N° d'ordre 376

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

le titre de Docteur de l'Université
Spécialité : Mathématiques Pures

par

ABLY Mohammed

INDEPENDANCE ALGEBRIQUE POUR LES GROUPES ALGEBRIQUES COMMUTATIFS

Soutenue le 28 juin 1989 devant la Commission d'Examen :

Président : S. FAKIR (Université de Lille Flandres Artois)
Rapporteurs : P. PHILIPPON (C.N.R.S.)
M. WALDSCHMIDT (Université de Paris VI)
Membres : M. HUTTNER (Université de Lille Flandres Artois)
M. LANGEVIN (Université de Paris VI)
N. ZINN-JUSTIN (Université de Lille Flandres Artois)

55376
1989
9

N° d'ordre 376

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

le titre de Docteur de l'Université
Spécialité : Mathématiques Pures

par

ABLY Mohammed

INDEPENDANCE ALGEBRIQUE POUR LES GROUPES ALGEBRIQUES COMMUTATIFS

Soutenue le 28 juin 1989 devant la Commission d'Examen :

Président : *S. FAKIR (Université de Lille Flandres Artois)*
Rapporteurs : *P. PHILIPPON (C.N.R.S.)*
M. WALDSCHMIDT (Université de Paris VI)
Membres : *M. HUTTNER (Université de Lille Flandres Artois)*
M. LANGEVIN (Université de Paris VI)
N. ZINN-JUSTIN (Université de Lille Flandres Artois)

à mes parents
et à ma famille,

Je remercie vivement :

— d'abord, Patrice Philippon qui a dirigé cette thèse. Ses suggestions ont été déterminantes pour l'aboutissement de ces recherches. C'est avec un grand plaisir que je prenais le train pour Paris afin de discuter avec lui,

— Michel Waldschmidt qui m'a initié à la recherche mathématique en dirigeant ma thèse de 3ème cycle et qui a montré beaucoup d'intérêt pour cette nouvelle thèse,

— tous les membres de l'équipe "Problèmes diophantiens" pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont réservé à l'I.H.P.,

— Sabah Fakir dont les conseils et les suggestions m'ont éclairé sur certaines questions et qui préside le jury de cette thèse,

— Nicole Zinn-Justin, Michel Langevin et Marc Huttner qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de cette thèse,

— tous les collègues de l'U.F.R. de Mathématiques de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois,

— Raymonde Bérat, pour sa grande disponibilité et le soin apporté à la réalisation technique de ce texte,

— Ginette Doclot, responsable de la bibliothèque, sans laquelle une bonne documentation ne serait posssible,

— tout le personnel de reprographie pour la réalisation matérielle de ce travail.

PLAN

Introduction générale.

En 1949, A.O. Gel'fond élabora une méthode pour démontrer l'indépendance algébrique de deux nombres par exemple $2^{\sqrt[3]{2}}$ et $2^{\sqrt[3]{4}}$. Plus généralement, il démontra le cas $d = 3$ de la conjecture suivante.

Conjecture de Gel'fond Schneider (cf. $[G]$ ou $[Sc]$) :

Soient α un nombre algébrique distinct de 0, 1 et β un nombre algébrique de degré $d \geq 2$ sur $\mathbf{Q}$. Alors, $\operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}) = d - 1$.

Cette méthode repose essentiellement sur un critère de transcendance appelé "critère de Gel'fond". La démonstration de ce critère utilise essentiellement le résultant de deux polynômes. Ce critère a été raffiné indépendamment en 1971 par M. Waldschmidt et D. Brownawell (cf. $[Br_1]$ par exemple).

En 1973, G.V. Chydnovsky (cf. $[C]$) développa cette méthode grâce à un critère d'indépendance algébrique en plusieurs variables pour démontrer l'indépendance algébrique de plus de deux nombres. Il démontra, sous les hypothèses de la conjecture de Gel'fond Schneider, que $\operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}) \geq \left[\frac{\log(d+1)}{\log 2}\right]$.

En 1984, en utilisant les techniques de l'élimination projective, introduite par Y.V. Nesterenko $[N_1]$ dans la transcendance, P. Philippon démontre un critère d'indépendance algébrique multi-dimensionel qui généralise les critères précédents. Ce critère lui a permis de montrer que : $\operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}) \geq [\frac{d}{2}]$ où α et β sont comme ci-dessus. Ce résultat a été raffiné récemment par G. Diaz $[D]$ qui obtient $[\frac{d+1}{2}]$ au lieu de $[\frac{d}{2}]$.

Parallèlement à l'étude qualitative en transcendance, on s'intéresse aux résultats quantitatifs. Il y a deux approches; la première est la notion de mesure d'indépendane algébrique en dimension $k \geq 0$. La seconde est la notion de mesure d'approximation simultanée en dimension $k \geq 0$.

En ce qui concerne la première, citons les travaux de P. Philippon $[P_2]$, de Nesterenko sur la fonction exponentielle $[N_2]$, de D. Brownawell-R. Tubbs ($[Br_2]$, $[Br - Tu]$) sur la fonction elliptique de Weierstrass et le travail en cours de E.M. Jabbouri ($[J]$) dans le cadre général des groupes algébriques commutatifs.

Dans ce travail, nous nous intéressons particulièrement à la seconde notion, pour $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{C}^n$, l'étude d'une mesure d'approximation simultanée en dimension k $\left(0 \leq k < \operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\underline{\alpha})\right)$ de $\underline{\alpha}$ consiste en une minoration non triviale de la distance du point $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ à un point arbitraire $\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ dont les coordonnées sont dans une extension de degré de transcendance k sur $\mathbf{Q}$, en fonction des tailles (relativement à cette extension) de $\beta_1, \ldots, \beta_n$.

Citons dans ce sens les travaux de Shorey [Sh], de M. Mignotte et M. Waldschmidt [$M - W$] dans le cas où la dimension k est nulle. Dans ce cas, les deux notions quantitatives, mesure de transcendance et mesure d'approximation simultanée sont équivalentes. Dans le cas où la dimension $k > 0$, l'équivalence entre ces notions a été étudiée par P. Philippon dans [P_2[, mais cette équivalence n'est pas assez fine puisqu'on perd dans la qualité de la mesure dans le passage de l'une à l'autre.

Dans la première partie de ce travail, nous démontrons une version quantitative (cf. critère principal) du critère d'indépendance algébrique de P. Philippon (cf. [P_1]). Cette version permet d'obtenir directement des mesures d'approximation simultanées. Ces mesures sont meilleures en qualité que celles obtenues par P. Philippon à partir de mesures d'indépendance algébrique (cf. [P_2], corollaire 6). Nous appliquons ensuite ce critère pour obtenir des mesures d'approximation simultanées de valeurs de la fonction exponentielle (usuelle).

Le but de la seconde partie de cette thèse est d'étendre ces résultats quantitatifs à certaines valeurs liées à l'application exponentielle d'un groupe algébrique commutatif défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$. En particulier quand le groupe est de la forme $G_a \times G_m^\delta$, où G_a est le groupe additif et G_m le groupe multiplicatif, nous retrouvons les résultats concernant la fonction exponentielle usuelle démontrés dans la première partie.

Quand G est de la forme $G_a \times E^\delta$, où E est une courbe elliptique de Weierstrass, nous obtenons des résultats quantitatifs d'indépendance algébrique de valeurs de la fonction elliptique associée à E et nous améliorons qualitativement les résultats connus jusqu'à présent.

Plus généralement, le résultat qualitatif obtenu dans le cadre général des groupes algébriques améliore un résultat de M. Waldschmidt (cf. [W], th. 14) du moins dans le cas d'un sous-groupe à un paramètre.

La méthode de transcendance que nous adoptons est une méthode de type "Gel'fond Schneider" utilisé par G. Diaz [D] dans le cas exponentiel. Nous la développons, dans le cadre des groupes algébriques commutatifs. Cette méthode utilise une fonction (la fonction auxiliaire) à une variable et un lemme de zéros multi-homogène de P. Philippon (cf. [P_3]). L'outil algébrique essentiel dans la démonstration est le critère quantitatif d'indépendance algébrique démontré dans la première partie.

Bibliographie générale.

[Br_1] D. Brownawell, On the development of Gel'fond's method, in *'Proc. Number theory Carbondale'", Lecture Notes in Math. 751, Springer-Verlag (1979), 16-44.*

[Br_2] D. Brownawell, Large transcendence degree revisited I : Exponential and non-CM cases, *Lectures Notes in Mathematics 1290, Springer-Verlag (1987), 149-173.*

[$Br - Tu$] D. Brownawell and R. Tubbs, Large Transcendance degree revisited II the CM case, *Lectures Notes in Mathematics, 1290, Springer-Verlag (1987), 175-188.*

[C] G.V. Chudnovsky, Contributions to the theory of transcendental numbers Mathematical surveys and Monographs, *Number 19.*

[D] G. Diaz, Grands degrés de transcendance pour des familles d'exponentielles, dans *"Séminaire d'arithmétique, Saint-Etienne, 1986-1987".*

[G] A.O. Gel'fond, Trancendental and algebraic numbers, *Moscou, GITIL, 1952 et New York, Dover, 1960.*

[J] E.M. Jabbouri, Mesures d'indépendance algébrique sur les groupes algébriques commutatifs. *(Manuscrit)*

[$M - W$] M. Mignotte, M. Waldschmidt, Approximation simultanée de valeurs de la fonction exponentielle, *Composito Mathematica 34, fasc. 2 (1977), 127-139.*

[N_1] Y.V. Nesterenko, Estimates for the orders of zéros of functions of a certain class and their applications in the theory of transcendental numbers, *Izv. Akad. Nauk. USSR Math. 41 (1977), Math. USSR Izv II (1977), 239-270.*

[N_2] Y.V. Nesterenko, Measures of algebraic independance of numbers and functions, *Journées arithmétiques de Besançon (1985), Astérisque 147-148 (1987), p. 141-149.*

[P_1] P. Philippon, Critères pour l'indépendance algébrique, *Publications mathématiques de l'I.H.E.S. n° 64 (1986), 5-52.*

[P_2] P. Philippon, Sur les mesures d'indépendance algébrique, *"Séminaire de théorie de nombres, Paris, 1983-84", éd. C. Goldstein, Birkhaüsser Progess in Math. 59 (1985).*

[P_3] P. Philippon, Un lemme de zéros pour les groupes produits, dans *"Problèmes diophantiens 1984-85", Publ. Math. Univ. P. et M. Curie, volume 73, (1985), n°* 6.

[P_4] P. Philippon, Sous-groupes à n-paramètres et indépendance algébrique. Approximations diophantiennes et nombres transcendants, *Luminy, 1982). Birkhäuser, Progress in Math., 31 (1983) 221-234.*

[Sc] Th. Schneider, Einführung in die transzendenten Zahlen, *Springer Verlag, 1957, (Grund der Math. Wiss, 81); trad. franç., 1959, Gauthier-Villars.*

[Sh] T. Shorey, On the sum $\Sigma_{k=1}^{3}|2^{\pi^k}-\alpha_k|$, α_k algebraic numbers, *J. Number Theory 6, (1974), 248-260.*

[W] M. Waldschmidt, Groupes algébriques et grands degrés de transcendance, *Acta Math. 156 (1986), 253-302.*

PREMIÈRE PARTIE

MESURE D'APPROXIMATION SIMULTANEE POUR DES VALEURS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

Introduction

Le résultat principal de ce texte consiste à établir une mesure d'approximation simultanée, de certaines familles de nombres en dimension positive ou nulle.

Plus précisément, nous obtenons (cf. Corollaire 1) une mesure d'approximation simultanée, en dimension positive ou nulle, des nombres $e^{x_1 \cdot y_1}, \ldots, e^{x_p \cdot y_q}$ où $x_1, \ldots, x_p$ (resp. $y_1, \ldots, y_q$) sont des nombres complexes $\mathbf{Q}$-linéairement indépendant et vérifiant une hypothèse technique de mesure d'indépendance linéaire.

Dans le cadre du problème de Gelfond Schneider, nous démontrons (cf. Corollaire 3) une mesure d'approximation simultanée de $\gamma^\beta, \ldots, \gamma^{\beta^{d-1}}$ où γ est un nombre algébrique différent de 0 et 1 et β un nombre algébrique de degré $d \geq 2$.

Dans le corollaire 4, nous obtenons une mesure d'approximation simultanée de $\left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta(\omega)}{\omega}\right)$ où ω est une période primitive du réseau d'une fonction elliptique et $\eta(\omega)$ la quasi-période associée.

Notons que d'autres résultats quantitatifs, sur l'indépendance algébrique ont été démontrés par Yu. Nesterenko $[N_2]$, P. Philippon $[P_2]$, E.M. Jabbouri [J] et G. Philibert [Ph].

L'équivalence entre "mesure d'indépendance algébrique" et "mesure d'approximation simultanée" a été étudiée par P. Philippon dans $[P_2]$; mais une équivalence fine entre ces deux notions, en plusieurs variables, n'est pas établie.

P. Philippon obtient (cf. $[P_2]$, Corollaire 6) une mesure d'approximation simultanée d'une famille de nombres à partir d'une mesure d'indépendance algébrique de celle-ci. Dans ce travail, nous améliorons ce résultat en remplaçant l'exposant de la taille qui intervient dans cette mesure par un exposant plus naturel.

L'outil essentiel, pour la démonstration de ces résultats, est l'algèbre commutative et, en particulier, les techniques de "l'élimination" introduite par Nesterenko (cf. $[N_1]$) dans l'étude des nombres transcendants et développés par P. Philippon dans $[P_1]$.

Le plan de ce travail est le suivant :

Dans la première partie, nous présentons les résultats auxiliaires et en particulier le lemme 8 qui permet de réduire les hypothèses.

Dans la seconde partie, nous énonçons le critère principal au paragraphe 1 et démontrons des corollaires de ce critère au paragraphe 2. Le paragraphe 3 est consacré à la démonstration du critère principal. Elle se fait en deux étapes ; dans la première étape (lemme 9), on réduit les hypothèses. La deuxième étape (lemme 10) utilise essentiellement les techniques de l'élimination projective.

I - NOTATIONS ET RESULTATS AUXILIAIRES.

1 - Définitions et notations.

1) Notions de hauteurs et tailles de polynômes à coefficients dans un corps de nombres.

Soit K un corps de nombres. On désigne par M_K l'ensemble des valeurs absolues de K et S_K l'ensemble des valeurs absolues archimédiennes.

Soit $v \in M_K$, on note K_v le complété de K pour la valeur absolue v, $\mathbf{C}_v$ le complété d'une clôture algébrique de K_v, σ_v le plongement de K dans $\mathbf{C}_v$ étendant le plongement canonique de K dans K_v et n_v le degré de K_v sur $\mathbf{Q}_v$.

Soit $P \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_m]$ (resp. $P \in \mathbf{C}_v[X_1, \ldots, X_m]$) . Si $v \in S_K$, on note $M_v(P)$ la mesure de Mahler de $\sigma_v(P)$ (resp. P) ; la mesure de Mahler d'un polynôme Q de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_m]$ est définie par :

$$M(Q) = \exp \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log |Q(e^{2i\pi u_1}, \ldots, e^{2i\pi u_m})|\, du_1 \cdots du_m \text{ si } Q \neq 0$$

et $$M(0) = 0\,.$$

Si $v \notin S_K$, on note $M_v(P)$ le maximum des valeurs absolues v-adiques des coefficients de $\sigma_v(P)$ (resp. P).

On définit les notions de hauteur, hauteur invariante, taille et taille v-adique de P par :

$$\overline{\underline{h}}(P) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} n_v \cdot \max(0, \log M_v(P))$$

$$\underline{h}(P) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} n_v \cdot \log M_v(P)$$

$$t(P) = \max(1 + \deg P, \overline{\underline{h}}(P))$$

$$t_v(P) = \max(1 + \deg P, \log H_v(P))$$

où $H_v(P)$ désigne le maximum des valeurs absolues v-adiques des coefficients de $\sigma_v(P)$ (resp. P).

Remarquons que si $v \notin S_K$, $H_v(P) = M_v(P)$.

Remarques :

Nous utiliserons souvent les inégalités suivantes (cf. [W], p. 26). Soit $v \in S_K$ et $P \in \mathbf{C}_v[X_1, \ldots, X_m]$, on a :

$$M_v(P) \leq (1 + \deg P)^m H_v(P)$$

$$\text{et} \qquad H_v(P) \leq 2^{\deg P} M_v(P)\,.$$

On déduit de ces inégalités :

$$t_v(P) \leq ([K : \mathbf{Q}] + 1) \cdot t(P)\,.$$

Remarquons que pour $P \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_m] \backslash \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned}\overline{\underline{h}}(P) &= \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} n_v \cdot \max(0, \log M_v(P)) \\ &= \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v \in S_K} n_v \cdot \max(0, \log M(P)) \\ &= \log M(P)\end{aligned}$$

puisque $\sum_{v \in S_K} n_v = [K : \mathbf{Q}]$.

2) Notion de taille sur une extension de $\mathbf{Q}$ *de type fini.*

L'étude d'une mesure d'approximation d'un point $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbf{C}_v^n$ en dimension k, consiste à minorer, pour tout point $\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de $\mathbf{C}_v^n$ dont les coordonnées appartiennent à une extension de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}_v$, de degré de transcendante k sur $\mathbf{Q}$, la quantité $\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i - \beta_i|_v$, en fonction des tailles (définies ci-dessous) de $\beta_1, \ldots, \beta_n$ dans cette extension.

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que cette extension est de la forme $L = \mathbf{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_k, \theta_{k+1})$ avec $(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbf{C}_v^k$ algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et θ_{k+1} entier sur $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_k]$. Un tel système sera appelé un k-système.

Le polynôme minimal de θ_{k+1} sur $\mathbf{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ peut s'écrire sous la forme $R(\theta_1, \ldots, \theta_k, X_{k+1})$, où

$$R(X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}) = X_{k+1}^{\delta} + R_1(X_1, \ldots, X_k) \cdot X_{k+1}^{\delta-1} + \ldots + R_\delta(X_1, \ldots, X_k)$$

avec $R_i \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_k]$, pour tout i, $(i = 1, \ldots \delta)$
et $\delta = [\mathbf{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}) : \mathbf{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_k)]$.

Un élément B de L s'écrit de manière unique (à des facteurs ± 1 près) sous la forme $\beta = \sum_{i=0}^{\delta-1} \frac{P_i(\underline{\theta})}{Q_i(\underline{\theta})} \cdot \theta_{k+1}^i$ où $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, P_i et Q_i sont des polynômes de $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_k]$ premiers entre eux, pour tout i, $(i = 0, \ldots, \delta - 1)$.

Soient $Q =: \mathrm{ppcm}\{Q_i, (i = 0, \ldots, \delta - 1)\}$ et $S_i =: \frac{Q \cdot P_i}{Q_i}$. On a :

$$Q(\underline{\theta}) \cdot \beta = \sum_{i=0}^{\delta-1} S_i(\underline{\theta}) \cdot \theta_{k+1}^i \,.$$

On définit, en suivant ([W_1], définition 4.2.1, p. 103) la taille $t(\beta)$ de β "relativement" au système de générateurs $\{\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}\}$ par :

$$t(\beta) = \max\{t(Q), t(S_0), \ldots, t(S_{\delta-1}), \delta\} \,.$$

Cette taille est indépendante, à une constante près, du système choisi ; les tailles d'un élément de L, relativement à deux systèmes de générateurs de L, $\{\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}\}$ et $\{\theta'_1, \ldots, \theta'_{k+1}\}$, sont égales, à une constante $c = c(\underline{\theta}, \underline{\theta}')$ près (cf. [W], Lemme 4.2.22, p. 114). Cela nous amène à la définition suivante :

Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{C}_v^n$ et $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction. On dira que φ est une mesure d'approximation simultanée en dimension k de $\underline{\alpha}$ si pour tout k-système $\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}$ de $\mathbf{C}_v$, il existe $c = c(\underline{\theta}) > 0$ tel que pour tout point $\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ appartenant à $(\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}])^n$ dont les coordonnées sont de tailles, relativement à $\underline{\theta}$, inférieures à T, on ait :

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j - \beta_j|_v \geq \exp(-\varphi(cT)) \,.$$

Pour une raison de commodité, nous ferons l'étude par rapport à un k-système $\{\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}\}$ avec $\max_{1 \leq i \leq k} |\theta_i|_v \leq 1$.

On fixe ce système dans toute la suite ; R désignera le polynôme minimal de θ_{k+1} sur $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_k]$. La taille d'un élément de $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}]$ sera la taille "relativement au système $\{\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}\}$".

3) Hauteurs sur les variétés.

Dans ce travail, nous utiliserons les notations, définitions et résultats de [P_1].

Ainsi pour un idéal homogène I de $K[X_0, \ldots, X_k]$ de codimension $k + 1 - r$ et $\underline{d} \in \mathbf{N}^r$, on définit (cf. [$P_1$], définition 1.14), la hauteur d'indice $\underline{d}$ de I (resp. le degré d'indice $\underline{d}$ de I) par

$$Ht_{\underline{d}}(I) =: \underline{h}(f) \quad (\text{resp. } \mathrm{Deg}_{\underline{d}}(I) =: d^o f)$$

où f est une forme U éliminante d'indice $\underline{d}$ de I. On note aussi :

$$\|I\|_{\underline{d},v} =: M_v(\tilde{\delta}_{\underline{\theta},\underline{d}}(f))/M_v(f)$$

où $\underline{\theta} = (1, \theta_1, \ldots, \theta_k)$, $v \in M_K$ et $\tilde{\delta}_{\underline{\theta},\underline{d}}$ désigne le morphisme défini dans ([P_1], définition 1.15).

Enfin, pour un polynôme $Q \in K[X_1, \ldots, X_k]$, on note ${}^hQ$ l'homogénéïsé de Q dans $K[X_0, \ldots, X_k]$.

4) Notation.

Soient f et g deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on écrira $f \ll g$ s'il existe deux nombres réels positifs x_0 et C tels que pour tout $x > x_0$, $f(x) \leq Cg(x)$.

2 - Résultats auxiliaires.

Les constantes c'_1, $c'_2 \ldots$ qui interviennent dans ces résultats sont explicités afin de rendre les résultats effectifs, mais ce ne sont pas les meilleures constantes possibles.

Rappelons que $\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}$ (resp. R) est le système (resp. le polynôme) introduit dans le paragraphe précédent.

Lemme 1. *Soient* $P \in \mathbf{C}_v[X_1, \ldots, X_m]$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbf{C}_v^m$. *Soit* $(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbf{C}_v^m$ *tel que* $\max_{1 \leq i \leq m} |\gamma_i - z_i|_v \leq \varepsilon < 1$. *Alors, on a :*

$$|P(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) - P(z_1, \ldots, z_m)|_v \leq \varepsilon \cdot \exp(c'_1 \cdot t_v(P))$$

où $c'_1 = m(2 + \log(1 + \max_{1 \leq i \leq m} |\gamma_i|_v))$.

Démonstration :

$$|P(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) - P(z_1, \ldots, z_m)|_v \leq |P(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) - P(z_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)|_v + \ldots$$
$$+ |P(z_1, \ldots, z_{m-1}, \gamma_m) - P(z_1, \ldots, z_m)|_v \,.$$

En majorant les coefficients de P par $e^{t_v(P)}$ et $\max_{1 \leq i \leq m} |z_i|_v$ par $1 + \max_{1 \leq i \leq m} |\gamma_i|_v$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&|P(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) - P(z_1, \ldots, z_m)|_v \\
&\quad \leq (1 + \deg P)^{m-1} \cdot e^{t_v(P)} \cdot (1 + \max_{1 \leq i \leq m} |\gamma_i|_v)^{(m-1)\deg P} \times \\
&\quad \times \sum_{j=1}^{m} \max_{0 \leq k \leq deg P} |\gamma_j^k - z_j^k|_v \,.
\end{aligned}$$

or $$|\gamma_j^k - z_j^k|_v \leq |\gamma_j - z_j|_v \cdot \sum_{i=0}^{k-1} |\gamma_j|_v^i \cdot |z_j|_v^{k-1-i}$$
$$\leq \varepsilon \cdot (1 + \max_{1\leq j \leq m} |\gamma_j|_v)^k .$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} &|P(\gamma_1,\ldots,\gamma_m) - P(z_1,\ldots,z_m)|_v \\ &\quad \leq \varepsilon \cdot \exp[m \cdot t_v(P) + m \cdot \log(1 + \max|\gamma_i|_v) \cdot t_v(P) + \log m] \\ &\quad \leq \varepsilon \cdot \exp(c_1' \cdot t_v(P)) . \end{aligned}$$ ■

Lemme 2. *Soient* $(z_1,\ldots,z_k) \in \mathbf{C}_v^k$ *tel que* $\max_{(i=1,\ldots,k)} |z_i - \theta_i|_v \leq \varepsilon < 1$. *Alors, il existe* $z_{k+1} \in \mathbf{C}_v$ *vérifiant :*

$$R(z_1,\ldots,z_{k+1}) = 0 \quad et \quad |z_{k+1} - \theta_{k+1}| \leq (\varepsilon \cdot \exp(c_2' \cdot t_v(R)))^{\frac{1}{\delta}}$$

où $c_2' = (k+1)[2 + \log(2 + \max_{(i=1,\ldots,k)} |\theta_i|)]$.

Démonstration : Soient $u_1,\ldots,u_\delta$ les racines de $R(z_1,\ldots,z_k,X)$, on a :

$$R(z_1,\ldots,z_k,X) = \prod_{i=1}^{\delta}(X - u_i)$$

d'où $$|R(z_1,\ldots,z_k,\theta_{k+1})|_v \geq (\inf_{i=1,\ldots,\delta} |\theta_{k+1} - u_i|_v)^\delta .$$

Soit z_{k+1} une racine de $R(z_1,\ldots,z_k,X)$ vérifiant :

$$|\theta_{k+1} - z_{k+1}|_v = \inf_{(i=1,\ldots,\delta)} |\theta_{k+1} - u_i|_v .$$

On a, d'après le lemme 1,

$$|R(\theta_1,\ldots,\theta_k,\theta_{k+1}) - R(z_1,\ldots,z_k,\theta_{k+1})|_v \leq \varepsilon \cdot \exp(c_2' \cdot t_v(R))) .$$

Comme $R(\theta_1,\ldots,\theta_{k+1}) = 0$, on en déduit le résultat. ■

Définition. *(Le semi-résultant de Cudnovskij)* -
Soient

$$P(X) = a_0X^p + \ldots + a_p = a_0\prod_{i=1}^{p}(X - u_i)\ ;\ a_0 \neq 0$$

$$Q(X) = b_0X^q + \ldots + b_q = b_0\prod_{i=1}^{q}(X - t_i)\ ;\ b_0 \neq 0$$

deux polynômes de $\mathbf{C}_v[X]$. Le semi-résultant de P et Q, noté $r(P,Q)$ est défini par

$$r(P,Q) = a_0^q \cdot b_0^p \prod_{\substack{(i,j)\\ u_i \neq t_j}} (u_i - t_j) .$$

Lemme 3. *Il existe un polynôme G de $\mathbf{Z}[X_0,\ldots,X_p,Y_0,\ldots,Y_q]$ de hauteur majorée par 5^{pq} et de degré au plus q en $(X_0,\ldots,X_p)$ et, au plus, p en $(Y_0,\ldots,Y_q)$ et vérifiant :*

$$r(P,Q) = G(a_0,\ldots,a_p,b_0,\ldots,b_q) .$$

Démonstration : Voir ([B], Lemme 2). ■

Lemme 4. *On suppose P non constant. Soit ζ une racine de P de multiplicité s. Si $Q(\zeta) \neq 0$, alors, on a :*

$$0 \neq |r(P,Q)|_v \leq |Q(\zeta)|_v^s \cdot \exp(6 \cdot t_v(P) \cdot t_v(Q)) .$$

Démonstration : Voir ([R], Lemme 3.8). ■

Lemme 5. *Soient $m \geq 2$ et $P \in K[X_1,\ldots,X_m]$. Soient $v \in M_K$, A un nombre réel ≥ 1 et $(z_1,\ldots,z_{m-1}) \in \mathbf{C}_v^{m-1}$ tel que $\max_{(i=1,\ldots,m-1)} |z_i|_v \leq A$. Alors, on a :*

$$t_v(P(z_1,\ldots,z_{m-1},X)) \leq ([K:\mathbf{Q}] + \log 2A + m) \cdot t(P) .$$

Démonstration : Si $v \notin S_k$, on a $M_v(P(z_1,\ldots,z_{m-1},X)) \leq A^{\deg P} \cdot M_v(P)$.

Si $v \in S_k$, on a :

$$\begin{aligned} M_v(P(z_1,\ldots,z_{m-1},X)) &\leq (1+\deg P) \cdot H_v(P(z_1,\ldots,z_{m-1},X)) \\ &\leq (1+\deg P)^m \cdot A^{\deg P} \cdot H_v(P) \\ &\leq (1+\deg P)^m \cdot A^{\deg P} \cdot 2^{\deg P} \cdot M_v(P) . \end{aligned}$$

Comme $\log M_v(P) \leq [K:\mathbf{Q}] \cdot \underline{\overline{h}}(P)$, on en déduit le résultat. ■

Lemme 6. *Soient $P_1,\ldots,P_l$ des polynômes de $\mathbf{C}_v[X_1,\ldots,X_m]$. On a :*

si $v \in S_k$, $\quad M_v(\sum_{i=1}^l P_i) \leq \sum_{i=1}^l (m+1)^{\deg P_i} \cdot M_v(P_i)$

si $v \notin S_k$, $\quad M_v(\sum_{i=1}^l P_i) \leq \max_{(i=1,\ldots,l)} M_v(P_i)$.

Démonstration : Voir [P_1], Lemme 1.13 pour le cas $l = 2$; on démontre de la même façon le résultat pour le cas $l > 2$. ■

Lemme 7. *Soient m un entier ≥ 2, P et Q deux polynômes de $K[X_1, \ldots, X_m]$ non nuls. Soient $(z_1, \ldots, z_{m-1}) \in \mathbf{C}_v^{m-1}$ et A un nombre réel ≥ 1 tels que :* $\max_{(i=1,\ldots,m-1)} |z_i|_v \leq A$.

On suppose que $P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X)$ est non constant ; soit $\zeta \in \mathbf{C}_v$ une racine de $P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X)$ de multiplicité s. Si, $Q(z_1, \ldots, z_{m-1}, \zeta) \neq 0$, alors, il existe $F \in K[X_1, \ldots, X_{m-1}] \backslash \{0\}$ vérifiant :

I) $F(z_1, \ldots, z_{m-1}) = r(P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X), Q(z_1, \ldots, z_{m-1}, X))$

II) $|F(z_1, \ldots, z_{m-1})|_v \leq |Q(z_1, \ldots, z_{m-1}, \zeta)|_v^s \cdot \exp(c'_3 \cdot t(P) \cdot t(Q))$

III) $t(F) \leq c'_4 \cdot t(P) \cdot t(Q)$

où $c'_3 = 6(\log 2A + m + [K : \mathbf{Q}])^2$ et $c'_4 = (4m + 5)$.

Démonstration : P et Q s'écrivent :

$$P(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{i=0}^{p} P_i(X_1, \ldots, X_{m-1}) X_m^i \text{ où } P_i \in K[X_1, \ldots, X_{m-1}]$$

$$Q(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{j=0}^{q} Q_j(X_1, \ldots, X_{m-1}) X_m^j \text{ où } Q_j \in K[X_1, \ldots, X_{m-1}] .$$

Posons
$$a_i = P_i(z_1, \ldots, z_{m-1}) \quad (i = 0, \ldots, p)$$
$$b_j = Q_j(z_1, \ldots, z_{m-1}) \quad (j = 0, \ldots, q) .$$

D'après le lemme 3, il existe un polynôme G de $\mathbf{Z}[X_0, \ldots, X_p, Y_0, \ldots, Y_q] \backslash \{0\}$ tel que : $r\big(P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X), Q(z_1, \ldots, z_{m-1}, X)\big) = G(a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q)$.

Soit F le polynôme de $K[X_1, \ldots, X_{m-1}]$ défini par :

$$F(\underline{X}) = G\big(P_0(\underline{X}), \ldots, P_p(\underline{X}), Q_0(\underline{X}), \ldots, Q_q(\underline{X})\big) .$$

On a bien l'égalité I) du lemme. L'inégalité II) découle du lemme 4 et du lemme 5.

Estimons, maintenant, la taille de F.

On a $\deg F \leq 2 \deg P \cdot \deg Q$.

Si $v \in S_K$, on déduit du lemme 6, que :

$$M_v(F) \leq m^{2\deg P\cdot\deg Q} \cdot 5^{\deg P\cdot\deg Q} \cdot (1+\deg P)^{\deg Q} \cdot (1+\deg Q)^{\deg P} \times$$
$$\times \left(\max_{(i=0,\ldots,p)} M_v(P_i)\right)^{\deg Q} \times \left(\max_{(j=0,\ldots,q)} M_v(Q_j)\right)^{\deg P}$$

Comme

$$\begin{aligned} M_v(P_i) &\leq (1+\deg P)^{m-1} \cdot H_v(P) \\ &\leq (1+\deg P)^{m-1} \cdot 2^{\deg P} \cdot M_v(P) \;\text{ pour tout } i,\; (i=0,\ldots,p)\,. \end{aligned}$$

de même, $M_v(Q_j) \leq (1+\deg Q)^{m-1} \cdot 2^{\deg Q} \cdot M_v(Q)$, pour tout j, $(j=0,\ldots,q)$.

On en déduit que :

$$M_v(F) \leq m^{2\deg P\cdot\deg Q} \cdot 20^{\deg P\cdot\deg Q} \cdot (1+\deg P)^{m\deg Q} \cdot (1+\deg Q)^{m\deg P} \times$$
$$\times (M_v(P))^{\deg Q} \cdot (M_v(Q))^{\deg P} .$$

Si $v \notin S_K$, $M_v(F) \leq (M_v(P))^{\deg Q} \cdot (M_v(Q))^{\deg P}$.

Or,

$$\begin{aligned} \underline{\overline{h}}(F) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} + \sum_{v\in S_k} n_v \cdot \max(0, \log M_v(F)) + \\ + \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v\notin S_K} n_v \cdot \max(0, \log M_v(F)) \,. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{v\in S_K} n_v = [K:\mathbf{Q}]$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \underline{\overline{h}}(F) \leq 2\cdot\deg P\cdot\deg Q\cdot\log m + \deg P\cdot\deg Q\log 20 + \\ + m\cdot\deg Q\cdot\log(1+\deg P) + m\cdot\deg P\cdot\log(1+\deg Q) + \\ + \deg Q\cdot\underline{\overline{h}}(P) + \deg P\cdot\underline{\overline{h}}(Q) \,. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$t(F) \leq c_4' \cdot t(P)\cdot t(Q) \text{ où } c_4' = (4m+5) \,. \qquad \blacksquare$$

Lemme 8. *Soient* $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{C}_v^n$, P *un polynôme de* $K[X_1,\ldots,X_n]$ *vérifiant :* $|P(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|_v \leq \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$.

Soient $(\beta_1,\ldots,\beta_n) \in (\mathbf{Z}[\theta_1,\ldots,\theta_{k+1}])^n$ *vérifiant :*

$$\max_{1\leq i\leq n} t(\beta_i) \leq T \;\; et \;\; \max_{1\leq i\leq n} |\alpha_i - \beta_i|_v \leq \varepsilon_1 < \frac{1}{2} \,.$$

On suppose que P n'a pas de zéros dans la boule de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon ε_3 de $\mathbf{C}_v^n$, avec $2\varepsilon_1 \leq \varepsilon_3 < 1$.

Alors, il existe un polynôme P^* (dépendant de P) de $K[Y_1, \ldots, Y_k]$ tel que :

IV) $|P^*(\theta_1, \ldots, \theta_k)|_v \leq (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \cdot \exp(c'_8 \cdot t(P) \cdot T)$.

V) $t(P^*) \leq c'_9 \cdot t(P) \cdot T$

VI) P^* *n'a pas de zéros dans la boule de* $\mathbf{C}_v^k$ *de centre* $\underline{\theta}$ *et de rayon* $\varepsilon_3^\delta \cdot \exp(-c'_{10} \cdot T)$

où $$c'_8 = 7(4k+n+8) \cdot \left(k + [K:\mathbf{Q}] + \log(2 + |\theta_{k+1}|_v) + 5\right)^2 \cdot t(R)$$
$$c'_9 = (4k+10) \cdot (4k+n+8) \cdot t(R)$$

et $$c'_{10} = 12(k+1) \cdot (2 + \log(2 + |\theta_{k+1}|_v)) \cdot t(R) .$$

Démonstration : Rappelons que pour tout i, $(i = 1, \ldots, n)$ β_i s'écrit :

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\delta-1} P_{i,j}(\theta_1, \ldots, \theta_k) \cdot \theta_{k+1}^j \text{ , avec } P_{i,j} \in \mathbf{Z}[Y_1, \ldots, Y_k]$$

tel que : $\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq \delta-1}} t(P_{i,j}) \leq T$.

Posons, pour tout i, $(i = 1, \ldots, n)$, $S_i(\underline{Y}) = \sum_{j=0}^{\delta-1} P_{i,j}(Y_1, \ldots, Y_k) \cdot Y_{k+1}^j$.

Soit $\tilde{P}$ le polynôme de $K[Y_1, \ldots, Y_{k+1}]$ défini (en fonction de P) par

$$\tilde{P}(\underline{Y}) = P\left(S_1(\underline{Y}), \ldots, S_n(\underline{Y})\right) .$$

Montrons que $\tilde{P}(\underline{\theta})$ est "petit". Par définition, $\tilde{P}(\underline{\theta}) = P(\underline{\beta})$. En utilisant le lemme 1, on obtient :

$$|P(\underline{\beta}) - P(\underline{\alpha})|_v \leq \varepsilon_1 \cdot \exp\left(c(\underline{\beta}) \cdot t_v(P)\right) \leq \varepsilon_1 \cdot \exp[c(\beta) \cdot ([K:\mathbf{Q}] + 1) \cdot t_v(P)]$$

où $c(\beta) = n \cdot \left(2 + \log(1 + \max_{(i=1,\ldots,n)} |\beta_i|_v)\right)$.

Or, compte tenu de l'inégalité, $\max_{(i=1,\ldots,k)} |\theta_i|_v \leq 1$, on a :

$$|\beta_i|_v \leq \max_{0 \leq j \leq \delta-1} H_v(P_{i,j}) \cdot (\deg P_{i,j} + 1)^k \cdot (1 + |\theta_{k+1}|_v)^\delta .$$

Comme $P_{i,j} \in \mathbf{Z}[Y]$,

si $v \notin S_K$, $H_v(P_{i,j}) \leq 1$

si $v \in S_K$, on a (cf. Introduction, remarques)

$$\begin{aligned} H(P_{i,j}) &\leq 2^{\deg P_{i,j}} \cdot M(P_{i,j}) \\ &\leq 2^{\deg P_{i,j}} \cdot e^{\overline{h}(P_{i,j})} \\ &\leq e^{2t(P_{i,j})} . \end{aligned}$$

Puisque $\max_{i,j} t(P_{i,j}) \leq T$, on en déduit que :

$$|\beta_i|_v \leq \exp[(k+2+\log(1+|\theta_{k+1}|_v)) \cdot T] .$$

Par conséquent, on obtient :

$$|P(\underline{\beta}) - P(\underline{\alpha})|_v \leq \varepsilon_1 \cdot \exp(c_5' \cdot t(P) \cdot T) ,$$

avec $c_5' = n \cdot (5 + k + \log(1 + |\theta_{k+1}|_v))([K:\mathbf{Q}]+1)$.

Comme $|P(\underline{\alpha})|_v \leq \varepsilon_2$, on en déduit :

(a) $$|\tilde{P}(\underline{\theta})|_v \leq \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \exp(c_5' \cdot t(P) \cdot T) .$$

Estimation de la taille de $\tilde{P}$.

Si P s'écrit $P(\underline{X}) = \sum_{j_1,\ldots,j_n} p_{j_1,\ldots,j_n} X_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n}$ $(p_{j_1,\ldots,j_n} \in K)$, on a par définition :

$$\tilde{P}(\underline{Y}) = \sum_{j_1,\ldots,j_n} p_{j_1,\ldots,j_n} S_1^{j_1}(Y) \cdot \ldots \cdot S_n^{j_n}(Y) .$$

On a évidemment :

$$\deg \tilde{P} \leq \deg P \cdot \max_{(l=1,\ldots,n)} \deg S_l \leq 2 \cdot \deg P \cdot T .$$

En utilisant le lemme 6, on obtient : si

$$v \notin S_K, \quad M_v(\tilde{P}) \leq M_v(P) \cdot \max_{j_1,\ldots,j_n} M_v(S_1^{j_1} \times \ldots \times S_n^{j_n}) .$$

Or, puisque pour tout i, $(i = 1,\ldots,n), S_i \in \mathbf{Z}[\underline{Y}]$, on a donc

$$\max_{j_1,\ldots,j_n} M_v(S_1^{j_1} \times \ldots \times S_n^{j_n}) \leq 1 ,$$

on déduit que : $M_v(\tilde{P}) \leq M_v(P)$.

Si $v \in S_K$, on a :

$$M_v(\tilde{P}) \leq (2+k)^{2\deg P \cdot T} \cdot \sum_{j_1,\dots,j_n} M_v(p_{j_1,\dots j_n} S_1^{j_1} \cdot \dots \cdot S^{j_n})$$
$$\leq (2+k)^{2\deg P \cdot T} \cdot H_v(P) \cdot (\max_{1\leq i\leq n} M_v(S_i))^{\deg P} \cdot (\deg P + 1)^n .$$

Or
$$\begin{aligned} M_v(S_i) &\leq (1+\deg S_i)^{k+1} \cdot H_v(S_i) \\ &\leq (1+\deg S_i)^{k+1} \cdot \max_{0\leq j\leq \delta-1} H_v(P_{i,j}) \\ &\leq (1+\deg S_i)^{k+1} \cdot 2^T \cdot \max_{0\leq j\leq \delta-1} M_v(P_{i,j}) \\ &\leq (2T)^{k+1} \cdot 2^T \cdot e^T \end{aligned}$$

et $H_v(P) \leq 2^{\deg P} \cdot M_v(P)$, d'où

$$\begin{aligned} \underline{\overline{h}}(\tilde{P}) &\leq \log[(2+k)^{2\deg P \cdot T} \cdot 2^{\deg P} \cdot (2T)^{k+1}(2e)^T \cdot (\deg P+1)^n] + \\ &+ \sum_{v\in S_K} n_v \cdot \max(0, \log M_v(P)) + \sum_{v\notin S_K} n_v \cdot \max(0, \log M_v(P)) \\ &\leq (4k+n+7) \cdot t(P) \cdot T + \underline{\overline{h}}(P) . \end{aligned}$$

On en déduit que :

(b) $$t(\tilde{P}) \leq c'_6 \cdot t(P) \cdot T \quad \text{où} \quad c'_6 = (4k+n+8) .$$

Posons $\varepsilon_4 = \frac{1}{2}\varepsilon_3 \cdot \exp(-c'_7 \cdot T)$ avec $c'_7 = 2(k+1)\cdot(2+\log(2+|\theta_{k+1}|_v))$.

Montrons que $\tilde{P}$ n'a pas de zéros dans la boule de centre $\underline{\theta}$ et de rayon ε_4 de $\mathbf{C}_v^{k+1}$. En effet, supposons qu'il existe $(\theta'_1,\dots,\theta'_{k+1}) \in \mathbf{C}_v^{k+1}$ tel que : $\tilde{P}(\underline{\theta}') = 0$ et $\max_{1\leq j\leq k+1} |\theta'_j - \theta_j| \leq \varepsilon_4$.

Posons, pour tout i, $(i=1,\dots,n)$, $\beta'_i = S_i(\underline{\theta}')$. On a, par définition, $P(\underline{\beta}'_i) = \tilde{P}(\underline{\theta}')$.

Pour tout i, $(i=1,\dots,n)$, on a :

$$|\beta'_i - \beta_i|_v = |S_i(\underline{\theta}') - S_i(\underline{\theta})|_v .$$

En utilisant le lemme 1, on obtient :

$$\begin{aligned} \max_{1\leq i\leq n} |\beta'_i - \beta_i|_v &\leq \varepsilon_4 \cdot \exp[(k+1)\cdot(2+\log(2+|\theta_{k+1}|_v)) \cdot \max_{1\leq i\leq n} t_v(S_i)] \\ &\leq \varepsilon_4 \cdot \exp[2(k+1)\cdot(2+\log(2+|\theta_{k+1}|_v)) \cdot T] \\ &\leq \varepsilon_4 \cdot \exp(c'_7 \cdot T) \\ &\leq \frac{\varepsilon_3}{2} \end{aligned}$$

d'où
$$\begin{aligned}\max_{1\le i\le n}|\beta_i'-\alpha_i|_v &\le \max_{1\le i\le n}|\beta_i'-\beta_i|_v+\max_{1\le i\le n}|\alpha_i-\beta_i|_v\\ &\le \frac{\varepsilon_3}{2}+\varepsilon_1\\ &\le \varepsilon_3\,.\end{aligned}$$

$\underline{\beta}'$ est donc un zéro de P et β' appartient à la boule de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon ε_3, ce qui contredit l'hypothèse. On a donc la propriété (d) suivante :

(d) $\tilde{P}$ n'a pas de zéros dans la boule de centre $\underline{\theta}$ et de rayon ε_4 de $\mathbf{C}_v^{k+1}$.

Définissons, maintenant le polynôme P^*. Posons :

$$\varepsilon_5=\varepsilon_4^{\delta}\cdot\exp(-c_7'\cdot t_v(R))\,.$$

Soient $(z_1,\ldots,z_k)\in\mathbf{C}_v^k$ vérifiant $\max_{(i=1,\ldots,k)}|z_i-\theta_i|_v\le\varepsilon_5$. Il existe, d'après le lemme 2, $z_{k+1}\in\mathbf{C}_v$ tel que : $R(z_1,\ldots,z_{k+1})=0$ et

$$\begin{aligned}|z_{k+1}-\theta_{k+1}|_v &\le (\varepsilon_5\cdot\exp(c_7'\cdot t_v(R))^{\frac{1}{\delta}}\\ &\le \varepsilon_4\,.\end{aligned}$$

D'après (d), $\tilde{P}(z_1,\ldots,z_{k+1})\neq 0$. Par suite, le lemme 7 assure l'existence d'un polynôme P^* de $K[X_1,\ldots,X_n]$ tel que :

$$P^*(z_1,\ldots,z_k)=r\big(\tilde{P}(z_1,\ldots,z_k,X),R(z_1,\ldots,z_k,X)\big)\,.$$

Puisque pour tout $(z_1,\ldots,z_k)$ dans la boule de centre $(\theta_1,\ldots,\theta_k)$ et de rayon ε_5 il existe z_{k+1} tel que

$$\tilde{P}(z_1,\ldots,z_{k+1})\neq 0 \quad \text{et} \quad R(z_1,\ldots,z_{k+1})=0$$

On en déduit que P^* n'a pas de zéro dans la boule de $\mathbf{C}_v^k$ de centre $(\theta_1,\ldots,\theta_k)$ et de rayon ε_5. Ceci entraîne l'inégalité vi) du lemme.

L'inégalité iv) du lemme découle de l'inégalité ii) du lemme 7 et des inégalités (a) et (b) vérifiées par $\tilde{P}$.

L'inégalité v) du lemme découle de l'inégalité iii) du lemme 7 et de l'estimation (b) vérifiée par $t(\tilde{P})$. ∎

II - LE CRITERE PRINCIPAL ET SES COROLLAIRES.

On rappelle, qu'on désigne, dans toute la suite, par $\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}$ (resp. R), le système (resp. le polynôme) introduit dans le paragraphe 1 du I.

1 - Enoncé du critère principal.

Soit K un corps de nombres et $v \in M_K$. Soient $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction continue et strictement croissante et $\psi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction continue, croissante telle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\psi(x) \geq 1$.

Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{C}_v^n$. Soient c_1, c_2 et c_3 des constantes > 0 ne dépendant que de $\underline{\alpha}$, k, n et $[K : \mathbf{Q}]$.

Théorème. *(Critère principal). (H_1) On suppose que pour tout réel $M \geq M_0$, il existe un idéal $I_M = (P_{M,1}, \ldots, P_{M,m(M)})$ de $K[X_1, \ldots, X_n]$ vérifiant :*

I*) l'ensemble des zéros de I_M dans la boule de $\mathbf{C}_v^n$ de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon*

$$\exp\left(-c_1 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot \psi(M)^{k+2}\right)$$

de $\mathbf{C}_v^n$ est vide.

II*)* $\max_{1 \leq j \leq m(M)} |P_{M,j}(\underline{\alpha})|_v \leq \exp\left(-c_2 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot \psi(M)^{k+1}\right)$

III*)* $\max_{1 \leq j \leq m(M)} t(P_{M,j}) \leq c_3 \cdot M$.

Alors, il existe une constante $c = c(\underline{\alpha}, k, n, [K : \mathbf{Q}], t(R)) > 0$ (effectivement calculable) telle que, pour tout point $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de $(\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}])^n$ vérifiant : $\max_{1 \leq i \leq n} t(\beta_i) \leq T$, *on ait :*

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i - \beta_i|_v \geq \exp\left(-cT^{k+1} \cdot [\psi \circ w(cT^{k+1})]^{k+2} \cdot [w(cT^{k+1})]^{k+1}\right)$$

où w est la fonction inverse de u.

Remarque : P. Philippon a démontré dans $[P_2$, Corollaire 6], un résultat, moins fort, avec l'exposant n à la place de $k+1$. Ce théorème améliore donc le résultat de P. Philippon, puisque sous l'hypothèse (H_1) du théorème, on a $k < n$ (cf. $[P_1]$, critère principal).

2 - Corollaires.

On déduit du critère principal, des résultats quantitatifs sur les grands degrés de transcendance liés à la fonction exponentielle, on considère $x_1, \ldots, x_p$ (resp. $y_1, \ldots, y_q$) des nombres complexes vérifiant l'hypothèse technique suivante : (HT) Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $X \geq X(\varepsilon)$ et tout p-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ (resp. tout q-uplet $(\nu_1, \ldots, \nu_q)$) d'entiers rationnels, non tous nuls, tels que $|\lambda_i| \leq X$ $(i = 1, \ldots, p)$ (resp. $|\nu_j| \leq X$ $(j = 1, \ldots, q)$), on ait :

$$|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i| \geq \exp(-X^\varepsilon) \text{ (resp. } |\sum_{j=1}^{q} \nu_j y_j| \geq \exp(-X^\varepsilon)) .$$

Posons $\kappa_1 = \frac{pq}{p+q}$, $\qquad \kappa_2 = \frac{p(q+1)}{p+q}$.

Corollaire 1. *Soit k un entier ≥ 0. Il existe une constante $c_1 = c(p, q, k, \underline{x}, \underline{y})$ > 0 telle que :*

i) $\varphi_1(T) = \exp(c_1 \cdot T^{k+1})$ soit une mesure d'approximation simultanée, en dimension k, du point $(e^{x_1 y_1}, \ldots, e^{x_p y_q})$ de $\mathbf{C}^{pq}$, si $\kappa_1 = k+1$ et $\kappa_1 > 1$.

ii) $\varphi_2(T) = c_1 T^{\frac{\kappa_1 \cdot (k+1)}{\kappa_1 - k - 1}} \cdot (\log T)^{\frac{-(k+1)}{\kappa_1 - k - 1}}$ soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k, du point $(e^{x_1 y_1}, \ldots, e^{x_p y_q})$, si $\kappa_1 > k+1$.

Démonstration : Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{pq})$, où $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{pq}\} = \{e^{x_r y_s}, (r = 1, \ldots, p), (s = 1, \ldots, q)\}$. En utilisant une fonction auxiliaire à une variable et un lemme de zéros géométrique, Diaz démontre (cf. [D], p. V.28) la proposition suivante :

Proposition 1. *Si $\kappa_1 > 1$. Alors, pour tout réel X, $X \geq X_0$, il existe une famille de polynômes $P_{X,1}, \ldots, P_{X,m(X)}$ de $\mathbf{Z}[Y_1, \ldots, Y_{pq}]$ vérifiant :*

a) pour tout j, $(j = 1, \ldots, m(X))$ $P_{X,j}$ n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}^{pq}$ de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon $\exp(-c_7 X^{\kappa_1} \cdot \log X)$.

b) $\max_{1 \leq j \leq m(X)} |P_{X,j}(\underline{\alpha})| \leq \exp(-c_8 X^{\kappa_1} \cdot \log X)$.

c) $\max_{1 \leq j \leq m(X)} t(P_{X,j}) \leq c_9 X$.

où c_7, c_8 et c_9 sont des constantes > 0 ne dépendant que de $p, q, \underline{x}$ et $\underline{y}$.

Si $\kappa_1 > 1$ et $\kappa_1 = k+1$, la proposition entraine que $\underline{\alpha}$ vérifie les hypothèses du critère principal dans $\mathbf{Q}$ avec $u(X) = \log X$, $v = 1$. On en déduit, par conséquent, la partie i) du corollaire.

Si $\kappa_1 > k+1$, la proposition 1 entraîne que $\underline{\alpha}$ vérifie les hypothèses du critère principal avec $u(X) = X^{\kappa_1-(k+1)} \cdot \log X$ et $\psi = 1$. La fonction inverse de u, notée w dans le critère, vérifie dans ce cas

$$w(T) \ll (\frac{T}{\log T})^{\frac{1}{\kappa_1-k-1}} .$$

On a, par conséquent, la partie ii) du corollaire. ■

Remarque. Si on applique le corollaire 1 ii) avec $p = 2$, $q = 3$ et $k = 0$, on obtient un résultat, similaire à celui de M. Waldschmidt et M. Mignotte (cf. $[W - M]$, Corollaire 1) :

Soient $\beta_{1,1}, \ldots, \beta_{2,3}$ des nombres algébriques de tailles inférieurs à T, on a :

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{s=1}^{3} |e^{x_r y_s} - \beta_{rs}| \geq \exp[-cT^6 \cdot (\log T)^{-5}] .$$

Le résultat de M. Waldschmidt et M. Mignotte est plus fin, puisqu'il sépare le degré et la hauteur dans la mesure d'approximation.

Corollaire 2. *Soit k un entier ≥ 0. On suppose $p \geq 2$. Alors, il existe une constante $c_2 = c(k, p, q, \underline{x}, \underline{y})$ telle que :*

iii) $\varphi_3(T) = \exp(c_2 T^{\frac{(p+q)(k+1)}{q}})$ soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k, du point $(x_1, \ldots, x_p, e^{x_1 y_1}, \ldots, e^{x_p y_q})$ de $\mathbf{C}^{p(1+q)}$, si $\kappa_2 = k+1$.

iv) $\varphi_4(T) = c_2 T^{\frac{\kappa_2\cdot(k+1)}{\kappa_2-k-1}} \cdot (\log T)^{\frac{-(k+1)q}{(p+q)(\kappa_2-k-1)}}$ soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k, du point $(x_1, \ldots, x_p, e^{x_1, y_1}, \ldots, e^{x_p y_q})$ de $\mathbf{C}^{p+pq}$, si $\kappa_2 > k+1$.

Démonstration : On utilise la proposition (cf. [D], p. V.21, V.22) suivante :

Proposition 2. *Si $p \geq 2$, alors on a : Pour tout $X \geq X_0$, il existe une famille de polynômes $Q_{X,1}, \ldots, Q_{X,m(X)}$ de $\mathbf{Z}[Y_1, \ldots, Y_{p(q+1)}]$ vérifiant :*

a) pour tout j, $(j = 1, \ldots, m(X))$, $Q_{X,j}$ n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}^{p(q+1)}$ de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon $\exp[-c_{10} X^{\kappa_2} \cdot (\log X)^{\frac{q}{p+q}}]$;

b) $\max_{1\leq j\leq m(X)} |Q_{X,j}(\underline{\alpha})| \leq \exp(-c_{11} X^{\kappa_2} \cdot (\log X)^{\frac{q}{p+q}})$;

c) $\max_{1\leq j\leq m(X)} t(Q_{X,j}) \leq c_{12} X$ où c_{10}, c_{11} et c_{12} ne dépendent que de p, q, $\underline{x}$ et y.

Si $\kappa_2 = k+1$, la proposition 2 implique que $\underline{\gamma}$ vérifie les hypothèses du critère principal avec $u(X) = (\log X)^{\frac{q}{p+q}}$, $\psi = 1$ et $K = \mathbf{Q}$.

On en déduit iii).

Si $\kappa_2 > k+1$, $\underline{\alpha}$ vérifie les hypothèses du critère principal avec $u(X) = X^{\kappa_2-k-1} \cdot (\log X)^{\frac{q}{p+q}}$ et $\psi = 1$.

Dans ce cas, w la fonction inverse de u, vérifie :

$$w(T) \ll \left(T/(\log T)^{\frac{q}{p+q}}\right)^{\frac{1}{\kappa_2-k-1}} . \qquad \blacksquare$$

On obtient comme sous corollaire du corollaire 2, un résultat concernant le problème de Gel'fond Schneider :

Corollaire 3. *Soient γ un nombre algébrique différent de 0 et 1, β un nombre algébrique de degré $d \geq 2$. Soit k un entier ≥ 0. Alors, il existe un réel $c_3 = c_3(k, d, \gamma, \beta) > 0$ tel que :*

VI) $\varphi_5(T) = \exp(c_3 T^{2(k+1)})$ *soit une mesure d'approximation simultanée, en dimension k, de $(\gamma^{\beta}, \ldots, \gamma^{\beta^{d-1}})$, si $d = 2k+1$.*

VII) $\varphi_6(T) = c_3 T^{\frac{(d+1)(k+1)}{d-2k-1}} \cdot (\log T)^{\frac{-(k+1)}{d-2k-1}}$ *soit une mesure d'approximation simultanée, en dimension k, de $(\gamma^{\beta}; \ldots, \gamma^{\beta^{d-1}})$, si $d > 2k+1$.*

Démonstration : On suppose β entier algébrique ; le résultat se déduit de ce cas particulier.

Posons : $K = \mathbf{Q}(\gamma, \beta)$, $\underline{\alpha} = (\gamma^{\beta}, \ldots, \gamma^{\beta^{d-1}})$, $\underline{\tilde{\alpha}} = (\gamma, \gamma^{\beta}, \ldots, \gamma^{\beta^{2(d-1)}})$, $x_i = \beta^{i-1}, (i = 1, \ldots, d)$, $x_i = \beta^{i-1}$ $(i = 1, \ldots, d)$, $y_j = \beta^{j-1} \cdot \log \gamma$, $(j = 1, \ldots, d)$.

β étant algébrique, on déduit de l'inégalité de la taille (cf. [W] que $x_1, \ldots, x_d$ (resp. $y_1, \ldots, y_d$) vérifie l'hypothèse (HT).

En utilisant le corollaire 2, on déduit qu'il existe $c' = c(k, d, \gamma, \beta)$ tel que :

a) $\varphi_1(T) = \exp(cT^{2(k+1)})$ soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k, du point $\underline{\tilde{\alpha}}$, si $d = 2k+1$.

b) $\varphi_2(T) = cT^{\frac{(d+1)(k+1)}{d-2k-1}} \cdot (\log T)^{-\frac{(k+1)}{d-2k-1}}$ soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k, du point $\underline{\tilde{\alpha}}$, si $d > 2k+1$.

Pour conclure, il suffit de montrer que si φ est une mesure d'approximation de $\underline{\tilde{\alpha}}$, en dimension k, alors il existe $c = c(k, d, \gamma, \beta)$ telle que $c \cdot \varphi$ soit une mesure d'approximation de $\underline{\alpha}$ en dimension k. Puisque la mesure d'approximation est indépendante à une constante près du k-système choisi ; on choisit un k-système $\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}$ tel que $\gamma \in \mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}]$.

Soient $w_1, \ldots, w_{d-1}$ des nombres appartenant à $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}]$ tels que :

$$\max_{1 \le i \le d-1} t(w_i) \le T \quad \text{et} \quad \max_{1 \le i \le d-1} |\gamma^{\beta^i} - w_i| \le \exp(-\varphi(T)) .$$

β étant entier algébrique de degré d ; pour tout j, $d \le j \le 2(d-1)$ il existe $\lambda_{i,j} \in \mathbf{Z}$ $(i = 0, \ldots, d-1)$ tels que : $\beta^j = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_{i,j} \cdot \beta^i$. On a donc

$$\gamma^{\beta^j} = \prod_{i=0}^{d-1} (\gamma^{\beta^i})^{\lambda_{i,j}} .$$

Posons :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_j &= w_j \quad \text{si } 1 \le j \le d-1 \\ \tilde{w}_j &= \prod_{i=0}^{d-1} (w_i)^{\lambda_{i,j}} \quad \text{si } d \le j \le 2(d-1) \\ \tilde{w}_0 &= \gamma . \end{aligned}$$

On a $\max_{0 \le j \le 2(d-1)} t(\tilde{w}_j) \le c_1 T$

$$\text{et} \qquad \max_{0 \le j \le 2(d-1)} |\gamma^{\beta^j} - \tilde{w}_j| \le \exp(-\frac{1}{c_2}\varphi(T))$$

où $c_1 = c(k, d, \gamma, \beta)$ et $c_2 = c(k, d, \gamma, \beta)$. ∎

On en déduit aussi du théorème un résultat lié aux fonctions elliptiques :

Corollaire 4. *Soit $\wp$ une fonction elliptique d'invariants g_2 et g_3, Ω le réseau des périodes de $\wp$. Soient ω une période primitive de Ω et η la quasi-période associée et $K = \mathbf{Q}(g_2, \wp(\frac{\omega}{2}))$. Alors, il existe une constante $c = c(\omega, \Omega, K) > 0$ telle que :*

a) $\varphi_7(T) = cT^{\frac{3}{2}} \cdot (\log T)^{\frac{3}{2}}$ soit une mesure d'approximation en dimension 0 *de $(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})$.*

b) $\varphi_8(T) = cT^6 \cdot (\log T)^6$ soit une mesure d'approximation en dimension 1 de $(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})$.

Démonstration : On utilise la proposition (cf. [PH], proposition 2) suivante :

Proposition 4. *Pour tout réel $M \geq M_0$, il existe une famille de polynômes $P_{M,1}, \ldots, P_{M,m(M)}$ dans $K[X,Y]$ vérifiant :*

i) pour tout j, $(j = 1, \ldots, m(M))$, $P_{M,j}$ n'a pas de zéros dans la boule de centre $(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})$ et de rayon $\exp(-c_{16}M^3)$;

ii) $\max |P_{M,j}(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})| \leq \exp(-c_{17}M^3)$;

iii) $\max\ t(P_{M,j}) \leq c_{18}M \cdot \log M$

où c_{16}, c_{17} et c_{18} sont des constantes positives non nulles, ne dépendant que de ω, Ω et K.

On pose $S = M \log M$; on a :

$$\frac{S}{\log S} \ll M \ll \frac{S}{\log S} .$$

Soit $P_{S,j}$ le polynôme de $K[X,Y]$ défini par $P_{S,j} = P_{M,j}$. D'après i) $P_{S,j}$ n'a pas de zéros dans la boule de centre $(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})$ et de rayon $\exp\left(-c_{19}\frac{S^3}{(\log S)^3}\right)$.

On déduit de ii) que $\max_j |P_{S,j}(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})| \leq \exp\left(-c_{20}\frac{S^3}{(\log S)^3}\right)$ et de iii) que $\max_j t(P_{S,j}) \leq c_{21}S$.

$(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})$ vérifie donc les hypothèses du critère principal avec

$$\begin{aligned} &(1) \quad k = 0,\ u(S) = \frac{S^2}{(\log S)^3},\ \psi = 1, \text{ d'une part} \\ &(2) \quad k = 1,\ u(s) = \frac{S}{(\log S)^3} \text{ et } \psi = 1, \text{ d'autre part.} \end{aligned}$$

Dans le cas (1), w (la fonction inverse de u) vérifie :

$$w(T) \ll T^{\frac{1}{2}} \cdot (\log T)^{\frac{3}{2}} .$$

On déduit du critère principal la partie a) du corollaire.

Dans le cas (2), w (la fonction inverse de u) vérifie :

$$w(T) \ll T(\log T)^3 .$$

Du critère principal, on déduit la partie b) du corollaire. ■

3 - Démonstration du critère principal.

Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer le théorème pour $T \geq T_0$, avec T_0 assez grand, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres de $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}]$ de tailles inférieures à T_0.

Pour démontrer le théorème, nous allons procéder par l'absurde. On considère la propriété (S) suivante.

(S) Soit c une constante suffisamment grande en fonction de n, k, $[K : \mathbf{Q}]$, $t(R)$ et $\underline{\alpha}$. Soit T_0 un nombre réel vérifiant

$$(*) \qquad T_0^{k+1} \cdot w(T_0^{k+1}) \cdot \psi \circ w(T_0^{k+1}) \geq M_0^{k+1} \cdot u(M_0) \cdot (\psi(M_0))^{k+2} .$$

Soit T un nombre réel $\geq T_0$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres appartenant à $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}]$ tels que :
$\max_{(i=1,\ldots,n)} t(\beta_i) \leq T$ et $\max_{(i=1,\ldots,n)} |\alpha_i - \beta_i|_v \leq \exp(-\varphi(T))$,
où $\varphi(T) = cT^{k+1} \cdot [\psi \circ w(cT^{k+1})]^{k+2} \cdot [w(cT^{k+1})]^{k+1}$.

Posons $M_2 = w(c'T^{k+1})$, avec $c' = \frac{c}{2(c_1+c_2)}$. Soit M_1 le nombre réel défini par :

$$(**) \qquad 2(\delta c_1 + 1)M_1^{k+1} \cdot u(M_1) \cdot (\psi(M_1))^{k+2} = M_2 \cdot (u(M_2)^{\frac{1}{k+1}} \cdot \psi(M_2) .$$

M_1 existe, puisque la fonction $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ définie par $f(x) = 2(\delta c_1 + 1)x^{k+1} \cdot u(x)(\psi(x))^{k+2}$, est continue strictement croissante donc inversible dans $\mathbf{R}^*$.

La démonstration se fait en 2 étapes.

Dans la première étape, nous allons montrer que, sous les hypothèses (H_1) et (S) le point $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ vérifie une propriété (H_2) analogue à (H_1) ; dans l'intervalle $[M_1, M_2]$.

Dans la deuxième étape, la propriété (H_2) jointe aux techniques d'élimination nous permettront d'obtenir la contradiction qui établira le théorème.

Notons que l'égalité (**) assure que l'intervalle $[M_1, M_2]$ est suffisamment grand afin de pouvoir appliquer "l'élimination" .

$1^{\text{ère}}$ étape. *Réduction des hypothèses.*

Lemme 9. *Si* (H_1) *et* (S) *sont vérifiés, alors on a la propriété* (H_2) *suivante :*

(H_2) *Pour tout* $M \in [M_1, M_2]$, *il existe un idéal* $\mathcal{I}_M = (Q_{M,1}, \dots, Q_{M,m(M)})$ *de* $K[Y_1, \dots, Y_k]$ *vérifiant :*

VII) *L'ensemble des zéros de* $\mathcal{I}_M$ *dans la boule de* $\mathbf{C}_v^k$ *de centre* $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ *et de rayon* $\exp\left(-c_4 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}\right)$ *est vide ;*

VIII) $\max_{1 \le j \le m(M)} |Q_{M,j}(\underline{\theta})|_v \le \exp(-c_5 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1})$;

IX) $\max_{1 \le j \le m(M)} t(Q_{M,j}) \le c_6 M \cdot T$

où $c_4 = \delta c_1 + 1$, $c_5 = \frac{c_2}{2}$ *et* $c_6 = (4k + n + 8) \cdot (3k + 10) \cdot t(R) \cdot c_3$.

Démonstration : Soit $M \in [M_1, M_2]$. Les inégalités (*) et (**) de la propriété(S) impliquent que $M_1 \ge M_0$. Par suite, l'hypothèse (H_1) assure l'existence d'un idéal $I_M = (P_{M,1}, \dots, P_{M,m(M)})$ de $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant I), II) et III) du théorème.

Posons, pour j, $(j = 1, \dots, m(M))$, $Q_{M,j} = P^*_{M,j}$ où $P^*_{M,j}$ désigne le polynôme de $K[Y_1, \dots, Y_k]$ définie, en fonction de $P_{M,j}$, par le lemme 8.

En utilisant les inégalités II) et III) de l'hypothèse (H_1), les inégalités de (S) et les inégalités IV) et V) du lemme 8, on obtient

$$\begin{aligned}\max_j |Q_{M,j}(\underline{\theta})|_v \le {} & [\exp\left(-c_2 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot \psi(M)^{k+1}\right) + \exp(-\varphi(T))] \times \\ & \times \exp(c_8' \cdot c_3 \cdot M \cdot T)\,.\end{aligned}$$

Or, pour tout $M \in [M_1, M_2]$, $c_2 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1} < \varphi(T)$, d'après la définition de M_2. On en déduit que :

$$\max_j |Q_{M,j}(\underline{\theta})|_v \le 2 \cdot \exp[-c_2 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1}] \cdot \exp(c_8' \cdot c_3' M T)\,.$$

D'autre part, on a, d'après la définition de M_1

$$\begin{aligned}2 c_4 M_1^{k+1} \cdot u(M_1) \cdot (\psi(M_1))^{k+2} &= M_2 \cdot (u(M_2))^{\frac{1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{k+1} \\ &= c'^{\frac{1}{k+1}} M_2 \cdot T \cdot (\psi(M_2))^{k+1}\,.\end{aligned}$$

Puisque c' est assez grand, on peut supposer que :

$$c'^{\frac{1}{k+1}} > \frac{8 c_4}{c_2}(c_8' \cdot c_3 + \log 2)\,.$$

D'autre part, $\psi \geq 1$, on en déduit que :

$$\max_j |Q_{M,j}(\underline{\theta})|_v \leq \exp[-\frac{c_2}{2} M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1}]$$

d'où l'inégalité VIII) de (H_2).

L'inégalité IX) de (H_2) résulte de l'inégalité III) de H_1 et l'inégalité V) du lemme 8.

Montrons que VII) est vérifiée.

D'après (H_1) I), pour tout $M \geq M_0$ et tout j, $(j = 1, \ldots, m(M))$, $P_{M,j}$ n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}_v^n$ de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon $\exp[-c_1 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}]$; comme $2c_1 \cdot M_2^{k+1} \cdot u(M_2) \cdot (\psi(M_2))^{k+2} \leq \varphi(T)$, on en déduit, grâce au lemme 8 VI), que $Q_{M,j} (= P^*_{M,j})$ n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}_v^k$ de centre $\underline{\theta}$ et de rayon $\exp[-\delta \cdot c_1 \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}] \cdot \exp(-c'_{10} T)$, pour tout $M \in [M_1, M_2]$. Or, on $M_1^{k+1} \cdot u(M_1) \cdot (\psi(M_1))^{k+2} > c'^{k+1} T$ et comme on peut supposer que $c'^{\frac{1}{k+1}} > c'_{10}$, puisque c' est suffisamment grand, on peut conclure que $Q_{M,j}$ n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}_v^k$ de centre $\underline{\theta}$ et de rayon $\exp[-(\delta \cdot c_1 + 1) \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}]$ pour tout $M \in [M_1, M_2]$, d'où la propriété VII) de (H_2) .

$2^{\text{ème}}$ étape. *Elimination.*

On utilise les notations, définitions et résultats de $[P_1]$. Pour simplifier les notations, nous omettrons l'indice v, qui désigne la valeur absolue considérée, dans celles-ci.

Soit r un entier tel que $0 \leq r \leq k+1$. Considérons l'assertion (A_r) suivante.

(A_r) Il existe $\mathcal{P}_r$ un idéal premier homogène de $K[Y_1, \ldots, Y_k]$, de codimension $k+1-r$, vérifiant, avec $\underline{d}_r = ([c_6 \cdot M_2 \cdot T]+1, \ldots, [c_6 \cdot M_2 \cdot T]+1) \in \mathbf{N}^r$, les inégalités suivantes :

XI) $Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) \leq c_{22}^{k-r+2}(M_2 \cdot T)^{k+1}$ et $\mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) \leq c_{22}(M_2 \cdot T)^k$.

XII) $\|\mathcal{P}_r\|_{\underline{d}_r} \leq \exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r \cdot (Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r))]$
où $c_6 = (4k+n+8)(3k+10) \cdot t(R) \cdot c_3$, $c_{22} = 8(k+2) \cdot \log(k+1) \cdot c_6$ et $[c_6 M_2 \cdot T]$ désigne la partie entière de $c_6 M_2 \cdot T$.

Lemme 10. *On a les implications suivantes :*

(a) $(H_2) \Rightarrow \big($*pour tout entier* r *tel que* $1 \leq r \leq k+1$; $(A_r) \Rightarrow (A_{r-1})\big)$;

(b) $(H_2) \Rightarrow (A_0)$.

Démonstration : Supposons (H_2) et (A_r) vérifies pour r, $1 \leq r \leq k+1$. Montrons que (A_{r-1}) est vérifiée.

Considérons l'idéal $(\mathcal{P}_r)$ qui vérifie (A_r) ; nous allons montrer que, $\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)}\{\|\underline{y} - \underline{\theta}\|\}$ est "suffisamment petit".

Posons $d_1 = [c_6 M_2 T] + 1$. En utilisant le lemme 2.7 de $[P_1]$ et l'inégalité XII) de (A_r), on obtient les inégalités suivantes :

$$\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta}) \leq \|\mathcal{P}_r\|_{\underline{d}_r}^{\frac{1}{\mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)}} \cdot \exp(c'_{11} M_2 \cdot T)$$

où $c'_{11} = 20(k+1) \cdot \log(k+1) \cdot c_6$.

Par suite,

$$\begin{aligned}\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \mathrm{Dist}_{\underline{d}_1}(\underline{y}, \underline{\theta}) &\leq \exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r (\frac{Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)}{\mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)} + M_2 \cdot T)] \\ &\qquad \times \exp(c'_{11} M_2 \cdot T) \\ &\leq \exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r \cdot M_2 \cdot T + c'_{11} M_2 \cdot T] \\ &\leq \exp[-(u(M_2))^{\frac{1}{k+1}} \cdot \psi(M_2) \cdot M_2 + c'_{11} M_2 \cdot T] .\end{aligned}$$

Comme $u(M_2) = c'T^{k+1}$, avec c' "suffisamment grand", on peut donc supposer que $c' > (4c'_{11})^{k+1}$ et par suite, on a :

(1) $$\min_{\underline{y}\in Z(\mathcal{P}_r)} \mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y},\underline{\theta}) \leq \exp(-c'_{11}M_2\cdot T)\ .$$

Soit $\underline{x}\in Z(\mathcal{P}_r)$ tel que :

$$\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{x},\underline{\theta}) = \min_{\underline{y}\in Z(\mathcal{P}_r)}\{\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y},\underline{\theta})\}\ .$$

On a $x_0 \neq 0$; en effet, si $x_0 = 0$, puisque $\|\underline{\theta}\| \leq 1$, on tire du lemme 1.16 (i) de $[P_1]$ l'inégalité : $\mathrm{Dist}(\underline{x},\underline{\theta}) \geq (k+1)^2$. D'autre part, le lemme 2.9 de $[P_1]$ entraîne que :

$$\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{x},\underline{\theta}) \geq \mathrm{Dist}(\underline{x},\underline{\theta})\cdot(2(k+1))^{-2(d_1+1)}\ .$$

On aurait, alors :

$$\mathrm{Dist}_{\underline{d}_1}(\underline{x},\underline{\theta}) \geq \exp(-4(k+1)\cdot c_6\cdot M_2\cdot T) > \exp(-c'_{11}\cdot M_2T)\ .$$

Cette dernière inégalité est absurde, d'après (1), on a donc $x_0 \neq 0$. Par suite, en utilisant à nouveau le lemme 1.16 ii) et le lemme 2.9 de $[P_1]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\underline{x}-\underline{\theta}\| &\leq 3(k+1)^2\cdot\mathrm{Dist}(\underline{x},\underline{\theta})\\ &\leq \mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{x},\underline{\theta})\cdot\exp[8(k+1)c_6\cdot M_2T]\end{aligned}$$

d'où

(2) $$\begin{aligned}\min_{\underline{y}\in Z(\mathcal{P}_r)}\{\|\underline{y}-\underline{\theta}\|\} &\leq \min_{\underline{y}\in Z(\mathcal{P}_r)}\{\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y},\underline{\theta})\}\exp[8(k+1)\cdot c_6\cdot M_2\cdot T]\\ &\leq \exp[-(u(M_2))^{\frac{1}{k+1}}\cdot\psi(M_2)\cdot M_2 + 2c'_{11}\cdot M_2\cdot T]\ .\end{aligned}$$

Comme, $u(M_2) = c'T^{k+1}$ et on peut supposer que $c' > (4c'_{11})^{k+1}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\min_{\underline{y}\in Z(\mathcal{P}_r)}\{\|\underline{y}-\underline{\theta}\|\} &\leq \exp[-\frac{1}{2}M_2\cdot(u(M_2))^{\frac{1}{k+1}}\cdot\psi(M_2)]\\ &\leq \exp[-c_4{M_1}^{k+1}\cdot u(M_1)\cdot(\psi(M_1))^{k+2}]\end{aligned}$$

Considérons S l'ensemble des nombres réels M tels que $M_1 \leq M \leq M_2$ et

$$\min_{\underline{y}\in Z(\mathcal{P}_r)}\{\|\underline{y}-\underline{\theta}\|\} \leq \exp[-c_4\cdot M^{k+1}\cdot u(M)\cdot(\psi(M))^{k+2}]\ .$$

S est non vide, puisqu'il contient M_1. Soit M sa borne supérieure, S étant fermé, on a $M\in S$.

La propriété (H_2) assure l'existence d'un polynôme $Q_{j,M}$ de $K[Y_1,\ldots,Y_k]$ n'ayant pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}_v^k$ de centre $\underline{\theta}$ et de rayon $\exp[-c_4 \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}]$. On déduit, grâce à l'inégalité précédente que ${}^hQ_{j,M} \notin \mathcal{P}_r$, et par suite que, codim $(\mathcal{P}_r, {}^hQ_{j,M}) = k - r + 2$.

Soit $\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}$ l'idéal défini formellement par :

$$\tilde{\mathcal{P}}_{r-1} = I_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot I_\ell^{e_\ell}$$

où, $I_1, \ldots, I_\ell$ sont les idéaux premiers minimaux, de codimension $k+2-r$, associés à $(\mathcal{P}_r, {}^hQ_{j,M})$ et $e_1, \ldots, e_\ell$ les longueurs des idéaux primaires correspondants.

Soit Y_i $(i = 0, \ldots, k)$ tel que $Y_i \notin \mathcal{P}_r$ et soit ρ le $K[Y_0, \ldots, Y_k][\underline{d}_{r-1}]$ homomorphisme défini par :

$$\begin{aligned} \rho : K[Y_0, \ldots, Y_r][\underline{d}_r] &\to K[Y_0, \ldots, Y_r][\underline{d}_{r-1}] \\ U_r &\to Y_i^{d_1 - \deg Q_{j,M}} \cdot {}^hQ_{j,M} . \end{aligned}$$

Si f est une forme U-éliminante d'indice $\underline{d}_r$ de $\mathcal{P}_r$ alors $\rho(f)$ s'écrit (cf. Proposition 2.4 de $[P_1]$) :

$$\rho(f) = \lambda \cdot \prod_{s=1}^{\ell} f_s^{e_s} ,$$

où $\lambda \in K$ et f_s est une forme U-éliminante d'indice $\underline{d}_{r-1}$ de I_s.

$\rho(f)$ est donc une forme U-éliminante d'indice $\underline{d}_{r-1}$ de $\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}$. En utilisant le lemme 2.1 de $[P_1]$ et l'inégalité XI) de (A_r), on obtient :

$$\mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}) \leq \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) \leq c_{22}(M_2 \cdot T)^k$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}) &\leq Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + \\ &\quad + [\overline{\underline{h}}(Q_{j,M}) + 6(k+2) \cdot \log(k+1) \cdot c_6 \cdot M_2 \cdot T] \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) \\ &\leq Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + [6(k+2) \cdot \log(k+1) + 1] \cdot c_6(M_2 \cdot T)^{k+1} \\ &\leq c_{22}^{k-r+3} \cdot (M_2 \cdot T)^{k+1} . \end{aligned}$$

Pour majorer $\|\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}}$, nous allons distinguer deux cas, suivant que $Z(\mathcal{P}_r)$ a un point "très proche" de $\underline{\theta}$ ou tous les points de $Z(\mathcal{P}_r)$ sont relativement éloignés de $\underline{\theta}$.

1^er^ cas $M = M_2$.

En utilisant le corollaire 2.3 de $[P_1]$, on obtient :

$$\|\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} \leq [\|\mathcal{P}_r\|_{\underline{d}_r} + |Q_{j,M}(\underline{\theta})|] \cdot \exp[c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r))]$$

où $c'_{12} = 32 \cdot (k+1) \cdot \log(k+1) \cdot c_6$.

Les inégalités XII) de (A_2) et l'inégalité VIII) de H_2 jointes à l'inégalité précédente, entraînent :

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} \leq \big[&\exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r \cdot (Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r))] + \\ &+ \exp[-c_5 \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1}]\big] \times \\ &\times \exp[c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r))] \,.\end{aligned}$$

Or, nous avons démontré (voir p. 26) :

$$\begin{aligned}Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1} &\leq c_{22}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}\mathcal{P}_r)) \\ &\leq c_{22}^{k-r+3}(M_2 \cdot T)^{k+1} \,.\end{aligned}$$

D'autre part, comme $u(M_2) = c'T^{k+1}$ et c' est "suffisamment grand" pour qu'on puisse supposer $c'^{\frac{1}{k+1}} > (c_{22}^{k+2} + c'_{12}c_{22}^{k+1} + \log 2)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}&(\psi(M_2))^r \cdot (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}}[Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)] \\ &\geq (\psi(M_2))^{r-1} \cdot (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r-1}{k+1}}[Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1})] + \\ &+ c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_r)) + \log 2 \,.\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1} &\geq M_2^{k+1}(u(M_2))^{\frac{k}{k+1}} \cdot (u(M_2))^{\frac{1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{k+1} \\ &\geq (M_2 \cdot T)^{k+1}(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{k}{k+1}} \cdot \frac{(u(M_2))^{\frac{1}{k+1}}}{T} \cdot (\psi(M_2))^{k+1} \,.\end{aligned}$$

Comme $u(M_2) = c'T^{k+1}$ et c' est suffisamment grand pour qu'on puisse supposer :

$$c'^{\frac{1}{k+1}} \cdot c_5 \geq (c_{22}^{k+2} + c'_{12} \cdot c_{22}^{k+1} + \log 2)$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}&c_5 \cdot M^{k+1} \cdot u(M)(\psi(M))^{k+1} \\ &\geq (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r-1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{r-1}[Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1})] + \\ &+ c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)) + \log 2 \,.\end{aligned}$$

On en conclut :

$$\|\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} \leq \exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r-1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{r-1} \cdot (Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}))] \, .$$

$2^{\text{ème}}$ cas : $M < M_2$.

u et ψ étant continues en M ; il existe $\eta > 0$ tel que : pour tout N vérifiant : $M \leq N \leq M + \eta < M_2$, on a :

$$u(N) \leq u(M) + 1 \quad \text{et} \quad \psi(N) \leq \psi(M) + 1 \, .$$

Soit M' tel que : $M < M' < M + \eta$. Comme M est la borne supérieure de S, on a :

$$\begin{aligned}\exp[-c_4 {M'}^{k+1} \cdot u(M') \cdot (\psi(M'))^{k+2}] &< \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\|\underline{y} - \underline{\theta}\|\} \\ &\leq \exp[-c_4 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}] \, .\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons montré (voir les inégalités (1) et (2), p. 25) que :

$$\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta}) \leq \exp(-c'_{11} \cdot M_2 \cdot T)$$

et $$\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\|\underline{y} - \underline{\theta}\|\} \leq \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta})\} \cdot \exp(\frac{c'_{11}}{2} \cdot M_2 \cdot T) \, .$$

On en déduit que :

$$\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\|\underline{y} - \underline{\theta}\|\} \leq \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta})\}^{\frac{1}{2}} \, .$$

Par suite, on obtient :

$$\exp[-c_4 \cdot {M'}^{k+1} \cdot u(M') \cdot (\psi(M'))^{k+2}] \leq \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta})\}^{\frac{1}{2}} \, .$$

En utilisant (H_2) VIII) et l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}|Q_{j,M}(\underline{\theta})| &\leq \exp[-c_5 \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1}] \\ &\leq \exp[-c_4 \cdot {M'}^{k+1} \cdot u(M') \cdot (\psi(M'))^{k+2} \cdot \lambda] \\ &\leq \min_{\underline{y} \in (\mathcal{P}_r)} \{1, (\mathrm{Dist}(\underline{y}, \underline{\theta}))^{\lambda/2}\}\end{aligned}$$

où $$\lambda = \frac{c_5 \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1}}{c_4 \cdot M'^{k+1} \cdot u(M') \cdot (\psi(M'))^{k+2}} .$$

Remarquons qu'on peut supposer sans restriction que l'hypothèse (H_1) est vérifiée avec $c_2 \leq 4(\delta c_1 + 1)$ et par suite que $c_5 \leq 2c_4$. On a alors $\frac{\lambda}{2} \leq 1$.

D'autre part, le choix de M' implique

$$\frac{\lambda}{2} \geq \frac{c_5}{16c_4}(\psi(M))^{-1} \geq \frac{c_5}{16c_4}(\psi(M_2))^{-1} .$$

En utilisant la proposition 2.5 de $[P_1]$ et l'inégalité XII) de (A_r), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} &\leq \|\mathcal{P}_r\|^{\frac{\lambda}{2}} \exp[c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r))] \\ &\leq \exp[-\frac{\lambda}{2} \cdot (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r \cdot (Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)) + \\ &\quad + c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r))] . \end{aligned}$$

Or $\frac{\lambda}{2} \cdot (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{1}{k+1}} \cdot \psi(M_2) \geq \frac{c_5}{16c_4} \cdot c'^{\frac{1}{k+1}}$ et c' est suffisamment grand pour qu'on puisse supposer que : $c_5 \cdot c'^{\frac{1}{k+1}} \geq 16c_4 \cdot c'_{12}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{2} \cdot (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r (Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)) \\ &\quad \geq (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r-1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{r-1} \cdot (Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + \\ &\quad + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_{r-1})) + c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)) . \end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} \leq \exp\Bigg[- \left(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}}\right)^{\frac{r-1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{r-1} \cdot \times \\ \times \left(Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1})\right)\Bigg] . \end{aligned}$$

Dans les deux cas mentionnés plus haut, on obtient la même majoration, vue la définition de $\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}$, il existe un idéal premier homogène I_s, $1 \leq s \leq k$ que nous noterons $\mathcal{P}_{r-1}$, de codimension $k + r - 2$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} \leq \exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r-1}{k+1}} \times \\ \times (\psi(M_2))^{r-1} \cdot (Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_{r-1}) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_{r-1}))] . \end{aligned}$$

On a évidemment :

$$\mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_{r-1}) \leq \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}) \leq c_{22} \cdot (M_2 \cdot T)^k$$

et $$Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_{r-1}) \leq Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\tilde{\mathcal{P}}_{r-1}) \leq c_{22}^{k-2+3} \cdot (M_2 \cdot T)^{k+1} .$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{r-1}$ vérifie l'assertion (A_{r-1}), ce qui entraîne le lemme 10 a).

Montrons le lemme 10 b), l'assertion (A_{k+1}) est vérifiée avec $\mathcal{P}_{k+1} = (0)$. L'inégalité XII) est évidemment vérifiée et les inégalités XI) découlent de la proposition 2.8 de $[P_1]$. On déduit donc du a) que si (H_2) est vérifiée alors (A_0) l'est aussi. ■

FIN de démonstration du théorème : si l'hypothèse (H_1) et la propriété (S) sont vérifiées ; le lemme 9 entraîne que (H_2) est vérifiée et, par suite, que (A_0) l'est aussi grâce au lemme 10.

Comme l'assertion (A_0) est évidemment fausse, puisqu'elle est équivalente à $1 \leq \|\mathcal{P}_0\| < 1$. On a donc une contradiction. On en déduit donc que si (H_1) est vérifiée alors la propriété (S) n'est jamais vérifiée, d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[B] D. BROWNAWELL - *Some remarks on semi-results*, in : Trancendence theory : advances and applications (Eds. Baker and Masser), London, 1977.

[D] G. DIAZ - *Grands degrés de transcendance pour des familles d'exponentielles*, dans : Séminaire d'arithmétique, Saint Etienne, 1986-1987.

[J] E.M. JABBOURI - *Mesure d'indépendance algébrique sur les groupes algébriques commutatifs*, (manuscrit).

[N_1] Yu. NESTERENKO - *Estimates for the orders of zeros of functions of certain class and their applications in the theory of transcendental numbers*, Izv. Akad. Nauk, U.S.S.R. Ser Math., 41, (1977) ; Math. U.S.S.R. Izv, 11 (1977), 239-270.

[N_2] Yu. NESTERENKO - *Measures of algebraic independence of numbers and functions*, dans Journées Arithmétiques de Besançon, Société Mathématique de France, Astérique 147-148 (1987), p. 141-149.

[P_1] P. PHILIPPON - *Critères d'indépendance algébrique*, Publications mathématiques, I.H.E.S. 64, 1987, 5-52.

[P_2] P. PHILIPPON - *Sur les mesures d'indépendance algébrique*, dans Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1983-84, ed. C. Goldstein (C) 1985, Birkhauser PM 59, 219-233.

[PH] G. PHILIBERT - *Une mesure d'indépendance algébrique*, Annales de l'Institut Fourier (à paraître).

[R] E. REYSSAT - *Une critère d'indépendance algébrique*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle 329 (1981), 66-81.

[W] M. WALDSCHMIDT - *Nombres transcendants*, Springer Verlag LN $n°$ 402 (1974).

[W-M] M. WALDSCHMIDT et M. MIGNOTTE - *Approximation simultanée de valeurs de la formation exponentielle*, Compositio Mathematica, Vol. 34, Fasc. 2, 1977, p. 127-139.

DEUXIÈME PARTIE

RESULTATS QUANTITATIFS D'INDEPENDANCE ALGEBRIQUE POUR LES GROUPES ALGEBRIQUES.

Introduction

Nous démontrons dans ce texte un résultat général (cf. th. principal) sur l'indépendance algébrique de valeurs liées à l'application exponentielle d'un groupe algébrique commutatif G défini sur un corps de nombres.

En particulier, si on prend $G = G_a \times E^\delta$ avec E une courbe elliptique de Weierstrass d'invariants algébriques et si on désigne par $\mathcal{P}$ la fonction elliptique associée à E et F son corps des multiplications nous obtenons le résultat qualitatif suivant :

Corollaire 14 . *Soient β un nombre algébrique de degré $\delta > \frac{2}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$ sur* $\mathbf{F}$ *et u un nombre complexe tel que $\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(\beta u), \ldots, \mathcal{P}(\beta^{\delta-1}u)$ soient définis. Alors, on a*

i) si $\mathbf{F} = \mathbf{Q}, \mathrm{degtr}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}\Big(\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(\beta u), \ldots, \mathcal{P}(\beta^{\delta-1}u)\big) \geq \left[\frac{\delta+1}{3}\right]$;

ii) si $\mathbf{F} \neq \mathbf{Q}, \mathrm{degtr}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}\Big(\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(\beta u), \ldots, \mathcal{P}(\beta^{\delta-1}u)\big) \geq \left[\frac{\delta+1}{2}\right]$.

Ce corollaire améliore un résultat de P. Philippon $[P_4]$ qui obtenait comme minoration $\left[\frac{\delta}{3}\right]$ au lieu de $\left[\frac{\delta+1}{3}\right]$ dans le cas $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$ et $\left[\frac{\delta}{2}\right]$ aulieu de $\left[\frac{\delta+1}{2}\right]$ dans le cas $\mathbf{F} \neq \mathbf{Q}$.

En fait, nous démontrons un résultat plus fort (cf. corollaire 13) concernant les mesures d'approximation simultanées du point $\Big(\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(\beta u), \ldots, \mathcal{P}(\beta^{\delta-1}u)\Big)$ en dimension k (avec $0 \leq k < \left[\frac{\delta+1}{3}\right]$ si $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$ et $0 \leq k < \left[\frac{\delta+1}{2}\right]$ si $\mathbf{F} \neq \mathbf{Q}$). Cela consiste en une minoration non triviale de la distance du point $\Big(\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(\beta u), \ldots, \mathcal{P}(\beta^{\delta-1}u)\Big)$ à un point arbitraire $(a_0, \ldots, a_\delta)$ dont les coordonnées sont dans une extension de degré de transcendance k sur $\mathbf{Q}$, en fonction des tailles (relativement à un système de générateurs de cette extension) de $a_0, \ldots, a_\delta$.

L'énoncé général étant très technique, nous allons énoncer des résultats dans les cas particuliers où les approximants sont algébriques ($k = 0$) ou des éléments de $\mathbf{Z}[\theta]$ avec θ transcendant ($k = 1$).

Soient β et u comme ci-dessus. Soient g_2, g_3 les invariants (algébriques) de $\mathcal{P}$.

Corollaire 15 . *Si $\delta > \frac{2}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$, il existe $c = c(\beta, u, g_2, g_3, \delta) > 0$ tel que pour tout uplet $(a_0, \ldots, a_{\delta-1})$ de nombres algébriques de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{0\leq i\leq \delta-1} |\mathcal{P}(\beta^i u) - a_i| \geq -c \frac{T^{\frac{(\delta+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{\delta[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-2}}}{(\log T)^{\frac{2}{\delta[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-2}}} .$$

Corollaire 16 . *Soit θ un nombre transcendant. Si $\delta = 1 + \frac{4}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$ (resp. $\delta > 1 + \frac{4}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$) il existe $c = c(\beta, u, g_2, g_3, \delta, \theta) > 0$ tel que pour tout uplet $(Q_0, \ldots, Q_{\delta-1})$ de polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{0\leq i\leq \delta-1} |\mathcal{P}(\beta^i u) - Q_i(\theta)| \geq -\exp\Big(cT^{\frac{(\delta+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{2}}\Big)$$

$$\Big(\text{resp. } \log \max_{0\leq i\leq \delta-1} |\mathcal{P}(\beta^i u) - Q_i(\theta)| \geq -c \frac{T^{\frac{2(\delta+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{(\delta-1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-4}}}{(\log T)^{\frac{4}{(\delta-1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-4}}}\Big) .$$

Une autre application intéressante concerne l'approximation simultanée en dimension k des nombres $\mathcal{P}(e), \mathcal{P}(e^2), \ldots, \mathcal{P}(e^{d'})$. On prend $G = E^{d'}$ avec E comme ci-dessus, on obtient en particulier en dimension $k = 0$ et en dimension $k = 1$, les résultats suivants :

Corollaire 10 . $(k = 0)$ - *Soit d' un entier, tel que $d' > 1 + \frac{2}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$. Il existe $c = c(d', g_2, g_3) > 0$ tel que pour tout uplet $(b_1, \ldots, b_{2d-1})$ de nombres algébriques de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{1\leq i\leq 2d'-1} |\mathcal{P}(e^i) - b_i| \geq -c \frac{T^{\frac{d'[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{(d'-1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-2}}}{(\log T)^{\frac{2+[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{(d'-1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-2}}} .$$

Corollaire 11 . $(k = 1)$ - *Soit θ un nombre transcendant. Si $d' = 2 + \frac{4}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$ (resp. $d' > 2 + \frac{4}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$), il existe $c = c(d', g_2, g_3, \theta)$ tel que pour tout uplet $(Q_0, \ldots, Q_{2d'-1})$ de polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{0\leq i\leq 2d-1} |\mathcal{P}(e^i) - Q_i(\theta)| \geq -\exp\Big(cT^2\Big)$$

$$\Big(\text{resp. } \log \max_{1\leq i\leq 2d-1} |\mathcal{P}(e^i) - Q_i(\theta)| \geq -c \frac{T^{\frac{2d'[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{(d'-2)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-4}}}{(\log T)^{\frac{2[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]+4}{(d'-2)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-4}}}\Big) .$$

Si on prend $G = G_a \times G_m^\delta$ où G_a est le groupe additif et G_m le groupe multiplicatif, nous retrouvons l'analogue exponentiel du corollaire 14 démontré récemment par G. Diaz [D] c'est le résultat suivant : Si γ est un nombre complexe non nul de logarithme non nul et β un nombre algébrique de degré $\delta \geq 2$, alors $\operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\gamma, \gamma^{\beta}, \ldots, \gamma^{\beta^{\delta-1}}) \geq \left[\frac{\delta+1}{2}\right]$.

Nous obtenons un résultat plus fort (cf. Corollaire 6) sur les mesures d'approximation simultanées du point $(\gamma, \gamma^{\beta}, \ldots, \gamma^{\beta^{\delta-1}})$ en dimension k, $0 \leq k < \left[\frac{\delta+1}{2}\right]$.

Là aussi, nous énonçons des résultats dans les cas où les approximants sont des nombres algébriques ($k = 0$) ou des éléments de $\mathbf{Z}[\theta]$ avec θ transcendant.

Soient γ et β comme ci-dessus.

Corollaire 7 . *Il existe $c = c(\gamma, \beta, \delta) > 0$ tel que pour tout δ uplet $(a_0, \ldots, a_{\delta-1})$ de nombres algébriques de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{0 \leq i \leq \delta-1} |\gamma^{\beta^i} - a_i| \geq -c \frac{T^{\frac{\delta+1}{\delta-1}}}{(\log T)^{\frac{1}{\delta-1}}} .$$

Corollaire 8 . *Soit θ un nombre transcendant. Si $\delta = 3$ (resp. $\delta > 3$), il existe $c = c(\gamma, \beta, \delta, \theta) > 0$ tel que pour tout δ uplet $(Q_0, \ldots, Q_{\delta-1})$ de polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{0 \leq i \leq \delta-1} |\gamma^{\beta^i} - Q_i(\theta)| \geq -\exp(cT^4)$$

$$\Bigg(\text{resp. } \log \max_{0 \leq i \leq \delta-1} |\gamma^{\beta^i} - Q_i(\theta)| \geq -c \frac{T^{\frac{2(\delta+1)}{\delta-3}}}{(\log T)^{\frac{2}{\delta-3}}} .$$

Un autre exemple intéressant est l'approximation simultanée en dimension $k \geq 0$ des nombres $e^{\pi}, e^{\pi^2}, \ldots, e^{\pi^{2d'-1}}$ avec $d' > 2$.

On prend $G = G_m^{d'}$, on obtient, en particulier en dimension 0 et en dimension 1, les corollaires suivants :

Corollaire 3 . *On suppose que $d' > 2$. Alors, il existe $c = c(d') > 0$ tel que pour tout uplet $(a_1, \ldots, a_{2d'-1})$ de nombres algébriques de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{1 \leq i \leq 2d-1} |e^{\pi^i} - a_i| \geq c \frac{T^{\frac{d'}{d'-2}}}{(\log T)^{\frac{2}{d'-2}}} .$$

Corollaire 4 . *Soit θ un nombre transcendant. Si $d' = 4$ (resp. $d' > 4$), il existe $c = c(d', \theta) > 0$ tel que pour tout uplet $(P_1, \ldots, P_{2d'-1})$ de polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{1 \leq i \leq 2d'-1} |e^{\pi^i} - P_i(\theta)| \geq -\exp(cT^2)$$

$$\left(\text{resp. } \log \max_{1 \leq i \leq 2d'-1} |e^{\pi^i} - P_i(\theta)| \geq -c\frac{T^{\frac{2d'}{d'-3}}}{(\log T)^{\frac{4}{d'-4}}}\right).$$

On peut remplacer dans les corollaires 3 et 4, π par e ou par un nombre transcendant w vérifiant l'hypothèse suivante : il existe $H_0 > 0$ tel que pour tout $H \geq H_0$ et tout uplet $(h_0, \ldots, h_{d'})$ d'entiers non tous nuls vérifiant $\max_{0 \leq j \leq d'} |h_j| \leq H$, on a :

$$|\sum_{j=0}^{d'} h_j w^j| \geq \exp(-cH \log H) \text{ où } c = c(w, d') .$$

D'un point de vue qualitatif, le résultat (Corollaire 1) que nous obtenons dans le cadre général des groupes algébriques commutatifs améliore un résultat de M. Waldschmidt (cf. [Wa_2] th. 1.4) dans le cas d'un sous-groupe à un paramètre. Il est intéressant de comparer les deux méthodes ; la méthode de M. Waldschmidt utilise une fonction analytique à plusieurs variables "les fausses variables" et un lemme de zéros de Masser-Wüstholz [$M - W$].

L'outil algébrique essentiel dans la démonstration de M. Waldschmidt est le critère d'indépendance algébrique de P. Philippon (cf. [P_1]).

La méthode que nous adoptons pour la construction de la fonction auxiliaire a été utilisée par G. Diaz [D] dans le cas exponentiel. Nous la développons ici dans le cadre des groupes algébriques commutatifs. On utilise une fonction analytique à une variable et un lemme de zéros multi-homogène de P. Philippon [P_3]. L'outil algébrique essentiel dans cette démonstration est un critère quantitatif d'indépendance algébrique que nous avons démontré dans [A].

Parallèlement à l'étude des mesures d'approximation simultanées en dimension k, il y a une autre approche quantitative pour l'indépendance algébrique ; c'est la notion de mesure d'indépendance algébrique en dimension k (cf. [P_2]). A ce propos, citons les tranvaux de P. Philippon ([P_2]), de Nesterenko ([N]) sur la fonction exponentielle, de D. Brownawell-R. Tubbs ([Br_2] et [$Br - Tu$]) sur la fonction elliptique de Weierstrass et le travail en cours de E.M. Jabbouri ([J]) sur les groupes algébriques commutatifs.

P. Philippon démontre ([P_2]) qu'on peut déduire des mesures d'indépendance algébrique en dimension k à partir de mesures d'approximation simultanées en dimension k et réciproquement. Mais ce passage fait perdre sur la qualité des mesures en dimension $k > 0$ (cf. [A]).

Enfin, voici le plan de ce travail :

Dans la première partie, on introduit les notations (§ 1) et on énonce le théorème principal et ses corollaires (§ 2). La deuxième partie est consacrée à la démonstration de la proposition principale (§ 1) ; on distingue deux cas. Dans le premier cas (§ 4, 1^{ier} cas) la démonsration est immédiate. Dans le second cas (§ 4, $2^{\text{ième}}$ cas) le schéma de démonstration est le schéma classique en transcendance ; on construit la fonction auxiliaire (§ 4, lemme 1.4) puis on utilise une formule d'extrapolation (§ 4, lemme 2.4) et enfin un lemme de zéros sur les groupes algébriques produits pour conclure (§ 4, lemme 3.4).

Dans la troisième partie, nous démontrons le théorème principal et nous en déduisons les corollaires.

I - NOTATIONS ET ENONCES DES RESULTATS.

§ 1 - Notations et définitions.

Soit G_2 un groupe algébrique commutatif connexe de dimension d_2, défini sur un corps de nombres $K \subset \mathbf{C}$.

Le groupe $G_2(\mathbf{C})$ des points complexes de G_2 est un groupe de Lie complexe. On note $T_{G_2}(\mathbf{C})$ son algèbre de Lie, identifiée à son espace tangent à l'origine et $\exp_{G_2} : T_{G_2}(\mathbf{C}) \to G_2(\mathbf{C})$ son application exponentielle.

Soit $\varphi_2 : \mathbf{C} \to G_2(\mathbf{C})$ un homomorphisme analytique tel que son application tangente à l'origine $\mathrm{Lie}(\varphi_2) : \mathbf{C} \to T_{G_2}(\mathbf{C})$ soit non nulle (φ_2 est un sous-groupe à un paramètre de G_2).

Soit $\chi_2 : G_2 \to \mathbf{P}_N$ un K-plongement de G_2 dans un espace projectif tel que $\chi_2 \circ \exp_{G_2} : T_{G_2}(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}_N(\mathbf{C})$ soit défini par des fonctions analytiques d'ordre $\leq \rho$, avec $\rho = 1$ si G_2 est linéaire et $\rho = 2$ sinon. Des plongements de ce type sont construits par J-P. Serre dans [Se].

L'application $\chi_2 \circ \exp_{G_2} \circ \mathrm{Lie}(\varphi_2) : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_N(\mathbf{C})$ est définie, alors, par des fonctions analytiques d'ordre $\leq \rho$, qu'on notera $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$.

Soient d_0 un entier égal à 0 ou 1, d_1 un entier ≥ 0. Pour avoir des résultats généraux, on considère un groupe produit de la forme $G = G_a^{d_0} \times G_m^{d_1} \times G_2$. Posons $d = d_0 + d_1 + d_2$.

Soit χ le K-plongement naturel, défini à partir de χ_2, de G dans $\mathbf{P}_{d_0} \times \mathbf{P}_{d_1} \times \mathbf{P}_N$. G est ainsi une sous-variété quasi-projective de $\mathbf{P}_{d_0} \times \mathbf{P}_{d_1} \times \mathbf{P}_N$, il existe donc des polynômes multi-homogènes $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s$ de $K[\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}]$ tel qu' un point de coordonnées $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ de $\mathbf{P}_{d_0} \times \mathbf{P}_{d_1} \times \mathbf{P}_N$ appartienne à G si et seulement si $f_i(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = 0$ pour tout i, $1 \leq i \leq r$ et $g_j(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) \neq 0$ pour tout j, $1 \leq j \leq s$.

Soient $x_1, \ldots, x_{d_1}$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et $\varphi : \mathbf{C} \to G(\mathbf{C})$ l'homomorphisme analytique défini par :

$$\varphi(z) = \big(\exp(x_1 z), \ldots, \exp(x_{d_1} z), \varphi_2(z)\big) \text{ si } d_0 = 0$$

$$\varphi(z) = \big(z, \exp(x_1 z), \ldots, \exp(x_{d_1} z), \varphi_2(z)\big) \text{ si } d_0 = 1 .$$

Soient $y_1, \dots, y_m$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. On pose :

$$Y = \mathbf{Z}y_1 + \cdots + \mathbf{Z}y_m, \ \Gamma = \varphi(Y)$$

$$Y(S) = \{h_1 y_1 + \cdots + h_m y_m, \ (h_1, \dots, h_m) \in \mathbf{Z}^m, \ 0 \leq h_i \leq S, \ 1 \leq i \leq m\}$$

$$\Gamma(S) = \varphi(Y(S))$$

$l = \operatorname{rang}_{\mathbf{Z}} \ker\varphi \cap Y$ (on peut supposer sans restriction que

$y_{m-l+1}, \dots, y_m$ appartiennent à $\ker\varphi$) .

Quitte à faire une transformation linéaire, on peut supposer que $\varphi_0(y_j) \neq 0$ pour tout j, $1 \leq j \leq m - l$ et on pose

$$\underline{\omega} = (y_j, \exp(x_i y_j), \frac{\varphi_s(y_j)}{\varphi_0(y_j)} \, ; i = 1, \dots, n \, ; j = 1, \dots, m - l \, ; s = 0, \dots, N)$$

et $L = K(\underline{\omega})$.

Le but de ce texte est d'obtenir une mesure d'approximation simultanée de $\underline{\omega}$.

Rappelons la notion de "mesure d'approximation simultanée" ([A] . Pour cela, nous allons définir d'abord une notion de taille sur un anneau de type fini.

Définition 1. *Soient $x_1, \dots, x_k$ des nombres complexes algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et ζ entier sur $\mathbf{Z}[x_1, \dots, x_k]$ de degré δ.*

Soit $\beta \in \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_k, \zeta]$, β s'écrit d'une manière unique sous la forme $\beta = \sum_{i=0}^{\delta-1} P_i(x_1, \dots, x_k)\zeta^i$ avec $P_i(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_k]$.

On définit, en suivant [Wa_3] § 4.2, la taille $t(\beta)$ de β relativement au système $\{x_1, x_k, \zeta\}$ par :

$$t(\beta) = \max_{0 \leq i \leq \delta - 1} \{\log H(P_i) + \deg P_i\}$$

où $\deg P_i$ désigne le degré totoal de P_i et $H(P_i)$ le maximum de valeurs absolues des coefficients de P_i.

Définition 2. *Soient $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{C}^n$ et $\psi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction. ψ est une mesure d'approximation simultanée en dimension k de $\underline{\alpha}$ si pour toute extension L de $\mathbf{Q}$ de degré de transcendance k ; $L = \mathbf{Q}(x_1, \dots, x_k, \zeta)$ avec $x_1, \dots, x_k$ $\mathbf{Q}$-algébriquement indépendants et ζ entier sur $\mathbf{Z}[x, \dots, x_k]$ tel que $[L : \mathbf{Q}(x_1, \dots, x_k)] \leq T$, il existe $c = c(x_1, \dots, x_k, \zeta) > 0$ vérifiant : pour tout* *uplet* $\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *dont les coordonnées sont dans* $\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_k, \zeta]$ *de tailles (relativement à* $\{x_1, \ldots, x_k, \zeta\}$*) inférieurs à* T*, on a :*

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j - \beta_j| \geq \exp(-c\psi(T)) .$$

On définit le coefficient, dépendant de Γ et G, suivant

$$\eta^* = \min_{G' \subseteq G} \left\{ \frac{\operatorname{rang}_{\mathbf{Z}} \Gamma/\Gamma \cap G' - \rho r_0 - (\rho - 1) r_1}{r_0 + r_1 + r_2} \right\}$$

où G' décrit les sous-groupes algébriques de G, distincts de G, et où r_0 est la dimension du plus grand facteur unipotent de G/G', r_1 est la dimension du plus grand facteur multiplicatif de G/G' et $r_2 = \dim G/G' - (r_0 + r_1)$.

On suppose que $l < m$ et on pose $\kappa = \frac{\eta^* d + \rho d_0 + (\rho-1) d_1}{(1 - l/m)(\eta^* + \rho)}$.

On considère l'hypothèse technique (H) suivante.

(H) Il existe $c_1' > 0$, il existe $S_1' > 0$ tel que pour tout $S \geq S_1'$ et pour tout sous-groupe algébrique connexe $G' \subset G \subset \mathbf{P}_{d_0} \times \mathbf{P}_{d_1} \times \mathbf{P}_N$ incomplètement défini par des équations multi-homogènes de multi-degrés $\leq (S, S, S)$ et tout $y \in Y(S)$,
ou bien $\varphi(y) \in G'$
ou bien $|u - y| \geq \exp(-c_1' S \log S)$ pour tout $u \in \mathbf{C}$ tel que $\varphi(u) \in G'$.

§ 2 - Enoncés des résultats.

Théorème principal. *On suppose l'hypothèse* (H) *vérifiée,* $\eta^* \geq 0$ *et* $\kappa > 1$. *Soit* k *un entier* ≥ 0 *tel que* $\kappa \geq k + 1$. *Alors, il existe un nombre réel* $c > 0$*, ne dépendant que de* $G, \chi, \varphi, K, x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1, \ldots, y_m, m, d_1$ *et* k *ayant la propriété suivante :*

si $\kappa = k + 1$ *(resp.* $\kappa > k + 1$*), la fonction* $\psi_1(T) = \exp(cT^{\frac{\kappa d}{d - \kappa d_0}})$ *(resp.* $\psi_2(T) = c\left[T/(\log T)^{\frac{d - \kappa d_0}{\kappa d}}\right]^{\frac{\kappa(k+1)}{\kappa - k - 1}}$*) est une mesure d'approximation simultanée de* $\underline{\omega}$ *en dimension* k.

En particulier, on a le résultat qualitatif suivant :

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du théorème principal, on a :*

$$\operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\underline{\omega}) \geq [\kappa] .$$

Ce corollaire améliore un résultat de M. Waldschmidt ([Wa_2], th. 1.4) dans le cas d'un sous-groupe à un paramètre.

On déduit du théorème les résultats démontrés dans [A] concernant la fonction exponentielle.

Indépendance algébrique de valeurs de la fonction exponentielle.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ (resp. $y_1, \ldots, y_m$) des nombres complexes $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants et vérifiant l'hypothèse (H_1) suivante :

(H_1) Il existe $c_2' > 0$, il existe $S_2' > 0$ tel que pour tout $S \geq S_2'$ et pour tout $\underline{\lambda} =: (\lambda_1, \ldots, \lambda_{d_1})$ non nul dans $\mathbf{Z}^{d_1}$ vérifiant $|\underline{\lambda} =: \max_{i=1,\ldots,d_1} |\lambda_i| \leq S$ (resp. pour tout $\underline{h} =: (h_1, \ldots, h_m)$ non nul dans $\mathbf{Z}^m$ vérifiant $|\underline{h}| =: \max_{j=1,\ldots,m} |h_j| \leq S$) on ait : $|\sum_{i=1}^{d_1} \lambda_i x_i| \geq \exp(-c_2' S \log S)$ $\big($resp. $|\sum_{j=1}^{m} h_j y_j| \geq \exp(-c_2' S \log S)\big)$.

Corollaire 2 (cf. [A], Cor. 1). *Posons* $\kappa = \frac{mn}{m+n}$ *et* $\underline{\omega} = (e^{x_i y_j}; i = 1, \ldots, n\ ;$ $j = 1, \ldots, m)$, *on suppose* $\kappa > 1$. *Soit* k *un entier* ≥ 0 *tel que* $\kappa \geq k+1$. *Alors il existe un nombre réel* $c > 0$, *ne dépendant que de* $m, n, x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1, y_m$ *et* k *ayant la propriété suivante :*

si $\kappa = k+1$ *(resp.* $\kappa > k+1$*) la fonction* $\psi_1(T) = \exp(cT^\kappa)$ *(resp.* $\psi_2(T) = c\Big(T/(\log T)^{1/\kappa}\Big)^{\frac{\kappa(k+1)}{\kappa-k-1}}$ *est une mesure d'approximation de* $\underline{\omega}$ *en dimension* k.

Si on prend $x_i = \pi^i$, pour $(1 \leq i \leq d)$, $y_j = \pi^{j-1}$ $1 \leq j \leq d$, on déduit du corollaire 2, dans le cas où les approximants sont algébriques ($k = 0$) où des éléments de $\mathbf{Z}[\theta]$ avec θ transcendant ($k = 1$), les résultats suivants :

Corollaire (3).- *On suppose que* $d' > 2$. *Alors, il existe* $c = c(d') > 0$ *tel que pour tout uplet* $(a_1, \ldots, a_{2d'-1})$ *de nombres algébriques de tailles* $\leq T$, *on ait :*

$$\log \max_{1 \leq i \leq 2d-1} |e^{\pi^i} - a_i| \geq c \frac{T^{\frac{d'}{d'-2}}}{(\log T)^{\frac{2}{d'-2}}} .$$

Corollaire (4).- *Soit* θ *un nombre transcendant. Si* $d' = 4$ *(resp.* $d' > 4$*), il existe* $c = c(d', \theta) > 0$ *tel que pour tout uplet* $(P_1, \ldots, P_{2d'-1})$ *de polynômes de* $\mathbf{Z}[X]$ *de tailles* $\leq T$, *on ait :*

$$\log \max_{1 \leq i \leq 2d'-1} |e^{\pi^i} - P_i(\theta)| \geq -\exp(cT^2)$$

$$\left(\text{resp. } \log \max_{1\leq i\leq 2d'-1} |e^{\pi^i} - P_i(\theta)| \geq -c\frac{T^{\frac{2d'}{d'-3}}}{(\log T)^{\frac{4}{d'-4}}}\right).$$

On peut remplacer dans les corollaires 3 et 4, π par e ou par un nombre transcendant w vérifiant l'hypothèse suivante : il existe $H_0 > 0$ tel que pour tout $H \geq H_0$ et tout uplet $(h_0, \ldots, h_{d'})$ d'entiers non tous nuls vérifiant $\max_{0\leq j\leq d'} |h_j| \leq H$, on a :

$$|\sum_{j=0}^{d'} h_j w^j| \geq \exp(-cH\log H) \text{ où } c = c(w, d').$$

Corollaire 5 (cf. [A], Cor. 2). *Posons* $\kappa = \frac{m(n+1)}{m+n}$, $\lambda = \frac{m(n+1)}{n}$ *et* $\underline{\omega}' = (y_j, \exp(x_i y_j)\ ;\ i = 1, \ldots, n\ ;\ j = 1, \ldots, m)$. *On suppose* $m \geq 2$, *soit* k *un entier* ≥ 0 *tel que* $\kappa \geq k+1$. *Alors, il existe un nombre réel* $c > 0$, *ne dépendant que de* $m, n, x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1, y_m$ *et* k *ayant la propriété suivante :*

si $\kappa = k+1$ *(resp.* $\kappa > k+1$*), la fonction* $\psi_1(T) = \exp(cT^\lambda)$ $\left(\textit{resp.}\psi_2(T) = c\left(T/(\log T)^{1/\lambda}\right)^{\frac{\kappa(k+1)}{\kappa-k-1}}\right)$ *est une mesure d'approximation simultanée de* $\underline{\omega}'$ *en dimension* k.

Corollaire 6 (cf. [A], Cor. 3). *Soient* γ *un nombre complexe non nul de logarithme non nul,* β *un nombre algébrique de degré* $\delta \geq 2$, *et* k *un entier* ≥ 0. *Alors il existe* $c = c(\gamma, \beta, \delta, k) > 0$ *ayant la propriété suivante :*

si $\delta = 2k+1$ *(resp.* $\delta > 2k+1$*), la fonction* $\psi_1(T) = \exp(cT^{\delta+1})$ $\left(\textit{resp.}\varphi_2(T) = c\left(T/(\log T)^{\frac{1}{\delta+1}}\right)^{\frac{(\delta+1)(k+1)}{\delta-2k-1}}\right)$ *est une mesure d'approximation simultanée de* $(\gamma, \gamma^\beta, \ldots, \gamma^{\beta^{\delta-1}})$ *en dimension* k.

En particulier, on retrouve le résultat qualitatif démontré par G. Diaz [D].

Sous les hypothèses du corollaire 6, on a :
$\mathrm{degtr}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\gamma, \gamma^\beta, \ldots, \gamma^{\beta^{\delta-1}}) \geq \left[\frac{\delta+1}{2}\right]$.

Dans les cas particuliers $k = 0$ et $k = 1$, on déduit du corollaire 6 les résultats suivants :

Soient γ et β comme ci-dessus.

Corollaire (7).- *Il existe $c = c(\gamma, \beta, \delta) > 0$ tel que pour tout δ uplet $(a_0, \ldots, a_{\delta-1})$ de nombres algébriques de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{0 \leq i \leq \delta-1} |\gamma^{\beta^i} - a_i| \geq -c \frac{T^{\frac{\delta+1}{\delta-1}}}{(\log T)^{\frac{1}{\delta-1}}}.$$

Corollaire (8).- *Soit θ un nombre transcendant. Si $\delta = 3$ (resp. $\delta > 3$), il existe $c = c(\gamma, \beta, \delta, \theta) > 0$ tel que pour tout δ uplet $(Q_0, \ldots, Q_{\delta-1})$ de polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{0 \leq i \leq \delta-1} |\gamma^{\beta^i} - Q_i(\theta)| \geq -\exp(cT^4)$$

$$\left(\text{resp. } \log \max_{0 \leq i \leq \delta-1} |\gamma^{\beta^i} - Q_i(\theta)| \geq -c \frac{T^{\frac{2(\delta+1)}{\delta-3}}}{(\log T)^{\frac{2}{\delta-3}}}\right.$$

Indépendance algébrique de valeurs de la fonction elliptique de Weierstrass.

On déduit aussi du théorème l'analogue elliptique des corollaires précédents.

Soient $\mathcal{P}$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2 et g_3 algébriques et $\mathbf{F}$ le corps des multiplications de $\mathcal{P}$.

On considère l'hypothèse (H_1') obtenue en remplaçant dans (H_1), $\mathbf{Z}$ par l'anneau des entiers de $\mathbf{F}$.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ (resp. $y_1, \ldots, y_m$) des nombres complexes $\mathbf{F}$-linéairement indépendants et vérifiant l'hypothèse (H_1'). On suppose que pour tout (i,j), $x_i y_j$ n'est pas pôle de $\mathcal{P}$.

Corollaire 9. *On suppose $m \leq n$ et, on pose $\kappa = \frac{mn[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{2n+m[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$. On suppose $\kappa > 1$, soit k un entier ≥ 0 tel que $\kappa \geq k+1$. Alors, il existe $c = c(m, n, g_2, g_3, k) > 0$ tel que :*

si $\kappa = k+1$ (resp. $\kappa > k+1$), la fonction $\psi_1(T) = \exp(cT^\kappa)$, $\left(resp. \psi_2(T) = c\big(T/(\log T)^{1/\kappa}\big)^{\frac{\kappa(k+1)}{\kappa-k-1}}\right)$ est une mesure d'approximation simultanée de $\big(\mathcal{P}(x_i y_j)\,;\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\big)$ en dimension k.

Une application intéressante de ce corollaire concerne l'approximation simultanée en dimension 0 ou 1 des nombres $\mathcal{P}(e), \mathcal{P}(e^2), \ldots, \mathcal{P}(e^{d'})$.

Corollaire (10). $(k=0)$ - *Soit d' un entier, tel que $d' > 1 + \frac{2}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$. Il existe $c = c(d', g_2, g_3) > 0$ tel que pour tout uplet $(b_1, \ldots, b_{2d-1})$ de nombres algébriques de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{1\leq i\leq 2d'-1} |\mathcal{P}(e^i) - b_i| \geq -c \frac{T^{\frac{d'[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{(d'-1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-2}}}{(\log T)^{\frac{2+[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{(d'-1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-2}}} .$$

Corollaire (11). $(k=1)$ - *Soit θ un nombre transcendant. Si $d' = 2 + \frac{4}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$ (resp. $d' > 2 + \frac{4}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$), il existe $c = c(d', g_2, g_3, \theta)$ tel que pour tout uplet $(Q_0, \ldots, Q_{2d'-1})$ de polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ de tailles $\leq T$, on ait :*

$$\log \max_{0\leq i\leq 2d-1} |\mathcal{P}(e^i) - Q_i(\theta)| \geq -\exp\left(cT^2\right)$$

$$\left(\text{resp. } \log \max_{1\leq i\leq 2d-1} |\mathcal{P}(e^i) - Q_i(\theta)| \geq -c \frac{T^{\frac{2d'[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{(d'-2)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-4}}}{(\log T)^{\frac{2[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]+4}{(d'-2)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-4}}}\right) .$$

Corollaire 12. *On pose*

$$\kappa = \frac{m(n+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{2n + m[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}, \quad \lambda = \frac{m(n+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{2n}$$

et

$$\underline{\omega'} = \left(y_j, \mathcal{P}(x_i y_j), 1 \leq i \leq n \,; 1 \leq j \leq m\right) .$$

On suppose $\kappa > 1$, soit k un entier ≥ 0. Alors il existe $c = c(m, n, g_2, g_3, k) > 0$ tel que :

si $\kappa = k+1$ (resp. $\kappa > k+1$), la fonction $\psi_1(T) = \exp(cT^\lambda)$ $\left(resp. \psi_2(T) = c\left(T/(\log T)^{1/\lambda}\right)^{\frac{\kappa(k+1)}{\kappa-k-1}}\right)$ est une mesure d'approximation simultanée en dimension k de $\underline{\omega'}$.

Corollaire 13. *Soient β un nombre algébrique de degré $\delta \geq 2$ sur $\mathbf{F}$, et u un nombre complexe tel que $\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(\beta u), \ldots, \mathcal{P}(\beta^{\delta-1}u)$ soient définis. Soit k un entier ≥ 0, on suppose que $\delta > 2/[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]$, alors il existe $c = c(\beta, u, \delta, g_2, g_3, k) > 0$ tel que :*

si $\delta = \left(1 + \frac{2}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}\right)k + \frac{2}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$ $\left(resp. \ \delta > \left(1 + \frac{2}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}\right)k + \frac{2}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}\right)$ la fonction $\psi_1(T) = \exp\left(cT^{\frac{(\delta+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{2}}\right)\left(resp. \psi_2(T) = c\left[T/(\log T)^{\frac{2}{(\delta+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}}\right]^{\frac{(\delta+1)(k+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{(\delta+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-(k+1)(2+[\mathbf{F}:\mathbf{Q}])}}\right)$ est une mesure d'approximation simultanée en dimension k de $(\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(\beta u), \ldots, \mathcal{P}(\beta^{\delta-1}u))$.

On a en particulier le résultat qualitatif suivant :

Corollaire 14.

$$i)\ si\ \mathbf{F}=\mathbf{Q}\ et\ \delta>2,\ degtr_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}\Big(\mathcal{P}(u),\ \mathcal{P}(\beta u),\dots,\mathcal{P}(\beta^{\delta-1}u)\Big)\geq\left[\frac{\delta+1}{3}\right]$$

$$ii)\ si\ \mathbf{F}\neq\mathbf{Q}\ et\ \delta\geq 2,\ degtr_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}\Big(\mathcal{P}(u),\ \mathcal{P}(\beta u),\dots,\mathcal{P}(\beta^{\delta-1}u)\Big)\geq\left[\frac{\delta+1}{2}\right].$$

Dans les cas particuliers $k=0$, $k=1$, on obtient les résultats suivants :

Corollaire (15).- *Si* $\delta>\frac{2}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$, *il existe* $c=c(\beta,u,g_2,g_3,\delta)>0$ *tel que pour tout uplet* $(a_0,\dots,a_{\delta-1})$ *de nombres algébriques de tailles* $\leq T$, *on ait :*

$$\log\max_{0\leq i\leq\delta-1}|\mathcal{P}(\beta^i u)-a_i|\geq -c\frac{T^{\frac{(\delta+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{\delta[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-2}}}{(\log T)^{\frac{2}{\delta[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-2}}}.$$

Corollaire (16).- *Soit* θ *un nombre transcendant. Si* $\delta=1+\frac{4}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$ *(resp.* $\delta>1+\frac{4}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$*) il existe* $c=c(\beta,u,g_2,g_3,\delta,\theta)>0$ *tel que pour tout uplet* $(Q_0,\dots,Q_{\delta-1})$ *de polynômes de* $\mathbf{Z}[X]$ *de tailles* $\leq T$, *on ait :*

$$\log\max_{0\leq i\leq\delta-1}|\mathcal{P}(\beta^i u)-Q_i(\theta)|\geq -\exp\Big(cT^{\frac{(\delta+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{2}}\Big)$$

$$\Big(\text{resp. }\log\max_{0\leq i\leq\delta-1}|\mathcal{P}(\beta^i u)-Q_i(\theta)|\geq -c\frac{T^{\frac{2(\delta+1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{(\delta-1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-4}}}{(\log T)^{\frac{4}{(\delta-1)[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]-4}}}\Big).$$

II - PROPOSITION PRINCIPALE.

L'outil principal de la démonstration du théorème est le critère d'indépendance algébrique (cf. [A], Critère principal).

Rappelons la définition de la taille (cf. [A]), considérée dans ce critère, d'un polynôme à coefficients dans le corps de nombres K.

Soient v une place de K, K_v le complété de K pour v, $\mathbf{C}_v$ le complété d'une clôture algébrique de K_v, n_v le degré de K_v sur $\mathbf{Q}_v$ et σ_v le plongement de K dans $\mathbf{C}_v$ étendant le plongement canonique de K dans K_v.

Pour P un polynôme à coefficients dans K, on désigne par $M_v(P)$ le maximum des valeurs absolues des coefficients de $\sigma_v(P)$ si v est finie et la mesure de Mahler de $\sigma_v(P)$ si v est infinie.

On définit (cf. [P_2]) la hauteur $h(P)$ et la taille de $t(P)$ de P par :

$$(h(P) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\Sigma_v n_v \max(0, \log M_v(P))$$

et $t(P) = \max(1 + \deg P, h(P))$.

On peut énoncer maintenant le critère d'indépendance algébrique.

Critère d'indépendance algébrique.

Soient $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbf{C}^n$, $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *une fonction continue et strictement croissante et* $k \in \mathbf{N}$. *Soient* c_1', c_2' *et* c_3' *des réels* > 0 *ne dépendant que de* $\underline{\omega}$, n, k *et* $[K : \mathbf{Q}]$.

On suppose que pour tout réel $S' \geq S_0'$, *il existe un idéal* $I_S' = \left(G'_{S',1}, \ldots, G'_{S',m(S')}\right)$ *de* $K[X_1, \ldots, X_n]$ *vérifiant :*

1) *l'ensemble des zéros de* I_S' *dans la boule de* $\mathbf{C}^n$ *de centre* $\underline{\omega}$ *et de rayon* $\exp(-c_1'\, S'^{k+1} \cdot u(S'))$ *de* $\mathbf{C}^n$ *est vide,*

2) $\max\limits_{1\leq j\leq m(S')} |G_{S',j}(\underline{\omega})| \leq \exp(-c_2' \cdot S'^{k+1} \cdot u(S'))$,

3) $\max\limits_{1\leq j\leq m(S')} t(G_{S',j}) \leq c_3' S'$.

Alors, il existe un réel $c' = c(\underline{\omega}, k, n, [K : \mathbf{Q}])$ *telle que la fonction définie par* $\psi(T) = c'T^{k+1} \cdot \left(v(c'T^{k+1})\right)^{k+1}$ *soit une mesure d'approximation de* $\underline{\omega}$ *en dimension* k, *où* v *est la fonction inverse de* u.

Le but de la proposition suivante est de montrer que,
$\underline{\omega} = \left(y_j, \exp(x_i y_j), \frac{\varphi_s(y_j)}{\varphi_0(y_j)}\ ;\ i = 1, \ldots, n\ ;\ j = 1, \ldots, m-l\ ;\ s = 0, \ldots, N\right)$ vérifie les hypothèses du critère précédent.

§ 1 - Proposition.

Dans ce paragraphe, on désigne par $c_0, \ldots, c_i, \ldots$ des réels ne dépendant que de $G, K, \chi, \varphi, m, x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1, \ldots, y_m$ et par c un autre réel suffisamment grand par rapport à $c_0, \ldots, c_i, \ldots$

Enfin soit S_0 un nombre réel suffisamment grand en fonction de c, on pose pour $S \geq S_0$,

$$D_0(S) = \frac{1}{c_0} S^{\eta^*+\rho} (\log S)^{-1+\frac{d_0}{d}},\ D_1(S) = \frac{1}{c_0} S^{\eta^*+\rho-1} (\log S)^{\frac{d_0}{d}}$$

$$D_2(S) = \frac{1}{c_0} S^{\eta^*} (\log S)^{\frac{d_0}{d}} \quad \text{où} \quad (c_0 = 2^{d_2+1} \deg \chi(G_2))$$

$$\Delta(S) = S^{\eta^*+\rho} (\log S)^{\frac{d_0}{d}},\ r(S) = S^{\kappa(\eta^*+\rho)} \log S$$

$$M(S) = \frac{1}{2c_0^d} S^{\frac{\kappa(\eta^*+\rho)}{m}},\ R_1(S) = c_1 S \quad (\text{où} \quad c_1 = \max_{1 \leq j \leq m} |y_j|)$$

$$R_2(S) = S^{\frac{\kappa(\eta^*+\rho)-\eta^*}{\rho}} (\log S)^{-\frac{d_0}{\rho d}}$$

Soient $\theta_1, \ldots, \theta_t$, θ_{t+1} des nombres complexes tels que $\theta_1, \ldots, \theta_t$ soient algébriquement indépendant sur $\mathbf{Q}$, θ_{t+1} entier sur $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_t]$ et
$K(\underline{\omega}) = \mathbf{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_{t+1})$.

Posons :

$$y_j = \frac{A_j(\theta_1, \ldots, \theta_{t+1})}{Q(\theta_1, \ldots, \theta_t)}\ (j = 1, \ldots m-l),$$

$$e^{x_i y_j} = \frac{B_{i,j}(\theta_1, \ldots, \theta_{t+1})}{Q(\theta_1, \ldots, \theta_t)}\ (i = 1, \ldots, d_1\ ;\ j = 1, \ldots, m-l),$$

$$\frac{\varphi_s(y_j)}{\varphi_0(y_j)} = \frac{C_{s,j}(\theta_1, \ldots, \theta_{t+1})}{Q(\theta_1, \ldots, \theta_t)}\ (s = 1, \ldots, N\ ;\ j = 1, \ldots, m-l)\ .$$

La démonstration du théorème repose sur la proposition suivante.

Enoncé de la proposition. *On suppose que l'hypothèse (H) est vérifiée ; on suppose que $\eta^* \geq 0$ et $\kappa > 1$. Alors, pour tout $S \geq S_0$, il existe un idéal $\mathcal{J}_S = (P_{S,1}, \ldots, P_{S,m(S)})$ dans $K[X_1, \ldots, X_t]$ tel que :*

1) *l'ensemble des zéros de $\mathcal{J}_S$ dans la boule de $\mathbf{C}^t$. de centre $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_t)$ et de rayon $\exp(-cr(S))$ est vide,*

2) $\max_{1\leq i\leq m(S)} |P_{S,i}(\underline{\theta})| \leq \exp(-c_2 r(S))$,

3) $\max_{1\leq i\leq m(S)} t(P_{S,i}) \leq c_3\Delta(S)$.

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin des lemmes suivants

§ 2 - Lemmes auxiliaires.

Nous utiliserons souvent le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit* $P \in K[X_1,\ldots,X_{t+1}]$, *soit* $(z_1,\ldots,z_{t+1}) \in \mathbf{C}^{t+1}$ *tel que* $\max_{1\leq i\leq t+1} |z_i-\theta_i| \leq \varepsilon < 1$. *Alors on a :*

$$|P(z_1,\ldots,z_{t+1}) - P(\theta_1,\ldots,\theta_{t+1})| \leq \varepsilon \cdot \exp(c_4 t(P))$$

où $c_4 = c(\underline{\theta}, t)$.

■ (cf. [A], lemme 1). ■

Le résultat suivant, démontré essentiellement par D. Bertrand porte sur les formules d'addition dans G_2 en tant que sous-variété quasi-projective de $\mathbf{P}_N$.

Lemme 2.2. *Il existe une constante* c_5. *ne dépendant que de* G_2, χ_2 *et* m' *vérifiant la proposition suivante.*

Pour tout $\underline{h} = (h_1,\ldots,h_{m'}) \in \mathbf{Z}^{m'}$, $|\underline{h}| =: \max_{1\leq i\leq n} |h_i| \leq S$, *il existe un recouvrement fini* $(V_\beta)_{\beta\in B_h}$ *de* $G_2^{m'}$ *par des ouverts de Zariski et une famille de polynômes* $(U_i^\beta)_{\substack{\beta\in B_h\\ 0\leq i\leq N}}$ *en les variables* $(X_{r,s}\,; r : 0,\ldots,N\,; s = 1,\ldots,m')$, *homogènes par rapport à chaque groupe de* $(N+1)$*-variables* $(X_{0,s},\ldots,X_{N,s})$, $(s=1,\ldots,m')$ *à coefficients entiers sur* K, *de tailles majorées par* $c_5 S^\rho$, *telle que pour tout élément* $p = (p_1,\ldots,p_{m'})$ *de* $G_2^{m'}$, *avec* p_s *de système de coordonnées projectives* $\mathbf{X} = (X_{0,s},\ldots,X_{n,s})$ $(s=1,\ldots,m')$, *et tout* $\beta \in B_h$, *on a :*

$\left(U_0^\beta(\mathbf{X}),\ldots,U_N^\beta(\mathbf{X})\right)$ *est ou bien un système de coordonnées projectives de* $h\cdot p =: h_1p_1 + \ldots + h'_m \cdot p_{m'}$ *dans* $\mathbf{P}_N$, *ou bien est le système nul.*

De plus si $(p_1,\ldots,p_{m'}) \in V_\beta$ *alors* $\left(U_0^\beta(\mathbf{X}),\ldots,U_N^\beta(\mathbf{X})\right)$ *n'est pas nul.*

■ D'après le lemme 7 de $[Be]$ et la quasi-compacité de G_2, il existe pour tout $\underline{h} \in \mathbf{Z}^{m'}$, $|\underline{h}| \leq S$ un recouvrement fini $(V_\beta)_{\beta\in\beta_h}$ de $G_2^{m'}$ par des ouverts de Zariski et une famille de polynômes $(U_i^\beta)_{\substack{\beta\in \mathbf{B}_h\\ 0\leq i\leq N}}$ vérifiant les conditions du lemme, telle que pour tout $p \in G_2^{m'}$, si $p \in V_\beta$, $\left(U_0^\beta(\mathbf{X}), \ldots, U_N^\beta(\mathbf{X})\right)$ est un système de coordonnées projectives de $h \cdot p$.

Soient $(\beta, \beta') \in \mathcal{B}_h^2$, $\beta \neq \beta'$;

$\left(U_0^\beta(\mathbf{X}), \ldots, U_N^\beta(\mathbf{X})\right)$ et $\left(U_0^{\beta'}(\mathbf{X}), \ldots, U_N^{\beta'}(\mathbf{X})\right)$ sont des systèmes de coordonnées projectives dans $\mathbf{P}_N$ du point $h \cdot p$ quand $p \in V_\beta \cap V_{\beta'}$. On a, par conséquent, pour $i, j \in \{0, \ldots, N\}$ $U_i^{\beta'} \cdot U_j^\beta - U_i^\beta \cdot U_j^{\beta'} = 0$ sur $V_\beta \cap V_{\beta'}$ et donc sur $G^{m'}$.

Si $p \in V_\beta \Rightarrow$ il existe i_0, $0 \leq i_0 \leq N$ tel que $U_{i_0}^\beta(\mathbf{X}) \neq 0$ d'où

$$U_i^{\beta'}(\mathbf{X}) = \frac{U_{i_0}^{\beta'}(\mathbf{X})}{U_{i_0}^\beta(\mathbf{X})} \cdot U_i^\beta(\mathbf{X})$$

ou bien $U_{i_0}^{\beta'}(\mathbf{X}) = 0$, alors on a $U_i^{\beta'}(\mathbf{X}) = 0$, $\forall i$, $0 \leq i \leq N$

ou bien $U_{i_0}^{\beta'}(\mathbf{X}) \neq 0$, et alors, $(U_0^{\beta'}(\mathbf{X}), \ldots, U_N^{\beta'}(\mathbf{X}))$ est un système de coordonnées projectives de $h \cdot p$ dans $\mathbf{P}_N$. ∎

Dans ce lemme, pour U et R deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$, on désigne par $r(U, R)$ le semi-résultant de Chudnovsky (cf. $[C]$) de U et R.

Lemme 2.3. *Soient U et R deux polynômes de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_{t+1}]$ non nuls. Soient $(z_1, \ldots, z_t) \in \mathbf{C}^t$ et A un nombre réel tel que $\max_{i \leq 1 \leq t} |z_i| \leq A$. On suppose que $R(z_1, \ldots, z_t, X)$ est non constant ; soit $\zeta \in \mathbf{C}$ une racine de $R(z_1, \ldots, z_t, X)$ de multiplicité s. Si $(U(z_1, \ldots, z_t, \zeta) \neq 0$ alors il existe $P \in K[X_1, \ldots, X_t] - \{0\}$ vérifiant*

i) $P(z_1, \ldots, z_t) = r\big(U(z_1, \ldots, z_t, X), R(z_1, \ldots, z_t, X)\big)$.

ii) $|P(z_1, \ldots, z_t)| \leq |U(z_1, \ldots, z_t, \zeta)|^s \exp\big(c_1' t(U) t(R)\big)$.

iii) $t(P) \leq c_2' t(U) t(R)$

où $c_1' = 6(\log 2A + t + 1 + [\mathbf{K} : \mathbf{Q}])^2$ *et* $c_2' = 4t + 9$.

∎ (cf. $[A]$, Lemme 7).

§ 3 - Petites perturbations de M. Waldschmidt.

Soit $R(\theta_1, \ldots, \theta_t, X)$ le polynôme minimal de θ_{t+1} sur $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_t]$.

Soit $(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t) \in \mathbf{C}^t$ tel que $\max\limits_{1 \leq i \leq t} |\theta_i - \tilde{\theta}_i| \leq \exp(-cr(S))$. A l'aide du semi-résultant de Chudnovsky (cf. $[Br_1]$), on exhibe une racine simple $\tilde{\theta}_{t+1}$ de $R(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t, X)$ tel que $|\tilde{\theta}_{t+1} - \theta_{t+1}| \leq \exp[-(c - c_6)r(S)]$. De cette façon, à chaque élément $(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t)$ de la boule de $\mathbf{C}^t$ de centre $(\theta_1, \ldots, \theta_t)$ et de rayon $\exp(-cr(S))$, on associe l'élément $\underline{\tilde{\theta}} = (\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_{t+1})$.

Soit j, $1 \leq j \leq m - l$, le point $\gamma_j = \varphi(y_j)$ de $G(L)$ a pour système de coordonnées dans $\mathbf{P}_{d_0}(L) \times \mathbf{P}_{d_1}(L) \times \mathbf{P}_N(L)$,

$$\left(Q(\underline{\theta}), A_j(\underline{\theta}), Q(\underline{\theta}), B_{1,j}(\underline{\theta}), \ldots, B_{d_1,j}(\underline{\theta}), Q(\underline{\theta}), C_{1,j}(\underline{\theta}), \ldots, C_{N,j}(\underline{\theta}) \right) .$$

Considérons le point $\tilde{\gamma}_j$ de $\mathbf{P}_{d_0}(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_{d_1}(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_N(\mathbf{C})$ qui a pour système de coordonnées,

$$\left(Q(\underline{\tilde{\theta}}), A_j(\underline{\tilde{\theta}}), Q(\underline{\tilde{\theta}}), B_{1,j}(\underline{\tilde{\theta}}), \ldots, B_{d_1,j}(\underline{\tilde{\theta}}), Q(\underline{\tilde{\theta}}), C_{1,j}(\underline{\tilde{\theta}}), \ldots, C_{N,j}(\underline{\tilde{\theta}}) \right) .$$

On vérifie (cf. $[W_2]$, § 5) puisque c est suffisamment grand par rapport à $t(f_1), \ldots, t(f_r)$, $t(g_1, \ldots, t(g_s)$ que $\tilde{\gamma}_j \in G$.

Comme $\exp_G$ est un difféomorphisme local, on en déduit qu'il existe $\tilde{y}_j \in \mathbf{C}$ tel que $\varphi(\tilde{y}_j) = \tilde{\gamma}_j$ et $\|y_j - \tilde{y}_j\| \leq \exp(-\frac{c}{2}r(S))$.

Soit $\underline{h} =: (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbf{Z}^m$, on pose $\underline{h}' = (h_1, \ldots, h_{m-l})$ et on désigne par $\mathcal{B}_h$ l'ensemble $\mathcal{B}_{h'}$ donné par le lemme 2.2.

Pour $\beta \in \mathcal{B}_h$ et $0 \leq i \leq N$, on pose :

$$u_i^\beta(\underline{Y}) = U_i^\beta \left(Q(\underline{Y}), C_{1,1}(\underline{Y}), \ldots, C_{N,1}(Y), \ldots, Q(\underline{Y}), C_{1,m-l}(\underline{Y}), \ldots, C_{N,m-l}(\underline{Y}) \right)$$

où U_i^β est le polynôme donné par le lemme 2.2.

Soit $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \leq S$. Soit $\beta \in \mathcal{B}_h$, d'après le lemme 2.2, $(u_0^\beta(\underline{\theta}), \ldots, u_N^\beta(\underline{\theta}))$ (resp. $(u_0^\beta(\tilde{\theta}), \ldots, u_N^\beta(\tilde{\theta})))$ est soit un système de coordonnées projectives de $\varphi_2(h \cdot y)$ (resp. $\varphi_2(h \cdot \tilde{y})$), où $h \cdot y = h_1 y_1 + \ldots + h_m y_m$ (resp. $h \cdot \tilde{y} = h_1 \tilde{y}_1 + \ldots + h_{m-l} \tilde{y}_{m-l}$) soit le système nul.

Si $(\varphi_2(y_1), \ldots, \varphi_2(y_{m-l})) \in V_\beta$ (resp. $(\varphi_2(\tilde{y}_1), \ldots, \varphi_2(\tilde{y}_{m-l})) \in V_\beta$) alors $(u_0^\beta(\underline{\theta}), \ldots, u_N^\beta(\underline{\theta}))$ (resp. $(u_0^\beta(\underline{\tilde{\theta}}), \ldots, u_N^\beta(\underline{\tilde{\theta}}))$ est un système de coordonnées projectives de $\varphi_2(h \cdot y)$ (resp. $\varphi_2(h \cdot \tilde{y})$) .

Ainsi pour tout $(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t) \in \mathbf{C}^t$ tel que $\max\limits_{1 \le 1 \le k} |\theta_i - \tilde{\theta}_i| \le \exp(-cr(S))$ il existe $(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{m-l}) \in \mathbf{C}^{m-l}$ avec $\max\limits_{1 \le j \le m-l} |y_j - \tilde{y}_j| \le \exp(-\frac{c}{2}r(S))$ tel que :

$$\tilde{y}_j = \frac{A_j(\tilde{\underline{\theta}})}{Q(\tilde{\underline{\theta}})}, \quad \exp(x_i \tilde{y}_j) = \frac{B_{i,j}(\tilde{\underline{\theta}})}{Q(\tilde{\underline{\theta}})} \; (i = 1, \ldots, d_1 \; ; \; j = 1, \ldots, m-l)$$

et pour tout $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \le S$ et tout $\beta \in \mathcal{B}_h$, $(u_0^\beta(\tilde{\theta}), \ldots, u_N^\beta(\tilde{\theta}))$ est ou bien un système de coordonnées projectives de $\varphi_2(h \cdot \tilde{y})$ ou bien le système nul. Si $(\varphi_2(\tilde{y}_1), \ldots, \varphi_2(\tilde{y}_{m-l})) \in V_\beta$, $(u_0^\beta(\tilde{\underline{\theta}}), \ldots, u_N^\beta(\tilde{\underline{\theta}}))$ n'est pas nul.

§ 4 - Démonstration de la proposition.

Deux cas peuvent se produire.

1^{er} **cas :**

$$\exists \underline{h} \in \mathbf{Z}^m, |\underline{h}| \le S \text{ tel que } \max_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_h \\ 0 \le i \le N}} |u_i^\beta(\underline{\theta})| \le \exp\Big(-\frac{c}{10}\frac{r(S)}{D_2(S)}\Big) .$$

Soient $(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t) \in \mathbf{C}^t$ tel que $\max\limits_{1 \le j \le t} |\theta_j - \underline{\tilde{\theta}_j}| \le \exp(-cr(S))$ et $(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{m-l})$ un $(m-l)$ uplet de nombres complexes, défini en fonction de $\tilde{\underline{\theta}}$ dans le paragraphe 3 ; il existe $\beta' \in \mathcal{B}_h$ tel que $(\varphi_2(\tilde{y}_1), \ldots, \varphi_2(\tilde{y}_{m-l})) \in V_{\beta'}$. On déduit du lemme 2.2 que $(u_0^{\beta'}(\tilde{\underline{\theta}}), \ldots, u_N^{\beta'}(\tilde{\underline{\theta}}))$ est un système de coordonnées projectives de $\varphi_2(h \cdot \tilde{y})$ et par suite, on a l'inégalité $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad \max_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_h \\ 0 \le i \le N}} |u_i^\beta(\tilde{\underline{\theta}})| \ne 0 .$$

Posons
$P_{i,\beta}(\theta_1, \ldots, \theta_t) = \left[r(u_i^\beta(\theta_1, \ldots, \theta_t, X), R(\theta_1, \ldots, \theta_t, X))\right]^{D_2(S)}$, (où r désigne le semi-résultant de Chudnovsky)
et $\quad \mathcal{J}_S = \Big(P_{i,\beta} \, , \; 0 \le i \le N \; , \; \beta \in \mathcal{B}_h\Big)$.

L'inégalité $(*)$ étant vérifiée, on déduit du lemme 2.3 i) que $\mathcal{J}_S$ n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}^t$ de centre $(\theta_1, \ldots, \theta_t)$ et de rayon $\exp(-cr(S))$. D'autre part, comme par hypothèse on a $\max\limits_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_h \\ 0 \le i \le N}} |u_i^\beta(\underline{\theta})| \le \exp\big(-\frac{c}{10}\frac{r(S)}{D_2(S)}\big)$, on déduit encore du lemme 2.3 ii) que $\max\limits_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_h \\ 0 \le i \le N}} |P_{i,\beta}(\underline{\theta})| \le \exp(-c_7 r(S))$. Enfin, comme d'après le lemme 2.2, on a $\max\limits_{\substack{\beta\in\mathcal{B}_h\\ 0\leq i\leq N}} t(u_i^\beta) \leq c_8 S^\rho$, le lemme 2.3 iii) montre que $\max\limits_{\substack{\beta\in\mathcal{B}_h\\ 0\leq i\leq N}} t(P_{i,\beta}) \leq c_9 S^\rho D_2(S) \leq c_{10}\Delta(S)$.

L'idéal $\mathcal{J}_S$ vérifie alors les conditions de la proposition.

$2^{\text{ème}}$ **cas :**

$$\forall \underline{h} \in \mathbf{Z}^m, 0 \leq |\underline{h}| \leq S, \ \max_{\substack{\beta\in\mathcal{B}_h\\ 0\leq i\leq N}} |u_i^\beta(\underline{\theta})| > \exp\left(-\frac{c}{10}\frac{r(S)}{D_2(S)}\right) .$$

Dans ce cas, le schéma de démonstration, en 3 pas, de la proposition est classique ; dans le 1^er pas, on construit une fonction analytique à une variable s'annulant sur $Y(S)$. Dans le $2^{\text{ème}}$ pas, on reprend une idée de G. Diaz [D] et, grâce à une formule d'extrapolation, on construit une suite d'idéaux $(\mathcal{J}_S)_S$ qui prennent des valeurs "petites" en $\underline{\theta}$.

Dans le $3^{\text{ème}}$ pas, on utilise les petites perturbations de M. Waldschmidt plus un lemme de zéro sur les groupes algébriques de P. Philippon, pour montrer que la variété des zéros de $\mathcal{J}_S$ est "localement vide".

1^{er} *pas. Construction de la fonction auxiliaire.*

Lemme 4.1. *Il existe un polynôme $P(X, Y_1, \ldots, Y_{d_1}, Z_0, \ldots, Z_N)$ non identiquement nul sur G de degré $\leq D_0(S)$ en X, de degré $\leq D_1(S)$ en $\underline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{d_1})$, homogène de degré $D_2(S)$ en $\underline{Z} = (Z_0, \ldots, Z_N)$, à coefficients dans $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_t]$ et de taille $\leq c_{11}\Delta(S)$ tel que, en notant $F = P \circ \chi \circ \varphi$, on ait $F(h \cdot y) = 0$ pour tout $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m, |\underline{h}| \leq M(S)$.*

■ Les paramètres $D_0(S), D_1(S), \ldots$ etc seront notés pour simplifier $D_0, D_1, \ldots$

Soit E un système de monômes unitaires homogènes en $\underline{Z}$ de degré D_2 linéairement indépendants sur $K(\underline{\theta})$ modulo l'idéal homogène de $K(\underline{\theta})[\underline{Z}]$ des polynômes qui s'annulent sur G_2 dans $\mathbf{P}_N$; on peut prendre E tel que $\operatorname{card} E \geq c_{12} D_2^{d_2}$.

Posons :

$$P(X, \underline{Y}, \underline{Z}) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\underline{\lambda}} \in E}} P_{\alpha, \underline{\beta}, \underline{\lambda}}(\underline{\theta}) X^{\alpha} Y_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot Y_{d_1}^{\beta_{d_1}} Z_0^{\lambda_0} \cdot \ldots \cdot Z_N^{\lambda_N}$$

où $P_{\alpha, \underline{\beta}, \underline{\lambda}}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

Soit $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$; $|h| \leq S$, on a :

$$F(h \cdot y) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\underline{\lambda}} \in E}} P_{\alpha, \underline{\beta}, \underline{\lambda}}(\underline{\theta}) \, (h \cdot y)^{\alpha} \prod_{\substack{1 \leq i \leq d_1 \\ 1 \leq j \leq m-1}} \Big(\exp(x_i y_j) \Big)^{\beta_i h_j} \prod_{k=0}^{N} \Big(\varphi_k(h \cdot y) \Big)^{\lambda_k} .$$

Soit j_h, $0 \leq j_h \leq N$ tel que $|\varphi_{j_h}(h \cdot y)| = \max\limits_{0 \leq i \leq N} |\varphi_i(h \cdot y)|$ et soit $\beta_h \in \mathcal{B}_h$ tel que $(u_0^{\beta_h}(\underline{\theta}), \ldots, u_N^{\beta_h}(\underline{\theta}))$ soit un système de coordonnées projectives de $\varphi_2(h \cdot y)$. On a :

$$(Q(\underline{\theta}))^{c_{13}(D_0 + D_1 \cdot S)} \left(\frac{u_{j_h}^{\beta_h}(\underline{\theta})}{\varphi_{j_h}(h \cdot y)} \right)^{D_2} F(h \cdot y) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\underline{\lambda}} \in E}} P_{\alpha, \underline{\beta}, \underline{\lambda}}(\underline{\theta}) H_{\alpha, \underline{\beta}, \underline{\lambda}, \underline{h}}(\underline{\theta})$$

où $H_{\alpha, \underline{\beta}, \underline{\lambda}, \underline{h}}$ est un polynôme à coefficients entiers sur K tel que : $t(H_{\alpha, \underline{\beta}, \underline{\lambda}, \underline{h}}) \leq c_{14}(D_0 \log S + D_1 S + D_2 S^{\rho}) \leq c_{15}\Delta$. et $\deg_{X_{t+1}} H_{\alpha, \underline{\beta}, \underline{\lambda}, \underline{h}}(\underline{X}) \leq \deg R$.

Posons :

$$H_{\underline{h}}(\underline{X}) = \sum_{\substack{|\alpha|\le D_0 \\ |\underline{\beta}|\le D_1 \\ \underline{Z}^{\underline{\lambda}}\in E}} P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{X}) H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{X})$$

et $n_i = \max\{\deg_{X_i} H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}, |\alpha| \le D_0, |\underline{\beta}| \le D_1, |\underline{\lambda}| \le D_2, |\underline{h}| \le M\}$ $(1 \le i \le t)$.

On cherche des polynômes $P_{\alpha,\beta,\lambda}$ à coefficients entiers rationnels de degré par rapport à X_i égal à n_i tels qu'on ait :
$(*)\quad H_{\underline{h}}(\underline{X}) = 0$ pour tout $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \le M$.

Le système $(*)$ est équivalent à un système linéaire à coefficients entiers sur K, le nombre d'équations de ce système est au plus $2^t \cdot \left(\prod_{i=1}^t n_i\right) \cdot \deg R \cdot M^{m-l}$; le nombre d'inconnues est supérieur ou égal à $c_{12}\left(\prod_{i=1}^t n_i\right) \cdot D_0^{d_0} D_1^{d_1} D_2^{d_2}$. Le choix des paramètres assure que $D_0^{d_0} D_1^{d_1} D_2^{d_2} > \frac{2^{t+1}}{c_{12}} \deg R \cdot [K : \mathbf{Q}] \cdot M^{m-l}$; par suite, le lemme de Thue-Siegel montre qu'il existe une solution du système $(*)$ telle que $\max\limits_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}} t(P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}) \le c_{15}\Delta$.

$2^{\text{ème}}$ pas. **Dérivation des coefficients et extrapolation.**

Les polynômes H_h pouvant s'annuler dans un voisinage de $\underline{\theta}$, nous allons les modifier afin d'obtenir les polynômes qui vérifient les conditions de la proposition principale. Pour cela, nous allons utiliser une idée de Chudnovsky, développée par G. Diaz [D].

Soient $(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t)$ dans la boule de $\mathbf{C}^t$ de centre $(\theta_1, \ldots, \theta_t)$ et de rayon $\exp(-cr(S))$ et $\underline{\tilde{\theta}} = (\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t, \tilde{\theta}_{t+1})$ l'élément de $\mathbf{C}^{t+1}$ associé (cf. § 3).

Pour $i = (i_1, \ldots, i_t) \in \mathbf{N}^t$, on note :
$|i| = i_1 + \ldots + i_t$ et D^i l'opérateur de dérivation $\frac{1}{i_1! \ldots i_t!}\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{i_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\partial}{\partial X_t}\right)^{i_t}$.

On considère l'ensemble
$I(\underline{\tilde{\theta}}) = \{i \in \mathbf{N}^t \mid \exists(\alpha, \underline{\beta}, \underline{\lambda}), |\alpha| \le D_0, |\underline{\beta}| \le D_1, |\underline{\lambda}| \le D_2$ tel que $D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}}) \ne 0\}$.

Puisque les polynômes $P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}$ $(|\alpha| \le D_0, |\underline{\beta}| \le D_1, |\underline{\lambda}| \le D_2)$ ne sont pas tous nuls et de degrés majorés par Δ, l'ensemble $I(\underline{\tilde{\theta}})$ est non vide, fini. La fonction $i = (i_1, \ldots, i_t) \to |i| = i_1 + \ldots + i_t$ atteint donc son minimum sur $I(\underline{\tilde{\theta}})$; choisissons un multi-indice $i(\underline{\tilde{\theta}})$ tel $|i(\underline{\tilde{\theta}})| = \min\limits_{i \in I(\underline{\tilde{\theta}})} |i|$.

Posons $I = \{i(\underline{\tilde{\theta}}),$ où $\underline{\tilde{\theta}} = (\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_{t+1})$ avec $\max_{1 \leq j \leq t} |\theta_j - \tilde{\theta}_j| \exp(-cr(S))\}$ et pour $i \in I$, $H_{h,i}(\underline{X}) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\lambda} \in E}} D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{X}) H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{X})$.

Lemme 4.2. *Pour tout $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \leq S$ et tout $i \in I$, on a :* $|H_{h,i}(\underline{\theta})| \leq \exp(-c_{27} r(S))$.

■ Considérons d'abord le cas où $|\underline{h}| \leq M$. Soient $i \in I$ et $\underline{\tilde{\theta}}$ tel que $i(\underline{\tilde{\theta}}) = i$; fixons-les pour toute la suite de la démonstration. On a :

$$\begin{aligned} H_{h,i}(\underline{\theta}) = & \sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\lambda} \in E}} \left(D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\theta}) - D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}}) \right) H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\theta}) \\ & + \sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\lambda} \in E}} D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}}) \left(H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\theta}) - H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\tilde{\theta}}) \right) \\ & + \sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\lambda} \in E}} D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}}) H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\tilde{\theta}}) . \end{aligned}$$

Or $i = i(\tilde{\theta})$, donc on a $(D^i H_h)(\underline{\tilde{\theta}}) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\lambda} \in E}} D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}}) H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\tilde{\theta})$, et, comme par construction $H_h \equiv 0$ pour tout $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$; $|\underline{h}| \leq M$, on en déduit

$$\sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\lambda} \in E}} D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}}) H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\tilde{\theta}}) = 0 .$$

D'autre part, comme $t(H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}) \leq c_{15}\Delta(S)$ et $t(D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}) \leq c_{16}\Delta(S)$, le lemme 2.1 entraîne :

$$\begin{aligned} |H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\theta}) - H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\tilde{\theta}})| & \leq \exp(-\frac{c}{2} r(S)) \cdot \exp(c_{17}\Delta(S) \\ & \leq \exp(-\frac{c}{3} r(S)) \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} |D^i P_{\alpha,\overline{\beta},\overline{\lambda}}(\underline{\theta}) - D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}})| & \leq \exp(-\frac{c}{2} r(S)) \cdot \exp(c_{17}\Delta(S)) \\ & \leq \exp(-\frac{c}{3} r(S)) . \end{aligned}$$

On déduit des inégalités précédentes,

$$|H_{h,i}(\underline{\theta})| \leq c_{12} D_0^{d_0} D_1^{d_1} D_2^{d} \exp\Big(-\frac{c}{3} r(S)\Big) \cdot \Big(\max_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}} |H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\theta})| + \max_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}} |D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}})| \Big)$$
$$\leq \exp\Big(-\frac{c}{3} r(S)\Big) \cdot \exp\Big(c_{18}\Delta(S)\Big) ,$$

d'où (1.4) $|H_{h,i}(\underline{\theta})| \leq \exp\Big(-\frac{c}{4} r(S)\Big)$.

Extrapolation. Nous allons extrapoler cette majoration à tout $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \leq S$. Pour cela, on considère la fonction analytique (qui dépend de i et $\underline{\tilde{\theta}}$) suivante :

$$f(z) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\lambda} \in E}} D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}})\, z^\alpha \prod_{j=1}^{d_1} \big(\exp(x_j z)\big)^{\beta_j} \prod_{k=0}^{N} \big(\varphi_k(z)\big)^{\lambda_k} .$$

On applique une formule d'extrapolation (cf. Lemme 4-5 de [R] et [D]) à la fonction f, on obtient :

(2.4) $$|f|_{R_1} \leq |f|_{R_2} \exp(-c_{19} M^m \log \frac{R_2}{R_1})$$
$$+ \exp(c_{20} M^m \log \frac{R_1}{M}) \exp(-c_{21} M^{m-1} \log \delta(M)) \sum_{|\underline{h}| \leq M} |f(h \cdot y)| .$$

(M, R_1, R_2 désignent les paramètres $M(S)$, $R_1(S)$, $R_2(S)$ définis au II. § 1) et $\delta(M)$ un minorant ≤ 1 de la distance de deux points distincts de $Y(M)$).

Or, on déduit de l'hypothèse (H) que $\log \delta(M) \geq -c_1' M \log M$, d'où l'inégalité 2.4 :

(2.4) $$|f|_{R_1} \leq |f|_{R_2} \exp(-c_{19} M^m \log \frac{R_2}{R_1})$$
$$+ \exp(c_{20} M^m \log \frac{R_1}{M}) \exp(c_{22} M^m \log M)) \sum_{|\underline{h}| \leq M} |f(h \cdot y)| .$$

Pour majorer $|f(h \cdot y)|$ pour $|\underline{h}| \leq M$, nous allons d'abord majorer $\sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\lambda} \in E}} D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}}) H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\theta})$.

On déduit du lemme 2.1 que :

$$\Big| \sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\lambda} \in E}} (D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}}) - D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\theta})) H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\theta}) \Big| \leq \exp(-\frac{c}{2} r(S)) \exp(c_{18}\Delta(S))$$
$$\leq \exp(-\frac{c}{3} r(S)) .$$

D'autre part, on a $\sum_{\substack{|\alpha|\leq D_0 \\ |\underline{\beta}|\leq D_1 \\ \underline{Z}^{\underline{\lambda}}\in E}} D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\theta}) H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\theta}) = H_{h,i}(\underline{\theta})$ et d'après (1.4), on a $|H_{h,i}(\underline{\theta})| \leq \exp\left(-\frac{c}{4} r(S)\right)$ pour tout $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \leq M$. Par conséquent, on obtient :

$$(3.4) \qquad |\sum_{\substack{|\alpha|\leq D_0 \\ |\underline{\beta}|\leq D_1 \\ \underline{Z}^{\underline{\lambda}}\in E}} D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}}) H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\theta})| \leq \exp(-\frac{c}{5} r(S))$$

Majoration de $|f(h.y)|$ pour $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \leq M$.

Soient $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$ tel que $|h| \leq S$, j_h, $0 \leq j_h \leq N$ tel que $|\varphi_{j_h}(h \cdot y)| = \max_{0\leq s\leq N} |\varphi_s(h \cdot y))|$, et $\beta_h \in \mathcal{B}_h$ tel que $\max_{\substack{\beta\in\mathcal{B}_h \\ 0\leq i\leq N}} |u_i^{\beta}(\underline{\theta})| = \max_{0\leq i\leq N} |u_i^{\beta_h}(\underline{\theta})|$ alors $(u_0^{\beta_h}(\underline{\theta}), \ldots, u_N^{\beta_h}(\underline{\theta}))$ est un système de coordonnées projectives de $\varphi_2(h\cdot y)$ d'après le lemme 2.2. Par suite, on a $|u_{j_h}^{\beta_h}(\underline{\theta})| = \max_{0\leq i\leq N} |u_i^{\beta_h}(\underline{\theta})|$.

Or, de la même façon qu'au premier pas, on a :

$$(4.4) \quad (Q(\underline{\theta}))^{c_{13}(D_0+D_1 S)} \left(\frac{u_{j_h}^{\beta_h}(\underline{\theta})}{\varphi_{j_h}(h \cdot y)}\right)^{D_2} f(h \cdot y) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq D_0 \\ |\underline{\beta}|\leq D_1 \\ \underline{Z}^{\underline{\lambda}}\in E}} D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}}) H_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda},\underline{h}}(\underline{\theta}) ,$$

De plus, par hypothèse, on a : $|u_{j_h}^{\beta_h}(\underline{\theta})| \geq \exp\left(-\frac{c}{10}\frac{r(S)}{D_2}\right)$, d'autre part $|\varphi_{j_h}(h \cdot y)| \leq \exp(c_{23} S^{\rho})$ puisque φ_{j_h} est d'ordre $\leq \rho$ et
$|Q(\underline{\theta})|^{c_{13}(D_0+D_1 S)} \geq \exp(-c_{24}\Delta(S))$.

Par suite, de l'égalité (4.4), on déduit pour tout $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \leq M$,

$$(5.4) \qquad \begin{aligned} |f(h \cdot y)| &\leq \exp(-\frac{c}{5} r(S)) \cdot \exp(\frac{c}{10} r(S)) \cdot \exp\Big(c_{24} + c_{23})\Delta(S)\Big) \\ &\leq \exp(-\frac{c}{20} r(S)) . \end{aligned}$$

Majoration de $|H_{h,i}(\underline{\theta})|$ pour $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \leq S$.

On a : $|f|_{R_2} \leq \exp(c_{25}(D_0 \log R_2 + D_1 R_2 + D_2 R_2^{\rho}))$ et on tire de des inégalités

(2.4) et (5.4)

$$\begin{aligned}|f|_{R_1} &\leq \exp\big(c_{25}(D_0 \log R_2 + D_1 R_2 + D_2 R_2^{\rho}) - c_{19} M^m \log \frac{R_2}{R_1}\big) + \\ &+ \exp(c_{20} M^m \log \frac{R_1}{M} + c_{21} M^m \log M) \cdot \exp(-\frac{c}{20} r(S)) \cdot M^m \\ &\leq \exp(-c_{26} M^m \log S) + \exp(-\frac{c}{30} r(S)) \\ &\leq \exp(-c_{27} r(S)) .\end{aligned}$$

Or pour tout $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \leq S$, on a $|h \cdot y| \leq R_1$, d'où

$$|f(h \cdot y)| \leq \exp(-c_{27} r(S)) . \tag{6.4}$$

Comme $\max_{0 \leq i \leq N} |\varphi_i(h \cdot y)| \geq \exp(-c_{28} S^{\rho})$, d'après les propriétés de la fonction thêta (cf. [Wa_1]), et comme $\max\limits_{0 \leq i \leq N} |u_i^{\beta_h}(\underline{\theta})| \leq \exp(c_{29} S^{\rho})$ et $(Q(\underline{\theta}))^{c_{13}(D_0 + D_1 S)} \leq \exp(c_{29} \Delta(S))$, les inégalités (6.4) et (4.4) entraînent :

$$\begin{aligned}|\sum_{\substack{|\alpha| \leq D_0 \\ |\underline{\beta}| \leq D_1 \\ \underline{Z}^{\underline{\lambda}} \in E}} D^i P_{\alpha, \underline{\beta}, \underline{\lambda}}(\tilde{\theta}) H_{\alpha, \underline{\beta}, \underline{\lambda}, \underline{h}}(\underline{\theta})| &\leq \exp(-c_{26} r(S)) \cdot \exp(c_{29} \Delta(S)) \\ &\leq \exp(-c_{30} r(S)) ,\end{aligned}$$

pour tout $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \leq S$.

3ème pas - Le lemme de zéros.

Lemme 4.3. *Il existe $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|h| \leq S$ tel que les polynômes $(H_{h,i})_{i \in I}$ "n'ont pas de zéros communs" dans la boule de $\mathbf{C}^t$ de centre $\underline{\theta}$ et de rayon* $\exp(-cr(S))$.

$(H_{h,i})_{i \in I}$ "n'ont pas de zéros communs" dans une boule veut dire que pour tout $(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t)$ dans cette boule,il existe $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$ et $i \in I$ tel que $H_{h,i}(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t, \tilde{\theta}_{t+1}) \neq 0$ où $\tilde{\theta}_{t+1}$ désigne le nombre complexe associé à $(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t)$ (cf. II. § 3).

■ On procède par l'absurde. Soit $(\ddot{\theta}_1, \ldots, \ddot{\theta}_t)$ dans la boule de $\mathbf{C}^t$ de centre $\underline{\theta}$ tel que $H_{h,j}(\ddot{\underline{\theta}}) = 0$, pour tout h, $|h| \leq S$ et tout $j \in I$. On a en particulier pour $i = i(\ddot{\underline{\theta}})$, $H_{h,i}(\ddot{\underline{\theta}}) = 0$ pour tout $h \in \mathbf{Z}^m$, $|h| \leq S$.

Soit $(\ddot{y}_1, \ldots, \ddot{y}_{m-t})$ l'élément de $\mathbf{C}^{m-t}$ défini à partir de $\ddot{\theta}$ (cf. II. § 3) et soit $\ddot{\gamma}_j = \varphi(\ddot{y}_j)$, $j = 1, \ldots, m-t$.
Posons $\ddot{Y} = \mathbf{Z}\ddot{y}_1 + \cdots + \mathbf{Z}\ddot{y}_{m-t}$ et $\ddot{\Gamma} = \mathbf{Z}\ddot{\gamma}_1 + \cdots + \mathbf{Z}\ddot{\gamma}_{m-t}$.

Soit $\tilde{P}$ le polynôme défini (en fonction de i et $\underline{\tilde{\theta}}$) par :

$$\tilde{P}(X,\underline{Y},\underline{Z}) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq D_0\\ |\underline{\beta}|\leq D_1\\ \underline{Z}^{\underline{\lambda}}\in E}} D^i P_{\alpha,\underline{\beta},\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\theta}}) X^\alpha \underline{Y}^{\underline{\beta}} \underline{Z}^{\underline{\lambda}}.$$

Soient $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$, $|\underline{h}| \leq S$, et j_h, $0 \leq j_h \leq N$ tels que : $\max_{0\leq i\leq N} |\varphi_i(h\cdot\tilde{y})| = |\varphi_{j_h}(h\cdot\tilde{y})|$. Soit $\beta'_h \in \mathcal{B}_h$ tel que $(u_0^{\beta'_h}(\underline{\tilde{\theta}}),\ldots,u_N^{\beta'_h}(\tilde{\theta}))$ soit un système de coordonnées projectives de $\varphi_2(h\cdot\tilde{y})$. On a :

$$(Q(\underline{\tilde{\theta}}))^{c_{13}(D_0+D_1S)}\Big(\frac{u_{j_h}^{\beta'_h}(\underline{\tilde{\theta}})}{\varphi_{j_h}(h\cdot y)}\Big)^{D_2}\tilde{P}\circ\chi\circ\varphi(h\cdot\tilde{y}) = H_{h,i}(\tilde{\theta}) = 0$$

donc $\tilde{P}\circ\chi$ s'annule sur $\tilde{\Gamma}(S)$.

Le lemme zéro de P. Philippon (cf. $[P_3]$) montre qu'il existe un sous-groupe algébrique connexe G' distinct de G défini par des équations de multidegrés $\leq (D_0, D_1, D_2)$ tel que

$$\mathrm{card}\Big(\frac{\tilde{\Gamma}(S)+G'}{G'}\Big) \leq c_{31} D_0^{r_0} D_1^{r_1} D_2^{r_2},\ \text{où } c_{31} = 2^{d^2}\deg\chi(G_2)$$

où r_0 est la dimension du plus grand facteur unipotent de G/G', r_1 est la dimension du plus grand facteur multiplicatif de G/G' et $r_2 = \dim G/G' - (r_0 + r_1)$.

Compte tenu du choix des paramètres D_0, D_1 et D_2 (en fonction de S), on en déduit que :

$$\mathrm{card}\Big(\frac{\tilde{\Gamma}(S)+G'}{G'}\Big) \leq c_{31} D_2^{r_0+r_1+r_2}\cdot S^{\rho r_0+(\rho-1)r_1}\cdot(\log S)^{-r_0}.$$

Or, $\mathrm{card}(\frac{\tilde{\Gamma}(S)+G'}{G'}) = \mathrm{card}(\frac{\Gamma(S)+G'}{G'})$ car l'application qui associe à la classe d'un élément $\varphi(h\cdot y)\ (\mathrm{mod}\, G')$, la classe $\varphi(h\cdot\tilde{y})\ (\mathrm{mod}\, G')$ est surjective par construction de $\tilde{\Gamma}(S)$ et elle est injective grâce à l'hypothèse (H) ; en effet, supposons que $\varphi(h.\tilde{y}) \equiv \varphi(h'\cdot\tilde{y})\ (\mathrm{mod}\ G')$ avec $|\underline{h}| \leq S$ et $|\underline{h}'| \leq S$, on a alors $\varphi\big((h-h')\cdot\tilde{y}\big) \in G'$. Or, on a :

$$\begin{aligned}|(h-h')\cdot\tilde{y}-(h-h')\cdot y| &\leq 2mS \max_{1\leq j\leq m-l}|\tilde{y}_j - y_j|\\ &\leq 2mS\exp(-\frac{c}{2}r(S))\\ &\leq \exp(-\frac{c}{4}r(S))\end{aligned}$$

On déduit de l'hypothèse (H) et de l'inégalité $r(S) > S\log S$, que $\varphi\big((h-h')\cdot y\big) \in G'$ et par suite $\varphi(h\cdot y) \equiv \varphi(h'\cdot y)\ (\mathrm{mod}\, G')$.

Comme $\mathrm{card}(\frac{\Gamma(S)+G'}{G'}) \geq S^{\mathrm{rang}_{\mathbf{Z}}\, \Gamma/\Gamma\cap G'}$; on en déduit que : $S^{\eta^*} \leq c_{31} D_2$. Or $D_2 = \frac{1}{c_0} S^{\eta^*}$, avec $c_0 > c_{31}$, d'où la contradiction qui entraîne le lemme 3.4. ∎

<u>Démonstration de la proposition</u> (dans le 2[ième] cas) .

Pour $\underline{h} \in \mathbf{Z}^m$; $|\underline{h}| \leq S$ et $i \in I$, on pose :

$$H^*_{h,i}(\theta_1, \ldots, \theta_t) = r(H_{h,i}(\theta_1, \ldots, \theta_t, X), R(\theta_1, \ldots, \theta_t, X)) \, .$$

En utilisant le lemme 2.3 et le lemme 4.2, on obtient

$$|H^*_{h,i}(\theta_1, \ldots, \theta_t)| \leq \exp(-c_{32} r(S))$$

et
$$t(H^*_{h,i}) \leq c_{33} \Delta(S) \, .$$

On déduit des lemmes 2.3 et 4.3 que la famille $\{(H^*_{h,i}),\ |h| \leq S,\ i \in I\}$ n'a pas de zéro dans la boule de $\mathbf{C}^t$ de centre $\underline{\theta}$ et de rayon $\exp(-cr(S))$, si on note $\{P_{S,1}, \ldots, P_{S,m(S)}\}$, la famille de polynômes constituée par $(\{H^*_{h,i}),\ |h| \leq S, i \in I\}$ pour $S \geq S_0$ et $\mathcal{J}_S = (P_{S,j})_{1 \leq j \leq m(S)}$, l'idéal $\mathcal{J}_S$ vérifie les conditions de la proposition principale.

III - DEMONSTRATION DU THEOREME ET DEDUCTION DES COROLLAIRES.

§ 1 - Démonstration du théorème.

On peut supposer sans restreindre la généralité que $\theta_j \in K[\underline{\omega}]$, pour tout j, $1 \leq j \leq t$.

Posons $\theta_j = F_j(\underline{\omega})$, où $F_j \in K[\underline{X}]$ $(1 \leq j \leq t)$ et $G_{S,i}(\underline{Y}) = P_{S,i}(F_1(\underline{Y}), \ldots, F_t(\underline{Y}))$, $(1 \leq i \leq m(S))$.

On a, évidemment,

$$|G_{S,i}(\underline{\omega})| = |P_{S,i}(\underline{\theta})| \leq \exp(-c_{32}r(S))$$

et

$$t(G_{S,i}) \leq c_{34}t(P_{S,i}) \leq c_{35}\Delta(S)\ .$$

D'autre part, on déduit du lemme 2.1 que :

$$|\underline{\tilde{\omega}} - \underline{\omega}| \leq \exp(-2cr(S)) \Rightarrow |F_j(\underline{\omega}) - F_j(\underline{\tilde{\omega}})| \leq \exp(-cr(S)) \quad \text{pour tout} \quad j,\ 1 \leq j \leq t\ .$$

Si on pose $\underline{\tilde{\theta}} = F_j(\underline{\tilde{\omega}})$, on a $|\underline{\theta} - \underline{\tilde{\theta}}| \leq \exp(-cr(S))$ et la proposition principale montre $\max\limits_{1 \leq i \leq m(S)} |P_{S,i}(\tilde{\theta})|) \neq 0$ ou encore $\max_{1 \leq i \leq m(S)} |G_{S,i}(\underline{\tilde{\omega}}| \neq 0$.

On en déduit, alors, que :

1) La famille $(G_{S,i})_{1 \leq i \leq m(S)}$ n'a pas de zéros dans la boule de centre $\underline{\omega}$ et de rayon $\exp(-2cr(S))$, pour tout $S \geq S_0$.

2) $\max\limits_{1 \leq i \leq m(S)} |G_{S,i}(\underline{\omega})| \leq \exp(-c_{32}r(S))$.

3) $\max\limits_{1 \leq i \leq m(S)} t(G_{S,i}) \leq c_{35}\Delta(S)$.

On pose $S' = \Delta(S)$, on a : $r(S) \gg\ll (S')^{\kappa}(\log S')^{1-\kappa\frac{d_0}{d}}$.

Si $\kappa = k+1$, $\underline{\omega}$ vérifie alors les hypothèses du critère d'indépendance algébrique du ch.II, avec $u(S') = (\log S')^{1-\kappa\frac{d_0}{d}}$, la fonction inverse v de u est définie par $v(T) = \exp\big((T)^{\frac{d}{d-\kappa d_0}}\big)$. On déduit du critère d'indépendance algébrique qu'il existe $c > 0$ tel que $\psi_1(T) = \exp(cT^{\frac{\kappa d}{d-\kappa d_0}})$ soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k de $\underline{\omega}$.

Si $\kappa > k+1$, $\underline{\omega}$ vérifie les hypothèses du critère d'indépendance algébrique avec $u(S') = (S')^{\kappa-k-1}(\log S')^{1-\kappa\frac{d_0}{d}}$; dans ce cas, on a : $v(T) \ll \Big(\frac{T}{(\log T)^{1-\kappa\frac{d_0}{d}}}\Big)^{\frac{1}{\kappa-k-1}}$.

On déduit alors du critère qu'il existe $c > 0$ tel que :
$\psi_2(T) = c\left[T/(\log T)^{\frac{d-\kappa d_0}{\kappa d}}\right]^{\frac{\kappa(k+1)}{\kappa-k-1}}$) soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k de $\underline{\omega}$.

Ainsi, le critère entraîne le théorème.

§ 2 - Déduction des corollaires.

Pour la déduction des corollaires, on utilisera la remarque suivante :

Remarque : Soient $\omega_1, \ldots, \omega_s$ des coordonnées de $\underline{\omega}$ tels que $K(\underline{\omega})$ soit algébrique sur $K(\omega_1, \ldots, \omega_s)$. On peut supposer par conséquent que $\theta_j \in K[\omega_1, \ldots, \omega_s]$ pour tout j, $1 \leq j \leq t$, et, par suite, on déduit de la démonstration précédente que $\underline{\omega}$ et $(\omega_1, \ldots, \omega_s$ ont la même mesure d'approximation en dimension k.

Cas exponentiel.

Démonstration du corollaire 2.- On prend $G = G_m^n(\mathbf{C})$, $K = \mathbf{Q}$, $\underline{\omega} = (\exp(x_i y_j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$, $Y = \mathbf{Z}y_1 + \cdots + \mathbf{Z}y_m$

et
$$\begin{aligned} \varphi : &\mathbf{C} \to G_m^n(\mathbf{C}) \\ &z \to (\exp(x_1 z), \ldots, \exp(x_n z)) . \end{aligned}$$

On a $\eta^* = \frac{m}{n}$ et $\kappa = \frac{m}{\frac{m}{n}+1} = \frac{mn}{m+n}$. L'hypothèse (H) est bien vérifiée dans ce cas puisque l'hypothèse (H_1) est vérifiée (cf. $[Wa_2]$).

Démonstration des corollaires 3 et 4.- On prend $x_i = \pi^i$, $1 \leq i \leq d'$, $y_j = \pi^{j-1}$, $1 \leq j \leq d'$.

On a $\kappa = \frac{d'}{2}$.

Si $d' > 2$, on a $\kappa > 1$, on applique le corollaire 2 avec $k = 0$, on obtient le corollaire 3.

Si $d' = 4$ (resp. $d' > 4$), on a $\kappa = 2$ (resp. $\kappa > 2$), on applique le corollaire 2, avec $k = 1$, on obtient le corollaire 4.

Démonstration du corollaire 5.- On prend $G = G_a(\mathbf{C}) \times G_m^n(\mathbf{C})$, $K = \mathbf{Q}$, $\underline{\omega} = (y_j, \exp(x_i y_j), (1 \leq i \leq n), (1 \leq j \leq m))$, $Y = \mathbf{Z}y_1 + \ldots + \mathbf{Z}y_m$

et
$$\begin{aligned} \varphi : &\mathbf{C} \to G \\ &z \to (z, \exp(x_1 z), \ldots, \exp(x_n z)) . \end{aligned}$$

On a, dans ce cas, $\eta^* = \frac{m-1}{n+1}$ et $\kappa = \frac{m-1+1}{\frac{m-1}{n+1}+1} = \frac{m(n+1)}{m+n}$.

Démonstration du corollaire 6.- On déduit ce résultat du corollaire 5. (H_1') est vérifiée dans ce cas grâce à l'inégalité de Liouville. On prend $x_i = \beta^{i-1}(i = 1, \ldots, \delta)$, $y_j = \beta^{j-1} \log \gamma \; (j = 1, \ldots, \delta)$, $\underline{\omega} = (\gamma, \gamma^\beta, \ldots, \gamma^{\beta^{(\delta-1)^2}})$ et $\underline{\omega}' = (\gamma^\beta, \ldots, \gamma^{\beta^{\delta-1}})$. On obtient par le corollaire 5 une mesure d'approximation simultanée ψ en dimension k de $\underline{\omega}$; d'après la remarque précédente, $\underline{\omega}$ et $\underline{\omega}'$ ont la même mesure d'approximation simultanée ψ en dimension k.

Démonstration des corollaires 7 et 8.- Ce sont les cas particuliers $k = 0$ et $k = 1$ du corollaire 6.

Cas elliptique.

Soit $E(\mathbf{C})$ la courbe elliptique associée à $\mathcal{P}$ et Ω le réseau des périodes. On prend $G = E^n(\mathbf{C})$, $K = \mathbf{Q}(g_2, g_3)$ où g_2 et g_3 sont les invariants (algébriques) de $\mathcal{P}$.

L'application exponentielle de E est donnée par

$$\mathbf{C} \overset{\exp_E}{\to} E(\mathbf{C}) \subset \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$$

$$z \to \begin{cases} \big(1, \mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z)\big) \text{ si } z \notin \Omega \\ (0,0,1) \text{ si } z \in \Omega \end{cases}$$

Démonstration du corollaire 9.- On prend le sous-groupe à un paramètre suivant :

$$\varphi : \mathbf{C} \to G$$
$$z \to (\exp_E(x_1 z), \ldots, \exp_E(x_n z)) .$$

Si $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$, on prend
$Y = \mathbf{Z}y_1 + \ldots + \mathbf{Z}y_m$,
$\underline{\omega} = \Big(1, \mathcal{P}(x_i y_j), \mathcal{P}'(x_i y_j)\Big), (i = 1, \ldots, n \; ; \; j = 1, \ldots, m)),$
$\underline{\omega}' = \Big(\mathcal{P}(x_i y_j), (i = 1, \ldots, n \; ; \; j = 1, \ldots, m)\Big).$
On a $\eta^* = \frac{m}{n}$ et $\kappa = \frac{mn}{m+2n}$.

Si $\mathbf{F} \neq \mathbf{Q}$; $\mathbf{F} = \mathbf{Q}(\tau)$.

On prend $Y = \mathbf{Z}y_1 + \ldots + \mathbf{Z}y_m + \mathbf{Z}\tau y_1 + \ldots + \mathbf{Z}\tau y_m$;
$\underline{\omega} = \Big(1, \mathcal{P}(x_i y_j), \mathcal{P}'(x_i y_j), 1, \mathcal{P}(x_i y_j \tau), \mathcal{P}'(x_i y_j \tau)\Big)$

$\underline{\omega}' = \left(\mathcal{P}(x_i y_j)\right)$.

On a, dans ce cas : $\eta^* = \frac{2m}{n}$ et $\kappa = \frac{2m}{\frac{2m}{n}+2} = \frac{mn}{m+n}$. L'hypothèse (H) est bien vérifiée dans ce cas puisque l'hypothèse (H_1) est vérifiée (cf. $[Wa_2]$).

Sous les hypothèses du corollaire 9, on déduit du théorème une mesure d'approximation simultanée *psi* en dimension k de $\underline{\omega}$; et, par suite, d'après la remarque précédente, ψ est aussi une mesure d'approximation simultanée en dimension k de $\underline{\omega}'$.

Démonstration des corollaires 10 et 11.- On déduit ces corollaires du corollaire 9. On prend $x_i = e^i$, $1 \le i \le d'$, $y_j = e^{j-1}$, $1 \le j \le d$. On a $\kappa = \frac{d'[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}{1+[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$.

Si $d' > 1 + \frac{2}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$, on a $\kappa > 1$, on applique le corollaire 9 avec $k = 0$, on obtient le corollaire 10.

Si $d' = 2 + \frac{4}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$, (resp. $d' > 2 + \frac{4}{[\mathbf{F}:\mathbf{Q}]}$, on $\kappa = 2$ (resp. $\kappa > 2$, on applique le corollaire 9 avec $k = 1$, on obtient le corollaire 11.

Démonstration du corollaire 12.- On prend $G = G_a(\mathbf{C}) \times E^n(\mathbf{C})$, $K = \mathbf{Q}(g_2, g_3)$.

$$\varphi : \mathbf{C} \to G$$
$$z \to \left(z, \exp_E(x_1 z), \ldots, \exp(x_n(z)\right)$$

Si $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$, on prend
$Y = \mathbf{Z}y_1 + \ldots + \mathbf{Z}y_m$,
$\underline{\omega} = (y_j, 1, \mathcal{P}(x_i y_j), \mathcal{P}'(x_i y_j))$
$\underline{\omega}' = \left(y_j, \mathcal{P}(x_i y_j)\right)$.

On a : $\eta^* = \frac{m-2}{n+1}$ et $\kappa = \frac{m(n+1)}{m+2n}$.

Si $\mathbf{F} \neq \mathbf{Q}$; $\mathbf{F} = \mathbf{Q}(\tau)$.
On prend $Y = \mathbf{Z}y_1 + \ldots + \mathbf{Z}y_m + \mathbf{Z}\tau y_1 + \ldots + \mathbf{Z}\tau y_m$
$\underline{\omega} = (y_j, 1, \mathcal{P}(x_i y_j),\ \mathcal{P}'(x_i y_j), 1, \mathcal{P}(\tau x_i y_j), \mathcal{P}'(\tau x_i y_j))$
$\underline{\omega} = (y_j, \mathcal{P}(x_i y_j))$.

On a, dans ce cas : $\eta^* = \frac{2m-2}{n+1}$ et $\kappa = \frac{2m(n+1)}{2m+2n} = \frac{m(n+1)}{m+n}$.

Démonstration du corollaire 13.- On le déduit du corollaire 12, en prenant :

$$x_i = \beta^{i-1}\ (i = 1, \ldots, \delta),\ y_j = \beta^{j-1} \cdot u\ (j = 1, \ldots, \delta) .$$

On pose :

$\underline{\omega} = (\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(\beta u), \dots \mathcal{P}(\beta^{(\delta-1)^2} u)$
$\underline{\omega}' = (\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(\beta u), \dots \mathcal{P}(\beta^{(\delta-1)} u))$.

On obtient une mesure d'approximation simultanée en dimension k de $\underline{\omega}$, par suite, $\underline{\omega}'$.

Si $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$, $\kappa = \frac{\delta(\delta+1)}{\delta+2\delta} = \frac{\delta+1}{3}$.

Si $\mathbf{F} \neq \mathbf{Q}$, $\kappa = \frac{\delta(\delta+1)}{\delta+2\delta} = \frac{\delta+1}{2}$.

Démonstration du corollaire 14.- C'est l'analogue qualitatif du corollaire 13.

Démonstration des corollaires 15 et 16.- Ce sont les cas particuliers $k = 0$ et $k = 1$ du corollaire 13.

BIBLIOGRAPHIE

[A] M. Ably, Mesure d'approximation simultanée, *(à paraître aux Annales de la Faculté de Toulouse).*

[Be] D. Bertrand, Problèmes locaux, *Appendice 1 de* [Wa_4].

[Br_1] D. Brownawell, On the development of Gel'fond's method, in *'Proc. Number theory Carbondale'", Lecture Notes in Math. 751, Springer-Verlag (1979), 16-44.*

[Br_2] D. Brownawell, Large transcendence degree revisited I : Exponential and non-CM cases, *Lectures Notes in Mathematics 1290, Springer-Verlag (1987), 149-173.*

[$Br-Tu$] D. Brownawell and R. Tubbs, Large Transcendance degree revisited II the CM case. *Lectures Notes in Mathematics, 1290, Springer-Verlag (1987), 175-188.*

[C] G.V. Chudnovsky, Contributions to the theory of transcendental numbers Mathematical surveys and Monographs, *Number 19.*

[D] G. Diaz, Grands degrés de transcendance pour des familles d'exponentielles, dans *"Séminaire d'arithmétique, Saint-Etienne, 1986-1987".*

[J] E.M. Jabbouri, Mesures d'indépendance algébrique sur les groupes algébriques commutatifs. *manuscrit*

[$M-W$] D. Masser, G. Wüstholz, Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions, *Inv. Math. 72 (1983), 407-464.*

[N] Y.V. Nesterenko, Measures of algebraic independance of numbers and functions, *Journées arithmétiques de Besançon (1985), Astérisque 147-148 (1987), p. 141-149.*

[P_1] P. Philippon, Critères pour l'indépendance algébrique, *Publications mathématiques de l'I.H.E.S. n° 64 (1986), 5-52.*

[P_2] P. Philippon, Sur les mesures d'indépendance algébrique, *"Séminaire de théorie de nombres, Paris, 1983-84", éd. C. Goldstein, Birkhaüsser Progess in Math. 59 (1985).*

[P_3] P. Philippon, Un lemme de zéros pour les groupes produits, dans *"Problèmes diophantiens 1984-85", Publ. Math. Univ. P. et M. Curie, volume 73, (1985), n° 6.*

[P_4] P. Philippon, Sous-groupes à n-paramètres et indépendance algébrique. Approximations diophantiennes et nombres transcendants, *Luminy, 1982). Birkhäuser, Progress in Math., 31 (1983) 221-234.*

[R] E. Reyssat, Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques, *Bull. S.M.F. 108 (1), 1980, 47-79.*

[Sc] Th. Schneider, Einführung in die transzendenten Zahlen, *Springer Verlag, 1957, (Grund der Math. Wiss, 81) ; trad. franç., 1959, Gauthier-Villars.*

[Se] J.P. Serre, Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs, *Appendice II de* [Wa_4].

[Wa_1] M. Waldschmidt, Sous-groupes analytiques de groupes algébriques, *Ann. of Math. 117 (1983), 627-657.*

[Wa_2] M. Waldschmidt, Groupes algébriques et grands degrés de transcendance, *Acta Math. 156 (1986), 253-302.*

[Wa_3] M. Waldschmidt, Nombres transcendants, *Lecture Notes in Mathematic 402, Springer-Verlag (1974).*

[Wa_4] M. Waldschmidt, Nombres transcendants et groupes algébriques, *Astérisque, Soc. Math. France 69-70 (1979).*

Résumé

Cette thèse se compose de deux parties; dans la première partie, nous démontrons une version quantitative du critère multi-dimensionnel d'indépendance algébrique démontré par P. Philippon, à l'aide des techniques de l'élimination projective. Cela nous permet ensuite d'obtenir des résultats quantitatifs d'indépendance algébrique, plus précisément des mesures d'approximation simultanées en dimension ≥ 0 de certains nombres tels que des valeurs de la fonction exponentielle.

Le but de la deuxième partie est d'étendre ces résultats quantitatifs à des valeurs liées à l'application exponentielle d'un groupe algébrique commutatif défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

En particulier, quand le groupe est de la forme E^d ou $\mathbb{G}_a \times E^d$ où $\mathbb{G}_a$ est le groupe additif et E est une courbe elliptique de Weierstrass d'invariants algébriques, nous obtenons des résultats quantitatifs d'indépendance algébique de valeurs de la fonction elliptique associée à E et nous améliorons les résultats qualitatifs connus jusqu'à présent.

Mots clés : Indépendance algébrique, Mesure d'approximation simultanée, Groupe algébrique.