N° ordre : 309 50376 1989



50376 1989 9

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES-ARTOIS

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

Spécialité: Productique, Automatique et Informatique Industrielle

par

Dominique RENAUX - HUREL

ANALYSE ET MODELISATION DU PROCESSUS BOURSIER PROPOSITION D'UNE METHODE DE GESTION DE PORTEFEUILLE

Soutenue le 6 Janvier 1989 devant la commission d'examen :

MM.	P. C. J. G. L. R. A. F.	VIDAL MELIN POSTAIRE POVY LAURENT MOUYART	Président, Rapporteur, Rapporteur, Rapporteur, Directeur de Recherches, Examinatrice,
Mme		CAMION	Invitée.

AVANT-PROPOS

Les Recherches présentées dans ce mémoire ont été réalisées au Centre d'Automatique animé par M. le Professeur P. VIDAL. Je le remercie pour l'accueil qu'il m'a réservé au sein de son laboratoire et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être le Président de la commission d'examen.

Je suis gré à M. le Professeur R. LAURENT pour la confiance qu'il m'a accordé lorsqu'il a accepté de diriger mes recherches. Je le remercie particulièrement pour l'aide constante qu'il m'a apporté, ses conseils et sa grande disponibilité.

Je remercie vivement M. le Professeur C. MELIN de l'Université de Compiègne pour avoir accepté de juger le contenu de ce mémoire et pour sa présence parmi les membres de ce jury en tant que rapporteur.

Que M. le Professeur J. G. POSTAIRE trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour avoir bien voulu porté un jugement sur ce travail et mes remerciements pour sa participation au jury en tant que rapporteur.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à M. le Professeur L. POVY qui a accepté de juger le contenu de ce mémoire et le remercie vivement d'avoir accepté d'être l'un de mes rapporteurs.

Je désire remercier Mme A. F. MOUYART pour l'intérêt qu'elle a manifestement porté à mes travaux et pour sa présence à la commission d'examen comme examinatrice.

Que Mme CAMION, Maître de Conférences à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Rattachée à l'institut des sciences Juridiques, Economiques et de Gestion, qui a accepté de juger le contenu de ce mémoire et de participer à la commission d'examen trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

J'adresse également mes remerciements à mon collègue E. CZESNALOWICZ pour ses critiques enrichissantes, l'aide et le soutien qu'il m'a toujours apporté.

Je ne saurais terminer cet avant-propos sans remercier tous les membres du Laboratoire d'Automatique avec qui j'ai eu la chance de travailler et qui ont toujours su faire régner la bonne ambiance.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.

CHAPITRE	I:	Méthodes	d'ai	nalvse de	données	boursières.

Introduction.

I.	L'appro	oche fonda	mentale et les modèles d'évaluation.	-10 -
	I. 1	Modèle	s d'équilibre.	- 10 -
	I.2	Modèle	s de déséquilibre.	- 13 -
II.	L'appr	oche techn	ique et les modèles d'évaluation.	- 14 -
	II.1	Méthod	les graphiques.	- 14 -
		II.1.1	Méthode des canaux.	- 14 -
		II.1.2	Méthodes chartistes.	- 15 -
		II.1.3	Méthode des points et croix.	- 16 -
		II.1.4	Courbe cumulative des valeurs en hausse et en baisse.	- 17 -
		II.1.5	Méthodes des moyennes mobiles.	- 17 -
	II.2	Le Mod	lèle du Marché.	- 18 -
		II.2.1	Notion de rentabilité et de risque.	- 18 -
		II.2.2	Caractéristiques du Modèle du Marché.	- 20 -
III.	Modèle	e d'évaluat	ion des obligations.	- 22 -
		III.1	Modèle déterministe.	- 22 -
		III.2	Modèle aléatoire.	- 25 -
IV.	Modèle	e d'évaluat	ion des obligations convertibles.	- 27 -
Conc	clusion.			

<u>CHAPITRE II</u>: Estimation des critères rentabilité et risque.

Introduction.

I.	Les crit	ères, les n	nodèles et la bourse.	- 32 -	
	I.1	Rentab	- 32 -		
	I.2	Etude o	- 33 -		
		I.2.1	Généralités.	- 33 -	
		I.2.2	Modèles récursifs.	- 33 -	
		I.2.3	Méthodes de filtrage.	- 35 -	
II.	Analyse	e de l'évol	ution des cotations par une méthode		
	de filtrage non linéaire.			- 35 -	
	II.1	Méthod	- 35 -		
	II.2	Analyse	- 38 -		
	11.3	Détecti estimat	ion des retournements de tendance et tions.	- 42 -	
III.	Méthod	le d'estim	ation et prévision des cours.	- 45 -	
	III.1	Descrip polyno	otion de la méthode des moindres carrés	- 45 -	
	III.2	1 2	Applicabilité de la méthode au modèle boursier		
conc	lusion.				

CHAPITRE III: Méthodes classiques de gestion de portefeuille.

Introduction.

I.	Déterm	ination et mesure du risque.	- 58 -	
II.	La dive	a diversification.		
III.	Approc	hes concernant la gestion de portefeuille.	- 64 -	
	III.1	Analyse de Markovitz.	- 64 -	
		Exemple.		
	III.2	Analyse de Black et Scholes.	- 67 -	
		Exemple.		
	III.3	Le graphique en étoile.	- 74 -	
	III.4	Analyse multicritère et méthode décisionnelle.	- 76 -	
		Exemple.		

Conclusion.

<u>CHAPITRE IV</u>: Elaboration d'une méthode conversationnelle de gestion de portefeuille.

Introduction.

I.	Hypoth	èses de base du modèle.	- 81 -
	I. 1	Description de la spéculation envisagée.	- 81 -
	I.2	Représentation vectorielle du portefeuille	82 -
	I.3	Représentation graphique.	- 82 -
II.	Etude o	- 83 -	
	II.1	Analyse graphique.	- 83 -
	II.2	Analogie avec la théorie des graphes.	- 86 -
III.	Modéli	- 87 -	
	III.1	Appartenance au domaine réalisable.	- 87 -
	III.2	Limites de prospection.	- 89 -
	III.3	Sélection du point initial optimal.	- 90 -
	III.4	Recherche des solutions.	- 90 -
	III.5	Critères rentabilité et risque.	- 92 -
	III.6	Zones de préférences.	- 94 -
	III.7	Critère somme.	- 97 -
	III.8	Application des autres critères.	- 99 -
		a - Critères relatifs à la diversificat	ion 99 -
		b - Critère d'imposition d'actions.	- 100 -
		c - Limitation des frais de transact	ions 100 -
IV.	Applica	tion du modèle à un portefeuille.	- 101 -

Conclusion.

CONCLUSION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

L'inflation élevée et la diminution incessante des taux des placements sans risque ont participé au développement des marchés financiers de telle sorte que toute approche rationnelle permettant la gestion des actifs trouve sa raison d'être.

Les différents actifs comme les actions, les obligations ou plus récemment créés les options et les contrats à terme sont évalués au moyen de deux critères: la rentabilité et le risque encourus. L' ensemble des titres possédés par un investisseur, plus communément appelé portefeuille, est donc valorisé par les mêmes notions rentabilité et risque. De ce fait, tout changement intervenant au niveau de la composition du portefeuille peut être quantifié, ce qui permet d' envisager l' utilisation de méthodes de comparaison, de classification, et de sélection.

La définition du portefeuille optimal est simple: présenter un rendement maximum pour un risque minimum. L' obtenir suppose être en possession d' un algorithme de sélection des titres performant et de données exactes. Les données à déterminer sont les valeurs des critères rentabilité et risque qui caractérisent chaque titre. Différentes méthodes existent dans la littérature et sont exposées dans le premier chapitre.

Néanmoins une estimation de ces deux critères basée sur le passé sans aucune extrapolation ne reflète pas la réalité et risque d'induire en erreur l'investisseur. Si celui-ci parvient à prévoir la hausse ou la baisse d'une valeur, il pourra moduler le contenu de son portefeuille de façon à en tirer le bénéfice maximum.

L'anticipation résume donc l'objet de notre deuxième chapitre. Nous nous sommes limités, dans un souci évident de simplification, aux titres qui varient continuellement à la bourse et qui ne présentent aucune entrave aux transactions de l'investisseur quand il le souhaite. Ce qui n'empêche en aucun cas d'étendre les méthodes proposées aux autres types d'actifs tels les options ou les contrats à terme en intégrant les contraintes qu'ils impliquent.

Le rendement, proprement dit, d'un titre comprend la plus-value entre la date d'achat et la date de vente ainsi que le dividende ou répartition des bénéfices, ou coupon. Quand l'investisseur spécule à la hausse ou à la baisse ce n'est autre que sur la plus-value du titre, d'autre part, le dividende n'est pas systématiquement répercuté par l'entreprise et le gain obtenu, comme celui du coupon de l'obligation est négligeable par rapport à la plus value. C'est pourquoi nous ne considérerons comme rendement d'un titre que la plus-value qu'il procure.

La loi de l'offre et de la demande fixe la cotation d'un actif. L'évolution temporelle obtenue nous permet d'assimiler la bourse à un processus dont l'entrée serait la tendance des investisseurs et la sortie la cotation qui en résulte. Le cours de la valeur, assimilé à un signal, peut alors être traité en tant que tel grâce aux méthodes d'identification, de lissage, ou de filtrage de façon à anticiper les critères recherchés.

Une fois les valeurs des critères caractérisant chaque action déterminées une gestion de portefeuille peut être fondée. Le troisième chapitre récapitule les méthodes déjà utilisées.

La composition du portefeuille proposé à l'investisseur doit correspondre au maximum à ses aspirations. Un algorithme de gestion de portefeuille conversationnel exposé au quatrième chapitre nous est apparu le mieux adapté au problème.

Partant d'une certaine somme à investir en bourse et connaissant les caractéristiques de chaque titre notre but a été d'intégrer des contraintes au niveau de la détermination de la composition du portefeuille. L'investisseur, grâce à l'aspect conversationnel du modèle, doit pouvoir choisir et limiter l'influence des contraintes qu'il désire appliquer parmi celles proposées.

Les différentes contraintes qu'il est possible d'introduire sont nombreuses. Elles peuvent concerner le risque ou la rentabilité, mais aussi la diversification du portefeuille dont nous verrons l'importance au cours de cet ouvrage, et peuvent également toucher à la composition du portefeuille, en limitant le nombre d'actions différentes, en imposant telle ou telle action, ou encore en observant les frais de transactions encourus lors d'un changement par rapport au bénéfice envisagé.

La liste des contraintes que nous envisageons d'intégrer à notre modèle n'est certes pas complète, seul un expert en la matière pourrait grâce à une étude approfondie de la réaction de l'investisseur face au marché élargir cet horizon.

CHAPITRE I

METHODES D'ANALYSE DE DONNEES BOURSIERES.

Introduction

Les recherches en matières d'évaluation et de sélection des valeurs mobilières ont commencé par l'approche fondamentale.

L'analyse fondamentale consiste à faire une étude approfondie d'une société, à examiner ses forces et ses faiblesses, à estimer l'impact des changements dans l'économie sur la société et à prévoir ces changements, elle permet d'évaluer la valeur réelle de l'action et non pas sa valeur sur le marché.

L'approche technique lui a succédé portant exclusivement sur l'étude des données internes du marché. Elle a pour base une théorie selon laquelle tous les facteurs économiques, psychologiques... qui influent sur la détermination des cours sont contenus dans les mouvements de l'offre et de la demande sur le marché, c'est-à-dire dans l'évolution des volumes des transactions et des variations de cours.

L'approche fondamentale a donné naissance à deux sortes de modèles : les modèles d'équilibre et les modèles de déséquilibre que nous aborderons tout d'abord dans ce chapitre.

Nous exposerons ensuite les principaux modèles issus de l'analyse technique. Contrairement à l'approche fondamentale, elle a été largement plus développée donnant lieu à de nombreux modèles graphiques et principalement au Modèle du Marché.

En dernier ressort, après avoir présenté les obligations et les obligations convertibles, compromis entre l'obligation classique et l'action, nous introduirons les différents modèles permettant leur évaluation.

I <u>L'APPROCHE FONDAMENTALE ET LES MODELES D'EVALUATION.</u>

I.1 <u>Modèles d'équilibre.</u>

Dans ces modèles interviennent les notions de taux et d'actualisation. L'actualisation constitue le fondement de l'évaluation d'une entreprise, d'un investissement, ou d'un placement [1].

Le taux d'intérêt actualisé permet de prédire la valeur future d'une valeur présente. En effet les valeurs futures et les valeurs présentes peuvent être reliées par la relation :

$$VF_1 = VA_*(1+i_1) \iff VA = VF_1/(1+i_1)$$

VA : valeur actuelle.

VF₁: valeur future dans un an.
i₁: taux d'intérêt d'ici un an.

ou plus généralement pour une durée quelconque :

$$VF_t = VA * ((1+i_1) * (1+i_2) ** (1+i_t))$$

 $VA = VF_t * (1/((1+i_1) ** (1+i_t)))$

Dans de nombreux cas d'évaluation on suppose que le taux est constant d'une année à l'autre alors:

$$VF_t = VA * (1+i)^t \le VA = VF_t / (1+i)^t$$

 $1/(1+i)^t$ représente le facteur d'actualisation. Il permet de connaître le montant qu'il faut placer aujourd'hui à intérêt composé au taux i ou aux taux successifs i_1 , i_2 ,......, i_t pour obtenir un franc dans t années.

Le taux de rentabilité interne d'un investissement est le taux d'actualisation qui égale la valeur actuelle des fonds investis à la valeur actuelle des fonds qui en seront retirés, dans ce cas l'investissement est rentable si ce taux est supérieur au taux d'intérêt sur le marché, c'est-à-dire au coût du capital.

$$F_0 = \sum_{t=1}^{N} \frac{F_t}{(1+r)^t}$$
 tel que r>k

r : taux de rentabilité interne.

k : coût du capital ou taux d'intérêt en avenir certain.

N: nombre d'années.

F₀: coût de l'investissement.

F_t: flux net de liquidité à l'année t.

Le coût actuariel d'un emprunt est le taux d'intérêt qui égale le montant des sommes reversées au titre des intérêts, des frais et des remboursements.On le calcule par:

$$E = \sum_{t=1}^{N} \frac{R_t + I_t}{(1+r)^t}$$

$$E : montant de l'emprunt.
R_t : montant du remboursement en t.
I_t : charge nette d'intérêt en t.$$

En théorie, le coût actuariel pour un emprunteur est égal au taux de rentabilité interne pour le prêteur. Ceci est difficilement réalisable si l'on considère les frais d'imposition et de transaction.

Pour une période s'arrêtant à l'année n, l'équation d'évaluation d'une action s'écrit [2]:

Exemple: Si un actionnaire souhaite garder une action qu'il achète 300F pendant 4 ans, en recevoir un dividende croissant au rythme de 10% par an et la revendre 360F, on aura:

$$300 = \frac{10}{(1+r)^1} + \frac{11}{(1+r)^2} + \frac{12.1}{(1+r)^3} + \frac{13.31+360}{(1+r)^4}$$

D'où r = 8.25%, r est le taux de rentabilité interne.

* Hypothèse de croissance à perpétuité

La principale difficulté est l'estimation de la valeur de l'action à l'année t. Une attitude courante consiste à supposer une croissance à long terme des dividendes au taux g. L'équation devient :

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)^1}{(1+r)^1} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D_0(1+g)^N}{(1+r)^N} = D_0 \sum_{t=1}^{N} \frac{(1+g)^t}{(1+r)^t}$$

Si n est suffisamment grand et tend vers l'infini, la relation peut s'écrire sous la forme:

* Estimation du multiplicateur boursier

Le multiplicateur boursier peut être estimé à l'aide du taux de croissance g, du taux d'actualisation r et du taux de distribution d.

Reprenons la dernière équation et divisons ses deux membres par ${\rm BPA}_0$ le bénéfice par action au temps zéro.

$$\frac{D_1}{P_0} = \frac{BPA_0}{r-g} = \frac{d}{r-g} \Rightarrow D_1 = BPA_0 * d$$

où P_0/BPA_0 : le multiplicateur.

 $D_1/BPA_0 = d$: le taux de distribution attendu des bénéfices.

r : le coût actuariel qui équivaut au taux de rentabilité exigé par le marché ou taux d'actualisation.

g : le taux de croissance attendu des bénéfices.

* Valeur d'une action à partir d'un modèle de multiplicateur

Si on considère le multiplicateur boursier, la valeur d'une action en fonction de sa croissance devient:

$$P_0 = \frac{BPA_1d_1}{(1+r)^1} + \frac{BPA_2d_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{BPA_Nd_N}{(1+r)^N} + \frac{P_N}{(1+r)^N}$$

BPA_t: le bénéfice par action en t. d_t: le taux de distribution en t.

 P_N : le prix de revente au temps N.

En supposant une croissance constante soit $BPA_t = BPA_0(1+g)^t$ et une politique constante de dividendes, on peut alors écrire :

$$P_0 = \frac{BPA_0d(1+g)^1}{(1+r)^1} + \frac{BPA_0d(1+g)^2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{BPA_0d(1+g)^N + P_N}{(1+r)^N}$$

* Décision de l'investisseur

Une fois le taux d'actualisation, les dividendes, et le prix de revente estimé, l'investisseur peut calculer la valeur intrinsèque ou valeur réelle de l'action. Connaissant la valeur de l'action sur le marché par rapport à la valeur réelle il peut déterminer si l'action est sous-évaluée ou sur-évaluée. Dans le cas où la méthode déclare l'action sous-évaluée sur le marché il faut la conserver, inversement la vendre.

I.2 Modèles de déséquilibre.

Dès que la valeur réelle de l'action est déterminée il est possible de déterminer son P.E.R. (Price Earning Ratio) qui n'est autre que le rapport du prix de l'action sur le bénéfice qu'elle procure pour une année donnée.

Whitbek et Kisor [3] ont déterminé trois variables explicatives du P.E.R. Il s'agit du taux de croissance escompté du bénéfice par action, du taux de distribution escompté des bénéfices (rapport des dividendes sur les bénéfices), et de la variabilité du bénéfice par action (écart-type des bénéfices).

Grâce à une analyse de régression multiple, 135 actions du New-York Stock Exchange le 8 juin 1962, et les prévisions des analystes de la Bank of New-York, ils ont abouti à la relation suivante :

Suite aux différents tests de validité de leur méthode, il a été prouvé que si le rapport du P.E.R. réel au P.E.R. théorique est inférieur à 0.85 les valeurs sont considérées comme sous-évaluées tandis que si le rapport est supérieur ou égal à 1.15 les valeurs sont sur-évaluées.

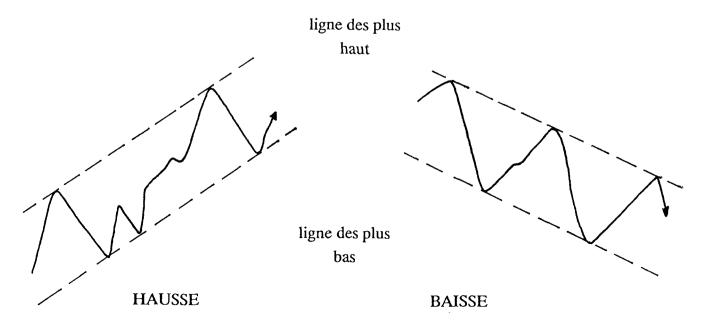
Une recherche effectuée par Richard S BOWER et Dorothy H BOWER [4] ajoute d'autres caractéristiques financières de l'entreprise. Les résultats obtenus auraient dûs être meilleurs, mais il en a été différemment car ils disposaient d'analystes moins compétents en matière de données prévisionnelles.

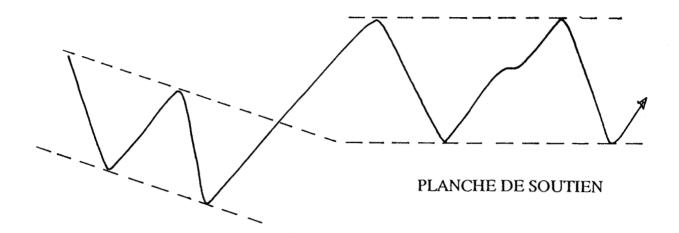
II. L'APPROCHE TECHNIQUE ET LES MODELES D'EVALUATION.

II.1. Méthodes graphiques.

II.1.1 Méthode des canaux.

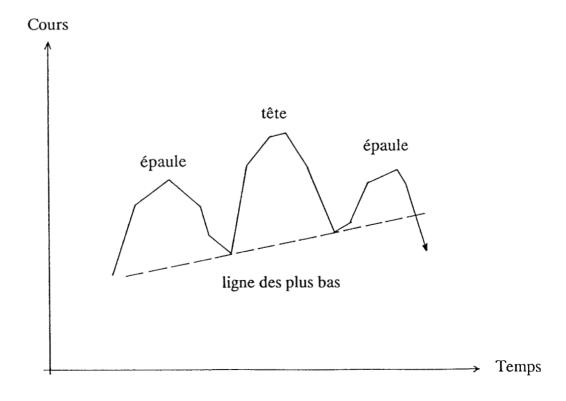
Cette méthode mise au point par Charles DOW, fondateur du Wall Street Journal, consiste à construire un canal d'évolution en joignant les point hauts et les points bas du cours d'une valeur. Si le canal, ainsi formé, se dirige vers le haut, la tendance est à la hausse, s'il se dirige vers le bas la tendance est à la baisse, s'il est horizontal le cours est en stagnation.





II.1.2 Méthodes Chartistes.

Au fil des cotations, des spécialistes se sont aperçu que des hausses, des baisses ou des stagnations de cours étaient précédés de mouvements spécifiques et caractéristiques. La formation "tête et épaules" est, par exemple, censée annoncer une forte baisse lorsque la ligne des cours se comporte telle que:



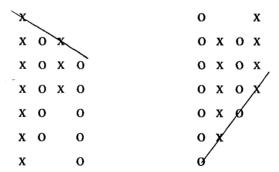
Ils ont donc établi un certain nombre de règles permettant d'anticiper selon l'évolution des cours la tendance à venir. Cet ensemble de règles est à l'origine des méthodes chartistes [5, 6]. L'interprétation qui résulte de l'utilisation de telles méthodes n'est pas univoque et dans la plupart des cas prête à confusion.

II.1.3 <u>Méthode des points et croix.</u>

Les courbes en points et croix [7,8] ne comportent pas d'échelles de temps mais seulement une échelle de cours. La construction d'une telle courbe nécessite un certain nombre de régles :

- * Les colonnes ne doivent comporter que des signes identiques. Lorsque l'évolution change de sens, il faut changer de colonne.
- * Il faut choisir une valeur unitaire de variation, toute évolution inférieure à ce seuil ne sera pas considérée.

Sur le graphique suivant sont représentés : un x quand le cours monte et quand le cours baisse il y a changement de colonne et de signe ici un o.



le plus haut a baissé le plus bas a baissé BAISSE le plus haut est monté le plus bas est monté HAUSSE

L'interprétation des graphiques points et croix rejoint les théories chartistes, et reste donc assez arbitraire. La méthode a été testée et comparée à la méthode de simple investissement qui consiste à acheter un certain nombre de titres et à les conserver. Le profit obtenu étant inférieur à celui procuré par la stratégie de simple investissement, une conclusion s'impose: la méthode points et croix est insuffisante.

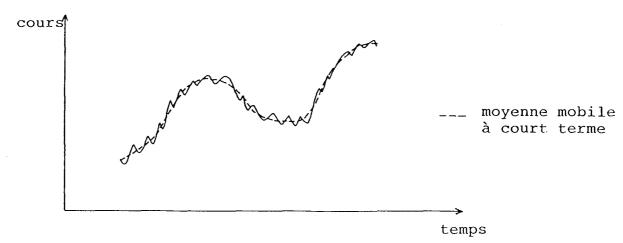
II.1.4 Courbe cumulative des valeurs en hausse et en baisse.

Quotidiennement la différence entre le nombre de valeurs en hausse et le nombre de valeurs en baisse est reportée sur un graphique [7]. Pour définir la stratégie à adopter, on compare la courbe des différences obtenue à la courbe de l'indice du marché, si la courbe cumulative est en hausse alors que la courbe de l'indice est en baisse, c'est une indication à la hausse et inversement à la baisse.

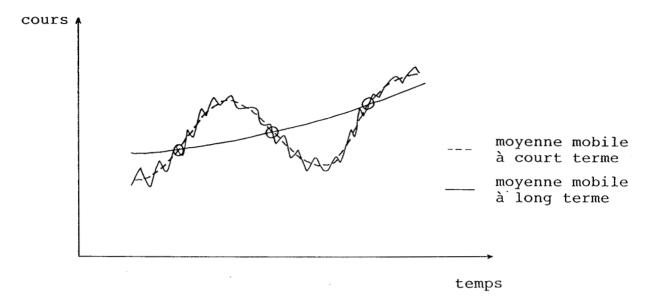
II.1.5 <u>Méthodes des moyennes mobiles</u>.

Cette méthode lisse une série de cours tout en gardant une fenêtre constante que l'on déplace au fur et à mesure de nouvelles cotations. La fenêtre est plus ou moins grande suivant la longueur de l'étude : court, moyen, ou long terme. L'évolution de la courbe filtrée obtenue permet de déduire une tendance et les instants où celle-ci va s'inverser.

Les moyennes mobiles [7, 9, 10] offrent l'avantage de mettre clairement en évidence des signaux de prises de position. L'intersection de la moyenne mobile avec la série de cours correspond à une indication d'achat ou de vente.



Les moyennes mobiles croisées sont plus perfectionnées [93], elles résultent de la superposition d'une moyenne mobile faite à court-terme et d'une moyenne mobile faite à long terme. Les intersections de ces deux moyennes sont alors les indications d'achat ou de vente.



L'inconvénient de telles méthodes est le délai de confirmation à observer. En effet suite à un signal d'achat ou de vente, il est nécessaire d'attendre quelques cotations qui confirmeront la tendance abordée et éviteront des frais de transactions non justifiés. A ce délai de confirmation vient s'ajouter le retard dû à la fenêtre d'observation de la méthode. Ces retards cumulés peuvent être importants et anéantir tout effort voué à maximiser la rentabilité du portefeuille étudié.

II.2 <u>Le Modèle du Marché.</u>

II.2.1 <u>Notion de rentabilité et de risque.</u>

La rentabilité d'une valeur est définie par la relation :

$$R_{t} = \frac{D_{t} + P_{t} - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

où R_t :taux de rentabilité de la valeur i pendant l'instant t. D_t :bénéfice à l'encaissement pendant la période t. P_t :cours de la valeur à la fin de la période t. P_{t-1} :cours de la valeur à la fin de la période t-1. ou $R_{i,t} = Log\left(\left(P_{i,t} + D_{i,t}\right)/P_{i,t-1}\right)$

 $R_{i,t} = Log((P_{i,t} + D_{i,t})/P_{i,t-1})$ $R_{i,t} : le rendement continu.$ Le risque représente la dispersion ou la variabilité de la rentabilité.

La variabilité d'une valeur sur une période déterminée est donnée par l'écart-type de la série des taux de rentabilité de cette valeur sur un nombre de sous-périodes à définir.

Exemple

période	rentabilité	R-R	$(R-\bar{R})^2$
1 ^{er} trimestre 2 ^{ème} trimestre 3 ^{ème} trimestre 4 ^{ème} trimestre	7% 10% 2% -7% —— R=3%	4% 7% -1% -10%	16 49 1 100 —

La rentabilité moyenne par période aurait été dans cet exemple de 3% et la variance de 166/4=41.5 d'où l'écart-type de 6.45%.

La valeur aurait réalisé trimestre par trimestre une rentabilité moyenne de 3% avec un écart-type de 6.45% autour de cette moyenne.

La variance d'une action se calcule par la formule :

$$\sigma_i^2 = 1/N \left(\sum_{t=1}^{N} (R_{it} - \overline{R}_i)^2 \right)$$

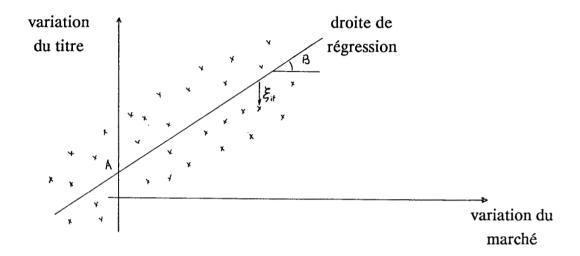
où R_{it} : rentabilité d'une action i sur la période t.

 \bar{R}_{i} : sa moyenne.

N : nombre de périodes.

II.2.2 Caractéristiques du Modèle du Marché.

Si nous traçons les variations d'un titre en fonction des variations du marché, nous obtenons le graphe suivant :



Le fait que tous les points soient proches de la droite indique le caractère systématique de la rentabilité de l'action, le fait que tous les points ne soient pas exactement sur la droite fait ressortir l'aspect non systématique (ou non lié au marché) d'une partie de la rentabilité du titre.

L'équation de la droite de régression est :

$$R_{it} = A_i + B_i R_{mt} + \xi_{it}$$

où

 R_{it}

: taux de rentabilité de l'action i pendant la période t.

 R_{mt}

: taux de rentabilité du marché mesuré par un indice général

pendant la période t.

 B_{i}

: paramètre propre à l'action i qui indique la relation qui existe entre les fluctuations de l'action i et les fluctuations de l'indice

général du marché, c'est le coefficient de volatilité ou

coefficient bêta.

 $\xi_{\rm it}$

: coefficient qui représente le risque spécifique de l'action i.

Variable aléatoire, son écart-type constitue une mesure du

risque spécifique.

 A_i

: coefficient qui représente la rentabilité qui aurait pu être

obtenue sur l'action si la rentabilité du marché avait été nulle.

Avec:
$$B_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_{m}^2}$$

: covariance des taux de rentabilité de l'action i avec ceux de $\sigma_{\rm im}$

l'indice du marché.

 $\sigma_{\rm m}^{2}$: variance des taux de rentabilité de l'indice du marché.

où
$$\sigma_{ij} = 1/N \sum_{t=1}^{N} (R_{it} - \overline{R}_i)(R_{jt} - \overline{R}_j)$$

 $\begin{array}{ll} R_{it} \ \text{et} \ R_{jt} & \text{: taux de rentabilit\'e des deux actions i,j.} \\ \overline{R}_i \ \text{et} \ \overline{R}_i & \text{: leurs moyennes respectives.} \end{array}$

Les actions pour lesquelles une variation donnée de l'indice entraîne une variation identique de leur rentabilité ont un bêta égal à 1. Les actions pour lesquelles une variation de 1% de l'indice entraîne une variation de leur rentabilité :

supérieure à 1% sont dites volatiles (B;>1) inférieure à 1% sont dites peu volatiles (B_i<1)

Le risque systématique (celui du marché) vaut : B $\sigma_{\rm m}$

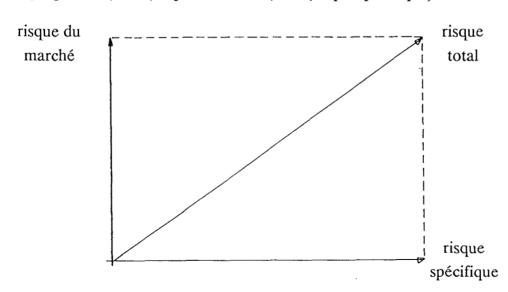
Le risque non systématique (de l'action) vaut : σ_{ξ}

D'où le risque total : $\sigma_i^2 = B_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\xi i}^2$

En effet:

$$\begin{split} &\sigma_{i}^{2} = \text{COV}(\,r_{i}, r_{i}) = \text{COV}(\,B_{i}\sigma_{m} + \sigma_{\xi i}, B_{i}\sigma_{m} + \sigma_{\xi i})\\ &\sigma_{i}^{2} = \text{COV}(\,B_{i}^{2}\,\sigma_{m}^{\,\,2}) + \text{VAR}_{\xi i}\\ &\sigma_{i}^{2} = B_{i}^{\,2}\,\sigma_{m}^{\,\,2} + \sigma_{\xi i}^{\,\,2} \end{split}$$

 $(risque\ total)^2 = (risque\ du\ marché)^2 + (risque\ spécifique)^2$



Les auteurs de ce modèle sont nombreux: MARKOWITZ (1952-1959), SHARPE (1904), LINTNER (1965), FAMA (1968), JACQUILLAT et SOLNIK (1981) [11]. Sa validité a été prouvée et il est largement appliqué par les spécialistes financiers bien qu'il ne soit pas toujours très rigoureux, en effet, lorsque la courbe qui représente les variations du titre en fonction des variations du marché est très bruitée, il paraît difficile de pouvoir approximer le nuage de points par une droite de régression.

III. MODELE D'EVALUATION DES OBLIGATIONS.

III.1. Modèle déterministe.

Pour comprendre un modèle d'évaluation d'obligation il faut connaître les propriétés de ce titre c'est pourquoi dans un premier temps nous verrons toutes les modalités (plus nombreuses que celles de l'action) qui l'affecte.

Les obligations donnent à leurs détenteurs la qualité de créanciers de la collectivité émettrice. Cette collectivité émettrice s'engage à les rembourser à une échéance déterminée et à leur verser un intérêt annuel fixe, d'où le nom de "valeur à revenu fixe".

Un emprunt obligataire est divisé en un nombre déterminé de coupures d'égales valeurs -les obligations- qui sont émises à la même date et simultanément souscrites par de nombreux épargnants.

Les obligations issues d'un même emprunt bénéficient toutes des mêmes droits.

La charte de chaque emprunt est constituée par son "contrat d'émission" qui précise ses caractéristiques.

* <u>Le prix d'émission</u>. C'est celui que doit verser toute personne qui souscrit une obligation au moment de son émission.

Son montant est souvent égal à la valeur nominale de l'obligation mais peut lui être inférieur. Les valeurs mobilières possèdent une valeur faciale inscrite sur chaque titre qui est appelée valeur nominale ou encore le "pair". La valeur nominale d'une action est égale à la fraction du capital social qu'elle représente.

Alors qu'une action ne peut être émise qu'à un prix égal ou supérieur à sa valeur nominale, dans le cas de l'obligation, la valeur nominale est égale au montant du prêt consenti par l'obligataire et sert de base de calcul à l'intérêt annuel.

* <u>L'intérêt</u>. C'est le revenu de l'obligation. Il est payé chaque année à une date déterminée, contre remise d'un coupon détaché du titre. Son montant est obtenu par application du taux d'intérêt de l'emprunt à la valeur nominale de l'obligation.

- * <u>Le prix de remboursement</u>. Il est au moins égal à la valeur nominale de l'obligation et peut même, parfois lui être supérieur dans ce cas, la différence entre le prix d'émission et le prix de remboursement constitue la "prime de remboursement" au bénéfice de l'obligataire.
- * <u>Les modalités d'amortissement</u>. Elles déterminent les conditions dans lesquelles les obligataires se trouvent remboursés.

L'emprunt peut être amorti en une seule fois, de façon massive, à la date d'échéance de l'emprunt. Mais le plus souvent, le remboursement est fractionné, année par année, à des dates fixées par avance et conformément à des modalités précisées par le contrat d'émission (tirages au sort, rachat en bourse).

Peut-on parler de rentabilité et de risque pour une obligation?

La rentabilité d'une obligation s'appréhende à partir de son taux de rendement actuariel. C'est le taux de rentabilité que peut prétendre obtenir l'acquéreur d'une obligation s'il la conserve jusqu'à son remboursement.

Le calcul de ce taux actuariel englobe la valeur d'acquisition de l'obligation - son prix d'émission ou ultérieurement son cours en bourse - ainsi que la série des intérêts annuels et des remboursements prévus par le contrat d'émission. Tous ces éléments sont connus et permettent, sous certaines hypothèses probabilistes, de mesurer à chaque instant le taux de rentabilité qui peut être escompté d'une obligation. On pourrait penser qu'un tel titre est dénudé de tout risque, en fait il en est autrement.

L'obligation se trouve essentiellement exposée à deux types de risques :

- 1) Le risque économique et monétaire qui tient aux fluctuations des taux d'intérêt exigés par les investisseurs et par l'équilibre économique général. Les taux de rendement actuariels s'élèvent avec la hausse prévisible des taux d'inflation, en provoquant une baisse des cours des obligations en bourse et inversement. Il s'ensuit un risque de perte, mais aussi de gain, en capital pour l'obligataire, qu'il vende son titre sur le marché ou qu'il attende le remboursement.
- 2) Le risque financier, également appelé risque de défaut, en raison de l'éventualité que la collectivité émettrice ne puisse faire face à l'échéancier des versements d'intérêts et des remboursements.

Le risque d'une obligation provient du fait que sa valeur va fluctuer en fonction du taux d'intérêt.

La relation actuarielle entre la valeur de marché de l'obligation et le taux d'intérêt à long terme en vigueur [12]est égale à tout instant à :

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^1} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_N(+F_N)}{(1+r)^N} = \sum_{t=1}^{N} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

P: valeur de l'obligation.

C_i: coupons à l'instant i.

r : taux d'intérêt.

F_N: valeur de l'obligation à l'instant N.

La variation du prix par rapport à une variation du taux est:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{C_1}{(1+r)^2} - \frac{2C_2}{(1+r)^3} - \dots - \frac{NC_N}{(1+r)^{N+1}} = -\frac{N}{t=1} - \frac{tC_t}{(1+r)^{t+1}}$$

La volatilité de l'obligation est :

$$\frac{dP}{P} = -D dr \quad \text{avec} \quad D = \frac{1}{1+r} \frac{tC_t}{t=1(1+r)^t}$$

$$\frac{D}{1+r} = \frac{N}{N} \frac{C_t}{t=1(1+r)^t}$$

D est appelé duration et indique la plus-value en capital réalisée lors d'un abaissement du taux du marché de 1%.

* Pour une obligation hypothétique (sans coupons)

$$P = \frac{C_N}{(1+r)^N}$$

* Pour une rente perpétuelle

* Pour une obligation amortissable en deux tranches par exemple au bout de 10 ans et au bout de 16 ans:

$$P = \frac{C_1 + C_2}{1 + r} + \frac{C_1 + C_2}{(1 + r)^2} + \dots + \frac{C_1 + C_2}{(1 + r)^{10}} + \frac{A_1}{(1 + r)^{10}}$$
$$\frac{C_2}{(1 + r)^{11}} + \dots + \frac{C_2}{(1 + r)^{16}} + \frac{A_2}{(1 + r)^{16}}$$

οù

 μ

C_i sont les coupons.

r le taux d'intérêt.

Ai la valeur de l'obligation à l'instant i

III.2 <u>Modèles aléatoires.</u>

Ces modèles ont été testés et ne donnent pas de très bons résultats en France car le marché n'est pas parfait [13]. C'est-à-dire que tous les spéculateurs ne bénéficient pas des mêmes informations. Mais on aspire toujours à un marché parfait.

Ces modèles sont basés sur la théorie d'un processus d'évolution stochastique continu de Gauss-Wiener défini par l'équation différentielle d'Itô, et l'expression de l'évolution du cours d'une action s'écrit alors:

$$\frac{dS}{=} = \mu dt + \sigma dz$$

où dS : variation du cours S pendant un cours instant dt. Si S_t valeur à t et S_{t+dt} à t+dt

$$\frac{dS}{S} = \frac{S_{t+dt} - S_{t}}{S_{t}}$$

: Espérance mathématique du rendement instantané de l'action.

dz : Processus standard de Gauss-Wiener, dz est distribué suivant une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à dt.

 σ : Ecart-type du rendement instantané de l'action. Etant connu, constant et identique pour tout investisseur.

Donc µdt est de nature déterministe et odz de nature aléatoire.

De même pour l'obligation c'est le taux d'intérêt qui suit ce processus:

$$dr = \mu(r)dt + \sigma(r)dz \qquad (1)$$

dr :Variation instantanée du taux sans risque au cours de l'instant dt.

 $\mu(r)$ et $\sigma(r)$: Espérance et écart-type des changements instantanés du taux sans risque.

Soit $G(r, \tau)$ la valeur de l'obligation sans coupon, de maturité τ qui rapportera 1F à l'échéance. Grâce au lemme d'Itô on peut exprimer le changement instantané de la valeur de l'obligation au cours d'un instant dt, lorsque le taux d'intérêt varie de dr. Soit:

$$dG = G_r dr + G_t dt + 1/2 G_{rr} (dr)^2$$
 (2)

Avec G_r: dérivée première de G par rapport à r

 G_t : dérivée première de G par rapport à t G_{rr} : dérivée seconde de G par rapport à r

En prenant le carré de cette équation :

$$(dr)^2 = (\mu(r)dt)^2 + 2\mu(r)\sigma(r)dzdt + (\sigma(r)dz)^2$$

D'après la table de multiplication applicable aux intégrales stochastiques:

$$(dt)^2 = 0$$
 dzdt = 0 $(dz)^2 = dt$

D'où $(dr)^2 = \sigma(r)^2 dt$

Remplaçons dr et $(dr)^2$ dans l'équation (2) et divisons par G:

$$\frac{dG}{G} = \frac{G_r}{G} (\mu(r)dt + \sigma(r)dz) + \frac{G_r}{G} dt + 1/2 \frac{G_{rr}}{G} \sigma(r)^2 dt$$

$$\frac{dG}{G} = \frac{G_r \mu(r) + G_r + 1/2 \sigma(r)^2 G_{rr}}{G} dt + \frac{\sigma(r) G_r}{G}$$

dG

: Espérance du rendement instantané de l'obligation sans coupon.

G

Comme E(dz)=0 il en découle, si on suppose que l'espérance du rendement instantané d'une obligation sans risque de défaut est égale au taux d'intérêt sans risque r quelque soit la maturité du titre, que:

$$\frac{\mu(\mathbf{r}) G_{\mathbf{r}} + G_{\mathbf{r}} + 1/2 G_{\mathbf{r}\mathbf{r}} \sigma^{2}(\mathbf{r})}{G} = \mathbf{r}$$

D'où

$$1/2 \sigma(r)^2 G_{rr} + \mu(r) G_r - G * r + G_t = 0$$

La résolution de cette équation différentielle, présentée au troisième chapitre et en annexe II, permet de trouver la valeur de l'obligation G.

IV MODELE D'EVALUATION DES OBLIGATIONS CONVERTIBLES.

L'obligation convertible [14, 15, 16] est décomposable en deux composantes distinctes:

- . la valeur nue
- . le droit de conversion

La valeur nue de l'obligation convertible (ou valeur obligataire ou plancher actuariel) représente le cours fictif d'une obligation classique équivalente qui aurait pu être émise par la même société et dont les coupons et la valeur des remboursements auraient été identiques à ceux de l'obligation convertible.

La valeur du droit de conversion de l'obligation convertible (ou droit d'option ou prime par rapport à la valeur nue) constitue le prix de l'avantage de l'obligation convertible par rapport à l'obligation classique.

De l'émission à t_1 la valeur d'échange est inférieure à la valeur nue (premier plancher). Après t_1 la valeur d'échange est supérieure à la prime par rapport à la valeur nue (deuxième plancher). La valeur de l'obligation convertible ne peut pas descendre en dessous de ces deux planchers : $C_t \ge \max(E_t, N_t)$.

Avant t_1 la prime de conversion est supérieure à la prime par rapport à la valeur nue, en t_1 elles sont égales et après t_1 la prime de conversion est inférieure à la prime par rapport à la valeur nue. La prime de conversion disparait en z.

En t₂, la valeur d'échange franchit la valeur nominale. Le cours de l'action devient plus élevé que le prix de conversion (intérêt de convertir).

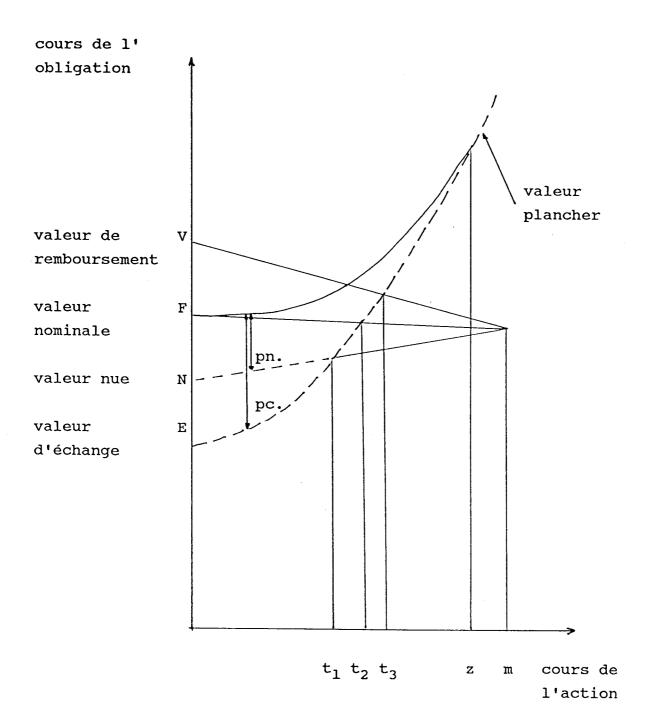
L'émetteur ne peut forcer la conversion avant t₃ date à laquelle la valeur d'échange dépasse la valeur de remboursement anticipé.

L'entrepreneur se réserve une marge de sécurité pour se garantir contre toute baisse éventuelle de l'action qui risquerait d'entraîner l'échec de la conversion et se traduirait par une perte importante de trésorerie pour sa société. Aussi l'amortissement anticipé n'interviendra pas avant la date z, date à laquelle la valeur d'échange excède largement la valeur de remboursement (15 à 20%).

La prime par rapport à la valeur nue est justifiée par le fait que : au delà de t_1 la valeur d'échange oppose un frein à la baisse du titre en cas de hausse des taux d'intérêt .

La prime de conversion est justifiée par le fait que : la valeur nue oppose une barrière à la baisse en cas de chute des cours de l'action.

Le coupon de l'obligation convertible est, durant les premières années, supérieur au dividende correspondant à la valeur d'échange.



pc. :prime de conversion.

pn. :prime par rapport à la valeur nue.

La prime de conversion tend à disparaître :

- . Si la valeur d'échange est assez élevée pour que l'amortissement paraisse imminent.
- . Si le dividende payé sur la valeur d'échange devient supérieur au coupon.
- . Si la valeur de l'obligation convertible est assez loin de la valeur nue pour que la protection qu'elle offre ait disparue.

Ainsi la valeur théorique de l'obligation peut s'écrire :

$$C_0 = \sum_{t=1}^{N} \frac{q_t R_t}{(1+r)^t} + \frac{a_t p_t Z_t}{(1+r)^t} + \frac{(1-a_t)p_t E_0 (1+g)^t}{(1+k)^t}$$

avec

C₀: valeur initiale de l'obligation convertible.

N : durée de vie de l'emprunt.

q_t: probabilité d'encaissement du coupon à l'année t.

R, : coupon à l'année t.

 a_t : vaut 1 si

$$\frac{P_{t} Z_{t}}{(1+r)^{t}} > \frac{P_{t} E_{0} (1+g)^{t}}{(1+k)^{t}}$$

sinon vaut 0

Z_t = V_t si échange par suite d'amortissement.

 $Z_t = N_t$ si échange spontané.

P_t: probabilité d'amortissement ou de fin d'emprunt en t

 V_t : valeur de remboursement en t.

N_t: valeur nue en t.

: taux de rendement actuariel brut des emprunts classiques similaires à l'obligation convertible.

 ${\bf E}_0$: valeur d'échange initiale.

g : taux de croissance moyen annuel du cours et du dividende de l'action contre laquelle l'obligation convertible est échangeable.

k: taux d'actualisation de cette action.

Si la prime par rapport à la valeur nue est égale à zéro donc si l'option d'échange est sans valeur, la formule devient :

$$C_0 = N_0 = \sum_{t=1}^{N} \frac{q_t R_t + p_t V_t}{(1+r)^t}$$

Si la prime de conversion tend vers zéro on peut écrire:

$$C_0 = N_0 = \sum_{t=1}^{N} \frac{q_t R_t + p_t E_t}{(1+k)^t}$$

Conclusion

Nous avons parcouru à travers ce chapitre les différentes méthodes d'évaluation des actifs financiers. Les spécialistes de l'évaluation des entreprises s'accordent depuis longtemps pour considérer que l'approche fondamentale est généralement insuffisante [17] et que seule la prise en compte d'une rentabilité prévisionnelle permet d'approcher la valeur réelle d'une firme et donc la valeur réelle de l'action concernée. Mais les comptes publiés par les firmes sont rares et analyser ces chiffres est extrêmement dangereux. L'évaluation des titres ne reposent que sur des estimations propres à chaque spécialiste, et de plus en plus le P.E.R. apparaît comme un instrument mal adapté à l'évaluation [18]

Les différentes méthodes d'analyse technique basées sur l'évolution des cours, offrent la possibilité d'extraire l'information utile du signal qu'est la tendance boursière. Par conséquent, les instants propices où il apparaît opportun d'intervenir sur le marché lors des changements de tendances peuvent être décelés par analyse graphique, et permettent de guider le spéculateur dans ses investissements. Néanmoins les nombreuses interprétations que l'on peut donner à une formation de cours constituent l'inconvénient majeur de ces méthodes. Le Modèle du Marché apparaît alors mieux adapté puisque celui-ci permet de quantifier la valeur d'un titre par les critères rentabilité et risque et d'utiliser ces critères pour effectuer une gestion de portefeuille.

CHAPITRE II

ESTIMATION DES CRITERES RENTABILITE ET RISQUE.

Introduction

Pendant de nombreuses années, les spécialistes ont évalués les actifs à partir de la situation économique de l'entreprise. Seule l'existence d'un marché parfait peut valider les méthodes qu'ils ont instaurées. Ce qui signifie un marché où toutes les informations sont disponibles et connues de tous. Cette hypothèse, évidemment utopique, explique l'aspect révolu de l'analyse fondamentale et le développement de l'analyse technique. Celle-ci consiste à considérer les cours de la bourse comme un signal qui reflète toutes les informations du marché et à le traiter en tant que tel.

Les cours de la bourse sont des données brutes difficilement exploitables, il est nécessaire d'extraire l'information utile du signal et d'éliminer les parasites appelés bruits. Cela relève du domaine de l'automatique et de la théorie du signal. Etant donné notre volonté d'analyser les phénomènes boursiers et principalement d'anticiper leur émergence dans le but de moduler fructueusement le contenu d'un portefeuille, nous allons proposer dans ce chapitre deux méthodes qui s'y prêtent.

I. LES CRITERES, LES MODELES ET LA BOURSE.

I.1 Rentabilité et Risque.

Le signal boursier se compose d'un signal significatif que l'on appelle la tendance boursière et d'un signal aléatoire constitué par un bruit autour de cette tendance. La rentabilité réelle d'un titre, qui correspond à la plus-value réalisée entre la date d'achat et la date de vente, est généralement appréciée au moyen de la rentabilité moyenne et de la variabilité de cette rentabilité, ou risque, sur la même période. La rentabilité moyenne correspond au pourcentage de la pente de la droite qui passe au mieux entre les cours concernés, et le risque, à l'erreur au sens du critère quadratique quantifié par:

$$E = ((\sum_{t=1}^{N} (C_t - D_t)^2)^{1/2}) / N$$

E : Erreur totale.

C. : Cours réalisé à l'instant t.

D_t : Ordonnée de la droite à l'instant t.

N : Nombre d'observations.

L'anticipation boursière est issue:

- * d'un suivi quotidien et d'une interprétation de l'évolution des cotations après élimination des parasites.
- * d'une extrapolation du cours suivant et par conséquent des risque et rentabilité. Nous aborderons selon la méthode utilisée l'une ou l'autre de ces possibilités.

I.2 Etude critique de quelques méthodes.

I.2.1 Généralités.

L'aspect très bruité des cotations d'un titre ne permet pas l'utilisation systématique des méthodes du traitement du signal. Si nous envisageons, par exemple, les fonctions Splines [19, 20, 21, 22], le résultat obtenu par leurs applications est identique à une tige flexible que l'on obligerait à passer par tous les points ou en ce qui nous concerne les cotations. Le bruit est alors pris intégralement en considération et cette procédure n'est pour notre étude d'aucune utilité. Il en est de même pour les fonctions B-Splines [22, 23], basées sur la théorie d'une tige flexible dont cette fois le lieu de passage serait le point milieu de la droite qui joint deux points consécutifs.

Ce type de méthodes d'interpolation qui assimile signal utile et bruit ne présente aucun avantage à la détection des tendances boursières. L'ensemble des méthodes envisageables se restreint donc aux méthodes qui présentent un effet de lissage ou de filtrage des cours observés.

I.2.2 Modèles récursifs.

Les modèles récursifs [24] consistent à déterminer les coefficients a_0 , a_1 ,..., a_i d'une équation telle que:

$$y(t+1) = a_0 * y(t) + a_1 * y(t-1) + + a_i * y(t-i)$$

Connaissant ces coefficients, l'estimation du point prévu en t+1 est alors possible. Une telle formulation appliquée à notre domaine d'étude équivaut à une estimation du cours en t+1 (C(t+1)) à partir des cours précédents:

$$C(t+1) = a_0 * C(t) + a_1 * C(t-1) + + a_i * C(t-i)$$

La méthode des moindres carrés [24, 27, 28] permet une telle résolution et introduit également l'effet de lissage et de filtrage que nous recherchons. Le système obtenu comprend N équations (avec N > i) et se présente sous la forme:

ou sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} C(t+1) \\ C(t) \\ \vdots \\ C(t-1) \\ C(t-1) \\ C(t-1) \\ \vdots \\ C(t-1) \\ C(t-1) \\ C(t-1) \\ \vdots \\ C(t-1) \\ C(t-1)$$

avec
$$\mathbb{C} = \mathbb{M} * A$$

La solution de ce système est:

$$\widetilde{A} = (\mathbb{M}^T * \mathbb{M})^{-1} * \mathbb{M}^T * \mathbb{C} \quad \text{où } \widetilde{A}^T = (\widetilde{a_0}, \widetilde{a_1}, \dots, \widetilde{a_i})$$
et
$$\widetilde{C}(t+1) = \widetilde{a_0} * C(t) + \widetilde{a_1} * C(t-1) \dots + \widetilde{a_i} * C(t-i)$$

Les résultats obtenus par application de ce modèle ne sont pas satisfaisants et la variation du nombre de cotations passées prises en considération n'améliore guère l'erreur d'estimation.

Aux périodes de liquidation il se produit généralement une augmentation du volume des transactions suivie d'une hausse des cours, le même phénomène s'observe lors des changements de tendance. Afin de vérifier l'existence d'une relation quelconque entre ces deux variables, nous avons intégrer le volume de transactions (VT) comme nouveau paramètre du modèle. L'équation devient alors:

$$C(t+1) = a_0 * C(t) + a_1 * C(t-1) \dots + a_i * C(t-i) + b_0 * VT(t) + b_1 * VT(t-1) \dots + b_i * VT(t-i)$$

Les résultats aberrants que nous avons obtenus ont prouvé qu'il n'existait pas de corrélation linéaire systématique liant l'évolution du cours et le volume de transactions engendrés. L'intégration de cette nouvelle variable est donc superflue.

I.2.3 <u>Méthodes de filtrage.</u>

Certains filtres comme les filtres de Butterworth, Tchebitchev, Bessel et Paynter [24, 25] ont déjà été appliqués à la bourse. Ils ont donné lieu à un logiciel spécialisé tel le SCAN [26] et mettent en évidence les mouvements boursiers. Néanmoins, ces filtres nécessitent un certain recul pour apprécier la configuration et l'amplitude d'un mouvement et par conséquent ne feront pas l'objet d'une nouvelle approche.

II. ANALYSE DE L'EVOLUTION DES COTATIONS PAR UNE METHODE DE FILTRAGE NON LINEAIRE.

II.1 Méthode de Rosenfeld.

Une autre technique de filtrage a été proposée par A. Rosenfeld et P. Torre [29]. Etant donné un ensemble de N observations {y(1),....,y(N)}, à chaque instant d'échantillonnage, les auteurs évaluent le point filtré associé comme étant la quantité:

$$\widetilde{y}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{t} y(i)}{t} * \frac{\sum_{i=t}^{N} y(i)}{N-t}$$

t: 1,2,...,N.

N: Nombre d'observations.

Le premier terme correspond à la moyenne des observations situées à gauche du point considéré et le second à la moyenne des observations à sa droite.

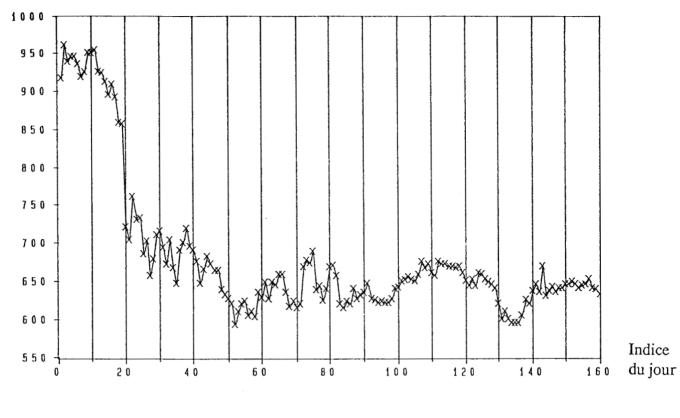
La courbe filtrée obtenue ne respecte pas l'amplitude des points réels. De plus le fait de considérer l'ensemble des observations conduit à une perte de l'information utile du signal réel.

H. Fizazi et J.G. Postaire [30, 31] ont apporté une amélioration à la méthode en choisissant une fenêtre symétrique à gauche et à droite de l'échantillon étudié. L'équation de filtrage devient:

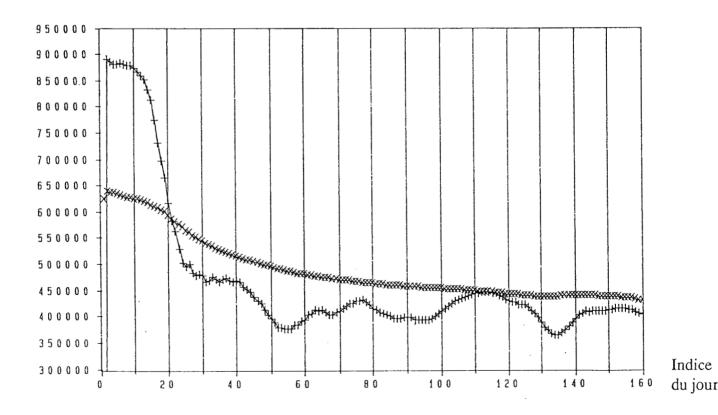
$$\widetilde{y}(t) = \frac{\sum_{i=t-L}^{t} y(i)}{L} * \frac{\sum_{i=t}^{t+L} y(i)}{L}$$

$$t: L, ..., N-L.$$

Les auteurs ont appliqué cette méthode aux courbes de fonctions de densité de probabilité obtenues en classification automatique. Les résultats obtenus prouvent que la courbe filtrée conserve l'information utile du signal d'origine à un facteur d'échelle près, et que l'erreur quadratique obtenue à la suite d'un réajustement de la courbe est inférieure à celle d'une moyenne mobile classique. Par contre, l'utilisation de cette méthode dans d'autres domaines n'est pas satisfaisante. La correction au niveau de l'amplitude ne suit aucune loi et, de plus, dans le cas d'observations fortement bruitées, le filtrage sera erroné. En effet, si nous considérons un signal bruité, un accident, situé au milieu de la fenêtre étudiée, sera intégré deux fois dans le calcul du point filtré correspondant: dans la moyenne à gauche et dans la moyenne à droite. Ainsi la courbe filtrée présente des anomalies en chaque instant d'échantillonnage où un accident se produit parmi les observations. D'un autre côté, le choix d'une fenêtre symétrique est particulièrement intéressant puisque celui-ci permet l'intégration de nouvelles observations sans altérer la courbe filtrée calculée précédemment.



X Signal réel



— Signal filtré par la méthode de Rosenfeld.

--- Signal filtré par la méthode d' H. Fizazi & J.G. Postaire. (L=10)

II.2 Analyse des tendances des cotations à la bourse.

La méthode de filtrage non-linéaire [32] que nous proposons conserve l'idée de base instaurée par H. Fizazi et J.G. Postaire: le choix de fenêtre symétrique autour de l'échantillon étudié. Afin de remédier aux anomalies de filtrage occasionnées par le bruit, que nous avons exposées précédemment, il est nécessaire de limiter l'influence de l'observation à l'instant étudié. La solution adoptée consiste à ne reporter que la moitié de la quantité de cette observation dans les fenêtres gauche et droite. Ainsi tout échantillon ne sera considéré en tout et pour tout qu'une seule fois et un événement imprévisible ne sera pas amplifié.

Soit une fenêtre de largeur L, en chaque instant les moyennes gauche (MG) et droite (MD) sont équivalentes à:

$$MG(t) = \frac{\int_{i=t-L}^{t-1} y(i) + (y(t)/2)}{(L-1) + 1/2}$$

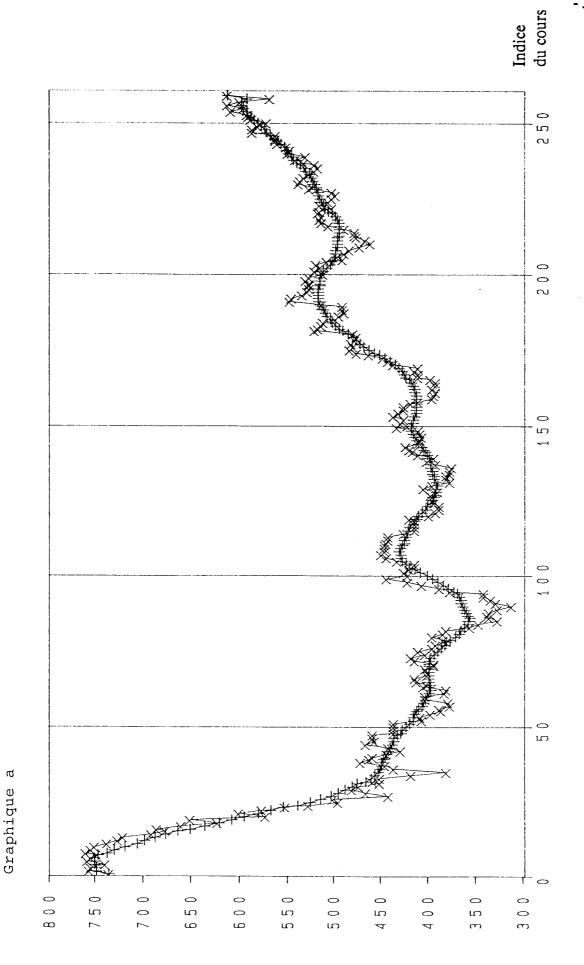
$$MD(t) = \frac{\int_{i=t-L}^{t-1} y(i) + (y(t)/2)}{(L-1) + 1/2}$$

En effectuant le produit de la moyenne gauche par la moyenne droite nous obtenons un signal filtré qui approxime la séquence d'observations sans toutefois respecter l'amplitude. Ce problème est résolu par l'utilisation de la racine carrée de ce produit. L'équation de filtrage devient:

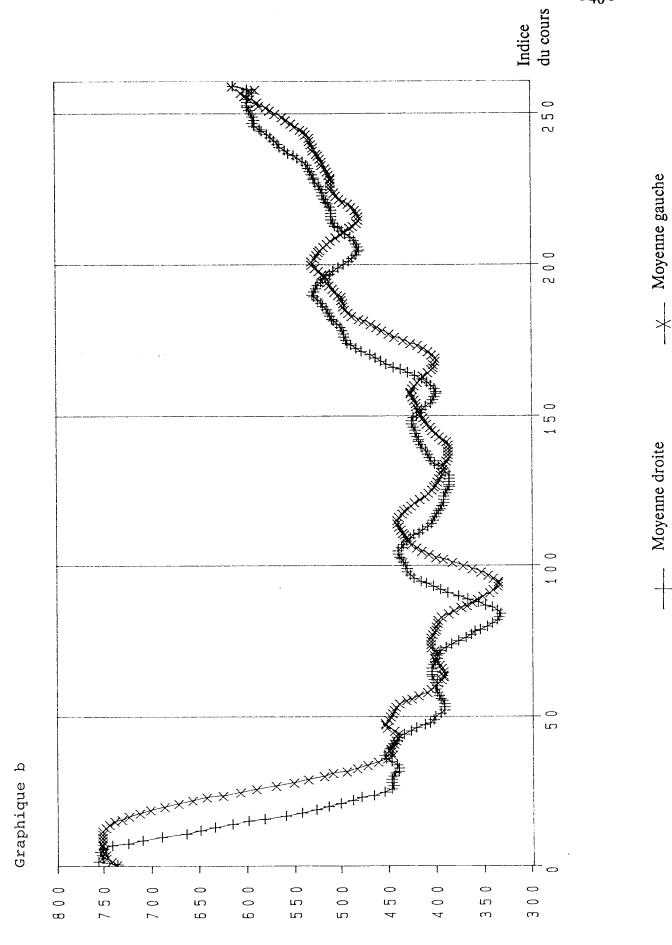
$$\underbrace{\sum_{i=t-L}^{t-1} y(i) + (y(t)/2)]}_{[i=t+1]} * \underbrace{\sum_{i=t+1}^{t+L} y(i) + (y(t)/2)]}_{[i=t+1]}^{1/2}$$

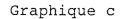
$$\underbrace{\sum_{i=t-L}^{t-1} y(i) + (y(t)/2)]}_{[i-t+1]} + \underbrace{\sum_{i=t+1}^{t+L} y(i) + (y(t)/2)]}_{[i-t+1]}^{1/2}$$

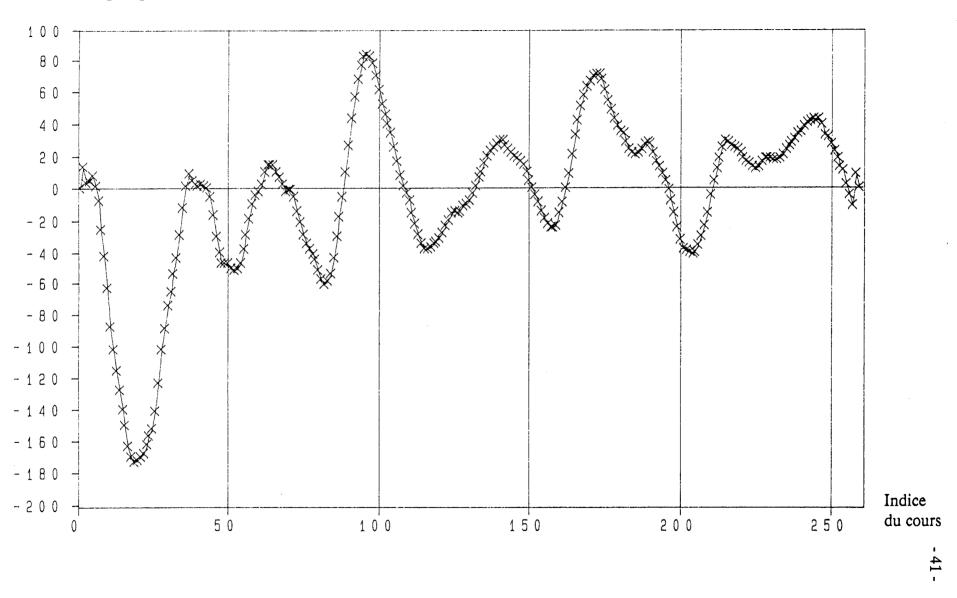
A chaque instant d'échantillonnage nous sommes en possession de trois quantités: $\tilde{y}(t)$ le point filtré, MG(t) la moyenne gauche, MD(t) la moyenne droite. Les reporter sur un graphique en fonction du temps permet d'obtenir un canal d'évolution autour du signal filtré.



Cotations du titre Printemps — Signal filtré du 22/09/87 au 30/09/88.







II.3 Détection des retournements de tendances et estimation.

Afin d'illustrer la méthode, nous avons appliqué l'algorithme aux cotations de l'action Printemps. Le graphique a représente le signal filtré au moyen d'une fenêtre de 10 observations à gauche du point et de 10 observations à droite (L=10), superposé aux observations réelles. Le graphique b est consacré au canal d'évolution formé par les moyennes gauche et droite. Il permet d'effectuer une analyse de la tendance. En effet, si la hauteur du canal ne subit aucune évolution, la tendance reste identique. Par contre, si elle augmente la tendance s'amplifie et inversement, si elle diminue la tendance s'atténue. Quand la moyenne gauche croise la moyenne droite, la tendance s'est réellement inversée.

La représentation des différences moyenne droite - moyenne gauche permet d'obtenir un nouveau signal (graphique c) plus explicite. Lorsque ces différences diminuent la tendance en cours arrive à sa fin, et à partir du moment où elles s'annulent le changement de tendance est confirmé. Les périodes durant lesquelles la pente de la courbe des différences est positive correspondent à des périodes favorables à la spéculation à la hausse et celles où la pente est négative à des périodes favorables à la spéculation à la baisse. A tout moment il est possible d'évaluer la rentabilité du titre grâce à la droite joignant la moyenne gauche à la moyenne droite, ainsi que le risque mesuré par l'erreur quadratique autour de cette droite.

La rentabilité du titre mesurée en pour-cent s'exprimera:

$$RE(t)_{(\%)} = \frac{MD(t)-MG(t)}{(L + 1/2)_*MD(t)} * 100$$

L'équation de la droite (MG,MD) sera :

$$y(T) = A * T + B$$
 $T \in [t-L, t+L]$ $A = \frac{MD(t) - MG(t)}{L + 1/2}$

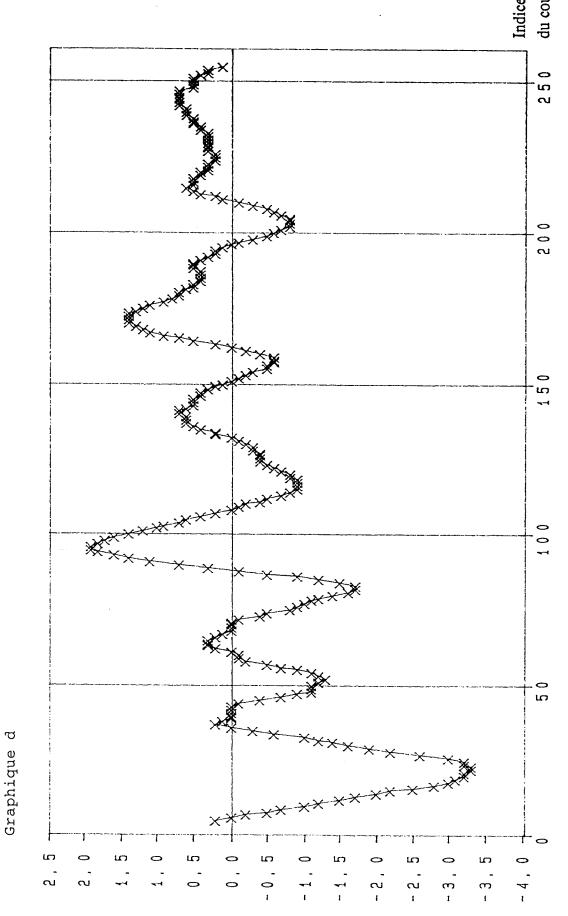
En T=t nous aurons: y(t) = (MG(t) + MD(t))/2

L'origine de la droite B aura pour valeur :

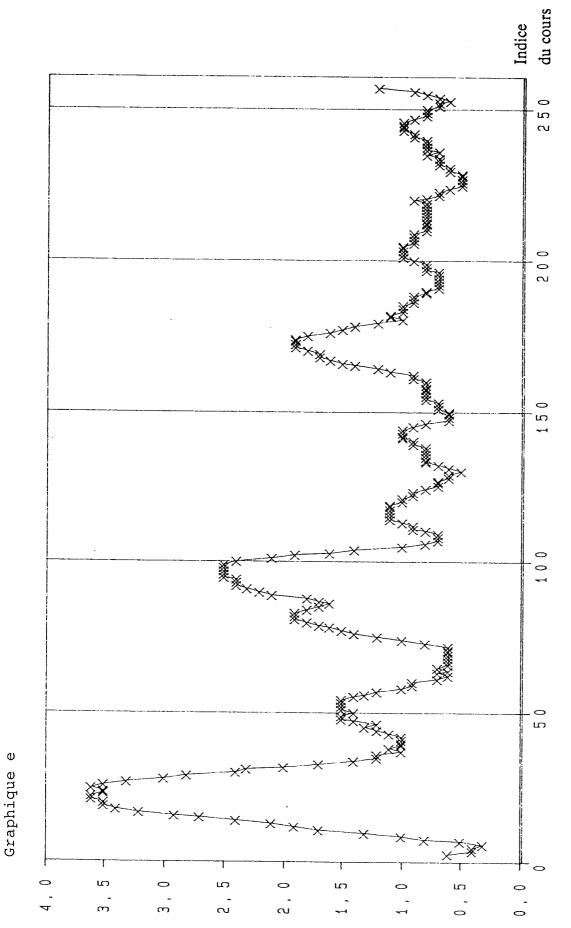
$$B = ((MG(t) + MD(t))/2) - A * t$$

D'où:
$$y(T) = (A * (T - t)) + ((MG(t) + MD(t))/2)$$









—X— risque du titre Printemps (%)

Le pourcentage du risque encouru sera donc évalué par la relation :

$$RI(T)_{(\%)} = \frac{1}{(2*L) + 1} * \left[\sum_{T=t-L}^{t+L} (C(T) - y(T))^2 \right]^{1/2} / ((MD(t) + MG(t))/2) * 100$$

C(T): cours enregistré durant la période [t-L, t+L]

Etant donné le retard introduit par les fenêtres d'observations il est impératif de réagir lors des premiers signes de ralentissement de la tendance en cours. La détermination de périodes de spéculation à la hausse ou à la baisse permet une ségrégation des titres qu'il est possible d'intégrer au portefeuille. La sélection parmi les restants peut ensuite s'effectuer au moyen des critères rentabilité et risque. Les graphiques d et e retracent l'évolution de ces critères pour le titre Printemps.

III METHODE D'ESTIMATION ET DE PREVISION DES COURS.

III.1 <u>Description de la méthode des Moindres Carrés Polynomiaux.</u>

La méthode des moindres carrés polynomiaux est très utilisée en identification de divers processus, elle permet d'effectuer sur le signal de départ les opérations de filtrage, de lissage et de prédiction en éliminant les oscillations de haute fréquence du signal [24, 27].

Considérons un ensemble de N points de mesures $y_i(t)$ et un polynôme de degré $r: P_r(t) = a_0 + a_1 * t + + a_r * t^r$.

On cherche les coefficients a_0 , a_1 , ..., a_r du polynôme qui approchent les mesures $y_i(t)$ en minimisant l'écart quadratique : $E = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N} (y_i - P_r(t_i))^2 \end{bmatrix}/N$

Posons:

$$\mathbf{A}_{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{0} \\ \mathbf{a}_{1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{r} \end{bmatrix} \qquad \phi_{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{t}_{1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{r} \end{bmatrix} \qquad \phi = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{t}_{1} & \dots & \mathbf{t}_{1}^{r} \\ \mathbf{1} & \mathbf{t}_{2} & \dots & \mathbf{t}_{2}^{r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{t}_{N} & \dots & \mathbf{t}_{N}^{r} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y}_{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{0} \\ \mathbf{y}_{1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N} \end{bmatrix}$$

Nous sommes alors ramené à une formulation classique des moindres carrés dont la solution est donnée par:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} = [\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{N}}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{T}} \mathbf{Y}_{\mathbf{N}}$$

III.2 Applicabilité de la méthode au modèle boursier.

Un processus conduisant à un état stationnaire permet de fixer a priori le degré optimal du polynôme qui minimisera l'erreur quadratique (selon l'allure générale des mesures acquises), de corriger les estimations des coefficients polynomiaux en intégrant au fur et à mesure les nouvelles observations et d'extrapoler le point suivant. Le processus boursier où les nombreuses cotations évoluent dans le temps, ne peut être envisagé dans cette optique.

D'autre part, afin d'analyser et d'extrapoler les événements boursiers seules les cotations les plus récentes sont significatives. Ce qui justifie le choix d'une fenêtre d'observations de largeur fixe et mobile dans le temps. Plus la fenêtre est large, plus les cotations seront lissées. Le choix de la largeur de la fenêtre dépend donc du type de spéculation envisagée. Un spéculateur à court terme devra opter pour une fenêtre réduite tandis qu'un spéculateur à long terme utilisera une fenêtre plus importante de manière à éliminer les aléas boursiers non durables.

En chaque instant t les coefficients du polynôme sont estimés à partir des observations de la fenêtre [t-L, t]. La méthode permet alors:

- * Soit une extrapolation en choisissant des valeurs temporelles qui n'appartiennent pas au segment [t-L, t].
- * Soit du lissage ou filtrage en prenant par exemple comme valeur temporelle le milieu du segment T=t-L/2 et en faisant glisser l'horizon d'observation. Le choix de cette valeur est justifié par les qualités du filtrage obtenu.

Les opérations de filtrage ou de lissage permettent d'extraire l'information utile du signal mais introduisent un retard par rapport au signal réel de L/2 [33]. Par contre la rentabilité et le risque calculés à partir de la droite qui passe au mieux parmi les cotations sont valables sur toute l'étendue de la fenêtre, et par conséquent en t, ce qui permet de travailler en temps réel. Pour anticiper l'évolution boursière il suffit donc d'anticiper les valeurs des critères rentabilité (RE) et risque (RI).

Deux façons d'aborder le problème se dégagent:

1] Etant donné un polynôme de degré quelconque on extrapole le cours suivant d'indice t+1. Le calcul des rentabilité et risque estimés sur l'intervalle [t-L+1,t+1] est alors faisable.

2] On essaye d'extrapoler directement les critères recherchés en estimant la droite qui passera au mieux parmi les observations de l'intervalle [t-L+1,t+1].

L'importance des erreurs commises au niveau des extrapolations en bourse [34] nous a incité à opter pour la seconde solution. L'équation d'une droite $y(t) = a_0 + a_1 * t$ dépend de deux paramètres a_0 et a_1 . Ces paramètres calculés grâce à la méthode des Moindres Carrés évoluent entre deux fenêtres consécutives (graphiques g_{10} pour une fenêtre de 10 observations et k_{20} pour une fenêtre de 20 observations). Les tests ont été faits à partir des cotations du titre CGE (Compagnie Générale d'Electricité) du 19/10/87 au 15/09/88 (graphique f).

L'interprétation de ces graphiques est simple: les coefficients polynomiaux évoluent dans le temps de manière non aléatoire.

Examinons le phénomène glissant de la fenêtre:

Soit une fenêtre F(L,t) de largeur L appliquée en t, et une seconde fenêtre de largeur identique appliquée en t+1:F(L,t+1). L'algorithme des Moindres Carrés portera dans le premier cas sur les observations t-L+1,.....,t

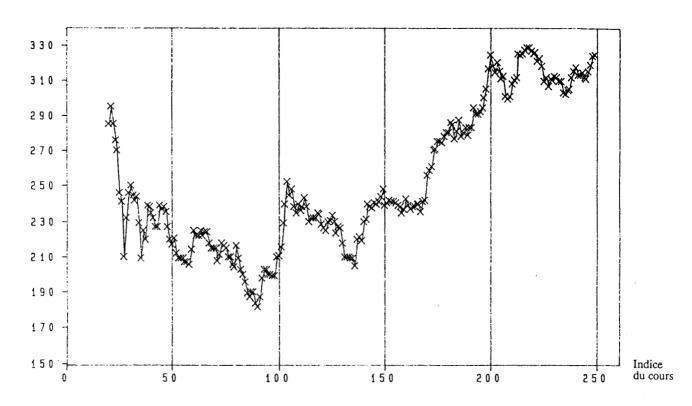
et sur les observations t-L+2,....,t+1 dans le second.

L'évolution des paramètres entre ces deux fenêtres sera dû à la suppression de l'observation en t-L+1 et à l'ajout d'une nouvelle observation d'indice t+1. La suppression de l'observation la plus ancienne y(t-L+1) ne permet-elle pas d'approcher les coefficients réels suivants?. Afin de vérifier cette hypothèse nous avons effectué des tests de corrélation entre les coefficients polynomiaux réels correspondant à une fenêtre de largeur L appliquée en t ,F(L,t) et ceux correspondants à une fenêtre F(L-1,t-1). L'équation de corrélation étant:

$$\text{cor} = \frac{N \left[\sum_{i=1}^{N} \left[a_{j}(L,i) * a_{j}(L-1,i-1) \right] \right] - \left[\left[\sum_{i=1}^{N} a_{j}(L,i) * \sum_{i=1}^{N} a_{j}(L-1,i-1) \right] }{\left[\left[N \left[\sum_{i=1}^{N} a_{j}(L,i)^{2} \right] \right] - \left[\sum_{i=1}^{N} a_{j}(L,i) \right]^{2} \right] * \left[\left[N \left[\sum_{i=1}^{N} a_{j}(L-1,i-1)^{2} \right] - \left[\sum_{i=1}^{N} a_{j}(L-1,i-1) \right]^{2} \right] }$$

avec $a_{j}(x,y)$: Coefficient j (j=0 ou j=1) calculé sur une fenêtre de x observations appliquée à l'instant y.

N : Nombre de coefficients j consécutifs. (N = 10 pour les tests).



_____ Cotations du titre CGE (Compagnie Générale d'Electricité) du 19/10/87 au 15/09/88.

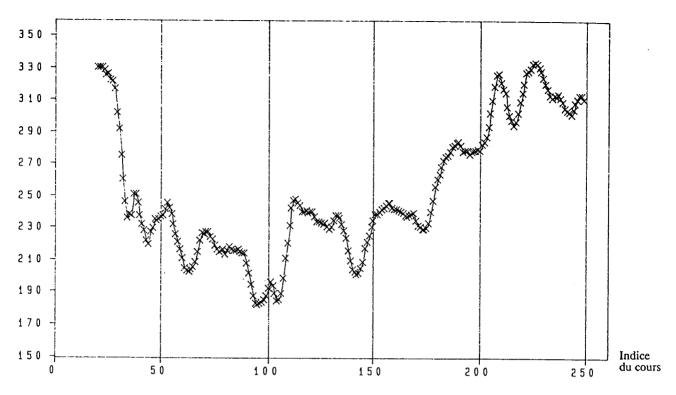
La corrélation est voisine de l'unité (graphique h_{10} et l_{20}), et s'en approche au fur et à mesure que l'on augmente la largeur de la fenêtre. Les coefficients polynomiaux $a_{j}(L-1,t-1)$ sont donc très proches des coefficients $a_{j}(L,t)$. Les rentabilités et risques estimés correspondent aux quantités:

$$RE(t)_{(\%)} = \frac{[a_0(L-1,t-1) + [a_1(L-1,t-1) * t]] - [a_0(L-1,t-1) + [a_1(L-1,t-1) * 1]] * 100}{[a_0(L-1,t-1) + [a_1(L-1,t-1) * t]]}$$

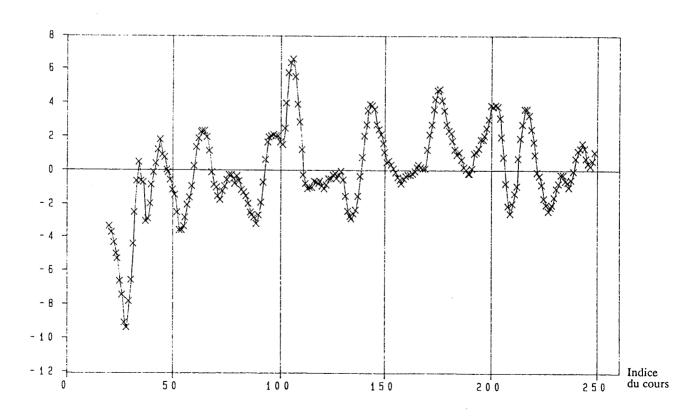
$$RI(t)_{(\%)} = \sum_{i=t-L+1}^{t-1} [C(i) - [a_0(L-1,t-1) + (a_1(L-1,t-1) * i)]]^2]^{1/2} / (L-1) * 100$$

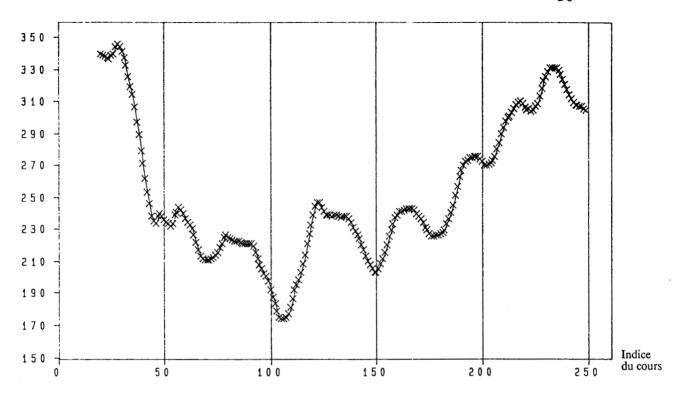
Etant donné les erreurs commises (graphiques i₁₀, j₁₀, m₂₀, n₂₀), les estimations des rentabilités et risques s'avèrent fiables et peuvent servir de paramètres pour une gestion de portefeuille.



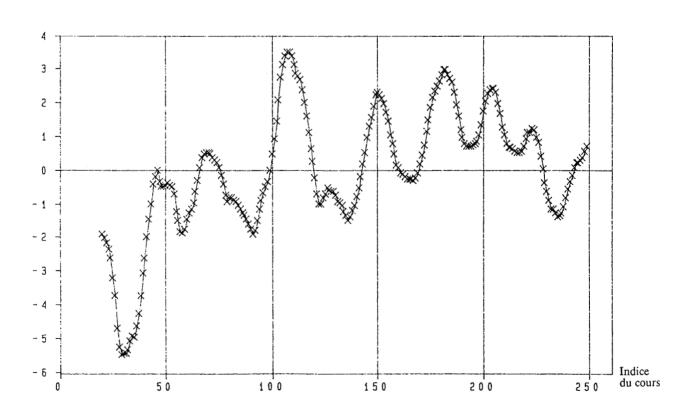


X Coefficient a₀

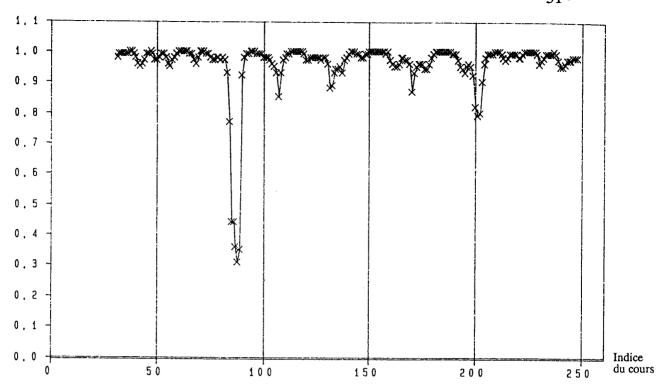




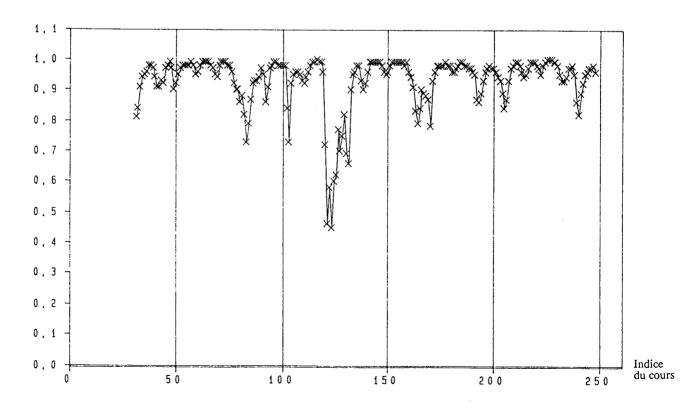
_X_Coefficient a₀



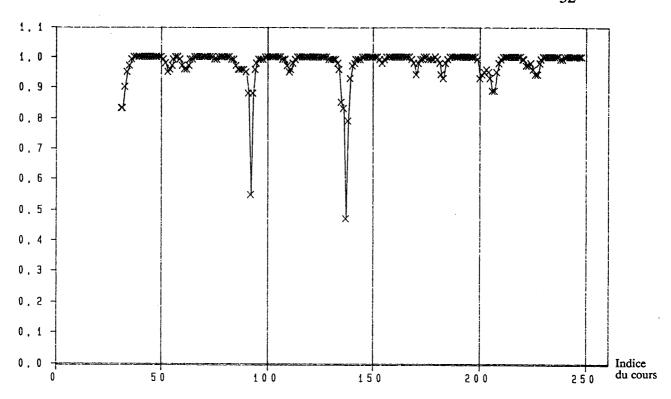
-X- Coefficient a₁



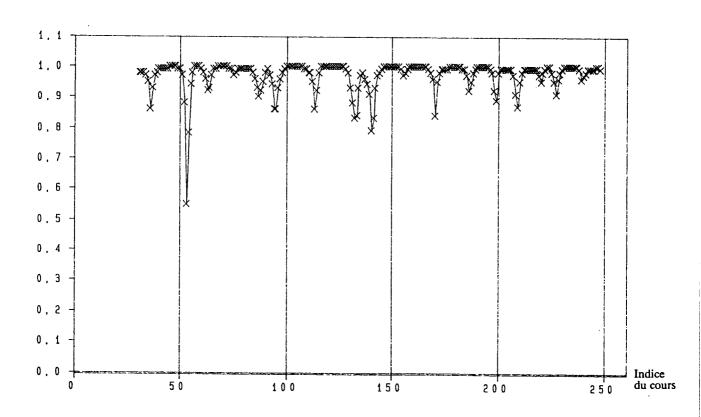
Corrélation entre le coefficient $a_0(L,t)$ et le coefficient $a_0(L-1,t-1)$.



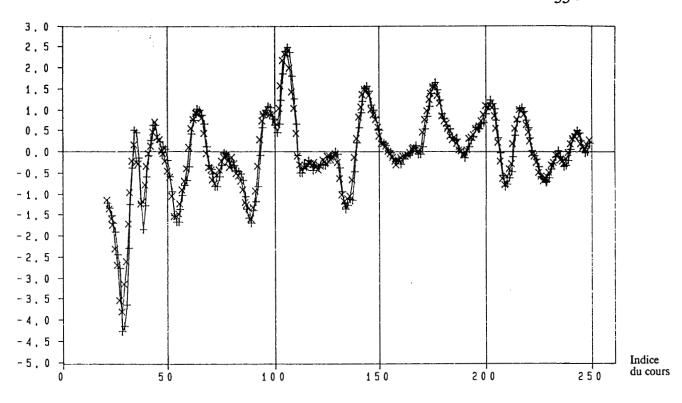
Corrélation entre le coefficient $a_1(L,t)$ et le coefficient $a_1(L-1,t-1)$.



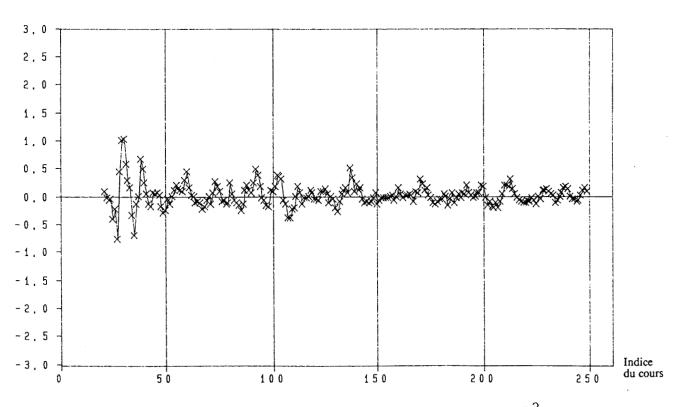
Corrélation entre le coefficient $a_0(L,t)$ et le coefficient $a_0(L-1,t-1)$.



-X- Corrélation entre le coefficient a₁(L_t) et le coefficient a₁(L-1.t-1).

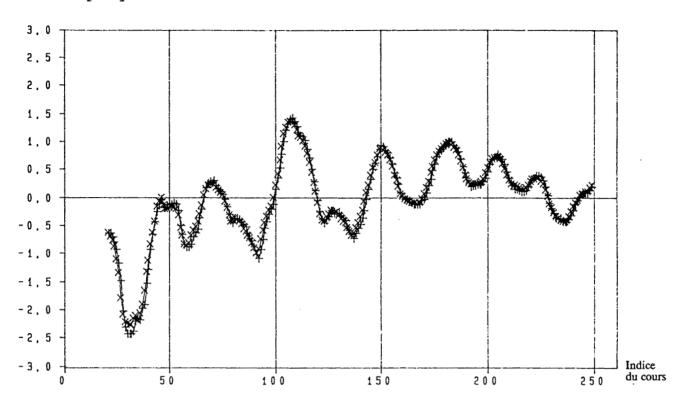


__X__Rentabilité réelle du titre (%) _____ Rentabilité estimée du titre (%)

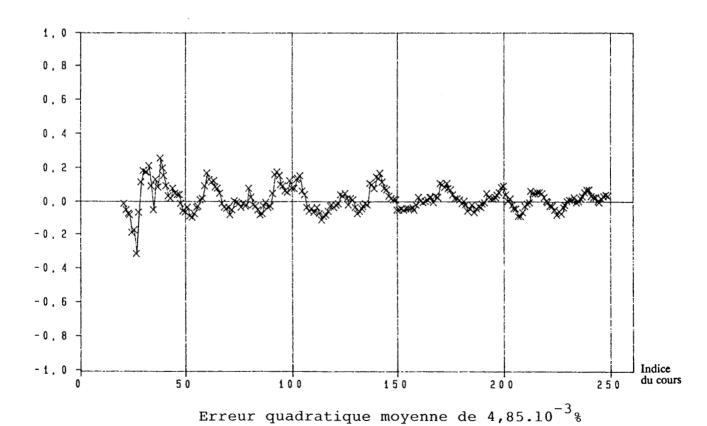


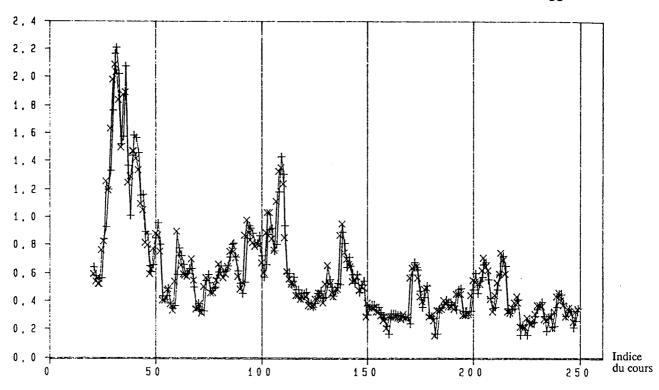
Erreur quadratique moyenne de $1.333.10^{-2}$ %

— X Différence entre rentabilité réelle et rentabilité estimée (%)

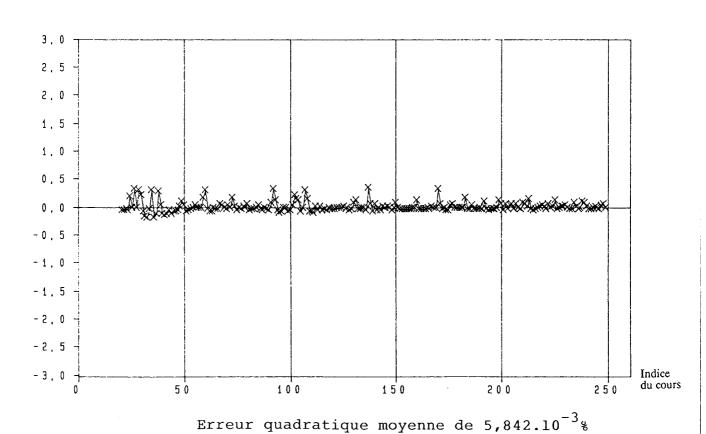


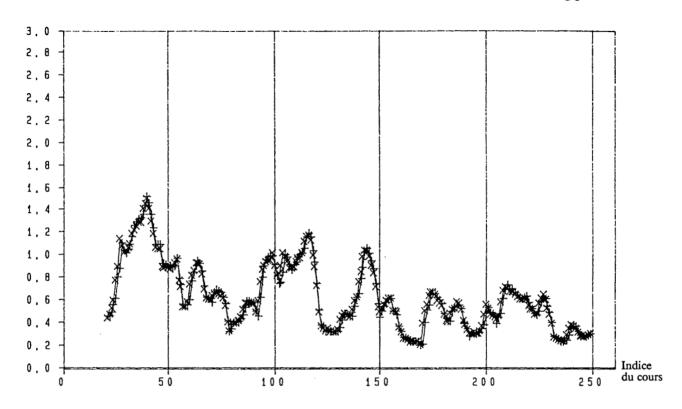
_____ Rentabilité réelle du titre (%) _____ Rentabilité estimée du titre (%)



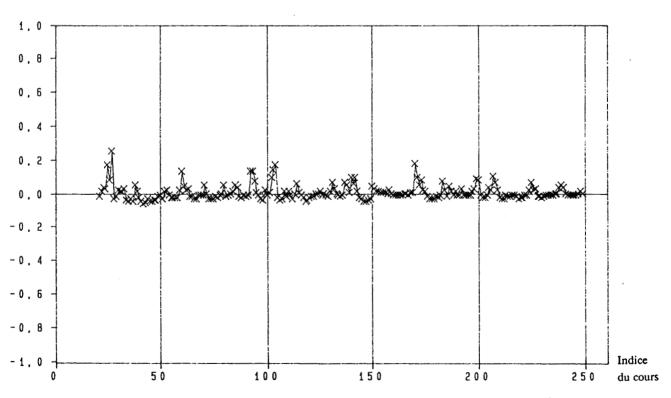












Erreur quadratique moyenne de 2,92.10⁻³%

—X Différence entre risque réel et risque estimé (%)

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit deux méthodes très différentes au point de vue de leur utilisation. La première permet par lissage et filtrage un suivi de l'évolution des cotations d'un titre en temps réel. Une anticipation est possible à partir du moment où les décisions de spéculation se font dès les premiers signes de décélération de la tendance en cours.

L'utilisation des modèles d'évaluations d'actifs usuels aboutit à l'obtention d'un signal filtré qu'il faut ensuite étudier. La méthode de filtrage non-linéaire que nous proposons pallie cet inconvénient. Elle met en évidence les moments où il apparait opportun d'intervenir sur le marché et détermine des périodes propices à la spéculation à la hausse mais aussi à la spéculation à la baisse. La durée de ces périodes dépend du placement réalisé à court, moyen, ou long terme et la largeur de la fenêtre d'observation sera donc choisie en conséquence. Cette méthode rapide et facile à utiliser présente indéniablement l'avantage d'orienter l'investisseur dans ses placements.

La seconde méthode présentée permet d'anticiper les critères rentabilité et risque qui qualifient le titre. Cette approche est très probante puisque les performances d'un placement dépendent de l'évolution de ces deux critères. Toutefois l'importante variabilité de certains titres peut être à l'origine de résultats erronés et les placements réalisés peuvent alors occasionner des pertes non négligeables. Par conséquent il est nécessaire de vérifier au préalable la validité des estimations requises.

CHAPITRE III

METHODES CLASSIQUES DE GESTION DE PORTEFEUILLE.

Introduction

Tout investisseur a une aversion envers le risque : un portefeuille à forte rentabilité mais très risqué n'est pas souvent recherché, par contre, un portefeuille qualifié d'une bonne rentabilité pour un niveau de risque acceptable fait la quasiunanimité des placements réalisés. La connaissance du risque encouru lors d'un placement apparait indispensable mais le problème est de le détecter et surtout de l'évaluer. Les recherches effectuées jusqu'à présent permettent de distinguer deux sortes de risques: le risque systématique ou risque du marché lié à la conjoncture économique et le risque diversifiable. Les fluctuations des rentabilités des actifs en période normale n'évoluent pas toutes dans le même sens, en choisissant des actifs de divers secteurs économiques, ces fluctuations peuvent se compenser et anéantir le risque diversifiable. L'intégration de titres de différentes provenances est ce que l'on appelle la diversification du portefeuille. De nombreux spécialistes ont abordé le problème de la gestion du portefeuille et plusieurs approches sont issues de ces recherches. Les principales sont la méthode de Markowitz, l'analyse selon Black et Scholes, le graphique en étoile, l'analyse multicritère. Ces techniques diffèrent l'une de l'autre tant au niveau des hypothèses que des contraintes qu'elles impliquent. Etant donné notre souci de parvenir à élaborer un algorithme de gestion de portefeuille, l'étude de ces différents modèles est relativement primordiale. Une présentation succincte de chacun d'eux fait partie de ce chapitre. Leur domaine d'application, leurs avantages et inconvénients sont également envisagés et analysés.

I. <u>DETERMINATION ET MESURE DU RISQUE.</u>

L'indicateur le plus fréquent du risque est la variance ou l'écart-type des taux de rentabilité [1, 11, 35]. Pour un portefeuille composé de N actions l'espérance de rentabilité de ce portefeuille s'écrira:

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{N} x_i E(R_i)$$

Sa variance:

$$V(P) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

 σ_{ii} covariance entre le titre i et le titre j.

x_i pourcentage du portefeuille investi dans le titre i.

Prenons l'exemple d'un portefeuille composé de trois actions, la matrice de covariance s'écrit :

Si chaque action représente un tiers du portefeuille nous aurons:

Var (P) =
$$(1/3)^2$$
 Var 1 + $(1/3)^2$ Var 2 + $(1/3)^2$ Var 3 + $(1/3)(1/3)$ Cov 1, 2 + $(1/3)(1/3)$ Cov 1, 3 + $(1/3)(1/3)$ Cov 2, 3

Var (P) =
$$(1/3)^2 * 3 * [1/3 (Var 1 + Var 2 + Var 3)]$$

+ $(1/3)^2 * 6 * [1/3 (Cov 1, 2 + Cov 1, 3 + Cov 2, 3)]$

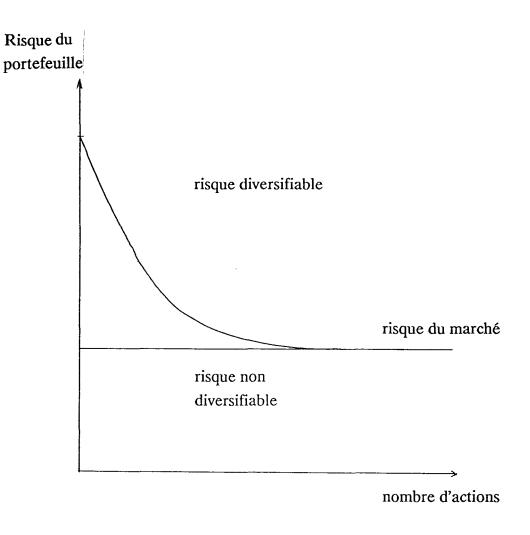
Var (P) =
$$(1/3)^2 * 3 * Var_m + (1/3)^2 * 6 * Cov_m$$

Var_m: variance moyenne et Cov_m: covariance moyenne. en généralisant à N titres nous obtenons:

$$\begin{array}{lll} {\rm Var} \; (\; P\;) & = (1/N)^2 * N * {\rm Var}_m \; + \; (1/N)^2 * (N^2 - N) * {\rm Cov}_m \\ {\rm Var} \; (\; P\;) & = (1/N) \; {\rm Var}_m \; + \; (1 - (1/N)) \; {\rm Cov}_m \\ \end{array}$$

Dans le cas où N tend vers l'infini, ce qui sous-entend un grand nombre de titres dans le portefeuille, le premier terme s'annule. Il faudrait pouvoir annuler la covariance moyenne, or, sur le marché financier, les titres ne peuvent pas être totalement indépendants les uns des autres. Leurs fluctuations dépendent d'un facteur commun qui est l'environnement économique. On dit alors qu'il y a un risque macro-économique non diversifiable. Une partie du risque ne sera jamais éliminée, c'est pourquoi on distingue deux sortes de risques:

- un risque diversifiable
- un risque non diversifiable appelé aussi risque systématique ou risque du marché.



Si nous reprenons l'équation obtenue grâce au Modèle du Marché:

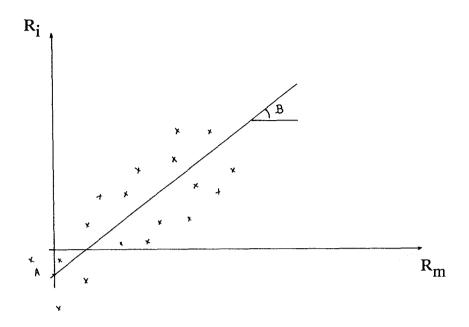
$$R_{it} = A_i + B_i R_{mt} + \epsilon_{it}$$

Le risque total d'un portefeuille mesuré par sa variance s'exprime alors :

$$Var_i = B_i^2 Var_m + Var_{\xi i}$$
risque du marché risque spécifique

$$\sigma_i^2 = B_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\xi_i}^2$$

Et la droite de régression obtenue à partir de la représentation graphique du taux de rentabilité du titre en fonction du taux de rentabilité de l'indice du marché permet alors de mesurer la volatilité du titre.



Ainsi un titre très volatile aura un B supérieur à 1 inversement un titre moins risqué aura un B inférieur à 1 mais toujours positif.

La signification des B_I est :

$$B_{i} = \frac{\text{Cov}(R_{i}, R_{m})}{\text{Var}_{m}}$$

avec B_i: pente de la droite de régression.

Le risque du portefeuille dépend donc de trois facteurs:

- Le nombre de titres qui le compose.
- Le risque de chaque titre mesuré par la variance.
- La corrélation qui lie les variations de rentabilité des différents titres mesurée par la covariance.

II. <u>LA DIVERSIFICATION</u>.

Le gestionnaire de portefeuille doit tenir compte du fait que la diversification de son portefeuille amenuisera son risque [36]. Calculons le risque d'un portefeuille diversifié composé de N actions. Nous avons vu précédemment que le risque d'une valeur équivaut au risque du marché additionné à son risque spécifique.

$$B_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\xi i}^2$$

Si on forme un portefeuille de N valeurs, le risque du portefeuille sera évalué à :

$$\sigma_{p}^{2} = B_{p}^{2} \sigma_{m}^{2} + \sigma_{\xi p}^{2} \text{ avec } B_{p} = 1/N \sum_{i=1}^{N} B_{i}^{2}$$

et
$$\sigma_{\xi p}^2 = 1/N^2 \sum_{i=1}^{N} \sigma_{\xi i}^2$$
 risque spécifique du portefeuille

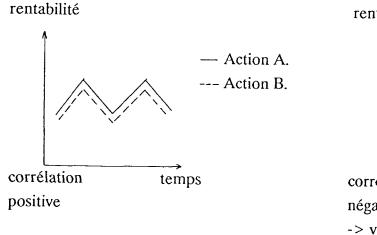
Si on considère la valeur moyenne des risques individuels de chaque titre σ_{ξ}^2 , nous obtenons alors:

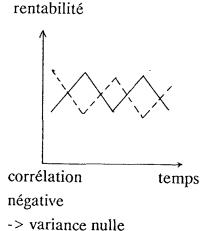
$$\sigma_{\xi}^2 = 1/N \sum_{i=1}^{N} \sigma_{\xi i}^2$$

$$\varphi_p^2 = \sigma_\xi^2/N$$

Cette dernière équation met en évidence le fait que plus le nombre de titres dans le portefeuille est important, plus le risque encouru diminue.

En réalité le risque d'un portefeuille est inférieur à la somme des risques des titres qui le composent. En effet les variations de cours des différents actifs ont tendance à se compenser et le risque total diminue.





Une mesure mathématique du degré de dépendance des fluctuations de cours de deux actions est la covariance entre les taux de rentabilité, elle s'exprime par:

$$\sigma_{ij} = 1/N \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (R_{it} - R_i)(\overline{R}_{jt} - \overline{R}_j)$$

où R_{it} et R_{jt} constituent les taux de rentabilité de deux actions i et j. \overline{R}_i et \overline{R}_i leurs moyennes respectives.

Pour un portefeuille ayant une proportion x_1 investie dans l'action A_1 et x_2 dans l'action A_2 ($x_1 + x_2 = 1$) la rentabilité espérée sera :

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2)$$

et le risque:

$$\sigma_{\rm p}^2 = x_1 \sigma_1^2 + x_2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12}$$

Plus σ_{12} est faible, plus le risque du portefeuille sera réduit. Si les deux actions fluctuent de manière indépendante alors $\sigma_{12} = 0$ et :

$$\sigma_{\rm p}^2 = x_1 \sigma_1^2 + x_2 \sigma_2^2$$

Le spéculateur a accès à différents marchés, investir en titres étrangers permetil aussi de réduire le risque du portefeuille, n'existe-t'il pas une corrélation entre les différents marchés ?. L' anecdote dite à la bourse de Paris sur le sujet: "Lorsque New-York éternue, Paris s'enrhume.", a incité Félix Rosenfeld [37] à tester la corrélation entre les différents marchés sur différentes périodes. Ses résultats sont surprenants, en effet, il n'existe aucune corrélation très étroite entre les différents marchés même si pendant de courtes périodes la bourse de Wall Street donne le ton aux autres bourses. La conclusion de son étude étant:" Si Wall Street éternue, la Bourse de Paris sort seulement son mouchoir".

L'investisseur pour diversifier efficacement son portefeuille pourra donc également acquérir des titres de bourses étrangères.

Si maintenant on combine un actif sans risque de rentabilité R_f et un portefeuille d'actions de rentabilité espérée $E(R_p)$ et de risque σ_p , l'investisseur anticipe une rentabilité E(R) sur l'ensemble de ses placements :

E(R) =
$$(1-x)R_f + x E(R_p)$$

 $\sigma^2 = x^2 \sigma_p^2$ avec x proportion de la somme investie.

Ces deux équations donnent :

$$\sigma = x \, \sigma_p$$

$$E(R) - R_f = x(E(R_p) - R_f)$$
 D'où
$$E(R) = R_f + \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p} * \sigma$$

On a une relation linéaire entre risque et rentabilité.

III. APPROCHES CONCERNANT LA GESTION DE PORTEFEUILLE.

III.1. Analyse de Markovitz.

Supposons que nous disposions de n actifs de rentabilités: $M^T = (r_1, r_2,, r_n)$. Soit un vecteur X qui représente les proportions de chaque actif dans le portefeuille:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{est:} \quad \mathbf{r}_p = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i^T * \mathbf{r}_i = \mathbf{X}^T \mathbf{N}$$

Le rendement du portefeuille est: $r_p = \sum_{i=1}^{N} x_i^T * r_i = X^T M$

et l'espérance du rendement: $E(r_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i^T * E(r_i)$

La méthode de Markovitz [11, 38] consiste à minimiser le risque du placement et à poser une condition minimum sur la rentabilité. Le risque, mesuré par la variance, s'écrit: $V(r_p) = X^T V X$ avec V matrice de variance, covariance des rendements.

La formulation de la méthode est alors:

$$\min X^T V X$$

Sous les contraintes:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i) > r_{\min}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

 $x_i > 0$ pour toute action i

Ce problème se résoud par le Lagrangien en posant:

$$L(\lambda_1, \lambda_2, x) = X^T V X - \lambda_1 (X^T E(r_i) - r_{min}) - \lambda_2 (X^T I - 1)$$

$$I^T = (1, 1, 1,, 1)$$

Il faut alors résoudre le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2VX - \lambda_1 E(r_i) - \lambda_2 I = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= r_{min} - X^T E(r_i) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 1 - X^T . I = 0 \end{cases}$$
 une équation une équation

où les solutions x_i représentent les proportions des différents actifs du portefeuille.

Exemple:

Considérons trois investissements i, j, k dont on connait un historique de rentabilités.

	Rentabilité en % de			
	i	j	k	
	10	-3	7	
	5	6	10	
	-5	9	1	
Rentabilité moyenne r	3.33%	4%	6%	$r = 1/3(\sum_{i=1}^{3} r_i)$
Variance σ^2	38.88	26	14	$\sigma^2 = 1/3 \left(\sum_{i=1}^{3} (r_i - r)^2 \right)$
Ecart-type	6.23	5.09	3.74	

La covariance étant évaluée par la relation:

$$\sigma_{ij} = 1/3(\sum_{i=1}^{3} (r_{ix} - r_i)(r_{jx} - r_j))$$

La matrice des variances-covariances est pour notre exemple:

	i	j	k ·
i	38.88	-28.32	18.32
j	-28.32	26	-8
k	18.32	-8	14

Si r_{min} vaut 4.5% on a le sytème suivant à résoudre:

$$2*38.88 x_1 - 2*28.32 x_2 + 2*18.32 x_3 - 3.33* \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$-2*28.32 x_1 + 2*26 x_2 - 2*8 x_3 - 4* \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$2*18.32 x_1 - 2*8 x_2 + 2*14 x_3 - 6* \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$3.33 x_1 - 4 x_2 + 6 x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

La résolution fixe x_1 à 29.5%, x_2 à 35.7% et x_3 à 34.7%. Avec ces valeurs on obtient une rentabilité de 4.49% et une variance de 4.186 sur cette rentabilité.

Cette méthode est fréquemment employée mais reste restrictive. Elle permet d'obtenir la composition d'un seul portefeuille de risque minimum pour une rentabilité choisie au préalable par l'investisseur, par contre la maximisation de la rentabilité pour un niveau de risque donné est impossible

III.2 Analyse de Black et Scholes.

F. Black et M. Scholes [1, 39, 40, 41, 42] ont aussi abordé la notion de portefeuille et ont montré qu'il était possible de constituer un portefeuille sans risque en associant une position en options et une position sur l'action correspondante. Il suffit alors d'ajuster en permanence les proportions d'actions et d'options dans ce portefeuille de manière à annuler constamment le risque, dans ce cas le rendement équivaut au taux sans risque.

Hypothèses du modèle:

- * Les options sont de type européen, et ne peuvent donc être exercées qu'à leur date de liquidation.
- * Le marché est parfait, ce qui signifie aucun impôt ni de frais de transactions et une information connue de chacun.
 - * Il n'y a pas de distribution de dividendes pendant la durée de l'option.
 - * Il n'y a pas de restriction aux achats et ventes des options et actions.
 - * Le taux d'intérêt à court terme est constant et connu.
 - * Le cours de l'action évolue de façon aléatoire.

La valeur d'une option d'achat s'exprime comme une fonction de cinq variables:

$$C = f(S, E, \tau, \sigma^2, r)$$

C: Valeur de l'option.

S : Cours de l'action correspondante.

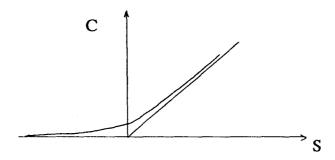
E: Prix d'exercice.

τ : Durée de vie de l'option.

 σ^2 : Volatilité de l'action correspondante.

r : Taux d'intérêt sans risque.

Pour un prix d'exercice et une durée de vie connus, la valeur de l'option croît avec le cours de l'action.



L'option a toujours une valeur positive même si le cours de l'action devient inférieur au prix d'exercice car l'investisseur peut espérer un retournement tant que l'échéance n'est pas atteinte. La valeur d'une option d'achat \mathbf{c}_a à sa date de liquidation est:

$$C_a = \max(S(\tau) - E, 0)$$

avec S: cours de l'action à la date de liquidation. E: prix d'exercice de l'option.

Supposons que l'action d'une société vaille 1000F à la date d'exercice avec un prix d'exercice E de 600 F. La valeur de l'option d'achat C_a est de : 1000F-600F=400F. A ce moment, le prix de l'option est déterminé à partir des cours de l'action qui sont connus. Le gain ou la perte réalisé est alors calculé par la différence entre la prix de l'option à la date d'exercice et le prix P à laquelle elle a été achetée.

Si P=250F alors G=400F-250F=150F. Par contre si le cours de l'action $S(\tau)$ vaut 550F alors:

 $C_a = 0$ et si P = 250F il s'en suit une perte de 250F.

Supposons un portefeuille composé de q actions qui pourrait être payé à l'aide de la vente de n options d'achat. La valeur R d'un tel portefeuille est égale à:

Et la variation de la valeur de ce portefeuille sur un intervalle de temps à:

$$dR = qdS - ndC$$
 (1)

Le prix d'exercice E, le taux d'intérêt sans risque r et la volatilité du cours σ^2 sont par hypothèse constants, par conséquent la valeur de l'option ne dépend que du temps t et du cours S.

Soit C=f(t,S), la valeur de l'option. Grâce au lemme d'Itô, il est possible de différencier une telle fonction. Pendant dt l'action varie de dS et l'option de :

$$dC = C_S dS + C_t dt + 1/2 C_{SS} (dS)^2$$
 (2)

Avec C_s, C_{ss} dérivées première et seconde de C par rapport à S C_t dérivée première de C par rapport à t.

Le cours évolue, par hypothèse, de façon aléatoire, ceci nous permet d'écrire (comme au premier chapitre):

$$\frac{dS}{--} = \mu dt + \sigma dz \quad (2)$$
S

En élevant au carré:

$$\frac{dS^2}{S^2} = (\mu dt)^2 + 2\mu\sigma dzdt + (\sigma dz)^2$$

D'aprés la table de multiplication applicable aux intégrales stochastiques, on obtient:

D'où:

$$dS^2 = S^2 \sigma^2 dt$$

En remplaçant dans l'équation (2):

$$dC = C_S dS + (C_t + 1/2 C_{SS} S^2 \sigma^2) dt$$

D'où la variation du portefeuille (1):

$$dR = ndC + qdS$$

$$dR = -n(C_S dS + (C_t + 1/2 C_{SS} S^2 \sigma^2)) dt + qdS$$

$$dR = (q - nC_S)dS + n(C_t + 1/2 C_{SS} S^2 \sigma^2)dt$$

Dans cette dernière relation, la seule variable aléatoire est dS, aussi si l'on choisit $q - nC_s = 0$, la variation de la valeur du portefeuille est certaine et sans risque. Pour cela, il suffit d'adopter la solution q=1 et $n=1/C_s$. Or C_s est variable, il faut donc réviser le portefeuille en permanence. L'équation devient:

$$dR = -1/c_s(C_t + 1/2 C_{ss}S^2\sigma^2)dt$$
 (3)

Si l'on ajuste continuellement le portefeuille pour maintenir le rapport: $n/q = 1/C_S$, le portefeuille d'arbitrage est alors sans risque et son rendement à l'équilibre est égal au taux sans risque r.

$$\frac{dR}{R} = r dt$$

Connaissant R:
$$dR = R r dt = (qS - nC)r dt = (S - (C/CS)) r dt$$
 (4)

En égalant les expressions (3) et (4):

$$-(1/C_{s}) (C_{t} + 1/2 C_{ss}S^{2}\sigma^{2})dt = (1/C_{s})(-C + C_{s}S)rdt$$

$$1/2 C_{ss}S^{2}\sigma^{2} + C_{s}Sr + C_{t} - Cr = 0$$

Si t-t* est la durée de vie de l'option il est équivalent d'écrire:

$$1/2 C_{ss} S^{2} \sigma^{2} + C_{s} Sr + C_{t-t^{*}} - Cr = 0$$
 (5)

Les solutions limites de cette équation sont:

Pour t-t* = 0
$$\begin{cases} C(S,0) = S-E & \text{si } S \ge E \\ C(S,0) = 0 & \text{si } S < E \end{cases}$$

On effectue les changements de variables et de fonction suivants:

$$C(S,t-t^*) = e^{r(t-t^*)} Y(S',r')$$
 (6)
$$e^{r'} = \frac{2}{\sigma^2} (r - \frac{1}{2} \sigma^2) [\log \frac{S}{E} - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(t-t^*)]$$

$$r' = -\frac{2}{\sigma^2} (r - \frac{1}{2} \sigma^2)^2 (t-t^*)$$

D'où:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S'} * \frac{\partial S'}{\partial S} = \frac{2}{\sigma^2 S} (r - \frac{1}{2} \sigma^2) e^{r(t-t^*)} Y_S,$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} (\frac{\partial C}{\partial S}) = -\frac{2}{\sigma^2 S^2} (r - \frac{1}{2} \sigma^2) e^{r(t-t^*)} Y_{S'} + \frac{4}{\sigma^4 S^2} (r - \frac{1}{2} \sigma^2)^2 e^{r(t-t^*)} Y_{S'S'},$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = r e^{r(t-t^*)} Y + e^{r(t-t^*)} (\frac{\partial Y}{\partial \tau}) = r e^{r(t-t^*)} Y + e^{r(t-t^*)} (\frac{\partial Y}{\partial S'} * \frac{\partial S'}{\partial \tau} + \frac{\partial Y}{\partial \tau'} * \frac{\partial \tau'}{\partial \tau})$$

En remplaçant dans l'équation (5) nous obtenons:

$$Y_{S'S'} = Y_{\tau'} \qquad (7)$$

Etudions les solutions limites:

D'où S = E e

pour t-t* = 0 alors
$$\tau' = 0$$
 et S' = $\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \log \frac{S}{E}$

$$\left(\frac{\sigma^2}{2} S' \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right)$$

Comme en $t-t^* = 0$ C(S,0) = Y(S',0), on obtient finalement:

$$\begin{cases} Y(S',0) = S - E = E [e & -1] & \text{si } S' \ge 0 \\ Y(S',0) = 0 & \text{si } S' < 0 \end{cases}$$

La solution de l'equation différentielle (7) qui est aussi l'équation de la chaleur en physique a été donnée par Churchill en 1963, elle s'écrit avec nos notations:

$$Y(S', \tau') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-S'}^{+\infty} E[\exp \frac{(S' + q\sqrt{2\tau'})\sigma^2/2}{r - \frac{\sigma^2}{2}} - 1] \exp(-q^2/2) dq$$

En remplaçant Y(S',s') dans l'équation (6) et en simplifiant la valeur de l'option est:

$$C = S N(d1) - E e^{-r(t-t^*)} N(d2)$$

$$Log S/E + (r + \sigma^2/2)(t-t^*)$$
avec
$$d1 = \frac{1}{2} \frac{1}$$

avec

$$d2 = \frac{\text{Log S/E} + (r - \sigma^2/2)(t-t^*)}{\sigma t^{1/2}}$$

et
$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} \exp(-q^2/2) dq$$
 valeur de la loi normale en d.

La relation (8) nous permet d'obtenir la valeur du rapport n/q:

$$\frac{n}{q} = \frac{1}{C_S} = \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial S}} = \frac{1}{N(d1)}$$

cette dernière expression indique le nombre d'options d'achat qu'il est nécessaire de détenir par rapport au nombre d'actions pour bénéficier d'un portefeuille sans risque.

Exemple d'utilisation de ce modèle:

Considérons une action cotée à 700F, un prix d'exercice de 600F, un taux d'intérêt mensuel de 1%, une échéance à 6 mois et un écart-type des variations des rentabilités estimé à 10% à partir d'un historique. On a alors:

avec
$$d1 = \frac{\text{Log} (700/600) + (0.01 + (0.1^2)/2)6}{0.1 \sqrt{6}}$$
$$d2 = \frac{\text{Log} (700/600) + (0.01 - (0.1^2)/2)6}{0.1 \sqrt{6}}$$

Les tables de la loi normale indiquent N(d1) = 0.841, N(d2) = 0.775 d'où la valeur de l'option:

$$C = 700 * .841 - 600 * e^{-0.01 * 6} * 0.775 = 150.77F$$

et la proportion d'options d'achat par rapport aux actions est évaluée à:

$$n/q = 1.189$$

Dès que la valeur de l'option diffère de sa valeur réelle sur le marché, il faut procéder à un réajustement du nombre d'options.

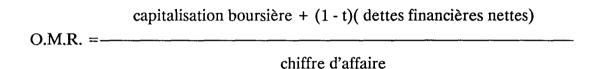
Examinons à la date d'échéance les positions de l'acheteur et du vendeur de l'option en fonction du cours de l'action considérée $S(\tau)$. Supposons pour cela que l'option d'achat ait été vendue au prix de 100F.

- si $S(\tau)$ < 600 + 100, l'acheteur décide d'abandonner son option et le vendeur a gagné 100F par titre prévu au contrat.
- si $S(\tau) \ge 600 + 100$, l'acheteur a tout intérêt à lever son option et paiera au vendeur 600F + 100F par titre. Le vendeur ne regrettera son opération que si le cours de l'action est supérieur à 700F, son gain étant alors limité à 100F par titre.

III.3 <u>Le graphique en étoile.</u>

Cette approche [38], mise au point par des analystes financiers, est purement issue de l'analyse fondamentale et n'apporte qu'une aide à la gestion de portefeuille. Les différents paramètres qui interviennent sont :

- le P.E.R. ratio du cours de l'action sur les bénéfices espérés.
- le B.P.A. bénéfice par action.
- le DT/CA ratio d'endettement avec CA les fonds propres de l'entreprise et DT les dettes financières.
- l' O.M.R. ratio de marge d'exploitation. Avec:

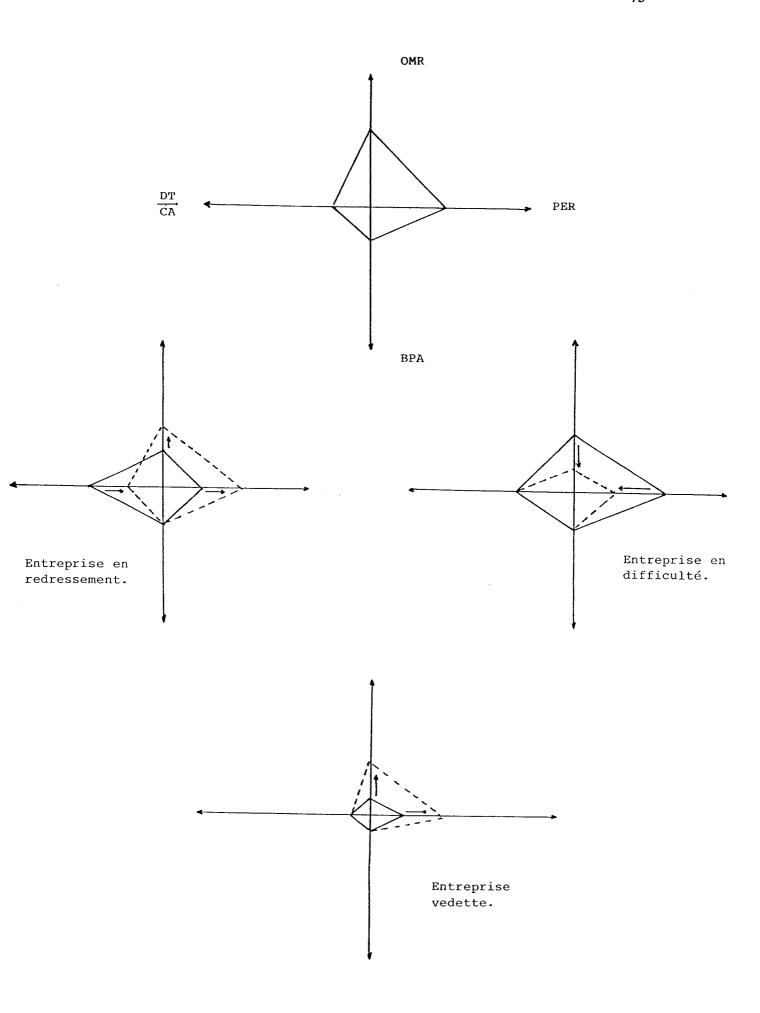


où t est le taux d'imposition.

La construction du graphique en étoile se fait autour de quatres axes:

- à l'Est, de gauche à droite, le ratio de bénéfice (P.E.R.).
- au Sud, de haut en bas, la croissance escomptée du bénéfice par action à moyen terme (B.P.A.).
- au Nord, de bas en haut, le ratio de marge d'exploitation (O.M.R.).
- à l'Ouest, de droite à gauche, le ratio d'endettement (DT/CA)

L'interprétation de la situation de l'entreprise se fait en fonction du développement de ce graphique en étoile. Le graphique en étoile d'un titre superposé à d'autres permet de faire une étude comparative et de guider l'investisseur. Néanmoins cette méthode requiert des estimations solides que seuls des analystes financiers très bien informés peuvent évaluer.



III.4 Analyse multicritère et Méthode décisionnelle.

La méthode consiste à comparer selon un ensemble de critères n actions en introduisant les notions de seuil (S_i) et de nombres flous [44]. Un critère appliqué à chaque action nous permet de constituer une matrice C_{ij} où i est l'indice du critère et j l'indice de l'action. Avec la notion de nombres flous la matrice relative à un critère devient: $|C_i^-(a_j), C_i^-(a_j)|$ où C^- et C^+ représentent les limites d'un domaine d'incertitude. La comparaison de deux actions a_j et a_k pour un critère C_i est alors possible si l'on introduit les relations de préférence P, d'indifférence I, et de non préférence P.

Différentes possibilités sont envisageables:

*
$$C_{i}^{+}(a_{j}) - C_{i}^{+}(a_{k}) > S_{i}$$

 $C_{i}^{-}(a_{j}) - C_{i}^{-}(a_{k}) > S_{i}$ $---> a_{j} P a_{k}$

$$C_i^+(a_j) - C_i^+(a_k) > S_i$$

 $C_i^-(a_j) - C_i^-(a_k) \le S_i$

Il suffit alors d'étudier le milieu des segments

en considérant:
$$M = ((C_i^+(a_j) + C_i^-(a_j)) - (C_i^+(a_k) + C_i^-(a_k))/2$$

$$\begin{aligned} -S_{i} \leq & M \leq S_{i} --- > a_{j} I a_{k} \\ & M > S_{i} --- > a_{j} P a_{k} \\ & M < -S_{i} --- > a_{j} NP a_{k} \end{aligned}$$

*
$$C_i^+(a_j) - C_i^+(a_k) < S_i$$
 Résultats identiques au cas précédent si l'on change j par k.

*
$$-S_{i} \le C_{i}^{+}(a_{j}) - C_{i}^{+}(a_{k}) \le S_{i}$$

 $-S_{i} \le M \le S_{i}$ ----> $a_{j} I a_{k}$

$$-S_{i} \le C_{i}^{+}(a_{j}) - C_{i}^{+}(a_{k}) \le S_{i}$$

 $M > S_{i}$ ----> $a_{j} P a_{k}$

$$-S_{i} \le C_{i}^{+}(a_{j}) - C_{i}^{+}(a_{k}) \le S_{i}$$

 $M < -S_{i}$ ----> $a_{i} NP a$

Afin d'utiliser la matrice de préférence ainsi définie, il est nécessaire de générer un code:

si
$$a_j P a_k$$
 ----> $PC_i(j,k)=1$
si $a_j I a_k$ ----> $PC_i(j,k)=0$
si $a_i NP a_k$ ----> $PC_i(j,k)=-1$

Les vecteurs sommes $VSOM_i(a_j) = \sum_{k=1}^{N} PC_i(a_j, a_k)$ définissent un ordre de préférence entre les actions pour le critère étudié. Cependant les différents critères n'aboutissent pas à une classification des actions identique. La solution adoptée consiste alors à introduire une nouvelle relation de préférence entre les critères et à procéder à une nouvelle classification.

Dans ce but, il est impératif de normaliser chaque vecteur $VSOM_i(a_k)$ grâce à la transformation:

$$VSOM_i(a_j) = (VSOM_i(a_j) - VSOM_{imin})/(VSOM_{imax} - VSOM_{imin})$$

Choisissons deux actions a_i et a_k et deux critères C_i et C_{i+1} et posons:

$$\begin{aligned} &\mathbf{D_i} = \mathbf{VSOM_i}(\mathbf{a_j}) - \mathbf{VSOM_i}(\mathbf{a_k}) \\ &\mathbf{D_{i+1}} = \mathbf{VSOM_{i+1}}(\mathbf{a_j}) - \mathbf{VSOM_{i+1}}(\mathbf{a_k}) \end{aligned}$$

Envisageons le cas où $D_i > 0$ et $D_{i+1} < 0$. L'action a_j est alors préférée à l'action a_k pour le critère C_i et l'action a_k est préférée à l'action a_j pour le critère C_{i+1} . Seule l'application d'un coefficient de préférence CP_i d'un critère par rapport à un autre permet de lever cette ambiguïté. Les relations de préférence deviennent:

$$\begin{array}{ll} D_i & & ---> D_i * CP_i \\ D_{i+1} & & ---> D_{i+1} * CP_{i+1} \end{array}$$

Pour CP_i inférieur à CP_{i+1} les différents cas possibles sont:

En comparant les n actions pour les critères C_i , C_{i+1} nous obtenons une nouvelle matrice P_i de dimension n_*n et un nouveau vecteur somme $VS_{i+1}(k)$. La même procédure est réalisée en considérant les critères C_{i+1} , C_{i+2} et les vecteurs sommes $VS_{i+1}(k)$ et $VSOM_{i+2}(k)$. Ceci permet de déterminer $VS_{i+2}(k)$ et ainsi de suite jusqu'au dernier critère C_m . Le vecteur somme final $VS_m(k)$ propose alors le classement définitif des différentes actions.

Afin d'illustrer la méthode considérons trois actions A1,A2,A3, et deux critères C1, C2. Après comparaison des actions entre elles, supposons que nous arrivions aux résultats suivants:

- pour le critère C1 A1 NP A2, A1 NP A3, A2 P A3.
- pour le critère C2 A1 P A2, A1 P A3, A2 I A3.

Les matrices de préférence relatives aux deux critères s'écrivent:

$$PC1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad PC2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On en déduit les vecteurs sommes:

$$VSOM1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad VSOM2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En normalisant ces vecteurs on obtient:

$$VSOM1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.5 \end{vmatrix} \qquad VSOM2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Supposons les critères à préférence égales: CP_i=1. En comparant les actions pour les critères C1, C2 grâce aux relations:

D1 = VSOM1(
$$A_i$$
) - VSOM1(A_j)
D2 = VSOM2(A_i) - VSOM2(A_j)

La nouvelle matrice de préférence s'écrit:

$$P1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur somme de cette matrice nous permet alors de conclure que A1 et A2 sont indifférentes et meilleures que l'action A3.

Conclusion

Les inconvénients présentés par les différents modèles de gestion de portefeuilles expliquent le fait qu'ils ne soit pas utilisés comme ils devraient l'être.

- * La méthode de Markovitz propose une composition qui minimise le risque total encouru pour un niveau de rentabilité donnée. Le choix de cette variable est limitée à priori par les rentabilités minimum et maximum des actions considérées. Si l'on propose l'un de ces extrêmes, le portefeuille intègrera une seule action, ce qui est contraire à l'idée de diversification. Le choix d'une valeur intermédiaire est délicat et peut ne pas être optimal. S'il est nécessaire de tester différents niveaux de rentabilité pour trouver le meilleur portefeuille, la méthode s'avère longue et ne présente aucune aide à la décision.
- * La méthode de Black et Scholes oblige l'investisseur à prendre une position en options pour chaque actions qu'il détient. Il est certain qu'elle permet d'éliminer le risque du portefeuille, mais l'inconvénient majeur est qu'elle limite le gain que l'on pourrait espérer du placement au taux sans risque.
- * La méthode du graphique en étoile fait appel à l'analyse fondamentale qui est comme nous l'avons vu au premier chapitre de moins en moins utilisée.
- * L'analyse multicritère offre à l'investisseur un classement de l'ensemble des actions à partir d'un ensemble de critères choisis et pondérés selon leur importance. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle laisse libre le spéculateur de la composition de son portefeuille.

D'autre part, aucune de ces méthodes ne tient compte des frais de transactions. Ceux-ci peuvent dans certains cas être très importants et supérieurs au gain espéré d'une opération boursière. De plus en plus l'investisseur gère lui-même le contenu de son portefeuille uniquement en fonction des fluctuations des valeurs à la bourse. La hausse d'un titre provoquera son achat et la baisse sa vente. Nous allons donc nous substituer à l'investisseur, étudier les éléments essentiels qui interviennent lors de la gestion d'un portefeuille, et élaborer un modèle mieux adapté au processus boursier.

CHAPITRE IV

ELABORATION D'UNE METHODE CONVERSATIONNELLE DE GESTION DE PORTEFEUILLE.

Introduction

Chaque investisseur a sa propre réaction face au marché, sa propre conception d'un portefeuille, ses propres limites d'investissements, le portefeuille qui lui sera proposé, pour le satisfaire, doit respecter son point de vue. Les caractéristiques relatives à l'investisseur peuvent être intégrées au modèle si celui-ci présente un caractère conversationnel. L'investisseur tient alors le rôle du décideur et choisit les critères qu'il désire appliquer en leur assignant des degrés de préférence . L'ensemble des critères prépondérants lors de la constitution d'un portefeuille est vaste, ceux que nous avons jugé devoir considérer sont:

- la somme à investir.
- le nombre minimum d'actions différentes accepté pour raison de diversification.
- une limite au niveau de la proportion d'un actif dans le portefeuille.
- pouvoir conserver un actif même si les caractéristiques qu'il présente ne sont pas favorables.
- minimiser les frais de transactions engendrés par des changements de compositions.

De façon à créer un modèle plus performant et mieux adapté aux besoins de l'investisseur, nous pouvons également apporter un certain nombre de contraintes:

- ne plus introduire de notions de maximisation de la rentabilité pour un risque donné ou de minimisation du risque pour une rentabilité fixée, mais introduire la possibilité de choisir un couple ou un domaine de rentabilité-risque.
- orienter ce choix en proposant des zones de préférence.
- offrir à l'investisseur la possibilité de choisir les critères et l'ordre de leurs applications relativement à la préférence de chacun.
- à l'issue de chaque critère, proposer un classement des compositions subsistantes dans le soucis de faciliter la décision.
- pouvoir intervenir à tout moment et interrompre le processus lorsqu'il ne subsiste qu'un nombre restreint de solutions.

Le modèle de gestion de portefeuille conversationnel que nous avons élaboré à partir d'une représentation graphique, en respectant les idées émises précédemment, est présenté au cours de ce dernier chapitre.

I HYPOTHESES DE BASE DU MODELE.

I.1 <u>Description de la spéculation envisagée.</u>

Il existe différentes façons d'entrevoir la spéculation boursière:

- La spéculation qualifiée "normale". L'investisseur se munit de titres dont la rentabilité augmente, et en période de conjoncture générale à la baisse, place ses fonds en investissements non risqués tels les obligations.
- La spéculation par options. Quand l'investisseur estime que le cours d'un titre va s'accroître, il se munit d'options d'achat sur ce titre. A l'échéance, si la tendance s'est confirmée le bénéfice représente la différence entre le cours réel et le prix fixé au contrat additionné au prix de l'option. Par contre, dans le cas où la tendance ne s'est pas maintenue la perte se limite au prix des options.

Inversement en période de baisse l'opération consiste à vendre des options d'achat sur des titres qui peuvent être fictifs. A l'échéance, si le cours a réellement baissé le bénéfice représente le montant de la vente des options, par contre, s'il est plus élevé, le vendeur doit fournir les actions prévues au contrat, il s'en suit une perte relative à la même différence que précédemment. Plus la rentabilité d'un titre diminue rapidement, plus la position en option devient intéressante.

Le fait de considérer la valeur absolue des rentabilités et comme somme à investir, le montant des titres prévus aux contrats d'options, nous autorise à envisager la composition d'un portefeuille en options de la même façon que celle d'un portefeuille d'actions.

Nous nous limiterons volontairement dans ce chapitre à une spéculation "normale" de façon à n'introduire aucune restriction aux transactions. Ainsi un placement qui s'avère regrettable pourra être maintenu jusqu'à ce que la conjoncture devienne à nouveau favorable alors qu'à l'échéance des options il aurait abouti à une perte certaine de leurs montants d'acquisition.

I.2 Représentation vectorielle du portefeuille.

Le portefeuille peut être assimilé à un vecteur dont chaque composante représente le pourcentage d'une action dans sa composition, la somme des composantes étant égale à cent pour cent. Le nombre total de portefeuilles réalisables à partir d'un ensemble de N actions dépend du découpage choisi. En effet considérons deux actions A et B, deux découpes V% et V'% avec V' supérieur à V, les portefeuilles seront respectivement représentés par les vecteurs:

$$\vec{P}_{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha\% \\ 100\% - \alpha\% \end{bmatrix} \qquad \vec{P}_{\beta} \begin{bmatrix} \beta\% \\ 100\% - \beta\% \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \quad \alpha\% = k * V\% \\ \text{et} \quad \beta\% = k' * V'\% \\ \text{k, k'entiers.}$$

Les valeurs maximums de α et β sont 100%, d'où:

kmax =
$$\frac{100\%}{V\%} = \frac{100}{V}$$
 k'max = $\frac{100}{V'}$

et
$$k \in [0, 100/V]$$
 $k' \in [0, 100/V']$

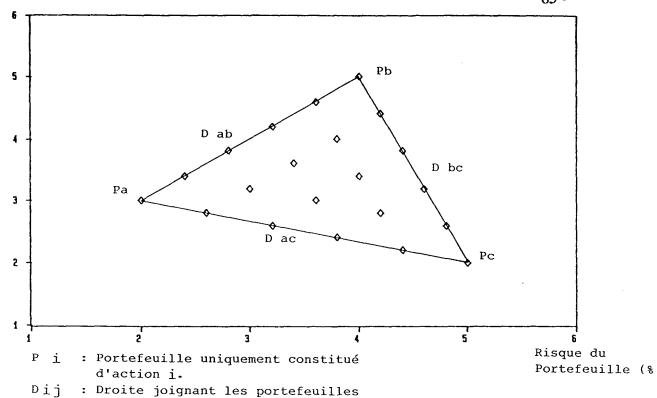
Comme V'% supérieur à V% par hypothèse, on obtient k'max inférieur à kmax. Le nombre de portefeuilles P_{α} est donc effectivement supérieur au nombre de portefeuilles P_{β} .

I.3 Représentation graphique.

Etant donné une découpe de 20% et trois actions A, B, C de rentabilités et risques suivants:

	rentabilité	risque
A	3%	2%
B	5%	4%
C	2%	5%

La représentation de toutes les combinaisons réalisables, sur un graphique d'abscisse le risque et d'ordonnée la rentabilité, est révélatrice.



En effet nous pouvons constater que les droites D_{ij} joignant le couple rentabilitérisque d'un portefeuille composé à 100% de l'action i et le couple rentabilitérisque d'un second portefeuille constitué uniquement de l'action j passe par tous les couples représentatifs des portefeuilles constitués à la fois d'actions i et d'actions j. De plus les couples associés aux portefeuilles à unique composante A, B, ou C dessinent un contour qui renferme toutes les autres possibilités.

Nous allons donc démontrer et généraliser ces observations.

qui comportent des actions i et j.

II. <u>ETUDE DES RESULTATS OBTENUS.</u>

II.1 Analyse graphique.

Un portefeuille composé uniquement d'action i sera caractérisé par un risque Ri_i et une rentabilité Re_i , de même un portefeuille d'action j aura comme risque Ri_j et rentabilité Re_i . L'équation de la droite D_{ii} dans le repère risque-rentabilité s'exprimera:

$$y = \frac{Re_{j} - Re_{i}}{Ri_{j} - Ri_{i}} * (x - Ri_{j}) + Re_{j}$$
 (1)

Choisissons maintenant un portefeuille composé de α % de l'action i et de (100% - α %) de l'action j.

La rentabilité de ce portefeuille équivaut à :

$$Re_{p} = \alpha\% * Re_{i} + (100\% - \alpha\%) * Re_{i}$$
 (2)

et son risque:

$$Ri_p = \alpha\% * Ri_i + (100\% - \alpha\%) * Ri_j$$
 (3)

Posons $x = Ri_p$ et remplaçons l'équation (3) dans l'équation (1).

$$y = \frac{Re_{j} - Re_{i}}{Ri_{j} - Ri_{i}} (\alpha\% * Ri_{i} + (100\% - \alpha\%) * Ri_{j} - Ri_{j}) + Re_{j}$$

$$y = \frac{Re_{j} - Re_{i}}{Ri_{j} - Ri_{i}} (\alpha\% * Ri_{i} - \alpha\% * Ri_{j}) + Re_{j}$$

$$y = \alpha\% * (Re_{i} - Re_{j}) + Re_{j} = (100\% - \alpha\%) * Re_{j} + \alpha\% * Re_{i}$$

$$y = Re_{p}$$

La rentabilité y obtenue étant identique à celle de l'équation (2), le portefeuille composé d'actions i et j appartient donc à la droite D_{ij} . Etudions la distance euclidienne entre les couples respectivement représentatifs du portefeuille P_i d'action i et d'un portefeuille P_{ij} composé de i et de j.

$$\begin{split} \text{Dist } (P_i, P_{ij}) &= [(\text{Re}_{\text{pi}} - \text{Re}_{\text{pij}})^2 + (\text{Ri}_{\text{pi}} - \text{Ri}_{\text{pij}})^2]^{1/2} \\ &= [[\ 100\% \ \text{Re}_i - (\alpha\% \ \text{Re}_i + (100\% - \alpha\%) \ \text{Re}_j)]^2 \\ &+ [\ 100\% \ \text{Ri}_i - (\alpha\% \ \text{Ri}_i + (100\% - \alpha\%) \ \text{Ri}_j)]^2]^{1/2} \\ &= [(100\% - \alpha\%)^2 ((\text{Re}_i - \text{Re}_j)^2 + (\text{Ri}_i - \text{Ri}_j)^2)]^{1/2} \\ &= (100\% - \alpha\%) \ \text{Dist } (P_i, P_i) \end{split}$$

Et la distance entre le portefeuille P_{ij} et le portefeuille P'_{ij} comprenant $\alpha\% + \beta\%$ de l'action i est:

Dist
$$(P_{ij}, P'_{ij}) = Dist (P_{ij}, P_i) + Dist (P_i, P'_{ij})$$

= $(100\% - \alpha\%) Dist (P_i, P_j) - (100\% - \alpha\% - \beta\%) Dist (P_i, P_j)$
= $\beta\% Dist (P_i, P_j)$

Chaque augmentation du pourcentage de l'action i dans le portefeuille entraı̂ne un déplacement proportionnel sur la droite D_{ij} . Les composition, rentabilité et risque d'un portefeuille $P(l+1)_{ij}$ consécutif au portefeuille $P(l)_{ij}$ peuvent alors être obtenus par la transformation:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha\% \\ 0 \\ 0 \\ +\alpha\% \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ +\alpha\% \\ 0 \\ 0 \\ N+1 \\ N+2 \\ (Re_j - Re_i)/Nbp \\ (Re_j - Re_i)/Nbp \end{bmatrix} - transformation de la rentabilité transformation du risque$$

avec Nbp = $100\%/\alpha\%$ nombre de portefeuilles réalisables en distribuant l'action i à l'action j par pas de $\alpha\%$.

et

$$|\overrightarrow{P}(l+1)_{ij}(m) = \overrightarrow{P}(l)_{ij}(m) + \overrightarrow{T_{ij}}(m) \quad m=1,...,N$$

$$|\overrightarrow{P}(l+1)_{ij}(N+1) = \operatorname{Re}(l+1)_{pij} = \overrightarrow{P}(l)_{ij} + \overrightarrow{T_{ij}}(N+1)$$

$$|\overrightarrow{P}(l+1)_{ij}(N+2) = \operatorname{Ri}(l+1)_{pij} = \overrightarrow{P}(l)_{ij} + \overrightarrow{T_{ij}}(N+2)$$

N: nombre d'actions dans le portefeuille.

Etant donné la répartition graphique des couples rentabilité-risque des différents portefeuilles et le fait que l'on puisse déduire les caractéristiques d'un portefeuille $\overrightarrow{P(l+1)}_{ij}$ à partir du portefeuille antécédent $\overrightarrow{P(l)}_{ij}$, il apparaît opportun de vérifier si un portefeuille composé d'actions i, j, k ne peut être retrouver par application des transformations $\overrightarrow{T_{ij}}$ et $\overrightarrow{T_{ik}}$ au portefeuille $\overrightarrow{P_{i}}$.

Considérons un portefeuille de caractéristiques:

Composition : xi + yj + zk avec x+y+z=100%

et x, y, z multiples de la découpe choisie.

<u>Rentabilité</u> : $Re_{pijk} = xRe_i + yRe_j + zRe_k$

<u>Risque</u> : $Ri_{pijk} = xRi_i + yRi_j + zRi_k$

Dans le repère (i, j, k, Re, Ri) nous avons:

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ Re_p \\ Ri_p \end{bmatrix} \quad \vec{P}_i = \begin{bmatrix} 100\% \\ 0 \\ 0 \\ Re_i \\ Ri_i \end{bmatrix} \vec{T}_{ij} = \begin{bmatrix} -\alpha\% \\ +\alpha\% \\ 0 \\ (Re_j - Re_i) * \alpha\% \\ (Ri_j - Ri_i) * \alpha\% \end{bmatrix} \vec{T}_{ik} = \begin{bmatrix} -\alpha\% \\ 0 \\ +\alpha\% \\ (Re_k - Re_i) * \alpha\% \\ (Ri_k - Ri_i) * \alpha\% \end{bmatrix}$$

L'hypothèse émise sera validée s'il existe λ , β entiers tels que:

$$\vec{P} = \vec{P}i + \lambda \vec{T}ij + \beta \vec{T}ik$$

En remplaçant, on obtient le système:

$$\begin{cases} x &= 100\% - \lambda \ \alpha\% - \beta \ \alpha\% \\ y &= \lambda \ \alpha\% \\ z &= \beta \ \alpha\% \\ Re_{p} &= Re_{i} + \lambda \left((Re_{j} - Re_{i}) * \alpha\% \right) + \beta \left((Re_{k} - Re_{i}) * \alpha\% \right) \\ Ri_{p} &= Ri_{i} + \lambda \left((Ri_{j} - Ri_{i}) * \alpha\% \right) + \beta \left((Ri_{k} - Ri_{i}) * \alpha\% \right) \end{cases}$$

Les solutions sont: $\lambda = y / \alpha\%$ et $\beta = z / \alpha\%$

Comme y et z sont multiples de $\alpha\%$, λ et β sont entiers, ce que nous voulions montrer. Il est donc possible de déterminer les caractéristiques d'un portefeuille associé à un couple rentabilité-risque choisi en appliquant les vecteurs transformations à un portefeuille constitué d'un seul actif.

II.2 <u>Analogie avec la théorie des graphes.</u>

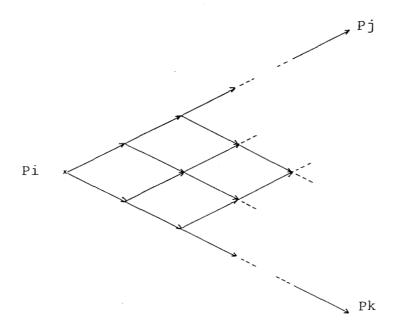
Plusieurs compositions de portefeuilles peuvent correspondre au même couple rentabilité-risque. Pour déterminer chacune d'entre elles il est nécessaire d'étudier les différentes combinaisons de vecteurs transformations \vec{T}_{ij} avec i l'indice du portefeuille initial et j l'indice représentatif des autres portefeuilles. Cette procédure présente une analogie avec la théorie des graphes, les arcs étant dans notre cas, les vecteurs transformations.

Cependant le parcours du graphe ainsi introduit équivaut à étudier toutes les combinaisons d'actifs possibles, de plus il n'est pas certain de trouver une solution. En effet, le couple rentabilité-risque choisi peut être impossible à atteindre ou ne pas correspondre à une combinaison compatible avec la découpe fixée a priori. Nous allons donc apporter diverses solutions afin de remédier à ces inconvénients.

III. MODELISATION DE LA GESTION D'UN PORTEFEUILLE.

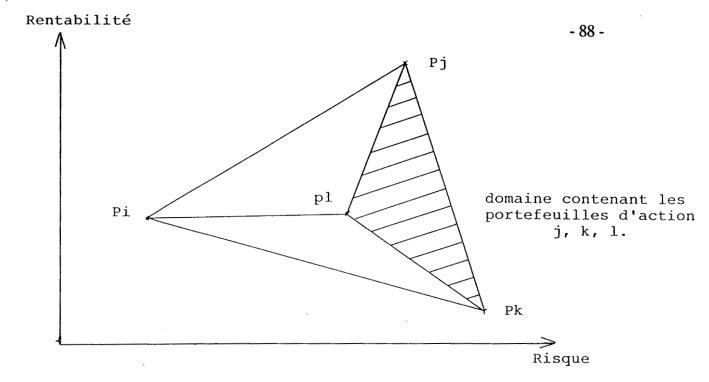
III.1 Appartenance au domaine réalisable.

La première difficulté réside dans le choix d'un couple plausible. Si nous considérons trois actions i, j, k, les différents portefeuilles sont obtenus par application des vecteurs transformations \overrightarrow{T}_{ii} , \overrightarrow{T}_{ik} jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'action i à distribuer.



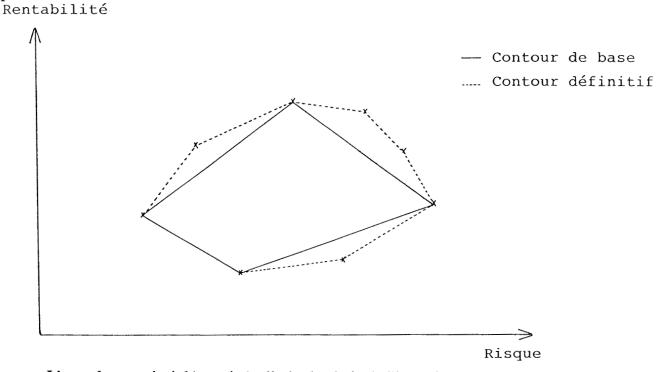
Les portefeuilles à l'issue de la procédure ne comprenant plus que de l'action j et de l'action k se situent comme nous l'avons démontré sur la droite D_{ik} .

La même procédure appliquée à quatres actions i, j, k, l nous permet d'aboutir sur les droites D_{jk} , D_{jl} , D_{kl} ou dans la zone délimitée par ces mêmes droites avec des combinaisons d'actions j, k et l.



L'ensemble des portefeuilles se trouvent alors à l'intérieur du contour réalisé par les points extrêmes P_i , P_k , P_l .

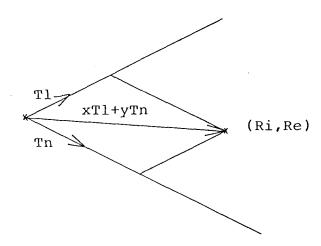
En généralisant à un ensemble de N actions, les portefeuilles à uniques composantes caractérisés de risque minimum, de risque maximum, de rentabilité minimum, et de rentabilité maximum déterminent un contour de base. Les intégrations successives des points extérieurs les plus éloignés de chaque côté de ce polygone permettent d'obtenir le contour définitif.



L'enveloppe, ainsi déterminée, limite le choix de l'investisseur et nous autorise à rejeter tout couple impossible à réaliser.

III.2 <u>Limites de prospection.</u>

Considérons un ensemble de N actifs, \vec{T}_1 , \vec{T}_2 ,..., \vec{T}_N les vecteurs transformations associés, et un repère ayant pour origine le point initial du contour et comme axes les vecteurs \vec{T}_k , k variant de 1 à N. Quelque soit le couple rentabilité-risque (ri,re) recherché qui correspond à une combinaison entière de vecteurs transformations, il est possible de déterminer des réels x et y tels que la combinaison $x\vec{T}_1 + y\vec{T}_N$ définissent ce même couple. \vec{T}_1 et \vec{T}_N étant les vecteurs de plus grande ouverture du repère.



Montrons alors que les droites parallèles aux vecteurs $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_N}$ appliquées au couple recherché déterminent des limites de prospection du graphe. Dans ce but considérons un couple (ri',re') extérieur à ce domaine, défini par la combinaison $\overrightarrow{x'T_1} + y'\overrightarrow{T_N}$ avec $x' \ge x$ et/ou $y' \ge y$ et prouvons qu'il n'existe pas de combinaison vectorielle $\lambda \overrightarrow{T_1} + \beta \overrightarrow{T_N}$, où λ et β soient des réels positifs, qui permettent de rejoindre le couple (ri,re) tels que:

$$x'T_{1}^{-} + y'T_{N}^{-} + \lambda T_{1}^{-} + \beta T_{N}^{-} = xT_{1}^{-} + yT_{N}^{-}$$

$$<=> (x' + \lambda)T_{1}^{-} + (y' + \beta)T_{N}^{-} = xT_{1}^{-} + yT_{N}^{-}$$

$$<=> \begin{cases} x' + \lambda = x <=> \\ y' + \beta = y \end{cases} \begin{cases} \lambda = x - x' \\ \beta = y - y' \end{cases}$$

 λ et β sont positifs si x est supérieur à x' et si y est supérieur à y', ce qui est contraire à l'hypothèse et qui confirme l'impossibilité de rejoindre le couple (ri,re) dès que les droites parallèles aux axes de plus grande ouverture sont franchis. Ces droites caractéristiques sont appelées droites d'arrêt.

III.3 Sélection du point initial optimal.

Le point initial optimal correspond au point qui minimisera le nombre d'itérations nécessaires à la détermination des compositions des différents portefeuilles associés au couple rentabilité-risque sélectionné. Comme un point du contour permet déjà de limiter la recherche graphique, il est évident que le point initial sera l'un d'entre eux. Le nombre d'itérations n'est pas lié à la distance entre le point initial et le couple à rejoindre mais au nombre de portefeuilles qui se situent dans la surface délimitée par les droites d'arrêt. Il est impossible de connaître ce nombre sans parcourir le graphe, néanmoins il est certain que plus le nombre de vecteurs transformations à appliquer dans chaque direction jusqu'aux droites d'arrêt sera grand, plus le nombre de combinaisons différentes sera important. Notre critère de sélection à minimiser peut de ce fait, être le suivant:

$$C = \pi \text{ (Nombre } T_{ij} \text{ sur la surface)}$$

$$j=1$$

i indice du point du contour. j indice des autres portefeuilles.

III.4 Recherche des solutions.

Une fois le point initial et la surface à étudier déterminés, le parcours du graphe peut commencer. Considérons un ensemble de N actions et les transformations \vec{T}_k , { k variant de 1 à N-1 } applicables à un portefeuille initial. Montrons alors par récurrence que si à une itération donnée on applique au portefeuille la transformation \vec{T}_j , à l'itération suivante, les transformations qu'il suffit d'étudier sont les transformations \vec{T}_k pour lesquelles k varie de j à N-1.

Prenons le cas où j=1 et j=2.

	transformation appliquée à l'itération i	transformations applicables à l'itération i+1
pour j=1 pour j=2	$ec{ ilde{T}}_1 \ ec{ ilde{T}}_2$	$\vec{T}_1, \vec{T}_2,, \vec{T}_{N-1}$ $\vec{T}_1, \vec{T}_2,, \vec{T}_{N-1}$

Comme la somme de deux vecteurs est par définition commutative, la combinaison vectorielle $\vec{T}_2 + \vec{T}_1$ est équivalente à la combinaison $\vec{T}_1 + \vec{T}_2$. Pour j=2 les transformations applicables à l'itération i+1 sont les \vec{T}_k avec k variant de 2 à N-1 Supposons l'hypothèse vraie en j=i, nous obtenons alors :

pour
$$j=i$$
 \vec{T}_i \vec{T}_i , \vec{T}_{i+1} ,, \vec{T}_{N-1}

et les combinaisons vectorielles $\vec{T}_k + \vec{T}_{i+1}$ avec k variant de 1 à i ont déjà été étudiées puisque k est inférieur à i+1. En j=i+1, la propriété de commutativité de la somme de deux vecteurs est toujours vraie. De ce fait, l'ensemble des combinaisons $\vec{T}_{i+1} + \vec{T}_k$, k=i+1, ..., N-1 n'est plus à étudier et il subsiste les combinaisons :

pour j=i+1	\vec{T}_{i+1}	$\vec{T}_{i+1},,\vec{T}_{N-1}$
------------	-----------------	--------------------------------

Le parcours de graphe que nous allons réaliser n'est donc pas un parcours habituel puisque l'examen de certaines branches est superflu. A chaque itération, les vecteurs Tij à appliquer dépendront de ceux appliqués à l'itération précédente.

transformation appliquée à l'itération i	transformations applicables à l'itération i+1		
T ₁ T ₂ T ₃ .	\vec{T}_{1} , \vec{T}_{2} , \vec{T}_{3} , \vec{T}_{N-2} , \vec{T}_{N-1} \vec{T}_{2} , \vec{T}_{3} , \vec{T}_{N-2} , \vec{T}_{N-1} \vec{T}_{3} , \vec{T}_{N-2} , \vec{T}_{N-1}		
$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ \vdots \\ T_{N-1} \end{array}$	\vec{T}_{N-2} , \vec{T}_{N-1}		

Le fait de limiter la surface de recherche et d'éliminer des branches qu'il est inutile d'étudier, nous amène à un parcours de graphe restreint. L'avantage qui en ressort est sans aucun doute le gain procuré au niveau du temps de calcul.

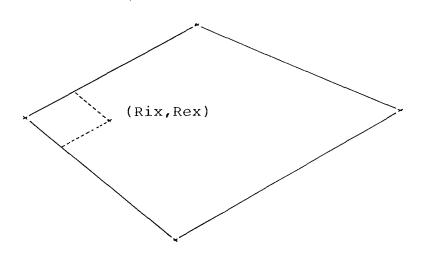
III.5 <u>Critères risque et rentabilité.</u>

Par hypothèse le modèle est conçu pour proposer l'ensemble des portefeuilles associés à une certaine rentabilité et à un certain risque, néanmoins, il est possible qu'il n'existe aucune combinaison entière de ces caractéristiques. Dans cette éventualité, il est nécessaire d'élargir la recherche au voisinage du couple proposé en introduisant un domaine de variation des critères rentabilité et risque. La recherche des portefeuilles pourra alors s'effectuer selon:

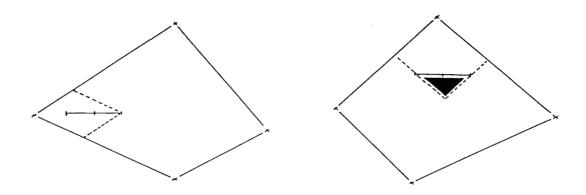
- différents niveaux de rentabilité pour un risque donné.
- différents niveaux de risque pour une même rentabilité.
- une variation en rentabilité et en risque autour d'un couple choisi.

Le domaine de recherche ainsi défini est à étudier et doit donc appartenir à la surface délimitée par les droites d'arrêt. Appelons are et ari les variations souhaitées autour du couple (re,ri) recherché et représentons les positions des droites d'arrêt selon divers cas de figures.

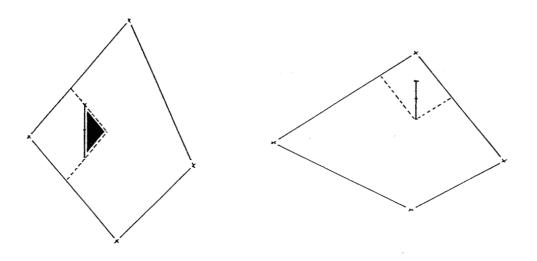
1)
$$\Delta re = 0$$
 et $\Delta ri = 0$



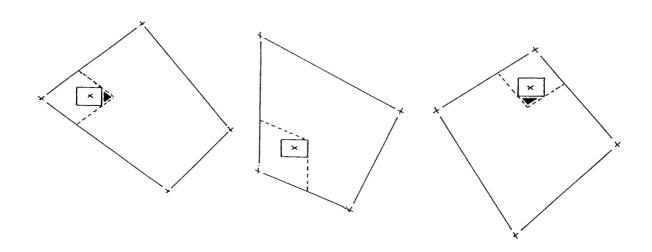
2) $\Delta re = 0$ et $\Delta ri \neq 0$



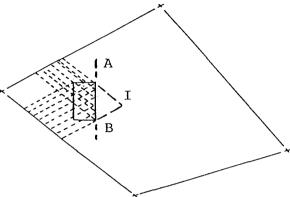
3) $\Delta re \neq 0$ et $\Delta ri = 0$



4) $\Delta re \neq 0$ et $\Delta ri \neq 0$



L'introduction d'un domaine de variation autour du point recherché met en évidence des zones noircies qu'il est inutile d'étudier. En effet, si nous considérons le domaine à atteindre comme un ensemble de points, que nous appliquons la méthode introduite au paragraphe III.2 qui permet de limiter l'espace de recherche, nous obtenons un ensemble de surfaces distinctes dont l'union détermine la surface réelle à étudier.



Pour définir cette nouvelle surface, il est plus simple d'effectuer une translation des droites d'arrêt aux extrêmes du domaine défini et d'observer la position de leur intersection I. Dans le cas où celle-ci n'appartient pas au domaine de variation, il existe alors une troisième droite d'arrêt qui passe par les points A et B, points d'intersection entre les droites d'arrêt initiales et le domaine de variation.

III.6 Zones de préférences.

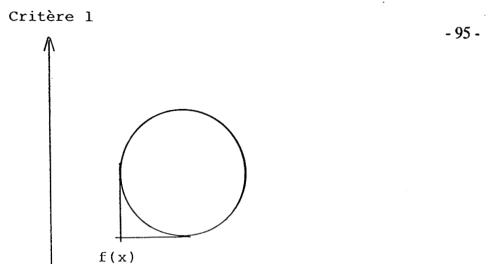
Tout ce que l'investisseur possède comme information se restreint au contour formé par les portefeuilles à unique composante. Plus le domaine rentabilité-risque choisi sera en haut du contour, plus les portefeuilles seront à rentabilité élevée, par ailleurs, plus le domaine sera à gauche plus le risque sera minimisé. La décision de l'investisseur n'est pas évidente puisque, dans la majorité des cas, le maximum en rentabilité ne correspond pas au minimum en risque. Un compromis entre ces optimums s'impose.

Dans un problème d'optimisation multicritère classique [45, 46], la structure de domination permet de sélectionner parmi l'ensemble des décisions celles qui sont optimales. La méthode consiste à créer un cône positif K^+ f(x) dont le sommet est la décision f(x), et à analyser la position des autres décisions par rapport à ce cône.

Quelque soit x' solution admissible, si $f(x') \in K^+ f(x)$ alors :

La décision x est meilleure que x'.

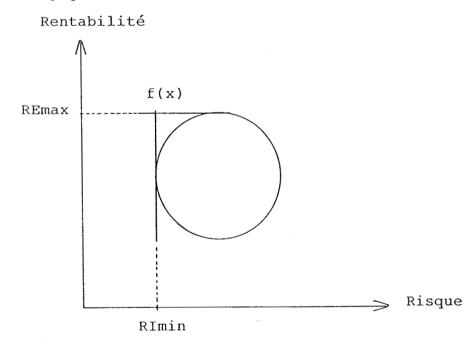
De ce fait, l'ensemble des solutions optimales se trouvent sur la frontière et se nomment "points de Pareto".



Critère 2

Soit $f(\bar{x})$ le point idéal qui minimise les deux critères, pour choisir une solution parmi les "points de Pareto" il suffit d'instaurer et de minimiser un critère distance $d(f(\bar{x}), f(x))$. Notre objectif consiste à maximiser la rentabilité et à minimiser le risque.

Comme nous connaissons la rentabilité maximale réalisable, qui est en fait celle de l'action la plus rentable, il est équivalent de minimiser la perte de rentabilité et par analogie avec ce qui précède nous obtenons:

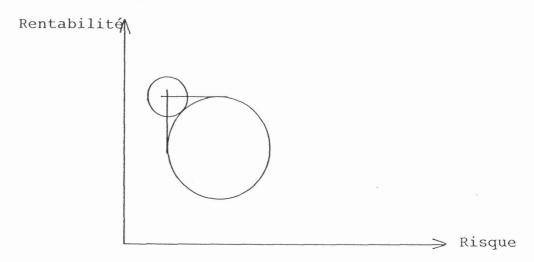


Afin de tenir compte de l'aversion de l'investisseur envers le risque, le critère distance que nous avons choisi s'exprime:

$$Min [(Ri_{min} - Ri(x))^2 + a (Re_{max} - Re(x))^2]$$

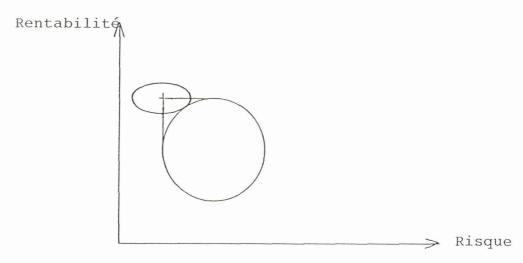
si a = 1 Le critère distance correspond à l'équation d'un cercle.

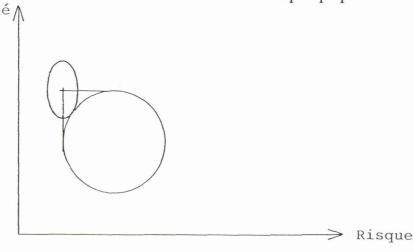
La rentabilité et le risque bénéficient de la même importance dans la phase d'optimisation.



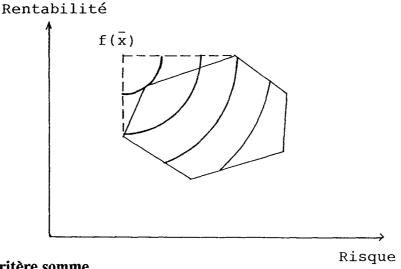
si $a \ne 1$ Le critère distance est l'équation d'une ellipse.

si a > 1 Le critère rentabilité est prépondérant sur le risque.





En reproduisant les cercles et ellipses obtenus à des rayons supérieurs, des zones de préférences se dessinent et permettent d'orienter la décision de l'investisseur. L'adjonction de ces zones de préférences est appréciable : elles procurent au modèle un aspect d'optimisation qu'il ne possédait pas à la base.



III.7 <u>Critère somme.</u>

L'investisseur a un budget à respecter, parmi les portefeuilles associés au domaine choisi, certains ne lui seront pas accessibles et sont à éliminer de suite. Le prix de revient d'un portefeuille est facile à estimer puisque les différents actifs qui le composent possèdent chacun une valeur. Celui-ci s'exprime:

 $PF = \sum_{i=1}^{N} Nb_i C_i$ i=1 PF : prix du portefeuille. $Nb_i : nombre d'action i.$ $C_i : cours de l'action i.$

N : Nombre d'actions différentes.

S : Somme à investir.

si $PF \le S$, le portefeuille est possible.

si PF > S, il faut rejeter cette composition non réalisable.

Pour accepter les portefeuilles proposés par notre modèle, il suffit de trouver des coefficients Nbi tels que:

$$\sum_{i=1}^{N} Nb_{i} = 100\% \text{ et } \sum_{i=1}^{N} Nb_{i} C_{i} \leq S$$

Comme les actions sont, par définition, indivisibles, le problème est de trouver des coefficients Nb₁, Nb₂,..., Nb_N entiers tels que:

$$Nb_1 C_1 + Nb_2 C_2 + + Nb_N \le S$$
 (1)
 $Nbta = Nb_1 + Nb_2 + + Nb_N$ (2)

avec Nbta: nombre total d'actions.

 $Nb_i = P_i\%$ * Nbta $P_i\%$: pourcentage de l'action dans le portefeuille.

L'équation (1) devient:

$$P_1\%$$
 Nbta $C_1 + P_2\%$ Nbta $C_2 + + P_N\%$ Nbta $C_N \le S$

<-> Nbta $\le \frac{S}{P_1\% C_1 + + P_N\% C_N}$ = Vmax

Trouver la valeur maximale de Nbta comprise entre zéro et Vmax telle que tout Nb_i , i=1,...,N, soit entier, pourrait être envisagé à partir d'une procédure itérative classique. Cependant la convergence risque d'être dans certains cas relativement longue, c'est pourquoi nous proposons la méthode suivante.

Par hypothèse nous savons que:

$$Nb_i = P_i\% \ Nbta$$
 et d'où la relation: $Nb_j = Nb_i \ P_j\% \ / \ P_i\%$ $Nb_j = P_j\% \ Nbta$

A partir de cette relation, le processus à suivre est:

- 1) quelque soit i, les coefficients Nb_i sont entiers, le portefeuille convient => fin de la procédure.
- 2) il existe au moins un coefficient Nb_i non entier alors:

$$Nb_i = E(Nb_i)$$

 $Nb_j = Nb_i P_j\% / P_i\%$ quelque soit j différent de i.
si les Nb_i ne sont pas tous nuls retour en 1)
sinon il n'existe aucun portefeuille, fin de la procédure

La convergence de cette méthode sera d'autant plus rapide que le coefficient Nb_i sélectionné présentera la plus grande différence avec sa valeur entière E(Nb_i). Dans le cas où les Nb_i trouvés sont nuls, aucune combinaison d'actifs entière n'est réalisable selon le budget disponible, la proposition de composition du portefeuille doit alors être rejetée.

III.8 Application des autres critères.

Jusqu'à présent, l'investisseur détient un ensemble de portefeuilles en accord avec ses possibilités financières et les critères rentabilité-risque. Il peut alors désirer affiner la sélection selon d'autres critères tels la diversification, la minimisation des frais de transactions ou encore l'obligation pour certaines actions d'appartenir au portefeuille. Cependant il ne faut pas négliger le fait que l'application d'un critère supprime les possibilités de portefeuilles et qu'il peut finalement n'en rester aucun. Dans cette éventualité, l'investisseur désirera changer l'ordre d'intervention des critères et interrompre le processus lorsqu'il ne subsiste qu'un nombre restreint de possibilités. La mémorisation des compositions obtenues à l'issue du critère somme permet à l'investisseur d'appliquer les critères dans un ordre différent ou avec des autres valeurs seuils sans avoir à rechercher toutes les compositions de base. L'ordre de sélection des critères est important puisqu'il traduit la préférence de l'investisseur. A l'issue de chaque critère, un classement des compositions subsistantes est envisagé en vue de faciliter la décision.

a - Critères relatifs à la diversification.

La diversification conditionne le nombre d'actions différentes. Un portefeuille sera accepté si ce nombre est supérieur à un seuil choisi à priori. Parmi toutes les opportunités de portefeuilles, il est facile de déterminer le nombre maximum d'actions différentes que l'on puisse obtenir, ainsi que le nombre minimum. Ces extremums établissent une fourchette de choix pour l'utilisateur et lui éviteront d'éliminer toutes les possibilités en adoptant un seuil trop bas.

Limiter la proportion d'une action par rapport aux autres est aussi du ressort de la diversification. La valeur seuil à ne pas dépasser, choisie par l'investisseur, peut également être bornée par les extremums de la plus petite et de la plus grande proportion d'une action dans une composition.

b - Critère d'imposition d'actions.

Vouloir conserver certaines actions doit être envisagé, deux possibilités se dégagent:

- Les actions concernées sont à rentabilité positives et appartiennent de ce fait au graphe. Il sera facile d'éliminer les compositions proposées qui ne les contiennent pas.
- * Les actions n'appartiennent pas à l'ensemble des actions rentables ou aucune composition du domaine rentabilité-risque choisi ne les contiennent. L'investisseur devra alors imposer le nombre d'actions de ce type qu'il désire, la somme investie sera déduite de son budget disponible et le solde de l'opération sera le nouveau critère somme de l'algorithme.

c - Limitation des frais de transactions.

Les frais de transactions représente un pourcentage de la valeur de l'action négociée. Lors d'un changement de composition du portefeuille les frais de transactions seront de la même façon proportionnels à la somme d'argent investie en titres S_i.

$$S_i = \sum_{i=1}^{N} | (Nbi_{p1} - Nbi_{p2}) * C_i |$$

Nbi_{p1}: nombre d'action i dans le portefeuille détenu. Nbi_{p2}: nombre d'action i dans le portefeuille proposé.

C_i : cours de l'action i.

N : nombre d'actions différentes.

abs : valeur absolue.

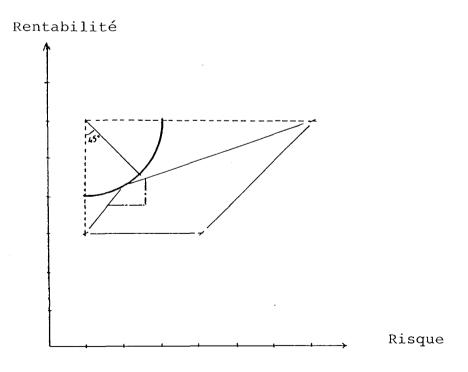
La valeur minimale de cette expression qualifiera la transformation de portefeuille optimale en frais de transactions.

IV. APPLICATION DU MODELE A UN PORTEFEUILLE.

Le modèle, ainsi conçu, propose à l'investisseur un ensemble de portefeuilles qui respectent ses aspirations et suppose qu'il n'existe aucune entrave aux transactions envisagées. Néanmoins avant toute décision d'investissement, il est nécessaire d'étudier la rentabilité de l'opération. En effet, les frais de transactions représentent environ 1,3% du montant des titres négociés, si la rentabilité espérée du placement n'est pas suffisamment élevée pour les compenser et apporter une plus-value, il est préférable d'investir au taux sans risque ou de conserver le portefeuille actuel, même si celui-ci ne présente pas de caractéristiques optimales. Comme le modèle présente à chaque proposition la rentabilité espérée du placement, le risque encouru, et les frais occasionnels, l'investisseur, en tant que décideur, peut alors intervenir au niveau de la constitution de son portefeuille.

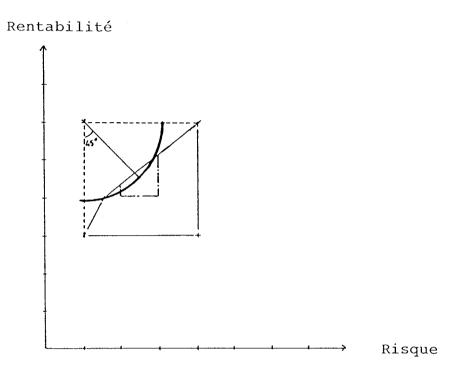
Afin de tester la méthode, nous avons décidé d'attribuer une préférence identique aux critères rentabilité-risque. Les zones de préférences, introduites précédemment, correspondent alors à des cercles et le couple optimal à réaliser est déterminé par le cercle de rayon minimum. Envisageons deux possibilités:

- le cercle de rayon optimal n'est en contact qu'avec un point du contour, le domaine recherché est défini autour de ce point.



Points du contour
 Domaine de recherche consécutif à l'intersection d'une droite à 45° d'origine le point initial et du cercle de rayon optimal.

- le cercle et la surface délimitée par les points du contour ont une zone commune. Le domaine recherché sera développé autour du point d'intersection entre le cercle et, pour respecter l'hypothèse d'indifférence entre les critères, une droite de pente 45° ayant pour origine le point idéal.



Les titres à intégrer à notre portefeuille sont représentatifs des sociétés et banques: Ibm, Thomson, Printemps, Compagnie générale d'électricité, Crédit Commercial de France. L'étude du placement a été réalisée sur la période du 10 mai 1988 au 30 septembre 1988, les variations souhaitées des critères rentabilité et risque ont été fixées à 0.1%., et le budget initial à 10000 Frs.

Dans un premier temps, nous avons accepté de constituer un portefeuille si celui-ci comportait au moins quatre titres rentables. Dès qu'il n'est plus possible de conserver quatre titres différents ou que la rentabilité ou la somme investie en titres diminue sensiblement, la stratégie adoptée consiste alors à vendre et à investir sans risque à un taux d'intérêt constant de 10% sur l'année. Ces règles que nous nous sommes fixées lors de notre simulation sont intégrées au modèle grâce au caractère conversationnel que nous lui avons donné.

En effet à chaque nouvelle évolution des cours, le logiciel que nous avons réalisé indique la situation du portefeuille détenu jusqu'alors et propose un ensemble de critères. Nous sélectionnons alors ceux que nous désirons retenir, et indiquons sous forme de questions-réponses dans quelle mesure les appliquer (nombres d'actions, somme à investir, pourcentage maximum d'un actif dans le portefeuille...). Fonction de ces choix, l'algorithme soumet un ensemble de combinaisons d'actifs réalisables avec toutes leurs caractéristiques (rentabilité, risque, somme, frais de transactions...). Dans le cas de compositions non satisfaisantes nous renouvelons la procédure en faisant évoluer les seuils des critères ou en choisissant d'autres critères. Cet aspect du modèle procure une liberté d'action non négligeable en permettant de comparer l'influence du choix d'un critère par rapport à un autre.

Le bénéfice réel réalisé en utilisant les estimations des critères de la méthode des moyennes présentée au second chapitre a été de 19.25 % sur cinq mois. L'indice général du marché a réalisé sur la même période une plus-value de 20%. En omettant d'inclure les frais de transactions, le bénéfice réel atteint les 23% et devient supérieur à l'augmentation de l'indice du marché.

Lors d'un second essai, nous avons décidé d'accepter un portefeuille qui comporterait au moins trois titres rentables. Le bénéfice réel enregistré sur la même période baisse alors à 17%. Les transactions sont plus fréquentes, le portefeuille est moins diversifié et donc plus risqué. Si de la même façon nous intégrons les frais de transactions le bénéfice atteint cette fois les 25%.

Conclusion

La baisse du bénéfice réel confirme le fait qu'un portefeuille moins diversifié est plus risqué. Néanmoins, si les frais de transactions ne sont pas considérés, il est possible de comparer la rentabilité des placements effectués avec l'évolution de l'indice général du marché et les résultats obtenus nous permettent d'apprécier l'efficacité du modèle de gestion de portefeuille. Les critères rentabilité risque estimés à partir de la méthode des moindres carrés introduite au deuxième chapitre conduisent à une réaction de l'investisseur face au marché et à un bénéfice quasiment identiques, l'anticipation étant faite à très court terme.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons exposé à travers cet ouvrage comment, à partir des cotations boursières, il était possible d'estimer les critères rentabilité et risque qui qualifient le titre et élaboré un modèle d'aide à la gestion de portefeuille. En lui prêtant un caractère conversationnel, nous sommes parvenus à moduler le contenu du portefeuille proposé en fonction du demandeur.

La robustesse de notre modèle repose d'une part sur la fiabilité des estimations des critères rentabilité et risque et, d'autre part, sur l'intégration d'autres critères que les méthodes usuelles omettaient, comme la somme à investir, les frais de transactions ou la diversification.

Une proposition de portefeuille peut ne pas correspondre aux objectifs financiers de l'investisseur, il est, dans ce cas, inutile de la lui soumettre et le critère somme à investir permet une première sélection parmi les solutions.

Les frais de transactions représentent un pourcentage des titres négociés, et peuvent, de ce fait, être très élevés. Nous avons donc décidé de les inclure au modèle. Ceci nous a permis d'orienter l'investisseur dans ses décisions en lui exposant les frais relatifs à chaque proposition, et de construire un modèle réaliste.

La diversification est à l'appréciation du décideur. Elle concerne le nombre de titres différents dans le portefeuille ou la proportion d'un titre par rapport aux autres. Elle élimine également un certain nombre de possibilités qui ne satisfont pas l'investisseur.

Les essais que nous avons effectués ont concerné un ensemble restreint de titres, le critère diversification n'a pu, de ce fait, être pleinement exploité. Malgré cela, les bénéfices enregistrés sont plus que satisfaisants devant l'évolution de l'indice général du marché. Ce qui nous permet d'apprécier la fiabilité des estimations des critères rentabilité et risque et la validité du modèle de gestion.

Le temps nécessaire à la recherche des solutions dépend évidemment du nombre de titres considérés mais ne dépasse pas quelques secondes sur un calculateur IBM AT.

Nous n'avons pas envisagé lors des tests les titres qui sont échangés uniquement par quotités, si l'éventualité se produisait, il suffirait alors de considérer la quotité de titres comme un unique titre.

Le modèle de gestion que nous proposons améliore réellement la rentabilité du portefeuille, néanmoins, l'investisseur qui intervient comme décideur doit être conscient de ses actes. Il est tenu d'apprécier la rentabilité de l'opération qu'il va réaliser face aux frais engendrés, de limiter le volume de transactions, et principalement de suivre l'évolution quotidienne des titres de son portefeuille.

BIBLIOGRAPHIE

[1]	A. QUINTART - R. ZISSWILLER . "Théorie de la Finance" . Presse Universitaire de France.
[2]	B. JACQUILLAT." Les Modèles d'évaluation et de Sélection des Valeurs Mobilières: Panorama des Recherches Américaines ". Analyses financières n°11 4 ^{eme} trimestre 1972.
[3]	V. S. WHITBEK, M. Jr KISOR ." A new Tool in Investment Decision Making" . Financial Analyst Journal . May-June 1963.
[4]	R. S. BOWER, D. H. BOWER . "Risk and the Valuation of Common Stock" . Journal of Political Economy, IXXVII, May-June 1969
[5]	B. FETIVEAU. "Le Chartisme en Bande Dessinée". Sciences & Vie Economie n°22, Novembre 1986.
[6]	W. L. JILER. "How Charts can help you in the Stock Market" publié par Trend Line.
[7]	B. MONTIER. "L'Analyse Technique du Marché des Valeurs Mobilières". Analyses Financières n°2 1969.
[8]	J. HAMON." Prévision de Cours Boursiers et Méthodes Points et Croix "Analyses Financières 3 ^{eme} trimestre 1975.
[9]	H. DE LA BRUSLERIE, H. DE LATTRE ." Analyse Chartiste et

Gestion du Risque de Change". Analyses Financières 3^{eme} tri. 1985.

[10]	J. HAMON. "Application d'un Modèle de Moyennes Mobiles au Marché Français des Valeurs à Revenu Variable". Revue de Science Financière n° 3 Octobre 1974.
[11]	B. JACQUILLAT, B. SOLNIK ." Marché Financiers et Gestion de Portefeuilles". Edition Dunod 1976.
[12]	B. DUMAS, B. JACQUILLAT ."Panorama des méthodes d'évaluation des obligations". Analyses Financières 4 ^{eme} trimestre 1985.
[13]	J. C. AUGROS. "L'Apport de la Théorie Financières à l'Etude des Actifs Conditionnels des Options aux Obligations Convertibles". Thèse de 3eme cycle présentée à Rennes en 1981.
[14]	J. DIF ." Les Primes des Obligations Convertibles". Analyses Financières 3 ^{eme} trimestre 1975.
[15]	C. PINEAU VALENCIENNE." Panorama des Etudes sur les Obligations Convertibles". Analyses Financières 3 ^{eme} trimestre 1974.
[16]	R. ROUSSELLE, D. VIDAL-MADJAR. "Obligations Convertibles: de l'Evaluation à la Gestion". Analyses Financières 3 ^{eme} trimestre 1975.
[17]	J.P. DETRIE ." Analyse Stratégique et Analyse Financière". Analyses Financières 3 ^{eme} trimestre 1984.
[18]	S. RAINSY." Le P.E.R. Un Instrument mal adapté à la Gestion Mondiale des Portefeuilles. Comment Remédier à ses Lacunes". Analyses

[19] N. BAKHVALOV."Méthodes Numériques - Analyse, Algèbre, équations différentielles ordinaires". Editions Mir Moscou.

Financières 2^{eme} trimestre 1984.

[20] R. W. HORNBECK."Numerical Methods". Quantum Publishers INC 1975

[21] H. KAUFMAN."On-line State Estimation using Modified Cubic Splines". IEE Transactions on automatic control, February 1976.

[22	M. LUCA	S. "La réalisation des	logiciels interactifs".	. Edition E	yrolles 1982
------	---------	------------------------	-------------------------	-------------	--------------

- [23] P.J. HARTLEY, C.J.JUDD. "Parametrization and Shape of B-Spline Curves for CAD". IPC Business Press volume 12 number 5 September 1980
- [24] M. LABARRERE, J.P. KRIEF, B. GIMONET. "Le Filtrage et ses Applications". Editions Cepadues.
- [25] A. LLORENS, R. ROUSSELLE. "La Nouvelle Analyse Technique". Analyses financières 4^{eme} tri. 1978.
- [26] J.C. ADJEMIAN. "SCAN: Analyse Technique et Stratégie" Analyses financières 4^{eme} tri. 1981.
- [27] L. POVY. "Identification de Processus". Edition Dunod Université.
- [28] P. DE LARMINAT, Y. THOMAS."Automatique des Systèmes Linéaires". Edition Flammarion Sciences.
- [29] A. ROSENFELD, P. DE LA TORRE." Histogramm Concavity Analysis as an Aid in Threshold Selection". IEEE Transactions on systems Man and Cybernetics vol. smc-13, n°3 March/April 1983.
- [30] H. FIZAZI, J.G. POSTAIRE." Classification Optimale de Petits
 Echantillons par Restauration des Propriétés de Convexité des Fonctions
 de Densité Marginales de Probabilité". Présenté au IASTED Int. Symp.
 On Identification and Pattern Recognition (RAI/IPAR), Toulouse, 1986.
- [31] H. FIZAZI. "Classification Automatique de Petits Echantillons par Restauration des Propriétés de Convexité des Fonctions de Densité Marginales de Probabilité". Thèse de Docteur Ingénieur, Lille, 1987.

[32]	D. HUREL, R. LAURENT, L. POVY, R.G. LITWAK. "Analysis of the Stock Exchange Quotations Evolution using a non Linear-Filtering Method". Congrés IMACS, Paris, 18-21 Juin 1988.
[33]	C. VASSEUR. "La Notion d'Evenement dans les Systèmes Dynamiques: Détection, Temps réel et Application à la Conception d'une Instrumentation Distribuée". Thèse de Docteur Ingénieur, Lille, 1982.
[34]	D. HUREL. "Identification de Paramètres en vue d'effectuer la Gestion d'un Portefeuille". Mémoire de Diplôme d'Etude Approfondie. Lille, 1986.
[35]	A. ANTOUN . "La Gestion des Risques Financiers dans les Entreprises en France". Analyses financières 3 ^{eme} tri.1987.
[36]	G.A. POGUE, B.H. SOLNIK. "Risque, Diversification, et Gestion de Portefeuille". Analyses financières 3eme tri. 1972.
[37]	F. ROSENFELD ."Une Recherche sur les Variations comparées des Marchés Boursiers". Analyses financières 1 ^{eme} tri.1986.
[38]	J. J. ROSA. "Rentabilité, Risque et Equilibre à la Bourse de Paris". Revue économique n°4, 1976.

[40] S.D. SMITH."Numerical Solution of Partial Differential Equations, Difference Methods". Oxford University Press 1978.

Liabilities". Journal of Political Economy 1975.

F. BLACK, M. SCHOLES." The Pricing of Options and Corporate

[39]

[41] CH. PELISSIE DU RAUSAS." Comparaison Empirique et Théorique de deux modèles de Pricing d'Options de Change - Premiers Eléments pour la mise au point de Stratégies d'Investissement". Mémoire présenté en sept. 1984 Université Paris IX - Dauphine.

- [42] E. DELATTRE." Introduction à une Théorie des Marchés d'Option Etroits: Etude des Lois de Distribution des Variations de Cours d'une Action". Thèse de 3eme cycle présentée à Lille en 1982.
- [43] P. LOIRET, G. ROUVIER."Une Nouvelle Approche Boursière Comparative: le Graphique en Etoile".Analyses financières 3^{eme} tri.1986.
- [44] R.G. LITWAK, R. LAURENT, L. POVY, D. HUREL." Classing Method Multicriterion Optimisation Application to the Financial Market". Article présenté au Third Bellman Continuum, Sophia-Antipolis, June 13-14, 1988.
- [45] E. JACQUET-LAGREZE, B. ROY. "Aide à la Décision Multicritère et Systèmes Relationnels de Préférences". Cahier du LAMSADE n°34-1980.
- [46] G. BERNARD, M.L. BESSON. "Douze Méthodes d'Analyse Multicritère". R.I.R.O 5è année, V-3,1971.

ANNEXE I

Formule de Gordon-Shapiro

$$P_0 = D_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+g)^k}{(1+r)^k}$$

Si n est suffisamment grand on peut écrire:

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)}{1+r} \left(1 + \frac{1+g}{1+r} + \dots + \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+r)^{n-1}}\right)$$

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)}{1+r} \left(\frac{1}{1+g} \right) = \frac{D_0(1+g)}{1+r} \left(\frac{1+r}{1+g} \right)$$

$$1-\frac{1+r}{1+r}$$

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)}{r-g} \approx \frac{D_0}{r-g}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{r-g}$$
 car $D_1 = D_0 (1+g)$

ANNEXE II

Solution numérique

Elle consiste à découper la maturité de l'option ainsi que la valeur de l'action correspondante en un nombre assez grand d'intervalles égaux tels que:

$$S = ih \quad i = 0, 1, ..., n$$

$$\tau = jk \quad j = 0, 1, ..., m$$

On suppose que S et τ varient de façon discrète et non plus continue.La différence entre deux valeurs consécutives de chacune des variables étant h et k d'où l'équivalence de:

$$C(S,\tau) = C(S_i,\tau_j) = C(ih,jk) = C_{i,j}$$

Selon cette notation et en analogie avec l'évaluation des options par la méthode numérique de Schwartz:

$$C_{S} = \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2h}$$
 $C_{SS} = \frac{C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}}{h^{2}}$

$$C = \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{k}$$

On remplace C_S , C_{SS} , C dans l'équation différentielle:

$$\frac{1}{-\frac{(ih)^2 \sigma^2 - \frac{C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}}{h^2} + r(ih)}{2h}$$

$$- r C_{i,j} + \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{k} = 0$$



Après simplification:

$$\begin{aligned} a_i & C_{i-1,j} + b_i C_{i,j} + C_i C_{i+1,j} = C_{i,j-1} \\ où & a_i = 1/2 \text{ rki} + 1/2 \sigma^2 \text{ki}^2 & \text{On peut calculer de proche} \\ & b_i = (1+\text{rk}) + \sigma^2 \text{ ki}^2 & \text{en proche les } C_{i,j} \\ & c_i = 1/2 \text{ rki} - 1/2 \sigma^2 \text{ki}^2 \end{aligned}$$

RESUME

Le travail exposé concerne la réalisation d'un modèle de gestion de portefeuille de titres cotés en bourse.

Les critères rentabilité et risque sont fréquemment utilisés pour quantifier la valeur d'un titre. Nous introduisons deux méthodes qui permettent une évaluation correcte de ces paramètres. La première est basée sur un principe de filtre moyenneur, la seconde traite de leur anticipation.

Nous étudions ensuite les différentes constitutions de portefeuille qu'il est possible de réaliser à partir d'un ensemble fini d'actifs. Leur représentation dans un repère orthogonal rentabilité-risque nous conduit à l'élaboration d'un modèle de gestion du portefeuille.

Afin d'obtenir un modèle qui reflète au mieux la réalité et de palier les inconvénients des méthodes usuelles, nous déterminons un certain nombre de contraintes importantes à intégrer. Ces contraintes sont relatives à la somme à investir, aux frais de transactions et à la diversification du portefeuille.

Les résultats obtenus suite à des essais sur un ensemble de titres montrent la fiabilité des estimations et l'efficacité du modèle de gestion.

MOTS CLES: Cours de Bourse - Analyse - Modélisation Filtrage - Estimation - Gestion de portefeuille.