

Numéro d'ordre 538

50376
1990
114

68837

50376
1990
114

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences des Matériaux

par

Anne-Christine HLADKY-HENNION

Ingénieur ISEN

**APPLICATION DE LA METHODE DES
ELEMENTS FINIS A LA MODELISATION
DE STRUCTURES PERIODIQUES
UTILISEES EN ACOUSTIQUE**

Soutenue le 7 Juin 1990 devant la commission d'examen:



Président	Monsieur B. ESCAIG
Rapporteurs	Monsieur C. BRUNEEL Monsieur B. POIREE
Examineurs	Monsieur C. AUDOLY Monsieur J.-N. DECARPIGNY Monsieur M. LAGIER Monsieur R. P. RADLINSKI Monsieur O. B. WILSON

A mes parents,

A Witold,

A mes frères et soeur,

A ma famille et à tous mes amis.

Cette thèse a été préparée dans le Laboratoire
d'Acoustique de l'ISEN
(Institut Supérieur d'Electronique du Nord).

*Le code éléments finis ATILA qui a permis cette étude
a été conçu pour le GERDSM
(Groupe d'Etude et de Recherche en Détection Sous Marine).
Son développement a été financé par la DCAN
(Direction des Constructions et Armes Navales).*

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur B. ESCAIG qui a accepté la présidence de ce jury.

Je remercie Monsieur le Professeur C. BRUNEEL et Monsieur B. POIREE d'avoir accepté le rôle de rapporteurs et d'avoir jugé ce travail dans une version provisoire.

Monsieur C. AUDOLY, ingénieur au GERDSM, a suivi de près ce travail et a mis à notre disposition les outils nécessaires à la validation de nos résultats. Qu'il en soit très sincèrement remercié.

J'exprime ma gratitude à Monsieur M. LAGIER pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour sa participation au jury.

I am pleased to thank R.P. RADLINSKI for his participation in my jury. His suggestions on this work were interesting and judicious and his competence on compliant tubes is from now on well-known in Lille. I am grateful to him.

I would like to thank Professor O.B. WILSON for the interest he devoted to my activities. I am very glad him to take part in my jury.

J'exprime mon très sincère attachement à Monsieur J.-N. DECARPIGNY, à qui je dois ma formation en Acoustique. Sa compétence, son enthousiasme et sa confiance ont largement contribué à la réalisation de ce travail. Je l'en remercie très chaleureusement.

Je remercie l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord qui m'a permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions.

J'assure l'ensemble des membres du laboratoire de ma reconnaissance pour leur aide efficace, et plus spécialement R. BOSSUT pour ses conseils judicieux en informatique, B. DUBUS, B. HAMONIC et A. LAVIE pour leur disponibilité et leur bonne humeur que j'ai particulièrement appréciées.

Enfin, je tiens à remercier vivement mon mari et mes amis qui m'ont été d'un précieux concours lors de la réalisation de ce document.

SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I : DESCRIPTION DES METHODES D'ANALYSE DE LA DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES RESEAUX PLANS.....	8
I.1 Présentation générale.....	9
I.2 La méthode des domaines partiels.....	11
I.3 La méthode de diffusion multiple.....	13
I.4 La méthode des équations intégrales.....	16
I.5 Conclusion.....	17
CHAPITRE II : FORMULATION THEORIQUE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE A LA MODELISATION DE STRUCTURES PERIODIQUES A UNE DIMENSION.....	19
II.1 Introduction au modèle mathématique général d'un réseau périodique à une dimension.....	20
II.1.1 Description du modèle.....	20
II.1.2 Expressions de la pression dans les milieux I et III.....	20

II.1.3 Expressions de la dérivée normale du champ de pression dans les milieux I et III.....	24
II.2 Rappels relatifs à la méthode des éléments finis.....	25
II.2.1 Les équations du problème.....	25
II.2.2 La formulation variationnelle.....	28
II.2.3 Discrétisation : utilisation de la méthode des éléments finis.....	29
II.2.4 Description du code éléments finis ATILA.....	35
II.2.5 Description de la bibliothèque ATILA.....	37
II.2.6 La prise en compte des pertes.....	38
II.2.7 Le stockage par colonnes actives par blocs.....	40
II.3 Application des conditions de périodicité au modèle éléments finis.....	41
II.4 Application des conditions de continuité pour la pression et sa dérivée normale au modèle éléments finis.....	47
II.5 Résolution du système.....	51
II.5.1 Calcul des coefficients de réflexion et de transmission...	51
II.5.2 Critère de convergence et influence des ondes évanescentes.....	53
II.5.3 Analyse des phénomènes d'interférence dans les champs de pression transmis et réfléchi.....	54
II.5.4 Cas particulier: une seule surface de la structure diffractante est en contact avec le fluide.....	56
II.6 Conclusion.....	57

CHAPITRE III : MODELISATION A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DE STRUCTURES PERIODIQUES A UNE DIMENSION: VALIDATION ET RESULTATS.....	58
III.1 Validation du modèle.....	60
III.1.1 Diffusion acoustique par une plaque élastique.....	60
III.1.1.a Modèle analytique.....	60
III.1.1.b Application à la diffusion par une plaque élastique en PVC.....	63
III.1.1.c Mise en évidence des ondes de LAMB.....	63
III.1.2 Influence du choix de la maille élémentaire.....	66
III.1.3 Diffusion acoustique par un plan élastique.....	69
III.1.3.a Modèle analytique.....	69
III.1.3.b Cas d'un dioptre eau-aluminium.....	71
III.2 Etude de réseaux de cylindres circulaires.....	73
III.2.1 Cylindres circulaires rigides ou métalliques.....	74
III.2.2 Cylindres circulaires en plastique (PVC).....	74
III.3 Etude de réseaux de tubes elliptiques.....	78
III.3.1 Analyse modale d'un tube.....	79
III.3.2 Calcul du coefficient de transmission du réseau lorsque la direction de l'onde incidente est parallèle au grand axe des tubes.....	81
III.3.3 Calcul du coefficient de transmission du réseau lorsque la direction de l'onde incidente est parallèle au petit axe des tubes.....	85

III.4 Etude de réseaux de tubes compliants.....	88
III.4.1 Etude de réseaux de tubes compliants monocouches.....	89
III.4.1.a Premier cas: $\beta = 0^\circ$ et l'angle d'incidence vaut 0° ou 30°	89
III.4.1.b Second cas: $\beta = 0^\circ, 90^\circ$ et 45° et l'incidence est normale.....	92
III.4.1.c Etude du champ proche.....	95
III.4.1.d Description des phénomènes d'interférence dans le champ de pression transmis.....	96
III.4.2 Etude de réseaux de tubes compliants multicouches.....	97
III.4.3 Etude de réseaux de tubes compliants enrobés d'un matériau viscoélastique.....	100
III.4.3.a Réseaux non enrobés d'un matériau viscoélastique.....	101
III.4.3.b Réseaux enrobés d'un matériau viscoélastique.....	105
III.5 Conclusion.....	109
 CHAPITRE IV : FORMULATION THEORIQUE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE A LA MODELISATION DE STRUCTURES PERIODIQUES A DEUX DIMENSIONS.....	110
IV.1 Introduction au modèle mathématique général d'un réseau périodique à deux dimensions.....	111
IV.1.1 Description du modèle.....	111
IV.1.2 Expressions du champ de pression dans les milieux I et III.....	112

IV.1.3 Expressions de la dérivée normale du champ de pression dans les milieux I et III.....	115
IV.2 Application des conditions de périodicité au modèle éléments finis.....	116
IV.3 Application des conditions de continuité pour la pression et sa dérivée normale au modèle éléments finis.....	120
IV.3.1 Formalisme général.....	120
IV.3.2 Fonctions d'interpolation et intégration.....	123
IV.4 Résolution du système.....	126
IV.5 Conclusion.....	128
 CHAPITRE V : MODELISATION A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DE STRUCTURES PERIODIQUES A DEUX DIMENSIONS: VALIDATION ET RESULTATS.....	129
V.1 Validation du modèle.....	130
V.1.1 Influence du nombre de points de Gauss.....	130
V.1.2 Diffusion acoustique par une plaque élastique.....	133
V.1.3 Cylindres circulaires en plastique (PVC).....	134
V.2 Panneaux de panneaux de type Alberich.....	137
V.2.1 Analyse modale du réseau en polyuréthane.....	138
V.2.2 Calcul du coefficient de transmission du panneau en polyuréthane.....	139
V.2.3 Analyse modale du réseau en résine silicone.....	144

V.2.4 Calcul du coefficient de transmission du panneau en résine silicone.....	146
V.3 Conclusion.....	147
CONCLUSION.....	148
REFERENCES.....	150
ANNEXES.....	159
ANNEXE 1: Formulation utilisée pour construire les éléments du code ATILA.....	159
ANNEXE 2: Algorithme de résolution adapté au stockage par colonnes actives.....	164
ANNEXE 3: Détermination des coefficients c_n en fonction des valeurs nodales des pressions.....	166
ANNEXE 4: Analyse simple de l'effet de la prise en compte des pertes sur le champ de déplacement.....	169
ANNEXE 5: Caractéristiques du matériau d'enrobage des cylindres circulaires: UREFLEX TZE 535.....	171
ANNEXE 6: Caractéristiques du matériau du panneau de type Alberich: polyuréthane UR 267.....	174
ANNEXE 7: Caractéristiques du matériau du panneau de type Alberich: résine silicone RTV 261.....	177

NOTATIONS

Seules les notations qui se répètent dans différentes sections sont reportées ci-après.

a : demi grand axe d'un tube compliant de section rectangulaire,

$\{A_n^+\}$: matrice colonne reliant le coefficient d'ordre n du développement en série de Fourier de la pression aux valeurs nodales (SP1D),

$\{A_{nm}^+\}$: matrice colonne reliant le coefficient d'ordre (n,m) du développement en série de Fourier de la pression aux valeurs nodales (SP2D),

$[A^+]$: matrice contenant les colonnes $\{A_n^+\}$ (SP1D) ou les colonnes $\{A_{nm}^+\}$ (SP2D),

b : demi petit axe d'un tube compliant de section rectangulaire,

$[B^e]$: matrice formée par les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées d'espace,

B_p^e : dérivées des polynômes d'interpolation par rapport aux coordonnées d'espace, associées à l'élément fluide,

c : vitesse de propagation du son dans le fluide,

c_1 : vitesse de propagation des ondes longitudinales dans le solide,

c_n : coefficient d'ordre n dans le développement en série de Fourier (SP1D),

c_{nm} : coefficient d'ordre (n,m) dans le développement en série de Fourier (SP2D),

c_t : vitesse de propagation des ondes transversales dans le solide,

$[c]$ ou c_{ijkl} : tenseur des constantes de rigidité, condensé ou non,

C1, C2, C3, C4: coins délimitant la maille élémentaire tridimensionnelle entre deux secteurs jointifs (SP2D),

\underline{C} : vecteur contenant les termes c_n (SP1D) ou les termes c_{nm} (SP2D),

d : demi-pas du réseau (SP1D),

d_1 , d_2 : demi-pas du réseau, respectivement dans la direction x et dans la direction y (SP2D),

[D] : matrice reliant contraintes et déformations,

[D⁺], [D⁻]: matrices diagonales exprimant les conditions de raccordement du champ de pression aux interfaces entre les zones modélisées par éléments finis et par ondes planes,

E : module d'Young ou d'élasticité,

E', E'' : parties réelle et imaginaire du module d'Young,

f : fréquence d'excitation,

\underline{f} : densité superficielle de force,

\underline{F} : vecteur des forces nodales appliquées,

\underline{F}_ℓ : vecteur des forces nodales appliquées sur le secteur ℓ (SP1D),

$\underline{F}_{\ell,m}$: vecteur des forces nodales appliquées sur le secteur (ℓ,m) (SP2D),

F_1^{V1} , F_1^{V2} : force appliquée sur le degré de liberté numéro i des lignes V1 ou V2 du premier secteur (SP1D),

h : épaisseur des parois des tubes compliants,

[H] : matrice de compressibilité du domaine fluide dans la formulation éléments finis,

In : domaine intérieur d'une cellule élémentaire élastique, par opposition aux frontières avec les secteurs jointifs,

k : module du vecteur d'onde \underline{k} ,

k_n : nombre d'onde d'ordre n (SP1D),

$k_{n,m}$: nombre d'onde d'ordre (n,m) (SP2D),

\underline{k} : vecteur d'onde,

K : compressibilité du fluide,

$[K]$: matrice de rigidité mécanique dans la formulation éléments finis,

$[K_\ell]$: matrice de rigidité mécanique du secteur numéro ℓ (SP1D),

$[K_{\ell,m}]$: matrice de rigidité mécanique du secteur numéro (ℓ,m) (SP2D),

L : quantité variationnelle,

L_{e1}, L_{f1}, L_{co} : quantités variationnelles associées aux parties élastique, fluide et de couplage de la quantité L ,

$[L]$: matrice de couplage à l'interface fluide-solide dans la formulation éléments finis,

M : paramètre déterminant le nombre de termes à considérer dans le développement en série de Fourier (SP1D),

M_x, M_y : paramètres déterminant le nombre de termes à considérer dans le développement en série de Fourier, dans les directions x et y (SP2D),

$[M]$: matrice de masse cohérente du domaine solide dans la formulation éléments finis,

$[M_\ell]$: matrice de masse cohérente du domaine solide associée au secteur ℓ (SP1D),

$[M_{\ell,m}]$: matrice de masse cohérente du domaine solide associée au secteur (ℓ,m) (SP2D),

$[M_1]$: matrice de masse du domaine fluide dans la formulation éléments finis,

\underline{n} : vecteur unitaire normal à la frontière du domaine considéré,

n_1 : nombre de degrés de liberté associés aux lignes (V1) et (V2) (SP1D),

n_2 : nombre de degrés de liberté associés au domaine intérieur (In) (SP1D),

N : nombre de secteurs élémentaires (SP1D),

N_x, N_y : nombre de secteurs élémentaires dans les directions x et y (SP2D),

$[N^e]$: matrice ligne formée par les fonctions d'interpolation de l'élément,

N_p^e : polynôme d'interpolation associé à l'élément fluide,

$[N_s^e]$: matrice ligne formée par les fonctions d'interpolation de l'élément fluide situé sur la surface S_+ ,

p : pression,

p' : pression connue,

p_i : pression incidente,

p^+, p^- : champs de pression dans les régions I et III,

P_i : amplitude de la pression incidente,

P_{re} : amplitude de la pression réfléchie,

P_{tr} : amplitude de la pression transmise,

\underline{P} : vecteur des valeurs nodales de la pression,

\underline{P}_i : vecteur des valeurs nodales de la pression incidente,

$\underline{P}_+, \underline{P}_-$: vecteurs des valeurs nodales de la pression sur les surfaces S_+ et S_- ,

$q(x,y), q(x,y,z)$: fonctions périodiques intervenant dans l'expression de la pression (SP1D et SP2D),

q_n : coefficient d'ordre n intervenant dans le développement en série de Fourier de la pression (SP1D),

q_{nm} : coefficient d'ordre (n,m) intervenant dans le développement en série de Fourier de la pression (SP2D),

$[Q]$: notation condensée de la matrice $[[K]-\omega^2[M]]$,

R : coefficient de réflexion,

R_n^P, R_n^Φ : coefficients de réflexion d'ordre n intervenant dans le développement en série de Fourier de la pression et de sa dérivée normale (SP1D),

R_{nm}^P, R_{nm}^Φ : coefficients de réflexion d'ordre (n,m) intervenant dans le développement en série de Fourier de la pression et de sa dérivée normale (SP2D),

$[R_{D1,D2}]$: bloc matriciel correspondant aux sous-domaines $D1$ et $D2$ de la maille élémentaire tridimensionnelle après la condensation des degrés de liberté (SP2D),

s_{ij} : composantes du tenseur d'élasticité,

s'_{ij}, s''_{ij} : parties réelle et imaginaire de s_{ij} ,

$[s]$: tenseur des constantes élastiques, condensé ou non,

SP1D : structure périodique à une dimension,

SP2D : structure périodique à deux dimensions,

\underline{S} : tenseur condensé ou vecteur des déformations,

S_i : surface frontière entre le domaine solide et le domaine fluide,

S_p : surface du domaine fluide sur laquelle la pression est connue,

S_T : surface sur laquelle la contrainte est connue en tout point,

S_u : surface sur laquelle le déplacement est connu en tout point,

S_Φ : surface du domaine fluide sur laquelle la dérivée normale de la pression est connue,

S_∞ : surface frontière limitant le domaine fluide,

S_1, S_2, S_3, S_4 : surfaces délimitant la maille élémentaire tridimensionnelle entre deux secteurs jointifs (SP2D),

S_-, S_+ : surfaces délimitant le maillage éléments finis et définissant les frontières entre les régions I et II d'une part, II et III d'autre part,

$[S]$ ou S_{k1} : tenseur des déformations,

t : temps,

T : coefficient de transmission,

T_n^p, T_n^Φ : coefficients de transmission d'ordre n intervenant dans le développement en série de Fourier de la pression et de sa dérivée normale (SP1D),

T_{nm}^p, T_{nm}^Φ : coefficients de transmission d'ordre (n,m) intervenant dans le développement en série de Fourier de la pression et de sa dérivée normale (SP2D),

\underline{T} : tenseur condensé ou vecteur des contraintes,

$[T]$ ou T_{ij} : tenseur des contraintes,

\underline{u} : champ de déplacement,

u_i' : déplacement imposé dans la direction i ,

\underline{U} : vecteur des valeurs nodales du champ de déplacement,

\underline{U}_ℓ : vecteur des valeurs nodales du champ de déplacement sur le secteur ℓ (SP1D),

$\underline{U}_{\ell,m}$: vecteur des valeurs nodales du champ de déplacement sur le secteur (ℓ,m) (SP2D),

U_i^{V1}, U_i^{V2} : déplacement au degré de liberté numéro i des lignes V1 ou V2 du premier secteur (SP1D),

U_i^{In} : déplacement au degré de liberté numéro i du domaine intérieur In du premier secteur (SP1D),

$V1, V2$: lignes délimitant la maille élémentaire bidimensionnelle entre deux secteurs jointifs (SP1D),

w : espacement entre deux réseaux de tubes compliants,

x, y, z : coordonnées spatiales,

y^+, y^- : positions des surfaces S_+ et S_- (SP1D),

z^+, z^- : positions des surfaces S_+ et S_- (SP2D),

α_n : nombre d'onde d'ordre n ,

β : angle d'inclinaison du petit axe du tube compliant par rapport à la normale au plan du réseau,

β_m : nombre d'onde d'ordre m (SP2D),

δ : angle de pertes mécaniques,

Δ : symbole du Laplacien,

$[\Delta^+], [\Delta^-]$: matrices prenant en compte le raccordement au modèle d'ondes planes,

φ : angle d'incidence repéré dans le plan xOy (SP2D),

Φ : dérivée normale de la pression,

- Φ_i : dérivée normale de la pression incidente,
- Φ^+ , Φ^- : champs de la dérivée normale de la pression dans les régions I et III,
- $\underline{\Phi}$: vecteur des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression sur S_∞ ,
- $\underline{\Phi}_+$, $\underline{\Phi}_-$: vecteurs des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression sur les surfaces S_+ et S_- ,
- $\underline{\Phi}_i$: vecteur des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression incidente,
- $\underline{\Phi}_I$: vecteur des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression dans le domaine intérieur,
- $\underline{\Phi}_{V1}$, $\underline{\Phi}_{V2}$: vecteurs des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression sur les faces (V1) et (V2) (SP1D),
- ξ , η , ζ : coordonnées réduites,
- λ : longueur d'onde,
- λ_y : période de la fonction pression dans la direction y (SP1D),
- λ_1 : longueur d'onde acoustique associée au premier mode de résonance d'un tube compliant,
- ν : coefficient de Poisson,
- ν' , ν'' : parties réelle et imaginaire du coefficient de Poisson,
- ψ : déphasage entre deux points distants d'une période (SP1D),
- ψ_x , ψ_y : déphasages entre deux points distants d'une période, respectivement dans la direction x et dans la direction y (SP2D),
- ρ : masse volumique du domaine solide,
- ρ_f : masse volumique du domaine fluide,

- θ : angle d'incidence repéré par rapport à la normale au plan du réseau,
- Ω_f : domaine fluide,
- Ω_{fi} : domaine fluide interne,
- Ω_{f+} , Ω_{f-} : domaines fluides externes respectivement au-delà et en deçà des surfaces S_+ et S_- ,
- Ω_s : domaine solide,
- ω : pulsation,
- ∂ : symbole de dérivation partielle,
- (-), (+): traces des surfaces S_+ et S_- dans le plan xOy (SP1D),
- I, III : domaines fluides semi-infinis respectivement en deçà et au-delà des structures diffractantes,
- II : domaine comportant les structures diffractantes et une partie du fluide environnant.

INTRODUCTION

La diffraction d'une onde acoustique par des réseaux périodiques est l'objet de nombreuses applications dans le domaine de l'acoustique sous-marine, de tels réseaux pouvant se comporter comme des écrans [1] réflecteurs ou absorbeurs dans de larges bandes de fréquence, même en basse fréquence (quelques centaines de hertz à quelques kilohertz). Ces écrans sont eux-mêmes utilisés, par exemple, pour accroître la directivité ou le niveau d'une antenne d'émission [2-4], pour isoler une antenne de réception d'une source de bruit ou pour conférer à une paroi ou à une structure des propriétés d'anechoïcité [5]. Les réseaux périodiques utilisés peuvent être classés en deux catégories. La première contient les réseaux à une dimension, en particulier les réseaux de tubes compliants (figure 1). Dans ces réseaux, des tubes, très longs, creux, de section elliptique ou rectangulaire, sont disposés parallèlement de façon à former un panneau (figure 2). Une onde acoustique plane incidente tombant sur ce panneau excite, à certaines fréquences, les modes de résonance des tubes et le panneau peut se comporter alors, sous certaines conditions, comme une barrière acoustique, l'onde transmise étant supprimée. La seconde catégorie contient les réseaux périodiques à deux dimensions, tels que les panneaux de type Alberich ou certains revêtements anéchoïques. La figure 3 présente un panneau de type Alberich, formé d'une plaque de matériau viscoélastique contenant des inclusions cylindriques, réparties de façon périodique. Un tel panneau, excité par une onde acoustique plane, se comporte comme un baffle absorbeur lorsque la fréquence de l'onde incidente permet qu'un mode de la cavité cylindrique soit excité. Enfin, la figure 4 décrit schématiquement un panneau anéchoïque à adaptation graduelle, formé, suivant les cas, d'un ensemble de structures absorbantes triangulaires ou pyramidales.

Afin d'expliquer le comportement physique de ces réseaux périodiques et d'aider leur conception, de nombreux auteurs ont établi des modèles mathématiques conduisant à des résultats en accord raisonnable avec les mesures. Ainsi, E. BURKE [6], G.A. BRIGHAM [7], G. DUMERY [8] et C. AUDOLY [3, 9, 10] ont analysé des réseaux de cylindres circulaires ou de tubes compliant de section elliptique, à l'aide d'une approche de diffusion multiple, méthode consistant à déterminer le champ diffracté par un obstacle élémentaire du réseau puis à réaliser la sommation des contributions de chaque obstacle. De même, la méthode des domaines partiels, consistant à découper le milieu acoustique en régions dans lesquelles le champ de pression est exprimé sous forme d'une série d'ondes, a été retenue par V. VOVK [11], R.P. RADLINSKI [12-14] et C. AUDOLY [10, 15], ces travaux étant généralement bien adaptés pour des tubes de section rectangulaire. L'étude de milieux perforés a été réalisée principalement par G.C. GAUNAURD [16, 17] pour différents types d'inclusions sphériques, à l'aide d'une méthode de champ moyen permettant l'homogénéisation des propriétés élastiques. Enfin, la diffraction d'une onde plane en incidence quelconque par un réseau de tubes a été étudiée par J.D. ACHENBACH [18] à l'aide d'une formulation tridimensionnelle, alors que la diffraction des ondes élastiques par un réseau périodique de cylindres a été analysée avec l'aide de la méthode de la matrice T par A. LAKHTAKIA [19, 20]. Toutefois, si de nombreux modèles analytiques ou semi-analytiques ont permis de décrire le comportement de réseaux simples, l'analyse de réseaux plus complexes du fait de leur géométrie, des matériaux qui les constituent, de la direction de l'onde incidente ou des modes de vibration concernés, nécessite une approche numérique. Une telle approche, déjà retenue par A.J. KALINOWSKI [21], peut produire des informations beaucoup plus riches. Suivant une démarche voisine, l'objet de cette thèse est d'établir une méthode générale permettant de décrire toute structure présentant une périodicité à une ou deux dimensions et exploitant la méthode des éléments finis afin de lever toutes les restrictions précédentes. Cette démarche s'appuie sur l'utilisation du code ATILA [22-28], qui a été développé au Laboratoire d'Acoustique de l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord pour le Groupe d'Etude et de Recherche en Détection Sous-Marine (DCAN-Toulon).

Une structure périodique à une dimension, comme un réseau de tubes compliant, est supposée infinie dans une direction. En conséquence, l'hypothèse de déformation plane permet de réduire le domaine étudié à un

domaine bidimensionnel, contenant, dans l'exemple cité, la section des tubes. Dans ce cas, le motif de base se répète parallèlement à lui-même et périodiquement dans une direction de l'espace. En revanche, dans le cas des structures périodiques à deux dimensions, le domaine étudié reste tridimensionnel et le motif de base se répète parallèlement à lui-même et périodiquement dans deux directions de l'espace. Le domaine entier, bidimensionnel ou tridimensionnel, est alors découpé en trois régions (figure 5), par deux plans fictifs parallèles à la structure diffractante et qui délimitent le maillage éléments finis. La première et la troisième régions sont deux domaines fluides semi-infinis dans lesquels le champ acoustique est développé sur une base d'ondes planes, homogènes ou évanescentes. Le champ est ainsi décrit analytiquement dans ces régions. La seconde région comporte les structures diffractantes et une petite partie du domaine fluide environnant. Le champ de pression et le champ de déplacement de la structure y sont décrits numériquement, à l'aide de la méthode des éléments finis. Le théorème de Bloch-Floquet permet de réduire la modélisation de cette région à une cellule élémentaire, qui fait seule l'objet d'un maillage par éléments finis [29]. Dans la cellule élémentaire maillée, la périodicité est prise en compte à l'aide de conditions cycliques, c'est à dire d'une relation de phase spécifique entre des points distants d'un nombre entier de fois le pas du réseau. Ces conditions sont appliquées sur les points des surfaces délimitant la maille élémentaire. Les équations de continuité du champ de pression et de sa dérivée normale sont alors écrites sur les frontières entre la première et la deuxième région d'une part, entre la deuxième et la troisième région d'autre part. Elles permettent ainsi de raccorder les expressions des champs de pression, écrites soit sur une base d'ondes planes dans les première et troisième régions, soit en fonction des valeurs nodales du domaine éléments finis dans la deuxième région. Hormis la facilité de prise en compte de géométries complexes ou de matériaux divers, cette approche présente l'avantage de ne requérir aucune condition restrictive sur le champ de déplacement et de ne pas demander de développements théoriques supplémentaires à chaque changement de structure.

Ce rapport est divisé en cinq chapitres. Le premier résume les diverses méthodes analytiques ou semi-analytiques utilisées pour décrire le comportement de réseaux périodiques et pour aider leur conception. Pour chacune d'elles, il présente les modèles simplifiés et dresse la liste de leurs limitations essentielles. Puis, après la description du modèle mathématique et un rappel succinct de la méthode des éléments finis, le

second chapitre précise les développements théoriques spécifiques aux structures périodiques à une dimension, le maillage étant alors bidimensionnel. Les résultats obtenus par éléments finis dans le cas de la périodicité à une dimension et relatifs aux variations du coefficient de transmission en fonction de la fréquence, sont présentés dans le chapitre 3: ils sont comparés tout d'abord à des résultats de modèles analytiques simples, permettant une première validation de la méthode, puis à des résultats de modèles analytiques plus complexes ou à des mesures, permettant d'envisager l'optimisation de réseaux en vue d'applications en acoustique sous-marine. Suivant la même démarche que dans le chapitre 2, la formulation théorique de la méthode des éléments finis pour des structures dont la périodicité est à deux dimensions est présentée au chapitre 4, le maillage étant alors tridimensionnel. Les résultats correspondants obtenus par éléments finis, sont tout d'abord comparés, dans le chapitre 5, à des tests développés pour des structures périodiques à une dimension, permettant ainsi la validation du modèle. Ils sont ensuite comparés à des mesures, menant à une discussion sur les problèmes de comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux liés à l'identification des propriétés des matériaux viscoélastiques. En conclusion, plusieurs extensions de la méthode proposée, notamment dans le cas de réseaux comportant des matériaux actifs ou de réseaux périodiques à trois dimensions, sont envisagées.

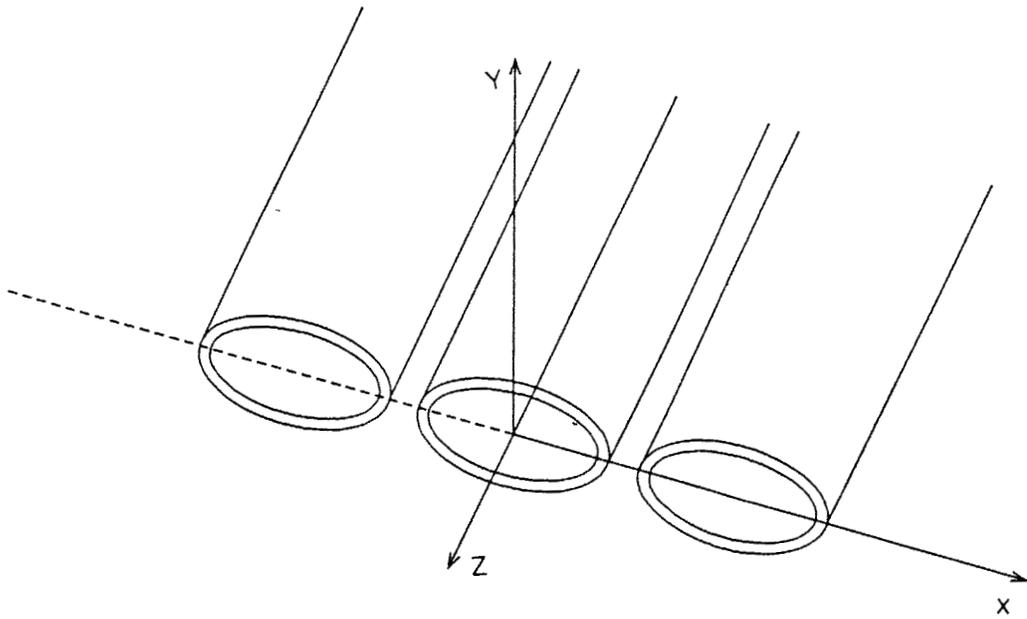


Figure 1: Structure périodique à une dimension: réseau de tubes compliants.



Figure 2: Panneau de tubes compliants.



Figure 3: Structure périodique à deux dimensions: panneau de type Alberich

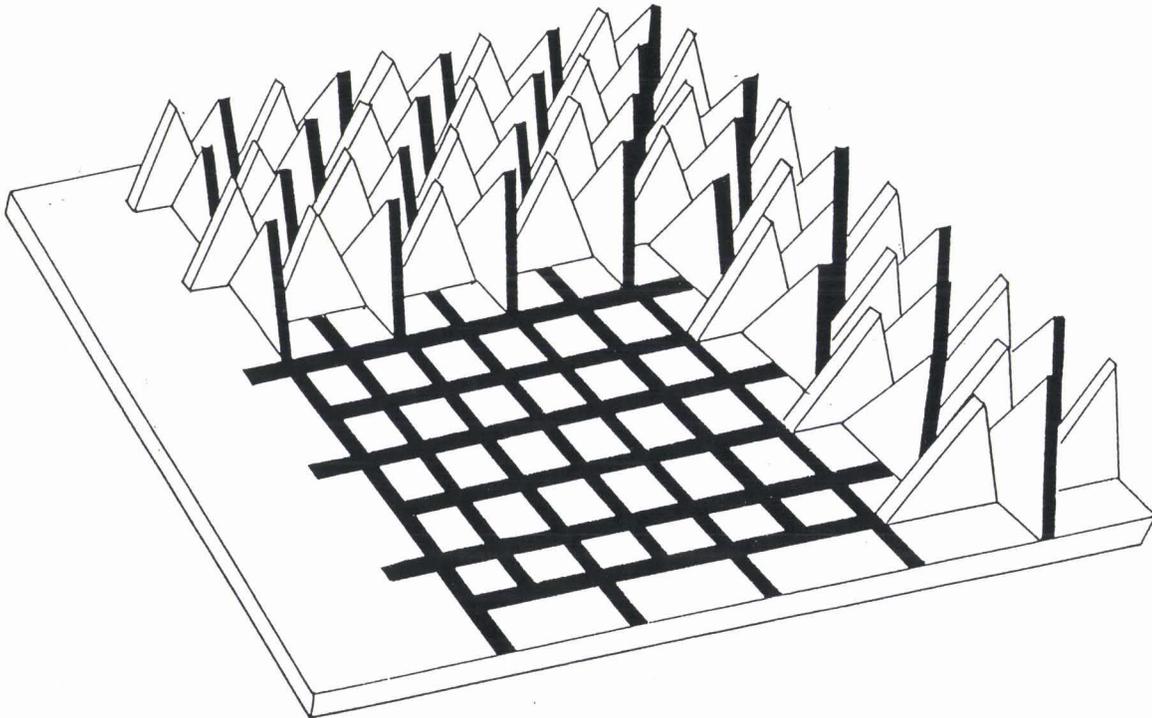


Figure 4: Panneau anéchoïque à adaptation graduelle.

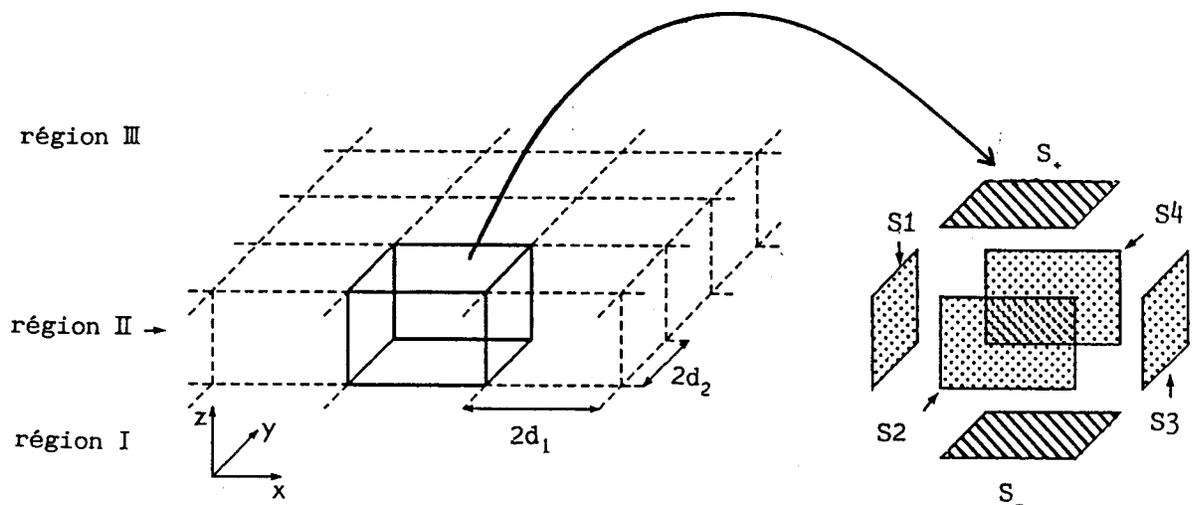
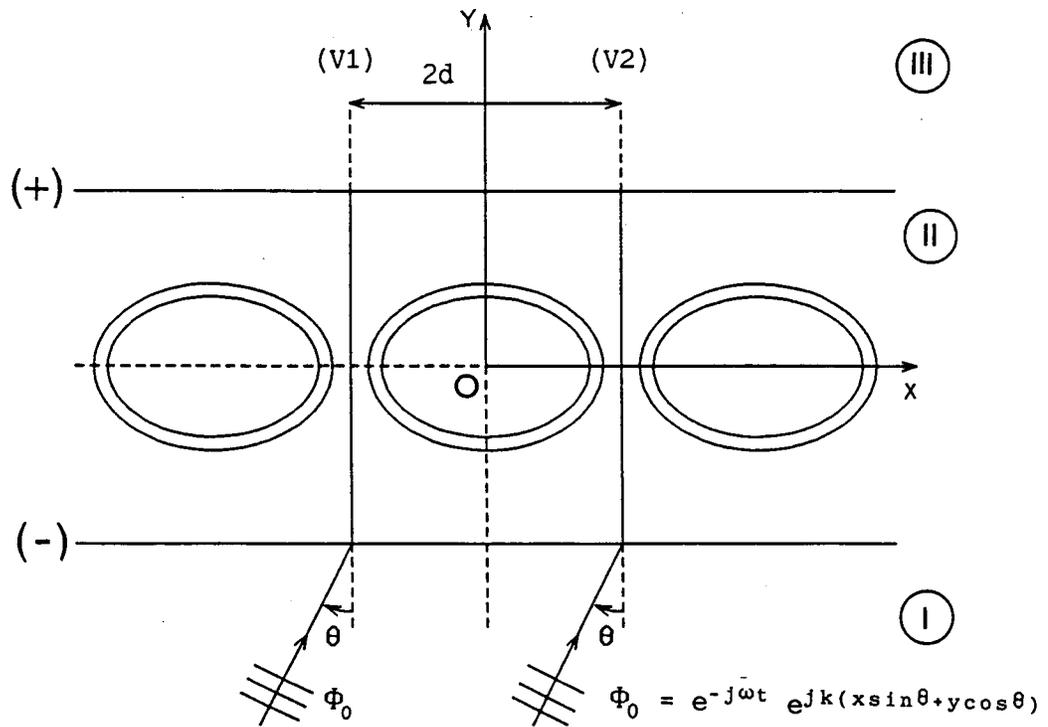


Figure 5: Domaines d'étude.

CHAPITRE 1

DESCRIPTION DES METHODES D'ANALYSE DE LA DIFFUSION

ACOUSTIQUE PAR DES RESEAUX PERIODIQUES PLANS.

Après une présentation succincte des méthodes de calculs adaptées au problème de la diffusion acoustique par un obstacle isolé, ce chapitre décrit les approches permettant l'analyse de la diffusion par des réseaux plans infinis périodiques: méthode des domaines partiels, méthode de la diffusion multiple, utilisation des formulations intégrales...A partir d'une étude bibliographique, il cherche notamment à dégager les limitations essentielles de chacune de ces méthodes. Ces limitations conduisent alors naturellement à proposer l'utilisation de la technique des éléments finis, et particulièrement du code ATILA, pour décrire le comportement de réseaux périodiques à simple ou double périodicité.

Une synthèse des différentes méthodes permettant l'analyse de la diffusion acoustique par un obstacle, isolé ou non, est détaillée dans la thèse de C. AUDOLY [3]. Seules ses grandes lignes sont résumées dans ce chapitre, lorsque la matière correspondante est indispensable à la compréhension ou l'illustration des chapitres suivants.

I.1 PRESENTATION GENERALE.

La diffusion d'une onde acoustique par un obstacle isolé, en champ libre, est un problème classique, résolu de façon satisfaisante, notamment en basse fréquence, quand les dimensions caractéristiques de la structure sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. Des solutions analytiques ou semi-analytiques ont été apportées pour des géométries simples, qui fournissent les bases fondamentales d'une bonne compréhension physique. Néanmoins, la résolution précise de problèmes concrets, lorsque, par exemple, la structure diffractante est de forme géométrique complexe, n'a pu être entreprise qu'après l'avènement de méthodes numériques performantes. Parmi celles-ci, on peut citer la méthode des équations intégrales [30], la méthode du champ nul ou de la matrice de transition [31], la méthode des éléments finis [22, 32].

Le cas d'un réseau d'obstacles est, en revanche, plus difficile à traiter, à cause des interactions acoustiques entre les différents éléments. De fait, l'hypothèse de diffusion simple, due à J.W. RAYLEIGH [33], qui consiste à négliger ces interactions conduit souvent à des résultats incorrects. De nombreux auteurs ont donc abordé les problèmes de la diffusion multiple, avec des méthodes plus ou moins élaborées permettant de prendre en compte ces interactions. Ainsi, W. VON IGNATOWSKI [34] a montré que les champs réfléchis et transmis par un réseau périodique peuvent être représentés sous forme de séries de Fourier. D'autre part, outre le cas de la diffusion par des distributions aléatoires d'obstacles, lié au problème de la propagation des ondes acoustiques dans les milieux inhomogènes [35] et le cas de réseaux finis dans lesquels les obstacles sont placés de façon arbitraire [3], des auteurs ont étudié la diffusion par des réseaux plans, infinis, périodiques. Dans ce dernier cas, les méthodes utilisées peuvent se décomposer en différentes catégories:

- la méthode des domaines partiels [3, 11, 12], applicable

principalement à des réseaux périodiques dont l'obstacle élémentaire a une section de forme rectangulaire,

- la méthode de diffusion multiple [36, 37], qui consiste à déterminer le champ diffracté par un obstacle élémentaire du réseau puis à réaliser la sommation des contributions de chaque obstacle,

- la méthode des équations intégrales, qui constitue une approche classique à de nombreux problèmes de rayonnement et de diffraction [30, 38]. Les équations intégrales sont alors écrites dans un domaine borné, représentant un pas du réseau périodique, ou peuvent être périodisées sur le pourtour de l'obstacle [18, 39]. Cette méthode a notamment été retenue par J.D. ACHENBACH [18], dans une formulation tridimensionnelle, en vue d'étudier la diffraction d'une onde plane par un réseau de tubes,

- la méthode des éléments finis, dans laquelle une cellule élémentaire seulement est maillée, sur la surface externe de laquelle des conditions aux limites spécifiques sont imposées [21]. La diffraction par un réseau périodique immergé à simple ou double périodicité est étudiée ici à l'aide de cette approche originale [40], et la présentation des méthodes et résultats correspondants constituent le présent mémoire. Il faut signaler en outre que l'analyse de la propagation dans des matériaux hétérogènes périodiques a déjà été réalisée par cette même approche [29].

Dans de nombreux cas, les problèmes de propagation rencontrés dans ce contexte sont traités à l'aide d'une formulation bidimensionnelle: les structures diffractantes sont de grande longueur, leur section est de forme géométrique simple et elles sont excitées par une onde plane, dans un plan perpendiculaire à leur longueur. Néanmoins, l'étude théorique des propriétés acoustiques de matériaux perforés, tels que les panneaux de type Alberich, ou divers panneaux à inclusions périodiques s'est particulièrement développée [16, 17, 41] et, dans ce cas, la formulation doit être tridimensionnelle.

L'objet des paragraphes suivants est de préciser succinctement le principe des méthodes préalablement décrites.

I.2 LA METHODE DES DOMAINES PARTIELS.

Cette méthode est applicable uniquement dans le cas de réseaux périodiques plans infinis, formés d'obstacles rectangulaires. Son application aux réseaux de tubes compliant a été initialement traitée par V. VOVK [11], puis reprise par R.P. RADLINSKI [12]. Dans ce cas, le tube compliant qui est un tube à parois minces, dont la section est fortement allongée, est assimilé en première approximation à deux plaques planes mécaniquement couplées. Alors que V. VOVK a supposé les plaques appuyées aux extrémités, R.P. RADLINSKI les a supposées encastrées. Ultérieurement, C. AUDOLY [3, 15] a développé la méthode de R.P. RADLINSKI et généralisé le formalisme à une onde plane en incidence quelconque.

Dans la méthode des domaines partiels, le milieu acoustique est découpé en trois régions notées I, II et III (figure I.1), dans lesquelles le champ de pression est exprimé sous la forme d'ondes planes:

$$p_I(x,y) = p_i e^{jk(x\sin\theta + y\cos\theta)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n e^{-jk_n y} e^{j(\alpha_n + k\sin\theta)x},$$

$$p_{III}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n e^{jk_n y} e^{j(\alpha_n + k\sin\theta)x}, \quad (I.1)$$

avec:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{d}, \quad k_n^2 = k^2 - (\alpha_n + k\sin\theta)^2, \quad (I.2)$$

où d est le demi pas du réseau, θ est l'angle d'incidence, calculé par rapport à la normale au plan du réseau, k est le nombre d'onde ($k = \omega/c$), c est la vitesse du son dans l'eau, ω est la pulsation. Les coefficients de réflexion R_n et de transmission T_n sont à déterminer.

Dans la région II, une combinaison d'ondes satisfaisant les conditions de parois rigides en $x = \pm a$ est cherchée. Les ondes peuvent se propager dans les deux sens ($y < 0$ et $y > 0$). On obtient:

$$p_{II}^{\pm}(x,y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(A_m e^{-jk_m y} + B_m e^{jk_m y} \right) \Psi_m^{\pm}(x), \quad (I.3)$$

avec:

$$\Psi_m^\pm(x) = e^{\pm jkdsin\theta} \cos\left(\beta_m(x \pm d) + m \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{2(d-a)}, \quad k_m = \sqrt{k^2 - \beta_m^2}, \quad (I.4)$$

où A_m et B_m sont les coefficients des ondes se propageant respectivement dans le sens y positif et y négatif.

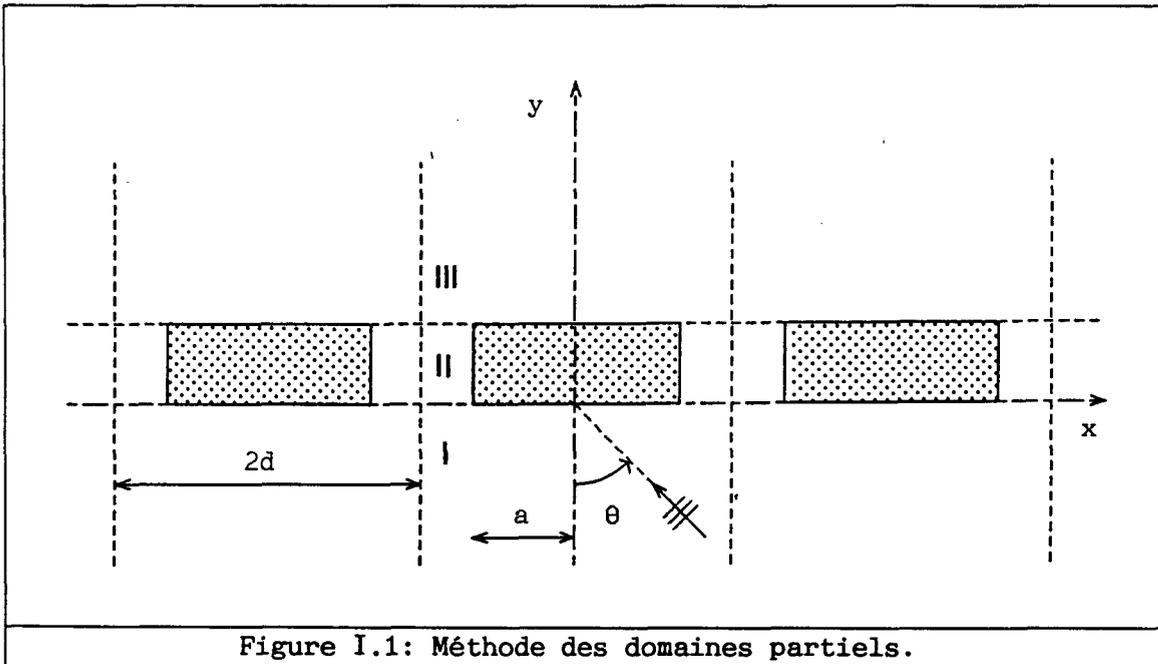
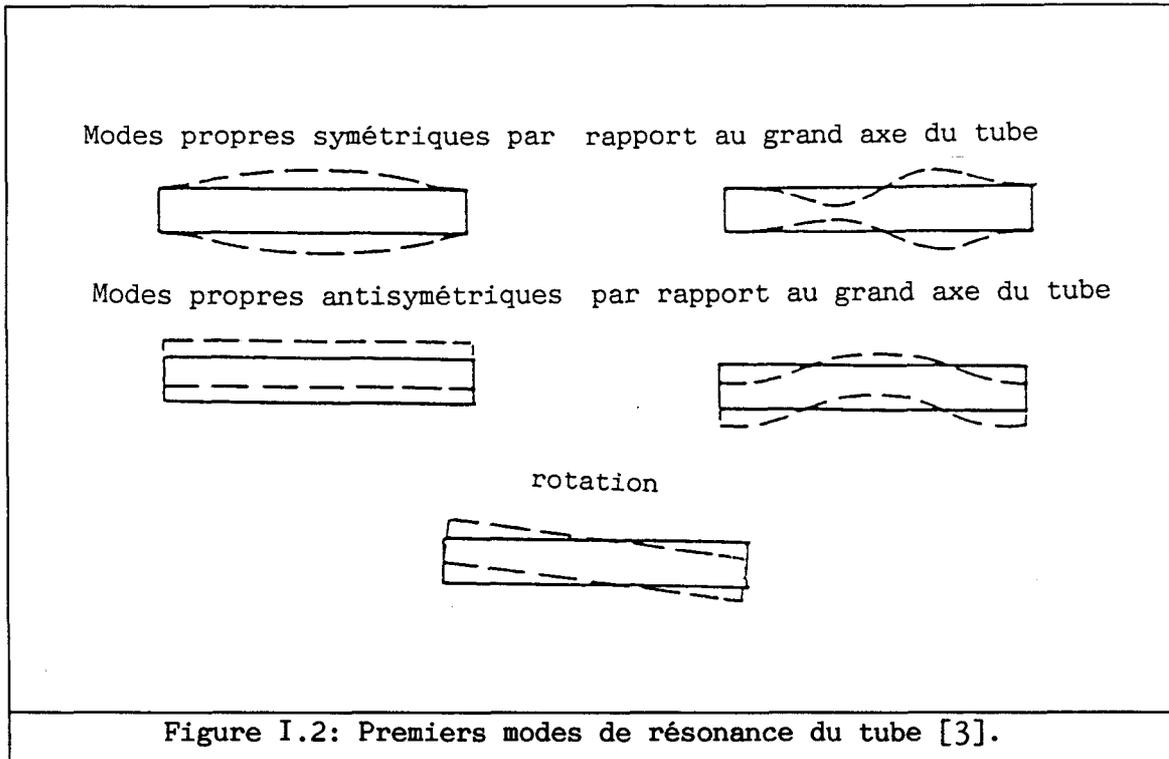


Figure I.1: Méthode des domaines partiels.

Si l'obstacle élémentaire est élastique, le mouvement des parois est décrit comme une combinaison linéaire de modes de résonance. Le matériau constituant les tubes étant supposé élastique et isotrope, les modes de résonance prédominants sont les modes de flexion de plaque. Les champs de déplacement associés à quelques modes sont présentés sur la figure I.2.

Pour résoudre le problème de diffraction, les relations de continuité de la pression et du déplacement normal aux frontières des différents domaines sont posées. Ceci conduit à un système linéaire dont la résolution fournit les valeurs des coefficients R_n , T_n , A_m et B_m ainsi que des composantes du champ de déplacement des tubes sur la base modale retenue. Le système linéaire est résolu numériquement, les séries étant tronquées et seuls les premiers modes de résonance étant pris en compte. Cette méthode permet de traiter le problème de la diffraction d'une onde

plane par un réseau de tubes compliants mais, du fait du découpage du domaine en trois régions, elle reste limitée à des géométries d'obstacles rectangulaires. De plus, la sévérité des conditions de continuité entre les domaines I et II d'une part, II et III d'autre part, peut entraîner des difficultés.



I.3 LA METHODE DE DIFFUSION MULTIPLE.

Dans ce cas, la méthode consiste à exprimer les coefficients de diffraction des obstacles placés dans le réseau à partir des coefficients de diffraction en champ libre. Ainsi, V. TWERSKY [42] a introduit la diffusion multiple en considérant des ordres d'interaction croissants. Le problème est traité intégralement si toutes les interactions sont prises en compte. Le cas particulier de réseaux d'obstacles cylindriques a été également exposé par V. TWERSKY [36, 37]. E. BURKE [6] et G.A. BRIGHAM [7] ont développé une variante de la méthode en vue d'applications à des obstacles de section elliptique, alors que G. DUMERY [8] a proposé une méthode plus générale, applicable à des obstacles dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.

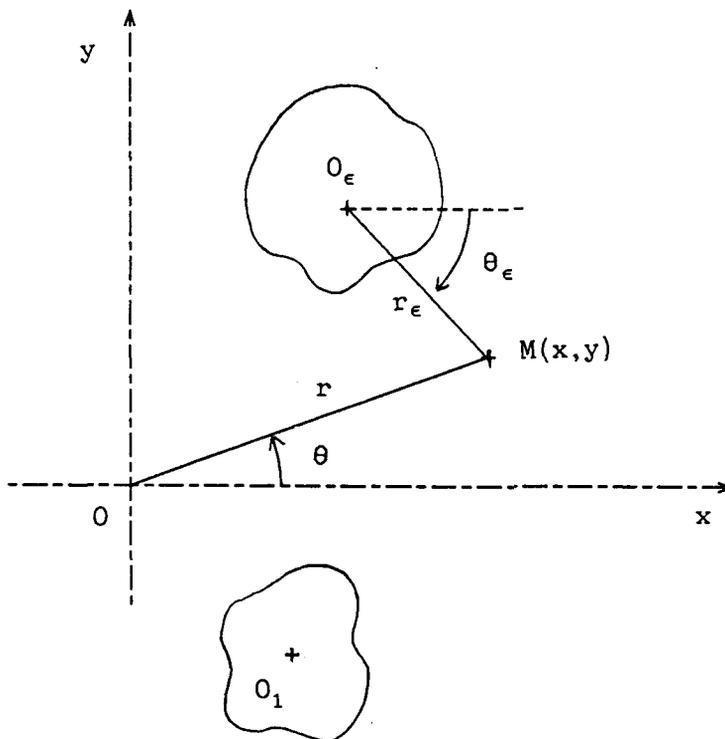


Figure I.3: Méthode de diffusion multiple, réseau quelconque.

Considérant un ensemble d'obstacles centrés aux points $O_1, O_2 \dots O_\epsilon$ (figure I.3), le champ de pression total s'exprime alors comme la somme de l'onde incidente p_i et des ondes diffractées par chacun des obstacles:

$$p = p_i + \sum_{\epsilon} p_{\epsilon}, \quad (\text{I.5})$$

avec:

- p : champ de pression acoustique total,
- p_i : champ de pression incident,
- p_{ϵ} : champ diffracté par l'obstacle numéro ϵ .

ϵ peut être fini ou peut varier de $-\infty$ à $+\infty$, dans le cas de réseaux périodiques plans. Si, à titre d'exemple, on s'intéresse au cas d'obstacles cylindriques, l'onde incidente et l'onde diffractée pour l'obstacle ϵ sont composées d'ondes cylindriques et peuvent s'exprimer, en omettant la

dépendance temporelle en $\exp(-j\omega t)$, sous la forme:

$$p_i = \sum_n A_n^\epsilon J_n(kr_\epsilon) e^{jn\theta_\epsilon},$$

$$p_\epsilon = \sum_n C_n^\epsilon H_n(kr_\epsilon) e^{jn\theta_\epsilon},$$
(I.6)

avec:

- n : entier variant de $-\infty$ à $+\infty$,
- k : ω/c ,
- c : célérité du son dans l'eau,
- $r_\epsilon, \theta_\epsilon$: distance et angle définissant la position du point d'observation par rapport à l'origine de l'obstacle numéro ϵ , comme explicité à la figure I.3,
- $A_n^\epsilon, C_n^\epsilon$: coefficients des ondes incidentes et diffractées à l'ordre n pour l'obstacle numéro ϵ ,
- J_n : fonction de Bessel d'ordre n et de première espèce,
- H_n : fonction de Hankel d'ordre n et de première espèce.

L'hypothèse de diffusion simple consiste à supposer que les C_n^ϵ sont les mêmes qu'en champ libre, alors que la méthode de diffusion multiple permet de calculer les coefficients C_n^ϵ en tenant compte de toutes les interactions, via la résolution d'un système linéaire, déduit de l'écriture des équations de continuité. Dans le cas de réseaux plans infinis (figure I.4), les obstacles sont identiques, placés de façon périodique avec la même orientation. Une relation linéaire existe alors entre les coefficients C_n^ϵ d'un obstacle et ceux du suivant. Un grand nombre de coefficients inconnus sont ainsi éliminés. Les coefficients de réflexion et de transmission sont déduits des coefficients C_n , coefficients de diffraction de l'obstacle centré en 0.

La méthode de la diffusion multiple permet de faire varier la configuration plus facilement que la méthode des domaines partiels. Outre la prise en compte de réseaux de cylindres à section circulaire ou à section elliptique, elle a été développée pour la modélisation d'un réseau de tubes compliant [3]. Le champ acoustique autour des tubes peut être alors, soit représenté à l'aide de fonctions de Mathieu dont le maniement est délicat, soit basé sur une représentation intégrale de l'équation de Helmholtz. Toutefois, la convergence peut être difficile à atteindre dans certains cas particuliers, lorsque des obstacles de forme allongée sont disposés côte à côte, à faible distance.

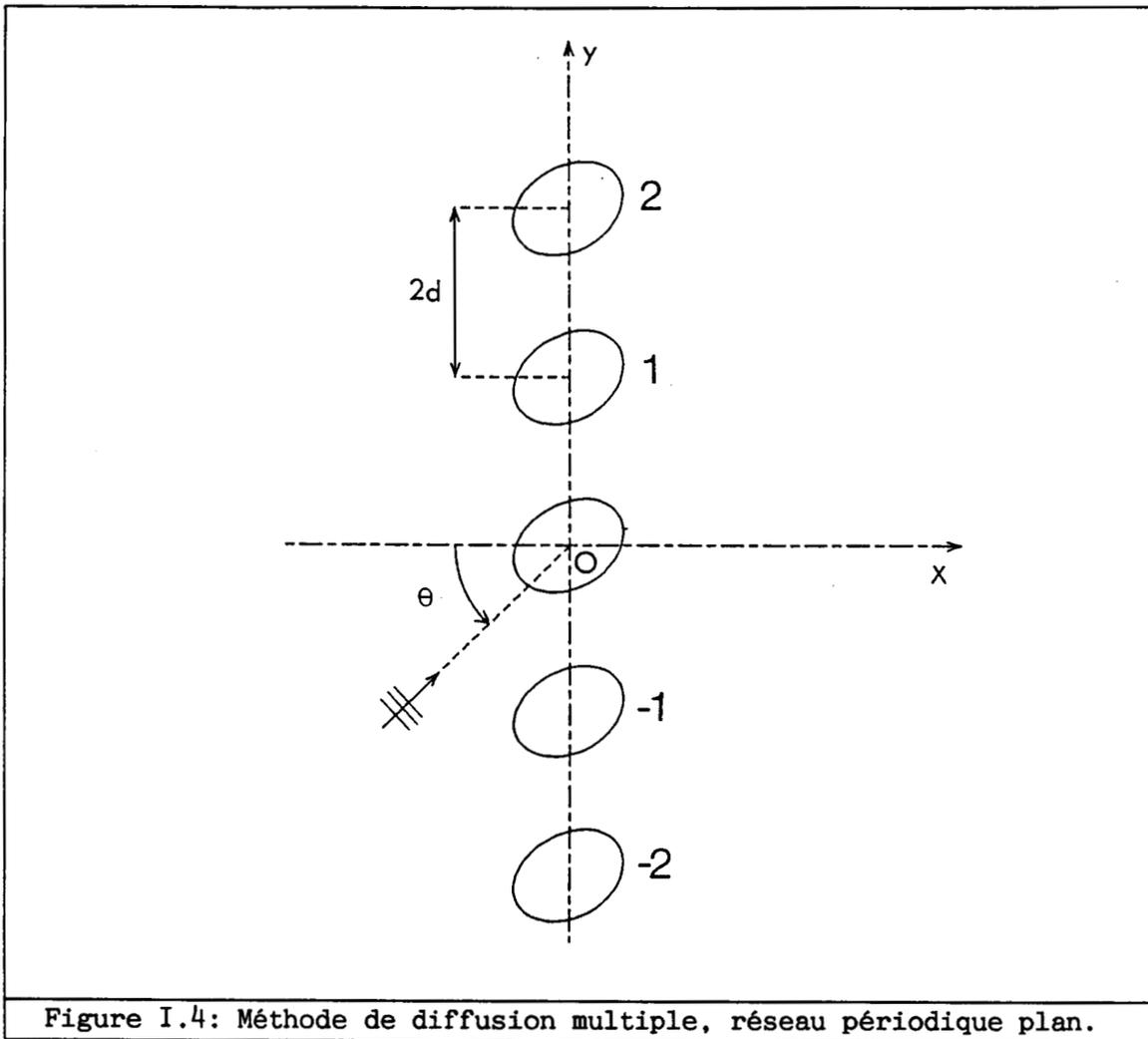


Figure I.4: Méthode de diffusion multiple, réseau périodique plan.

I.4 LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES.

Dans le cas de réseaux périodiques plans infinis, le problème en milieu non borné est ramené à un problème en milieu borné, constitué d'un pas du réseau limité par les surfaces S_1^+ , S_2^+ , S_1^- et S_2^- (figure I.5). L'équation intégrale de Helmholtz est alors écrite sur la surface S et sur l'ensemble des surfaces délimitant le milieu borné.

Il est possible d'éliminer les contributions des surfaces S_1^+ , S_2^+ , S_1^- et S_2^- en utilisant une fonction de Green périodique: les coefficients de réflexion et de transmission sont, dans ce cas, définis comme des intégrales sur le pourtour de l'obstacle, intégrales évaluées numériquement. C'est la méthode développée par J.D. ACHENBACH [18], dans un formalisme tridimensionnel lui permettant de considérer une direction d'incidence quelconque par rapport à l'obstacle diffractant. Le problème

est alors moins lourd à résoudre du point de vue numérique, mais le calcul de la fonction de Green périodique peut s'avérer difficile.

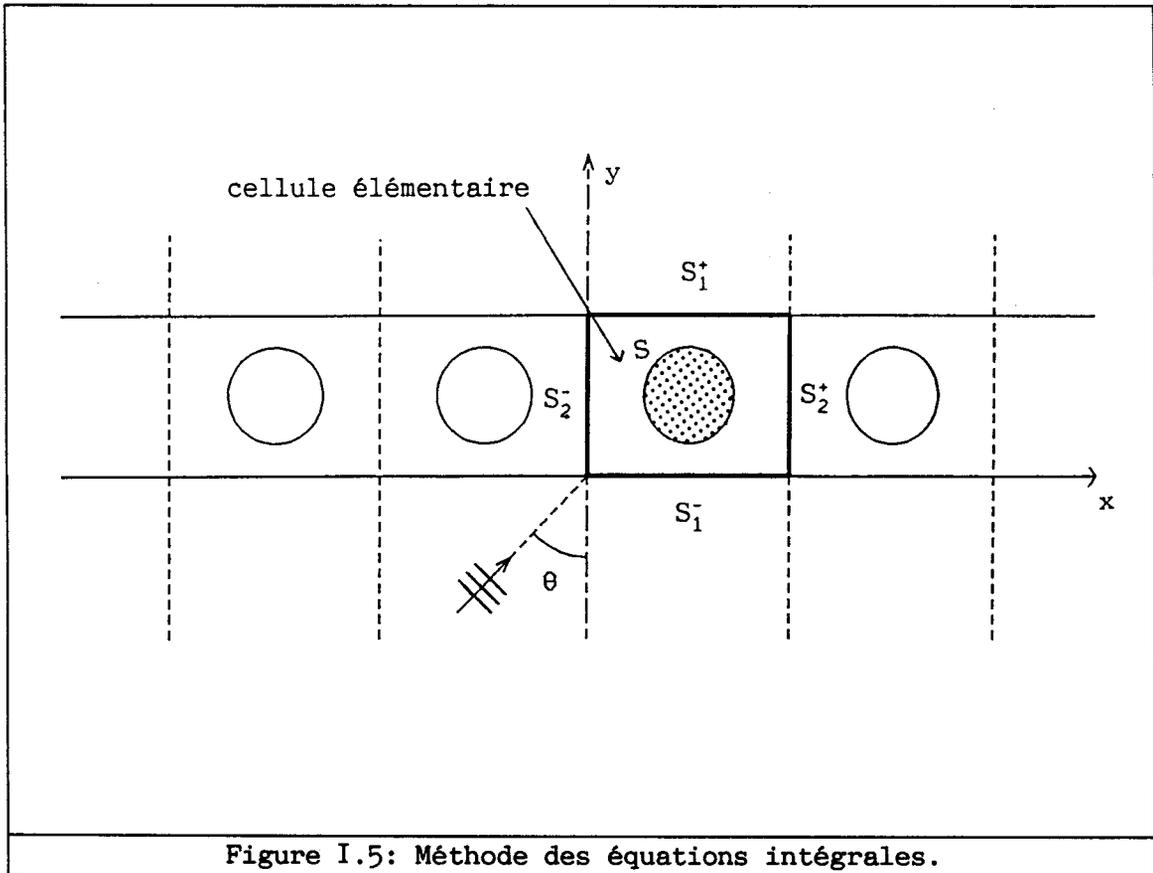


Figure I.5: Méthode des équations intégrales.

I.5 CONCLUSION.

Dans le cas de réseaux périodiques à une dimension formés de cylindres circulaires ou de tubes compliants de grande longueur, les méthodes analytiques ou semi-analytiques classiques, telles que la méthode des domaines partiels ou la méthode de diffusion multiple, permettent de déterminer aisément le comportement acoustique. En revanche, l'analyse de réseaux plus complexes, du fait de la géométrie, des matériaux des tubes, d'une double périodicité du réseau ou de la nature du champ de déplacement est beaucoup plus difficile à réaliser et le recours à des approches numériques devient essentiel.

De tels développements font l'objet de ce présent mémoire. Ils ont été effectués dans le code ATILA, qui utilise la méthode des éléments finis pour décrire le comportement de réseaux périodiques à une ou deux

dimensions. Cette approche présente les avantages essentiels de n'imposer aucune condition restrictive sur le champ de déplacement et de ne pas demander de développements théoriques supplémentaires à chaque changement de structure. Elle reste évidemment limitée au cas des basses fréquences, lorsque les dimensions caractéristiques de la structure ne sont pas trop grandes par rapport à la longueur d'onde. Néanmoins, elle permet de couvrir l'ensemble du spectre utile pour les applications concernées.

CHAPITRE 2

FORMULATION THEORIQUE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

APPLIQUEE A LA MODELISATION DE STRUCTURES PERIODIQUES A UNE DIMENSION.

Dans ce chapitre, les structures périodiques concernées sont essentiellement des réseaux de tubes compliant. Elles peuvent être aussi certains revêtements anéchoïques ou des plaques raidies par des renforts linéaires. Dans tous les cas, le motif de base est supposé infini dans une direction donnée et se répète parallèlement à lui-même et périodiquement dans une direction orthogonale à la direction précédente.

Après avoir décrit un modèle mathématique général adapté à de tels réseaux périodiques à une dimension et explicité notamment les expressions du champ de pression et de sa dérivée normale, ce chapitre expose succinctement la méthode des éléments finis et décrit brièvement le code ATILA. Les développements théoriques liés à la méthode des éléments finis et spécifiques aux structures périodiques sont ensuite détaillés, à savoir, d'une part, la prise en compte de la périodicité, à l'aide d'une relation de phase entre des points distants d'un nombre entier de fois le pas du réseau, et, d'autre part, l'écriture des conditions de continuité du champ de pression et de sa dérivée normale sur les frontières du domaine fluide. La liste exhaustive des informations susceptibles d'être extraites des résultats pour permettre la meilleure connaissance possible du comportement du système est alors dressée.

II.1 INTRODUCTION AU MODELE MATHEMATIQUE GENERAL D'UN RESEAU PERIODIQUE A UNE DIMENSION.

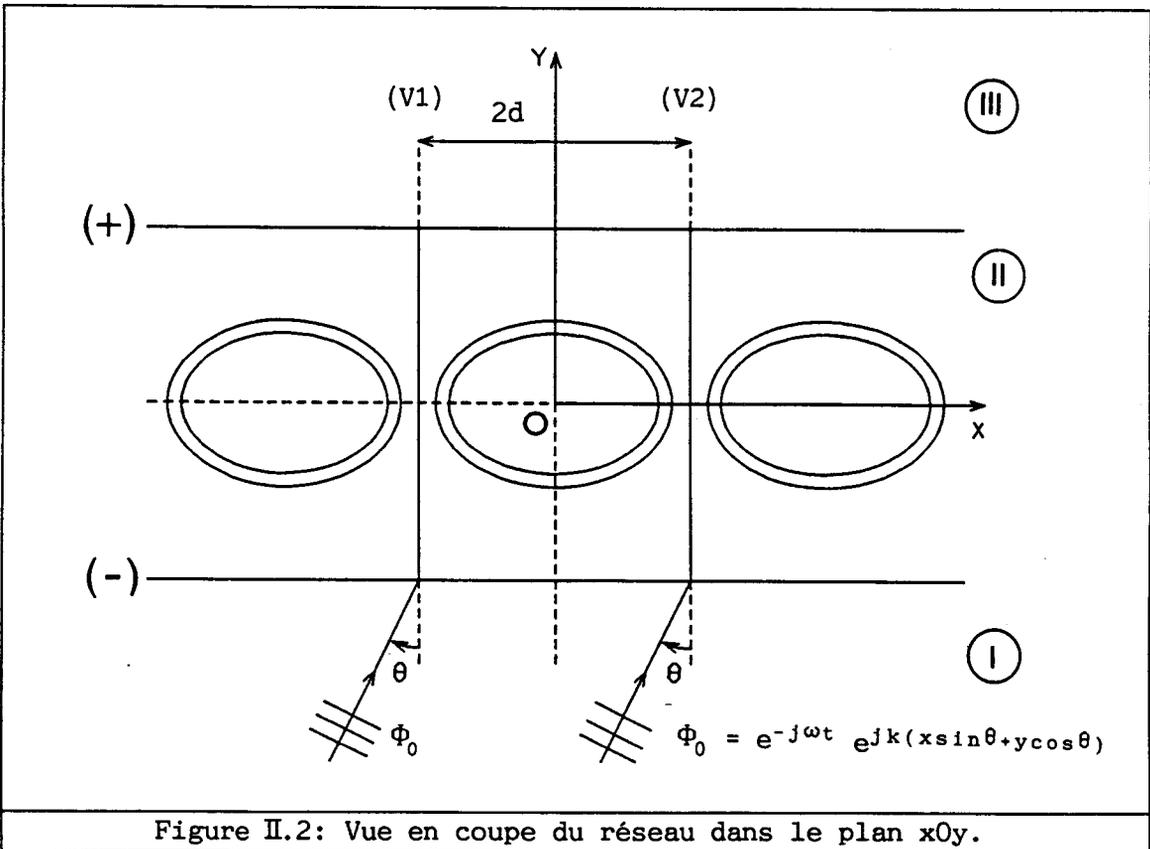
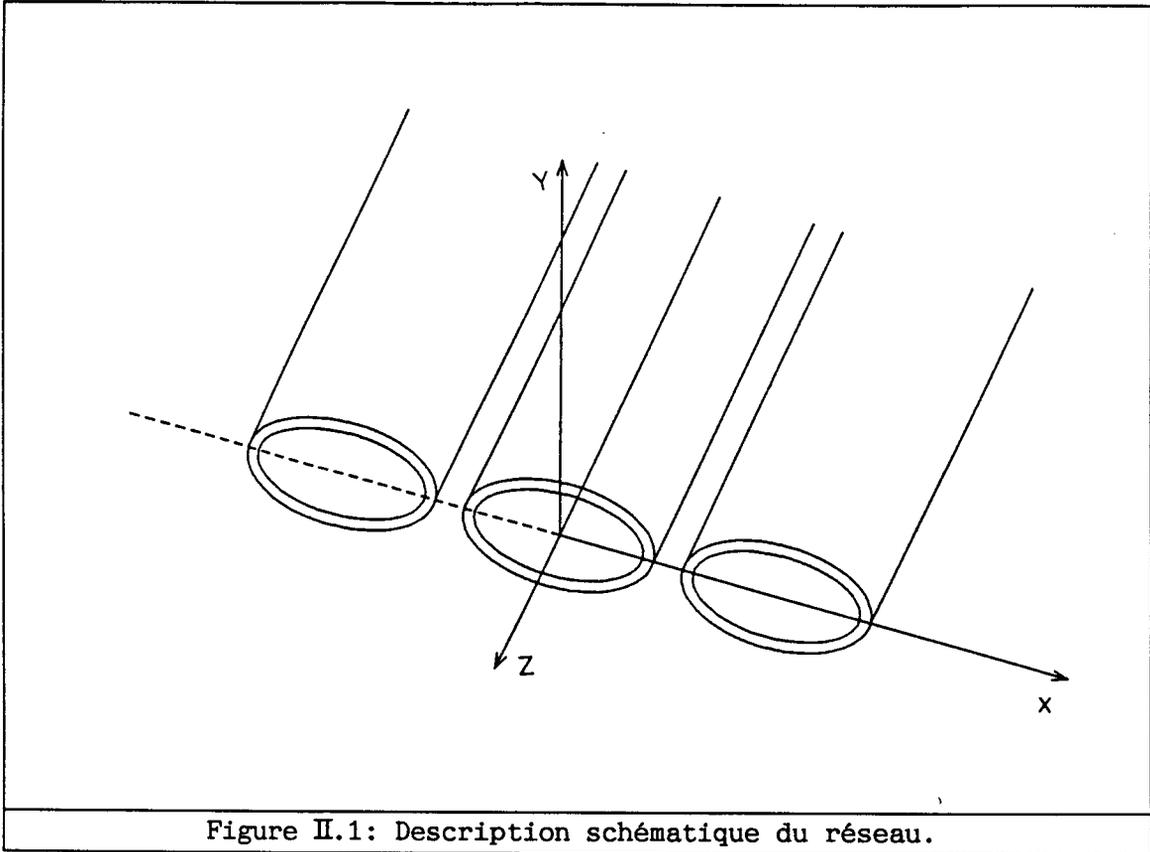
II.1.1 Description du modèle.

Comme indiqué en préambule au chapitre, la structure constituant le motif périodique est considérée comme infinie dans une direction. Les structures successives sont disposées côte à côte, parallèles entre elles, de façon à former un réseau de pas $2d$. Dans le modèle utilisé, l'axe Oz est supposé parallèle aux structures (figure II.1) et le réseau s'étend théoriquement de $-\infty$ à $+\infty$ dans la direction Ox . Ainsi, le problème se réduit à un problème bidimensionnel et les champs considérés ne dépendent que des coordonnées x et y . Le comportement élastique de la structure peut en outre être décrit dans l'hypothèse classique de déformation plane.

Le réseau ainsi formé étant supposé immergé et soumis à une onde incidente acoustique plane dans les applications retenues, le domaine entier est divisé en trois régions successives par deux plans parallèles au plan xOz , qui est le plan du réseau (figure II.2). La première et la troisième régions sont des domaines fluides semi-infinis, dans lesquelles le champ de pression peut être décrit analytiquement. La seconde région comporte les structures diffractantes et une petite partie du domaine fluide environnant. Elle va être décrite numériquement, à l'aide des éléments finis. Sur la figure II.2, les lignes fictives $(-)$ et $(+)$, parallèles à l'axe Ox , limitent le maillage éléments finis et représentent les frontières entre les régions I et II d'une part, entre les régions II et III d'autre part. De plus, du fait de la périodicité du réseau, les lignes $(V1)$ et $(V2)$, parallèles à l'axe Oy , limitent la cellule élémentaire, de largeur $2d$.

II.1.2 Expressions du champ de pression dans les milieux I et III.

Une onde acoustique incidente plane, monochromatique, dont le vecteur d'onde \underline{k} est parallèle au plan xOy , excite le réseau sous un angle d'incidence θ défini par rapport à l'axe Oy (figure II.2). Cette onde



s'exprime sous la forme:

$$p_i(t, x, y) = p_i e^{jk_x x \sin \theta + jk_y y \cos \theta - j\omega t} = e^{-j\omega t} p_i(x, y), \quad (\text{II.1})$$

où k est le module de \underline{k} et ω est la pulsation.

Puisque le réseau est considéré comme infini et périodique dans la direction x , toute fonction d'espace $F(x, y)$ (pression, déplacement...) doit nécessairement vérifier la relation de Bloch-Floquet [43]:

$$F(x+2d, y) = F(x, y) e^{j2dk_x \sin \theta}. \quad (\text{II.2})$$

En particulier, du fait de cette relation de phase entre deux points séparés du pas du réseau, le champ de pression total dans les régions I et III peut s'écrire:

$$p(x+2d, y) = p(x, y) e^{j2dk_x \sin \theta}. \quad (\text{II.3})$$

La fonction $q(x, y)$, construite à partir du champ de pression suivant la relation:

$$q(x, y) = p(x, y) e^{-jxk_x \sin \theta}, \quad (\text{II.4})$$

est alors périodique par rapport à la variable x , de période $2d$, et peut donc se développer en série de Fourier:

$$q(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n(y) e^{\frac{jn\pi x}{d}}. \quad (\text{II.5})$$

En conséquence, on peut écrire, de façon générale:

$$p(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n(y) e^{j\left(\frac{n\pi}{d} + k_x \sin \theta\right)x}. \quad (\text{II.6})$$

Lors de la propagation d'une onde acoustique plane monochromatique dans un milieu fluide, le champ de pression p doit vérifier l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (\text{II.7})$$

avec $k = \omega/c$, c étant la vitesse de propagation libre dans le fluide. Il en découle une relation simple entre les coefficients de Fourier q_n , coefficients définis par la relation (II.5):

$$\{k^2 - (\frac{n\pi}{d} + k\sin\theta)^2\}q_n(y) + \frac{d^2q_n(y)}{dy^2} = 0. \quad (\text{II.8})$$

Cette équation différentielle se résout facilement et conduit à:

$$q_n(y) = A_n e^{-jk_n y} + B_n e^{jk_n y}, \quad (\text{II.9})$$

avec:

$$k_n^2 = k^2 - (\frac{n\pi}{d} + k\sin\theta)^2. \quad (\text{II.10})$$

Dès lors:

$$p(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_n e^{-jk_n y} + B_n e^{jk_n y}) e^{j(\frac{n\pi}{d} + k\sin\theta)x}. \quad (\text{II.11})$$

Etant donné le sens de propagation des ondes, compte tenu de la condition de rayonnement, l'expression du champ de pression acoustique dans la région I peut s'écrire, en isolant le terme représentant la pression incidente:

$$p^-(x,y) = p_i e^{jk(x\sin\theta + y\cos\theta)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n^p e^{-jk_n y} e^{j(\alpha_n + k\sin\theta)x}, \quad (\text{II.12})$$

avec:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{d}, \quad k_n^2 = k^2 - (\alpha_n + k\sin\theta)^2. \quad (\text{II.13})$$

Le premier terme, introduit dans la relation (II.12), correspond à l'onde incidente. Le second terme représente une série infinie d'ondes réfléchies par le réseau, les coefficients R_n^p étant des coefficients à déterminer. Lorsque $k_n^2 < 0$, l'onde correspondante se propage parallèlement à l'axe des x et s'atténue exponentiellement dans la direction y négatif. Une telle onde ne contribue qu'au champ de pression proche et est souvent appelée onde évanescence. Lorsque $k_n^2 > 0$, l'onde est homogène et se propage à partir du réseau dans la direction y négatif. Dans ce cas, sa direction de propagation est déterminée par le vecteur d'onde $(\alpha_n + k\sin\theta, -k_n)$, elle contribue au champ de pression lointain. Ainsi, lorsque la fréquence et l'angle d'incidence θ sont tels que plusieurs ondes homogènes existent, un

phénomène d'interférences va apparaître dans le champ de pression réfléchi. De la même façon, l'expression du champ de pression transmis dans la région III est donnée par:

$$p^+(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^p e^{jk_n y} e^{j(\alpha_n + k_n \sin \theta)x}, \quad (\text{II.14})$$

où les coefficients de transmission T_n^p sont à déterminer.

L'intérêt des relations (II.12) et (II.14) est d'autoriser le calcul des coefficients de transmission et de réflexion loin du réseau. Si la condition suivante est vérifiée:

$$\omega < \frac{c\pi}{d(1+|\sin \theta|)}, \quad (\text{II.15})$$

k_0^2 est seul positif et une seule onde homogène existe, qui se propage dans la même direction que l'onde incidente. Cette situation correspond généralement au cas physique concret. Les pressions transmises et réfléchies dans les milieux III et I loin du réseau sont alors déterminées respectivement par T_0^p et R_0^p . Toutes les autres ondes sont évanescentes et ne contribuent pas au champ lointain. Néanmoins, la convergence des séries (II.12) et (II.14) est directement liée à la position des lignes (+) et (-), l'amplitude des contributions évanescentes décroissant exponentiellement avec la distance. Ainsi, à des lignes éloignées correspondent un maillage éléments finis important et des séries rapidement convergentes, et vice-versa. La position de ces lignes peut donc être considérée comme un paramètre d'optimisation.

II.1.3 Expressions de la dérivée normale du champ de pression dans les milieux I et III.

L'écriture de certaines conditions aux limites du domaine fluide le long des frontières (+) et (-) exige la connaissance de la dérivée normale du champ de pression définie par:

$$\Phi = \underline{n}_1 \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (\text{II.16})$$

où \underline{n} est le vecteur normal à la frontière considérée. En tenant compte de

l'expression du champ de pression déduite de l'équation de Helmholtz, Φ peut donc être écrit dans les deux régions extérieures I et III sous la forme:

$$\Phi^*(x,y) = \Phi_1 e^{jk(x\sin\theta+y\cos\theta)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n^\Phi e^{-jk_n y} e^{j(\alpha_n + k\sin\theta)x}, \quad (\text{II.17})$$

$$\Phi^*(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^\Phi e^{jk_n y} e^{j(\alpha_n + k\sin\theta)x}, \quad (\text{II.18})$$

où Φ_1 est la dérivée normale de la pression incidente, R_n^Φ et T_n^Φ sont, respectivement, des coefficients de réflexion et de transmission à déterminer.

II.2 RAPPELS RELATIFS A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

Les rappels décrits dans cette partie ont été présentés en détail dans la thèse de J.N. DECARPIGNY [22]. Ils sont volontairement reproduits de manière condensée et restreints au cas d'un domaine élastique passif immergé, qui est le seul cas utile dans la suite. Les mêmes restrictions sont appliquées à la présentation du code ATILA. Sont également traitées deux extensions spécifiques, préalablement décrites dans la thèse de B. DUBUS [44].

II.2.1 Les équations du problème.

La description du comportement d'une structure élastique rayonnant dans un fluide suppose la résolution simultanée de problèmes mécanique et acoustique. Le problème mécanique est couplé au problème acoustique au niveau d'une surface S_1 , interface entre le milieu solide Ω_s et le milieu fluide Ω_f (figure II.3). Le domaine fluide est limité par une surface frontière extérieure notée S_∞ sur laquelle une condition de rayonnement particulière est imposée. Dans cette analyse, les modèles utilisés excluent les non-linéarités de grands déplacements ou de comportement. Les effets dissipatifs, ignorés dans une première phase, sont discutés dans la section (II.2.6). Enfin, chaque phénomène physique est supposé avoir une dépendance temporelle en $\exp(-j\omega t)$, où ω désigne la pulsation.

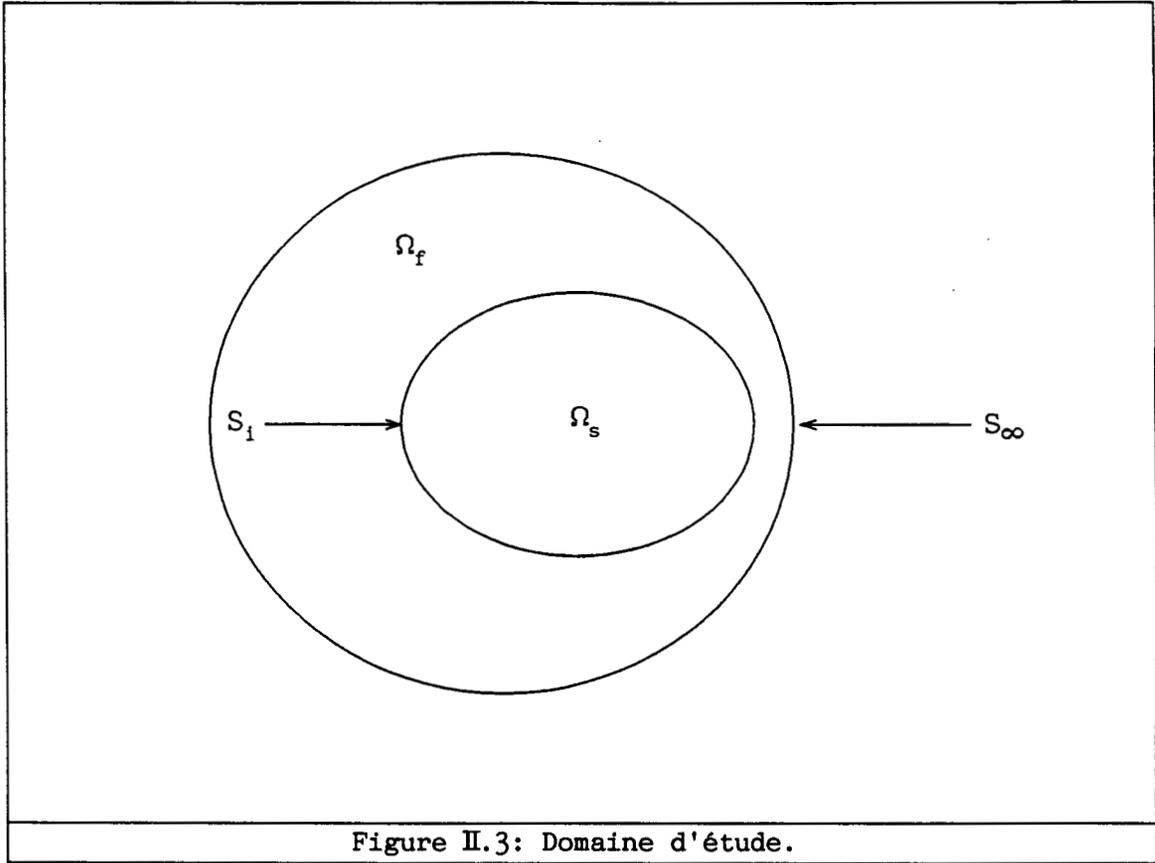


Figure II.3: Domaine d'étude.

Dans le domaine Ω_s , les équations constitutives [45, 46] s'expriment par:

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}, \quad (\text{II.19})$$

où $[T]$ est le tenseur des contraintes, $[S]$ le tenseur des déformations, $[c]$ le tenseur des constantes élastiques, la notation d'Einstein étant désormais implicitement utilisée. Le tenseur des déformations peut être relié au champ de déplacement \underline{u} par:

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (\text{II.20})$$

Dans tout le domaine Ω_s , doit être également vérifiée l'équation générale du mouvement:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (\text{II.21})$$

où ρ désigne la masse volumique. A partir des équations (II.19), (II.20) et

(II.21), on obtient:

$$-\rho \omega^2 u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl} S_{kl}). \quad (\text{II.22})$$

Cette équation est assortie d'un ensemble de conditions aux limites mécaniques diverses. Celles-ci peuvent s'appliquer au champ de déplacement (condition du type Dirichlet) en tout point d'une surface appelée S_u et s'écrire:

$$u_i = u_i', \quad (\text{II.23})$$

où u_i' est un déplacement connu. Elles peuvent aussi s'appliquer au champ de contrainte (condition du type Neumann) en tout point d'une surface notée S_T et s'écrire:

$$T_{ij} n_j = -f_i, \quad (\text{II.24})$$

où \underline{n} est un vecteur unitaire normal à la surface, orienté vers l'intérieur, et \underline{f} est une densité superficielle de force connue.

De la même façon, le fluide étant supposé homogène, compressible et non dissipatif, l'équation de Helmholtz est vérifiée en tout point du domaine fluide Ω_f par le champ de pression p :

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (\text{II.25})$$

où:

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{K}{\rho_f}}. \quad (\text{II.26})$$

c désigne la vitesse du son dans le fluide, K et ρ_f sont respectivement la compressibilité et la masse volumique du fluide. Pour le fluide seul, les conditions aux limites peuvent s'appliquer au champ de pression sous la forme:

$$p = p', \quad (\text{II.27})$$

où p' est une pression connue. Les surfaces correspondantes sont notées S_p . Les conditions aux limites peuvent aussi s'appliquer à la dérivée

normale du champ de pression, sous la forme:

$$n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \Phi, \quad (\text{II.28})$$

où Φ est une quantité connue. Les surfaces correspondantes sont notées S_Φ . Dans le cas particulier des structures périodiques, les conditions aux limites sur la surface S_∞ se réduisent également à l'équation (II.28) mais sont détaillées ultérieurement. Enfin, en tout point de l'interface entre le solide et le fluide, S_1 , sont appliquées des conditions de continuité dynamique:

$$T_{ij} n_j = -p n_i, \quad (\text{II.29})$$

et cinématique:

$$n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho_f \omega^2 n_i u_i. \quad (\text{II.30})$$

II.2.2 La formulation variationnelle.

Les équations (II.22) et (II.25) d'une part, (II.23), (II.24), (II.27) à (II.30) d'autre part, sont respectivement les équations d'Euler et les conditions aux limites associées à la quantité stationnaire L définie par [22, 47]:

$$\begin{aligned} L = & \iiint_{\Omega_s} \frac{1}{2} \left(S_{ij} c_{ijkl} S_{kl} - \rho \omega^2 u_i^2 \right) d\Omega_s \\ & - \iint_{S_u} \left(u_i - u'_i \right) n_j c_{ijkl} S_{kl} dS_u \\ & - \iint_{S_T} f_i u_i dS_T \\ & + \frac{1}{\rho_f \omega^2} \iiint_{\Omega_f} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^2 - k^2 p^2 \right] d\Omega_f \\ & - \frac{1}{\rho_f \omega^2} \iint_{S_p} \left(p - p' \right) n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dS_p, \\ & \dots/\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots/\dots \\
 & - \frac{1}{\rho_f \omega^2} \iint_{S_\Phi} p \Phi \, dS_\Phi \\
 & - \iint_{S_1} p u_i n_i \, dS_1. \tag{II.31}
 \end{aligned}$$

Les trois premières intégrales concernent le solide élastique, le premier terme étant associé au potentiel de déformation et à l'énergie cinétique, le second aux déplacements imposés et le troisième au travail des forces extérieures. Les trois intégrales suivantes s'appliquent, quant à elles, au domaine fluide seul. Elles sont associées, dans l'ordre, à l'équation de Helmholtz, aux conditions aux limites du type Dirichlet puis du type Neumann. Enfin, le dernier terme décrit le couplage entre le domaine solide et le domaine fluide. L'intégrale concernant la surface S_∞ n'apparaît pas directement mais est, en fait, contenue dans l'avant-dernier terme de l'équation (II.31). L'annulation de la variation de L au premier ordre est équivalente à la vérification simultanée des équations (II.22) et (II.25) et des conditions aux limites (II.23), (II.24), (II.27) à (II.30).

II.2.3 Discrétisation : utilisation de la méthode des éléments finis.

Lors de la résolution d'un problème à l'aide de la méthode des éléments finis [22, 32, 48, 49], les domaines solide Ω_s et fluide Ω_f , dans lesquels le champ de déplacement \underline{u} et le champ de pression p sont recherchés, sont découpés fictivement par des lignes ou des surfaces en *éléments* qui sont interconnectés en un nombre fini de points situés à leurs frontières, les *noeuds* (figure II.4). L'ensemble des éléments constitue le *maillage*. A l'intérieur de chaque élément, le champ de déplacement ou le champ de pression est défini de manière unique par les seules valeurs qu'il prend aux noeuds de l'élément, cette définition étant assurée à l'aide de *fonctions d'interpolation ou de pondération*. Ainsi, on dispose sur Ω_s et sur Ω_f d'une fonction d'essai, dépendant des seules valeurs nodales de \underline{u} et p , qui est définie par morceaux dans des domaines élémentaires jointifs.

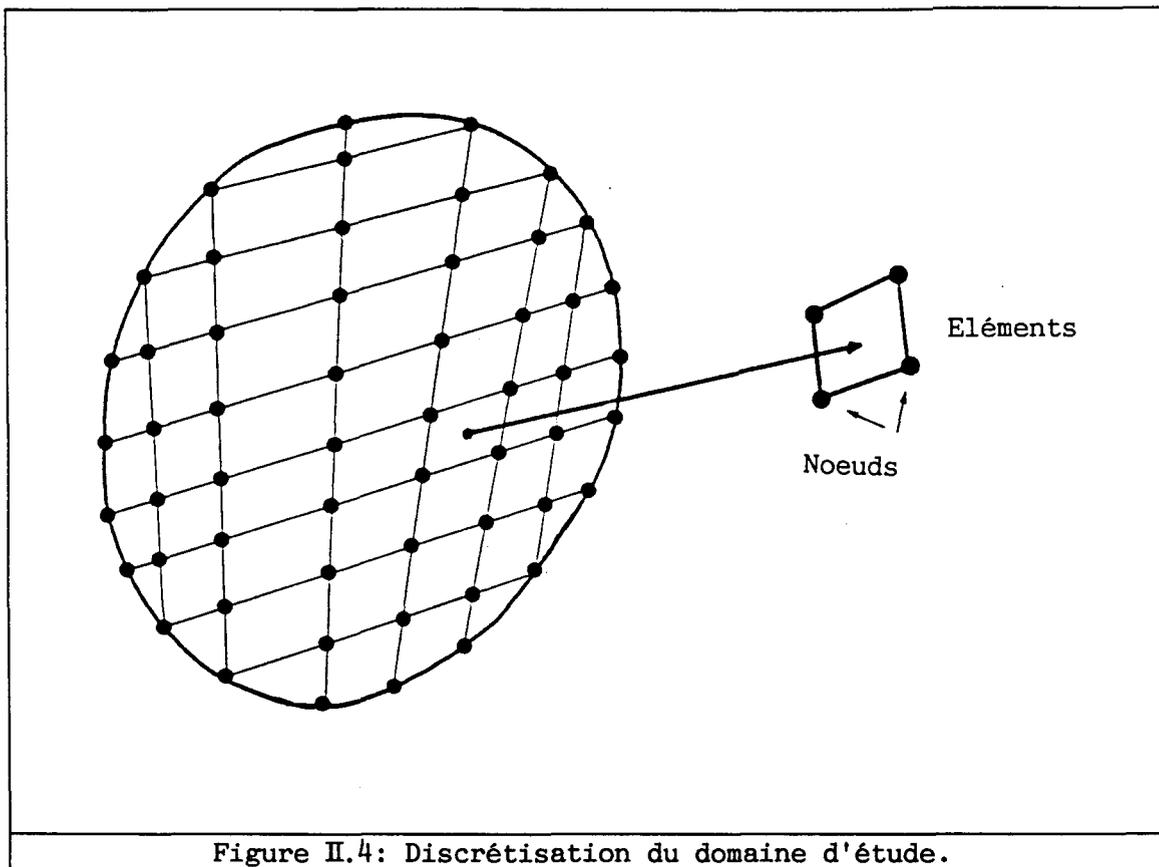


Figure II.4: Discretisation du domaine d'étude.

Cas d'une structure élastique.

La relation entre le déplacement d'un point quelconque situé à l'intérieur de l'élément e et les valeurs nodales du même déplacement, groupées dans le vecteur \underline{U}^e , à l'aide des fonctions d'interpolation décrites à l'annexe 1, s'exprime formellement par:

$$\underline{u} = [N^e] \underline{U}^e. \quad (\text{II.32})$$

$[N^e]$ est alors une matrice ligne regroupant les fonctions d'interpolation de e (annexe 1). L'état de déformation $\underline{\xi}$ de ce même point s'exprime alors en fonction des dérivées des fonctions d'interpolation, regroupées dans la matrice $[B^e]$, sous la forme:

$$\underline{\xi} = [B^e] \underline{U}^e. \quad (\text{II.33})$$

A partir de la loi de Hooke, l'état de contrainte \underline{T} s'écrit:

$$\underline{T} = [D] \underline{\xi}, \quad (\text{II.34})$$

où $[D]$ s'obtient par condensation du tenseur c_{ijkl} [45]. La partie

élastique de la fonctionnelle de la relation (II.31) est alors décomposée en une somme d'intégrales sur tous les éléments e du maillage pour introduire les expressions développées en (II.32), (II.33) et (II.34). Notant Ω_e le volume de l'élément e et S_{T_e} les parties des surfaces S_T appartenant à e , si elles existent, la partie élastique L_{e1} de la quantité stationnaire L devient ainsi:

$$\begin{aligned} L_{e1} = & \sum_e \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_e} \underline{U}^{eT} [B^e]^T [D] [B^e] \underline{U}^e d\Omega_e \\ & - \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_e} \omega^2 \rho \underline{U}^{eT} [N^e]^T [N^e] \underline{U}^e d\Omega_e \\ & - \iint_{S_{T_e}} \underline{U}^{eT} [N^e]^T \underline{f} dS_{T_e}. \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Dans cette quantité, l'intégrale relative à la surface S_u a été éliminée. En effet, le déplacement d'un point d'une face d'élément est uniquement fonction des déplacements des noeuds de cette face, compte tenu des propriétés des fonctions d'interpolation choisies (annexe 1). L'expression de cette intégrale sur un élément:

$$\iint_{S_{u_e}} \left(u_i - u_i' \right) n_j T_{ij} dS_{u_e}, \quad (\text{II.36})$$

ne dépend donc que des valeurs prises par \underline{u} sur les noeuds de S_{u_e} , à l'exclusion des autres noeuds de l'élément. Par conséquent, si, dans l'équation (II.35), on impose aux déplacements des noeuds de S_u les valeurs fixées par les conditions aux limites (II.23), toutes les intégrales (II.36) s'annulent. Les conditions aux limites de type Dirichlet sur le champ de déplacement sont donc bien prises en compte dans l'expression (II.35).

En définissant la matrice élémentaire de rigidité mécanique $[K^e]$:

$$[K^e] = \iiint_{\Omega_e} [B^e]^T [D] [B^e] d\Omega_e, \quad (\text{II.37})$$

la matrice élémentaire de masse cohérente $[M^e]$:

$$[M^e] = \iiint_{\Omega_e} \rho [N^e]^T [N^e] d\Omega_e, \quad (\text{II.38})$$

et le vecteur élémentaire des forces nodales appliquées \underline{F}^e :

$$\underline{F}^e = \iint_{S_{Te}} [N^e]^T \underline{f} \, dS_{Te}. \quad (\text{II.39})$$

la partie élastique de la quantité stationnaire L_{e1} peut finalement s'exprimer sous la forme:

$$L_{e1} = \sum_e \frac{1}{2} \left(\underline{U}^{eT} [K^e] \underline{U}^e \right) - \frac{1}{2} \omega^2 \left(\underline{U}^{eT} [M^e] \underline{U}^e \right) - \underline{U}^{eT} \underline{F}^e. \quad (\text{II.40})$$

Cas d'une structure immergée.

Comme le domaine solide Ω_s , le domaine fluide Ω_f est découpé en éléments simples constituant le maillage. A l'intérieur de chaque élément e , la pression p est donnée par:

$$p = [N_p^e] \underline{P}^e, \quad (\text{II.41})$$

où \underline{P}^e est le vecteur des valeurs nodales de p et N_p^e un polynôme d'interpolation semblable à ceux décrits en annexe 1. Ainsi, la dérivée normale du champ de pression, qui apparaît dans la fonctionnelle (II.31), s'exprime par:

$$\Phi = [B_p^e] \underline{P}^e, \quad (\text{II.42})$$

les dérivées des polynômes d'interpolation étant regroupées dans la matrice $[B_p^e]$. Reportant alors les expressions (II.32), (II.33), (II.41) et (II.42) dans la fonctionnelle de l'équation (II.31) et adoptant les conventions de notation de (II.35), on obtient:

$$L = L_{e1} + L_{f1} + L_{co}. \quad (\text{II.43})$$

où L_{e1} , L_{f1} et L_{co} représentent respectivement les contributions à la quantité stationnaire L dues au domaine élastique, au domaine fluide et au couplage.

L'expression de L_{f1} est:

$$\begin{aligned}
 L_{f1} = & \frac{1}{\rho_f \omega^2} \sum_e \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_e} \underline{P}^{eT} [B_p^e]^T [B_p^e] \underline{P}^e d\Omega_e \\
 & - \frac{1}{2} k^2 \iiint_{\Omega_e} \underline{P}^{eT} [N_p^e]^T [N_p^e] \underline{P}^e d\Omega_e \\
 & - \iint_{S_{\Phi_e}} \underline{P}^{eT} [N_p^e]^T \Phi dS_{\Phi_e}. \quad (\text{II.44})
 \end{aligned}$$

Cette fonctionnelle comporte une somme sur les éléments e fluides, y compris leurs frontières S_{Φ_e} . Dans cette quantité, l'intégrale relative à la surface S_p a disparu, pour les raisons identiques à celles exposées dans le cas de la structure élastique seule, pour la surface S_u .

L'expression de L_{c0} est:

$$L_{c0} = - \sum_e \iint_{S_{1e}} \underline{P}^{eT} [N^e]^T \underline{n} [N_p^e] \underline{P}^e dS_{1e}. \quad (\text{II.45})$$

Cette quantité comporte une somme sur les éléments interfaces S_{1e} communs aux éléments solides et fluides.

En définissant la matrice élémentaire de compressibilité fluide $[H^e]$:

$$[H^e] = \iiint_{\Omega_e} K [B_p^e]^T [B_p^e] d\Omega_e, \quad (\text{II.46})$$

la matrice élémentaire de masse cohérente fluide $[M_1^e]$:

$$[M_1^e] = \iiint_{\Omega_e} \rho_f [N_p^e]^T [N_p^e] d\Omega_e, \quad (\text{II.47})$$

le vecteur élémentaire des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression $\underline{\Phi}^e$:

$$\underline{\Phi}^e = \iint_{S_{\Phi_e}} [N_p^e]^T \Phi dS_{\Phi_e}. \quad (\text{II.48})$$

la partie L_{f1} de L associée au fluide peut finalement s'exprimer sous la forme:

$$L_{f1} = \frac{1}{\rho_f^2 c^2 \omega^2} \sum_e \frac{1}{2} \left(\underline{p}^{eT} [H^e] \underline{p}^e \right) - \frac{1}{2} \omega^2 \left(\underline{p}^{eT} [M_1^e] \underline{p}^e \right) - \rho_f c^2 \underline{p}^{eT} \underline{\Phi}^e \quad (\text{II.49})$$

En définissant la matrice de couplage de l'élément interface $[L^e]$:

$$[L^e] = \iint_{S_{1e}} [N^e] \underline{n} [N_p^e]^T dS_{1e}, \quad (\text{II.50})$$

la partie L_{c0} de L associée au couplage peut s'exprimer sous la forme:

$$L_{c0} = - \sum_e \underline{u}^{eT} [L^e] \underline{p}^e. \quad (\text{II.51})$$

Dès lors, l'application du principe variationnel conduit à minimiser L , défini par les équations (II.40), (II.43), (II.49) et (II.51), par rapport aux valeurs nodales de \underline{u} et \underline{p} . Le système d'équations linéaires obtenu est:

$$\begin{pmatrix} [K] - \omega^2 [M] & -[L] \\ -\rho_f^2 c^2 \omega^2 [L]^T & [H] - \omega^2 [M_1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U} \\ \underline{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F} \\ \rho_f c^2 \underline{\Phi} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.52})$$

où $[K]$ et $[M]$ sont les matrices de rigidité et de masse cohérente pour la structure, $[H]$ et $[M_1]$ sont les matrices de compressibilité et de masse cohérente pour le fluide, $[L]$ est la matrice de couplage entre le fluide et la structure. Ces matrices sont réelles et proviennent de la sommation sur l'ensemble des éléments des matrices élémentaires définies aux équations (II.37), (II.38), (II.46), (II.47) et (II.50). Cette opération est appelée *assemblage*. \underline{U} est le vecteur des valeurs nodales du champ de déplacement, \underline{F} le vecteur des valeurs nodales des forces appliquées, \underline{P} le vecteur des valeurs nodales de la pression et $\underline{\Phi}$ le vecteur des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression.

II.2.4 Description du code éléments finis ATILA.

Le code éléments finis ATILA a été développé pour permettre la modélisation de transducteurs piézoélectriques rayonnant dans un fluide [22-28, 44, 50-53]. Il peut être utilisé pour effectuer l'analyse statique, modale ou harmonique de structures élastiques, piézoélectriques ou magnétostrictives, immergées ou non. Dans cette section, seules les analyses liées à un problème élastique seul ou à un problème de couplage domaine élastique-domaine fluide sont présentées et sont détaillées. Ces analyses résultent de l'équation (II.52), en annulant les termes appropriés.

Analyse statique d'une structure élastique.

Une structure élastique est soumise à une force mécanique sur sa frontière. Le déplacement est obtenu pour tous les noeuds en résolvant le système d'équations:

$$[K] \underline{U} = \underline{F}. \quad (\text{II.53})$$

La connaissance de \underline{U} permet de déterminer, à l'aide des matrices d'interpolation $[N^e]$ et $[B^e]$, le déplacement, les déformations et les contraintes en tout point.

Analyse statique d'une structure élastique contenant du fluide.

Un système comportant une structure élastique et du fluide est soumis à une force mécanique. Le domaine fluide est fermé. La structure et le fluide interagissent le long de leur interface. La pression et le déplacement sont obtenus pour tous les noeuds en résolvant le système d'équations symétrisé:

$$\begin{pmatrix} [K] & -[L] \\ -[L]^T & -\frac{[M_1]}{\rho_f^2 c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U} \\ \underline{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F} \\ \underline{0} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.54})$$

Analyse modale d'une structure élastique.

Les modes propres d'une structure purement élastique sont les

solutions non nulles de l'équation:

$$([K] - \omega^2 [M]) \underline{U} = \underline{0}, \quad (\text{II.55})$$

les pulsations propres, appelées pulsations de résonance, étant les racines de:

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0. \quad (\text{II.56})$$

Analyse modale d'un système fluide-structure.

La structure et le fluide sont présents simultanément et interagissent le long de leur interface, le domaine fluide étant fermé. Les modes propres du système sont fournis par les solutions non nulles de:

$$\begin{pmatrix} [K] - \omega^2 [M] & -[L] \\ -\rho_f^2 c^2 \omega^2 [L]^T & [H] - \omega^2 [M_1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U} \\ \underline{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.57})$$

les pulsations propres étant obtenues en annulant le déterminant correspondant.

Analyse harmonique d'une structure élastique.

Une structure purement élastique est soumise sur sa frontière à une force dépendant sinusoidalement du temps, à la pulsation ω . Le système d'équations est donné par:

$$([K] - \omega^2 [M]) \underline{U} = \underline{F}. \quad (\text{II.58})$$

Sa résolution fournit le champ de déplacement de la structure. En l'absence de pertes, il est singulier pour les pulsations propres de la structure élastique.

Analyse harmonique d'un système fluide-structure.

Pour une fréquence d'excitation et une force mécanique appliquée données, le système à résoudre est celui de l'équation (II.52), dans lequel le vecteur des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression sur les frontières du domaine fluide est déterminé selon le problème traité [50]. Sa résolution fournit le champ de déplacement de la structure et le champ de pression.

II.2.5 Description de la bibliothèque ATILA.

Les éléments de forme simple (triangles, rectangles) ne pouvant modéliser une frontière courbe que par une succession de segments de droite ou de facettes planes, ils imposent un nombre d'éléments prohibitif pour décrire des domaines complexes. En revanche, la technique des éléments isoparamétriques à interpolation quadratique [32, 48], utilisée dans le code ATILA, permet de générer des éléments aux contours plus arbitraires à l'aide d'une correspondance point par point entre un élément simple et un élément curviligne. Pour traiter ces éléments, il est nécessaire de distinguer un repère global, un repère local et un repère réduit. Les coordonnées des noeuds du maillage sont exprimées dans le repère global. Le repère local est un repère intermédiaire attaché à l'élément considéré, le passage du repère local au repère global s'effectuant par rotation. La transformation des coordonnées des noeuds du repère réduit au repère local (figure II.5) est, quant à elle, réalisée à l'aide d'une transformation ponctuelle utilisant les fonctions d'interpolation (annexe 1). Le calcul des différentes matrices et vecteurs définis dans les intégrales des équations (II.37) à (II.39), (II.46) à (II.48), (II.50) est conduit en coordonnées réduites, la transformation de coordonnées étant prise en compte à l'aide du jacobien correspondant et l'évaluation des intégrales étant faite par une technique numérique dite de quadrature de Gauss [32, 48].

Les éléments disponibles dans le code et utiles dans l'étude de structures périodiques à une ou deux dimensions sont mécaniques ou fluides, à deux ou trois dimensions, ou interfaces fluide-structure. Les éléments mécaniques peuvent décrire le comportement de structures élastiques isotropes ou composites [54]. Ils peuvent être bidimensionnels (triangle à 6 noeuds ou quadrilatère à 8 noeuds) ou tridimensionnels (tétraèdre à 10 noeuds, prisme à 15 noeuds ou hexaèdre à 20 noeuds) [22]. Les éléments fluides servent à modéliser un fluide homogène. Ils peuvent être soit à deux dimensions (triangle à 6 noeuds ou quadrilatère à 8 noeuds), soit à trois dimensions (tétraèdre à 10 noeuds, prisme à 15 noeuds ou hexaèdre à 20 noeuds). Les éléments interfaces imposent les relations de continuité cinématique et dynamique à l'interface des maillages solide et fluide. Ils peuvent être bidimensionnels (élément à 6 noeuds) ou tridimensionnels (triangle à 12 noeuds ou quadrilatère à 16 noeuds).

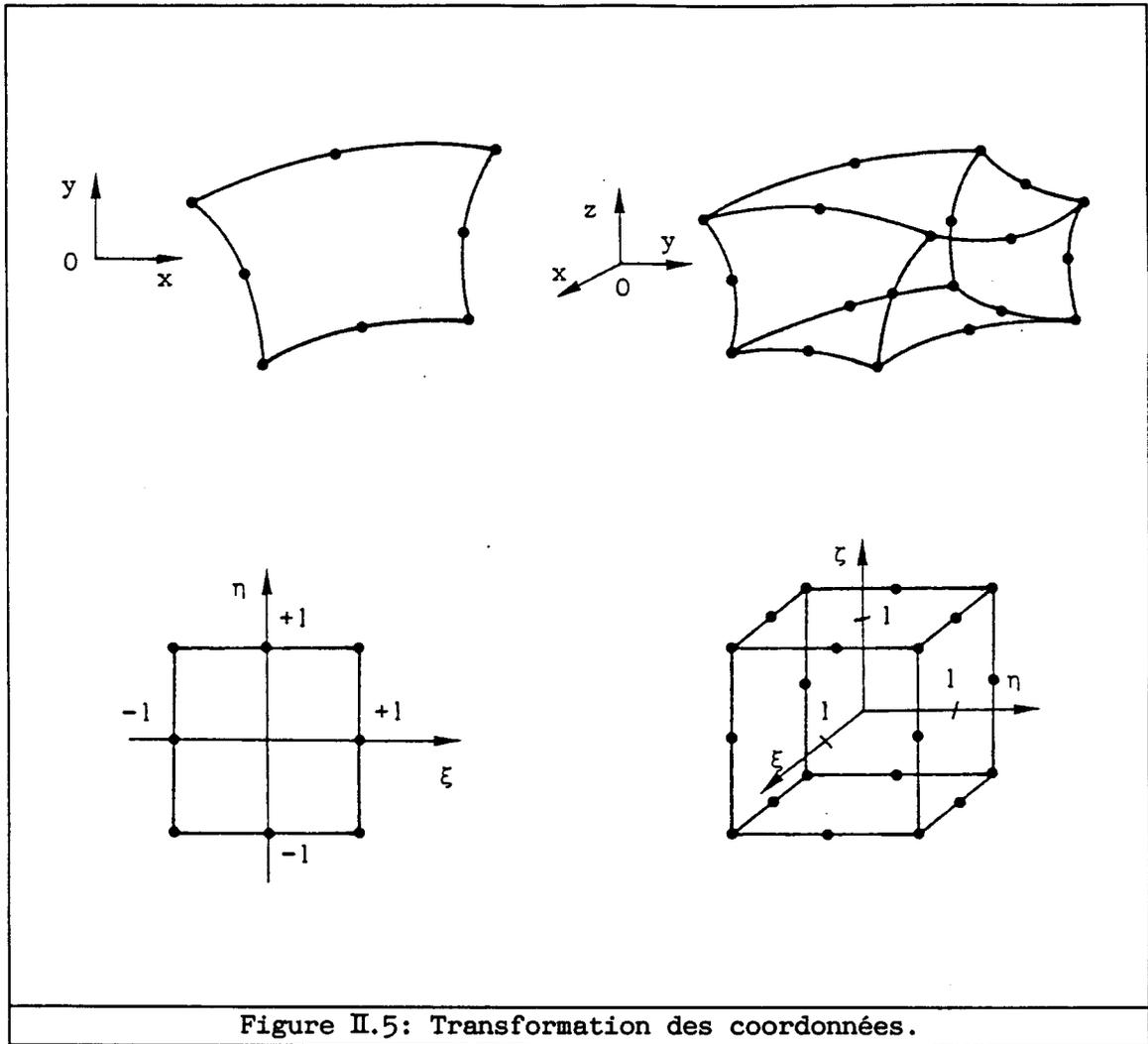


Figure II.5: Transformation des coordonnées.

II.2.6 La prise en compte des pertes.

L'utilisation de constantes élastiques complexes pour décrire les dissipations d'énergie d'origine mécanique dans un problème linéaire est une technique classique, exploitée depuis longtemps [44, 55]. Dans ce cas, sachant que la dépendance temporelle des champs s'exprime dans cette étude en $\exp(-j\omega t)$, les composantes du tenseur des compliances s'écrivent:

$$s_{ij} = s'_{ij} + j s''_{ij}. \quad (\text{II.59})$$

Les parties imaginaires introduites doivent, pour assurer au matériau un caractère passif, vérifier certaines inégalités qui ont été notamment

discutées par R. HOLLAND [55]. Dans le cas d'un matériau élastique isotrope, ces relations se réduisent à:

$$s''_{11} , s''_{44} \geq 0, \quad (\text{II.60})$$

$$s''_{11} \geq |s''_{12}| \quad \text{et} \quad s''_{11} (s''_{11} + s''_{12}) \geq 2 (s''_{12})^2. \quad (\text{II.61})$$

Utilisant alors, de façon plus habituelle, le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν tels que:

$$\begin{aligned} E &= E' - j E'', \\ \nu &= \nu' + j \nu'', \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

avec E' , E'' et ν' constantes positives, on a les relations:

$$s_{11} = \frac{1}{E}, \quad s_{12} = \frac{-\nu}{E}, \quad s_{44} = \frac{2(1+\nu)}{E}, \quad (\text{II.63})$$

qui entraînent les deux inégalités:

$$\frac{-E''(1+\nu')}{E'} \leq \nu'' \leq \frac{E''}{E'} \frac{1-2\nu'}{2}. \quad (\text{II.64})$$

La prise en compte des pertes s'effectue dès l'assemblage des éléments, après la lecture des caractéristiques des matériaux et les éléments mécaniques bidimensionnels (triangle à 6 noeuds ou quadrilatère à 8 noeuds) ou tridimensionnels (tétraèdre à 10 noeuds, prisme à 15 noeuds ou hexaèdre à 20 noeuds) ont été développés pour répondre à cet objectif [44]. Les propriétés des matériaux étant complexes, la matrice de rigidité pour le domaine élastique, définie à l'équation (II.37), et le champ de déplacement deviennent donc complexes. La quantité variationnelle L_{e1} associée au système élastique (II.40) s'écrit alors:

$$L_{e1} = \sum_e \frac{1}{2} \left(\underline{U}^{*eT} [K^e] \underline{U}^e \right) - \frac{1}{2} \omega^2 \left(\underline{U}^{*eT} [M^e] \underline{U}^e \right) - \underline{U}^{*eT} \underline{F}^e \quad (\text{II.65})$$

où l'astérisque désigne le conjugué de toute quantité complexe.

II.3 APPLICATION DES CONDITIONS DE PERIODICITE AU MODELE ELEMENTS FINIS.

Chaque secteur élémentaire limité par les lignes (V1), (V2), (+) et (-), décrit schématiquement à la figure II.2, peut être modélisé à l'aide de la méthode des éléments finis. Les notations sont alors définies à la figure II.7, sur laquelle le domaine solide Ω_s est en contact avec le milieu fluide infini Ω_f , par l'intermédiaire de la surface S_i . Ω_f est décomposé en trois parties, Ω_{f_+} , Ω_{f_+} et Ω_{f_-} , par les surfaces S_+ et S_- qui vont jouer le rôle de la surface S_∞ . Seuls Ω_s et Ω_{f_+} sont, de fait, divisés en éléments finis, connectés par des noeuds. Le traitement général de ce problème conduit au système d'équations:

$$\begin{pmatrix} [K]-\omega^2[M] & -[L] \\ -\rho_f^2 c^2 \omega^2 [L]^T & [H]-\omega^2[M_1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U} \\ \underline{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F} \\ \underline{\Phi} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.66})$$

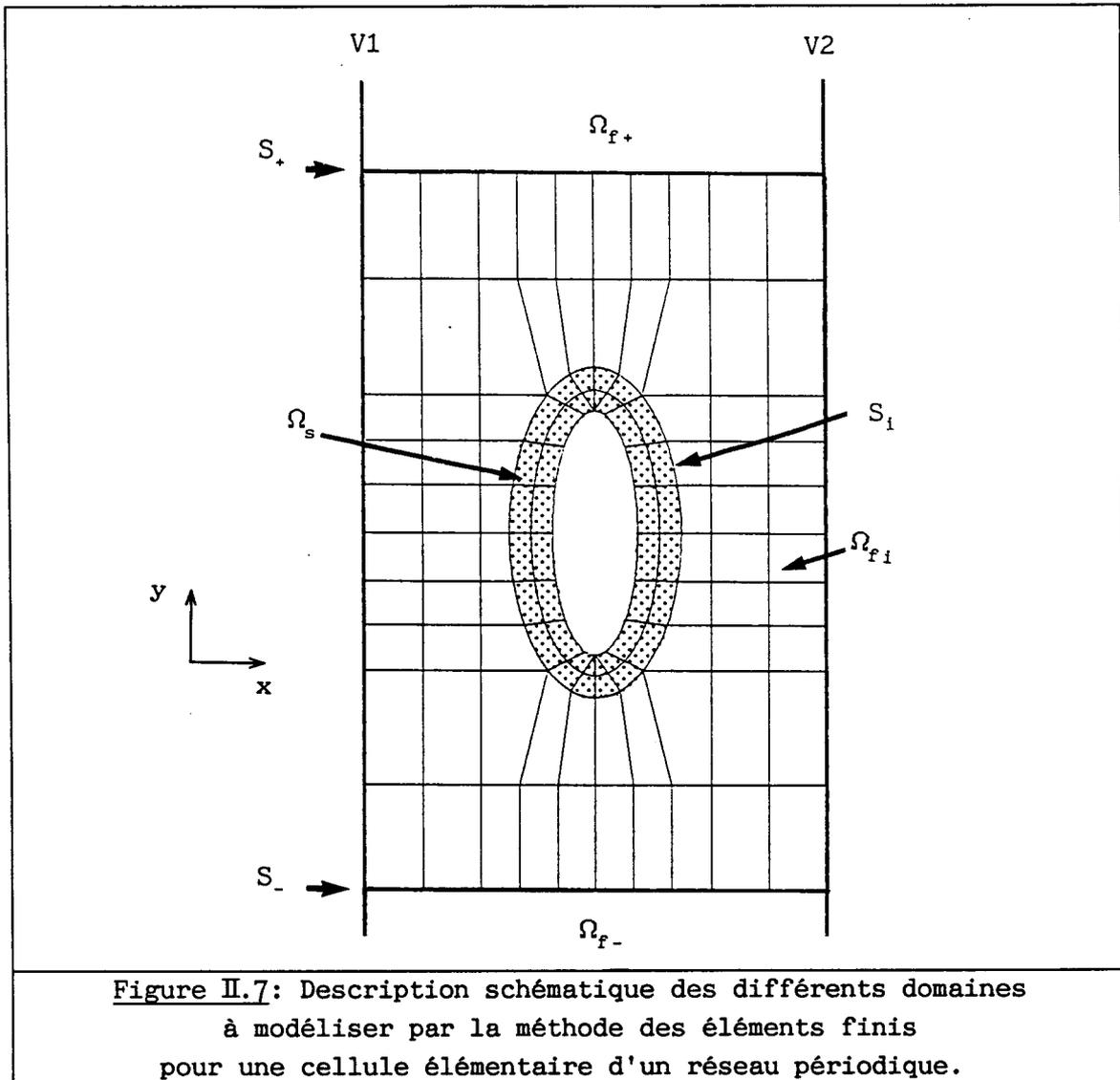
où $[K]$ et $[M]$ sont respectivement les matrices de rigidité et de masse pour la structure Ω_s , $[H]$ et $[M_1]$ sont les matrices de compressibilité et de masse pour le domaine fluide Ω_{f_+} . $[L]$ est une matrice d'interface, qui représente le couplage entre le fluide et la structure sur la surface S_i . ρ_f et c sont respectivement la masse volumique et la vitesse du son dans le fluide. ω est la pulsation. \underline{F} contient les valeurs nodales des forces appliquées. $\underline{\Phi}$ contient les valeurs nodales de la dérivée normale de la pression sur les frontières du domaine fluide. $[K]$, $[M]$, $[H]$, $[M_1]$, $[L]$, \underline{F} et $\underline{\Phi}$ résultent respectivement de l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires $[K^e]$, $[M^e]$, $[H^e]$, $[M_1^e]$, $[L^e]$, \underline{F}^e et $\underline{\Phi}^e$. Le maillage étant réduit à une cellule élémentaire, \underline{F} et $\underline{\Phi}$ incorporent les conditions aux limites imposées par la périodicité et le théorème de Bloch-Floquet. A l'évidence, $\underline{\Phi}$ incorpore également les conditions de raccordement aux domaines fluides semi-infinis Ω_{f_+} et Ω_{f_-} .

L'intégration des conditions de périodicité du système d'équations (II.66) peut se faire en considérant qu'initialement le domaine complet comporte N secteurs identiques (figure II.8), modélisés par éléments finis [58]. Les relations suivantes sont établies, pour des raisons de simplicité, dans le cas d'une maille élémentaire limitée au seul domaine élastique, mais peuvent s'appliquer à toutes les variables caractérisant un problème couplé (pression et déplacement). Les secteurs étant supposés être tous strictement identiques, les matrices de rigidité et de masse sont donc

les mêmes pour chaque cellule élémentaire:

$$K_N = K_{N-1} = \dots = K_{\ell+1} = K_\ell = K_{\ell-1} = \dots = K_1 = K, \quad (\text{II.67})$$

$$M_N = M_{N-1} = \dots = M_{\ell+1} = M_\ell = M_{\ell-1} = \dots = M_1 = M.$$



Considérant alors qu'un secteur donné, noté (ℓ), n'a de frontières communes qu'avec les deux secteurs contigus ($\ell-1$) et ($\ell+1$), on distingue le domaine intérieur (In), la face commune (V1) entre le secteur ($\ell-1$) et le secteur (ℓ), la face commune (V2) entre le secteur (ℓ) et le secteur ($\ell+1$), comme indiqué sur la figure II.8. Entre deux secteurs jointifs, les déplacements \underline{U}_ℓ et $\underline{U}_{\ell+1}$ vérifient:

$$\underline{U}_{\ell+1}^{V1} = \underline{U}_\ell^{V2} = e^{j\psi} \underline{U}_\ell^{V1}, \quad (\text{II.68})$$

où ψ désigne le déphasage entre les deux faces (V1) et (V2), égal à $2dk\sin\theta$. Par ailleurs, de proche en proche, le vecteur des valeurs nodales du déplacement sur un secteur (ℓ) peut aussi être écrit en fonction du vecteur des valeurs nodales du déplacement sur le premier secteur élémentaire:

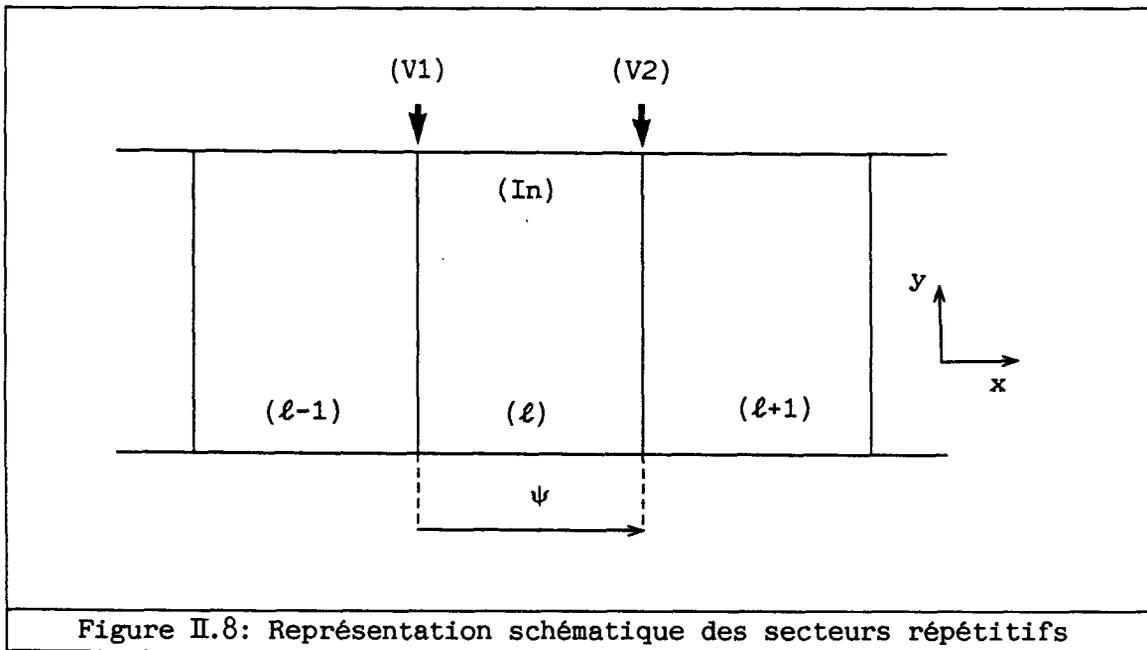
$$\underline{U}_\ell = e^{j(\ell-1)\psi} \underline{U}_1. \quad (\text{II.69})$$

De même, la force appliquée \underline{F} vérifie, du fait de l'équilibre des forces entre deux secteurs jointifs:

$$\underline{F}_{\ell+1}^{V1} = -\underline{F}_\ell^{V2}, \quad \underline{F}_{\ell+1}^{V1} = e^{j\psi} \underline{F}_\ell^{V1}, \quad (\text{II.70})$$

et, comme pour le déplacement:

$$\underline{F}_\ell = e^{j(\ell-1)\psi} \underline{F}_1. \quad (\text{II.71})$$



Ainsi, la quantité variationnelle L_{e1} de l'équation (II.65), en notation complexe, décomposée en une somme d'intégrales sur tous les secteurs (ℓ) du maillage devient:

$$L_{e1} = \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{2} \left(\underline{U}_\ell^{*T} [K] \underline{U}_\ell \right) - \frac{1}{2} \omega^2 \left(\underline{U}_\ell^{*T} [M] \underline{U}_\ell \right) - \underline{U}_\ell^{*T} \underline{F}_\ell, \quad (\text{II.72})$$

où l'astérisque désigne le conjugué de toute quantité complexe. Elle se

réduit immédiatement, considérant les relations (II.69) et (II.71), à :

$$L_{e1} = \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{2} \left(\underline{U}_1^{*T} [K] \underline{U}_1 \right) - \frac{1}{2} \omega^2 \left(\underline{U}_1^{*T} [M] \underline{U}_1 \right) - \underline{U}_1^{*T} \underline{F}_1, \quad (\text{II.73})$$

soit, puisque les matrices de rigidité et de masse ne dépendent pas de l'indice (ℓ):

$$L_{e1} = \frac{N}{2} \left(\underline{U}_1^{*T} \left[[K] - \omega^2 [M] \right] \underline{U}_1 \right) - N \underline{U}_1^{*T} \underline{F}_1. \quad (\text{II.74})$$

Dès lors, l'application du principe variationnel conduit à minimiser L_{e1} par rapport aux valeurs nodales du champ de déplacement \underline{U}_1 . Afin de conserver dans l'expression finale le vecteur \underline{U}_1 et non son complexe conjugué, la quantité $2L_{e1}/N$ est dérivée par rapport aux composantes de \underline{U}_1^* . Par ailleurs, les vecteurs des valeurs nodales du déplacement et de la force appliquée sont décomposés de façon à faire apparaître dans leur dénomination le découpage selon les domaines (V1), (In) et (V2). Les relations de phase (II.68) et (II.70) entre les noeuds des lignes (V1) et (V2) permettent d'écrire:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1^T &= \left[\left(\underline{U}^{V1} \right), \left(\underline{U}^{In} \right), \left(e^{j\psi} \underline{U}^{V1} \right) \right]^T, \\ \underline{F}_1^T &= \left[\left(\underline{F}^{V1} \right), \left(\underline{Q} \right), \left(-e^{j\psi} \underline{F}^{V1} \right) \right]^T. \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

Les vecteurs \underline{U}^{V1} et \underline{F}^{V1} sont de taille $n1$, $n1$ désignant le nombre de degrés de liberté associés aux lignes (V1) et (V2). Le vecteur \underline{U}^{In} est de taille $n2$, $n2$ désignant le nombre de degrés de liberté associés au domaine intérieur (In). Dans le domaine intérieur, les forces appliquées sur les noeuds sont nulles. De la même façon, les matrices de rigidité et de masse sont décomposées sous la forme:

$$\left[[K] - \omega^2 [M] \right] = [Q] = \begin{bmatrix} Q^{V1,V1} & Q^{V1,In} & Q^{V1,V2} \\ Q^{In,V1} & Q^{In,In} & Q^{In,V2} \\ Q^{V2,V1} & Q^{V2,In} & Q^{V2,V2} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.76})$$

Le système à minimiser est alors :

$$\begin{aligned}
\frac{2L_{e1}}{N} = & \sum_{i=1}^{n1} \left(U_i^{V1} \right)^* \left\{ \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{V1,V1} U_j^{V1} + \sum_{j=1}^{n2} Q_{i,j}^{V1,I_n} U_j^{I_n} + \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{V1,V2} e^{j\psi} U_j^{V1} \right\} \\
& + \sum_{i=1}^{n2} \left(U_i^{I_n} \right)^* \left\{ \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{I_n,V1} U_j^{V1} + \sum_{j=1}^{n2} Q_{i,j}^{I_n,I_n} U_j^{I_n} + \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{I_n,V2} e^{j\psi} U_j^{V1} \right\} \\
& + \sum_{i=1}^{n1} \left(e^{j\psi} U_i^{V1} \right)^* \left\{ \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{V2,V1} U_j^{V1} + \sum_{j=1}^{n2} Q_{i,j}^{V2,I_n} U_j^{I_n} + \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{V2,V2} e^{j\psi} U_j^{V1} \right\} \\
& - 2 \sum_{i=1}^{n1} \left(U_i^{V1} \right)^* \left(F_i^{V1} \right) - 2 \sum_{i=1}^{n1} \left(e^{j\psi} U_i^{V1} \right)^* \left(- e^{j\psi} F_i^{V1} \right),
\end{aligned} \tag{II.77}$$

où la paire d'indices i, j désigne classiquement la place de l'élément dans la matrice, c'est-à-dire à la ligne i et à la colonne j . Il est clair que la dernière ligne de cette équation, relative aux forces appliquées, a une contribution nulle. La quantité variationnelle est enfin dérivée par rapport à $\left(U_i^{V1} \right)^*$ et $\left(U_i^{I_n} \right)^*$. Cette opération fait intervenir des dérivations d'un nombre complexe par rapport à son conjugué. L'étude de ce terme peut être aisément réalisée en décomposant tout nombre complexe z sous la forme $z = x + jy$, avec x et y réels, et en considérant une fonction d'une variable complexe $f(z, z^*)$. On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} \right), \tag{II.78}$$

d'où, en posant $f(z, z^*) = z$:

$$\frac{\partial z}{\partial z^*} = 0, \tag{II.79}$$

puisque les variables x et y sont supposées indépendantes.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{2L_{e1}}{N} \right)}{\partial (U_i^{V1})^*} &= \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{V1,V1} U_j^{V1} + \sum_{j=1}^{n2} Q_{i,j}^{V1,In} U_j^{In} + \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{V1,V2} e^{j\psi} U_j^{V1} \\ &+ e^{-j\psi} \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{V2,V1} U_j^{V1} + e^{-j\psi} \sum_{j=1}^{n2} Q_{i,j}^{V2,In} U_j^{In} + \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{V2,V2} U_j^{V1}, \end{aligned} \quad (II.80)$$

et :

$$\frac{\partial \left(\frac{2L_{e1}}{N} \right)}{\partial (U_i^{In})^*} = \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{In,V1} U_j^{V1} + \sum_{j=1}^{n2} Q_{i,j}^{In,In} U_j^{In} + \sum_{j=1}^{n1} Q_{i,j}^{In,V2} e^{j\psi} U_j^{V1}. \quad (II.81)$$

Minimisant la quantité variationnelle et regroupant sous forme matricielle les deux équations, on obtient :

$$\begin{bmatrix} [Q^{V1,V1} + Q^{V2,V2} + e^{j\psi} Q^{V1,V2} + e^{-j\psi} Q^{V2,V1}] & [Q^{V1,In} + e^{-j\psi} Q^{V2,In}] \\ [Q^{In,V1} + e^{j\psi} Q^{In,V2}] & [Q^{In,In}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}^{V1} \\ \underline{U}^{In} \end{Bmatrix} = \underline{\{0\}} \quad (II.82)$$

Sous cette forme, le système d'équations à résoudre pour le sous-domaine élastique est modifié par combinaisons linéaires de lignes et de colonnes afin de tenir compte de la relation de phase entre les noeuds des lignes (V1) et (V2). En termes d'éléments finis, cette condition se traduit par une condensation des degrés de liberté associés aux noeuds de la ligne (V2). Après ces modifications, la matrice obtenue est hermitique. D'autres approches [59-61], utilisant directement l'expression matricielle du système à résoudre et non pas la formulation variationnelle, permettent d'aboutir à une matrice identique à celle explicitée à l'équation (II.82).

Une relation équivalente à (II.82) est établie dans le cas d'une maille élémentaire limitée au seul domaine fluide. Dans ce cas, les matrices de compressibilité [H] et de masse cohérente [M₁] pour le domaine fluide Ω_{f1}, le vecteur des valeurs nodales de la pression \underline{p} et de sa dérivée normale $\underline{\phi}$ jouent le rôle, respectivement, des matrices de rigidité [K] et de masse cohérente [M] pour le solide, des vecteurs des valeurs nodales du déplacement \underline{U} et de la force appliquée \underline{F} . Mais, alors que, pour

la maille élastique, seule la force appliquée entre deux secteurs jointifs est non nulle (II.75), pour la maille fluide $\underline{\Phi}$ contient les valeurs nodales de la dérivée normale de la pression sur les frontières du domaine fluide, c'est-à-dire qu'il incorpore les conditions de raccordement aux domaines fluides semi-infinis Ω_{f+} et Ω_{f-} . Ces termes sont non nuls et sont explicités dans la section suivante.

II.4 APPLICATION DES CONDITIONS DE CONTINUITÉ POUR LA PRESSION ET SA DERIVÉE NORMALE AU MODÈLE ÉLÉMENTS FINIS.

Ecrire la relation de phase entre deux noeuds séparés du pas du réseau permet de réduire le maillage à un seul secteur répétitif. De plus, cette relation a permis de donner les conditions aux limites pour deux secteurs jointifs. Pour prendre en compte l'effet des deux domaines fluides externes, le champ de pression dans le domaine éléments finis doit être raccordé au champ de pression donné sous forme d'une série d'ondes planes par les relations (II.12) et (II.14). Pour cela, le vecteur $\underline{\Phi}$ est décomposé sous la forme:

$$\{\underline{\Phi}\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\Phi}_- \\ \underline{\Phi}_I \\ \underline{\Phi}_+ \end{array} \right\}, \quad (\text{II.83})$$

où les noeuds d'une cellule élémentaire sont regroupés en trois parties: la ligne frontière (-), le domaine intérieur (I) et la ligne frontière (+). Dans la suite de cette section, puisque le formalisme est le même pour les deux lignes frontières (+) et (-), les relations détaillées correspondent à la ligne frontière (+) uniquement. $\underline{\Phi}_+$ résulte de l'assemblage des vecteurs élémentaires:

$$\underline{\Phi}_+^e = \int_{S_+^e} \{N_+^e\}^T \Phi^* dS_+^e, \quad (\text{II.84})$$

où Φ^* est la dérivée normale de la pression sur la frontière (+). $\{N_+^e\}^T$ est le vecteur des fonctions de forme associées à l'élément fini S_+^e , élément situé sur la surface frontière S_+ dont la ligne (+) est la trace dans le plan xOy . Pour relier Φ^* et p^* , les développements en série des équations (II.12) et (II.14) sont d'abord réduits à $2M+1$ termes, n variant de

-M à +M où M est un paramètre qui dépend du maillage et de la position de la frontière par rapport à la structure diffractante. La valeur de M joue le rôle de paramètre d'optimisation et est discutée ultérieurement. Ainsi, en notation contractée:

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \left(e^{j\left(\frac{n\pi}{d} + k\sin\theta\right)x} \right)^T \left(T_n^\Phi e^{jk_n y} \right), \\ p^* &= \left(e^{j\left(\frac{n\pi}{d} + k\sin\theta\right)x} \right)^T \left(T_n^p e^{jk_n y} \right), \end{aligned} \quad (\text{II.85})$$

où chaque vecteur est construit avec les 2M+1 valeurs des quantités écrites entre parenthèses. Ensuite, la relation (II.28) entre p^* et Φ^* est développée, menant à l'équation:

$$T_n^\Phi e^{jk_n y} = n_i \frac{\partial (T_n^p e^{jk_n y})}{\partial x_i} = jk_n (T_n^p e^{jk_n y}), \quad (\text{II.86})$$

qui devient, sous forme matricielle:

$$\left(T_n^\Phi e^{jk_n y} \right) = [D^*] \left(T_n^p e^{jk_n y} \right). \quad (\text{II.87})$$

[D*] est une matrice diagonale d'ordre 2M+1 dont le terme générique est:

$$D_{\ell\ell}^* = jk_{\ell-1-M}, \quad (\text{II.88})$$

pour la ligne, ou la colonne, ℓ . Inclure les relations (II.85) et (II.87) dans l'expression de Φ_+^e donne:

$$\Phi_+^e = \int_{S_+^e} \left\{ N_+^e \right\}^T \left(e^{j\left(\frac{n\pi}{d} + k\sin\theta\right)x} \right)^T [D^*] \left(T_n^p e^{jk_n y} \right) dS_+^e. \quad (\text{II.89})$$

Comme indiqué précédemment, le vecteur Φ_+^e est calculé sur l'élément S_+^e dont la ligne (+) est la trace dans le plan xOy. C'est pourquoi, faisant intervenir une unité de longueur d'élément dans la direction Oz, l'intégration sur la surface S_+^e se réduit à l'intégration par rapport à la variable x , correspondant à la trace de la surface S_+^e dans le plan xOy.

Afin d'exploiter la relation (II.89) dans les équations de la méthode des éléments finis, il faut revenir aux valeurs nodales de la pression et non considérer l'expression de la pression de l'équation (II.85). Pour ce faire, utilisant le développement en série de Fourier de la pression donné à l'équation (II.6), p^* peut à nouveau être mis sous la forme d'un produit de deux vecteurs de taille $2M+1$:

$$p^* = \sum_{n=-M}^{+M} c_n e^{j\left(\frac{n\pi}{d} + k\sin\theta\right)x}, \quad (\text{II.90})$$

$$p^* = \left(e^{j\left(\frac{n\pi}{d} + k\sin\theta\right)x} \right)^T \underline{c},$$

où le vecteur \underline{c} contient les termes c_n définis par:

$$c_n = \frac{1}{2d} \int_{-d}^{+d} p^*(x) e^{-j\left(\frac{n\pi}{d} + k\sin\theta\right)x} dx. \quad (\text{II.91})$$

La fonction pression $p^*(x)$, sur chaque élément de la ligne frontière (+) peut être exprimée en fonction des valeurs nodales de la pression, par l'intermédiaire des fonctions de forme (annexe 1). Sur l'élément de la ligne S_+^e :

$$p^*(x) = \left\{ N_+^e \right\}^T \underline{p}_+^e, \quad (\text{II.92})$$

\underline{p}_+^e étant le vecteur des valeurs nodales de p^* . Regroupant alors les vecteurs élémentaires des valeurs nodales de la pression, l'expression générale des termes c_n , explicitée en annexe 3, devient:

$$c_n = \left[\sum_e \frac{1}{2d} \int_{S_+^e} e^{-j\left(\frac{n\pi}{d} + k\sin\theta\right)x} \left\{ N_+^e \right\}^T dx \right] \underline{p}_+ = \left\{ A_n^+ \right\}^T \underline{p}_+, \quad (\text{II.93})$$

où $\left\{ A_n^+ \right\}^T$ est une matrice ligne. Finalement, le vecteur \underline{c} s'écrit de la façon suivante:

$$\underline{c} = [A^+] \underline{p}_+. \quad (\text{II.94})$$

La matrice $[A^+]$ contient $2M+1$ lignes $\left\{ A_n^+ \right\}^T$ et son nombre de colonnes est le nombre de noeuds sur la ligne frontière (+). Ainsi, par la décomposition en série de Fourier de la pression, les coefficients T_n^p sont déterminés

sans difficulté à l'aide des relations (II.85), (II.90) et (II.94):

$$\left(\begin{array}{c} T_n^p \\ \sim \end{array} e^{jk_n y} \right) = \underline{C} = [A^+] \underline{P}_+. \quad (\text{II.95})$$

D'autre part, le vecteur $\underline{\Phi}_+^e$ de l'équation (II.89) devient:

$$\underline{\Phi}_+^e = \left[\int_{S_+^e} \left\{ N_+^e \right\}^T \left(e^{j \left(\frac{n\pi}{d} + k \sin \theta \right) x} \right) \begin{array}{c} \sim \\ \sim \end{array} \right]^T [D^+] [A^+] dS_+^e \Big] \underline{P}_+. \quad (\text{II.96})$$

Par assemblage des vecteurs élémentaires $\underline{\Phi}_+^e$, le vecteur des valeurs nodales de la dérivée normale sur la frontière fluide S_+ s'exprime finalement par:

$$\underline{\Phi}_+ = \left[\sum_e \int_{S_+^e} \left\{ N_+^e \right\}^T \left(e^{j \left(\frac{n\pi}{d} + k \sin \theta \right) x} \right) \begin{array}{c} \sim \\ \sim \end{array} \right]^T [D^+] [A^+] dS_+^e \Big] \underline{P}_+. \quad (\text{II.97})$$

A l'aide de l'équation (II.93), il est aisé de reconnaître dans cette dernière relation les lignes conjuguées et transposées de la matrice $[A^+]$.

D'où:

$$\underline{\Phi}_+ = 2d [A^+]^{*T} [D^+] [A^+] \underline{P}_+ = [\Delta^+] \underline{P}_+. \quad (\text{II.98})$$

La ligne frontière (-) est traitée de la même façon et conduit à définir la matrice $[\Delta^-]$. Pour cette frontière, les vecteurs des valeurs nodales de la pression et de sa dérivée normale sont écrits de la façon suivante:

$$\underline{P}_- = \underline{P}_-^i + \underline{P}_-^r, \quad (\text{II.99})$$

$$\underline{\Phi}_- = \underline{\Phi}_-^i + [\Delta^-] \underline{P}_-^r = 2\underline{\Phi}_-^i + [\Delta^-] \underline{P}_-^r, \quad (\text{II.100})$$

où les lettres i et r signifient respectivement incident et réfléchi.

Par ailleurs, il est à noter que la dérivée normale de la pression interne $\underline{\Phi}_i$ se réduit à la dérivée normale de la pression sur les deux faces (V1) et (V2). Or, notant $\underline{\Phi}_{V\ell}$ la dérivée normale de la pression sortant de la face $V\ell$, la relation suivante est toujours vérifiée:

$$\underline{\Phi}_{V2} = -e^{j\psi} \underline{\Phi}_{V1} \quad \text{où } \psi = 2dk \sin \theta. \quad (\text{II.101})$$

De plus, sommer le terme correspondant à la dérivée normale sur la face (V2) après l'opération de condensation et le terme correspondant à la

dérivée normale sur la face (V1) donne un résultat nul. En conséquence, $\underline{\Phi}_1$ est un vecteur nul, résultat à rapprocher du calcul de la force appliquée sur les lignes (V1) et (V2) à partir de l'analogie entre les relations (II.70) et (II.101).

Compte tenu des relations (II.98) et (II.100), exprimant en termes matriciels les conditions de raccordement aux ondes planes, le système (II.66) prend en définitive la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} [K'] - \omega^2 [M'] & -[L'] \\ -\rho_f^2 c^2 \omega^2 [L']^{T*} & [H'] - \omega^2 [M_1'] - \rho_f c^2 [\Delta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U} \\ \underline{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ 2\rho_f c^2 \underline{\Phi}_1' \end{pmatrix} \quad (\text{II.102})$$

L'apostrophe signifie que la condensation des degrés de liberté a été effectuée entre les noeuds des lignes (V1) et (V2). L'apostrophe est appliquée sur chaque matrice puisque, lors du maillage d'une cellule élémentaire, le fluide et la structure peuvent couper les lignes (V1) et (V2).

II.5 RESOLUTION DU SYSTEME.

La résolution du système (II.102) fournit les vecteurs déplacement et pression de la maille élémentaire. Ensuite, les coefficients de réflexion et de transmission peuvent être déterminés à partir des valeurs des pressions sur les lignes (+) et (-).

II.5.1 Calcul des coefficients de réflexion et de transmission.

Puisque la dépendance temporelle n'apparaît plus, et en conservant les notations précédentes de la section II.1, la pression incidente s'écrit:

$$p_i(x,y) = p_i e^{jk(x\sin\theta + y\cos\theta)}. \quad (\text{II.103})$$

La dérivée normale de la pression incidente est:

$$\Phi_i(x,y) = -j p_i k \cos\theta e^{jk(x\sin\theta + y\cos\theta)}. \quad (\text{II.104})$$

L'amplitude de l'onde incidente étant arbitraire, pour des raisons pratiques, elle est notée:

$$\Phi_i(x,y) = -\cos\theta e^{jk(xs\sin\theta+y\cos\theta)}, \quad (\text{II.105})$$

d'où :

$$p_i(x,y) = \frac{-j}{k} e^{jk(xs\sin\theta+y\cos\theta)}. \quad (\text{II.106})$$

Si la fréquence d'étude est telle qu'une seule onde homogène se propage au-delà de la frontière (+), dans la même direction que l'onde incidente, alors, dans le champ lointain, les ondes évanescentes n'ont plus d'influence et la dérivée normale de la pression, exprimée sous forme d'une série dans les équations (II.17) et (II.18), se réduit à:

$$\Phi^+(x,y) \simeq jk_0 T_0^p e^{j(k\sin\theta x + k_0 y)} = jk\cos\theta T_0^p e^{jk(\sin\theta x + \cos\theta y)}, \quad (\text{II.107})$$

$$\Phi^-(x,y) \simeq \Phi_i(x,y) + jk\cos\theta R_0^p e^{-jk(\sin\theta x + \cos\theta y)}.$$

Pour calculer les coefficients de réflexion R_0^p et de transmission T_0^p , il faut utiliser les matrices $[A^-]$ et $[A^+]$, compte tenu de la relation (II.95). Seuls les termes correspondant à $n=0$ doivent être retenus. Etant donné le rangement utilisé pour ces termes, ils correspondent à la ligne centrale des matrices. Ces matrices-lignes sont notées $\{A_0^-\}^T$ et $\{A_0^+\}^T$ et correspondent aux deux frontières $y = y^-$ et $y = y^+$ respectivement. La dérivée normale de la pression sur la frontière (+) s'écrit ainsi:

$$\Phi^+(x,y) = jk\cos\theta \left\{ A_0^+ \right\}^T \underline{P}_+ e^{jk(\sin\theta x + \cos\theta(y-y^+))}, \quad (\text{II.108})$$

d'où, en divisant cette expression par la dérivée normale de la pression incidente et en prenant le module:

$$|T| = k \left| \left\{ A_0^+ \right\}^T \underline{P}_+ \right|. \quad (\text{II.109})$$

Pour le coefficient de réflexion, dans un premier temps, la dérivée normale de la pression réfléchie est calculée sur la frontière (-) par:

$$\Phi_r^-(x,y) = jk\cos\theta \left\{ A_0^- \right\}^T \{ \underline{P}_- - \underline{P}_1 \} e^{-jk(\sin\theta x + \cos\theta(y-y^-))}, \quad (\text{II.110})$$

où le vecteur \underline{P}_1 contient les valeurs nodales de la pression incidente.

Puis, en divisant cette expression par la dérivée normale de la pression incidente et en prenant le module, le coefficient de réflexion s'exprime par:

$$|R| = \left| jk \left\{ A_0 \right\}^T \underline{P} - 1 \right|. \quad (\text{II.111})$$

II.5.2 Critères de convergence et influence des ondes évanescentes.

Il est possible de connaître les amplitudes des ondes de tous ordres sur la frontière (+), en utilisant les équations (II.14), (II.93) et (II.95), afin d'observer l'évolution des contributions des ondes évanescentes ou homogènes en fonction de la position de cette frontière fictive. Cette connaissance est souvent essentielle, car la position de la frontière (+) vis-à-vis de la structure diffractante conditionne la convergence des séries. C'est pourquoi, il est particulièrement intéressant de déterminer la rapidité de décroissance de la première onde non prise en compte, d'ordre $M+1$ ou $-M-1$, et d'évaluer la longueur caractéristique y_c définie par:

$$y_c = \frac{1}{\min(k_{-M-1}, k_{M+1})}. \quad (\text{II.112})$$

La comparaison de cette longueur à la distance entre la structure et la surface (+) renseigne alors sur l'influence de la première onde évanescente non prise en compte dans le développement en série de la pression et de sa dérivée normale. Elle peut conduire à une modification du maillage et ainsi une meilleure convergence des séries.

De plus, repérant l'élément-ligne le plus grand sur la frontière (+), de longueur x_{\max} , le nombre total d'ondes à considérer dans le développement en série de la pression et de sa dérivée normale, $2M+1$, est déterminé à partir de:

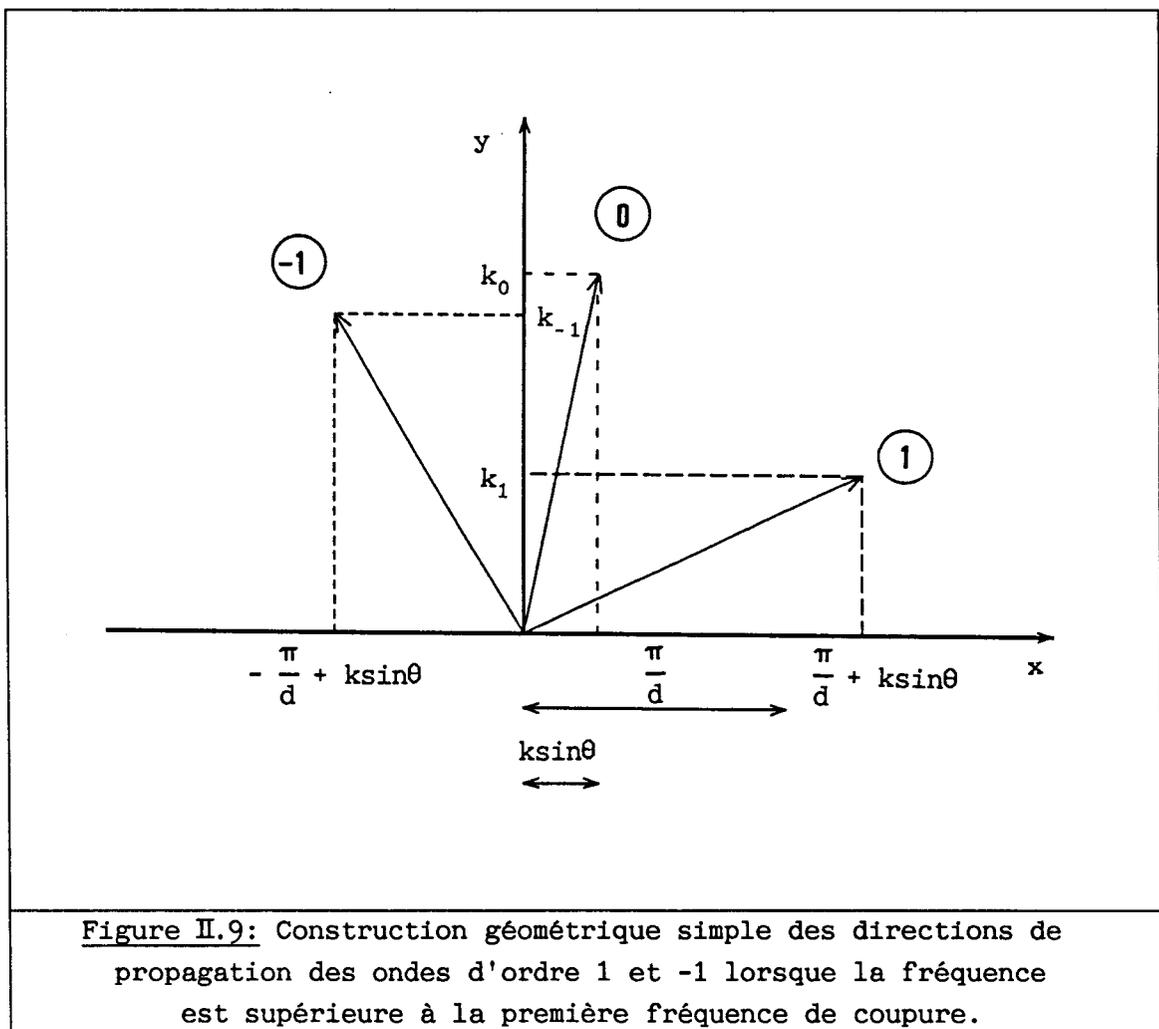
$$M = \text{Ent} \left(\frac{2d}{x_{\max}} \right), \quad (\text{II.113})$$

où la fonction Ent désigne la partie entière. En effet, le champ de pression dans le domaine éléments finis doit être raccordé au champ de pression externe exprimé sous forme d'une combinaison d'ondes planes. L'opération réalisée est alors la projection de fonctions trigonométriques sur une base de fonctions d'interpolation, pour laquelle le théorème d'échantillonnage de Shannon s'applique. A la limite du critère de Shannon,

il est possible de décrire une sinusoïde sur un élément-ligne de la frontière (+), les éléments linéaires utilisés ayant trois noeuds. Il s'avère donc raisonnable de ne pas décrire d'ondes dont la demi-longueur d'onde est inférieure au plus grand élément, ce qui conduit à la relation (II.113). De ce fait, si plusieurs ondes homogènes existent, il faut impérativement que le maillage soit suffisamment dense pour qu'elles puissent toutes être prises en compte.

II.5.3 Analyse des phénomènes d'interférence dans les champs de pression transmis et réfléchi.

Si la fréquence d'étude est telle que plusieurs ondes homogènes, d'ordre 0, 1 et -1 par exemple (figure II.9), se propagent de part et d'autre du réseau, très loin des frontières (+) et (-), ces ondes vont



interférer et donner naissance à une répartition de pression complexe. Les phénomènes de réflexion et de transmission ne sont plus spéculaires. Lorsque l'incidence est normale, l'étude mathématique du module du champ de pression à l'infini conduite en n'utilisant, à titre d'exemple, que les termes d'ordre 0, 1 et -1, suggère plusieurs remarques:

- la période de la fonction pression dans la direction x coïncide avec la période du réseau,
- un calcul mathématique simple montre que la fonction pression admet de même une période λ_y dans la direction y , donnée par:

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k_0 - k_1} \quad (\text{II.114})$$

- la fonction peut donc être étudiée dans le domaine réduit défini par:

$$|p(x,y)| = |p(x+d, y + \frac{\lambda_y}{2})| \quad (\text{II.115})$$

Outre la compréhension de la structure du champ de pression, l'étude de cette situation à laquelle plusieurs ordres contribuent doit aussi fournir un test de conservation de l'énergie acoustique, évident lorsque l'ordre 0 est seul présent. Avec les notations de la figure II.10, on peut de fait démontrer la relation :

$$P_i^2 \xi_0 = P_{t,0}^2 \xi_0 + P_{t,1}^2 \xi_1 + P_{t,-1}^2 \xi_{-1} + P_{r,0}^2 \xi_0 + P_{r,1}^2 \xi_1 + P_{r,-1}^2 \xi_{-1} \quad (\text{II.116})$$

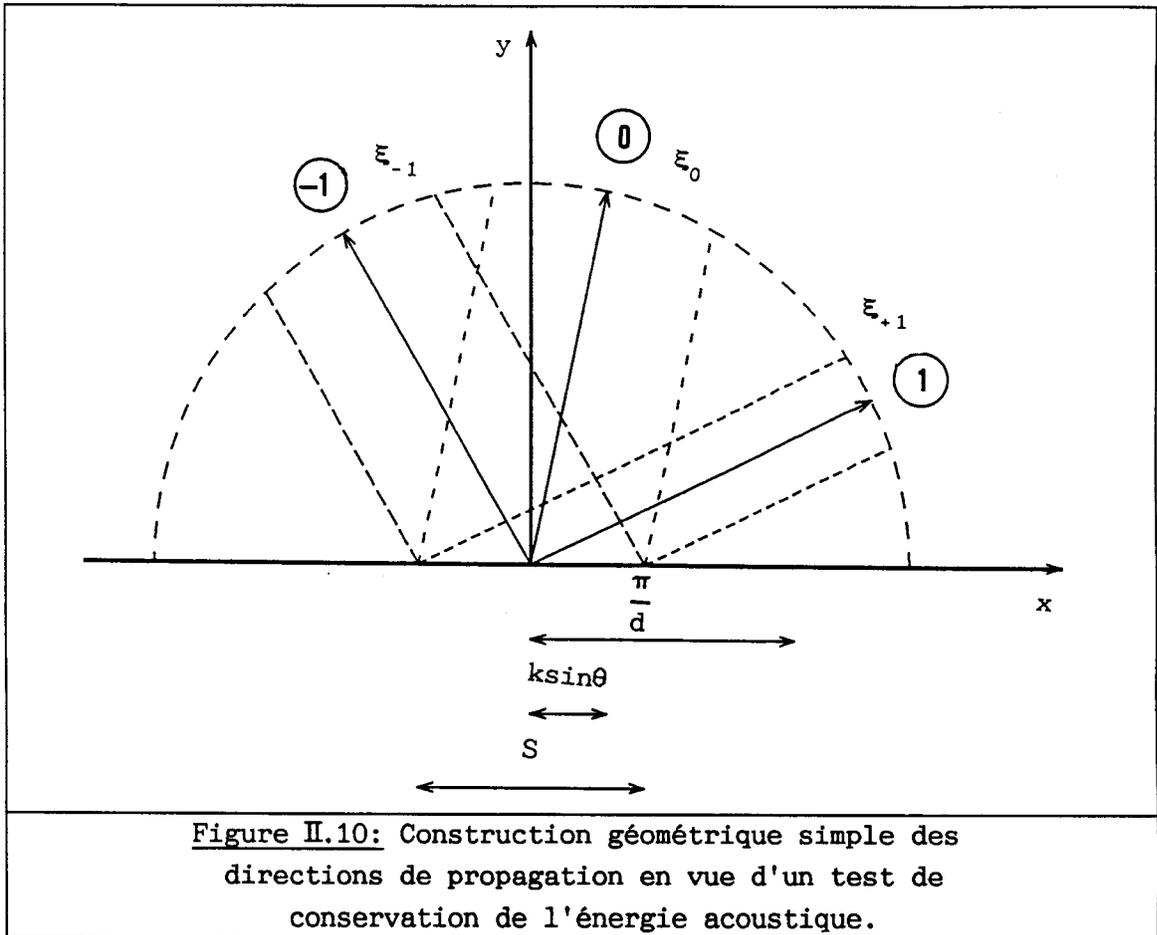
où :

- P_i désigne l'amplitude de la pression incidente,
- $P_{t,i}$ est l'amplitude de la contribution d'ordre i de la pression dans le milieu III, obtenue à partir du développement en séries de Fourier,
- $P_{r,i}$ est l'amplitude de la contribution d'ordre i de la pression dans le milieu I, obtenue à partir du développement en séries de Fourier,
- ξ_i est la section droite traversée par l'onde d'ordre i ,

et :

$$\frac{\xi_i}{\xi_j} = \frac{k_i}{k_j} \quad , \quad k_n^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{d} + k \sin\theta \right)^2 \quad (\text{II.117})$$

Cette relation de conservation est un test simple, qui doit toujours être vérifié dans le cas de structures diffractantes sans pertes internes.



II.5.4 Cas particulier: une seule surface de la structure diffractante est en contact avec le fluide.

Les revêtements anéchoïques ou les plaques raidies par des renforts linéaires, ainsi que les problèmes mettant en évidence des quasi-ondes de Rayleigh, peuvent être traités par cette approche. Dans ce cas, une seule surface de la structure diffractante est en contact avec le fluide. Dans le formalisme, la ligne frontière (+) n'intervient pas et seule la matrice $[\Delta^-]$ est calculée par l'équation (II.100). La résolution du système, analogue à celui de l'équation (II.102), fournit les vecteurs déplacement et

pression de la maille élémentaire. Ensuite, seul le coefficient de réflexion peut être déterminé à partir des valeurs des pressions sur la face (-), comme dans le cas d'une structure entièrement immergée, en utilisant l'équation (II.111).

II.6 CONCLUSION

Le formalisme de la méthode des éléments finis appliqué à la modélisation de structures périodiques à une dimension a été établi. A cette fin, la prise en compte de conditions cycliques dans le code éléments finis ATILA a été réalisée. De même, des relations de raccordement entre les expressions des champs de pressions, écrites soit sur une base d'ondes planes, soit en fonction des valeurs nodales du domaine éléments finis ont été développées pour servir de conditions d'interface sur les frontières de la maille élémentaire. Pour décrire le comportement de réseaux périodiques à une dimension, l'approche éléments finis n'impose pas, contrairement à certaines méthodes développées dans le chapitre 1, de conditions restrictives sur la géométrie, les matériaux ou le champ de déplacement. Elle présente en outre l'avantage indéniable de ne nécessiter que la modification du maillage éléments finis à tout changement de structure diffractante, le développement théorique restant toujours le même. Cette approche permet donc d'envisager l'analyse de réseaux complexes.

L'étape suivante est le test de la méthode développée pour différents réseaux périodiques, en vue de comparer les résultats obtenus par l'approche éléments finis à des résultats de modèles analytiques antérieurs ou à des mesures. Les comparaisons sont élaborées à propos des variations du coefficient de transmission en fonction de la fréquence d'excitation ou de l'angle d'incidence.

CHAPITRE 3

MODELISATION A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS

FINIS DE STRUCTURES PERIODIQUES A UNE DIMENSION:

VALIDATION ET RESULTATS.

Ce chapitre a pour objet de présenter quelques résultats obtenus, à partir du modèle développé précédemment, pour divers réseaux périodiques à une dimension. Dans la première partie, relative à la validation du modèle, des résultats obtenus par éléments finis et à l'aide d'un modèle analytique simple pour décrire la diffusion acoustique par une plaque élastique infinie sont comparés. Ensuite, un cas numérique est analysé permettant de définir l'influence du choix de la maille élémentaire. Enfin, le cas d'une plaque infinie de grande épaisseur est envisagé, permettant d'étudier la diffusion par un plan. Dans la seconde partie, plusieurs exemples sont traités, pour lesquels les résultats du modèle éléments finis sont comparés soit à des modèles analytiques complexes, soit à des mesures. Ces exemples concernent successivement la diffraction d'une onde plane par des réseaux de cylindres circulaires, des réseaux de tubes elliptiques et des réseaux de tubes compliant, monocouches ou multicouches, enrobés ou non d'un matériau viscoélastique. Le dernier cas, analysé en détail, permet d'envisager l'optimisation de réseaux en vue d'applications en acoustique sous-marine. L'ensemble démontre la précision et l'efficacité de cette approche numérique, qui ne souffre plus de restrictions liées à la géométrie des structures diffractantes, à la nature des matériaux qui les constituent ou à la complexité de leur champ de déplacement.

Utilisant la méthode des éléments finis décrite au chapitre précédent, les variations en fonction de la fréquence ou en fonction de l'angle d'incidence du coefficient de transmission peuvent être calculées pour différents types de réseaux. Les coefficients de transmission T et de réflexion R , utilisés dans ce chapitre, exprimés en décibels, sont définis par:

$$T = 20 \log \left| \frac{P_{tr}}{P_i} \right| ; \quad R = 20 \log \left| \frac{P_{re}}{P_i} \right|, \quad (\text{III.1})$$

où P_{tr} est la pression transmise, calculée à partir du terme T_0^p , P_{re} est la pression réfléchie, calculée à partir du terme R_0^p , comme indiqué dans la section II.5.1, et P_i est la pression incidente. Généralement, pour les configurations considérées ici, une seule onde homogène existe et se propage dans la même direction que l'onde incidente, les autres ondes étant évanescentes. Dans tous les cas, même si d'autres ondes homogènes existent dans les deux demi-espaces fluides infinis, les coefficients de transmission et de réflexion sont calculés en utilisant uniquement les termes T_0^p et R_0^p , respectivement. Sur les courbes du coefficient de transmission obtenues, on parle de pertes d'insertion élevées lorsque le niveau transmis est faible. Dans chaque exemple, la tangente de l'angle de pertes, ou pourcentage de pertes, est définie comme la valeur absolue du rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle du module d'Young.

Dans ce chapitre et les suivants, les représentations graphiques des champs de déplacement obtenus à l'aide du code ATILA sont toujours construites suivant les mêmes principes:

- les traits pointillés correspondent à la position de repos de la structure, les traits pleins au champ de déplacement de la structure, à la fréquence considérée,

- les parties réelle et imaginaire du champ de déplacement correspondent à deux instants différents, séparés d'un quart de période, et les amplitudes sont normalisées indépendamment.

III.1 VALIDATION DU MODELE.

III.1.1 Diffusion acoustique par une plaque élastique.

Il s'agit d'étudier la diffusion d'ondes acoustiques par une plaque plane, infinie, dont le matériau, élastique, homogène et isotrope, présente des pertes. Pour ce problème existe un modèle analytique simple, rappelé brièvement dans une première section [62, 63]. Ensuite, deux cas de plaques infinies sont étudiés, le premier mettant en évidence l'influence des pertes dans le matériau, le second permettant une bonne description des ondes de Lamb.

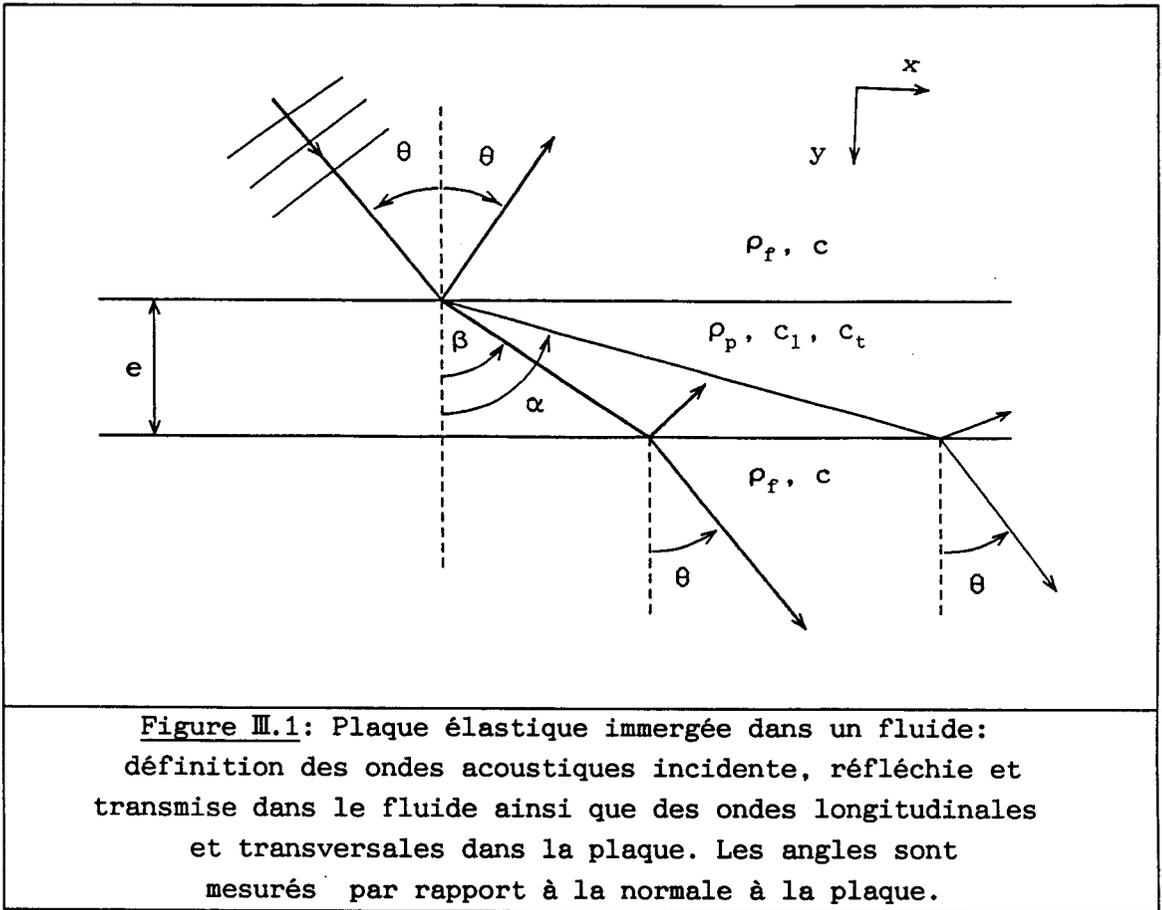
III.1.1.a Modèle analytique [62, 63].

Soit une onde acoustique plane, monochromatique, de fréquence $f = \omega/c$, se propageant dans un liquide parfait, de masse volumique ρ_f , dans lequel la vitesse du son est c . Cette onde arrive sur une plaque élastique infinie immergée, sous un angle d'incidence θ . L'épaisseur de la plaque est notée e . Le matériau constituant la plaque est caractérisé par sa masse volumique ρ_p , la vitesse des ondes longitudinales c_l et la vitesse des ondes transversales c_t . L'onde plane acoustique crée dans la plaque des ondes longitudinales et transversales, se réfractant respectivement sous les angles α et β (figure III.1). De l'autre côté de la plaque existe une onde transmise d'angle θ . Les relations suivantes sont nécessairement vérifiées:

$$\frac{c}{\sin\theta} = \frac{c_l}{\sin\alpha} = \frac{c_t}{\sin\beta} . \quad (\text{III.2})$$

Les expressions des coefficients de transmission et de réflexion de l'onde acoustique dépendent de l'angle d'incidence. Trois domaines différents sont à considérer:

- a) $\theta < \theta_1$, où $\sin\theta_1 = c/c_l$
- b) $\theta_1 < \theta < \theta_t$, où $\sin\theta_t = c/c_t$
- c) $\theta > \theta_t$.



Dans le domaine (a), tous les angles sont réels et les ondes dans le milieu solide sont homogènes et planes. Les coefficients de transmission et de réflexion, notés respectivement T et R, s'écrivent:

$$T = \frac{c_s c_a - \tau^2}{(c_s - j\tau)(c_a + j\tau)}, \quad R = j\tau \frac{c_a + c_s}{(c_s - j\tau)(c_a + j\tau)}, \quad (\text{III.3})$$

où:

$$\tau = \frac{\rho_f c}{\rho_p c_1} \frac{\cos \alpha}{\cos \theta},$$

$$c_s = \cos^2 2\beta \cot\left(\frac{\pi f e}{c_1} \cos \alpha\right) + \left(\frac{c_t}{c_1}\right)^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \cot\left(\frac{\pi f e}{c_t} \cos \beta\right), \quad (\text{III.4})$$

$$c_a = \cos^2 2\beta \tan\left(\frac{\pi f e}{c_1} \cos \alpha\right) + \left(\frac{c_t}{c_1}\right)^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \tan\left(\frac{\pi f e}{c_t} \cos \beta\right).$$

Dans le domaine (b), l'angle α est complexe. Les ondes longitudinales sont évanescentes mais les ondes transversales restent homogènes et planes. T et R sont calculés comme précédemment, moyennant quelques modifications dans

la définition formelle de α , données par:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - j|\alpha''| \quad \text{avec} \quad \alpha'' = -|\cosh^{-1}(\sin\alpha)|, \quad (\text{III.5})$$

$$\cos\alpha = j \sinh|\alpha''|.$$

Dans le domaine (c), l'angle β devient lui aussi complexe. Les ondes longitudinales et transversales dans la plaque sont évanescentes. T et R sont déterminés comme dans le domaine (a), mais ces équations restent valables si on affecte à β les modifications déjà appliquées à α dans le domaine (b). Si les pertes internes dans le matériau constituant la plaque sont prises en compte, le module d'Young utilisé devient complexe, avec une partie imaginaire négative. Les vitesses des ondes longitudinales et transversales ainsi que les angles α et β sont alors toujours complexes, mais les relations précédentes restent valables.

Les ondes planes élémentaires qui se propagent dans une plaque infinie et élastique, mais placée dans le vide, se classent en deux catégories:

- des ondes transversales,
- des ondes de LAMB, telles que les composantes u_x et u_y , du champ de déplacement soient non nulles. Deux cas sont possibles, en terme de symétrie de ces ondes par rapport au plan médian de la plaque, appelées les ondes de LAMB SYMETRIQUES et ondes de LAMB ANTISYMETRIQUES.

L'équation donnant les fréquences des modes propres symétriques correspond à $c_g = 0$. De même, l'équation donnant les fréquences des modes propres antisymétriques correspond à $c_a = 0$. Si alors la plaque est immergée dans un liquide, les ondes qui peuvent se propager réémettent au cours de leur propagation une partie de leur énergie dans le liquide. Ces ondes peuvent être appelées quasi-ondes de LAMB et correspondent aux pôles du coefficient de réflexion. Si enfin $\tau \ll 1$, ce qui est le cas par exemple pour une plaque d'aluminium dans l'eau, on peut montrer que les fréquences des quasi-ondes de LAMB sont égales aux fréquences des modes propres. A ces fréquences, le coefficient de transmission T vaut 1.

III.1.1.b Application à la diffusion par une plaque élastique en PVC.

L'exemple test est une plaque infinie, de 12 cm d'épaisseur, en PVC. Les constantes suivantes ont été utilisées pour le matériau: $E = 4.1 \cdot 10^9$ Pa, $\nu = 0.4$, $\rho = 1400$ kg.m⁻³. L'onde acoustique plane est incidente sous un angle $\theta = 10^\circ$. Les valeurs du coefficient de transmission obtenues pour différentes fréquences à l'aide du modèle analytique et de la méthode des éléments finis sont comparées à la figure III.2. La bande de fréquence analysée s'étend de 600 Hz à 10 kHz. Différents pourcentages de pertes internes ont par ailleurs été utilisés comme paramètres: 0%, 10%, 40% et 80%. Dans tous les cas, un très bon accord est obtenu entre les deux approches, fournissant une première validation du modèle. Toutefois, les deux modèles ne se juxtaposent pas exactement à très basses fréquences. En effet, à ces fréquences, la matrice de rigidité du solide [K] prédomine face à la matrice de masse [M], puisque le facteur ω^2 devient très faible. Ceci induit des problèmes numériques, liés à la singularité de [K], du fait de l'existence d'un mode de translation rigide de la structure. Une étude préliminaire, effectuée pour connaître l'influence du maillage sur le résultat en très basses fréquences, a néanmoins montré un accord parfait pour une fréquence de 100 Hz. L'analyse fine du diagramme obtenu permettrait la détermination des quasi-ondes de Lamb de la plaque. La discussion de ce point particulier fera l'objet de la section suivante.

III.1.1.c Mise en évidence des ondes de LAMB.

Dans ce test, une plaque infinie en aluminium, d'épaisseur 10 cm, est plongée dans l'eau. Cette lame est excitée par une onde plane de fréquence 20 kHz mais dont l'angle d'incidence varie entre 0° et 45° . Puisque la plaque est infinie, une seule onde homogène se propage dans la direction y , et l'amplitude des autres composantes a été obtenue nulle. Le pas du réseau peut donc être choisi assez grand pour autoriser l'observation des ondes de Lamb. La figure III.3 montre la variation avec l'angle du coefficient de réflexion de la plaque, calculé à l'aide du modèle analytique puis de la méthode des éléments finis. Un très bon accord entre ces modèles est de nouveau à souligner.

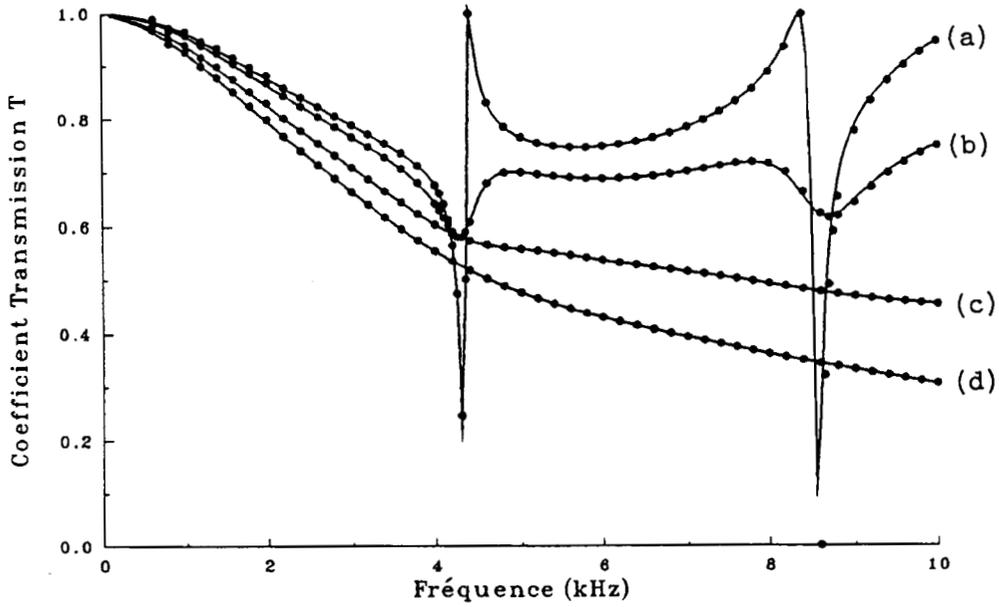


Figure III.2: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'une plaque élastique $\theta = 10^\circ$, échelle linéaire.

(a): $\text{tg}\delta = 0\%$, (b): $\text{tg}\delta = 10\%$, (c): $\text{tg}\delta = 40\%$, (d): $\text{tg}\delta = 80\%$.
Points (FEM), trait plein (Analytique).

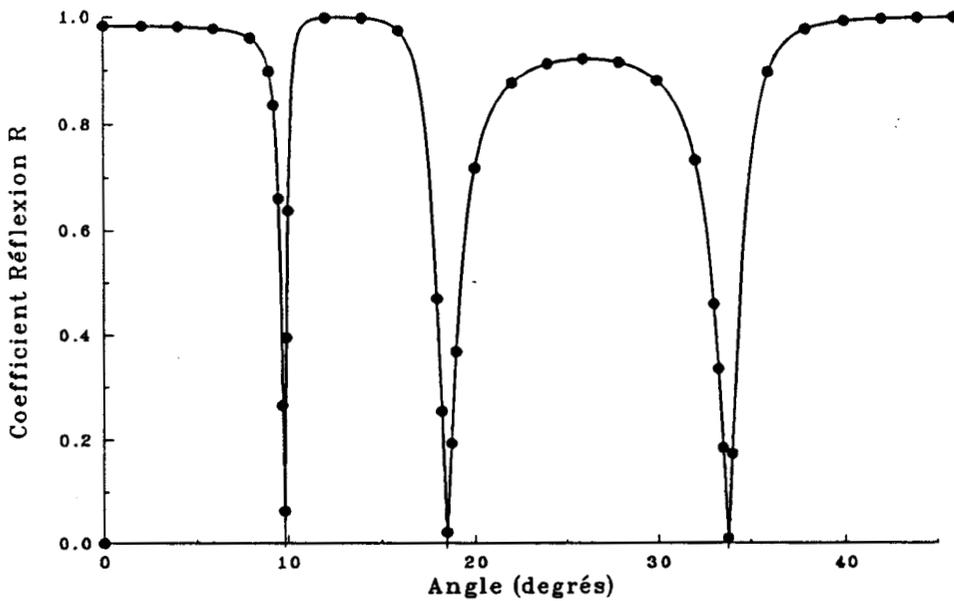
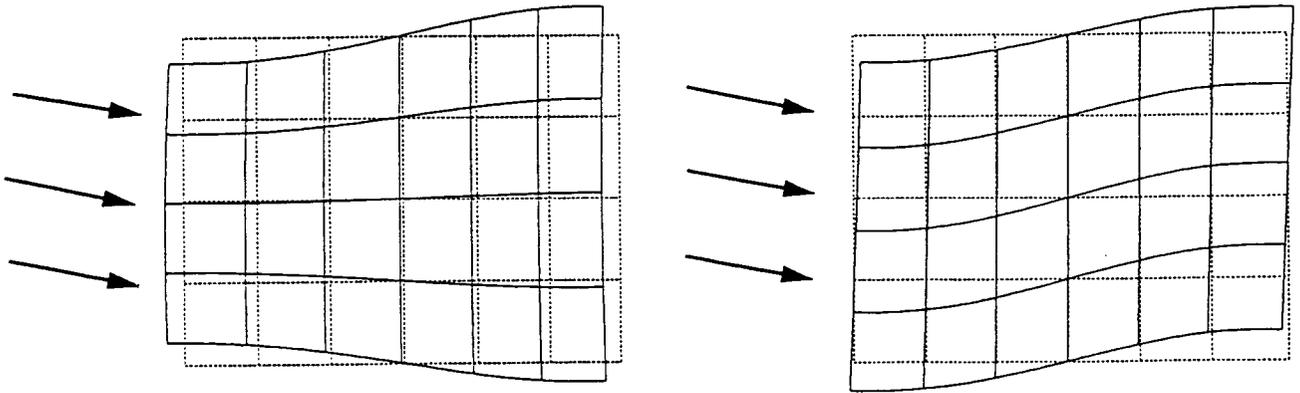
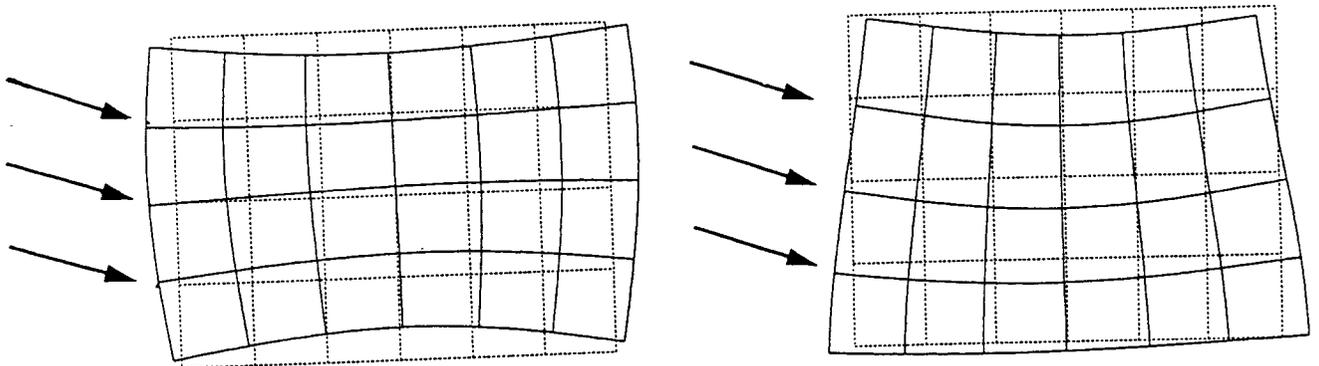


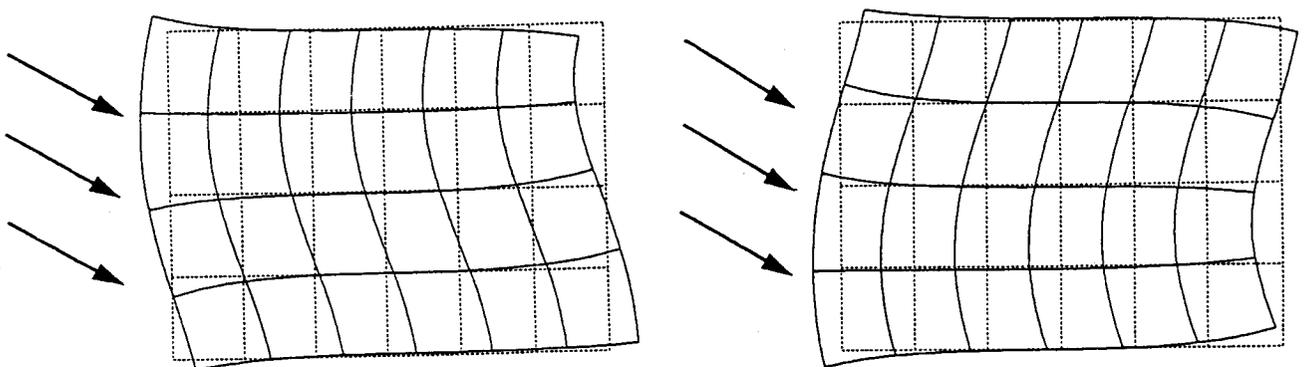
Figure III.3: Variation en fonction de l'angle d'incidence du coefficient de réflexion d'une plaque en aluminium.
Points (FEM), trait plein (Analytique).



(a): $\theta_1 = 9.8^\circ$, $R = 0.064$; onde de Lamb antisymétrique.



(b): $\theta_2 = 18.5^\circ$, $R = 0.020$; onde de Lamb symétrique.



(c): $\theta_3 = 33.75^\circ$, $R = 0.0068$; onde de Lamb antisymétrique.

Figure III.4: Parties réelle et imaginaire du déplacement de la structure.

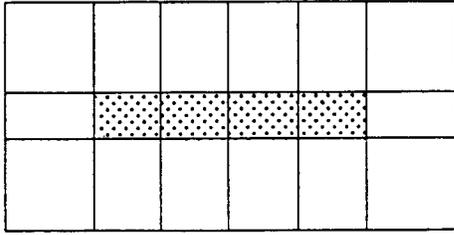
Le calcul analytique des modes propres de la plaque à la fréquence étudiée, explicité précédemment, donne deux ondes de Lamb antisymétriques à $\theta_1 = 9.8^\circ$ et $\theta_3 = 34.0^\circ$ et une onde de Lamb symétrique à $\theta_2 = 18.5^\circ$. La figure III.3 rend bien compte de ce phénomène, le coefficient de transmission valant 1 pour ces angles. Par ailleurs, à la figure III.4, le champ de déplacement obtenu pour les trois angles précédents est présenté. L'identification des ondes de Lamb symétriques et antisymétriques est évidente.

III.1.2 Influence du choix de la maille élémentaire.

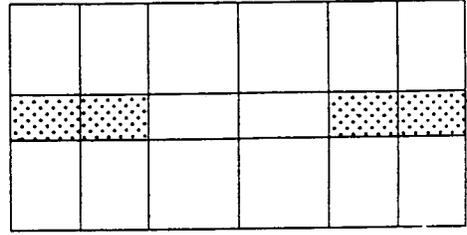
Dans cette section, des tubes, pleins infinis, élastiques, de section rectangulaire (largeur 6 cm, épaisseur 1 cm) sont disposés côte à côte de façon à former un réseau de pas $2d = 10$ cm, le grand axe des tubes étant parallèle au plan du réseau. Les caractéristiques du matériau qui le compose sont: $E = 1.11 \cdot 10^9$ Pa, $\nu = 0.3$, $\rho = 2000$ kg.m⁻³. Le choix de la maille élémentaire devant être indifférent, le coefficient de transmission a été calculé pour plusieurs secteurs répétitifs différents (figures III.5.a à III.5.e).

Les variations du coefficient de transmission en fonction de la fréquence sont représentées pour les angles d'incidence 0° et 30° aux figures III.6.a et III.6.b entre 5 et 7 kHz, l'accord étant parfait en dehors de cette bande. Dans le cas des maillages (III.5.c) et (III.5.d), l'erreur relative est de l'ordre de 1%, du fait de la dissymétrie du maillage de part et d'autre des faces (V1) et (V2). Les éléments bordant les faces (V1) et (V2) étant de même taille pour le maillage (III.5.c), le résultat est meilleur. Les trois autres maillages donnent des résultats identiques entre eux.

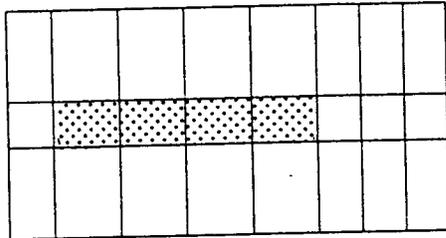
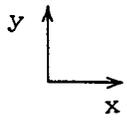
Pour les trois premiers maillages, la longueur d'onde dans l'eau étant supérieure au pas du réseau, une seule onde homogène se propage dans la direction normale au plan des tubes. En revanche, dans le cas du secteur répétitif modélisé à la figure III.5.e, pour lequel la période est double, cette condition n'est pas vérifiée et une onde homogène supplémentaire, qui n'a pas lieu physiquement d'exister, pourrait être trouvée numériquement. Un bref calcul, décrit en annexe 3, montre que l'amplitude de cette onde homogène est nulle, quel que soit l'angle d'incidence.



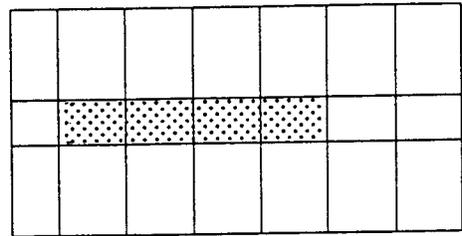
III.5.a



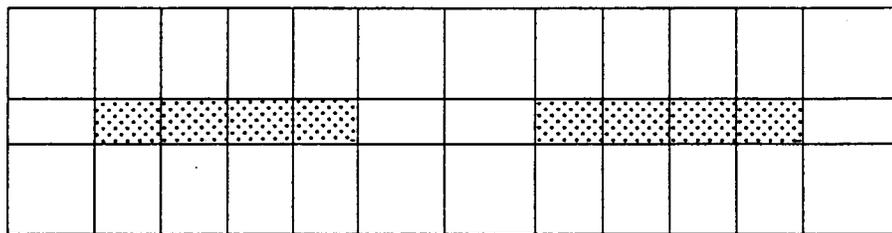
III.5.b



III.5.c



III.5.d



III.5.e

Figure III.5: Modélisation de plusieurs secteurs répétitifs.

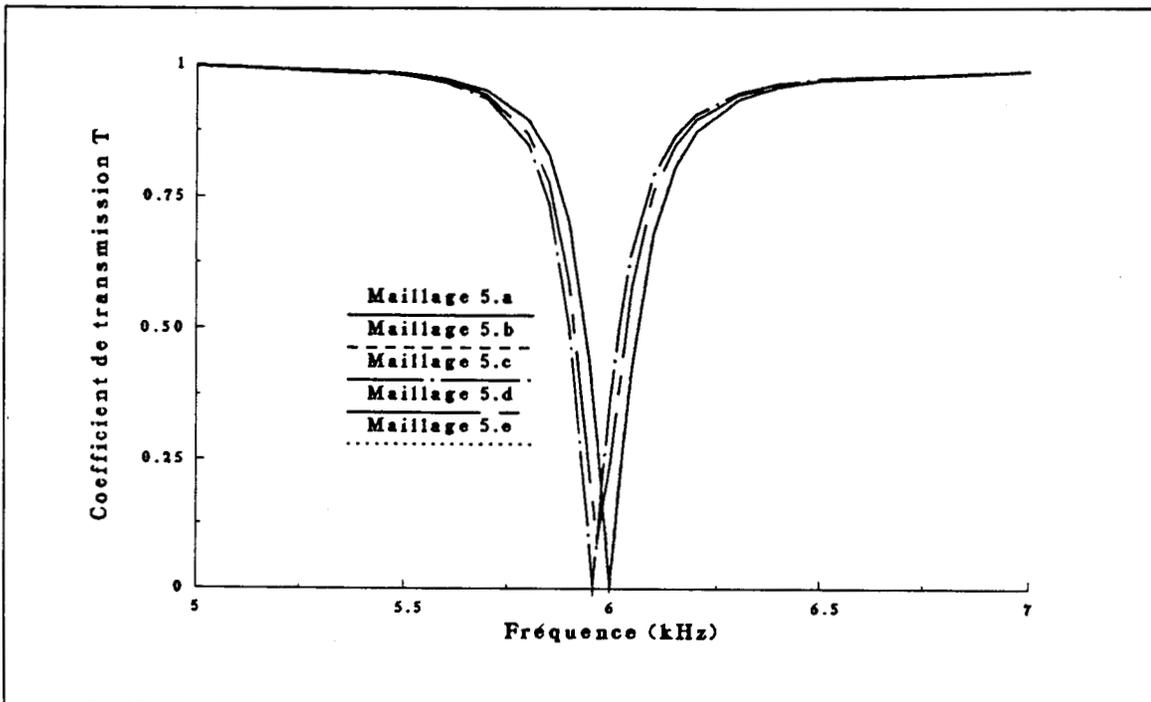


Figure III.6.a: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de lamelles de matériau mou plongées dans du fluide, $\theta = 0^\circ$, plusieurs maillages générés.

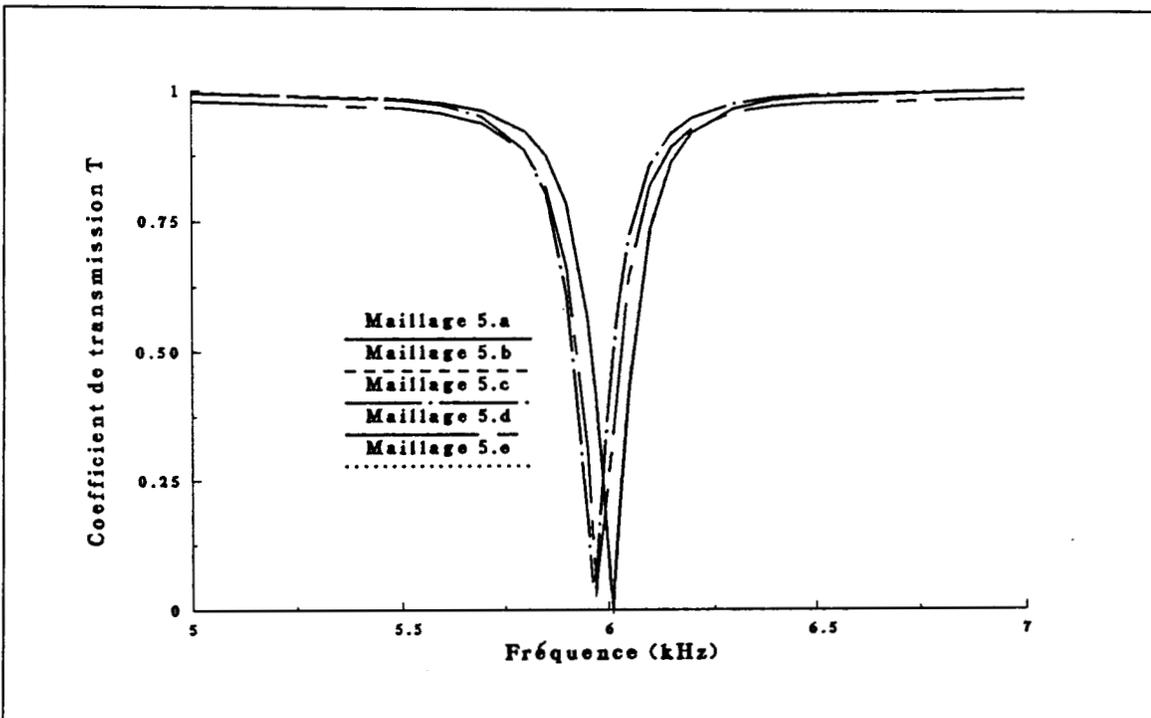


Figure III.6.b: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de lamelles de matériau mou plongées dans du fluide, $\theta = 30^\circ$, plusieurs maillages générés.

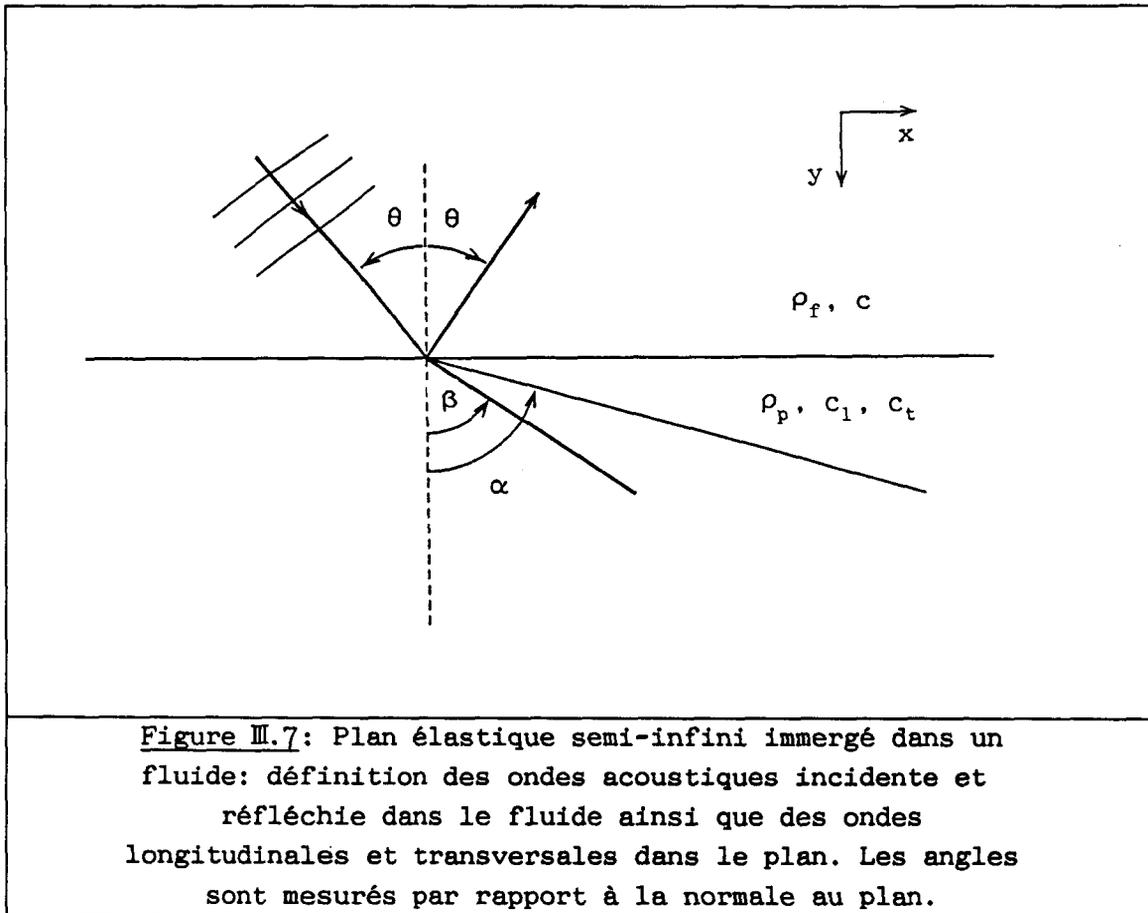
Enfin, pour achever la validation du modèle, les valeurs de la pression et des déplacements de la structure en différents noeuds, pour les quatre premiers secteurs répétitifs ont été relevées. Dans le cas de l'incidence normale, la comparaison peut se faire directement sur les parties réelles et imaginaires des pressions et déplacements. En revanche, dans le cas de l'incidence oblique, la comparaison ne peut être effectuée que sur les modules, la référence de phase étant située sur la face (V1). Des tableaux de comparaison pour les pressions et pour les déplacements de la structure ont été dressés et l'erreur relative a été évaluée. Elle est toujours inférieure à 1 %. L'accord est notamment parfait pour les secteurs répétitifs (III.5.a), (III.5.b) et (III.5.e).

III.1.3 Diffusion acoustique par un plan élastique.

Il s'agit dans cette section d'étudier la réflexion d'une onde plane monochromatique, se propageant dans un liquide parfait, sur la surface plane d'un solide élastique, homogène, isotrope, semi-infini. La géométrie du problème est donnée à la figure III.7. Un modèle analytique simple permet de calculer directement le coefficient de réflexion d'un tel plan [64, 65]. Le modèle éléments finis développé permet, lui, de considérer le cas d'un milieu solide d'épaisseur finie dont la face arrière est libre (section II.5.4). En incluant des pertes dans le matériau, ce cas doit, à la limite des grandes épaisseurs, être identique au cas idéal traité analytiquement.

III.1.3.a *Modèle analytique.*

Les notations sont les mêmes que pour le modèle analytique introduit au paragraphe III.1.1.a, mais la plaque est ici d'épaisseur infinie. Une onde acoustique plane de fréquence $f = \omega/2\pi$ excitant cette plaque sous un angle d'incidence θ , crée des ondes longitudinales et transversales, qui se réfractent respectivement sous les angles α et β (figure III.7), la relation III.2 étant vérifiée. L'expression du coefficient de réflexion de l'onde acoustique dépend de l'angle d'incidence et les



trois domaines à considérer sont les mêmes que précédemment. L'expression analytique du coefficient de réflexion est:

$$R = \frac{C - \tau}{C + \tau}, \quad (\text{III.6})$$

où:

$$\tau = \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{c}{c_1} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \quad \text{et} \quad C = \cos^2 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta \left(\frac{c_t}{c_1} \right)^2. \quad (\text{III.7})$$

Lorsque les angles α et β sont complexes, R est calculé selon la même formule, moyennant quelques modifications de la définition formelle des angles, déjà données en III.5. Dans le cas où les pertes internes dans le matériau de la plaque sont prises en compte, le module d'Young est complexe, avec une partie imaginaire négative. Les vitesses des ondes longitudinales et transversales ainsi que les angles α et β sont alors toujours complexes mais la relation (III.6) reste valable.

Lorsque le plan infini est placé dans le vide, une onde de surface peut se propager, appelée onde de RAYLEIGH, dont la vitesse de phase c_R ne dépend pas de la fréquence et dont le vecteur d'onde associé k_R doit vérifier:

$$\left(k_R^2 + q^2\right)^2 - 4 p q k_R^2 = 0, \quad (\text{III.8})$$

avec:

$$q^2 = k_R^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} \quad \text{et} \quad p^2 = k_R^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}. \quad (\text{III.9})$$

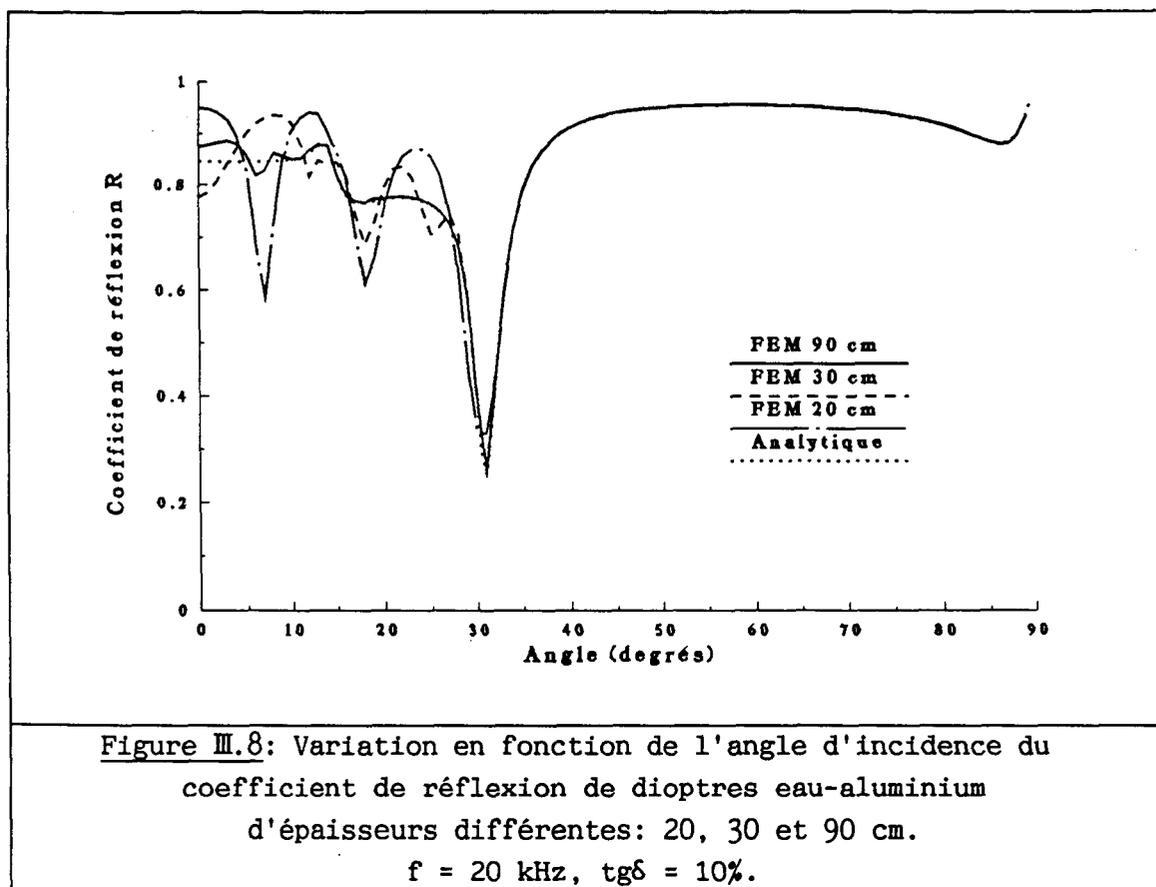
La vitesse de phase de l'onde de Rayleigh c_R correspond à $C = 0$. Il s'agit d'une résonance du plan. Ainsi, la solution de l'équation $C = 0$ peut être appelée mode propre du plan. En présence de fluide, si l'angle d'incidence θ est égal à l'angle de Rayleigh θ_R défini par:

$$\sin \theta_R = \frac{c}{c_R}, \quad (\text{III.10})$$

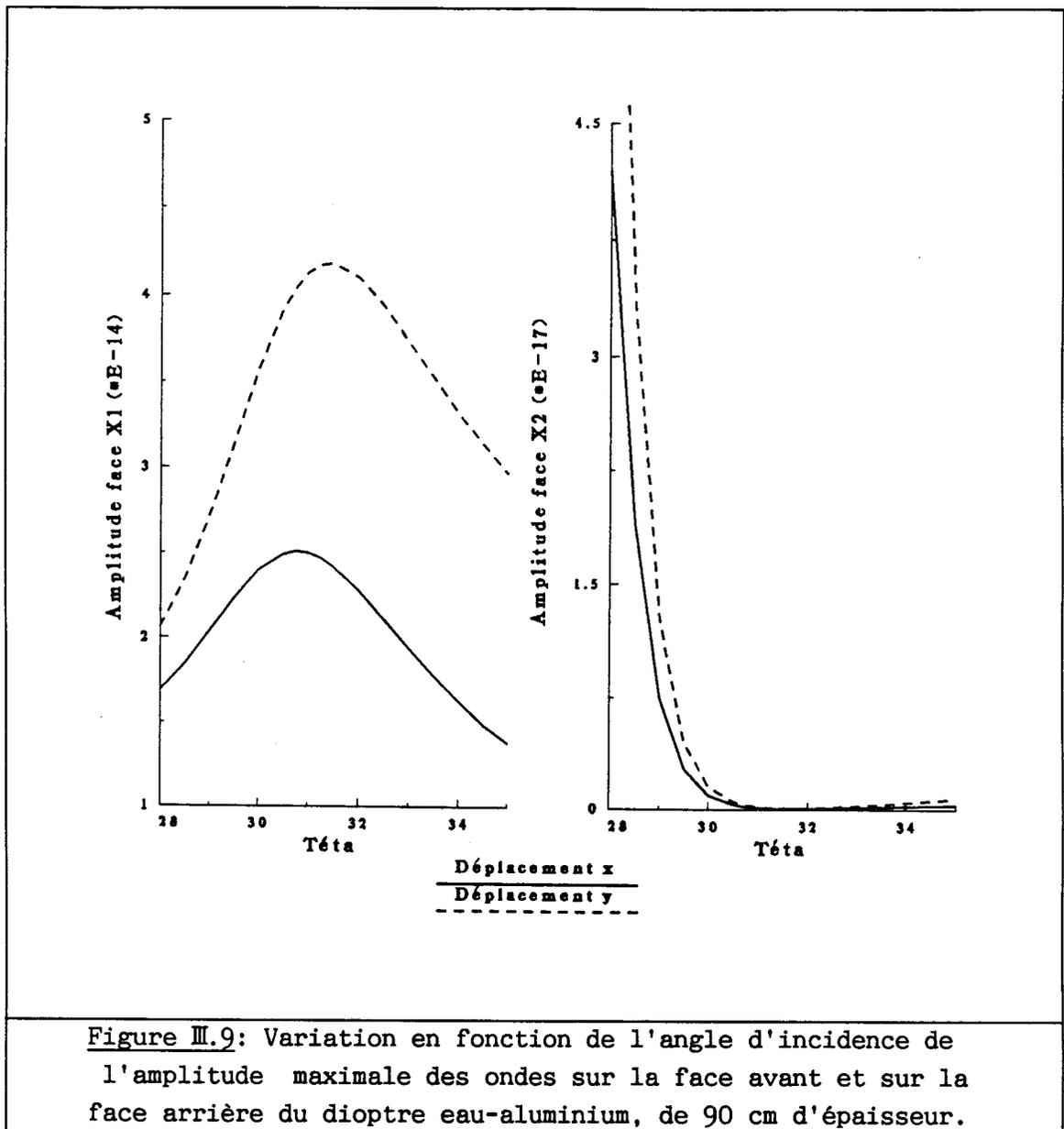
une quasi-onde de Rayleigh peut se propager à l'interface. Pour des angles supérieurs ou égaux à θ_R , le module du coefficient de réflexion du plan immergé sans pertes est égal à 1.

III.1.3.b Cas d'un dioptre eau-aluminium.

L'exemple test est une plaque en aluminium, dont le pourcentage de pertes a été arbitrairement fixé à 10%. Une onde acoustique plane, de fréquence 20 kHz, excite la plaque immergée sous un angle θ variable entre 0° et 89° . Plusieurs plaques, d'épaisseurs différentes (20, 30 et 90 cm) ont été modélisées par éléments finis en considérant la face arrière de ces plaques comme libre. La figure III.8 présente les variations du coefficient de réflexion de ces plaques en fonction de l'angle d'incidence, calculées par éléments finis, et les compare aux résultats du modèle analytique de diffusion par un plan. L'accord est bon, sauf aux petits angles, mais la convergence des résultats en fonction de l'épaisseur de la plaque est nette.

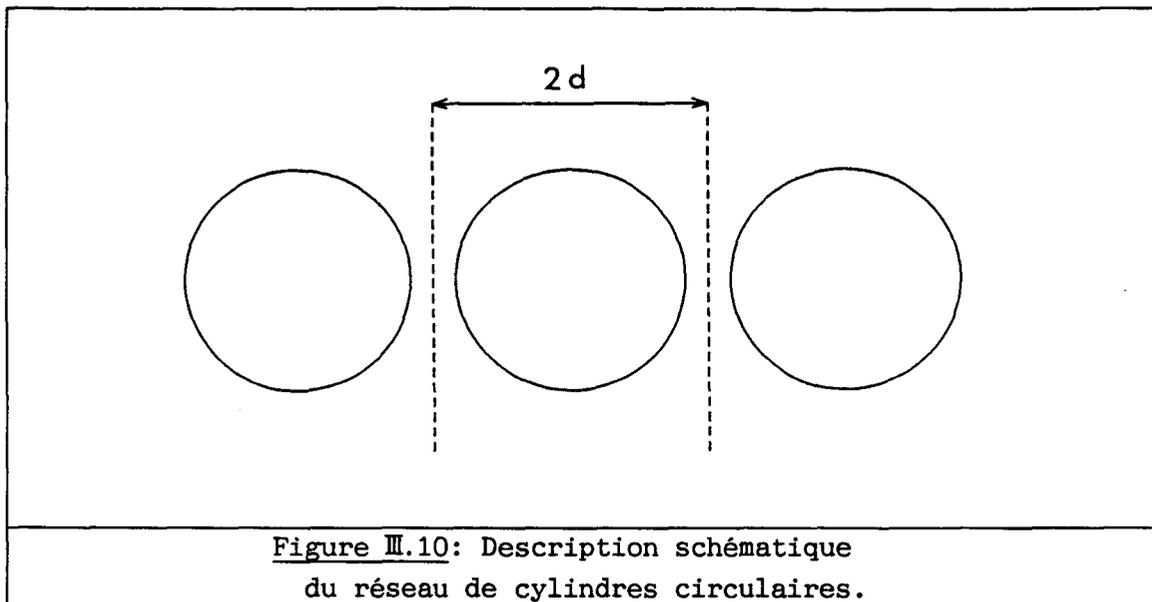


Sans tenir compte des pertes, la vitesse de phase des ondes de Rayleigh, solution de l'équation (III.8), est 2887 m/s. L'angle θ_R correspondant, calculé par l'équation (III.10), est donc de 31.04° . Le coefficient de réflexion du plan présente bien un creux très important (figure III.8), lorsque l'angle d'incidence de l'onde dans le matériau avec pertes coïncide avec θ_R . Par ailleurs, considérant la plaque de 90 cm d'épaisseur, le coefficient de réflexion a été calculé pour un angle très proche de l'angle de Rayleigh et les amplitudes maximales des ondes sur la face avant et sur la face arrière ont été relevées en fonction de l'angle d'incidence (figure III.9). Près de 31° , l'amplitude des composantes selon x et y de l'onde est maximale sur la face avant, minimale sur la face arrière. A l'angle de Rayleigh, l'onde incidente crée, en plus de l'onde réfléchie, une quasi-onde de Rayleigh qui se propage à l'interface solide-liquide. L'onde de surface emprunte de l'énergie au faisceau incident pour pouvoir se propager, ce qui explique la chute du coefficient de réflexion observée.



III.2 ETUDE DE RESEAUX DE CYLINDRES CIRCULAIRES.

Dans cette section, les résultats du modèle éléments finis sont comparés aux résultats d'un modèle analytique de diffusion multiple, utilisant les fonctions de Hankel pour décrire le champ acoustique diffracté par des cylindres circulaires [3, 8, 10]. De plus, le champ de déplacement obtenu par la méthode des éléments finis pour les fréquences associées à de grandes pertes d'insertion est comparé au champ de déplacement des modes propres de la structure, permettant une interprétation physique simple. Un schéma de principe du réseau est donné à la figure III.10.

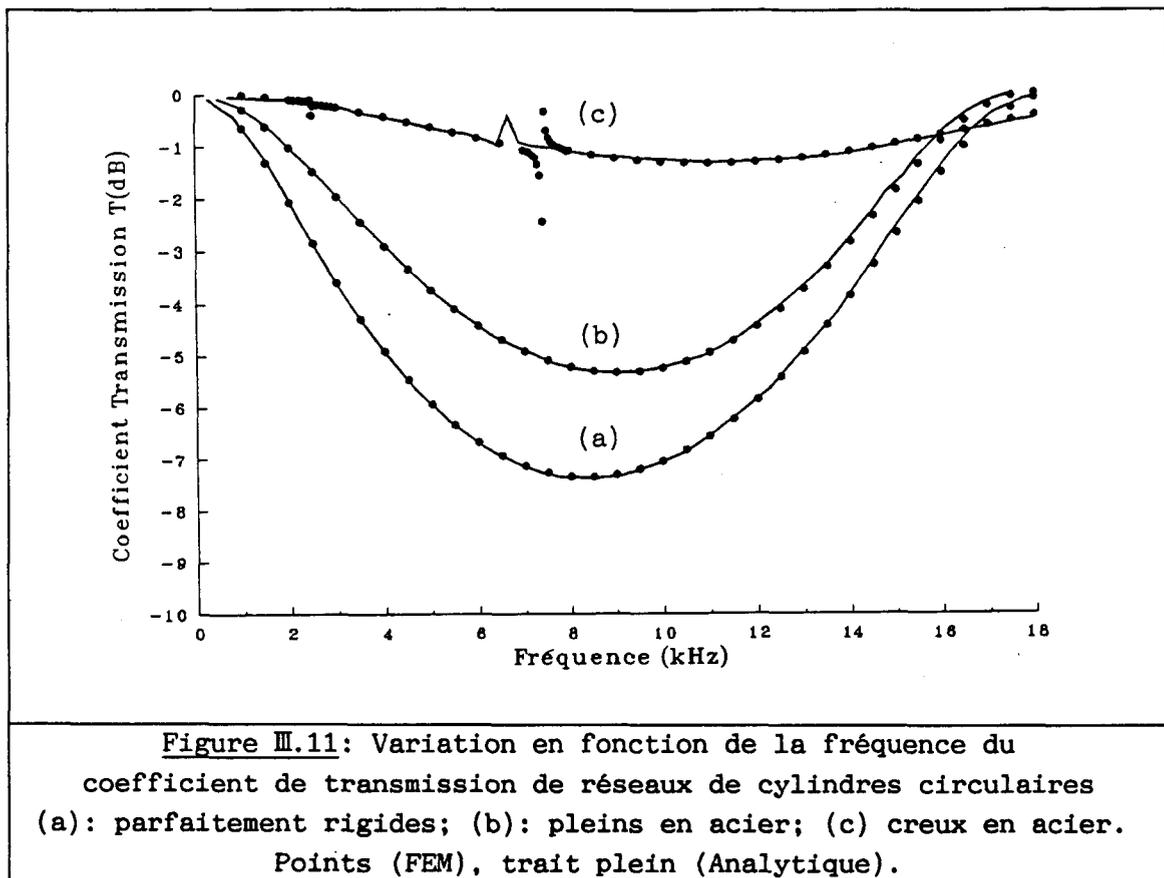


III.2.1 Cylindres circulaires rigides ou métalliques.

La figure III.11 compare les résultats du modèle analytique élaboré par C. AUDOLY [10] aux résultats du modèle éléments finis, pour une onde plane en incidence normale, dans le cas d'un réseau de cylindres parfaitement rigides (condition de Neumann), d'un réseau de cylindres pleins en acier et d'un réseau de cylindres creux également en acier, pour lesquels l'épaisseur des parois est 2.5 mm. Le rayon externe de ces cylindres, dans les trois cas, est de 2.5 cm et les tubes sont disposés de façon à former un réseau de pas 6 cm. Un bon accord entre ces deux approches est observé sur cette figure. On constate que l'effet d'écran est assez faible pour les cylindres rigides et les cylindres pleins en acier, et très faible pour les tubes en acier. L'effet d'écran est dans ces différents cas principalement dû à la masse des éléments. Les premiers modes de flexion d'un tube circulaire ont un effet acoustique très faible car la variation de volume interne correspondante est nulle.

III.2.2 Cylindres circulaires en plastique (PVC).

Pour ce type d'application, les tubes métalliques sont inefficaces car les modes de résonance intéressants du point de vue acoustique sont rejetés à trop haute fréquence. Pour baisser les fréquences de résonance, il faut utiliser des matériaux moins raides, comme les plastiques.



Dans cette section, un réseau de tubes plastiques en PVC est donc considéré. Les constantes physiques de ce matériau ont déjà été données dans la section III.1.1. Le rayon externe du tube est 2.5 cm, et l'épaisseur des parois 3 mm. Le pas du réseau est 6 cm. Les pertes internes dans le PVC sont choisies égales à 6%, suite à des mesures effectuées à l'aide d'un viscoélasticimètre [66]. Les résultats obtenus par C. AUDOLY à l'aide du modèle analytique [10] et par la méthode des éléments finis, incluant et excluant les pertes internes, sont comparés à des mesures sur la figure III.12. Un bon accord est à nouveau observé entre ces courbes. Entre 4 et 9 kHz, le coefficient de transmission est stable, de -7 dB environ. Ensuite, après une faible remontée, il chute très rapidement. La fréquence du mode radial du cylindre dans l'air étant de 12.7 kHz, le comportement du réseau immergé au voisinage de 13.5 kHz est donc probablement sous l'influence de l'excitation de ce mode. C'est ce que démontrent les représentations graphiques des parties réelle et imaginaire du champ de déplacement de la structure à 13.5 kHz (figure III.13), tracées en excluant les pertes dans le PVC, compte tenu des remarques formulées dans l'annexe 4. Ainsi, à cette fréquence, le mode radial n'est pas pur, il n'est pas compensé par la translation d'ensemble et le coefficient de

transmission est élevé. Plus bas en fréquence, la translation d'ensemble a davantage d'influence et la transmission est donc plus faible. On peut aussi noter que, en incluant les pertes internes dans le PVC, plusieurs pics étroits, dus à l'excitation de modes de résonance plus faibles, disparaissent.

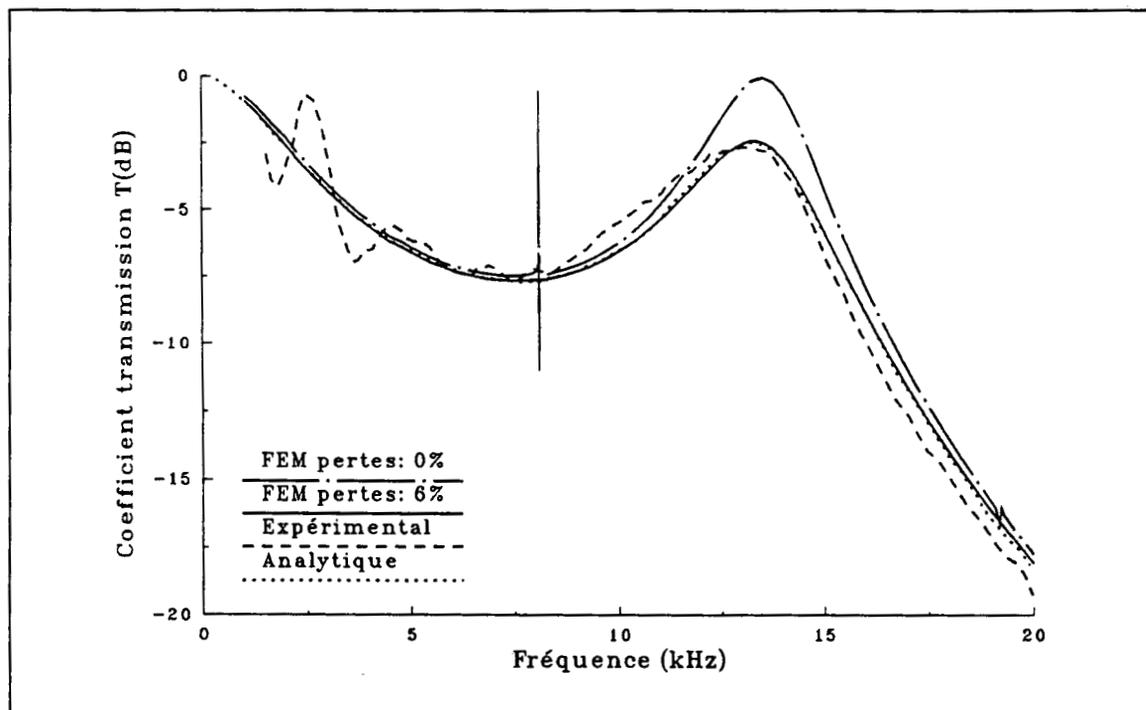


Figure III.12: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de cylindres circulaires en plastique.

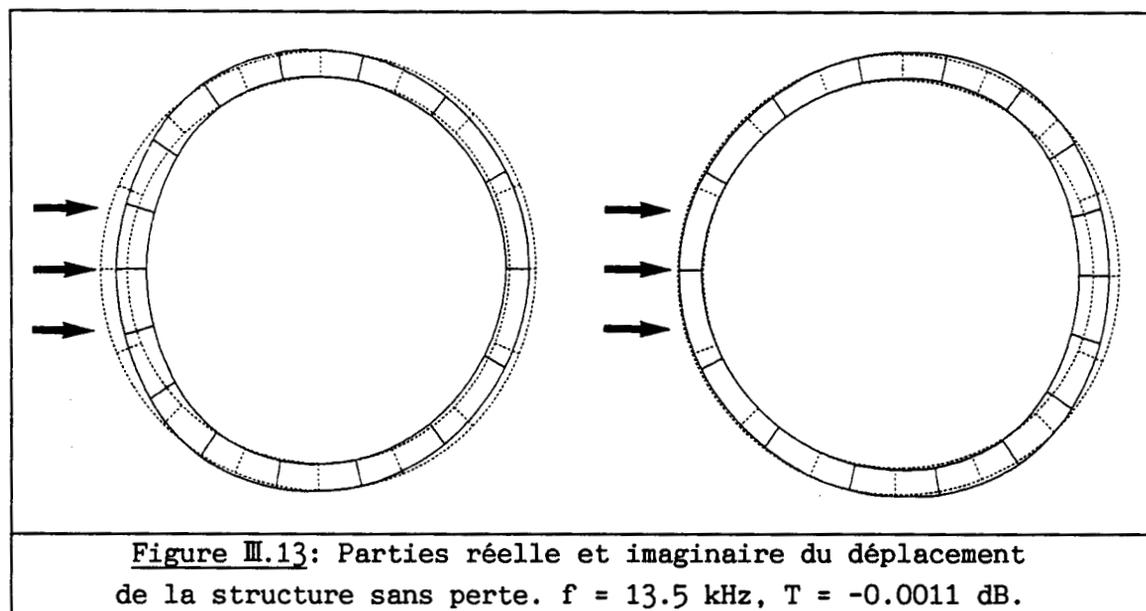


Figure III.13: Parties réelle et imaginaire du déplacement de la structure sans perte. $f = 13.5$ kHz, $T = -0.0011$ dB.

Afin d'améliorer fortement les performances de tels réseaux de tubes, en terme de niveau transmis ou de largeur de bande de réjection, il est envisagé de les enrober dans un élastomère de faible rigidité. L'effet positif de l'enrobage a été démontré expérimentalement [14, 67, 68] et de nombreuses études le prouvent. Les cylindres décrits précédemment sont enrobés d'UREFLEX TZE 535, dont la masse volumique est de 1170 kg.m^{-3} et dans lequel la vitesse des ondes longitudinales est de l'ordre de 1770 m/s . L'épaisseur totale de la couche est 8 cm . Afin de tenir compte de l'amortissement, le module d'Young doit être pris complexe et déterminé en fonction de la fréquence d'excitation et de la température à partir de courbes maîtresses, présentées en annexe 5.

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour résoudre ce problème implique un maillage dense, puisque la vitesse des ondes longitudinales et transversales est faible. En effet, le maillage doit respecter le critère en $\lambda/4$ [22], c'est-à-dire que la plus grande longueur d'un élément doit être inférieure au quart de longueur d'onde dans le milieu considéré pour assurer une bonne description des ondes. Trois maillages ont été testés pour étudier la convergence des solutions (figures III.14.a à III.14.c). Seul le troisième maillage vérifie très strictement le critère en $\lambda/4$ pour les ondes transversales, plus lentes, dans toute la bande de fréquence.

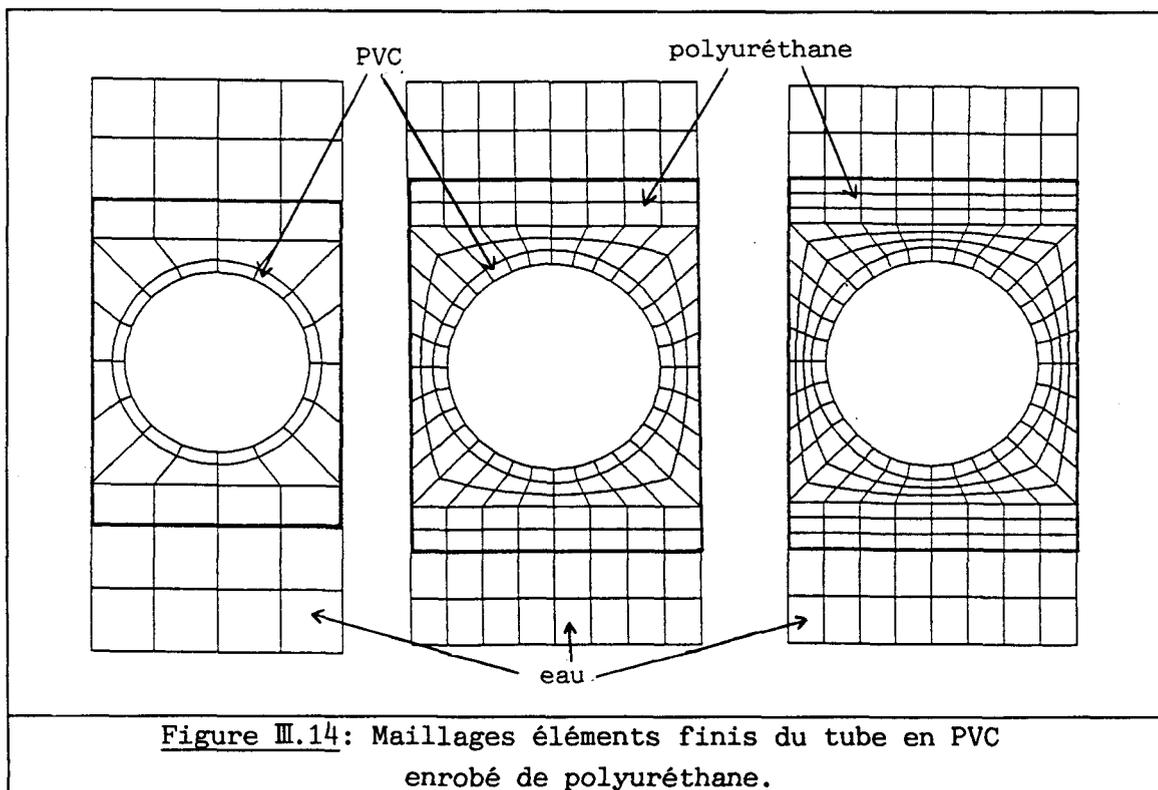


Figure III.14: Maillages éléments finis du tube en PVC enrobé de polyuréthane.

Les résultats du modèle éléments finis sont comparés aux mesures, à la figure III.15, pour les trois maillages décrits. Le modèle éléments finis produit un résultat conforme aux mesures et la convergence des solutions est nette, même si le critère en $\lambda/4$ n'est pas parfaitement vérifié. Toutefois, un écart à 13.5 kHz reste apparent quel que soit le maillage. Il est probablement dû aux difficultés rencontrées pour connaître avec précision les constantes physiques de l'élastomère.

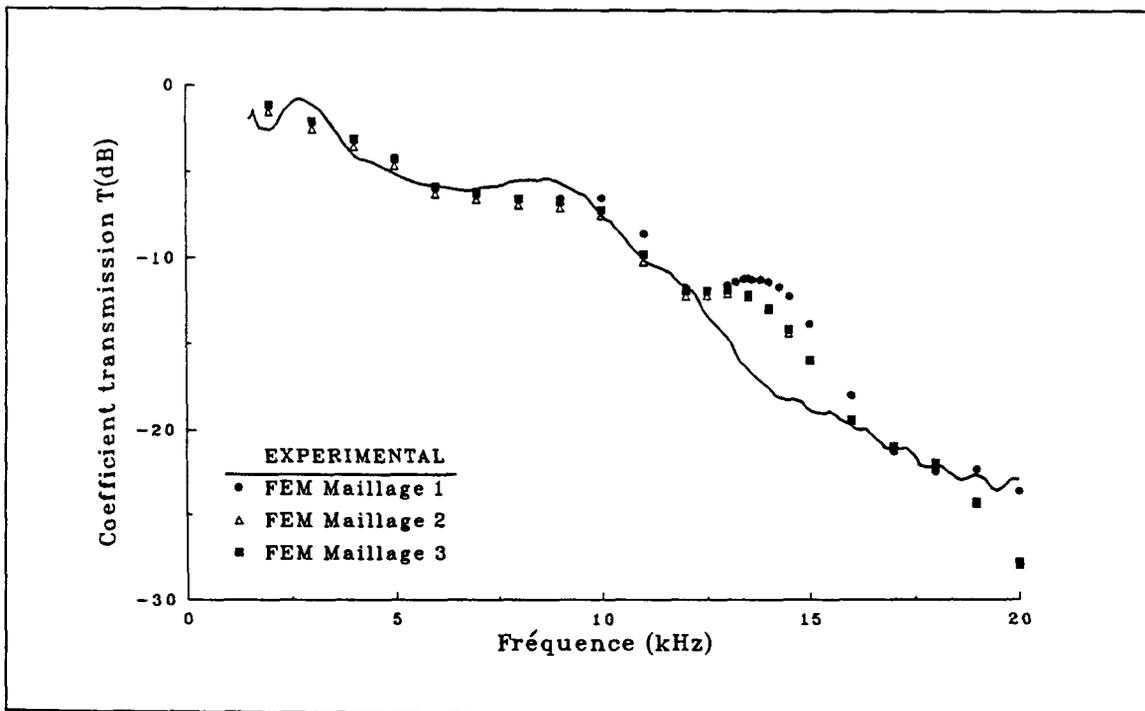


Figure III.15: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de cylindres circulaires, creux, en PVC, enrobé de polyuréthane.

III.3 ETUDE DE RESEAUX DE TUBES ELLIPTIQUES.

Cet exemple permet la vérification directe des résultats obtenus à l'aide des éléments finis, par une onde en incidence normale par comparaison aux résultats expérimentaux et analytiques, obtenus par G.A. BRIGHAM [7]. Dans un premier temps, l'analyse modale du tube de section elliptique dans l'air a été conduite. Puis, les tubes étant disposés côte à côte et immergés, les diagrammes d'insertion ont été relevés pour différents espacements entre les tubes.

III.3.1 Analyse modale d'un tube.

Le demi grand axe du tube étudié est de 39.6 cm, le demi petit axe de 17.8 cm. L'épaisseur des parois est supposée constante sur tout le périmètre et égale à 11.9 cm. Les propriétés physiques du matériau constituant le tube sont: $E = 2.37 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\nu = 0.375$, $\rho = 1180 \text{ kg.m}^{-3}$. Un quart du tube de section elliptique a été modélisé à l'aide de 10 éléments isoparamétriques (figure III.16). Appliquant sur les limites A et B du maillage des conditions de symétrie ou d'antisymétrie du champ de déplacement, les premiers modes propres sont calculés et leurs fréquences sont reportées dans le tableau III.1. Les lettres S et A désignent respectivement les conditions de symétrie et d'antisymétrie. Les figures III.17.a à III.17.c présentent les champs de déplacement du quart de l'ellipse obtenus pour ces trois modes propres.

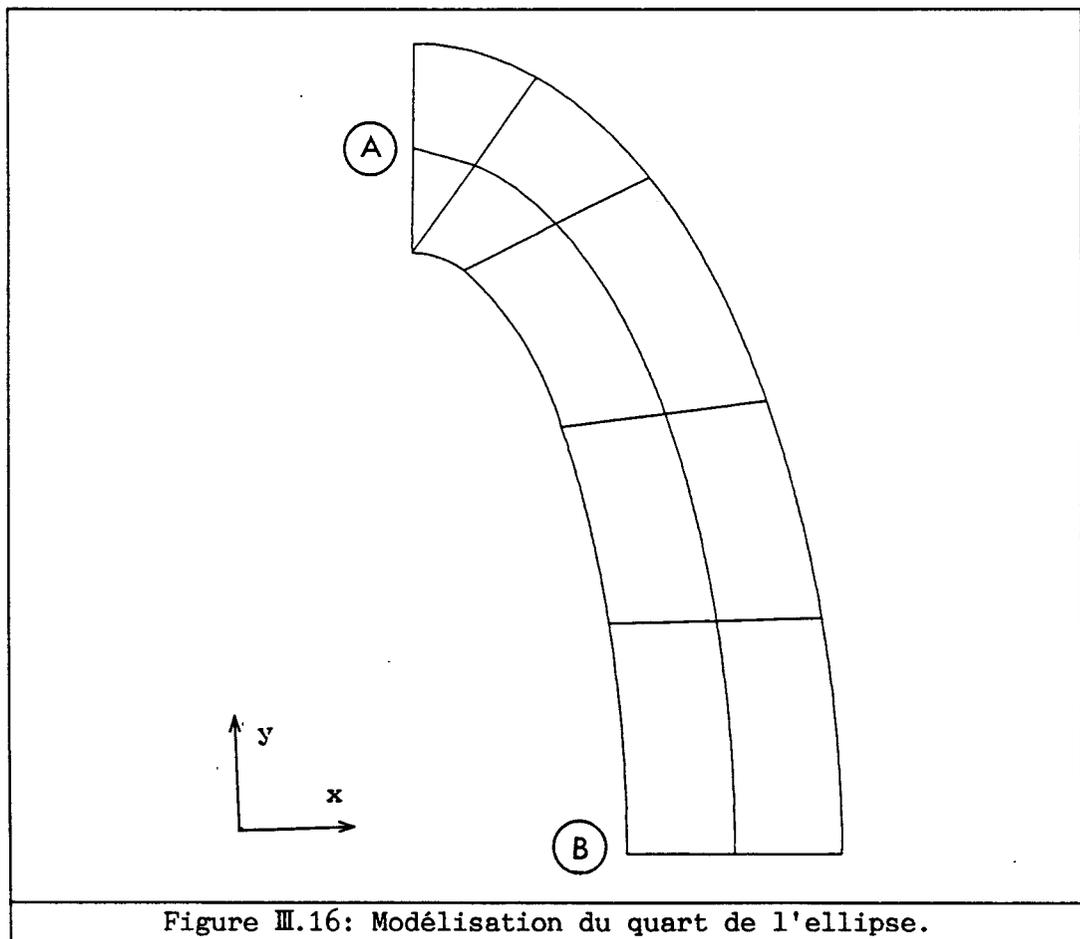


Figure III.16: Modélisation du quart de l'ellipse.

Face A	Face B	Fréquence
S	S	216 Hz
S	A	556 Hz
A	S	509 Hz

Tableau III.1

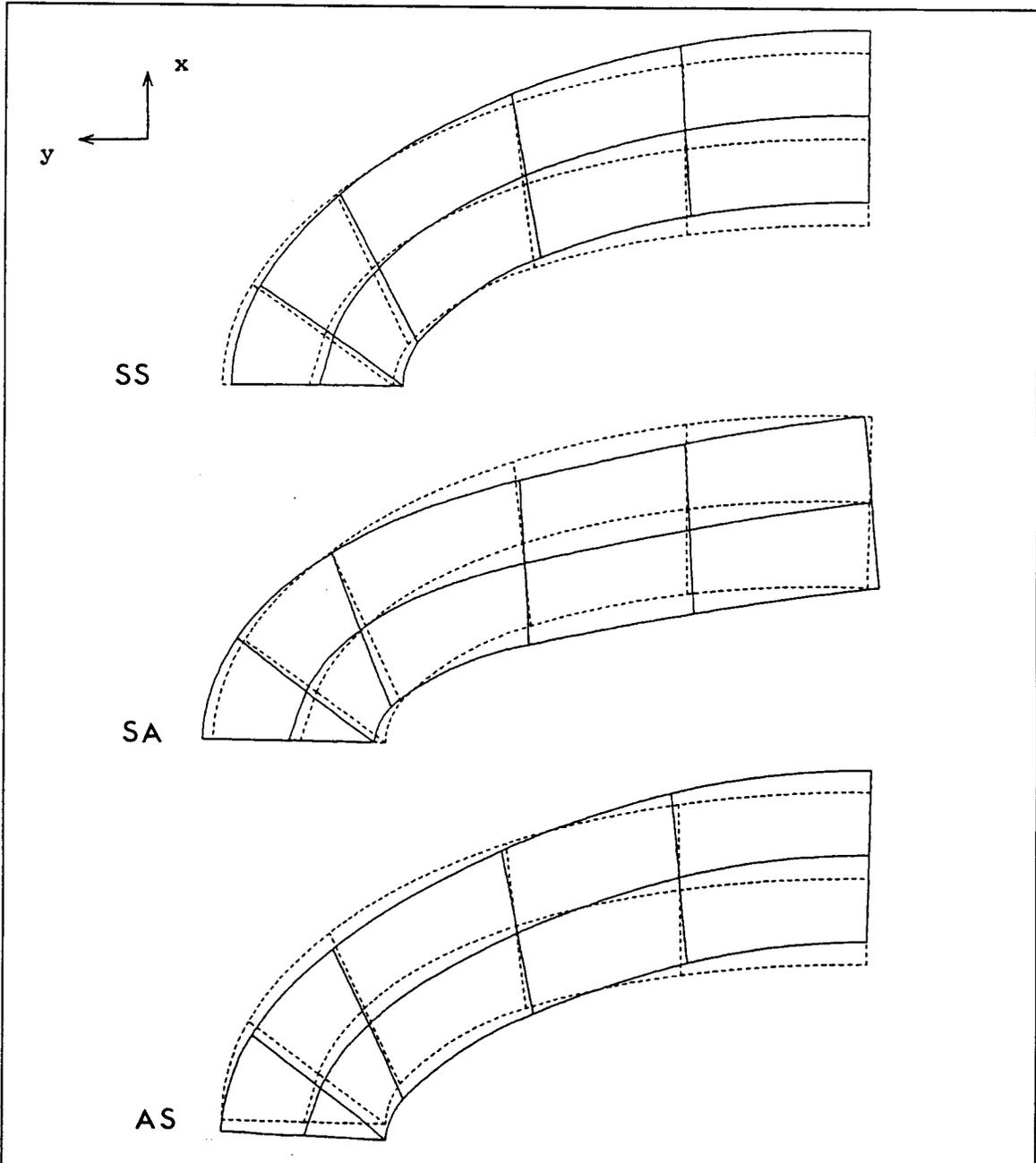
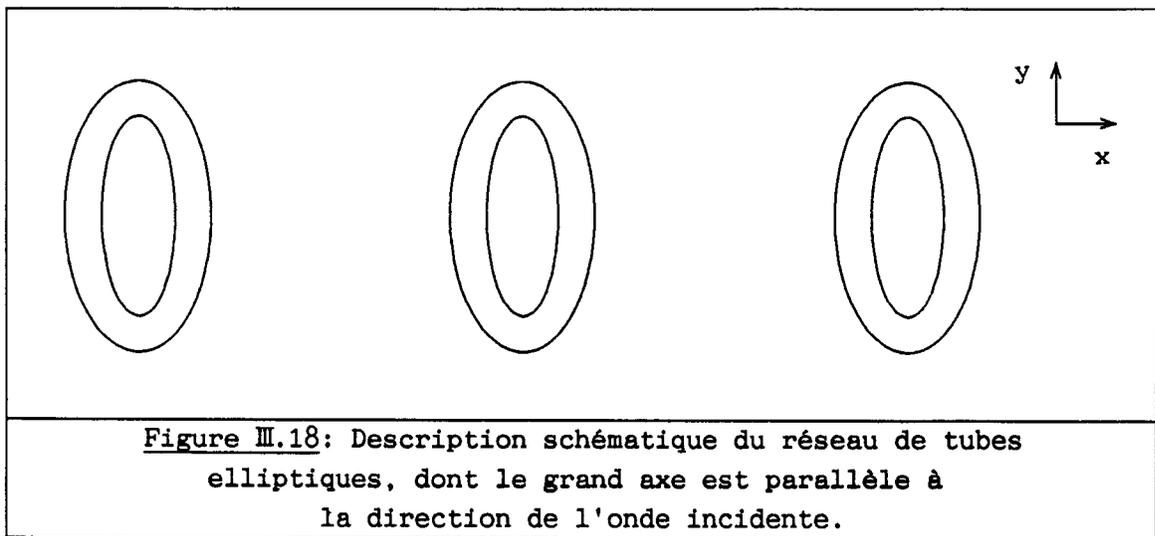


Figure III.17: Champ de déplacement du quart de l'ellipse aux trois premiers modes propres.

$$f_{SS} = 216 \text{ Hz}, f_{SA} = 556 \text{ Hz}, f_{AS} = 509 \text{ Hz}.$$

III.3.2 Calcul du coefficient de transmission du réseau lorsque la direction de l'onde incidente est parallèle au grand axe des tubes.

Le grand axe des tubes étant parallèle à la direction de l'onde incidente (figure III.18), trois diagrammes d'insertion correspondants à



trois pas différents du réseau : 63.5 cm, 1.27 m et 2.54 m ont été calculés et comparés à des diagrammes mesurés ou calculés à l'aide d'un modèle analytique aux figures III.19, III.20 et III.21. Globalement, l'accord est bon, même si les pics obtenus par éléments finis sont plus étroits et plus profonds puisque les pertes dans le matériau, de l'ordre de 4%, ne sont pas prises en compte. La première résonance, dont la fréquence est située respectivement à 110, 148 et 142 Hz, est due à l'excitation simultanée du mode rigide de translation et du premier mode symétrique de l'ellipse, comme le montre la figure III.22, qui présente schématiquement le champ de déplacement de la structure immergée à 110 Hz, lorsque $2d = 63.5$ cm. Le deuxième pic, dont la fréquence se situe respectivement à 345, 390 et 395 Hz, est provoqué principalement par l'excitation du mode rigide de translation et du deuxième mode propre symétrique par rapport à la direction de l'onde incidente. La figure III.23 présente schématiquement le champ de déplacement de la structure immergée, à 345 Hz, lorsque $2d = 63.5$ cm. Grâce aux figures III.22 et III.23, il est aisé d'identifier les modes, par une comparaison aux champs de déplacement de la figure III.17. Les fréquences de résonance du réseau immergé sont fonction des modes propres du tube dans l'air, de la masse ajoutée due au fluide extérieur et des

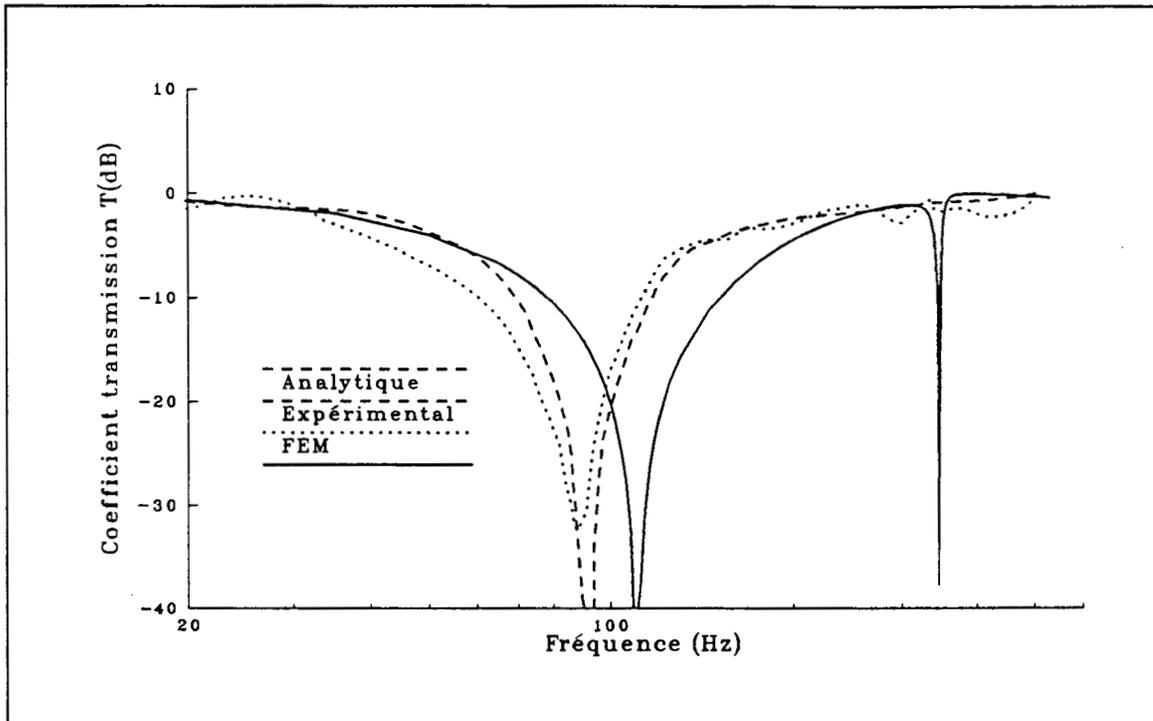


Figure III.19: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de tubes de section elliptique, dont le grand axe est parallèle à la direction incidente. $2d = 63.5$ cm.

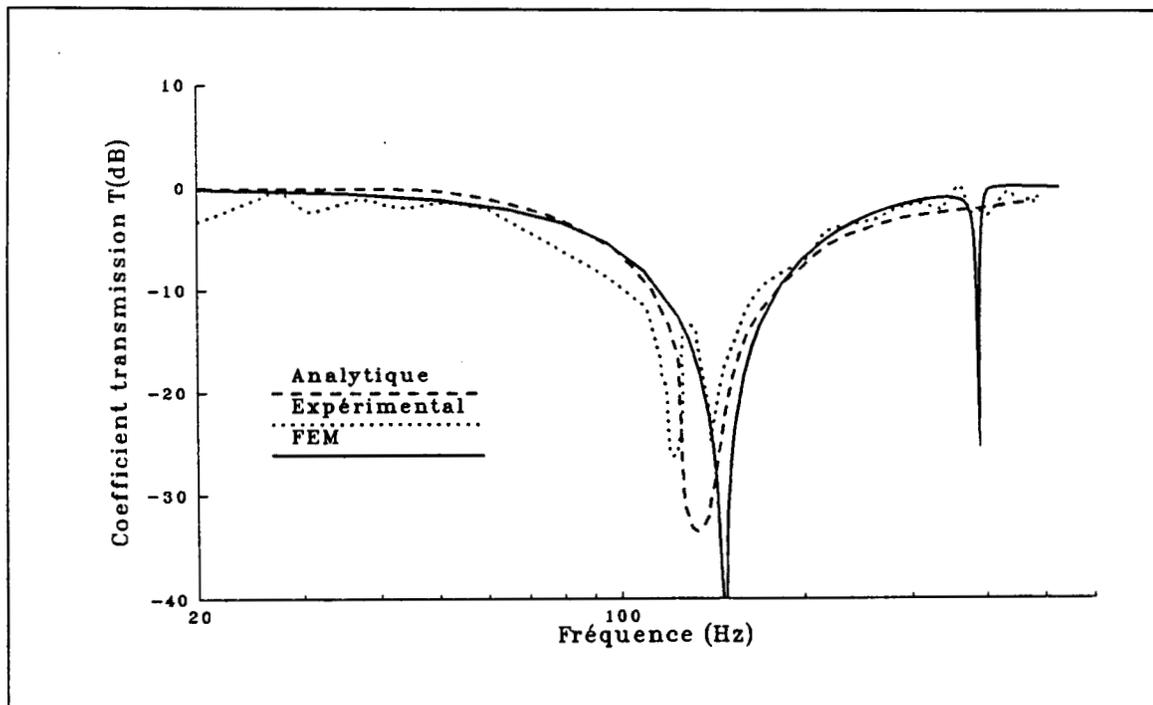
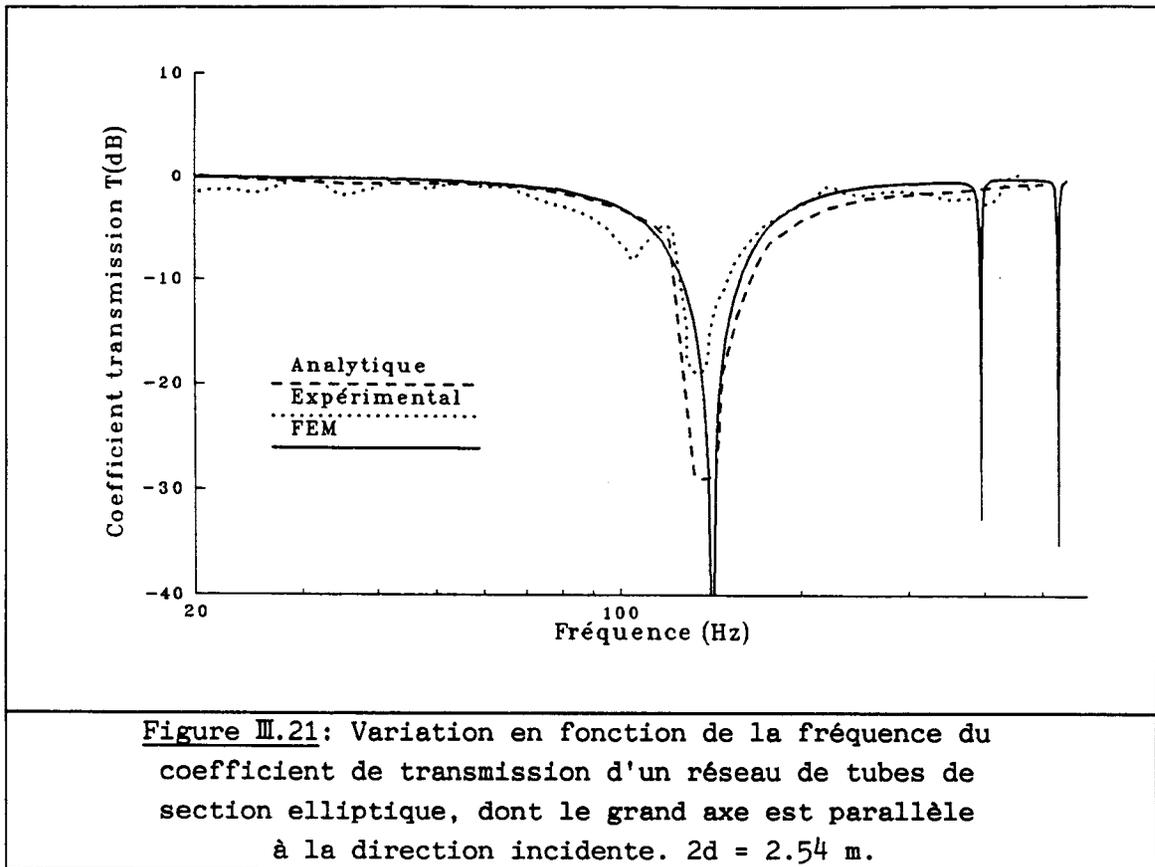


Figure III.20: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de tubes de section elliptique, dont le grand axe est parallèle à la direction incidente. $2d = 1.27$ m.

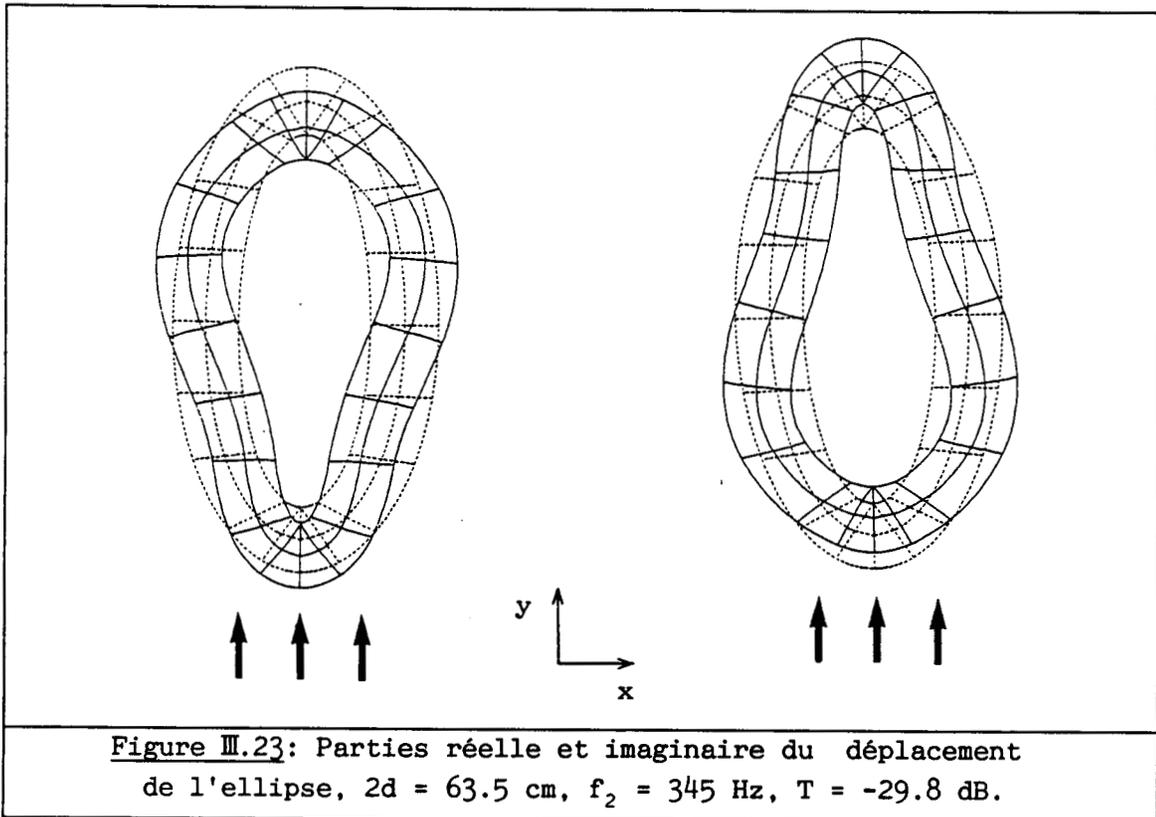
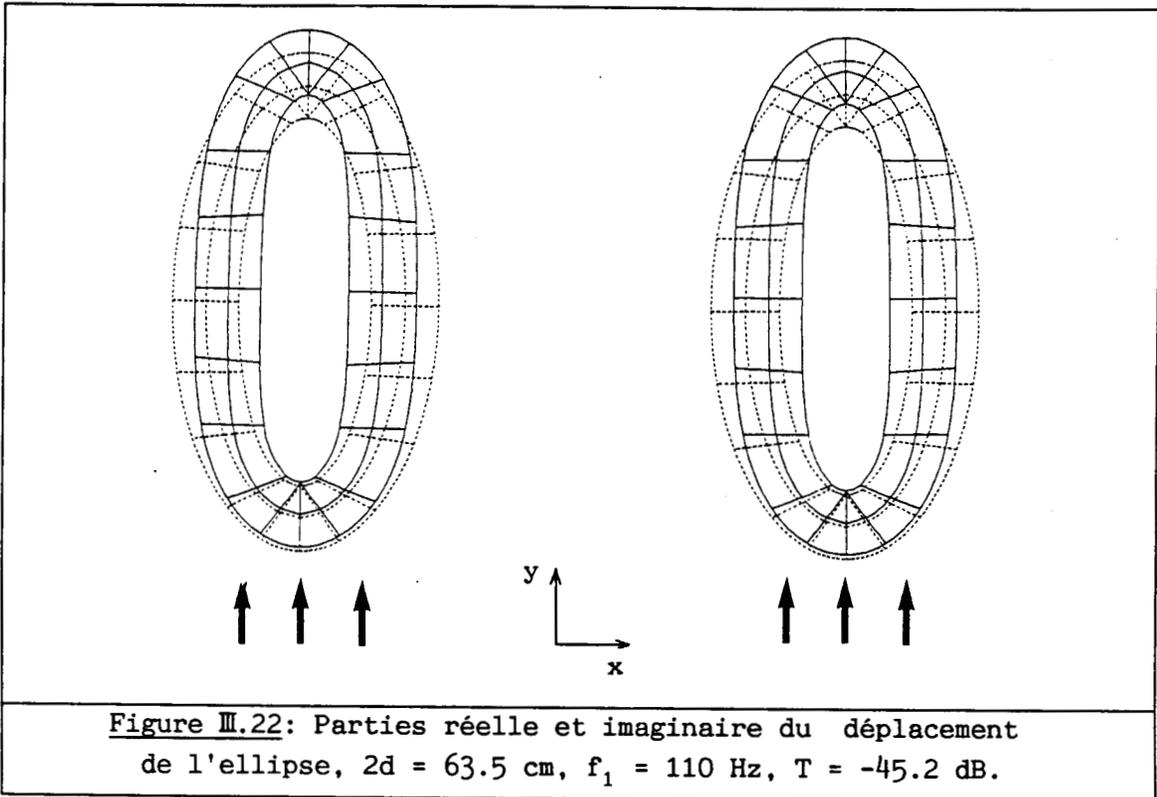


effets d'interaction entre les tubes. Dans cet exemple, la combinaison du mode de translation et des modes symétriques provoque une chute du coefficient de transmission. Par ailleurs, les tubes étant disposés de façon à avoir leur grand axe parallèle à la direction de l'onde incidente, les interactions sont d'autant plus fortes que l'espacement entre les tubes est faible, entraînant une chute de la fréquence de résonance du réseau.

Le tableau III.2 compare la valeur f_1 de la fréquence du premier pic calculée par la méthode des éléments finis et la valeur expérimentale. Il compare de même les valeurs B_1 des bandes de réjection à -10 dB calculées par éléments finis et mesurées autour du premier pic. Les écarts observés sont probablement dus à la modélisation de l'ellipse, dont la géométrie n'est pas connue avec précision, en particulier pour ce qui concerne l'épaisseur [7].

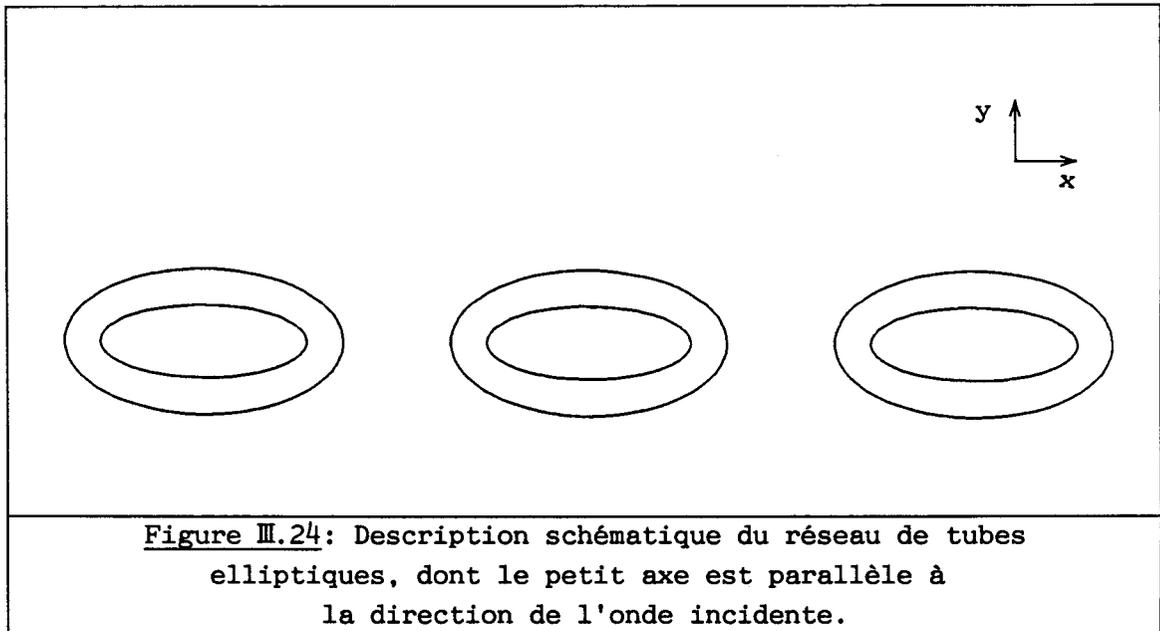
	f_1 (fem)	f_1 (exp)	B_1 (fem)	B_1 (exp)
$2d = 63.5$ cm	110 Hz	88 Hz	0.64	0.55
$2d = 1.27$ m	148 Hz	≈ 130 Hz	0.42	0.51
$2d = 2.54$ m	142 Hz	134 Hz	0.22	0.19

Tableau III.2



III.3.3 Calcul du coefficient de transmission du réseau lorsque la direction de l'onde incidente est parallèle au petit axe des tubes.

Le petit axe des tubes étant parallèle à la direction de l'onde incidente (figure III.24), les diagrammes d'insertion ont été calculés pour



$2d = 1.27$ m et $2d = 2.54$ m et sont comparés à des diagrammes mesurés ou calculés à l'aide d'un modèle analytique aux figures III.25 et III.26. Du fait de la masse ajoutée par le fluide, la fréquence de la première résonance, à 172 ou 145 Hz, est très inférieure à 216 Hz, valeur correspondante dans l'air, mais les effets d'interaction entre tubes étant moins importants que lorsque le grand axe des ellipses est orienté dans la direction de l'onde incidente, elle est plus élevée que dans le premier cas. Le second pic, à 374 et 375.5 Hz est provoqué par l'excitation du mode rigide de translation et du second mode symétrique par rapport à la direction de l'onde incidente, se trouvant à 509 Hz dans l'air. La figure III.27 présente le champ de déplacement de l'ellipse dans ce cas, lorsque le pas du réseau est de 1.27 m. En introduisant des pertes, ce second pic disparaît du diagramme d'insertion. Par ailleurs, il est évident que seuls les modes symétriques par rapport au plan médian de la maille sont excités.

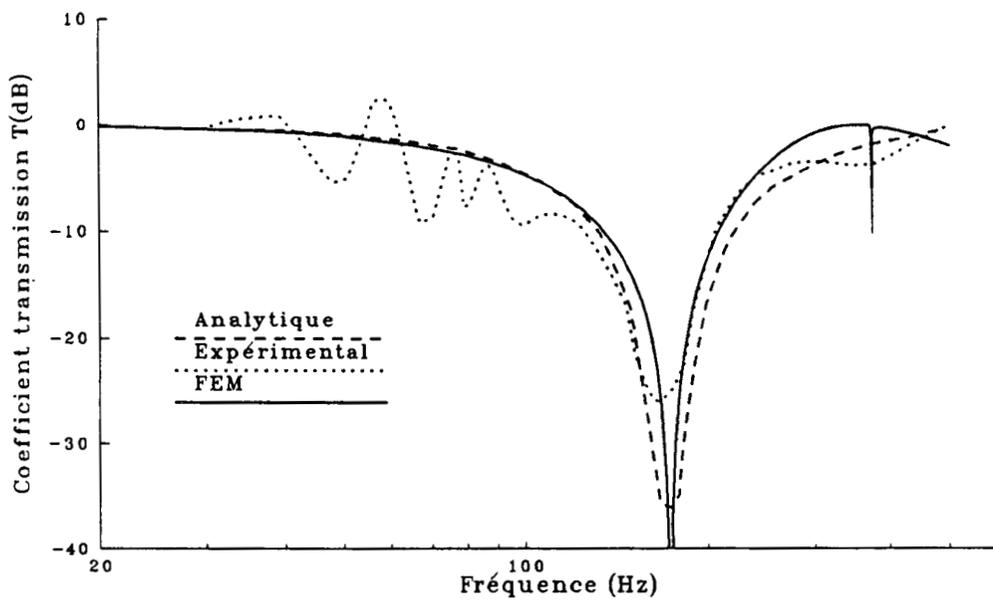


Figure III.25: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de tubes de section elliptique, dont le petit axe est parallèle à la direction incidente. $2d = 1.27$ m.

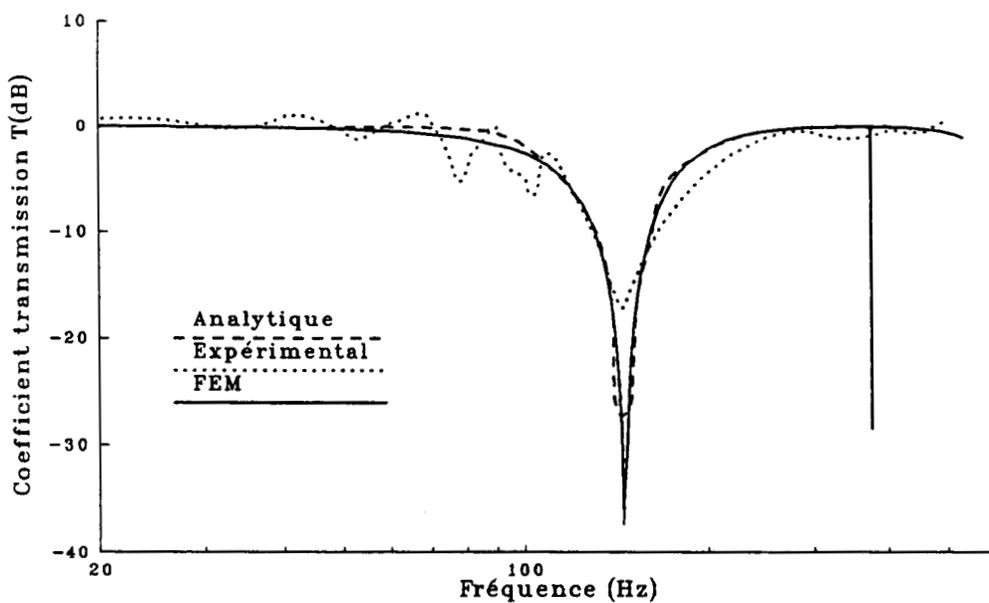
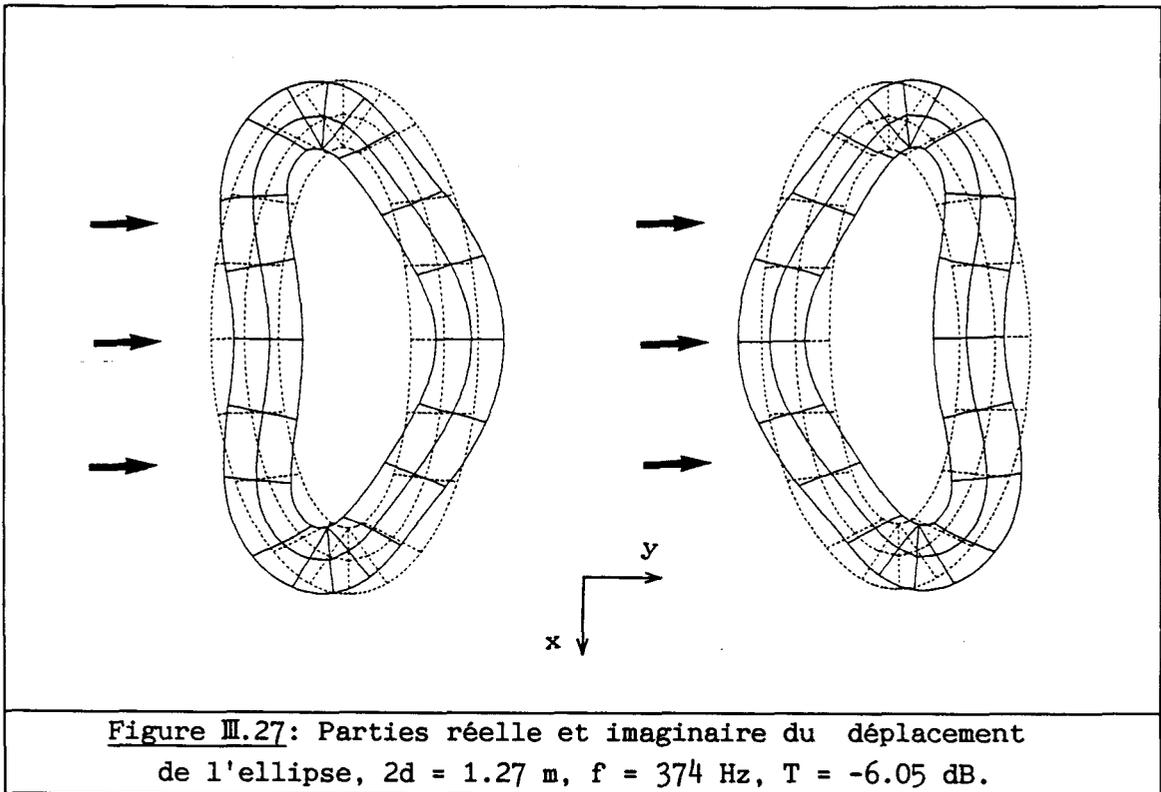


Figure III.26: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de tubes de section elliptique, dont le petit axe est parallèle à la direction incidente. $2d = 2.54$ m.



Le tableau III.3 est dressé pour comparer les valeurs expérimentales et calculées de la fréquence du premier pic f_1 et de la bande de réjection à -10 dB B_1 . Là aussi, l'accord est satisfaisant.

	f_1 (fem)	f_1 (exp)	B_1 (fem)	B_1 (exp)
$2d = 1.27$ m	172 Hz	164 Hz	0.42	0.50
$2d = 2.54$ m	145 Hz	145 Hz	0.20	0.24

Tableau III.3

Dans les deux configurations, les tubes ayant leur grand axe parallèle ou perpendiculaire à la direction de l'onde incidente, l'augmentation du pas entraîne une réduction de la profondeur du pic principal et de la bande de réjection à -10 dB. Pour $2d = 2.54$ m, que les tubes aient leur grand axe parallèle ou perpendiculaire à la direction de l'onde incidente donne pratiquement la même fréquence de résonance du réseau: la masse ajoutée est alors la même pour les deux configurations, puisque les tubes sont identiques, et les effets d'interaction sont négligeables dans les deux cas puisque l'espacement entre les tubes est grand.

Pour obtenir des pertes d'insertion plus intéressantes du point de vue des applications, l'épaisseur de la paroi des tubes peut être diminuée, afin d'augmenter la compliance du tube [7]: il en résulte une fréquence de résonance plus basse et une bande de réjection à -10 dB plus large. Néanmoins, il faut tenir compte des contraintes de conception liées à l'effet de la pression hydrostatique externe, qui exigent une épaisseur minimale.

III.4 ETUDE DE RESEAUX DE TUBES COMPLIANTS.

Les tubes compliants sont des tubes à parois minces dont la section, de forme ovale, a une forte excentricité, le rapport du petit axe au grand axe étant petit devant 1. En première approximation, un tel tube peut être assimilé à deux plaques planes, encastrées aux extrémités, la liaison entre les deux plaques étant supposée rigide (figure III.28). Les conditions aux limites imposées au tube sont telles qu'il y ait identité des déplacements entre les noeuds A et A' d'une part, B et B' d'autre part, ce qui exclut le mouvement de rotation. L'intérieur des tubes est vide et le milieu extérieur aux tubes est l'eau. Plusieurs exemples de réseaux de tubes compliants sont traités: les réseaux monocouches, les réseaux multicouches et enfin le cas de tubes enrobés dans un matériau viscoélastique.

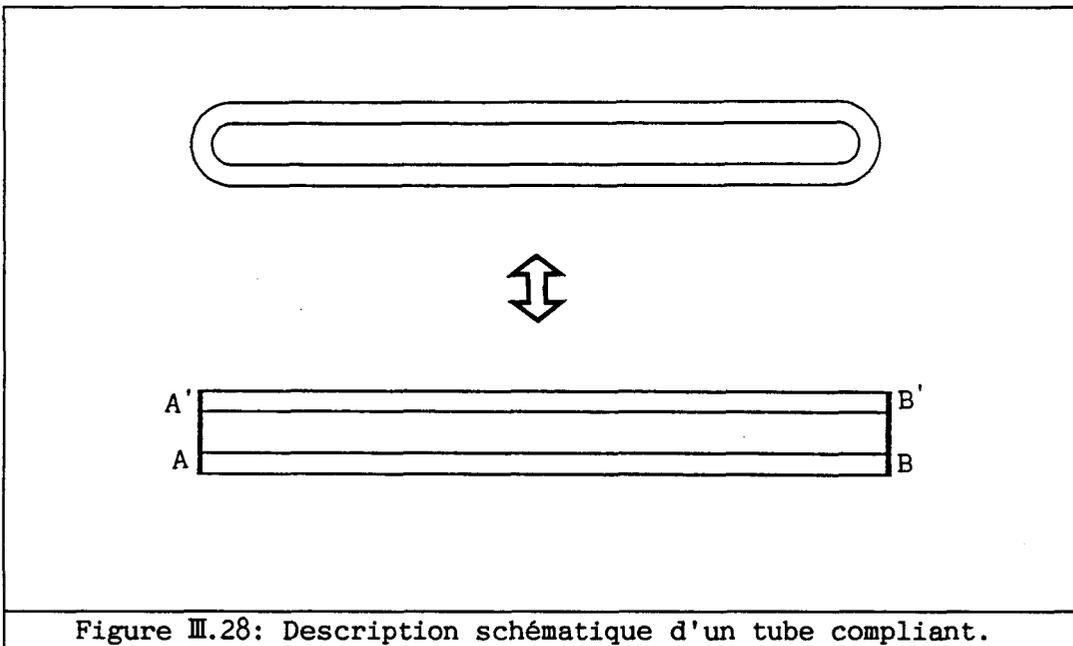
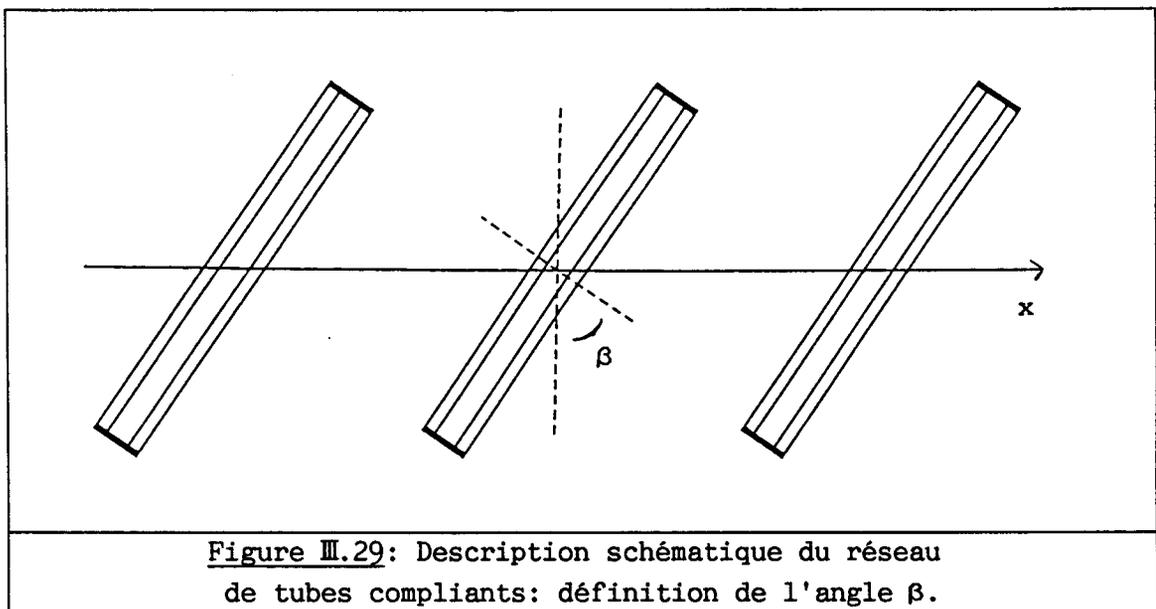


Figure III.28: Description schématique d'un tube compliant.

III.4.1 Etude de réseaux de tubes compliants monocouches.

Outre la comparaison des résultats du modèle éléments finis à des mesures et aux résultats d'un modèle analytique utilisant la méthode des domaines partiels, élaboré par C. AUDOLY [15], pour différentes configurations de réseaux (direction de l'onde incidente variable, tubes inclinés les uns par rapport aux autres), cette section propose une étude complète du champ de pression dans un voisinage proche des tubes et à l'infini. L'angle β est défini comme angle d'inclinaison du petit axe des tubes par rapport à la normale au plan du réseau (figure III.29). La



configuration classique est obtenue avec un angle β nul. Les tubes sont en acier, matériau dont les propriétés physiques sont: $E = 1.93 \cdot 10^{11}$ Pa, $\nu = 0.3$, $\rho = 7900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Le pas du réseau est 11.1 cm, le grand axe des tubes 9.1 cm, le petit axe 1.1 cm, l'épaisseur des parois 2.77 mm. Une étude préliminaire de l'influence de l'épaisseur de la couche d'air entre les deux plaques a montré de très faibles variations du coefficient de transmission pour un rapport petit axe/grand axe évoluant de 0.1 à 0.2.

III.4.1.a Premier cas: $\beta = 0^\circ$ et l'angle d'incidence vaut 0° ou 30° .

Les figures III.30 et III.31 présentent les variations avec la fréquence du coefficient de transmission lorsque le réseau est excité par une onde plane, respectivement en incidence 0° et 30° , dans la bande de fréquence 1-20 kHz. Le niveau transmis est calculé en utilisant le terme

T_0^p , c'est-à-dire en ne considérant à l'infini que l'onde d'ordre 0, bien que les premières fréquences de coupure du réseau soient 13.3 kHz et 8.9 kHz pour $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 30^\circ$.

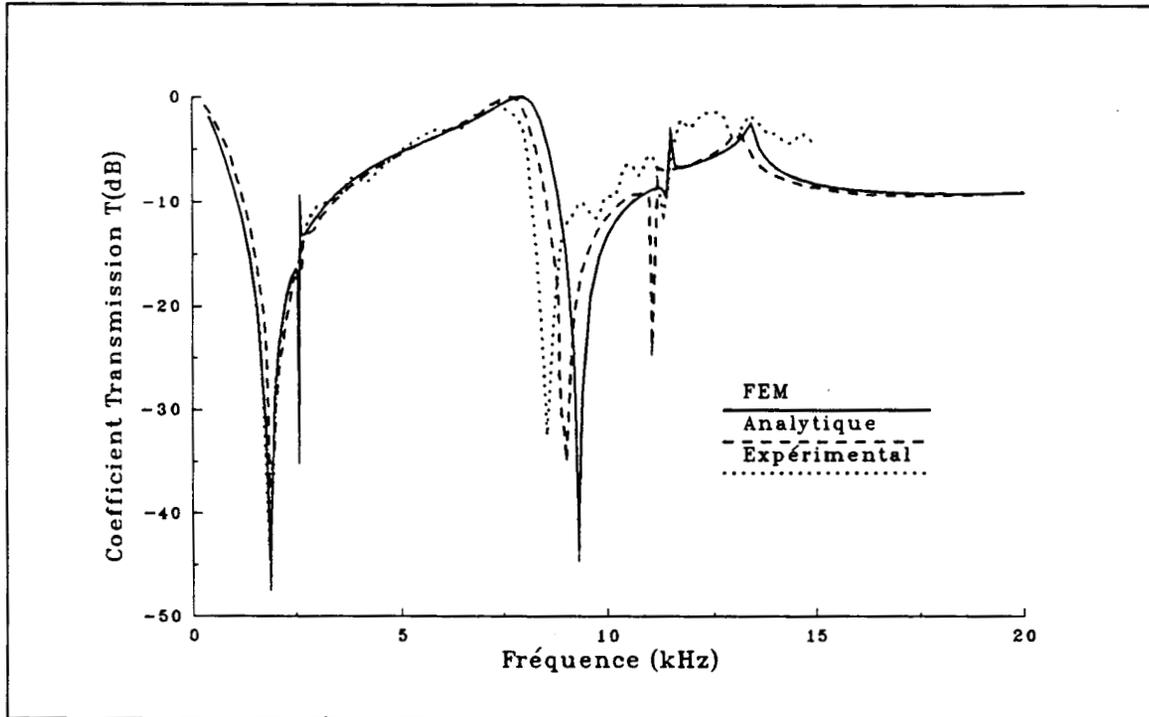


Figure III.30: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de tubes compliants, $\beta = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$.

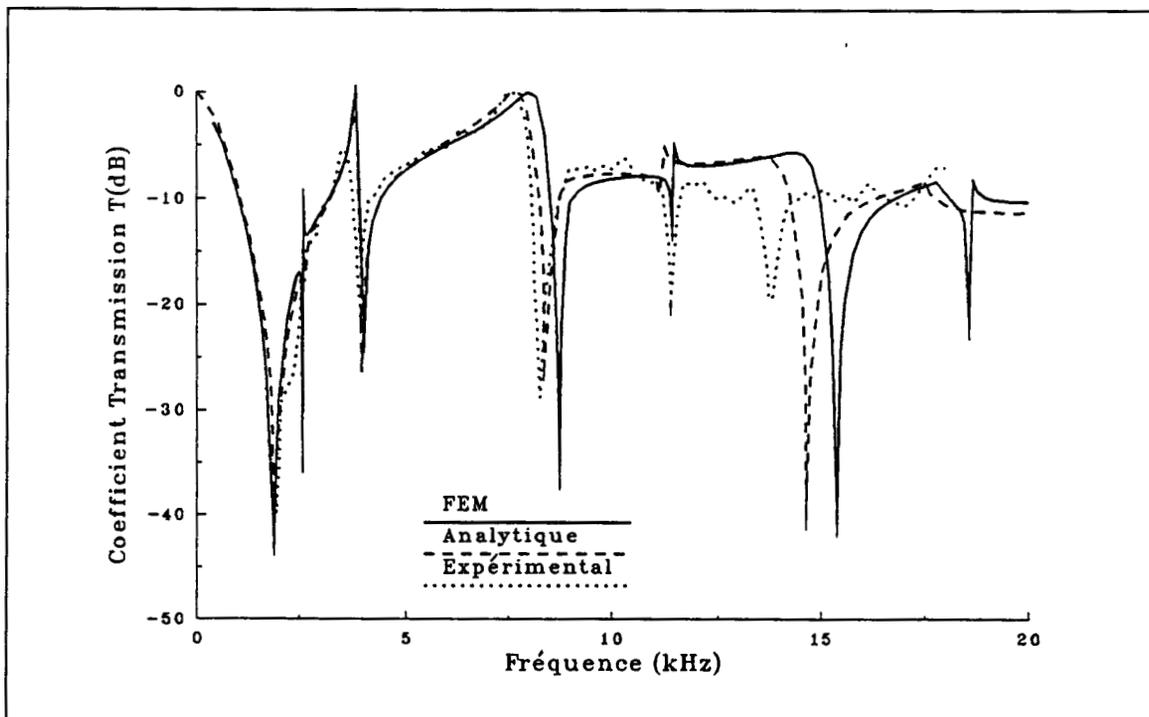
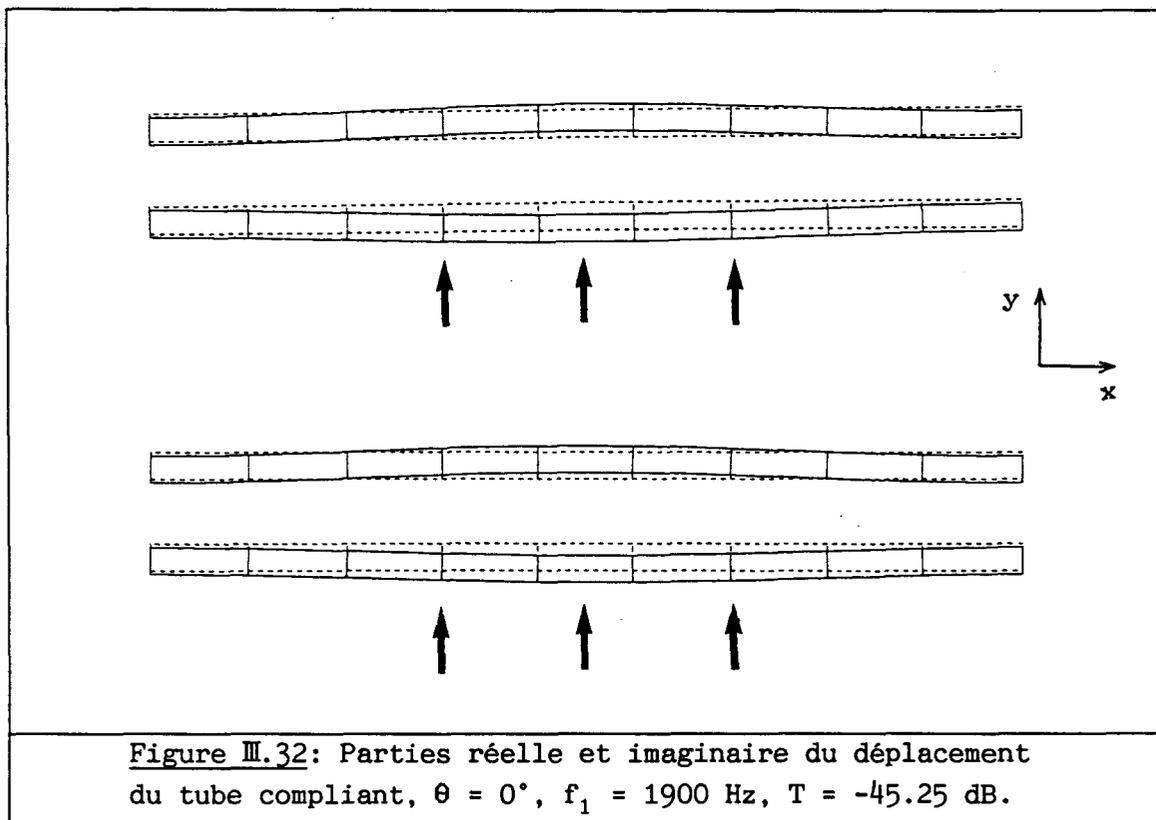
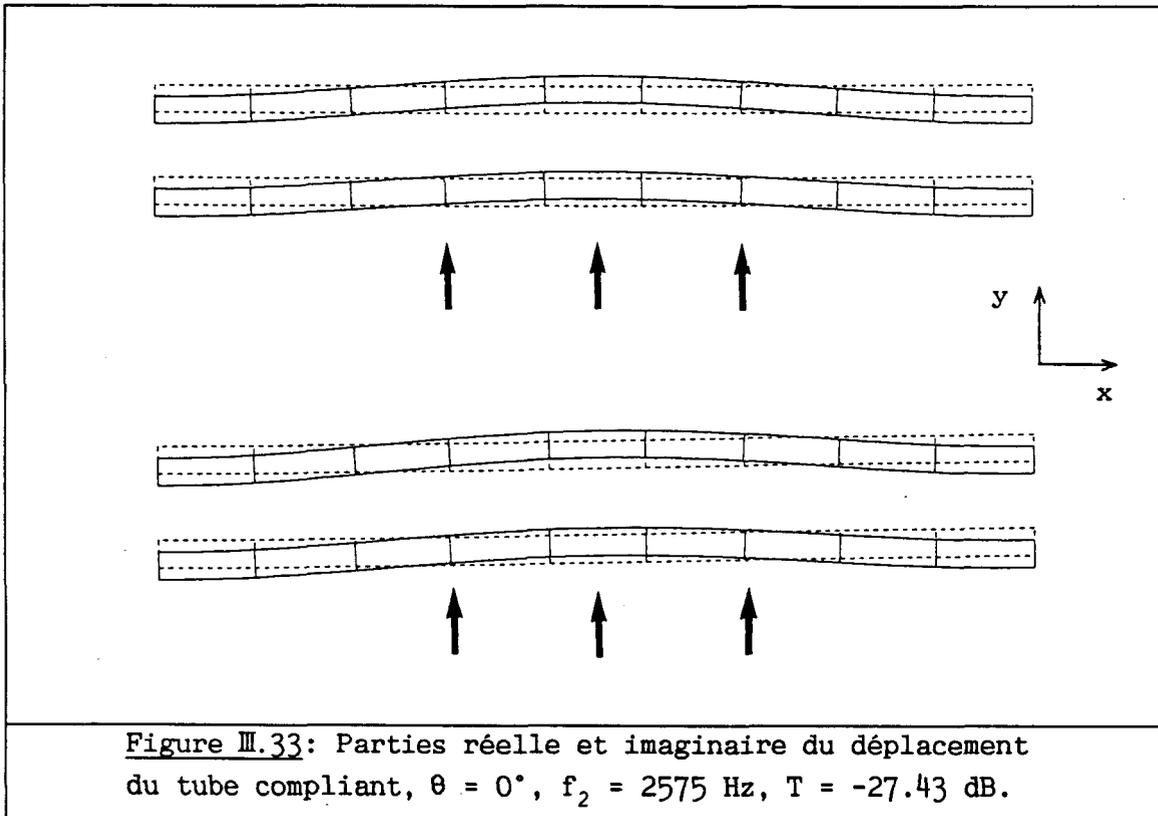


Figure III.31: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de tubes compliants, $\beta = 0^\circ$, $\theta = 30^\circ$.

L'accord est bon entre les résultats du modèle analytique, les résultats du modèle éléments finis et les mesures. Le décalage des pics, observé à haute fréquence, est certainement dû aux conditions mécaniques utilisées, qui ne sont pas strictement équivalentes dans les différents cas. Le champ de déplacement de la structure est présenté aux figures III.32 et III.33, pour les deux premières résonances du réseau, $f_1 = 1900$ Hz et $f_2 = 2575$ Hz et pour une excitation par une onde plane en incidence normale. Il montre des modes symétriques par rapport à la direction de l'onde incidente. La première résonance, due à l'excitation du mode rigide de translation et du premier mode symétrique par rapport au grand axe du tube, dont la fréquence est située à 1980 Hz dans l'air, est beaucoup plus prononcée que la seconde résonance, due à la combinaison du mode rigide de translation et du premier mode antisymétrique par rapport au grand axe du tube, dont la fréquence est située à 3300 Hz dans l'air. En effet, selon une interprétation développée par R.P. RADLINSKI [12], le premier mode symétrique par rapport à l'axe Ox a une variation de volume interne plus importante que le premier mode antisymétrique par rapport à l'axe x et l'effet d'écran acoustique est donc plus marqué.





III.4.1.b Second cas: $\beta = 0^\circ$, 90° , et 45° et l'incidence est normale.

Les tubes précédents sont inclinés les uns par rapport aux autres et le réseau ainsi formé est excité par une onde plane en incidence normale. Les figures III.30, III.34 et III.35 représentent le niveau transmis obtenu pour les configurations $\beta = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$ et $\beta = 45^\circ$, respectivement. Les figures III.36 et III.37 montrent le champ de déplacement de la structure pour les deux premières résonances du réseau lorsque $\beta = 90^\circ$. La symétrie de ce champ par rapport à l'onde incidente est claire. Avec la configuration $\beta = 45^\circ$, l'ensemble des modes est excité. Le diagramme est donc nettement plus perturbé.

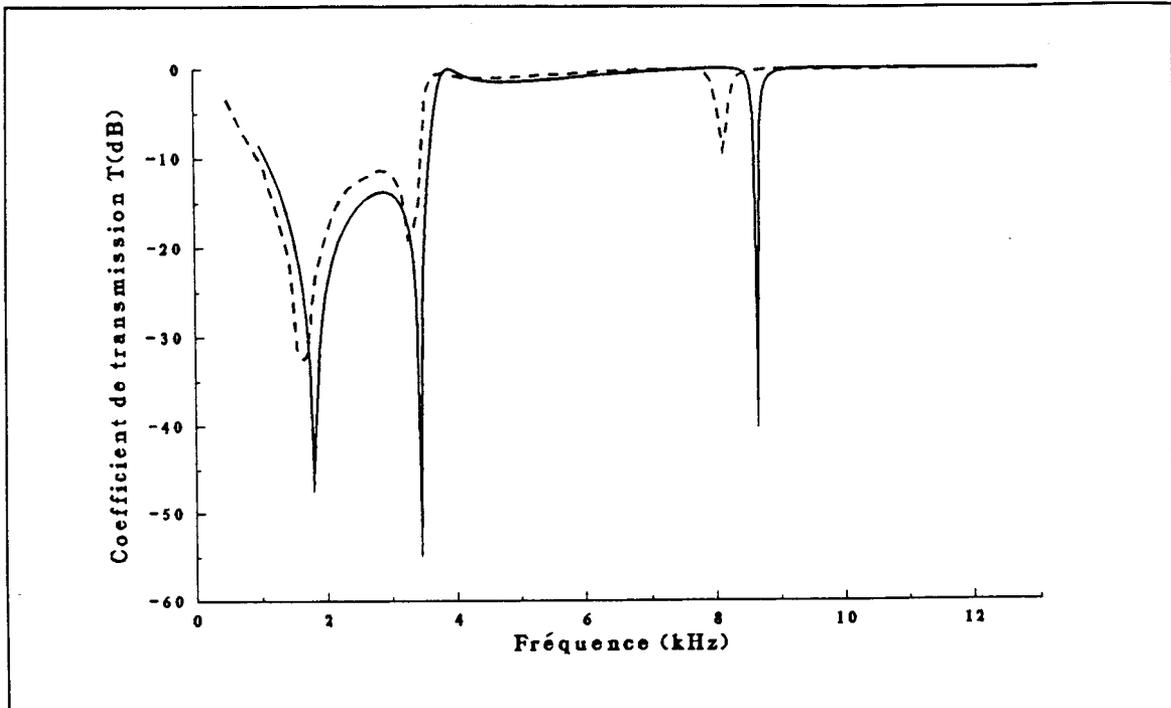


Figure III.34: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de tubes compliants, $\beta = 90^\circ$, $\theta = 0^\circ$.
 Trait plein (FEM), trait pointillé (Analytique).

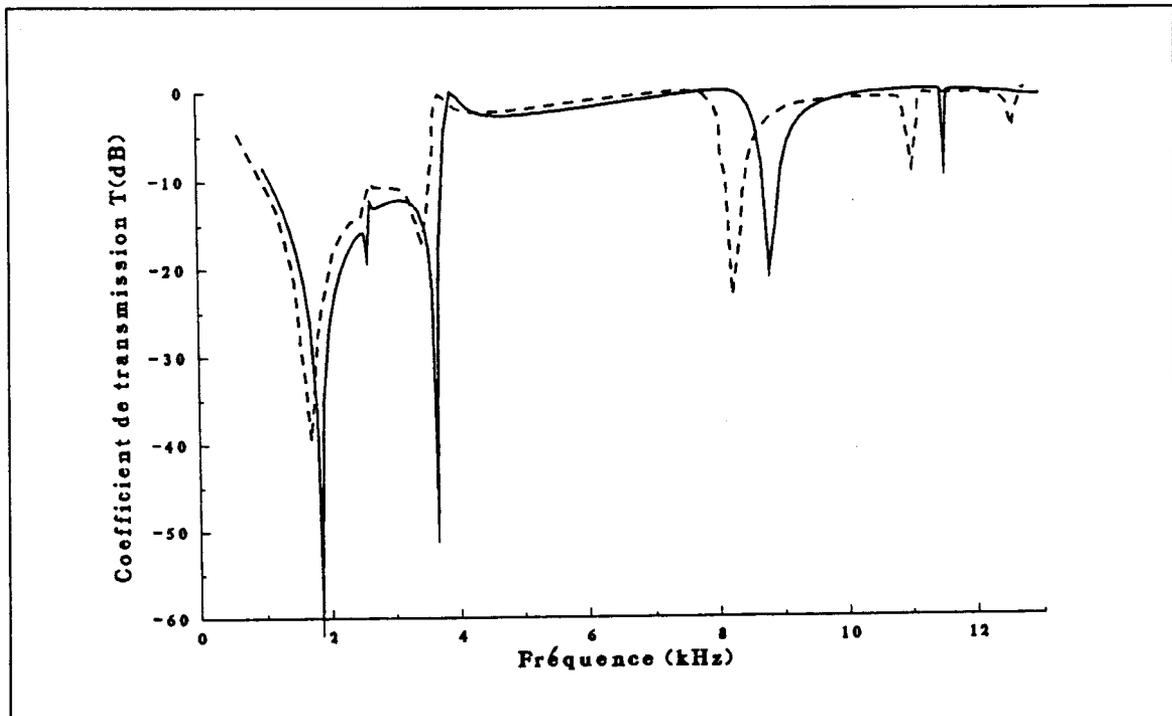
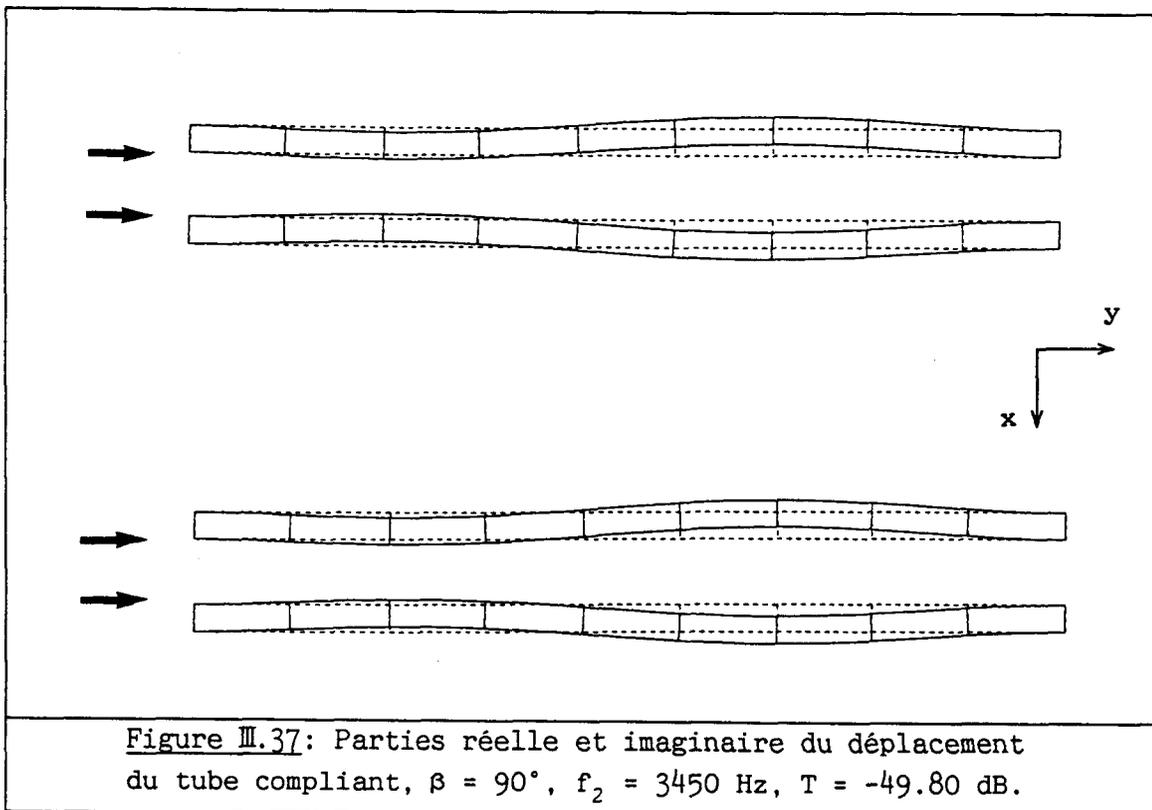
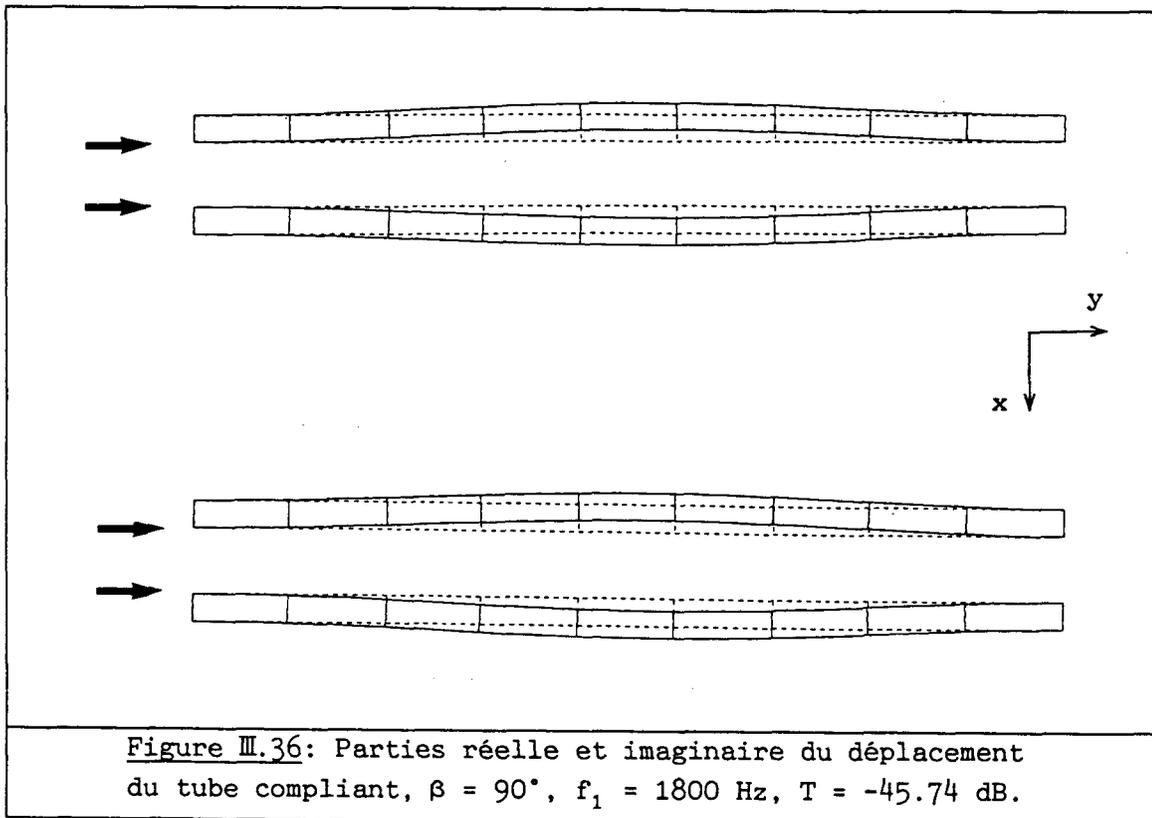
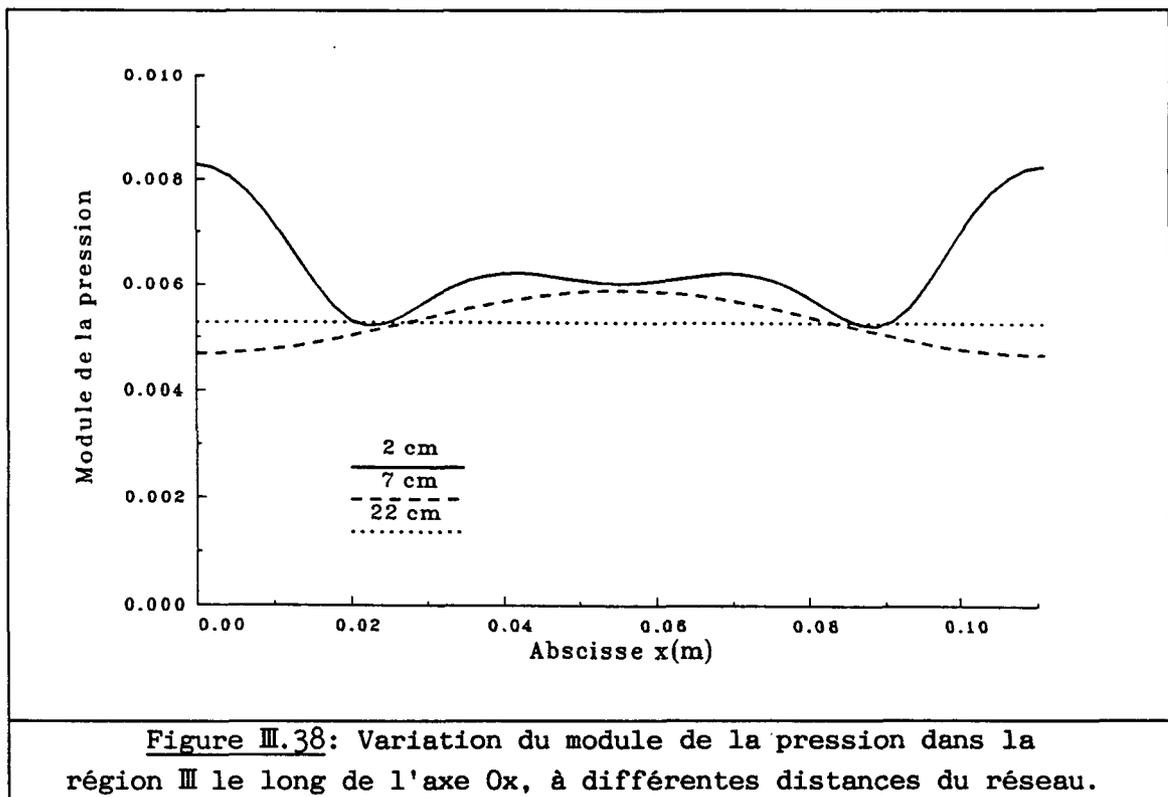


Figure III.35: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de tubes compliants, $\beta = 45^\circ$, $\theta = 0^\circ$.
 Trait plein (FEM), trait pointillé (Analytique).



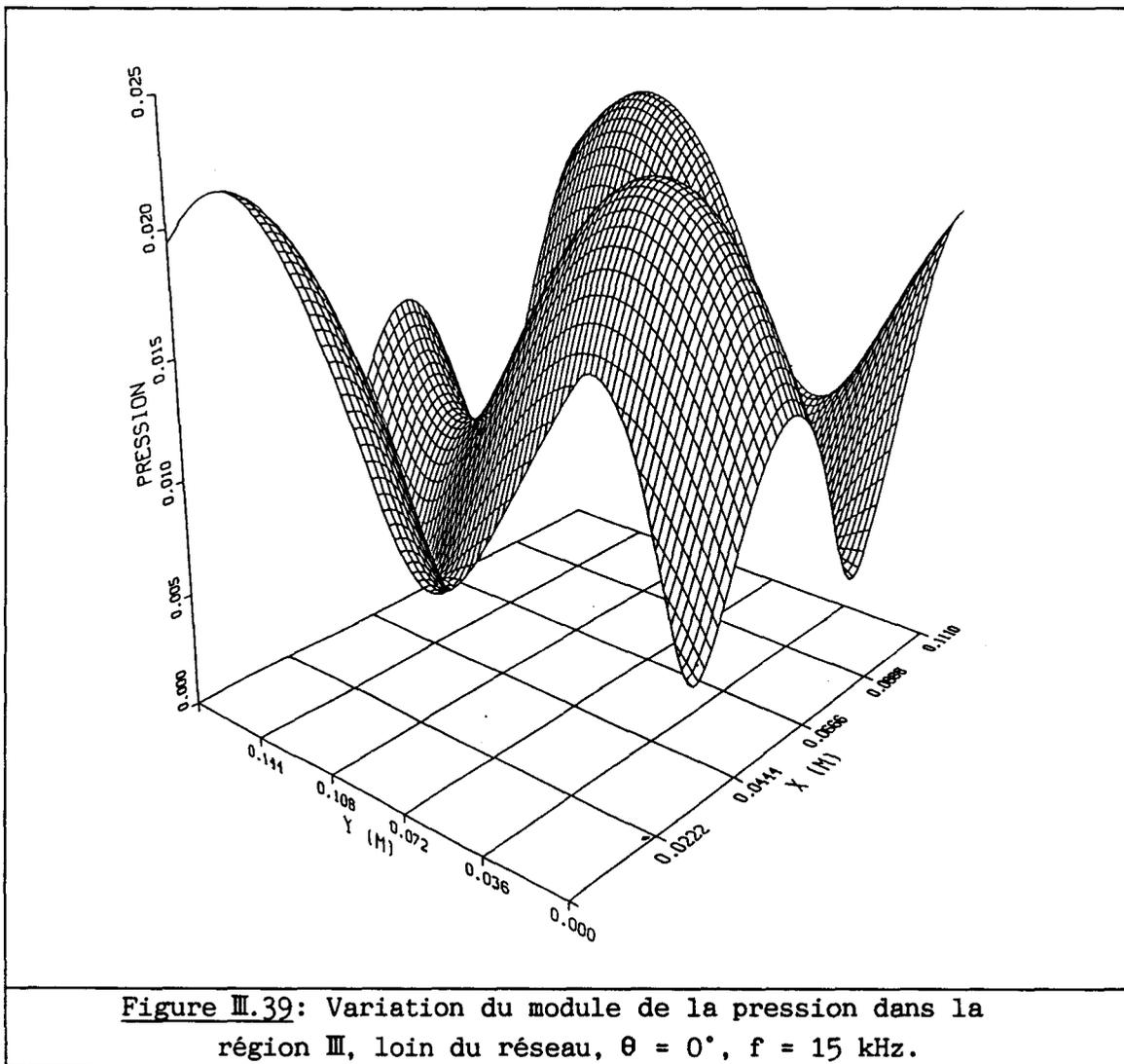
III.4.1.c Etude du champ proche.

Expérimentalement, l'hydrophone de réception est placé derrière le réseau, pour éviter tout problème de diffraction dû à la taille finie du panneau de tubes. La position de l'hydrophone vis-à-vis des tubes compliants peut alors influencer les résultats, puisque cet hydrophone est placé dans le champ proche. Utilisant le modèle éléments finis, le module de la pression peut être déterminé en fonction de l'abscisse, variant de 0 à $2d$, à différentes distances des tubes, comme indiqué dans le paragraphe II.5.2. L'étude permet alors de sélectionner la distance minimale. Un exemple est présenté à la figure III.38, pour une onde en incidence normale, lorsque $\beta = 0^\circ$, à 10 kHz. Bien qu'une seule onde se propage dans la région III, la pression varie le long de l'axe x lorsque l'hydrophone de réception tombe sous l'influence des ondes évanescentes, aux distances de 2 et 7 cm. En revanche, loin du réseau, par exemple à 22 cm, les ondes évanescentes sont négligeables et l'onde est parfaitement plane.



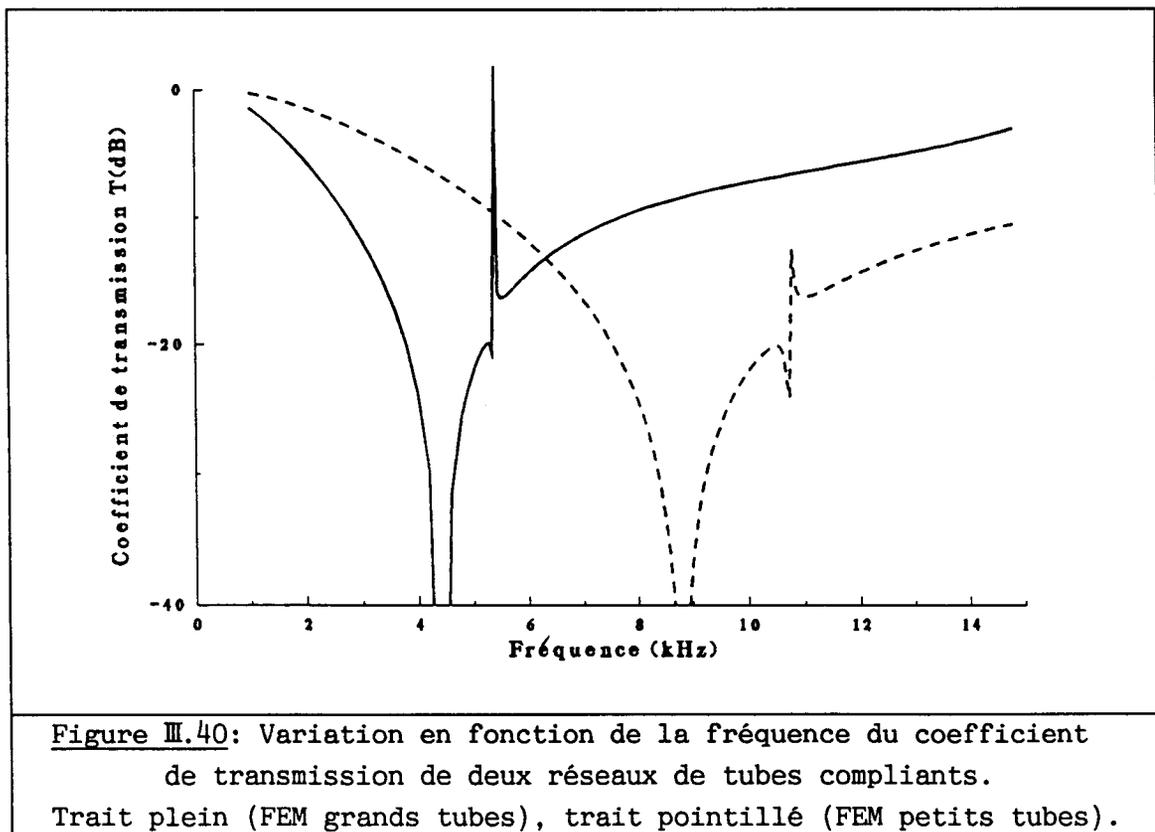
III.4.1.d Description des phénomènes d'interférence dans le champ de pression transmis.

Si plus d'une onde se propage dans les deux domaines fluides semi-infinis, en deçà de la ligne frontière (-) et au-delà de la ligne frontière (+), i.e. si la fréquence est supérieure à 13.3 kHz et 8.9 kHz pour les angles d'incidence 0° et 30° respectivement, les coefficients de réflexion et de transmission n'ont alors de sens qu'en valeur moyenne, puisque le champ de pression présente des maxima et des minima dans le plan xOy . Ainsi, à titre d'exemple, le module du champ de pression est représenté à la figure III.39, pour une onde en incidence normale et à 15 kHz, en utilisant la double périodicité de la fonction par rapport à la variable x et par rapport à la variable y afin de réduire le domaine d'étude (section II.5.3). Cette figure montre clairement un phénomène d'interférence dans le champ transmis.



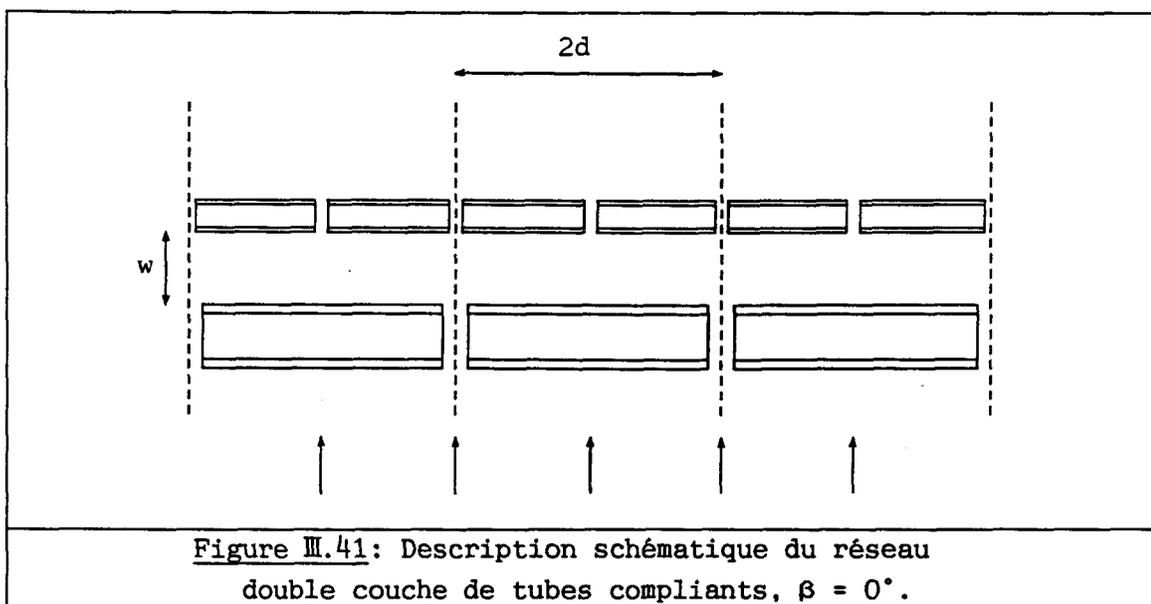
III.4.2 Etude de réseaux de tubes compliants multicouches.

La faible valeur de la largeur de la bande de réjection des réseaux monocouches à certaines fréquences de résonance suggère de combiner plusieurs panneaux afin de former des réseaux multicouches, dont la bande de réjection, par combinaison des bandes de réjection des réseaux élémentaires, pourrait être plus large [7, 12, 13]. Dans cette partie, les deux panneaux élémentaires considérés sont construits à partir de tubes, dont les propriétés du matériau constitutif sont: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$. Les tubes compliants des deux panneaux sont creux, de section allongée, et sont assimilés, d'un point de vue mécanique, à deux plaques planes encastées aux extrémités. Pour les tubes du premier panneau, le demi grand axe est 2.7 cm, le demi petit axe 1.2 cm, l'épaisseur des parois 2 mm. Ces tubes forment un réseau périodique de pas 6 cm, le grand axe du tube étant parallèle au plan du réseau. Le second panneau comporte, lui, des tubes deux fois plus petits et deux fois plus rapprochés. Le coefficient de transmission de chaque panneau, supposé excité séparément par une onde plane en incidence normale, a été calculé



par le modèle éléments finis et sa variation avec la fréquence est représentée à la figure III.40.

Les positions dans le spectre des bandes de réjection à -10 dB des deux panneaux suggèrent de les disposer côte à côte, sous la forme d'un réseau à deux couches, en vue d'élargir la bande. Ainsi, une onde plane normale au plan des tubes rencontre tout d'abord le réseau de grands tubes, puis le réseau de petits tubes, placé parallèlement au premier, à une distance notée w (figure III.41). Les figures III.42 et III.43 montrent les résultats obtenus par C. AUDOLY à l'aide d'un modèle analytique [15] et par la méthode des éléments finis, pour deux espacements différents entre les réseaux: 0.5 cm et 3.5 cm respectivement. L'accord est bon entre ces deux approches. Par ailleurs, ces résultats montrent que, lorsque deux réseaux de tubes compliants sont immergés, le diagramme du coefficient de transmission résultant n'est pas strictement la superposition des diagrammes de chacun des deux réseaux pris séparément. En effet, lorsque la distance de séparation entre les deux réseaux décroît, le champ de pression dans le voisinage immédiat des tubes devient moins uniforme, comme l'a montré la figure III.38, et ces interactions dans le champ proche tendent à modifier les performances, notamment en terme de largeur de bande [69]. A ce stade, grâce à la méthode élaborée, une optimisation et une analyse fine des mécanismes d'interaction peuvent être conduites.



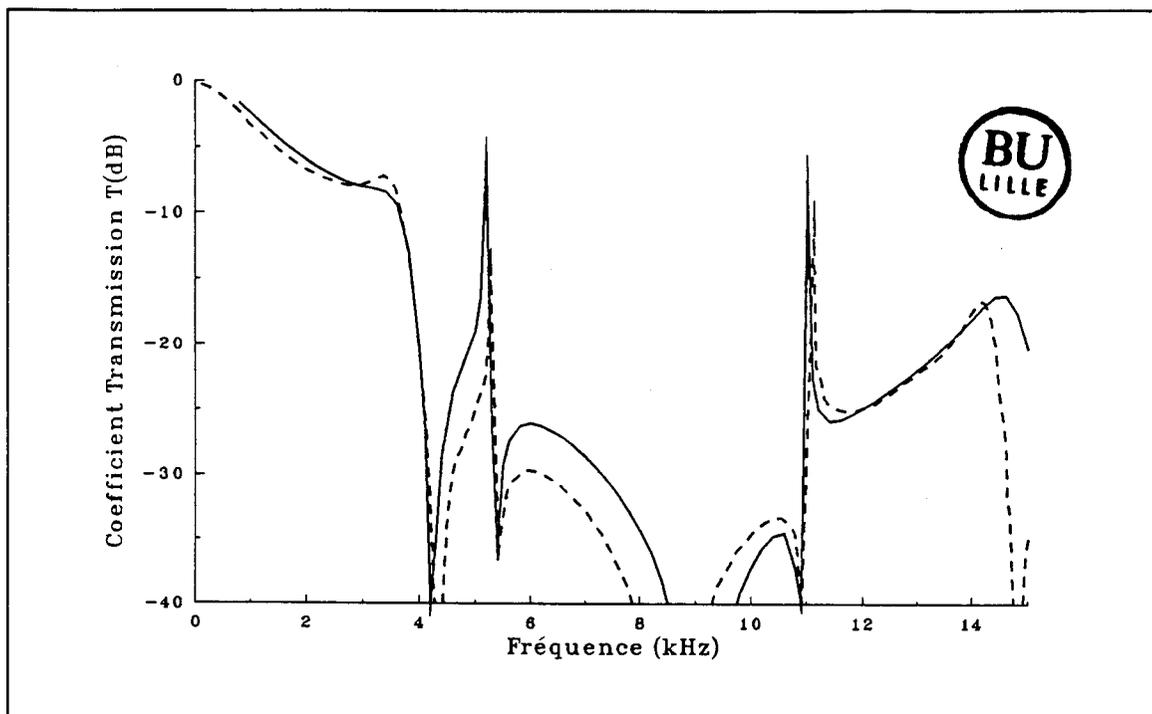


Figure III.42: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau double couche, $\theta = 0^\circ$, $w = 0.5$ cm. Trait plein (FEM), trait pointillé (Analytique).

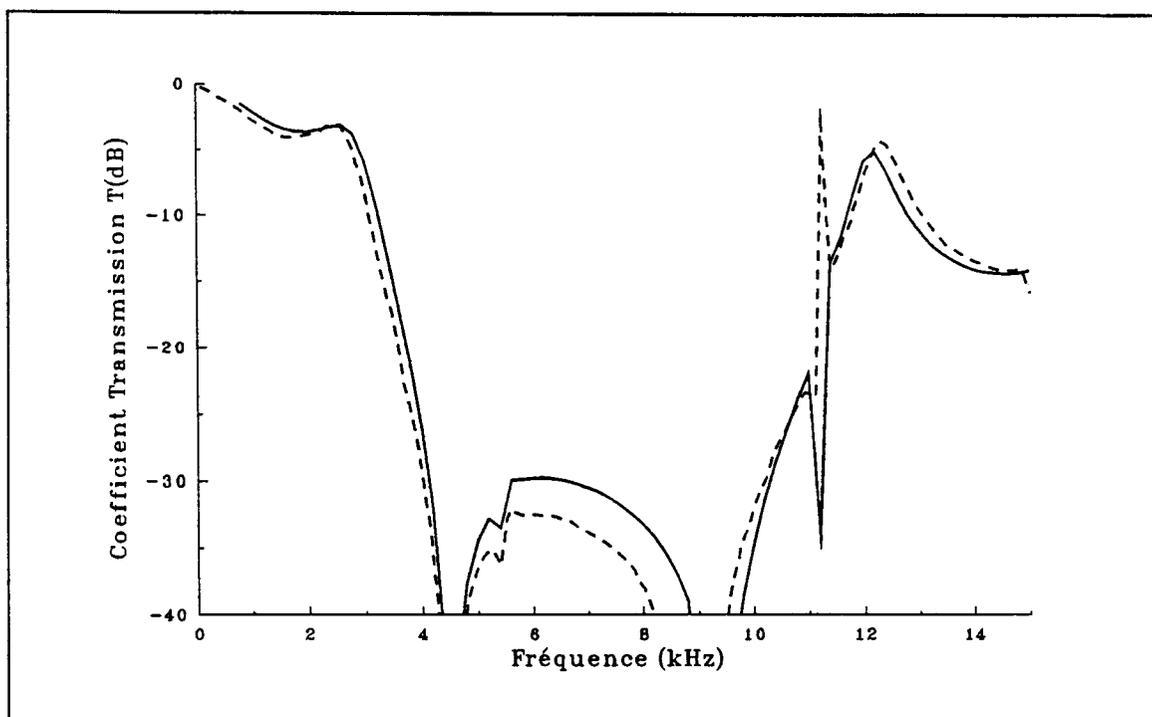


Figure III.43: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau double couche, $\theta = 0^\circ$, $w = 3.5$ cm. Trait plein (FEM), trait pointillé (Analytique).

III.4.3 Etude de réseaux de tubes compliants enrobés d'un matériau viscoélastique.

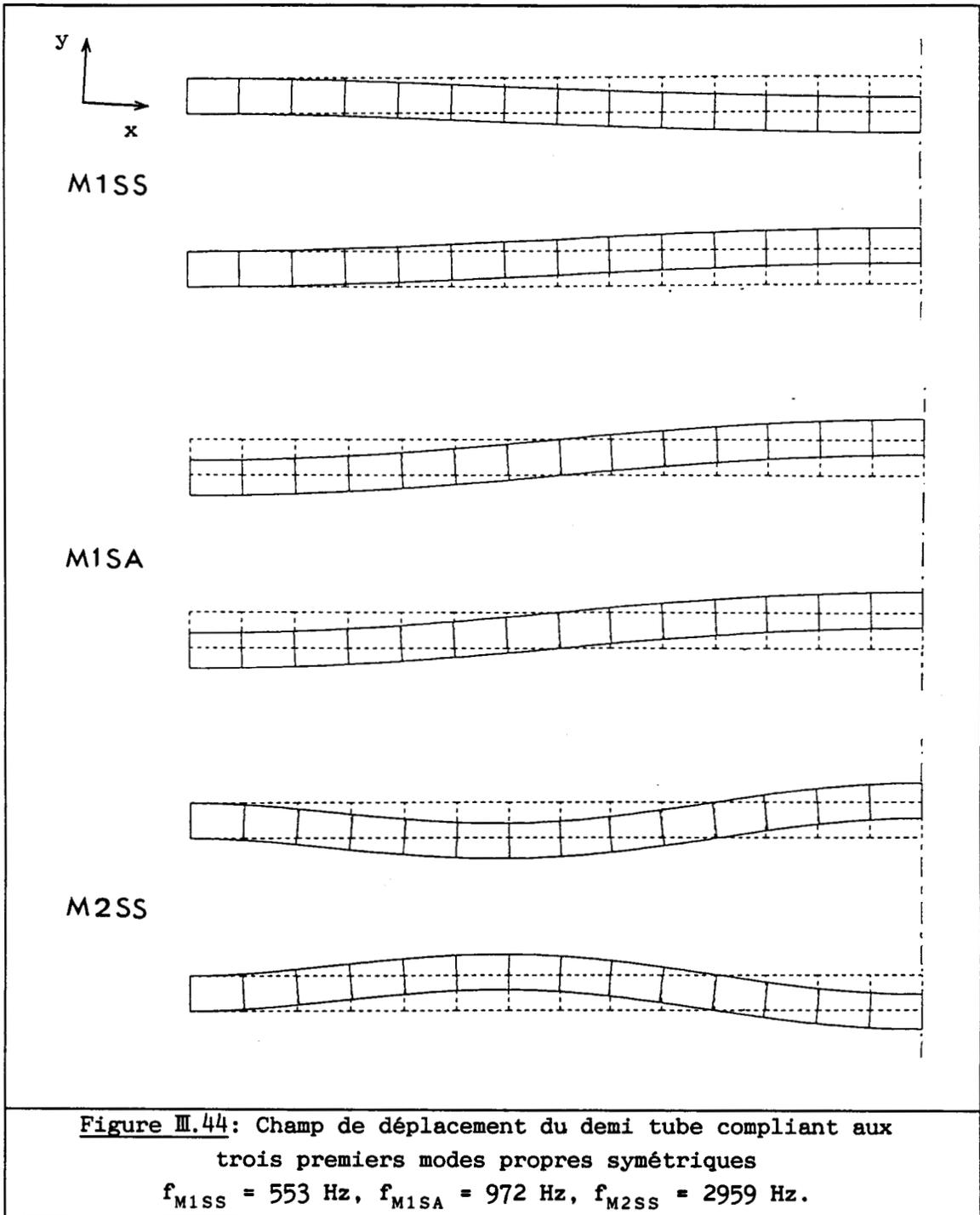
Dans cet exemple, le coefficient de transmission est calculé pour les réseaux de tubes compliants monocouches, enrobés ou non d'un matériau viscoélastique, étudiés par R.P. RADLINSKI [12, 14, 67]. Le cas des réseaux multicouches [13] n'est pas traité, les résultats de la section III.4.2 étant satisfaisants.

Deux réseaux de tubes compliants, modélisés par deux plaques planes mécaniquement couplées, dont les propriétés du matériau constitutif sont: $E = 19.5 \cdot 10^{10} \text{Pa}$, $\nu = 0.28$, $\rho = 7700 \text{ kg.m}^{-3}$, sont considérés. Notant a le demi grand axe, b le demi petit axe, h l'épaisseur des parois, et d le demi-pas du réseau, les dimensions des éléments compliants sont données en fonction de la longueur d'onde acoustique du premier mode de résonance symétrique du grand tube, correspondant à $f_1 = 553 \text{ Hz}$ dans le tableau III.4.

	a	a / b	h	d
Tube 1	$0.043 \lambda_1$	7.35	$0.002 \lambda_1$	$0.05 \lambda_1$
Tube 2	$0.57 a_1$	7.35	$0.57 h_1$	$0.05 \lambda_1$

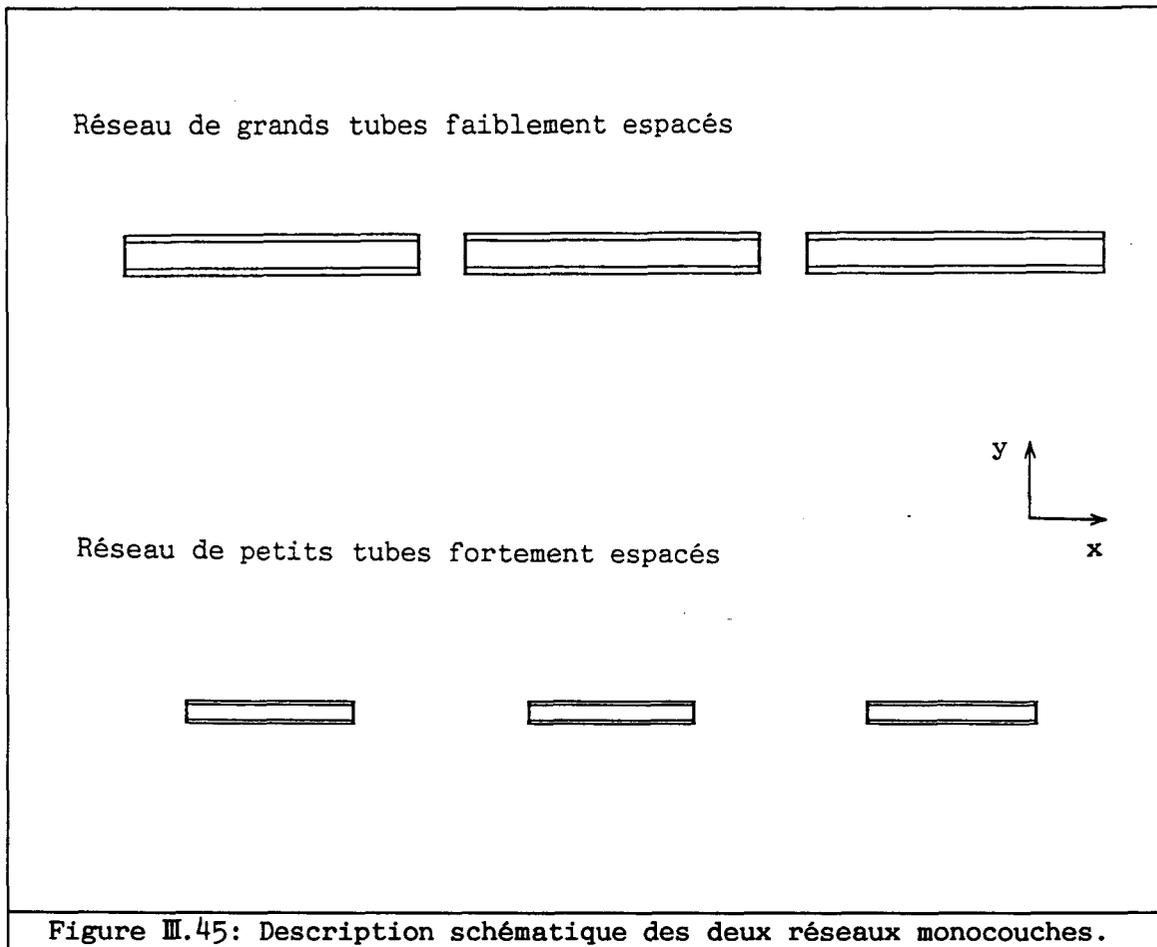
Tableau III.4

L'analyse modale du grand tube est effectuée en ne modélisant que la moitié du tube, afin de déterminer uniquement les modes symétriques par rapport à la direction de l'onde incidente. La figure III.44 présente le champ de déplacement de la moitié du tube pour les trois premières fréquences de résonance: 553 Hz, 972 Hz et 2959 Hz. Le premier et le troisième modes sont symétriques par rapport au grand axe du tube et sont notés M1SS et M2SS, respectivement. Le second mode est antisymétrique par rapport à cet axe et est noté M1SA. L'analyse modale de l'autre tube n'est pas effectuée. En effet, le rapport des dimensions étant égal à 0.57, le premier mode propre de ce tube est donc $f_2 = 1.8 f_1$.



III.4.3.a Réseaux non enrobés d'un matériau viscoélastique.

Les tubes, dont le grand axe est parallèle au plan du réseau, sont excités par une onde plane en incidence normale (figure III.45). Les coefficients de transmission mesurés ou obtenus par le modèle analytique élaboré par R.P. RADLINSKI [12, 14, 67] et par la méthode des éléments finis pour les deux réseaux simples, sont présentés aux figures III.46 et



III.47 et montrent un très bon accord entre les différentes approches. La bande de réjection à -10 dB est plus large dans le cas des grands tubes, puisque ces tubes forment un réseau plus dense. Dans la bande de fréquence étudiée un minimum apparaît à 590 Hz, pour le réseau de grands tubes, et à 725 Hz, pour le réseau de petits tubes, correspondant à l'excitation du premier mode symétrique du tube dans l'air, M1SS, compensé par la translation d'ensemble. Le deuxième minimum à 2850 Hz, pour le réseau de grands tubes, et à 4250 Hz, pour le réseau de petits tubes, est dû à la contribution du mode rigide de translation et du mode M2SS. L'effet du mode M1SA, symétrique par rapport à l'axe y et antisymétrique par rapport à l'axe x , est, lui, très léger mais peut être néanmoins noté sur la figure III.46 à 770 Hz et sur la figure III.47 à 1300 Hz. Cet effet peu important est dû à la faible variation de volume interne. Il a déjà été mis en évidence dans le paragraphe III.4.1 traitant les réseaux de tubes compliants monocouches. Le champ de déplacement du grand tube aux deux pics principaux du diagramme, présenté aux figures III.48 et III.49, permet une identification aisée des modes.

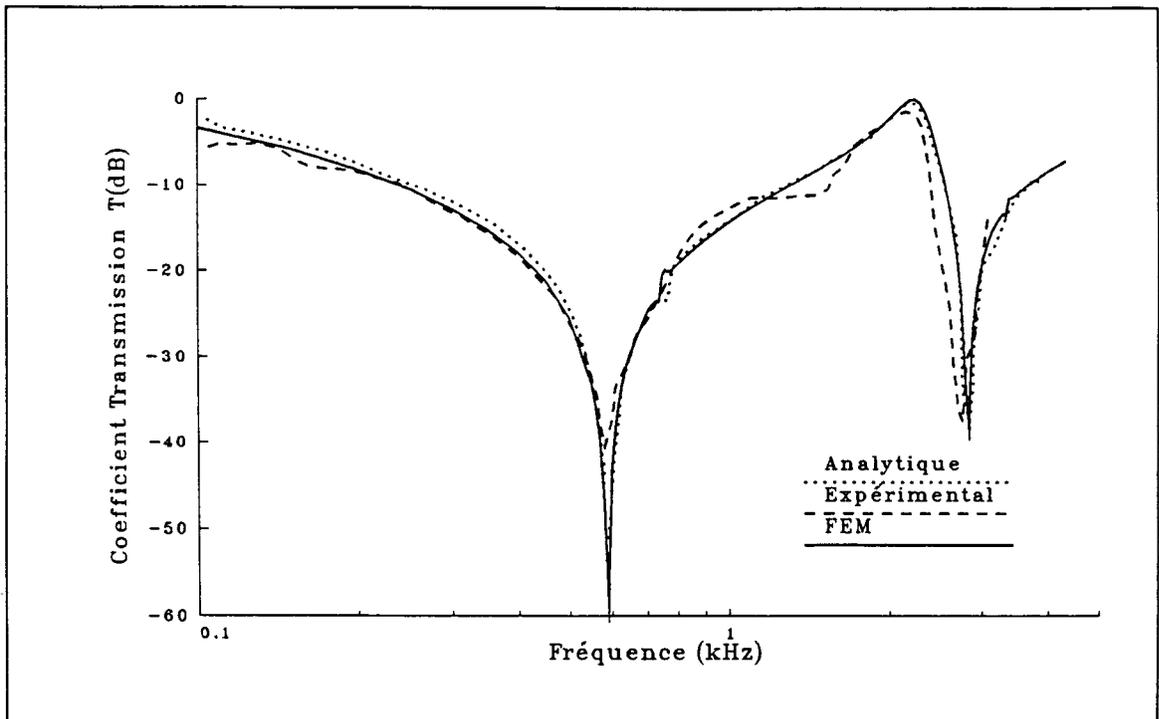


Figure III.46: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de grands tubes compliants faiblement espacés. $\theta = 0^\circ$.

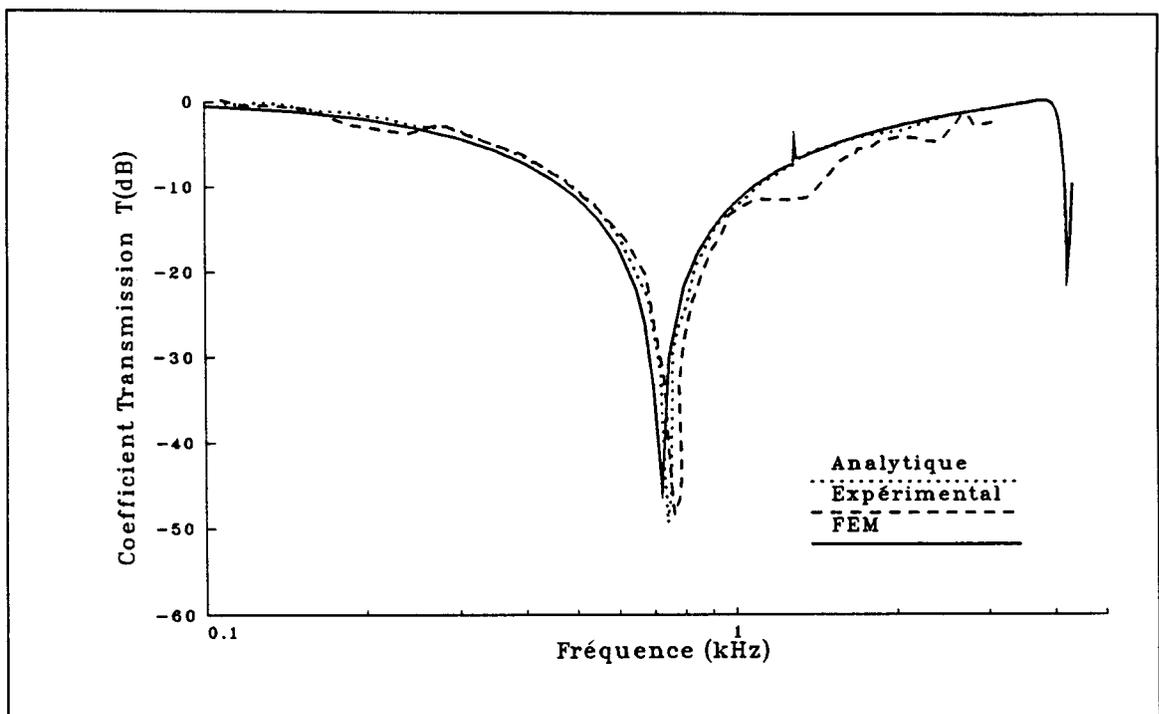
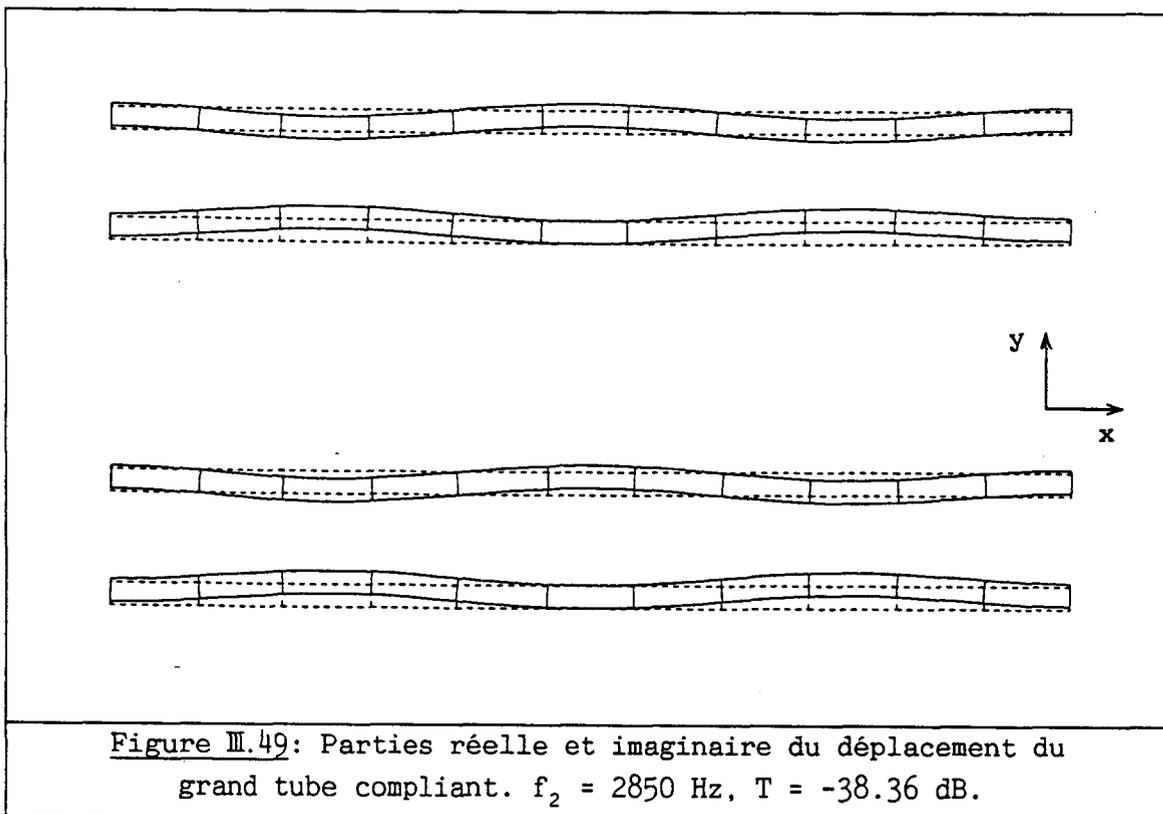
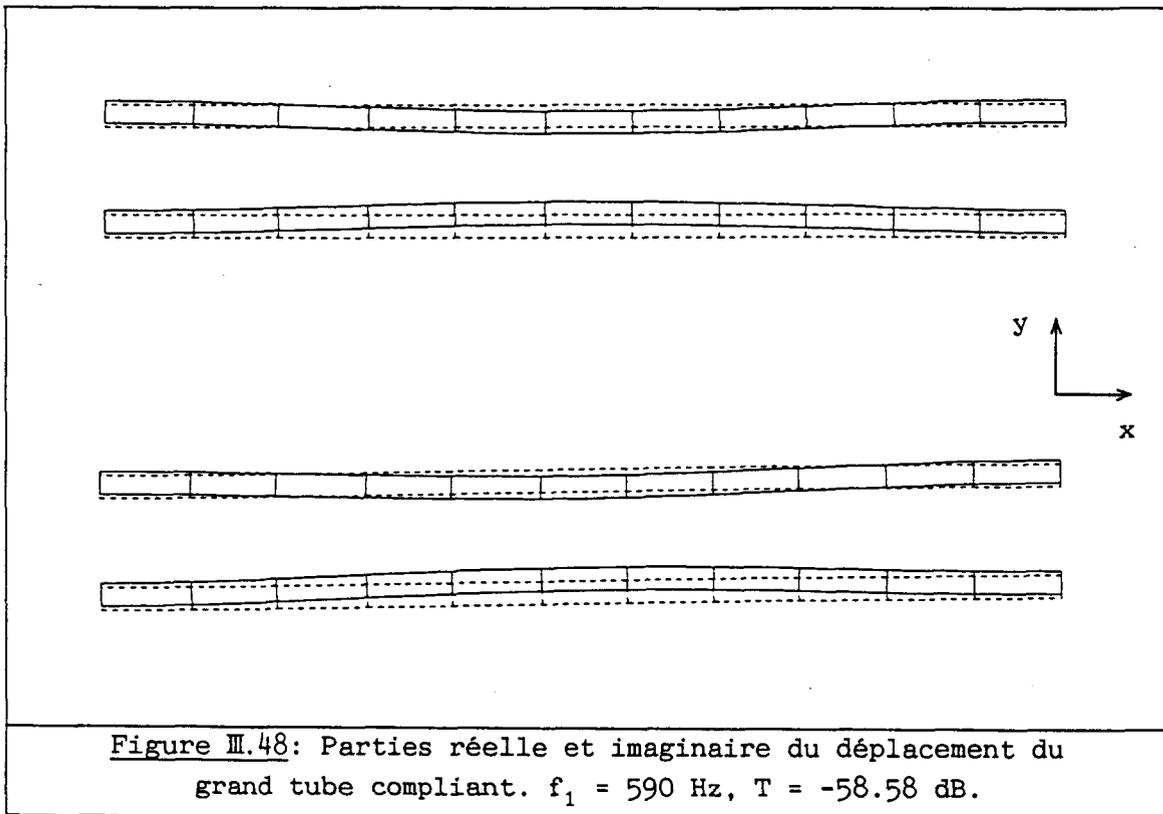


Figure III.47: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de petits tubes compliants fortement espacés. $\theta = 0^\circ$.

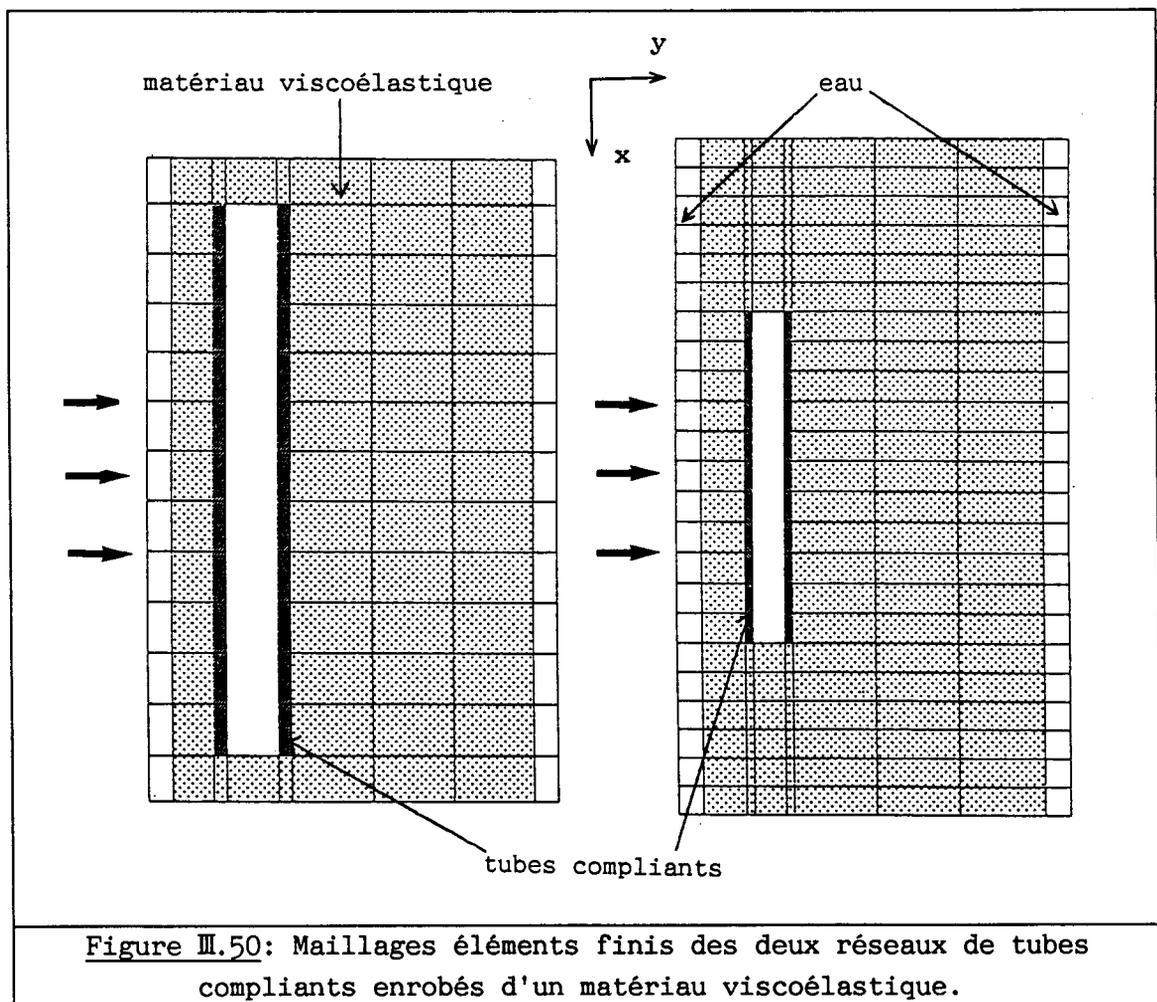


III.4.3.b Réseaux enrobés d'un matériau viscoélastique.

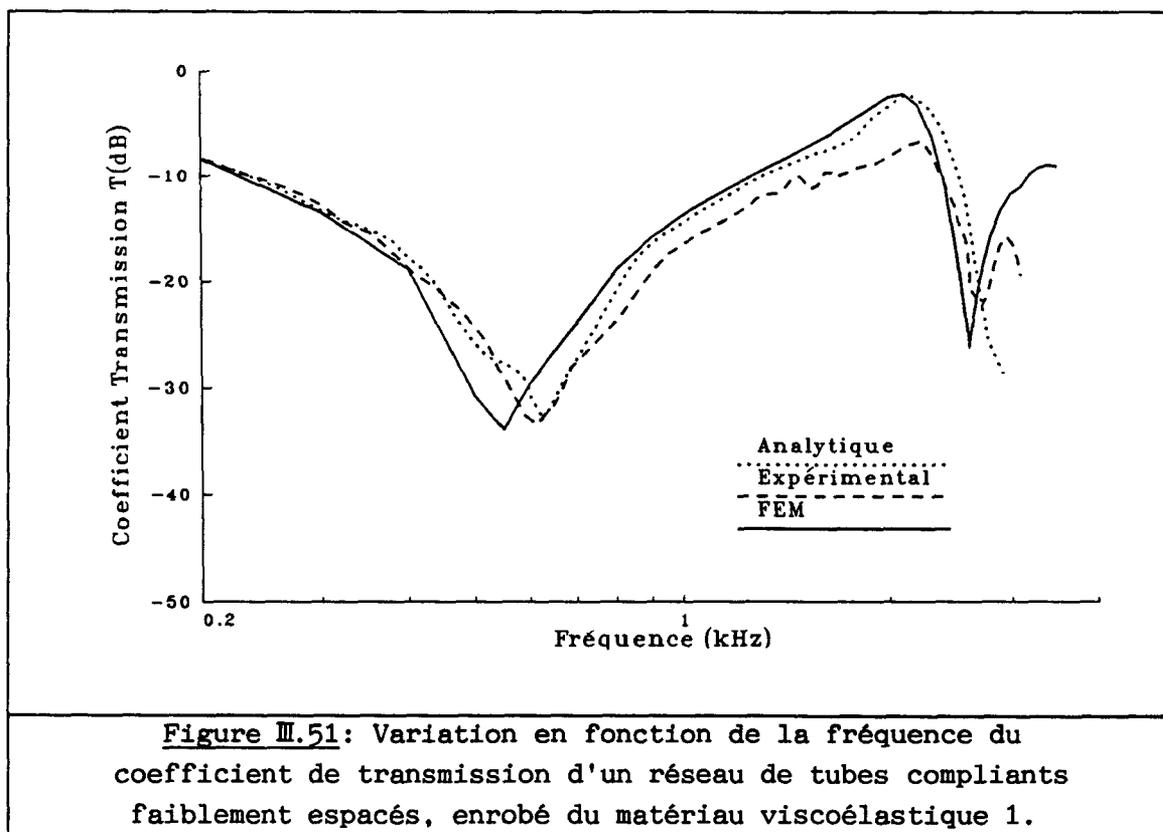
Deux matériaux viscoélastiques différents ont été utilisés par R.P.RADLINSKI pour enrober les tubes sur une épaisseur de $0.00375 \lambda_1$ au-delà des tubes, de $0.00125 \lambda_1$ en deçà des tubes, dont le maillage est présenté à la figure III.50. Les propriétés physiques de ces matériaux: le module d'Young E , le pourcentage de pertes sur le module d'Young $\text{tg } \delta$, le coefficient de Poisson ν , la densité ρ , la vitesse des ondes longitudinales c_1 et des ondes transversales c_t sont donnés dans le tableau III.5:

	E (Pa)	$\text{tg } \delta$ (%)	ν	ρ (kg.m^{-3})	c_1 (m/s)	c_t (m/s)
Matériau 1	$4.139 \cdot 10^6$	0.20	0.4997	1030	1558.6	36.6
Matériau 2	$4.068 \cdot 10^8$	0.50	0.4738	1030	1641.6	366.0

Tableau III.5



La figure III.51 présente la variation du coefficient de transmission en fonction de la fréquence pour le réseau de grands tubes enrobé dans le matériau 1. Le diagramme obtenu pour le réseau de petits tubes est présenté à la figure III.52. Puisque la vitesse des ondes transversales est très faible dans le matériau 1, le maillage éléments finis ne vérifie pas tout à fait le critère en $\lambda/4$ pour c_t . Néanmoins, l'accord est satisfaisant. Par comparaison aux figures III.46 et III.47, enrober le réseau fait monter la fréquence du premier pic. En outre, les pertes diminuent la profondeur des deux pics, dus à l'excitation des modes symétriques M1SS et M2SS mais élargissent notablement les bandes de réjection. Enfin, le pic résultant du mode M1SA, antisymétrique par rapport au grand axe du tube, disparaît. Toutefois, le matériau d'enrobage ayant des caractéristiques acoustiques proches de celles de l'eau, l'effet de l'enrobage reste assez faible sur les deux diagrammes présentés. Néanmoins, le pic résultant du mode M1SA, antisymétrique par rapport au grand axe du tube, disparaît.



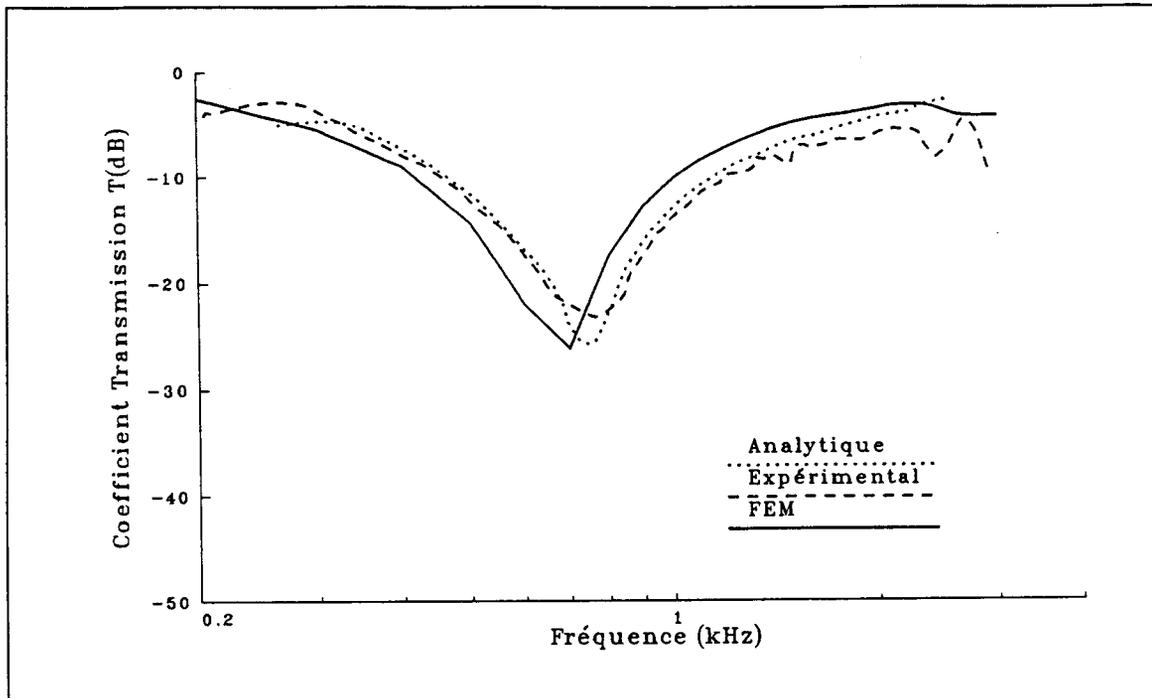


Figure III.52: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de tubes compliants fortement espacés, enrobé du matériau viscoélastique 1.

Enrobant maintenant les tubes dans le matériau 2, dont la rigidité et les pertes sont supérieures à celles du matériau 1, les diagrammes présentant les variations du coefficient de transmission avec la fréquence changent fortement (figures III.53 et III.54). L'accord est meilleur entre les différentes approches puisque le maillage éléments finis respecte le critère en $\lambda/4$ pour la vitesse des ondes longitudinales et transversales dans le matériau d'enrobage, c_t étant multipliée par un facteur 10. Les fréquences de résonance du réseau augmentent notablement du fait de la rigidité apportée par le matériau 2.

Finalement, cette section montre que les tubes compliants enrobés d'un matériau viscoélastique présentent des caractéristiques intéressantes en vue d'applications en acoustique sous-marine. La méthode des éléments finis permet de modéliser ces réseaux et les résultats sont en bon accord avec les résultats d'un modèle analytique et avec les mesures, moyennant le respect du critère en $\lambda/4$. Ces exemples permettent d'établir quelques règles relatives à l'optimisation de réseaux de tubes compliants: enrober des tubes compliants d'un matériau viscoélastique modifie la fréquence de résonance du réseau, du fait de la rigidité supplémentaire apportée par le matériau d'enrobage. L'effet d'un matériau rigide, avec des pertes élevées,

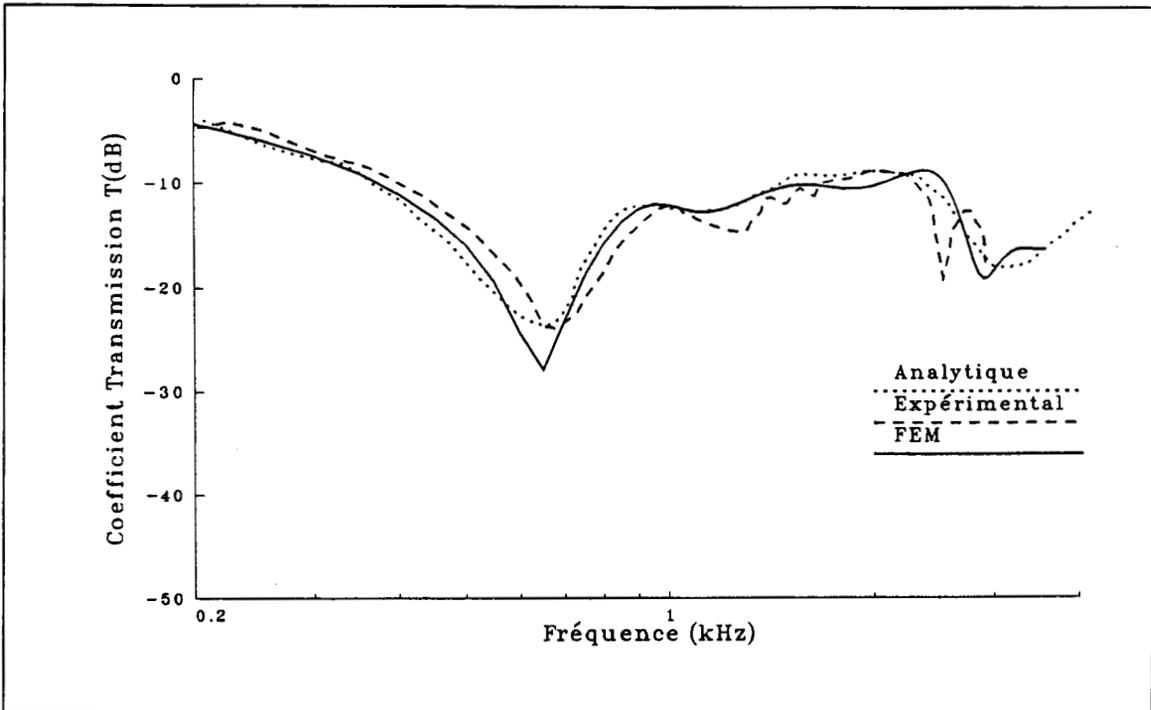


Figure III.53: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de tubes compliants faiblement espacés, enrobé du matériau viscoélastique 2.

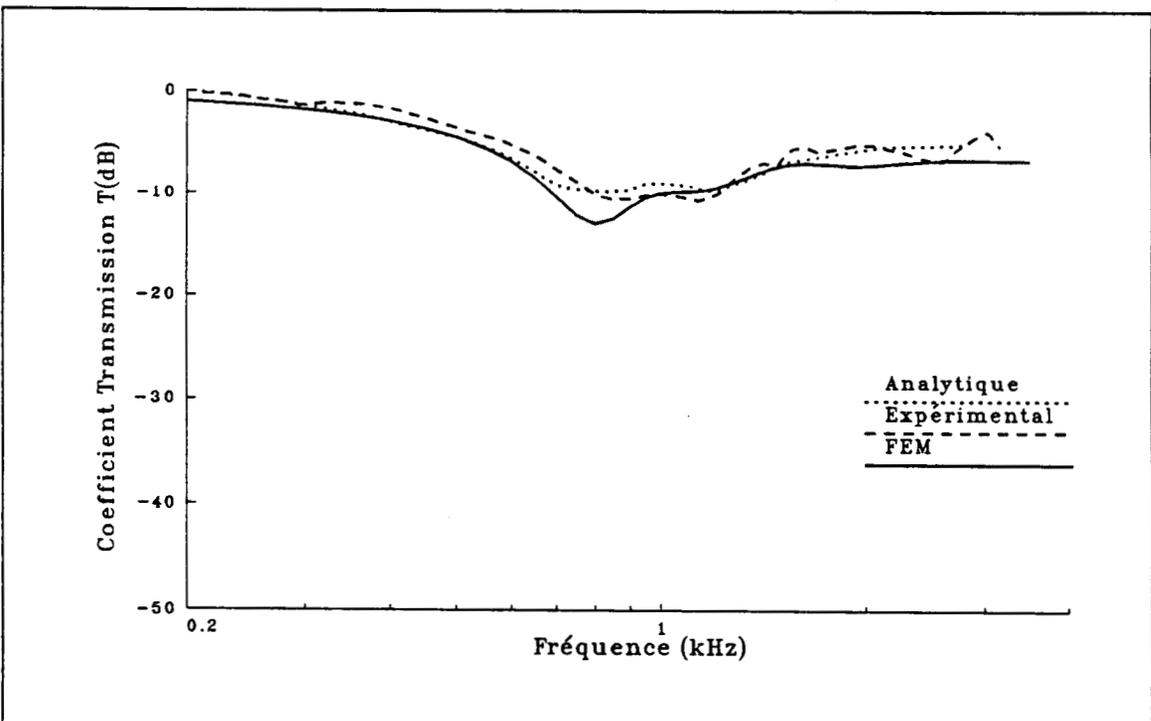


Figure III.54: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un réseau de tubes compliants fortement espacés, enrobé du matériau viscoélastique 2.

est important en terme de niveau maximal de réjection et de largeur de bande. Il peut être alors envisagé de disposer côte à côte plusieurs réseaux de tubes compliant enrobés d'un matériau viscoélastique, en vue d'obtenir des diagrammes d'insertion présentant des caractéristiques optimales et répondant à un cahier des charges donné.

III.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, les tests réalisés pour des structures périodiques à une dimension montrent qu'un très bon accord est toujours obtenu lors de la comparaison des résultats produits par le modèle éléments finis et par un modèle analytique, lorsque ce dernier existe. De plus, la souplesse et la fiabilité de cette approche originale ont été démontrées. Toutefois, quelques écarts ont parfois été observés lorsque les résultats du modèle éléments finis sont comparés à des mesures, comme dans le cas de cylindres enrobés de polyuréthane, ce matériau étant faiblement rigide et ayant des pertes importantes. La mauvaise connaissance des propriétés du matériau, variant de façon conséquente en fonction de la fréquence d'excitation et de la température d'expérimentation, peut expliquer facilement les écarts observés.

Une première extension de la technique développée peut maintenant être envisagée, pour analyser les structures périodiques à deux dimensions, dans le but de déterminer le comportement de panneaux de type Alberich ou de panneaux anéchoïques à adaptation graduelle, décrits dans l'introduction.

CHAPITRE 4

FORMULATION THEORIQUE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

APPLIQUEE A LA MODELISATION DE STRUCTURES PERIODIQUES A DEUX DIMENSIONS.

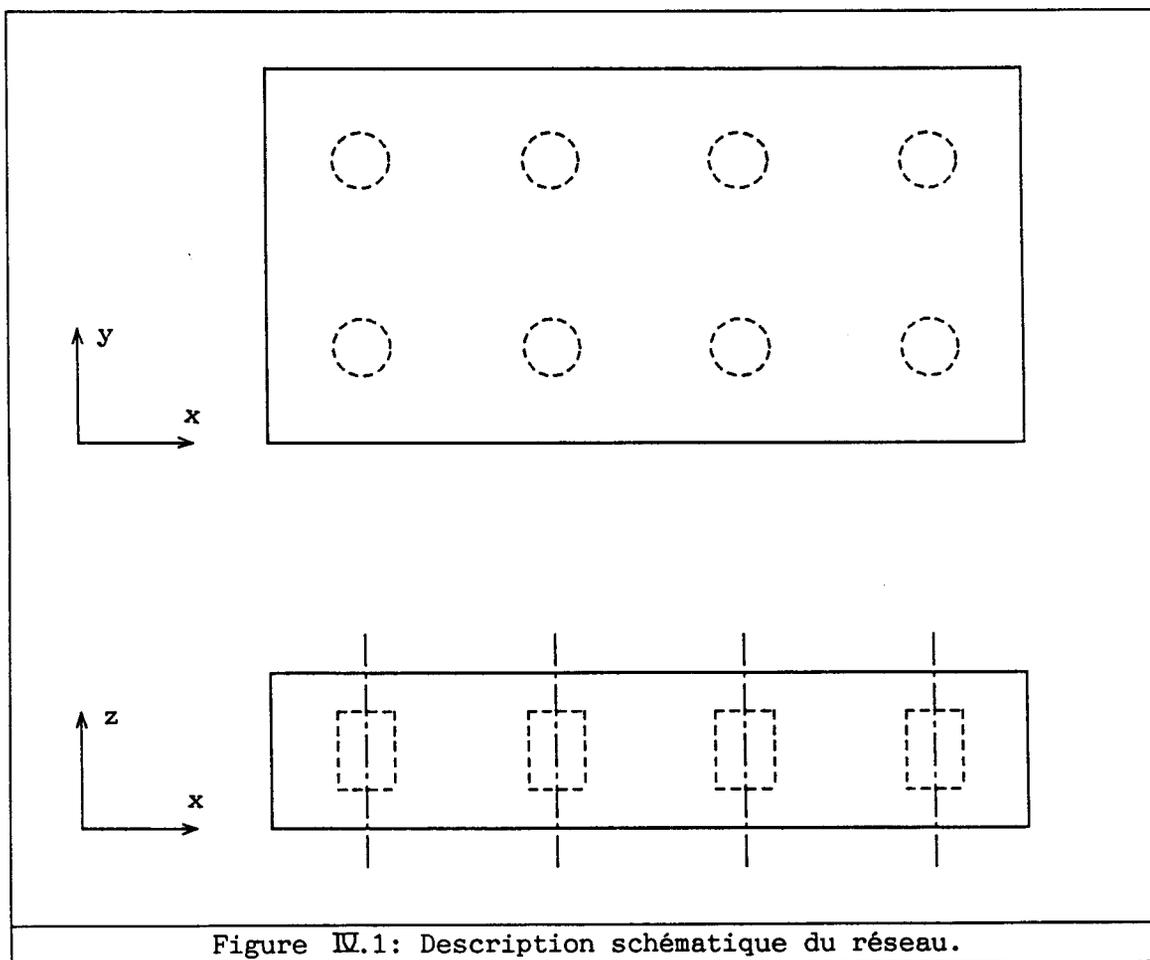
Dans ce chapitre, les structures périodiques concernées sont essentiellement des panneaux de type Alberich. Elles peuvent aussi être des panneaux absorbants, utilisés pour le revêtement d'une cuve acoustique et constitués, par exemple, de pyramides, de prismes ou de coins. Dans tous les cas, le motif de base se répète parallèlement à lui-même et périodiquement dans deux directions.

La première section décrit tout d'abord le modèle mathématique général adapté à de tels réseaux, en suivant la démarche proposée dans le chapitre 2. Puis, les sections 2 et 3 décrivent respectivement, la prise en compte de la périodicité, à l'aide d'une relation de phase entre des points distants d'un nombre entier de fois le pas du réseau, et l'écriture des conditions de continuité du champ de pression et de sa dérivée normale sur les frontières du domaine fluide. Enfin, la section 4 discute la méthode de résolution.

IV.1 INTRODUCTION AU MODELE MATHEMATIQUE GENERAL D'UN RESEAU PERIODIQUE A DEUX DIMENSIONS.

IV.1.1 Description du modèle.

Un modèle simple peut être élaboré en considérant, à titre d'exemple, un panneau de type Alberich, dont la vue en coupe et la vue de dessus sont présentées à la figure IV.1. C'est une structure multicouche, formée à partir d'une plaque de matériau viscoélastique contenant des inclusions cylindriques d'air réparties de façon périodique. Dans ce modèle, le panneau est placé perpendiculairement à l'axe Oz et le réseau s'étend théoriquement de $-\infty$ à $+\infty$ dans les directions Ox et Oy . Le problème est tridimensionnel, dépendant des trois coordonnées x , y et z . Le réseau étant supposé immergé et soumis à une onde incidente acoustique plane dans les applications retenues, le domaine entier est alors divisé en trois



régions successives, par deux plans parallèles au plan xOy , qui est le plan du réseau (figure IV.2). Ces trois régions ont les mêmes caractéristiques que celles utilisées pour les structures périodiques à une dimension. Les régions I et III sont ainsi des domaines fluides semi-infinis, dans lesquelles le champ de pression peut être décrit analytiquement, la région II contenant les structures diffractantes et une petite partie du domaine fluide environnant. La figure IV.2 détaille cette seconde région, sur laquelle les surfaces fictives S_- et S_+ , parallèles au plan xOy , limitent le maillage éléments finis et représentent les frontières entre les régions I et II d'une part, entre les régions II et III d'autre part. Du fait de la périodicité du réseau dans la direction x , les plans $S1$ et $S3$, parallèles au plan yOz , limitent une cellule élémentaire de largeur $2d_1$. De même, la périodicité du réseau dans la direction y permet de limiter une cellule élémentaire de largeur $2d_2$, par les plans $S2$ et $S4$, parallèles au plan xOz .

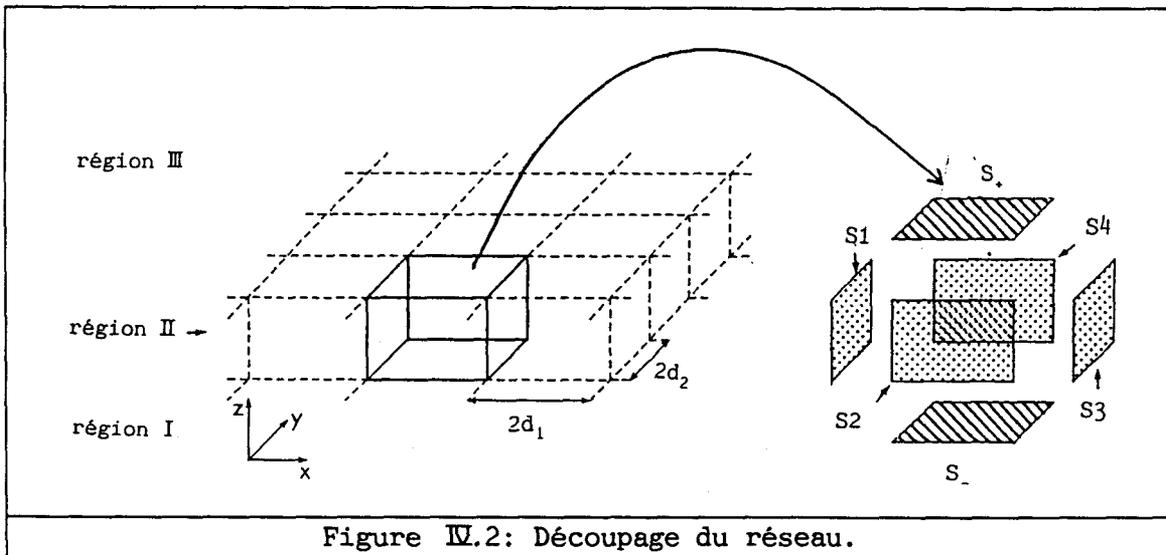


Figure IV.2: Découpage du réseau.

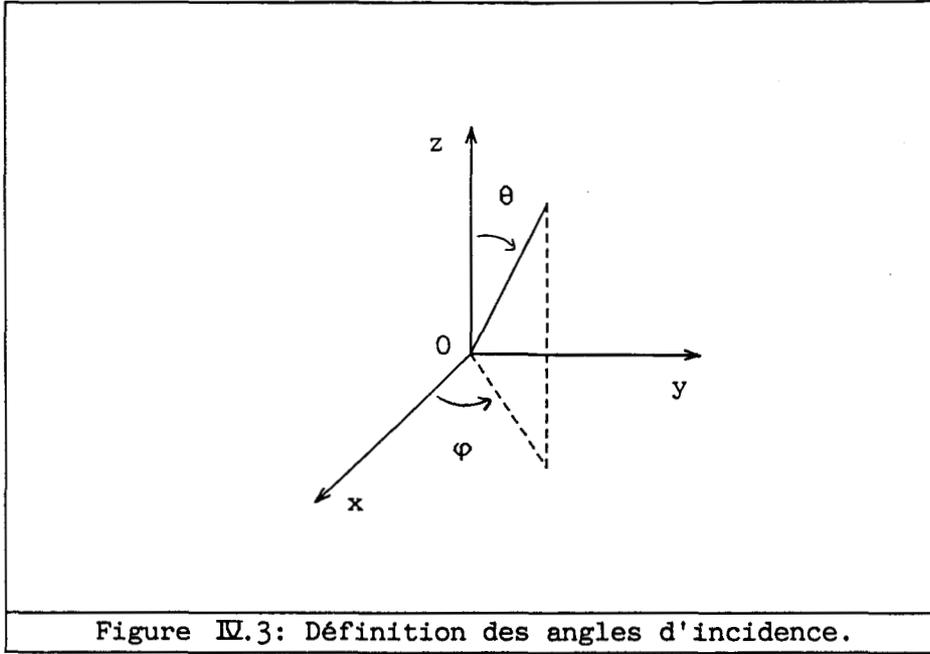
IV.1.2 Expressions du champ de pression dans les milieux I et III.

Une onde acoustique incidente, plane, monochromatique, dont le vecteur d'onde \underline{k} est repéré par les deux angles θ et φ , définis à la figure IV.3, excite le réseau. Cette onde s'exprime sous la forme:

$$p_i(t, x, y, z) = p_i e^{jk(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)} e^{-j\omega t}, \quad (\text{IV.1})$$

$$p_i(t, x, y, z) = e^{-j\omega t} p_i(x, y, z),$$

où k est le module de \underline{k} dans le fluide et ω la pulsation.



Le réseau étant considéré comme infini et périodique, de période $2d_1$ dans la direction x et de période $2d_2$ dans la direction y , les fonctions d'espace $F(x,y,z)$ telles que la pression ou le déplacement doivent nécessairement vérifier les relations [43]:

$$\begin{aligned} F(x+2d_1, y, z) &= F(x, y, z) e^{j2d_1 k \sin\theta \cos\varphi}, \\ F(x, y+2d_2, z) &= F(x, y, z) e^{j2d_2 k \sin\theta \sin\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

Le champ de pression n'est donc pas périodique:

$$p(x+2d_1, y+2d_2, z) = p(x, y, z) e^{j2d_1 k \sin\theta \cos\varphi} e^{j2d_2 k \sin\theta \sin\varphi}, \quad (\text{IV.3})$$

mais il est aisé de construire une fonction $q(x,y,z)$ suivant la relation:

$$q(x,y,z) = p(x,y,z) e^{-jxk \sin\theta \cos\varphi} e^{-jyk \sin\theta \sin\varphi}, \quad (\text{IV.4})$$

qui est elle-même périodique par rapport à la variable x , de période $2d_1$, et par rapport à la variable y , de période $2d_2$. Cette fonction peut donc se développer en série de Fourier:

$$q(x,y,z) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} q_{nm}(z) e^{\frac{jn\pi x}{d_1}} e^{\frac{jm\pi y}{d_2}}. \quad (\text{IV.5})$$

En conséquence, on peut écrire, de façon générale:

$$p(x,y,z) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} q_{nm}(z) e^{j\left(\frac{n\pi}{d_1} + k\sin\theta\cos\varphi\right)x} e^{j\left(\frac{m\pi}{d_2} + k\sin\theta\sin\varphi\right)y} \quad (\text{IV.6})$$

L'équation de Helmholtz (II.7), nécessairement vérifiée lors de la propagation d'une onde acoustique plane monochromatique dans un milieu fluide, donne une relation liant les coefficients q_{nm} :

$$\left\{ k^2 - \left(\frac{n\pi}{d_1} + k\sin\theta\cos\varphi \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{d_2} + k\sin\theta\sin\varphi \right)^2 \right\} q_{nm}(z) + \frac{d^2 q_{nm}(z)}{dz^2} = 0. \quad (\text{IV.7})$$

La résolution de cette équation différentielle donne:

$$q_{nm}(z) = A_{nm} e^{-jk_{nm}z} + B_{nm} e^{jk_{nm}z}, \quad (\text{IV.8})$$

avec :

$$k_{nm}^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{d_1} + k\sin\theta\cos\varphi \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{d_2} + k\sin\theta\sin\varphi \right)^2. \quad (\text{IV.9})$$

Dès lors:

$$p(x,y,z) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \left(A_{nm} e^{-jk_{nm}z} + B_{nm} e^{jk_{nm}z} \right) e^{j\alpha_n x} e^{j\beta_m y}, \quad (\text{IV.10})$$

avec:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{d_1} + k\sin\theta\cos\varphi \quad \text{et} \quad \beta_m = \frac{m\pi}{d_2} + k\sin\theta\sin\varphi. \quad (\text{IV.11})$$

Dans la région I, compte tenu de la condition de rayonnement, les ondes se propagent nécessairement dans la direction z décroissant. L'expression du champ de pression acoustique peut s'écrire, en isolant le terme représentant la pression incidente:

$$p^-(x,y,z) = p_1(x,y,z) + \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} R_{nm}^p e^{-jk_{nm}z} e^{j\alpha_n x} e^{j\beta_m y}. \quad (\text{IV.12})$$

L'onde incidente est représentée par le premier terme, explicité à l'équation (IV.1). Le second terme représente une série double infinie d'ondes réfléchies par le réseau, les coefficients R_{nm}^p étant à déterminer.

Lorsque $k_{nm}^2 < 0$, l'onde correspondante se propage parallèlement au plan xOy et s'atténue exponentiellement dans la direction z négatif. Une telle onde est une onde évanescente. En revanche, si $k_{nm}^2 > 0$, l'onde est homogène et se propage à partir du réseau dans la direction z négatif, sa direction de propagation étant repérée par le vecteur $(\alpha_n, \beta_m, -k_{nm})$. Elle contribue au champ de pression lointain. Ainsi, selon la valeur de la fréquence d'excitation et des angles d'incidence θ et φ , si plusieurs ondes homogènes existent, il peut se produire un phénomène d'interférences dans le champ de pression réfléchi. De même, la pression transmise dans la région III est:

$$p^+(x,y,z) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} T_{nm}^p e^{jk_{nm}z} e^{j\alpha_n x} e^{j\beta_m y}, \quad (\text{IV.13})$$

où les coefficients de transmission T_{nm}^p sont à déterminer.

Dans le cas où une seule onde transmise homogène existe, dans la même direction que l'onde incidente, c'est-à-dire si la condition de l'équation (IV.14) est vérifiée, les coefficients de transmission et de réflexion loin du réseau sont calculés en considérant uniquement les termes T_{00}^p et R_{00}^p dans le développement en série. Toutes les autres ondes sont alors évanescentes et ne contribuent pas au champ lointain.

$$\omega < \text{Min} \left(\frac{c\pi}{d_1(1+|\sin\theta\cos\varphi|)}, \frac{c\pi}{d_2(1+|\sin\theta\sin\varphi|)} \right). \quad (\text{IV.14})$$

IV.1.3 Expressions de la dérivée normale du champ de pression dans les milieux I et III.

L'écriture de certaines conditions aux limites du domaine fluide sur les surfaces S_+ et S_- nécessite la connaissance de la dérivée normale du champ de pression, définie par l'expression (II.16). Utilisant les expressions (IV.12) et (IV.13), Φ est écrit dans les deux domaines fluides semi-infinis sous la forme:

$$\Phi^-(x,y,z) = \Phi_1(x,y,z) + \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} R_{nm}^\Phi e^{-jk_{nm}z} e^{j\alpha_n x} e^{j\beta_m y}, \quad (\text{IV.15})$$

$$\Phi^+(x,y,z) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} T_{nm}^\Phi e^{jk_{nm}z} e^{j\alpha_n x} e^{j\beta_m y}, \quad (\text{IV.16})$$

Φ_1 étant la dérivée normale de la pression incidente. R_{nm}^{Φ} et T_{nm}^{Φ} sont, respectivement, des coefficients de réflexion et de transmission à déterminer.

IV.2 APPLICATION DES CONDITIONS DE PERIODICITE AU MODELE ELEMENTS FINIS.

Les rappels relatifs à la méthode des éléments finis ne sont pas repris dans ce chapitre puisqu'ils sont décrits dans la section II.2 et restent vrais pour des domaines tridimensionnels.

Le secteur élémentaire tridimensionnel qui doit être modélisé par éléments finis est limité cette fois par les six surfaces S_+ , S_- , S_1 , S_2 , S_3 , S_4 et décrit schématiquement à la figure IV.2. Par comparaison au cas de la figure II.7, pour lequel les domaines solide et fluide sont représentés par leur trace dans le plan xOy , il faut simplement noter que, dans le cas des structures périodiques à deux dimensions, les domaines solide Ω_s et fluide Ω_f sont traités comme tridimensionnels et les surfaces S_+ , S_- et S_1 comme bidimensionnelles. Par ailleurs, les notations sont les mêmes que dans le paragraphe II.3 et la résolution du problème conduit à un système d'équations identique à (II.66).

Les conditions de périodicité peuvent être intégrées au système d'équations (II.66) en considérant, dans un premier temps, que le système périodique comporte N_x secteurs identiques dans la direction x et N_y secteurs identiques dans la direction y (figure IV.4), modélisés par éléments finis. Une nouvelle fois, pour des raisons de simplicité, les équations sont développées pour un secteur élastique mais peuvent être généralisées à toutes les variables caractérisant un problème couplé (pression et déplacement). Repérant chaque secteur élémentaire par deux indices, relatifs à sa position dans le réseau dans les directions x et y , les matrices de rigidité et de masse vérifient:

$$K_{N_x, N_y} = \dots = K_{\ell+1, m+1} = K_{\ell+1, m} = K_{\ell, m+1} = K_{\ell, m} = \dots = K_{1, 1} = K, \quad (\text{IV.17})$$

$$M_{N_x, N_y} = \dots = M_{\ell+1, m+1} = M_{\ell+1, m} = M_{\ell, m+1} = M_{\ell, m} = \dots = M_{1, 1} = M.$$

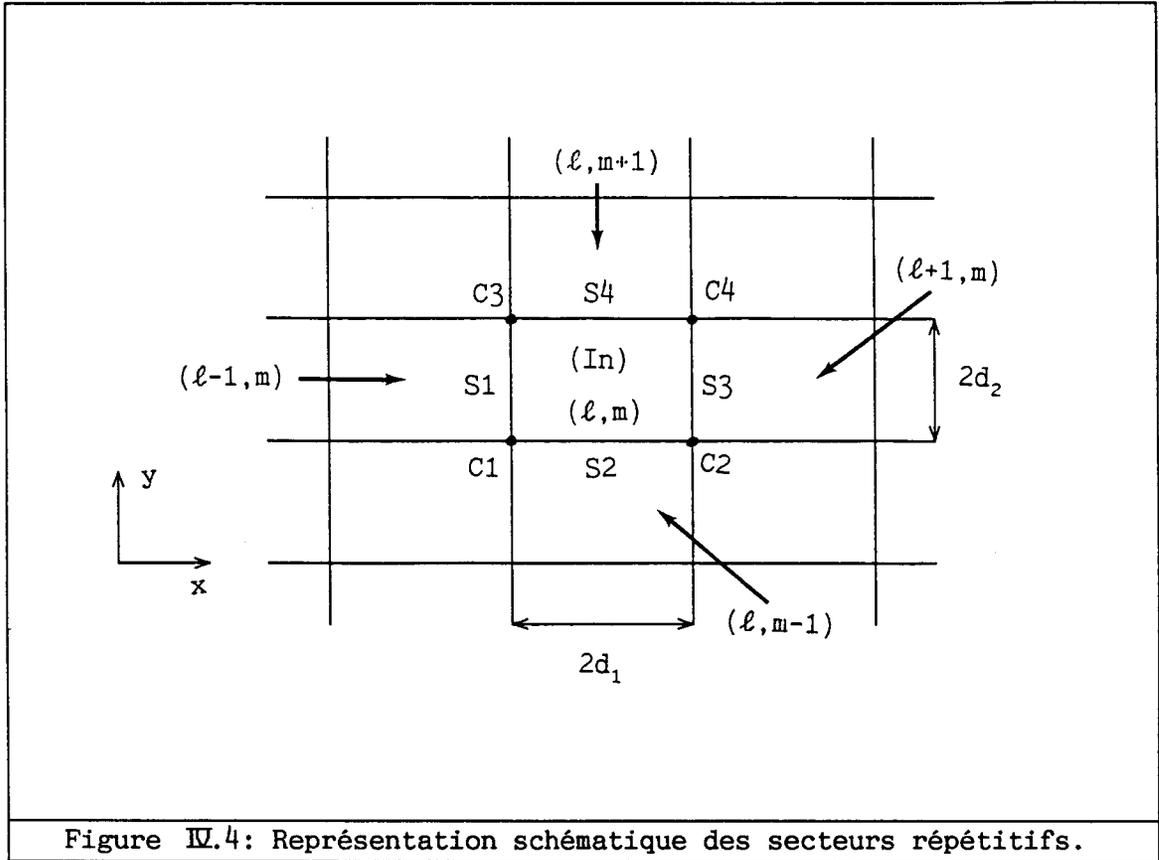


Figure IV.4: Représentation schématique des secteurs répétitifs.

Un secteur donné, noté (l, m) , n'a de frontières communes qu'avec les quatre secteurs contigus $(l-1, m)$, $(l+1, m)$, $(l, m+1)$ et $(l, m-1)$. On distingue le domaine intérieur In, la surface commune S1 entre le secteur $(l-1, m)$ et le secteur (l, m) , la surface commune S3 entre le secteur (l, m) et le secteur $(l+1, m)$, la surface commune S2 entre le secteur $(l, m-1)$ et le secteur (l, m) , la surface commune S4 entre le secteur (l, m) et le secteur $(l, m+1)$. Enfin, on distingue les lignes frontières aux coins du maillage: C1, C2, C3 et C4, comme indiqué à la figure IV.4. Entre deux secteurs jointifs, le déplacement vérifie notamment:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{l+1, m}^{S1} &= \underline{U}_{l, m}^{S3} = e^{j\psi_x} \underline{U}_{l, m}^{S1}, \\ \underline{U}_{l, m+1}^{S2} &= \underline{U}_{l, m}^{S4} = e^{j\psi_y} \underline{U}_{l, m}^{S2}, \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

où ψ_x et ψ_y désignent respectivement le déphasage entre les surfaces S1 et S3, égal à $2d_1 k \sin\theta \cos\varphi$, et le déphasage entre les surfaces S2 et S4, égal à $2d_2 k \sin\theta \sin\varphi$. Réitérant cette opération, le vecteur des valeurs nodales du déplacement sur un secteur (l, m) peut être écrit en fonction du vecteur des valeurs nodales du déplacement sur le premier secteur

élémentaire:

$$\underline{U}_{\ell,m} = e^{j(\ell-1)\psi_x} e^{j(m-1)\psi_y} \underline{U}_{1,1}. \quad (\text{IV.19})$$

De même, le vecteur des valeurs nodales de la force appliquée sur un secteur (ℓ,m) vérifie:

$$\underline{F}_{\ell,m} = e^{j(\ell-1)\psi_x} e^{j(m-1)\psi_y} \underline{F}_{1,1}. \quad (\text{IV.20})$$

Ainsi, la quantité variationnelle L_{e1} de l'équation (II.40), décomposée en une somme d'intégrales sur tous les secteurs du maillage:

$$L_{e1} = \sum_{\ell=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} \frac{1}{2} \left(\underline{U}_{\ell,m}^{*T} [K] \underline{U}_{\ell,m} \right) - \frac{1}{2} \omega^2 \left(\underline{U}_{\ell,m}^{*T} [M] \underline{U}_{\ell,m} \right) - \underline{U}_{\ell,m}^{*T} \underline{F}_{\ell,m}, \quad (\text{IV.21})$$

devient:

$$L_{e1} = \sum_{\ell=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} \frac{1}{2} \left(\underline{U}_{1,1}^{*T} [K] \underline{U}_{1,1} \right) - \frac{1}{2} \omega^2 \left(\underline{U}_{1,1}^{*T} [M] \underline{U}_{1,1} \right) - \underline{U}_{1,1}^{*T} \underline{F}_{1,1}, \quad (\text{IV.22})$$

les matrices de rigidité et de masse ne dépendant pas des indices ℓ et m . Remplaçant de façon condensée le couple d'indices $(1,1)$ par l'indice (1) , la quantité variationnelle s'écrit:

$$L_{e1} = \frac{N_x N_y}{2} \left(\underline{U}_1^{*T} \left[[K] - \omega^2 [M] \right] \underline{U}_1 \right) - N_x N_y \underline{U}_1^{*T} \underline{F}_1. \quad (\text{IV.23})$$

Appliquer le principe variationnel conduit alors à minimiser L_{e1} par rapport aux valeurs nodales du champ de déplacement. Dans cette perspective, les vecteurs des valeurs nodales du déplacement et de la force appliquée ainsi que les matrices de rigidité et de masse, sont décomposés de façon à faire apparaître dans leur dénomination le découpage selon les domaines (S1), (S2), (S3), (S4), (C1), (C2), (C3), (C4) et (In). Puis, la quantité L_{e1} est enfin dérivée par rapport à chaque composante de \underline{U}^{S1} , \underline{U}^{S2} , \underline{U}^{C1} , \underline{U}^{In} , les autres composantes pouvant se ramener à ces dernières par l'intermédiaire des relations de phase. Le calcul de cette dérivée

conduit à un système d'équations qui, sous forme matricielle, s'écrit:

$$\begin{bmatrix} R_{S1,S1} & R_{S1,S2} & R_{S1,C1} & R_{S1,In} \\ R_{S1,S2}^{*T} & R_{S2,S2} & R_{S2,C1} & R_{S2,In} \\ R_{S1,C1}^{*T} & R_{S2,C1}^{*T} & R_{C1,C1} & R_{C1,In} \\ R_{S1,In}^{*T} & R_{S2,In}^{*T} & R_{C1,In}^{*T} & R_{In,In} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}^{S1} \\ \underline{U}^{S2} \\ \underline{U}^{C1} \\ \underline{U}^{In} \end{bmatrix} = \{Q\}, \quad (\text{IV.24})$$

la matrice obtenue étant hermitique. Dans celle-ci, si on note [Q] la matrice [K] - ω^2 [M] et si on conserve la décomposition précédente selon les différents sous-domaines, les expressions des sous-matrices [R_{i,j}] sont:

$$\begin{aligned} [R_{S1,S1}] &= [Q_{S1,S1} + Q_{S3,S3}], \\ [R_{S1,S2}] &= [Q_{S1,S2} + Q_{S1,S4} e^{j\psi_y} + Q_{S3,S2} e^{-j\psi_x} + Q_{S3,S4} e^{j(\psi_y - \psi_x)}], \\ [R_{S1,C1}] &= [Q_{S1,C1} + Q_{S3,C2} + Q_{S1,C3} e^{j\psi_y} + Q_{S3,C4} e^{j\psi_y}], \\ [R_{S1,In}] &= [Q_{S1,In} + Q_{S3,In} e^{-j\psi_x}], \\ [R_{S2,S2}] &= [Q_{S2,S2} + Q_{S4,S4}], \\ [R_{S2,C1}] &= [Q_{S2,C1} + Q_{S2,C2} e^{j\psi_x} + Q_{S4,C3} + Q_{S4,C4} e^{j\psi_x}], \\ [R_{S2,In}] &= [Q_{S2,In} + Q_{S4,In} e^{-j\psi_y}], \\ [R_{C1,C1}] &= [Q_{C1,C1} + Q_{C2,C2} + Q_{C3,C3} + Q_{C4,C4}], \\ [R_{C1,In}] &= [Q_{C1,In} + Q_{C2,In} e^{-j\psi_x} + Q_{C3,In} e^{-j\psi_y} + Q_{C4,In} e^{-j(\psi_x + \psi_y)}], \\ [R_{In,In}] &= [Q_{In,In}]. \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

Par combinaisons linéaires de lignes et de colonnes, le système (II.66) est modifié pour tenir compte des relations de phase entre les différents plans délimitant la maille élémentaire. Cette opération de condensation affecte les degrés de liberté associés aux noeuds des surfaces (S3), (S4), et des lignes (C2), (C3) et (C4).

Deux relations équivalentes à (IV.24) et (IV.25) sont établies dans le cas d'une maille élémentaire fluide. Les échanges de rôle entre les

différents termes sont explicités à la fin de la section II.3 et, dans ce cas, le vecteur de la dérivée normale de la pression $\underline{\Phi}$ n'est pas nul car il incorpore les conditions de raccordement aux domaines fluides semi-infinis Ω_{f+} et Ω_{f-} .

IV.3 APPLICATION DES CONDITIONS DE CONTINUITÉ POUR LA PRESSION ET SA DÉRIVÉE NORMALE AU MODÈLE ÉLÉMENTS FINIS.

IV.3.1 Formalisme général.

La démarche est la même que pour les structures périodiques à une dimension. Le vecteur $\underline{\Phi}$ est décomposé en trois vecteurs correspondants aux domaines suivants: la surface frontière S_+ , le domaine intérieur (I) et la surface frontière S_- . Le formalisme est alors établi pour la surface S_+ . $\underline{\Phi}_+$, le vecteur des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression sur la surface S_+ , résulte de l'assemblage des vecteurs élémentaires:

$$\underline{\Phi}_+^e = \int_{S_+^e} \left\{ N_+^e \right\}^T \Phi^* dS_+^e, \quad (\text{IV.26})$$

où Φ^* est la dérivée normale de la pression sur la surface S_+ . $\left\{ N_+^e \right\}^T$ est le vecteur des fonctions de forme associées à l'élément fini bidimensionnel S_+^e , situé sur la surface frontière S_+ . Ne conservant que $(2M_x+1) \cdot (2M_y+1)$ termes dans les développements des équations (IV.13) et (IV.16), où M_x et M_y sont des paramètres dépendant du maillage construit dans les directions x et y et explicités dans la section II.5.2, les vecteurs Φ^* et p^* s'écrivent sous la forme d'un produit de deux vecteurs:

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \left(e^{j(\alpha_n x + \beta_m y)} \right)^T \left(T_{nm}^\Phi e^{jk_{nm}z} \right), \\ p^* &= \left(e^{j(\alpha_n x + \beta_m y)} \right)^T \left(T_{nm}^p e^{jk_{nm}z} \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

Développer ensuite la relation (IV.27) entre p^* et Φ^* conduit à:

$$T_{nm}^\Phi e^{jk_{nm}z} = n_i \frac{\partial (T_{nm}^p e^{jk_{nm}z})}{\partial x_i} = jk_{nm} (T_{nm}^p e^{jk_{nm}z}), \quad (\text{IV.28})$$

qui devient, sous forme matricielle:

$$\left(\underset{\sim}{T}_{nm}^{\Phi} e^{jk_{nm}z} \right) = [D^*] \left(\underset{\sim}{T}_{nm}^p e^{jk_{nm}z} \right). \quad (\text{IV.29})$$

La matrice $[D^*]$ est d'ordre $(2M_x+1).(2M_y+1)$ et comporte sur sa diagonale les termes génériques jk_{nm} . Ces termes sont rangés sous forme de $2M_x+1$ blocs contenant chacun $2M_y+1$ termes. En tenant compte de l'équation (IV.29), le vecteur $\underline{\Phi}_+^e$ de l'équation (IV.26) s'exprime par:

$$\underline{\Phi}_+^e = \int_{S_+^e} \left\{ \underline{N}_+^e \right\}^T \left(e^{j(\alpha_n x + \beta_m y)} \right)^T [D^*] \left(\underset{\sim}{T}_{nm}^p e^{jk_{nm}z} \right) dS_+^e. \quad (\text{IV.30})$$

Il faut alors relier la pression, sous la forme de l'équation (IV.27), aux valeurs nodales, pour pouvoir exploiter la méthode des éléments finis. Cette opération est conduite en utilisant le développement en série de Fourier de la pression, exprimé par l'équation (IV.6). p^* s'écrit, de ce fait, comme produit de deux vecteurs de taille $(2M_x+1).(2M_y+1)$:

$$p^* = \sum_{n=-M_x}^{+M_x} \sum_{m=-M_y}^{+M_y} c_{nm} e^{j(\alpha_n x + \beta_m y)}, \quad (\text{IV.31})$$

$$p^* = \left(e^{j(\alpha_n x + \beta_m y)} \right)^T \underline{C},$$

où le vecteur \underline{C} , contient les termes c_{nm} définis par:

$$c_{nm} = \frac{1}{2d_1} \frac{1}{2d_2} \int_{-d_1}^{+d_1} \int_{-d_2}^{+d_2} p^*(x,y) e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y)} dx dy. \quad (\text{IV.32})$$

La fonction pression $p^*(x,y)$, sur chaque élément de la surface frontière S_+ , peut être exprimée à partir des valeurs nodales de la pression, par l'intermédiaire des fonctions de forme. Ainsi, sur l'élément de la surface S_+^e :

$$p^*(x,y) = \left\{ \underline{N}_+^e \right\}^T \underline{P}_+^e, \quad (\text{IV.33})$$

où \underline{P}_+^e est le vecteur des valeurs nodales de la pression relatif à cet élément. Dans le cas des réseaux présentant une périodicité à une dimension, les fonctions de forme sont simples puisqu'elles sont écrites sur des éléments linéaires (annexe 3). L'intégration se fait alors par rapport à une seule variable (section II.4). Ici, les fonctions de forme sont plus compliquées car elles dépendent de deux variables x et y . Elles

sont explicitées dans la section IV.3.2, de même que la procédure d'intégration.

Regroupant les vecteurs élémentaires des valeurs nodales de la pression, l'expression des c_{nm} de l'équation (IV.32) devient:

$$c_{nm} = \left[\sum_e \frac{1}{2d_1} \frac{1}{2d_2} \int_{S_+^e} e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y)} \{ N_+^e \}^T dx dy \right] \underline{P}_+ = \{ A_{nm}^+ \}^T \underline{P}_+, \quad (\text{IV.34})$$

où $\{ A_{nm}^+ \}^T$ est une matrice ligne. Finalement, le vecteur \underline{C} est écrit de la façon suivante:

$$\underline{C} = [A^+] \underline{P}_+. \quad (\text{IV.35})$$

La matrice $[A^+]$ comporte $(2M_x+1) \cdot (2M_y+1)$ lignes et son nombre de colonnes est le nombre de noeuds sur la surface S_+ . Il est alors aisé, par les équations (IV.27), (IV.31) et (IV.35) de déterminer les coefficients T_{nm}^p :

$$\left(T_{nm}^p \underset{\sim}{e}^{jk_{nm}z} \right) = \underline{C} = [A^+] \underline{P}_+. \quad (\text{IV.36})$$

Ainsi le vecteur $\underline{\Phi}_+^e$ de l'équation (IV.30) est:

$$\underline{\Phi}_+^e = \left[\int_{S_+^e} \{ N_+^e \}^T \left(\underset{\sim}{e}^{j(\alpha_n x + \beta_m y)} \right)^T [D^+] [A^+] dS_+^e \right] \underline{P}_+. \quad (\text{IV.37})$$

En assemblant les vecteurs élémentaires $\underline{\Phi}_+^e$, $\underline{\Phi}_+$ sur la frontière fluide S_+ devient:

$$\underline{\Phi}_+ = \left[\sum_e \int_{S_+^e} \{ N_+^e \}^T \left(\underset{\sim}{e}^{j(\alpha_n x + \beta_m y)} \right)^T [D^+] [A^+] dS_+^e \right] \underline{P}_+. \quad (\text{IV.38})$$

A l'aide de l'équation (IV.34), les lignes conjuguées et transposées de la matrice $[A^+]$ peuvent être identifiées dans (IV.38). En conséquence:

$$\underline{\Phi}_+ = 2d_1 \ 2d_2 [A^+]^{*T} [D^+] [A^+] \underline{P}_+ = [\Delta^+] \underline{P}_+. \quad (\text{IV.39})$$

Cette opération est la même pour la surface S_- , conduisant à une matrice notée $[\Delta^-]$. Décomposer le vecteur des valeurs nodales de la pression et de sa dérivée normale sous la forme d'une partie incidente et d'une partie réfléchiée conduit à l'équation (IV.40), dans laquelle $\underline{\Phi}_i$ est

le vecteur des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression incidente sur la surface S_- :

$$\underline{\Phi}_- = 2\underline{\Phi}_i + [\Delta^-] \underline{P}_-. \quad (\text{IV.40})$$

Comme dans le cas des réseaux périodiques à une dimension, la dérivée normale de la pression interne se réduit à la dérivée normale de la pression sur les surfaces S_1 à S_4 du maillage. La prise en compte des relations de phase entre les surfaces (S_1) et (S_3) d'une part, entre les surfaces (S_2) et (S_4) d'autre part, conduit à un vecteur des dérivées normales nul dans tout le domaine intérieur (I).

Utilisant les équations (IV.39) et (IV.40), l'expression matricielle des conditions de raccordement aux ondes planes donne le système de l'équation (II.102), mais dans lequel le vecteur $\underline{\Phi}_i$ et les matrices $[\Delta^+]$ et $[\Delta^-]$ sont calculés sur des éléments bidimensionnels et non plus sur des éléments linéaires.

IV.3.2 Fonctions d'interpolation et intégration.

Cette section présente les fonctions d'interpolation utilisées sur les surfaces S_+ et S_- ainsi que la procédure d'intégration, pour le calcul des termes c_{nm} définis à l'équation (IV.32).

La relation entre les coordonnées réelles (x,y) d'un point de l'élément réel et les coordonnées réduites (ξ,η) du même point dans l'élément de référence est assurée à l'aide des fonctions de pondération. Ainsi, pour un élément à p noeuds, dont les coordonnées dans le repère global sont $(x_1,y_1), \dots, (x_p,y_p)$, on a :

$$(x,y) = [N_1(\xi,\eta), N_2(\xi,\eta), \dots, N_p(\xi,\eta)] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_p & y_p \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.41})$$

Les fonctions de pondération sont développées ci-après pour un élément triangulaire à six noeuds et pour un élément quadrilatère à huit noeuds

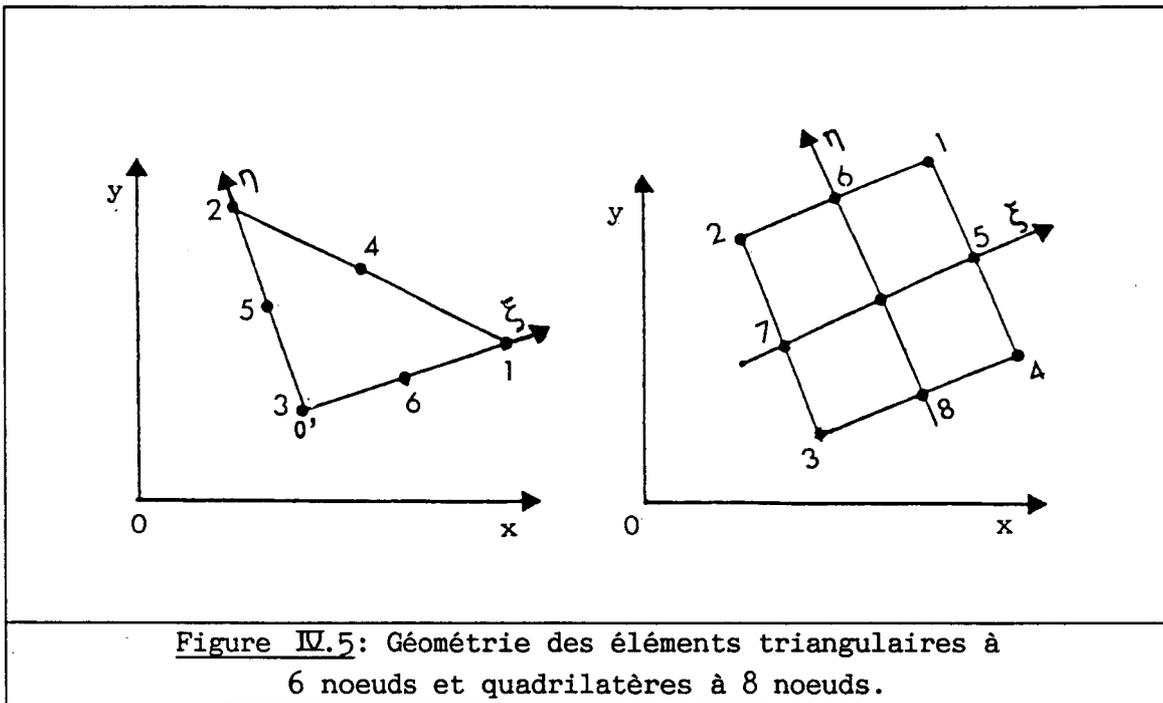


Figure IV.5: Géométrie des éléments triangulaires à 6 noeuds et quadrilatères à 8 noeuds.

(figure IV.5). Choisisant, pour l'élément triangulaire à six noeuds les coordonnées réduites suivantes:

Noeud	1	2	3	4	5	6
ξ	1	0	0	0.5	0	0.5
η	0	1	0	0.5	0.5	0

Tableau IV.1

on peut établir les expressions des six fonctions de forme données par:

$$N_1(\xi, \eta) = (2\xi - 1)\xi,$$

$$N_2(\xi, \eta) = (2\eta - 1)\eta,$$

$$N_3(\xi, \eta) = (1 - 2\xi - 2\eta)(1 - \xi - \eta),$$

$$N_4(\xi, \eta) = 4\xi\eta,$$

$$N_5(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta),$$

$$N_6(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta).$$

(IV.42)

En procédant de même pour l'élément quadrilatère à huit noeuds, avec le choix des coordonnées réduites suivant:

Noeud	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ	1	-1	-1	1	1	0	-1	0
η	1	1	-1	-1	0	1	0	-1

Tableau IV.2

les huit fonctions de forme obtenues sont:

$$N_1 (\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) (\xi+\eta-1),$$

$$N_2 (\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1-\xi) (1+\eta) (-\xi+\eta-1),$$

$$N_3 (\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1-\xi) (1-\eta) (-\xi-\eta-1),$$

$$N_4 (\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1+\xi) (1-\eta) (\xi-\eta-1),$$

$$N_5 (\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1+\xi) (1-\eta^2),$$

$$N_6 (\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1+\eta),$$

$$N_7 (\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1-\xi) (1-\eta^2),$$

$$N_8 (\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1-\eta). \quad (\text{IV.43})$$

L'intégrale de l'équation (IV.32) est alors décomposée sur l'ensemble des éléments de la surface S_+ . Ensuite, utilisant la relation (IV.41) entre les coordonnées réelles et réduites et définissant de façon condensée la matrice ligne $\{G(x,y)\}^T$, on peut écrire les équations (IV.32) et (IV.33) sous la forme:

$$\frac{1}{2d_1} \frac{1}{2d_2} \int_{S_+^e} p^*(x,y) e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y)} dx dy = \int_{S_+^e} \{G(x,y)\}^T \underline{P}_+^e dx dy. \quad (\text{IV.44})$$

Pour un élément triangulaire à six noeuds de surface S_+^{Tr} , (IV.44) devient:

$$\int_{S_+^{Tr}} \{G(x,y)\}^T \underline{P}_+^{Tr} dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \{G(\xi,\eta)\}^T |\det[J_{Tr}]| d\xi d\eta \underline{P}_+^{Tr}. \quad (\text{IV.45})$$

Pour un élément quadrilatère à huit noeuds de surface S_+^{qu} , elle devient:

$$\int_{S_+^{qu}} \{G(x,y)\}^T \underline{p}_+^{qu} dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \{G(\xi,\eta)\} |\det[J_{Qu}]| d\xi d\eta \underline{p}_+^{qu}, \quad (\text{IV.46})$$

où $|\det[J_{Tr}]|$ et $|\det[J_{Qu}]|$ représentent les jacobiens du changement de coordonnées. Cette intégration est alors menée par méthode numérique, à l'aide des points de Gauss, étant donnée la complexité des fonctions à intégrer.

IV.4 RESOLUTION DU SYSTEME.

Les équations du système fournissent le champ de déplacement et le champ de pression sur la maille élémentaire. La connaissance des valeurs des pressions sur les surfaces S_+ et S_- permet le calcul des coefficients de transmission et de réflexion, ainsi que des contributions des ondes de tous ordres.

En gardant les mêmes notations que dans la section IV.1 et omettant la dépendance temporelle, la pression incidente s'exprime par:

$$p_i(x,y,z) = p_i e^{jk(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)}, \quad (\text{IV.47})$$

et sa dérivée normale par:

$$\Phi_i(x,y,z) = -j p_i k \cos \theta e^{jk(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)}. \quad (\text{IV.48})$$

Notant l'amplitude de l'onde incidente:

$$\Phi_i(x,y,z) = -\cos \theta e^{jk(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)}, \quad (\text{IV.49})$$

la pression s'écrit alors:

$$p_i(x,y,z) = \frac{-j}{k} e^{jk(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)}. \quad (\text{IV.50})$$

Lorsqu'une seule onde homogène se propage de part et d'autre du réseau, dans la même direction que l'onde incidente, alors, dans le champ lointain, l'effet des ondes évanescentes est négligeable. Loin du réseau, seul le terme d'ordre (0,0) intervient dans le développement en série de la dérivée

normale de la pression explicité aux équations (IV.15) et (IV.16):

$$\Phi^+(x,y,z) \simeq jk \cos \theta T_{00}^p e^{jk(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)}, \quad (\text{IV.51})$$

$$\Phi^-(x,y,z) \simeq \Phi_1^-(x,y,z) + jk \cos \theta R_{00}^p e^{-jk(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)}.$$

Pour calculer les coefficients de réflexion R_{00}^p et de transmission T_{00}^p , il faut rechercher les matrices $[A^-]$ et $[A^+]$, compte tenu de la relation (IV.36). Toutefois, seuls les termes correspondant à $n = m = 0$ doivent être connus et, en conséquence, seule la ligne centrale est extraite, considérant le rangement retenu pour les différents termes. Ces matrices-lignes sont notées $\{A_{00}^-\}^T$ et $\{A_{00}^+\}^T$ et correspondent respectivement aux deux frontières en $z = z^-$ et $z = z^+$. L'équation (IV.51) devient:

$$\Phi^+(x,y,z) = jk \cos \theta \{A_{00}^+\}^T \underline{P}_+ e^{jk(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta (z - z^+))} \quad (\text{IV.52})$$

Diviser cette dernière équation par la dérivée normale de la pression incidente et prendre le module de l'expression ainsi obtenue conduit au coefficient de transmission:

$$|T| = k \left| \{A_{00}^+\}^T \underline{P}_+ \right|. \quad (\text{IV.53})$$

Pour le coefficient de réflexion, la dérivée normale de la pression réfléchie est calculée par:

$$\Phi_r^-(x,y,z) = jk \cos \theta \{A_{00}^-\}^T \{ \underline{P}_- - \underline{P}_1 \} e^{-jk(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta (z - z^-))} \quad (\text{IV.54})$$

Le vecteur \underline{P}_1 contient les valeurs nodales de la pression incidente. Diviser l'équation (IV.54) par la dérivée normale de la pression incidente et prendre le module de l'expression obtenue donne le coefficient de réflexion:

$$|R| = \left| jk \{A_{00}^-\}^T \underline{P}_- - 1 \right|. \quad (\text{IV.55})$$

Comme dans le cas des structures présentant une périodicité dans une direction, les contributions des ondes évanescentes ou homogènes de tous ordres sont calculées sur la surface S_j du maillage. C'est un critère de convergence et leur connaissance permet de savoir si les surfaces

frontières S_+ et S_- sont suffisamment éloignées de la structure diffractante. Si tel n'est pas le cas, l'amplitude des premières ondes évanescentes non prises en compte dans le développement en série de Fourier n'est pas négligeable. De plus, si le maillage sur les surfaces S_+ et S_- n'est pas suffisamment serré, certaines ondes homogènes peuvent ne pas apparaître dans le développement en série. Il faut alors modifier le maillage, pour obtenir un meilleur résultat.

De même, le cas particulier où une seule face de la structure diffractante est en contact avec le fluide est traité par cette approche. La matrice de raccordement au modèle ondes planes est calculée uniquement sur la surface S_- . Le champ de déplacement et le champ de pression sont déterminés sur toute la maille élémentaire par la résolution d'un système analogue à celui de l'équation (II.102). Le coefficient de réflexion peut être calculé à partir des valeurs des pressions sur la surface S_- , à l'aide de l'équation (IV.55).

IV.5 CONCLUSION.

Ce chapitre a présenté les développements théoriques spécifiques aux structures périodiques à deux dimensions. Le maillage étant tridimensionnel, la périodicité est prise en compte à l'aide d'une relation de phase spécifique entre des points distants d'un nombre entier de fois le pas du réseau, c'est-à-dire les points appartenant aux surfaces délimitant la maille élémentaire. De plus, les équations de continuité du champ de pression et de sa dérivée normale sont écrites sur les frontières du domaine fluide, afin de raccorder les expressions des champs de pression écrites d'une part sur une base d'ondes planes, d'autre part en fonction des valeurs nodales du domaine éléments finis. Comme pour le formalisme de la méthode des éléments finis appliquée aux structures périodiques à une dimension, le modèle mathématique développé dans ce chapitre présente de nombreux avantages et notamment de ne pas demander de développements théoriques supplémentaires à chaque changement de structure.

Le formalisme étant établi, différents réseaux périodiques sont analysés dans le chapitre 5, en vue de comparer les résultats obtenus par l'approche éléments finis à des résultats de modèles analytiques et numériques antérieurs ou à des mesures.

CHAPITRE 5

MODELISATION A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS

FINIS DE STRUCTURES PERIODIQUES A DEUX DIMENSIONS:

VALIDATION ET RESULTATS.

Ce chapitre décrit les résultats obtenus, à l'aide du modèle développé dans le chapitre 4, pour divers réseaux plans infinis présentant une périodicité dans deux directions de l'espace. La première partie présente la validation du modèle. Elle discute la détermination du nombre de points de Gauss nécessaires à une bonne convergence du calcul numérique des intégrales utilisées, puis propose un exemple test déjà traité à l'aide du module existant pour les structures périodiques à une dimension. Dans la seconde partie, plusieurs panneaux de type Alberich sont alors considérés, pour lesquels les résultats du modèle éléments finis sont comparés à des mesures. Ces divers exemples démontrent la fiabilité et la souplesse de l'approche retenue, qui permettent d'envisager l'optimisation de panneaux.

Dans ce chapitre, les variations du coefficient de transmission ou de réflexion en fonction de l'angle d'incidence ou de la fréquence d'excitation sont déterminées à l'aide de l'approche éléments finis développée au chapitre précédent. Les coefficients de transmission et de réflexion sont, en général, exprimés en décibels selon les formules:

$$T = 20 \log \left| \frac{P_{Tr}}{P_i} \right| \quad \text{et} \quad R = 20 \log \left| \frac{P_{Re}}{P_i} \right| \quad (\text{V.1})$$

dans lesquelles P_{Tr} est la pression transmise, calculée à partir du terme T_{00}^p , P_{Re} est la pression réfléchie, calculée à partir du terme R_{00}^p et P_i est la pression incidente. Dans les configurations considérées, une seule onde homogène existe, les autres ondes étant évanescentes. De même la tangente de l'angle de pertes, ou pourcentage de pertes, est définie comme valeur absolue du rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle du module d'Young.

V.1 VALIDATION DU MODELE.

V.1.1 Influence du nombre de points de Gauss.

L'effet des deux domaines fluides externes est pris en compte en raccordant, aux frontières du maillage fluide, les champs de pression exprimés, d'une part, sous forme d'ondes planes et, d'autre part, en fonction des valeurs nodales. Toutefois, alors que dans le cas des réseaux périodiques à une dimension les fonctions de forme sont simples et faciles à intégrer, dans le cas de réseaux périodiques présentant une périodicité à deux dimensions les fonctions de forme sont plus complexes et dépendent de deux variables. Aussi, le calcul des coefficients c_{nm} de l'équation (IV.32) ne peut être conduit que par intégration numérique, à l'aide des points de Gauss.

Dans ce cas, la fonction à intégrer est seulement calculée en un nombre de points donné et si on émet l'hypothèse d'un développement polynômial de cette fonction, on peut montrer qu'un échantillon de n points permet de former et d'intégrer exactement un polynôme de degré $2n-1$ [32].

Dans cette expression, les fonctions d'interpolation, le jacobien du changement de variables et les exponentielles peuvent être exprimés sous des formes polynômiales approximatives. Supposant alors que le nombre de points d'intégration est le même dans chaque direction, on en déduit que 36 points d'échantillonnage sont nécessaires pour l'intégration sur un élément quadrilatère, 25 points pour l'intégration sur un élément triangulaire. Les points pour lesquels la fonction à intégrer doit être calculée sont définis par des tables donnant, pour chaque type de domaine d'intégration (quadrilatère, triangle), la position des points d'intégration et les coefficients de pondération utilisés [32].

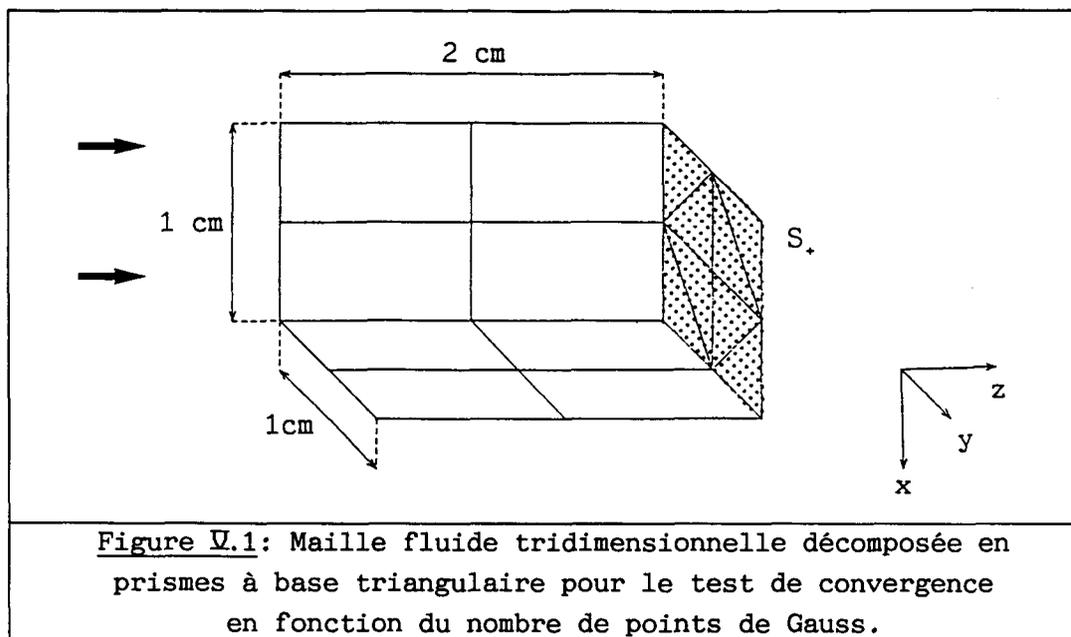
Pour tester la convergence de cette technique numérique, on calcule simplement les coefficients de transmission et de réflexion d'une couche fluide. On considère alors une maille tridimensionnelle fluide ayant les caractéristiques physiques de l'eau et décomposée en prismes à base triangulaire (figure V.1). Le coefficient de transmission doit évidemment être égal à 1 et le coefficient de réflexion à 0. La couche de fluide est supposée excitée par une onde acoustique plane et les coefficients de transmission et de réflexion sont calculés en considérant 4, 9, 16 ou 25 points de Gauss pour chacun des éléments triangulaires appartenant aux faces S_+ et S_- . Les valeurs obtenues sont présentées dans le cas d'une onde en incidence normale, dans le tableau V.1, puis dans le cas d'une onde en incidence oblique, dans le tableau V.2. Dans ce dernier cas, l'incidence est repérée par le couple de valeurs $(30^\circ, 30^\circ)$, correspondant

Nombre de points de Gauss	Transmission	Réflexion
4	0.298	0.954
9	0.987	0.161
16	0.999	5.7E-03
25	0.999	1.1E-04

Tableau V.1: Maille fluide, $(0^\circ, 0^\circ)$.

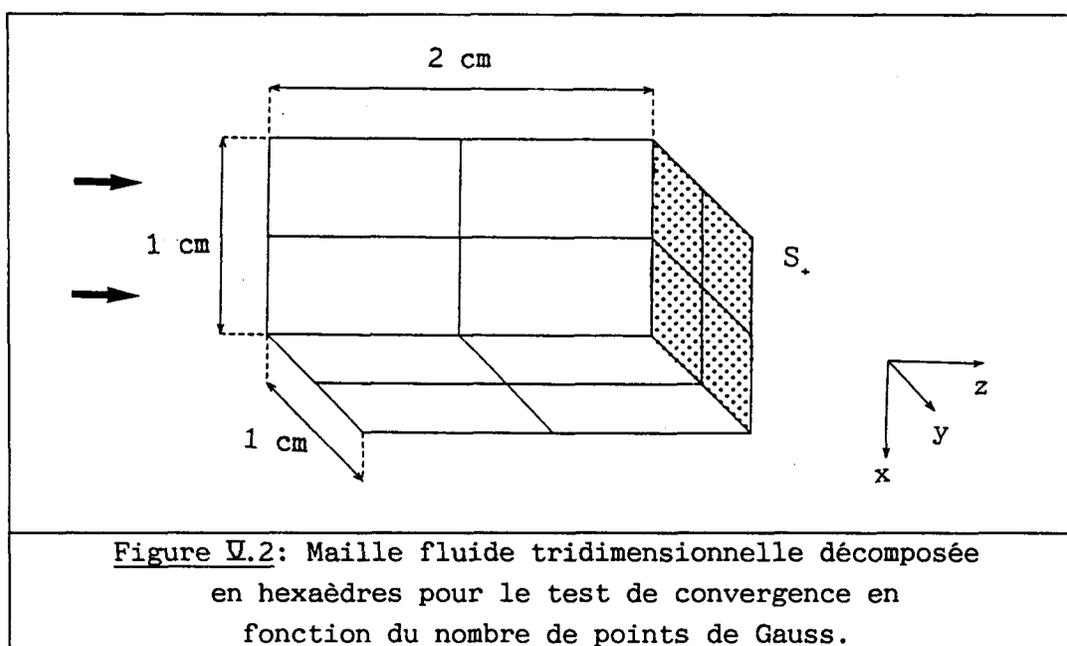
Nombre de points de Gauss	Transmission	Réflexion
4	0.246	0.969
9	0.979	0.207
16	1.000	7.4E-03
25	1.000	2.6E-04

Tableau V.2: Maille fluide, $(30^\circ, 30^\circ)$.



respectivement aux angles θ et φ de la figure III.3. La convergence des résultats est nette et le choix de 25 points a été retenu pour la suite.

Un autre test doit aussi être effectué concernant le nombre d'ondes planes à prendre en compte dans le développement en série de Fourier de la pression et de sa dérivée normale. L'exemple traité est alors le même que précédemment, mais avec le maillage de la figure V.2. Selon le critère d'échantillonnage de Shannon (section II.5.2), 5 ondes, d'ordre -2 à +2, doivent être prises en compte. Le tableau V.3 présente les coefficients de transmission et de réflexion pour la maille décrite, excitée par une onde



plane en incidence normale, si 5 ou 11 ondes sont considérées dans le développement en série de Fourier. Le nombre de points de Gauss pour l'intégration est, de même, traité comme un paramètre du tableau. La convergence des résultats est claire et démontre, si nécessaire, que la vérification du critère de Shannon ainsi qu'une bonne sélection du nombre de points de Gauss sont deux paramètres essentiels pour garantir la précision du résultat.

Nombre de points de Gauss	Ondes -2 à +2		Ondes -5 à +5	
	T	R	T	R
1	8.5E-5	1.000	3.6E-6	1.000
4	0.126	0.992	3.9E-4	1.000
9	0.999	9.3E-4	1.7E-3	0.999
16	0.999	3.1E-4	0.591	0.806
25	1.000	3.0E-4	0.999	5.9E-5

Tableau V.3: Maille fluide ($0^\circ, 0^\circ$).

V.1.2 Diffusion acoustique par une plaque élastique.

Le cas d'une plaque plane, infinie, élastique, homogène et isotrope, dont le matériau présente des pertes, peut être traité par le modèle éléments finis décrit dans le chapitre précédent, la maille élémentaire étant alors tridimensionnelle, ou analytiquement [62, 63]. Dans ce dernier cas, le modèle est explicité brièvement dans la section III.1.1.a. Dans cette partie, la structure test est une plaque infinie en PVC, de 4 cm d'épaisseur, les caractéristiques physiques du PVC étant celles proposées dans la section III.1.1.b. L'onde acoustique plane incidente sur la plaque est repérée par le couple d'angles ($10^\circ, 0^\circ$). Dans la bande de fréquence 600 Hz-18 kHz, les valeurs du coefficient de transmission sont calculées par le modèle analytique et par éléments finis et sont comparées entre elles à la figure V.3. Le pourcentage de pertes internes est le paramètre des différentes courbes: 0%, 10% et 40%. Dans ces trois cas, l'accord est très bon entre les deux approches, fournissant une première validation du modèle.

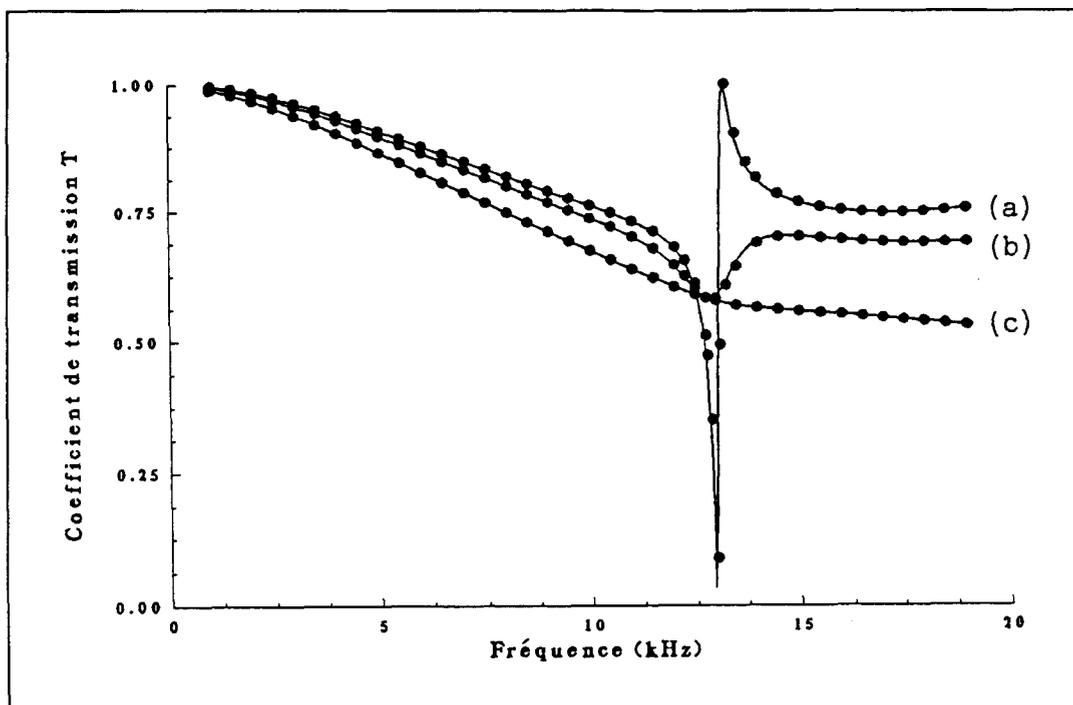


Figure V.3: Variation en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'une plaque élastique $\theta = 10^\circ$, échelle linéaire.

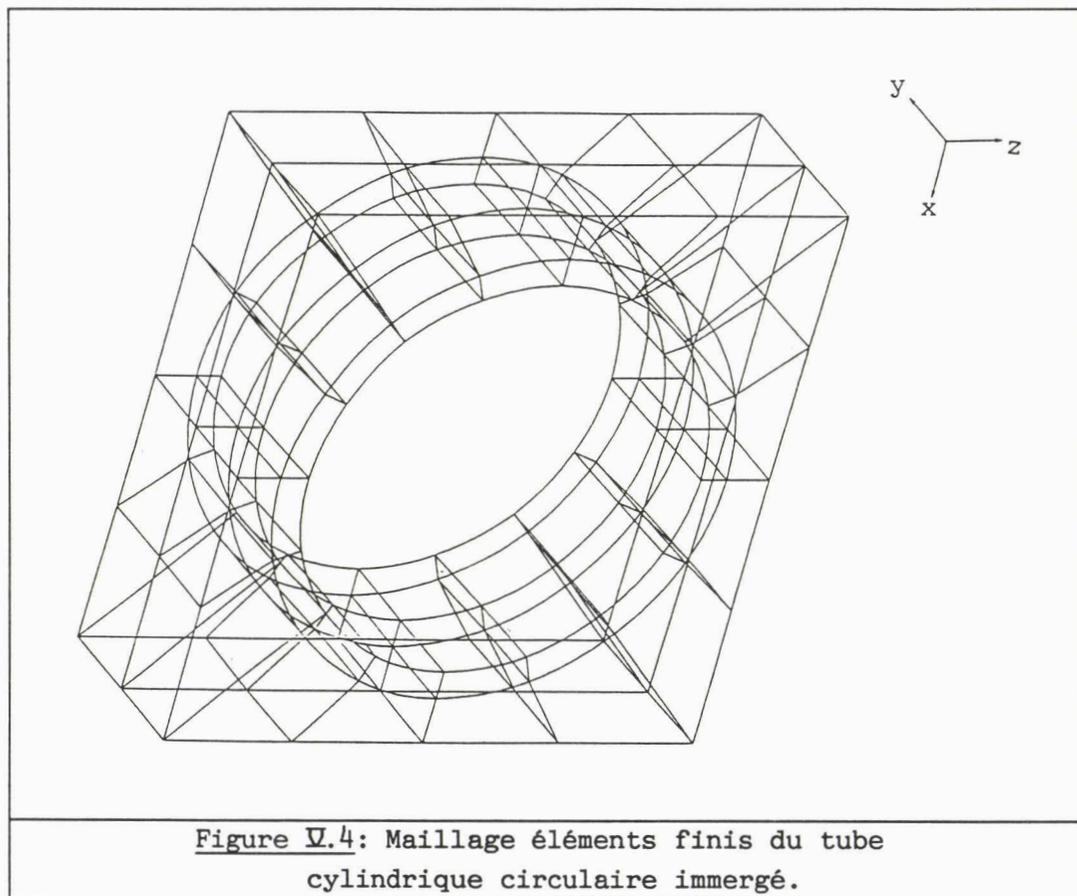
(a): $\text{tg}\delta = 0\%$, (b): $\text{tg}\delta = 10\%$, (c): $\text{tg}\delta = 40\%$
Points (FEM), trait plein (Analytique).

V.1.3 Cylindres circulaires en plastique (PVC).

La phase de test suivante est la modélisation d'une structure périodique à une dimension à l'aide d'une cellule élémentaire tridimensionnelle. Cette structure pouvant être modélisée à l'aide du module développé au chapitre 2, la comparaison des résultats est alors facile.

Le cas envisagé est le réseau de cylindres circulaires en PVC étudié à la section III.2.2, pour lequel la comparaison des résultats obtenus par les modèles analytique élaboré par C. AUDOLY [10] et éléments finis a montré un très bon accord (figure III.12). Dans le contexte considéré ici, la maille tridimensionnelle est construite à partir de la maille bidimensionnelle précédente en découpant un segment du tube le long de la génératrice. Toutefois, pour conserver la validité de l'hypothèse de déformation plane et pouvoir comparer les résultats des deux approches, la longueur du segment du tube, notée h , doit être très petite devant la

longueur d'onde λ des ondes transversales susceptibles de se développer le long de ce tube. Dans la configuration retenue, le rapport h/λ reste inférieur à 0.4 dans toute la gamme de fréquence (figure V.4).



Pour une excitation par une onde acoustique plane en incidence normale, la variation du coefficient de transmission a été calculée dans la bande 1 kHz-20 kHz. Les résultats obtenus coïncident exactement avec les précédents (figure III.12) et n'ont donc pas été reproduits de nouveau. Par ailleurs, la validité de l'hypothèse de déformation plane a été testée à 13.5 kHz, fréquence pour laquelle l'amplitude de vibration est élevée, en traçant les parties réelle et imaginaire du champ de déplacement. Les représentations données aux figures V.5 (dans le plan xOz) et V.6 (en perspective) ont été obtenues dans le cas où les pertes du PVC ne sont pas prises en compte. Ces figures démontrent que les génératrices du cylindre se déplacent bien en restant rigoureusement parallèles à elles-mêmes, ce qui valide l'hypothèse, et que la déformation de la section droite est très voisine de celle déjà obtenue (figure III.13).

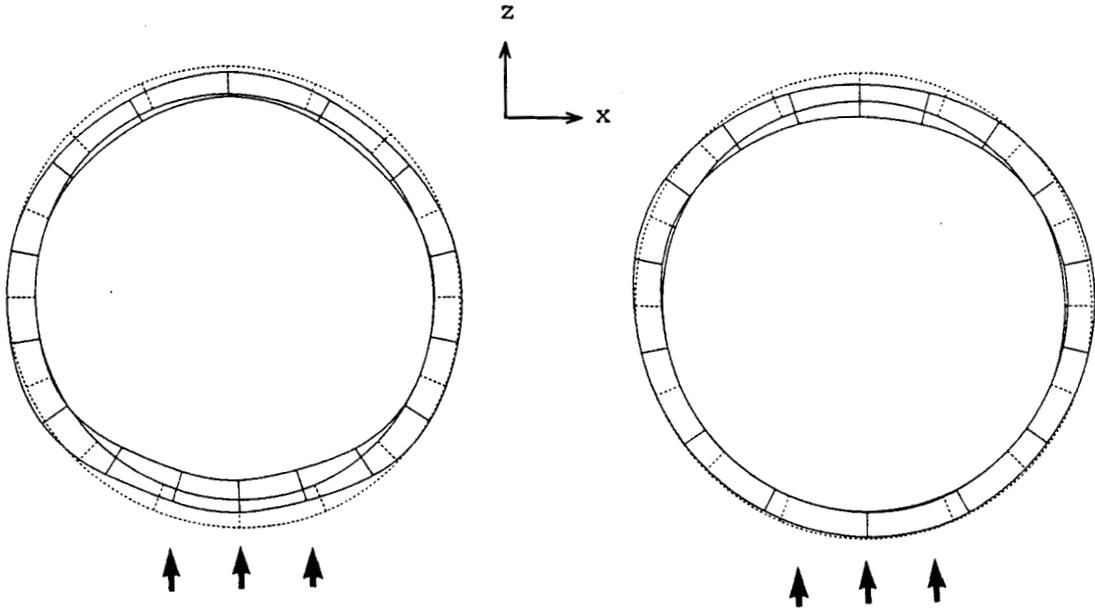


Figure V.5: Parties réelle et imaginaire du déplacement de la structure sans perte. $f = 13.5$ kHz, maille tridimensionnelle, vue dans le plan xOz .

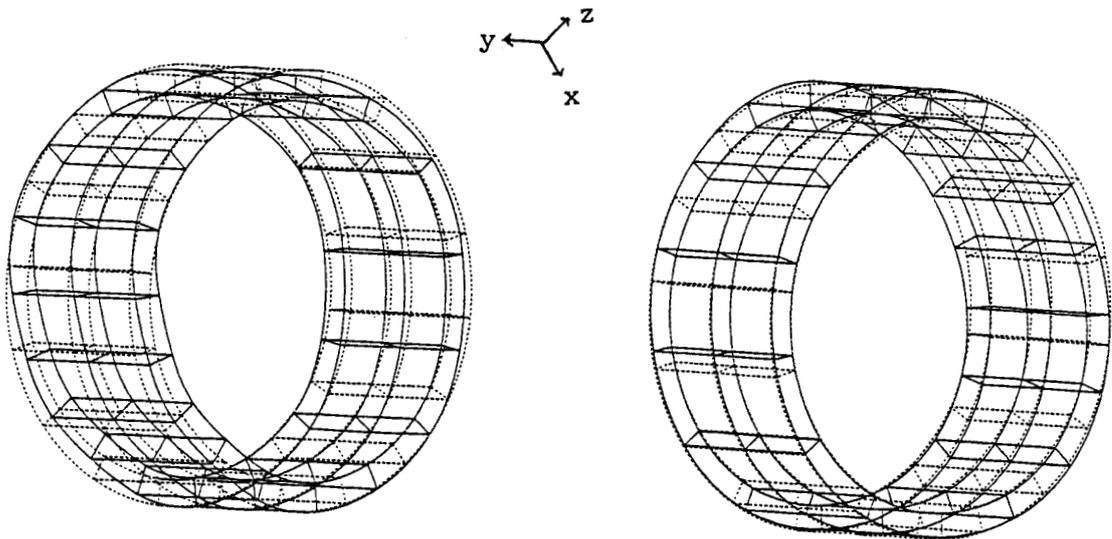
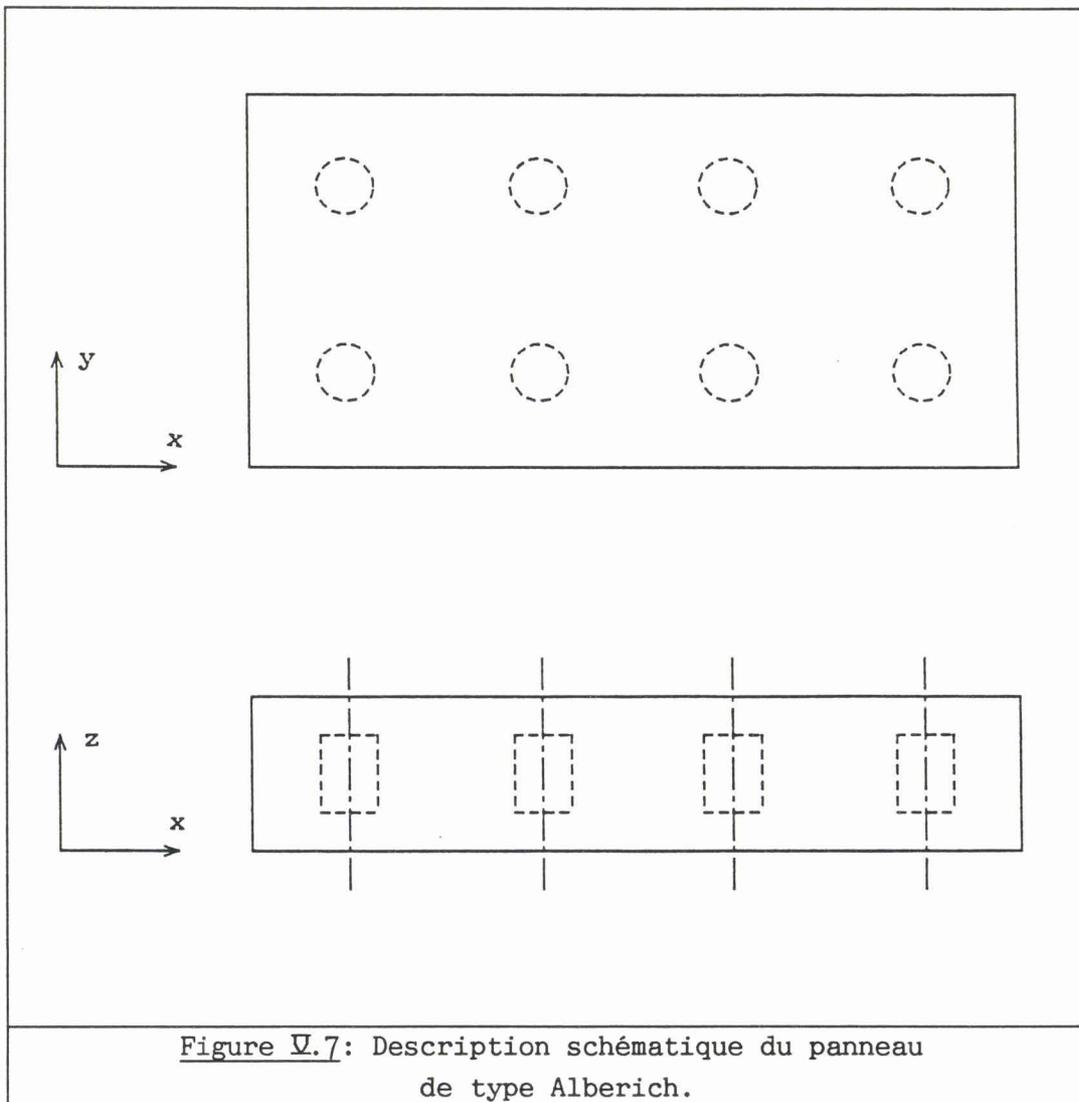


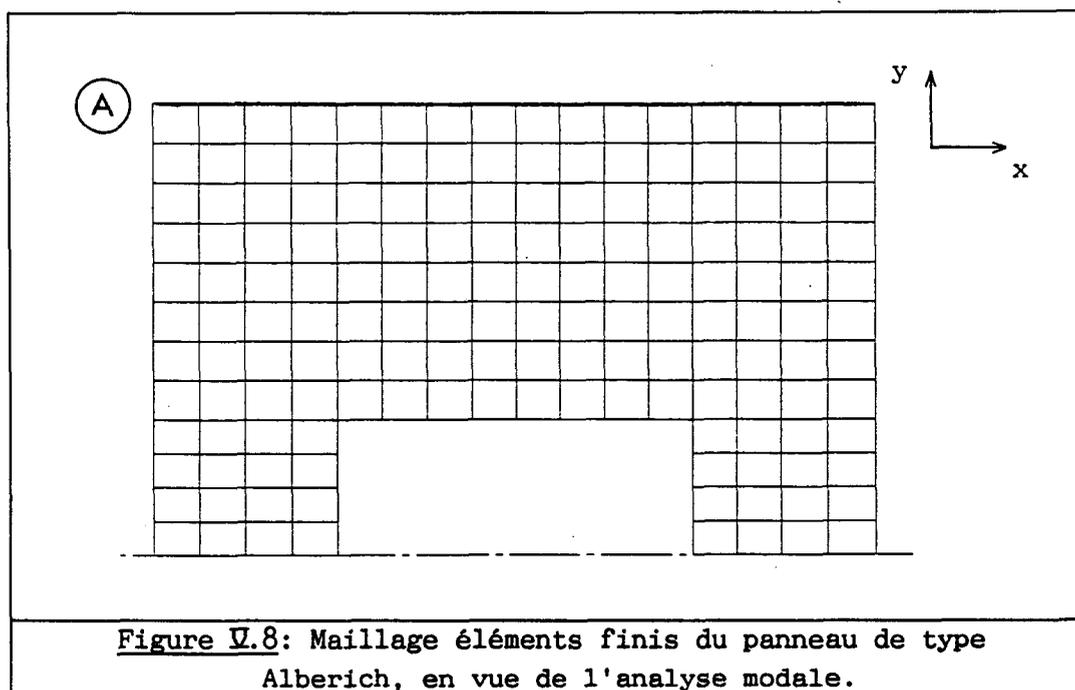
Figure V.6: Parties réelle et imaginaire du déplacement de la structure sans perte. $f = 13.5$ kHz, maille tridimensionnelle, vue en perspective.

IV.2 ETUDE DE PANNEAUX DE TYPE ALBERICH.

Cet exemple permet la vérification directe des résultats obtenus à l'aide des éléments finis par comparaison à des mesures [66]. Deux réseaux sont analysés en détail: le premier en polyuréthane, le second en résine silicone. Dans les deux cas, l'analyse modale d'une portion de réseau dans l'air est tout d'abord décrite, puis les coefficients de transmission des panneaux immergés sont calculés. Les deux panneaux étudiés ont la même structure géométrique multicouche contenant des inclusions cylindriques remplies d'air. La photographie d'un fragment du panneau en polyuréthane est présentée à la figure 3 de l'introduction et un schéma de principe est donné à la figure IV.7.



Dans les deux cas, l'analyse modale dans l'air est conduite pour fournir les fréquences et les champs de déplacement associés aux modes propres, afin de permettre, si possible, une interprétation simple des résonances mises en évidence sur les courbes de transmission ou de réflexion des panneaux immergés. Compte tenu du fait qu'une onde acoustique en incidence normale peut uniquement exciter des modes symétriques, seuls ces modes sont recherchés. Par ailleurs, la distance entre deux inclusions voisines étant grande devant le rayon de l'inclusion, la maille élémentaire retenue est un cylindre et non un parallélépipède, ce qui autorise le recours à un modèle à symétrie axiale (figure V.8). Ainsi, les axes centraux des figures V.9 et V.15 décrites ultérieurement sont des axes de symétrie.



V.2.1 Analyse modale du réseau en polyuréthane.

Le matériau constituant le panneau en polyuréthane a une masse volumique ρ égale à 1100 kg.m^{-3} . La vitesse des ondes longitudinales c_1 est égale à 1500 m/s . Les autres propriétés caractéristiques sont lues sur des courbes maîtresses, présentées en annexe 6, permettant de connaître, en fonction de la température et de la fréquence d'excitation, le module d'Young et les pertes associées [66]. Les variations observées sur ces courbes sont importantes. Le coefficient de Poisson est aisément calculé et

varie de 0.494 à 0.471 dans la bande de fréquence étudiée et à 5°C. La vitesse des ondes transversales est de 290 m/s environ à 15 kHz.

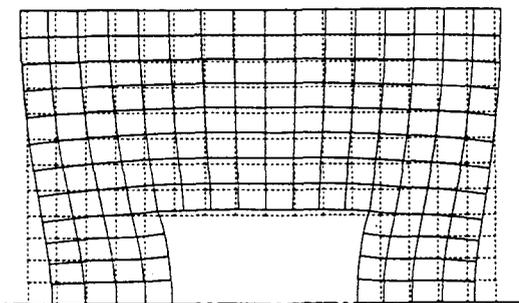
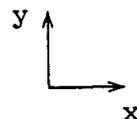
Appliquant sur la face A du maillage de la figure V.8 une condition de symétrie du champ de déplacement, les premiers modes propres sont calculés et leurs fréquences sont reportées dans le tableau V.4, pour des propriétés du matériau lues à 15 kHz. Dans la bande de fréquence utilisée, les modes sont nombreux. La figure V.9 présente six champs de déplacement, correspondant aux six premières fréquences propres, qui contiennent d'importantes composantes de cisaillement.

Mode	Fréquence (Hz)
1	6724.1
2	6732.3
3	9654.5
4	9686.4
5	11876.
6	12005.
7	12603.
8	14402.
9	15908.
10	16724.

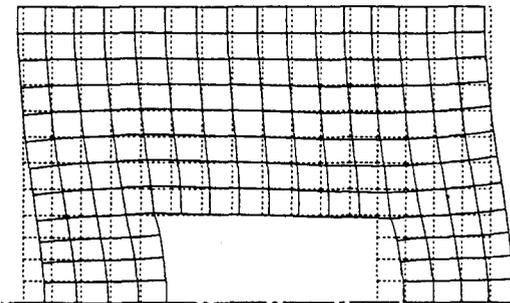
Tableau V.4: Fréquences propres du panneau en polyuréthane.

V.2.2 Calcul du coefficient de transmission du panneau en polyuréthane.

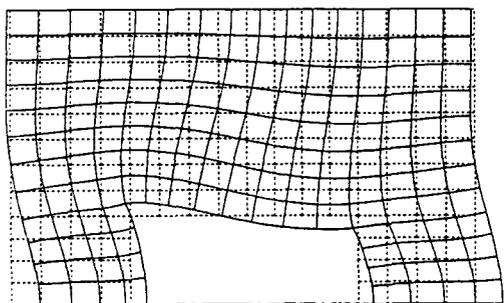
Deux maillages ont été construits pour ce problème. Le premier (figure V.10.a), plus économique sur le plan numérique, ne vérifie pas le critère en $\lambda/4$ pour la vitesse des ondes transversales. Le second (figure V.10.b), en revanche, vérifie ce critère dans les parties jouxtant la cavité cylindrique, lorsque la fréquence d'excitation est inférieure à 15 kHz. La figure V.11 compare les variations avec la fréquence du coefficient de transmission du panneau, mesurées puis calculées par le modèle éléments finis pour les deux maillages générés, lorsque la température d'expérimentation est de 5°C. Le premier maillage donne un résultat en désaccord net avec le second, démontrant la nécessité de vérifier correctement le critère de maillage. Dans ce premier cas, les



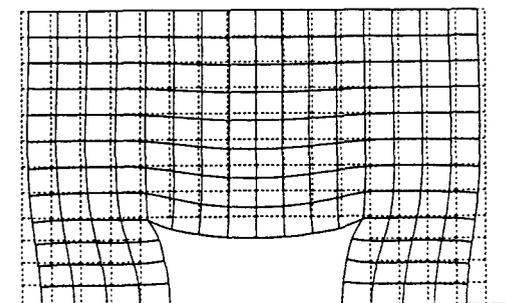
$$f_1 = 6724.1 \text{ Hz}$$



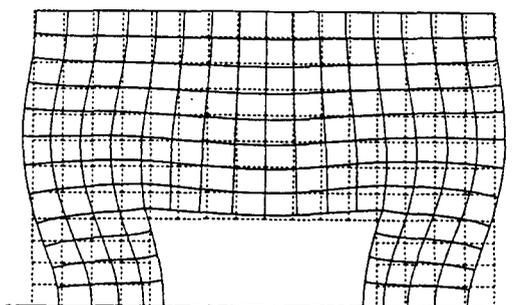
$$f_2 = 6732.3 \text{ Hz}$$



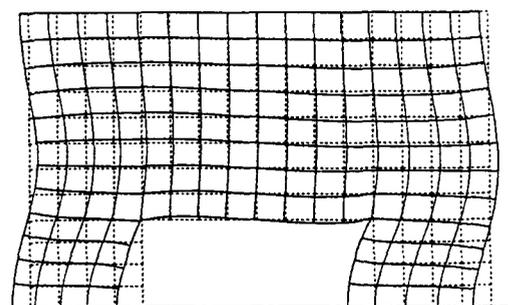
$$f_3 = 9654.5 \text{ Hz}$$



$$f_4 = 9686.4 \text{ Hz}$$



$$f_5 = 11876. \text{ Hz}$$



$$f_6 = 12005. \text{ Hz}$$

Figure V.9: Champ de déplacement de la structure en polyuréthane correspondant aux six premiers modes propres.

parties réelle et imaginaire du champ de déplacement de la structure calculées à 17 kHz, lorsque les pertes d'insertion sont maximales, sont présentées à la figure V.12. L'identification du mode excité est très difficile mais la figure permet de constater à l'évidence que les effets de cisaillement sont très importants et que le maillage utilisé n'est pas assez dense par rapport à la longueur d'onde des ondes transversales. Ceci implique une rigidité calculée trop grande et augmente ainsi la fréquence et le niveau du minimum du diagramme. En revanche, le second maillage donne une courbe très semblable à la courbe expérimentale, décalée toutefois de 2 kHz vers les hautes fréquences. Les parties réelle et imaginaire du champ de déplacement à 16 kHz sont présentées à la figure V.13. Elles permettent de montrer que l'identification d'un mode unique est impossible et que plusieurs modes doivent nécessairement interagir. Par ailleurs, le cisaillement est, cette fois, bien décrit.

L'écart en fréquence entre le minimum théorique et le minimum mesuré de la courbe de transmission peut, au moins partiellement, s'expliquer par le fait que les propriétés du matériau varient extrêmement dans la gamme étudiée en fonction de la fréquence et de la température. Leur connaissance exacte est donc assez difficile. De plus, la vitesse des ondes longitudinales a été supposée constante sur toute la bande de fréquence, ce qui n'est certainement pas le cas physiquement. C'est pourquoi, pour évaluer l'influence du choix des valeurs des constantes physiques sur la courbe calculée, une simulation a été conduite en considérant une valeur du module d'Young inférieure de 25% à la valeur utilisée précédemment. En fonction de la fréquence d'excitation, les valeurs trouvées pour le coefficient de transmission (figure V.14) se rapprochent fortement des valeurs expérimentales dans la bande de fréquence d'utilisation. Ainsi, le pic est bien décalé et les largeurs de bande expérimentale et obtenue par la méthode des éléments finis sont semblables. Ce dernier résultat permet de conclure que l'origine des écarts observés peut raisonnablement être recherchée dans la description des propriétés du matériau et qu'une connaissance plus précise de celles-ci est indispensable pour produire un accord quantitatif meilleur et plus fiable.

Par ailleurs, il serait maintenant intéressant d'écrire le champ de déplacement de la structure immergée sous forme d'une combinaison linéaire des déplacements propres de la structure dans l'air, permettant ainsi de déterminer la contribution de chacun des modes propres.

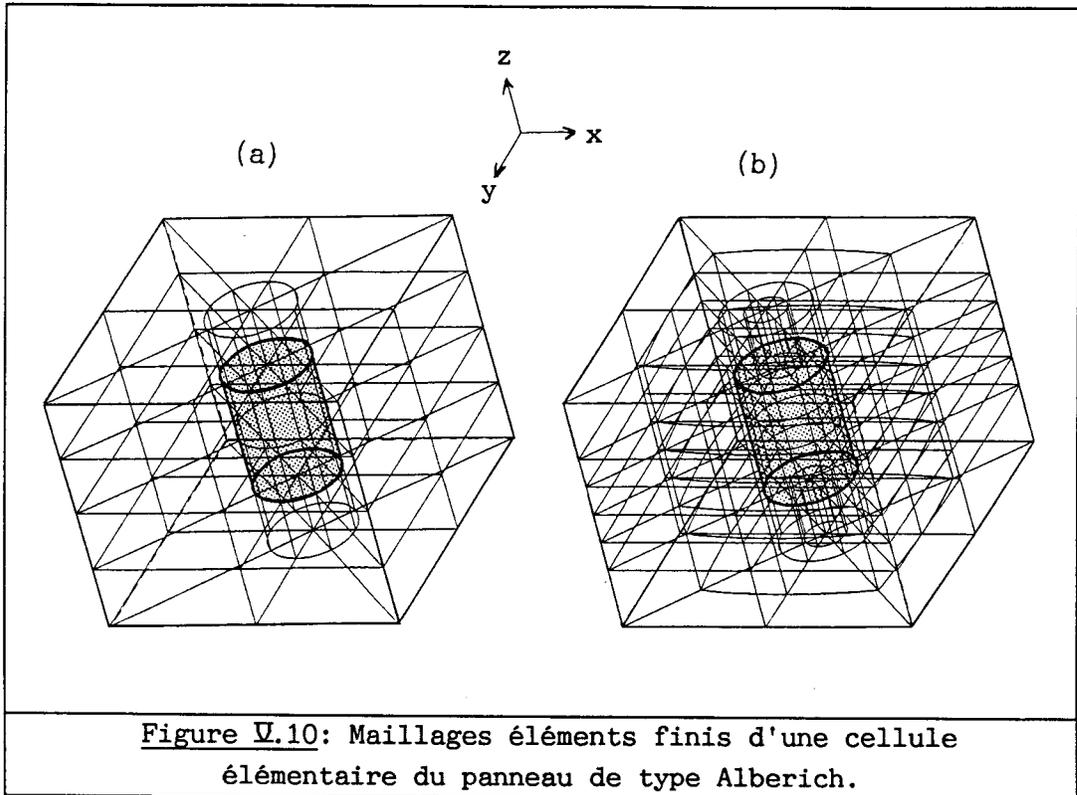


Figure V.10: Maillages éléments finis d'une cellule élémentaire du panneau de type Alberich.

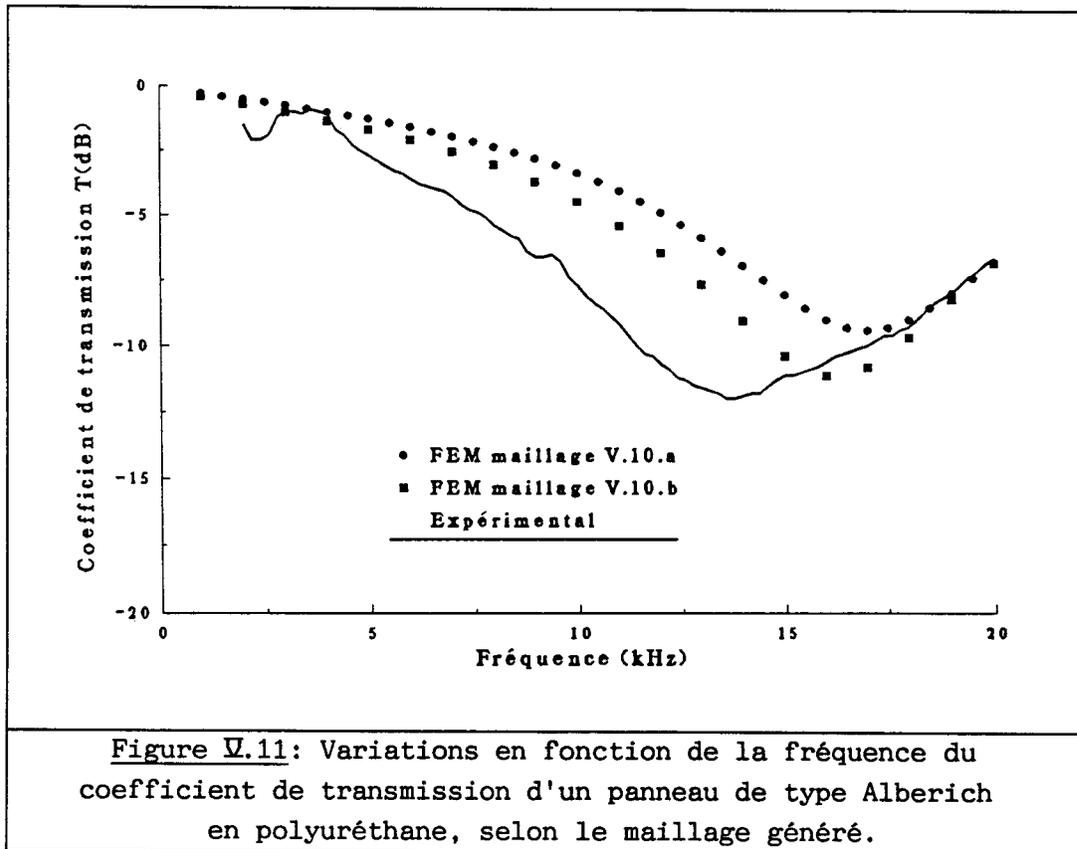


Figure V.11: Variations en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un panneau de type Alberich en polyuréthane, selon le maillage généré.

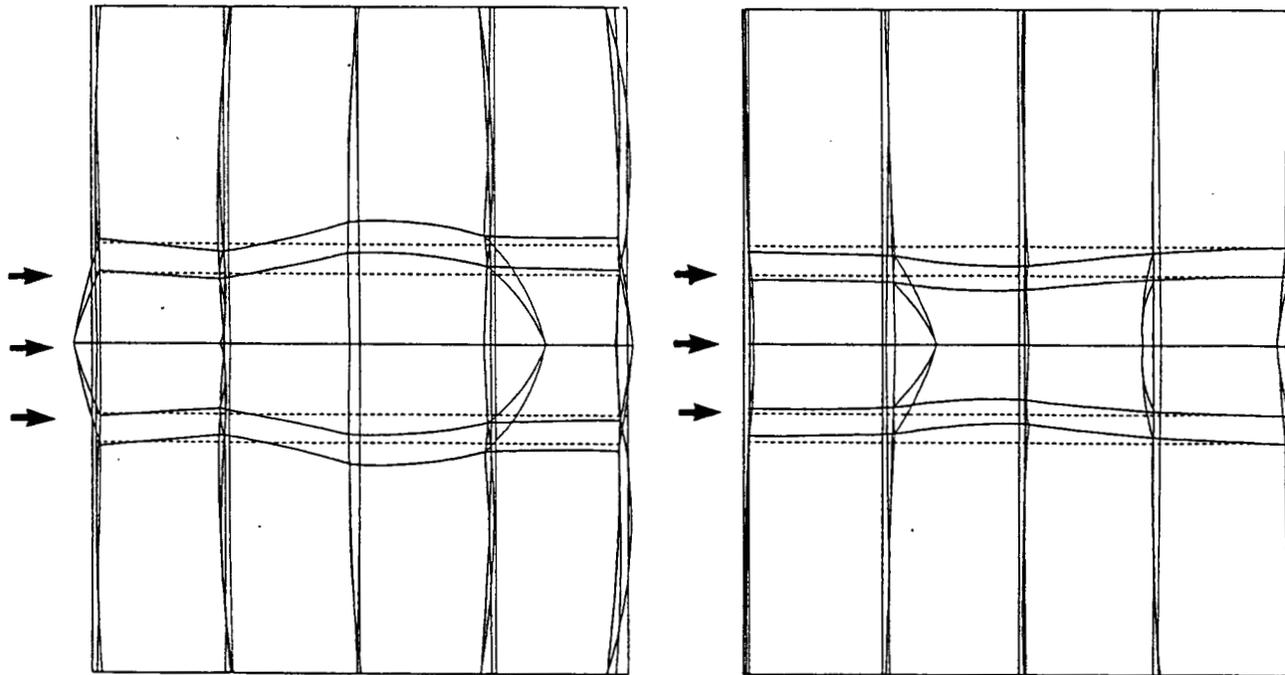


Figure V.12: Parties réelle et imaginaire du champ de déplacement de la structure en polyuréthane, dans le plan xOz , à 17 kHz, maillage V.10.a.

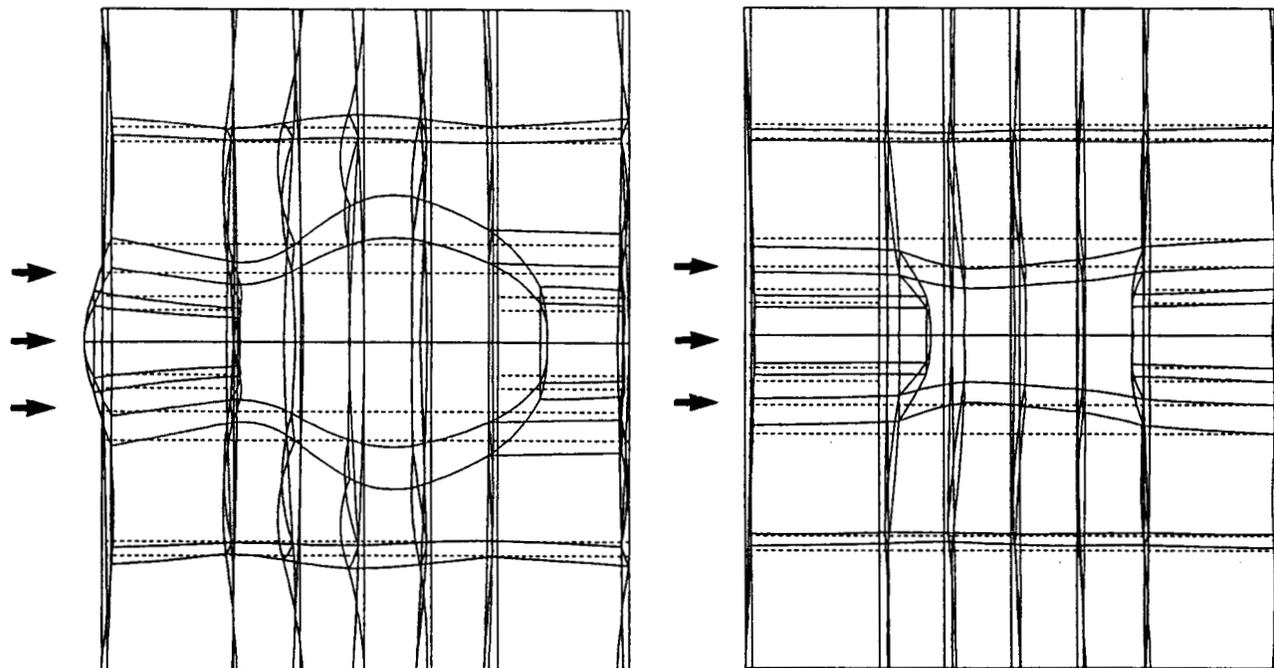
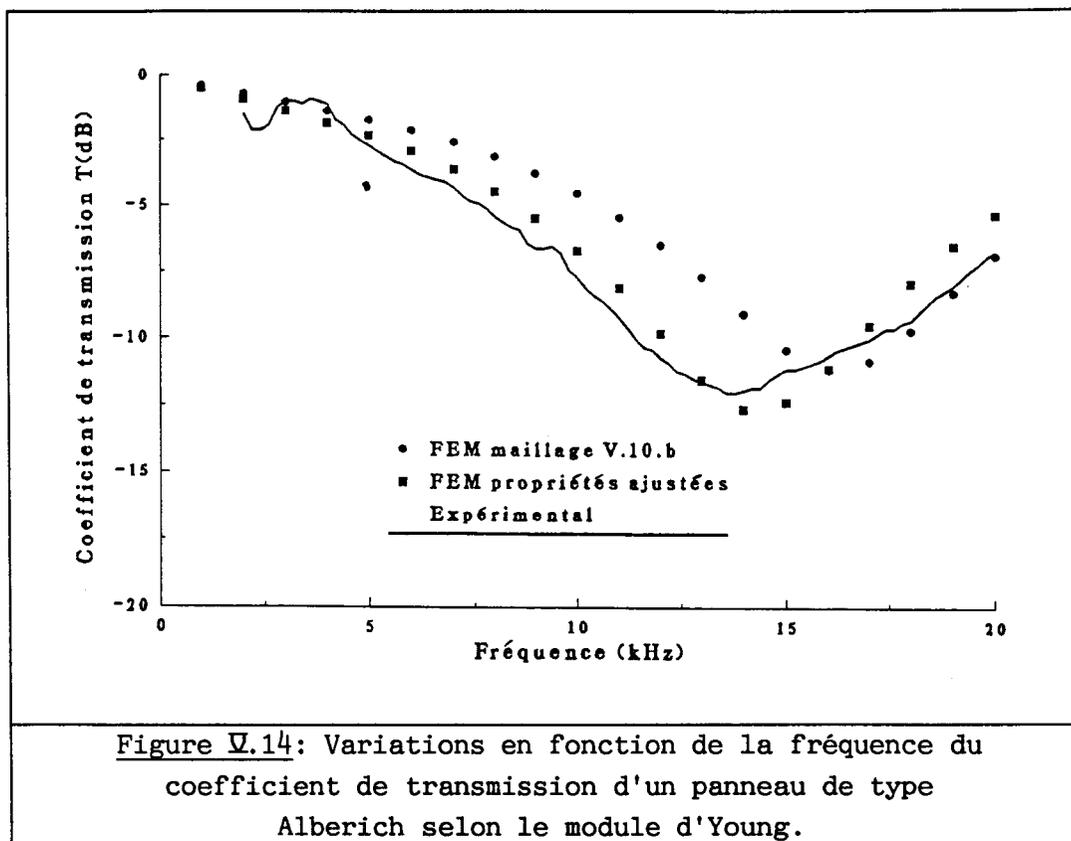
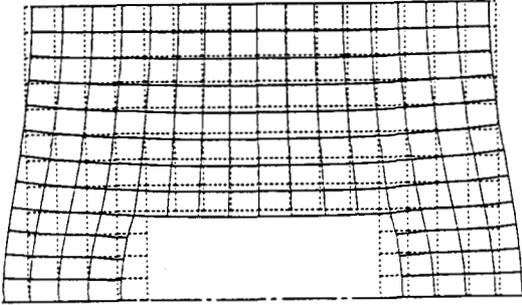
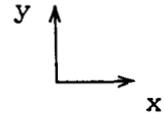


Figure V.13: Parties réelle et imaginaire du champ de déplacement de la structure en polyuréthane, dans le plan xOz , à 16 kHz, maillage V.10.b.

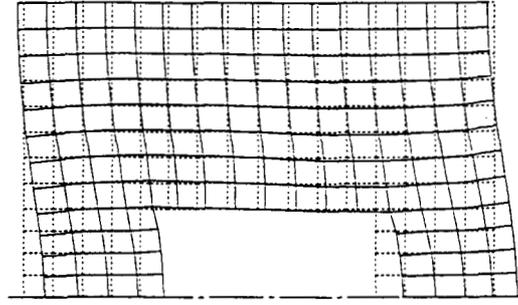


V.2.3 Analyse modale du réseau en résine silicone.

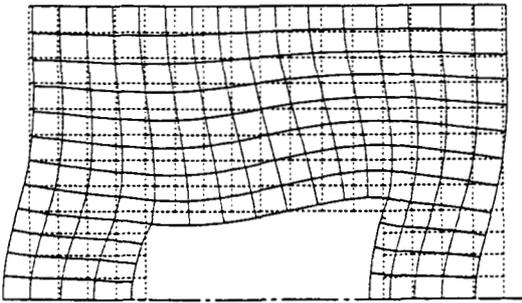
Ce réseau possède exactement la même géométrie que le panneau en polyuréthane (figure V.7). Le matériau constituant le panneau est de la résine silicone pour laquelle $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ et $c_1 = 1140 \text{ m/s}$. Les autres propriétés sont relevées à partir de courbes maîtresses, présentées en annexe 7, mais les variations en fonction de la température et de la fréquence d'excitation sont, cette fois, négligeables. En conséquence, les propriétés caractéristiques du matériau ont été lues uniquement à 5 kHz. Le coefficient de Poisson est aisément calculé et vaut 0.49976, ce qui induit une vitesse des ondes transversales très faible, de l'ordre de 24 m/s. L'analyse modale est à nouveau conduite en faisant l'hypothèse de symétrie axiale (figure V.8). Les premiers modes propres symétriques par rapport à la face A sont calculés et leurs fréquences sont reportées dans le tableau V.5, lorsque les propriétés du matériau du panneau sont relevées à 5 kHz. La figure V.15 présente six champs de déplacement correspondant aux six premières fréquences propres.



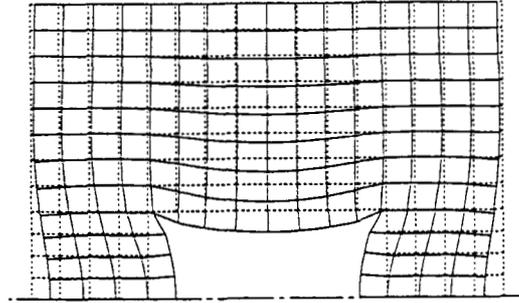
$$f_1 = 571.95 \text{ Hz}$$



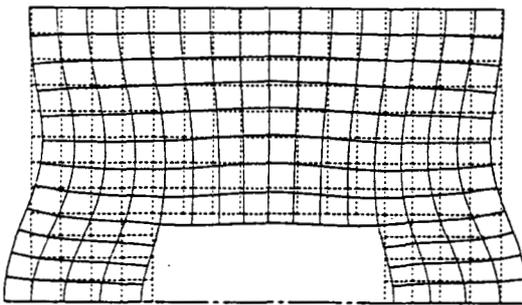
$$f_2 = 573.91 \text{ Hz}$$



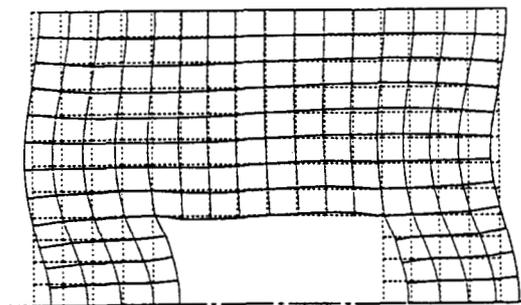
$$f_3 = 819.36 \text{ Hz}$$



$$f_4 = 879.16 \text{ Hz}$$



$$f_5 = 1022.6 \text{ Hz}$$



$$f_6 = 1026.5 \text{ Hz}$$

Figure V.15: Champ de déplacement de la structure en résine silicone correspondant aux six premiers modes propres.

Mode	Fréquence (Hz)
1	571.95
2	573.91
3	819.36
4	879.16
5	1022.6
6	1026.5
7	1072.0
8	1227.6
9	1362.4
10	1439.0

Tableau V.5: Fréquences propres du panneau en résine silicone.

V.2.4 Calcul du coefficient de transmission du panneau en résine silicone.

Le maillage construit est présenté à la figure V.10.b. Il respecte le critère en $\lambda/4$ pour une fréquence d'excitation inférieure à 1.5 kHz, c'est-à-dire qu'à 3 kHz il faudrait un maillage deux fois plus fin pour respecter encore le critère.

Le coefficient de transmission est calculé puis comparé à des mesures (figure V.16). L'accord est très bon entre les deux courbes. Ainsi, le premier pic, correspondant à des pertes d'insertion élevées est bien placé en fréquence. Le faible écart observé est probablement dû aux difficultés pour connaître avec précision les propriétés du matériau. A 1800 Hz, les parties réelle et imaginaire du champ de déplacement sont tracées et permettent de montrer que le pic est provoqué par l'excitation simultanée de plusieurs modes existant dans l'air dans la même gamme de fréquence. Cet exemple montre qu'une nouvelle fois la méthode des éléments finis permet de décrire de façon satisfaisante le comportement de panneaux de type Alberich.

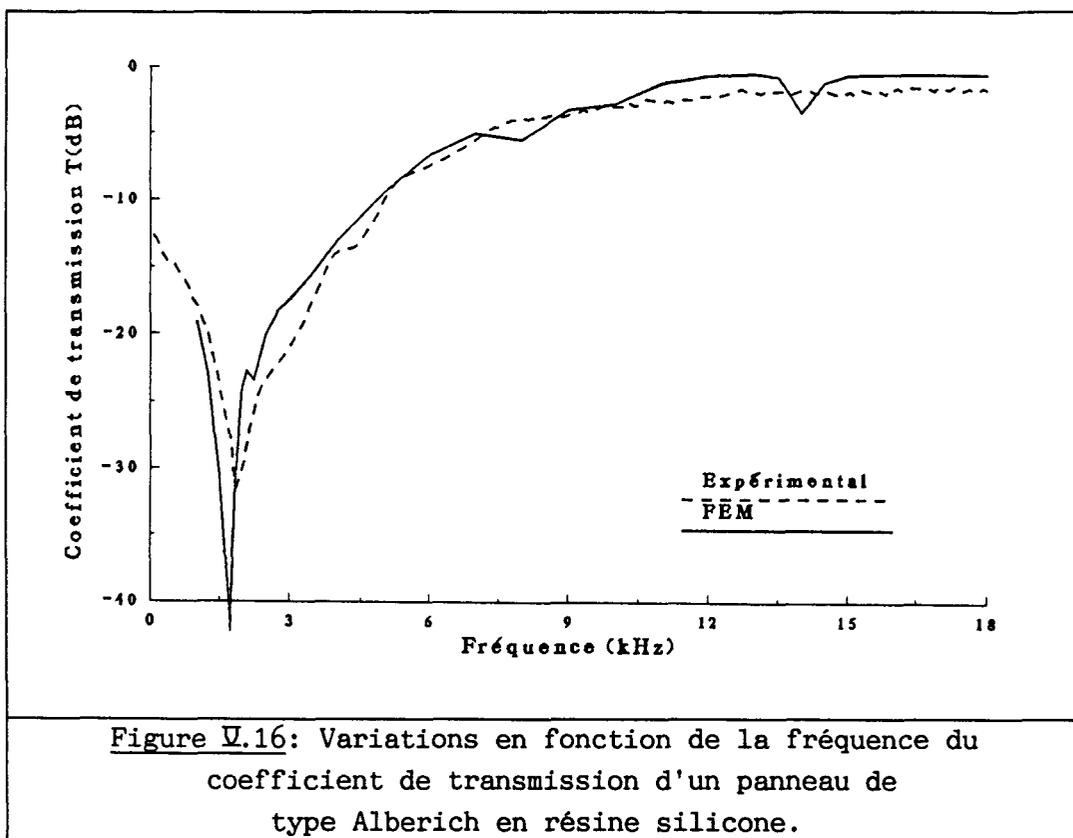


Figure V.16: Variations en fonction de la fréquence du coefficient de transmission d'un panneau de type Alberich en résine silicone.

V.3 CONCLUSION

Ce chapitre a présenté les tests effectués en vue de valider la méthode des éléments finis appliquée à des structures périodiques à deux dimensions. L'accord est très bon lorsque les résultats du modèle éléments finis sont comparés à des résultats antérieurs ou obtenus par un modèle analytique. En revanche, lorsque les propriétés du matériau ne sont pas connues avec une précision suffisante, l'approche éléments finis peut évidemment donner des résultats qui ne coïncident pas exactement avec les mesures. C'est également le cas lorsque le maillage éléments finis ne respecte pas le critère en $\lambda/4$ pour la vitesse des ondes transversales sur toute la bande de fréquence. Néanmoins, la méthode développée a permis de déterminer de façon très satisfaisante le comportement des panneaux de type Alberich étudiés. Elle pourra donc être appliquée à l'étude de tout réseau présentant une périodicité dans deux directions de l'espace, et notamment de panneaux anéchoïques à adaptation graduelle.

CONCLUSION

Dans cette thèse, la modélisation à l'aide de la méthode des éléments finis de la diffraction d'une onde acoustique par des structures périodiques, a été proposée. Elle a permis de déterminer le comportement de nombreux réseaux périodiques à une ou deux dimensions, les géométries pouvant être complexes et les matériaux divers.

Dans une première partie, la liste des modèles analytiques ou semi-analytiques utilisés antérieurement pour décrire le comportement de réseaux périodiques plans infinis a été dressée. Les limitations essentielles de chacun des modèles ayant été mises en évidence, l'utilisation d'un logiciel de simulation performant pour analyser ces réseaux est alors apparue comme essentielle et a été entreprise à l'aide du code ATILA. Dans une seconde partie, une méthode générale a été développée qui peut s'appliquer indifféremment aux réseaux présentant une périodicité dans une ou deux directions de l'espace. Les résultats obtenus numériquement ont démontré que cette méthode permet de décrire précisément et aisément le comportement de tels réseaux. Ainsi, elle a été utilisée avec succès pour déterminer les variations avec la fréquence des coefficients de transmission de réseaux de tubes compliant ou de cylindres de section circulaire ou elliptique de même que de panneaux de type Alberich. De plus, la fiabilité et la souplesse de cette approche ont été soulignées, et notamment le fait qu'il n'y a pas d'hypothèses restrictives sur le champ de déplacement et que la modification de la structure diffractante ne nécessite que la modification du maillage, sans développement théorique supplémentaire. Enfin, différents matériaux, incluant ou excluant des pertes internes, ont été considérés. Il faut toutefois noter que des écarts non négligeables ont parfois été observés

lorsque les résultats du modèle éléments finis ont été comparés à des valeurs mesurées, dans le cas des tubes circulaires enrobés de polyuréthane ou des panneaux de type Alberich. De fait, la connaissance précise des propriétés de ces matériaux est difficile, puisque les variations de leurs constantes physiques en fonction de la température et de la fréquence d'excitation sont importantes. De plus, dans ces matériaux, la vitesse des ondes transversales étant très petite, le maillage doit être extrêmement fin pour répondre au critère en $\lambda/4$.

Au-delà de la modélisation de structures à simple ou double périodicité, l'un de nos objectifs est maintenant d'utiliser la méthode des éléments finis, dans le cadre de cette approche, pour la modélisation de structures ou de matériaux composites à périodicité tridimensionnelle. Dans ce cas, seule une cellule élémentaire tridimensionnelle sera maillée et la périodicité sera prise en compte dans les trois directions à l'aide du théorème de Bloch-Floquet. L'étude de la propagation des ondes élastiques dans ces matériaux permettra de connaître les courbes de dispersion et d'analyser le comportement dynamique: identification des modes de propagation, des fréquences de coupure, des bandes passantes (pass-bands) et des bandes d'arrêt (stop-bands) [70-73]. Il sera de même possible de déterminer les propriétés homogénéisées de ces matériaux dans la limite des grandes longueurs d'onde ainsi que les limites, pour un matériau donné, des techniques d'homogénéisation. Par ailleurs, la bibliothèque du code éléments finis ATILA possédant des éléments piézoélectriques, la prise en compte d'éléments actifs dans les réseaux périodiques pourra être envisagée en vue de l'utilisation du code pour l'optimisation d'une structure d'absorption active.

REFERENCES

1-R.J. BOBBER *classe les écrans en trois catégories idéales: le réflecteur, qui réfléchit la totalité de l'onde incidente, le baffle qui ne transmet rien et le revêtement anéchoïque qui ne réfléchit rien.*

R.J. BOBBER, Underwater electroacoustics measurements, NRL-USRD, Orlando, Technical report, ch. 6, distribué par DMC, dept of Defense, USA, (1970).

2-L.E. KINSLER, A.R. FREY, A.B. COPPENS, J.V. SANDERS,
"Fundamental of Acoustics", 3^{eme} édition, Ed. Wiley, section 8.4,
New-York, (1982).

3-C. AUDOLY,

"Etude de barrières acoustiques formées de réseaux d'obstacles résonnants",
Thèse de Doctorat, Université de Toulon et du Var, (1989).

4-W.L. KONRAD,

"Disappearing baffle for sonar arrays", J. Acoust. Soc. Am., 86, 2045,
(1989).

5-R.J. URICK

"Principles of underwater sound", Ed. Mc Graw Hill, section 9.14, New-York,
(1975).

6-E. BURKE, V. TWERSKY,

"On scattering of waves by an infinite grating of elliptic cylinders", IEEE
Trans. Antennas Propag., AP-14, 465-480 (1966).

7-G.A. BRIGHAM, J.J. LIBUHA, R.P. RADLINSKI,

"Analysis of scattering from large planar gratings of compliant cylindrical shells", J. Acoust. Soc. Am. 61, 48-59, (1977).

8-G. DUMERY,

"Sur la diffraction des ondes sonores par des grilles ou des réseaux d'obstacles", Acustica, 18, 334-341, (1967).

9-C. AUDOLY,

"Modeling of compliant tube underwater reflectors", J. Acoust. Soc. Am., 87, 1841-1846 (1990).

10-C. AUDOLY, G. DUMERY,

"Etude d'écrans sous-marins constitués de tubes élastiques", Acustica, 69, 263-269, (1989).

11-V. VOVK, V.T. GRINCHENKO, L.A. KONONUCHENKO,

"Diffraction of a sound wave by a plane grating formed by hollow elastic bars", Akust. Zh., 22, 201-205, (1976) [Sov. Phys. Acoust., 22, 113-115, (1976)]

12-R.P. RADLINSKI, M.M. SIMON,

"Scattering by multiple gratings of compliant tubes", J. Acoust. Soc. Am., 72, 607-614, (1982).

13-R.P. RADLINSKI, R.S. JANUS,

"Scattering from two or three gratings of densely packed compliant tubes", J. Acoust. Soc. Am., 80, 1803-1809, (1986).

14-R.P. RADLINSKI,

"Scattering from multiple compliant tube gratings in a viscoelastic layer", J. Acoust. Soc. Am., 85, 2301-2310, (1989).

15-C. AUDOLY,

"Diffraction d'une onde plane par un réseau de tubes compliant", Acustica, 64, 159-163, (1987).

16-G.C. GAUNAURD, H. ÜBERALL,

"Resonance theory of the effective properties of perforated solids", J. Acoust. Soc. Am., 71, 282-295, (1982); errata, J. Acoust. Soc. Am. 72, 371, (1982).

17-G.C. GAUNAURD, H. ÜBERALL,

"Resonance effects and the ultrasonic effective properties of particulate composites", J. Acoust. Soc. Am., 74, 305-313, (1983).

18-J.D. ACHENBACH, Y.C. LU, M. KITAHARA,

"3-D reflection and transmission of sound by an array of rods", J. Sound Vib., 125, 463-476, (1988).

19-A. LAKHTAKIA, V.V. VARADAN, V.K. VARADAN,

"Reflection characteristics of an elastic slab containing a periodic array of elastic cylinders: SH wave analysis", J. Acoust. Soc. Am. 80, 311-316, (1986).

20-A. LAKHTAKIA, V.V. VARADAN, V.K. VARADAN,

"Reflection characteristics of an elastic slab containing a periodic array of circular elastic cylinders: P and SV wave analysis", J. Acoust. Soc. Am. 83, 1267-1275, (1988).

21-A.J. KALINOWSKI,

"Steady state solutions to the dynamically loaded periodic structures", NASA Conference Publication 2131, Eighth NASTRAN User's Colloquium, Greenbelt, (1979).

22-J.-N. DECARPIGNY,

"Application de la méthode des éléments finis à l'étude des transducteurs piézoélectriques", Thèse de Doctorat d'Etat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1984).

23-J.-N. DECARPIGNY, J.-C. DEBUS, B. TOCQUET, D. BOUCHER,

"In air analysis of piezoelectric Tonpilz transducers in a wide frequency band using a mixed finite element-plane wave method", J. Acoust. Soc. Am., 78, 1499-1507, (1985).

24-J.-N. DECARPIGNY, J.-C. DEBUS, B. HAMONIC, R. BOSSUT, P. TIERCE, D. MOREL, D. BOUCHER, B. TOCQUET,

"Finite element analysis of low frequency sonar transducer", Proceedings of the Two-day Conference on sonar transducers, Birmingham, Ed. Institute of Acoustics, Vol 9 (2), 42-49, (1987).

25-B. HAMONIC,

"Power sonic and ultrasonic transducers design", dans Proceedings of the International Workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, Lille, Ed. B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Springer Verlag, 143-159 (1988).

26-J.-N. DECARPIGNY, J.-C. DEBUS, R. BOSSUT, B. HAMONIC, B. DUBUS, P. TIERCE, D. MOREL, K. ANIFRANI, D. BOUCHER,

"Analyse de transducteurs piézoélectriques par éléments finis: le code ATILA", Actes du congrés international Strucome 88, Ed. Hermes, 341-354 Paris, (1988).

27-R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY,

"Finite element modeling of radiating structures using dipolar damping elements", J. Acoust. Soc. Am., 86, 1234-1244 (1989).

28-B. HAMONIC, J.-C. DEBUS, J.-N. DECARPIGNY, D. BOUCHER, B. TOCQUET,

"Analysis of radiating thin shell sonar transducers using the finite element method", J. Acoust. Soc. Am., 86, 1245-1253 (1989).

29-T.C. MA, R.A. SCOTT, W.H. YANG,

"Harmonic wave propagation in an infinite elastic medium with a periodic array of cylindrical pores", J. Sound Vib., 71, 473-482, (1980).

30-H.A. SCHENCK,

"Improved integral formulation for acoustic radiation problem", J. Acoust. Soc. Am., 44, 41-58, (1967).

31-P.C. WATERMAN,

"New formulation of acoustic scattering", J. Acoust. Soc. Am., 45, 1417-1429, (1969).

32-O.C. ZIENKIEWICZ,

"La méthode des éléments finis", Ed. McGraw-Hill, New-York (1979).

33-J.W. RAYLEIGH,

Proc. London Math. Soc., 29, p. 523 (1898).

34-W. VON IGNATOWSKI,

"Zur Theorie der Gitter", Annalen der Physik, 44, 369-427, (1914).

35-V.K. VARADAN,

"Multiple scattering of acoustic, electromagnetic and elastic waves", dans "Acoustic, electromagnetic and elastic waves scattering-Focus on the T-Matrix approach", Pergamon Press, 103-134, New-York (1979).

36-V. TWERSKY,

"On the scattering of waves by an infinite grating", IRE Trans. Ant. Propa., 4, 330-345, (1956).

37-V. TWERSKY,

"On scattering of waves by the infinite grating of circular cylinders", IRE Trans. Ant. Propa., 10, 737-763, (1962).

38-A. LAVIE,

"Modélisation du rayonnement ou de la diffraction acoustique par une méthode mixte équations intégrales-champ nul", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1989).

39-J.D. ACHENBACH, Z.L. LI,

"Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens", Wave motion, 8, 225-234, (1986).

40-A.-C. HENNION, R. BOSSUT, J.-N. DECARPIGNY, C. AUDOLY,

"Analysis of the scattering of a plane acoustic wave by a periodic elastic structure using the finite element method: application to compliant tube gratings", J. Acoust. Soc. Am., 87, 1861-1870 (1990).

41-R. LANE,

"Absorption mechanisms for waterbone sound in Alberich anechoic layers", Ultrasonics, 28-30, janvier (1981).

42-V. TWERSKY,

"Multiple scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders", J. Acoust. Soc. Am., 21, 42-46, (1952).

43-L. BRILLOUIN, M. PARODI,

"Propagation des ondes dans les milieux périodiques", Ed. Masson, Paris, (1956).

44-B. DUBUS,

"Analyse des limitations de puissance des transducteurs piézoélectriques", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1989).

45-J.F. NYE,

"Physical properties of crystals", Clarendon Press, Ed. Oxford Univ. Press, Oxford, (1957).

46-D.A. BERLINCOURT, D.R. CURRAN, H. JAFFE,

"Physical Acoustics, principles and methods", vol. 1 part A, éd. par W.P. Mason, Academic Press, New-York, (1964).

47-O.C. ZIENKIEWICZ, R.E. NEWTON,

Proc. of the International Symposium on finite element techniques, Stuttgart, (1969).

48-K.J. BATHE,

"Finite element procedures in engineering analysis", Ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1982).

49-G. DHATT, G. TOUZOT,

"Introduction à la méthode des éléments finis", Collection Université de Compiègne, Ed. Maloine, Paris, (1982).

50-R. BOSSUT,

"Modélisation de transducteurs piézoélectriques annulaires immergés par la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, (1985).

51-P. TIERCE,

"Modélisation du transducteur Isabelle par la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, (1985).

52-B. HAMONIC,

"Contribution à l'étude du rayonnement de transducteurs utilisant les vibrations de coque mince", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1987).

53-K. ANIFRANI,

"Contribution à l'étude de structures piézoélectriques à l'aide de la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1988).

54-B. HAMONIC, J.-C. DEBUS, H. TOURNEUR, J.-N. DECARPIGNY, D. BOUCHER,

"Finite element modeling of GRP composite shells used in low frequency flextensional transducers", soumis au J. Acoust. Soc. Am., (1990).

55-R. HOLLAND,

"Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients", IEEE SU 14, 18-20, (1967).

56-M. GERADIN,

"Une étude comparative des méthodes numériques en analyse dynamique des structures", Bulletin de l'Association Technique Maritime, N° 78, Ed. ATMA, 167-198, (1978).

57-J.-C. DEBUS, D. MOREL, J.-N. DECARPIGNY,

"Incorporation au code éléments finis ATILA d'une méthode de stockage par colonnes actives et d'un algorithme de diagonalisation de Lanczos", G.E.R.D.S.M. convention c.83.48.826.163, (1986).

58-R. HENRY,

"Contribution à l'étude dynamique des machines tournantes", Thèse de Doctorat d'Etat, Université Claude Bernard Lyon I, (1981).

59-D.J. MEAD,

"A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling", J. Sound Vib., 27, 235-260, (1973).

60-R.M. ORRIS, M. PETYT,

"A finite element study of harmonic wave propagation in periodic structures", J. Sound Vib., 33, 223-236, (1974).

61-J.-L. ALLOUCHE, F. GRAS, P. ORSERO,

"Vibrations de structures immergées en symétrie cyclique", Actes du Troisième Colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures, 465-482, Ed. DRET, Nov 1985.

62-R. FIORITO, W. MADIGOSKY, H. ÜBERALL,

"Resonance theory of acoustical waves interacting with an elastic plate", J. Acoust. Soc. Am., 66, 1857-1866, (1979).

63-J.-L. IZBICKI, G. MAZE, J. RIPOCHE,

"Diffusion acoustique par une plaque élastique", dans "La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple; Théorie et expériences édité par N. GESPA.", Ed. Cedocar, 134-157, (1987).

64-I.A VIKTOROV, E.K. GRISHCHENKO, T.M. KAEKINA,

"An investigation of the propagation of ultrasonic surface waves at the boundary between a solid and a liquid", Sov. Phys. Acoust., 9, 131-137, (1963).

65-J.-L. IZBICKI, G. MAZE, J. RIPOCHE,

"Diffusion acoustique par un plan; onde de Rayleigh," dans "La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple; Théorie et expériences édité par N. GESPA.", Ed. Cedocar, 53-62, (1987).

66-C. AUDOLY

Communication privée.

67-R.P. RADLINSKI, R.S. JANUS,

"Scattering from multiple compliant tube gratings in a viscoelastic layer", J. Acoust. Soc. Am., Suppl. 1, 78, LL11, (1985).

68-C. AUDOLY, P. LAMY,

"Plane wave scattering from compliant tube gratings at oblique incidence",
J. Acoust. Soc. Am., Suppl. 1, 80, KK11, (1986).

69-R.P. RADLINSKI,

"Interaction between two gratings of compliant tubes", J. Acoust. Soc. Am.,
Suppl. 1, 69, BB10, (1981).

70-S. BASTE, A. GERARD,

"Etude des modes guidés dans les composites tridimensionnels", Rev.
Acoust., 78, 43-48, (1986).

71-D. BAI, J.B. KELLER,

"Sound waves in a periodic medium containing rigid spheres", J. Acoust.
Soc. Am., 82, 1436-1441, (1987).

72-J.D. ACHENBACH, M. KITAHARA

"Harmonic waves in a solid with a periodic distribution of spherical
cavities", J. Acoust. Soc. Am., 81, 595-598, (1987).

73-M. YAMAGUCHI, K.Y. HASHIMOTO, H. MAKITA,

"Finite element method analysis of dispersion characteristics for 1-3 type
piezoelectric composites", 1987 IEEE Ultrasonics Symposium, Proceedings,
657-661, (1987).

ANNEXE 1

FORMULATION UTILISEE POUR CONSTRUIRE LES ELEMENTS DU CODE ATILA.

La technique des éléments isoparamétriques à interpolation quadratique permet de générer des éléments de formes complexes: par déformation, des éléments simples sont transformés en éléments aux contours arbitraires. Ces éléments sont susceptibles de décrire des lignes, des surfaces ou des volumes dont les frontières sont courbes. Leur construction est réalisée à l'aide des coordonnées réduites ξ , η , ζ (figure A.1.1). Le passage de ces coordonnées réduites aux coordonnées réelles x , y et z du repère local est effectué à l'aide des fonctions de forme. Le maillage de la structure est construit dans un repère fixe et unique, $OXYZ$, appelé repère global. Le passage du repère local, lié à chaque élément, au repère global se fait par rotation. Par le biais de transformations matricielles, tous les calculs sont menés en coordonnées réduites.

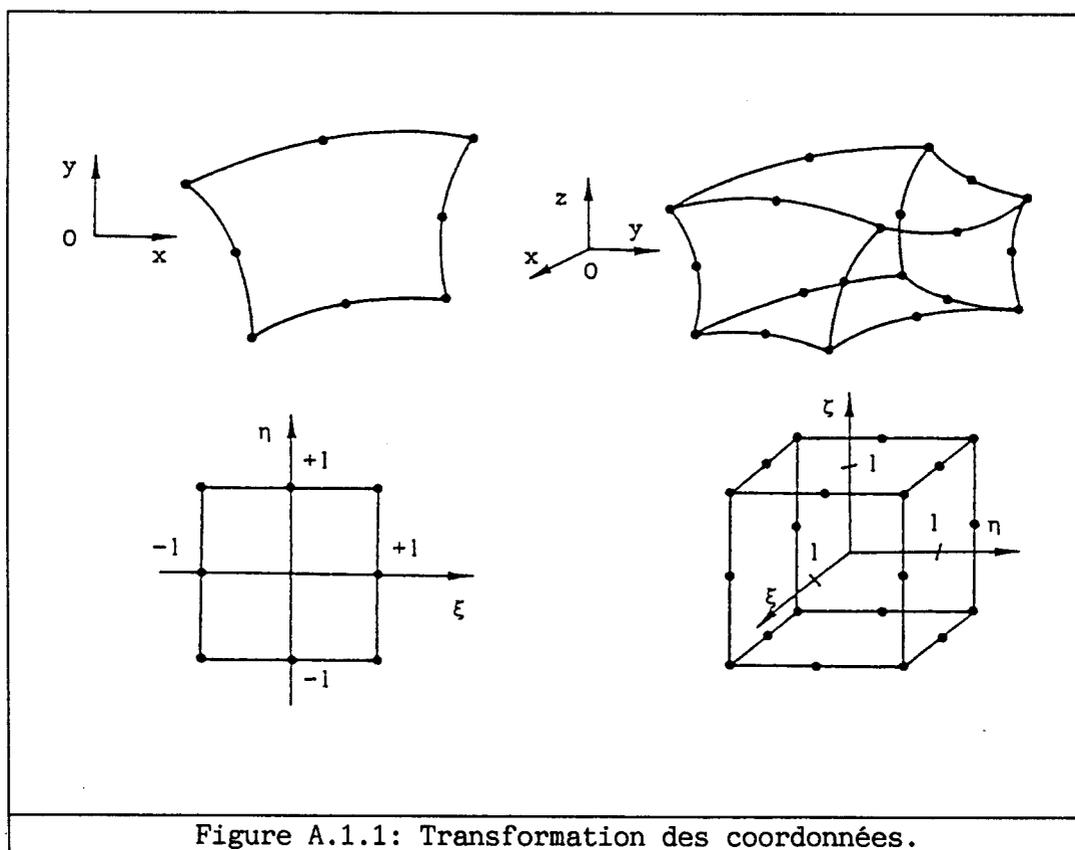


Figure A.1.1: Transformation des coordonnées.

A l'intérieur de chaque élément fini, les variables du champ (champ de déplacement ou champ de pression, par exemple) sont définies de manière unique par les valeurs qu'elles prennent aux noeuds de l'élément, la définition étant assurée à l'aide de fonctions d'interpolation. Cette annexe présente les fonctions d'interpolation utilisées dans les éléments du code ATILA, ainsi que la formulation des différents tenseurs qui en découle.

Si on considère, dans un premier temps, un élément triangulaire dont les trois sommets sont les trois noeuds et si on note U_1^e , U_2^e et U_3^e les valeurs nodales du champ de déplacement sur ces trois noeuds, il est possible d'exprimer la valeur du champ u par une interpolation linéaire:

$$u = \sum_{i=1}^3 [N_i^e] U_i^e, \quad (\text{A.1.1})$$

où la matrice $[N_i^e]$ correspond aux *fonctions d'interpolation* ou de *pondération*, représentées à la figure A.1.2. Ces fonctions sont des

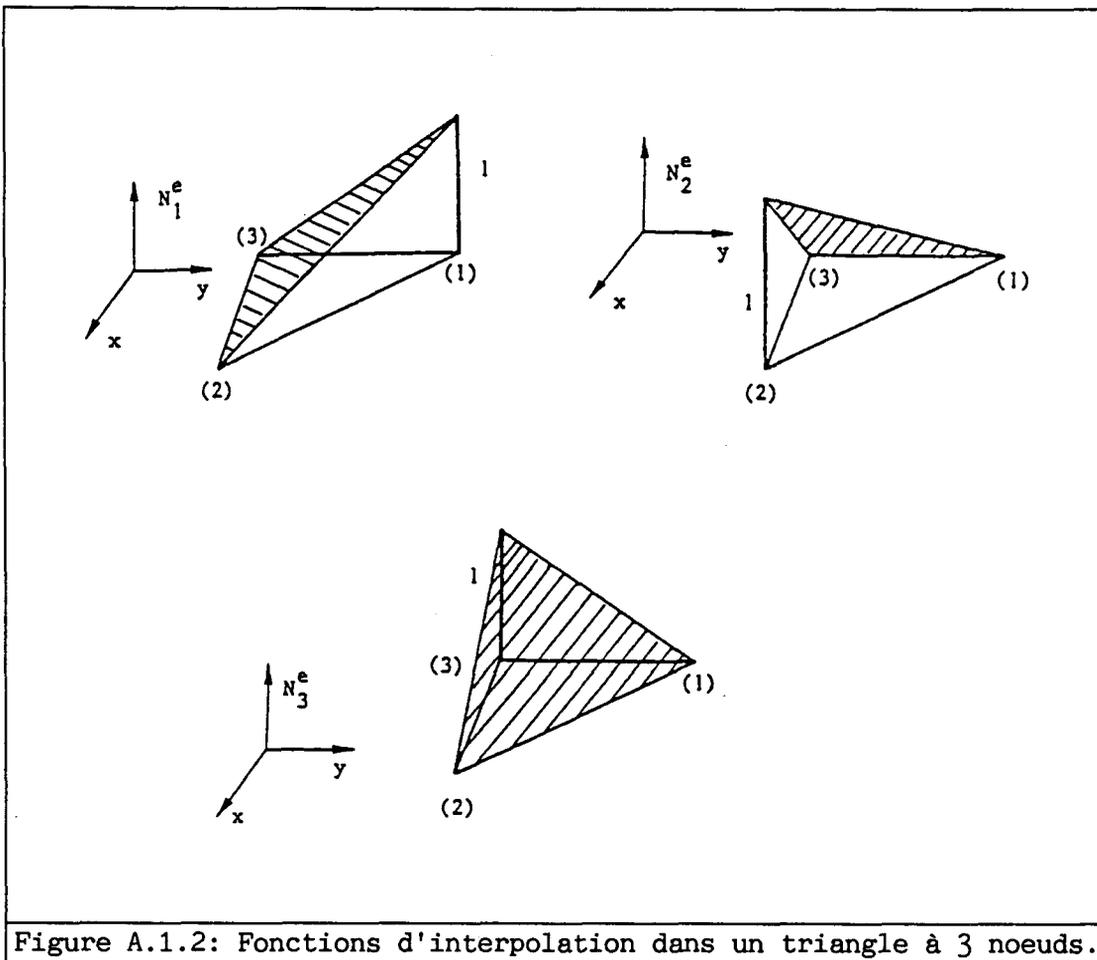


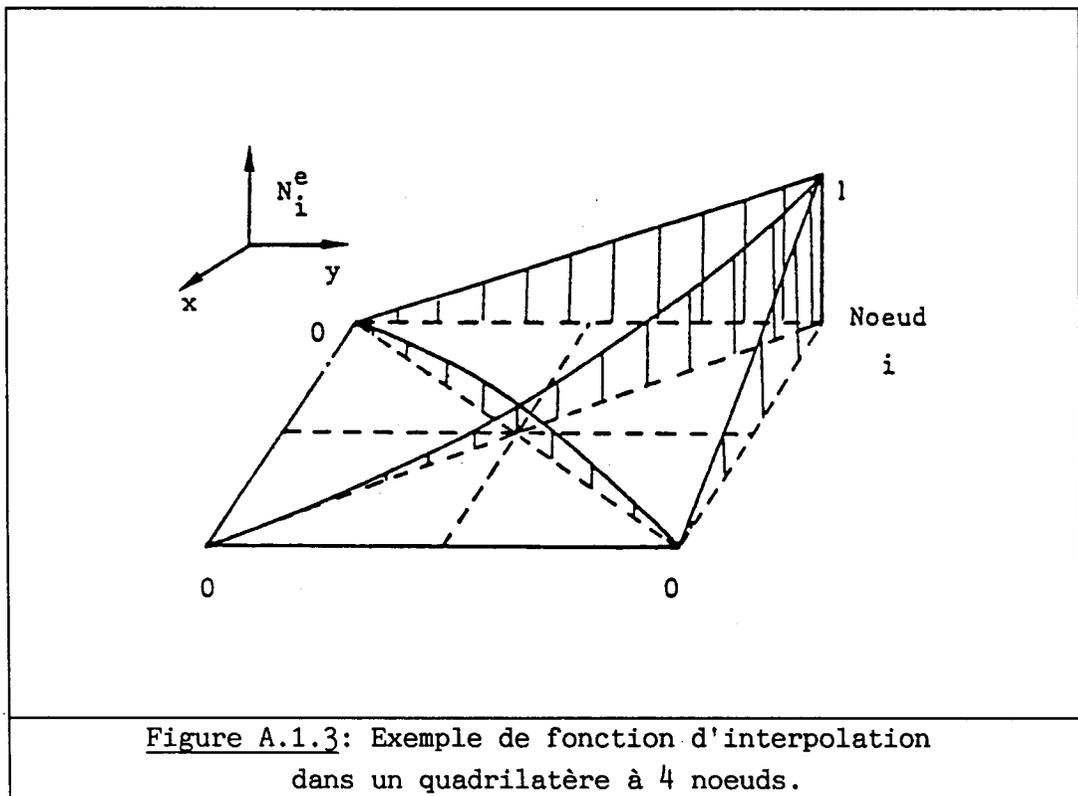
Figure A.1.2: Fonctions d'interpolation dans un triangle à 3 noeuds.

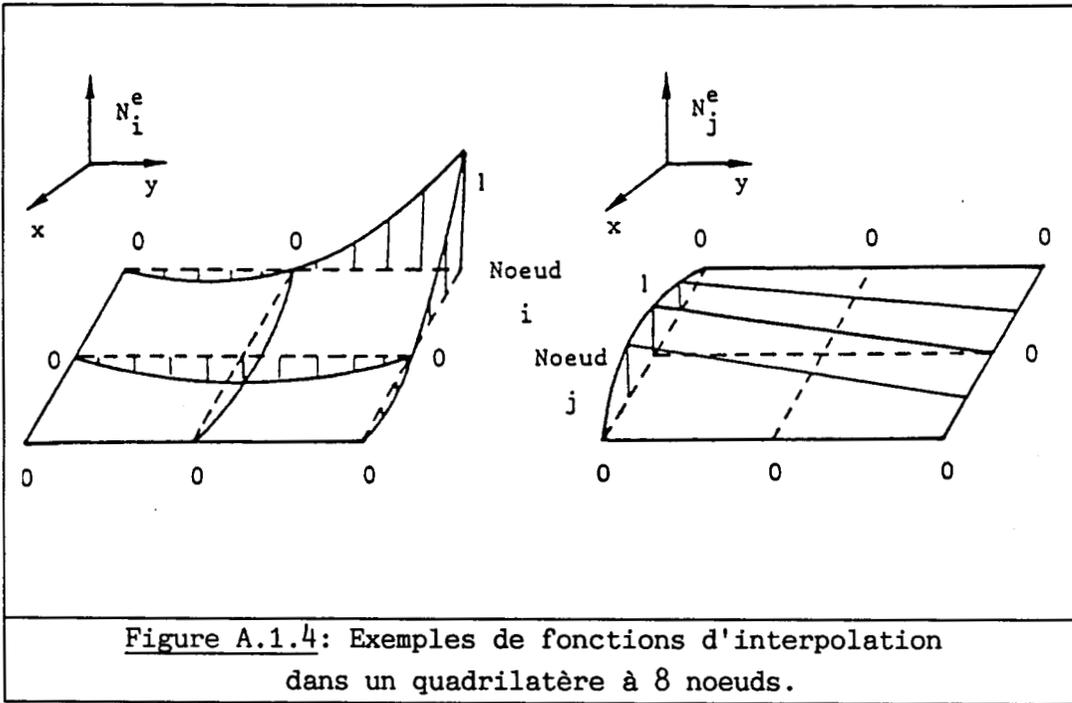
polynômes en x et y dont les neuf coefficients constants (3×3) sont définis par les relations:

$$\begin{aligned} N_i^e(x_j, y_j) &= 1 \quad \text{si } i = j \\ &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

où les indices i et j varient de 1 à 3.

Si on considère alors un élément quadrilatère dont les quatre coins sont les noeuds, les relations précédentes restent valables, à condition de faire varier les indices i et j de 1 à 4. Les fonctions d'interpolation restent linéaires sur les côtés de l'élément mais deviennent quadratiques à l'intérieur (figure A.1.3). Pour un élément quadrilatère dont les quatre coins et les milieux des quatre côtés sont les huit noeuds, les relations précédentes restent valables en faisant varier les indices i et j de 1 à 8. Cette fois, les fonctions d'interpolation deviennent quadratiques sur les côtés (figure A.1.4). Cette procédure de construction est évidemment généralisable à des interpolations d'ordre plus élevé ou à des éléments tridimensionnels, et se trouve présentée en détail dans le livre de O.C. ZIENKIEWICZ [32].





Notant p le nombre de noeuds de l'élément e , on peut alors écrire, sous forme matricielle:

$$\underline{u} = [N^e] \underline{U}^e, \quad (\text{A.1.3})$$

où:

$$\underline{U}^e = \begin{bmatrix} U_1^e \\ \vdots \\ U_p^e \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1.4})$$

et:

$$[N^e] = \left[[N_1^e] \dots [N_p^e] \right]. \quad (\text{A.1.5})$$

Les $p \times p$ coefficients des polynômes d'interpolation sont définis comme dans le cas d'un élément à trois noeuds, cité ci-dessus. Le champ de déformation s'obtient directement en dérivant les composantes de \underline{u} sous la forme:

$$\underline{\xi} = [B^e] \underline{u}, \quad (\text{A.1.6})$$

avec:

$$[B^e] = \left[[B_1^e], [B_2^e], \dots, [B_p^e] \right], \quad (\text{A.1.7})$$

et:

$$[B_i^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial z} & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1.8})$$

Dès lors, le tenseur des contraintes est donné par:

$$\underline{T} = [c] [B^e] \underline{u}, \quad (\text{A.1.9})$$

où $[c]$ est le tenseur de rigidité condensé.

Pour effectuer un calcul par éléments finis, il faut construire les matrices ou les vecteurs définissant les propriétés des éléments, tels que la matrice de rigidité ou le vecteur des valeurs nodales de la force appliquée, dont les composantes sont écrites sous forme d'intégrales. Ces intégrales sont toujours calculées dans le repère global. Pour travailler en coordonnées réduites, les variables et le domaine sur lequel l'intégration est effectuée, sont transformés par changement de variable. La procédure classique fait intervenir le jacobien du changement de variable. Le problème de la détermination des propriétés des éléments est maintenant ramené au calcul d'intégrales sur des éléments simples et non pas sur des éléments courbes. Si, les bornes d'intégration sont devenues simples, il n'en est pas de même pour l'expression à intégrer: il faut avoir recours à l'intégration numérique. La méthode retenue est la quadrature de Gauss, dans laquelle les points pour lesquels la fonction à intégrer doit être calculée sont définis par des tables, donnant, pour chaque type de domaine d'intégration (rectangulaire, prismatique, triangulaire...), la position des points d'intégration, déterminée de manière à obtenir la précision maximale, ainsi que les coefficients de pondération utilisés.

ANNEXE 2

ALGORITHME DE RESOLUTION ADAPTE AU STOCKAGE PAR COLONNES ACTIVES.

Pour résoudre les systèmes d'équations linéaires dans le cas de matrices non pleines, il est nécessaire de réduire le nombre de coefficients à mémoriser et le travail de programmation en ne sauvegardant que les termes utiles, colonne par colonne. Le stockage minimum requis pour la phase de résolution est constitué d'une série de colonnes contenant chacune tous les termes à partir du terme de la diagonale jusqu'au premier terme non nul.

Soit un système d'équations linéaires non symétrique de la forme:

$$[K] X = Y$$

la résolution consiste, dans un premier temps, à factoriser la matrice [K] sous la forme :

$$[K] = [L] [D] [W]$$

où [D] est une matrice diagonale, [L] est une matrice triangulaire inférieure et [W] est une matrice triangulaire supérieure. La factorisation s'effectue à l'aide de l'algorithme suivant :

$j = 2, \dots, n$

$i = m_j, \dots, j-1$

$$k_{i,j} = k_{i,j} - \sum_{r=m_m}^{i-1} k_{i,r} k_{r,j}$$

$$k_{j,i} = k_{j,i} - \sum_{r=m_m}^{i-1} k_{j,r} k_{r,i}$$

$$k_{j,i} = \frac{k_{j,i}}{k_{i,i}}$$

$$k_{j,j} = k_{j,j} - \sum_{r=m_j}^{j-1} k_{j,r} k_{r,j}$$

où m_j est le numéro de la ligne du premier coefficient non nul de la colonne j et $m_m = \max(m_1, m_j)$. Après factorisation, la solution X peut être obtenue à partir du chargement Y de la manière suivante :

$$X_1 = Y_1$$

$i = 2, \dots, n$

$$X_i = Y_i - \sum_{j=1}^{i-1} k_{i,j} X_j$$

$$X_n = \frac{X_n}{k_{n,n}}$$

$i = n-1, \dots, 1$

$$X_i = k_{i,i}^{-1} \left(X_i - \sum_{j=i+1}^n k_{i,j} X_j \right)$$

ANNEXE 3

DETERMINATION DES COEFFICIENTS c_n EN

FONCTION DES VALEURS NODALES DES PRESSIONS.

Cette annexe présente de façon détaillée l'expression des coefficients c_n utilisés dans le développement en série de Fourier pour les structures périodiques présentant une simple périodicité. Leur connaissance renseigne sur les contributions de chaque onde, progressive ou évanescente. Ces coefficients sont mis en évidence dans les équations (II.91) et (II.92), dans le cas de la ligne frontière (+):

$$c_n = \left[\sum_e \frac{1}{2d} \int_{S_e^+} e^{-j\left(\frac{n\pi}{d} + k\sin\theta\right)x} \left\{ N_e^+ \right\}^T \underline{P}_e^+ dx \right], \quad (\text{A.3.1})$$

où \underline{P}_e^+ est le vecteur des valeurs nodales de la pression sur l'élément S_e^+ . $\left\{ N_e^+ \right\}^T$ est le vecteur des fonctions de forme, associées à la trace de l'élément fini S_e^+ dans le plan xOy . L'intégration s'effectue par rapport à la seule variable x .

Notant i le numéro de l'élément dont les coordonnées sont comprises entre x_i et x_{i+1} , et P_{-1}^i , P_0^i et P_{+1}^i les pressions nodales respectivement à gauche, au centre et à droite de l'élément i situé sur la ligne frontière (+), le produit $\left\{ N_i^+ \right\}^T \underline{P}_i^+$ peut s'écrire:

$$\left\{ N_i^+ \right\}^T \underline{P}_i^+ = \frac{\xi(\xi-1)}{2} P_{-1}^i + (1-\xi^2) P_0^i + \frac{\xi(\xi+1)}{2} P_{+1}^i, \quad (\text{A.3.2})$$

où:

$$\chi = \xi \frac{x_{i+1} - x_i}{2} + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \quad (\text{A.3.3})$$

où ξ varie de -1 à +1 pour couvrir l'élément de surface S_i^+ . ξ est la coordonnée réduite correspondant à la coordonnée globale x . L'intégration, décomposée selon tous les éléments de la ligne (+) et moyennant le

changement de variable pour passer de x à ξ , est aisée et on obtient:

$$c_n = \sum_{i=1}^{N\text{elts}} \left(\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2d} \right) e^{-j \left(\frac{n\pi}{d} + k \sin \theta \right) \left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} \right)} \left\{ \alpha_{-1}^i P_{-1}^i + \alpha_0^i P_0^i + \alpha_{+1}^i P_{+1}^i \right\} \right) \quad (\text{A.3.4})$$

avec :

$$\alpha_{-1}^i = \left(\frac{\sin q}{q} + \frac{2 \cos q}{q^2} - \frac{2 \sin q}{q^3} \right) + j \left(\frac{\sin q}{q^2} - \frac{\cos q}{q} \right),$$

$$\alpha_0^i = \left(\frac{4 \sin q}{q^3} - \frac{4 \cos q}{q^2} \right),$$

$$\alpha_{+1}^i = \left(\frac{\sin q}{q} + \frac{2 \cos q}{q^2} - \frac{2 \sin q}{q^3} \right) + j \left(\frac{\cos q}{q} - \frac{\sin q}{q^2} \right),$$

$$\text{et } q = \left(\frac{n\pi}{d} + k \sin \theta \right) \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right). \quad (\text{A.3.5})$$

La relation $P_{+1}^i = P_{-1}^{i+1}$ est nécessairement vérifiée.

Cas d'une période double.

Dans le cas de mailles élémentaires présentant une double période, traité dans la section III.1.2, une onde progressive supplémentaire, qui n'a pas lieu physiquement d'exister, pourrait être trouvée numériquement. Déterminons la contribution de cette onde.

Pour une maille présentant une double période (figure III.5.e), la ligne frontière (+) est décomposée en $2N$ éléments et les c_n sont calculés en décomposant la relation (A.3.4) sous la forme d'une somme de deux termes: pour i variant tout d'abord de 1 à N , puis pour i variant de $N+1$ à $2N$. Le maillage étant tel que les éléments i et $i+N$ soient identiques, on a les relations suivantes:

* q pour l'élément i est égal à q pour l'élément $i+N$,

* $\alpha_h^i = \alpha_h^{i+N}$ pour $h = -1, 0$ ou $+1$ et pour $i \leq N$,

* $P_h^i = P_h^{i+N}$ pour $h = -1, 0$ ou $+1$ et pour $i \leq N$,

$$* \frac{x_{N+i+1} - x_{N+i}}{2d} = \frac{x_{i+1} - x_i}{2d},$$

$$* \frac{x_{N+i+1} + x_{N+i}}{2} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} + d.$$

Pour $n = 1$, correspondant à la première onde progressive, le déphasage, introduit par l'exponentielle, vaut -1 . En regroupant chacun des termes des éléments i et $i+N$, c'est à dire séparés de d , on obtient $c_{\pm 1} = 0$. Cette onde progressive a donc une amplitude nulle. Ainsi, une seule onde, correspondant à c_0 , se propage dans la même direction que l'onde incidente.

ANNEXE 4

ANALYSE SIMPLE DE L'EFFET DE LA PRISE EN COMPTE

DES PERTES SUR LE CHAMP DE DEPLACEMENT.

Comparés aux champs de déplacement des modes propres de la structure diffractante dans l'air, les champs de déplacement de la structure dans le réseau immergé, obtenus par la méthode des éléments finis pour les fréquences associées à de grandes pertes d'insertion, permettent une interprétation physique simple. Cependant, lorsque les pertes dans le matériau sont prises en compte, dans l'étude des ondes de Lamb ou de réseaux de cylindres circulaires par exemple, l'identification des modes semble plus difficile. Afin de noter l'influence des pertes sur le champ de déplacement, un exemple simple est présenté.

Cette annexe présente l'analyse dans l'air d'un barreau de section carrée, dans lequel sont incorporées des pertes. Le barreau, de longueur ℓ , d'épaisseur e , de densité ρ , de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν , est sollicité à une extrémité par une force harmonique F , uniformément répartie. L'autre extrémité est libre. L'équation du mouvement, relatif au déplacement dans la direction x , est:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}. \quad (\text{A.4.1})$$

Otant la dépendance temporelle et notant que la contrainte est nulle à l'extrémité libre du barreau, le déplacement u_x s'écrit alors:

$$u_x = \frac{A}{\cos k\ell} \cos\{k(x-\ell)\} \text{ avec } k = \sqrt{\frac{\rho}{E}}. \quad (\text{A.4.2})$$

Faire intervenir la force appliquée conduit à:

$$u_x = \frac{F}{e^2 E k} \frac{1}{\sin k\ell} \cos\{k(x-\ell)\}. \quad (\text{A.4.3})$$

Connaissant le coefficient de Poisson, le déplacement dans la direction y

se déduit de:

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\nu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (\text{A.4.4})$$

d'où:

$$u_y = \frac{\nu F y}{e^2 E} \frac{1}{\sin k\ell} \sin\{k(x-\ell)\}. \quad (\text{A.4.5})$$

La technique classique est de prendre en compte les pertes dans les matériaux en considérant un module d'Young complexe. Ainsi, les équations précédentes permettent encore de déterminer le champ de déplacement du barreau. Le fait d'introduire des pertes conduit non plus à des fonctions sinus et cosinus simples pour u_x et pour u_y mais à une combinaison de fonctions sinus, cosinus, sinus et cosinus hyperboliques. Les composantes du déplacement comportent aussi une partie imaginaire non nulle. La figure A.4.1 présente les parties réelle et imaginaire du champ de déplacement du barreau, en PVC, pour 0%, 40% et 80% de pertes dans le matériau. Avec les pertes dans le matériau, le module du déplacement en tous les points diminue et la phase devient non nulle. Cet exemple montre qu'il devient difficile d'identifier précisément le mode de vibration du barreau avec pertes, difficulté qui se retrouve à l'évidence pour les réseaux périodiques.

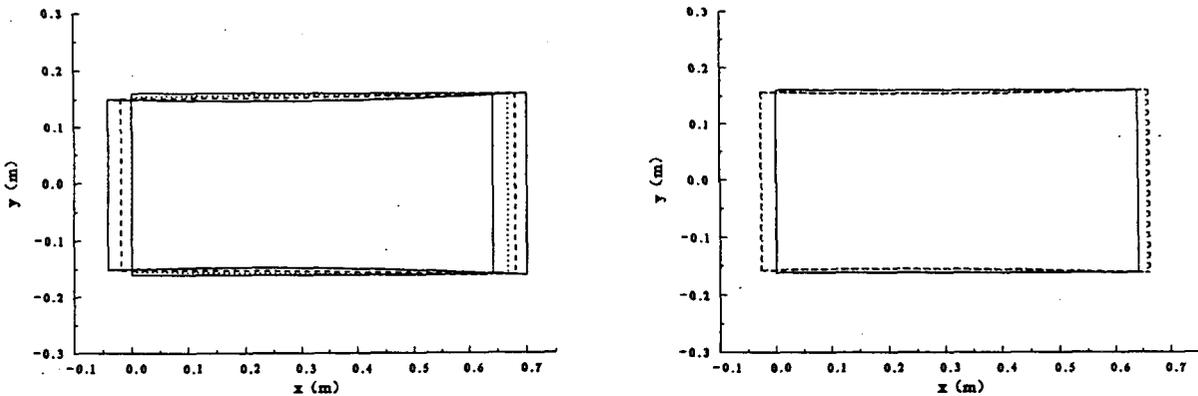


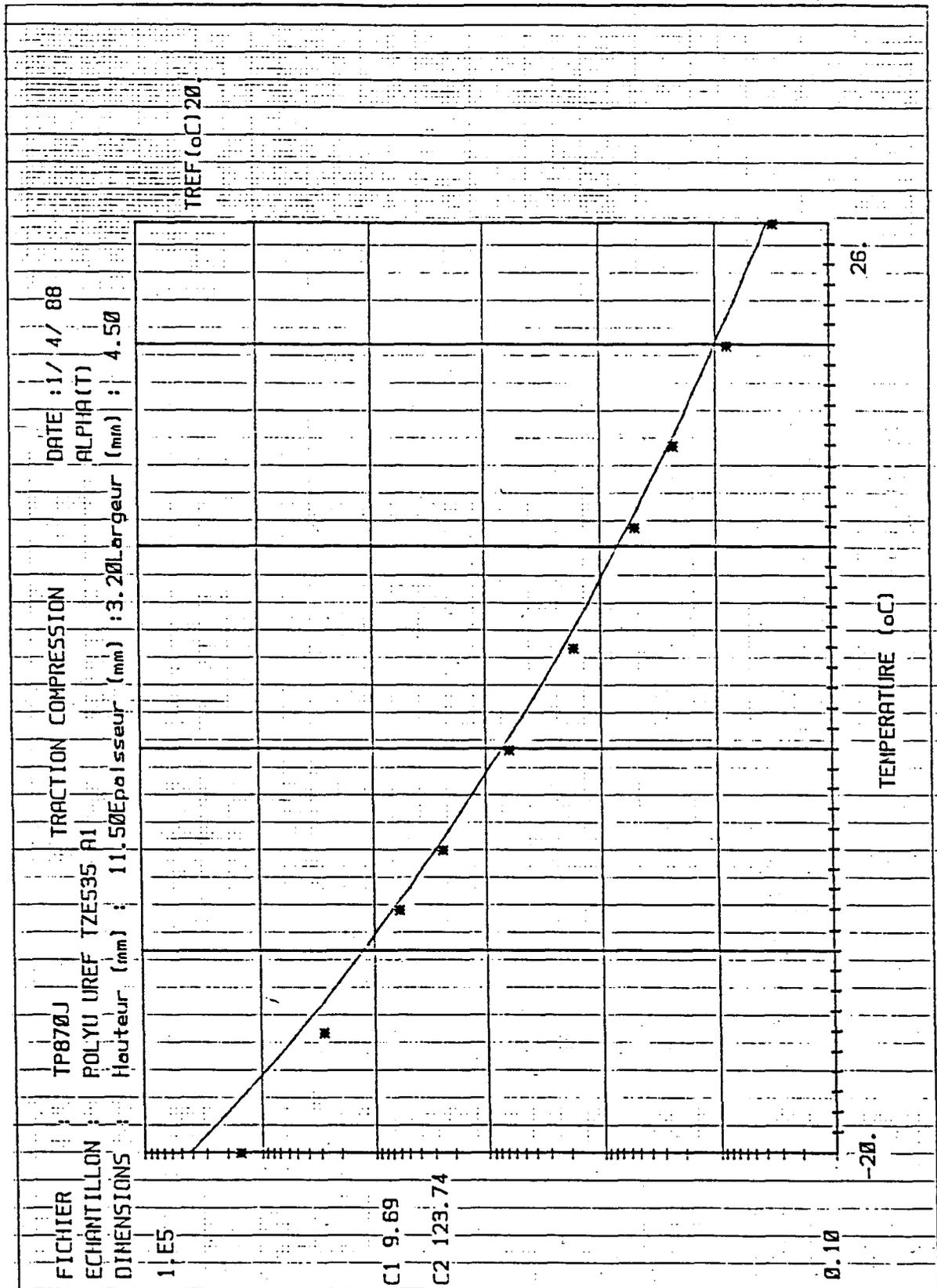
Figure A.4.1: Parties réelle et imaginaire du champ de déplacement du barreau avec pertes.

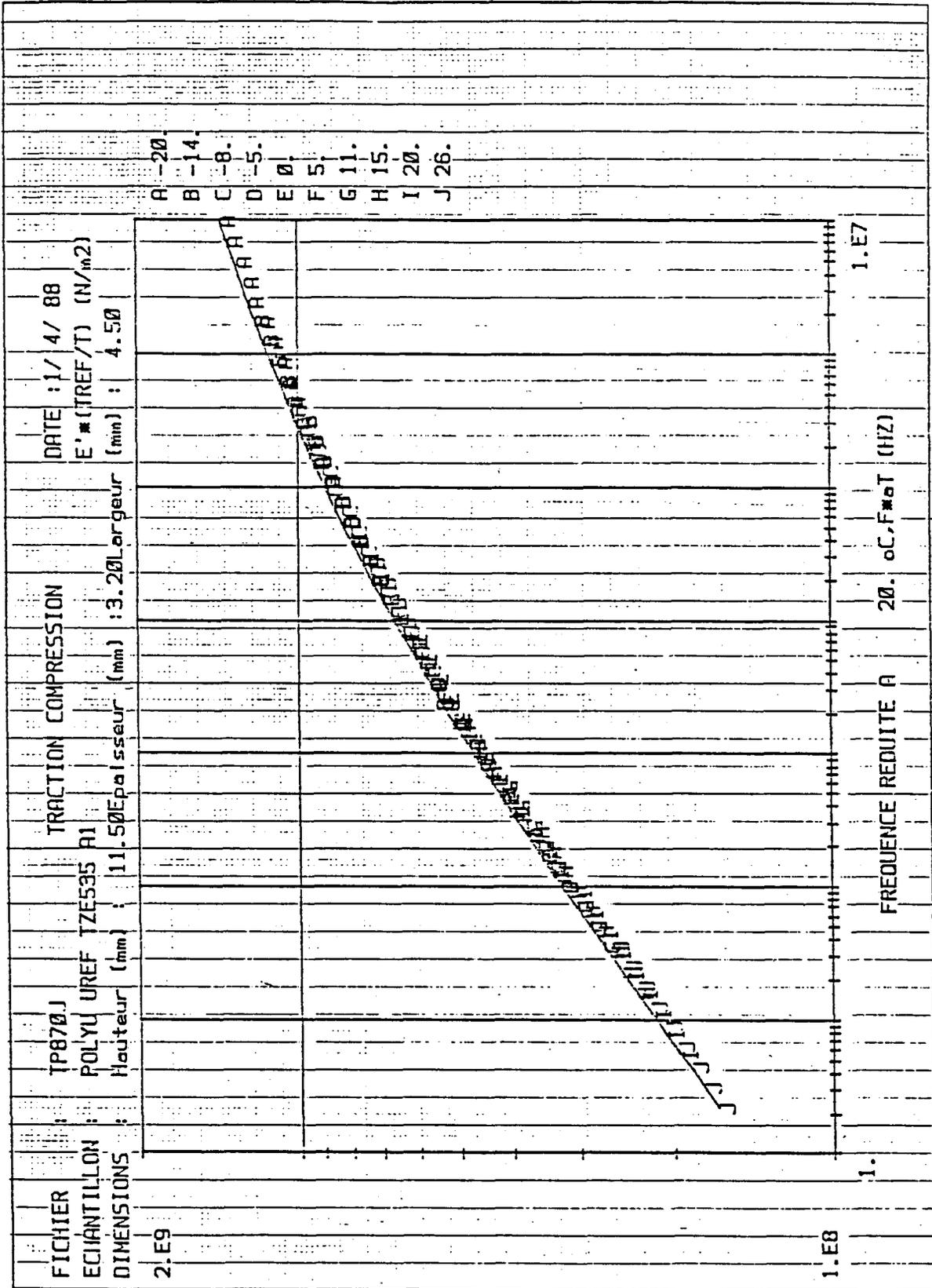
Trait plein: 0%, trait tiré: 40%, trait pointillé: 80%.

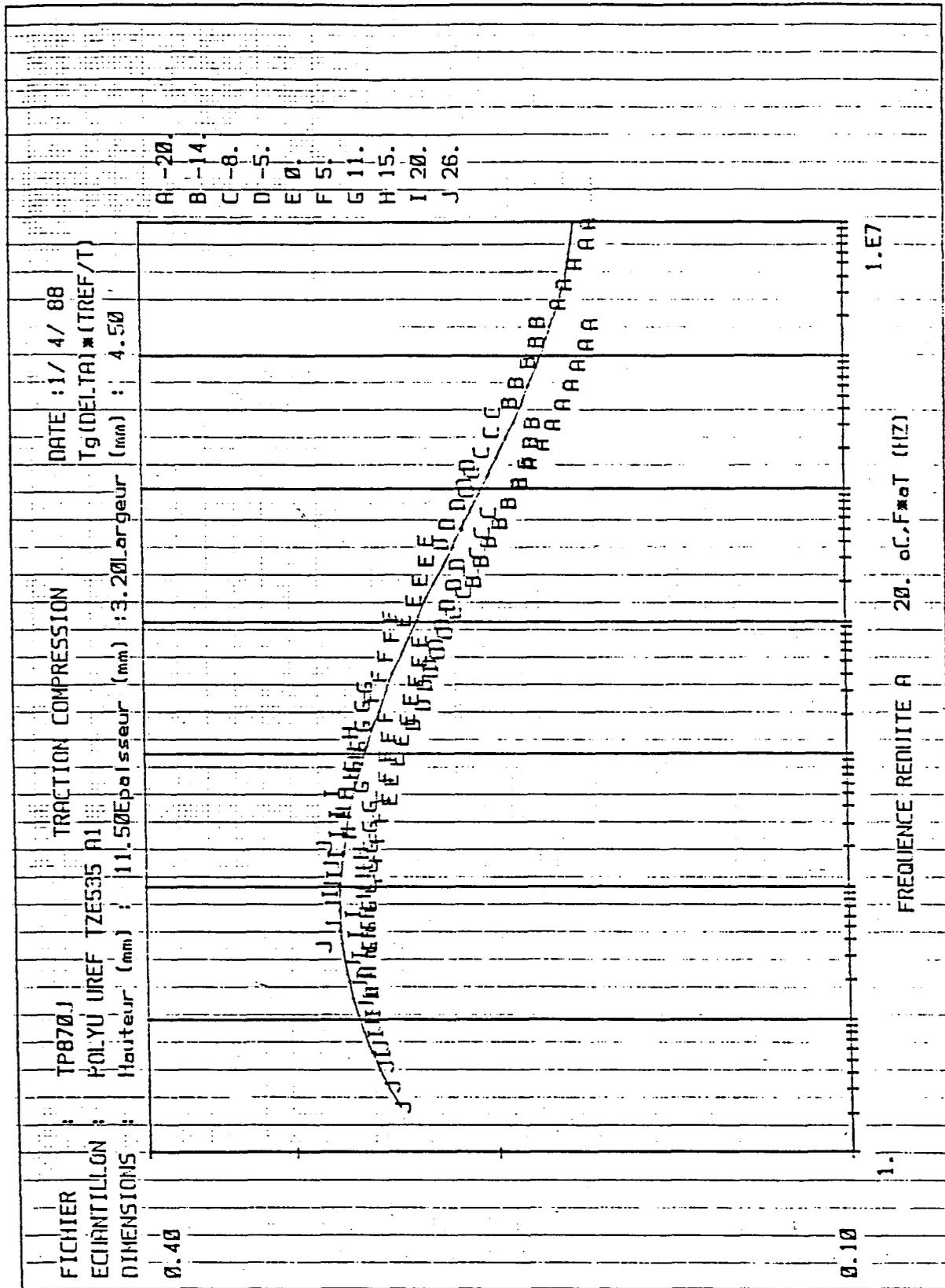
ANNEXE 5

CARACTERISTIQUES DU MATERIAU D'ENROBAGE

DES CYLINDRES CIRCULAIRES: UREFLEX TZE 535.







ANNEXE 6

CARACTERISTIQUES DU MATERIAU DU PANNEAU

DE TYPE ALBERICH: POLYURETHANE UR 267.

DATE: 18/06/86

REF.: UR267

Tref: 20.0C

EXCITATION

Tension/Compression

Stat. Strain: 0.E+000

Dyn. Strain : 7.E-005

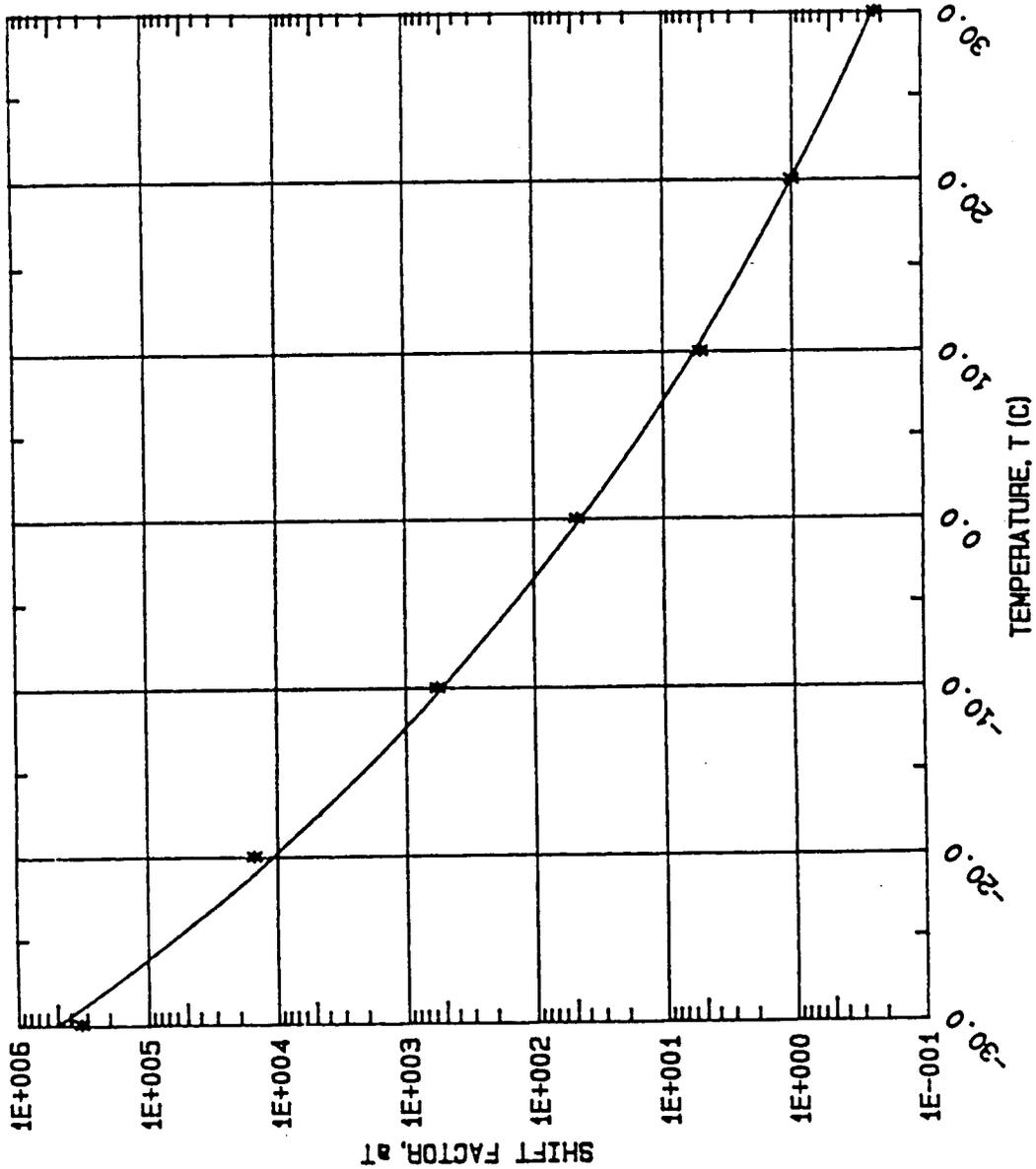
SAMPLE

Height: 14.0mm

Width: 5.0mm

Length: 5.2mm

Metravib



REF: UR267

DATE: 18/06/86

SAMPLE

Height: 14.0mm

Width: 5.0mm

Length: 5.2mm

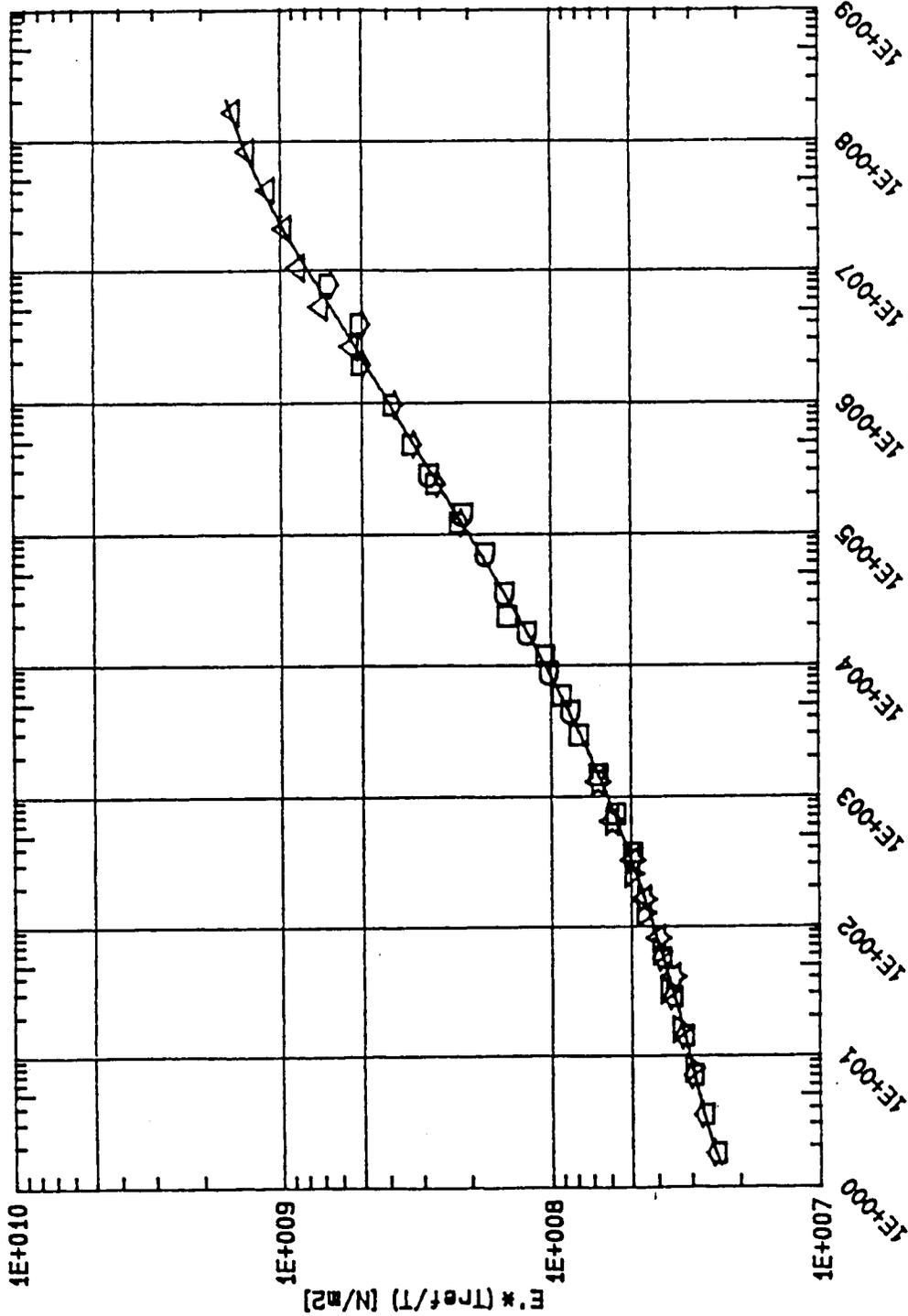
EXCITATION

Tension/Compression

Stat. Strain: 0.0E+000

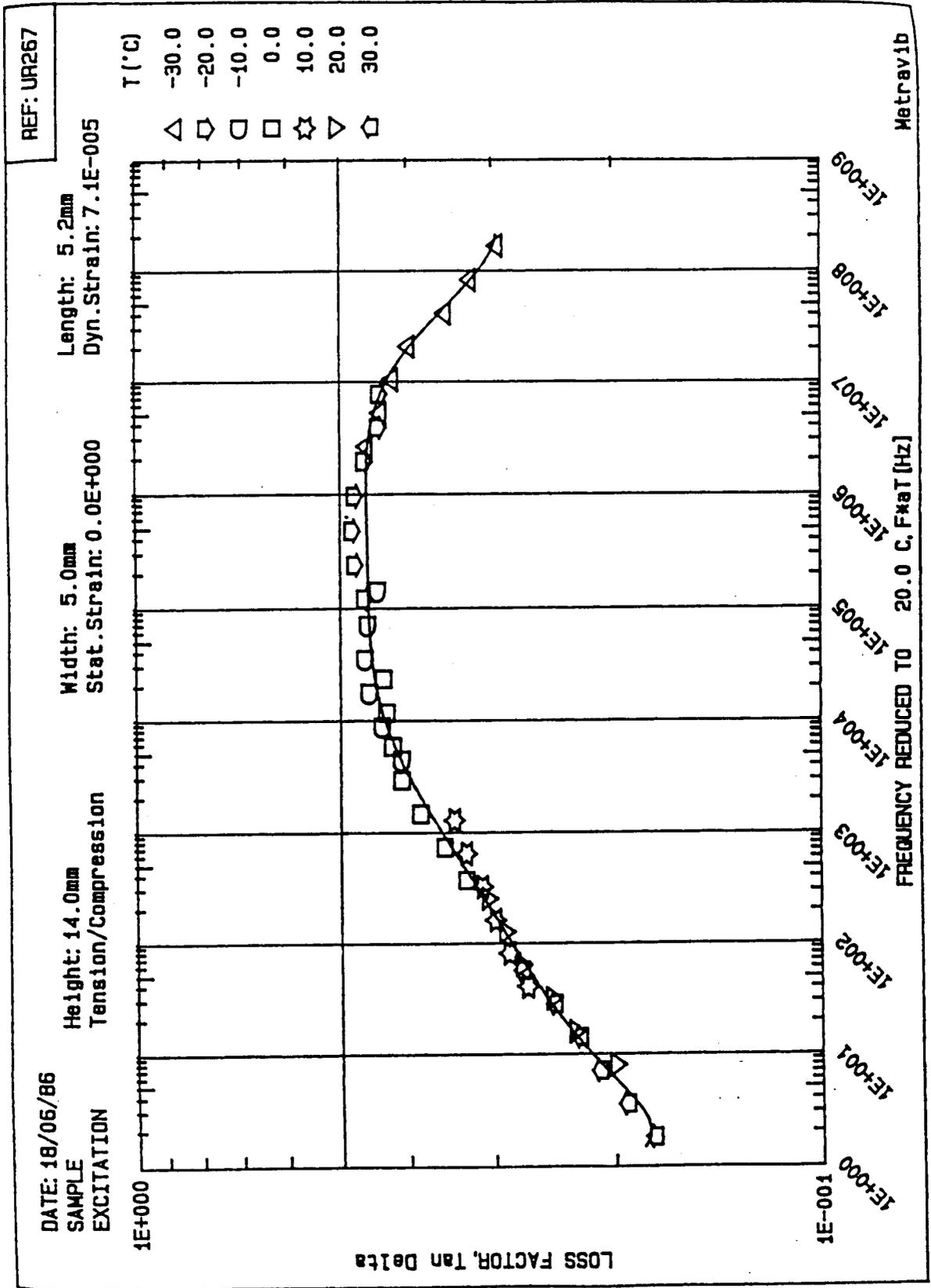
Dyn. Strain: 7.1E-005

T (°C)
 △ -30.0
 ◻ -20.0
 ◻ -10.0
 ◻ 0.0
 ☆ 10.0
 ▽ 20.0
 ◻ 30.0



Metrav1b

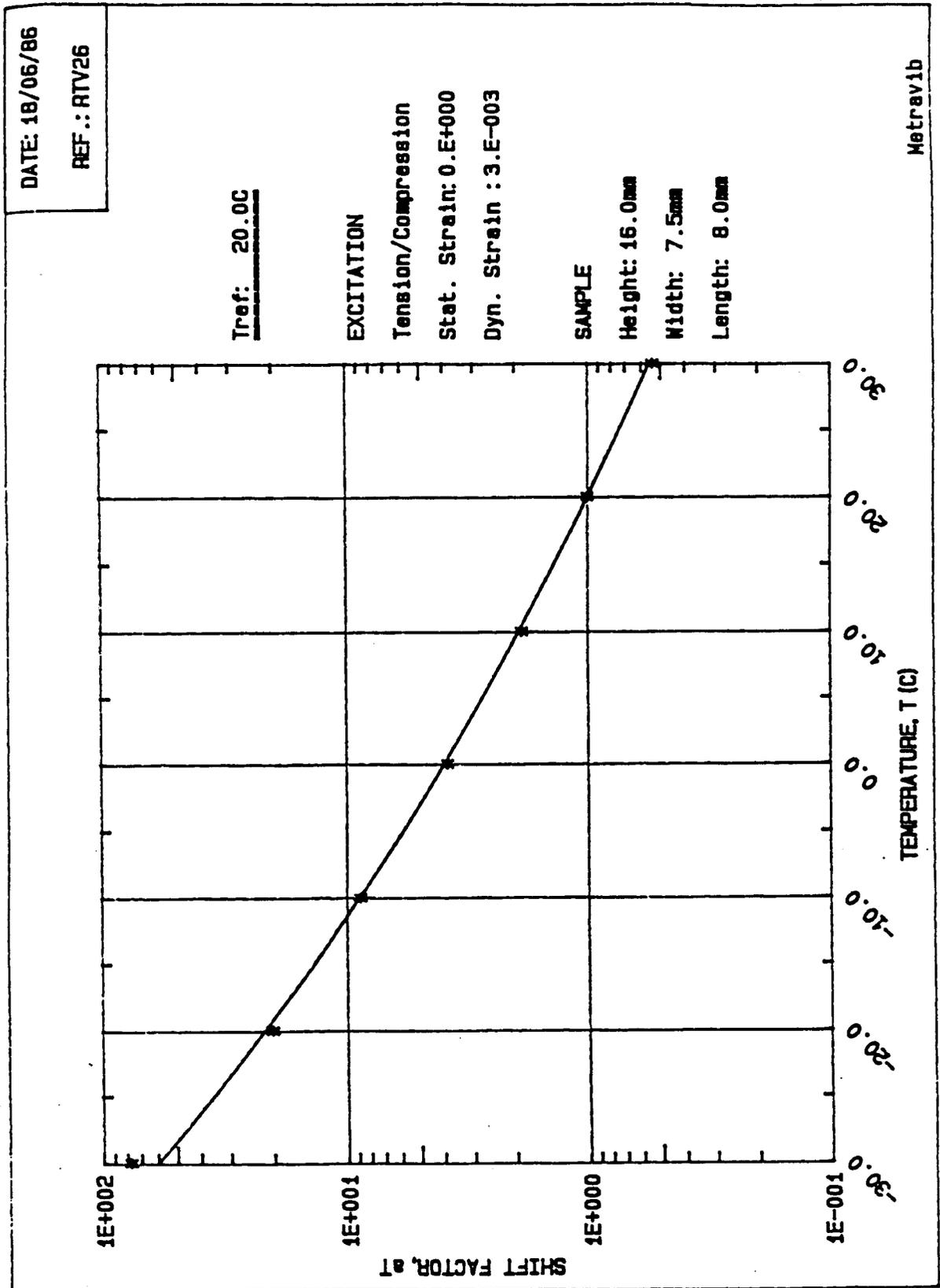
FREQUENCY REDUCED TO 20.0 C, F*₂₀T [Hz]



ANNEXE 7

CARACTERISTIQUES DU MATERIAU DU PANNEAU

DE TYPE ALBERICH: RESINE SILICONE RTV 261.



DATE: 18/06/86

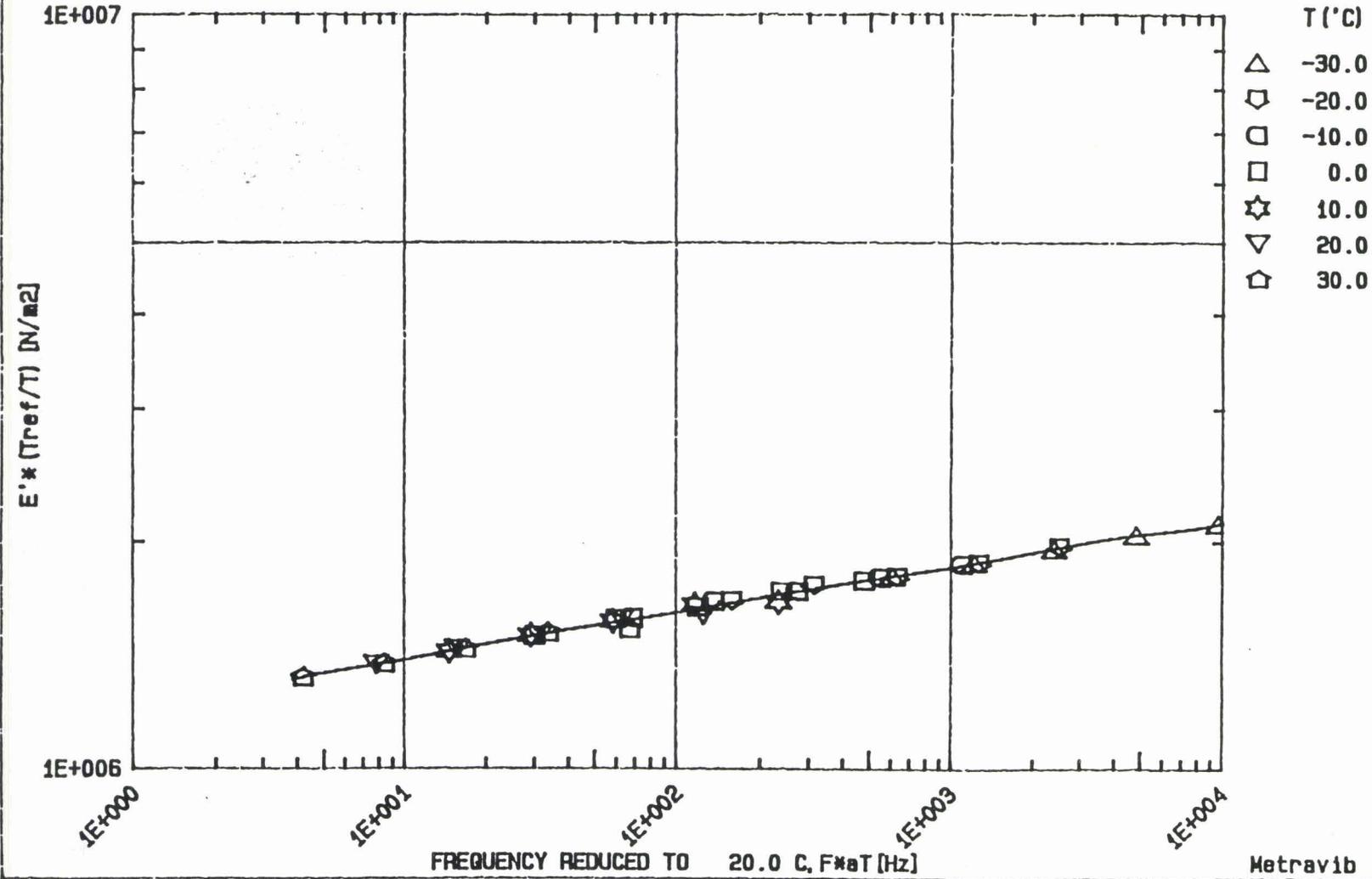
REF: RTV26

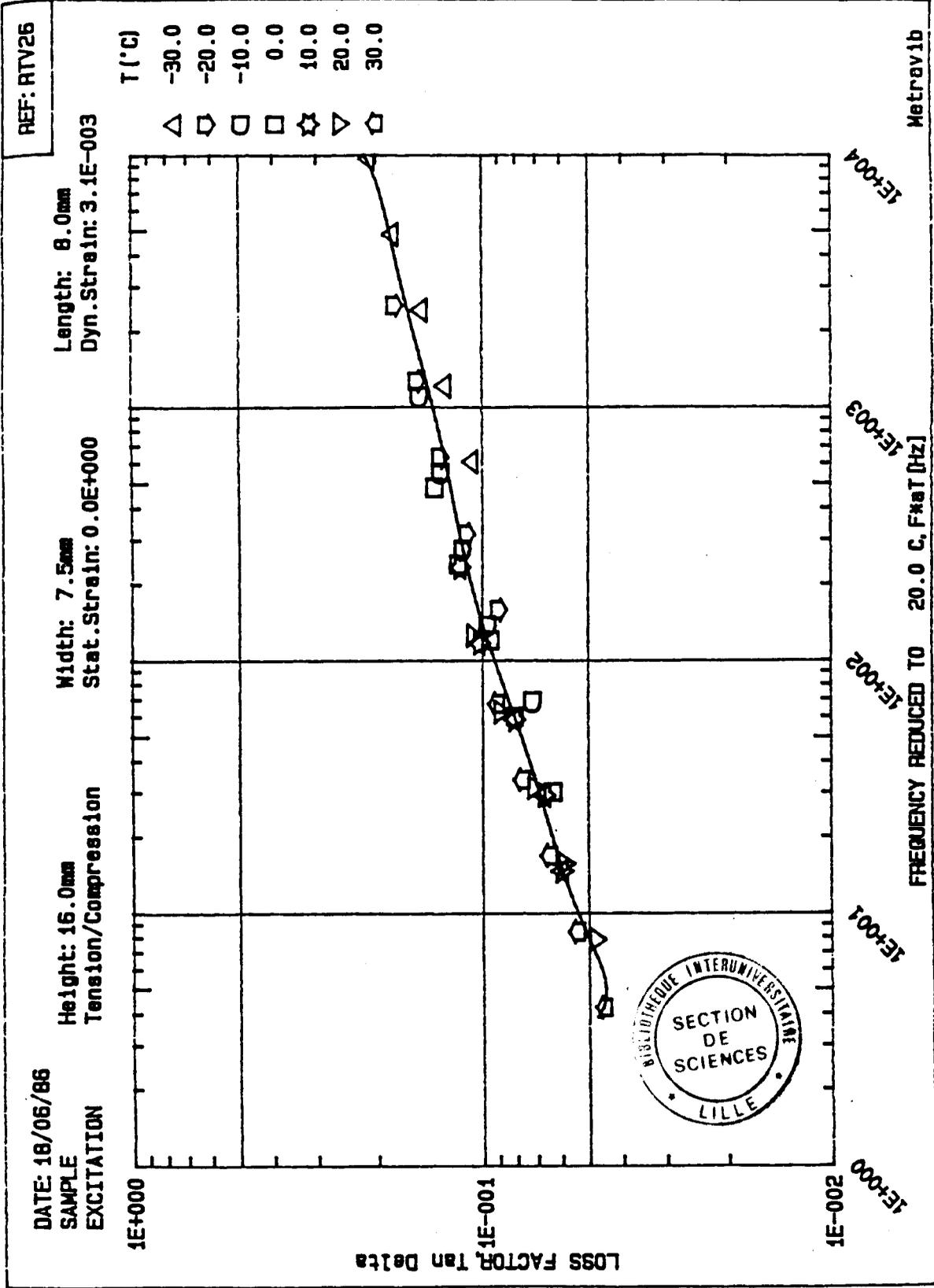
SAMPLE
EXCITATION

Height: 16.0mm
Tension/Compression

Width: 7.5mm
Stat. Strain: 0.0E+000

Length: 8.0mm
Dyn. Strain: 3.1E-003





Résumé de thèse

La diffraction d'une onde acoustique plane par un réseau d'obstacles périodiques est susceptible de nombreuses applications, notamment en acoustique sous-marine. De tels réseaux peuvent en effet se comporter comme des écrans réflecteurs ou absorbeurs efficaces dans de larges bandes de fréquence. Ils sont alors utilisés, par exemple, pour accroître la directivité ou le niveau d'une antenne d'émission, pour isoler une antenne de réception d'une source de bruit ou pour conférer à une structure des propriétés d'anéchoïcité.

Cette thèse concerne la modélisation de structures périodiques à une ou deux dimensions par la méthode des éléments finis, à l'aide du code ATILA. Les développements théoriques spécifiques nécessaires à la description de ces réseaux sont tout d'abord présentés pour le cas de la périodicité à une dimension, le domaine d'étude étant alors bidimensionnel. Plusieurs exemples sont traités et les résultats obtenus par éléments finis sont comparés avec succès à des résultats de modèles analytiques antérieurs ou à des mesures. Puis, suivant la même démarche, la technique développée est appliquée aux structures périodiques à deux dimensions, le domaine d'étude étant alors tridimensionnel. Plusieurs exemples spécifiques montrent alors la souplesse et la fiabilité de l'approche éléments finis pour décrire le comportement de telles structures. Enfin, l'ensemble des résultats conduit à proposer une extension de la méthode à l'étude de réseaux comportant des matériaux actifs ou à des réseaux dont la périodicité est à trois dimensions.

Mots-clés

Acoustique sous-marine
Underwater Acoustics

Structures périodiques
Periodic structures

Méthode des éléments finis
Finite element method

Diffraction acoustique
Acoustic scattering

Réseaux de tubes compliant
Compliant tube gratings

Revêtements anéchoïques
Anechoic layers

