N° d'ordre 317

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

le titre de Docteur de l'Université

Spécialité : Mathématiques Pures

par

Jacques VENKEN

AUTOUR DU THEOREME CHINOIS

Soutenue le 6 février 1989 devant la Commission d'Examen :

Présidente	: *N. ZINN-JUSTIN (Université de Lille Flandres Artois)*
Rapporteurs	: *J.P. LAFON (Université de Paris XIII)*
	J. MAROT (Université de Brest)
Membres	: *R. BKOUCHE (Université de Lille Flandres Artois)*
	L. GRUSON (Université de Lille Flandres Artois)

N° d'ordre 317

L'UNIVERSITE DES S ... ES ARTOIS

AUT ... S

Soutenue le 6 février 1989 devant la Commission d'Examen :

Présidente : N. ZINN-JUSTIN (Université de Lille Flandres Artois)
Rapporteurs : J.P. LAFON (Université de Paris XIII)
J. MAROT (Université de Brest)
Membres : R. BKOUCHE (Université de Lille Flandres Artois)
L. GRUSON (Université de Lille Flandres Artois)

Ne proclame pas tes buts. Même et surtout si tu les vois, ou crois les voir. Au départ déjà, te restreindre ! Si affaissé, brimé, si fini que tu sois, demande-toi régulièrement — et irrégulièrement — "Qu'est-ce qu'aujourd'hui encore je peux risquer ?"

Poteaux d'angle

Henri Micheaux

Madame Nicole ZINN-JUSTIN nous a proposé ce sujet. Elle a su, avec adresse et doigté éveiller notre intérêt et aiguillonner notre ardeur au travail. Critique vigilante, elle a étudié nos ébauches et revu nos manuscrits. Nous lui vouons une grande estime et une inaltérable admiration.

Nous remercions vivement Monsieur Jean-Pierre Lafon et Monsieur Jean Marot pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Nous nous sentons très honorés de leur présence dans le jury.

Monsieur Rudolph Bkouche et Monsieur Laurent Gruson nous ont de tout temps prodigué leur chaleur, leur gentillesse et leurs conseils. Qu'ils trouvent ici le témoignage d'une fidèle amitié.

Nous avons trouvé à l'U.F.R. de Mathématiques plus qu'un milieu de travail : un terreau culturel et toutes les relations affectives qui permettent l'épanouissement. Nous dédions à nos collègues cette thèse tardive.

Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui ont rendu possible la réalisation matérielle de ce travail, particulièrement, Madame Raymonde Bérat dont l'efficacité et la compétence n'ont d'égales que la gentillesse et la bonne humeur.

Le présent travail tente d'articuler deux concepts et les conditions de finitude qui leur sont intimement associés : modules de type borné et modules pan-caténaires d'une part, familles étrangères d'idéaux et condition *Et* d'autre part. Cette étude permet d'esquisser dans un second temps la structure des modules pan-caténaires sur un anneau noethérien de dimension un.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

REMARQUE SUR LE THEOREME CHINOIS

0 - Introduction et définitions.

Soient A un anneau commutatif unifère, $(p_i)_{i\in I}$ une famille finie d'idéaux de A, X le module $X = \oplus_{i\in I} A/p_i$, $(e_i)_{i\in I}$ les générateurs canoniques de X. Le théorème chinois se décompose en les assertions suivantes :

a) Le A-module X est monogène si et seulement si

$$p_i + p_j = A \quad \text{pour tous} \quad i, j \quad i \neq j$$

et, lorsque ces conditions se vérifient :

b) L'élément $x \in X$, $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$ engendre X si et seulement si

$$Aa_i + p_i = A \quad \text{pour tous} \quad i \in I$$

c) L'annulateur de tout $x \in X$ générateur de X est

$$\mathrm{Ann}_A x = \bigcap_{i\in I} p_i = \prod_{i\in I} p_i \ .$$

Nous proposons, dans cet article, une généralisation de ce théorème. Nous noterons, dans ce qui suit, $|I|$ le cardinal de l'ensemble I.

0.1 - Définition. *Soient I un ensemble, $(p_i)_{i\in I}$ une famille d'idéaux de A, éventuellement nuls ou impropres et n un entier strictement positif. On dira que les p_i sont, soit en nombre insuffisant, soit n-étrangers si, pour toute partie H de I telle que $|H| = n$,*

$$\sum_{h\in H} p_h = A \ .$$

Si, en outre, $|I| \geq n$, on dira que la famille des p_i est n-étrangère.

Cette définition permet un énoncé plus général.

Théorème. *Soient I un ensemble fini, $(p_i)_{i\in I}$ une famille d'idéaux de A et d un entier positif. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) le A-module X est engendré par d générateurs ;

(ii) les p_i sont, soit en nombre insuffisant, soit $(d+1)$-étrangers.

Dans la première partie, nous démontrons un critère de type déterminantiel qui prolonge l'assertion b) et permet de caractériser les familles génératrices de X.

Nous l'appliquons aux cas les plus simples, essentiellement le cas où A contient un corps infini et celui des familles 3-étrangères d'idéaux.

La démonstration du théorème proprement dit constitue la deuxième partie. On y construit de manière plus ou moins effective un système de générateurs de X. Le problème des relations entre ces générateurs (assertion c)) n'est pas abordé.

Enfin, en vue des applications de ce théorème, auxquelles est consacré la fin de ce travail, nous utilisons la définition qui suit :

0.2 - Définition. *Soient M un module sur un anneau A et d un entier positif. On dira que M est de type borné d, si tout sous-module de type fini de M est contenu dans un sous-module de M engendré par d générateurs. On dira que M est de type borné s'il existe un entier d tel que M soit de type borné d.*

Cette définition permet d'étendre l'énoncé du théorème au cas d'un ensemble indiciel I quelconque :

Théorème. *Soient I un ensemble, $(p_i)_{i\in I}$ une famille d'idéaux de A et d un entier positif. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est de type borné d ;

(ii) les idéaux p_i sont, soit en nombre insuffisant, soit $(d+1)$-étrangers.

Certains auteurs (Heinzer et Lantz dans [4], Nicolas dans [6], Renault dans [7] et [8]) étudient un affaiblissement des conditions noethériennes sur les modules :

0.3 - Définition. *On dira qu'un module M sur un anneau A est d-caténaire si tout sous-module N de type borné d est de type fini, auquel cas N est engendré par d générateurs. On dira que le module M est pan-caténaire s'il est caténaire pour tout entier d.*

La fin de ce travail est centré sur l'étude des idéaux premiers associés des modules pan-caténaires sur les anneaux noethériens. Pour ce faire, dans une troisième partie, nous caractérisons la famille des annulateurs des éléments d'un module pan-caténaire sur un anneau A ainsi que les sommes directes pan-caténaires de modules pan-caténaires.

Dans la quatrième partie, nous esquissons un lien entre la dimension d du spectre maximal de A (dans le cas noethérien) et l'existence d'ensembles infinis d'idéaux de A $(d+1)$-étrangers, nous exhibons dans certains cas de telles familles et démontrons le :

Théorème. *Soit M un module pan-caténaire sur un anneau noethérien dont le spectre maximal est de dimension de Krull finie, alors $Z(M)$ est contenu dans une réunion finie d'idéaux premiers.*

On rappelle que $Z(M)$ désigne l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que l'homothétie de rapport a dans M ne soit pas injective.

1 - Caractérisation des systèmes de générateurs de X.

1.1 - Soit M une matrice de type (I, J) dont les ensembles d'indices I et J sont finis et totalement ordonnés et dont les coefficients appartiennent à un anneau commutatif unifère A.

La notation $M_{H,K}$ signifiera que $H \subset I$, $K \subset J$ et que la matrice $M_{H,K}$ s'obtient en supprimant dans M les lignes (resp. les colonnes) dont les indices appartiennent à $I - H$ (resp. $J - K$).

Lorsque H et K ont même cardinalité, on notera $\det(M_{H,K})$ le mineur correspondant.

Soit $H \subset I$, on notera $|H|$ le cardinal de H, H' le complémentaire de H dans I.

On notera encore Q_H l'idéal $\sum_{\substack{K \subset J \\ |K|=|H|}} A \det(M_{H,K})$.

Lemme.

1) On ne modifie pas l'idéal Q_H si l'on ajoute à une colonne donnée de la matrice M un multiple d'une autre colonne.

2) Si $H_1 \subset H$, $Q_H \subset Q_{H_1}$.

■ La première assertion est triviale ; quant à l'autre, il suffit de remarquer que

$$\det(M_{H,K}) \in \sum_{\substack{K_1 \subset K \\ |K_1|=|H_1|}} A \det(M_{H_1,K_1}) ;$$

ce qui résulte du développement de Laplace de $\det(M_{H,K})$. ■

1.2 - Soient maintenant $p_1, \ldots, p_m$ des idéaux de A, I l'ensemble $[1, \ldots, m]$, X le module $X = \oplus_{i \in I} A/p_i$, $e_1, \ldots, e_m$ les générateurs canoniques de X ; $x_1, \ldots, x_d$ des éléments de X, J l'ensemble $[1, \ldots, d]$. On peut écrire $x_j = \sum_{i \in I} a_{ij} e_i$, pour tout $j \in J$. On désigne par M la matrice (a_{ij}).

On ne se privera pas, dans ce qui suit, d'exiger que certains p_i soient égaux à A, auquel cas $\mathrm{Ann}_A\, e_i = A$. On remarquera que deux matrices $M = (a_{ij})$ et $N = (b_{ij})$ représentent le même système $x_1, \ldots, x_d$ d'éléments de X si et seulement si $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{p_i}$ pour tous i, j et que l'idéal $Q_H + \sum_{h \in H} p_h$ ne dépend, par conséquent, pas de la matrice M mais seulement du système d'éléments $x_1, \ldots, x_d$ de X.

Remarque : L'image de l'idéal $Q_H + \sum_{h\in H} p_h$ dans l'anneau $A/\sum_{h\in H} p_h$ est l'idéal Q_H de la matrice $\overline{M}_{H,J}$ dont les coefficients sont ceux de la matrice $M_{H,J}$ réduits modulo $\sum_{h\in H} p_h$.

1.3 - Lemme.

1) Soient $p_1,\ldots,p_m$ des idéaux de A $(d+1)$-étrangers. On suppose que, pour tout H, tel que $0<|H|\leq d$, les relations :

$$Q_H + \sum_{h\in H} p_h = A$$

sont satisfaites. Alors $x_1,\ldots,x_d$ est un système de générateurs de X.

2) Soient $p_1,\ldots,p_{m'}$ des idéaux de A. On suppose que $m'\leq d$ et que, pour tout H, $0<|H|\leq m'$ les relations

$$Q_H + \sum_{h\in H} p_h = A$$

sont satisfaites. Alors $x'_1,\ldots,x'_d$ est un système de générateurs de X.

■ 1) Soit $i_0\in I$. On considère l'idéal :

$$T_{i_0} = \sum_{1\leq k\leq d} \Big(\sum_{\substack{H,|H|=k \\ i_0\in H}} Q_H \prod_{h'\in H'} p_{h'}\Big) + p_{i_0}\ .$$

Montrons que $T_{i_0}=A$.

Sinon, soit m un idéal maximal contenant T_{i_0}. Il doit contenir p_{i_0}. S'il contient les idéaux $p_{i_0},\ldots,p_{i_k}$, $k\leq d$, $i_0,\ldots,i_k$ tous distincts, soit H la partie $\{i_0,\ldots,i_k\}$ de I ; il contient alors $Q_H\prod_{h'\in H'} p_{h'}$. Il ne peut contenir Q_H en vertu des hypothèses ; il existe donc i_{k+1}, $i_{k+1}\notin\{i_0,\ldots,i_k\}$ tel que $p_{i_{k+1}}\subset m$. Pour $k=d$, ceci signifie que $p_{i_0},\ldots,p_{i_d}$, $p_{i_{d+1}}\subset m$, ce qui est impossible, les idéaux p_i étant $(d+1)$-étrangers. Il en résulte une relation du type :

$$1 = b_{i_0} + \sum_H b_H \quad \text{où} \quad b_{i_0}\in p_{i_0}\ .$$

H parcourt l'ensemble des parties $H\subset I$, $i_0\in H$, $1\leq |H|\leq d$ et $b_H\in Q_H\prod_{h'\in H'} p_{h'}$.

Or, $Q_H\prod_{h'\in H'} p_{h'} = \sum_{\substack{K\subset J \\ |K|=|H|}} \det(M_{H,K})\prod_{h'\in H'} p_{h'}$ et b_H s'écrit :

$$b_H = \sum_{\substack{K\subset J \\ |K|=|H|}} \det(M_{H,K}) b_{H',K}$$

où $b_{H',K} \in \prod_{h' \in H'} p_{h'}$.

Il vient :

$$1 = b_{i_0} + \sum_{1 \leq k \leq d} \sum_{\substack{H, |H|=k \\ i_0 \in H}} \Big(\sum_{\substack{K \subset J \\ |K|=|H|}} \det(M_{H,K}) b_{H',K} \Big) .$$

Considérons la matrice N à coefficients dans $A[X_1, \ldots, X_d]$ telle que pour $i \neq i_0$, $n_{ij} = a_{ij}$ et pour $i = i_0$, $n_{i_0 j} = X_j$, ainsi que le polynôme :

$$P(X_1, \ldots, X_d) = \sum_{1 \leq k \leq d} \sum_{\substack{H, |H|=k \\ i_0 \in H}} \Big(\sum_{\substack{K \subset J \\ |K|=|H|}} \det(N_{H,K}) b_{H',K} \Big) .$$

Alors $P(X_1, \ldots, X_d) = \sum_{j \in J} \alpha_j X_j$. En vertu de la relation précédente :

$$P(a_{i_0 1}, \ldots, a_{i_0 d}) \equiv 1 \pmod{p_{i_0}} .$$

Pour $i \neq i_0$, $P(a_{i1}, \ldots, a_{id}) \equiv 0 \pmod{p_i}$.

En effet, les expressions :

$$\sum_{K \subset J, |K|=|H|} det(N_{H,K}) b_{H',K}$$

sont nulles mod p_i si $i \in H'$ ($b_{H',K} \in \prod_{h' \in H'} p_{h'}$) ; sinon $i \in H$ et la matrice $N_{H,K}$ contient les lignes i_0 et i qui après substitution des a_{ij} aux X_j sont égales. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \alpha_j x_j &= \sum_{j \in J} \alpha_j \Big(\sum_{i \in I} a_{ij} e_i \Big) \\ &= \sum_{i \in I} \Big(\sum_{j \in J} a_{ij} \alpha_j e_i \Big) = e_{i_0} . \end{aligned}$$

car l'annulateur de e_i est p_i.

2) En effet, on peut compléter l'ensemble $p_1, \ldots, p_{m'}$ en un ensemble $p_1, \ldots, p_m$, $m = d+1$, en posant $p_{m'+1} = \ldots = p_m = A$. Cet ensemble d'idéaux est $(d+1)$-étranger. On complète la matrice par $m - m'$ lignes d'éléments arbitraires de A. Les relations complémentaires :

$$Q_H + \sum_{h \in H} p_h = A \quad \text{pour} \quad H \cap [m'+1, m] \neq \emptyset$$

sont triviales. En vertu de la première partie du lemme les éléments $x_j = x'_j + \sum_{m'+1 \leq i \leq m} a_{ij} e_i$ engendrent le module $X = \oplus_{i \in I} A/p_i = \oplus_{i \leq m'} A/p_i$. ■

1.4 - Proposition. *Soient $p_1, \ldots, p_m$ des idéaux de A ; $x_1, \ldots, x_d$ des éléments de X. Pour que $x_1, \ldots, x_d$ soit un système de générateurs de X, il faut et il suffit que, pour toute matrice M représentant le système $x_1, \ldots, x_d$, les relations :*

$$Q_H + \sum_{h \in H} p_h = A$$

soient satisfaites pour tout $H \subset I$, $H \neq \emptyset$.

■ Le fait que les conditions suffisent fait l'objet du lemme 1.3. En effet, si $m > d$, pour tout $H \subset I$ tel que $|H| = d + 1$, $Q_H = \{0\}$ (Q_H est alors engendré par une famille vide de déterminants) et

$$\sum_{h \in H} p_h = A \, .$$

Les p_i sont donc, soit en nombre insuffisant, soit $(d+1)$-étrangers et le lemme s'applique.

Montrons la nécessité de ces conditions : Soient A^d un A-module libre de rang d ; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d$ une base de A^d et $\varphi : A^d \to X$ l'application qui associe les x_j aux ε_j. Alors, pour tout $j \leq d$ l'application :

$\Lambda^j \varphi : \Lambda^j A^d \to \Lambda^j X$ est surjective.

On identifie ΛX au produit tensoriel gauche des algèbres $\Lambda A/p_i$ de sorte que $\Lambda^j X$ s'écrit $\oplus_{H, |H| = j} A / \sum_{h \in H} p_h$ muni du système de générateurs canonique $(e_H \big| |H| = j)$. Soit alors $H \subset I$, $|H| \leq d$. On considère l'application $p_H \circ \Lambda^{|H|} \varphi$ surjective

$$\Lambda^{|H|} A^d \to \Lambda^{|H|} X \to A / \sum_{h \in H} p_h$$

où p_H désigne la projection canonique sur le facteur $A / \sum_{h \in H} p_h$. La matrice de cette application est la matrice ligne $\big(\det(M_{H,K})$, $|K| = |H|$ et, exprimer la surjectivité de $p_H \circ \Lambda^{|H|} \varphi$ revient à écrire $Q_H + \sum_{h \in H} p_h = A$.

D'autre part, si $|H| > d$, $Q_H = \{0\}$, et $\Lambda^{|H|} X = \{0\}$, car X est engendré par d générateurs, et donc $A / \sum_{h \in H} p_h = \{0\}$ ce qui entraîne encore :

$$Q_H + \sum_{h \in H} p_h = A \, . \qquad \blacksquare$$

1.5 - Dans ce qui suit, on utilisera le critère qui précède sous la forme suivante :

Proposition. *Soient d un entier positif ; $p_1,\ldots,p_m$ des idéaux de A, soit en nombre insuffisant, soit $(d+1)$-étrangers ; $x_1,\ldots,x_d$ des éléments de X . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $x_1,\ldots,x_d$ est un système de générateurs de X ;

(ii) pour tout $H \subset I$ tel que $0 < |H| \leq d$

$$Q_H + \sum_{h\in H} p_h = A\ .$$

Ceci résulte d'une relecture de la démonstration de 1.4.

1.6 - Dans l'énoncé du corollaire qui suit, on considère en outre la structure canonique de A-algèbre de X.

Corollaire. *Soient d un entier supérieur à 2 ; $p_1,\ldots,p_m$ des idéaux de A, soit en nombre insuffisant, soit $(d+1)$-étrangers ; $x \in X$, $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $x^0, x, \ldots, x^{d-1}$ engendrent X ;

(ii) $A(a_i - a_{i'}) + p_i + p_{i'} = A$ pour tous $i, i' \in I$, $i \neq i'$.

■ On remarque que $x^0 = \sum_{i\in I} e_i$ et que $x^j = \sum_{i\in I} a_i^j e_i$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Il suffit de remarquer que pour

$$H = \{i, i'\} \quad i \neq i' \quad Q_H = A(a_i - a_{i'})\ .$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Les relations impliquent que :

$$A \prod_{\substack{h,h'\in H\\ h\neq h'}} (a_h - a_{h'}) + \sum_{h\in H} p_h = A\ .$$

Or, chaque Q_H, pour $|H| \geq 2$, contient un déterminant de Vandermonde ; et, pour $|H| = 1$, $Q_H = A$. ■

1.7 - Corollaire. *Soient A un anneau contenant un corps infini k ; $p_1, \ldots, p_m$ des idéaux de A, soit en nombre insuffisant , soit $(d+1)$-étrangers. Alors X est engendré par d éléments.*

En effet, si $k_1, \ldots, k_m$ sont des éléments distincts de k, il suffit de considérer dans X l'élément x, $x = \sum_{i \in I} k_i e_i$ et d'appliquer 1.6.

1.8 - On note e l'élément $e = \sum_{i \in I} e_i$; $e_i \wedge e_{i'}$, pour $i < i'$, les générateurs de $\oplus_{i<i'} A/p_i + p_{i'}$, identifié à $\Lambda^2 X$; f l'élément $f = \sum_{i<i'} e_i \wedge e_{i'}$.

Corollaire. *Soient $(p_i)_{i \in I}$ une famille d'idéaux de A, soit 3-étrangers, soit en nombre insuffisant. Alors, il existe $x \in X$ tel que X soit engendré par e et x. En outre, la suite de A-modules :*

$$0 \to A/\cap_i p_i \xrightarrow{\varphi} \oplus_i A/p_i \xrightarrow{\psi} \oplus_{i<i'} A/p_i + p_{i'} \to 0$$

où $\varphi(1) = e$ et $\psi(y) = y \wedge e$ est exacte.

■ Le cas insuffisant $m = 2$ est trivial : on prend $x = e_1$, on remarque que $x \wedge e = f$ et l'on utilise la suite exacte classique :

$$0 \to A/p_1 \cap p_2 \xrightarrow{\varphi} A/p_1 \oplus A/p_2 \xrightarrow{\psi} A/p_1 + p_2 \to 0 \, .$$

Montrons, par récurrence sur $|I|$, qu'il existe dans X un élément $x = \sum x_i e_i$ tel que $x \wedge e = f$, c'est-à-dire tel que si $i < i'$, $x_i - x_{i'} \equiv 1 \pmod{p_i + p_{i'}}$.

On suppose vérifiée son existence pour $|I| = m \geq 2$.

Soit alors $I = [1, m+1]$, il existe par hypothèse, dans A des éléments $x_1, \ldots, x_m$ tels que, pour $i < i' \leq m$

$$x_i - x_{i'} \equiv 1 \pmod{p_i + p_{i'}} \, .$$

Les idéaux $p_{m+1} + p_i$, pour $i \leq m$ sont 2-étrangers. Il existe donc $x_{m+1} \in A$ tel que $x_i - 1 \equiv x_{m+1} \pmod{p_{m+1} + p_i}$, pour tout $i \leq m$. Il en résulte que l'élément $x = \sum_{i \leq m} x_i e_i + x_{m+1} e_{m+1}$ satisfait l'équation $x \wedge e = f$. Enfin, le fait que X soit engendré par e et x résulte de 1.7 car :

$$A(x_i - x_{i'}) + p_i + p_{i'} = A \, .$$

En ce qui concerne l'exactitude de la suite, ψ est surjective, car $\psi(x) = f$ et f engendre $\oplus_{i<i'} A/p_i + p_{i'}$, les idéaux $p_i + p_{i'}$ étant 2-étrangers.

φ est injective, car $\mathrm{Ann}_A e = \cap_{i\in I} p_i$.

Quant à l'exactitude en $\oplus_{i\in I} A/p_i$, il suffit de montrer par récurrence sur $|I|$ que la relation $ax \wedge e = 0$ implique qu'il existe $b \in A$ tel que $ax = be$. Supposons cette assertion vérifiée pour $|I| = m \geq 2$. Soit alors $I = [1, m+1]$. Les idéaux $p_{m+1} + p_i \quad i \leq m$ sont 2-étrangers et donc :

$$p_{m+1} + \bigcap_{i\leq m} p_i \subset \bigcap_{i\leq m} (p_{m+1} + p_i) \subset \prod_{i\leq m} (p_{m+1} + p_i) \subset p_{m+1} + \prod_{i\leq m} p_i$$

et $$p_{m+1} + \prod_{i\leq m} p_i \subset p_{m+1} + \bigcap_{i\leq m} p_i \, .$$

Il vient : $0 = ax \wedge e = af$, $a \in \mathrm{Ann}_A f = \bigcap_{i<i'} (p_i + p_{i'})$, $a \in \bigcap_{i\leq m} (p_{m+1} + p_i) = p_{m+1} + \bigcap_{i\leq m} p_i$ d'où $a = a' + a''$, avec $a' \in p_{m+1}$ et $a'' \in \bigcap_{i\leq m} p_i$; $ax = a'x + a''x$. Or $a''x = a''x_{m+1}e_{m+1} = a''x_{m+1}e$.

Quitte à remplacer a' par a, il suffit donc de voir que $ax \wedge e = 0$ implique $ax = be$, lorsque $a \in p_{m+1}$. Or, de $ax \wedge e = 0$ résulte, dans ce cas, que $ax' \wedge e' = 0$ où $x' = x - x_{m+1}e_{m+1}$ et $e' = e - e_{m+1}$.

Par récurrence, $ax' = be'$ et, pour tout $i \leq m$, $ax_i \equiv b \pmod{p_i}$, d'où $b \in \bigcap_{i\leq m} (p_{m+1} + p_i)$, car $a \in p_{m+1}$ et $b = b' + b''$, où $b' \in p_{m+1}$ et $b'' \in \bigcap_{i\leq m} p_i$.

On conclut par :

$$ax = ax' = be' = b'e' = b'e \, . \qquad \blacksquare$$

1.9 - Soit I un idéal de A. On notera $\sqrt{I}$ (resp. $r(I)$) l'intersection des idéaux premiers (resp. maximaux) contenant I.

Corollaire. *Soient p_i des idéaux de A qui sont, soit en nombre insuffisant, soit $(d+1)$-étrangers ; q_i des idéaux tels que $p_i \subset \sqrt{q_i}$ (resp. $r(q_i)$). Alors les q_i sont, soit en nombre insuffisant, soit $(d+1)$-étrangers et toute matrice M d'un système de générateurs de $\oplus_i A/p_i$ est aussi matrice d'un système de générateurs de $\oplus_i A/q_i$.*

En effet, les relations $Q_H + \sum_{h\in H} p_h = A$ impliquent $Q_H + \sum_{h\in H} \sqrt{q_h} = A$ (resp. $Q_H + \sum_{h\in H} r(q_h) = A$) qui, à leur tour, donnent $Q_H + \sum_{h\in H} q_h = A$, car, pour tout idéal maximal m, les relations $I \subset m$, $\sqrt{I} \subset m$, $r(I) \subset m$ sont équivalentes.

Pour les relations d'étrangeté, même démonstration.

2 - Le théorème chinois.

2.1 - Lemme. *Soient p_i, $i \in I = [1, m]$, des idéaux de A, soit en nombre insuffisant, soit $(d+1)$-étrangers ; $(a_{i1}, \ldots, a_{id})$, $1 \leq i < m$, une matrice d'un système de générateurs de $\oplus_{i<m} A/p_i$, telle que $(a_{i1}, \ldots, a_{i\, d-1})$ soit matrice d'un système de générateurs de $\oplus_{i<m} A/p_m + p_i$; soient $a_{m1}, \ldots, a_{m\, d-1}$ des éléments arbitraires de A. On peut alors trouver a_{md} tel que $(a_{i1}, \ldots, a_{id})$ soit matrice d'un système de générateurs de $\oplus_{i \leq m} A/p_i = X$.*

Ce choix peut, de plus, s'effectuer de telle manière que, pour tout H, $H \subset I$, $m \in H$, $|H| = d$

$$\det(M_{H,J}) \equiv \det(M_{H-\{m\},\ J-\{d\}}) \quad (\text{modulo } \sum_{h \in H} p_h)\,.$$

■ Si $p_m = A$, on prend a_{md} arbitraire dans A et la relation sur les déterminants est évidemment vérifiée.

Si $d = 1$, on prend $a_{m1} \equiv 1 (\text{mod } p_m)$ (les idéaux p_i sont alors 2-étrangers) et (a_{i1}) $1 \leq i \leq m$ est la matrice colonne d'un système de générateurs de X (théorème chinois).

Dans le cas général, par hypothèse,

$$a_{id} \equiv \sum_{j<d} \alpha_j a_{ij} \; (\text{mod } p_m + p_i), \text{ pour } i < m$$

On pose alors $a_{md} = 1 + \sum_{j<d} \alpha_j a_{mj}$ et l'on utilise la proposition 1.5 :

Soit $H \subset I$, $|H| \leq d$:

si $m \notin H$ $\quad Q_H + \sum_{h \in H} p_h = A$ (c'est l'hypothèse) ;

si $H = \{m\}$ $\quad Q_{\{m\}} = idl\{a_{m1}, \ldots, a_{md}\} = A$;

si $m \in H$, soit $M_{H,J}$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{id} \\ a_{m1} & \cdots & a_{md} \end{pmatrix} \quad i \in H - \{m\}\,.$$

Son Q_H est le même que celui de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{i\,d-1} & a_{id} - \sum_{j<d} \alpha_j a_{ij} \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\ d-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{Lemme } 1.1)\,.$$

L'image de l'idéal $Q_H + \sum_{h\in H} p_h$ dans l'anneau $A/\sum_{h\in H} p_h$ est l'idéal Q_H de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_{i1} & \dots & \overline{a}_{i\ d-1}, 0 \\ \overline{a}_{m1} & \dots & \overline{a}_{m\ d-1}, 1 \end{pmatrix} \quad \text{(remarque 1.2)}$$

et donc de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_{i1} & \dots & \overline{a}_{i\ d-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\overline{a}_{ij}$ désigne la classe de a_{ij} modulo $\sum_{h\in H} p_h$. C'est aussi l'image de l'idéal $Q_{H-\{m\}} + \sum_{h\in H-\{m\}} p_h$ modulo $\sum_{h\in H} p_h$.

Il vient :

$$Q_H + \sum_{h\in H} p_h = Q_{H-\{m\}} + \sum_{h\in H} p_h$$

ce qui établit que M est matrice d'un système de générateurs de X, car :

$$Q_{H-\{m\}} + \sum_{h\in H-\{m\}} p_h = A\ .$$

Le même raisonnement montre que :

$$\begin{aligned} \overline{\det(M_{H,J})} &= \det(\overline{M}_{H,J}) = \det(\overline{M}_{H-\{m\},J-\{d\}}) \\ &= \overline{\det(M_{H-\{m\},J-\{d\}})} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme. ■

2.2 - On utilisera dorénavant les conventions classiques suivantes : l'intersection et le produit de la famille vide d'idéaux de A est égale à A ; la somme de la famille vide d'idéaux de A est l'idéal nul.

Pour $1 \leq m' \leq m$ et $1 \leq d' \leq d$, on notera :

$$R_{m'd'} = \bigcap_{\substack{S\ S\subset[m'+1,m] \\ |S|=d-d'}} (\sum_{s\in S} p_s)$$

de sorte que $R_{m'\ d} = \{0\}$, et que si $d-d' > m-m'$, $R_{m'\ d'} = A$ (même si $m' = m$).

Lemme.

1) $R_{m'\ d'} \subset R_{m'+1\ d'}$

2) $R_{m'\ d'+1} \subset R_{m'\ d'}$

3) $\sqrt{R_{m'\ d'}} \subset \sqrt{R_{m'+1\ d'+1} + p_{m'+1}}$

4) si $H \subset [1,m']$, $|H| = d'$ *et les* p_i *sont* $(d+1)$*-étrangers*

$$R_{m'\ d'} + \sum_{h\in H} p_h \subset R_{m'+1\ d'+1} + p_{m'+1} + \sum_{h\in H} p_h\ .$$

1) résulte de ce que

$$\{S|S \subset [m'+2,m], |S| = d-d'\}$$
$$\subset \{S|S \subset [m'+1,m], |S| = d-d'\}\ .$$

2) Si $d'+1 = d$, l'assertion est triviale.
Si $d' < d-1$, soit $a \in R_{m'd'+1}$. On peut supposer qu'il existe $S \subset [m'+1,m]$, $|S| = d-d'$, sinon $R_{m'd'} = A$. Soit un tel S, $|S| > 1$. Soit alors $t \in S$; $a \in \sum_{s\in S-\{t\}} p_s$, car $|S-\{t\}| = d-d'-1$ et donc $a \in \sum_{s\in S} p_s$.

3) Soit q un idéal premier contenant $R_{m'+1\ d'+1} + p_{m'+1} \cdot R_{m'+1\ d'+1} \subset q$. Il existe donc $S \subset [m'+2,m]$, $|S| = d-d'-1$ ($R_{m'+1\ d'+1} \neq A$) tel que $\sum_{s\in S} p_s + p_{m'+1} \subset q$. $S \cup \{m'+1\} \subset [m'+1,m]$ et $|S\cup\{m'+1\}| = d-d'$ et donc $R_{m'\ d'} \subset q$.

4) On peut supposer $R_{m'\ d'} \neq A$ par 3) et donc que :

$$\{S|S \subset [m'+1,m], |S| = d-d'\} \neq \emptyset\ .$$

Notons $S_1,\ldots,S_l$ les éléments de cet ensemble, $r_1,\ldots,r_l$ les idéaux $\sum_{s\in S_k} p_s$, r l'idéal $\sum_{h\in H} p_h$. Les idéaux $r + r_k$ sont 2-étrangers : en effet, r_k est somme de $|H| + |S_k|$ idéaux p_i ($H \cap S_k = \emptyset$ et $|H| + |S_k| = d$). Il vient donc :

$$\bigcap_k r_k + r \subset \bigcap_k (r_k + r) = \prod_k (r_k + r) \subset \prod_k r_k + r$$

et
$$R_{m'\ d'} + \sum_{h\in H} p_h = \prod_{\substack{S\ S\subset[m'+1,m]\\ |S|=d-d'}} \Big(\sum_{s\in S} p_s\Big) + \sum_{h\in H} p_h$$
$$\subset \prod_{\substack{S\subset[m'+2,m]\\ |S|=d-d'-1}} \Big(p_{m'+1} + \sum_{s\in S} p_s\Big) + \sum_{h\in H} p_h$$
$$\subset \prod_{\substack{S\ S\subset[m'+2,m]\\ |S|=d-d'-1}} \Big(\sum_{s\in S} p_s\Big) + p_{m'+1} + \sum_{h\in H} p_h \subset R_{m'+1\ d'+1} + p_{m'+1} + \sum_{h\in H} p_h\ .$$

2.3 - Lemme. *Soient* p_i, $i \in I = [1,m]$ *des idéaux de* A, *soit en nombre insuffisant, soit* $(d+1)$*-étrangers ; soit* $(a_{i1},\ldots,a_{id})$ $1 \le i \le m'$, $m' < m$, *une* *matrice M' telle que, pour $m'' \leq m'$, $d' \leq d$, $(a_{i1},\ldots,a_{id'})$ soit matrice d'un système de générateurs de :*

$$\oplus_{i\leq m''} A/R_{m''\ d'} + p_i \ .$$

Il existe alors $a_{m'+1\ 1},\ldots,a_{m'+1\ d}$ tels que, pour $1 \leq i \leq m''$, $m'' \leq m'+1$, $d' \leq d$, $(a_{i1},\ldots,a_{id'})$ soit matrice d'un système de générateurs de :

$$\oplus_{i\leq m''} A/R_{m''d'} + p_i \ .$$

De plus, si pour tout $H \subset [1,m']$, $|H| \leq d$, $\det(M'_{H,[1,|H|]}) \equiv 1 \pmod{R_{m_H|H|} + \sum_{h\in H} p_h}$, (où m_H désigne le plus grand élément de H), cette propriété subsiste pour tout $H \subset [1,m'+1]$, $|H| \leq d$, relativement à la matrice M^+ obtenue en bordant M' par la ligne $(a_{m'+1\ j})$, $1 \leq j \leq d$.

■ Il suffit de vérifier les assertions du lemme pour $m'' = m'+1$; on le fera par récurrence sur l'entier d'. Pour $d' = 1$, les $R_{m'+1\ 1} + p_i$, $1 \leq i \leq m'+1$, sont 2-étrangers. Il suffit donc de prendre $a_{m'+1\ 1} \equiv 1 \pmod{R_{m'+1\ 1} + p_{m'+1}}$, éventuellement donc quelconque lorsque $R_{m'+1\ 1} = A$.

Supposons le lemme vérifié pour tout entier d'' tel que $1 \leq d'' < d'+1$ c'est-à-dire, supposons que l'on a trouvé $a_{m'+1\ 1},\ldots,a_{m'+1\ d'}$ tels que, pour $1 \leq d'' \leq d'$,

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{i\ d''} \\ a_{m'+1\ 1} & \ldots & a_{m'+1\ d''} \end{pmatrix}$$

soit matrice d'un système de générateurs de :

$$\oplus_{i\leq m'+1} A/R_{m'+1\ d''} + p_i \ .$$

Il suffit de trouver $a_{m'+1\ d'+1}$ tel que :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{id'} & a_{i\ d'+1} \\ a_{m'\ 1} & \ldots & a_{m'\ d'} & a_{m'\ d'+1} \\ a_{m'+1\ 1} & \ldots & a_{m'+1\ d'} & a_{m'+1\ d'+1} \end{pmatrix}$$

soit un système de générateurs de :

$$\oplus_{i\leq m'+1} A/R_{m'+1\ d'+1} + p_i$$

(l'assertion pour $d'' < d'+1$ est acquise par récurrence).

Appliquons le lemme 2.1 aux idéaux :

$$R_{m'+1\ d'+1} + p_i \quad i \leq m'$$

$$R_{m'+1\ d'+1} + p_{m'+1}$$

On le peut car les $R_{m'+1\ d'+1} + p_i \quad 1 \leq i \leq m'+1$ sont, soit en nombre insuffisant, soit $(d'+2)$-étrangers. D'autre part,

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{i\ d'+1} \\ a_{m'\ 1} & \dots & a_{m'\ d'+1} \end{pmatrix}$$

est matrice d'un système de générateurs de $\oplus_{i \leq m'} A/R_{m' d'+1} + p_i$, par hypothèse. Comme $R_{m'\ d'+1} \subset R_{m'+1\ d'+1}$ (Lemme 2.2), c'est aussi une matrice d'un système de générateurs de :

$$\oplus_{i \leq m'} A/R_{m'+1\ d'+1} + p_i \ .$$

D'autre part :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{i\ d'} \\ a_{m'\ 1} & \dots & a_{m'\ d'} \end{pmatrix}$$

est, par hypothèse, matrice d'un système de générateurs de : $\oplus_{i \leq m'} A/R_{m'\ d'} + p_i$ or,

$$\sqrt{R_{m'\ d'} + p_i} \subset \sqrt{R_{m'+1\ d'+1} + p_{m'+1} + p_i} \qquad \text{(Lemme 2.2)}$$

et donc :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{i\ d'} \\ a_{m'\ 1} & \dots & a_{m'\ d'} \end{pmatrix}$$

est aussi matrice d'un système de générateurs de

$$\oplus_{i \leq m'} A/R_{m'+1\ d'+1} + p_{m'+1} + p_i \ . \qquad \text{(Corollaire 1.9)}$$

Il en résulte que l'on peut trouver $a_{m'+1\ d'+1}$ (éventuellement arbitraire si $R_{m'+1\ d'+1} = A$) tel que :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{i\ d'+1} \\ a_{m'+1\ 1} & \dots & a_{m'+1\ d'+1} \end{pmatrix}$$

soit matrice d'un système de générateurs de :

$$\oplus_{i \leq m'+1} A/R_{m'+1\ d'+1} + p_i \ .$$

Reste à démontrer l'assertion qui concerne les déterminants. C'est clair pour $d' = 1$.

Soit $H \subset [1, m'+1]$, $|H| \leq d$. On peut supposer que $m'+1 \in H$ (sinon, c'est vrai par hypothèse).

Soit

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{i\ |H|} \\ a_{m'+1\ 1} & \dots & a_{m'+1\ |H|} \end{pmatrix}$$

la matrice concernée ($i \leq m'$) .

L'élément $a_{m'+1\ |H|}$ a été construit à l'aide du lemme 2.1 appliqué aux idéaux :

$$R_{m'+1\ |H|} + p_i \quad i \leq m'$$
$$R_{m'+1\ |H|} + p_{m'+1} \ .$$

Il vient donc :

$$\det(M^{+}_{H,[1,|H|]}) \equiv \det(M'_{H-\{m'+1\},[1,|H|-1]}) \ (\mathrm{mod}\ R_{m'+1\ |H|} + \sum_{h \in H} p_h) \ .$$

Par hypothèse,

$$\det(M'_{H-\{m'+1\},[1,|H|-1]}) \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ R_{m''\ |H|-1} + \sum_{h \in H - \{m'+1\}} p_h)$$

où m'' désigne le plus grand élément de $H - \{m'+1\}$.

Or

$$\begin{aligned} & R_{m''\ |H|-1} + \sum_{h \in H-\{m'+1\}} p_h \\ & \subset R_{m'\ |H|-1} + \sum_{h \in H-\{m'+1\}} p_h \qquad \text{(Lemme 2.2)} \\ & \subset R_{m'+1\ |H|} + p_{m'+1} + \sum_{h \in H-\{m'+1\}} p_h \end{aligned}$$

$$(H - \{m'+1\} \subset [1, m'], |H - \{m'+1\}| = |H| - 1, \quad \text{Lemme 2.2})$$

ce qui permet de conclure, si les p_i sont $(d+1)$-étrangers. Si $m < d$, comme $|H| \leq m'+1$:

$$m - m' - 1 < d - m' - 1 \leq d - |H|$$

ce qui montre que $R_{m'+1\ |H|} = A$ et l'assertion est triviale (si $m'+1 = m$, $|H| < d$!).

Si $m = d$ et $|H| < m'+1$, $R_{m'+1\ |H|} = A$.

$$\text{Si}\qquad |H| = m'+1,\ R_{m'+1\ |H|} = \sum_{i \geq m'+2} p_i$$

$$R_{m'+1}\ |H| + \sum_{h\in H} p_h = \sum_{i\in I} p_i$$

$$R_{m'\ |H|-1} = \sum_{i\geq m'+1} p_i$$

et $R_{m'\ |H|-1} + \sum_{h\in H-\{m'+1\}} p_h = \sum_{i\in I} p_i$ ce qui achève de démontrer le lemme.

2.4 - Définition. *Soient p_i, $i \in I = [1,m]$, des idéaux de A, soit en nombre insuffisant, soit $(d+1)$-étrangers, x_j, $j \in J = [1,d]$, des éléments de $X = \oplus_{i\in I} A/p_i$.*

On dira que les x_j forment un système agréable d'éléments de X s'il existe une matrice M représentant les x_j dans la famille génératrice canonique e_i de X qui satisfait aux conditions suivantes :

1) Pour tous m', d' tels que $1 \leq m' \leq m$, $1 \leq d' \leq d$, la matrice $M_{[1,m'],[1,d']}$ est matrice d'un système de générateurs de $\oplus_{i\leq m'} A/R_{m'\ d'} + p_i$.

2) Pour tout m' tel que $1 \leq m' \leq m$ et tout $H \subset [1,m']$ tel que $|H| \leq d$

$$\det(M_{H,[1,|H|]}) \equiv 1 \bmod (R_{m_H\ |H|} + \sum_{h\in H} p_h)$$

où m_H désigne le plus grand élément de H.

Remarques :

1) Il est clair que, si M satisfait aux conditions de la définition, toute autre matrice représentant les x_j y satisfait aussi.

2) Si M satisfait aux conditions de la définition, (x_j) est un système de générateurs de X. En effet, $R_{m,d} = \{0\}$.

2.5 - Théorème. *Soient p_i, $i \in I = [1,m]$ des idéaux de A, X le module $\oplus_{i\in I} A/p_i$, d un entier tel que $1 \leq d < m$.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) les p_i sont $(d+1)$-étrangers ;

(ii) il existe un système agréable de d éléments de X ;

(iii) X possède un système de d générateurs.

■ $(ii) \Rightarrow (iii)$. C'est la remarque 2.4.

$(iii) \Rightarrow (i)$. En effet $\Lambda^{d+1}X$ est alors nul. Or $\Lambda^{d+1}X$ est isomorphe à

$$\oplus_{\substack{H\subset I\\ |H|=d+1}} A/\sum_{h\in H} p_h \,.$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. On construit la matrice M par récurrence sur l'entier m', $1 \leq m' \leq m$. Pour $m' = 1$, il suffit de prendre la ligne $(1, 0, \ldots, 0)$ qui satisfait trivialement aux conditions du lemme 2.3. Ce même lemme permet de poursuivre la récurrence jusqu'à son terme. ■

Remarque : On aurait pu, en vertu du corollaire 1.9, remplacer les idéaux $R_{m'\ d'}$ par les idéaux

$$S_{m'\ d'} = \prod_{\substack{S\ S\subset[m'+1,m]\\ |S|=d-d'}} (\sum_{s\in S} p_s)$$

et rendre ainsi évidents les lemmes 2.2.3 ($S_{m'\ d'} \subset S_{m'+1\ d'+1} + p_{m'+1}$) et 2.2.4. Mais leur intérêt est purement technique, alors que pour le lemme 2.2.2, on a seulement $\sqrt{S_{m'\ d'+1}} \subset \sqrt{S_{m'\ d'}}$. Ce lemme n'est pas utilisé dans la démonstration, mais le résultat $R_{m'\ d'+1} \subset R_{m'\ d'}$ n'est-il pas plus agréable ?

3 - Modules pan-caténaires.

3.1 - Soit M un A-module de type fini. On notera $g(M)$ le minimum des cardinaux des systèmes de générateurs de M. La formule $g(M) \leq d$ signifiera donc que M possède un système de d générateurs.

Nous nous excusons auprès du lecteur pour le sorite qui suit.

Exemples de modules de type borné :

1) Soient N_k, $k \in \mathbf{N}$, une chaîne croissante de sous-modules de M et $N = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} N_k$. Si, pour tout k, $g(N_k) \leq d$, N est de type borné d.

2) Plus généralement, toute limite inductive filtrante de modules de type borné d est de type borné d. Il s'en suit que, si M est un A-module, tout sous-module de type borné d de M est contenu dans un sous-module de type borné d maximal contenu dans M : cela résulte en effet du lemme de Zorn.

3) Soient M un A module de type fini tel que $g(M) \leq d$ et S une partie multiplicative de A. Alors le A-module $S^{-1}M$ est de type borné d. En effet, si l'on note $\varphi : M \to S^{-1}M$ l'application canonique, soit F un sous-A-module de type fini de $S^{-1}M$, il existe $s \in S$ tel que $F \subset \frac{1}{s}\varphi(M)$.

Soient $x_1, \ldots, x_m$ des éléments d'un module M sur un anneau A. Nous noterons encore dans ce qui suit $e(x_1, \ldots, x_m)$ le sous-module engendré par $x_1, \ldots, x_m$.

3.1.1 - Proposition. *Soient $M_1, \ldots, M_n$, N des modules sur un anneau A et soit φ, $\varphi : \prod_{i=1}^n M_i \to N$, une application multilinéaire. Si les M_i sont de type borné d_i, le module N' engendré par l'image de φ est de type borné $\prod_{i=1}^n d_i$.*

■ Soit F de type fini contenu dans N', il existe $y_1, \ldots, y_m$ éléments de $\prod_{i=1}^n M_i$ tels que $F \subset e(\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_m)) \subset N'$. Ecrivons : $y_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn})$, $1 \leq j \leq m$; $e(x_{ji} | 1 \leq j \leq m) \subset T_i$ avec $g(T_i) \leq d_i$ et donc $e(y_j) \subset \prod_{i=1}^n T_i$ avec $g(\prod_{i=1}^n T_i) \leq \prod_{i=1}^n d_i$.

Soit T' le sous-module de N engendré par l'image par φ de $\prod_{i=1}^n T_i$, il vient :

$$g(T') \leq \prod_{i=1}^n d_i$$

et $F \subset e(\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_m)) \subset T' \subset N'$. ■

3.1.2 - Corollaire.

1) Tout module quotient d'un module de type borné d est de type borné d.

2) Soient $M_1, \ldots, M_n$ des A-modules, alors, si les M_i sont de type borné d_i, $\otimes_{i=1}^n M_i$ est de type borné $\prod_i d_i$.

3) Si M est de type borné d, pour $i \leq d$, $\Lambda^i M$ est de type borné $\binom{d}{i}$ et $\Lambda^i M = \{0\}$, pour $i > d$.

En effet, 1 et 2 résultent directement de la proposition (1.3). Pour 3), soient $i \leq d$ et $F \subset \Lambda^i M$ de type fini. Il existe $T \subset M$, $g(T) \leq d$ tel que F soit contenu dans l'image canonique de $\Lambda^i T$ dans $\Lambda^i M$.

Or $g(\Lambda^i T) \leq \binom{d}{i}$. Si $i > d$, $\Lambda^i T = \{0\}$.

3.1.3 - Lemme. *Soit*

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} P \to 0$$

une suite exacte de A-modules. Si N (resp. P) est de type borné d (resp. d'), M est de type borné $d + d'$.

■ Soit $T \subset M$, T de type fini. Il existe alors $F \subset M$ tel que $g(F) \leq d'$ et $\varphi(T) \subset \varphi(F)$ d'où $T \subset F + i(N)$. Il en résulte qu'il existe $F' \subset i(N)$, $g(F') \leq d$ tel que $T \subset F + F'$. ■

3.1.4 - Lemme. *Soit*

$$0 \to N \to M \to P \to 0$$

une suite exacte de A-modules telle que M soit de type borné et P de présentation finie. Alors N est de type borné.

■ En effet il existe des entiers m et n tels que : $A^m \to A^n \to P \to 0$ soit exacte. On peut alors trouver des morphismes φ et ψ tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A^m & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

soit commutatif. Par le lemme du serpent, $\operatorname{coker}\varphi \simeq \operatorname{coker}\psi$. Or, $\operatorname{coker}\psi$ est de type borné (3.1). On obtient la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Im}\varphi \to N \to \mathrm{coker}\varphi \to 0$$

et N est de type borné par 3.1.3. ■

3.1.5 - Théorème. *Soient p_i, $i \in I$ des idéaux de A et X le module $\oplus_{i\in I} A/p_i$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est de type borné d ;

(ii) les idéaux p_i sont, soit en nombre insuffisant, soit $(d+1)$-étrangers.

■ $(i) \Rightarrow (ii)$. $\Lambda^{d+1}X = \{0\}$ par 3.1.2. Or $\Lambda^{d+1}X$ s'identifie à :

$$\bigoplus_{\substack{H, H\subset I\\ |H|=d+1}} A/\sum_{h\in H} p_h$$

et $\sum_{h\in H} p_h = A$, pour $H \subset I$, $|H| = d+1$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Soit F de type fini, $F \subset X$. Il existe une partie finie J de I telle que $F \subset \oplus_{j\in J} A/p_j$ et l'on conclut à l'aide du théorème 2.5 (on peut supposer $|J| > d$). ■

3.2.1 - Proposition. *Soit M un A-module.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) M est d-caténaire.

(ii) Toute chaîne croissante de sous-modules N_k, $k \in \mathbf{N}$, tels que $g(N_k) \leq d$ est stationnaire.

(iii) Tout ensemble ξ de sous-modules de M tel que $g(N) \leq d$ pour tout $N \in \xi$ possède un élément maximal.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $N = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} N_k$. Alors N est de type borné d (Exemple 3.1) et donc de type fini. Il existe donc un entier k tel que $N \subset N_k$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sinon, on peut construire une chaîne strictement croissante de modules de ξ.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Soit N un sous-module de type borné de M et ξ l'ensemble des sous-modules N' de N tels que $g(N') \leq d$.

Soit alors N'' un élément maximal de ξ. Soit $x \in N$. Il vient :

$$N'' \subset Ax + N'' \subset T \subset N \quad g(T) \leq d \quad \text{et} \quad x \in N'' .$$

3.2.2 - Proposition. *Soit*

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} P \to 0$$

une suite exacte de A-modules. On suppose N pan-caténaire et P pseudo-cohérent pan-caténaire. Alors M est pan-caténaire.

■ Soit T un sous-module de type borné de M. On écrit la suite exacte :

$$0 \to i(N) \cap T \to T \to \varphi(T) \to 0 .$$

Il résulte des hypothèses sur P que $\varphi(T)$ est de présentation finie. $i(N) \cap T$ est alors de type borné par 3.1.4 et donc de type fini, car sous-module de $i(N)$. T est donc de type fini. ■

3.2.3 - Corollaire. *Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille finie de modules M_i pseudo-cohérents et pan-caténaires sur un anneau A. $\oplus_{i \in I} M_i$ est alors pan-caténaire.*

■ Par récurrence sur $|I|$ et application de 3.2.2. ■

3.3 - Notation : On notera dorénavant $\mathrm{Et}(d)$ la propriété suivante qui concerne les familles $\{p_i | i \in I,\ p_i \text{ idéal de } A\}$:

"Toute sous-famille $\{p_j | j \in J\ , J \subset I\}$ $(d+1)$-étrangère est finie".

On notera Et la propriété suivante : "La famille $\{p_i | i \in I\ , p_i \text{ idéal de } A\}$ possède, pour tout d, la propriété $\mathrm{Et}(d)$".

On peut compléter agréablement ces notations par $\mathrm{Et}(0)$: "presque tous les p_i sont distincts de A".

On remarquera que $\mathrm{Et}(d)$ implique $\mathrm{Et}(d')$ pour $d' \leq d$.

3.3.1 - Théorème. *Soient M un A-module d-caténaire ; x_i, $i \in I$, une famille d'éléments non nuls de M. Alors la famille* $\{\mathrm{Ann} x_i | i \in I\}$ *satisfait* $\mathrm{Et}(d)$.

■ Supposons que la famille $\{\mathrm{Ann} x_i | i \in I\}$ ne satisfait pas $\mathrm{Et}(d)$. Soit alors d' le plus petit entier tel que $\mathrm{Et}(d')$ ne soit pas satisfaite. d' est non nul, car $\mathrm{Ann} x_i \neq A$, pour tout $i \in I$.

Soit $J \subset I$ une partie infinie de I telle que $\{\mathrm{Ann}x_j | j \in J\}$ soit $(d'+1)$-étrangère. Considérons l'application ψ :

$$\psi : \oplus_{j \in J} A/\mathrm{Ann}x_j \to M$$

qui, au générateur canonique e_j, associe x_j.

Le module $X = \oplus_{j\in J} A/\mathrm{Ann}x_j$ est de type borné d' (Théorème 3.1.5), donc $\psi(X)$ est de type borné d' (Corollaire 3.1.2). Or, M est aussi d'-caténaire. $\psi(X)$ est donc de type fini et il existe une partie finie H de J, telle que $\psi(X) = e(x_h | h \in H)$.

Soit alors $K = J - H$, K est infinie.

Soient $k_1, \ldots, k_{d'}$ des éléments de K distincts, $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{d'}} \in e(x_h | h \in H)$,

et donc :
$$\mathrm{Ann}x_{k_l} \supset \bigcap_{h \in H} \mathrm{Ann}x_h \quad 1 \leq l \leq d' .$$

Soit m un idéal maximal de A contenant les $\mathrm{Ann}x_{k_l}$, $1 \leq l \leq d'$, il contient alors $\cap_{h\in H}\mathrm{Ann}x_h$ et il existe $h \in H$ tel que $\mathrm{Ann}x_h \subset m$, d'où m contient $d'+1$ annulateurs ce qui est impossible. La famille $\{\mathrm{Ann}x_k | k \in K\}$ est donc d'-étrangère, ce qui implique, contrairement à l'hypothèse sur d', que la famille $\{\mathrm{Ann}x_i | i \in I\}$ ne satisfait pas $\mathrm{Et}(d'-1)$. Quod erat demonstrandum. ∎

3.3.2 - Corollaire.

1) Soit A un anneau noethérien. M un A-module d-caténaire. Alors $\mathrm{Ass}_A M$ satisfait $\mathrm{Et}(d)$.

2) Soient A un anneau noethérien, M un A-module pan-caténaire, N un sous-module de type fini de M. Alors $\mathrm{Ass}_A M/N$ satisfait Et.

∎ En effet, M/N est alors pan-caténaire. ∎

3.4 - Lemme. *Soient d un entier strictement positif, M_i, $i \in I$, une famille de A-modules telle que, pour toute partie J finie de I, $\oplus_{j\in J} M_j$ soit d-caténaire ; N le module réunion d'une chaîne strictement croissante de modules N_k, $k \in \mathbf{N}$, tels que :*

$$g(N_k) \leq d, \quad N_k \subset \oplus_{i \in I} M_i .$$

Alors il existe une injection $\varphi : \mathbf{N} \to I$, telle que, si l'on note M_n le module $M_{\varphi(n)}$ et p la projection canonique :

$$p : \oplus_{i\in I} M_i \to \oplus_{n \in N} M_n$$

$$p(N) = \oplus_{n\in\mathbf{N}} F_n,\ F_n \subset M_n,\ F_n \neq \{0\}\ ,$$

$$g(\oplus_{m\leq n} F_m) \leq d\ .$$

En particulier, $p(N)$ n'est pas de type fini.

■ On notera, si $M \subset \oplus_{i\in I} M_i$

$$I(M) = \Big\{ i | i \in I,\ pr_i(M) \neq \{0\} \Big\}$$

où pr_i désigne $pr_i : \oplus_{i'\in I} M_{i'} \to M_i$, la projection canonique. On notera de même :

$$p_n : \oplus_{n'\in\mathbf{N}} M_{n'} \to M_n$$

les projections canoniques, de sorte que :

$$p_n \circ p = pr_{\varphi(n)}\ .$$

On remarquera que si M est de type fini, $I(M)$ est fini ; que $I(N_k) \subset I(N_{k+1})$; que $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} I(N_k) = I(N)$ et que $I(N)$ est infini. (Sinon $N \subset \oplus_{i\in I(N)} M_i$, module qui est d-caténaire par hypothèse. Il en résulterait que $g(N) \leq d$ et la chaîne N_k, $k \in \mathbf{N}$, ne saurait être strictement croissante).

On construit d'abord, par récurrence, des éléments $\varphi(n)$ appartenant à $I(N)$ et des modules T_n, tels que :

$T_n \subset T_{n+1}$ et l'inclusion est stricte,

$N_n \subset T_n \subset N,\ g(T_n) \leq d,$

$pr_{\varphi(n)}(T_n) = pr_{\varphi(n)}(N) \neq \{0\},$

$pr_{\varphi(n+1)}(T_n) = \{0\}$ et les $\varphi(n)$ tous distincts.

Soit $\varphi(0)$ un élément quelconque de $I(N)$. Comme N est de type borné d, $pr_{\varphi(0)}(N) \subset M_0$ est de type borné d, donc $g(pr_{\varphi(0)}(N)) \leq d$ et il existe dans N un module de type fini T tel que $pr_{\varphi(0)}(N) = pr_{\varphi(0)}(T)$.

Soit alors T_0 un sous-module de N tel que : $g(T_0) \leq d$, $N_0 \subset T_0$, $T \subset T_0$. Il vient :

$$pr_{\varphi(0)}(T_0) = pr_{\varphi(0)}(N) \neq \{0\}\ .$$

Supposons que l'on ait construit $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ éléments distincts de $I(N)$ et des modules $T_0 \subsetneq \ldots \subsetneq T_n \subset N$ tels que :

$g(T_m) \leq d \quad (m \leq n)$

$N_m \subset T_m$, $pr_{\varphi(m)}(T_m) = pr_{\varphi(m)}(N) \neq \{0\}$, $\quad m \leq n$

et $pr_{\varphi(m+1)}(T_m) = \{0\}$, $\quad (m < n)$.

Soient $\varphi(n+1) \in I(N) - I(T_n)$ (qui est non vide), T' un sous-module de type fini de N tel que :

$$pr_{\varphi(n+1)}(T') = pr_{\varphi(n+1)}(N)$$

($pr_{\varphi(n+1)}(N)$ est de type borné d, $M_{\varphi(n+1)}$ est d-caténaire) et $T_{n+1} \subset N$ qui contient T', T_n, N_{n+1} et tel que $g(T_{n+1}) \leq d$ (ce qui se peut faire, car N est de type borné d). Il vient :

Si $m < n+1$, $\varphi(m) \in I(T_m)$, ($pr_{\varphi(m)}(T_m) = pr_{\varphi(m)}(N)$ qui est non nul) ; donc $\varphi(m) \in I(T_n)$, car $T_m \subset T_n$; il en résulte que $\varphi(m) \neq \varphi(n+1)$.

D'autre part, $pr_{\varphi(n+1)}(T_n) = \{0\}$ $\quad (\varphi(n+1) \notin I(T_n))$; $T_n = T_{n+1}$ impliquerait $pr_{\varphi(n+1)}(T_{n+1}) = \{0\}$; or, $pr_{\varphi(n+1)}(T_{n+1}) = pr_{\varphi(n+1)}(N) \neq \{0\}$, car $\varphi(n+1) \in I(N)$ et T_{n+1} contient T'. On peut donc continuer la construction.

Notons alors :

$$q_n : \oplus_{n' \in \mathbf{N}} M_{n'} \to \oplus_{m \leq n} M_m$$

la projection canonique et définissons F_n par :

$$F_n = p(T_n) \cap \ker q_{n-1}$$
$$F_0 = p(T_0)$$

et montrons que les conclusions du lemme sont vérifiées.

Remarquons d'abord que $p(T_n) \subset \oplus_{m \leq n} M_m$. En effet, pour $m > n$,

$$p_m p(T_n) = pr_{\varphi(m)}(T_n) \subset pr_{\varphi(m)}(T_{m-1}) = \{0\} .$$

D'autre part, $\ker q_{n-1} = \oplus_{m' > n-1} M_{m'}$ et donc $F_n \subset M_n$, ce qui implique que la somme des F_n est directe.

Supposons maintenant que pour tout entier n', $n' < n$, $p(T_{n'}) = \oplus_{m' \leq n'} F_{m'}$ et vérifions cette propriété à l'ordre n.

Soit $x \in p(T_n)$. Comme $p(T_n) \subset \oplus_{m \leq n} M_m$, on peut écrire $x = \sum_{m=0}^{n} x_m$. Pour $m < n$, $x_m = p_m(x) \in p_m p(T_n) = pr_{\varphi(m)}(T_n) \subset pr_{\varphi(m)}(N)$; or $pr_{\varphi(m)}(N) = pr_{\varphi(m)}(T_m) = p_m p(T_m)$ et $p_m p(T_m) = F_m$: c'est l'hypothèse de récurrence. Mais alors, $x - \sum_{m=0}^{n-1} x_m \in p(T_n)$, car $x_m \in F_m \subset p(T_m)$ et, pour $l < n$, $p_l(x - \sum_{m=0}^{n-1} x_m) = p_l(x - x_l) = 0$ et $x - \sum_{m=0}^{n-1} x_m \in \ker q_{n-1}$. Il en résulte que $x_n \in F_n$ et que $p(T_n) \subset \oplus_{m \leq n} F_m \subset p(T_n)$. $p(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} T_n) = \oplus_{n \in N} F_n$.

Il vient donc :

$p(N) = \oplus_{n \in \mathbf{N}} F_n$, car $N = \cup T_n \quad (N_k \subset T_k \subset N)$

$g(\oplus_{m \leq n} F_m) = g(p(T_n)) \leq g(T_n) \leq d$.

Montrons encore que $F_n \neq \{0\}$ ce qui achèvera de démontrer le lemme.

Si $F_n = \{0\}$, $p(T_{n-1}) = p(T_n)$ et

$$\begin{aligned}\{0\} \neq pr_{\varphi(n)}(N) = pr_{\varphi(n)}(T_n) = p_n p(T_n) = p_n p(T_{n-1}) \\ = pr_{\varphi(n)}(T_{n-1}) = \{0\}!\end{aligned}$$

3.4.1 - Théorème. *Soit M_i, $i \in I$, une famille de A-modules.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\oplus_{i \in I} M_i$ est d-caténaire ;

(ii) a) pour toute partie finie J de I, $\oplus_{j \in J} M_j$ est d-caténaire ;

b) pour toute famille $\{x_i | x_i \in M_i,\ x_i \neq 0\}$, la famille $\{\mathrm{Ann} x_i | i \in I\}$ *satisfait* $\mathrm{Et}(d)$.

■ $(i) \Rightarrow (ii)$. L'assertion a) est triviale.

Soit alors $\{\mathrm{Ann} x_k | k \in K,\ K \subset I,\ x_k \in M_k,\ x_k \neq 0\}$ une famille $(d+1)$-étrangère d'idéaux de A. L'application canonique :

$$\oplus_{k \in K} A/\mathrm{Ann} x_k \to \oplus_{k \in K} M_k$$

qui associe un générateur canonique e_k l'élément x_k de M_k, est injective. Or $\oplus_{k \in K} M_k$ est d-caténaire, $\oplus_{k \in K} A/\mathrm{Ann} x_k$ est de type borné d (Théorème 3.1.5) donc de type fini, d'où $|K|$ est fini.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sinon, en vertu de 3.2.1, il existe dans $\oplus_{i \in I} M_i$, un module N réunion d'une chaîne strictement croissante de sous-modules N_k, $k \in \mathbf{N}$, tels que $g(N_k) \leq d$; reprenons les notations du lemme 3.4 (non (i) et $a \Rightarrow$ non b) : considérons le module $p(N) = \oplus_{n \in \mathbf{N}} F_n$. Il est de type borné d et n'est pas de type fini.

Soit m un idéal maximal de A. Le module $p(N)) \otimes_A A/m$ est de type borné d sur le corps $k = A/m$. C'est donc un espace vectoriel sur k de dimension inférieure à d. Or $p(N) \otimes_A A/m \simeq \oplus_{n\in\mathbf{N}}(F_n \otimes_A A/m)$. Il existe donc une partie $K(m)$ de $\mathbf{N}$, $|K(m)| \leq d$ telle que pour $l \in \mathbf{N} - K(m)$, $F_l \otimes_A A/m = \{0\}$, d'où $F_l = mF_l$, et il existe $a_l \in m$ tel que $(1 - a_l)F_l = \{0\}$ $(g(F_l) \leq d$ et Nakayama). Il en résulte, que pour $l \in \mathbf{N} - K(m)$ $A = m + \mathrm{Ann}F_l$.

Considérons alors la famille $\{\mathrm{Ann}F_n | n \in \mathbf{N}\}$. Pour tout choix de m idéal maximal de A, il n'existe donc au plus que d idéaux de la famille contenus dans m. La famille $\{\mathrm{Ann}F_n | n \in \mathbf{N}\}$ est donc $(d + 1)$-étrangère.

Soit alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, x_n un élément non nul de $F_n \subset M_n = M_{\varphi(n)}$. Il vient : $\mathrm{Ann}x_n \supset AnnF_n$ et la famille $\{\mathrm{Ann}\, x_n | n \in \mathbf{N},\ x_n \in M_{\varphi(n)}\}$ est une famille $(d + 1)$-étrangère infinie d'annulateurs d'éléments de $M_{\varphi(n)}$ et la famille $\{\mathrm{Ann}x_i | i \in I\}$ définie par $x_i = x_n$ si $i = \varphi(n)$, x_i quelconque si $i \notin \varphi(\mathbf{N})$ ne satisfait pas $\mathrm{Et}(d)$. ■

3.4.2 - Corollaire. *Soit A un anneau semi-local (i.e. qui ne possède qu'un nombre fini d'idéaux maximaux). Soit M_i une famille de A-modules d-caténaires.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\oplus_{i\in I} M_i$ est d-caténaire ;

(ii) pour toute partie J finie de I, $\oplus_{j\in J} M_j$ est d-caténaire.

En effet, il n'existe pas dans ce cas de famille $(d+1)$-étrangère infinie d'idéaux de A.

3.4.3 - Corollaire. *Soit M_i $i \in I$ une famille de A-module telle que les M_i soient d-caténaires et sans torsion (i.e. les annulateurs des éléments non nuls des M_i sont nuls).*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\oplus_{i\in I} M_i$ est d-caténaire ;

(ii) pour toute partie J finie de I, $\oplus_{j\in J} M_j$ est d-caténaire.

3.4.4 - Corollaire. *Soit M un module sur un anneau A.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M^n est d-caténaire pour tout $n \in \mathbf{N}$;

(ii) $M^{(I)}$ *est d-caténaire pour tout* I *.*

C'est la conjonction des théorèmes 3.3.1 et 3.4.1.

3.4.5 - Théorème. *Soit* M *un module pseudo-cohérent sur un anneau* A*. Alors* $M^{(I)}$ *est d-caténaire pour tout* I*, si* M *l'est.*

Ceci résulte de 3.2.3 et 3.4.4.

3.4.6 - Proposition. *Soit* A *un anneau pan-caténaire (i.e. pan-canténaire en tant que module sur lui-même).*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout A*-module de présentation finie est pan-caténaire.*

(ii) pour tout A*-module* M *de présentation finie et tout* $x \in M$*,* $A/\mathrm{Ann}x$ *est pan-caténaire.*

(iii) $A^{(I)}$ *est pan-caténaire pour tout* I*.*

■ L'équivalence des conditions (i) et (iii) résulte de 3.4.4 et du fait que tout quotient d'un pan-caténaire par un type fini est pan-caténaire.

$(i) \Rightarrow (ii)$ est trivial.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Il suffit de montrer par récurrence sur l'entier n que A^n est pan-caténaire. Supposons A^{n-1} pan-caténaire et considérons la suite exacte canonique :

$$0 \to A \to A^n \xrightarrow{p} A^{n-1} \to 0$$

où $p(e_n) = 0$. Soit T un sous-module de type borné de A^n. Il existe $F \subset T$, F de type fini tel que $p(T) = p(F)$. Il vient : $F \subset T \subset F + Ae_n$, d'où une injection :

$$0 \to T/F \to Ae_n/F \cap Ae_n \ .$$

Or le A-module monogène $Ae_n/F \cap Ae_n$ est isomorphe à $Ae_n + F/F$, qui est contenu dans A^n/F et celui-ci est de présentation finie. Par (ii), T/F est de type fini et donc T est de type fini. ■

3.5 - Application aux modules de dimension nulle. On notera, pour tout module M sur un anneau A, $\mathrm{Ass}_A M$ l'ensemble des idéaux premiers de A qui sont minimaux au-dessus des annulateurs des éléments non nuls de M. On rappelle un résultat de D. Lazard :

Soient A un anneau, m un idéal maximal de A et I l'idéal engendré par les idempotents de m. Alors A/I est dépourvu d'idempotents non triviaux.

3.5.1 - Lemme. *Soient A un anneau 1-caténaire de dimension nulle et m un idéal premier (nécessairement maximal) de A. Il existe alors un idempotent e de A tel que $m = \sqrt{Ae}$.*

∎ Soit I l'idéal engendré par les idempotents de m. Tout idéal $J \subset I$ de type fini est alors engendré par un idempotent, de sorte que I est de type borné 1. En vertu des hypothèses, I est monogène et $I = Ae$ où e est idempotent. A/Ae est de dimension nulle, sans idempotents non triviaux et donc local d'idéal maximal m/Ae. Le lemme en résulte. ∎

3.5.2 - Proposition. *Soit M un module 1-caténaire et de dimension nulle (i.e $\dim A/Ann_A M = 0$) sur un anneau A. Alors :*

1) Si $p \in \mathrm{Ass}_A M$, il existe $m \in M$ tel que $p = \sqrt{\mathrm{Ann}_A m}$.

2) $\mathrm{Ass}_A M$ est fini.

∎ En effet, soit $p \in \mathrm{Ass}_A M$. Il existe alors $m \in M$ tel que p soit idéal premier minimal de $\mathrm{Ann}_A m$. Mais $\overline{A} = A/\mathrm{Ann}_A m$ s'injecte dans M et donc est 1-caténaire et de dimension nulle ($\mathrm{Ann}_A m \supset \mathrm{Ann}_A M$ et $\dim A/\mathrm{Ann}_A \overline{A} = \dim A/\mathrm{Ann}_A m = 0$). Il existe donc dans $\overline{A}$ considéré comme anneau un idempotent $\overline{e}$ tel que $\overline{p} = \sqrt{\overline{A}\,\overline{e}}$, où $\overline{p}$ (resp. $\overline{e}$) désigne l'image canonique de p (resp. de $e \in A$) dans $\overline{A}$. D'où $p = \sqrt{Ae + \mathrm{Ann}_A m}$. Considérons alors $\mathrm{Ann}_A(1-e)m$. Il vient

$$e(1-e)m = \overline{e}(1-\overline{e})m = 0$$

et
$$Ae + \mathrm{Ann}_A m \subset \mathrm{Ann}_A(1-e)m \;.$$

D'autre part, de $a(1-e)m = 0$ résulte $a(1-e) \in \mathrm{Ann}_A m$ et $a \in Ae + \mathrm{Ann}_A m$ d'où $p = \sqrt{\mathrm{Ann}_A(1-e)m}$.

Montrons encore que $\mathrm{Ass}_A M$ est fini : comme M est 1-caténaire, la famille $\{\mathrm{Ann}\, x, x \in M, x \neq 0\}$ satisfait Et(1) par 3.3.1. Y satisfait aussi la famille $\{\sqrt{\mathrm{Ann}\, x}, x \in M, x \neq 0\}$ (Lemme 1.9) et donc, de même, $\mathrm{Ass}_A(M)$. Mais les idéaux de $\mathrm{Ass}_A(M)$ sont maximaux. Il en résulte que $\mathrm{Ass}_A(M)$ est fini. ∎

3.5.3 - Proposition. *Soit M un module de dimension nulle sur un anneau A. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) M est d-caténaire ;

(i) a) $\mathrm{Ass}_A M$ est fini ;

b) pour tout $p \in \mathrm{Ass}_A M$, le A_p-module M_p est d-caténaire.

■ $(i) \Rightarrow (ii)$. Il suffit de vérifier b).

Soient $p_0 \in \mathrm{Ass}_A M$, $\{p_1, \ldots, p_n\} = \mathrm{Ass}_A M - p_0$, $S = A - \bigcup_{i \neq 0} p_i$ et N_0 le noyau de l'application canonique $M \to S^{-1}M$. Il vient :

$$\mathrm{Ass}_A\ N_0 = \{p_0\} \quad \mathrm{Ass}_A M/N_0 = \{p_1, \ldots, p_n\} .$$

Tout idéal premier de $\mathrm{Supp}(M/N_0)$ contient un élément de $\mathrm{Ass}_A M/N_0$ et donc lui est égal (dimension nulle !). D'où $(M/N_0)_{p_0} = 0$ et $(N_0)_{p_0} = M_{p_0}$.

Montrons encore que tout sous-module de N_0 est un A_{p_0}-module, ce qui montrera que N_0 est un A-module d-caténaire si et seulement si c'est un A_{p_0}-module d-caténaire. Pour ce faire, soit Q un sous-A-module de N_0. Il suffit de montrer que, pour tout $s \in A - p_0$, l'homothétie $s : Q \to Q$ est bijective. Elle est clairement injective car $s \notin Z(Q) = p_0$. De plus, comme p_0 est maximal, il vient :

$$A = As + p_0 .$$

Soit $q \in Q$. Comme $\mathrm{Ass}_A Q = \{p_0\}$, $p_0 = \sqrt{Ann_A(q)}$, d'où $A = As + Ann_A(q)$ et il existe $a \in A$ tel que $q = (as)q = s(aq)$. On identifiera N_0 au localisé en p_0 de M, de sorte que la suite $N_0 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N_0$, où ψ est l'application canonique de M vers son localisé, vérifie $\psi \circ \varphi = 1$ et $M = N_0 \oplus \ker \varphi$ où $\mathrm{Ass}_A(\ker \varphi) = \{p_1 \ldots p_m\}$. Il vient par récurrence sur $|\mathrm{Ass}_A M|$: $M = \oplus_i N_i$, $\mathrm{Ass}_A N_i = \{p_i\}$. Il en résulte que si M est d-caténaire, les N_i le sont en tant que A-modules et en tant que A_{p_i}-modules. Les M_{p_i} sont donc des A_{p_i}-modules d-caténaires.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Soient T un sous-module de M de type borné d et $p \in \mathrm{Spec}\ A$.

Si $p \in \mathrm{Ass}_A M$, T_p est un A_p-module de type fini ;

Si $p \notin \mathrm{Ass}_A M$, il ne peut contenir d'élément de $\mathrm{Ass}_A M$ et donc $T_p = \{0\}$.

Comme $\mathrm{Ass}_A M$ est fini, il existe donc dans T un module F de type fini tel que, pour tout $p \in \mathrm{Spec}\, A$, $F_p \simeq T_p$ et donc $(T/F)_p = \{0\}$ d'où $T = F$. ■

3.6 - Note pour rendre à César...

La proposition 3.2.2 est connue de Nicolas dans le cas A intègre et $M = N \oplus P$ ([6], Théorème 1.5). Il en va de même pour 3.2.3 et 3.4.3 dans le cas d'un anneau cohérent intègre ([6], Théorème 1.6). Renault ([7], Théorème 3.2) démontre 3.4.5 dans le cas où A est noethérien et $M = A$. Enfin, Heinzer et Lantz dans [4] montrent 3.5.3 dans le cas $M = A$.

4 - Idéaux premiers associés des modules pan-caténaires sur un anneau noethérien.

4.1 - Le lemme qui suit est classique.

Lemme. *Soit M un module sur un anneau noethérien A. Existent alors :*

1) $N \subset M$ tel que M soit extension essentielle de N.

2) Une famille $(p_i)_{i \in I}$ d'idéaux premiers de A telle que $N = \oplus_{i \in I} A/p_i$.

■ En effet, soit E l'enveloppe injective de M. Il vient : $E = \oplus_{i \in I} E_i$, où les E_i sont injectifs indécomposables, $M \cap E_i \neq \{0\}$, car l'extension E de M est essentielle, $\emptyset \neq \mathrm{Ass}_A(M \cap E_i) \subset \mathrm{Ass}_A E_i = \{p_i\}$, car E_i est indécomposable.

Il existe donc des injections essentielles

$$A/p_i \to M \cap E_i \ .$$

Soit $N = \oplus_{i \in I} A/p_i$. Les applications

$$N \to \oplus_{i \in I}(M \cap E_i) \quad \text{et} \quad \oplus_{i \in I}(M \cap E_i) \to E$$

sont essentielles donc aussi leur composée. Il s'en suit que M est extension essentielle de N. ■

4.2 - Proposition. *Soit M un module sur un anneau noethérien. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathrm{Ass}_A M$ *satisfait* $\mathrm{Et}(d)$ *;*

ii) M est extension essentielle d'un module d-caténaire.

■ $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit N le sous-module dont il est question dans le lemme 4.1. $\mathrm{Ass}_A N$ satisfait alors $\mathrm{Et}(d)$ et pour tout x_i, $x_i \neq 0$, $x_i \in A/p_i$, $\mathrm{Ann}_A x_i = p_i$. On conclut à l'aide de 3.4.1.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Soient N un sous-module de M d-caténaire dont M soit extension essentielle et $p \in \mathrm{Ass}_A M$. Il existe $x \in M$ et $s \in A$ tels que $p = \mathrm{Ann}_A x$, $sx \in N$, $sx \neq 0$, d'où $s \notin p$ et $p = \mathrm{Ann}_A sx$. Il en résulte que $\mathrm{Ass}_A N = \mathrm{Ass}_A M$ qui satisfait donc $\mathrm{Et}(d)$ par 3.3.2. ■

4.3 - On notera, pour tout idéal I de A, $\mathrm{htm}(I)$, la codimension dans $\mathrm{Spm}(A)$ de $V(I)$, où $V(I)$ est l'ensemble des idéaux maximaux de A contenant I.

On rappelle (voir par ex. [5]) que $\mathrm{Spm}(A)$ est un espace topologique noethérien si et seulement si les composantes irréductibles de tout fermé de $\mathrm{Spm}(A)$ sont en nombre fini ; que, lorsque ces conditions sont vérifiées, les composantes irréductibles de $V(I)$ sont les $V(p_i)$, où les p_i sont les idéaux premiers minimaux de $r(I)$ et $p_i = r(p_i)$, ($r(I)$ désigne l'intersection des idéaux maximaux contenant I). Il en résulte que, si I est un idéal de A et J n'est pas contenu dans la réunion des idéaux premiers minimaux de $r(I)$, $\mathrm{htm}(I) < \mathrm{htm}(I+J)$.

Lemme. *Soient A un anneau à spectre maximal noethérien et $(p_i)_{i\in I}$ une famille d'idéaux de A telle que $\cup_{i\in I} p_i$ ne soit contenue dans aucune réunion finie d'idéaux maximaux de A. Il existe alors $J \subset I$, J infinie telle que, si $J' \subset J$, $|J'| < \infty$, $\mathrm{htm}(\sum_{j'\in J'} p_{j'}) \geq |J'|$.*

■ Soit E l'ensemble, ordonné par inclusion des parties K de I, telles que, pour tout $K' \subset K$, $|K'| < \infty$, $\mathrm{htm}(\sum_{k'\in K'} p_{k'}) \geq |K'|$. E est non vide ($\emptyset \in E$) et clairement inductif. Soit J un élément maximal de E.

Montrons que J est infini. Sinon, soit Q l'ensemble des idéaux premiers minimaux des $r(\sum_{j'\in J'} p_{j'})$ où $J' \subset J$. Q est fini et il existe $i \in I - J$ tel que p_i ne soit pas contenu dans la réunion des $q \in Q$. Soit alors $J' \subset J \cup \{i\}$ tel que $i \in J'$. Comme p_i n'est pas contenu dans la réunion des idéaux premiers minimaux de $r(\sum_{j'\in J'-\{i\}} p_{j'})$, il vient :

$$|J' - \{i\}| \leq \mathrm{htm}\Big(\sum_{j'\in J'-\{i\}} p_{j'}\Big) < \mathrm{htm}\Big(\sum_{j'\in J'} p_{j'}\Big)$$

et donc $|J'| \leq \mathrm{htm}(\sum_{j'\in J'} p_{j'})$. Il en résulte que J n'est pas maximal. ■

4.4 - Théorème. *Soit M un module sur un anneau noethérien A dont le spectre maximal est de dimension d.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Ass}_A M$ satisfait $\mathrm{Et}(d)$;

(ii) $Z(M) = \cup\{p \mid p \in \mathrm{Ass}_A M\}$ est contenu dans une réunion finie d'idéaux maximaux ;

(iii) M est extension essentielle d'un module pan-caténaire.

■ $(i) \Rightarrow (ii)$. Sinon, il existerait, en vertu du lemme 4.3, une partie J infinie de $\mathrm{Ass}_A M$, telle que si $J' \subset J$, $|J'| < \infty$, $|J'| \leq \mathrm{htm}(\sum_{p\in J'} p)$. L'hypothèse sur la dimension du spectre maximal de A implique que, pour tout J', $J' \subset J$, $|J'| = d+1$, $\sum_{p \in J'} p = A$ et donc $\mathrm{Ass}_A M$ ne satisferait pas Et(d).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Soit N le sous-module de M dont il est fait mention dans le lemme 4.1. Il vient que $\mathrm{Ass}_A M = \mathrm{Ass}_A N$ et il suffit de montrer que $\mathrm{Ass}_A N$ satisfait Et, par 3.4.1 (pour tout x_i, $x_i \neq 0$, $x_i \in A/p_i$, $\mathrm{Ann}_A x_i = p_i$). Or, pour tout entier δ et pour tout idéal maximal m de A, m ne peut contenir que δ idéaux premiers d'une partie P $(\delta+1)$-étrangère de $\mathrm{Ass}_A N$. Supposons P infinie et soient $m_1, \ldots, m_n$ des idéaux maximaux de A tels que $Z(M) \subset \cup_i m_i$. Comme tout $p \in P$ est contenu dans $\cup m_i$, car $Z(N) \subset Z(M)$, et donc est contenu dans l'un d'entre eux, il existerait une infinité de p, $p \in P$, contenus dans l'un d'entre eux, ce qui est impossible.

$(iii) \Rightarrow (i)$ résulte de 4.2. ∎

4.5 - Soit I un idéal d'un anneau noethérien A tel que $I \neq A$. On appellera profondeur de I et on notera prof I la longueur commune de toutes les suites régulières maximales contenues dans I. On rappelle les faits suivants :

1) Si $x_1, \ldots, x_n$ est une suite régulière, la suite obtenue par échange de x_i et x_{i+1} est régulière si et seulement si $x_{i+1} \notin Z(A/(x_1, \ldots, x_{i-1}))$.

Soient H un ensemble et $(x_h)_{h \in H}$ une famille d'éléments de A, nous noterons, dans ce qui suit, q_H l'idéal engendré pour les x_h, de sorte que :

2) Soit P une partie de A de cardinal n telle que $q_P \neq A$. Les éléments de P forment, pour tout ordre sur P, une suite régulière si et seulement si, pour tout $H \subset P$ et tout $x \in P - H$, $x \notin Z(A/q_H)$. On dira, dans ce cas, que P est une partie régulière de A.

3) Si $Q \subset P$ et P est régulière, alors Q est régulière.

4) Tout idéal engendré par une suite régulière de longueur n est aussi engendré par un sous-ensemble régulier de cardinal n.

Proposition. *Soit A un anneau noethérien qui satisfait aux conditions suivantes : il existe un entier d tel que :*

1) Tout idéal maximal est de profondeur d ;

2) Tout idéal de profondeur $d-1$ est contenu dans une infinité d'idéaux maximaux.

(Par exemple, un anneau noethérien équidimensionel de Cohen-Macaulay et de Jacobson).

Il existe alors une famille infinie $(r_i)_{i\in I}$ d'idéaux de A $(d+1)$-étrangers qui satisfait $\mathrm{Et}(d')$ *pour $d' < d$.*

■ Remarquons d'abord que, pour tout idéal I de profondeur d, A/I est semi-local. En effet, $\mathrm{Ass}_A A/I = \{p_1, \ldots, p_n\}$ et, comme tout idéal maximal m contenant I est de profondeur d, $m \subset \cup p_i$ et donc est égal à l'un d'entre eux.

Soit alors E l'ensemble, ordonné par inclusion, des parties P de A telles que :

1) Pour tout $P' \subset P$, $|P'| = d$, il existe m maximal dans A tel que $q_{P'} \subset m$ et P' est une partie régulière de A.

2) Pour tout $P' \subset P$, $|P'| = d+1$ $\quad q_{P'} = A$.

Montrons qu'il existe $P \in E$, $|P| = d$: Soit m un idéal maximal de A, alors prof $m = d$ et il existe une suite régulière $x_1, \ldots, x_d$ contenue dans m. L'idéal $(x_1, \ldots, x_d)$ est aussi engendré par une partie régulière P qui satisfait aux conditions requises. L'ensemble E est clairement inductif. Soit Q, $Q \supset P$ un élément maximal de E. Montrons que Q est infini.

Sinon, soient $m_1, \ldots, m_k$ les idéaux maximaux de A qui contiennent l'un des q_H, pour $|H| = d$ et $H \subset Q$, et $p_1, \ldots, p_l$ les idéaux premiers associés des q_H tels que $|H| < d$, $H \subset Q$. Considérons alors $H \subset Q$, $|H| = d-1$, et associons lui un idéal maximal $m(H)$ de A tel que :

$$q_H \subset m(H) \not\subset m_1 \cup \ldots \cup m_k \cup p_1 \cup \ldots \cup p_l\,.$$

Il en existe, car prof $q_H = d-1$ (q_H est engendré par une suite régulière) et donc q_H est contenu dans une infinité d'idéaux maximaux. Il vient :

$$\bigcap_{\substack{H,\, H\subset Q\\ |H|=d-1}} m(H) \not\subset m_1 \cup \ldots \cup m_k \cup p_1 \cup \ldots \cup p_l\,.$$

Soit $x \in \cap m(H)$ n'appartenant pas à $m_1 \cup \ldots \cup m_k \cup p_1 \cup \ldots \cup p_l$. Montrons que $Q \cup \{x\} \in E$:

Si $H \subset Q \cup \{x\}$, $|H| = d+1$, $x \in H$, soit $m \supset q_H$; il vient : $m \supset q_{H-\{x\}}$, $|H - \{x\}| = d$ et $x \in m$, mais m est alors l'un des $m_1, \ldots, m_k$, d'où $q_H = A$.

Si $H \subset Q \cup \{x\}$, $|H| = d$, $x \in H$, alors $q_H = q_{H-\{x\}} + Ax \subset m(H - \{x\})$.

Montrons encore que les éléments de H, rangés dans n'importe quel ordre, forment une suite régulière.

La démonstration se fait par récurrence sur la position occupée par l'élément x dans la suite : dans le cas où x vient en dernière position, on a : $x_1, \dots, x_{d-1}, x$ où $\{x_1, \dots, x_{d-1}\} = H - \{x\} \subset Q$. Comme $x \notin Z(A/q_{H-\{x\}})$ et $H - \{x\}$ est un ensemble régulier, la suite est régulière. Supposons encore que, quel que soit l'ordre sur H, si x arrive en $(i+1)$-ième position, la suite des éléments de H est régulière et considérons $x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_i, \dots, x_{d-1}$. Comme $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x, \dots, x_{d-1}$ est régulière par hypothèse et que $x \notin Z\big(A/(x_1, \dots, x_{i-1})\big)$, la suite $x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_i, \dots, x_{d-1}$ est régulière, ce qui achève de démontrer que $Q \cup \{x\} \in E$.

Il s'en suit que Q n'est pas maximal et donc que Q est infini. Il en résulte que la famille $(r_q)_{q \in Q}$ d'idéaux de A, où $r_q = Aq$, satisfait aux exigences de la proposition.

Références

[1] N. Bourbaki, "Algèbre", Chapitres 1 à 3, Diffusion C.C.L.S., Paris, 1970.

[2] N. Bourbaki, "Algèbre commutative", Hermann, Paris, 1965.

[3] P. Gabriel, Objects injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot, t.12, Année 1958/1959 : Algèbre et Theorie des Nombres, exposé 17.

[4] W. Heinzer and D. Lantz, Commutative Rings with ACC on n generated Ideals, *J. Algebra* **80** (1983), 261-278.

[5] I. Kaplansky, "Commutative Rings", Allyn and Bacon, Boston, 1970.

[6] A. M. Nicolas, Sur les modules tels que toute suite croissante de sous-modules engendrés par n générateurs soit stationnaire, *J. Algebra* **60** (1979), 249-260.

[7] G. Renault, Sur des conditions de chaînes ascendantes dans les modules libres, *J. Algebra* **47** (1977), 268-275.

[8] G. Renault, Anneaux de Dedekind dont le groupe des classes est fini, *J. Algebra* **85** (1983), 333-336.

CHAPITRE II

STRUCTURE DES MODULES PAN-CATENAIRES SUR UN ANNEAU NOETHERIEN DE DIMENSION UN

0 - Introduction.

Pour les définitions et résultats nécessaires à la compréhension de ce travail, nous nous permettrons de nous référer librement à notre article "Remarque sur le théorème chinois".

Pontryagin démontre dans "Topological groups" le critère suivant :

Soit G un groupe dénombrable sans torsion. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est libre ;

(ii) tout sous-groupe de G de rang fini est libre ;

(iii) G est pan-caténaire.

Nicolas, dans [4], généralise ainsi ce résultat :

Pour un module M sans torsion sur un anneau de Dedekind, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) tout sous-module de M de rang dénombrable est projectif ;

(ii) tous sous-module de M de rang fini est de type fini ;

(iii) M est pan-caténaire.

L'équivalence des conditions (i) et (ii) appartient au yoga des anneaux de Prüfer. Par contre, l'équivalence de (ii) et (iii) est susceptible d'une généralisation que nous exposons dans ce travail :

Soit M un module sur un anneau noethérien de dimension un. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) M est pan-caténaire ;

(ii) pour tout sous-module N de type fini de M, M/N est 1-caténaire ;

(iii) a) pour tout sous-module N de type fini de M, $\mathrm{Ass}_A\, M/N$ est fini ;

b) toute extension essentielle d'un sous-module de type fini contenue dans M est de type fini.

Dans une première partie, nous donnons des exemples assez classiques de modules de type borné ; en particulier, les modules injectifs indécomposables sur un anneau noethérien de dimension un, qui s'avèrent utiles pour démontrer le théorème de structure dans le cas semi-local. On y trouve aussi des exemples neufs de modules pan-caténaires (Théorème 1.2.1).

La deuxième partie expose une technique de réduction des questions de noethérianité et de pan-caténarité des modules sur un anneau noethérien au cas des modules sur un anneau intègre (Corollaire 2.3), technique sur laquelle repose la démonstration du théorème de structure, objet de la dernière partie.

1 - Quelques exemples.

1.1.1 - Soit M un A-module de type fini. On notera, dans ce qui suit, $g(M)$ le minimum des cardinaux des systèmes de générateurs de M.

Le lecteur peu familier des enveloppes injectives et des modules de Cohen-Macaulay en trouvera les propriétés essentielles dans [2] et [3].

Lemme. *Soient M et N des A-modules ; $I \subset \operatorname{Ann}_A M$.*
Alors $I \subset \operatorname{Ann}_A(\operatorname{Hom}_A(M,N))$ et

$$\operatorname{Hom}_A(M,N) = \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Ann}_N I) = \operatorname{Hom}_{A/I}(M, \operatorname{Ann}_N I)$$

où $\operatorname{Ann}_N I$ désigne le module $\{x | x \in N, Ix = 0\}$.

■ Résulte des équations $I(\varphi(x)) = (I\varphi)(x) = \varphi(Ix)$. ■

1.1.2 - Lemme. *Soient A un anneau local artinien, m son idéal maximal, $E = E(A/m)$ l'enveloppe injective du corps résiduel. Alors E est de type fini et $g(E) = \dim_{A/m}(\operatorname{Ann}_A m)$.*

■ La suite
$$E \to E/mE \to 0$$

donne
$$0 \to \operatorname{Hom}_A(E/mE, E) \to \operatorname{Hom}_A(E,E) .$$

Or, $\operatorname{Hom}_A(E,E) = A$ par la dualité de Matlis, car A est complet pour la topologie m-adique, d'où la suite exacte :

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(E/mE, E) \xrightarrow{\alpha} A .$$

Mais α se factorise à travers $\operatorname{Ann}_A m$, car $m \subset \operatorname{Ann}_A(\operatorname{Hom}_A(E/mE, E))$. Il vient :

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(E/mE, E) \to \operatorname{Ann}_A m$$

d'où, comme (Lemme 1.1) :

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_A(E/mE, E) &= \operatorname{Hom}_A(E/mE, \operatorname{Ann}_E m)\\ &\cong \operatorname{Hom}_A(E/mE, A/m) = \operatorname{Hom}_{A/m}(E/mE, A/m) ,\end{aligned}$$

car $\mathrm{Ann}_E\, m$ est isomorphe à A/m (E est indécomposable), il résulte que :

$$\dim_{A/m}(E/mE) \leq \dim_{A/m}(\mathrm{Hom}_{A/m}(E/mE, A/m)) \leq \dim_{A/m}(\mathrm{Ann}_A\, m)\,.$$

Mais $\mathrm{Ann}_A\, m$ est un idéal de type fini et E/mE est donc un espace vectoriel de dimension finie sur A/m. Il s'en suit que E est de type fini (Nakayama) et que :

$$g(E) = \dim_{A/m}(E/mE) \leq \dim_{A/m}(\mathrm{Ann}_A\, m)\,.$$

D'autre part, de la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ann}_A\, m \to A$$

découle la suite exacte :

$$E \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ann}_A\, m, E) \to 0$$

car $E \cong \mathrm{Hom}_A(A, E)$ et E est injectif.

Comme $m \subset \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ann}_A\, m, E))$, φ se factorise à travers E/mE, d'où la suite exacte :

$$E/mE \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ann}_A\, m, E) \to 0\,.$$

Or, $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ann}_A\, m, E) = \mathrm{Hom}_{A/m}(\mathrm{Ann}_A\, m, \mathrm{Ann}_E\, m)$ qui est isomorphe à :

$$\mathrm{Hom}_{A/m}(\mathrm{Ann}_A\, m, A/m)$$

car $\mathrm{Ann}_E\, m$ est isomorphe à A/m .

On obtient donc une suite exacte :

$$E/mE \to \mathrm{Hom}_{A/m}(\mathrm{Ann}_A\, m, A/m) \to 0$$

d'où :

$$\dim_{A/m}(\mathrm{Ann}_A\, m) \leq \dim_{A/m}(\mathrm{Hom}_{A/m}(\mathrm{Ann}_A\, m, A/m) \leq \dim_{A/m}(E/mE) = g(E)\,.$$

Les deux inégalités permettent de conclure. ∎

1.1.3 - Lemme. *Soient A un anneau de Cohen-Macaulay local, m son idéal maximal, $E = E(A/m)$ l'enveloppe injective du corps résiduel. Alors le A-module E est de type borné δ, où $\delta = \dim_{A/m} \operatorname{Ext}^d_A(A/m, A)$ et $d = \dim A$.*

■ Soient $x_1, \ldots, x_d$ un système de paramètres de A, I_n l'idéal $(x_1^n, \ldots, x_d^n)$, $T \subset E$ un A-module de type fini. Comme $\operatorname{Ass}_A E = \{m\}$, il existe un entier n tel que $m^n \subset \operatorname{Ann}_A T$ et donc : $T \subset \operatorname{Ann}_E I_n$, car $I_n \subset m^n$. Or, $\operatorname{Ann}_E I_n$ est aussi l'enveloppe injective de A/m considéré comme A/I_n-module.

Comme A/I_n est local artinien :

$$g(\operatorname{Ann}_E I_n) = \dim_{A/m}(\operatorname{Ann}_{A/I_n} m) = \dim_{A/m}(\operatorname{Hom}_{A/I_n}(A/m, A/I_n)) .$$

Comme I_n est un idéal engendré par une suite régulière maximale :

$$\operatorname{Hom}_{A/I_n}(A/m, A/I_n) \cong \operatorname{Ext}^d_A(A/m, A)$$

et T est contenu dans $\operatorname{Ann}_E I_n$ qui est engendré par δ générateurs.

1.1.4 - Proposition. *Soient A un anneau de Cohen-Macaulay et E un A-module injectif indécomposable. Alors E est de type borné.*

■ Comme E est injectif indécomposable, il existe p idéal premier de A tel que $\operatorname{Ass}_A E = \{p\}$ et $E = E(A/p)$. Mais E est aussi un A_p-module et c'est aussi l'enveloppe injective du A_p-module A_p/pA_p. A_p est un anneau de Cohen-Macaulay local. Il en résulte que E est un A_p-module de type borné δ (Lemme 1.1.3).

Soit alors T un sous-A-module de type fini de E . T_p est alors contenu dans un sous-A_p-module T_δ de E engendré par les éléments $y_1, \ldots, y_\delta$. Soit T' le sous-A-module de T_δ engendré par $y_1, \ldots, y_\delta$. Il existe $s \in A - p$ tel que $sT \subset T'$, car $T \subset T_\delta$ et T est de type fini. Comme l'homothétie de rapport s est inversible dans E, $T \subset \frac{1}{s}T'$ et $g(\frac{1}{s}T') \leq \delta$, ce qui achève la démonstration. ■

1.1.5 - Lemme. *Soient A un anneau local noethérien de dimension un, m son idéal maximal, E l'enveloppe injective du corps résiduel. Alors E est de type borné.*

■ Si $m \notin \operatorname{Ass} A$, A est de Cohen-Macaulay et cela résulte de 1.1.3.

Sinon soient $p_1, \ldots, p_n$ les idéaux premiers minimaux de A, $S = A - \cup_i p_i$ et I le noyau de l'application canonique de A vers $S^{-1}A$. Considérons la suite exacte :

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0 .$$

$\mathrm{Ass}_A I = \{m\}$ et il existe donc un entier n tel que $m^n I = \{0\}$; $\mathrm{Ass}_A A/I = \{p_1, \ldots, p_n\}$, et, par conséquent, $m/I \notin \mathrm{Ass}_{A/I} A/I$. Il en résulte que A/I est un anneau local de Cohen-Macaulay de dimension un. Comme E est injectif, la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(A/I, E) \to E \to \mathrm{Hom}_A(I, E) \to 0$$

est exacte.

$\mathrm{Hom}_A(A/I, E) = \mathrm{Ann}_E I$ est l'enveloppe injective du A/I-module A/m et est, de ce fait, un A/I-module de type borné (Lemme 1.1.3) et donc un A-module de type borné.

Montrons encore $\mathrm{Hom}_A(I, E)$ est un A-module de type fini, ce qui permettra de conclure par ([6], 3.1.3). Or, il existe n tel que $m^n I = \{0\}$ et

$$\mathrm{Hom}_A(I, E) = \mathrm{Hom}_A(I, \mathrm{Ann}_E m^n) \subset (\mathrm{Ann}_E m^n)^{g(I)} .$$

$\mathrm{Ann}_E m^n$ est de type fini : cela résulte de 1.1.2 car A/m^n est artinien et $\mathrm{Ann}_E m^n$ est l'enveloppe injective du A/m^n-module A/m.

1.1.6 - Proposition. *Soient A un anneau noethérien de dimension un, E un A-module injectif indécomposable. Alors E est de type borné.*

■ Il suffit de voir que, pour tout $p \in \mathrm{Spec}\, A$, $E(A/p)$ est un A_p-module de type borné et de relire la démonstration de la proposition 1.1.4.

Or, si p est minimal, A_p est de Cohen-Macaulay et si p est maximal, $E(A/p)$, qui est aussi l'enveloppe injective du A_p-module A_p/pA_p, est de type borné sur A_p par 1.1.5. ■

1.2.1 - On utilise le résultat suivant dû à Nicolas ([4], Théorème 1.1).

"Soit A un anneau intègre. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $n \in \mathbf{N}$ A^n est d-caténaire ;

(ii) pour tout ensemble X, A^X est d-caténaire."

Théorème. *Soient M un module de type fini sur un anneau noethérien A et X un ensemble. Alors M^X est pan-caténaire.*

■ Il existe ([1], chap. IV, § 1, n° 4, Théorème 1) une suite finie $(M_i)_{0\leq i\leq n}$ de sous-modules de M telle que :

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$$

et, pour $i < n$, des suites exactes :

$$0 \to M_i \to M_{i+1} \to A/p_i \to 0$$

où p_i est un idéal premier de A .

Les suites :

$$0 \to M_i^X \to M_{i+1}^X \to (A/p_i)^X \to 0$$

sont alors exactes. Or le A-module $(A/p_i)^X$ est aussi le A/p_i-module $(A/p_i)^X$ où A/p_i est considéré comme A/p_i-module. $(A/p_i)^X$ est donc un A/p_i et donc un A-module pan-caténaire. Le théorème résulte, par itération, de ([6], 3.2.2). ■

1.2.2 - On note M^* le A-module $\mathrm{Hom}_A(M, A)$.

Corollaire. *Soit A un anneau noethérien.*

1) Si M est un A-module de type fini, $\mathrm{Hom}_A(N, M)$ est pan-caténaire pour tout N ;

2) Si M se plonge dans M^{**}, M est pan-caténaire.

■ En effet, si $A^{(I)} \to M \to 0$ est exacte, alors

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}(A^{(I)}, N) = N^I$$

est exacte.

D'autre part, $M^{**} = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, A), A)$. ■

1.2.3 - Lemme. *Soit M un module sur un anneau noethérien A tel que, pour tout ensemble X, M^X soit 1-caténaire. Alors :*

$$\cap_{m\in M}\, r(\mathrm{Ann}_A\, m) = r(\mathrm{Ann}_A\, M)$$

où, pour tout idéal I, $r(I)$ désigne l'intersection des idéaux maximaux de A contenant I.

■ Considérons d'abord un élément $a \in A$, tel que, pour tout $m \in M$: $A = Aa + \mathrm{Ann}_A\, m$, et montrons que $A = Aa + \mathrm{Ann}_A\, M$.

Il existe, pour tout $m \in M$, un élément a_m de A tel que $m = a_m am$. On construit alors dans M^M une suite $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ d'éléments définis comme suit : $f_i(m) = a_m^i m$. Notons que $f_0(m) = m$.

Montrons que $f_i = af_{i+1}$. En effet, pour $m \in M$, il vient :

$$af_{i+1}(m) = aa_m^{i+1}m = a_m^i m = f_i(m) .$$

Comme M^M est 1-caténaire, il existe $j \in \mathbf{N}$ tel que $f_{j+1} = \alpha f_j$ d'où :

$$f_j = a\alpha f_j,\ (1 - a\alpha)f_j = 0 \text{ et donc } (1 - a\alpha)f_0 = 0 .$$

Il s'en suit que, pour tout $m \in M$, $(1 - a\alpha)m = 0$. Il en résulte que :

$$A = Aa + \mathrm{Ann}_A\, M .$$

Il est clair que $r(\mathrm{Ann}_A\, M) \subset \cap_{m \in M}\, r(\mathrm{Ann}_A\, m)$. Soient alors $b \in \cap\, r(Ann_A\, m)$ et u un élément quelconque de A. On a, pour tout $m \in M$,

$$A = A(1 - ub) + \mathrm{Ann}_A\, m$$

d'où, en vertu de ce qui précède :

$$A = A(1 - ub) + \mathrm{Ann}_A\, M, \quad \text{pour tout } u \in A .$$

Considérons alors un idéal maximal q de A tel que $\mathrm{Ann}_A\, M \subset q$ et $b \notin q$. Il existe, dans ce cas, $v \in A$ tel que $1 - vb \in q$, ce qui contredit la formule précédente et établit le lemme. ■

1.2.4 - La proposition qui suit montre qu'il est peu fréquent qu'un module pan-caténaire M sur un anneau noethérien A possède la propriété que, pour tout ensemble X, M^X soit 1-caténaire.

Proposition. *Soit A un anneau noethérien.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) pour toute famille $(M_i)_{i \in I}$ de modules pan-caténaires $\prod_{i \in I} M_i$ est 1-caténaire.

(ii) pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ de modules 1-caténaires, $\prod_{i\in I} M_i$ est 1-caténaire.

(iii) pour tout module M pan-caténaire et tout ensemble I, M^I est 1-caténaire.

(iv) pour tout module M 1-caténaire et tout ensemble I, M^I est 1-caténaire.

(v) A est somme directe finie d'anneaux locaux.

■ Il suffit de montrer (iii) $\Rightarrow$ (v) et (v) $\Rightarrow$ (ii). Les autres implications s'en déduisent trivialement.

(iii) $\Rightarrow$ (v).

Soient p un idéal minimal de A, m un idéal maximal de A contenant p, M le A-module $M = \oplus_{n\in \mathbf{N}} A/p + m^n$, $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ses générateurs canoniques.

Comme, pour tout $x \in M$, $x \neq 0$, il existe $n \in \mathbf{B}$ tel que $p + m^n \subset \mathrm{Ann}_A x$, $\sqrt{\mathrm{Ann}_A x} = m$ et M est pan-caténaire en vertu de ([6], 3.4.1 et 1.9).

Or $r(\cap_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Ann}_A\, e_n) = r(\mathrm{Ann}_A\, M) = \cap_{x\in M}\ r(\mathrm{Ann}_A\, x) = m$. Comme $p = \cap_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Ann}_A\, e_n = \cap_{n\in\mathbf{N}}(p + m^n)$ car A/p est noethérien intègre, $r(p) = m$. Comme l'idéal maximal m contenant p était arbitrairement choisi et que les idéaux premiers minimaux de A sont en nombre fini, A est semi-local. Soient $(m_i)_{0\le i\le k}$ les idéaux maximaux de A et q_i l'intersection (finie) des idéaux premiers minimaux contenus dans m_i. Il vient : $r(q_i) = m_i$ et les q_i sont 2-étrangers. On obtient la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Nil}\, A \to A \xrightarrow{\varphi} \oplus_{0\le i\le k} A/q_i \to 0$$

et les A/q_i sont des anneaux locaux.

Soient alors $e_0, \dots, e_k$ des idempotents de l'anneau $B = \oplus A/q_i$ tels que $1 = \Sigma e_i$, $e_i e_j = 0$, pour $i \neq j$, et $A/q_i = Be_i$. Ceux-ci se relèvent en des idempotents $f_1, \dots, f_k$ de A qui possèdent les mêmes propriétés. La restriction de φ à Af_i est un homomorphisme surjectif sur Ae_i : si $x \in Af_i$, $x = xf_i$ et $\varphi(x) = \varphi(x)e_i$. Si $u \in Ae_i$, $y = \varphi(z)$, $y = ye_i = \varphi(z)\varphi(f_i) = \varphi(zf_i)$. On obtient donc la suite exacte :

$$0 \to Af_i \cap \mathrm{Nil}\, A \to Af_i \to Ae_i \to 0$$

ce qui montre que l'anneau Af_i est local.

(v) $\Rightarrow$ (ii).

Supposons que $A = \oplus_{0 \leq i \leq k} A_i$, A_i local. Il vient : $1 = \Sigma e_i$, $e_i \in A_i$, $e_i e_j = 0$ pour $i \neq j$, $e_i^2 = e_i$ et $A_i = Ae_i$.

Il en résulte que, pour tout A-module M, $M = \oplus_{0 \leq i \leq k} M_i$, où $Me_i = M_i$. M_i est alors un A-module dont l'annulateur contient $1 - e_i$. C'est donc aussi un $A/A(1-e_i)$-module et $A/A(1-e_i)$ est local.

Soit alors $M = \prod_{x \in X} M_x$, où les A-modules M_x sont 1-caténaires. Il est clair que $Me_i = \prod_{x \in X} M_x e_i$ et la démonstration résulte des deux lemmes qui suivent :

Lemme 1. *Soient A un anneau local et $(M_x)_{x \in X}$ une famille de modules 1-caténaires. Alors $\prod_{x \in X} M_x$ est 1-caténaire.*

■ En effet, soient $T \subset \prod_{x \in X} M_x$ de type borné 1, non de type fini, et $t \in T$. Il existe $u \in T$, $u \notin At$ et $v \in T$ tel que $At \subset At + Au \subset Av$. Il vient : $t = av$, où $a \in m$ (m est l'idéal maximal de A). Il en résulte que $T = mT$, et, pour tout $x \in X$, $pr_x(T) = m\, pr_x(T)$.

Or $pr_x(T) \subset M_x$ est de type borné 1, donc de type fini et $pr_x(T) = \{0\}$ par Nakayama, d'où $T = \{0\}$. ■

Lemme 2. *Soient P et Q des modules 1-caténaires sur un anneau A. Alors $P \oplus Q$ est 1-caténaire.*

■ Soient p et q les projections canoniques, $T \subset P \oplus Q$ un module de type borné 1. Alors $p(T)$ et $q(T)$ sont monogènes et il existe $x \in T$ tel que $p(T) = p(Ax)$ et $q(T) = q(Ax)$.

Soit alors $t \in T$, il existe alors $y \in T$ tel que $At + Ax \subset Ay$ d'où $t = ay$ et $x = by$. Mais $p(Ax) = p(Ay)$ et $q(Ax) = q(Ay)$. Il existe donc $c, d \in A$ tels que :

$$y = cx + u, \quad u \in M \qquad et \qquad y = dx + v, \quad v \in N$$

d'où : $$(1 - bc)y \in M \quad \text{et} \quad (1 - bd)y \in N$$

et : $$A = Ab + M : y \qquad\qquad A = Ab + N : y\ .$$

Il s'en suit que : $A = Ab + (M : y) \cap (N : y) = Ab$ et, $y = b^{-1}x$, $t = ab^{-1}x$, $T = Ax$. ■

2 - Réduction au cas d'un anneau intègre.

2.1 - Soit M un module sur un anneau A. On notera $E_b(M)$ (resp. $E_n(M)$) l'ensemble des idéaux de A qui possèdent la propriété suivante : il existe $N \subset M$ de type borné non de type fini (resp. non de type fini) et $T \subset N$, T de type fini, tels que $I = \mathrm{Ann}_A N/T$.

Lemme. *Soit M un module sur un anneau noethérien A. Alors tout idéal $p \in E_b(M)$ maximal pour la relation d'inclusion entre éléments de $E_b(M)$ est premier.*

■ Soit, en effet, p un élément maximal. Il existe $N \subset M$, N de type borné non de type fini et $T \subset N$, T de type fini tels que $p = \mathrm{Ann}_A N/T$.

Soient $x, y \in A$, $x \notin p$, $xy \in p$. Considérons les modules yN et $yN \cap T$. $yN \cap T$ est de type fini, yN est de type borné. Il vient : $pyN \subset pN \subset T$ et $xyN \subset pN \subset T$ d'où $p + Ax \subset \mathrm{Ann}_A yN/yN \cap T$. Or, $p + Ax$ contient strictement p et p est maximal. Il s'en suit que yN est de type fini. D'autre part, $(p + Ay)N \subset T + yN$ qui est de type fini et $p + Ay \subset \mathrm{Ann}_A N/T + yN$. En vertu du caractère maximal de p, $y \in p$, ce qui achève la démonstration. ■

Lemme. *Soit M un module sur un anneau noethérien A. Alors tout idéal $p \in E_n(M)$ maximal parmi les éléments de $E_n(M)$ est premier.*

■ Soit p un tel élément. Il est de la forme $p = \mathrm{Ann}_A N/T$ où $T \subset N$ est de type fini et N ne l'est point. Soient $x, y \in A$, $x \notin p$, $xy \in p$. Montrons que yN est de type fini. Il vient, comme dans le lemme qui précède :

$$p + Ax \subset \mathrm{Ann}_A yN/yN \cap T$$

d'où, en vertu du caractère maximal de p, yN est de type fini, car $x \notin p$. Du fait que $p + Ay \subset \mathrm{Ann}_A N/T + yN$ résulte alors que $y \in p$.

2.2 - Proposition. *Soit M un module sur un anneau noethérien A .*

1) Si M est de type borné et n'est pas de type fini, il existe un sous-module N de M de type borné qui est annulé par un idéal premier p et qui n'est pas de type fini.

2) Si M n'est pas de type fini, il existe $N \subset M$ annulé par un idéal premier p et non de type fini.

■ $E_b(M)$ (resp. $E_n(M)$) est non vide : $\mathrm{Ann}_A M \in E_b(M)$ (resp. $E_n(M)$). Comme A est noethérien, $E_b(M)$ (resp. $E_n(M)$) possède un élément maximal p qui est premier (2.1).

Il existe alors $N \subset M$, N de type borné non de type fini (resp. non de type fini) et $T \subset N$ de type fini tels que $p = \mathrm{Ann}_A N/T$. Soient alors $x_1, \ldots, x_m$ les générateurs de p. Il en résulte une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ann}_N p \to N \xrightarrow{\varphi} T^m$$

où $\varphi(n) = (x_1 n, \ldots, x_m n)$.

Montrons que $\mathrm{Ann}_N p$ satisfait aux conditions exigées : $\varphi(N)$ est de présentation finie. Si N est de type borné, $\mathrm{Ann}_N p$ l'est aussi ([6], 3.1.4) et $\mathrm{Ann}_N p$ ne saurait être de type fini sans que N ne le soit. ■

2.3 - Corollaire. *Soient M un module sur un anneau noethérien A, $p_1, \ldots, p_n$ les idéaux premiers minimaux de $\mathrm{Ann}_A M$. Alors :*

1) M est noethérien si et seulement si $\mathrm{Ann}_M p_i$ l'est pour tout i.

2) M est pan-caténaire si et seulement si $\mathrm{Ann}_M p_i$ l'est pour tout i.

3) M est extension essentielle d'un sous-module de type fini si et seulement si $\mathrm{Ann}_M p_i$ l'est pour tout i.

■ Pour les assertions 1) et 2), il suffit d'appliquer la proposition 2.2 au module M sur l'anneau noethérien $A/\mathrm{Ann}_A M = A'$, ce qui ne change rien aux hypothèses de 2.2 et de remarquer que, pour tout sous-module N de M et p' idéal premier de $A/\mathrm{Ann}_A M$, il existe q' idéal premier minimal de $A/\mathrm{Ann}_A M$ tel que $q' \subset p'$ et donc $\mathrm{Ann}_M p' \subset \mathrm{Ann}_M q'$. q' se relève alors en un idéal premier q de A minimal au-dessus de $\mathrm{Ann}_A M$ et $\mathrm{Ann}_M q = \mathrm{Ann}_M q'$.

En ce qui concerne l'assertion 3), si M est extension essentielle du sous-module de type fini N, $\mathrm{Ann}_M p_i$ est extension essentielle de $N \cap \mathrm{Ann}_M p_i = \mathrm{Ann}_N p_i$ qui est de type fini. D'autre part, si $\mathrm{Ann}_M p_i$ est extension essentielle d'un sous-module N_i, soit N le module somme des N_i. Si $x \in M$, il existe $s \in A$ tel que $\mathrm{Ann}_A sx = p$ où p est premier. Comme $\mathrm{Ann}_A sx \supset \mathrm{Ann}_A M$ il existe p_i idéal premier minimal de $\mathrm{Ann}_A M$ tel que $p \supset p_i$. Il en résulte que $sx \neq 0$ et $sx \in \mathrm{Ann}_M p_i$. Il existe donc $t \in A$ tel que $tsx \neq 0$ et $tsx \in N_i \subset N$, ce qui montre que M est extension essentielle du module de type fini N.

2.4 - Ajoutons encore la curiosité suivante, peut-être sans effet pratique.

Proposition. *Soit M un module sur un anneau noethérien A. Alors M est pan-caténaire si et seulement si, pour tous $T \subset N \subset M$ tels que N est de type borné, T de type fini et $\mathrm{Ann}_A N/T = p$, où p est un idéal premier de A, $p \in \mathrm{Ass}_A N/T$.*

■ Si M est pan-caténaire, N/T est de type fini et engendré par des éléments $x_1, \ldots, x_n$; $p = \cap_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Ann}_A x_i$ et il existe un indice i tel que $p = \mathrm{Ann}_A x_i$.

D'autre part, s'il existe un sous-module de M qui soit de type borné mais non de type fini, $E_b(M)$ est non vide. Comme A est noethérien il existe dans $E_b(M)$ un élément maximal q. q est premier et de la forme $q = \mathrm{Ann}_A N/T$, où N est de type borné et n'est pas de type fini et $T \subset N$ est de type fini.

N/T est de type borné, $N/T \otimes_{A/q} K$ (où K désigne le corps des fractions de A/q) est de type borné et donc de type fini. Il existe donc dans N un module de type fini T' contenant T tel que $N/T' \otimes_{A/q} K = \{0\}$. Or, $\mathrm{Ann}_A N/T \subset \mathrm{Ann}_A N/T'$, et lui est donc égal car q est maximal. N/T' est alors un A/q-module de torsion et $q \notin \mathrm{Ass}_A N/T'$.

2.5 - Application du principe de réduction au cas intègre.

Soient M un module sur un anneau A, p un idéal premier de A. On appellera p-torsion de M et on notera $T_p(M)$ le sous-A-module de torsion de $\mathrm{Ann}_M p$.

Proposition. *Soient M un module sur un anneau noethérien A, $p_1, \ldots, p_n$ les idéaux premiers minimaux de $\mathrm{Ann}_A M$, S la partie multiplicative $A - \cup_i p_i$. Supposons que le noyau N de l'application canonique de M vers $S^{-1}M$ soit de type fini. Alors, pour tout ensemble X, M^X est pan-caténaire si M l'est.*

■ Soit $x \in T_{p_i}(M)$. $\mathrm{Ann}_A x$ contient strictement p_i et ne peut donc être contenu dans la réunion des p_i. Il en résulte que $T_{p_i}(M)$ est contenu dans N. $T_{p_i}(M)$ est donc de type fini. On a la suite exacte de A/p_i-modules :

$$0 \to T_{p_i}(M) \to \mathrm{Ann}_M p_i \to Q_i \to 0$$

d'où la suite exacte :

$$0 \to T_{p_i}(M)^X \to (\mathrm{Ann}_M p_i)^X \to Q_i^X \to 0 .$$

$T_{p_i}(M)^X$ est pan-caténaire (Théorème 1.2.1) et Q_i^X l'est aussi car Q_i est un module sans torsion sur l'anneau noethérien intègre A/p_i ([4], Théorème 1.1) donc $(\mathrm{Ann}_M\, p_i)^X$ l'est aussi ([6], 3.2.2). Pour conclure, il suffit d'utiliser 2.3 en remarquant que $\mathrm{Ann}_{M^X}\, p_i = (\mathrm{Ann}_M\, p_i)^X$ et que les idéaux premiers minimaux de M et M^X sont les mêmes car $\mathrm{Ann}_A\, M = \mathrm{Ann}_A\, M^X$. ∎

3 - Le théorème de structure.

3.1 - Le cas semi-local.

3.1.1 - Proposition. *Soit M un module sur un anneau semi-local noethérien de dimension un. Alors M est extension essentielle d'un sous-module pan-caténaire.*

■ En effet, le spectre maximal de A est de dimension nulle et $Z(M) = \cup\{p | p \in \mathrm{Ass}_A M\}$ est contenu dans une réunion finie d'idéaux maximaux. On applique alors ([6], Théorème 4.4). ■

3.1.2 - Soit M un module sur un anneau A. On notera $\nu(M)$ la borne supérieure dans $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ des entiers $g(T)$, où T parcourt l'ensemble des sous-modules de type fini de M.

On posera : $n + \infty = \infty + n = \infty + \infty = \infty$.

Lemme. *Soit $0 \to N \to M \xrightarrow{\varphi} P \to 0$ une suite exacte de A-modules. Alors $\nu(N) \leq \nu(M)$, $\nu(P) \leq \nu(M)$ et $\nu(M) \leq \nu(N) + \nu(P)$, de sorte que $\nu(M) < \infty$ si et seulement si $\nu(N) < \infty$ et $\nu(P) < \infty$.*

■ Le fait que $\nu(N) \leq \nu(M)$ résulte de la définition de ν. Montrons que $\nu(P) \leq \nu(M)$: soit T un sous-module de type fini de P tel que $g(T) = d$. Il existe alors un sous-module S de type fini de M tel que $g(S) \leq d$ et $\varphi(S) = T$. Comme $g(\varphi(S)) \leq g(S)$, $g(S) = d$ et $d \leq \nu(M)$.

Montrons encore que $\nu(M) \leq \nu(N) + \nu(P)$: soit S un sous-module de type fini de M. Il existe $S' \subset S$ tel que $\varphi(S') = \varphi(S)$ et $g(S') \leq g(\varphi(S)) \leq \nu(P)$.

Il vient : $S = S' + S \cap \ker\varphi$ et $S = S' + S''$, S'' de type fini, $S'' \subset S \cap \ker\varphi$; d'où $g(S) \leq \nu(N) + \nu(P)$. Comme S est arbitrairement choisi dans M, la propriété en résulte. ■

3.1.3 - Proposition. *Soient A un anneau semi-local noethérien de dimension un et M un A-module.*

1) $\nu(A) < \infty$;

2) Si M est de type fini et $g(M) \leq d$, alors $\nu(M) \leq d\,\nu(A)$:

3) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) M est de type borné ;

(ii) $\nu(M) < \infty$.

■ 1) Le lecteur désireux de trouver une démonstration de ce résultat consultera utilement [5], Théorème 1.1 et Corollaire 1.2.

2) Il suffit de remarquer qu'il existe une suite exacte :

$$A^d \to M \to 0 .$$

En effet, par itération du lemme 3.1.2, $\nu(A^d) \leq d\,\nu(A)$ et $\nu(M) \leq d\,\nu(A)$ par ce même lemme.

3) (i) $\Rightarrow$ (ii). Il existe un entier d tel que tout sous-module de type fini S de M soit contenu dans un sous-module T de M tel que $g(T) \leq d$. Il en résulte que

$$g(S) \leq \nu(S) \leq \nu(T) \leq d\,\nu(A) ,$$

d'où $\nu(M) \leq d\,\nu(A)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i), il est clair que M est de type borné $\nu(M)$. ■

3.1.4 - Corollaire. *Tout sous-module d'un module de type borné sur un anneau semi-local noethérien de dimension un est de type borné.*

■ C'est la conjonction de 3.1.2 et 3.1.3. ■

3.1.5 - Proposition. *Soit M un module sur un anneau semi-local de dimension un. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M est de type borné ;

(ii) M est extension essentielle d'un sous-module de type fini.

■ (i) $\Rightarrow$ (ii). Par 3.1.1, M est extension essentielle d'un sous-module T pancaténaire et T est de type borné (3.1.4) donc de type fini.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $E(M)$ l'enveloppe injective de M. L'hypothèse sur M implique que $E(M)$ est somme directe d'un nombre fini d'injectifs indécomposables qui sont de type borné par 1.1.6 et M est de type borné comme sous-module du module de type borné $E(M)$. ■

3.1.6 - Théorème. *Soit M un module sur un anneau A semi-local noethérien de dimension un. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M est pan-caténaire ;

(ii) tout sous-module de M extension essentielle d'un sous-module de type fini est de type fini ;

(iii) tout quotient de M par un module de type fini est 1-caténaire ;

(iv) pour tout sous-module N de M et tout $t \in \operatorname{Rad} A$ l'équation $N = tN + T$, où T est de type fini, entraîne $N = T$.

■ (i) $\Leftrightarrow$ (ii). C'est l'objet de la proposition 3.1.5.

(i) $\Rightarrow$ (iii) car tout quotient d'un pan-caténaire par un module de type fini est pan-caténaire.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) l'équation implique que :

$$N/T = t\,N/T\,.$$

Soit $x_0 \in N/T$. On construit par récurrence une suite x_n d'éléments de N/T tels que $x_n = t\,x_{n+1}$. Comme N/T est 1-caténaire, il existe un indice m tel que $Ax_m = Ax_{m+1}$, d'où $x_{m+1} = \alpha x_m = \alpha t x_{m+1}$, $(1-\alpha t)x_{m+1} = 0$ et $(1-\alpha t)x_0 = 0$. Mais $1 - \alpha t$ est inversible et $N/T = \{0\}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Rappelons d'abord que tout-module B de type borné d sur un anneau artinien A est de type fini. En effet, il existerait, dans le cas contraire, une suite strictement croissante de sous-modules B_n de B tels que $g(B_n) \leq d$. Mais $l(B_n) \leq d\,l(A)$ et pour $n > d\,l(A)$, $l(B_n)$ serait strictement supérieur à $d\,l(A)$, d'où le résultat.

Soit alors N un sous-module de type borné de M. Notons I le radical de A. N/IN est de type borné sur l'anneau artinien A/I et donc de type fini. Il en résulte que :

$$N = IN + T \quad \text{où } T \text{ est de type fini.}$$

Les hypothèses sur A impliquent qu'il existe $t \in I$ tel que $I = \sqrt{At}$ et donc $I^n \subset At$. D'où, comme par itération, $N = I^n N + T$, il vient $N = tN + T$ et $N = T$. ■

3.1.7 - Corollaire. *Soit M un module sur un anneau semi-local noethérien. Soient $p_1, \ldots, p_n$ les idéaux premiers minimaux de $\operatorname{Ann}_A M$ et S la partie multiplicative $A - \cup p_i$.*

Supposons que $S^{-1}M = \{0\}$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est pan-caténaire ;*

(ii) M *est 1-caténaire ;*

(iii) pour tout sous-module N *de* M *et tout* $t \in \operatorname{Rad} A$, $N = tN$ *implique* $N = \{0\}$.

■ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $x_0 \in N$. On construit par récurrence $x_n = tx_{n+1}$. L'hypothèse implique que la suite est stationnaire. Il existe donc un entier m tel que $x_{m+1} = \alpha x_m$, d'où $(1 - \alpha t)x_{m+1} = 0$, $(1 - \alpha t)x_0 = 0$ et $x_0 = 0$, car $t \in \operatorname{Rad} A$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). On applique 3.1.6 : Soient $N \subset M$ et $t \in \operatorname{Rad} A$ tels que $N = tN + T$ où T est de type fini. Comme $S^{-1}T = \{0\}$, il existe $s \in S$ tel que $sT = \{0\}$, d'où $sN = tsN$, $sN = \{0\}$ et N est module sur l'anneau artinien $A/\operatorname{Ann}_A N + As$, car $\operatorname{Ann}_A M \subset \operatorname{Ann}_A N$.

Notons A' cet anneau. L'image u de t dans A' appartient à $\operatorname{Rad} A'$. Il existe donc un entier n tel que $u^n = 0$. Il vient : $N = uN + T$, $N = u^n N + T = T$. ■

3.2 - Le cas global.

3.2.1 - Lemme. *Soit* M *un module 1-caténaire sur un anneau noethérien* A *de dimension un. Alors* $\operatorname{Ass}_A M$ *est fini.*

■ Il y aurait, dans le cas contraire, un ensemble infini d'idéaux maximaux associés à M et $\operatorname{Ass}_A M$ ne satisferait pas Et(1) ([6],3.3). On conclut par ([6], 3.3.2). ■

3.3.2 - Lemme. *Soit* M *un module sur un anneau noethérien* A. *Supposons que* $\operatorname{Ass}_A M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ *où les* m_i *sont des idéaux maximaux de* A. *Soit* S *la partie multiplicative* $S = A - \cup m_i$. *Alors tout sous-module de* M *est module sur l'anneau semi-local* $S^{-1}A$.

■ Soient $N \subset M$ et $s \in S$. Comme $\operatorname{Ass}_A N \subset \operatorname{Ass}_A M$, l'homothétie de rapport s est injective dans N.

Montrons qu'elle est surjective : on a, en effet :

$$A = As + \prod_i m_i \,.$$

Notons I le produit des m_i. Soit $x \in N$. Il existe un entier n tel que $I^n x = \{0\}$. Comme $A = As + I^n$, il existe $a \in A$ tel que $x = s(ax)$; ce qui permet de conclure. ■

3.2.3 - Lemme. *Soit M un module de torsion sur un anneau A noethérien intègre de dimension un.*

1) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) M est 1-caténaire et de type borné ;

(ii) M est 1-caténaire et extension essentielle d'un sous-module de type fini ;

(iii) M est de type fini.

2) Si $\mathrm{Ass}_A M$ est fini, M est de type borné si et seulement si il est extension essentielle d'un sous-module de type fini.

■ On remarque que, dans tous les cas, $\mathrm{Ass}_A M$ est fini (par 3.2.1, si M est 1-caténaire et, trivialement, si M est de type fini) et que ses éléments sont des idéaux maximaux de A. Par 3.2.2, tous les sous-A-modules de M sont aussi des A'-modules où A' est un anneau semi-local noethérien intègre de dimension un de la forme $S^{-1}A$, de sorte que les propriétés (i), (ii) et (iii) sont équivalentes pour A si et seulement si elles le sont pour A'.

Vérifions à titre d'exemple la propriété d'extension essentielle : si M est extension essentielle de T en tant que A-module, soit $x \in M - T$. Il existe $a \in A$ tel que $ax \in T$ et $ax \neq 0$. Mais $a \in A'$ et T est aussi un A'-module.

Inversement, si M est extension essentielle du A'-module T, il existe $a' \in A'$ tel que $a'x \in T$, $a'x \neq 0$. Mais $a'x \in A'x = Ax$, de sorte qu'il existe $a \in A$ tel que $a'x = ax \neq 0$, et ax appartient au A-module T.

1) (ii) $\Rightarrow$ (i) par 3.1.5.

(i) $\Rightarrow$ (iii) par 3.1.7, M est aussi pan-caténaire et donc de type fini.

(iii) $\Rightarrow$ (i) trivialement.

2) résulte de 3.1.5. ■

3.2.4 - Lemme. *Soit T un module sans torsion sur un anneau A noethérien intègre de dimension un. Supposons que T soit extension essentielle d'un sous-module N de type fini et que T/N soit 1-caténaire. Alors T est de type fini.*

■ Considérons la suite exacte :

$$0 \to N \xrightarrow{i} T \to Q \to 0\,.$$

Comme i est essentiel, Q est de torsion et $\mathrm{Ass}_A Q = \{m_1, \ldots, m_k\}$, où les m_i sont des idéaux maximaux de A. Soit S la partie multiplicative $A - \cup m_i$. Q est alors un $S^{-1}A$-module 1-caténaire de torsion (3.2.2). La suite :

$$0 \to S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}i} S^{-1}T \to S^{-1}Q \to 0$$

est exacte et $S^{-1}i$ est essentiel, car $S^{-1}T$ est sans torsion.

Il en résulte que $S^{-1}T$ est un $S^{-1}A$-module de type borné (3.1.5) et donc $S^{-1}Q$ l'est aussi. $S^{-1}Q$ est donc un $S^{-1}A$-module de type fini (3.2.3) et, par conséquent, un A-module de type fini (3.2.2). T est donc de type fini. ■

3.2.5 - Théorème. *Soit M un module sur un anneau A noethérien de dimension un. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M est pan-caténaire ;

(ii) pour tout sous-module N de type fini de M, M/N est 1-caténaire ;

(iii) a) pour tout sous-module N de type fini de M, $\mathrm{Ass}_A M/N$ est fini ;

b) toute extension essentielle d'un sous-module de type fini contenue dans M est de type fini.

■ (i) ⇒ (ii) trivialement.

(ii) ⇒ (iii) L'assertion a) résulte de 3.2.1. Pour démontrer b), remarquons d'abord que tout sous-module de M satisfait (ii). Y satisfont en particulier les $\mathrm{Ann}_M p$, où p parcourt l'ensemble des idéaux premiers minimaux de $\mathrm{Ann}_A M$. En vertu de 2.3, on peut supposer que A est intègre. Soit alors $S \subset M$, S extension essentielle d'un sous-module N de type fini. Le module de torsion $T(S)$ de S est 1-caténaire et extension essentielle du module de type fini $T(S) \cap N$. $T(S)$ est donc de type fini par 3.2.3 et l'on peut, sans inconvénient, supposer que $T(S) \subset N$. Considérons alors l'injection :

$$0 \to N/T(S) \to S/T(S) .$$

Montrons qu'elle est essentielle. Désignons par φ l'application canonique de S sur $S/T(S)$. Soient $x \in S/T(S) - N/T(S)$ et $y \in S$ tel que $x = \varphi(y)$. Il vient : $y \notin N$ et il existe $a \in A$ tel que $ay = n \neq 0$, où $n \in N$. $ax = \varphi(n) \in N/T(S)$ et $ax = 0$ entraînerait $a = 0$ car $S/T(S)$ est sans torsion, ce qui est impossible.

Par 3.2.4, $S/T(S)$ est de type fini et S l'est aussi, car $T(S)$ l'est.

(iii) $\Rightarrow$ (i). On peut, par 2.3, supposer A intègre, car tout sous-module de M satisfait aux assertions de (iii). Soit T un sous-module de type borné de M, $T \otimes_A K$ (où K désigne le corps des fractions de A) est de type borné sur K et donc de type fini sur K. Il existe $N \subset T$, N de type fini, tel que $T/N \otimes_A K = \{0\}$. On considère la suite exacte :

$$0 \to N \to T \to T/N \to 0 .$$

T/N est de type borné, de torsion et $\mathrm{Ass}_A\, T/N$ est fini. Il existe donc $N' \supset N$ tel que N'/N soit de type fini et tel que T/N soit extension essentielle de N'/N, par 3.2.3. Il en résulte que N' est de type fini et que T est extension essentielle de N'. T est donc de type fini par (iii), ce qui permet de conclure. ■

Références

[1] N. Bourbaki, "Algèbre commutative", Hermann, Paris, 1965.

[2] P. Gabriel, Objects injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot, t.12, Année 1958/1959 : Algèbre et Théorie des Nombres, exposé 17.

[3] H. Matsumura, "Commutative Algebra", Benjamin, Reading, 1980.

[4] A. M. Nicolas, Sur les modules tels que toute suite croissante de sous-modules engendrés par n générateurs soit stationnaire, *J. Algebra* **60** (1979), 249-260.

[5] J.D. Sally and W.V. Vasconcelos, Stable rings, *J. of Pure and Applied Algebra* **4** (1974), 319-336.

[6] J. Venken, Remarque sur le théorème chinois, à paraître.

04 3865437

RÉSUMÉ

Nous présentons, dans ce travail, une généralisation du théorème "chinois" qui affirme que, sous une hypothèse bien connue, une somme directe finie de modules monogènes est monogène. Le résultat porte sur la possibilité d'engendrer par d éléments une somme directe finie de modules monogènes. L'outil que nous utilisons à cette fin est la notion de famille $(d+1)$-étrangère d'idéaux d'un anneau commutatif.

Les applications concernent les modules de type borné d, modules qui sont limite inductive de modules engendrés par d générateurs, ainsi que les modules pan-caténaires. Ceux-ci généralisent les modules noethériens en ce sens que tout sous-module de type borné d est de type fini et ceci pour tout entier naturel d. L'extension du théorème chinois au cas de familles infinies de modules monogènes fournit un bon exemple de module de type borné. Le résultat clef est le fait que toute famille d'annulateurs d'éléments non nuls d'un module pan-caténaire possède la propriété que toute sous-famille $(d+1)$-étrangère est finie. Cela permet d'étudier la stabilité de la notion de pan-caténarité des modules par passage aux sommes directes infinies et de caractériser l'assassin des modules pan-caténaires sur un anneau noethérien dont le spectre maximal est de dimension finie.

Enfin, dans la deuxième partie, nous donnons un théorème de structure des modules pan-caténaires sur un anneau noethérien de dimension un, théorème qui généralise des résultats similaires de Pontryagin sur l'anneau des entiers et de Nicolas sur un anneau de Dedekind.

MOTS CLÉS : **Théorème chinois - Système de générateurs -
Module de type borné - Module pan-caténaire -
Idéaux premiers associés - Extension essentielle.**