

THESE

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS**

pour obtenir le grade de

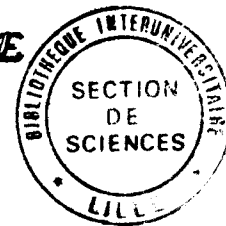
**Docteur en
Productique : Automatique et Informatique Industrielle**

par

Allal SAADANE

Mastère IDN

Maître E.E.A



**Réduction des Systèmes Linéaires Périodiques
Application à la Commande**

Soutenue le 12 Octobre 1990 devant le Jury d'examen :

<i>M. P. Borne</i>	<i>Président, Rapporteur</i>
<i>M. A. El Moudni</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>M. F. Rotella</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>M. J.P. Richard</i>	<i>Examineur</i>
<i>M. M. Staroswiecki</i>	<i>Examineur</i>
<i>M. S. Tzafestas</i>	<i>Examineur</i>

Directeur de Thèse : J. P. Richard

A mon frère Hassan

A mes Parents

A Paul et Marie-Dominique Somon

Avant propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'IDN, sous la direction de Monsieur J.P. Richard.

Nous sommes particulièrement reconnaissant envers Monsieur J.P. Richard, Professeur à l'IDN, Directeur de Recherche. Son extrême compétence, le temps et l'intérêt qu'il a bien voulu nous consacrer et l'amitié qu'il nous a toujours témoignée nous ont permis de surmonter les périodes de difficulté et d'achever dans les meilleures conditions les travaux entrepris.

Nous remercions très vivement Monsieur le Professeur P. Borne, Directeur du LAII et responsable Scientifique de l'IDN, pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant d'être Président du jury de thèse.

Tous nos remerciements vont à Monsieur A. El Moudni, Professeur à l'Université Hassan II de Casablanca, ainsi qu'à Monsieur F. Rotella, Maître de Conférence à l'IDN, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à notre travail et pour avoir accepté de le juger en tant que rapporteurs.

Nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à MM. Staroswiecki, Professeur à l'EUDIL et S.G. Tzafestas, Professeur à l'Université d'Athènes, pour l'honneur qu'ils ont bien voulu nous accorder en acceptant de participer, comme examinateurs, au jury de thèse.

Nous tenons enfin à témoigner notre profonde amitié à tous les Chercheurs du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'IDN, pour la sympathie et l'esprit d'équipe qu'ils savent entretenir au sein du Laboratoire.

Sommaire

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I

Introduction aux systèmes continus linéaires non stationnaires

I. Définition

II. Transformations des systèmes LNS

II.1. Transformations algébriques

II.2. Propriétés des transformations algébriques

- *Equivalence algébrique*

- *Equivalence topologique*

II.3. Similitude des propriétés des systèmes associés par une transformation algébrique

III. Résolution analytique des systèmes LNS

III.1. Résolution directe : définition et classe de systèmes directement solubles.

- *Classe C : systèmes commutatifs*

- *Classe A_1*

- *Classe A_h*

- *Classe Δ : matrice d'état triangulaire*

- *Théorème 1 : solubilité des systèmes $[A_1 \cup A_h \cup C]$*

III.2. Résolution indirecte

- *Définition*

- *Théorème 2 : solubilité de tout système LNS par le biais d'une transformation algébrique*

III.3. Exemples illustratifs

IV. Stabilité des systèmes LNS

IV.1. Description d'un système par ses entrées/sorties

- *Système relaxé*

- *Système BIBO*

IV.2. Critères de stabilité vis-à-vis des entrées/sorties

IV.3. Description d'un système par ses variables (d'état) internes

IV.4. Stabilité interne

IV.4.1. Définitions

IV.4.2. Critères de stabilité interne

V. Commandabilité des systèmes LNS

V.1. Définitions

V.2. Rappels de théorèmes généraux

V.2.1. Indépendance linéaire d'un ensemble de fonctions

V.2.2. théorèmes généraux

V.3. Critères de commandabilité des systèmes LNS

- *Condition nécessaire et suffisante : Grammien de commandabilité*

- *Condition suffisante : classe particulière.*

Note sur l'observabilité des systèmes LNS

Conclusion

CHAPITRE II

Systèmes linéaires à coefficients périodique

Introduction

I. Définition

II. Résolution analytique

II.1. Résolution directe

II.2. Résolution indirecte : transformation de **Floquet**

III. Stabilité

- Stabilité interne

- Equivalence de la stabilité d'un système T-périodique et de son modèle réduit

IV. Commandabilité

IV.1. Commandabilité sur un intervalle ou/et à un instant fixé

IV.2. Commandabilité (à tout instant)

- *Théorème de Brunovski*

- Théorème de **Shaiman-Kabamba**

- Grammien de commandabilité généralisé: Théorème de **Al_Rahmani-Franklin**

IV.3. Classe particulière

- Théorème de **Yoshii**

V. Sur une méthode originale de détermination de la transformation de Floquet-Lyapunov

- Position du problème

V.1. Calcul du modèle réduit

V.1.1. Méthode analytique : réponse impulsionnelle

V.1.2. Méthode numérique

V.2. Rappels sur le calcul tensoriel

V.3. Algorithme de calcul d'une transformation de Floquet

V.3.1. Principe

V.3.2. Mise en équations

V.4. Calcul de l'inverse de la transformation de Floquet

V.4.1. Première méthode

V.4.2. Deuxième méthode

V.5. Validité de la méthode : exemples d'application

V.5.1. Exemple 1

V.5.2. Exemple 2

V.5.3. Exemple 3

Conclusion

CHAPITRE III

Commande des systèmes linéaires T-périodiques

Introduction

I. Rappel des méthodes de synthèse par feedback périodique continu

I.1. Théorème d'existence de Brunovski

I.2. Méthode de Meerkov

I.3. Méthode de Kern : synthèse par retour de sortie

- *Principe*

- *Limites*

II. Sur une nouvelle méthode

- II.1. Formulation du problème
- II.2. Approche d'une solution générale
- II.3. Solution particulière : Proposition 1

III. Synthèse par SSPH (Sampled State Periodic Hold)

- III.1. Principe d'une commande **SSPH**
- III.2. méthode de **Kabamba** : solution continue par morceaux.
 - III.2.1. Principe
 - III.2.2. Exemple
- III.3. Méthode de **Al_Rahmani-Franklin** : solution constante par morceaux
 - III.3.1. Principe
 - III.3.2. Exemple
- III.4. **Généralisation aux systèmes T-périodiques purs**
 - III.4.1. Problème de synthèse directe
 - III.4.2. Synthèse sur le modèle réduit
 - *Proposition 2*
 - *Proposition 3*
 - *Proposition 4*
 - III.4.3. Exemple

IV. Synthèse par feedback impulsif : méthode de Yoshii

- IV.1. Définition
- IV.2. Principe
- IV.3. Théorème

CHAPITRE IV

Exemples d'application

I. Introduction

II. Exemple 1

- II.1. Calcul du modèle réduit

II.2. Calcul de $P(t)$

II.3. Commandabilité

II.4. Placement de pôles

II.4.1. Feedback continu

II.4.2. Commande SSPH : *réponse pile*

- *Feedback continu par morceaux*

- *Feedback constant par morceaux*

III. Exemple 2 : Circuit RLC à capacité variable

III.1. Transformation de l'équation d'état

III.2. Calcul du modèle réduit

III.3. Commandabilité

III.4. Placement de pôles

III.4.1. Feedback continu

III.4.2. Commande SSPH : *réponse pile*

- *Feedback continu par morceaux*

- *Feedback constant par morceaux*

IV. Exemple 3 : stabilisation d'un satellite

IV.1. Méthode de **Kern**

IV.2. Méthode de **Yoshii**

IV.3. Nouvelle méthode

V. Considérations sur la commande en temps minimal

V.1. Position du problème

V.2. Solution générale

V.3. Sur le problème de détermination des conditions initiales

CONCLUSION GENERALE

ANNEXE

BIBLIOGRAPHIE

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

La conception d'une commande en temps réel d'un système, se heurte souvent à une difficulté d'analyse qui s'accroît avec la dimension et la complexité des processus mis en jeu.

Différentes études ont été consacrées à la réduction de dimensions et à la simplification de modèles visant, en particulier, à séparer les dynamiques d'un processus, ou à réduire sa complexité structurelle liée à la présence de composants non linéaires ou non stationnaires.

Ce mémoire traite essentiellement des systèmes continus et linéaires, dont les paramètres non stationnaires obéissent à des lois d'évolution de type périodique. Contrairement au cas linéaire stationnaire, la résolution analytique de tels systèmes est impossible dans le cas général. Nous entendons par "résolution analytique" la détermination d'une expression littérale (en fonction du temps et des conditions initiales), par opposition à une résolution numérique.

Notre travail consiste à développer une méthode de résolution analytique (approchée ou exacte) des équations différentielles à coefficients périodiques qui régissent cette classe de systèmes. Le but principal est celui d'étendre les méthodes d'analyse et de synthèse appliquées usuellement aux systèmes linéaire à coefficients constants.

Au premier chapitre, nous abordons les différentes définitions et notions relatives aux processus linéaire à coefficients variables de manière générale. Nous traiterons en particulier du problème de solubilité posé par ces systèmes ainsi que des moyens possibles d'y répondre.

Le deuxième chapitre est consacré aux systèmes linéaires T-périodiques, cas particulier intéressant des processus linéaires non stationnaires, tant de point de vue théorique que pratique. Après un rappel des différentes méthodes d'investigation et des principaux résultats relatifs à la stabilité et à la commandabilité de tels

processus, nous développons un algorithme original de calcul d'une transformation de Floquet-Lyapunov qui constituera un outil appréciable pour la résolution intégrale des processus T-périodiques. La mise en œuvre de cet algorithme est simplifiée par l'utilisation des produits tensoriels. Sa validité est testée sur plusieurs exemples.

Au troisième chapitre, nous traitons de la synthèse de commande des systèmes linéaires T-périodiques. Il est ainsi répondu, en particulier, à quelques problèmes qui étaient restés posés par certaines méthodes de synthèse par feedback à gain périodique. Nous développons, de plus, une nouvelle approche qui permet dans de nombreux cas de déterminer explicitement ce gain.

Le chapitre quatre sera consacré essentiellement à des exemples d'application pour comparer et illustrer l'intérêt des différentes méthodes de synthèse.

Chapitre I

CHAPITRE I

INTRODUCTION AUX SYSTEMES CONTINUS LINEAIRES NON STATIONNAIRES

L'analyse d'un système peut se décomposer de manière générale en deux parties : analyse quantitative et analyse qualitative. Dans une étude quantitative, on s'intéresse à la réponse exacte du système pour des entrées et des conditions initiales données. Pour une étude qualitative, on s'intéresse aux propriétés générales du système, en particulier, la stabilité, la commandabilité et/ou l'observabilité.

Nous exposons ici l'essentiel des définitions et des méthodes d'investigation qui ont été élaborées pour l'étude des systèmes linéaires à coefficients variables en fonction du temps, dont une classe remarquable, tant de point vue théorique que pratique, est constituée par les processus à coefficients périodiques que nous verrons au chapitre deux.

I. DEFINITION

Un système physique est dit continu, linéaire et non stationnaire s'il est décrit par des équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients variables en fonction du temps.

Modélisé dans l'espace d'état, un tel processus est régi par une équation d'état de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = A(t).x(t) + B(t).u(t) \\ s(t) = C(t).x(t) \end{cases} \quad (I.1)$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^q$ est le vecteur d'état; $u(t) \in \mathcal{R}^p$, est le vecteur de commande ou d'entrée; $s(t) \in \mathcal{R}^m$ est la sortie; $A(t) \in \mathcal{R}^{q \times q}$, matrice carrée variable en fonction du temps, est la matrice d'état (ou

d'évolution); $B(t) \in \mathcal{R}^{q \times p}$, également variable en fonction du temps, est la matrice d'entrée ou de commande et $C(t) \in \mathcal{R}^{m \times q}$ est la matrice de sortie ou d'observation. La solution d'un tel système sera notée $x(t) = \phi(t; t_0, x_0, u)$.

Pour un système dynamique donné, les matrices $A(t)$ et $B(t)$ peuvent prendre des formes différentes selon le choix des variables d'état.

Par la suite, nous résumerons quelquefois (I.1) à sa matrice d'évolution A (système A) ou à la paire (A, B) . De même, nous désignerons par *système LNS*, un système linéaire non stationnaire.

II. TRANSFORMATION DES SYSTEMES LNS

II.1. TRANSFORMATIONS ALGÈBRIQUES : définition

Une transformation algébrique $T(t)$ (appelée aussi réduction dans la littérature) est un changement de variable portant sur le vecteur état. Ce concept de similitude cinématique a son origine dans les travaux de Floquet [1883] ou de Lyapunov [1892] et a été développé par Markus [1955] et Langenhop [1960].

II.2. PROPRIÉTÉS DES TRANSFORMATIONS ALGÈBRIQUES

- *Equivalence algébrique*

Une représentation $\bar{A}(t)$ est algébriquement équivalente à $A(t)$ s'il existe une matrice $T(t)$:

- continue, différentiable
- non singulière $\forall t$ ($\det T(t) \neq 0$)

telle que, par le changement de variable :

$$x(t) = T(t) \cdot \bar{x}(t)$$

le système :

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t)$$

se ramène au système :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}(t) \cdot \bar{x}(t)$$

- **Equivalence topologique**

Si, en plus des conditions précédentes, T , T^{-1} et \dot{T} sont continues et bornées sur \mathcal{R}^+ (respectivement sur \mathcal{R}) alors $\bar{A}(t)$ est topologiquement (respectivement complètement topologiquement) équivalente à $A(t)$ au sens algébrique. (d'après Shokoohi, Silverman et Van Dooren, 1983). Dans la littérature, cette transformation $T(t)$ est usuellement appelée *transformation de Lyapunov*.

Après transformation, la relation entre $\bar{A}(t)$ et $A(t)$ s'écrit :

$$\bar{A}(t) = T^{-1}(t) \cdot A(t) \cdot T(t) - T^{-1}(t) \cdot \dot{T}(t)$$

et il est facile de vérifier que l'équivalence algébrique et l'équivalence topologique sont effectivement des relations d'équivalence.

Dans le cas où $T(t)$ est une matrice constante, la relation d'équivalence est appelée équivalence statique, cas particulier de l'équivalence cinématique .

Notons, par ailleurs, que la variation de $T(t)$ en fonction du temps signifie que la nouvelle base de coordonnées est en mouvement par rapport aux coordonnées initiales.

II.3. SIMILITUDE DES PROPRIÉTÉS DES SYSTEMES ASSOCIÉS PAR UNE TRANSFORMATION ALGÈBRE

Sur le plan de la similitude des propriétés des systèmes associés par la transformation $T(t)$, il a été montré [Harris et Miles, 1980; Shokoohi et Al, 1983] que :

- les propriétés des entrées/sorties des deux systèmes sont invariantes par équivalence algébrique. Cependant, les propriétés internes changent, par exemple la stabilité et le caractère borné des coefficients des matrices.
- avec l'équivalence topologique, la stabilité interne (et le caractère borné des matrices), les exposants caractéristiques et leur multiplicité sont invariants (le terme exposant

caractéristique, spécifique des systèmes périodiques, sera défini au chapitre suivant).

Par ailleurs, dans une étude d'analyse (stabilité par exemple) ou de synthèse de commande en temps réel, il arrive que, même si l'on dispose d'une transformation $T(t)$, permettant la résolution analytique de l'équation d'état d'un système LNS, cette solution elle même n'en reste pas moins difficilement exploitable.

Dans ce sens, il devient donc intéressant de chercher une transformation $T(t)$ assurant l'équivalence topologique des deux systèmes associés (A et \bar{A}), d'une part, et d'autre part, $T(t)$ doit être telle que l'approche considérée sur le système initial A , devienne plus simple à traiter sur le système associé, représenté par $\bar{A}(t)$. Le meilleur des cas est celui où \bar{A} est une matrice constante et T une transformation de Lyapunov.

Cette manière de voir, est certes plus contraignante, mais elle offre l'avantage de ramener l'étude d'un processus linéaire non stationnaire à celle d'un modèle linéaire stationnaire, comme nous le montrerons au chapitre trois, dans le cas où $A(t)$ est périodique en fonction du temps.

III. RESOLUTION ANALYTIQUE DES SYSTEMES LNS.

Il a été montré [Zadeh et Desoer,1963], [Chen,1970], que la solution intégrale de (I.1) est :

$$x(t) = \phi(t, t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) d\tau \quad (I.2)$$

où $\phi(t, t_0)$ désigne la matrice de transition du système homogène :

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) \quad (I.3)$$

c'est-à-dire que $\phi(t, t_0)$, (appelée également matrice fondamentale ou

matrice intégrale), satisfait les relations :

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t, t_0) = A(t) \cdot \phi(t, t_0) \\ \phi(t_0, t_0) = I_q \end{cases}$$

I_q étant la matrice identité.

Selon la relation (I.2), il est clair que la matrice de transition $\phi(t, t_0)$ est la clef de la solution de l'équation (I.1).

III.1. RÉOLUTION DIRECTE

Définition

Le système (I.1) est dit directement soluble, si pour une matrice $A(t)$ donnée, la matrice de transition $\phi(t, t_0)$ correspondante, peut être déterminée explicitement à partir de (I.3).

Dans ce sens, Min-Yen Wu [1980], définit trois classes de systèmes LNS :

Classe A_1 :

Un système $A(t) \in A_1$, signifie que $A(t)$ est dérivable et qu'il existe une matrice constante A_1 telle que :

$$\dot{A}(t) = \frac{dA(t)}{dt} = A_1 \cdot A(t) - A(t) \cdot A_1 \quad \forall t$$

Classe A_h :

Un système $A(t) \in A_h$, signifie que $A(t)$ est dérivable et qu'il existe une matrice A_1 constante et une fonction scalaire $h(t)$ non nulle $\forall t$ telles que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{A(t)}{h(t)} \right) = A_1 \cdot A(t) - A(t) \cdot A_1 \quad \forall t$$

Classe C :

Un système $A(t) \in C$, signifie que $A(t)$ vérifie la propriété de commutativité :

$$A(t) \cdot \left[\int_{t_0}^t A(\tau) \cdot d\tau \right] = \left[\int_{t_0}^t A(\tau) \cdot d\tau \right] \cdot A(t)$$

C'est par exemple le cas des matrices $A(t)=A=\text{constante}$.

Dans le même article, Wu a montré les deux théorèmes suivants :

Théorème 1:

$$\text{Si } A(t) \in [A_1 \cup A_h \cup C]$$

alors le système (I.3) correspondant, est directement soluble.

En effet, si $A(t) \in A_1$ alors la matrice de transition correspondante s'écrit:

$$\phi(t, t_0) = \exp(A_1 t) \cdot \exp[A_2(t-t_0)] \cdot \exp(-A_1 t_0) \quad \forall t, t_0$$

où A_2 est une matrice constante telle que :

$$A_2 = \exp(-A_1 t_0) [A(t_0) - A_1] \exp(A_1 t_0)$$

Si $A(t) \in A_h$, $\phi(t, t_0)$ s'écrit alors :

$$\phi(t, t_0) = \exp[A_1 \cdot g(t, t_0)] \exp[A_2 \cdot g(t, t_0)] \quad \forall t, t_0$$

où $g(t, t_0)$ est défini par :

$$g(t, t_0) = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau$$

et A_2 est une matrice constante telle que :

$$A_2 = A_h(t_0) - A_1$$

Enfin si la propriété de commutativité est vérifiée la matrice de transition s'écrit aisément :

$$\phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right]$$

A ces trois classes il convient d'ajouter une quatrième que nous appellerons classe Δ , il s'agit des matrices triangulaires (inférieures ou supérieures)

III.2. RÉOLUTION INDIRECTE

Définition

Nous appellerons résolution indirecte toute résolution par un changement de variable portant sur le vecteur état.

Théorème 2:

- a) tout système $A(t)$ est soluble,
 b) tout système $A(t)$ peut être transformé en tout système $\bar{A}(t)$ désiré, moyennant une transformation algébrique $T(t)$ adéquate.

Cela signifie qu'il existe toujours un changement de variable :

$$x(t) = T(t) \cdot \bar{x}(t)$$

tel que le système (I.3) puisse être ramené au système :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}(t) \cdot \bar{x}(t)$$

où $\bar{A}(t)$ est soluble, de classe A_1 , A_h , C ou est égale à une matrice constante.

La relation entre les matrices de transition des systèmes A et \bar{A} s'écrit :

$$\bar{\phi}(t, t_0) = T^{-1}(t) \cdot \phi(t, t_0) \cdot T(t_0)$$

Malheureusement, en pratique il n'existe aucune méthode générale pour déterminer $T(t)$. De plus, $T(t)$ n'est pas nécessairement une transformation de Lyapunov.

III.3. EXEMPLES

Exemple 1

Considérons le système représenté par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -1 \\ 1 & \cos t \end{pmatrix} \quad (I.6)$$

Il est facile de vérifier que :

$$A(t) \cdot \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] = \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] \cdot A(t)$$

et donc que $A(t)$ est de classe C .

Maintenant, si l'on utilise le changement de variable :

$$x(t) = T(t) \cdot \bar{x}(t)$$

où :

$$T(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin t} & 0 \\ 0 & e^{\sin t} \end{pmatrix}$$

il vient :

$$\bar{A}(t) = T^{-1}(t)A(t)T(t) - \dot{T}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc \bar{A} est une matrice constante.

Si l'on prend :

$$T(t) = e^{\sin t} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

on obtient alors :

$$\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -e^t \\ e^{-t} & 1 \end{pmatrix}$$

et il est facile de vérifier que $\bar{A}(t)$ est de classe A_1 .

La matrice de transition de (I.6) est donnée par :

$$\phi(t,0) = e^{\sin t} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Exemple2

Considérons le système représenté par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(t^2-2) & 2t \end{pmatrix} \quad (\text{I.11})$$

Il est à noter que $A(t)$ n'appartient à aucune des classes définies précédemment. Cependant, avec la transformation :

$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

nous avons :

$$\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

dans ce cas $\bar{A}(t)$ est de classe C.

Si $T(t)$ est égale à :

$$T(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

cela conduit à la nouvelle matrice d'état :

$$\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui, étant constante, est évidemment soluble.

La matrice de transition de $A(t)$ dans (I.11) est donnée par la relation :

$$\phi(t,0) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ (t+1)e^t + (t-1)e^{-t} & (t+1)e^t - (t-1)e^{-t} \end{pmatrix}$$

IV. STABILITE DES SYSTEMES LNS

Le concept de stabilité tient une place importante dans toute analyse ou conception d'un système automatique, étant donné qu'un système instable est, le plus souvent, inutilisable.

On distingue deux aspects de la stabilité : la stabilité en termes d'entrées/sorties et la stabilité de l'état interne du système. Dans le premier cas de figure, on s'intéresse généralement à la stabilité pour des entrées bornées, en termes de description des entrées/sorties (le système est considéré comme une boîte noire). Dans le second cas, on étudie la stabilité interne d'un système en termes de description des variables d'état interne, où la notion d'état (ou de

point) d'équilibre est fondamentale. On définit alors la stabilité d'un point d'équilibre, et dans ce sens on distingue, en pratique, deux types de stabilité :

- stabilité simple au sens de Lyapunov,
- stabilité asymptotique

IV.1 DESCRIPTION D'UN SYSTEME PAR SES ENTRÉES/SORTIES

Nous considérons d'abord le cas des systèmes monovariables (une entrée, une sortie).

$u(t)$ et $s(t)$ désigneront respectivement l'entrée et la sortie à l'instant t .

Définitions [Chen, 1970]

Systeme relaxé

Nous appellerons système relaxé un processus dont les conditions initiales (internes) sont nulles.

Systeme BIBO

Un système relaxé est dit stable au sens des entrées bornées-sorties bornées (BIBO) si et seulement si pour toute entrée bornée, la sortie est bornée.

On sait que si les entrées/sorties d'un système initialement relaxé satisfont les propriétés d'homogénéité et d'additivité, et si le système est causal, alors l'entrée u et la sortie s sont reliées par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^t g(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad \forall t$$

où $g(t, \tau)$ est la réponse impulsionnelle du système, définie par la sortie s mesurée à l'instant t , due à une entrée impulsionnelle appliquée à l'instant τ .

Pour caractériser un système par ses entrées/sorties, on essaie généralement de répondre à la question suivante : si l'entrée possède certaines propriétés, sous quelles conditions la sortie possède-t-elle

les mêmes propriétés ? Par exemple si l'entrée est bornée c'est-à-dire :

$$|u(t)| \leq k_1 < \infty \quad \forall t$$

sous quelles conditions sur le système existe-t-il une constante k_2 telle que la sortie s vérifie :

$$|s(t)| \leq k_2 < \infty \quad \forall t$$

Il en est de même pour une entrée périodique, constante, etc...

Selon ces différentes propriétés, on définit différents types de stabilité. Pour les systèmes linéaires, c'est la stabilité entrée bornée-sortie bornée qui est communément la plus utilisée.

Nous rappelons que la description d'un système par ses entrées/sorties est applicable si celui-ci est initialement relaxé. Par conséquent, cette définition de la stabilité en terme d'entrées/sorties est applicable uniquement aux systèmes relaxés.

IV.2. CRITERES DE STABILITÉ VIS À VIS DES ENTRÉES/SORTIES

Théorème S.1

Un système monovariante relaxé décrit par

$$s(t) = \int_{-\infty}^t g(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

est stable au sens des entrées bornées-sorties bornées si et seulement s'il existe un nombre fini k tel que

$$\int_{-\infty}^t |g(t,\tau)d\tau| \leq k < \infty \quad \forall t$$

Considérons maintenant un système multivariable à p entrées et m sorties :

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_m(t) \end{bmatrix}$$

Il sera décrit par :

$$\mathbf{s}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

où $\mathbf{G}(t,\tau)$ est la matrice de réponse impulsionnelle (de dimensions $m \times p$) :

$$\mathbf{G}(t,\tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t,\tau) & \dots & g_{1p}(t,\tau) \\ \vdots & g_{jj}(t,\tau) & \vdots \\ g_{m1}(t,\tau) & \dots & g_{mp}(t,\tau) \end{bmatrix}$$

$g_{ij}(t,\tau)$ est la réponse impulsionnelle entre la $j^{\text{ème}}$ entrée et la $i^{\text{ème}}$ sortie. De manière analogue au cas monovariable, un système multivariable relaxé est défini stable (au sens des entrées bornées - sorties bornées) si et seulement si pour tout vecteur d'entrées borné le vecteur de sorties est borné (par vecteur borné, on entend que toutes ses composantes sont bornées). En appliquant le théorème S.1 pour toutes les paires d'entrée/sortie possibles, et en utilisant le fait que la somme d'un nombre fini de fonctions bornées est bornée, il vient le théorème suivant :

Théorème S.2

Un système multivariable relaxé, décrit par :

$$\mathbf{s}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

est stable (au sens des entrées bornées-sorties bornées), si et seulement s'il existe un nombre fini k tel que pour tout élément g_{ij} de \mathbf{G}

$$\int_{-\infty}^t |g_{ij}(t,\tau)d\tau| \leq k < \infty \quad \forall t$$

IV.3. DESCRIPTION D'UN SYSTEME PAR SES VARIABLES D'ÉTAT

Supposons maintenant que l'on connaisse l'évolution interne du système (équation d'état) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) & \text{(I.13.a)} \\ \mathbf{s}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) & \text{(I.13.b)} \end{cases}$$

avec $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ et $C(\cdot)$ ayant les dimensions appropriées, et dont les coefficients sont des fonctions continues quelque soit t .

La solution de (I.13.a) peut toujours être décomposée en une réponse à une entrée nulle et une réponse avec des conditions initiales nulles :

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t;t_0, x_0, u) = \phi(t;t_0, x_0, 0) + \phi(t;t_0, 0, u) \\ &= \phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Par conséquent, il convient bien d'étudier séparément la stabilité de la réponse à entrée nulle et la stabilité de la réponse à état initial nul. En combinant ces résultats on obtient entièrement les propriétés de stabilité du système (I.13).

Considérons la stabilité à état initial nul (ou stabilité en termes d'entrées/sorties). Nous avons

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t C(t)\phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^t G(t, \tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

où $G(t, \tau) = C(t)\phi(t, \tau)B(\tau)$ est par définition la matrice de réponse impulsionnelle de (I.13). Le théorème S.2 peut alors être remodelé en introduisant la norme vectorielle :

Théorème S.3

La réponse à état initial nul du système (I.13) est stable au sens des entrées bornées-sorties bornées si et seulement s'il existe un nombre fini k tel que

$$\int_{t_0}^t \|C(t)\phi(t, \tau)B(\tau)\| d\tau \leq k < \infty \quad \forall t_0, t \geq t_0$$

Notons qu'à chaque instant la norme de $u(t)$ peut être choisie égale à

$$\sum_i |u_i(t)|, \text{ ou } \max_i |u_i(t)|, \text{ ou } \left(\sum_i |u_i^2(t)| \right)^{\frac{1}{2}}$$

et à chaque choix de la norme de \mathbf{u} , correspond une valeur de la norme :

$$\|C(t)\phi(t,\tau)B(\tau)\|$$

Par ailleurs, la stabilité de (I.13) pour une entrée nulle correspond explicitement à celle de l'équation d'état en régime libre:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$$

pour toute valeur initiale \mathbf{x}_0 , c'est-à-dire à la réponse :

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t,t_0)\mathbf{x}_0$$

Il est clair que la stabilité au sens des entrées bornées-sorties bornées n'est plus applicable ici. On introduit alors une notion de stabilité qui corresponde à la description interne du système. Pour cela, on définit d'abord la notion de point ou d'état d'équilibre.

IV.4 STABILITÉ INTERNE

IV.4.1 Définitions

Point d'équilibre

Un état \mathbf{x}_e de (I.13) est un point d'équilibre si et seulement si

$$\mathbf{x}_e = \phi(t;t_0\mathbf{x}_e,0) \quad \forall t_0 \text{ et } t \geq t_0$$

Autrement dit, si en l'absence d'entrée, la trajectoire d'état du système atteint l'état d'équilibre \mathbf{x}_e elle y restera indéfiniment, et cela signifie que

$$\dot{\mathbf{x}}_e = 0$$

par conséquent un état d'équilibre de (I.13) est solution de l'équation:

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{x} = 0$$

Stabilité au sens de Lyapunov [Lyapunov,1892]

L'état d'équilibre x_e est dit (uniformément) stable au sens de Lyapunov si et seulement si pour tout ϵ positif, il existe un nombre positif $\delta(\epsilon)$ tel que $\|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|\phi(t; t_0, x_0, 0) - x_e\| \leq \epsilon \quad \forall t_0 \text{ et } t \geq t_0$

En d'autres termes, la stabilité au sens de Lyapunov exprime que la trajectoire du système en régime libre, partant de conditions initiales x_0 suffisamment proches de x_e , ne s'éloigne pas trop de ce point d'équilibre. Si elle le rejoint quand t tend vers l'infini, alors le point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable.

Stabilité asymptotique [Lyapunov, 1892]

Un état d'équilibre x_e est dit (uniformément) asymptotiquement stable s'il est stable au sens de Lyapunov et si toute trajectoire issue de conditions initiales suffisamment proches de x_e converge vers x_e quand t tend vers l'infini, c'est-à-dire : $\exists \gamma > 0, \forall \epsilon > 0, \exists T(\epsilon, \gamma) > 0$ tels que $\|x_0 - x_e\| \leq \gamma \Rightarrow \|\phi(t; t_0, x_0, 0) - x_e\| \leq \epsilon \quad \forall t_0 \text{ et } t \geq t_0 + T(\epsilon, \gamma)$.

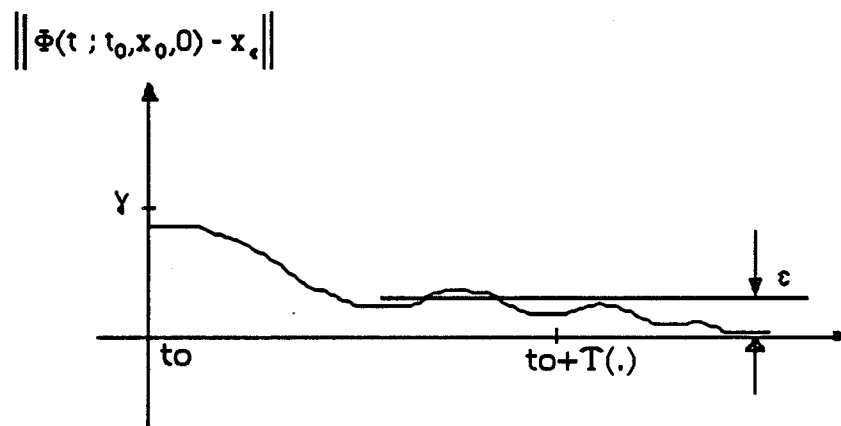


Fig. I.1

IV.4.2. Critères de stabilité interne

Théorème S.4

Tout état d'équilibre de (I.13) est stable au sens de Lyapunov si et seulement s'il existe une constante positive k telle que :

$$\|\phi(t, t_0)\| \leq k < \infty \quad \forall t_0 \text{ et } t \geq t_0$$

Théorème S.5

L'état nul (ou l'origine) de (I.13) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe deux nombres positifs k_1 et k_2 tels que :

$$\|\phi(t, t_0)\| \leq k_1 e^{-k_2(t-t_0)} \quad \forall t_0 \text{ et } t \geq t_0$$

Remarques

1. L'équilibre $x=0$ est un état d'équilibre de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. S'il est asymptotiquement stable alors il est le seul point d'équilibre de ce système. Par abus de langage, on peut alors dire que le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ est asymptotiquement stable.

2. L'équilibre $x=0$ des systèmes LNS $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ peut être instable même si les valeurs propres de $A(\cdot)$ sont à parties réelles négatives. On peut vérifier cela sur les deux exemples suivants.

Exemple 1

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t)$$

Son polynôme caractéristique est $\det[A(\cdot) - \lambda I] = (\lambda+1)^2$, donc à tout instant les valeurs propres de $A(\cdot)$ sont -1 et -1 ; cependant, ce système n'est pas stable, puisque sa matrice de transition

$$\phi(t, 0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

diverge quand t tend vers l'infini.

Exemple 2

Considérons à présent le système T-périodique :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

Les valeurs propres de $A(t)$, solutions de $\det[A(t) - \lambda I] = 0$ sont égales à $\frac{1}{4}(-1 \pm j\sqrt{7})$. Elles sont donc à parties réelles négatives. Cependant le système est instable. En effet, ses solutions sont de la forme :

$$x(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot e^{\frac{1}{2}t}$$

3. L'équilibre $x=0$ d'un système LNS $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ peut être stable même si certaines valeurs propres de $A(\cdot)$ présentent des parties réelles positives pour certains instants t (équation de Mathieu par exemple) ou même à tous les instants [Laurent, Richard et Poloujadoff, 1982]

V. COMMANDABILITE DES SYSTEMES LNS**V.1 DÉFINITIONS**Commandabilité sur un intervalle de temps

Un système (A,B) est dit commandable sur $[t_1, t_2]$, si pour toutes valeurs $x(t_1)$ et x_2 prises dans son espace d'état, il existe une commande u définie sur $[t_1, t_2]$ capable de transférer ce système de l'état $x(t_1)$ à l'état x_2 à l'instant t_2 .

Commandabilité à un instant t_1

Un système (A,B) est dit commandable à l'instant t_1 , s'il existe $t_2 > t_1$, tel qu'il soit commandable sur $[t_1, t_2]$.

Commandabilité

Un système est dit commandable s'il est commandable à tout instant.

Il est à noter que ces différentes définitions nécessitent uniquement l'existence d'une commande u capable de transférer le système d'un état quelconque à un autre état quelconque en un temps fini; aucune spécification sur la trajectoire parcourue par le système ou l'amplitude de la commande u n'est requise; celle-ci peut avoir une amplitude aussi grande que désirée. De ce fait, si un système dynamique linéaire est commandable, il existe, en général, plusieurs commandes pouvant répondre à la même définition, et il devient intéressant alors de chercher parmi ces commandes, celle qui optimise un critère donné (temporel, énergétique ou autres) ou qui vérifie certaines contraintes (saturation par exemple).

Par ailleurs, il est naturellement plus pratique, de disposer de critères (plus ou moins souples), liés à la structure d'un processus donné et permettant de conclure à sa commandabilité.

Dans le paragraphe suivant, nous rappelons l'essentiel des théorèmes relatifs à la commandabilité des processus LNS.

V.2 RAPPELS DE THÉOREMES GÉNÉRAUX

Avant d'aborder l'essentiel des critères relatifs à la commandabilité des systèmes LNS, nous rappelons en premier lieu, pour la clarté de nos propos, quelques théorèmes généraux sur la notion d'indépendance linéaire d'un ensemble de fonctions (scalaires ou vectorielles) d'une variable réelle. Ces derniers sont à la base des critères de commandabilité des systèmes linéaires continus.

V.2.1. Indépendance linéaire d'un ensemble de fonctions.

Définition

Soit un ensemble de n fonctions d'une variable réelle $t : f_1 \dots f_n$. Cet ensemble est dit lié sur $[t_1, t_2]$, s'il existe n scalaires $\alpha_1 \dots \alpha_n$, non tous nuls tels que $\alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t) + \dots + \alpha_n \cdot f_n(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$.

Dans le cas contraire, l'ensemble de ces fonctions est dit linéairement indépendant sur l'intervalle $[t_1, t_2]$.

Remarques

1. Dans cette définition, la spécification de l'intervalle $[t_1, t_2]$ est fondamentale.

2. Lorsque des fonctions sont linéairement indépendantes sur un intervalle $[t_1, t_2]$ donné, il n'est pas nécessaire qu'elles le soient sur tout sous-intervalle de $[t_1, t_2]$; cependant, elles seront linéairement indépendantes sur tout intervalle contenant $[t_1, t_2]$. Cette nuance est capitale pour l'étude de la commandabilité d'un système dynamique continu, puisque la définition de celle-ci est directement liée au concept d'indépendance linéaire.

La définition précédente s'étend à un ensemble de n fonctions vectorielles d'une variable réelle t : $f_1 \dots f_n$, où $f_i(t) \in \mathcal{R}^{1 \times p}$.

Pour résumer cette extension, notons :

$$\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_n] \in \mathcal{R}^{1 \times n}$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Il vient donc :

$f_1 \dots f_n$ sont linéairement indépendantes sur $[t_1, t_2]$, si

$$\alpha \cdot F(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

implique que $\alpha = \mathbf{0}$.

Notons enfin que la notion d'indépendance linéaire étant associée à un intervalle de temps, il est nécessaire, pour la tester, de considérer cet intervalle en entier.

V.2.2. Théorèmes généraux.

Théorème C.1 (de Gram)

Soient f_i ($i=1\dots n$), n fonctions vectorielles de la variable réelle t ($f_i(t) \in \mathcal{R}^{1 \times p}$) définies sur $[t_1, t_2]$.

Soit $F \in \mathcal{R}^{n \times p}$, une matrice où f_i est son $i^{\text{ème}}$ ligne.
Soit la matrice $W(t_2, t_1) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ définie par :

$$W(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t) \cdot F^T(t) dt$$

Les fonctions $f_1 \dots f_n$ sont linéairement indépendantes sur $[t_1, t_2]$ si et seulement si la matrice $W(t_2, t_1)$ est non singulière.

Remarques

1. La matrice W portera par la suite le nom de Grammien de commandabilité pour un processus dynamique continu.

2. Le théorème C.1 est très général, il ne requiert aucune spécification sur les fonctions f_i , mise à part leur continuité.

Les théorèmes suivants concernent, par contre, des classes de fonctions particulières.

Théorème C.2

Supposons que les fonctions (vectorielles) $f_1 \dots f_n$ soient continûment dérivables jusqu'à l'ordre $(n-1)$ sur $[t_1, t_2]$.

Soient F la matrice de dimensions $n \times p$, dont les lignes sont les fonctions f_i , ($i=1 \dots n$) et $F^{(k)}$, sa dérivée à l'ordre k .

S'il existe $t_3 \in [t_1, t_2]$, tel que :

$$\text{rang} \left[F(t_3) \mid F^{(1)}(t_3) \mid \dots \mid F^{(n-1)}(t_3) \right] = n$$

alors, les fonctions $f_1 \dots f_n$ sont linéairement indépendantes sur $[t_1, t_2]$

Remarque

La condition du théorème C.2 est suffisante mais pas nécessaire pour l'indépendance linéaire d'un ensemble de fonctions définies sur $[t_1, t_2]$.

Théorème C.3

Supposons maintenant, que les fonctions $f_1 \dots f_n$ soient analytiques sur $[t_1, t_2]$, et soit un instant t_3 fixé quelconque de $[t_1, t_2]$. Les fonctions $f_1 \dots f_n$ sont linéairement indépendantes sur $[t_1, t_2]$ si et seulement si :

$$\text{rang} \left[F(t_3) \mid F^{(1)}(t_3) \mid \dots \mid F^{(n-1)}(t_3) \mid \dots \right] = n \tag{I.12}$$

Remarques

1. Une conséquence directe du théorème C.3. est que, si un ensemble de fonctions analytiques est linéairement indépendant sur un intervalle $[t_1, t_2]$, la relation (I.12) est vraie quelque soit $t \in [t_1, t_2]$. Par conséquent, si un ensemble de fonctions analytiques est linéairement indépendant sur $[t_1, t_2]$, alors il est linéairement indépendant sur tout sous-intervalle de $[t_1, t_2]$.

2. Le théorème C.3 n'est plus vérifié, si la relation (I.12) est remplacée par :

$$\text{rang} \left[F(t_3) \mid F^{(1)}(t_3) \mid \dots \mid F^{(n-1)}(t_3) \right] = n$$

V.3 CRITERES DE COMMANDABILITÉ DES SYSTEMES LNS

Nous énonçons dans ce qui suit, les principaux critères de commandabilité des systèmes LNS, en essayant de mettre l'accent sur leur intérêt pratique et les contraintes qu'ils requièrent pour leur application.

Considérons un système dynamique linéaire et continu (S) :

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t).x(t) + B(t).u(t) \\ s(t) = C(t)x(t) \\ x \in \mathcal{R}^{qx1} \\ u \in \mathcal{R}^{px1}, s \in \mathcal{R}^{mx1} \\ A(t) \in \mathcal{R}^{qxq}, B(t) \in \mathcal{R}^{qxp}, C(t) \in \mathcal{R}^{mxq} \end{cases}$$

et notons par $\phi(t, t_0)$, sa matrice de transition.

Théorème C.4 [Chen, 1970]

Le système (S) est commandable sur $[t_0, t_1]$, si et seulement si les q lignes de la matrice $\phi(t_0, \cdot)B(\cdot) \in \mathcal{R}^{q \times p}$ sont linéairement indépendantes

Ce théorème de base, est très peu utilisé en pratique, néanmoins, c'est le prélude au théorème C.5, en principe plus commode (dédit du théorème C.1).

Théorème C.5

Le système (S) est commandable sur $[t_0, t_1]$, si et seulement si son Grammien de commandabilité :

$$W(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\phi^T(t_1, \tau)d\tau$$

est non singulier.

De façon tout à fait analogue au cas du théorème C.1, les théorèmes C.4 et C.5 ne requièrent aucune restriction quant aux matrices $A(t)$ et $B(t)$ (ou lignes de $\phi(t_0, \cdot)B(\cdot)$), mise à part leur continuité.

Par ailleurs, il faut noter la nécessité, pour ces deux théorèmes, de calculer la matrice de transition de (S), ce qui est, de loin, la tâche la plus difficile, voire le plus souvent impossible. Par conséquent, il devient nécessaire, pour contourner cette difficulté, de déterminer des critères n'ayant pas recours au calcul de cette matrice (moyennant, bien évidemment, des contraintes sur les matrices $A(t)$ et $B(t)$, ce qui conduit, par conséquent, à des critères moins généraux).

Théorème C.6 [Chen, 1970]

Soient un système (S) où les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont continûment dérivable jusqu'à l'ordre $(q-1)$ et $M_0(\cdot), M_1(\cdot) \dots$, une suite de matrices de $\mathcal{R}^{q \times p}$ définies par :

$$M_0(t) = B(t)$$

$$M_{k+1}(t) = -A(t) \cdot M_k(t) + \frac{d}{dt} M_k(t) \quad k = 1, \dots, (q-1)$$

alors, le système (S) est commandable sur $[t_0, t_1]$ si :

$$\text{rang} \left[M_0(t_1) \mid M_1(t_1) \mid \dots \mid M_{q-1}(t_1) \right] = q$$

Ce théorème donne une condition suffisante mais pas nécessaire pour qu'un système soit commandable sur un intervalle (ou à un instant donné).

Pour clore ce paragraphe, nous signalons, à toutes fins utiles, qu'en plus de la définition de la commandabilité utilisée dans ce mémoire, selon laquelle lorsqu'un système est commandable, rien n'est préjugé quand à la durée (à part sa finitude) du transfert du système considéré entre deux états arbitraires, il existe d'autres types de commandabilité plus spécifiques, qui sont liés à cette durée; c'est le cas de la commandabilité différentielle (durée arbitrairement petite), de la commandabilité instantanée (durée nulle) et de la commandabilité uniforme (la même durée quelque soit t). Evidemment la commandabilité définies en ces termes implique la commandabilité dans le sens des définitions utilisées dans ce mémoire.

Note sur l'observabilité des systèmes LNS

La notion d'observabilité est une notion duale de la commandabilité d'un système LNS. Cela signifie (Boudarel, 1967) que les conditions d'observabilité du système (S) sont équivalentes aux conditions de commandabilité de son dual (ou adjoint modifié) (Sd) défini par

$$(Sd) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = A^T(t)y(t) + C^T(t)u^*(t) \\ s^*(t) = B^T(t)y(t) \\ \\ u^* \in \mathcal{R}^{m \times 1} \\ s^* \in \mathcal{R}^{p \times 1} \end{cases}$$

Aussi n'insisterons-nous pas sur les critères d'observabilité dans ce mémoire.

CONCLUSION

Dans ce premier chapitre, nous avons mis l'accent sur le problème de solubilité des systèmes linéaires non stationnaires qui constitue l'obstacle majeur à l'analyse de tels processus. Nous savons maintenant que cette propriété n'est pas intrinsèque aux systèmes LNS, mais que c'est une propriété de représentation.

Nous savons également qu'il existe toujours une transformation algébrique pouvant ramener la représentation d'un système donné à un modèle dont la solution intégrale est plus facile à déterminer. L'idéal, dans ce sens, est de pouvoir se ramener à une représentation où les paramètres sont indépendants du temps. En revanche, il n'y a aucune méthode générale pour la détermination de telles transformations.

Faute de pouvoir mener, de manière générale une étude directe sur de tels processus, nous avons été amené à mettre en valeur l'intérêt de la recherche des transformations $T(t)$ qui permettent, non seulement la résolution de l'équation d'état, mais également une simplification structurelle du modèle initial, préservant ses propriétés, et rendant l'étude plus commode sur le système réduit associé. L'intérêt de cette approche sera particulièrement mis en évidence dans le cas des systèmes à coefficients périodiques que nous traitons dans les chapitres suivants.

Chapitre II

CHAPITRE II

SYSTEMES LINEAIRES A COEFFICIENTS PERIODIQUES

INTRODUCTION

Les systèmes linéaires périodiques continus sont des systèmes linéaires décrits par des équations différentielles ordinaires à coefficients périodiques en fonction du temps. De tels systèmes (déterministes ou stochastiques) sont utilisés pour modéliser des phénomènes naturels ou artificiels de type périodiques. Dans ce sens, ils revêtent un grand intérêt dans de nombreux champs d'application. C'est le cas par exemple, de certains systèmes considérés en physique du solide [Ziegler,1977], en mécanique céleste [Sigrist,1976] [Iswar, 1980], en optique [Elachi,1976], en aéronautique [Borri & Montegazza,1973] [Pardoux & Pignol,1985], en automatique [Meerkov,1973,1980], en électrotechnique [Chassande,1981] [Lesenne & al,1981], en mécanique quantique [Barone & Narcowich,1977].

De plus, les systèmes périodiques jouent un rôle clé dans la théorie de commande optimale périodique. Celle-ci repose sur l'observation suivante : il existe de nombreux systèmes d'intérêt pratique significatif, pour lesquels la meilleure opération est de type périodique (il peut être plus économique de passer périodiquement par un point de consigne que d'y rester en permanence).

Bien évidemment, les systèmes linéaires stationnaires appartiennent à la classe des systèmes linéaires périodiques. Cependant, l'extension des propriétés des systèmes stationnaires au cas périodique pur est loin d'être une tâche simple, comme en témoigne une abondante littérature sur la commande des systèmes périodiques (théorie et application). En effet, plusieurs problèmes spéciaux étaient rencontrés. Ce n'est que lors de ces deux dernières décennies que certains de ces problèmes ont été résolus ou clarifiés, notamment en ce qui concerne les propriétés structurelles de tels processus.

L'objectif de ce chapitre est de donner une idée générale sur les systèmes linéaires périodiques. Nous résumons les principaux résultats significatifs qui existent dans la littérature. Notre principale contribution à l'étude de tels processus est l'élaboration d'un algorithme original, qui, dans beaucoup de cas, permet de résoudre les équations différentielles à coefficients périodiques. L'intérêt pratique de cet outil sera particulièrement mis en évidence aux chapitres III et IV.

I. DEFINITION

Un système linéaire T-périodique est décrit par l'équation d'état:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (\text{II.1.a})$$

où $A(t) \in \mathcal{R}^{q \times q}$ et $B(t) \in \mathcal{R}^{q \times p}$ sont des matrices réelles continues et T-périodiques. La période T est le plus petit nombre réel pour lequel :

$$\begin{cases} A(t+T) = A(t) \\ B(t+T) = B(t) \end{cases} \quad \forall t \quad (\text{II.1.b})$$

La matrice de transition (ou matrice intégrale) $\phi(t, \tau)$, i.e. la solution de l'équation :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi(t, \tau) = \dot{\phi}(t, \tau) = A(t)\phi(t, \tau) \\ \phi(\tau, \tau) = I_q \end{cases} \quad \forall t > \tau$$

vérifie la propriété de périodicité :

$$\phi(t+T, \tau+T) = \phi(t, \tau) \quad (\text{II.2})$$

La matrice $\phi(t+T, t)$ s'appelle matrice de monodromie à l'instant t. En particulier, $\phi(T, 0)$ est la matrice de monodromie à l'instant $t=0$, ou simplement *matrice de monodromie*. Pour simplifier les notations, elle sera aussi notée V par la suite.

Par ailleurs, comme $\phi(t+T, t) = \phi(t, \tau)\phi(\tau+T, \tau)\phi^{-1}(t, \tau)$, les valeurs propres de $\phi(t+T, t)$ sont indépendantes du temps. Elles sont appelées *multiplieurs caractéristiques*.

II. RESOLUTION ANALYTIQUE

II.1. RÉOLUTION DIRECTE

La résolution analytique directe telle qu'elle a été définie au chapitre I se heurte, de manière générale, aux méthodes d'investigation connues au même titre que les systèmes linéaires non stationnaires quelconques. Aussi n'insisterons-nous pas sur ce point. Nous faisons remarquer, toutefois, que beaucoup d'auteurs se sont penchés sur cette question délicate. Plusieurs travaux ont ainsi proposé des méthodes de résolution approchée. Parmi celles-ci, certaines consistent à remplacer les termes périodiques dans chaque intervalle élémentaire de la période par une fonction polynomiale du temps. Ainsi Sinha, Chou et Denmann [1979] ont traité complètement le cas de l'équation de Mathieu en utilisant une approximation par une constante, par une fonction linéaire ou par une fonction quadratique du temps (dans chaque intervalle de la période) et ont constaté que l'approximation d'ordre 2 (par une fonction quadratique) donne d'excellents résultats. Enfin, il existe des méthodes, ayant peu d'intérêt pratique, qui définissent des séries de fonctions dont la convergence permet, par des approximations successives, de déterminer des solutions approchées pour des équations différentielles à coefficients périodiques. Le plus souvent, elles ont été appliquées également aux équations de Mathieu et Hill.

II.2. RÉOLUTION INDIRECTE

Par définition, on doit chercher une transformation algébrique $P(t)$ pouvant ramener le système (II.1) à un autre système directement soluble. Par la transformation inverse $P^{-1}(t)$ on doit retrouver la solution du système initial (II.1). Tout le problème est donc de trouver le changement de variable $P(t)$. Dans ce sens, la transformation la mieux adaptée à cette classe de processus est, certes, la transformation de Floquet. Deux raisons principales justifient ce fait :

1. Elle transforme le système T-périodique initial en un système dont la matrice d'état est une constante.

2. C'est une transformation de Lyapunov. Cela signifie que, au moins au niveau de la stabilité et du caractère borné des coefficients des matrices, les deux systèmes ont des propriétés comparables. Nous verrons d'ailleurs, au chapitre III, que leurs propriétés de commandabilité le sont également.

En fait les trajectoires des deux systèmes sont périodiquement topologiquement égales [C. Przybilski & J.P. Richard, 1986]. Nous pouvons illustrer cela sur l'exemple simple d'un système d'ordre 2 défini par :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot x(t)$$

Ses valeurs propres sont $-\lambda + j$, $-\lambda - j$.

Si l'on effectue le changement de variable $y = P(t) \cdot x(t)$ où $P(t)$ s'écrit:

$$P(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

il vient :

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot y(t)$$

c'est-à-dire que $y(t) = \exp(-\lambda t) \cdot y_0$, et par conséquent $x(t)$ s'écrira :

$$x(t) = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} y_{01} \cos t - y_{02} \sin t \\ y_{01} \sin t + y_{02} \cos t \end{pmatrix}$$

Dans l'espace d'état, les trajectoires coïncident à chaque période : elles sont *périodiquement topologiquement égales*. (Fig.II.1).

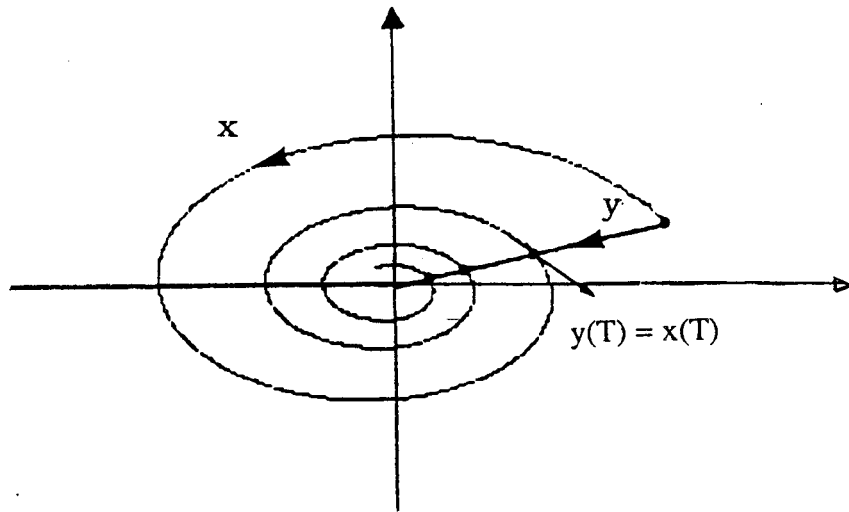


Fig. II.1

Notons au passage, que cette démarche s'inscrit dans un cadre plus général, regroupant des méthodes de réduction structurelle des systèmes complexes. Nous pouvons résumer cela par le schéma synoptique suivant [C. Przybylski, 1986] :

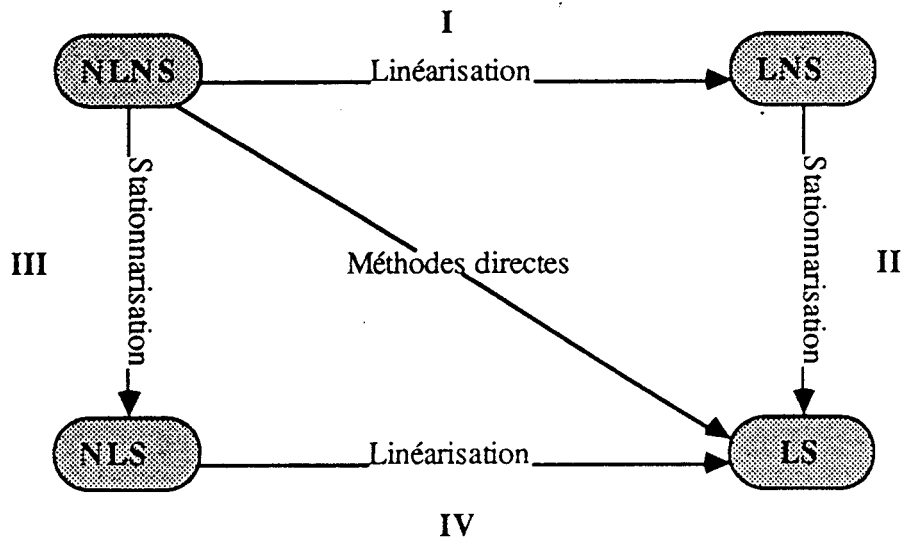


Fig. II.2

La transformation de Floquet se situe dans la phase II.

Nous rappelons ici, sans démonstration, ce théorème de base qui a été établi simultanément par Floquet (1883) et Lyapunov (1892).

Théorème de Floquet

Soit un système linéaire dont l'équation d'état est de type périodique (II.1) :

Alors, il existe un changement de variable $P(t)$ borné et régulier pour tout t , ($P^{-1}(t)$ existe et est borné pour tout t), périodique de période T , ramenant le système initial (II.1) au système linéaire de matrice d'état constante M :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = My(t) + B_R(t)u(t) \\ y(t) = P(t)x(t) \\ M = P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t) \\ B_R(t) = P(t)B(t) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Ainsi si l'on dispose de $P(t)$ et de M , alors la matrice de transition et la solution de (II.1) s'écrivent respectivement (cf. chap. I) :

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0) &= P^{-1}(t)e^{M(t-t_0)}P(t_0) \\ x(t) &= P^{-1}(t)e^{M(t-t_0)}P(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t P^{-1}(t)e^{M(t-\tau)}P(\tau)B(\tau)u(\tau) \end{aligned}$$

Par ailleurs, si $P(T) = P(0) = I_q$, il vient la matrice de monodromie:

$$V = \phi(T, 0) = e^{MT} \quad (\text{II.4})$$

Les valeurs propres de M s'appellent *exposants caractéristiques* de (II.1) (par différence avec les valeurs propres de $\phi(T, 0)$ qui sont les multiplieurs caractéristiques).

En dépit de nombreuses études, la matrice M associée à $A(t)$, ainsi que le changement de variable $P(t)$, restent impossibles à expliciter analytiquement dans le cas général. Au paragraphe V nous proposons une méthode de calcul de $P(t)$ qui constitue un outil de base pour nos approches d'analyse et de synthèse de commande des systèmes T-périodiques aux chapitres III et IV.

Remarque

La transformation de Floquet n'est pas unique. Il s'agit en fait d'une famille de transformations qui diffèrent par leurs conditions initiales. Nous verrons, par la suite, que celles qui confèrent les mêmes conditions initiales aux deux systèmes, permettent de simplifier de façon notable la synthèse de commande sur les systèmes périodiques.

III. STABILITE

L'essentiel des définitions et critères généraux relatifs à la stabilité des systèmes LNS a été rappelé au premier chapitre. Pour les systèmes périodiques, nous nous intéresserons uniquement à la stabilité interne : d'après les propriétés de la transformation de Floquet-Lyapunov précédemment évoquées, la stabilité d'un système linéaire T-périodique est équivalente à celle de son modèle réduit. En effet, si l'on considère les équations d'état en régime libre du système (II.1) et son modèle réduit (II.3) :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (\text{II.5.a})$$

$$\dot{y}(t) = My(t) \quad (\text{II.5.b})$$

La stabilité de (II.5.a) est déterminée par ses multipliers caractéristiques (valeurs propres de $\phi(T,0)$) $\sigma_1, \dots, \sigma_q$. Celle de (II.5.b) est déterminée par les valeurs propres de M (exposants caractéristiques) $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. Or, d'après (II.4) il existe une relation une à une entre les valeurs des deux spectres. Comme les deux systèmes sont topologiquement équivalents, il vient le théorème suivant :

Théorème

Un système linéaire T-périodique est :

1. *asymptotiquement stable si et seulement si les modules de ses multipliers caractéristiques sont strictement inférieurs à l'unité*

ii. instable si au moins l'un de ses multiplieurs caractéristiques est de module supérieur à l'unité.

Remarque

En plus de la relation (II.4), nous savons également, grâce au théorème d'Abel-Jacobi-Liouville, que si $\sigma_i = e^{\lambda_i T}$, $i=1, \dots, q$, sont les multiplieurs caractéristiques de (II.1) alors :

$$\prod_{i=1}^q \sigma_i = e^{\int_0^T \text{tr}A(t) dt}$$

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i = \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr}A(t) dt, \quad \left(\text{mod } \frac{2\pi j}{T} \right)$$

IV. COMMANDABILITE

IV.1 COMMANDABILITÉ SUR UN INTERVALLE OU/ET À UN INSTANT FIXÉ

Les critères relatifs à ces deux types de commandabilité, ne diffèrent en rien de ceux établis pour les systèmes linéaires non stationnaires quelconques; néanmoins, la commandabilité sur une période (intervalle $[0 , T]$), revêt un intérêt particulier, notamment pour résoudre le problème de placement de pôles tel qu'il sera vu au chapitre III.

IV.2 COMMANDABILITÉ (commandabilité à tout instant)

Des critères plus simples ont été établis, faisant intervenir le caractère périodique des processus mis en jeu.

Pour la clarté des propos suivants, nous rappelons la condition classique (nécessaire et suffisante) relative à la commandabilité des systèmes linéaires stationnaires régis par l'équation d'état :

$$(St) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

où A et B sont des matrices constantes, de dimensions respectives $q \times q$ et $q \times p$.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. La paire (A, B) (ou le système (St)) est commandable si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} B & | & AB & | & A^2B & | & \dots & | & A^{q-1}B \end{bmatrix} = q$$

Cette proposition est une conséquence directe du théorème C.6 (cf. chap. I), avec l'intervalle $[0, \infty[$ et du théorème de Cayley-Hamilton

2. La paire (A, B) est commandable si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda I & | & B \end{bmatrix} = q \quad \forall \lambda \in C \quad (\text{II.6.a})$$

où C désigne l'ensemble des nombres complexes.

Nous retenons la deuxième formulation.

Remarque

En fait, on montre que si la condition (II.6.a) est vérifiée sur le spectre de A , cela suffit à ce que la paire (A, B) soit commandable. Ce test est connu sous le nom de test PBH (test de Popov-Belevitch-Hautus) [Bittanti, 1984]. Nous retrouverons une propriété analogue pour les systèmes T-périodiques.

Pour les processus à coefficients périodiques, le premier résultat, concernant la recherche de conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité, a été établi par P. Brunovsky (1969). Nous le résumons par le théorème suivant :

Théorème T.1

Supposons que $A(t)$ ($A(t) \in \mathcal{R}^{q \times q}$) et $B(t)$ ($B(t) \in \mathcal{R}^{q \times p}$) du système (II.1) soient T-périodiques et intégrables sur $[0, T]$.

Alors le système (II.1) est commandable si et seulement si les lignes de la matrice $\phi^{-1}(t, 0)B(t)$, $t \in [0, qT]$, sont linéairement indépendantes.

La démonstration de ce théorème utilise essentiellement la périodicité de la matrice de transition, à savoir :

$$\phi(t+kT, t_0+kT) = \phi(t, t_0) \quad \forall t, t_0 \in \mathcal{R} \text{ et } k \text{ entier}$$

Par ailleurs, grâce au théorème C.1 (cf. chap.I), le théorème T.1 peut également s'énoncer :

le système (II.1) est commandable s'il est commandable sur q périodes, c'est-à-dire si et seulement si le Grammien de commandabilité

$$W(qT, 0) = \int_0^{qT} \phi(qT, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \phi^T(qT, \tau) d\tau$$

est non singulier.

Notons que ce théorème nécessite l'intégration du système (II.1) sur q périodes.

Des travaux plus récents [Shayman, 1980; Kabamba, 1986] ont pu améliorer légèrement ce dernier résultat, à savoir l'intégration de (II.1) sur une seule période T. Cela peut s'énoncer comme suit:

Théorème T.2

i) Le système (II.1) est commandable si et seulement si la paire $(\phi(T, 0), W(T, 0))$ est commandable, c'est-à-dire :

$$\text{rang} \left[\begin{array}{c|c} \phi(T, 0) - \lambda \mathbf{I} & W(T, 0) \end{array} \right] = q \quad \forall \lambda \in \mathcal{C} \quad (\text{II.6.b})$$

ii) Si (II.1) est commandable, le nombre de périodes nécessaires pour transférer son état entre deux valeurs arbitraires est au mieux égal à l'indice de commandabilité de la paire $[\phi(T, 0), W(T, 0)]$.

Remarque

On retrouve ici le test PBH évoqué précédemment pour les systèmes stationnaires. En effet si la condition (II.6.b) est vérifiée sur

le spectre de $\phi(T,0)$, cela suffit à ce que le système (II.1) soit commandable.

Dans une autre étude [Al-Rahmani et Franklin,1989], que nous reprendrons plus en détail au chapitre III, on définit la notion de Gramien généralisé $\mathcal{H}_r(t_2,t_1)$ par :

$$\mathcal{H}_r(t_2,t_1) = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \left[\int_{i\Delta+t_1}^{(i+1)\Delta+t_1} \phi(t_2,\tau)B(\tau)d\tau \cdot \int_{i\Delta+t_1}^{(i+1)\Delta+t_1} B^T(\tau)\phi^T(t_2,\tau)d\tau \right]$$

où $\Delta=(t_2- t_1)/r$ et r est un entier positif. Dans ce cas le Gramien $W(t_2,t_1)$ devient un cas particulier du Grammien généralisé, à savoir :

$$W(t_2,t_1) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{H}_r(t_2,t_1)$$

Il vient alors le théorème suivant :

Théorème T.3

Le système (II.1) est commandable si et seulement s'il existe un entier positif r tel que la paire $[\phi(T,0) , \mathcal{H}_r(T,0)]$ soit commandable

Un fait remarquable des théorèmes T.2 et T.3 est que la commandabilité d'un système linéaire T-périodique se ramène à celle d'un système linéaire stationnaire de matrice d'état $\phi(T,0)$ et de commande, respectivement, $W(T,0)$ et $\mathcal{H}_r(T,0)$. Bien évidemment, cela suppose la connaissance préalable des valeurs des Grammiens de commandabilité.

IV.3. CLASSE PARTICULIERE

Dans une récente étude du placement de pôles des systèmes linéaires T-périodiques par une commande impulsionnelle (cf. Chap.III) Yoshii (1989) propose une nouvelle matrice de commandabilité, notée $Q(t)$ et définie par :

$$Q(t) = \left[\tilde{B}(t) | \phi^{-1}(T,0)\tilde{B}(t) | \phi^{-2}(T,0)\tilde{B}(t) | \dots | \phi^{-(q-1)}(T,0)\tilde{B}(t) \right]$$

avec $\tilde{B}(t) = \phi^{-1}(t,0)B(t)$

De la définition de $Q(t)$ découle le théorème suivant :

Théorème de Yoshii

Soit un système $(A(t),B(t))$ T-périodique où $A(t)$ et $B(t)$ sont analytiques sur $[0, \infty [$ et p lignes de $B(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$ sont linéairement indépendantes. Alors la paire $(A(t),B(t))$ est commandable si et seulement si $\text{rang}[Q(t)] = q$ presque partout.

Notons que pour t fixé, $Q(t)$ est la matrice classique de commandabilité d'un système linéaire stationnaire de matrice d'état $\phi^{-1}(T,0)$ et de matrice de commande $\tilde{B}(t)$. C'est cette propriété qui a été utilisée par Yoshii pour résoudre le problème de placement de pôles par un feedback à gain impulsionnel.

Remarque

Ces différents théorèmes que nous venons d'énoncer, ont deux points importants en commun :

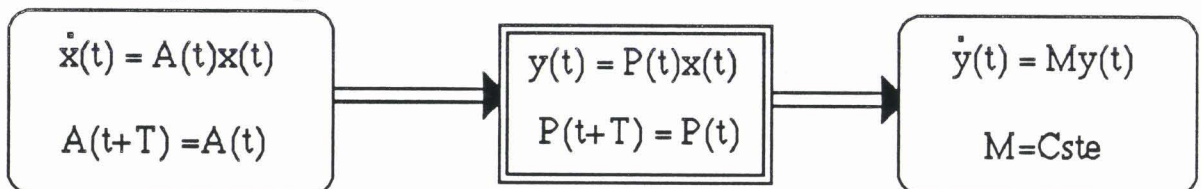
- I. ils donnent des conditions nécessaires et suffisantes
- II. ils nécessitent le calcul de la matrice de transition, c'est-à-dire la résolution de l'équation d'état du système étudié.

Ce dernier point constitue de manière générale, le seul obstacle à l'application de ces critères, obstacle qui sera retrouvé dans tous les problèmes de placement de pôles ou de commande par la suite. Le paragraphe suivant propose une façon de lever ce problème

V. SUR UNE METHODE DE DETERMINATION DE LA TRANSFORMATION DE FLOQUET-LYAPUNOV.

Position du problème

Considérons le schéma de résolution indirecte d'un système linéaire T-périodique:



$P(t)$ vérifie l'équation de Lyapunov :

$$\dot{P}(t) = MP(t) - P(t)A(t)$$

Nous nous proposons de répondre à la question suivante : *connaissant $A(t)$ et $P(t)$ étant T-périodique, est-il possible de déterminer les coefficients du développement en série de Fourier de $P(t)$?*

Les paragraphes suivants montrent que l'on peut aisément calculer ce développement si $A(t)$ est analytique sur $[0, \infty[$ et si l'on connaît une valeur de M . Utilisant les propriétés des produits tensoriels, nous développons de plus un algorithme facilement informatisable qui permet de calculer les coefficients de Fourier de $P(t)$.

V.1. CALCUL DU MODELE RÉDUIT M

Nous avons déjà fait remarquer qu'il n'existe aucune méthode analytique exacte qui permette de calculer la matrice d'état M du modèle réduit. Cependant, il existe certaines techniques qui s'efforcent d'approcher analytiquement ou numériquement les valeurs propres de M (exposants caractéristiques).

V.1.1. Méthode analytique : réponse impulsionnelle

Supposons que l'on ait accès à la réponse impulsionnelle d'un système T-périodique. Si à l'instant t , $g(t, \tau)$ est cette réponse à une impulsion appliquée à l'instant τ , elle peut être considérée comme paramétrique en t ou bien en τ ; on définit donc deux transformées de Laplace de $g(t, \tau)$, paramétriques l'une en t , l'autre en τ . Corral (1979) montre alors que ces deux transformées de Laplace ont des pôles identiques qui sont aussi les valeurs propres de M à un multiple de $2j\pi/T$ près.

V.1.2. Méthodes numériques

La détermination des exposants caractéristiques peut se faire de différentes façons : à l'aide de fractions continues [Blanck, 1960; Tamir 1962], de déterminants infinis [Shäfke et Schmidt, 1966;

Wagenführer, 1980] ou d'autres développements en série [Malkin, 1956] appliqués le plus souvent aux équations de Mathieu et Hill.

Dans le même esprit, mais dans une démarche différente, on peut déterminer les exposants caractéristiques de M en mesurant les réponses échantillonnées du système A(t) [Richard et Laurent, 1983].

Remarque

On montre [Bellman, 1953] que, $\phi(T,0)$ (ou V) étant une matrice non dégénérée, il existe une matrice notée $\text{Log}\phi(T,0)$ telle que :

$$e^{\text{Log}\phi(T,0)} = \phi(T,0) = V \quad (\text{II.7})$$

Par conséquent, si l'on connaît une valeur de V, nous pouvons écrire :

$$MT = \text{Log}V \quad (\text{II.8})$$

On peut aussi montrer [Burgat et Mira, 1970; Volterra, 1887; Gantmacher, 1966] que V est semblable à la matrice \bar{V} définie par :

$$\bar{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[I_q + \frac{T}{n}A(t_0 + \frac{n-1}{n}T) \right] \left[I_q + \frac{T}{n}A(t_0 + \frac{n-2}{n}T) \right] \dots \left[I_q + \frac{T}{n}A(t_0) \right]$$

En particulier pour $t_0 = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[I_q + \frac{T}{n}A(\frac{n-1}{n}T) \right] \left[I_q + \frac{T}{n}A(\frac{n-2}{n}T) \right] \dots \left[I_q + \frac{T}{n}A(0) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left[I_q + \frac{T}{n}A(\frac{k}{n}T) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Ainsi, une fois V calculée par (II.9) et grâce aux relations (II.7) et (II.8), M peut donc être déterminée par :

$$M = \frac{1}{T} \text{Log}V \quad (\text{II.10})$$

Notes importantes

I. En pratique, le calcul de $V=\phi(T,0)$ par la relation (II.9) pose un problème de convergence ((II.9) converge très lentement vers la limite V). De plus on ne dispose pas d'un critère d'arrêt.

II. Il arrive souvent que les valeurs propres de $\phi(T,0)$ (i.e de V) soient complexes. Leur logarithme l'est aussi, bien que la partie réelle en soit déterminée de façon unique. Dans ces conditions, la matrice $P(t)$ que l'on cherche doit être de période $2T$ [Miles et Harris, 1980] et la matrice M doit être déterminée par la relation :

$$M = \frac{1}{2T} \left[\text{Log}V + (\text{Log}V)^* \right] \quad (\text{II.11})$$

où l'astérisque désigne le complexe conjugué.

V.1.3. Calcul de M par simulation

Nous adoptons dans ce mémoire un moyen plus simple et plus fiable qui permet de déterminer une valeur de M suffisamment précise. Cela consiste à simuler l'équation intégrale de (II.1), c.à.d :

$$\dot{\phi}(t,0) = A(t)\phi(t,0)$$

et prendre sa valeur à l'instant $t=T$. Celle-ci donne immédiatement et de manière assez rigoureuse (c.f paragraphe II) :

$$\phi(T,0) = P^{-1}(T)e^{MT}P(0) = e^{MT} = V$$

M s'en déduit alors par la relation (II.10) (ou la relation (II.11) si les valeurs propres de V sont complexes).

V.2 RAPPELS SUR LE CALCUL TENSORIEL [Brewer, 1978]

Pour la mise en équations, nous rappelons d'abord quelques notations et définitions relatives au calcul matriciel, que nous sommes amené à utiliser pour développer la présente méthode.

Soient deux matrices A et B quelconques, telles que $A \in \mathcal{R}^{p \times q}$ et $B \in \mathcal{R}^{m \times n}$.

Produit de Kronecker

Le produit de Kronecker de A par B est défini par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ a_{21}B & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}B & \dots & \dots & a_{pq}B \end{pmatrix}$$

où a_{ij} désigne l'élément d'indices i et j ($i=1,p ; j=1,q$)

La matrice $A \otimes B$ est de dimension $pm \times qn$.

Fonction Vec

On définit une fonction d'une variable matricielle et à valeurs vectorielles, notée **Vec**, par :

$$\text{Vec}(A) = \begin{pmatrix} A_{.1} \\ A_{.2} \\ \vdots \\ A_{.q} \end{pmatrix}$$

où $A_{.j}$ désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A .

Le vecteur image de la matrice A par la fonction **Vec** est de dimensions $px1$.

Par la suite, nous noterons par $A(pxq)$, toutes matrices $A \in \mathcal{R}^{pxq}$, pour éviter toutes confusions au niveau des dimensions des matrices utilisées dans nos calculs.

Propriétés

De la définition du **produit de Kronecker** et de la fonction **Vec**, découlent un certain nombre de propriétés dont nous ne rappelons ici que celles qui nous intéressent :

$$P1 : A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$P2 : (A \otimes B)(D \otimes G) = AD \otimes BG$$

$$P3 : (N \otimes M)^{-1} = N^{-1} \otimes M^{-1}$$

$$P4 : \exp(N \otimes M) = \exp(N) \otimes \exp(M)$$

$$P5 : \text{Vec}(ADB) = (B^T \otimes A) \text{Vec}(D)$$

$$P6 : (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

$$P7 : (I_p \otimes z)A = A \otimes z$$

$$P8 : A(I_q \otimes z^T) = A \otimes z^T$$

avec, respectivement, les dimensions suivantes :

$$\begin{array}{lll} A : A(p \times q), & G : G(t \times u), & z : z(n \times 1) \\ B : B(s \times t), & M : M(m \times m), & I_q : \text{Identité}(q, q) \\ C : C(r \times l), & N : N(n \times n), & I_p : \text{Identité}(p, p) \end{array}$$

V.3. ALGORITHME DE CALCUL DE $P(t)$

V.3.1. Principe

$P(t)$ étant T-périodique en fonction de t, notre objectif est de déterminer, élément par élément, son développement en série de Fourier.

Le cas que nous traitons ici, concerne une transformation particulière, dans ce sens que, les systèmes $A(t)$ et M ont les mêmes conditions initiales à l'instant initial $t_0=0$, autrement dit $P(0)=P(T)=I_q$. Le cas où $P(0) \neq I_q$, s'en déduit par une transformation simple. En plus, $A(t)$ est supposée réelle et analytique sur $[0, \infty[$. Nous justifierons ce choix dans nos applications aux chapitre trois et quatre.

V.3.2. Mise en équations

Nous cherchons donc à calculer, pour un ordre N suffisant, les coefficients du développement en série de Fourier de la transformation de Floquet :

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \dots & p_{1q}(t) \\ \vdots & p_{ij}(t) & \vdots \\ p_{q1}(t) & \dots & p_{qq}(t) \end{pmatrix}$$

Chaque élément $p_{ij}(t)$ peut s'écrire :

$$p_{ij}(t) = \pi^T(t) \cdot C_{ij}$$

avec :

$$\pi^T(t) = \left[1 \quad \cos(\omega t) \quad \dots \quad \cos(N\omega t) \quad \sin(\omega t) \quad \dots \quad \sin(N\omega t) \right] \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

et

$$C_{ij}^T = \begin{bmatrix} a_{ij}^0 & \dots & a_{ij}^N & b_{ij}^1 & \dots & b_{ij}^N \end{bmatrix}$$

P(t) peut donc s'écrire sous la forme :

$$P(t) = \Pi_D(t) \cdot C_M$$

avec

$$\Pi_D(t) = \begin{pmatrix} \pi^T(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \setminus & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pi^T(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{q \times q(2N+1)}$$

et

$$C_M = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1q} \\ \vdots & C_{ij} & \vdots \\ C_{q1} & \dots & C_{q\mathfrak{q}} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{q(2N+1) \times q}$$

Par ailleurs, si l'on applique la fonction **Vec** à P(t), il vient, en utilisant la propriété P5 :

$$\mathbf{Vec}[P(t)] = [I_q \otimes \Pi_D(t)] \cdot \mathbf{Vec}[C_M]$$

Ensuite, notons **Vec**(C_M) = **C** tel que :

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} C_{11}^T \dots C_{q1}^T & C_{12}^T \dots C_{q2}^T & \dots & C_{1\mathfrak{q}}^T \dots C_{q\mathfrak{q}}^T \end{bmatrix}$$

En remarquant que :

$$I_q \otimes \Pi_D(t) = I_q^2 \otimes \pi^T(t)$$

il vient :

$$\mathbf{Vec}[P(t)] = [I_q^2 \otimes \pi^T(t)] \cdot \mathbf{C}$$

Il en est de même pour une dérivée d'ordre k quelconque de P(t) :

$$\mathbf{Vec}[P^{(k)}(t)] = [I_q^2 \otimes \pi^{T(k)}(t)] \cdot \mathbf{C}$$

L'application de la fonction **Vec** aux deux membres de la relation

$$\dot{P}(t) = M.P(t) - P(t).A(t)$$

donne :

$$\left[I_q^2 \otimes \pi^T(t) \right].C = \text{Vec}[M.P(t) - P(t).A(t)]$$

et, plus généralement, pour les dérivées successives :

$$\left[I_q^2 \otimes \pi^T(t) \right].C = \text{Vec} \left[M.P^{(k-1)}(t) - \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i P^{(i)}(t).A^{(k-1-i)}(t) \right] \quad (\text{II.12})$$

où C_{k-1}^i désigne les coefficients du binôme de Newton.

La matrice **C** contient les coefficients des développements en série de Fourier à l'ordre N, de l'ensemble des éléments de la matrice P(t), soit $q^2(2N+1)$ coefficients au total. Pour les déterminer, nous devons disposer de $q^2(2N+1)$ équations indépendantes.

Compte tenu du fait que chaque relation (II.12) à un ordre k donné, équivaut à q équations indépendantes, en plus de la condition $P(0)=I_q$, nous utiliserons à cet effet, les dérivées successives de (II.12), jusqu'à l'ordre 2N, en considérant leurs valeurs respectives à l'instant t=0.

Pour simplifier l'écriture, nous adoptons les notations suivantes :

$$Z_0 = I_q$$

$$Z_k = M.P^{(k-1)}(0) - \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i P^{(i)}(0).A^{(k-1-i)}(0)$$

et nous désignerons par z_{ij}^k un élément quelconque de Z_k .

Nous obtenons alors le système d'équations matricielles:

$$\begin{aligned} \text{Vec}[P(0)] &= \left[I_q^2 \otimes \pi^T(0) \right] \cdot C = \text{Vec}(Z_0) \\ \text{Vec}[\dot{P}(0)] &= \left[I_q^2 \otimes \dot{\pi}^T(0) \right] \cdot C = \text{Vec}[M-A(0)] = \text{Vec}(Z_1) \\ &\vdots \\ \text{Vec}[P^{(k)}(0)] &= \left[I_q^2 \otimes \pi^{T(k)}(0) \right] \cdot C = \text{Vec}(Z_k) \\ &\vdots \\ \text{Vec}[P^{(2N)}(0)] &= \left[I_q^2 \otimes \pi^{T(2N)}(0) \right] \cdot C = \text{Vec}(Z_{2N}) \end{aligned}$$

Par une concaténation judicieuse de toutes ces équations matricielles nous aboutissons à un système d'équations simples de la forme :

$$A \cdot C = B \tag{II.13}$$

où **A** s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} \Pi(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \backslash & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Pi(0) \end{pmatrix} = I_q^2 \otimes \Pi(0)$$

avec :

$$\Pi(0) = \begin{pmatrix} \pi^T(0) \\ \dot{\pi}^T(0) \\ \vdots \\ \pi^{T(2N)}(0) \end{pmatrix} \tag{II.14}$$

La matrice **B** s'écrit :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{\bullet} \\ \beta_{21}^{\bullet} \\ \vdots \\ \beta_{q1}^{\bullet} \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{q\alpha}^{\bullet} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \beta_{ij}^{\bullet} = \begin{pmatrix} 0 \\ z_{ij} \\ \vdots \\ z_{ij}^{2N} \end{pmatrix}$$

ou autrement écrit :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \text{Vec}(Z_0) \\ \vdots \\ \text{Vec}(Z_{2N}) \end{pmatrix}$$

On peut montrer que la matrice **A** est inversible quel que soit N (la démonstration est portée en annexe). L'équation (II.13) admet donc toujours une solution :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

que l'on peut écrire grâce à la propriété P3 :

$$\mathbf{C} = \left[\mathbf{I}_q \otimes \Pi^{-1}(0) \right] \cdot \mathbf{B}$$

Enfin si l'on note $\mathbf{B} = \text{Vec}(\mathbf{R})$, et $\mathbf{C} = \text{Vec}(\mathbf{L})$ où **R** et **L** sont des matrices constantes de dimensions $(2N+1) \times q^2$, il vient, d'après la propriété P5 :

$$\mathbf{C} = \text{Vec} \left[\Pi^{-1}(0) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}_q \right]$$

c'est-à-dire :

$$\text{Vec}(\mathbf{L}) = \text{Vec} \left[\Pi^{-1}(0) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}_q \right]$$

soit, en identifiant les arguments de la fonction **Vec** :

$$\mathbf{L} = \Pi^{-1}(0) \cdot \mathbf{R}$$

Il est à noter que chaque colonne de la matrice **L** identifie entièrement un élément $p_{ij}(t)$ de $P(t)$:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11}^0 \dots & a_{ij}^0 & \dots & a_{q1}^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11}^N \dots & a_{ij}^N & \dots & a_{q1}^N \\ b_{11}^1 \dots & b_{ij}^1 & \dots & b_{q1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{11}^N \dots & b_{ij}^N & \dots & b_{q1}^N \end{pmatrix}$$

La matrice **R** s'écrit :

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{cccc} \dot{\beta}_{11} & \dot{\beta}_{21} \dots \dot{\beta}_{q1} & \dot{\beta}_{12} & \dot{\beta}_{22} \dots \dot{\beta}_{q2} \dots \dot{\beta}_{1q} & \dot{\beta}_{2q} \dots \dot{\beta}_{qq} \end{array} \right]$$

soit :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_{11} & z_{21} \dots z_{1q} & z_{2q} \dots z_{q1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_{11} & z_{21} \dots z_{1q} & z_{2q} \dots z_{q1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_{11}^{2N} & z_{21}^{2N} \dots z_{1q}^{2N} & z_{2q}^{2N} \dots z_{q1}^{2N} \end{pmatrix}$$

ou, autrement écrit :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \text{Vec}^T(Z_0) \\ \text{Vec}^T(Z_1) \\ \vdots \\ \text{Vec}^T(Z_{2N}) \end{pmatrix}$$

Notons, en résumé, les dimensions de ces différentes matrices :

$$\begin{aligned}
 C_{ij} &\in \mathcal{R}^{(2N+1) \times 1}, & \pi^T(t) &\in \mathcal{R}^{1 \times (2N+1)} \\
 C &\in \mathcal{R}^{q^2 \times (2N+1) \times 1}, & L &\in \mathcal{R}^{(2N+1) \times q^2} \\
 \text{Vec}[P(t)] &\in \mathcal{R}^{q^2 \times 1}, & R &\in \mathcal{R}^{(2N+1) \times q^2}
 \end{aligned}$$

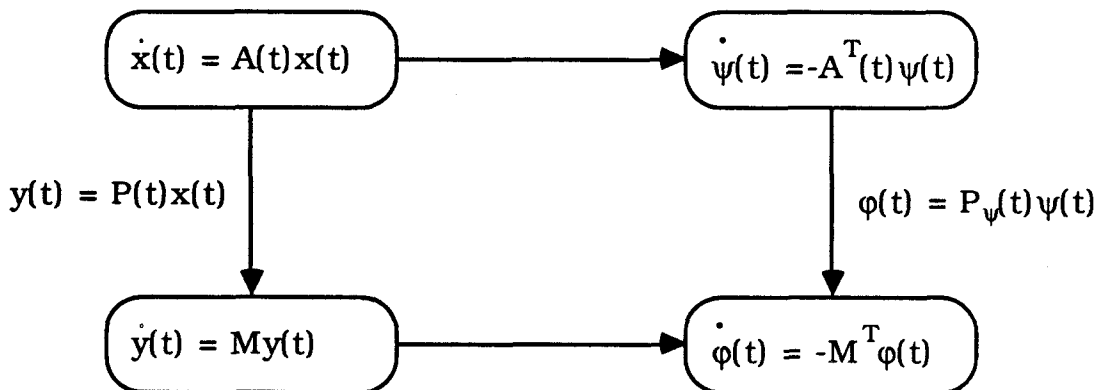
V.4 CALCUL DE $P^{-1}(t)$

Il arrive souvent qu'on ait besoin de l'inverse de la transformation de Floquet $P(t)$; l'algorithme précédent, partant de la connaissance préalable de $A(t)$ et de M , ne peut déterminer que la matrice $P(t)$.

Ce problème peut être résolu en partant des systèmes adjoints de $A(t)$ et de M . Nous pouvons montrer cela de deux façons différentes.

V.4.1. Première méthode

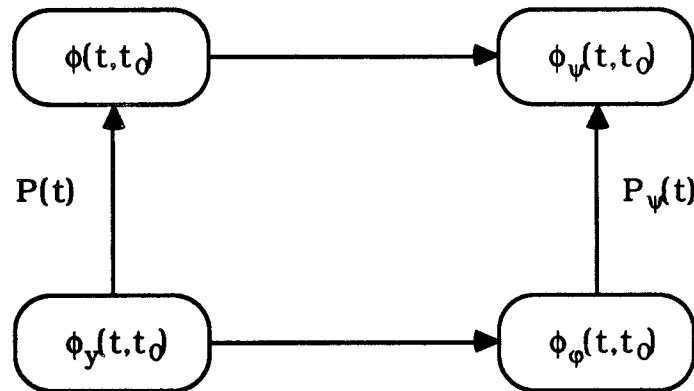
Pour cela, considérons le schéma suivant, reliant ces différents systèmes :



Le système adjoint de $A(t)$, soit $-A^T$, est linéaire T-périodique. Le système adjoint de M , soit $-M^T$, est linéaire stationnaire.

Il existe donc une transformation de Floquet, notée $P_\psi(t)$, T-périodique qui ramène le système $-A^T(\cdot)$ au système $-M^T$. Intuitivement, $P_\psi(t)$ doit pouvoir s'exprimer en fonction de $P(t)$. Pour montrer cela, cherchons à exprimer le lien entre les matrices de

transition des différents systèmes du schéma précédent représentés respectivement comme suit :



1. Relations entre $\phi(t, t_0)$ et $\phi_y(t, t_0)$, $\phi_\psi(t, t_0)$ et $\phi_\phi(t, t_0)$

De la connaissance de M et de $-M^T$ il vient :

$$\phi_y(t, t_0) = e^{M(t-t_0)} \quad (\text{II.15.a})$$

$$\phi_\phi(t, t_0) = e^{-M^T(t-t_0)} \quad (\text{II.15.b})$$

Par ailleurs il est facile d'établir les relations suivantes :

$$\phi(t, t_0) = P^{-1}(t)\phi_y(t, t_0)P(t_0) \quad (\text{II.16.a})$$

$$\phi_\psi(t, t_0) = P_\psi^{-1}(t)\phi_\phi(t, t_0)P_\psi(t_0) \quad (\text{II.16.b})$$

2. Relations entre $\phi(t, t_0)$ et $\phi_\psi(t, t_0)$, $\phi_y(t, t_0)$ et $\phi_\phi(t, t_0)$

On montre [Boudarel,1967] que la matrice de transition d'un système donné (ici $A(.)$) et celle de son système adjoint ($-A^T(.)$) sont liées par la relation :

$$\phi_\psi(t, t_0) = \phi^{-T}(t, t_0)$$

Il en est de même pour M et $-M^T$:

$$\phi_\phi(t, t_0) = \phi_y^{-T}(t, t_0)$$

La dernière relation est facile à vérifier grâce à (II.15.a) et (II.15.b), puisque l'inverse et la transposition (ou la composition de ces deux opérations) de l'exponentielle d'une matrice quelconque Q s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} [e^Q]^{-1} &= e^{-Q} \\ [e^Q]^T &= e^{Q^T} \\ [e^Q]^{-T} &= e^{-Q^T} \end{aligned}$$

Finalement, grâce aux relations (II.15.a), (II.15.b), (II.16.a) et (II.16.b) il vient :

$$\begin{aligned} \phi_{\psi}(t, t_0) &= P_{\psi}^{-1}(t) e^{-M^T(t-t_0)} P_{\psi}(t_0) \\ \phi_{\psi}(t, t_0) &= \left[P^{-1}(t) e^{M(t-t_0)} P(t_0) \right]^{-T} \\ \phi_{\psi}(t, t_0) &= P^T(t) e^{-M^T(t-t_0)} P^{-1}(t_0) \end{aligned}$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} P_{\psi}^{-1}(t) &= P^T(t) \\ P_{\psi}(t_0) &= P^{-T}(t_0) \end{aligned}$$

Comme t et t₀ sont quelconques, nous pouvons déduire que :

$$P^{-1}(t) = P_{\psi}^T(t)$$

V.4.2. Deuxième méthode

P(t), A(t) et M vérifient l'équation de Lyapunov :

$$\dot{P}(t) = MP(t) - P(t)A(t)$$

qui s'écrit encore :

$$\dot{P}(t)P^{-1}(t) = M - P(t)A(t)P^{-1}(t)$$

Comme $P(t)P^{-1}(t) = \mathbf{I}_q$, nous avons par dérivation :

$$\dot{P}(t)P^{-1}(t) = -\widehat{P(t)P^{-1}(t)}$$

L'équation de Lyapunov devient alors:

$$\widehat{P(t)P^{-1}(t)} = -M + P(t)A(t)P^{-1}(t)$$

Si l'on transpose et multiplie à droite par $P^{-T}(t)$, on obtient alors :

$$\widehat{P^{-T}(t)} = (-M^T).P^{-T}(t) - P^{-T}(t).(-A^T(t))$$

Ce qui montre que $P^{-T}(t)$ est la transformation de Floquet de $-A^T(t)$ en $-M^T$.

Résultat

$-A^T(.)$ et $-M^T$ étant connues, l'algorithme précédemment établi permet de calculer $P_v(t)$. $P^{-1}(t)$ s'en déduit alors par simple transposition.

V.5. VALIDITÉ DE LA MÉTHODE

Nous illustrons dans ce paragraphe la validité de l'algorithme précédemment élaboré. Pour cela, en premier lieu, nous choisissons volontairement deux exemples de systèmes linéaires T-périodiques directement solubles. Nous pouvons ainsi comparer, dans chaque cas, la solution théorique avec la solution calculée par notre algorithme. Ensuite, nous considérons un troisième exemple dont la solution n'est pas triviale.

V.5.1. Exemple 1

Soit le système linéaire T-périodique décrit par :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 1 \\ 1 & \cos t \end{bmatrix} x(t) \quad (\text{II.17})$$

Notons par $\phi(t,0)$ sa matrice de transition (ou matrice intégrale).

a) Solution théorique

Il est facile de vérifier que le système (II.17) est commutatif.

Autrement dit (cf. chap I) :

$$A(t) \cdot \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \cdot A(t)$$

$\phi(t,0)$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \phi(t,0) &= e^{\int_0^t A(\tau) d\tau} = \exp\left(\begin{bmatrix} \sin t & t \\ t & \sin t \end{bmatrix}\right) \\ &= e^{\sin t} \cdot \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot t\right) \\ &= P^{-1}(t) \cdot e^{Mt} \end{aligned}$$

D'où :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ 0 & e^{-\sin t} \end{bmatrix}$$

b) Solution par l'algorithme

b.1) Calcul du modèle réduit

Une évaluation rapide par simulation (paragraphe V.1.3) nous donne pour le système (II.17) :

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} \#-10^{-8} & 1 \\ 1 & \#-10^{-8} \end{bmatrix} \# M$$

b.2) Calcul de P(t)

L'exécution de notre algorithme donne les premiers termes du développement en série de Fourier de P(t) :

$$\widehat{P}(t) = \begin{bmatrix} 1.266-0.271\cos(2t)+0.005\cos(4t)+\dots & 0 \\ -1.130\sin t +0.044\sin(3t) +\dots & \\ 0 & 1.266-0.271\cos(2t)+0.005\cos(4t)+\dots \\ & -1.130\sin t +0.044\sin(3t) +\dots \end{bmatrix}$$

Ce qui constitue une bonne approximation de $P(t)$.

Remarque

Il est intéressant de remarquer que $\hat{P}(t)$ ainsi obtenu correspond au développement en série de Fourier du développement en série entière de l'expression théorique de $P(t)$ déterminée auparavant.

V.5.2. Exemple 2

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) = \begin{bmatrix} 1 & \sin t \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot x(t) \quad (\text{II.18})$$

a) Solution théorique

La matrice $A(t)$ de ce système est triangulaire supérieure. (II.18) est donc directement soluble. On obtient ainsi:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5}(1 - \cos t - 2\sin t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{5}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

et

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5}(-1 + \cos t + 2\sin t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Solution par l'algorithme

De la même façon que dans l'exemple 1, on trouve pour M:

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = M \text{ à } 10^{-8} \text{ près}$$

et pour P(t) :

$$\widehat{P}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -0.2+0.2\cos t+0.4\sin t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P(t)$$

Dans ce cas, nous retrouvons exactement la solution théorique de P(t). Ce résultat remarquable était tout à fait prévisible, car le principe de l'algorithme est d'identifier une matrice périodique par une série de Fourier. Et si la matrice à identifier, en l'occurrence P(t), est théoriquement une série de Fourier finie, c'est cette expression que l'algorithme retrouve. Pour cela, il faut que la valeur de la matrice M soit suffisamment précise.

V.5.3. Exemple 3

Considérons, avec $\omega=\pi$ et $T=2$, le système T-périodique :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-0.5\sin \omega t & -2.1 \end{bmatrix} \cdot x(t) \quad (\text{II.19})$$

Ce système n'appartient à aucune des classes directement solubles définies au chapitre I. Cependant nous pouvons le résoudre par le biais d'une transformation de Floquet. Nous devons donc évaluer son modèle réduit M et en déduire le changement de variable P(t).

Une bonne estimation de M donne:

$$M = \begin{bmatrix} -0.151 & 1.003 \\ -0.716 & -1.949 \end{bmatrix}$$

Cela conduit, par le même algorithme que précédemment, à une valeur de la série de Fourier de $P(t)$ où seules les premières harmoniques sont significatives :

$$\hat{P}(t) = \begin{bmatrix} 1.036 - 0.036\cos \omega t - 0.047\sin \omega t & 0.031 - 0.031\cos \omega t + 0.001\sin \omega t \\ 0.124 - 0.124\cos \omega t + 0.094\sin \omega t & 0.972 + 0.028\cos \omega t + 0.048\sin \omega t \end{bmatrix}$$

La figure II.3 montre la simulation du système (II.19), de son modèle réduit $\dot{y}(t) = My(t)$ (trajectoires exactes) et de la trajectoire approchée $\hat{y}(t) = \hat{P}(t)x(t)$. Nous constatons que les courbes $y(t)$ et $\hat{y}(t)$ coïncident. Ceci justifie bien les approximations retenues.

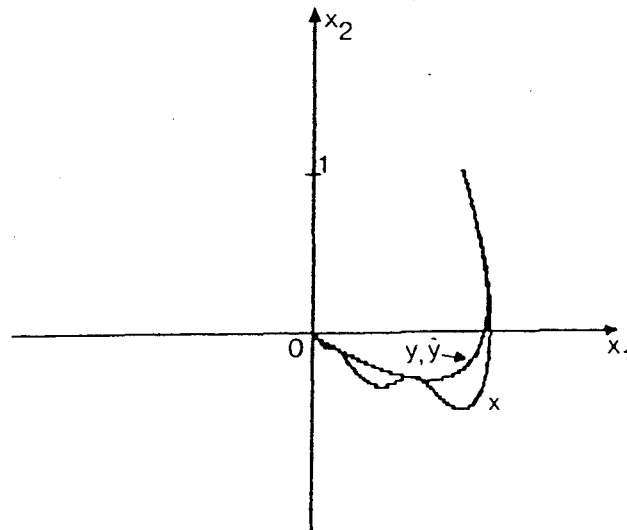


Fig. II.3

CONCLUSION

Un résultat fondamental pour notre étude a été établi : il est possible d'approcher très précisément la solution explicite $[M, P(t), P^{-1}(t)]$ du problème de Floquet pour $A(t)$ donné. Ceci va maintenant nous permettre d'aborder le problème de la commande.

Chapitre III

CHAPITRE III

SYNTHESE ET COMMANDE DES SYSTEMES LINEAIRES T-PERIODIQUES

INTRODUCTION AU PROBLEME DE PLACEMENT DE POLES

Une propriété remarquable des systèmes stationnaires commandables

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ s(t) = Cx(t) \end{cases}$$

est la suivante : pour tout spectre Σ choisi, il existe une commande en boucle fermée $u=Qx$, telle que le spectre du système

$$\dot{x}(t) = (A + BQ)x(t)$$

soit égal à Σ .

Pour $u \in \mathcal{R}^p$, $p > 1$, il a été explicitement établi [Popov, 1964] que la propriété précédente est équivalente à la propriété de commandabilité complète (commandabilité par rapport à chaque composante du vecteur de commande).

Wonham [1967] a montré que Q peut être choisie réelle si le spectre Σ contient des valeurs propres complexes avec leurs conjugués de même multiplicité.

Par ailleurs, Paraskevopoulos et King [1976] ont proposé une solution au problème de la détermination d'une matrice constante de retour de sortie K , telle que pour la commande en boucle fermée $u=Ky$, la matrice du système en boucle fermée $[A + BKC]$ soit égale à une matrice H possédant les valeurs propres désirées en boucle fermée. Utilisant les propriétés du produit de Kronecker, cette méthode ramène la détermination de la matrice de retour de sortie K du système, à un ensemble d'équations linéaires explicites en éléments de K .

Nous traitons dans ce chapitre le cas des systèmes linéaires à coefficients périodiques. Nous exposons d'abord l'essentiel des méthodes existantes que nous pouvons regrouper en trois catégories : la première consiste à proposer des solutions continues plus ou moins approchées du feedback recherché. La seconde, basée sur la notion de commande SSPH, propose des solutions continues par morceaux. Cette dernière était jusqu'à présent appliquée aux systèmes linéaires stationnaires et permettait notamment de diminuer la sensibilité de tels processus qu'une solution constante ne pouvait résorber. Nous montrerons que l'on peut généraliser cette technique à un système linéaire T-périodique pur, en effectuant la synthèse sur son système réduit constant. Enfin, la troisième catégorie cherche à déterminer, pour une classe particulière de systèmes linéaires T-périodiques, une commande de retour à gain impulsif.

I. RAPPEL DES METHODES DE SYNTHESE PAR FEEDBACK PERIODIQUE CONTINU

Position du problème

Considérons un système multivariable décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ s(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (\text{III.1.a})$$

où $x \in \mathcal{R}^q$, $u \in \mathcal{R}^p$, $s \in \mathcal{R}^m$ et $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ sont des matrices T-périodiques réelles intégrables, continues par morceaux, de dimensions appropriées.

Dans le cas des systèmes T-périodiques, le spectre de H doit être remplacé par l'ensemble des exposants caractéristiques du système en boucle fermée, c'est-à-dire par un retour de sortie :

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)K(t)C(t)]x(t)$$

ou par un retour d'état :

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)K(t)]x(t)$$

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de la détermination d'un gain de retour T-périodique $K(t)$, tel que le système en boucle fermée ait les propriétés dynamiques désirées. Nous rappelons, d'abord, l'essentiel des méthodes de synthèse analytique qui traitent de ce problème, en indiquant, au passage, les difficultés qu'elles impliquent pour leurs mise en œuvre. Nous proposons par la même occasion une nouvelle approche qui permet, dans beaucoup de cas, d'éviter ces difficultés.

I.1. THÉOREME D'EXISTENCE DE BRUNOVSKI

Les travaux de Brunovski [1969] constituent une référence remarquable pour l'étude des systèmes linéaires T-périodiques. En plus du critère de commandabilité cité au chapitre II (amélioré depuis par Shaymann), Brunovski a montré, dans le même article, l'existence et la nature des retroactions susceptibles d'améliorer les propriétés dynamiques de tels processus sans toutefois donner le moyen de les déterminer explicitement. Ce fait est similaire à celui établi par Popov et Wonham pour les systèmes linéaires stationnaires. Nous rappelons ici, sans démonstration, ce théorème de base.

Théorème

Supposons que $A(t)$ et $B(t)$ dans (III.1.a) soient de classe C^1 et que (III.1.a) soit commandable.

Alors :

i) Pour tout spectre réel $\Sigma = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_q \}$ tel que:

$$\begin{cases} \lambda_i \neq 0, i=1, \dots, q \\ \prod_{i=1}^q \lambda_i > 0 \end{cases}$$

il existe une matrice $Q(t) \in \mathcal{R}^{p \times q}$, T-périodique, telle que les multiplieurs caractéristiques de (III.1.a) en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t) Q(t)] x(t) \quad (\text{III.1.b})$$

soient égaux à λ_i , $i=1, \dots, q$.

ii) Pour tout spectre réel $\Sigma = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_q \}$ tel que $\lambda_i \neq 0, i=1, \dots, q$, il existe une matrice $Q(t)$ $2T$ -périodique telle que les multiplieurs caractéristiques de (III.1.b) (considéré comme un système $2T$ -périodique) soient égaux à $\lambda_i^2, i=1, \dots, q$.
De plus, les deux propositions i) et ii) constituent une condition suffisante pour la commandabilité complète de (III.1.a).

I.2. MÉTHODE DE MEERKOV

La méthode de Meerkov [1975] consiste, en résumé, à modifier la structure d'un système linéaire constant, pour modifier ses propriétés dynamiques. Pour cela, Meerkov introduit des perturbations "vibratoires" d'amplitudes et de pulsations assez grandes et de valeurs moyennes nulles dans certains coefficients particuliers du système. Ensuite, par une méthode de centrage de Volosov, il conclut à la stabilisation désirée.

Bien que cette procédure ait un effet tout à fait similaire à celui d'une synthèse par feedback, elle ne peut être apparentée à une telle approche. En effet, elle ne nécessite nullement la mesure de l'état ou de la sortie du système ainsi contrôlé mais plutôt l'accès physique aux paramètres du modèle. Aussi l'avons-nous citée uniquement à titre bibliographique.

I.3. MÉTHODE DE KERN : synthèse par retour de sortie

La loi de commande par retour de sortie est supposée de la forme

$$u(t) = K(t)s(t) \quad (\text{III.2})$$

où $K(t)$ est une matrice pxm, T-périodique

Le système en boucle fermée est donc

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A(t) + B(t)K(t)C(t)]x(t) \\ s(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

La dynamique (placement de pôles) désirée est définie par la détermination des exposants caractéristiques du système en boucle fermée. A ce propos on considère le système à coefficients constants

$$\dot{z}(t) = Rz(t) , z \in \mathcal{R}^q \quad (\text{III.4})$$

où les valeurs propres de la matrice R, sont les exposants caractéristiques requis pour le système en boucle fermée.

Par un changement de variable

$$x(t) = P(t)z(t) \quad (\text{III.5})$$

on a la relation suivante

$$A(t) + B(t)K(t)C(t) = \dot{P}(t)P^{-1}(t) + P(t)RP^{-1}(t) \quad (\text{III.6})$$

où P(t) est une matrice réelle, intégrable, continue par morceaux, non singulière $\forall t$, et satisfait la condition

$$P(t+T) = P(t)S \quad (\text{III.7})$$

où S est une matrice réelle telle que :

$$\begin{cases} S^2 = I_q \\ RS = SR \end{cases}$$

Si cette condition est remplie, le membre de droite de l'équation (III.6) est T-périodique, et par conséquent aussi la matrice de retour K(t), si elle existe. Le problème de placement de pôles peut être alors formulé de la manière suivante : est-il possible de trouver une matrice P(t) satisfaisant la condition (III.7), telle que l'équation (III.6) soit soluble pour la matrice de retour K(t), pour tout $t \in [0, T]$?

Si l'on note

$$V(t) = \dot{P}(t)P^{-1}(t) + P(t)RP^{-1}(t) - A(t) \quad (\text{III.8})$$

(ici V(t) et P(t) sont encore inconnues), l'équation (III.6) devient, en utilisant le produit de Kronecker (cf. chapitre II) :

$$B(t) \otimes C^T(t) \cdot \text{Vec}[K(t)] = \text{Vec}[V(t)]$$

c'est-à-dire

$$B(t) \otimes C^T(t) \begin{bmatrix} k_1^T(t) \\ \vdots \\ k_p^T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T(t) \\ \vdots \\ v_q^T(t) \end{bmatrix} \quad (III.9)$$

où k_i $i=1, \dots, p$, et v_j , $j=1, \dots, q$ sont respectivement les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de K et de V

Si l'on note maintenant

$$\bar{P}(t) = B(t) \otimes C^T(t) \quad , \quad \xi(t) = \text{Vec}[K(t)] = \begin{bmatrix} k_1^T(t) \\ \vdots \\ k_p^T(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \eta(t) = \text{Vec}[V(t)] = \begin{bmatrix} v_1^T(t) \\ \vdots \\ v_q^T(t) \end{bmatrix}$$

l'équation (III.9) peut s'écrire simplement

$$\bar{P}(t)\xi(t) = \eta(t) \quad (III.10)$$

où $\bar{P}(t)$, ξ et η sont respectivement de dimensions $q^2 \times mp$, $mp \times 1$ et $q^2 \times 1$ (les inconnues deviennent ici ξ et η).

On se ramène donc à un ensemble d'équations linéaires explicites en éléments de K . Il est à remarquer d'ailleurs que l'équation (III.10) constitue un système où le nombre d'équations à résoudre est supérieur à celui des inconnues (éléments de K), puisque $q^2 > mp$.

Pour résoudre (III.10) en $\xi(t)$, on cherche un espace vectorielle d'ordre k , $1 \leq k \leq mp$, tel que

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) \xi_i \quad (III.11)$$

satisfasse l'équation (III.10), où $a_i(t)$, $i=1, \dots, k$, sont des fonctions scalaires continues T-périodiques et ξ_i , $i=1, \dots, k$, les vecteurs de base

de cet espace. Pour construire ces vecteurs de base, on prend k nombres ($1 \leq k \leq mp$)

$$0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k < T$$

et on essaie de résoudre l'équation (III.10) pour ces instants discrets.

Pour résoudre

$$\bar{P}(t_1)\xi_1 = \eta_1 \quad (III.12)$$

où $\xi_1 = \xi_1(t_1)$ et $\eta_1 = \eta(t_1)$, pour ξ_1 , soit Q_1 une matrice de transformation $q^2 \times q^2$ non singulière telle que

$$Q_1 \bar{P}(t_1) = \begin{bmatrix} P_1(t_1) \\ \dots\dots \\ P_2(t_1) \end{bmatrix}$$

où $P_1(t_1)$ correspond aux lignes linéairement indépendantes de $\bar{P}(t_1)$ tandis que $P_2(t_1) = 0$

Si $\bar{P}(t_1)$ est de rang maximal, alors les dimensions $P_1(t_1)$ et de $P_2(t_1)$ sont respectivement $mp \times mp$ et $(q^2 - mp) \times mp$, et

$$\text{rang}[P_1(t_1)] = \text{rang}[\bar{P}(t_1)] = mp$$

En appliquant Q_1 à l'équation (III.12), il vient

$$Q_1 \bar{P}(t_1)\xi_1 = \begin{bmatrix} P_1(t_1) \\ \dots\dots \\ 0 \end{bmatrix} \xi_1 = Q_1 \eta_1 = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \dots\dots \\ \psi_1 \end{bmatrix}$$

Cette équation a une solution, pourvu que $V(t_1)$ soit tel que

$$\psi_1 = 0 \quad (III.13)$$

A condition que la relation (III.13) soit satisfaite, (III.11) se ramène à

$$P_1(t_1)\xi_1 = \phi_1 \quad (III.14)$$

Si maintenant $\text{rang}[P_1(t_1)] = pm$, alors $P_1(t_1)$ est non singulière, et donc

$$\xi_1 = P_1^{-1}(t_1)\phi_1$$

D'autre part, si $\text{rang}[P_1(t_1)] < mp$, alors l'équation (III.14) est un système indéterminé d'équation linéaires, ayant une infinité de solutions. Avec ξ_1 , on dispose du premier vecteur de base de l'espace vectoriel cherché, et s'il existe maintenant une fonction scalaire $a_1(t)$ T-périodique, qui satisfait

$$\bar{P}(t)a_1(t)\xi_1 = \eta(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

alors le problème de placement de pôles est résolu. Sinon (si $a_1(t)$ ne peut être trouvé), et si le problème est soluble, il existe un nombre t_2 tel que

$$\bar{P}(t_2)\xi_2 = \eta_2$$

avec ξ_2 linéairement indépendant de ξ_1 ($\xi_2 = \xi_2(t_2) \neq \alpha \cdot \xi_1, \alpha \neq 0$). Soit alors Q_2 une matrice de transformation $q^2 \times q^2$ non singulière telle que

$$Q_2 \bar{P}(t_2)\xi_2 = \begin{bmatrix} P_1(t_2) \\ \dots \\ P_2(t_2) \end{bmatrix} \xi_2 = Q_2 \eta_2 = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \dots \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.15)}$$

où $P_1(t_2)$ et $P_2(t_2)$ ont les mêmes propriétés que dans la première étape.

De (III.15) on obtient la condition suffisante suivante, pour résoudre (III.10)

$$\psi_2 = 0$$

S'il existe des fonctions scalaires T-périodiques $a_1(t)$ et $a_2(t)$ telles que la relation

$$\bar{P}(t)[a_1(t)\xi_1 + a_2(t)\xi_2] = \eta(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

soit satisfaite, alors le problème est résolu, sinon on choisit t_3, \dots , et on continue ce procédé jusqu'à $k \leq pm$, tant que cela est nécessaire.

Cet algorithme est à la base (en plus du théorème de Floquet-Lyapunov-Yakubovitch) de la démonstration du théorème qui va suivre.

Théorème

Soit R une matrice $q \times q$ réelle avec des valeurs propres données $\lambda_1 \dots \lambda_q$

Alors une condition suffisante pour que le système en boucle fermée (III.3) ait les exposants caractéristiques $\lambda_1 \dots \lambda_q$, est l'existence d'une matrice réelle $P(t)$ satisfaisant la condition (III.7), telle que :

$$\psi_1 = 0, \dots, \psi_k = 0, \quad 1 \leq k \leq mp$$

Les lignes $k_i(t)$ de la matrice de retour T-périodique $K(t)$ sont données par :

$$\xi_s(t) = \begin{bmatrix} k_1^T(t) \\ \vdots \\ k_m^T(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k a_i(t) \xi_i$$

Remarque

La difficulté de mise en œuvre d'un tel théorème vient de plusieurs facteurs :

- aucune condition d'existence simple n'est donnée.
- le calcul des $a_i(t)$ et des instants t_i n'est pas systématique et doit être mené par tâtonnements.

II. SUR UNE NOUVELLE METHODE

II.1. FORMULATION DU PROBLEME

Reprenons le problème pour un système (S) donné

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ A(\cdot), B(\cdot) \text{ T-périodiques} \end{cases}$$

La dynamique de (S) est déterminée par les valeurs propres du système (Sr) associé par une transformation de Floquet-Lyapunov $P(t)$:

$$(Sr) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = My(t) + B_r(t)u(t) \\ y = P(t)x \\ B_r(t) = P(t)B(t) \\ M = [\dot{P}(t) + P(t)A(t)]P^{-1}(t) \end{cases}$$

Si l'on suppose que les exposants caractéristiques de (S) (valeurs propres de M) ne sont pas satisfaisants et que la commande u peut être construite sous la forme :

$$u(t) = F(t)x(t)$$

alors le problème de placement de pôles peut être formulé de la manière suivante : *existe-t-il une matrice F(t) (gain de retour d'état) telle que le système (S) en boucle fermée, noté (S_f) :*

$$(S_f) \quad \dot{x}_f(t) = [A(t) + B(t)F(t)] \cdot x_f(t) = A_f(t) \cdot x_f(t)$$

ait les exposants caractéristiques désirés ? autrement dit telle que le système (\bar{S}_f) associé par une transformation de Floquet Lyapunov T(t) à (S_f)

$$(\bar{S}_f) \quad \begin{cases} \dot{z} = \bar{M}z \\ z = T(t)x_f \\ \bar{M} = [\dot{T}(t) + T(t)A_f(t)] \cdot T^{-1}(t) \end{cases}$$

ait pour valeurs propres, les exposants caractéristiques désirés pour (S_f).

Ceci dit, nous pouvons noter que les seules données de ce problème sont les matrices A(.), et \bar{M} (M peut être évaluée numériquement à partir de A(t)), et qu'en revanche la détermination de F(t) est subordonnée à la connaissance de T(.).

A ce stade, l'algorithme que nous avons développé au chapitre II pour calculer des transformations de Floquet-Lyapunov, ne peut être appliqué ici pour déterminer T(.), étant donné que l'on ne connaît pas la matrice $A_f(t) = A(t) + B(t)F(t)$ (F(.) inconnue recherchée)

Nous allons montrer dans le paragraphe suivant que l'on peut contourner cette difficulté et déterminer une transformation T(t) par notre algorithme.

II.2. APPROCHE D'UNE SOLUTION GÉNÉRALE

Une solution au problème de placement de pôles peut être déterminée, sous certaines conditions, en considérant deux démarches parallèles, l'une partant du système initial (S) pour aboutir aux exposants caractéristiques désirés, et la seconde partant du système réduit (Sr) pour aboutir à un système dont les valeurs propres sont ces mêmes exposants caractéristiques. Cela peut se schématiser de la manière suivante :

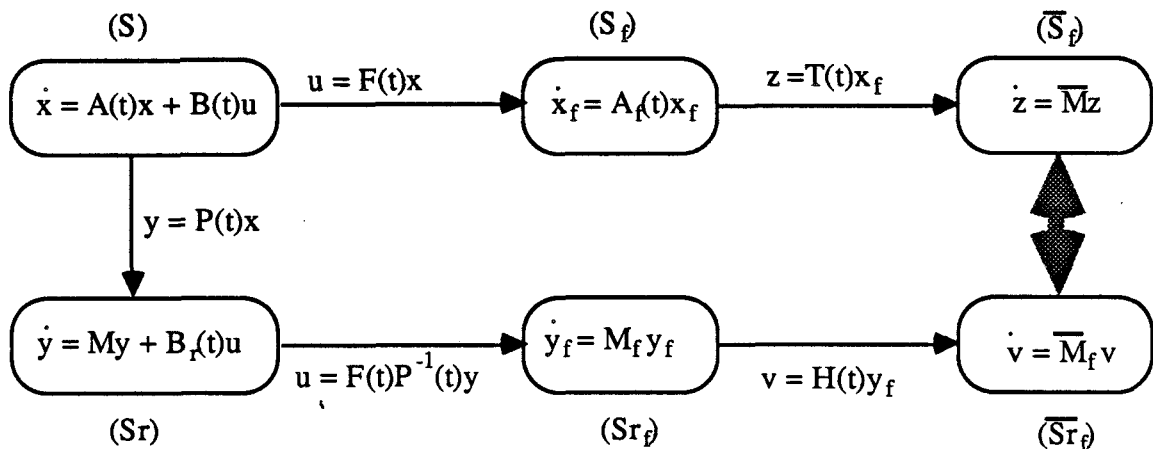


Fig. III.1

où P(t), T(t) et H(t) sont des transformations de Floquet-Lyapunov. Il est à remarquer que ce schéma représente une approche générale, où \bar{M}_f est semblable à \bar{M} et H(t) est T-périodique puisque $M_f(t) = M + B_r(t)F(t)P^{-1}(t)$ est T-périodique. Nous avons donc $T(t) = H(t)P(t)$, mais comme M_f est inconnue, nous ne pouvons déterminer H(t) d'une manière générale. Par contre, nous en proposons une solution particulière qui permet d'atteindre le même objectif de manière systématique.

II.3. SOLUTION PARTICULIERE

Une solution intéressante peut être déduite de la démarche précédente. Si l'on note $L(t) = B(t)F(t)$, les matrices A_f et M_f peuvent alors s'écrire :

$$A_f(t) = A(t) + L(t)$$

$$M_f(t) = M + \bar{L}(t)$$

où

$$\bar{L}(t) = P(t)L(t)P^{-1}(t)$$

S'il existe $F(t)$ tel que

$$\bar{L}(t) = \bar{L}_0 \quad (\text{III.16})$$

où \bar{L}_0 est une matrice constante telle que M_f ait les valeurs propres désirées, alors le problème de placement de pôles est résolu. En effet, dans ce cas nous pouvons considérer que

$$\bar{M} = \bar{M}_f = M_f = M + \bar{L}_0$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} H(t) &= I_q \\ T(t) &= H(t)P(t) = P(t) \end{aligned}$$

Cela signifie simplement que $P(t)$ (que nous savons dorénavant calculer) est une solution particulière de l'équation de Lyapunov

$$\dot{T}(t) = \bar{M}T(t) - T(t)A_f(t) \quad (\text{III.17})$$

où A_f s'écrit :

$$A_f(t) = A(t) + L(t) = A(t) + P^{-1}(t)\bar{L}_0P(t) \quad (\text{III.18})$$

Notons que le choix de \bar{L}_0 dépend de celui des exposants caractéristiques désirés.

Nous venons donc de montrer que $P(t)$ est une solution de l'équation de Lyapunov (III.17), étant entendu que cette fois, on peut déterminer d'autres solutions de (III.17) à l'aide de l'algorithme du chapitre II, une fois fixé \bar{L}_0 ; la matrice $L(t)$ se déduit alors de (III.17) par :

$$\begin{aligned} L(t) = B(t)F(t) &= T^{-1}(t)\dot{T}(t) + T^{-1}(t)\bar{M}T(t) - A(t) \\ &= V(t) \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Ceci constitue une légère amélioration par rapport à la méthode de Kern, puisque la transformation $T(t)$ existe toujours (c'est la transformation de Floquet-Lyapunov de (III.18) en \bar{M})

Enfin, il reste la question : comment déterminer explicitement la matrice $F(t)$? Pour y répondre, nous avons le choix de résoudre l'équation (III.19) en $F(t)$ [après calcul de $T(t)$ c'est-à-dire de $V(t)$] ou l'équation (III.16) en $F(t)$ (une fois fixé \bar{L}_0 qui répond à la dynamique désirée). Nous adoptons ce dernier cas qui correspond à la solution particulière $T(t) = P(t)$, laquelle répond à la même question, tout en nécessitant moins de calcul.

Nous cherchons donc $F(t)$ tel que

$$B(t)F(t) = P^{-1}(t)\bar{L}_0P(t) \quad (\text{III.20})$$

où \bar{L}_0 est une matrice constante telle que

$$\bar{M} = M + \bar{L}_0$$

ait la valeur désirée (et notamment le spectre désiré). Une condition suffisante pour que (III.20) ait une solution unique en $F(t)$ est que $B(t)$ soit de rang maximal quelque soit $0 \leq t \leq T$. $F(t)$ peut alors s'écrire explicitement :

$$F(t) = [B^T(t)B(t)]^{-1} B^T(t)P^{-1}(t)\bar{L}_0P(t)$$

Si cette condition de rang n'est pas satisfaite, l'équation (III.20) admet en général une infinité de solutions ou bien même des solutions à gains infinis. Dans ce cas les exposants caractéristiques ne peuvent être tous choisis arbitrairement.

Nous pouvons résumer cette approche par la proposition suivante:

Proposition 1

Soient (S) un système T-périodique commandable

$$(S) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

et $P(t)$ la transformation de Floquet-Lyapunov, qui réduit le système (S) en régime libre ($u(t) \equiv 0$) en (Sr)

$$(Sr) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = My(t) \\ M = [\dot{P}(t) + P(t)A(t)]P^{-1}(t) \end{cases}$$

Soit \bar{M} une matrice $q \times q$ réelle avec des valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_q$ données.

Supposons, enfin, que la commande u puisse s'écrire

$$u(t) = F(t)x(t)$$

où $F(t)$ est une matrice réelle T-périodique.

Alors une condition suffisante pour que le système (S) en boucle fermée

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)F(t)]x(t)$$

ait les exposants caractéristiques $\lambda_1 \dots \lambda_q$ (ou soit entièrement assigné), est que $B(t)$ soit de rang maximal pour tout $t \in [0, T]$. Une solution explicite du gain de retour d'état $F(t)$ s'écrit alors

$$F(t) = [B^T(t)B(t)]^{-1} B^T(t)P^{-1}(t)\bar{L}_0P(t)$$

où \bar{L}_0 est une matrice réelle constante telle que $\bar{L}_0 = \bar{M} - M$

Le chapitre IV sera consacré à des exemples complets de synthèse, notamment par ce type de méthode.

III. SYNTHÈSE PAR UNE COMMANDE SSPH (*Sampled State Periodic Hold*)

III.1. PRINCIPE D'UNE COMMANDE SSPH

Le concept d'une commande SSPH consiste à générer une commande fonction linéaire périodique de l'état (ou sortie) échantillonné avec une période fixe. Le principe d'un retour à gain périodique apparaît dans [Laurent, Borne et Gentina, 1970] (voir aussi [Pillet et Al, 1982]). L'appellation SSPH est introduite par la suite dans [Chammas et Leondes, 1978] pour le placement de pôles, la réponse en temps fini des systèmes linéaire stationnaires et la commande optimale des systèmes linéaires non stationnaires. Il a été repris par

Kabamba [1986] pour effectuer le placement de pôles des systèmes linéaires T-périodiques, où la période d'échantillonnage est prise égale à celle du système considéré. Nous pouvons schématiser ce principe par la boucle d'asservissement suivante :

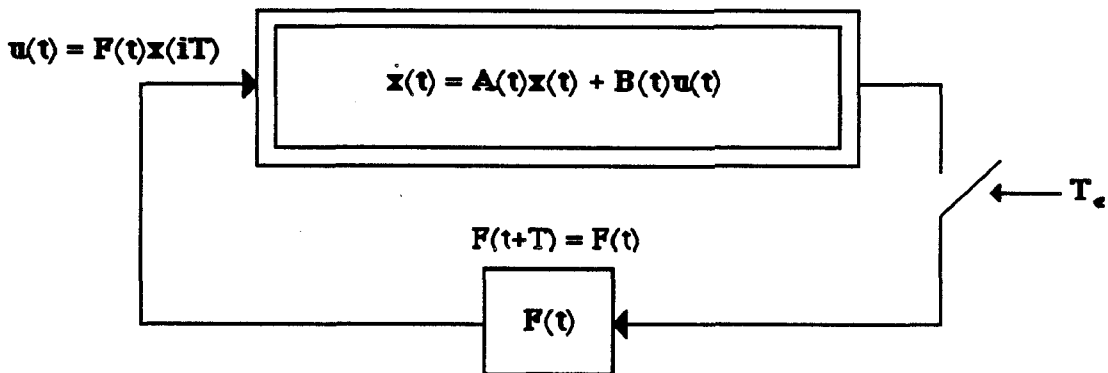


Fig. III.2

Si $A(t)$, $B(t)$ sont T-périodiques on prend $T_e = T$

Dans le cas où $B(t)$ n'est pas de rang maximal, la méthode proposée au paragraphe II conduisait à une infinité de solutions du gain périodique continu, dont certaines sont non bornées. Une synthèse par une commande SSPH permet de lever cette difficulté, principalement en raison du fait qu'elle effectue le placement de pôles sur la matrice de monodromie (multiplieurs caractéristiques).

Un autre fait remarquable de la synthèse par SSPH est que la matrice de monodromie obtenue en boucle fermée peut être singulière. C'est cette propriété qui permet d'obtenir une réponse pile (c.à.d. en temps fini) dans un système linéaire à sortie continue.

III.2. MÉTHODE DE KABAMBA : solution continue par morceaux

III.2.1. Principe

Considérons le système (S) du paragraphe II.1 et notons par $\phi(T,0)$ sa matrice de monodromie. La commande SSPH est définie par :

$$\begin{cases} u(t) = F_s(t).x(iT) , & iT \leq t \leq (i+1)T \\ F_s(t+T) = F_s(t) \end{cases} \quad (III.21)$$

Si l'on pose $t=iT+\sigma$, $\sigma \in [0,T[$ et vue la périodicité de $\phi(t,\tau)$, c'est-à-dire:

$$\phi(t+iT,\tau+iT) = \phi(t,\tau) \quad \forall t, \tau \quad (\text{III.22})$$

la transition de (S) en boucle fermée obéit à la loi :

$$x(iT+\sigma) = \left[\phi(\sigma,0) + \int_0^\sigma \phi(\sigma,\tau)B(\tau)F_s(\tau)d\tau \right] x(iT) , \quad \sigma \in [0,T[\quad (\text{III.23})$$

La notion de matrice de monodromie s'étend à la commande SSPH, c'est la matrice de transition sur une période de la boucle fermée, que nous noterons $\psi(T,0)$. Nous avons alors:

$$\psi(T,0) = \phi(T,0) + \int_0^T \phi(T,\tau)B(\tau)F_s(\tau)d\tau \quad (\text{III.24})$$

Partant de ce fait, Kabamba a pu montrer l'équivalence du placement de pôles (de la matrice de monodromie) et de la commandabilité du système (S). Nous résumons cela dans les deux propositions suivantes:

KI. *les valeurs propres de la matrice de monodromie de (S) peuvent être arbitrairement assignées par une commande SSPH de telle façon qu'elles apparaissent sous forme de paires de complexes conjuguées si et seulement si (S) est commandable. Une solution du problème de placement de pôles s'écrit :*

$$F_s(t) = B^T(t)\phi^T(T,t)F_c \quad (\text{III.25})$$

où $F_c \in \mathcal{R}^{q \times q}$ est une matrice constante telle que $\phi(T,0) + W(T,0)F_c$ ait les valeurs propres désirées.

En effet avec la solution (III.25) la matrice de monodromie en boucle fermée devient :

$$\begin{aligned} \psi(T,0) &= \phi(T,0) + \int_0^T \phi(T,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\phi^T(T,\tau)F_c d\tau \\ &= \phi(T,0) + W(T,0)F_c \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

KII. La matrice de monodromie (S) peut être entièrement assignée par une commande SSPH si et seulement si (S) est commandable sur une période.

En effet, dans le cas où $W(T,0)$ est inversible, il vient de (III.26) :

$$F_c = W^{-1}(T,0)[\psi - \phi(T,0)]$$

où ψ est la matrice de monodromie désirée.

Notons enfin, que ces deux propositions sont établies en se basant sur la propriété (III.22), laquelle est commune aux systèmes linéaires constants et ceux à coefficients périodiques. Par ailleurs, vu que (III.25) nécessite la connaissance préalable de la matrice de transition $\phi(T,t)$, cette solution n'était généralement appliquée de manière systématique que pour les systèmes linéaires stationnaires. Ce que nous proposons au paragraphe III.4 permettra d'étendre cette approche, de manière aussi systématique à une large classe de systèmes linéaires T-périodiques purs.

Remarque

Comme la deuxième méthode qui suivra, cette approche permet de contourner le cas où une solution continue $F(t)$ devient non bornée, cas qui peut intervenir par une commande continue

III.2.2. Exemple (Kabamba, 1986)

Considérons avec $q=2$ et $p=1$ le système (stationnaire) commandable :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -0.6 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{III.27})$$

Ses valeurs propres sont $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$, il est donc instable.

Supposons que l'on veuille le stabiliser par un retour d'état tel que les valeurs propres soient -1 et -2 . En utilisant un retour d'état stationnaire, l'unique gain est $[0.6, -6]$, conduisant au système bouclé :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t)$$

On peut montrer que cette synthèse par un retour stationnaire n'est pas tout à fait désirable. En effet l'angle entre les deux vecteurs propres est petit : 5.71° , conduisant à une haute sensibilité et à un régime transitoire long (comme on verra par la suite fig. III.3).

Utilisons la commande SSPH avec par exemple $T=1$. Puisque le système (III.27) est 1-périodique et commandable sur $[0, 1]$, nous pouvons assigner entièrement sa matrice de monodromie. A propos de comparaison, choisissons une matrice de monodromie avec les valeurs propres e^{-1} et e^{-2} . La commande stationnaire et la commande SSPH vont décroître avec la même vitesse exponentielle. Supposons que l'on désire la matrice de monodromie :

$$\Psi = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$$

la proposition **KII** conduit au gain de retour SSPH suivant :

$$F_s(t) = \left[0.6e^{1-t} - 0.6e^{2(1-t)}, -2e^{1-t} + 3e^{2(1-t)} \right] \cdot F_c$$

$$F_c = \begin{bmatrix} -0.06622 & -0.906063 \\ 0.22073 & 2.0569 \end{bmatrix}$$

qui permet d'effectuer le placement de pôles désiré pour la matrice de monodromie.

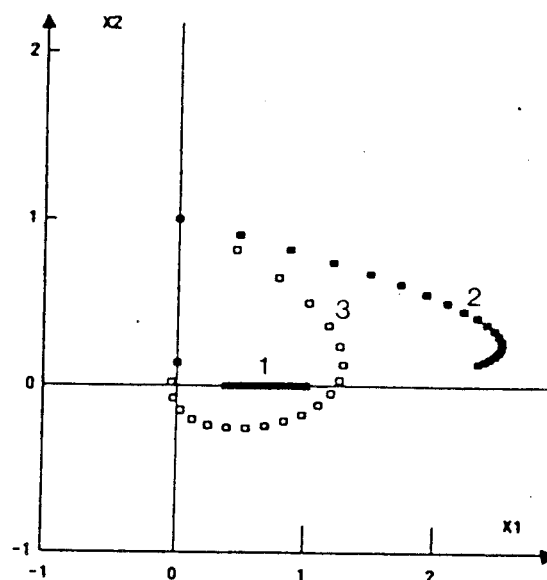


Fig. III.3

La figure III.3 représente, dans le plan de phase (x_1, x_2) , les colonnes des matrices de transition en boucle fermée sur $[0, 1]$ pour les deux stratégies de commande. Les premières colonnes (courbe (1)) sont approximativement identiques, commençant et finissant respectivement à $(1, 0)$ et $(e^{-1}, 0) = (0.368, 0)$. Les secondes colonnes sont représentées respectivement par la courbe (2) pour la commande stationnaire et la courbe (3) pour la commande SSPH. Elles commencent ensemble à $(0, 1)$ mais finissent respectivement à $(10(e^{-1} - e^{-2}), e^{-2}) = (2.33, 0.135)$ et $(0, e^{-2}) = (0, 0.135)$. Il paraît clair que l'amplitude du régime transitoire a été réduite par l'utilisation de la commande SSPH.

En conclusion, étant données les valeurs propres désirées en boucle fermée, le gain constant est unique, alors que la commande SSPH permet d'assigner entièrement la matrice de monodromie à n'importe quelle valeur, conférant ainsi au système asservi de meilleurs performances.

III.3. MÉTHODE DE AL RAHMANI-FRANKLIN : solution constante par morceaux

Une autre approche du problème de placement de pôles consiste à chercher un feedback T-périodique constant par morceaux qui présente l'avantage d'être facile à implanter dans une chaîne de commande par ordinateur en temps réel.

Dans ce sens, Al Rahmani et Franklin [1989] ont développé une méthode de synthèse basée sur le concept de commande SSPH, en introduisant la notion de Grammien de commandabilité généralisé, qui permet d'effectuer le placement de pôles désiré à l'aide d'un feedback vérifiant les propriétés citées plus haut.

Nous exposons ici le principe de cette approche, qui était également appliquée uniquement aux systèmes linéaires constants de manière générale, du fait qu'elle nécessite la connaissance explicite de la matrice de transition $\phi(T, t)$.

III.3.1. Principe

Soit r un entier positif et $\Delta = (t_2 - t_1)/r$, où t_1 et t_2 sont deux instants quelconques.

Le Grammien de commandabilité généralisé est la matrice de commandabilité définie par (cf. chap.II) :

$$\mathcal{H}_r(t_2, t_1) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=0}^{r-1} \left[\int_{i\Delta+t_1}^{(i+1)\Delta+t_1} \phi(t_2, \tau) B(\tau) d\tau \cdot \int_{i\Delta+t_1}^{(i+1)\Delta+t_1} B^T(\tau) \phi^T(t_2, \tau) d\tau \right]$$

La limite de $\mathcal{H}_r(t_2, t_1)$ quand r tend vers l'infini est le Grammien de commandabilité usuel $W(t_2, t_1)$.

La commande $u(t)$ s'écrit

$$u(t) = G(t)x(iT) \quad (H.28)$$

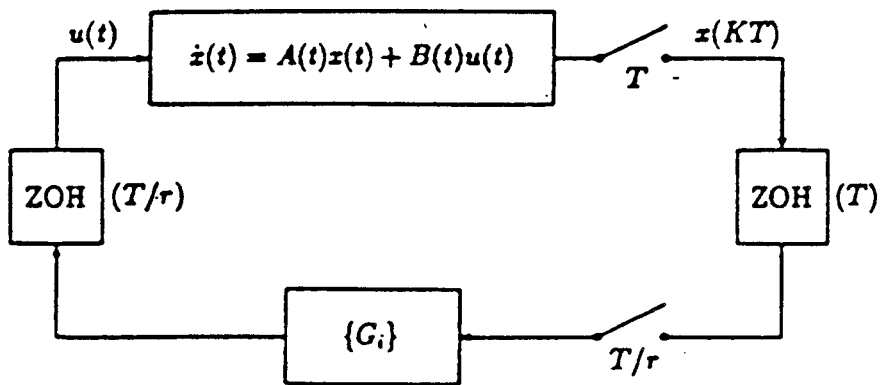
On cherche $G(t)$ sous la forme d'une séquence périodique $\{G_j\}$ de gains constants sur des sous-intervalles de $[0, T]$ de longueur fixe $\Delta = T/r$, c'est-à-dire :

$$G(t) = G_j \quad \text{pour } iT + j\Delta \leq t \leq iT + (j+1)\Delta$$

La périodicité de $G(t)$ peut s'exprimer par les deux écritures suivantes :

$$\begin{cases} G(t+T) = G(t) \\ G_{j+r} = G_j, \quad j = 0, 1, \dots, r-1 \end{cases} \quad (III.29)$$

La figure III.4 représente le schéma fonctionnel de ce principe.



ZOH : bloqueur d'ordre zero

Commande constante par morceaux à gain périodique discret

Fig. III.4

Par une démarche tout à fait analogue à celle de Kabamba, Al Rahmani & Franklin ont montré les propositions suivantes:

RI. *L'ensemble des valeurs propres de la matrice de monodromie $\psi(T,0)$ en boucle fermée peut être arbitrairement assigné à un ensemble de paires de complexes conjugués si et seulement si le système (III.1) est commandable, i.e. si et seulement s'il existe un entier positif r tel que la paire $(\phi(T,0), \mathcal{H}_r(T,0))$ soit commandable. Une solution de la forme (III.29) est donnée par :*

$$G_j = \frac{1}{T} \int_{j\frac{T}{r}}^{(j+1)\frac{T}{r}} B^T(\tau) \phi^T(T, \tau) d\tau \cdot L_r \quad (III.30)$$

où L_r est une matrice réelle constante telle que

$$\phi(T,0) + \mathcal{H}_r(T,0)L_r$$

ait les valeurs propres désirées.

RII. *La matrice de monodromie en boucle fermée $\psi(T,0)$ peut être entièrement assignée si et seulement si le système (III.1) est*

commandable sur une période, i.e. si et seulement s'il existe un entier r positif tel que $\mathcal{H}_r(T,0)$ soit non singulier. Dans ce cas L_r s'écrit :

$$L_r = \mathcal{H}_r^{-1}(T,0) [\psi(T,0) - \phi(T,0)]$$

RIII. Si $u(t) \in \mathcal{R}$, il est nécessaire que $r \geq q$ pour que $\psi(T,0)$ puisse être choisie arbitrairement.

RIV. La matrice d'état en boucle fermée d'un système linéaire stationnaire commandable peut être arbitrairement assignée par le feedback de la proposition **RII**.

RV. La solution de Kabamba est un cas particulier de la solution (III.30) pour $r = \infty$.

Nous pouvons noter que la principale difficulté avec cette méthode est la recherche d'une valeur de r satisfaisant les conditions de commandabilité requises pour le placement de pôles. On sait simplement que : si $W(t_2, t_1)$ est inversible alors il existe r tel que $\mathcal{H}_r(T,0)$ le soit aussi. On peut à la limite élaborer un algorithme itératif de recherche d'une valeur adéquate de r , mais si r devient grand alors cette méthode de synthèse perd un peu de son intérêt. Il est alors préférable de chercher une solution continue ou, si cela n'est pas possible, appliquer la méthode de Kabamba pour déterminer une solution continue par morceaux.

III.3.2. Exemple (Al-Rahmani & Franklin, 1989)

a) Considérons le système stationnaire commandable

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{III.31})$$

de valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (instable). On peut considérer (III.31) comme étant T-périodique, avec par exemple $T=1$.

Supposons que l'on désire assigner les valeurs propres de sa matrice de monodromie en boucle fermée $\psi(T,0)$ à $\lambda_1 = \lambda_2^* = -1 + 2j$ (λ_2^* désigne ici le complexe conjugué de λ_2 , et j le complexe pur tel que $j^2 = -1$).

Par un feedback constant classique, l'unique solution est $K=[-4,-4]$, conduisant à la matrice de boucle fermée:

$$A + BK = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Par la proposition **RV**, $\psi(T,0)$ peut être choisie arbitrairement. Prenons par exemple $\psi(T,0) = e^R$ où R est la matrice :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1.6 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Le spectre de R est $\Sigma = \{-1 \pm j2\}$ comme souhaité. Les figures III.5-8, montrent la variable d'état $x_1(t)$ et la commande $u(t)$ pour des conditions initiales $x_1(0) = -x_2(0) = -5$, avec $r=2$ et $r=100$. Les réponses correspondantes pour le feedback constant sont aussi représentées. Le cas $r=100$ est équivalent en pratique à la proposition **RV**.

b) On prend cette fois $T=0.5$ et $\psi(T,0) = e^{(A+BK)T}$ où $A+BK$ est la matrice obtenue en a). Comme le montre la figure III.9, la réponse obtenue pour un gain constant et celle relative au feedback constant par morceaux coïncident, mais la dernière solution est avantageuse. La figure III.10 montre la loi de commande dans les deux cas.

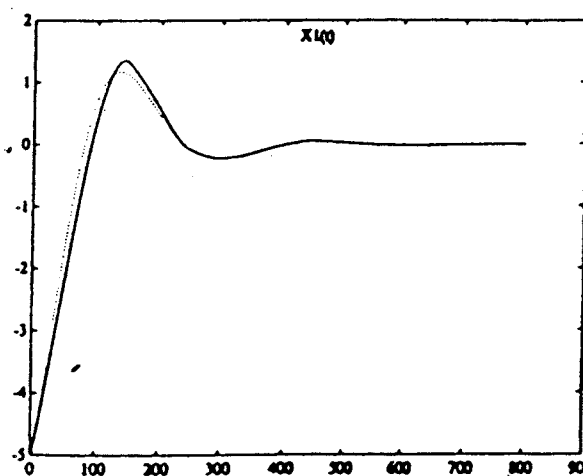


Fig.III.5

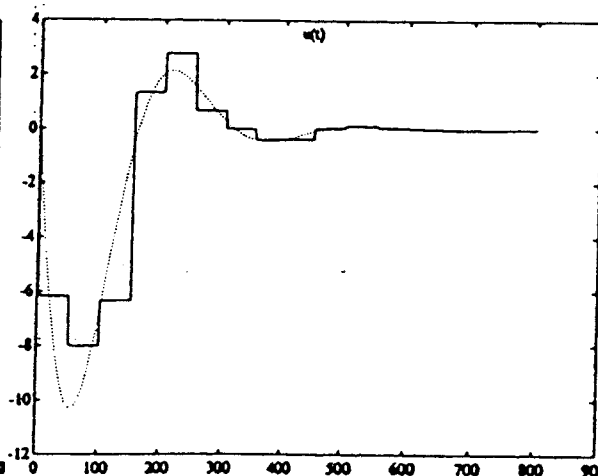


Fig.III.6

echelle de temps : 100/s

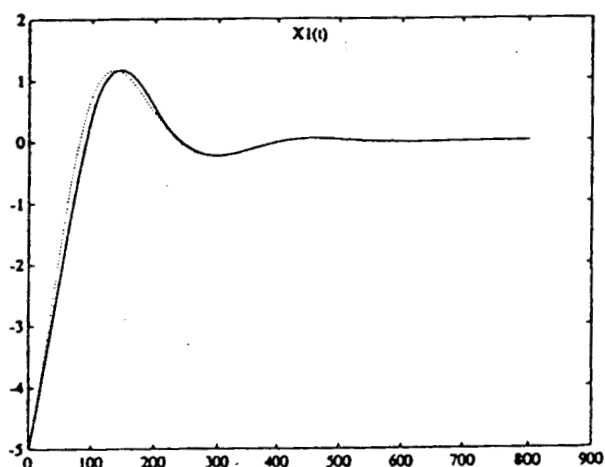


Fig.III.7

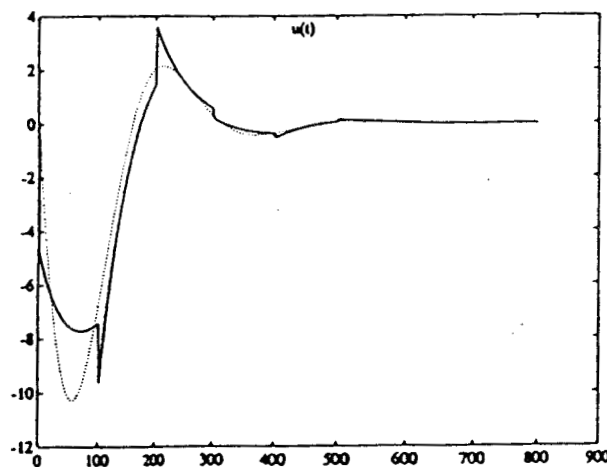


Fig.III.8

echelle de temps : 100/s

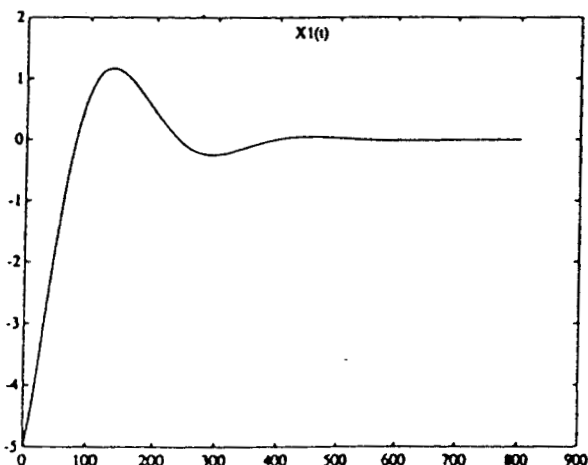


Fig.III.9

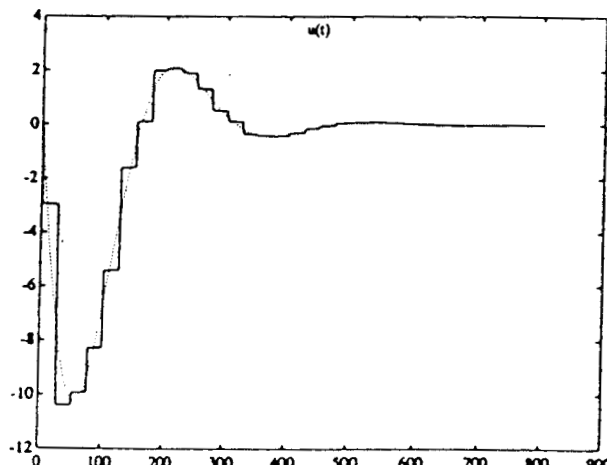


Fig.III.10

echelle de temps : 100/s

III.4. GÉNÉRALISATION AUX SYSTEMES LINÉAIRES T-PÉRIODIQUES PURS

Nous avons déjà fait remarquer que l'application des méthodes de synthèse par une commande SSPH se heurtait au calcul de la matrice de transition dans le cas où les coefficients du système ne sont plus constants. Nous allons voir, en premier lieu, que l'algorithme de calcul de la transformation de Floquet (cf. chap. II) permet de lever cette difficulté. En fait, pour des raisons d'ordre

pratique, nous montrerons qu'il est plus commode d'effectuer la synthèse sur le modèle réduit.

III.4.1. Problème de synthèse directe

Considérons le système (S) décrit par l'équation d'état:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t) u(t) \quad (\text{III.32})$$

et notons par $\phi(t, t_0)$ sa matrice de transition.

Par le changement de variable $y(t) = P(t)x(t)$ son modèle réduit (S_R) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = My(t) + B_R(t) u(t) \\ B_R(t) = P(t)B(t) \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

M étant une matrice constante, sa matrice de transition est :

$$\phi_R(t, t_0) = e^{M(t-t_0)}$$

De manière générale nous avons donc (cf. chapitre II) :

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0) &= P^{-1}(t)\phi_R(t, t_0)P(t_0) \\ &= P^{-1}(t)e^{M(t-t_0)}P(t_0) \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Etant données les conditions de commandabilité requises pour le placement de pôles, la commande SSPH continue par morceaux s'écrit:

$$\begin{cases} u(t) = F_s(t)x(iT) \\ F_s(t) = B^T(t)\phi^T(T, t)F_c \\ F_s(t+T) = F_s(t) \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

De même, nous pouvons écrire, pour la commande SSPH constante par morceaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = G(t)x(iT) \\ G(t) = G_j, \quad iT+j\Delta \leq t \leq iT+(j+1)\Delta, \quad \Delta = \frac{T}{r}, \quad r > 0 \\ G_j = \frac{r}{T} \int_{j\Delta}^{(j+1)\Delta} B^T(\tau)\phi^T(T,\tau)d\tau.L_r, \quad j=0, 1, \dots, r-1 \\ G(t+T) = G(t) \quad \text{ou} \quad G_{j+r} = G_j \end{array} \right. \quad (\text{III.36})$$

A ce stade, nous pouvons considérer, à première vue, que le problème est résolu. En effet, nous pouvons calculer $P(t)$ et $P^{-1}(t)$ par l'algorithme proposé au chapitre II et en déduire $\phi(T,t)$ par la relation (III.34). En fait, cette façon de calculer multiplie, de manière générale, les erreurs d'approximation de $P(t)$ et de $P^{-1}(t)$. Nous pouvons éviter cela en effectuant la synthèse sur le modèle réduit.

III.4.2. Synthèse sur le système réduit

a) Commande SSPH continue par morceaux

Nous montrons d'abord la proposition suivante :

Proposition 2

Le système (III.32) est commandable sur $[t_1, t_2]$ si et seulement si son modèle réduit (III.33) est commandable sur $[t_1, t_2]$

Preuve

Le système (III.33) est commandable sur $[t_1, t_2]$ si et seulement si son Grammien de commandabilité :

$$W_R(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \phi_R(t_2, \tau) B_R(\tau) B_R^T(\tau) \phi_R^T(t_2, \tau) d\tau$$

est inversible. Or comme $B_R(t) = P(t)B(t)$ et vue la relation (III.34), nous avons :

$$W_R(t_2, t_1) = P^{-1}(t_2)W(t_2, t_1)P^T(t_2) \quad (\text{III.37})$$

où $W(t_2, t_1)$ désigne le Grammien de commandabilité du système initial (III.32). Donc $W_R(t_2, t_1)$ est inversible si et seulement si $W(t_2, t_1)$ l'est.

Supposons maintenant que l'on veuille assigner la matrice de monodromie de (III.33) en boucle fermée à une valeur donnée $\Psi_R(T, 0)$ par la commande :

$$\begin{aligned} u(t) &= F_{sR}(t)y(iT) \\ F_{sR} &= B_R^T(t)\phi_R^T(T, t)F_{cR} \\ \phi_R(T, t) &= e^{M(T-t)} \end{aligned}$$

En notant $t=iT+\sigma$, $\sigma \in [0, T]$, la transition d'état de (III.33) obéit à la loi:

$$\begin{aligned} y(iT+\sigma) &= \left[\phi_R(\sigma, 0) + \int_0^\sigma \phi_R(\sigma, \tau)B_R(\tau)B_R^T(\tau)\phi_R^T(T, \tau)d\tau.F_{cR} \right] y(iT) \quad , \quad \sigma \in [0, T[\\ &= \Psi_R(\sigma, 0)y(iT) \end{aligned}$$

D'où :

$$\Psi_R(T, 0) = \phi_R(T, 0) + W_R(T, 0)F_{cR}$$

Des relations (III.34) et (III.37) et grâce à la périodicité de $P(t)$, il vient :

$$\Psi_R(T, 0) = P(0)\phi(T, 0)P^{-1}(0) + P^{-1}(0)W(T, 0)P^{-T}(0)F_{cR}$$

Si l'on prend $P(0)=I_q$, ce qui signifie que l'on impose les mêmes conditions initiales aux deux systèmes (III.32) et (III.33), alors :

$$\Psi_R(T, 0) = \phi(T, 0) + W(T, 0)F_{cR}$$

Par ailleurs, la commande SSPH (III.35) appliquée au système initial (III.32) donne comme matrice de monodromie en boucle fermée :

$$\psi(T, 0) = \phi(T, 0) + W(T, 0)F_c$$

Si l'on veut donc que $\psi(T,0) = \psi_R(T,0)$, alors on doit avoir $F_c = F_{cR}$. Par conséquent :

$$F_s(t) = F_{sR}(t)$$

Ce qui précède démontre la proposition suivante :

Proposition 3

La commande SSPH (III.35), continue par morceaux, calculée sur le modèle réduit (III.33) pour assigner ses exposants caractéristiques, confère le même placement de pôles sur le système initial (III.32), si les deux systèmes (III.32) et (III.33) possèdent les mêmes conditions initiales à $t_0=0$.

b) Commande SSPH constantes par morceaux

Si l'on considère le placement de pôles par la commande SSPH (III.36), nous pouvons conclure par une démarche tout à fait analogue à a) :

Proposition 4

La commande SSPH (III.36), constante par morceaux, calculée sur le modèle réduit (III.33) pour assigner ses exposants caractéristiques, confère le même placement de pôles sur le système initial (III.32), si les deux systèmes (III.32) et (III.33) possèdent les mêmes conditions initiales à $t_0=0$.

En effet, nous avons dans ce cas, grâce à la relation (III.34)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{TR}(T,0) &= \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \left[\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} \phi_R(T,\tau) B_R(\tau) d\tau \cdot \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} B_R^T(\tau) \phi_R^T(T,\tau) d\tau \right] \\ &= \mathcal{H}_r(T,0) \end{aligned}$$

et

$$\phi_R(T,0) = \phi(T,0)$$

Par conséquent, la matrice constante L_r dans (III.36) peut être la même dans la solution (III.36) appliquée à (III.32) ou (III.33) :

$$L_{rR} = L_r$$

D'où :

$$G_{jR} = \frac{r}{T} \int_{\frac{jT}{r}}^{\frac{(j+1)T}{r}} B_R^T(\tau) \phi_R^T(T, \tau) d\tau \cdot L_{rR} = G_j$$

Cela justifie bien le choix de $P(0) = I_q$ que nous avons adopté au chapitre II pour calculer une transformation particulière de Floquet-Lyapunov.

III.4.3. Exemple

Considérons, avec $q=2$, $p=1$, $\omega=4$ et $T=\pi/2$, le système linéaire T-périodique:

$$(E) \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \cos 4t & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \cos 4t \end{bmatrix} u(t)$$

a) Calcul du modèle réduit

a.1. Calcul de M

Par simulation numérique de $\dot{\phi}(t,0) = A(t)\phi(t,0)$ (cf. chap. II), nous obtenons immédiatement :

$$\phi(T,0) = e^{MT} = \begin{bmatrix} 0.482 & 0.283 \\ -0.296 & -0.084 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$M = \begin{bmatrix} -0.12 & 0.88 \\ -0.92 & -1.88 \end{bmatrix}$$

Les exposants caractéristiques sont $-1 \pm 0.188j$. (E) est donc asymptotiquement stable.

a.2. Calcul de P(t)

Connaissant maintenant A(t) et M, l'exécution du programme de calcul de P(t) donne la valeur approchée à l'ordre 1 (première harmonique) :

$$\hat{P}(t) = \begin{bmatrix} 0.943 + 0.059\cos \omega t - 0.030\sin \omega t & - 0.030\sin \omega t \\ 0.123 - 0.126\cos \omega t - 0.238\sin \omega t & 1.066 - 0.067\cos \omega t + 0.030\sin \omega t \end{bmatrix}$$

La figure III.11 représente la simulation des équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ \dot{y} = My \\ \hat{y} = \hat{P}(t)x \end{cases}$$

\hat{y} et y coïncident, ce qui valide bien l'approximation retenue.

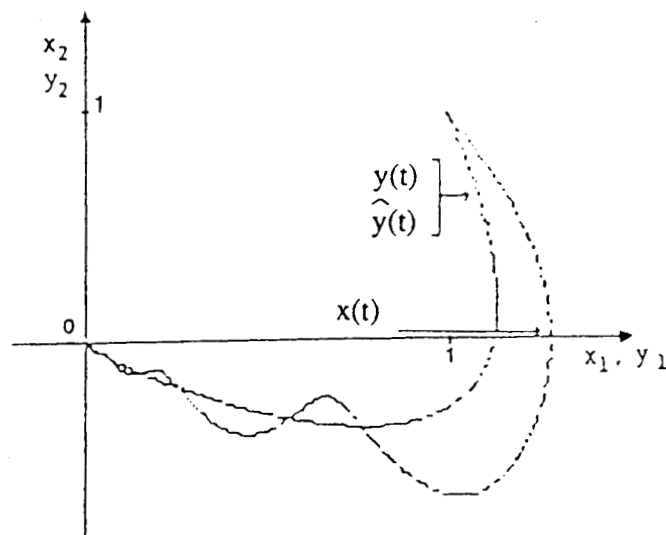


Fig.III.11

b) Commandabilité

Le Grammien de commandabilité (du système réduit) est égal à :

$$W_R(T,0) = \begin{bmatrix} 0.138 & 0.082 \\ 0.082 & 0.644 \end{bmatrix}$$

Il est facile de vérifier que :

$$\text{rang}[\phi_R(T,0) - \lambda I_q, W_R(T,0)] = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Par conséquent (E) est commandable. En plus $W_R(T,0)$ étant inversible, cela permet d'assigner entièrement la matrice de monodromie en boucle fermée.

c) Commande en temps fini

c.1. Commande continue par morceaux

La réponse de (E) en régime libre atteint son point d'équilibre, pratiquement au bout de quatre périodes (Fig.III.12). On peut considérer que cette réponse est trop lente. Pour remédier à cela, prenons comme matrice de monodromie en boucle fermée :

$$\Psi(T,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solution (III.35) conduit à

$$F_c = \begin{bmatrix} -4.048 & 0.975 \\ 0.975 & -0.571 \end{bmatrix}$$

et $F_s(t) = [f_1(t), f_2(t)]$ avec

$$f_1(t) = e^{t-\pi/2} \begin{bmatrix} + \cos(\omega_0 t - \varphi) + 24 \sin(\omega_0 t - \varphi) \\ + 0.484 \cos(\omega_1 t + \varphi) - 12 \sin(\omega_1 t + \varphi) \\ + 0.5 \cos(\omega_2 t - \varphi) + 12 \sin(\omega_2 t - \varphi) \\ - 0.02 \cos(\omega_3 t + \varphi) + 0.425 \sin(\omega_3 t + \varphi) \\ - 0.014 \cos(\omega_4 t - \varphi) - 0.350 \sin(\omega_4 t - \varphi) \end{bmatrix}, \quad f_2(t) = e^{t-\pi/2} \begin{bmatrix} - 0.589 \cos(\omega_0 t - \varphi) - 29 \sin(\omega_0 t - \varphi) \\ - 0.283 \cos(\omega_1 t + \varphi) + 14 \sin(\omega_1 t + \varphi) \\ - 0.287 \cos(\omega_2 t - \varphi) - 14 \sin(\omega_2 t - \varphi) \\ + 0.010 \cos(\omega_3 t + \varphi) - 0.514 \sin(\omega_3 t + \varphi) \\ + 0.008 \cos(\omega_4 t - \varphi) + 0.423 \sin(\omega_4 t - \varphi) \end{bmatrix}$$

$$\omega_0 = 0.188 \quad \omega_1 = \omega - \omega_0 = 3.812 \quad \omega_2 = \omega + \omega_0 = 4.188$$

$$\omega_3 = 2\omega - \omega_0 = 7.812 \quad \omega_4 = 2\omega + \omega_0 = 8.188 \quad \varphi = 0.295$$

La figure III.13.a montre la réponse de (E) en boucle fermée: il atteint l'origine, cette fois, en $2T$ exactement. La loi de commande est représentée par la figure 13.b tandis que la figure III.13.c montre les gains $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

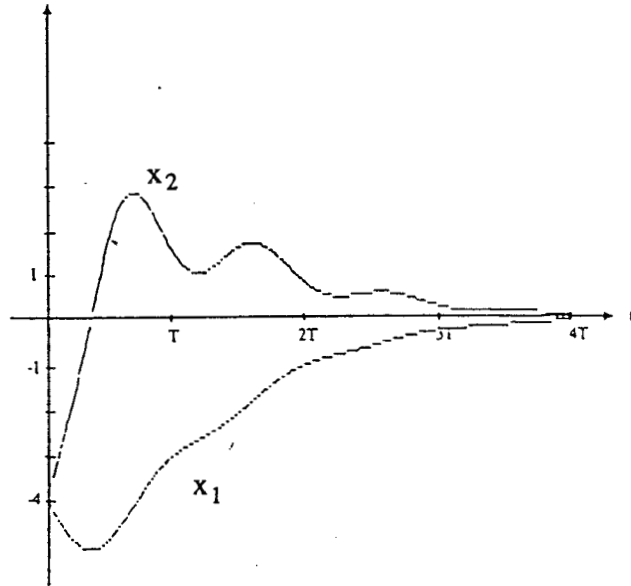


Fig.III.12

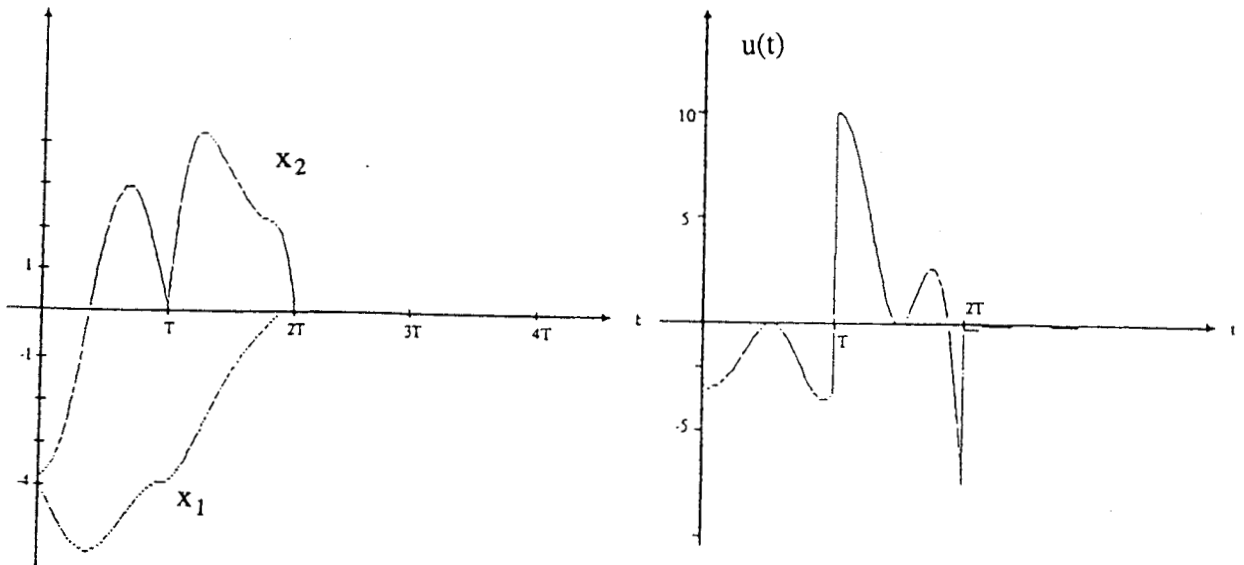


Fig.III.13.a

Fig.III.13.b

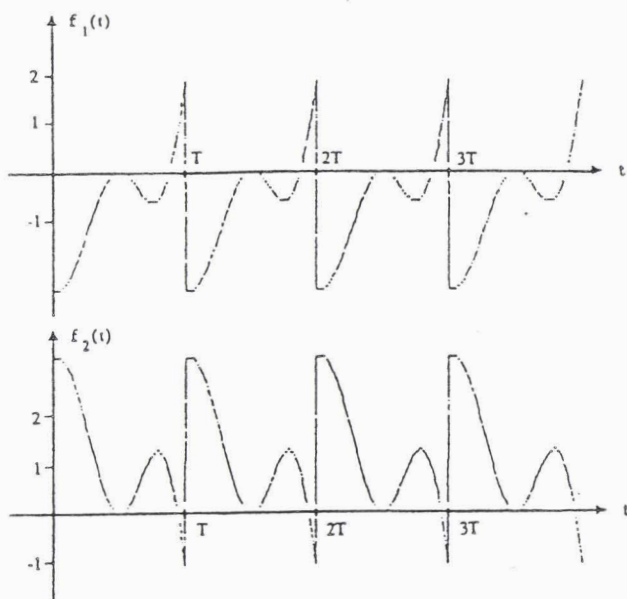


Fig.III.13.c

c.2 Commande constante par morceaux

Pour le même placement de pôles, et en prenant $r=2$ (qui satisfait les conditions de commandabilité requises) la solution (III.36) conduit à:

$$\mathcal{H}_2(T,0) = \begin{bmatrix} 0.038 & 0.065 \\ 0.065 & 0.278 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} -25.453 & 31.877 \\ 7.017 & -7.153 \end{bmatrix}$$

$$G_0 = [-2.230 \quad 2.775], \quad G_1 = [0.439 \quad 0.334]$$

Les courbes de simulation correspondantes sont représentées par les figures III.14.

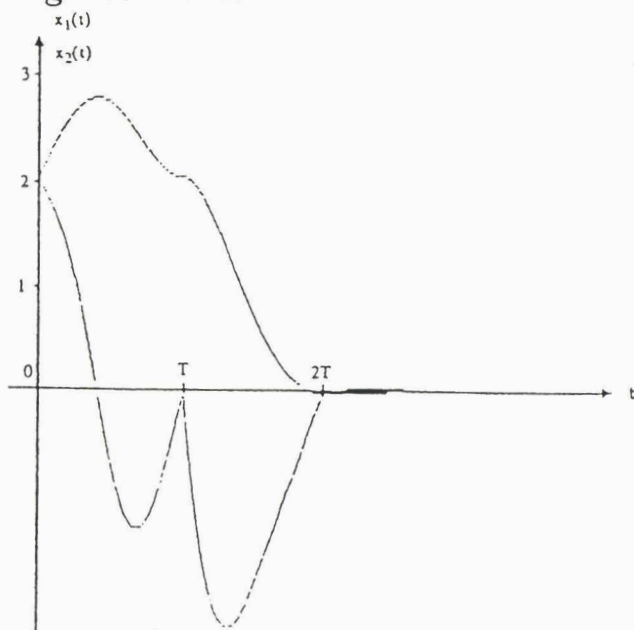


Fig.III.14.a

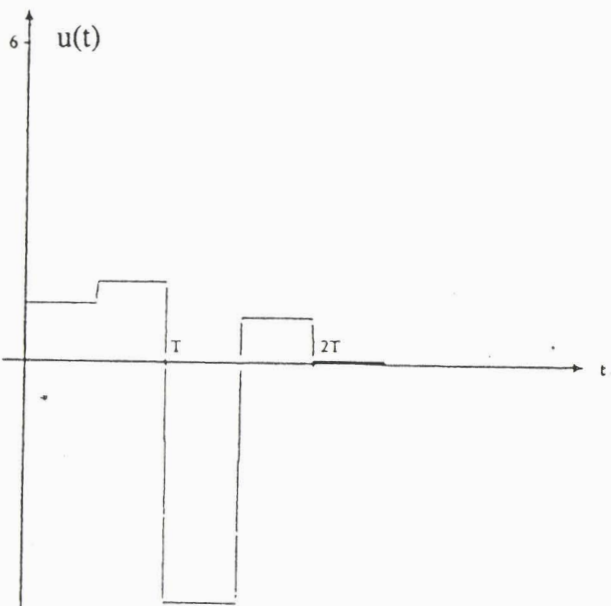


Fig.III.14.b

IV. SYNTHÈSE PAR FEEDBACK IMPULSIONNEL : Méthode de Yoshii

Toujours dans le but de chercher le moyen de déterminer un feedback permettant d'assigner les multiplieurs (ou exposants) caractéristiques d'un processus T-périodique, nous exposons la méthode de Yoshii qui permet dans certains cas d'atteindre l'objectif escompté.

IV.1. DÉFINITION

Nous dirons qu'un système T-périodique $(A(t), B(t))$ satisfait les hypothèses de Yoshii, s'il vérifie les propriétés suivantes:

H1. $A(t)$ et $B(t)$ sont analytiques sur $[0, \infty[$

H2. p lignes de $B(t) \in \mathcal{R}^{q \times p}$ sont linéairement indépendantes

H3. Les multiplieurs caractéristiques du système en régime libre

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

sont tous distincts.

IV.2. PRINCIPE

Soit $\Sigma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$ le spectre auquel on veut assigner le système en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)K(t)]x(t) \quad (III.38)$$

On écrit $K(t)$ sous la forme :

$$K(t) = K_* \delta(t - [t^*]_T) \quad , \quad 0 < t^* < T \quad (III.39)$$

où $K_* \in \mathcal{R}^{p \times q}$ est une matrice constante à déterminer. $\delta(t - [t^*]_T)$ est une séquence de fonctions de Dirac définies aux instants $t^*, t^*+T, t^*+2T, \dots$. Par conséquent $K(t)$ est T-périodique. Par ailleurs, si t est fixé, la matrice de commandabilité $Q(t)$ définie (cf. chap.II, §IV.3) par:

$$\begin{cases} Q(t) = \left[\tilde{B}(t) \mid \phi^{-1}(T)\tilde{B}(t) \mid \phi^{-2}(T)\tilde{B}(t) \mid \dots \mid \phi^{-(q-1)}(T)\tilde{B}(t) \right] \\ \tilde{B}(t) = \phi^{-1}(t)B(t) \end{cases} \quad (III.40)$$

a la forme classique d'une matrice de commandabilité d'un système stationnaire de matrice d'état $\phi^{-1}(T)$ et de commande $\tilde{B}(t)$. Ainsi, grâce au théorème de Yoshii (cf. chap.II), on peut choisir un instant t^* tel que la paire $(\phi^{-1}(T), \tilde{B}_*(t)) = (\phi^{-1}(T), \phi^{-1}(T)\tilde{\tilde{B}}_*)$ soit commandable, avec $\tilde{B}_* = \tilde{B}(t^*)$ et $\tilde{\tilde{B}}_* = \phi(T)\tilde{B}_*$. Par conséquent, on peut choisir une matrice P_* telle que les valeurs propres de

$$\phi^{-1}(T) + \tilde{B}_*P_* = \phi^{-1}(T) [I_q + \tilde{\tilde{B}}_*P_*] \quad (III.41)$$

appartiennent à l'ensemble défini par :

$$\frac{1}{\Sigma} = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_q} \right\}$$

Par ailleurs, en utilisant un feedback de la forme (III.39), la matrice de monodromie $\psi(T)$ du système bouclé (III.38) peut s'écrire [Brunovski,1969] :

$$\begin{cases} \psi(T) = \phi(T).e^{(\tilde{B}_*\tilde{K}_*)} \\ \tilde{K}_* = K_*\phi(t^*) \end{cases} \quad (III.42)$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(T) &= e^{-\tilde{B}_*\tilde{K}_*} . \phi^{-1}(T) \\ &= \phi^{-1}(T)\phi(T).e^{-\tilde{B}_*\tilde{K}_*} . \phi^{-1}(T) \\ &= \phi^{-1}(T).e^{-\phi(T)\tilde{B}_*\tilde{K}_*} . \phi^{-1}(T) \end{aligned}$$

Si l'on note

$$\tilde{\tilde{K}}_* = -\tilde{K}_* . \phi^{-1}(T) \quad (III.43)$$

il vient :

$$\psi^{-1}(T) = \phi^{-1}(T).e^{\tilde{\tilde{B}}_*\tilde{\tilde{K}}_*} \quad (III.44)$$

Des relations (III.41) et (Y.7), si l'on peut trouver une matrice \tilde{K}_* telle que :

$$\phi^{-1}(T) [I_q + \tilde{B}_* \tilde{P}_*] = \phi^{-1}(T) e^{\tilde{B}_* \tilde{K}_*}$$

ou la relation équivalente:

$$I_q + \tilde{B}_* \tilde{P}_* = e^{\tilde{B}_* \tilde{K}_*} \quad (\text{III.45})$$

soit satisfaite, le problème est résolu. K_* se déduit de \tilde{K}_* par (III.42) et (III.43). Donc, finalement, le problème de la détermination d'un feedback de la forme (III.39) se ramène à la résolution d'une équation matricielle du type:

$$I_q + BP = e^{BK} \quad (\text{III.46})$$

où K est l'inconnue.

Yoshii montre que (III.46) admet une solution réelle en K si:

1. $B \in \mathcal{R}^{q \times p}$ est une matrice réelle avec p colonnes linéairement indépendantes.
2. $P \in \mathcal{R}^{p \times q}$ est une matrice réelle avec p lignes linéairement indépendantes.
3. $I_q + BP$ est une matrice non singulière et ne possède aucune valeur propre réelle négative.

Ensuite, il a proposé un algorithme de résolution de (III.46) dans le cas où ces dernières hypothèses sont satisfaites.

Le théorème suivant résume la méthode de Yoshii:

Théorème

Soit un système $(A(t), B(t))$ vérifiant les hypothèses de Yoshii. Si $t=t^$ est un instant fixé tel que la matrice $I_q + \tilde{B}_* \tilde{P}_*$ soit non singulière et ne possède aucune valeur propre réelle négative, alors les multiplieurs caractéristiques de (III.38) peuvent être assignés à*

l'ensemble $\Sigma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$ ($\prod_{i=1}^q \lambda_i > 0$) par un feedback de la forme

(III.39)

$$K(t) = K_* \delta(t - [t]_T^*)$$

où $K_* = -\tilde{K}_* \phi(T) \phi^{-1}(t^*)$, avec \tilde{K}_* solution de l'équation (III.45)

Par ailleurs, Yoshii a pu généraliser cet algorithme à un feedback de la forme :

$$K(t) = \sum_{i=1}^n K_i \delta(t - [t]_T^i), \quad 0 < t^i < T, \quad i=1, \dots, n \quad \text{et } n > 1$$

c'est-à-dire, en considérant n impulsions par période.

Remarque

Les principales difficultés de cette méthode se résument en deux points :

a. Quand $I_q + \tilde{B}_* P_*$ possède des valeurs propres réelles négatives, (III.45) n'admet pas de solution réelle. En plus, on ne sait pas éviter ce cas, et on ne connaît pas les conditions qui le font apparaître.

b. On ne connaît, à priori, ni le nombre d'impulsions de Dirac nécessaires, ni leur positionnement sur une période.

Nous verrons au dernier chapitre, et à titre de comparaison, une application de cette approche à la stabilisation d'un satellite.

Chapitre IV

CHAPITRE IV EXEMPLES D'APPLICATION

I. INTRODUCTION

Nos consacrons ce chapitre à des applications directes des méthodes de synthèse exposées au chapitre trois. Ceci nous permet de mettre en évidence leur intérêt pratique sur des exemples traités autrement dans la littérature. Nous essayons en même temps de comparer ces méthodes pour dégager les avantages et les inconvénients que chacune est susceptible d'engendrer. Des simulations sont effectuées dans chaque cas de figure pour justifier nos propos.

II. EXEMPLE 1 : Problème de Yamabe

Considérons le système linéaire T-périodique décrit par :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 + \alpha \cos^2 t & 1 - \alpha \sin t \cos t \\ -1 - \alpha \sin t \cos t & -1 + \alpha \sin^2 t \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{IV.1})$$

où α est un paramètre réel.

On sait que ce système, appelé dans la littérature problème de Yamabe [Wu,1980] est asymptotiquement stable si $\alpha < 1$. Supposons que l'on veuille fixer le paramètre α à la valeur $\alpha = 2$. Il devient donc nécessaire de trouver une commande en boucle fermée permettant de stabiliser (IV.1) pour cette valeur de α . Pour ce faire, nous allons essayer de mettre en évidence l'intérêt des deux méthodes de synthèse exposées au chapitre III (§ II et §III.4), basées essentiellement sur la réduction des systèmes linéaires T-périodiques.

II.1. CALCUL DU MODELE RÉDUIT

La période de (IV.1) est, en principe, égale à $T = \pi$. Mais pour cette valeur, la matrice de monodromie $\phi(T,0)$ possède des valeurs propres complexes, de même que son logarithme. Cela conduirait à un modèle

réduit de matrice d'état M complexe. Pour pouvoir appliquer plus simplement notre méthode de synthèse, nous pouvons considérer le système (IV.1) comme étant $2T$ -périodique (cf. chap. II, Notes du § V.1.2.). Nous prendrons donc la période $T=2\pi$. Nous obtenons successivement ainsi, par simulation numérique de l'équation intégrale de (IV.1) $\dot{\phi}(t,0) = A(t)\phi(t,0)$:

$$\phi(T,0) = \begin{bmatrix} 535.4916 & 0 \\ 0 & 0.0018 \end{bmatrix} = V$$

$$M = \frac{1}{2\pi} \log V \# \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

II.2. CALCUL DE $P(t)$

Compte tenu de (IV.2) et de la période choisie, l'exécution de l'algorithme de calcul d'une transformation de Floquet conduit à l'expression exacte :

$$P(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

II.3. COMMANDABILITÉ

Le système (IV.1) est commandable. En effet son Grammien de commandabilité sur une période a pour valeur :

$$W(T,0) = \begin{bmatrix} 35843.789 & 0 \\ 0 & 0.375 \end{bmatrix}$$

Et il est aisé de vérifier alors que :

$$\text{rang}[\phi(T,0) - \lambda I, W(T,0)] = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

II.4. PLACEMENT DE POLES

II.4.1. Feedback continu

Supposons que la commande u , en boucle fermée, puisse s'écrire $u(t) = F(t)x(t)$ où $F(t)$ est un gain T -périodique à déterminer. Supposons ensuite que l'on veuille assigner les exposants caractéristiques de

(IV.1) (valeurs propres de M) aux valeurs $\lambda_1=-2$ et $\lambda_2=-3$. On doit donc avoir le système en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)F(t)]x(t) \quad (IV.4)$$

auquel correspond le modèle réduit :

$$\dot{y}(t) = \bar{M}y(t) \quad (IV.5)$$

avec :

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Si l'on note $\bar{L}_0 = \bar{M} - M$ et en remarquant que la matrice de commande $B(t)$ de (IV.1) est de rang maximal, nous sommes en mesure d'appliquer la proposition 1 (cf. chapitre III, § II.3). La solution au problème peut donc s'écrire :

$$F(t) = [B^T(t)B(t)]^{-1} B^T(t)P^{-1}(t)\bar{L}_0P(t)$$

soit, tout calcul fait :

$$F(t) = [f_1(t), f_2(t)] = [\sin t \cos t, -\sin^2 t - 2] \quad (IV.6)$$

Les figures IV.1 et IV.2 montrent respectivement la réponse du système (IV.1) en régime libre (instable) et en boucle fermée par le feedback continu (IV.6).

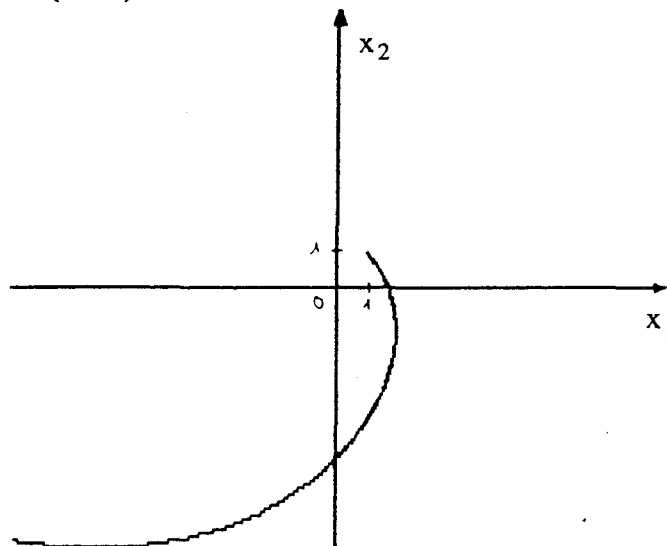


Fig. IV.1

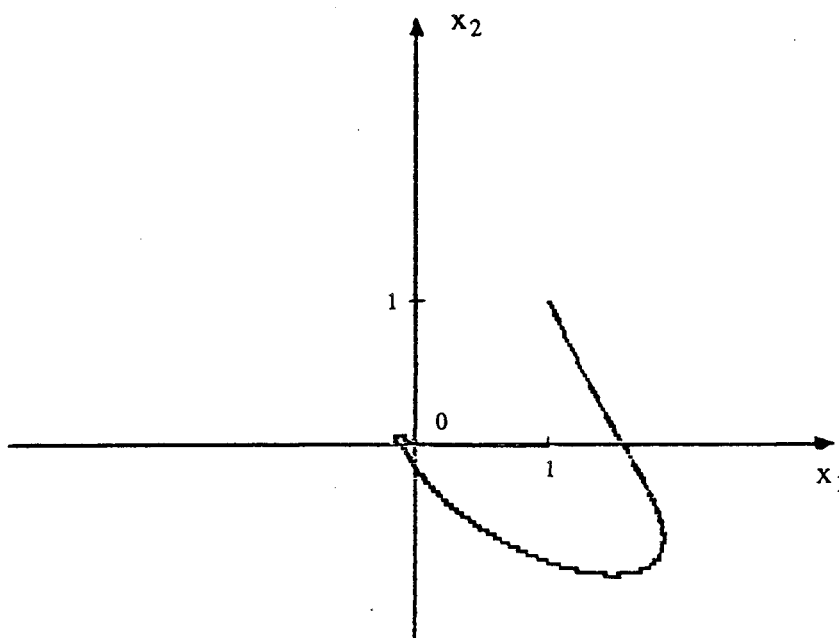


Fig. IV.2

II.4.2. Commande SSPH : réponse pile

Le système (IV.1) étant T-périodique pur, il est nécessaire d'effectuer la synthèse sur le modèle réduit pour déterminer une commande SSPH adéquate (cf. chap. III, § III.4.2).

a) Feedback continu par morceaux

Nous rappelons qu'une synthèse par une commande SSPH consiste à effectuer le placement de pôles sur la matrice de monodromie. Pour cette raison, nous retenons le cas particulier intéressant où la matrice de monodromie en boucle fermée du système (IV.1) est assignée à la valeur :

$$\psi(T,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'intérêt pratique de ce cas particulier, réside essentiellement dans le fait qu'il permet d'obtenir une réponse pile dans un système linéaire à sortie continue.

La transformation de Floquet étant calculée au paragraphe II.2, le modèle réduit du système (IV.1) s'écrit donc :

$$\dot{y}(t) = My(t) + B_R(t)u(t)$$

où M et $P(t)$ sont respectivement données par (IV.2) et (IV.3) et où

$$B_R(t) = P(t)B(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

Si l'on écrit la commande $u(t) = F_s(t)x(iT)$ dans (IV.1), il vient, d'après la proposition 3 (cf. chapitre III, § III.4.2) et compte tenu du fait que le système est commandable sur une période, le gain SSPH $F_s(t)$ recherché :

$$F_s(t) = B^T(t)\phi^T(T,t)F_c = B_R^T(t).e^{M^T(T-t)}.F_c \\ = \begin{bmatrix} 0.015\sin t e^{(T-t)} & -0.005\cos t e^{-(T-t)} \end{bmatrix}, \quad t \in [0, T[$$

où la matrice de placement de pôles F_c vaut :

$$F_c = W^{-1}(T,0)[\psi(T,0) - \phi(T,0)] \# \begin{bmatrix} -0.015 & 0 \\ 0 & -0.005 \end{bmatrix}$$

La figure IV.3 montre la réponse du système (IV.1) ainsi asservi.

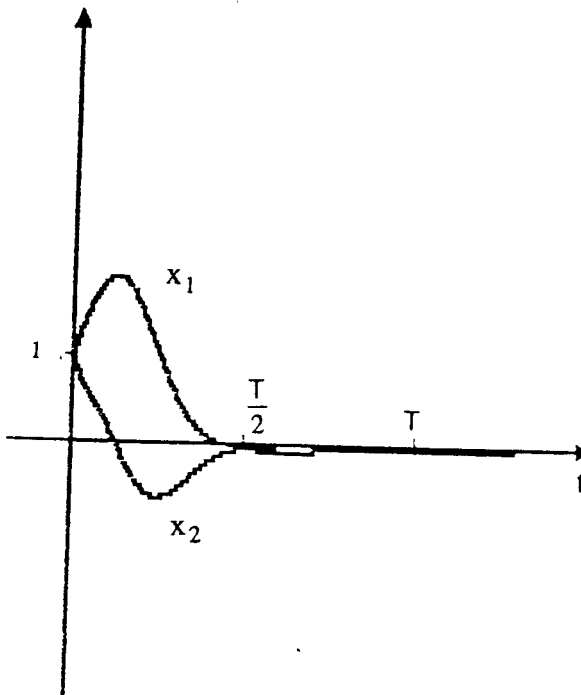


Fig. IV.3

b) Feedback constant par morceaux

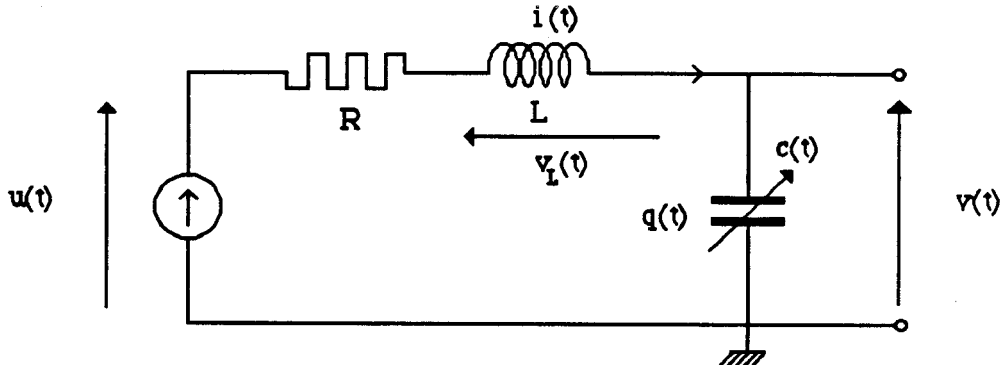
La détermination d'un feedback SSPH constant par morceaux $u(t)$ tel que :

$$\begin{cases} u(t) = G(t)x(iT) \\ G(t) = G_j, \quad iT+j\Delta \leq t \leq iT + (j+1)\Delta, \quad \Delta = \frac{T}{r}, \quad r > 0, \quad j=0 \dots r-1 \\ G(T+t) = G(t) \text{ ou } G_{j+r} = G_j \end{cases}$$

nécessite la détermination préalable d'une valeur de r qui satisfait les propriétés de commandabilité requises (Grammien de commandabilité généralisé). Or, pour cet exemple précis, cette valeur est relativement élevée ($r > 5$). Comme nous l'avons fait remarquer au chapitre III (§ III.3.1), cela fait perdre l'intérêt pratique de cette solution. Aussi, contenterons-nous, pour cet exemple, de la solution précédente (continue par morceaux).

III. EXEMPLE 2 : Circuit RLC à capacité variable

Considérons le circuit électrique suivant



La résistance R et l'inductance L sont supposées constantes ($R=210\Omega$, $L=10\text{mH}$). La capacité c est variable en fonction du temps et obéit à la loi ($C_0 = 1\mu\text{F}$) :

$$\frac{1}{c(t)} = \frac{1}{C_0} (1 + \beta \sin \omega t)$$

avec $\omega=10^3\pi$.

Un tel exemple a été considéré dans [M. Parodi, 1957], en ramenant les équations du système à une équation de Mathieu, puis en tentant de le résoudre par des approximations successives. Le

problème de la commande n'était pas abordé par l'auteur et le traitement que nous en proposons semble beaucoup plus aisé.

III.1. TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT

Ce système électrique est d'ordre 2. Naturellement, on peut prendre comme variables d'état la tension $v(t)$ aux bornes de l'élément capacitif et le courant $i(t)$ dans l'inductance. Cependant, ce choix amène à manipuler des grandeurs qui sont, soit très grandes (dus à ω), soit très petites (dus à C_0). Pour des raisons de commodité, nous préférons donc prendre comme variables d'état les variables d'énergie:

$$\begin{cases} x_1(t) = q(t) = \int i(t)dt & \text{(proportionnelle à la charge de la capacité)} \\ x_2(t) = p(t) = \int v_L(t)dt & \text{(proportionnelle au courant dans l'inductance)} \end{cases}$$

En effectuant un changement d'échelle sur la charge $q(t)$ ($x_1 = \lambda q$), la tension d'entrée $u(t)$ ($e = u/\mu$) et sur le temps t ($t = k\theta$), on aboutit à l'équation d'état :

$$\frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} \lambda q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda k}{L} \\ \frac{-k}{\lambda C_0} (1 + \beta \sin \omega k \theta) & -\frac{kR}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda q \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k\mu \end{bmatrix} \frac{u(k\theta)}{\mu}$$

En choisissant judicieusement les facteurs d'échelle $\lambda = 100$, $\mu = 10^4$ et $k = 10^{-4}$ (soit $\omega k = \pi$), on obtient finalement (pour $\beta = 0.5$) le système T-périodique de période $T = 2$ (en notant $x_2 = p$) :

$$\dot{x}(\theta) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 0.5 \sin \pi \theta & -2.1 \end{bmatrix} x(\theta) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(\theta) \quad (\text{IV.7})$$

Par la suite, nous noterons la variable θ par t .

III.2. CALCUL DU MODELE RÉDUIT

La partie homogène de (IV.7) a déjà été traitée au chapitre II (§ V.5.3), dans le cadre d'une application directe de l'algorithme de calcul d'une transformation de Floquet. Nous reprenons donc les résultats qui en sont issus.

Les matrices de monodromie et d'évolution sont respectivement :

$$\phi(T,0) = e^{MT} = \begin{bmatrix} 0.379 & 0.261 \\ -0.186 & -0.088 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

$$M \# \begin{bmatrix} -0.151 & 1.003 \\ -0.716 & -1.949 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

La série de Fourier à l'ordre 1 de la transformation de Floquet de (IV.7) a pour expression :

$$\hat{P}(t) = \begin{bmatrix} 1.036 - 0.037\cos \omega t - 0.047\sin \omega t & 0.031 - 0.031\cos \omega t + 0.001\sin \omega t \\ 0.124 - 0.124\cos \omega t + 0.094\sin \omega t & 0.972 + 0.028\cos \omega t + 0.048\sin \omega t \end{bmatrix}$$

où $\omega = \pi$.

Les exposants caractéristiques de (IV.7) sont $\lambda_1 = -0.749$ et $\lambda_2 = -1.350$ (asymptotiquement stable).

Il vient donc le modèle réduit correspondant au système (IV.7) :

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} -0.151 & 1.003 \\ -0.716 & -1.949 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0.031 - 0.031\cos \omega t + 0.001\sin \omega t \\ 0.972 + 0.028\cos \omega t + 0.048\sin \omega t \end{bmatrix} e(t), \quad \omega = \pi$$

III.3. COMMANDABILITÉ

Le Grammien de commandabilité sur une période a pour valeur :

$$W(T,0) = \begin{bmatrix} 0.197 & 0.051 \\ 0.051 & 0.217 \end{bmatrix}$$

(IV.7) est donc commandable sur une période. De plus, compte tenu de (IV.8), il est aisé de vérifier qu'il est également commandable (à tout instant).

III.4. PLACEMENT DE POLES

III.4.1. Feedback continu

Supposons que l'on veuille améliorer les transitoires du système (IV.7) (par exemple cela peut correspondre à ramener le plus vite possible la charge $q(t)$ à une valeur nulle ou fixée à l'avance) par un retour d'état continu $e(t) = F(t)x(t)$. Soient $\bar{\lambda}_1 = -2$ et $\bar{\lambda}_2 = -3$ les

exposants caractéristiques désirés en boucle fermée. Le gain T-périodique continu $F(t)$ peut être alors déterminé grâce à la connaissance de $P(t)$. En effet, en remarquant que la matrice de commande $B(t)$ est de rang maximal, la proposition 1 conduit à la solution :

$$F(t) = [B^T(t)B(t)]^{-1} B^T(t)P^{-1}(t)\bar{L}_0P(t) = [f_1(t), f_2(t)]$$

avec :

$$\bar{L}_0 = \bar{M} - M = \begin{bmatrix} -1.849 & -1.003 \\ 0.716 & -1.051 \end{bmatrix}$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix}$$

soit, tout calcul fait :

$$F(t) \# \begin{bmatrix} 0.974 + 0.178\sin \omega t - 0.247\cos \omega t & -1.144 + 0.085\sin \omega t + 0.100\cos \omega t \end{bmatrix}, \quad \omega = \pi$$

La figures IV.4 montre respectivement la réponse du système (IV.7) en régime libre (1) et sa réponse en boucle fermée (2).

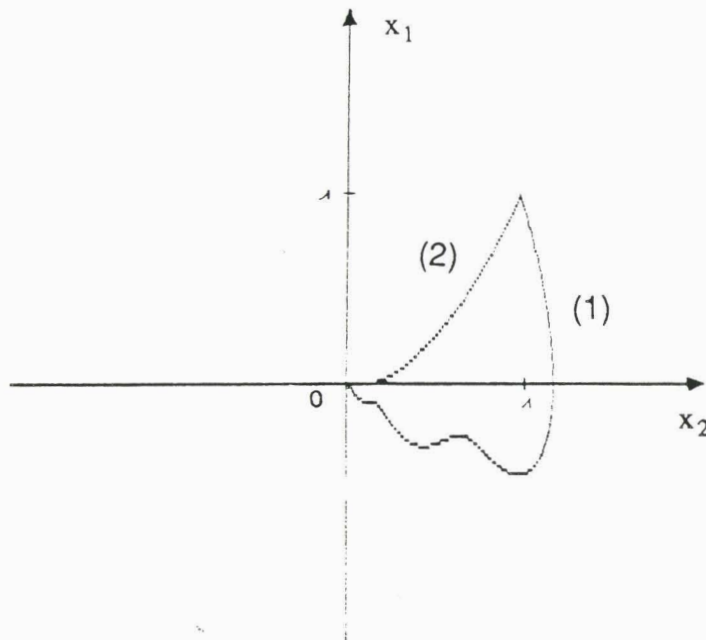


Fig. IV.4

III.4.2. Commande SSPH : réponse pile

a) Feedback continu par morceaux

Par la même démarche que pour l'exemple 1 ((IV.7) étant commandable sur une période), une solution du gain SSPH $F_s(t)$ tel que $e(t)=F_s(t)x(iT)$ qui permet d'assigner la matrice de monodromie en boucle fermée de (IV.7) à la valeur :

$$\psi(T,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a pour expression, pour $t \in [0, T[$:

$$F_s^T(t) = \begin{bmatrix} (0.4399 + 0.0215 \sin \omega t + 0.0041 \cos \omega t) e^{-\lambda t} + (-1.1757 - 0.0574 \sin \omega t + 0.0109 \cos \omega t) e^{-\lambda t} \\ (-1.1757 - 0.0244 \sin \omega t - 0.0047 \cos \omega t) e^{-\lambda t} + (1.5780 + 0.0771 \sin \omega t - 0.0147 \cos \omega t) e^{-\lambda t} \end{bmatrix}$$

La figure IV.5 montre, respectivement, l'évolution dans le temps de l'état du système (IV.7) en régime libre (a) et en boucle fermée (b). Dans ce dernier cas, il atteint l'origine en deux périodes exactement. La figure IV.6 montre la loi de commande SSPH $e(t)=F_s(t)x(iT)$.

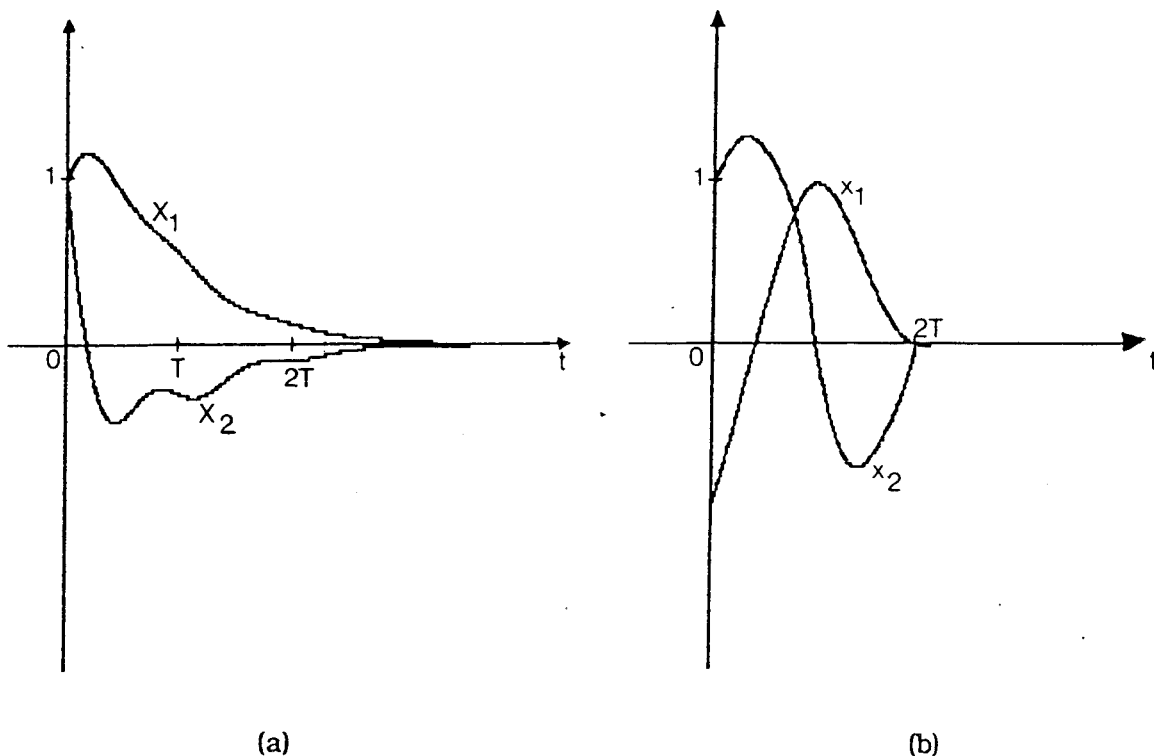


Fig. IV.5

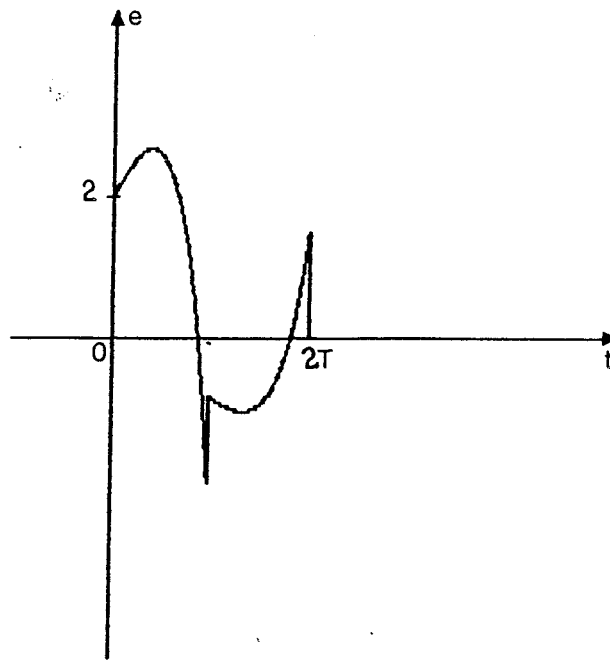


Fig. IV.6

b) Feedback constant par morceaux

Pour le même placement de pôles que précédemment, nous pouvons déterminer une solution constante par morceaux qui est de ce fait plus pratique. En effet, pour le système (IV.7) la valeur $r=2$ (cf. §II.4.2b) satisfait bien les conditions de commandabilité requises pour cette méthode de synthèse. On obtient alors, respectivement, pour le Grammien de commandabilité généralisé et la matrice de placement pôles :

$$\mathcal{H}_r(T,0) = \begin{bmatrix} 0.1838 & 0.0793 \\ 0.0793 & 0.1403 \end{bmatrix}, \quad L_r = \begin{bmatrix} -3.4829 & 4.9586 \\ 3.2953 & -2.1716 \end{bmatrix}, \quad r=2$$

On en déduit la commande SSPH $e(t)=G(t)x(iT)=G_j x(iT)$, $j=0, \dots, r-1$:

$$G_0 = [-1.3585 \quad 1.7923], \quad G_1 = [0.2962 \quad 0.5114]$$

Les courbes de simulation correspondantes sont représentées par les figures IV.7 et IV.8. La réponse du système est analogue au cas de la solution continue par morceaux, mais la loi de commande est, ici, nettement plus simple à implanter.

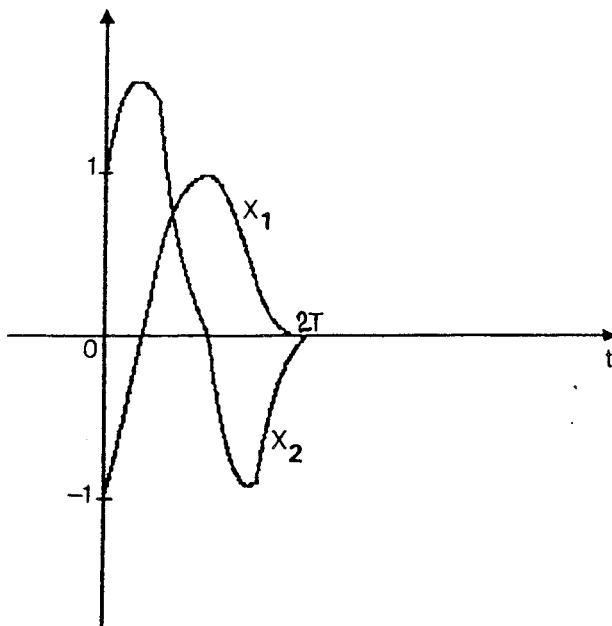


Fig. IV.7

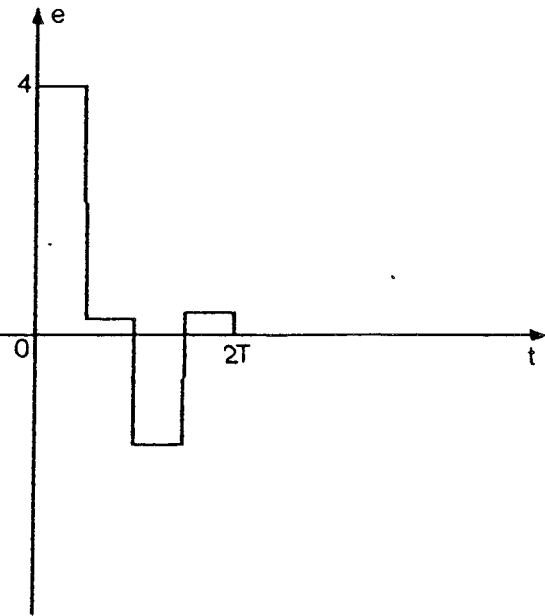


Fig. IV.8

IV. EXEMPLE 3 : Stabilisation d'un satellite

Nous considérons dans ce dernier paragraphe le problème de stabilisation de l'attitude d'un satellite rigide dont le mouvement de spin est supposé stabilisé. La figure IV.9 représente les systèmes de coordonnées adoptés : (e_1, e_2, e_3) est un repère lié au satellite (e_1 est l'axe de spin), (e_a, e_b, e_c) est un repère galiléen. H_0 est le vecteur des moments angulaires. ϕ, θ et ψ sont les angles d'Euler.

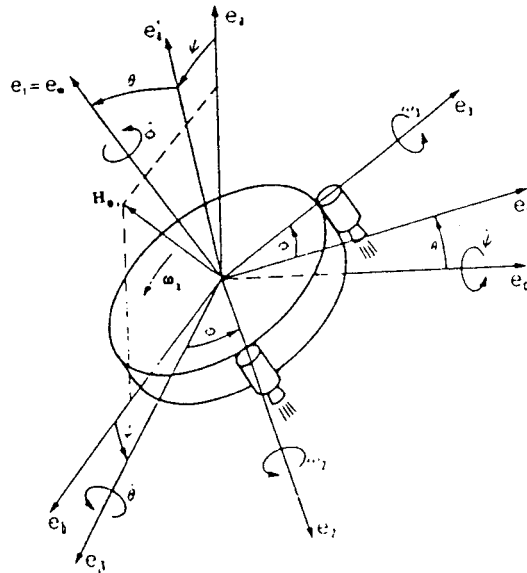


Fig. IV.9

Le problème consiste à aligner le moment angulaire H_0 et l'axe de spin e_1 . Il a été traité la première fois, semble-t-il, par J. Ackerman (1969) et repris ensuite par G. Kern (1980) puis par K. Yoshii (1989).

Ces deux derniers ont traité ce problème par les méthodes, portant leur nom, que nous avons exposées au chapitre III. Nous reprenons intégralement leurs approches de résolution afin de pouvoir les comparer avec celle que nous proposons au §IV.3.

IV.1. MÉTHODE DE KERN

Les équations d'Euler des vitesses angulaires ω_1, ω_2 et ω_3 en plus des relations cinématiques des trois angles d'Euler conduisent au système d'équations différentielles (Ackerman,1969) :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{M_1}{\sigma I} \\ \dot{\omega} = j(\sigma - 1)\omega_1\omega + \frac{M}{I} \\ \dot{\phi} = \omega_1 + \psi \sin \theta \\ \dot{\theta} + j\psi \cos \theta = \omega e^{j\phi} \end{cases} \quad (IV.10)$$

où $\sigma=I_1/I$ est le rapport des moments d'inertie. $M_1, M_2,$ et M_3 sont les moments des axes liés au système ($e_1, e_2,$ et e_3) qui peuvent être induits, par exemple, par des jets de gaz.

ω et M sont les valeurs complexes $\omega=\omega_2+j\omega_3$ et $M=M_2+jM_3$.

Pour la synthèse d'une boucle de retour, les équations différentielles non linéaires (IV.10) ne conviennent pas. Sous l'hypothèse que θ et ψ restent petits et en prenant $M_1=0$ on peut linéariser ces équations pour obtenir le système:

$$\begin{bmatrix} \dot{n} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega_1\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{M}{j\omega_1\sigma I} e^{j\omega_1 t} \quad (IV.11)$$

où les variables d'états n et h sont respectivement :

$$n = \frac{1}{j\omega_1\sigma} e^{j\omega_1 t} \omega \quad (\text{pointeur de nutation})$$

$$h = \Theta - n \quad (\text{pointeur du moment angulaire})$$

avec $\Theta=\theta+j\psi$, l'angle complexe d'Euler.

Si le vecteur d'état $x^T=[n, h]$ est connu, on peut utiliser une loi de commande de la forme (techniquement réalisable):

$$M(t) = K(t)x(t) = \begin{bmatrix} k_1(t) & k_2(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$$

et l'on obtient le système en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = [A + B(t)K(t)]x(t) \quad (IV.12)$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} j\omega_1\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B(t) = \frac{e^{j\omega t}}{j\omega_1\sigma l} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Problème de stabilisation

Est-il possible de trouver des fonctions bornées (périodiques) $k_1(t)$ et $k_2(t)$ telles que le système (IV.12) ait la propriété de stabilité désirée ?.

A ce propos, on considère le système linéaire stationnaire :

$$\dot{z} = Rz, \quad z \in \mathcal{R}^2 \quad (IV.13)$$

où la matrice R a pour valeurs propres λ_1 et λ_2 . Par la transformation $x=T(t)z$, où T(t) devra être une matrice périodique différentiable et non singulière, il vient de l'équation (IV.12) :

$$\frac{e^{j\omega t}}{j\omega_1\sigma l} \begin{bmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ -k_1(t) & -k_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11}(t) & v_{12}(t) \\ v_{21}(t) & v_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (IV.14)$$

où v_{ij} , $i,j=1,2$, sont les éléments de la matrice

$$V(t) = \dot{T}(t)T^{-1}(t) + T(t)RT^{-1}(t) - A \quad (IV.15)$$

Le produit de Kronecker (calcul tensoriel) appliqué à (IV.14) permet d'écrire :

$$\frac{e^{j\omega t}}{j\omega_1\sigma l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11}(t) \\ v_{12}(t) \\ v_{21}(t) \\ v_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (IV.16)$$

ou de manière plus concise :

$$\mathcal{P}(t)\zeta(t) = \eta(t)$$

Soit Q une matrice de transformation 4x4 non singulière telle que:

$$Q\mathcal{P}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1(t) \\ \dots\dots \\ \mathcal{P}_2(t) \end{bmatrix}$$

où $\mathcal{P}_1(t)$ regroupe les lignes linéairement indépendantes de $\mathcal{P}(t)$, tandis que $\mathcal{P}_2(t) \equiv 0$.

Si l'on applique, à l'équation (IV.16), la transformation :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

il vient :

$$\frac{e^{j\omega_1 t}}{j\omega_1 \sigma I} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11}(t) \\ v_{12}(t) \\ v_{11}(t) + v_{21}(t) \\ v_{12}(t) + v_{22}(t) \end{bmatrix}$$

d'où l'on déduit la condition suffisante pour l'existence du gain K(t) :

$$\begin{cases} v_{11}(t) + v_{21}(t) \equiv 0 \\ v_{12}(t) + v_{22}(t) \equiv 0 \end{cases} \quad (IV.17)$$

Il reste alors à trouver une transformation T(t) périodique, différentiable et non singulière telle que les éléments de la matrice V(t) dans (IV.15) puissent satisfaire la condition (IV.17). A ce propos, on essaie de trouver une solution périodique de l'équation différentielle :

$$\dot{T}(t) + T(t)R - [A + V(t)]T(t) = 0 \quad (IV.18)$$

La solution générale de cette équation est de la forme (Kern, 1979) :

$$T(t, T_0) = T_1^{-1}(t) T_1(T) T_0 T_2(T) T_2^{-1}(t) \quad (IV.19)$$

avec $T(T, T, T_0) = T_0$, la période $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ ou $\frac{4\pi}{\omega_1}$ et T_1, T_2 satisfaisant :

$$\begin{cases} \dot{T}_1(t) = -T(t)[A + V(t)] , & T_1(0) = I & \text{(IV.20)} \\ \dot{T}_2(t) = RT_2(t) , & T_2(0) = I & \text{(IV.21)} \end{cases}$$

La solution générale $T(t, T, T_0)$ est une solution périodique de (IV.18) si, respectivement :

$$T(T, T, T_0) = T_0 = T(0, T, T_0) = T_1(T)T_0T_2(T)$$

ou

$$T_1(T)T_0 = T_0 e^{-RT} \quad \text{(IV.22)}$$

L'équation (IV.22) a une solution non triviale si $T_1(T)$ et e^{-RT} ont des valeurs propres communes, où $T_1(t)$ est la solution de

$$\dot{T}_1(t) = -T_1(t) \begin{bmatrix} v_{11}(t) + j\omega_1\sigma & v_{12}(t) \\ -v_{11}(t) & -v_{12}(t) \end{bmatrix} T_1(0) , \quad T_1(0) = I \quad \text{(IV.23)}$$

Comme la solution de (IV.22) doit être non singulière, les valeurs propres de $T_1(T)$, ρ_1 et ρ_2 , doivent être $e^{-\lambda_1 T}$ et $e^{-\lambda_2 T}$.

Résultat

Si, pour des valeurs propres stables de R, il existe des fonctions périodiques $v_{11}(t)$ et $v_{12}(t)$ telles que $\rho_1 = e^{-\lambda_1 T}$ et $\rho_2 = e^{-\lambda_2 T}$ alors l'équation (IV.18) a une solution périodique non singulière (IV.19) et le problème de stabilisation est résolu par

$$\begin{cases} k_1(t) = j\omega_1\sigma I e^{-j\omega_1 t} v_{11}(t) \\ k_2(t) = j\omega_1\sigma I e^{-j\omega_1 t} v_{12}(t) \end{cases}$$

Pour le moment M on obtient

$$\begin{aligned} M(t) &= k_1(t)n(t) + k_2(t)h(t) \\ M_2 &= \text{Re}[k_1(t)n(t) + k_2(t)h(t)] \\ M_3 &= \text{Im}[k_1(t)n(t) + k_2(t)h(t)] \end{aligned}$$

Finalement, on remarque que pour l'analyse numérique le problème est de trouver, pour des valeurs λ_1 et λ_2 données, des fonctions périodiques v_{11} et v_{12} telles que la solution de (IV.23) à l'instant $t=T$, $T_1(t)$, ait les valeurs propres $e^{-\lambda_1 T}$ et $e^{-\lambda_2 T}$. Le choix particulier de λ_1 et λ_2 sera issu d'un problème d'optimisation.

IV.2. MÉTHODE DE YOSHII

Les variables d'états n et h dans (IV.11) sont complexes; pour appliquer l'algorithme de Yoshii (cf. chapitre III), on doit tout exprimer en termes réels. A cet effet, si l'on note $n=n_1 + jn_2$ et $h=h_1+jh_2$, le système (IV.11) devient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1\sigma & 0 & 0 \\ \omega_1\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega_1\sigma I} \begin{bmatrix} \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \\ -\cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & -\cos \omega_1 t \\ \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (IV.24)$$

Si le vecteur d'état est connu, on peut asservir ce système par la commande :

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = K(t) \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Malheureusement ce système ne vérifie pas la troisième hypothèse de Yoshii, à savoir que les multipliers caractéristiques ne sont pas tous distincts. Néanmoins, la procédure de Yoshii permet, dans ce cas précis, de déterminer un gain $K(t)$ tel que le système en boucle fermée ait les multipliers caractéristiques désirés. Les multipliers caractéristiques du système (IV.24) en régime libre sont $\rho_{1,2} = e^{\pm j\omega_1\sigma}$, $\rho_3 = \rho_4 = 1$. Ils sont situés sur le cercle unité. On désire les assigner à $\rho_{1,2} = \alpha e^{\pm j\omega_1\sigma}$, $\rho_3 = \rho_4 = \alpha$ ($\alpha < 1$), i.e. les ramener à l'intérieur du cercle unité.

Le principe de la procédure de Yoshii ayant été exposé au chapitre III, nous nous contenterons de rapporter les résultats de simulation correspondant à cette résolution sachant que l'impulsion de Dirac est approchée par la fonction :

$$\delta(t) \approx \left(\frac{v}{\pi}\right)^{-1} e^{-vt^2}, \quad v=10^4$$

et que les valeurs des différents paramètres sont:

rayon du satellite = 0.6m

hauteur du satellite = 0.5m

densité = 500kg/m³

$\omega_1 = 2\pi \text{ rad/s}$, $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1\text{s}$

La figure IV.10 montre la trajectoire du moment angulaire et de la nutation dans le plan $\theta-\psi$. La figure IV.11 montre la réponse temporelle.

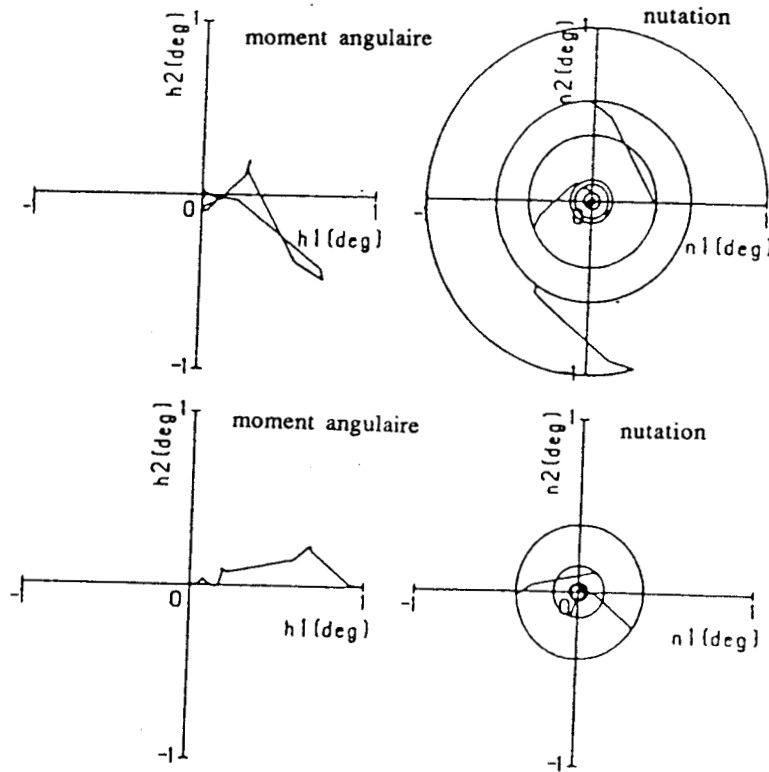


Fig. IV.10

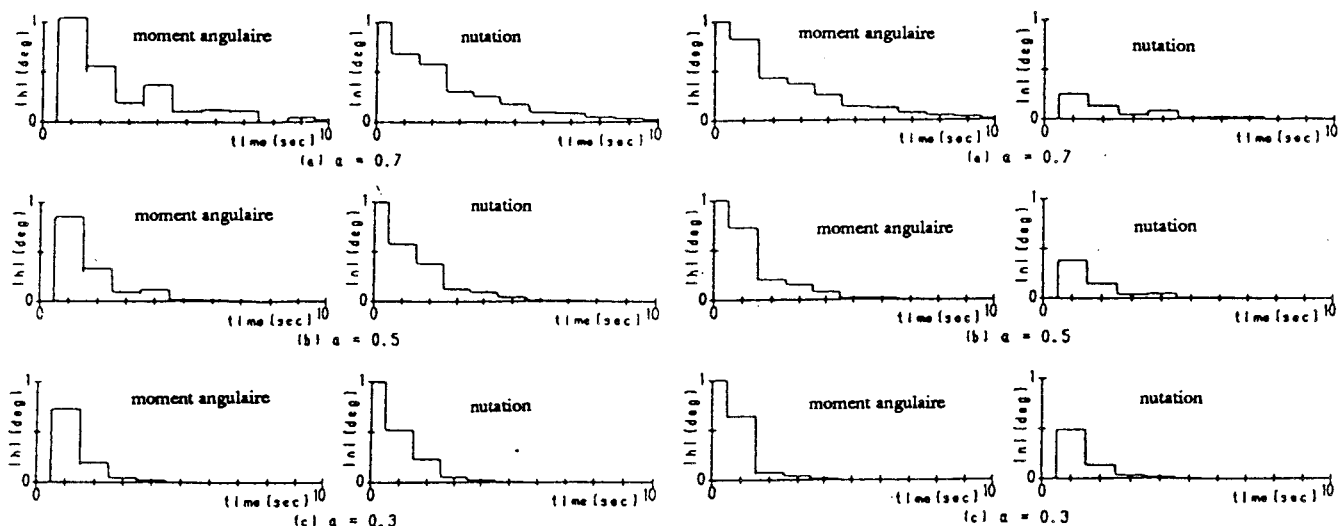


Fig. IV.11

IV.3. NOUVELLE MÉTHODE

Nous nous proposons, en dernier lieu, de résoudre le même problème, en appliquant notre approche proposée au chapitre III. Comme nous allons le voir, cette méthode paraît beaucoup plus simple que les deux précédentes, d'autant plus qu'elle conduit, dans ce cas, à une solution exacte.

Nous rappelons que la présente méthode consiste à déterminer un gain continu T-périodique, permettant d'assigner les exposants caractéristiques (valeurs propres du modèle réduit) du système. Pour cela, deux conditions doivent être remplies :

- la matrice de commande $B(t)$ doit être de rang maximal.
- la connaissance préalable d'une transformation de Floquet qui réduit le système en régime libre en un modèle constant.

Dans le cas présent, il est facile de vérifier que le système (IV.7) remplit la première condition. De même, sa matrice d'état A étant constante, la transformation de Floquet peut être réduite à $P(t)=I_4$ (le système est identique à son modèle réduit : $M=A$). De ce fait, si l'on

note \bar{A} la matrice d'état désirée en boucle fermée, il vient (cf. chap. III, §II.3) :

$$\begin{aligned}
 F(t) &= [B^T(t)B(t)]^{-1} B^T(t)P^{-1}(t)\bar{L}_0P(t) \\
 &= [B^T(t)B(t)]^{-1} B^T(t)\bar{L}_0 \\
 \bar{L}_0 &= \bar{A} - A
 \end{aligned}$$

Pour retrouver le même placement de pôles qu'au paragraphe IV.2 i.e $(\alpha e^{\pm j\omega\sigma}, \alpha, \alpha)$, il suffit de prendre $\bar{L}_0 = \mu I_4$ où μ est tel que $\alpha = e^\mu$. Par ailleurs, nous avons :

$$[B^T(t)B(t)]^{-1} = \frac{(\omega_1\sigma I)^2}{2} I_2$$

D'où l'expression exacte de $F(t)$:

$$F(t) = \frac{(\omega_1\sigma I)^2}{2} \mu \cdot B^T(t)$$

La figure IV.12 montre la trajectoire du moment angulaire et de la nutation dans le plan $\theta-\psi$. La figure IV.13 montre la réponse temporelle.

Une remarque générale peut être notée à propos du coût et de la fiabilité des solutions issues respectivement des deux dernières méthodes. En effet, la solution de Yoshii est la moins coûteuse (énergétiquement parlant). Cependant, elle peut engendrer une instabilité (oscillations indésirables) si les instants où le gain est non nul sont imprécis ou mal choisis. En revanche la dernière solution est certainement plus coûteuse (solution continue). Par contre elle est beaucoup plus fiable (solution théoriquement exacte).

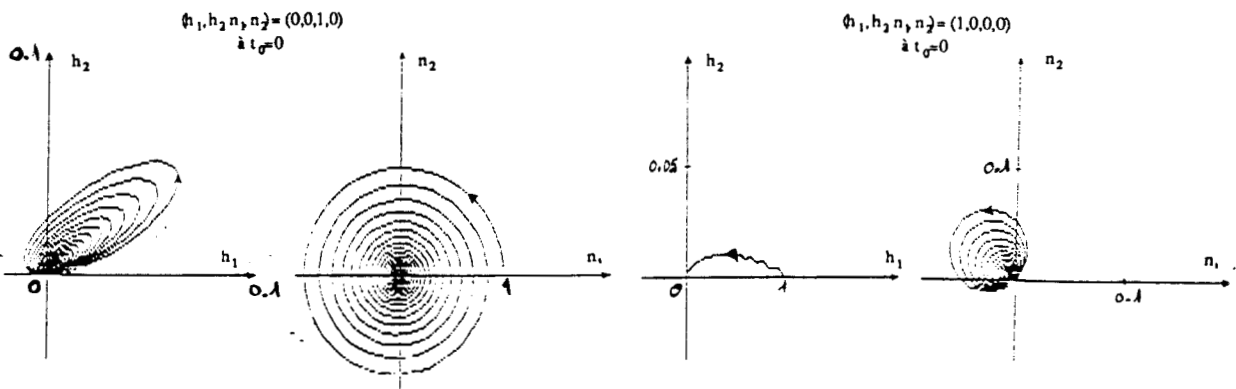


Fig. IV.12

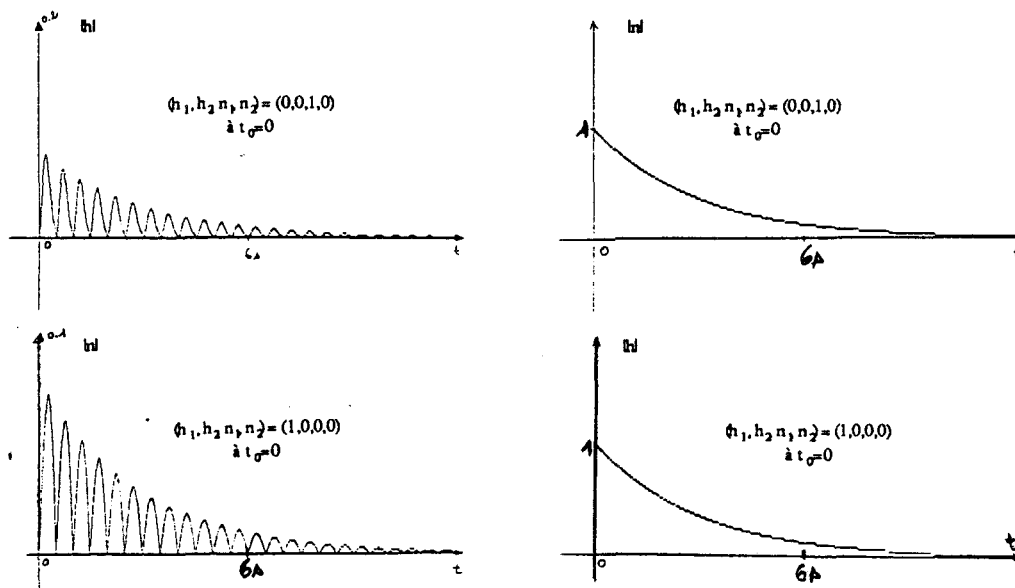


Fig. IV.13

V. CONSIDERATIONS SUR LA COMMANDE EN TEMPS MINIMAL

V.1. POSITION DU PROBLEME

Le problème de commande optimale peut s'énoncer de la manière suivante :

Soit un système (S) régi par l'équation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ A(t+T) = A(t), B(t+T) = B(t) \end{cases} \quad (IV.25)$$

trouver la loi de commande $u(t)$ permettant, à partir de conditions initiales $x(0) = x_0$ données, de ramener le système à l'état $x(t_f) = x_f$ fixé, en minimisant le critère temporel :

$$J = \int_0^{t_f} dt$$

La commande $u(t)$ vérifiera par ailleurs la contrainte :

$$-1 \leq u(t) \leq +1 \quad (IV.26)$$

pour $0 \leq t \leq t_f$.

V.2. SOLUTION GÉNÉRALE

Une méthode de résolution classique consiste à maximiser le Hamiltonien du système par rapport à la loi de commande u . Si l'on exprime la contrainte (IV.26) par : *il existe λ tel que $(u + 1)(u - 1) + \lambda^2 = 0$* , le Hamiltonien s'écrit :

$$H = -1 + \psi^T(t) \cdot [A(t)x(t) + B(t)u(t)] + \alpha \cdot [(u+1)(u-1) + \lambda^2]$$

où ψ désigne le vecteur adjoint et α un scalaire (multiplicateurs de Lagrange).

La dérivée partielle de le Hamiltonien par rapport à λ étant nulle, on peut écrire :

$$H_\lambda = 2\alpha\lambda = 0$$

d'où $\alpha=0$ ou $\lambda=0$. La contrainte sera donc ou saturée ($\lambda=0$), ou n'interviendra pas dans le Hamiltonien ($\alpha=0$).

De ce fait , la maximisation de H par rapport à u entraîne :

$$\begin{cases} u = 1 & \text{si } \psi^T(t)B(t) > 0 \\ u = -1 & \text{si } \psi^T(t)B(t) < 0 \end{cases}$$

On dispose ensuite d'une équation supplémentaire :

$$H_x = -\dot{\psi}(t)$$

qui conduit ici à une équation différentielle :

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(t)\psi(t) \quad (\text{IV.27})$$

Dans le cas plus classique où A est une matrice constante, une intégration analytique alors possible de (IV.27) permet, non certes une détermination complète de $\psi(t)$, les conditions initiales $\psi(0)$ restant inconnues, mais une approche suffisante de $\psi(t)$ pour déterminer le nombre de passages de $\psi^T(t)B$ par 0 et donc le nombre de commutations de la loi de commande $u(t)$. On conclut alors par une intégration analytique de (IV.25), là encore possible car A est une constante, qui donne deux familles de trajectoires selon que $u(t)=-1$ ou

que $u(t)=1$. La loi de commande est finalement déterminée par retour d'état, les instants de commutation devenant lieux de commutation dans l'espace d'état .

On comprend aisément que le travail présenté au chapitres II rende cette méthodologie applicable aux systèmes pour lesquels $A(t)$ est une matrice à coefficients périodiques .

En effet, il permet de trouver des solutions analytiques aux équations (IV.25) et (IV.27) et donc de déterminer aussi une loi de commande par retour d'état, ce qui n'est pas réalisable sans cela.

Une approche différente de résolution peut être formulée. Elle consiste à déterminer la loi de commande dans l'espace d'état obtenu par le changement de base $P(t)$. Dans cet espace de résolution, le problème peut s'énoncer ainsi :

Soit le système (S) régi par l'équation d'état :*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = My(t) + B_r(t)u(t) \\ B_r(t) = P(t)B(t) \end{cases}$$

obtenue par le changement de base $y(t)=P(t).x(t)$.

Trouver la loi de commande $u(t)$, permettant, à partir de conditions initiales $y(0)=P(0).x(0)=x(0)=x_0$ données, d'atteindre en temps minimal la trajectoire définie par l'équation en coordonnées paramétriques $y(\tau) = P(\tau).x_f$. La commande $u(t)$ vérifie les mêmes contraintes que dans l'espace de représentation initial .

V.3. SUR LE PROBLEME DE DÉTERMINATION DES CONDITIONS INITIALES

La loi de commande optimale $u(t)$ est parfaitement déterminée si l'on connaît les conditions initiales $\psi(t_0)$ du vecteur adjoint $\psi(t)$. Or ces dernières sont impossibles à déterminer dans le cas général. Ceci est dû essentiellement au fait que le principe du maximum donne une condition nécessaire (et non nécessaire et suffisante) pour résoudre le problème de la commande optimale. Pour les systèmes stationnaires, on essaie souvent de contourner cette difficulté en adoptant une structure de commande en boucle fermée. Une approche

suffisante du vecteur adjoint et des trajectoires d'état du système permettent en général de déterminer le ou les lieux de commutation.

Pour les systèmes T-périodiques, le problème est plus délicat. En effet, dans ce cas, le lieu de commutation n'est plus unique, il devient en fait un faisceau de courbes de commutation dont chacune correspond à une valeur donnée de l'instant initial t_0 ($t_0 \in [0, T]$). Si t_0 est fixé, on peut déterminer l'équation en coordonnées paramétriques du lieu de commutation correspondant (le paramètre étant le temps) d'où l'on peut extraire une loi de commande optimale en boucle fermée. Malheureusement, ces équations sont, en général, non linéaires en fonction du temps. Cela rend leur usage peu pratique.

Conclusion générale

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, nous avons mis l'accent, en premier lieu, sur la difficulté de résoudre intégralement les systèmes linéaires non stationnaires qui constitue l'obstacle majeur à une étude rigoureuse de ce type de processus. Nous avons ensuite consacré nos efforts à la classe des systèmes linéaires T-périodiques, essentiellement en raison du regain d'intérêt sans cesse croissant qu'ils suscitent tant au niveau de la recherche qu'au niveau des applications. Nous avons pu, ainsi, élaborer un algorithme facilement informatisable qui permet, dans tous les cas rencontrés en pratique, de résoudre analytiquement les équations différentielles régissant de tels processus. En première étape, cet outil nous a permis de généraliser certaines méthodes de synthèse de commande appliquées usuellement aux systèmes linéaires stationnaires, à savoir les méthodes de synthèse basées sur la notion de commande SSPH. En deuxième étape, nous avons pu également proposer une nouvelle approche qui permet de déterminer, pour des conditions suffisantes de commandabilité, une solution continue au problème délicat du placement de pôles dans les systèmes T-périodiques. Tout cela a été rendu possible grâce à l'introduction de la notion du modèle réduit (ou stationnarisé) dans nos approches de synthèse.

Certes, le fait de disposer d'un moyen d'analyse des systèmes T-périodiques nous a permis de résoudre des aspects intéressants de la synthèse, mais d'autres aspects restent à explorer. En effet, ce moyen de calcul conjugué à la notion de modèle réduit s'avère particulièrement intéressant pour résoudre le problème de commande optimale. C'est le cas, par exemple, de la commande en temps minimal que nous avons succinctement traité en fin de ce mémoire. Cela a pu également ouvrir une autre voie de recherche à savoir le problème de la commande optimale minimisant un critère quadratique (thèse de B. Rabenasolo en préparation). Enfin, le principe même de l'algorithme proposé semble intéressant pour traiter des problèmes divers, de type équations différentielles ou

algébriques, pour lesquels on sait simplement que la solution recherchée est périodique. Ces problèmes constituent souvent un obstacle à des procédures d'optimisation. Nous pensons continuer nos travaux dans cette direction.

Annexe

ANNEXE

Démonstration de l'inversibilité de \mathbf{R}

Nous avons (cf. chap. II) :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_q^2 \otimes \Pi(0)$$

et d'après la propriété P3, \mathbf{R}^{-1} peut s'écrire :

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}_q^2 \otimes \Pi^{-1}(0)$$

\mathbf{R} est donc inversible si $\Pi(0)$ est inversible. D'après la relation (II.14) $\Pi(0)$ s'écrit :

$$\Pi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \omega & \dots & N\omega \\ 0 & -\omega^2 & \dots & -(N\omega)^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\omega^3 & \dots & -(N\omega)^3 \\ 0 & \omega^4 & \dots & (N\omega)^4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{N-1} \omega^{2N-1} & \dots & (-1)^{N-1} (N\omega)^{2N-1} \\ 0 & (-1)^N \omega^{2N} & \dots & (-1)^N (N\omega)^{2N} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit U un opérateur de permutation (des lignes) tel que :

$$\bar{\Pi} = U \cdot \Pi(0) = \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix}$$

où $\Pi_1 \in \mathcal{K}^{(N+1) \times (N+1)}$ et $\Pi_2 \in \mathcal{K}^{N \times N}$, s'écrivent respectivement :

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\omega^2 & \dots & -(N\omega)^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & (-1)^N (\omega)^{2N} & \dots & (-1)^N (N\omega)^{2N} \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} \omega & 2\omega & \dots & N\omega \\ -\omega^3 & -(2\omega)^3 & \dots & -(N\omega)^3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (-1)^{N-1} \omega^{2N-1} & (-1)^{N-1} (2\omega)^{2N-1} & \dots & (-1)^{N-1} (N\omega)^{2N-1} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de U étant égal à ± 1 , il vient (à un signe près) :

$$\det[U \cdot \Pi(0)] = \det[\Pi(0)] = \det(\overline{\Pi})$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire :

$$\det(\overline{\Pi}) = \det(\Pi_1) \cdot \det(\Pi_2)$$

$\overline{\Pi}$ est inversible si Π_1 et Π_2 le sont simultanément .

Les déterminants de Π_1 et Π_2 peuvent s'écrire :

$$\det(\Pi_1) = \left(\prod_{k=0}^{N-1} (-1)^k \omega^{2k} \right) \cdot \det(V_N)$$

$$\det(\Pi_2) = \left(\prod_{k=0}^{N-1} (-1)^k \omega^{2k+1} \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^N j \right) \cdot \det(V_N)$$

où V_N est la matrice définie par :

$$V_N = \begin{pmatrix} 1 & 2^2 & \dots & N^2 \\ 1 & 2^4 & \dots & N^4 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2^{2N} & \dots & N^{2N} \end{pmatrix}$$

Donc Π_1 et Π_2 sont inversibles si V_N est inversible. Or le calcul du déterminant de la matrice V_N peut se ramener à celui d'un déterminant de Vandermonde :

$$\det(V_N) = \prod_{j=1}^N j^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2^2 & \dots & N^2 \\ | & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{2N-2} & \dots & N^{2N-2} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^N j^2 \cdot \text{Vandermonde}(1, 2^2, \dots, N^2) \neq 0$$

Bibliographie



Bibliographie**Al Rahmani H. and Franklin G. F.**

Linear Periodic Systems : Eigenvalue Assignment Using Discrete Periodic Feedback.

IEEE Transaction on Autom. Contr. Vol. 34 N° 1, January 1989

Barone S.R. and Narcowich M. A.

Floquet theory and application

Physical Review A , Vol. 15, n° 3, March 1977

Bellman R.

Stability theory of differential equations

McGraw-Hill, New-York

Bittanti S.

Time series and linear systems

Springer-Verlag Berlin, Heidelberg New-York, 1986

Bittanti S. , Colaneri P. and Guardabassi G.

H-controllability and Observability of linear Periodic systems

SIAM J. and Optimization Vol. 22, N°6, november 1984

Blanck G. G.

Mathieu functions

Handbook of mathematical functions

Ed. by Abramowitz and Stegun, Dover Publications, Inc. New-York

Borri M. and Montegazza P.

Certain forms of stability of twin-blade semirigid rotors

Actes 2e Congrès Assoc. Ital. di Aeronaut. E Astronaut., Pise, Italie,

Septembre 1974, 313-322

Boudarel R. , Delmas J. & Guichet P.

Commande optimale des processus

Dunod, Paris, 1967

Brewer J. W.

Kronecker Products and Matrix Calculus in system Theory.

IEEE on circuits and systems Vol. cas-25, N°9 , september 1978

Brunovsky P.

Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems

Journal of Differential Equations 6, 1969, 296-313

Burgat C. & Mira C.

Sur une méthode de détermination des exposants caractéristiques d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients périodiques

C.R. Acad. Sc. Paris, t. 271, Série A, novembre 1970

Chammas A. B. and Leondes C. T.

- *On the design of linear time invariant systems by periodic output feedback*

Int. J. Contr. , Vol. 27, n° 6, 885-903, 1978

- *On the finite time control of linear systems by piecewise constant output feedback*

Int. J. Contr., Vol. 30, n° 2, 227-234, 1979

Chassande J. P.

Etude analytique complète d'une machine synchrone autopilotée à caractéristiques bilinéaires et à commutation naturelle de courant

Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Grenoble, Juin 1981

Chen C. T.

Introduction to linear system theory

Electrical, Engineering, Electronics and systems, Holt, Rinhart and Winston Series (USA)

Corall D. R.

On the stability of periodically time varying systems

Int. J. Control, 1979, Vol. 29, n° 3, 497-504

Elachi C.

Waves in active and passive periodic structures. A review
IEEE Proc. , Vol. 64, December 1976, 1666-1698

Floquet G.

Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques

Annales Sc. de l'E. N. S., 1883, t. XII, 47

Gantmacher F. R.

Théorie des matrices

Dunod- Paris, 1966, t. 1 et 2

Iswar B.

The characteristic exponents in the restricted problem of three bodies

J. Math. and Phys. Sc., Vol 14, october 1980, 397-414

Kabamba P.T.

Monodromy Eigenvalue Assignment in Linear Periodic Systems

IEEE Transaction on Autom. Contr. Vol. AC-31, N°10, October 1986

Kabamba P. T.

Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions

IEEE Trans. On Aut. Contr., Vol. 32, n° 9, September 1987

Kern G.

Linear closed-loop control in linear periodic systems with application to spin-stabilized bodies

Int. J. Control, 1980, Vol. 31, n° 5, 905-916

Langenhop C. E.

On bounded matrices and kinematic similarity

Trans. Am. Math. Soc., 97, 1960, 317

Laurent F. , Borne P. & Gentina J. C.

Sur une limitation de durée du régime transitoire d'un système échantillonné à gain périodique

Congrès de l'AFAS, Besançon, 1969

Revue de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, t. 1, n° 3, 135-144, 1er trimestre 1970

Lesenne N. , Kotny J. L. and Segurier G.

Influence of the usual simplifying hypothesis on the study of the dynamical behaviour of the synchronous machine

Collection "Technique et Documentation", Lavoisier Université, 1981
Paris

Lyapunov A. M.

Problème général de la stabilité du mouvement

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, , t. IX, 1892 (trad. 1907)

Malkin I. G.

Some problems in the theory of non-linear oscillations

Traduit du Russe (1956) dans Translation Series, Physics & Math., A.E.C.,
Tr. 3766, US

Mammeri B.

Sur une méthode simple de calcul des valeurs propres de l'équation de Mathieu

C.R. Acad. Sc. Paris, t. 272, Série A, juin 1971

Markus L.

Continuous matrices and stability of differential systems

Math. Zeitschrift Bd. 62, 1955, 310-319

Meerkov S. M.

Averaging of trajectories of slow dynamic systems

Differential equations, Vol. 9, 1973, 1239-1245

Meerkov S. M.

Principle of vibrational control : Theory and applications .

IEEE Trans. on Autom. Contr. Vol AC-25 N°4, August 1980.

Miles J. F. and Harris C. J.

Stability of linear systems

Mathematics in Science and Engineering, Vol. 153, Academic Press, London, 1980

Pardoux E. & Pignol M.

Etude de la stabilité de la solution d'une EDS bilinéaire à coefficients périodiques. Application au mouvement des pales d'hélicoptère

Thèse de Doctorat, Université de Provence et INRIA, 1984

Parodi M.

Introduction à l'étude de l'analyse symbolique

Gauthier Villars, Paris, 1957, 112-113

Pillet E. , Poloujadoff M. & Chassande J.P.

Time constants of unsymmetrical short circuit of synchronous machines

IEEE Transaction on Power Apparatus and systems, vol. Pas-98, N°6 Nov/Dec 1979

Pillet E. , Poloujadoff M. , Richard J. P. and Laurent F.

Determination of time-varying systems asymptotically stable without verifying the linear stability conditions

Symposium MECO'82, Vol. 1, Tunis, Septembre 1982

Pillet E. & Poloujadoff M.

Méthode de résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques. Application à un asservissement.

Symposium MECO'82 , Vol. 1, Tunis , Septembre 1982

Pontriaguine L. L. , Boltianski V. , Camkréldzé R. & Michtchenko E.

Théorie mathématique des processus optimaux

Edition Mir, 1974, (traduit du russe)

Przybylski C. and Richard J. P.

On structural model reductions for continuous non-linear periodical time-varying systems

Congrès IMACS, Lille, juin 1986

Richard J.P. , Saadane A. and Rabenasolo B.

Periodic Systems : Pole assignment and optimal control by Floquet's factor direct computation

Systems Analysis-Modelling-Simulation, (à paraître)

Richard J. P. , Saadane A. and Rabenasolo B.

Control of periodic systems by use of Floquet's transformation

Handbook of Automatic Control, Part III : System stability (S. Tzafestas, M. Dekker), (à paraître)

Richard J. P. and Conze P.

Toward the optimal control of linear periodic systems

Computing and Computers for control systems, IMACS, 1989, 77-78

Richard J. P. & Laurent F.

Identification of the dynamical properties of a linear process with periodical coefficients

Congrès ACI 1983, Iasted Copenhagen, Vol. 1, 8/7-8/11

Schäfke F. W. and Schmidt D.

Ein Verfahren zur Berechnung des charakteristischen exponenten der Mathieuschen differentialgleichung

III Numer Math. 8, 1966, 68-71

Shaymann M. A.

Inertia theorems for the periodic Liapunov equation and Perioduc Riccati equation.

Systems & control letters 4, February 1984 , 27-32 (North-Holland).

Shokoohi S. , Silverman L.M. and Van Dooren D.M.

Linear time variable systems : balancing and model reduction

IEEE Trans. On Autom. Contr. , Vol. AC-28, n° 8, August 1983

Sigrist N.

Qualitative investigation of almost separable Hamiltonian systems

Actes du Advanced Study Institute, Italy, Août 1976, 141-150

D. Reidel Pub. Comp.

Sinha S. C., Chou C. C. and Denman H. H.

Stability analysis of systems with periodic coefficients : an approximate approach

Journal of Sound and Vibration, 1979, Vol. 64, n° 4, 515-527

Tamir T.

Characteristic exponents of Mathieu equations

Math. Comp. ,1962, 16-17

Volosov

Averaging in systems of ordinary differential equations

USP Matem. Nauk. 17, n° 6,1962

Willems J. L. , Kucera V. and Brunovsky P.

On the assignment of invariant factors by time varying feedback strategies.

Systems & control letters 5, 1984, 75-80

Wu Min-Yen

- *Solvability and représentation of linear time-varying systems*

Int. J. Control, Vol. 31, n°5, 1980, 937-945

- *Solution of certain classes of linear time-varying systems*

Int. J. Control., Vol. 31, n°1, 1980, 11-20

Yoshii K. and Hakomori K.

Characteristic multiplier assignment in continuous-time linear periodic systems

Int. J. Control, Vol. 50, n° 6, 1989, 2349-2363

Ziegler F.

Wave propagation in periodic and disordered layered composite materials

Int. J. Of Solids and Structures, Vol. 13, n° 4, 1977, 293-305



Résumé

Ce mémoire traite essentiellement des systèmes linéaires à coefficients périodiques.

La première partie de ce travail met l'accent sur le problème délicat de la résolution analytique des équations différentielles à coefficients variables en fonction du temps qui régissent les processus linéaires non stationnaires. Ce problème constitue un obstacle majeur à toute analyse quantitative rigoureuse ou aux problèmes de commande.

La deuxième partie traite des systèmes linéaires à coefficients périodiques. Une solution au problème de Floquet-Lyapunov est proposée. Une telle solution permet de résoudre très précisément, et de manière analytique, les équations différentielles à coefficients périodiques. De plus, pour ce faire, un algorithme facilement informatisable, utilisant les propriétés des produits tensoriels, a été mis au point.

La troisième partie concerne l'aspect synthèse et commande des systèmes linéaires T-périodiques, en particulier le problème de placement de pôles. Des méthodes de synthèse, appliquées jusqu'ici aux systèmes linéaires stationnaires, ont été généralisées grâce à l'introduction de la notion de modèle réduit ou stationnarisé. De plus, une nouvelle approche de synthèse est proposée. Elle donne une condition suffisante pour la détermination d'un feedback à gain périodique continu qui permet d'assigner entièrement les exposants caractéristiques des processus T-périodiques. Ceci permet, par exemple, d'obtenir des comportements de type "réponse pile" pour les systèmes T-périodiques à sortie continue.

La dernière partie est consacrée à des exemples d'application divers, comme par exemple le problème de régulation de l'attitude d'un satellite à spin stabilisé. Traités autrement dans la littérature de manière plus ou moins approchée, ces exemples nous permettent de comparer et mettre en valeur les méthodes et algorithmes proposés.

Mots clés

Commande SSPH
Exposants et multiplieurs caractéristiques
Gain périodique
Matrice de monodromie
Placement de pôles
Stabilisation
Systèmes T-périodiques
Théorie de Floquet-Lyapunov

