

55376
1989
5

55376
1989
5

N° d'ordre : 358

THESE DE DOCTORAT

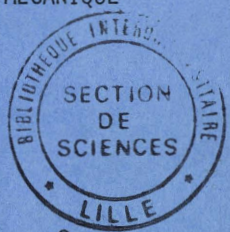
présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MECANIQUE

par



MONNIER JEAN-CLAUDE

HYDRODYNAMIQUE DES ECOULEMENTS TURBULENTS DANS LES CELLULES D'ELECTRODEPOSITION.

Soutenue le 31 Mai 1989

devant la Commission d'examen

Membres du Jury :

- Rapporteur(s) : M. HA MINH HIEU, Professeur, I.N.P. Toulouse.
- M. MICHEAU, Professeur, U.S.T.L. Flandres Artois.
- Membres : M. WINAND, Professeur, U.L. Bruxelles.
- M. DYMENT, Professeur, U.S.T.L. Flandres Artois.
- M. ROUAULT, Directeur technique, ALB.
- M. STANISLAS, Directeur technique, ERA-IMFL.



55376
1989
5

55376
1989
5

N° d'ordre : 358

T E
présentée à

ET TECHNIQUES

À RETOURNER LE

ARTOIS

pers 28129

r
en Mécanique

aude

ENTS TURBULENTS
ÉTRODEPOSITION

Soutenue le 31 Mai 1989



030 024046 8

Président : Monsieur DYMENT, Professeur à l'USTLFA.

Rapporteurs : Monsieur HA MINH, Professeur à l'INP Toulouse,
Monsieur MICHEAU, Professeur à l'USTLFA.

Examineurs: Monsieur WINAND, Professeur à l'UL Bruxelles,
Monsieur ROUAULT, Directeur Technique, AL Beautor,
Monsieur STANISLAS, Ingénieur habilité ONERA-IMFL.



AVANT PROPOS

Ce travail a été effectué dans le cadre d'une Convention Industrielle pour la Formation par la Recherche entre les Aciérie et Laminoirs de Beautor et l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille. Je remercie Monsieur GIBON, Président Directeur Général des A.L.B, et Monsieur BAHUREL, Directeur de l'I.M.F.L, de m'avoir permis de réaliser ce travail.

Je suis reconnaissant envers Monsieur le Professeur DYMENT de m'avoir accueilli dans son équipe et de présider ce jury.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance et ma profonde estime à Monsieur STANISLAS, Ingénieur dans le groupe de Mécanique des Fluides Fondamentale de l'I.M.F.L, pour l'encadrement scientifique et le soutien moral qu'il a su m'apporter et qui m'ont permis de mener à bien cette étude.

Je tiens également à remercier Monsieur ROUAULT, Directeur Technique des A.L.B, pour l'intérêt qu'il a constamment témoigné à l'égard de ce travail.

Je remercie également Monsieur HA MINH, Professeur à l'I.N.P Toulouse, Monsieur WINAND, Professeur à l'U.L Bruxelles, et Monsieur MICHEAU, Professeur à l'U.S.T Lille, d'avoir témoigné leur intérêt à l'examen de ce travail et accepté de participer au jury.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Messieurs VANHEE, DUPONT et BOUCHARD pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la partie expérimentale de cette étude.

Je remercie également le bureau d'études et l'atelier des A.L.B pour leur participation à la conception et à la réalisation d'une maquette expérimentale pour ce travail, et en particulier Messieurs BRUN, HUBERT et LESTIENNE.

Je veux aussi exprimer ma reconnaissance aux membres du groupe Mécanique des Fluides Fondamentale de l'I.M.F.L. Je tiens à remercier tout particulièrement Mademoiselle BERNARD pour l'aide précieuse qu'elle m'a apportée dans la réalisation de ce mémoire.

Enfin je remercie l'Agence Nationale pour la Recherche Technique qui, en accordant une subvention (contrat CIFRE) aux A.L.B, a financé partiellement ce travail de recherche.

TABLE DES MATIERES

PREMIERE PARTIE:

DESCRIPTION ET MODELISATION DU PROBLEME

CHAPITRE 1: Description du problème industriel.....	1
1.1 Introduction.....	1
1.2 Description d'une ligne d'électro-zingage.....	2
1.3 Fonctionnement d'une cellule d'électro-zingage...	3
1.4 Problème industriel.....	4
CHAPITRE 2: Modélisation hydrodynamique.....	9
2.1 Introduction.....	9
2.2 Phénomènes chimiques.....	10
2.3 Phénomènes électriques.....	15
2.4 Phénomènes hydrauliques.....	18

DEUXIEME PARTIE:

MODELISATION DE L'ECOULEMENT DANS LES ZONES ETABLIES

INTRODUCTION.....	26
CHAPITRE 1: Formulation mathématique du problème.....	27
1.1 Introduction.....	27
1.2 Equations de NAVIER-STOKES.....	27
1.3 Equations de REYNOLDS.....	30
1.4 Problème de fermeture.....	34
CHAPITRE 2: Choix d'une base de données expérimentales.....	42
2.1 Introduction.....	42
2.2 Ecoulements de POISEUILLE.....	43
2.3 Ecoulements de COUETTE pur.....	47
2.4 Ecoulements de COUETTE avec gradient de pression.	51

CHAPITRE 3: Fermeture basée sur l'hypothèse de BOUSSINESQ....	53
3.1 Introduction.....	53
3.2 Simplifications des équations du mouvement.....	53
3.3 Hypothèse de BOUSSINESQ.....	57
3.4 Modèle de longueur de mélange.....	59
3.5 Modèle à une équation de transport.....	82
3.6 Modèle à deux équations de transport.....	94
CHAPITRE 4: Conclusion de la deuxième partie.....	109

TROISIEME PARTIE:
ETUDE EXPERIMENTALE DE LA ZONE D'INJECTION

INTRODUCTION.....	114
CHAPITRE 1: Etude par Similitude.....	116
1.1 Introduction.....	116
1.2 Règles de similitude.....	117
1.3 Dimensionnement de la maquette.....	119
CHAPITRE 2: Installation expérimentale.....	121
2.1 Description de l'installation expérimentale.....	121
2.2 Description de la maquette.....	122
2.3 Moyens de mesure.....	123
2.4 Qualification de la maquette.....	125
CHAPITRE 3: Résultats expérimentaux.....	127
3.1 Présentation des résultats.....	127
3.2 Transpositions des résultats sur la cellule.....	130
3.3 Analyse des résultats expérimentaux.....	131
3.4 Conclusions.....	136

QUATRIEME PARTIE:
SYNTHESE ET PERSPECTIVES

CHAPITRE 4: Synthèse et perspectives.....	137
---	-----

REFERENCES:

ANNEXES:

ANNEXE A: Tableau récapitulatif des expériences.

ANNEXE B: Méthode de résolution de CONSTANTINESCU.

ANNEXE C: Modèle de ELROD & NG.

ANNEXE D: Coordonnées des prises de pression utilisées pour l'étude finale.

FIGURES:

NOTATIONS PRINCIPALES

$x_1 = x$	Direction de l'écoulement moyen
$x_2 = y$	Direction perpendiculaire aux parois, dirigée de la paroi fixe vers celle mobile
$x_3 = z$	Direction pour que $(0, x_1, x_2, x_3)$ forme un trièdre direct
$h = 2R$	Hauteur de l'écoulement suivant la direction x_2
L	Longueur totale du canal
L_1	Longueur du canal amont
L_2	Longueur du canal aval
L_0	Largeur de la fente d'injection
ℓ	Largeur du canal
r	Rayon du tambour
P	Pression statique instantanée
\bar{P}	Pression statique moyenne
P'	Fluctuation de pression
\hat{P}	Pression motrice moyenne
P_a	Pression atmosphérique
$\hat{P}_1(x)$	Pression motrice amont
$\hat{P}_2(x)$	Pression motrice aval
u_i	Composante de la vitesse instantanée dans la direction i
\bar{u}_i	Composante de la vitesse moyenne dans la direction i
u'_i	Composante de la vitesse fluctuante dans la direction i $u'_1 = u'$ $u'_2 = v'$ $u'_3 = w'$
$\overline{u'_i u'_j}$	Corrélation vitesse-vitesse $\overline{u'_1 u'_1} = \overline{u' u'}$ $\overline{u'_2 u'_2} = \overline{v' v'}$ $\overline{u'_3 u'_3} = \overline{w' w'}$ $\overline{u'_1 u'_2} = \overline{u' v'}$
$-\rho \overline{u'_i u'_j}$	Contrainte de REYNOLDS
K	Énergie cinétique turbulente
ϵ	Taux de dissipation isotrope
ϵ_{ij}	Taux de dissipation isotrope de la corrélation $u'_i u'_j$

$U = \bar{u}_1$	Composante de la vitesse moyenne dans la direction x_1
$V = \bar{u}_2$	Composante de la vitesse moyenne dans la direction x_2
U_b	Vitesse de la paroi mobile
U_0	Vitesse débitante à l'injection
U_1	Vitesse débitante amont
U_2	Vitesse débitante aval
U_{max}	Vitesse maximale du profil de vitesse
U_{min}	Vitesse minimale du profil de vitesse
U_{moy}	Vitesse moyenne du profil de vitesse
Q_0	Débit d'injection
Q_1	Débit du côté amont
Q_2	Débit du côté aval
Re_b	$= \frac{U_b h}{\nu}$
Re_{max}	$= \frac{U_{max} h}{\nu}$
Re_{min}	$= \frac{U_{min} h}{\nu}$
Re_{moy}	$= \frac{U_{moy} h}{\nu}$
δ_{ij}	Symbole de KRONECKER
ϕ	Grandeur instantanée
$\bar{\phi}$	Grandeur moyenne
ϕ'	Grandeur fluctuante
ρ	Masse volumique du fluide
μ	Viscosité dynamique du fluide
ν	Viscosité cinématique du fluide
ν_t	Viscosité turbulente

- $u_\tau =$ Vitesse de frottement pariétale
 $u_{\tau 1} =$ Vitesse de frottement pariétale à $y = 0$
 $u_{\tau 2} =$ Vitesse de frottement pariétale à $y = h$

$$u_{\tau max} = \max(u_{\tau 1}, u_{\tau 2})$$

$$u_\tau^* = \sqrt{u_{\tau 1}^2 + u_{\tau 2}^2}$$

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau}$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

$$[T_{ij}] = [-P\delta_{ij}] + [\tau_{ij}]$$

$$[\bar{T}_{ij}] = [-\bar{P}\delta_{ij}] + [\bar{\tau}_{ij}] + [-\rho \overline{u'_i u'_j}]$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\tau'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$$

LISTE DES FIGURES

PREMIERE PARTIE

- Fig 1-1a Exemple d'utilisation des tôles pré-protégées pour la carrosserie d'automobile (extrait ref <1-2>).
- Fig 1-1b Pourcentage en surface de tôles zinguées pour la carrosserie d'automobile (extrait ref <1-1>).
- Fig 1-2 Schéma de la ligne d'électro-zingage des Aciérie et Laminoirs de BEAUTOR.
- Fig 1-3 Schéma d'une cellule d'électro-zingage de type "RADIACEL".
- Fig 1-4 Variation de la concentration en zinc près de la tôle.
- Fig 1-5a Rendement d'une cathode en fonction de la densité de courant.
- Fig 1-5b Qualité du revêtement de zinc en fonction de la densité de courant et de la vitesse débitante de l'électrolyte (extrait ref <1-3>).
- Fig 1-6a Ecoulement laminaire avec tourbillons de TAYLOR (extrait ref <1-4>).
- Fig 1-6b Ecoulement laminaire avec tourbillons au sein d'un tube cintré.
- Fig 1-7 Schématisation de l'écoulement interne d'une cellule d'électro-zingage.
- Fig 1-8 Simplifications de la configuration d'écoulement au sein d'une cellule d'électro-zingage.

BASE DE DONNEES

- Fig 2-1 Evolution du profil de vitesse moyenne dans les parties établies, en fonction du gradient de pression.
- Fig 2-2 Profils expérimentaux de vitesse moyenne pour des écoulements de POISEUILLE.
- Fig 2-3a Profils de K pour des écoulements de POISEUILLE.
- Fig 2-3b Profils de $\overline{u'u'}$ pour les écoulements de POISEUILLE.
- Fig 2-4 Profils de U_t pour des écoulements de POISEUILLE.
- Fig 2-5 Profils de vitesse moyenne pour des écoulements de COUETTE pur.

- Fig 2-6 Profils de $\overline{u'u'}$ pour des écoulements de COUETTE pur.
- Fig 2-7 Profils de Dt pour des écoulements de COUETTE pur.
- Fig 2-8 Profils de K , $\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$ et $\overline{w'w'}$ pour des écoulements de POISEUILLE et de COUETTE pur.
- Fig 2-9 Profils de vitesse moyenne et de $\overline{u'u'}$ pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression.

MODELE DE CONSTANTINESCU

- Fig 3-1 Prédictions pour deux valeurs de k pour un écoulement de POISEUILLE.
- Fig 3-2 Profils de vitesse pour des écoulements de POISEUILLE.
- Fig 3-3 Profil de $u^+ = f(y^+)$ pour un écoulement de POISEUILLE.
- Fig 3-4 Profil de Dt pour un écoulement de POISEUILLE.
- Fig 3-5 Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE pur
- Fig 3-6 Profil de $u^+ = f(y^+)$ pour un écoulement de COUETTE pur.
- Fig 3-7 Profil de Dt pour un écoulement de COUETTE pur.
- Fig 3-8 Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression.
- Fig 3-9 Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE sans vitesse débitante.
- Fig 3-10 Prédictions du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante.

MODELE DE LONGUEUR DE MELANGE

- Fig 4-1 Evolution de α_0 en fonction du gradient de pression.
- Fig 4-2 Profils de vitesse pour des écoulements de POISEUILLE.
- Fig 4-3 Profil de $u^+ = f(y^+)$ pour un écoulement de POISEUILLE.
- Fig 4-4 Profil de Dt pour un écoulement de POISEUILLE.
- Fig 4-5 Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE pur.
- Fig 4-6 Profil de $u^+ = f(y^+)$ un écoulement COUETTE pur.
- Fig 4-7 Profil de Dt pour un écoulement de COUETTE pur.

- Fig 4-8 Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression.
- Fig 4-9 Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE sans vitesse débitante.
- Fig 4-10 Prédiction du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante.
- Fig 4-11 Comparaisons entre deux modèles. Profils de vitesse et de Vt .
- Fig 4-12 Comparaisons entre deux modèles. Profils de u^+ en fonction de y^+ .

MODELE A UNE EQUATION DE TRANSPORT

- FIG 5-1 Prédictions de K et de Vt pour des écoulements de POISEUILLE.
- FIG 5-2 Prédictions d'un écoulement de COUETTE pur.
- FIG 5-3 Prédictions d'un écoulement de COUETTE pur.
- FIG 5-4 Prédictions d'écoulements de COUETTE pur.
- FIG 5-5 Prédiction d'un écoulement de POISEUILLE.
- FIG 5-6 Prédictions d'écoulements de COUETTE avec gradient de pression.
- FIG 5-7 Prédictions d'écoulements de COUETTE avec gradient de pression.

MODELE A DEUX EQUATIONS DE TRANSPORT

- FIG 6-1 Prédictions d'un écoulement de POISEUILLE.
- FIG 6-2 Prédiction de K pour un écoulement de POISEUILLE.
- FIG 6-3 Prédictions d'un écoulement de COUETTE pur.
- FIG 6-4 Prédictions d'écoulements de COUETTE avec gradient de pression.
- FIG 6-5 Prédictions d'écoulements de COUETTE avec gradient de pression.

CONCLUSIONS DE LA DEUXIEME PARTIE

- FIG 7-1 Comparaisons entre trois modèles de turbulence:
Prédictions d'un écoulement de COUETTE pur.
- FIG 7-2 Comparaisons entre trois modèles de turbulence:
Prédictions d'un écoulement de POISEUILLE.
- FIG 7-3 Comparaisons entre trois modèles de turbulence:
Prédictions d'un écoulement de type COUETTE.
- FIG 7-4 Comparaisons entre trois modèles de turbulence:
Prédictions d'un écoulement de type POISEUILLE.

PARTIE EXPERIMENTALE

- FIG 8-1a Schéma de l'installation expérimentale.
- FIG 8-1b Schéma de la maquette.
- FIG 8-2 Photos de l'installation expérimentale.
- FIG 8-3 Photos des appareils de mesures.
- FIG 8-4 Instrumentation du côté aval de la maquette.
- FIG 8-5 Instrumentation du côté amont de la maquette.
- FIG 8-6 Répartition transversale de la pression.
- FIG 8-7 Evolution de la pression du côté aval de la maquette.
- FIG 8-8 Graphe des conditions d'expériences.
- FIG 8-9 Répartition de pression dans la maquette en fonction
à 8-17 du débit injecté pour une vitesse de bande donnée.
- FIG 8-18 Coefficient de perte de charge singulière à
l'injection.
- FIG 8-19 Répartition du débit injecté dans la maquette.
- FIG 8-20 Répartition du débit injecté.
- FIG 8-21 Variation du gradient de pression en fonction de la
à 8-25 vitesse débitante pour deux vitesses de bande.
- FIG 8-26 Evolution des coefficients D et E
- FIG 8-27 Modélisation de la répartition du débit d'injection de
la maquette.
- FIG 8-28 Modélisation de la répartition du débit injecté.

SYNTHESE ET PERSPECTIVES

- FIG 9-1 Abaque pour des cellules d'électro-zingage.
- FIG 9-2 Simulation des écoulements internes des cellules
d'électro-zingage.
- FIG 9-3 Estimation de la structure de dépôt dans les cellules
d'électro-zingage.
- FIG 9-4 Simulation d'une nouvelle cellule d'électro-zingage.


```
*****
*
*          PREMIERE PARTIE:          *
*
*
* DESCRIPTION ET MODELISATION DU PROBLEME *
*
*****
```


DESCRIPTION DU PROBLEME INDUSTRIEL1.1 Introduction:

Le véhicule que peut posséder tout un chacun, passe la majeure partie de son existence à l'extérieur, exposé à un environnement agressif (pluies acides, embruns salins, produits de déneigement, projections de gravillons, etc...). Ce milieu défavorable détériore la carrosserie des véhicules. De tout temps, le secteur automobile s'est intéressé à la lutte contre cette corrosion atmosphérique.

Depuis une dizaine d'années, les nouvelles exigences de qualité des consommateurs conduisent les constructeurs d'automobiles à proposer des garanties anti-corrosion de longue durée sur la carrosserie de leurs véhicules (par ex: garantie de 6 ans pour la protection contre la perforation et de 1 an contre la corrosion d'aspect). De telles propositions n'ont pu être faites que grâce à l'utilisation de plus en plus massive de tôles pré-protégées (par ex: galvanisées ou électro-zinguées) pour la fabrication des éléments de carrosserie (fig 1-1a). Certains constructeurs d'automobiles proposent même des véhicules dont la carrosserie est constituée à 100 % de tôles zinguées (fig 1-1b).

Cette pré-protection des tôles d'acier consiste à déposer sur une ou deux faces une fine couche (une dizaine de microns d'épaisseur) d'un métal ayant une bonne tenue à la corrosion. Le matériau de protection généralement choisi est du zinc ou un alliage riche en cet élément. Les raisons principales du choix du zinc comme métal de protection sont, premièrement sa bonne tenue à la corrosion atmosphérique, et deuxièmement la

protection cathodique qu'il assure à l'acier dans le cas de présence ou d'apparition de discontinuités dans le revêtement. De plus, ce dépôt superficiel de zinc n'altère pas trop les propriétés initiales de malléabilité et d'adhérence de la peinture, dont la bande d'acier bénéficie. Cependant il diminue la soudabilité de la tôle, ce qui a freiné initialement l'utilisation des tôles zinguées, et notamment de celles revêtues double face. Les nouveaux robots de soudage permettent maintenant de souder les tôles zinguées aussi rapidement que les tôles nues.

En 1982, 12 % (en surface) de la carrosserie des voitures françaises était protégée contre la corrosion par des tôles zinguées. En 1987, ce pourcentage s'élève à 34 %, et pour 1995 il est estimé entre 60 à 70 % <1-1>. En France, de 1981 à 1984, la consommation de ces tôles pré-revêtues dans le secteur automobile a augmenté de plus de 60% <1-2>. Devant cette nouvelle demande, la nécessité d'augmenter la productivité des lignes d'électro-zingage existantes ou la construction de nouvelles installations mieux optimisées, se fait donc sentir.

Actuellement, pour améliorer leur compétitivité les constructeurs d'automobiles, mettent en place un processus de "QUALITE TOTALE", qui n'est pas sans conséquence pour les fournisseurs de ce secteur d'activité. Les producteurs de tôles électro-zinguées devront mieux maîtriser leurs processus de fabrication pour améliorer la qualité de leur production.

L'augmentation de production des lignes d'électro-zingage et l'amélioration de la qualité du dépôt de zinc nécessitent des recherches approfondies en électrochimie.

1.2 Description d'une ligne d'électro-zingage:

Depuis 1976, la société des Aciérie et Laminoirs de Beautor fabrique des tôles électro-zinguées sur une ou deux faces. Les bandes de métal se présentent sous forme de bobine

pesant environ 20 tonnes. La tôle d'acier a une épaisseur comprise entre 0,4 et 3 mm, pour une largeur variant de 700 à 1500 mm.

La ligne d'électro-zingage connue sous le nom de procédé "RADIACEL" est constituée de trois parties principales (fig 1-2): Une zone d'entrée, une zone de revêtement et une zone de sortie.

Une partie de la zone d'entrée est constituée de deux dérouleuses, une cisaille, une soudeuse, et un accumulateur d'entrée, ce qui permet une alimentation continue de la ligne. Dans une seconde partie de cette zone d'entrée, différentes opérations sur les faces de la tôle (dégraissage, avivage, rinçage et séchage) sont effectuées pour assurer une bonne adhérence du zinc sur cette bande de métal.

L'opération d'électro-zingage de la bande de métal s'effectue au sein des huit cellules constituant la zone de revêtement. Le fonctionnement de celles-ci sera expliqué dans le paragraphe suivant. Pour effectuer de l'électro-zingage simple face, la tôle d'acier passe successivement dans les cellules référencées 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 et 18 sur la figure 1-2. Tandis que pour effectuer un dépôt sur les deux faces de la bande, l'ordre de passage de la tôle au sein des cellules est le suivant: 11, 12, 13, 14, 18, 17, 16, 15.

Dans la zone de sortie, avant d'être reconditionnée sous forme de bobine, la tôle électro-zinguée peut subir un traitement de finition (phosphatation ou chromatisation). Dans cette dernière partie il est effectué aussi un contrôle tant quantitatif que qualitatif du dépôt de zinc.

1.3 Fonctionnement d'une cellule d'électro-zingage:

L'opération d'électro-zingage s'effectue au sein de huit cellules de type "RADIACEL" (fig 1-3).

Ces cellules sont constituées principalement d'un tambour portant la bande de métal et d'une carcasse comportant une anode insoluble en plomb. Le tambour a un diamètre d'environ 2 m pour une longueur voisine de 2 m. La distance entre le tambour et l'anode de la carcasse est d'environ 10 mm.

Un champ électrique est créé entre le tambour (cathode) et l'anode insoluble en plomb située de part et d'autre de l'injection de l'électrolyte. La différence de potentiel entre la cathode et l'anode est d'une dizaine de volts. Pour avoir une vitesse de déposition du zinc acceptable, la densité de courant électrique dans la cellule (rapport de l'intensité du courant d'électrolyse à la surface de la cathode) doit être élevée. Sur la ligne d'électro-zingage, elle est de 100 A/dm², ce qui correspond à une intensité de 40000 Ampères par cellule.

Le procédé d'électro-zingage des cellules étant à anode insoluble, le zinc nécessaire à la réaction est contenu dans l'électrolyte. Le fluide électrolytique est une solution aqueuse d'acide sulfurique et de sulfate de zinc dont la température est maintenue aux environs de 50°C. La concentration en zinc est de l'ordre de 50 grammes par litre, celle en acide sulfurique de l'ordre de 100 grammes par litre. Cette solution électrolytique est injectée à la base de la cellule et s'écoule entre le tambour recouvert par la tôle et l'anode. Puis cet électrolyte est évacué par les côtés amont et aval. L'électro-zingage de la tôle appauvrit la concentration en zinc de l'électrolyte: il est donc nécessaire de le régénérer. Cette opération s'effectue dans une station située à côté de la ligne par dissolution du zinc pur en milieu sulfurique.

La bande de métal nu pénètre du côté amont de la cellule avec une vitesse d'environ 60 m/mn, et s'enroule sur le tambour. La tôle étant en contact électrique avec le tambour, elle devient une anode pour la réaction d'électro-zingage. Le zinc se dépose donc sur la face qui est en contact avec le fluide

électrolytique. Finalement, la tôle électro-zinguée sort du côté aval de la cellule.

1.4 PROBLEME INDUSTRIEL:

Le problème industriel est double:

- Augmentation de la production de la ligne d'électro-zingage existante.
- Amélioration de la qualité du dépôt de zinc.

a) Augmentation de la production de la ligne:

Pour augmenter la production de la ligne existante, il faut accroître la vitesse de déplacement de la bande de métal. Cet accroissement de vitesse implique deux choses:

Premièrement, pour déposer la même épaisseur de zinc sur la tôle, il faut soit augmenter le nombre de cellules de la ligne, soit accroître la densité de courant. Etant donnée l'implantation de la ligne, élever l'intensité du courant d'électrolyse semble la solution la plus simple.

Deuxièmement, l'écoulement de l'électrolyte interne à la cellule est modifié par cette augmentation de vitesse de la bande. La distance entre la bande et l'anode étant constante dans la cellule, les débits d'évacuation amont et aval de l'électrolyte sont égaux, lorsque la bande de métal est immobile. Mais la mise en mouvement de la tôle provoque un déséquilibre de ces deux débits, d'autant plus important que la vitesse de la bande est grande. Pour un débit d'injection donné, la quantité d'électrolyte évacué du côté amont diminue avec l'augmentation de la vitesse de bande. Il existe donc une vitesse critique de la tôle, à partir de laquelle le débit amont du fluide est nul. Dans ce cas, l'électrolyte du côté amont n'est pas renouvelé, et sa concentration en zinc va diminuer. Ainsi

cette demi-partie de la cellule deviendra improductive pour l'opération d'électro-zingage. Il faut donc assurer un débit minimum pour éviter un appauvrissement trop important en zinc de la solution du côté amont.

L'augmentation de production de la ligne nécessite donc une étude hydrodynamique de l'écoulement interne de l'électrolyte. Elle aura pour but essentiel de prédire la répartition des débits amont et aval en fonction de la vitesse de la bande de métal.

b) Amélioration de la qualité du dépôt de zinc:

L'augmentation de la production nécessite d'accroître la densité du courant d'électrolyse, ce qui devrait favoriser l'obtention d'un revêtement à structure fine et de bonne qualité <1-3>. Cela implique une vitesse d'élaboration de la couche de zinc plus importante, mais celle-ci est limitée par le transport des ions zinc près de la tôle (cathode). L'électro-zingage de la bande de métal provoque un appauvrissement en zinc de l'électrolyte dans la région proche de la tôle (fig 1-4a). Pour une densité de courant limite, la concentration en zinc est nulle à la surface de la cathode (fig 1-4b). Au delà de cette valeur, la consommation en zinc imposée par la densité de courant est supérieure au flux de diffusion des ions zinc. Dans ce cas, en plus du dépôt métallique, un dégagement d'hydrogène se produit. Cette dernière réaction est pénalisante pour le rendement énergétique de la cellule et la qualité du revêtement de zinc. Il faut donc toujours travailler au dessous de cette densité de courant limite.

La vitesse d'élaboration du revêtement est fonction du flux de diffusion des ions zinc à la surface de la tôle qui est proportionnel au gradient local de concentration. Le flux maximal de diffusion, et donc la vitesse maximale d'élaboration du dépôt, sont obtenus avec la densité de courant limite. Dans ce cas, le gradient de diffusion est égal au rapport de la concentration au

loin à l'épaisseur de la couche de diffusion (fig 1-4b). Il est donc possible d'augmenter la diffusion de deux manières, soit en accroissant la concentration de l'électrolyte, soit en diminuant l'épaisseur de la couche de diffusion. Cette dernière grandeur est fortement liée à la nature de l'écoulement de l'électrolyte. Le mouvement du fluide électrolytique influence fortement la valeur de la densité de courant limite et donc la qualité du dépôt de zinc.

WEYMEERSCH, WINAND et RENARD <1-3> montrent que pour des densités de courant relativement élevées l'augmentation du débit de l'électrolyte permet de conserver un bon rendement de cathode (fig 1-5a). Ils montrent aussi que pour une densité de courant donnée, la qualité du revêtement de zinc est fonction du débit du fluide électrolytique entre la tôle et l'anode (fig 1-5b).

Nous remarquons que l'écoulement de l'électrolyte entre les électrodes a une forte influence sur la valeur de la densité de courant limite, sur le rendement de cathode, sur la vitesse d'élaboration du revêtement et aussi sur la qualité du dépôt de zinc. Cela montre l'intérêt d'une étude hydrodynamique de l'écoulement interne de l'électrolyte.

REMARQUES:

Le transport des ions zinc vers la tôle a lieu aussi par migration (déplacement des particules chargées sous l'effet du champ électrique). Comme la concentration de zinc dans l'électrolyte est faible, ce mode de transport est négligeable devant celui par diffusion dans la région proche de la bande de métal.

Le flux de diffusion des ions zinc à la surface de la tôle dépend aussi du coefficient de diffusion. La valeur de cette grandeur est fonction de la concentration en zinc et la température de l'électrolyte.

c) Etude du problème industriel:

Pour étudier les deux aspects du problème industriel, nous avons scindé notre étude en deux parties:

- * Etude du fonctionnement global d'une cellule.
- * Etude de l'écoulement de l'électrolyte au sein des cellules.

L'augmentation de production de la ligne d'électro-zingage nécessite de prédire le comportement global des cellules. C'est-à-dire qu'il faut déterminer la répartition entre les côtés amont et aval du débit d'électrolyte injecté dans une cellule. Pour ce premier aspect du problème industriel, nous nous sommes orientés vers une simulation expérimentale du fonctionnement des cellules: elle sera développée dans la troisième partie de ce mémoire.

La qualité du dépôt de zinc est fortement influencée par l'écoulement de l'électrolyte au sein des cellules. Ce second aspect du problème industriel nécessite de simuler les conditions d'écoulement: cette simulation fera l'objet de la deuxième partie de ce mémoire.

Mais, avant d'aborder ces deux phases de notre étude, la complexité des phénomènes chimiques et hydrauliques internes aux cellules d'électro-zingage nous oblige à schématiser quelque peu leur fonctionnement. Ces simplifications sont développées dans le chapitre suivant.

MODELISATION HYDRODYNAMIQUE2.1 INTRODUCTION:

Le chapitre précédent montre que l'augmentation de la production de la ligne d'électro-zingage et l'amélioration de la qualité du dépôt de zinc nécessitent d'étudier l'hydrodynamique interne des cellules. Cette étude peut-être effectuée de manière expérimentale ou numérique.

L'étude expérimentale détaillée de l'hydrodynamique interne d'une cellule nécessite une instrumentation de celle-ci. Un tel équipement n'étant pas concevable sur la ligne industrielle, il est nécessaire de réaliser une installation pour simuler le fonctionnement des cellules. La réalisation d'un tel dispositif expérimental est très onéreuse pour plusieurs raisons, dont les principales sont:

- Utilisation d'un fluide électrolytique très acide et de prix relativement élevé.
- Maintien de la composition chimique de l'électrolyte. (nécessité d'une station de régénération en zinc).
- Création d'un champ électrique de forte densité.

Etant donné le coût élevé d'une telle installation, nous ne pouvons envisager une étude expérimentale détaillée du fonctionnement d'une cellule réelle.

Les performances des calculateurs actuels ont permis de simuler numériquement quelques processus industriels. Mais les phénomènes se produisant au sein des cellules d'électro-zingage

sont très complexes, et une simulation numérique détaillée de leur hydrodynamique n'est pas possible pour plusieurs raisons, dont les principales sont :

- Fluide électrolytique à composition chimique et propriétés physiques variables.
- Ecoulement turbulent tri-dimensionnel.
- Présence de forces à distance d'origine électrique régies par les équations de MAXWELL et d'OHM.
- Dégagements gazeux à la surface des électrodes.

Comme nous venons de le montrer, une étude complète tant expérimentale que numérique du fonctionnement des cellules paraît difficilement envisageable. Pour étudier leur hydrodynamique interne, nous sommes donc amenés à négliger certains phénomènes et à en modéliser d'autres. Dans ce chapitre, nous exposerons les différentes hypothèses simplificatrices adoptées, et nous évaluerons leurs effets sur l'hydrodynamique interne des cellules.

2.2 PHENOMENES CHIMIQUES:

Les phénomènes chimiques qui se produisent au sein des cellules d'électro-zingage correspondent globalement à une électrolyse d'une solution aqueuse de sulfate de zinc et d'acide sulfurique, qui présente de plus les particularités suivantes: fluide électrolytique en mouvement, cathode mobile (bande de métal). Globalement, l'électrolyte subit les quatre réactions chimiques suivantes:

- Consommation de zinc à la cathode.
(zingage de la bande de métal)
- Production de zinc dans la station de régénération.
- Dégagement d'oxygène à l'anode.
- Dégagement d'hydrogène à la cathode et dans la station de régénération.

Ces différentes transformations provoquent des modifications de la composition chimique locale ou moyenne du fluide électrolytique.

REMARQUES:

- * La concentration en zinc de la solution électrolytique étant conservée constante, le bilan des deux premières réactions est nul. Les deux dégagements gazeux se traduisent par une diminution de la quantité d'eau contenue dans l'électrolyte. Pour compenser cette consommation, il est nécessaire d'ajouter continuellement de l'eau dans la solution.
- * Les taux de production (anode) et de destruction (cathode + station de régénération de l'électrolyte) des ions hydrogène sont égaux, donc le PH de la solution électrolytique est constant.
- * Le faible PH de l'électrolyte (forte concentration en acide sulfurique dans la solution) est pénalisant pour l'opération d'électro-zingage, car il facilite le dégagement d'hydrogène à la cathode (le potentiel de réduction des ions hydrogène diminue avec le PH de la solution). Mais l'avantage d'une forte concentration en acide sulfurique dans l'électrolyte est de réduire sa résistance ohmique, ce qui est énergétiquement intéressant. La réduction des ions zinc est facilitée par l'utilisation de fortes densités de courant.

a) Modification de la composition chimique de l'électrolyte:

Lorsque l'électrolyte est injecté dans les cellules d'électro-zingage, il est composé de 88% d'eau, 7% d'acide sulfurique et 5% de zinc. L'électro-zingage de la tôle provoque une diminution de la concentration moyenne en zinc de l'électrolyte. Pour obtenir un revêtement de zinc de 10 microns

d'épaisseur sur une face de la tôle, nous pouvons estimer que la teneur moyenne en zinc de l'électrolyte diminue de 2%. Ceci occasionne une diminution de 0,1% de la masse volumique moyenne de la solution électrolytique. Cette variation étant faible, nous négligerons la diminution de la masse volumique due à la consommation de zinc.

Dans les cellules d'électro-zingage, l'agitation turbulente régnant au sein de l'électrolyte (Nombre de REYNOLDS $Re_b = hUb/D_{av} > 10000$) homogénéise le fluide électrolytique dans la majeure partie de l'écoulement. L'électro-zingage de la tôle affaiblit la teneur en zinc seulement dans une zone très proche de la bande de métal ($y+ \ll 1$, $\langle 1-3 \rangle$) (fig 1-4). Dans le cas extrême où la concentration en zinc s'annule à la paroi (densité de courant limite, fig 1-4b), la masse volumique diminue seulement de 4,5%. Dans les cellules, la densité de courant étant inférieure à sa valeur limite, la variation de masse volumique sera encore moindre. Cette diminution étant relativement faible, nous négligerons l'affaiblissement de la masse volumique de l'électrolyte dû à l'appauvrissement local en zinc.

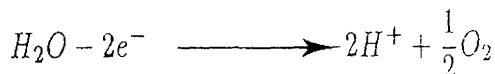
A la cathode (bande de métal), les deux réactions possibles sont un dégagement d'hydrogène ou un dépôt de zinc :



Le potentiel global de réduction des ions hydrogène (tension de réduction de H_2 + surtension H_2 /acier) est inférieur à celui des ions zinc (tension de réduction de Zn + surtension Zn/acier). Par conséquent, pour de faibles tensions (faibles densités de courant), l'électrolyse de la solution aqueuse de sulfate de zinc ne donnera lieu qu'à un dégagement d'hydrogène à la cathode. Pour une tension plus élevée (haute densité de courant), ce qui est le cas dans les cellules d'électro-zingage,

nous obtenons simultanément les deux réactions précédentes. Le constituant superficiel de la tôle devient le zinc. Dans ce cas, le potentiel global de réduction des ions hydrogène est supérieur à celui des ions zinc. Donc le dégagement d'hydrogène diminue considérablement, et le zinc se dépose alors avec un rendement proche de 100%. Le dégagement gazeux n'a donc lieu qu'au début de l'électro-zingage de la tôle. L'effet de ce phénomène étant ponctuel, il n'a qu'une faible influence sur l'hydrodynamique interne des cellules et peut être négligé.

A l'anode insoluble en plomb, la seule réaction chimique est l'oxydation de l'eau contenue dans l'électrolyte:



Le résultat d'une telle transformation est une production d'ions hydrogène et un dégagement d'oxygène. Les cations H^+ sont absorbés principalement par le processus de régénération en zinc de l'électrolyte. L'oxydation des molécules d'eau provoque aussi la formation des bulles d'oxygène à la surface de l'anode. Elles se détachent de la paroi dès qu'elles atteignent une certaine taille critique, qui dépend de l'agitation de la solution électrolytique. Etant données les vitesses débitantes amont et aval de l'électrolyte, on peut supposer que les bulles sont petites et uniformément réparties au sein de la solution.

Lors de la production de tôles électro-zinguées simple face, la quantité de zinc déposée par seconde au sein d'une cellule est égale au produit de la masse volumique du zinc par la vitesse de déplacement de la bande de métal, par sa largeur et par le huitième de l'épaisseur définitive du revêtement (chacune des huit cellules de la ligne d'électro-zingage déposent la même quantité de zinc sur la tôle). Par exemple, pour un revêtement de 10 microns d'épaisseur sur une tôle de 1 m de large et se

déplaçant à 1 m/s, 9 grammes/seconde de zinc sont déposés par chaque cellule. Si nous négligeons le faible dégagement d'hydrogène sur la tôle (rendement de la cathode = 100 %), le débit massique d'oxygène à l'anode est obtenu en multipliant le résultat précédent par le rapport des masses molaires de l'oxygène et du zinc: le résultat est 2.2 grammes/seconde d'oxygène. En supposant que la même quantité d'oxygène s'échappe de chaque côté de la cellule, et que les vitesses débitantes amont et aval sont de l'ordre de grandeur de celle de la bande de métal, la solution électrolytique est à 95 % sous forme liquide et 5 % sous forme gazeuse (bulles d'oxygène), lorsqu'elle sort de la cellule d'électro-zingage. La proportion de la phase gazeuse étant faible, on peut supposer que la coalescence des bulles d'oxygène est relativement faible, et que les bulles restent de petite taille et uniformément réparties par l'agitation turbulente au sein du fluide. A l'échelle macroscopique, l'électrolyte est toujours assimilable à un fluide homogène dont la masse volumique diminue d'environ 5 % lors de son passage dans la cellule. La distance entre la bande de métal et l'anode étant constante, et la quantité de zinc déposée par seconde étant négligeable devant le débit massique de l'électrolyte, l'affaiblissement de la masse volumique du fluide électrolytique entraîne une augmentation de sa vitesse débitante locale par conservation du débit. Dans le dessein de simplifier notablement les simulations numérique et expérimentale de l'hydrodynamique interne de la cellule, nous négligerons cette diminution de la masse volumique due au dégagement d'oxygène de l'anode. Les vitesses débitantes amont et aval seront donc supposées constantes de l'injection jusqu'aux évacuations de la cellule d'électro-zingage.

En conclusion, les simplifications proposées nous permettent de considérer l'électrolyte comme un fluide homogène non-réactif à propriétés physiques constantes.

2.3 PHENOMENES ELECTRIQUES:

Dans les cellules d'électro-zingage, le champ électrique a deux effets majeurs sur le fluide électrolytique:

- Echauffement par effet Joule.
- Apparition de forces à distance d'origine électrique.

a) Echauffement de l'électrolyte:

Dans une cellule, trois phénomènes peuvent modifier la température de l'électrolyte, qui sont:

- Réactions chimiques au sein de l'électrolyte.
- Dissipation visqueuse de l'électrolyte.
- Effet Joule.

La cause principale de l'élévation de la température de l'électrolyte est la production de chaleur par effet Joule. Pour une tension entre les électrodes de 10 volts et un courant d'électrolyse de 40000 ampères, la puissance consommée par une cellule d'électro-zingage est de 400 KW. Si nous négligeons l'énergie nécessaire aux réactions chimiques sur les électrodes (transformations endothermiques), la puissance dissipée par effet Joule est donc au maximum égale à 400 KW. En assimilant le fluide électrolytique à de l'eau, et en supposant que la vitesse débitante de l'électrolyte est de l'ordre de grandeur de celle de la bande de métal (≈ 1 m/s), nous évaluons l'élévation de température du fluide à 3°C, ce qui provoque une variation d'environ 0,1% de la masse volumique et d'environ 2% de la viscosité cinématique. Ces deux variations étant faibles, nous négligerons l'effet de l'échauffement de l'électrolyte sur ces deux propriétés du fluide.

b) Apparition de forces à distance d'origine électrique:

La tension aux bornes des électrodes crée des forces à

distance au sein du fluide électrolytique qui agissent sur son écoulement. Ces forces sont égales à $\rho_e \vec{E}$, où ρ_e et \vec{E} représentent respectivement la densité de charge et le vecteur champ électrique. Dans ce cas, les équations de NAVIER-STOKES qui régissent le mouvement du fluide électrolytique s'écrivent:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i + \rho_e E_i$$

L'évolution des grandeurs ρ_e et \vec{E} est régie par les équations réduites de MAXWELL et la loi d'OHM:

$$\epsilon_e \frac{\partial E_j}{\partial x_j} = \rho_e \quad E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \frac{\partial J_j}{\partial x_j} = 0. \quad J_i = \beta \rho_e E_i$$

avec

ϵ_e = Permittivité du fluide.

\mathbf{J} = Vecteur densité de courant.

φ = Différence de potentiel.

β = Mobilité des ions.

La densité de charge ρ_e est non nulle seulement dans des zones très proches de l'anode et de la bande de métal ($y^+ \ll 1$, $\langle 1-3 \rangle$), où la variation de concentration des constituants de l'électrolyte rend le fluide non électriquement neutre. Au delà d'une distance relativement faible de part et d'autre de l'injection, les profils de concentration n'évoluent presque plus dans la direction de l'écoulement moyen, et ρ_e n'est plus fonction que de la distance à l'anode ou à la bande de métal. D'après la configuration des cellules d'électro-zingage, la composante principale du vecteur champ électrique \vec{E} est suivant

la direction normale à la surface de la tôle, donc les forces électriques n'agissent que dans cette direction. L'équation de conservation de la masse nous permet d'évaluer le rapport des ordres de grandeur de deux composantes du vecteur vitesse du fluide dans les fines zones pariétales où ρ_e est non nulle:

$$\frac{v}{U} \approx \frac{\delta}{L} \approx 2 \cdot 10^{-5}$$

où U = Composante du vecteur vitesse suivant la direction de l'écoulement moyen.

v = Composante du vecteur vitesse suivant la direction normale à la surface de la bande de métal.

δ = Epaisseur de la couche de diffusion.

L = Longueur du canal (anode-tôle).

Pour l'application numérique, nous avons pris:

$$\delta = \nu / u_{\tau} \quad u_b = 1 \text{ m/s} \quad L = 2 \text{ m} \quad h = 0,01 \text{ m} \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$u_{\tau} = u_b/35$ (Ecoulement de COUETTE pur à $Re_b \approx 10000$)

Nous constatons que l'influence du champ électrique sur l'écoulement de l'électrolyte est donc négligeable. Cette simplification présente deux avantages importants.

Premièrement, la simulation numérique de l'hydrodynamique interne des cellules ne nécessite plus la résolution des équations réduites de MAXWELL et de la loi d'OHM. L'écoulement de l'électrolyte est donc régi seulement par les équations de NAVIER-STOKES.

Deuxièmement, nous pouvons simuler l'écoulement interne d'une cellule à l'aide d'un dispositif dans lequel il n'y a pas de champ électrique. Cela simplifie considérablement la conception d'une installation expérimentale.

2.4 PHENOMENES HYDRAULIQUES:

Dans le dessein de faciliter l'étude hydrodynamique des cellules, nous simplifierons la configuration d'écoulement au sein de celles-ci. Le comportement global ne sera que légèrement modifié par ces hypothèses simplificatrices.

2.4.1 Hypothèses simplificatrices:

a) Nature de l'écoulement de l'électrolyte:

Du fait de la courbure du passage entre la tôle et l'anode, et du déplacement de la bande de métal, l'électrolyte est soumis à une force centrifuge. Son écoulement peut-être, selon les cas, laminaire, laminaire avec tourbillons de TAYLOR (fig 1-6a et 1-6b) ou turbulent. Les paramètres permettant de déterminer la nature des écoulements internes du fluide électrolytique sont:

$$\text{le nombre de REYNOLDS} = \frac{U h}{\nu}$$

$$\text{le nombre de TAYLOR/DEAN} = \frac{U h}{\nu} \sqrt{\frac{h}{r}}$$

où: U = Echelle de vitesse.

h = Distance entre la tôle et l'anode. = 0,01 m

r = Rayon du tambour de la cellule. = 1 m

-6

ν = Viscosité cinématique de l'électrolyte. = 1.10 m²/s

Pour des écoulements de COUETTE (fig 1-6a) (Vitesse débitante égale à la moitié de la vitesse de la paroi mobile), TAYLOR choisit la vitesse de déplacement de la bande de métal comme échelle de vitesse U. Pour des écoulements au sein de tubes cintrés (fig 1-6b), DEAN retient la vitesse débitante comme échelle de vitesse U. Pour notre configuration d'écoulement aucune de ces deux propositions n'est satisfaisante, car la nature de l'écoulement de l'électrolyte dans le passage entre la bande de métal et l'anode dépend à la fois de la vitesse de déplacement de la tôle et de la vitesse de débit du fluide électrolytique qui sont indépendantes. Il semble indiqué physiquement d'utiliser comme échelle de vitesse U la plus grande des deux vitesses précédentes. Dans ce cas, l'échelle de vitesse U est au minimum égale à la vitesse de déplacement de la tôle ($\approx 1 \text{ m/s}$). Le nombre de REYNOLDS correspondant est égal à 10000, la valeur du nombre de TAYLOR/DEAN est 1000. Pour de telles valeurs des deux paramètres l'écoulement est en régime turbulent. Donc quel que soit le débit d'injection de l'électrolyte, son écoulement au sein des cellules sera toujours turbulent.

L'écoulement dans les cellules étant turbulent, la vitesse et la pression fluctuent au cours du temps. Les conditions génératrices moyennes (débit d'injection, vitesse de déplacement de la tôle) étant constantes, les grandeurs instantanées fluctuent autour de valeurs moyennes indépendantes du temps. Il existe donc un écoulement moyen de l'électrolyte: c'est cet écoulement que nous désirons étudier.

REMARQUES:

- * Pour les écoulements de COUETTE entre deux cylindres concentriques, les valeurs de transition du nombre de TAYLOR pour les différents régimes d'écoulement sont:

$Ta < 41,3$	Écoulement laminaire.
$41,3 < Ta < 400$	Écoulement avec tourbillons de TAYLOR.
$400 < Ta$	Écoulement turbulent.

* Pour des tubes cintrés de diamètre 0,01 m et dont le rayon de cintrage est égal à 1 m, la formule de ITO <1-5> prédit un écoulement turbulent si le nombre de DEAN est supérieur à 360.

* Pour les écoulements de POISEUILLE, la transition (laminaire, turbulent) s'effectue à un nombre de REYNOLDS Remoy, basé sur la vitesse débitante et sur la hauteur du passage, de l'ordre de 2000.

* Pour les écoulements de COURTTE plan, la transition s'effectue à $Re_b = 1100$ pour LEUTHRUSSER & CHU <1-10>, et à $Re_b = 3000$ pour REICHARDT <1-11>.

b) Influence de la courbure du passage:

En raison de la courbure du passage entre la tôle et l'anode, l'électrolyte est soumis à une force centrifuge, qui modifie l'écoulement du fluide. Le paramètre permettant de quantifier cette influence de la courbure du passage sur l'écoulement est (ref<1-14>):

-2

$$\frac{h}{r} \approx 10$$

où: h = Distance entre la tôle et l'anode. = 0,01 m
 r = Rayon du tambour de la cellule. = 1 m

Pour une telle valeur du rapport h/r , les expériences de BURTON & CARPER <1-6> montrent que la courbure n'influence pas l'écoulement du fluide. Nous pouvons donc représenter le canal par un canal plan (figure 1-7).

c) Effets de bords:

Aux extrémités latérales du tambour des cellules

d'électro-zingage (fig 1-8a), l'écoulement est localement tridimensionnel. En supposant que les vitesses débitantes amont et aval sont sensiblement constantes sur toute la largeur du tambour, nous pouvons estimer qu'au maximum 10% du débit d'injection passe dans ces zones latérales. Malgré ce pourcentage, nous négligerons ces parties pour simplifier notablement l'étude de l'hydrodynamique de la cellule. Nous limiterons donc latéralement la section de passage de l'électrolyte à la largeur du tambour (fig 1-8b).

Sur les parois verticales situées aux extrémités du tambour de la cellule des couches limites se développent. Celles-ci n'ayant qu'une faible influence sur l'hydrodynamique de la cellule, nous les négligerons également.

d) Influence de l'injecteur:

Sur la figure 1-8a, nous constatons que la longueur de la fente d'injection est inférieure de 6 % à celle du tambour. Cette différence de longueur entraîne l'existence de zones d'écoulement tri-dimensionnelles. L'influence de ces zones sur la répartition des débits amont et aval est très restreinte. Dans le dessein de simplifier l'étude de l'hydrodynamique, nous supposerons que la longueur de la fente d'injection est égale à celle du tambour (fig 1-8c).

e) Influence de l'épaisseur de la bande de métal:

Du fait de l'épaisseur de la bande de métal, la hauteur du passage pour le fluide électrolytique est plus faible entre la tôle et l'anode (fig 1-8c). Cette variation de hauteur entraîne que l'électrolyte s'écoule plus facilement sur les côtés de la cellule. Cela se traduit par une vitesse débitante (amont ou aval) plus faible au centre qu'aux extrémités du tambour. Ce phénomène est d'autant plus prononcé que l'épaisseur de la tôle est importante. Dans ces conditions, l'écoulement moyen de l'électrolyte au sein des cellules d'électro-zingage est tri-

dimensionnel. En anticipant sur les résultats de la simulation numérique du fonctionnement d'une cellule d'électro-zingage, nous pouvons estimer, pour différentes épaisseurs de la tôle, la variation de la vitesse débitante par unité de largeur d'une extrémité à l'autre du tambour.

Epaisseur de la tôle	Variation transversale de la vitesse débitante
0,4 mm	2,5 %
1 mm	6 %
2 mm	14 %
3 mm	25 %

Pour pouvoir négliger le phénomène précédemment cité, nous sommes obligés d'apporter des restrictions quant aux dimensions de la bande de métal. Car pour pouvoir supposer que la vitesse débitante de l'électrolyte est uniforme sur la largeur de la cellule, il faut que la hauteur du passage soit sensiblement constante. Cela implique que la tôle doit être de faible épaisseur (< 1 mm) ou de largeur voisine de celle du tambour. Les bandes de métal utilisée par l'industrie automobile (principal consommateur de tôles électro-zinguées) répondent à ces deux conditions. Donc, même en faisant ces restrictions dimensionnelles sur la tôle, notre étude hydrodynamique garde tout son intérêt industriel. Pour la simulation, nous supposons que la hauteur du passage est constante.

Grâce à l'hypothèse de hauteur du passage constante, et à celle relative aux couches limites sur les parois latérales, l'écoulement moyen de l'électrolyte au sein des cellules peut-être supposé plan.

2.4.2 Décomposition du modèle d'écoulement:

Du fait des différentes hypothèses simplificatrices du précédent paragraphe, nous pouvons considérer que l'écoulement interne d'une cellule d'électro-zingage est plan, quasi rectiligne et nous pouvons le schématiser comme indiqué sur la figure 1-7. Le domaine, où se produit l'écoulement, peut-être décomposé en trois parties:

- une partie d'injection.
- une partie établie amont.
- une partie établie aval.

a) Zone d'injection:

Elle se situe entre les abscisses inconnues X_a et X_b (fig 1-7). A cause du déplacement de la bande de métal, une répartition dissymétrique du débit d'injection s'effectue dans cette zone entre les côtés amont et aval de la cellule d'électro-zingage. De ce fait, le profil de vitesse de l'écoulement moyen évolue de l'injection jusqu'aux abscisses X_a et X_b (écoulement bi-dimensionnel). La longueur de cette zone d'injection est fonction du développement des couches limites sur la tôle et sur l'anode, qui dépend principalement du nombre de REYNOLDS, de la configuration de l'écoulement et aussi de la turbulence au sein du fluide en amont de la zone d'injection. Une telle configuration d'écoulement n'ayant, à notre connaissance, jamais été étudiée numériquement et expérimentalement, la longueur de la partie injection est a priori inconnue. Bien que les conditions d'écoulement soient différentes de part et d'autre de l'injection en raison du déplacement de la bande de métal, nous pouvons supposer que cette zone d'écoulement bi-dimensionnel s'étend symétriquement par rapport à l'injection ($X_a = -X_b$). En considérant les longueurs d'établissement du profil de vitesse moyenne pour les différentes configurations d'écoulement données dans le tableau 1, nous pouvons estimer que la partie d'injection

s'étend sur des longueurs amont ou aval de l'ordre de 40 fois la hauteur du passage entre la paroi mobile et l'anode. La longueur de cette zone représente environ 20 % de la longueur totale de l'écoulement interne de l'électrolyte.

Configuration d'écoulement	Longueur d'établissement	Références
Ecoulement en parois fixes	50 hauteurs de passage	COMTE-BELLOT <1-7>
Ecoulement de tuyau	25 à 40 diamètres	NIKURADSE <1-8>
Ecoulement de COUETTE	40 hauteurs de passage	HAI <1-9>

TABLEAU 1: Longueurs d'établissement pour différentes configurations d'écoulement.

Plusieurs raisons nous font penser que la vraie longueur de la partie d'injection est inférieure à l'estimation précédente. Premièrement, les longueurs d'établissement du tableau 1 ont été déterminées à partir de dispositifs expérimentaux comportant un convergent en amont. Or DRISSLER <1-12> montre qu'une entrée à bords francs, comme dans les cellules d'électro-zingage, a pour effet de diminuer notablement la longueur d'établissement de l'écoulement. Cette configuration d'entrée donne naissance généralement à un décollement, qui provoque une accélération du fluide dans la partie centrale de l'écoulement, et qui se traduit par une diminution de la longueur d'établissement. Deuxièmement, dans les trois expériences du tableau 1 le fluide a un taux de turbulence initial très faible, tandis que celui du fluide électrolytique est beaucoup plus élevé en amont de l'injection. Cela doit aussi diminuer la longueur

d'établissement de l'écoulement. Ne pouvant pas évaluer l'influence bénéfique de ces deux constatations, nous gardons la précédente évaluation pour la zone d'injection.

Dans les régions pariétales, le développement du profil de vitesse moyenne est lié, en raison du caractère local de l'écoulement, à l'évolution de la vitesse de frottement pariétale u_{τ} . DEISSLER <1-13> montre que pour une conduite ou un canal bi-dimensionnel la longueur d'établissement de u_{τ} est très faible (≈ 6 hauteurs de passage). Les conditions hydrodynamiques d'un phénomène pariétal tel que l'électro-zingage d'une tôle sont donc établies à de faibles distances de l'entrée de l'écoulement.

b) Domaines d'écoulement établi amont et aval:

Les parties où l'écoulement est établi en amont et en aval se situent au-delà des abscisses respectives X_a et X_b (fig 1-7a). De ces abscisses jusqu'aux évacuations amont et aval, les conditions d'écoulement sont indépendantes de x . Dans ces zones établies, l'écoulement est supposé par droites parallèles, et il présente les propriétés suivantes:

- Les grandeurs dynamiques moyennes (vitesses, corrélations) ne sont fonction que de l'ordonnée y .
- La seule composante non nulle du vecteur vitesse moyenne est celle suivant x .
- La pression motrice \hat{P} est indépendante de la coordonnée z .

Comme nous le verrons ultérieurement, ces différentes propriétés permettent de simplifier notablement les équations de REYNOLDS, qui régissent l'écoulement moyen de l'électrolyte au sein des cellules d'électro-zingage.


```
*****
*
*           DEUXIEME PARTIE:
*
*
* MODELISATION DE L'ECOULEMENT DANS LES ZONES ETABLIES
*
*****
```


2ème PARTIE

INTRODUCTION

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons montré que l'écoulement de l'électrolyte au sein des cellules d'électro-zingage peut se décomposer en trois parties: une partie d'injection et deux parties établies amont et aval. De plus, nous avons estimé que la longueur cumulée des zones établies représente environ 80 % de la longueur totale de l'écoulement interne de l'électrolyte. Si on suppose que le rendement de dépôt du zinc est relativement constant le long de la cellule d'électro-zingage, ces deux zones contribuent d'une manière importante à l'électro-zingage de la tôle. Etant donnée cette remarque et l'influence importante de l'hydrodynamique sur la qualité et sur le rendement de dépôt, il nous semble utile de prédire numériquement l'écoulement de l'électrolyte dans ces parties établies. Cette simulation numérique devrait nous permettre à plus ou moins longue échéance de déterminer les paramètres hydrauliques qui contrôlent la qualité et le rendement de dépôt. Nous désignerons d'une manière générale l'écoulement au sein des parties établies amont et aval par: écoulement de COUETTE (avec ou sans gradient de pression).

Cette simulation numérique des écoulements de COUETTE présente aussi un intérêt plus scientifique. Car les récents travaux de EL TELBANY & REYNOLDS <2-15> <2-16> <2-17> ont permis d'accroître considérablement le nombre de données expérimentales pour ce type d'écoulement. Cela devrait permettre de valider ou d'améliorer des modèles de turbulence existants.

FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME1.1 Introduction:

Tout écoulement de fluide est régi par un ensemble d'équations, qui exprime la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Ce système d'équations doit être complété par la définition du tenseur des contraintes visqueuses, par des lois de comportement pour la viscosité dynamique, la masse volumique et le coefficient de conductivité.

L'écoulement interne des cellules d'électro-zingage étant supposé isotherme et isovolume, et l'électrolyte étant homogène, le précédent système d'équations se réduit à:

- Equation de conservation de la masse.
- Equation de conservation de la quantité de mouvement.

La quantité de mouvement étant une grandeur vectorielle, son équation de conservation se décompose en trois équations.

Ces quatre équations régissent l'écoulement interne des cellules, elles sont généralement appelées équations de NAVIER-STOKES.

1.2 Equations de NAVIER-STOKES:

L'équation de continuité s'écrit pour un fluide isovolume:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0.$$

Les équations de quantité de mouvement s'écrivent sous forme conservative:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad \text{pour } i=1,2,3 \quad (1.1)$$

Où les forces à distance sont désignées par \vec{f} . Dans le cas qui nous intéresse, \vec{f} se résume à l'accélération de la pesanteur \vec{g} . Les forces de contact se traduisent par la divergence du tenseur des contraintes $[T_{ij}]$. Il se compose d'un tenseur $[-P \delta_{ij}]$ traduisant les effets purement normaux de la pression et d'un tenseur $[T_{ij}]$ dit des contraintes visqueuses.

$$[T_{ij}] = [-P \delta_{ij}] + [\tau_{ij}] \quad (1.2)$$

Pour un fluide newtonien, les termes du tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} s'écrivent:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{pour } i \text{ et } j = 1 \text{ à } 3$$

Pour un fluide newtonien isovolume à température constante, les équations de NAVIER-STOKES se réduisent à:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + g_i \quad \text{pour } i=1,2,3 \quad (1.4)$$

Le premier membre de l'équation (1.4) , qui correspond à la variation de la quantité de mouvement, se décompose en une partie instationnaire et une partie correspondant à la convection par l'écoulement (c'est à dire le transport de la quantité de mouvement par le fluide): ce terme est non linéaire. Dans le second membre, nous trouvons le gradient de pression, qui est généralement producteur de quantité de mouvement. Le deuxième terme contenant la vitesse a un caractère diffusif vis-à-vis de la quantité de mouvement. Car comme la chaleur va du chaud vers le froid, la quantité de mouvement diffuse des zones à grande vitesse vers celles à faible vitesse. Le dernier terme traduit l'effet du champ de pesanteur, qui est la source la plus simple de quantité de mouvement. L'action de la pression et celle de la pesanteur peuvent être regroupées en une pression motrice.

Les équations de NAVIER-STOKES forment un système fermé. C'est à dire que nous disposons d'autant d'équations que d'inconnues. En principe, la résolution numérique directe de ces équations permettrait de déterminer toutes les grandeurs de l'écoulement. Une telle résolution nécessite un maillage dont la distance maximale entre les noeuds est égale à l'échelle η de KOLMOGOROV <2-1>, qui est la taille caractéristique des petites structures dissipatives de l'écoulement, et qui peut être évaluée à partir de l'échelle caractéristique des grosses structures turbulentes:

$$\frac{\eta}{l} \simeq R_l^{-3/4} \quad R_l = \frac{l u_l}{\nu}$$

u_l = Vitesse caractéristique des grosses structures.

l = Longueur caractéristique des grosses structures.

ν = Viscosité cinématique du fluide.

L'échelle de longueur des grosses structures de l'écoulement interne des cellules d'électro-zingage est de l'ordre de grandeur de la hauteur h (≈ 10 mm) du passage entre la bande de métal et l'anode. Tandis que l'ordre de grandeur de u_i est voisin de celui de la vitesse de frottement u_T . Le rapport de u_T sur la vitesse de la bande de métal U_b est environ égal à 35 pour les écoulements de COUETTE ayant un nombre de REYNOLDS $Re_b = hU_b/\nu \approx 10000$. L'ordre de grandeur de η est donc 0,1 mm. Les dimensions de l'écoulement étant 3800mmX1800mmX10mm, le nombre N de points du maillage est $\approx 7 \cdot 10^9$. Les ordinateurs actuels ne peuvent pas stocker dans leur mémoire centrale un tel maillage. On peut résoudre ce problème de stockage en scindant l'écoulement en plusieurs domaines dont la taille est inférieure à celle de la mémoire centrale de l'ordinateur. L'ensemble du maillage est alors stocké dans une mémoire périphérique. Les équations sont résolues successivement dans les différents domaines. Cette méthode de stockage fut adoptée par MOIN & KIM <2-2>, mais elle entraîne des échanges de données entre l'ordinateur et sa mémoire périphérique, qui augmentent considérablement le temps de calcul. Bien que MOIN & KIM aient choisi une résolution de type "Modélisation sous-maille" qui consiste à modéliser les structures de dimension inférieure à la taille du maillage choisi, nous utilisons leur temps de calcul pour estimer le temps nécessaire à la simulation directe de l'écoulement interne des cellules. MOIN & KIM mettent approximativement 48 heures sur un ordinateur ILLIAC IV pour simuler un écoulement de POISEUILLE, dont le maillage comprend 516096 noeuds. Pour $7 \cdot 10^9$ noeuds de maillage nous estimons que l'ordre de grandeur du temps de calcul est de $65 \cdot 10^4$ heures (≈ 75 ans). Etant donné ce temps de calcul, une résolution numérique directe de l'écoulement interne des cellules n'est pas concevable.

1.3 Equations de REYNOLDS:

Deux méthodes permettent de déterminer les grandeurs

moyennes de l'écoulement: soit on résoud les équations de NAVIER-STOKES sur un certain intervalle de temps et on calcule la moyenne temporelle des différentes grandeurs; soit on résoud les équations moyennées de l'écoulement. Comme nous l'avons vu plus haut, la première méthode nécessite des temps de calcul prohibitifs, qui la rendent inapplicable à notre écoulement. Nous nous intéressons donc à la résolution des équations moyennées de l'écoulement.

1.3.1 Décomposition des grandeurs instantanées:

C'est O. REYNOLDS, qui le premier proposa de décomposer toute grandeur instantanée ϕ d'un écoulement turbulent stationnaire en une partie moyenne $\bar{\phi}$ et une partie fluctuante ϕ' .

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'$$

$\bar{\phi}$ est la moyenne temporelle de la grandeur instantanée ϕ , elle est donnée par

$$\bar{\phi}(\vec{x}) = \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} \phi(\vec{x}, t) dt$$

et elle est indépendante du temps.

La durée d'intégration $2T$ doit être grande devant l'échelle de temps de la turbulence.

Par définition, la moyenne temporelle de la partie fluctuante ϕ' est nulle.

$$\frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} \phi'(\vec{x}, t) dt = 0$$

En appliquant cette décomposition, les variables de

l'écoulement s'écrivent :

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad \text{pour } i=1,2,3 \quad P = \bar{P} + P'$$

1.3.2 Equation de REYNOLDS:

Ce sont les équations du mouvement moyen. Si nous utilisons la décomposition précédente dans l'équation de continuité (1.3) et que nous prenons la moyenne temporelle de cette équation, nous obtenons :

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0. \quad (1.5)$$

Par différence entre (1.3) et (1.5), on obtient :

$$\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0. \quad (1.6)$$

En appliquant le même traitement que précédemment aux équations instantanées de quantité de mouvement (1.4), nous obtenons sous la forme convective :

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right\} + g_i \quad \text{pour } i=1,2,3 \quad (1.7)$$

On constate que pour l'équation de continuité la décomposition des variables aboutit au remplacement des grandeurs instantanées par les grandeurs moyennes correspondantes. Par contre, si nous comparons les équations (1.4) et (1.7), nous remarquons que des termes supplémentaires inconnus $\overline{u'_i u'_j}$ sont apparus. Le processus de moyenne se traduit donc par une "perte d'informations" au niveau de l'équation de quantité de mouvement

de l'écoulement moyen. Ces termes de corrélations vitesse-vitesse proviennent de la non linéarité des termes convectifs de l'équation (1.4). Ils sont regroupés dans le tenseur symétrique des corrélations doubles de vitesses $[R_{ij}]$.

$$[R_{ij}] = [\overline{u'_i u'_j}]$$

On peut écrire l'équation (1.7) sous une forme analogue à (1.1):

$$\frac{\partial \rho \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad \text{pour } i=1,2,3 \quad (1.8)$$

avec

$$[\bar{T}_{ij}] = [-\bar{P} \delta_{ij}] + [\bar{\tau}_{ij}] + [-\rho R_{ij}] \quad (1.9)$$

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.10)$$

Par rapport au tenseur des contraintes visqueuses $[T_{ij}]$ (1.2), le tenseur des contraintes moyennes visqueuses $[\bar{T}_{ij}]$ (1.9) est augmenté du tenseur des contraintes de REYNOLDS $[-\rho R_{ij}]$, qui amplifie la diffusion de la quantité de mouvement de l'écoulement moyen.

Les quatre équations de REYNOLDS contiennent dix inconnues (les 3 composantes de vitesse, la pression, les 6 corrélations doubles de vitesses). Ces équations constituent un système ouvert. Il y a donc un "problème de fermeture" des

équations des REYNOLDS: il faut trouver des lois permettant d'équilibrer les nombres d'équations et d'inconnues. C'est le but de la modélisation de la turbulence.

1.4 Problème de fermeture:

Pour assurer la fermeture des équations de REYNOLDS, différentes méthodes sont envisageables.

La première consiste à écrire des équations supplémentaires pour les grandeurs turbulentes inconnues (corrélations vitesse-vitesse), mais ce processus est divergent. Comme nous le verrons ultérieurement, l'établissement des équations de transport pour les corrélations double de vitesse fait apparaître de nouvelles inconnues (corrélation vitesse-pression, corrélations triple de vitesse). Par conséquent, le nouveau système obtenu reste ouvert.

La deuxième méthode consiste à modéliser les contraintes de REYNOLDS en les reliant par des relations algébriques aux autres inconnues du système d'équations. On aboutit alors à des modèles de type "longueur de mélange", qui seront développés dans le chapitre suivant.

La dernière méthode possible est une combinaison des deux approches précédentes. La fermeture s'effectue au niveau des équations de transport pour certaines grandeurs turbulentes. Ceci permet de s'affranchir d'une prescription algébrique des échelles de la turbulence et de disposer de modèle ayant une plus grande universalité. Ce type de modélisation sera développé dans le chapitre 3 de la deuxième partie de ce mémoire.

Pour le moment, nous nous limiterons à la présentation des équations de transport pour les grandeurs turbulentes, auxquelles nous ferons appel dans la modélisation.

1.4.1 Equations de transport des corrélations vitesse-vitesse:

Les équations de REYNOLDS contiennent des termes en $\overline{u'_i u'_j}$, qui sont des inconnues. Des équations de transport pour ces corrélations de vitesse peuvent être établies (PIQUET <2-9>):

$$\textcircled{1} \quad \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = - \left\{ \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right\} \quad \textcircled{2}$$

$$- \frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} \quad \textcircled{3}$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left\{ \overline{u'_i \frac{\partial \tau'_{jk}}{\partial x_k}} + \overline{u'_j \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}} \right\} \quad \textcircled{4}$$

$$- \frac{1}{\rho} \left\{ \overline{u'_i \frac{\partial P'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial P'}{\partial x_i}} \right\} \quad \textcircled{5}$$

(1.11)

les termes $\textcircled{4}$ et $\textcircled{5}$ sont généralement décomposés de la manière suivante:

$$\textcircled{4} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \underbrace{\overline{u'_i \tau'_{jk}} + \overline{u'_j \tau'_{ik}}}_{\textcircled{4a}} \right\} - \frac{1}{\rho} \left\{ \underbrace{\overline{\tau'_{jk} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{\tau'_{ik} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}}_{\textcircled{4b}} \right\}$$

$$\textcircled{5} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \underbrace{\frac{P'}{\rho} (\delta_{ik} u'_j + \delta_{jk} u'_i)}_{\textcircled{5a}} \right\} - \frac{P'}{\rho} \left(\underbrace{\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}}}_{\textcircled{5b}} \right) \quad (1.12)$$

Comme pour les équations de NAVIER-STOKES, les termes de (1.11) peuvent être interprétés physiquement. Ils expriment respectivement:

Terme (1) : Variation convective due à l'écoulement moyen de la corrélation $\overline{u_i' u_j'}$.

Terme (2) : Production par interaction entre la turbulence et l'écoulement moyen.

Terme (3) : Diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse.

Terme (4a) : Transport de la corrélation par les forces visqueuses.

Terme (4b) : Dissipation visqueuse de $\overline{u_i' u_j'}$.

Terme (5a) : Diffusion turbulente due aux fluctuations de pression.

Terme (5b) : Redistribution de l'énergie turbulente entre les corrélations vitesse-vitesse. Pour les corrélations normales, ce terme a tendance à diminuer l'anisotropie existant entre ces corrélations (HINZE <2-3>). La contraction de ce terme est nulle.

Les termes (4a) et (4b) peuvent s'écrire de la manière suivante:

$$\frac{1}{\rho} \left\{ \overline{u_i' \frac{\tau'_{jk}}{\partial x_k}} + \overline{u_j' \frac{\tau'_{ik}}{\partial x_k}} \right\} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k^2} - \epsilon_{ij} \quad (1.13)$$

avec $\epsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}$

ϵ_{ij} est appelé taux de dissipation isotrope de la corrélation $\overline{u_i' u_j'}$.

En remplaçant (1.12) et (1.13) dans (1.11) nous obtenons

l'équation de transport pour la corrélation $\overline{u'_i u'_j}$:

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = & - \left\{ \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \overline{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + \frac{P'}{\rho} (\delta_{ik} u'_j + \delta_{jk} u'_i) \right\} \\ & - \epsilon_{ij} + \frac{P'}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.4.2 Equation de transport pour l'énergie cinétique turbulente

En utilisant la décomposition de REYNOLDS, l'énergie cinétique totale moyenne se décompose en l'énergie cinétique de l'écoulement moyen et en l'énergie cinétique turbulente K.

$$\frac{1}{2} \overline{u_i^2} = \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 + \frac{1}{2} \overline{u_i'^2} \quad K = \frac{1}{2} \overline{u_i'^2} \quad (\text{somme sur } i)$$

Pour obtenir l'équation de transport de l'énergie turbulente, il faut remplacer l'indice j par i, dans (1.11), sommer sur l'indice i et multiplier le résultat par 1/2. Nous obtenons :

$$\bar{u}_k \frac{\partial K}{\partial x_k} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_i u'_i u'_k}}{\partial x_k}}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{u'_i} \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}}_{\textcircled{4}} - \underbrace{\frac{1}{2} \overline{u'_i} \frac{\partial P'}{\partial x_i}}_{\textcircled{5}} \quad (1.15)$$

Les termes $\textcircled{4}$ et $\textcircled{5}$ de l'équation (1.15) se décomposent de la manière suivante :

$$\textcircled{4} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_i \tau'_{ik}}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \overline{\tau'_{ik}} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \quad (1.16)$$

$\textcircled{4a}$
 $\textcircled{4b}$

$$\textcircled{5} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\overline{P' u'_i}}{\rho} \delta_{ik} \right) - \frac{\overline{P'}}{\rho} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \quad (1.17)$$

$\textcircled{5a}$
 $\textcircled{5b}$

Ces différents termes s'interprètent de la façon suivante:

Terme $\textcircled{1}$: Variation convective due à l'écoulement.

Terme $\textcircled{2}$: Production d'énergie cinétique turbulente K par l'écoulement moyen. Ce terme est généralement positif, mais cela n'est pas une règle absolue. Il figure aussi dans l'équation de transport pour l'énergie cinétique de l'écoulement moyen mais avec le signe opposé. Il exprime donc le transfert d'énergie du mouvement moyen vers le mouvement turbulent.

Terme $\textcircled{3}$: Diffusion turbulente de K due aux fluctuations de vitesse.

Terme $\textcircled{4a}$: Transport de l'énergie cinétique par les forces visqueuses.

Terme $\textcircled{4b}$: Dissipation visqueuse de l'énergie cinétique turbulente. Ce terme représente une transformation en chaleur de l'énergie cinétique turbulente.

Terme $\textcircled{5a}$: Diffusion turbulente due aux fluctuations de pression.

Terme (5b) : Contraction du terme de redistribution. D'après l'équation (1.6), ce terme est nul.

Les termes (4a) et (4b) peuvent prendre la forme suivante:

$$(4a) = \nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_k^2} + \nu \frac{\overline{\partial u'_i \partial u'_k}}{\partial x_k \partial x_i} \quad (1.18)$$

$$(4b) = \epsilon + \nu \frac{\overline{\partial u'_i \partial u'_k}}{\partial x_k \partial x_i} \quad (1.19)$$

avec $\epsilon = \nu \frac{\overline{\partial u'_i \partial u'_i}}{\partial x_k \partial x_k}$

ϵ est appelé taux de dissipation isotrope ou pseudo-dissipation de l'énergie cinétique turbulente K . Pour une turbulence homogène, le dernier terme de (1.18) et (1.19) est nul (CORRSIN <2-4>). Dans ce cas, ϵ représente vraiment le taux de dissipation visqueuse de la turbulence.

En utilisant (1.16), (1.17), (1.18) et (1.19), l'équation (1.15) s'écrit:

$$\bar{u}_k \frac{\partial K}{\partial x_k} = \frac{\overline{u'_i u'_k}}{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} - \nu \frac{\partial K}{\partial x_k} + \frac{\overline{P' u'_k}}{\rho} \right\} - \epsilon \quad (1.20)$$

C'est sous cette forme que l'équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente est généralement connue. Cette équation peut être obtenue plus directement à partir de (1.14).

1.4.3 Equation de transport pour le taux de dissipation isotrope:

Le taux de dissipation isotrope ϵ figure dans l'équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente (1.20). La pseudo-dissipation étant utilisée par certains modèles de fermeture, il est intéressant d'établir une équation de transport pour cette inconnue. On obtient (DAVIDOV <2-5>, HARLOW & NAKAYAMA <2-6>, CHASSAING & HA-MINH <2-7>):

$$\bar{u}_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = -2\nu \left\{ \frac{\overline{\partial u'_i \partial u'_k}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\overline{\partial u'_j \partial u'_j}}{\partial x_i \partial x_k} \right\} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - 2\nu \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k}}$$

①

②

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_k \epsilon} - \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} + 2 \frac{\nu \overline{\partial u'_k \partial P'}}{\rho \partial x_j \partial x_j} \right)$$

③a

③b

③c

$$2\nu \left\{ \frac{\overline{\partial u'_i \partial u'_i \partial u'_k}}{\partial x_k \partial x_j \partial x_j} \right\} - 2\nu^2 \left(\frac{\overline{\partial^2 u'_i}}{\partial x_k \partial x_k} \right)^2$$

④

⑤

(1.21)

La signification des différents termes est:

Terme (1) : Variation convective due à l'écoulement moyen du
taux de dissipation isotrope.

Termes (2) et (4) : Production de ϵ par le mouvement moyen et le
mouvement fluctuant.

Terme (3a) : Diffusion due aux fluctuations de vitesse.

Terme (3b) : Diffusion visqueuse.

Terme (3c) : Diffusion due aux fluctuations de pression.

Terme (5) : Dissipation de la dissipation isotrope.

CONSTITUTION D'UNE BASE DE DONNEES EXPERIMENTALES2.1 Introduction:

Dans un chapitre ultérieur, nous développerons plusieurs modèles de turbulence pour tenter de prédire, dans les parties établies amont et aval de la cellule, différentes grandeurs telles que: vitesse moyenne, corrélations vitesse-vitesse, énergie turbulente, gradient de pression, etc... La validation de ces modèles de turbulence nécessite de comparer leurs prédictions avec des résultats expérimentaux existants dans la littérature. Pour permettre ces comparaisons, il est nécessaire de constituer une base de données expérimentales. Ceci est le but du présent chapitre.

Dans les parties établies, nous sommes en présence d'un écoulement entre deux parois parallèles, dont l'une est en mouvement par rapport à l'autre, et avec un gradient longitudinal de pression motrice constant, cet écoulement est généralement dénommé de COUETTE avec gradient de pression. Cette désignation provient du nom du premier scientifique qui étudia ce type d'écoulement. COUETTE <2.8> s'intéressa plus particulièrement au cas où le gradient de pression est nul. Dans ce cas, la mise en mouvement du fluide est provoquée uniquement par le déplacement de la paroi mobile (fig 2-1). Dans les parties établies, l'écoulement du fluide est gouverné par les deux paramètres suivants: la vitesse de la paroi, le gradient de pression. Suivant les valeurs de ces deux paramètres, le profil de vitesse moyenne de l'écoulement est considérablement modifié (fig 2-1). Nous pouvons classer l'écoulement en trois familles (voir tableau ci-dessous).

		Vitesse de la paroi mobile	
		nulle	non nulle
gradient de pression	nul	pas d'écoulement	écoulement de COUETTE pur
	non nul	écoulement de POISEUILLE pur	écoulement de COUETTE avec gradient de pression

2.2 Ecoulements de POISEUILLE:

Ce type d'écoulement a fait l'objet de nombreuses études expérimentales plus ou moins détaillées. Parmi ces expériences, les travaux les plus importants sont ceux de LAUFER <2-10><2-11>, COMTE-BELLOT <2-12>, CLARK <2-13>, HUSSAIN & REYNOLDS <2-14>, EL TELBANY & REYNOLDS <2-15><2-16><2-17>.

Si nous construisons un nombre de REYNOLDS Re_{max} basé sur la vitesse maximale de l'écoulement et la hauteur du passage, ce nombre Re_{max} varie de 24600 à 514000 pour l'ensemble des données expérimentales. Ces expériences servant de référence pour les modélisations ultérieures, il nous semble utile de les comparer entre elles.

A l'exception de CLARK, les différents auteurs fournissent les profils de vitesse moyenne. Pour des nombres de REYNOLDS voisins, la forme de ces profils expérimentaux est comparée sur la figure 2-2. Cette comparaison met en évidence le fait que seuls les profils de vitesse moyenne de COMTE-BELLOT

diffèrent des autres expériences. Deux explications peuvent justifier une telle différence. La première généralement invoquée est que l'écoulement n'est pas complètement établi dans la section de mesure. La deuxième provient d'une remarque de COMTE-BELLOT sur son dispositif expérimental, qui indique que le convergent situé en aval de la section de mesure provoque une courbure des lignes de courant dans une partie du canal. Bien que l'auteur indique que ce phénomène n'est pas sensible dans la section de mesure, nous pouvons penser qu'il peut expliquer la forme particulière de ses profils de vitesse moyenne.

En utilisant une représentation logarithmique pour les profils de vitesse moyenne, les expériences montrent que dans une partie de l'écoulement la vitesse moyenne suit une loi de la forme suivante:

$$u^+ = A \ln(y^+) + B$$

Les constantes A et B des différents travaux sont données dans le tableau suivant:

	A	B
LAUFER <2-10>	3	5,5
COMTE-BELLOT <2-12>	2,7	4,5 à 6
CLARK <2-13>	2,86	variable
HUSSAIN & REYNOLDS <2-14>	2,44	5
EL TELBANY & REYNOLDS <2-15>	2,55	5,1

Nous constatons que A et B prennent des valeurs différentes suivant les auteurs. Dans leurs expériences respectives, LAUFER, HUSSAIN & REYNOLDS et EL TELBANY & REYNOLDS trouvent que A et B sont des constantes, tandis que B varie pour CLARK et COMTE-BELLOT. Cette variation n'est pas clairement établie. Car pour CLARK B augmente avec le nombre de REYNOLDS, tandis que pour COMTE-BELLOT l'évolution de B est plus erratique. Pour déterminer les variables A et B, il faut connaître la vitesse de frottement pariétale u_T . Cette détermination est faite à partir: soit du profil de vitesse moyenne dans la sous-couche visqueuse, soit du gradient longitudinal de pression. Ces deux types de mesure sont difficiles à effectuer, et peuvent donner pour la vitesse de frottement pariétale des valeurs différentes (voir HUSSAIN & REYNOLDS <2-14>). Cette difficulté à déterminer précisément u_T peut justifier partiellement les variations de A et B suivant les auteurs. Les expériences les plus récentes montrent que A et B prennent des valeurs respectivement voisines de 2,5 et 5.

A l'exception de HUSSAIN & REYNOLDS qui ne donnent que la corrélation $\overline{u'u'}$, les autres auteurs mesurent les trois corrélations normales. Ces mesures nous permettent de calculer l'énergie turbulente K. Pour chacun des travaux expérimentaux, les profils de K/u_T^2 sont indépendants du nombre de REYNOLDS. La figure 2-3a montre que globalement ces profils se scindent en deux groupes. Le premier est constitué par les résultats de LAUFER et CLARK, tandis que le second concerne ceux de COMTE-BELLOT et EL TELBANY & REYNOLDS. Dans la partie centrale de l'écoulement, les données de CLARK corroborent bien celles de LAUFER. Mais dans les régions pariétales, l'énergie turbulente K/u_T^2 mesurée par CLARK est supérieure à celle de LAUFER, et elle se rapproche des prédictions du second groupe. COMTE-BELLOT et EL TELBANY & REYNOLDS prédisent globalement les mêmes profils d'énergie turbulente K/u_T^2 , ils diffèrent très légèrement au centre de l'écoulement.

Rappelons que la vitesse de frottement pariétale u_T ,

qui est utilisée pour rendre sans dimension l'énergie turbulente (fig 2-3a) et ultérieurement la corrélation $\overline{u'u'}$ (fig 2-3b), est difficile à déterminer. Une erreur sur cette grandeur provoque seulement une translation des profils de K ou $\overline{u'u'}$, mais elle ne peut justifier la différence de forme entre ces profils.

Pour préciser les causes des dispersions entre les mesures de K/u_T^2 , nous avons comparé pour l'ensemble des expériences les profils des trois corrélations normales. Cette comparaison montre que les dispersions précédemment constatées sur K/u_T^2 sont dues principalement aux mesures de la corrélation $\overline{u'u'}$, qui est la composante prépondérante de l'énergie turbulente (fig 2-3b). Les différents auteurs donnent des profils similaires pour $\overline{v'v'}$ et $\overline{w'w'}$. La figure 2-3b montre que les données expérimentales de HUSSAIN & REYNOLDS corroborent celles de CLARK.

Dans les zones pariétales, la structure turbulente au sein d'une couche limite et celle d'un écoulement de POISEUILLE sont identiques. KLEBANOFF <2-18> trouve que la valeur du pic de K/u_T^2 est voisin de 8. Cette donnée semble confirmer les mesures de CLARK, COMTE-BELLOT, HUSSAIN & REYNOLDS et EL TELBANY & REYNOLDS. Pour la partie centrale des écoulements de POISEUILLE, le choix d'un profil d'énergie turbulente est plus difficile. Etant donnée la forme particulière des profils de vitesse moyenne de COMTE-BELLOT, nous pouvons émettre quelques réserves quant à la justesse de ses mesures de $\overline{u'u'}$ et K . Dans ces conditions, les profils de K/u_T^2 de LAUFER et CLARK sont sans doute les plus réalistes dans cette partie de l'écoulement. Etant données les remarques précédentes et les précautions prises par CLARK et HUSSAIN & REYNOLDS dans la réalisation de leurs expériences, nous pensons que leurs résultats expérimentaux sont sans doute les plus proches de la réalité.

L'hypothèse de BOUSSINESQ utilisée par certains modèles de turbulence fait apparaître une inconnue dénommée viscosité turbulente D_t . La corrélation $\overline{u'v'}$ et le gradient transversal de vitesse moyenne permettent de calculer des valeurs expérimentales

de cette grandeur. HUSSAIN & REYNOLDS et EL TELBANY & REYNOLDS la déterminent pour leurs expériences. Les profils $V_t/0.5hu_T$ de HUSSAIN & REYNOLDS sont identiques et indépendants du nombre de REYNOLDS. Les profils de viscosité turbulente des deux travaux précédemment cités sont globalement en accord (fig 2-4). Etant donné qu'à partir d'une distance relativement faible des parois la corrélation varie linéairement avec l'ordonnée y , la légère différence de forme entre les deux profils de V_t est sans doute imputable à la détermination du gradient transversal de vitesse moyenne. Dans la partie centrale de l'écoulement, la viscosité turbulente est relativement constante. Cette propriété est utilisée dans certains modèles de turbulence (par ex: ELROD & NG <2-19>). Au centre de l'écoulement, la viscosité turbulente est égale à $0,035hu_T$.

2.3 Ecoulements de COUETTE pur:

Depuis les premiers travaux de COUETTE <2-8> en 1890, ce type d'écoulements a fait l'objet de plusieurs études expérimentales, dont les plus importantes sont dues à REICHARDT <2-20> <2-21>, ROBERTSON & JOHNSON <2-22>, LEUTHEUSSER & CHU <2-23> et EL TELBANY & REYNOLDS <2-15><2-16><2-17>. Le nombre de REYNOLDS de ces expériences varie de 1080 à 68400. Pour de faibles valeurs de Re_b , l'écoulement de COUETTE est laminaire, la vitesse moyenne varie linéairement entre les deux parois (fig 2-5). Pour des nombres de REYNOLDS plus élevés, l'écoulement devient turbulent, et le profil de vitesse moyenne prend la forme d'un S plus ou moins prononcé suivant la valeur de Re_b .

Sur la figure 2-5, nous comparons pour deux nombres de REYNOLDS très différents les profils de vitesse moyenne donnés par les auteurs précédemment cités. Pour $Re_b \approx 5800$, les résultats de LEUTHEUSSER & CHU et de REICHARDT sont globalement en accord. On peut noter un léger désaccord dans les zones pariétales entre ces deux profils, qui peut se justifier par les valeurs différentes du nombre de REYNOLDS des deux expériences.

Pour $Re_b \approx 60000$, les mesures de ROBERTSON & JOHNSON diffèrent de celles de EL TELBANY & REYNOLDS et de REICHARDT. Si la différence entre ROBERTSON & JOHNSON et EL TELBANY & REYNOLDS peut s'expliquer par le fait que les nombres de REYNOLDS sont relativement différents dans ces deux expériences, cette explication n'est pas valable pour les expériences de ROBERTSON & JOHNSON et REICHARDT. Etant donné le nombre d'expériences disponibles, nous ne pouvons dire avec certitude lequel de ces trois auteurs donne les profils de vitesse moyenne les plus réalistes .

La figure 2-5 montre que la vitesse moyenne varie linéairement dans la partie centrale de l'écoulement. Cette zone est d'autant plus étendue que la valeur du nombre de REYNOLDS est grande. Cela veut dire que le gradient de vitesse moyenne y est constant, mais il varie avec le nombre de REYNOLDS. ROBERTSON & JOHNSON donnent pour le gradient de vitesse moyenne au centre de l'écoulement la loi suivante:

$$\frac{h}{U_b} \left| \frac{dU}{dy} \right|_{h/2} = \frac{0,78}{\text{Log}_{10}(Re_b/4)} \quad \text{avec } Re_b = \frac{U_b h}{\nu}$$

Ils donnent aussi une loi pour le coefficient de frottement C_f :

$$\sqrt{\frac{C_f}{2}} = \frac{G}{\text{Log}_{10}(Re_b/4)} \quad \text{avec } C_f = \frac{2 \tau_w}{\rho (U_b/2)^2} = 8 \left(\frac{u_\tau}{U_b} \right)^2$$

ROBERTSON & JOHNSON trouvent que pour leurs expériences G est égal à 0,19. Pour les mesures expérimentales de EL TELBANY & REYNOLDS, la valeur optimale de G est 0,182. Cette différence tend à montrer que pour un écoulement donné ROBERTSON & JOHNSON trouveraient une vitesse de frottement pariétale supérieure à celle de EL TELBANY & REYNOLDS.

Une représentation logarithmique des profils de vitesse moyenne montre que dans une partie de l'écoulement la vitesse

moyenne suit une loi:

$$u^+ = A \ln(y^+) + B$$

Les constantes A et B sont données dans le tableau suivant:

	A	B
REICHARDT <2-20>	2,5	5,5
ROBERTSON & JOHNSON <2-22>	2,43	5,6
EL TELBANY & REYNOLDS <2-15>	2,55	5,1

Pour l'ensemble de ces travaux, les valeurs moyennes de A et B sont respectivement 2,5 et 5,4, elles sont voisines de celles trouvées pour les écoulements de POISEUILLE.

Pour les écoulements de COUETTE pur, les mesures de grandeurs turbulentes sont peu nombreuses. Nous ne disposons que des mesures de EL TELBANY & REYNOLDS pour les trois corrélations normales et pour $\overline{u'v'}$, et de celles de ROBERTSON & REYNOLDS pour $\overline{u'u'}$. La figure 2-6 montre que ces deux travaux prédisent des formes similaires pour cette dernière corrélation. Mais EL TELBANY & REYNOLDS mesurent un niveau de $\overline{u'u'}$ plus élevé que celui de ROBERTSON & JOHNSON. La vitesse de frottement pariétale u_τ est utilisée pour rendre sans dimensions les corrélations normales. Nous avons établi précédemment que ROBERTSON & JOHNSON surestiment u_τ par rapport à EL TELBANY & REYNOLDS, cela peut expliquer partiellement la différence entre les profils de la figure 2-6.

A partir de leurs données expérimentales, REICHARDT et EL TELBANY & REYNOLDS déterminent des profils de viscosité

turbulente, qui sont comparés sur la figure 2-7. Nous constatons qu'ils présentent une différence de forme dans la partie centrale de l'écoulement. Car EL TELBANY & REYNOLDS trouvent que U_t y est relativement constant, tandis que pour REICHARDT elle ne présente pas un tel palier. Dans la partie centrale des écoulements de COUETTE pur, la corrélation $\overline{u'v'}$ et le gradient transversal de la vitesse moyenne sont constants, donc la viscosité turbulente garde la même valeur. Cela tend à valider les résultats de EL TELBANY & REYNOLDS.

Avant d'étudier la dernière famille d'écoulements, nous comparons sur la figure 2.8 les profils d'énergie turbulente et des trois corrélations normales pour des écoulements de POISEUILLE et COUETTE pur. Nous constatons que la turbulence au sein de ces deux types d'écoulements est similaire dans les zones pariétales, mais qu'elle diffère dans la partie centrale. Cette différence est principalement due au fait que la valeur des taux de production des équations de transport pour K et $\overline{u'u'}$ (1.11) (1.15) est notablement différente dans la partie centrale de ces deux types d'écoulements.

La corrélation $\overline{u'v'}$ et le gradient de vitesse moyenne s'annulent au centre des écoulements de POISEUILLE, ceci provoque l'annulation du taux de production de K et $\overline{u'u'}$. Dans ces conditions, ces deux grandeurs subissent une diminution, qui est limitée par les processus de diffusion turbulente. $\overline{w'w'}$ ne recevant son énergie que de $\overline{u'u'}$ par l'intermédiaire du terme de redistribution, l'évolution de ces deux corrélations est donc liée dans la partie centrale de l'écoulement. Par contre la corrélation $\overline{v'v'}$, qui reçoit aussi son énergie par le même processus de redistribution, est moins influencée par l'évolution de $\overline{u'u'}$.

Dans la partie centrale des écoulements de COUETTE pur, $\overline{u'v'}$ et le gradient de vitesse moyenne sont non nuls et constants, donc les taux de production d'énergie turbulente et de la corrélation $\overline{u'u'}$ sont aussi constants. Ceci se traduit par des

profils de K et de corrélations normales relativement plats au centre de l'écoulement. Comme précédemment, $\overline{v'v'}$ et $\overline{w'w'}$ reçoivent de l'énergie de $\overline{u'u'}$ par l'intermédiaire du terme de redistribution. La comparaison des profils de K, $\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$ et $\overline{w'w'}$ pour les deux types d'écoulements nous permet de constater que $\overline{v'v'}$ est la seule corrélation normale qui est sensiblement la même dans les deux cas.

2.4 Ecoulements de COUETTE avec gradient de pression :

Pour cette dernière famille d'écoulements nous ne disposons que des travaux de EL TELBANY & REYNOLDS <2-15> <2-16> <2-17>, et de HUEY & WILLIAMSON <2-24>. Les premiers étudient plus particulièrement les écoulements de COUETTE avec un gradient de pression favorable (fig 2-1(b)), tandis que les seconds s'intéressent au cas où la vitesse débitante de l'écoulement est nulle. Dans ce cas le gradient de pression s'oppose à la mise en mouvement du fluide (fig 2-1(c)). Nous remarquons que les gradients de pression de ces deux travaux sont de signe contraire. Cela empêche normalement toutes comparaisons des résultats expérimentaux. En plus des profils de vitesse moyenne, EL TELBANY & REYNOLDS mesurent les trois corrélations normales et $\overline{u'u'}$. HUEY & WILLIAMSON donnent seulement les profils de vitesse moyenne et la corrélation $\overline{u'u'}$.

Les profils de vitesse moyenne et de $\overline{u_x'u_y'}$ de deux écoulements notés (1) et (2), qui ne diffèrent que par le signe de leur gradient de pression, sont reliés par les relations suivantes (fig 2-1):

$$\textcircled{1} \quad U(y) = U_b - U \textcircled{2}(h-y) \qquad \overline{(u_x'u_y')}(y) \textcircled{1} = \overline{(u_x'u_y')(h-y)} \textcircled{2}$$

Les données de HUEY & WILLIAMSON transformées par ces deux relations sont désignées sur la figure 2-9 par la notation " HUEY & WILLIAMSON modifié". Les écoulements décrits par ces

nouvelles données ont un gradient de pression favorable et une vitesse débitante égale à celle de la paroi mobile. Sur la figure 2-9, un écoulement de HUEY & WILLIAMSON ainsi modifié est comparé à une expérience de EL TELBANY & REYNOLDS dont la vitesse débitante est égale à $0,97U_b$. Les profils de vitesse des deux expériences sont en accord près de la paroi ayant la vitesse de frottement la plus grande, mais ils diffèrent près de l'autre paroi. La forme des profils de $\overline{u'u'}$ est globalement similaire pour $y < 0,8h$. Au delà, cette corrélation évolue différemment pour les deux travaux. On constate finalement une différence de niveau de $\overline{u'u'}$ entre les deux expériences. Etant donnée la cohérence de l'ensemble des mesures expérimentales de EL TELBANY & REYNOLDS pour des écoulements de POISEUILLE et de COUETTE pur, nous pensons que leurs résultats expérimentaux sont sans doute les plus proches de la réalité.

FERMETURE BASEE SUR L'HYPOTHESE DE BOUSSINESQ3.1 INTRODUCTION:

Le but du présent chapitre est de résoudre numériquement les équations de REYNOLDS, qui régissent l'écoulement moyen de l'électrolyte dans les parties établies amont et aval de la cellule d'électro-zingage. Dans ces régions, l'écoulement du fluide électrolytique est par droites parallèles. Cette propriété permet de simplifier considérablement les équations de REYNOLDS. Malgré ces simplifications, ces équations restent "ouvertes". Pour pouvoir les résoudre, il est nécessaire d'utiliser des lois de fermeture.

L'hypothèse de BOUSSINESQ, qui est utilisée pour les différentes fermetures développées dans ce chapitre, fait apparaître une viscosité turbulente ν_t . Pour déterminer cette nouvelle inconnue et donc assurer la fermeture des équations de REYNOLDS simplifiées, nous développerons plusieurs modèles de turbulence. Leurs prédictions seront comparées à la base de données expérimentales constituée dans le précédent chapitre. Nous présenterons aussi deux méthodes de résolution des équations de mouvement.

3.2 SIMPLIFICATIONS DES EQUATIONS DE MOUVEMENT:

Dans les parties établies amont et aval de la cellule, l'écoulement de l'électrolyte est par droites parallèles. Cette particularité lui confère les propriétés suivantes:

- Les grandeurs dynamiques moyennes (vitesse, corrélation vitesse-vitesse) ne sont fonction que de l'ordonnée x_2 .
- La seule composante non nulle du vecteur vitesse moyenne est celle suivant x_1 .
- La pression motrice \hat{P} est indépendante de la coordonnée x_3 .

Ces trois propriétés permettent des simplifications importantes des équations du précédent chapitre. Dans les parties établies, les équations de REYNOLDS (1.5) (1.7) se réduisent à :

$$0. = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_1} + \frac{d}{dx_2} \left(\nu \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} - \overline{u'_1 u'_2} \right) \quad (3.1)$$

$$0. = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_2} + \frac{d(-\overline{u'_2 u'_2})}{dx_2}$$

$$0. = \overline{u'_2 u'_3}$$

Comme la corrélation $\overline{u'_1 u'_2}$ est fonction seulement de l'ordonnée x_2 , la deuxième équation implique que la pression \hat{P} est de la forme suivante :

$$\hat{P}(x_1, x_2) = F(x_1) + \overline{\rho u'_2 u'_2}$$

où la fonction F ne dépend que de x_1 .

Le dernier terme de (3.1) n'est fonction que de l'ordonnée x_2 , donc le gradient de pression motrice ne peut dépendre que de cette coordonnée. Cette remarque et la précédente relation imposent que \hat{P} est de la forme :

$$\hat{P}(x_1, x_2) = Ax_1 + B - \overline{\rho u'_2 u'_2}$$

où A et B sont des constantes qui dépendent des valeurs de la pression motrice à l'entrée et à la sortie des parties établies.

Dans ces conditions, la connaissance des pressions motrices aux extrémités des zones établies, nous permet de connaître le gradient longitudinal de la pression \hat{P} . Dans l'équation de mouvement (3.1) des parties établies amont et aval, la vitesse moyenne locale \bar{u}_1 et la corrélation $\overline{u'_1 u'_2}$ sont les seules inconnues.

Dans ces zones établies, les équations de transport des corrélations normales et de $\overline{u'_1 u'_2}$ (1.14) se simplifient considérablement, et elles s'écrivent:

pour $\overline{u'_1 u'_1}$:

$$0. = -2\overline{u'_1 u'_2} \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} - \frac{d\overline{u'_1 u'_1 u'_2}}{dx_2} + \nu \frac{d^2 \overline{u'_1 u'_1}}{dx_2^2} + 2 \frac{\overline{P' \partial u'_1}}{\rho \partial x_1} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_k} \right)^2}$$

pour $\overline{u'_2 u'_2}$:

$$0. = -\frac{d\overline{u'_2 u'_2 u'_2}}{dx_2} + \nu \frac{d^2 \overline{u'_2 u'_2}}{dx_2^2} - \frac{2 \overline{P' u'_2}}{\rho dx_2} + 2 \frac{\overline{P' \partial u'_2}}{\rho \partial x_2} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u'_2}{\partial x_k} \right)^2}$$

pour $\overline{u'_3 u'_3}$:

$$0. = -\frac{d\overline{u'_3 u'_3 u'_2}}{dx_2} + \nu \frac{d^2 \overline{u'_3 u'_3}}{dx_2^2} + 2 \frac{\overline{P' \partial u'_3}}{\rho \partial x_3} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u'_3}{\partial x_k} \right)^2}$$

pour $\overline{u'_1 u'_2}$:

$$0. = -\frac{\overline{u'_2 u'_2} d\bar{u}_1}{dx_2} - \frac{d\overline{u'_1 u'_2 u'_2}}{dx_2} + \nu \frac{d^2 \overline{u'_1 u'_2}}{dx_2^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d\overline{P' u'_1}}{dx_2} - \frac{P'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \right) - 2\nu \frac{\partial u'_1}{\partial x_k} \frac{\partial u'_2}{\partial x_k}$$

Ces équations de transport montrent que $\overline{u'_1 u'_1}$ est la seule corrélation normale à recevoir directement de la production de l'écoulement moyen. Tandis que $\overline{u'_2 u'_2}$ et $\overline{u'_3 u'_3}$ sont alimentées en énergie par l'intermédiaire du terme de redistribution, qui tend à diminuer l'anisotropie entre les corrélations. Cela justifie le fait que $\overline{u'_1 u'_1}$ soit la plus importante des corrélations normales.

Dans les parties établies, l'équation de transport pour l'énergie turbulente K (1.20) s'écrit:

$$0. = -\overline{u'_1 u'_2} \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} - \frac{1}{2} \frac{d\overline{u'_i u'_i u'_2}}{dx_2} + \nu \frac{d^2 K}{dx_2^2} - \frac{d}{dx_2} \left(\frac{\overline{P' u'_2}}{\rho} \right) - \epsilon$$

Tandis que l'équation de transport pour le taux de dissipation isotrope ϵ (1.21) se réduit à:

$$0. = -2\nu \left\{ \frac{\partial u'_1}{\partial x_j} \frac{\partial u'_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_1} \frac{\partial u'_j}{\partial x_2} \right\} \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} - 2\nu \overline{u'_2} \frac{\partial u'_1}{\partial x_2} \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx_2^2} - \frac{d}{dx_2} \left\{ \overline{u'_2 \epsilon'} - \nu \frac{d\epsilon}{dx_2} + 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial u'_2}{\partial x_j} \frac{\partial P'}{\partial x_j} \right\} - 2\nu \frac{\overline{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}}{\partial x_k \partial x_j} - 2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)^2$$

3.3 HYPOTHESE DE BOUSSINESQ:

Dans le précédent paragraphe, nous avons donné l'équation de mouvement du fluide dans les parties établies amont et aval:

$$\frac{d}{dx_2} \left(\nu \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} - \overline{u'_1 u'_2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_1} = 0. \quad (3.1)$$

Cette équation comporte deux inconnues $\bar{u}_1(x_2)$ et $\overline{u'_1 u'_2}(x_2)$, elle est donc "ouverte". Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux fermetures basées sur l'hypothèse de BOUSSINESQ, qui relie le tenseur des corrélations vitesse-vitesse au tenseur taux de déformation à l'aide de la viscosité turbulente ν_t . Une telle hypothèse trouve sa justification dans l'équation de transport pour l'énergie cinétique moyenne qui s'écrit (HINZE <2-25>):

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\bar{u}_i^2}{2} \right) &= \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{P} \bar{u}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j} \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ \textcircled{1} & \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \\ &+ \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{u}_i \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ & \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{6} \end{aligned}$$

Terme $\textcircled{1}$: Variation convective due à l'écoulement moyen de l'énergie cinétique moyenne.

Terme $\textcircled{2}$: Production d'énergie cinétique moyenne. Ce terme est généralement négatif, il tend à diminuer l'énergie cinétique moyenne. Il se retrouve dans l'équation de transport pour l'énergie turbulente (1.20) avec un signe opposé, il exprime donc un prélèvement

d'énergie au mouvement moyen pour entretenir la turbulence au sein de l'écoulement.

Terme ③ : Diffusion due au champ de pression.

Terme ④ : Diffusion turbulente.

Terme ⑤ : Diffusion visqueuse.

Terme ⑥ : Dissipation visqueuse, elle exprime la transformation d'énergie cinétique en énergie interne.

Les termes ② et ⑥ tendent à diminuer l'énergie cinétique moyenne, donc $-\overline{u'_i u'_j}$ et $\nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ jouent des rôles analogues.

Cela nous incite à exprimer les corrélations en fonction du tenseur taux de déformation de l'écoulement moyen :

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right\} + \frac{2}{3} K \delta_{ij} \quad (3.2)$$

Cette relation est une forme généralisée de l'hypothèse formulée par BOUSSINESQ <2-26>. Le terme complémentaire $\frac{2}{3} K \delta_{ij}$ est introduit afin que la relation reste cohérente par contraction des indices.

Dans les parties établies amont et aval, la relation (3.2) s'écrit pour la corrélation $\overline{u'_1 u'_2}$:

$$-\overline{u'_1 u'_2} = \nu_t \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} \quad (3.3)$$

On voit que la modélisation de la corrélation $\overline{u'_1 u'_2}$ fait apparaître une nouvelle inconnue, la viscosité turbulente ν_t . Celle-ci est différente de la viscosité moléculaire ν , qui est

une propriété intrinsèque du fluide. Comme $\overline{u_1' u_2'}$ est une grandeur liée à la turbulence au sein de l'écoulement, ν_t est une caractéristique de celui-ci.

Pour assurer la fermeture du système (3.1) (3.3), plusieurs propositions ont été faites pour modéliser ν_t . Dans les paragraphes suivants nous allons aborder quelques uns des modèles de turbulence existants.

3.4 MODELE DE LONGUEUR DE MELANGE:

La première formulation pour la viscosité turbulente fut donnée par PRANDTL vers 1925. Par analogie avec le mouvement moléculaire d'un gaz, il propose une expression pour ν_t , qui fait apparaître une longueur de mélange L_m (SCHLICHTING <2-27>). Cette longueur de mélange est l'analogie du libre parcours moyen de la théorie cinétique des gaz. La formulation de PRANDTL s'écrit:

$$\nu_t = L_m^2 \left| \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} \right| \quad (3.4)$$

Différentes expressions empiriques pour L_m ont été proposées suivant le type d'écoulement considéré.

REMARQUE: Dans le but de faciliter la compréhension des équations ultérieures, nous abandonnons momentanément la notation indicielle.

3.4.1 Résolution analytique:

Avant que n'apparaissent les moyens de calculs actuels, la résolution analytique était la seule possibilité pour étudier, autrement qu'expérimentalement, un problème de mécanique

des fluides. A l'exception de quelques problèmes simplistes, ce type de résolution nécessite de diviser l'écoulement en plusieurs zones, dans lesquelles certaines hypothèses simplificatrices permettent d'obtenir des solutions analytiques du problème posé. Ce type de résolution fut utilisé pour les écoulements de POISEUILLE et de COUETTE avec ou sans gradient de pression.

Depuis les premiers travaux de VON KARMAN en 1937, plusieurs résolutions analytiques furent proposées pour les écoulements de POISEUILLE et de COUETTE pur (par ex: PAI <2-28>, REICHARDT <2-20> <2-21>, ROBERTSON <2-29>...). Mais elles n'étaient applicables qu'à un seul type d'écoulements (POISEUILLE ou COUETTE pur). Il fallut attendre 1959 et les travaux de CONSTANTINESCU <2-30> pour que soit proposée une méthode de résolution analytique applicable aux trois types d'écoulements étudiés. Initialement, elle fut développée pour étudier la lubrification turbulente des paliers lisses.

a) Modèle de CONSTANTINESCU:

CONSTANTINESCU <2-30><2-31><2-32> propose une résolution analytique de l'équation de mouvement pour des écoulements par droites parallèles de POISEUILLE et de COUETTE avec ou sans gradient de pression motrice. Les relations (3.1) (3.3) et (3.4) donnent les équations du mouvement de l'écoulement dans les parties établies amont et aval suivantes:

$$\frac{d}{dy} \left\{ (\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy} \right\} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} = 0. \quad (3.5)$$

$$\nu_t = Lm^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \quad (3.6)$$

CONSTANTINESCU propose pour la longueur de mélange une variation linéaire avec la distance à la paroi la plus proche.

$$0 \ll y \ll h/2 \quad L_m = ky \quad (3.7)$$

$$h/2 \ll y \ll h \quad L_m = k(h-y) \quad (3.8)$$

En intégrant l'équation (3.5) suivant y , nous obtenons:

$$(\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} y = C_0 \quad C_0 = \nu \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=0} \quad (3.9)$$

Etant donnée la formulation discontinue de la longueur de mélange (3.7) (3.8), l'équation (3.9) s'écrit différemment suivant que l'ordonnée y est supérieure ou inférieure à $h/2$:

pour $0 \ll y \ll h/2$:

$$\left(\nu + k^2 y^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \right) \frac{dU}{dy} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} y = C_0 \quad (3.10)$$

pour $h/2 \ll y \ll h$:

$$\left(\nu + k^2 (h-y)^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \right) \frac{dU}{dy} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} y = C_0 \quad (3.11)$$

En utilisant, le changement de variable $y^* = h - y$, l'équation (3.11) s'écrit sous une forme similaire à (3.10):

pour $0 \ll y^* \ll h/2$:

$$\left(\nu + k^2 y^{*2} \left| \frac{dU}{dy^*} \right| \right) \frac{dU}{dy^*} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} y^* = C_0^* \quad C_0^* = -C_0 - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} \quad (3.12)$$

Sous une forme sans dimensions, les équations (3.10) et (3.12) s'écrivent:

pour $0 < \tilde{y} < 1/2$:

$$\left(1 + A\tilde{y}^2 \left| \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} \right| \right) \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} + B\tilde{y} = C1 \quad (3.13)$$

pour $0 < \tilde{\tilde{y}} < 1/2$:

$$\left(1 + A\tilde{\tilde{y}}^2 \left| \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} \right| \right) \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} + B\tilde{\tilde{y}} = C2 \quad (3.14)$$

avec $\tilde{y} = \frac{y}{h}$ $\tilde{\tilde{y}} = \frac{h-y}{h}$ $\tilde{U} = \frac{U}{U^*}$

et $B = -\frac{h^2}{U^* \mu} \frac{d\hat{P}}{dx}$ $A = k^2 \frac{U^* h}{V}$ $C1 = C0 \frac{V}{U^* h}$ $C2 = B - C1$

Pour les écoulements de POISEUILLE, la vitesse U^* est égale à la valeur maximale du profil de vitesse.

Pour des écoulements de COUETTE avec ou sans gradient de pression motrice, U^* est égale à la vitesse de la paroi mobile.

La résolution analytique du système d'équations (3.13) (3.14) est possible, mais elle nécessite de très laborieux calculs, aussi CONSTANTINESCU <2-30> propose une simplification pour les réduire notablement. Elle consiste à scinder en deux zones chacune des demi-parties de l'écoulement. Dans les zones proches des parois $A\tilde{y}^2 |d\tilde{U}/d\tilde{y}|$ et $A\tilde{\tilde{y}}^2 |d\tilde{U}/d\tilde{\tilde{y}}|$ sont supposés négligeables devant 1. Tandis qu'en dehors de ces zones, ces deux termes sont très grands devant 1.

$A\tilde{y}^2 |d\tilde{U}/d\tilde{y}|$ et $A\tilde{y}^2 |d\tilde{U}/d\tilde{y}|$ des équations (3.13) et (3.14) modélisent le rapport V_t/V . Les expériences d'écoulements entre deux parois parallèles ont montré que près des parois la viscosité turbulente est négligeable devant la viscosité moléculaire (sous-couches visqueuses). Au delà de ces zones pariétales il existe des zones dites de transition où V_t et V sont du même ordre de grandeur. Dans la partie centrale de l'écoulement, V_t est très supérieure à V . Nous constatons que, exceptées les zones de transition, l'hypothèse de CONSTANTINESCU est physiquement justifiée.

CONSTANTINESCU <2-30> montre que le fait de négliger les zones de transition ($V_t \nu V$) n'a que peu d'effet sur les profils de vitesse moyenne.

Etant donnée la précédente hypothèse simplificatrice, le système d'équations (3.13) et (3.14) s'écrit:

pour $0 \ll \tilde{y} \ll \Delta 1$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} + B\tilde{y} = C1 \quad (3.15)$$

pour $\Delta 1 \ll \tilde{y} \ll 1/2$:

$$A\tilde{y}^2 \left| \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} \right| \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} + B\tilde{y} = C1 \quad (3.16)$$

pour $\Delta 2 \ll \tilde{y} \ll 1/2$:

$$A\tilde{y}^2 \left| \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} \right| \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} + B\tilde{y} = C2 \quad (3.17)$$

pour $0 \leq \tilde{y} \leq \Delta 2$:

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} + B\tilde{y} = C2 \quad (3.18)$$

où $\Delta 1$ et $\Delta 2$ sont les épaisseurs des zones pariétales (sous-couches visqueuses).

L'intégration des équations (3.15) et (3.18) ne pose aucun problème. Par contre, pour intégrer les équations (3.16) et (3.17), il est nécessaire d'oter les valeurs absolues. Il faut donc connaître le signe de la dérivée de la vitesse, et donc la forme du profil de vitesse. Celle-ci change notablement en fonction de la valeur du gradient de pression motrice (fig 2-1). Pour chaque cas de profil de vitesse, l'intégration de (3.16) et (3.17) est différente. Pour déterminer $\Delta 1$, $\Delta 2$ et les différentes constantes d'intégration, il suffit d'écrire la continuité de la vitesse et de sa dérivée aux frontières des intervalles d'intégration.

Les écoulements de POISEUILLE et de COUETTE avec et sans gradient de pression motrice sont résolus succinctement en annexe B.

Pour définir complètement le modèle, il nous reste à définir la valeur de la constante k de la longueur de mélange. Initialement, CONSTANTINESCU <2-30> prit pour k la valeur proposée par PRANDTL, $k = 0,4$, puis il adopta $k = 0,3$ <2-33> pour améliorer l'accord entre l'expérience et le calcul. Ultérieurement, pour des écoulements de POISEUILLE et de COUETTE pur, CONSTANTINESCU <2-34> établit pour k la loi de variation suivante:

$$k = 0.125 \text{ Re} \quad (3.19)$$

avec: $Re = \frac{U_b h}{\nu}$ pour les écoulements de COUETTE pur.

$Re = \frac{U_{max} h}{2\nu}$ pour les écoulements de POISEUILLE.

CONSTANTINESCU <2-32> justifie la nécessité de modifier la valeur de k par l'influence réciproque des deux parois dans la partie centrale de l'écoulement, qui doit diminuer la longueur de mélange. Une autre justification donnée par CONSTANTINESCU <2-34> est liée à sa méthode de résolution, qui néglige les zones où $A\tilde{y}^2 |d\tilde{u}/d\tilde{y}|$ et $A\tilde{y}^2 |d\tilde{u}/d\tilde{y}|$ sont voisins de 1 (zones de transition). Mais la principale raison de la modification de la valeur de k est que dans les régions pariétales la longueur de mélange est inférieure à $0.4y$. Dans ces zones, VAN DRIEST <2-35> utilise une fonction d'amortissement pour atténuer la valeur de L_m . Mais pour conserver la possibilité d'intégrer les équations (3.16) et (3.17), ce genre de fonction ne peut pas être utilisé ici. CONSTANTINESCU compense donc la sur-estimation de L_m dans les régions pariétales par une sous-évaluation de celle-ci dans la partie centrale de l'écoulement, ce qui nécessite une diminution de la valeur de k par rapport à celle de PRANDTL. Cette modification de k se traduit par un déplacement du profil de vitesse et un changement de pente dans la zone logarithmique (fig 3-1). L'importance de ces régions pariétales est fonction de la vitesse de frottement pariétale et donc indirectement du nombre de REYNOLDS. Il semble nécessaire de relier k au nombre de REYNOLDS, comme CONSTANTINESCU le propose dans la relation (3.19).

La relation (3.19) permet d'obtenir des prédictions relativement bonnes pour des écoulements de POISEUILLE et de COUETTE pur. Cela nous incite à étendre cette relation aux écoulements de COUETTE avec gradient de pression en ne modifiant seulement que la formulation de Re . La résolution analytique correspondant aux expériences de EL TELBANY & REYNOLDS <2-15> nous a permis de définir quelques contraintes pour la nouvelle formulation de Re :

- Pour les écoulements de POISEUILLE:

$$Re = \frac{U_{max} h}{2 \nu}$$

- Pour les écoulements de COUETTE avec ou sans gradient de pression, où le maximum et le minimum du profil de vitesse moyenne sont compris entre zéro et la vitesse de la paroi mobile:

$$Re = \frac{U_b h}{\nu}$$

- Pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression favorable, où le maximum du profil de vitesse moyenne est supérieur à la vitesse de la paroi mobile:

$$Re = \frac{1}{2} \left(\frac{U_b h}{\nu} + \frac{U_{max} h}{\nu} \right)$$

- Pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression défavorable, où le minimum du profil de vitesse moyenne est négatif:

$$Re = \frac{U_b h}{\nu} - \frac{U_{min} h}{2 \nu}$$

Etant données ces différentes contraintes pour la formulation de Re , la relation donnant k pour les trois types d'écoulements s'écrit:

$$0.07$$

$$k = 0.125 Re \quad (3.20)$$

$$Re = \frac{Re_b + Re_{max} - Re_{min}}{2}$$

avec $Re_b = \frac{U_b h}{\nu}$ $Re_{max} = \frac{U_{max} h}{\nu}$ $Re_{min} = \frac{U_{min} h}{\nu}$

b) Résultats et conclusions:

Ecoulement de POISEUILLE:

Nous comparons sur la figure 3-2 pour quelques expériences provenant de notre base de données les profils de vitesse obtenus par le modèle de CONSTANTINESCU et les mesures expérimentales. Globalement, les prédictions du modèle sont relativement bonnes comparées aux résultats expérimentaux, bien que dans certains cas il existe un décalage. Cet écart peut être imputable à la relation (3.20) du modèle, qui calcule la valeur de la constante k . Mais cette différence peut aussi provenir d'une mauvaise évaluation du gradient de pression. Car cette grandeur, qui est un paramètre d'entrée de la résolution analytique, est rarement donnée pour les différentes expériences. Nous l'évaluons à partir de la vitesse de frottement pariétale u_τ , dont la détermination expérimentale est difficile. Les erreurs de mesure sur u_τ se répercutent donc sur le gradient de pression. Ceci peut expliquer l'écart entre l'expérience et le calcul constaté pour certains travaux.

Les profils de vitesse calculés et mesurés à partir des expériences de HUSSAIN & REYNOLDS <2-14> diffèrent par leur forme. Cette différence apparaît aussi sur la figure 3-3, elle est principalement due à la valeur relativement faible de k nécessitée par le modèle de CONSTANTINESCU. Dans la zone logarithmique (fig 3-3), k est égal à l'inverse de la pente du profil de vitesse. Expérimentalement, cette valeur est relativement constante et voisine de 0,4. Mais pour que le modèle prédise correctement le profil de vitesse, il est nécessaire de prendre pour k des valeurs plus faibles (fig 3-1), cela n'est pas sans conséquence pour la forme de ce profil.

Sur la figure 3-4, nous constatons que dans les zones pariétales la viscosité turbulente D_t est relativement bien modélisée. Mais un certain désaccord apparaît dans la partie centrale de l'écoulement entre le profil calculé de D_t et celui

déterminé expérimentalement. Cela est probablement dû à une mauvaise estimation de la longueur de mélange, ou à une mauvaise modélisation de ν_t , qui prédit une viscosité turbulente nulle sur l'axe de l'écoulement. Cette annulation de ν_t n'est pas vérifiée expérimentalement.

Écoulement de COUETTE pur:

Pour des nombres de REYNOLDS compris entre 5800 et 68000, les prédictions du profil de vitesse par la méthode de CONSTANTINESCU sont relativement bonnes (fig 3-5). Il est à noter quand même une légère différence entre l'expérience et le calcul dans les zones pariétales, qui est probablement dû à la surestimation de la longueur de mélange dans ces régions. Cette différence apparaît aussi sur la figure 3-6. Pour ce type d'écoulement, la différence de pente du profil de vitesse dans la zone logarithmique est due à la valeur de k donnée par la relation (3.20).

Sur la figure 3-7, les profils expérience et calcul de la viscosité turbulente sont relativement différents. Les profils de vitesse étant bien prédits dans la partie centrale de l'écoulement (fig 3-5), la mauvaise prédiction de ν_t est due à la loi de variation de la longueur de mélange retenue par CONSTANTINESCU. Cette constatation amène la remarque suivante: une mauvaise évaluation de la viscosité turbulente dans la zone centrale n'a qu'une faible influence sur la forme du profil de vitesse.

Pour les écoulements de POISEUILLE, la relation (3.20) permet de prédire correctement les vitesses moyenne et maximale. Pour les écoulements de COUETTE pur, quelque soit la valeur de k , ces deux grandeurs sont bien estimées. Cette relation permet également au modèle de CONSTANTINESCU de prévoir correctement la vitesse de frottement u_τ . Pour les expériences de EL TELBANY & REYNOLDS, elle est prédite avec une erreur inférieure à 1%.

Ecoulement de COUETTE avec gradient de pression:

Les figures 3-8 et 3-9 permettent une comparaison entre les prédictions du modèle de CONSTANTINESCU et les mesures expérimentales pour ce type d'écoulements. Nous séparons ces écoulements en deux groupes:

- * Ecoulements de type COUETTE: La dérivée de la vitesse moyenne ne s'annule pas à l'intérieur de l'écoulement.
- * Ecoulements de type POISEUILLE: La dérivée de la vitesse moyenne s'annule à l'intérieur de l'écoulement.

Bien que des différences apparaissent dans la partie centrale des écoulements de type COUETTE, le modèle de CONSTANTINESCU les prédit globalement assez bien. Mais les qualités du modèle pour les écoulements de type POISEUILLE sont notablement moins bonnes. Car si les prédictions sont relativement correctes près de la paroi ayant la vitesse de frottement la plus grande, elles sont plutôt mauvaises près de l'autre paroi. Cette différence pour les écoulements de type POISEUILLE est d'autant plus marquée que la vitesse débitante du fluide est voisine de celle de la paroi mobile pour les cas à gradient de pression favorable, ou de zéro lorsque le gradient de pression est défavorable. Ce désaccord est dû à une mauvaise modélisation de la viscosité turbulente, qui fait que V_t s'annule avec le gradient de vitesse moyenne. Une mauvaise évaluation de la longueur de mélange peut aussi expliquer partiellement les prédictions médiocres du modèle de CONSTANTINESCU. Elles peuvent aussi provenir de l'hypothèse de BOUSSINESQ, qui impose à la corrélation $\overline{u'v'}$ et au gradient de vitesse moyenne de s'annuler à la même ordonnée. Or les récents travaux de EL TELBANY & REYNOLDS montrent que pour ce type d'écoulement ces deux grandeurs s'annulent à des ordonnées différentes.

Conclusions:

Les précédentes comparaisons ont montré les possibilités de la méthode de CONSTANTINESCU. Ce modèle prédit globalement assez bien les profils de vitesse moyenne pour des écoulements de POISEUILLE et de COUETTE, mais il présente quelques faiblesses pour calculer des écoulements de COUETTE avec gradient de pression dont le profil de vitesse a un extrémum. Plusieurs raisons peuvent expliquer ces faiblesses. La première est due à la méthode, qui ne prend en compte les zones de transition ($V \sim V_t$). La deuxième explication est une mauvaise formulation de la longueur de mélange. Car celle retenue par CONSTANTINESCU présente un point anguleux, qui est physiquement peu plausible. De plus cette longueur de mélange étant surestimée dans les régions pariétales, la valeur de k pour permettre une bonne prédiction de l'écoulement est inférieure à celle trouvée expérimentalement dans les zones logarithmiques ($\approx 0,4$). Les possibilités de changement de formulation de la longueur de mélange afin d'améliorer les prédictions du modèle sont limitées par la méthode de résolution qui nous oblige à pouvoir intégrer les équations (3-16) et (3-17). Aussi CONSTANTINESCU n'a-t-il pu essayer que des formulations paraboliques et sinusoidales de la longueur de mélange, qui n'amélioreraient d'ailleurs pas la qualité des prédictions du modèle. Comme nous l'avons montré précédemment le fait de relier la viscosité turbulente au gradient de vitesse moyenne peut être une raison des faiblesses du modèle. Pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression, l'hypothèse de BOUSSINESQ est une justification des écarts qui existent entre les prédictions du modèle de CONSTANTINESCU et les mesures expérimentales.

Pour l'ensemble des expériences de EL TELBANY & REYNOLDS <2-15>, le modèle de CONSTANTINESCU prédit la vitesse débitante avec une erreur comprise entre -1,5% et +1,5%, tandis que l'erreur sur la vitesse maximale du profil varie de -3% à +10%. Ce modèle nous permet de prédire assez correctement le gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour les

écoulements de COUETTE avec gradient de pression (fig 3-10).

3.4.2 Résolution numérique:

Dans le paragraphe précédent, nous avons émis l'hypothèse que les erreurs de prédictions du modèle de CONSTANTINESCU provenaient d'une mauvaise modélisation de la longueur de mélange. Cette résolution analytique ne permettant qu'un choix restreint de longueur de mélange, nous l'abandonnons au profit d'une résolution numérique de l'équation de mouvement du fluide. Cette nouvelle méthode n'apporte aucune limitation quant au choix de la longueur de mélange, de plus elle tient compte de l'influence des viscosités moléculaire et turbulente dans tout l'écoulement. Dans ces conditions il sera peut-être possible de trouver une loi plus ou moins compliquée de longueur de mélange permettant de mieux prédire les écoulements étudiés. Dans cette résolution numérique, nous gardons la même modélisation pour la viscosité turbulente, le système d'équations à résoudre s'écrit donc:

$$\frac{d}{dy} \left[(\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} = 0. \quad \nu_t = Lm^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \quad (3.5)(3.5)$$

a) Modèle de longueur de mélange:

Pour résoudre numériquement le précédent système d'équations, il nous reste à déterminer la loi de variation de la longueur de mélange permettant de prédire correctement les écoulements étudiés. Ce problème est ardu, comme la suite de ce paragraphe va nous le montrer.

Les écoulements de POISEUILLE ont déjà fait l'objet de plusieurs modélisations numériques. La loi de variation de la longueur de mélange, qui semble donner les meilleurs résultats dans la partie centrale de l'écoulement, fut proposée par

NIKURADSE <2-36>, et elle s'écrit:

$$\frac{Lm}{h/2} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^4 \quad (3.21)$$

A partir de ses propres expériences, REICHARDT <2-20> <2-21> montre que dans la partie centrale des écoulements de COUETTE pur la viscosité turbulente suit la loi suivante:

$$\frac{\nu_t}{u_\tau h/2} = 0,20 - 0,20 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^2 \quad (3.22)$$

Le gradient de pression étant nul pour ce type d'écoulements, l'intégration de (3.5) donne:

$$(\nu + \nu_t) \left| \frac{dU}{dy} \right| = u_\tau^2 \quad u_\tau = \sqrt{\nu \left| \frac{dU}{dy} \right|_{y=0}}$$

En dehors des zones pariétales, ν_t étant notablement supérieure à la viscosité moléculaire, nous pouvons donc faire les approximations suivantes:

$$\nu_t \left| \frac{dU}{dy} \right| \sim u_\tau^2 \quad Lm \left| \frac{dU}{dy} \right| \sim u_\tau \quad \frac{\nu_t}{u_\tau} \sim Lm \quad (3.23)$$

La proposition de REICHARDT (3.22) donne pour la longueur de mélange la forme suivante:

$$\frac{Lm}{h/2} = 0,20 - 0,20 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^2 \quad (3.24)$$

Nous remarquons que la formulation obtenue est différente

de celle de NIKURADSE. Cette constatation nous a conduit à adopter pour la recherche d'un modèle permettant de prédire correctement les écoulements étudiés une démarche qui se décompose en trois étapes. En premier lieu, nous recherchons une formulation de la longueur de mélange qui nous permette de prédire correctement les écoulements de COUETTE pur. Dans une deuxième étape, nous déterminerons les modifications nécessaires à cette première formulation pour bien prédire les écoulements de POISEUILLE. Et finalement nous essaierons à partir de ces deux lois de variation de la longueur de mélange de trouver une formulation applicable aux écoulements de COUETTE avec gradient de pression.

lère étape: Ecoulement de COUETTE pur

Les profils de viscosité turbulente de EL TELBANY & REYNOLDS <2-17> et de REICHARDT <2-21> diffèrent légèrement dans la partie centrale des écoulements de COUETTE pur (fig 2-7). Les mesures de REICHARDT sont plus anciennes et moins complètes que celles de EL TELBANY & REYNOLDS. Aussi, il nous semble préférable d'utiliser les données expérimentales de ces deux derniers auteurs pour déterminer la longueur de mélange. Mais la méthodologie que nous allons adopter pour définir la longueur de mélange est aussi applicable si nous utilisons les mesures de REICHARDT comme données de référence.

Les expériences d'écoulements de COUETTE pur permettent d'établir certaines propriétés de la longueur de mélange:

- La forme du profil de vitesse moyenne implique que la longueur de mélange soit symétrique par rapport à l'axe de l'écoulement.
- La viscosité turbulente étant nulle aux parois, la longueur de mélange doit l'être aussi.
- A partir d'une certaine distance aux parois, il existe une zone où D_t est grande devant D et où la vitesse moyenne

suit une loi logarithmique:

$$u^+ = A \ln(y^+) + B$$

On en déduit que $\frac{d Lm}{dy} = \frac{1}{A}$

Cette zone "logarithmique" étant relativement proche de la paroi, nous imposons que la dérivée pariétale de la longueur de mélange est aussi égale à $1/A$. Cette approximation sera corrigée ultérieurement par l'introduction d'une fonction d'amortissement de type VAN DRIEST. D'après les expériences de la base de données du précédent chapitre, nous adoptons pour A la valeur de 2,5.

- Les profils de viscosité turbulente de EL TELBANY & REYNOLDS <2-17> (fig 2-7) montrent que Vt est sensiblement constante dans la partie centrale de l'écoulement. Nous traduisons mathématiquement cette propriété en imposant à la dérivée seconde de la longueur de mélange de s'annuler à mi-hauteur du canal.
- Les expériences de REICHARDT <2-21> et de EL TELBANY & REYNOLDS <2-17> montrent que Vt est en moyenne égale à $0,21u_\tau h/2$. D'après la relation (3.23), on conclut que la valeur de la longueur de mélange pour $y = h/2$ est égale à $0,21h/2$.

Ces cinq propriétés permettent d'établir pour la longueur de mélange la loi suivante:

$$\frac{Lm}{h/2} = \alpha_0 - \alpha_1 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^4 - \alpha_2 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^6$$

$$\alpha_0 = 0,21 \quad A = 2,5 \quad \alpha_1 = \frac{0,5}{A} - 3\alpha_0 = -0,43 \quad \alpha_2 = 2\alpha_0 - \frac{0,5}{A} = 0,22$$

REMARQUE: En n'imposant pas l'annulation de la dérivée seconde de la longueur de mélange, et en adoptant $U_t = 0,2u_{\tau}h/2$ au centre de l'écoulement, on retrouve la formulation de REICHARDT (3.24).

L'approximation faite en troisième lieu conduit à une surestimation de la longueur de mélange dans les zones visqueuse et de transition. VAN DRIEST <2-35> propose de multiplier la longueur de mélange par une fonction d'amortissement pour diminuer L_m dans les zones pariétales. La forme de cette fonction est:

$$f = 1 - \exp \left[\frac{-Y}{\nu A^+} \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}} \right] \quad \text{où } Y = \min(y, h-y)$$

La constante A^+ permet d'étendre plus ou moins la zone d'influence de la fonction d'amortissement. VAN DRIEST <2-35> prend pour τ la contrainte de cisaillement à la paroi la plus proche. Si ce choix ne pose aucun problème pour les écoulements de COUETTE et de POISEUILLE purs, il en est tout autrement pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression. Car la contrainte de cisaillement peut s'annuler sur l'une des deux parois pour certaines valeurs du gradient de pression. Dans ce cas, la longueur de mélange et la viscosité turbulente sont nulles dans la moitié de l'écoulement, ce qui n'est physiquement pas concevable. Comme la présente formulation de la longueur de mélange sera ultérieurement appliquée aux écoulements de COUETTE avec gradient de pression, nous avons préféré adopter la proposition de PATANKAR & SPALDING <2-37>, qui prennent τ égal à la contrainte de cisaillement locale:

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy}$$

La constante A^+ est optimisée numériquement sur

l'ensemble des écoulements de POISEUILLE de la base de données, on obtient:

$$A^+ = 30.$$

Etant donnée cette dernière proposition, le modèle obtenu pour des écoulements de COUETTE pur s'écrit:

$$\frac{Lm}{h/2} = \left\{ \alpha_0 - \alpha_1 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^4 - \alpha_2 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^6 \right\} \left\{ 1 - \exp\left(\frac{-Y}{\nu A^+} \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}}\right) \right\}$$

(3.25)

avec $Y = \min(y, h-y)$ $A^+ = 30$ $\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy}$

$$\alpha_0 = 0,21 \quad A = 2,5 \quad \alpha_1 = \frac{0,5}{A} - 3\alpha_0 = -0,43 \quad \alpha_2 = 2\alpha_0 - \frac{0,5}{A} = 0,22$$

2ème étape: Ecoulement de POISEUILLE

Nous imposons à la longueur de mélange pour des écoulements de POISEUILLE les mêmes propriétés que précédemment sauf pour sa valeur à $y = h/2$, qui fixe α_0 . Nous déterminons cette inconnue en optimisant la prédiction des profils de viscosité turbulente, la valeur optimale de α_0 est 0,14. Le modèle pour des écoulements de POISEUILLE s'écrit donc:

$$\frac{Lm}{h/2} = \left\{ \alpha_0 - \alpha_1 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^4 - \alpha_2 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^6 \right\} \left\{ 1 - \exp\left(\frac{-Y}{\nu A^+} \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}}\right) \right\}$$

(3.26)

avec $Y = \min(y, h-y)$ $A^+ = 30$ $\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy}$

$$\alpha_0 = 0,14 \quad A = 2,5 \quad \alpha_1 = \frac{0,5}{A} - 3\alpha_0 = -0,22 \quad \alpha_2 = 2\alpha_0 - \frac{0,5}{A} = 0,08$$

3ème étape: Ecoulement de COUETTE avec gradient de pression

La mise en mouvement du fluide pour un écoulement de COUETTE pur est due à la paroi mobile, tandis qu'elle est provoquée pour un écoulement de POISEUILLE par le gradient de pression. Le déplacement du fluide pour un écoulement de COUETTE avec gradient de pression est provoqué à la fois par la paroi mobile et le gradient de pression, ce type d'écoulement peut donc être vu comme une composition des deux écoulements précédemment cités, qui peuvent être interprétés comme étant les cas limites des écoulements de COUETTE avec gradient de pression. Le rapport du gradient de pression à la vitesse de la paroi mobile permet de définir la nature de l'écoulement. Sous une forme sans dimension, ce rapport s'écrit:

$$Bx = \frac{-h^2 \partial \hat{P}}{\mu U b \partial x}$$

- $Bx = 0$ Ecoulement de COUETTE pur.
- $Bx = \pm \infty$ Ecoulement de POISEUILLE pur.
- $-\infty < Bx < 0$ Ecoulement de COUETTE avec gradient de pression défavorable.
- $0 < Bx < +\infty$ Ecoulement de COUETTE avec gradient de pression favorable.

Les formulations (3.25) et (3.26) pour les écoulements de POISEUILLE et de COUETTE pur diffèrent seulement par la valeur de α_0 . Les écoulements de COUETTE avec gradient de pression pouvant être interprétés comme une superposition de ces deux écoulements, nous adoptons la même forme de longueur de mélange pour les trois types d'écoulement. Nous déterminerons seulement

la valeur de α_0 permettant de prédire correctement la vitesse débitante. Pour cela, nous avons utilisé les expériences de EL TELBANY & REYNOLDS <2-15> (fig 4-1). On constate que l'évolution de α_0 en fonction de Bx présente une certaine dispersion. Nous avons retenu pour α_0 la loi de variation suivante:

$$\alpha_0 = 0,14 + 0,07 \exp\left(\frac{-|Bx|}{630}\right)$$

Ce qui conduit au modèle final suivant pour les trois types d'écoulement:

$$\frac{Lm}{h/2} = \left\{ \alpha_0 - \alpha_1 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^4 - \alpha_2 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^6 \right\} \left\{ 1 - \exp\left(\frac{-Y}{\nu A + \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}}}\right) \right\}$$

avec $Y = \min(y, h-y)$ $A = 30$.

$$\alpha_0 = 0,14 + 0,07 \exp\left(\frac{-|Bx|}{630}\right) \quad Bx = \frac{-h^2}{\mu U b} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} \quad \frac{\tau}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy}$$

$$A = 2,5 \quad \alpha_1 = \frac{0,5}{A} - 3\alpha_0 \quad \alpha_2 = 2\alpha_0 - \frac{0,5}{A} \quad (3.27)$$

b) Résultats et conclusions:

Pour résoudre numériquement l'équation de mouvement nous avons adopté une méthode par volumes finis, présentée dans l'ouvrage de PATANKAR <2-38>.

Afin de permettre des comparaisons entre les prédictions du modèle de longueur de mélange et celui de CONSTANTINESCU, nous avons utilisé les mêmes expériences pour les vérifications de ces deux modèles.

Ecoulement de POISEUILLE:

La figure 4-2 permet de comparer pour des écoulements de POISEUILLE les profils de vitesse obtenus par le modèle de longueur de mélange à des mesures expérimentales. Les estimations sont globalement correctes. Comme pour le modèle de CONSTANTINESCU, le décalage entre les prédictions et les mesures pour certaines expériences est imputable partiellement à la détermination du gradient de pression.

Par rapport au modèle de CONSTANTINESCU, nous constatons que la forme des profils de vitesse obtenus par le modèle de longueur de mélange est en meilleur accord avec les expériences (fig 4-2). Cette constatation est confirmée par la figure 4-3.

Le modèle prédit correctement la viscosité turbulente dans une grande partie de l'écoulement (fig 4-4). Mais une différence apparaît entre l'expérience et le calcul pour V_t au centre de l'écoulement, qui est principalement dû au fait que dans le modèle choisi (3.4) la viscosité turbulente s'annule en même temps que la dérivée de la vitesse moyenne. Cette zone de désaccord est peu étendue de part et d'autre de l'axe de l'écoulement, et elle n'a qu'une faible influence sur la forme du profil de vitesse (fig 4-2).

Ecoulement de COUETTE pur:

La figure 4-5 présente les résultats obtenus par le modèle proposé pour des écoulements de COUETTE pur ayant des nombres de REYNOLDS relativement différents. Excepté pour l'écoulement à faible nombre de REYNOLDS, les estimations sont très proches des mesures expérimentales. Comme la figure 4-6 le montre, cet accord entre l'expérience et le calcul est vérifié au voisinage des parois. La qualité des prédictions du modèle proposé est nettement supérieure à celle fournie par le modèle de CONSTANTINESCU.

La figure 4-7 compare le profil calculé de viscosité turbulente aux mesures expérimentales. Nous constatons les bons résultats du modèle proposé.

Pour les quatre cas d'écoulements de COUETTE pur étudiés par EL TELBANY & REYNOLDS, le modèle surestime d'environ 3% la vitesse de frottement pariétale.

Écoulement de COUETTE avec gradient de pression:

Les profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression obtenus par le modèle proposé sont présentés sur les figures 4-8 et 4-9. Comme pour le modèle de CONSTANTINESCU, nous scindons ce type d'écoulement en deux groupes:

- * Écoulements de type COUETTE.
- * Écoulements de type POISEUILLE.

Les écoulements de type COUETTE sont relativement bien estimés par le modèle. Par contre ces prédictions se dégradent pour les écoulements de type POISEUILLE. La différence de forme entre les profils de vitesse calculés et expérimentaux a trois origines possibles:

- une mauvaise estimation de la longueur de mélange, qui ne prend pas en compte la dissymétrie de l'écoulement. (différentes formulations dissymétriques ont été essayées sans succès)
- le fait que dans le modèle D_t s'annule en même temps que dU/dy , qui elle-même s'annule dans le cas d'un écoulement de type POISEUILLE et pas dans le cas d'un écoulement de type COUETTE.
- l'hypothèse de BOUSSINESQ qui impose à $\overline{u'v'}$ de s'annuler en

même temps que dU/dy , ce qui est infirmé par les résultats expérimentaux de EL TELBANY & REYNOLDS.

Conclusions:

Les précédentes comparaisons entre les prédictions du modèle proposé et les expériences de la base de données nous permettent de tirer plusieurs conclusions:

Premièrement, ce modèle prévoit très bien les écoulements de COUETTE pur. La qualité de ses résultats est nettement supérieure à celle du modèle de CONSTANTINESCU.

Deuxièmement, la forme des profils de vitesse et les profils de viscosité turbulente sont globalement bien évalués pour les écoulements de POISEUILLE. Ce modèle présente une légère faiblesse dans la détermination de D_t sur l'axe de l'écoulement, qui n'a que peu d'influence sur la forme du profil de vitesse. De plus, dans certains cas il existe un décalage entre les profils de vitesse expérimentaux et prédits, mais cette différence est due aux incertitudes de mesures de la vitesse de frottement pariétale à partir de laquelle est généralement déterminé le gradient de pression.

Et troisièmement, nous avons montré que le modèle prévoit correctement les écoulements de type COUETTE, mais que la qualité de ses prédictions se dégrade notablement pour les écoulements de type POISEUILLE. Cette faiblesse est imputable à la modélisation de la viscosité turbulente, à l'estimation de la longueur de mélange, et à l'hypothèse de BOUSSINESQ.

Pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression réalisés par EL TELBANY & REYNOLDS <2-15>, le modèle proposé donne la vitesse débitante avec une erreur comprise entre -1,5% et +1%, tandis que l'erreur sur la vitesse maximale du profil varie de -3% à +7%. Ce modèle permet de déterminer assez correctement le gradient de pression en fonction de la vitesse

débitante pour ce type d'écoulements (fig 4-10).

Il y a une vingtaine d'années, ELROD & NG <2-19> (annexe C) ont développé un modèle de longueur de mélange pour les écoulements de POISEUILLE et de COUETTE avec ou sans gradient de pression. La figure 4-11 compare les résultats de notre modèle et de celui de ELROD & NG pour trois écoulements. Les profils de vitesse déterminés par ces deux modèles sont similaires pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression. Mais les prédictions du modèle proposé sont meilleures pour des écoulements de POISEUILLE et de COUETTE pur que celles du modèle de ELROD & NG (fig 4-11 et 4-12).

3.5 MODELE A UNE EQUATION DE TRANSPORT:

Une des hypothèses émises pour justifier les faiblesses des modèles de longueur de mélange est l'utilisation du gradient de vitesse moyenne dans la modélisation de la viscosité turbulente. ν_t est lié à la turbulence régnant au sein de l'écoulement. Or la formulation adoptée pour ν_t par les précédents modèles n'exprime pas cette relation directement mais à travers un terme qui intervient dans la production de turbulence et qui ne prend pas en compte les phénomènes de transport. Nous nous proposons d'utiliser un modèle plus élaboré, qui exprimera plus explicitement cette relation. D'un point de vue dimensionnel, la viscosité est égale au produit d'une vitesse par une longueur. Pour l'échelle de longueur L , on adopte comme précédemment une formulation empirique, comme échelle de vitesse on prend la racine carré de l'énergie turbulente, qui est une grandeur plus représentative du niveau de turbulence local. La viscosité turbulente s'écrit donc:

$$\nu_t = Cste \sqrt{K} L$$

Les modèles de turbulence adoptant une telle formulation pour ν_t sont généralement dénommés modèles à une équation de

transport. Ils nécessitent la résolution de l'équation pour l'énergie turbulente. En retenant l'hypothèse de BOUSSINESQ pour la corrélation $\overline{u'v'}$, cette équation s'écrit pour un écoulement par droites parallèles:

$$\nu_t \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \frac{d}{dy} \left\{ \overline{(K' + p')v'} + \nu \frac{dK}{dy} \right\} - \epsilon = 0. \quad (3.28)$$

avec $K' = \frac{1}{2}(u'u' + v'v' + w'w')$

Historiquement, ces modèles à une équation de transport furent proposés pour la première fois par KOLMOGOROV <2-1> et PRANDTL <2-62> vers 1940. Mais il fallut attendre 25 ans et l'avènement des premiers calculateurs rapides pour que ces modèles soient développés. HO & VOHR <2-39> citent plusieurs applications de ce type de modèles. Les contributions les plus importantes sont dues à WOLFSHTEIN <2-40> et HASSID & POREH <2-41>.

a) Modèles:

Il y a une vingtaine d'années, WOLFSHTEIN <2-40> développa pour les écoulements à une dimension un modèle à une équation de transport, où la viscosité turbulente s'écrit:

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{K} l_\mu$$

C_μ est une constante empirique, et l_μ est l'échelle de longueur.

L'énergie turbulente est régie par l'équation (3.28), dont la résolution nécessite de modéliser les termes de diffusion turbulente $\overline{(K' + p')v'}$ et de dissipation ϵ . WOLFSHTEIN adopte pour

ces deux termes inconnus les modélisations suggérées par KOLMOGOROV <2-1> et PRANDTL <2-62>, qui s'écrivent:

$$\overline{(K' + p')v'} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{dK}{dy} \quad \epsilon = C_D \frac{K^{3/2}}{l_D}$$

où C_μ et σ_k sont des constantes empiriques, et l_D est l'échelle de longueur caractéristique du processus de dissipation de l'énergie turbulente.

En utilisant les précédentes modélisations, l'équation de transport pour K s'écrit:

$$\nu_t \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \frac{d}{dy} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{dK}{dy} \right\} - C_D \frac{K^{3/2}}{l_D} = 0. \quad (3.29)$$

En tenant compte des suggestions de GLUSHKO <2-42> et de SPALDING <2-43> sur le comportement de l_μ et l_D dans les zones pleinement turbulentes et dans la sous-couche visqueuse, WOLFSHTEIN adopte pour ces deux échelles de longueur les formulations suivantes:

$$l_\mu = kY [1 - \exp(-A_\mu R_k)] \quad R_k = \frac{Y\sqrt{K}}{\nu} \quad Y = \min(y, h - y)$$

$$l_D = kY [1 - \exp(-A_D R_k)]$$

où k , A_μ et A_D sont des constantes empiriques.

Nous remarquons que ces formulations sont analogues à la proposition de VAN DRIEST <2-35> pour la longueur de mélange.

A partir de données expérimentales, WOLFSHTEIN détermine

les différentes constantes de son modèle:

C_μ	C_D	σ_k	k	A_μ	A_D
0,55	0,1664	1,53	0,4	0,016	0,263

La figure 5.1a présente pour un écoulement de POISEUILLE les profils de K et de ν_t obtenus par ce modèle. Etant donnée la qualité de ces prédictions, HASSID & POREH <2-41> apportent quelques modifications au modèle de WOLFSHTEIN.

Premièrement, HASSID & POREH adoptent pour l'échelle de longueur une loi proposée par NIKURADSE <2-36> , et la viscosité turbulente s'écrit:

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{K} l [1 - \exp(-A_\mu R_k)] \quad R_k = \frac{\sqrt{K} l}{\nu}$$

$$\frac{l}{h/2} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^4$$

Deuxièmement, ils modifient la modélisation du terme de dissipation de K . D'après eux, le processus de dissipation de K est différent suivant la valeur du nombre de REYNOLDS turbulent R_k . Lorsque R_k est grand, ϵ est correctement modélisé par:

$$\epsilon = C_{D1} \frac{K^{3/2}}{l}$$

où C_{D1} est une constante empirique.

Mais lorsque R_k devient petit (zones pariétales), le processus de dissipation est mal représenté par une telle relation, aussi HASSID & POREH proposent une autre modélisation de ϵ dans les zones pariétales. Dans la sous-couche visqueuse ($Vt \sim 0$), les expériences montrent que l'énergie turbulente varie comme y^2 . Dans cette zone, l'équation de transport de K se réduit à:

$$\nu \frac{d^2 K}{dy^2} = \epsilon$$

et $K \sim Cste y^2$ donc $\epsilon = 2\nu \frac{K}{y^2}$

Or dans cette zone pariétale, $\ell \sim 0,4y$ donc $\epsilon = 0,32\nu \frac{K}{\ell^2}$

En faisant une synthèse de ces deux formulations de ϵ , HASSID & POREH modélisent la dissipation de K de la manière suivante:

$$\epsilon = C_{D2}\nu \frac{K}{l^2} + C_{D1} \frac{K^{3/2}}{l} [1 - \exp(-A_\mu R_k)]$$

A partir d'une certaine distance à la paroi, les termes de production et de dissipation sont les termes les plus importants de l'équation (3.29), mais leur différence reste de l'ordre de grandeur du terme de diffusion, ce qui veut dire que l'importance des termes de production et de dissipation est relativement liée. Il semble donc normal d'adopter la même fonction d'amortissement pour ces deux termes.

REMARQUE: Si on néglige le terme de diffusion de l'équation (3.29), nous obtenons:

$$\nu_t \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = C_D \frac{K^{3/2}}{l} \qquad \nu_t = \sqrt{\frac{C_\mu^3}{C_D}} l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|$$

Etant donnée la valeur des constantes C_μ et C_D , nous retrouvons la modélisation retenue pour ν_t dans les modèles de longueur de mélange:

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|$$

HASSID & POREH adoptent pour les constantes du modèle les valeurs suivantes:

C_μ	C_{D1}	C_{D2}	σ_k	A_μ
0,55	0,1664	0,32	1	0,03

Les profils de K et de ν_t obtenus par ce modèle pour un écoulement de POISEUILLE sont présentés sur la figure 5.1b. Ils sont proches des mesures expérimentales. Ces bonnes évaluations sont dues à la modélisation retenue pour ϵ et à la formulation de l'échelle de longueur.

La figure 5-2 montre les prédictions de ce modèle pour un écoulement de COUETTE pur. Nous remarquons que les profils de vitesse, de viscosité turbulente, et d'énergie turbulente sont relativement mal estimés par le modèle. Notre dessein étant de calculer des écoulements de COUETTE avec ou sans gradient de pression, nous ne pouvons nous satisfaire de ces résultats. Aussi nous nous proposons d'apporter quelques modifications au modèle de HASSID & POREH afin d'améliorer ces prédictions d'un écoulement de COUETTE pur.

Pour la définition de ce nouveau modèle, nous disposons des expériences d'écoulement de COUETTE pur de EL TELBANY & REYNOLDS. Les profils de vitesse et de viscosité turbulente ont été validés dans le chapitre 2 par d'autres résultats expérimentaux. Par contre, le profil d'énergie turbulente n'a pu être confirmé par d'autres travaux. Etant donné cet état de fait, les modifications du modèle de HASSID & POREH n'auront pour dessein que d'améliorer les prédictions de la vitesse et de la viscosité turbulente.

Le paragraphe 3.4 nous a permis de constater l'importante influence de la formulation de la longueur de mélange sur la qualité des prédictions. Aussi la seule modification que nous apportons au modèle de HASSID & POREH, concerne l'échelle de longueur. L'énergie turbulente est relativement constante dans la partie centrale des écoulements de COUETTE pur (fig 5-2), la loi de variation de la viscosité turbulente est donc directement liée à l'évolution de l'échelle de longueur dans cette région. Etant donnés les résultats obtenus précédemment, nous adoptons pour ℓ la loi de variation utilisée pour la longueur de mélange du modèle de turbulence (3.27):

$$\frac{\ell}{h/2} = \alpha_0 - \alpha_1 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^4 - \alpha_2 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^6$$

$$\alpha_0 = 0,14 + 0,07 \exp\left\{\frac{-|Bx|}{630}\right\} \quad Bx = \frac{-h^2}{\mu U b} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x}$$

$$\alpha_1 = \frac{0,5}{A} - 3\alpha_0 \quad \alpha_2 = 2\alpha_0 - \frac{0,5}{A}$$

(3.30)

Cette modification de l'échelle de longueur nous oblige, pour conserver une bonne prédiction des profils de vitesse des écoulements de POISEUILLE, à changer $A\mu$. la nouvelle valeur de cette constante est:

$$A\mu = 0,021$$

b) Résultats et conclusions:

Pour résoudre numériquement l'équation de mouvement et l'équation de transport pour K nous avons adopté une méthode par volumes finis, présentée dans l'ouvrage de PATANKAR <2-38>.

Ecoulement de COUETTE pur:

La figure 5-2 permet de constater l'effet bénéfique de la modification apportée au modèle de HASSID & POREH. Le changement de formulation de l'échelle de longueur améliore grandement les prédictions de vitesse et de viscosité turbulente, mais il ne modifie que faiblement la prédiction de l'énergie turbulente. Le modèle surestime l'énergie turbulente dans la partie centrale. Cette surestimation est due au choix de constantes C_μ et C_{D1} . Car l'énergie turbulente étant relativement constante au centre de l'écoulement, l'équation de transport (3.29) se réduit à une égalité entre les termes de production et de dissipation. Nous avons donc:

$$\nu_t \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = C_{D1} \frac{K^{3/2}}{l}$$

Dans cette partie de l'écoulement, la corrélation $-\overline{u'v'}$ est sensiblement égale au carré de la vitesse de frottement pariétale u_τ , nous pouvons donc écrire:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{dU}{dy} \simeq u_\tau^2 \quad \text{donc} \quad \frac{K}{u_\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{C_\mu C_{D1}}}$$

A partir des mesures expérimentales de EL TELBANY & REYNOLDS on trouve que K/u_τ^2 est égal à 2,6, tandis que les constantes choisies pour le modèle conduisent à $K/u_\tau^2 = 3,3$ (valeur correspondant à la zone logarithmique de la couche limite). Deux

méthodes sont possibles pour améliorer la prédiction de l'énergie turbulente.

La première consiste à ajuster les constantes C_μ et C_{D1} . D'après les expériences de EL TELBANY & REYNOLDS <2-16>, nous avons dans la partie centrale d'un écoulement de COUETTE:

$$K \simeq 2,6u_\tau^2 \qquad \nu_t \simeq 0,21u_\tau h/2$$

Dans cette région, le modèle nous permet d'écrire:

$$\frac{l}{h/2} \simeq 0,21 \qquad C_\mu \simeq \frac{\nu_t}{\sqrt{K}l} \qquad C_{D1} \simeq \frac{u_\tau^4}{C_\mu K^2}$$

$$\text{d'où} \qquad C_\mu = 0,620 \qquad C_{D1} = 0,239$$

Les prédictions d'un écoulement de COUETTE pur avec ces nouvelles constantes sont données sur la figure 5.3. On constate que le niveau d'énergie turbulente est correctement prédit dans la partie centrale, mais que par contre sa forme est mal représentée dans les zones pariétales.

La seconde méthode consiste à supposer que la turbulence n'est pas en équilibre local et à différencier les échelles de longueur de la production et de la dissipation d'énergie turbulente.

l_μ = Echelle de longueur de la production.

l_D = Echelle de longueur de la dissipation de K.

La forme retenue pour ces deux échelles de longueur est donnée par la formule (3.30), où le coefficient α_0 sera déterminé ultérieurement pour chacune d'elle. Au centre d'un écoulement de COUETTE pur, l'équation de transport de K se réduit à:

$$\nu_t \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = C_{D1} \frac{K^{3/2}}{l_D} \quad \text{d'où} \quad \frac{u_\tau^4}{K^2} = C_\mu l_\mu \frac{C_{D1}}{l_D}$$

dont on déduit pour $y=h/2$:

$$l_\mu = \frac{\nu_t}{C_\mu \sqrt{K}} \quad l_D = l_\mu C_\mu C_{D1} \frac{K^2}{u_\tau^4}$$

$$\text{où } C_\mu = 0,55 \quad C_{D1} = 0,1664 \quad K \simeq 2,6u_\tau^2 \quad l_\mu \simeq 0,21u_\tau h/2$$

$$\text{donc } l_\mu(y=h/2) = \alpha_0(l_\mu) = 0,237 \quad l_D(y=h/2) = \alpha_0(l_D) = 0,146$$

Nous constatons que pour prédire correctement les écoulements de POISEUILLE et de COUETTE pur l'échelle de longueur l_D est sensiblement la même ($\alpha_0(l_D) = 0,14$). Les prédictions d'un écoulement de COUETTE pur obtenues avec $\alpha_0(l_\mu) = 0,237$ et $\alpha_0(l_D) = 0,14$ sont données sur la figure 5.3. Pour calculer correctement les écoulements de COUETTE pur il suffit de modifier seulement l'échelle de longueur de la production turbulente dans le modèle utilisé pour des écoulements de POISEUILLE pur.

Cette étude d'amélioration des modèles à une équation de transport n'a pas été étendue au cas d'écoulement de COUETTE avec gradient de pression, car ils présentent la même limitation que les modèles de longueur de mélange liée à la formulation analytique de l'échelle de longueur. Ceci les empêche de prédire correctement les grandeurs locales et ils n'apportent par ailleurs aucune information globale supplémentaire.

La figure 5-4 montre que le modèle utilisant la relation (3.30) prédit correctement les écoulements de COUETTE pur pour une gamme de nombre de REYNOLDS relativement importante.

Écoulement de POISEUILLE:

La figure 5-5 permet de comparer les prédictions du modèle proposé à celles du modèle de HASSID & POREH. Le décalage entre les profils de vitesse prédits est principalement dû au fait que la constante $A\mu$ de chaque modèle a été optimisée numériquement sur des bases de données différentes. La légère différence entre les profils de Vt et de K des deux modèles est due au changement de formulation de l'échelle de longueur. Dans le précédent chapitre, nous avons montré que les valeurs de K mesurées par EL TELBANY & REYNOLDS étaient supérieures à celles d'autres auteurs. Aussi pour juger la prédiction par le modèle de l'énergie turbulente nous préférons utiliser les mesures de CLARK <2-13>. En comparant les figures 5-5 et 5-1, nous pouvons conclure que le modèle proposé prédit correctement l'énergie turbulente d'un écoulement de POISEUILLE.

Écoulement de COUETTE avec gradient de pression:

La figure 5-6 présente les prédictions du modèle proposé et celles du modèle de HASSID & POREH pour quatre écoulements de COUETTE avec gradient de pression, deux de ces écoulements étant de type COUETTE, et les deux autres de type POISEUILLE.

Le modèle proposé calcule correctement les profils de vitesse pour les écoulements de type COUETTE, mais il présente les mêmes faiblesses que le modèle de HASSID & POREH et que les modèles de longueur de mélange pour les écoulements de type POISEUILLE. Ceci est confirmé par la figure 5-7, qui présente la prédiction du profil de vitesse pour l'ensemble des expériences de EL TELBANY & REYNOLDS <2-15> et de HUEY & WILLIAMSON <2-24>. La formulation de l'échelle de longueur du modèle à une équation de transport, qui est la même que pour le modèle de longueur de mélange, permet de déterminer assez correctement la vitesse débitante des écoulements de COUETTE avec gradient de pression étudiés par EL TELBANY & REYNOLDS.

Le modèle proposé surestime l'énergie turbulente dans les écoulements de type COUETTE (Expériences N°7 et 9 fig 5-6). Lorsqu'un maximum apparaît sur le profil de vitesse (Expérience N°10 fig 5-6), l'énergie turbulente est correctement prédite par le modèle. Mais, lorsque cet extremum s'éloigne des parois (Expériences N°13 fig 5-6) la qualité des prédictions de K se dégrade. La mauvaise estimation de l'énergie turbulente dans la région voisine du maximum de vitesse est sans doute due à l'hypothèse de BOUSSINESQ, qui est utilisée pour la modélisation du terme de production de l'équation de transport de K . Expérimentalement, nous constatons que l'apparition d'un maximum sur le profil de vitesse coïncide avec une élévation brutale du profil d'énergie turbulente (Expériences N° 9 et 10 fig 5-6). Le modèle proposé ne reproduit pas ce brusque changement du profil de K . Pour reproduire cette élévation brutale de K , il faudrait provoquer un changement tout aussi brutal de certaines constantes du modèle.

Conclusions:

Les précédentes comparaisons entre les prédictions du modèle proposé et les expériences de la base de données amènent les conclusions suivantes:

En premier lieu, nous avons constaté l'influence importante de l'échelle de longueur sur les prédictions d'un modèle à une équation (fig 5-1). La formulation de \bar{l} est donc un des paramètres essentiels de la qualité de ce type de modèle. Pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression, il est difficile de décrire analytiquement cette échelle de longueur.

Le modèle proposé, qui est une version modifiée du modèle de HASSID & POREH, évalue très bien les profils de vitesse et de viscosité turbulente pour les écoulements de COUETTE pur. Nous avons aussi présenté deux modifications permettant d'améliorer la prédiction de l'énergie turbulente d'un écoulement

de COUETTE réalisé par EL TELBANY & REYNOLDS.

Ce modèle détermine correctement la forme des profils de vitesse, d'énergie et de viscosité dans les écoulements de POISEUILLE. Par rapport aux modèles de longueur de mélange, on peut noter que le modèle proposé évalue mieux V_t dans la partie centrale de l'écoulement.

En dernier lieu, le modèle calcule correctement les profils de vitesse des écoulements de type COUETTE, mais la qualité de ses prédictions se dégrade pour les écoulements de type POISEUILLE. Ceci a déjà été observé avec les modèles de longueur de mélange. Cette faiblesse du modèle peut être imputable à la formulation empirique symétrique retenue pour l'échelle de longueur et à l'hypothèse de BOUSSINESQ.

Pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression réalisés par EL TELBANY & REYNOLDS <2-15>, le modèle proposé donne la vitesse débitante avec une erreur comprise entre +-1%, tandis que l'erreur sur la vitesse maximale du profil varie de 0% à 6%.

3.6 MODELE A DEUX EQUATIONS DE TRANSPORT:

Une difficulté commune aux modèles de longueur de mélange et aux modèles à une équation de transport pour K est de trouver une formulation empirique décrivant correctement l'échelle de longueur ℓ . Si on a pu trouver une formulation satisfaisante dans le cas où l'écoulement est relativement simple et symétrique (POISEUILLE et COUETTE pur), il paraît bien difficile de proposer une forme analytique pour ℓ dans les écoulements de COUETTE avec gradient de pression. Devant cette difficulté, SPALDING <2-43> et ROTTA <2-44> proposent de déterminer ℓ à l'aide d'une équation de transport supplémentaire. Une telle solution pose des problèmes tout d'abord de choix de la grandeur transportée puis de modélisation des termes de

l'équation de transport pour cette grandeur. Aujourd'hui, la dissipation d'énergie turbulente ϵ est à peu près universellement admise comme seconde grandeur turbulente transportée (LAUNDER <2-63>, RODI <2-64>). Ce choix tient au fait que ϵ présente l'avantage d'être une grandeur physique intervenant dans l'équation pour K et pour laquelle il est possible de déduire une équation de transport des équations de NAVIER-STOKES (1.21). De plus ϵ est un paramètre dimensionnant des échelles de KOLMOGOROV. Dans le cas où la turbulence est en équilibre local elle est bien représentative des petites structures turbulentes. Avec les deux grandeurs K et ϵ , on construit une échelle de longueur $l \approx K^{3/2}/\epsilon$ et la viscosité turbulente s'exprime par:

$$\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \quad (3.31)$$

où C_μ est une constante.

Cette modélisation nécessite la résolution simultanée des équations de transport pour K et ϵ . L'équation de transport pour l'énergie turbulente (3.29) devient:

$$\nu_t \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \frac{d}{dy} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{dK}{dy} \right\} - \epsilon = 0. \quad (3.32)$$

Modélisation de l'équation de transport pour ϵ :

TENNEKES & LUMLEY <2-46> ont déduit d'une analyse des ordres de grandeur des termes de l'équation de transport pour ϵ , qu'à grand nombre de REYNOLDS turbulent ($Rt = K^2/\nu\epsilon$) les termes (4) et (5) de (1.21) sont les termes les plus importants. Mais la différence de ces deux termes reste du même ordre de grandeur que les termes de diffusion (3) et de convection (1). RODI <2-47> montre que les termes (4) et (5) peuvent être modélisés ensemble.

Globalement ils représentent une destruction de ϵ , qui est modélisée de la manière suivante:

$$\textcircled{5} - \textcircled{4} = C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon}{K} \epsilon$$

Le terme de diffusion par les fluctuations de pression $\textcircled{3c}$ est négligé. Comme dans l'équation de transport pour K , nous adoptons pour les termes de diffusion $\textcircled{3a}$ une modélisation de type gradient, qui s'écrit:

$$\textcircled{3a} = -\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k}$$

La constante O_ϵ a la même signification qu'un nombre de PRANDTL, elle doit être voisine de l'unité.

REMARQUE: En simplifiant notablement l'équation de transport pour le terme $\textcircled{3a}$ de (1.21), HANJALIC & LAUNDER <2-48> proposent une modélisation pour ce terme, qui s'écrit pour un écoulement à une seule dimension:

$$\textcircled{3a} = -C_3 \frac{K}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dy}$$

Si on suppose que $\overline{v'v'}/K$ est sensiblement constant, la précédente relation s'écrit:

$$\textcircled{3a} = -\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{d\epsilon}{dy}$$

Les mesures expérimentales de CHAMPAGNE, HARRIS & CORRSIN <2-49> montrent que $\overline{v'v'}/K \approx 0,49$. Par

optimisation numérique, HANJALIC & LAUNDER trouvent que $C_3 \simeq 0,13$. La valeur de C_μ généralement adoptée étant 0,09, σ_ϵ est donc voisin de 1,4. Les modèles K- ϵ optent ordinairement pour une valeur de σ_ϵ légèrement plus faible ($\sigma_\epsilon \simeq 1,3$).

HANJALIC & LAUNDER <2-48> proposent pour le terme de production ② de l'équation (1.21) la modélisation suivante:

$$\textcircled{2} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k}$$

où $C_{\epsilon 1}$ est une constante.

Etant données les précédentes modélisations, l'équation de transport pour ϵ s'écrit:

$$\bar{u}_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = -C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right\} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K}$$

Pour un écoulement par droites parallèles, cette équation se réduit à:

$$0 = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon \nu_t}{K} \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \frac{d}{dy} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{d\epsilon}{dy} \right\} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} \quad (3.33)$$

Cette équation n'est valable qu'à grand nombre de REYNOLDS turbulent. Des modifications sont nécessaires lorsque R_t devient faible. Mais avant de définir ces modifications, nous allons déterminer les constantes des équations (3.31) à (3.33).

Lorsque la production et la dissipation de K sont en équilibre près d'une paroi, l'équation (3.32) permet d'écrire:

$$\nu_t \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = \epsilon \quad \overline{u'v'} \sim u_\tau^2 \quad \text{donc} \quad C_\mu = \frac{u_\tau^4}{K^2}$$

A partir de plusieurs expériences de turbulence de paroi, la valeur adoptée pour C_μ est 0,09.

D'après les expériences sur la décroissance de la turbulence de grille de BATCHELOR & TOWNSEND <2-50> et de COMTE-BELLOT & CORRSIN <2-51>, la constante $C_{\epsilon 2}$ est comprise entre 1,8 et 2. Dans la zone où la production et la dissipation de K sont égales et où $u^+ = A \log(y^+) + B$, on peut montrer que $C_{\epsilon 1}$ est donnée par la relation suivante:

$$C_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 2} - \frac{1}{A^2 \sigma_\epsilon \sqrt{C_\mu}} \quad (3.34)$$

Les constantes σ_k et σ_ϵ sont déterminées numériquement.

Pour optimiser les prédictions des écoulements cisailés à surface libre, LAUNDER, MORSE, RODI & SPALDING <2-52> déterminent un nouveau jeu de constantes, qui est utilisé dans la plupart des modèles $K - \epsilon$.

C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
0,09	1,44	1,92	1	1,3

Les équations (3.31) à (3.33) ne sont pas applicables dans les zones proches d'une paroi, et aux endroits où le nombre de REYNOLDS turbulent devient faible. Les expériences de turbulence de grille montrent par exemple qu'en fin de décroissance $C_{\epsilon 2}$ diminue avec R_t . Deux solutions sont possibles



pour étendre ces équations jusqu'aux parois. La première consiste à utiliser des "fonctions de paroi", qui utilisent des lois universelles de la zone interne de la couche limite pour prescrire dans la zone logarithmique pleinement turbulente des valeurs des grandeurs U , K et ϵ . Ceci permet de "sauter" le domaine pariétal où Rt est faible. Cette zone s'étend jusqu'à une certaine distance en y^+ ($y^+ = y u_\tau / \nu$, $u_\tau =$ vitesse de frottement pariétale). Cette méthode évite également de mailler la zone de fort gradient adjacente à la paroi, ce qui réduit notablement le nombre de points de maillage. Elle présente en ce qui nous concerne l'inconvénient majeur de ne pas décrire les grandeurs turbulentes au proche voisinage de la paroi, grandeurs que l'on envisage à terme de relier au rendement et à la qualité du revêtement déposé. De plus, dans les écoulements de COUETTE avec gradient de pression, u_τ peut s'annuler sur l'une des parois. Dans ces conditions, l'une des zones pariétales devient d'épaisseur infinie, et par conséquent rend caduque l'utilisation des "fonctions de paroi". Nous avons donc choisi d'utiliser la deuxième approche possible: la résolution jusqu'aux parois en raffinant le maillage et la modification des équations (3.31) à (3.33) pour qu'elles prennent en compte l'effet de la paroi sur la turbulence. Cette adaptation des équations se traduit par l'apparition de termes supplémentaires et de fonctions d'amortissement. Le système d'équations devient:

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{K^2}{\tilde{\epsilon}} \quad (3.35)$$

$$\nu_t \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \frac{d}{dy} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{dK}{dy} \right\} - \epsilon = 0. \quad \epsilon = \tilde{\epsilon} + D \quad (3.36)$$

$$C_{\epsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\epsilon}}{K} \nu_t \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \frac{d}{dy} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{d\tilde{\epsilon}}{dy} \right\} - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{K} + E = 0. \quad (3.37)$$



De nombreuses propositions ont été faites pour E, D, $f\mu$, $f1$ et $f2$. PATEL RODI & SCHEUERER <2-53> présentent les propositions de sept auteurs, auxquelles nous pouvons ajouter celles de JONES & LAUNDER <2-54>, de BERNARD <2-55>, de NAGANO & HISHIDA <2-56> et de NISIZAMA & YOSHIZAWA <2-57>. Cette liste n'est pas exhaustive. Devant le nombre et la diversité des modèles K- ϵ à faible Re , nous n'essaierons pas de formuler une nouvelle version de ce type de modèle, qui serait optimisée pour la prédiction des écoulements COUETTE. Nous allons plutôt étudier la capacité de ces modèles à prédire ce type d'écoulement.

On peut classer globalement en trois familles les différents modèles suivant la manière dont ils prennent en compte l'effet de la paroi sur la turbulence, ils utilisent: soit la distance à la paroi, soit le nombre de REYNOLDS turbulent, soit une combinaison des deux. Pour notre étude, nous choisissons les modèles de CHIEN <2-58> (CH), de LAUNDER & SHARMA <2-59> (LS) et de LAM & BREMHORST <2-60> (LB), qui sont les plus caractéristiques de chacune des trois familles.

a) Modèles:

Les différentes constantes et fonctions d'amortissement des modèles choisis sont données dans le tableau suivant:

	c_μ	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ	D	$f\mu$
LS	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$2\nu \left(\frac{d\sqrt{K}}{dy} \right)^2$	$\exp \left[\frac{-3.4}{(1+Re_t/50)^2} \right]$
LB	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	0	$[1 - \exp(-.0165Re_y)]^2 \left[1 + \frac{20.5}{Re} \right]$
CH	0.09	1.35	1.80	1.0	1.3	$2\nu \frac{K}{Y^2}$	$1 - \exp(-.0115Y^+)$

TABEAU DES CONSTANTES ET FONCTIONS D'AMORTISSEMENT

	f_1	f_2	E	$\tilde{\epsilon}_{(paroi)}$
LS	1	$1 - 0.3 \exp(-R_t^2)$	$2\nu\nu_t \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)^2$	0
LB	$1 + (.05/f\mu)^3$	$1 - \exp(-R_t^2)$	0	$\frac{d\tilde{\epsilon}}{dy} = 0$
CH	1	$1 - .22 \exp\left[-(R_t/6)^2\right]$	$-2\nu(\tilde{\epsilon}/Y^2) \exp(-.5Y^+)$	0

TABLEAU DES CONSTANTES ET FONCTIONS D'AMORTISSEMENT (suite)

avec: $R_t = \frac{K^2}{\nu\epsilon}$ $R_y = \frac{\sqrt{K} Y}{\nu}$ $Y^+ = \frac{u_T Y}{\nu}$ $Y = \min(y, h-y)$

CHIEN adopte deux constantes légèrement différentes des autres auteurs. Il prend pour $C_{\epsilon 2}$ la valeur donnée par HANJALIC & LAUNDER <2-61>, puis il détermine $C_{\epsilon 1}$ avec la relation (3.34). Les autres auteurs adoptent les constantes proposées par LAUNDER, MORSE, RODI & SPALDING <2-52>.

Expérimentalement, on constate que la valeur de ϵ est non nulle à la paroi ($\epsilon \simeq 0, lu_T^4/\nu$). Pour des convenances numériques, LAUNDER & SHARMA et CHIEN imposent $\tilde{\epsilon}$ nul à la paroi. Cette contrainte nécessite un terme supplémentaire D dans l'équation de transport pour K, dont la valeur pariétale doit contrebalancer le terme de diffusion visqueuse de K (3.36).

$$D = \nu \frac{d^2 K}{dy^2}$$

Dans cette zone: $K = C_{ste} y^2 + \dots$ donc $D = 2\nu \frac{K}{y^2}$

Cette expression est adoptée par CHIEN. LAUNDER & SHARMA adoptent pour le terme D la proposition de JONES & LAUNDER <2-54>. En utilisant des développements de TAYLOR pour les fluctuations u' , v' et w' dans les zones très proches des parois, JONES & LAUNDER montrent que leur terme D a le même comportement que $\tilde{\epsilon}$ dans ces régions pariétales. LAM & BREMHORST imposent que $\tilde{\epsilon}$ est égal au terme de diffusion visqueuse à la paroi, donc leur terme D est nul. PATEL, RODI & SCHEUERER <2-53> proposent une modification de la condition pariétale sur $\tilde{\epsilon}$ dans le modèle de LAM & BREMHORST, ils imposent l'annulation de la dérivée de cette grandeur. Cette nouvelle proposition semble plus physique (HANJALIC & LAUNDER <2-61>), aussi nous l'avons adoptée.

Pour équilibrer le terme de diffusion visqueuse au voisinage de la paroi dans l'équation de transport pour $\tilde{\epsilon}$ (3.37), CHIEN introduit un terme E, dont la formulation ressemble à celle de D. LAUNDER & SHARMA reprennent pour E une expression proposée par JONES & LAUNDER <2-54>. Ils indiquent ne pouvoir donner de justification physique quant à la forme de ce terme, mais constatent qu'il permet de prédire correctement les pics pariétaux d'énergie turbulente mesurés par LAUFER <2-10>.

Les expériences de COMTE-BELLOT & CORRSIN <2-51> et de BATCHELOR & TOWNSEND <2-50> montrent que $C_{\epsilon 2}$ est environ égal à 1,4 lorsque R_t devient faible. CHIEN et LAUNDER & SHARMA adoptent une fonction f_2 , qui permet d'obtenir cette variation de $C_{\epsilon 2}$ avec le nombre de REYNOLDS turbulent. La valeur de $\tilde{\epsilon}$ étant non nulle à la paroi dans le modèle de LAM & BREMHORST, le terme de dissipation de l'équation (3.37) devient infini. Pour empêcher cela, ils utilisent une fonction f_2 , qui s'annule avec R_t .

Près des parois, CHIEN pense que V_t est directement liée à y^+ , aussi construit-il sa fonction f_μ à partir de cette grandeur. LAUNDER & SHARMA indiquent que la valeur au voisinage de la paroi de V_t doit dépendre des valeurs locales de K et de $\tilde{\epsilon}$, et ils utilisent R_t comme paramètre de leur fonction f_μ . En

s'inspirant des propositions de HASSID & POREH <2-41> pour V_t et ϵ , LAM & BREMHORST trouvent une formulation de f_μ fonction conjointe de la distance à la paroi et le nombre de REYNOLDS turbulent.

CHIEN et LAUNDER & SHARMA n'utilisent pas de fonction fl. Tandis que LAM & BREMHORST relie fl à f_μ pour pouvoir prédire correctement le pic pariétal de K.

REMARQUE: Initialement, CHIEN utilise la vitesse de frottement pariétale dans f_μ et E. Dans les écoulements de COUETTE avec gradient de pression, cette grandeur peut s'annuler, aussi nous proposons de la remplacer par la vitesse de frottement locale:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}} = \sqrt{(\nu + \nu_t) \left| \frac{dU}{dy} \right|}$$

En plus des zones pariétales, V_t s'annule aussi avec le gradient de vitesse. Nous avons pu constater que cette annulation n'avait que peu d'effet sur les prédictions de U et de K.

b) Résultats et conclusions:

Pour résoudre numériquement l'équation de mouvement et les équations de transport pour K et pour ϵ nous avons adopté une méthode par volumes finis, présentée dans l'ouvrage de PATANKAR <2-38>.

Écoulement de POISEUILLE:

La figure 6-1 montre que les trois modèles prédisent correctement le profil de vitesse d'un écoulement de POISEUILLE. Les modèles de CHIEN et de LAUNDER & SHARMA présentent des profils de u^+ similaires, qui sont en accord avec les mesures

expérimentales de EL TELBANY & REYNOLDS. Par contre le modèle de LAM & BREMHORST prédit une zone de transition ($10 < y^+ < 100$) relativement importante. Les trois modèles sur-évaluent la viscosité turbulente dans la partie centrale de l'écoulement. Cette surestimation n'influence que faiblement les profils de $\overline{u'v'}$ et de U, elle est sans doute due à une sur-évaluation de K dans cette zone de l'écoulement (fig 6-2).

La figure 6-2 présente les prédictions d'énergie turbulente obtenues par les trois modèles pour un écoulement de POISEUILLE réalisé par CLARK <2-13>. Nous constatons que les modèles montrent la même évolution de K dans la partie centrale de l'écoulement, et qu'elle est supérieure en niveau aux mesures expérimentales. Dans les zones pariétales, le modèle de CHIEN donne la meilleure estimation de l'énergie turbulente, tandis que le modèle LAUNDER & SHARMA sous-estime notablement le pic pariétal de K.

Écoulement de COUETTE pur:

La figure 6-3 présente les prédictions des trois modèles pour un écoulement de COUETTE pur. Les modèles donnent des profils de vitesse U très similaires, mais LAUNDER & SHARMA et CHIEN semblent en meilleur accord avec l'expérience. Les mêmes constatations, que dans le paragraphe précédent, peuvent être faites pour ce qui concerne les profils u^+ . Les modèles donnent des profils de $\overline{U^2}$ relativement semblables. Ils ne reproduisent pas le plateau de viscosité turbulente dans la partie centrale de l'écoulement, mais cette mésestimation n'a qu'une faible influence sur la prédiction du profil de vitesse. La meilleure évaluation de $\overline{U^2}$ est donnée par le modèle de LAUNDER & SHARMA. L'énergie turbulente est d'une manière générale assez mal estimée. LAUNDER & SHARMA ne prédisent pas de pics pariétaux de K, tandis que les deux autres modèles donnent des profils de K relativement corrects dans les zones pariétales. Par contre, à l'unanimité, ils surestiment le niveau d'énergie turbulente dans la partie centrale de l'écoulement. Cette surestimation est due à

la constante C_μ . Car au centre de l'écoulement nous avons égalité entre les termes de production et de dissipation de l'équation de transport pour K, elle se réduit à:

$$\nu_t \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = \epsilon \simeq \tilde{\epsilon} \qquad \frac{K}{u_\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} = 3,3$$

Cette valeur C_μ a été déterminée à partir des mesures expérimentales de K dans les zones pariétales où il y a une relative égalité entre la production et la dissipation de K. Mais à partir des mesures de EL TELBANY & REYNOLDS on trouve que K/u_τ^2 est égal à 2,6 au centre d'un écoulement de COUETTE pur, où il y a aussi cette égalité entre la production et la dissipation de K. Si on veut superposer les prédictions et les mesures d'énergie turbulente dans la partie centrale de l'écoulement, il faut changer la valeur de C_μ .

Pour les quatre écoulements de COUETTE pur réalisés par EL TELBANY & REYNOLDS, le modèle de LAUNDER & SHARMA surestime la vitesse de frottement pariétal de $\simeq 2\%$, celui de CHIEN de $\simeq 3\%$, celui de LAM & BREMHORST de $\simeq 1\%$.

Écoulement de COUETTE avec gradient de pression:

La figure 6-4 présente les prédictions des trois modèles de turbulence pour quatre écoulements de COUETTE avec gradient de pression, deux de ces écoulements étant de type COUETTE, et deux de type POISEUILLE.

Les trois modèles déterminent assez correctement les profils de vitesse des deux écoulements de type COUETTE, mais leurs évaluations sont moins bonnes pour ceux de type POISEUILLE, principalement dans la région du maximum de vitesse. Ce désaccord entre l'expérience et le calcul est principalement dû à l'hypothèse de BOUSSINESQ, qui implique que la corrélation $\overline{u'v'}$ s'annule à la même ordonnée que la dérivée de la vitesse moyenne.

La figure 6-4 montre que le modèle de LAUNDER & SHARMA sous-estime l'énergie turbulente dans les régions pariétales, tandis que les deux autres modèles évaluent relativement bien le pic pariétal de K près de la paroi ayant la vitesse de frottement la plus importante. Les trois modèles surestiment l'énergie turbulente dans les écoulements de type COUETTE (Expériences N°7 et 9 fig 6-4). Lorsqu'un maximum apparaît sur le profil de vitesse (Expérience N°10 fig 6-4), les prédictions d'énergie turbulente des modèles s'améliorent notablement. Mais, si cet extremum s'éloigne des parois (Expériences N°13 fig 6-4), les prédictions de K sont moins correctes, principalement dans la zone où la dérivée de vitesse s'annule. Cette mauvaise évaluation de l'énergie turbulente est sans doute due à l'hypothèse de BOUSSINESQ, qui est utilisée pour la modélisation du terme de production de l'équation de transport pour K . Expérimentalement, nous constatons que l'apparition d'un maximum sur le profil de vitesse coïncide avec une élévation brutale du profil d'énergie turbulente (Expériences N° 9 et 10 fig 6-4). Pour que les modèles reproduisent cette élévation soudaine, il faudrait modifier la constante C_{μ} , lorsqu'un extremum apparaît sur le profil de vitesse.

La figure 6-5 présente les prédictions du profil de vitesse pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression. Les profils de vitesse obtenus à l'aide des trois modèles de turbulence étant similaires, nous n'avons tracé sur cette figure que les évaluations du modèle de CHIEN. Les expériences de HUEY & WILLIAMSON <2-24> sont relativement bien déterminées. Les prédictions du modèle sont de qualité moyenne pour certains écoulements de type COUETTE, elles présentent pour les écoulements de type POISEUILLE les mêmes faiblesses que le modèle de longueur de mélange et que celui à une équation de transport. Ce désaccord entre l'expérience et le calcul est sans doute imputable à l'hypothèse de BOUSSINESQ retenue pour la viscosité turbulente.

Conclusions:

Les précédentes comparaisons entre les expériences et les prédictions des modèles de CHIEN, de LAUNDER & SHARMA et de LAM & BREMHORST nous permettent de tirer plusieurs conclusions:

Bien que ces modèles surestiment V_t au centre des écoulements de POISEUILLE, ils déterminent correctement les profils de vitesse. Ils surestiment légèrement l'énergie turbulente dans la partie centrale de l'écoulement. Dans les régions pariétales, le modèle de LAUNDER & SHARMA sous-évalue les pics de K , tandis que les deux autres modèles donnent une évolution de l'énergie turbulente relativement en accord avec les expériences.

En ne changeant aucune des constantes des modèles, les profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE pur sont correctement calculés. Les prédictions de V_t par les modèles sont très similaires, elles ne présentent pas une zone plateau pour V_t comme le montre l'expérience. Les modèles de CHIEN et de LAM & BREMHORST évaluent correctement K dans les régions pariétales, tandis que le modèle de LAUNDER & SHARMA la sous-estime. En raison de la valeur trop faible de C_μ , l'énergie turbulente est surévaluée dans la partie centrale de l'écoulement. D'après les expériences, la valeur de C_μ devrait être plus grande, mais cela altérerait les prédictions de K dans les écoulements de POISEUILLE.

Pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression, les trois modèles déterminent des profils de vitesse similaires. Leurs prédictions du profil de vitesse sont moins correctes pour les écoulements de type COUETTE que celles obtenues par un modèle de longueur de mélange ou un modèle à une équation de transport. L'énergie turbulente est globalement surestimée par les trois modèles pour les écoulements de type COUETTE. Elle est aussi sous-estimée au voisinage de l'extremum du profil de vitesse des écoulements de type POISEUILLE, cette

mauvaise détermination est sans doute due à l'hypothèse de BOUSSINESQ. Les meilleurs calculs de K sont obtenus avec les modèles de LAM & BREMHORST et de CHIEN.

Pour l'ensemble des écoulements étudiés, nous pouvons conclure que globalement les meilleures prédictions sont obtenues par le modèle de CHIEN.

CONCLUSIONS DE LA DEUXIEME PARTIE

Cette deuxième partie de notre travail avait pour objectif de prédire des écoulements par droites parallèles de POISEUILLE et de COUETTE avec ou sans gradient de pression. Pour ce faire, nous avons constitué une base de données expérimentale aussi large que possible, dont nous avons essayé de nous assurer au mieux de sa validité. Notre étude a montré qu'il subsiste des écarts notables d'une expérience à l'autre même en ce qui concerne les écoulements de POISEUILLE pur et que des expériences complémentaires de bonne qualité sont nécessaires notamment pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression. Sur cette base de données, nous avons étudié 4 types de modèle de turbulence:

- * Le modèle analytique de CONSTANTINESCU.
- * Des modèles de longueur de mélange.
- * Des modèles à une équation de transport.
- * Des modèles à deux équations de transport.

Ces quatre types de modèle utilisent l'hypothèse de BOUSSINESQ pour la modélisation de la corrélation $u'v'$.

En scindant l'écoulement en plusieurs zones (zones visqueuses et zones pleinement turbulentes), le modèle de CONSTANTINESCU permet de résoudre analytiquement l'équation de mouvement des écoulements par droites parallèles. Malgré les importantes simplifications nécessaires et la formulation simple adoptée pour la longueur de mélange, il prédit correctement la vitesse débitante des écoulements de COUETTE avec gradient de pression. Nous avons notablement amélioré cette prédiction par

une nouvelle formulation du coefficient k de la longueur de mélange (relation (3.20)). Ce modèle relativement simple permet donc de tracer des abaques donnant le gradient de pression en fonction de la vitesse débitante de l'écoulement.

Le deuxième modèle de turbulence testé utilise une nouvelle formulation de la longueur de mélange, que nous avons proposée et optimisée pour prédire correctement la vitesse débitante des écoulements de COUETTE et de POISEUILLE. Le modèle à une équation de transport est celui de HASSID & POREH <2-41>, dans lequel nous avons adopté pour l'échelle de longueur la formulation développée pour le modèle de longueur de mélange. Parmi trois modèles à deux équations de transport (LAUNDER & SHARMA <2-59>, LAM & BREMHORST <2-60>, CHIEN <2-58>), nous avons retenu celui de CHIEN, qui donne globalement les meilleures prédictions pour les écoulements de COUETTE. La seule modification apportée à ce modèle est l'utilisation de la vitesse de frottement locale dans les fonctions d'amortissement. La formulation des modèles à deux équations de transport est la même pour l'ensemble des écoulements étudiés, tandis que celle des autres types de modèle est fonction de l'écoulement considéré (modification de l'échelle de longueur).

En conclusion à cette deuxième partie, il paraît intéressant de comparer les améliorations apportées aux prédictions par la sophistication des modèles. Pour ce faire, les figures 7-1 à 7-4 présentent la comparaison des résultats des trois types de modèle (que nous désignerons par A, B et C pour simplifier l'exposé de ce chapitre) pour quatre types d'écoulement, qui sont:

- * Ecoulement de COUETTE pur.
- * Ecoulement de POISEUILLE.
- * Ecoulement de type COUETTE.
- * Ecoulement de type POISEUILLE.

La figure 7-1 présente le cas d'un écoulement de COUETTE

pur. Les profils de vitesse calculés par les trois modèles sont similaires et en parfait accord avec les mesures expérimentales. Le modèle de longueur de mélange (A) et celui à une équation de transport (B) prédisent très bien la viscosité turbulente, ceci est principalement dû à la nouvelle formulation empirique adoptée pour l'échelle de longueur de ces deux modèles. Nous constatons que la surestimation de D_t par le modèle K- ϵ de CHIEN (C) n'a qu'une faible influence sur le calcul du profil de vitesse. On constate que les profils d'énergie turbulente donnés par les modèles B et C sont relativement semblables et que la seule différence notable entre ceux-ci est la valeur du pic pariétal de K. La surestimation de K dans la partie centrale de l'écoulement est due à la valeur de C_{μ} pour le modèle C. Pour le modèle B on a vu qu'elle peut être corrigée en adoptant des échelles de longueur différentes pour la production et la dissipation de K (fig 5-3).

La figure 7-2 présente les prédictions des mêmes modèles pour un écoulement de POISEUILLE. Les profils de vitesse obtenus sont similaires et voisins des mesures expérimentales. La meilleure estimation de la viscosité turbulente est donnée par le modèle B. Les deux autres modèles déterminent incorrectement D_t dans la partie centrale de l'écoulement, mais ceci n'altère pas la détermination du profil de vitesse. Les modèles B et C donnent des profils de K relativement similaires. Par rapport aux données expérimentales de CLARK (2-13), qui nous semblent être les mesures de K les plus correctes, on constate qu'ils prédisent bien le profil d'énergie turbulente. Les meilleurs calculs de K dans les zones pariétales sont obtenus avec le modèle B.

La figure 7-3 présente le cas d'un écoulement de type COUETTE. Pour ce genre d'écoulement, on constate que les modèles A et B donnent généralement de meilleures prédictions du profil de vitesse que le modèle C. A l'exception des zones pariétales, les modèles à équations de transport présentent des profils de K similaires. Ces deux modèles surestiment l'énergie turbulente dans la majeure partie de l'écoulement. Nous constatons que les

profils de viscosité turbulente calculés par ces deux derniers modèles sont relativement différents. Cette différence peut expliquer partiellement les moins bonnes prédictions du profil de vitesse par le modèle $K-\epsilon$ de CHIEN. Cette faiblesse est vraisemblablement due à la modélisation de l'équation de transport pour ϵ .

Les expériences de EL TELBANY & REYNOLDS montrent que l'apparition d'un extremum sur le profil de vitesse d'un écoulement de COUETTE avec gradient de pression provoque une élévation brutale du niveau de K (expériences N°9 et 10 fig 5-6 et fig 6-4). EL TELBANY & REYNOLDS <2-16> indiquent que cette élévation est sans doute due au changement de signe de la vorticité engendrée à la paroi supérieure, qui modifie considérablement la structure de la turbulence dans l'ensemble de l'écoulement. Aucun des deux modèles à équations de transport ne prédit ce changement soudain du niveau de K .

La figure 7-4 compare les trois modèles dans le cas d'un écoulement de type POISEUILLE. Bien que les prédictions de la viscosité turbulente par ces trois modèles soient légèrement différentes, on constate que les profils de vitesse sont relativement similaires. Près de la paroi ayant le frottement le plus faible, les modèles surestiment la vitesse. Ceci est dû principalement à l'hypothèse de BOUSSINESQ, qui impose que la corrélation $\overline{u'v'}$ et la dérivée de vitesse s'annulent à la même abscisse. Or les expériences de EL TELBANY & REYNOLDS démentent pour les écoulements de type POISEUILLE l'annulation simultanée de ces deux grandeurs. Les profils de K calculés par les modèles B et C sont relativement semblables, ils donnent correctement l'énergie turbulente près de la paroi ayant la plus grande vitesse de frottement, mais ils la sous-estiment dans l'autre partie de l'écoulement. Cette mauvaise évaluation est sans doute due à l'hypothèse de BOUSSINESQ, qui est utilisée pour la modélisation du terme de production de l'équation de transport pour K .

L'ensemble des résultats présentés permettent d'aboutir à certaines conclusions en ce qui concerne la modélisation turbulente. Tout d'abord ils mettent en évidence une certaine souplesse quant au choix de l'échelle de vitesse dans la formulation de la viscosité turbulente (le passage de dU/dy à \sqrt{K} modifie peu les résultats obtenus). Ils montrent par contre le rôle important de l'échelle de longueur et la comparaison des modèles K et $K-\epsilon$ mettent en évidence les faiblesses du modèle à deux équations de transport. Ces résultats montrent également que l'hypothèse de l'échelle de longueur unique peut-être remise en cause même dans des écoulements relativement simples. On peut bien entendu espérer qu'en augmentant le nombre de REYNOLDS on aboutisse à un équilibre local. Mais les nombres de REYNOLDS des expériences étudiées sont déjà relativement grands par rapport aux conditions industrielles et l'on ne peut éluder ce problème si l'on veut effectuer des prédictions réalistes de situations industrielles pratiques.

Les résultats obtenus avec l'ensemble des modèles pour les écoulements de type POISEUILLE (fig 7-4) remettent unanimement en cause l'hypothèse de BOUSSINESQ. Ceci implique soit de trouver une modélisation complémentaire de $\overline{u'v'}$ dans les zones concernées pour un modèle K ou $K-\epsilon$, soit de s'affranchir de cette hypothèse en résolvant des équations de transport supplémentaires pour les contraintes de REYNOLDS.

Enfin, ces résultats montrent que les modèles de turbulence existants ne permettent pas de prédire le saut du niveau d'énergie constaté expérimentalement au passage d'un écoulement de type COUETTE à un écoulement de type POISEUILLE. Il est certain que ce phénomène n'ayant été observé que par un seul expérimentateur, il demande une vérification expérimentale. S'il était confirmé, les résultats obtenus avec le modèle K indiquent une différence profonde de nature de la turbulence dans ces deux types d'écoulement, différence qui n'est actuellement pas représentée par les modèles.

*
* TROISIEME PARTIE *
* *
* *
* ETUDE EXPERIMENTALE DE LA ZONE D'INJECTION *
* *

INTRODUCTION

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons montré que le déplacement de la bande de métal provoque une répartition inégale du débit d'injection entre les côtés amont et aval de la cellule d'électro-zingage (fig 1-3), répartition qui est d'autant plus dissymétrique que la vitesse de la tôle est grande. Il existe donc, pour un débit d'injection donné, une vitesse "critique" de la bande de métal, à partir de laquelle le débit amont d'électrolyte est nul. Dans ce cas le fluide électrolytique n'est pas renouvelé du côté amont de la cellule, et sa concentration en zinc risque de diminuer fortement. Cet appauvrissement peut réduire notablement le rendement de dépôt. Il est donc nécessaire d'assurer un minimum de débit de ce côté.

Pour étudier cette répartition du débit, on peut utiliser soit une approche expérimentale, soit une approche numérique. L'étude numérique de ce phénomène nécessite des moyens informatiques importants, dont nous ne disposons pas. Il s'agit en effet d'un écoulement plan, turbulent, avec des gradients de vitesse intenses et dans certains cas une zone de recirculation. Les codes de calcul à mettre en oeuvre et le nombre de points de maillage nécessaires sont sans commune mesure avec ceux utilisés dans la seconde partie de ce mémoire. De plus, la configuration d'écoulement des cellules n'ayant jamais été étudiée à notre connaissance, il n'existe pas de données expérimentales permettant de valider les résultats d'une simulation. Pour ces deux raisons, nous avons choisi d'étudier expérimentalement ce phénomène.

Compte tenu des contraintes de la production

industrielle, il n'est pas envisageable d'étudier la répartition du débit d'injection directement sur la ligne d'électro-zingage. Nous avons donc conçu une installation expérimentale permettant de simuler le fonctionnement hydrodynamique d'une cellule. Notre étude visant uniquement la détermination de la répartition du débit injecté en fonction de la vitesse de la bande de métal, elle ne nécessite seulement que des mesures de débit et de vitesse de la tôle. Nous avons cependant effectué également des mesures de répartition de pression, qui donnent des informations sur l'écoulement au sein des cellules.

ETUDE PAR SIMILITUDE1.1) INTRODUCTION:

La méthode la plus directe pour étudier la répartition du débit injecté serait de l'observer directement sur une cellule industrielle. Cette solution étant techniquement impossible, il nous faut concevoir une maquette qui permette de reproduire de manière satisfaisante le fonctionnement hydrodynamique des cellules. Nous avons montré dans le chapitre "MODELISATION HYDRODYNAMIQUE" que:

- * Le champ électrique créé dans les cellules n'a presque pas d'influence sur l'écoulement de l'électrolyte.
- * L'électrolyte est assimilable à un fluide homogène et de composition chimique constante.
- * La configuration d'écoulement au sein des cellules peut-être simplifiée sans que le comportement de ces dernières soit considérablement modifié (fig 1-7).
- * La courbure du passage entre l'anode et la bande de métal n'a que peu d'influence sur l'écoulement de l'électrolyte (fig 1-7).

Etant données ces propriétés, la simulation du fonctionnement de la cellule sur la maquette ne nécessite pas la présence d'un champ électrique. Cela simplifie considérablement sa conception. L'électrolyte se comportant comme un fluide newtonien classique, on peut le remplacer par de l'eau, qui est plus facile à manipuler. La courbure du canal n'ayant que peu d'influence, on peut reproduire le comportement d'une cellule dans une maquette ayant une forme géométrique différente (fig 1-7).

1.2) REGLES DE SIMILITUDE:

Pour pouvoir reproduire le comportement hydrodynamique d'une cellule dans la maquette et transposer les résultats expérimentaux, certaines conditions doivent être respectées.

La répartition du débit d'injection dans une cellule (fig 1-7) dépend des grandeurs suivantes:

* Longueurs caractéristiques:

h = Hauteur du passage.

L0 = Largeur de la fente d'injection.

L = Longueur totale du canal.

* Vitesses caractéristiques:

Ub = Vitesse de la bande de métal.

U0 = Vitesse du fluide à l'injection.

* Caractéristiques du fluide:

ρ = Masse volumique du fluide.

μ = Viscosité dynamique du fluide = $\nu\rho$

REMARQUE: La répartition du débit d'injection est relativement indépendante de la largeur ℓ du canal, car nous avons montré dans le chapitre 2 de la 1ère partie que les vitesses débitantes amont, aval et d'injection sont uniformes sur la largeur de la cellule.

Il existe donc une fonction f qui relie le rapport des débits amont Q1 et d'injection Q0 aux précédentes grandeurs:

$$\frac{Q1}{Q0} = f(h , L0 , L , U0 , Ub , \rho , \mu)$$

En utilisant Ub, h et ρ comme grandeurs primaires, on

peut rendre sans dimensions les paramètres de la précédente relation:

$$\frac{Q1}{Q0} = \varphi \left(\frac{L0}{h}, \frac{L}{h}, \frac{U0}{Ub}, \frac{\nu}{Ub h} \right)$$

Cette relation est applicable aussi à la maquette (grandeurs accentuées):

$$\frac{Q1'}{Q0'} = \varphi \left(\frac{L0'}{h'}, \frac{L'}{h'}, \frac{U0'}{Ub'}, \frac{\nu'}{Ub' h'} \right)$$

Si les paramètres de la fonction φ sont égaux, la cellule et la maquette sont en similitude. L'invariance de ces paramètres constitue les conditions de similitude, ce qui nous permet d'écrire:

$$\frac{Q1}{Q0} = \frac{Q1'}{Q0'}$$

Cette relation permet de transposer les résultats expérimentaux de la maquette à la cellule.

Les conditions de similitude qui contiennent seulement des distances entraînent une similitude géométrique entre la maquette et la cellule. Cela impose un rapport d'échelle constant pour les longueurs h , L et $L0$.

$$\frac{h'}{h} = \frac{L0'}{L0} = \frac{L'}{L}$$

La précédente règle de similitude n'impose pas de relation pour la largeur du passage, du moins pas directement. Nous supposons en effet que les vitesses débitantes amont, aval et d'injection sont uniformes sur la largeur du canal. Cette hypothèse n'est possible que si l'épaisseur des couches limites, qui se développent sur les faces latérales du passage, est faible

devant la largeur du passage. Cela impose que cette dimension est grande devant la hauteur du passage. Le rapport ℓ/h est de l'ordre de 180 dans les cellules. Il suffit qu'il soit grand devant 1 sur la maquette.

Les deux paramètres restant imposent une similitude dynamique entre les vitesses et les nombres de REYNOLDS des deux machines.

$$\frac{U_0'}{U_b'} = \frac{U_0}{U_b} \quad \frac{U_b' h'}{v'} = \frac{U_b h}{v}$$

La dernière règle de similitude prend en compte le changement de nature du fluide entre la cellule et la maquette.

1.3) DIMENSIONNEMENT DE LA MAQUETTE:

A cause de la similitude géométrique, certaines dimensions caractéristiques de la maquette sont liées à celles de la cellule. La hauteur h du passage d'une cellule augmente pendant sa durée d'utilisation (usure de l'anode en plomb). Lorsque h dépasse une certaine valeur, la cellule est retirée de la ligne d'électro-zingage. Pour la remise en état, on recharge en plomb l'anode pour ramener la hauteur du passage à sa valeur initiale. Cette grandeur varie aussi en fonction de l'épaisseur de la tôle à revêtir. Bien que la variation de ce paramètre ait une influence sur la répartition du débit d'injection, elle n'est pas prise en compte dans notre étude. Nous supposons que la hauteur du passage est constante et qu'elle est égale à 10 mm. Etant donnée cette hypothèse, les dimensions caractéristiques d'une cellule industrielle sont:

* Hauteur du passage	$h = 10$ mm
* Largeur de la fente d'injection	$L_0 = 50$ mm
* Longueur totale du canal	$L \approx 3800$ mm
* Largeur du canal	$\ell \approx 1800$ mm

Nous avons adopté 0,7 pour le rapport d'échelle entre les deux machines, les dimensions caractéristiques de la maquette sont donc:

* Hauteur du passage	$h' = 7$ mm
* Largeur de la fente d'injection	$L_0' = 35$ mm
* Longueur totale du canal	$L' = 2580$ mm
* Largeur du canal	$\ell' = 450$ mm

Nous avons indiqué précédemment qu'aucune règle de similitude ne relie la largeur du canal de la maquette à celle de cellule, et que la seule contrainte était d'avoir un rapport ℓ/h relativement grand. Ce rapport est de l'ordre de 65 sur la maquette.

La courbure du canal de la cellule industrielle n'ayant pas d'influence sur l'écoulement, nous pouvons donc simuler son fonctionnement dans une maquette qui ne soit pas un modèle réduit homothétique. Pour diminuer le délai de fabrication de l'installation expérimentale, nous avons utilisé un dispositif existant, fourni par le laboratoire d'électro-métallurgie de l'Université Libre de Bruxelles, auquel nous avons apporté quelques modifications pour qu'il puisse simuler le comportement d'une cellule.

La maquette est schématisée sur la figure 8-1b. Nous constatons que son canal est courbe aux extrémités. Cette courbure peut influencer l'écoulement turbulent du fluide. Le paramètre qui permet d'évaluer cette influence est le rapport de la hauteur du passage sur le rayon du tambour (voir chapitre 2 de la 1ère partie). Les expériences de BURTON & CARPER <1-6> montrent que la courbure n'a qu'une faible influence sur un écoulement turbulent lorsque ce rapport est de l'ordre de 0,01. Il n'est que légèrement plus élevé sur la maquette ($h'/r' = 0,03$). Nous supposons que l'on peut encore négliger l'influence de la courbure du canal.

INSTALLATION EXPERIMENTALE2.1 DESCRIPTION DE L'INSTALLATION EXPERIMENTALE:

Les figures 8-1a et 8-2 présentent un schéma et des photos de l'installation expérimentale.

Au repos, l'eau est stockée dans une cuve en polyester, dont la capacité est d'environ 1,1 m³. Le fluide est aspiré par une pompe ayant un débit nominal de 80 m³/h, puis est refoulé vers l'injecteur de la maquette. Cette pompe centrifuge doit fonctionner à un débit relativement constant et voisin de sa valeur nominale. Aussi nous avons installé en amont de l'injecteur une dérivation qui permet de faire varier le débit d'injection de la maquette entre 0 et 80 m³/h, tout en gardant le débit de la pompe relativement constant. L'injecteur permet d'avoir une vitesse d'injection uniforme sur la largeur du canal de la maquette. Après son passage dans l'injecteur, l'eau s'écoule au sein de la maquette, puis elle tombe dans les déversoirs amont et aval et retourne par gravité vers la cuve de stockage.

La mise en mouvement de la bande est assurée par un ensemble moteur, qui est constitué d'un réducteur à engrenage et d'un moteur à courant continu de 16 KW (fig 8-2). Sa vitesse de rotation peut varier de 0 à 1500 tours/mn, ce qui permet d'obtenir une vitesse de déplacement de la bande comprise entre 0 et 176 m/mn. La stabilité de rotation du moteur à courant

continu est assurée par une dynamo tachymétrique montée en bout d'arbre.

REMARQUE: Initialement, le moteur d'entraînement de la maquette avait une vitesse de rotation maximale de 3000 tr/mn, mais sa puissance était insuffisante pour mettre en mouvement la bande. Nous avons donc utilisé un autre moteur plus puissant dont la vitesse de rotation maximale est de 1500 tr/mn, ce qui a réduit de moitié la gamme de vitesse possible de la bande.

2.2 DESCRIPTION DE LA MAQUETTE:

La maquette est présentée sur la figure 8-1b. Elle est constituée d'une bande en inox de 1,5 mm d'épaisseur et de 500 mm de largeur. Les deux gros tambours font 500 mm de diamètre et 500 mm de longueur, leur entre-axe est de 1500 mm. Ils sont recouverts sur leur périphérie d'un revêtement en caoutchouc, qui augmente l'adhérence de la bande. Ils sont réglables verticalement et horizontalement. Leur position par rapport aux parties courbes du canal est très importante, car elle détermine la hauteur du canal. La précision de réglage des tambours est de 0,3 mm. Le tambour du côté amont est libre en rotation, tandis que l'autre est relié au bloc moteur par l'intermédiaire d'un accouplement souple. Nous avons choisi de transmettre le mouvement à la bande par le tambour du côté aval, car dans ces conditions les forces de frottement tendent le brin inférieur de la bande. Le tambour central a un diamètre de 160 mm pour une longueur de 600 mm. Il a une double fonction: il assure à la fois la tension et le guidage de la bande. La pression régnant au sein du canal tend à soulever la bande dans sa partie inférieure. Un patin de glissement empêche cette déformation, sa surface est de 1300mm x 500mm.

2.3 MOYENS DE MESURE:

a) Mesure de vitesse:

La vitesse de déplacement de la bande est donnée par un afficheur à aiguille, qui utilise la tension fournie par la dynamo tachymétrique du moteur à courant continu. Cette différence de potentiel est proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur. Le rapport de réduction du réducteur à engrenage étant constant, le signal de la dynamo est donc aussi proportionnel à la vitesse de déplacement de la bande. Grâce à un étalonnage préliminaire, l'afficheur à aiguille donne directement la vitesse de déplacement de la bande en m/mn. La précision de cette mesure est de 1%.

Nous avons utilisé quelquefois un tachymètre optique pour mesurer la vitesse de rotation des tambours amont et aval. Cette double mesure permet de vérifier celle fournie par le précédent afficheur, et surtout de contrôler que les deux tambours tournent à la même vitesse (pas de glissement entre la bande et le tambour moteur).

b) Mesure de débit:

Les débits amont et aval sont mesurés par deux débitmètres électromagnétiques (fig 8-3). L'erreur de mesure de ces appareils est de $\pm 0,5\%$ de la valeur lue. Ils fournissent deux indications. La première est une mesure du débit instantané. La seconde est l'émission d'une impulsion lorsqu'une certaine quantité d'eau a traversé le débitmètre.

Pendant la mise au point de l'installation expérimentale, plusieurs problèmes de mesure de débit sont apparus:

Lors de l'écoulement de l'eau des déversoirs vers la cuve de stockage, des bulles d'air sont entraînées par le fluide

et traversent les débitmètres. Dans ces conditions les mesures de débit sont incorrectes. Nous avons donc installé des cuves tampons entre les déversoirs et les débitmètres (fig 8-2), qui captent ces bulles d'air et tranquilisent l'écoulement de l'eau.

Lorsque le débit d'injection dans la maquette est faible, une grande partie du débit de la pompe retourne vers la cuve. Ce retour de fluide provoque une agitation importante dans le réservoir de stockage, qui influence les mesures de débit. Nous avons donc intercalé une grille entre les conduites des débitmètres et celle de refoulement de la pompe. Cet obstacle réduit notablement l'agitation de l'eau dans la cuve de stockage, mais les fluctuations du débit instantané sont encore trop importantes. Nous avons donc utilisé le second signal des débitmètres pour mesurer les débits de fluide. Ils sont déterminés en comptant le nombre d'impulsions émises pendant une certaine durée. Un temps d'échantillonnage d'environ 3 minutes est généralement nécessaire pour obtenir une mesure correcte du débit. Cette durée est plus importante pour les très faibles débits. Le comptage de ces impulsions est réalisé par un compteur totaliseur.

c) Mesure de pression:

L'injecteur est équipé de quatre prises de pression qui sont réparties sur une génératrice située à 5 cm en amont de l'injection dans la maquette (fig 8-4). Les côtés amont et aval de la maquette possèdent respectivement 47 prises de pression réparties symétriquement par rapport à la fente d'injection. Les figures 8-4 et 8-5 présentent la répartition de ces prises de pression au sein de la maquette. Pour faciliter la présentation de ces figures, nous avons déroulé les parties courbes situées au niveau des tambours. L'appareil de mesure des pressions est un multimanomètre à mercure de 36 tubes (fig 8-3).

2.4 QUALIFICATION DE LA MAQUETTE:

Avant d'effectuer les expériences nécessaires à l'étude, nous avons réalisé quelques mesures préliminaires pour vérifier la qualité de l'écoulement interne de la maquette.

Lorsque la vitesse de la bande est nulle la conception symétrique de la maquette impose que ses débits amont Q_1' et aval Q_2' soient égaux. Cette égalité a été constatée expérimentalement pour quatre valeurs du débit d'injection Q_0' compris entre 10 et 80 m³/h (différence entre les débits amont et aval < 1 %).

Le deuxième type de mesure a pour but de vérifier que la vitesse débitante est uniforme sur la largeur du canal de la maquette (direction oz fig 8-4 et 8-5). Les mesures des quatre prises de pression de l'injecteur montrent que cette uniformité existe à la sortie de cet élément. L'instrumentation du canal permet de mesurer la pression suivant six génératrices transversales (fig 8-4 et 8-5). La figure 8-6 présente les mesures de pression suivant ces génératrices pour trois valeurs différentes du débit d'injection Q_0' . On constate que la pression est constante sur la largeur du canal, donc la vitesse débitante est uniforme dans cette direction transversale. Cette uniformité de la pression a été aussi constaté lorsque la bande est en mouvement.

Les mesures de pression dans la direction de l'écoulement montrent que celle-ci varie linéairement de l'injection vers les extrémités du canal. La figure 8-7 présente un exemple de répartition de la pression du côté aval. On obtient le même type de résultat de l'autre côté de la maquette. Physiquement, on sait que la loi de variation de la pression n'est pas linéaire pour de faibles abscisses. Mais les premières prises de pression, situées à environ 7 hauteurs de passage de l'injection, sont trop éloignées de celle-ci pour permettre des mesures dans la zone d'établissement de la perte de charge.

Ces premières mesures montrent que la pression est constante sur la largeur du canal, et qu'elle varie linéairement dans le sens de l'écoulement moyen. Ces deux propriétés ont conduit à réduire le nombre de prises de pression nécessaire à l'étude. Le multimanomètre ne comportant que 36 tubes de mesure, nous avons instrumenté 34 prises de pression (17 de chaque côté de la maquette). Elle sont représentées par une étoile sur les figures 8-4 et 8-5, et leurs coordonnées sont données en annexe D. Cette instrumentation permet de connaître correctement la répartition de la pression au sein de la maquette. Les deux derniers tubes du multimanomètre donnent la pression atmosphérique et la pression d'injection.

RESULTATS EXPERIMENTAUX3.1 PRESENTATION DES RESULTATS:

Une fois l'écoulement au sein de la maquette qualifié, nous avons entrepris une étude paramétrique. Etant données les caractéristiques du moteur à courant continu et de la pompe, nous pouvons faire varier le premier paramètre de 0 à 176 m/mn, et le second de 0 à 80 m³/h.

Sur la figure 8-8, nous présentons les valeurs de la vitesse de la bande et du débit d'injection des différentes expériences. On constate l'existence de deux zones non étudiées expérimentalement. Dans le premier domaine (petit débit d'injection et grande vitesse de bande) le débit injecté n'est pas suffisant pour permettre une évacuation de fluide du côté amont de la maquette. D'autre part, à cause de limitations techniques propres à la maquette, nous n'avons pas pu étudier la zone où la vitesse de la bande et le débit d'injection sont grands, car nous avons constaté un glissement relatif entre la bande et le tambour d'entraînement. Lorsqu'on augmente le débit d'injection, la pression dans le canal s'accroît, et le frottement de la bande sur le patin de glissement devient important. Dans ces conditions le déplacement de la bande est plus difficile, ce qui explique le glissement observé à partir d'une certaine vitesse de la bande.

REMARQUE: Pour simplifier les notations, nous n'utiliserons pas systématiquement les grandeurs accentuées pour la maquette. Il sera explicitement indiqué si une grandeur non accentuée est relative à la cellule industrielle ou à la maquette.

Les figures 8-9 à 8-17 présentent l'ensemble des mesures obtenues pour les expériences réalisées. Chaque figure correspond à une vitesse de bande et les résultats sont donnés pour différentes valeurs du débit d'injection. Nous présentons pour chaque cas l'évolution longitudinale de la pression des deux côtés de la maquette ainsi que la pression mesurée en amont de l'injection.

Les mesures erronées données par la prise de pression située à l'abscisse $x = 0,65$ m pour des vitesses de bande supérieure à 80 m/mn sont dues à son obstruction partielle. Après son nettoyage, ses indications devinrent correctes (voir les expériences à vitesse de bande plus faible).

Nous constatons que les profils de pression sont relativement linéaires de l'injection jusqu'aux extrémités du canal ($x = 1,3$ m et $x = -1,3$ m) et cela quelle que soit la vitesse de la bande. Cette linéarité commence dès les premières abscisses (la lère prise de pression est située à environ 7 hauteurs de passage), ce qui montre que les longueurs d'établissement de la vitesse de frottement pariétale sont très faibles. Cette constatation a déjà été faite par DEISSLER <1-13>. L'évolution linéaire de la pression motrice est moins bien vérifiée du côté aval de la maquette pour les grandes vitesses de bande et les forts débits d'injection. Ce léger défaut peut provenir d'une variation de la hauteur du passage, qui est due soit à un décentrement du tambour moteur par rapport à la partie courbe du canal, soit à un flottement de la bande lié à sa grande vitesse de déplacement. Ce défaut n'existe pas du côté amont de la maquette.

Pour l'ensemble des expériences, \hat{P} est sensiblement égale à la pression atmosphérique à l'extrémité aval du canal ($x = 1,3$ m), mais elle est supérieure à cette valeur à l'autre extrémité de la maquette. Il existe donc une perte de charge singulière assez importante à cet endroit, qui est sans doute

due au déplacement de la bande à contre-courant par rapport au sens d'écoulement du fluide. La précision de nos mesures de pression ne permet pas d'établir une loi pour cette perte de charge singulière. Mais nous constatons sur les figures 8-9 à 8-17 qu'elle provoque un simple déplacement du point d'annulation de $\hat{P} - P_a$ à l'abscisse $x \approx 1,4m$. Cette valeur est relativement constante pour l'ensemble des expériences.

Si l'on prolonge les profils de pression amont et aval jusqu'à l'origine, on constate qu'ils ne donnent pas les mêmes pressions sur l'axe, et que celles-ci sont différentes de la pression d'injection. La perte de charge singulière est donc différente de part et d'autre de l'injecteur. Cet écart est notable dès que la vitesse de bande dépasse 40 m/mn et augmente de façon importante avec celle-ci.

Sur la figure 8-18, nous présentons les coefficients de perte de charge singulière sur la maquette entre l'injection et les côtés amont et aval:

$$\Delta_{P01} = \hat{P}_0 - \hat{P}_1(x=0) + \frac{1}{2}\rho(U_0^2 - U_1^2)$$

$$\Delta_{P02} = \hat{P}_0 - \hat{P}_2(x=0) + \frac{1}{2}\rho(U_0^2 - U_2^2)$$

Il n'a pas été possible de dégager une loi générale pour les pertes de charge singulières à partir de ces mesures. Si ce n'est que le coefficient de perte de charge semble tendre vers une constante du côté amont dès que le débit injecté dépasse 30. m³/h. Cette constante semble peu dépendante de la vitesse de bande.

Les mesures effectuées permettent de tracer la répartition du débit injecté en fonction de la vitesse de la bande (fig 8-19). Cette figure montre l'influence de la vitesse

de bande sur la répartition du débit d'injection. On remarque que, pour une vitesse de bande donnée, une faible variation du débit d'injection peut modifier considérablement la répartition entre l'amont et l'aval. On note également que pour un débit injecté suffisamment faible on peut atteindre un débit nul du côté amont.

3.2 TRANSPOSITIONS DES RESULTATS EXPERIMENTAUX SUR LA CELLULE:

Dans le chapitre "ETUDE PAR SIMILITUDE" nous avons établi les différentes relations permettant de transposer les résultats expérimentaux de la maquette sur la cellule. Grâce à ces règles de similitude, nous pouvons écrire:

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{Q_1'}{Q_0'} \quad \text{et} \quad \frac{Q_2}{Q_0} = \frac{Q_2'}{Q_0'}$$

si
$$\frac{U_b h}{D} = \frac{U_b' h'}{D'} \quad \text{et} \quad \frac{U_0}{U_b} = \frac{U_0'}{U_b'}$$

Les grandeurs accentuées sont relatives à la maquette.

Données numériques:

Maquette:

h' = Hauteur du passage	=	7	mm
l' = largeur du passage	=	450	mm
r' = Rayon du tambour	=	250	mm
D' = Viscosité du fluide	=	$1 \cdot 10^{-6}$	m ² /s

Cellule :

h = Hauteur du passage	=	10	mm
l = Largeur du passage	=	450	mm
r = Rayon du tambour	=	900	mm
D = Viscosité de l'électrolyte	=	$0,6 \cdot 10^{-6}$	m ² /s

A l'aide de ces relations, nous pouvons transposer les résultats expérimentaux de la maquette à la cellule industrielle. Le rapport d'échelle et la différence de viscosité entre l'eau et l'électrolyte réduisent notablement la gamme de vitesse de la cellule que nous avons simulée sur la maquette.

La courbure des canaux de la cellule et de la maquette peut sous certaines conditions faire apparaître des tourbillons de TAYLOR. Etant donné que nous n'avons pas respecté une similitude entre les rayons de courbure des deux machines, la transposition des résultats expérimentaux n'est possible que si ces tourbillons de TAYLOR n'existent pas au sein des écoulements des deux machines, il faut donc que leur nombre de TAYLOR soit supérieur à 400.

$$\text{Cellule:} \quad Ta = \frac{U_b h}{\nu} \sqrt{\frac{h}{r}} > 400 \quad \text{donc} \quad U_b > 14 \text{ m/mn}$$

$$\text{Maquette:} \quad Ta' = \frac{U_b' h'}{\nu'} \sqrt{\frac{h'}{r'}} > 400 \quad \text{donc} \quad U_b' > 20 \text{ m/mn}$$

En utilisant la règle de similitude sur le nombre de REYNOLDS, la valeur de 14 m/mn pour la cellule correspond à une vitesse de bande de 34 m/mn sur la maquette. Dans ces conditions les essais sur la maquette ayant une vitesse de bande de 20 m/mn ne peuvent pas être transposés à la cellule.

La figure 8-20 présente la répartition du débit injecté dans la maquette (fig 8-19) en fonction du rapport U_0/U_b et pour différentes valeurs de Re_b ($=hU_b/\nu$). Nous constatons que Q_1/Q_0 est relativement indépendant de Re_b . Etant donnée la faible influence de ce terme sur la répartition de débit, il peut être retiré des paramètres de similitude (voir chapitre: ETUDE PAR SIMILITUDE.) Le rapport Q_1/Q_0 dépend donc d'une fonction φ , qui s'écrit:

$$\frac{Q1}{Q0} = \phi \left(\frac{L0}{h}, \frac{L}{h}, \frac{U0}{Ub} \right)$$

Nous constatons sur la figure 8-20 que le débit amont Q1 est nul lorsque U0/Ub est inférieur à 0,15. Etant tracée en grandeurs sans dimensions, cette figure est aussi applicable à la cellule industrielle.

3.3 ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX:

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous avons proposé un modèle de longueur de mélange (paragraphe 3.4.2), qui permet de prédire en fonction de la vitesse débitante et de la vitesse de bande le gradient de pression des expériences de EL TELBANY & REYNOLDS <2-15> (fig 4-10). A l'aide de ce modèle, il est donc possible de calculer le gradient de pression théorique dans les zones établies amont et aval de la maquette à partir du débit et de la vitesse de bande mesurés.

La comparaison de ces calculs aux mesures expérimentales est présentée sur les figures 8-21 à 8-25. Elles sont tracées pour une vitesse de bande donnée, et présentent l'évolution du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante. Nous constatons que le modèle de longueur de mélange sous-estime globalement le gradient de pression. Cette sous-évaluation augmente avec la vitesse débitante. Pour un gradient de pression donné, l'écart entre la vitesse débitante prédite et celle mesurée est de l'ordre de 10 à 15 %. Nous n'avons pas pris en compte dans le calcul l'effet du développement de couches limites latérales dans le canal. A partir des travaux de DEAN pour un écoulement de POISEUILLE pur, on peut estimer que ce phénomène diminue de 5 % la vitesse débitante calculée. Ceci ramène l'écart entre la théorie et l'expérience à environ 10% pour l'ensemble des cas. Il faut noter par ailleurs la différence des nombres de REYNOLDS Reb: 38000 à 120000 pour les expériences de EL TELBANY &

REYNOLDS, 2300 à 20000 pour les expériences présentées.

Les mesures montrent que la pression motrice varie linéairement de l'injection jusqu'aux extrémités du canal; donc nous pouvons écrire:

$$\hat{P}1(x=0) - Pa = \frac{\partial \hat{P}1}{\partial x} L1 \quad \text{et} \quad \hat{P}2(x=0) - Pa = \frac{\partial \hat{P}2}{\partial x} L2$$

$$\hat{P}1(x=0) - \hat{P}2(x=0) = \frac{\partial \hat{P}1}{\partial x} L1 + \frac{\partial \hat{P}2}{\partial x} L2 \quad (3.1)$$

où $\hat{P}1$ = Pression motrice du côté amont de la maquette
 $\hat{P}2$ = Pression motrice du côté aval de la maquette
 Pa = Pression atmosphérique
 $L1$ = Longueur du canal amont de la maquette
 $L2$ = Longueur du canal aval de la maquette

Les figures 8-21 à 8-25 montrent que pour une vitesse de bande donnée les gradients de pression amont et aval varient d'une manière parabolique avec leur vitesse débitante respective. Ils peuvent être approximés par:

$$\frac{\partial \hat{P}1}{\partial x} = D1 \left(\frac{-U1 - Ub/2}{Ub} \right)^2 + E1 \left(\frac{-U1 - Ub/2}{Ub} \right)$$

$$\frac{\partial \hat{P}2}{\partial x} = D2 \left(\frac{U2 - Ub/2}{Ub} \right)^2 + E2 \left(\frac{U2 - Ub/2}{Ub} \right)$$

où $U1$ = Vitesse débitante amont
 $U2$ = Vitesse débitante aval
 $D1$ }
 $E1$ } Coefficients, dont les valeurs dépendent
 $D2$ } de la vitesse de la bande
 $E2$ }

Les courbes des gradients de pression amont et aval étant symétriques par rapport à l'origine des axes des figures 8-21 et 8-25, nous avons donc:

$$D1 = -D2 = D \qquad E1 = E2 = E$$

$$\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial x} = D \left(\frac{-U1 - Ub/2}{Ub} \right)^2 + E \left(\frac{-U1 - Ub/2}{Ub} \right) \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial x} = -D \left(\frac{U2 - Ub/2}{Ub} \right)^2 + E \left(\frac{U2 - Ub/2}{Ub} \right) \qquad (3.3)$$

Pour une vitesse de bande donnée, les coefficients D et E sont obtenus à partir des courbes de gradient de pression calculées par le modèle de longueur de mélange par régression parabolique (Fig 8-21 à 8-25). Ils sont présentés sur la figure 8-26.

La dernière inconnue de la relation (3.1) est la différence entre les pressions motrices en amont et en aval à l'abscisse $x=0$. Les figures 8-9 à 8-17 montrent qu'elle varie avec la vitesse de la bande et le débit d'injection. Pour des vitesses de bande supérieures à 40 m/mn, nous avons constaté à partir des expériences que le rapport suivant est relativement constant lorsque le débit d'injection est plus grand qu'environ 20 m³/h:

$$K = \frac{\hat{P}_1(x=0) - \hat{P}_2(x=0)}{\frac{1}{2} \rho (U2^2 - U1^2)} \simeq 1,25 \qquad (3.4)$$

Pour déterminer correctement K, il faut que la différence $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ soit suffisamment grande devant l'erreur de mesure sur la pression. Cela peut expliquer pourquoi la constance

de K est moins bien vérifiée aux faibles vitesses de bande et aux petits débits d'injection.

En remplaçant (3.2), (3.3) et (3.4) dans (3.1), nous obtenons :

$$A U_2^2 + B U_2 + C = 0 \quad (3.5)$$

avec
$$A = -\frac{D}{U_b^2} - \frac{K\rho}{2L_2} \quad B = \frac{E+D}{U_b}$$

$$C = \frac{-2E-D}{4} + \frac{L_1}{L_2} \left\{ D \left(\frac{-U_1 - U_b/2}{U_b} \right)^2 + E \left(\frac{-U_1 - U_b/2}{U_b} \right) \right\} + \frac{K}{2L_2} \rho U_1^2$$

Les coefficients E et D dépendent de la vitesse de bande (fig 8-26).

REMARQUE :

Nous avons indiqué précédemment qu'une perte de charge singulière notable existe à l'extrémité amont du canal (paragraphe 3.1). Nous la prenons en compte dans notre modélisation en supposant que la longueur effective L1 du canal amont est 1,4m (sa vraie longueur est 1,3m). La valeur de L2 est égale à 1,3m.

L'expression (3.5) permet de calculer la vitesse débitante U2 en fonction de Ub et U1. Cette relation permet de construire un abaque qui donne pour différentes valeurs de la vitesse de la bande la répartition du débit injecté (Q0=Q1+Q2) entre les côtés amont et aval de la maquette. La figure 8-27 présente cet abaque et des mesures expérimentales des débits amont Q1 et aval Q2. Nous constatons que la précédente

modélisation reproduit correctement cette répartition.

Si on représente la modélisation de la répartition du débit injecté en fonction de $U0/U_b$ (fig 8-28), les différentes courbes calculées (fig 8-27) se superposent. Etant tracé en grandeurs sans dimensions, la figure 8-28 est valable pour la maquette et pour la cellule industrielle

3.4 CONCLUSIONS:

Les mesures réalisées sur la maquette montrent que la pression motrice varie linéairement sur la presque totalité de l'écoulement. Cela indique que les conditions d'écoulement dans les zones pariétales s'établissent rapidement. Les conditions hydrodynamiques agissant sur le processus d'électro-zingage, qui est un phénomène pariétal, sont donc constantes dans la plus grande partie de chaque demi canal de la cellule industrielle.

Nous avons déterminé pour une certaine gamme de vitesse la répartition du débit injecté. Cela nous a permis de constater que cette répartition est très sensible à la vitesse de la bande et au débit d'injection (fig 8-19).

Nous avons montré que la répartition du débit injecté dans les cellules industrielles dépendaient seulement du rapport $U0/U_b$ (fig 8-20).

En utilisant les mesures de pression et un modèle de longueur de mélange, nous avons modélisé la répartition entre les côtés amont et aval du débit d'injection. Cette modélisation permet de prédire assez correctement les débits aval et injecté en fonction du débit amont choisi et de la vitesse de bande.

Cette étude expérimentale a permis de déterminer le fonctionnement hydrodynamique d'une cellule, elle répond donc au problème industriel posé.

*
* QUATRIEME PARTIE *
* *
* *
* SYNTHESE ET PERSPECTIVES *
* *

SYNTHESE ET PERSPECTIVES

En introduction à ce mémoire, nous avons montré l'importance des conditions hydrodynamiques dans le procédé d'électro-zingage des tôles. Elles influencent la vitesse de fonctionnement de la ligne, le rendement de dépôt et la qualité du revêtement.

Dans ce mémoire nous nous étions fixés pour objectif de mieux définir les conditions hydrodynamiques de fonctionnement d'une cellule industrielle, d'essayer de les prédire avec des modèles simples et dans la mesure du possible d'utiliser nos résultats pour essayer d'améliorer le processus industriel.

Dans la 1ère partie de notre mémoire, nous avons schématisé l'écoulement dans une cellule en une zone de perte de charge singulière et deux zones établies.

Dans la 2ème partie, nous avons étudié l'écoulement de COUETTE avec gradient de pression dans les zones établies. Cette étude a consisté à tester différents modèles de turbulence sur une base de données expérimentales établie par nos soins à partir d'une compilation des expériences publiées sur le sujet. Cette étude nous a permis de mettre en évidence certaines faiblesses tant des résultats expérimentaux que des modèles existants. Nous avons apporté quelques modifications à certains modèles, qui améliorent la prédiction des caractéristiques globales telles que la vitesse débitante ou les vitesses de frottement en fonction du gradient de pression. Il est certain que des progrès restent à faire, notamment en ce qui concerne les modèles à équations de transport, mais ils nécessiteraient l'obtention de résultats

expérimentaux complémentaires permettant d'étayer la base de données existante.

Dans la 3ème partie, nous nous sommes intéressés d'une part à la zone de perte de charge singulière de l'injection et d'autre part au fonctionnement global de la cellule. Il s'agit d'une étude expérimentale sur maquette qui a montré le bien fondé des hypothèses faites dans la première partie. Les résultats obtenus nous ont permis de qualifier la perte de charge à l'injection, de vérifier l'existence des zones établies sur la majeure partie du canal, de montrer la sensibilité du débit amont à la vitesse de bande et au débit d'injection et finalement de définir un modèle prédictif du fonctionnement global d'une cellule. Etant données les bonnes prédictions du modèle, il pourra être utilisé pour des débits injectés et des vitesses de bande supérieures à ceux testés sur la maquette. Une étude par similitude nous a permis également d'effectuer la transposition de ces résultats obtenus sur la maquette à la cellule industrielle.

L'ensemble des résultats obtenus permet aujourd'hui d'envisager des applications à des cellules de type autre que celle faisant l'objet de notre étude. Afin de mettre en évidence l'intérêt des résultats obtenus nous nous proposons de simuler le fonctionnement industriel de cellules.

La modélisation de la répartition de débit permet de construire pour les cellules un abaque qui donne le débit injecté Q_0 en fonction de la vitesse de la tôle et du débit amont Q_1 (fig 9-1a). La bande de métal se déplaçant à 90 m/mn sur la ligne d'électro-zingage, ce graphique indique que le débit d'injection doit être supérieur à 70 m³/h pour que l'électrolyte s'écoule du côté amont de la cellule. Le renouvellement de la solution électrolytique nécessite un minimum de débit amont Q_1 . En supposant que le rendement de dépôt est égal à 100% et que la densité de courant est 100 A/dm², la quantité de zinc q déposée par unité de largeur de la tôle de chaque côté des cellules est

égale à 6,4 grammes/seconde, tandis que la quantité de zinc Q injectée vers le côté amont par seconde et par unité de largeur du canal est:

$$Q = C_{zn} \frac{Q_1}{3600l}$$

où Q_1 = Débit amont (m³/h)

l = Largeur du canal = 1,8 m

C_{zn} = Concentration en zinc = 65 kg/m³

Le taux d'appauvrissement T de l'électrolyte à la sortie amont de la cellule est:

$$T = \frac{q}{Q} = 6,4 \cdot 10^{-3} \frac{3600l}{C_{zn} \cdot Q_1} \quad T \cdot Q_1 = 0,64 m^3/h$$

L'épaisseur finale e du revêtement de zinc est:

$$e = \frac{6,4 \cdot 10^{-3}}{\rho_{zn}} \cdot \frac{60N_c}{Ub} \quad e(\mu m) = 53,8 \frac{N_c}{Ub}$$

où N_c = Nombre de cellules utilisées

Ub = Vitesse de la bande de métal en m/mn

ρ_{zn} = Masse Volumique du zinc = 7140 kg/m³

En utilisant les deux relations précédentes et la modélisation de la répartition nous pouvons construire un abaque, qui donne Ub et Q_0 en fonction de l'épaisseur finale du revêtement, du nombre de cellules et du taux d'appauvrissement maximal de la solution électrolytique (fig 9-1b). L'épaisseur courante du revêtement des tôles électro-zinguées est de 10 μm . Le graphique de la figure 9-1b montre que pour fabriquer un tel produit la vitesse maximale de la bande de métal est de 90 m/mn.

Si on limite le taux d'appauvrissement T de la solution électrolytique à 2% ($Q_1 = 0,64/T = 32 \text{ m}^3/\text{h}$), l'abaque indique que le débit Q_0 est de $127 \text{ m}^3/\text{h}$ ($Q_2 = Q_0 - Q_1 = 95 \text{ m}^3/\text{h}$). Le rendement de dépôt étant inférieur à 100%, les valeurs de U_b et Q_0 sont légèrement surestimées. Cet exemple est représentatif du fonctionnement réel des cellules de la ligne d'électro-zingage.

On constate que les résultats que nous avons obtenu permettent de répondre au problème industriel qui nous a été posé au départ, à savoir définir les conditions de fonctionnement pour assurer un bon renouvellement de l'électrolyte du côté amont.

En utilisant les modèles de turbulence de la 2ème partie de ce mémoire nous pouvons calculer les écoulements amont et aval de la cellule correspondant à la précédente application numérique. Les résultats de cette simulation sont présentés sur la figure 9-2. Elle donne pour les deux côtés de la cellule les profils de vitesse et d'énergie turbulente. Cette dernière grandeur est fonction de l'agitation régnant au sein du fluide, qui homogénéise la concentration en zinc de l'électrolyte, et améliore les conditions d'électro-zingage de la bande de métal. Dans la partie aval de la cellule, l'énergie turbulente est faible près de la tôle, ce qui est défavorable à l'électro-zingage. De l'autre côté, l'électro-déposition du zinc est favorisée par un niveau de K assez important au voisinage de la tôle. Nous constatons que les conditions hydrodynamiques de l'électro-zingage ne sont pas identiques, il est donc vraisemblable que le rendement de dépôt et la qualité du revêtement sont différents de chaque côté de la cellule.

L'électro-zingage de la tôle dépend en effet de C_0 la concentration moyenne en zinc de l'électrolyte, du coefficient de diffusion D des ions zinc, de l'épaisseur de la couche de diffusion δ_d et de la densité de courant I . Dans les cellules, δ_d est très petit devant la distance entre la bande de métal et l'anode, et C_0 est sensiblement constant. L'agitation turbulente au sein de l'électrolyte limite le développement de la couche de

diffusion. Elle est donc en première approximation proportionnelle à l'épaisseur de la sous-couche visqueuse δ , qui dépend elle-même de la viscosité du fluide ν et de la vitesse de frottement pariétale u_τ ($\delta = \delta^+ u_\tau / \nu \approx 10$). L'épaisseur de la couche de diffusion dépend donc de u_τ , ce qui exprime l'influence de l'hydrodynamique sur l'électro-zingage de la tôle. Finalement, les paramètres qui régissent le dépôt de zinc sont C_0 , D , I , ν et u_τ . Si ces grandeurs sont identiques entre deux cellules, alors on peut espérer que leur rendement de dépôt et la qualité du revêtement qu'elles déposent sont les mêmes. Ceci demande cependant à être confirmé au plan expérimental.

WEYMEERSH, WINAND & RENARD <1-4> ont étudié la qualité du revêtement de zinc en fonction de la vitesse débitante et de la densité de courant sur une cellule expérimentale (fig 9-3), qui est constituée de deux parois fixes (une anode et une cathode) entre lesquelles s'écoule un électrolyte de même composition que celui de la ligne d'électro-zingage. La simulation présentée plus haut (fig 9-2) a permis de déterminer les vitesses de frottement à la surface de la tôle de chaque côté de la cellule industrielle. Si u_τ dans la cellule expérimentale est successivement égale aux deux valeurs précédentes, les revêtements produits devraient être similaires à ceux des deux parties de la cellule industrielle. En utilisant les mêmes programmes de calcul que précédemment, nous pouvons estimer les vitesses débitantes de la cellule expérimentale donnant les mêmes valeurs de u_τ que dans la cellule industrielle. Les résultats de cette simulation sont donnés sur la figure 9-3. Nous constatons que la structure du revêtement déposé dans chaque partie de la cellule industrielle est différente. La mauvaise qualité du dépôt réalisé du côté aval est due à la faible vitesse de frottement pariétale (faible agitation turbulente fig 9-2). Une manière d'améliorer la structure du revêtement dans la partie aval de la cellule serait d'augmenter le débit Q_2 . Pour obtenir un revêtement homogène de ce côté (zone 4 de la figure 9-3) Q_0 devrait être de l'ordre de 250 m³/h (pour la zone 5, $Q_0 \approx 500$ m³/h). Des telles valeurs de débit sont techniquement impossibles

à réaliser. Nous constatons donc que la qualité du revêtement déposé par les cellules industrielles ne peut pas être notablement améliorée en modifiant le débit d'injection. Sur la figure 9-3, nous remarquons que la qualité du revêtement est meilleure du côté amont. Donc une cellule d'électro-zingage dans laquelle l'électrolyte s'écoule toujours à contre-courant par rapport au mouvement de la bande de métal produit un revêtement d'assez bonne qualité. En changeant la position de l'injection sur la cellule, nous pouvons créer une telle configuration d'écoulement (figure 9-4). Pour produire dans cette nouvelle cellule un revêtement macroscopiquement lisse et uniforme (zone 5 de la figure 9-3), le débit injecté Q_0 serait de l'ordre de 120 m³/h. La simulation de l'écoulement de l'électrolyte est donnée sur la figure 9-4.

Les résultats précédemment obtenus ne sont que des estimations de la structure du revêtement déposé dans les cellules industrielles et ne sont donnés ici qu'à titre indicatif des possibilités offertes par la simulation. La méthode de détermination de la structure du revêtement est industriellement très intéressante, car elle permet de transposer sur la ligne d'électro-zingage des conditions hydrodynamiques optimisées sur une cellule de laboratoire de conception relativement simple (la tôle à revêtir est fixe).

PERSPECTIVES:

Lors de la constitution de la base de données, nous avons constaté que les résultats expérimentaux sur des écoulements de COUETTE sont peu nombreux. Cela peut s'expliquer par le fait qu'il est difficile de réaliser une translation parfaitement rectiligne d'une bande, surtout quand la vitesse de celle-ci devient importante. Les seules mesures relativement complètes dont nous disposons sont celles de EL TELBANY & REYNOLDS <2-15> à <2-17>, dont la validité n'a pu être confirmée par d'autres résultats expérimentaux. Des expériences complémentaires

d'écoulement de COUETTE nous semblent nécessaires. En apportant des modifications à la maquette de la partie expérimentale du mémoire, cette installation pourrait permettre ce genre d'expérience.

Dans la deuxième partie du mémoire, nous avons montré que les modèles utilisés prédisent moins correctement les écoulements de type POISEUILLE. L'hypothèse de BOUSSINESQ retenue par ces modèles est sans doute à l'origine de ces mauvaises prédictions, car elle impose une annulation simultanée de $u'v'$ et du gradient de vitesse. Or les expériences de EL TELBANY & REYNOLDS montrent que ces deux grandeurs s'annulent à des abscisses différentes pour ce type d'écoulement. Pour s'affranchir de l'hypothèse de BOUSSINESQ, il faut résoudre l'équation de transport pour la corrélation $u'v'$. Depuis une dizaine d'années, plusieurs versions de ce type de modèle ont été proposées. Les écoulements de COUETTE avec gradient de pression semble être un bon test pour juger leurs performances.

La méthode de détermination de la qualité du dépôt précédemment décrite n'apporte aucune explication quant à l'interaction qui existe entre l'écoulement de l'électrolyte et la structure du dépôt. Pour maîtriser la qualité du revêtement, il est nécessaire d'étudier plus finement ce phénomène. Une première étape de cette recherche serait d'étudier la structure du dépôt de zinc dans une cellule dont l'écoulement de l'électrolyte serait connu. Les résultats de ces expériences permettraient d'améliorer les estimations de la précédente méthode. De plus, ces mesures pourraient servir de base de données pour une simulation numérique de l'équation de transport des ions zinc.

Il existe par ailleurs de nombreux types de cellules d'électro-déposition, les outils mise au point à l'occasion de ce travail peuvent être transposés assez rapidement à des configurations d'écoulement voisines de celle étudiée.

*
* R E F E R E N C E S *
*

REFERENCES RELATIVES A LA PREMIERE PARTIE

- <1-1> GOUT D:
"Anti-corrosion: La percée du zinc", Usine Nouvelle, N°46, pp 62-64, (1988).
- <1-2> HEURTAUX J:
"Fabrication de la tôle", Galvano-Organo-Traitements de surface, N°566, pp 347-349, (1986).
- <1-3> WEYMEERSCH A, WINAND R et RENARD L:
"Zinc electrodeposition at high current densities"
Part 1: Electrochemical study.
Part 2: Characteristics of deposits.
Plating & Surface Finishing, (April 1981).
- <1-4> SCHLICHTING H:
"Boundary layer theory", McGraw-hill Book Company, (1968).
- <1-5> ITO H:
"Friction factors for turbulent flow in curved pipes"
J Basic Engineering ASME, Vol 81, pp 123-124, (1959).
- <1-6> BURTON R.A, CARPER H.J:
"An experimental study of annular flows with applications in turbulent film lubrication", J of Lubrication Technology ASME, pp 381-391, (july 1967).
- <1-7> COMTE-BELLOT G:
"Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles", Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'air, N°419, (1965).
- <1-8> NIKURADSE J:
"Gesetzmässigkeit der turbulenten Strömung in Glatten Rohren", Forshg Arb Ing Wes, N° 356, (1936).
- <1-9> HAI S.M:
"Pressure development in the entrance region and fully developed region of generalized channel turbulent flows.", J of Applied Mechanics ASME, Vol 43, pp 13-19, (march 1976).
- <1-10> LEUTHEUSSER H.J, CHU V.H:
"Experiments on plane COUETTE flow", J of Hydraulics Division, vol 97 HY9, pp 1269-1284, (1971).
- <1-11> REICHARDT H:
"Über die geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen turbulenten Couetteströmung", Z Angew Math Mech, pp S26-S29, (1956).

- <1-12> DEISSLER R.G:
"Analytical and experimental investigation of adiabatic turbulent flow in smooth tubes", National Advisory Committee for Aeronautics, Report N°2138, (1950).
- <1-13> DEISSLER R.G:
"Analysis of turbulent heat transfer and flow in the entrance regions of smooth passages", National Advisory Committee for Aeronautics, Report N°3016, (1953).
- <1-14> FRENE J:
"Régimes d'écoulement non laminaires en films minces: application aux paliers lisses", Thèse de Doctorat es sciences Physiques, Université Claude BERNARD Lyon I, (1974).

REFERENCES RELATIVES A LA DEUXIEME PARTIE

- <2-1> KOLMOGOROV A.N:
"Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high REYNOLDS numbers", DOKL AKAD NAUK SSSR, 30, (1941).
"Equations of turbulent motion of incompressible fluid" IZV AKAD NAUK SSSR, seria fizichiska 6, 56, (1942).
- <2-2> MOIN P, KIM J:
"Numerical investigation of turbulent channel flow", J of Fluid Mech, vol 118, pp 341-377, (1982).
- <2-3> HINZE J.O:
"Turbulence", Mc Graw Hill Book, p 253, (1959).
- <2-4> CORRSIN S:
J Aeronaut Sciences, 20, p 853, (1953).
- <2-5> DAVIDOV B.I:
"On the statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid", DOKL AKAD NAUK SSSR, 136, pp 46-50, (1961).
- <2-6> HARLOW F.H, NAKAYAMA P.I:
"Transport of turbulence energy decay rate", Los Alamos Sci Lab University of California, Rep:LA3854, (1968).
- <2-7> CHASSAING P, HA-MINH H:
"Equations de transport des différentes expressions du taux de dissipation", Rapport IMFT N° 83 S.A, (1974).
- <2-8> COUETTE M:
" Etudes sur le frottement des liquides", Annales de chimie et physique, série 6, vol 21, pp 433-510, (1890).
- <2-9> PIQUET J:
"Turbulence et sa modélisation", Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de NANTES.
- <2-10> LAUFER J:
"Some recent measurements in a two-dimensional turbulent channel", J of Aeronautical Science, Vol 17, N°5, pp 277-287, (1950).
- <2-11> LAUFER J:
"Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel", NACA, Report N°1053, (1951).
- <2-12> COMTE-BELLOT G:
"Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles" Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'air, N°419, (1965).

- <2-13> CLARK J.A:
"A study of incompressible turbulent boundary layers in channel flow", J of Basic Engineering ASME, vol 90, pp 455-468, (dec 1968).
- <2-14> HUSSAIN A.K.M.F, REYNOLDS W.C:
"Measurements in fully developed turbulent channel flow", J of Fluids Engineering, vol 97, pp 568-580, (dec 1975).
- <2-15> EL TELBANY M.M.M, REYNOLDS A.J:
"Velocity distributions in plane turbulent channel flows", J of Fluid Mech, Vol 100, N°1, pp 1-29, (1980).
- <2-16> EL TELBANY M.M.M, REYNOLDS A.J:
"Turbulence in plane channel flows", J of Fluid Mech, Vol 111, pp 283-318, (1981)
- <2-17> EL TELBANY M.M.M, REYNOLDS A.J:
"The structure of turbulent plane COUETTE flow", J of Fluids Engineering ASME, Vol 104, pp 367-372, (1982).
- <2-18> KLEBANOFF P.S:
"Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient", NACA, Report N°2454, (1953).
- <2-19> ELROD H.G, NG C.W:
"A theory for turbulent fluid films and its applications to bearings", J of Lubrication Technology ASME, Vol 89, N°3, pp 346-362, (1967).
- <2-20> REICHARDT H:
"Über die geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen turbulenten Couetteströmung", Z Angew Math Mech, pp S26-S29, (1956).
- <2-21> REICHARDT H:
"Gesetzmässigkeiten der geradlinigen turbulenten Couetteströmung", Mitteilungen aus dem, MAX PLANCK Institut für Strömungsforschung, and der Aerodynamischen Versuchsanstalt, Goettingen, N°22, (1959).
- <2-22> ROBERTSON J.M, JOHNSON F:
"Turbulence structure in plane COUETTE flow", J of Engineering Mech Division, Vol 96 EM6, pp 1171-1182, (1970).
- <2-23> LEUTHEUSSER H.J, CHU V.H:
"Experiments on plane COUETTE flow", Journal of Hydraulics Division, vol 97 HY9, pp 1269-1284, (1971).
- <2-24> HUEY L.J, WILLIAMSON J.W:
"Plane turbulent COUETTE flow with zero net flow", J of Applied Mechanics ASME, pp 885-890, (dec 1974).

- <2-25> HINZE J.O:
"Turbulence", Mc Graw Hill Book, (1959).
- <2-26> BOUSSINESQ J:
"Essais sur la théorie des eaux courantes", Mémoire présentée à l'académie des sciences de PARIS, Tome 23, N° 1, pp 1-680, (1877).
- <2-27> SCHLICHTING M:
"Boundary layer theory", 7ème édition, Mac Graw Hill, Series in Mechanical Engineering, (1979).
- <2-28> PAI S.I:
"On turbulent flow between parallel plates", Applied Mechanics, vol 20, pp 109-114, (1953).
- <2-29> ROBERTSON J.M:
" On turbulent plane-COUPETTE flow", Proceeding sixth Midwestern Conference on Fluid Mechanics, AUSTIN TEXAS, pp 169-182, (sept 1959).
- <2-30> CONSTANTINESCU V.N:
"On turbulent lubrication", Proc Instn Mech Engrs, vol 173, N° 38, pp 881-900d, (1959).
- <2-31> TIPEI N, CONSTANTINESCU V.N:
"Influence of the law of variation of the mixing length on the turbulent motion in the lubricant layer", Rev Mec Appli, 5, pp 729-738, (1960).
- <2-32> CONSTANTINESCU V.N:
"On the improvement of the turbulent lubrication theory. by using the mixing-length hypothesis", Rev Roum Sci Techn Mec Appli, Tome 10, N° 2, pp 421-437, (1965).
- <2-33> CONSTANTINESCU V.N:
"Analysis of bearings operating in turbulent regime", J of Basic Engineering ASME, vol 84, pp 139-151, (1962).
- <2-34> CONSTANTINESCU V.N, GALETUSE S:
"On the possibilities of using universal velocity laws for the study of turbulent lubrication", Rev Roum Sci Techn Mec Appli, vol 12, N° 4, pp 831-852, (1967).
- <2-35> VAN DRIEST E.R:
"On turbulent flow near a wall", J of Aero Science, Vol 23, p 1007-1011, (1956).
- <2-36> NIKURADSE J:
"Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in Glatten Rohren", Forshg Arb Ing Wes, N° 356, (1932).
- <2-37> PATANKAR S.V, SPALDING D.B:
"Heat and mass transfer in boundary layers", Intertext Books London, (1970).

- <2-38> PATANKAR S.V:
"Numerical heat transfer and fluid flow", Mc Graw Hill
Book Company (1980).
- <2-39> HO M.K, VOHR J.H:
"Application of energy model of turbulence to
calculation of lubricant flows", J of Lubrication
Technology ASME, vol 96, pp 95-102, (jan 1974).
- <2-40> WOLFSHTEIN M:
"The velocity and temperature distribution in one-
dimensional flow with turbulence augmentation and
pressure gradient", Int J Heat Mass Transfer, vol 12, pp
301-318, (1969).
- <2-41> HASSID S, PORBH M:
"A turbulent energy model for flows with drag
reduction", J of Fluids Engineering ASME, vol 97, pp
234-241, (1975).
- <2-42> GLUSHKO G.S:
"Turbulent boundary layer on a flat in an incompressible
fluid", Izv Akad Nauk SSSR, Mekh, N°4, pp 13-23, (1965).
- <2-43> SPALDING D.B:
"Monograph on turbulent boundary layers", Tech Rept
N°TWF/TN/33, Imperial College Mech, Engng Dept, (1967).
- <2-44> ROTTA J.C:
"Statistische theorie nichthomogener turbulenz", Zeitsh,
Fur Physik, vol 129, pp 547-572, et vol 131, pp 51-77,
(1951).
- <2-46> TENNEKES H, LUMLEY J.L:
"A first course in turbulence", MIT press cambridge
MASSACHUSETTS, (1976).
- <2-47> RODI W:
"On the equation governing the rate of turbulent energy
dissipation", Mech, Engng Dept, Imperial College, Rep
TM/TN/14.
- <2-48> HANJALIC K, LAUNDER B.E:
"A REYNOLDS stress model of turbulence and its
applications to thin shear flows", J Fluid Mech, vol 52,
N°4, pp 609-628, (1972).
- <2-49> CHAMPAGNE F.H, HARRIS V.G, CORRISIN S:
"Experiments on nearly homogeneous turbulent shear
flows", J Fluid Mech, vol 141, pp 81-141, (1970).
- <2-50> BATCHELOR G.K, TOWNSEND A.A:
"Decay of isotropic turbulence in the initial period",
PROC ROY SOC, A193, pp 539-558.

- <2-51> COMTE-BELLOT G. CORRISIN S:
"The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence", J Fluid Mech, vol 25, p 657, (1967).
- <2-52> LAUNDER B.E, MORSE A, RODI W, SPALDING D B:
"The prediction of free shear flows - A comparison of the performance of six turbulence models", Mech Engng Dept, Imperial College, Rept N° TM/TN/A/19, (1972).
- <2-53> PATEL V.C, RODI W, SCHEUERER G:
"Turbulence models for near-wall and low REYNOLDS number flows: A review", AIAA Journal, vol 23, N°9, pp 1308-1319, (1985).
- <2-54> JONES W.P, LAUNDER B.E:
"The calculation of low-REYNOLDS number phenomena with a two-equation model of turbulence", Int J Heat Mass Transfer, vol 16, pp 1119-1130, (1973).
- <2-55> BERNARD P.S:
"Limitations of the near-wall $K-\epsilon$ turbulence model", AIAA Journal, vol 24, N°4, pp 619-622, (1986).
- <2-56> NAGANO Y, HISHIDA M:
"Improved form of the $K-\epsilon$ model for wall turbulent shear flows", J of Fluids Engineering ASME, vol 109, pp 156-160, (1987).
- <2-57> NISIZIMA S, YOSHIZAWA A:
"Turbulent channel and couette flows using an anisotropic $K-\epsilon$ model", AIAA Journal, vol 25, N°3, pp 414-420, (1987).
- <2-58> CHIEN K.Y:
"Predictions of channel and boundary layer flows with a low REYNOLDS-number turbulence model", AIAA Journal, vol 20, N°1, pp 33-38, (1982).
- <2-59> LAUNDER B.E, SHARMA B.I:
"Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation near a spinning disc". Letters in heat and mass transfer, vol 1, pp 131-138, (1974).
- <2-60> LAM C.K.G, BREMHORST K.A:
"Modified form of the $K-\epsilon$ model for predicting wall turbulence", J of Fluids Engineering, vol 103, pp 456-460, (1981).
- <2-61> HANJALIC K, LAUNDER B.E:
"Contribution towards a REYNOLDS-stress closure for low-REYNOLDS number turbulence", J of Fluid Mech, vol 74, N°4, pp 593-610, (1976).

- <2-62> PRANDTL L:
"Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete
Turbulenz", Nachrichten von de Akad der Wissenschaften
Göttingen, pp 6-19, (1945).
- <2-63> LAUNDER B.E:
"An introduction to single-point closure methodology."
Lecture Series 1987-06, Von Karman Institute, (1987).
- <2-64> RODI W:
"Turbulence models for practical applications."
Lecture Series 1987-06, Von Karman Institute, (1987).

*
* A N N E X E S *
*

TABLEAU RECAPITULATIF DES EXPERIENCES

N°	h (m)	Ub (m/s)	Umax (m/s)	U moy (m/s)	Reb	Remax	utau1 (m/s)	utau2 (m/s)	AUTEURS
1	0,066	12,84	12,84	6,42	57010	57010	0,282	0,282	EL TELBANY & REYNOLDS
2	0,066	12,84	12,84	7,28	57010	57010	0,328	0,233	EL TELBANY & REYNOLDS
3	0,066	12,84	12,84	8,06	57010	57010	0,362	0,1809	EL TELBANY & REYNOLDS
4	0,066	12,84	12,84	8,14	57010	57010	0,357	0,1667	EL TELBANY & REYNOLDS
5	0,066	12,84	12,84	8,81	57010	57010	0,383	0,1305	EL TELBANY & REYNOLDS
6	0,066	8,59	8,59	6,71	38140	38140	0,313	0,0615	EL TELBANY & REYNOLDS
7	0,101	17,08	17,08	14,55	116050	116050	0,600	0,0400	EL TELBANY & REYNOLDS
8	0,101	12,84	12,84	11,38	87240	87240	0,485	0,0229	EL TELBANY & REYNOLDS
9	0,101	8,59	8,59	7,79	58360	58360	0,350	0,0084	EL TELBANY & REYNOLDS
10	0,066	12,84	13,25	12,40	57010	58830	0,564	0,03	EL TELBANY & REYNOLDS
11	0,066	12,84	16,33	15,10	57010	72510	0,679	0,1860	EL TELBANY & REYNOLDS
12	0,066	12,84	21,57	20,11	57010	95770	0,880	0,4142	EL TELBANY & REYNOLDS
13	0,066	12,84	24,01	22,40	57010	106610	0,978	0,518	EL TELBANY & REYNOLDS
14	0,066	8,59	23,62	21,90	38140	104870	0,961	0,670	EL TELBANY & REYNOLDS
15	0,066	0	16,00	14,55	0	71040	0,659	0,659	EL TELBANY & REYNOLDS
16	0,044	12,84	12,84	6,42	38000	38000	0,293	0,293	EL TELBANY & REYNOLDS
17	0,044	17,08	17,08	8,54	50560	50560	0,378	0,379	EL TELBANY & REYNOLDS
18	0,066	17,08	17,08	8,54	75830	75830	0,363	0,363	EL TELBANY & REYNOLDS
19	0,066	12,84	12,84	6,12	57010	57010	0,267	0,303	EL TELBANY & REYNOLDS
20	0,066	12,84	12,84	3,31	57010	57010	0,1089	0,431	EL TELBANY & REYNOLDS
21	0,066	12,84	12,84	3,17	57010	57010	0,1035	0,435	EL TELBANY & REYNOLDS
22	0,066	12,84	18,27	16,89	57010	81120	0,740	0,269	EL TELBANY & REYNOLDS
23	0,066	8,59	13,81	12,87	38140	61320	0,600	0,256	EL TELBANY & REYNOLDS
24	0,066	8,59	15,05	14,02	38140	66820	0,645	0,306	EL TELBANY & REYNOLDS
25	0,044	0	25,80	23,52	0	76370	1,040	1,040	EL TELBANY & REYNOLDS
26	0,066	0	12,60	11,42	0	55940	0,514	0,514	EL TELBANY & REYNOLDS
27	0,18	0	10,50	0	0	126000	0,39	0,39	COMTE-BELLOT
28	0,18	0	22,20	0	0	266400	0,80	0,80	COMTE-BELLOT
29	0,18	0	42,80	0	0	513640	1,36	1,36	COMTE-BELLOT
30	0,0254	0	15,00	0	0	24400			LAUFER
31	0,127	0	3,00	0	0	24600			LAUFER
32	0,127	0	7,50	0	0	61600			LAUFER
33	0,127	0	15,00	0	0	123200			LAUFER
34	0,0635	0	6,67	5,88	0	27600	0,309	0,309	HUSSAIN & REYNOLDS
35	0,0635	0	11,20	9,95	0	46400	0,489	0,489	HUSSAIN & REYNOLDS
36	0,0635	0	15,60	13,96	0	64600	0,658	0,658	HUSSAIN & REYNOLDS
37	0,127	0	3,57	0	0	30400	0,1524	0,1524	CLARK
38	0,127	0	6,46	0	0	55200	0,2591	0,2591	CLARK
39	0,127	0	10,70	0	0	91200	0,3962	0,3962	CLARK
40	0,160	0,094	0,094	0,047	2400	2400			REICHARDT
41	0,160	0,244	0,244	0,122	5800	5800			REICHARDT
42	0,120	9	9	4,5	68400	68400			REICHARDT
43	0,160	0,244	0,244	0,122	36000	36000			REICHARDT
44	0,049	9,144	9,144	4,572	28200	28200			ROBERTSON & JOHNSON
45	0,049	15,42	15,42	7,71	47200	47200			ROBERTSON & JOHNSON
46	0,049	21,34	21,34	10,67	66000	66000			ROBERTSON & JOHNSON
47	0,049	10,73	10,73	5,365	32800	32800			ROBERTSON & JOHNSON
48	0,049	12,98	12,98	6,49	39920	39920			ROBERTSON & JOHNSON
49	0,049	19,63	19,63	9,815	60400	60400			ROBERTSON & JOHNSON
50	0,0635	9,144	9,144	0	38600	38600			HUEY & WILLIAMSON
51	0,0635	12,76	12,76	0	54000	54000			HUEY & WILLIAMSON
52	0,0635	18,71	18,71	0	79200	79200			HUEY & WILLIAMSON
53	0,0635	25,80	25,80	0	109200	109200			HUEY & WILLIAMSON

METHODE DE RESOLUTION DE CONSTANTINESCU

La méthode de CONSTANTINESCU permet de résoudre analytiquement l'équation de mouvement des écoulements de POISEUILLE et de COUETTE avec ou sans gradient de pression, qui s'écrit en faisant l'hypothèse de BOUSSINESQ:

$$\frac{d}{dy} \left\{ (\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy} \right\} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} = 0.$$

La modélisation de ν_t et les hypothèses simplificatrices retenues par CONSTANTINESCU permettent d'écrire la précédente équation sous la forme suivante (voir paragraphe 3.4.1 de la 2ème partie):

pour $0 \ll \tilde{y} \ll \Delta_1$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} + B\tilde{y} = C_1 \quad (3.15)$$

pour $\Delta_1 \ll \tilde{y} \ll 1/2$

$$A\tilde{y}^2 \left| \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} \right| \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} + B\tilde{y} = C_1 \quad (3.16)$$

pour $\Delta_2 \ll \tilde{\tilde{y}} \ll 1/2$

$$A\tilde{\tilde{y}}^2 \left| \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} \right| \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} + B\tilde{\tilde{y}} = C_2 \quad (3.17)$$

pour $0 \ll \tilde{\tilde{y}} \ll \Delta_2$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} + B\tilde{\tilde{y}} = C_2 \quad (3.18)$$

La désignation des différentes grandeurs est donnée dans la paragraphe 3.4.1 de la 2ème partie de ce mémoire.

L'intégration des équations (3.15) et (3.18) ne pose aucun problème. Par contre, pour intégrer les équations (3.16) et (3.17) il faut ôter les valeurs absolues. Il est donc nécessaire de connaître le signe de la dérivée de la vitesse et par

conséquent la forme du profil de vitesse. Celle-ci change notablement suivant la valeur du gradient de pression (fig 2-1). L'intégration de (3.16) et (3.17) est donc différente pour chaque cas d'écoulements. Nous donnons dans la suite de cette annexe les relations permettant de calculer les profils de vitesse pour les écoulements suivants:

- * Ecoulement de COUETTE pur (annexe B1).
- * Ecoulement de COUETTE avec gradient de pression favorable (annexes B2, B3 et B4).
- * Ecoulement de POISEUILLE (annexe B5).

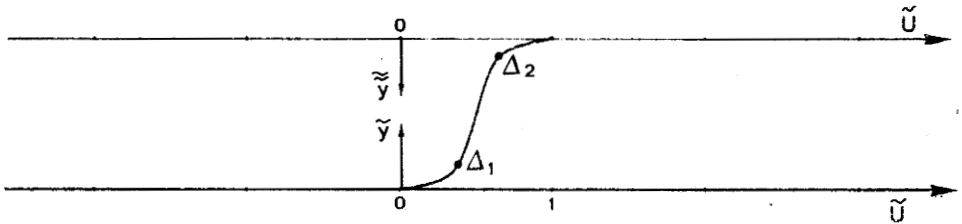
Les relations pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression défavorable ne sont pas données, car les profils de vitesse des deux écoulements notés ① et ②, qui ne diffèrent que par le signe de leurs gradients de pression, sont reliés par la relation suivante:

$$U_{①}(y) = U_b - U_{②}(h-y)$$

Pour déterminer le profil de vitesse d'un écoulement de COUETTE avec un gradient de pression défavorable, il suffit de résoudre un écoulement qui ne diffère du précédent que par le signe du gradient de pression (annexes B2, B3 et B4), puis d'utiliser la précédente relation.

ECOULEMENT DE COUETTE PUR

$$B = \frac{-h^2 \partial \hat{P}}{\mu U b \partial x} = 0. \quad A = k^2 \frac{U b \cdot h}{\nu} \quad \tilde{U} = \frac{U}{U b} \quad \tilde{y} = \frac{y}{h} \quad \tilde{\tilde{y}} = \frac{h-y}{h}$$

Bl.1 Schéma de l'écoulement:

Bl.2 Détermination du profil de vitesse:

Si nous intégrons les équations (3.15) à (3.18), nous obtenons:

pour $0 \leq \tilde{y} \leq \Delta_1$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = C1 \quad \tilde{U} = C1\tilde{y}$$

pour $\Delta_1 \leq \tilde{y} \leq 1/2$ $d\tilde{U}/d\tilde{y} > 0$ $C1 > 0$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = \sqrt{\frac{C1}{A}} \frac{1}{\tilde{y}} \quad \tilde{U} = \sqrt{\frac{C1}{A}} \log(\tilde{y}) + C3$$

pour $\Delta_2 \leq \tilde{\tilde{y}} \leq 1/2$ $d\tilde{U}/d\tilde{\tilde{y}} < 0$ $C2 < 0$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} = \sqrt{\frac{-C2}{A}} \frac{1}{\tilde{\tilde{y}}} \quad \tilde{U} = \sqrt{\frac{-C2}{A}} \log(\tilde{\tilde{y}}) + C4$$

pour $0 \leq \tilde{\tilde{y}} \leq \Delta_2$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} = C2 \quad \tilde{U} = C2\tilde{\tilde{y}} + 1.$$

B1.3 Détermination des constantes:

En utilisant la continuité de la vitesse \tilde{U} et de sa dérivée aux frontières des différents intervalles, nous pouvons exprimer Δ_2 , C_1 , C_2 , C_3 et C_4 en fonction de l'inconnue Δ_1 , qui est obtenue en itérant sur la relation suivante:

$$\Delta_1 = \frac{1}{A} (1 - \log(2\Delta_1))$$

$$\Delta_1 = \Delta_2$$

$$C_1 = \frac{1}{A\Delta_1^2}$$

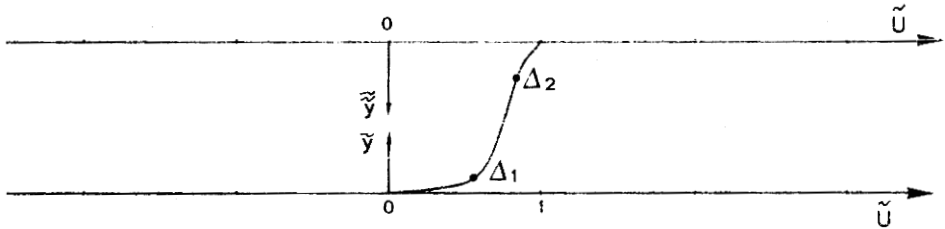
$$C_2 = \frac{-1}{A\Delta_2^2}$$

$$C_3 = \frac{1}{2} + \frac{\log(2)}{A\Delta_1}$$

$$C_4 = \frac{1}{2} - \frac{\log(2)}{A\Delta_1}$$

ECOULEMENT DE COUETTE AVEC GRADIENT DE PRESSION FAVORABLE
 ET SANS PRESENCE D'UN MAXIMUM SUR LE PROFIL DE VITESSE

$$B = \frac{-h^2 \partial \hat{P}}{\mu U b \partial x} > 0. \quad A = k^2 \frac{U b \cdot h}{\nu} \quad \tilde{U} = \frac{U}{U b} \quad \tilde{y} = \frac{y}{h} \quad \tilde{\tilde{y}} = \frac{h-y}{h}$$

B2.1 Schéma de l'écoulement:

B2.2 Détermination du profil de vitesse:

Si nous intégrons les équations (3.15) à (3.18), nous obtenons:

pour $0 \ll \tilde{y} \ll \Delta 1$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = C1 - B\tilde{y} \quad \tilde{U} = C1\tilde{y} - \frac{B}{2}\tilde{y}^2$$

pour $\Delta 1 \ll \tilde{y} \ll 1/2$ $d\tilde{U}/d\tilde{y} > 0$ $c1 > 0$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = \sqrt{\frac{C1}{A}} \sqrt{1 - \frac{B}{C1}\tilde{y}} \quad \tilde{U} = C3 + \sqrt{\frac{C1}{A}} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{B}{C1}\tilde{y}} - \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{B}{C1}\tilde{y}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B}{C1}\tilde{y}}} \right\}$$

pour $\Delta 2 \ll \tilde{\tilde{y}} \ll 1/2$ $d\tilde{U}/d\tilde{\tilde{y}} < 0$ $c2 < 0$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} = -\sqrt{\frac{-C2}{A}} \sqrt{1 - \frac{B}{C2}\tilde{\tilde{y}}} \quad \tilde{U} = C4 - \sqrt{\frac{-C2}{A}} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{B}{C2}\tilde{\tilde{y}}} - \log \frac{\sqrt{1 - \frac{B}{C2}\tilde{\tilde{y}}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{B}{C2}\tilde{\tilde{y}}} - 1} \right\}$$

pour $0 \ll \tilde{\tilde{y}} \ll \Delta 2$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} = C2 - B\tilde{\tilde{y}} \quad \tilde{U} = 1 + C2\tilde{\tilde{y}} - \frac{B}{2}\tilde{\tilde{y}}^2$$

B2.3 Détermination des constantes:

En utilisant la continuité de la vitesse \tilde{U} et de sa dérivée aux frontières des différents intervalles, nous pouvons exprimer C_1 , C_2 , C_3 et C_4 en fonction des inconnues Δ_1 et Δ_2 , qui sont obtenues en itérant sur les relations suivantes:

$$AB(1 - \Delta_1 - \Delta_2) = \frac{1}{\Delta_1^2} - \frac{1}{\Delta_2^2}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{B}{2}\Delta_2^2 + \frac{1}{A\Delta_2} \left\{ 1 - 2\beta_2 + \alpha_2 \log \frac{(1 - \alpha_2)(\beta_2 + \alpha_2)}{(1 - \alpha_2)(\beta_2 + \alpha_2)} \right\} = \\ = \frac{B}{2}\Delta_1^2 - \frac{1}{A\Delta_1} \left\{ 1 - 2\beta_1 + \alpha_1 \log \frac{(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 + \beta_1)}{(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 - \beta_1)} \right\} \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + AB\Delta_1^3}$$

$$\beta_1 = \sqrt{1 - AB\Delta_1^2(0,5 - \Delta_1)}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{1 - AB\Delta_2^3}$$

$$\beta_2 = \sqrt{1 + AB\Delta_2^2(0,5 - \Delta_2)}$$

$$C_1 = \frac{AB\Delta_1^3 + 1}{A\Delta_1^2}$$

$$C_3 = \frac{B}{2}\Delta_1^2 - \frac{1}{A\Delta_1} \left\{ 1 - \alpha_1 \log \frac{(\alpha_1 + 1)}{(\alpha_1 - 1)} \right\}$$

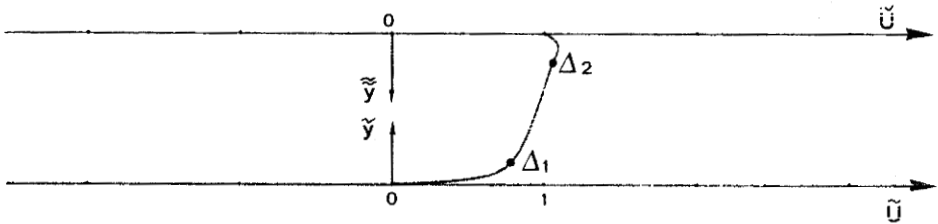
$$C_2 = \frac{AB\Delta_2^3 - 1}{A\Delta_2^2}$$

$$C_4 = 1 + \frac{B}{2}\Delta_2^2 - \frac{1}{A\Delta_2} \left\{ 1 - \alpha_2 \log \frac{(1 + \alpha_2)}{(1 - \alpha_2)} \right\}$$

ÉCOULEMENT DE COUETTE AVEC GRADIENT DE PRESSION FAVORABLE
ET AVEC PRESENCE D'UN MAXIMUM SUR LE PROFIL DE VITESSE
SITUE DANS UNE SOUS COUCHE LAMINAIRE

$$B = \frac{-h^2}{\mu U b} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} > 0. \quad A = k^2 \frac{U b \cdot h}{\nu} \quad \tilde{U} = \frac{U}{U b} \quad \tilde{y} = \frac{y}{h} \quad \tilde{\tilde{y}} = \frac{h-y}{h}$$

B3.1 Schéma de l'écoulement:



B3.2 Détermination du profil de vitesse:

Si nous intégrons les équations (3.15) à (3.18), nous obtenons:

pour $0 < \tilde{y} < \Delta_1$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = C_1 - B\tilde{y} \quad \tilde{U} = C_1\tilde{y} - \frac{B}{2}\tilde{y}^2$$

pour $\Delta_1 < \tilde{y} < 1/2$ $d\tilde{U}/d\tilde{y} > 0$ $C_1 > 0$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = \sqrt{\frac{C_1}{A}} \sqrt{1 - \frac{B}{C_1}\tilde{y}} \quad \tilde{U} = C_3 + \sqrt{\frac{C_1}{A}} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{B}{C_1}\tilde{y}} - \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{B}{C_1}\tilde{y}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B}{C_1}\tilde{y}}} \right\}$$

pour $\Delta_2 < \tilde{\tilde{y}} < 1/2$ $d\tilde{U}/d\tilde{\tilde{y}} < 0$ $C_2 > 0$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} = -\sqrt{\frac{C_2}{A}} \sqrt{\frac{B}{C_2}\tilde{\tilde{y}} - 1} \quad \tilde{U} = C_4 - 2\sqrt{\frac{C_2}{A}} \left\{ 2\sqrt{\frac{B}{C_2}\tilde{\tilde{y}} - 1} - \text{arctg} \sqrt{\frac{B}{C_2}\tilde{\tilde{y}} - 1} \right\}$$

pour $0 < \tilde{\tilde{y}} < \Delta_2$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} = C_2 - B\tilde{\tilde{y}} \quad \tilde{U} = 1 + C_2\tilde{\tilde{y}} - \frac{B}{2}\tilde{\tilde{y}}^2$$

B3.3 Détermination des constantes:

En utilisant la continuité de la vitesse \tilde{U} et de sa dérivée aux frontières des différents intervalles, nous pouvons exprimer C1, C2, C3 et C4 en fonction des inconnues Δ_1 et Δ_2 , qui sont obtenues en itérant sur les relations suivantes:

$$AB(1 - \Delta_1 - \Delta_2) = \frac{1}{\Delta_1^2} - \frac{1}{\Delta_2^2}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{B}{2}\Delta_2^2 + \frac{1}{A\Delta_2} \left\{ 1 - 2\beta_2 + 2\alpha_2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\alpha_2} \right) \right] \right\} = \\ = \frac{B}{2}\Delta_1^2 - \frac{1}{A\Delta_1} \left\{ 1 - 2\beta_1 + \alpha_1 \log \frac{(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 + \beta_1)}{(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 - \beta_1)} \right\} \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{AB\Delta_1^3 + 1}$$

$$\beta_1 = \sqrt{1 - AB\Delta_1^2(0,5 - \Delta_1)}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{AB\Delta_2^3 - 1}$$

$$\beta_2 = \sqrt{1 + AB\Delta_2^2(0,5 - \Delta_2)}$$

$$C1 = \frac{AB\Delta_1^3 + 1}{A\Delta_1^2}$$

$$C3 = \frac{B}{2}\Delta_1^2 - \frac{1}{A\Delta_1} \left\{ 1 - \alpha_1 \log \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1 - 1} \right\}$$

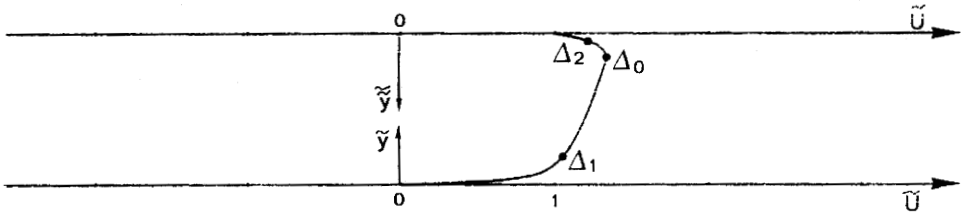
$$C2 = \frac{AB\Delta_2^3 - 1}{A\Delta_2^2}$$

$$C4 = 1 + \frac{B}{2}\Delta_2^2 + \frac{1}{A\Delta_2} \left\{ 1 - 2\alpha_2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\alpha_2} \right) \right\}$$

ÉCOULEMENT DE COUETTE AVEC GRADIENT DE PRESSION FAVORABLE
ET AVEC PRESENCE D'UN MAXIMUM SUR LE PROFIL DE VITESSE
SITUE DANS UNE ZONE PLEINEMENT TURBULENTE

$$B = \frac{-h^2}{\mu U b} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} > 0. \quad A = k^2 \frac{U b h}{\nu} \quad \tilde{U} = \frac{U}{U b} \quad \tilde{y} = \frac{y}{h} \quad \tilde{\tilde{y}} = \frac{h-y}{h}$$

B4.1 Schéma de l'écoulement:



B4.2 Détermination du profil de vitesse:

Si nous intégrons les équations (3.15) à (3.18), nous obtenons:

pour $0 < \tilde{y} < \Delta_1$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = C_1 - B\tilde{y} \quad \tilde{U} = C_1\tilde{y} - \frac{B}{2}\tilde{y}^2$$

pour $\Delta_1 < \tilde{y} < 1/2$ $d\tilde{U}/d\tilde{y} > 0$ $c_1 > 0$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = \sqrt{\frac{C_1}{A}} \sqrt{1 - \frac{B}{C_1}\tilde{y}} \quad \tilde{U} = C_3 + \sqrt{\frac{C_1}{A}} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{B}{C_1}\tilde{y}} - \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{B}{C_1}\tilde{y}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B}{C_1}\tilde{y}}} \right\}$$

pour $\Delta_0 < \tilde{\tilde{y}} < 1/2$ $d\tilde{U}/d\tilde{\tilde{y}} < 0$ $c_2 > 0$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} = -\sqrt{\frac{C_2}{A}} \sqrt{\frac{B}{C_2}\tilde{\tilde{y}} - 1} \quad \tilde{U} = C_5 - 2\sqrt{\frac{C_2}{A}} \left\{ \sqrt{\frac{B}{C_2}\tilde{\tilde{y}} - 1} - \arctg \sqrt{\frac{B}{C_2}\tilde{\tilde{y}} - 1} \right\}$$

pour $\Delta_2 < \tilde{\tilde{y}} < \Delta_0$ $d\tilde{U}/d\tilde{\tilde{y}} > 0$ $c_2 > 0$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} = \sqrt{\frac{C_2}{A}} \sqrt{1 - \frac{B}{C_2}\tilde{\tilde{y}}} \quad \tilde{U} = C_4 + \sqrt{\frac{C_2}{A}} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{B}{C_2}\tilde{\tilde{y}}} - \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{B}{C_2}\tilde{\tilde{y}}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B}{C_2}\tilde{\tilde{y}}}} \right\}$$

pour $0 < \tilde{y} < \Delta_2$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = C_2 - B\tilde{y} \quad \tilde{U} = 1 + C_2\tilde{y} - \frac{B}{2}\tilde{y}^2$$

Remarque: Le signe de la dérivée de \tilde{U} change dans l'intervalle $(\Delta_2; 1/2)$. Pour pouvoir intégrer (3.17), cet intervalle est découpé en deux, qui sont $(\Delta_2; \Delta_0)$ et $(\Delta_0; 1/2)$. Δ_0 est l'ordonnée où la dérivée de \tilde{U} s'annule.

B4.3 Détermination des constantes:

En utilisant la continuité de la vitesse \tilde{U} et de sa dérivée aux frontières des différents intervalles, nous pouvons exprimer Δ_0 , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 et C_5 en fonction des inconnues Δ_1 et Δ_2 , qui sont obtenues en itérant sur les relations suivantes:

$$AB(1 - \Delta_1 - \Delta_2) = \frac{1}{\Delta_1^2} + \frac{1}{\Delta_2^2}$$

$$1 + \frac{B}{2}\Delta_2^2 - \frac{1}{A\Delta_2} \left\{ 1 + 2\beta_2 + \alpha_2 \left[\log \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 + 1} - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{B}{2}\Delta_1^2 - \frac{1}{A\Delta_1} \left\{ 1 - 2\beta_1 + \alpha_1 \log \frac{(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 + \beta_1)}{(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 - \beta_1)} \right\}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + AB\Delta_1^3} \quad \beta_1 = \sqrt{1 - AB\Delta_1^2(0,5 - \Delta_1)}$$

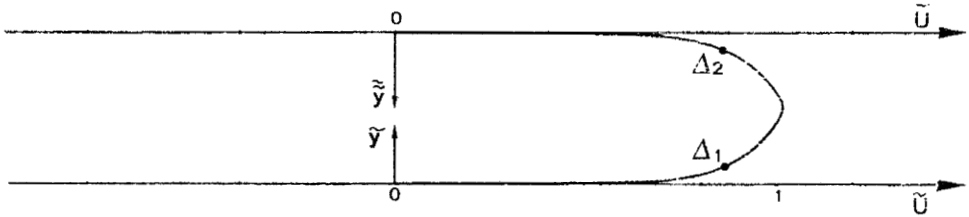
$$\alpha_2 = \sqrt{1 + AB\Delta_2^3} \quad \beta_2 = \sqrt{AB\Delta_2^2(0,5 - \Delta_2) - 1}$$

$$C_1 = \frac{1 + AB\Delta_1^3}{A\Delta_1^2} \quad C_3 = \frac{B}{2}\Delta_1^2 - \frac{1}{A\Delta_1} \left\{ 1 - \alpha_1 \log \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1 - 1} \right\} \quad \Delta_0 = \frac{C_2}{B}$$

$$C_2 = \frac{1 + AB\Delta_2^3}{A\Delta_2^2} \quad C_4 = C_5 = 1 + \frac{B}{2}\Delta_2^2 - \frac{1}{A\Delta_2} \left\{ 1 - \alpha_2 \log \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha_2 - 1} \right\}$$

ECOULEMENT DE POISEUILLE

$$B = \frac{-h^2}{\mu U_{max}} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} > 0. \quad A = k^2 \frac{U_{max} h}{\nu} \quad \tilde{U} = \frac{U}{U_{max}} \quad \tilde{y} = \frac{y}{h} \quad \tilde{\tilde{y}} = \frac{h-y}{h}$$

B5.1 Schéma de l'écoulement:

B5.2 Détermination du profil de vitesse:

Si nous intégrons les équations (3.15) à (3.18), nous obtenons:

pour $0 \ll \tilde{y} \ll \Delta_1$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = C1 - B\tilde{y} \quad \tilde{U} = C1\tilde{y} - \frac{B}{2}\tilde{y}^2$$

pour $\Delta_1 \ll \tilde{y} \ll 1/2$ $d\tilde{U}/d\tilde{y} > 0$ $C1 > 0$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = \sqrt{\frac{C1}{A}} \frac{\sqrt{1 - \frac{B}{C1}\tilde{y}}}{\tilde{y}} \quad \tilde{U} = C3 + \sqrt{\frac{C1}{A}} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{B}{C1}\tilde{y}} - \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{B}{C1}\tilde{y}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B}{C1}\tilde{y}}} \right\}$$

pour $\Delta_2 \ll \tilde{\tilde{y}} \ll 1/2$ $d\tilde{U}/d\tilde{\tilde{y}} > 0$ $C2 > 0$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} = \sqrt{\frac{C2}{A}} \frac{\sqrt{1 - \frac{B}{C2}\tilde{\tilde{y}}}}{\tilde{\tilde{y}}} \quad \tilde{U} = C4 + \sqrt{\frac{C2}{A}} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{B}{C2}\tilde{\tilde{y}}} - \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{B}{C2}\tilde{\tilde{y}}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B}{C2}\tilde{\tilde{y}}}} \right\}$$

pour $0 \ll \tilde{\tilde{y}} \ll \Delta_2$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{\tilde{y}}} = C2 - B\tilde{\tilde{y}} \quad \tilde{U} = C2\tilde{\tilde{y}} - \frac{B}{2}\tilde{\tilde{y}}^2$$

B5.3 Détermination des constantes:

En utilisant la continuité de la vitesse \tilde{U} et de sa dérivée aux frontières des différents intervalles, nous pouvons exprimer Δ_2 , C_1 , C_2 , C_3 et C_4 en fonction l'inconnue Δ_1 , qui est obtenue en itérant sur la relation suivante:

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{1}{AB(0,5 - \Delta_1)}}$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 \qquad C_1 = C_2 = \frac{B}{2}$$

$$C_3 = C_4 = \frac{B}{2}\Delta_1^2 + \frac{1}{A\Delta_1} \left\{ \alpha_1 \log \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1 - 1} - 1 \right\} \qquad \alpha_1 = \sqrt{1 + AB\Delta_1^3}$$

MODELE DE ELROD & NG

ELROD & NG <C-1> développeront un modèle de turbulence pour étudier la lubrification turbulente des paliers lisses. Il permet de prédire les écoulements de POISEUILLE et de COUETTE avec ou sans gradient de pression, dont l'équation de mouvement s'écrit:

$$\frac{d}{dy} \left\{ (\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy} \right\} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} = 0.$$

Le modèle de ELROD & NG est construit à partir des trois remarques suivantes:

- 1) Dans les zones pariétales d'un écoulement, le profil de vitesse suit généralement une loi de paroi universelle:

$$U^+ = f(Y^+)$$

avec $U^+ = \frac{U}{u_{\tau w}}$ $Y^+ = \frac{Y}{D} u_{\tau w}$

Y = Distance à la paroi.

U = Vitesse moyenne locale.

$u_{\tau w}$ = Vitesse de frottement pariétale.

D = Viscosité cinématique du fluide.

Etant donnée cette évolution pariétale de la vitesse, REICHARDT <C-2> propose pour la viscosité turbulente D_{tw} la formulation empirique suivante:

$$\frac{\nu_{tw}(Y)}{\nu} = k^+ \{ Y^+ - \delta^+ \tanh(Y^+/\delta^+) \}$$

Les valeurs respectives de k^+ et δ^+ sont 0,4 et 10,7 <C-3>.

- 2) CLAUSER <C-4> montre que la distribution de vitesse dans 80 à 90% de l'épaisseur d'une couche limite peut être calculée correctement en utilisant une viscosité turbulente D_{tc} indépendante de y mais reliée à la distribution globale de vitesse à travers la relation suivante:

$$\nu_{tc} = \frac{1}{56} \int_0^\delta (U_{max} - U) dy$$

avec U_{max} = Vitesse à l'extérieure de la couche limite.
 δ = Epaisseur de la couche limite.

3) Bien que la viscosité turbulente diminue légèrement au centre d'un écoulement de POISEUILLE (fig 2-4), ELROD & NG supposent que ν_t dans chaque demi-partie d'un écoulement entre deux parois ne décroît pas avec la distance à la paroi la plus proche.

En tenant compte de ces trois remarques, ELROD & NG proposent pour ν_t la formulation suivante:

$$\nu_t(y) = \min(\nu_{tc}, \nu_{tw}(y))$$

ν_{tc} est donnée par la relation suivante:

$$\nu_{tc} = \frac{1}{56} \int_0^h |U_{max} - U| dy$$

avec U_{max} = vitesse maximale au sein de l'écoulement.

$\nu_{tw}(y)$ est donnée par les deux formulations suivantes:

$$0 < y < h/2 \quad \nu_{tw}(y) = \max(\nu_{tw}(Y)) \quad \text{pour } Y \in [0, y]$$

$$\nu_{tw}(Y) = 0,4\nu [Y^+ - 10,7 \tanh(Y^+/10,7)]$$

$$Y^+ = \frac{Y u_\tau}{\nu} \quad u_\tau = (\nu + \nu_t) \left| \frac{dU}{dy} \right|_Y$$

$$h/2 < y < h \quad \nu_{tw}(y) = \max(\nu_{tw}(Y)) \quad \text{pour } Y \in [y, h]$$

$$\nu_{tw}(Y) = 0,4\nu [Y^+ - 10,7 \tanh(Y^+/10,7)]$$

$$Y^+ = \frac{(h - Y) u_\tau}{\nu} \quad u_\tau = (\nu + \nu_t) \left| \frac{dU}{dy} \right|_Y$$

REMARQUE: Dans certaines conditions, une des deux vitesses de frottement pariétales pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression peut s'annuler. Dans ce cas, la formulation de REICHARDT donne une viscosité

turbulente nulle. Pour éviter cette annulation de U_{tw} dans une demi-partie de l'écoulement ELROD & NG remplacent dans leur formulation de la viscosité turbulente la vitesse de frottement pariétale par la vitesse de frottement locale .

REFERENCES:

- <C-1> ELROD H.G, NG C.W:
"A theory for turbulent fluid films and its application to bearings", J of Lubrication Technology ASME, vol 97, N°3, pp 346-362, (july 1967).
- <C-2> REICHARDT H:
"Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen", SAMM, vol 31, p 208, (1951).
- <C-3> NG C.W:
"Fluid dynamic foundation of turbulent lubrication theory", ASLE Transaction, vol 7, pp 311-321, (1964).
- <C-4> CLAUSER F.H:
"The turbulent boundary layer", Advances in Applied Mechanics, vol 4, pp 1,51, (1965).

COORDONNEES DES PRISES DE PRESSION UTILISEE DANS L'ETUDE FINALE
--

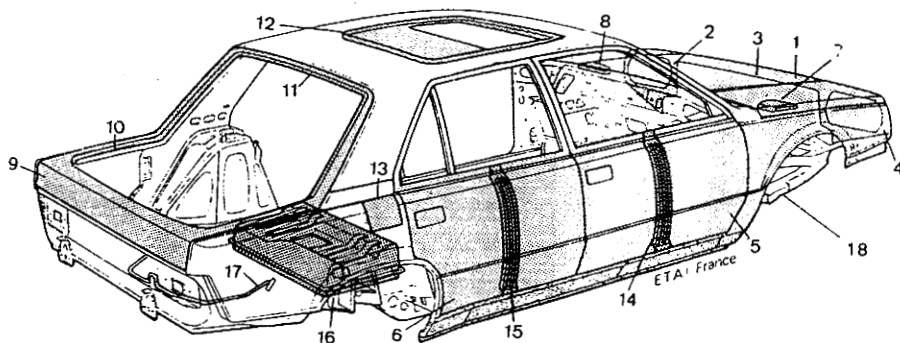
INJECTION		
X	Y	Z
0	-50	-100

COTE AMONT		
X	Y	Z
-60	0	0
-100	0	0
-160	0	0
-200	0	0
-240	0	0
-300	0	0
-350	0	0
-450	0	0
-550	0	0
-650	0	0
-814	0	-100
-881	0	-100
-950	0	-100
-1016	0	-100
-1089	0	-100
-1152	0	-100
-1219	0	-100

COTE AVAL		
X	Y	Z
60	0	0
100	0	0
160	0	0
200	0	0
240	0	0
300	0	0
350	0	0
450	0	0
550	0	0
650	0	0
814	0	100
881	0	100
950	0	100
1016	0	100
1089	0	100
1152	0	100
1219	0	100

*
* F I G U R E S *
*

Composants de la carrosserie de la Renault 25



Tôle Zincrométal

4. Aile avant

Tôles électrozinguées 1 face

1. Panneau extérieur de capot

2. Tôle porte-phare

3. Traverse supérieure de radiateur

5. Panneau, caisson et charnières de porte avant

6. Panneau, caisson et charnières de porte arrière

7-8. Coupelle d'amortisseur avant

9. Panneau extérieur de porte de coffre

10. Gouttière inférieure de porte de coffre

11. Traverse supérieure de porte de coffre

12. Cadre support de toit ouvrant

13. Trappe à essence

Tôles électrozinguées 2 faces

14. Raidisseur de panneau extérieur de porte avant

15. Raidisseur de panneau extérieur de porte arrière

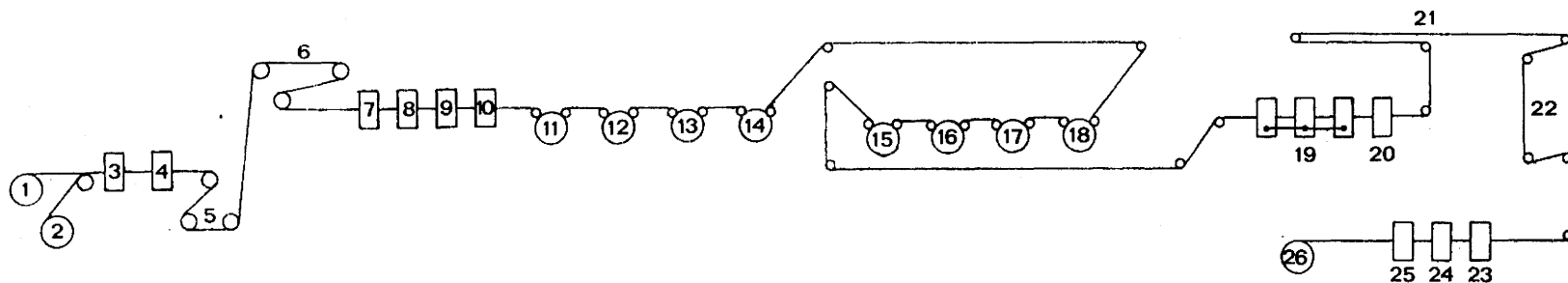
16. Réservoir à carburant

Figure 1-1a: Exemple d'utilisation des tôles pré-protégées pour la carrosserie d'automobile (Extrait de Galvano-Organo-Traitements de surface)

AUDI (tous modèles)	100 %
FIAT TIPO	70 %
PEUGEOT 405	67 %
VOLVO	50 à 65 % selon les modèles
PEUGEOT 309	48 %
PEUGEOT 205	42 %
PEUGEOT 505	35 %
RENAULT 19	34 %
CITROEN AX	33 %
RENAULT 25	30 %
RENAULT 21	27 %
RENAULT 5	25 %
CITROEN BX	20 %

Sources: Centre du zinc/ "L'Usine Nouvelle"

Figure 1-1b: Pourcentage en surface des tôles zinguées pour la carrosserie d'automobile (réf <1-1>)



1 et 2: Dérouleuses

3: Cisaille

4: Soudeuse

5: Bloc de tension

6: Accumulateur d'entrée

7: Dégraissage électrolytique

8: Avivage

9: Rinçage

10: Séchage

11 à 18: Cellules d'électro-zingage

19: Traitement de finition

(phosphatation ou chromatisation)

20: Jauge (mesure l'épaisseur du dépôt de zinc)

21: Accumulateur de sortie

22: Contrôle visuel

23: Marquage

24: Huileuse

25: Cisaille

26: Enrouleuse

Figure 1-2: Schéma de la ligne d'électro-zingage des Acierie et Laminoirs de BEAUTOR

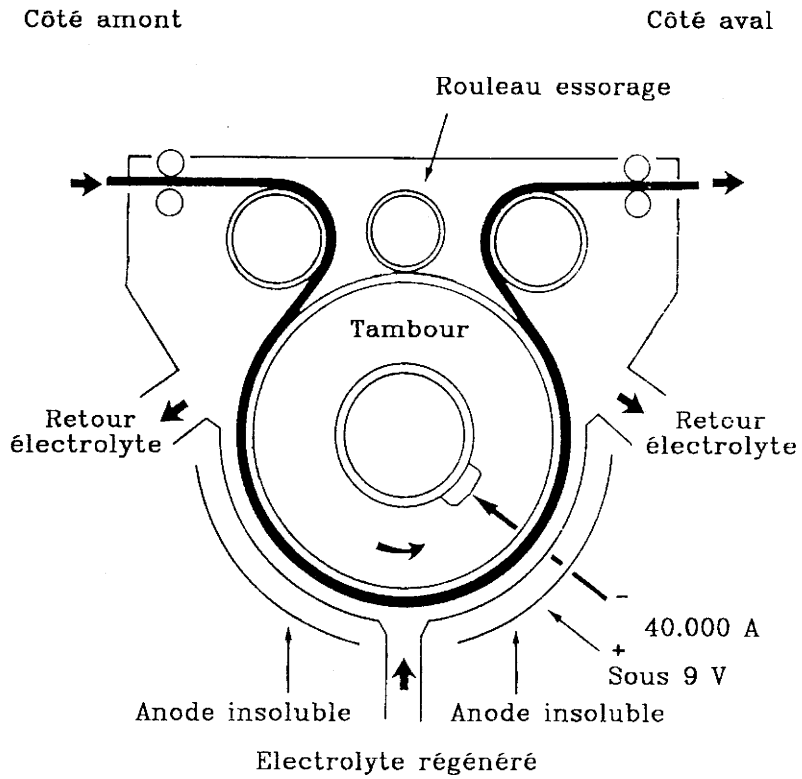
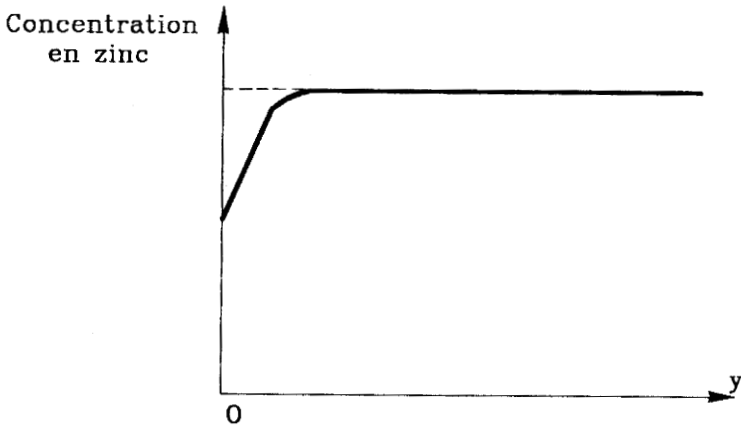
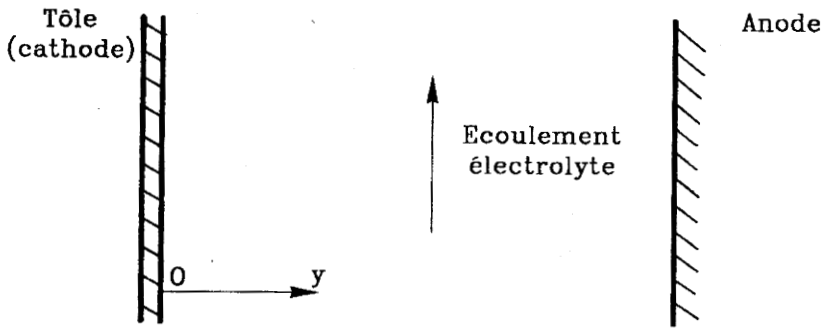
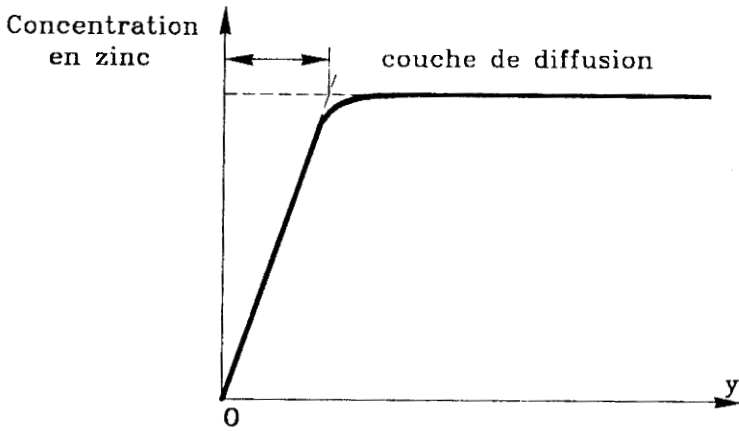


Figure 1-3: Schéma d'une cellule d'électro-zingage
type "RADIACEL"



a) avec densité de courant



b) avec densité de courant limite

Figure 1-4: Variation de la concentration en zinc près de la tôle

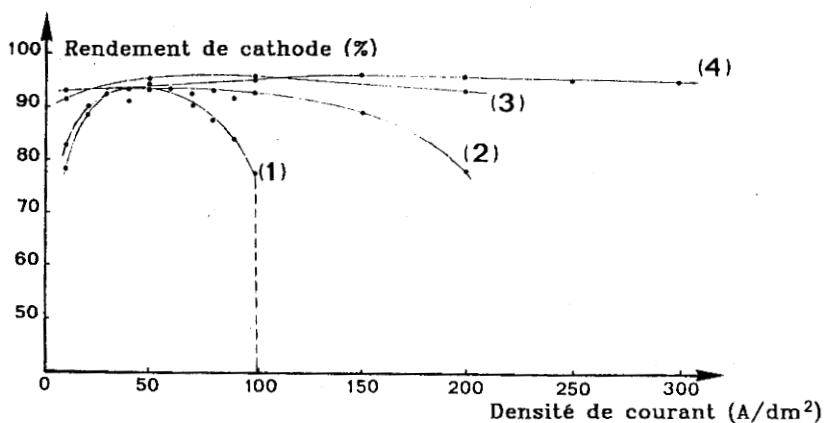
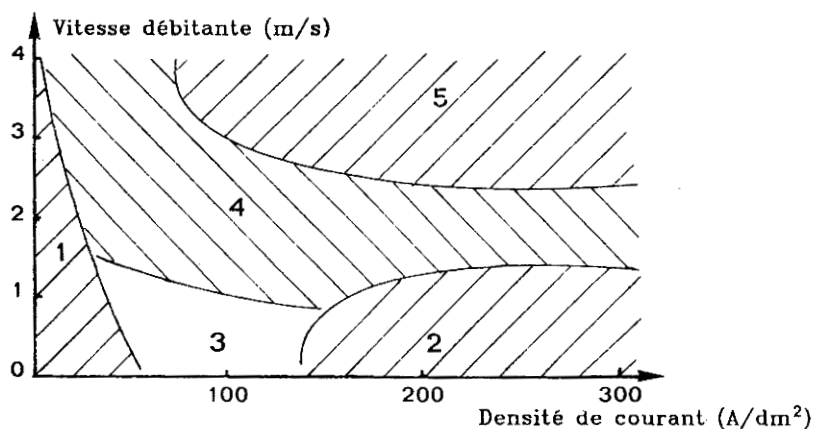


Figure 1-5a: Rendement de cathode en fonction de la densité courant, pour différentes vitesses débitantes de l'électrolyte ((1): 0,7 m/s; (2): 1,4 m/s; (3): 3 m/s; (4): 4 m/s). (réf <1-3>).



- 1: Revêtement non uniforme
- 2: Revêtement blanc de mauvaise qualité
- 3: Revêtement uniforme, mais très poreux
- 4: Revêtement homogène, mais plutôt rugueux
- 5: Revêtement macroscopiquement uniforme et lisse

Figure 1-5b: Qualité du revêtement de zinc en fonction de la densité de courant et de la vitesse débitante de l'électrolyte (réf <1-3>).

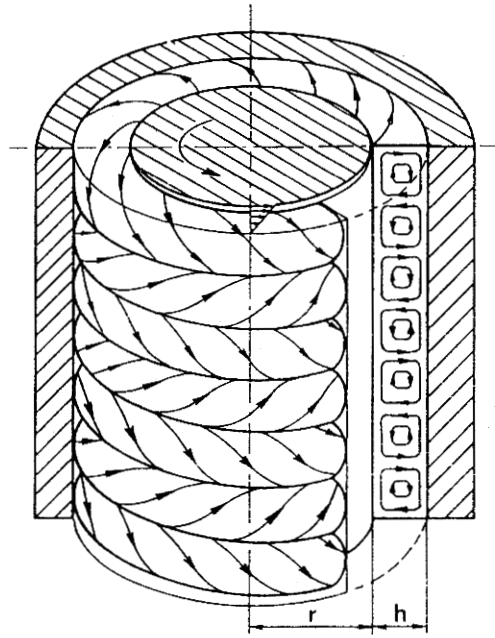


Figure 1-6a: Ecoulement laminaire avec tourbillons de TAYLOR
 (extrait de SCHLICHTING <1-4>)

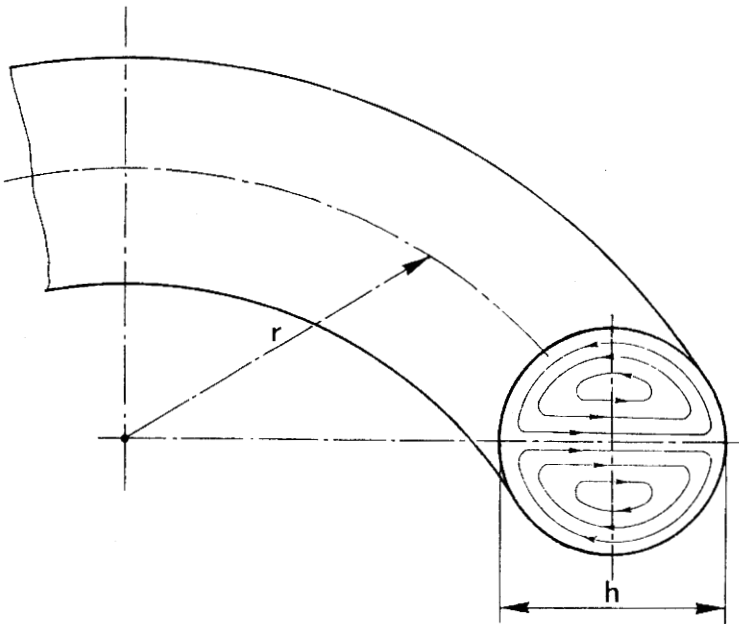
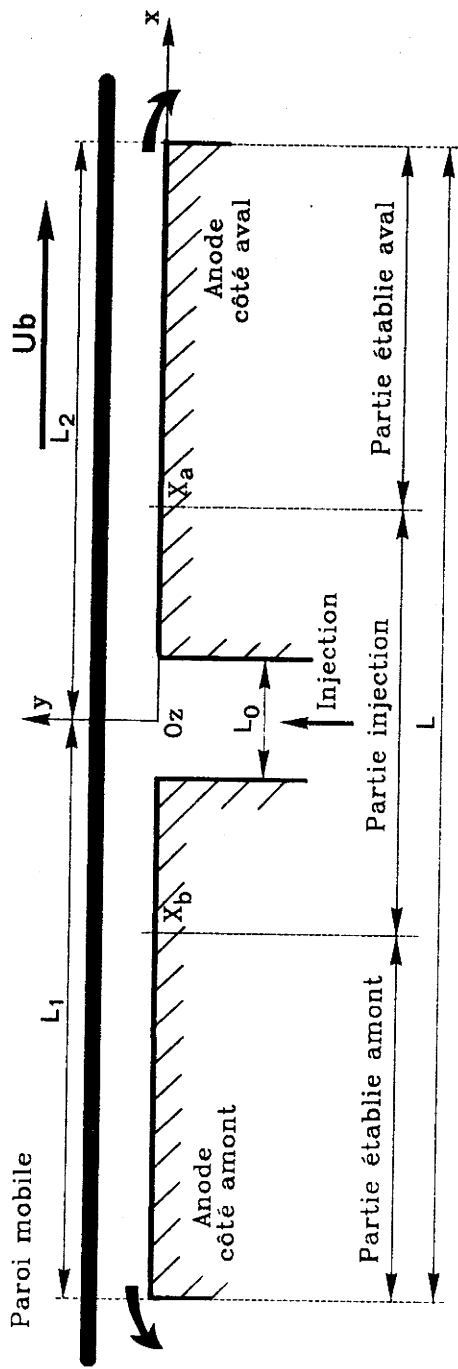
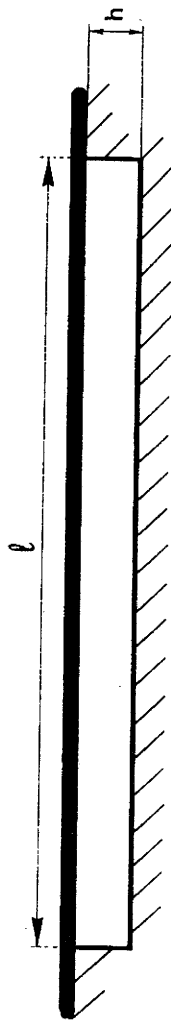


Figure 1-6b: Ecoulement laminaire avec tourbillons au sein
 d'un tube cintré

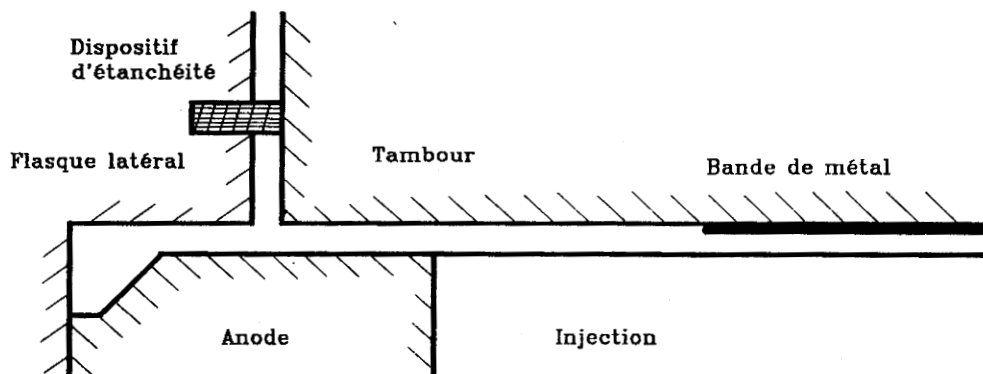


a) Coupe longitudinale

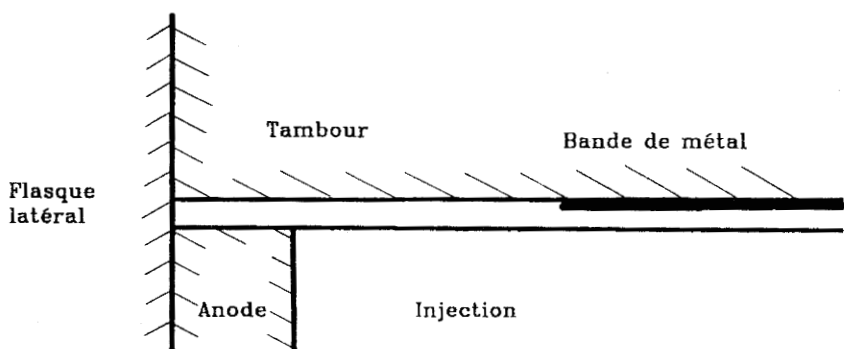


b) Coupe transversale

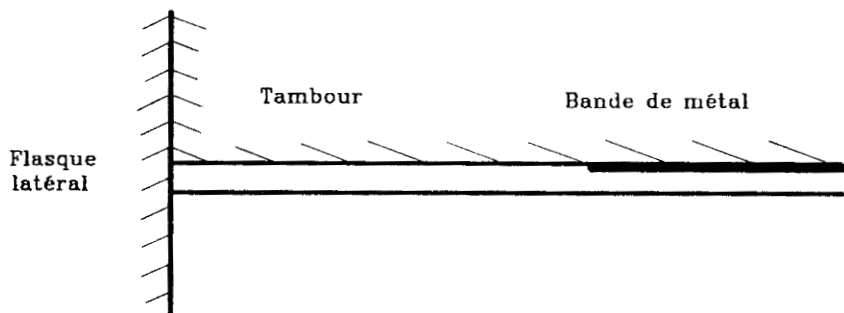
Figure 1-7: Schématisation de l'écoulement interne d'une cellule d'électro-zingage



a) Coupe suivant le plan Oyz de la figure 1-7

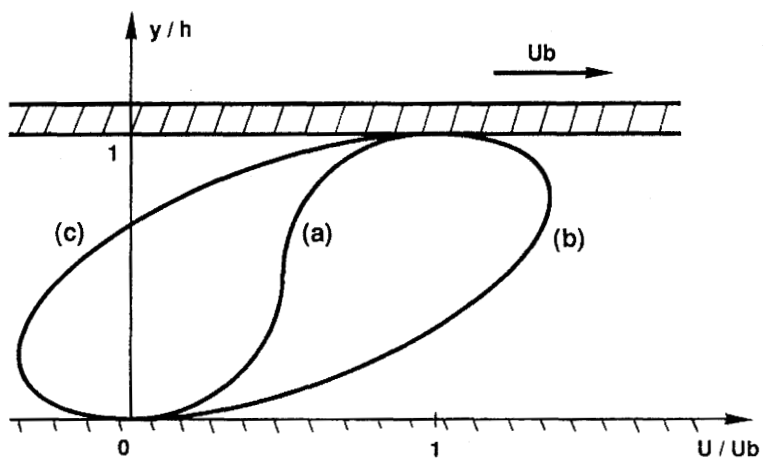


b) Simplification des zones latérales



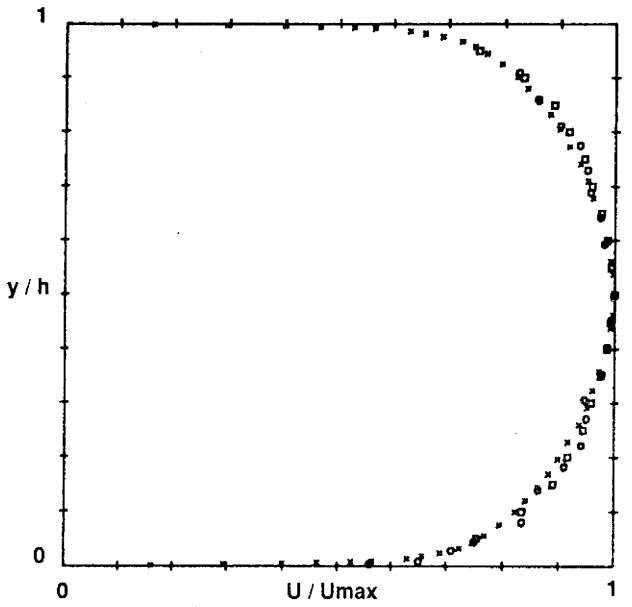
c) Simplification des zones latérales et élargissement de l'injection

Fig 1-8: Simplifications de la configuration d'écoulement au sein d'une cellule d'électro-zingage

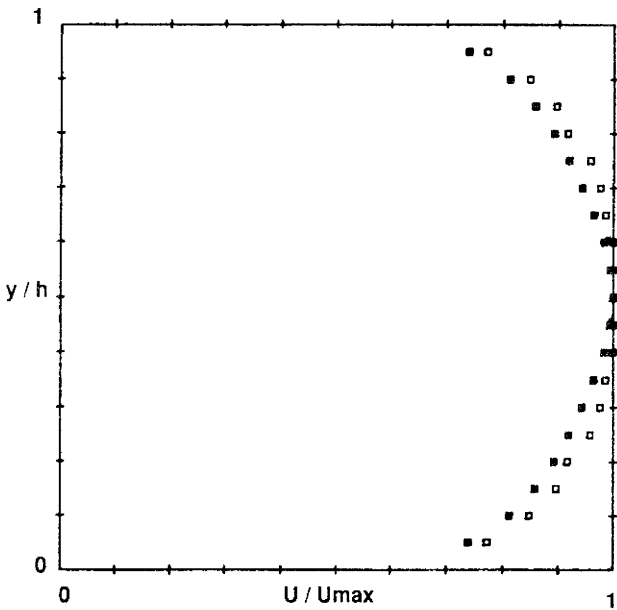


- (a) Gradient de pression nul
- (b) Gradient de pression favorable
- (c) Gradient de pression adverse

Figure 2-1: Evolution du profil de vitesse moyenne dans les parties établies en fonction du gradient de pression



- x Remax = 64600 : HUSSAIN & REYNOLDS < 2-14 >
- o Remax = 71040 : EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >
- Remax = 61600 : LAUFER < 2-10 >



- Remoy = 114000 : COMTE - BELLOT < 2-12 >
- Remax = 123200 : LAUFER < 2-10 >

Figure 2-2: Profils de vitesse pour des écoulements de POISEUILLE

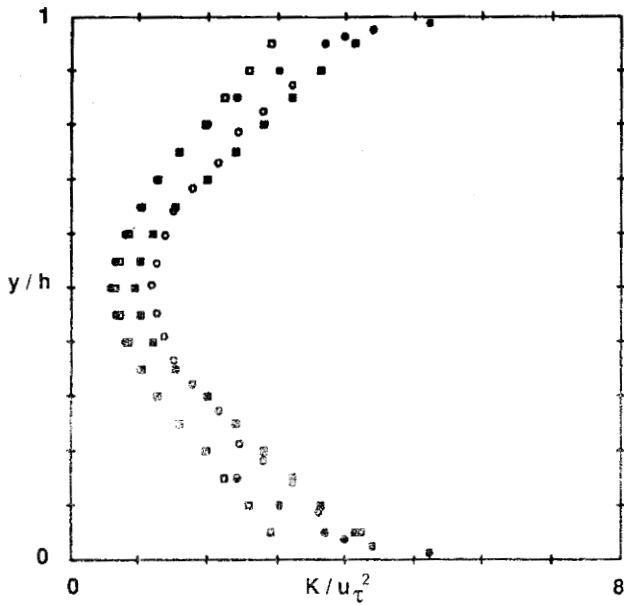


Figure 2-3 a: Profils d'énergie turbulente pour des écoulements de POISEUILLE

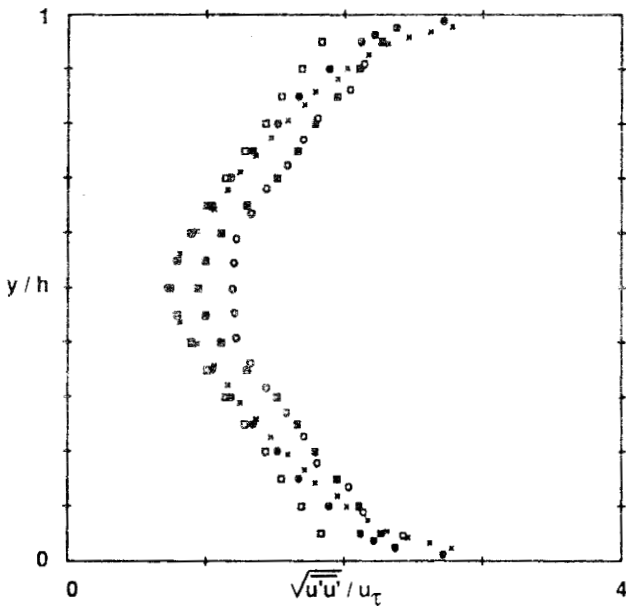
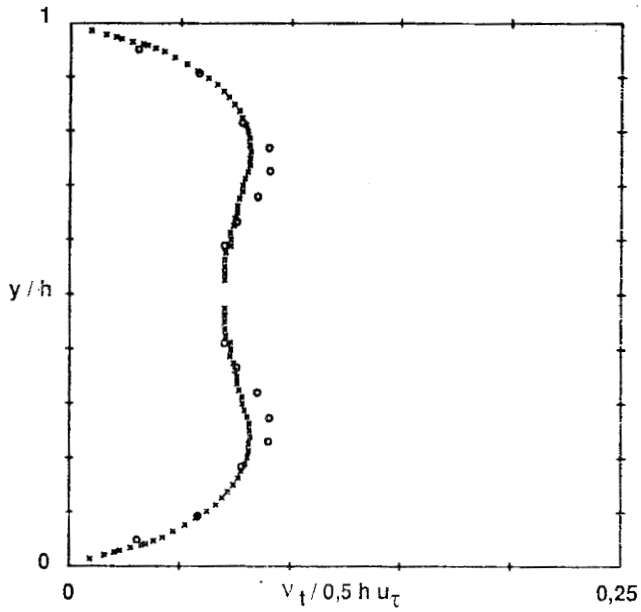


Figure 2-3 b: Profils de $\overline{u'u'}$ pour des écoulements de POISEUILLE

- × Remax = 64600 : HUSSAIN & REYNOLDS < 2-14 >
- Remax = 71040 : EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >
- Remoy = 114000 : COMTE BELLOT < 2-12 >
- Remax = 61600 : LAUFER < 2-10 >
- Remax = 55200 : CLARK < 2-13 >



- x Remax = 64600 : HUSSAIN & REYNOLDS < 2-14 >
- o Remax = 76370 : EL TELBANY & REYNOLDS < 2-17 >

Figure 2-4: Profils de viscosité turbulente pour des écoulements de POISEUILLE

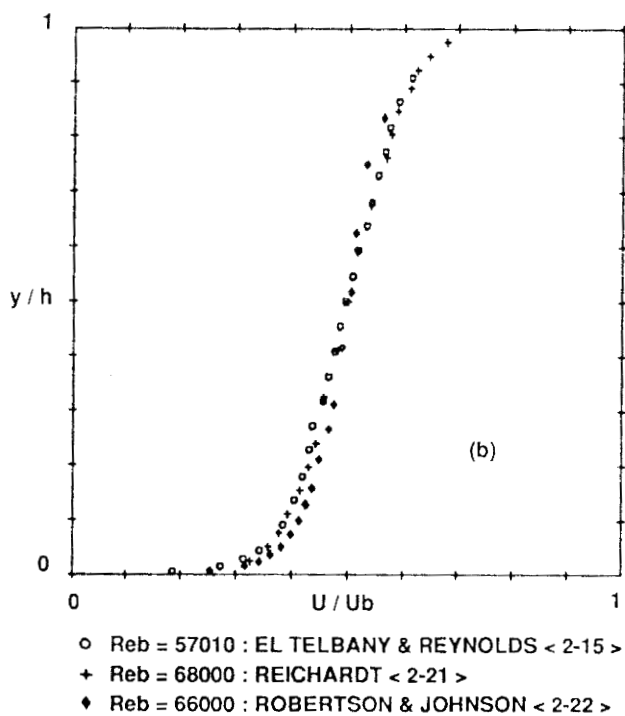
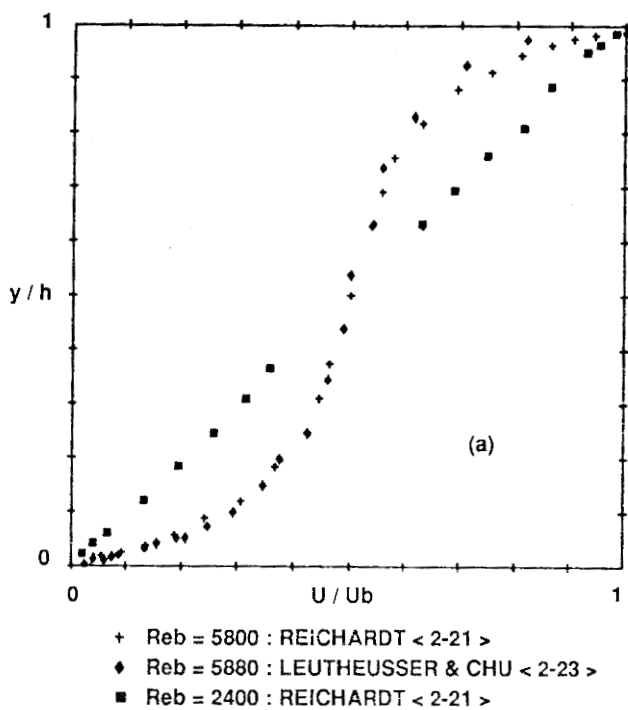


Figure 2-5: Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE pur

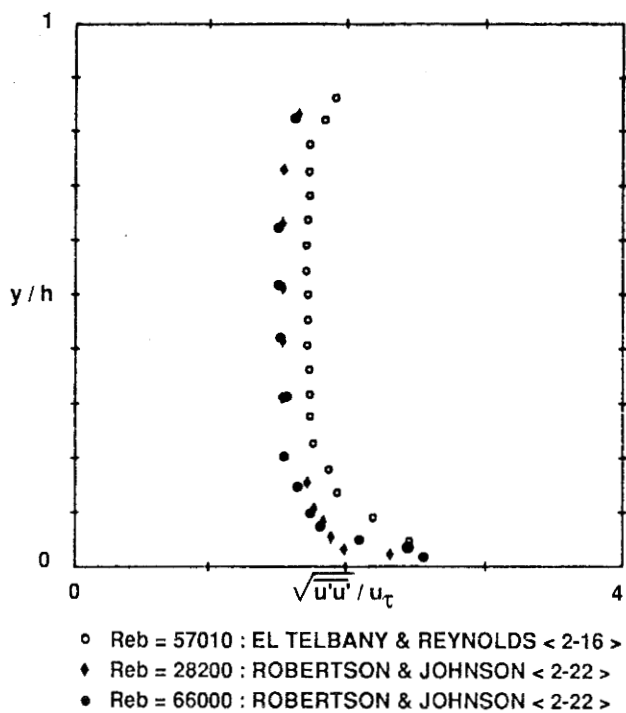


Figure 2-6: Profils de $\overline{u'u'}$ pour des écoulements de COUETTE pur

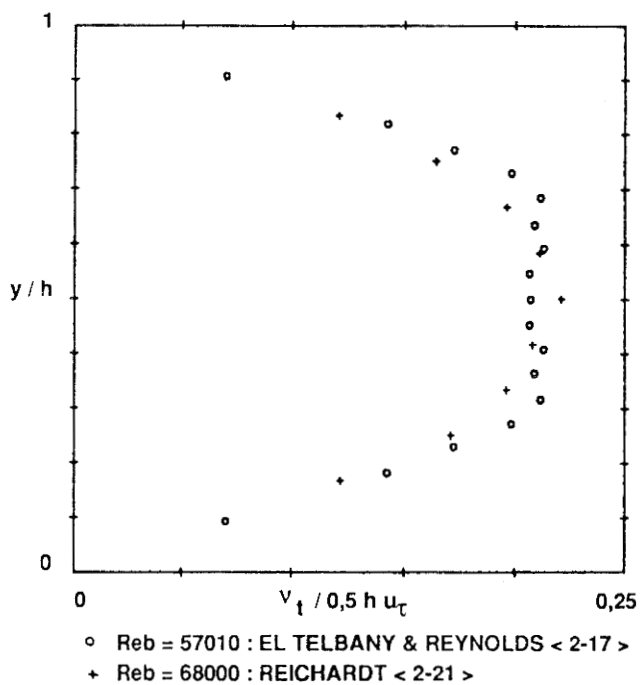
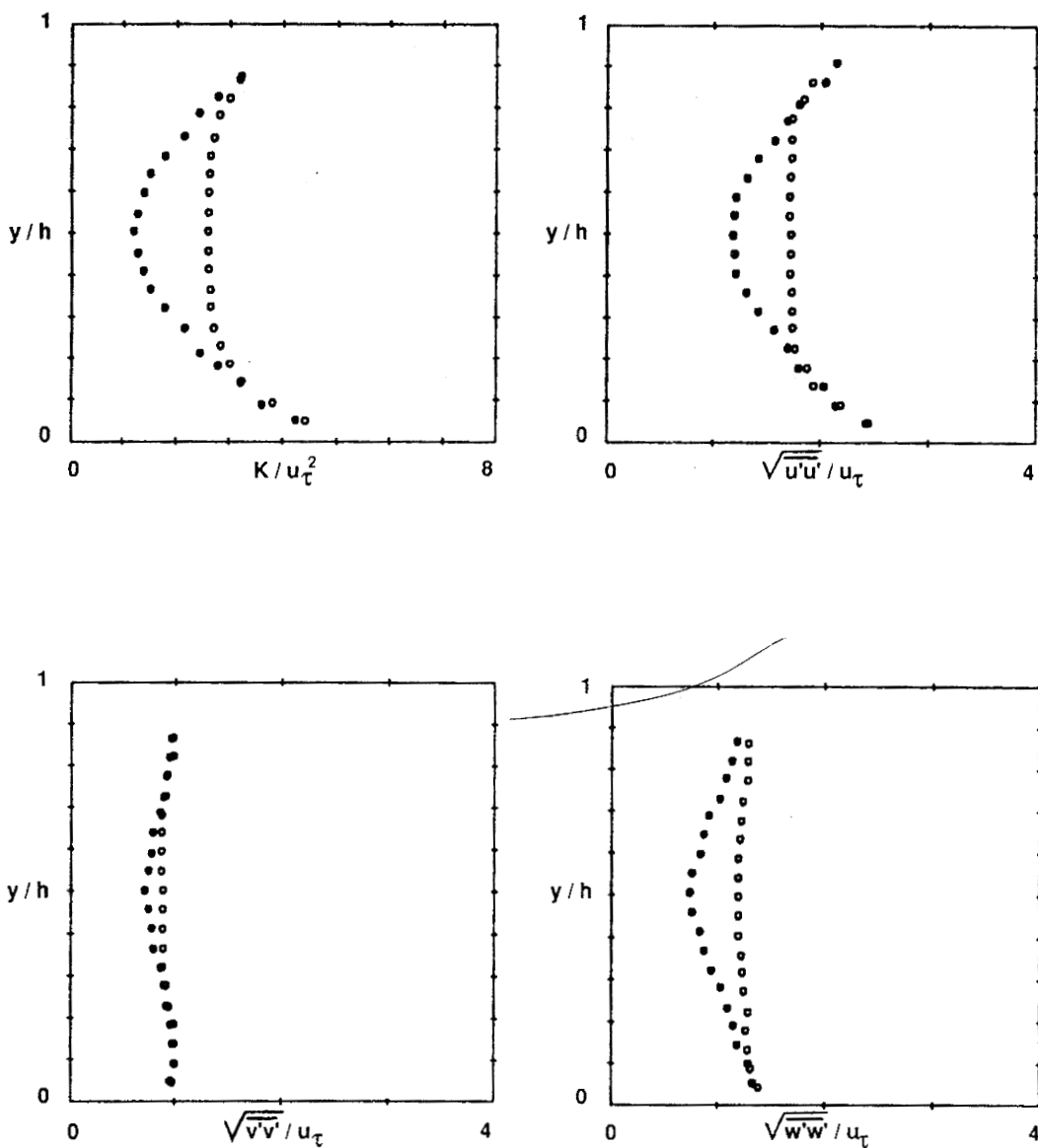
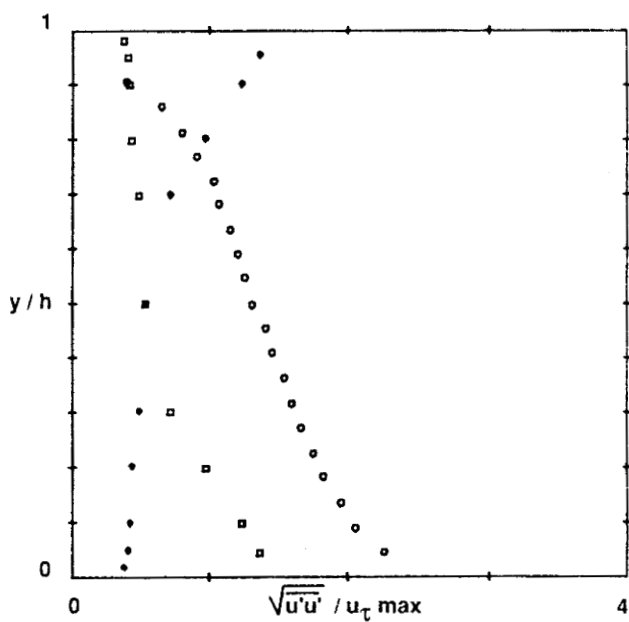
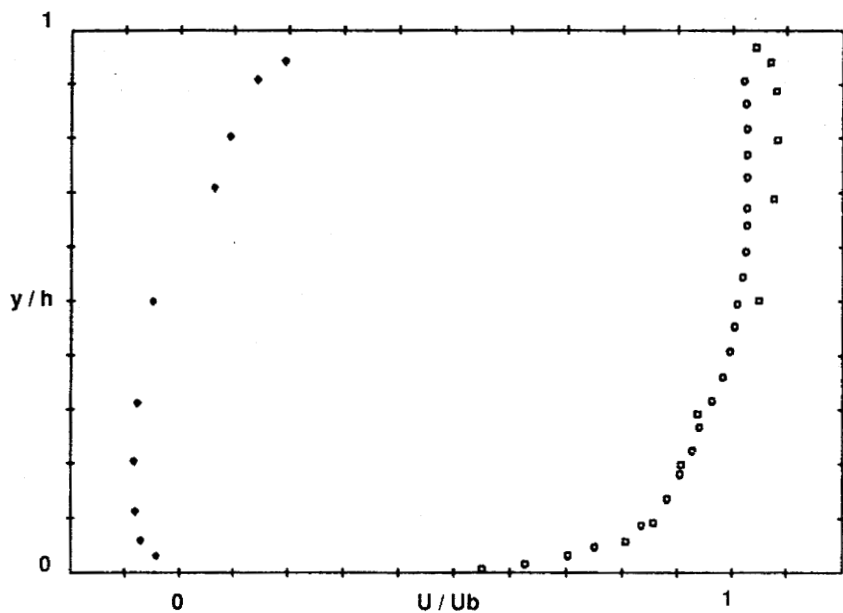


Figure 2-7: Profils de viscosité turbulente pour des écoulements de COUETTE pur



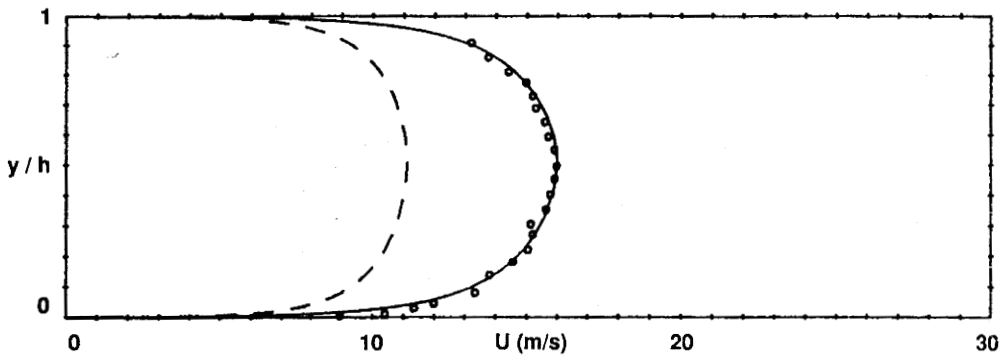
- Remax = 71040 : Ecoulement de POISEUILLE < 2-16 >
- Reb = 57010 : Ecoulement de COUETTE pur < 2-16 >

Figure 2-8: Profils de K , $\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$ et $\overline{w'w'}$ pour des écoulements de POISEUILLE et de COUETTE pur

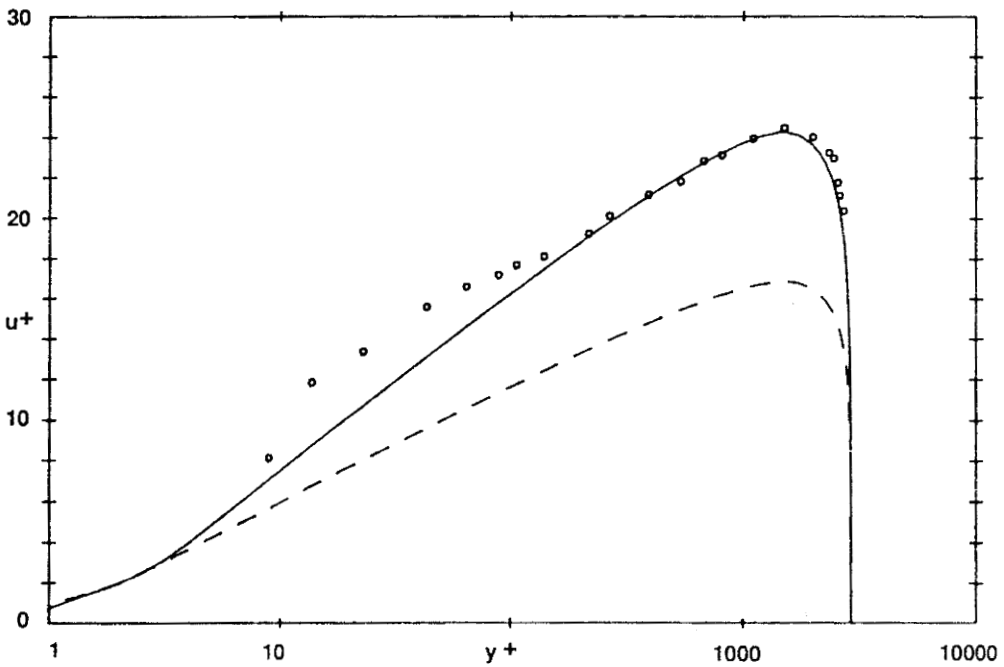


- $Re_b = 57010$ $Re_{max} = 58830$: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-16 >
- * $Re_b = 54000$ $Re_{moy} = 0$: HUEY & WILLIAMSON < 2-24 >
- $Re_b = 54000$ $Re_{max} = 54000$: HUEY & WILLIAMSON modifié

Figure 2-9: Profils de vitesse et de $\overline{u'u'}$ pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression



a) Profils de vitesse



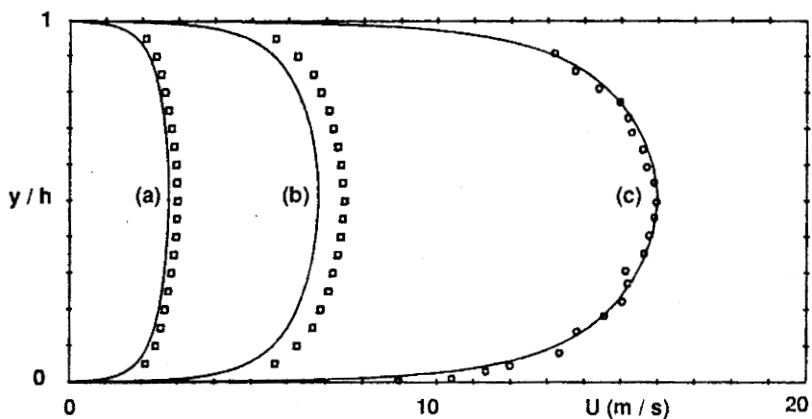
b) Profils de u^+ en fonction de y^+

---- $k = 0,4$

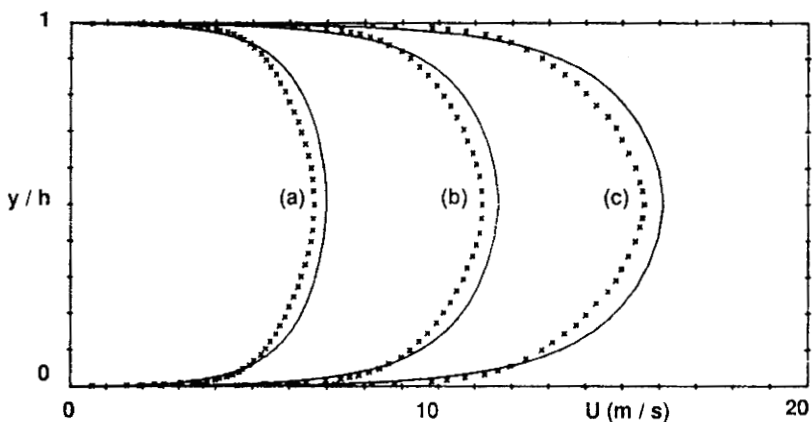
— $k = \text{relation (3.19)}$

o Remax = 71040: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >

Figure 3-1: Modèle de CONSTANTINESCU
Prédictions pour un écoulement de POISEUILLE

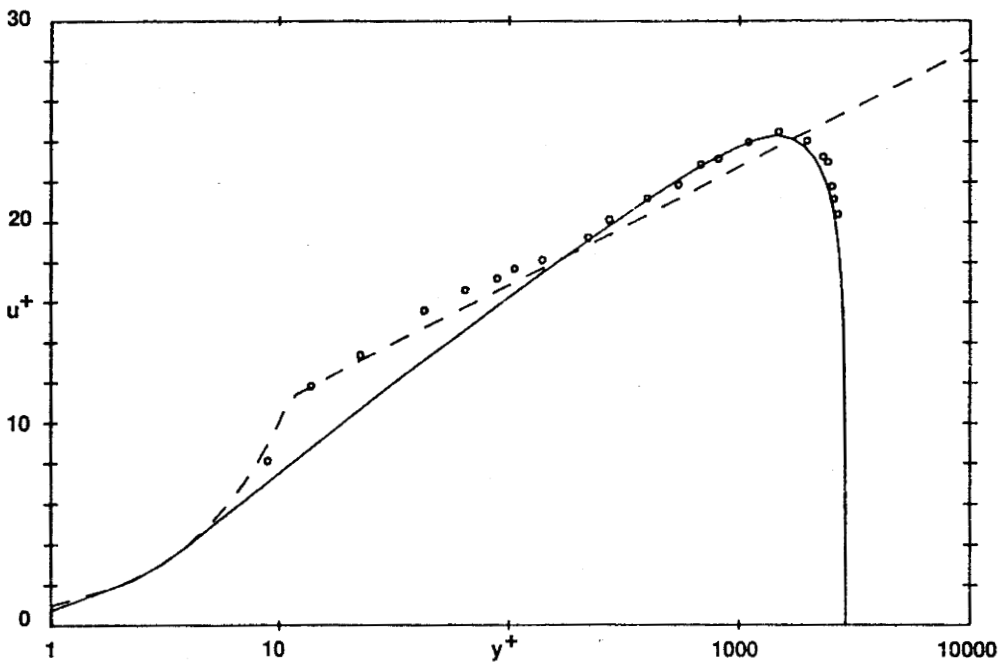


Expériences: \square (a) $Re_{max} = 24600$: LAUFER < 2-10 >
 \circ (b) $Re_{max} = 61600$: LAUFER < 2-10 >
 \circ (c) $Re_{max} = 71040$: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >



Expériences: \times (a) $Re_{max} = 27600$: HUSSAIN & REYNOLDS < 2-14 >
 \times (b) $Re_{max} = 46400$: HUSSAIN & REYNOLDS < 2-14 >
 \times (c) $Re_{max} = 64600$: HUSSAIN & REYNOLDS < 2-14 >

Figure 3-2: Modèle de CONSTANTINESCU
 Profils de vitesse pour des écoulements de POISEUILLE

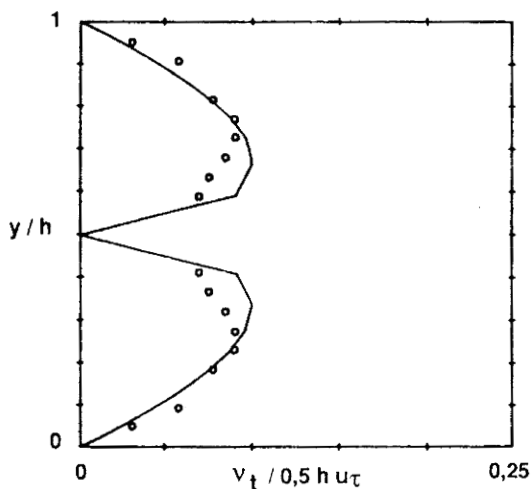


---- $u^+ = y^+, u^+ = 2,5 \ln (y^+) + 5,1$

o Remax = 71040 : EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >

Figure 3-3: Modèle de CONSTANTINESCU

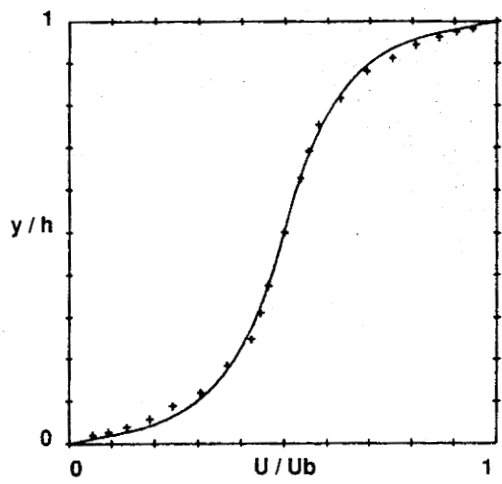
Profil de u^+ en fonction de y^+ pour un écoulement de POISEUILLE



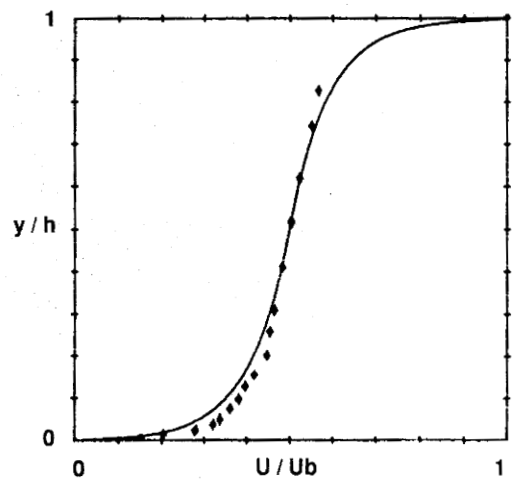
o Remax = 76370 : EL TELBANY & REYNOLDS < 2-17 >

Figure 3-4: Modèle de CONSTANTINESCU

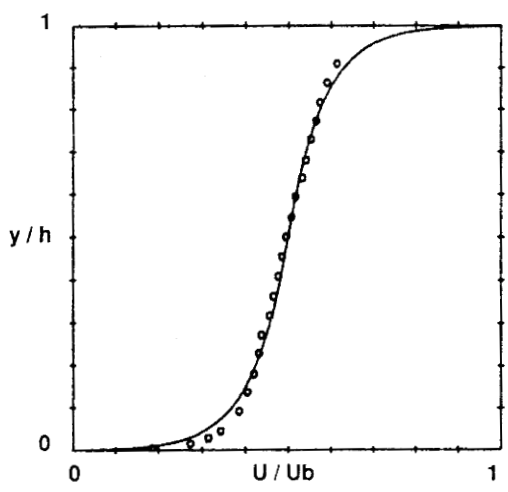
Profil de V_t pour un écoulement de POISEUILLE



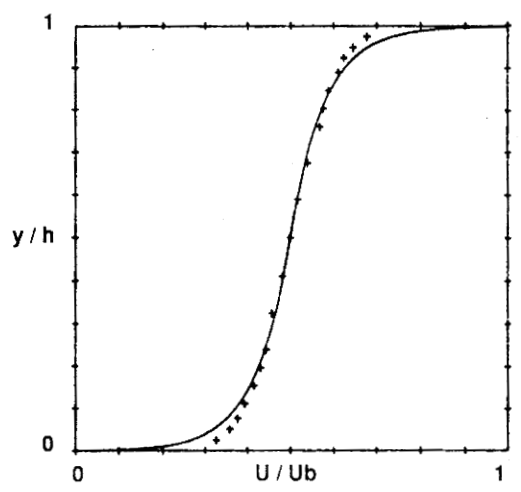
+ $Re_b = 5800$: REICHARDT < 2-21 >



◆ $Re_b = 28200$: ROBERTSON & JOHNSON < 2-22 >

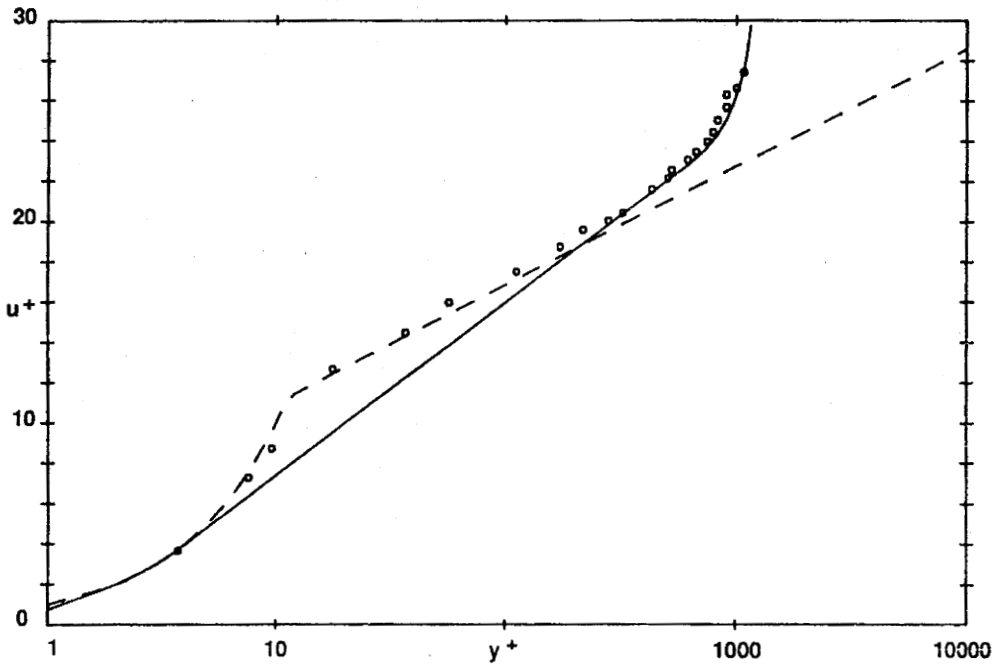


○ $Re_b = 57010$: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >



+ $Re_b = 68000$: REICHARDT < 2-21 >

Figure 3-5: Modèle de CONSTANTINESCU
 Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE pur

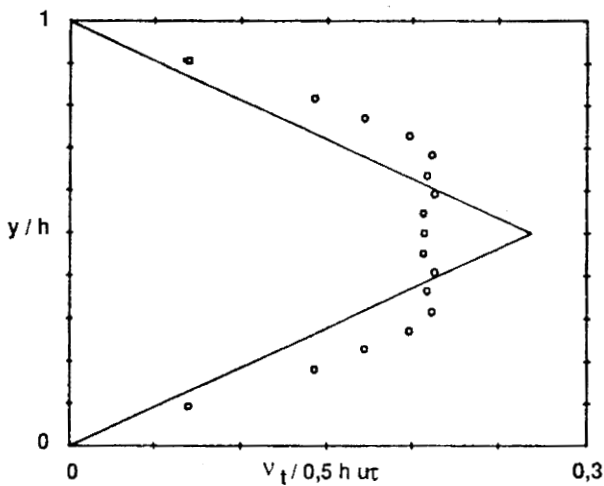


---- $u^+ = y^+$; $u^+ = 2,5 \ln(y^+) + 5,1$

o $Re_b = 57010$: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >

Figure 3-6: Modèle de CONSTANTINESCU

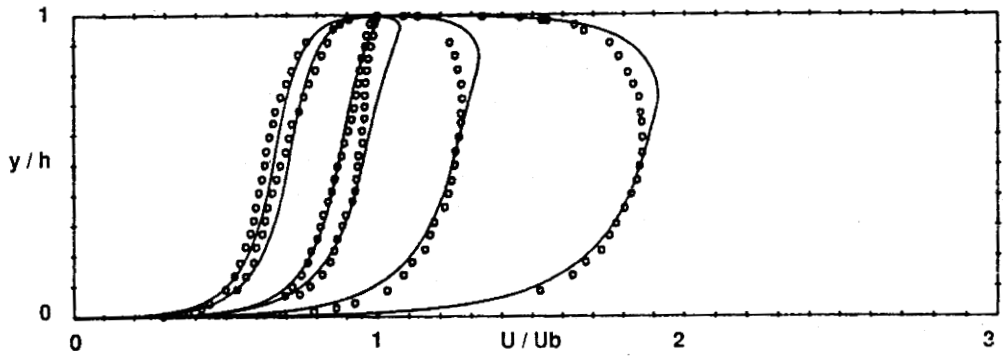
Profil de u^+ en fonction de y^+ pour un écoulement de COUETTE pur



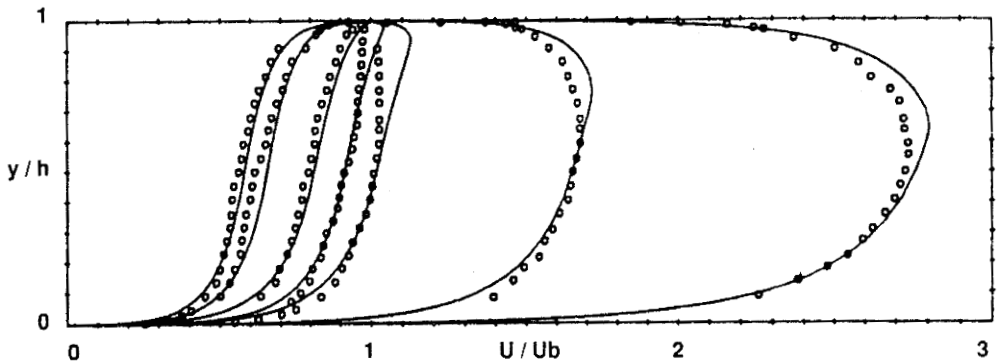
o $Re_b = 57010$: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-17 >

Figure 3-7: Modèle de CONSTANTINESCU

Profil de V_t pour un écoulement de COUETTE pur

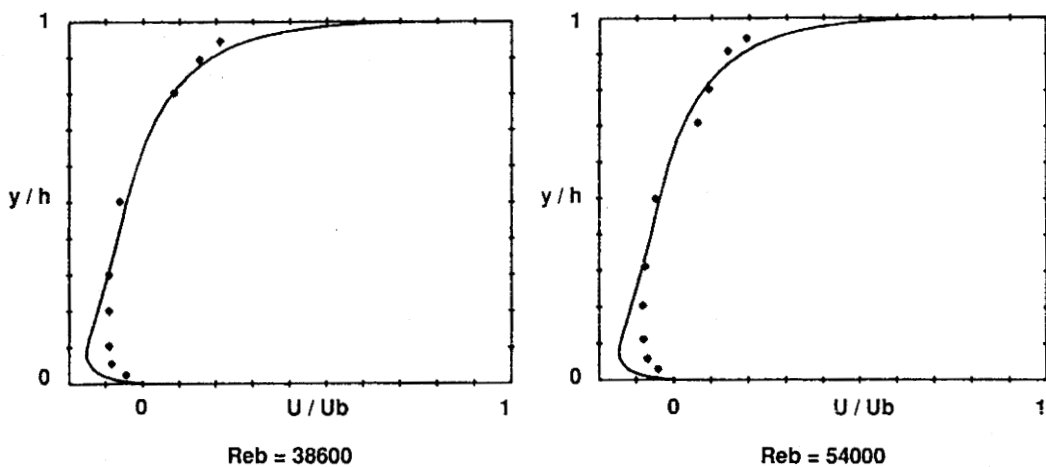


◦ EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >
Expériences n° 3, 5, 7, 9, 11, 13 (voir annexe A)



◦ EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >
Expériences n° 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 (voir annexe A)

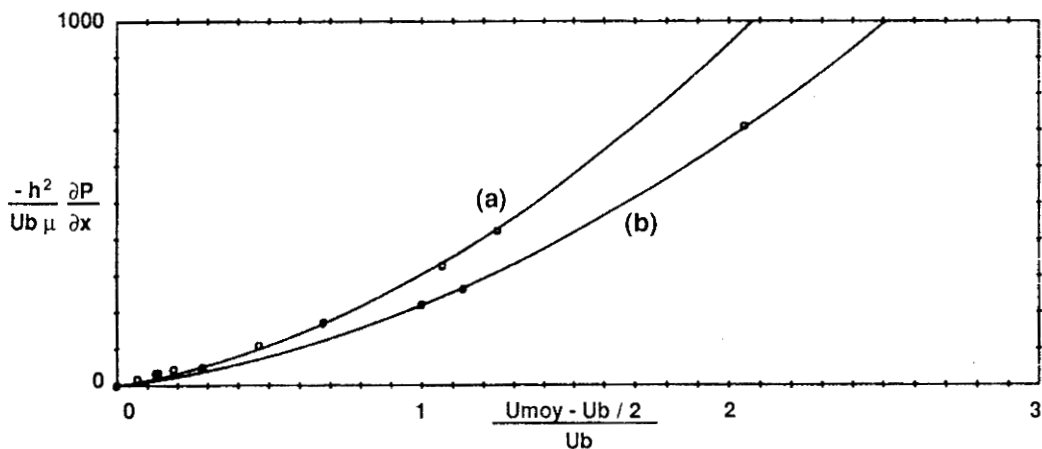
Figure 3-8: Modèle de CONSTANTINESCU
Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression



* HUEY & WILLIAMSON < 2-24 >

Figure 3-9: Modèle de CONSTANTINESCU

Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE sans vitesse débitante



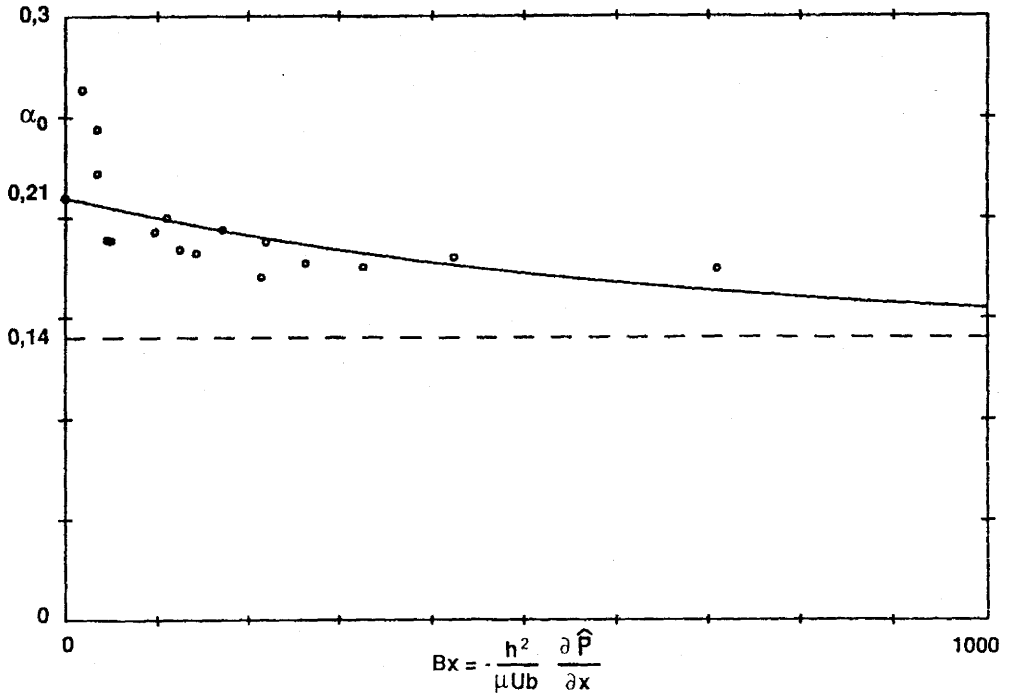
(a) $Re_b = 57010$

(b) $Re_b = 38140$

o EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >

Figure 3-10: Modèle de CONSTANTINESCU

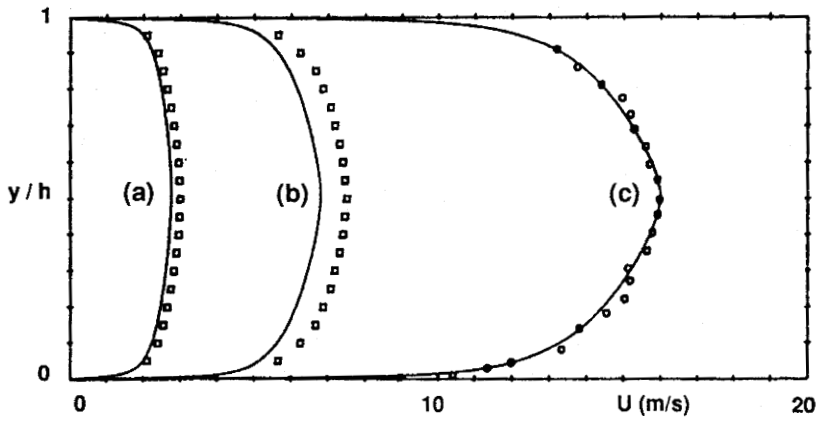
Prédiction du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante



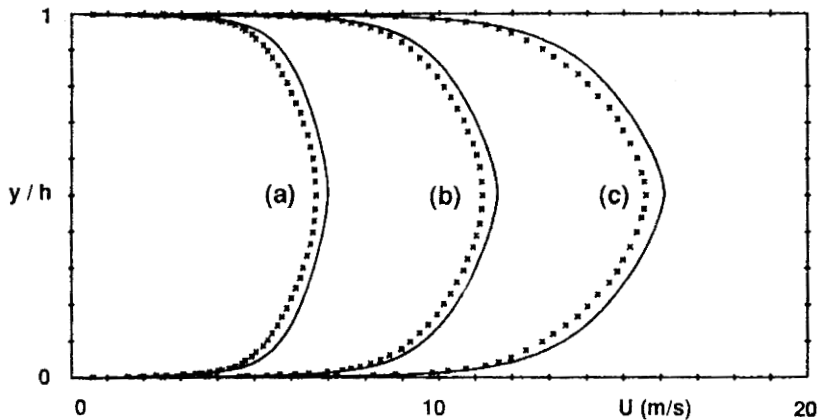
$$\text{— } \alpha_0 = 0,14 + 0,07 \exp(-|Bx| / 630)$$

o Expériences de EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >

Figure 4-1: Evolution du coefficient α_0 de la longueur de mélange en fonction du paramètre Bx

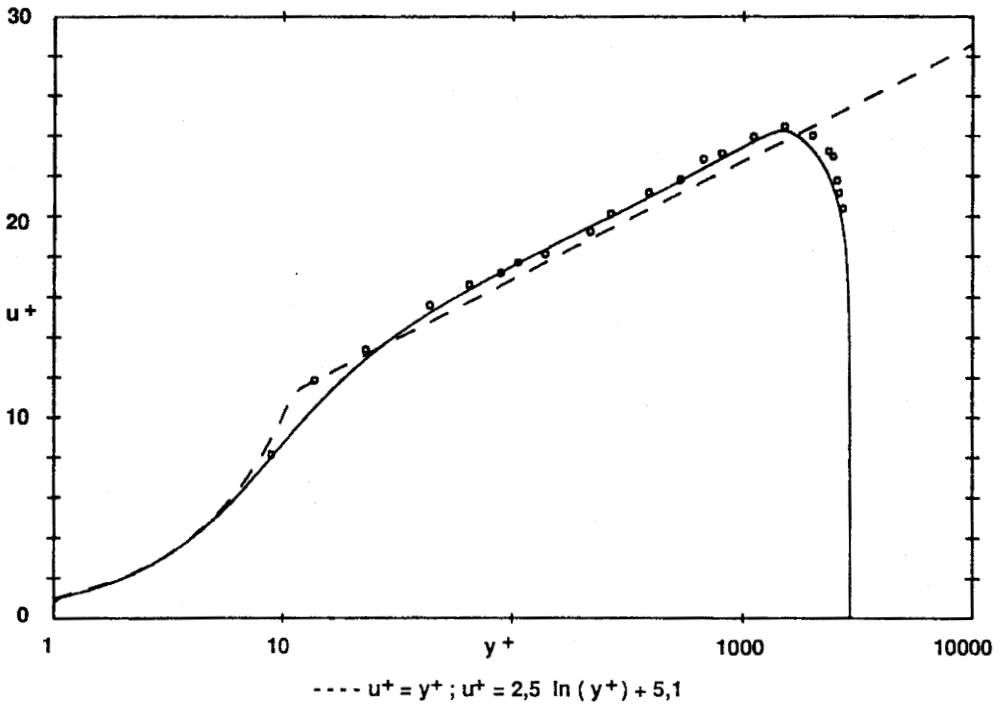


Expériences: \square (a) $Re_{max} = 24600$: LAUFER < 2-10 >
 \square (b) $Re_{max} = 61600$: LAUFER < 2-10 >
 \circ (c) $Re_{max} = 71040$: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >



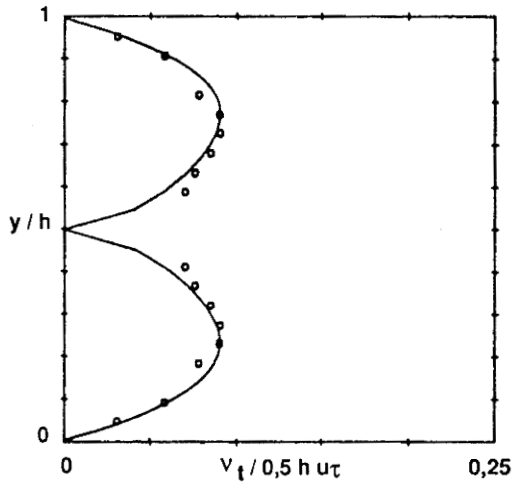
Expériences: \times (a) $Re_{max} = 27600$: HUSSAIN & REYNOLDS < 2-14 >
 \times (b) $Re_{max} = 46400$: HUSSAIN & REYNOLDS < 2-14 >
 \times (c) $Re_{max} = 64600$: HUSSAIN & REYNOLDS < 2-14 >

Figure 4-2: Modèle de longueur de mélange
 Profils de vitesse pour des écoulements de POISEUILLE



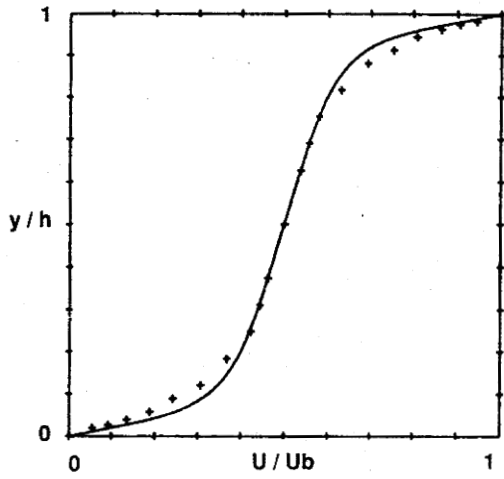
○ Remax = 71040: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >

Figure 4-3: Modèle de longueur de mélange
Profil de u^+ en fonction de y^+ pour un écoulement de POISEUILLE

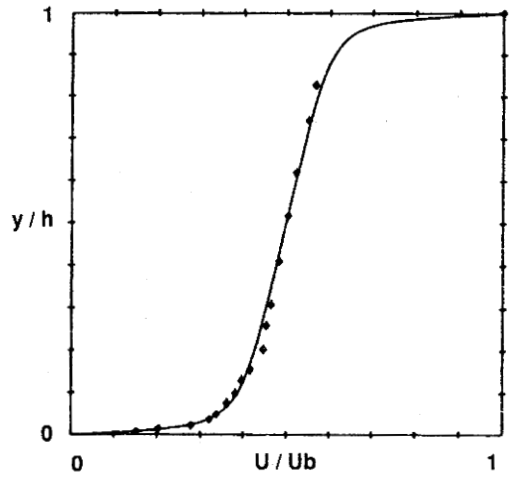


○ Remax = 76370: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-17 >

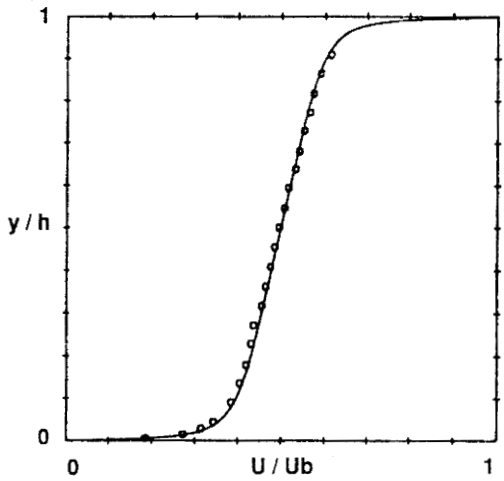
Figure 4-4: Modèle de longueur de mélange
Profil de v_t pour un écoulement de POISEUILLE



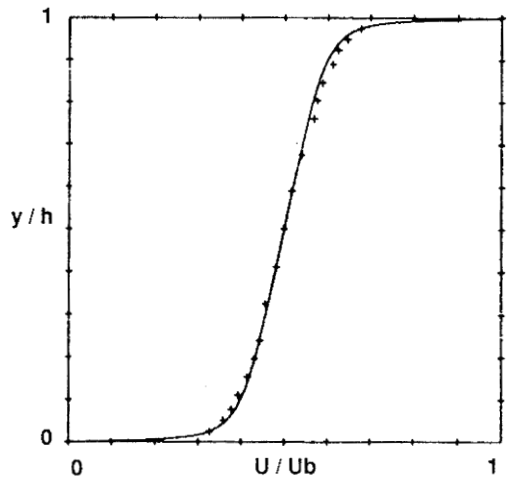
+ $Re_b = 5800$: REICHARDT < 2-21 >



♦ $Re_b = 28200$: ROBERTSON & JOHNSON < 2-22 >

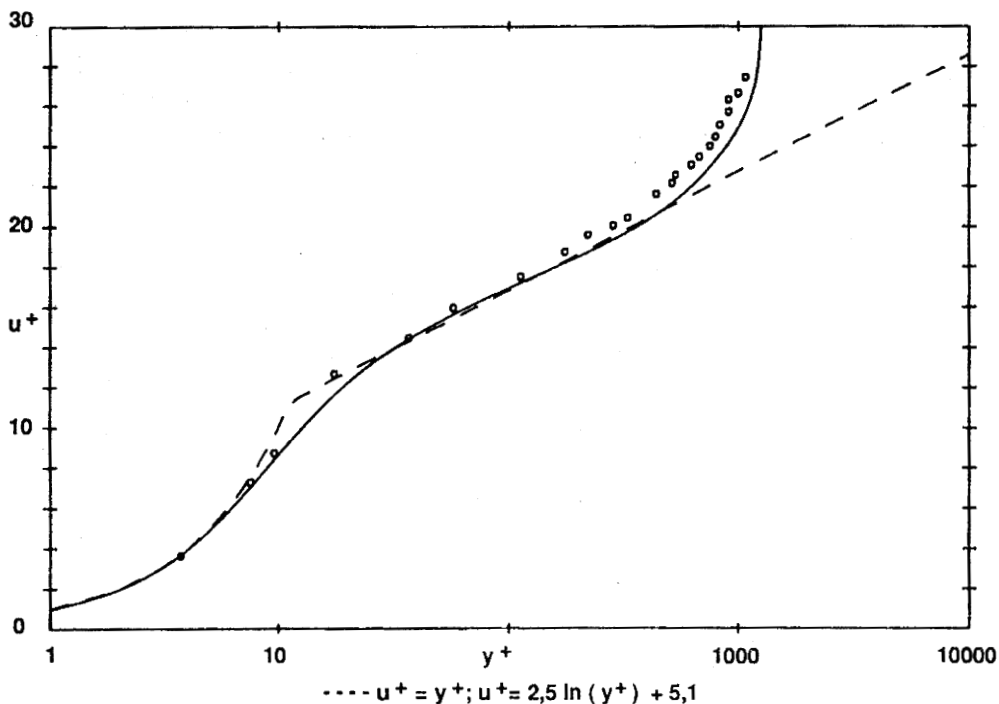


o $Re_b = 57010$: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >



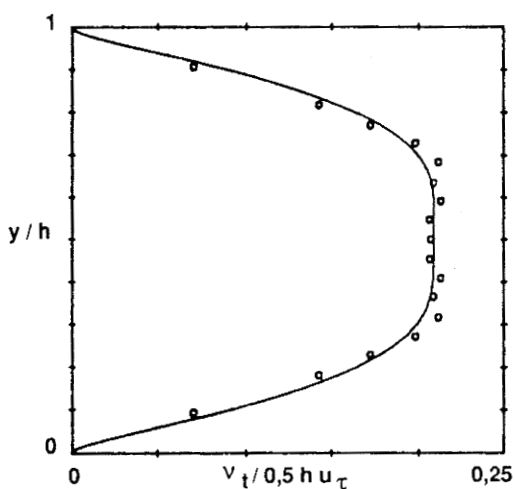
+ $Re_b = 68000$: REICHARDT < 2-21 >

Figure 4-5: Modèle de longueur de mélange
Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE pur



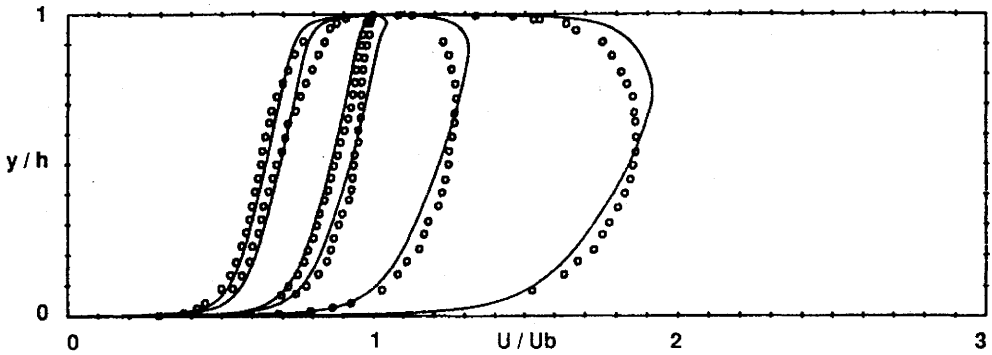
o Reb = 57010: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >

Figure 4-6: Modèle de longueur de mélange
 Profil de u^+ en fonction de y^+ pour un écoulement de COUETTE pur

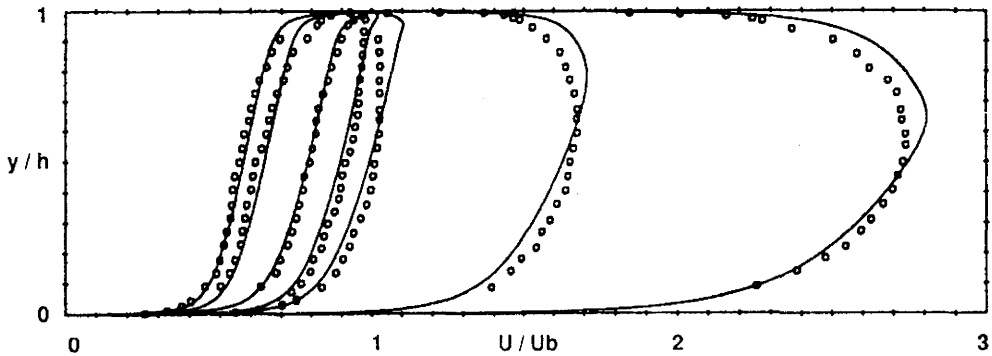


o Reb = 57010: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-17 >

Figure 4-7: Modèle de longueur de mélange
 Profil de v_t pour un écoulement de COUETTE pur



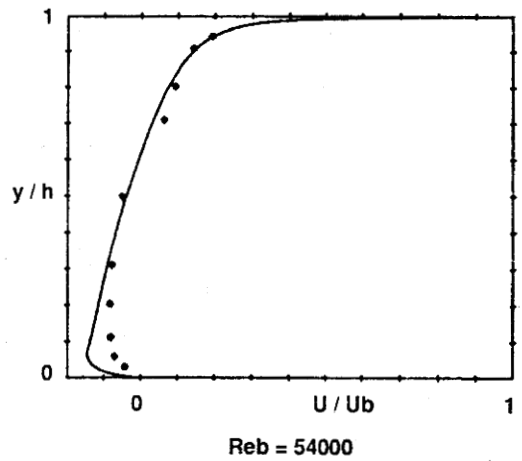
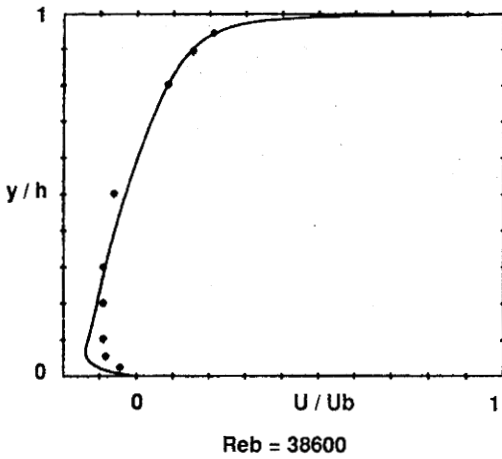
◊ EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >
Expériences n° 3, 5, 7, 9, 11, 13 (voir annexe A)



◊ EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >
Expériences n° 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 (voir annexe A)

Figure 4-8: Modèle de longueur de mélange

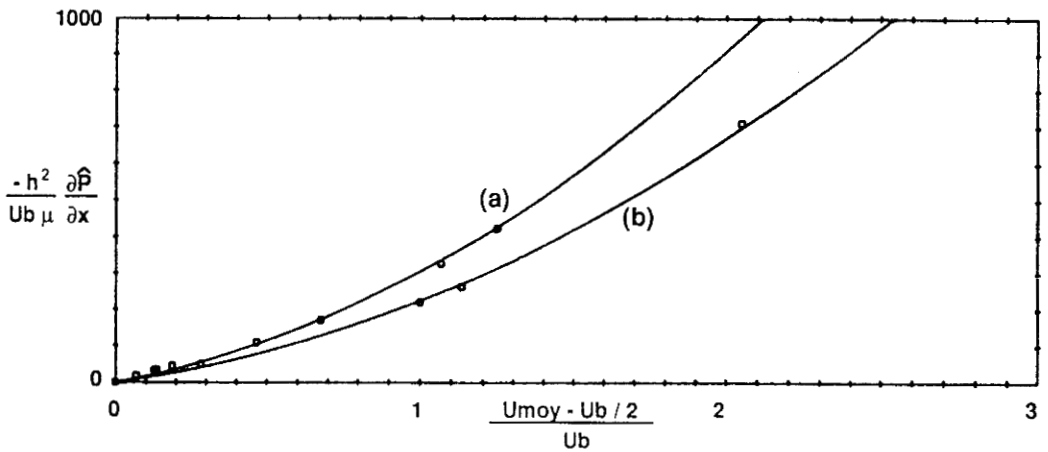
Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE avec gradient de pression



* HUEY & WILLIAMSON < 2-24 >

Figure 4-9: Modèle de longueur de mélange

Profils de vitesse pour des écoulements de COUETTE sans vitesse débitante



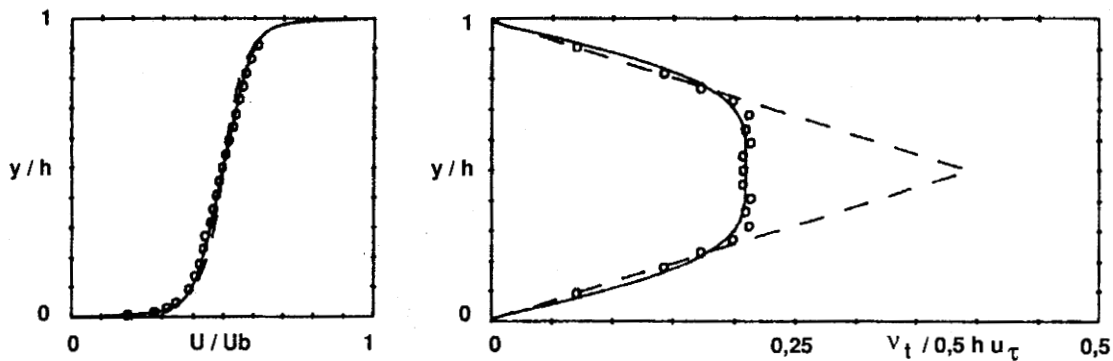
(a) $Re_b = 57010$

(b) $Re_b = 38140$

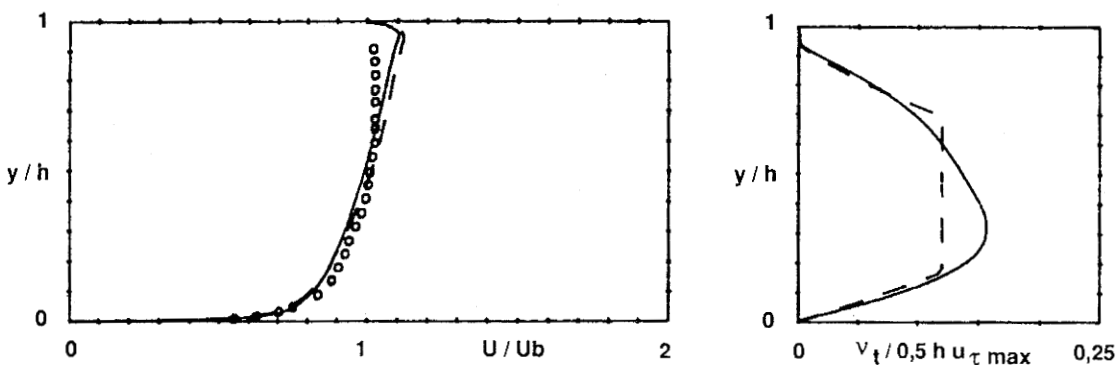
o EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >

Figure 4-10: Modèle de longueur de mélange

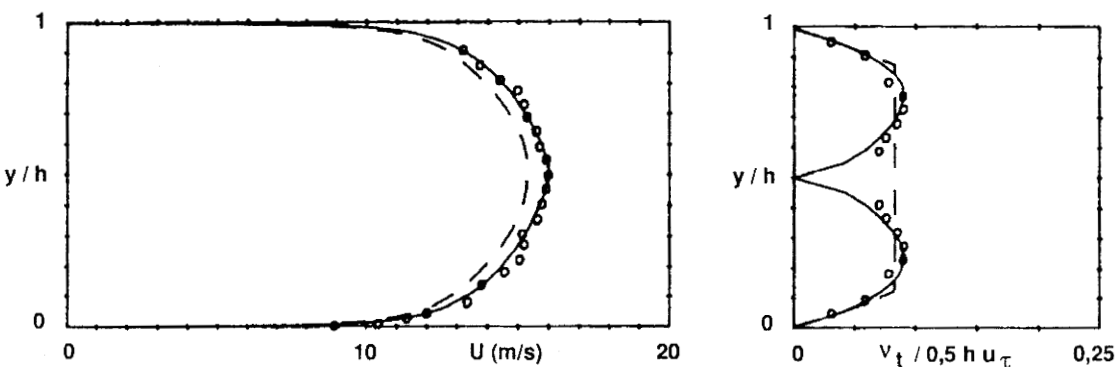
Prédiction du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante



Expérience n° 1 (Annexe A)
 a) Ecoulement de COUETTE pur



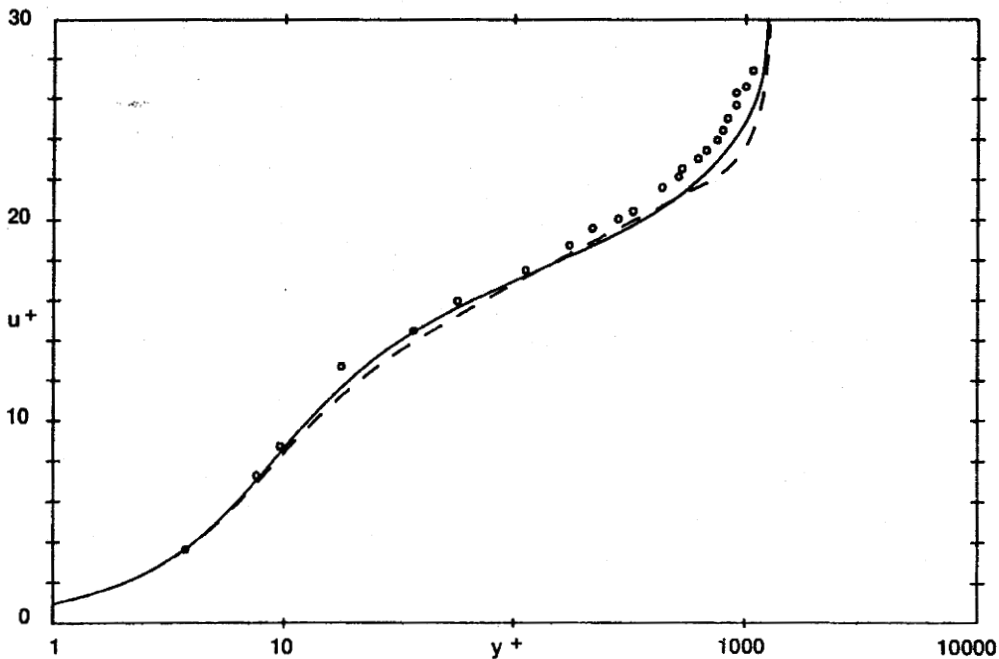
Expérience n°10 (Annexe A)
 b) Ecoulement de COUETTE avec gradient de pression



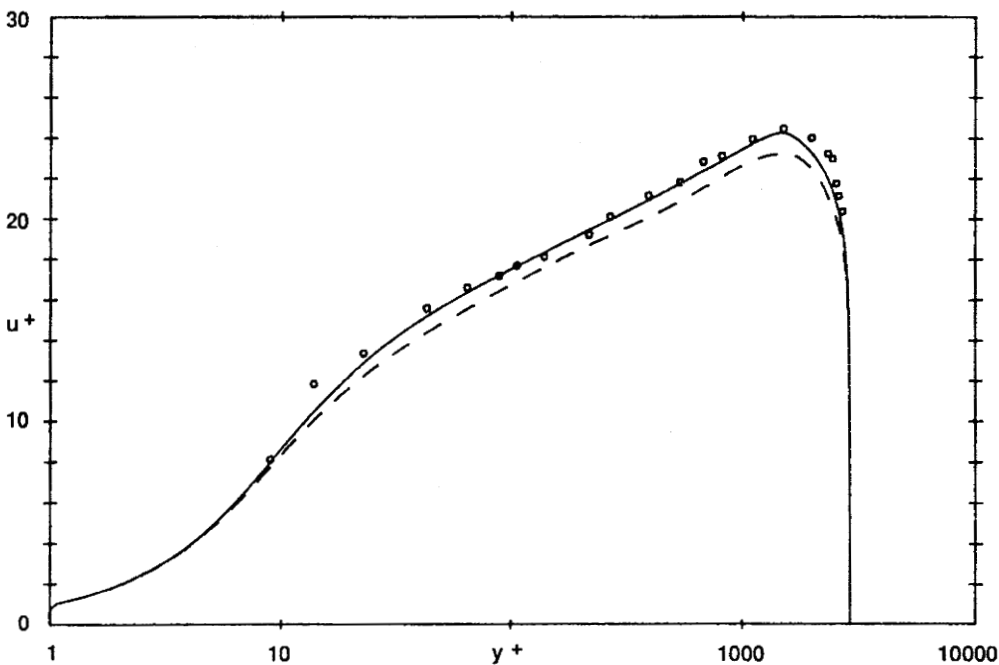
Expérience n° 15 (Annexe A)
 c) Ecoulements de POISEUILLE

— Modèle de longueur de mélange - - - Modèle de ELROD & NG < 2-19 >
 o Expériences de EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 > - < 2-17 >

Figure 4-11: Comparaisons des prédictions de deux modèles de longueur de mélange



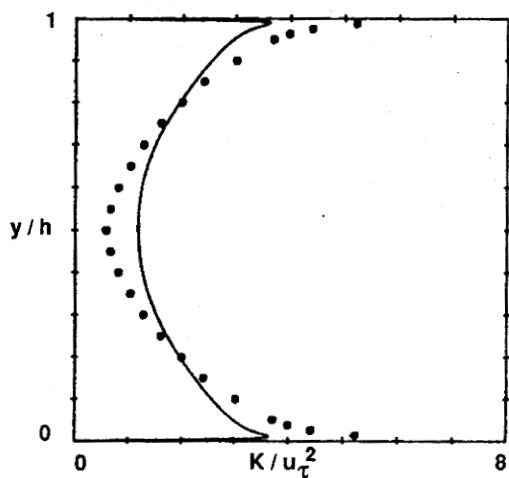
a) Ecoulement de COUETTE pur: $Re_b = 57010$



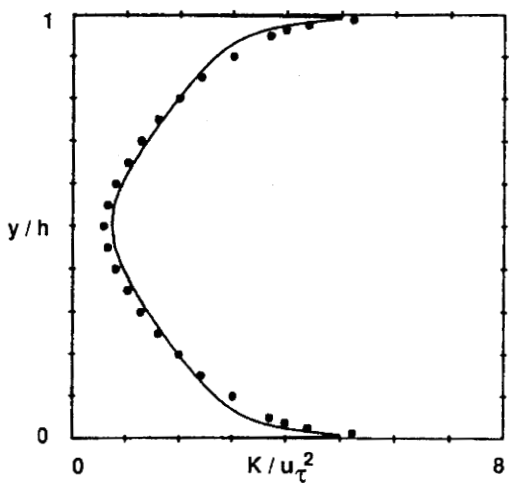
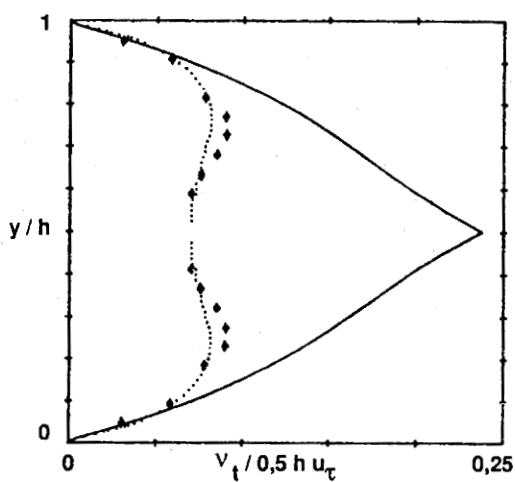
b) Ecoulement de POISEUILLE: $Re_{max} = 71040$

— Modèle de longueur de mélange - - - Modèle de ELROD & NG < 2-19 >
 ○ Expériences de EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >

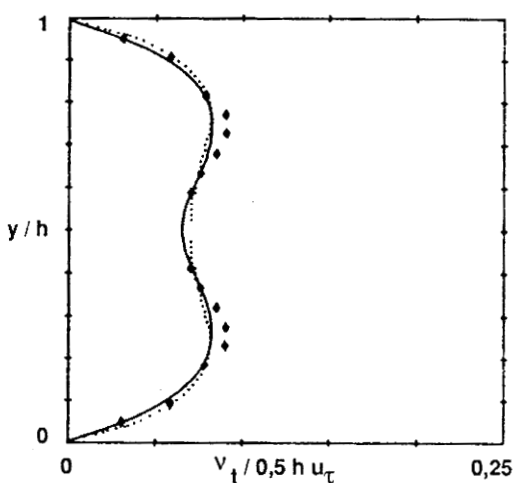
Figure 4-12: Comparisons des prédictions de deux modèles de longueur de mélange



a) Modèle de WOLFSHTEIN < 2-40 >



b) Modèle de HASSID & POREH < 2-41 >



- Prédications des modèles
- Remax = 55200: CLARK < 2-13 >
- Remax = 64600: HUSSAIN & REYNOLDS < 2-14 >
- ◆ Remax = 76370: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-17 >

Figure 5-1: Modèles à une équation de transport
Prédications de K et v_t pour des écoulements de POISEUILLE

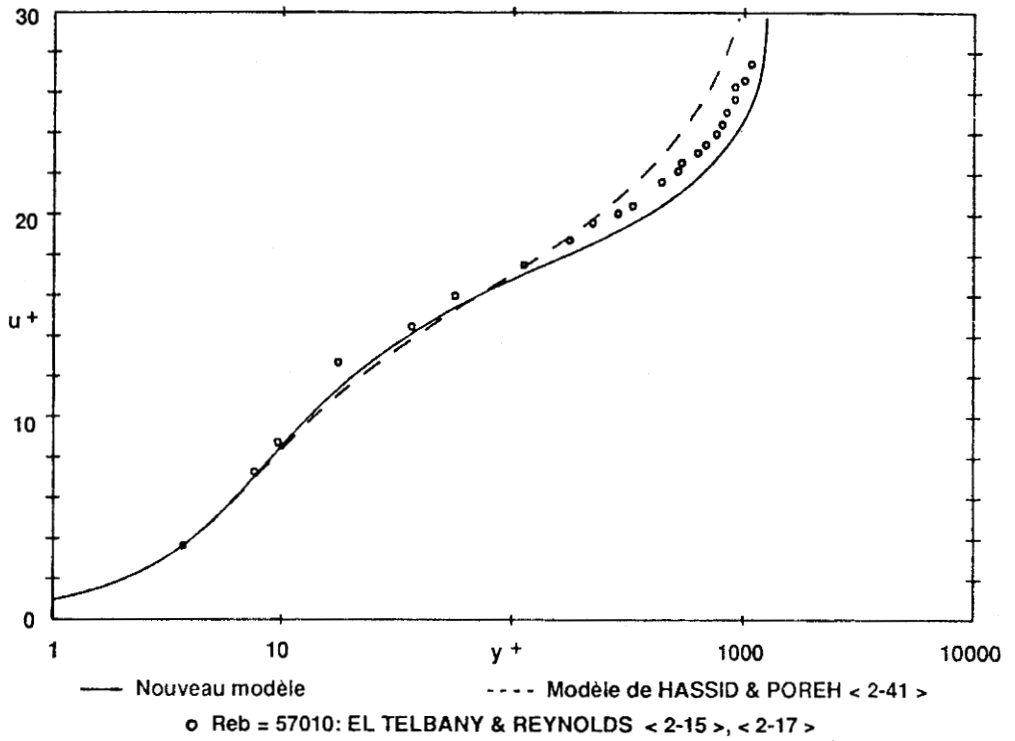
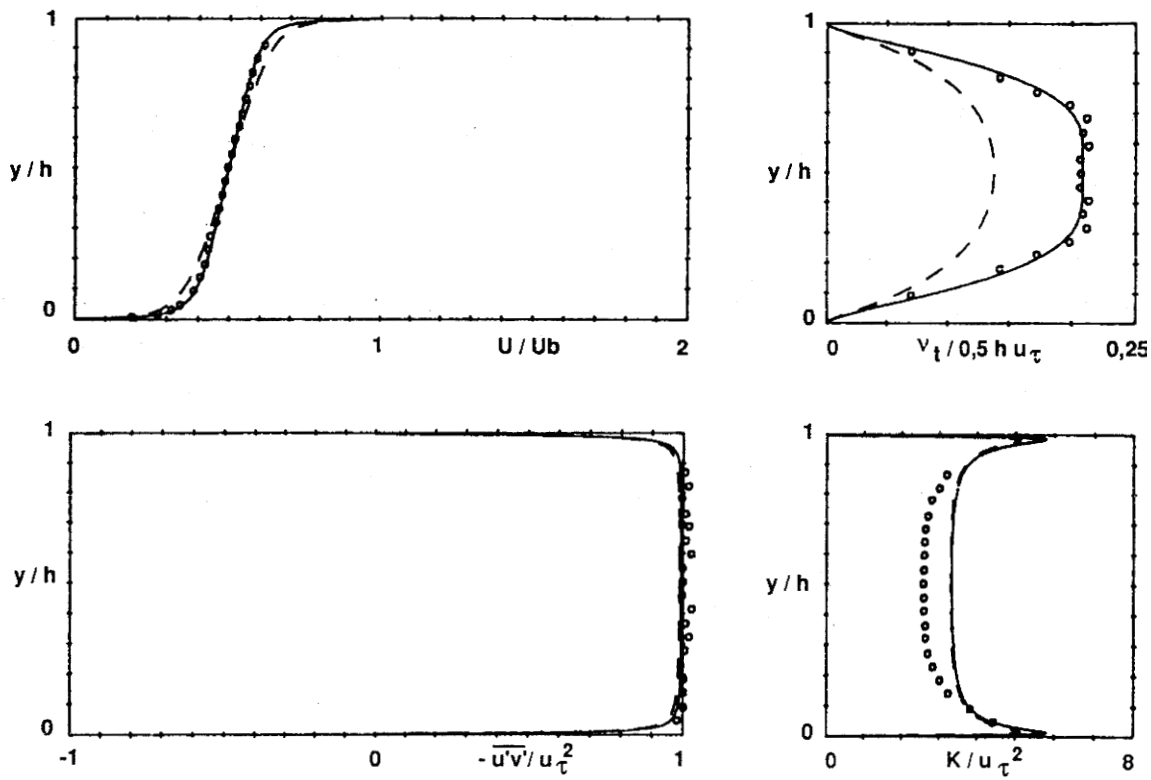
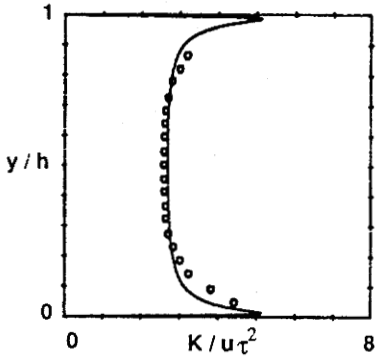
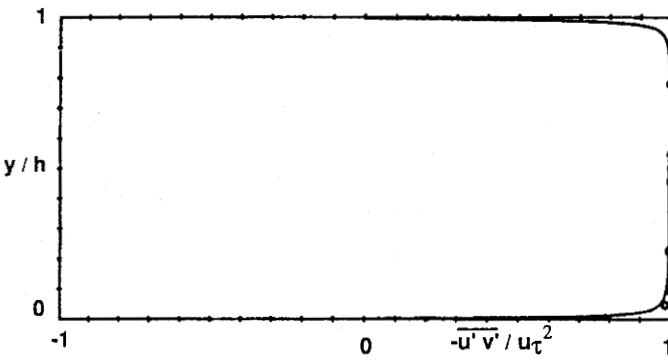
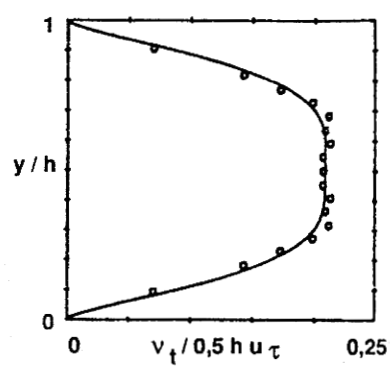
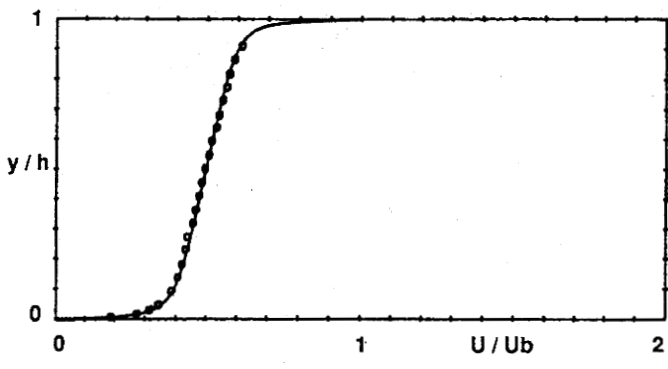
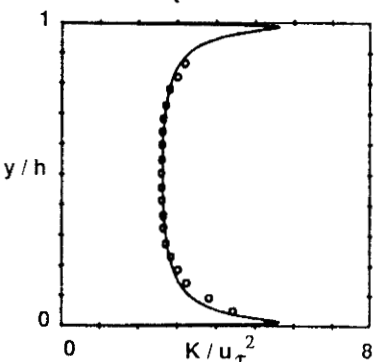
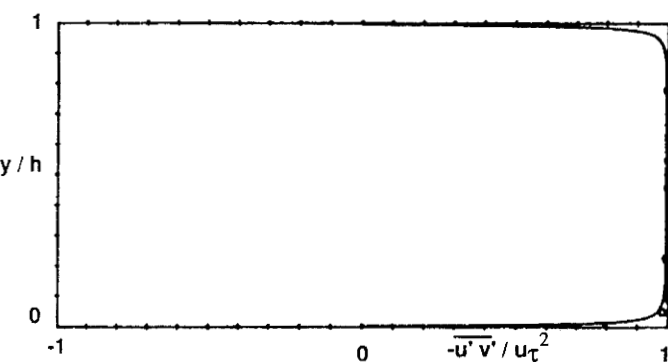
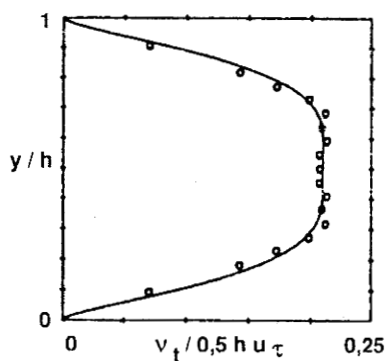
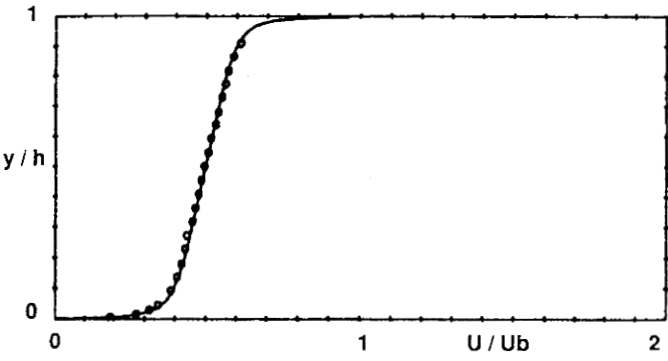


Figure 5-2: Modèles à une équation de transport
Prédictions d'un écoulement de COUETTE pur



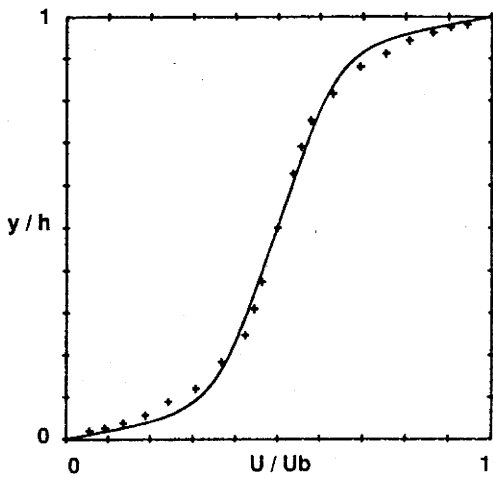
a) Changement des constantes C_μ et C_{D1}



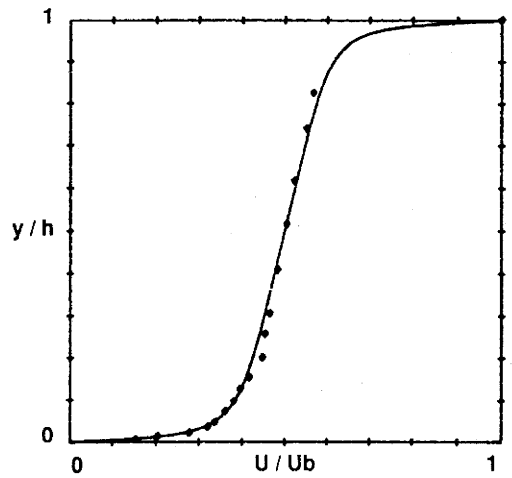
b) Utilisation de deux échelles de longueur

— Modèle modifié o Reb = 57010: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >, < 2-17 >

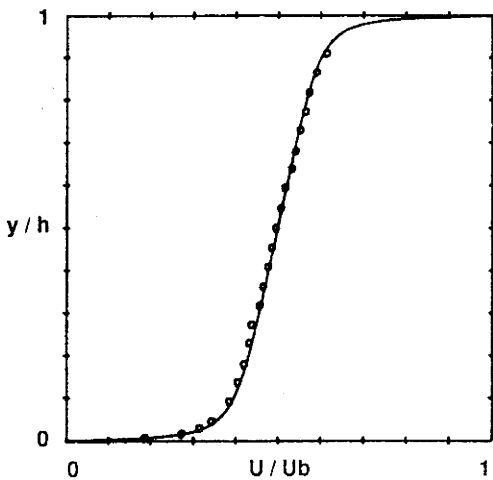
Figure 5-3: Modèles à une équation de transport
Prédictions d'un écoulement de COUETTE pur



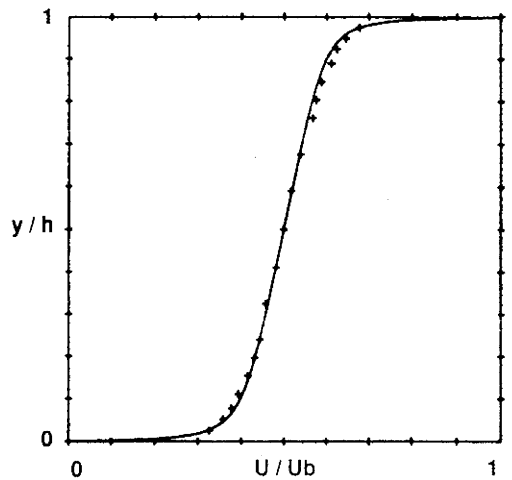
+ $Re_b = 5800$: REICHARDT < 2-21 >



♦ $Re_b = 28200$: ROBERTSON & JOHNSON < 2-22 >



o $Re_b = 57010$: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >



+ $Re_b = 68000$: REICHARDT < 2-21 >

— Nouveau modèle

Figure 5-4: Modèle à une équation de transport
Prédictions d'écoulements de COUETTE pur

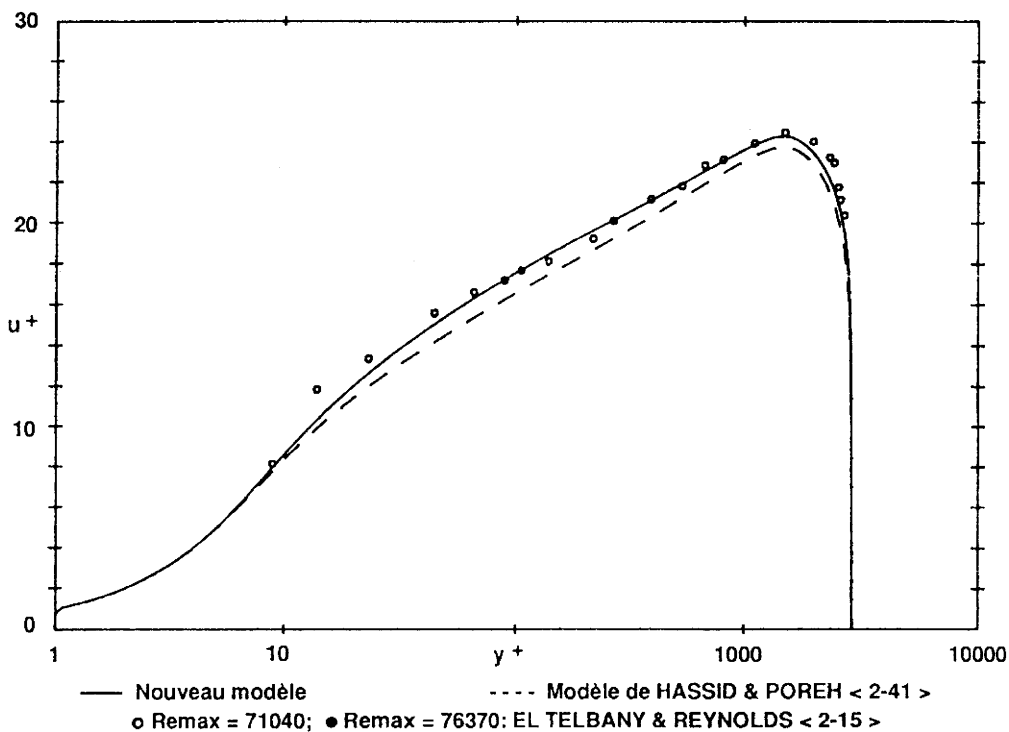
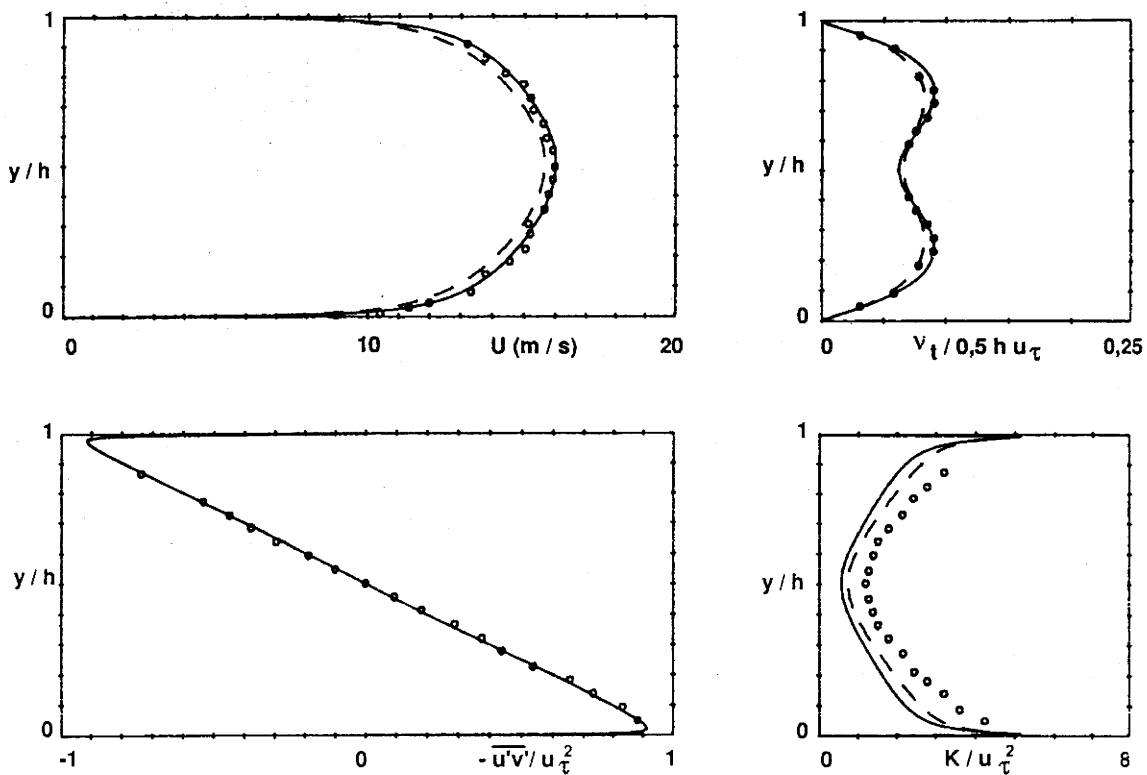
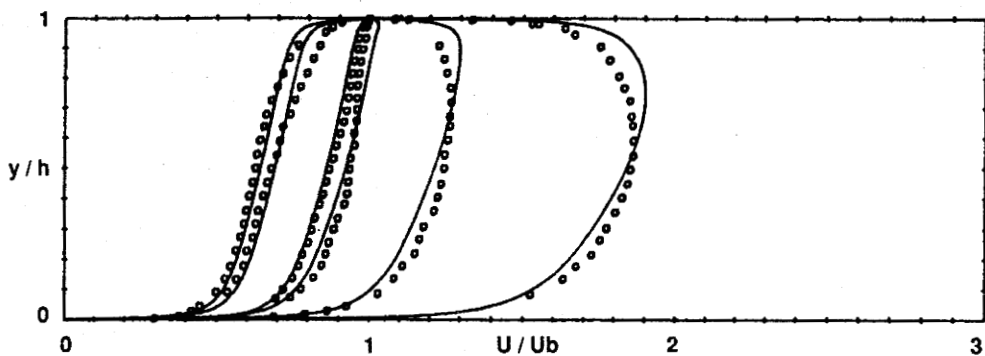
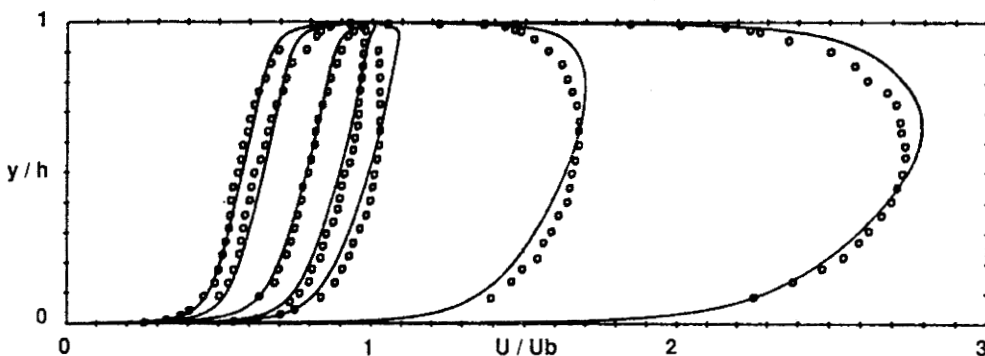


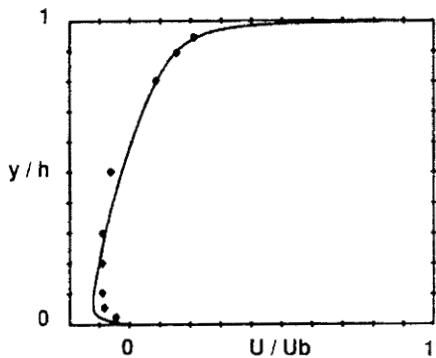
Figure 5-5: Modèles à une équation de transport
Prédictions d'un écoulement de POISEUILLE



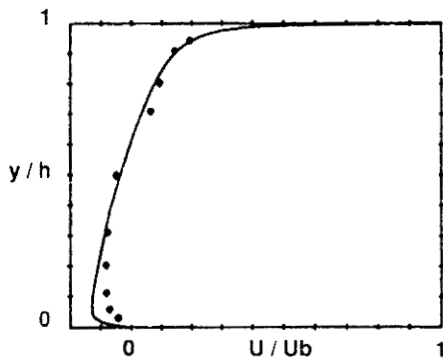
○ EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >
Expériences n° 3, 5, 7, 9, 11, 13 (annexe A)



○ EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >
Expériences n° 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 (annexe A)



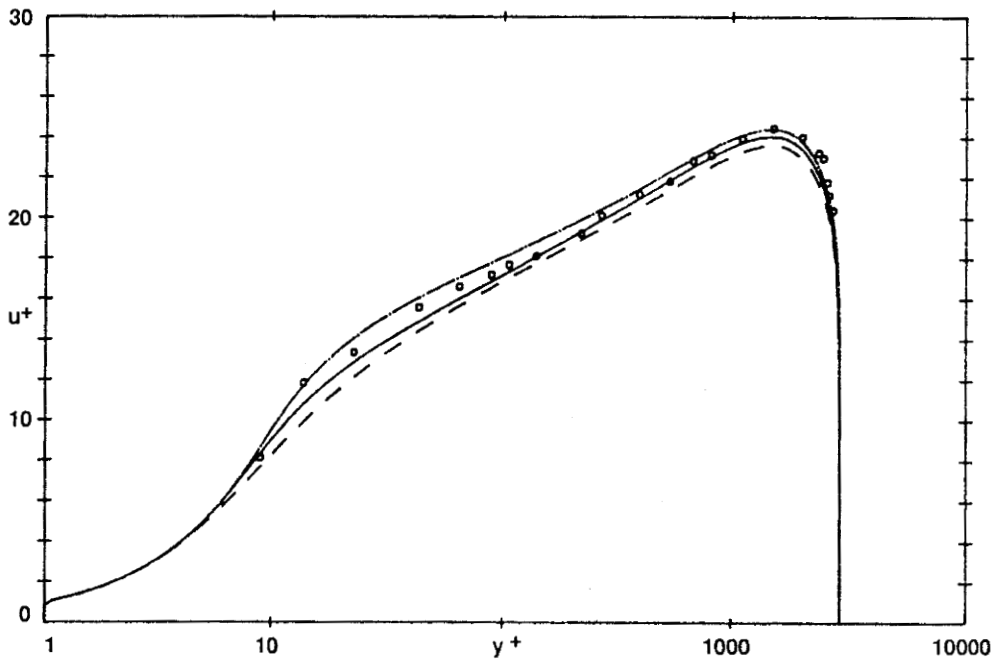
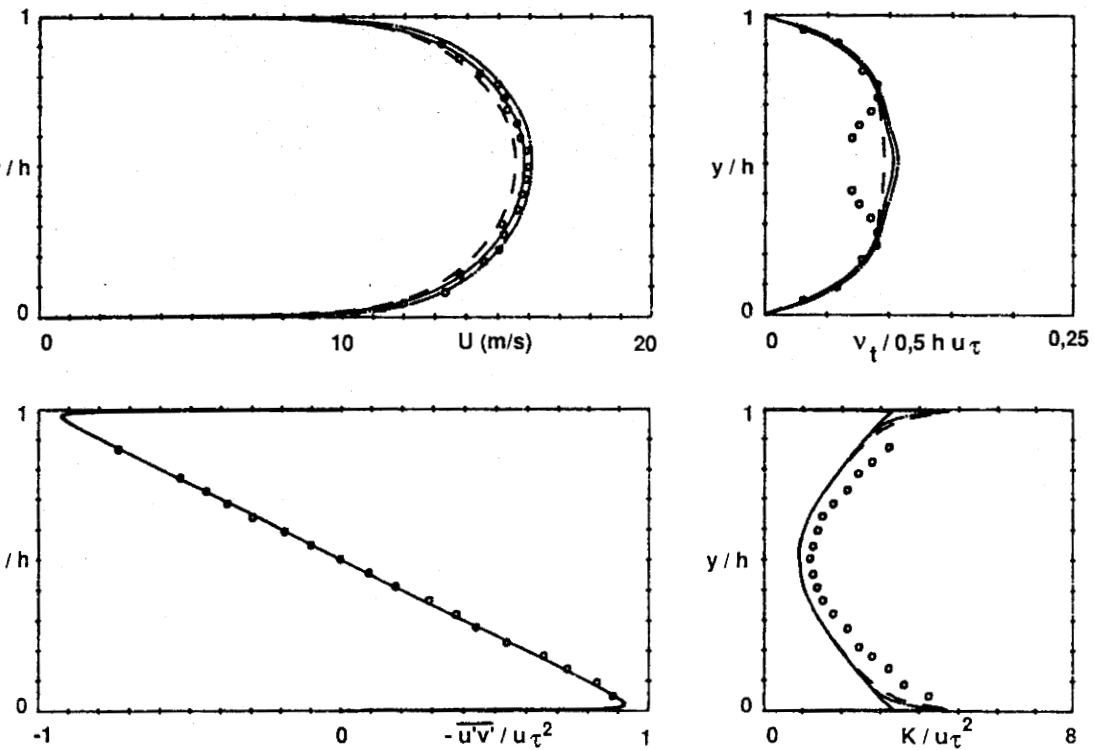
Re_b = 38600



Re_b = 54000

* HUEY & WILLIAMSON < 2-24 >

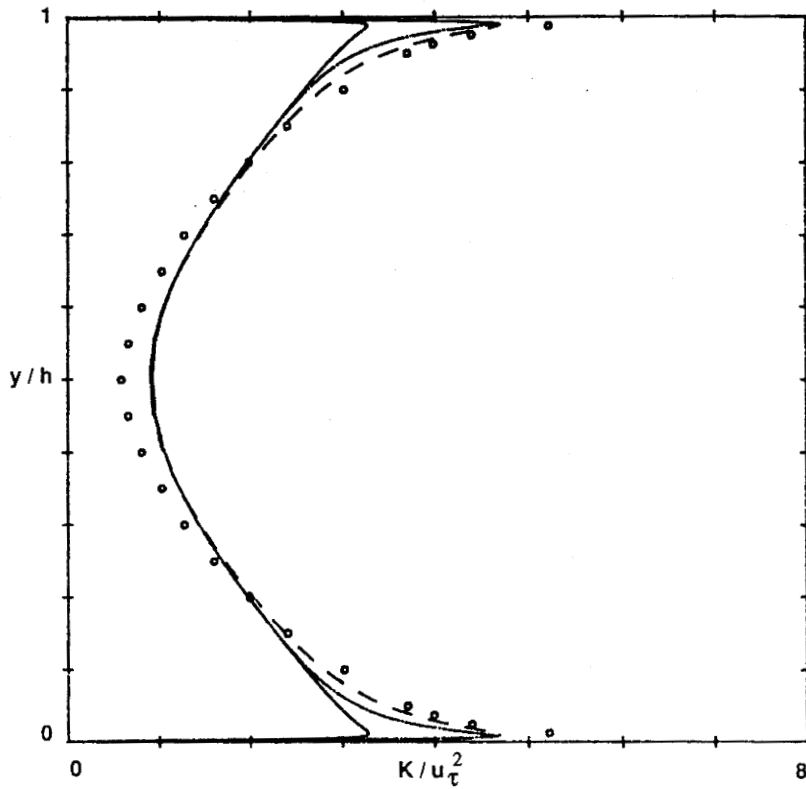
Figure 5-7: Modèle à une équation de transport
Prédictions d'écoulements de COUETTE avec gradient de pression



— LAUNDER & SHARMA < 2-59 > - - - - CHIEN < 2-58 > - - - - LAM & BREMHORST < 2-60 >

○ Remax = 71040; ● Remax = 76370: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >, < 2-17 >

Figure 6-1: Modèles à deux équations de transport
Prédictions d'un écoulement de POISEUILLE



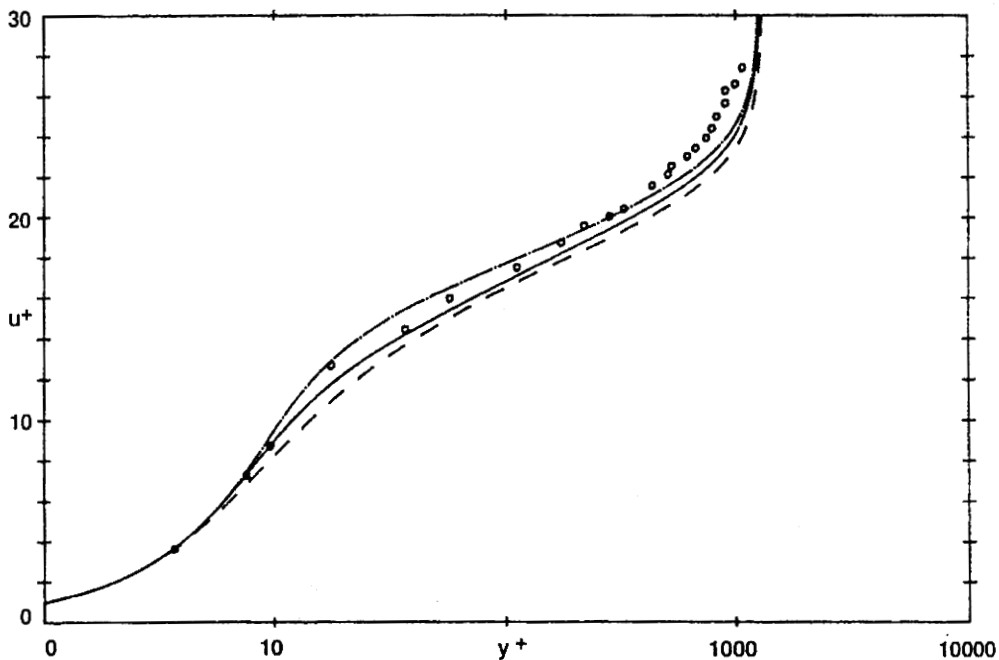
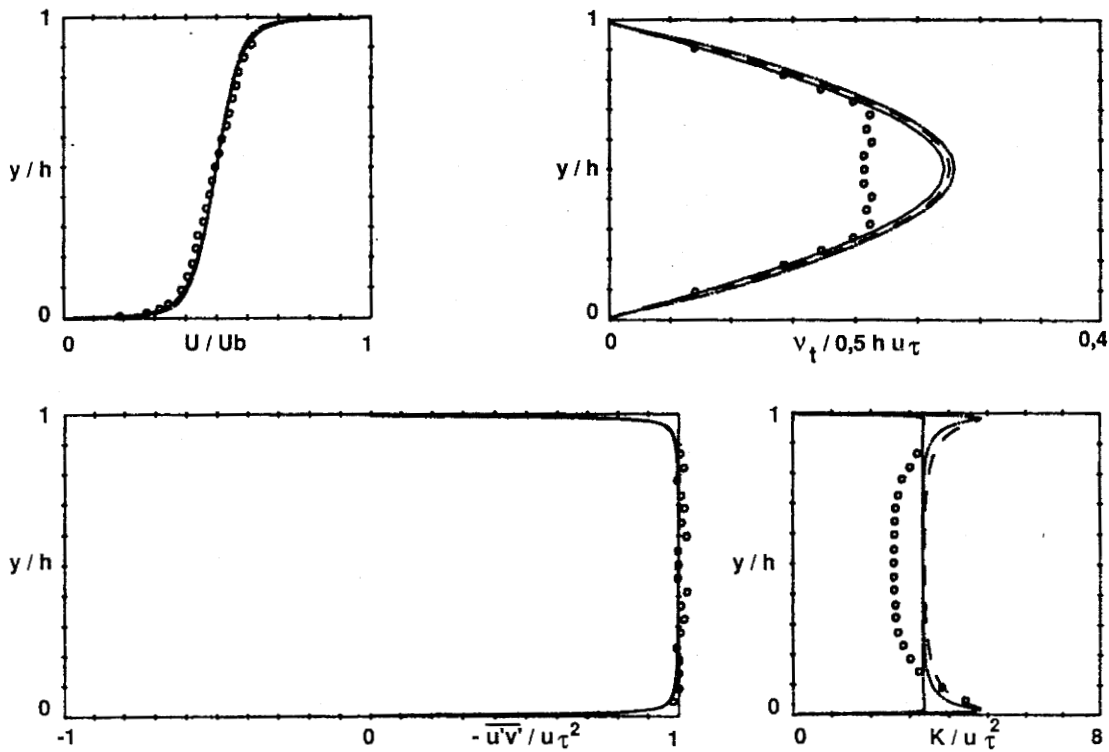
— LAUNDER & SHARMA < 2-59 >

---- CHIEN < 2-58 >

- . - . - LAM & BREMHORST < 2-60 >

o Remax = 55200: CLARK < 2-13 >

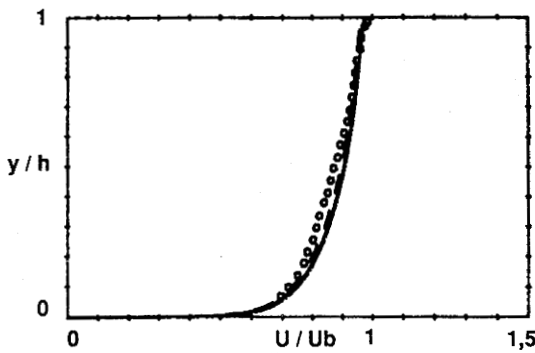
Figure 6-2: Modèles à deux équations de transport
Prédiction de K pour un écoulement de POISEUILLE



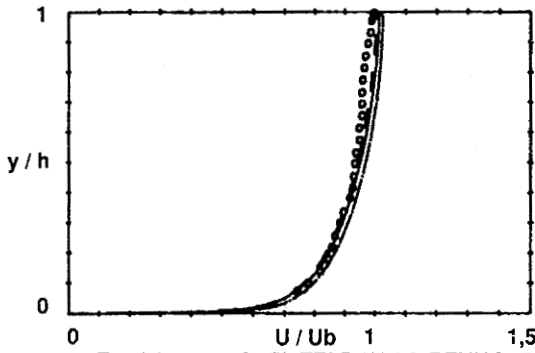
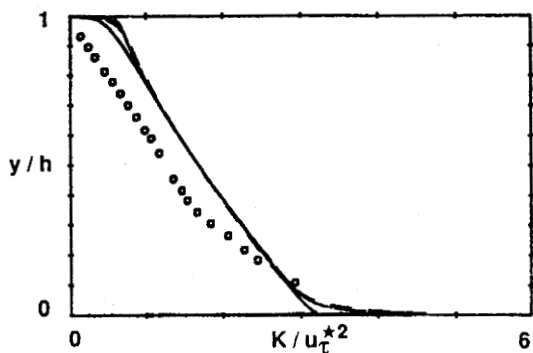
— LAUNDER & SHARMA <2-59> - - - - CHIEN <2-58> - · - · - LAM & BREMHORST <2-60>

○ Remax = 57010: EL TELBANY & REYNOLDS <2-15>, <2-17>

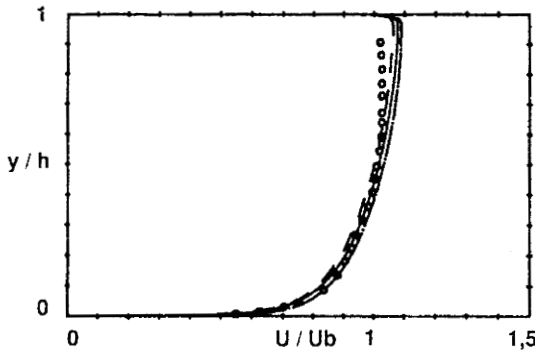
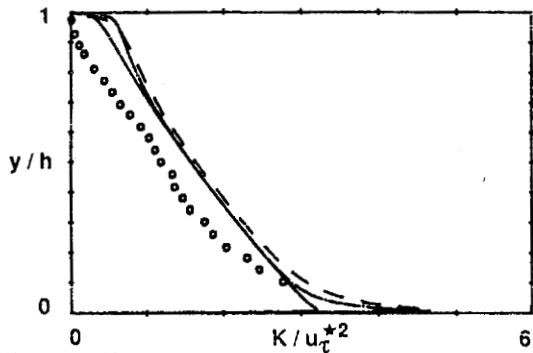
**Figure 6-3: Modèles à deux équations de transport
Prédictions d'un écoulement de COUETTE pur**



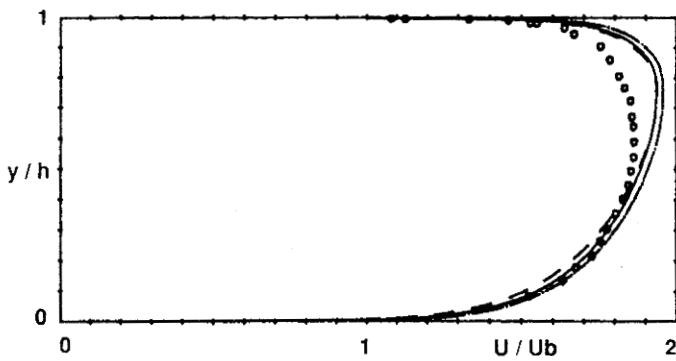
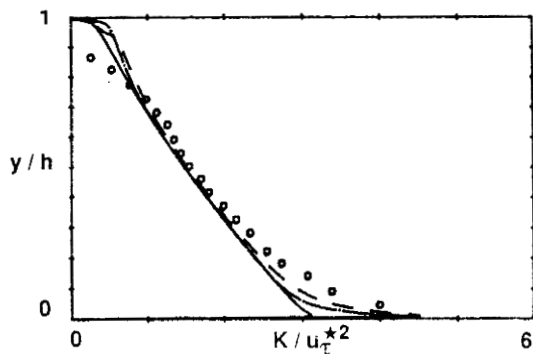
o Expérience n°7: EL TELBANY & REYNOLDS (annexe A)



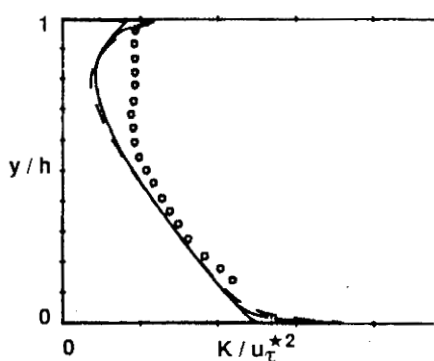
o Expérience n°9: EL TELBANY & REYNOLDS (annexe A)



o Expérience n°10: EL TELBANY & REYNOLDS (annexe A)

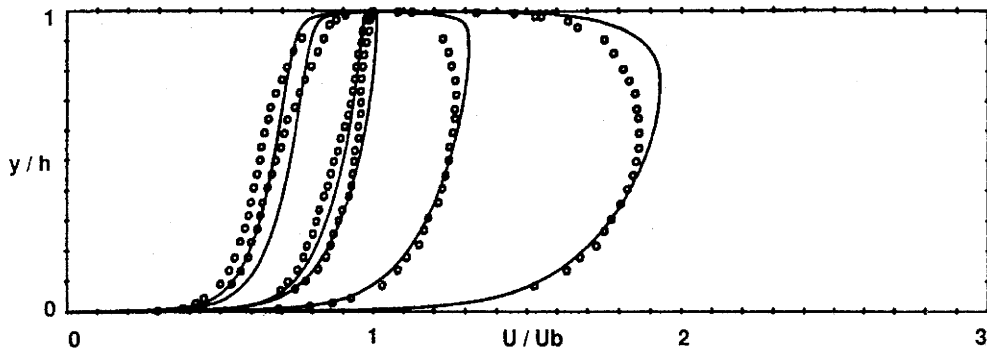


o Expérience n°13: EL TELBANY & REYNOLDS (annexe A)

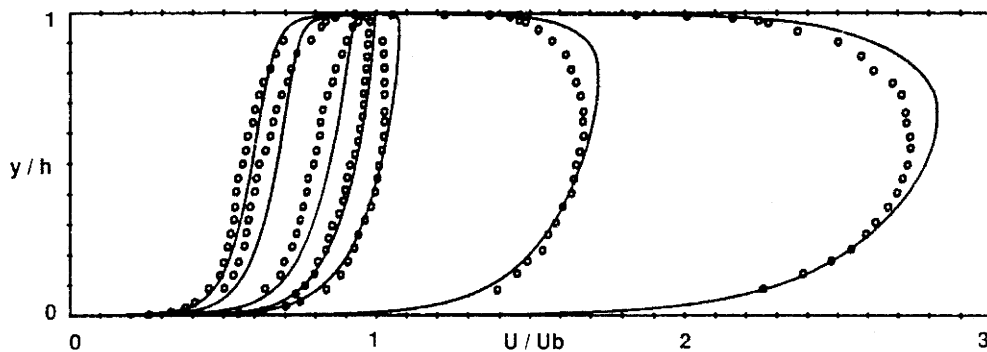


— LAUNDER & SHARMA <2-59> --- CHIEN <2-58> - - - - LAM & BREMHORST <2-60>

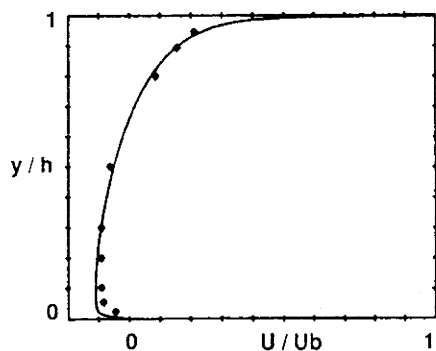
Figure 6-4: Modèles à deux équations de transport
Prédictions d'écoulements de COUETTE avec gradient de pression



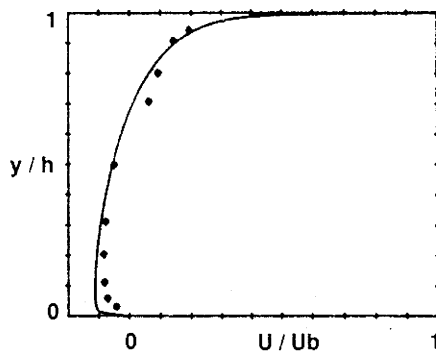
○ EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >
Expériences n°3, 5, 7, 9, 11, 13 (voir annexe A)



○ EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >
Expériences n° 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 (voir annexe A)



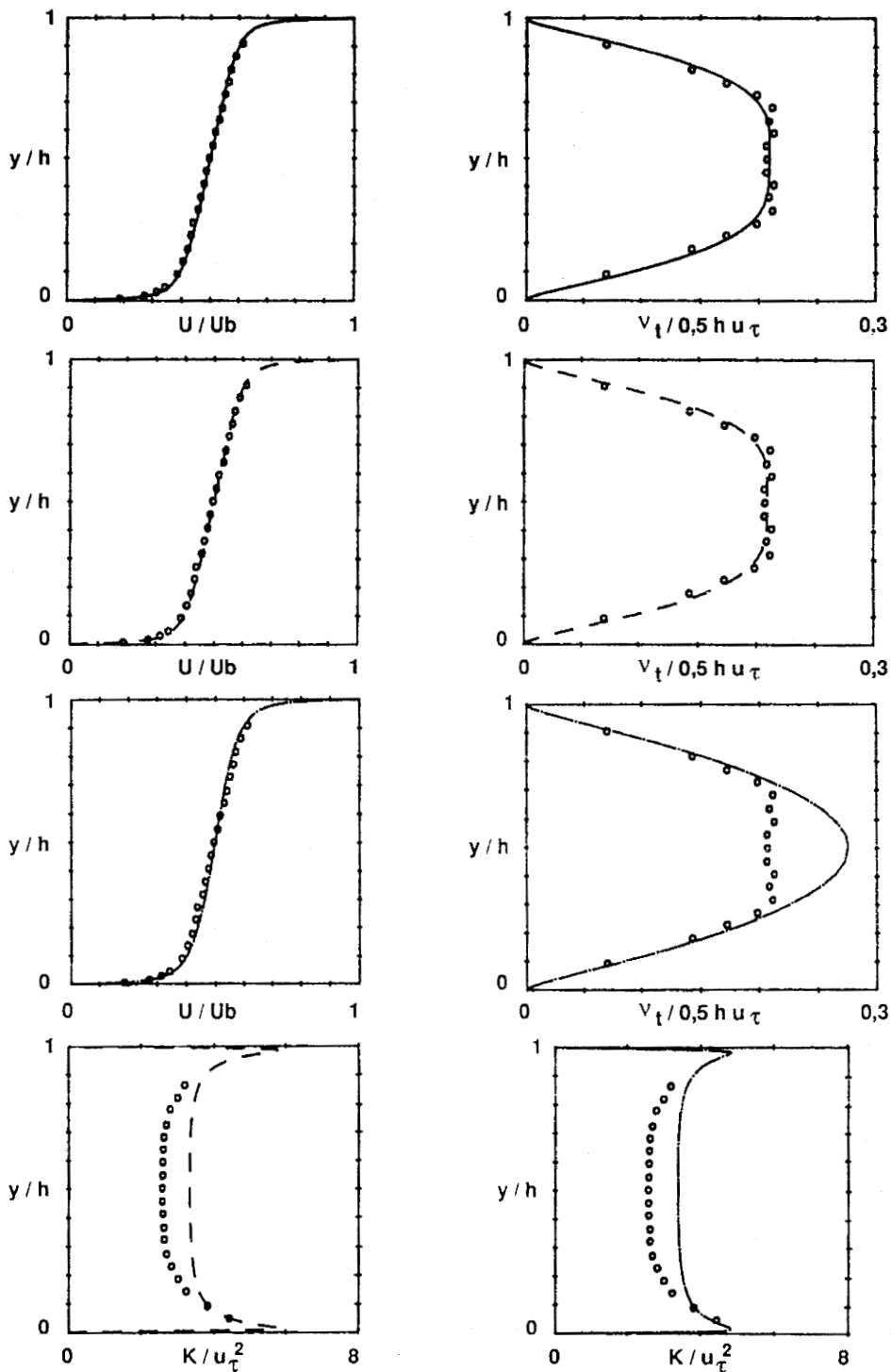
Reb = 38600



Reb = 54000

● HUEY & WILLIAMSON < 2-24 >
— Modèle de CHIEN < 2-58 >

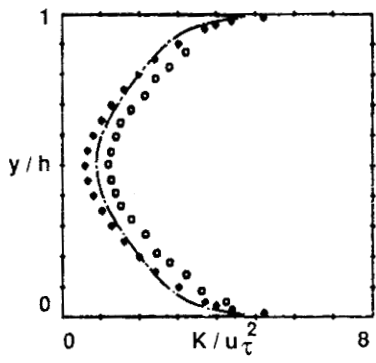
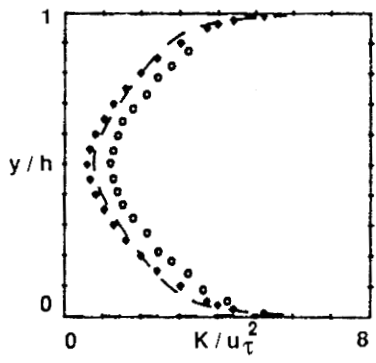
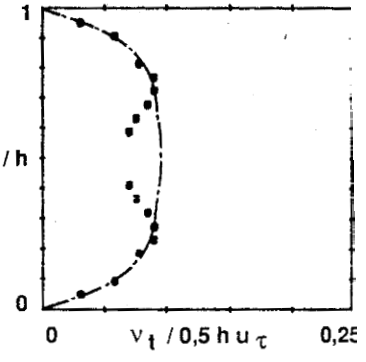
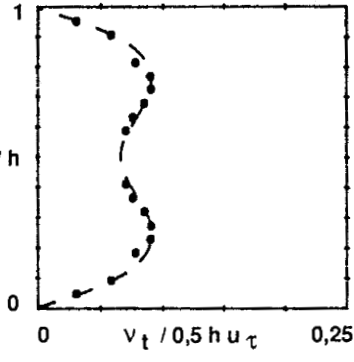
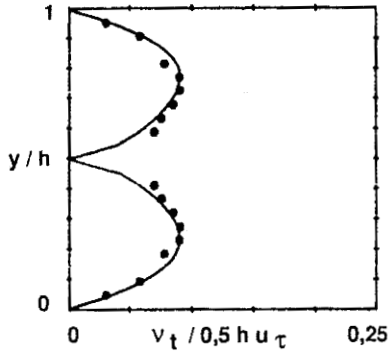
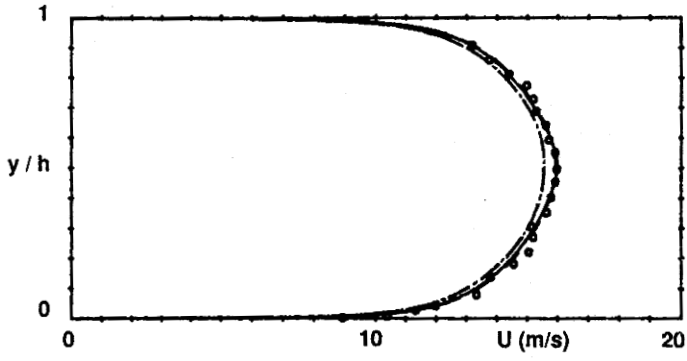
Figure 6-5: Modèle à deux équations de transport
Prédictions d'écoulements de COUETTE avec gradient de pression



- Modèle de longueur de mélange
- - - Modèle à une équation de transport
- · - · - · Modèle K - ε de CHEN <2-58 >

o Reb = 57010: EL TELBANY & REYNOLDS <2-15 >

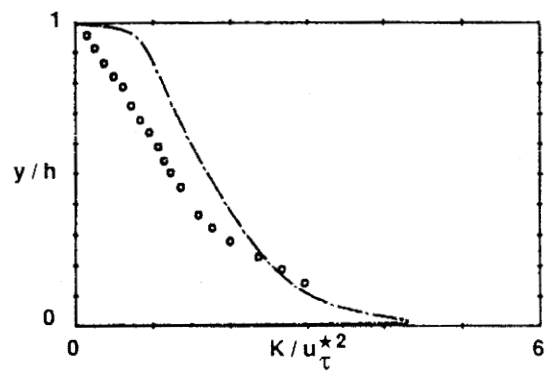
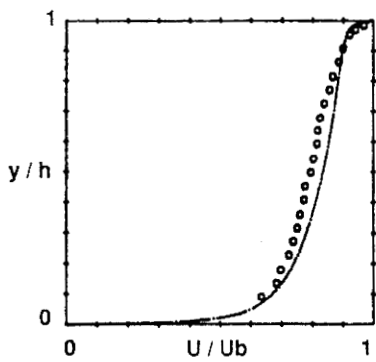
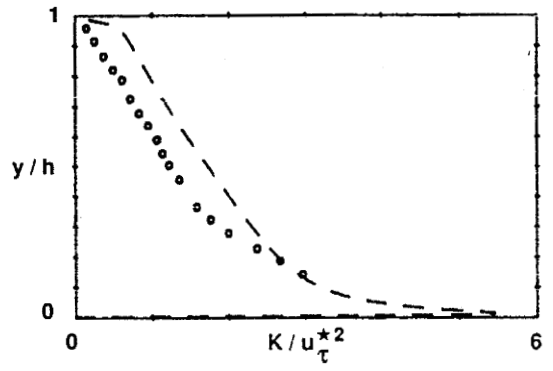
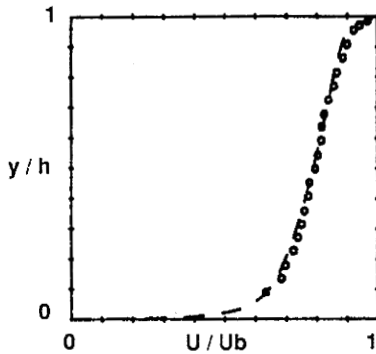
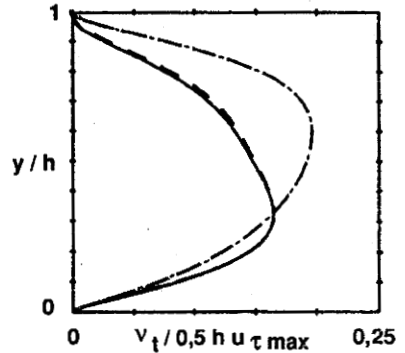
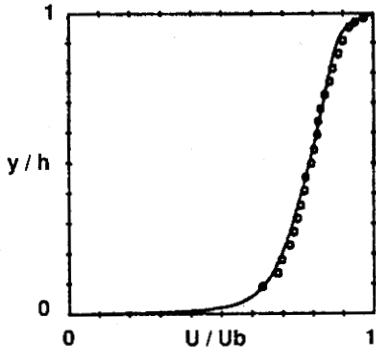
Figure 7-1: Comparaisons entre trois modèles de turbulence
Prédictions d'un écoulement de COUETTE pur



— Modèle de longueur de mélange
 - - - Modèle à une équation de transport
 - · - · - Modèle K - ε de CHIEN <2-58 >

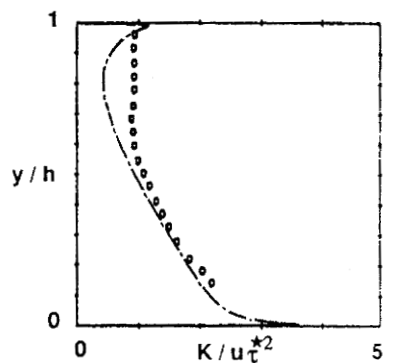
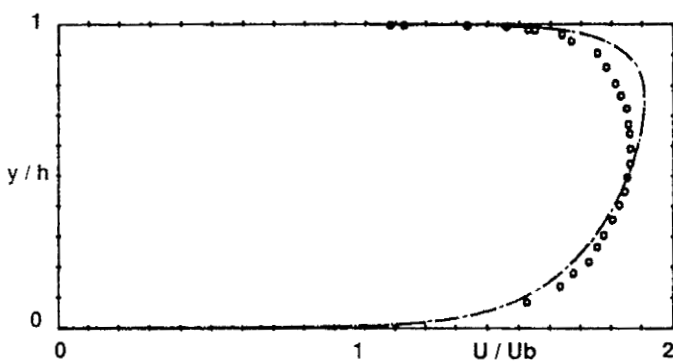
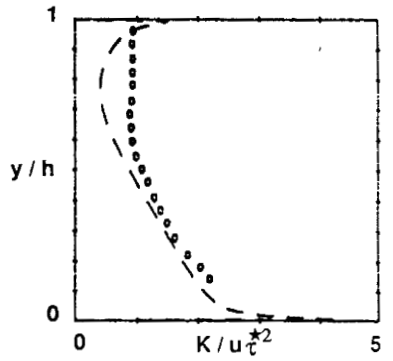
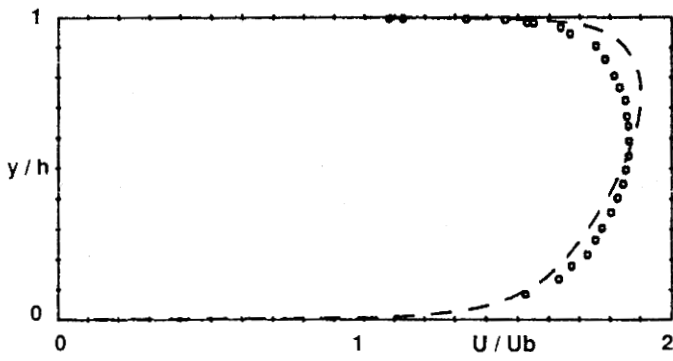
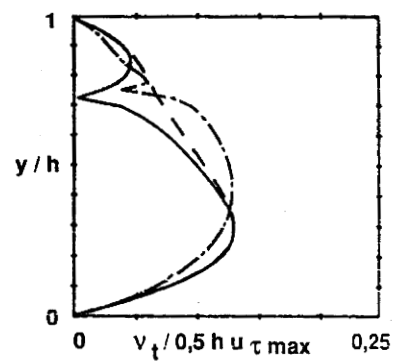
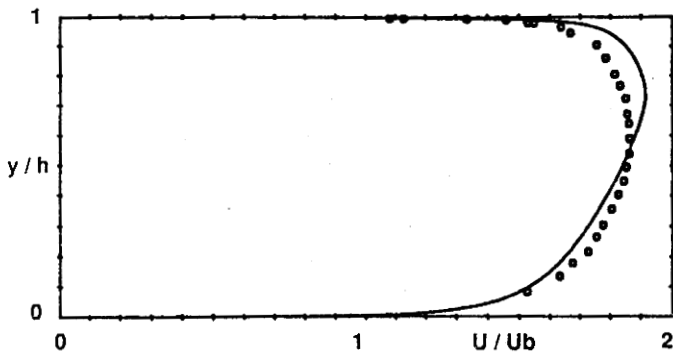
○ Remax = 71040: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >, < 2-16 >
 ● Remax = 76370: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-15 >, < 2-16 >
 * Remax = 55200: CLARK < 2-13 >

**Figure 7-2: Comparaisons entre trois modèles de turbulence
 Prédications d'écoulements de POISEUILLE**



- Modèle de longueur de mélange
- - - Modèle à une équation de transport
- · - · - Modèle K - ε de CHIEN < 2-58 >

○ Expérience n°6: EL TELBANY & REYNOLDS (annexe A)
 Figure 7-3: Comparaisons entre trois modèles de turbulence
 Prédications d'un écoulement de type COUETTE



- Modèle de longueur de mélange
- - - Modèle à une équation de transport
- · - · - Modèle K - ε de CHIEN < 2-58 >

o Expérience n°13: EL TELBANY & REYNOLDS (annexe A)

**Figure 7-4: Comparaisons entre trois modèles de turbulence
Prédictions d'un écoulement de type POISEUILLE**

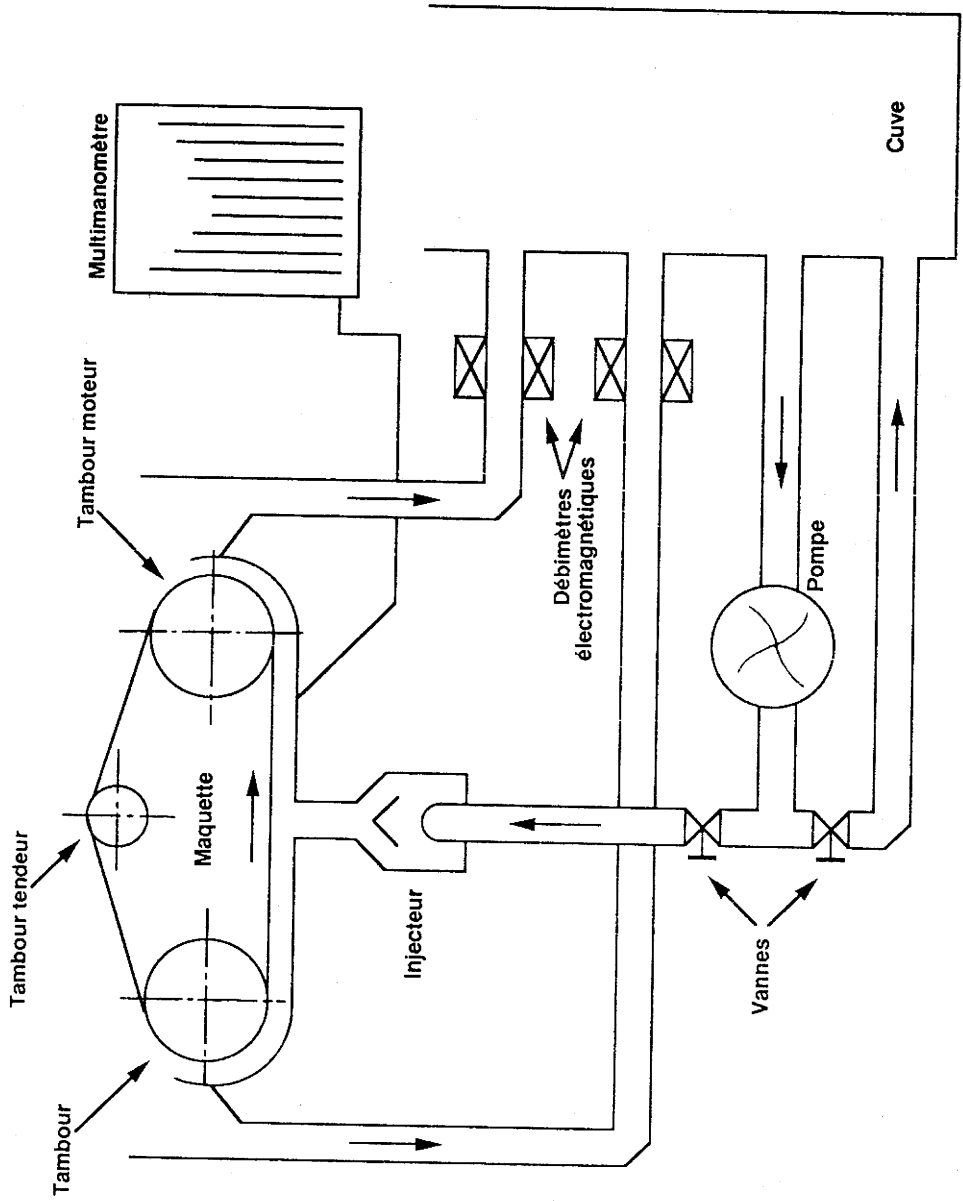


Figure 8-1 a: Schéma de l'installation expérimentale

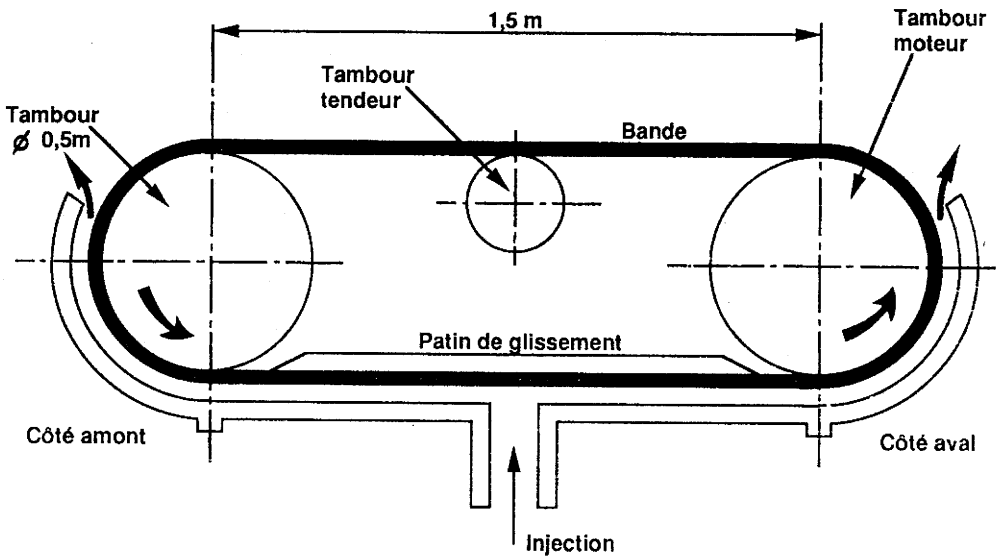
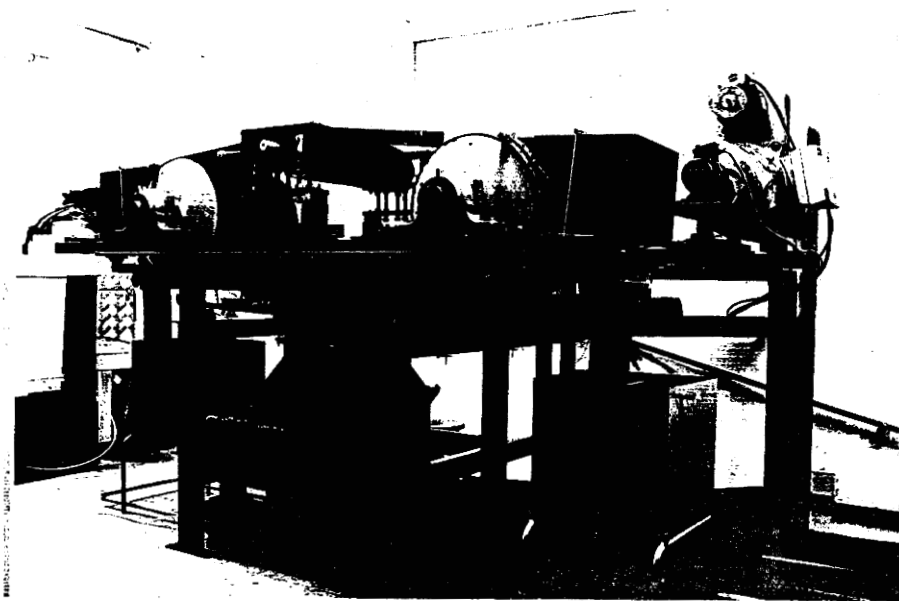
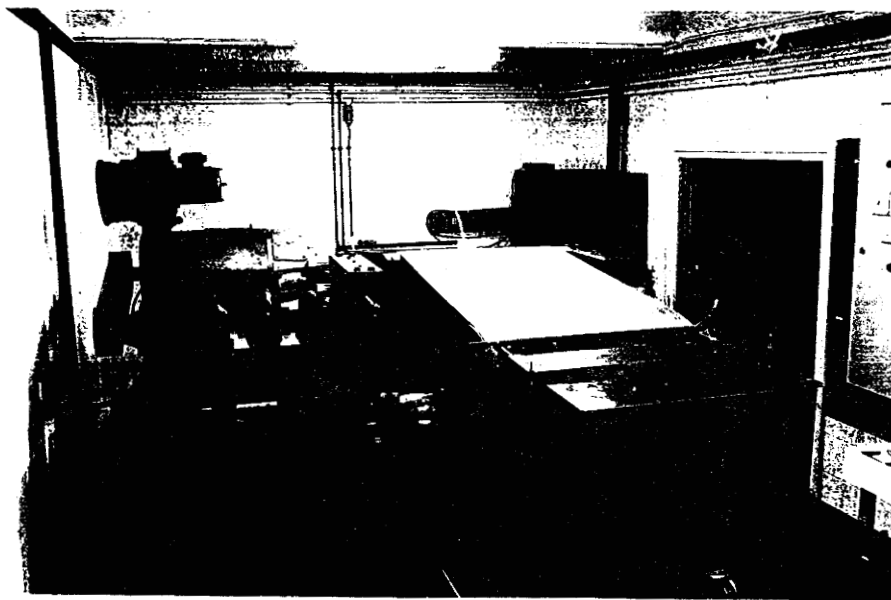


Figure 8-1b: Schéma de la maquette

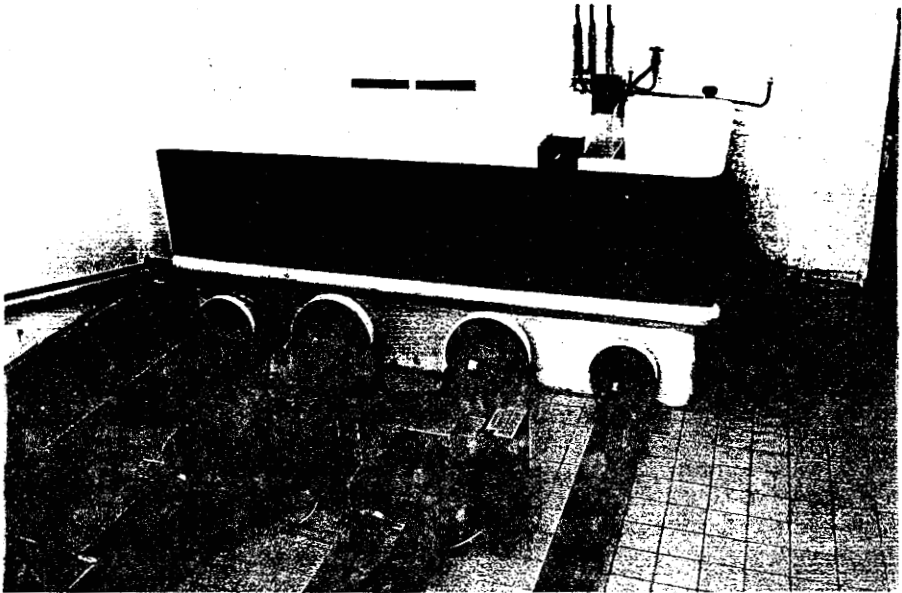


Vue de face



Vue arrière

Figure 8-2: Photos de l'installation expérimentale

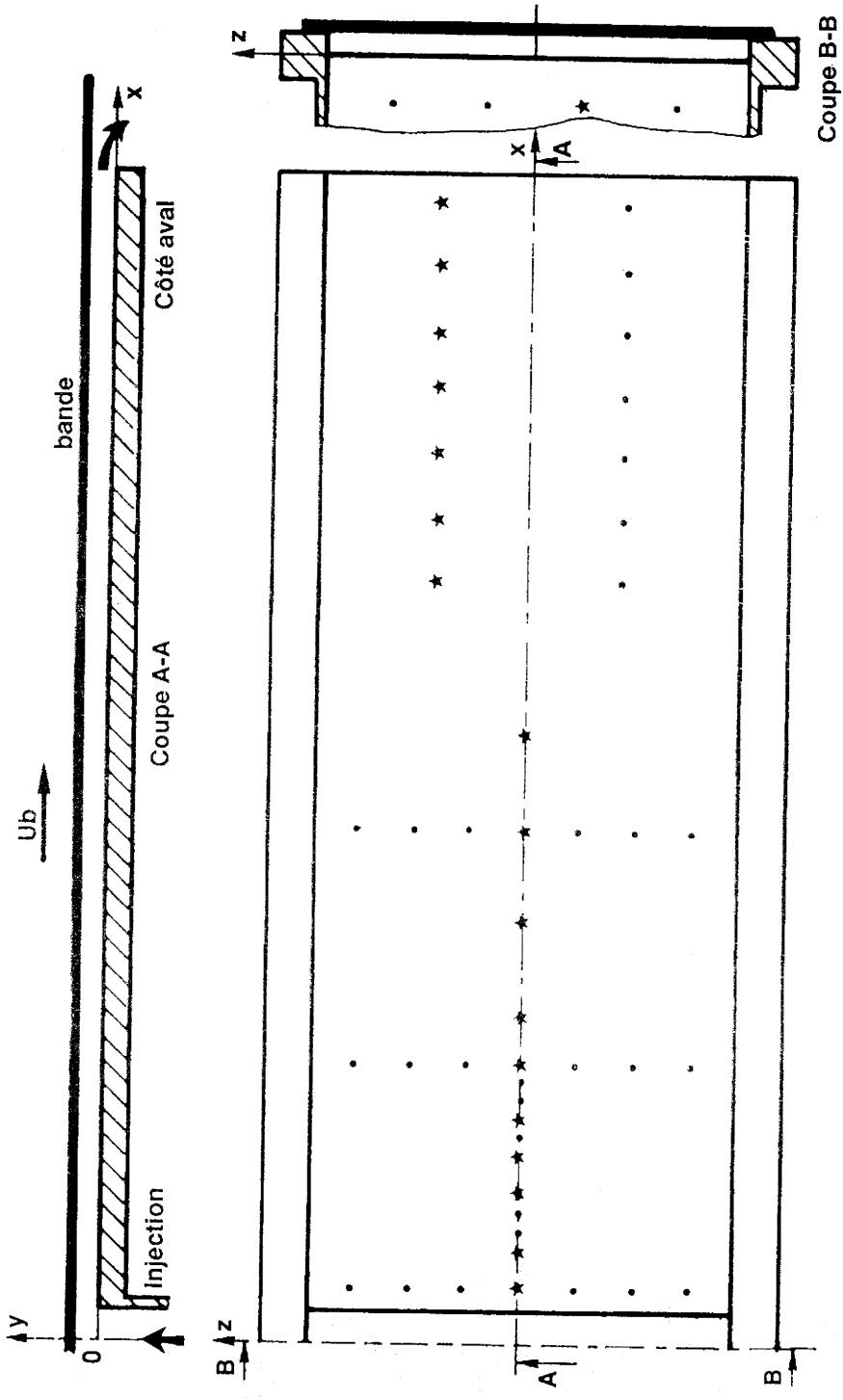


Débimètres électromagnétiques et cuve de stockage



Multimanomètre à 36 tubes

Figure 8-3: Photos des appareils de mesures



• Prise de pression

★ Prise de pression utilisée pour l'étude finale

Figure 8-4: Instrumentation du côté aval de la maquette

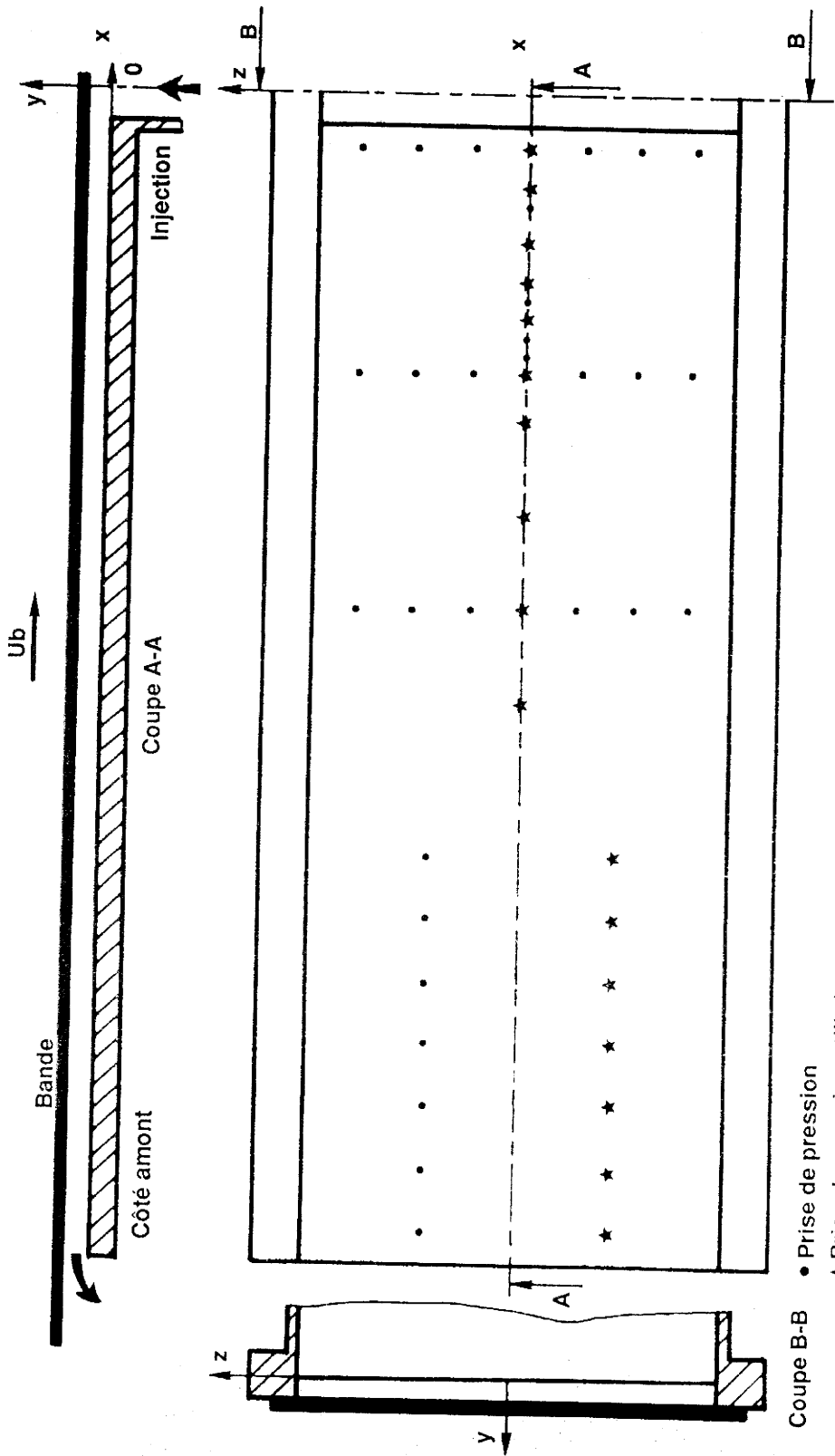
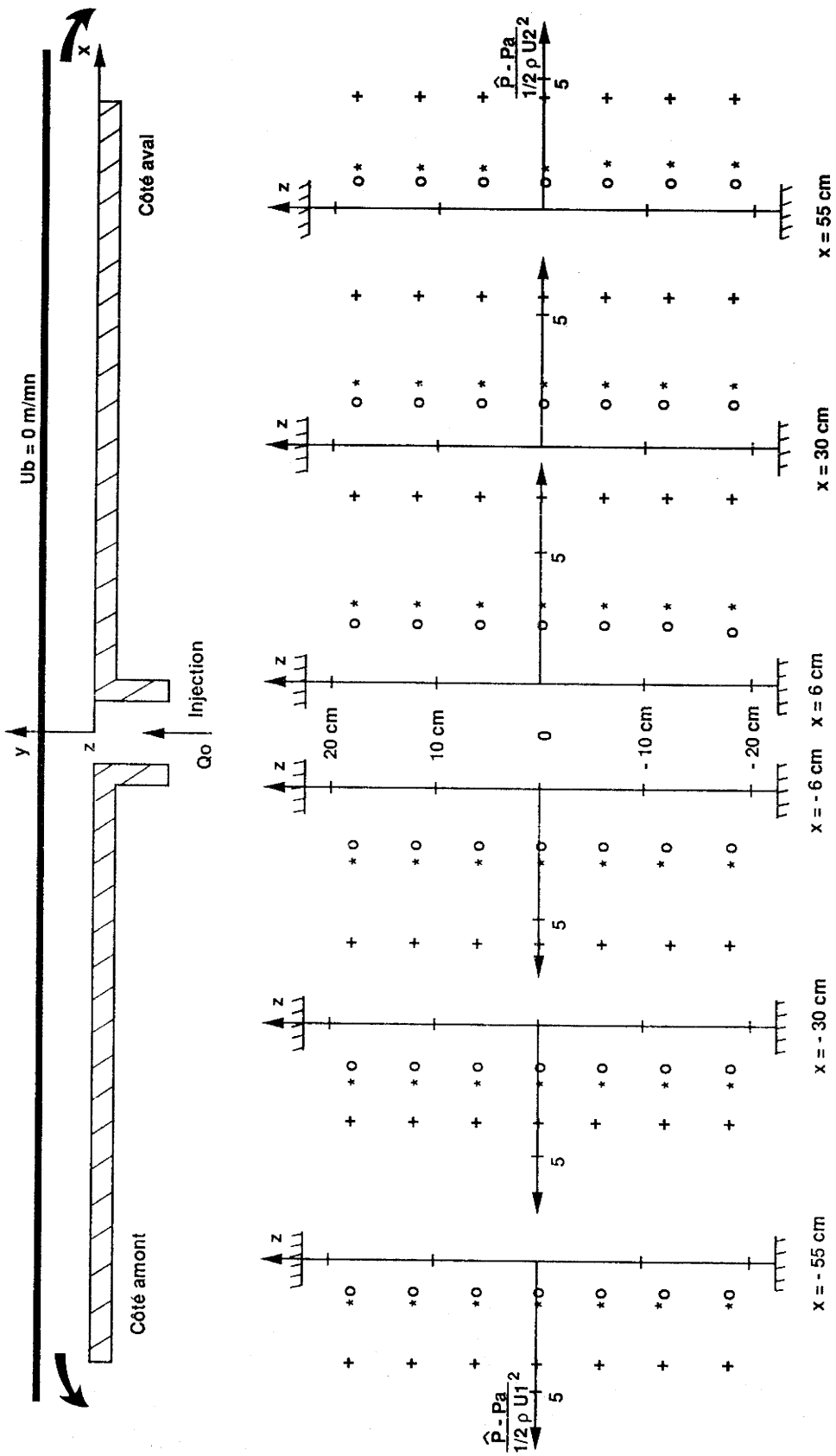
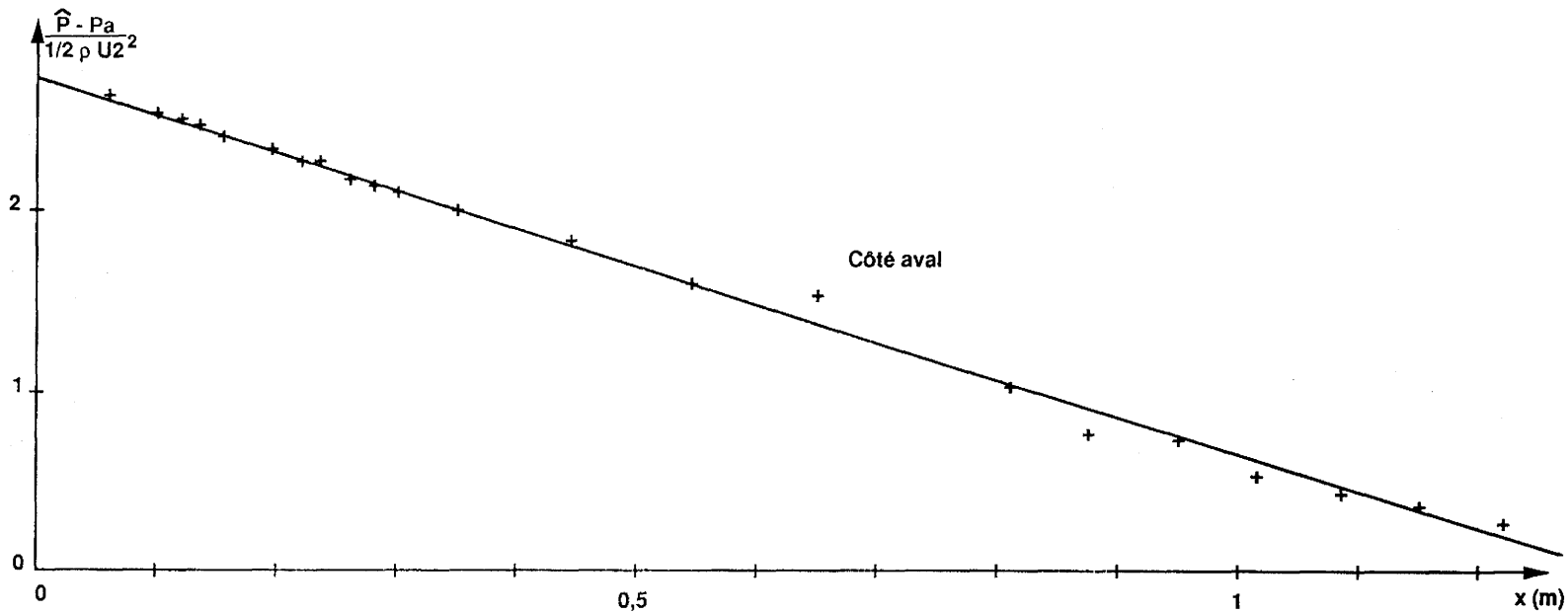
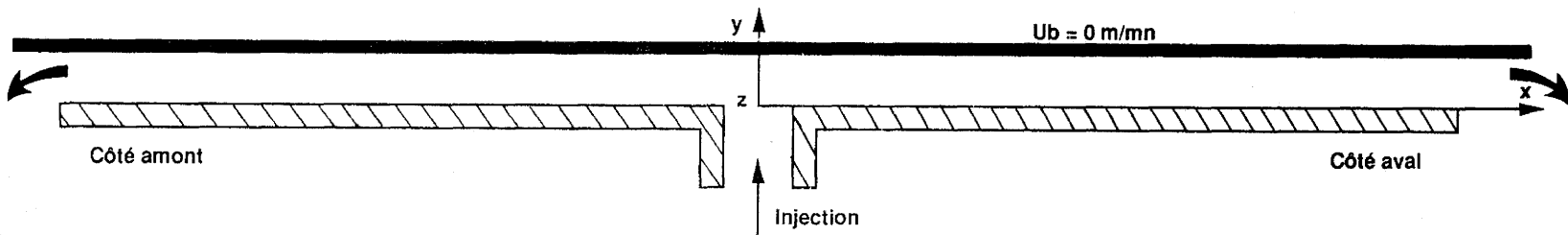


Figure 8-5: Instrumentation du côté amont de la maquette



+ $Q_0 \approx 10 \text{ m}^3/\text{h}$ * $Q_0 \approx 40 \text{ m}^3/\text{h}$ o $Q_0 \approx 80 \text{ m}^3/\text{h}$
 Pa: Pression atmosphérique U1: Vitesse débitante amont U2: Vitesse débitante aval
 Figure 8-6: Répartition transversale de la pression motrice \hat{P}



U2: Vitesse débitante aval
 + Points expérimentaux

Figure 8-7: Evolution de la pression motrice du côté aval de la maquette

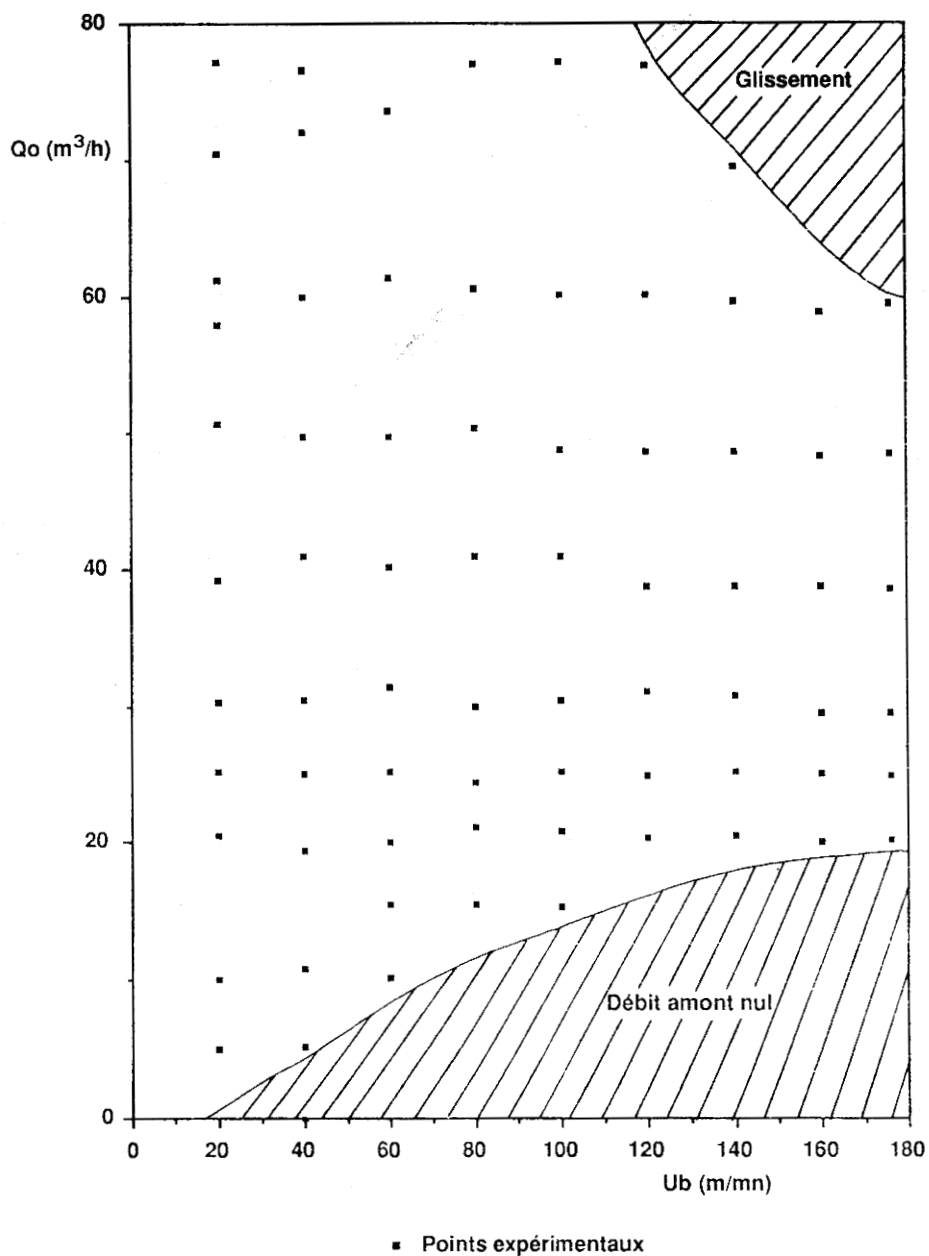


Figure 8-8: Graphe des conditions d'expériences

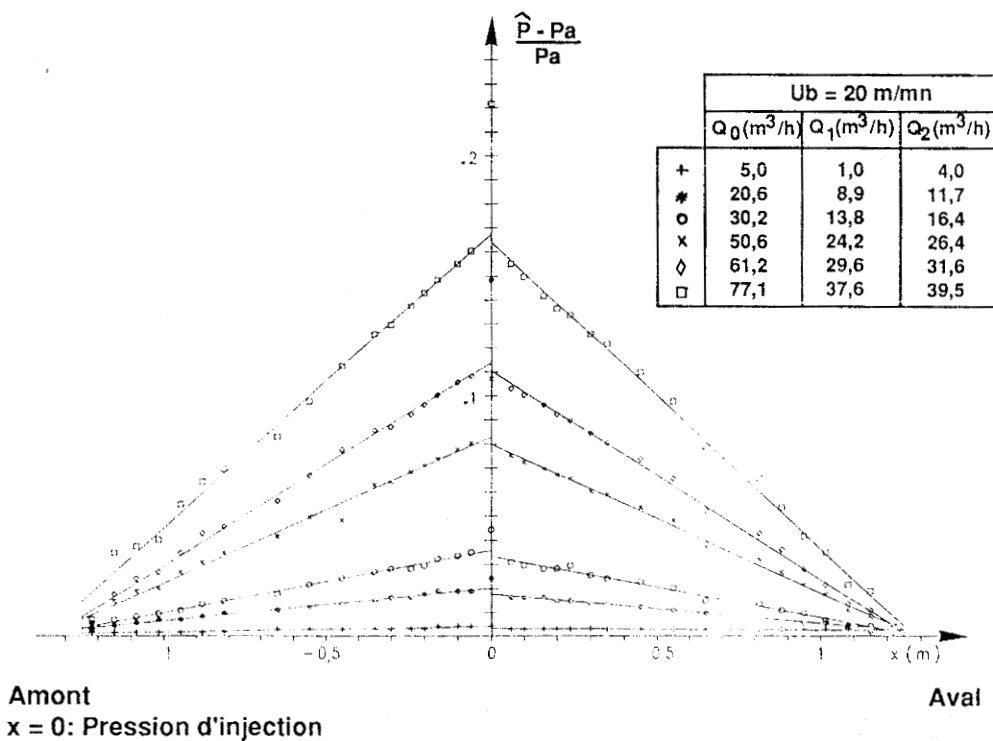
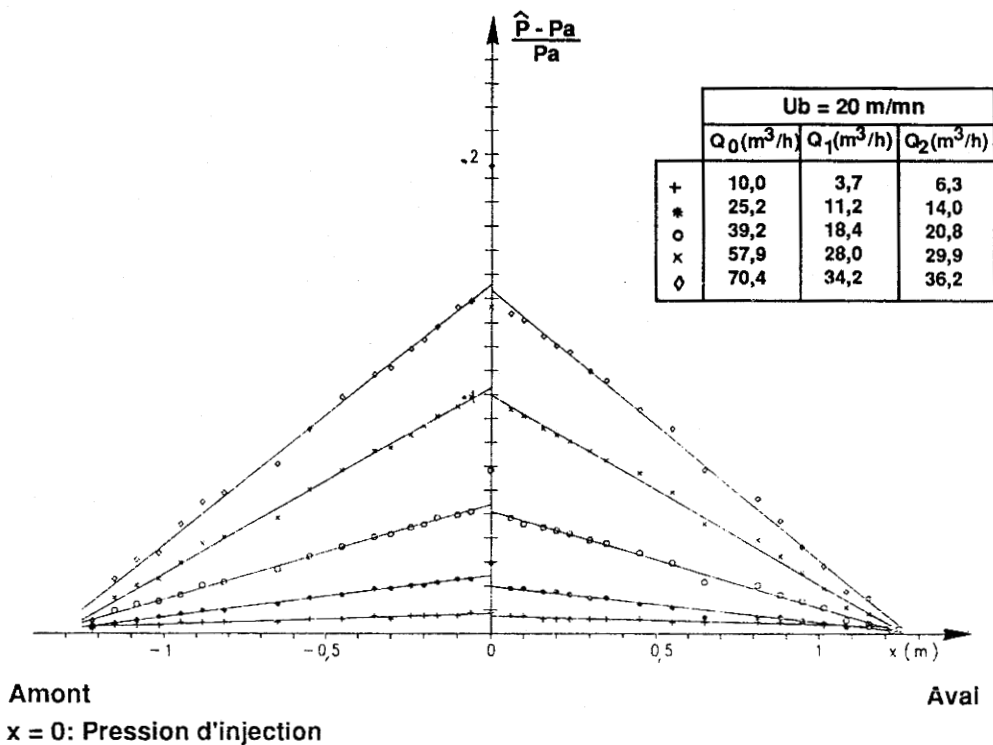


Figure 8-9: Répartition de la pression dans la maquette en fonction du débit injecté pour une vitesse de bande de 20 m/mn

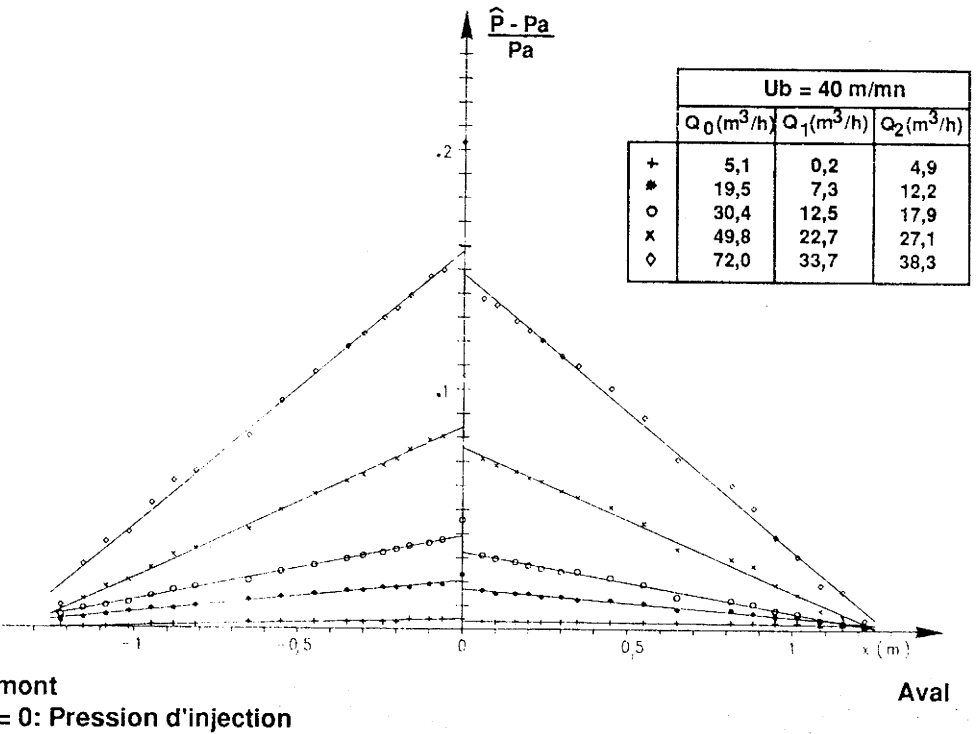
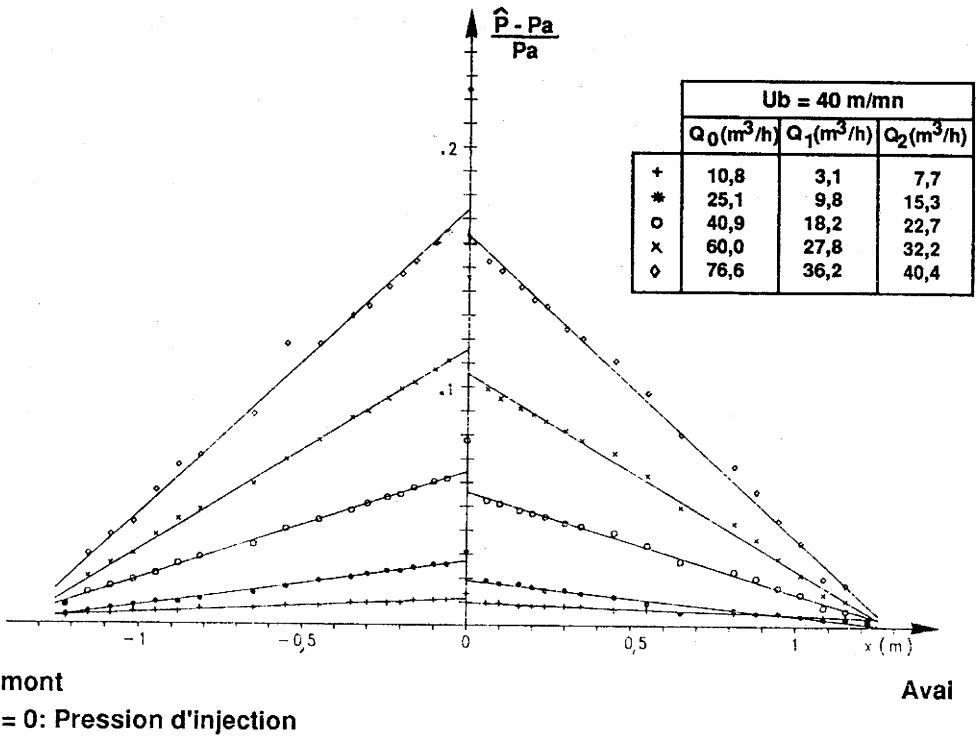


Figure 8-10: Répartition de la pression dans la maquette en fonction du débit injecté pour une vitesse de bande de 40 m/mn

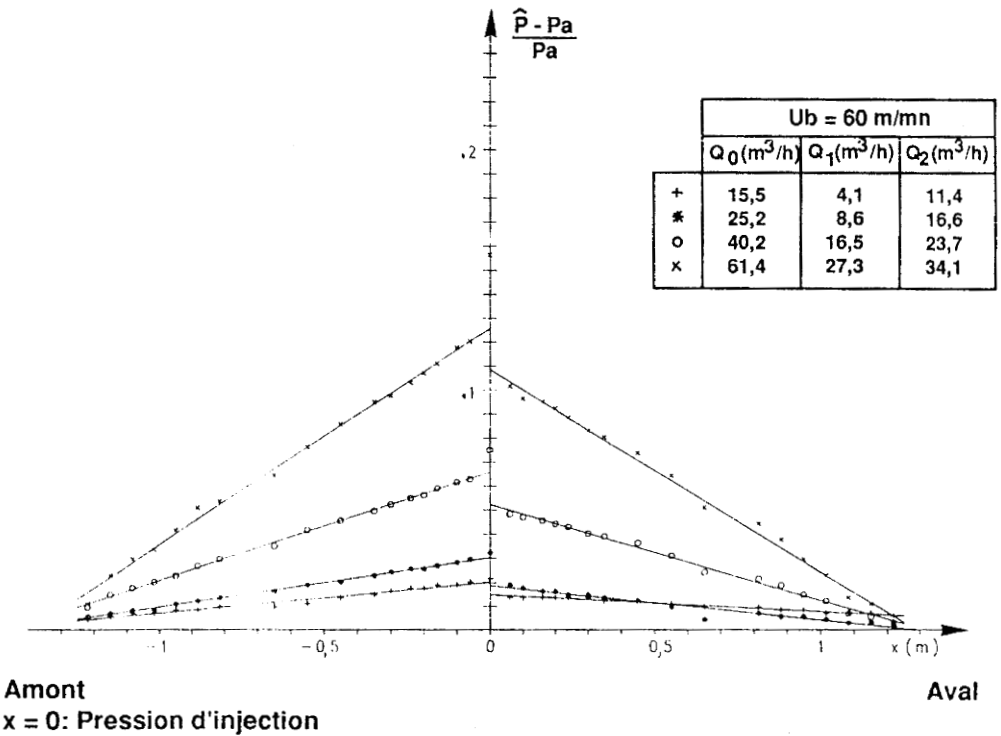
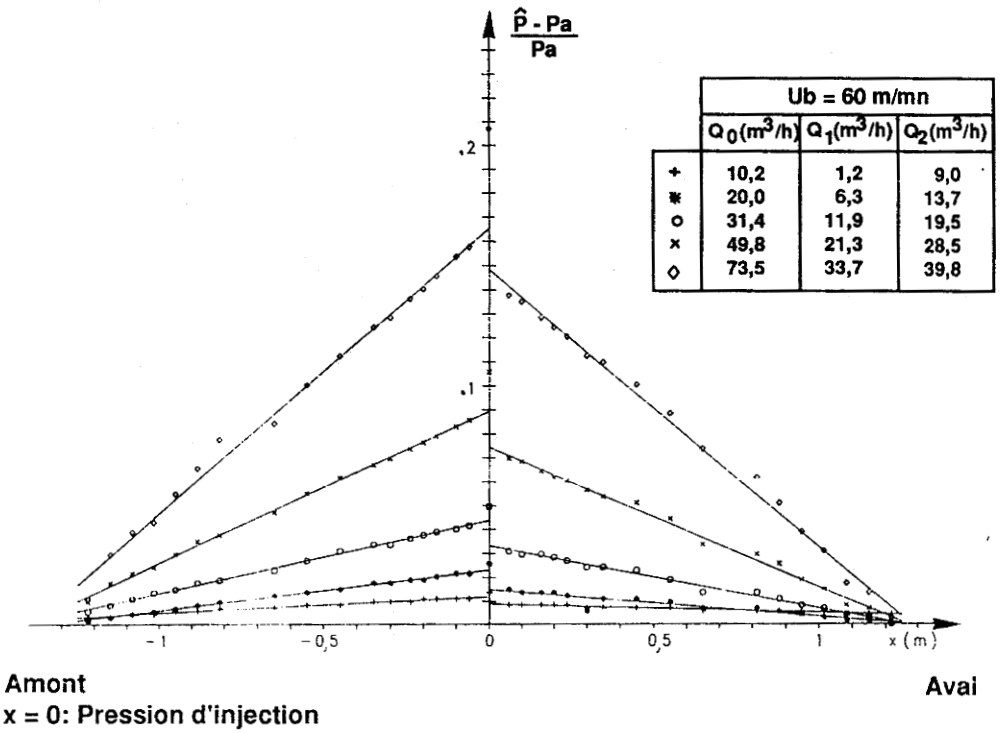


Figure 8-11: Répartition de la pression dans la maquette en fonction du débit injecté pour une vitesse de bande de 60 m/mn

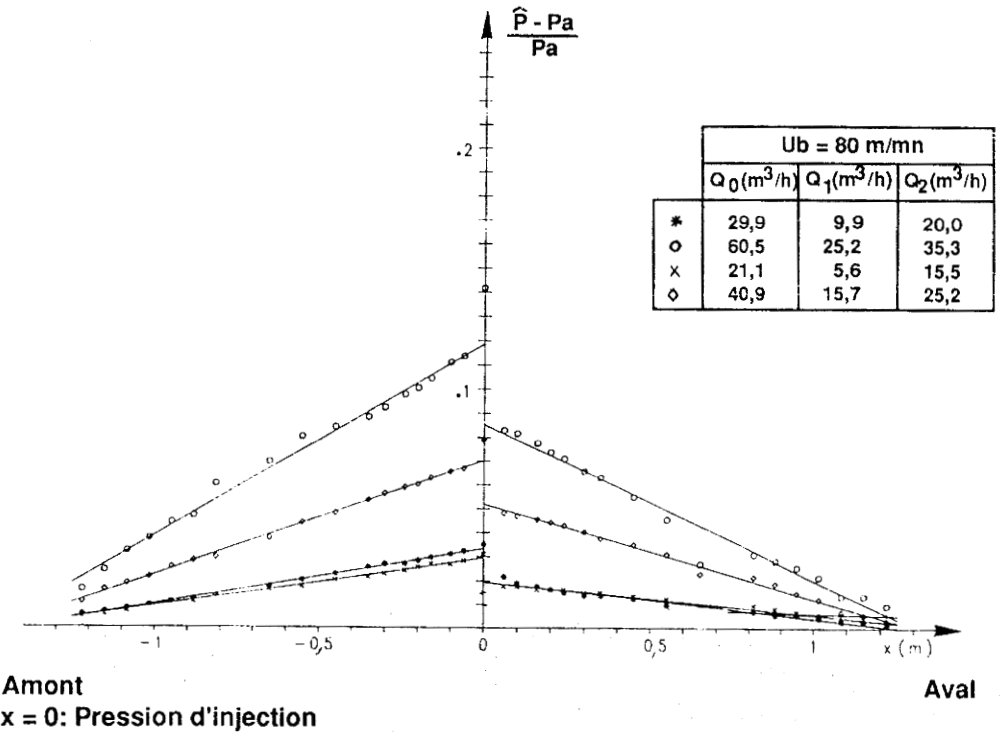
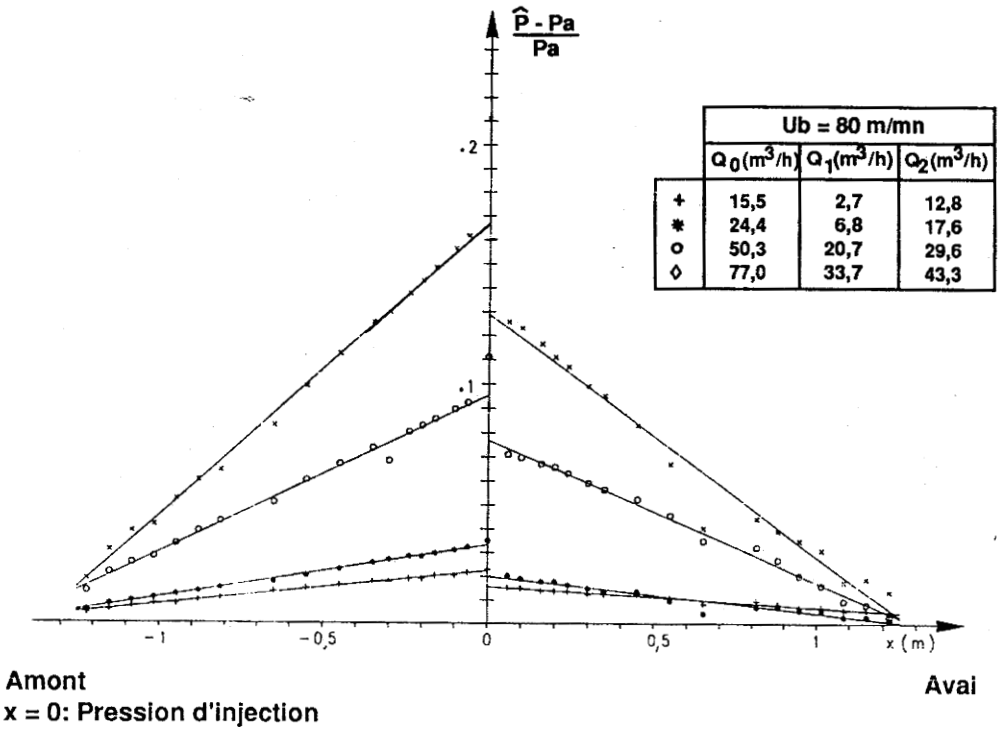


Figure 8-12: Répartition de la pression dans la maquette en fonction du débit injecté pour une vitesse de bande de 80 m/mn

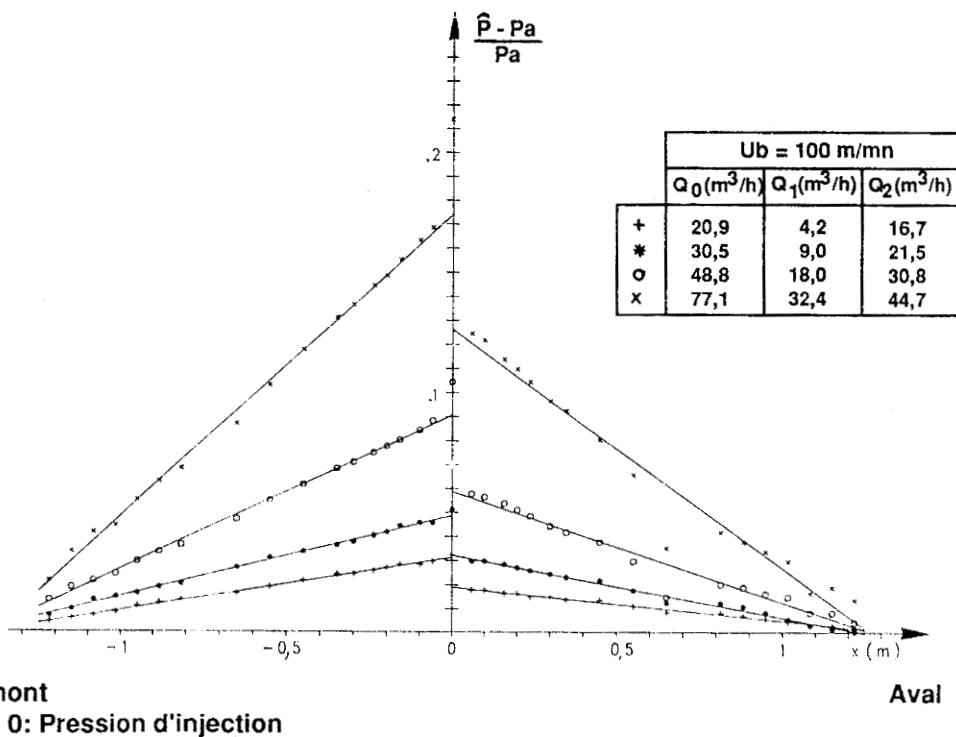
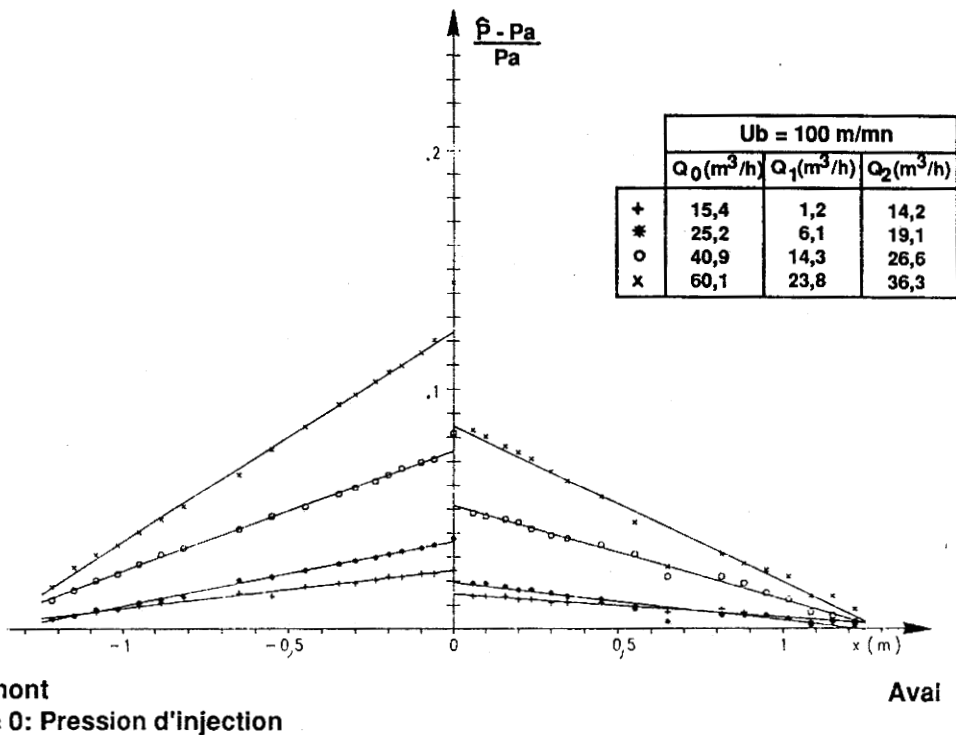
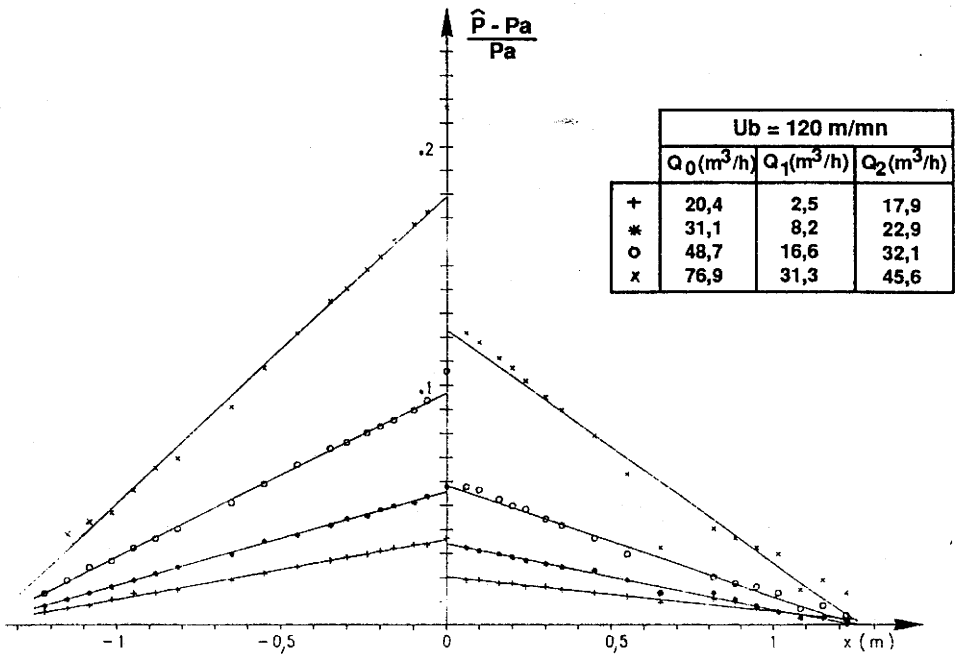


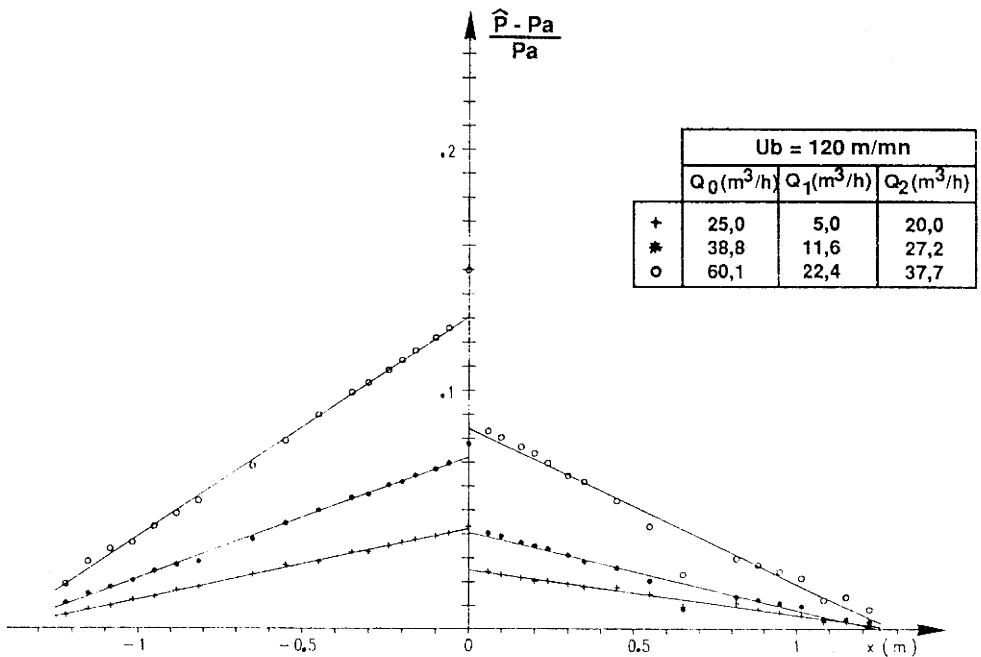
Figure 8-13: Répartition de la pression dans la maquette en fonction du débit injecté pour une vitesse de bande de 100 m/mn



Amont

x = 0: Pression d'injection

Aval



Amont

x = 0: Pression d'injection

Aval

Figure 8-14: Répartition de la pression dans la maquette en fonction du débit injecté pour une vitesse de bande de 120 m/mn

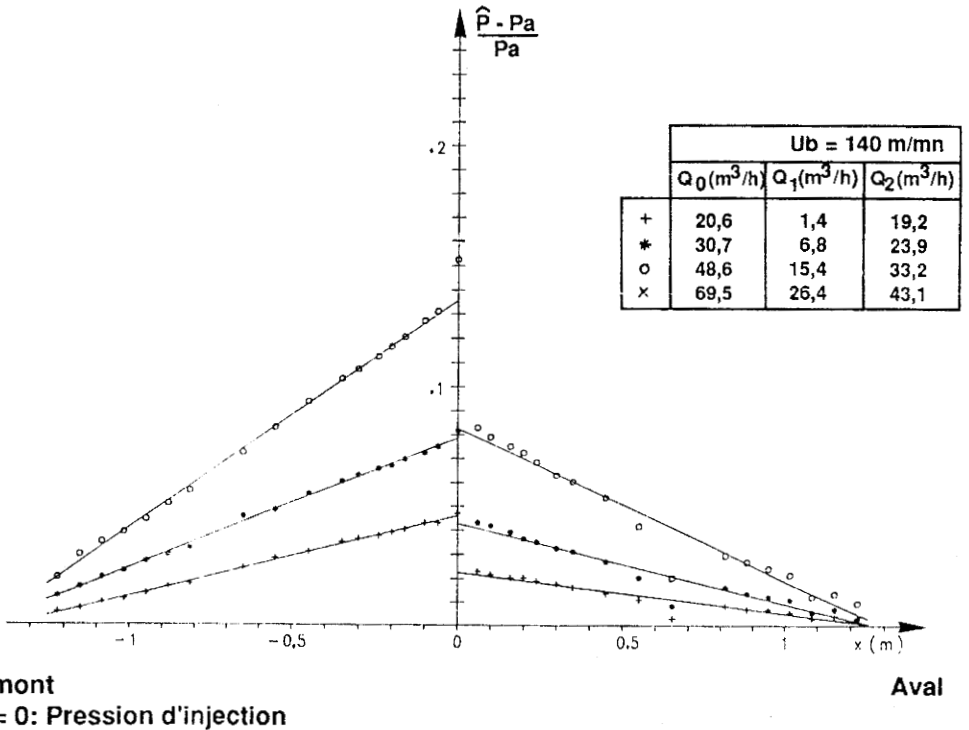
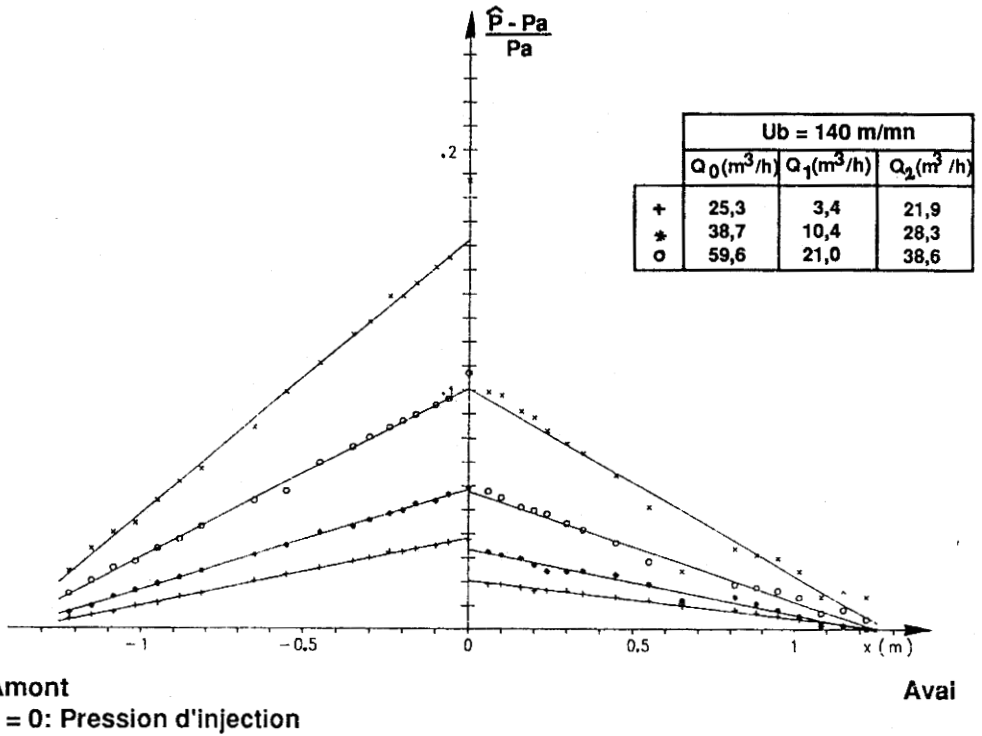


Figure 8-15: Répartition de la pression dans la maquette en fonction du débit injecté pour une vitesse de bande de 140 m/mn

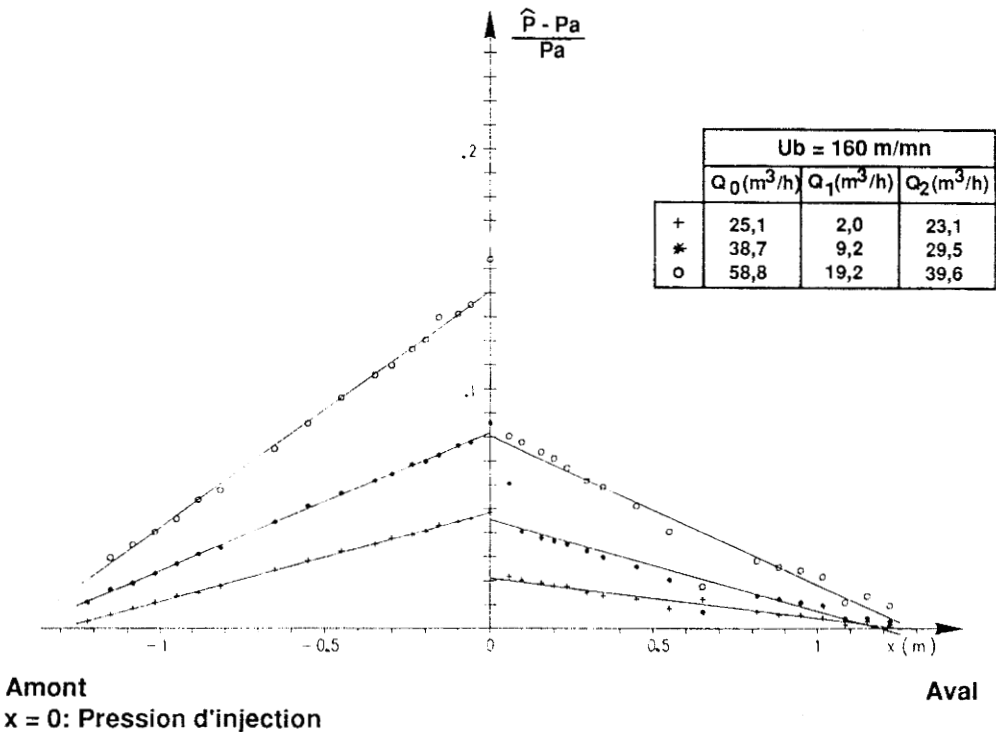
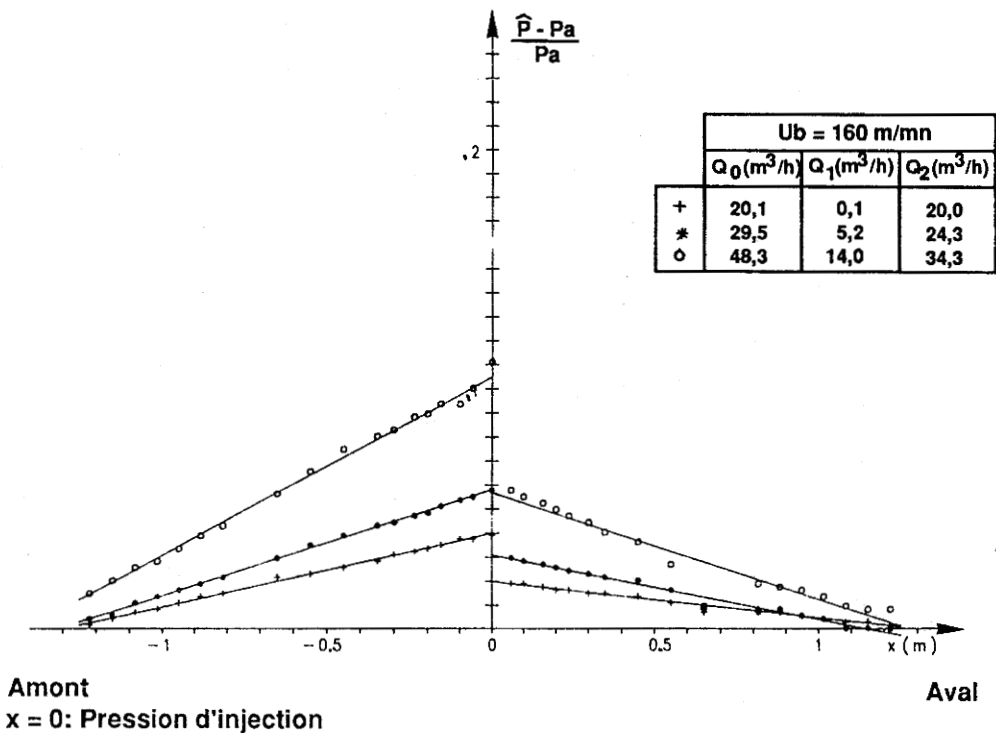


Figure 8-16: Répartition de la pression dans la maquette en fonction du débit injecté pour une vitesse de bande de 160 m/mn

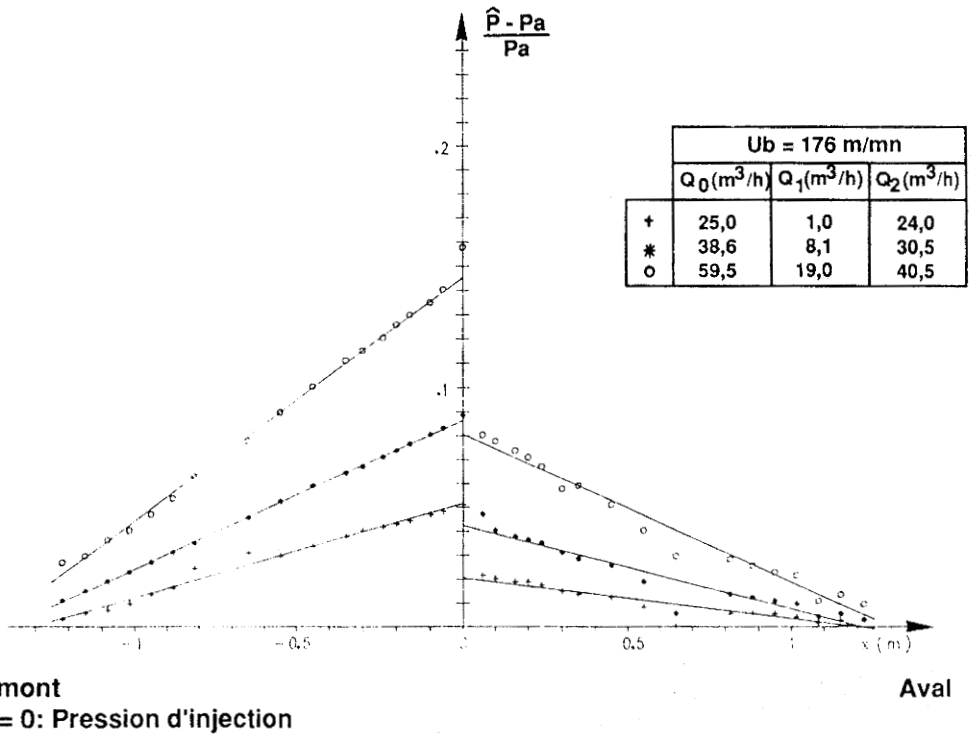
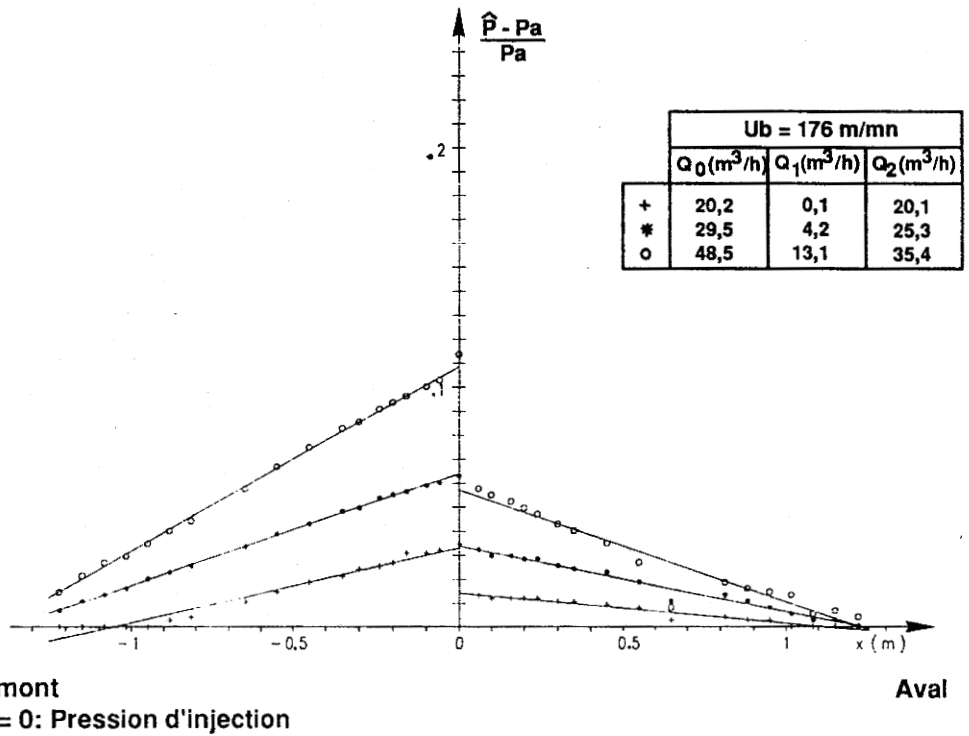
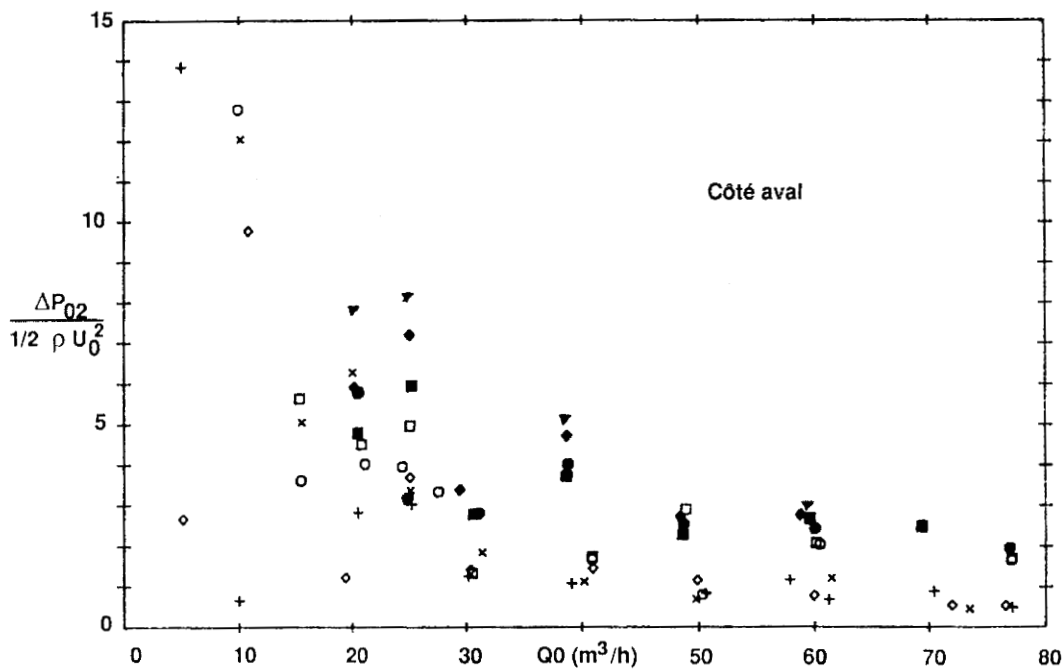
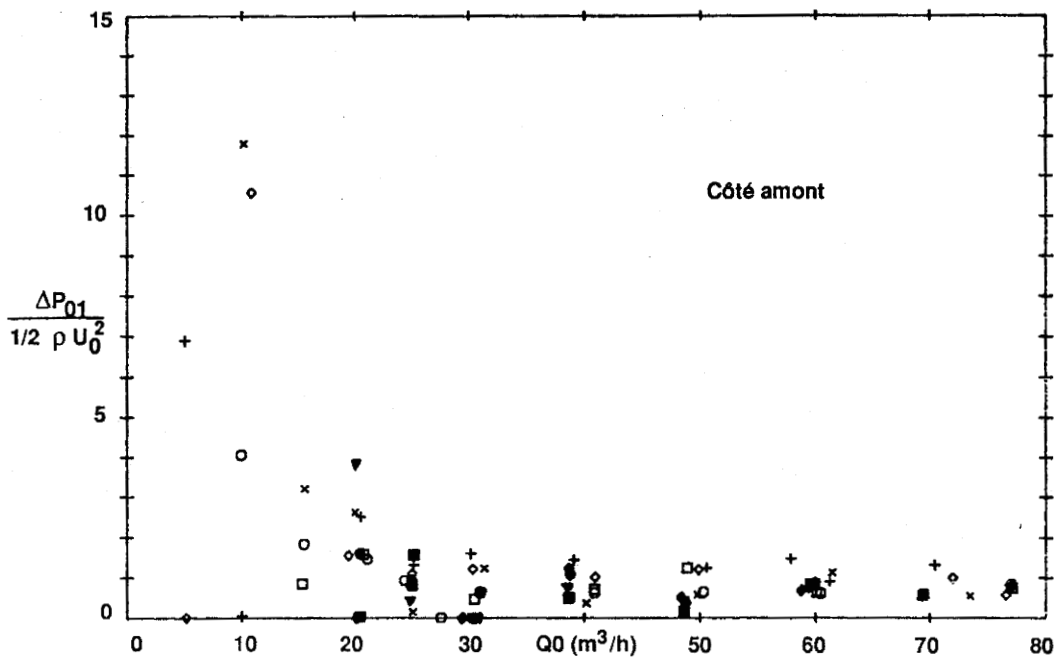


Figure 8-17: Répartition de la pression dans la maquette en fonction du débit injecté pour une vitesse de bande de 176 m/mn



Ub (m/mn)	20	40	60	80	100	120	140	160	176
	+	◇	×	○	□	●	■	◆	▼

Figure 8-18: Coefficient de perte de charge singulière à l'injection

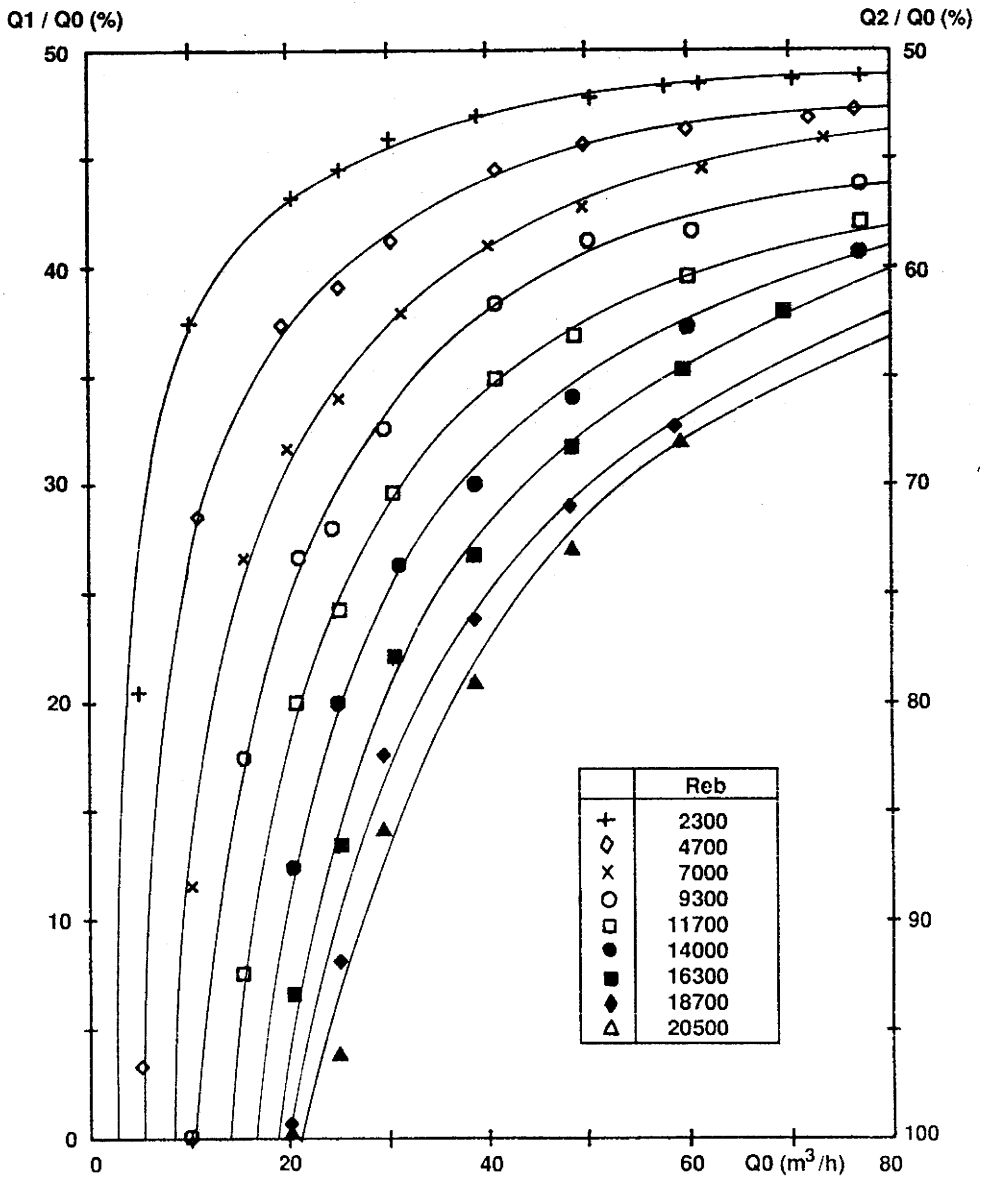


Figure 8-19 : Répartition du débit injecté dans la maquette

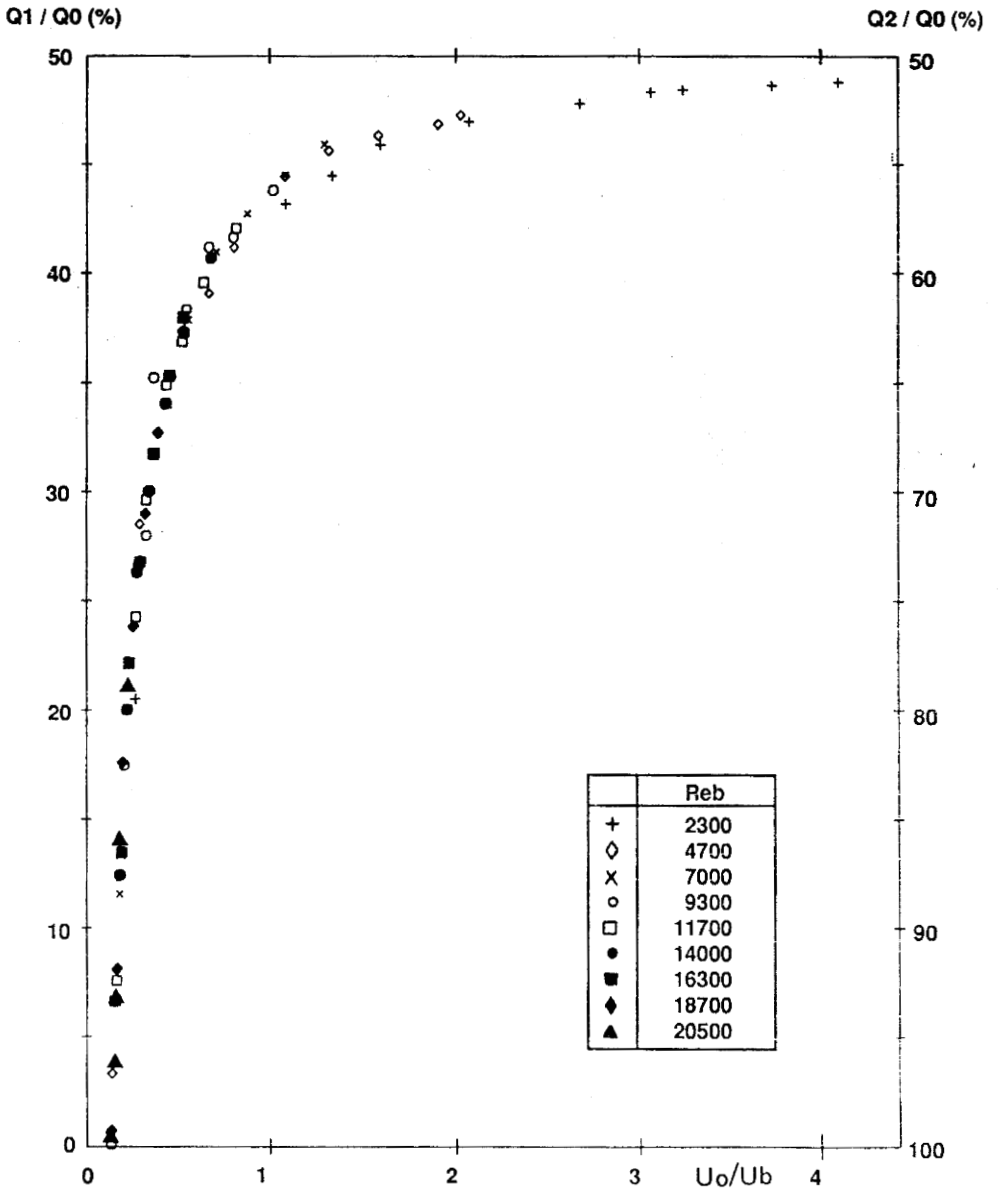
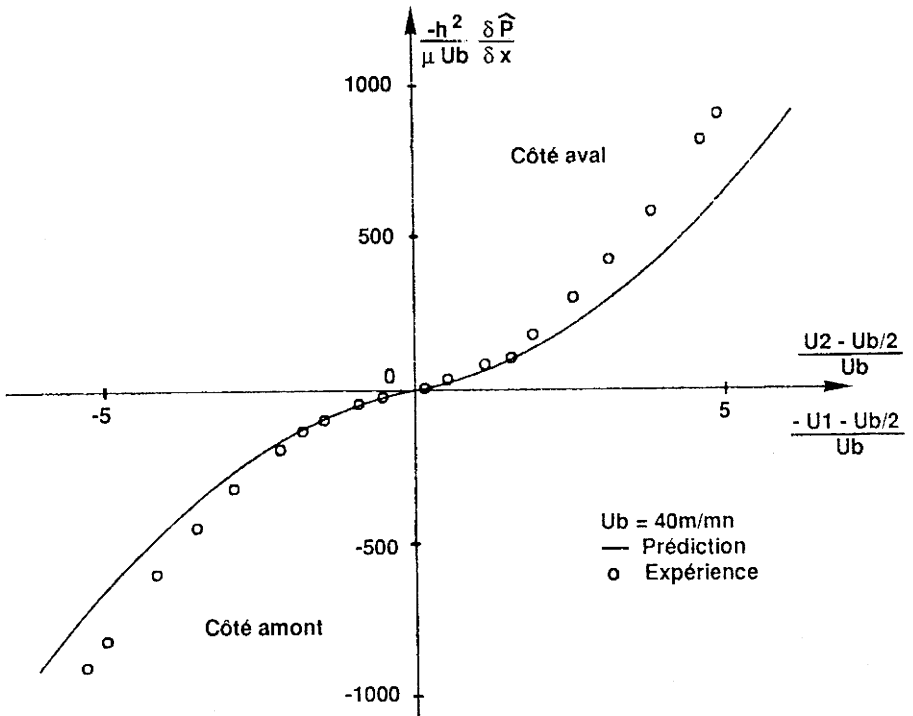
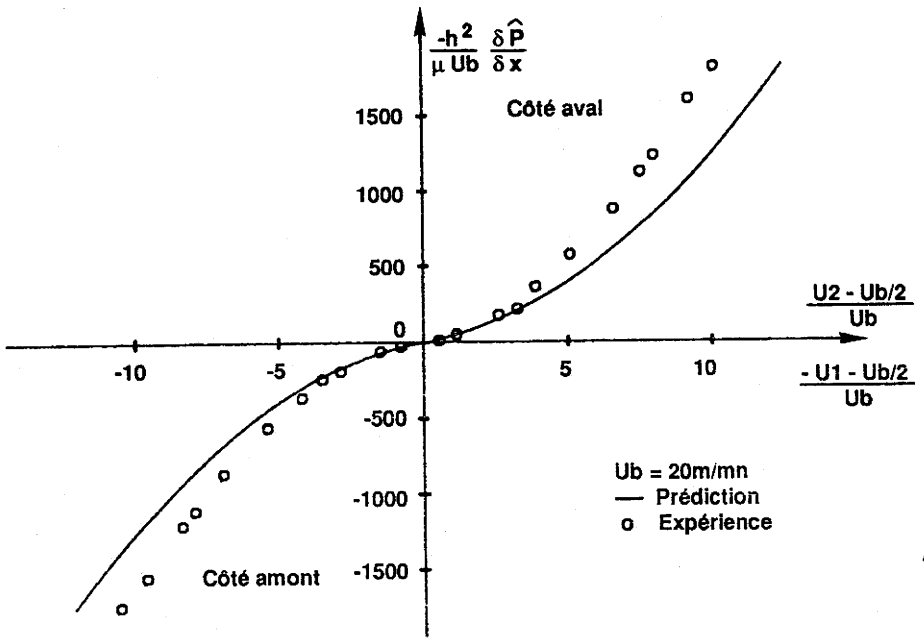


Figure 8-20: Répartition du débit injecté

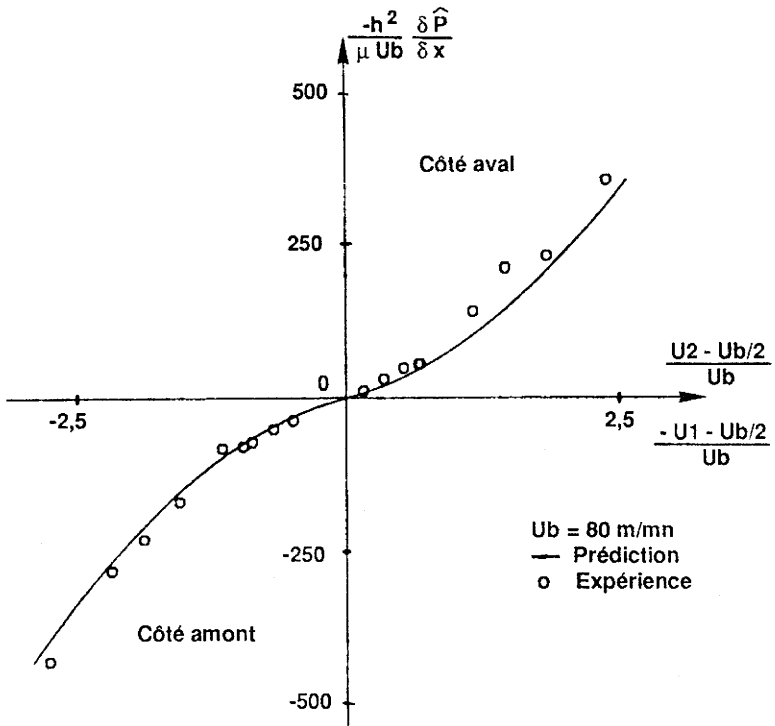
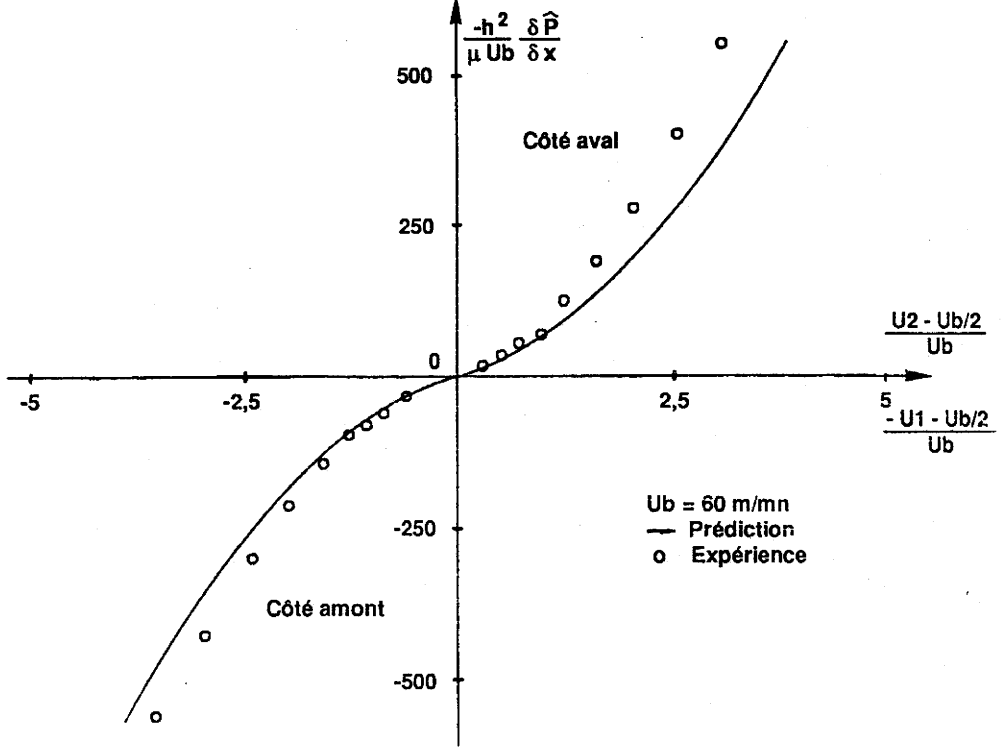


U1: Vitesse débitante amont

U2: Vitesse débitante aval

Ub: Vitesse de bande

Figure 8-21: Variation du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour deux vitesses de bande

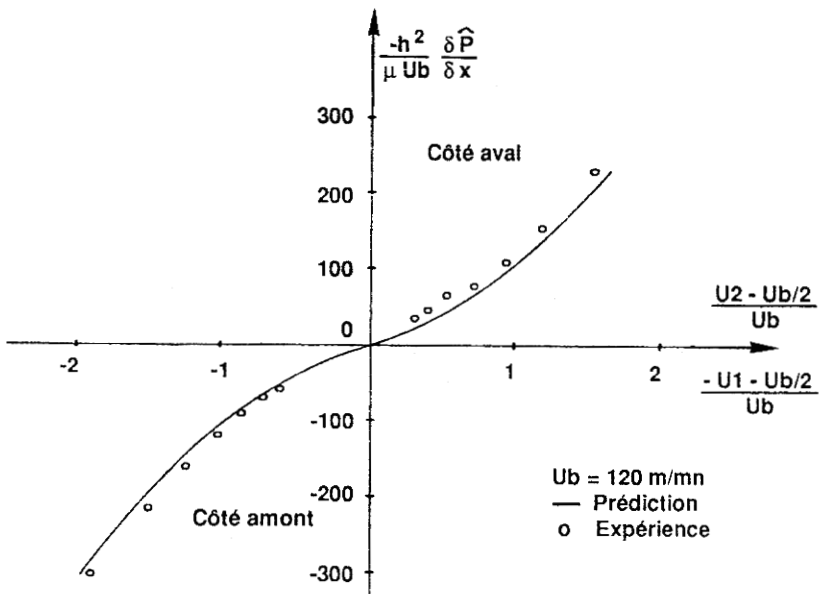
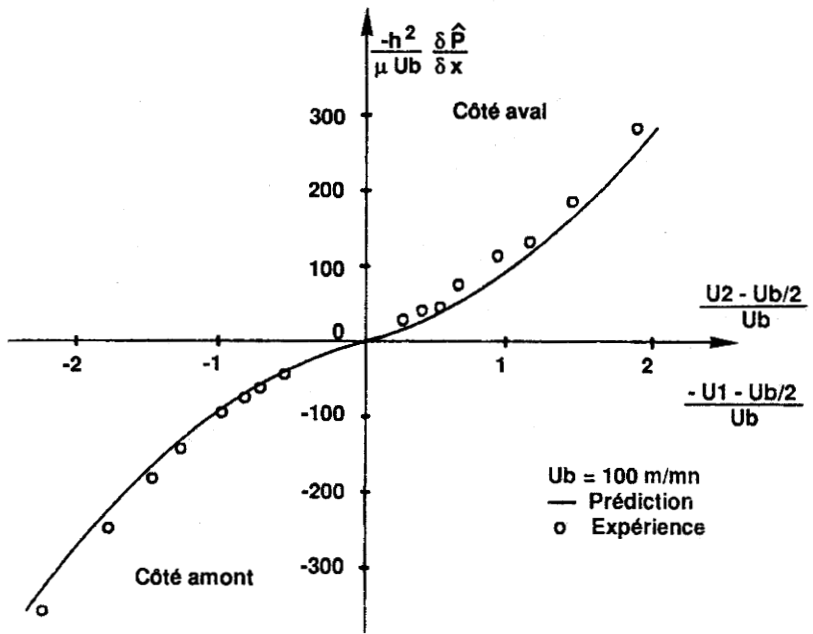


U1: Vitesse débitante amont

U2: Vitesse débitante aval

Ub: Vitesse de bande

Figure 8-22: Variation du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour deux vitesses de bande

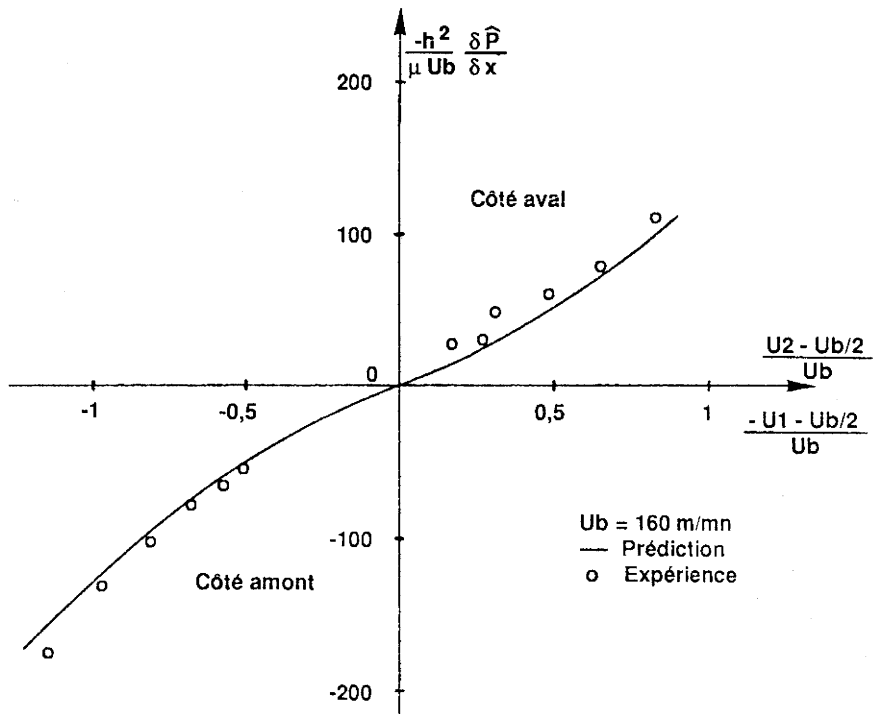
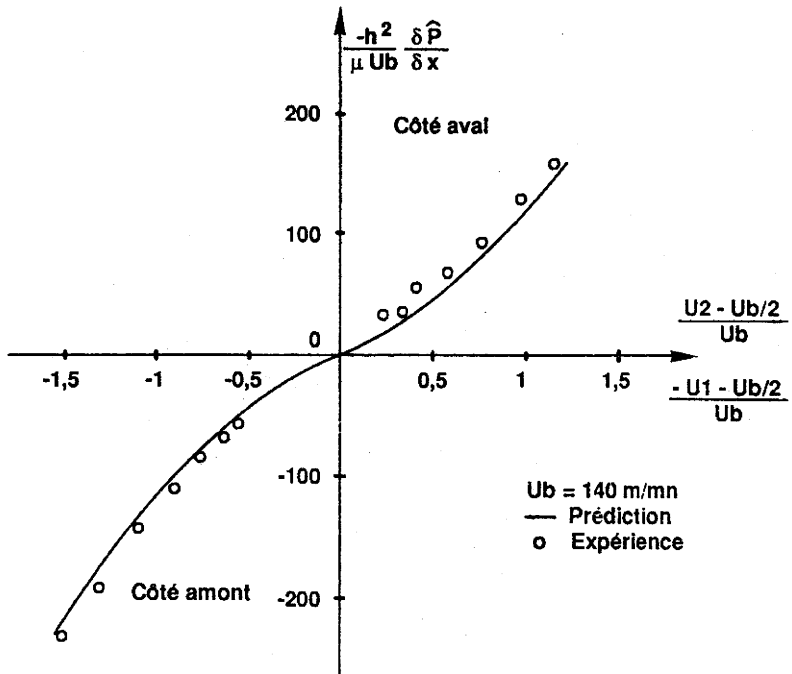


U1: Vitesse débitante amont

U2: Vitesse débitante aval

Ub: Vitesse de bande

Figure 8-23: Variation du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour deux vitesses de bande

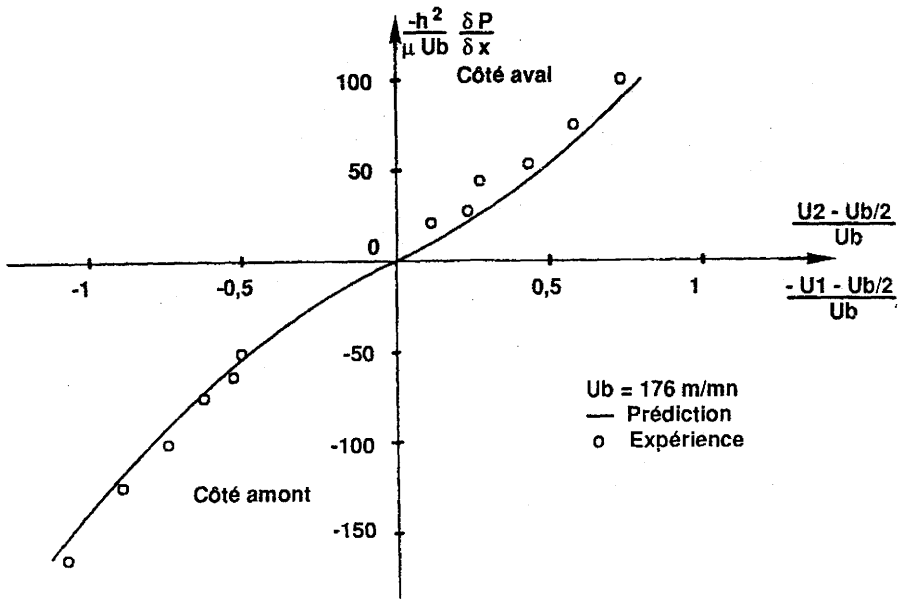


U1: Vitesse débitante amont

U2: Vitesse débitante aval

Ub: Vitesse de bande

Figure 8-24: Variation du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour deux vitesses de bande

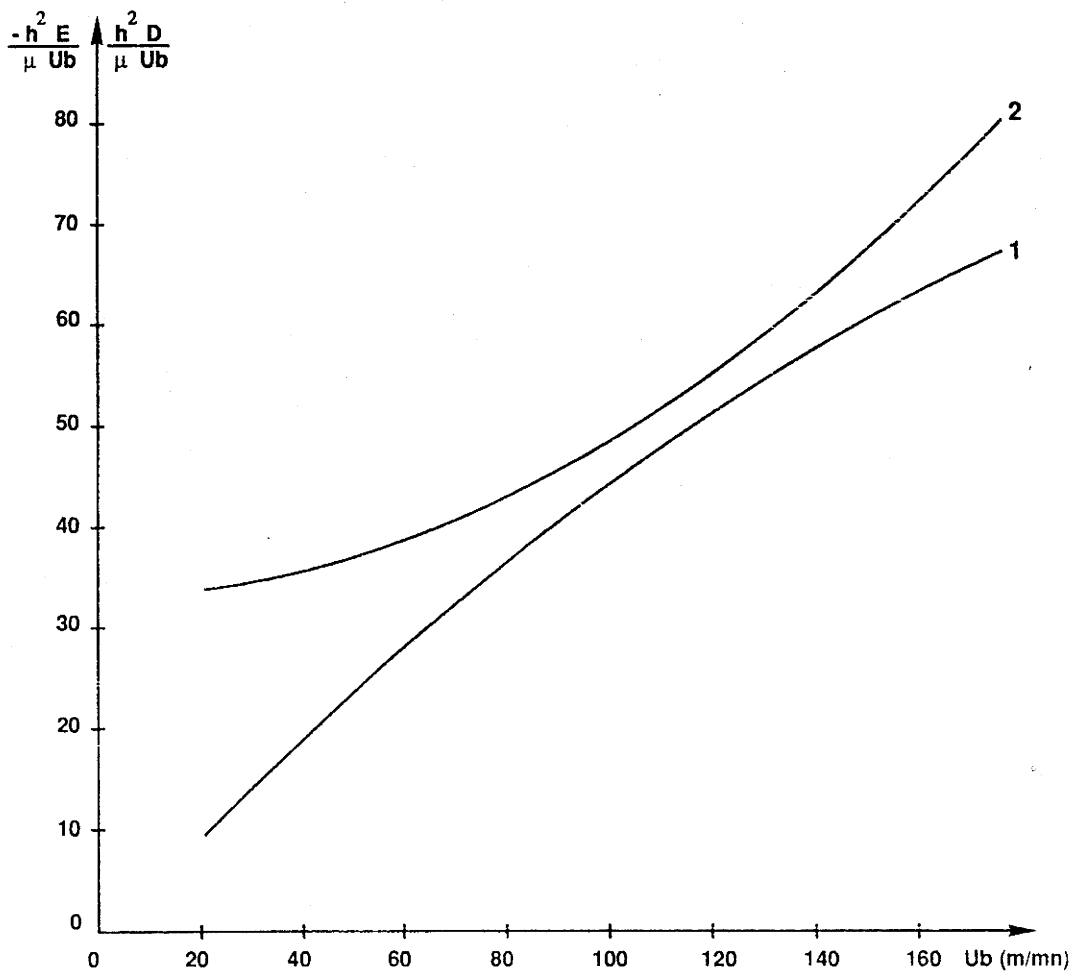


U1: Vitesse débitante amont

U2: Vitesse débitante aval

Ub: Vitesse de bande

Figure 8-25: Variation du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour une vitesse de bande



1: Courbe relative au coefficient D
 2: Courbe relative au coefficient E

Figure 8-26: Evolution des coefficients E et D avec la vitesse de bande

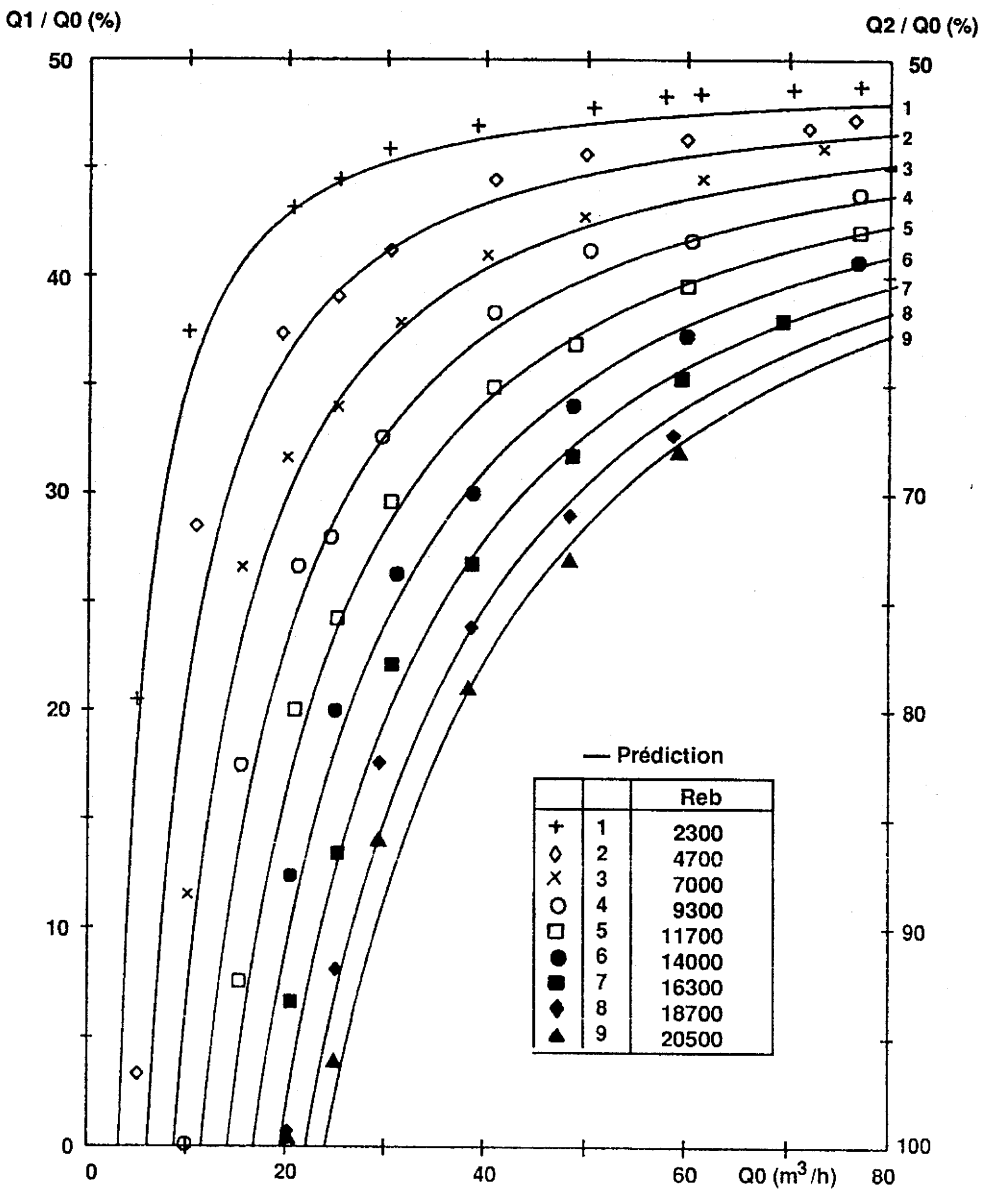


Figure 8-27: Modélisation de la répartition du débit injecté dans la maquette

Q1 / Q0 (%)

Q2 / Q0 (%)

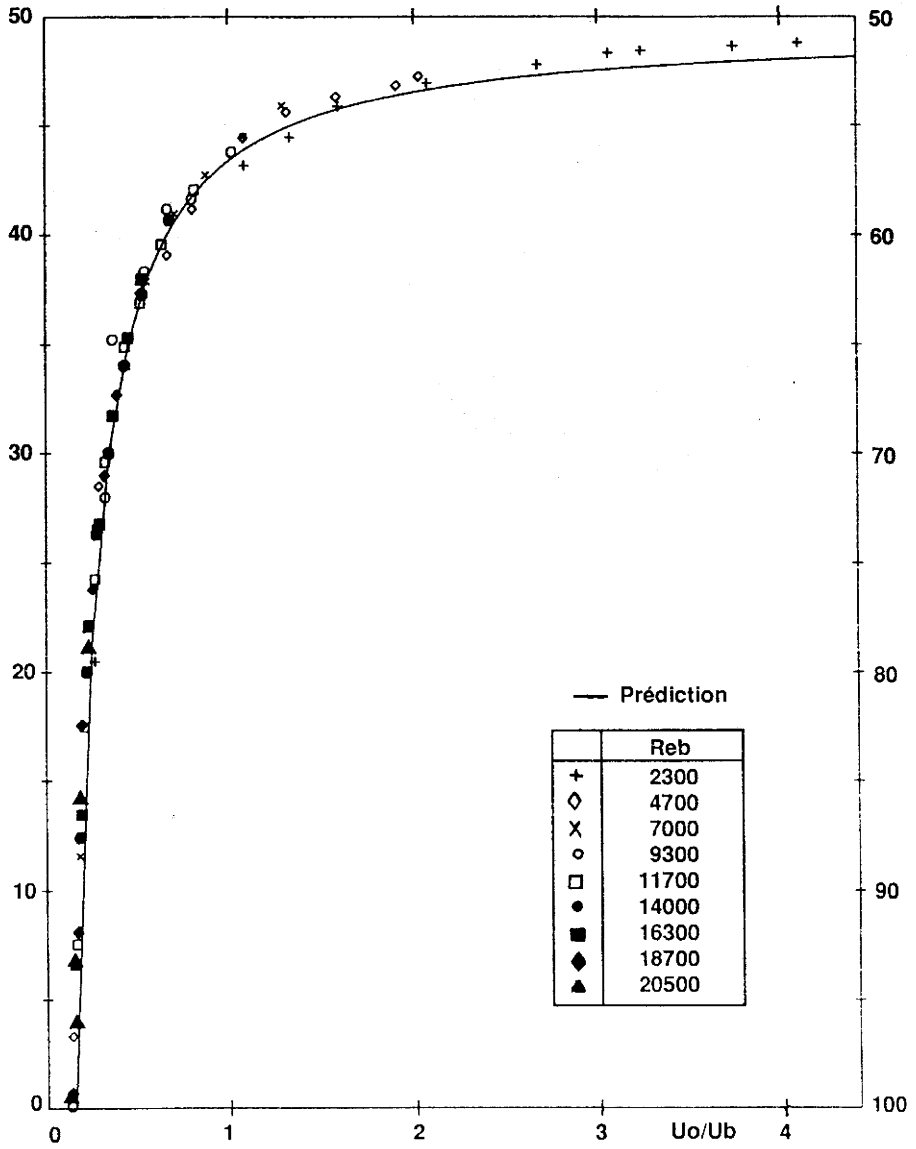
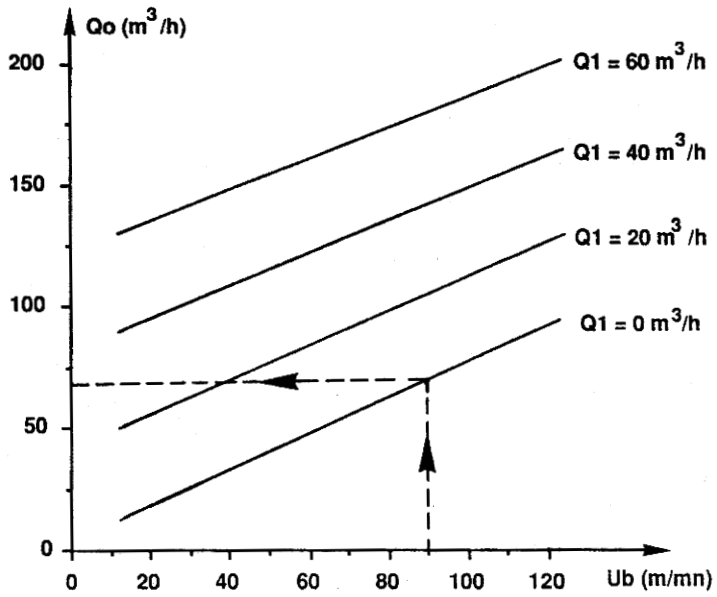
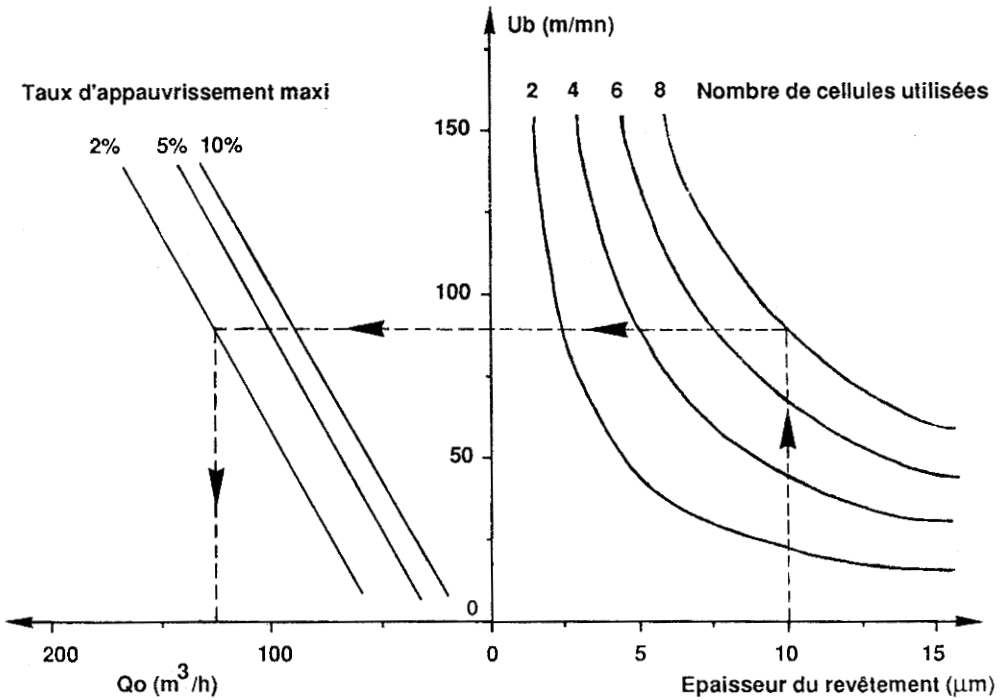


Figure 8-28: Modélisation de la répartition du débit injecté

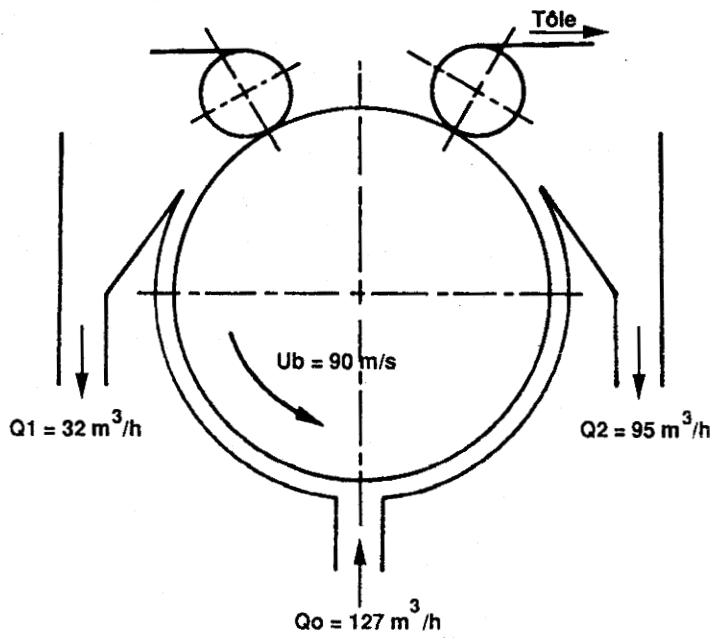


a) Abaque de Q_o en fonction de Q_1 et U_b

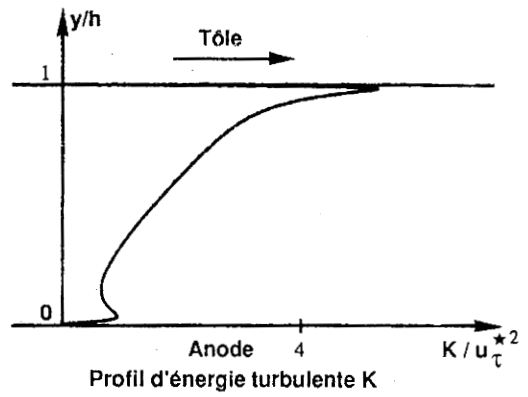
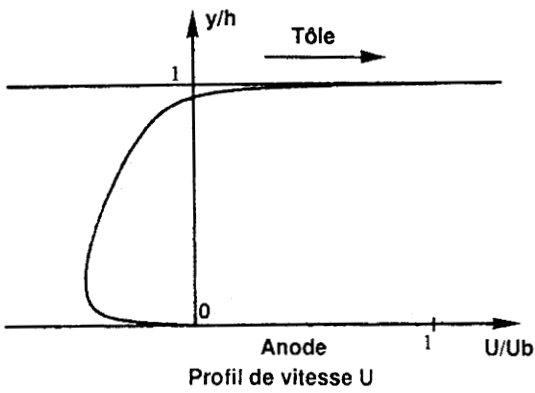


b) Abaque de Q_o et U_b en fonction de l'épaisseur du revêtement de zinc

Figure 9-1: Abaque pour une cellule d'électrozingage



Côté amont:



Côté aval:

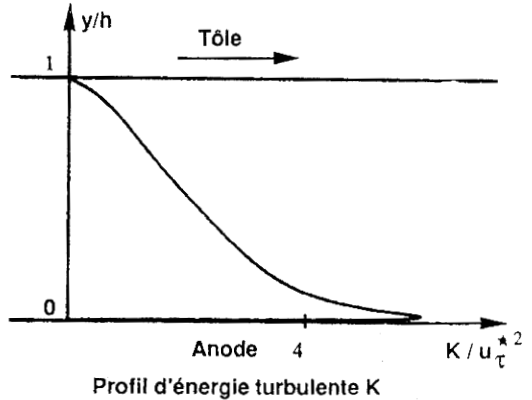
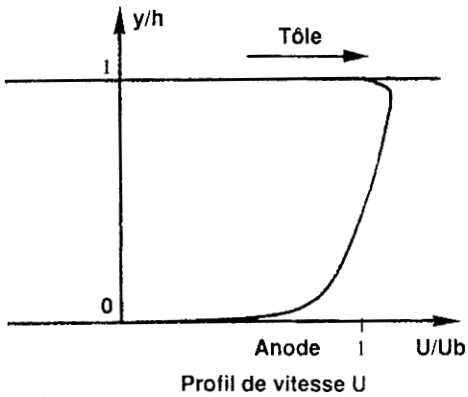


Figure 9-2: Simulation des écoulements internes des cellules d'électro-zincage

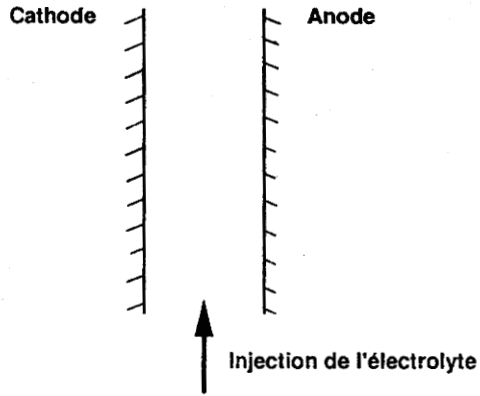
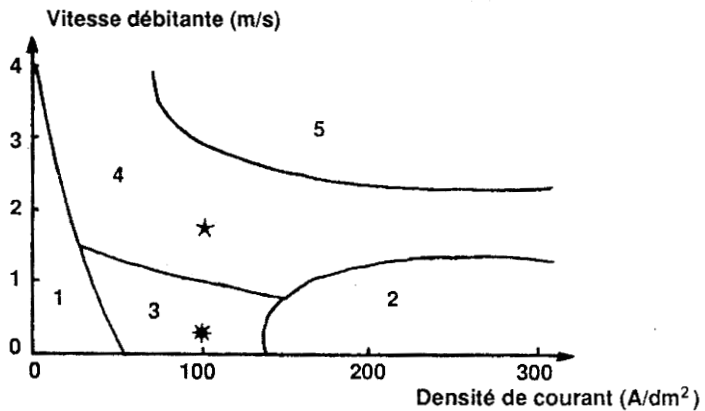


Schéma de la cellule expérimentale



- 1 Revêtement non uniforme
- 2 Revêtement blanc de mauvaise qualité
- 3 Revêtement uniforme, mais très poreux
- 4 Revêtement homogène, mais plutôt rugueux
- 5 Revêtement macroscopiquement uniforme et lisse

Cellule d'électro-zingage: ★ Côté amont
* Côté aval

Figure 9-3: Estimation de la structure de dépôt dans les cellules d'électro-zingage

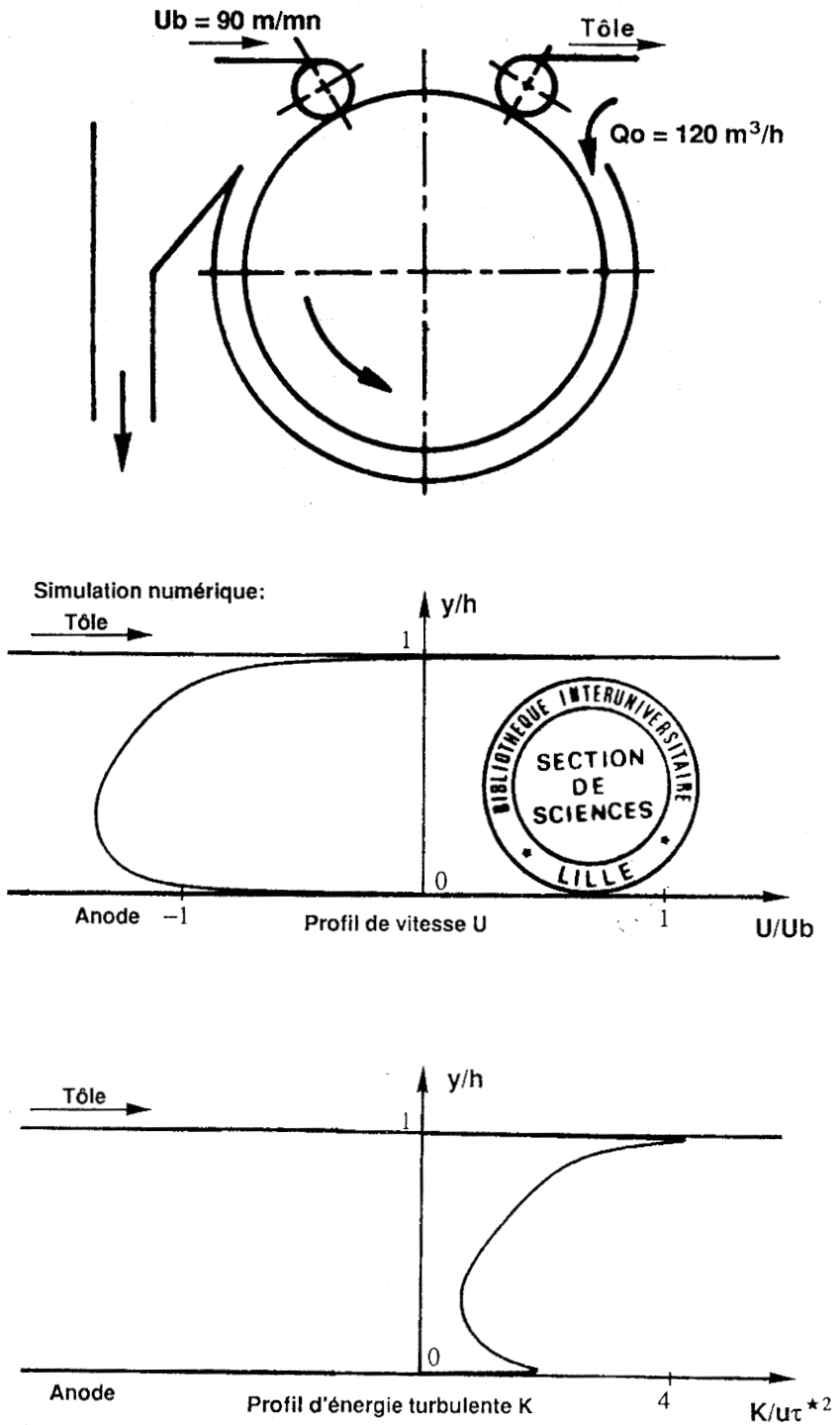


Figure 9-4: Simulation d'une nouvelle cellule d'électro-zingage

MOTS CLES

ELECTRODEPOSITION
ÉCOULEMENT DE COUETTE
ÉTUDE EXPERIMENTALE

ÉCOULEMENT TURBULENT
MODELISATION

RESUME

La consommation croissante de tôle électro-zinguée et les nouvelles exigences de qualité incitent les industriels à améliorer leur processus de fabrication. Des études préliminaires ont montré que la qualité du revêtement de zinc et le rendement de dépôt des cellules d'électro-zingage sont fortement influencés par l'écoulement de l'électrolyte. Ce mémoire présente une étude hydrodynamique d'une cellule d'électro-zingage. La première partie du mémoire est consacrée à la modélisation de l'écoulement dans les zones établies. L'électrolyte s'écoule entre une paroi fixe (anode) et une paroi mobile (tôle) (écoulement de COUETTE). Pour cette modélisation nous avons utilisé et comparé plusieurs modèles de turbulence, qui prédisent assez correctement ce type d'écoulement. La deuxième partie concerne une étude expérimentale sur maquette. On a déterminé les répartitions de débit et de pression en fonction de la vitesse de la tôle et du débit injecté. Les résultats obtenus ont permis de proposer une modélisation du fonctionnement global d'une cellule. En conclusion, on applique les résultats obtenus pour simuler le fonctionnement industriel d'une ligne d'électro-zingage.