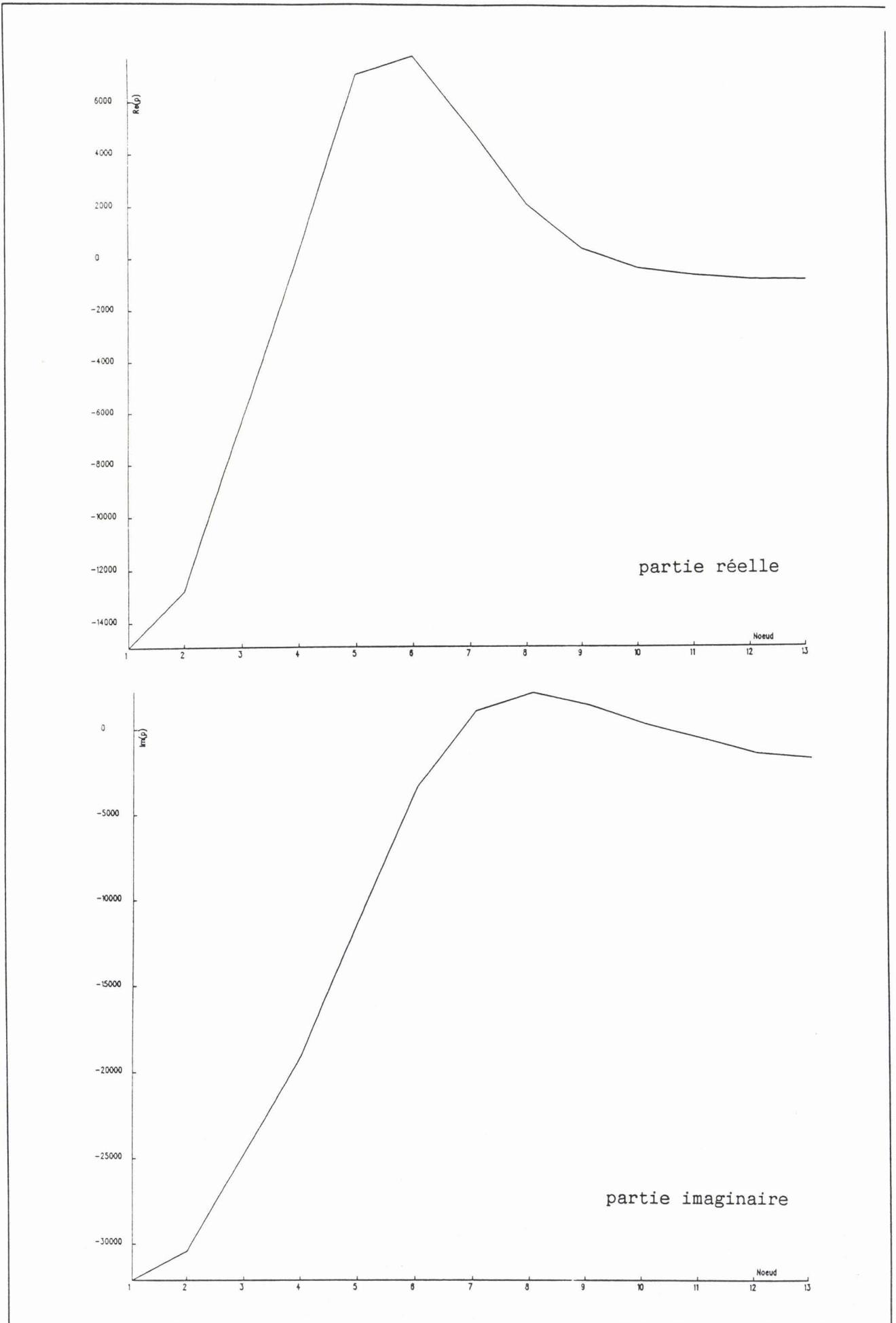


figure IV-34 : pression dans le plan (XOY) à 2600 Hz

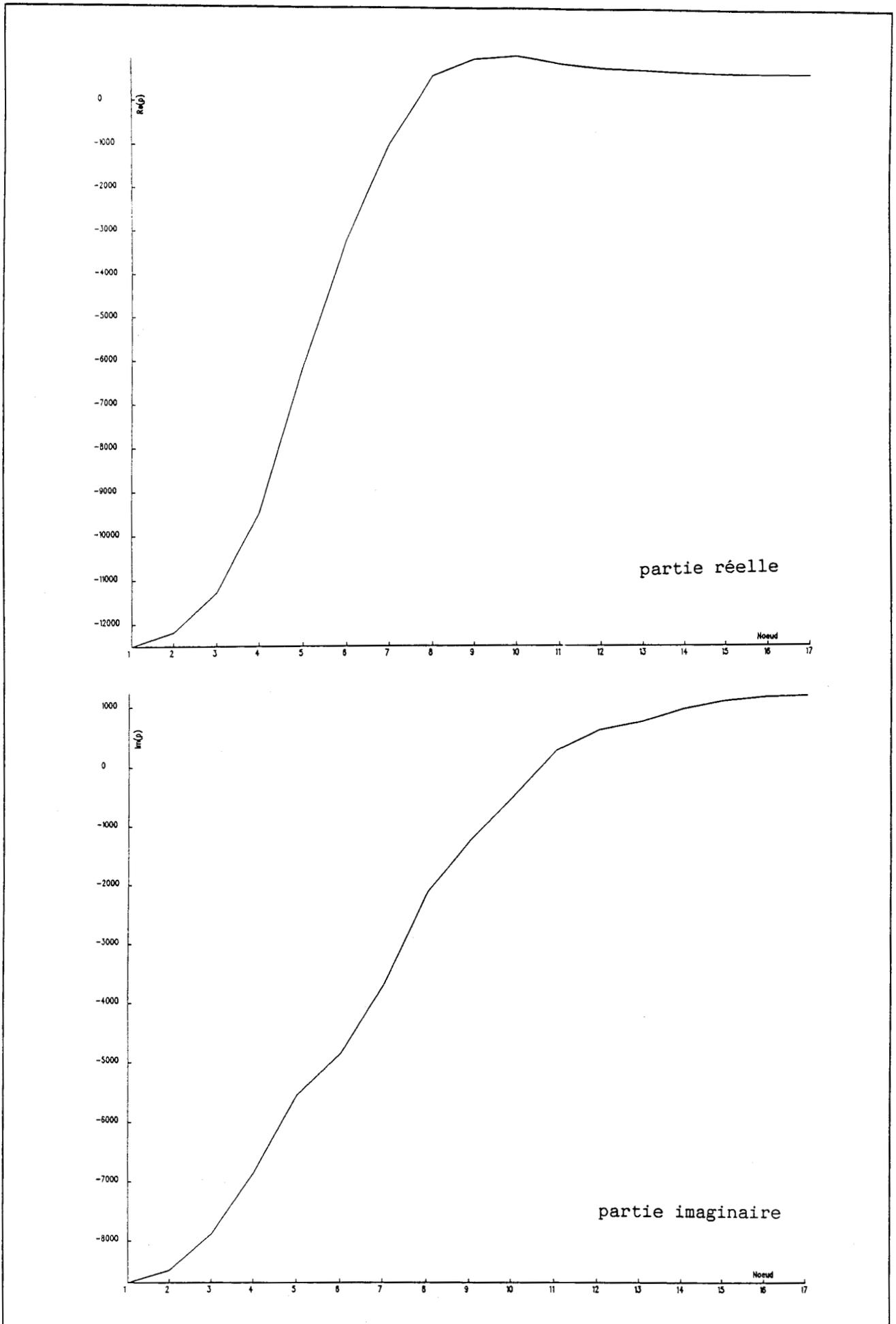


figure IV-35 : pression dans le plan (YOZ) à 1500 Hz

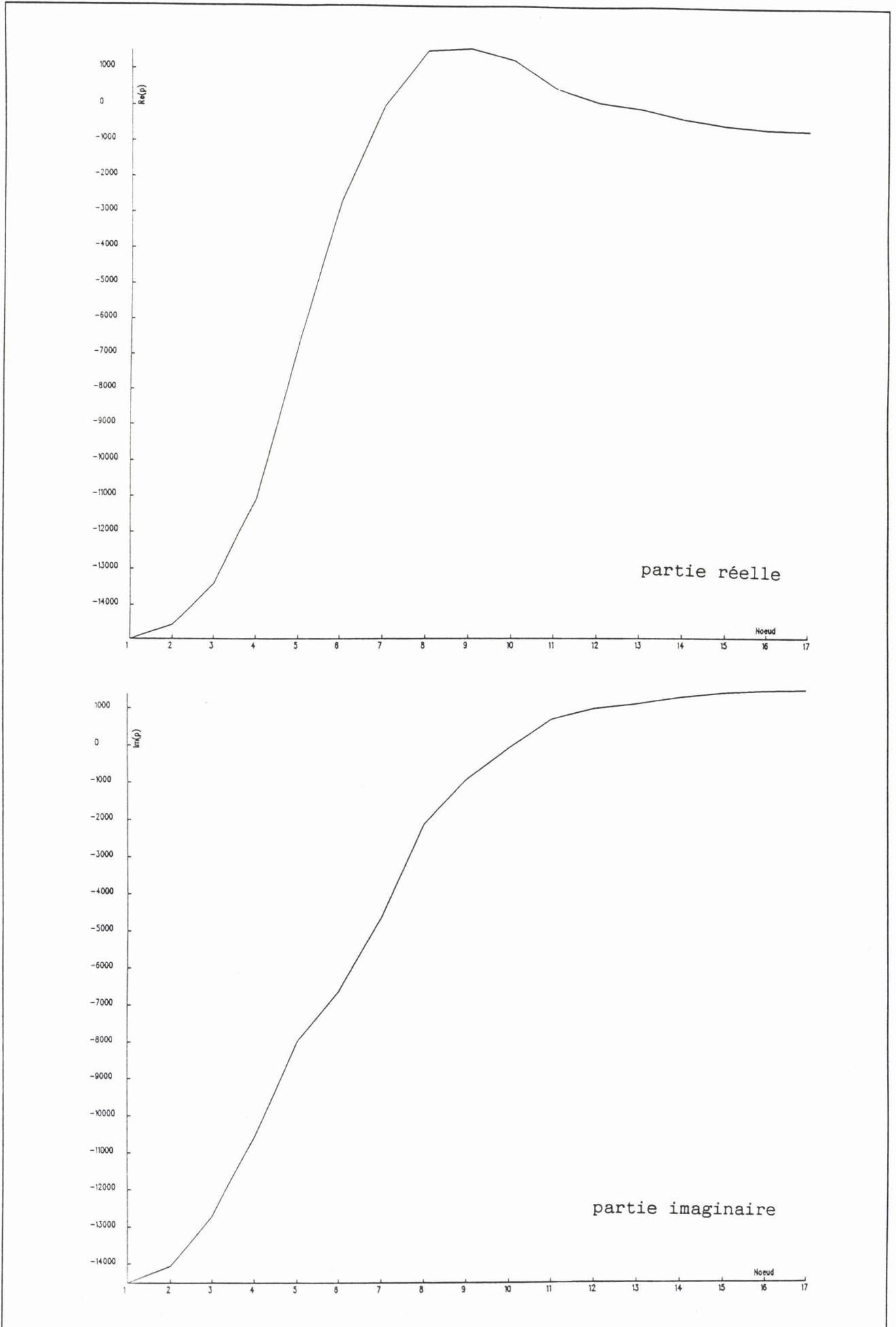


figure IV-36 : pression dans le plan (YOZ) à 1800 Hz

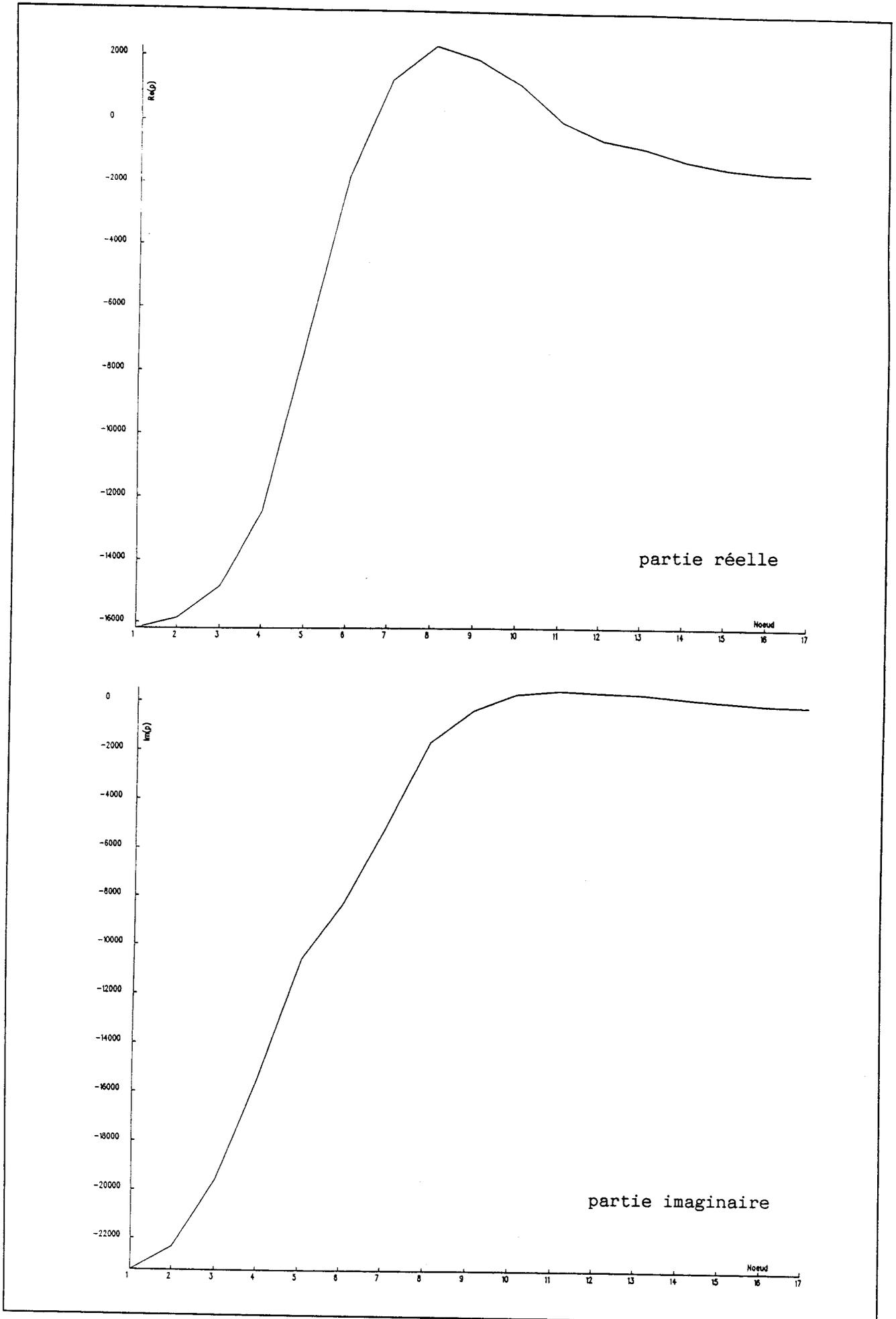


figure IV-37 : pression dans le plan (YOZ) à 2200 Hz

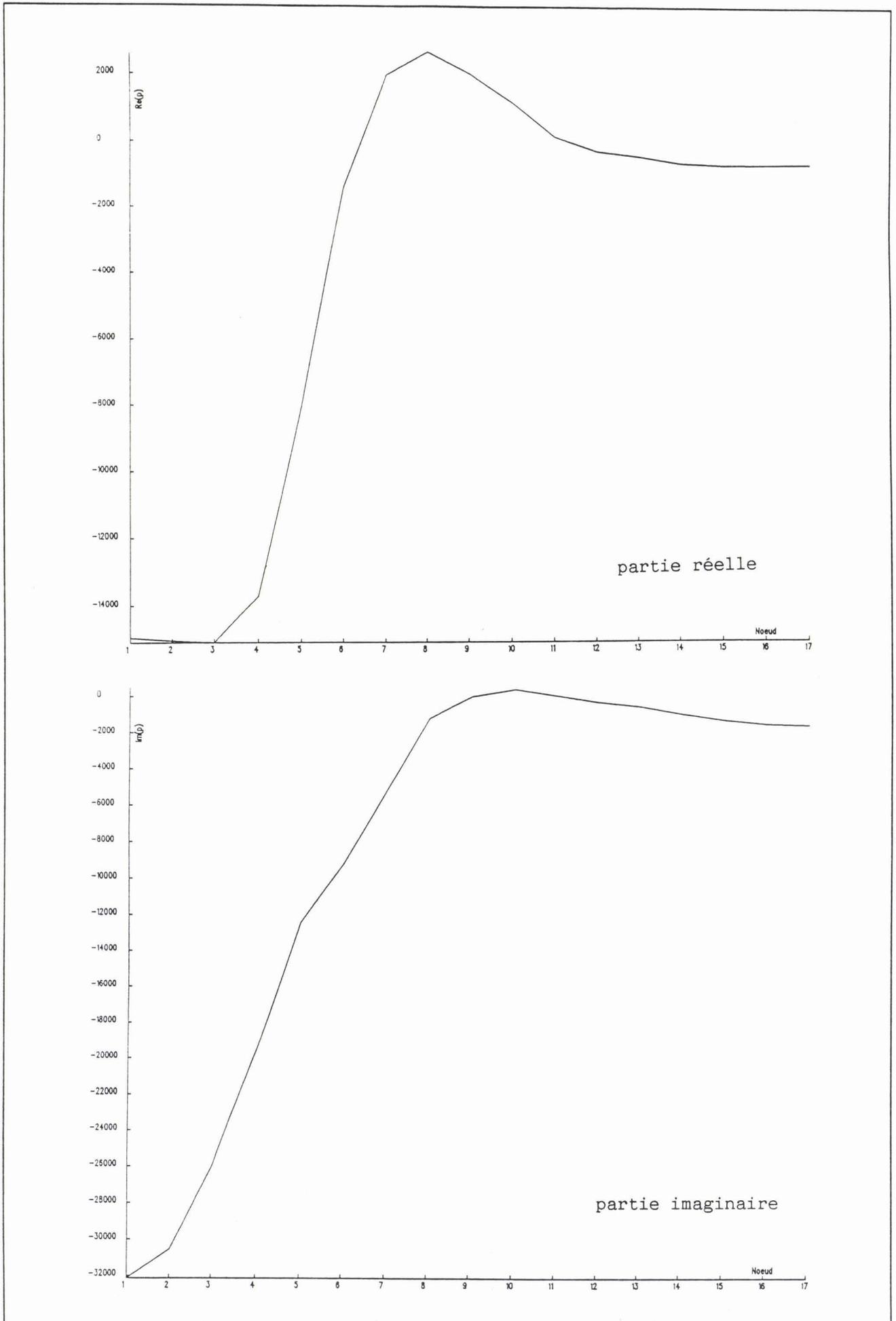


figure IV-38 : pression dans le plan (YOZ) à 2600 Hz

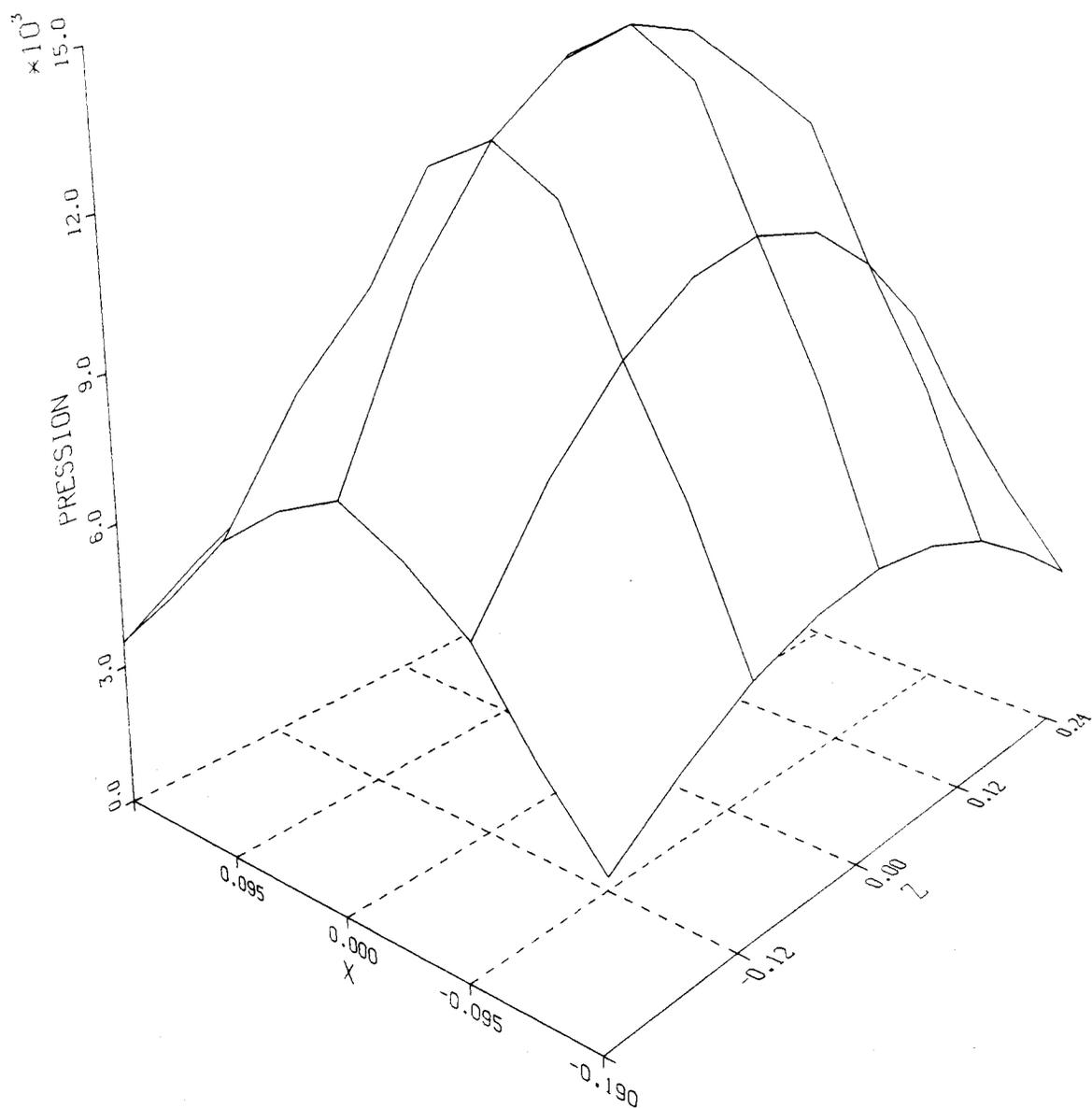


figure IV-39 : pression sur la face parlante à 1500 Hz

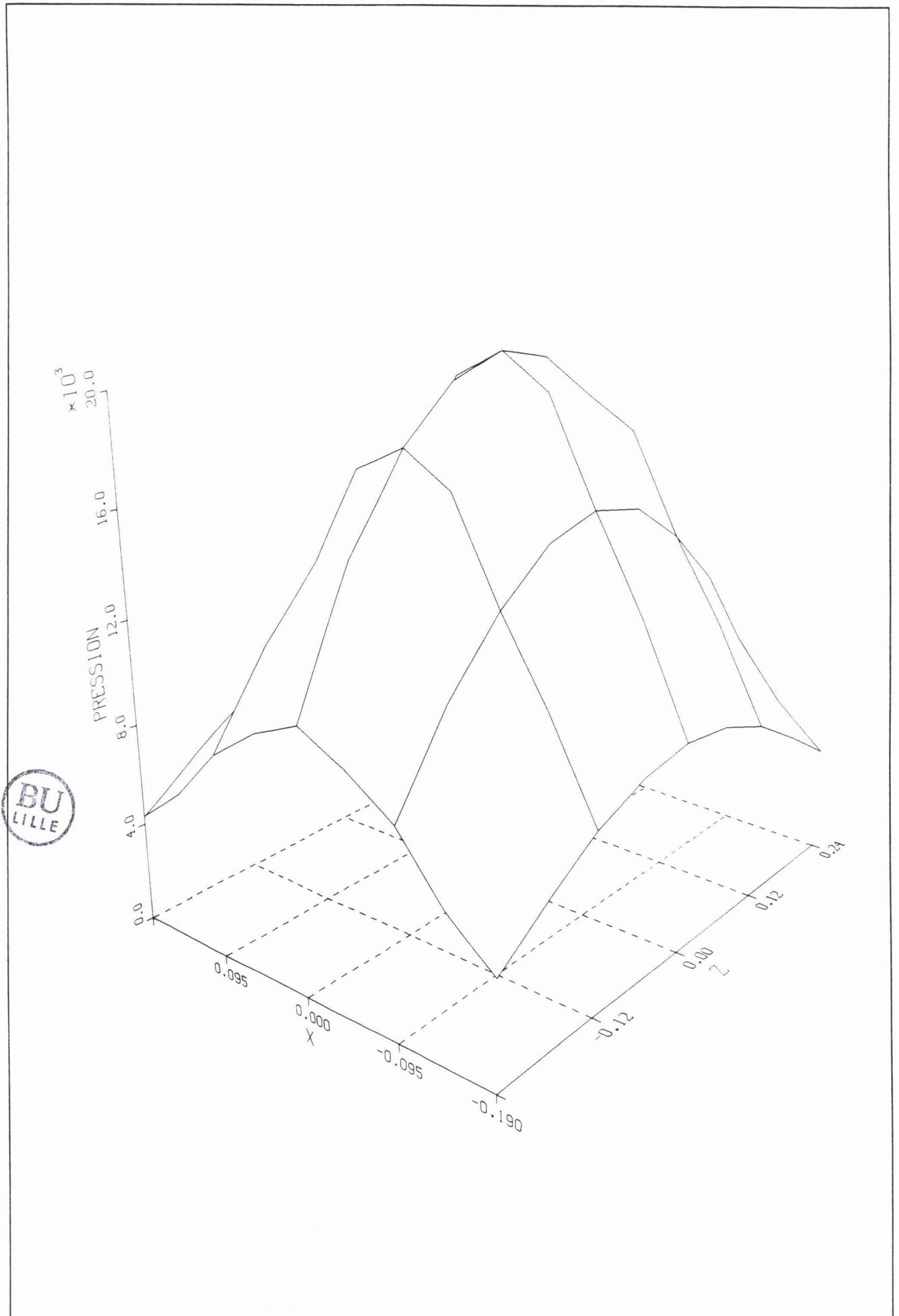


figure IV-40 : pression sur la face parlante à 1800 Hz

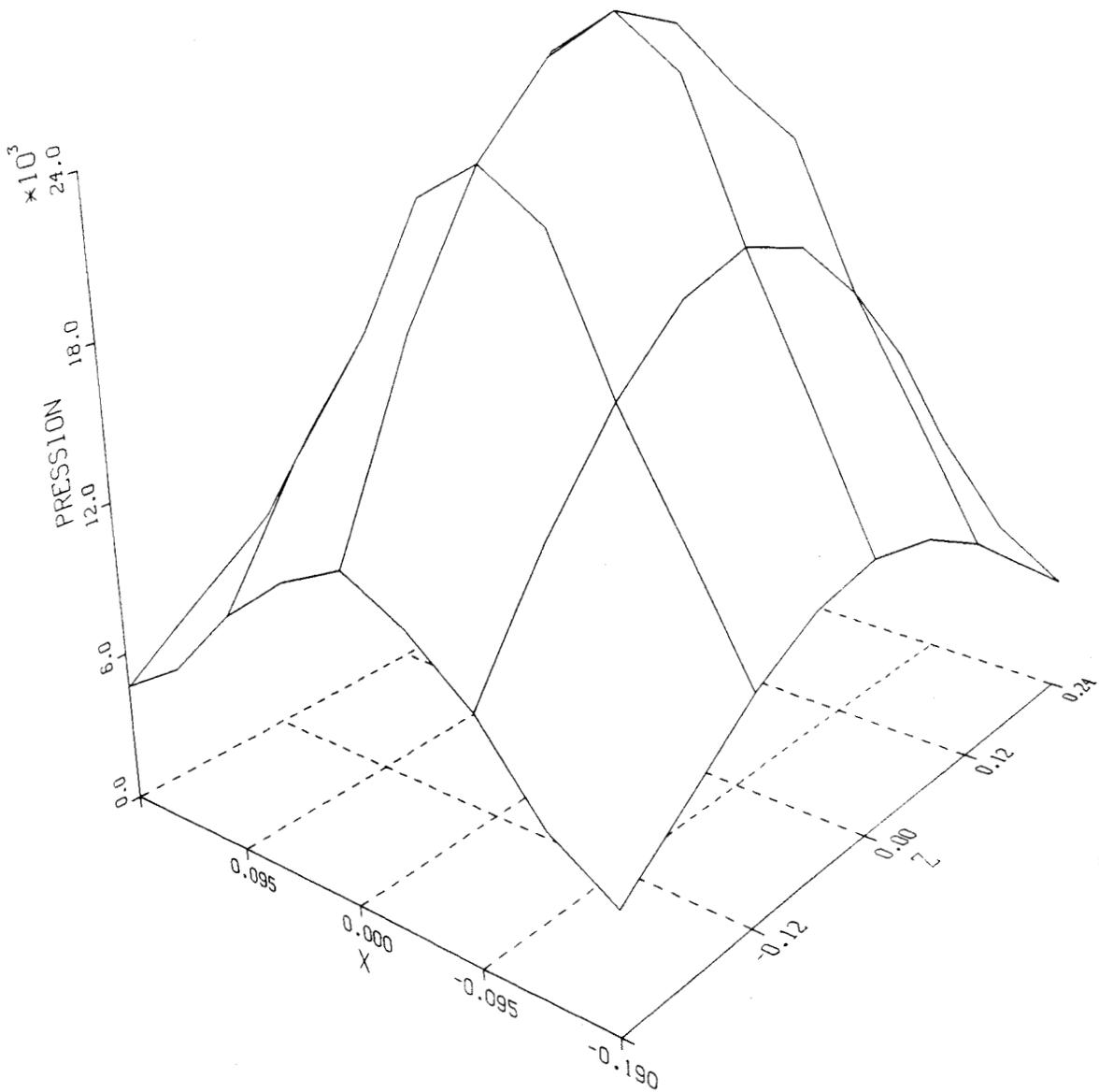


figure IV-41 : pression sur la face parlante à 2200 Hz

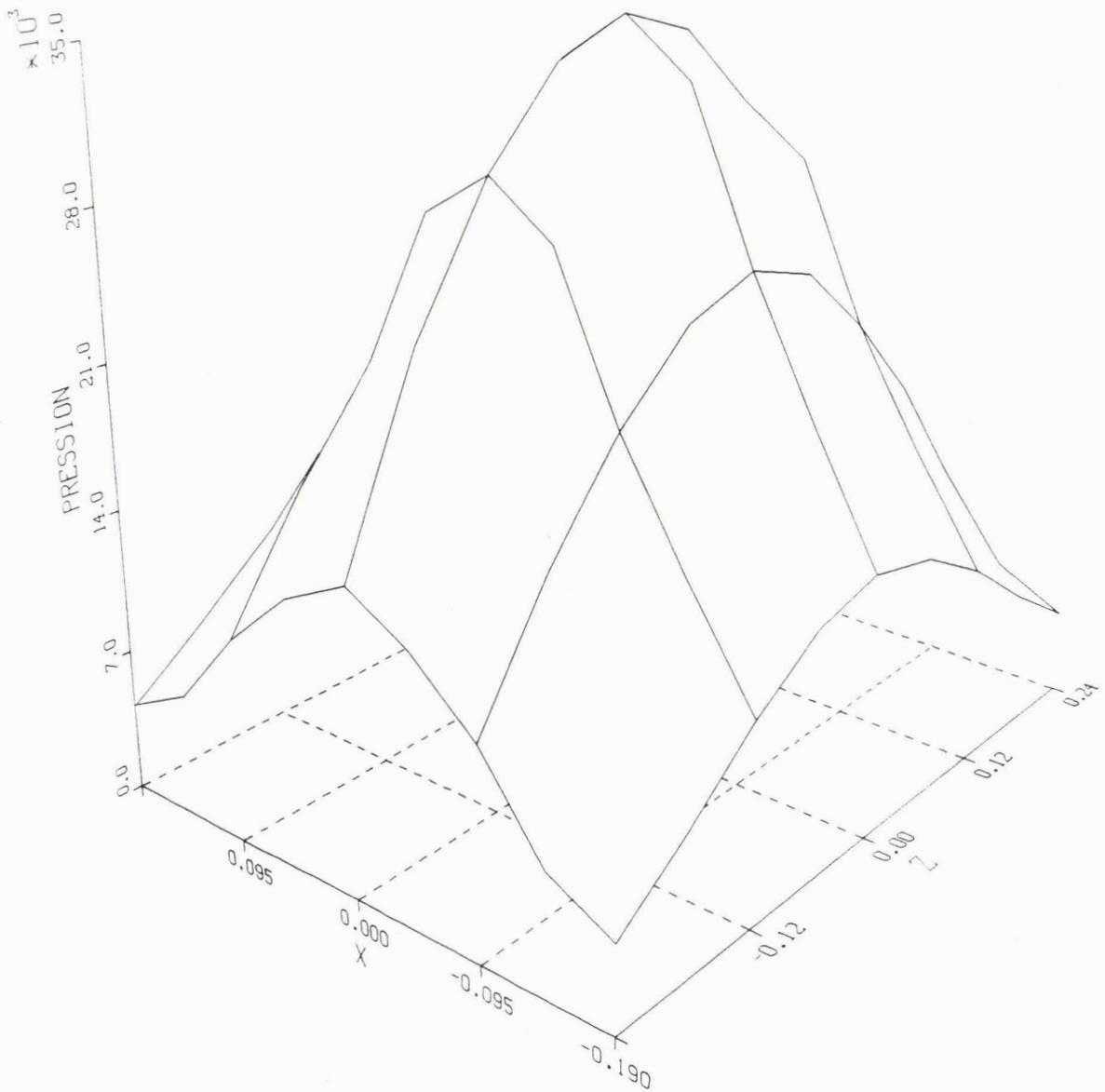


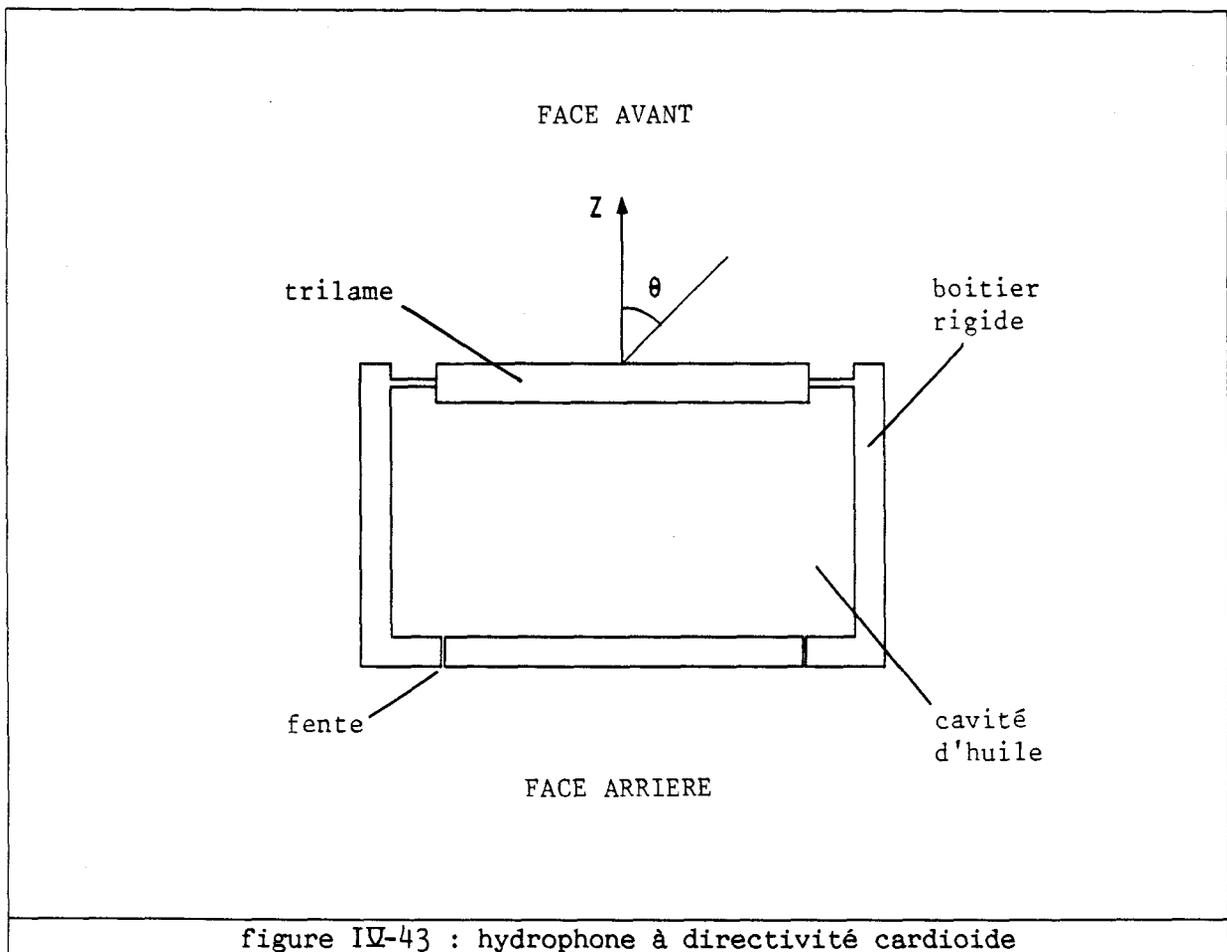
figure IV-42 : pression sur la face parlante à 2600 Hz

Cet accord étant noté, on remarque, conformément à l'attente, une directivité marquée dans l'axe principal d'émission. Les courbes et représentations tridimensionnelles confirment cette directivité. Sur ces dernières figures, une diminution rapide de la pression intervient quand on s'éloigne du milieu de la face parlante. On observe également une légère augmentation de la pression au point milieu de la face arrière, due à la superposition des ondes tangentielles.

#### IV - 5 MODELISATION D'UN HYDROPHONE CARDIOIDE

##### IV - 5.1 Généralités

Le récepteur électroacoustique abordé dans cette étude est un hydrophone à directivité cardioïde intrinsèque schématisé sur la figure IV-43. Les détails de ses caractéristiques et son fonctionnement sont donnés par M. RICHARD [93] et C. GRANGER [94].



Il est constitué des éléments suivants :

- un trilame piézoélectrique localisé sur la face avant, transformant l'énergie acoustique reçue en énergie électrique, et recouvert d'une couche de protection généralement en polyuréthane,
- une cavité d'huile,
- une fente annulaire située sur la face arrière constituant un système déphaseur.

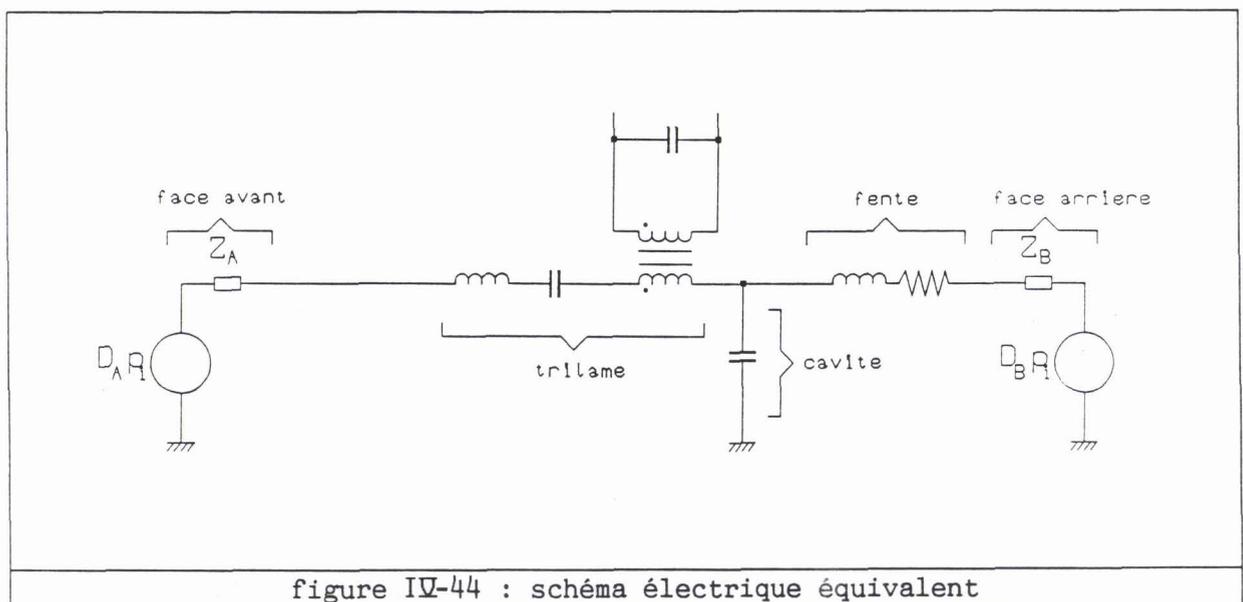
La sensibilité de l'hydrophone est définie classiquement par :

$$sh = \frac{V}{p_i} \quad (\text{IV-5})$$

où  $V$  est la tension apparaissant aux bornes de l'hydrophone en circuit électrique ouvert et  $p_i$  est la pression incidente en l'absence d'hydrophone. On dit que l'hydrophone est à directivité cardioïde intrinsèque quand la sensibilité en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$  suit une loi :

$$sh(\theta) = A (1 + \cos\theta) \quad (\text{IV-6})$$

où  $A$  est une constante. Le schéma électrique équivalent adopté est représenté sur la figure IV-44 [94].



où les termes  $D_A$  et  $D_B$  sont les coefficients d'autodiffraction face avant et arrière,  $Z_A$  et  $Z_B$  les impédances de rayonnement face avant et arrière. Dans la phase initiale de développement, les coefficients d'autodiffraction et l'impédance de rayonnement de la face avant ont été modélisés de façon simplifiée, et les simplifications réalisées ont été grossièrement validées par quelques mesures [94]. L'impédance de rayonnement  $Z_B$  de la face arrière a été négligée devant l'impédance de fente. Une première tentative de prise en compte plus rationnelle des coefficients de diffraction et des impédances de rayonnement à l'aide des équations intégrales et des éléments finis [95] a permis une meilleure description du problème, mais le calcul de la sensibilité de l'hydrophone n'a pu aboutir à cause des difficultés de modélisation numérique du réseau déphaseur. En conséquence, il a été décidé de revenir au schéma équivalent, en identifiant les paramètres du trilame et de la cavité à l'aide d'un modèle éléments finis et les termes de diffraction à l'aide des équations intégrales.

#### IV - 5.2 Nouvelle approche de résolution

##### IV - 5.2.1 *Définition des termes d'autodiffraction et des impédances de rayonnement par utilisation des équations intégrales*

En reprenant les travaux de L.L. FOLDY [59], l'équation intégrale du problème considéré est (cf (I-51)) :

$$p_i(\underline{r}) + \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p_i(\underline{r}')}{\partial n'} G(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' - \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} G(\underline{r}, \underline{r}') = p(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Gamma \cup \Omega_f \quad (\text{IV-7})$$

où  $G$  est la fonction de Green vérifiant les conditions aux limites homogènes sur la surface  $\Gamma$ . On peut condenser (IV-7) sous la forme suivante :

$$p(\underline{r}) = p_i(\underline{r}) + p_{di}(\underline{r}) + p_r(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Gamma \cup \Omega_f \quad (\text{IV-8})$$

où  $p_{di}$  est la pression diffractée quand le trilame est absolument immobile et  $p_r$  la pression rayonnée en l'absence d'onde incidente. On note  $p_b$  la pression bloquée somme des termes  $p_i$  et  $p_{di}$ . En notant  $\beta$  la vitesse normale normée par rapport à la vitesse moyenne sur la surface du trilame, on a [59] :

$$D_A p_i = \frac{1}{S} \int \int_S \bar{\beta}(\underline{r}) p_b(\underline{r}) dS$$

$$Z_A = \frac{1}{S^2} \int \int_S \bar{\beta}(\underline{r}) p_r(\underline{r}) dS$$
(IV-9)

où  $\bar{\beta}$  est le complexe conjugué de  $\beta$ . Le coefficient  $D_B$  est tel que  $D_B p_i$  est la valeur de la pression  $p$  sur la fente arrière.

#### IV - 5.2.2 Cas particulier de l'hydrophone

Il faut noter que, l'hydrophone étant considéré comme fixe, il n'y a pas d'effet d'entraînement du corps rigide dû à la pression de radiation. D'autre part, l'impédance de rayonnement de la face arrière est négligée par rapport à l'impédance de fente. Une analyse modale de l'hydrophone par ATILA fournit la vitesse normale  $v$  sur la surface  $S$  du trilame. Le débit alternatif  $U$  est alors :

$$U = S \bar{V}$$
(IV-10)

où  $\bar{V}$  est la vitesse normale moyenne sur le trilame :

$$\bar{V} = \frac{1}{S} \int \int_S v(\underline{r}) dS$$
(IV-11)

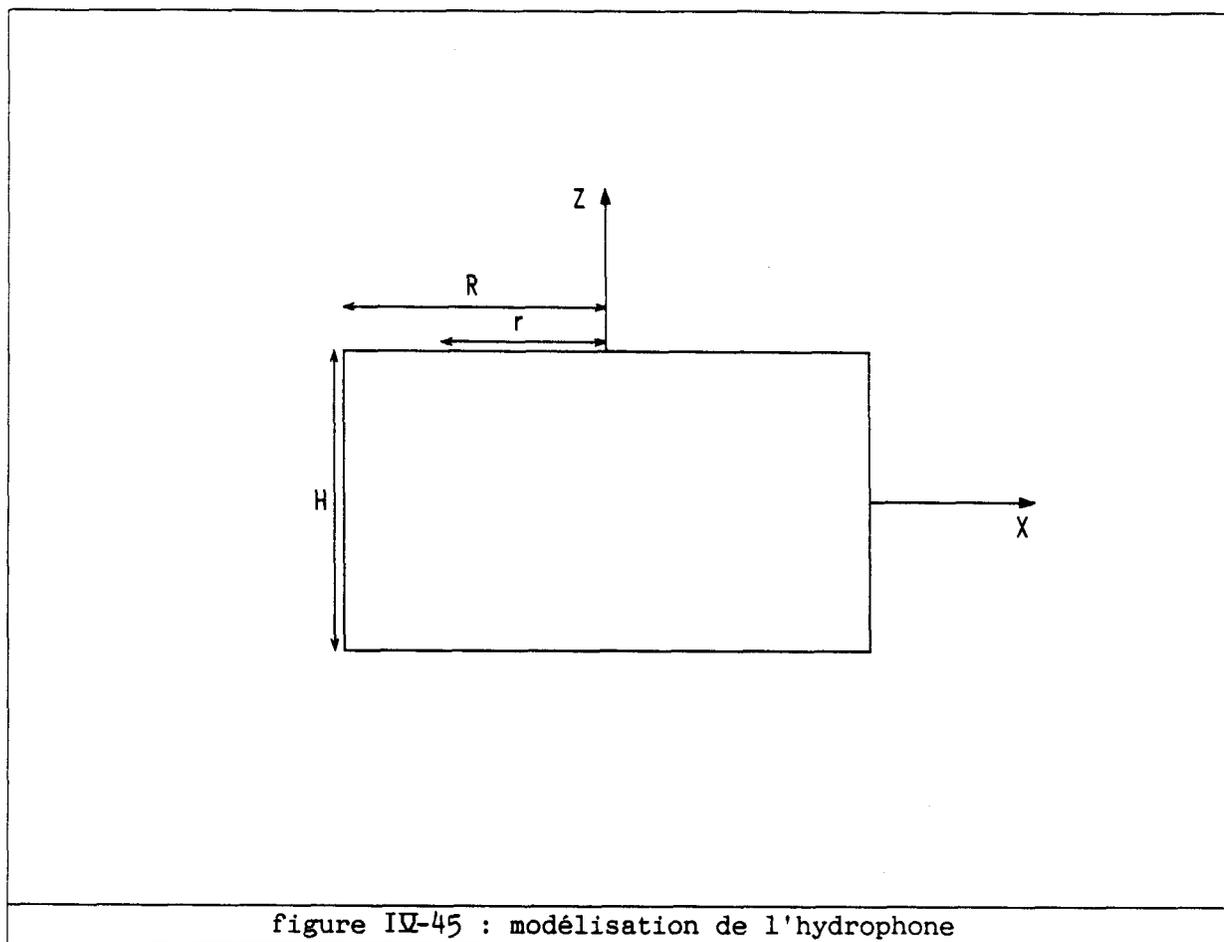
On introduit alors la vitesse normale normée  $\beta$  telle que :

$$\beta(\underline{r}) = \frac{1}{V} v(\underline{r}) \quad \underline{r} \in S$$
(IV-12)

Après immersion de l'hydrophone, on peut raisonnablement supposer que le type de variation de la vitesse sur  $S$  reste identique à  $\beta$ . Avec cette hypothèse, la résolution du problème peut alors être entreprise par la méthode des équations intégrales.

#### IV - 5.3 Résolution du problème par équations intégrales

L'hydrophone est assimilé à un cylindre de hauteur  $H$ , de rayon  $R$  et d'axe de révolution (OZ) (figure IV-45).  $r$  est le rayon du trilame.



où  $H = 0,0145$  m,  $R = 0,019$  m et  $r = 0,012$  m. La structure étant à symétrie axiale, le code HELNUL permet de déterminer la pression surfacique  $p_r$  à partir du champ de vitesse  $\beta$  donné par ATILA. L'impédance de rayonnement  $Z_A$  est alors calculée simplement par (IV-9). La résolution du problème de diffraction requiert l'utilisation du code EQI. L'onde incidente  $p_i$  étant dirigée suivant les  $Z$  décroissants, et toute la surface du cylindre étant parfaitement rigide, EQI fournit  $p_b$  sur  $S$  et, après application de (IV-9), le coefficient  $D_A$ . Le coefficient  $D_B$  est caractérisé après identification du produit  $D_B p_i$  avec la pression sur la fente arrière. Sur la figure IV-46 est représentée la variation du module des coefficients  $D_A$  et  $D_B$  en fonction de la fréquence. On constate que  $D_A$  est sensiblement égal à l'unité dans la partie inférieure de la gamme de fréquence étudiée. Quand la fréquence augmente,  $D_A$  croît et s'éloigne fortement de l'unité. Par contre,  $D_B$  reste proche de l'unité et prouve que la diffraction sur la face arrière est peu importante. Sur la figure IV-47 est comparée la partie réelle de l'impédance de rayonnement  $Z_A$  et la partie imaginaire de  $Z_A/\omega$ ,  $\omega$  étant la pulsation, avec les valeurs théoriques correspondantes au cas du piston bafflé dur. Ces courbes montrent

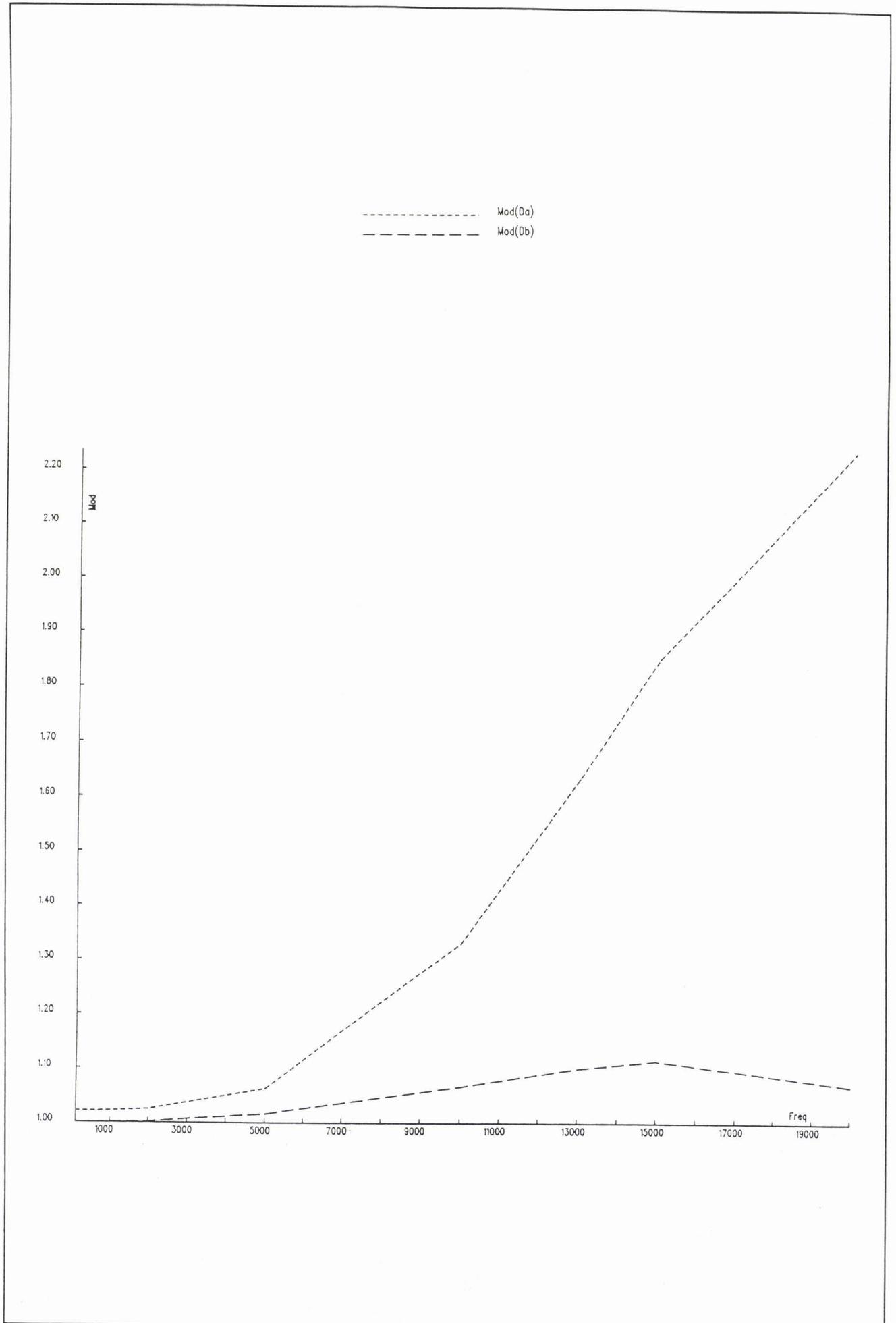


figure IV-46 : modules des coefficients d'autodiffraction

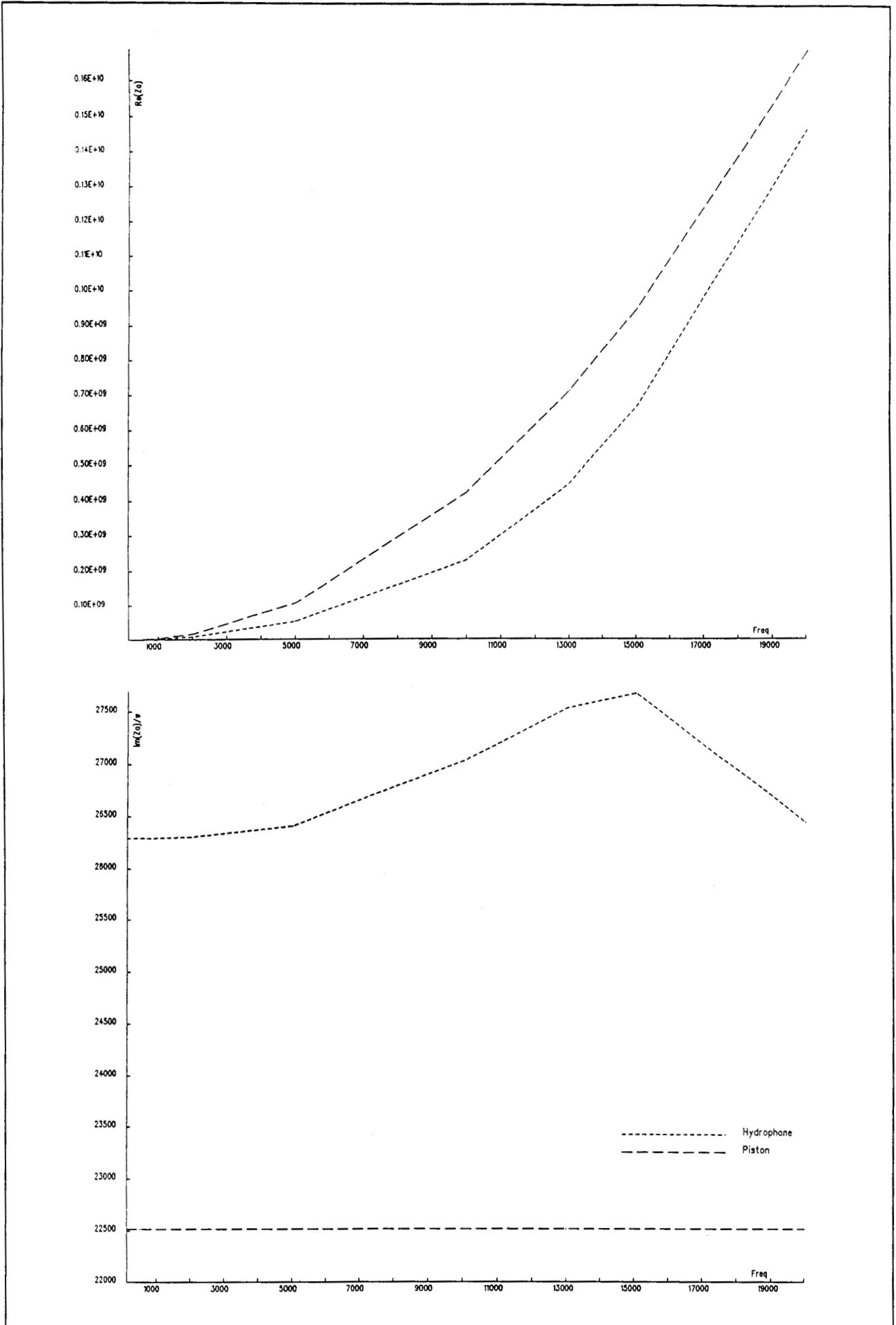


figure IV-47 : impédance de rayonnement de l'hydrophone et du piston

que l'analogie avec le piston bafflé dur donne une bonne idée du type de variation de l'impédance de rayonnement de l'hydrophone, mais ne permet pas de conclusion quantitative, du fait des fortes différences de niveau observées. D'autre part, des mesures ayant conduit à déterminer les valeurs expérimentales de  $Z_A$  ont montré un excellent accord avec le calcul [96].

En conclusion, les résultats obtenus dans ce paragraphe permettent une meilleure interprétation du comportement de l'hydrophone cardioïde intrinsèque étudié. Disposant ainsi d'un meilleur outil de simulation, on pourra prévoir beaucoup plus finement les propriétés de l'hydrophone et définir ainsi une structure optimale. En outre, étant donné la relative simplicité des calculs entrepris par équations intégrales, une automatisation de la démarche est envisageable en prévision de l'étude de plusieurs autres hydrophones.

## CONCLUSION

Le travail décrit dans cette thèse concerne le développement d'outils numériques permettant la modélisation du rayonnement et de la diffraction acoustique, leur validation à l'aide de nombreux exemples tests et leur application à plusieurs problèmes concrets associés à la conception de transducteurs SONAR. Il a conduit, après une contribution à la réalisation du code de résolution des problèmes à symétrie axiale HELNUL, à l'élaboration du code de résolution de problèmes tridimensionnels EQI. Ces codes, qui utilisent la représentation de Helmholtz extérieure, résolvent le problème des fréquences irrégulières par une technique de surdétermination faisant appel à des équations supplémentaires de champ nul. Le code EQI s'applique à des structures de forme géométrique quelconque.

Pour les deux codes, à partir des valeurs nodales de la composante normale du déplacement à l'interface fluide-structure, il est possible d'étudier le rayonnement d'une source acoustique et de déterminer la pression pariétale, la pression en tout point du fluide, le niveau d'émission et la directivité en champ lointain. Pour le code EQI, un problème de diffraction peut également être résolu, la surface du corps étant alors supposée parfaitement rigide et exposée à une onde incidente plane. Après constitution du maillage de surface, la résolution des problèmes considérés est menée par l'emploi de fonctions d'interpolation de type quadratique. Lorsque la valeur de la fréquence de travail l'exige, la combinaison équations intégrales-champ nul, mise en oeuvre et développée par B. STUPFEL dans l'hypothèse d'une symétrie axiale du problème, est utilisée. Dans les équations de champ nul, la variable pression est décomposée en séries convergentes de fonctions spéciales. Dans tous les cas, les différentes intégrales sont calculées par la formule de quadrature directe de Gauss-Legendre, et un traitement spécial est réservé aux intégrales dites diagonales. La résolution d'un système d'équations linéaires constitue l'étape finale et, quand le système est surdéterminé, une technique de moindres carrés est employée. Les solutions de ce système sont les valeurs nodales de la pression en surface, le calcul de la

directivité à l'infini ou de la pression dans le fluide étant effectué si nécessaire par un postprocesseur, sans difficulté supplémentaire.

Les tests réalisés sont nombreux et variés. Dans un premier temps, l'application du code HELNUL à la résolution de problèmes de rayonnement a permis de constater son efficacité. Ensuite, les améliorations de la méthode de Jones apportées par B. STUPFEL et notamment la délimitation précise de son domaine de validité, ont permis d'aborder le domaine des hautes fréquences. Dans un deuxième temps, l'application du code EQI au rayonnement ou à la diffraction associés à des structures tridimensionnelles a démontré son efficacité et sa souplesse d'utilisation, tout en permettant d'évaluer ses limites en termes de taille du problème informatique. Parallèlement, nous nous sommes intéressés à la résolution du problème complet fluide-structure pour lequel la structure est modélisée par la méthode des éléments finis alors que le domaine fluide est pris en compte entièrement par la méthode des équations intégrales. Le couplage entre ces deux méthodes se fait par l'intermédiaire d'une matrice impédance caractérisant les effets du fluide sur la surface mouillée. Concrètement, le développement d'un programme assurant l'interface entre les codes ATILA et EQI a été nécessaire. La faisabilité d'une telle approche a été établie dans un cas particulier.

Les outils utilisés et développés dans ce mémoire permettent une simulation numérique fiable et efficace de problèmes de rayonnement ou de diffraction acoustique pour des formes géométriques complexes. Néanmoins, quelques améliorations du code tridimensionnel sont d'ores et déjà à l'étude : la prise en compte des éventuelles symétries de la structure, la mise au point d'un algorithme de résolution par blocs, l'utilisation d'une technique de renormalisation des équations de champ nul inspirée de celle déjà opérationnelle dans le cas de problèmes à symétrie axiale, l'optimisation du calcul des intégrales apparaissant dans les équations supplémentaires de champ nul, une meilleure troncature de la série représentant la pression dans les équations de champ nul ou le remplacement de cette série par une approximation de la pression à l'aide des fonctions d'interpolation de type quadratique. Ces différentes techniques devraient permettre une diminution considérable du temps de calcul nécessaire et faciliter le traitement du cas des grandes structures et des problèmes d'interaction dans les antennes. A fortiori, ces améliorations permettront un élargissement vers le haut de la bande des fréquences de travail.

**BIBLIOGRAPHIE**

1. R.J. URICK,  
"Principles of Underwater Sound", Mc Graw-Hill ed. (1975).
2. "Special issue on SONAR", IEE Proc.-F, Vol. 131, N°3 (1984).
3. Undersea Defence Technology, Conf. Proc., Ed. Microwave exhibitions and publishers Ltd, Tunbridge Wells, England (1988).
4. P.M. MORSE, H. FESHBACH,  
"Methods of Theoretical Physics", Mc Graw-Hill ed., Vol. 1-2 (1953).
5. P.M. MORSE,  
"Vibration and Sound", Mc Graw-Hill ed. (1948).
6. D.H. STENZEL, O. BROSZE,  
"Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen", Springer-Verlag ed. (1958).
7. R. COURANT, D. HILBERT,  
"Methods of Mathematical Physics", Interscience ed., Vol. 1 (1953).
8. L.H. WILCOX,  
"Spherical means and radiation conditions", Arch. Rat. Mech. Anal., 3, 133-148 (1959).
9. L.H. WILCOX  
"A generalisation of the theorem of Rellich and Atkinson", Proc. Am. Soc., 271-276 (1955).
10. H.A. SCHENCK,  
"Improved integral formulation for acoustic radiation problems", J. Acoust. Soc. Am., 44, 41-58 (1967).

11. **G. CHERTOCK,**  
"Integral equation methods in sound radiation and scattering from arbitrary surfaces", Nav. Ship. and Res. Dev. Center, Washington DC, Report n°3538 (1971).
12. **J. GIROIRE,**  
"Comptes rendus de la journée d'étude S.E.E. sur les calculs de propagation et de diffraction par la méthode des éléments finis" (1979).
13. **D. COLTON, R. KRESS,**  
"Integral Equation Methods in Scattering Theory", Wiley-Interscience ed. (1983).
14. **P.C. WATERMAN,**  
"New formulation of acoustic scattering", J. Acoust. Soc. Am., 45, 1417-1429 (1969).
15. **P.C. WATERMAN,**  
"Symmetry, unitary, and geometry in electromagnetic scattering", Phys. Rev. D, 3, 825-839 (1971).
16. **O.C. ZIENKIEWICZ,**  
"The Finite Element Method in Engineering Science", Mc Graw-Hill ed. (1977).
17. **D.V. DEAN,**  
"Finite element study of acoustic wave", Thesis, US Naval Postgraduate School, Monterey (1970).
18. **J.T. HUNT, M.R. KNITTEL, C.S. NICHOLS, D. BARACH,**  
"Finite element approach to acoustic scattering from elastic structures", J. Acoust. Soc. Am., 57, 287-299 (1975).
19. **M.R. KNITTEL, C.S. NICHOLS, D. BARACH,**  
J. Acoust. Soc. Am., 58, 983-995 (1975).

20. **J.N. DECARPIGNY,**  
"Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piézoélectriques", Thèse de Doctorat d'Etat, Université des Sciences et Techniques de Lille (1984).
21. **C. YEH,**  
"Scattering of acoustic waves by a penetrable prolate spheroid. I. Liquid prolate spheroid", J. Acoust. Soc. Am., 42, 518-521 (1967).
22. **J.E. BURKE,**  
"Scattering by penetrable spheroids", J. Acoust. Soc. Am., 43, 871-875 (1967).
23. **J.L. BUTLER,**  
"Solution of acoustical-radiation problems by boundary collocation", J. Acoust. Soc. Am., 48, 325-336 (1970).
24. **R.F. MILLAR,**  
"The Rayleigh hypothesis and a related least-squares solution to scattering problems for periodic surfaces and other scatterers", Radio Science, 8, 785-796 (1973).
25. **T.L. GEERS,**  
"Doubly Asymptotic Approximations for transient motions of submerged structures", J. Acoust. Soc. Am., 65, 1500-1508 (1978).
26. **T.L. GEERS, C.A. FELIPPA,**  
"Doubly Asymptotic Approximations for vibration analysis of submerged structures", J. Acoust. Soc. Am., 73, 1152-1159 (1983).
27. **H. HUANG, Y.F. WANG,**  
"Asymptotic fluid structure interaction theories for acoustic radiation prediction", Int. Engng. Mech. Div. ASME AMD 64, PVP 78, (1984).
28. **J.B. KELLER,**  
"Diffraction by a convex cylinder", IRE Trans. Ant. Prop., Vol. AP-4, 312-321 (1956).

29. **J.B. KELLER,**  
"Diffraction by an aperture", J. Appl. Phys., Vol. 28, 426-444 (1957).
30. **J.B. KELLER,**  
"A geometrical theory of diffraction", Proc. of Symposia in Applied Mathematics, Mc Graw-Hill ed., Vol. 8, 27-52 (1958).
31. **R. BOSSUT,**  
"Modélisation de transducteurs piézoélectriques annulaires immergés par la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat-Ingénieur, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis (1985).
32. **P. TIERCE,**  
"Modélisation du transducteur Isabelle par la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat-Ingénieur, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis (1985).
33. **B. HAMONIC,**  
"Contribution à l'étude du rayonnement de transducteurs utilisant les vibrations de coque mince", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille (1987).
34. **K. ANIFRANI,**  
"Contribution à l'étude de structures piézoélectriques à l'aide de la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille (1988).
35. **J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, P. TIERCE, B. HAMONIC, B. TOCQUET, D. BOUCHER,**  
"Modélisation par la méthode des éléments finis du rayonnement de transducteurs piézoélectriques", 3ème Colloque DRET sur les tendances actuelles en Calcul de Structures, Pluralis éd. (1985).
36. **B. HAMONIC, R. BOSSUT, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, D. MOREL, P. TIERCE, B. TOCQUET, D. BOUCHER,**  
"Modal analysis of SONAR transducers using the finite element method", 11th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgique (1986).

37. J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, B. HAMONIC, R. BOSSUT, P. TIERCE, D. MOREL, D. BOUCHER, B. TOCQUET,  
"Finite element analysis of low frequency SONAR transducers", Proc. I.O.A., Vol. 9, Part 2, 42-51 (1987).
38. B. STUPFEL, A. LAVIE, C. GRANGER, R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY,  
"Implantation dans le code ATILA du couplage entre éléments finis et équations intégrales", convention de recherche n° C 83.48.826.163 avec la DCAN pour le GERDSM, premier rapport d'avancement (1987).
39. B. STUPFEL, A. LAVIE, J.N. DECARPIGNY,  
"Modélisation d'un hydrophone à directivité cardioïde et détermination de sa géométrie optimale", convention de recherche n° C 84.34.050.00.470.75.001 pour la DRET, second rapport d'avancement (1987).
40. B. STUPFEL, A. LAVIE, J.N. DECARPIGNY,  
"Combined integral equation formulation and null-field method for the exterior acoustic problem", J. Acoust. Soc. Am., 83, 927-941 (1988).
41. A. LAVIE, D. MOREL, B. STUPFEL, J.N. DECARPIGNY,  
"Analyse, à l'aide d'une méthode d'équations intégrales, de la diffraction d'une onde acoustique plane par une structure rigide tridimensionnelle", convention de recherche n° C 86.48.826.334 avec la DCAN pour le GERDSM, rapport d'avancement (1987).
42. E. GOURSAT,  
"Cours d'Analyse Mathématique", Ed. Gauthier-Villars, Vol. 3 (1942).
43. O.D. KELLOG,  
"Foundations of Potential Theory", Springer-Verlag ed. (1967).
44. V. SMIRNOV,  
"Cours de Mathématiques Supérieures", Ed. Mir Moscou, Vol. 2-4 (1975).
45. L.G. COPLEY,  
"Integral equation method for radiation vibrating bodies", J. Acoust. Soc. Am., 41, 807-816 (1966).

46. J.C. BOLOMEY, A. WIRGIN,  
"Numerical comparison of the Green's function and the Waterman and Rayleigh theories of scattering from a cylinder with arbitrary cross-section", Proc. IEE, 121, 794-804 (1974).
47. T. TERAJ,  
"On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods", J. Sound and Vibr., 69, 71-100 (1980).
48. P.J.T. FILIPPI,  
"Theoretical Acoustics and Numerical Techniques", Springer-Verlag ed. (1983).
49. W. TOBOCMAN,  
"Calculation of acoustic wave scattering by means of the Helmholtz integral equation. I", J. Acoust. Soc. Am., 76, 599-607 (1984).
50. A.F. SEYBERT, B. SOENARKO, F.J. RIZZO, D.J. SHIPPY,  
"An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimensions", J. Acoust. Soc. Am., 77, 362-368 (1985).
51. A.F. SEYBERT, B. SOENARKO, F.J. RIZZO, D.J. SHIPPY,  
"A special integral equation formulation for acoustic radiation and scattering for axisymmetric bodies and boundary conditions", J. Acoust. Soc. Am., 80, 1241-1247 (1986).
52. W. TOBOCMAN,  
"Extension of the Helmholtz integral equation method to shorter wavelengths", J. Acoust. Soc. Am., 80, 1828-1837 (1986).
53. W. TOBOCMAN,  
"Extension of the Helmholtz integral equation method to shorter wavelengths II", J. Acoust. Soc. Am., 82, 704-706 (1987).
54. A.F. SEYBERT, T.K. RENGARAJAN,  
"The use of CHIEF to obtain unique solutions for acoustic radiation using boundary integral equations", J. Acoust. Soc. Am., 81, 1299-1306 (1987).

55. P. MALBEQUI, S.M. CANDEL, E. RIGNOT,  
"Boundary integral calculations of scattered fields: application to a spacecraft launcher", J. Acoust. Soc. Am., **82**, 1771-1781 (1987).
56. D.S. JONES,  
"Integral equations for the exterior acoustic problem", Q. J. Mech. Appl. Math., ~~XXVII~~, 129-142 (1973).
57. A. DYMENT,  
"Introduction à la Mécanique des Fluides", Cours, U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Université des Sciences et Techniques de Lille (1976-77).
58. M. BRUNEAU,  
"Introduction aux Théories de l'Acoustique", publications de l'Université du Maine (1983).
59. L.L. FOLDY,  
"Theory of passive linear electroacoustic transducers with fixed velocity distribution", J. Acoust. Soc. Am., **21**, 595-604 (1949).
60. M.A. HAMDI,  
"Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains", Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Technologie de Compiègne (1982).
61. A.J. BURTON, G.F. MILLER,  
"The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems", Proc. R. Soc. London Ser. A, **323**, 201-210 (1971).
62. I.C. MATHEWS,  
"Numerical techniques for three-dimensional steady-state fluid-structure interaction", J. Acoust. Soc. Am., **79**, 1317-1325 (1986).
63. L.G. COPLEY,  
"Fundamental results concerning integral representations in acoustic radiation", J. Acoust. Soc. Am., **44**, 28-32 (1968).

64. **A. MESSIAH,**  
"Mécanique Quantique", Ed. Dunod, Vol. 1-2 (1964)
65. **I.S. GRADSHTEYN, I.M. RYZHIK,**  
"Table of Integrals Series and Products", Academic Press ed. (1965).
66. **W. TOBOCMAN,**  
"Comparison of the T-matrix and Helmholtz integral equation methods for wave scattering calculations", J. Acoust. Soc. Am., 77, 369-374 (1985).
67. **V.K. VARADAN, V.V. VARADAN, L.R. DRAGONETTE, L. FLAX,**  
"Computation of rigid body scattering by prolate spheroids using the T-matrix approach", J. Acoust. Soc. Am., 71, 22-25 (1982).
68. **V.K. VARADAN, V.V. VARADAN, J.H. SU, T.A.K. PILLAI,**  
"Comparison of sound scattering by rigid and elastic obstacles in water", J. Acoust. Soc. Am., 71, 1377-1383 (1982).
69. **G. KRISTENSSON, P.C. WATERMAN,**  
"The T matrix for acoustic and electromagnetic scattering by circular disks", J. Acoust. Soc. Am., 72, 1612-1625 (1982).
70. **V.K. VARADAN, V.V. VARADAN, S.J. TSAO, W.G. NEUBAUER,**  
"Scattering of acoustic waves by rigid cylindrical objects with sharp corners", J. Acoust. Soc. Am., 72, 1957-1964 (1982).
71. **T.A.K. PILLAI, V.V. VARADAN, V.K. VARADAN,**  
"Sound scattering by rigid and elastic infinite elliptical cylinders in water", J. Acoust. Soc. Am., 72, 1032-1037 (1982).
72. **R.L. WEAVER, YIH-HSING-PAO,**  
"Application of the transition matrix to a ribbon-shaped scatterer", J. Acoust. Soc. Am., 66, 1199-1206 (1979).
73. **G.C. GAUNAURD, M.F. WERBY,**  
"Interpretation of the three-dimensional sound fields scattered by submerged elastic shells and rigid spheroidal bodies", J. Acoust. Soc. Am., 84, 673-680 (1988).

74. R.H. HACKMAN,  
"The transition matrix for acoustic and elastic wave scattering in prolate spheroidal coordinates", J. Acoust. Soc. Am., 75, 35-45 (1984).
75. R.H. HACKMAN, D.G. TODOROFF,  
"An application of the spheroidal-coordinate-based transition matrix: The acoustic scattering from high aspect ratio solids", J. Acoust. Soc. Am., 78, 1058-1071 (1985).
76. CHIEF, "Combined Helmholtz Integral Equation Formulation".
77. B. STUFFEL, J.N. DECARPIGNY,  
"Analyse bibliographique des méthodes de calcul de champ de pression diffracté par un corps élastique ou non", Contrat de recherche n° 83/1085 avec la DRET (1984).
78. ATILA, "Analyse de Transducteurs par Intégration des équations de Laplace".
79. A. BAYLISS, M. GUNZBURGER, E. TURKEL,  
"Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions", ICASE Report n°80/1, NASA, Langley (1980).
80. R.J. BOBBER,  
"Underwater electroacoustic measurement", N.D.L. Techn. Report, Dpt. of Defense, USA (1970).
81. G. DELHOMMEAU, B. PESEUX, J.P. QUEVAT,  
"Natural frequencies of immersed plates evaluated by a mixed method. Finite element methode and boundary integral method", Proc. of the International Conference on Numerical Methods for Coupled Problems, Swansea (1981).
82. J.C. LACHAT, J.O. WATSON,  
"Effective numerical treatment of boundary integral equations : a formulation for three-dimensional elastostatics", Int. J. Num. Meth. Engng., 10, 991-1005 (1976).

83. G.W. BENTHIEN, DON BARACH,  
CHIEF, Users manual, Naval Ocean Systems Center, San Diego (1986).
84. D. LANGE, A. CHAUDOUET,  
"Application de la méthode des équations intégrales à la Mécanique",  
Cours Dpt. Mécanique du solide, CETIM, Senlis.
85. M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN,  
"Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications (1972).
86. A. LAVIE, D. MOREL,  
"Participation à l'écriture d'un code de résolution par équation  
intégrale", rapport interne, SINAPTEC (1987).
87. L.L. BERANEK,  
"Acoustics", Mc Graw-Hill ed. (1954).
88. D. LALISSE, D. BOUCHER,  
"Optimization of a low frequency transmitting array", J. Acoust. Soc.  
Am., 84, Supp. 1, D2 (1988).
89. R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY,  
"Finite element modeling of radiating structures using dipolar damping  
elements", Soumis à J. Acoust. Soc. Am. (1988).
90. GERDSM, Groupe Techniques d'Emission, Procès-verbal n° 88-152 (1988).
91. M. FAVRE, P. TIERCE, J.N. DECARPIGNY,  
"Définition d'un transducteur basse fréquence à matériaux  
piézoélectriques", Convention de recherche n°C 86.48.826.344 avec la  
DCAN-Toulon pour le GERDSM, commande n°11, rapport final (1987).
92. A. LAVIE, K. ANIFRANI, J.N. DECARPIGNY,  
"Etude du rayonnement acoustique du flexionnel monoface par une  
formulation intégrale", Convention de recherche n°C 86.48.826.334 avec la  
DCAN pour le GERDSM, commande n°16, rapport d'avancement (1988).

93. **M. RICHARD,**  
"Etude de la faisabilité d'un hydrophone unidirectionnel", Thèse de 3ème Cycle, Université de Provence Aix Marseille (1979).
94. **C. GRANGER,**  
"Etude et réalisation d'hydrophones miniatures directifs", Mémoire du CNAM de Lille (1983).
95. **B. STUFFEL, C. GRANGER, J.N. DECARPIGNY,**  
"Autodiffraction d'un hydrophone directif. Calcul du champ acoustique", Contrat de recherche n° 83/1085 avec la DRET (1984).
96. **C. GRANGER, G. HAW, K. ANIFRANI, A. LAVIE, J.N. DECARPIGNY,**  
"Optimisation de la géométrie d'un hydrophone cardioïde", Convention de recherche n°C 87.48.813.505 avec la DCAN-Toulon pour le GERDSM, à paraître.

## LEGENDE DES FIGURES

### CHAPITRE I

Figure I-1 : Domaine acoustique.....	5
Figure I-2 : Piston circulaire dans un baffle dur infini.....	24
Figure I-3 : Coordonnées cartésiennes.....	29
Figure I-4 : Coordonnées cylindriques.....	30
Figure I-5 : Coordonnées sphériques.....	31
Figure I-6 : Limitation du volume fluide.....	47

### CHAPITRE II

Figure II-1 : Maillage d'une structure tridimensionnelle.....	54
Figure II-2 : Élément quadrilatère.....	57
Figure II-3 : Élément triangulaire.....	57
Figure II-4 : Maillage d'une structure à symétrie axiale.....	58
Figure II-5 : Découpage d'un quadrangle en deux parties.....	67
Figure II-6 : Découpage d'un quadrangle en trois parties.....	68
Figure II-7 : Découpage d'un triangle en deux parties.....	68
Figure II-8 : Discontinuité des normales.....	89

### CHAPITRE III

Figure III-1 : Géométries à symétrie axiale.....	99
Figure III-2 : Rayonnement du cylindre symétrique : $k_A = k_B = 2$ .....	104
Figure III-3 : Rayonnement du cylindre antisymétrique : $k_A = k_B = 2$ .....	106
Figure III-4 : Rayonnement du sphéroïde : $k_A = 2$ $k_B = 8$ .....	108
Figure III-5 : Rayonnement du cône : $k_R = 2$ $k_B = 8$ .....	110
Figure III-6 : Erreur maximale sur le cylindre quand $NEQCN = 0$ ou $n$ .....	113
Figure III-7 : Erreur maximale sur le cône quand $NEQCN = 0$ ou $10$ .....	114
Figure III-8 : Surfaces nodales du cylindre symétrique : $B = 6A$ .....	117
Figure III-9 : Surfaces nodales du cylindre antisymétrique : $B = 6A$ .....	120
Figure III-10 : Temps de calcul avec 0, 1 et $n$ équations de champ nul.....	122
Figure III-11 : Surfaces nodales de la sphère antisymétrique.....	124
Figure III-12 : Surfaces nodales du cylindre : $B = 10A$ .....	126
Figure III-13 : Partie réelle de la pression sur le cylindre..... symétrique et le 9ème $k$ à problème	128
Figure III-14 : Partie imaginaire de la pression sur le cylindre..... symétrique et le 9ème $k$ à problème	129
Figure III-15 : Partie réelle de la pression sur le cylindre..... antisymétrique et le 9ème $k$ à problème	131
Figure III-16 : Partie imaginaire de la pression sur le cylindre..... antisymétrique et le 9ème $k$ à problème	132

Figure III-17 : Description du parallélépipède rectangle.....	134
Figure III-18 : Maillages du cube.....	135
Figure III-19 : Maillage du cylindre.....	138
Figure III-20 : Maillages de la sphère.....	140
Figure III-21 : Partie réelle de la pression sur la sphère.....	143
Figure III-22 : Partie imaginaire de la pression sur la sphère.....	144
Figure III-23 : Partie réelle de la pression sur le cube pour $k_{111}$ .....	147
Figure III-24 : Partie imaginaire de la pression sur le cube pour $k_{111}$ .....	148
Figure III-25 : Partie réelle de la pression sur le cube pour $k_{121}$ .....	150
Figure III-26 : Partie imaginaire de la pression sur le cube pour $k_{121}$ .....	151
Figure III-27 : Maillages des parallélépipèdes rectangles.....	153
Figure III-28 : Partie réelle de la pression sur le parallélépipède..... rectangle dans le plan (XOZ)	155
Figure III-29 : Partie imaginaire de la pression sur le parallélépipède..... rectangle dans le plan (XOZ)	156
Figure III-30 : Partie réelle de la pression sur le parallélépipède..... rectangle dans le plan (XOY)	157
Figure III-31 : Partie imaginaire de la presssion sur le parallélépipède..... rectangle dans le plan (XOY)	158
Figure III-32 : Maillage de la sphère diffractante.....	161
Figure III-33 : Partie réelle de la pression sur la sphère par..... équations intégrales et pour $kR = 2$	162

Figure III-34 : Partie imaginaire de la pression sur la sphère par.....	163
équations intégrales et pour $kR = 2$	
Figure III-35 : Partie réelle de la pression sur la sphère par.....	164
équations intégrales et pour $kR = 4$	
Figure III-36 : Partie imaginaire de la pression sur la sphère par.....	165
équations intégrales et pour $kR = 4$	
Figure III-37 : Directivités de la sphère diffractante.....	166
Figure III-38 : Partie réelle de la pression sur la sphère par.....	168
champ nul et pour $kR = 2$	
Figure III-39 : Partie imaginaire de la pression sur la sphère par.....	169
champ nul et pour $kR = 2$	
Figure III-40 : Variation du déterminant au voisinage de la première.....	171
fréquence irrégulière	
Figure III-41 : Partie réelle de la pression sur la sphère pour.....	173
la première fréquence irrégulière	
Figure III-42 : Partie imaginaire de la pression sur la sphère pour.....	174
la première fréquence irrégulière	
Figure III-43 : Directivité de la sphère diffractante pour la.....	175
première fréquence irrégulière	
Figure III-44 : Sphère piézoélectrique.....	176
Figure III-45 : Comparaison des déplacements calculés en $10^{-10}$ m.....	178

## CHAPITRE IV

Figure IV-1 : Transducteur de type Tonpiliz.....	182
Figure IV-2 : Partie réelle de la pression sur l'axe (OZ).....	184

Figure IV-3 : Partie imaginaire de la pression sur l'axe (OZ).....	185
Figure IV-4 : Directivités du piston.....	186
Figure IV-5 : Partie réelle de la pression sur le piston.....	187
Figure IV-6 : Partie imaginaire de la pression sur le piston.....	188
Figure IV-7 : Antenne cylindrique.....	190
Figure IV-8 : Partie réelle de la pression sur le grand cylindre.....	193
Figure IV-9 : Partie imaginaire de la pression sur le grand cylindre.....	194
Figure IV-10 : Partie réelle de la pression sur l'antenne quand.....	195
B = 0,6295	
Figure IV-11 : Partie imaginaire de la pression sur l'antenne quand.....	196
B = 0,6295	
Figure IV-12 : Partie réelle de la pression sur l'antenne quand.....	197
B = 0,333	
Figure IV-13 : Partie imaginaire de la pression sur l'antenne quand.....	198
B = 0,333	
Figure IV-14 : Partie réelle de la pression sur l'antenne quand.....	199
B = 0,0365	
Figure IV-15 : Partie imaginaire de la pression sur l'antenne quand.....	200
B = 0,0365	
Figure IV-16 : Directivités de l'antenne cylindrique.....	201
Figure IV-17 : Transducteur flexionnel de classe I.....	204
Figure IV-18 : Modèle éléments finis du flexionnel.....	205

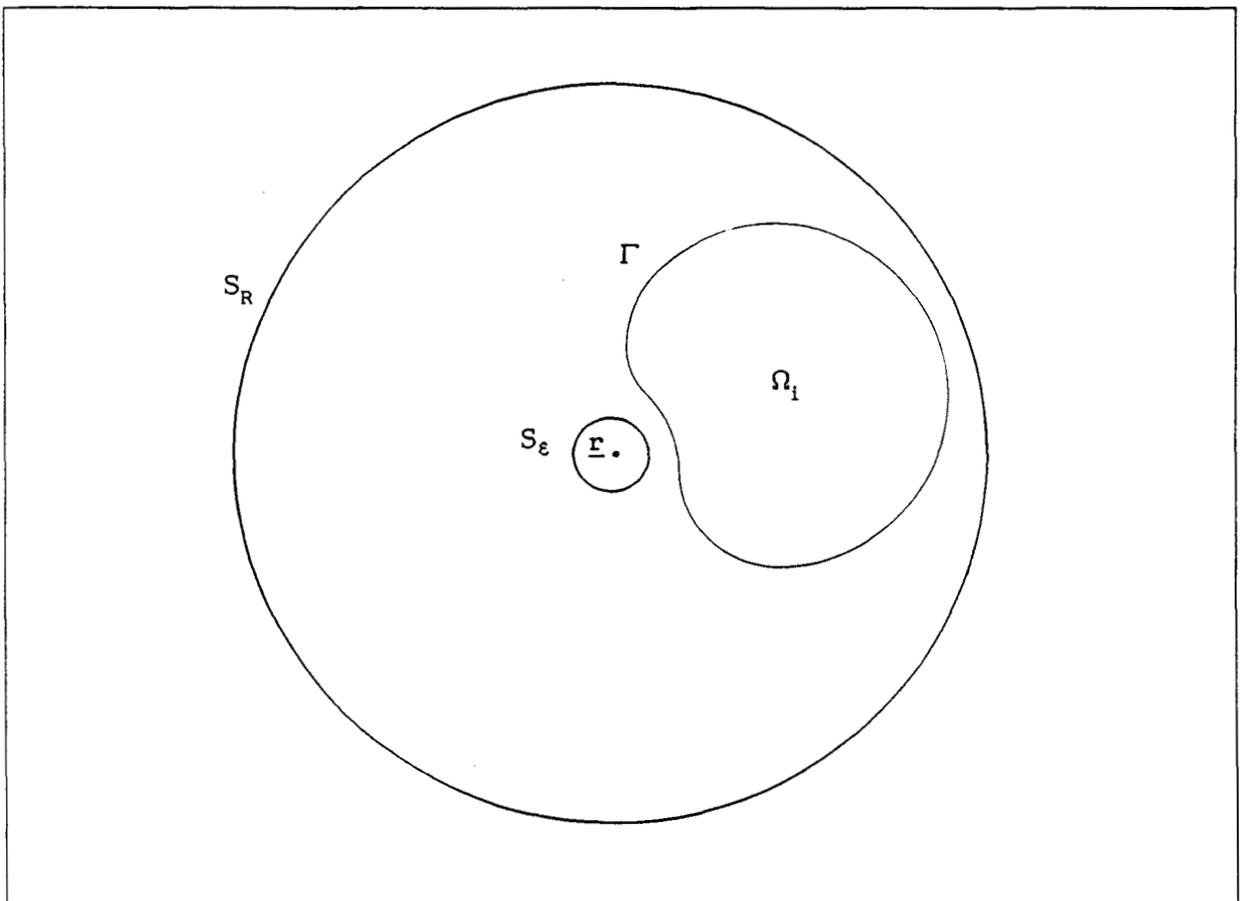
Figure IV-19 : Directivités du flexensionnel.....	207
Figure IV-20 : Pression sur la surface du flexensionnel à $0,95f_0$ .....	208
Figure IV-21 : Pression sur la surface du flexensionnel à $1,99f_0$ .....	209
Figure IV-22 : Pression sur la surface du flexensionnel à $2,41f_0$ .....	210
Figure IV-23 : Pression sur la surface du flexensionnel à $2,91f_0$ .....	211
Figure IV-24 : Projecteur unidirectionnel.....	213
Figure IV-25 : Numérotation des noeuds dans (XOY).....	215
Figure IV-26 : Numérotation des noeuds dans (YOZ).....	216
Figure IV-27 : Directivités à 1500 Hz.....	217
Figure IV-28 : Directivités à 1800 Hz.....	218
Figure IV-29 : Directivités à 2200 Hz.....	219
Figure IV-30 : Directivités à 2600 Hz.....	220
Figure IV-31 : Pression dans le plan (XOY) à 1500 Hz.....	221
Figure IV-32 : Pression dans le plan (XOY) à 1800 Hz.....	222
Figure IV-33 : Pression dans le plan (XOY) à 2200 Hz.....	223
Figure IV-34 : Pression dans le plan (XOY) à 2600 Hz.....	224
Figure IV-35 : Pression dans le plan (YOZ) à 1500 Hz.....	225
Figure IV-36 : Pression dans le plan (YOZ) à 1800 Hz.....	226
Figure IV-37 : Pression dans le plan (YOZ) à 2200 Hz.....	227
Figure IV-38 : Pression dans le plan (YOZ) à 2600 Hz.....	228

Figure IV-39 : Pression sur la face parlante à 1500 Hz.....	229
Figure IV-40 : Pression sur la face parlante à 1800 Hz.....	230
Figure IV-41 : Pression sur la face parlante à 2200 Hz.....	231
Figure IV-42 : Pression sur la face parlante à 2600 Hz.....	232
Figure IV-43 : Hydrophone à directivité cardioïde.....	233
Figure IV-44 : Schéma électrique équivalent.....	234
Figure IV-45 : Modélisation de l'hydrophone.....	237
Figure IV-46 : Modules des coefficients d'autodiffraction.....	238
Figure IV-47 : Impédance de rayonnement de l'hydrophone et du piston.....	239

## ANNEXE I

JUSTIFICATION THEORIQUE DE LA REPRESENTATION INTEGRALE DE HELMHOLTZ

Dans cette étude, la démonstration contenue dans l'article de GIROIRE [12] est reprise et modifiée dans le but de détailler la démarche qui conduit aux équations intégrales de Helmholtz. Il s'agit d'appliquer le théorème de Green (I-41) dans le volume  $V$  de surface  $S$  en identifiant la fonction  $p$  et la fonction nulle dans  $\Omega_1$ . L'espace de travail est schématisé de la manière suivante :



1er cas :  $\underline{r} \in \Omega_1 \cup \Gamma$

Le volume  $V$  est l'espace compris à l'intérieur de la sphère  $S_R$  de centre  $\underline{r}$  et

de rayon  $R$  auquel on retranche la sphère  $S_\varepsilon$  de centre  $\underline{r}$  et de rayon  $\varepsilon$  ainsi que le volume  $\Omega_1$  intérieur à  $\Gamma$ . Après avoir exploité l'équation de Helmholtz homogène au point  $\underline{r}'$  de  $V$  et l'équation associée (I-37), l'intégrale de volume du premier membre est réduite à :

$$- \int \int \int_V p(\underline{r}') \delta(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \quad (\text{A-I.1})$$

où la normale à la surface frontière  $S$  est dirigée vers l'extérieur du volume  $V$ . Or,  $\underline{r} \notin V$ , donc le premier membre est nul. Le développement du second membre conduit à sommer 3 intégrales de surface  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  respectivement sur  $S_R$ ,  $S_\varepsilon$  et  $\Gamma$ . On a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \int_{S_R} \left( p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \right) d\underline{r}' \\ I_2 &= \int \int_{S_\varepsilon} \left( p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \right) d\underline{r}' \\ I_3 &= \int \int_{\Gamma} \left( p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \right) d\underline{r}' \end{aligned} \quad (\text{A-I.2})$$

En respectant le sens des normales, on a :

$$0 = I_1 - I_2 - I_3 \quad (\text{A-I.3})$$

On précise le comportement de ces intégrales en y injectant la relation (I-39) et en sachant que sur une sphère de centre  $\underline{r}$  :

$$\frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikD}}{D} \left( ik - \frac{1}{D} \right) \quad (\text{A-I.4})$$

où :  $D = |\underline{r} - \underline{r}'|$ .

Sur la sphère  $S_R$ , il vient :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int \int_{S_R} \left\{ \frac{e^{ikR}}{R} \left( ikp(\underline{r}') - \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial r'} \right) - \frac{e^{ikR}}{R^2} p(\underline{r}') \right\} d\underline{r}' \quad (\text{A-I.5})$$

La condition de Sommerfeld conduit à :  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = 0$

Sur la sphère  $S_\varepsilon$  :

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int \int_{S_\varepsilon} \left\{ p(\underline{r}') \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left( ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial r'} \right\} d\underline{r}' \quad (\text{A-I.6})$$

si  $\underline{r} \notin \Gamma$  :

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad I_2 \sim \frac{1}{4\pi} \left\{ p(\underline{r}) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left( ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial r} \right\} 4\pi\varepsilon^2$$

$$\text{donc : } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = -p(\underline{r})$$

si  $\underline{r} \in \Gamma$  :

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad I_2 \sim \frac{1}{4\pi} \left\{ p(\underline{r}) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left( ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial r} \right\} \alpha(\underline{r}) \varepsilon^2$$

$$\text{donc : } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = -\frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r})$$

où  $\alpha(\underline{r})$  est l'angle solide extérieur défini par  $\Gamma$  en  $\underline{r}$ .

Donc :

$$\int \int_{\Gamma} \left( p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') \right) d\underline{r}' = \begin{cases} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Omega_f \\ \frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Gamma \end{cases} \quad (\text{A-I.7})$$

C'est la représentation de Helmholtz extérieure.

2ème cas :  $\underline{r} \in \Omega_i$

L'espace  $V$  est alors le volume intérieur à la sphère  $S_R$  auquel on retranche le volume  $\Omega_i \cup \Gamma$ . A l'aide d'un raisonnement similaire, on obtient :

$$\int \int_{\Gamma} \left( p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') \right) = 0 \quad \underline{r} \in \Omega_i \quad (\text{A-I.8})$$

C'est la représentation de Helmholtz intérieure.

## ANNEXE II

### CALCUL DES INTEGRALES DE HELMHOLTZ

Cette annexe comprend deux parties. La première présente le traitement des intégrales diagonales de Helmholtz quand le problème est tridimensionnel. La seconde traite du calcul des intégrales quand le problème admet une symétrie axiale.

#### A - II.1 Cas du problème tridimensionnel

On présente la technique utilisée quand le noeud de calcul  $\underline{r}$  appartient à l'élément d'intégration  $\Gamma_j$ . Deux alternatives sont possibles, suivant que l'élément est un élément quadrilatère à 8 noeuds ou un élément triangulaire à 6 noeuds.

##### A - II.1.1 *Eléments quadrilatères à 8 noeuds*

On détaille le calcul quand le noeud de calcul est situé au point de coordonnées réduites  $\xi = 0$  et  $\eta = 1$ . Cette situation est schématisée sur la figure II-6. D'après (II-27), les intégrales à calculer sont du type :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (\text{A-II.1})$$

I est décomposée en 3 intégrales  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  telles que :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (\text{A-II.2})$$

où :

- $I_1$  représente l'intégrale sur le triangle de gauche,
- $I_2$  " " " " " du milieu,

-  $I_3$  représente l'intégrale sur le triangle de droite.

Calcul de  $I_1$  :

$$I_1 = \int_{-1}^0 \left( \int_{2\xi+1}^1 f(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)) d\eta \right) d\xi \quad (\text{A-II.3})$$

En effectuant les changements de variables suivants :

$$x = 2\xi + 1 \quad (\text{A-II.4})$$

$$y = \frac{2}{1-x} \eta + \frac{1+x}{x-1}$$

il vient :

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-x) f(\underline{r}, \underline{r}'(x, y)) dx dy \quad (\text{A-II.5})$$

Calcul de  $I_2$  :

$$I_2 = \int_{-1}^1 \left( \int_{\frac{\eta-1}{2}}^{\frac{1-\eta}{2}} f(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)) d\xi \right) d\eta \quad (\text{A-II.6})$$

Avec la transformation suivante :

$$x = \frac{2}{1-\eta} \xi \quad (\text{A-II.7})$$

il vient :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-\eta) f(\underline{r}, \underline{r}'(x, \eta)) dx d\eta \quad (\text{A-II.8})$$

Calcul de  $I_3$  :

$$I_3 = \int_0^1 \left( \int_{-2\xi+1}^1 f(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)) d\eta \right) d\xi \quad (\text{A-II.9})$$

En posant successivement :

$$x = 2 \xi - 1$$

$$y = \frac{2}{x+1} \eta + \frac{x-1}{x+1} \quad (\text{A-II.10})$$

alors :

$$I_3 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x+1) f(\underline{r}, \underline{r}'(x,y)) dx dy \quad (\text{A-II.11})$$

On obtient ainsi des intégrales qui sont calculées directement par la méthode de Gauss-Legendre. Quand le noeud de calcul prend l'une des 7 autres positions dans le quadrilatère, on procède de la même façon et on décompose alors I en la somme de 2 ou 3 intégrales bornées par -1 et 1.

#### A - II.1.2 *Eléments triangulaires à 6 noeuds*

L'élément d'intégration est découpé en 2 triangles, comme indiqué figure II-7. Le calcul est explicité quand le noeud  $\underline{r}$  est au point de coordonnées réduites :  $\xi = -1$  et  $\eta = -1$ . De nouveau on décompose le domaine d'intégration :

$$I = I_1 + I_2 \quad (\text{A-II.12})$$

où :

- $I_1$  est l'intégrale sur le triangle supérieur,
- $I_2$  " " " inférieur.

Calcul de  $I_1$  :

On effectue le changement de repère suivant :

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{5}}{8} (1 - 2\xi + 3\eta) \\ Y = \frac{\sqrt{13}}{8} (1 - 2\xi - \eta) \end{cases} \quad (\text{A-II.13})$$

Alors :

$$I_1 = \frac{8}{\sqrt{65}} \int_0^{\frac{\sqrt{13}}{2}} \left( \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2} - Y\sqrt{\frac{5}{13}}} f(\underline{r}, \underline{r}'(X, Y)) dX \right) dY \quad (\text{A-II.14})$$

En effectuant les modifications suivantes :

$$y = \frac{4}{\sqrt{13}} Y - 1 \quad (\text{A-II.15})$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{5} (1 - y)} X - 1$$

on obtient :

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 - y) f(\underline{r}, \underline{r}'(x, y)) dx dy \quad (\text{A-II.16})$$

Calcul de  $I_2$  :

Avec le même changement de repère utilisé pour débiter le calcul de  $I_1$  :

$$I_2 = \frac{8}{\sqrt{65}} \int_0^{\frac{\sqrt{13}}{2}} \left( \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2} - Y\sqrt{\frac{5}{13}} - \frac{\sqrt{5}}{2}} f(\underline{r}, \underline{r}'(X, Y)) dX \right) dY \quad (\text{A-II.17})$$

En considérant que :

$$y = \frac{4}{\sqrt{13}} Y - 1 \quad (\text{A-II.18})$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{5} (1 - y)} X + 1$$

il vient :

$$I_2 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 - y) f(\underline{r}, \underline{r}'(x, y)) dx dy \quad (\text{A-II.19})$$

On peut maintenant évaluer  $I_1$  et  $I_2$  par la technique d'intégration de Gauss-Legendre. Quelle que soit la position du noeud de calcul  $\underline{r}$  dans la

topologie de l'élément, le calcul des autres intégrales se fait dans le même esprit.

#### A - II.2 Cas du problème à symétrie axiale

Les intégrales sont traitées sans distinction entre celles qui sont diagonales et celles qui ne le sont pas. Notre attention se porte sur la partie réelle, dans laquelle on isole la singularité de l'intégrand. Les intégrales ainsi obtenues dans l'équation (II-35) subissent un traitement spécial qui leur permet de converger plus vite que par la méthode de Gauss-Legendre.

##### A - II.2.1 *Calcul de A'*

On rappelle la forme de A' :

$$A' = \int_0^\pi \frac{1}{D} d\varphi \quad (\text{A-II.20})$$

où :

$$D = |\underline{r} - \underline{r}'|$$

Les coordonnées du noeud de calcul  $\underline{r}$  sont  $(x, 0, z)$  et celles du point d'intégration sont  $(x', y', z')$  où  $x'$  et  $y'$  sont des fonctions de  $\xi$  et  $\varphi$  alors que  $z$  est uniquement fonction de  $\xi$ . En se référant à (II-11), on a une relation entre  $x'$  et  $y'$  :

$$x'^2(\xi, \varphi) + y'^2(\xi, \varphi) = x'^2(\xi, 0) \quad (\text{A-II.21})$$

Cette relation permet d'écrire que :

$$D = \sqrt{a - b \cos\varphi} \quad (\text{A-II.22})$$

avec :

$$a(\xi) = (z - z'(\xi))^2 + x^2 + x'^2(\xi, 0)$$

$$b(\xi) = 2 \times x'(\xi, 0)$$

Les variables a et b sont positives. On sait alors que [65] :

$$A' = \frac{2}{\sqrt{a+b}} [F(\delta, R)]_0^\pi \quad (\text{A-II.23})$$

avec :

$$R = \sqrt{\frac{2b}{a+b}}$$

F est l'intégrale elliptique de première espèce. Sachant que :

$$\delta(0) = 0 \quad \delta(\pi) = \frac{\pi}{2}$$

et que :

$$F(0, R) = 0$$

on a :

$$A' = \frac{2}{\sqrt{a+b}} F\left(\frac{\pi}{2}, R\right) \quad (\text{A-II.24})$$

Avec le développement en série (II-37) de :

$$F\left(\frac{\pi}{2}, R\right)$$

l'intégration en  $\varphi$  est terminée.

#### A - II.2.2 Calcul de B'

L'intégrale B' est donnée par :

$$B' = \int_0^\pi \frac{1}{D^3} (\underline{r}' - \underline{r}) \cdot \underline{n}' \, d\varphi \quad (\text{A-II.25})$$

La distance D est encore modifiée sous la forme (A-II.22). Etant donné (II-11)

et (II-12), le produit scalaire est :

$$(\underline{r}'(\xi, \varphi) - \underline{r}) \cdot \underline{n}'(\xi, \varphi) = \alpha(\xi) + \beta(\xi) \cos \varphi \quad (\text{A-II.26})$$

avec :

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{R(\xi)} \left( (z'(\xi) - z) \frac{dx'(\xi, 0)}{d\xi} - x'(\xi, 0) \frac{dz'(\xi)}{d\xi} \right)$$

$$\beta(\xi) = \frac{x}{R(\xi)} \frac{dz'(\xi)}{d\xi}$$

Il vient alors :

$$B' = \alpha \int_0^\pi \frac{1}{D^3} d\varphi + \beta \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{D^3} d\varphi \quad (\text{A-II.27})$$

Calcul de  $\int_0^\pi \frac{1}{D^3} d\varphi$  :

On sait que [65] :

$$\int_0^\pi \frac{1}{D^3} d\varphi = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}} [E(\delta, R)]_0^\pi \quad (\text{A-II.28})$$

où E est l'intégrale elliptique complète de seconde espèce. En reprenant les valeurs de  $\delta$  et R déjà définies précédemment et en sachant que :

$$E(0, R) = 0$$

on a :

$$\int_0^\pi \frac{1}{D^3} d\varphi = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}} E\left(\frac{\pi}{2}, R\right) \quad (\text{A-II.29})$$

Calcul de  $\int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{D^3} d\varphi$  :

On impose le changement de variables :

$$t = a - b \cos \varphi$$

Après calculs, on trouve :

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi}{D^3} d\varphi = \frac{a}{b} \int_{a-b}^{a+b} \frac{dt}{\sqrt{t^3 (t-a+b)(a+b-t)}} - \frac{1}{b} \int_{a-b}^{a+b} \frac{dt}{\sqrt{t (t-a+b)(a+b-t)}} \quad (\text{A-II.30})$$

Après avoir introduit les intégrales elliptiques [65] :

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi}{D^3} d\varphi = \frac{a}{b} \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}} [E(\chi, R)]_{a-b}^{a+b} - \frac{1}{b} \frac{2}{\sqrt{a+b}} [F(\lambda, R)]_{a-b}^{a+b} \quad (\text{A-II.31})$$

On a :

$$\begin{aligned} \chi(a-b) &= 0 & \chi(a+b) &= \frac{\pi}{2} \\ \lambda(a-b) &= \frac{\pi}{2} & \lambda(a+b) &= 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi}{D^3} d\varphi = \frac{2a}{b(a-b)\sqrt{a+b}} E\left(\frac{\pi}{2}, R\right) + \frac{2}{b\sqrt{a+b}} F\left(\frac{\pi}{2}, R\right) \quad (\text{A-II.32})$$

Finalement :

$$B' = \frac{2}{\sqrt{a+b}} \left( \frac{\alpha + a\beta/b}{a-b} E\left(\frac{\pi}{2}, R\right) + \frac{\beta}{b} F\left(\frac{\pi}{2}, R\right) \right) \quad (\text{A-II.33})$$

Les développements en série (II-37) terminent le calcul de B'.

## ANNEXE III

### CALCUL DU FACTEUR DE DIRECTIVITE

Dans cette annexe, on considère la représentation (I-47.a) de la pression dans  $\Omega_p$  et on se place en condition de champ lointain pour en extraire le facteur de directivité (II-39). On caractérise alors le comportement des intégrales de Helmholtz. Ensuite, on indique une méthode de calcul économique de ces intégrales quand le problème admet une symétrie axiale.

#### A - III.1 Comportement des intégrales

On est amené à étudier le comportement à l'infini des deux intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \\
 B_1 &= \int \int_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}'
 \end{aligned}
 \tag{A-III.1}$$

On définit :

$$\underline{\delta} = \underline{r} - \underline{r}'$$

On note  $r$ ,  $r'$  et  $\delta$  les rayon-vecteurs associés à  $\underline{r}$ ,  $\underline{r}'$  et  $\underline{\delta}$ . Ils sont reliés par :

$$\delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 \underline{r} \cdot \underline{r}'}$$

En champ lointain :  $r \longrightarrow \infty$ , donc  $r \gg r'$  et :

$$r \longrightarrow \infty \quad \delta = \sqrt{r^2 \left(1 - 2 \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2}\right)}$$

Le développement limité au premier ordre de  $(1 - x)^{1/2}$  quand  $x \longrightarrow 0$  permet d'écrire :

$$r \longrightarrow \infty \quad \delta = r - \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r} \quad (\text{A-III.2})$$

A - III.1.1 Calcul de  $A_1$

$$A_1 = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \frac{e^{ik\delta}}{\delta} d\underline{r}' \quad (\text{A-III.3})$$

En plus de (A-III.2), on a :

$$r \longrightarrow \infty \quad \frac{1}{\delta} = \frac{1}{r} \quad (\text{A-III.4})$$

Avec ces deux relations, on transforme facilement  $A_1$  :

$$r \longrightarrow \infty \quad A_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}' \quad (\text{A-III.5})$$

A - III.1.2 Calcul de  $B_1$

$$B_1 = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{e^{ik\delta}}{\delta} \right) d\underline{r}' \quad (\text{A-III.6})$$

On développe la dérivée normale :

$$\frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{e^{ik\delta}}{\delta} \right) = - \frac{e^{ik\delta}}{\delta} \left( ik - \frac{1}{\delta} \right) \frac{\delta \cdot \underline{n}'}{\delta}$$

A l'infini, on a les résultats suivants :

$$r \longrightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} ik - \frac{1}{\delta} = ik \\ \underline{\delta} \cdot \underline{n}' = \underline{r} \cdot \underline{n}' \end{array} \right. \quad (\text{A-III.7})$$

La prise en compte des relations (A-III.2), (A-III.4) et (A-III.7) donne :

$$r \longrightarrow \infty \quad B_1 = - \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}' \quad (\text{A-III.8})$$

Les équations (A-III.5) et (A-III.8) justifient la formulation (II-39).

Finalement, à partir de l'équation discrétisée (II-40), on explicite les intégrales calculées que l'on note  $A_2$  et  $B_2$  :

$$A_2 = \iint_{\Gamma} N_1(\xi, \eta) e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}'(\xi, \eta) \quad (\text{A-III.9})$$

$$B_2 = \iint_{\Gamma} N_1(\xi, \eta) \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}'(\xi, \eta)$$

L'intégration est faite par la technique de Gauss-Legendre.

#### A - III.2 Méthode d'intégration adaptée à la symétrie axiale

Dans ce cas, les intégrales (A-III.9) se simplifient et, en rappelant la relation (II-13), on a :

$$A_2 = \int_{-1}^1 N_1(\xi) w(\xi) 2 \int_0^{\pi} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\varphi d\xi \quad (\text{A-III.10})$$

$$B_2 = \int_{-1}^1 N_1(\xi) w(\xi) 2 \int_0^{\pi} \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\varphi d\xi$$

Le point d'observation  $\underline{r}$  est placé dans le plan  $Y = 0$  du repère global cartésien. Les coordonnées de  $\underline{r}$  sont  $(x, 0, z)$  et on introduit les variables  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Z}$  telles que :

$$\mathcal{X} = \frac{x}{r} \quad \mathcal{Z} = \frac{z}{r}$$

Après un changement de notation évident, les relations (II-11) et (II-12) fournissent les coordonnées de  $\underline{r}'$  et  $\underline{n}'$  :

$$\underline{r}'(a(\xi)\cos\varphi, a(\xi)\sin\varphi, b(\xi)) \quad \underline{n}'(c(\xi)\cos\varphi, c(\xi)\sin\varphi, d(\xi))$$

Avec cette convention, on développe les termes suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r} &= \mathcal{X} a(\xi) \cos\varphi + \mathcal{Z} b(\xi) \\ \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} &= \mathcal{X} c(\xi) \cos\varphi + \mathcal{Z} d(\xi) \end{aligned} \quad (\text{A-III.11})$$

On reprend les équations (A-III.10) et on utilise les résultats (A-III.11). Les intégrales  $A_2$  et  $B_2$  se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} A_2 &= 2 \int_{-1}^1 N_1(\xi) w(\xi) e^{-ik\mathcal{Z}b} \left( \int_0^\pi e^{-ik\mathcal{X}a\cos\varphi} d\varphi \right) d\xi \\ B_2 &= 2 \int_{-1}^1 N_1(\xi) w(\xi) e^{-ik\mathcal{Z}b} \left( \mathcal{X} c \int_0^\pi \cos\varphi e^{-ik\mathcal{X}a\cos\varphi} d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{Z} d \int_0^\pi e^{-ik\mathcal{X}a\cos\varphi} d\varphi \right) d\xi \end{aligned} \quad (\text{A-III.12})$$

On peut représenter sous une forme intégrale les fonctions de Bessel de première espèce [85] :

$$\begin{aligned} J_0(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{it\cos\varphi} d\varphi \\ J_1(t) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^\pi e^{it\cos\varphi} \cos\varphi d\varphi \end{aligned} \quad (\text{A-III.13})$$

En injectant (A-III.13) dans (A-III.12), on obtient :

$$\begin{aligned} A_2 &= 2 \int_{-1}^1 N_1(\xi) w(\xi) e^{-ik\mathcal{Z}b} \pi J_0(-k\mathcal{X}a) d\xi \\ B_2 &= 2 \int_{-1}^1 N_1(\xi) w(\xi) e^{-ik\mathcal{Z}b} \pi (\mathcal{X} c i J_1(-k\mathcal{X}a) + \mathcal{Z} d J_0(-k\mathcal{X}a)) d\xi \end{aligned} \quad (\text{A-III.14})$$

L'introduction des fonctions de Bessel a permis de remplacer l'intégration

suisant  $\varphi$  par une formule analytique. Ce recours à un algorithme de calcul des fonctions de Bessel fiable et performant apporte alors un gain de précision et une diminution du temps de calcul.



036 113 441

## Résumé de thèse

Le rayonnement d'une onde acoustique par une structure mécanique ou électromécanique vibrante, de même que la diffraction d'une onde acoustique par une structure élastique, sont deux problèmes essentiels et très actuels dans les domaines du SONAR, de la discrétion acoustique et de l'imagerie sous-marine. Différentes approches permettent la modélisation de ces phénomènes mais leurs domaines de validité respectifs sont subordonnés à la gamme de fréquence, aux dimensions de la structure et à l'importance des effets élastiques.

Le travail décrit dans cette thèse concerne le développement d'outils numériques exploitant la méthode des équations intégrales et permettant la modélisation du rayonnement ou de la diffraction acoustique. Il a conduit, après une contribution à la réalisation du code de résolution des problèmes à symétrie axiale HELNUL, à l'élaboration du code de résolution de problèmes tridimensionnels EQI. Ces codes, qui utilisent la représentation de Helmholtz extérieure, résolvent le problème des fréquences irrégulières par une technique de surdétermination faisant appel à des équations supplémentaires de champ nul. Le code EQI s'applique à des structures de forme géométrique quelconque. La validation de ces codes a été effectuée à l'aide de nombreux exemples tests et a démontré la précision des résultats acquis. Plusieurs applications concrètes ont été traitées : rayonnement d'une antenne bafflée, rayonnement d'un transducteur flexionnel de classe I, rayonnement d'un projecteur unidirectionnel basse fréquence, autodiffraction par un hydrophone. L'ensemble de ces résultats, très probants, permet d'envisager maintenant l'application au problème de l'interaction acoustique dans les antennes de grande taille, de même que la résolution du problème complet fluide-structure par un couplage entre les méthodes des équations intégrales et des éléments finis.

## Mots-clefs

Rayonnement acoustique  
*Acoustic radiation*

Diffraction acoustique  
*Acoustic diffraction*

Modélisation tridimensionnelle  
*Three-dimensional modeling*

Equation intégrale  
*Integral equation*

Fréquences irrégulières  
*Irregular frequencies*

Méthode de champ nul  
*Null-field method*

Interaction fluide-structure  
*Fluid-structure interaction*