

50376  
1990  
142

69 190

50376  
1990  
142

N° d'ordre : 584

## THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR D'UNIVERSITE**  
spécialité productique

par

**Christophe SUEUR**  
Ingénieur IDN



**CONTRIBUTION A LA MODELISATION ET A L'ANALYSE DES SYSTEMES DYNAMIQUES PAR UNE APPROCHE BOND-GRAPH APPLICATION AUX SYSTEMES POLYARTICULES PLANS A SEGMENTS FLEXIBLES.**

soutenue le 5 octobre 1990 devant le jury d'examen

MM.	P.	BORNE	Président
	A.	FOSSARD	Rapporteur
	S.	SCAVARDA	Rapporteur
	P.	COIFFET	Examineur
Mme	G.	DAUPHIN TANGUY	Examineur
MM.	M.	STAROSWIECKI	Examineur
	J.U.	THOMA	Examineur

Thèse dirigée par Mme G. DAUPHIN TANGUY, Professeur à l'IDN.

*A Amélie, Karine, Maddy.*

## AVANT-PROPOS

Ce travail de recherche a été effectué à l'Unité de Génie Robotique Avancée (UGRA) du Commissariat à l'Energie Atomique d'octobre 1987 à septembre 1990. La confiance de Monsieur G. FRAISE, Chef de l'unité et de Monsieur A. RIWAN, Responsable de la Mécanique au sein de l'unité, a constitué un facteur humain indispensable pour mener à bien ce travail.

Nous tenons à remercier Monsieur J.C. GENTINA, Professeur et Directeur de l'IDN, pour l'attention qu'il a portée à l'évolution de nos travaux et à l'accueil chaleureux qu'il nous a réservé au sein du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'IDN.

Nous sommes très reconnaissants à Madame G. DAUPHIN TANGUY, Professeur à l'IDN, pour nous avoir soutenus tout au long de ces trois années. La liberté de travail dont elle a su nous faire profiter, les remarques judicieuses et sa compétence dans les divers domaines abordés ont été une aide précieuse pour la réussite de nos travaux. Qu'elle trouve ici notre profonde amitié pour la bienveillance et la gentillesse qu'elle nous a toujours témoignées lors de nos longues discussions.

Nous sommes très redevables à Monsieur P. BORNE, Professeur et Directeur du Laboratoire d'Automatique de l'IDN, pour l'enseignement qu'il a su nous dispenser et sa motivation pour la recherche qu'il a su nous faire partager. Nous sommes très honorés qu'il ait accepté de présider notre Jury de thèse et nous l'en remercions.

La compétence de Monsieur A. FOSSARD, Professeur à l'Ecole Supérieure d'Aéronautique de Toulouse, dans divers domaines de l'automatique est reconnue par de nombreux scientifiques. Nous sommes très honorés qu'il ait accepté d'être rapporteur de cette thèse et nous le remercions pour l'intérêt qu'il a porté à nos travaux et les nombreux conseils dont il a su nous faire profiter.

Monsieur S. CAVARDA, Professeur à l'INSA de Lyon, nous a honorés en acceptant d'être rapporteur de cette thèse. Par sa rigueur scientifique et l'intérêt qu'il a porté aux divers sujets abordés, il a contribué à rendre ce rapport plus clair. Qu'il trouve ici notre profonde reconnaissance.

Monsieur le Professeur P. COIFFET a largement contribué au développement de la robotique en France et est en grande partie responsable de l'application des bond-graphs dans ce domaine. Nous sommes très honorés de sa présence parmi le jury.

Monsieur M. STAROSWIECKI, Professeur à l'Université de Lille I, nous a honorés en acceptant de participer au jury de thèse.

Monsieur le Professeur J.U. THOMA est sans doute parmi les bond-graphistes, la figure la plus connue dans le monde. Ses travaux dans divers domaines ont largement contribué à faire des bond-graphs un langage universel de la physique. Nous sommes très honorés qu'il ait accepté de participer au jury de thèse.

Nous sommes reconnaissants au groupe de travail qui s'est constitué autour du projet de Système de Conception de Robots Industriels par Bond-Graphs Technologiques (SCRIBT) de l'UGRA, sans qui une partie importante des travaux n'aurait pu être faite.

Nous adressons aux chercheurs de l'IDN l'expression de notre gratitude pour l'accueil chaleureux qu'ils nous ont réservé à chacune de nos visites.

Nous remercions Madame M. GAILLOT pour le soin qu'elle a porté à la réalisation de ce document.



**CONTRIBUTION A LA MODELISATION ET  
L'ANALYSE DES SYSTEMES DYNAMIQUES  
PAR UNE APPROCHE BOND-GRAPH :  
APPLICATION AUX SYSTEMES  
POLYARTICULES PLANS  
A SEGMENTS FLEXIBLES**

**TABLE des MATIERES**

	Pages
AVANT-PROPOS	i-ii
TABLE DES MATIERES	iii
INTRODUCTION GENERALE	1
 CHAPITRE I : LES SYSTEMES DYNAMIQUES - PRESENTATION DES PRINCIPALES NOTIONS	 5
INTRODUCTION	5
I - REPRESENTATION DES SYSTEMES	6
Introduction	6
I.1 - Les systèmes dynamiques	7
I.2 - Les systèmes linéaires	8
I.2.1 - Représentation	9
a) Modèle d'état	9
b) Fonction de transfert	9
I.2.2 - Propriétés	11
a) Stabilité	11
b) Commandabilité	12
c) Observabilité	13
d) Indices de commandabilité/observabilité	14

I.2.3 - Réalisation minimale - Décomposition de Kalman.	14
II - PROPRIETES STRUCTURELLES DES SYSTEMES DYNAMIQUES LINAIRES	17
Introduction	17
II.1 - Structure d'un système linéaire	18
II.2 - Graphe et matrice de structure	19
II.3 - Commandabilité/Observabilité structurelle	20
II.4 - Indices de Commandabilité/Observabilité structurelles	22
Conclusion	23
III - METHODES DE SIMPLIFICATION DE MODELE	23
Introduction	23
III.1 - Classification des problèmes - applications	24
III.2 - Systèmes à deux échelles de temps	25
III.2.1 - Mise en évidence des dynamiques	26
a) Bloc-diagonalisation des systèmes continus linéaires	26
b) Permutation et conditionnement	28
III.2.2 - Classification des méthodes de simplification	29
a) Présentation succincte de quelques méthodes	29
b) Méthodes de perturbation	31
III.2.3 - Etude des systèmes singulièrement perturbés	33
A) Systèmes non linéaires	33
a) Systèmes explicites	33
b) Systèmes non explicites	40
B) Systèmes linéaires	44
a) Equations d'état	44
b) Système à fréquences élevées	54
C) Propriétés	57
a) Stabilité	57
b) Commandabilité/Observabilité des systèmes linéaires	58
D) Application à la commande	59
a) Commande par minimisation d'un critère de performance	60
b) Commande par placement de pôles	64

	Pages
III.2.4 - Méthodes de Perturbation appliquées à la	
robotique	64
A) Les manipulateurs à articulations flexibles	65
B) Les manipulateurs à flexibilité distribuée	68
C) Quelques remarques	72
CONCLUSION	73
CHAPITRE II : LE BOND-GRAPH, LE BOND-GRAPH RECIPROQUE, PROPRIETES	
STRUCTURELLES	74
INTRODUCTION	74
I - LE BOND-GRAPH	75
Introduction	75
I.1 - Modélisation par bond-graph	75
I.2 - Mise en équation	76
a) Equation d'état	76
b) Equation différentielle du second ordre	79
c) Equation de phase	80
II - LE BOND-GRAPH RECIPROQUE	80
Introduction	80
II.1 - Bond-graph réciproque d'un système linéaire	81
a) définition des nouvelles variables	81
b) propriétés	83
II.2 - Mise en équation	84
II.3 - Généralisation aux systèmes non linéaires	87
a) Non linéarité de la structure de jonction	87
b) Non linéarité des relations constitutives	88
III - PROPRIETES STRUCTURELLES DES SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES	
MODELISES PAR BOND-GRAPH	89
Introduction	89
III.1 - Quelques remarques	90
III.2 - Rang structurel de la matrice d'état	92
a) Définition du rang structurel	92
b) Rang structurel de A	93

	Pages
III.3 - Stabilité asymptotique	95
III.4 - Commandabilité/Observabilité structurelle	95
a) Propriétés dans l'espace d'état	96
b) Exemple	98
c) Décomposition de l'espace d'état	100
d) Commandabilité structurelle en sortie	110
 CONCLUSION	 113
 ANNEXES	 114
 <b>CHAPITRE III : APPLICATION DES METHODES DE DECOUPLAGE ET DE REDUCTION AUX SYSTEMES LINEAIRES MODELISES PAR BOND-GRAPH</b>	  125
 INTRODUCTION	 125
 I - SYSTEMES AMORTIS	 126
I.1 - Mise en évidence des dynamiques	126
I.2 - Partitionnement du vecteur état	127
I.2.1 - C d'ordres de grandeur différents	127
I.2.2 - R d'ordres de grandeur différents	129
I.2.3 - Cas général	133
I.3 - Partitionnement du bond-graph	134
I.3.1 - Procédures d'obtention directe des bond-graphs rapide et quasi rapide	 134
I.3.2 - Systèmes explicites	135
a) Bond-graph rapide et équation d'état rapide	135
b) Bond-graph lent et équation d'état lente	136
c) Exemple	137
I.3.3 - Systèmes implicites	139
a) Exemple	139
b) Changement structurel de variables	142
I.3.4 - Cas général	144
I.3.5 - Amélioration de la précision des systèmes lent et rapide	 145
a) Amélioration de la précision du système lent	145
b) Amélioration de la précision du système rapide	 149

	Pages
c) Etude de l'équation de sortie corrigée	151
d) Remarques sur les systèmes corrigés	152
e) Exemple	153
I.3.6 - Application à la commande	155
CONCLUSION	156
II - ETUDE DES SYSTEMES PUREMENT OSCILLANTS	157
II.1 - Découplage des modes lents et des modes rapides	158
II.1.1 - Description du problème	158
II.1.2 - Application des perturbations singulières sur les équations du second ordre	160
II.1.3 - Décomposition de l'équation d'état	162
II.1.4 - Interprétation sur le bond-graph	169
a) Bond-graph rapide	169
b) Bond-graph lent	171
II.2 - Amélioration de la précision des modes lents	175
II.2.1 - Etude des équations différentielles du second ordre	175
CONCLUSION	180
ANNEXES	181
CHAPITRE IV : MODELISATION DES SYSTEMES DYNAMIQUES A SEGMENTS FLEXIBLES	193
INTRODUCTION	193
I - ETUDE VIBRATOIRE D'UN SEGMENT FLEXIBLE	194
I.1 - Méthode d'analyse modale	194
I.1.1 - Modèles de dimension infinie	194
I.1.1.1 - Modèle mathématique	194
a) conditions aux limites libre-libre	196
b) conditions aux limites encastré-libre	198
c) conditions aux limites appuyé-appuyé	199
I.1.1.2 - Modèle bond-graph	200

	Pages
I.1.2 - Analyse vibratoire pour les modèles à dimension finie	202
I.1.2.1 - Modèle bond-graph par troncature modale	203
I.1.2.2 - Prise en compte des capacités résiduelles	205
I.1.2.3 - Application des perturbations singulières sur les modèles de dimension infinie	206
a) conditions aux limites homogènes	209
b) conditions aux limites non homogènes	213
I.1.2.4 - Applications des perturbations singulières sur les modèles de dimension finie comportant des corrections statiques	215
a) Conditions aux limites homogènes	215
b) Conditions aux limites non homogènes	218
c) Remarque sur les fréquences propres obtenues	221
I.1.3 - Remarques sur les formes modales	222
I.2 - Méthode des éléments finis	225
I.2.1 - Modèle sans conditions aux limites	225
a) modèle mathématique	225
b) modèle bond-graph	228
I.2.2 - Modèle avec conditions aux limites	229
I.2.3 - Réduction du modèle	230
I.2.3.1 - Conditions aux limites homogènes	230
a) condensation de masse	230
b) perturbations singulières	232
c) système corrigé	235
I.2.3.2 - Conditions aux limites non homogènes	237
I.2.4 - Analyse des nouvelles fonctions d'interpolation	238
I.3 - Exemples	240
I.3.1 - Exemple 1	240
a) Calcul des différentes fréquences propres	241
b) Analyse des formes d'onde	243
I.3.2 - Exemple 2	247
CONCLUSION	252

	Pages
II - MODELES DE SYSTEMES POLYARTICULES FLEXIBLES EN MOUVEMENT PLAN	253
II.1 - Présentation des modèles cinématique et dynamique d'un segment flexible	254
II.2 - Calcul des différents multiportes pour différents champs de déplacement	255
II.2.1 - Expression formelle des champs de déplacement	255
II.2.2 - Analyse modale	256
II.2.3 - Méthode des éléments finis	259
II.3 - Réduction d'ordre du modèle d'un segment flexible en mouvement plan	259
II.3.1 - Réduction modale avant normalisation des matrices	259
a) Réduction du système obtenu par analyse modale	260
b) Réduction du système obtenu par la méthode des éléments finis	262
c) Application sur un segment souple	264
II.3.2 - Introduction du multiport de raideur résiduel	267
a) Approche modale	267
b) Approche éléments finis	269
II.3.3 - Réduction modale après normalisation des matrices	270
II.4 - Application sur un robot expérimental	270
II.4.1 - Présentation du modèle	270
II.4.2 - Calcul des fréquences propres du système	272
II.5 - Application de la méthode des perturbations singulières pour le découplage d'un modèle de robot 2 axes	276
CONCLUSION	283
ANNEXES	284
CONCLUSION GENERALE	303
BIBLIOGRAPHIE	305
RESUME	



## INTRODUCTION GENERALE

Le langage bond-graph est un formalisme réseau pour la représentation des systèmes physiques. Il présente non seulement une structure topologique concrète, comme le réseau électrique, mais aussi, simultanément, un réseau de flux de puissance : ceci est exprimé par le postulat de continuité de puissance *Paynter (1961)*, *Breedveld (1984)*, chapitre 2.

La structure spécifique du modèle bond-graph permet de rattacher directement les éléments du modèle aux éléments constituants du système dynamique. La modification du modèle se fait en général par simple ajout ou retrait d'éléments sur la représentation initiale contrairement à d'autres méthodes où le processus de modélisation doit être complètement repris.

La notion de causalité *Rosenberg (1987)* est en général plus liée à l'aspect mathématique du modèle. Elle est utilisée pour la mise en équation du système dynamique et trouve une application particulière en automatique linéaire.

Elle permet ainsi de définir certains rangs du réseau *Rosenberg et Moultrie (1980)*, *Perelson et Oster (1976)* et de mettre en évidence des propriétés structurelles du système dynamique *Suda et Hatanaka (1986)*, *Sueur et Dauphin Tanguy (1989)*, (1990).

La première partie du rapport est consacrée à la présentation de nouveaux outils définis à l'aide de la représentation bond-graph et appliqués en automatique linéaire. Ceux-ci sont essentiellement basés sur les concepts de structure et de causalité. Leur application se traduit graphiquement par des manipulations causales et par la dualisation de certains éléments du modèle.

Dans un premier temps, la notion de causalité va permettre de déterminer le rang de certaines matrices à l'aide d'une méthode graphique simple, directement appliquée sur le modèle bond-graph. Ce rang est appelé rang "structurel" car il est indépendant de la valeur numérique des paramètres. Il tient néanmoins compte des possibles relations entre ces paramètres. Nous calculons ainsi le rang structurel de la matrice d'état du système dynamique et définissons la notion de commandabilité/observabilité

structurelle de l'état par le calcul du rang "structurel" des matrices de commandabilité et d'observabilité. Nous montrons que la notion de rang structurel est plus précise pour la représentation par bond-graph que pour d'autres méthodes de représentation graphiques, telles que les graphes de structure *Lin (1974)*. La propriété de commandabilité structurelle en sortie est étudiée à l'aide d'une méthode analogue. La décomposition canonique de Kalman s'applique directement sur le modèle bond-graph. Nous montrons qu'à ce niveau, les méthodes proposées sont utilisées en tant qu'outil d'analyse mais aussi de conception.

Dans un second temps, nous utilisons les notions de boucle causale et de gain causal pour la mise en évidence des dynamiques des systèmes linéaires. Nous proposons des méthodes graphiques de découplage pour certaines catégories de systèmes linéaires à deux échelles de temps. Les modèles découplés sont en général des modèles bond-graph et leur représentation mathématique est la même que celle des modèles découplés directement obtenus par application des perturbations singulières *Kokotovic et al. (1986)*, sur le modèle mathématique initial. Nous utilisons le bond-graph réciproque, *G. Dauphin Tanguy et al. (1985)*, qui est un outil graphique d'inversion des dynamiques du système. Nous proposons une méthode d'amélioration de la précision des modèles découplés, qui conserve la structure des modèles découplés initiaux et garde le sens physique des nouvelles variables dynamiques.

La seconde partie du rapport est consacrée à la modélisation des segments flexibles par Bond-Graph.

L'utilisation de matériaux légers dans les structures mécaniques a introduit des problèmes nouveaux tels que l'apparition de la flexibilité de ces structures. La modélisation fait appel aux méthodes de discrétisation spatiale de la mécanique des structures, telles que l'analyse modale ou les éléments finis. Le choix d'un modèle est un problème ouvert, aussi bien pour la commande, *Cetinkunt et Book (1989)*, que pour la précision et la simplicité du modèle obtenu *Maschke (1990)*. Certains auteurs font appel à la méthode de double décomposition modale *Margolis et Tabrizi (1984)* qui permet d'éliminer les modes élevés d'un modèle tout en ayant la même précision sur les modes conservés. Néanmoins, les variables dynamiques ne sont plus directement attachées aux constituants du système dynamique.

La modélisation des bras flexibles des robots manipulateurs a fait l'objet de nombreux travaux, *Karnopp (1968)*, *Yazman (1989)* et *Maschke (1990)*. Ils montrent que la formulation "force-libre" par la méthode d'analyse modale est très générale et qu'elle s'adapte très bien aux conditions aux limites réelles des bras flexibles. La flexibilité des modes négligés a une influence très importante sur le comportement statique du système. Un multiport, dit de capacité résiduelle, est introduit pour en tenir compte.

Nous proposons des méthodes de réduction des modèles qui prennent en compte les effets des termes négligés, tout en conservant la structure initiale du modèle simplifiée.

Dans un premier temps, nous rappelons les modèles mathématiques et bond-graph d'une poutre de Bernoulli-Euler pour différentes méthodes de discrétisation spatiale *Yazman (1989)*. Une alternative à la méthode de double réduction modale est proposée pour les modèles linéaires des systèmes dynamiques comportant des segments flexibles à l'aide de la méthode des perturbations singulières. Cette nouvelle formulation conserve la structure du modèle réduit ainsi que certaines variables dynamiques du modèle initial. Le nouveau modèle est appelé modèle réduit corrigé.

Dans un second temps, nous rappelons les modèles bond-graph cinématiques et dynamiques pour un segment flexible en mouvement plan. Les méthodes de réduction et de correction sont appliquées sur le modèle du segment flexible, qui est linéaire grâce à certaines approximations faites sur les matrices des champs de déplacement. Nous proposons une méthode de prise en compte des flexibilités des modes négligés pour les différents champs de déplacement.

Ce mémoire est scindé en quatre chapitres.

Le premier chapitre est un rappel de certains concepts de l'automatique linéaire, tels que la représentation d'état et la représentation par système graphe des systèmes dynamiques linéaires, ainsi que certaines propriétés fondamentales associées. Des méthodes d'étude des systèmes dynamiques à deux échelles de temps sont présentées avec un intérêt tout particulier pour la méthode des perturbations singulières.

Le second chapitre traite, dans un premier temps, de la représentation par bond-graph des systèmes dynamiques linéaires. Nous présentons ensuite le bond-graph réciproque et proposons des méthodes graphiques pour

l'analyse des propriétés structurelles des systèmes linéaires. La décomposition canonique de Kalman est ensuite introduite à l'aide de la représentation bond-graph.

Dans le troisième chapitre, des méthodes de découplage, à partir de la représentation bond-graph, sont proposées pour les systèmes dynamiques linéaires, purement amortis (réseaux RC) ou purement oscillants (système IC). Une correspondance est faite avec la méthode des perturbations singulières. Des méthodes d'amélioration de la précision des modèles découplés sont proposées.

Enfin le dernier chapitre traite du problème de modélisation des systèmes polyarticulés plans, comportant des segments flexibles, considérés comme des poutres de Bernouilli-Euler. Différents champs de déplacement sont utilisés, l'analyse modale et les éléments finis. Nous proposons des méthodes de réduction conservant le sens physique des variables dynamiques ainsi que des méthodes de prise en compte des effets négligés. Une généralisation de l'apparition du multiport dit de "flexibilité" résiduel est faite quels que soient le champ de déplacement et les conditions aux extrémités du segment flexible. Une application sur un robot expérimental LED est développée. Enfin, le découplage d'un modèle de robot deux axes comportant des segments flexibles est proposé.

# CHAPITRE I

## LES SYSTEMES DYNAMIQUES PRESENTATION DES PRINCIPALES NOTIONS

### SOMMAIRE

- I - REPRESENTATION DES SYSTEMES
- II - PROPRIETES STRUCTURELLES DES SYSTEMES DYNAMIQUES LINEAIRES
- III - METHODES DE SIMPLIFICATION DE MODELE

## INTRODUCTION

Un système dynamique est en général caractérisé par un modèle. Ce modèle peut être représenté de diverses manières, à l'aide de concepts élaborés en vue d'une utilisation spécifique. C'est ainsi que nous introduisons le concept de représentation qui joue un rôle fondamental dans l'analyse des systèmes dynamiques puisqu'il conditionne fortement la mise en place de méthodes en vue de cette analyse.

Dans une première partie, nous rappelons les représentations d'état *Kalman* (1963) et celle sous forme de matrice de transfert, *Rosenbrock* (1974). Nous introduisons les notions de commandabilité et d'observabilité.

Une seconde partie rappelle la notion de propriété structurelle, *Lin* (1974). A l'aide des représentations de graphe de structure et de matrice de structure, *Shields et Pearson* (1976), des méthodes d'étude de la commandabilité et de l'observabilité structurelles des systèmes dynamiques linéaires sont présentées.

Le modèle obtenu par les diverses méthodes de représentation peut s'avérer parfois très complexe et complètement inutilisable lors de l'analyse ou de la commande du système dynamique, par exemple. C'est pourquoi des méthodes, dites de simplification de modèle ont été élaborées. Divers critères de simplification peuvent être employés. La troisième partie de ce chapitre rappelle quelques-unes de ces méthodes et plus particulièrement la méthode des perturbations singulières, *Kokotovic et al.* (1986), qui consiste à séparer les dynamiques "lentes" et "rapides" du modèle. Cette méthode s'appuie en général sur la représentation d'état du système dynamique.



## I - REPRESENTATION DES SYSTEMES

### Introduction

La notion de système est associée à la définition de deux sous-ensembles de variables, les variables de sortie et les variables d'entrée. A celles-ci nous devons associer une représentation, appelée dans notre cas représentation d'état, caractérisant le comportement du processus étudié. Cette représentation mathématique, aussi appelée modèle, est souvent très complexe car elle doit s'approcher le plus possible du processus réel. Néanmoins, dans de nombreux cas, le modèle peut être simplifié, ce qui permet de mettre en évidence certaines propriétés. Nous nous limiterons aux cas des systèmes linéaires multivariables (à plusieurs entrées et plusieurs sorties).

De nombreux auteurs ont participé à l'élaboration de méthodes d'étude de ces systèmes. *Kalman (1963)* a présenté une description mathématique de ces systèmes, en faisant apparaître la structure canonique mettant en évidence différents sous-espaces en fonction de leur propriété de commandabilité/observabilité. *Rosenbrock (1974)* a élaboré une théorie très intéressante à l'aide de la représentation sous forme de matrice de transfert et de matrice système. Ces méthodes sont très générales et s'appliquent en particulier pour les systèmes interconnectés. *Moore (1981)* a étudié la réalisation minimale de Kalman d'un point de vue signal.

D'autres se sont intéressés à la commande ou à la commande découplée ; entre autres : *Siljak (1977)*, *Desoer & Lin (1985)*, *Descusse, Lafay & Malabre (1988)*, *Hayakawa & Siljak (1988)*, *Willems (1989)*, *Pichai et al. (1983)*.

*Gilbert (1963)* a mis en évidence des propriétés de commandabilité et d'observabilité pour les systèmes interconnectés. Il introduit la notion de systèmes équivalents à l'aide de la matrice système. *Taylor et Pugh (1986)* ajoutent quelques nouveautés à ce sujet.

Nous n'avons rappelé ici que quelques références bibliographiques en rapport avec notre approche des systèmes multivariables. Le type de modèle mathématique utilisé dans notre étude est l'équation d'état qui peut être déduite directement du modèle graphique bond graph que nous considérons également.



Dans un premier temps, nous développerons les méthodes de représentation en introduisant la matrice de transfert et la matrice système. Dans un deuxième temps, les propriétés de commandabilité et d'observabilité seront présentées et seront associées à la décomposition canonique de Kalman.

### I.1 - Les systèmes dynamiques

La notion de système physique est généralement associée à la définition de deux sous-ensembles de variables.

- \* les variables de sortie supposées accessibles à la mesure,
- \* les variables d'entrée (commandes permettant d'agir sur le processus ou perturbations, mesurables ou non mesurables.

A ces deux ensembles, nous ajoutons la notation d'état qui caractérise l'ensemble des informations dont il suffit de disposer à l'instant  $t_0$  pour prédire à partir d'un modèle connu, le comportement du processus sur l'intervalle de définition  $[t_0, +\infty[$ .

Nous noterons  $x$  le vecteur état de dimension  $n$ , défini sur  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x_0$  représente l'état initial du processus à l'instant  $t_0$ , la relation de dépendance entre le vecteur état, les commandes et l'état initial  $x_0$  se définit à tout instant de l'intervalle d'observation  $]t_0, t_1]$  par :

$$(I.1.1) \quad x(t) = x(x_0; u[t_0, t]; t_0, t)$$

où  $u[t_0, t]$  est le vecteur définissant l'évolution des commandes sur l'intervalle  $[t_0, t]$ .

De façon analogue, les variables de sortie  $y(t)$  sont définies par la relation :

$$(I.1.2) \quad y(t) = y(x_0; u[t_0, t]; t_0, t)$$

Nous noterons de façon simplifiée :

$$(I.1.3) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Une classe importante de systèmes peut se représenter à l'aide d'une équation différentielle non linéaire,

$$(I.1.4) \quad \dot{x} = f(x,u)$$

où  $f$  est continûment dérivable en  $x$  et  $u$  avec  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ , et d'une équation non linéaire de mesure :

$$(I.1.5) \quad y = g(x,u)$$

où  $g$  est continûment dérivable en  $x$  et  $u$ .

Plus généralement, à condition d'effectuer des hypothèses justifiées sur l'amplitude de variation des signaux, de nombreux systèmes non linéaires peuvent être linéarisés, autour d'un point d'équilibre.

Nous noterons :

$$(I.1.6a) \quad \dot{x} = A x + B u \quad A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

$$(I.1.6b) \quad y = C x + D u \quad C \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \quad D \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$$

où  $x$ ,  $y$  et  $u$  correspondent aux variations respectives de  $x$ ,  $y$  et  $u$  autour d'un point d'équilibre défini par  $x_0$ ,  $y_0$  et  $u_0$ .

L'équation I.1.6a) est appelée équation d'état du système, et  $x$ ,  $A$ ,  $B$  et  $u$  sont respectivement le vecteur état, la matrice d'état, la matrice de commande et le vecteur d'entrée du système.

L'équation I.1.6b) est appelée équation de sortie,  $y$ ,  $C$  et  $D$  sont respectivement le vecteur de sortie, la matrice de sortie et la matrice de transmission directe du système.

Pour les systèmes linéaires, l'équation I.1.6) est vraie pour toute variation de  $x$ ,  $y$  et  $u$ .

## I.2 - Les systèmes linéaires

Dans toute la suite, nous ferons l'étude des systèmes déterministes, c'est-à-dire des systèmes dont le comportement est parfaitement

prévisible, connaissant le signal d'entrée  $u(t)$ . Nous étudierons les systèmes multivariables, c'est-à-dire ceux comportant plusieurs entrées et plusieurs sorties. Les propriétés développées ci-après utilisent une description rassemblant le modèle d'état et la fonction de transfert tel que *Rosenbrock* le suggère. Nous ne donnerons que quelques définitions et nous placerons dans le cas particulier où le système peut se mettre sous forme d'équations d'état.

### I.2.1 - Représentation

#### a) Modèle d'état

Les modèles d'état des systèmes continus linéaires stationnaires se présentent sous la forme des équations I.1.6) que nous rappelons :

$$(I.1.7) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Si l'on connaît la valeur de  $x$  en un instant  $t_0$  ( $x(t_0)$ ), l'équation I.1.7) a une solution unique  $x(t)$  qui ne dépend que de  $x(t_0)$  et de la fonction  $u(\tau)$ ,  $\tau \in [t_0, t]$ .

#### b) Fonction de transfert

Si la condition initiale pour  $x$  dans I.1.7) est  $x(0) = 0$ , en prenant la transformée de Laplace de l'équation I.1.7), nous obtenons, si  $s$  représente l'opérateur symbolique de Laplace :

$$(I.1.8) \quad \begin{cases} s X(s) = A X(s) + B U(s) \\ Y(s) = C X(s) + D(s) U(s) \end{cases}$$

La résolution de I.1.8) donne :

$$(I.1.9) \quad Y(s) = G(s) U(s) \\ \text{avec } G(s) = C(sI_n - A)^{-1} B + D.$$

$G(s)$  est appelée matrice de transfert du système linéaire. Lorsque le système ne comporte qu'une entrée et une sortie,  $G(s)$  est appelée fonction de transfert.

L'équation I.1.9) ne définit qu'une partie des relations entrée/sortie du système, celle qui est complètement commandable et complètement observable. Elle représente la forme irréductible du système dynamique. Nous développerons ces propriétés dans la suite de notre rapport.

Nous allons donner quelques définitions relatives aux systèmes linéaires multivariés.

L'équation I.1.8) peut s'écrire :

$$(I.1.10) \quad P(s) \cdot \begin{pmatrix} X(s) \\ -U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y(s) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad P(s) = \begin{pmatrix} sI_n - A & B \\ -C & D \end{pmatrix}, \quad P(s) \in \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^{n+p}.$$

$P(s)$  est une matrice polynomiale contenant toutes les informations mathématiques du système pour définir son comportement.

#### Définition I.1.1)

$P(s)$  est appelée matrice système. A cause de sa forme spéciale,  $P(s)$  est dite sous forme espace d'état.

#### Définition I.1.2) (Rosenbrock (1970))

Les matrices polynomiales  $(sI_n - A, B)$  sont premières entre elles (à gauche) si la condition suivante est vérifiée :

- la matrice  $(B, AB, \dots, A^{i-1}B)$  est de rang  $n$ , où  $i$  est un entier quelconque plus grand que le degré du polynôme minimal de  $A$ . En particulier, nous pouvons choisir  $i = n$ .

#### Définition I.1.3) (Rosenbrock (1970))

Les matrices polynomiales  $(sI_n - A, C)$  sont premières entre elles (à droite) si la condition suivante est vérifiée :

- la matrice  $(C^t, (CA)^t, \dots, (CA^{i-1})^t)$  est de rang  $n$ , où  $i$  est défini comme précédemment.

Propriété I.1.1) (Rosenbrook (1970))

Le système  $\Sigma$  est dit d'ordre minimal si la condition suivante est vérifiée :

- Les matrices A,B sont premières entre elles (à gauche) et A,C sont premières entre elles (à droite).

I.2.2 - Propriétés (Rosenbrook (1970))a) Stabilité :

Nous présentons quelques propriétés pour les systèmes autonomes, c'est-à-dire pour les systèmes définis par :

$$(I.1.11) \Sigma : \dot{x}(t) = A x(t).$$

Définition I.1.4)

Soit  $x = 0$  un point d'équilibre.

Le système  $\Sigma$  est un système stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \text{ tq } \|x(t_0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

$\|x\|$  est la norme du vecteur  $x$ .

Définition I.1.5)

Le système  $\Sigma$  est un système asymptotiquement stable si  $x(t)$  tend vers 0 (point d'équilibre) quand  $t$  tend vers  $\infty$ .

Définition I.1.6)

Le système  $\Sigma$  est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative.

Définition I.1.7)

Si le système  $\Sigma$  est tel qu'une des valeurs propres de A est nulle, alors il est dit stable, non asymptotiquement, les autres étant à partie réelle négative.

b) Commandabilité

Définition 1.1.8) Commandabilité d'un état à l'origine.

$\Sigma$  est dit commandable d'un état à l'origine (CEO) si, étant donné l'état  $x(0) = C$ , il existe un temps  $t_1 > 0$  et une commande  $u$  définie sur  $[0, t_1]$  telle que  $x(t_1) = 0$ .

Théorème I.1.1)

$\Sigma$  est commandable (CEO) ssi  $sI_n - A$  et  $B$  sont premières entre elles (à gauche).

Ce que nous appelons ici commandabilité (CEO) est en général simplement appelé commandabilité, ou complète commandabilité. Cette différence de terminologie permet parfois de séparer les cas où tous les états ou seulement certains états peuvent être amenés à l'origine.

Définition I.1.9) Commandabilité de l'origine à un état.

$\Sigma$  est dit commandable de l'origine à un état (COE) si, étant donné un état quelconque  $C$ , il existe un temps  $t_1 > 0$  et une commande définie sur  $[0, t_1]$  telle que si  $x(0) = 0$ , alors  $x(t_1) = C$ .

Théorème I.1.2)

$\Sigma$  est commandable (COE) ssi  $sI_n - A$ ,  $B$  sont premières entre elles (à droite).

Définition I.1.10) : Commandabilité d'état

$\Sigma$  est dit commandable en état (CE) ssi étant donné deux états  $C_0$  et  $C_1$ , il existe un temps  $t_1 > 0$  et  $u$  défini sur  $[0, t_1]$ , tels que  $x$  passe de l'état  $C_0$  à  $t = 0$  à l'état  $C_1$  à  $t = t_1$ .

Théorème I.1.3)

$\Sigma$  est commandable (CE), si  $sI_n - A$ ,  $B$  sont premières entre elles (à droite).

Ces trois théorèmes sont équivalents si A est inversible.

Dans la plupart des situations, le but de la commande est que la sortie  $y$  suive une certaine trajectoire. Nous parlons dans ce cas de commandabilité en sortie ou commandabilité fonctionnelle.

Définition I.1.11) : Commandabilité fonctionnelle

Soit  $G(s)$  la matrice de transfert,  $k$  le degré du plus petit dénominateur commun dans  $G(s)$ .

Etant donné  $y$ , avec  $y = 0$  pour  $t < 0$  et  $D_k y$  la dérivée  $k^{\text{ième}}$  de  $y$ ,  $t_q \parallel D_k(y(t)) \parallel < M e^{dt}$  pour  $M$  et  $d$  donnés et pour tout  $t$ , alors le système sera fonctionnellement commandable s'il existe un  $t_q$  pour  $x(0) = 0$ , qui permet d'obtenir la trajectoire désirée pour  $y$ .

Théorème I.1.4)

$\Sigma$  est fonctionnellement commandable ssi  $\det(G(s)) \neq 0$ ,  
ssi  $\text{rang}(CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B, D) = n$ .

Remarque : Nous devons remarquer que la commandabilité d'état n'entraîne pas la commandabilité de l'état considéré comme une sortie. Réciproquement, un système peut être commandable en sortie sans être commandable en état.

Si  $G$  n'est pas une matrice carrée,  $\det(G(s))$  n'existe pas. Si  $G(s)$  comporte plus de lignes que de colonnes, c'est-à-dire plus de sorties que d'entrées, le système ne peut pas être fonctionnellement commandable. Par contre, si le système a plus d'entrées que de sorties, il y a redondance d'entrée pour les sorties (pas nécessairement pour l'état).

c) Observabilité

Définition I.1.12)

$\Sigma$  est dit observable si il existe  $t_1 > 0$  tel que la mesure de  $y$  sur l'intervalle  $[0, t_1]$  permet de déduire  $x(0)$ .



Théorème I.1.5)

$\Sigma$  est observable ssi  $sI_n - A$ ,  $C$  sont premières entre elles (à droite).

d) Indices de commandabilité/observabilitéDéfinition I.1.13)

L'indice de commandabilité  $\mu$ , resp. d'observabilité  $\nu$ , est le plus petit entier inférieur à  $n$ , tel que  $\det[B, AB, \dots, A^{\nu-1}B] \neq 0$ , respectivement  $\det[C^t, (CA)^t, \dots, (CA^{\nu-1})^t] \neq 0$ .

Ces indices sont utilisés par exemple pour déterminer des commandes découplantes pour des systèmes multivariables, *Descusse (1988)*, en tant que mesure de l'influence de l'entrée, resp. la sortie par rapport à l'état du système.  $\mu$  sera par exemple le nombre minimal d'opérations à faire sur les états pour calculer  $u$  connaissant l'état du système.

I.2.3) Réalisation minimale-décomposition de Kalman

Nous avons donné plusieurs définitions concernant la commandabilité d'un système dynamique. Généralement, seule la commandabilité en sortie est nécessaire pour un processus industriel. Celle-ci n'entraîne ni la commandabilité, ni l'observabilité de l'état tout entier.

Par contre, la matrice de transfert  $G(s)$ , directement liée à la notion de commandabilité en sortie, rassemble toutes les informations du sous-espace d'état à la fois commandable et observable.

La notion de réalisation minimale, ou irréductibilité, est associée à ce sous-espace d'état. Ce dernier nous donne la même matrice de transfert  $G(s)$  que le système global.

Nous pouvons ainsi introduire la décomposition de Kalman, obtenue simplement par une permutation du vecteur d'état.

Le nouveau vecteur état  $\eta$ , défini par la matrice de permutation  $M$ , s'obtient par :

$$I.1.12) \quad x = M\eta \quad \text{avec} \quad \eta = \{\eta_i, i = 1 \dots 4\}.$$

Le nouveau système d'équations est :

$$I.1.13) \quad \begin{cases} \dot{\eta} = \hat{A} \eta + \hat{B} u \\ y = \hat{C} \eta + \hat{D} u \end{cases} \quad y = \hat{C} \eta + \hat{D} u$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \hat{A} = M^t A M & \hat{C} = C M \\ \hat{B} = M^t B & \hat{D} = D \end{cases}$$

Nous avons en plus :

$$I.1.14) \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & \hat{A}_{13} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = [\hat{C}_1 \ 0 \ \hat{C}_3 \ 0] \quad \hat{D} = D.$$

L'espace d'état a été décomposé en 4 sous-espaces d'état dont les propriétés et le système de définition sont :

- $S^*$  : système commandable et observable caractérisé par  $\hat{\Sigma}_1 : (\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1, D_1)$
- $S^c$  : système commandable et non observable caractérisé par  $\hat{\Sigma}_2 : (\hat{A}_{22}, \hat{B}_2, 0, D_2)$
- $S^o$  : système non commandable et observable caractérisé par  $\hat{\Sigma}_3 : (\hat{A}_{33}, 0, \hat{C}_3, D_3)$
- $S^f$  : système non commandable et non observable caractérisé par  $\hat{\Sigma}_4 : (\hat{A}_{44}, 0, 0, D_4)$

Remarque :

$$(sI - \hat{A})^{-1} = \begin{bmatrix} (sI - \hat{A}_{11})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ +s(sI - \hat{A}_{22})^{-1} \hat{A}_{21} (sI - \hat{A}_{11})^{-1} & (sI - \hat{A}_{22})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (sI - \hat{A}_{33})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (sI - \hat{A}_{44})^{-1} \hat{A}_{43} (sI - \hat{A}_{33})^{-1} & (sI - \hat{A}_{44})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$M_{ij}$  sont des matrices dépendant des  $A_{ij}$  et  $I$  est la matrice d'identité de dimension appropriée.

Il vient immédiatement que la matrice de transfert  $G(s)$ ,

$$(I.1.15) \quad G(s) = C(sI_n - A)^{-1} B + D$$

est aussi égale à :

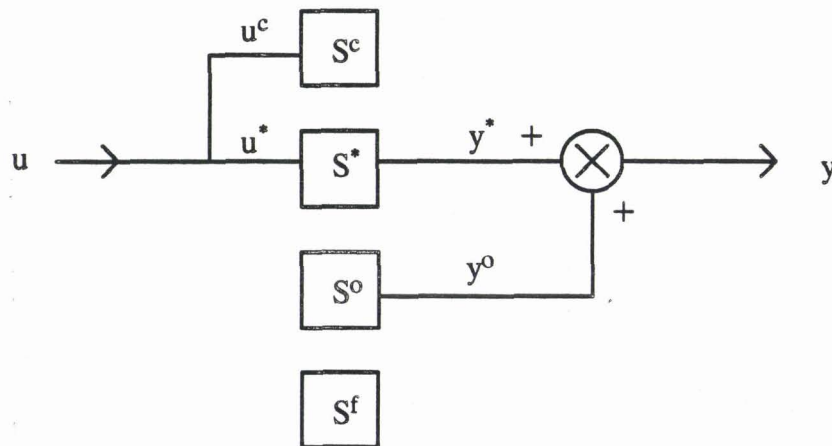
$$(I.1.16) \quad G(s) = \hat{C}_1 (sI - \hat{A}_{11})^{-1} \hat{B}_1 + D.$$

Remarque :

Pour que le système soit commandable en sortie, il faut bien entendu que les sorties et commandes soient associées au sous-espace commandable et observable.

Une condition de bon comportement du système sera que les systèmes non commandables et/ou non observables soient stables.

La *Figure I.1.1*) représente la décomposition du système complet  $S$ .



*Figure I.1.1 : Décomposition canonique de Kalman*

Il est immédiat d'après la *Figure I.1.1*), que ni la commandabilité complète de l'état, ni l'observabilité complète de l'état sont nécessaires pour une commandabilité complète des variables de sortie.

## II - PROPRIETES STRUCTURELLES DES SYSTEMES DYNAMIQUES LINEAIRES

### Introduction

Les considérations structurelles d'un système  $\Sigma$  doivent être faites avant les calculs mathématiques et les propriétés structurelles doivent être exploitées dans le but de la conception, car elles apportent de nombreux renseignements sur le système. C'est pourquoi l'étude structurelle des systèmes multivariables a fait l'objet de nombreuses études aussi bien du point de vue graphique que mathématique. *Lin* (1974) a formulé la notion de commandabilité structurelle pour les systèmes monovariables, ceci à l'aide de la théorie des graphes. *Shields & Pearson* (1976) ont étendu les résultats de *Lin* au cas multivariable, à l'aide de méthodes algébriques, en introduisant la notion de term-rank. *Mayeda* (1981) et *Schizas & Evans* (1981) ont utilisé la théorie des graphes pour l'étude des systèmes multivariables.

*Glover et Silverman* (1976) ont simplifié la méthode algébrique de *Shields et Pearson* en introduisant des opérations booléennes.

*Frankesen, Falster & Evans* (1979) ont montré que la commandabilité et l'observabilité structurelles peuvent être étudiées par deux tests indépendants, le test d'atteignabilité et celui de term-rank.

*Wonham* (1979) a utilisé une méthode géométrique pour la commande multivariable des systèmes linéaires.

D'autres auteurs ont utilisé des méthodes de mise en évidence des propriétés structurelles, dans différents cas avec des méthodes plus ou moins équivalentes : *Davison* (1977) pour les systèmes composites, *Lin* (1977) pour l'étude de la structure minimale de commandabilité, *Sinha* (1977) pour le découplage des systèmes multivariables, *Evans et Schizas* (1981) pour les aspects structurels d'assignements de pôle. *Anderson et Hong* (1982) ont pris en compte certaines relations algébriques entre les différents éléments pour le calcul du rang de matrices. *Johnston, Barton & Brisk* (1984), *Pillou et Rech* (1989), *Burrows et Sahinkaya* (1981) ont développé des algorithmes de calcul du rang générique des matrices de structure, *Johnston & Barton* (1985) parlent d'équivalence structurelle pour la réduction de modèle, *Mortazavian* (1982) introduit le concept de k-commandabilité/k-observabilité où k correspond au chemin le plus long entre un

noeud d'entrée, ou de sortie, et un noeud de variable d'état dans la théorie des graphes,  $k$  s'apparente à l'indice de commandabilité/observabilité, il en est une borne supérieure. *Tao & Hsia (1982)* appliquent les graphes de structure à la théorie des systèmes. Enfin, *Georgiou et Flaudas (1990)* étudient les propriétés structurelles des systèmes de grande échelle en vue de la synthèse de commandes.

Nous nous apercevons que de nombreux progrès ont été faits dans le domaine de l'étude structurelle des systèmes linéaires multivariés. Malgré tout, nous sommes encore très loin d'une théorie rigoureuse dans ce domaine, car de nombreuses informations sont parfois perdues lors du passage au graphe de structure ou à la matrice de structure. C'est pourquoi, *Willems (1986)* cherche à savoir si la commandabilité/observabilité structurelle est générique par rapport aux paramètres ou seulement pour des valeurs exceptionnelles des paramètres. Il expose une méthode où les paramètres non nuls peuvent varier. Sa méthode est très générale contrairement aux autres méthodes présentées en référence.

Nous nous attacherons à rappeler quelques définitions et propriétés obtenues par différents auteurs cités en référence. Nous ferons une analyse des différentes démarches possibles en insistant sur les avantages et défauts des méthodes proposées.

## II.1 - Structure d'un système linéaire

Considérons le système linéaire continu  $\Sigma$  défini par :

$$(I.2.1) \quad \Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \\ C \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \\ D \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Le système  $\Sigma$  associé au quadruplet  $(A,B,C,D)$  est noté :

$$(I.2.2) \quad \Sigma = (A,B,C,D).$$

Certains paramètres dans  $A,B,C,D$  ont une valeur fixe déterminée alors que d'autres ne sont pas exactement connus à cause de la variation de certaines valeurs due à l'âge des composants, par exemple. Néanmoins, la

petite variation de la valeur des paramètres ne va pas changer le principe de fonctionnement du système.

Nous pouvons ainsi introduire la notion de structure qui fera uniquement la distinction entre les paramètres nuls (0) et les paramètres non-nuls, pouvant varier, du système dynamique.

### Définition I.2.1)

Deux systèmes :  $\Sigma_0 : = (A_0, B_0, C_0, D_0)$ ,  $\Sigma_1 : = (A_1, B_1, C_1, D_1)$  sont structurellement équivalents ou ont la même structure si :

- (i) Les matrices correspondantes des deux systèmes ont la même dimension.
- (ii) Il existe une matrice de permutation  $P$ , avec  $A_2 = PA_1P^t$ ,  $B_2 = PB_1$ ,  $C_2 = C_1P^t$  et  $D_2 = D_1$  telle que les paramètres nuls de  $A_2, B_2, C_2, D_2$  correspondent aux paramètres nuls de  $A_1, B_1, C_1, D_1$  et vice versa.

La structure de  $\Sigma$  est définie par la classe d'équivalence  $[\Sigma]$  des systèmes structurellement équivalents. Les propriétés structurelles sont évidemment valables pour la classe de systèmes ayant la même structure.

## II.2 - Graphe et matrice de structure

L'étude structurelle d'un système dynamique peut se faire soit graphiquement, à l'aide du graphe de structure, soit mathématiquement à l'aide de la matrice de structure. Nous pouvons utiliser indifféremment l'une ou l'autre méthode suivant les outils dont nous disposons.

### Définition I.2.2)

$G(A,B,C,D)$  est appelé graphe de structure du système  $(A,B,C,D)$  si :

- a) à chaque variable d'état  $x_i$ , il correspond un noeud  $v_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) et à chaque terme non nul  $a_{ij}$  de la matrice  $A$ , une arête orientée de  $v_j$  à  $v_i$  ;
- b) à chaque entrée  $u_r$ , il correspond un noeud d'entrée  $e_r$  ( $r = 1, \dots, p$ ) et à chaque terme non nul  $b_{ir}$  de  $B$ , une arête orientée de  $e_r$  à  $v_i$  ;
- c) à chaque sortie  $y_k$ , il correspond un noeud de sortie  $s_k$  ( $k = 1, \dots, q$ ) et à chaque terme non nul  $c_{ki}$  de  $C$ , une arête orientée de  $v_i$  à  $s_k$  ;



d) à chaque terme non nul  $d_{kr}$  de  $D$ , il correspond une arête orientée de  $e_r$  à  $s_k$ .

A l'aide de ce graphe de structure, des propriétés peuvent être mises en évidence par la théorie des graphes.

### Définition I.2.3)

Un graphe de structure peut être complètement décrit à l'aide de sa matrice adjacente  $M$ , dont les éléments sont  $m_{ij} = 1$  s'il existe une arête du noeud  $t_j$  au noeud  $t_i$ , sinon  $m_{ij} = 0$  ( $t \in \{v, e, s\}$ ).

A cause des éléments "0" ou "1", la matrice adjacente est souvent appelée matrice booléenne.

La matrice adjacente pour le graphe de structure  $G(A, B, C, D)$  est :

$$(I.2.3) \quad M = \begin{bmatrix} A_B & B_B \\ C_B & D_B \end{bmatrix}$$

où  $A_B, B_B, C_B, D_B$  résultent de  $A, B, C, D$  en remplaçant les termes non nuls par "1" (indice "B", Boolean).

A l'aide de l'arithmétique Booléenne, facilement utilisable sur calculateur, nous pouvons extraire de  $M$  de nombreuses propriétés structurales. Nous ne développerons pas les méthodes de la théorie des graphes, par contre, nous développerons certaines procédures d'analyse à l'aide de la matrice  $M$ .

## II.3 - Commandabilité/Observabilité structurelle

Nous explicitons d'abord quelques définitions (nous utiliserons la terminologie anglo-saxonne de "term-rank" car nous ne connaissons pas l'équivalence française).

### Définition I.2.4)

Le "term-rank" d'une matrice booléenne  $M_B$  est donné par le nombre



d'éléments, non nuls, dans la matrice de permutation maximale contenue dans  $M_B$ .

$$\text{Supposons que } M_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons définir deux matrices de permutation :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

avec  $\text{rang}(M_1) = \text{rang}(M_2) = 2$ .

D'où  $\text{term-rank}(M_B) = 2$ .

Nous montrerons dans le chapitre 2 que le term-rank est peu satisfaisant car il est parfois différent du rang réel de la matrice  $M$ , quels que soient les paramètres de  $M$ .

Cette remarque est valable pour la matrice  $M$  définie par :

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & \frac{R}{L_2} \\ \frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix}$$

où  $\text{term-rank}(M_B) = 2$  et  $\text{rang}(M) = 1$ .

La notion de "rang générique" est parfois utilisée. Elle est semblable à celle de "term rank" mais en plus tient compte de certaines relations algébriques supplémentaires entre les différents paramètres de la matrice.

Nous définirons le "rang structurel" qui lui est pratiquement dans tous les cas, égal au rang réel de  $M$ .

Propriété I.2.1) (Shields et Pearson (1976))

Le système (A,B) est structurellement commandable ssi :

- a) tous les états (noeuds) sont atteignables par l'entrée,
- b)  $\text{term-rank } [A_B, B_B] = n.$

Propriété I.2.2) (Shields et Pearson (1976))

Le système (A,C) est structurellement observable ssi :

- a) tous les états (noeuds) sont atteignables par la sortie,
- b)  $\text{term-rank } \begin{bmatrix} A_B \\ C_B \end{bmatrix} = n.$

II.4 - Indices de commandabilité/Observabilité structurelleDéfinition I.2.5)

Un état (noeud) est atteignable en entrée, resp. en sortie, s'il existe un chemin sur le graphe de structure entre l'entrée et l'état, resp. l'état et la sortie.

Nous définissons ainsi les indices  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\nu}$  de commandabilité/observabilité structurelle par :

Définition I.2.6)

$\bar{\mu}$  est la longueur du chemin le plus long entre l'entrée et les états.

$\bar{\nu}$  est la longueur du chemin le plus long entre les états et la sortie.

$\bar{\mu}$  est le nombre de dérivations à faire sur l'état  $x_i$  associé au chemin le plus long pour qu'apparaisse l'entrée  $u$  dans l'équation différentielle correspondante.

Propriété I.2.3) (Mortazavian (1982))

$$\mu \geq \bar{\mu}$$

$$\nu \geq \bar{\nu}$$

## Conclusion

Nous avons énoncé quelques méthodes pour l'étude des propriétés structurelles d'un système dynamique linéaire multivariable. Quelques remarques peuvent être faites. Tout d'abord, il est nécessaire de disposer des équations d'état du système pour construire le graphe de structure ou la matrice de structure. Si le modèle change, ajout d'un élément par exemple, il faut calculer les nouvelles équations d'état, ce qui peut être fastidieux et redéfinir un nouveau graphe (ou matrice) de structure. Il serait donc intéressant de disposer d'un outil mettant en évidence à la fois les dynamiques (équations) et la structure du système. La deuxième remarque est que le graphe (ou matrice) de structure ne tient pas compte des relations algébriques éventuelles entre les différents paramètres, ce qui se traduit par exemple par un "term-rank" toujours différent du rang réel d'une matrice donnée.

Nous montrerons, dans le chapitre suivant, comment l'outil bond-graph réunit toutes ces conditions. Nous en déduirons que les méthodes de mise en évidence des propriétés structurelles précédemment citées ne sont pas toujours valables.

## III - METHODES DE SIMPLIFICATION DE MODELE

### Introduction

Un problème fondamental dans la théorie des systèmes et de la commande est de trouver un modèle mathématique du système physique. Une représentation réaliste d'un système peut se traduire par des équations dynamiques d'un ordre élevé. La prise en compte de phénomènes "parasites" tels que des petites constantes de temps, masses, inerties, résistances, inductances, capacités, augmente l'ordre de ces systèmes. Ceci pose des problèmes d'analyse et de commande. Le problème est de trouver le meilleur degré de complexité du modèle mathématique suivant la tâche requise.

Une méthode de simplification de modèle est de négliger les termes "parasites" qui augmentent l'ordre du système dynamique. Ceci revient à étudier le phénomène dominant caractérisant le système. Mais, une conception basée sur un modèle trop simplifié peut se traduire par un résultat, loin des performances désirées. Ceci oblige, soit à modifier le modèle en gardant un ordre de complexité plus élevé, soit à étudier séparément les

phénomènes jusqu'alors éliminés. Les méthodes à échelles de temps multiples et les méthodes de perturbations singulières qui sont une représentation particulière des premières, apportent des solutions à ces questions.

Dans une première partie, une analyse succincte des problèmes posés sera réalisée. Un développement plus approfondi de certaines méthodes fera l'objet de la seconde partie.

### III.1 - Classification des problèmes. Applications

La théorie des perturbations singulières et les méthodes à échelles de temps multiples ont reçu ces trente dernières années une attention toute particulière.

Les premières méthodologies développées concernaient les problèmes de valeurs initiales, valeurs finales et couches limites, *Vasileva (1963)*, *O'Malley (1974)*, *Kokotovic et al. (1976)*, dans le but de simplifier les problèmes de calcul de trajectoires optimales. *Hoppensteadt (1971)*, *Vasileva (1976)* développèrent des théories sur les solutions et les propriétés des équations différentielles ordinaires comportant des petits paramètres en facteur des termes dérivés de plus haut degré. Une formulation des perturbations singulières indépendantes des coordonnées est proposée par *Fenichel (1979)*.

Une première étape pour un système à plusieurs échelles de temps est de faire la séparation des dynamiques. Deux problèmes se posent. La mise en évidence des échelles de temps n'est pas simple. La séparation des états en états lents et rapides requiert parfois de la clairvoyance, ou ingéniosité, de la part de l'analyste, *Kokotovic (1981)*, *Kokotovic et al. (1982)*. Une permutation, ou conditionnement des états, assure parfois la séparation des variables d'état en deux sous-ensembles de dynamiques différentes.

La stabilité, *Kokotovic et al. (1976)*, *Saberi et Khalil (1984)*, *Saberi et Khalil (1985)*, la commandabilité/observabilité, ou l'analyse dans le domaine fréquentiel, sont une deuxième étape dans l'analyse des systèmes à plusieurs échelles de temps.

L'assimilation des perturbations singulières à la théorie de la commande est récente. Plusieurs approches sont possibles : la commande optimale en boucle ouverte, en boucle fermée, *Sannuti et Kokotovic (1969)*, *Chow*

et Kokotovic (1981), la commande composite par retour d'état, Kokotovic, O'Malley et Sannuti (1976), Porter (1977), Fossard et Magni (1980), Suzuki (1981), Khabil et Hu (1989), la commande adaptative, Iannou et Kokotovic (1982) ou la commande non-linéaire stochastique Bensoussan (1981).

Les problèmes de filtrage, de retour à grand gain, de systèmes interconnectés, des chaînes de Markov, de la modélisation multi-modèles, de la théorie des jeux, ne sont qu'une partie des systèmes traités par les méthodes à échelles de temps.

Il est à remarquer que les systèmes discrets, délaissés dans les années 60, font désormais l'objet d'une attention toute particulière Naidu (1988), Phillips (1980). La mécanique des fluides, les réseaux électriques Chow (1982), Sastry et Desoer (1981), les systèmes de puissance Peponides, Chow et Kokotovic (1982), les systèmes aéronautiques concernant l'optimisation de trajectoires, les réactions chimiques, la diffusion, la biologie et autres, sont autant de domaines conduisant à des modèles pouvant se traduire par des systèmes d'équations différentielles mettant en évidence un phénomène lent et un, ou plusieurs phénomènes rapides. Pour une introduction aux méthodes de perturbation singulières, les références conseillées sont Kokotovic, Khalil et O'Reilly (1986), Saksena, O'Reilly et Kokotovic (1984), Naidu (1988).

Nous nous proposons, dans la partie suivante de donner quelques éléments de base sur les différentes méthodes de réduction.

### III.2 - Systèmes à deux échelles de temps

Le concept d'échelles de temps est une notion relativement récente. Elle est associée à une classe de systèmes où n'apparaît pas obligatoirement un paramètre  $\varepsilon$ , comme dans la méthode des perturbations singulières. Par contre, il apparaît deux ensembles de valeurs propres bien séparés donnant naissance à un phénomène lent à un phénomène rapide et à des couches limites.

Un système à deux échelles de temps peut être modélisé par les équations :

$$(I.3.1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, u, t) & x_1(t_0) = x_{10} & x_1 \in \mathbb{R}^n \\ \dot{x}_2 = G(x_1, x_2, u, t) & x_2(t_0) = x_{20} & x_2 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

où  $x_1$  est le vecteur des variables dites lentes et  $x_2$  le vecteur des variables superposées à un état dit quasi-permanent, dites rapides  $\|\dot{x}_2\| \gg \|\dot{x}_1\|$ . Une façon de mettre en évidence ce fait est d'introduire  $g = \epsilon G$ . Ainsi,  $g$  est du même ordre de grandeur en amplitude que  $f$ . Le système devient :

$$(I.3.2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, u, t) & x_1(t_0) = x_{10} \\ \epsilon \dot{x}_2 = g(x_1, x_2, u, t) & x_2(t_0) = x_{20} \end{cases}$$

En l'absence d'estimations empiriques de  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2$ , les paramètres physiques tels que les constantes de temps, les boucles de gain sont examinés de façon à déterminer les états lents et rapides.

### III.2.1 - Mise en évidence des dynamiques

#### a) Bloc-diagonalisation des systèmes continus linéaires.

Pour les systèmes linéaires, il existe une méthode géométrique de séparation des dynamiques. Elle consiste à localiser les modes du système dans le plan complexe.

Considérons le système général :

$$(I.3.3a) \quad \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 u \quad x_1 \in \mathbb{R}^n \quad x_2 \in \mathbb{R}^m$$

$$(I.3.3b) \quad \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2 u \quad u \in \mathbb{R}^p$$

$A_{ij}$  et  $B_i$  ayant les dimensions appropriées.

Supposons que les modes propres du système I.3.3) peuvent se regrouper en  $n$  valeurs propres de petit module (près de l'origine) et en  $m$  valeurs propres de grand module (loin de l'origine), donnant respectivement les réponses lentes et rapides. En d'autres termes, le système comporte  $n$  modes dominants et  $m$  modes non dominants. Nous supposons que les modes sont stables, sinon un placement de pôle doit être envisagé. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+m}$  les valeurs propres du système I.3.3) rangées par module croissant, c'est-à-dire  $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots < \lambda_{n+m}$ .  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  correspondent aux modes dominants,  $\lambda_{n+1} \dots \lambda_{n+m}$  aux modes non dominants.

Ce système possède deux échelles de temps si  $|\lambda_n| \ll |\lambda_{n+1}|$ .

Soit  $\varepsilon = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_{n+1}|}$ . Le petit paramètre  $\varepsilon$  est une mesure de la séparation des échelles de temps.

L'objectif est d'obtenir 2 modèles d'ordre réduit découplant les modes lents et rapides. Ceci est possible par une transformation linéaire *Chang (1974)* se faisant en deux étapes.

La première étape consiste à utiliser le changement de variable  $x_{2r} = x_2 + Lx_1$  où la matrice  $L$  de dimension  $m \times n$  vérifie l'équation :

$$(I.3.4) \quad LA_{11} + A_{21} + LA_{12}L - A_{22}L = 0.$$

Le système I.3.3) est triangularisé :

$$(I.3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\ell & A_{12} \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{2r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_r \end{bmatrix} u \\ \text{avec } \begin{cases} A_\ell = A_{11} - A_{12}L \\ A_r = A_{22} + LA_{12} \\ B_r = B_2 + LB_1 \end{cases} \end{array} \right.$$

La seconde étape consiste à utiliser le changement de variable  $x_{1\ell} = x_1 - Mx_{2r}$  où la matrice  $M$  de dimension  $n \times m$  vérifie l'équation :

$$(I.3.6) \quad A_\ell M + MA_r + A_{12} = 0.$$

Le système I.3.5) est bloc-diagonalisé.

$$(I.3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1\ell} \\ \dot{x}_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\ell & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\ell} \\ x_{2r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\ell \\ B_r \end{bmatrix} u \\ \text{avec } B_\ell = B_1 - MLB_1 - MB_2 \end{array} \right.$$

Le système I.3.7) a la forme désirée. Le comportement des vecteurs  $x_{1\ell}$  et  $x_{2r}$  s'étudie de manière séparée.

La transformation relatant les anciens vecteurs  $x_1, x_2$  aux nouveaux vecteurs  $x_{1\ell}, x_{2r}$  s'écrit :



$$(I.3.8) \quad \begin{bmatrix} x_{1\ell} \\ x_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - ML & -M \\ L & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La transformation inverse s'écrit :

$$(I.3.9) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & M \\ -L & I_2 - LM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\ell} \\ x_{2r} \end{bmatrix}$$

$I_1$  et  $I_2$  sont des matrices unité de dimension appropriée. Il est à noter qu'aucune inversion de matrice n'est à faire.

L'existence et le calcul des solutions  $L$  et  $M$  des équations I.3.4) et I.3.6) ont été étudiés par de nombreux auteurs *Kokotovic et al. (1980)*, *Winkelman et al. (1980)*, *Chow et Kokotovic (1976)*.

Une première approche proposée par *Kokotovic (1975)* consiste à calculer  $L$  et  $M$  à l'aide de suites. Des conditions sur les normes de certaines matrices sont introduites.

Une autre approche *Avramovic (1979)* consiste à utiliser les valeurs propres de  $A$  et les vecteurs propres associés.

Une solution due à *Magni (1981)* fait appel aux polynômes annulateurs de  $A$  et ne requiert que le calcul des vecteurs propres.

#### b) Permutation et conditionnement

En pratique, les variables d'état d'un modèle physique à deux échelles de temps sont rangées dans un ordre arbitraire et sont parfois mal adaptées pour le découplage. C'est pourquoi, la matrice d'état correspondante peut ne pas vérifier les conditions nécessaires permettant de trouver  $L$  et  $M$ , *Kokotovic et al. (1980)*, à cause d'un mauvais conditionnement.

Deux transformations sont alors nécessaires.

Une permutation permet de rassembler les  $n$  premières variables dans un vecteur état correspondant aux variables lentes et les  $m$  autres variables dans un vecteur état correspondant aux variables rapides.



Un conditionnement permet de réajuster certains termes de la matrice d'état et de réduire la norme de certaines matrices.

### III.2.2 - Classification des méthodes de simplification

La notion de simplification est très large puisqu'elle englobe à la fois les simplifications d'ordre structurel, les décompositions du système initial en sous-systèmes et les diminutions d'ordre d'un modèle donné sans modification de structure. Nous présentons succinctement quelques unes des méthodes employées dans la littérature.

#### a) Présentation succincte de quelques méthodes

##### - Méthodes du modèle

Les méthodes du modèle consistent à choisir a priori un modèle d'ordre inférieur à celui du système initial, dont les paramètres sont déterminés de façon à minimiser l'écart entre le comportement des deux modèles pour différents types d'entrées.

Deux approches, l'une temporelle, l'autre fréquentielle, sont généralement employées. L'inconvénient de celles-ci réside dans le fait que la signification physique du modèle simplifié n'existe généralement plus et l'utilisation du modèle pour construire des commandes s'avère délicate.

##### - Approche fréquentielle

L'approche fréquentielle se fait en général à l'aide de l'opérateur de transfert. *Luse et Khalil (1985)*, *Luse (1986)*, donnent deux raisons importantes pour l'utilisation de cette approche. La première est que les méthodes d'analyse des systèmes dynamiques dans le domaine fréquentiel sont très employées. La seconde est que, puisque seul le comportement entrée-sortie est considéré, la description du système sous forme singulièrement perturbée n'est pas nécessaire. Ils obtiennent des modèles approximatifs et donnent quelques résultats garantissant leur stabilité.

Une première approche consiste à trouver un opérateur de transfert pour chaque domaine fréquentiel. Elle est bien sûr limitée aux systèmes linéaires. *Porter et Shenton (1975)* et *Fernando et Nicholson (1982)* mon-

trent que les opérateurs de transfert obtenus à partir de l'opérateur de transfert du système global sont ceux des sous-systèmes découplés à l'aide de la méthode des perturbations singulières sur le modèle d'état.

Une extension pour l'étude des systèmes en boucle fermée et la caractérisation des zéros peut être envisagée, semblable à celle employée dans l'espace d'état *Porter (1974), (1977a), (1977b), (1978)*.

*Fossard et Magni (1980)* font une analyse fréquentielle à l'aide de la représentation d'état pour les systèmes singulièrement perturbés avec une commande en état ou en sortie.

Les approximations de type "Padé" consistent à tronquer le développement en fractions continues de l'opérateur de transfert. La méthode de *Routh Hutton et Friendland (1975)* conserve les premiers éléments du tableau de Routh, ce qui garantit la stabilité du système réduit si le système initial est stable. Elle fournit une bonne approximation pour les hautes fréquences. D'autres développements, tel que celui de *Cauer*, peuvent être appliqués. Ces méthodes ne sont pas générales et ne donnent pas toujours de bonnes approximations.

#### - Approche modale

Certaines techniques, telle la méthode des perturbations singulières que nous explicitons dans le paragraphe suivant, sont basées sur une décomposition du modèle global en deux sous-modèles, ou plus, en vue de la réduction d'ordre. L'approximation des dynamiques par le modèle d'ordre réduit dépend uniquement de ce partitionnement. *Litz et Roth (1981)*, par une approche modale, mesurent le degré de dépendance entre les variables d'état et les valeurs propres dominantes. Les valeurs propres dominantes sont obtenues en considérant leur valeur absolue mais aussi la commandabilité et l'observabilité, *Litz (1980a), (1980b)*.

#### - Symétrisation interne

Une méthode dite de réalisation uniformément équilibrée pour les systèmes linéaires a été introduite par *Moore (1981)*. Cette représentation est caractérisée par le fait que les grammians de commandabilité et d'observabilité sont égaux et diagonaux. Cette méthode permet de mesurer le "degré" de commandabilité et d'observabilité des différents composants du vecteur état. La réduction consiste à ne garder que les variables fortement

commandables/observables, c'est-à-dire celles associées aux fortes valeurs propres du grammian.

*Shokoohi et al. (1983)* précisent quelques propriétés de cette méthode. *Fernando et Nicholson (1982)* montrent que si le système d'état est équilibré, alors le système approximé à l'aide de la méthode des perturbations singulières, *Kokotovic et al. (1986)*, est aussi équilibré.

*Pernebo et Silverman (1982)* appliquent cette méthode aux systèmes continus et discrets et donnent quelques propriétés sur la stabilité. Une différence essentielle entre la méthode de symétrisation interne et d'autres méthodes est, qu'elle ne s'appuie aucunement sur les propriétés fréquentielles en vue de la réduction mais simplement sur une mesure de la commandabilité/observabilité.

#### - Méthode de Schur

Une nouvelle méthode pour la modélisation des systèmes à deux échelles de temps sous forme singulièrement perturbée est présentée par *Aldaheri et Khalil (1989)*. Celle-ci utilise une décomposition de Schur. Ils montrent que la forme singulièrement perturbée est obtenue par une transformation à l'aide d'une forme de Schur "ordonnée" suivie d'un conditionnement. Sous certaines conditions, le modèle final est formé, en ce qui concerne le système rapide, uniquement de variables contenues dans le modèle initial. Enfin, des conditions nécessaires et suffisantes sont données pour obtenir un modèle par simple permutation des variables initiales.

*Safonov et Chiang (1989)* proposent un algorithme générant les réalisations du modèle réduit de *Moore (1981)* sans nécessairement appliquer une réalisation équilibrée. L'algorithme utilise une décomposition de Schur. Celui-ci est stable et ne dépend pas de la faible commandabilité ou faible observabilité des variables dynamiques *Chow (1977)* contrairement à la méthode de Moore qui, à cause des erreurs de calcul numériques, peut être instable.

#### b) Méthodes de perturbation

La formulation mathématique de la plupart des phénomènes physiques conduit à la résolution d'équations pour lesquelles, on ne connaît pas en général, de solution analytique exacte. Lorsque l'on évalue les ordres de

grandeur des différents termes qui interviennent dans ces équations, on constate que certains sont négligeables devant d'autres. Ceci conduit parfois après simplification à une solution analytique du problème posé.

Le but des perturbations est de mettre en évidence ces termes, appelés paramètres de perturbations, conduisant à simplifier les modèles. Il est à noter qu'un paramètre petit n'a pas nécessairement des effets petits.

### - Perturbations régulières

Dans un système dynamique, nous pouvons parfois extraire deux sous-modèles faiblement couplés. Une application des perturbations régulières découple ces modèles en annulant certains petits coefficients. L'ordre du modèle est conservé.

Les équations de couplage sont de type :

$$(I.3.10) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, \varepsilon x_2, u) & x_1 \in \mathbb{R}^n \\ \dot{x}_2 = g(\varepsilon x_1, x_2, u) & x_2 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

ce qui donne quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$(I.3.11) \quad \begin{cases} \dot{x}_{1\ell} = f(x_{1\ell}, u) \\ \dot{x}_{2\ell} = g(x_{2\ell}, u) \end{cases}$$

Le système reste de dimension  $n + m$  mais il se découple en deux sous-systèmes indépendants.

Si  $f$  et  $g$  possèdent des propriétés de dérivabilité, un développement au voisinage de  $\varepsilon = 0$ , permet d'obtenir des solutions plus fines.

### - Perturbations singulières

Les méthodes de perturbations singulières ont reçu une attention particulière par les mathématiciens. Un premier objectif est la simulation, un autre très important étant la commande des systèmes, *Kokotovic et al.* (1986).

Le système est dit sous forme singulièrement perturbée s'il peut s'écrire :

$$(I.3.12a) \quad \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, \varepsilon, u, t) \quad x_1(t_0) = x_{10} \quad x_1 \in \mathbb{R}^n$$

$$(I.3.12b) \quad \varepsilon \dot{x}_2 = g(x_1, x_2, \varepsilon, u, t) \quad x_2(t_0) = x_{20} \quad x_2 \in \mathbb{R}^m$$

où le point désigne la dérivée par rapport au temps,  $f$  et  $g$  sont des fonctions supposées suffisamment différentiables compte tenu de leurs arguments  $x_1, x_2, \varepsilon, t, u$ . Le scalaire  $\varepsilon$  représente tous les petits paramètres.

$\varepsilon$  en général utilisé comme outil de modélisation n'est pas toujours facile à mettre en évidence. Les petits paramètres sont trouvés par des considérations physiques (rapport de 2 masses, 2 concentrations...).

Les paragraphes suivants feront l'objet d'une étude assez générale des méthodes de perturbations singulières.

### III.2.3 - Etude des systèmes singulièrement perturbés

La méthode des perturbations singulières s'utilise pour l'étude de nombreux systèmes dynamiques. Suivant le cas dans lequel on se place (système explicite, implicite, linéaire, non linéaire), une démarche rigoureuse existe pour faciliter la tâche d'analyse. Nous nous proposons d'explicitier quelques unes de ces démarches.

#### A - Systèmes non linéaires

##### a) Systèmes explicites

##### - Méthode analytique

Reprenons l'équation I.3.12).

Lorsque l'on introduit  $\varepsilon = 0$ , la dimension de l'espace d'état passe de  $n + m$  à  $n$  car l'équation différentielle I.3.12b) se dégénère en une équation algébrique, ou transcendente.

$$(I.3.13) \quad 0 = g(x_{1\ell}, x_{2\ell}, 0, u_\ell, t)$$

où l'indice  $\ell$  indique que les variables sont étudiées dans le cas où  $\varepsilon = 0$  ( $\ell$ , lent).

Le système est dit sous forme standard ou sous forme explicite si l'hypothèse suivante est vérifiée :

Hypothèse I.3.1 :

Dans le domaine d'étude, I.3.13) a  $k \geq 1$  racines réelles distinctes :

$$(I.3.14) \quad x_{2\ell} = \phi_{1\ell}(x_{1\ell}, u_\ell, t), \quad i = 1, \dots, k.$$

Cette hypothèse assure l'existence d'un modèle réduit bien défini correspondant à chaque racine de I.3.13).

Pour obtenir le  $i^{\text{ème}}$  modèle réduit, il suffit de substituer I.3.14) dans I.3.12) :

$$(I.3.15) \quad \dot{x}_{1\ell} = f(x_{1\ell}, \phi_{1\ell}(x_{1\ell}, u_\ell, t), 0, u_\ell, t) ; \quad x_{1\ell}(t_0) = x_{10}.$$

Ce modèle est parfois appelé modèle à état quasi-statique, car la variable  $x_2$  converge rapidement vers une racine de I.3.13) qui est la forme à état quasi-statique de I.3.12b).

Contrairement à la variable d'origine  $x_2$ , ayant comme condition initiale  $x_{20}$  à  $t_0$ , la variable d'état quasi-statique  $x_{2\ell}$  ne peut avoir une condition initiale  $x_{20}$ , et il peut y avoir une grande différence entre sa valeur initiale

$$(I.3.16) \quad x_{2\ell}(t_0) = \phi_{1\ell}(x_{1\ell}(t_0), u_\ell(t_0), t_0)$$

et la condition initiale  $x_{20}$ .  $x_{2\ell}$  ne peut donc pas être une approximation uniforme de  $x_2$ .

Au mieux, l'approximation

$$(I.3.17) \quad x_2 = x_{2\ell}(t) + O(\varepsilon)$$

sera vraie dans un intervalle qui exclut  $t_0$ , c'est-à-dire pour  $t \in [t_1, T]$  où  $t_1 > t_0$ . Par contre, la valeur initiale de  $x_{1\ell}$  sera  $x_{10}$  et

$$(I.3.18) \quad x_1 = x_{1\ell}(t) + O(\varepsilon)$$

est une approximation uniforme de  $x_1$  sur un intervalle  $[t_0, T]$  où  $x_{1\ell}$  existe.

L'approximation I.3.17), établit que pendant l'intervalle initial  $[t_0, t_1]$ , la variable  $x_2$  approche  $x_{2\ell}$  et que durant  $[t_1, T]$  elle reste proche de  $x_{2\ell}$ . En fait, ayant posé  $\varepsilon = 0$  dans I.3.12b), nous avons rendu la période transitoire nulle.

Posons

$$(I.3.19) \quad \varepsilon \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{d\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon}.$$

La nouvelle variable de temps est dilatée, c'est-à-dire, si  $\varepsilon$  tend vers 0,  $\tau$  tend vers l'infini pour des valeurs de  $t$  différentes de  $t_0$ .

Pendant que  $x_2$  et  $\tau$  changent presque instantanément,  $x_1$  reste à la valeur initiale  $x_{10}$  et  $u$  à  $u_0$ . Pour décrire l'évolution de  $x_2$  en fonction de  $\tau$ , nous utilisons l'équation dite de couche limite.

$$(I.3.20) \quad \begin{cases} \frac{dx_2}{d\tau} = g(x_{10}, x_2(\tau), u(t_0), 0, t_0) \\ x_2(\tau = 0) = x_{20} \end{cases}$$

Nous ajoutons alors la correction due à la couche limite.

$$(I.3.21) \quad x_2(t, \varepsilon) = x_{2\ell}(t) + x_2(\tau) - x_{2\ell}(t_0) + O(\varepsilon).$$

La validité des équations I.3.17), I.3.18) et I.3.21) dépend des propriétés de stabilité de I.3.20).

Hypothèse I.3.2 :

Le point d'équilibre  $x_2(\tau)$  de I.3.20) est asymptotiquement stable,  $x_2(\tau)$  part de  $x_{20}$ , et  $x_{20}$  appartient au domaine d'attraction du point d'équilibre  $x_{2\ell}(t_0)$ .



Si cette hypothèse est satisfaite, c'est-à-dire si

$$(I.3.22) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} x_2(\tau) = x_{2\ell}(t_0)$$

alors à partir d'un instant  $t_1 > t_0$ ,  $x_2$  sera proche de  $x_{2\ell}$ . L'intervalle  $[t_0, t_1]$  peut être rendu arbitrairement petit en choisissant  $\varepsilon$  suffisamment petit.

Hypothèse I.3.3 :

Les valeurs propres de  $\frac{\partial g}{\partial x_2}$  évaluées le long de  $x_{1\ell}(t)$ ,  $x_{2\ell}(t)$ ,  $u_\ell(t)$  pour tout  $t \in [t_0, T]$ , ont des parties réelles négatives plus petites qu'un nombre réel négatif fixé, c'est-à-dire :

$$(I.3.23) \quad \operatorname{Re} \lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\} \leq -c < 0.$$

Ces deux hypothèses définissent une propriété de forte stabilité du système de couche limite I.3.20). Un théorème dû à *Tikhonov (1952)* peut ainsi être déduit (*Hoppensteadt, 1971*)).

Théorème I.3.1)

Si les hypothèses I.3.2) et I.3.3) sont satisfaites, alors l'approximation I.3.18), I.3.21) est valide pour tout  $t \in [t_1, T]$  et il existe  $t_1 \geq t_0$  tq I.3.17) est valide pour  $t \in [t_1, T]$ .

- Interprétation géométrique

Un intérêt particulier apparaît pour l'analyse des systèmes singulièrement perturbés à l'aide des méthodes géométriques, *Sobolev (1984)*, *Marino et Kokotovic (1988)*, *Khorasani (1988)*, *Khorasani (1989)*, *Kokotovic et al. (1986)*.

Ces méthodes permettent de donner une interprétation géométrique du comportement\* à deux échelles de temps  $x_1(t, \varepsilon)$ ,  $x_2(t, \varepsilon)$  en tant que trajectoires de  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Un système d'équations plus simple est étudié :

$$(I.3.24) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, u, \varepsilon) & x_1 \in \mathbb{R}^n \\ \varepsilon \dot{x}_2 = g(x_1, x_2, u, \varepsilon) & x_2 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

où  $f$  et  $g$  ne dépendent plus de la variable  $t$ . L'élimination du temps  $t$  nous permet d'utiliser le concept d'espaces invariants.

- Mise en évidence des dynamiques

Les propriétés de conservation et d'équilibre deviennent évidentes lorsque le modèle est exprimé à l'aide de l'échelle de temps rapide pour  $\varepsilon = 0$ .

$$(I.3.25) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = 0 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = g(x_1, x_2, 0, u) \end{cases}$$

Indépendamment de  $u$ , les  $n$  états  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$  sont constants. Ceci exprime la propriété de conservation. En d'autres termes, donnant une valeur  $\bar{x}$  au vecteur  $x$ , le système évolue dans un espace de dimension  $m$ , appelé espace de conservation  $C(\bar{x})$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$ . A chaque valeur  $\bar{x}$  de  $x$ , un tel espace  $C(\bar{x})$  est associé pour lequel  $x$  est constant et égal à  $\bar{x}$ . Alors que  $C$  est indépendant de  $u$ , l'évolution de  $g$  sur  $C$  est commandée par  $u$ .

Une autre propriété de l'équation est que  $\frac{dx_2}{d\tau} = 0$  définit pour chaque  $u$  un espace d'équilibre continu  $E^u$ , de dimension  $n$ , transversal à chacun des espaces de la famille  $C$ . (Figure I.3.1).

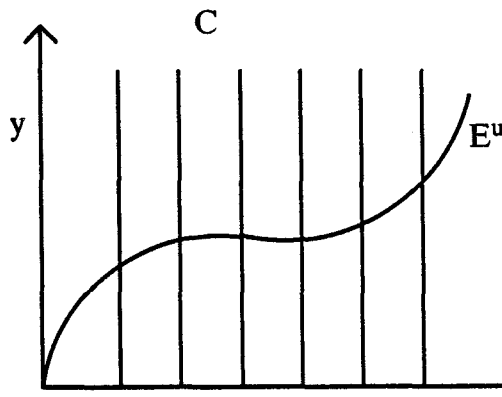


Figure I.3.1 : Représentation des espaces d'équilibre  $E^u$  et de conservation  $C$ .

Un intérêt particulier de ces considérations géométriques existe lorsque le système n'est pas sous forme standard. Une application sera présentée ultérieurement pour l'étude d'un bras manipulateur.

### Espaces invariants

Nous nous proposons d'exposer une méthode réduisant l'étude à un système d'ordre  $n$ , associé à l'espace d'équilibre ou espace invariant.

Dans l'espace d'état de dimension  $(n+m)$ , un espace  $M_\varepsilon$  de dimension  $n$ , dépendant du paramètre  $\varepsilon$ , peut être défini comme l'expression de  $x_2$ , fonction de  $x_1$ ,  $u$  et  $\varepsilon$ .

$$(I.3.26) \quad M_\varepsilon : x_2 = \Phi(x_1, u, \varepsilon) ; \quad x_1 \in \mathbb{R}^n, \quad x_2 \in \mathbb{R}^m.$$

$\Phi$  est supposée suffisamment continument différentiable en tant que fonction de  $x_1$ ,  $u$  et  $\varepsilon$ .

$M_\varepsilon$  sera un espace invariant de I.3.24), si l'expression I.3.26) est vraie pour tout  $t > t^*$  lorsqu'elle est vraie à  $t = t^*$ , c'est-à-dire :

$$(I.3.27) \quad x_2(t^*, \varepsilon) = \Phi(x_1(t^*, \varepsilon), u, \varepsilon) \Rightarrow x_2(t, \varepsilon) = \Phi(x_1(t, \varepsilon), u, \varepsilon) \quad \forall t \geq t^*.$$

Cet espace invariant existe si la matrice Jacobienne  $\left( \frac{\partial g}{\partial x_2} \right)_\varepsilon = 0$  est non singulière pour tout  $x$  et  $u$  étudiés.

$\Phi(x_1, u, \varepsilon)$  est déterminée en différentiant I.3.26) et en utilisant I.3.24) :

$$I.3.28) \quad \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} f(x_1, \Phi(x_1, u, \varepsilon), u, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial u} \dot{u} = g(x_1, \Phi(x_1, u, \varepsilon), u, \varepsilon).$$

Cette équation est appelée condition d'espace ("manifold condition").

$\Phi(x, u, \varepsilon)$  doit satisfaire cette équation différentielle pour tout  $x$  étudié et pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ ,  $\varepsilon^* > 0$ . Les dynamiques du système I.3.24) se réduisent au sous-système réduit lent et exact :

$$(I.3.29) \quad \dot{x}_1 = f(x_1, \phi(x_1, u, \varepsilon), u, \varepsilon) \quad x_1 \in \mathbb{R}^n$$

Pour  $\varepsilon = 0$ , un espace lent "non corrigé"  $M_0$  est défini par  $x_2 = \varphi_0(x_1, u_0)$ , de manière que  $g(x_1, \varphi_0(x_1, u_0), u_0, 0) = 0$ .  $M_0$  est l'espace d'équilibre. Le sous-système lent non corrigé est défini par l'équation :

$$(I.3.30) \quad \dot{x}_1 = f(x_1, \varphi_0(x_1, u_0(x_1))), u_0(x_1), 0).$$

Il est à remarquer que contrairement à l'équation I.3.30),  $M_\varepsilon$  défini par I.3.29) représente le modèle exact.

De nombreuses applications concernant la commande et l'étude de la stabilité ont été faites à partir du concept d'espaces invariants.

#### - Construction de modèles approximatés

Un développement en série de  $f$ ,  $g$ ,  $u$  et  $\phi$  autour de  $\varepsilon = 0$  dans l'équation I.3.28) permet de trouver  $\phi(x, u, \varepsilon)$  en égalisant les termes en facteur de même puissance de  $\varepsilon$ .

$$(I.3.31) \quad u(x_1) = u_0(x_1) + \varepsilon u_1(x_1) + O(\varepsilon^2).$$

$$(I.3.32) \quad \phi(x_1, u, \varepsilon) = \varphi_0(x_1, u_0) + \varepsilon \varphi_1(x_1, u) + O(\varepsilon^2).$$

En substituant I.3.31) et I.3.32) dans I.3.28), des solutions explicites pour  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  peuvent être obtenues.

$$(I.3.33) \quad \varphi_1(x_1, u) = \left( \frac{\partial g}{\partial x_2} \right)_{x_2 = \varphi_0}^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) f(x_1, \varphi_0, u_0, 0) - \frac{\partial g}{\partial u} u_1 - \left( \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right)_{z = \varphi_0} \right]$$

L'espace lent corrigé  $M_1$  est défini par  $x_2 = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1$ . C'est un espace plus proche de  $M_\varepsilon$  que  $M_0$  à l'erreur près  $O(\varepsilon)$ .

Le modèle lent corrigé au premier ordre est donc défini par :

$$(I.3.34) \quad \dot{x}_1 = f(x_1, \varphi_0(x_1, u_0(x_1)) + \varepsilon \varphi_1(x_1, u_0 + \varepsilon u_1), u_0 + \varepsilon u_1, \varepsilon).$$

De la même manière, il est possible d'obtenir des modèles plus précis à l'aide d'un développement à un ordre supérieur en  $\varepsilon$ .

b) Systèmes non explicites- Définition I.3.1)

On appelle systèmes non standards ou non explicites les systèmes pour lesquels l'hypothèse I.3.1) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire quand la Jacobienne  $\frac{\partial g}{\partial x_2}$  à  $\varepsilon = 0$  est singulière pour  $x_2 \in D$ ,  $D$  étant la région d'intérêt.

Dans ce cas, les échelles de temps ne sont pas explicites, c'est-à-dire qu'elles ne coïncident pas avec la décomposition du vecteur état  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , *Peponides et al. (1982)*. Des méthodes analytiques et numériques ont été développées par *O'Malley et Flaherty (1977), (1980)* pour ces systèmes appelés systèmes singuliers singulièrement perturbés.

Il apparaît que la singularité de  $\frac{\partial g}{\partial x_2}$  est souvent due à un mauvais choix des vecteurs état  $x_1$  et  $x_2$ . Le problème de modélisation consiste à trouver un choix "physique" des variables lentes et rapides qui élimine la singularité, *Marino et Kokotovic (1988)*.

Nous proposons par la suite une interprétation géométrique de la singularité. Les systèmes de puissance ainsi que le modèle d'un robot manipulateur à joint flexible caractériseront l'approche géométrique.

- Elimination de la singularité

Supposons le système non linéaire :

$$(I.3.35) \quad \varepsilon \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} = h(x, \varepsilon, u) \quad x \in \mathbb{R}^{n+m}$$

qui à l'échelle  $\tau$  pour  $\varepsilon = 0$  donne :

$$(I.3.36) \quad \frac{dx}{d\tau} = h(x, 0, u).$$

Pour ce système, on définit des propriétés d'équilibre et de conservation.

Espace S d'équilibre

L'ensemble  $S = \{x | h(x, 0, u) = 0, x \in D\}$  définit un espace différentiable de dimension  $\nu$ ,  $\nu \geq 1$ . C'est-à-dire qu'il existe une fonction continuellement différentiable  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , telle que  $\text{rang} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \rho$ ,  $\forall x \in D$  tq

$$(I.3.37) \quad \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(x, 0, u) = 0 \quad \forall x \in D.$$

Espace Dynamique F

Il existe une fonction continuellement différentiable  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tq

$$(I.3.38) \quad \text{rang} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) = \nu, \quad \forall x \in D$$

avec la propriété de conservation que le long de toutes les trajectoires de I.3.36) dans D

$$(I.3.39) \quad \sigma(x(\tau)) = \sigma(x(0)), \quad \forall \tau$$

c'est-à-dire que pour chaque  $\sigma(x(0))$ , I.3.39) définit un espace invariant F de I.3.36).

$$\text{De plus, } \text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \end{bmatrix} = n + m, \quad \forall x \in D.$$

Lemme I.3.1)

Si les propriétés de conservation sont vérifiées alors le changement de variable :

$$(I.3.40) \quad \begin{cases} x_1 = \sigma(x) \\ x_2 = \varphi(x) \end{cases}$$

transforme I.3.35) en I.3.24) avec  $\frac{\partial g}{\partial x_2} \Big|_{\varepsilon=0}$  non singulière, c'est-à-dire en un modèle explicite.

Si de plus, l'hypothèse I.3.3) est satisfaite pour le système transformé, alors :

$$(I.3.41) \quad x_1(t) = x_{1\ell}(t) + O(\varepsilon) \quad \text{et} \quad x_2(t) = x_{2r}(t/\varepsilon) + x_{2\ell}(t) + O(\varepsilon).$$

- Application

Le manipulateur :

Supposons un manipulateur simple consistant d'un moteur à courant continu, dont l'inertie du rotor est  $J_m$ , connecté à un bras rigide, de longueur unité, d'inertie  $J$ , et de masse  $M$ , à l'aide d'une boîte de vitesse.

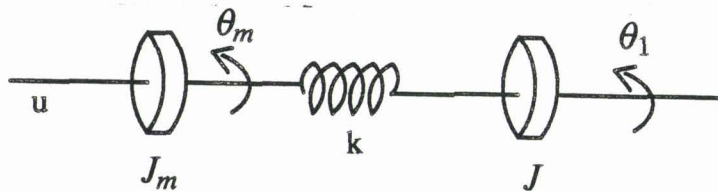


Figure I.3.2 : Manipulateur.

La flexibilité de l'arbre est modélisée par un ressort de torsion de rigidité  $k$ .

Les équations dynamiques sont :

$$(I.3.42) \quad \begin{cases} J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + Mg \sin \theta_1 + k(\theta_1 - \theta_m) = 0 \\ J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} - k(\theta_1 - \theta_m) = u \end{cases}$$

où  $\theta_1$  est l'angle du bras,  $\theta_m$  l'angle de l'arbre moteur et  $u$  le couple appliqué à l'arbre moteur.

Deux échelles de temps peuvent être mises en évidence lorsque la rigidité de l'arbre est élevée, c'est-à-dire si  $\varepsilon^2 = 1/k$  est petit.



Avec l'échelle de temps rapide  $\tau = t/\varepsilon$ , le système I.3.42) s'écrit :

$$(I.3.43) \quad \begin{cases} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} = -\varepsilon^2 \frac{Mg}{J_1} \sin \theta_1 - \frac{1}{J_1} (\theta_1 - \theta_m) \\ \frac{d^2\theta_m}{d\tau^2} = \frac{1}{J_m} (\theta_1 - \theta_m) + \frac{\varepsilon^2}{J_m} u \end{cases}$$

Il n'existe a priori ni de variable rapide, ni de variable lente. Les propriétés géométriques de ces équations vont pourtant nous permettre de mettre en évidence deux échelles de temps.

En posant  $\varepsilon = 0$  dans l'équation I.3.42), nous trouvons un espace d'équilibre défini par  $\theta_1 = \theta_m$ . Nous en déduisons que la variable définie par :

$$(I.3.44) \quad x_2 = \theta_1 - \theta_m$$

est une variable rapide.

En posant  $\varepsilon = 0$  dans l'équation I.3.43), une propriété de conservation est définie. Elle se traduit par le fait que la quantité de mouvement  $J_1 \frac{d\theta_1}{d\tau} + J_m \frac{d\theta_m}{d\tau}$  est constante.

La variable définie par :

$$(I.3.45) \quad x_1 = \frac{1}{J_1 + J_m} (J_1 \theta_1 + J_m \theta_m)$$

est une variable lente. Le coefficient multiplicateur  $\frac{1}{J_1 + J_m}$  est ajouté de façon à garder des variables ayant le même sens physique. Pour cet exemple, les variables sont des angles.

Les mêmes conclusions seraient obtenues en utilisant les équations d'état du système, avec les variables d'état  $\theta_1$ ,  $\frac{d\theta_1}{dt}$ ,  $\theta_m$ ,  $\frac{d\theta_m}{dt}$ .

Remarques

*Peponides et al. (1982), Kokotovic (1981), Peponides et Kokotovic (1983), Chow et Kokotovic (1983), Avramovic et al. (1980), Kokotovic et al. (1982)* montrent que les réseaux dynamiques (électriques) sont en général formés de sous-ensembles qui évoluent lentement mais dont les oscillations entre chacun de ces sous-systèmes sont rapides. Les modèles sont sous forme non explicites. Ils observent que pour ces systèmes dynamiques non linéaires, les espaces d'équilibre et dynamique sont linéaires. En conséquence, la transformation rendant les échelles de temps explicites est linéaire, c'est-à-dire que les changements de variables sont linéaires.

Une autre application de la notion d'espaces d'équilibre et dynamique est envisagée pour les chaînes de Markov, *Kokotovic (1981)*.

**B - Systèmes linéaires**

Les systèmes linéaires ne sont qu'un cas particulier des systèmes non linéaires. Toutes les méthodes vues précédemment sont donc applicables. Réciproquement, les systèmes non linéaires peuvent être linéarisés autour d'un point de fonctionnement et se réduisent donc à un système localement linéaire. Ainsi, la plupart des propriétés locales d'un système non linéaire se déduisent à l'aide de l'étude d'un système linéaire. Il paraît donc intéressant de développer la méthode des perturbations singulières pour les systèmes linéaires.

a) Equations d'état- Forme standard

Soit le système décrit par ses équations d'état et de sortie :

$$(I.3.46a) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u & x_1 \in \mathbb{R}^r & u \in \mathbb{R}^p \\ \varepsilon \dot{x}_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + B_2 u & x_2 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$$(I.3.46b) \quad y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \quad y \in \mathbb{R}^q.$$

Hypothèse I.3.4 :  $A_{22}$  est inversible.

Hypothèse I.3.5 : Les valeurs propres de  $A_{22}$  sont strictement négatives.

Si les deux hypothèses précédentes sont vérifiées, alors le système est dit sous forme standard ou explicite. Il comporte  $n$  petites valeurs propres et  $m$  grandes valeurs propres (en norme).

Une méthode d'étude sans approximation est celle de la bloc diagonalisation. L'inconvénient de cette méthode est que les variables d'état finales n'ont plus aucune signification physique. De plus, le calcul des matrices  $L$  et  $M$  peut s'avérer être compliqué.

La méthode des perturbations singulières se déroule en deux phases :

En appliquant  $\varepsilon = 0$  dans I.3.46), il vient :

$$(I.3.47a) \quad \begin{cases} \dot{x}_{1\ell} = A_{11} x_{1\ell} + A_{12} x_{2\ell} + B_1 u_\ell \\ 0 = A_{21} x_{1\ell} + A_{22} x_{2\ell} + B_2 u_\ell \end{cases}$$

$$(I.3.47b) \quad y_\ell = C_1 x_{1\ell} + C_2 x_{2\ell} .$$

L'indice  $\ell$  indique que les variables sont considérées dans leur évolution lente.

Il vient :

$$(I.3.48) \quad x_{2\ell} = -A_{22}^{-1} A_{21} x_{1\ell} - A_{22}^{-1} B_2 u_\ell$$

$$(I.3.49a) \quad \dot{x}_{1\ell} = A_0 x_{1\ell} + B_0 u_\ell \quad \text{avec } x_{1\ell}(t_0) = x_{10}$$

$$(I.3.49b) \quad y_\ell = C_0 x_{1\ell} + D_0 u_\ell$$

$$\text{avec } \begin{cases} A_0 = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} & B_0 = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 \\ C_0 = C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21} & D_0 = -C_2 A_{22}^{-1} B_2 \end{cases}$$

La seule dynamique est celle des variables  $x_{1\ell}$ . La composante  $x_{2\ell}$  des variables rapides  $x_2$  correspond à un régime quasi-permanent d'entraînement des variables rapides, après extinction des transitoires.

Le système d'ordre  $(n + m)$  se réduit à un système d'ordre  $n$ . Pour l'étude du transitoire rapide, on considère que les variables lentes sont constantes, c'est-à-dire  $x_1 = x_{1\ell} = x_1(0)$ .

En effet, si on dilate l'échelle des temps lente  $t$  pour obtenir une échelle des temps rapide  $\tau$ , telle que  $\tau = t/\varepsilon$  (exemple  $t$  en minutes,  $\tau$  en secondes,  $\varepsilon = 1/60$ ), alors le système I.3.46a) devient :

$$(I.3.50) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon (A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + B_2 u \end{cases}$$

Dans cette échelle,  $\frac{dx_1}{d\tau}$  est très faible, d'où l'approximation.

La variable rapide apparaît donc comme la superposition de deux composantes, que nous noterons  $x_{2\ell}$  et  $x_{2r}$ , avec  $x_{2r}$  définie par :

$$(I.3.51a) \quad x_{2r} = x_2 - x_{2\ell}$$

De même, on définit :

$$(I.3.51b) \quad \begin{cases} u_r = u - u_\ell \\ y_r = y - y_\ell \end{cases}$$

Le système rapide d'ordre  $m$  non corrigé écrit dans l'échelle de temps lente est :

$$(I.3.52a) \quad \varepsilon \dot{x}_{2r} = A_{22} x_{2r} + B_2 u_r \quad \text{avec } x_{2r}(t_0) = x_{20} + A_{22}^{-1} A_{21} x_{10}$$

$$(I.3.52b) \quad y_r = C_2 x_{2r}$$

Une approximation du modèle défini par l'équation I.3.43) est justifiée par le théorème suivant.

#### Théorème I.3.2 (Kokotovic et al. (1986))

Si  $\text{Re } \lambda(A_{22}) < 0$ , il existe  $\varepsilon^* > 0$  tq, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon^*]$ , les états du système original I.3.46), dont les conditions initiales sont quel-

conques  $x_{10}$  et  $x_{20}$ ,  $\|x_{10}\| \leq C_1$ ,  $\|x_{20}\| \leq C_2$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes indépendantes de  $\varepsilon$ , sont approximés pour tout temps fini  $t \geq t_0$  par :

$$(I.3.53) \quad \begin{cases} x_1(t) = x_{1\ell}(t) + O(\varepsilon) \\ x_2(t) = -A_{22}^{-1} A_{21} x_{1\ell}(t) + x_{2r}(\tau) + O(\varepsilon) \end{cases}$$

où  $x_1(t)$  et  $x_2(\tau)$  sont les états respectifs du modèle lent (I.3.49) et du modèle rapide (I.3.52). Si, de plus,  $\operatorname{Re} \lambda(A_0) < 0$  alors (I.3.53) est vrai pour  $t \in [t_0, \infty[$ .

De plus, la correction de couche limite  $x_{2r}(\tau)$  est significative seulement pendant un court instant initial  $[t_0, t_1]$ ,  $t_1 - t_0 = O(\varepsilon \ln \varepsilon)$ , après lequel  $x_2(t) = -A_{22}^{-1} A_{21} x_{1\ell}(t) + O(\varepsilon)$ .

Remarque :

Une autre approximation du système rapide peut être faite en considérant que  $x_{2r}(t_0) = x_{20}$  et

$$I.3.54) \quad x_2 \approx x_{2\ell}(t) + x_{2r}(\tau) - x_{2\ell}(t_0).$$

En général, le modèle approximé peut ne pas être suffisamment précis. Ainsi, le paramètre  $\varepsilon$  peut ne pas être petit et l'approximation  $\varepsilon = 0$  non justifiée. De même, des valeurs propres proches de l'axe imaginaire impliquent le besoin de plus d'informations au niveau de la stabilité du système. Enfin, une analyse plus précise du comportement quasi-permanent du système requiert un modèle plus précis.

Plusieurs façons d'obtenir un modèle corrigé existent.

Une première méthode employée par *Kokotovic (1975)* consiste à bloc-diagonaliser la matrice d'état. Cette bloc-diagonalisation se déroule en deux étapes (cf. § III.2.1). Elle requiert soit la résolution de deux équations algébriques entre matrices, soit la résolution de deux suites qui approximent la solution des deux équations algébriques.

La première suite est définie par :

$$(I.3.55) \quad \begin{cases} L_{k+1} = A_{22}^{-1} A_{21} + \varepsilon A_{22}^{-1} L_k (A_{11} - A_{12} L_k) \\ L_1 = A_{22}^{-1} A_{21} \end{cases}$$

Après  $k$  itérations,  $L_{k+1}$  converge vers  $L$  si  $\varepsilon$  est suffisamment petit et les matrices  $A_{ij}$  sont désormais définies par :

$$(I.3.56) \quad \begin{cases} A_{11}^k = A_{11} - A_{12} L_k \\ A_{21}^k = A_{21} - A_{22} L_k + L_k A_{11}^k \\ A_{22}^k = A_{22} + \varepsilon L_k A_{12} \\ A_{12}^k = A_{12} \end{cases}$$

La seconde suite est définie par :

$$(I.3.57) \quad \begin{cases} H_{j+1}^k = A_{12} (A_{22}^k)^{-1} + \varepsilon (A_{11}^k - H_j^k A_{21}^k) H_j^k (A_{22}^k)^{-1} \\ H_1^k = A_{12} (A_{22}^k)^{-1} \end{cases}$$

L'indice  $k$  correspond à l'indice d'arrêt du calcul de la suite définie par l'équation I.3.56). Après  $j$  itérations, nous obtenons :

$$(I.3.58) \quad \begin{cases} A_{11}^{kj} = A_{11}^k - H_j^k A_{21}^k \\ A_{12}^{kj} = A_{12} - H_j^k A_{22}^k + A_{11}^{kj} H_j^k \\ A_{21}^{kj} = A_{21}^k \\ A_{22}^{kj} = A_{22}^k + A_{21}^k H_j^k \end{cases}$$

Les matrices  $A_{12}^{kj}$  et  $A_{21}^{kj}$  sont bien entendu respectivement d'ordre  $O(\varepsilon^j)$  et  $O(\varepsilon^k)$  et peuvent donc être considérées comme étant nulles. Anderson (1978) a fait quelques remarques sur ces algorithmes de calcul des matrices  $A_{11}^{kj}$  et  $A_{22}^{kj}$ .

Kokotovic et al. (1980) présentent un autre algorithme de séparation des dynamiques en procédant à des changements de variables de façon récursive dans un premier temps sur les variables rapides et dans un deuxième temps sur les variables lentes. Un problème est que les nouvelles

variables gardent un sens physique mais ne sont plus directement rattachées à un élément constituant du système dynamique.

*Dauphin-Tanguy et Rotella (1988)* proposent une autre technique de découplage en vue de l'amélioration du critère de performance pour le problème de commande composite quasi-optimale.

En posant  $\varepsilon = 0$ , dans l'équation I.3.46), ils obtiennent le système lent défini par :

$$(I.3.59) \quad \begin{cases} \dot{x}_{1\ell} = A_\ell x_{1\ell} + B_\ell u \\ x_{1\ell}(0) = x_{10} \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} A_\ell = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \\ B_\ell = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 \end{cases}$$

La technique de découplage proposée suppose que  $x_{1\ell}$  est une approximation de  $x_1$  durant toute l'évolution du système dynamique, avec la même entrée  $u$  que dans le système initial.

Le système initial est approximé par :

$$(I.3.60a) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_{1\ell} \\ \varepsilon \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\ell & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\ell} \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\ell \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$(I.3.60b) \quad \tilde{y} = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_{1\ell} \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad x_{1\ell}(0) = x_{10} \quad \tilde{x}_2(0) = x_{20}$$

où le "~" indique que  $x$  est remplacé par  $x_{1\ell}$  dans l'équation I.3.46). Le découplage final consiste à bloc-diagonaliser la matrice d'état dans l'équation I.3.60a). La commande composite consiste à décomposer la commande en une partie lente et une partie rapide et à faire certaines hypothèses de leur influence respective sur les modèles lent et rapide.



- Forme non standard

En non linéaire, une caractérisation géométrique nous permet de mettre en évidence deux espaces invariants, correspondant à l'évolution des variables lentes et des variables rapides. Ces différentes variables ne sont en général pas directement déduites du vecteur état. Nous nous proposons d'appliquer la méthode géométrique pour les systèmes linéaires. Celle-ci a été appliquée par *Chow (1982)*, *Peponides et al. (1982)* et *Peponides et Kokotovic (1983)*.

Soit l'équation d'état, dans les deux échelles de temps,

$$(I.3.61) \quad \varepsilon \dot{x} = F(\varepsilon)x, \quad \frac{dx}{d\tau} = F(\varepsilon)x, \quad x \in \mathbb{R}^{n+m}$$

Si  $\det F(0) \neq 0$ , alors l'hypothèse I.3.4) est vérifiée et toutes les composantes de  $x$  sont rapides. Donc, l'existence de deux échelles de temps est liée à la nullité du déterminant de  $F(0)$ .

Notons  $F(\varepsilon) = F_0 + \varepsilon F_1(\varepsilon)$  et supposons que la dimension de l'espace nul de  $F_0$  est  $n$ . Une hypothèse importante est que l'espace image et l'espace nul de  $F_0$  forment une somme directe dans  $\mathbb{R}^{n+m}$ , c'est-à-dire :

$$(I.3.62) \quad \text{Im}(F_0) \oplus \text{Ker}(F_0) = \mathbb{R}^{n+m}.$$

Ceci implique que  $F_0$  a  $n$  valeurs propres nulles dans  $\text{Ker}(F_0)$  et  $m$  valeurs propres non nulles dans  $\text{Im}(F_0)$ . Par conséquent,  $\text{Ker}(F_0)$  est l'espace d'équilibre  $M_0$ .

Pour sélectionner une variable rapide  $x_2$ , nous choisissons  $m$  vecteurs indépendants dans  $\mathbb{R}^{n+m}$  orthogonaux à  $\text{Ker}(F_0)$  en les positionnant dans la matrice  $Q$  de dimension  $m \times (n+m)$ , de telle façon que :

$$(I.3.63) \quad Qv = 0 \Leftrightarrow F_0 v = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Ker}(F_0).$$

En particulier,  $Q$  peut être formée de  $m$  lignes indépendantes de  $F_0$ . La condition que  $x_2$  soit nulle sur  $M_0$  est satisfaite par le vecteur  $Q_v \in \mathbb{R}^m$  donc  $Q_v$  est candidate en tant que variable rapide  $x_2$ .

Pour sélectionner une variable lente  $x_1$ , nous recherchons une quantité constante dans I.3.61). Celle-ci est trouvée à l'aide d'une matrice  $P$  de dimension  $n \times (n+m)$  vérifiant  $PF_0 = 0$ . Donc pour  $\varepsilon = 0$ , nous avons :

$$(I.3.64) \quad P \frac{dx}{dt} = PF_0 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+m} .$$

Par conséquent, le vecteur  $Px \in \mathbb{R}^n$ , qui reste constant pour tout  $\tau \geq 0$ , est candidat en tant que variable lente.

Proposition I.3.1) (Kokotovic (1986))

Si  $F(0) = F_0$  satisfait I.3.62), alors le changement de variable :

$$(I.3.65) \quad \begin{cases} x_1 = Px \\ x_2 = Qx \end{cases} \quad T = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$$

transforme le système I.3.61) en

$$(I.3.66) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}(\varepsilon)x_1 + A_{12}(\varepsilon)x_2 \\ \varepsilon \dot{x}_2 = \varepsilon A_{21}(\varepsilon)x_1 + A_{22}(\varepsilon)x_2 \end{cases}$$

qui est sous forme explicite puisque  $A_{22}(0)$  est non singulière.

Une approche alternative est employée par *Coderch et al. (1983)* où le système n'est pas transformé en une forme singulièrement perturbée explicite. Une étude directe de  $\exp(A(\varepsilon)t)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  est faite et une approximation asymptotique uniforme de  $\exp(A(\varepsilon)t)$  est obtenue sous certaines conditions de stabilité.

*Khalil (1984)* propose un algorithme pour la décomposition du système initial en un ensemble de sous-systèmes indépendants à des échelles de temps différentes en assurant une approximation asymptotique uniforme de  $\exp(A(\varepsilon)t)$ .

Exemple (Peponides, Kokotovic, Chow (1982))

Soit le système électrique suivant, comportant 3 sources de courant, 3 éléments capacitifs  $C_1, C_2, C_3$  et 3 éléments résistifs  $R_1, R_2, R_3$ .

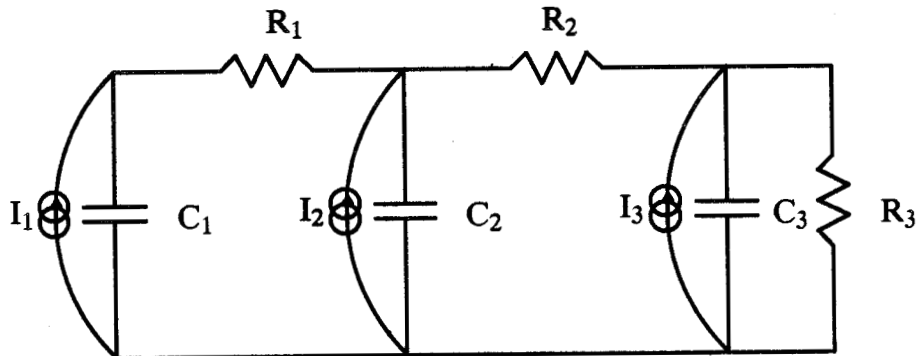


Figure I.3.3 : Réseau électrique.

Les équations d'état du système peuvent s'écrire avec l'échelle de temps rapide  $\tau$ ,

$$(I.3.67) \quad \begin{cases} R_1 C_1 \frac{dv_1}{d\tau} = -v_1 + v_2 + R_1 I_1 \\ R_1 C_2 \frac{dv_2}{d\tau} = v_1 - \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) v_2 + \frac{R_1}{R_2} v_3 + R_1 I_2 \\ R_1 C_3 \frac{dv_3}{d\tau} = \frac{R_1}{R_2} v_2 - \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right) v_3 + R_1 I_3 \end{cases}$$

où  $v_1, v_2, v_3$  sont les tensions aux bornes respectives de  $C_1, C_2, C_3$ .

Supposons que les amplitudes des éléments capacitifs sont du même ordre de grandeur et que  $R_1$  et  $R_2$  sont petites alors que  $R_3$  est grande, c'est-à-dire :

$$(I.3.68) \quad \begin{cases} R_1 = r \\ R_2 = r/2 \\ R_3 = R \\ \frac{r}{R} = \epsilon \end{cases}$$

L'équation I.3.67) peut s'écrire :

$$(I.3.69) \quad \frac{dx}{d\tau} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{rC_1} & \frac{1}{rC_1} & 0 \\ \frac{1}{rC_2} & \frac{-3}{rC_2} & \frac{2}{rC_2} \\ 0 & \frac{2}{rC_3} & \frac{-(2+\varepsilon)}{rC_3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \text{ avec } x = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Il n'existe a priori qu'une échelle de temps.

Si  $A(0)$  était régulière, alors toutes les variables dynamiques seraient rapides. Or  $A(0)$  est singulière. Il existe donc un phénomène lent. C'est la décharge lente des capacités à travers la résistance  $R_3$ .

Pour l'étude des phénomènes lent et rapide, nous écrivons l'équation I.3.69) pour  $\varepsilon = 0$  et recherchons une caractérisation des espaces image et nul de  $A(0)$ . Nous faisons l'hypothèse que  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ .

$$(I.3.70) \quad \frac{dx}{d\tau} = A(0)x + b(0) u.$$

La propriété de conservation exhibe la matrice  $P = [C_1, C_2, C_3]$ , telle que  $P \frac{dx}{d\tau} = 0$ .

La charge totale du système est conservée, c'est-à-dire :

$$(I.3.71) \quad C_1 v_1(\tau) + C_2 v_2(\tau) + C_3 v_3(\tau) = C_1 v_1(0) + C_2 v_2(0) + C_3 v_3(0).$$

La propriété d'espace d'équilibre exhibe les deux équations suivantes :

$$(I.3.72a) \quad v_1 - v_2 = R_1 I_1$$

$$(I.3.72b) \quad v_3 - v_2 = R_2 I_3$$

Notons  $C_a = C_1 + C_2 + C_3$  la capacité dite agrégée. Cette grandeur est introduite pour conserver le même sens physique des nouvelles variables dynamiques.

La variable lente du système est  $x_1$  et les variables rapides sont

$x_{21}$  et  $x_{22}$ , définies par :

$$(I.3.73a) \quad x_1 = \frac{C_1}{C_a} v_1 + \frac{C_2}{C_a} v_2 + \frac{C_3}{C_a} v_3$$

$$(I.3.73b) \quad \begin{cases} x_{21} = v_1 - v_2 - R_1 I_1 \\ x_{22} = v_3 - v_2 - R_2 I_3 \end{cases}$$

Le système d'équations obtenu à partir de ces nouvelles variables sera explicite. Il contient deux échelles de temps.

#### b) Systèmes à fréquences élevées

Les systèmes oscillants sont en général représentés par des équations différentielles du second ordre. Dans cette catégorie entrent les systèmes mécaniques et électromécaniques. Ils comportent, en général, des oscillations à haute fréquence. Une représentation d'état exhibe une matrice d'état dont les valeurs propres ont une partie réelle faible et une partie imaginaire grande. En général, l'amplitude des oscillations à haute fréquence est faible, et leur effet est négligeable. Cela conduit à des problèmes appelés raides. Il est montré que les techniques des perturbations singulières peuvent être appliquées pour ce genre de problème *Chow, Allemong et Kokotovic (1972)*.

L'approche consiste à décomposer un système comportant des oscillations à hautes fréquences en deux sous-systèmes séparés, l'un comportant les dynamiques lentes, et l'autre comportant les modes oscillatoires élevés. La décomposition proposée conserve le sens physique des variables dynamiques.

Supposons le système d'équations différentielles du second ordre :

$$(I.3.74) \quad \ddot{s} + P \dot{s} = Q s = 0 \quad \dot{s}(t_0) = \dot{s}_0 \quad s(t_0) = s_0$$

caractérisé par les relations suivantes :

$$(I.3.75) \quad s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2/\varepsilon^2 \\ Q_3 & Q_4/\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre positif dû à la présence de ressorts rigides ou de petites masses, et est responsable des oscillations à hautes fréquences dans I.3.74).

- Séparations par l'équation d'état équivalente

Le système I.3.75) peut être écrit sous la forme d'un système singulièrement perturbé d'équations différentielles du premier ordre :

$$(I.3.76) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 & x_1(t_0) = x_{10} \\ \varepsilon \dot{x}_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 & x_2(t_0) = x_{20} \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \dot{s}_1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2/\varepsilon^2 \\ \dot{s}_2/\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & I_d \\ -Q_1 & -P_1 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Q_2 & -\varepsilon P_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Q_3 & -P_3 \end{bmatrix} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I_d \\ -Q_4 & -\varepsilon P_4 \end{bmatrix}$$

$I_d$  est une matrice d'identité de dimension appropriée.

Les matrices  $A_{ij}$  n'ont pas obligatoirement la forme restrictive présentée dans l'équation I.3.76) mais la seule contrainte est qu'elles vérifient les hypothèses suivantes :

Hypothèse I.3.6 :

La norme des matrices  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$  est majorée autour de  $\varepsilon = 0$  et l'état  $x_2$  est de dimension paire, c'est-à-dire  $x_2 \in \mathbb{R}^{2m}$ .

Hypothèse I.3.7 :

La matrice  $A_{22}$  est de la forme :

$$(I.3.77) \quad A_{22} = \begin{bmatrix} \varepsilon D_1 & D_2 \\ D_3 & \varepsilon D_4 \end{bmatrix}$$

où  $D_2, D_3$  sont des matrices de dimension  $m \times m$ , non singulières et la matrice  $D_2 D_3$  a des valeurs propres simples négatives  $-\omega_i^2$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

L'hypothèse I.3.7) garantit l'existence de grandes oscillations.

Une bloc diagonalisation exacte peut être faite. Un modèle plus simple est obtenu en négligeant les termes en facteur de  $\varepsilon$ .

Le sous-système lent s'écrit :

$$(I.3.78) \quad \begin{cases} \dot{x}_{1\ell} = A_{0\ell} x_{1\ell} & x_{1\ell}(t_0) = x_{10} \\ \dot{x}_{2\ell} = -A_{22\ell}^{-1} A_{21} x_{1\ell} \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad A_{0\ell} = A_{11} - A_{12} A_{22\ell}^{-1} A_{21} \quad A_{22\ell} = \begin{bmatrix} 0 & D_2 \\ D_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Le sous-système oscillatoire s'écrit :

$$(I.3.79) \quad \varepsilon \dot{x}_{2r} = A_{22r} x_{2r} \quad x_{2r}(t_0) = x_{20} + A_{22\ell}^{-1} A_{21} x_{10}$$

$$\text{avec} \quad A_{22r} = A_{22} = \begin{bmatrix} \varepsilon D_1 & D_2 \\ D_3 & \varepsilon D_4 \end{bmatrix}$$

Les  $n$  valeurs propres du système I.3.78) sont lentes. Elles contribuent à la dynamique lente du système. Les grandes parties imaginaires des  $2m$  valeurs propres sont responsables des hautes fréquences alors que leur partie réelle constitue l'enveloppe de ces fréquences oscillatoires.

#### Théorème I.3.3) (Chow et al. (1978))

Si le système initial I.3.76) vérifie les hypothèses I.3.6) et I.3.7), alors il existe un temps fini  $T(\varepsilon)$  tel que les états de I.3.67) sont approximés à  $O(\varepsilon)$  par les sous-systèmes I.3.78) et I.3.79) pour  $t_0 \leq t \leq T$ , c'est-à-dire :

$$(I.3.80) \quad \begin{cases} x_1(t) = x_{1\ell}(t) + O(\varepsilon) \\ x_2(t) = x_{2\ell}(t) + x_{2r}(t) + O(\varepsilon) \end{cases}$$

- Systemes purement oscillants

Le modèle simplifié consiste en un système oscillatoire pur, la matière P dans l'équation I.3.74) étant nulle.

Les techniques des perturbations singulières sont directement applicables sur les équations différentielles du second ordre.

Le sous-système lent, c'est-à-dire celui à fréquences faibles, est

$$(I.3.81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{s}_{1\ell} + (Q_1 - Q_2 Q_4^{-1} Q_3) s_{1\ell} = 0 \\ s_{1\ell}(t_0) = s_1(t_0) \\ \dot{s}_{1\ell}(t_0) = \dot{s}_1(t_0) \\ s_{2\ell} = -\varepsilon^2 Q_4^{-1} Q_3 s_{1\ell} \end{array} \right.$$

Le sous-système à fréquences rapides est :

$$(I.3.82) \quad \varepsilon^2 \ddot{s}_{2r} = -Q_4 s_{2r} \quad \begin{array}{l} s_{2r}(t_0) = s_2(t_0) + \varepsilon^2 Q_4^{-1} Q_3 s_1(t_0) \\ \dot{s}_{2r}(t_0) = \dot{s}_2(t_0) + \varepsilon^2 Q_4^{-1} Q_3 \dot{s}_1(t_0) \end{array}$$

Remarques :

Si  $Q_4$  n'est pas inversible, le système est sous forme non explicite. Des changements de variables sont nécessaires.

Les mêmes résultats sont obtenus en utilisant l'équation d'état déduite de I.3.74) avec  $P = 0$ . Il suffit pour cela de transformer I.3.81) en équation d'état et de comparer les résultats.

**C - Propriétés**

a) Stabilité

De nombreux auteurs ont étudié le problème de la stabilité des systèmes singulièrement perturbés *Saberi et Khalil (1984)* ; *Locatelli (1976)* ; *Kokotovic et Marino (1987)* ; *Khalil (1987)* ; *Kokotovic et al. (1986)*.

Les propriétés de stabilité asymptotique et exponentielle sont étudiées à l'aide des techniques de Lyapunov. Des fonctions dites "fonc-



tions de Lyapunov de type "quadratique" sont utilisées. Il est montré que la fonction de Lyapunov globale est la somme de deux fonctions obtenues sur 2 sous-systèmes découplés correspondant aux systèmes lent et rapide.

b) Commandabilité/observabilité des systèmes linéaires

Soit l'équation dynamique I.3.46).

Théorème I.3.4) (Kokotovic et Haddad (1975))

Si  $A_{22}^{-1}$  existe et si

$$(I.3.83a) \quad \text{rang} [B_\ell, A_\ell B_\ell, \dots, A_\ell^{n-1} B_\ell] = n$$

$$(I.3.83b) \quad \text{rang} [B_2, A_{22} B_2, \dots, A_{22}^{n-1} B_2] = m$$

alors il existe  $\varepsilon^* > 0$  tel que le système I.3.46) est commandable pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon^*]$ .

Il est à remarquer que si  $A_{22}$  est singulière, il existe  $K$  telle que  $A_{22} + B_2 K$  soit non singulière. La commandabilité du système n'est pas influencée par  $u = Kx + v$ , donc le théorème I.3.4) reste vrai même si  $A_{22}^{-1}$  n'existe pas en remplaçant  $A_{22}$  par  $A_{22} + B_2 K$  dans  $A_\ell$  et  $B_\ell$ .

Théorème I.3.5) (Kokotovic et Haddad (1975))

Si  $A_{22}^{-1}$  existe et si

$$(I.3.84a) \quad \text{rang} [C_\ell^t, A_\ell^t C_\ell^t, \dots, A_\ell^{n-1} C_\ell^t] = n$$

$$(I.3.84b) \quad \text{rang} [C_2^t, A_{22}^t C_2^t, \dots, A_{22}^{n-1} C_2^t] = m$$

alors il existe  $\varepsilon^* > 0$  tel que le système I.3.46) est observable pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon^*]$ .

Il est à remarquer qu'un système peut être commandable/observable pour  $\varepsilon > 0$  sans l'être pour  $\varepsilon = 0$ . Les théorèmes précédents ne sont donc pas assez généraux. *Chow (1977)* a introduit les propriétés de faible et forte commandabilité.

- Définition I.3.2 (Chow (1977))

Le système singulièrement perturbé I.3.46) est dit faiblement commandé s'il perd sa propriété de commandabilité quand les faibles connexions ou éléments parasites sont éliminés (c'est-à-dire pour  $\varepsilon = 0$ ).

Réciproquement ce système est dit fortement commandable s'il garde sa propriété de commandabilité pour  $\varepsilon = 0$ .

Un lien peut être fait avec les propriétés de commandabilité structurelle où un système est dit structurellement commandable s'il retrouve, ou garde, sa propriété de commandabilité lorsque l'on modifie la valeur numérique de certains éléments, c'est-à-dire lorsque l'on crée une perturbation.

Tout ceci reste vrai pour la propriété d'observabilité.

D - Application à la commande

Une application importante de la méthode des perturbations singulières est la commande des systèmes dynamiques. La commande dite optimale consiste à minimiser un critère quadratique qui fait en général intervenir la commande et la sortie du système.

Une autre méthode est la commande modale qui a pour objet de faire un placement de pôles.

L'application de ces méthodes sur des modèles complexes est difficile. C'est pourquoi, lorsque le système est écrit sous forme de modèles singulièrement perturbés, le problème de commande est en général séparé en deux sous-problèmes, l'un relatif au sous-système lent, l'autre au sous-système rapide.

Nous énonçons succinctement les méthodes d'application de ces commandes.

Théorème I.3.6) (Chow (1977))

Le système singulièrement perturbé I.3.46) est fortement commandable (observable) si les sous-systèmes I.3.49) (I.3.52)) sont commandables (observables).

Il est à noter que l'existence de valeurs propres faiblement commandables dans le système I.3.46) impose une commande à gain élevé d'ordre supérieur ou égal à  $1/\varepsilon$ . En pratique, ce genre de système est à proscrire. Des instabilités numériques peuvent apparaître.

Des études sur la commandabilité des systèmes à multi-paramètres ont été faites *Abed et Silva-Madriz (1987)*. *Sannuti (1977)* généralise les propriétés de *Chow (1977)* pour les systèmes linéaires dont les paramètres dépendent du temps, et à une certaine classe de systèmes non linéaires.

a) Commande par minimisation d'un critère de performance

*Chow et Kokotovic (1976)*, *Kokotovic et al. (1986)* ont fait une analyse des performances de commande pour les systèmes linéaires sous forme singulièrement perturbée. Ils montrent qu'il est possible de calculer une commande optimale pour chaque sous-système découplé et de considérer la somme des deux pour le système complet en gardant un critère de performance relativement bon. La commande est appelée commande composite quasi-optimale. Lorsque le système rapide est stable (ou devenu stable par retour d'état), la commande peut se faire uniquement sur la partie lente. C'est une commande réduite.

*Dauphin-Tanguy et Rotella (1988)* utilisent la même méthodologie et montrent qu'en modifiant légèrement la méthode de découplage, il est possible d'améliorer le critère de performance.

*Magni et Fossard (1982)* emploient une commande réduite avec des conditions d'application moins restrictives qui ont l'avantage d'être physiquement plus significatives que celles généralement mentionnées utilisant les concepts mathématiques des fonctions  $O(\varepsilon)$ .

*Ardema (1983)*, *Wilde et Kokotovic (1973)*, *Chow et Kokotovic (1978)*, *(1981)*, *Saberi et Sannuti (1987)* proposent pour certaines classes de systèmes dynamiques sous forme singulièrement perturbée des méthodes simplifiées de commande optimale.

Nous rappelons succinctement la méthode de minimisation de critère de performance employée par *Chow et Kokotovic (1976)*. Elle sera appliquée sur des exemples dans la troisième partie du rapport pour des systèmes linéaires modélisés par bond-graph.

- Commande optimale

Considérons le système :

$$(I.3.85) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \epsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ x(0) \\ y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

La commande optimale consiste à trouver une commande qui minimise l'indice de performance

$$(I.3.86) \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y^t Q y + u^t R u] dt \quad Q \geq 0, \quad R > 0.$$

La commande exacte est :

$$(I.3.87) \quad u = - R^{-1} B^t K x$$

où K est la solution de l'équation de Riccati :

$$(I.3.88) \quad KA + A^t K - KB R^{-1} B^t K + C^t C = 0.$$

La valeur optimale de l'indice de performance est définie par :

$$(I.3.89) \quad J_{op} = \frac{1}{2} x(0)^t K x(0).$$

- Commande composite quasi-optimale

Une première approche consiste à extraire deux indices de performance quadratique, un pour les variables lentes, l'autre pour les variables rapides. A l'aide des commandes optimales  $u_\ell$  et  $u_r$  des sous-systèmes lent et rapide, nous formons une commande composite  $u_c$  implémentée sur le système original.

$$(I.3.90) \quad u_c = u_\ell + u_r .$$

Nous séparons l'étude en deux parties appelées problème  $\ell$  et problème  $r$ .

### Problème $\ell$

Il faut trouver  $u_\ell$  de façon à minimiser :

$$(I.3.91) \quad J_\ell = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y_\ell^t Q y_\ell + u_\ell^t R u_\ell) dt, \quad Q \geq 0 \quad R > 0.$$

$J_\ell$  peut s'exprimer à l'aide de  $x_{1\ell}$  et  $u_\ell$ , soit :

$$(I.3.92) \quad J_\ell = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_{1\ell}^t C_\ell^t Q C_\ell x_{1\ell} + 2 u_\ell^t D_\ell^t Q C_\ell x_{1\ell} + u_\ell^t R_\ell u_\ell] dt$$

avec :  $R_\ell = R + D_\ell^t Q D_\ell.$

Si le triplet  $(A_\ell, B_\ell, C_\ell)$  est stabilisable détectable, alors l'équation I.3.93) a une unique solution  $K_\ell$  positive semi-définie et la commande optimale du système lent est  $u_\ell$  définie par l'équation I.3.94)

$$(I.3.93) \quad K_\ell A_{\ell\ell} + A_{\ell\ell}^t K_\ell - K_\ell B_\ell R_\ell^{-1} B_\ell^t K_\ell + C_{\ell\ell}^t C_{\ell\ell} = 0$$

avec

$$\begin{cases} A_{\ell\ell} = A_\ell - B_\ell R_\ell^{-1} D_\ell^t Q C_\ell \\ C_{\ell\ell}^t C_{\ell\ell} = C_\ell^t (Q - Q D_\ell R_\ell^{-1} D_\ell^t Q) C_\ell \end{cases}$$

$$(I.3.94) \quad u_\ell = - R_\ell^{-1} (D_\ell^t C_\ell + B_\ell^t K_\ell) x_{1\ell} .$$

### Problème $r$

Il faut trouver  $u_r$  de façon à minimiser :

$$(I.3.95) \quad J_r = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y_r^t Q y_r + u_r^t R u_r) dt.$$

Si le triplet  $(A_{22}, B_2, C_2)$  est stabilisable détectable, alors la commande optimale pour le système rapide vérifiant I.3.52) est :

$$(I.3.96) \quad u_r = -R^{-1} B_2^t K_r x_{2r}$$

où  $K_r$  est une matrice semi-définie positive obtenue par l'équation de Riccati

$$(I.3.97) \quad 0 = -K_r A_{22} - A_{22}^t K_r + K_r B_2 R^{-1} B_2^t K_r - C_2^t Q C_2 .$$

La commande composite est obtenue à l'aide de l'équation I.3.90) et en tenant compte de :

$$(I.3.98) \quad x_{2r} = x_2 - x_{2\ell}$$

et

$$(I.3.99) \quad u_c = -G X = -[G_1 \ G_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} G_1 = (I_d - R^{-1} B_2^t K_r A_{22}^{-1} B_2) R_{\ell}^{-1} (D_{\ell}^t C_{\ell} + B_{\ell}^t K_{\ell}) + R^{-1} B_2^t K_r A_{22}^{-1} A_{21} \\ G_2 = R^{-1} B_2^t K_r \end{cases}$$

L'indice de performance  $J_c$  est dans ce cas :

$$(I.3.100) \quad J_c = \frac{1}{2} x(0)^t P_c x(0)$$

où  $P_c$  est une matrice définie positive, solution de l'équation de Lyapunov

$$(I.3.101) \quad P_c (A-BG) + (A-BG)^t P_c = -G^t R^{-1} G - C^t Q C .$$

#### - Commande réduite

Elle consiste à calculer une commande optimale sur le système lent uniquement. La matrice  $G$  appelée  $G_R$  est obtenue en prenant  $K_r = 0$ .

L'indice de Performance est  $J_{cR}$ .

On admet en général que la partie rapide est bien amortie et de dynamique nettement supérieure à celle de la partie lente. Plus généralement, on admet qu'un retour d'état partiel est effectué sur la partie rapide et qu'une commande avec un critère quadratique  $J_{cR}$  est effectuée sur la partie lente. Il est important de noter que  $J_{cR}$  est assez proche de  $J_{op}$  (critère optimal) si les conditions initiales sur les variables rapides ne sont pas trop grandes par rapport à celles de variables lentes.

## b) Commande par placement de pôles

*Magni et Fossard (1982)* proposent une méthode de placement de pôles pour les systèmes linéaires sous forme singulièrement perturbée à l'aide du modèle mis sous forme bloc-triangulaire. Ils montrent qu'à l'aide de certaines hypothèses, le problème peut se ramener au placement des pôles des sous-systèmes lent et rapide. La première hypothèse est que le sous-système lent "étouffe" les signaux rapides et la deuxième est que le sous-système rapide peut être considéré comme une transmission directe vis-à-vis des signaux lents.

D'autres auteurs proposent des méthodes de commande composite pour la stabilisation ou le placement de pôles de certaines classes de systèmes dynamiques en utilisant leur propriété de forme singulièrement perturbée *Suzuki (1981)*, *Khalil (1987)*, *O'Reilly (1980)*.

### III.2.4 - Méthodes de Perturbation appliquées à la robotique

La conception des bras manipulateurs se fait de nos jours de telle façon que la masse de la charge est nettement supérieure à celle du bras lui-même. Ceci permet de diminuer les coûts lors de la commande ou d'améliorer la mobilité. Mais les bras légers ont des dynamiques beaucoup plus complexes, car ils introduisent une flexibilité distribuée le long de la structure mécanique. Le système obtenu est de dimension infinie. Le but est donc de conserver un nombre fini de modes du système dynamique en utilisant un critère d'erreur. *Krishnan et Vidyasagar (1988)* utilisent un critère de minimisation de la norme de Hankel pour mettre en évidence le nombre de modes nécessaires à la commande. *Hastings et al. (1987)* utilisent le critère de réalisation équilibrée.

*Khorrami et Özgüner (1988a),(1988b)*, *Siciliano et Book (1988)* utilisent la méthode des perturbations singulières. Ils peuvent ainsi séparer l'étude de la commande en deux parties. De plus, ils montrent que le système lent obtenu, est celui du système rigide, c'est-à-dire celui où la flexibilité des bras est négligée.

Une autre approche consiste à définir les espaces invariants *Khorrami et Özgüner (1988)*, *Siciliano et al. (1986)*.

Un autre problème très étudié est celui de la commande de bras manipulateurs rigides (non flexibles) dont les articulations sont flexibles.

Il a été montré que, dans ce cas, cette classe de systèmes non linéaires ne satisfait plus les conditions d'obtention d'un retour d'état statique non linéaire linéarisant et non interactif, *De Luca (1988)*.

Différentes méthodes, visant à mettre en évidence une dynamique rapide au niveau de l'articulation, ont permis de simplifier le problème de commande. *Ficola et al. (1983)*, *Marino et Spong(1986)*, *Spong et al.( 1987)*, *Khorasani et Spong (1985)*, *Marino et Kokotovic (1988)*.

Enfin, l'étude des bras manipulateurs flexibles, considérés comme des systèmes à paramètres distribués, a été effectuée par *Siciliano et Book (1988)* à l'aide des méthodes de perturbations singulières.

*Balas (1978)*, *(1982a)*, *(1982b)* utilise la méthode des perturbations singulières pour les systèmes à paramètres distribués de la même manière que pour les systèmes de dimension finie. *Lions (1978)* utilise quant à lui des méthodes asymptotiques plus générales. Leurs méthodes sont appliquées entre autres aux systèmes à diffusion de chaleur et les modèles de structures mécaniques flexibles (satellites).

#### A - Les manipulateurs à articulations flexibles

De récents travaux ont montré que l'applicabilité des algorithmes de commande qui supposent un modèle rigide pour le manipulateur est limitée pour les robots réels, ces derniers n'étant jamais parfaitement rigides. Par exemple, la plupart des robots sont commandés par des moteurs à courant continu ou non en série avec un réducteur de vitesse. En général, il en résulte une basse fréquence peu amortie dans la réponse en boucle ouverte du robot. Ceci impose des limitations au niveau de la bande passante de l'algorithme de commande supposant un modèle rigide, ainsi que des problèmes de stabilité.

Les concepts de linéarisation par retour, perturbations singulières, espaces invariants et commande composite, sont les mieux adaptés pour ce genre de problème, *Marino et Spong (1986)*.

Nous prenons l'exemple d'un bras manipulateur sur lequel le concept d'espaces invariants est utilisé (même manipulateur que dans l'exemple 1) *Khorasani et Spong (1985)*.



Exemple :

Cet exemple tient compte des frottements et du rapport de réduction au niveau du moteur.

En notant  $z = k(\theta_1 - \theta) = k(\theta_1 + 1/n\theta_m)$ ,

$B_1$  le frottement au niveau de la barre,

$B_m$  le frottement au niveau de l'arbre moteur,

$$(I.3.102a) \quad J_1 \ddot{\theta}_1 + B_1 \dot{\theta}_1 + Mg \sin \theta_1 + z = 0.$$

$$(I.3.102b) \quad J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m + \frac{1}{n} z = u.$$

Sachant que les variables rapides sont les forces élastiques aux joints, ainsi que leur dérivée par rapport au temps, les variables retenues pour la mise sous forme équation d'état seront  $x_{11} = \theta_m$ ,  $x_{12} = \dot{\theta}_m$ ,  $x_{21} = z$  et  $x_{22} = \dot{z}$  avec  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

A partir de I.3.102), il vient :

$$(I.3.103a) \quad \begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = -a_1 x_{12} - a_2 x_{21} + b_1 u \end{cases}$$

$$(I.3.103b) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \dot{x}_{22} = -a_3 x_{12} - a_4 x_{21} - \varepsilon a_5 x_{22} - a_6 \sin(\varepsilon^2 x_{21} - a_7 x_{11}) + b_2 u \end{cases}$$

$$\text{avec :} \quad a_1 = \frac{B_m}{J_m} \quad a_2 = \frac{1}{nJ_m} \quad a_3 = \frac{B_1}{nJ_1} - \frac{B_m}{nJ_m}$$

$$a_4 = \frac{1}{n^2 J_m} + \frac{1}{J_1} \quad a_5 = \frac{B_1}{J_1} \quad a_6 = \frac{Mg}{J_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{J_m} \quad b_2 = \frac{1}{nJ_m} \quad a_7 = \frac{1}{n}.$$

Le modèle rigide, ou modèle non corrigé, est obtenu en faisant  $\varepsilon = 0$ . L'espace lent non corrigé obtenu est défini par :

$$(I.3.104a) \quad \begin{cases} x_{21} = \frac{1}{a_4} [a_3 x_{12} + a_6 \sin(a_7 x_{11}) + b_2 u] \\ x_{22} = 0 \end{cases}$$

$$(I.3.104b) \quad \begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = -(a_1 + \frac{a_2 a_3}{a_4}) x_{12} - \frac{a_2 a_6}{a_4} + \sin(a_7 x_{11}) + (b_1 - \frac{a_2 b_2}{a_4}) u \end{cases}$$

Les variables rapides  $x_{21}$  et  $x_{22}$  ne sont pas directement liées à l'espace lent. Les variables rapides exactes se déplacent par rapport à cet espace. Cette déviation est représentée par deux nouvelles variables rapides  $\eta_1$  et  $\eta_2$ .

$$(I.3.105) \quad \begin{cases} \eta_1 = x_{21} - \frac{1}{a_4} [a_3 x_{12} + a_6 \sin(a_7 x_{11}) + b_2 u] \\ \eta_2 = x_{22} \end{cases}$$

La correction au premier ordre de ce système consiste à calculer  $\varepsilon \dot{\eta}_1$ ,  $\varepsilon \dot{\eta}_2$ , à annuler les termes en  $\varepsilon^2$  et calculer  $\eta_1$  et  $\eta_2$  en fonction de  $x_1$ ,  $x_2$  pour  $\varepsilon \dot{\eta}_1 = 0$  et  $\varepsilon \dot{\eta}_2 = 0$ .

Il vient :

$$(I.3.106) \quad \begin{cases} \eta_1 = -\varepsilon^2 (-1 + \varepsilon^2 \frac{a_2 a_3 a_5}{a_4^2})^{-1} \frac{a_5}{a_4} \Gamma = 0 \\ \eta_2 = \varepsilon (-1 + \varepsilon^2 \frac{a_2 a_3 a_5}{a_4^2})^{-1} \Gamma \end{cases}$$

$\Gamma$  est une fonction non linéaire de  $x_{11}$ ,  $x_{12}$  et  $u$ .

Or l'équation I.3.103a) ne dépend que de  $x_{21}$ , et  $\eta_1 = 0$ . La correction au premier ordre du sous-système lent est identique à celui du modèle rigide. Pour cette raison, il est nécessaire d'effectuer une correction au second ordre.

Remarque : Il peut être facilement montré que toutes les corrections d'ordre impair sont nulles.

La déviation des nouvelles variables rapides  $\eta_1$  et  $\eta_2$  par rapport à l'espace lent corrigé se traduit par :

$$(I.3.107) \quad \begin{cases} \eta_{1c} = \eta_1 + \varepsilon^2 \left( -1 + \varepsilon^2 \frac{a_2 a_3 a_5}{a_4^2} \right)^{-1} \frac{a_5}{a_4} \Gamma \\ \eta_{2c} = \eta_2 - \varepsilon \left( -1 + \varepsilon^2 \frac{a_2 a_3 a_5}{a_4^2} \right)^{-1} \Gamma \end{cases}$$

L'espace corrigé du second ordre est obtenu en éliminant les termes  $\varepsilon^3$ , et donc en faisant  $\varepsilon \dot{\eta}_{1c} = 0$  et  $\varepsilon \dot{\eta}_{2c} = 0$  et en calculant  $\eta_{1c}$ ,  $\eta_{2c}$  en fonction de  $x_1$ ,  $x_2$  et  $\varepsilon$ .

Les calculs étant assez complexes sont omis. Cette méthode utilisée par *Khorasani et Spong (1985)* semble donner de très bons résultats pour le calcul de la commande et au niveau de la précision de la dynamique du modèle. Il semble néanmoins que pour des modèles plus complexes, les calculs apparaîtront vite très compliqués.

*Spong et al. (1987)* ont utilisé le concept d'espace invariant pour le même modèle mais directement sur les équations différentielles du second ordre, donc à partir de la formulation Lagrangienne. Ils montrent que la stratégie de commande est la somme de la commande calculée pour le modèle rigide et d'une commande de correction tenant compte de la flexibilité.

En fait, ces deux stratégies sont identiques. Un calcul rapide montre que dans l'espace d'état, la correction au premier ordre sera toujours nulle et que la correction au second ordre sera équivalente à la correction au premier ordre pour le système écrit sous forme d'équation de Lagrange (équation différentielle du second ordre). Il paraît donc judicieux, pour ces systèmes dynamiques, d'utiliser directement la forme de Lagrange.

## B - Les manipulateurs à flexibilité distribuée

Les équations dynamiques du manipulateur flexible sont déduites de la méthode des modes supposés de Lagrange. Le modèle réduit est basé sur la

méthode des perturbations singulières, où les variables rapides sont les forces élastiques et leur dérivée *Siciliano et Book, (1982)*. Une commande composite est utilisée pour ce système.

Les équations de mouvement non linéaires, pour le manipulateur à  $n$  degrés de liberté comportant  $n$  bras flexibles utilisant l'approche de *Book (1984)* sont :

$$(I.3.108) \quad M(q, g) \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(q, \dot{q}) \\ f_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(q, \dot{q}, \delta, \dot{\delta}) \\ g_2(q, \dot{q}, \delta, \dot{\delta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec  $M$  matrice d'inertie ;

$q = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n)^t$  est le vecteur des variables articulaires ;

$\delta = (\delta_{11} \ \delta_{12} \ \dots \ \delta_{1m_1} \ \delta_{21} \ \dots \ \delta_{2m_2} \ \dots \ \delta_{nm_n})^t$  est le vecteur des variables de déformation ;

$f_1$  et  $f_2$  sont les vecteurs contenant les termes de gravitation (seulement  $f_1$ ), de Coriolis et centrifuges.  $f_1$  apparaît dans le modèle rigide ;

$g_1$  et  $g_2$  sont les vecteurs tenant compte des interactions entre les variables articulaires (et leur dérivée) et les variables de déformation (et leur dérivée) ;

$K = \text{diag} (k_{11} \ \dots \ k_{1m_1}, k_{21}, \dots, k_{2m_2} \ \dots \ k_{nm_n})$  est une matrice diagonale contenant les coefficients de raideur constants des ressorts de flexion ;

$u = (\tau_1, \dots, \tau_n)^t$  est le vecteur de commande des forces généralisées appliquées aux  $n$  articulations.

Etant donné que  $M$  est définie positive, elle peut être inversée :

$$(I.3.109) \quad M^{-1} = H = \begin{bmatrix} H_{11}[n \times n] & H_{12}[n \times m'] \\ H_{21}[m' \times n] & H_{22}[m' \times m'] \end{bmatrix}$$

où  $m' = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ .

L'équation I.3.108) s'écrit :

$$(I.3.110) \quad \begin{cases} \ddot{q} = -H_{11}f_1 - H_{12}f_2 - H_{11}g_1 - H_{12}g_2 - H_{12}K\delta + H_{11}u \\ \ddot{\delta} = H_{21}f_1 - H_{22}f_2 - H_{21}g_1 - H_{22}g_2 - H_{22}K\delta + H_{21}u \end{cases}$$

Ce système dynamique contient  $n+m'$  coordonnées généralisées mais seulement  $n$  commandes d'entrée. La synthèse d'une commande par retour d'état non linéaire n'est donc pas aussi simple que dans le cas d'un modèle rigide. Une méthode est d'ajouter des actionneurs le long de la structure *Balas (1978)*. Nous développons la méthode des perturbations singulières *Siciliano et Book(1988)* conduisant à une commande composite de ce genre de modèles dynamiques.

Il est possible d'utiliser la méthode de perturbations singulières directement sur l'équation I.3.90) en mettant en évidence un petit facteur  $\varepsilon$ , mais étant donné que la plupart des théorèmes sont connus pour les systèmes mis sous forme d'équations d'état, nous adopterons la deuxième solution, ce qui n'est évidemment pas indispensable.

Supposons que les ordres de grandeur des  $k_i$  sont comparables, c'est-à-dire :

$$(I.3.111) \quad k_i = k \tilde{k}_i \quad i = 1, \dots, m'.$$

Les nouvelles variables (forces élastiques) peuvent être définies par :

$$(I.3.112) \quad \zeta := k \tilde{K} \delta$$

$$\text{avec } \tilde{K} = \text{diag}(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_m).$$

En notant  $x_{11} = q$ ,  $x_{12} = \dot{q}$ ,  $x_{21} = \zeta$ ,  $x_{22} = \varepsilon \dot{\zeta}$  et  $\varepsilon^2 = 1/k$  et en utilisant I.3.110), l'équation d'état du système dynamique devient :

$$(I.3.113a) \quad \begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = -H_{11}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) f_1(x_{11}, x_{12}) - H_{12}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) f_2(x_{11}, x_{12}) \\ \quad - H_{11}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) g_1(x_{11}, x_{12}, \varepsilon^2 x_{21}, \varepsilon x_{22}) \\ \quad - H_{12}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) g_2(x_{11}, x_{12}, \varepsilon^2 x_{21}, \varepsilon x_{22}) \\ \quad - H_{12}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) z_1 + H_{11}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) u \end{cases}$$

$$(I.3.113b) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \varepsilon \dot{x}_{22} = -H_{21}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) f_1(x_{11}, x_{12}) - H_{22}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) f_2(x_{11}, x_{12}) \\ \quad - H_{21}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) g_1(x_{11}, x_{12}, \varepsilon^2 x_{21}, \varepsilon x_{22}) \\ \quad - H_{22}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) g_2(x_{11}, x_{12}, \varepsilon^2 x_{21}, \varepsilon x_{22}) \\ \quad - H_{22}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) x_{21} + H_{21}(x_{11}, \varepsilon^2 x_{21}) u \end{cases}$$

Les variables lentes sont  $x_{1i}$  ( $i = 1, 2$ ) et les variables rapides sont  $x_{2i}$  ( $i = 1, 2$ ). Le sous-système lent, correspondant au modèle rigide, est obtenu en faisant  $\varepsilon = 0$  dans I.3.113).

$$(I.3.114a) \quad \begin{cases} \dot{x}_{11\ell} = x_{22\ell} \\ \dot{x}_{12\ell} = M_{11}^{-1}(x_{11\ell}) [f_1(x_{11\ell}, x_{12\ell}) + u_\ell] \end{cases}$$

$$(I.3.114b) \quad \begin{cases} \dot{x}_{21\ell} = -H_{22}^{-1}(x_{11\ell}, 0) [H_{21}(x_{11\ell}, 0) f_1(x_{11\ell}, x_{12\ell}) + H_{22}(x_{11\ell}, 0) f_2(x_{11\ell}, x_{12\ell}) \\ \quad + H_{21}(x_{11\ell}, 0) g_1(x_{11\ell}, x_{12\ell}, 0, 0) \\ \quad + H_{22}(x_{11\ell}, 0) g_2(x_{11\ell}, x_{12\ell}, 0, 0) + H_{21}(x_{11\ell}, 0) u] \\ \dot{x}_{22\ell} = 0 \end{cases}$$

$f_1$  est donc exactement la fonction de  $q$  et  $\dot{q}$  apparaissant dans le modèle du bras rigide.

Pour obtenir le sous-système rapide, il suffit d'introduire l'échelle de temps rapide  $\tau = t/\varepsilon$  et de faire  $\varepsilon = 0$  dans les équations. Bien entendu,  $x_{11}$  et  $x_{12}$  n'ont pas de composantes rapides, c'est-à-dire  $x_{11r} = 0$ ,  $x_{12r} = 0$ .

. En notant  $x_{21r} = x_{21} - x_{21\ell}$ , et  $x_{22r} = x_{22} - x_{22\ell} = x_{22}$ , et sachant que  $g_1(x_{11}, x_{12}, 0)$  et  $g_2(x_{11}, x_{12}, 0, 0)$  sont nuls car par définition ces termes représentent des produits de  $x_{11}$  et/ou  $x_{12}$  avec des termes  $\varepsilon^2 x_{22}$  et/ou  $\varepsilon x_{22}$ , il vient :

$$(I.3.115) \quad \begin{cases} \frac{dx_{21r}}{d\tau} = x_{22r} \\ \frac{dx_{22r}}{d\tau} = -H_{22}(x_{11\ell}, 0)x_{21r} + H_{21}(x_{11\ell}, 0)(u - u_\ell) \end{cases}$$

Ce système est un système linéaire paramétrisé par les variables lentes  $x_{11\ell}$ . Une stratégie de commande peut être effectuée sur ces deux sous-modèles. Si le terme  $\varepsilon$  n'est pas suffisamment petit, la méthode d'espaces invariants peut être utilisée, *Siciliano, Book et De Maria (1986)*. Le désavantage de cette méthode est qu'elle nécessite de nombreux calculs formels et des dérivations sur des équations différentielles très non linéaires.

### C - Quelques remarques

Des travaux très intéressants ont été proposés pour résoudre les problèmes des flexibilités des bras manipulateurs, aussi bien en ce qui concerne la flexibilité localisée que la flexibilité distribuée. La première méthode, celle des perturbations singulières, semble performante lorsque deux ensembles de dynamiques bien distinctes sont mises en évidence. Une commande composite classique, *Kokotovic et al. (1986)* peut facilement être implantée.

La méthode des espaces invariants permet de garder un modèle de même dimension que celui du système rigide. L'avantage est que l'erreur peut être rendue aussi petite que l'on désire. L'inconvénient, très important, est qu'elle nécessite des calculs fastidieux tels que dériver des équations fortement non linéaires. Un logiciel de calculs formels semble nécessaire dans ce cas.

De plus, la formulation des équations dynamiques (*Lagrange, Hamilton, etc...*) introduit a priori des approximations sur les modes vibratoires des bras flexibles. Il semble donc important de prendre en compte les effets des modes élevés sur les modes lents dans les modèles retenus.

Dans cette partie, nous avons rappelé quelques méthodes de simplifications de modèles, ceci pour plusieurs domaines d'applications. Il nous a semblé préférable de ne s'intéresser qu'aux méthodes ayant un intérêt dans les parties suivantes du rapport.

Pour conclure, nous dirons que le terme  $\varepsilon$  introduit dans la méthode des perturbations singulières n'a pas forcément un sens physique. Il peut être introduit artificiellement et être proche de 1. Ceci est fréquent dans les modèles dynamiques d'avions par exemple *Calise, (1976)*. Les résultats obtenus sont relativement bons et ont surtout l'intérêt de simplifier les modèles en vue de calculs temps réels qui seraient, dans certains cas, impossibles avec les modèles complets.

## CONCLUSION

Un rappel succinct de certaines méthodes d'analyse et de mise en évidence de certaines propriétés des systèmes dynamiques a été fait à l'aide de la représentation d'état et de fonction de transfert, *Rosenbrock (1974)*.

Etant donné que la propriété de structure d'un système dynamique est fondamentale, nous avons rappelé quelques méthodes d'étude des propriétés structurelles, telles que la commandabilité et l'observabilité. Celles-ci sont en général basées sur les concepts de graphe de structure, *Lin (1974)*, ou de matrice de structure, *Shields et Pearson (1976)*.

Quelques méthodes d'étude des systèmes dynamiques à deux échelles de temps ont été présentées. Une attention particulière est apportée à la méthode des perturbations singulières qui consiste à réduire l'ordre du système tout en conservant une bonne approximation du système global. Deux points importants sont abordés. Le premier se traduit par la mise sous forme singulièrement perturbée du modèle et le second par l'utilisation de ce modèle en vue de la commande.

Ces notions seront reprises et adaptées aux modèles représentés par bond-graph.



## **CHAPITRE II**

### **LE BOND-GRAPH, LE BOND-GRAPH RECIPROQUE PROPRIETES STRUCTURELLES**

#### **SOMMAIRE**

I - LE BOND-GRAPH

II - LE BOND-GRAPH RECIPROQUE

III - PROPRIETES STRUCTURELLES DES SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES

## INTRODUCTION

Dans la première partie du rapport, nous avons rappelé quelques notions fondamentales sur la représentation des systèmes. La représentation d'état semble être en général un bon outil pour l'analyse des systèmes dynamiques. Une autre formulation, appelée modèle bond-graph, *Karnopp et Rosenberg (1975)*, est une étape intermédiaire entre la description physique d'un système dynamique et la phase de construction d'un modèle mathématique par représentation graphique des échanges de puissance entre les différents constituants du système.

Cependant, le modèle bond-graph d'un système peut être utilisé directement comme outil graphique pour l'analyse des propriétés du système dynamique. Pour cela, nous disposons de la causalité, qui exprime la relation de cause à effet entre les différents éléments et de la structure de jonction qui nous donne des renseignements primordiaux sur la structure du système.

Dans une première partie, nous rappelons succinctement quelques notions de la méthodologie bond-graph. Ensuite, nous définissons un nouvel outil appelé bond-graph réciproque qui se déduit graphiquement du modèle bond-graph. Il sera utilisé pour les découplages des dynamiques des systèmes multi-échelles de temps.

L'analyse des propriétés structurelles d'un système dynamique est particulièrement aisée à l'aide d'un modèle bond-graph, car ce dernier contient toutes les informations nécessaires pour une telle étude. L'objet de la troisième partie est de formuler les différentes méthodologies.

## I - LE BOND-GRAPH

### Introduction

La notion de bond-graph a été introduite par *Paynter (1961)* pour représenter les échanges de puissance entre les différents éléments d'un système. Cette méthode de représentation connaît actuellement un développement rapide car elle peut être utilisée dans de nombreux domaines physiques pour des buts divers.

*Karnopp et Rosenberg (1975), (1983)* ont introduit les éléments essentiels pour l'appréhension de cette méthode. Il serait trop long de présenter tous les travaux faits dans ce domaine. Une liste bibliographique très intéressante peut être trouvée dans *Bos et Breedveld (1985)*.

Nous pouvons remarquer qu'une nouvelle définition du bond-graph en tant que bond-graph généralisé est proposée par *Breedveld (1984)*.

Une présentation des différents éléments constituant un modèle bond-graph ainsi que la méthode de mise en équation fera l'objet de cette partie. La même formulation a été adoptée dans *Sueur et Dauphin (1989), (1990)*.

### I.1 - Modélisation par bond-graph

Un bond-graph est composé d'éléments de bases, associés aux portes I et C (stockage), R (dissipation),  $S_e$  et  $S_p$  (sources). Les éléments O, I, TF (transformateur) et GY (gyrateur) composent la structure de jonction, qui échange la puissance entre les différentes parties du système dynamique et qui doit satisfaire la conservation d'énergie.

La *Figure II.1.1)* représente la forme bloc-diagramme avec les différents vecteurs composant les variables bond-graph.

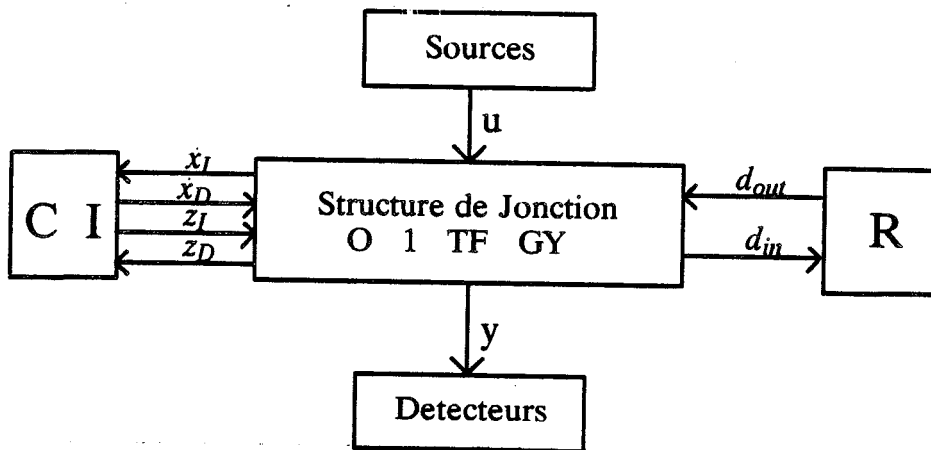


Figure II.1.1) Bloc-diagramme de la structure de jonction d'un modèle Bond-Graph.

## I.2 - Mise en équation

### a) Equation d'état

Le bloc-diagramme de la Figure II.1.1) est représenté par l'équation

$$(II.1.1a) \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ d_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & 0 & S_{33} & S_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_I \\ \dot{x}_D \\ d_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

$$(II.1.1b) z_D = -S_{12}^t z_I + G_1 u.$$

Les 0 dans la matrice de structure indiquent que les éléments résistifs ne sont pas directement causalement liés aux éléments en causalité dérivée, ce qui est toujours possible et que le vecteur de sortie ne s'exprime pas explicitement en fonction des variables associées aux éléments en causalité dérivée, ce qui est une hypothèse simplificatrice en général vérifiée.

Le vecteur  $x$  contient les variables d'énergie  $p$  (pour les éléments I) et  $q$  (pour les éléments C). Les indices I et D correspondent respectivement aux éléments en causalité Intégrale et en causalité Dérivée.

$$\begin{array}{lll} x_I \in \mathbb{R}^n & u \in \mathbb{R}^p & y \in \mathbb{R}^q \\ x_D \in \mathbb{R}^d & d_{in} \in \mathbb{R}^r & \end{array}$$

Nous avons les propriétés suivantes :

$$(II.1.2) \quad \begin{cases} S_{13} = -S_{21}^t \\ S_{11} = -S_{11}^t \\ S_{23} = -S_{23}^t \end{cases}$$

Les lois élémentaires associées aux composants sont :

$$(II.1.3) \quad \begin{cases} d_{out} = L d_{in} \\ z_I = F_I x_I \\ z_D = F_D x_D \end{cases}$$

$L$ ,  $F_D$  et  $F_I$  sont des matrices carrées, diagonales lorsque les multiports sont décomposés en ports simples.

$z_I$  et  $z_D$  sont les vecteurs associés aux variables de co-énergie.

$d_{out}$ , respectivement  $d_{in}$ , sont les vecteurs comportant les variables sortant, respectivement entrant, dans le champ résistif  $R$ .

Pour simplifier les calculs, nous supposons que  $G_1 = 0$ . Cette hypothèse signifie que les entrées ne sont pas directement causalement liées aux éléments en causalité dérivée. Dans le cas contraire, un système d'équations différentielles du premier ordre est obtenu, où la dérivée du vecteur entrée  $u$  apparaît. L'élimination de cette dérivée se fait par simple changement de variable.

Les équations d'état et de sortie déduites de II.1.1a) et II.1.1b) sont :

$$(II.1.4a) \quad \begin{cases} \dot{x}_I = A x_I + B u \\ \text{avec} \\ A = [I_d + S_{12} F_D^{-1} S_{12}^t F_I]^{-1} [S_{11} + S_{13} L (I_d - S_{23} L)^{-1} S_{21}] F_I \\ B = [I_d + S_{12} F_D^{-1} S_{12}^t F_I]^{-1} [S_{14} + S_{13} L (I_d - S_{23} L)^{-1} S_{24}] \end{cases}$$

$$(II.1.4b) \begin{cases} y = C x_I + D u \\ \text{avec} \\ C = [S_{31} + S_{33}L(I_d - S_{23}L)^{-1}S_{21}]F_I \\ D = [S_{34} + S_{33}L(I_d - S_{23}L)^{-1}S_{24}] \end{cases}$$

Le système d'état obtenu est modélisé dans la base  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ . D'autres formulations permettent de ne garder qu'une variété de variables.

Le vecteur d'état est décomposé en :

$$x_I = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

où  $p$  est le vecteur des variables  $p$ , et  $q$  le vecteur des variables  $q$ .

$$p \in \mathbb{R}^{m_1}$$

$$q \in \mathbb{R}^{m_2}$$

$$\text{avec } m_1 + m_2 = n.$$

Le vecteur d'entrée est décomposé en  $u = \begin{bmatrix} u_e \\ u_f \end{bmatrix}$ , où l'indice  $e$  est associé aux efforts et l'indice  $f$  aux flux.

L'équation d'état peut s'écrire :

$$(II.1.5) \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{pp} & A_{pq} \\ A_{qp} & A_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{pe} & B_{pf} \\ B_{qe} & B_{qf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e \\ u_f \end{bmatrix}$$

Les nouvelles matrices sont, bien entendu, obtenues à partir des matrices  $A$  et  $B$ .

D'autres formulations, déduites de cette équation, peuvent être développées, pour obtenir par exemple le modèle d'état dans l'espace de phase, comme il sera indiqué par la suite.

b) Equation différentielle du second ordre

A l'aide de l'équation II.1.5), nous pouvons obtenir deux équations différentielles du second ordre suivant le changement de variables effectué *Margolis et Young (1977)*.

Le premier consiste à introduire un vecteur de déplacement  $x$  défini par :

$$(II.1.6) \quad \dot{x} = M^{-1}p,$$

où  $M$  est la matrice de masse du système.  $M$  sera généralement égale à :

$$(II.1.7) \quad M = \left( F_I^{-1} + S_{12} F_D^{-1} S_{12}^t \right)_{pp}$$

où les matrices définissant  $M$  sont réduites au vecteur  $p$ .

$$(II.1.8) \quad M \ddot{x} + \bar{R} \dot{x} + \bar{C} x = \bar{B} \begin{bmatrix} \int u_e dt \\ \int u_f dt \end{bmatrix}$$

avec :

$$\bar{C} = [A_{pq} A_{qq} A_{pq}^{-1} A_{pp} - A_{pq} A_{qp}] M$$

$$\bar{R} = [-A_{pq} A_{qq} A_{pq}^{-1} - A_{pp}] M$$

$$\bar{B} = [B_{pe}, P_{pf}, B_{pq} (B_{qe} - A_{qq} A_{pq}^{-1} B_{pe}), A_{pq} (B_{qf} - A_{qq} A_{pq}^{-1} B_{pf})]$$

Une condition est que  $A_{pq}$  soit inversible. Si  $A_{pq}$  n'est pas carrée, alors  $A_{pq}^{-1}$  sera la pseudo-inverse de  $A_{pq}$ . Celle-ci n'existe pas nécessairement.

La deuxième méthode consiste à introduire un vecteur d'impulsion  $y$  défini par :

$$(II.1.9) \quad \dot{y} = K q$$

$K$  sera la matrice de raideur du système.  $K$  sera généralement égale à :

$$(II.1.10) K = \left( F_I^{-1} + S_{12} F_D^{-1} S_{12}^t \right)_{qq}^{-1}$$

où les matrices définissant  $K$  sont réduites au vecteur  $q$ .

Nous obtenons une équation différentielle semblable à la précédente.

### c) Equation de phase

A partir des équations différentielles du second ordre, nous pouvons aisément déduire une représentation dans l'espace de phase, en choisissant comme vecteurs état  $x$  et  $\dot{x}$ . Nous obtenons un système de dimension  $2m_1$ .

Une formulation analogue avec les vecteurs état  $y$  et  $\dot{y}$  donnera un système de dimension  $2m_2$ .

Nous avons présenté différentes formulations mathématiques de mise en équation à partir d'un modèle bond-graph linéaire. Celles-ci seront utilisées dans la suite du rapport. Nous supposons que le lecteur sait construire un modèle bond-graph et qu'il connaît les principes de la causalité.

## II - LE BOND-GRAPH RECIPROQUE

### Introduction

La notion de bond-graph réciproque a été introduite par *Dauphin Tanguy (1983)*, *Dauphin Tanguy, Borne et Lebrun (1985)*. Celle-ci, associée aux méthodes de perturbations singulières, permet d'obtenir une meilleure précision sur le système rapide.

*Sueur et Dauphin (1989)* ont proposé une définition plus générale. Celle-ci s'avère être un outil performant pour le découplage des systèmes dynamiques amortis.

Nous proposons dans cette partie de présenter les méthodes d'obtention du bond-graph réciproque ainsi que certaines de ses propriétés. Une généralisation aux systèmes non linéaires sera envisagée.



## II.1 - Bond-graph réciproque d'un système linéaire

### a) Définition des nouvelles variables

La transformation réciproque est un outil mathématique qui inverse les dynamiques non nulles d'un système. Elle a été présentée pour les modèles fréquentiels par *Hutton et Friedland, (1975)*.

#### Définition II.2.1)

Le signal réciproque de  $g(t)$  noté  $\tilde{g}(t)$  est caractérisé par sa transformée de Laplace  $\tilde{G}(s)$  obtenue de  $G(s)$  par la relation :

$$(II.2.1) \quad \tilde{G}(s) = \frac{1}{s} G\left(\frac{1}{s}\right)$$

où  $G(s)$  est la transformation de Laplace de  $g(t)$ .

A l'aide de cette définition, les variables réciproques des variables généralisées du bond-graph et leurs lois constitutives sont obtenues par

$$(II.2.2) \quad \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} p = \int edt \\ q = \int fdt \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathfrak{L}} \begin{array}{l} P(s) = \frac{1}{s} E(s) \\ Q(s) = \frac{1}{s} F(s) \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathfrak{R}} \begin{array}{l} \tilde{P}(s) = E(1/s) = s \tilde{E}(s) \\ \tilde{Q}(s) = F(1/s) = s \tilde{F}(s) \end{array} \\ \\ \left. \begin{array}{l} e = \frac{1}{c} \int fdt = \frac{q}{C} \\ f = C \dot{e} \\ f = \frac{1}{I} \int edt = \frac{p}{I} \\ e = I \dot{f} \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathfrak{L}} \begin{array}{l} E(s) = \frac{1}{s} \frac{F(s)}{C} = \frac{Q(s)}{C} \\ F(s) = sC E(s) \\ F(s) = \frac{1}{s} \frac{E(s)}{I} = \frac{P(s)}{I} \\ E(s) = s I F(s) \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathfrak{R}} \begin{array}{l} \tilde{E}(s) = \frac{s}{C} \tilde{F}(s) = \frac{1}{C} \tilde{Q}(s) \\ \tilde{F}(s) = \frac{s}{I} \tilde{E}(s) = \frac{1}{I} \tilde{P}(s) \end{array}$$

où  $\mathfrak{L}$  et  $\mathfrak{R}$  représentent respectivement la transformation de Laplace et la transformation Réciproque.

La *table II.2.1* rassemble les relations fondamentales du bond-graph et leur forme équivalente dans le bond-graph réciproque en introduisant les nouvelles variables réciproques comme :

$$(II.2.3) \quad \begin{cases} F = \tilde{p} & P = \tilde{f} & \tilde{r} = 1/r & \tilde{C} = 1/C & \tilde{R} = 1/R \\ E = \tilde{q} & Q = \tilde{e} & \tilde{g} = 1/g & \tilde{I} = 1/I & \tilde{G} = 1/G \end{cases}$$

Ces relations nous permettent de donner la définition suivante du bond-graph réciproque :

		Variables réciproques	Nouvelles variables réciproques
Jonction 0	$e_1 = e_2 = \dots = e_n$	$\tilde{p}_1 = \dots = \tilde{p}_n$	$F_1 = F_2 = \dots = F_n$
	$f_1 + f_2 + \dots + f_n = 0$	$\tilde{q}_1 + \dots + \tilde{q}_n = 0$	$E_1 + E_2 + \dots + E_n = 0$
Jonction 1	$f_1 = f_2 = \dots = f_n$	$\tilde{q}_1 = \dots = \tilde{q}_n$	$E_1 = E_2 = \dots = E_n$
	$e_1 + e_2 + \dots + e_n = 0$	$\tilde{p}_1 + \dots + \tilde{p}_n = 0$	$F_1 + F_2 + \dots + F_n = 0$
Elément C	$e = 1/C.q$	$\tilde{q} = C \tilde{e}$	$E = 1/\tilde{C}.Q$
	$f = C \dot{e}$	$\dot{\tilde{f}} = C \tilde{e}$	
Elément I	$f = 1/I.p$	$\tilde{p} = I \tilde{f}$	$F = 1/\tilde{I}.P$
	$e = I \dot{f}$	$\dot{\tilde{e}} = I \tilde{f}$	
Elément R	$e = R f$	$\tilde{p} = R \tilde{q}$	$E = \tilde{R} F$
	$f = G e$	$\tilde{q} = G \tilde{p}$	$F = \tilde{G} E$
Elément TF	$e_1 = r e_2$	$\tilde{p}_1 = r \tilde{p}_2$	$E_1 = \tilde{r} E_2$
	$f_2 = r f_1$	$\tilde{q}_2 = r \tilde{q}_1$	$F_2 = \tilde{r} F_1$
Elément GY	$e_2 = g f_1$	$\tilde{p}_2 = g \tilde{q}_1$	$E_1 = \tilde{g} F_2$
	$e_1 = g f_2$	$\tilde{p}_1 = g \tilde{q}_2$	$E_2 = \tilde{g} F_1$
Source d'effort	$S_e = e$	$\int \tilde{p} dt$	$\int F dt = S_f$
Source de flux	$S_f = f$	$\int \tilde{q} dt$	$\int E dt = S_e$

Table II.2.1 : Eléments bond-graph et bond-graph réciproque et relations fondamentales.

Définition II.2.2)

Supposons un modèle bond-graph acausal. Le bond-graph réciproque est caractérisé par :

- une structure de jonction duale du modèle initial,
- des éléments de module inversé,
- des sources et des détecteurs duaux.

b) Propriétés

Nous allons donner quelques propriétés concernant la structure de jonction du bond réciproque ainsi que des propriétés causales.

Soit le bond-graph du modèle initial sur lequel nous imposons la causalité intégrale.

Nous notons:

$x_D$  le vecteur comportant les éléments ayant une causalité dérivée.

$x_I = \begin{bmatrix} x_{I_1} \\ x_{I_2} \end{bmatrix}$  le vecteur comportant les éléments ayant une causalité intégrale.

$x_{I_1}$  est le vecteur état associé aux éléments restant en causalité intégrale lorsque la causalité dérivée est imposée sur le bond-graph.

Propriété II.2.1)

Un modèle bond-graph en causalité dérivée et son bond-graph réciproque en causalité intégrale ont la même matrice de structure de jonction, avec des vecteurs entrée et sortie duaux.

Cette propriété est directement déduite de la définition du bond-graph réciproque.

La *Table II.2.2* donnent quelques propriétés causales du bond-graph réciproque.

	Bond-graph initial	Bond-graph réciproque
Vecteur état	Causalité des éléments de stockage	
$x_{I_1} \in \mathbb{R}^t$	Intégrale	Dérivée
$x_{I_2} \in \mathbb{R}^{n-t}$	Intégrale	Intégrale
$x_D \in \mathbb{R}^d$	Dérivée	Intégrale

Table II.2.2 : Propriétés causales du Bond-Graph réciproque.

## II.2 - Mise en équation

Nous allons caractériser les équations dynamiques du système réciproque en fonction de celles du système initial. Certaines propriétés sont démontrées dans *Sueur et Dauphin (1990)*.

### Théorème II.2.1)

Soit un modèle bond-graph n'ayant pas d'éléments en causalité dérivée caractérisé par les équations :

$$(II.2.4) \quad \begin{cases} \dot{x}_I = A x_I + B u \\ y = C x_I + D u \end{cases} \quad \text{où } A \text{ est supposé inversible}$$

Les équations d'état et de sortie du bond-graph réciproque sont :

$$(II.2.5) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_I = \tilde{A} \tilde{x}_I + \tilde{B} \tilde{u} \\ \tilde{y} = \tilde{C} \tilde{x}_I + \tilde{D} \tilde{u} \end{cases}$$

où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{y}$  sont respectivement les vecteurs d'entrée et de sortie réciproques, et  $\tilde{x}_1$  le vecteur d'état réciproque, avec :

$$(II.2.6) \quad \begin{cases} \tilde{A} = F_I A^{-1} F_I^{-1} & \tilde{C} = C A^{-1} F_I^{-1} \\ \tilde{B} = -F_I A^{-1} B & \tilde{D} = D - C A^{-1} B \end{cases}$$

*Démonstration Annexe 1.*

Les valeurs propres de la matrice d'état réciproque  $\tilde{A}$  ont un module inverse des valeurs propres de la matrice d'état  $A$ .

Propriété II.2.2)

Soit un modèle bond-graph quelconque. Quelques propriétés des valeurs propres de la matrice d'état réciproque sont rassemblées dans la *Table II.2.3.*

	Bond-graph Initial		Bond-graph Réciproque	
$x_{I_1} \in \mathbb{R}^t$	$n=t+(n-t)$	$t$ valeurs propres nulles	$t$ équations algébriques	pas de dynamique
	différent.			
$x_{I_2} \in \mathbb{R}^{n-t}$	du premier ordre	$(n-t)$ v.p. non nulles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-t}$	$(n-t)+d$ équations différent. du	$(n-t)$ v.p. non nulles $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_{n-t}$
$x_D \in \mathbb{R}^d$	$d$ équations algébriques	pas de dynamique.	$1^{\text{er}}$ ordre	$d$ v.p. nulles

*Table II.2.3 : Propriétés dynamiques du bond-graph réciproque.*

Remarque :

La transformation réciproque peut être un moyen de calculer l'inverse d'une matrice.

Nous calculons la matrice de transfert du bond-graph réciproque pour A inversible et pour un modèle ne contenant pas de causalité dérivée.

$$(II.2.7) \quad \tilde{W}_r(s) = \tilde{C} \left( s I_n - \tilde{A} \right)^{-1} \tilde{B} + \tilde{D}$$

$$= \left( C A^{-1} F_I^{-1} \right) \left( s I_n - F_I A^{-1} F_I^{-1} \right)^{-1} \left( -F_I A^{-1} B \right) + D - C A^{-1} B.$$

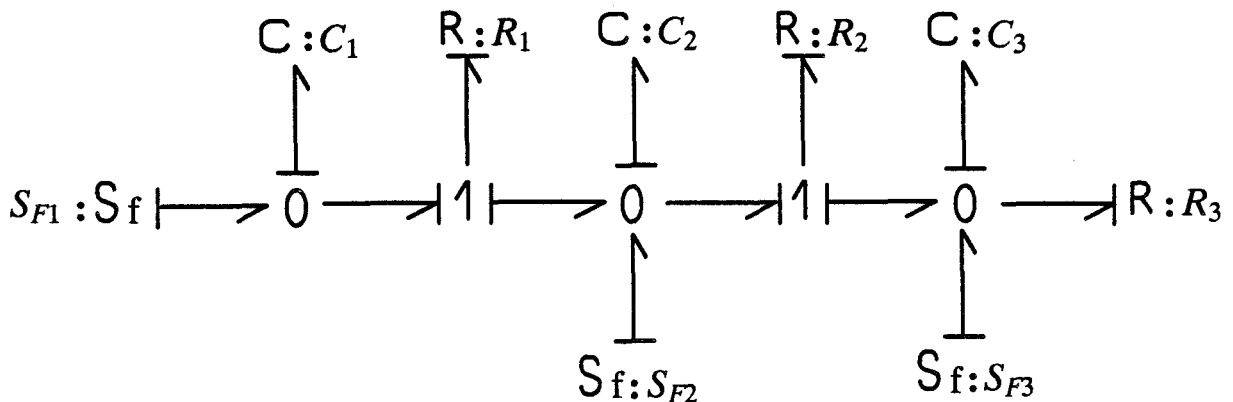
Après quelques calculs, nous avons :

$$(II.2.8) \quad \tilde{W}_r(s) = C \left[ \frac{1}{s} - A \right]^{-1} B + D.$$

Il apparaît que  $\tilde{W}_r(s) \neq \tilde{W}(s)$ . En fait,  $\tilde{W}_r(s) = s \tilde{W}(s)$ . Le coefficient s se justifie par le fait que le bond-graph réciproque contient des sources d'entrée en tant qu'intégrale de flux et d'efforts *Table II.2.1*.

Exemple :

Soit le bond-graph d'un réseau électrique, représenté sur la *Figure II.2.1*) :



*Figure II.2.1) : modèle bond-graph.*

Le bond-graph réciproque est représenté sur la *Figure II.2.2*).

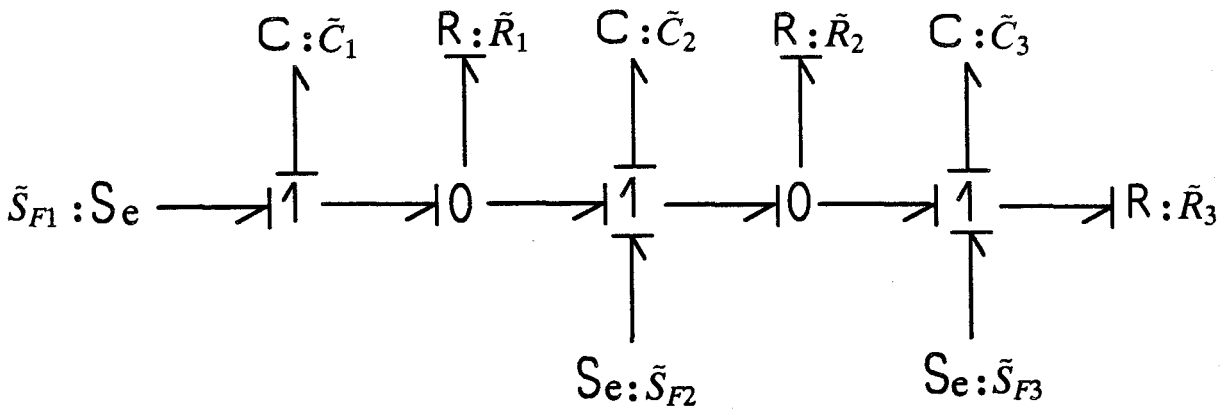


Figure II.2.2) : bond-graph réciproque.

avec :

$$\begin{cases} \tilde{C}_i &= 1/C_i \\ \tilde{R}_i &= 1/R_i \\ \tilde{S}_{F_i} &= \int S_{F_i} dt \end{cases}$$

### II.3 - Généralisation aux systèmes non linéaires

La transformation réciproque n'existe pas a priori pour les systèmes non linéaires étant donné que la fonction de transfert qui sert de point de départ pour la définition n'est pas définie.

Par contre, nous avons montré que cette transformation pouvait se généraliser à un système linéaire quelconque, ceci à l'aide d'un modèle bond-graph. Celle-ci peut se faire de manière graphique. Nous pouvons donc faire complètement abstraction de la définition initiale du système réciproque.

Nous dirons que le système réciproque est défini par son bond-graph réciproque. Il est donc possible d'étendre la définition aux systèmes non linéaires. Celui-ci n'étant qu'un intermédiaire dans le processeur d'étude du système dynamique (pour le découplage par exemple), le modèle mathématique n'a pas à être considéré. Les problèmes numériques associés à ce modèle n'existent donc pas.

Nous ne ferons l'étude de quelques systèmes non linéaires particuliers.

#### a) Non linéarité de la structure de jonction

Le cas le plus simple de non linéarité se traduit par la non

linéarité des éléments de la structure de jonction. Seuls les modules des transformateurs et gyrateurs sont non linéaires. De nombreux modèles de systèmes dynamiques entrent dans cette catégorie, par exemple les modèles de robots avec actionneurs électriques.

Pour ces systèmes, le bond-graph réciproque s'obtient de la même façon que pour les systèmes linéaires. Une attention particulière est à apporter lorsque les modules des transformateurs et gyrateurs s'annulent.

### b) Non linéarité des relations constitutives

Ces non-linéarités concernent les éléments de stockage d'énergie (I,C) et éléments dissipatifs R.

Nous avons par exemple les relations :

$$(II.2.9) \quad \begin{cases} f = h_1(p) \\ e = h_2(q) \\ f = R(e) \end{cases}$$

Une autre façon d'écrire ces relations est :

$$(II.2.10) \quad \begin{cases} f = \left( \frac{h_1(p)}{p} \right) \cdot p = \frac{p}{I} \\ e = \left( \frac{h_2(q)}{q} \right) \cdot q = \frac{q}{C} \\ f = \frac{R(e)}{e} \cdot e = \frac{e}{R} \end{cases}$$

Nous avons donc :

$$(II.2.11) \quad \begin{cases} I = \frac{p}{h_1(p)} \\ C = \frac{q}{h_2(q)} \\ R = \frac{e}{R(e)} \end{cases}$$

Bien entendu, ces relations ne sont pas définies pour  $h_1(p) = h_2(q) = R(e) = 0$ . Dans ce cas, certains flux  $f$  et efforts  $e$  sont nuls. Comme nous l'avons remarqué précédemment, nous ne nous intéressons pas aux problèmes numériques qui existent dans certains cas particuliers.



Le bond-graph réciproque sera défini à l'aide des nouveaux éléments :

$$(II.2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{I} = \frac{h_1(\tilde{p})}{\tilde{p}} \\ \tilde{C} = \frac{h_2(\tilde{q})}{\tilde{q}} \\ \tilde{R} = \frac{R(\tilde{e})}{\tilde{e}} \end{array} \right.$$

Nous ne développons pas plus cette partie. Il apparaît clairement que les relations entre les équations différentielles du système initial et du système réciproque ne sont pas immédiates. Néanmoins, lorsque seule la structure de jonction est non linéaire, il est possible de trouver une caractérisation semblable aux systèmes linéaires, si toutefois nous n'avons pas de causalités dérivées.

### III - PROPRIETES STRUCTURELLES DES SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES MODELISES PAR BOND-GRAPH

#### Introduction

Comme nous l'avons indiqué dans le précédent chapitre, il est souvent nécessaire de connaître certaines propriétés structurelles d'un système dynamique avant tout calcul numérique. Cette analyse fait partie intégrante de la conception de système.

Une remarque concernant les méthodes existantes tend à prouver que celles-ci ne sont pas forcément simples d'utilisation et surtout qu'elles perdent parfois certaines informations importantes. Ces informations sont perdues lors de l'écriture du graphe de structure (ou matrice de structure) représentant la structure du système. Ceci est dû au fait que la construction se fait en général à partir de l'équation d'état, qui n'explicite pas totalement toutes les relations constitutives du système étudié.

Les propriétés de la structure d'un modèle bond-graph ont fait l'objet de nombreuses études. Nous rappellerons les principales propriétés mises en évidence par différents auteurs.

Nous nous proposons d'utiliser le bond-graph en tant qu'outil pour l'étude des propriétés structurelles. Celui-ci s'adapte tout particulièrement bien à ce genre d'étude, car sa structure de jonction possède toutes les informations nécessaires à une analyse rigoureuse.

Les méthodes développées ont été présentées dans *Sueur et Dauphin Tanguy, (1989), (1990)*.

Nous faisons d'abord l'analyse du rang de la matrice d'état et de la matrice de structure de jonction. Nous définissons pour cela la notion de rang structurel d'une matrice. Nous en déduisons des conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité/observabilité structurelles. Nous montrerons que cette notion de propriété structurelle est plus précise que dans la littérature. Le rang structurel est pratiquement toujours égal au rang réel.

Dans un deuxième temps, nous montrerons que l'étude structurelle peut se faire directement sur le bond-graph, simplement à l'aide de manipulations causales.

Enfin, nous mettrons en évidence certains sous-espaces correspondant à la décomposition canonique de Kalman.

### III.1 - Quelques remarques

Deux approches intéressantes permettent d'étudier les systèmes linéaires. L'une est basée sur les techniques des graphes linéaires, l'autre sur les techniques bond-graph. Bien que ces deux approches soient conceptuellement indépendantes, celles sont très proches du point de vue méthodologie. *Bell et Martens (1974)* et *Perelson et Oster (1976)* ont fait une comparaison de ces deux méthodes.

Les techniques des graphes linéaires furent d'abord développées pour l'analyse des réseaux électriques. Un graphe linéaire orienté est extrait du modèle physique pour ne définir que la structure du système. Une différence substantielle entre la construction du bond-graph et celle du graphe linéaire réside dans le fait que le bond-graph représente le flux de puissance et non pas simplement la topologie du système.

Les bond-graphs sont toujours connectés alors que les graphes linéaires peuvent être composés de plusieurs parties. Il est possible de

convertir un graphe linéaire en un bond-graph. La transformation inverse est possible, néanmoins plus délicate, car le bond-graph contient les informations d'une manière plus condensée *Ort et Martens (1974)*. De plus, lorsqu'un système dynamique fait appel à deux domaines énergétiques différents, les graphes linéaires n'indiquent plus explicitement la structure du modèle.

*Karnopp (1988)* montre que la plupart des outils utilisés pour la représentation mathématique d'un système n'exhibe pas nécessairement les aspects structurels et que le bond-graph est particulièrement bien adapté pour cette finalité. Néanmoins, des modèles corrects peuvent avoir une structure obscure, par exemple l'oscillateur modélisé par deux capacités attachées à un multiport résistif à caractère gyroscopique, ou des structures semblant correctes qui sont fausses. La modélisation reste dans ce cas le travail le plus délicat.

L'étude des propriétés de la matrice de structure de jonction d'un modèle bond-graph s'est traduite par quelques articles.

*Ort et Martens (1973)* ont développé une méthode pour mettre en évidence la relation entre la topologie du bond-graph et les équations d'efforts et de flux décrivant les contraintes du système.

*Rosenberg et Moultrie (1980)* et *Moultrie (1979)* calculent le nombre de variables d'effort et de flux indépendantes devant être spécifiées pour une topologie donnée avant l'affectation de la causalité. Pour un système donné, il est possible de connaître le nombre de variables d'effort et de flux intervenant dans les relations entrée-sortie.

*Rosenberg et Andry (1979)* donnent des conditions de solvabilité, de la structure de jonction d'un bond-graph contenant des boucles. Ils utilisent pour cela la causalité et le concept de gain de boucle causale, à l'aide des règles de *Mason Brown (1972)*.

*Rosenberg (1979)* et *Breedveld (1984)* utilisent la structure de jonction d'un système et le concept de gyrateur essentiel pour savoir si un système dynamique est réciproque, c'est-à-dire s'il peut être décrit par une fonction de potentiel.

*Hogan et Fasse (1988)* associent les principes de conservation à la structure de jonction d'un bond-graph et montrent que, si le principe de

conservation est garanti pour l'énergie, il ne l'est pas nécessairement pour la charge, la quantité de mouvement, etc...

*Suda et Enoki (1981), (1986)* établissent les bases théoriques de la structure de jonction d'un bond-graph et introduisent les propriétés d'ir-réductibilité, de commandabilité/observabilité structurelles. Néanmoins, ces études sont faites pour des systèmes particuliers, monovariabiles. De plus, ils se basent sur des concepts graphiques peu simples à l'utilisation.

*Rosenberg (1987)* fait le bilan des méthodes de mise en évidence de propriétés d'un système grâce à la causalité du modèle bond-graph et montre qu'un pas important reste à franchir pour une exploitation plus judicieuse de celle-ci. Nous espérons que le travail présenté dans la suite du rapport apporte une contribution dans ce domaine de recherche.

### III.2 - Rang structurel de la matrice d'état

#### a) Définition du rang structurel

Jusqu'à maintenant, nous avons défini le rang, le rang générique et le term-rank d'une matrice. Il a été montré que le rang générique et le term-rank sont toujours supérieurs ou égaux au rang réel. Ceci tend à prouver que ces définitions ne sont pas suffisamment précises.

La structure de jonction d'un modèle bond-graph contient les informations sur le type des éléments constituant le système et sur la façon dont ils sont interconnectés, quelle que soit la valeur numérique des paramètres. C'est pourquoi nous pouvons l'utiliser pour caractériser les propriétés structurelles.

Nous proposons une nouvelle appellation : le rang "structurel". Celui-ci ne peut être obtenu que pour certaines matrices à l'aide d'un modèle bond-graph, grâce à des manipulations causales. Le terme structurel est associé au mot structure de jonction du bond-graph.

Nous montrons que le rang structurel est pratiquement toujours égal au rang réel.

Dans la suite, nous notons :

-  $t$  : le nombre d'éléments dynamiques restant en causalité intégrale lorsque la causalité dérivée est imposée sur le modèle bond-graph.

-  $t_s$  (resp.  $t_d$ ) : le nombre d'éléments dynamiques restant en causalité intégrale lorsque :

- (a) la causalité dérivée est imposée sur le modèle bond-graph,
- (b) une dualisation du nombre maximal de source d'entrée (resp. de détecteurs de sortie) est appliquée pour éliminer ces causalités intégrales.

Nous faisons deux hypothèses. La première n'est pas restrictive mais permet uniquement de simplifier les notations.

#### Hypothèse II.3.1)

Aucun élément en causalité dérivée n'est directement causalement lié avec les entrées ( $G_1 = 0$ ) et les sorties ( $S_{3_2} = 0$ ) dans le modèle initial.

#### Hypothèse II.3.2)

La structure de jonction linéaire est solvable, c'est-à-dire que les boucles disjointes et non disjointes sont solvables *Rosenberg et Andry (1979)*.

#### Définition II.3.1)

Le rang structurel d'une matrice  $M$  est défini comme le rang maximal de cette matrice en fonction des paramètres libres, en tenant compte des relations entre ces paramètres.

Nous notons struct-rang ( $M$ ).

b) Rang structurel de  $A$

#### Propriété II.3.1)

Le rang structurel de la matrice d'état  $A$  définie dans II.1.4) est égal à :

- le rang de la matrice ( $S_{11}, S_{13}$ ) défini dans II.1.1),
- $n-t$ .

*Démonstration Annexe 2.*

Remarque :

Si l'hypothèse II.3.2) n'est pas vérifiée, il faut garder plus d'éléments en causalité intégrale, comme le montre l'exemple suivant.

La Figure II.3.1a) représente le modèle bond-graph.

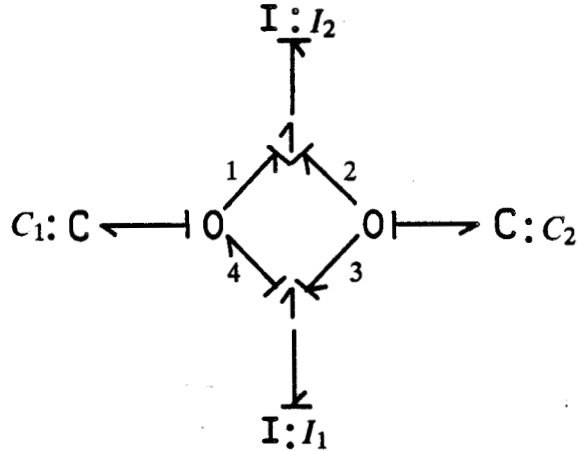


Figure II.3.1a) : modèle bond-graph.

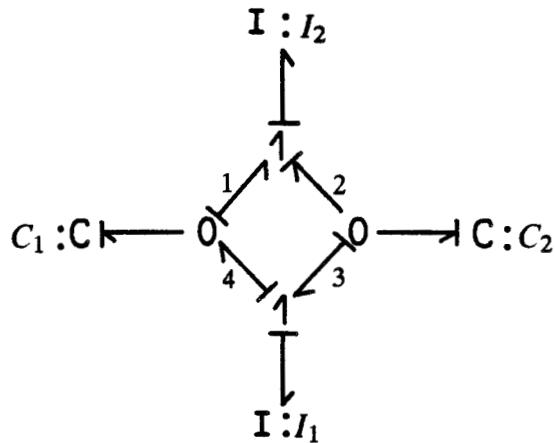


Figure II.3.1.b) : modèle bond-graph avec boucle algébrique non solvable.

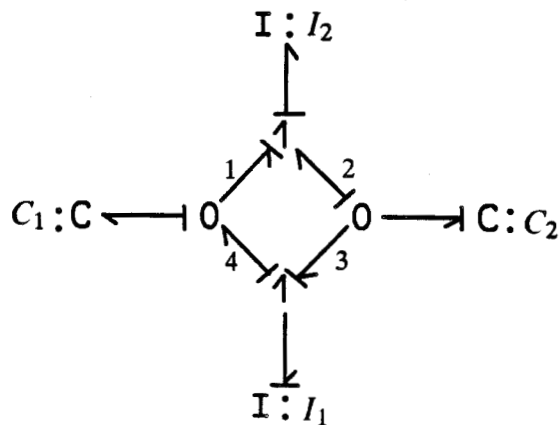


Figure II.3.1.c) : modèle bond-graph pour le calcul du rang de A.

La figure II.3.1.b) représente le même modèle pour lequel les éléments I et C ont une causalité dérivée. Une boucle algébrique (liens 1-2-3-4) est introduite, ayant un gain égal à 1, ce qui est une condition de non-solvabilité. Pour éliminer cette boucle, nous devons laisser la causalité intégrale sur les éléments  $C_1$  et  $I_1$ , *figure II.3.1.c*). Le rang structurel du système est donc égal à 2.

Dans la suite, nous supposons que les manipulations causales génèrent des modèles solvables.

### III.3 - Stabilité asymptotique

#### Propriété II.3.2)

Une condition suffisante de non-existence de stabilité asymptotique d'un système modélisé par bond-graph est que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit vérifiée.

- Il existe au moins une combinaison linéaire entre les lignes de  $(S_{11} S_{13})$ .
- Un élément dynamique, au moins, reste en causalité intégrale lorsque la causalité dérivée est imposée sur le modèle.

#### Remarque :

Ces deux conditions indiquent simplement une dégénérescence du rang structurel de la matrice d'état A, c'est-à-dire que A a au moins une valeur propre nulle.

### III.4 - Commandabilité/observabilité structurelle

Comme nous l'avons déjà remarqué, il existe plusieurs définitions concernant la commandabilité.

Nous développerons dans un premier temps des méthodes mathématique et graphique pour l'étude de la commandabilité en état, puis pour la commandabilité en sortie.

Le terme structurel n'est pas équivalent à celui employé avec la

méthode du graphe (ou matrice) de structure, car les définitions respectives du rang des matrices sont différentes.

Les notions d'atteignabilité en entrée et atteignabilité en sortie s'expriment sur le modèle bond-graph comme l'existence d'un chemin causal entre les éléments dynamiques (I et C en causalité intégrale) et les sources et détecteurs.

#### a) Propriétés dans l'espace d'état

##### Théorème II.3.1)

Le système  $[A \ B]$  est structurellement à état commandable ssi :

- a) tous les éléments dynamiques en causalité intégrale sont causalement connectés avec une source,
- b)  $\text{struct-rang } [A \ B] = n. \quad (\Leftrightarrow) \quad t_s = 0$

Ce théorème est simplement une reprise de la propriété I.2.1) donnant les conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité structurelle pour les systèmes représentés par les systèmes graphes adaptée ici pour les systèmes modélisés par bond-graph.

##### Théorème II.3.2)

Le système  $[A \ C]$  est structurellement à état observable ssi :

- a) tous les éléments dynamiques en causalité intégrale sont causalement liés à un détecteur,
- b)  $\text{struct-rang } \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = n. \quad (\Leftrightarrow) \quad t_d = 0$

Nous pouvons faire la même remarque que précédemment pour la propriété d'observabilité structurelle.

##### Remarque :

- Les conditions (a) des théorèmes précédents peuvent être simplifiées par : pour chaque sous-système indépendant, au moins un élément dynamique en causalité intégrale est causalement connecté à une source (un détecteur).



- Si deux chemins s'annulent entre eux, le test du rang structurel le détecte.
- Les variables dynamiques en causalité dérivée ne sont pas commandables *Rosenberg et Andry (1979)* et n'ont donc aucun intérêt dans cette étude.

Nous proposons une manipulation causale sur le modèle bond-graph de manière à déterminer directement le rang structurel des matrices  $[A \ B]$  et  $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ .

### Propriété II.3.3)

Le rang structurel de  $[A \ B]$  est égal :

- au rang de la matrice  $(S_{11} \ S_{13} \ S_{14})$ ,
- à  $(n-t_s)$ .

*Démonstration Annexe 3.*

### Propriété II.3.4)

Le rang structurel de  $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$  est égal :

- au rang de la matrice  $(S_{11}^t \ S_{21}^t \ S_{31}^t)$ ,
- à  $(n-t_d)$ .

*Démonstration similaire à celle de l'Annexe 3.*

Nous pouvons faire quelques remarques :

si le rang structurel de  $A$  est égal à  $n$ , alors une seule source (détecteur) est suffisante pour commander (observer) l'état du système (si elle est judicieusement positionnée).

- si le rang structurel de  $A$  est égal à  $n-t$ , ( $t > 0$ ), il vient immédiatement que  $t$  sources au moins (détecteurs) sont nécessaires pour commander (observer) l'état du système dynamique ( $t$  est suffisant si les éléments sont judicieusement placés).

b) Exemple

Considérons le modèle bond-graph de la *Figure III.3.2a*) où la causalité intégrale a été imposée :

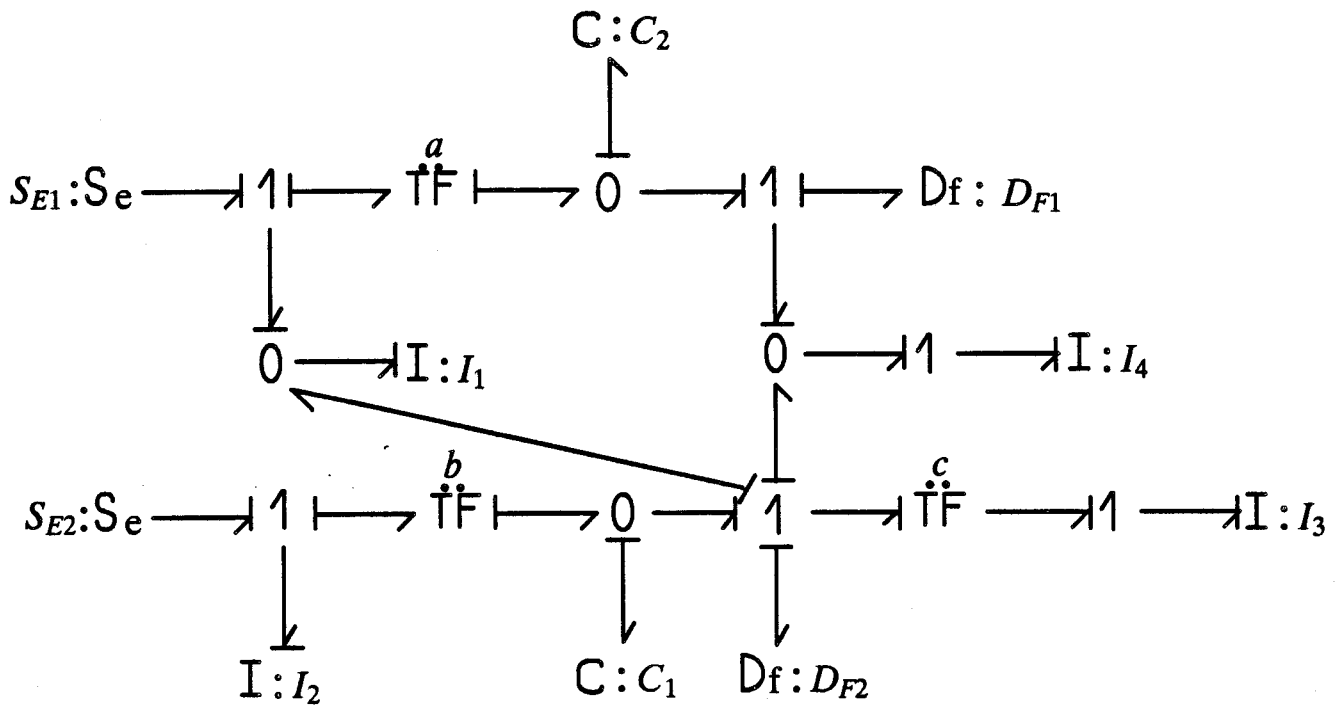


Figure II.3.2a) : modèle bond-graph en causalité intégrale.

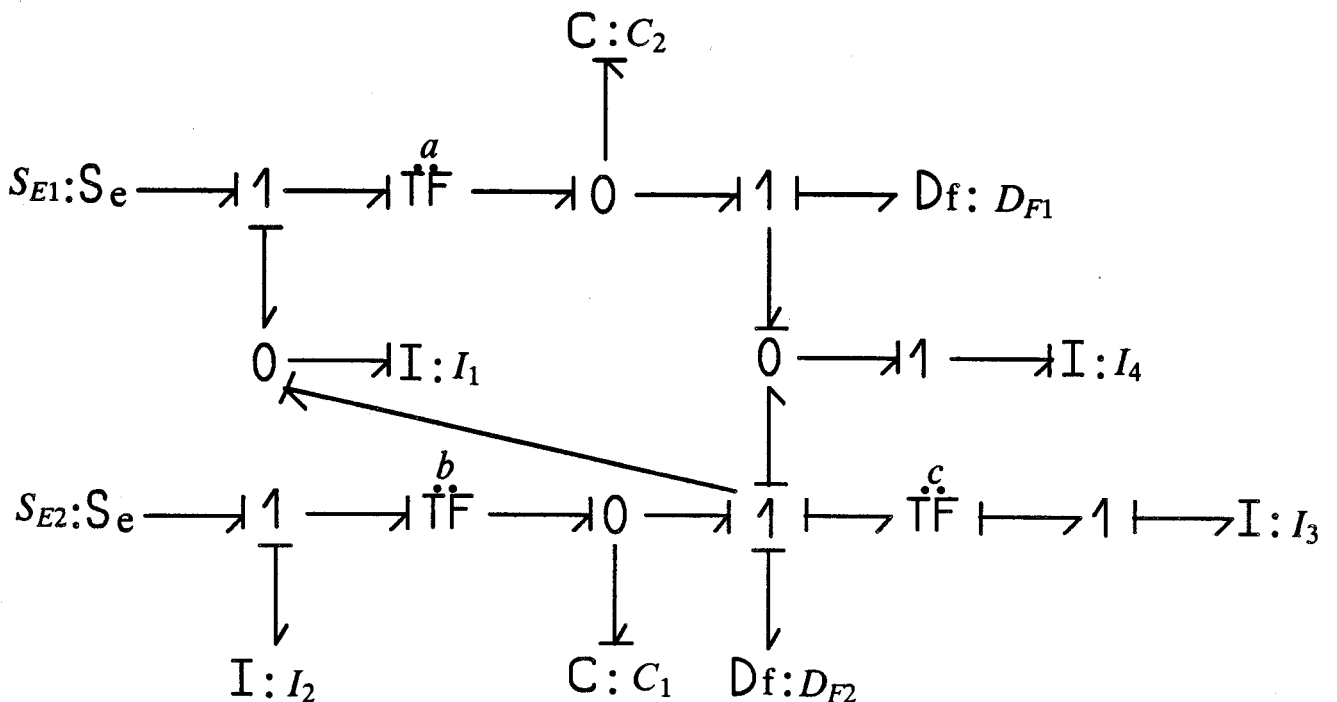


Figure II.3.2b) : modèle bond-graph en causalité dérivée.



Il y a six variables d'état  $p_i$  sur  $I_i$  et  $q_j$  sur  $C_j$  ( $i = 1, \dots, 4$  ;  $j = 1, 2$ ). La dimension du système est  $n = 6$ .

Toutes les variables sont causalement connectées à au moins une source et un détecteur.

La Figure II.3.2b) représente le système où la causalité dérivée est imposée. Il reste deux éléments dynamiques en causalité intégrale ( $I_1(p_1)$ ,  $I_4(p_4)$ ). Nous pouvons en conclure que :

$$\text{struct-rang } [A] = n - 2 = 4$$

Remarque :

Si  $a = 1$ , il y a une boucle causale non solvable. Dans ce cas,  $\text{struct-rang } [A] = 2$ . Le système n'est plus ni commandable, ni observable. Cette situation ne sera pas prise en compte dans la suite de l'étude.

Une dualisation des sources est faite sur le modèle bond-graph de la Figure II.3.2b), ce qui donne la Figure II.3.2c).

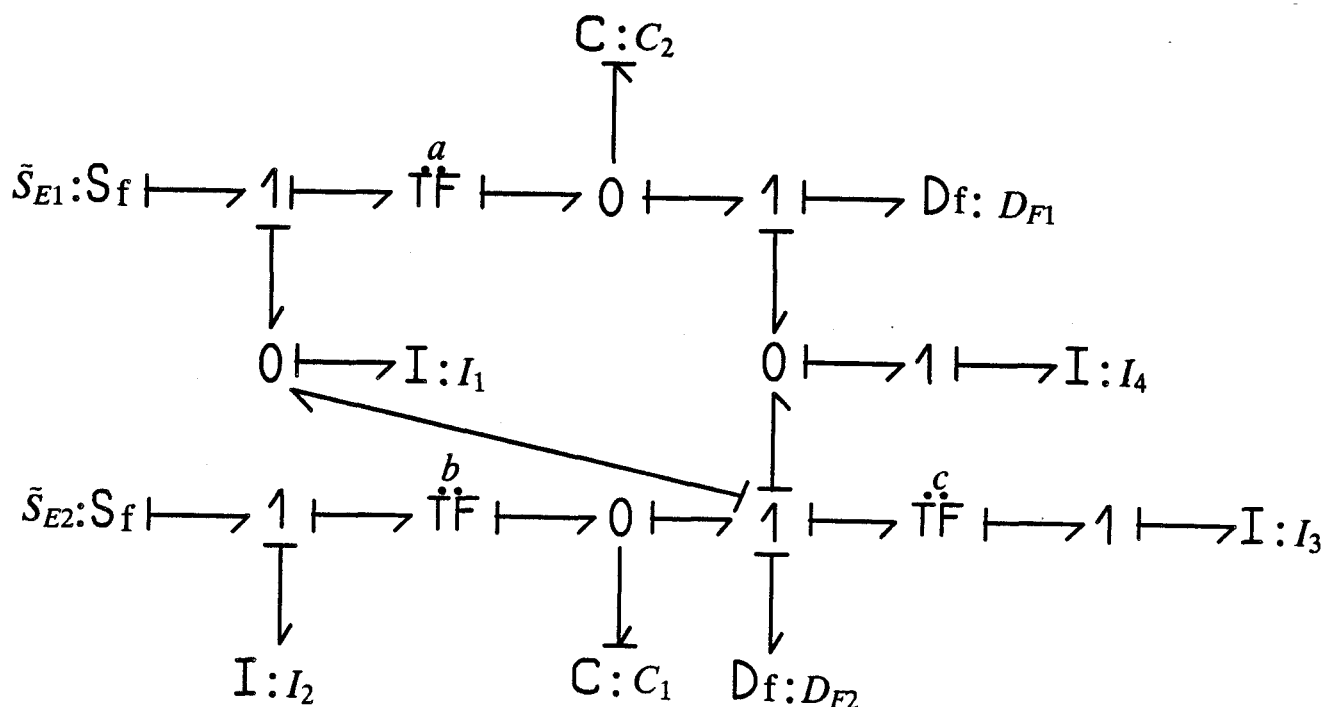


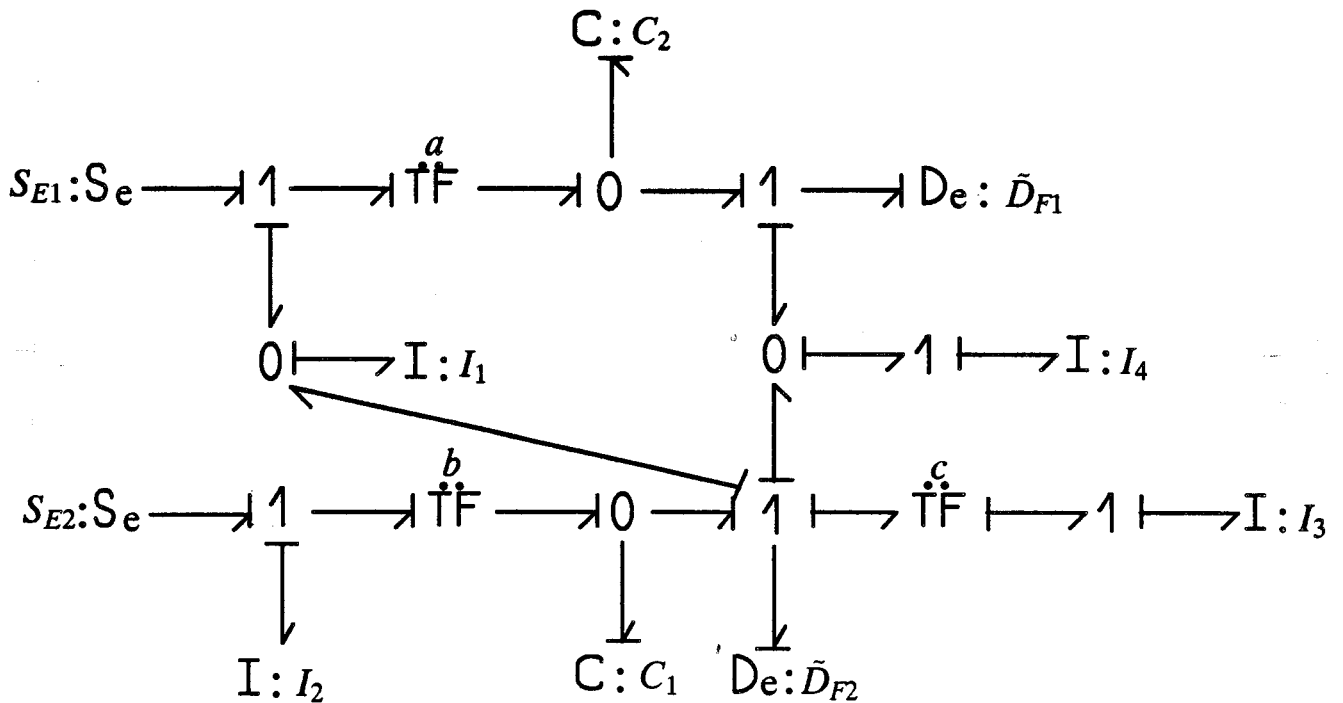
Figure II.3.2c) : modèle bond-graph en causalité dérivée avec dualisation des sources d'entrée.

Nous voyons que tous les éléments I et C ont maintenant une causalité dérivée. Nous en concluons que :

$$\text{struct-rang } [A \ B] = n.$$

Ce système est donc structurellement commandable en état par les 2 sources.

Le même principe est utilisé, mais cette fois-ci avec les détecteurs, *Figure II.3.2d*).



*Figure II.3.2d*) : modèle bond-graph en causalité dérivée avec dualisation des détecteurs de sortie.

Tous les éléments I et C ont une causalité dérivée. Nous en concluons que :

$$\text{struct-rang } \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = n.$$

Ce système est structurellement observable en état avec les deux détecteurs.

### c) Décomposition de l'espace d'état

Nous allons mettre en évidence différents sous-espaces d'état ayant des propriétés intéressantes. Bien entendu, il est nécessaire que la matrice d'état soit de rang dégénéré.

- Mise en évidence de relations algébriques

Lorsque nous imposons une causalité dérivée aux différents éléments dynamiques, un choix apparaît lorsque au moins un élément conserve une causalité intégrale.

Les connections causales entre les éléments ayant une causalité intégrale et ceux ayant une causalité dérivée sont directement liées aux relations algébriques entre les différentes lignes de  $(S_{11} S_{13})$ .

Si dans  $(S_{11} S_{13})$ , plusieurs relations algébriques existent et sont indépendantes, alors le choix des éléments devant conserver une causalité intégrale est total. Il n'aura aucune conséquence sur les études ultérieures. Par contre, si les relations algébriques sont liées, nous devons adopter certaines règles. Nous justifions ces remarques sur un exemple.

Reprenons le bond-graph de la *Figure II.3.2b*), où nous imposons la causalité dérivée pour les éléments dynamiques.

$I_1$  est directement causalement connecté à  $I_2$  et  $I_3$  que nous notons :

$$I_1 \rightarrow \{I_2, I_3\} = G_1.$$

$I_4$  est directement causalement connecté à  $I_2$  et  $I_3$  que nous notons :

$$I_4 \rightarrow \{I_2, I_3\} = G_2.$$

Nous notons :

$$(II.3.1) \begin{cases} G_1^* = \{I_1, I_2, I_3\} \\ G_2^* = \{I_2, I_3, I_4\} \end{cases}$$

Nous en déduisons que, structurellement, les variables d'état  $(p_1, p_2, p_3)$  et  $(p_2, p_3, p_4)$  sont algébriquement liées. Il existe deux relations algébriques entre les lignes de  $(S_{11} S_{13})$ , celles-ci étant liées car les variables  $p_2$  et  $p_3$  apparaissent dans les deux relations.

Nous écrivons l'équation de structure de jonction où apparaissent bien les relations algébriques entre les variables dynamiques :

$$(II.3.2) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & \frac{(a-1)}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ a & 0 & \frac{(a-1)}{c} & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ e_1 \\ e_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Cette forme n'est pas très élégante puisque les deux variables  $p_2$  et  $p_3$  apparaissent dans les deux relations algébriques.

Nous proposons une autre manière d'imposer la causalité dérivée sur le bond-graph de la Figure II.3.2e).

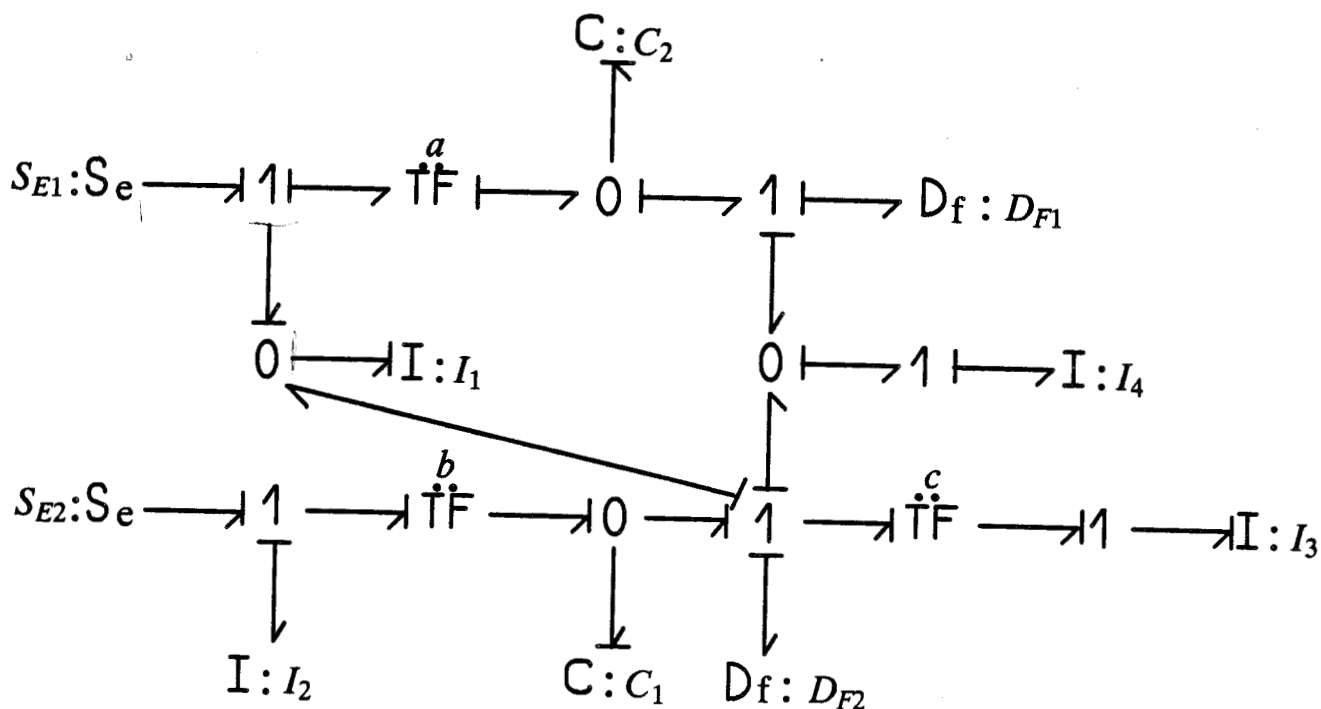


Figure II.3.2e) : modèle bond-graph en causalité dérivée.

Nous obtenons :

$$(II.3.3) \begin{cases} I_1 \rightarrow \{I_4\} = G_1 & G_1^* = \{I_1, I_4\} \\ I_3 \rightarrow \{I_2, I_4\} = G_2 & G_2^* = \{I_2, I_3, I_4\} \end{cases}$$

Cette fois-ci, seule la variable  $p_4$  apparaît dans les deux relations algébriques. Nous avons minimisé le nombre d'éléments appartenant en même temps à  $G_1^*$  et  $G_2^*$ .

Remarque :

D'autres choix équivalents existent pour le bond-graph en causalité dérivée. Nous pouvons par exemple inverser les causalités de  $I_2$  et  $I_3$ , ou celles entre  $I_1$  et  $I_4$ .

- Mise en évidence de sous-espaces non commandables et non observables

Nous n'étudions que la commandabilité, l'observabilité se faisant de manière duale.

Lorsque le rang de la matrice d'état  $A$  est non dégénéré, nous savons que le système sera commandable en état à l'aide d'une seule source d'entrée. Par contre, si  $A$  est de rang  $n-t$ , une condition nécessaire de commandabilité en état est d'avoir  $t$  entrées non redondantes.

Dans un premier temps, nous allons associer un sous-espace non commandable à chaque entrée.

Soient  $G_i^* = i = 1, \dots, t$  les ensembles associés aux variables qui introduisent des relations algébriques dans la matrice d'état. Les  $G_i^*$  sont choisis de façon que  $G_k^*$  et  $G_j^*$  ( $\forall k \neq j$ ) aient le minimum d'éléments en commun. Ceci se fait assez simplement lorsque les relations algébriques font apparaître peu de variables en commun.

Soient  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, p$  les colonnes respectives de  $B$  associées à l'entrée  $u_j$  et  $C_j$ ,  $j = 1, \dots, q$  les lignes respectives de  $C$  associées à la sortie  $y_j$ .

Hypothèse II.3.3)

a) Les entrées et les sorties redondantes sont éliminées, c'est-à-dire que nous gardons un nombre d'entrées et de sorties de façon que les rangs de  $B$  et  $C$  soient maximaux.

b) Si le rang de  $[A \ B_j]$ , respectivement le rang de  $\begin{bmatrix} A \\ C_j \end{bmatrix}$ , est égal au rang de  $A$ , alors la source d'entrée  $e_j$ , respectivement le détecteur de sortie  $y_j$ , est éliminé.

Une méthode d'analyse directe sur le bond-graph sera proposée pour satisfaire l'hypothèse II.3.3).

L'hypothèse II.3.3) étant vérifiée, il est clair que le sous-espace non commandable associé à l'entrée  $u_j$  est de rang  $t-1$  car le rang de  $[A \ B_j]$  est  $n-(t-1)$ . Ayant  $t-1$  relations algébriques,  $t-1$  variables dynamiques ne peuvent adopter l'état désiré.

Pour chaque entrée  $u_j$ , nous pouvons associer un sous-espace non commandable de rang  $t-1$ . Nous montrons comment obtenir ces sous-espaces à l'aide du bond-graph. Un choix judicieux et obligatoire fait que l'intersection de ces sous-espaces nous donne le sous-espace d'état non commandable.

Prenons d'abord un exemple.

Considérons le bond-graph de la Figure II.3.2e) et dualisons la source d'entrée  $S_{E2}$ , Figure II.3.2f) :

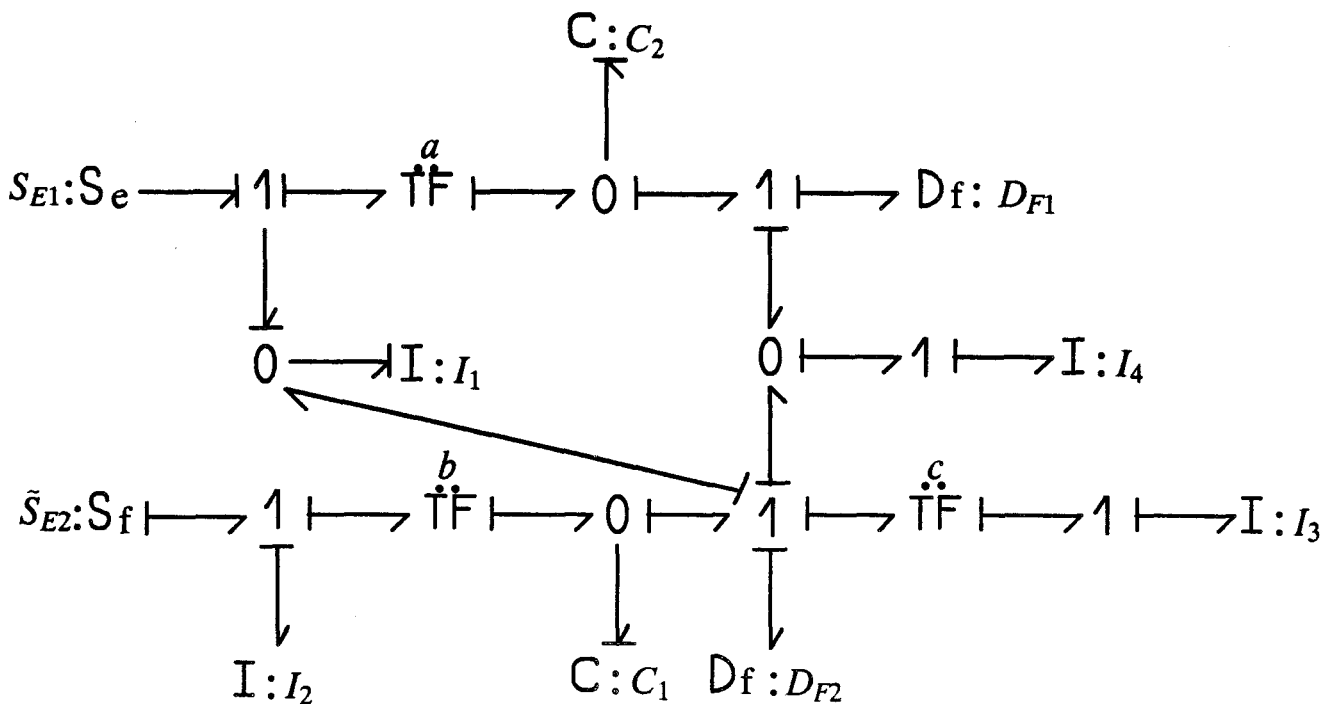


Figure II.3.2f : modèle bond-graph en causalité dérivée avec dualisation de la source d'entrée  $S_{E2}$ .



Seul l'élément  $I_3$  peut adopter la causalité dérivée. Nous en concluons que  $S_{E_2}$  élimine la relation algébrique dans  $[A B_2]$  entre les lignes associées aux variables d'état  $p_2, p_3, p_4$ .

La relation algébrique associée à  $p_1, p_4$  existe dans  $[A B_2]$ . Nous en concluons que le sous-espace d'état structurellement non commandable par  $S_{E_2}$  est soit  $\{p_1\}$  soit  $\{p_4\}$  car le rang du sous-espace est égal au nombre de relations algébriques restantes, c'est-à-dire 1.

Lorsque  $S_{E_2}$  est dualisé, nous avons :

$$I_1 \rightarrow \{I_4\} = H_{12} \quad H_{12}^* = \{I_1, I_4\}$$

Nous choisissons  $H_{12}^* - H_{12} = \{I_1\}$  le sous-espace non commandable associé à  $S_{E_2}$ .

Les matrices  $H_{i,j}$  sont associées aux relations algébriques existantes lorsque l'entrée  $u_j$  est dualisée. L'indice  $i$  est associé à la  $i^{\text{ème}}$  relation algébrique.  $H_{i,j}^*$  est construit de la même manière que  $G_i^*$  (mêmes contraintes sur les relations algébriques).

En général,  $H_{i,j}$  et  $H_{i,j}^*$  sont respectivement égaux à un des ensembles  $G_k$  et  $G_k^*$ , ceci, lorsque les relations algébriques sont indépendantes.

Reprenons le bond-graph de la *Figure II.3.2c*) et dualisons la source  $S_{E_1}$ . Nous avons le choix entre un changement de causalité pour  $I_1$  et  $I_3$ .

Cela signifie que dans la matrice  $[A B_1]$ , pour l'entrée  $S_{E_1}$  uniquement, nous éliminons les dépendances algébriques entre les lignes 1 et 4, puis entre les lignes 2, 3 et 4. Par contre, nous introduisons une dépendance entre les lignes 1, 2, 3 et 4, car l'élément restant en causalité intégrale est directement causalement lié aux trois autres éléments en causalité dérivée.

Nous choisissons  $I_3$  en causalité intégrale car pour  $S_{E_2}$ , nous avons choisi  $I_1$ . L'élément gardant la causalité dérivée est bien entendu un de ceux ayant une causalité intégrale avant la dualisation.

Nous avons :

$$I_3 \rightarrow \{I_1, I_2, I_4\} = H_{11} \quad H_{11}^* = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}.$$

Le sous-espace d'état structurellement non commandable est donc  $H_{11}^* - H_{11} = \{I_3\} = \{p_3\}$ . (Un autre choix pour la causalité nous donnerait  $p_2$ ).

Pour obtenir l'espace d'état structurellement non commandable, nous pouvons au choix faire l'intersection des sous-espaces structurellement non commandables associés à chacune des entrées, soit prendre les variables associées aux éléments dynamiques restant en causalité intégrale lorsque les sources d'entrée sont dualisées.

Il faut néanmoins choisir les  $H_{ij}$  de manière judicieuse, c'est-à-dire que pour chaque entrée dualisée, il faut mettre en causalité dérivée un élément dynamique non déjà choisi par les autres entrées, ceci à chaque fois que possible.

Dans l'exemple, pour  $S_{E_2}$ , nous n'avons pas le choix alors que pour  $S_{E_1}$ , nous avons le choix entre  $I_1$  et  $I_3$  mais comme  $I_3$  a été "pris" par  $S_{E_2}$ , nous devons choisir  $I_1$  pour  $S_{E_1}$ .

Le sous-espace d'état non structurellement commandable est  $(H_{11}^* - H_{11}) \cap (H_{12}^* - H_{12}) = \emptyset$ .

Il est clair que par cette méthode, nous pouvons procéder à la décomposition canonique de Kalman.

Quelques propriétés peuvent être mises en évidence à l'aide de manipulations causales sur le bond-graph.

### Propriété II.3.5)

Le rang structurel de la matrice de commande B est égal au nombre maximal de sources pouvant être dualisées sur le bond-graph (l'inversion des causalités ne peut se faire que sur des éléments I, R et C).

*Démonstration Annexe 4.*

Propriété II.3.6)

Le rang structurel de la matrice de sortie C est égal au nombre maximal de détecteurs pouvant être dualisés sur le modèle bond-graph (l'inversion des causalités ne peut se faire que sur des éléments I, R et C).

Démonstration : formulation duale de la précédente.

Remarque :

Les sources, respectivement les détecteurs, redondants pour l'étude de la commandabilité, resp. l'observabilité, structurelles en état sont ceux qui ne peuvent être dualisés sur le modèle bond-graph.

Propriété II.3.7)

Lorsqu'un modèle bond-graph dont la causalité dérivée est imposée sur les éléments dynamiques comporte des éléments en causalité intégrale, les sources d'entrée, respectivement les détecteurs de sorties, nécessaires pour que le système soit structurellement commandable, resp. observable, en état, sont ceux dont la dualisation permet d'éliminer les causalités intégrales sur le modèle bond-graph.

Démonstration : Les entrées dualisées éliminant les causalités intégrales rendent le rang de  $[A \ B_r]$  égal à  $n$ ,  $B_r$  étant la matrice B réduite à ces entrées. Elles suffisent donc à rendre le système structurellement commandable en état.

Remarque : Les propriétés II.3.5), II.3.6) et II.3.7) permettent de trouver les entrées et sorties nécessaires pour le bon fonctionnement d'un système donné. Ceci est particulièrement important pour l'analyse des pannes, par exemple.

Les sources d'entrées supplémentaires sont en général nécessaires pour l'étude de la commandabilité fonctionnelle.

A l'aide des propriétés II.3.5), II.3.6) et II.3.7), nous éliminons toutes les sources et détecteurs du modèle bond-graph de manière à satisfaire l'hypothèse II.3.3). Les rangs de B et de C seront en général supérieurs à  $t$ .

Par la suite, nous considérons que l'hypothèse II.3.3) est vérifiée. Deux procédures sont désormais écrites. La première définit un sous-espace d'état structurellement non commandable associé à chaque source d'entrée, la seconde, le sous-espace d'état structurellement non commandable pour l'ensemble des entrées.

Une formulation duale peut être adoptée pour les détecteurs de sortie.

### Propriété II.3.8)

Si l'hypothèse II.3.3a) est vérifiée, le sous-espace d'état non structurellement commandable associé à chacune des sources d'entrée  $u_j$ , tel que  $\text{rang} [A \ B_j] = \text{rang} A$ , est  $\bigcup_{i=1, \dots, t} (G_i^* - G_i)$ .

### Démonstration :

Si  $\text{rang} [A \ B_j] = n-t$ , le sous-espace d'état non structurellement commandable est de rang  $t$ .  $G_i^* - G_i$  est associée à la  $i^{\text{ème}}$  relation algébrique de la matrice  $[A \ B_j]$ . Avec le choix des  $G_i^*$ , la propriété est immédiate.

Pour chaque source d'entrée  $u_j$  vérifiant l'hypothèse II.3.3), nous associons des ensembles  $H_{ij}$  et  $H_{ij}^*$ . Les  $H_{ij}$  sont choisis de la même manière que les  $G_i$  avec les 2 conditions suivantes :

- $u_j$  est dualisée,
- l'élément dynamique adoptant une causalité dérivée est, si possible, choisi de manière à être différent de celui choisi pour l'entrée  $u_i$  ( $i \neq j$ ). On commencera à chaque fois par les entrées où le choix n'est pas possible.

### Propriété II.3.9)

Si l'hypothèse II.3.3) est vérifiée, le sous-espace d'état non structurellement commandable associée à la source d'entrée  $u_j$  est  $\bigcup_{i=1, \dots, t-1} (H_{ij}^* - H_{ij})$ .

Démonstration :

Le rang de  $[A \ B_j]$  est  $n-(t-1)$ . Chaque ensemble  $H_{i,j}^* - H_{i,j}$  correspond à la variable d'état définie dans la  $i^{\text{ème}}$  relation algébrique. Sachant que  $\bigcap_{i=1, \dots, t-1} (H_{i,j}^* - H_{i,j}) = \emptyset$ , nous obtenons  $t-1$  variables d'état non structurellement commandables. CQFD.

Remarque :

Il est possible de trouver différents sous-espaces d'état non structurellement commandables pour l'entrée  $u_j$ . Le choix adopté permet de rendre l'intersection des  $\bigcup_{i=1, \dots, t-1} (H_{i,j}^* - H_{i,j})$  la plus faible possible.

Propriété II.3.10)

L'hypothèse II.3.3) étant vérifiée, le sous-espace d'état non structurellement commandable est :

$$- \bigcap_{j=1, \dots, p} \left( \bigcup_{i=1, \dots, t-1} (H_{i,j}^* - H_{i,j}) \right)$$

- L'ensemble des variables dynamiques associées aux éléments en causalité intégrale lorsque l'on impose la causalité dérivée et qu'un nombre maximal de source d'entrée a été dualisé.

Démonstration :

1) Un sous-espace non structurellement commandable est associé à chaque entrée  $u_j$  (propriété II.3.9). Le choix des  $H_{i,j}$  et  $H_{i,j}^*$  rend ces sous-espaces les plus disjoints possibles. Les variables dynamiques apparaissant dans chaque sous-espace ne sont commandables par aucune des entrées. CQFD.

2) Cette propriété est directement liée à la propriété de commandabilité structurelle d'un système modélisé par bond-graph.

Remarque :

- Il est en général inutile de chercher les  $H_{i,j}$  et  $H_{i,j}^*$ . Néanmoins, cela peut être utile pour simplifier les commandes.

- La décomposition canonique de Kalman peut aisément être obtenue. Il sera intéressant de rendre les sous-espaces d'état non structurellement commandables et observables les plus disjoints possibles.

- Ces propriétés sont très intéressantes lors de l'étude de la commandabilité fonctionnelle ou en sortie qui fait l'objet de la partie suivante.

#### d) Commandabilité structurelle en sortie

La commandabilité en sortie ne nécessite pas la commandabilité en état. Elle nécessite simplement un comportement entrée-sortie bien défini. Il faut être capable de calculer l'entrée pour que la sortie ait le comportement désiré. La commandabilité en sortie s'apparente à la commandabilité fonctionnelle. *Rosenbrock (1970)* a introduit les terminologies en insistant sur les distinctions entre celles-ci. Par exemple, l'état considéré comme une sortie n'est en général pas commandable. *Georgiou et Floudas (1990)* utilisent le concept de connectabilité et de commandabilité structurelle fonctionnelle pour connaître la possibilité de considérer une variable d'état comme sortie lors d'un objectif de commande.

Un état non commandable peut être commandable s'il est considéré comme une sortie.

#### Exemple

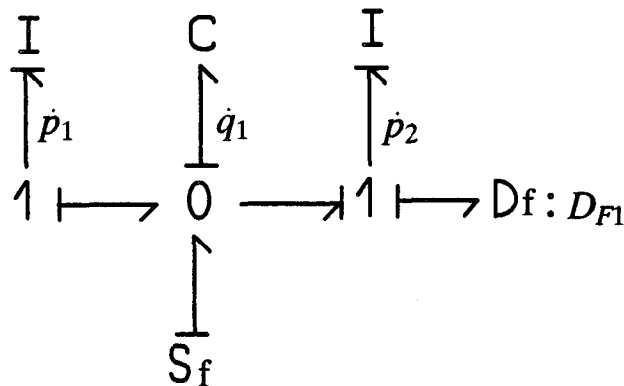


Figure II.3.3a) : modèle bond-graph.

Une des deux variables d'état  $p_1$  ou  $p_2$  n'est pas commandable, alors que la sortie  $y = \frac{p_2}{I}$  est commandable.

Reprenons le même exemple avec 2 entrées et 2 sorties :

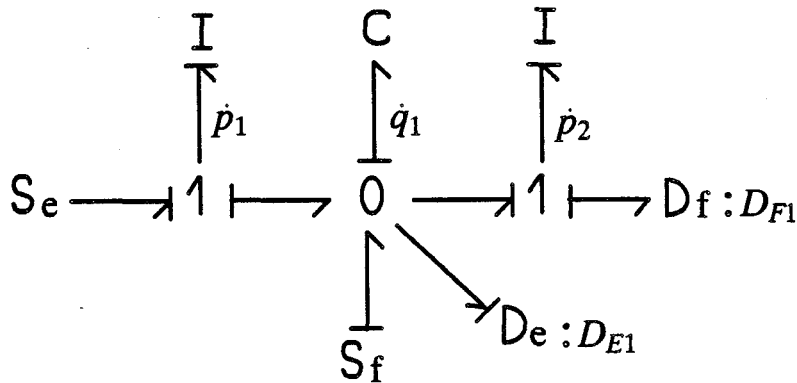


Figure II.3.3b) : modèle bond-graph avec 2 entrées-sorties

Ce système n'est pas commandable en sortie car le déterminant de la fonction de transfert est nul.

Par contre, le système de la Figure II.3.3c) est commandable en sortie :

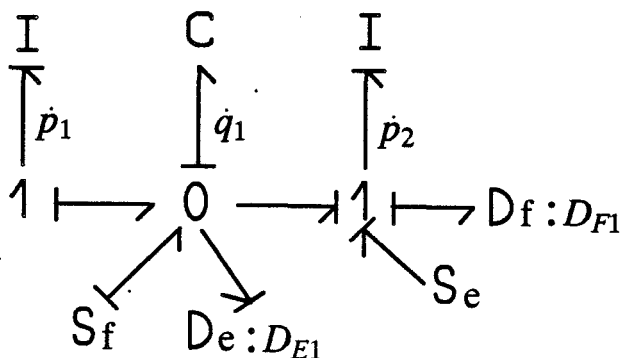


Figure II.3.3.c) : modèle bond-graph avec 2 nouvelles entrées-sorties.

A l'aide de cet exemple, nous voyons que le fait d'avoir B et C de rang maximal n'est pas suffisant pour assurer la commandabilité en sortie.

#### Propriété II.3.11)

Une condition suffisante de non commandabilité structurelle en sortie est qu'il existe une combinaison linéaire entre les lignes de  $(S_{31} \ S_{33} \ S_{34})$ .

Démonstration :

S'il existe une combinaison linéaire entre les lignes de  $(S_{31} S_{33} S_{34})$ , alors la même combinaison linéaire existe entre les lignes de C et D, ce qui est une condition suffisante de non-commandabilité en sortie.

La même propriété peut cette fois être formulée à l'aide de manipulations causales.

Propriété II.3.12)

Une condition suffisante de non-commandabilité en sortie est qu'il existe au moins un détecteur ne pouvant pas être dualisé. L'inversion des causalités peut se faire sur les éléments I, R, C mais aussi sur certaines sources.

Démonstration :

Le changement des causalités des détecteurs équivaut à inverser la plus grande sous-matrice inversible de  $(S_{31} S_{33} S_{34})$ . Si le rang de  $(S_{31} S_{33} S_{34})$  n'est pas maximal, nous ne pouvons pas écrire le vecteur de sortie  $y$  dans le vecteur d'entrée de l'équation de structure de jonction, ce qui équivaut à dire que la causalité de toutes les sorties ne peut être inversée.

Propriété II.3.13)

Une condition suffisante de non commandabilité structurelle en sortie est que le rang de  $(S_{14}^t S_{24}^t S_{34}^t)^t$  soit inférieur au nombre de détecteurs de sortie.

Démonstration :

Le rang structurel de la matrice de commande B est égal au rang de  $(S_{14}^t S_{24}^t S_{34}^t)^t$ . Une condition suffisante de non-commandabilité en sortie est que  $\text{rang B} < \text{rang C}$ , CQFD.



Propriété II.3.14)

Une condition suffisante de non-commandabilité structurelle en sortie est que le nombre d'entrées pouvant être dualisées est inférieur au nombre de détecteurs (seuls les éléments I, R, C peuvent adopter une causalité inverse).

Démonstration : La dualisation des sources d'entrée donne une information sur le rang structurel de la matrice de commande B. Si le nombre de sources dualisées est inférieur au nombre de détecteurs, nous en concluons que le rang structurel de B est inférieur au nombre de détecteurs. CQFD.

Des conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité/observabilité structurelles sont mises en évidence à l'aide du modèle bond-graph, ceci par de simples manipulations causales. Une première constatation est que le terme structurel est plus précis pour un modèle bond-graph. La seconde est que l'analyse est nettement plus simple que pour les autres méthodes graphiques ou mathématiques. Une étude plus fine serait à faire pour la commandabilité en sortie.

CONCLUSION

La modélisation par bond-graph nécessite une grande rigueur dans la compréhension des phénomènes intervenant dans l'évolution d'un système dynamique. Cette rigueur permet de constituer un modèle le plus proche possible de la réalité où tous les phénomènes mis en évidence sont directement accessibles sur le bond-graph. Cette modélisation est plus explicite qu'un modèle mathématique mais aussi qu'un modèle graphique habituel (système graphe, graphe de structure, etc...) car elle contient à la fois les informations des modèles mathématiques et graphiques.

Cette constatation nous a permis de mettre en évidence des propriétés structurelles d'un système dynamique linéaire modélisé par bond-graph, ceci à l'aide de simples manipulations causales.

Une décomposition canonique de Kalman a été envisagée à l'aide du modèle bond-graph.

## ANNEXE II.1

Calcul des équations d'état et de sortie du bond-graph réciproque.

Hypothèses :

- Pas de causalité dérivée
- A est inversible.

Soit un modèle bond-graph. Nous imposons la causalité dérivée. L'équation de structure de jonction est A.2.1), il n'y a plus d'élément en causalité intégrale car A est inversible.

$$(A.2.1) \quad \begin{bmatrix} z_I \\ d_{in_d} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ d_{out_d} \\ u \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } d_{out_d} = L_d d_{in_d} .$$

A l'aide de A.2.1), nous avons :

$$(A.2.2a) \quad \begin{cases} z_I = A^* \dot{x}_I + B^* u \\ A^* = [J_{11} + J_{12}L_d(I_r - J_{22}L_d)^{-1}J_{21}] \\ \text{avec} \\ B^* = [J_{13} + J_{12}L_d(I_r - J_{22}L_d)^{-1}J_{23}] \end{cases}$$

$$(A.2.2b) \quad \begin{cases} y_d = C^* \dot{x}_I + D^* u \\ C^* = [J_{31} + J_{32}L_d(I_r - J_{22}L_d)^{-1}J_{21}] \\ \text{avec} \\ D^* = [J_{33} + J_{32}L_d(I_r - J_{22}L_d)^{-1}J_{23}] \end{cases}$$

A l'aide du bond-graph en causalité intégrale, les équations d'état et de sortie sont :

$$(A.2.3) \quad \begin{cases} \dot{x}_I = A x_I + B u \\ y = C x_I + D u \end{cases}$$

En comparant A.2.2) et A.2.3), et en utilisant la relation  $z_I = F_I x_I$ , nous déduisons :

$$(A.2.4) \quad \begin{cases} A^* = F_I A^{-1} \\ B^* = -F_I A^{-1} B \end{cases} \quad \begin{cases} C^* = C A^{-1} \\ D^* = (D - C A^{-1} B) \end{cases}$$

L'équation de structure de jonction réciproque, directement obtenue de A.2.1) est :

$$(A.2.5) \quad \begin{bmatrix} \tilde{x}_I \\ \tilde{d}_{in} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_I \\ \tilde{d}_{out} \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \tilde{d}_{in} = d_{out} \quad , \quad \tilde{d}_{out} = d_{in} \quad \text{et} \quad \tilde{d}_{out} = \tilde{L} \tilde{d}_{in}$$

Pour le bond-graph initial en causalité intégrale, nous avons  $d_{out} = L d_{in}$  qui devient  $d_{out_d} = L_d d_{in_d}$  lorsque la causalité dérivée est imposée. Après dualisation, nous avons  $\tilde{d}_{out}$  et  $\tilde{d}_{in}$  satisfaisant  $\tilde{d}_{out} = L_d^{-1} \tilde{d}_{in}$ . La transformation réciproque inverse le module de R, ce qui donne  $\tilde{L}_d$ .

Les équations d'état et de sortie réciproques sont :

$$(A.2.6a) \quad \begin{cases} \tilde{x}_I = \tilde{A} \tilde{x}_I + \tilde{B} \tilde{u} \\ A^* = [J_{11} + J_{12} \tilde{L} (I_r - J_{22} \tilde{L})^{-1} J_{21}] \tilde{F}_I \\ \text{avec} \\ B^* = [J_{13} + J_{12} \tilde{L} (I_r - J_{22} \tilde{L})^{-1} J_{23}] \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{F}_I = F_I^{-1} \\ \tilde{L} = L_d \end{cases}$$

$$(A.2.6b) \quad \begin{cases} \tilde{y} = \tilde{C} \tilde{x}_I + \tilde{B} \tilde{u} \\ \tilde{C} = [J_{31} + J_{32} \tilde{L} (I_r - J_{22} \tilde{L})^{-1} J_{21}] \tilde{F}_I \\ \text{avec} \\ \tilde{D} = [J_{33} + J_{32} \tilde{L} (I_r - J_{22} \tilde{L})^{-1} J_{23}] \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$(A.2.7a) \begin{cases} \tilde{A} = A^* F_I^{-1} = F_I A^{-1} F_I^{-1} \\ \tilde{B} = B^* = -F_I A^{-1} B \end{cases}$$

$$(A.2.7b) \begin{cases} \tilde{C} = C^* F_I^{-1} = C A^{-1} F_I^{-1} \\ \tilde{D} = D^* = D - C A^{-1} B \end{cases}$$

## ANNEXE II.2

## Calcul du rang structurel de la matrice d'état

Nous séparons l'égalité de la propriété II.3.1) en trois parties :

$$\begin{aligned} \text{struct-rang } [A] &= \text{rang } [S_{11} S_{13}] = n-t \\ (1) \quad &= \quad (2) = (3) \end{aligned}$$

Première étape : (2) = (3)

Nous ne développons que les étapes principales de la démonstration.

Soit l'équation de structure de jonction définie par :

$$(A.2.8) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ d_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & 0 & S_{23} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_I \\ \dot{x}_D \\ d_{out} \\ u \end{bmatrix} \\ z_d = -S_{12}^t z_I \end{cases}$$

$$\text{avec } x_I = \begin{bmatrix} x_{I_1} \\ x_{I_2} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_{I_1} \in \mathbb{R}^{n-m} \\ x_{I_2} \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$$\text{rang } (S_{11} \ S_{13}) = m.$$

L'affectation de la causalité dérivée sur les éléments de stockage C et I équivaut à inverser certains termes de A.2.8). Le nombre de modifications se limite au rang de  $(S_{11} \ S_{13})$ .

Un nouveau vecteur de sortie de l'équation de structure de jonction  $[x_{I_1}^t \ z_{I_2}^t \ d_{in}^{*t}]^t$  est construit, où une partie des éléments dynamiques associés au vecteur  $x_{I_1}$  conservent la causalité intégrale.

Cette manipulation suppose de ne pas créer de boucle algébrique non solvable.

Il vient :

$$(A.2.9) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{I_1} \\ z_{I_2} \\ d_{in}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_1 & 0 & M_2 \\ M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \\ 0 & M_7 & M_8 & M_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{I_1} \\ \dot{x}_{I_2} \\ d_{out}^* \\ u \end{bmatrix} \\ z_D = M_{10} z_{I_1} \end{cases}$$

Les 0 sont obtenus en considérant une propriété bien connue des matrices : si une matrice

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

est telle que  $\text{rang}(F) = \text{rang}(F_{22})$  et  $F_{22}$  inversible alors  $F_{11} - F_{12} F_{22}^{-1} F_{21} = 0$ .

Il n'est plus possible d'affecter la causalité dérivée sur les éléments associés au vecteur  $x_{I_1}$  car ces éléments sont uniquement directement causalement connectés aux sources et aux éléments en causalité dérivée (équation A.2.9).

Nous en déduisons que  $\text{rang}[S_{11} \ S_{13}] = n-t$ .

Deuxième étape (1) = (2)

Struct-rang  $[A] \leq \text{rang}[S_{11} \ S_{13}]$ , car s'il existe une combinaison linéaire entre les lignes de  $(S_{11} \ S_{13})$ , alors il existe une combinaison linéaire entre les lignes de  $A$ .

Soit l'équation d'état :

$$(A.2.10) \quad \dot{x} = A x + B u$$

Elle peut être décomposée comme

$$(A.2.11) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

avec

struct-rang  $[A] = \text{struct-rang}[A_{22}]$  et  $A_{22}$  inversible.

Nous pouvons écrire différemment l'équation A.2.11), c'est-à-dire,

$$(A.2.12) \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_{22}^{-1} \dot{x}_2 - A_{22}^{-1} A_{21} x_1 - A_{22}^{-1} B_2 u \\ \dot{x}_1 = A_{12} A_{22}^{-1} \dot{x}_2 + (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) u \end{cases}$$

Reprenons l'équation A.2.9).

Si A.2.9) est solvable, c'est-à-dire si  $(I - M_g L^*)$  est inversible, où  $I$  est une matrice identité et  $L^*$  est telle que  $d_{out}^* = L^* d_{in}^*$ , il vient :

$$(A.2.13) \quad \begin{cases} \dot{x}_{I_1} = M_{11} \dot{x}_{I_2} + M_{12} u \\ \dot{x}_{I_2} = M_{13} \dot{x}_{I_2} + M_{14} x_{I_1} + M_{15} u \end{cases}$$

avec  $x_{I_2} \in \mathbb{R}^m$ ,  $x_{I_1} \in \mathbb{R}^{n-m}$ .

De manière évidente, deux méthodes différentes ont été employées pour l'inversion de la relation A.2.8), soit directement à l'aide de l'équation d'état, soit à l'aide d'une manipulation causale.

Les équations finales sont bien entendu égales. Ceci se traduit par les égalités  $x_2 = x_{I_2}$  et  $x_1 = x_{I_1}$ , c'est-à-dire (1) = (2).

Remarque :

La condition d'inversibilité de  $(I - M_g L^*)$  n'est pas une contrainte structurelle. De plus, elle est pratiquement toujours vraie. La définition du rang structurel de  $A$  est donc très proche de la définition du rang de  $A$ .

## ANNEXE II.3

## Calcul du rang structurel de [A B]

$$\begin{aligned} \text{struct-rang [A B]} &= \text{rang [S}_{11} \text{ S}_{13} \text{ S}_{14}] = n - t_s \\ (1) \quad &= \quad (2) \quad = (3) \end{aligned}$$

Première étape : (2) = (3)

Une décomposition en deux étapes est proposée. La première correspond à l'affectation de la causalité dérivée sur les éléments dynamiques et la seconde à la dualisation des sources d'entrée.

Pas 1 :

En supposant que  $\text{rang}(S_{11} \text{ S}_{13}) = m$ , nous reprenons l'équation A.2.19) correspond à l'affectation de la causalité dérivée.

$$(A.2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \cdot \\ x_{I_1} \\ z_{I_2} \\ d_{in}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_1 & 0 & M_2 \\ M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \\ 0 & M_7 & M_8 & M_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{I_1} \\ \cdot \\ x_{I_2} \\ d_{out}^* \\ u \end{bmatrix} \\ z_d = M_{10} z_{I_1} \quad \text{avec } z_{I_2} \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

Pas 2 :

Nous supposons que  $\text{rang}[M_2] = p^* \leq p$ . Nous notons :

$$(A.2.15) \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec } u_1 \in \mathbb{R}^{p-p^*}, \quad u_2 \in \mathbb{R}^{p^*} .$$

Un nouveau vecteur de sortie de l'équation de structure de jonction  $\begin{bmatrix} x_1^t & z^t & d_{in}^{*t} & u_2^t \end{bmatrix}^t$  est construit. A.2.14) devient :



$$(A.2.16) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ z \\ d_{in}^* \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N_1 & 0 & 0 \\ N_2 & N_3 & N_4 & N_5 \\ 0 & N_6 & N_7 & N_8 \\ 0 & N_{10} & 0 & N_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \dot{x} \\ d_{out}^* \\ u_1 \end{bmatrix}$$

L'équation A.2.16) s'obtient en fait après diverses manipulations causales qui consistent à mettre le plus d'éléments possible en causalité dérivée avec dualisation du plus grand nombre possible de sources d'entrée.

En notant  $M_2^{ij}$  ( $i, j=1,2$ ) les termes de la matrice  $M_2$ , nous pouvons séparer la première ligne de l'équation A.2.14) en deux parties, c'est-à-dire :

$$(A.2.17) \begin{cases} \dot{x}_{I_{11}} = M_1^1 \dot{x}_{I_2} + M_2^{11} u_1 + M_2^{12} u_2 \\ \dot{x}_{I_{12}} = M_1^2 \dot{x}_{I_2} + M_2^{21} u_1 + M_2^{22} u_2 \end{cases}$$

où  $\text{rang}[M_2] = \text{rang}[M_2^{22}]$  et  $M_2^{22}$  inversible.

L'écriture de la seconde équation de A.2.17) peut être inversée et  $u_2$  peut s'exprimer en fonction de  $\dot{x}_{I_{12}}$ ,  $\dot{x}_{I_2}$  et  $u_1$ .

L'équation A.2.16) est déduite de A.2.17) et A.2.14) en écrivant :

$$(A.2.18) \begin{cases} x_1 = x_{I_{11}} \\ x = \begin{bmatrix} x_{I_{12}} \\ x_{I_2} \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} x_1 \in \mathbb{R}^{n-(m+p^*)} \\ x \in \mathbb{R}^{m+p^*} \end{array}$$

et en tenant compte de :

$$(A.2.19) M_2^{11} - M_2^{12} (M_2^{22})^{-1} M_2^{21} = 0.$$

D'après A.2.16), nous déduisons que les variables dynamiques associées à  $\dot{x}_1$  gardent la causalité intégrale et qu'elles sont uniquement causalement liées aux éléments dynamiques en causalité dérivée. Nous ne pouvons donc plus faire de modification de la causalité.

Le nombre d'entrées dualisé est donc égal au rang de  $u_2$ .

L'équation A.2.16) peut s'obtenir en considérant la plus grande matrice inversible de  $(S_{11} S_{13} S_{14})$ . Nous en concluons que  $\text{rang}[S_{11} S_{13} S_{14}] = m + p^*$ .

D'où  $m + p^* = t_s$  et donc (2) = (3).

Nous savons que  $\text{rang}[A B] \leq \text{rang}[S_{11} S_{13} S_{14}]$  et en considérant la même approche que dans l'annexe 2, nous avons (1) = (2).

## ANNEXE II.4

Calcul du rang structurel de la matrice de commande B.

L'équation de structure de jonction s'écrit :

$$(A.2.20) \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{d}_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & 0 & S_{23} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_I \\ \dot{x}_D \\ d_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

$$z_D = -S_{12}^t z_I .$$

Dualiser le vecteur  $u$  équivaut à inverser les causalités des entrées et donc de mettre  $u$  dans le vecteur de sortie de l'équation de structure de jonction.

La matrice  $\begin{pmatrix} S_{14} \\ S_{24} \end{pmatrix}$  est décomposée en deux matrices dont l'une a le même rang que  $\begin{pmatrix} S_{14} \\ S_{24} \end{pmatrix}$ .  $u$  est de la même manière décomposé en  $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ .

La nouvelle équation de structure de jonction est:

$$(A.2.21) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ d_{in}^* \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & 0 \\ M_4 & M_5 & M_6 & 0 \\ M_7 & M_8 & M_9 & M_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{x}_t \\ d_{out}^* \\ u_1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_t = -M_2^t \dot{x} + M_{11} u_2 .$$

Le vecteur  $x$  contient une partie du vecteur  $x_I$ .

Le vecteur  $x_t$  contient  $x_D$  et l'autre partie du vecteur  $x_I$ .

$d_{in}^*$  et  $d_{out}^*$  sont composés d'éléments de  $d_{in}$  et de  $d_{out}$ .

Seul  $u_2$  est fonction de  $u_1$ , c'est-à-dire qu'il est impossible de dualiser d'autres entrées.

Ecrivons maintenant l'équation d'état obtenue à partir de l'équation A.2.20).

$$(A.2.22) \quad \dot{x}_I = A x_I + Bu.$$

Nous pouvons décomposer cette équation et l'écrire sous la forme :

$$(A.2.23) \quad \begin{cases} u_2 = B_{22}^{-1} [\dot{x}_{I_2} - A_{21}x_{I_1} - A_{22}x_{I_2} - B_{21}u^1] \\ \dot{x}_{I_1} = + B_{12}B_{22}^{-1} \dot{x}_{I_2} + (A_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}A_{21})x_{I_1} + (A_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}A_{22})x_{I_2} \end{cases}$$

où  $B_{22}$  est la plus grande sous-matrice de  $B$  inversible.

Bien entendu, la résolution de A.2.9) donnera l'équation A.2.23), c'est-à-dire :

$$(A.2.24) \quad \begin{cases} u_2 = u^2 \\ u_1 = u^1 \\ x = x_{I_1} \\ x_t = x_{I_2} \end{cases}$$

Il existe néanmoins une impossibilité quand  $(I_d - M_6 L^*)$ , où  $d_{out}^* = L^* d_{in}^*$ , n'est pas inversible. C'est pourquoi nous parlons de rang structurel.

Nous en concluons que le rang structurel de  $B$  est égal au rang de  $\begin{pmatrix} S_{14} \\ S_{24} \end{pmatrix}$  et donc au nombre maximal de sources pouvant être dualisées.

## **CHAPITRE III**

# **APPLICATION DES METHODES DE DECOUPLAGE ET DE REDUCTION AUX SYSTEMES LINEAIRES MODELISES PAR BOND-GRAPH**

### **SOMMAIRE**

I - SYSTEMES AMORTIS

II - ETUDE DES SYSTEMES PUREMENT OSCILLANTS

## INTRODUCTION

Il existe très peu d'articles ou d'ouvrages traitant du problème de découplage ou de réduction des systèmes dynamiques modélisés par bond-graph. Le traitement se situe en général au niveau des équations dynamiques du système et perd donc tout l'avantage que peut offrir le bond-graph, par exemple du point de vue structurel.

*Dauphin Tanguy et al. (1985)* ont introduit un nouveau concept, le bond-graph réciproque et l'ont associé à la méthode des perturbations singulières pour, dans un premier temps, faire le découplage, entre le système rapide et le système lent et dans un deuxième temps, améliorer la précision du système rapide. Cet article a servi de base pour la recherche des méthodes présentées dans ce chapitre.

*Suda (1988)* a traité de l'effet "parasite" de certaines variables dynamiques en donnant des conditions d'élimination de ces variables, correspondant donc à une réduction d'ordre du modèle.

Dans ce chapitre, plusieurs catégories de systèmes dynamiques vont être traitées.

La première partie concerne le découplage des systèmes dynamiques linéaires, appelés réseaux ou systèmes RC. Ces systèmes ne sont pas oscillants et peuvent être modélisés uniquement par des éléments résistifs et capacitifs sans éléments inertiels. La méthode proposée se base sur les propriétés causales et structurelles du modèle bond-graph. Une correspondance est faite avec la méthode des perturbations singulières *Sueur et Dauphin Tanguy (1990)*. Une méthode analogue serait employée pour l'étude des systèmes RI.

Nous rappelons les définitions de système explicite et système implicite et montrons comment le modèle bond-graph fait la distinction entre ces deux possibilités. Pour les systèmes explicites, une méthode de découplage est proposée directement à partir du modèle bond-graph. Une méthode d'amélioration de la précision des systèmes lent et rapide, dite méthode de correction, est proposée en gardant la structure des modèles initiaux. Pour les systèmes implicites, nous utilisons le bond-graph en tant qu'outil de mise en évidence des changements de variables nécessaires pour rendre le système explicite.

La deuxième partie concerne l'étude des systèmes purement oscillatoires. Une méthode de séparation en deux sous-systèmes est présentée à l'aide d'équations différentielles du second ordre, de l'équation d'état et du bond-graph. Une nouvelle définition de système standard, ou explicite, est donnée. Nous montrons que la séparation en deux sous-modèles "lent et rapide" peut être directement faite sur le bond-graph si le système est explicite mais que l'exploitation des résultats doit généralement se faire sur les équations différentielles du second ordre, avec soit les variables de déplacement, soit les variables de moment.

Pour les systèmes purement oscillants, le système rapide a peu d'intérêt. Nous ne gardons que le système lent, qui est parfois éloigné de la réalité à cause des approximations lors de la réduction. Une méthode dite de correction est présentée. Elle permet de mieux tenir compte de l'effet des hautes fréquences dans le système lent.

## I - SYSTEMES AMORTIS (*Sueur et Dauphin Tanguy (1990)*).

Les systèmes dits "amortis" sont les systèmes pour lesquels les oscillations sont quasi-nulles ou alors n'existent que sur un temps très court. Elles ont a priori très peu d'influence sur le comportement dynamique du système étudié.

Un système peut être considéré comme amorti si la partie réelle de chacune des valeurs propres de la matrice d'état est négative et si celle-ci est au moins de l'ordre de grandeur de la partie imaginaire. De nombreux systèmes physiques, hydrauliques et électriques entrent dans cette catégorie.

La méthode des perturbations singulières a été largement utilisée pour l'étude de ces systèmes dynamiques (chapitre I, § III). Nous nous proposons dans ce chapitre de montrer l'avantage de la formulation bond-graph.

### I.1 - Mise en évidence des dynamiques

Il est en général difficile de mettre en évidence les dynamiques d'un système linéaire sans faire le calcul, exact ou approché, des valeurs propres de la matrice d'état. D'autres méthodes, tel que le calcul des vecteurs propres, peuvent être utilisées, ce qui peut poser des problèmes lorsque le système est de grande dimension.

Cependant, un travail d'analyse est nécessaire pour mettre en évidence les éléments qui induisent le phénomène lent et ceux qui induisent le phénomène rapide (ou les deux à la fois !), généralement à partir de considérations physiques.

Sur le modèle bond-graph, on dira qu'il existe des dynamiques d'ordres de grandeur différents si les gains de boucles causales sont d'ordres de grandeur différents. Par la suite, nous supposons que les systèmes étudiés ne comportent pas de gyrateurs et qu'il n'y a pas de causalités dérivées.

## I.2 - Partitionnement du vecteur état

Lorsqu'un système dynamique comporte deux échelles de temps, il convient, pour pouvoir utiliser la méthode des perturbations singulières, de séparer le vecteur état en deux sous-vecteurs, de façon à obtenir deux sous-systèmes découplés.

Les équations d'état et de sortie du système dynamique considéré sont :

$$(III.1.1) \quad \begin{cases} \dot{x}_I = Ax_I + Bu & x_I \in \mathbb{R}^{n+m} \\ y = Cx_I + Du & y \in \mathbb{R}^q \quad u \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Une première étape consiste à mettre en évidence les gains de boucle sur le modèle bond-graph, correspondant aux termes de la matrice A.

Les modes lents, respectivement rapides, sont associés aux petites, respectivement grandes, amplitudes de gains de boucle.

### I.2.1 - C d'ordres de grandeur différents

Les éléments R sont d'ordres de grandeur équivalents. Nous faisons l'hypothèse dans ce paragraphe que tous les autres éléments, c'est-à-dire les éléments résistifs et les transformateurs, n'introduisent pas de gains de boucles d'ordres de grandeur différents.



Le vecteur état est décomposé en  $x_I = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$  où  $q_1 \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur associé à la partie lente et  $q_2 \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur associé à la partie rapide.

Considérons l'équation de structure de jonction simplifiée, associée à un modèle bond-graph sans élément en causalité dérivée. Une décomposition est faite.  $d_{out_2}$  et  $d_{in_2}$  contiennent les variables efforts et flux, suivant la causalité, des éléments R directement causalement connectés, ou indirectement par l'intermédiaire d'autres éléments R, aux éléments C de petit module.

La nouvelle équation de structure de jonction est :

$$(III.1.2) \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ d_{in_1} \\ d_{in_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & S_{12}^{11} & S_{12}^{12} & | & S_{13}^1 \\ 0 & 0 & | & 0 & S_{12}^{22} & | & S_{13}^2 \\ -S_{12}^{11t} & 0 & | & S_{22}^{11} & 0 & | & S_{23}^1 \\ -S_{12}^{12t} & -S_{12}^{22t} & | & 0 & S_{22}^{22} & | & S_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ d_{out_1} \\ d_{out_2} \\ u \end{bmatrix}$$

où :  $S_{ij}$  sont des sous-matrices de S

$S_{ij}^{k\ell}$  sont des sous-matrices de  $S_{ij}$

$S^t$  est la transposée de la matrice S.

$$(III.1.3) \quad \begin{cases} d_{out_1} = L_1 d_{in_1} & d_{in_1} \in \mathbb{R}^r \\ d_{out_2} = L_2 d_{in_2} & d_{in_2} \in \mathbb{R}^s \end{cases}$$

$$(III.1.4) \quad z_I = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{I1} & 0 \\ 0 & \frac{F_{I2}}{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = F_I x_I$$

$\varepsilon$  est introduit de façon à normaliser l'ordre de grandeur des termes dans la matrice  $F_I$ .  $F_{I1}$  et  $F_{I2}$  sont des matrices carrées diagonales, composées de termes en  $1/C_i$ ,  $i = 1, \dots, (n + m)$ .

L'équation d'état est :

$$(III.1.5) \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & F_{I1} & \frac{T_{12} F_{I2}}{\varepsilon} \\ T_{21} & F_{I2} & \frac{T_{22} F_{I2}}{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$\text{avec } T_{11} = - \left[ S_{12}^{11} L_1 (I - S_{22}^{11} L_1)^{-1} S_{12}^{11t} + S_{12}^{12} L_2 (I - S_{22}^{22} L_2)^{-1} S_{12}^{12t} \right]$$

$$T_{12} = - \left[ S_{12}^{12} L_2 (I - S_{22}^{22} L_2)^{-1} S_{12}^{22t} \right]$$

$$T_{21} = - \left[ S_{12}^{22} L_2 (I - S_{22}^{22} L_2)^{-1} S_{12}^{12t} \right]$$

$$T_{22} = - \left[ S_{12}^{22} L_2 (I - S_{22}^{22} L_2)^{-1} S_{12}^{22t} \right]$$

$$B_1 = + \left[ S_{13}^1 + S_{12}^{11} L_1 (I - S_{22}^{11} L_1)^{-1} S_{23}^1 + S_{12}^{12} L_2 (I - S_{22}^{22} L_2)^{-1} S_{23}^2 \right]$$

$$B_2 = + \left[ S_{13}^2 + S_{12}^{22} L_2 (I - S_{22}^{22} L_2)^{-1} S_{23}^2 \right]$$

Si l'équation d'état est exprimée en fonction du vecteur  $z_1$ , comportant les variables de co-énergie, une nouvelle équation d'état est obtenue :

$$(III.1.6) \quad \dot{z}_1 = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \varepsilon \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{I1} T_{11} & F_{I1} T_{12} \\ F_{I2} T_{21} & F_{I2} T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{I1} & B_1 \\ F_{I2} & B_2 \end{bmatrix} u$$

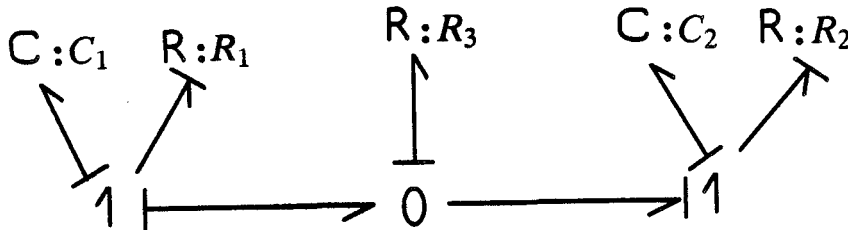
Si  $F_{I2} T_{22}$  est inversible, le système est dit sous forme singulièrement perturbée. Cette condition est équivalente à la condition d'inversibilité de la matrice  $A_{22} = T_{22} F_{I2}$  définie dans III.1.5).

### I.2.2 - R d'ordres de grandeur différents

Les éléments capacitifs C ont des ordres de grandeur équivalents. Lorsque les éléments R ont des ordres de grandeur différents, il est plus difficile de faire un partitionnement du vecteur état. En général, les phénomènes lents et rapides ne sont pas directement mis en évidence. La décomposition du vecteur état n'est donc pas simple. Le bond-graph donne néanmoins quelques indications.

Une difficulté apparaît lorsque plusieurs éléments R sont causalement liés entre eux, c'est-à-dire lorsqu'il apparaît une boucle algébrique. Dans ce cas, il suffit de calculer la résistance équivalente, ceci pour chaque élément R en causalité conductance. Une autre manière consiste à calculer le multiport R associé.

L'exemple de la *figure III.1.1)* est une illustration de ce regroupement.



*Figure III.1.1 : Bond-graph avec boucles algébriques entre éléments résistifs*

Dans cet exemple,  $R_1, R_3$  et  $R_2, R_3$  forment deux boucles algébriques. L'application de quelques règles simples, non développées dans ce rapport, permet de calculer directement la matrice d'état.

La matrice d'état est :

$$A = - \frac{1}{R_3(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \begin{bmatrix} R_2 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_1 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/C_1 & 0 \\ 0 & 1/C_2 \end{bmatrix}$$

Nous faisons l'étude des valeurs propres de A pour différentes configurations possibles de l'ordre de grandeur des éléments R.

Si  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ , les deux valeurs propres sont de l'ordre de  $1/R$ .

Si  $R_1 = R_2 = \varepsilon R_3 = \varepsilon R$ , le système devient implicite.

Un système est dit implicite si :

a) après la décomposition du vecteur état et de la matrice d'état, la matrice  $A_{22}$  n'est pas inversible.

b) quand une seule échelle de temps existe a priori, la matrice d'état  $\varepsilon^k A(\varepsilon)$  devient non inversible pour  $\varepsilon = 0$ . k est un entier qui permet de

faire le calcul de  $A(\varepsilon)$  pour  $\varepsilon = 0$ .

Dans les deux cas, les phénomènes lents et rapides ne peuvent pas être obtenus directement, mais seulement après un changement de base.

Nous écrivons la matrice d'état en tenant compte de la relation précédente entre les éléments résistifs.

$$A = \frac{-1}{\varepsilon R(2+\varepsilon)} \begin{bmatrix} (1+\varepsilon) & 1 \\ 1 & (1+\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/C_1 & 0 \\ 0 & 1/C_2 \end{bmatrix}$$

Nous calculons  $A_0 = \varepsilon A(\varepsilon)$  pour  $\varepsilon = 0$  et pour  $C_1 = C_2 = C$ .

$$A_0 = -\frac{1}{2RC} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_0$  a une valeur propre nulle. Le système est sous forme implicite.

Le calcul des valeurs propres de  $A$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , confirme notre propos :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{(2+\varepsilon)RC} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{\varepsilon RC} \end{cases}$$

Il apparaît que si les éléments  $R$  en causalité résistance ont un grand module, le système peut devenir implicite, par contre si ces éléments sont petits, les modes seront pratiquement de l'ordre des éléments en causalité conductance.

Il est donc possible de faire le partitionnement du vecteur état même lorsque des boucles algébriques entre les éléments  $R$  apparaissent.

L'équation de structure de jonction est :

$$(III.1.7) \quad \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ d_{in_1} \\ d_{in_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & S_{12}^{11} & 0 & | & S_{13}^1 \\ 0 & 0 & | & S_{12}^{21} & S_{12}^{22} & | & S_{13}^2 \\ -S_{12}^{11t} & -S_{12}^{21t} & | & S_{22}^{11} & 0 & | & S_{23}^1 \\ 0 & -S_{12}^{22t} & | & 0 & S_{22}^{22} & | & S_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ d_{out_1} \\ d_{out_2} \\ u \end{bmatrix}$$

$d_{in_1}$  est le vecteur correspondant aux éléments R de valeur élevée et ceux intervenant dans une boucle algébrique dont les éléments R équivalents ont aussi une valeur élevée.

$g_1$  est le vecteur état correspondant aux éléments C, causalement connectés avec les éléments R dans  $d_{in_1}$  uniquement.

$g_2$  et  $d_{in_2}$  contiennent les variables restantes.

Remarque :

Pour les systèmes amortis RC, la plupart des éléments résistifs ont une causalité conductance. Ceux ayant une causalité résistance forment des boucles algébriques avec les premiers et introduisent des termes non nuls dans la matrice  $S_{22}$ .

Le calcul des matrices  $L_2(I - S_{22}^{22} L_2)^{-1}$  et  $L_1(I - S_{22}^{11} L_1)^{-1}$  équivaut à trouver les multiports résistifs équivalents à causalité conductance donc de termes caractéristiques  $1/R$ . Les termes résistifs de faible valeur introduiront donc les modes élevés.

Lorsque nous écrivons l'équation d'état sous la forme III.1.5), les termes  $L_2(I - S_{22}^{22} L_2)^{-1}$  ont une valeur élevée par rapport aux termes  $L_1(I - S_{22}^{11} L_1)^{-1}$ .

L'introduction d'un paramètre de normalisation  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  conduit à une forme singulièrement perturbée pour l'équation d'état :

$$(III.1.8) \quad \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \varepsilon \dot{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$\text{avec : } A_{11} = - \left[ S_{12}^{11} L_1 (I - S_{22}^{11} L_1)^{-1} S_{12}^{11t} \right] F_{11}$$

$$A_{12} = - \left[ S_{12}^{11} L_1 (I - S_{22}^{11} L_1)^{-1} S_{12}^{21t} \right] F_{12}$$

$$A_{21} = -\varepsilon \left[ S_{12}^{21} L_1 (I - S_{22}^{11} L_1)^{-1} S_{12}^{11t} \right] F_{11}$$

$$A_{22} = - \left[ \varepsilon S_{12}^{21} L_1 (I - S_{22}^{11} L_1)^{-1} S_{12}^{21t} + S_{12}^{22} L_2 (I - S_{22}^{22} L_2)^{-1} S_{12}^{22t} \right] F_{12}$$

$$B_1 = \left[ S_{13}^1 + S_{12}^{11} L_1 (I - S_{22}^{11} L_1)^{-1} S_{23}^1 \right]$$

$$B_2 = \left[ \varepsilon S_{13}^2 + \varepsilon S_{12}^{21} L_1 (I - S_{22}^{11} L_1)^{-1} S_{23}^1 + S_{12}^{22} L_2 (I - S_{22}^{22} L_2)^{-1} S_{23}^2 \right]$$

Si  $A_{22}^2 = - \left[ S_{12}^{22} L_2 (I - S_{22}^{22} L_2)^{-1} S_{12}^{22t} \right] F_{12}$  est inversible (pas de valeurs propres nulles), alors la valeur absolue de chacune de ses valeurs propres est plus grande que celles des valeurs propres de  $-\varepsilon \left[ S_{12}^{21} L_1 (I - S_{22}^{11} L_1)^{-1} S_{12}^{21t} \right] F_{12}$  qui correspond à une connection causale entre les éléments dynamiques rapides C et les éléments R de valeur élevée.

La non-inversibilité de  $A_{22}^2$  signifie que les variables  $q_2$  ne sont pas purement rapides, mais qu'un phénomène lent existe.

### Définition III.1.1 (Sueur et Dauphin Tanguy (1990))

L'équation d'état III.1.8) est dite explicite, si la matrice  $A_{22}^2 = - \left[ S_{12}^{22} L_2 (I - S_{22}^{22} L_2)^{-1} S_{12}^{22t} \right] F_{12}$  est inversible.

### I.2.3 - Cas général

Il n'existe a priori pas de méthode générale. Simplement, la décomposition du vecteur état peut se faire en combinant les deux façons précédentes, en essayant de privilégier les gains de boucles élevés dans la partie rapide du système.

Si tous les gains sont du même ordre de grandeur, il peut néanmoins exister des phénomènes lents cachés. Ceci apparaît par exemple pour les systèmes interconnectés. En général, ces systèmes sont implicites. Il suffira de montrer que la matrice d'état comporte des modes nuls.

### 1.3 - Partitionnement du bond-graph

#### I.3.1 - Procédures d'obtention directe des Bond-graphs rapide et quasi-rapide

Le système dynamique sera découplable en une partie lente et une partie rapide si la condition d'inversibilité des matrices  $A_{22}$  (cas I.2.1) et  $A_{22}^2$  (cas I.2.2) associées respectivement à la partie rapide, quasi-rapide du système, est vérifiée. La notion de bond-graph quasi-rapide est introduite dans le cas I.2.1 car l'étude se fait sur  $A_{22}^2$  et non  $A_{22}$ .

Nous proposons deux procédures pour la construction directe des bond-graphs rapide et quasi-rapide. Ces procédures sont directement liées aux procédures de décomposition de l'équation de structure de jonction globale. L'existence d'un chemin causal entre deux éléments se traduit par l'apparition d'un terme non nul dans la matrice de structure de jonctions. L'élimination de certaines parties de S équivaut donc à enlever certains chemins causaux et certains éléments du bond-graph global. Les procédures s'en déduisent simplement.

##### Procédure III.1.1 (cas I.2.1)

Si dans un bond-graph, les éléments C ont des ordres de grandeur différents et les R des valeurs semblables, alors le bond-graph rapide réduit est obtenu à partir du bond-graph global en supprimant :

- tous les éléments C de module élevé,
- tous les éléments R uniquement causalement connectés à ces éléments C, directement ou indirectement à travers d'autres éléments R,
- toutes les sources et détecteurs n'ayant plus de connection causale avec les éléments C et R restants.

##### Procédure III.1.2 (cas I.2.2)

Si dans un bond-graph, les éléments R ont des ordres de grandeur différents et les C des valeurs semblables, alors le bond-graph rapide est

obtenu à partir du bond-graph global en supprimant :

- tous les éléments C <sup>uniquement</sup> causalement connectés aux éléments R de valeur élevée ou aux R équivalents de valeur élevée (boucles algébriques),
- tous les éléments R n'ayant plus de connection causale avec les éléments C restants (directement ou indirectement à travers des éléments R),
- toutes les sources, détecteurs, n'ayant plus de connection causale avec les éléments C restants (directement ou indirectement à travers des éléments R).

Le bond-graph quasi-rapide s'obtient en enlevant tous les éléments R d'amplitude élevée (ou le R équivalent) dans la procédure III.1.2).

Remarque : Ces procédures n'introduisent aucun changement de causalité.

### I.3.2 - Systemes explicites

#### Theoreme III.1.1)

Le système est structurellement sous forme explicite si le bond-graph rapide (ou quasi-rapide) n'a pas d'éléments C en causalité intégrale quand une procédure de mise sous forme causalités dérivées est implémentée.

Démonstration : Si dans le bond-graph rapide (quasi-rapide), tous les éléments C peuvent être mis en causalité dérivée, la matrice d'état du système rapide (quasi-rapide) est inversible, donc par définition, le système est sous forme explicite.

#### a) Bond-graph rapide et équation d'état rapide

Si le système est sous forme explicite, alors le bond-graph rapide s'obtient en utilisant la procédure III.1.1) ou III.1.2).

L'équation d'état du sous-système rapide (ou du bond-graph rapide est :

$$(III.1.9) \quad \varepsilon \dot{q}_{2r} = A_{22} q_{2r} + B_2 u_r .$$

$A_{22}$  est obtenue dans III.1.5) ou III.1.8).



$u_r$  est le comportement rapide du vecteur d'entrée.

Remarque: Pour les systèmes lent, respectivement rapide, nous introduirons les vecteurs  $u_\ell$ , respectivement  $u_r$ , correspondant au comportement lent, respectivement rapide de l'entrée.

Cette hypothèse permet de conserver une cohérence avec la méthode des perturbations singulières.

### b) Bond-graph lent et équation d'état lente

A l'aide des propriétés du bond-graph réciproque et des procédures définies précédemment, nous proposons une définition du bond-graph lent.

#### Procédure III.1.3 : Obtention du bond-graph lent

- construire le bond-graph réciproque global,
- dessiner le bond-graph rapide réciproque à l'aide des procédures III.1.1) et III.1.2),
- construire le bond-graph lent réduit à l'aide d'une nouvelle transformation réciproque sur le bond-graph réciproque rapide.

Ce bond-graph lent réduit a les propriétés suivantes :

#### Propriété III.1.1)

L'équation d'état du bond-graph lent est la même que celle obtenue à l'aide de la méthode des perturbations singulières :

$$(III.1.10) \quad \dot{q}_{1\ell} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) q_{1\ell} + (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) u_\ell .$$

*Démonstration Annexe III.1.*

#### Propriété III.1.2)

Si chaque capacité enlevée du bond-graph global est remplacée par un détecteur d'effort, alors l'équation de sortie lente sera :

$$(III.1.11) \quad y_\ell = -F_{12} A_{22}^{-1} A_{21} q_{1\ell} - F_{12} A_{22}^{-1} B_2 u_\ell .$$

$q_{2\ell} = F_{12}^{-1} y_\ell$  est l'équation algébrique, correspondant au comportement lent de  $q_2$ , obtenu par la méthode des perturbations singulières.

Démonstration : Il suffit d'utiliser la procédure de l'annexe III.1 avec l'équation de sortie :

$$y = C \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec } C = [0 \quad F_{12}].$$

Il apparaît ainsi que notre méthode de découplage à partir des modèles bond-graph donne exactement les mêmes résultats que ceux des perturbations singulières dans le cas des systèmes explicites.

### c) Exemple

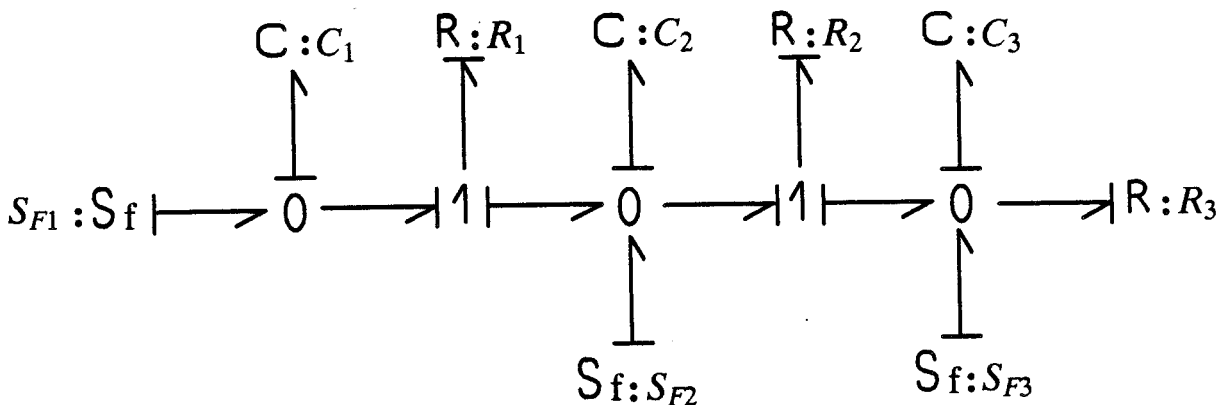
Reprenons l'exemple de la *Figure I.3.3*).

Les éléments R sont supposés avoir la même amplitude et les éléments  $C_2$  et  $C_3$  sont parasites, c'est-à-dire  $C_2 = C_3 = \varepsilon C_1$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Le vecteur état est  $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$  où  $q_1 = [q_1]$  est la variable d'état lente

et  $q_2 = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$  est le vecteur état comportant les variables rapides.

Le bond-graph du système est représenté par la *Figure III.1.2*.



*Figure III.1.2 : Bond-graph du réseau électrique.*

Le bond-graph rapide peut facilement être dessiné *Figure III.1.3*

(procédure III.1.1) :

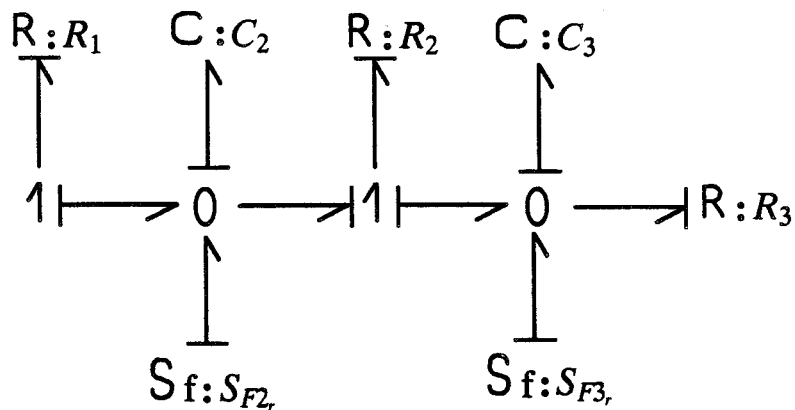


Figure III.1.3 : Bond-graph rapide.

Les Figures III.1.4, III.1.5, III.1.6, représentent respectivement le bond-graph réciproque, le bond-graph réciproque rapide et le bond-graph lent du bond-graph de la Figure III.1.2.

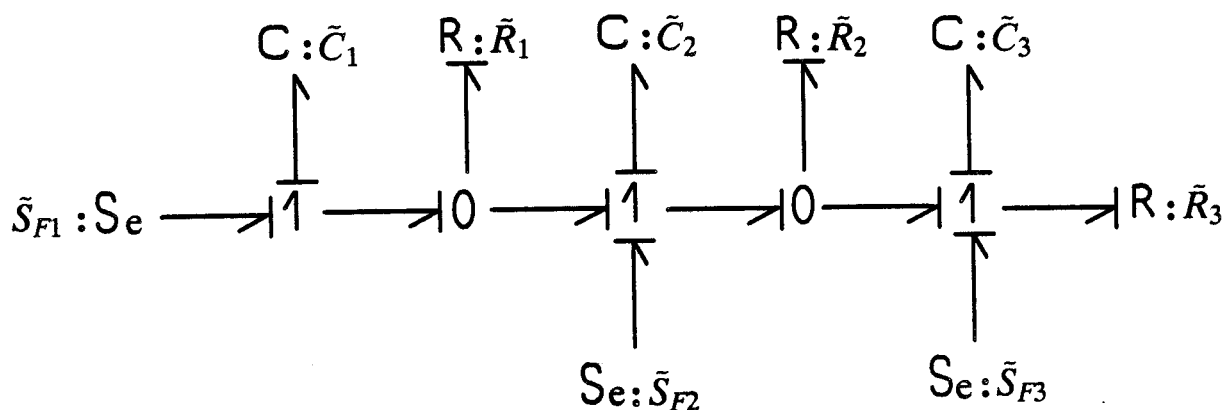


Figure III.1.4 : Bond-graph réciproque.

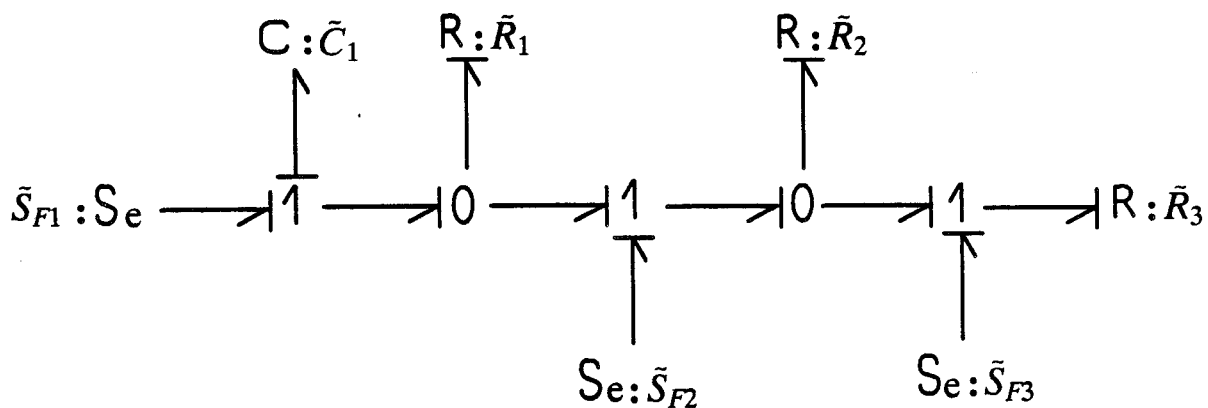


Figure III.1.5 : Bond-graph réciproque rapide.

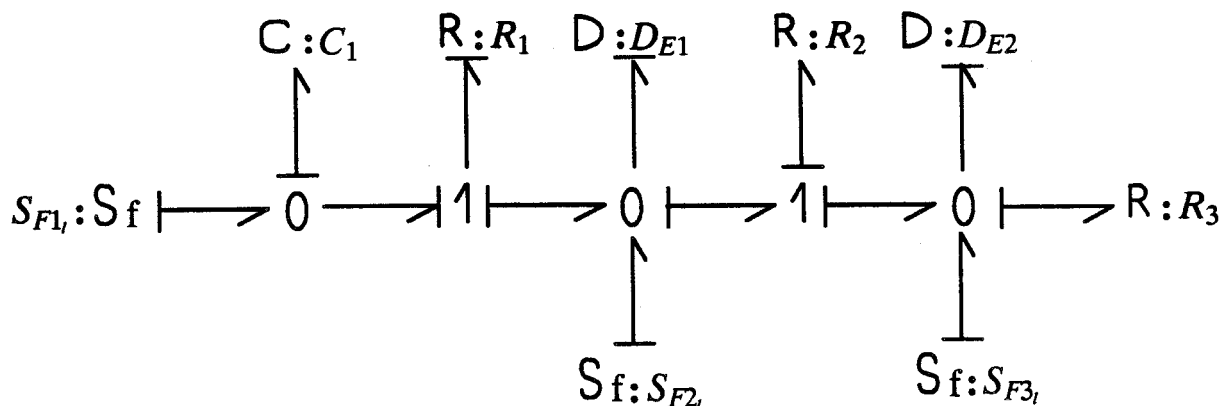


Figure III.1.6 : Bond-graph lent.

Les équations dynamiques lentes et rapides s'ensuivent simplement.

### 1.3.3 - Systèmes implicites

Le système étudié est dit implicite lorsqu'un phénomène lent existe dans le sous-système a priori rapide. Cela se traduit par l'existence de valeurs propres nulles dans la matrice d'état du bond-graph rapide (cas I.2.1) ou quasi-rapide (cas I.2.2).

Il est nécessaire, pour ces systèmes, de faire un ou plusieurs changements de variables mettant en évidence ces phénomènes lents. Des méthodes analytiques et géométriques existent à l'aide de la matrice d'état (voir chapitre I, § III).

Nous proposons une méthode en utilisant les propriétés causales du bond-graph. Ce changement de variables est fait sans aucun calcul. Un avantage est que l'analyse ne se fait pas globalement, mais localement sur les variables mises en jeu. Il n'existe malheureusement pas dans ce cas ni de bond-graph lent, ni de bond-graph rapide.

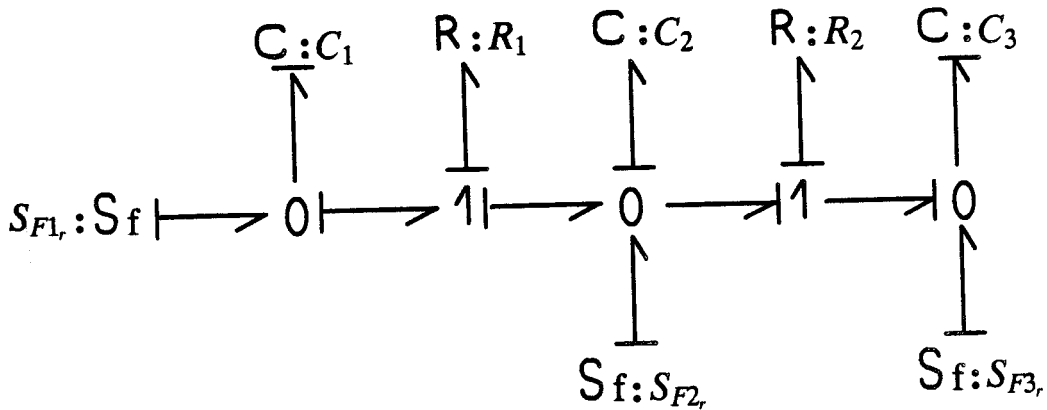
Nous nous proposons de faire l'étude d'un exemple. Ensuite, nous développerons une méthode générale de changement de variables dit structurel.

#### a) Exemple

Reprenons l'exemple de la Figure I.3.3.

Les éléments C sont supposés avoir une amplitude du même ordre de grandeur et  $R_3$  est supposé d'amplitude beaucoup plus grande que  $R_1$  et  $R_2$ .

Le bond-graph causal de la *Figure III.1.2* nous dit que les trois éléments dynamiques  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont causalement liés à  $R_1$  et  $R_2$ . Le bond-graph quasi-rapide s'obtient donc en enlevant seulement  $R_3$ . Ce bond-graph quasi-rapide est mis sous forme causalités dérivées. (*Figure III.1.7*).



*Figure III.1.7 : Bond-graph quasi-rapide du réseau électrique, en causalité dérivée.*

Il apparaît que  $C_2$  reste en causalité intégrale. Le système est donc implicite. L'utilisation des chemins causaux va nous permettre de définir quelques propriétés.

Soient  $e_{c_1}$ , respectivement  $f_{c_1}$ , la tension, respectivement le flux, aux bornes de  $C_1$ .

L'équation d'état du bond-graph quasi-rapide est :

$$(III.1.12) \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_2} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_1} & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{C_2} & \frac{1}{R_2 C_3} \\ 0 & +\frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

En régime permanent ( $\dot{q}_1 = 0$ ), nous obtenons les relations :

$$(III.1.13) \quad \begin{cases} e_{C_1} = R_1 S_{F_1} + e_{C_2} \\ e_{C_3} = -R_2 S_{F_3} + e_{C_2} \end{cases}$$

Ces équations peuvent être directement obtenues à partir du bond-graph quasi-rapide de la *Figure III.1.7* à l'aide des chemins causaux. Nous recherchons pour cela les efforts dans  $C_1$  et  $C_2$  sachant que le flux dans  $C_1$  et  $C_2$  est nul.

Ces relations sont les relations de conservation dans la méthode des perturbations singulières (voir chapitre I, § III).

La matrice d'état étant dégénérée, d'ordre 1, nous obtenons une autre relation :

$$(III.1.14) \quad f_{C_2} = -f_{C_1} - f_{C_3} + S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$$

avec, par hypothèse,  $S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3} = 0$ .

Cette relation peut, encore une fois, être obtenue à l'aide du bond-graph quasi-rapide de la *Figure III.1.7*. Il suffit de rechercher le flux de  $C_2$ , à l'aide des chemins causaux, en fonction des autres flux.

A l'aide des équations III.1.13), respectivement III.1.14), nous obtenons les nouvelles variables rapides  $x_{21}$  et  $x_{22}$ , respectivement la nouvelle variable lente  $x_{11}$ , du système dynamique. Il suffit de calculer la nouvelle équation d'état avec les nouvelles variables pour s'en assurer. Nous proposons une démonstration pour le cas général dans le paragraphe suivant.

$$(III.1.15a) \quad x_{11} = \frac{1}{C_1 + C_2 + C_3} (q_1 + q_2 + q_3)$$

$$(III.1.15b) \quad \begin{cases} x_{21} = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} - R_1 S_{F_1} \\ x_{22} = \frac{q_3}{C_3} - \frac{q_2}{C_2} + R_2 S_{F_3} \end{cases}$$

Le terme  $\frac{1}{C_1+C_2+C_3}$  est appelé capacité agrégée. Il permet de n'avoir que des variables efforts. Il apparaît comme terme multiplicateur de la variable lente. Ce changement de variable est exactement le même que celui obtenu par la méthode des perturbations singulières (chapitre I., § III). De plus, il peut être directement mis en évidence à l'aide des propriétés causales du bond-graph.

b) Changement structurel de variables

L'équation de structure de jonction du bond-graph rapide (cas I.2.1) et du bond-graph quasi-rapide (cas I.2.2) est :

$$(III.1.16) \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ d_{in_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12}^{22} & S_{13}^2 \\ -S_{12}^{22t} & S_{22}^{22} & S_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ d_{out_2} \\ u \end{bmatrix}$$

Si le bond-graph est mis sous forme causalités dérivées, certains éléments restent en causalité intégrale.

Notons  $q_{21}$  le vecteur état correspondant à ces éléments,  $q_{22}$  le vecteur état comprenant les éléments restant en causalité dérivée.

A partir de ce bond-graph, nous obtenons les relations suivantes :

$$(III.1.17a) \quad \dot{q}_{21} = T_1 \dot{q}_{22} + T_2 u$$

$$(III.1.17b) \quad F_{I22} q_{22} = T_3 F_{I21} q_{21} + T_4 u + T_5 \dot{q}_{22}$$

avec 
$$F_{I2} = \begin{bmatrix} F_{I21} & 0 \\ 0 & F_{I22} \end{bmatrix}$$

$T_i$  sont des matrices obtenues par la résolution de l'équation de structure de jonction (cas bond-graph en causalité dérivée).

Nous définissons deux nouveaux vecteurs :

$$(III.1.18) \quad \eta_1 = q_{21} - T_1 q_{22} - T_2 \int u dt$$

$$(III.1.19) \quad \eta_2 = F_{I22} \underline{q}_{22} - T_3 F_{I21} \underline{q}_{21}$$

Nous montrons facilement que ce changement de variable appliqué au système rapide (ou quasi-rapide) est tel que  $\eta_1$  est associé aux valeurs propres nulles et  $\eta_2$  aux valeurs propres non nulles.

*Démonstration Annexe III.2.*

Les nouvelles variables introduites dans le système global seront influencées par les dynamiques lentes.

Le vecteur lent total sera donc  $\begin{bmatrix} \underline{q}_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix}$ , le vecteur rapide  $\eta_2$ . Le vecteur lent est composé de variables de déplacement et le vecteur rapide de variables effort. Il paraît logique de tout transformer en variables effort étant donné qu'il n'est pas possible de tout transformer en variables déplacement. Le changement de variable final sera :

$$(III.1.20) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{I1} & \underline{q}_1 \\ F_{eq} & \eta_1 \\ & \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{I1} & 0 & 0 \\ 0 & F_{eq} & -F_{eq} \cdot T_1 \\ 0 & -T_3 \cdot F_{I21} & F_{I22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_{21} \\ \underline{q}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{eq} T_2 \int u \, dt \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1$  contient les variables lentes,  $x_2$  les variables rapides.  $F_{eq}$  sera par exemple (pour l'exemple précédent) la capacité agrégée du système.

Un calcul possible de  $F_{eq}$  s'effectue à l'aide de l'équation III.1.18). Pour  $\eta_1 = 0$  et en différenciant, nous obtenons une équation différentielle faisant intervenir les vecteurs  $\underline{q}_{21}$  et  $\underline{q}_{22}$ , c'est-à-dire :

$$(III.1.21) \quad \dot{\underline{q}}_{21} = + T_1 \dot{\underline{q}}_{22} + T_2 u.$$

Une telle relation apparaît lorsque dans un bond-graph les éléments capacitifs associés au vecteur état  $\underline{q}_{22}$  sont en causalité dérivée. Dans ce cas, une relation algébrique entre  $\underline{q}_{21}$  et  $\underline{q}_{22}$  est :

$$(III.1.22) \quad \underline{q}_{22} = F_{I22}^{-1} T_1^t F_{I21} \underline{q}_{21}.$$

Le multiport de raideur équivalent du modèle bond-graph est  $K_{eq}$ .



$$(III.1.23) K_{e_q} = F_{I_{21}} \left[ I_d + T_1 F_{I_{22}}^{-1} T_1^t F_{I_{21}} \right]^{-1} .$$

Nous choisissons donc  $F_{e_q} = K_{e_q}$  soit :

$$(III.1.24) F_{e_q} = \left[ F_{I_{21}}^{-1} + T_1 F_{I_{22}}^{-1} T_1^t \right]^{-1} .$$

$F_{e_q}$  est une matrice symétrique, définie positive.

Dans la méthode des perturbations singulières, nous définissons les changements de variables à l'aide de propriétés géométriques. La première étape consiste à définir un sous-espace vectoriel associé au vecteur état  $q_2$  et à la matrice d'état  $A_{22}$ . Ce sous-espace vectoriel est ensuite décomposé comme somme directe entre l'espace nul associé à  $A_{22}$ , appelé  $\text{Ker}(A_{22})$  et l'espace image de  $A_{22}$ , appelé  $\text{Im}(A_{22})$ . Une correspondance est faite entre les relations algébriques intervenant dans  $A_{22}$ , les sous-espaces  $\text{Ker}(A_{22})$  et  $\text{Im}(A_{22})$  et les nouvelles variables d'état rapides et lentes.

Le changement structurel de variables à l'aide du bond-graph se fait dans le même esprit. Une interprétation géométrique, à l'aide d'espaces vectoriels ou de matroides *Birkett et Roe (1989)* serait intéressante.

Le changement de variables proposé fait intervenir le vecteur d'entrée  $u$ . Il n'est néanmoins pas indispensable car les propriétés dynamiques sont conservées lorsqu'il est omis.

Nous pouvons qualifier ce changement de variables, de structurel, car il s'obtient à partir de la structure du bond-graph et de ses propriétés causales (voir exemple a).

#### I.3.4 - Cas général

Le modèle bond-graph, tout comme le modèle d'état, n'est pas toujours adapté pour le découplage des dynamiques du système étudié.

Supposons un modèle bond-graph ayant des éléments dynamiques en causalité dérivée et des dynamiques d'ordres de grandeur différents.

Nous procédons d'abord à un partitionnement du vecteur état sans tenir compte des éléments en causalité dérivée. Deux conditions de découplage sur le bond-graph sont alors nécessaires. Un élément en causalité dérivée ne doit pas être causalement lié simultanément à un élément dont la variable d'état fait partie du vecteur lent et à un élément dont la variable d'état fait partie du vecteur rapide. Cette condition étant vérifiée, le module de l'élément ne doit pas faire varier trop fortement le gain des boucles causales, en tout cas ne pas rendre rapide une variable lente et réciproquement.

Si ces conditions ne sont pas vérifiées, le découplage ne sera pas directement possible sur le bond-graph. Il faudra ainsi faire l'étude à partir du système d'état.

### I.3.5 - Amélioration de la précision des systèmes lent et rapide

La méthode classique des perturbations singulières fait apparaître un terme  $\varepsilon$  qui permet de découpler le modèle en un modèle lent, obtenu pour  $\varepsilon = 0$ , et un modèle rapide.

Néanmoins, lorsque  $\varepsilon$  n'est pas très proche de 0, cette méthode peut entraîner une erreur importante sur les modèles obtenus. Il existe une méthode de bloc-diagonalisation *Kokotovic et al. (1986)* qui découple les variables lentes et les variables rapides. Le nouveau modèle est appelé modèle corrigé. Ce modèle découplé donne des modes propres plus précis, néanmoins les nouvelles variables, qui gardent une signification physique, ne sont plus directement rattachées à des éléments précis du système.

Nous proposons une méthode, appelée de la même manière méthode de correction, qui consiste à améliorer la précision des systèmes lent et rapide, tout en conservant une structure semblable aux systèmes lent et rapide non corrigés.

Cette méthode n'est bien entendu valable que pour les systèmes explicites.

#### a) Amélioration de la précision du système lent

Reprenons l'équation d'état d'un système RC avec les variables dynamiques de co-énergie des vecteurs  $z_1$  et  $z_2$  :

$$(III.1.23) \quad \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \varepsilon \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{I1} T_{11} & F_{I2} T_{12} \\ F_{I2} T_{21} & F_{I2} T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{I1} & B_1 \\ F_{I2} & B_2 \end{bmatrix} u.$$

Nous nous plaçons dans le cas particulier où seuls les éléments  $C$  ont des ordres de grandeur différents. Une étude semblable peut être faite dans le cas où  $F_{I2} T_{22}$  a des valeurs propres de module élevé devant celles de  $F_{I1} T_{11}$ .

$F_{I2}$  a été normalisée pour faire apparaître le terme  $\varepsilon$ .

$T_{22}$  est une matrice inversible. Le système est sous forme singulièrement perturbée. Il est de plus explicite.

Le terme  $F_{I2} T_{21}$  représente un couplage entre les variables rapides de  $z_2$  et les variables lentes de  $z_1$ .

Pour rendre ce couplage plus faible, nous introduisons le nouveau vecteur  $\eta$  défini par :

$$(III.1.24) \quad \eta = z_2 + T_{22}^{-1} T_{21} z_1.$$

La nouvelle équation d'état avec les vecteurs  $z_1$  et  $\eta$  est :

$$(III.1.25) \quad \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \varepsilon \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{I1} (T_{11} - T_{12} T_{22}^{-1} T_{21}) & F_{I1} T_{12} \\ \varepsilon T_{22}^{-1} T_{21} F_{I1} (T_{11} - T_{12} T_{22}^{-1} T_{21}) & (F_{I2} T_{22} + \varepsilon T_{22}^{-1} T_{21} F_{I1} T_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{I1} B_1 \\ F_{I2} B_2 + \varepsilon T_{22}^{-1} T_{21} F_{I1} B_1 \end{bmatrix} u$$

Dans l'échelle des temps lente,  $\eta$  n'a pas de dynamique.

Remarque :

Le nouveau système d'état est encore sous forme singulièrement perturbée. La matrice  $(F_{I2} T_{22} + \varepsilon T_{22}^{-1} T_{21} F_{I1} T_{12})$  étant inversible. Pour s'en convaincre, il suffit de factoriser à droite par  $T_{22}$ . Le premier facteur

est la somme de deux matrices dont l'une est définie positive et l'autre semi-définie positive. Le deuxième facteur est  $T_{22}$ .

Le nouveau vecteur état  $\eta$  contient les variables rapides. Pour  $\varepsilon = 0$ , nous obtenons le système lent habituel.

Or, en général,  $\varepsilon$  n'est pas très proche de 0, et donc écrire  $\varepsilon = 0$  peut entraîner des erreurs importantes sur le modèle lent obtenu. De plus, il est parfois difficile de faire apparaître  $\varepsilon$  dans les équations. Seules des considérations physiques permettent de trouver  $\varepsilon$ .

Dans la suite, nous ne ferons plus apparaître le terme  $\varepsilon$ .

En régime autonome et en posant  $\varepsilon = 0$  dans III.1.23), nous obtenons une relation algébrique entre  $z_{1\ell}$  et  $z_{2\ell}$  soit :

$$(III.1.26) \quad z_{2\ell} = -T_{22}^{-1} T_{21} z_{1\ell} .$$

Les relations III.1.24) et III.1.26) montrent que  $\eta$  correspond à l'évolution rapide de  $z_2$ . Il vient :

$$(III.1.27) \quad \eta = z_{2r} .$$

Pour obtenir le système lent corrigé, nous posons simplement  $\dot{\eta} = 0$  dans III.1.25) en considérant que  $\dot{\eta}$  est d'ordre  $\varepsilon$  après le régime transitoire. Le modèle lent corrigé est défini par l'équation III.1.28) :

$$(III.1.28) \quad \dot{z}_{1\ell}^c = F_{11}^c (T_{11} - T_{12} T_{22}^{-1} T_{21}) z_{1\ell}^c + F_{11}^c (B_1 - T_{12} T_{22}^{-1} B_2) u_\ell$$

$$\text{avec } F_{11}^c = \left[ I_d + F_{11} T_{12} T_{22}^{-1} F_{12}^{-1} T_{22}^{-1} T_{21} \right]^{-1} F_{11} .$$

L'indice  $c$  indique que la variable lente n'est pas obtenue par la méthode habituelle.

$u_\ell$  est la partie lente du vecteur entrée.

Etant donné que  $F_{11}^c$  est une matrice symétrique définie positive, l'équation d'état III.1.28) peut être associée au bond-graph lent du système initial où la matrice  $F_{11}$  est remplacée par  $F_{11}^c$ .

Nous avons obtenu un nouveau bond-graph lent, appelé bond-graph lent corrigé, pour lequel le vecteur état lent est  $Q_{1\ell}$ , avec :

$$(III.1.29) \quad Q_{1\ell} = (F_{11}^c)^{-1} z_{1\ell}^c .$$

Le vecteur état lent qui nous intéresse est  $q_{1\ell}^c$ . Il s'exprime en fonction de  $z_{1\ell}^c$  par la relation habituelle, c'est-à-dire :

$$(III.1.30) \quad q_{1\ell}^c = F_{11}^{-1} z_{1\ell}^c .$$

Nous pouvons encore écrire :

$$(III.1.31) \quad q_{1\ell}^c = F_{11}^{-1} (F_{11}^c) Q_{1\ell} .$$

Le système lent corrigé conserve les mêmes variables lentes de co-énergie. La structure du système lent est conservée. Uniquement quelques coefficients d'ordre  $O(\varepsilon)$  sont ajoutés, correspondant à la nouvelle matrice  $F_{11}^c$ . En ce qui concerne les variables d'énergie, elles ne sont plus directement obtenues sur le bond-graph lent corrigé, mais la relation initiale III.1.30) est conservée.

Nous pouvons calculer l'évolution lente du vecteur état comportant les variables rapides.

D'après l'équation III.1.24), nous pouvons écrire :

$$(III.1.33) \quad z_{2\ell}^c = \eta_\ell - T_{22}^{-1} T_{21} z_{1\ell}^c$$

où  $\eta_\ell$  est obtenu en écrivant  $\dot{\eta} = 0$  dans III.1.25).

Cette expression tient compte de l'évolution lente de  $\eta$  donc de  $z_{2r}$ . C'est pourquoi l'indice c apparaît sur les variables  $z_{2\ell}$  et  $z_{1\ell}$ . Pour  $\eta_\ell = 0$ , cet indice disparaît.

Il vient :

$$(III.1.34) \quad z_{2\ell}^c = - (T_{22}^c)^{-1} (T_{21}^c) z_{1\ell}^c - (T_{22}^c)^{-1} B_2^c u_\ell$$

$$\text{avec } \begin{cases} T_{22}^c = T_{22} + F_{12}^{-1} T_{22}^{-1} T_{21} F_{11} T_{12} \\ T_{21}^c = T_{21} + F_{12}^{-1} T_{22}^{-1} T_{21} F_{11} T_{11} \\ B_2^c = B_2 + F_{12}^{-1} T_{22}^{-1} T_{21} F_{11} B_1 \end{cases}$$

Sachant que :

$$(III.1.35) \quad \begin{cases} z_1^c = F_{11} q_1^c \\ z_2^c = F_{12} q_2^c \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$(III.1.36) \quad q_{2\ell}^c = - F_{12}^{-1} (T_{22}^c)^{-1} \left[ (T_{21}^c) F_{11} q_{1\ell}^c + B_2^c u_\ell \right]$$

$q_{1\ell}^c$  est calculé à partir de l'équation III.1.30).

b) Amélioration de la précision du système rapide

La première méthode consiste à extraire le système rapide du système global III.1.25), en éliminant le terme de couplage avec  $z_1$ .

Nous obtenons :

$$(III.1.37) \quad \dot{\eta}_r = (F_{12} T_{22} + T_{22}^{-1} T_{21} F_{11} T_{12}) \eta_r + [F_{12} B_2 + T_{22}^{-1} T_{21} F_{11} B_1] u_r.$$

En tenant compte de :

$$(III.1.38) \quad \begin{cases} \eta_r = \eta - \eta_\ell \\ z_{2r}^c = z_2^c - z_{2\ell}^c \end{cases}$$

Nous en déduisons immédiatement :

$$(III.1.39) \quad z_{2r}^c = \eta_r$$

A l'aide de la relation :

$$(III.1.40) \quad z_2^c = F_{12} q_2^c$$

il vient :

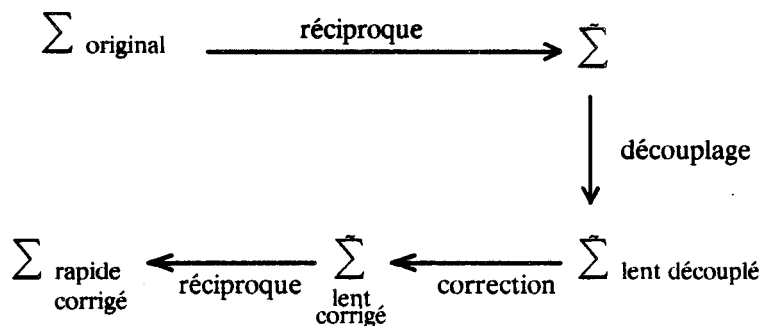
$$(III.1.41) \quad \dot{q}_{2r}^c = (T_{22}^c) F_{12} q_{2r}^c + B_2^c u_r .$$

Ce système n'est pas très intéressant car cette équation dynamique n'est plus associée à un bond-graph de la même structure que le bond-graph rapide. En effet, la matrice de commande  $B_2^c$  peut par exemple, dans certains cas, faire apparaître des nouveaux termes n'existant pas dans l'équation d'état rapide non corrigé, d'où une modification de la structure du bond-graph rapide.

Nous nous proposons d'utiliser le bond-graph réciproque pour améliorer la précision du modèle rapide.

Une première étape consiste à chercher le bond-graph réciproque du système global. Le système réciproque lent peut être extrait. Sur ce système, nous utilisons la méthode de correction présentée précédemment qui consiste à modifier la matrice de raideur du système. Une nouvelle transformation réciproque est accomplie. Nous obtenons ainsi le système rapide corrigé appelé bond-graph rapide corrigé.

Cette transformation est représentée sur la *Figure III.1.8*.



*Figure III.1.8 : Représentation de la méthode d'obtention du modèle rapide corrigé.*

Pour obtenir le système rapide corrigé, il suffit d'extraire le système rapide du bond-graph (présenté précédemment) et de modifier la matrice caractéristique de raideur du système.

Soit  $F_{12}$  la matrice de raideur du système rapide.

La matrice de raideur du système rapide corrigé est définie par :

$$(III.1.42) \quad F_{12}^c = F_{12} + T_{22}^{-1} T_{21} F_{11} T_{12} T_{22}^{-1} .$$

*Démonstration Annexe III.3.*

Les équations du bond-graph rapide corrigé à l'aide des variables de co-énergie et d'énergie sont définies par :

$$(III.1.43a) \quad \begin{cases} \dot{z}_{2r}^c = F_{12}^c T_{22} z_{2r}^c + F_{12}^c B_2 u_r \\ y_r = C_2 z_{2r}^c + D u_r \end{cases}$$

$$(III.1.43b) \quad Q_{2r} = (F_{12}^c)^{-1} z_{2r}^c .$$

Le vecteur état rapide  $q_{2r}$  corrigé est définie par la même relation avec  $z_{2r}^c$ , soit :

$$(III.1.44) \quad q_{2r}^c = (F_{12})^{-1} z_{2r}^c .$$

Tout comme pour les systèmes découplés non corrigés,  $q_1$  aura un comportement lent uniquement et  $q_2$  sera la somme des comportements lent et rapide.

$$(III.1.45) \quad \begin{cases} q_1 = q_{1\ell}^c \\ q_2 = q_{2\ell}^c + q_{2r}^c \\ u = u_\ell + u_r \end{cases}$$

Les conditions initiales de chaque système dynamique tiennent compte des équations III.1.34) et III.1.45).

### c) Etude de l'équation de sortie corrigée

L'équation de sortie du système est définie par :

$$(III.1.46) \quad y = C_1 F_{12} q_1 + C_2 F_{12} q_2 + Du .$$

Nous pouvons décomposer le vecteur de sortie :

$$(III.1.47) \quad y = y_\ell + y_r .$$



$y_\ell$ , respectivement  $y_r$ , tient compte de l'évolution lente, respectivement rapide, des variables d'état et de l'entrée.

$$(III.1.48) \quad \begin{cases} y_\ell = (C_1 - C_2 (T_{22}^c)^{-1} T_{21}^c) F_{11} q_{1\ell} + (D - C_2 (T_{22}^c)^{-1} B_2^c) u_\ell \\ y_r = C_2 F_{12} q_{2r} + D u_r \end{cases}$$

Sachant que :

$$(III.1.49) \quad \begin{cases} F_{12} q_{2r} = F_{12}^c Q_{2r} \\ F_{11} q_{1\ell} = F_{11}^c Q_{1\ell} \end{cases}$$

$y_\ell$  et  $y_r$  peuvent directement être déduits des bond-graphs corrigés.

d) Remarques sur les systèmes corrigés

L'équation d'état du système non corrigé est de la forme :

$$(III.1.50) \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

L'équation d'état du système corrigé est de la forme :

$$(III.1.51) \quad [I + \epsilon M] \dot{x} = Ax + Bu$$

où  $M$  est une matrice symétrique.

Les propriétés structurelles sont donc conservées.

Le système corrigé garde des variables d'état de même nature. Il garde un sens physique que nous ne retrouvons pas avec d'autres méthodes.

En général, le bond-graph obtenu ne contient plus uniquement des ports simples. Des relations supplémentaires entre les variables d'état sont introduites. Elles sont néanmoins d'ordre  $\epsilon$ . L'étude d'un système graphe associé au système corrigé devra tenir compte du poids d'ordre  $\epsilon$  des chemins ajoutés par rapport au système graphe associé au système non corrigé. Ceci est important pour l'étude du découplage-linéarisation par exemple.

e) Exemple

Reprenons le modèle bond-graph du réseau électrique :

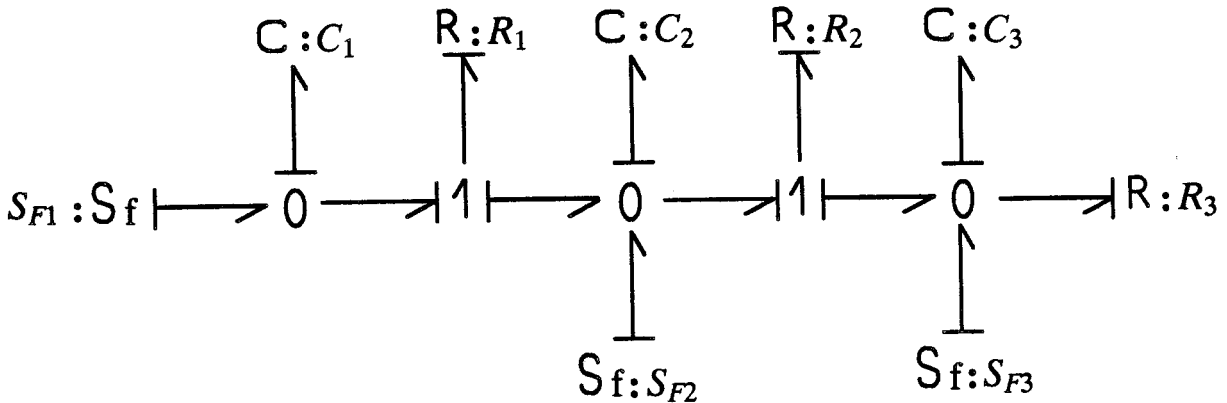


Figure III.1.9 : modèle bond-graph d'un réseau électrique.

Les matrices d'état et de commande du système dynamique sont :

$$(III.1.52) \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_2} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_1} & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{1}{C_2} & \frac{1}{R_2 C_3} \\ 0 & \frac{1}{R_2 C_2} & -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur état est  $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$  où  $q_1$  est la variable lente et  $q_2, q_3$  sont les variables rapides.

Les équations lente et rapide du modèle non corrigé sont :

$$(III.1.53) \quad \begin{cases} \dot{q}_{1\ell} = A_\ell q_{1\ell} + B_\ell u_\ell \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_{2r} \\ \dot{q}_{3r} \end{bmatrix} = A_r \begin{bmatrix} q_{2r} \\ q_{3r} \end{bmatrix} + B_r u_r \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} A_\ell = -\frac{1}{(R_1+R_2+R_3)} & B_\ell = \begin{bmatrix} \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3} & \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} \\ 1 & \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} \end{bmatrix} \\ A_r = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_1+R_2}\right)\frac{1}{C_2} & \frac{1}{R_2 C_3} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_3} \end{bmatrix} & B_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Les équations lente et rapide du modèle corrigé sont :

$$(III.1.54) \begin{cases} \dot{q}_{1\ell}^c = F_{I1}^{-1} F_{I1}^c [A_\ell q_{1\ell} + B_\ell u_\ell] \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_{2r}^c \\ \dot{q}_{3r}^c \end{bmatrix} = F_{I2}^{-1} F_{I2}^c \left[ A_r \begin{bmatrix} q_{2r}^c \\ q_{3r}^c \end{bmatrix} + B_r u_r \right] \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} F_{I1}^c = \left[ C_1 + \left(\frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}\right)^2 C_2 + \left(\frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}\right)^2 C_3 \right]^{-1} \\ F_{I2}^c = \begin{bmatrix} 1/C_2 & 0 \\ 0 & 1/C_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{C_1 (R_1+R_2+R_3)^2} \begin{bmatrix} (R_2+R_3)^2 & R_3 (R_2+R_3) \\ -R_3 (R_2+R_3) & R_3^2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Nous allons comparer les valeurs propres des matrices d'état pour les différents cas en prenant  $\varepsilon = 0.1$  puis  $\varepsilon = 1$ .

$$\underline{AN} : R_1 = R_2 = R_3 = R = 1 \quad - \quad C_2 = C_3 = 1.$$

	système total	système découplé	système découplé corrigé
	- 0.0315	- 0.0333	- 0.0316
	-----		
$C_1=10$	- 3.0173	- 3	- 3.0171
	- 1.0512	- 1	- 1.0496
	-----		
	- 0.1981	- 0.333	- 0.2143
	-----		
$C_1=1$	- 3.2470	- 3	- 3.2153
	- 1.555	- 1	- 1.4514

Table III.1.1 : Valeurs propres de la matrice d'état pour différentes valeurs de  $C_1$ .

Il apparaît clairement que les systèmes corrigés sont nettement mieux approximés du point de vue fréquentiel. Pour  $\epsilon = 1$ , l'approximation reste très correcte. Pour  $\epsilon = 1$ , le choix des vecteurs lent et rapide peut être quelconque, l'approximation sera dans tous les cas très bonne.

### I.3.6 - Application à la commande

Les modèles lent et rapide corrigés peuvent être utilisés en vue de la commande, soit pour la commande modale, soit pour la commande composite quasi-optimale parmi d'autres possibilités.

Il apparaît que le critère de performance obtenu à l'aide d'une commande composite sur les systèmes lent et rapide corrigés n'est pas nécessairement meilleur que celui obtenu pour les systèmes non corrigés. En fait, pour le cas extrême où l'on procède à un changement de variables de manière à bloc-diagonaliser la matrice d'état, ce critère peut devenir très mauvais suivant par exemple les conditions initiales des variables d'état.

En effet, supposons le modèle représenté par les équations :

$$(III.1.55a) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \epsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u.$$

$$(III.1.55b) \quad y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

La commande composite quasi-optimale est la somme des commandes calculées pour le système lent et pour le système rapide. La même commande est donc appliquée pour les deux sous-systèmes indépendants, ce qui apparemment ne donne pas un bon critère d'optimalité.

Néanmoins, ce critère n'est pas obligatoirement indispensable. Si le système rapide est stabilisable-déTECTABLE, il est possible de lui appliquer un retour d'état et de calculer une commande optimale uniquement sur la partie lente corrigée.

Reprenons l'exemple du réseau électrique modélisé par le bond-graph de la *Figure III.1.9*. Nous comparons les critères obtenus pour le modèle d'état directement obtenu à l'aide du modèle bond-graph (variables de co-énergie) et le modèle d'état déduit du précédent par un changement de base du type de l'équation III.1.24).

Les résultats sont présentés dans la *Table III.1.2*.

Nous avons choisi  $C_1 = 10$ ,  $R_1 = 1$  en faisant varier  $\epsilon$  de 0.1 à 1. Les variables dynamiques ont la valeur 1 pour condition initiale et la matrice de sortie est  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0.25$	$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 0.75$	0.1
$J_{op}$	3.8022	4.7616	6.1665	7.4294	8.6079
$J_c$	3.8052	4.7781	6.2169	7.5253	8.7588
$J_r$	3.8222	4.8072	6.2610	7.5896	8.8504
$J_c^*$	3.8081	4.7918	6.2672	7.6334	8.9445
$J_r^*$	3.8202	4.7975	6.2358	7.5527	2.8088

*Table III.1.2 : Comparaison des critères quadratiques.*

$J_{op}$ ,  $J_c$  et  $J_r$  sont respectivement les critères associés aux commandes, optimale, composite et réduite du système initial et  $J_c^*$  et  $J_r^*$  sont respectivement les critères associés aux commandes composite et réduite du système obtenu par changement de base.

Nous remarquons que  $J_c < J_c^*$ , il paraît donc souhaitable de garder le modèle initial lors du calcul de la commande composite. Par contre, si nous voulons introduire une commande réduite, il est préférable de la calculer à partir du système obtenu par changement de base.

Après l'étude de quelques exemples, nous nous sommes aperçus qu'il n'existait pas de règle générale et que chaque cas offrait un choix préférable par rapport aux autres.

### Conclusion

Dans cette première partie, nous avons donné quelques guides en vue de la séparation du vecteur état en variables lentes et variables rapides. Nous avons montré que le bond-graph permet surtout de résoudre deux problèmes importants :

- il indique si le partitionnement est adéquat, dans ce cas deux sous bond-graphs correspondant au modèle lent et modèle rapide sont obtenus.
- Un changement de variables est proposé lorsque le système est sous forme implicite.

L'avantage par rapport à d'autres méthodes est qu'aucun calcul n'est à faire. L'analyse se fait de manière structurale. Lorsque le découplage est possible, nous obtenons deux sous modèles bond-graph. Nous gardons ainsi toutes les possibilités d'analyse qu'offre le modèle bond-graph. Un modèle d'état formel peut être directement obtenu alors que ce même modèle, obtenu par la méthode des perturbations singulières, requièrerait des calculs formels fastidieux tels que l'inversion et le produit de matrices.

L'étude à l'aide du bond-graph peut se faire de manière manuelle, même avec un modèle de grande dimension. Elle peut néanmoins se faire informatiquement à l'aide de l'intelligence artificielle qui est très adaptée pour ce genre d'analyse.

Une méthode dite de correction a été proposée. Elle permet de conserver un modèle physique tout en améliorant la précision des fréquences des sous-systèmes lent et rapide. De plus, ces nouveaux modèles peuvent être modélisés par des bond-graphs semblables aux bond-graphs des modèles non corrigés. Les propriétés structurales initiales sont conservées.

## II - ETUDE DES SYSTEMES PUREMENT OSCILLANTS

Il n'existe en général pas de systèmes purement oscillants. Par contre, les systèmes dynamiques ont souvent un comportement lent associé à des oscillations rapides. Néanmoins, certaines structures vibratoires, telles les segments souples, retirées de leur environnement sont purement oscillantes à l'amortissement structural près qui est très faible. Mais l'environnement se comportant généralement comme un filtre passe bas, les phénomènes oscillatoires rapides sont en soi peu intéressants. Nous parlerons donc souvent de réduction plutôt que de séparation de modes, les modes étant une mesure des périodes d'oscillation. Un bond-graph, associé à un système physique oscillant, ne comporte pas d'éléments R.

Une première partie consistera à donner des critères et méthodes de séparations des systèmes lent (modes à faible valeur) et rapide (modes à valeur élevée).

Une deuxième partie fera l'objet d'une analyse particulière du système lent en vue d'une réduction de modèle. Nous introduirons une méthode ayant pour but d'augmenter la précision du système lent (précision des modes).

## II.1 - Découplage des modes lents et des modes rapides

Tout comme pour les systèmes RC, deux catégories de systèmes peuvent apparaître : les systèmes implicite et explicite. Nous ne développerons pas la partie concernant les systèmes implicites. Une étude analogue à celle faite par les systèmes amortis implicites pourrait être développée. Nous supposerons par la suite que les oscillations rapides sont dues à des éléments capacitifs de faible valeur et que tous les éléments I ont le même ordre de grandeur, cette restriction ne modifie en rien la généralité de l'étude. Nous supposerons, enfin, qu'il n'y a pas d'éléments en causalité dérivée.

Une démarche analogue peut être adoptée lorsque les éléments I ont des ordres de grandeur différents et les éléments C le même ordre de grandeur. Il faudrait simplement utiliser la formulation mathématique duale de celle que nous proposons par la suite.

### II.1.1 - Description du problème

Soit un bond-graph dont l'équation d'état a la forme suivante :

$$(III.2.1) \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{pq} \\ A_{qp} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ B_q \end{bmatrix} u$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\in \mathbb{R}^{\ell} & \mathbf{u} &\in \mathbb{R}^p \\ \mathbf{q} &\in \mathbb{R}^{n+m} \end{aligned}$$

$\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  sont respectivement les vecteurs des variables d'état associées aux éléments inertiels et capacitifs.

Le bond-graph étudié ne comporte a priori que des ports simples. Les éléments capacitifs de raideur élevée sont rassemblés dans la matrice de raideur  $K_2$ , avec  $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , les autres dans  $K_1$ ,  $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Le système peut néanmoins être étudié à l'aide d'une représentation multiports. Dans ce cas,  $K_2$  comportera des valeurs propres de valeur élevée en comparaison de celles de  $K_1$ .

Le système étudié aura a priori  $m$  modes propres élevés et  $n$  modes propres faibles s'il est explicite.

Les modes propres du système sont les valeurs propres de la matrice  $-K A_{qp} A_{pq} K^{-1}$  où  $K$  est la matrice de raideur du système. Le rang de cette matrice est au plus  $\ell$ , donc le nombre de modes propres non nuls est au plus  $\ell$ . Si  $\ell < m$ , le système sera sous forme implicite.

Nous nous plaçons dans le cas où  $\ell \geq m$ .

La décomposition du vecteur état est immédiate en ce qui concerne les variables  $\underline{q}$ . Notons  $\underline{q}_2$  le vecteur état associé aux éléments capacitifs contenus dans  $K_2$ .

L'équation III.2.1) peut être réécrite :

$$(III.2.2) \quad \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_1 K_1 & A_2 K_2 \\ 0 & 0 & A_3 K_1 & A_4 K_2 \\ A_5 M_1^{-1} & A_6 M_2^{-1} & 0 & 0 \\ A_7 M_1^{-1} & A_8 M_2^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} u,$$

avec  $A_5 = -A_1^t$ ,  $A_6 = -A_3^t$ ,  $A_7 = -A_2^t$ ,  $A_8 = -A_4^t$ . Ces matrices sont indépendantes des éléments  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n+m$  et  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ . Elles ne dépendent que des coefficients de la structure de jonction du bond-graph.  $M_1$  et  $M_2$  sont les matrices de masse comportant les termes  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ .

$p_2$  est choisie de façon à ce que la matrice  $A_4$  soit carrée et inversible.

#### Propriété III.2.1)

$A_8$  est structurellement inversible ssi il est possible de mettre tous les éléments capacitifs correspondant à la matrice  $K_2$  en causalité dérivée en même temps que tous les éléments inertiels de  $M_2$  (sans introduire de boucle algébrique non solvable).

#### Démonstration :

Il suffit d'utiliser l'équation de structure de jonction du modèle qui est pratiquement la même que III.2.2) et de positionner  $\dot{p}_2$  et  $\dot{q}_2$  dans le vecteur d'entrée. Ceci équivaut à inverser les causalités des éléments de matrices caractéristiques  $M_2$  et  $K_2$ , mais aussi à inverser les matrices  $A_4$  et  $A_8$ .



Nous montrerons par la suite que si  $A_8$  n'est jamais inversible, alors le système est sous forme implicite. C'est-à-dire qu'il existe des oscillatoires lents dans la partie supposée rapide. Des changements de variables doivent être faits dans ce cas.

Nous appliquons directement les perturbations singulières sur les équations différentielles du second ordre et montrons qu'une méthode de découplage directe sur le bond-graph ou sur l'équation d'état donnent des résultats identiques.

### II.1.2 - Application des perturbations singulières sur les équations différentielles du second ordre

Nous introduisons les nouvelles variables définies par :

$$(III.2.3) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = K_1 q_1 \\ \dot{y}_2 = K_2 q_2 \end{cases}$$

Le système d'équations différentielles du second ordre, obtenu à partir du système d'équations III.2.2), est :

$$(III.2.4) \quad \begin{cases} \ddot{y}_1 + K_1 H_{11} y_1 + K_1 H_{12} y_2 = K_1 B_1^* \int u dt + K_1 B_3 u \\ \ddot{y}_2 + K_2 H_{21} y_1 + K_2 H_{22} y_2 = K_2 B_2^* \int u dt + K_2 B_4 u \end{cases}$$

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} H_{11} = -(A_5 M_1^{-1} A_1 + A_6 M_2^{-1} A_3) \\ H_{12} = -(A_5 M_1^{-1} A_2 + A_6 M_2^{-1} A_4) \\ H_{21} = -(A_7 M_1^{-1} A_1 + A_8 M_2^{-1} A_3) \\ H_{22} = -(A_7 M_1^{-1} A_2 + A_8 M_2^{-1} A_4) \\ B_1^* = (A_5 M_1^{-1} B_1 + A_6 M_2^{-1} B_2) \\ B_2^* = (A_7 M_1^{-1} B_1 + A_8 M_2^{-1} B_2) \end{cases}$$

La matrice  $K_2$  comportant les éléments de valeur élevée peut être normalisée par rapport à  $K_1$  en posant  $\varepsilon K_2 = \tilde{K}_2$ .

#### Propriété III.2.2)

Si  $A_8$  est choisie de façon à ce que son rang soit maximal, alors  $H_{22}$  est inversible ssi  $A_8$  est inversible.

Démonstration :

⇒ Si  $A_8$  n'est pas inversible, alors il existe une combinaison linéaire entre les lignes de  $[A_7 \ A_8]$ . Le rang de  $H_{22}$  est dans ce cas dégénéré.

⇐ Si  $A_8$  est inversible,  $H_{22}$  est la somme d'une matrice définie positive  $-A_8 M_2^{-1} A_4$  et d'une matrice semi-définie positive  $-A_7 M_1^{-1} A_2$ , elle est donc inversible.

Propriété III.2.3)

Le système d'équations différentielles du second ordre III.2.4) est sous forme explicite ssi les éléments capacitifs associés à  $K_2$  peuvent adopter la causalité dérivée.

Nous supposons dans la suite que le système étudié est sous forme explicite. Le système lent par application des perturbations singulières est obtenu en posant  $\varepsilon \ddot{y}_2 = 0$ , soit :

$$(III.2.5) \quad \begin{cases} y_{2\ell} = -H_{22}^{-1} H_{21} y_{1\ell} + H_{22}^{-1} B_2^* \int u_\ell dt + H_{22}^{-1} B_4 u_\ell \\ \ddot{y}_{1\ell} + K_1 (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_{1\ell} = K_1 [(B_1^* - H_{12} H_{22}^{-1} B_2^*) \int u_\ell dt + (B_3 - H_{12} H_{22}^{-1} B_4) u_\ell]. \end{cases}$$

Le système rapide obtenu par application des perturbations singulières est :

$$(III.2.6) \quad \begin{cases} y_{1r} = 0 \\ \ddot{y}_{2r} + K_2 H_{22} y_{2r} = K_2 B_2^* \int u_r dt + K_2 B_4 u_r \end{cases}$$

Le calcul de  $y_1$  et  $y_2$  se fait à l'aide de l'équation suivante :

$$(III.2.7) \quad \begin{cases} y_1 = y_{1\ell} \\ y_2 = y_{2\ell} + y_{2r} \end{cases}$$

La prise en compte des conditions initiales donne :

$$(III.2.8a) \quad \begin{cases} y_{1\ell}(0) = y_1(0) \\ \dot{y}_{1\ell}(0) = \dot{y}_1(0) \end{cases}$$

$$(III.2.8b) \begin{cases} y_{2r}(0) = y_2(0) + H_{22}^{-1} H_{21} y_1(0) \\ \dot{y}_{2r}(0) = \dot{y}_2(0) + H_{22}^{-1} H_{21} \dot{y}_1(0) \end{cases}$$

Nous proposons maintenant une méthode directe de découplage à l'aide de l'équation d'état.

### II.1.3 - Décomposition de l'équation d'état

#### - Système lent

L'équation d'état III.2.2) ne se présente pas sous une forme singulièrement perturbée.

Nous écrivons cette équation à l'aide des variables de co-énergie définies par :

$$(III.2.9a) \begin{cases} \underline{f}_1 = M_1^{-1} p_1 \\ \underline{f}_2 = M_2^{-1} p_2 \end{cases}$$

$$(III.2.9b) \begin{cases} \underline{e}_1 = K_1 q_1 \\ \underline{e}_2 = K_2 q_2 \end{cases}$$

La nouvelle équation d'état s'écrit :

$$(III.2.10) \begin{bmatrix} \dot{\underline{f}}_1 \\ \dot{\underline{e}}_1 \\ \dot{\underline{f}}_2 \\ \varepsilon \dot{\underline{e}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_1^{-1} A_1 & 0 & M_1^{-1} A_2 \\ K_1 A_5 & 0 & K_1 A_6 & 0 \\ 0 & M_2^{-1} A_3 & 0 & M_2^{-1} A_4 \\ \tilde{K}_2 A_7 & 0 & \tilde{K}_2 A_8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{e}_1 \\ \underline{f}_2 \\ \underline{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1^{-1} B_1 \\ K_1 B_3 \\ M_2^{-1} B_2 \\ \tilde{K}_2 B_4 \end{bmatrix} u.$$

La forme de la matrice d'état ne permet pas d'appliquer directement les perturbations singulières, néanmoins puisque la matrice  $\begin{bmatrix} 0 & M_2^{-1} A_4 \\ \tilde{K}_2 A_8 & 0 \end{bmatrix}$  est inversible, nous pouvons déjà présager que les modes propres élevés sont liés aux vecteurs  $\underline{f}_2$  et  $\underline{e}_2$ .

Posons  $\varepsilon = 0$  dans III.2.10). Il vient :

$$(III.2.11) \tilde{K}_2 A_7 \underline{f}_{1\ell} + \tilde{K}_2 A_8 \underline{f}_{2\ell} + \tilde{K}_2 B_4 u_\ell = 0.$$

L'indice  $\ell$  indique que les calculs tiennent compte de  $\varepsilon = 0$ .

En dérivant III.2.11) et en utilisant III.2.10), il vient après quelques développements mathématiques :

$$(III.2.12a) \quad \underline{e}_{2\ell} = H_{22}^{-1} [-H_{21} \underline{e}_{1\ell} + B_2^* u_\ell + B_4 \dot{u}_\ell]$$

$H_{ij}$  et  $B_i^*$  sont définis dans III.2.4).

$$III.2.12b) \quad \begin{cases} \dot{\underline{f}}_{1\ell} = M_1^{-1} \left[ I_d + A_2 A_4^{-1} M_2 A_8^{-1} A_7 M_1^{-1} \right]^{-1} \\ \quad \quad \quad \left[ (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) \underline{e}_{1\ell} + (B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2) u_\ell - A_2 A_4^{-1} M_2 A_8^{-1} B_4 \dot{u}_\ell \right] \\ \underline{e}_{1\ell} = K_1 (A_5 - A_6 A_8^{-1} A_7) \underline{f}_{1\ell} + K_1 (B_3 - A_6 A_8^{-1} B_4) u_\ell \end{cases}$$

Nous développons ici le calcul du coefficient de  $\underline{e}_{1\ell}$ , appelé T dans l'équation III.2.12b).

Aucune hypothèse n'est faite sur les matrices.

$$\begin{aligned} T &= M_1^{-1} \left[ A_1 - A_2 (A_7 M_1^{-1} A_2 + A_8 M_2^{-1} A_4)^{-1} (A_7 M_1^{-1} A_1 + A_8 M_2^{-1} A_3) \right] \\ &= M_1^{-1} \left[ \left( I_d - A_2 (A_7 M_1^{-1} A_2 + A_8 M_2^{-1} A_4)^{-1} A_7 M_1^{-1} \right) A_1 - A_2 (A_7 M_1^{-1} A_2 + A_8 M_2^{-1} A_4)^{-1} A_8 M_2^{-1} A_3 \right] \end{aligned}$$

En regroupant les matrices dans les parenthèses, nous avons :

$$\begin{aligned} T &= M_1^{-1} \left[ I_d - (I_d + M_1 A_7^{-1} A_8 M_2^{-1} A_4 A_2^{-1})^{-1} \right] A_1 - M_1^{-1} \left( I_d + A_2 A_4^{-1} M_2 A_8^{-1} A_7 M_1^{-1} \right)^{-1} A_2 A_4^{-1} A_3 \\ &= M_1^{-1} \left[ I_d + A_2 A_4^{-1} M_2 A_8^{-1} A_7 M_1^{-1} \right]^{-1} (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3). \end{aligned}$$

Le calcul des autres coefficients se fait de la même manière.

Le système III.2.12) transformé en équations différentielles du second ordre à l'aide du vecteur défini par :

$$(III.2.13) \quad \begin{cases} \dot{y}_{1\ell} = \underline{e}_{1\ell} \\ \dot{y}_{2\ell} = \underline{e}_{2\ell} \end{cases}$$

est le système lent du système d'équations différentielles du second ordre calculé pour le système global.

*Démonstration Annexe III.4.*

Nous dirons donc que les vecteurs définis par les équations III.2.12) sont les vecteurs lents du système dynamique. A l'aide des équations III.2.9), il est possible de calculer les équations dynamiques lentes associées aux variables d'état du modèle bond-graph.

- Système rapide

Nous décomposons l'équation d'état III.2.10) de manière à garder les sous-matrices directement associées au vecteur état  $\underline{e}_2$ .

Soit :

$$(III.2.14) \quad \begin{bmatrix} \dot{\underline{f}}_{1r} \\ \dot{\underline{f}}_{2r} \\ \varepsilon \dot{\underline{e}}_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_1^{-1} A_2 \\ 0 & 0 & M_2^{-1} A_4 \\ \tilde{K}_2 A_7 & \tilde{K}_2 A_8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f}_{1r} \\ \underline{f}_{2r} \\ \underline{e}_{2r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1^{-1} B_1 \\ M_2^{-1} B_2 \\ \tilde{K}_2 B_4 \end{bmatrix} u_r.$$

L'indice  $r$  indique que les vecteurs état sont définis à l'aide d'une équation réduite par rapport à l'équation d'état initiale III.2.10).

La transformation de cette équation d'état en équation différentielle du second ordre avec la nouvelle variable  $y_{2r}$  définie par :

$$(III.2.15) \quad \dot{y}_{2r} = \underline{e}_{2r}$$

nous donne exactement le système rapide directement obtenu par application des perturbations singulières sur les équations différentielles du second ordre du système global (Annexe III.4).

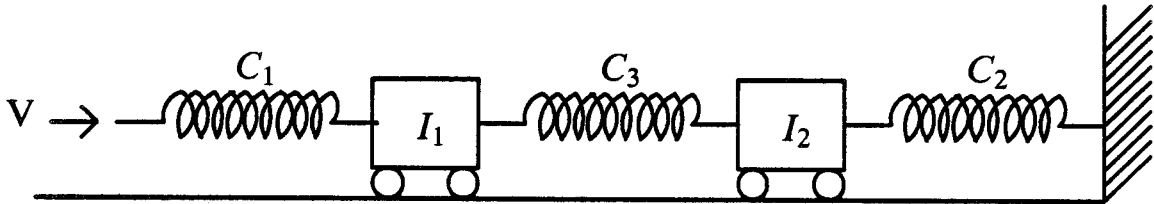
La méthode de découplage sur les équations d'état est donc légitime. Néanmoins, lorsque la matrice  $A_7$  n'est pas nulle, le vecteur état  $\underline{f}_1$  a à la fois une dynamique propre lente et une dynamique propre rapide. Le découplage peut dans ce cas se faire directement sur l'équation d'état mais l'analyse des résultats devra obligatoirement être faite sur les équations différentielles du second ordre.

Une interprétation sur le bond-graph est faite ultérieurement.

Nous présentons un exemple et donnerons ensuite quelques définitions et propriétés.

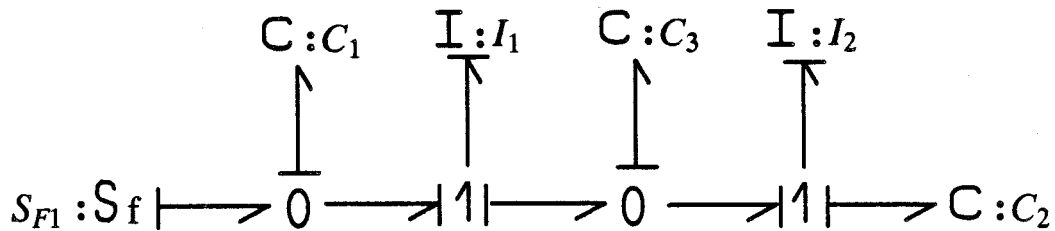
Exemple :

Soit le modèle mécanique représenté sur la *Figure III.2.1* :



*Figure III.2.1 : Modèle mécanique.*

Le modèle bond-graph du système dynamique est représenté sur la *Figure III.2.2*).



*Figure III.2.2 : Modèle bond-graph du système mécanique.*

Le ressort  $C_3$  est un élément parasite du système. La variable dynamique associée est considérée comme rapide.

Nous écrivons l'équation d'état du système.

$$(III.2.17) \quad \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & \frac{-1}{C_3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{C_2} & \frac{+1}{C_3} \\ \frac{-1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{+1}{I_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Pour dessiner le bond-graph rapide, nous devons garder tous les éléments capacitifs de petit module et tous les éléments inertiels directement causalement liés aux premiers, et toutes les sources causalement liées à ces éléments dynamiques.

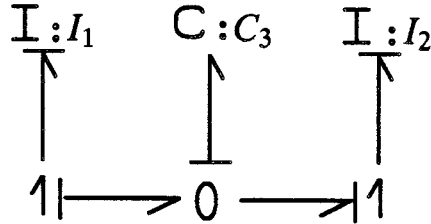


Figure III.2.3 : Bond-graph rapide.

Le bond-graph lent s'obtient simplement en tenant compte du fait que  $\dot{q}_3 = 0$ . Ceci équivaut dans le cas présent à enlever l'élément C, de module  $C_3$ , et à changer certaines causalités.

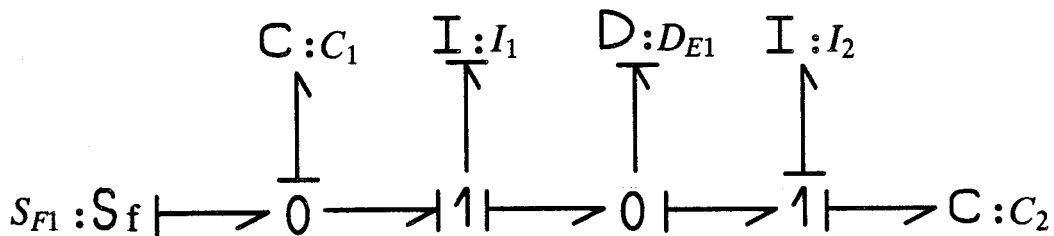


Figure III.2.4 : Bond-graph lent.

Il est clair que la variable  $p_1$  a à la fois une dynamique propre lente et une dynamique propre rapide puisque  $I_1$  apparaît dans le bond-graph lent et dans le bond-graph rapide.

L'étude dynamique ne peut donc pas se faire à l'aide des équations d'état. Néanmoins, les bond-graphs lent et rapide peuvent être utilisés pour obtenir les équations différentielles du second ordre des systèmes lent et rapide.

L'équation d'état lente issue du bond-graph lent est :

$$(III.2.18a) \quad \begin{bmatrix} \dot{p}_{1\ell} \\ \dot{q}_{1\ell} \\ \dot{q}_{2\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta C_1} & \frac{-1}{\Delta C_2} \\ \frac{-1}{I_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1\ell} \\ q_{1\ell} \\ q_{2\ell} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_\ell$$

$$(III.2.18b) \quad \begin{cases} p_{2\ell} = \frac{I_2}{I_1} p_{1\ell} & \text{avec } \Delta = 1 + \frac{I_2}{I_1} \\ q_{3\ell} = \frac{1}{I_1 + I_2} \left( I_2 \frac{q_{1\ell}}{C_1} + I_1 \frac{q_{2\ell}}{C_2} \right) \end{cases}$$

La variable d'état  $q_{3\ell}$  est calculée à l'aide du détecteur d'effort ajouté à la place de  $C_3$ .

L'équation d'état rapide issue du bond-graph rapide est :

$$(III.2.19) \quad \begin{bmatrix} \dot{p}_{1r} \\ \dot{p}_{2r} \\ \dot{q}_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1r} \\ p_{2r} \\ q_{2r} \end{bmatrix}$$

A l'aide des nouvelles variables définies par le changement de variable de l'équation III.2.20), nous obtenons les équations différentielles du second ordre des systèmes lent et rapide (équations III.2.21).

$$(III.2.20) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{q_1}{C_1} \\ \dot{y}_2 = \frac{q_2}{C_2} \\ \dot{y}_3 = \frac{q_3}{C_3} \end{cases}$$

$$(III.2.21a) \quad \begin{cases} C_1 \ddot{y}_{1\ell} + \frac{1}{I_1 + I_2} y_{1\ell} - \frac{1}{I_1 + I_2} y_{2\ell} = u_\ell \\ C_2 \ddot{y}_{2\ell} - \frac{1}{I_1 + I_2} y_{1\ell} + \frac{1}{I_1 + I_2} y_{2\ell} = 0 \\ y_{3\ell} = \frac{1}{(I_1 + I_2)C_3} (I_2 y_{1\ell} + I_1 y_{2\ell}) \end{cases}$$

$$(III.2.21b) \quad C_3 \ddot{y}_{3r} + \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) y_{3r} = 0.$$

Le découplage à partir des équations différentielles du second ordre du système global donne bien entendu les mêmes résultats.



Cet exemple illustre la possibilité d'utiliser le bond-graph comme outil graphique pour le découplage des dynamiques d'un système. Pour l'exemple, nous dirons que le système est sous forme explicite. Une nouvelle définition est proposée pour différencier le cas des systèmes explicites où les variables d'état ont un comportement à la fois lent et rapide et celui où ces dernières ont un comportement uniquement lent ou uniquement rapide.

Nous donnons une définition pour les bond-graphs associés aux systèmes purement oscillants.

Définition III.2.1)

Un modèle bond-graph d'un système purement oscillant est dit totalement explicite si  $A_8$  est inversible et les matrices  $A_2$  et  $A_7$  sont nulles.

L'adverbe totalement indique que l'on peut directement faire l'analyse des deux systèmes découplés à partir des équations d'état. Les équations III.2.12) et III.2.14) contiennent respectivement les variables lentes et les variables rapides.

Nous résumons les différents cas possibles.

-  $A_8$  inversible et les matrices  $A_2$  et  $A_7$  sont nulles.

Le système est totalement explicite (par définition). Le découplage par la méthode des perturbations singulières peut se faire sur l'équation d'état ou sur les équations différentielles du second ordre.

-  $A_8$  inversible et  $A_2$  et  $A_7$  ne sont pas nulles.

Le système est explicite. Néanmoins, les équations d'état sont mal adaptées pour l'analyse des résultats puisque certaines variables ont des dynamiques propres à la fois lentes et rapides (équations III.2.12 et III.2.14)). Le découplage se fera à l'aide des équations d'état. Elles seront ensuite transformées en équations différentielles du second ordre.

-  $A_8$  non inversible.

Le système est sous forme implicite, la matrice du système rapide des équations différentielles du second ordre n'étant pas inversible (propriété III.2.2). Des changements de variables, obtenus à l'aide du bond-graph (similitude avec la partie 1 de ce chapitre) doivent être faits.

#### II.1.4 - Interprétation sur le bond-graph

Si le système est totalement explicite, ou explicite, il est possible de trouver un bond-graph lent et un bond-graph rapide. Néanmoins, dans le deuxième cas, les variables d'état ne sont pas toujours directement exploitables puisqu'il faut utiliser des nouvelles variables représentées par des équations différentielles du second ordre.

##### a) Bond-graph rapide

Pour les systèmes oscillants, les matrices d'état et de commande d'un modèle dynamique se déduisent facilement de la matrice de structure de jonction.

Nous avons, dans le cas où il n'y a pas de causalités dérivées :

$$(III.2.22) \quad \begin{cases} A = S_{11} F_I \\ B = S_{13} \end{cases}$$

L'équation d'état du système rapide s'obtient en ne gardant qu'une partie de l'équation d'état totale. Il en est de même pour la matrice de structure de jonction et donc du bond-graph.

La matrice de structure de jonction du système est  $S = [S_{11} \ S_{13}]$ . Après décomposition, nous voyons immédiatement que  $S$  peut s'exprimer en fonction des éléments des matrices d'état et de commande.

$$(III.2.23) \quad S = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & A_1 & A_2 & B_1 \\ 0 & 0 & A_3 & A_4 & B_2 \\ A_5 & A_6 & 0 & 0 & B_3 \\ A_7 & A_8 & 0 & 0 & B_4 \end{array} \right]$$

La matrice de structure de jonction du système rapide est  $S_r$  :

$$(III.2.24) \quad S_r = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & A_2 & B_1 \\ 0 & 0 & A_4 & B_2 \\ A_7 & A_8 & 0 & B_4 \end{array} \right]$$

Si  $A_7 = 0$ , alors il faut enlever les premières ligne et colonne de  $S_r$ .

### Procédure III.2.1

Procédure d'obtention du Bond-graph rapide :

- garder tous les éléments C associés au vecteur état  $q_2$ ,
- garder tous les éléments inertiels directement causalement liés aux éléments C précédemment retenus,
- garder toutes les sources directement causalement liées aux éléments I et C précédemment retenus.

Nous pouvons désormais déduire deux propriétés mises en évidence par le bond-graph rapide.

### Propriété III.2.4)

Un système est totalement explicite ssi tous les éléments dynamiques du bond-graph rapide peuvent être mis en causalité dérivée.

### Démonstration :

D'après la définition III.2.1), la condition  $A_2 = 0$  exprime l'égalité en nombre d'éléments capacitifs C et inertiels I dans le système rapide.  $A_4$  inversible exprime la possibilité d'inverser toutes les causalités (il suffit d'écrire la matrice de structure de jonction du système rapide). D'où la propriété.

### Propriété III.2.5)

Un système est explicite ssi tous les éléments capacitifs C du bond-graph rapide peuvent être mis en causalité dérivée.

Autant d'éléments inertiels I adopteront une causalité dérivée.

Démonstration

Nous utilisons la même méthode que précédemment. Cette fois-ci les éléments dynamiques I associés au vecteur  $p_1$  gardent leur causalité intégrale.

Lors des manipulations causales, nous devons bien entendu ne pas introduire de boucle algébrique non solvable.

b) Bond-graph lent

Si le système est totalement explicite, le système lent est obtenu par la procédure suivante :

Procédure III.2.2 (Bond-graph lent)

- dessiner le Bond-graph réciproque,
- extraire le Bond-graph réciproque rapide,
- procéder à la transformation réciproque du bond-graph réciproque rapide.

Démonstration :

En utilisant la même méthode que pour les systèmes RC, nous obtenons le résultat. Une méthode directe peut néanmoins être utilisée. Nous la développons maintenant. Elle sera aussi utilisée lorsque le système n'est pas totalement explicite.

Faisons d'abord une remarque. L'équation d'état lente est obtenue en écrivant  $\ddot{y}_2 = 0$ . Ceci équivaut à enlever les éléments capacitifs associés à  $q_2$  et à introduire des relations algébriques. Celles-ci se traduisent par l'apparition de causalités dérivées et/ou le retrait de certaines jonctions.

Exemple

Reprenons le bond-graph du système mécanique de la *Figure III.2.1*. Nous représentons le bond-graph réciproque.

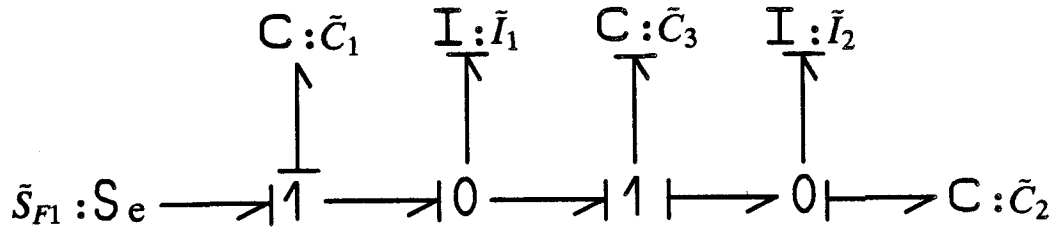


Figure III.2.5 : Bond-graph réciproque du système mécanique.

Les éléments capacitifs  $\tilde{C}_1$  et  $\tilde{C}_2$  ont des valeurs élevées par rapport à  $\tilde{C}_3$ . Néanmoins, il est difficile d'obtenir le bond-graph réciproque rapide car un des éléments capacitifs est en causalité dérivée. Ceci est dû au fait que le système est explicite, mais non totalement explicite.

Dans ce cas, le bond-graph lent est obtenu en posant  $\dot{q}_3 = 0$  sur le bond-graph et donc à introduire une relation algébrique entre les variables de co-énergie des éléments inertiels. Ceci revient à enlever l'élément capacitif  $C_3$  et à introduire une causalité dérivée (Figure III.2.4).

Les deux schémas des Figures III.2.6 illustrent le cas général.

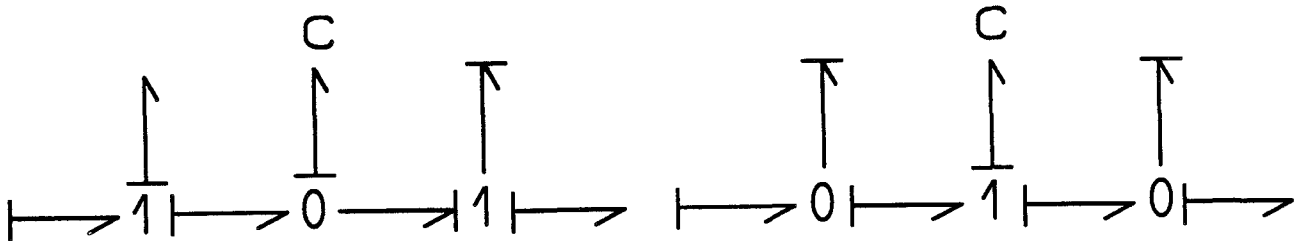


Figure III.2.6a : Élément C sur une jonction 0.

Figure III.2.6b : Élément C sur une jonction 1.

Dans le premier cas, l'élément rapide C est sur une jonction 0. Le système lent est obtenu en enlevant l'élément C et en procédant à un changement de causalité. Nous représentons une des possibilités.

Dans le deuxième cas, l'élément C est sur une jonction 1. Le système lent est obtenu en enlevant l'élément C, la jonction 1 (car  $\dot{q} = 0$ , donc le flux est nul sur la jonction) et en modifiant la causalité sur les jonctions où des conflits causaux apparaissent.

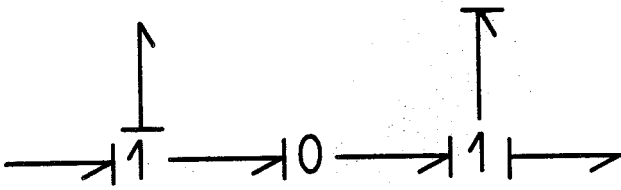


Figure III.2.7a : Elimination de l'élément rapide.



Figure III.2.7b : Elimination de l'élément rapide.

Dans le deuxième cas, plusieurs sous-systèmes indépendants apparaissent. En général, nous devons utiliser une combinaison de ces deux cas.

Une justification peut être apportée en écrivant l'équation de structure de jonction du modèle bond-graph. Nous voyons qu'écrire  $\dot{q} = 0$  pour chacun des éléments rapides introduit des équations algébriques directement associées à des manipulations causales.

D'où la procédure d'obtention du bond-graph lent.

### Procédure III.2.3

- enlever les éléments C qui introduisent des modes élevés,
- résoudre directement sur le bond-graph, l'équation  $\dot{q} = 0$ .

#### Remarque :

Cette procédure est appliquée complètement pour chacun des éléments C considéré comme rapide de manière séquentielle.

#### Remarques :

La présence d'éléments inertiels en causalité dérivée dans le système global modifie légèrement les méthodes présentées pour l'obtention des modèles lent et rapide.

Pour le système rapide, il faudra par exemple garder en plus tous les éléments en causalité dérivée directement causalement connectés aux éléments inertiels retenus dans la procédure III.2.1, et les éléments inertiels en causalité intégrale, directement causalement connectés aux premiers. Ces systèmes seront en général non totalement explicites.

En présence d'éléments  $C$  en causalité dérivée, les méthodes sont inchangées uniquement si ces derniers n'ont pas à la fois une connexion causale directe avec les  $C$  associés au vecteur rapide et les  $C$  associés au vecteur lent. Sinon le découplage n'est pas possible à partir du bond-graph.

Exemple :

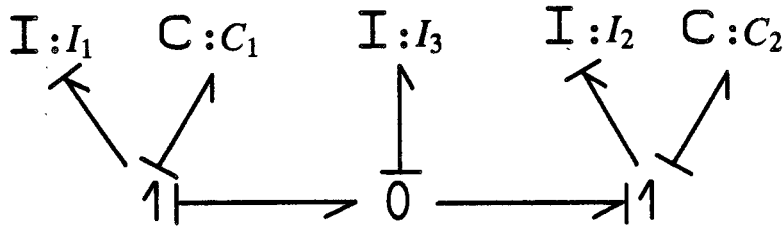


Figure III.2.8 : Modèle bond-graph.

Supposons le modèle de la Figure III.2.8, où  $C_2$  est associé à la variable rapide.

Nous représentons les bond-graphs lent et rapide.

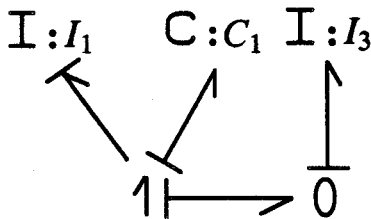


Figure III.2.9a : Bond-graph lent.

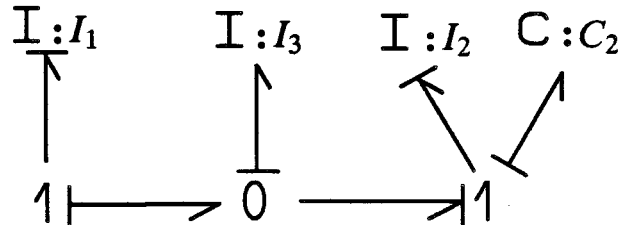


Figure III.2.9b : Bond-graph rapide.

Ce système est explicite, mais non totalement explicite.

Nous avons introduit le concept de système totalement explicite. Cette appellation permet de différencier 2 cas possibles qui peuvent s'étudier de la même manière. Un système totalement explicite met en évidence des variables d'état lentes et rapides. Un système explicite ne permet pas de différencier les variables d'état lentes et rapides mais permet d'obtenir deux modèles d'état (ou bond-graph) dits abusivement lent et rapide dont la mise sous forme d'équations différentielles du second ordre donne deux systèmes, un lent et un rapide. L'avantage de la formulation explicite

est que celle-ci permet de faire le découplage sur le bond-graph avant le calcul des équations différentielles du second ordre.

Nous n'insisterons pas plus sur cette partie car, en général, le système rapide a très peu d'intérêt. Il permet simplement de savoir si le système est explicite ou non. Si le système est sous forme implicite, des changements de variables peuvent être faits de la même manière que dans la première partie de ce chapitre.

Nous parlerons par la suite de réduction en ne nous intéressant qu'à la partie lente.

## II.2 - Amélioration de la précision de modes lents

Seule l'étude des systèmes explicites est faite dans cette partie. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, en général seule l'évolution lente d'un système oscillatoire est significative. Une troncature modale est ainsi généralement effectuée. Malheureusement, les effets lents des phénomènes oscillatoires rapides sont parfois non négligeables. Nous proposons une méthode qui améliore la précision des phénomènes lents. Nous supposons le système non amorti. Une étude semblable pourrait être faite dans le cas contraire.

Une première étape introduit le concept de correction sur les équations différentielles du second ordre. Ensuite, une interprétation sur le bond-graph est proposée. Ces corrections sont faites pour des régimes non autonomes, en supposant que les entrées interviennent peu dans la dynamique du système. Nous ne tenons pas compte des dérivées successives des entrées avec les méthodes de correction employées.

### II.2.1 - Etude des équations différentielles du second ordre

L'équation d'état du système dynamique étudié est :

$$(III.2.25) \quad \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_1 K_1 & A_2 K_2 \\ 0 & 0 & A_3 K_1 & A_4 K_2 \\ A_5 M_1^{-1} & A_6 M_2^{-1} & 0 & 0 \\ A_7 M_1^{-1} & A_8 M_2^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} u,$$

avec  $A_4 = -A_8^t$  matrices carrées inversibles.



$p_2$  est choisie de façon que  $A_4$  soit inversible, s'il y a impossibilité, le système est sous forme implicite.

Introduisons les nouvelles variables définies par :

$$(III.2.26) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = K_1 q_1 \\ \dot{y}_2 = K_2 q_2 \end{cases}$$

Le système d'équations différentielles du second ordre obtenu à partir du système d'équation III.2.26) est :

$$(III.2.27) \quad \begin{cases} \ddot{y}_1 + K_1 H_{11} y_1 + K_1 H_{12} y_2 = K_1 B_1^* \int u dt + K_1 B_3 u \\ \ddot{y}_2 + K_2 H_{21} y_1 + K_2 H_{22} y_2 = K_2 B_2^* \int u dt + K_2 B_4 u \end{cases}$$

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} H_{11} = -(A_5 M_1^{-1} A_1 + A_6 M_2^{-1} A_3) \\ H_{12} = -(A_5 M_1^{-1} A_2 + A_6 M_2^{-1} A_4) \\ H_{21} = -(A_7 M_1^{-1} A_1 + A_8 M_2^{-1} A_3) \\ H_{22} = -(A_7 M_1^{-1} A_2 + A_8 M_2^{-1} A_4) \\ B_1^* = (A_5 M_1^{-1} B_1 + A_6 M_2^{-1} B_2) \\ B_2^* = (A_7 M_1^{-1} B_1 + A_8 M_2^{-1} B_2) \end{cases}$$

$K_2$  est la matrice comportant les éléments de valeur élevée par rapport à  $K_1$ , et peut être normalisée en posant  $\varepsilon K_2 = \tilde{K}_2$ .

Le système lent non corrigé est obtenu en posant  $\varepsilon \ddot{y}_2 = 0$ . Il vient :

$$(III.2.28) \quad \begin{cases} y_{2\ell} = -H_{22}^{-1} H_{21} y_{1\ell} + H_{22}^{-1} B_2^* \int u_\ell dt + H_{22}^{-1} B_4 u_\ell \\ \ddot{y}_{1\ell} + K_1 (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_{1\ell} = K_1 \left[ (B_1^* - H_{12} H_{22}^{-1} B_2^*) \int u_\ell dt + (B_3 - H_{12} H_{22}^{-1} B_4) u_\ell \right] \end{cases}$$

Les corrections se font en utilisant le concept d'espaces invariants. Si  $y_2$  ne suit pas exactement la trajectoire définie par l'équation III.2.28), une nouvelle variable tenant compte de cette variation est définie.

Le changement de variable ne tient pas compte de l'entrée  $u$  pour éviter tout problème de dérivation.

$$(III.2.29) \quad \zeta^1 = y_2 + H_{22}^{-1} H_{21} y_1 .$$

En fait,  $\zeta^1$  correspond à l'évolution rapide de  $y_2$  en régime autonome, c'est-à-dire :

$$(III.2.30) \quad \zeta^1 = y_{2r} = y_2 - y_{2\ell} .$$

Nous montrons que pendant l'évolution lente,  $\ddot{\zeta}^1 = 0$ .

*Démonstration Annexe III.5.*

En combinant les relations (III.2.27) et (III.2.29) et en posant  $\ddot{\zeta}^1 = 0$ , nous obtenons :

$$(III.2.31) \quad \begin{cases} y_{2\ell}^c = (H_{22}^c)^{-1} \left[ -H_{21}^c y_{1\ell}^c + B_2^{*c} \int u_\ell dt + B_4^c u_\ell \right] \\ \ddot{y}_{1\ell}^c + K_1^c (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_{1\ell}^c = K_1^c \left[ (B_1^* - H_{12} H_{22}^{-1} B_2^*) \int u_\ell dt + (B_3 - H_{12} H_{22}^{-1} B_4) u_\ell \right] . \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} K_1^c = K_1 \left[ I_d + H_{12} H_{22}^{-1} K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 \right]^{-1} \\ H_{22}^c = H_{22} + K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 H_{12} \\ H_{21}^c = H_{21} + K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 H_{11} \\ B_2^{*c} = B_2^* + K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 B_1^* \\ B_4^c = B_4 + K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 B_3 \end{cases}$$

Nous obtenons donc exactement la même forme que pour le système lent non corrigé pour lequel la matrice de raideur  $K_1$  a été modifiée en  $K_1^c$ . L'indice  $c$  indique que l'approximation des variables  $y_{1\ell}$  et  $y_{2\ell}$  n'est plus obtenue de manière habituelle mais avec le système d'équations corrigées (III.2.31).

Le système d'équations différentielles du second ordre pour le système corrigé à l'ordre  $n$  est :

$$(III.2.32) \begin{cases} \dot{y}_2^{nc} = (H_{22}^{nc})^{-1} \left[ -H_{21}^{nc} \dot{y}_1^{nc} + B_2^{*nc} \int u_\ell dt + B_4^{nc} u_\ell \right] \\ \ddot{y}_1^{nc} + K_1^{nc} (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_1^{nc} = K_1^{nc} \left[ (B_1^* - H_{12} H_{22}^{-1} B_2^*) \int u_\ell dt + (B_3 - H_{12} H_{22}^{-1} B_4) u_\ell \right]. \end{cases}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} K_1^{nc} = K_1 \left[ I_d + H_{12} H_{22}^{-1} K_2^{-1} (H_{22}^{(n-1)c}) H_{21}^{(n-1)c} K_1 \right]^{-1} \\ H_{22}^{(n-1)c} = H_{22} + K_2^{-1} (H_{22}^{(n-2)c})^{-1} H_{21}^{(n-2)c} K_1 H_{12} \\ H_{21}^{(n-1)c} = H_{21} + K_2^{-1} (H_{22}^{(n-2)c})^{-1} H_{21}^{(n-2)c} K_1 H_{11} \\ B_2^{*nc} = B_2^* + K_2^{-1} (H_{22}^{(n-1)c})^{-1} H_{21}^{(n-1)c} K_1 B_1^* \\ B_4^{nc} = B_4 + K_2^{-1} (H_{22}^{(n-1)c})^{-1} H_{21}^{(n-1)c} K_1 B_3 \end{cases}$$

L'indice nc sur une matrice correspond à la correction de celle-ci à l'ordre n. L'initialisation étant pour n = 1 avec :

$$(III.2.33) \begin{cases} H_{22}^{1c} = H_{22} \\ H_{21}^{1c} = H_{21} \end{cases}$$

L'étude du système corrigé est très simple, puisqu'elle consiste à calculer une nouvelle matrice de raideur à l'aide du calcul d'une suite. Cette nouvelle matrice de raideur n'est en général plus symétrique sauf pour la correction à l'ordre 1.

Reprenons l'exemple de la *Figure III.2.1*.

Le ressort  $C_3$  est en général considéré comme un élément "parasite". Le système rapide n'est pas pris en compte.

Si nous désirons prendre en compte l'effet du ressort  $C_3$  dans le modèle du système lent, nous appliquons les méthodes de correction.

Le système d'équations différentielles du second ordre s'obtient à l'aide de l'équation d'état du système et des nouvelles variables  $y_1, y_2, y_3$  :

$$(III.2.34) \begin{bmatrix} C_1 \ddot{y}_1 \\ C_2 \ddot{y}_2 \\ C_3 \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & -\frac{1}{I_1} \\ 0 & \frac{1}{I_2} & -\frac{1}{I_2} \\ -\frac{1}{I_1} & -\frac{1}{I_2} & \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Le système lent corrigé au premier ordre aura la même structure que le système lent avec la nouvelle matrice de flexibilité  $C^c$ .

$$(III.2.35) C^c = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} + \frac{C_3}{(I_1 + I_2)^2} \begin{bmatrix} I_2^2 & I_1 I_2 \\ I_1 I_2 & I_1^2 \end{bmatrix}$$

La nouvelle matrice de flexibilité n'est plus diagonale. Les éléments capacitifs ne sont plus de simples ports mais forment un multiport de dimension  $2 \times 2$ .

Nous obtenons :

$$(III.2.36) C^c \begin{bmatrix} \ddot{y}_{1\ell}^c \\ \ddot{y}_{2\ell}^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1 + I_2} & -\frac{1}{I_1 + I_2} \\ -\frac{1}{I_1 + I_2} & \frac{1}{I_1 + I_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1\ell}^c \\ y_{2\ell}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_\ell.$$

Nous pouvons de même obtenir  $y_{3\ell}^c$ .

Le concept d'espaces invariants, utilisé dans la méthode des perturbations singulières a été adopté en vue de l'amélioration de la précision des modes lents lors d'une réduction de modèle, c'est-à-dire lorsque l'on veut éliminer le système "rapide". Ce concept permet de tenir compte de la variation des variables rapides par rapport aux espaces d'équilibre associés aux variables lentes. Cette méthode peut être directement appliquée sur l'équation d'état du modèle. Le terme de correction à un ordre donné a été adopté pour donner un ordre de grandeur de l'amélioration de la précision des modes lents.

Il est bien entendu nécessaire que le système soit sous forme explicite. Enfin une représentation de la correction peut être directement faite sur le bond-graph à l'aide de la modification d'une matrice de rigidité. Cette représentation "non physique", sauf pour la correction au premier ordre, permet simplement de se rendre compte de l'effet de la correction.

Cette méthode de correction sera utilisée lors de l'étude des systèmes à paramètres distribués.

## CONCLUSION

Ce chapitre a fait l'objet d'une présentation de méthodes de découplage des dynamiques de systèmes modélisés par bond-graph. Nous nous sommes placés dans des cas particuliers pour bien mettre en évidence les concepts utilisés, sachant qu'il n'existe pas de méthode générale.

La partie la plus délicate de l'étude est le partitionnement du vecteur état. Le bond-graph ne conduit pas nécessairement à une solution mais peut néanmoins apporter quelques renseignements.

La contribution fondamentale du bond-graph se situe au niveau de toute l'étude qui se situe après le choix du partitionnement du vecteur état. Les informations nécessaires, telles l'explicité du système ou les changements structurels de variables, sont directement mises en évidence sur le bond-graph par des manipulations causales. Lorsque le système étudié est sous forme explicite, le découplage est fait sur le bond-graph, même dans le cas des systèmes purement oscillants dont certaines variables d'état ont à la fois des dynamiques propres lente et rapide.

Une méthode dite de correction a été présentée pour améliorer la précision des fréquences propres des systèmes découplés, pour les systèmes amortis, et la précision des modes propres du modèle lent des systèmes purement oscillatoires. Une justification physique est présentée pour la correction à l'ordre 1.

Toutes les possibilités n'ont pas été envisagées. Pour les systèmes à la fois amortis et oscillants, il faut combiner les deux méthodes précédentes en reconnaissant l'importance respective des deux phénomènes.

## ANNEXE III.1

Calcul de l'équation d'état du bond-graph lent

Nous faisons l'hypothèse que la matrice d'état est inversible.

Nous écrivons les matrices d'état, de commande et de sortie du système :

$$(A.3.1) \quad \begin{cases} A = \begin{bmatrix} T_{11} & F_{I1} & T_{12} & F_{I2} \\ T_{21} & F_{I1} & T_{22} & F_{I2} \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ C = [C_1 \ F_{I1} \ C_2 \ F_{I2}] & D \end{cases}$$

Nous écrivons les matrices d'état, de commande et de sortie du système réciproque :

$$(A.3.2) \quad \tilde{A} = F_I A^{-1} F_I^{-1}$$

$$\text{où} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} T_\ell^{-1} F_{I1}^{-1} & -T_\ell^{-1} T_{12} T_{22}^{-1} F_{I2}^{-1} \\ -T_{22}^{-1} T_{21} T_\ell^{-1} F_{I1}^{-1} & T_{22}^{-1} (I_d + T_{21} T_\ell^{-1} T_{12} T_{22}^{-1}) F_{I2}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad T_\ell = T_{11} - T_{12} T_{22}^{-1} T_{21}.$$

Nous notons :

$$(A.3.3) \quad \tilde{A} = \tilde{T} \tilde{F}_I$$

$$\text{avec} \quad \tilde{F}_I = F_I^{-1}.$$

$$(A.3.4) \quad \tilde{B} = -F_I A^{-1} B$$

$$\text{où} \quad \tilde{B} = - \begin{bmatrix} T_\ell^{-1} (B_1 - T_{12} T_{22}^{-1} B_2) \\ T_{22}^{-1} B_2 - T_{22}^{-1} T_{21} T_\ell^{-1} (B_1 - T_{12} T_{22}^{-1} B_2) \end{bmatrix}$$

$$(A.3.5) \quad \tilde{C} = C A^{-1} F_I^{-1}$$

$$\text{ou} \quad \tilde{C} = \left[ (C_1 - C_2 T_{22}^{-1} T_{21}) T_\ell^{-1} \tilde{F}_{I1}; \left[ -C_1 T_\ell^{-1} T_{12} T_{22}^{-1} + C_2 T_{22}^{-1} [I + T_{21} T_\ell^{-1} T_{12} T_{22}^{-1}] \right] \tilde{F}_{I2} \right]$$

$$(A.3.6) \quad \tilde{D} = D - C A^{-1} B$$

$$\text{ou } \tilde{D} = D - (C_1 - C_2 T_{22}^{-1} T_{21}) T_{\ell}^{-1} B_1 - \left[ -C_1 T_{\ell}^{-1} T_{12} T_{22}^{-1} + C_2 T_{22}^{-1} \left[ I + T_{21} T_{\ell}^{-1} T_{12} T_{22}^{-1} \right] \right] B_2.$$

Etant donné que nous sommes dans le système réciproque, le système lent est désormais associé à l'indice 2 dans les matrices et le système rapide est associé à l'indice 1.

Nous écrivons les matrices d'état de commande et de sortie du système rapide réciproque.

$$(A.3.7) \quad \begin{cases} \tilde{A}_r = T_{\ell}^{-1} F_{11}^{-1} \\ \tilde{B}_r = - \left[ T_{\ell}^{-1} (B_1 - T_{12} T_{22}^{-1} B_2) \right] \\ \tilde{C}_r = \left[ (C_1 - C_2 T_{22}^{-1} T_{21}) T_{\ell}^{-1} F_{11}^{-1} \right] \\ \tilde{D}_r = D - (C_1 - C_2 T_{22}^{-1} T_{21}) T_{\ell}^{-1} B_1 - (-C_1 T_{\ell}^{-1} T_{12} T_{22}^{-1} + C_2 T_{22}^{-1} (I_d + T_{21} T_{\ell}^{-1} T_{12} T_{22}^{-1})) B_2 \end{cases}$$

Une nouvelle transformation réciproque donne, en tenant compte du fait que dans le système réciproque rapide, nous avons  $F_{11}^{-1}$ ,

$$(A.3.8) \quad \begin{aligned} A_{\ell} &= (F_{11}^{-1}) \cdot (T_{\ell}^{-1} F_{11}^{-1})^{-1} F_{11} \\ &= T_{\ell} F_{11} \\ &= A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \end{aligned}$$

$$(A.3.9) \quad \begin{aligned} B_r &= -(F_{11}^{-1}) (F_{\ell}^{-1} F_{11}^{-1})^{-1} (-T_{\ell}^{-1} (B_1 - T_{12} T_{22}^{-1} B_2)) \\ &= B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 \end{aligned}$$

$$(A.3.10) \quad \begin{aligned} C_{\ell} &= (C_1 - C_2 T_{22}^{-1} T_{21}) T_{\ell}^{-1} F_{11}^{-1} (T_{\ell}^{-1} F_{11}^{-1})^{-1} (F_{11}^{-1})^{-1} \\ &= (C_1 - C_2 T_{22}^{-1} T_{21}) F_{11} \\ &= (C_1 F_{11}) - (C_2 F_{12}) A_{22}^{-1} A_{21} \end{aligned}$$

$$(A.3.11) \quad \begin{aligned} D_{\ell} &= D - (C_1 - C_2 T_{22}^{-1} T_{21}) T_{\ell}^{-1} B_1 + C_1 T_{\ell}^{-1} T_{12} T_{22}^{-1} B_2 - C_2 T_{22}^{-1} (I_d + T_{21} T_{\ell}^{-1} T_{12} T_{22}^{-1}) B_2 \\ &\quad - (C_1 - C_2 T_{22}^{-1} T_{21}) T_{\ell}^{-1} F_{11}^{-1} (T_{\ell}^{-1} F_{11}^{-1})^{-1} (-T_{\ell}^{-1} (B_1 - T_{12} T_{22}^{-1} B_2)) \\ &= D - C_2 T_{22}^{-1} B_2 \\ &= D - (C_2 F_{12}) A_{22}^{-1} B_2. \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien les matrices "lentes" obtenues par application directe des perturbations singulières.

## ANNEXE III.2

Etude du changement de variable dans le cas des systèmes implicites

L'équation du système rapide ou quasi-rapide, s'écrit :

$$(A.3.12) \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_{21} \\ \dot{q}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22}^{11} F_{I21} & A_{22}^{12} F_{I22} \\ A_{22}^{21} F_{I21} & A_{22}^{22} F_{I22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \end{bmatrix} u.$$

$A_{22}^{22}$  est la plus grande sous-matrice inversible de  $A_{22}$ .

Sachant que  $A_{22}$  n'est pas inversible, nous voulons obtenir un premier vecteur état associé aux valeurs propres nulles du système rapide (ou quasi-rapide), soit  $\eta_1$ .

L'équation d'état peut s'écrire d'une manière différente, c'est-à-dire :

$$(A.3.13) \quad \begin{cases} \dot{q}_{21} - B_{21} u = A_{22}^{11} F_{I21} q_{21} + A_{22}^{12} F_{I22} q_{22} \\ \dot{q}_{22} - B_{22} u = A_{22}^{21} F_{I21} q_{21} + A_{22}^{22} F_{I22} q_{22} \end{cases}$$

En multipliant la deuxième équation par  $-A_{12} A_{22}^{-1}$ , en faisant la somme des deux nouvelles équations et en tenant compte du fait que  $A_{22}^{11} - A_{22}^{12} (A_{22}^{22})^{-1} A_{22}^{21} = 0$ , nous obtenons :

$$(A.3.14) \quad (\dot{q}_{21} - B_{21} u) - A_{12}^{12} (A_{22}^{22})^{-1} (\dot{q}_{22} - B_{22} u) = 0.$$

Ceci nous permet de définir  $\eta_1$  comme

$$(A.3.15) \quad \eta_1 = q_{21} - (A_{22}^{12}) (A_{22}^{22})^{-1} q_{22} - \left[ B_{21} - (A_{22}^{12}) (A_{22}^{22})^{-1} B_{22} \right] \int u dt.$$

Le deuxième vecteur est calculé à l'aide de la relation obtenue en régime autonome permanent ( $\dot{q}_{21} = \dot{q}_{22} = 0, u = 0$ ) :

$$(A.3.16) \quad \eta_2 = F_{I22} q_{22} + (A_{22}^{22})^{-1} (A_{22}^{21}) F_{I21} q_{21}.$$

Matriciellement, nous pouvons écrire:



$$(A.3.17) \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_d & -(A_{22}^{12})(A_{22}^{22})^{-1} \\ (A_{22}^{22})^{-1}(A_{22}^{21})F_{I21} & F_{I22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[B_{21} - (A_{22}^{12})(A_{22}^{22})^{-1}B_{22}] \int u dt \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice d'état dans la nouvelle base est :

$$(A.3.18) A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -F_{I22}A_{22}^{21}F_{I21} [I_d + (A_{22}^{12})(A_{22}^{22})^{-1}F_{I22}^{-1}(A_{22}^{22})^{-1}(A_{22}^{21})F_{I21}]^{-1} & (A_{22}^{22})^{-1}(A_{22}^{21})F_{I21}A_{22}^{12} + F_{I22}A_{22}^{22} \end{bmatrix}$$

La matrice définie par :

$$(A.3.19) M = [(A_{22}^{22})^{-1}(A_{22}^{21})F_{I21}A_{22}^{12}(A_{22}^{22})^{-1} + F_{I22}]A_{22}^{22},$$

est bien entendu inversible car :

Les matrices  $F_{I22}$  et  $A_{22}^{22}$  sont inversibles et la matrice  $(A_{22}^{22})^{-1}(A_{22}^{21})F_{I21}A_{22}^{12}(A_{22}^{22})^{-1}$  est symétrique donc semi-définie positive.

De plus,  $F_{I22}$  contient des valeurs propres de module élevé donc la matrice  $M$  contient des dynamiques rapides.

La matrice de commande dans la nouvelle base est :

$$(A.3.20) B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ (A_{22}^{22})^{-1}(A_{22}^{21})F_{I21}B_{21} + F_{I22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Remarque :

Dans le système rapide (quasi-rapide), la nouvelle variable d'état  $\eta_1$  n'évolue pas. Elle est donc lente pour le système global.

$\eta_2$  a un comportement rapide auquel on ajoute un effet lent dû au couplage avec les variables dynamiques lentes des vecteurs  $q_1$  et  $\eta_1$ .

Une autre possibilité est d'éliminer le terme  $\int u dt$  dans le changement de variable.

## ANNEXE III.3

Calcul de la matrice de raideur et des équations dynamiques du système rapide corrigé

Nous reprenons les matrices  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{D}$  du système réciproque étudié dans l'annexe III.1.

Nous faisons le calcul des matrices d'état, de commande et de sortie du système lent réciproque.

$$(A.3.21) \quad \begin{cases} \tilde{A}_\ell = \tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_\ell = T_{22}^{-1} \tilde{F}_{12} \end{cases}$$

$$(A.3.22) \quad \begin{cases} \tilde{B}_\ell = \tilde{B}_2 - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_\ell = -T_{22}^{-1} B_2 \end{cases}$$

$$(A.3.23) \quad \begin{cases} \tilde{C}_\ell = \tilde{C}_2 - \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} \\ \tilde{C}_\ell = C_2 T_{22}^{-1} \tilde{F}_{12} \end{cases}$$

$$(A.3.24) \quad \begin{cases} \tilde{D}_\ell = \tilde{D} - \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{B}_1 \\ \tilde{D}_\ell = D - C_2 T_{22}^{-1} B_2 \end{cases}$$

Nous voyons évidemment que le système réciproque lent est le système rapide réciproque. Le calcul du système réciproque complet est fait pour le calcul de la correction. Le système réciproque lent est associé aux équations suivantes :

$$(A.3.25) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{q}}_{2\ell} = \tilde{A}_\ell \tilde{q}_{2\ell} + \tilde{B}_\ell \tilde{u}_\ell \\ \tilde{y}_\ell = \tilde{C}_\ell \tilde{q}_{2\ell} + \tilde{D}_\ell \tilde{u}_\ell \end{cases}$$

Le système réciproque lent corrigé s'obtient en modifiant la matrice de raideur et à l'aide d'un nouveau vecteur état, ceci pour obtenir un modèle bond-graph.

La nouvelle matrice de raideur (réciproque) est :

$$(A.3.26) \quad \tilde{F}_{I_2}^c = \tilde{F}_{I_2} \left[ I_d + \tilde{T}_{21} \tilde{T}_{11}^{-1} \tilde{F}_{I_1}^{-1} \tilde{T}_{12} \tilde{F}_{I_2} \right]^{-1} .$$

Après calcul, nous obtenons :

$$(A.3.27) \quad \tilde{F}_{I_2}^c = \tilde{F}_{I_2} \left[ I_d + T_{22}^{-1} T_{21} \tilde{F}_{I_1}^{-1} T_{12} T_{22}^{-1} \tilde{F}_{I_2} \right]^{-1} .$$

La nouvelle équation d'état est obtenue avec le nouveau vecteur d'état  $\tilde{Q}_2$ .

$$(A.3.28) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{Q}}_{2\ell} = \tilde{A}_\ell^c \tilde{Q}_{2\ell} + \tilde{B}_\ell^c \tilde{u}_\ell \\ \tilde{y}_\ell^c = \tilde{C}_\ell^c \tilde{Q}_{2\ell} + \tilde{D}_\ell^c \tilde{u}_\ell \end{cases}$$

avec  $\tilde{A}_\ell^c = T_{22}^{-1} \tilde{F}_{I_2}^c$

$$\tilde{B}_\ell^c = -T_{22}^{-1} B_2$$

$$\tilde{C}_\ell^c = C_2 T_{22}^{-1} \tilde{F}_{I_2}^c$$

$$\tilde{D}_\ell^c = D - C_2 T_{22}^{-1} B_2$$

Pour obtenir le système rapide corrigé, il faut désormais appliquer une nouvelle transformation réciproque.

$$(A.3.29) \quad \begin{cases} A_r^c = \tilde{F}_{I_2}^c (\tilde{A}_\ell^c)^{-1} (\tilde{F}_{I_2}^c)^{-1} \\ A_r^c = T_{22} F_{I_2}^c \end{cases}$$

avec  $F_{I_2}^c = F_{I_2} + T_{22}^{-1} T_{21} F_{I_1} T_{12} T_{22}^{-1} .$

$$(A.3.30) \quad \begin{cases} B_r^c = -\tilde{F}_{I_2}^c (\tilde{A}_\ell^c)^{-1} \tilde{B}_\ell^c \\ B_r^c = B_2 \end{cases}$$

$$(A.3.31) \quad \begin{cases} C_r^c = \tilde{C}_\ell^c (\tilde{A}_\ell^c)^{-1} (\tilde{F}_{I_2}^c)^{-1} \\ C_r^c = C_2 F_{I_2}^c \end{cases}$$

$$(A.3.32) \begin{cases} D_r^c = \tilde{D}_\ell^c - \tilde{C}_\ell^c (\tilde{A}_\ell^c)^{-1} \tilde{B}_\ell^c \\ D_r^c = D \end{cases}$$

Le système rapide corrigé est donc associé aux équations suivantes :

$$(A.3.33) \begin{cases} \dot{Q}_{2r} = T_{22} F_{12}^c Q_{2r} + B_2 u_r \\ y_r = C_2 F_{12}^c Q_{2r} + D u_r \end{cases}$$

$$\text{avec } F_{12}^c = F_{12} + T_{22}^{-1} T_{21} F_{11} T_{12} T_{22}^{-1} .$$

Nous devons désormais calculer le vecteur  $q_{2r}$ . Sachant que le vecteur de co-énergie corrigé s'exprime toujours de la même manière en fonction de  $q_{2r}^c$ , c'est-à-dire :

$$(A.3.34) q_{2r}^c = (F_{12})^{-1} z_{2r}^c$$

et que

$$(A.3.35) Q_{2r} = (F_{12}^c)^{-1} z_{2r}^c .$$

Le calcul de  $q_{2r}^c$  s'effectue simplement à l'aide du bond-graph rapide corrigé.

L'équation de sortie du système rapide corrigé est :

$$(A.3.36) y_r = T_{22} z_{2r}^c + D u_r$$

soit de façon indifférente :

$$(A.3.37) \begin{cases} y_r = T_{22} F_{12}^c Q_{2r} + D u_r \\ \text{ou} \\ y_r = T_{22} F_{12} q_{2r} + D u_r \end{cases}$$

$y_r$  s'obtient donc directement sur le bond-graph rapide corrigé.

## ANNEXE III.4

Transformation des équations différentielles du premier ordre découplées  
en équations différentielles du second ordre

Nous définissons d'abord les variables  $y_1$  et  $y_2$  :

$$(A.3.38) \quad \begin{cases} \dot{y}_{1\ell} = e_{1\ell} \\ \dot{y}_{2\ell} = e_{2\ell} \end{cases}$$

L'équation III.2.12a) donne :

$$(A.3.39) \quad \dot{y}_{2\ell} = H_{22}^{-1} \left[ -H_{21} y_{1\ell} + B_2^* \int u_\ell dt + B_4 u_\ell \right]$$

L'équation III.2.12b) donne :

$$(A.3.40) \quad \ddot{y}_{1\ell} + K_1 T_1 y_{1\ell} = K_1 T_2 \int u_\ell dt + K_1 T_3 u_\ell$$

avec :

$$\begin{cases} T_1 = -(A_5 - A_6 A_8^{-1} A_7) M_1^{-1} \left[ I_d + A_2 A_4^{-1} M_2 A_8^{-1} A_7 M_1^{-1} \right]^{-1} (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) \\ T_2 = +(A_5 - A_6 A_8^{-1} A_7) M_1^{-1} \left[ I_d + A_2 A_4^{-1} M_2 A_8^{-1} A_7 M_1^{-1} \right]^{-1} (B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2) \\ T_3 = (B_3 - A_6 A_8^{-1} B_4) - (A_5 - A_6 A_8^{-1} A_7) M_1^{-1} \left[ I_d + A_2 A_4^{-1} M_2 A_8^{-1} A_7 M_1^{-1} \right]^{-1} A_2 A_4^{-1} M_2 A_8^{-1} B_4 \end{cases}$$

Nous montrons simplement que  $T_1 = H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}$ .

$$(A.3.41) \quad H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21} = - (A_5 M_1^{-1} A_1 + A_6 M_2^{-1} A_3) \\ + (A_5 M_1^{-1} A_2 + A_6 M_2^{-1} A_4) (A_7 M_1^{-1} A_2 + A_8 M_2^{-1} A_4)^{-1} (A_7 M_1^{-1} A_1 + A_8 M_2^{-1} A_3).$$

Nous cherchons à factoriser de manière à faire apparaître 4 termes :

$$(A.3.42) \quad H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21} = - A_5 M_1^{-1} \left[ I_d - A_2 (A_7 M_1^{-1} A_2 + A_8 M_2^{-1} A_4)^{-1} A_7 M_1^{-1} \right] A_1 \\ - A_6 \left[ I_d - M_2^{-1} A_4 (A_7 M_1^{-1} A_2 + A_8 M_2^{-1} A_4)^{-1} A_8 \right] M_2^{-1} A_3 \\ + A_5 M_1^{-1} A_2 (A_7 M_1^{-1} A_2 + A_8 M_2^{-1} A_4)^{-1} A_8 M_2^{-1} A_3 \\ + A_6 M_2^{-1} A_4 (A_7 M_1^{-1} A_2 + A_8 M_2^{-1} A_4)^{-1} A_7 M_2^{-1} A_1$$

En tenant compte du fait que  $I_d - (I_d + M)^{-1} = [I_d + M^{-1}]^{-1}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (A.3.43) \quad H_{11} - H_{12}H_{22}^{-1}H_{21} &= -A_5M_1^{-1} \left[ I_d + A_2A_4^{-1}M_2A_8^{-1}A_7M_1^{-1} \right]^{-1}A_1 \\
 &- A_6A_8^{-1}A_7M_1^{-1} (I_d + A_2A_4^{-1}M_2A_8^{-1}A_7M_1^{-1})^{-1}A_2A_4^{-1}A_3 \\
 &+ A_5M_1^{-1} (I_d + A_2A_4^{-1}M_2A_8^{-1}A_7M_1^{-1})^{-1}A_2A_4^{-1}A_3 \\
 &+ A_6A_8^{-1}A_7M_1^{-1} (I_d + A_2A_4^{-1}M_2A_8^{-1}A_7M_1^{-1})^{-1}A_1
 \end{aligned}$$

En regroupant les termes, nous obtenons bien  $T_1$ .

A l'aide des équations III.2.14) et III.2.15), nous avons directement :

$$(A.3.44) \quad \ddot{y}_{2r} + K_2H_{22}y_{2r} = K_2B_2^* \int u_r dt + K_2B_4u_r$$

## ANNEXE III.5

Calcul des équations différentielles du second ordre avec les variables  $y_1$  et  $\zeta^1$

Le changement de variable est défini par :

$$(A.3.45) \quad \begin{cases} y_1 = y_1 \\ \zeta^1 = y_2 + H_{22}^{-1} H_{21} y_1 \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$(A.3.46) \quad \begin{cases} \ddot{y}_1 + K_1 (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_1 + K_1 H_{12} \zeta^1 = K_1 B_1^* \int u dt + K_1 B_3 u \\ K_2^{-1} \ddot{\zeta}_1 + K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_1 + H_{22}^c \zeta^1 = B_2^{*c} \int u dt + B_4^c u \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} H_{22}^c = H_{22} + K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 H_{12} \\ B_2^{*c} = B_2^* + K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 B_1^* \\ B_4^c = B_4 + K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 B_3 \end{cases}$$

Nous nous apercevons que le couplage entre le système lent et le nouveau système rapide est plus faible étant donné que le coefficient de  $y_1$  et d'ordre  $\varepsilon$  (dû au terme  $K_2^{-1}$ ).

Nous changeons de variable de temps en posant :

$$(A.3.47) \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}},$$

où  $\varepsilon$  est le terme de normalisation de la matrice  $K_2^{-1}$ , c'est-à-dire  $K_2^{-1} = \varepsilon \tilde{K}_2^{-1}$  de manière à ce que  $\tilde{K}_2$  et  $K_1$  aient des valeurs propres du même ordre de grandeur.

Nous obtenons :

$$(A.3.48) \begin{cases} \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} + \varepsilon K_1 (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_1 + \varepsilon K_1 H_{12} \zeta^1 = \varepsilon K_1 B_1^* \int u dt + \varepsilon K_1 B_3 u \\ \tilde{K}_2^{-1} \frac{d^2 \zeta^1}{d\tau^2} + \varepsilon \tilde{K}_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_1 + H_{22}^c \zeta^1 = B_2^{*c} \int u dt + B_4^c u \end{cases}$$

Ce système montre que  $y_1$  n'a pas de dynamique rapide propre car pour  $\varepsilon = 0$  nous avons  $\frac{d^2 y_1}{d\tau^2} = 0$ , alors que  $\zeta^1$  a une dynamique rapide propre.

L'obtention du système lent à l'aide de la méthode des perturbations singulières est possible, pour cela il suffit d'écrire  $\ddot{\zeta}^1 = 0$  dans l'équation A.3.48).

$$(A.3.49) \quad \zeta_\ell^1 = (H_{22}^c)^{-1} \left[ -K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_{1\ell} + B_2^{*c} \int u_\ell dt + B_4^c u_\ell \right]$$

Nous trouvons avec les variables  $y_1$  et  $y_2$  :

$$(A.3.50) \begin{cases} y_{2\ell} = (H_{22}^c)^{-1} \left[ -H_{21}^c y_{1\ell} + B_2^{*c} \int u_\ell dt + B_4^c u_\ell \right] \\ \ddot{y}_{1\ell} + K_1^c (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_{1\ell} = K_1^c \left[ (B_1^* - H_{12} H_{22}^{-1} B_2^*) \int u_\ell dt + (B_3 - H_{12} H_{22}^{-1} B_4) u_\ell \right] \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} H_{21}^c = H_{21} + K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 H_{11} \\ K_1^c = K_1 \left[ I_d + H_{12} H_{22}^{-1} K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 \right]^{-1} \end{cases}$$

Nous savons que la matrice  $H_{22}^c$  est inversible étant donné que  $H_{22}$  est inversible et que la matrice  $\left[ I + H_{22}^{-1} K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 H_{12} \right]$  est définie positive (car  $H_{12} = H_{21}^t$ ).

A chaque nouvelle correction, le couplage entre le système rapide et le système lent va diminuer. La variable rapide sera uniquement définie par une relation algébrique, en fonction de la variable lente.

Le système lent sera ainsi défini de manière plus précise.



Une deuxième correction se fait à l'aide du nouveau changement de variable.

$$(A.3.51) \begin{cases} \zeta^2 = \zeta^1 + (H_{22}^c)^{-1} K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_1 \\ y_1 = y_1 \end{cases}$$

Nous n'écrivons pas le système d'équation différentielle du second ordre exprimé à l'aide des nouvelles variables  $y_1$  et  $\zeta^2$ . Néanmoins avec le même principe que précédemment, nous pouvons écrire  $\ddot{\zeta}^2 = 0$ .

A l'aide des équations A.3.45) et A.3.51), nous obtenons :

$$(A.3.52) \quad y_{2\ell}^{2c} + (H_{22}^c)^{-1} (H_{21}^c) y_{1\ell}^{2c} = 0.$$

Soit à l'aide de l'équation III.2.27) :

$$(A.3.53) \begin{cases} y_{2\ell}^{2c} = (H_{22}^c)^{-1} \left[ -H_{21}^{2c} y_{1\ell}^{2c} + B_{\ell}^{*2c} \int u_{\ell} dt + B_4^{2c} \int u_{\ell} dt \right] \\ \ddot{y}_{2\ell}^{2c} + K_1^{2c} (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) y_{2\ell}^{2c} = K_1^{2c} \left[ (B_1^* - H_{12} H_{22}^{-1} B_2^*) \int u_{\ell} dt + (B_3 - H_{12} H_{22}^{-1} B_4) u_{\ell} \right] \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} K_1^{2c} = K_1 \left[ I_d + H_{12} H_{22}^{-1} K_2^{-1} (H_{22}^c)^{-1} H_{21}^c K_1 \right]^{-1} \\ H_{22}^{2c} = H_{22} + K_2^{-1} (H_{22}^c)^{-1} H_{21}^c K_1 H_{12} \\ H_{21}^{2c} = H_{21} + K_2^{-1} (H_{22}^c)^{-1} H_{21}^c K_1 H_{11} \\ B_2^{*2c} = B_2^* + K_2^{-1} (H_{22}^c)^{-1} H_{21}^c K_1 B_1^* \\ B_4^{2c} = B_4 + K_2^{-1} (H_{22}^c)^{-1} H_{21}^c K_1 B_3 \end{cases}$$

Nous obtenons de manière récurrente la forme générale du système d'équations pour une correction à l'ordre  $n$ . Nous ne faisons pas la démonstration. Une façon simple serait de montrer que l'on a :

$$(A.3.54) \quad \ddot{y}_{2\ell}^{nc} + (H_{22}^{(n-1)c})^{-1} (H_{21}^{(n-1)c}) \ddot{y}_{1\ell}^{nc} = 0.$$

La suite de la démonstration est immédiate en utilisant l'équation III.2.27).

## **CHAPITRE IV**

# **MODELISATION DES SYSTEMES DYNAMIQUES A SEGMENTS FLEXIBLES**

### **SOMMAIRE**

- I - ETUDE VIBRATOIRE D'UN SEGMENT FLEXIBLE
  
- II - MODELES DE SYSTEMES POLYARTICULES FLEXIBLES EN MOUVEMENT PLAN

## INTRODUCTION

Dans le chapitre III, nous avons établi une méthode d'amélioration de la précision des modes lents d'un système dynamique. Cette méthode est tout à fait adaptée pour les systèmes à paramètres distribués où l'effet de la flexibilité des modes rapides est non négligeable. Une réduction de modèle simple conduit parfois à des modèles très erronés.

L'étude portera sur l'analyse des fréquences propres et des formes modales d'un segment flexible à l'aide du modèle de Bernouilli-Euler.

Quelques auteurs *Karnopp (1968), (1975), (1980), Margolis (1985), Lebrun (1985), Samanta et Mukherjee (1985), (1986), et Yazman (1988)* utilisent la modélisation par bond-graphs pour l'étude des systèmes à paramètres distribués. Cette méthode de modélisation permet de rattacher facilement le modèle à un environnement extérieur.

En vue de la réduction de l'ordre des modèles obtenus *Lebrun (1985), Margolis (1984), et Yazman (1988)* utilisent le concept de double réduction modale. L'inconvénient est que cette méthode ne conserve pas le sens physique des variables dynamiques.

Dans un premier temps, nous employons les méthodes d'analyse modale et des éléments finis pour la modélisation d'un segment flexible en petits mouvements. Différentes approches sont adoptées pour tenir compte des conditions aux limites et du nombre de modes propres à retenir.

Nous proposons une méthode de réduction et de correction qui garde le sens physique des variables dynamiques en s'appuyant sur la méthode des perturbations singulières. Nous comparons cette méthode à celle faisant apparaître une matrice dite de "capacités résiduelles". Nous proposons quelques exemples d'application.

La deuxième partie fait l'objet de l'étude du modèle dynamique d'un segment flexible pour lequel nous prenons en compte le couplage avec les grands mouvements *Yazman, Servettaz et Larivière (1989)*. Nous nous restreignons au mouvement plan du segment flexible. Une première étape consiste à donner une expression générale sous forme bond-graph du système étudié, avec les méthodes d'analyse modale et éléments finis pour différentes bases de décomposition.

Dans un second temps, nous proposons une méthode de réduction des modèles de segments déformables, quel que soit le champ de déplacement choisi. Nous montrons que le modèle se rapproche de celui obtenu par la méthode d'analyse modale pour des conditions aux limites "force-libre". Nous introduisons le multiport de flexibilité résiduel pour chacun des modèles réduits et généralisons ainsi la méthode de prise en compte de l'effet des modes statiques quelle que soit la méthode de modélisation employée.

Enfin, nous proposons sur un exemple de robot 2-axes à segments déformables, une méthode simple qui permet de mettre le modèle mathématique, obtenu à partir du modèle bond-graph, sous forme singulièrement perturbée.

## I - ETUDE VIBRATOIRE D'UN SEGMENT FLEXIBLE

### I.1 - Méthode d'analyse modale

#### I.1.1 - Modèles de dimension finie

Un rappel succinct des équations aux dérivées partielles et du modèle bond-graph traduisant le comportement d'une poutre en flexion de Bernouilli-Euler est présenté *Yazman (1988)*. Nous adoptons la formulation flux avec, dans un premier temps, des conditions aux limites types "Libre-Libre". *Margolis (1980)* a montré que les modèles de poutres en torsion développés avec les conditions aux limites de type "force-libre" (ou libre-libre) ont un caractère très général et les modes associés à ces modèles sont capables de se combiner pour s'adapter à tout type de contrainte géométrique ou dynamique pouvant être imposée aux frontières du système. Ces modèles sont donc très facilement utilisables. Dans un second temps, nous développerons les modèles pour des conditions aux limites homogènes du type encasturé-libre et appuyé-appuyé. Pour les conditions aux limites non homogènes, nous adopterons la formulation libre-libre.

#### I.1.1.1 - Modèle mathématique

La *figure IV.1.1)* représente un segment flexible, avec les différentes variables associées.

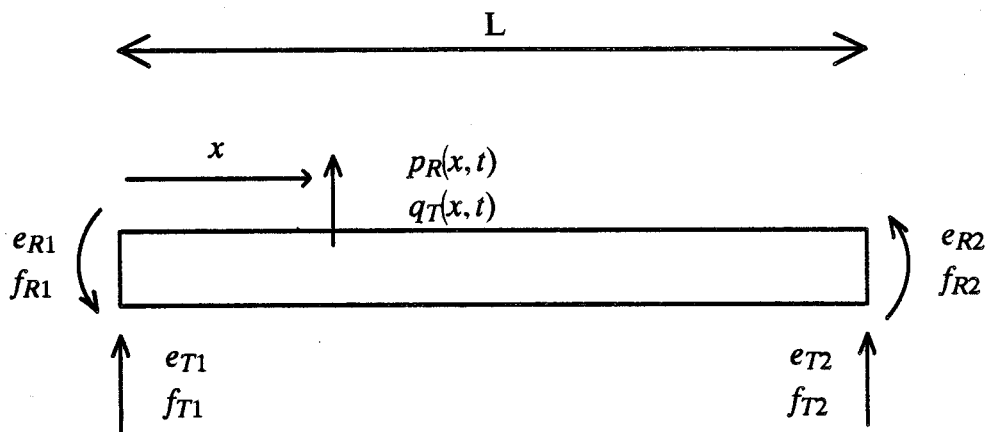


Figure IV.1.1 : Notations relatives au segment flexible.

- $e_R$  : moment fléchissant
- $e_T$  : effort tranchant
- $p_R$  : impulsion angulaire
- $q_T$  : flèche
- $f_T$  : vitesse de translation
- $f_R$  : vitesse de rotation
- $L$  : longueur du segment flexible
- $E$  : module d'Young
- $I$  : inertie de la section
- $\rho$  : masse volumique
- $S$  : section.

Nous indicerons par T les grandeurs relatives aux translations et par R celles concernant les rotations.

On note :

$$(IV.1.1a) \quad q_T = \int f_T \, dt$$

$$(IV.1.1b) \quad p_R = \int e_R \, dt$$

$$(IV.1.1c) \quad e_T = \frac{\partial e_R}{\partial x}$$

$$(IV.1.1d) \quad f_R = \frac{\partial f_T}{\partial x}$$

. équation de continuité :

$$(IV.1.2a) \quad e_R = -EI \frac{\partial^2 q_T}{\partial x^2}$$

. équation de quantité de mouvement :

$$(IV.1.2b) \quad \frac{\partial e_T}{\partial x} = \rho S \cdot \frac{\partial^2 q_T}{\partial t^2}$$

La procédure d'analyse consiste à supposer que les solutions sont de la forme :

$$(IV.1.3) \quad q_T(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) \eta_i(t)$$

L'espace et le temps sont donc séparés à l'aide des fonctions  $g_i$ , fonctions de l'espace et  $\eta_i$ , fonctions du temps.

Nous obtenons les systèmes d'équations :

$$(IV.1.4a) \quad \ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = 0$$

$$(IV.1.4b) \quad \omega_i^2 g_i(x) - \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 g_i(x)}{\partial x^4} = 0$$

$g_i(x)$  sont aussi appelées formes modales du segment flexible.

Les solutions sont de la forme :

$$(IV.1.5a) \quad \eta_i(t) = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i(t)$$

$$(IV.1.5b) \quad g_i(x) = C_i \cos \beta_i x + D_i \sin \beta_i x + E_i \operatorname{Ch} \beta_i x + F_i \operatorname{Sh} \beta_i x,$$

avec 
$$\beta_i = \sqrt{\omega_i^2 \frac{\rho S}{EI}}$$

L'introduction des conditions aux limites permet de déterminer complètement les solutions.

a) Conditions aux limites libre-libre

$$(IV.1.6a) \quad \frac{d^2 g_i(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et} \quad x = L : \text{Moment nul.}$$

$$(IV.1.6b) \quad \frac{d^3 g_i(x)}{dx^3} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et} \quad x = L : \text{Force nulle.}$$

En introduisant les équations IV.1.6) dans IV.1.4b), il vient :

$$(IV.1.7) \quad \text{Ch } \beta_1 L \cos \beta_1 L = 1$$

$$(IV.1.8) \quad \begin{cases} C_i = E_i = C_r (\text{Sh } \beta_i L - \sin \beta_i L) \\ D_i = F_i = -C_r (\text{Ch } \beta_i L - \cos \beta_i L) \end{cases}$$

$C_r$  est un coefficient de normalisation.

$$\beta_3 L = 4.73004$$

$$\beta_4 L = 7.8532$$

$$\beta_5 L = 10.9956$$

$$\beta_i L = \frac{(2i+1)\pi}{2} \quad i \geq 6.$$

L'expression des formes modales après normalisation est donnée par l'équation IV.1.9).

$$(IV.1.9) \quad g_i(x) = (\text{Ch } \beta_i x + \cos \beta_i x) - \gamma_i (\text{Sh } \beta_i x + \sin \beta_i x)$$

$$i = 1 \dots \infty \quad \text{avec } \gamma_i = \frac{\text{Ch } \beta_i L - \cos \beta_i L}{\text{Sh } \beta_i L - \sin \beta_i L}.$$

Nous obtenons en plus deux modes statiques. Ils correspondent aux vitesses de rotation et de translation du centre de gravité du segment assimilé à une poutre flexible.

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des formes modales  $g_i(x)$  et en mettant les termes correspondant aux conditions aux limites non homogènes dans le second membre, nous aboutissons à un système infini d'équations différentielles du second ordre en  $\eta_i(t)$  :

$$(IV.1.10) \quad \begin{cases} \rho S L \ddot{\eta}_1(t) = e_{T1} + e_{T2} \\ \frac{\rho S L^3}{12} \ddot{\eta}_2(t) = -\frac{L}{2} e_{T1} + \frac{L}{2} e_{T2} + e_{R1} + e_{R2} \\ \rho S L \ddot{\eta}_i(t) + \frac{(\beta_i L)^4}{L^3} EI \eta_i(t) = 2e_{T1} + 2(-1)^{i+1} e_{T2} + 2(-1)^{i+1} \frac{(\beta_i L)}{L} \text{tg}^{(-1)^{i+1}} \left( \frac{\beta_i L}{L} \right) e_{R1} \\ -2 \frac{(\beta_i L)}{L} \text{tg}^{(-1)^{i+1}} \left( \frac{\beta_i L}{2} \right) \cdot e_{R2} \end{cases}$$

b) Conditions aux limites encastré-libre

Les conditions sont :

$$(IV.1.11) \quad \begin{cases} g_1(0) = 0 & \text{déplacement nul} \\ \left. \frac{dg_1(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 & \text{rotation nulle} \end{cases}$$

$$(IV.1.12) \quad \begin{cases} \left. \frac{d^2 g_1(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 & \text{moment nul} \\ \left. \frac{d^3 g_1(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = 0 & \text{force nulle} \end{cases}$$

L'équation caractéristique est :

$$(IV.1.13) \quad \cos \beta_1 L \operatorname{Ch} \beta_1 L = -1$$

dont les solutions sont :

$$\begin{aligned} \beta_1 L &= 1.8751 \\ \beta_2 L &= 4.6941 \\ \beta_3 L &= 7.8548 \\ \beta_4 L &= 10.996 \\ \beta_i L &= (2i-1)\pi/2 \quad \text{pour } i \geq 5. \end{aligned}$$

L'expression des formes modales est :

$$(IV.1.14) \quad g_i(x) = D_i [(\cos \beta_i x - \operatorname{Ch} \beta_i x) + \delta_i (\sin \beta_i x - \operatorname{Sh} \beta_i x)]$$

$$\text{avec } \delta_i = \frac{\sin \beta_i L - \operatorname{Sh} \beta_i L}{\cos \beta_i L + \operatorname{Ch} \beta_i L}$$

$D_i$  est un coefficient de normalisation permettant de vérifier les équations suivantes :

$$(IV.1.15) \quad \int_0^L \rho S g_i(x) g_i(x) dx = \rho S L = I$$

En notant :

$$(IV.1.16a) \quad K_i = \int_0^L EI (g_i^{(2)}(x))^2 dx \quad \text{et} \quad C_i = \frac{1}{K_i}$$



$$(IV.1.16b) \quad K_i = EI \frac{(\beta_i L)^4}{L^3}$$

Nous obtenons les équations différentielles suivantes :

$$(IV.1.17) \quad I \ddot{\eta}_i(t) + \frac{1}{C_i} \eta_i(t) = g_i(L) e_{T_2} + \left. \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} \right|_{x=L} e_{R_2} \\ i = 1 \rightarrow \infty$$

où  $e_{T_2}$  et  $e_{R_2}$  sont les conditions aux limites non homogènes introduites dans le second membre.

c) Conditions aux limites appuyé-appuyé

Les conditions sont :

$$(IV.1.18) \quad \begin{cases} g_i(0) = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad \text{moment nul}$$

$$(IV.1.19) \quad \begin{cases} g_i(L) = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 g_i(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \end{cases} \quad \text{moment nul}$$

L'équation caractéristique est :

$$(IV.1.20) \quad \text{Sh } \beta_i L \sin \beta_i L = 0.$$

Sachant que  $\text{Sh } \beta_i L = 0$  seulement si  $\beta_i L = 0$ , les solutions non triviales de l'équation sont obtenues pour :

$$(IV.1.21) \quad \sin \beta_i L = 0,$$

soit :

$$(IV.1.22) \quad \beta_i L = i\pi \quad i = 1, \dots, \infty.$$

L'expression des formes modales est :

$$(IV.1.23) \quad g_i(x) = C_i \sin \beta_i x$$

$C_i$  est obtenu en normant les formes modales.  $C_i = \sqrt{2}$ , d'où :

$$(IV.1.24) \quad g_i(x) = \sqrt{2} \sin \beta_i x$$

$$(IV.1.25) \quad I_i = \int_0^L \rho S g_i^2(x) dx = \rho S L$$

$$(IV.1.26) \quad K_i = \int_0^L EI [g_i^{(2)}(x)]^2 dx = EI \frac{(\beta_i L)^4}{L^3}$$

Les équations différentielles IV.1.27) représentent le système :

$$(IV.1.27) \quad I \ddot{\eta}_i(t) + \frac{1}{C_i} \eta_i(t) = \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} e_{R1} + \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=L} e_{R2} \\ i = 1 \rightarrow \infty.$$

où  $e_{R1}$  et  $e_{R2}$  sont les termes correspondant aux conditions aux limites non homogènes introduites dans le second membre.

Comme nous l'avons déjà remarqué, le modèle "libre-libre" en formulation flux a un caractère très général. C'est pourquoi les modèles de types conditions aux limites géométriques peuvent être obtenus directement à partir du modèle en formulation flux type libre-libre, sur lequel les contraintes géométriques sont ajoutées. Il en est de même pour les systèmes ayant des contraintes de type dynamique.

Nous nous intéressons dans un premier temps au modèle bond-graph du système dit libre-libre.

I.1.1.2 - Modèle Bond-Graph

Le bond-graph correspondant au système IV.1.10) est représenté sur la Figure IV.1.2) :

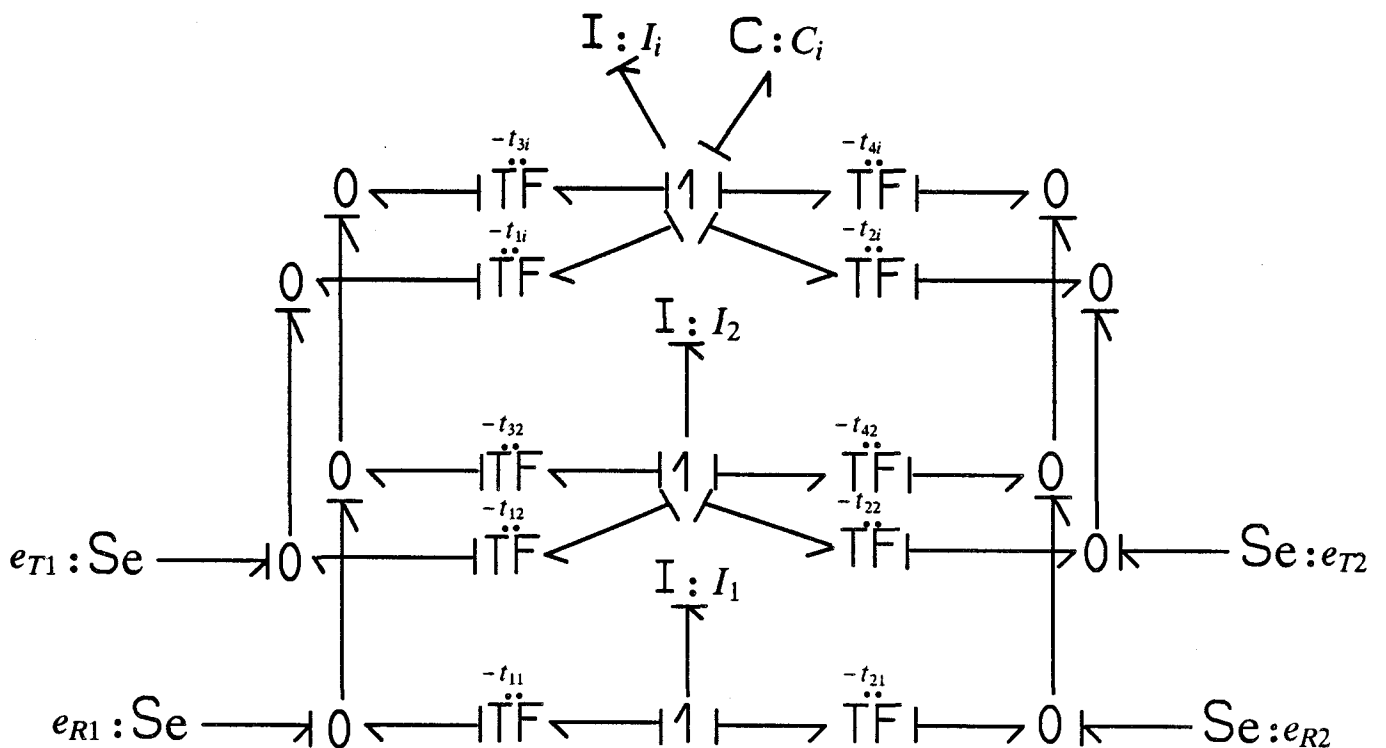


Figure IV.1.2 : Modèle d'un segment flexible en formulation "libre-libre".

Chaque mode retenu est une combinaison d'éléments I et C associés à une vitesse commune décrite par une jonction 1. Les actions extérieures sont appliquées au moyen de jonctions 0 associées aux efforts  $e_{T1}$ ,  $e_{T2}$ ,  $e_{R1}$  et  $e_{R2}$ .

Les transformateurs convertissent les efforts appliqués aux extrémités de la poutre en efforts modaux. Ils sont calculés à partir des formes modales  $g_i(x)$ .

Les paramètres du modèle bond-graph de la *Figure IV.1.2* sont rassemblés dans le *Tableau IV.1.1*.

i	$I_i$	$C_i$	$t_{1i}$	$t_{2i}$	$t_{3i}$	$t_{4i}$
1	$\rho SL$	0	1	1	0	0
2	$\frac{\rho SL^3}{12}$	0	-L/2	L/2	1	1
j	$\rho SL$	$\frac{1}{(\beta_j L)^4} \frac{L^3}{EI}$	2	$2(-1)^{j+1}$	$2(-1)^{j+1} \frac{(\beta_j L)}{L} \operatorname{tg}^{(-1)^{j+1}} \frac{(\beta_j L)}{2}$	$-2 \frac{(\beta_j L)}{L} \operatorname{tg}^{(-1)^{j+1}} \frac{(\beta_j L)}{2}$

*Tableau IV.1.1 : Paramètres du modèle bond-graph du segment souple en formulation force-libre.*

Les  $t_{ij}$  sont obtenus à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{cases} t_{1i} = g_i(0) = 2 \\ t_{2i} = g_i(L) \end{cases} \quad \begin{cases} t_{3i} = \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ t_{4i} = \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=L} \end{cases}$$

Pour  $j > 2$ , des éléments  $R_j$  sont ajoutés pour tenir compte des dissipations structurelles. Les modèles avec contraintes de type géométrique ou dynamique sont directement obtenus à partir du bond-graph de la *Figure IV.1.2*). Le système appuyé-appuyé est obtenu en faisant  $e_{R1} = e_{R2} = 0$  et en mettant des sources de flux nulles à la place de  $e_{T1}$  et  $e_{T2}$ . Les différents cas sont assemblés dans le *Tableau IV.1.2*.

Les modèles développés dans cette partie sont exacts pour une infinité de modes. Or les sous-systèmes auxquels sont raccordés ces modèles se comportent comme des filtres "passe-bas". Ils ne sollicitent qu'un domaine de pulsations fini.

Il s'agit donc de faire une réduction de modèle, appelée troncature modale.

Conditions aux limites	Modèle Bond-Graph
h o m o g è n e s	encastré-libre $\begin{array}{l} 0 : S_f \longrightarrow \\ 0 : S_f \longrightarrow \end{array} \boxed{E-L}$
non h o m o g è n e s	appuyé-appuyé $0 : S_f \longrightarrow \boxed{A-A} \longleftarrow S_f : 0$
h o m o g è n e s	encastré-charge inertiel $\begin{array}{l} 0 : S_f \longrightarrow \\ 0 : S_f \longrightarrow \end{array} \boxed{E-I} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{II} \\ \longrightarrow \text{II} \end{array}$
h o m o g è n e s	encastré-charge capacitif $\begin{array}{l} 0 : S_f \longrightarrow \\ 0 : S_f \longrightarrow \end{array} \boxed{E-C} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{C} \\ \longrightarrow \text{C} \end{array}$

Tableau IV.1.2

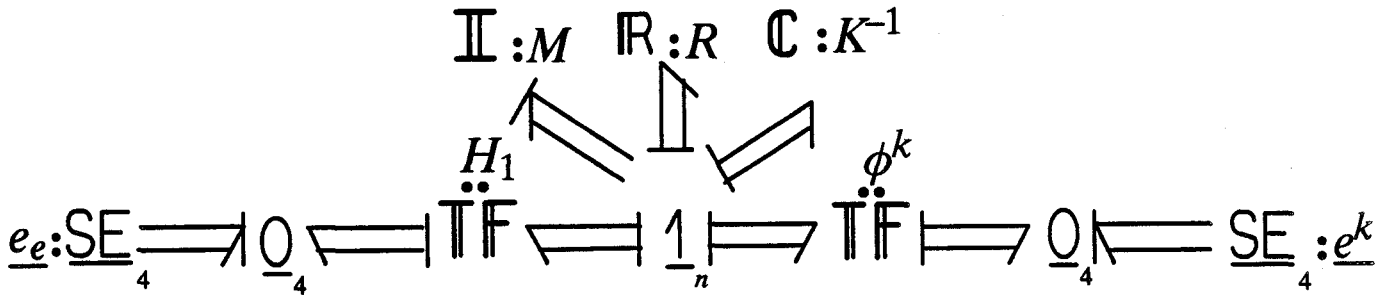
Modèles en mots bond-graph avec les conditions aux limites associées

### I.2.1 - Analyse vibratoire pour les modèles à dimension finie

L'obtention d'un modèle à dimension finie d'un segment flexible peut se faire de plusieurs manières. La première consiste à prendre le modèle défini précédemment et de lui appliquer une troncature modale. Mais les résultats sont parfois très mauvais, les conditions aux limites adoptées étant parfois loin de la réalité et la flexibilité du segment est répartie sur tous les modes. Un multiport de capacités résiduelles est introduit pour tenir compte de cette flexibilité. Nous utilisons la méthode des perturbations singulières sur différents modèles et comparons les résultats obtenus.

I.2.1.1 - Modèle bond-graph par troncature modale

Nous reprenons le modèle de la *Figure IV.1.2)* en faisant varier  $i$  de 3 à  $n$ . Une représentation multibond-graph est proposée sur la *Figure IV.1.3)* :



*Figure IV.1.3 : Représentation vectorielle d'un modèle de segment flexible*

$$(IV.1.28) \quad M = \text{diag}(I_1, I_2, \dots, I_n), \text{ matrice des masses.}$$

$$(IV.1.29) \quad R = \text{diag}(0, 0, R_3, \dots, R_n), \text{ matrice des dissipations modales.}$$

$$(IV.1.30) \quad K = \text{diag}(0, 0, k_3, \dots, k_n), \text{ matrice des raideurs modales.}$$

$$(IV.1.31) \quad H_1 = - \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ t_{31} & t_{32} & \dots & t_{3n} \\ t_{41} & t_{42} & \dots & t_{4n} \end{bmatrix}, \text{ matrice des transformateurs modaux.}$$

$$(IV.1.32) \quad \eta = [y, \theta, \eta_3, \dots, \eta_n]^t, \text{ vecteur des déplacements modaux.}$$

$$(IV.1.33) \quad \underline{e}_e = [e_{T1}, e_{T2}, e_{R1}, e_{R2}]^t, \text{ vecteur d'efforts relatifs aux conditions aux limites en 0 et L.}$$

Nous pouvons introduire de la même façon des efforts  $e_T$  et  $e_R$  en  $\ell$  points du segment flexible. Ces efforts agissent sur les modes par l'intermédiaire de la matrice de transformation  $[\varphi^k]$  définie par la relation IV.1.34) :

$$(IV.1.34) \quad [\varphi^k] = - \begin{bmatrix} \phi_{11}^k & \dots & \phi_{1j}^k & \dots & \phi_{1\ell}^k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \phi_{ij}^k & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}^k & \dots & \dots & \dots & \phi_{n\ell}^k \end{bmatrix}$$

où  $\phi_{ij}^k$  est le transformateur associé au  $j^{\text{ème}}$  point considéré sur la poutre sollicitée par l'effort  $k$  ( $k = T$  si  $e_T$  et  $k = R$  si  $e_R$ ) et agissant sur le  $i^{\text{ème}}$  mode du système.

$$(IV.1.35) \quad \underline{e}^k = [e_T^t, e_R^t]^t, \text{ vecteur d'efforts d'entrée.}$$

Les transformateurs  $\phi_{ij}^k$  ont pour expression :

- pour  $i \leq 2$  :

$$(IV.1.36) \quad \begin{cases} \phi_{1j}^T = 1 & \phi_{2j}^T = x_j - L/2 \\ \phi_{1j}^R = 0 & \phi_{2j}^R = 1 \end{cases}$$

- pour  $i > 2$  :

$$(IV.1.37) \quad \begin{cases} \phi_{ij}^T(x_j) = \text{ch}(\beta_i x_j) + \cos(\beta_i x_j) - \gamma_i [\text{sh}(\beta_i x_j) + \sin(\beta_i x_j)] \\ \phi_{ij}^R(x_j) = \beta_i [\text{sh}(\beta_i x_j) - \sin(\beta_i x_j) - \gamma_i [\text{ch}(\beta_i x_j) + \cos(\beta_i x_j)]] \end{cases}$$

Les équations relatives au modèle flux du segment flexible peuvent se mettre sous forme matricielle par la relation IV.1.38) :

$$(IV.1.38) \quad M \ddot{\eta} + R \dot{\eta} + K \eta = - [H_1]^t \underline{e}_e - [\varphi^T]^t e_T - [\varphi^R]^t e_R .$$

Une autre formulation sous forme d'équation d'état peut être obtenue. Nous notons :

$$(IV.1.39) \quad \underline{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]^t \text{ le vecteur des impulsions modales (inerties } I_i).$$

$$(IV.1.40) \quad \underline{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^t \text{ le vecteur des déplacements modaux (compliances } C_i).$$

Il vient :

$$(IV.1.41) \quad \begin{cases} \dot{\underline{p}} = -R M^{-1} \underline{p} - K \underline{q} - [H_1]^t \underline{e}_e - [\varphi_k]^t \underline{e}^k \\ \dot{\underline{q}} = M^{-1} \underline{p} \end{cases}$$

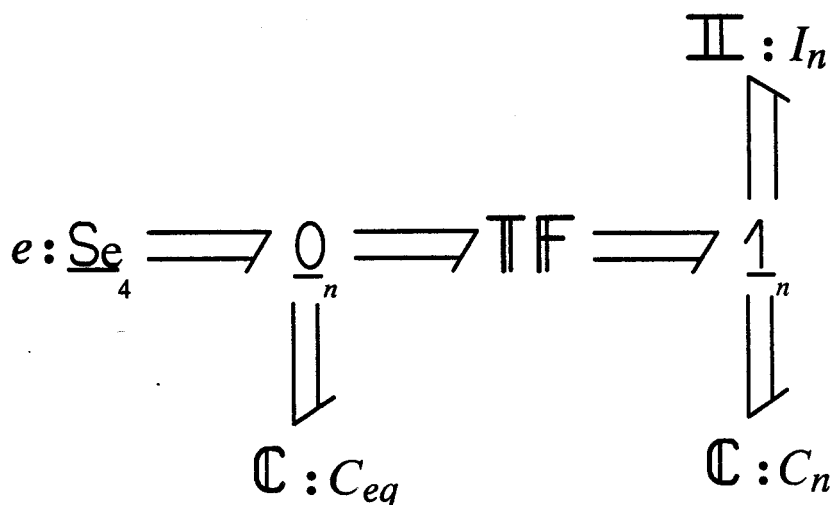
Les modèles finis ayant des conditions aux limites de type géométrique ou dynamique s'obtiennent directement à partir du modèle fini libre-libre avec la procédure définie précédemment pour le modèle infini libre-libre.

#### I.1.2.2 - Prise en compte des capacités résiduelles

Lors de la réduction modale, les modes élevés sont enlevés. Bien que ces derniers, se situant au-delà du spectre d'excitation du segment flexible, ne soient pas excités, ils contribuent néanmoins au comportement vibratoire car la flexibilité du segment est répartie sur tous les modes dans cette formulation.

Les éléments capacitifs des modes négligés sont gardés et appelés capacités résiduelles *Yazman (1988), Karnopp (1968)*.

Le multibond-graph d'un segment flexible à l'ordre  $n$  muni du multiport  $C_{eq}$  est représenté sur la *Figure IV.1.4* :



*Figure IV.1.4 : Multibond-graph d'un segment flexible à l'ordre  $n$  muni du multiport  $C_{eq}$ .*

Le multiport des capacités résiduelles peut se calculer de deux manières ; soit à l'aide du calcul de séries infinies qui tiennent compte des flexibilités de l'ordre  $n+1$  à l'infini ; soit en retranchant au multiport capacitif de la flexibilité totale du segment, les termes de flexibilité jusqu'à l'ordre  $n$ . Par la suite, nous utiliserons les indices  $eq$  (équivalent) et  $res$  (résiduel) pour exprimer le multiport des capacités résiduelles, c'est-à-dire  $C_{eq} = C_{res}$  ou  $K_{res} = K_{eq}$ .

Le multiport capacitif total est  $C_{TOT}$ , il vaut :

$$(IV.1.42) \quad C_{TOT} = \frac{L}{420 EI} \begin{bmatrix} 4L^2 & -22L & 3L^2 & 13L \\ -22L & 156 & -13L & -54 \\ 3L^2 & -13L & 4L^2 & 22L \\ 13L & -54 & 22L & 156 \end{bmatrix}$$

La prise en compte de ces capacités résiduelles améliore la précision des modes du système en basse fréquence. Par contre, des modes élevés sont introduits. Des problèmes de calcul peuvent donc apparaître. Nous verrons par la suite comment éliminer ces modes élevés.

Le tableau IV.1.3 représente les modèles en mots bond-graph et les conditions aux limites associées, avec la prise en compte des capacités résiduelles.

Conditions aux limites		Modèle Bond-Graph
homogènes	encastré-libre	
	appuyé-appuyé	
non homogènes	encastré-charge	

Tableau IV.1.3 : Modèle en mots bond-graph avec le multiport des capacités résiduelles.

### I.1.2.3 - Application des perturbations singulières sur les modèles de dimension infinie

Dans un premier temps, nous reprenons le bond-graph de la Figure IV.1.2) avec une nouvelle notation multiport. Celle-ci permettra de faire une décomposition en vue de l'utilisation des perturbations singulières.



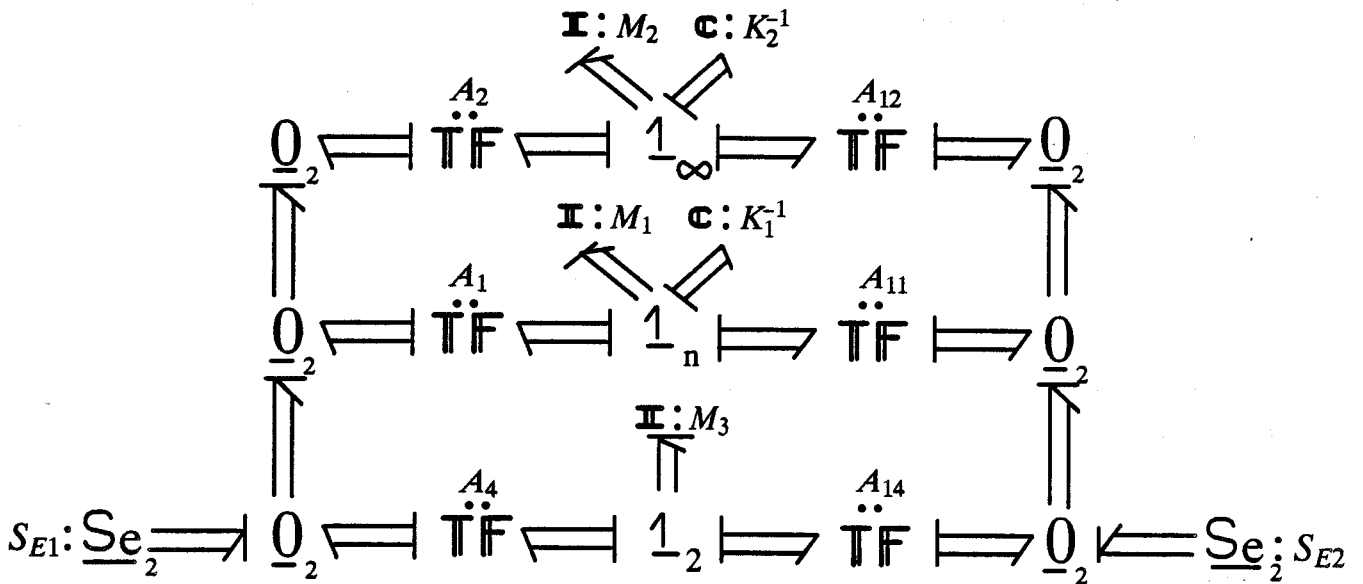


Figure IV.1.5 : Modèle décomposé d'un segment flexible en formulation "force-libre".

Il apparaît que plus  $n$  est grand, plus  $C_n$  est petit, ceci met en évidence des variables d'état correspondant aux dynamiques rapides.

Nous avons:

$$(IV.1.43a) \begin{cases} M_3 = \text{diag}(I_1, I_2) \\ M_1 = \text{diag}(I_3, \dots, I_n) \\ M_2 = \text{diag}(I_{n+1}, \dots, I_\infty) \end{cases}$$

$$(IV.1.43b) \begin{cases} K_1 = \text{diag}(k_3, \dots, k_n) \\ K_2 = \text{diag}(k_{n+1}, \dots, k_\infty) \end{cases}$$

Suivant les conditions aux limites imposées au système, nous obtenons  $S_{E1}$  et  $S_{E2}$ .

Par exemple, pour le système appuyé-appuyé, nous prendrons :

$$(IV.1.44) \begin{cases} S_{E1} = \begin{bmatrix} e_{T1} \\ e_{T2} \end{bmatrix} \\ S_{E2} = \begin{bmatrix} e_{R1} \\ e_{R2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ceci nous permet de garder les mêmes notations pour différents cas de figure.

$p_1$  et  $q_1$  sont les vecteur états correspondant respectivement aux matrices  $M_1$  et  $K_1$ .

$q_1$  est associé aux éléments  $C$  de plus grand module, il sera un vecteur lent.

$p_2$  et  $q_2$ , de dimension infinie, sont les vecteurs état correspondant respectivement aux matrices  $M_2$  et  $K_2$ .

$p_3$  est le vecteur état lié aux éléments  $I_1$  et  $I_2$ .

Les matrices  $(A_1, A_2, A_4)$  et  $(A_{11}, A_{12}, A_{14})$  se déduisent de la matrice  $H_1$ , (équation IV.1.31) suivant le choix de  $S_{E1}$  et  $S_{E2}$ .

Nous notons :

$$\begin{cases} A_5 = -A_1^t \\ A_{15} = -A_{11}^t \end{cases} \quad \begin{cases} A_7 = -A_2^t \\ A_{17} = -A_{12}^t \end{cases} \quad \begin{cases} A_8 = -A_4^t \\ A_{18} = -A_{14}^t \end{cases}$$

Il est possible d'appliquer la méthode des perturbations singulières sur le modèle d'un segment flexible où un nombre infini de modes existe. Si nous prenons le modèle "force-libre" il apparaît que les perturbations singulières nous donnent le modèle réduit de la *Figure IV.1.2*), qui correspond à l'équation IV.1.10). Cette méthode équivaut à faire une troncature modale à l'ordre  $n$ .

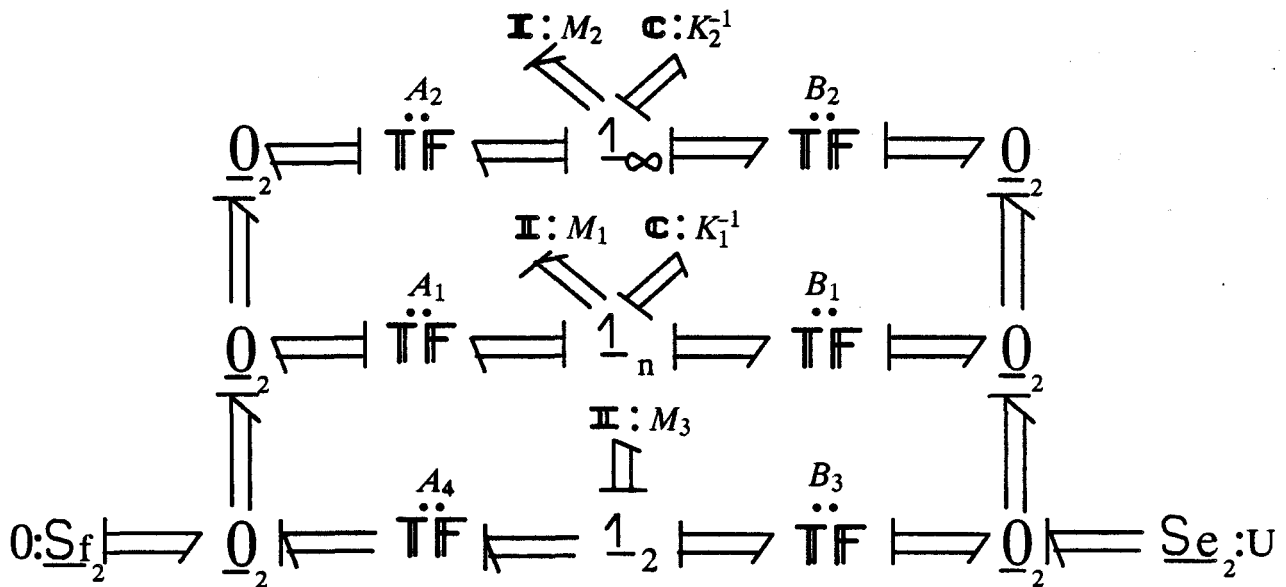
La formulation flux sans contraintes extérieures est mal adaptée pour l'utilisation des perturbations singulières. Nous allons nous placer dans deux cas. Dans un premier temps, nous faisons l'étude de systèmes avec des conditions aux limites homogènes puis dans un second temps avec des conditions aux limites non homogènes.

Nous traiterons de manière particulière les systèmes corrigés à l'ordre 1 ayant des conditions aux limites homogènes. Pour ces systèmes, nous trouvons un bond-graph équivalent sur lequel la matrice de flexibilité est modifiée.

a) Conditions aux limites homogènes

Nous n'étudions que deux cas particuliers. Les conditions de type encastré-libre et appuyé-appuyé. Pour une condition de type appuyé-libre et encastré-appuyé, il faut modifier les matrices  $M_1$ ,  $M_3$  et  $K_1$ . La méthode est néanmoins exactement la même.

La représentation du bond-graph s'obtient directement à partir de celle de la *Figure IV.1.5*).



*Figure IV.1.6 : Modèle bond-graph d'un segment flexible avec contraintes homogènes.*

La matrice  $A_4$  étant carrée et inversible, la mise de la causalité ne pose aucun problème et peut directement s'effectuer sur le bond-graph avec une représentation multiports.

Nous avons ajouté une source d'effort correspondant à une entrée extérieure éventuelle avec les transformateurs modaux associés.

L'équation d'état associée et l'équation algébrique se déduisent facilement de ce bond-graph.

$$(IV.1.45a) \quad \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} -K_1 & 0 \\ 0 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \Delta^{-1} \begin{bmatrix} -B_1^t + A_5 A_8^{-1} B_3^t \\ -B_2^t + A_7 A_8^{-1} B_3^t \end{bmatrix} u.$$

$$(IV.1.45b) \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} & 0 \\ 0 & M_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$(IV.1.45c) \quad p_3 = -M_3 A_4^{-1} (A_1 M_1^{-1} p_1 + A_2 M_2^{-1} p_2).$$

$$\text{avec :} \quad \Delta = \begin{bmatrix} I_d + A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1 M_1^{-1} & A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_2 M_2^{-1} \\ A_7 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1 M_1^{-1} & I_d + A_7 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_2 M_2^{-1} \end{bmatrix}$$

Remarque :

La présence de causalités dérivées ne modifie pas l'étude dans le cas présent car celles-ci sont sur des éléments inertiels et seuls les éléments capacitifs introduisent des modes élevés.

#### - Perturbations singulières

L'utilisation directe des perturbations singulières, en utilisant les procédures du chapitre III, nous indique qu'il suffit d'enlever les éléments capacitifs de valeur faible. Il suffit donc d'enlever la matrice  $K_2^{-1}$ . Etant donné que celle-ci est sur une jonction 1, il faut enlever cette jonction 1. Nous montrons facilement que la source d'effort n'agit plus par l'intermédiaire de  $B_2$ . Le modèle lent correspond ainsi au modèle réduit obtenu par réduction modale (Figure IV.1.7) :

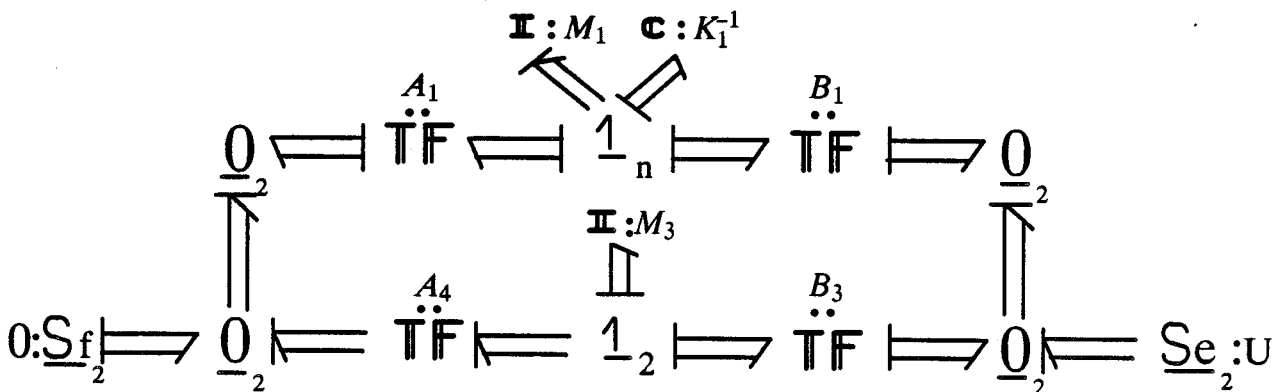


Figure IV.1.7 : Modèle bond-graph réduit par application des perturbations singulières.

L'équation d'état du modèle lent ou réduit s'obtient à partir de l'équation IV.1.45) avec  $\dot{q}_2 = 0$  ou directement à partir du bond-graph réduit de la Figure IV.1.7.

$$(IV.1.46a) \begin{cases} \dot{p}_1 = (I_d + A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1 M_1^{-1})^{-1} [-K_1 q_1 + (-B_1^t + A_5 A_8^{-1} B_3^t) u_e] \\ \dot{q}_1 = M_1^{-1} p_1 \end{cases}$$

$$(IV.1.46b) p_3 = -M_3 A_4^{-1} A_1 M_1^{-1} p_1.$$

Deux relations supplémentaires sont obtenues à l'aide des équations IV.1.45).

$$(IV.1.46c) \begin{cases} p_2 = 0 \\ q_2 = K_2^{-1} A_7 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1 M_1^{-1} (I_d + A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1 M_1^{-1})^{-1} K_1 q_1 \end{cases}$$

L'utilisation simple des perturbations singulières n'a donc rien apporté de nouveau. Nous nous proposons donc d'appliquer les méthodes de correction sur le modèle lent.

#### - Correction sur le modèle réduit

La correction sur le modèle réduit peut se faire à l'aide des équations d'état du système.

Néanmoins, il est plus judicieux d'utiliser les équations différentielles du second ordre du système de façon à trouver une interprétation simple de la correction.

L'expression de ces équations différentielles est obtenue à partir de l'équation IV.1.45) à l'aide des nouvelles variables.

$$(IV.1.47) \begin{cases} \dot{y}_1 = K_1 q_1 \\ \dot{y}_2 = K_2 q_2 \end{cases}$$

$$(IV.1.48) \begin{cases} \ddot{y}_1 + K_1 H_{11} y_1 + K_1 H_{12} y_2 = K_1 [H_{11} (-B_1^t + A_5 A_8^{-1} B_3^t) + H_{12} (-B_2^t + A_7 A_8^{-1} B_3^t)] \int u dt \\ \ddot{y}_2 + K_2 H_{21} y_1 + K_2 H_{22} y_2 = K_2 [H_{21} (-B_1^t + A_5 A_8^{-1} B_3^t) + H_{22} (-B_2^t + A_7 A_8^{-1} B_3^t)] \int u dt \end{cases}$$

$$\text{avec : } \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1 & A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_2 \\ A_7 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1 & M_2 + A_7 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

\* Correction premier ordre

Le système corrigé au premier ordre s'obtient à l'aide du changement de variable :

$$(IV.1.49) \quad \eta^1 = y_2 + H_{22}^{-1} H_{21} y_1$$

avec  $\ddot{\eta}^1 = 0.$

Nous obtenons :

$$(IV.1.50) \quad \ddot{y}_{1\ell} + [K_1 (I_d + H_{12} H_{22}^{-1} K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1)^{-1} (H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21})] \\ [y_{1\ell} - (-B_1^t + A_5 A_8^{-1} B_3^t) \int u_\ell dt] = 0.$$

En remplaçant les matrices  $H_{i,j}$  en fonction des matrices  $M_{i,j}$ , nous obtenons :

$$(IV.1.51) \quad \ddot{y}_{1\ell} + K_1^c M_{11}^{-1} y_{1\ell} = K_1^c M_{11}^{-1} (-B_1^t + A_5 A_8^{-1} B_3^t) \int u_\ell dt.$$

Le système corrigé au premier ordre peut être interprété directement sur le bond-graph du système réduit sur lequel la matrice de raideur  $K_1$  devient une matrice symétrique non diagonale  $K_1^c$  explicitée par :

$$(IV.1.52) \quad K_1^c = + K_1 [I_d + M_{11}^{-1} M_{12} K_2^{-1} M_{21} M_{11}^{-1} K_1]^{-1}.$$

\* Correction à un ordre quelconque

La correction à l'ordre deux nous donne les équations différentielles suivantes :

$$(IV.1.53) \quad \ddot{y}_{1\ell} + K_1^{2c} M_{11}^{-1} y_{1\ell} = K_1^{2c} M_{11}^{-1} (-B_1^t + A_5 A_8^{-1} B_3^t) \int u_\ell dt ,$$

avec

$$\begin{cases} K_1^{2c} = K_1 [I_d + H_{12} H_{22}^{-1} K_2^{-1} (H_{22}^c)^{-1} H_{21} K_1]^{-1} \\ H_{22}^c = H_{22} + K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 H_{12} \\ H_{21}^c = H_{21} + K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21} K_1 H_{11} \end{cases}$$

Nous pouvons encore une fois interpréter la correction sur le bond-graph réduit en remplaçant  $K_1$  par  $K_1^{2c}$ . Cette fois-ci,  $K_1^{2c}$  n'est plus symétrique.

$$(IV.1.54) \quad K_1^{2c} = + K_1 [I_d + H_{12} H_{22}^{-1} (H_{22}^c)^{-1} H_{21}^c K_1]^{-1}.$$

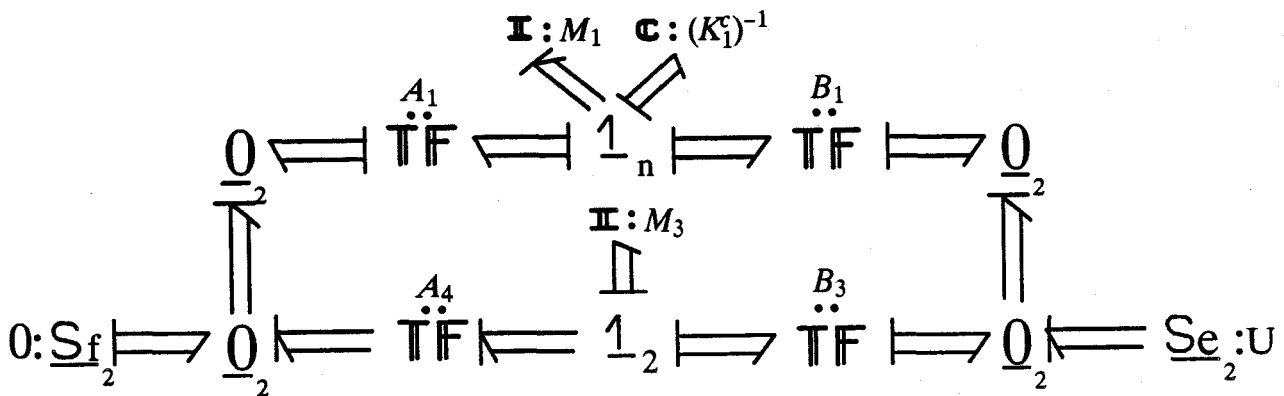
Les corrections à des ordres supérieurs s'obtiennent à l'aide des méthodes présentées dans le chapitre 3.

Remarque :

Le calcul des nouvelles matrices de raideur semble fastidieux car certaines matrices ont une dimension infinie. Nous montrerons par la suite comment éviter ces calculs à l'aide d'une méthode équivalente à celle présentée ci-dessus.

Le bond-graph du système corrigé est présenté ci-dessous (*Figure IV.1.8*).

Nous pouvons ajouter d'éventuelles entrées sachant que les transformateurs associés à ces entrées sont enlevés pour les modes éliminés, et, le système corrigé étant le système réduit pour lequel la matrice de raideur est modifiée.



*Figure IV.1.8 : Bond-graph réduit corrigé d'un segment souple.*

#### b) Conditions aux limites non homogènes

Nous prenons l'exemple du système encastré-charge. Le bond-graph est représenté sur la *Figure IV.1.9*).

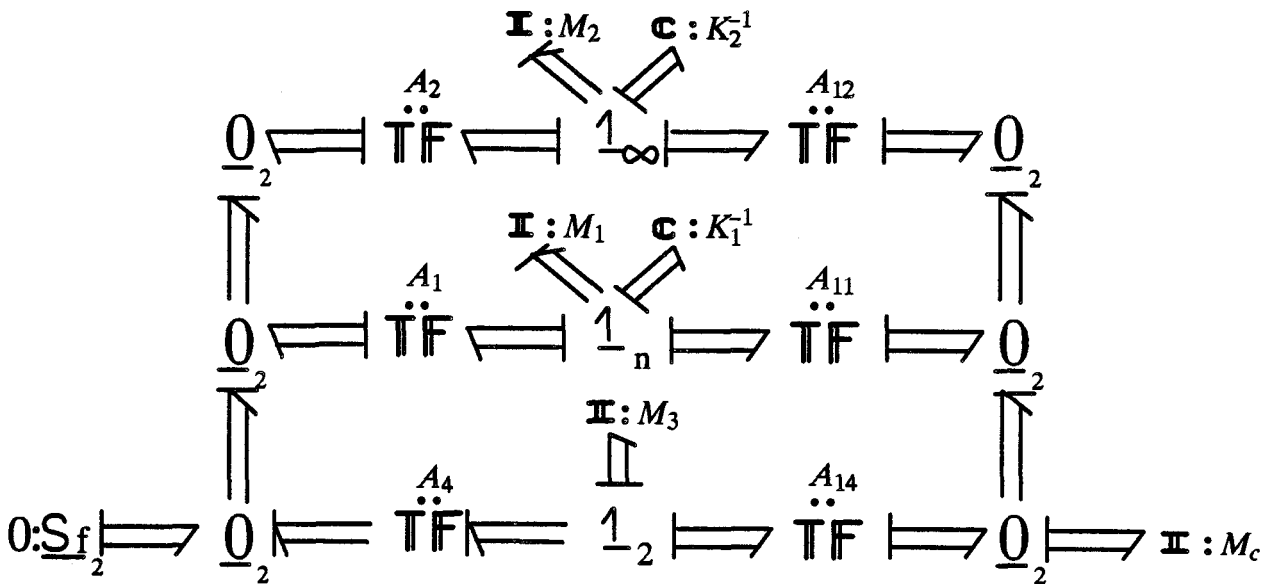


Figure IV.1.9 : Modèle bond-graph d'un segment souple pour des conditions aux limites "encastrement-charge".

$M_c$  est la matrice représentant le multiport de la charge.

#### - Perturbations singulières

L'utilisation des perturbations singulières se fait de la même manière que pour les systèmes à contraintes géométriques. Néanmoins, nous devons considérer le multiport constitué des matrices  $M_3$  et  $M_c$  et non plus  $M_3$  seul pour le calcul de la matrice de masse équivalente.

Nous obtenons un modèle réduit non corrigé (Figure IV.1.10), correspondant à une réduction modale.

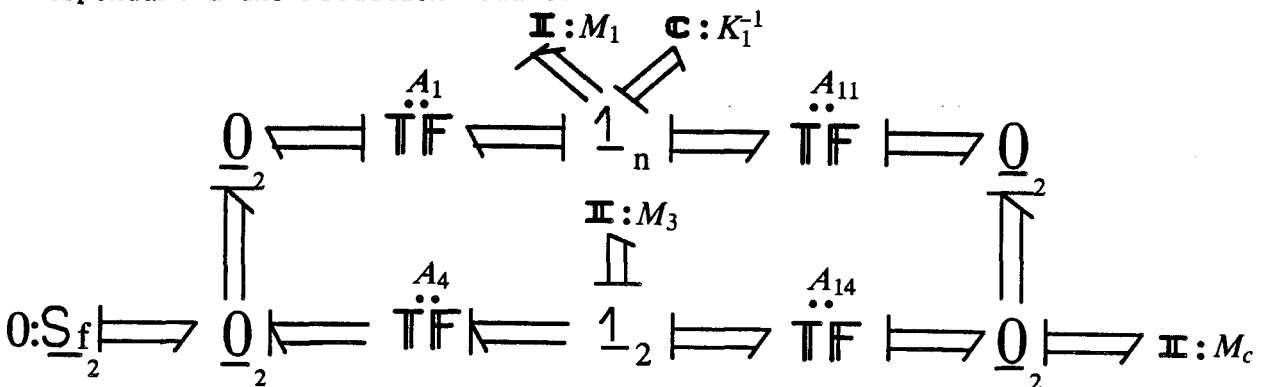


Figure IV.1.10 : Bond-graph réduit d'un segment souple avec des conditions aux limites "encastrement-charge".

Il est à remarquer que si la charge est telle que  $\|M_c\| \ll \|M_3\|$  alors celle-ci introduit des modes élevés. Une étude particulière doit être faite pour ce cas. Nous supposons désormais que la charge n'introduit pas de modes élevés.



- Correction sur le modèle réduit

En considérant le multiport constitué par  $M_3$  et  $M_c$ , nous pouvons appliquer exactement la même méthode que précédemment.

I.1.2.4 - Application des perturbations singulières sur les modèles de dimension finie comportant des corrections statiques

Dans cette partie, nous allons appliquer la méthode des perturbations singulières sur des modèles de poutres comportant un nombre fini de modes et pour lesquelles une correction statique, à l'aide des capacités résiduelles a été introduite.

Dans un deuxième temps, nous appliquons les méthodes de correction sur le système réduit.

a) Conditions aux limites homogènes

Avec les notations précédentes, nous obtenons le bond-graph du système avec des conditions aux limites de type géométrique, avec le multiport des capacités résiduelles. Une source d'effort est éventuellement ajoutée.

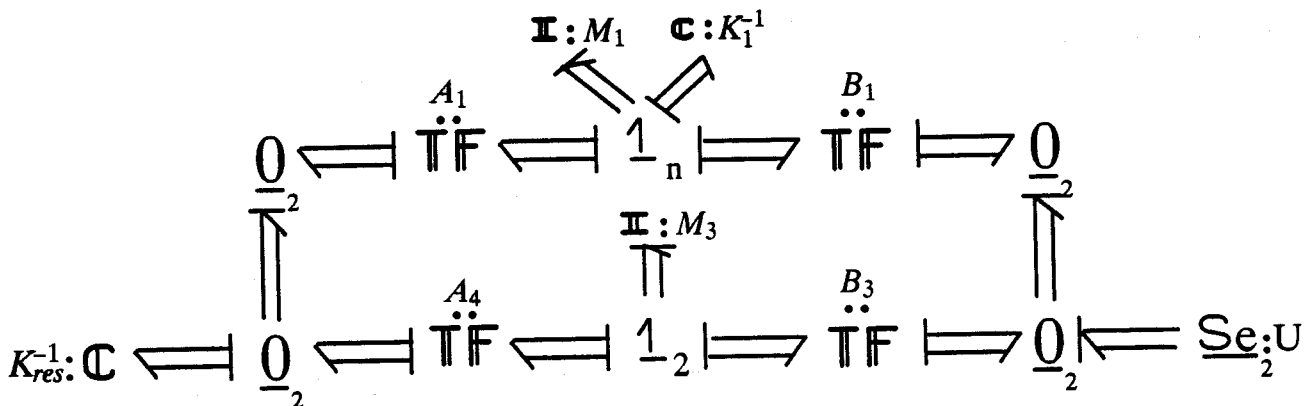


Figure IV.1.11 : Modèle bond-graph muni du multiport des capacités résiduelles.

Le vecteur  $q$  est associé au multiport des capacités résiduelles.

L'équation d'état associée est :

$$(IV.1.55) \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_1 & A_5 K_{res} \\ 0 & 0 & 0 & A_8 K_{res} \\ M_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ A_1 M_1^{-1} & A_4 M_3^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ q_1 \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_1^t \\ -B_3^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Le multiport des capacités résiduelles introduit des modes élevés dans le système. Néanmoins, il améliore la précision des modes faibles.

En général, les valeurs propres de  $K_{res}^{-1}$  ne sont pas toutes faibles devant celles de  $K_1^{-1}$ . Ce qui prouve que le multiport des capacités résiduelles n'a pas seulement un comportement rapide. Le vecteur état associé a donc une partie lente et une partie rapide. Il peut être facilement montré qu'en enlevant une partie du multiport  $K_{res}^{-1}$ , la précision des modes est peu modifiée et que les modes les plus élevés sont enlevés. Nous nous apercevons que seuls les termes de  $K_{res}^{-1}$  associés à la translation introduisent des modes élevés. En première approximation, nous pouvons donc enlever ces termes, sachant qu'ils améliorent très peu la précision des modes lents. Ces différentes considérations s'expliquent simplement en remarquant que les termes de la matrice  $C_{res}$  ont des ordres de grandeur très différents.

Néanmoins, dans la suite, nous considérerons que le multiport  $C_{res}$  est associé au vecteur introduisant les modes rapides, même si cela n'est pas tout à fait exact. Une justification sera donnée ultérieurement. Ceci permet de simplifier considérablement l'analyse du système.

Le système réduit obtenu à l'aide des perturbations singulières (Figure IV.1.12) consiste à enlever le multiport des capacités résiduelles.

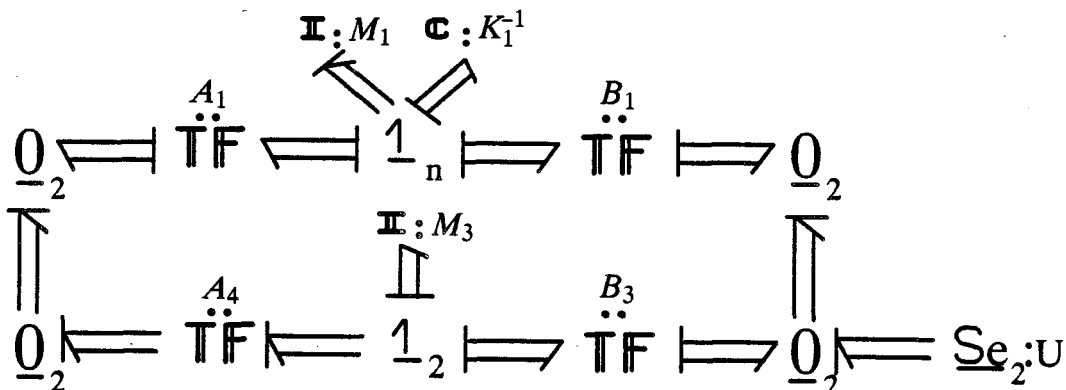


Figure IV.1.12 : Bond-graph réduit du segment souple.

Les équations d'état du système réduit s'obtiennent facilement soit à partir du bond-graph réduit, soit en posant  $\dot{q} = 0$  dans l'équation IV.1.55).

Nous utilisons désormais les équations différentielles du second ordre du modèle IV.1.55) de façon à donner une interprétation simple des corrections.

Le changement de variable est donné par :

$$(IV.1.56) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = K_1 g_1 \\ \dot{y}_2 = K_2 g \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$(IV.1.57) \quad \begin{cases} \ddot{y}_1 + K_1 G_{11} y_1 + K_1 G_{12} y_2 = - K_1 M_1^{-1} B_1^t \int u dt \\ \ddot{y}_2 + K_{res} G_{21} y_1 + K_{res} G_{22} y_2 = - K_{res} (A_1 M_1^{-1} B_1^t + A_4 M_3^{-1} B_3^t) \int u dt \end{cases}$$

$$\text{avec :} \quad \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} & - M_1^{-1} A_5 \\ A_1 M_1^{-1} & -(A_1 M_1^{-1} A_5 + A_4 M_3^{-1} A_8) \end{bmatrix}$$

Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs, ceux-ci ayant déjà été faits pour d'autres systèmes. De plus, nous écrivons les équations du système en régime autonome, sachant que l'entrée gardera le coefficient du système réduit quelle que soit la correction.

\* Correction premier ordre

$$(IV.1.58) \quad \ddot{y}_{1\ell} + K_1 \left[ I_d + G_{12} G_{22}^{-1} K_{res}^{-1} G_{22}^{-1} G_{21} K_1 \right]^{-1} \left( M_1 + A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1 \right)^{-1} y_{1\ell} = 0.$$

\* Correction à un ordre quelconque

$$(IV.1.59) \quad \ddot{y}_{1\ell} + K_1 \left[ I_d + G_{12} G_{22}^{-1} K_{res}^{-1} (G_{22}^c)^{-1} G_{21} K_1 \right]^{-1} \left( M_1 + A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1 \right)^{-1} y_{1\ell} = 0.$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} G_{22}^c = G_{22} + K_{res}^{-1} G_{22}^{-1} G_{21} K_1 G_{12} \\ G_{12}^c = G_{21} + K_{res}^{-1} G_{22}^{-1} G_{21} K_1 G_{11} \end{cases}$$

Pour les ordres supérieurs, il faut utiliser les méthodes du chapitre 3.

Nous interprétons donc les corrections sur le modèle réduit à l'aide d'une nouvelle matrice de raideur, symétrique pour la correction à l'ordre 1, et non symétrique pour une correction à un ordre supérieur.

A l'ordre 1,

$$(IV.1.60) \quad K_1^c = K_1 \left[ I_d + G_{12} G_{22}^{-1} K_{res}^{-1} G_{22}^{-1} G_{21} K_1 \right]^{-1} .$$

Nous comparons les systèmes corrigés obtenus à partir du système de dimension infinie et celui contenant le multiport des capacités résiduelles. Il apparaît que les matrices de raideur corrigées sont les mêmes :

*Démonstration en Annexe 1.*

Nous avons donc les propriétés suivantes :

- les modèles réduits (lents) sont les mêmes,
- les modèles corrigés sont les mêmes,
- les matrices de raideur corrigées peuvent se calculer à partir du système de dimension finie.

De plus, nous justifions notre choix pour  $p$  (associé à  $C_{res}$ ) en tant que vecteur état rapide et justifions l'emploi des capacités résiduelles en tant qu'améliorations des modes lents d'un système.

#### b) Conditions aux limites non homogènes

Nous reprenons l'exemple du système encastré-charge.

Le bond-graph obtenu en tenant compte des capacités résiduelles est représenté sur la *Figure IV.1.13*.

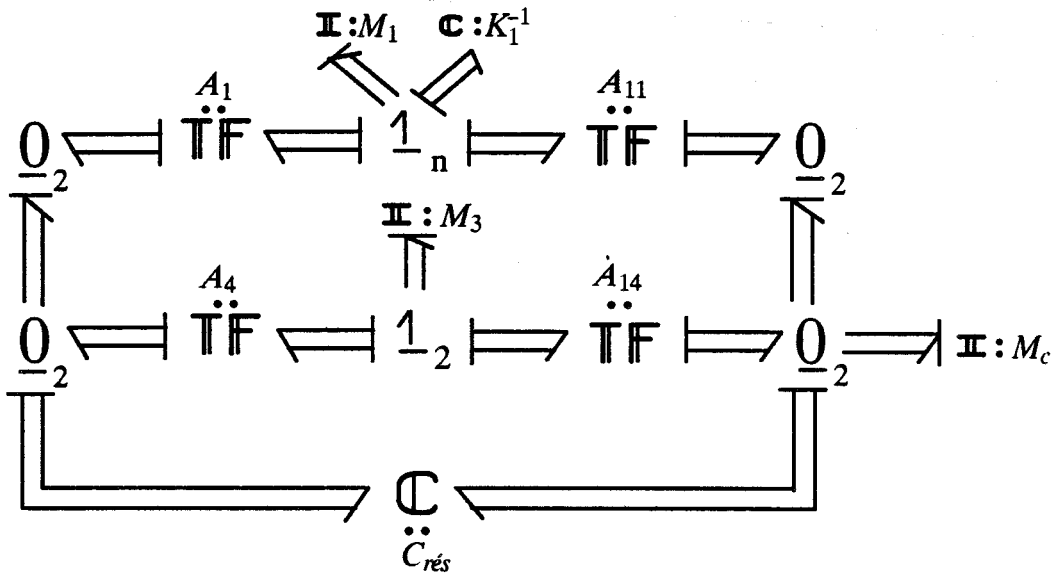


Figure IV.1.13 : Modèle bond-graph muni du multiport des capacités résiduelles.

L'équation d'état avec  $q$ ,  $p_3$  et  $p_c$  les vecteurs état associés respectivement à  $C_{res}$ ,  $M_3$  et  $M_c$ , est :

$$(IV.1.61) \quad \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_3 \\ \dot{p}_c \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -K_1 & [A_5 \ A_{15}]K_{res} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [A_8 \ A_{18}]K_{res} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [0 \ I_d]K_{res} \\ M_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [A_1 \ A_{11}]M_1^{-1} & [A_4 \ A_{14}]M_3^{-1} & [0 \ -I_d]M_c^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_c \\ q_1 \\ q \end{bmatrix}$$

Nous définissons les nouvelles matrices  $R_i$  :

$$(IV.1.62a) \quad \begin{cases} R_1 = -I_d \\ R_2 = [A_5 \ A_{15}] & R_4 = \begin{bmatrix} A_8 & A_{18} \\ 0 & +I_d \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$(IV.1.62b) \quad \begin{cases} R_5 = -R_1^t & R_7 = -R_2^t \\ R_8 = -R_4^t \end{cases}$$

Les dimensions des matrices  $R_i$  sont telles que l'équation IV.1.61) peut désormais s'écrire :

$$(IV.1.63) \quad \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_1 K_1 & R_2 K_{res} \\ 0 & 0 & 0 & R_4 K_{res} \\ R_5 M_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ R_7 M_1^{-1} & R_8 M_2^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q \end{bmatrix}$$

avec  $p_2 = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_c \end{bmatrix}$  et  $M_2 = \begin{bmatrix} M_3 & 0 \\ 0 & M_c \end{bmatrix}$

Nous obtenons une équation d'état avec une forme générale où les variables rapides sont dans le vecteur état  $q$ . Le système est sous forme explicite car  $R_4$  est inversible.

Remarque

Le multiport des capacités résiduelles contient des valeurs propres de faible valeur (2) et des valeurs propres de valeur plus élevée (2).

Le modèle réduit contiendrait a priori un multiport résiduel de dimension 2. Néanmoins, nous considérons que le vecteur  $q$  complet est rapide, ceci pour simplifier les méthodes de correction.

Nous pouvons appliquer la méthode générale des perturbations singulières et celle des corrections sur le modèle d'équation d'état IV.1.63) transformé en équations différentielles du second ordre avec le changement de variables :

$$(IV.1.64) \begin{cases} y_1 = K_1 \dot{q}_1 \\ y_2 = K_{res} \dot{q} \end{cases}$$

Le système réduit lent s'obtient en enlevant le multiport des capacités résiduelles (Figure IV.1.14).

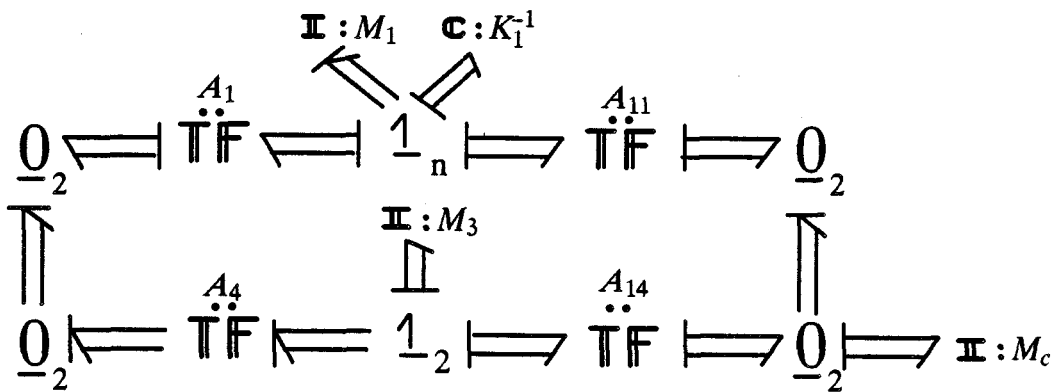


Figure IV.1.14 : Modèle réduit du segment souple pour les conditions aux limites "encastrement-charge".

L'équation d'état est donnée en écrivant  $\dot{\mathbf{q}} = 0$  dans l'équation IV.1.63) :

$$(IV.1.65a) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_1 = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_4^{-1} \mathbf{M}_2 \mathbf{R}_8^{-1} \mathbf{R}_7 \mathbf{M}_1^{-1} \right]^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{g}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{R}_5 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{p}_1 \end{cases}$$

$$(IV.1.65b) \quad \begin{cases} \mathbf{p}_2 = - \mathbf{M}_2 \mathbf{R}_8^{-1} \mathbf{R}_7 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{g}_2 = - \mathbf{K}_{res}^{-1} \left[ \mathbf{R}_7 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_8 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{R}_4 \right]^{-1} \mathbf{R}_7 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{g}_1 \end{cases}$$

Le système corrigé s'obtient simplement en modifiant la matrice de raideur  $\mathbf{K}_1$  à l'aide des méthodes précédemment utilisées. Nous ne revenons pas sur ces calculs.

### c) Remarques sur les fréquences propres obtenues

Nous allons donner quelques propriétés des modes propres du système étudié, pour différentes approximations. Nous rangeons les valeurs propres des modèles par ordre croissant. Soit  $\lambda^i$  la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre de la matrice  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$  où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices de masse et de raideur du système. Le mode propre est la racine carré de  $\lambda^i$ .

Chacun des systèmes a un nombre de valeurs propres différent. Nous ne comparons donc que les valeurs propres qui sont comparables, c'est-à-dire les plus faibles en module.

#### - Propriété IV.1.1)

$$\lambda^i < \lambda_{CR}^i < \lambda_{AC}^i < \lambda_{SC}^i$$

où :  $\lambda^i$  est la valeur propre réelle du système.

$\lambda_{CR}^i$  est la valeur propre pour le modèle contenant des capacités résiduelles.

$\lambda_{AC}^i$  est la valeur propre pour le système avec correction et sans capacité résiduelle.

$\lambda_{SC}^i$  est la valeur propre pour le système sans correction et sans capacité résiduelle.

*Démonstration en Annexe 2.*

Dans tous les cas, nous avons une borne supérieure de la valeur propre réelle. En général,  $\lambda_{CR}^i$  est très proche de  $\lambda_{AC}^i$ , sinon égale.

. Bond-graph équivalent après correction

Nous avons donné une interprétation de la correction apportée à l'aide d'une nouvelle matrice de raideur non symétrique, n'ayant pas de signification physique. Il serait plus judicieux par exemple d'interpréter ces corrections comme la modification de la longueur de la poutre ou bien de la modification des transformateurs modaux.

Ceci n'est en général pas possible. Néanmoins, lorsque nous ne gardons qu'un seul mode souple, il suffit soit de changer les transformateurs modaux liés au mode souple, soit de changer la raideur  $K_1$  qui, cette fois-ci, est un réel.

Remarque :

L'étude d'un segment souple décomposé en plusieurs éléments se fera à l'aide des multiports de capacités résiduelles. La correction fera apparaître des multiports capacitifs, associés aux modes souples, couplés entre tous les éléments du segment.

I.1.3 - Remarques sur les formes modales

Dans une première partie, nous avons fait une analyse vibratoire d'un segment flexible avec plusieurs conditions aux limites possibles. Nous avons montré qu'il est possible de rendre aussi précis que l'on désire le calcul des modes propres d'un système donné.

Mais l'étude d'un segment flexible se situe aussi au niveau du calcul des formes modales ainsi qu'à l'établissement des matrices de transformation au niveau des sources (d'effort ou de flux) extérieures. Quelques remarques seront faites à ce sujet.

- Système non corrigé

Le bond-graph du système non corrigé est représenté sur la *Figure IV.1.15)* :



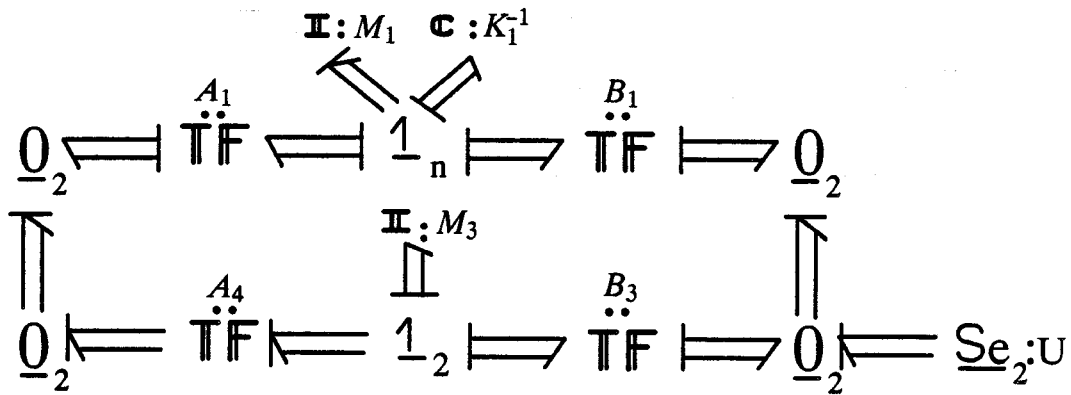


Figure IV.1.15 : Bond-graph réduit d'un segment souple avec des conditions aux limites homogènes.

$B_1$  et  $B_3$  sont calculées à partir des formes modales du système libre-libre et en fonction des conditions aux limites. Ces matrices dépendent du point choisi sur le segment souple. Ceci permet de retrouver les nouvelles formes modales en faisant varier ce point.

La matrice de masse équivalente  $M_{e,q}$  du système est :

$$(IV.1.66) \quad M_{e,q} = M_1 + A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1.$$

Le système d'équations différentielles du second degré est, en posant  $\dot{x}_1 = M_1^{-1} p_1$ ,

$$(IV.1.67) \quad M_{e,q} \ddot{x}_1 + K_1 x_1 = (A_5 A_8^{-1} B_3^t - B_1^t) u.$$

Une diagonalisation et une normalisation du système permet de diagonaliser les matrices de masse et de raideur.

Le nouveau système est :

$$(IV.1.68) \quad M_1 \ddot{x}_1 + K_1^* x_1 = P^t (A_5 A_8^{-1} B_3^t - B_1^t) u.$$

avec

$$\begin{cases} M_1 = P^t M_{e,q} P \\ K_1^* = P^t K_1 P \end{cases}$$

Les nouvelles formes modales sont définies par :

$$(IV.1.69) \quad g_{EL}(x_1) = \left[ P^t (A_5 A_8^{-1} B_3^t - B_1^t) \right] (x_1).$$

- Système corrigé au premier ordre

La prise en compte de la flexibilité des modes supérieurs se traduit par la modification de la matrice de raideur du système  $K_1$ .

Les transformateurs modaux associés à l'entrée restent identiques.

Si la correction est faite au premier ordre,  $(K_1^c)$  est symétrique. Il est alors possible de faire une diagonalisation sans changer les transformateurs modaux liés aux grands mouvements.

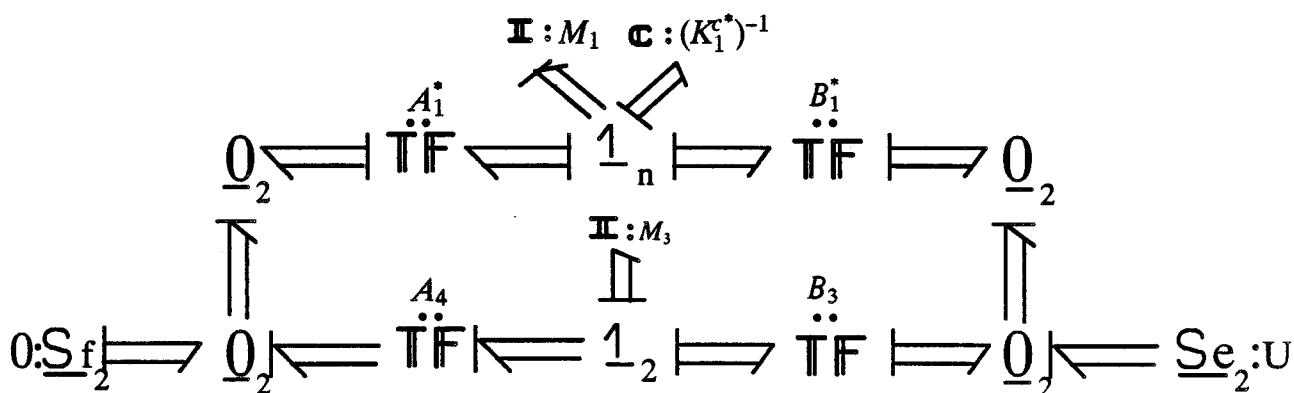


Figure IV.1.16 : Modification du multiport de raideur.

Nous obtenons :

$$(IV.1.70) \quad \begin{cases} M_1 = W^t M_1 W \\ K_1^{c*} = W^t K_1^c W \\ A_5^* = W^t A_5 \\ B_1^{t*} = W^t B_1^t \end{cases} \quad \text{avec} \quad A_1^* = -A_5^{*t}$$

Il est ainsi possible de définir un nouveau vecteur de formes modales en utilisant la même méthode que pour le système non corrigé.

Les nouvelles formes modales sont donc formées d'une combinaison linéaire des formes modales vérifiant les conditions aux limites libre-libre.

- Correction à un ordre supérieur

La matrice de raideur n'est plus diagonale. Nous n'obtenons pas un modèle physique.

## Conclusion

Nous avons adopté, dans cette partie, une formulation force-libre pour la modélisation d'un segment flexible, étant donné le caractère général de cette méthode. Différentes approches pour la réduction du modèle obtenu ainsi que pour la prise en compte des effets des modes négligés ont été présentées. Il apparaît que du point de vue fréquentiel, la nouvelle méthode dite méthode de correction permet d'obtenir la même précision que celle prenant en compte le multiport des capacités résiduelles. L'avantage de celle-ci est qu'elle n'introduit pas de modes élevés et que son application est très simple.

### I.2 - Méthode des éléments finis

#### I.2.1 - Modèle sans conditions aux limites

La méthode des éléments finis consiste à considérer le segment comme l'assemblage d'un nombre fini d'éléments de poutre à section constante.

Le concept de noeuds relatif à cette méthode permet de développer des procédures systématiques d'assemblage d'éléments de poutres, à section constante ou non, pour construire le modèle global approché du segment flexible.

La méthode des éléments finis est une méthode de discrétisation du Lagrangien  $L_T$  du segment flexible défini par la relation IV.1.71).

$$(IV.1.71) \quad L_T = \int_0^L \{ \rho S(x) [\dot{u}(x,t)]^2 - EI(x) [u''(x,t)]^2 \} dx$$

- L : longueur du segment
- $\rho$  : masse volumique du segment
- E : module d'Young du segment
- $S(x)$  : section du segment
- $I(x)$  : inertie de section du segment
- $u(x,t)$  : variable de déformation élastique

#### a) Modèle mathématique

La méthode des éléments finis consiste à discrétiser le Lagrangien de la relation IV.1.71) en deux étapes.  $L_T$  est d'abord exprimé comme la

somme des lagrangiens d'un nombre fini d'éléments de poutre uniforme dont l'assemblage constitue le segment flexible.

$$(IV.1.72) \quad L_T = \sum_{i=1}^n L_i .$$

Le Lagrangien  $L_i$  de l'élément  $i$  est ensuite calculé grâce à l'approximation de la variable de déformation  $u^i(x,t)$  par l'intermédiaire des fonctions d'interpolation  $g_j^i(x)$  relatives aux coordonnées généralisées  $u_j^i(x)$ ,  $j \in \{1,2,3,4\}$ . Ces dernières traduisent la flèche et la rotation de l'élément de poutre à ses deux extrémités  $x = 0$  et  $x = \ell_i$  et sont appelées "noeuds" de l'élément.

$$(IV.1.73) \quad u^i(x,t) = \sum_{j=1}^4 g_j^i(x) u_j^i(t).$$

Dans le cas où les fonctions d'interpolation  $g_j^i(x)$  correspondent aux fonctions d'interpolation cubique d'Hermite, *Meirovitch (1980)*, l'expression discrète du Lagrangien  $L_i$  est donnée par la relation IV.1.74).

$$(IV.1.74) \quad L_i = \frac{1}{2} (\dot{U}_i^t M_i \dot{U}_i - U_i^t K_i U_i)$$

avec  $U_i^t = [u_1^i(t), u_2^i(t), u_3^i(t), u_4^i(t)]$ .

L'expression des fonctions d'interpolation cubique d'Hermite est :

$$(IV.1.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1^i(x) = \frac{1}{\ell_i^3} [\ell_i^3 - 3\ell_i x^2 + 2x^3] \\ g_2^i(x) = \frac{1}{\ell_i^2} [\ell_i^2 x - 2\ell_i x^2 + x^3] \\ g_3^i(x) = \frac{1}{\ell_i^3} [3\ell_i x^2 - 2x^3] \\ g_4^i(x) = \frac{1}{\ell_i^2} [-\ell_i x^2 + x^3] \end{array} \right.$$

Les matrices  $M_i$  et  $K_i$  sont définies par les expressions suivantes :

$$(IV.1.76a) \quad M_i = \rho S \int_0^{\ell_i} G_i G_i^t dx$$

$$(IV.1.76b) \quad K_i = E^i I^i \int_0^{\ell_i} (G_i'') (G_i'')^t dx$$

avec  $G_i = [g_1^i(x), g_2^i(x), g_3^i(x), g_4^i(x)]^t$ .

Nous trouvons :

$$(IV.1.77a) \quad M_i = \frac{\rho S l_i}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_i & 54 & -13l_i \\ 22l_i & 4l_i^2 & 13l_i & -3l_i^2 \\ 54 & 13l_i & 156 & -22l_i \\ -13l_i & -3l_i^2 & -22l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix}$$

$$(IV.1.77b) \quad K_i = \frac{E I_i}{l_i^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_i & -12 & 6l_i \\ 6l_i & 4l_i^2 & -6l_i & 2l_i^2 \\ -12 & -6l_i & 12 & -6l_i \\ 6l_i & 2l_i^2 & -6l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix}$$

Les équations du mouvement relatives à l'élément  $i$  peuvent être obtenues à l'aide des équations de Lagrange et sont données par la relation :

$$(IV.1.78) \quad M_i \ddot{U}_i + K_i U_i = F_i.$$

$F_i$  est le vecteur des forces extérieures agissant sur les noeuds de l'élément  $i$ .

Il est possible de partitionner le vecteur  $U_i$  des noeuds en deux vecteurs  $U_i^0$  et  $U_i^{\ell i}$  comprenant respectivement les noeuds de l'élément  $i$ .

Avec ce partitionnement et en écrivant les équations IV.1.78) pour chaque élément  $i$ , nous obtenons :

$$(IV.1.79) \quad M_T \ddot{U} + K_T U = F$$

où  $U$  est composé de toutes les coordonnées généralisées définies précédemment.

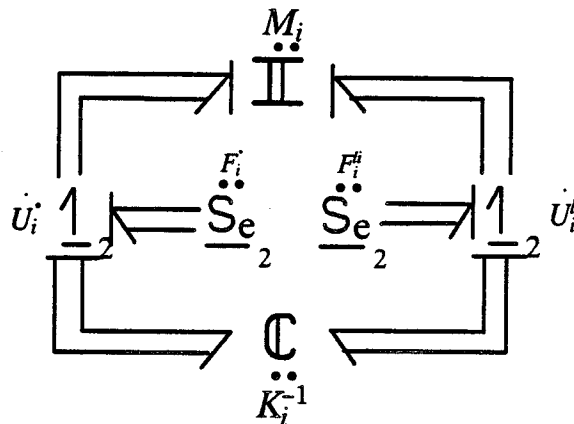
$M_T$  et  $K_T$  sont respectivement les matrices de masses et de flexibilité du segment complet.

$$(IV.1.80) \quad M_T = \left[ \begin{array}{c} [M_1] \\ [M_2] \\ [M_3] \\ \dots \\ [M_n] \end{array} \right] \quad K_T = \left[ \begin{array}{c} [K_1] \\ [K_2] \\ [K_3] \\ \dots \\ [K_n] \end{array} \right]$$

F est l'ensemble des forces extérieures agissant sur les noeuds du segment flexible.

b) Modèle bond-graph :

Le modèle en bond-graph de l'élément  $i$  relatif à la méthode des éléments finis est représenté par la *Figure IV.1.17*) :



*Figure IV.1.17* : Modèle pour bond-graph d'un élément  $i$  obtenu par la méthode des éléments finis.

L'indice 0, resp.  $l_i$ , indique que l'on se trouve à l'extrémité du segment  $i$  en  $x = 0$ , resp.  $x = l_i$ .

Le modèle bond-graph du segment flexible constitué de  $n$  éléments de poutre, est obtenu en assemblant les modèles bond-graph de ces éléments, *Figure IV.1.18*).

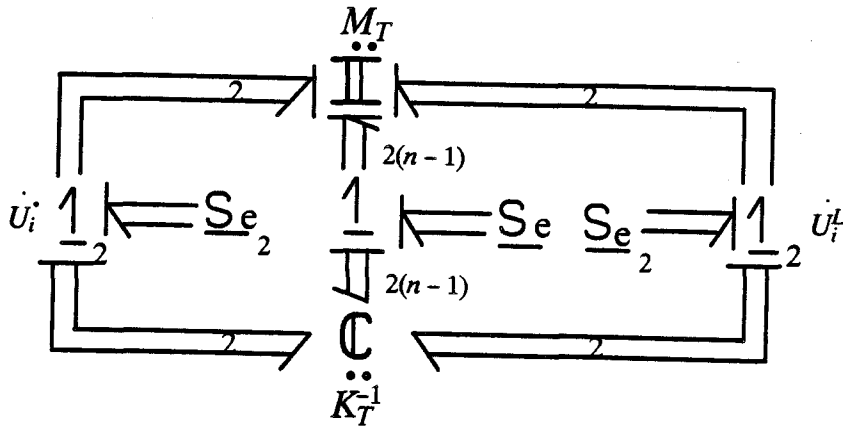


Figure IV.1.18 : Modèle bond-graph d'un segment flexible obtenu par la méthode des éléments finis.

Les matrices  $M_T$  et  $K_T$  sont données précédemment.

L'équation d'état associée au bond-graph de la Figure IV.1.18) est :

$$(IV.1.81) \quad \begin{cases} \dot{p} = -K_T g + F \\ \dot{g} = M_T^{-1} p \end{cases}$$

où  $p$  et  $g$  sont les vecteurs des impulsions généralisées (inertie I) et des déplacements généralisés (compliance C).

Cette méthode permet de trouver un modèle fini à un ordre quelconque.

Remarque :

Il est possible de faire la même étude par la méthode modale. Nous nous contenterons dans un premier temps des méthodes présentées précédemment.

### I.2.2 - Modèles avec conditions aux limites

#### - Conditions aux limites homogènes

Une condition aux limites de type géométrique, telle qu'un encastrement, se traduit simplement par des vitesses nulles aux noeuds considérés. Les variables généralisées  $U_i$  ont donc une valeur nulle. Ceci se traduit simplement par le retrait des lignes et colonnes des matrices  $K_T$  et  $M_T$  correspondant aux noeuds considérés.

### - Conditions aux limites non homogènes

Dans ce cas, il suffit d'ajouter les multiports, par exemple inertiels, aux noeuds où les contraintes sont effectives.

La méthode sera précisée sur des exemples.

#### I.2.3 - Réduction du modèle

La méthode des éléments finis est très simple d'utilisation. Mais le nombre de modes augmente très vite avec le nombre d'éléments retenus. De plus, seuls les premiers modes sont très bien approximés. Ceux, ayant les valeurs les plus élevées, sont en général beaucoup plus grands, en module, que les modes réels.

Nous proposons différentes méthodes pour éliminer ce problème, ceci pour différentes conditions aux limites.

##### I.2.3.1 - Conditions aux limites homogènes

###### a) Condensation de masse (Meirovitch, 1980)

En éléments finis, il existe une méthode appelée condensation de masse qui permet de réduire considérablement la dimension du système étudié.

Cette méthode utilise le fait que certaines forces inertielles associées à certains déplacements sont beaucoup plus petites que d'autres. En d'autres termes, l'influence de ces dernières dans le système global est faible.

Dans notre cas, il apparaît que la matrice de masse comporte des éléments d'ordre de grandeur très différents. Ceux associés aux rotations sont beaucoup plus faibles et donnent donc des modes propres élevés.

La condensation de masse consiste dans ce cas à séparer les variables généralisées en deux catégories : celles liées aux translations et celles liées aux rotations.



Nous noterons  $q_1$  et  $q_2$  les vecteurs contenant respectivement les variables de translation et de rotation.

Le système en régime non autonome s'écrit :

$$(IV.1.82) \quad \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u.$$

où  $M = (M_{ij})$  et  $K = (K_{ij})$  s'obtiennent à partir de  $M_T$  et  $K_T$ , et  $B_1$  et  $B_2$  traduisent les relations sur les jonctions 1, associées aux noeuds de vitesses où agissent des efforts extérieurs.

La méthode de condensation de masse ou réduction de Guyan, consiste à introduire le changement de variable :

$$(IV.1.83) \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = T \eta \quad \text{avec} \quad T^t = \begin{bmatrix} I_d & -K_{12}K_{22}^{-1} \end{bmatrix},$$

$\eta$  ayant la dimension du vecteur  $q_1$ .

Ce changement de variable équivaut à imposer une contrainte statique sur le système.

Les matrices de masse, de rigidité et de commande sont définies par :

$$(IV.1.84a) \quad M_c = \begin{bmatrix} I_d & -K_{12}K_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ -K_{22}^{-1}K_{21} \end{bmatrix}$$

$$(IV.1.84b) \quad K_c = \begin{bmatrix} I_d & -K_{12}K_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ -K_{22}^{-1}K_{21} \end{bmatrix}$$

$$(IV.1.84c) \quad B_c = \begin{bmatrix} I_d & -K_{12}K_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Le nouveau système est :

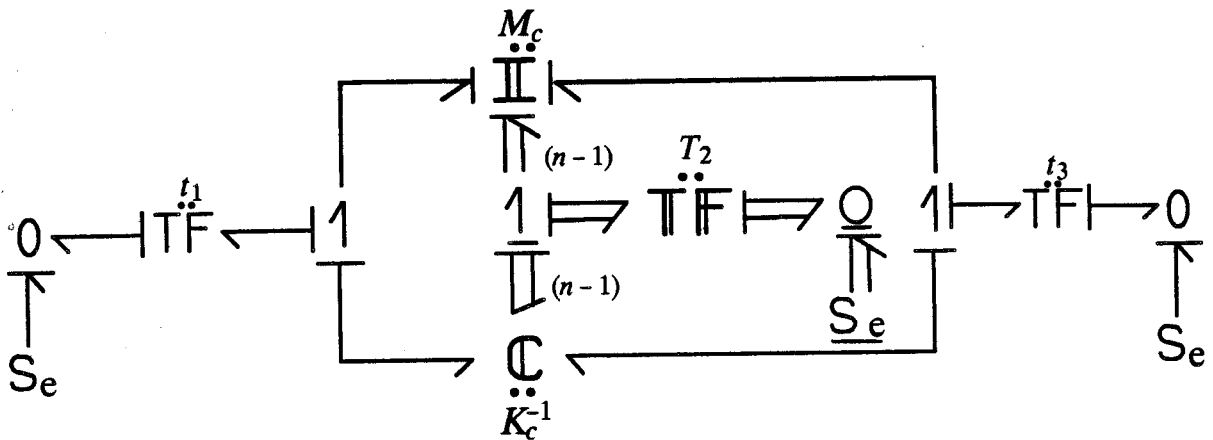
$$(IV.1.85) \quad M_c \ddot{\eta} + K_c \eta = B_c u$$

avec

$$\begin{cases} M_c = M_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}M_{21} - M_{12}K_{22}^{-1}K_{21} + K_{12}K_{22}^{-1}M_{22}K_{22}^{-1}K_{21} \\ K_c = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} \\ B_c = B_1 - K_{12}K_{22}^{-1}B_2 \end{cases}$$

Une meilleure approximation peut être obtenue en imposant une contrainte statique plus précise.

Le bond-graph obtenu à partir du système d'état condensé IV.1.85) est représenté sur la *Figure IV.1.19*).



*Figure IV.1.19 : Bond-graph d'un segment flexible après condensation de masse.*

Des transformations tiennent compte du changement de la matrice d'entrée B vérifiant désormais :

$$(IV.1.86) \quad B_c = B_1 - K_{12}K_{22}^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} t_1 \\ T_2^t \\ t_3 \end{bmatrix}$$

Cette notation est peu souhaitable car nous devons transformer le bond-graph. Une autre approche va nous donner les mêmes résultats numériques tout en conservant le sens physique du système initial.

#### b) Perturbations singulières

La méthode des perturbations singulières est proche de la méthode de condensation de masse car elle consiste à séparer les variables donnant les modes lents et celles donnant les modes rapides.

Nous pourrions l'utiliser directement sur l'équation IV.1.82) mais il paraît plus souhaitable de donner une interprétation sur le bond-graph.

Pour ceci, nous allons décomposer les matrices  $M_T$  et  $K_T$  de la même façon que dans l'équation IV.1.82) et ensuite trouver une formulation bloc-diagonale de ces matrices.

Une nouvelle représentation multiport est proposée.

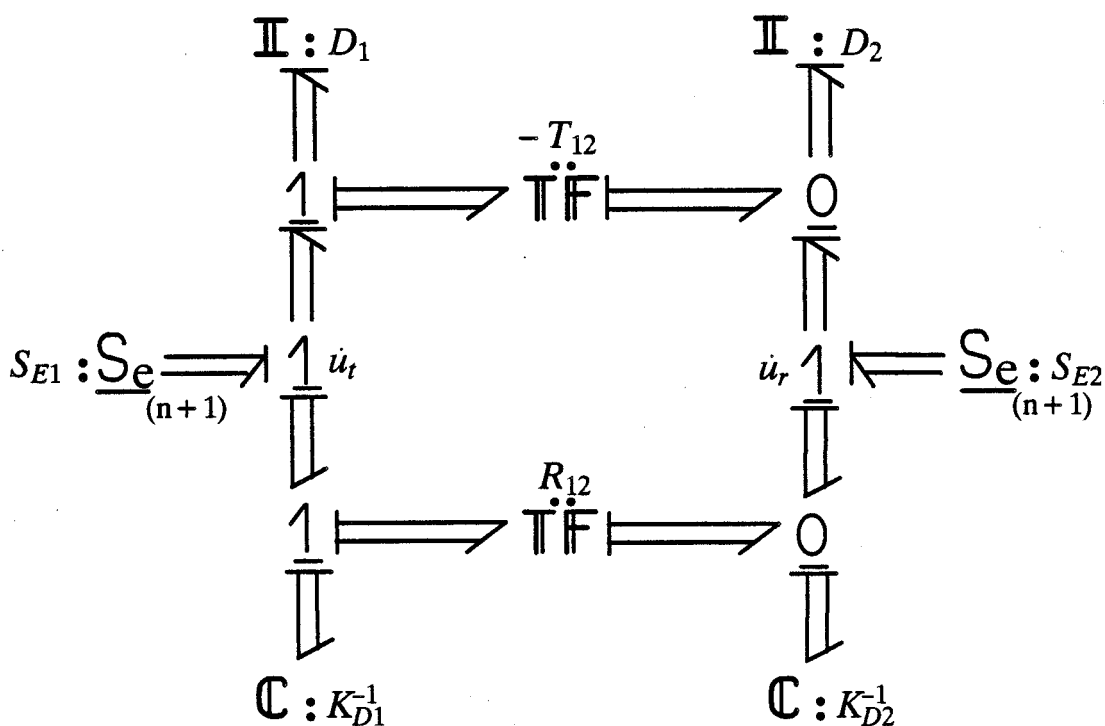


Figure IV.1.20 : Bond-graph d'un segment flexible avec séparation des vitesses de rotation et de translation.

$\dot{u}_t$  et  $\dot{u}_r$  sont respectivement les vecteurs vitesse de translation et de rotation.

Les matrices  $M$  et  $K$  sont bloc-diagonalisées de la manière suivante :

$$(IV.1.87a) \quad M^{-1} = T D^{-1} T^t$$

$$(IV.1.87b) \quad K = R^t K_D R$$

$$\text{avec : } R = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ R_{12} & I_d \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ T_{12} & I_d \end{bmatrix}$$

Nous trouvons ainsi les matrices  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $K_{D1}$  et  $K_{D2}$  en fonction de  $M$  et  $K$ .

$$(IV.1.88a) \begin{cases} D_1 = M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{21} \\ T_{12} = -M_{22}^{-1} M_{21} \\ D_2 = M_{22} \end{cases}$$

$$(IV.1.88b) \begin{cases} K_{D1} = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21} \\ K_{D2} = K_{22} \\ R_{12} = K_{22}^{-1} K_{21} \end{cases}$$

Nous associons les vecteurs état  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$  et  $q_2$  respectivement aux multiports de caractéristique  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $K_{D1}$  et  $K_{D2}$ .

L'équation d'état du système est :

$$(IV.1.89) \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{D1}^{-1} & -(T_{12} + R_{12})^t K_{D2} \\ 0 & 0 & 0 & -K_{D2} \\ D_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ (T_{12} + R_{12}) D_1^{-1} & D_2^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_d & T_{12}^t \\ 0 & I_d \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{E1} \\ S_{E2} \end{bmatrix}$$

Le système lent sans correction (*Figure IV.1.21*) est obtenu pour  $\dot{p}_2 = 0$ , c'est-à-dire en enlevant la jonction 0 liée à  $D_2$  sur le modèle bond-graph de la *Figure IV.1.20*). En régime autonome, la jonction 0 liée à  $K_{D2}$  est enlevée.

L'équation d'état s'obtient simplement soit à l'aide du bond-graph, soit à l'aide de l'équation d'état IV.1.89) en posant  $\dot{p}_2 = 0$ .

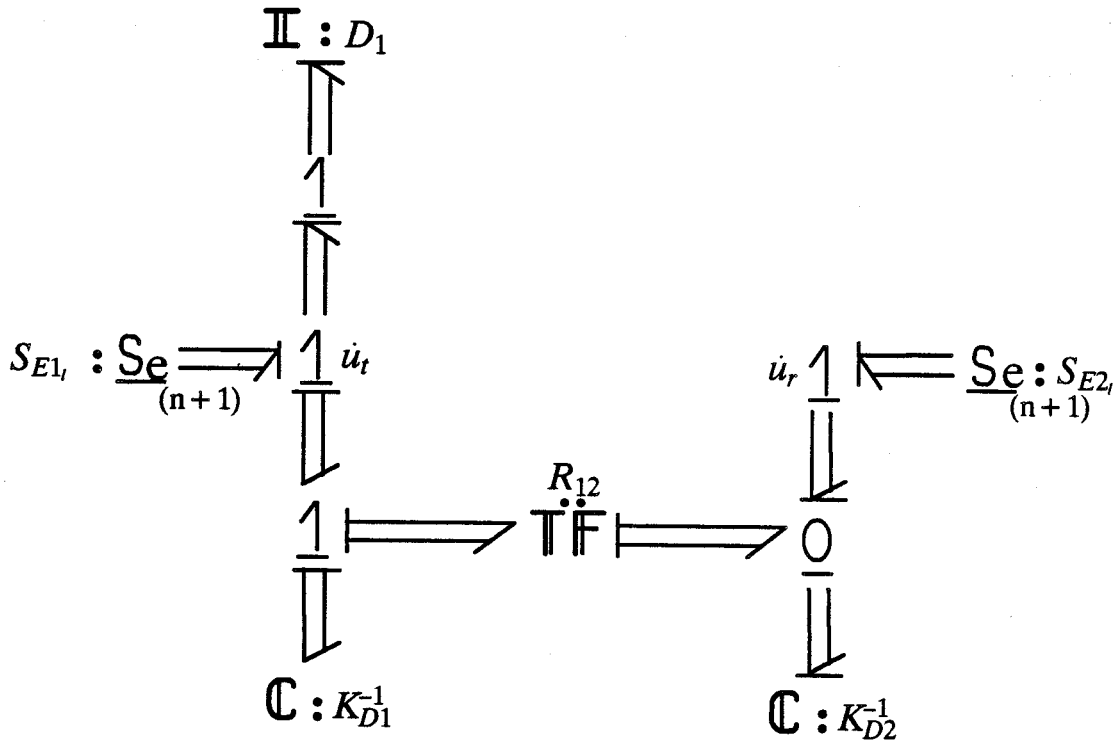


Figure IV.1.21 : Modèle bond-graph lent du segment flexible par la méthode des éléments finis.

$$(IV.1.90a) \begin{cases} \dot{p}_{1\ell} = -K_{D1} q_{1\ell} + [I_d \ -R_{12}^t][S_{E1\ell} \ S_{E2\ell}]^t \\ \dot{q}_{1\ell} = D_1^{-1} p_{1\ell} \end{cases}$$

$$(IV.1.90b) \ p_{2\ell} = -D_2^{-1} (T_{12} + R_{12}) D_1^{-1} p_{1\ell}.$$

### c) Système corrigé

A l'aide des méthodes de correction appliquées dans le cas présent pour des éléments inertiels d'ordres de grandeur différents, nous obtenons une matrice de masse corrigée  $D_1^c$ ,

$$(IV.1.91) \ D_1^c = D_1 + (R_{12} + T_{12})^t D_2 (R_{12} + T_{12})$$

Il apparaît que le modèle corrigé peut être représenté soit à l'aide du bond-graph réduit pour lequel  $D_1$  devient  $D_1^c$  soit à l'aide du bond-graph de la Figure IV.1.22).

L'équation d'état du système lent corrigé est :

$$(IV.1.92) \begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_{1\ell}^c = -[\mathbf{I}_d + (\mathbf{R}_{12} + \mathbf{T}_{12})^t \mathbf{D}_2 (\mathbf{R}_{12} + \mathbf{T}_{12}) \mathbf{D}_1^{-1}]^{-1} \mathbf{K}_{D1} \mathbf{q}_{1\ell}^c + [\mathbf{I}_d \quad -\mathbf{R}_{12}^t] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{E1\ell} \\ \mathbf{S}_{E2\ell} \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{q}}_{1\ell}^c = \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{p}_{1\ell} \end{cases}$$

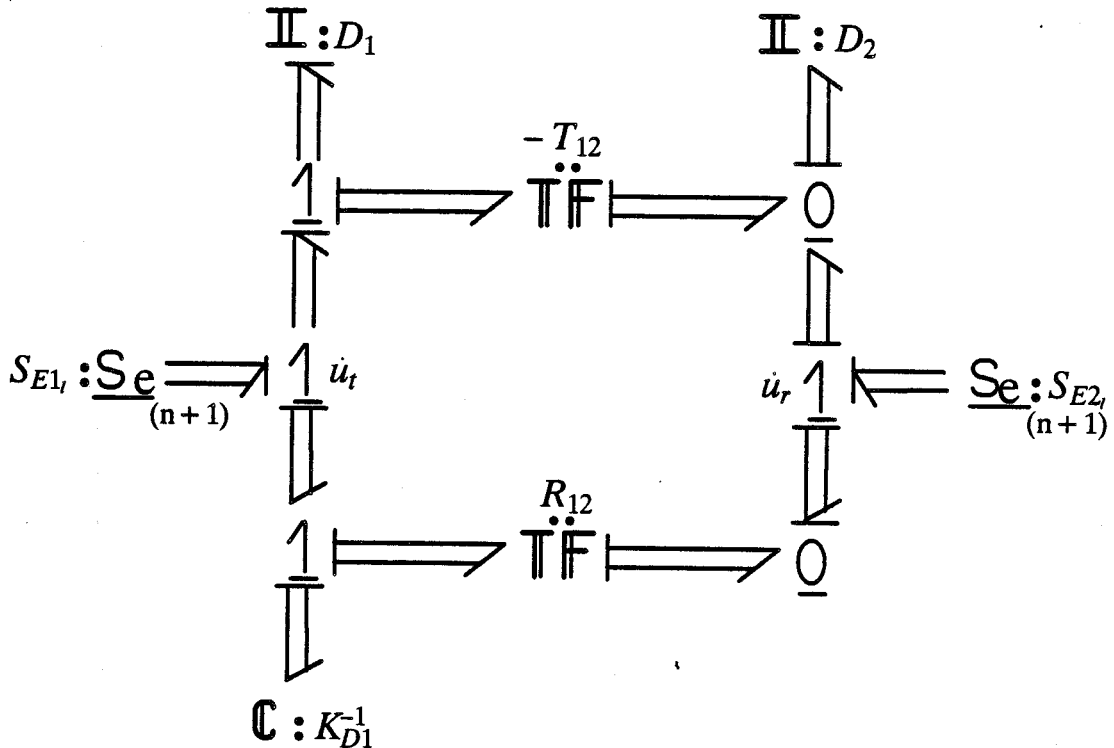


Figure IV.1.22 : Modèle bond-graph réduit corrigé du segment flexible

La matrice de flexibilité équivalente est  $\mathbf{K}_{D1}$ , soit :

$$(IV.1.93) \quad \mathbf{K}_{eq} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}.$$

La matrice de masse équivalente est :

$$(IV.1.94a) \quad \mathbf{M}_{eq} = \mathbf{D}_1 + (\mathbf{R}_{12} + \mathbf{T}_{12})^t \mathbf{D}_2 (\mathbf{R}_{12} + \mathbf{T}_{12}),$$

soit après calculs :

$$(IV.1.94b) \quad \mathbf{M}_{eq} = \mathbf{M}_{11} + \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{22} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}.$$

Nous retrouvons un résultat équivalent à la méthode de condensation de masse, avec cette fois-ci une interprétation directe sur le bond-graph du système global.

La correction à un ordre supérieur ne donne plus le même résultat que la méthode de condensation de masse. La matrice de masse équivalente obtenue n'est plus symétrique. Nous pouvons néanmoins obtenir un bond-graph équivalent en modifiant  $D_1$  du bond-graph réduit de la *Figure IV.1.21*) à l'aide de la nouvelle matrice  $D_1^{nc}$ .

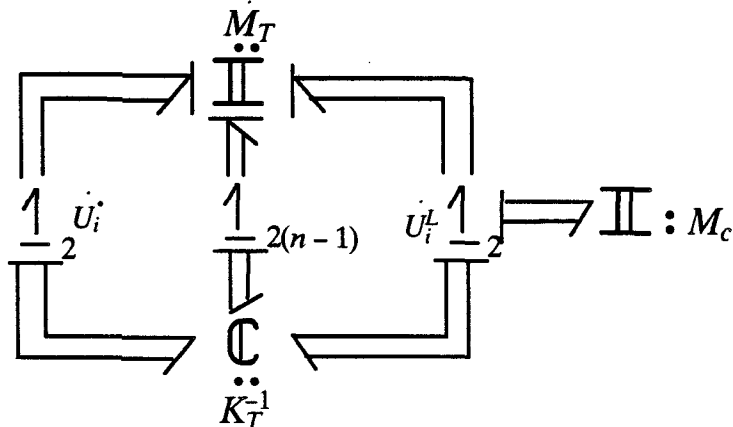
Cette nouvelle matrice s'obtient à l'aide des méthodes présentées dans le chapitre III.

Remarque : Ces trois méthodes permettent d'éliminer près de la moitié du nombre de modes du système. Seule la troisième permet d'avoir la même précision sur les modes lents pour le système réduit et le système initial en utilisant une correction précise. Les deux autres méthodes donnent néanmoins de très bons résultats car les modes obtenus sont nettement plus précis que ceux d'un système non réduit comportant le même nombre de modes. La méthode des perturbations singulières peut s'appliquer sur le bond-graph où la décomposition des multiports M et K est différente. Nous n'obtenons plus les mêmes corrections (Annexe IV.3).

#### I.2.3.2 - Conditions aux limites non homogènes

Nous nous plaçons dans le cas d'une charge inertielle sur une des deux extrémités.

Le bond-graph est représenté sur la *Figure IV.1.23*). Les contraintes homogènes sur l'extrémité  $x = 0$  n'ont pas été prises en compte.



*Figure IV.1.23* : Modèle bond-graph d'un segment flexible avec une masse sur une extrémité.

Le multiport I:M<sub>c</sub> est en causalité dérivée. Le calcul du multiport inertiel total M<sub>T</sub> se fait simplement en ajoutant I = M<sub>c</sub> à la matrice M<sub>T</sub> de la manière suivante :

$$(IV.1.95) \quad M_T^* = \begin{bmatrix} [M_1] & & & \\ & [M_2] & & \\ & & \dots & \\ & & & [M_n[M_c]] \end{bmatrix}$$

les M<sub>j</sub> étant les matrices de masse pour chaque élément du segment souple.

- Condensation de masse :

La méthode est exactement la même que pour le système avec des conditions aux limites homogènes. Les variables généralisées à l'extrémité seront gardées suivant les valeurs numériques de M<sub>T</sub>.

- Perturbations singulières :

Les mêmes remarques peuvent être faites.

Si M<sub>c</sub> a de faibles valeurs numériques par rapport à M<sub>n</sub>, seules les variables généralisées de translation seront gardées.

Si M<sub>c</sub> a de grandes valeurs numériques par rapport à M<sub>n</sub>, nous garderons en plus la variable généralisée de rotation à l'extrémité du segment.

- Système corrigé :

Des méthodes identiques à celles concernant les systèmes avec des contraintes aux limites homogènes sont appliquées, en tenant compte bien sûr du nouveau multiport M<sub>T</sub><sup>\*</sup>.

I.2.4 - Analyse des nouvelles fonctions d'interpolation

Pour un élément souple, nous avons utilisé les fonctions d'interpolation cubiques d'Hermite :

$$(IV.1.96) \quad G^i = [g_j^i]_{j=1, \dots, 4}^t$$



Les matrices de masse et de raideur sont définies par les relations :

$$(IV.1.97) \quad \begin{cases} M_i = \rho S \int_0^{\ell_i} G_i(\eta) G_i(\eta)^t d\eta \\ K_i = E I_z \int_0^{\ell_i} G_i''(\eta) [G_i''(\eta)]^t d\eta \end{cases}$$

Sachant que les fonctions d'interpolations sont définies sur le  $i^{\text{ème}}$  élément du segment souple, nous pouvons définir une fonction d'interpolation pour le segment souple en fonction de  $G_i$ .

$$(IV.1.98) \quad G = [g_1^1, g_2^1, g_3^1 + g_2^2, g_4^1 + g_2^2, \dots, g_3^{i-1} + g_1^i, g_4^{i-1} + g_2^i, \dots, g_3^n, g_4^n]^t.$$

Chacune des fonctions d'interpolation  $g_j^i$  est bien entendu nulle partout sauf sur l'élément  $i$ .

Nous faisons un regroupement dans  $G$  des termes  $g_j$  d'indice  $j$  impair correspondant aux noeuds de translation.

$$(IV.1.99a) \quad G = [g_1^1, g_3^1 + g_2^2, \dots, g_3^{i-1} + g_1^i, g_3^n, g_2^1, g_4^1 + g_2^2, \dots, g_4^{i-1} + g_2^i, \dots, g_4^n]^t.$$

$$(IV.1.99b) \quad G = [G_{\text{impair}}^t, G_{\text{pair}}^t]^t.$$

La nouvelle fonction d'interpolation du système corrigé avec la masse condensée sera :

$$(IV.1.100) \quad G_c = G_{\text{impair}} - K_{12} K_{22}^{-1} G_{\text{pair}}.$$

Nous pouvons facilement vérifier que :

$$(IV.1.101) \quad \begin{cases} M_{e_q} = \int_0^L G_c(\eta) [G_c(\eta)]^t d\eta \\ K_{e_q} = E I_z \int_0^L G_c''(\eta) [G_c''(\eta)]^t d\eta \end{cases}$$

où  $M_{e_q}$  et  $K_{e_q}$  sont respectivement les matrices de masse et de raideur condensées.

Une caractéristique de la méthode des éléments finis est qu'elle introduit en général de nombreuses variables dynamiques lors de la modélisation d'un système à paramètres distribués, ceci de façon à obtenir une bonne approximation des modes lents du système. Contrairement à la méthode d'analyse modale, il n'existe pas de méthode permettant de prendre en compte l'effet des modes élevés. Nous sommes donc obligés de choisir un modèle de dimension relativement grande. L'application des méthodes de réduction gardant la signification physique des variables, permet de diminuer d'au plus de moitié la dimension du système tout en gardant une précision semblable sur les modes lents du système. Une autre méthode de réduction modale consiste à calculer les modes du système et à redéfinir un modèle de petite dimension possédant les modes lents du système initial. Le désavantage de cette méthode est qu'elle nécessite des calculs numériques fastidieux et qu'elle ne conserve pas la signification physique des variables dynamiques.

### I.3 - Exemples

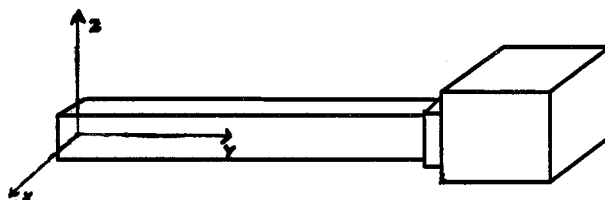
Nous étudions le comportement fréquentiel et temporel d'une poutre de Bernouilli-Euler pour différentes configurations.

Le premier exemple a pour objectif de montrer la précision des fréquences propres obtenues pour un modèle corrigé de poutre simple étudiée en flexion avec différentes conditions aux limites.

Le deuxième exemple montre comment trouver le modèle corrigé d'un système plus complexe.

#### I.3.1 - Exemple 1

Nous faisons l'étude d'un système dynamique composé d'un segment flexible, d'une pièce intermédiaire et d'une charge, *Figure IV.1.24*).



*Figure IV.1.24 : Schéma du système dynamique.*

Les caractéristiques sont rassemblées dans le *Tableau IV.1.4*) :

Segment	flexible	Pièce intermédiaire	Charge
Forme	rectangulaire		
Epaisseur	$e = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$		
Hauteur	$h = 60.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$		
Longueur	$L_{30} = 3.10 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$\ell = 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$L = 45 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
EI	$23.2 \text{ N m}^3$		
Masse	$M_{30} = 0.41 \text{ kg}$	$m = 0.45 \text{ kg}$	$M = 3 \text{ kg}$
$J_z$			$J_z = 180 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$

Tableau IV.1.4 : Caractéristiques numériques du système dynamique.

Le multiport de charge comprenant la pièce intermédiaire et la charge ramenées à l'extrémité du segment souple est :

$$(IV.1.102) \quad M_c = \begin{bmatrix} M+m & ML + m\ell \\ ML+m\ell & J_z + ML^2 + m\ell^2 \end{bmatrix}$$

Nous faisons les calculs pour 1 à 3 modes souples à l'aide de la méthode d'analyse modale dans la base de décomposition libre-libre. Quant à la méthode des éléments finis, elle est utilisée avec au plus 6 modes.

#### a) Calcul des différentes fréquences propres

Les différents résultats pour les configurations, encastré-libre, appuyé-appuyé et encastré-charge sont assemblés dans les Tableaux IV.1.5, IV.1.6 et IV.1.7.

Les valeurs dans les tableaux sont normalisées par rapport au

$$\text{terme } F_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_z E}{\rho S L^4}}$$

Nous pouvons faire deux constatations.

Les résultats obtenus par la méthode d'analyse modale pour lesquels les modèles tiennent compte d'une correction à l'ordre 1 sont très satisfaisants (l'avantage est que le multiport capacitif corrigé est symétrique). Les corrections à des ordres supérieurs donnent bien entendu le même résultat que le modèle avec le multiport des capacités résiduelles en ce qui concerne les modes lents. Nous ne les avons pas notés car le modèle associé n'est plus un modèle physique. L'avantage est que les modes d'ordre élevé, qui sont bien entendu très erronés, sont éliminés.

La méthode de condensation, dans la méthode des éléments finis, qui correspond à une correction d'ordre 1, donne aussi de très bons résultats.

Il est à remarquer que pour des conditions aux limites encastré-charge, la méthode de condensation de masse, en éléments finis, sera différente suivant l'ordre de grandeur de la charge par rapport à celui du segment souple.

		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	
	Nb. de modes retenus	3,52	22,03	61,7	121	199,9	
A.M	1	Ss. cap. résid.	5,61				
		Avec cap. rés.	3,52	22,39	108,29		
		Avec correction	3,52				
	2	Ss. cap. résid.	4,69	32,16			
		Avec cap. rés.	3,52	22,32	61,25	214,57	
		Avec correction	3,52	24,05			
	3	Ss. cap. résid.	4,32	28,65	81,87		
		Avec cap. rés.	3,52	22,30	61,15	118,96	344,39
		Avec correction	3,52	22,77	68,19		
E.F	2	Sans correction	3,53	34,81			
		Condensation	3,57				
	4	Sans correction	3,52	22,22	75,16	218,14	
		Condensation	3,52	22,28			
	6	Sans correction	3,52	22,11	62,47	140,67	264,74
		Condensation	3,52	22,24	62,67		

Tableau IV.1.5 : Modes propres du segment souple pour des conditions aux limites encastré-libre.

b) Analyse des formes d'ondes

Les méthodes présentées précédemment améliorent considérablement la précision des modes propres d'un système à paramètres distribués, ceci pour l'ensemble des modes (même les plus élevés), quelles que soient les conditions aux limites imposées.

Une analyse succincte des formes d'onde, pour la méthode d'analyse modale est présentée.

		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	
	Nb. de modes retenus	9,87	39,48	88,87	158,17	247,71	
A.M	1	Ss. cap. résid.	10,0				
		Avec cap. rés.	9,87	50,20	122,51		
		Avec correction	9,87				
	2	Ss. cap. résid.	10,01	40,37			
		Avec cap. rés.	9,87	39,50	122,51	229,49	
		Avec correction	9,87	39,53			
	3	Ss. cap. résid.	9,90	40,37	91,11		
		Avec cap. rés.	9,87	39,50	88,98	229,49	371,62
		Avec correction	9,87	39,53	89,10		
E.F	2	Sans correction	10,95	50,20			
		Condensation	10,95	50,20			
	4	Sans correction	9,91	43,82	110,14	200,79	
		Condensation	9,94				
	6	Sans correction	9,88	39,95	98,59	183,32	328,01
		Condensation	9,88	40,74			

Tableau IV.1.6 : Modes propres du segment souple pour des conditions aux limites appuyé-appuyé

		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	
	Nb. de modes retenus						
	Modes réels →	0,464	7,72	26,83	64,44	115,04	
A.M	1	Ss. cap. résid.	0,597				
		Avec cap. rés.	0,464	7,75	27,07	97,35	165,88
		Avec correction	0,464				
	2	Ss. cap. résid.	0,567	10,70			
		Avec cap. rés.	0,464	7,72	27,00	68,85	164,38
		Avec correction	0,464	7,77			
	3	Ss. cap. résid.	0,524	10,70	41,11		
		Avec cap. rés.	0,464	7,72	26,85	64,80	115,33
		Avec correction	0,464	7,73	27,83		
E.F	2	Sans correction	0,464	7,86			
		Condensation	0,467	7,86			
	4	Sans correction	0,464	7,73	26,68	85,02	
		Condensation	0,464	7,73	26,71		
	6	Sans correction	0,464	7,72	26,42	65,63	148,56
		Condensation	0,464	7,72	26,50	65,97	

Tableau IV.1.7 : Modes propres du segment souple pour des conditions aux limites encastéré-charge.

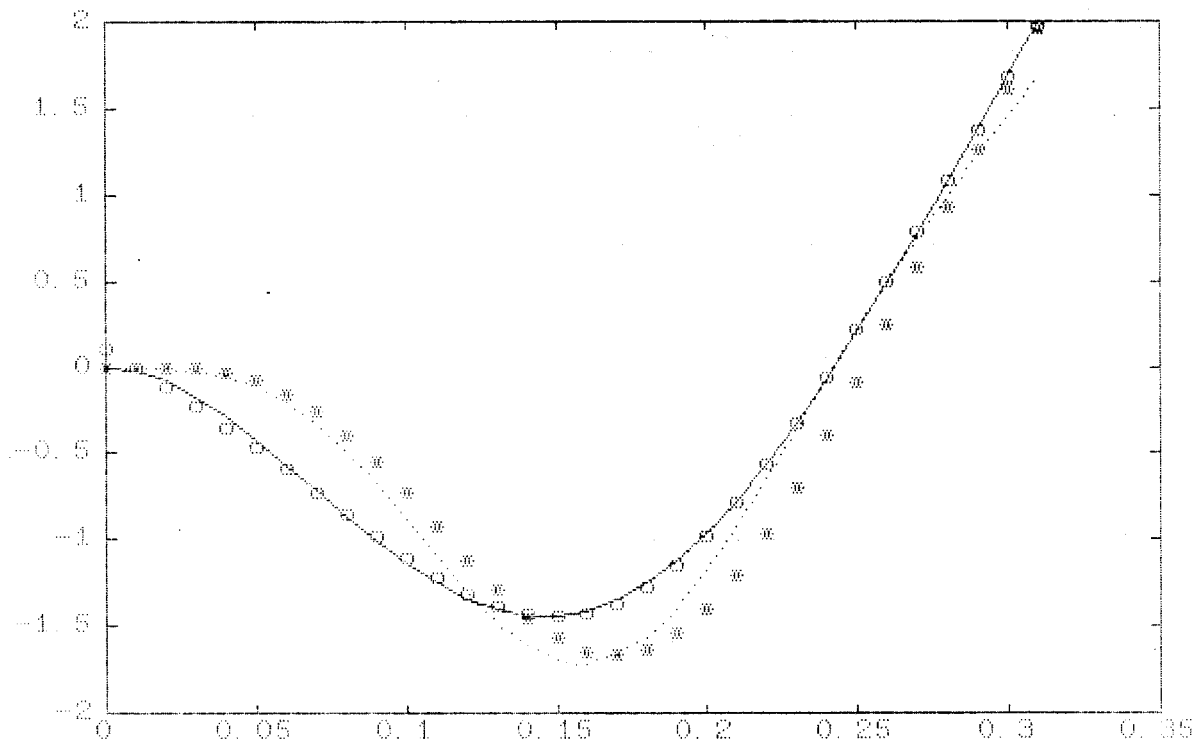
Nous comparons les formes d'ondes réelles FEL et FAA des modèles obtenus à l'aide des décompositions dans respectivement les bases encastéré-libre et appuyé-appuyé, les formes d'ondes FELL et FAAL des modèles obtenus par manipulations causales sur les modèles déduits d'une décomposition dans la base libre-libre, les formes d'ondes FLLCR FAALCR des modèles déduits des précédents par ajout des multiports des capacités résiduelles et enfin les formes d'ondes FELLC et FAALC des modèles déduits de FELL et FAAL en modifiant simplement la raideur du système par les méthodes de correction présentées précédemment.

Le mode de représentation de chacune des courbes est précisé dans le *Tableau IV.1.8*) :

Courbes		Représentation
FEL	FAA	—
FELL	FAAL	*
FELLCR	FAALCR	o
FELLC	FAALC	.....

*Tableau IV.1.8 - Mode de représentation des différentes formes d'onde.*

Les *Figures IV.1.25a*) et *IV.1.25b*) représentent respectivement les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> formes d'ondes du segment flexible de la *Figure IV.1.24*) ayant les conditions aux limites encastré-libre et les *Figures IV.1.26a*) et *IV.1.26b*) les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> formes d'ondes du système ayant les conditions aux limites appuyé-appuyé.



*Figure IV.1.25a*) : 2<sup>ème</sup> forme modale du segment flexible avec les conditions aux limites encastré-libre.

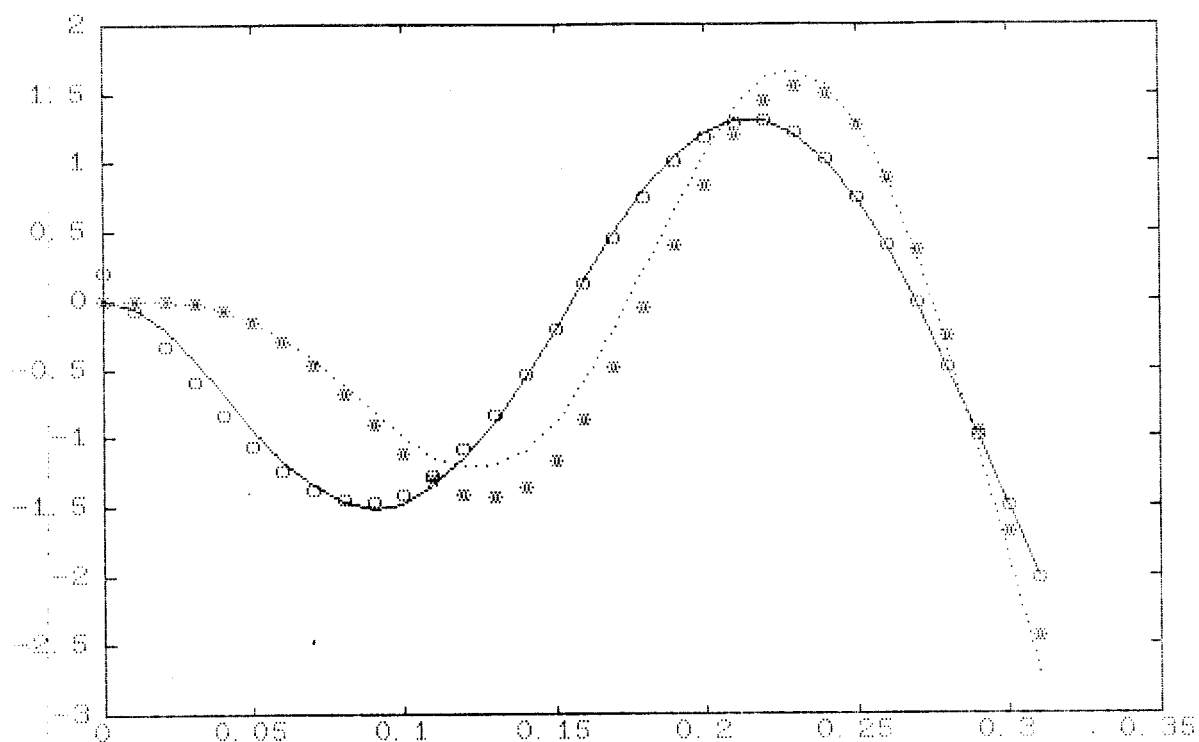


Figure IV.1.25b) : 3<sup>ème</sup> forme modale du segment flexible avec les conditions aux limites encasturé-libre.

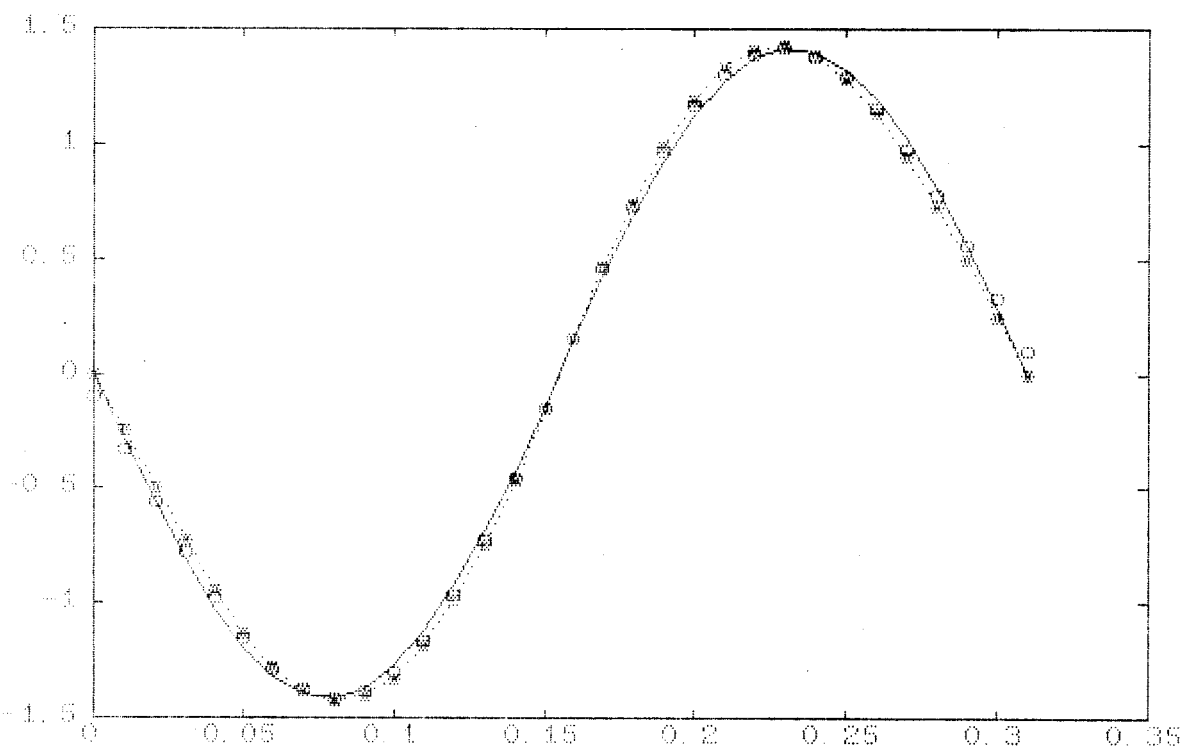


Figure IV.1.26a) : 2<sup>ème</sup> forme modale du segment flexible avec les conditions aux limites appuyé-appuyé.



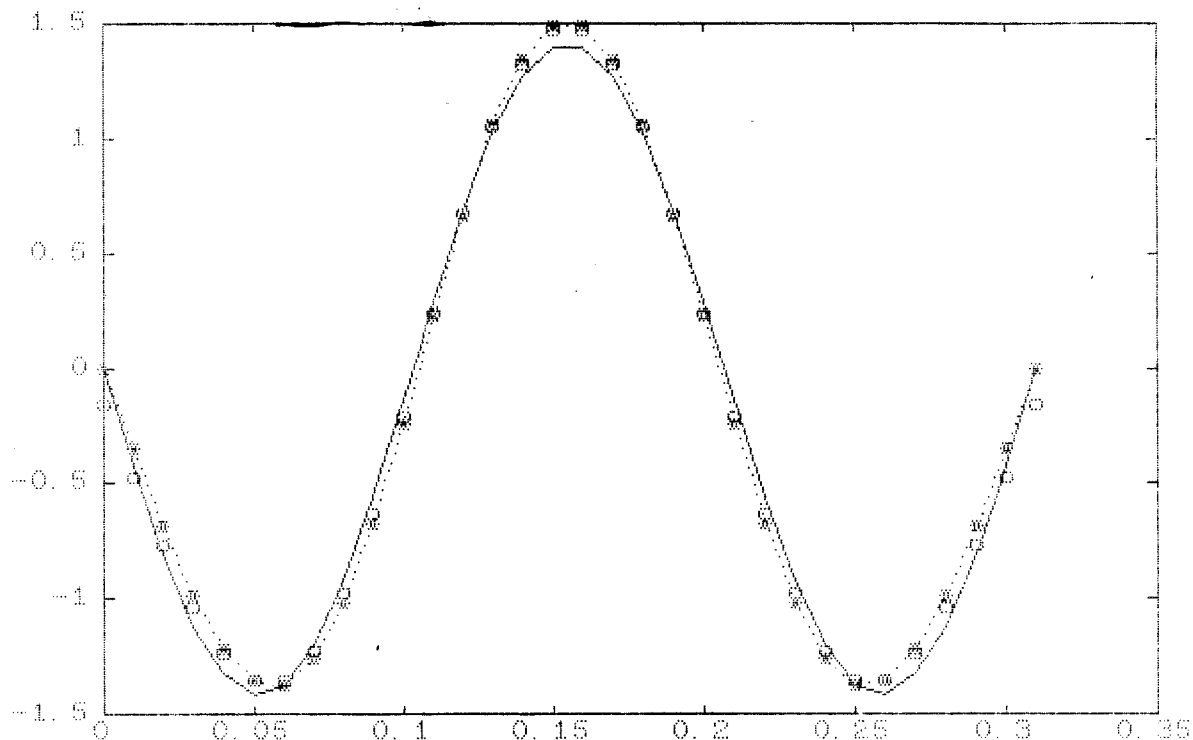


Figure IV.1.26b) : 3<sup>ème</sup> forme modale du segment flexible avec les conditions aux limites appuyé-appuyé.

La première remarque est que les formes d'ondes FELLCR et FAALCR sont très proches respectivement des formes d'ondes FEL et FAA. Ceci est dû au multiport des capacités résiduelles qui améliore non seulement la précision des modes propres mais aussi celle des formes d'onde. Néanmoins, un inconvénient important est que les conditions aux limites ne sont plus respectées.

Les autres modèles donnent des formes d'onde assez proches des formes d'ondes réelles et ont l'avantage de conserver les conditions aux limites réelles. Il n'y a pas de différence notable entre les formes d'ondes FELL et FAAL et les formes d'onde FELLC et FAALC. La correction de la flexibilité du modèle réduit n'a donc pas une influence concluante sur l'amélioration de la précision des formes d'ondes.

### I.3.2 - Exemple 2

Le système dynamique étudié comprend un segment de type Bernoulli-Euler ayant des conditions aux limites de type encastré-libre et un oscillateur composé d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur. Une source d'effort (échelon) est appliquée sur le segment souple (Figure IV.1.27).

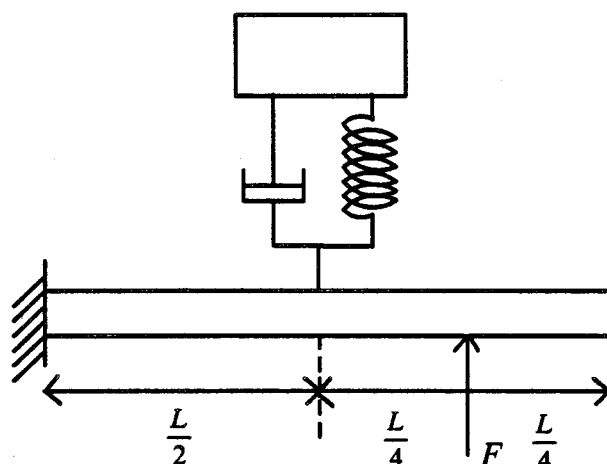


Figure IV.1.27 : Schéma du système mécanique avec segment flexible et oscillateur.

Les caractéristiques mathématiques du modèle sont rassemblées dans le Tableau IV.1.8).

Segment flexible		Oscillateur	
Forme	rectangulaire	masse	$m = 0,5 \text{ kg}$
Epaisseur	0,01 m	raideur	$k = 1.10^4 \text{ N m}^{-1}$
Hauteur	0,01 m	amortissement	$0,5 \sqrt{2} \text{ km}$
Longueur	1 m		
Masse	0,785 kg		

Tableau IV.1.8 : Caractéristiques numériques du système mécanique.

Le segment flexible peut être modélisé de différentes manières. Nous choisissons le modèle obtenu par analyse modale avec une décomposition dans la base encastree libre.

Le modèle complet contient une infinité de modes. Nous supposons que le modèle de poutre avec 4 modes fournit une bonne approximation pour le système complet. Ceci est vrai tant que le mode propre de l'oscillateur est voisin ou plus faible que les premiers modes propres du segment souple.

Le modèle bond-graph est représenté sur la Figure IV.1.28).

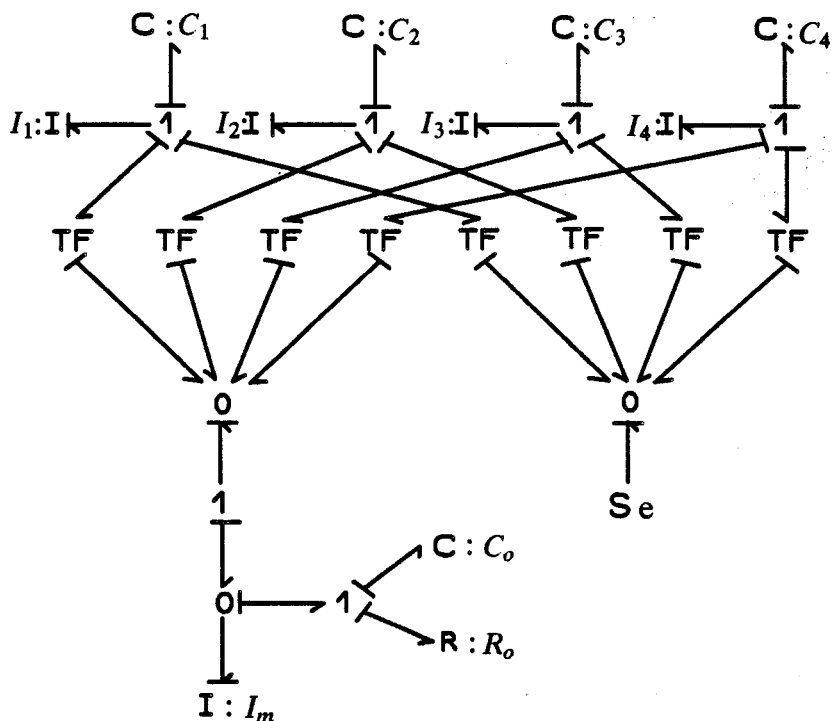


Figure IV.1.28 : Modèle bond-graph du système mécanique.

Les différents paramètres du modèle bond-graph sont calculés à l'aide des méthodes présentées dans le début du chapitre.

Une première méthode de réduction consiste à utiliser celle dite de double réduction modale *Margolis et Tabrizi (1984)*. Nous n'utilisons pas cette méthode car le bond-graph obtenu contient des variables dynamiques n'ayant plus une interprétation directe sur le système, même si elles gardent une signification physique.

Une autre méthode de réduction consiste à ne garder qu'un seul mode propre associé au segment flexible. Elle ne convient pas car les modes du système obtenu sont très mal approximés. Néanmoins, à l'aide d'une correction apportée sur le modèle réduit, nous approximons très bien les modes réels du système.

Le bond-graph du système réduit corrigé est représenté sur la *Figure IV.1.29* :

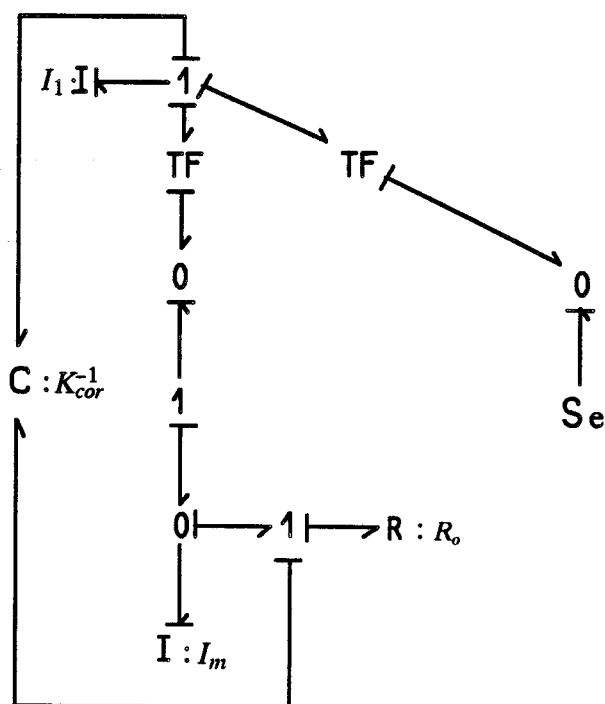


Figure IV.1.29 : Modèle bond-graph réduit corrigé du système mécanique.

Le modèle lent corrigé est obtenu à l'aide du modèle lent pour lequel la matrice de raideur est modifiée et tient compte de la raideur des modes supérieurs. Nous ne développons pas les calculs.

Nous comparons les valeurs propres des matrices d'état obtenues pour différents modèles et différentes valeurs du coefficient d'amortissement au niveau de l'oscillateur (tableau IV.1.9).

Un modèle dont la réponse est formée d'une partie oscillatoire avec des fréquences élevées ajoutée à un comportement dynamique lent est en général réduit au système lent (Chow, Allemeng, Kokotovic). Si la partie oscillatoire est peu amortie, la réduction se fait sans tenir compte de l'amortissement car les valeurs propres ont des parties réelles très faibles par rapport aux parties imaginaires.

Etant donné le faible amortissement du système étudié, en ce qui concerne la partie oscillatoire rapide, nous appliquons les méthodes de correction sans tenir compte de cet amortissement, c'est-à-dire uniquement sur les matrices de raideur. C'est pourquoi, pour  $b \neq 0$ , nous obtenons, pour les modèles corrigés, des modes propres pouvant être inférieurs aux modes réels.

	Modèle	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
b=0	EL	45,39	143,3	373,9	921,2	1812,5
	EL réduit	45,56	162,95			
	EL réduit cor.	45,40	146,4			
	LL + cap. rés.	45,64	144,4	376,6	1617,2	
	LL sans cap.rés.	78,68	150,5			
	LL réduit cor.	46,36	145,1			
b=50	EL	45,43	152,9	352,0	921,2	1803,0
	EL réduit	45,59	162,8			
	EL réduit cor.	45,46	146,2			
	LL + cap. rés.	45,67	153,7	353,7	1616,7	
	LL sans cap.rés.	79,00	149,9			
	LL réduit cor.	47,28	142,3			

Tableau IV.1.9 : Comparaison des modes propres du système dynamique pour différents modèles.

Les vitesses de la masse de l'oscillateur et du segment souple au niveau de l'action de la force d'entrée sont représentées respectivement sur les Figures IV.1.30) et IV.1.31).

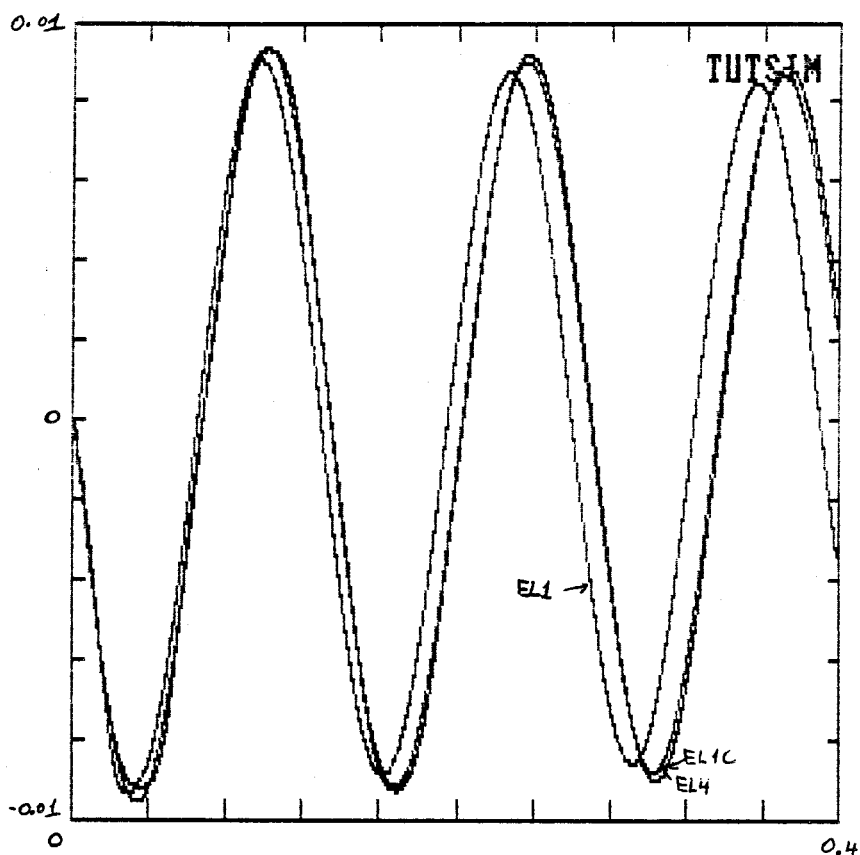


Figure IV.1.30 : Vitesse de la masse de l'oscillateur pour différents modèles.

Le modèle pour lequel le segment souple comporte 4 modes souples est noté EL4, celui avec un mode souple EL1 et celui pour lequel la flexibilité est modifiée est noté EL1C.

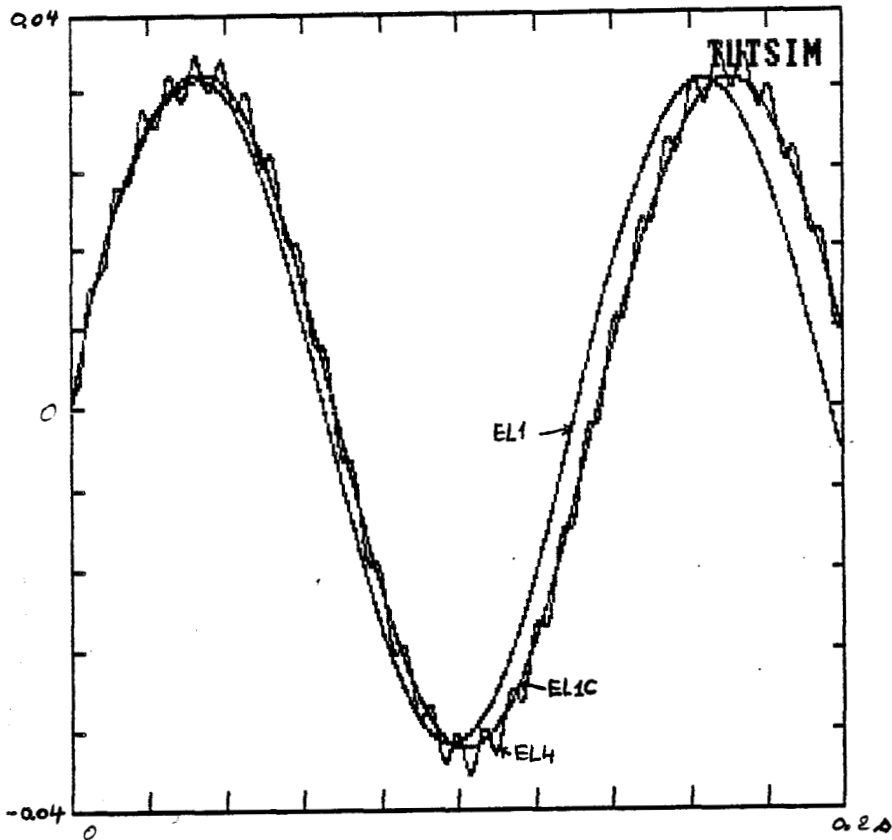


Figure IV.1.31 : Vitesse du segment flexible au niveau de l'application de la force.

Il apparaît clairement que le modèle EL1 approxime très mal EL4 alors que EL1C approxime très bien EL4 en lissant les courbes, c'est-à-dire en enlevant les effets des modes rapides.

Les méthodes de corrections appliquées aux deux exemples donnent de bonnes approximations aussi bien du point de vue fréquentiel que temporel. Elles ne sont pas générales car elles ne sont valables que pour des systèmes linéaires très peu amortis.

#### CONCLUSION

Une application des méthodes dites de correction a été faite sur des modèles de systèmes dynamiques à paramètres distribués, plus particulièrement sur des modèles de segments souples. Cette méthode est assez restreinte car elle suppose que le système étudié soit linéaire et très peu

amorti. Néanmoins, elle a l'avantage de conserver dans le modèle final un certain nombre de variables dynamiques du système initial contrairement à la méthode de double réduction modale. De plus, elle n'introduit pas de fréquences élevées et ne modifie pas les propriétés du système, telles que la structure du système ou les conditions aux limites, contrairement à la méthode qui consiste à ajouter un multiport capacitif dit de "capacités résiduelles".

La méthode de correction conserve donc les propriétés essentielles du système global tout en l'approximant de manière satisfaisante.

## II - MODELES DE SYSTEMES POLYARTICULES FLEXIBLES EN MOUVEMENT PLAN

Une procédure systématique de modélisation en bond-graph des systèmes mécaniques polyarticulés à segments flexibles a été largement développée par *Yazman (1988)*, *Servettaz (1989)* et *Maschke (1990)*. C'est une extension de celle proposée par *Bos (1986)* et *Tiernego (1982)* pour les systèmes à segments rigides.

Nous nous proposons de rappeler succinctement cette procédure pour les systèmes plans en énonçant les hypothèses relatives aux petits déplacements.

Les différents choix des champs de déplacement et des conditions aux limites donnent tous un modèle de la même structure mais avec un ensemble de paramètres différents. Nous proposons une étude comparative entre les différents modèles. Nous appliquons la méthode des perturbations singulières et la méthode de correction présentées précédemment sur les modèles de segments flexibles sans contraintes externes pour les différents choix des champs de déplacement. L'exemple d'un robot expérimental validera nos résultats.

Le modèle bond-graph d'un robot plan à deux segments souples servira d'exemple pour l'application de la méthode des perturbations singulières en vue d'un découplage.

## II.1 - Présentation des modèles cinématique et dynamique d'un segment flexible

Une étude cinématique succincte est présentée dans l'annexe 4, ainsi que les hypothèses faites sur les déformations.

Avec l'approche des modes non contraints, les multiports sont calculés à l'aide de la méthode des modes supposés (analyse modale) avec des conditions aux limites libre-libre. Il n'y a pas de termes de couplage entre les mouvements rigides de l'élément et les déformations élastiques.

Nous observerons Yazman *et al.* (1989) que la méthode des éléments finis ainsi que celles des modes supposés avec l'approche des modes contraints ou non contraints donnent des modèles en bond-graph de la même classe, c'est-à-dire des modèles ayant la même structure, mais des ensembles de paramètres différents.

Le bond-graph est représenté sur la Figure IV.2.1).

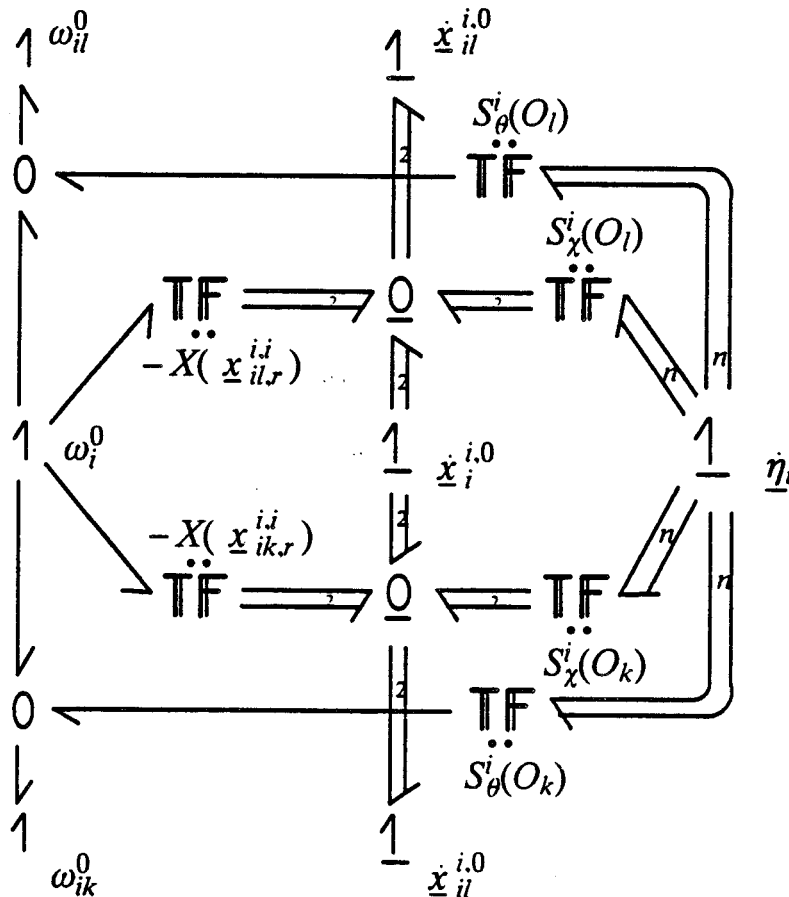


Figure IV.2.1 - Modèle bond-graph cinématique d'un segment flexible



L'association des petits et grands déplacements d'un segment flexible n'est pas une tâche simple à réaliser. Comme énoncé dans l'annexe 4, quelques hypothèses simplificatrices doivent être faites pour obtenir un modèle relativement simple. *Figure IV.2.1*).

Ce modèle garde la même structure avec les méthodes des modes supposés et des éléments finis pour l'approche modes contraints ou modes non contraints.

Il est en général difficile de connaître les contraintes aux extrémités d'un segment flexible, par exemple que peut-on dire pour un moteur exerçant un couple à l'extrémité du segment ? C'est pourquoi, différentes hypothèses de conditions aux limites doivent être faites et nous devons essayer de trouver celles correspondant le plus à la réalité.

Nous explicitons la structure de jonction ainsi que les multiports de puissance pour un segment flexible en mouvement plan. Les transformateurs, de matrice caractéristique non linéaire, qui correspondent aux transformations de repères liés aux grands mouvements ne sont pas spécifiés.

Dans un premier temps, nous utilisons la méthode des modes supposés et dans un deuxième temps, la méthode des éléments finis. Différentes conditions aux limites seront prises. Une discussion sur l'ajout du multiport des capacités résiduelles sera faite.

## II.2 - Calcul des différents multiports pour différents champs de déplacement

### II.2.1 - Expression formelle des champs de déplacement

Le vecteur des petits déplacements est défini par :

$$(IV.2.1) \quad u_i(\xi, t) = \sum_{i=1}^n g_i(\xi) q(t)$$

Nous choisissons la variable  $\xi$  de façon à ne pas confondre avec les variables de déplacement en grands mouvements  $x$  et  $y$ .

$$(IV.2.2) \quad X \begin{pmatrix} X_p^i \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \xi - \frac{L}{2} \end{bmatrix}^t$$

$$(IV.2.3) \quad S_X^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1(\xi) & g_2(\xi) & \dots & g_n(\xi) \end{bmatrix}$$

$$(IV.2.4) \quad S_\theta^i = \begin{bmatrix} g_1'(\xi) & \dots & g_n'(\xi) \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } g_1'(\xi) = \frac{d g_1(\xi)}{d(\xi)}$$

$g$  est le vecteur des formes modales correspondant au choix du champ de déplacement.

### II.2.2 - Analyse modale

#### - Conditions aux limites "force-libre"

Pour ce cas particulier, les différents multiports sont bloc-diagonaux. Il n'y a pas de couplage entre les grands et petits mouvements. Nous obtenons le modèle bond-graph de la figure IV.2.2). Les différentes matrices de masse ( $M_{\theta\theta}, M_{XX}, M_{\eta\eta}$ ), de raideur  $K_{\eta\eta}$  et de transformateurs modaux s'obtiennent en ne considérant que les petits mouvements. Ces calculs sont présentés dans la première partie de ce chapitre.

#### - Conditions aux limites encastré-libre et appuyé-appuyé

Nous appelons  $M^*$ , respectivement  $K^*$ , les matrices de masse et de raideur du système complet.

Le calcul des différentes matrices est présenté dans l'annexe 5. Lorsque les matrices  $M^*$ ,  $K^*$ , TF1 (transformateurs modaux en  $\xi = 0$ ) et TF2 (transformateurs modaux en  $\xi = L$ ) sont calculées, il reste à normaliser la matrice de masse pour obtenir un modèle mathématique pouvant se représenter par le modèle bond-graph de la figure IV.2.2). Mais avant cette procédure, il est bien entendu nécessaire de procéder à une troncature modale, à l'ordre  $n$ .

Nous présentons succinctement la procédure.

Procédure de normalisation

- Calcul des valeurs propres et vecteurs propres de  $M^{*-1}K^*$ .  $V$  est la matrice des vecteurs propres
- Diagonalisation de la matrice  $M^*$  qui devient  $V^t M^* V$  (matrice diagonale)
- Permutation et normalisation de  $M^*$  qui devient  $W^t M^* W = M_d$

$M_d$  est la matrice de masse obtenue lorsque l'on utilise la base de décomposition force-libre.

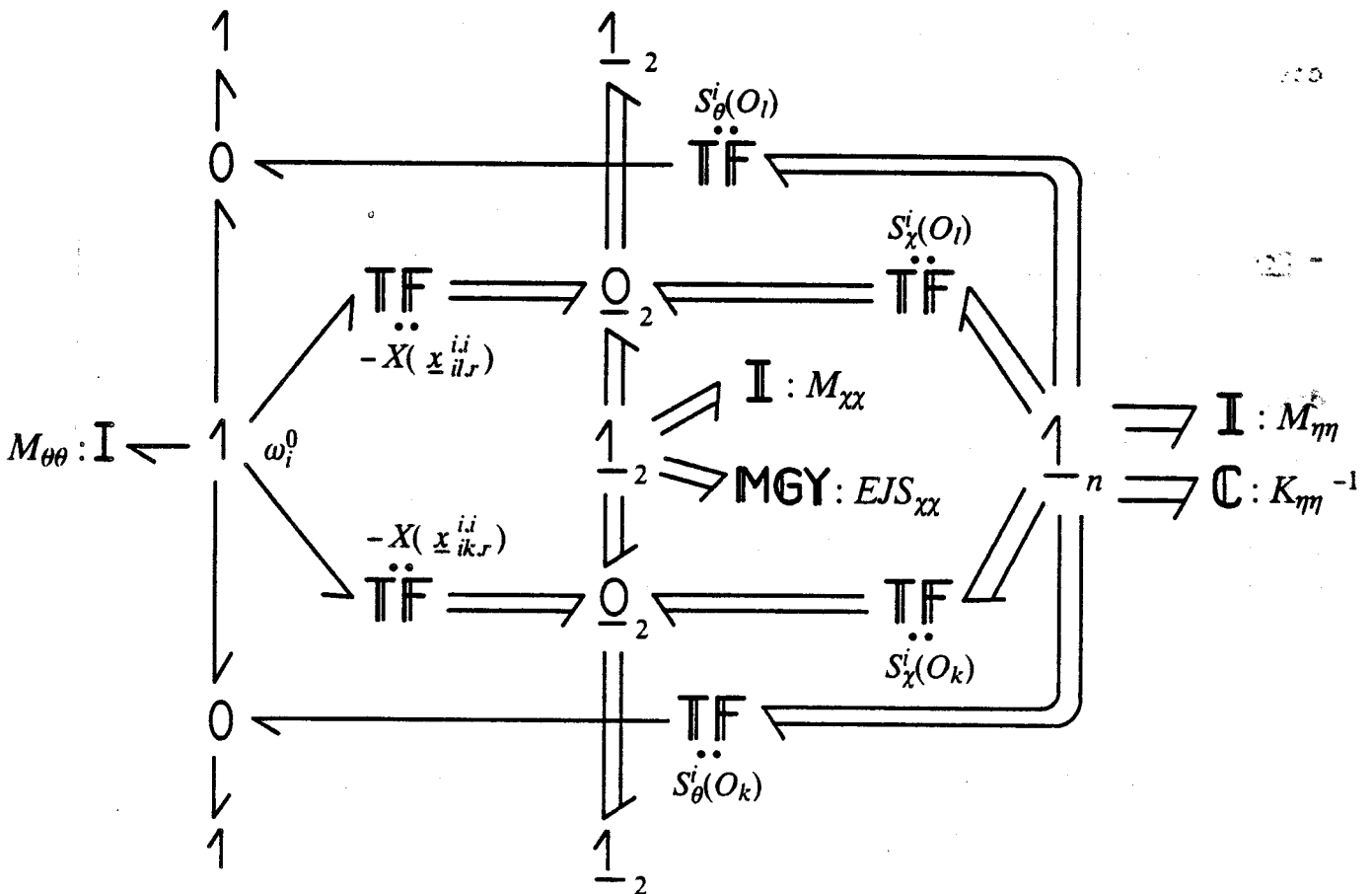


Figure IV.2.2 : Modèle bond-graph dynamique d'une poutre de Bernoulli-Euler avec pour conditions aux limites "force-libre"

La matrice diagonale  $M_d = W^t M^* W$  est telle que

$$(IV.2.5) \quad \begin{cases} M_d(i,i) = M & i=1, \dots, n \text{ et } i \neq 3 \\ M_d(3,3) = \frac{ML^2}{12} \\ M_d(i,j) = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Les nouvelles matrices seront ainsi définies par :

$$\text{Matrice de masse : } M_d = W^t M^* W$$

$$\text{Matrice de rigidité : } K_d = W^t K^* W$$

$$\text{Transformateurs modaux en } \xi = 0 : \text{TFLL1} = \text{TF1.W}$$

$$\text{Transformateurs modaux en } \xi = L : \text{TFLL2} = \text{TF2.W}$$

En utilisant les notations du bond-graph de la *figure IV.2.2*), nous avons :

$$(IV.2.6a) \quad M_d = \begin{bmatrix} M_{xx} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_{\theta\theta} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & M_{\eta\eta} \end{bmatrix}$$

$$(IV.2.6b) \quad K_d = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & K_{\eta\eta} \end{bmatrix}$$

$$(IV.2.6c) \quad \text{TFLL1} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(0) \\ \mathbf{g}'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x^i(0_k) \\ S_\theta^i(0_k) \end{bmatrix}$$

$$(IV.2.6d) \quad \text{TFLL2} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(L) \\ \mathbf{g}'(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x^i(0_l) \\ S_\theta^i(0_l) \end{bmatrix}$$

Les matrices  $\mathbb{O}$  étant des matrices nulles de dimension appropriée.

Cette procédure de normalisation nous a permis de trouver un modèle mathématique et un modèle bond-graph de la même structure que ceux obtenus pour un choix de champ de déplacement force-libre. Nous avons choisi des matrices de masse identiques. Quant aux paramètres des autres matrices caractéristiques, ils seront d'autant plus proche du modèle "force-libre" que le nombre de modes retenus est grand.

Cette procédure de normalisation requiert des calculs pouvant être fastidieux lorsque le nombre de modes est grand. Une troncature modale après normalisation est donc peu souhaitable. Or, si celle-ci est appliquée avant la normalisation, la précision est moins bonne. Nous proposons par la suite une solution à ce problème.

### II.2.3 - Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis exige des calculs semblables à ceux de la méthode d'analyse modale. Nous calculons d'abord les matrices  $M^*$ ,  $K^*$ , TF1 et TF2 pour des conditions aux limites libre-libre et ensuite introduisons les conditions aux limites choisies en éliminant les lignes et colonnes appropriées.

Les différents calculs sont présentés dans l'annexe 6.

En ce qui concerne la procédure de normalisation des matrices, elle est exactement la même que celle présentée précédemment.

Il est à noter que plus le nombre d'éléments retenus dans un segment est grand, meilleure est la précision des premiers modes, mais plus le nombre de modes est élevé.

### II.3 - Réduction d'ordre du modèle d'un segment flexible en mouvement plan

Que ce soit par la méthode d'analyse modale, ou celle des éléments finis, plus le nombre de modes gardés est important, plus les modes (sauf les plus élevés) obtenus se rapprochent des modes réels du segment dans la base de décomposition force-libre.

Une application des méthodes de réduction et de correction sur un modèle comportant un nombre important de modes donnera un modèle approximé du modèle obtenu pour une base de décomposition libre-libre. Plusieurs choix sont possibles. Nous pouvons par exemple appliquer les méthodes de réduction et de correction avant, ou après la normalisation des matrices du système.

Nous proposons plusieurs méthodes et comparons leur complexité et leur précision.

#### II.3.1 - Réduction modale avant normalisation des matrices

La procédure de normalisation des matrices est très simple lorsque nous ne gardons que très peu de modes. Il est donc souhaitable d'appliquer les méthodes de réduction et de correction sur le modèle avant normalisation.

a) Réduction du système obtenu par analyse modale

Par la méthode d'analyse modale, nous savons que  $K^*$  est diagonale et que les modes rapides correspondent directement aux valeurs numériques élevées de  $K^*$ .

Nous notons :

$$(IV.2.7) \quad M^* = \begin{bmatrix} M_{11}^* & M_{12}^* \\ M_{21}^* & M_{22}^* \end{bmatrix} \quad K^* = \begin{bmatrix} K_1^* & 0 \\ 0 & K_2^* \end{bmatrix}$$

$K_1^*$  n'est pas inversible. Elle est de la forme  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{1r}^* \end{bmatrix}$  où  $K_{1r}^*$  est inversible. Dans la suite nous écrivons  $(K_1^*)^{-1}$  qui correspondra à  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (K_{1r}^*)^{-1} \end{bmatrix}$ .

$M_{12}^*, M_{21}^*, M_{22}^*$  et  $K_2^*$  ont a priori une dimension infinie. La figure IV.2.3) représente un modèle bond-graph simplifié du segment flexible.

$\dot{y}$  et  $\dot{\theta}$  sont respectivement les vitesses de translation et de rotation (en grands mouvements) aux extrémités du segment flexible. Une direction de l'espace ( $x$ ) a été enlevée car les transformations effectuées ultérieurement ne modifient pas les parties des matrices caractéristiques associées à cette direction.

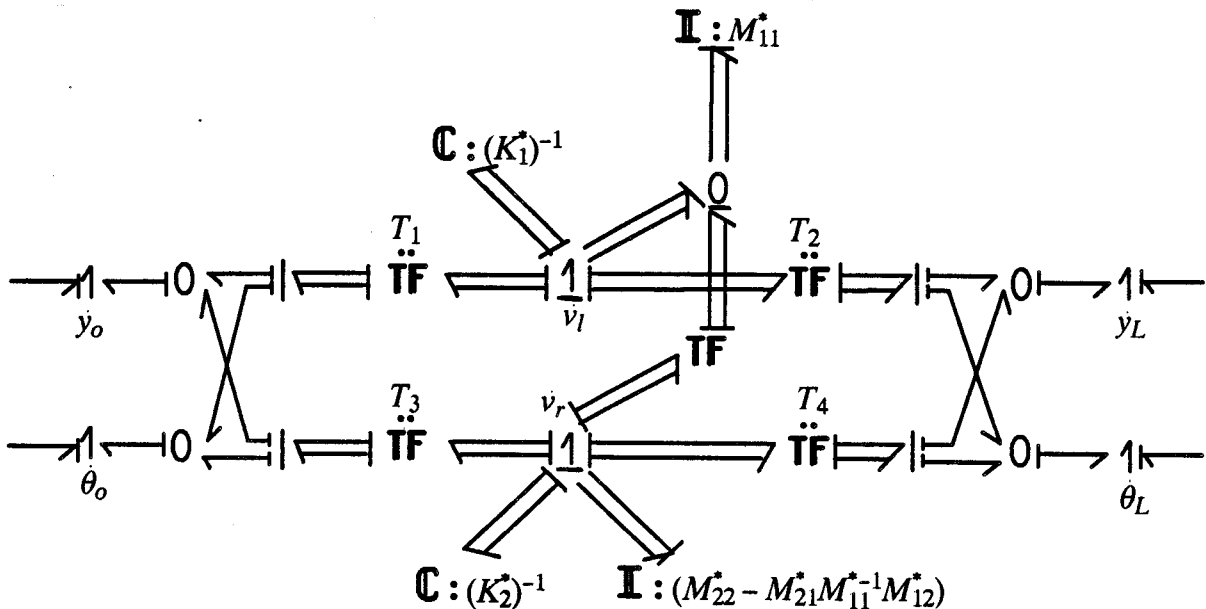


Figure IV.2.3 : Représentation simplifiée d'un segment flexible en mouvement plan. Conditions aux limites autres que force-libre

Nous avons séparé les jonctions 1 correspondant aux noeuds de vibration en deux parties. L'une concerne ceux associés aux modes faibles ( $\dot{v}_f$ ), l'autre ceux associés aux modes rapides ( $\dot{v}_r$ ). La matrice de masse  $M^*$  a été décomposée. Les transformateurs modaux s'obtiennent directement à l'aide de TF1 et TF2.

L'application de la méthode des perturbations singulières consiste à enlever la jonction 1 liée à  $\dot{v}_r$ . Le modèle réduit est représenté sur la figure IV.2.4).

L'application des perturbations singulières sur le modèle complet associée à la méthode de correction donne le modèle réduit pour lequel la matrice de raideur  $K_1^*$  devient  $K_1^{*c}$  avec

$$(IV.2.8) \quad K_1^{*c} = \left[ I_d + K_1^* M_{11}^{*-1} M_{12}^* K_2^{*-1} M_{21}^* M_{11}^{*-1} \right]^{-1} K_1^*$$

Les autres matrices caractéristiques du modèle réduit corrigé sont conservées.

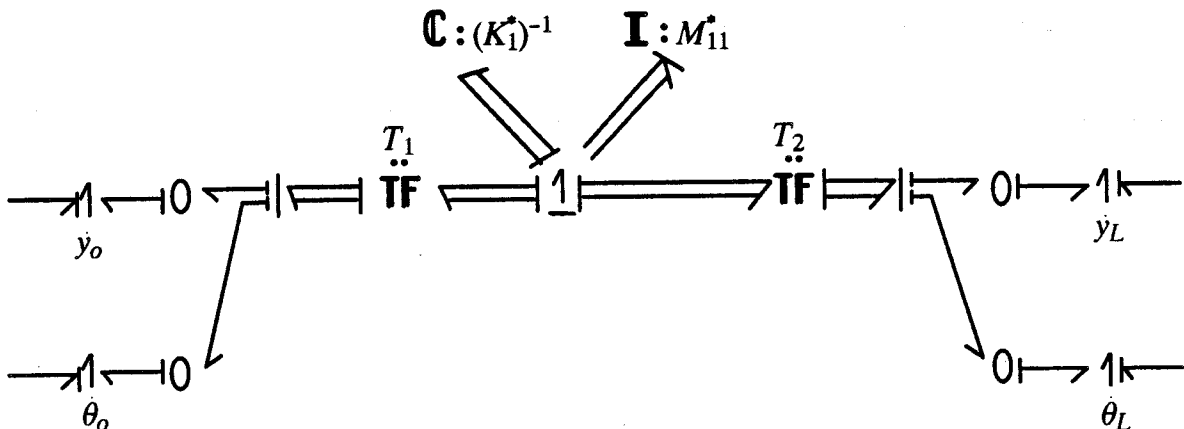


Figure IV.2.4 : Modèle bond-graph dynamique réduit

Le calcul de  $K_1^{*c}$  se fait à l'aide du calcul de plusieurs séries qui convergent très rapidement. Nous montrerons que ce modèle peut être amélioré car le modèle réduit corrigé a été fait en faisant quelques approximations.

b) Réduction du système obtenu par la méthode des éléments finis

Contrairement à la méthode d'analyse modale, partant d'un modèle de dimension très grande, nous ne pouvons pas obtenir un modèle de petite dimension. Au plus, nous pouvons diviser la dimension par 2.

Nous utilisons la méthode de condensation de masse, précédemment présentée en ne gardant que les noeuds des modes flexibles liés à la translation.

Il est donc nécessaire de faire des permutations dans  $M^*$  et  $K^*$ , de subdiviser ces matrices en 4 sous-matrices et d'appliquer la méthode de condensation de masse de Guyan. Les mêmes conditions sont faites pour les transformateurs modaux.

Si  $P$  est la matrice de permutation séparant les noeuds de rotation et de translation,  $M^*$ ,  $K^*$ ,  $\begin{bmatrix} TF1 \\ TF2 \end{bmatrix}^t$  deviennent

$$(IV.2.9) \quad \begin{cases} P^t M^* P \\ P^t K^* P \\ P^t \begin{bmatrix} TF1 \\ TF2 \end{bmatrix}^t \end{cases}$$

La relation algébrique, correspondant à la condensation de Guyan se traduit par l'apparition de la matrice  $T$  avec

$$(IV.2.10) \quad T = \begin{bmatrix} I_d \\ -K_{22}^{-1} K_{21} \end{bmatrix}$$

Le système condensé s'obtient à l'aide des matrices définies dans l'équation IV.2.11).

$$(IV.2.11) \quad \begin{cases} M_{e,q} = T^t P^t M^* P T \\ K_{e,q} = T^t P^t K^* P T \\ TF_{e,q}^t = T^t P^t \begin{bmatrix} TF1 \\ TF2 \end{bmatrix}^t \end{cases}$$

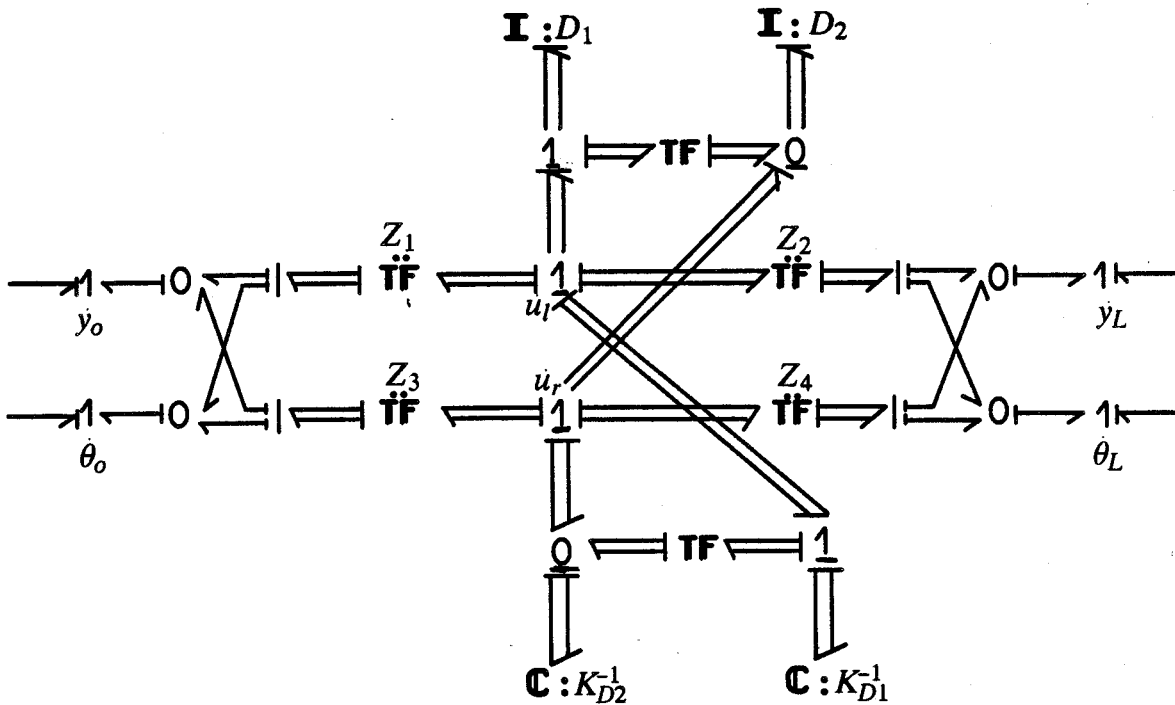
Le modèle réduit condensé peut se transformer en un système ayant la structure d'un système obtenu par la méthode d'analyse modale avec des conditions aux limites libre-libre. Il suffit pour cela d'utiliser la procédure de normalisation présentée précédemment.



Nous présentons le modèle bond-graph d'un segment flexible en mouvement plan, avant normalisation, obtenu par la méthode des éléments finis avant la condensation, *figure IV.2.5*) et après la condensation de masse *figure IV.2.6*). Nous avons volontairement simplifié le modèle bond-graph en ne gardant que les parties nécessaires à la compréhension de la méthode.

Les matrices  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $K_{D1}$  et  $K_{D2}$  sont celles obtenues par la méthode des éléments finis (cf. chap. 4, partie 1).

$\dot{y}$  et  $\dot{\theta}$  sont les vitesses de translation et de rotation (en grands mouvements) aux extrémités 0 et L du segment.



*Figure IV.2.5 - Représentation simplifiée d'un segment flexible en mouvement plan. Méthode des éléments finis*

Le vecteur  $\dot{u}_p$  contient les vitesses de translation et de rotation associées aux noeuds choisis pour le maillage du segment par la méthode des éléments finis. Le vecteur  $\dot{u}_r$  contient les vitesses de rotations associées aux petits mouvements.

Les modules des transformateurs varient suivant les conditions aux limites imposées.

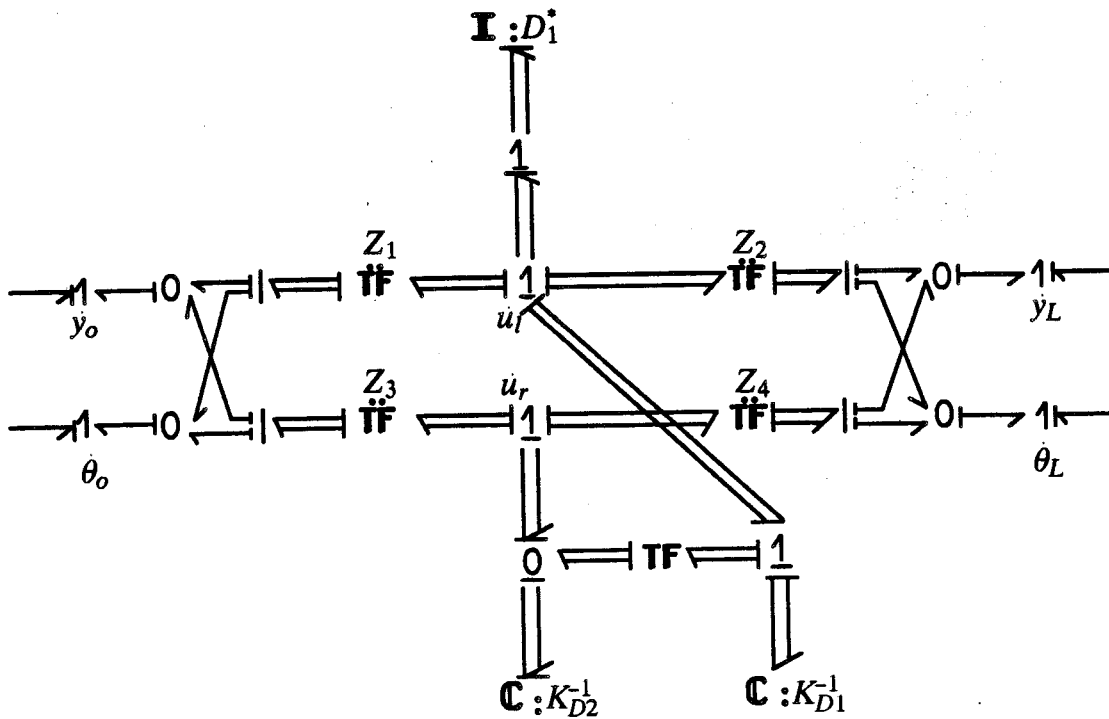


Figure IV.2.6 - Représentation simplifiée d'un segment flexible en mouvement plan après condensation de la masse

$D_1^*$  est la matrice caractéristique de la masse condensée.

Le multiport de raideur de matrice caractéristique  $K_{D2}$  est en causalité dérivée. Il traduit les relations algébriques imposées au système lors de la condensation. Nous l'avons gardé sur le schéma pour lui donner une interprétation dans un paragraphe ultérieur.

$K_{D1}$  n'est pas inversible. Elle a une forme semblable à  $K_1^*$ . Nous faisons les mêmes remarques sur la notation  $K_{D1}^{-1}$ .

### c) Application sur un segment souple

Nous reprenons le segment souple étudié dans la première partie de ce chapitre.

Les fréquences propres non nulles du modèle comportant les grands mouvements sont représentées dans les tableaux IV.2.1) pour différents cas de figures.

Nous conservons 2 fréquences propres par la méthode d'analyse

modale. Les modèles corrigés donnent de très bonnes approximations des fréquences propres du modèle libre-libre, *Tableau IV.2.1a*). Le choix du nombre de modes conservé est arbitraire pour cette méthode.

Analyse modale	Nombre de modes	Système initial 2 modes	Système réduit corrigé	Fréquences réelles
encastré-libre	2	1012,8	1008,2	1008,1 2778,8
		5288	3014	
appuyé-appuyé	2	1021,7	1008,5	1008,1 2778,8
		2840,8	2783,3	

*Tableau IV.2.1a : Fréquences propres d'un segment souple libre ; analyse modale.*

	Nombre de modes du système obtenu	Système initial	Système condensé 1	Système condensé 2	Fréquences réelles
Eléments	1		1376,5	1376,5	
	2	1209	1011,4	1045,6	1008,1 2778,8
4129,5		4980	3923,1		
finis	3		1018	1011	2778,8 5447,8 9006,5
			2796	3117,4	
encastré	3		11225	7262,3	9006,5
libre	4	1010	1011	1009	1008,1 2778,8 5447,8 9006,5
		3162	2836	2842	
		7907	5514	6366	
		12632	19997	11541	

*Tableau IV.2.1b : Fréquences propres d'un segment souple libre : Eléments finis.*

	Nombre de modes	Système initial	Système condensé	Fréquences réelles
	1		1012,3	
Eléments	2	1209	1021,7	
		4129,5	2796,2	1008,1
finis	3		1012,1	2778,8
			2844,1	5447,8
appuyé-			5514,7	9006,5
appuyé	4	1010	1019,6	
		3162	2807,8	
		7907	5622	
		12632	9172,5	

Tableau IV.2.1c : Fréquences propres d'un segment souple libre : Eléments finis.

Les modèles non condensés obtenus par la méthode des éléments finis donnent les mêmes fréquences propres pour les deux types de conditions aux limites (encastré-libre et appuyé-appuyé).

La méthode de condensation, en éléments finis, pour les conditions aux limites "encastré-libre" est peu satisfaisante car le mode le plus élevé est très mal approximé. Il est supérieur au mode le plus élevé du système non condensé comportant le même nombre de modes. (Tableau IV.2.1b). Les autres modes sont bien approximés et ont une valeur proche de la valeur réelle du mode correspondant. Contrairement à ce qu'on peut atteindre, la précision d'un mode donné n'est pas nécessairement meilleure lorsque l'on augmente le nombre d'éléments.

Pour améliorer la précision du mode le plus élevé, nous proposons une autre méthode de condensation. Elle est semblable à la méthode de Guban. Nous introduisons une relation algébrique supplémentaire au niveau de la vitesse de translation du noeud le plus proche de l'encastrement. Les résultats numériques sont présentés dans le tableau IV.2.1b) dans la co-

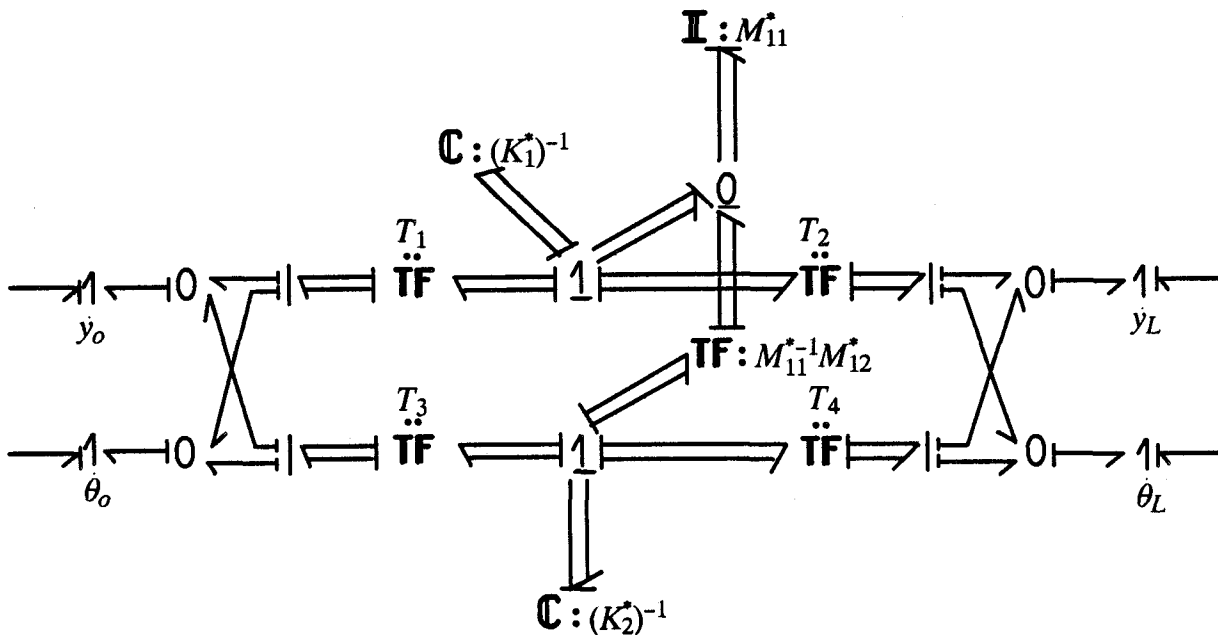
bonne correspondant au système dit "condensé 2". Cette fois-ci, tous les modes sont inférieurs à ceux obtenus pour un modèle non condensé ayant le même nombre de modes. Le système condensé pour les conditions aux limites appuyé-appuyé approxime très bien les fréquences propres du système libre-libre. *Tableau IV.2.1c*). L'observation des transformateurs modaux obtenus après normalisation montre que ces derniers sont très proches de ceux associés à la base de décomposition libre-libre.

### II.3.2 - Introduction du multiport de raideur résiduel

Les modèles réduits corrigés supposent quelques approximations, notamment sur l'effet du multiport des raideurs négligées. Nous développons une méthode graphique qui permet de trouver et de calculer ce multiport que nous appellerons multiport de raideur résiduel.

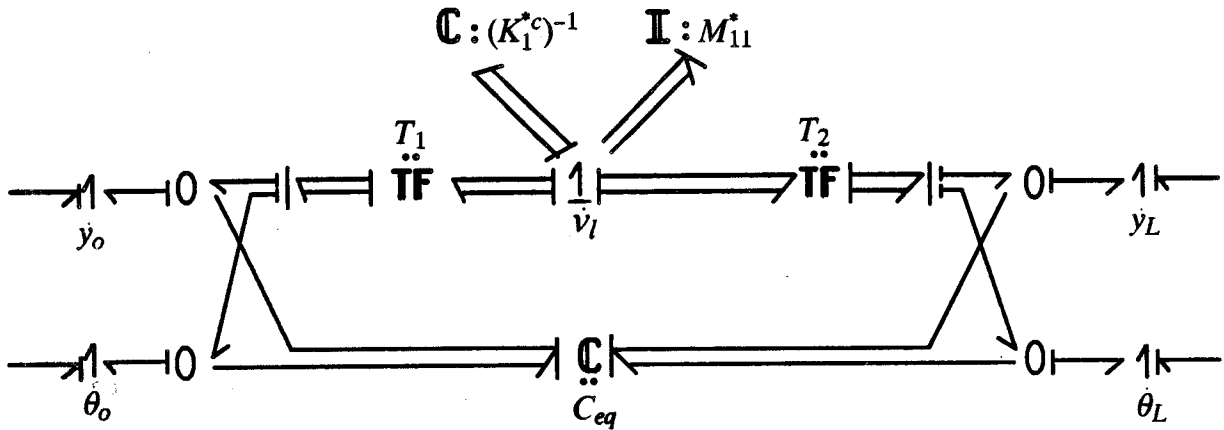
#### a) Approche modale

Le modèle réduit corrigé s'obtient dans un premier temps en modifiant le multiport de raideur  $K^*$ . En tenant compte de l'effet de la flexibilité totale du segment souple, nous obtenons un modèle semblable. Ce dernier se déduit du modèle global en enlevant simplement le multiport d'inertie sur la jonction 1 associée à  $\dot{v}_r$ . Nous le représentons sur la *figure IV.2.7*).



*Figure IV.2.7 - Modèle bond-graph du système avec conservation du multiport de raideur des modes supérieurs*

Ce modèle bond-graph semble complexe et mal adapté pour la normalisation. Néanmoins, après quelques manipulations qui permettent de "transporter"  $K_2^*$  à travers les transformateurs, nous obtenons une autre représentation du système, *figure IV.2.8*).



*Figure IV.2.8 : Modèle bond-graph avec apparition du multiport de flexibilité résiduel*

Le passage entre les deux représentations est simple.  $K_1^{*c}$  représente la raideur équivalente vue au niveau de la jonction  $1(\dot{v}_l)$ .

$C_{eq}$  est obtenu par le "transport" de  $(K_2^*)^{-1}$  à travers  $T_3$  et  $T_4$ .

$$(IV.2.12) \quad C_{eq} = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} (K_2^*)^{-1} \begin{bmatrix} T_3^t & T_4^t \end{bmatrix}$$

$C_{eq}$  est au plus un élément 2-port car la matrice  $\begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}$  comporte au plus deux lignes non nulles. Il dépend de la base de décomposition choisie.

L'équation IV.2.12) requiert le calcul de séries. Une autre méthode de calcul consiste à faire la différence entre le multiport de flexibilité totale et le multiport de flexibilité du modèle réduit en ne gardant que la partie utile.

$$(IV.2.13) \quad C_{eq} = \left[ C_{Total} - \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} (K_1^*)^{-1} \begin{bmatrix} T_1^t & T_2^t \end{bmatrix} \right]_{utile}$$

Il reste à appliquer la normalisation pour obtenir un modèle de la forme libre-libre avec un multiport de flexibilité résiduel.

b) Approche éléments finis

Reprenons le modèle bond-graph réduit corrigé de la figure IV.2.6). Le multiport de matrice caractéristique  $K_{D2}^{-1}$  apparaît en causalité dérivée. Si nous le transportons à travers les transformateurs modaux  $Z_3$  et  $Z_4$ , nous obtenons un multiport qui correspond à la flexibilité résiduelle.

Nous proposons une représentation plus simple du modèle, figure IV.2.9).

$Z_1^*$  et  $Z_2^*$  sont les matrices caractéristiques des transformateurs modaux obtenus après la condensation.

$C_{eq}$  est au plus un élément 2-port étant donné les caractéristiques de  $Z_3$  et  $Z_4$ . (2-port pour appuyé-appuyé et 1-port pour encastré-libre).

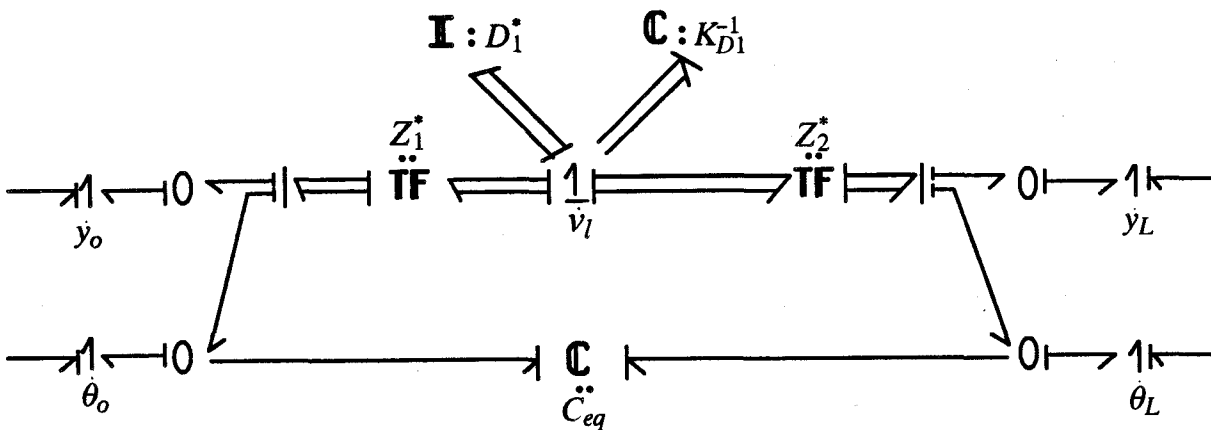


Figure IV.2.9 - Modèle bond-graph tenant compte du multiport de flexibilité résiduel

$$(IV.2.14) \quad C_{eq} = \begin{bmatrix} Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} K_{D2}^{-1} \begin{bmatrix} Z_3^t & Z_4^t \end{bmatrix}$$

La normalisation permet de trouver un modèle de la forme libre-libre avec un multiport de flexibilité résiduel.

Remarque : Les bases de décomposition encastré-libre et appuyé-appuyé, pour les méthodes d'analyse modale et éléments finis, donnent après quelques manipulations, des modèles ayant la structure d'un modèle force-libre avec un multiport de flexibilité résiduel plus simple que dans le cas où nous décomposons directement dans la base de décomposition force-libre (analyse modale).

Un intérêt immédiat concerne l'étude d'un segment souple dont la section n'est pas constante où la méthode d'analyse modale est difficilement applicable. Avec les développements présentés nous pouvons nous rapprocher d'un modèle force-libre sans aucun problème avec un minimum de calcul et avec une précision tout à fait acceptable.

### II.3.3 - Réduction modale après normalisation des matrices

Une façon tout à fait différente de résoudre le problème de réduction consiste à transformer dans un premier temps le modèle complet en un modèle ayant la structure du modèle force-libre. La procédure de normalisation doit dans ce cas être appliquée sur un modèle de grande dimension. Ceci peut poser des problèmes numériques importants.

Lorsque cette transformation est accomplie, il est possible de réduire le système avec l'introduction du multiport des flexibilités résiduelles. La méthode de calcul a été introduite dans la première partie de ce chapitre.

Un autre inconvénient est que le multiport résiduel est un 4-port. De plus nous ne pouvons pas lui donner une expression formelle.

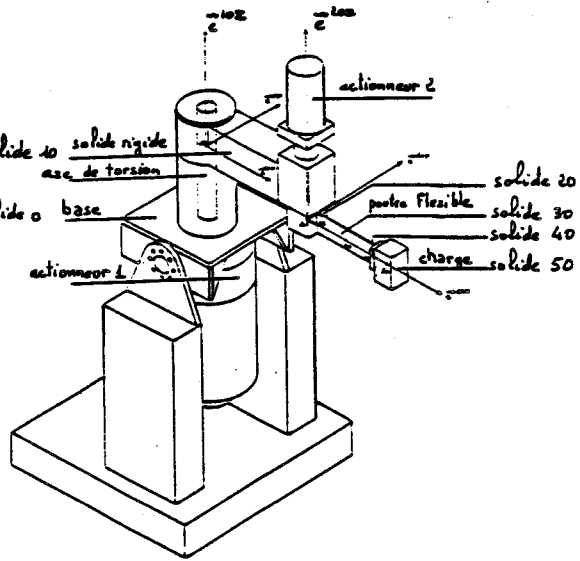
## II.4 - Application à un robot expérimental

### II.4.1 - Présentation du modèle

Le modèle d'un robot expérimental L.E.D. a été largement étudié dans *Maschke (1990)*. Nous ne reprenons pas la phase de modélisation. La *figure IV.2.10*) représente le modèle bond-graph développé de ce robot.

Une analyse des trois premiers modes propres a été faite pour différents choix de méthodes de discrétisation spatiale avec un certain nombre de modes *Maschke (1990)*.





Esquisse du robot expérimental L.E.D. développé par IKERLAN (Mondragon)

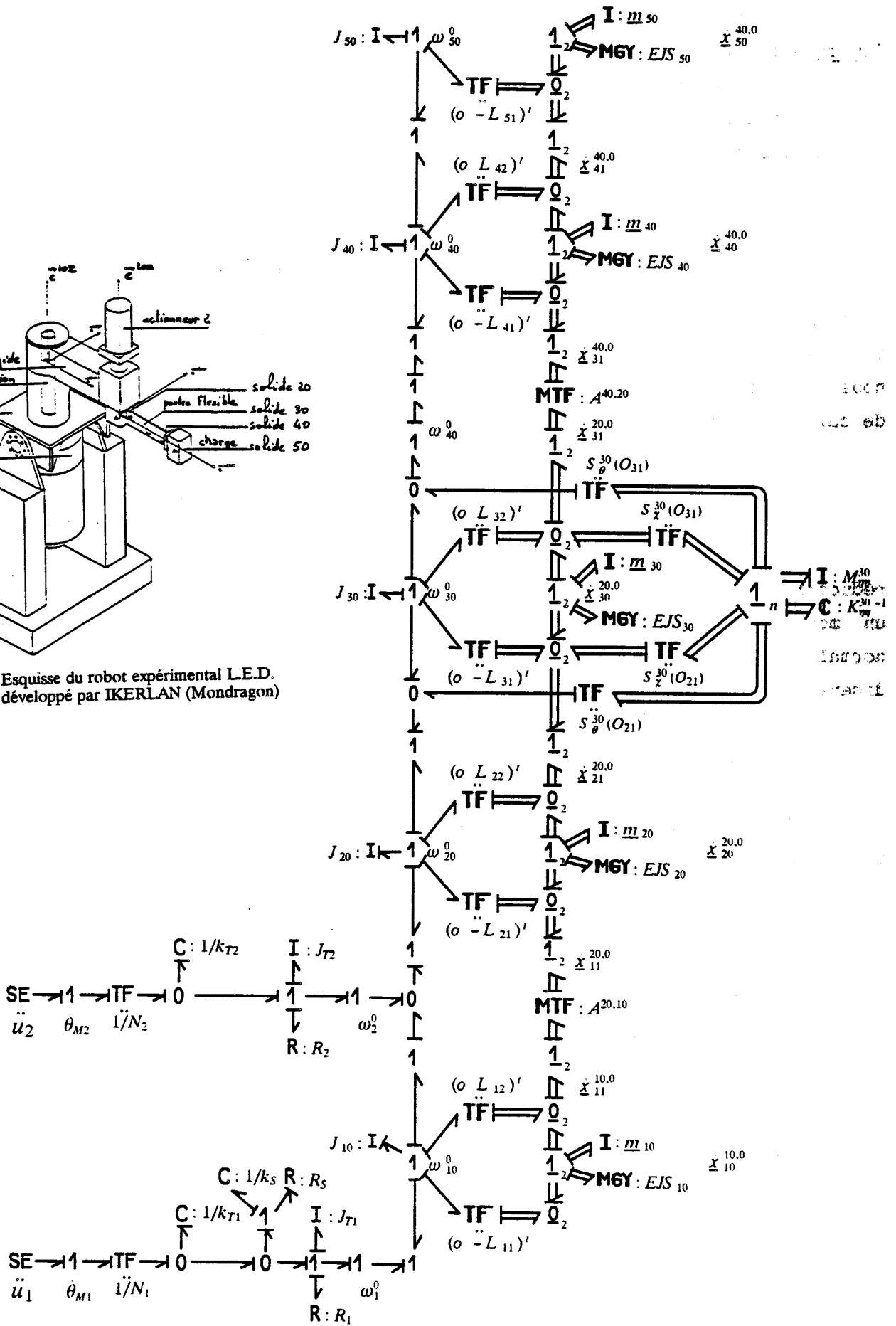


Figure IV.2.10 - Modèle développé du robot expérimental L.E.D.

### II.4.2 - Calcul des fréquences propres du système

Les modèles présentés ne comportent que deux modes associés à la partie flexible.

Le tableau IV.2.2) représente l'ensemble des modèles étudiés. Les modèles AMEL10 et AMAA10 sont obtenus en prenant 10 modes souples, en

Méthode de discrétisation	Conditions aux limites	Modèle complet	Modèle réduit corrigé	Modèle réduit corrigé + $C_{res}$	Nom du modèle	
Eléments finis	Encastré-libre	*			EFEL	
			*(cond.1)		EFELR1	
			*(cond.2)		EFELR2	
				*(cond.1)	EFELRC1	
				*(cond.2)	EFELRC2	
Analyse modale	Appuyé-appuyé	*			EFAA	
			*		EFAAR	
				*	EFAARC	
Analyse modale	Encastré-libre	*			AMEL	
			*		AMELR	
				*	AMELRC	
	Appuyé-appuyé	*				AMAA
			*			AMAAR
				*		AMAARC
Analyse modale	Libre-libre	*			AMLL	
				*	AMLLRC	
Analyse modale	Encastré-libre	*(10modes)			AMEL10	
	Appuyé-Appuyé	*(10modes)			AMAA10	

Tableau IV.2.2 - Méthodes de discrétisations et approximations

effectuant une normalisation et en réduisant le modèle de structure libre-libre à 2 modes. Nous pouvons ainsi vérifier d'après les *tableaux IV.2.3*) que les modes obtenus sont bien très proches de ceux du modèle "libre-libre" AMLL.

Une première constatation peut être faite. Les modèles réduits et corrigés donnent des résultats tout à fait différents suivant les conditions aux limites choisies.

Ainsi, pour les conditions aux limites appuyé-appuyé, les résultats se rapprochent de ceux obtenus pour la configuration libre-libre en analyse modale et pour les conditions aux limites encastré-libre, les premiers modes sont bien approximés.

Les résultats sont, à première vue, surprenants puisque les modes propres du segment seul (*Tableau IV.2.1*) ne sont pas très différents. Néanmoins, les transformateurs modaux modifient le résultat escompté.

Ainsi, pour les conditions aux limites appuyé-appuyé, nous obtenons un modèle symétrique proche du modèle libre-libre alors que pour les conditions aux limites encastré-libre, le modèle n'est plus symétrique et ne s'apparente donc pas au modèle force-libre.

En ce qui concerne la méthode des éléments finis, les modèles condensés pour les conditions aux limites encastré-libre donnent des résultats proches du modèle non condensé alors que pour les conditions aux limites appuyé-appuyé, les résultats sont proches de ceux obtenus par la méthode d'analyse modale avec des conditions aux limites libre-libre. L'ajout des multiports de flexibilité résiduels améliore considérablement la précision des résultats. Il apparaît que le modèle EFFLRC2 est le plus proche de la réalité. Ce modèle ne comporte que 3 modes (2 modes souples + 1 mode dû à  $K_{res}$ ) et il donne des résultats pratiquement équivalents au modèle AMLLRC qui lui comporte 6 modes (2 modes souples + 4 modes dus à  $K_{res}$ ).

En ce qui concerne la méthode d'analyse modale pour les modes contraints, appuyé-appuyé, les modes sont mal approximés. L'introduction des multiports de flexibilité résiduels améliore néanmoins les résultats.

Nombre total de modes du modèle du segment	Mesures expérimentales	Premier mode 2.93 Hz		Second mode 7.81 Hz		Troisième mode 53.7 Hz	
	Modèles	Premier mode	Erreur	Second mode	Erreur	Troisième mode	Erreur
2	EFEL	2.93 Hz	0 %	7.95 Hz	1.8 %	57.1 Hz	6.3 %
2	EFLLR1	2.94 Hz	0.3 %	7.96 Hz	1.9 %	69.4 Hz	29.2 %
2	EFELR2	2.94 Hz	0.3 %	7.96 Hz	1.9 %	63.1 Hz	17.5 %
3	EFELRC1	2.93 Hz	0 %	7.95 Hz	1.8 %	58.1 Hz	8.2 %
3	EFELRC2	2.93 Hz	0 %	7.95 Hz	1.8 %	56.4 Hz	5.0 %
2	EFAA	2.93 Hz	0 %	7.95 Hz	1.8 %	57.5 Hz	7.1 %
2	EFAAR	3.23 Hz	10.2 %	8.30 Hz	6.3 %	76.3 Hz	42.1 %
4	EFAARC	2.93 Hz	0 %	7.95 Hz	1.8 %	56.6 Hz	5.4 %
2	AMEL	2.95 Hz	0.7 %	7.98 Hz	2.2 %	71.9 Hz	33.9 %
2	AMELC	2.40 Hz	-18 %	7.55 Hz	-3.3 %	52.3 Hz	-2.6 %
4	AMELCR	2.28 Hz	-22.2 %	7.48 Hz	-4.2 %	49.5 Hz	-7.8 %
2	AMAA	3.19 Hz	8.9 %	8.24 Hz	5.5 %	67.3 Hz	25.3 %
2	AMAAR	3.16 Hz	7.8 %	8.20 Hz	5.0 %	66.1 Hz	23.1 %
4	AMAARC	3.06 Hz	4.4 %	8.09 Hz	3.6 %	60.4 Hz	12.5 %
2	AMLL	3.34 Hz	14.0 %	8.46 Hz	8.3 %	76.9 Hz	43.2 %
6	AMLLRC	2.93 Hz	0 %	7.95 Hz	1.8 %	56.1 Hz	4.5 %
2	AMEL10	3.37 Hz	15.0 %	8.51 Hz	9.0 %	76.6 Hz	42.6 %
2	AMAA10	3.37 Hz	15.0 %	8.52 Hz	9.1 %	76.8 Hz	43.0 %

Tableau IV.2.3a) : Comparaison entre les fréquences calculées et mesurées  
(bras en position d'extension)  $\theta_2 = 0^\circ$ .

Nombre total de modes du modèle du segment	Mesures expérimentales	Premier mode 3.17 Hz		Second mode 6.35 Hz		Troisième mode 52.7 Hz	
	Modèles	Premier mode	Erreur	Second mode	Erreur	Troisième mode	Erreur
2	EFEL	3.31 Hz	4.4 %	6.48 Hz	2.0 %	56.7 Hz	7.6 %
2	EFLLR1	3.32 Hz	4.7 %	6.48 Hz	2.0 %	68.6 Hz	30.2 %
2	EFELR2	3.32 Hz	4.7 %	6.48 Hz	2.0 %	62.4 Hz	18.4 %
3	EFELRC1	3.31 Hz	4.4 %	6.48 Hz	2.0 %	57.5 Hz	7.1 %
3	EFELRC2	3.31 Hz	4.4 %	6.48 Hz	2.0 %	55.8 Hz	5.9 %
2	EFAA	3.31 Hz	4.4 %	6.48 Hz	2.0 %	56.9 Hz	8.0 %
2	EFAAR	3.79 Hz	19.6 %	6.54 Hz	3.0 %	75.5 Hz	43.2 %
4	EFAARC	3.30 Hz	4.1 %	6.48 Hz	2.0 %	56.0 Hz	6.3 %
2	AMEL	3.35 Hz	5.7 %	6.48 Hz	2.0 %	71.2 Hz	35.1 %
2	AMELC	2.58 Hz	-18.6 %	6.42 Hz	1.1 %	53.9 Hz	2.3 %
4	AMELCR	2.44 Hz	-23.0 %	6.42 Hz	1.1 %	49.2 Hz	-6.6 %
2	AMAA	3.71 Hz	17.0 %	6.53 Hz	2.8 %	66.6 Hz	26.4 %
2	AMAAR	3.67 Hz	15.8 %	6.52 Hz	2.7 %	65.4 Hz	24.1 %
4	AMAARC	3.51 Hz	10.7 %	6.50 Hz	2.4 %	59.7 Hz	13.3 %
2	AMLL	3.98 Hz	25.6 %	6.57 Hz	3.5 %	76.0 Hz	44.2 %
6	AMLLRC	3.31 Hz	4.4 %	6.48 Hz	2.0 %	55.6 Hz	5.5 %
2	AMEL10	4.03 Hz	27.1 %	6.58 Hz	3.6 %	75.9 Hz	44.0 %
2	AMAA10	4.03 Hz	27.1 %	6.58 Hz	3.6 %	75.7 Hz	43.6 %

Tableau IV.2.3b) : Comparaison entre les fréquences calculées et mesurées  
(bras en position repliée)  $\theta_2 = 90^\circ$ .

Les modèles AMEL donnent de très bonnes approximations des modes réels. Il apparaît que les modifications apportées conduisent à des modes inférieurs aux modes réels. C'est le seul cas où nous n'obtenons pas les résultats prévus. Une raison éventuelle est la non-symétrie du modèle ou alors la très grande sensibilité par rapport aux paramètres.

Enfin, nous voyons que, parmi les méthodes par modes contraints, ce sont les modèles en éléments finis qui sont les plus précis. Le modèle le plus précis est AMLLRC. Néanmoins à cause de la taille de ce modèle, il sera nettement plus judicieux d'employer le modèle EFELRC2 qui lui est plus simple et est pratiquement aussi précis. Un fait intéressant est que ces remarques sont valables pour deux configurations différentes du bras flexible du robot.

Il est à noter que les méthodes présentées dans cette partie sont valables pour les cas où les segments flexibles n'ont que des petits mouvements.

## II.5 - Application de la méthode des perturbations singulières pour le découplage d'un modèle de robot 2 axes

Nous avons présenté des méthodes permettant de simplifier un modèle de segment flexible s'intégrant dans un modèle plus complexe. Néanmoins, pour des cas extrêmes, cette simplification n'est pas suffisante dans le sens où le modèle du système dynamique conserve une taille trop importante. Nous sommes dans ce cas obligés de procéder à un découplage pour séparer le modèle en un modèle "lent" et un modèle "rapide". Nous présentons dans cette partie l'exemple d'un robot 2-axes *figure IV.2.11* pour lequel les segments sont flexibles. Une méthode semblable s'applique lorsque l'on prend également en compte la flexibilité au niveau des joints.

Dans le premier chapitre du rapport (partie 3), nous avons énoncé une méthode de mise sous forme singulièrement perturbée des modèles de manipulateurs à segments flexibles obtenus par la méthode des modes supposés de Lagrange. Nous proposons une méthode semblable explicitée sur un exemple de manipulateur modélisé par bond-graph pour lequel nous

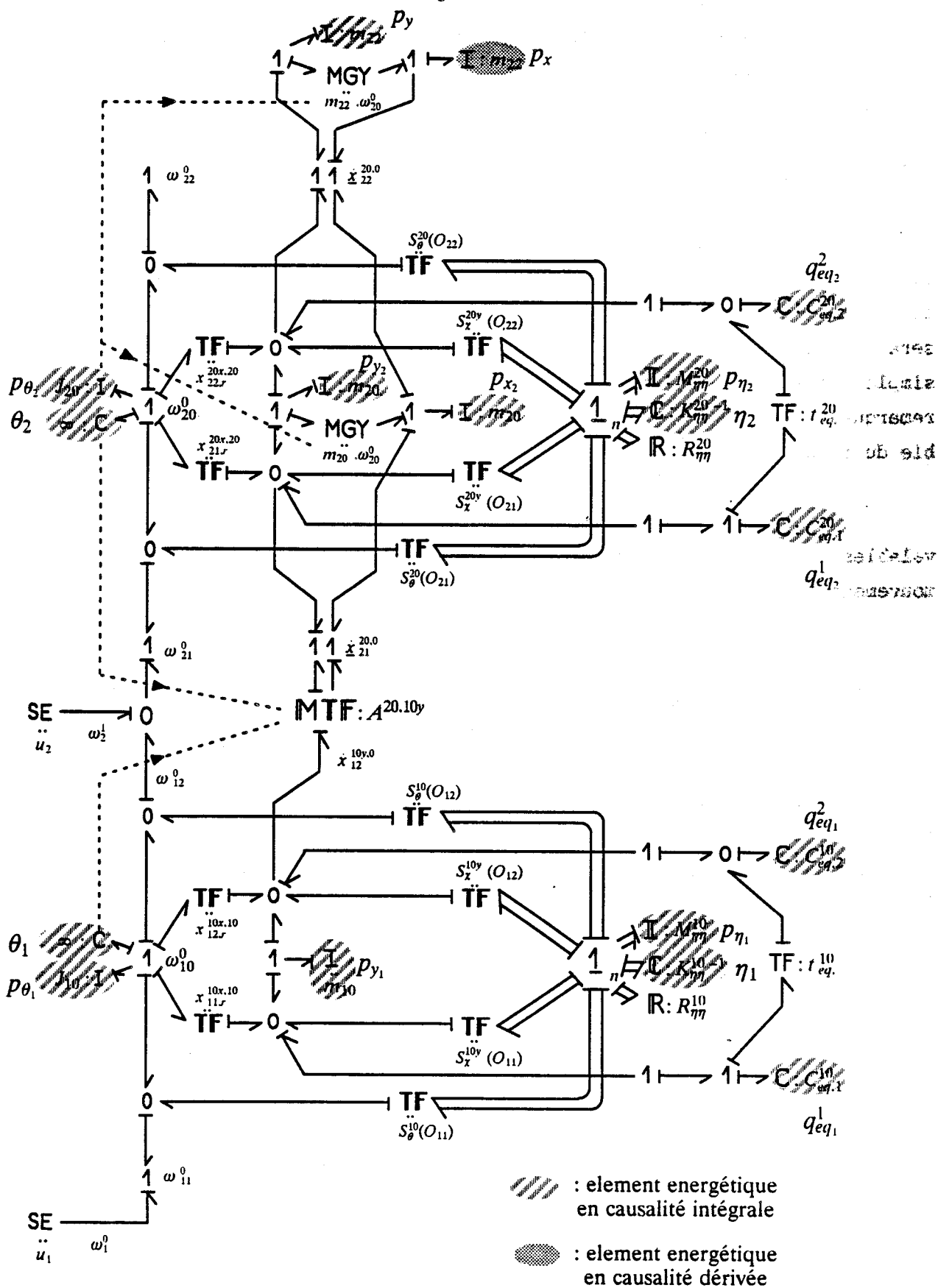


Figure IV.2.11 : Modèle augmenté par la causalité, obtenu par la méthode des modes supposés, avec modes statiques de correction d'un robot 2-axes.

utilisons la méthode des modes supposés avec en plus la prise en compte de la flexibilité des modes supérieurs, c'est-à-dire le multiport des capacités résiduelles.

Nous écrivons l'équation d'état du modèle bond-graph à l'aide des variables de vitesse et d'effort associées respectivement aux éléments dynamiques inertiels et capacitifs en causalité intégrale.

(IV.2.15)

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_R \\ \dot{V}_T \\ \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_T^{-1}H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_2^{-1} \\ 0 & 0 & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{eq}P_{13}^{Rt} & -K_{eq}P_{13}^{Tt} & -K_{eq}P_{23}^t & -K_{eq}P_{33}^t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ V_T \\ P_1 \\ P_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_R^{-1}B_1 \\ M_T^{-1}B_2 \\ M_1^{-1}B_3 \\ M_2^{-1}B_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

L'indice R est associé aux vitesses de rotation et T aux vitesses de translation.

$$(IV.2.16) \quad \begin{cases} V_R = \begin{bmatrix} p_{\theta_1}/J_{10} \\ p_{\theta_2}/J_{20} \end{bmatrix} = M_R^{-1} \begin{bmatrix} p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2} \end{bmatrix} \\ V_T = \begin{bmatrix} p_{y_1}/m_{10} \\ p_{x_2}/(m_{20}+m_{22}) \\ p_{y_2}/m_{20} \\ p_y/m_{22} \end{bmatrix} = M_T^{-1} \begin{bmatrix} p_{y_1} \\ p_{x_2} \\ p_{y_2} \\ p_y \end{bmatrix} \end{cases}$$

La masse  $m_{22}$  associée à l'élément inertiel en causalité dérivée est ramenée au niveau de l'élément inertiel associé à la variable  $p_{x_2}$ .

$$(IV.2.17) \quad \begin{cases} P_1 = \left[ \left( M_{\eta\eta}^{10} \right)^{-1} \cdot P_{\eta_1} \right] = M_1^{-1} P_{\eta_1} \\ P_2 = \left[ \left( M_{\eta\eta}^{20} \right)^{-1} \cdot P_{\eta_2} \right] = M_2^{-1} P_{\eta_2} \end{cases}$$

$$(IV.2.18) \quad \begin{cases} Q_1 = \left[ \left( K_{\eta\eta}^{10} \right)^{-1} \cdot \eta_1 \right] = K_1^{-1} \eta_1 \\ Q_2 = \left[ \left( K_{\eta\eta}^{20} \right)^{-1} \cdot \eta_2 \right] = K_2^{-1} \eta_2 \end{cases}$$



$$(IV.2.19) \quad Q = \begin{bmatrix} q_{e q_1}^1 \cdot \frac{1}{C_{e q_1}^{10}} \\ q_{e q_1}^2 \cdot \frac{1}{C_{e q_2}^{10}} \\ q_{e q_2}^1 \cdot \frac{1}{C_{e q_1}^{20}} \\ q_{e q_2}^2 \cdot \frac{1}{C_{e q_2}^{20}} \end{bmatrix} = K_{e q}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q_{e q_1}^1 \\ q_{e q_1}^2 \\ q_{e q_2}^1 \\ q_{e q_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$(IV.2.20) \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Le calcul des matrices  $H$ ,  $P_{13}^R$ ,  $P_{13}^T$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{33}$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  et  $B_4$  se fait à l'aide des règles de calcul d'équation d'état sur un modèle bond-graph. Seules les matrices  $H$ ,  $P_{13}^T$  et  $B_2$  sont non linéaires. De plus, la matrice  $P_{13}^T$  est inversible.

Etant donné que certaines matrices sont non linéaires, il est difficile d'obtenir un système d'équations différentielles du second ordre explicite directement à l'aide de l'équation d'état IV.2.15.

Nous proposons un changement de variable qui peut être directement obtenu à l'aide du modèle bond-graph. Remarquons d'abord que le modèle rigide ne fait apparaître aucune compliance. Ce dernier s'obtient simplement en écrivant :

$$(IV.2.21) \quad \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q} \end{bmatrix} = 0$$

dans le modèle qui tient compte de la flexibilité distribuée.

L'équation IV.2.21) donne les relations algébriques suivantes :

$$(IV.2.22) \quad \begin{cases} K_1 P_1 = 0 \\ K_2 P_2 = 0 \\ K_{e q} (P_{13}^R V_R + P_{13}^T V_T + P_{23}^t P_1 + P_{33}^t P_2) = 0 \end{cases}$$

Ces relations sont les relations algébriques obtenues lorsque l'on ne considère que le modèle lent du système global IV.2.15).

Nous proposons le changement de variables suivant :

$$(IV.2.23) \quad \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} V_R \\ V_T \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } P = \begin{bmatrix} I_d & 0 & 0 & 0 \\ -\left(P_{13}^R\right)^t & -\left(P_{13}^T\right)^t & -P_{23}^t & -P_{33}^t \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix}$$

Les vecteurs  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q$  sont conservés. Nous avons bien un changement de base puisque  $P$  est inversible.

En notant

$$(IV.2.24) \quad \begin{cases} H^* = \left(P_{13}^T\right)^t M_T^{-1} H \left(P_{13}^T\right)^{t^{-1}} + \left(\dot{P}_{13}^T\right)^t \left(P_{13}^T\right)^{t^{-1}} \\ P^* = - \left[ \left(P_{13}^T\right)^t M_R^{-1} P_{13}^R + \left(P_{13}^T\right)^t M_T^{-1} P_{13}^T + P_{23}^t M_1^{-1} P_{23} + P_{33}^t M_2^{-1} P_{33} \right] \\ B^* = -\left(P_{13}^R\right)^t M_R^{-1} B_1 - \left(P_{13}^T\right)^t M_T^{-1} B_2 - P_{23}^t M_1^{-1} B_3 - P_{33}^t M_2^{-1} B_4 \end{cases}$$

nous obtenons une nouvelle équation d'état.

(IV.2.25)

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_R^{-1} P_{13}^R \\ H^* P_{13}^R{}^t & H^* & H^* P_{23}^t & H^* P_{33}^t & P_{23}^t M_1^{-1} & P_{33}^t M_2^{-1} & P^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_1^{-1} & 0 & M_1^{-1} P_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_2^{-1} & M_2^{-1} P_{33} \\ 0 & 0 & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{e_q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_R^{-1} B_1 \\ B^* \\ M_1^{-1} B_3 \\ M_2^{-1} B_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Il est désormais possible d'obtenir un système d'équations différentielles du second ordre explicite à l'aide du changement de variable

$$(IV.2.26) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} \\ M_2^{-1} \\ M_3^{-1} \\ M_4^{-1} \end{bmatrix}$$

Soit

(IV.2.27)

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -H^* P_{13}^{Rt} & -H^* & -H^* P_{23}^t & -H^* P_{33}^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -M_R^{-1} P_{13}^R K_{eq} & 0 & 0 \\ 0 & -P^* K_{eq} & -P_{23}^t M_1^{-1} K_1 & -P_{33}^t M_2^{-1} K_2 \\ 0 & -M_1^{-1} P_{23} K_{eq} & M_1^{-1} K_1 & 0 \\ 0 & -M_2^{-1} P_{33} K_{eq} & 0 & M_2^{-1} K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} M_R^{-1} B_1 \\ B^* \\ M_1^{-1} B_3 \\ M_2^{-1} B_4 \end{bmatrix} u$$

Le modèle est désormais sous forme d'équations différentielles du second ordre. La question est de savoir s'il est ou non sous forme singulièrement perturbée.

Un premier choix consiste à séparer la variable  $x_2$ . Etant donné que  $P^*$  est inversible et en considérant que  $K_{eq}$  a des valeurs propres supérieures à celles de  $K_1$  et  $K_2$  nous pouvons choisir  $x_1, x_3, x_4$  en tant que vecteur rapide. Le modèle lent serait celui obtenu en enlevant les multiports des capacités résiduelles du modèle complet. Une correspondance est à faire avec les modèles lents obtenus pour les systèmes linéaires. Néanmoins, nous ne faisons pas ce choix de découplage car nous désirons avoir pour modèle lent, le modèle du robot rigide.

Le vecteur lent choisi est  $x_1$ . Les vecteurs rapides sont  $x_2, x_3$  et  $x_4$ . Avec ce choix, le modèle est bien sous forme singulièrement perturbée. De plus, il est explicite car la matrice  $T$  définie par la relation IV.2.28) est inversible.

$$(IV.2.28) \quad T = \begin{bmatrix} -P^* & -P_{23}^t M_1^{-1} & -P_{33}^t M_2^{-1} \\ -M_1^{-1} P_{23} & M_1^{-1} & 0 \\ -M_2^{-1} P_{33} & 0 & M_2^{-1} \end{bmatrix}$$

### Démonstration

T est une matrice symétrique. Nous recherchons une relation entre ses colonnes en multipliant la deuxième par  $P_{23}$  et la troisième par  $P_{33}$  (à droite).

Nous faisons la somme des trois colonnes et obtenons

$$(IV.2.29) \quad T^* = \begin{bmatrix} -P^* & -P_{23}^t M_1^{-1} P_{23} & -P_{33}^t M_2^{-1} P_{33} \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

Soit en remplaçant  $P^*$  par sa valeur

$$(IV.2.30) \quad T^* = \begin{bmatrix} (P_{13}^R)^t M_R^{-1} P_{13}^R + (P_{13}^T)^t M_T^{-1} P_{13}^T & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

Il est donc impossible de trouver une combinaison linéaire entre les colonnes de T. Elle est donc inversible.

Nous ne développerons pas les calculs des modèles lents et rapides. Nous faisons simplement quelques remarques.

L'application des perturbations singulières se fait en général sur l'équation de phase. Le découplage montre que le système lent correspond au modèle du robot rigide sur lequel des détecteurs d'efforts sont ajoutés aux positions respectives des éléments capacitifs pour tenir compte de leur évolution lente à l'aide de relations algébriques (cf. modèles linéaires).

L'équation de phase du système rapide est linéaire dans le sens où les matrices non linéaires ne dépendent que des variables du système lent qui sont considérées comme constantes pendant l'évolution des variables rapides (cf. partie 1, chap. III).

## CONCLUSION

Nous avons rappelé succinctement les modèles bond-graph de segments déformables considérés comme des poutres d'Euler-Bernouilli obtenus par discrétisation des fonctionnelles d'énergie des domaines cinétiques, potentiels élastiques et gravitationnels, *Yazman (1988)*.

Dans une première partie, nous avons proposé des méthodes dites de réduction et de correction pour des modèles linéaires de systèmes dynamiques comportant des segments déformables. Ces méthodes conservent le sens physique des nouvelles variables dynamiques qui sont directement attachées à un élément constituant du système dynamique. Le modèle final est un modèle bond-graph.

L'étude de la modélisation des systèmes polyarticulés à segments flexibles en mouvement plan a fait l'objet de la deuxième partie. Nous avons montré que, quels que soient le champ de déplacement et la méthode de discrétisation spatiale choisis, pour la modélisation des segments déformables, il est possible de trouver graphiquement sur le modèle bond-graph, un multiport, dit de flexibilité résiduel qui tient compte de l'effet statique des modes négligés lors de la réduction du modèle.

ANNEXE 1 - CHAPITRE IV
------------------------

Démonstration de l'égalité des matrices de raideur corrigées pour les  
systèmes de dimensions infinie et finie avec capacités résiduelles

- Correction ordre 1

Système de dimension finie

$$(A.4.1) \quad K_1^c = K_1 \left[ I_d + G_{12} G_{22}^{-1} K_{res}^{-1} G_{22}^{-1} G_{21} K_1 \right]$$

Nous ne faisons que le calcul du terme :

$$(A.4.2) \quad T_f = G_{12} G_{22}^{-1} K_{res}^{-1} G_{22}^{-1} G_{21}$$

En remplaçant les matrices  $G_{ij}$  par leur valeur, il vient :

$$(A.4.3) \quad T_f = -M_1^{-1} A_5 (A_1 M_1^{-1} A_5 + A_4 M_3^{-1} A_8)^{-1} K_{res}^{-1} (A_1 M_1^{-1} A_5 + A_4 M_3^{-1} A_8)^{-1} A_1 M_1^{-1}$$

Système de dimension infinie

De la même manière que pour le système de dimension finie, nous introduisons  $T_i$  avec :

$$(A.4.4) \quad T_i = H_{12} H_{22}^{-1} K_2^{-1} H_{22}^{-1} H_{21}$$

En remplaçant les matrices  $H_{ij}$  par leur valeur, il vient :

$$(A.4.5) \quad T_i = M_{11}^{-1} M_{12} K_2^{-1} M_{21} M_{11}^{-1} \\ = (M_1 + A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1)^{-1} A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_2 K_2^{-1} A_7 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1 (M_1 + A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1)^{-1}$$

En tenant compte du fait que :

$$(A.4.6) \quad A_2 K_2^{-1} A_7 = -K_{res}^{-1}$$

Il est immédiat que  $T_f = T_i$  .

Nous ne présentons pas les corrections aux ordres supérieurs, les calculs étant très fastidieux.

## ANNEXE 2 - CHAPITRE IV

## Comparaison des modes propres pour les différents systèmes

$$(A.4.7) \quad \lambda^i < \lambda_{CR}^i < \lambda_{AC}^i < \lambda_{SC}^i$$

Nous calculons les matrices  $K M^{-1}$  pour les différentes approximations. Suivant les conditions aux limites, nous utiliserons les matrices  $A_i$  ou  $R_i$ . Nous écrirons les équations à l'aide des matrices  $A_i$ .

En ce qui concerne le système avec capacités résiduelles, nous avons :

$$(A.4.8) \quad [K M^{-1}]_{CR} = + \begin{bmatrix} K_1 M_1^{-1} & -K_1 M_1^{-1} A_5 \\ K_2 A_1 M_1^{-1} & -K_2 (A_1 M_1^{-1} A_5 + A_4 M_3^{-1} A_8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

Système sans correction

$$(A.4.9) \quad [K M^{-1}]_{SC} = + K_1 (M_1 + A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1)^{-1}$$

Système avec correction premier ordre

$$(A.4.10) \quad [K M^{-1}]_{AC} = K_1 \left[ I_d + G_{12} G_{22}^{-1} K_{res}^{-1} G_{22}^{-1} G_{21} K_1 \right]^{-1} (M_1 + A_5 A_8^{-1} M_3 A_4^{-1} A_1)^{-1}$$

Il est immédiat que  $\lambda_{AC}^i < \lambda_{SC}^i$  car le système corrigé a une matrice de masse équivalente dont les valeurs propres sont inférieures une à une aux valeurs propres de la matrice raideur du système non corrigé. Cette propriété se déduit du fait que la matrice  $G_{12} G_{22}^{-1} K_{res}^{-1} G_{22}^{-1} G_{21}$  est semi-définie positive, puisque symétrique.

La méthode de correction utilisée nous permet de dire que  $\lambda_{CR}^i < \lambda_{AC}^i$  car le système non corrigé initial est celui contenant le multiport des capacités résiduelles.

De plus, le système réel comporte des modes plus faibles que ceux approximatés avec le multiport des capacités résiduelles, c'est-à-dire  $\lambda^i < \lambda_{CR}^i$ .

Nous avons donc l'inéquation A.4.7).

## ANNEXE 3 - CHAPITRE IV

## Perturbations singulières sur le modèle obtenu par les éléments finis

Une nouvelle représentation multiport est proposée :

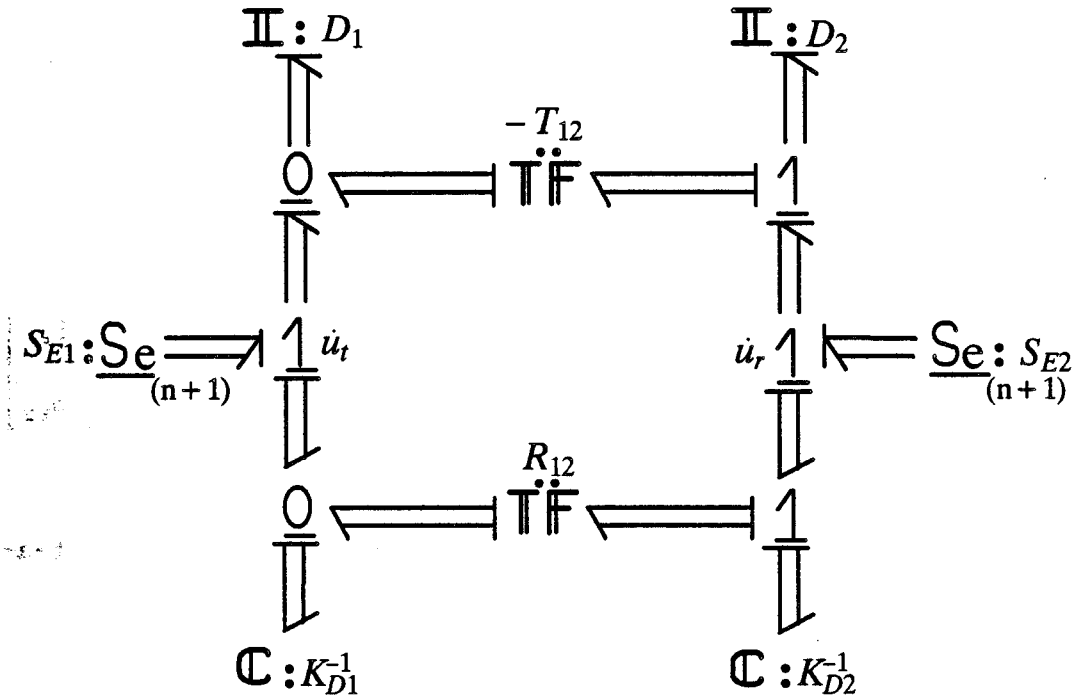


Figure A.4.1 : Modèle bond-graph décomposé d'un segment flexible.  
Méthode des éléments finis.

$\dot{u}_t$  et  $\dot{u}_r$  sont respectivement les vitesses de translation et de rotation aux noeuds choisis sur le segment souple.

Les matrices  $M$  et  $K$  peuvent être diagonalisées de la manière suivante :

$$(A.4.11) \quad \begin{cases} M^{-1} = T D^{-1} T^t \\ K = R^t K_D R^t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T = \begin{bmatrix} I_d + T_{12} \\ 0 & I_d \end{bmatrix} \\ R = \begin{bmatrix} I_d & R_{12} \\ 0 & I_d \end{bmatrix} \end{cases}$$

Nous trouvons ainsi les matrices  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $K_{D1}$  et  $K_{D2}$  en fonction de  $M$  et  $K$  :



$$(A.4.12a) \begin{cases} D_1 = M_{11} \\ D_2 = M_{22} - T_{12}^t M_{11} T_{12} = M_{22} - M_{12}^t M_{11}^{-1} M_{12} \\ T_{12} = -M_{11}^{-1} M_{12} \end{cases}$$

$$(A.4.12b) \begin{cases} K_{D1} = K_{11} \\ K_{D2} = K_{22} - R_{12}^t K_{11} R_{12} = K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12} \\ R_{12} = K_{11}^{-1} K_{12} \end{cases}$$

Nous associons les vecteurs états  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  respectivement aux multiports de matrice caractéristique  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $K_{D1}$ ,  $K_{D2}$ .

L'équation d'état est :

$$(A.4.13) \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_{D1} & 0 \\ 0 & 0 & -(T_{12} + R_{12})^t K_{D1} & -K_{D2} \\ D_1^{-1} & (T_{12} + R_{12}) D_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & D_2^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ T_{12}^t & I_d \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{E1} \\ S_{E2} \end{bmatrix}$$

Le système lent sans correction est obtenu pour  $\dot{p}_2 = 0$ , c'est-à-dire en enlevant  $D_2$  sur le bond-graph (Figure A.4.2) :

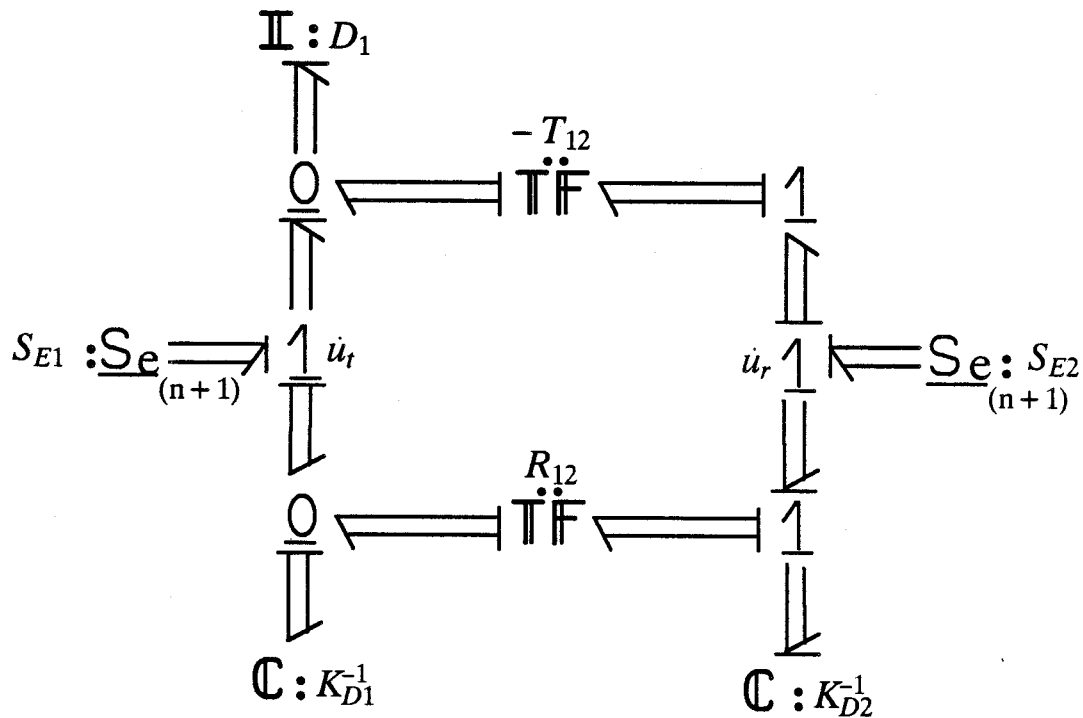


Figure A.4.2 : Modèle bond-graph réduit

L'équation d'état s'obtient simplement, soit à partir du bond-graph, soit à partir de l'équation A.4.13) avec  $\dot{p}_2 = 0$  :

$$(A.4.14a) \begin{cases} \dot{p}_1 = K_{D1} q_1 \\ \dot{q}_1 = \left[ I_d + (T_{12} + R_{12}) K_{D2}^{-1} (T_{12} + R_{12})^t K_{D1} \right]^{-1} \left[ D_1^{-1} p_1 + (T_{12} + R_{12}) K_{D2}^{-1} [T_2^t \ I_d] \begin{bmatrix} \dot{S}_{E1\ell} \\ \dot{S}_{E2\ell} \end{bmatrix} \right] \end{cases}$$

$$(A.4.14b) q_2 = -K_{D2}^{-1} (T_{12} + R_{12})^t K_{D1} q_1 + K_{D2}^{-1} [T_{12}^t \ I_d] \begin{bmatrix} S_{E1\ell} \\ S_{E2\ell} \end{bmatrix}.$$

Le système corrigé s'obtient à l'aide des méthodes présentées dans le chapitre III.

Pour la correction au premier ordre, nous changeons  $D_1$  par une nouvelle matrice symétrique  $D^c$ .

$$(A.4.15) D^c = D_1 + L_{12} L_{22}^{-1} D_2 L_{22}^{-1} L_{21}$$

$$\text{avec} \quad \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{D1} & 0 \\ (T_{12} + R_{12})^t K_{D1} & K_{D2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d & (T_{12} + R_{12}) \\ 0 & I_d \end{bmatrix}.$$

## ANNEXE 4 - CHAPITRE IV

## Cinématique d'un segment flexible

La configuration de chaque segment flexible dans la chaîne cinématique ouverte est identifiée en utilisant un ensemble de variables aux joints et de coordonnées élastiques en accord avec les hypothèses de Book. Nous prenons les notations de Maschke (1990).

La figure A4.3) représente les repères dans lesquels les variables sont exprimées.

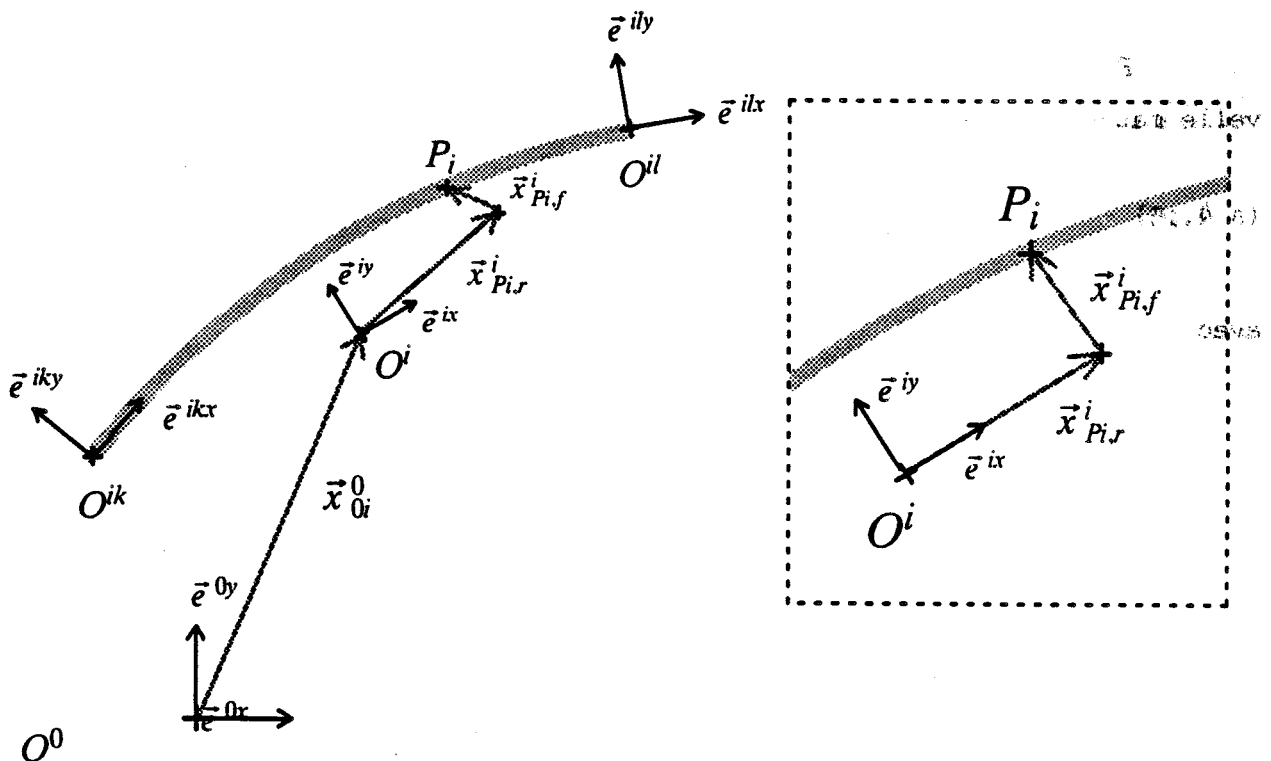


Figure A4.3 : Systèmes de coordonnées et repérage d'un point courant  $P_i$  de la poutre.

Le repère  $(O^0, \vec{e}^{0x}, \vec{e}^{0y})$  est le repère inertiel fixe. Au segment indicé par  $i$ , on lie un repère noté  $(O^i, \vec{e}^{ix}, \vec{e}^{iy})$  par rapport auquel on décrit les déformations de la poutre.

Pour pouvoir décrire les attaches du segment aux articulations, certains repères intermédiaires sont introduits. Ils sont liés à un noeud  $O^{ik}$  (c'est-à-dire un point matériel de la poutre) indexé par  $k$ , du segment  $i$ . On suppose que ces repères notés  $(O^{ik}, \vec{e}^{ikx}, \vec{e}^{iky})$  se déduisent par une rotation infinitésimale du repère  $(O^i, \vec{e}^{ix}, \vec{e}^{iy})$  attaché au solide  $i$ .

Le modèle bond-graph représentant les relations cinématiques planes d'une poutre déformable est représenté sur la figure A4.4)

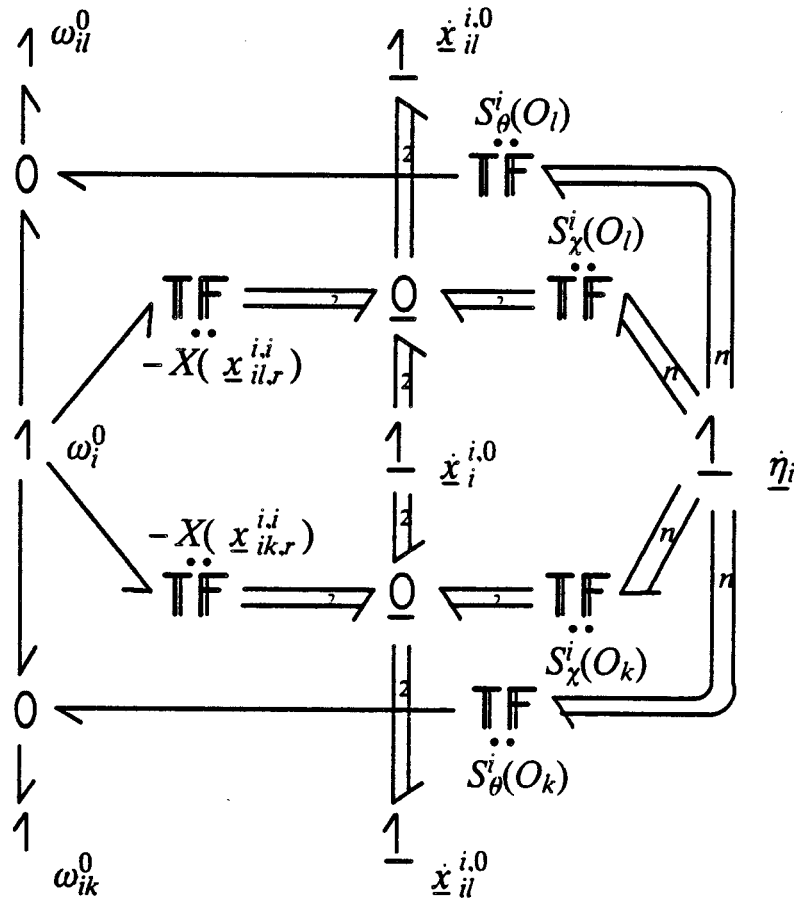


Figure A4.4 : modèle bond-graph cinématique d'un segment flexible

- $\underline{\eta}_i$  est le vecteur des coordonnées élastiques associées au segment  $i$ ,
- $S_{\chi}^i$  est la matrice de champ de déplacements supposés (fonctions de base de la variable d'espace).
- $S_{\theta}^i(P_i)$  est la matrice du champ de rotation supposée dépendante du champ de déplacement  $S_{\chi}^i$  (si pas d'hypothèses simplificatrices).

Les autres vecteurs et matrices correspondent aux éléments obtenus dans les relations décrivant le mouvement d'un segment rigide Bos (1986).

Des hypothèses simplificatrices conduisent à une structure de jonction similaire à celle de la figure A4.3) où tous les éléments transformateurs sont linéaires, à part ceux associés aux grands déplacements.

Le modèle dynamique s'obtient en considérant les fonctionnelles d'énergie.

Nous rappelons simplement les relations constitutives des éléments multiports définis pour chaque choix de champs de déplacement.

Le multiport inertiel est :

$$(A4.16) \quad M^* = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{x\theta} & M_{x\eta} \\ & M_{\theta\theta} & M_{\theta\eta} \\ \text{Sym.} & & M_{\eta\eta} \end{bmatrix}$$

où les sous matrices sont :

$$(A4.17) \quad \begin{cases} M_{\theta\theta} = \int_0^{\ell} \mu X(\underline{x}_p^i, i)^t X(\underline{x}_p^i, i) dx \\ M_{\theta\eta} = \int_0^{\ell} \mu X(\underline{x}_p^i, i)^t S_x^i dx \\ M_{x\theta} = \int_0^{\ell} \mu X(\underline{x}_p^i, i) dx \\ M_{\eta\eta} = \int_0^{\ell} \mu (S_x^i)^t S_x^i dx \\ M_{x\eta} = \int_0^{\ell} \mu (S_x^i)^t dx \\ M_{xx} = \int_0^{\ell} \mu I_d dx \end{cases}$$

où  $\mu$  est la masse linéique de la poutre.

Le multiport des forces gyroscopiques est

$$(A4.18) \quad EJS = \begin{bmatrix} EJS_{xx} & EJS_{x\theta} & EJS_{x\eta} \\ & 0 & EJS_{\theta\eta} \\ \text{Ansisym.} & & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} EJS_{\theta\eta} = \int_0^{\ell} -\mu X(\underline{x}_p^i, i)^t X(\dot{\theta}_{p_i} \vec{e}^z) S_x^i dx \\ EJS_{x\theta} = \int_0^{\ell} -\mu X(\dot{\theta}_{p_i} \vec{e}^z)^t X(\underline{x}_p^i, i) dx \\ EJS_{xx} = \int_0^{\ell} -\mu X(\dot{\theta}_{p_i} \vec{e}^z) dx \\ EJS_{x\eta} = \int_0^{\ell} -\mu X(\dot{\theta}_{p_i} \vec{e}^z)^t (S_x^i) dx \end{cases}$$

Le multiport capacitif a pour matrice de raideur :

$$(A4.19) \quad K_{\eta\eta} = \int_0^{\ell} (S_x^{i''})^t C^{-1} S_x^{i''} dx$$

où  $C^{-1} = EI$ ,

avec  $E$ , module d'élasticité de Young et  $I$  inertie de section de la poutre.

Ces trois multiports sont connectés aux jonctions 1 portant les vitesses de translations  $\dot{x}_1^i$ , de rotation  $\dot{\theta}_1^0$  et les vitesses de coordonnées de déformation  $\dot{\eta}_1$ .

Pour le cas où le champ de déplacement est de type "force-libre", les multiports sont bloc-diagonaux. La figure A4.5) représente le modèle bond-graph pour ce cas particulier. Par la suite, nous montrerons qu'il est toujours possible de se ramener à ce modèle mais avec des paramètres différents.

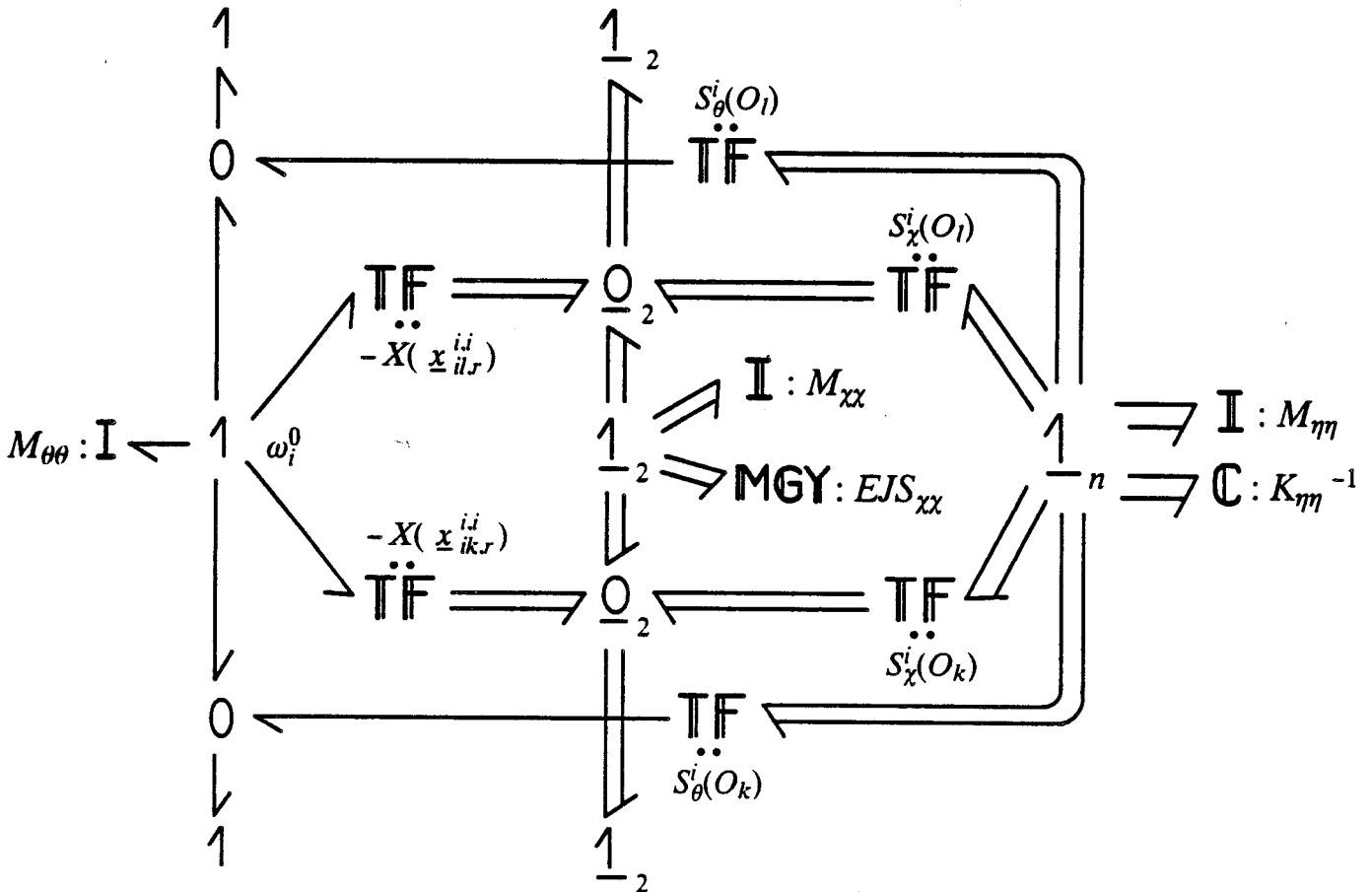


Figure A4.5 - Modèle bond-graph dynamique d'une poutre de Bernouilli-Euler avec des conditions aux limites "force-libre"

## Calcul des matrices de masse et de raideur - Analyse modale

La matrice de masse est

$$(A4.20) \quad M^* = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{x\theta} & M_{x\eta} \\ & M_{\theta\theta} & M_{\theta\eta} \\ \text{Sym.} & & M_{\eta\eta} \end{bmatrix}$$

Nous avons

$$(A4.21.a) \quad M_{xx} = \int_0^L \mu I_d d\xi = \mu L I_d = \begin{bmatrix} M \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$(A4.21.b) \quad M_{\theta\theta} = \int_0^L \mu \left( \xi - \frac{L}{2} \right)^2 d\xi = \frac{ML^2}{12}$$

$$(A4.21.c) \quad M_{\theta x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_0^L \mu \left( \xi - \frac{L}{2} \right) d\xi \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t$$

L est la longueur du segment flexible

M est la masse du segment flexible.

Nous calculons les autres sous-matrices pour différents choix de champ de déplacement.

- Conditions aux limites appuyé-appuyé

Nous utilisons les formes modales obtenues à l'aide de la base de décomposition appuyé-appuyé, c'est-à-dire

$$(A4.22) \quad g_1(\xi) = \sqrt{2} \sin \beta_1 \xi$$

Nous définissons les dimensions des différentes matrices

$$M_{\theta\eta} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad M_{x\eta} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n, \quad M_{\eta\eta} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$(A4.23) \quad M_{\theta\eta}(1, i) = \int_0^L \mu \left( \xi - \frac{L}{2} \right) g_i(\xi) d\xi$$

$$= - \frac{(ML \sqrt{2})}{2(\beta_i L)} [(-1)^i + 1]$$

Le premier indice indique le numéro de la ligne et le deuxième, le numéro de la colonne.

$$(A4.24a) \quad M_{\chi\eta}(1, i) = 0$$

$$(A4.24b) \quad M_{\chi\eta}(2, i) = \int_0^L \mu g_i(\xi) d\xi$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{(\beta_i L)} [(-1)^i - 1]$$

$$(A4.25) \quad \begin{cases} M_{\eta\eta}(i, i) = M \\ M_{\eta\eta}(i, j) = 0 \text{ pour } i \neq j \text{ (orthogonalité des formes modales)} \end{cases}$$

$M_{\theta\eta}$  et  $M_{\chi\eta}$  représentent le couplage entre les petits et grands déplacements.

Les transformateurs modaux sont calculés à partir de l'expression des formes modales.

Nous avons :

$$(A4.26a) \quad \begin{cases} g_j(0) = 0 \quad (\text{pas de translation car appui}) \\ \left. \frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = (\beta_j L) \frac{\sqrt{2}}{L} \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$(A4.26b) \quad \begin{cases} g_j(L) = 0 \quad (\text{pas de translation car appui}) \\ \left. \frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=L} = (-1)^j (\beta_j L) \frac{\sqrt{2}}{L} \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

En notant TF1 le multiport des transformateurs modaux en  $\xi = 0$  et TF2 celui en  $\xi = L$ , nous avons



$$(A4.27a) \quad TF1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{L}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\beta_1 L) \frac{\sqrt{2}}{L} & \dots & (\beta_n L) \frac{\sqrt{2}}{L} \end{bmatrix}$$

$$(A4.27b) \quad TF2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{L}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (-1)^1 (\beta_1 L) \frac{\sqrt{2}}{L} & \dots & (-1)^n (\beta_n L) \frac{\sqrt{2}}{L} \end{bmatrix}$$

### Matrice de rigidité

$$K^* \in \mathbb{R}^{n+3} \times \mathbb{R}^{n+3}$$

$$(A4.28) \quad \begin{cases} K^*(i+3, i+3) = EI \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 g_i(\xi)}{\partial \xi^2} \right]^2 d\xi \\ K^*(i+3, i+3) = EI \frac{(\beta_i L)^4}{L^3} \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Ailleurs,  $K^*$  a des valeurs nulles.

### - Conditions aux limites encastré-libre

Les formes modales sont

$$(A4.29) \quad g_i(\xi) = D_i [\cos \beta_i \xi - \text{Ch } \beta_i \xi + \gamma_i [\sin \beta_i \xi - \text{Sh } \beta_i \xi]]$$

avec 
$$\gamma_i = \frac{\sin \beta_i L - \text{Sh } \beta_i L}{\cos \beta_i L + \text{Ch } \beta_i L}$$

$D_i$  est un coefficient de normalisation. Dans ce cas précis, il est difficilement calculable (il vaut pratiquement 1), nous le prendrons donc égal à 1 dans la suite de l'étude).

Nous faisons les mêmes hypothèses que pour le cas précédent.

$$(A4.30) \quad M_{\theta\eta}(1, i) = \frac{2M}{(\beta_i L)} \gamma_i$$

$$(A4.31) \quad \begin{cases} M_{\chi\eta}(1,i) = 0 \\ M_{\chi\eta}(2,i) = -\frac{ML}{(\beta_1 L)} \left[ \frac{2}{(\beta_1 L)} + \gamma_1 \right] \end{cases}$$

Les transformateurs modaux se calculent de la même manière que précédemment.

$$(A4.32) \quad \zeta_i(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial g_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \text{ car nous avons un encastrement}$$

$$(A4.33a) \quad TF1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -L/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A4.33b) \quad TF2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & L/2 & t_{21}^1 & \dots & t_{21}^n \\ 0 & 0 & 1 & t_{22}^1 & \dots & t_{22}^n \end{bmatrix}$$

avec  $t_{21}^j = D_j [(\cos \beta_j L - \text{Ch } \beta_j L) + \gamma_j (\sin \beta_j L - \text{Sh } \beta_j L)]$

$t_{22}^j = D_j \beta_j [-\sin \beta_j L - \text{Sh } \beta_j L + \gamma_j (\cos \beta_j L - \text{Ch } \beta_j L)]$

$$j = 1, \dots, n$$

$$K^* \in \mathbb{R}^{n+3} \times \mathbb{R}^{n+3}$$

$$(A4.34) \quad K^*(i+3, i+3) = \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 g_1(\xi)}{\partial \xi^2} \right]^2 d\xi = E I \frac{(\beta_1 L)^4}{L^3} \quad i = 1, \dots, n$$

Ailleurs,  $K^*$  a des valeurs nulles.

## ANNEXE 6 - CHAPITRE IV

## Calcul des matrices de masse et raideur équivalentes par la méthode des éléments finis

La matrice de masse équivalente est

$$(A4.35) \quad M^* = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{x\theta} & M_{x\eta} \\ & M_{\theta\theta} & M_{\theta\eta} \\ \text{Sym.} & & M_{\eta\eta} \end{bmatrix}$$

Chacune de ces matrices doit être calculée pour un élément. Nous utilisons pour cela les fonctions d'interpolations cubiques d'Hermite. Pour le segment complet, il suffit d'assembler les matrices correspondant à chaque élément d'une manière semblable à celle du calcul de  $M_T$  et  $K_T$  (chapitre IV, partie I).

Les matrices  $M_{xx}$ ,  $M_{x\theta}$  et  $M_{\theta\theta}$  sont les mêmes qu'avec la méthode d'analyse modale car elles sont indépendantes du choix des formes modales. Nous supposons que la densité du segment est uniforme. Par contre, la longueur et la section de chaque élément  $i$  peuvent être différentes. Nous notons  $\mu^i = \rho S^i$  où  $S^i$  est la section de l'élément  $i$ .

$G = [g_1, g_2, g_3, g_4]^t$  est le vecteur comportant les fonctions d'interpolation cubiques d'Hermite.

Le segment souple est décomposé en  $n$  éléments.

#### Calcul de $M_{x\eta}$

$$M_{x\eta} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n+2}$$

La première ligne de  $M_{x\eta}$  est nulle, nous ne faisons donc que le calcul de la deuxième ligne.

#### Pour l'élément $i$

L'indice  $i$  sur les différentes matrices correspond à celles calculées pour l'élément  $i$

$$(A4.36) \quad {}^i M_{x\eta} = \rho \int_0^{\ell_i} S^i {}^i G^t(\eta) d\eta$$

Après calcul, nous obtenons

$$(A4.37) \quad {}^i M_{x\eta} = {}^i M \left[ \frac{1}{2}, \frac{{}^i L}{12}, \frac{1}{2}, -\frac{{}^i L}{12} \right]$$

Le regroupement entre  ${}^i M_{x\eta}$  et  ${}^{i+1} M_{x\eta}$  s'obtient en sommant les troisième et quatrième colonnes de  ${}^i M_{x\eta}$  avec respectivement les première et deuxième colonnes de  ${}^{i+1} M_{x\eta}$  (noeuds communs entre les deux éléments).

#### Pour le segment complet

La matrice  $M_{x\eta}$  s'obtient à l'aide de la procédure précédente pour l'ensemble des éléments.

$M_{x\eta}(i,j)$  désigne l'élément de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de  $M_{x\eta}$

Nous obtenons :

$$(A4.38a) \quad M_{x\eta}(1,i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 2n+2$$

$$(A4.38b) \quad \begin{cases} M_{x\eta}(2,1) = \frac{{}^1 M}{2} \\ M_{x\eta}(2,2) = \frac{{}^1 L^1 M}{12} \\ M_{x\eta}(2,2i+1) = \frac{{}^i M}{2} + \frac{{}^{i+1} M}{2} & \text{pour } i = 1, \dots, n-1 \\ M_{x\eta}(2,2i+1) = -\frac{{}^i L^i M}{12} + \frac{{}^{i+1} L^{i+1} M}{12} & \text{pour } i = 1, \dots, n-1 \\ M_{x\eta}(2,2n+1) = \frac{{}^n M}{2} \\ M_{x\eta}(2,2n+2) = -\frac{{}^n L^n M}{12} \end{cases}$$

#### Calcul de $M_{\eta\eta}$

La matrice  $M_{\eta\eta}$  est la matrice de masse  $M_T$  du segment flexible définie dans le chapitre 3.

$$M_{\eta\eta} \in \mathbb{R}^{2n+2} \times \mathbb{R}^{2n+2}$$

Pour un élément nous avons :

$$(A4.39) \quad {}^i M_{\eta\eta} = \frac{{}^i M}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 {}^i L & 54 & -13 {}^i L \\ 22 {}^i L & 4 {}^i L^2 & 13 {}^i L & -3 {}^i L^2 \\ 54 & 13 {}^i L & 156 & -22 {}^i L \\ -13 {}^i L & -3 {}^i L^2 & -22 {}^i L & 4 {}^i L^2 \end{bmatrix}$$



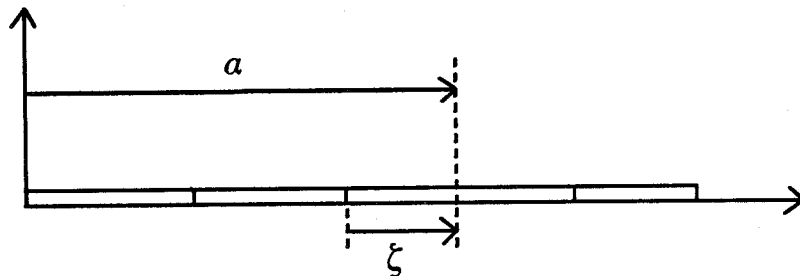
En notant  ${}^i M_{\eta\eta} = \begin{bmatrix} {}^i R & {}^i S \\ {}^i S^t & {}^i T \end{bmatrix}$ , nous obtenons :

$$(A4.40) \quad \begin{cases} M_{\eta\eta}(1:2, 1:4) = [{}^1 R & {}^1 S] \\ M_{\eta\eta}(2i+1 : 2i+2, 2i-1 : 2i+4) = [{}^i S^t & {}^i T & {}^{i+1} R & {}^{i+1} S] \\ M_{\eta\eta}(2n+1:2n+2, 2n-1:2n+2) = [{}^n S^t & {}^n T] \quad i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

La notation  $M_{\eta\eta}(i:j, k:l)$  indique que nous prenons dans  $M_{\eta\eta}$  les lignes  $i$  à  $j$  et les colonnes  $k$  à  $l$ . Nous avons bien entendu  $j > i$  et  $l > k$ .

### Calcul de $M_{\theta\eta}$

Le calcul de  $M_{\chi\theta}$  est plus complexe car il fait intervenir deux variables.



### Élément $i$

Pour l'élément  $i$ , nous avons

$$(A4.41) \quad {}^i M_{\theta\eta} = \int_0^{\ell_i} \rho S^i \left( \alpha - \frac{L}{2} \right) {}^i G(\xi) d\xi$$

$$\text{où } \alpha = \sum_{j=1}^{i-1} {}^j L + \xi$$

$$L = \sum_{j=1}^n {}^j L$$

Nous obtenons

$$(A4.42) \quad \begin{cases} {}^i M_{\theta\eta} = \left( \sum_{j=1}^{i-1} jL - \frac{L}{2} \right) \int_0^{\ell_1} \rho^i S^i G(\xi) d\xi + \int_0^{\ell_1} \rho^i S \xi^i G(\xi) d\xi \\ {}^i M_{\theta\eta} = \left( \sum_{j=1}^{i-1} jL - \frac{L}{2} \right) {}^i M \begin{bmatrix} 1 & {}^i L & 1 & -{}^i L \\ 2 & 12 & 2 & 12 \end{bmatrix} + {}^i M \begin{bmatrix} 3{}^i L & {}^i L^2 & 7{}^i L & -{}^i L^2 \\ 20 & 30 & 20 & 20 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Nous séparons  ${}^i M_{\theta\eta}$  en une somme de deux termes en notant

$$(A4.43) \quad {}^i M_{\theta\eta} = {}^i T_{\theta\eta} + {}^i S_{\theta\eta}$$

### Segment souple

Pour le segment complet, nous obtenons

$$(A4.44) \quad M_{\theta\eta} = T_{\theta\eta} + S_{\theta\eta}$$

avec

$$(A4.45) \quad \begin{cases} T_{\theta\eta}(1,1) = -\frac{L}{2} \frac{{}^1 M}{2} \\ T_{\theta\eta}(1,2) = -\frac{L}{2} \frac{{}^1 M^1 L}{12} \\ T_{\theta\eta}(1,2i+1) = \left( \sum_{j=1}^{i-1} jL - \frac{L}{2} \right) \cdot \frac{{}^i M}{2} + \left( \sum_{j=1}^i jL - \frac{L}{2} \right) \frac{{}^{i+1} M}{2} \quad i=1, \dots, n-1 \\ T_{\theta\eta}(1,2i+2) = \left( \sum_{j=1}^{i-1} jL - \frac{L}{2} \right) \cdot \left[ -\frac{{}^i L^i M}{12} \right] + \left( \sum_{j=1}^i jL - \frac{L}{2} \right) \left[ \frac{{}^{i+1} L^{i+1} M}{12} \right] \quad i=1, \dots, n-1 \\ T_{\theta\eta}(1,2n+1) = \left( \sum_{j=1}^{n-1} jL - \frac{L}{2} \right) \frac{{}^n M}{2} \\ T_{\theta\eta}(1,2n+2) = \left( \sum_{j=1}^{n-1} jL - \frac{L}{2} \right) \cdot \left( -\frac{{}^n L^n M}{12} \right) \end{cases}$$

$$(A4.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{\theta\eta}(1,1) = {}^1M \cdot \frac{3^1L}{20} \\ S_{\theta\eta}(1,2) = {}^1M \cdot \frac{{}^1L^2}{30} \\ S_{\theta\eta}(1,2i+1) = \frac{7}{20} {}^iL^iM + \frac{3 {}^{i+1}L^{i+1}M}{20} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ S_{\theta\eta}(1,2i+2) = -\frac{{}^iL^{2i}M}{20} + \frac{({}^{i+1}L)^2 {}^{i+1}M}{30} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ S_{\theta\eta}(1,2n+1) = \frac{7 {}^nL^nM}{20} \\ S_{\theta\eta}(1,2n+2) = -\frac{({}^nL)^2 {}^nM}{20} \end{array} \right.$$

La matrice de raideur est

$$(A4.47) \quad K^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Eq. 48)

Eléments i

$$(A4.48) \quad {}^iK_{\eta\eta} = \frac{{}^iE^i I}{{}^iL^3} \begin{bmatrix} 12 & 6^iL & -12 & 6^iL \\ 6^iL & 4^iL^2 & -6^iL & 2^iL^2 \\ -12 & -6^iL & 12 & -6^iL \\ 6^iL & 2^iL^2 & -6^iL & 4^iL^2 \end{bmatrix}$$

En notant

$$(A4.49) \quad {}^iK_{\eta\eta} = \begin{bmatrix} {}^iA & {}^iB \\ {}^iB^t & {}^iC \end{bmatrix}$$

Nous obtenons

$$(A4.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{\eta\eta}(1:2,1:4) = [{}^1A \ {}^1B] \\ K_{\eta\eta}(2i+1:2i+2,2i-1:2i+4) = [{}^iB^t \ {}^iA + {}^{i+1}C \ {}^{i+1}B] \quad i=1, \dots, n-1 \\ K_{\eta\eta}(2n+1:2n+2,2n-1:2n+2) = [{}^nB^t \ {}^nC] \end{array} \right.$$

Calculs des transformateurs modaux

$$TF1 \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{2n+5} \quad TF2 \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{2n+5}$$

$$(A4.50a) \quad TF1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L/2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A4.50b) \quad TF2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les réels 1 sur les colonnes 4, 5, 2n+4 et 2n+5 de TF1 et TF2 tiennent compte des translations et rotations aux extrémités du segment.

Introduction des conditions aux limites homogènes

Il suffit d'enlever les lignes et colonnes dans  $M^*$ ,  $K^*$  TF1 et TF2 correspondant aux conditions aux limites.

Par exemple pour un encastrement en  $\xi=0$ , il faut enlever les quatrième et cinquième lignes et colonnes de  $M^*$  et  $K^*$ , et les quatrième et cinquième colonnes de TF1 et TF2.



## CONCLUSION GENERALE

L'analyse des systèmes dynamiques à l'aide des méthodes habituelles s'avère parfois difficile car les outils mathématiques ou graphiques ne sont pas nécessairement bien adaptés ou assez riches en informations. Le langage bond-graph s'avère être un langage graphique de modélisation et de représentation de type réseau au même titre que d'autres méthodes avec l'avantage de renfermer plus d'informations, facilement accessibles. Il est aussi un outil d'analyse, essentiellement basé sur les concepts de structure et de causalité, et un outil de conception dans le sens où il est possible de séparer et de localiser les propriétés des objets physiques et donc de décrire ces objets comme un système de propriétés élémentaires reliées entre elles. Une modification d'une partie d'un modèle ne remet pas en cause la représentation de l'autre part du modèle.

C'est à ce titre que ce mémoire propose une démarche pour l'analyse des propriétés structurelles, telles que la commandabilité et l'observabilité, des systèmes dynamiques linéaires, *Sueur et Dauphin Tanguy* (1988), (1989), (1990). L'accent est mis sur la simplicité des méthodes qui sont purement graphiques et facilement utilisables à l'aide des méthodes de l'informatique telles que l'intelligence Artificielle. Une généralisation peut être envisagée pour les systèmes non linéaires.

De nos jours, la complexité des modèles proposés s'est traduite par l'apparition de nouveaux concepts, tels la méthode des perturbations singulières qui permet de simplifier les modèles, par l'analyse et la séparation des dynamiques, tout en gardant une bonne approximation du système initial. Ce mémoire propose des solutions pour le découplage de certaines catégories de systèmes dynamiques *Sueur et Dauphin Tanguy* (1990). Différentes procédures causales proposent, soit un découplage direct à partir du modèle bond-graph, soit un découplage associé à un changement de variables lorsque le système n'est pas exprimé de manière explicite. Une interprétation physique des résultats est plus aisée qu'à l'aide d'autres méthodes. Une extension à une plus grande catégorie de systèmes dynamiques semble possible.

Enfin, le langage bond-graph a permis une approche unifiée de la modélisation des robots à segments flexibles. Par diverses méthodes de discrétisation de la mécanique des structures, nous avons rappelé les modèles structurés des poutres de Bernouilli-Euler. L'application de la méthode des perturbations singulières conduit à des modèles simplifiés, à l'aide d'une interprétation graphique directe sur le modèle bond-graph. La dernière étape nous a permis de mettre en évidence graphiquement, pour chaque hypothèse de modélisation et procédure de discrétisation, un élément bond-graph appelé multiport de flexibilité résiduel, qui tient compte de la flexibilité de la partie du modèle négligé lors de la simplification de modèle. Nous avons ainsi généralisé le concept de multiport de flexibilité résiduel jusqu'alors défini uniquement pour les modèles obtenus dans la base force-libre par la méthode d'analyse modale.

L'étude de quelques méthodes de modélisation et d'analyse des systèmes dynamiques à l'aide de la représentation par bond-graph est proposée dans ce mémoire. Il apparaît que les résultats sont équivalents à ceux obtenus par d'autres méthodes pour d'autres modes de représentation. La simplicité et le sens physique des démarches proposées ont été largement démontrés. Le champ d'investigation semble encore très vaste.

Enfin  
de l'association  
de l'association

de l'association  
de l'association  
de l'association  
de l'association

de l'association  
de l'association  
de l'association  
de l'association  
de l'association

**BIBLIOGRAPHIE**

ABED, F.H., SILVA-MADRIZ, R.I. (1987)

"Controllability of multiparameters singularly perturbed system".  
10<sup>th</sup> World Congress on Automatic control.  
Vol. 8 IFAC, July 27-31, Munich, pp. 137-140.

ALDHAHERI, R.W., KHALIL, H.K. (1989).

"A Real Schur Form Method for Modeling Singularly Perturbed Systems".  
IEEE trans. Aut. Control, vol. 34, n°8, pp. 856-861.

ANDERSON, L. (1978).

"Decoupling of two-time scale linear systems".  
Proc. JACC, Philadelphia, pp. 153-163.

ANDERSON, B.D.O., HONG, H. (1982).

"Structural Controllability and matrix nets".  
Int. J. Control, vol. 35, n° 3, pp. 397-416.

ARDEMA, M.D. (1983).

"Solution algorithms for non-linear singularly perturbed optimal control problems".  
Optimal Control applications & methods, vol. 4, pp. 283-302.

AVRAMOVIC, B. (1979).

"Subspace iteration approach to the time scale separation".  
Proc. of IEEE Conf. on Dec. and Control, pp. 684-687.

AVRAMOVIC, B., KOKOTOVIC, P.V., WINKELMAN, J.R., CHOW, J.H. (1980).

"Area Decomposition for Electromechanical Models of Power System".  
Automatica, Vol. 16, pp. 637-648.

BALLAS, M.J. (1978).

"Feedback control of flexible systems".  
IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-23, n°4, pp. 673-679.

BALLAS, M.J. (1982a).

"Trends in Large Space Structure Control Theory: Fondest Hopes, Wildest Dreams".  
IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-27, n°3, pp. 522-535.

BALLAS, M.J. (1982b).

"Reduced-Order Feedback Control of distributed parameter Systems via Singular Perturbation Methods".

Journ. of Math. Analysis and App., n° 87, 281-294.

BELL, A.C., MARTENS, H.R. (1974)

"A Comparison of Linear Graphs and Bond-Graphs in the Modeling Process".

Automatic Control Conference, pp. 777-794.

BENSOUSSAN, A. (1981)

"Singular perturbation results for a class of stochastic control problems".

IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-26, 1071.

BONDERSON, L.S. (1975).

Vector Bond-graphs applied to One-Dimensional Distributed Systems.

Journ. of Dyn. Syst., Meas., and Cont., ASME, pp. 75-82.

BOOK, W.J. (1984)

"Recursive Lagrangian dynamics flexible manipulator arms".

Int. J. Robotics Res., 3(3), pp. 379-392.

BOS, A.M., BREEVELD, P.C. (1985)

"1985 Update of the Bond-Graph Bibliography".

Journ. of the Franklin Inst., vol. 319, n°1/2, pp. 269-286.

BOS, A.M. (1986).

Modelling Multibody Systems in Terms of Multibond-graph, with Application to a Motorcycle.

Thesis Enschede, The Netherlands.

BREEDVELD, P.C. (1984)

"Essential Gytrators and Equivalence Rules for 3-port Junction Structures".

Journ. of the Franklin Inst., vol. 318, n°2, pp. 77-89.

BROWN, F.T. (1972)

"Direct Application of the Loop Rule to Bond Graphs".

Journ. of Dyn. Syst., Meas. and Control, Sept. 1972, pp. 253-261.

BURROWS, C.R., SAHINKAYA, M.N. (1981).

A new algorithm for determining structural controllability.  
Int. J. Control., vol. 33, n° 2, pp. 379-392.

CALISE, A.J. (1976).

"Singular Perturbation Methods for Variational Problems in Aircraft Flight".

IEEE trans. Aut. Control, vol. AC-21, n°3, pp. 345-353.

CHOW, J.H. (1977).

"Preservation of controllability in linear time-invariant perturbed systems".

Int. J. Control, vol. 25, n°5, 697-704.

CHOW, J.H. (1982).

"Time Scale Modeling of Dynamic Networks with Application to Power Systems".

Lecture Notes in Control Information Science 46. Springer, Berlin.

CHOW, J.H., ALLEMONG, J.J., KOKOTOVIC, P.V. (1982).

"Singular Perturbation Analysis of Systems with Sustained High Frequency Oscillations".

Automatica, n° 14, pp. 271-279.

CHOW, J.H., KOKOTOVIC, P.V. (1976).

"A decomposition of near-optimum regulators for systems with slow and fast modes".

IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-21, pp.701-705.

CHOW, J.H., KOKOTOVIC, P.V. (1978).

"Near-optimal feedback stabilization of a class of non linear singularly perturbed systems".

SIAM, J. Control and Optimization, Vol. 16, n°5, pp. 756-770.

CHOW, J.H., KOKOTOVIC, P.V. (1981).

"A two stage Lyapunov-Bellman feedback design of a class of non linear systems".

IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-26, n°3, pp. 656-663.

CHOW, J.H., KOKOTOVIC, P.V. (1985).

"Time Scale Modeling of Sparse Dynamic Networks".

IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-30, n°8, pp. 714-722.

CODERCH, M., WILLSKY, A.S., Sastry, S.S., CASTANON, D.A. (1983).

"Hierarchical aggregation of linear systems with multiple time scales".  
IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-28, pp. 1017-1030.

DAUPHIN TANGUY, G. (1983)

"Sur la représentation multi-modèle des systèmes singulièrement perturbés".

Thèse Docteur es Sciences Physiques. USTL, Lille.

DAUPHIN TANGUY, G., BORNE, P., LEBRUN, M. (1985)

"Order Reduction of Multi-time Scale Systems using Bond-Graphs, the Reciprocal System and the Singular Perturbation Method".

Journ. of the Franklin Inst., vol. 319, n°1/2, pp. 157-171.

CIJASA

DAUPHIN TANGUY, G., ROTELLA, F. (1988).

"Improvement in Near-optimum Regulators for Singularly Perturbed Systems".

Journal of the Franklin Institute, vol. 325, n°6, pp. 745-754.

DAVISON, F.J. (1977).

"Connectability and Structural Controllability of Composite Systems".  
Automatica, Vol. 13, pp. 109-123.

DE LUCA, A. (1988).

"Dynamic control of robots with joint elasticity".

Proceedings, 1988, IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 152-159.

DESCUSSE, J., LAFAY, J.F., MALABRE M. (1988).

"Solution to Morgan's Problem"

IEEE trans. Aut. Cont., vol. 33, n° 8, pp. 732-739.

DESOER, C.A., LIN, C.A. (1985).

"A comparative study of linear and non linear MIMO feedback configuration".

Int. J. Systems Sci., vol. 16, n° 7, pp. 789-813.

EVANS, F.J., SCHIZAS, C. (1981).

"The structural aspects of pole assignment".

Int. J. Control, vol. 34, n° 5, pp. 991-1015.

FENICHEL, N. (1979).

"Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations".

FERNANDO, K.V., NICHOLSON, H. (1982).

"Singular Perturbational Model Reduction of Balanced Systems".  
IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-27, n° 2, pp. 466-468.

FERNANDO, K.V., NICHOLSON, H. (1982).

"Singular Perturbational Model Reduction in the Frequency Domain".  
IEEE trans. Aut. Control, vol. AC-27, n°4, pp. 969-970.

FICOLA, A., MARINO, R., NICOSIA, S. (1983).

"A singular perturbation approach to the dynamic control of elastic robots".

Proc. 21<sup>st</sup> Allerton Conf. Comm., Control, Comput., University of Illinois, pp. 335-342.

FOSSARD, A.G., MAGNI, J.S. (1980).

"Frequency analysis of singularly perturbed systems with state or output control".

J. Large Scale Systems, n°1, pp. 223-228.

FRANÇOIS, C. (1981).

Les méthodes de perturbation en mécanique.  
ENSTA.

FRANKSEN, O.I., FALSTER, P., EVANS, F.J. (1979).

"Structural aspects of controllability and observability, parts I and II.

Journ. of the Franklin Institute, 308, pp. 79-124.

GEORGIU, A., FLOUDAS, C.A. (1990).

Structural properties of Large Scale Systems.  
Int. J. Control, Vol. 51, n° 1, pp. 169-187.

GILBERT, E.G. (1963).

"Controllability and observability in multivariable control systems".  
J. S.I.A.M. Control, Ser. A, vol. 2, n°1.



GLOVER, K., SILVERMAN, L.M. (1976).

"Characterization of Structural Controllability".

IEEE trans. Aut. Cont., pp. 334-337.

HASTINGS, G.G., DORSEY, J.F., BOOK, W.J. (1987).

"Application of balanced realizations to estimate model order requirement for flexible manipulators".

ASME Winter Annual Meeting, Boston.

HAYAKAWA, Y., SILJAK, D.D. (1988).

"On Almost Invariant Subspaces of Structured Systems and Decentralized Control".

IEEE Trans. Aut. Control, vol. 33, n° 10, pp. 931-939.

HOGAN, N., FASSE, E.D. (1988)

"Conservation Principles and Bond-Graph Junction Structures"

ASME WAM, pp. 9-13.

HOPPENSTEADT, F. (1971).

"Properties of Solutions of Ordinary Differential Equations with Small Parameters".

Comm. on Pure and App. Math., Vol. 24, pp. 807-840.

HUTTON, M.F., FRIEDLAND, B. (1975).

"Routh Approximations for Reducing Order of Linear Time-invariant Systems".

IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-20, n° 3, pp. 329-337.

IOANNOU, P., KOKOTOVIC, P.V. (1982).

"An Asymptotic Error Analysis of Identifiers and Adaptive Observers in the Presence of Parasites".

IEEE Trans. Aut. Control, AC-27, 921.

JOHNSTON, R.D., BARTON, G.W., BRISK, M.L. (1984).

"Determination of the generic rank of structural matrices".

Int. J. Control, vol. 40, n° 2, pp. 257-264.

JOHNSTON, R.D., BARTON, G.W. (1985).

"Structural equivalence and model reduction".

Int. J. Control, vol. 41, n°6, pp. 1477-1491.

KALMAN, R.F. (1963).

"Mathematical description of linear dynamical systems".

J. S.I.A.M. Control, Ser. A, vol. 1, n°2, pp. 153-192.

KARNOPP, D. (1966).

Coupled Vibratory-System Analysis, using Dual Formulation.

Journal of Acoust. Soc. of Amer., Vol. 40, n°2, pp. 380-844.

KARNOPP, D. (1968).

Computer Representation of Continuous Vibratory Systems using Normal Modes and Bond-Graph Techniques.

Simulation Council Inc., pp. 129-135.

KARNOPP, D. (1975).

Lumped Parameter Models of Acoustic Filters using Normal Modes and Bond-Graphs.

Journ. of Sound and Vib., 42(4), pp. 437-446.

KARNOPP, D. (1986).

Complementary Formulations in Vibrations: Bond-Graph Structures and Modal Transformations.

Journ. of the Franklin Inst., Vol. 310, n°6, pp. 303-316.

KARNOPP, D. (1988)

"Structure in Dynamic System Models. Why a Bond-Graph is more Informative than its Equations ?"

IMACS, 12<sup>th</sup> World Congress, July 18-22, 1988, Paris, France, pp. 1-4.

KARNOPP, D., ROSENBERG, C. (1975)

"System Dynamics: a Unified Approach".

John Wiley and Sons, N.Y.

KARNOPP, D., ROSENBERG, C. (1983)

"Introduction to Physical System Dynamics"

Mac Graw Hill.

KHALIL, H.K. (1984).

"Time Scale Decomposition of Linear Implicite Singularly Perturbed Systems".

IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-29, n°11, pp. 1054-1056.

KHALIL, H.K. (1987).

"Output Feedback Control of Linear Two-time Scale Systems".

IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-32, n°9, pp. 784-792.

KHALIL, H.K. (1987).

"Stability Analysis of Nonlinear Multiparameter Singularly Perturbed Systems".

IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-32, n°3, pp. 260-263.

KHALIL, H.K., HU, Y.N. (1989).

"Steering Control of Singularly Perturbed Systems: A Composition Control Approach".

Automatica, Vol. 25, n°1, pp. 65-75.

KHORRAMI, F., ÖZGÜNER, Ü. (1988a).

"Perturbation Methods in Control of Flexible Link Manipulators".

IEEE International Conference on Robotics and Automation, Proceedings pp. 310-315.

KHORRAMI, F., ÖZGÜNER, Ü. (1988b).

"A Singular Perturbation Analysis of a Distributed Parameter Model of Flexible Manipulators".

Proceedings of the American Control Conference, Atlanta, GA, June 1988, pp. 1704-1709.

KHORASANI, K., SPONG, M.W. (1985).

"Invariant Manifolds and their Application to Robot Manipulator with Flexible Joints".

IEEE International Conference on Robotics and Automation, Proceedings, pp. 978-983.

KHORASANI, K. (1988).

"An Optimal Feedback Regulation of Nonlinear Singularly Perturbed Systems via Slow Manifold Approach".

Automatica, vol. 24, n°1, pp. 105-108.

KHORASANI, K. (1989).

"A Slow Manifold Approach to Linear Equivalent of Nonlinear Singularly Perturbed Systems".

Automatica, vol. 25, n°2, pp. 301-306.

KOKOTOVIC, P.V. (1975).

"A Riccati equation for Block-diagonalization of Ill-conditioned Systems".

IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-20, pp. 812-814.

KOKOTOVIC, P.V. (1981).

Subsystems, time-scales and multimodelling.

Automatica, Vol. 17, n°6, pp. 789-795.

KOKOTOVIC, P.V., ALLEMONG, J.J., WINKELMAN, J.R., CHOW, J.H. (1980).

"Singular Perturbation and Iterative Separation of Time Scales".

Automatica, Vol. 16, pp. 23-33.

KOKOTOVIC, P.V., AVRAMOVIC, B., CHOW, J.H., WINKELMAN, J.R. (1982).

"Coherency-based decomposition and aggregation".

Automatica, Vol. 18, n°1, pp. 47-56.

KOKOTOVIC, P.V., HADDAD, A.H. (1975).

"Controllability and Time-Optimal Control of Systems with Slow and Fast Modes".

IEEE Trans. Aut. Control, pp. 111-113.

KOKOTOVIC, P.V., KHALIL, H.K., O'REILLY, J. (1986).

Singular Perturbation method in control: Analysis and Design.

Academic Press Inc. London LDT 1986.

KOKOTOVIC, P.V., MARINO, R. (1986).

"On Vanishing Stability Regions in Nonlinear Systems with High-gain Feedback".

IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-31, n° 10, pp. 967-970.

KOKOTOVIC, P.V., O'MALLEY, R.E., SANNUTI, P. (1976).

"Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory".

An overviews Automatica, 12, pp. 123-132.

KOKOTOVIC, P.V., SANNUTI, P. (1968).

"Singular Perturbation Method for Reducing the Model Order in Optimal Control Design".

IEEE Trans. Aut. Control, 13, pp. 377-384.

KRISHNAN, H., VIDYASAGAR, M. (1988).

"Control of a Single-link Flexible Beam using a Hankel-nor-Based Reduced Order Model".

IEEE International Conference on Robotics and Automation, Proceedings, pp. 9-14.

LEBRUN, M. (1985).

The Use of Modal Analysis Concepts in the Simulation of Pipeline Transients.

Journ. of the Franklin Inst., Vol. 319, n° 1/2, pp. 137-156.

LIN, C.T. (1974).

"Structural Controllability".

IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-19, n° 3, pp. 201-208.

LIN, C.T. (1977).

"System Structure and Minimal Structure Controllability".

IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-22, n° 5, pp. 855-862.

LIONS, J.L. (1978).

"Asymptotic Methods in the Optimal Control of Distributed Systems".

Automatica, vol. 14, pp. 199-211.

LITZ, L. (1980a).

Proc. IFAC, Toulouse Symp. Large Scale Systems, ed. A. Titli, M.G. Singh (New York, Pergamon Press), pp. 195-202.

LITZ, L. (1980b).

Proc. Systems Analysis and Simulation, ed. A. Sydow (Berlin: Akademie-Verlag), pp. 230-234.

LITZ, L., ROTH, H. (1981).

"State Decomposition for Singular Perturbation Order Reduction - A Modal Approach".

Int. Journal of Control, Vol. 34, n°5, pp. 937-954.

LOCATELLI, A. (1976).

"State Observation and Output Feedback Stabilization of Linear Singularly Perturbable Systems".

LSS Theory and Applications.

Proceeding of the IFAC Symposium, UDINE.

LUSE, D.W. (1986).

"Frequency Domain Results for Systems with Multiple Time Scales"  
IEEE Trans. on Automa. Control, Vol. AC-31, n°10, pp. 918-924.

LUSE, D.W., KHALIL, H.K. (1985).

"Frequency Domain Results for Systems with Slow and Fast Dynamics".  
IEEE Trans. on Automa. Control, vol. AC-30, n°12, pp. 1171-1178.

MAGNI, J.F. (1981).

Analyse et commande des systèmes à plusieurs échelles de temps.  
Thèse D.I./E.N.S.A.E., Toulouse.

MAGNI, J.F., FOSSARD, A.J. (1982).

"Commande en deux étapes des systèmes linéaires à deux dynamiques".  
R.A.I.R.O. Automatique/Systems Analysis and Control, Vol. 16, n°1,  
pp. 25-38.

MARGOLIS, D.L. (1976).

Finite Mode Bond-Graph Representation of Vehicle-Guideway Interaction  
Problems.  
Journ. of the Franklin Inst., Vol. 302, n°1, pp. 1-17.

MARGOLIS, D.L. (1978).

Bond-Graphs, Normal Modes and Vehicular Structures.  
Vehicle System Dynamics, Vol. 7, pp. 49-63.

MARGOLIS, D.L. (1980).

An Algorithm for Incorporating Subsystem Modes into Overall Dynamic Sys-  
tem Models.  
Journ. of the Franklin Inst., Vol. 310, n°2, pp. 107-117.

MARGOLIS, D.L. (1980).

Dynamical Models for Multidimensional Structures using Bond-Graphs.  
Journ. of Dyn. Syst., Meas., and Control, ASME, Vol. 102, pp. 180-187.

MARGOLIS, D.L. (1985).

A Survey of Bond-Graph Modeling for Interacting Lumped and Distributed  
Systems.  
Journ. of the Franklin Inst., Vol. 319, n° 1/2, pp. 125-135.

MARGOLIS, D.L., KARNOPP, D.C. (1979).

~~1980-1981~~  
Bond-Graphs for Flexible Multibody Systems.

Journ. of Dyn. Syst., Meas., and Control, ASME, Vol. 101, pp. 50-57.

MARGOLIS, D.L., TABRIZI, M. (1984).

Reduction of Models of Interacting Lumped and Distributed Systems using Bond-Graphs and Repeated Modal Decomposition.

Journ. of the Franklin Inst., Vol. 317, n°5, pp. 309-322.

MARGOLIS, D.L., YANG, W.C. (1985).

Bond-Graph Models for Fluid Networks using Modal Approximation.

Journ. of Dyn. Syst., Meas., and Control, Vol. 107, pp. 169-175.

MARGOLIS, D.L., YOUNG, G.E. (1977)

"Reduction of Models of Large Scale Lumped Structures Using Normal Modes and Bond-Graphs".

Jour. of the Franklin Inst., vol. 304, n°1, pp. 65-79.

MARINO, R., KOKOTOVIC, P.V. (1988).

"A Geometric Approach to Nonlinear Singularly Perturbed Control Systems".

Automatica, vol. 24, n°1, pp. 31-41.

MARINO, R., SPONG, M.W. (1986).

"Nonlinear Control Techniques for Flexible Joint Manipulator. A Single Link Case Study".

IEEE International Conference on Robotics and Automation, Proceedings, pp. 1030-1036.

MASCHKE, B. (1990).

Contribution à une approche par bond-graph de l'étude et la conception de lois de commande de robots contenant des segments flexibles.

Thèse de Doctorat, n°1168, Orsay.

MAYEDA, H. (1981).

"On Structural Controllability Theorem".

IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-26, n° 3, pp. 795-798.

MEIROVITCH, L. (1980).

Computational Methods in Structural Dynamics.

Sijthoff & Noordhoff ; Mechanics: Dynamical Systems.

MOORE, B.C. (1981).

"Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability-observability, and Model Reduction".

IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-26, pp. 17-31.

MORTAZAVIAN, H. (1982).

"On k-controllability and k-observability of Linear Systems".

MOULTRIE, B. (1979)

"Upper Bounds for Port Bond Causal Orientations of Weighted Junction Structures".

Jour. of the Franklin Inst., vol. 308, n° 3., pp. 353-359.

NAIDU, D.S. (1988).

Singular Perturbation Methodology in Control Systems.

Peter Peregrinus Ltd.

O'MALLEY, R.E. (1974).

"Boundary Layer Methods for Certain Nonlinear Singularly Perturbed Optimal Control Problems".

J. Math. Anal. Appl., 45, pp. 468-484.

O'MALLEY, R.E., FLAHERTY, Jr. et J.E. (1977).

"Singular Singular-Perturbations Problems".

Lecture Notes in Mathematics, N°594. New York: Springer-Verlag, pp. 422-436.

O'MALLEY, R.E., FLAHERTY, Jr. et J.E. (1980).

"Analytical and Numerical Methods for Nonlinear Singular Singularly-Perturbed Initial Value Problems".

SIAM J. Appl. Math., Vol. 38, n°2, pp. 225-248.

O'REILLY, J. (1980).

"Dynamical Feedback Control for a Class of Singularly Perturbed Linear Systems using a Full-order Observer".

Int. J. Control, vol. 31, n°1, pp.1-10.

ORT, J.R., MARTENS, H.R. (1973)

"The Properties of Bond-Graph Junction Structure Matrices".

Trans. of the ASME, Journ. Dyn. Syst., Meas. & Cont., Dec. 1973, pp. 362-367.



ORT, J.R., MARTENS, H.R. (1974)

"A Topological Procedure for Converting a Bond-Graph to a Linear Graph"  
Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Sept. 74,  
pp. 307-314.

PAYNTER, M.M. (1961)

"Analysis and Design of Engineering Systems".  
M.I.T. Press, Cambridge (Mass.).

PEPONIDES, G.M., KOKOTOVIC, P.V. (1983).

"Weak Connections, Time Scales and Aggregation of Nonlinear Systems".  
IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-28, n°6, pp. 729-734.

PEPONIDES, G., KOKOTOVIC, P.V., CHOW, I.H. (1982).

"Singular Perturbations and Time Scales in Nonlinear Models of Power  
Systems".  
IEEE Trans. Circuits and Syst., CAS-29, 758.

PERELSON, A.S., OSTER, G.F. (1976)

"Bond-Graphs and Linear Graphs".  
Journ. of the Franklin Inst., vol. 302, n° 2, pp. 159-185.

PERNEBO, L., SILVERMAN, L.M. (1982).

"Model Reduction via Balanced State Space Representation".  
IEEE Trans. Control, Vol. AC-27, n°2, pp. 382-387.

PHILIPPS, R.G. (1980).

"Reduced Order Modelling and Control of Two-time Scale Discrete  
Systems".  
Int. J. Control, 31, pp. 765-780.

PICHAJ, V., SEZER, M.E., SILJAK, D.D. (1983).

"A Graph-Theoretic Algorithm for Hierarchical Decomposition of Dynamic  
Systems with applications to Estimation and Control".  
IEEE trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol. SMC-13, n° 3, pp.  
197-207.

PILLOU, C., RECH, C. (1989).

"Simple algebraic algorithm for determination of the generic-rank of  
structured systems".  
Int. J. Control, vol. 50, n° 4, pp. 1533-1539.

PORTER, B. (1974).

"Singular Perturbation Methods in the Design of Stabilizing Feedback Controllers for Multivariable Linear Systems".  
Int. Control. vol. 20, n°4, pp. 689-691.

PORTER, B. (1977a).

"Singular Perturbation Methods in the Design of State Feedback Controllers for Multivariable Linear Systems".  
Int. J. Control, vol. 26, n°4, pp. 583-587.

PORTER, B. (1977b).

"Singular Perturbation Methods in the Design of Full-order Observers for Multivariable Linear Systems".  
Int. Control, vol. 26, n°4, pp. 589-594.

PORTER, B. (1978).

"Closed-loop Eigenstructure Assignment by State Feedback in Multivariable Linear Systems with Slow and Fast Modes".  
Int. Control., vol. 28, n°1, pp. 93-100.

PORTER, B., SHENTON, A.T. (1975).

"Singular Perturbation Analysis of the Transfer Function Matrices of a Class of Multivariable Linear Systems".  
Int. Control, vol. 21, pp. 655-660.

ROSENBERG, R.C. (1971)

"State Space Formulation for Bond-Graph Models of Multiport Systems".  
Jour. of Dyn. Syst., Meas. and Contr., March 1971, pp. 35-40.

ROSENBERG, R.C. (1979)

"Essential Gytrators and Reciprocity in Network Structures".  
Journ. of the Franklin Inst., vol. 308, n° 3, pp. 343-352.

ROSENBERG, R.C. (1987)

"Exploiting Bond-Graph Causality in Physical System Models".  
Trans. of the ASME, Journ. of Dyn. Syst., Meas. and Contr., vol. 109, pp. 378-383.

ROSENBERG, R.C., ANDRY, A.N. (1979)

"Solvability of Bond-Graph Junction Structures with Loops".  
IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-26, n° 2, pp. 130-137.

ROSENBERG, R.C., ANDRY, A.N. (1979)

"A Controllability Test for Linear System using a Graphical Technique".  
IFAC Symp. on Computer Aided Design of Control Systems, Zurich.

ROSENBERG, R.C., MOULTRIE, B. (1980)

"Basic Order for Bond-Graph Junction Structure".  
IEEE Trans. on Circuits and Syst., vol. CAS-27, n°10, pp. 909-920.

ROSENBROCK, H.H. (1970)

"State-Space and Multivariable Theory".  
Study in Dynamical Systems, WELSON, R.W., Brocket & H.H. Rosenbrock.

ROSENBROCK, H.H. (1970).

"State-space and Multivariable Theory".  
Study in Dynamical Systems, NELSON, R.W. Brochet & H.H. Rosenbrock.

ROSENBROCK, H.H. (1974).

"Structural properties of linear dynamical systems".  
Int. J. Control, vol. 20, n° 2, pp. 191-202.

ROSENBROCK, H.H., HAYTON, G.E. (1974).

"Dynamical indices of a transfer function matrix".  
Int. J. Control, Vol. 20, n°2, pp. 177-189.

SABERI, A., KHALIL, H.

"Two-time Scale Feedback Design of Nonlinear Singularly Perturbed Systems".  
Proc. ACC, 441.

SABERI, A., KHALIL, H. (1984).

"Quadratic-type Lyapunov Functions for Singularly Perturbed Systems".  
IEEE Trans. Control, Vol. AC-29, n°6, pp. 542-550.

SABERI, A., KHALIL, H. (1985).

"Stabilization and Regulation of Nonlinear Singularly Perturbed Systems. Composite Control".  
IEEE Trans. Control, Vol. AC-30, n°8, pp. 739-745.

SABERI, A., SANNUTI, P. (1987).

"Cheap and Singular Controls for Linear Quadratic Regulators"  
IEEE Trans. Control, vol. AC-32, n°3, pp. 208-219.

SAFONOV, M.G., CHIANG, R.Y. (1989).

"A Schur Method for Balanced-Truncation Model Reduction".  
IEEE Trans. Control, vol. 34, n°7, pp. 729-733.

SAKSENA, V.R., O'REILLY, J., KOKOTOVIC, P.V. (1984).

"Singular Perturbations and Time-scale Methods in Control Theory: Survey  
1976-1984".  
Automatica, vol. 20, n°3, pp. 273-293.

SAMANTA, B., MUKHERJEE, A. (1985).

A Bond-Graph Based Analysis of Coupled Vibratory Systems Taking Advan-  
tage of the Dual Formulation.  
Journ. of the Franklin Inst., Vol. 320, n°3/4, pp. 111-131.

SAMANTA, B., MUKHERJEE, A. (1986).

Role of Zero Frequency Modes in Bond-Graph Adapted Dual Space  
Formulation.  
Journ. of the Franklin Inst., Vol. 322, n°5/6, pp. 305-324.

SANNUTI, P. (1977).

"On the Controllability of Singularly Perturbed Systems".  
IEEE Trans. Control, vol. AC-22, n°4, pp. 622-624.

SANNUTI, P. and KOKOTOVIC, P.V. (1969).

"Near Optimum Design of Linear Systems by a Singular Perturbation  
Method".  
IEEE Trans. Autom. Control, 14, pp. 15-22.

SASTRY, S.S., DESOER, C.A. (1981).

"Jump Behaviour of Circuit and Systems".  
IEEE Trans. on Circuits and Syst., CAS-28, 1109.

SCHIZAS, C., EVANS, F.J. (1981).

"A graph theoretic approach to multivariable control system design".  
Automatica, vol. 17, n°2, pp. 371-377.

SERVETTAZ, G. (1989).

Rapport interne UGRA-SERA.

Septembre 1989.

COE-

SHIELDS, R.W., PEARSON, J.B. (1976).

"Structural Controllability of Multi-input Linear Systems".

IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-21, n° 2, pp. 203-212.

SHOKOOHI, S., SILVERMAN, L.M., VAN DOOREN, P.M. (1983).

"Linear Time - Variable Systems: Balancing and Model Reduction".

IEEE Trans. Control, vol. AC-28, n°8, pp. 810-822.

SICILIANO, B., BOOK, W.J. (1988).

"A Singular Perturbation Approach to Control of Lightweight Flexible Manipulators".

Intern. Journ. of Robotics Research, vol. 7, n°4, pp. 79-88.

COE-

SICILIANO, B., BOOK, W.J., DE MARIA, G. (1986).

"An Integral Manifold Approach to Control of a one Link Flexible Arm".

Proceedings of 25<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, Athens (Greece)  
pp. 1131-1134.

COE-

SILJAK, D.D. (1977).

"On reachability of dynamic systems".

Int. J. Systems Sci., vol. 8, n°3, pp. 321-338.

SIMON, H.A., ANDO, A. (1961).

Aggregation of Variables in Dynamic Systems.

Econometrica, vol. 29, pp. 111-138.

SINHA, P.K. (1977).

"Controllability, observability and decoupling of multivariable systems".

Int. J. Control, Vol. 26, n° 4, pp. 603-620.

SOBOLEV, V.A. (1984).

"Integral Manifolds and Decomposition of Singularly Perturbed Systems".

Systems and Control Letters 5, pp. 169-179.

- SPONG, M.W., KHORASANI, K., KOKOTOVIC, P. (1987).  
 "An Integral Manifold Approach to the Feedback Control of Flexible Joint Robots".  
 IEEE Journal of Robotics and Automation, vol. RA-3, n°4, pp. 291-300.
- SUDA, N., ENOKI, A. (1981)  
 "Power Conserving Multiport Systems, Junction Structures and Bond-Graphs".  
 IFAC, Control Science and Technology, 8<sup>th</sup> World Congress, Kyoto, Japan, pp. 1761-1766.
- SUDA, N., HATANAKA, T. (1986)  
 "Structural Properties of Systems Represented by Bond-Graphs".  
 IMACS, Complex and Dist. Syst. Analysis, Sim. and Cont., pp. 73-80.
- SUDA, N. (1988).  
 "Effect of Parasitic Storage Elements on Systems Represented by Bond-Graphs".  
 Proceedings, IMACS 12<sup>th</sup> World Congrès, July, pp. 17-19.
- SUEUR, C., DAUPHIN TANGUY, G. (1988)  
 "Algorithms for the Study of Structural Properties on Bond-Graph Models".  
 IMACS Symposium on System Modelling and Simulation.  
 Cetrano, Italy, Sept. 1988.
- SUEUR, C., DAUPHIN TANGUY, G. (1989)  
 "Structural Controllability/Observability of Linear Systems Represented by Bond-Graphs"  
 Journ. of the Franklin Inst., vol. 326, n°6, pp. 869-883.
- SUEUR, C., DAUPHIN TANGUY, G. (1990).  
 "Bond-Graph Approach for Multi-time Scale Systems Analysis".  
 A paraître dans la revue spéciale bond-graph du Journal of the Franklin Institute.
- SUEUR, C., DAUPHIN TANGUY, G. (1990)  
 "Bond-Graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems".  
 Accepté dans le Journal of the Franklin Institute.

SUZUKI, M. (1981).

"Composite Controls for Singularly Perturbed Systems".  
IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-26, n° 2, pp. 505-507.

TAO, K.M., HSIA, P. (1982).

"On the structure of directed graphs with applications: parts I, II".  
Int. J. General Systems, Vol. 8, pp. 147-159, pp. 211-224.

TAYLOR, G.E., PUGH, A.C. (1986).

"Equivalence of generalised state-space systems : new results".  
Frequency Domain and state space Methods for Linear Systems.  
C.I. Byrnes and A. Lindquist (Editors).  
Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland).

TIERNEGO, M.J.L. (1982)

A New Systematic Bond-Graph Modelling Procedure for 3-D Mechanics  
Applied to Robotics.  
Proc. 10<sup>th</sup> IMACS Cong. System Simulation and Scient. Computation,  
Montreal, Vol. 3, pp. 392-394.

TIKHONOV, A.N. (1952).

"Systems of Differential Equations Containing a Small Parameter Multi-  
plying the Derivative".  
Mat. Sb., Vol. 31, n°73, pp. 575-586.

VASIL'EVA, A.B. (1963).

"Asymptotic Behavior of Solutions to Certain Problems Involving Non-  
linear Differential Equations Containing a Small Parameter Multiplying  
the Highest Derivatives".  
Russian Math Surveys, 18, pp. 13-81.

VASIL'EVA, A.B. (1976).

"The Development of the Theory of Ordinary Differential Equations with a  
Small Parameter Multiplying the Highest Derivative during the Period  
1966-1976".  
Russian Math. Surveys 31:6, pp. 109-131.

WILDE, R.R., KOKOTOVIC, P.V. (1973).

"Optimal Open- and Closed-Loop Control of Singularly Perturbed Linear Systems".  
IEEE Trans. Control, vol. AC-18, n°6, pp. 616-625.

WILLEMS, J.L. (1986).

"Structural Controllability and Observability".  
Systems & Control Letters, 8, pp. 5-12.

WILLEMS, J.L. (1989).

"Time-varying Feedback for the stabilization of Fixed modes in Decentralized control systems".  
Automatica, vol. 25, n°1, pp. 127-131.

WINKELMAN, J.R., CHOW, T.H., ALLEMONG, J.J., KOKOTOVIC, P.V. (1980).

"Multi-time-scale Analysis of a Power System".  
Automatica, Vol. 16, pp. 35-43.

WONHAM, V.M. (1979).

"Linear multivariable control. A geometric approach".  
2<sup>nd</sup> Ed., Springer-Verlag, 1979.  
J. Diff. Equations, 31, pp. 53-98.

YAZMAN, A. (1988).

Modélisation des robots flexibles par les bond-graphs.  
Application à l'analyse de leurs performances dynamiques.  
Thèse de Doctorat, Orsay, Université Paris-Sud.

YAZMAN, A., SERVETTAZ, G., LARIVIERE, E. (1989).

Bond-Graph Modelling of Flexible Multibody Systems.  
Soumis pour publication au Journal of the Franklin Institute.

ZEID, A. (1988)

"Some Bond-Graph Structural Properties: Eigen Spectra and Stability".  
ASME WAM., pp. 75-82.

ZEID, A., ROSENBERG, R. (1985)

"Estimating Eigenvalues for a Class of Dynamic Systems".  
Journ. of the Franklin Inst., vol. 320, n° 1.



**TITRE : CONTRIBUTION A LA MODELISATION ET A L'ANALYSE DES SYSTEMES DYNAMIQUES PAR UNE APPROCHE BOND-GRAPH. APPLICATION AUX SYSTEMES POLYARTICULES PLANS A SEGMENTS FLEXIBLES.**

**RESUME :**

Ce mémoire propose l'utilisation systématique du langage bond-graph pour l'analyse des systèmes dynamiques linéaires et la modélisation des robots plans considérés comme des systèmes polyarticulés flexibles.

Après un rappel succinct de quelques méthodes de représentation des systèmes dynamiques, la notion de propriété structurelle est rappelée à l'aide de l'étude des matrices de structure associées aux systèmes linéaires multivariés. Cette notion est élargie aux systèmes modélisés par bond-graph. Une méthode graphique simple, consistant uniquement de manipulations causales exhibe les propriétés de commandabilité et d'observabilité structurelles et aboutit à la décomposition canonique de Kalman.

Une interprétation graphique de la méthode des perturbations singulières appliquée aux modèles linéaires à deux échelles de temps, modélisés par bond-graph, est proposée. Après un choix des vecteurs états découplés, l'explicité du modèle est étudiée à l'aide de simples manipulations causales. Lorsque le système est exprimé de manière explicite, deux modèles bond-graph découplés sont déduits à l'aide d'une transformation réciproque, appliquée au modèle bond-graph initial. Dans le cas contraire, un changement de variables est proposé.

Le dernier point abordé concerne la modélisation des robots plans considérés comme des systèmes polyarticulés flexibles. En particulier, une interprétation simple de l'application des perturbations singulières sur les modèles de segments flexibles obtenus par les méthodes d'analyse modale et éléments finis est donnée. Une méthode de calcul et de représentation sur le modèle bond-graph de l'effet statique des modes négligés lors de la réduction de modèle est proposée pour les différents champs de déplacements supposés choisis.

**MOTS CLES :**

Bond-graph  
Propriétés structurelles  
Réduction, perturbations singulières  
Dynamique des structures  
Robots à segments flexibles

