

50376
1990
166

70338

50376
1990
166

N° d'ordre : 588

THESE

présentée à

**L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRE ARTOIS**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR EN PRODUCTIQUE : AUTOMATIQUE ET
INFORMATIQUE INDUSTRIELLE**

par

M'hamed TAHIRI

**METHODE D'ESTIMATION DE L'ATTRACTEUR ET DU
DOMAINE D'ATTRACTION ASSOCIE POUR UN PROCESSUS
COMPLEXE CONTINU LOCALEMENT INSTABLE.**

Soutenue le 9 octobre 1990 devant la commission d'examen
composée par les professeurs :

G. DAUPHIN TANGUY
A. EL MOUDNI
J. P. RICHARD
S. G. TZAFESTAS
M. BENREJEB
P. BORNE
M. STAROSWIECKI



Président.
Rapporteur.
Rapporteur.
Rapporteur.
Examineur.
Examineur.
Examineur.

Directeur de Thèse : Pierre Borne, Professeur à l'IDN.



A mes parents
A ma femme

Avant propos.

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'IDN (Institut Industrielle du Nord) sous la direction de Monsieur le professeur Pierre Borne.

En premier lieu, nous exprimons notre reconnaissance à Monsieur le Professeur Pierre Borne, Directeur du laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'IDN et Directeur Scientifique de ce même établissement pour la confiance dont il a fait preuve à notre égard que ce soit sur le plan de l'enseignement ou de la recherche. Il a su nous faire profiter de sa grande expérience et de ses conseils tout au long de cette étude. Le temps et l'intérêt qu'il a bien voulu consacrer à cette recherche nous ont profondément touché. Nous tenons à l'en remercier très chaleureusement.

Nous sommes grandement honorés de l'intérêt que Madame G. Dauphin-Tanguy, Professeur à l'IDN, a bien voulu porter à notre travail en acceptant de présider notre jury de thèse. Qu'elle reçoive ici nos très sincères remerciements.

Nous remercions très vivement Monsieur A. El Moudni, Professeur à la Faculté des Sciences I de CASABLANCA, pour l'intérêt qu'il a montré pour nos travaux en participant au jury de notre thèse comme rapporteur.

Nous adressons à Monsieur J. P. Richard, Professeur à l'IDN l'expression de notre gratitude pour l'honneur qu'il a fait en acceptant de juger notre travail et d'être rapporteur. Nous lui exprimons toute notre reconnaissance pour la bienveillance et la gentillesse qu'il nous a toujours témoignés.

La participation de Monsieur S. G. Tzafestas, Professeur à l'université d'Athènes, à la commission d'examen de notre travail comme rapporteur nous a beaucoup honoré. Qu'il soit ici remercié très vivement du temps qu'il nous a consacré.

Nous adressons à Monsieur M. Benrejeb, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, l'expression de notre gratitude pour l'extrême attention avec laquelle il a envisagé notre travail, ainsi que sa présence, comme examinateur, à notre jury de thèse .

C'est avec empressement que nous voulons remercier Monsieur M. Staroswiecki, Professeur à l'Ecole Universitaire Des Ingénieurs de Lille, pour sa participation au jury de thèse comme examinateur.

Nous tenons enfin à remercier tous les membres du Laboratoire d'Automatique de l'IDN et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de ce travail tant du point de vue recherche que sur le plan des contacts amicaux.

TABLE DES MATIERES

Avant propos.	5
INTRODUCTION GENERALE.	11
CHAPITRE I : MODELISATION ET ANALYSE DES SYSTEMES CONTINUS.	
1° GENERALITES.	17
2° STRUCTURE ET REPRESENTATION DES SYSTEMES CONTINUS DANS L'ESPACE D'ETAT.	17
3° REPRESENTATION CANONIQUE DES MATRICES D'EVOLUTION.	20
3.1 Formes Compagnes.	20
3.2 Formes de JORDAN.	21
3.3 Systèmes à non-linéarités de rang (k).	23
3.4 Systèmes de type Lur'e & Postnikov.	24
3.4.1 Type MLP.	25
3.4.2 Type mLP.	27
3.4.3 Type MLPg.	28
3.4.4 Type mLPg .	30
3.5 Formes en flèche.	31
4° NOTION DE STABILITE : RAPPELS & DEFINITIONS.	33
5° METHODES DE LYAPUNOV.	37
5.1 La première méthode.	37
5.2 La deuxième méthode.	39
6° NOTION DE NORME VECTORIELLE.	42
7° PRINCIPE ET METHODE DE COMPARAISON.	46
7.1 Rappel de la méthode.	46

7.2	Système majorant et matrice pseudo-majorante.	47
7.3	Propriétés des matrices pseudo-majorantes.	52
7.4	Mise en œuvre, lemme de comparaison.	53
7.5	Critère pratique de stabilité.	54
8°	CONCLUSION.	55

CHAPITRE II : ESTIMATION ET ANALYSE DES ATTRACTEURS.

1°	INTRODUCTION.	59
2°	ESTIMATION DU DOMAINE DE STABILITE LOCALE.	59
3°	DEFINITION ET ANALYSE DES ATTRACTEURS.	63
3.1	Orbite ou trajectoire issue d'un point.	63
3.2	Ensemble invariant.	64
3.3	Points et ensembles limites.	64
3.4	Prolongement.	66
3.4.1	La première prolongation positive.	66
3.4.2	Ensemble limite de prolongation relatif à un domaine D.	68
3.5	Définition d'un attracteur.	68
3.6	Stabilité asymptotique d'un attracteur.	69
3.7	Définition du domaine d'attraction d'un attracteur.	69
4°	ETUDE DES SYSTEMES INSTABLES LOCALEMENT.	70
4.1	Systèmes majorants non autonomes SMNA.	71
4.2	Généralisation du lemme de comparaison.	75
4.3	Estimation des attracteurs.	77
5°	CONCLUSION.	88

CHAPITRE III :
ESTIMATION DU DOMAINE D'ATTRACTION.

1 ° INTRODUCTION.	91
2 ° SYSTEMES MAJORANTS NON AUTONOMES LINEAIRES.	92
3 ° SYSTEMES MAJORANTS NON AUTONOMES ET NON LINEAIRES.	96
4 ° CONCLUSION.	98

CHAPITRE IV :
ETUDE DE PROBLEMES PARTICULIERS.

1 ° PROCESSUS DECRITS PAR DES INEGALITES DIFFERENTIELLES.	1 0 1
1.1 Inégalité différentielle minorée par une équation différentielle.	1 0 1
1.2 Inégalité différentielle majorée par une équation différentielle.	1 0 2
2 ° SYSTEMES DECRITS PAR DES MATRICES INTERVALLES.	1 0 6
2.1 Introduction.	1 0 6
2.2 Etude de la stabilité.	1 0 6
3 ° ANALYSE DES SYSTEMES BRUTES.	1 1 2
3.1 Détermination d'un SMNA pour les systèmes bruités.	1 1 3
3.2 Détermination du système de comparaison.	1 1 6
3.3 Estimation des attracteurs.	1 1 6
4 ° CONCLUSION.	1 2 1
CONCLUSION GENERALE.	1 2 3
ANNEXES.	1 2 7
BIBLIOGRAPHIE.	1 4 5



INTRODUCTION GENERALE.

L'étude de la stabilité d'un système, qu'il s'agisse d'un processus physique, biologique, économique ou autre est nécessaire et constitue une étape importante dans la synthèse d'une loi de commande ou l'analyse du comportement ultérieur de ce système. Cela explique l'abondance des publications et travaux qui ont été consacrés à cette question depuis 1892 date de l'apparition des principaux résultats de LYAPUNOV, fondateur de la théorie moderne de la stabilité [8].

La plupart des résultats proposés concernent la détermination de conditions plus au moins complexes de stabilité locale ou globale [9], ou de stabilité absolue [12]. La recherche ou l'estimation du domaine de stabilité asymptotique d'une position d'équilibre a connu beaucoup moins de développement et les méthodes présentées restent très souvent générales et de mise en oeuvre délicate [10].

Nous envisageons dans ce mémoire d'apporter une contribution à ce problème. Les résultats proposés ont pour but de simplifier la détermination du domaine de stabilité asymptotique d'un équilibre et l'estimation de l'attracteur ainsi que le domaine d'attraction correspondant à l'attracteur [34], [50].

Le travail présenté dans cette thèse s'attache à proposer des conditions suffisantes de stabilité, robustes, c'est à dire peu sensibles aux variations des paramètres du système, et applicables même lorsque le modèle du processus est mal défini [53], bruité ou défini par des inégalités. Les conditions sont basées sur la définition et la construction systématique d'un modèle dit de comparaison, associé au modèle initial et dont la stabilité d'un type donné implique la stabilité de même type pour le processus décrit par le modèle initial, et ce quelque soit l'évolution des paramètres de ce système dans les limites de variations prédéfinies et prises en compte dans la définition du système de comparaison.

Le chapitre 1 est consacré à des rappels de méthodes de modélisation et de définitions et théorèmes relatifs au concept de stabilité utilisées dans la suite.

L'estimation des domaines de stabilité asymptotique d'un

équilibre, d'attracteur et le domaine d'attraction de l'attracteur est menée dans les deuxième et troisième chapitres.

Le quatrième chapitre est consacré à l'analyse de trois types particuliers de processus :

- Systèmes décrits par des inégalités différentielles.
- Systèmes décrits par des matrices intervalles.
- Systèmes imparfaitement identifiés ou bruités.

Les techniques proposées sont illustrées par la mise en œuvre d'exemples présentés tout le long du mémoire.

Chapitre I :

MODELISATION ET ANALYSE DES SYSTEMES CONTINUS.

1° GENERALITES.

Un processus ou système dynamique [1] est un ensemble (physique, économique, biologique, ...) susceptible d'évoluer en fonction d'une variable indépendante appelée temps. Il est généralement caractérisé par la nature des signaux qui interviennent dans sa description.

Lorsque les signaux sont définis par rapport à une variable temps continue, le processus est dit **continu**. Si la variable temps est discrète, le système est dit **discret**.

En ce qui concerne la modélisation des systèmes continus, elle se fait généralement au moyen d'équations de fonctionnement de type différentielles, aux dérivées partielles, etc Elle mène parfois à différents modèles mathématiques caractérisant le même processus.

La représentation dans l'espace d'état est souvent choisie ; pour un même système, il existe une infinité de représentations possibles obtenues par changement de base. Ceci est parfois intéressant pour une analyse plus performante des propriétés du système (exemple : le cas de la stabilité).

2° STRUCTURE ET REPRESENTATION DES SYSTEMES CONTINUS DANS L'ESPACE D'ETAT.

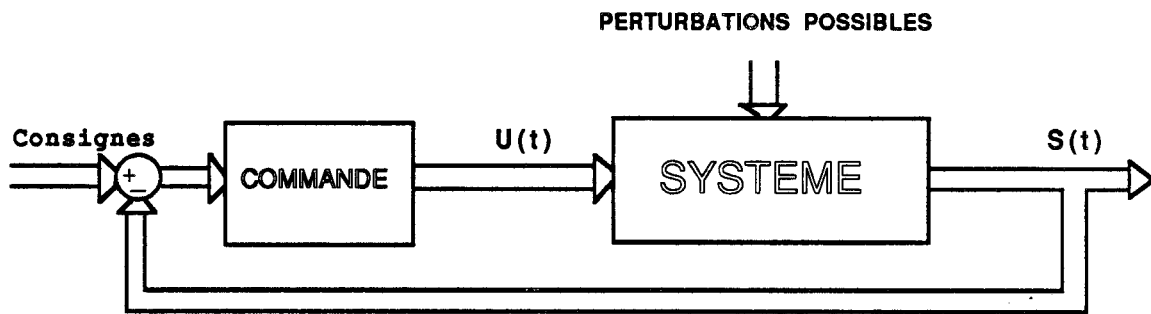
L'évolution d'un système déterministe, considéré à partir d'un instant initial t_0 , est décrite par trois ensembles de variables (figures 1 et 2) :

Un ensemble de grandeurs d'entrées agissant sur le système et regroupées en un vecteur $\mathbf{U}(t)$ élément de \mathbf{R}^l .

Un ensemble de grandeurs de sorties accessibles à la mesure et regroupées en un vecteur $\mathbf{S}(t)$ élément de \mathbf{R}^m .

Un ensemble de n informations regroupées sous forme d'un

vecteur caractérisant l'état du système dont la connaissance à l'instant initial associée à la connaissance de l'évolution des entrées permet à partir du modèle de déterminer le comportement futur du processus.



(FIGURE 1)

Les équations représentatives du processus dans l'espace d'état sont de la forme suivante (les perturbations n'étant prises en compte ici qu'à travers la méconnaissance de f et g) :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t),u(t)) \quad (1)$$

$$s(t) = g(t,x(t),u(t))$$

$x(t)$: Vecteur d'état élément de \mathbb{R}^n .

$u(t)$: Vecteur de commande élément de \mathbb{R}^l .

$s(t)$: Vecteur des sorties élément de \mathbb{R}^m .

Lorsque c'est possible, une représentation communément adoptée pour les processus correspond à une description de la forme suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{A}[t,x].x + \mathbf{B}[t,x].u \quad (2)$$

$$s(t) = \mathbf{C}[t,x].x + \mathbf{D}[t,x].u$$

$A[t,x]$: matrice d'évolution , élément de $\mathbf{R}^{n \times n}$.

$B[t,x]$: matrice de commande, élément de $\mathbf{R}^{n \times l}$.

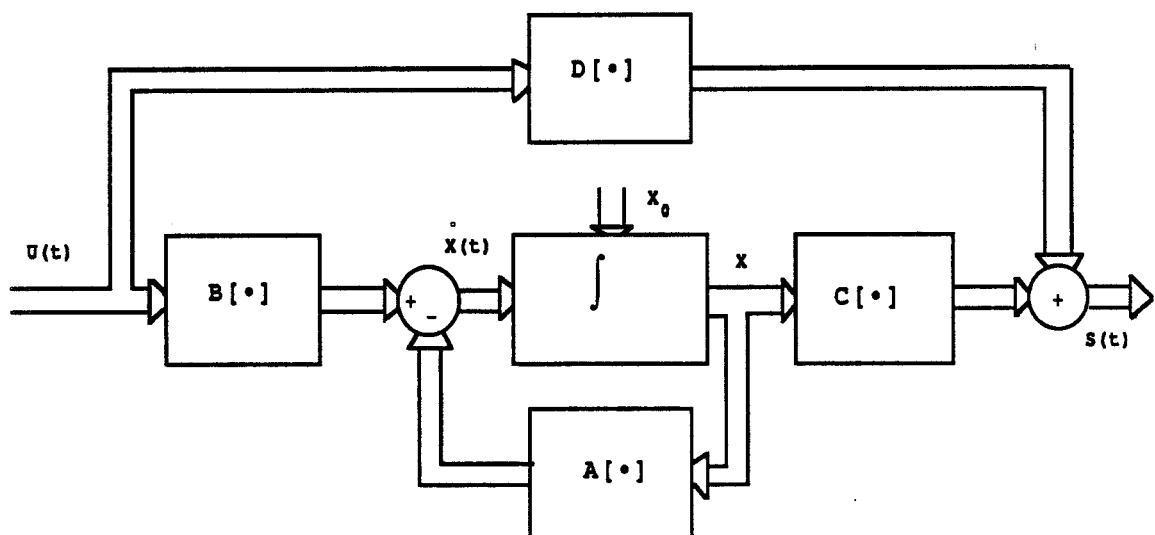
$C[t,x]$: matrice d'observation, élément de $\mathbf{R}^{m \times n}$.

$D[t,x]$: matrice de transmission directe, élément de $\mathbf{R}^{m \times l}$.

t : caractérise le temps, élément de \mathbf{R} .

Dans le souci d'une écriture simple, nous noterons lorsqu'aucune ambiguïté ne sera possible :

$$A[t,x] = A[\cdot], B[t,x] = B[\cdot], C[t,x] = C[\cdot] \text{ et } D[t,x] = D[\cdot].$$



(FIGURE 2)

Le système défini par (2) est dit :

- Linéaire stationnaire, si les quatres matrices sont constantes.
- Linéaire non stationnaire, si les quatres matrices sont fonctions

Ces formes apparaissent par exemple lorsque le régime libre du processus est décrit par une équation différentielle de la forme ci-dessous :

$$s^{(n)} + a_{n-1}(\cdot).s^{(n-1)} + a_{n-2}(\cdot).s^{(n-2)} + \dots + a_1(\cdot).s^{(1)} + a_0(\cdot) = 0 \quad (3)$$

3.2 Formes de JORDAN.

Dans le cas linéaire stationnaire, l'équation (1) peut être représentée par une fonction de transfert de la forme suivante avec $m \leq n$:

$$H(p) = \frac{S(p)}{U(p)} = \frac{b_0 + b_1.p + \dots + b_{m-1}.p^{m-1} + b_m.p^m}{a_0 + a_1.p + \dots + a_{n-1}.p^{n-1} + p^n} \quad (4)$$

p représentant l'opérateur de dérivation (variable de Laplace).

La méthode des modes fait apparaître les pôles de la fonction de transfert. Cette représentation a l'avantage de conduire à une matrice $A[.]$ diagonale ou plus généralement ayant la forme canonique de JORDAN. Elle présente l'inconvénient d'exiger la décomposition de $H(p)$.

Si on peut décomposer la fonction de transfert en éléments simples de la forme :

$$\frac{c_i}{p - d_i} .$$

dont les coefficients c_i dénotent les résidus de la fonction $H(p)$ relatifs aux pôles d_i .

en posant :

$$x_i(p) = \frac{U(p)}{p - d_i} .$$

$$\dot{x}_i(p) = d_i \cdot x_i(p) + U(p).$$

Soit :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & d_i & \\ & & & \ddots \\ 0 & \dots & & & d_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U \quad (5)$$

Dans le cas où la fonction de transfert possède des pôles multiples, par exemple $H(p)$ possède un pôle multiple d'ordre k , on la décompose en éléments simples de la forme :

$$H(p) = \frac{c_1}{(p-d)^k} + \frac{c_2}{(p-d)^{k-1}} + \dots + \frac{c_k}{(p-d)} + \frac{c_{k+1}}{p-d_{k+1}} + \dots$$

Si on pose :

$$x_k(p) = \frac{U(p)}{p-d}, \quad x_{k-1}(p) = \frac{x_k(p)}{p-d}, \quad \dots, \quad x_1(p) = \frac{x_2(p)}{p-d}.$$

On aura respectivement :

$$\dot{x}_k = d \cdot x_k + U, \quad \dot{x}_{k-1} = d \cdot x_{k-1} + x_k, \quad \dots, \quad \dot{x}_1 = d \cdot x_1 + x_2.$$

voir page 23
TAKIRI

La matrice $A[.]$ de l'équation (6) ci-dessous est appelée matrice de JORDAN. Dans le cas général, elle est constituée d'une diagonale réelle ou complexe avec une diagonale supérieure d'éléments nuls ou unités :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} d & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U \quad (6)$$

La matrice A[.] de (6) est appelée matrice de JORDAN. Dans le cas général, elle est constituée d'une diagonale réelle ou complexe avec une diagonale supérieure d'éléments nuls ou unités.

3.3 Systèmes à non-linéarités de rang (k).

La notion de non-linéarité de rang (k) a été introduite en vue de réduire le nombre de termes constants ou de regrouper les éléments non-linéaires dans une matrice [2], [3].

Définition :

La matrice A[t,x] de (2), notée A[.] d'ordre n est à non-linéarités de rang (k) si les termes non-constants peuvent être (par changement de base) regroupés dans k rangées de même nature (lignes ou colonnes).

Dans le cas où le regroupement des éléments non-linéaires est en colonnes, la matrice A[.] est de type C(k) :

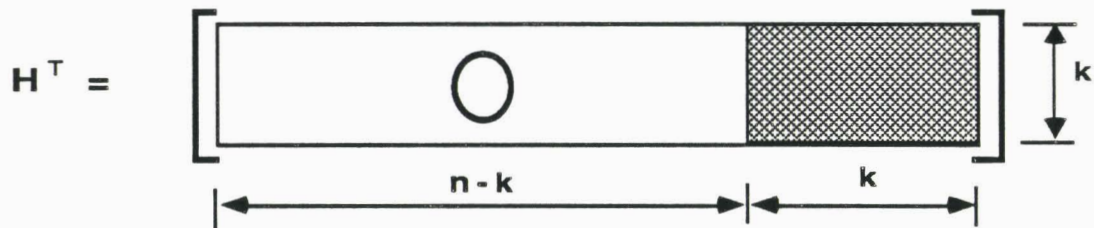
$$A[.] = A + V[.] \cdot H^T \quad (7)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$$V[.] \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

$$H \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Soit :



Les k dernières colonnes de la matrice $A[.]$ sont les seules à contenir les éléments non-linéaires: $V[.].H^T$ correspond au regroupement de tous les termes non-constants de la matrice $A[.]$.

A chaque instant, le rang de $V[.].H^T \leq k$. D'où l'appellation non-linéarités de rang k .

Si les éléments non-linéaires sont rangés en lignes, la matrice correspondante est de type $L(k)$. Elle s'écrit :

$$A[.] = A + K.V^T[.]. \quad (8)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$$V[.] \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

$$K \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

L'écriture (8) s'obtient par transposition de (7).

3.4 Systèmes de type Lur'e & Postnikov.

La famille des systèmes de Lur'e & Postnikov est très utilisée

en modélisation. Elle se décompose en quatre sous-ensembles [4] selon le paramètre k (nombre de colonnes non-linéaires) et l (nombre maximum de coefficients non-linéaires différents par colonne) :

3.4.1 Type MLP.

Les systèmes **MLP** (Multivariables Lur'e & Postnikov) sont décrits par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A.x + B.f(t,\varepsilon) \\ \varepsilon &= C.x + e \end{aligned} \quad (9)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, ε et $e \in \mathbb{R}^k$. On supposera que C est de rang maximum : $\text{rang}(C) = k$, et la fonction $f(t,\varepsilon)$ vérifie les conditions suivantes :

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

$$f(t,\varepsilon) = [\phi_i(t,\varepsilon)]_{i=1, \dots, k} ; \phi(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

$$F^* [t,\varepsilon] = \text{Diag} (\phi_i(t,\varepsilon) / \varepsilon_i).$$

$$F^* [t,\varepsilon] = \text{Diag} (\phi_i^*(t,\varepsilon)).$$

$$\forall (t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k, \exists F_{\min} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \exists F_{\max} \in \mathbb{R}^{k \times k} :$$

$$F_{\min} \leq F^* [t,\varepsilon] \leq F_{\max}.$$

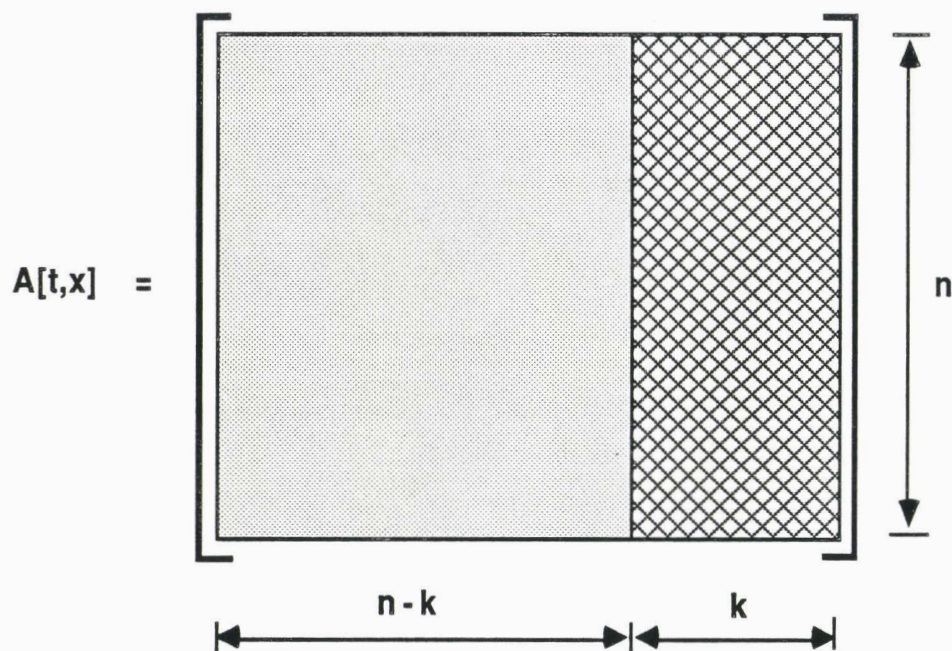
Les termes $(\phi_i^*(t,\varepsilon))$ sont appelés gains équivalents du système. En régime libre, le système (9) se transforme en :

$$dx/dt = [A + B.F^* [t, C.x].C].x \quad (10)$$

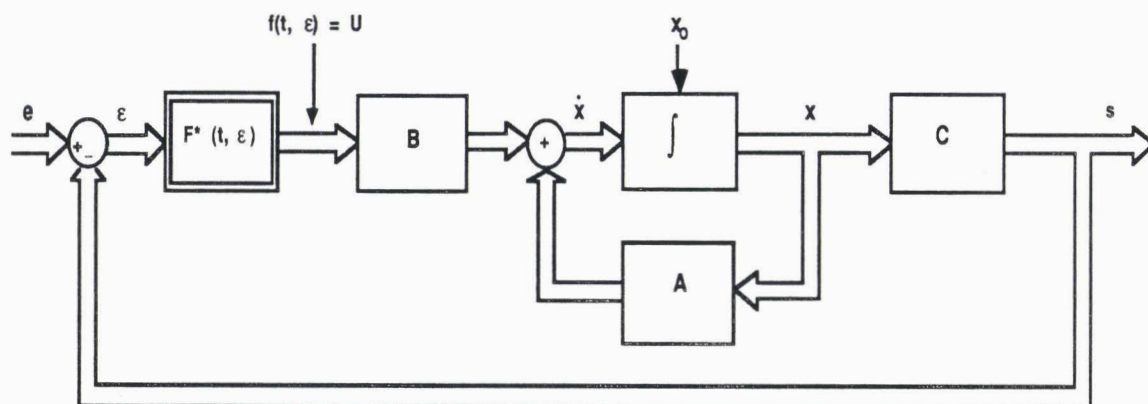
Ce qui donne la matrice d'évolution suivante :

$$A[t,x] = A + B.F^* [t, C.x].C$$

Si ε est constitué des k dernières composantes de x , la forme de $A[t,x]$ est :



Les non-linéarités sont regroupées dans un bloc constitué de n lignes et k colonnes dont chaque colonne contient seulement une non-linéarité : ($l = 1$). La structure d'un tel système est donnée par la figure suivante :



(FIGURE 3)

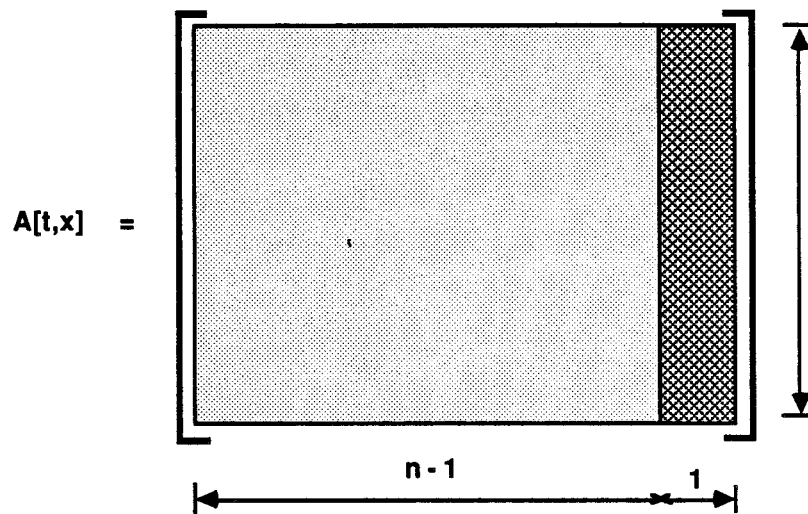
3.4.2 Type mLP.

Dans ce cas, on a une seule colonne non-linéaire ($k = 1$). Le système correspondant est appelé monovisible Lur'e & Postnikov. Il est décrit par les équations suivantes :

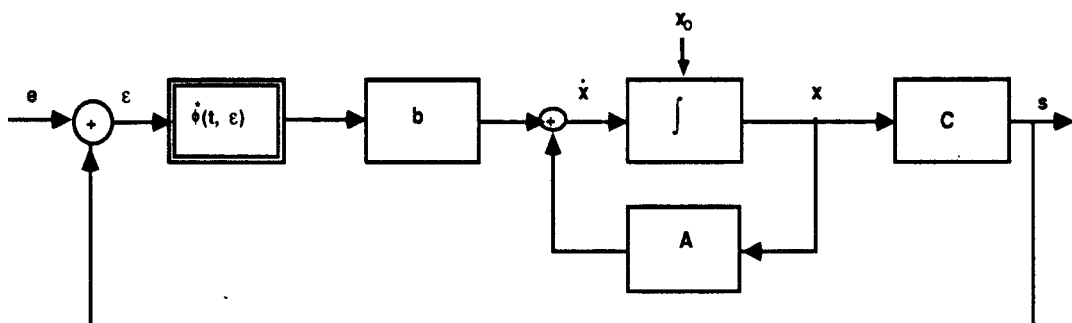
$$\begin{aligned} \dot{x} &= A.x + b.\phi(t,\varepsilon) & (11) \\ \varepsilon &= C^T.x + e \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, b et $C \in \mathbb{R}^n$, ε et $e \in \mathbb{R}^n$, $\phi(t,\varepsilon) = \phi^*(t,\varepsilon) \cdot \varepsilon$.

La matrice d'évolution a la forme suivante :



La structure du système correspondant a la forme suivante:



(FIGURE 4)

3.4.3 Type MLPg.

Cette classe de système est une généralisation des systèmes MLP. La différence entre MLP et MLPg est qu'il y'a plusieurs non-linéarités différentes dans chaque colonne de la matrice d'évolution du système MLPg (Multivariables Lur'e & Postnikov généralisés). Ce type de systèmes est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A.x + B.f(t,\varepsilon) \\ \varepsilon &= C.x + e \end{aligned} \quad (12)$$

Dans ce cas, la fonction $f(t,\varepsilon)$ change de forme :

$$f(t,\varepsilon) = [\phi_{i,j}(t,\varepsilon)]_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, l} ; \phi(t,0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

$$F^*[t,\varepsilon] = \text{Bloc Diag} (G_i^*)_{i=1, \dots, k} \in \mathbb{R}^{m \times k} ; \quad (m = k.l).$$

$$G_i^* = [\phi_{i,j}(t,\varepsilon)/\varepsilon_j] = [\phi_{i,j}^*(t,\varepsilon)]_{j=1, \dots, l}$$

$$\forall (t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \exists F_{\min} \in \mathbb{R}^{m \times k}, \exists F_{\max} \in \mathbb{R}^{m \times k} :$$

$$F_{\min} \leq F^*[t,\varepsilon] \leq F_{\max}.$$

La matrice d'évolution est donnée par :

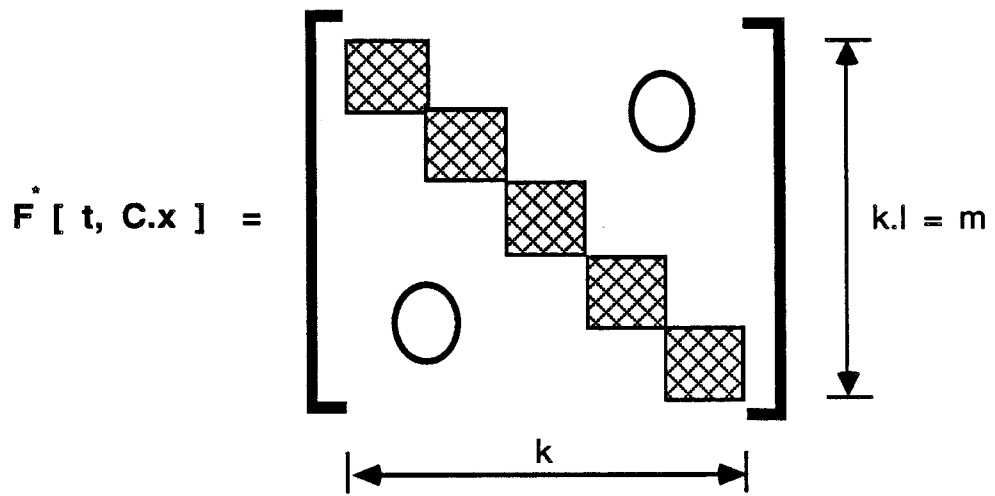
$$A[t,x] = A + B.F^*[t, C.x].C$$

Cependant :

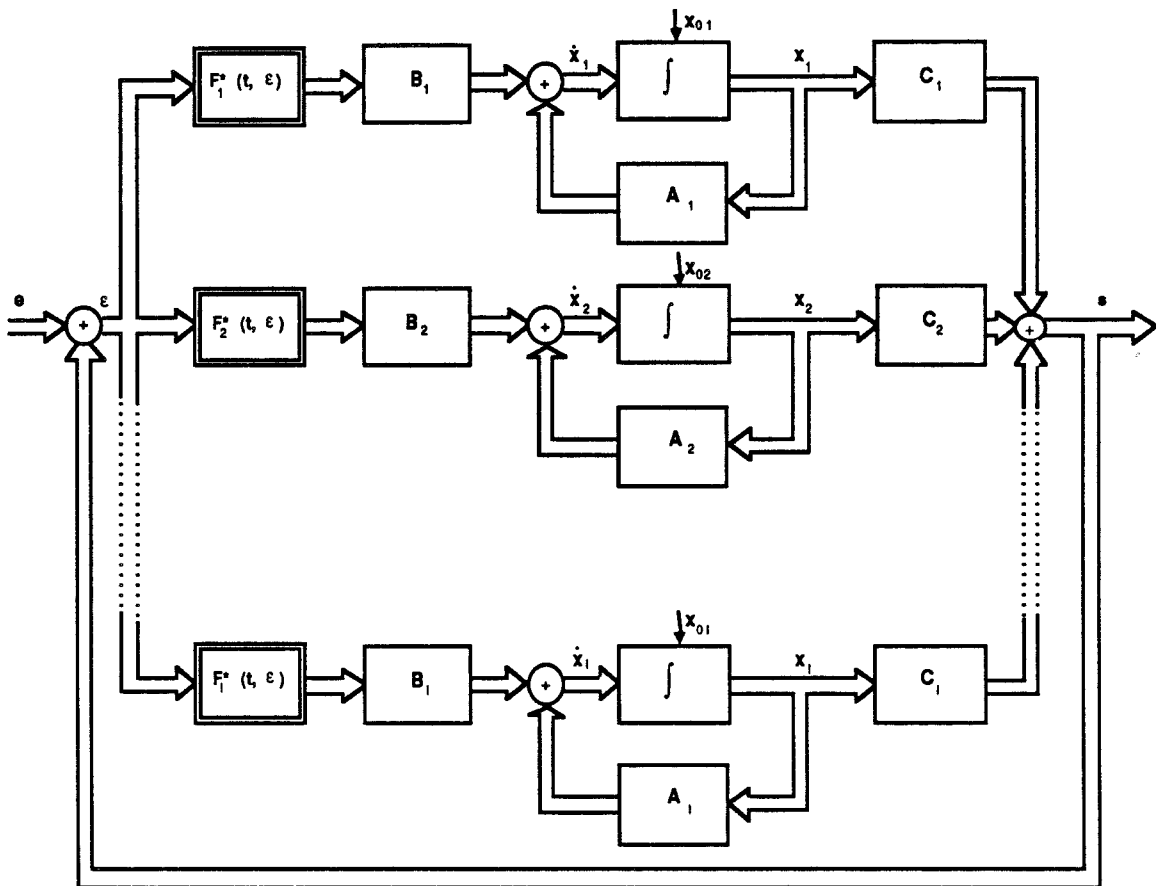
$$B \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

$$F^*[t, C.x] \in \mathbb{R}^{m \times k}.$$

$$C \in \mathbb{R}^{k \times n}.$$



La figure suivante donne la structure correspondante :



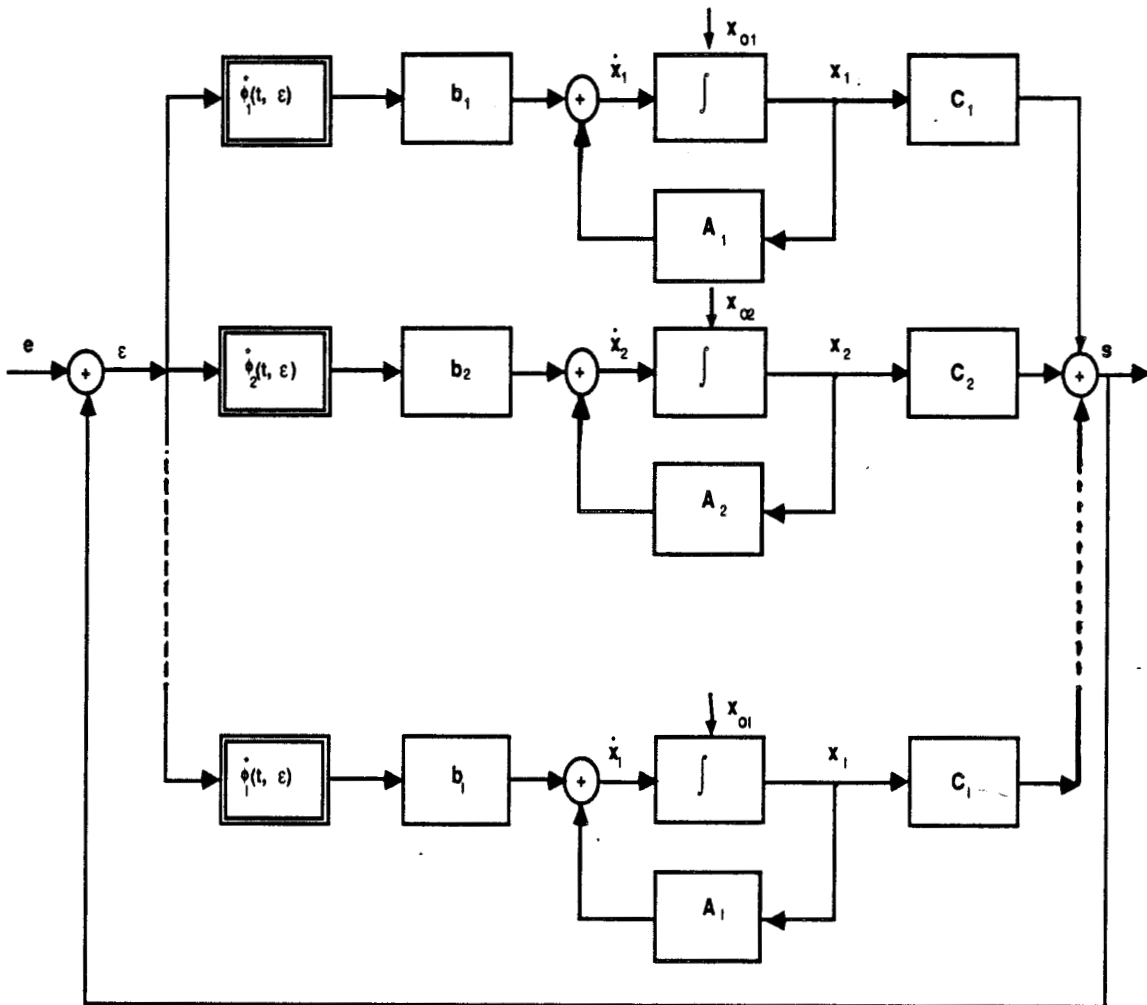
(FIGURE 5)

3.4.4 Type mLPg.

Il existe pour ce type de systèmes **mLPg** (monovariabiles Lur'e & Postnikov généralisés) une seule colonne non-linéaire qui peut contenir plusieurs non-linéarités ($l > 1$) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A.x + b.f(t,\varepsilon) \\ \varepsilon &= C.x + e \end{aligned} \quad (13)$$

La structure correspondante à ce type de système est donnée par la figure suivante :



(FIGURE 6)

La fonction $f(t, \varepsilon)$ s'écrit comme suit :

$$f^T(t, \varepsilon) = [\phi_1(t, \varepsilon), \dots, \phi_l(t, \varepsilon)] ; \phi(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbf{R}^+.$$

$$F^* [t, \varepsilon] = [\phi_1(t, \varepsilon) / \varepsilon_1, \dots, \phi_l(t, \varepsilon) / \varepsilon_l]^T.$$

$$F^* [t, \varepsilon] = [\phi_i^*(t, \varepsilon)]_{i=1, \dots, l}.$$

$$\forall (t, \varepsilon) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n, \exists F_{\min} \in \mathbf{R}^k, \exists F_{\max} \in \mathbf{R}^k :$$

$$F_{\min} \leq F^* [t, \varepsilon] \leq F_{\max}.$$

3.5 Formes en flèche.

L'utilisation de la représentation dite en flèche apparaît très intéressante et bien adaptée à l'analyse des systèmes dynamiques.

$$F_1 [x, t] = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \text{---} & 0 & b_1 \\ & \diagdown & & & \\ 0 & & & & \\ & \diagdown & & & \\ & & & & \\ 0 & \text{---} & 0 & p_{n-1} & b_{n-1} \\ & & f_1(\cdot) & \text{---} & f_{n-1}(\cdot) & f_n(\cdot) \end{bmatrix}$$

$$F_2 [x, t] = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \text{---} & 0 & f_1(\cdot) \\ & \diagdown & & & \\ 0 & & & & \\ & \diagdown & & & \\ & & & & \\ 0 & \text{---} & 0 & p_{n-1} & f_{n-1}(\cdot) \\ & & b_1 & \text{---} & b_{n-1} & f_n(\cdot) \end{bmatrix}$$

Les deux formes en flèche ci-dessus (dites minces) conviennent pour les systèmes monovariabiles linéaires ou non-linéaires [5]..[7].

Pour les processus du type de Lur'e & Postnikov :

Les termes $f_i(\cdot)$ représentent les non-linéarités avec $i = 1, \dots, n$.

Les b_j sont des coefficients réels constants avec $j = 1, \dots, n-1$.

Les p_k ($k = 1, \dots, n-1$) sont choisis arbitrairement [4].

Les deux représentations ci-dessus peuvent être déterminées à partir des deux formes Compagnes et à l'aide d'un changement de base P , respectivement $[P^T]^{-1}$ de la forme :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & 0 \\ p_1^2 & p_2^2 & \dots & p_{n-1}^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_1^{n-1} & p_2^{n-1} & \dots & p_{n-1}^{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_1[t,x] = P^{-1} \cdot A_1[t,x] \cdot P \quad (14)$$

$$F_2[t,x] = P^T \cdot A_2[t,x] \cdot (P^T)^{-1} \quad (15)$$

$$= P^T \cdot A_1^T[t,x] \cdot (P^{-1})^T \quad (16)$$

$$= [P^{-1} \cdot A_1[t,x] \cdot P]^T \quad (17)$$

La forme en flèche se généralise aisément aux processus multivariés sous forme de flèche épaisse, chaque élément scalaire intervenant dans les matrices en flèche ci-dessus étant remplacé par une matrice [4].

4° NOTION DE STABILITE : RAPPELS & DEFINITIONS.

La stabilité est une condition nécessaire pour le bon fonctionnement des systèmes. C'est la qualité minimale que doit avoir un processus pour nous garantir qu'une perturbation ne conduira pas ce dernier à une catastrophe.

Tous les Automaticiens connaissent l'abondance des travaux consacrés à ce sujet. La plus part des méthodes d'étude proposées sont basées sur les travaux de LYAPUNOV [8].

Pour rappeler quelques définitions relatives à cette question, nous allons considérer l'équation d'état (18) correspondante aux systèmes autonomes.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x) \quad (18)$$

$x = [x_1, \dots, x_n]^T$: vecteur d'état.

Les propriétés d'existence et d'unicité de la solution de l'équation (18) sont supposées vérifiées. La fonction f doit satisfaire les conditions de Lipschitz < annexe 1 >.

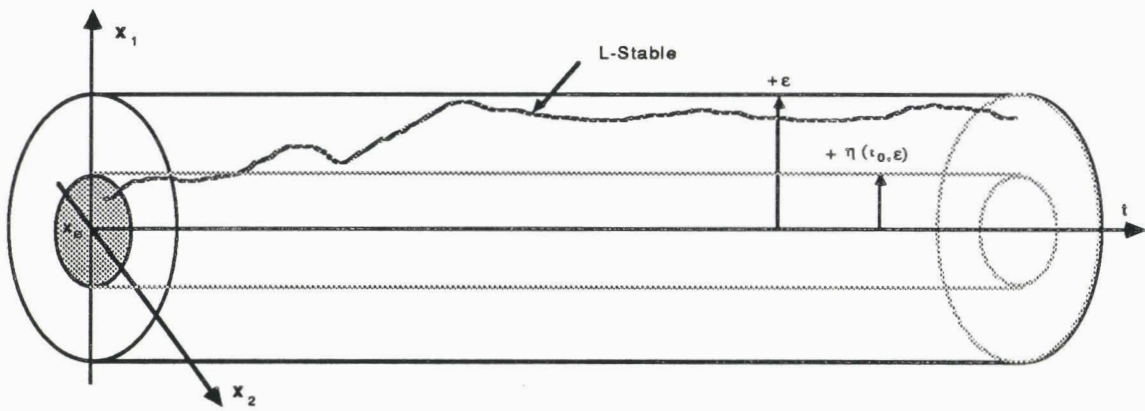
Définition 1 : Stabilité au sens de LYAPUNOV [9] et [10].

L'équilibre $x = x_e$ du système (18) est stable au sens de LYAPUNOV si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(t_0, \varepsilon) > 0, \forall t_0 \in \mathbf{R},$$

$$\{ \|x(t_0) - x_e\| < \eta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \forall t \in [t_0, +\infty[, \|x(t; t_0, x_0) - x_e\| < \varepsilon \}.$$

Autrement dit, un équilibre est L-stable (c'est à dire stable au sens de LYAPUNOV si une faible perturbation dans les conditions initiales entraîne une faible perturbation de la trajectoire ultérieure (figure 7).



(FIGURE 7)

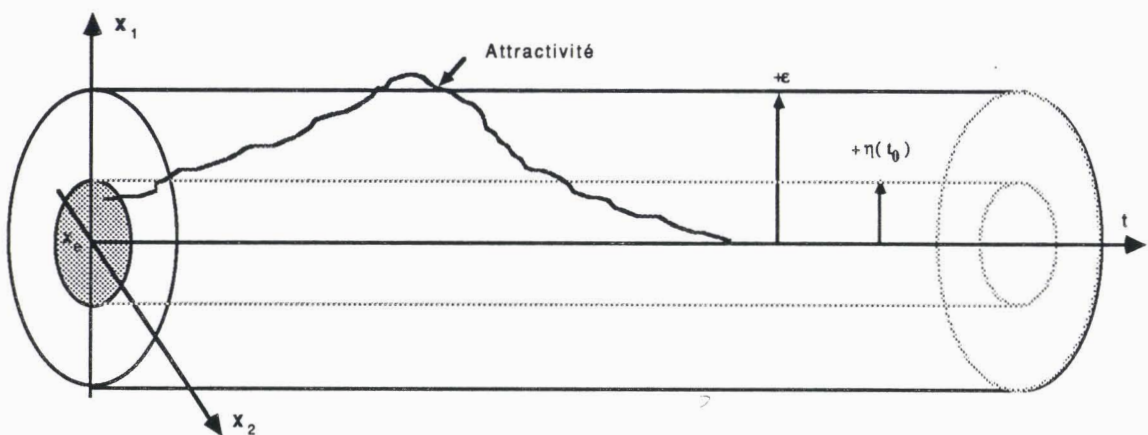
Définition 2 : Attractivité [9] et [10].

L'équilibre x_e est attractif si l'état x converge au bout d'un temps infini vers x_e lorsque les conditions initiales se situent dans une boule ouverte de centre x_e :

$$\forall t_0 \in \mathbf{R}, \exists \eta(t_0) > 0, \text{ tel que : } \|x(t_0) - x_e\| < \eta(t_0)$$

$$\Rightarrow \text{Lim}_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) = x_e.$$

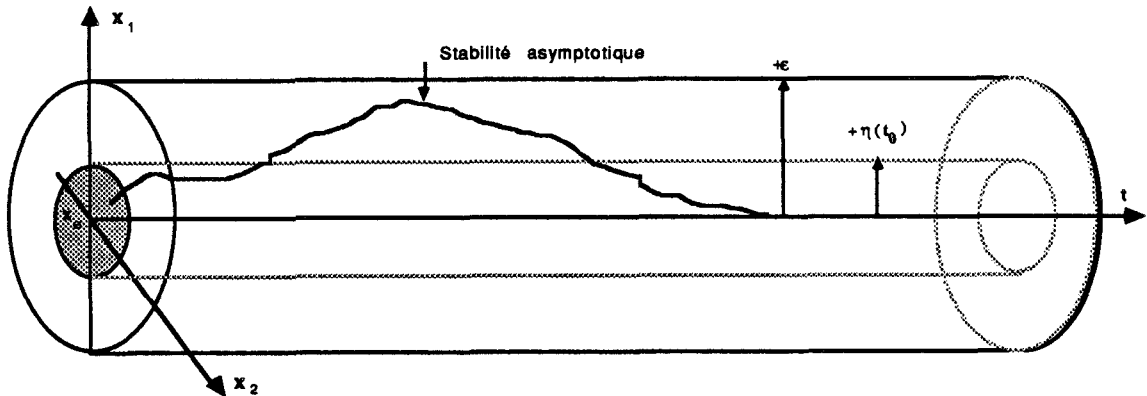
Une illustration dans \mathbf{R}^2 est donnée par la figure ci-dessous.



(FIGURE 8)

Définition 3 : Stabilité asymptotique.

Un équilibre est asymptotiquement stable (figure 9) s'il est à la fois stable et attractif .



(FIGURE 9)

Définition 4 : Stabilité uniforme [11].

La position d'équilibre x_e est uniformément stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \forall t_0 \in \mathbf{R},$$

$$\{ \forall x(t_0) : \|x(t_0) - x_e\| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow \forall t \geq t_0, \|x(t; t_0, x_0) - x_e\| < \varepsilon \}.$$

La quantité $\eta(\varepsilon)$ est indépendante de t_0 .

Définition 5 : Attractivité uniforme [11].

L'équilibre x_e est uniformément attractif si :

$\exists \eta > 0, \forall t_0 \in \mathbf{R}, \forall x_0 : \|x(t_0) - x_e\| < \eta, x(t; t_0, x_0)$ est définie pour tout $t \geq t_0$ et tend vers le point d'équilibre x_e , quand t tend vers l'infini.

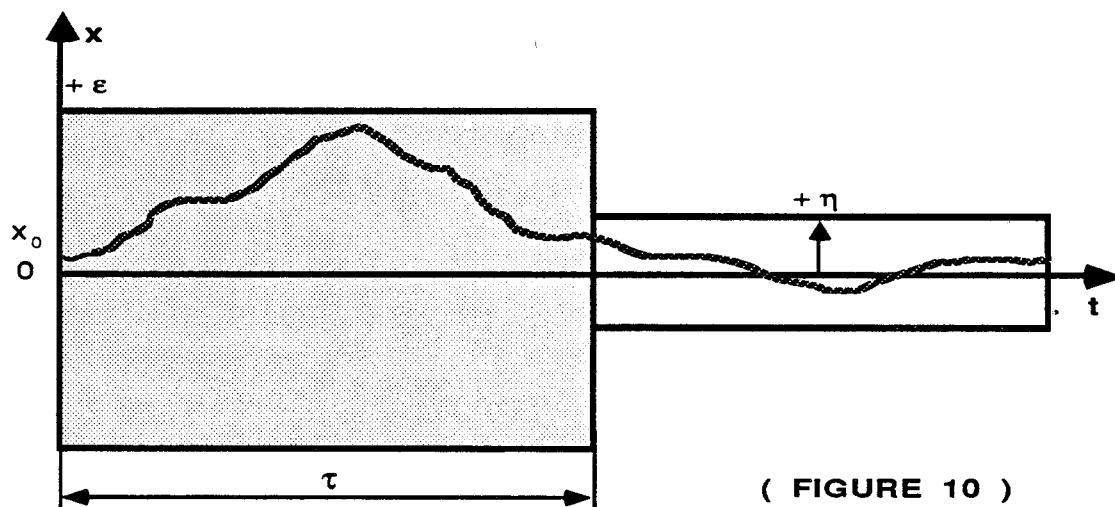
Définition 6 : Stabilité asymptotique uniforme .

Lorsque x_0 est uniformément stable et uniformément attractif, on dit qu'il est **uniformément asymptotiquement stable**.

Parmi d'autres définitions relatives à la stabilité, on trouve :

La stabilité absolue [LUR'E & POSTNIKOV 1944] et l'hyperstabilité [12] correspondantes à l'analyse d'une famille de systèmes.

La stabilité pratique [13] qui consiste à voir si le vecteur état converge vers un voisinage prédéfini de l'équilibre après un temps fini τ (figure 10).



La stabilité globale lorsque le système est stable pour toutes les valeurs que peuvent prendre les variables dans le problème qu'on étudie.

La stabilité en régime non autonome [14] et [15].

etc....

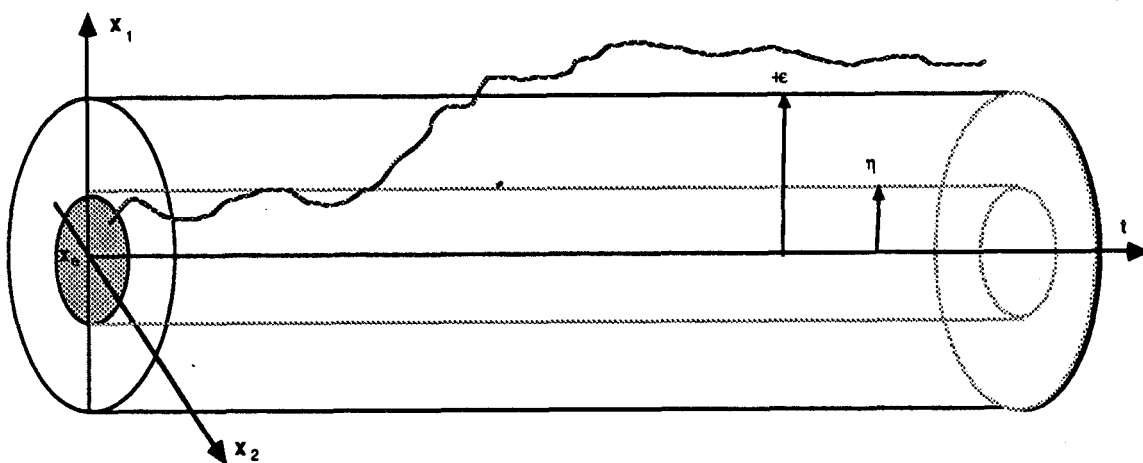
Définition 7 : Equilibre instable [11].

Un équilibre est instable s'il n'est pas stable (figure 11). On peut formuler explicitement cette définition par :

$$\exists \varepsilon > 0, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall \eta > 0,$$

$$\exists x_0 : \|x(t_0) - x_c\| < \eta \text{ et } \exists t \geq t_0, \|x(t; t_0, x_0) - x_c\| \geq \varepsilon.$$

Remarque . On n'oubliera pas, dans l'opération de négation, que la nouvelle quantité η ne dépend pas de ε et de t_0 .



(FIGURE 11)

5° METHODES DE LYAPUNOV.

5.1 La première méthode.

On l'appelle également la méthode de la première approximation. Elle propose une linéarisation autour d'un point de fonctionnement qui, lorsqu'elle est possible permet d'étudier la stabilité locale d'un système non-linéaire [16].

Soit le système décrit par l'équation (19) suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x) = A.x + g(t,x) \quad (19)$$

A est une matrice constante élément de $\mathbf{R}^{n \times n}$ et $g(t,x)$ une fonction dépendante de l'état et du temps telle que :

$$\frac{\|g(x,t)\|}{\|x\|} \text{ tend uniformément vers zéro avec } \|x\|.$$

$\|x\|$ désigne ici la norme euclidienne du vecteur état.

Le système décrit par l'équation (20) est le **système linéarisé**, autour du point $x_e = 0$, associé à (19) :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A.x \quad (20)$$

Théorème 1 Si l'équilibre $x_e = 0$ du système (20) est asymptotiquement stable, il en est de même (localement) pour le système (19).

Théorème 2 Si l'équilibre $x_e = 0$ du système linéarisé est instable, alors le système initial est instable (localement).

Théorème 3 Lorsque l'équilibre $x_e = 0$ du système linéarisé est stable sans l'être asymptotiquement, on ne peut conclure ni à la stabilité locale ni à l'instabilité : c'est le cas critique. Il a été étudié en détail par N. BAUTIN [17].

Remarques.

La méthode est applicable pour les positions d'équilibre autres que l'origine en s'y ramenant par simple changement d'origine du vecteur état. Elle ne permet d'étudier que la stabilité locale au voisinage de l'équilibre, et de plus ne nous donne aucune indication sur le domaine dans lequel la stabilité est garantie.

5.2 La deuxième méthode.

Elle permet de conclure à la stabilité ou à l'instabilité d'un système sans construire la solution de l'équation différentielle correspondante.

Elle donne des conditions de stabilité suffisantes mais non nécessaires, mais elle peut permettre la détermination d'un domaine dans lequel la stabilité est garantie.

Pour énoncer les théorèmes correspondants à cette deuxième méthode, il est nécessaire de rappeler quelques définitions de certaines fonctions .

Nous considérons par la suite que l'équilibre est $x_e = 0$ et que pour les autres positions d'équilibre, on peut se ramener à l'origine par un simple changement de repère du vecteur état. On notera également (pour $r > 0$) :

$$D_{r,t_0} = \{ (t,x) \in [t_0,+\infty[\times \mathbb{R}^n \text{ telque } \|x\| \leq r \text{ et } t \geq t_0 \}.$$

Soit $v(t,x)$ une fonction scalaire définie en chaque point de l'espace d'état, continue, différentiable et à dérivées partielles continues également.

Définition 1 : Fonction de classe K [18].

Nous appelons fonction de classe K, toute fonction :

$$f : [0,r] \rightarrow \mathbb{R}^+ ; r \text{ élément de } \mathbb{R}^+.$$

$$y \rightarrow f(y)$$

$f(y)$ continue, strictement croissante et $f(0) = 0$.

Définition 2 : Fonction définie positive.

Une fonction $v(t,x)$ continue de D_{r,t_0} dans \mathbf{R} est définie positive si et seulement si il existe une fonction f de classe K telle que :

- a) $v(t,0) = 0$ pour tout t élément de $[t_0, +\infty[$.
- b) $v(t,x) \geq f(\|x\|)$ pour tout (t,x) élément de D_{r,t_0} .

$\|x\|$ désigne ici norme euclidienne du vecteur état.

Définition 3 : Fonction définie négative.

Une fonction $v(t,x)$ continue de D_{r,t_0} dans \mathbf{R} est définie négative si et seulement si il existe une fonction f de classe K telle que :

- a) $v(t,0) = 0$ pour tout t élément de $[t_0, +\infty[$.
- b) $v(t,x) \leq -f(\|x\|)$ pour tout (t,x) élément de D_{r,t_0} .

Définition 4 : Fonction décroissante.

La fonction $v(t,x)$ est décroissante si elle converge uniformément par rapport à t vers $x_e = 0$ quand $\|x\|$ tend vers 0.

Définition 5 : Fonction non bornée en rayon.

La fonction $v(t,x)$ est non bornée en rayon si et seulement si elle tend vers l'infini quand $\|x\|$ tend vers l'infini.

A partir de ces définitions, nous pouvons énoncer les théorèmes fondamentaux de LYAPUNOV, ainsi que le théorème dû à BARBASIN & KRASOVSKI. Les fonctions $v(t,x)$ calculées dans la suite seront par conséquent telles que les courbes $v(t,x) = \text{constante}$ limiteront un

domaine connexe avec la propriété suivante :

Si $D_{c_1}(t) = \{ x / v(t,x) \leq c_1 \}$ et $D_{c_2}(t) = \{ x / v(t,x) \leq c_2 \}$,

$c_1 < c_2 \rightarrow D_{c_1}(t)$ est inclus dans $D_{c_2}(t)$ pour tout t donné.

Théorème 1 : Stabilité

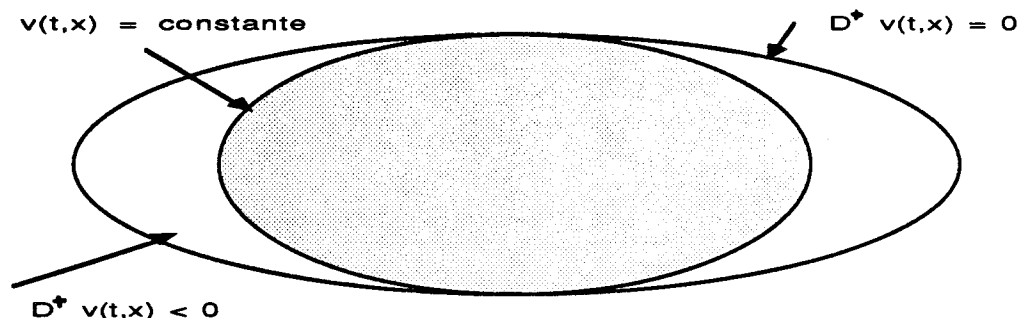
l'équilibre $x_e = 0$ du système régi par l'équation différentielle (19) est stable s'il existe une fonction $v(t,x)$ définie positive dont la dérivée $D^+v(t,x)$ ne soit jamais positive le long des trajectoires de l'équation (19).

Théorème 2 : Stabilité asymptotique.

L'équilibre $x_e = 0$ du système décrit par (19) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $v(t,x)$ définie positive et décroissante dont la dérivée $D^+v(t,x)$ soit définie négative.

Théorème 3 : Stabilité asymptotique globale [19].

L'équilibre $x_e = 0$ est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction $v(t,x)$ qui soit définie positive, non bornée en rayon, décroissante et dont la dérivée $D^+v(t,x)$ soit définie négative le long des trajectoires de (19) dans tout l'espace d'état.



(FIGURE 12)

Sur la figure (12) ci-dessus, la plus grande équipotentielle $v(t,x) = \text{constante}$ comprise dans $D^+v(t,x) \leq 0$ définit une estimation par défaut du domaine d'attraction de l'équilibre x_0 (chaitre II).

Toute fonction satisfaisant les conditions des trois théorèmes ci-dessus est appelée **fonction de LYAPUNOV**. Le problème essentiel pour l'application de cette méthode réside dans la recherche des fonctions $v(t,x)$ dites : fonctions candidates à LYAPUNOV.

En pratique, il n'existe aucun procédé général qui nous permette de choisir une fonction plutôt qu'une autre, mais la nature des systèmes à étudier nous aide dans beaucoup de cas à choisir des fonctions adéquates. On peut admettre une infinité de fonctions $v(t,x)$.

Cependant le fait qu'une fonction ne nous permette pas de conclure à la stabilité n'exclue pas l'existence d'une autre fonction permettant d'affirmer la stabilité ou l'instabilité.

6° NOTION DE NORME VECTORIELLE.

Le concept de norme vectorielle introduit par F. ROBERT [20], en vue d'étudier la convergence des récurrences linéaires en analyse numérique, a été développé par P. BORNE, J. C. GENTINA et F. LAURENT pour analyser les systèmes complexes de grandes dimensions linéaires ou non-linéaires continus ou discrets et ceci a conduit à de nombreux travaux [21] [26].

L'application des normes vectorielles permet la définition systématique d'une classe de systèmes majorants associés à un processus et dont la stabilité entraîne celle du système initial.

Rappels :

Soit $E_V = \mathbb{R}^n$ un espace vectoriel de dimension n et $E_{V_1}, E_{V_2}, \dots, E_{V_k}$ des sous espaces vectoriels de E_V avec :

$$E_{V_1} \cup E_{V_2} \cup \dots \cup E_{V_k} = E_V ; (k \leq n).$$

Notons :

- a°) x un vecteur de dimension n élément de \mathbf{R}^n .
 b°) x_i une projection de x dans E_{V_i} avec :

$$x_i = P_i(x), \forall x \in E_V, \forall x_i \in E_{V_i}, (\forall i = 1, 2, \dots, k \leq n).$$

$P_i(\cdot)$ est l'opérateur de projection.

Si $p_i(x_i)$ est une norme scalaire du vecteur x_i de E_{V_i} , alors le vecteur $p(x)$ de dimension k et de composantes $p_i(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) est une norme vectorielle du vecteur x :

$$p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+^k.$$

$$x \rightarrow p_i(x) = p_i(x_i).$$

La norme vectorielle possède les propriétés suivantes :

- a°) $p_i(x_i) \geq 0, \forall x_i \in E_{V_i}, (\forall i = 1, 2, \dots, k)$.
 b°) $p_i(x_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, (\forall i = 1, 2, \dots, k)$.
 c°) $p(x_i + y_i) \leq p_i(x_i) + p_i(y_i), \forall x_i \in E_{V_i}, \forall y_i \in E_{V_i}, (\forall i = 1, 2, \dots, k)$.
 d°) $p_i(\alpha \cdot x_i) = |\alpha| p_i(x_i), \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall x_i \in E_{V_i}, (\forall i = 1, 2, \dots, k \leq n)$.

La norme vectorielle p est dite **régulière** si tous les sous espaces vectoriels E_{V_i} forment un recouvrement de E_V et sont disjoints deux à deux :

$$E_{V_i} \cap E_{V_j} = \emptyset, (\forall i \neq j = 1, 2, \dots, k).$$

$$E_{V_1} \cup E_{V_2} \cup \dots \cup E_{V_k} = E_V.$$

La norme vectorielle p est dite **surjective** si $(k-1)$ des sous espaces $(E_{v_i}, i = 1, 2, \dots, k)$ ne suffisent pas à redéfinir E_v .

Exemples.

Soit : $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \in E_v$.

1°) Si on choisit :

$$y_1 = [x_1, x_2, x_3, 0, 0]^T \in E_{v_1}.$$

$$y_2 = [0, 0, x_3, x_4, x_5]^T \in E_{v_2}.$$

$$y_3 = [0, 0, 0, 0, x_5]^T \in E_{v_3}.$$

Les sous espaces vectorielles E_{v_1} , E_{v_2} et E_{v_3} ne sont pas "tous" disjoints 2 à 2. Donc, la norme $p(x) = [p_1(y_1), p_2(y_2), p_3(y_3)]^T$ n'est pas régulière. D'autre part, on constate que $E_{v_1} \cup E_{v_2}$ reconstitue tout l'espace vectoriel E_v . Par conséquent, la norme vectorielle $p(x)$ n'est pas surjective.

Si on prend pour p_1 la norme " somme des modules ", pour p_2 la norme euclidienne et pour p_3 la norme du max, il vient :

$$p_1(y_1) = |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

$$p_2(y_2) = (x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)^{1/2}.$$

$$p_3(y_3) = |x_5|.$$

Soit finalement : $p^T(x) = [(|x_1| + |x_2| + |x_3|), (x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)^{1/2}, |x_5|]$.

2°) Si on choisit :

$$y_1 = [x_1, x_2, 0, 0, 0]^T \in E_{v_1}.$$

$$y_2 = [0, x_2, x_3, x_4, 0]^T \in E_{v2}.$$

$$y_3 = [0, 0, 0, 0, x_5]^T \in E_{v3}.$$

La norme vectorielle $p(x) = [p_1(y_1), p_2(y_2), p_3(y_3)]^T$ n'est pas régulière mais surjective.

Si on prend pour p_1 la norme du Max, p_2 la norme " somme des modules ", et pour p_3 la norme euclidienne , il vient :

$$p_1(y_1) = \text{Max} \{ |x_1|, |x_2| \}.$$

$$p_2(y_2) = |x_2| + |x_3| + |x_4|.$$

$$p_3(y_3) = (x_5^2)^{1/2} = |x_5|.$$

Soit finalement :

$$p^T(x) = [\text{Max} \{ |x_1|, |x_2| \}, (|x_2| + |x_3| + |x_4|), |x_5|].$$

3°) Si on choisit :

$$y_1 = [x_1, x_2, 0, 0, 0]^T \in E_{v1}.$$

$$y_2 = [0, 0, x_3, x_4, 0]^T \in E_{v2}.$$

$$y_3 = [0, 0, 0, 0, x_5]^T \in E_{v3}.$$

La norme vectorielle $p(x) = [p_1(y_1), p_2(y_2), p_3(y_3)]^T$ est régulière et surjective.

7° PRINCIPE ET METHODE DE COMPARAISON.

L'analyse directe des processus dynamiques s'avère parfois embarrassante et difficile. L'introduction de la méthode de comparaison a réduit considérablement ces difficultés. Elle permet d'étudier la stabilité d'une façon indirecte en associant à un processus complexe de grande dimension un système plus simple et d'ordre inférieur ou égal de telle façon que la stabilité du nouveau système, dit de **comparaison** implique celle du système initial. Une très riche bibliographie correspondante à la question est donnée dans les références [10] et [27].

7.1 Rappel de la méthode.

Soit $g : T_0 \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$; D : un domaine de \mathbb{R}^n ; $O \in D$; $D \neq \{O\}$.

$(t,z) \rightarrow g(t,z)$: une fonction localement Lipschitzienne

$$\frac{dz(t)}{dt} = g(t,z) \quad (21)$$

une équation différentielle avec $z_0 \in D$. $z(t)$: une solution de (21) définie sur un intervalle $]t_1, t_2[$ contenant t_0 , avec $z_0 = z(t_0)$.

$y(t)$: Une fonction de classe K définie sur $]t_1, t_2[$ avec $y_0 = y(t_0)$ et $y_0 \in D$.

Théorème [11] :

Si $y_0 \leq z_0$ et $\forall t \in [t_0, t_2[$:

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq g(t,y(t)) ,$$

alors $\forall t \in [t_0, t_2[$: $y(t) \leq z(t)$.

La démonstration de ce théorème est rappelée en < annexe 2 >.

7.2 Système majorant et matrice pseudo-majorante.

La nature des systèmes que nous nous proposons d'étudier dans ce qui suit est régie par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(t,x) = A[t,x].x \quad (22)$$

$x \in \mathbf{R}^n = \mathbf{E}_v$: vecteur d'état.

$x_0 = x(t_0 ; t_0, x_0)$: vecteur d'état à l'instant initial.

D_S : voisinage de $x = 0$ inclus dans \mathbf{R}^n .

t_0 : caractérise l'instant initial.

$T_0 = [t_0, +\infty[$.

$f : T_0 \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

$(t,x) \rightarrow \mathbf{R}^n$.

f est une fonction localement Lipschitzienne et $f(t,0) = 0$.

$x(t ; t_0, x_0)$: la solution supposée unique de l'équation (22).

$A[t,x]$: une matrice d'évolution d'ordre $n \times n$.

L'application de la notion de norme vectorielle au vecteur d'état x nous permet de définir un système pseudo-majorant de la façon suivante [24] et [26] :

Définition 1 :

La matrice $M[t,x] : T_0 \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{k \times k}$ définit un système majorant de (22) sur D_S sur relativement à la norme vectorielle $p(x)$ de taille k si et seulement si l'inégalité (23) est vérifiée composante à composante $\forall x \in D_S$ et $\forall t \geq t_0$.

$$D^+ p(x) \leq M[t,x].p(x) \quad (23)$$

$D^+ p(x) = [D^+ p_1(x_1), \dots, D^+ p_k(x_k)]^T$ est la dérivée à droite de $p(x)$ au sens de ROSENBROCK [28] et SANDBERG [29]. Elle permet de lever les difficultés qui peuvent être dues aux discontinuités éventuelles d'une ou plusieurs composantes $[D^+ p_i(x_i)]$.

La matrice $M[t,x]$ est appelée pseudo-majorante correspondante à la matrice d'évolution $A[t,x]$.

Notons :

$$A_{ij}[t,x] = P_i \cdot A[t,x] \cdot P_j \quad (\forall i, j = 1, 2, \dots, k).$$

$$M[t,x] = [m_{ij}(t,x)]$$

$$\mu_{ij}(t, x, y) = \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T \cdot A_{ij}[t,x] \cdot y_j}{p_j(y_j)} \quad (24)$$

"Grad" désigne le gradient de.

Définition 2 :

La matrice $M[t,x]$ est une matrice pseudo-majorante canonique relativement à la norme vectorielle $p(x)$ si :

$$m_{ii}(t,x) = \text{Sup}_{y \in E_v} \{ \mu_{ii}(t, x, y) \}$$

$$(\forall i = 1, 2, \dots, k) ; (\forall x \in E_v) ; (\forall t \in T_0) \quad (25)$$

$$m_{ij}(t,x) = \text{Max} \left\{ 0 ; \text{Sup}_{y \in E_v} \{ \mu_{ij}(t, x, y) \} \right\}$$

$$(\forall i \neq j = 1, 2, \dots, k) ; (\forall x \in E_v) ; (\forall t \in T_0)$$

Remarque. Dans le cas où les normes $p_i(x_i)$ ne sont différentiables que par morceaux, on doit remplacer le gradient par un sous-gradient généralisé [30] (dans le sens de la différentiation à droite seulement).

Définition 3 :

La matrice $M[t] = [m_{ij}(t)]$ telle que :

$$m_{ii}(t) = \text{Sup}_{y \in E_v} \{ \mu_{ii}(t, y, y) \}$$

$$(\forall i = 1, 2, \dots, k) ; (\forall t \in T_0)$$
(26)

$$m_{ij}(t) = \text{Max} \left\{ 0 ; \text{Sup}_{y \in E_v} \{ \mu_{ij}(t, y, y) \} \right\}$$

$$(\forall i \neq j = 1, 2, \dots, k) ; (\forall t \in T_0).$$

est une pseudo-majorante canonique ne dépendant que du temps.

Définition 4 :

La matrice $M = [m_{ij}]$ telle que :

$$m_{ii} = \text{Sup}_{y \in E_v ; t \in T_0} \{ \mu_{ii}(t, y, y) \}$$

$$(\forall i = 1, 2, \dots, k).$$
(27)

$$m_{ij} = \text{Max} \left\{ 0 ; \text{Sup}_{y \in E_v ; t \in T_0} \{ \mu_{ij}(t, y, y) \} \right\}$$

$$(\forall i \neq j = 1, 2, \dots, k).$$

est une pseudo-majorante canonique constante.

$$m_{ij}(t,x) = \text{Max}_{u \in I_i} \left\{ \sum_{v \in I_j} |a_{uv}(\cdot)| \right\} \quad (29)$$

$(\forall x \in E_V) ; (\forall i \neq j = 1, 2, \dots, k) ; (\forall t \in T_0).$

Exemple. Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(\cdot) & a_{12}(\cdot) & a_{13}(\cdot) \\ a_{21}(\cdot) & a_{22}(\cdot) & a_{23}(\cdot) \\ a_{31}(\cdot) & a_{32}(\cdot) & a_{33}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Si on choisit la division de l'espace E_V comme suit :

$y_1 = [x_1, 0, 0]^T$ et $y_2 = [0, x_2, x_3]^T$;

et si $p_i(y_i)$ = norme du Max : $p_1(y_1) = |x_1|$ et $p_2(y_2) = \text{Max} \{ |x_2|, |x_3| \}$,

alors, Les éléments $m_{ij}(t,x)$ de la pseudo-majorante $M[t,x]$ sont :

$$m_{11}(t,x) = a_{11}(\cdot).$$

$$m_{22}(t,x) = \text{Max} \{ (a_{22}(\cdot) + |a_{23}(\cdot)|) ; (|a_{32}(\cdot)| + a_{33}(\cdot)) \}.$$

$$m_{21}(t,x) = \text{Max} \{ |a_{21}(\cdot)| ; |a_{31}(\cdot)| \}.$$

$$m_{12}(t,x) = |a_{12}(\cdot)| + |a_{13}(\cdot)|.$$

2°) Si $p_i(y_i)$ = norme somme des modules, alors :

$$m_{ii}(t,x) = \text{Max}_{v \in I_i} \left\{ a_{vu}(\cdot) + \sum_{u \in I_i; u \neq v} |a_{uv}(\cdot)| \right\} \quad (30)$$

$(\forall x \in E_V) ; (\forall i = 1, 2, \dots, k) ; (\forall t \in T_0).$

$$m_{ij}(t,x) = \text{Max}_{v \in I_j} \left\{ \sum_{u \in I_i} |a_{uv}(\cdot)| \right\} \quad (31)$$

$(\forall x \in E_V) ; (\forall i \neq j = 1, 2, \dots, k) ; (\forall t \in T_0).$

Pour le même système ci-dessus, si on garde la même division de l'espace, les éléments $m_{ij}(t,x)$ de la pseudo-majorante $M[t,x]$ sont :

$$m_{11}(t,x) = a_{11}(\cdot).$$

$$m_{22}(t,x) = \text{Max} \{ (a_{22}(\cdot) + |a_{32}(\cdot)|); (|a_{23}(\cdot)| + a_{33}(\cdot)) \}.$$

$$m_{12}(t,x) = \text{Max} \{ |a_{12}(\cdot)| ; |a_{13}(\cdot)| \}.$$

$$m_{21}(t,x) = |a_{21}(\cdot)| + |a_{31}(\cdot)|.$$

7.3 Propriétés des matrices pseudo-majorantes.

Les matrices pseudo-majorantes $M[t,x]$ associées aux matrices $A[t,x]$ et relatives aux normes vectorielles $p(x)$ possèdent les propriétés suivantes (énoncées pour un couple (t,x) donné) :

a°) Les éléments hors diagonaux sont non négatifs :

$$\forall m_{ij}(t,x) \in M[t,x], m_{ij}(t,x) \geq 0.$$

b°) La partie réelle de la valeur propre principale λ_m de $M[t,x]$ est supérieure à la partie réelle de toutes les valeurs propres λ_i de $A[t,x]$:

$$\text{Re}(\lambda_m) \geq \text{Re}(\lambda_i), (\forall i = 1, 2, \dots, n).$$

c°) Si la partie réelle de la valeur propre principale λ_m de $M[t,x]$ est négative, alors $M[t,x]$ est l'opposée d'une M-matrice :

$$\text{L'inverse } M^{-1}[t,x] \text{ existe et } M^{-1}[t,x] \geq 0.$$

d°) Dans le cas où $M[t,x]$ est l'opposée d'une M-matrice, alors $M[t,x]$ admet un vecteur propre principal $U(t,x)$ associé à λ_m dont toutes

les composantes $U_i(t,x)$ sont non négatives.

e°) Lorsque $M[t,x]$ admet une inverse irréductible [31], les composantes $U_i(t,x)$ du vecteur propre principal sont strictement positives.

f°) Lorsque $M[t,x]$ est l'opposée d'une M-matrice, les conditions de KOTELYANSKI sont vérifiées : tous les mineurs principaux de $M[t,x]$ sont de signes alternés, le premier étant négatif. Et si les conditions de KOTELYANSKI sont satisfaites $M[t,x]$ étant à éléments hors diagonaux positifs alors $M[t,x]$ est l'opposée d'une M-matrice.

7.4 Mise en œuvre, lemme de comparaison.

L'utilisation du concept de norme vectorielle débouche sur la définition d'un système majorant correspondant à un processus complexe dont on veut analyser la propriété de stabilité.

Le lemme ci-dessous permet une mise en œuvre directe du lemme de comparaison de WAZEWSKI [32]. Il nous permet la détermination d'un système de comparaison du système initial.

Enoncé du lemme.

Soit une norme vectorielle p régulière, surjective et de taille k et soit $M[t,x]$ une pseudo-majorante associée au système (22) telle que d'une part les éléments non diagonaux soient non négatifs et que d'autre part l'inégalité (32) soit vérifiée le long des solutions de (22).

$$D^+p(x) \leq M[t,x].p(x). \quad (32)$$

Le système (33) tel que : $z(t_0) \geq p(x(t_0))$

$$\frac{dz(t)}{dt} = M[t,x].z \quad ; \quad \forall (z \in \mathbf{R}_+^k) \quad (33)$$

est un système de comparaison de (22) sur \mathbf{R}^n et l'inégalité suivante est vérifiée [24] :

$$z(t) \geq p(x(t)) \quad (34)$$

$$(\forall x \in \mathbf{E}_v) ; (\forall t \in T_0)$$

Dans ce cas la stabilité du système de comparaison implique bien celle du système initial.

7.5 Critère pratique de stabilité.

Basé sur la notion de norme vectorielle et la définition d'une pseudo-majorante $M[t,x]$, le critère pratique de BORNE et GENTINA [24] et [25] s'énonce comme suit :

Si la pseudo-majorante $M[t,x]$, correspondante à la matrice d'évolution $A[t,x]$ d'un système d'ordre n , relativement à une norme p , est telle que ses éléments non constants soient regroupés dans une seule ligne ou colonne, alors une condition suffisante de stabilité asymptotique du système initial est que les mineurs principaux de $M[t,x]$ vérifient les conditions suivantes :

$$m_{11} < 0 ; \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} > 0 ; \dots (-1)^n \times \det M[.] > 0 .$$

Remarques.

a°) Les conditions du critère ci-dessus sont les conditions de stabilité asymptotique du linéaire - critère de KOTELYANSKI [10] et [33] appliqués au système de comparaison non linéaire. Lorsque le critère est applicable directement sans majoration, on dit que le système vérifie la conjecture du linéaire.

b°) Le critère s'applique aisément aux formes en flèches minces ou épaisses [7].

8° CONCLUSION.

Au cours de ce premier chapitre, nous avons rappelé quelques méthodes de représentations des systèmes continus de grande dimension ainsi que des définitions et résultats principaux concernant la stabilité. L'utilisation du concept de norme vectorielle et l'application des techniques de majoration simplifient considérablement l'analyse des systèmes et par suite, limitent a priori le volume des calculs.

Chapitre II :

ESTIMATION ET ANALYSE DES ATTRACTEURS.

1° INTRODUCTION.

Il est des cas où il est impossible de prouver que l'état du système converge vers le point d'équilibre indépendamment de sa valeur initiale $x(t_0) = x_0$. Il s'agit alors de rechercher un domaine d'attraction défini comme étant un ensemble de valeurs $x(t_0)$ garantissant la convergence du vecteur état vers l'équilibre [34].

La connaissance de ce domaine d'attraction ainsi que des points finaux ou trajectoires limites a une grande importance pour le contrôle et la commande des systèmes. Or, leur détermination exacte s'avère parfois difficile. On cherche alors par l'introduction du système de comparaison une estimation qui soit suffisamment proche du domaine effectif [35]..[40].

Nous allons rappeler dans un premier temps une méthode d'estimation basée sur l'application des normes vectorielles et dans un second temps nous énoncerons des définitions relatives aux systèmes majorants non autonomes et une généralisation du lemme de comparaison ainsi qu'une méthode originale d'estimation des attracteurs.

2° ESTIMATION DU DOMAINE D'ATTRACTION D'UN EQUILIBRE.

Le domaine d'attraction d'un point d'équilibre est l'ensemble des points d'où partent les trajectoires aboutissant à cet équilibre. Une estimation de ce domaine peut être donnée par le théorème ci-dessous.

Soit un système non-linéaire de grande dimension décrit, en régime autonome, par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A[t,x].x \quad (35)$$

$x \in \mathbb{R}^n$: vecteur d'état.

$x_0 = x(t_0 ; t_0, x_0)$: vecteur d'état à l'instant initial.

$T_0 = [t_0, +\infty[; t_0$ caractérise l'instant initial.

$x_e = 0$: est un point d'équilibre.

$A[t,x]$: Une matrice d'évolution d'ordre $n \times n$.

Théorème :

Si le système (35) admet un système de comparaison défini à partir de la norme vectorielle p satisfaisant l'expression suivante :

$$\frac{dz}{dt} = M.z \quad (36)$$

Avec M matrice constante, opposée d'une M -matrice, et d'inverse irréductible dans un domaine D_M entourant le point d'équilibre x_e , alors la plus grande équipotentielle définie par $U^T.p(x(t)) \leq k$, avec U vecteur principal de M^T et $k \geq 0$, et incluse dans D_M est une estimation du domaine de stabilité asymptotique de l'origine noté D_{SL} .

Démonstration.

Si l'inégalité suivante est vérifiée,

$$D^+p(x) \leq M.p(x)$$

le système de comparaison défini par (36) implique $z(t) \geq p(x(t))$
 $\forall t \in T_0$ si la condition $z(t_0) \geq p(x(t_0))$ est satisfaite. Dans D_M , la dérivée de la fonction de LYAPUNOV $v(x(t)) = U^T.p(x(t))$ est non positive car M est l'opposée d'une M -matrice.

Si U est le vecteur propre principal de M^T et $v(x(t)) = U^T.p(x(t))$, alors :

$$D^+ v(x) = D^+ [U^T.p(x)].$$

$$D^+ v(x) = U^T [D^+ p(x)]. \quad \text{Car } U \text{ est un vecteur constant.}$$

Or $D^+ p(x) \leq M.p(x)$.

Donc $D^+ v(x) \leq U^T.M.p(x)$.

$D^+ v(x) \leq \lambda_m.U^T.p(x)$; λ_m est la valeur propre principale de M^T .

$D^+ v(x) \leq \lambda_m.v(x)$.

Par conséquent, $D^+ v(x)$ est négative puisque $\lambda_m < 0$.

Exemple. Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 + |x_1| & \sin(t) + 2 \\ \cos(t) & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Pour $p^T(x) = [|x_1| \quad |x_2|]$, la pseudo-majorante correspondante est :

$$M[t, x] = \begin{bmatrix} -9 + |x_1| & |\sin(t) + 2| \\ |\cos(t)| & -2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -9 + |x_1| & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \forall t_0 \in T_0$$

Si $|x_1| \leq 5$, on déduit une pseudo-majorante constante et opposée d'une M-matrice.

Il vient alors :

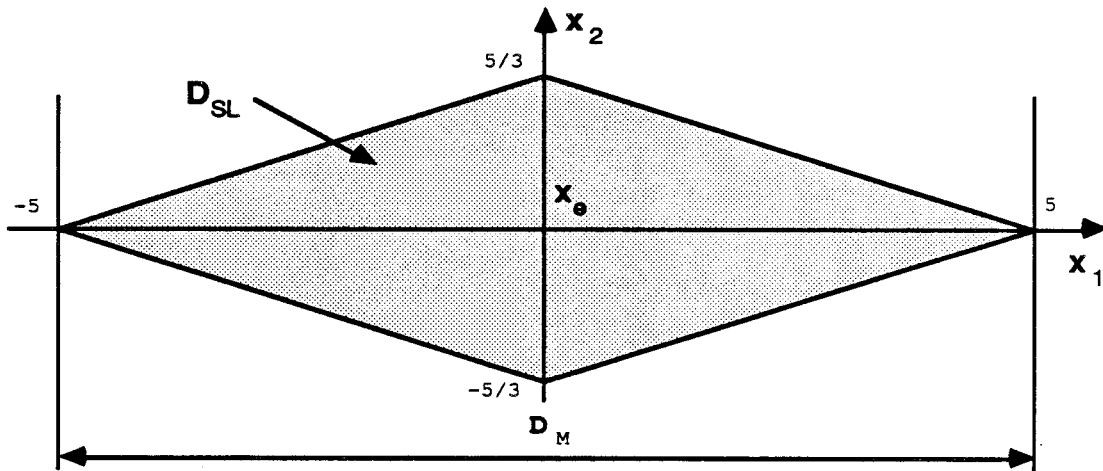
$$M^T = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} ; \quad \lambda_m = -1 \text{ et } U^T = [1 \quad 3] .$$

Soit finalement :

a°) $D_M = \{ x \in \mathbf{R}^2 : |x_1| \leq 5 \}$.

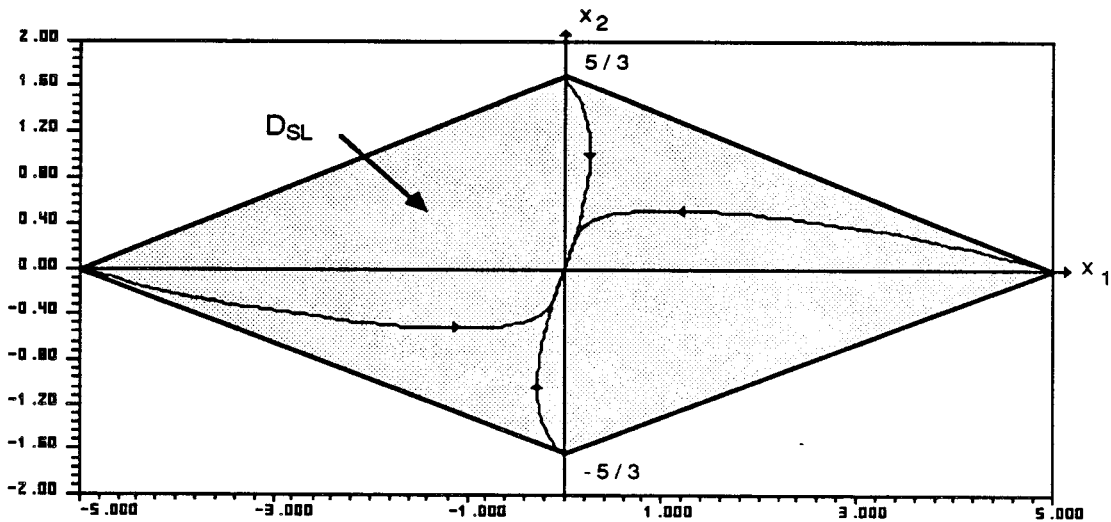
b°) $D_{SL} = \{ x \in \mathbf{R}^2 : |x_1| + 3.|x_2| \leq 5 \}$.

La figure ci-dessous nous donne l'estimation du domaine d'attraction relatif au point $x_e = 0$.



(FIGURE 13)

Sur la figure suivante, on voit bien que pour toute condition initiale x_0 élément de D_{SL} , on a convergence asymptotique du vecteur état vers l'origine.



(FIGURE 14)

Remarque.

Dans la référence [34] est donnée une généralisation du théorème ci-dessus pour traiter le cas où la pseudo-majorante est non constante.

3° DEFINITION ET ANALYSE DES ATTRACTEURS.

En pratique, un attracteur est un domaine (ou point) vers lequel converge le vecteur d'état. Nous allons rappeler quelques notations et définitions nécessaires à l'analyse des attracteurs.

Soit :

$$T_0 = [t_0, +\infty[\text{ avec } t_0 \in \mathbf{R}.$$

$$f : T_0 \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

$$(t, x) \rightarrow f(t, x) \text{ fonction localement Lipschitzienne.}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x).$$

l'équation différentielle, modélisant un processus dynamique quelconque. Nous notons $x(t ; t_0, x_0)$ la solution exprimée en fonction des conditions initiales t_0 et x_0 .

3.1 Orbite ou trajectoire issue d'un point [11].

L'ensemble $\gamma(x_0) = \{x(t ; t_0, x_0) : t \in \mathbf{R}\}$ est appelé orbite ou trajectoire d'un système issue du point x_0 .

L'ensemble $\gamma^+(x_0) = \{x(t ; t_0, x_0) : t \in T_0 = [t_0, +\infty[\}$ est appelé semi-orbite ou semi-trajectoire positive d'un système issue du point x_0 .

L'ensemble $\gamma^-(x_0) = \{x(t ; t_0, x_0) : t \in]-\infty, t_0] \}$ est appelé

semi-orbite ou semi-trajectoire négative d'un système issue du point x_0 .

3.2 Ensemble invariant.

On appelle ensemble invariant \mathbf{I} une réunion d'orbites telle que, si x_0 lui appartient, la solution $x(t ; t_0, x_0)$ lui appartient aussi quelque soit $t \in \mathbf{R}$:

$$x(t ; t_0, x_0) \in \mathbf{I} \quad \forall x_0 \in \mathbf{I} \text{ et } \forall t \in \mathbf{R}.$$

Il est positivement invariant si :

$$x(t ; t_0, x_0) \in \mathbf{I} \quad \forall x_0 \in \mathbf{I} \text{ et } \forall t \geq t_0.$$

Il est négativement invariant si :

$$x(t ; t_0, x_0) \in \mathbf{I} \quad \forall x_0 \in \mathbf{I} \text{ et } \forall t \in]-\infty, t_0].$$

3.3 Points et Ensembles limites.

La notion de point limite et ensemble limite remonte à G. D. BIRKHOFF [41]. Leurs propriétés ont été étudiées surtout dans le cadre des systèmes dynamiques abstraits : voir par exemple N. P. BHATIA & G. P. SZEGÖ (1970) [42].

D'après [43], un point y est appelé point limite au sens positif de la solution $x(t ; t_0, x_0)$, s'il existe une suite $\{t_j\}$ de valeurs t , telle que l'on ait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n ; t_0, x_0) = y \quad \text{et } t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots \rightarrow b.$$

où b désigne l'extrémité supérieure de l'intervalle de définition de la solution $x(t ; t_0, x_0)$ de sorte que b est positif ou infini.

On appelle ensemble limite positif d'une orbite γ , l'ensemble des points limites positifs associés à $\gamma(x_0)$ noté $\Lambda^+(\gamma(x_0))$. Nous

admettons l'abus de langage consistant à écrire $\Lambda^+(x_0)$ ou lieu de $\Lambda^+(\gamma(x_0))$.

$$\Lambda^+(x_0) = \{ y \in \mathbb{R}^n, \text{ il existe une séquence } \{t_i\} \text{ de } T_0, \\ \text{avec } t_i \rightarrow +\infty \text{ et } x(t_i; t_0, x_0) \rightarrow y \}. \quad (37)$$

Propositions. [11]

- a) Si $\Lambda^+(x_0)$ est non vide et borné, alors $x(t; t_0, x_0) \rightarrow \Lambda^+(x_0)$ quand $t \rightarrow +\infty$.
- b) Si $\gamma(x_0)$ est borné, $\Lambda^+(x_0)$ est non vide et compact.

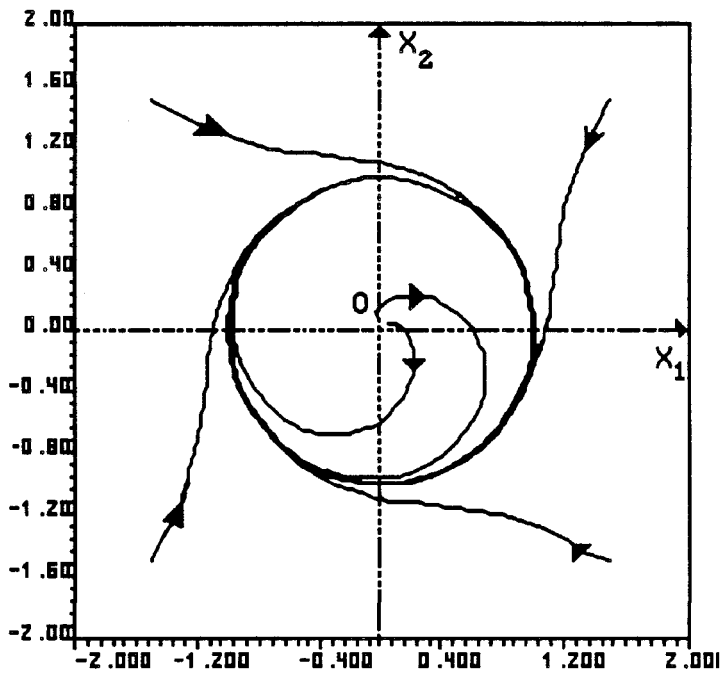
Exemple.

Soit le système défini par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x_1^2 - x_2^2 & -1 \\ 1 & 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Au voisinage de l'origine, le système est instable localement. Sur la figure ci-dessous, on voit bien que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$ (sauf le point $x_0 = 0$), les trajectoires tendent vers un cercle de rayon unité et centré à l'origine.

Les orbites intérieures au cercle s'y approchent sous forme de spirales quand $t \rightarrow +\infty$. De même toutes les orbites extérieures au cercle tendent également en spirale vers lui quand $t \rightarrow +\infty$. Par conséquent, l'ensemble limite $\Lambda^+(x_0)$ est le cercle unité pour tout point $x_0 \neq 0$ et $\Lambda^+(0) = \{0\}$.



(FIGURE 15)

3.4 Prolongement.

La notion de prolongement a été utilisée, dans un cas très spécial, par H. POINCARÉ [44] et, par la suite par BENDIXSON [45] dans ses études du comportement asymptotique des trajectoires d'un système.

La définition formelle de la prolongation et la notion de prolongation relative sont dues à T. URA [43] et [46]. Le concept de l'ensemble limite de prolongation a été introduit par J. AUSLANDER, N. P. BHATIA et P. SEIBERT [47].

3.4.1 La première prolongation positive.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, et soit $V(x)$ le voisinage de x . Selon T. URA [43] et [48], on définit la première prolongation de x_j , noté $J^+(x_j)$, par :

$$J^+(x_j) = \{ y \in \mathbb{R}^n, \text{ il existe une séquence } \{x_i\} \in \mathbb{R}^n \text{ et une séquence } \{t_i\} \text{ de } T_0 = [t_0, +\infty[\text{ tel que : } \\ x_i \rightarrow x_j, t_i \rightarrow +\infty \text{ et } x(t_i; t_0, x_i) \rightarrow y \}. \quad (38)$$

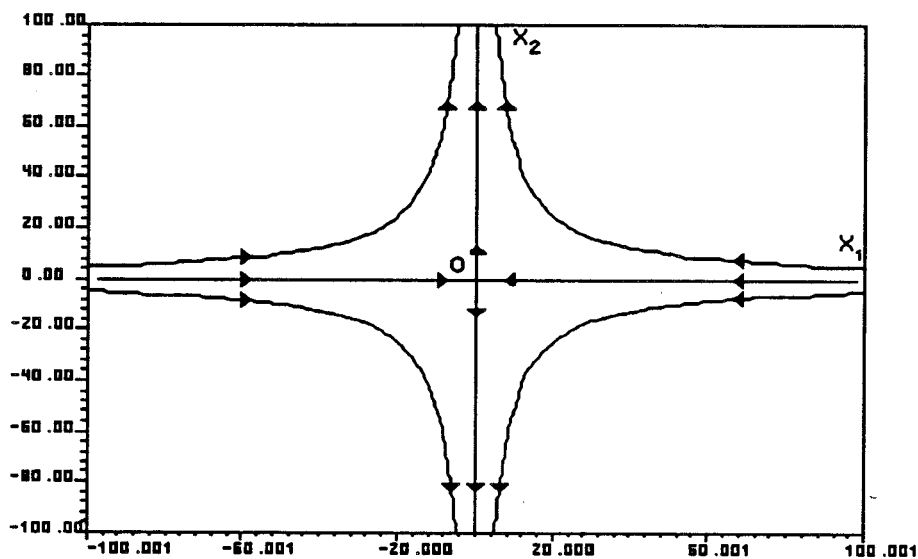
La première prolongation peut être supposée comme une extension de la limite de l'orbite $\gamma(x_j)$. En effet, parmi les propriétés correspondantes, on note :

- a) La fermeture de $\gamma^+(x_j)$ est incluse dans $J^+(x_j)$.
- b) $\Lambda^+(x_j)$ est inclus dans $J^+(x_j)$.
- c) $J^+(x_j)$ est fermé et invariant.

Exemple.

Soit le système suivant :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$



(FIGURE 16)

Le système possède un seul point d'équilibre ($x_e = 0$) instable appelé dans ce cas col (voir la figure ci-dessus).

Pour tout point P de l'espace d'état tel que x_1 est quelconque et $x_2 = 0$, on a :

$$\Lambda^+(P) = \{(x_1, x_2) = (0,0)\} .$$

$$J^+(P) = \{ x \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 0 \}.$$

Pour tout point P de l'espace d'état tel que $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$, $J^+(x_0) = \emptyset$.

3.4.2 Ensemble limite de prolongation relatif à un domaine D.

Cet ensemble est donné par :

$$J^+(x_j, D) = \{ y \in \mathbf{R}^n, \text{ il existe une séquence } \{x_i\} \text{ de } \mathbf{D} \text{ et une séquence } \{t_i\} \text{ de } T_0 = [t_0, +\infty[\text{ telles que : } \\ x_i \rightarrow x_j, t_i \rightarrow +\infty \text{ et } x(t_i; t_0, x_i) \rightarrow y \} . \quad (39)$$

On peut définir également l'ensemble limite de prolongation d'un ensemble F relativement à un ensemble D [42] comme suit :

$$J^+(F, D) = \bigcup_{x \in F} \{ y \in \mathbf{R}^n, \text{ il existe une séquence } \{x_i\} \in \mathbf{D} \text{ et une séquence } \{t_i\} \text{ de } T_0 = [t_0, +\infty[\text{ telles que : } \\ x_i \rightarrow x, t_i \rightarrow +\infty \text{ et } x(t_i; t_0, x_i) \rightarrow y \} . \quad (40)$$

3.5 Définition d'un attracteur.

Soit D_A un fermé de \mathbf{R}^n . D'après N. ROUCHE et J. MAWHIN [11], l'ensemble D_A sera dit semi-attracteur s'il existe un voisinage D_V de D_A tel que pour toute condition initiale $x_0 \in D_V - D_A$, la solution issue de x_0 tende vers D_A quand $t \rightarrow +\infty$.

S'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(D_A, \varepsilon)$ soit incluse dans D_V ,

D_A est appelé attracteur. Si $D_V = \mathbf{R}^n$, D_A est appelé attracteur illimité (ou global si D_V est l'ensemble de définition de l'état x).

En s'appuyant sur les définitions rappelées ci-dessus, on peut définir l'attracteur de la façon suivante :

Définition 1 :

Un ensemble compact D_A est un attracteur relatif au domaine D_V inclus dans \mathbf{R}^n si et seulement si :

$$\forall x_0 \in D_V, \Lambda^+(x_0) \neq \emptyset, \Lambda^+(x_0) \text{ est inclus dans } D_A. \quad (41)$$

Et on peut définir l'attracteur uniforme comme suit :

Définition 2 :

Un ensemble compact est un attracteur uniforme relatif au domaine D_V inclus dans \mathbf{R}^n si et seulement si :

$$\forall x_0 \in D_V, J^+(x_0, D_V) \neq \emptyset, J^+(x_0, D_V) \text{ est inclus dans } D_A. \quad (42)$$

3.6 Stabilité asymptotique d'un attracteur.

Un ensemble compact D_A inclus dans \mathbf{R}^n est asymptotiquement stable relativement à D_V si et seulement si D_A est un attracteur uniforme relatif à D_V et est positivement invariant :

A l'instant final t_f , $x(t_f; t_0, x_0) \in D_A, \forall x \in D_V$ et $\forall t \in T_0$.

3.7 Définition du domaine d'attraction d'un attracteur.

Le domaine d'attraction peut être défini comme-suit [42] :

$$D_A^r = \{ x_0 \in \mathbf{R}^n : d(x(t; t_0, x_0), D_A) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty \}.$$

d : désigne la distance métrique dans \mathbf{R}^n .

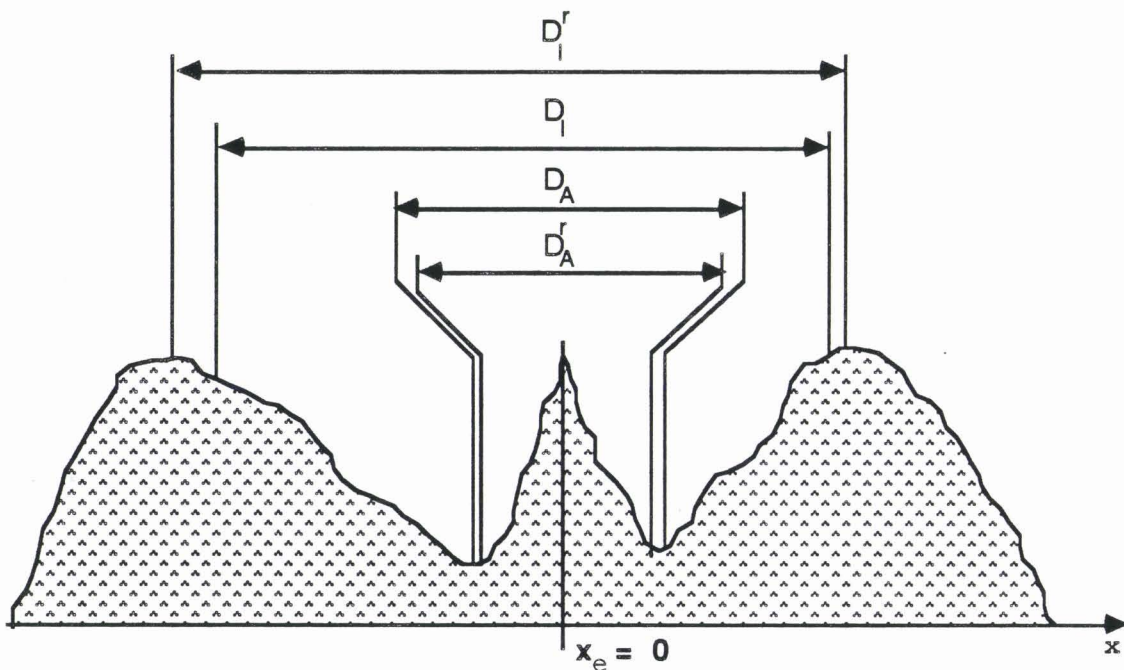
4° ETUDE DES SYSTEMES INSTABLES LOCALEMENT.

Certains processus physiques sont instables au sens de LYAPUNOV au voisinage de l'équilibre : problème de régulation de niveau, de température, les réseaux Neuroniques [49] ...

Dans le cas le plus général, l'origine $x = 0$ peut être un équilibre stable ou instable, ou bien même ne pas être un point d'équilibre. Ce type de systèmes est régi par une équation différentielle de la forme (43) avec $f(t,0)$ non nécessairement nulle.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x) \quad (43)$$

Nous supposons que le système présente cependant un attracteur [34] et [50]. La figure suivante fait l'analogie de la question en illustrant diverses notations utilisées.



(FIGURE 17)

D_A^r : est l'attracteur réel.

D_A : est l'attracteur estimé par excès.

D_1^r : est le domaine d'attraction réel.

D_1 : est le domaine d'attraction estimé par défaut.

4.1 Système majorant non autonome (SMNA).

Si le système (43) est instable au voisinage de l'origine, il sera réécrit comme suit :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{A}[t,x].x + \mathbf{b}[t,x] \quad (44)$$

Méthode. Soit :

$x \in \mathbf{R}^n$: vecteur d'état de dimension n .

$p(x)$: norme vectorielle de dimension k ($k \leq n$).

c : vecteur constant non négatif de dimension k .

D_s : un ensemble compact de \mathbf{R}^n .

$$V = \{ x \in D_s, p(x) \leq c \}. \quad (45)$$

$\delta(x) = 1$ si $x \in V$.

$\delta(x) = 0$ si $x \notin V$.

L'équation (43) peut être transformée en (46) ou (47):

$$f(t,x) = \mathbf{A}_1[t,x].x + \mathbf{b}_1[t,x] \quad \text{si } x \in V. \quad (46)$$

$$f(t,x) = \mathbf{A}_2[t,x].x + \mathbf{b}_2[t,x] \quad \text{si } x \notin V \text{ et } x \in D_s. \quad (47)$$

Par conséquent :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{A}[t,x].x + \mathbf{b}[t,x] \quad \text{avec :}$$

$$\mathbf{A}[t,x] = \delta(x) \mathbf{A}_1[t,x] + (1 - \delta(x)) \mathbf{A}_2[t,x].$$

$$\mathbf{b}[t,x] = \delta(x) \mathbf{b}_1[t,x] + (1 - \delta(x)) \mathbf{b}_2[t,x].$$

$\mathbf{A}[t,x]$, $\mathbf{A}_1[t,x]$, $\mathbf{A}_2[t,x]$: matrices carrées d'ordre n .

$\mathbf{b}[t,x]$, $\mathbf{b}_1[t,x]$, $\mathbf{b}_2[t,x]$: vecteurs de dimension n .

La stabilité des attracteurs peut être étudiée par application du concept de norme vectorielle.

Soit P_i l'opérateur de projection : $x_i = P_i x$.

On peut écrire : $P_i \mathbf{b}[t,x] = \mathbf{b}_i[t,x]$.

Définition 1 :

La matrice $M[t,x]$ et le vecteur $N[t,x]$ tels que :

$$M[t,x] : T_0 \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{k \times k}$$

$$N[t,x] : T_0 \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (k \leq n).$$

définissent un Système Majorant Non Autonome (SMNA) de (43) relativement à la norme vectorielle $p(x)$ de taille k sur D_s si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée composante à composante.

$$D^+p(x) \leq M[t,x].p(x) + N[t,x] \quad (48)$$

$$(\forall x \in D_s) ; (\forall t \in T_0).$$

Reprenons les relations (24) données précédemment.

$$A_{ij}[t,x] = P_i \cdot A[t,x] \cdot P_j \quad (\forall i, j = 1, 2, \dots, k).$$

$$M[t,x] = [m_{ij}(t,x)].$$

$$\mu_{ij}(t, x, y) = \frac{\text{Grad } p_i(y_j)^T \cdot A_{ij}[t,x] \cdot y_j}{p_j(y_j)}$$

Définition 2 :

La matrice pseudo-majorante canonique $M[t,x]$ d'éléments $m_{ij}(t,x)$ et le vecteur $N[t,x]$ d'éléments $n_i(t,x)$ relatifs à la norme vectorielle $p(x)$ tels que :

$$m_{ii}(t,x) = \text{Sup}_{y \in E_v} \{ \mu_{ij}(t,x,y) \}; \forall i = 1, 2, \dots, k; \forall x \in \mathbb{R}^n; \forall t \in T_0.$$

$$m_{ij}(t,x) = \text{Max} \left\{ 0; \text{Sup}_{y \in E_v} \{ \mu_{ij}(t,x,y) \} \right\}; \forall i \neq j; \forall x \in \mathbb{R}^n; \forall t \in T_0.$$

$$N[t,x] : T_0 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^k \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

$$n_i(t,x) = |\text{Grad } p_i(x_i)^T \cdot b_i(t, x)|; \quad b_i(t,x) = P_i b(t,x).$$

définissent un système de comparaison non autonome de (44) relativement à $p(x)$, non-linéaire et non stationnaire de la forme :

$$dz/dt = M[t,x].z + N[t,x] \quad (49)$$

Définition 3 : Cas où $M[.]$ et $N[.]$ ne dépendent que du temps.

La matrice pseudo-majorante canonique $M[t]$ d'éléments $m_{ij}(t)$ et le vecteur $N[t]$ d'éléments $n_i(t)$ relatifs à la norme vectorielle $p(x)$ tels que :

$$m_{ii}(t) = \text{Sup}_{y \in E_v} \{ \mu_{ij}(t, y, y) \}; \forall i = 1, 2, \dots, k; \forall t \in T_0.$$

$$m_{ij}(t) = \text{Max}_{y \in E_v} \left\{ 0; \text{Sup}_{y \in R^n} \{ \mu_{ij}(t, y, y) \} \right\}; \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k; \forall t \in T_0.$$

$$N[t] : T_0 \rightarrow R^k_+ \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

$$n_i(t) = \text{Sup}_{y \in R^n} n_i(t, y).$$

définissent un système de comparaison non autonome de (44) relativement à $p(x)$, linéaire non stationnaire de la forme :

$$\frac{dz(t)}{dt} = M[t].z + N[t] \quad (50)$$

Définition 4 : Cas où M et N sont constants.

La matrice pseudo-majorante canonique M d'éléments m_{ij} et le vecteur N d'éléments n_i relatifs à la norme $p(x)$ tels que :

$$m_{ii} = \text{Sup}_{y \in E_v} \{ \mu_{ij}(t, y, y) \}; \forall i = 1, 2, \dots, k; \forall t \in T_0.$$

$$m_{ij} = \text{Max}_{y \in E_v} \left\{ 0; \text{Sup}_{y \in R^n} \{ \mu_{ij}(t, y, y) \} \right\}; \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k; \forall t \in T_0.$$

$$n_i = \sup_{y \in \mathbb{R}^n; t \in T_0} n_i(t, y).$$

définissent un système de comparaison non autonome du (44) relativement à $p(x)$, linéaire et stationnaire de la forme :

$$\frac{dz}{dt} = M.z + N \quad (51)$$

4.2 Généralisation du lemme de comparaison.

Dans ce mémoire, l'introduction de la notion de système majorant non autonome a pour but d'étudier les systèmes présentant un équilibre instable, inclus dans un attracteur. Le lemme de comparaison du chapitre I 7.4 peut être généralisé afin de déterminer un système de comparaison non autonome correspondant.

Enoncé du lemme .

Soit $M[t, x]$ une matrice pseudo-majorante non constante et relative à une norme vectorielle p de taille k associée au système (44) ; et soit $N[t, x]$ un vecteur non négatif :

$$M[t, x] : T_0 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$$

$$N[t, x] : T_0 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (k \leq n).$$

Si l'inégalité (48) est vérifiée le long des solutions, alors le système (C) suivant est un SMNA de (44) sur \mathbb{R}^n avec la condition $z(t_0) \geq p(x(t_0))$:

$$(C) : \frac{dz}{dt} = M[t, z].z + N[t, z] \quad (52)$$

Par conséquent, $z(t) \geq p(x(t)) \quad \forall t \in T_0$.

Démonstration.

Soient :

$t_0 \in \mathbf{R}$: caractérise l'instant initial.

$T_0 = [t_0, +\infty[.$

$\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t), x_2(t) \dots, x_n(t)]$: vecteur d'état $\in \mathbf{R}^n$.

$\mathbf{z}^T(t) = [z_1(t), \dots, z_k(t)]$: vecteur de comparaison avec $k \leq n$.

$\mathbf{p}^T(x(t)) = [p_1(x(t)), p_2(x(t)) \dots, p_k(x(t))]$: vecteur norme avec $k \leq n$.

$\mathbf{w}^T(t) = [w_1(t), w_2(t) \dots, w_k(t)] = \mathbf{z}^T(t) - \mathbf{p}^T(x(t)) ; \forall t \in T_0.$

A l'instant initial t_0 , $\mathbf{z}(t_0) \geq \mathbf{p}(x(t_0))$.

Donc : $\mathbf{w}^T(t_0) = \mathbf{z}^T(t_0) - \mathbf{p}^T(x(t_0)) \geq 0$.

$\forall t \in T_0$, on a :

$$D^+ w(t) = D^+ z(t) - D^+ p(x(t)).$$

$$D^+ w(t) = M[t,x].z(t) + N[t,x] - D^+ p(x(t)).$$

$$\text{Or } D^+ p(x(t)) \leq M[t,x].p(x) + N[t,x].$$

Il vient donc :

$$D^+ w(t) \geq M[t,x].[z(t) - p(x)].$$

$$D^+ w(t) \geq M[t,x].w(t). \quad (53)$$

A $t = t_0$, $w(t)$ est positive ou nulle, croissante.

Soit $\tau \in]t_0, +\infty[$: le premier instant s'il existe pour lequel une des composantes $w_i(t)$ du vecteur $w(t)$ devient nulle, et soit $M[t,x]$

une matrice carrée d'ordre $k \times k$ et d'éléments $m_{ij}(t,x)$. Compte-tenu du (53), on peut écrire :

$$D^+ w_i(t) \geq \sum_{j=1 \text{ et } j \neq i}^k m_{ij}(t,x) w_j(t). \quad (54)$$

Puisque les éléments hors diagonaux de $M[t,x]$ sont tous non négatifs, alors la composante $w_i(t)$ devient à l'instant τ une fonction non décroissante. Par conséquent, le vecteur $w(t)$ ne peut pas devenir négatif $\forall t \in T_0$. Finalement :

$$w(t) = z(t) - p(x(t)) \geq 0.$$

Ou

$$z(t) \geq p(x(t)). \quad (55)$$

4.3 Estimation des attracteurs.

La méthode d'estimation que nous proposons se base sur le concept de norme vectorielle et le lemme de comparaison précédent. Nous supposons que le système est régi par des équations de type (43). Les deux théorèmes ci-dessous nous permettent de calculer une estimation (par excès) des attracteurs.

Théorème 1 :

Si le système décrit par (43) admet un système de comparaison non autonome, linéaire et relatif à la norme vectorielle p de la forme suivante :

$$\frac{dz}{dt} = M.z + N \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in T_0. \quad (56)$$

Avec M matrice constante opposée d'une M -matrice et N vecteur positif constant, alors le domaine défini par :

$$D_A = \{ x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } p(x) \leq -M^{-1}.N \} \quad (57)$$

est une estimation de l'attracteur relatif à l'équilibre $x_0 = 0$.

Démonstration.

Le système défini par (56) satisfait $z(t) \geq p(x(t)) \quad \forall t \in T_0$ si la condition $z(t_0) \geq p(x(t_0))$ est vérifiée.

Comme ce système est linéaire et tel que la matrice M est stable, il vient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -M^{-1}.N \quad \forall z(t_0) \quad (58)$$

Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(x(t)) \leq -M^{-1}.N \quad (59)$$

Exemple d'application n° 1.

Soit le système suivant instable à l'origine :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,5 & 1 \\ -0,5 & 1 - x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Considérons la norme vectorielle $p(x) = [|x_1| |x_2|]^T$. Le système peut être décomposé, comme en (46) et (47), de la façon suivante :

$$A_1[t,x] = \begin{bmatrix} -1,5 & 1 \\ -0,5 & 1 - x_2^2 \end{bmatrix}; \quad b_1[t,x] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^2 - V.$$

$$A_2[t,x] = \begin{bmatrix} -1,5 & 1 \\ -0,5 & -2 \end{bmatrix}; \quad b_2^T[t,x] = \begin{bmatrix} 0 & x_2(3 - x_2^2) \end{bmatrix} \text{ pour } x \in V.$$

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| < \sqrt{3} \right\}.$$

Il vient :

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1,5 & 1 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix}; \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^2 - V.$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -1,5 & 1 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix}; \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ pour } x \in V.$$

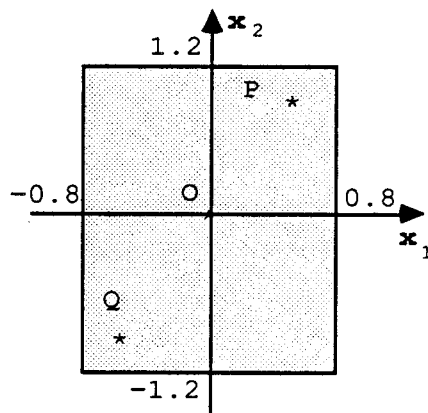
Par conséquent, le système de comparaison non autonome correspondant est donné par l'équation (60) ci-dessous :

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -1,5 & 1 \\ +0,5 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^2 \quad (60)$$

L'application du théorème donne :

$$D_A = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 0,8 \text{ et } |x_2| \leq 1,2 \}.$$

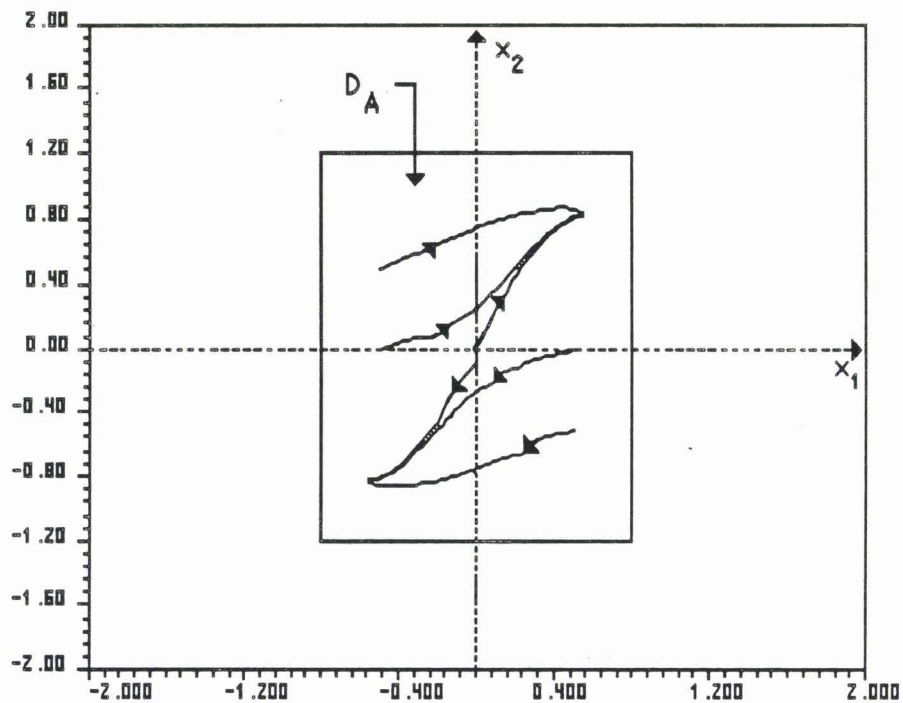
La figure suivante donne l'estimation du domaine D_A contenant les trois points d'équilibre O, P et Q.



(FIGURE 18)

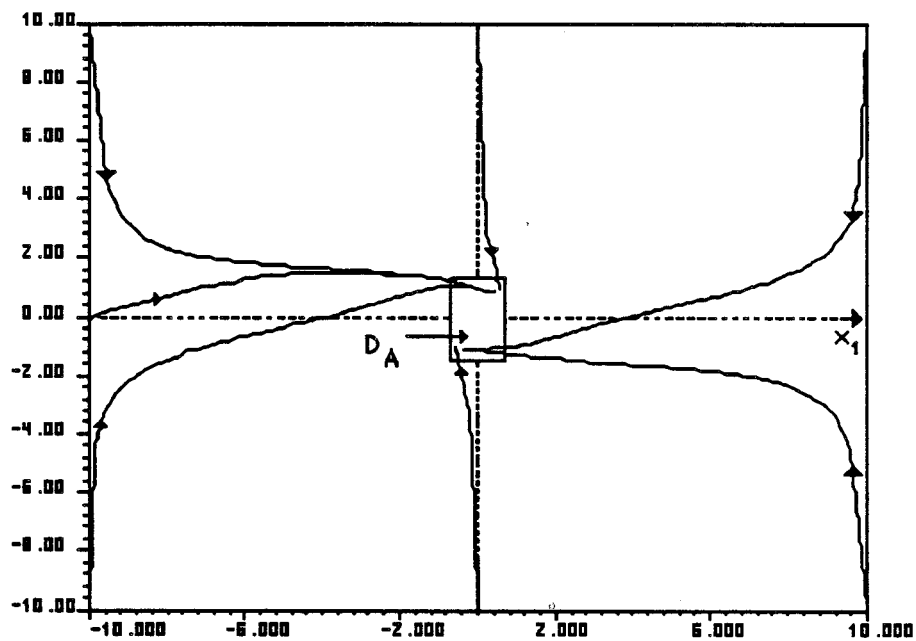
$O(0 ; 0)$ correspond à x_{e1} .
 $P(+0.544 ; +0.816)$ correspond à x_{e2} .
 $Q(-0.544 ; -0.816)$ correspond à x_{e3} .

La figure ci-dessous représente diverses trajectoires de simulation. Pour des conditions initiales $x(t_0)$ appartenant au domaine D_A , les trajectoires restent à l'intérieur de l'attracteur (figure 19). Elles convergent en fait vers l'un des points P ou Q.



(FIGURE 19)

Sur la figure (20) ci-dessous, on voit bien que si on part d'un point quelconque de l'espace d'état, le système converge vers le domaine D_A : c'est à dire quelques soient les conditions initiales, les trajectoires du système convergeront vers l'attracteur D_A .



(FIGURE 20)

Exemple d'application n° 2.

Le système suivant est instable à l'origine. Les trajectoires de simulation convergent vers des cycles limites (figure 21 et 22).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 + 10^{-2} \cdot |x_2| & 0,9 \cdot \cos(t) + 8 \cdot 10^{-7} \cdot |x_2|^3 \\ -0,5 \cdot \sin(t) & 1 - x_2^2 \end{bmatrix} \cdot x \quad (61)$$

Le système peut être décomposé de la façon suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 + 10^{-2} \cdot |x_2| & 0,9 \cdot \cos(t) + 8 \cdot 10^{-7} \cdot |x_2|^3 \\ -0,5 \cdot \sin(t) & 1 - x_2^2 \end{bmatrix} \cdot x \quad \text{pour } x \in V .$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 + 10^{-2}|x_2| & 0,9.\cos(t) + 8.10^{-7}|x_2|^3 \\ -0,5.\sin(t) & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ (2-x_2^2).x_2 \end{bmatrix} \text{ pour } x \in V$$

avec $V = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 \leq 2\}$.

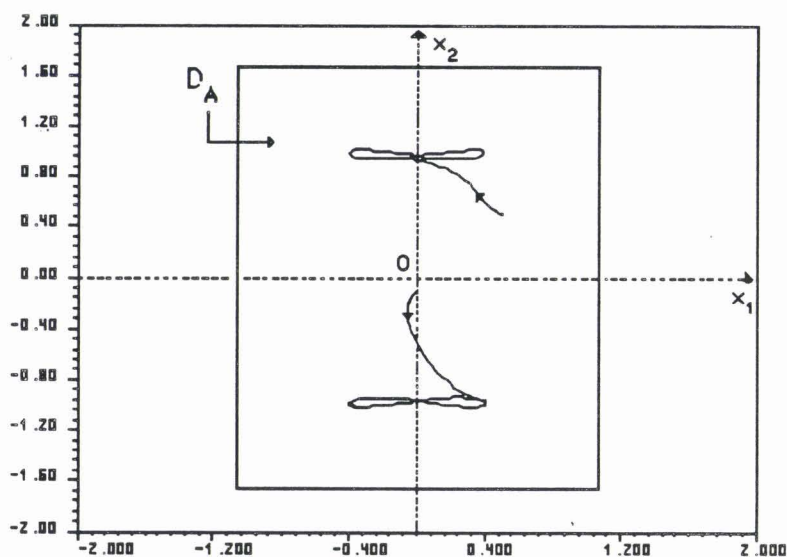
Soit $p(x) = [|x_1| \ |x_2|]^T$ et $D_S = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x_2| \leq 50\}$. Le système de comparaison non autonome correspondant est donné par l'équation suivante :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1,5 & +1 \\ +0,5 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,089 \end{bmatrix} \text{ pour } x \in D_S.$$

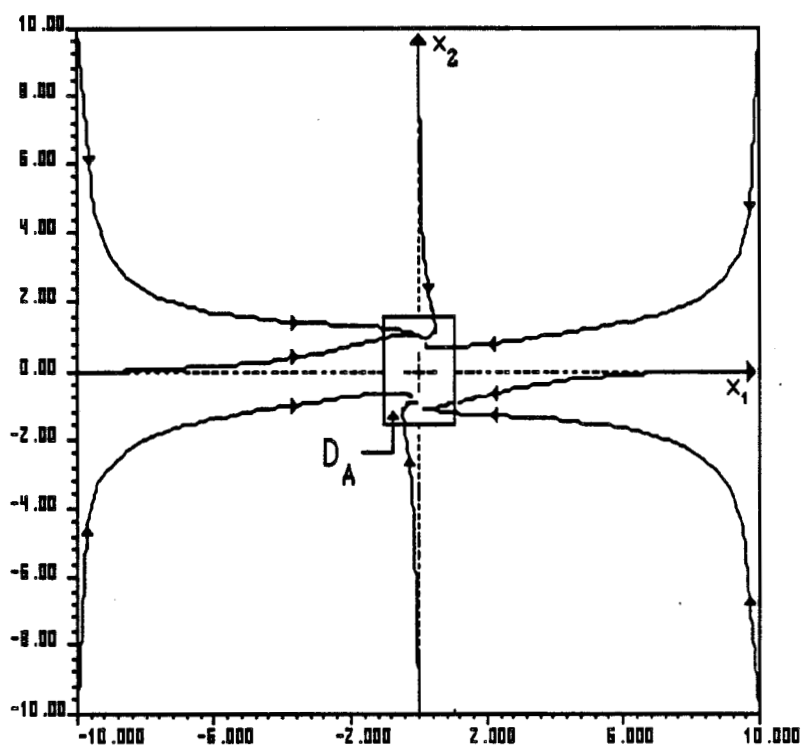
L'évaluation de l'attracteur est donnée par la relation ci-dessous :

$$D_A = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x_1| \leq 1,089 \text{ et } |x_2| \leq 1,634\}.$$

Le système ne converge plus vers un point d'équilibre mais vers deux ensembles de points (formant des 8) appelés cycles limites qui sont asymptotiquement stables. Les deux figures suivantes donnent différentes trajectoires de simulation.



(FIGURE 21)



(FIGURE 22)

Le théorème ci-dessous correspond au cas où le système de comparaison non autonome est non-linéaire.

Théorème 2 :

Si le système décrit par (43) admet un système de comparaison non autonome, non-linéaire et relatif à la norme vectorielle p de la forme suivante :

$$\frac{dz}{dt} = M[.]z + N[.] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in T_0 \quad (62)$$

Avec $M[.]$ matrice non constante opposée d'une M-matrice dans un domaine D_S , d'inverse irréductible, à éléments non constants isolés dans une colonne et $N[.]$ vecteur non négatif, alors le domaine défini par :

$$D_A = \{ x \in \mathbb{R}^n : U^T \cdot p(x) \leq -\lambda_m^{-1} \cdot \text{Max}_{x \in D_S} \{ U^T \cdot N[.] \} \} \quad (63)$$

est une estimation de l'attracteur de l'équilibre $x_e = 0$ avec λ_m et U respectivement la valeur maximale de la valeur propre principale et le vecteur propre principal associé de la matrice $M^T[.]$.

De plus ce vecteur est de direction fixe $\forall x \in D_s ; \forall t \in T_0$:

$$\lambda_m = \underset{x \in D_s ; \forall t \in T_0}{\text{Max}} \lambda_m(t,x).$$

Démonstration.

Prenons $v(x) = U^T.p(x)$, (64)

$$D^+ v(x) = D^+ [U^T.p(x)].$$

$$D^+ v(x) = U^T.[D^+ p(x)]. \quad \text{Car } U \text{ est un vecteur constant.}$$

Or $D^+ p(x) \leq M[.].p(x) + N[.]$.

Donc $D^+ v(x) \leq U^T.[M[.].p(x) + N[.]$.

$$D^+ p(x) \leq U^T.M[.].p(x) + U^T.N[.]$$

Du fait de la forme spéciale de $M[.]$, nous avons :

$$U^T.M[.].p(x) \leq \lambda_m.U^T.p(x).$$

Soit : $D^+ v(x) \leq \lambda_m.U^T.p(x) + U^T.N[.]$. (65)

Le système défini par l'équation suivante est un système de comparaison de (65).

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_m.z + \alpha \quad (66)$$

Avec : $\alpha = \underset{x \in D_s}{\text{Max}} \{ U^T.N[.] \}$ (67)

Comme λ_m est non positif, il vient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -\lambda_m^{-1} \cdot \alpha \quad (68)$$

Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U^T \cdot p(x) \leq -\lambda_m^{-1} \cdot \alpha \quad (69)$$

Exemple d'application.

Soit le système d'équilibre $x = 0$ instable :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 - |x_1| & +1 + |1 - |x_2|| \\ -1 & -1 - |1 - |x_2|| \end{bmatrix} \cdot x \quad (70)$$

Le système peut être décomposé comme suit :

$$\mathbf{A}_1[t, x] = \begin{bmatrix} 2 - |x_1| & +1 + |1 - |x_2|| \\ -1 & -1 - |1 - |x_2|| \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_1[t, x] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour } x \in \mathbf{R}^2 - \mathbf{V}.$$

$$\mathbf{A}_2[t, x] = \begin{bmatrix} -2 & +1 + |1 - |x_2|| \\ -1 & -1 - |1 - |x_2|| \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_2[t, x] = \begin{bmatrix} (4 - |x_1|) \cdot x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour } x \in \mathbf{V}.$$

$$\mathbf{V} = \left\{ x \in \mathbf{R}^2 : |x_1| \leq 4 \right\}.$$

Considérons la norme vectorielle $p(x) = [|x_1| \ |x_2|]^T$, il vient :

$$\mathbf{M}_1[t, x] = \begin{bmatrix} -2 & +1 + |1 - |x_2|| \\ 1 & -1 - |1 - |x_2|| \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N}_1[.] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour } x \in \mathbf{R}^2 - \mathbf{V}.$$

$$\mathbf{M}_2[t, x] = \begin{bmatrix} -2 & +1 + |1 - |x_2|| \\ 1 & -1 - |1 - |x_2|| \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N}_2[.] = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour } x \in V.$$

Et le système de comparaison non autonome correspondant est donné par :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -2 & +1 + |1 - |x_2|| \\ 1 & -1 - |1 - |x_2|| \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

La matrice $M[.]$ est asymptotiquement stable $\forall x \in \mathbf{R}^2$. La valeur principale $\lambda_m(t, x)$ peut être estimée à partir du polynôme symbolique [2] associée à $M[.]$:

$$P_S = \lambda^2 + (2 + g)\lambda + g \quad \text{avec } g = 1 + |1 - |x_2|| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^2.$$

$$\lambda_m(t, x) = \frac{-(2 + g) + \sqrt{(2 + g)^2 - 4g}}{2}.$$

$$\lambda_m(t, x) = \frac{(2 + g) \left[-1 + \left(1 - \frac{4g}{(2 + g)^2} \right)^{1/2} \right]}{2}; \text{ soit } \mathbf{Max} \lambda_m(t, x) = \lambda_m \# \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

Le vecteur principal $U^T(\alpha; \beta)$ associé à λ_m peut être calculé à partir du théorème de Frobenius < annexe 4 >.

Soit :

$$\mathbf{M}^T[m_{ii}(.)] = \begin{bmatrix} -2 & +1 \\ g & -g \end{bmatrix}.$$

Avec les notations de l'annexe 4, il vient :

$$\mathbf{M}_1^T [m_{11}(\cdot)] = [-2].$$

$$\mathbf{M}_1^T [\lambda_m] = \left[-2 - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right].$$

La matrice $\mathbf{M}^T[\cdot]$ est d'ordre 2 avec les éléments non-linéaires rangés dans la dernière ligne (2^{ème} ligne). Le vecteur principal U est nécessairement de direction fixe puisque la première ligne de la matrice $\mathbf{M}^T[\cdot]$ est à éléments tous constants. Par conséquent cette relation suffit à le déterminer. Il vient :

$$\alpha = \beta \cdot \left\{ -\mathbf{M}_1^{-1} [\lambda_m] \right\} \times m_{12}(\cdot).$$

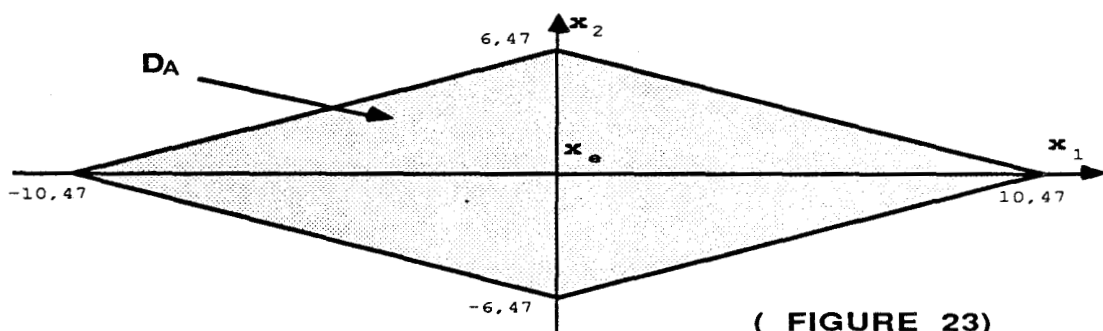
$$\alpha = \beta \cdot \left[\frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right].$$

$$\mathbf{U}^T = \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{1 + \sqrt{5}} & 1 \end{array} \right].$$

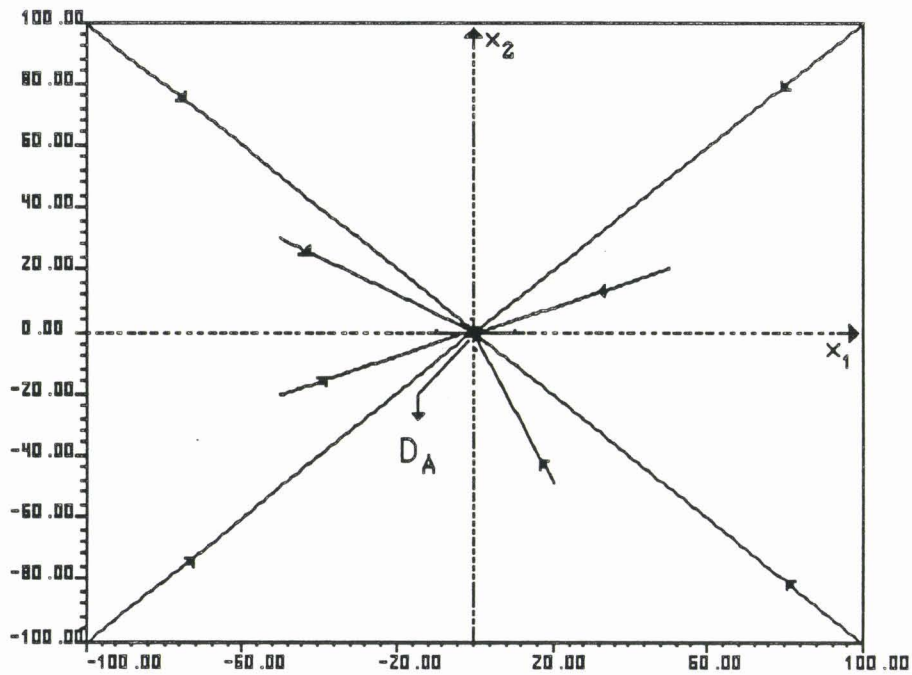
Pour $v(x) = \mathbf{U}^T \cdot p(x)$,

$$D_A = \{ x \in \mathbf{R}^2 : (3 - \sqrt{5}) \cdot |x_1| + (\sqrt{5} - 1) \cdot |x_2| \leq 8 \}.$$

La figure suivante donne l'estimation de l'attracteur D_A :



Sur la figure 24, diverses trajectoires de simulation convergent vers l'attracteur estimé D_A .



(FIGURE 24)

5° CONCLUSION.

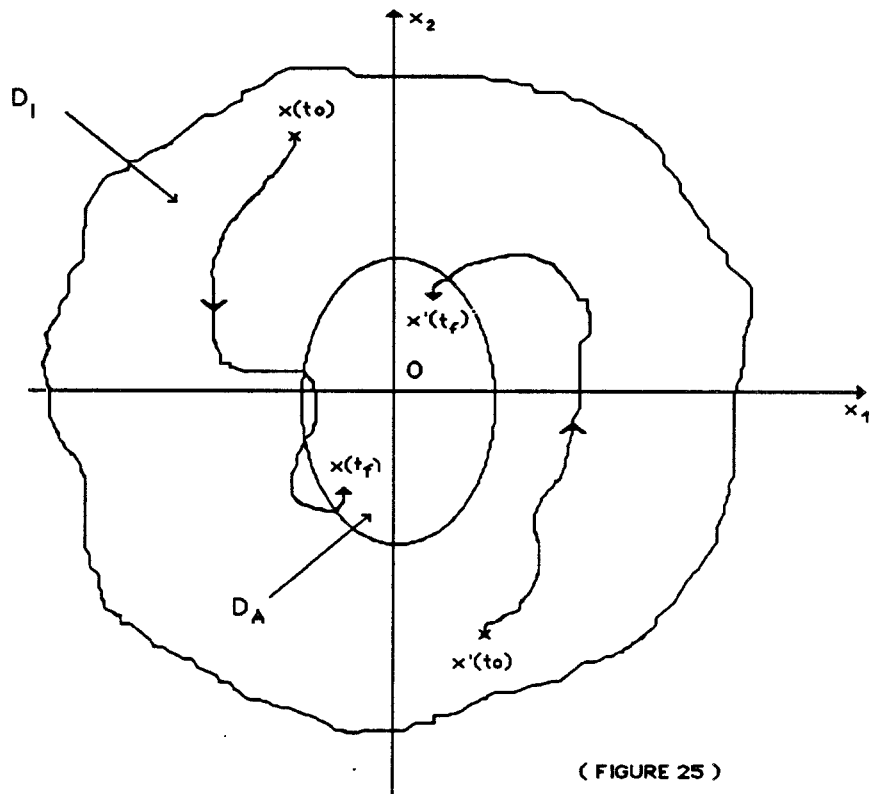
L'estimation de l'attracteur D_A s'avère très importante car la position finale du vecteur état sera ainsi localisée et ceci pour des conditions initiales appartenant à un domaine D_I , appelé domaine d'attraction de l'attracteur, qu'on peut calculer également par estimation (chapitre suivant).

Chapitre III :

ESTIMATION DU DOMAINE D'ATTRACTION.

1° INTRODUCTION.

Comme nous l'avons vu au chapitre II (3.5, 3.6, 3.7 et figure 17), les évaluations D_A et D_I d'un attracteur D_A^r et de son domaine d'attraction D_I^r sont d'une grande importance car on peut affirmer que le vecteur état, partant d'un point quelconque de D_I , convergera vers D_A comme l'illustre la figure suivante.



(FIGURE 25)

t_0, t_f : caractérisent respectivement l'instant initial et l'instant final.

x, x' : caractérisent le vecteur état.

D_A : définit l'estimation de l'attracteur.

D_I : définit l'estimation du domaine d'attraction.

L'évaluation de D_A^r a été étudié au chapitre II. Nous proposons dans ce chapitre d'énoncer deux théorèmes originaux qui donnent une évaluation par défaut du domaine D_I^r dans les cas où le SMNA est soit linéaire, soit non-linéaire.

2° SYSTEMES MAJORANTS NON AUTONOMES LINEAIRES.

Théorème :

Si le système décrit par (43) admet un SMNA sur D_S associé à la norme vectorielle p de la forme suivante:

$$\frac{dz}{dt} = M.z + N \quad (72)$$

avec M opposée d'une M -matrice, N vecteur positif et U vecteur principal de M^T , alors en notant D_A le domaine défini par :

$$D_A = \{ x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } p(x) \leq -M^{-1}.N \}.$$

et D_I le domaine limité par la plus grande équipotentielle ($U^T.p(x) = Cte$) qui soit comprise dans D_S et tel que :

$U^T.(M.p(x) + N) < 0$ sauf peut être dans un domaine fermé entourant l'origine et strictement inclus dans D_I ,

alors le domaine D_A est une estimation de l'attracteur et D_I une évaluation de son domaine d'attraction (figure 26) avec :

$$D_A \subset D_I \subset D_S.$$

Démonstration.

Soit $x \in D_A$, alors $U^T.p(x) \leq -U^T.M^{-1}.N$, donc $x \in D_S$, et il est à l'intérieur d'un ensemble de type :

$$D_I = \{ x \in D_S, U^T.p(x) \leq \alpha \}.$$

D_1 est la plus grande équipotentielle incluse dans D_S , donc D_A est inclus dans D_1 .

Soit : $x_0 \in D_1 - D_A$.

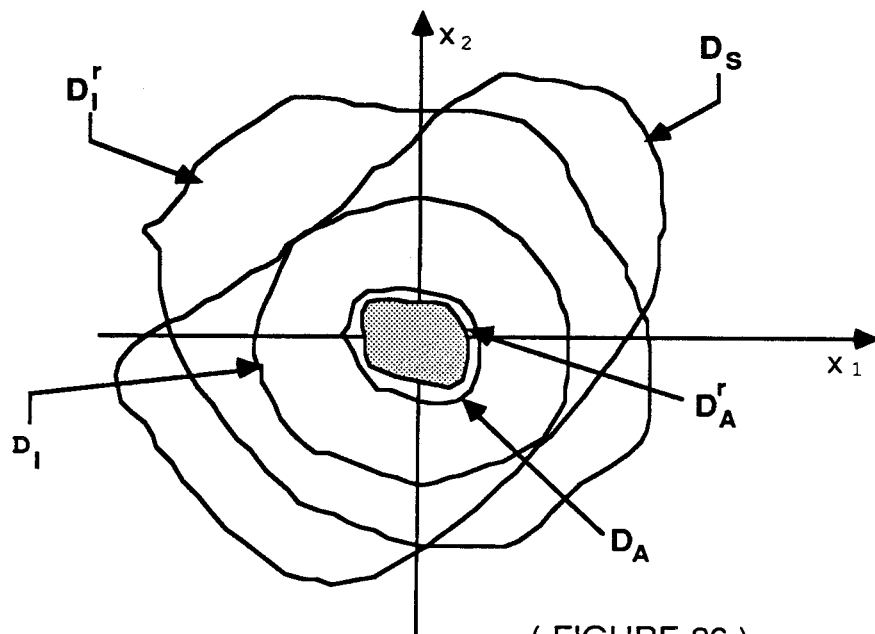
Alors, à l'instant t_0 , partant de $x_0 \in D_1$ inclus dans D_S :

$$D^+(p(x_0)^T.U) \leq p(x_0)^T.M^T.U + N^T.U.$$

Partant initialement de $x_0 \notin D_A$, $p^T(x_0) > -N^T.M^{-T}$; soit :

$$D^+(p(x_0)^T.U) \leq 0.$$

D'où, $x(t ; t_0, x_0)$ reste à l'intérieur du domaine D_1 .



(FIGURE 26)

D_A : définit l'estimation de l'attracteur.

D_1 : " " de son domaine d'attraction.

D^r_A : est l'attracteur (réel).

D^r_I : est le domaine d'attraction (réel).

Exemple n° 1.

Soit le système décrit par :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 + 10^{-2}|x_2| & 0.9 + 8 \cdot 10^{-7}|x_2|^3 \\ -0.5 & 1 - x_2^2 \end{bmatrix} \cdot x \quad (73)$$

On peut le décomposer de la façon suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 + 10^{-2}|x_2| & 0.9 + 8 \cdot 10^{-7}|x_2|^3 \\ -0.5 & 1 - x_2^2 \end{bmatrix} \cdot x \quad \text{pour } x \notin V.$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 + 10^{-2}|x_2| & 0.9 + 8 \cdot 10^{-7}|x_2|^3 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ (2 - x_2^2) \cdot x_2 \end{bmatrix} \quad \text{pour } x \in V.$$

avec :

$$V = \left\{ x \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 \leq 2 \right\}.$$

Considérons la norme vectorielle suivante :

$$p(x) = [|x_1| \ |x_2|]^T.$$

$$\text{Soit : } D_S = \left\{ x \in \mathbf{R}^2 : |x_2| \leq 50 \right\}.$$

Il vient pour $x \in D_S$ le système de comparaison non autonome suivant :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1.5 & +1 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,089 \end{bmatrix}$$

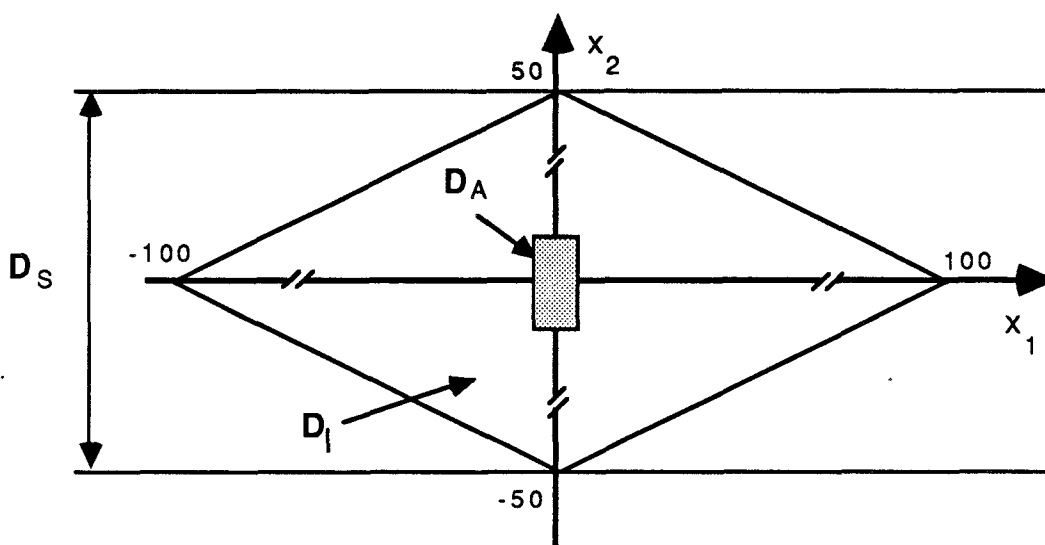
avec $U^T = [0,5 \ 1]$. Soit finalement :

a°) $D_A = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1,089 \text{ et } |x_2| \leq 1,634 \}$.

b°) $D_I = \{ x \in \mathbb{R}^2 : 0,5 \cdot |x_1| + |x_2| \leq 50 \}$.

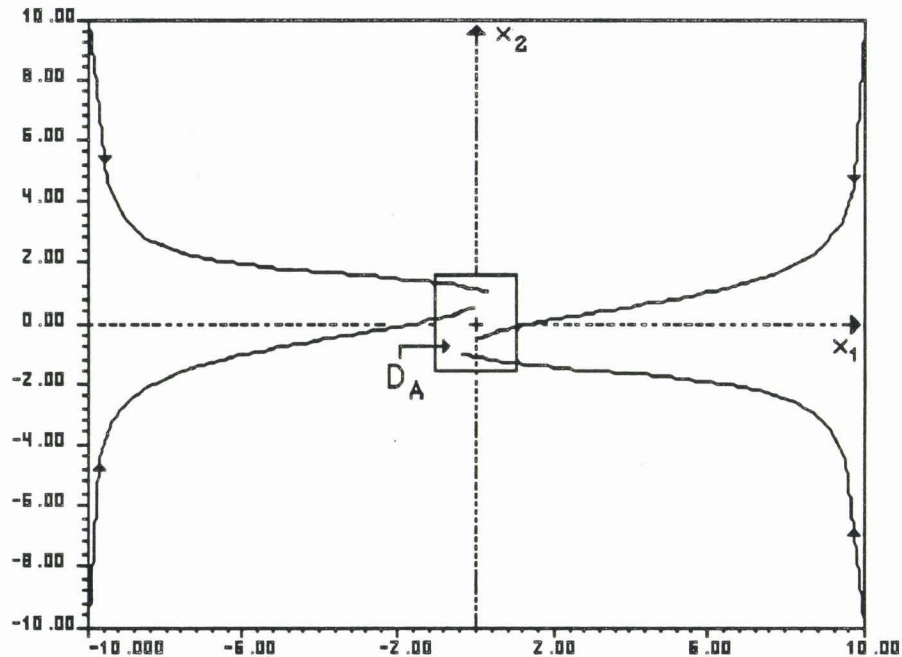
La figure 27 ci-dessous donne à la fois :

- L'estimation de l'attracteur D_A .
- L'estimation de son domaine d'attraction D_I .
- Le domaine D_S où la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative.



(FIGURE 27)

La figure suivante illustre la convergence du vecteur état vers le domaine D_A pour des conditions initiales appartenant à D_1 .



(FIGURE 28)

3° SYSTEMES MAJORANTS NON AUTONOMES ET NON LINEAIRES.

Théorème :

Si le système décrit par (43) admet un SMNA sur D_S de la forme (74), non-linéaire, relatif à la norme vectorielle p et possédant les propriétés suivantes :

$$\frac{dz}{dt} = M[.]z + N[.] \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \forall t \in \mathbf{T}_0 \quad (74)$$

- a) $M[.]$ opposée d'une M-matrice, d'inverse irréductible dans un domaine D_S , dont les éléments non constants sont isolés

dans une seule colonne.

- b) $N[.]$ vecteur non négatif et borné.
- c) λ_m valeur maximale dans D_S de la valeur propre principale de $M[.]^T$ et U vecteur propre associé (constant et strictement positif).
- d) D_I le domaine limité par la plus grande équipotentielle :

$$v(x) = U^T.p(x) = k ; (k > 0) \text{ comprise dans } D_S .$$

- e) D_A le domaine, s'il existe, limité par la plus grande équipotentielle :

$$U^T.p(x) \leq -\lambda_m^{-1} \cdot \text{Max}_{x \in D_S} \{ U^T.N[.] \}$$

- f) D_A est inclus dans D_I .

Alors, D_A est une estimation de l'attracteur de (43) et D_I est une estimation de son domaine d'attraction.

Démonstration.

Prenons $v(x) = U^T.p(x)$. D'après (b) et (c) il vient :

$$D^+ v(x) \leq \lambda_m \cdot U^T.p(x) + U^T.N[.]$$

Soit $D^+ v(x) \leq c < 0$.

$$\text{pour } U^T.p(x) > -\lambda_m^{-1} \cdot \text{Max}_{x \in D_S} \{ U^T.N[.] \} \quad \text{car } \lambda_m < 0.$$

Si D_A est inclus dans D_I , nous avons donc $v(x)$ décroissante dans $D_I - D_A$. d'ou la propriété.

Remarque.

Un théorème semblable peut être établi si $M[.]^T$ possède un vecteur principal de direction fixe quelque soit x .

La condition (c) étant alors remplacée par :

c') $M[.]^T$ possède un vecteur principal de direction constante avec λ_m la plus grande valeur principale associée.

Exemple n° 2.

Reprenons le système décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 - |x_1| & +1 + |1 - |x_2|| \\ -1 & -1 - |1 - |x_2|| \end{bmatrix} \cdot x \quad (70)$$

Pour $v(x) = U^T \cdot p(x)$ et $p(x) = [|x_1| \ |x_2|]^T$,

$$D_A = \{ x \in \mathbb{R}^2 : (3 - \sqrt{5}) \cdot |x_1| + (\sqrt{5} - 1) \cdot |x_2| \leq 8 \}.$$

Le domaine d'attraction s'étend à tout l'espace d'état.

Par conséquent :

$$D_1 = D^r_1 = \mathbb{R}^2 .$$

4° CONCLUSION.

Le domaine d'attraction nous permet donc de savoir quelles sont les conditions initiales qui assurent la convergence de l'état vers l'attracteur : si elle est illimitée (cas de l'exemple 2), le vecteur d'état convergera vers l'attracteur quelle que soit la condition initiale choisie. Cependant, dans le cas où elle ne s'étend pas à tout l'espace d'état (domaine d'attraction borné), les conditions initiales peuvent appartenir au domaine D_1 (cas de l'exemple 1).



Chapitre IV :
ETUDE DE PROBLEMES PARTICULIERS.

Dans cette partie du mémoire, nous nous proposons d'exploiter les résultats donnés dans les paragraphes ci-dessus afin d'analyser trois types particuliers de processus :

- Systèmes décrits par des inégalités différentielles.
- Systèmes décrits par des matrices intervalles.
- Systèmes bruités.

1° PROCESSUS DECRITS PAR DES INEGALITES DIFFERENTIELLES.

1.1 Inégalité différentielle minorée par une équation différentielle.

Considérons l'inégalité vectorielle ci-dessous :

$$\frac{dx}{dt} \geq A.x \quad (75)$$

A est une matrice d'éléments a_{ij} constants ($i, j = 1, 2, \dots, n$), x est le vecteur d'état élément de \mathbb{R}^n tel que $x(0) = x_0$. D'après [51], une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions de l'inégalité (75) soient minorées par celles de l'équation (76) est que les éléments hors diagonaux de la matrice A soient non négatifs :

$$\frac{dy}{dt} = A.y ; y(0) = x_0. \quad (76)$$

Supposons qu'il existe une équation différentielle déduite de (75) telle que :

$$\frac{dx}{dt} = A.x + f(t) ; \text{ avec } f(t) \geq 0.$$

La solution de l'équation ci-dessus s'exprime comme suit [51] :

$$x = e^{At} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) \cdot d\tau \quad (77)$$

e^{At} est la matrice exponentielle. Soit k un scalaire réel positif, il vient :

$$e^{At} = e^{(A+kl)t} \cdot e^{-klt} \quad ; \quad I \text{ est la matrice identité (n \times n).}$$

Si le scalaire k est choisi suffisamment grand pour que la matrice $A + kl$ soit non négative, alors $e^{(A + kl)t}$ est une matrice non négative.

Puisque $e^{-klt} \geq 0$, la matrice e^{At} est non négative. Par conséquent, si les hypothèses ci-dessus sont réunies, il vient :

$$x = y + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) \cdot d\tau \quad (78)$$

Soit finalement :

$$\forall t \geq t_0 : \quad x(t ; t_0, x_0) \geq y(t ; t_0, x_0) \quad (79)$$

1.2 Inégalité différentielle majorée par une équation différentielle.

La classe de systèmes que nous allons analyser est régie par une inégalité de la forme suivante [52] :

$$\frac{dx}{dt} \leq f(t, x) \quad (80)$$

$x(t_0) = x_0$, et $f(\cdot)$ est localement Lipschitzienne.

Si l'inégalité (80) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dx}{dt} \leq A[t,x].x \quad (81)$$

avec : $A[t,x]$ une matrice carrée d'ordre n , non-linéaire et x vecteur d'état, alors en choisissant une norme vectorielle appropriée $p(x)$, le système de comparaison correspondant est donné par l'équation ci-dessous :

$$\frac{dz}{dt} = M[t,x].z \quad (82)$$

$p(x) \leq z$ et $M[t,x]$ est une pseudo-majorante de $A[t,x]$ à éléments hors diagonaux non négatifs.

Proposition .

→ **Toutes les définitions, propriétés et résultats donnés au chapitre I.7 sont valables et applicables pour étudier la stabilité des systèmes décrits par des inégalités différentielles.**

Exemple d'application .

Soit le système caractérisé par les inégalités suivantes:

$$\frac{dx_1}{dt} \leq -2x_1 + \sin(t)x_2 + 0.2x_3 + 0.7x_4$$

$$\frac{dx_2}{dt} \leq -0.2x_1 - 1.5x_2 - 0.4x_3 + 0.6(\text{sat } x_3)x_4$$

$$\frac{dx_3}{dt} \leq -0.1(\text{sign } x_2)x_1 + 0.3x_2 - 1.3x_3 + 0.3x_4$$

$$\frac{dx_4}{dt} \leq 0.1x_1 + 0.4x_2 - 1.1x_3 - 2x_4$$

Si $p(x)^T = [\text{Max} \{ |x_1| ; |x_2| \} ; \text{Max} \{ |x_3| ; |x_4| \}]$, ce système admet un système de comparaison donné par :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & -0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Ce dernier système est asymptotiquement stable. Par conséquent, le système initial l'est également.

Si dans certains cas, l'inégalité différentielle (80) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dx}{dt} \leq f(t,x) = A[t,x].x + B[t,x] \quad (83)$$

$x(t_0) = x'_0$, $B[t,x]$ est un vecteur de même dimension que x . Le choix d'une norme vectorielle adéquate $q(x)$ nous permet de définir un système de comparaison de type (84) majorant le système initial.

$$\frac{dz}{dt} = M[t,x].z + N[t,x] \quad (84)$$

Les éléments de la pseudo-majorante $M[t,x]$ et du vecteur $N[t,x]$ sont déterminés à partir des définitions 1, 2, 3 et 4 du chapitre II.4.

Proposition.

→ Le lemme de comparaison généralisé et les méthodes d'analyse données chapitre II.4 sont valables ici pour étudier la stabilité de ce type de processus.

Exemple d'application.

Soit le système caractérisé par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ -0.5 & 1 - x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

L'inégalité ci-dessus peut être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{dx}{dt} \leq A[t,x].x + B[t,x] \quad \text{avec :}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ -0.5 & 1 - x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } x_2^2 \geq 3.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ -0.5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (3 - x_2^2).x_2 \end{bmatrix} \quad \text{si } x_2^2 < 3.$$

Le choix de la norme vectorielle $q(x) = [|x_1| \ |x_2|]^T$ nous permet de déterminer le système de comparaison suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0.5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{avec } q(x) \leq z.$$

Les solutions de ce dernier système dit système majorant non-autonome (SMNA) majorent celles du système de départ, et la convergence du SMNA implique celle du système initial. Il vient une estimation de l'attracteur D_A telle que :

$$D_A = \{ x : |x_1| \leq 0.8 \text{ et } |x_2| \leq 1.2 \}.$$

2 ° Systèmes décrits par des matrices intervalles [53].

2.1 Introduction.

Certains processus dynamiques sont décrits, dans l'espace d'état, par des matrices dites **intervalles**. Les variations des éléments de ces matrices peuvent avoir plusieurs causes possibles :

- Tolérances sur la conception.
- Erreurs ou imprécisions sur les mesures.
- Modifications induites par la maintenance.
- Changement des conditions opératoires.
- Vieillessement.
- Variables mal identifiées.
- Coefficients physiques incertains.
- Influence du temps,

L'analyse de ce type de processus a été envisagée dans le cas linéaire par de nombreux chercheurs [54] - [63], BIALAS dans la référence [54] a donné une condition nécessaire et suffisante pour conclure à la stabilité.

Cependant, elle a été contestée par KARL. [55] et BARMISCH. [56] et ont démontré, par ailleurs, que cette méthode est lourde, trompeuse et généralement incorrecte.

2.2 Etude de la stabilité.

Les matrices intervalles sont définies, dans le cas linéaire, de la façon suivante [64]:

$$A = \{ a_{ij} \in \mathbf{R} : a_{ij \min} \leq a_{ij} \leq a_{ij \max} ; i, j = 1, 2, \dots, n \}. \quad (85)$$

$$\text{ou} \quad A_{\min} \leq A \leq A_{\max}$$

avec A_{\min} et A_{\max} des matrices carrées supposées connues, de même ordre que A et d'éléments respectivement $a_{ij \min}$ et $a_{ij \max}$. Ce cas suppose que A est mal connue, mais qu'elle reste constante.

Dans le cas général où la matrice A varie entre deux bornes variables, les systèmes correspondants sont décrits par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\dot{x} = A[t,x,w].x \quad (86)$$

$$\text{avec } A_{\min}[t,x,w] \leq A[t,x,w] \leq A_{\max}[t,x,w]. \quad (87)$$

Dans le souci d'une écriture simple, nous noterons lorsqu'aucune ambiguïté ne sera possible :

$$A[t,x,w] = A[.], \quad A_{\min}[t,x,w] = A_{\min}[.] \quad \text{et} \quad A_{\max}[t,x,w] = A_{\max}[.]$$

t désigne le temps $\in T_0$ inclus dans \mathbf{R} , x l'état $\in \mathbf{R}^n$, $w \in W$ caractérise les perturbations. L'ensemble des matrices intervalles telles que :

$$A_1[.] = \{A[.] : A_{\min}[.] \leq A[.] \leq A_{\max}[.]\} \quad (88)$$

est "stable" si et seulement si tout système décrit par une équation de type (86) est "stables". Généralement, on ne peut pas analyser ce nombre important de systèmes. D'où la nécessité de méthodes pratiques permettant de lever cette difficulté.

L'approche proposée dans ce qui suit consiste à tester la stabilité d'une seule matrice notée $M[.]$ pour conclure à la stabilité ou à l'instabilité de $A_1[.]$ dans le cas général.

Dans le cas des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires, le système de comparaison permettant de conclure à la stabilité du processus dépend directement des $m_{ij}(.)$ définis dans le chapitre I (25), (26) et (27).

Cependant, si des systèmes sont décrits par des matrices intervalles perturbées en w , on doit effectuer une étape intermédiaire en définissant une matrice $C[.] = \{c_{ij}(\cdot)\}$ qui peut être suivant les cas :

a°) Non-linéaire et non stationnaire :

$$c_{ii}(t, x) = \text{Sup}_{w \in W} \{a_{ii \max}(t, x, w)\} \quad (89)$$

$$c_{ij}(t, x) = \text{Max} \left\{ \text{Sup}_{w \in W} |a_{ij \min}(t, x, w)| ; \text{Sup}_{w \in W} |a_{ij \max}(t, x, w)| \right\}$$

b°) Linéaire et non stationnaire :

$$c_{ii}(t) = \text{Sup}_{\substack{w \in W; \\ x \in \mathbb{R}^n}} \{a_{ii \max}(t, x, w)\} \quad (90)$$

$$c_{ij}(t) = \text{Max} \left\{ \text{Sup}_{\substack{w \in W; \\ x \in \mathbb{R}^n}} |a_{ij \min}(t, x, w)| ; \text{Sup}_{\substack{w \in W; \\ x \in \mathbb{R}^n}} |a_{ij \max}(t, x, w)| \right\}$$

c°) Non-linéaire et stationnaire :

$$c_{ii}(x) = \text{Sup}_{\substack{w \in W; \\ t \in T_0}} \{a_{ii \max}(t, x, w)\} \quad (91)$$

$$c_{ij}(x) = \text{Max} \left\{ \text{Sup}_{\substack{w \in W; \\ t \in T_0}} |a_{ij \min}(t, x, w)| ; \text{Sup}_{\substack{w \in W; \\ t \in T_0}} |a_{ij \max}(t, x, w)| \right\}$$

d°) Linéaire et stationnaire :

$$c_{ii} = \text{Sup}_{\substack{w \in W; \\ t \in T_0; \\ x \in \mathbb{R}^n}} \{ a_{ii \max}(t, x, w) \} \quad (92)$$

$$c_{ij} = \text{Max} \left\{ \text{Sup}_{\substack{w \in W; \\ t \in T_0; \\ x \in \mathbb{R}^n}} |a_{ij \min}(t, x, w)| ; \text{Sup}_{\substack{w \in W; \\ t \in T_0; \\ x \in \mathbb{R}^n}} |a_{ij \max}(t, x, w)| \right\}$$

Le système de comparaison se déduit à partir de la matrice $C[.]$ à l'aide des relations suivantes tout à fait semblables à (24) :

$$m_{ij}(\cdot, y) = \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T \cdot C_{ij}[\cdot] \cdot y_j}{p_j(y_j)} \quad (93)$$

$$\mu_{ii}(\cdot) = \text{Sup}_y m_{ii}(\cdot, y) ; \forall i$$

$$\mu_{ij}(\cdot) = \text{Max} \left\{ 0 ; \text{Sup}_y m_{ij}(\cdot, y) \right\} ; \forall i \neq j$$

Si le système décrit par $M[.]$ est stable, il en est de même du système initial, en particulier il vient :

Théorème : Si la matrice $M[.]$, constante ou ayant des éléments non constants isolés dans une seule rangée et d'inverse irréductible, est l'opposée d'une M-matrice relativement à une norme vectorielle régulière et surjective, alors $A_1[.]$ est "asymptotiquement stable".

Exemple d'application n° 1.

Soit le système suivant [54] :

$$\dot{x} = A.x \quad \text{avec :}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Avant de conclure à la stabilité de A_1 , BIALAS a analysé 16 matrices différentes et 16 polynômes caractéristiques. D'autres auteurs ont résolu l'équation de Lyapunov

Avec la méthode proposée, il vient :

$$C = M = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

La pseudo-majorante correspondante, relativement à la norme vectorielle $p(x) = [|x_1| |x_2|]^T$, est opposée d'une M-matrice. Par conséquent, l'ensemble A_1 est "asymptotiquement stable".

Exemple d'application n° 2.

Soit le système dynamique $\dot{x} = A.x$ tel que :

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 & -0.5 \\ -0.2 & -6 & 0 & 0.09 \\ 0.2 & -0.1 & -5 & 0.5 \\ -0.1 & 0 & -2 & -7 \end{bmatrix} \leq A \leq \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & -4 & 0.5 & 1 \\ 0.3 & 0 & -3 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

Pour analyser ce système, certaines méthodes nécessitent de gros calculs et d'autres méthodes ne nous permettent pas de conclure à la stabilité : exemple le choix de normes scalaires comme fonctions candidates. Avec la méthode proposée ci-dessus, on obtient :

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & -4 & 0.5 & 1 \\ 0.3 & 0.1 & -3 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Si on choisi la norme suivante :

$q^T(x) = \left[\text{Max} \{ |x_1|; |x_2| \} ; \text{Max} \{ |x_3| ; |x_4| \} \right]$, le système de comparaison correspondant est donné par :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1.5 \\ 0.4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

dont la matrice d'évolution est l'opposée d'une M-matrice. Par conséquent, l'ensemble A_1 est "asymptotiquement stable".

Exemple d'application n° 3.

La matrice $A[.]$ est ici variable entre deux bornes variables :

$$\begin{bmatrix} -4+0,5.\sin x_1 & \cos t & -1 \\ 0 & -5 & 0,3.\sin x_3 \\ -0,1 & -0,5 & -3 \end{bmatrix} \leq A[.] \leq \begin{bmatrix} -3+0,3.\sin x_1 & 1 & +0,1 \\ -1+e^{-x_2^2} & -3 & 0,5+s \sin x_3 \\ 0.1 & 0.5 & -2 \end{bmatrix}$$

On a :

$$C[.] = \begin{bmatrix} -3+0,3.\sin x_1 & 1 & 1 \\ \left| -1+e^{-x_2^2} \right| & -3 & |0,5 + \sin x_3| \\ 0.1 & 0.5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Si $p(x) = [\text{Max} \{ |x_1| ; |x_2| \} ; |x_3|]^T$, il vient :

$$M = \begin{bmatrix} -1,7 & +1,5 \\ 0,6 & -2 \end{bmatrix}.$$

D'après le théorème ci-dessus, l'ensemble des matrices intervalles est "asymptotiquement stable".

3° ANALYSE DES SYSTEMES BRUITES.

Cette dernière partie est consacrée à l'étude des systèmes bruités complexes non-linéaires. L'approche présentée par la suite est basée sur la définition de systèmes de comparaison déduits du modèle initial par les techniques de majorations. Elle nous permet d'estimer les attracteurs et les régions d'attraction pour des systèmes stables ou instables localement soumis à des perturbations diverses. Cette classe de systèmes est régie par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, w) \quad (94)$$

Avec :

$x \in \mathbf{R}^n$: vecteur d'état de dimension n.

$t \in T_0 = [t_0, +\infty[; \quad t_0 \in \mathbf{R}.$

$w \in W$ inclus dans \mathbb{R}^n est le vecteur perturbation.

$$f : T_0 \times \mathbb{R}^n \times W \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Nous supposons que l'équation (94) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{dx}{dt} = A[t,x,w].x + B[t,x,w] \quad (95)$$

expression dans laquelle $A[t,0,w]$ est à éléments bornés pour tout $(t,w) \in T_0 \times W$.

3.1 Détermination d'un SMNA pour les systèmes bruités.

Soit D_S un ensemble compact inclus dans \mathbb{R}^n , $\{0\} \in D_S$, $D_S \neq \{0\}$ et p la norme vectorielle de x dans \mathbb{R}^n .

$$p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k_+ ; \text{ (voir les rappels au chapitre I).}$$

$$\text{Soit : } p(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)]^T.$$

Si $\phi_i(\cdot)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) désigne une norme scalaire définie sur le sous espace vectoriel E_i , il lui correspond la norme régulière [24] de taille k et de $i^{\text{ème}}$ composante ci-dessous :

$$p_i(x) = p_i(P_i x) = p_i(x_i).$$

P_i l'opérateur de projection de l'espace vectoriel E_v dans le sous espace vectoriel E_i : $x_i = P_i x$.

Soit :

$$A_{ij}[t,x,w] = P_i.A[t,x,w].P_j \quad (\forall i, j = 1, 2, \dots, k).$$

$$B_j[t,x,w] = P_j.B[t,x,w]$$

$$m_{ij}(t,x,w,y) = \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T \cdot A_{ij}[t,x,w] \cdot y_j}{p_j(y_j)} \quad (96)$$

$$n_i(t,x,w) = |\text{Grad } \phi_i(x_i)^T \cdot B_i(t,x,w)|.$$

$$\forall i, j, t, x, w : M[.] = \{ \mu_{ij}(\cdot) \} \text{ et } N[.] = \{ v_{ij}(\cdot) \}.$$

Définition 1 :

Le couple $(M ; N)$, $M : T_0 \times D_S \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$, $N : T_0 \times D_S \rightarrow \mathbb{R}^k_+$ définit un SMNA du système (95) sur D_S relativement à la norme vectorielle p si et seulement si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$D^+ p(x) \leq M[t,x] \cdot z + N[t,x] \quad (97)$$

$$\forall (t,x) \in T_0 \times D_S.$$

Définition 2 :

Le couple $(M ; N)$ avec :

$$\mu_{ii}(t,x) = \text{Sup}_{w \in W; y \in D_s} \{ m_{ii}(t,x,w,y) \} \quad \forall i. \quad (98)$$

$$\mu_{ij}(t,x) = \text{Max} \left\{ 0 ; \text{Sup}_{w \in W; y \in D_s} \{ m_{ij}(t,x,w,y) \} \right\} \quad \forall i \neq j.$$

$$v_i(t,x) = \text{Sup}_{w \in W} \{ n_i(t,x,w) \}$$

définit un SMNA sur D_S , non-linéaire et non-stationnaire du système (95).

Définition 3 :

Le couple (M ; N) avec :

$$\mu_{ii}(x) = \text{Sup}_{w \in W; y \in D_S; t \in T_0} \{m_{ii}(t, x, w, y)\} \quad \forall i. \quad (99)$$

$$\mu_{ij}(x) = \text{Max} \left\{ 0 ; \text{Sup}_{w \in W; y \in D_S; t \in T_0} \{m_{ij}(t, x, w, y)\} \right\} \quad \forall i \neq j.$$

$$v_i(x) = \text{Sup}_{w \in W; t \in T_0} \{n_i(t, x, w)\} \quad \forall i.$$

définit un SMNA sur D_S , non-linéaire et stationnaire du système (95).

Définition 4 :

Le couple (M ; N) avec :

$$\mu_{ii}(t) = \text{Sup}_{w \in W; y \in D_S} \{m_{ii}(t, y, w, y)\} \quad \forall i. \quad (100)$$

$$\mu_{ij}(t) = \text{Max} \left\{ 0 ; \text{Sup}_{w \in W; y \in D_S} \{m_{ij}(t, y, w, y)\} \right\} \quad \forall i \neq j.$$

$$v_i(t) = \text{Sup}_{w \in W} \{n_i(t, y, w)\} \quad \forall i.$$

définit un SMNA sur D_S , linéaire et non stationnaire du système (95).

Définition 5 :

Le couple (M ; N) avec :

$$\mu_{ii} = \text{Sup}_{w \in W; y \in D_S; t \in T_0} \{m_{ii}(t, y, w, y)\} \quad \forall i. \quad (101)$$

$$\mu_{ij} = \text{Max} \left\{ 0 ; \text{Sup}_{w \in W; y \in D_S; t \in T_0} \{m_{ij}(t, y, w, y)\} \right\} \quad \forall i \neq j.$$

$$v_i = \text{Sup}_{w \in W; y \in D_S; t \in T_0} \{n_i(t, y, w)\} \quad \forall i.$$

définit un SMNA sur D_S , linéaire et stationnaire du système (95).

3.2 Détermination du système de comparaison.

A partir du lemme de comparaison généralisé énoncé au chapitre II.4.2, on peut définir le système de comparaison correspondant à l'équation (95) et relativement à la norme vectorielle $p(x)$ comme suit :

$$\frac{dz}{dt} = M[t, x].z + N[t, x] \quad (102)$$

avec la condition suivante : $z(t) \geq p(x(t))$ si $\forall (t_0, x_0) \in T_0 \times \mathbf{R}^n$, $z(t_0) \geq p(x(t_0))$.

3.3 Estimation des attracteurs.

Nous supposons que les perturbations agissant sur le système sont bornées. Les techniques nous permettant d'estimer l'attracteur et sa zone d'influence pour un système stable ou instable localement sont identiques à celles données ci-dessus (chapitre II et III).

1°) cas : SMNA linéaire stationnaire.

Si le système de comparaison associé au modèle (95) est de la forme suivante :

$$\frac{dz}{dt} = M.z + N$$

avec M constante et opposée d'une M-matrice et N vecteur constant, l'estimation de l'attracteur est donnée par :

$$D_A = \{x : p(x) \leq -M^{-1}N\}.$$

L'estimation de la région d'attraction est donnée par :

$$D_I = \{x : U^T.p(x) \leq k \text{ et } x \in D_S\}.$$

k est le plus grand nombre réel positif tel que : $D_I \subset D_S$.

Exemple d'application.

Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 10^{-2} \cdot |x_2| + w_{11} & 0.5 \cos(t) + 8 \cdot 10^{-7} \cdot |x_2|^3 + w_{12} \\ -0.1 \sin(t) + w_{21} & 0.5 \cdot x_2^2 + w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{13} \\ w_{23} \end{bmatrix}$$

La matrice W est définie comme suit :

$$\begin{bmatrix} -0.5 & -0.2 & -0.1 \\ -0.4 & -0.5 & -0.2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Soit $V = \{x : x_2^2 \leq 2\}$.

Si $(t, x, w) \in T_0 \times V \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$, on choisi d'écrire le système comme

suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 10^{-2} \cdot |x_2| + w_{11} & 0.5 \cos(t) + 8 \cdot 10^{-7} \cdot |x_2|^3 + w_{12} \\ -0.1 \sin(t) + w_{21} & -1.5 + w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{13} \\ (2 - x_2^2) \cdot x_2 + w_{23} \end{bmatrix}$$

Si $(t, w) \in T_0 \times W$ et si $x \in V$, le système on lécrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 10^{-2} \cdot |x_2| + w_{11} & 0.5 \cos(t) + 8 \cdot 10^{-7} \cdot |x_2|^3 + w_{12} \\ -0.1 \sin(t) + w_{21} & 0.5 \cdot x_2^2 + w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{13} \\ w_{23} \end{bmatrix}$$

Dans le cas où $p(x) = [|x_1| \ |x_2|]^T$ et $D_S = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x_2| \leq 50 \}$, le système de comparaison correspondant est donné par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & +1 \\ +0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.100 \\ 1.289 \end{bmatrix}$$

Pour tout $x \in D_S$, il vient :

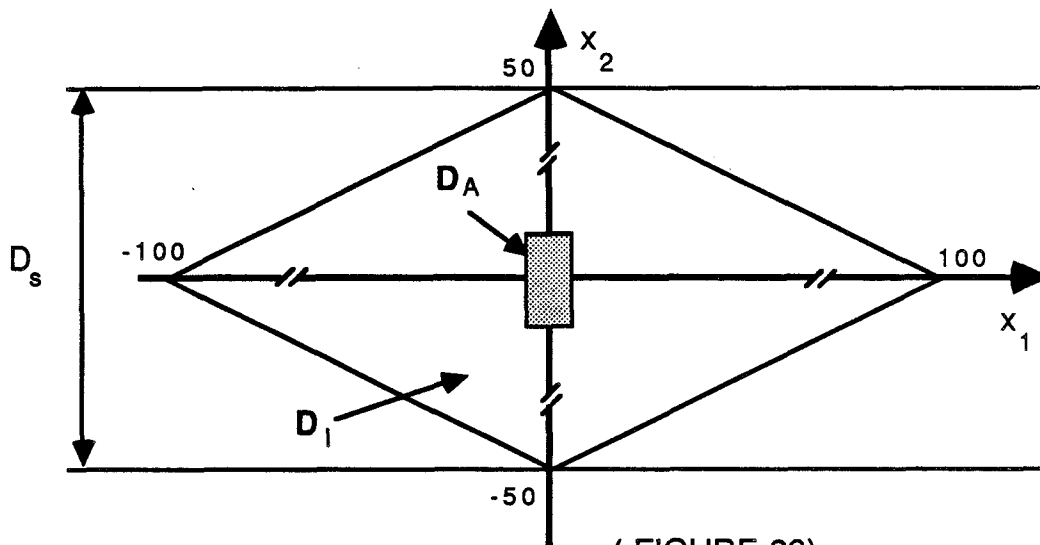
$$\lambda_m = -0.5 \cdot \lambda_c = -0.5.$$

$$U_m^T = [0.5 \ 1].$$

$$D_A = \{ x : |x_1| \leq 1.39 \text{ et } |x_2| \leq 1.9835 \}.$$

$$D_I = \{ x : 0.5|x_1| + |x_2| \leq 50 \}.$$

La figure suivante donne la forme des domaines D_S , D_A et D_I obtenus par estimation :



(FIGURE 29)

2°) cas : SMNA non-linéaire et non stationnaire.

Si le système de comparaison associé au modèle (95) est de la forme suivante :

$$\frac{dz}{dt} = M[.]z + N[.]$$

dans laquelle $M[.]$ est non constante et les éléments non-linéaires sont isolés dans la dernière rangée (colonne ou ligne). Si $M[.]$ est l'opposé d'une M-matrice, alors l'estimation de l'attracteur est donnée par :

$$D_A = \{ x : U_m^T p(x) \leq -\lambda_m^{-1} \cdot \text{Sup}_{x \in D_S; t \in T_0} (U_m^T N[t, x]) \}.$$

$$D_I = \{ x : U_m^T p(x) \leq k \text{ et } x \in D_S \}.$$

$k \geq 0$ et k est le plus grand nombre réel tel que D_I est inclus dans D_S .

Remarque.

$$\text{Si } D_S = \mathbf{R}^n, \text{ alors } D_I = \mathbf{R}^n.$$

Exemple d'application.

Soit le système décrit par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - |x_1| + w_{11} & 0.5 \sin(t) + |1 - |x_2|| + w_{12} \\ 0.9 \cos(t) + w_{21} & -0.5 - |1 - |x_2|| + w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{13} \\ w_{23} \end{bmatrix}$$

La matrice caractérisant le bruit est donnée par :

$$\begin{bmatrix} -1 & -0.5 & -0.1 \\ -0.1 & -0.5 & -0.2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Soit $V = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq 4 \}$.

Si $(t, x, w) \in T_0 \times V \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$, le système s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + w_{11} & 0.5 \sin(t) + |1 - |x_2|| + w_{12} \\ 0.9 \cos(t) + w_{21} & -0.5 - |1 - |x_2|| + w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (4 - |x_1|)x_1 + w_{13} \\ w_{23} \end{bmatrix}$$

Si $(t, w) \in T_0 \times W$ et si $x \notin V$, le système s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - |x_1| + w_{11} & 0.5 \sin(t) + |1 - |x_2|| + w_{12} \\ 0.9 \cos(t) + w_{21} & -0.5 - |1 - |x_2|| + w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{13} \\ w_{23} \end{bmatrix}$$

Dans le cas où $p(x) = [|x_1| \ |x_2|]^T$, le système de comparaison correspondant est donné par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & +1 + |1 - |x_2|| \\ +1 & -1 - |1 - |x_2|| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

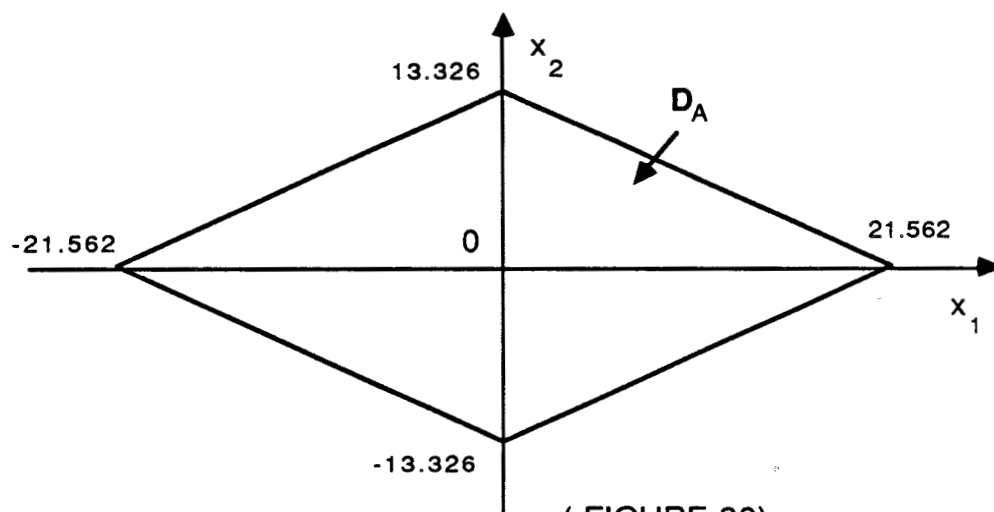
Les éléments non-constants de la matrice $M[.]$ sont rangés dans la dernière colonne. Avec les notations de l'annexe 4, il vient :

$$\lambda_m \# \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$U_m^T = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 + \sqrt{5} & & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

$$D_A = \{ x \in \mathbf{R}^n : (\sqrt{5} - 1) \cdot |x_1| + 2 \cdot |x_2| \leq (7\sqrt{5} + 11) \}.$$

$D_1 = \mathbf{R}^n$ (voir figure ci-dessous).



4° CONCLUSION.

Dans cette dernière partie du mémoire, nous avons exploité les résultats des chapitres 3 et 4 pour permettre l'analyse des systèmes décrits par des inégalités différentielles ou matrices intervalles et des systèmes bruités. Les méthodes proposées sont d'une application pratique et elles sont peu sensibles aux variations des paramètres du système. De plus, elles permettent une étude de cas restés sans solution (matrices intervalles bruitées à bornes variables par exemple).



CONCLUSION GENERALE.

La méthode de comparaison utilisée ici et fondée sur des propriétés d'inégalités différentielles, permet d'associer un système de comparaison de structure plus simple à un processus non-linéaire éventuellement complexe. L'utilisation de la notion de normes vectorielles permet la définition systématique d'une classe de systèmes majorants associés à un processus et dont les propriétés de stabilité permettent de conclure sur celles du système initial. Notre approche s'avère particulièrement intéressante dans l'étude de certains problèmes restés jusqu'ici sans réponse, ou demandant un effort de programmation non négligeable.

Les techniques de majoration et d'agrégation par normes vectorielles permettent d'étudier un processus indépendamment de la nature des variations de ses paramètres (aucune hypothèse de différentiabilité, ou autre, n'est requise).

La notion de Système Majorant Non Autonome (SMNA) permet d'aborder les processus à trajectoires complexes : c'est le cas des systèmes à plusieurs équilibres instables et stables, ou présentant des attracteurs localement asymptotiquement stables. Il est ainsi possible d'en estimer les caractéristiques initiales (domaine d'attraction) et finales (attracteurs) sans passer par la simulation numérique.

Le cas des matrices intervalles, bruités ou non, à bornes fixes ou variables, se prête également très bien à ce type d'investigation. Les nombreux exemples traités tout au long de ce mémoire ont montré la validité de notre méthode. La simplicité de mise en œuvre n'est limitée que par le choix, encore intuitif jusqu'ici, de la norme vectorielle et de la décomposition conduisant le système majorant non autonome (M,N) à être mieux adapté.

Nous nous sommes attachés ici à l'analyse des processus, mais cette approche trouve son application dans l'étude de la synthèse des systèmes non-linéaires continus ou discrets et c'est dans cette direction que nous envisageons de poursuivre nos travaux.

ANNEXES.

ANNEXE n° 1 : CONDITION DE LIPSCHITZ.

Soit :

t_0 : caractérise l'instant initial élément de \mathbf{R} .

$T_0 = [t_0, +\infty[$.

La fonction f telle que :

$f : T_0 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$(t,x) \rightarrow \mathbf{R}$

est Lipschitzienne par rapport à x s'il existe un nombre réel positif k tel que :

$$\forall x' \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, \forall t \in T_0, \| f(t,x') - f(t,x) \| \leq k. \| x' - x \|.$$

On dit que la fonction f est localement Lipschitzienne par rapport à x si tout (t,x) possède un voisinage appartenant à $T_0 \times \mathbf{R}$ et dans lequel f Lipschitzienne par rapport à x :

$$\|x'\| < h, \|x\| < h, L > 0 \text{ et } h > 0.$$

$\|\cdot\|$ désigne le module.

ANNEXE n° 2 : DEMONSTRATION DU THEOREME DE COMPARAISON.

Soit :

$$\dot{z} = g(t,z) \quad (1)$$

Une équation différentielle modélisant un processus dynamique :

$$g : T_0 \times D \rightarrow R ; \quad D \text{ est inclus dans } R.$$

$$(t,z) \rightarrow g(t,z).$$

$z(t)$ est une solution de (1) définie sur un intervalle $]t_1, t_2[$ contenant t_0 , avec $z_0 = z(t_0)$. Soit $y(t)$ une fonction réelle de classe K , définie sur $]t_1, t_2[$ avec $y_0 = y(t_0)$ et $y_0 \in D$.

Théorème :

$$\text{Si } y_0 \leq z_0 \quad (2)$$

$$\text{et } \forall t \in [t_0, t_0[: \dot{y}(t) \leq g(t,y(t)) \quad (3),$$

$$\text{alors } \forall t \in [t_0, \infty[: y(t) \leq z(t) \quad (4).$$

Supposons que la proposition (4) soit inexacte. Il existe alors un τ élément de $]t_0, t_2[$ tel que $y(\tau) > z(\tau)$, et un τ' élément de $[t_0, \tau[$ tel que $y(\tau') = z(\tau')$ et que :

$$\forall t \in]\tau', \tau[: y(t) > z(t).$$

Posons $w(t) = y(t) - z(t)$. On a donc :

$$w(\tau') = 0.$$

$$\text{Et } \forall t \in]\tau', \tau[: w(t) > 0.$$

Il existe un voisinage de $(\tau', z(\tau'))$ sur lequel on a une constante de Lipschitz k . Choisissons τ'' élément de $]\tau', \tau[$, assez proche de τ' pour que, quelque soit t appartenant à $[\tau', \tau'']$, les deux points $(t, z(t))$

et $(t, y(t))$ appartiennent à ce voisinage. Alors, grâce à (1) et (3), on a :

$$\forall t \in [\tau', \tau''] ,$$

$$\dot{w} \leq g(t, y(t)) - g(t, z(t)) .$$

$$\leq |g(t, y(t)) - g(t, z(t))| .$$

$$\leq k \cdot |w(t)| .$$

$$\leq k \cdot w(t) .$$

Dans le même intervalle de temps, on a donc :

$$e^{-kt} (\dot{w}(t) - kw(t)) \leq 0 .$$

Ou encore :

$$\frac{d}{dt} (e^{-kt} \cdot w(t)) \leq 0 .$$

La fonction $e^{-kt}w(t)$ est donc décroissante sur $[\tau', \tau'']$. Puisque $w(\tau') = 0$, on a $z(t) \leq 0$ sur $[\tau', \tau'']$. Ce qui contredit (5).

ANNEXE n° 3 : DEFINITION ET DETERMINATION D'UNE MATRICE PSEUDO-MAJORANTE : APPLICATION AUX NORMES DE HOLDER.

Le système étudié est régi par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{dx}{dt} = A[t,x].x \quad (1)$$

$E_V = R^n$: un espace vectoriel de dimension n et $E_{V_1}, E_{V_2}, \dots, E_{V_k}$ des sous espaces vectoriels de E_V avec $E_{V_1} \cup E_{V_2} \cup \dots \cup E_{V_k} = E_V$; ($k \leq n$).

$A[t,x]$: matrice $n \times n$ dont les coefficients sont fonctions de t et x .

x un vecteur de dimension n élément de R^n .

x_i une projection de x dans E_{V_i} avec :

$$x_i = P_i(x), \forall x \in E_V, \forall x_i \in E_{V_i}, (\forall i = 1, 2, \dots, k \leq n).$$

$P_i(.)$ est l'opérateur de projection.

Si $p_i(x_i)$ est une norme scalaire du vecteur x_i de E_{V_i} , alors le vecteur $p(x)$ de dimension k et de composantes $p_i(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) est une norme vectorielle du vecteur x :

$$\begin{aligned} p : R^n &\rightarrow R^k_+ \\ x &\rightarrow p_i(x) = p_i(x_i). \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} D^+ p_i(x) &= \left[\frac{\partial p_i(x_i)}{\partial x_i} \right]^T \cdot \dot{x}_i \\ &= \left[\text{Grad } p_i(x_i) \right]^T \cdot P_i \cdot A[t,x].x \end{aligned}$$

Or :

$$X = \sum_{j=1}^k P_j x = \sum_{j=1}^k P_j x_j = \sum_{j=1}^k x_j .$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} D^+ p_i(x) &= \sum_{j=1}^k \left[\text{Grad } p_i(x_j) \right]^T \cdot P_i \cdot \mathbf{A}[t, x] x_j \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\text{Grad } p_i(x_j) \right]^T \cdot P_i \cdot \mathbf{A}[t, x] P_j x_j . \end{aligned}$$

En notant : $x = \sum_{j=1}^k P_j x = \sum_{j=1}^k P_j x_j = \sum_{j=1}^k x_j ;$

$$D^+ p_i(x) = \sum_{j=1}^k \frac{\left[\text{Grad } p_i(x_j) \right]^T \cdot \mathbf{A}_{ij}[t, x] x_j \cdot p_j(x_j)}{p_j(x_j)} .$$

par majoration, on obtient :

$$D^+ p(x) \leq M[.] \cdot p(x)$$

$$D^+ p_i(x) \leq \sum_{j=1}^k p_j(x) \cdot \underset{\substack{y \in E_V \\ y \neq 0}}{\text{Max}} \left[\frac{\left[\text{Grad } p_i(y_j) \right]^T \cdot \mathbf{A}_{ij}[t, x] (y_j)}{p_j(y_j)} \right] .$$

Soit en passant à la forme vectorielle:

$$D^+ p(x) \leq M[.] \cdot p(x)$$

Il en résulte une définition de la pseudo-majorante $M[.]$

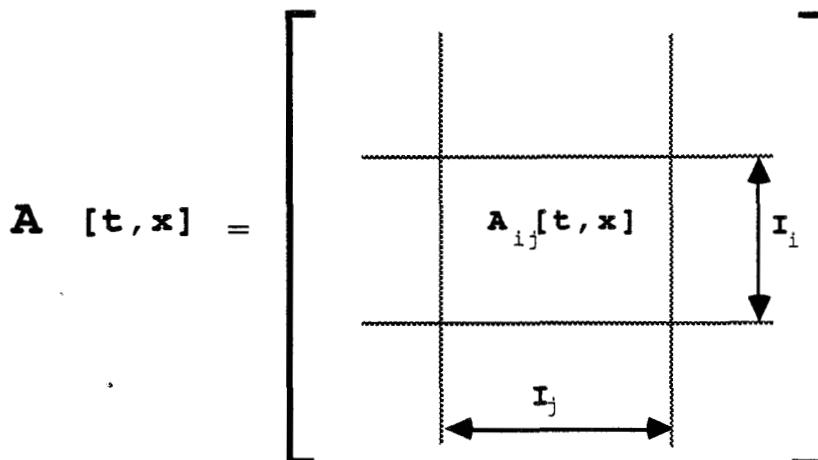
d'éléments $m_{ij}(\cdot)$ décrits par la relation suivante :

$$m_{ij}(\cdot) = \underset{\substack{y \in E_v \\ y \neq 0}}{\text{Max}} \frac{[\text{Grad } p_i(y_i)]^T \cdot A_{ij}[t, x] \cdot y_j}{p_j(y_j)}$$

1° APPLICATION AUX NORMES DE HOLDER [65].

Nous allons déterminer respectivement les pseudo-majorantes pour les normes : du Max et Somme des modules.

Notons :



Soit E_{vi} une partition de l'espace vectoriel E_v correspondant à un découpage par blocs de la matrice $A[t, x]$, I_i et I_j représentent l'ensemble des indices des lignes et colonnes correspondant au bloc $A_{ij}[t, x]$.

Nous allons déterminer les pseudo-majorantes respectivement pour les normes du Max et de sa duale (somme des modules) .

1.1 Norme du Max :

Si l'on prend pour $p_i(x)$ le module de l'élément de plus grand

module de $x_i \in E_{v_i}$, il vient en notant $m_{ij}(t,x)$ les éléments de la pseudo-majorante $M[m_{ij}(\cdot)]$:

$$m_{ij}(\cdot) = \mathbf{Max}_{k \in I_i} \left[\sum_{h \in I_j} |a_{kh}(\cdot)| \right]; \forall i \neq j.$$

$$m_{ii}(\cdot) = \mathbf{Max}_{k \in I_i} \left[a_{kk}(\cdot) + \sum_{h \in I_i \text{ et } h \neq k} |a_{kh}(\cdot)| \right]; \forall i.$$

Démonstration. Recherche de la pseudo-majorante minimale :

Pour i_0 et $j_0 \in [1, \dots, k]$, déterminons $m_{i_0 j_0}(\cdot)$.

Soit j_m tel que :

$$\begin{aligned} p_j(x) &= \mathbf{Max}_{j \in I_{j_0}} |x_j|. \\ &= |x_{j_m}| = x_{j_m} \cdot \text{sg}(x_{j_m}). \end{aligned}$$

$\text{sg}(v)$ désigne signe de la variable v :

$$\text{sg}(v) = 1 \text{ si } v > 0.$$

$$\text{sg}(v) = 0 \text{ si } v = 0.$$

$$\text{sg}(v) = -1 \text{ si } v < 0.$$

Et soit i_m tel que :

$$\begin{aligned} p_i(x) &= \mathbf{Max}_{i \in I_{i_0}} |x_i|. \\ &= |x_{i_m}| = x_{i_m} \cdot \text{sg}(x_{i_m}). \end{aligned}$$

$$[\text{Grad } p_i(x)] = [0 \dots\dots\dots 0, \text{sg}(x_{im}), 0 \dots\dots\dots 0]^T.$$

$$\frac{[\text{Grad } p_{i_0}(x_{i_0})]^T \cdot \mathbf{A}_{i_0 j_0}[t, x] \cdot x_{j_0}}{p_{j_0}(x_{j_0})}$$

$$= \frac{\text{sg}(x_{im}) \cdot \sum_{l \in I_{j_0}} a_{j_m l}(\cdot) \cdot x_l}{|x_{j_m}|}.$$

$$\leq \text{sg}(x_{im}) [a_{i_m j_m}(\cdot) \text{sg}(x_{j_m})] + \sum_{l \in I_{j_0} \text{ et } l \neq j_m} |a_{i_m l}(\cdot)| \frac{|x_l|}{|x_{j_m}|}.$$

$$\text{Max}_{\substack{x \in E_v \\ x \neq 0}} \frac{[\text{Grad } p_{i_0}(x_{i_0})]^T \cdot \mathbf{A}_{i_0 j_0}[t, x] \cdot x_{j_0}}{p_{j_0}(x_{j_0})} = m_{i_0 j_0}(\cdot).$$

$$m_{i_0 j_0}(\cdot) \leq \text{sg}(x_{im} x_{j_m}) a_{i_m j_m}(\cdot) + \sum_{l \in I_{j_0} \text{ et } l \neq j_m} |a_{i_m l}(\cdot)|. \quad (2)$$

1°) Si $i_0 = j_0$, $I_{i_0} = I_{j_0}$ et $j_m = j_m$, alors :

L'équation (2) s'écrit :

$$m_{i_0 i_0}(\cdot) = m_{j_0 j_0}(\cdot) \leq a_{i_m j_m}(\cdot) + \sum_{l \in I_{j_0} \text{ et } l \neq j_m} |a_{i_m l}(\cdot)|; \forall x \in E_v \text{ et } \forall i_m \in I.$$

Soit :

$$m_{i_0 i_0}(\cdot) \leq \text{Max}_{l \in I_{j_0}} \left[a_{il}(\cdot) + \sum_{l \in I_{j_0} \text{ et } l \neq i} |a_{il}(\cdot)| \right] = a_{mm}(\cdot) + \sum_{l \in I_{j_0} \text{ et } l \neq m} |a_{ml}(\cdot)| \quad (3).$$

en notant m l'indice élément de I_j pour lequel Max [.] est atteint.

Or pour x tel que :

$$x_{im} = x_m \text{ et } x_l = \text{sg} (x_{ml}). x_m \quad \forall l \neq m.$$

On a :

$$\frac{[\text{Grad } p_{i_0}(x_{j_0})]^T \cdot \mathbf{A}_{i_0 j_0}[t, x] x_{j_0}}{p_{j_0}(x_{j_0})} = a_{mm}(\cdot) + \sum_{l \in I_{i_0} \text{ et } l \neq m} |a_{ml}(\cdot)| \leq m_{i_0 i_0}(\cdot) \quad (4).$$

(3) et (4) entraînent :

$$m_{i_0 j_0}(\cdot) \leq \text{Max}_{l \in I_{j_0}} \left[a_{il}(\cdot) + \sum_{l \in I_{i_0} \text{ et } l \neq i} |a_{il}(\cdot)| \right]$$

2°) Si $i_0 \neq j_0$, l'intersection de I_{i_0} et I_{j_0} est égale à l'ensemble vide, alors par majoration de (2), on obtient :

$$m_{i_0 j_0}(\cdot) \leq \sum_{l \in I_{i_0}} |a_{iml}(\cdot)| \quad \forall i_m \in I_{i_0}, \text{ et donc :}$$

$$m_{i_0 j_0}(\cdot) \leq \text{Max}_{l \in I_{j_0}} \sum_{l \in I_{i_0}} |a_{il}(\cdot)| = \sum_{l \in I_{j_0}} |a_{ml}(\cdot)| .$$

Or pour $x \in \mathbb{E}_v$ tel que :

$$i_m \text{ (indice du } |x_i| \text{ maximum)} = m.$$

$$x_m > 0 .$$

$$x_l = |x_{jm}| \text{sg} (a_{iml}(\cdot)) \quad \forall l \in I_{j_0}.$$

On a :

$$\frac{[\text{Grad } p_{j_0} \ x_{j_0}]^T \mathbf{A}_{j_0 j_0} [t, x] x_{j_0}}{p_{j_0}(x_{j_0})} = \sum_{l \in I_{j_0}} a_{l, l}(\cdot) \text{sg}(a_{l, l}(\cdot)) = \sum_{l \in I_{j_0}} |a_{l, l}(\cdot)| \leq m_{j_0}(\cdot) \quad (6)$$

(5) et (6) entraînent :

$$m_{j_0}(\cdot) = \sum_{l \in I_{j_0}} |a_{l, l}(\cdot)| = \text{Max}_{i \in I_{j_0}} \sum_{l \in I_{j_0}} |a_{l, l}(\cdot)| .$$

1.2 Norme somme des modules :

Soit : $p_i(x) = \sum_{k \in I_i} |x_k|$, déterminons le terme m_{ij} .

On a :

$$[\text{Grad } p_i(y_i)] = [0 \dots 0, \text{sg}(y_{ik}), 0 \dots 0]^T ; k \in I_i \text{ et}$$

$$\frac{[\text{Grad } p_i(y_i)]^T \mathbf{A}_{ij} [t, x] y_j}{p_j(y_j)} = \frac{\sum_{k \in I_i} \left(\text{sg}(y_{ik}) \cdot \sum_{l \in I_j} a_{kl}(\cdot) \cdot y_l \right)}{\sum_{l \in I_j} y_l \text{sg}(y_l)} = b_{ij} .$$

1°) $i \neq j$:

$$b_{ij} = \frac{\sum_{l \in I_j} \left(\sum_{k \in I_i} \text{sg}(y_{ik}) a_{kl}(\cdot) \right) \cdot y_l}{\sum_{l \in I_j} y_l \text{sg}(y_l)} \leq \frac{\text{Max}_{l \in I_j} \left(\sum_{k \in I_i} \text{sg}(y_{ik}) a_{kl}(\cdot) \right) \cdot \sum_{l \in I_j} y_l}{\sum_{l \in I_j} y_l \text{sg}(y_l)}$$

$$\text{Soit } b_{ij} \leq \text{Max}_{i \in I_j} [\sum_{k \in I_i} |a_{kl}(\cdot)|]$$

et $\text{Max}_{y \in E_v} b_{ij} = m_{ij} \leq \text{Max}_{i \in I_j} \left(\sum_{k \in I_i} |a_{ki}(\cdot)| \right)$.

Si on prend y tel que :

$$\text{sg}(y_k) = \text{sg}(a_{ki}(\cdot)) \quad \forall k \text{ et } y > 0 \quad \forall i, \text{ donc :}$$

$$m_{ij} = \text{Max}_{i \in I_j} \left(\sum_{k \in I_i} |a_{ki}(\cdot)| \right).$$

2°) $i = j$:

$$b_{ii} = \frac{\sum_{k \in I_i} \text{sg}(y_k) \sum_{l \in I_i} a_{kl}(\cdot) y_l}{\sum_{l \in I_i} |y_l|} = \frac{N}{D}$$

Et en développant N , il vient si $I_i = \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} N = & \text{sg } y_1 [a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n] \\ & + \text{sg } y_2 [a_{21} y_1 + \dots + a_{2n} y_n] \\ & + \dots \\ & + \text{sg } y_n [a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = & a_{11} |y_1| + a_{12} y_2 \text{sg } y_1 + \dots + a_{1n} y_n \text{sg } y_1 \\ & + a_{21} y_1 \text{sg } y_2 + a_{22} |y_2| + \dots + a_{2n} y_n \text{sg } y_2 \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$+ a_{n1} y_1 \operatorname{sg} y_n + a_{n2} y_2 \operatorname{sg} y_1 + \dots + a_{nn} |y_n|$$

En factorisant en colonne, il vient puisque $(\operatorname{sg})^2 = 1$.

$$\begin{aligned} N = & |y_1| [a_{11} + a_{21} \operatorname{sg} (y_2 y_1) + \dots + a_{n1} \operatorname{sg} (y_n y_1)] \\ & + |y_2| [a_{12} \operatorname{sg} (y_1 y_2) + a_{22} + \dots + a_{n2} \operatorname{sg} (y_n y_2)] \\ & + \dots \\ & + |y_n| [a_{1n} \operatorname{sg} (y_1 y_2) + a_{2n} \operatorname{sg} (y_2 y_1) + \dots + a_{nn}] \end{aligned}$$

$$N = \sum_{i \in I_i} \{ |y_i| [a_{ii}(\cdot) + \sum_{j \neq i} a_{ji}(\cdot) \operatorname{sg} (y_i y_j)] \}.$$

$$N \leq \left(\sum_{i \in I_i} |y_i| \right) \times \{ \mathbf{Max}_{i \in I_i} [a_{ii}(\cdot) + \sum_{j \neq i} |a_{ji}(\cdot)|] \}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'ou } \mathbf{Max}_{y \in E_V} b_{ij} = m_{ij} & \leq \mathbf{Max}_{i \in I_i} [a_{ii}(\cdot) + \sum_{j \neq i} |a_{ji}(\cdot)|] \\ & = a_{i_0 j_0}(\cdot) + \sum_{j_0 \neq i_0} |a_{j_0 i_0}(\cdot)| \end{aligned}$$

Montrons qu'il existe bien un vecteur y pour lequel on a l'égalité.

Prenons $y_i = 0$ si $i \neq i_0$, $i \in I_i$.

$$\operatorname{sg} y_{i_0} \operatorname{sg} y_i = \operatorname{sg} (a_{j_0 i_0}(\cdot)).$$

Nous avons alors :

$$\frac{N}{D} = \frac{\sum_{i \in I_i} |y_i| \left[a_{ii}(\cdot) + \sum_{j \neq i} a_{ji}(\cdot) \operatorname{sg}(y_j y_i) \right]}{\sum_{i \in I_i} |y_i|}$$

$$\frac{N}{D} = \frac{|y_{i_0}|}{|y_{i_0}|} \cdot \left[a_{i_0 i_0}(\cdot) + \sum_{j \neq i_0} a_{j i_0}(\cdot) \operatorname{sg}(a_{j i_0}(\cdot)) \right]$$

On a ainsi :

$$m_{ij} = \mathbf{Max}_{i \in I_i} \left\{ a_{ij}(\cdot) \quad \sum_{k \in I_i; j \neq i} a_{ji}(\cdot) \mid \right\}.$$

ANNEXE n° 4 : THEOREME DE FROBENIUS.

Soit une matrice $A[t,x]$ d'ordre n possédant $n-1$ lignes d'éléments constants. Le vecteur propre relatif à une valeur propre donnée $\lambda = \lambda_0$ est nécessairement de direction fixe puisque $n-1$ relations suffisent à le déterminer.

Notons :

$$A[t,x] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1}^* & a_{n2}^* & \dots & a_{n,n}^* \end{bmatrix}$$

Dans cette présentation les éléments non constants de la matrice sont rangés dans la dernière ligne.

Si v_λ présente le vecteur propre de composantes α_i ($i = 1, \dots, n$) relatif à la valeur propre λ de la matrice $A[t,x]$, il vient :

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = -\alpha_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

Lorsque la matrice $A[t,x]$ est à éléments non diagonaux non négatifs et admet une valeur propre de plus grande partie réelle négative, la matrice $A_1[\lambda]$:

$$A_1[\lambda] = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} - \lambda \end{bmatrix}$$

est l'opposée d'une M-matrice, il en résulte que l'inverse de $-A[\lambda]$ existe et est à éléments non négatifs. Il vient alors :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \alpha_n \begin{bmatrix} -A_1[\lambda] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions le vecteur propre v_λ admet des composantes toutes de même signe et correspond à la valeur propre de plus grande partie réelle. Si lors d'une évolution particulière des coefficients a_{ni}^* , la valeur propre maximale λ reste constante et négative. Alors le vecteur propre v_λ reste de direction fixe.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] R. BOUDAREL, J. DELMAS et P. GUICHET.
Commande optimale des processus. Tome n° 1. Concepts fondamentaux de l'automatique.
DUNOD, PARIS, 1967.
- [2] J.P RICHARD.
Définition d'invariants polynomiaux adaptés à la modélisation et à l'étude des systèmes non-linéaires et non-stationnaires.
Thèse de Doctorat ès Science, Lille, 1984.
- [3] F. ROTELLA.
Détermination de nouvelles représentations d'état adaptées à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non-linéaires.
Thèse de Docteur Ingénieur, Lille, 1983.
- [4] M. A. MUHANDÉS.
Logiciel Interactif pour la Modélisation et l'Analyse des systèmes non linéaires.
Thèse de Docteur Ingénieur, Lille, 1987.
- [5] M. BENREJEB.
Sur la synchronisation des systèmes continus non-linéaires en régime forcé.
Thèse de Docteur Ingénieur, Lille, 1976.
- [6] M. BENREJEB.
Sur l'analyse et la synthèse des processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés.
Thèse de Doctorat ès Science, Lille, 1980.
- [7] M. BENREJEB, P. BORNE et F. LAURENT.
Sur une application de la représentation en flèche à l'analyse des processus.
RAIRO Sys. Ana. & Con., Vol. 16, n° 2, p : 133 - 146, 1982.
- [8] A. M. LIAPOUNOV.
Problème général de la stabilité du mouvement.
Ann. Fac. Sci., TOULOUSE, Vol. 9, p : 203 - 447, 1907.

- [9] W. HAHN.
Theory and application of the Liapunov's direct method.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1963.
- [10] Lj. T GRUJIC' .
Novel development of Lyapunov stability of motion.
Int. J. Control. Vol. 22, n° 4, pp : 525 - 549, 1975.
- [11] N. ROUCHE et J. MAWHIN.
Equations différentielles ordinaires. Tome II : Stabilité et solutions périodiques.
Maçon et Cie, 1973.
- [12] V. M. POPOV.
L'hyperstabilité des systèmes automatiques.
DUNOD, PARIS, 1973, (Traduit d'un ouvrage publié en 1966).
- [13] Lj. T GRUJIC'.
Uniform practical and finite-time stability of large-scale systems.
Int. J. Control. Vol. 6, n° 2, pp : 181 - 195, 1975.
- [14] Lj.T GRUJIC' and B. PORTER.
Continuous-time tracking systems incorporating Lurie plants with single nonlinearities.
Int. J. Syst. Sc., Vol. 11, n° 2, pp : 177 - 189, 1980.
- [15] P. BORNE, F. LAURENT et C. MAIZIERES.
Sur la stabilité dynamique des processus multivariables non-linéaires.
Aut. Cont. Theory and appli., Vol. 6, n° 2, 1978.
- [16] J. CH. GILLE, P. DECAULNE et M. PELEGRIN.
Systèmes asservis non linéaires.
DUNOD, 1988.
- [17] N. BAUTIN.
Comportement des systèmes dynamiques au voisinage des limites du domaine de la stabilité (Povedenie

dinamiceskikh sistem vblizi granic oblasti ustojcivosti).
GOSTEKHIZDAT, MOSCOU, 164 p, 1949.

- [18] W. HAHN.
Stability of motion.
Springer-Verlag, New York, Inc., 1967.
- [19] E. A. BARBASIN and N. N. KRASOVSKI.
On the existence of Lyapunov functions in the
case of asymptotic stability in the large.
Prikladnaja Matematika i Mekhanika 18, pp : 345 - 350,
MOSCOU 1954.
- [20] F. ROBERT.
Etude et utilisation des normes vectorielles en
analyse numérique linéaire.
Thèse de Doctorat ès Science, Grenoble, 1965.
- [21] P. BORNE, J. C. GENTINA et F. LAURENT.
Stabilité des systèmes non-linéaires continus de grande
dimension.
R.A.I.R.O, J. 3, pp : 67 - 77, 1972.
- [22] P. BORNE, J. C. GENTINA et F. LAURENT.
Sur la stabilité des systèmes échantillonnés non-linéaires.
R.A.I.R.O, J. 2, pp : 96 - 105, 1972.
- [23] Lj. T GRUJIC', J. C. GENTINA and P. BORNE.
General aggregation of large-scale systems by vector
Lyapunov functions and vector norms.
Int. Journal of Control, Vol. 24, pp : 529 - 550, 1976.
- [24] J. C. GENTINA.
Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes
continus non-linéaires de grande dimension.
Thèse de Doctorat ès Science, Lille, 1976.
- [25] P. BORNE.
Contribution à l'analyse des systèmes discrets
non-linéaires de grande dimension : Application aux
systèmes interconnectés.

Thèse de Doctorat ès Science, Lille, 1976.

- [26] P. BORNE.
Nonlinear systems stability : Vector Norm Approach.
Systems and Control Encyclopedia PERGAMON Press, Vol. 5,
pp : 3402 - 3406, 1987.
- [27] Lj. T. GRUJIC'.
Comparison systems.
Concise Encyclopedia of Modelling and Simulation
PERGAMON Press 1990.
- [28] H.H. ROSENBROCK.
A Lyapunov function for some naturally occurring linear
homogeneous time-dependent equations.
Automatica, Pergamon Press, Vol. 1, pp : 97 - 109, 1963.
- [29] I. W. SANDBERG.
Some theorems on the dynamic response of nonlinear
transistor networks.
Bell. Syst. Teck. J. 48, pp : 35 - 54, 1969.
- [30] Lj. T GRUJIC', A. A. MARTYNUK and R. PAVELLA.
Stability of large-scale systems under structural and
singular perturbations.
Lectures and notes in Control and Information Sciences,
92, SPRINGER - VERLAG, 1987.
- [31] F. R. GANTMACHER.
Théorie des matrices. Tome II.
DUNOD, PARIS, Chap 13, pp : 69 - 70, 1966.
- [32] T. WAZEWSKI.
Systèmes des équations et des inégalités
différentielles ordinaires aux deuxièmes membres
monotones et leurs applications.
Ann. Soc. Pol. Math., 23, pp : 112 - 166, 1950.
- [33] KOTELYANSKI.
Sur certaines propriétés des matrices à éléments positifs.
Math. Sci., Vol. 31, pp : 497 - 505, 1952.

- [34] PIERRE BORNE, JEAN PIERRE RICHARD and M'HAMED TAHIRI.
Estimation of Attractive Domains for Locally Stable or Unstable Systems.
Syst. Analysis Model. and Simulation. Akademic - Verlag, BERLIN 1990.
- [35] Lj. T. GRUJIC' and M. R. PAVELLA.
Asymptotic stability of large scale systems with application to power systems. Part. 1 : Domain estimation.
ELECTRICAL POWER & ENERGY, Vol.1, n° 1, 1979.
- [36] Lj. T GRUJIC' et C. BURGAT.
Estimation E_i du domaine de stabilité interconnecté de comparaison du type Lotka-Volterra.
C.R. Acad. Sc. PARIS, T 288, 23 Avril 1979.
- [37] A. VANNELLI and M. VIDYASAGAR.
Maximal Lyapunov Functions and Domain of Attraction for Autonomous Nonlinear Systems.
Automatica, Vol. 21, n° 1, pp : 69 - 80, 1985.
- [38] Lj. T GRUJIC'.
Koncepti domena stabilnosti.
U.D.K 681, 5, 037, 4.
AUTOMATIKA 26, 1- 2, pp : 5 - 10, 1985.
- [39] S. WEGRZYN, J. C. Gille, O. PALUSINSKI and P. VIDAL.
The stability domain with respect to initial conditions.
Congrès de l'I.F.A.C. à Londres, (session 23, paper 23.F), 1966.
- [40] F. LAURENT, A. EL MOUDNI, J. P. RICHARD and P. BORNE.
On initial stability conditions for nonlinear large-scale systems.
4° Cong. INFORMA. y AUTOMA., MADRID, pp : 144 - 151, 79.
- [41] G. D. BIRKHOFF.
Dynamical Systems.
Nouvelle édition 1966. Amer, Math. Soc., Providence 1927.

- [42] N. P. BHATIA et G. P. SZEGÖ.
Stability Theory of Dynamical Systems.
SPRINGER-VERLAG. BERLIN, 1970.
- [43] TARO URA.
Sur les courbes définies par les équations différentielles
dans l'espace à m dimensions.
Ann. Ec. Norm., 3, LXX- Fasc. 4, pp : 287 - 360, 1953.
- [44] H. POINCARÉ.
Mémoire sur les courbes définies par une
équation différentielle.
Oeuvres PARIS : Gauthier-Villars 1929. pp : 44 - 65, 1929.
- [45] I. BENDIXSON.
Sur les courbes définies par des équations différentielles.
Acta Mathematica, Vol. 24, pp : 1 - 88, 1901.
- [46] TARO URA.
On the Flow Outside a Closed Invariant Set : Stability,
Relative Stability and Saddle Sets.
Contributions to Differential Equations, Vol. 3., n° 3, New
York: Wiley, pp : 249 - 294, 1964.
- [47] J. AUSLANDER, N. P. BHATIA and P. SEIBERT.
Attractors in dynamical systems.
Bol. Soc. Math. Mexicana 2, pp : 55 - 66, 1964.
- [48] TARO URA.
Sur le courant extérieur à une région invariante :
Prolongements d'une caractéristique et l'ordre de stabilité.
Funk. Ekv., Vol. 2, pp : 143 - 200, 1959.
- [49] A. N. MICHEL, J. A. FARRELL and W. POROD.
Qualitative analysis of neural networks.
I.M.A.C.S, PARIS, 1988.
- [50] PIERRE BORNE and M'HAMED TAHIRI.
Estimation of the attractive domain and of its influence
area for a locally instable system.
COMPUTING AND COMPUTERS, pp : 221 - 224, 1989.

- [51] E. F. BECKENBACH and R. BELLMAN.
Inequalities.
Ergebnisse der Math., Springer, Berlin, 1961.
- [52] R. BELLMAN.
Vector Lyapunov Functions.
J.SIAM Control. Ser. A, Vol. 1, N° 1. Printed in U.S.A., 1962.
- [53] M'HAMED TAHIRI and PIERRE BORNE.
Stability analysis of continuous systems described by interval matrices.
13th IMACS World Congress - Dublin, Ireland, 22-26 July, 1991 (A paraître).
- [54] S. BIALAS.
A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices.
Int. J. Cont., Vol. 37, N° 4, pp : 717 - 722, 1983.
- [55] W. C. KARL, J. P. GRESCHAK and G. C. VERGHESE.
Comments on " A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices ".
Int. J., Contr, Vol. 39, N° 4, pp : 849 - 851, 1984.
- [56] B. R. BARMISCH and C.V. HOLLOT.
Counter-example to a recent result on the stability of interval matrices by S. BIALAS.
Int. J., Contr, Vol. 39, N° 5, pp : 1103 - 1104, 1984.
- [57] J. A. HEINEN.
Sufficient conditions for stability of interval matrices.
Int. J. Cont., Vol. 39, N° 6, pp : 1323 - 1328, 1984.
- [58] XU DAOYI.
Simple criteria for stability of interval matrices.
Int. J. Cont., Vol. 41, N° 1, pp : 289 - 295, 1985.
- [59] R. K. YEDAVALLI.
Stability analysis of interval matrices : another sufficient condition.

- Int. J. Cont., Vol. 43, N° 3, pp : 767 - 772, 1986.
- [60] LIAO XIAO XIN.
Stability of interval matrices.
Int. J. Cont., Vol. 45, N° 1, pp : 203 - 210, 1987.
- [61] CHUNG-LI JIANG.
Another sufficient condition for the stability of interval matrices.
Int. J. Cont., Vol. 47, N° 1, pp : 181 - 186, 1988.
- [62] S. H LIN, Y. T. JUANG, I. K. FONG, C. F. HSU & T. S. KUO .
Dynamic interval systems analysis and design.
Int. J. Cont., Vol. 48, N° 5, pp : 1807 - 1817, 1988.
- [63] JYH-HORNG, CHOU & ING RONG HORNG.
On sufficient condition for the stability of interval matrices.
The Franklin Institute Pergamon Press plc. Vol. 326, N° 1, pp : 19 - 25.
- [64] R. E. MOORE.
Interval Analysis.
Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1966.
- [65] J. P RICHARD.
Sur la stabilité locale des systèmes continus de grande dimension.
Rapport de D.E.A, Lille, 1979.



Résumé.

Le travail présenté constitue une contribution à l'analyse des processus dynamiques complexes. Il a pour but de simplifier la détermination du domaine d'attraction pour un équilibre localement stable, ou bien de l'attracteur ainsi que de son domaine d'attraction pour un système localement instable par exemple.

Les résultats donnés dans cette thèse s'attachent à proposer des conditions suffisantes de stabilité, robustes, c'est à dire peu sensibles aux variations des paramètres du système, et applicables même lorsque le modèle du processus est mal défini, bruité, décrit par des inégalités différentielles ou par des matrices intervalles.

Les outils mis en oeuvre sont d'une part les normes vectorielles, d'autre part la notion de système de comparaison. Nous définissons ainsi les Systèmes Majorants Non Autonomes (SMNA) qui sont une généralisation des Systèmes Majorants (SM) existant dans la littérature.

Mots-clés :

Attracteur.

Domaine d'attraction.

Inégalités différentielles.

Matrices intervalles.

Stabilité.

Système bruité.

Système de comparaison.

Systèmes non-linéaires.