

50376
1990
241
N° d'ordre : 617

50376
1990
241

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES
ARTOIS

pour obtenir le titre de
DOCTEUR EN ELECTRONIQUE

par

Mohamed ABOU ARAM



INFLUENCE DE LA TOPOGRAPHIE DU TERRAIN
SUR LA PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES
EN BASSES FREQUENCES

Soutenue le 23 Novembre 1990 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury : MM	R. GABILLARD	Président, Rapporteur
	J. FONTAINE	Rapporteur
	P. DEGAUQUE	Directeur de Thèse
	A. ZEDDAM	Examineur
	A. DEFEBVRE	Invité

A Anne-Marie
A mes parents et ma famille
A mes amis

Ce travail a été effectué au LABORATOIRE RADIOPROPAGATION ET ELECTRONIQUE de l'Université de Lille Flandres Artois, dirigé par Monsieur le Professeur R. GABILLARD.

Je remercie Monsieur le Professeur R. GABILLARD de m'avoir fait l'honneur de juger mon travail et de présider le jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance et de mon plus profond respect.

Pendant toute la durée de cette étude, j'ai travaillé en étroite collaboration avec Monsieur le Professeur P. DEGAUQUE de l'USTL. Le soutien constant et les multiples encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail ont été déterminants pour la réalisation de cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour cette aide efficace.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur le Professeur J. FONTAINE de l'Université de Clermont-Ferrand, de m'avoir fait l'honneur de juger mon travail et de participer au jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury, je remercie Monsieur le Professeur A. DEFEVRE, Doyen de la Faculté Libre des Sciences de Lille.

Je tiens à remercier Monsieur A. Zeddani qui a bien voulu examiner mon travail et participer au jury.

Je ne terminerai pas cet avant-propos sans exprimer mes remerciements à Monsieur DEHORTER qui a contribué à l'élaboration de ce document et à tous les membres de l'équipe du Laboratoire Radiopropagation et Electronique pour leur aide.

TABLE DES MATIERES

1er CHAPITRE : RAYONNEMENT D'UN DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL OU HORIZONTAL DANS UN MILIEU A TROIS COUCHES

INTRODUCTION	P.1
I.1 - D.E.V. dans le 1er demi-milieu	P.2
I.2.1. Expression du champ rayonné	P.3
I.2.2. Application des conditions aux limites	P.6
I.3. Etude des intégrales de Sommerfeld	P.8
I.3.1 Etude des fonctions intervenant dans les intégrales de Sommerfeld	P.8
I.3.2. Procédure numérique d'intégration	P.14
I.4 - Etude paramétrique du champ émis par un dipôle électrique.	P.16
I.4.1 - Influence de la fréquence.	P.16
I.4.2 - Influence de la conductivité de la forêt	P.19
I.4.3 - Influence de la distance horizontale r entre l'émetteur et le récepteur	P.22
I.4.4 - Effet du milieu d'émission.	P.25
I.5 - Conclusion	P.29

2° CHAPITRE : ANOMALIE DANS UN MILIEU HOMOGENE

INTRODUCTION	P. 30
II.A.1 - Polarisation du champ électrique parallèle à l'axe du cylindre	P. 31
II.A.2 - Expression du champ rayonné	P. 32
II.A.3- Convergence de la série	P. 34
II.A.4- Comparaison des résultats avec ceux de la littérature	P. 34
II.A.5- Etude paramétrique du champ électrique	P. 34
II.A.5.1- Influence de la fréquence et du rayon du cylindre	P. 34
II.A.5.2- Influence de la distance de réception r	P. 39
II.A.6- Courant de surface	P. 39
II.A.7- Polarisation verticale du champ électrique	P. 43
II.A.8- Expression du champ rayonné	P. 43
II.A.9- Etude paramétrique des composantes du champ électrique	P. 45
II.A.9.1- Composante transversale E_{θ}	P. 45
II.A.9.2- Influence de la géométrie de l'anomalie	P. 47
II.A.9.3- Composante radiale du champ électrique	P. 50
II.A.10- Courant de surface	P. 52

II.A.11- Conclusion	P.54
II.B.1- Anomalie sphérique	P.55
II.B.2- Détermination des composantes du champ électrique	P.56
II.B.3- Etude paramétrique	P.60
II.B.3.1- Composante normale du champ électrique E_r	P.60
II.B.3.2- Composante tangentielle E_θ	P.65
II.B.4- Conclusion	P.66
3' CHAPITRE : INFLUENCE DU SOL	
INTRODUCTION	P.67
III.1 - Anomalie dans un milieu stratifié	P.68
III.2 - Simulation de l'anomalie par des dipôles électriques	P.69
III.3 - Expression du champ électrique	P.71
III.3.1 - Champ total en un point des deux milieux	P.71
III.3.2 - Champ rayonné par les dipôles équivalents	P.73
III.3.3 - Champ total à l'intérieur de l'anomalie	P.75
III.4 - RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES	P.78
III.4.1 - Transformation du système intégral en système linéaire	P.78

III.4.2 - Calcul des éléments de la matrice	P. 80
III.4.3 - Optimisation du calcul de la matrice	P. 86
III.5 - Convergence du calcul du champ électrique à l'intérieur de l'anomalie	P. 95
III.6 - Influence du sol	P. 95
III.7 - Etude paramétrique	P. 98
III.7.1 - Influence de la conductivité de l'anomalie	P. 98
III.7.2 - Influences des dimensions de l'anomalie	P. 101
III.7.2.1 - Longueur de l'anomalie L	P. 101
III.7.2.2 - Largeur de l'anomalie l	P. 101
III.7.2.3 - Hauteur de l'anomalie H	P. 101
III.8 - Champ électrique émis par un D.E.V.	P. 103
III.9 - Conclusion	P. 111

4' CHAPITRE : INFLUENCE D'UN PYLONE

INTRODUCTION

IV.1 - Position du problème	P. 113
IV.2 - Champ re-rayonné par le pylône	P. 114
IV.3 - Expression final du champ re-rayonné	P. 117

IV.4 - Distribution du courant sur l'antenne	P. 119
IV.5 - Etude paramétrique du champ re-rayonné	P. 122
IV.5.1 - Influence de la distance r	P. 122
IV.5.2 - Comparaison avec les résultats pratiques.	P. 124
IV.5.3 - Réponse fréquentielle	P. 127
IV.5.4 - Réponse temporelle	P. 127
IV.6 - CONCLUSION	P. 135

5^e CHAPITRE : TRANSITION SOL-MER

INTRODUCTION	P. 136
V.1 - Transition de largeur faible	P. 137
V.2 - Impédance mutuelle entre deux dipôles	p 138
V.3 - Expression du champ électrique E_z	p 144
V.4 - Calcul de $\Delta Z_m / Z_m$ sous forme intégrale	p 145
V.5 - Transition abrupte	p 147
V.6 - Etude paramétrique	p 149
V.6.1 - Variation de $g(\alpha_1)$	p 149
V.6.2 - Variation de E_z	p 151

V.7 - Impédance de surface variant linéairement	p 151
V.8 - Etude paramétrique	p 154
V.8.1 - Variation de $Q(\alpha)$	p 154
V.8.2 - Variation de E_z	p 157
V.9 - Influence de la courbure de la terre	p 160
V.9.1 - Fonction d'atténuation	p 160
V.9.2 - Expression du champ électrique	p 163
V.9.3 - Traitement numérique	p 164
V.9.3.1 - Calcul des racines complexes t_s	p 164
V.9.3.2 - Calcul de la série $W(x,q)$	p 166
V.10. - ETUDE PARAMETRIQUE DE W'	p 168
V.10.1 - Influence de la distance entre l'émetteur et la zone de transition	p 168
V.10.2 - Influence de la fréquence	p 171
V.11 - Variation de E_z	p 171
V.12 - CONCLUSION	p 178

INTRODUCTION

INTRODUCTION

L'objet de cette thèse est l'étude de la déformation de l'amplitude du champ électromagnétique due à la topographie du terrain. En effet, de nombreux travaux ont montré qu'un changement de la nature du sol sur le trajet des ondes, une anomalie topographique telle qu'une montagne, une vallée ou simplement la présence d'une forêt provoque, même en basse fréquence ($f < 5$ MHz) une modification locale du champ électromagnétique.

Tout d'abord, pour étudier l'influence d'une forêt, nous supposerons un modèle simplifié à trois couches représentant successivement l'air, la forêt et le sol. Le premier chapitre concerne donc le rayonnement d'un dipôle électrique vertical ou horizontal, placé dans un milieu quelconque de ces trois milieux. Après une description du formalisme basé sur les intégrales de Sommerfeld, une étude paramétrique est effectuée de manière à mettre en évidence la variation du champ électrique lorsque le point d'observation passe d'un milieu à l'autre et, notamment de l'air à la forêt ; de plus, l'influence de la fréquence et de la polarisation des ondes est étudiée également.

En pratique, une "anomalie" ne se produit, par définition, que sur une longueur finie. Le problème pris dans son entière généralité est extrêmement complexe, aussi allons-nous l'aborder par phases successives en introduisant de nombreuses simplifications, soit sur la dimension, soit sur la forme de l'anomalie.

Le premier exemple canonique qui puisse être envisagé est celui d'une montagne isolée telle que cela peut se produire sur un massif montagneux situé sur une île. Afin d'avoir un ordre de grandeur des perturbations qui peuvent être engendrées par cet obstacle, on a essayé de se ramener à une forme géométrique simple telle que des solutions analytiques existent, si on

assimile cette "montagne" soit à une demi-sphère, soit à une demi-cylindre (obstacle à symétrie de translation) placé sur une sol parfaitement conducteur.

La théorie des images permet de nous amener au calcul des courant et champ rayonnés dans le vide en présence d'un obstacle de dimension double. Le deuxième chapitre décrit pour les deux formes précédentes le développement analytique et montre l'effet de masque que peuvent engendrer de tels obstacles de très grandes dimensions.

Le champ électromagnétique peut également subir des variations locales importantes lorsque le point d'observation se situe au voisinage d'anomalie topographique de taille beaucoup plus réduite. On peut en effet s'attendre à ce qu'une antenne de réception placée au voisinage d'un bâtiment, d'une colline ou d'une forêt capte un champ différent de celui qui existerait en présence d'une surface du sol parfaitement plane.

Le troisième chapitre traite donc le cas d'une "anomalie" située sur la surface d'un demi-milieu homogène et infini. L'étude théorique est abordée par la méthode des équations intégrales. Pour cela, après avoir montré que chaque élément de volume dv de l'anomalie se comporte comme un dipôle électrique équivalent re-rayonnant dans un demi-milieu, nous décrivons l'approche mathématique permettant de calculer la distribution de ces dipôles équivalents. Nous montrerons que le moment électrique qui les caractérise est solution d'une équation intégrale qui est résolue par la méthode des moments. Une des difficultés rencontrées dans l'application de cette méthode est qu'il faut calculer le champ rayonné dans l'air par chaque dipôle équivalent à un volume élémentaire de l'anomalie discrétisée. Compte tenu des fréquences basses envisagées, il n'existe pas de formule simple permettant de calculer ce champ en zone proche, ce qui implique donc le calcul numérique des intégrales de Sommerfeld intervenant dans les formules du rayonnement du dipôle.

Dans les exemples présentés, la conductivité de l'anomalie posée sur le sol pourra être identique à celle du sol lui-même. On dispose ainsi d'un moyen pour simuler l'influence d'une colline. Dans d'autres cas, nous considèrerons une faible conductivité, correspondant à celle d'une forêt et on s'attachera dans tous les cas à déterminer la distance minimum entre l'antenne de réception et l'obstacle afin que ce dernier n'ait que très peu d'effet sur le champ capté.

Dans les chapitres précédents, on s'est intéressé à l'amplitude et à la phase du champ électrique reçu en un point. Dans la pratique, ce champ est mesuré à l'aide d'une antenne, souvent verticale en basse fréquence et placée sur un mât. Ce mât lui-même joue le rôle d'obstacle puisqu'il peut être considéré comme une grande antenne verticale qui sera parcourue par un courant induit par le champ incident et re-rayonnera donc un champ secondaire qui sera capté par l'antenne de mesure fixée au voisinage immédiat du mât.

De manière générale, ce problème est tout à fait équivalent à celui exposé dans le chapitre précédent, hormis le fait que de nombreuses simplifications peuvent être introduites dans le calcul numérique puisque le mât peut être considéré comme un obstacle filiforme. Compte tenu de cette hypothèse, et après avoir décrit le procédé de résolution numérique, nous étudierons la réponse fréquentielle et temporelle de cet obstacle afin notamment de mettre en évidence l'influence sur le champ mesuré de la distance entre le mât et l'antenne de réception.

Enfin, le dernier chapitre de cette thèse est consacré à un autre type d'anomalie qui est celui d'un changement de conductivité rencontré par l'onde électromagnétique lors de sa propagation à la surface de la terre. Le cas le plus caractéristique et qui sera étudié en détail est la transition sol-mer. Nous déterminerons la perturbation locale du champ électrique due à la ligne de côte en envisageant le cas d'une interface mer-sol plan, puis en prenant en compte l'effet de rotondité de la terre.

CHAPITRE I

I - RAYONNEMENT D'UN DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL OU
HORIZONTAL DANS UN MILIEU A TROIS COUCHES

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous développons l'approche théorique permettant de calculer le champ électromagnétique rayonné par un dipôle électrique vertical ou horizontal, dans un milieu stratifié constitué de trois couches, mais dans les applications numériques, on se limite au cas de l'air et du sol, séparés par une couche mince, la forêt.

L'objectif de cette étude est d'établir des liaisons entre un émetteur se trouvant dans l'air ou la forêt et un récepteur qui est placé dans ces deux milieux.

Dans tous les cas de figures, le traitement numérique étant le même, on se contentera de le développer pour une seule configuration (l'émetteur est un D.E.V. situé dans l'air et la réception se fait dans l'air ou la forêt), et on commentera les résultats des autres configurations. Dans ce traitement, la distance qui sépare l'émetteur du récepteur est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde d'émission; ce qui ne nous permet pas de faire l'approximation de l'onde plane ou une étude approchée pour le calcul du champ électromagnétique.

De plus, cette étude numérique sera nécessaire pour les chapitres qui suivent, ceci nous amène à faire un développement détaillé de chaque étape.

I.1 - D.E.V. dans le 1er demi-milieu

Deux demi-milieux considérés homogènes et infinis sont séparés par une couche mince d'épaisseur d (fig. I.1). Les deux demi-milieux et la couche

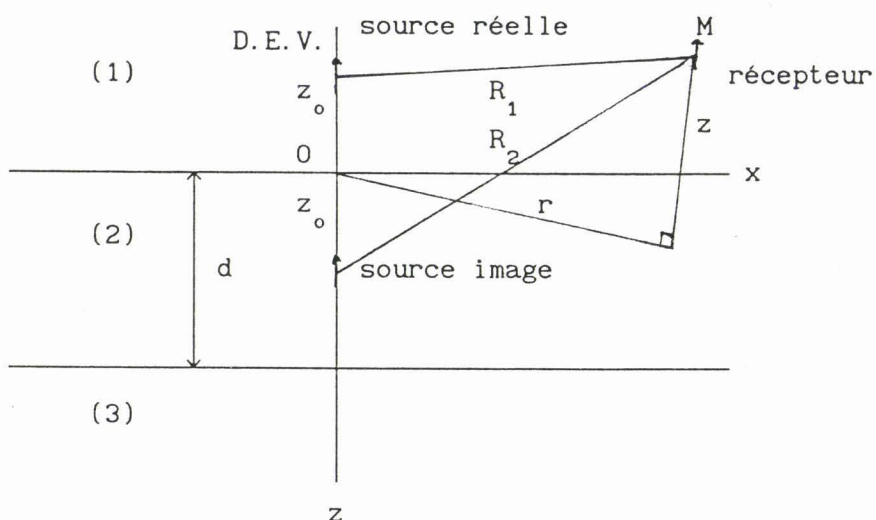


figure I.1

intermédiaire sont de caractéristiques électriques respectivement :
 (ϵ_1, σ_1) , (ϵ_2, σ_2) , (ϵ_3, σ_3) .

Un dipôle électrique vertical est placé dans le 1er demi-milieu à une distance z_0 de la surface de séparation entre (1) et (2), le point de réception est de coordonnées (r, z) , (le point de réception peut se

déplacer dans (1), (2) et (3)).

R_1 distance entre l'émetteur et le récepteur : $R_1 = \sqrt{(z-z_0)^2 + r^2}$

R_2 distance entre le dipôle image et le récepteur : $R_2 = \sqrt{(z+z_0)^2 + r^2}$

r la projection de R_1 et R_2 dans le plan oxy.

I.2.1. Expression du champ rayonné

Le dipôle émetteur de longueur dl est parcouru par un courant $I = I_0 e^{j\omega t}$ et le moment de ce dipôle peut s'écrire comme suit :

$$\vec{P} = \frac{I \vec{dl}}{4 \pi (\sigma_1 + j\omega \epsilon_1)} \quad (I.1)$$

Le champ rayonné est solution des équations de Maxwell. En introduisant le potentiel de Hertz $\vec{\Pi}_1$, les composantes électriques sont déduites de

$$\vec{E} = \vec{rot} \vec{rot} \vec{\Pi}_1 \quad (I.2)$$

i : indique l'indice du milieu.

Le potentiel de Hertz ne possède qu'une seule composante Π_z , ceci est dû à la symétrie de révolution du système. Les équations de Helmholtz s'écrivent de la manière suivante :

Dans le milieu d'émission :

$$(\Delta - \gamma_1^2) \Pi_{1z} = - \frac{P}{\epsilon} \delta(R) \quad (I.3)$$

Dans les milieux (2) et (3) :

$$(\Delta - \gamma_1^2) \Pi_{1z} = 0 \quad (I.4)$$

Δ : le Laplacien, δ : impulsion de Dirac.

$\gamma_1^2 = j\omega\mu(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)$. σ_1 : la conductivité, $\omega = 2\pi f$, f : la fréquence de travail.

Les solutions sont des fonctions de Green exprimées sous forme intégrale et les constantes d'intégrations sont déterminées à partir des conditions aux limites.

La théorie de l'électromagnétisme montre que le champ en un point M est la résultante du rayonnement reçu directement de la source émettrice et des réflexions se produisant à l'interface. Ces réflexions sont représentées par une source image symétrique à la source réelle par rapport au plan (0,x,y) et des termes complémentaires qui sont les intégrales de Sommerfeld [1]. Les potentiels de Hertz correspondants peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\Pi_{1z} = \Pi_{1p} + \Pi'_{1p} + \Pi_{1s}$$

$$\Pi_{1p} = \int_0^{\infty} F_{11}(\lambda) \exp(-u_1 |z-z_0|) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\Pi'_{1p} = \int_0^{\infty} F_{11}(\lambda) \exp(-u_1(z+z_0)) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\Pi_{1s} = \int_0^{\infty} F_{12}(\lambda) \exp(-u_1(z+z_0)) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (I.5)$$

- où Π_{1p} : correspond au champ primaire émis directement par le dipôle,
 Π'_{1p} : correspond au champ émis par la source image,
 Π_{1s} : correspond au champ secondaire, dû à la conductivité non infinie de la forêt.

$$\Pi_{2z} = \int_0^{\infty} \left[F_{21}(\lambda) \exp(-u_2 z) + F_{22}(\lambda) \exp(u_2 z) \right] \exp(-u_1 z_0) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\Pi_{3z} = \int_0^{\infty} F_{31}(\lambda) \exp(-u_{31} z) \exp(-u_1 z_0) J_0(\lambda r) d\lambda$$

Dans ces formules, λ est un réel, J_0 : fonction de Bessel d'ordre 0.

$u_i = (\lambda^2 + \gamma_i^2)$, γ_i^2 : constante de propagation du milieu i , F_{ij} : les inconnues à déterminer, $F_{11} = \lambda/u_1$

Le problème maintenant consiste à déterminer les fonctions $(F_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$

I.2.2. Application des conditions aux limites

Ces conditions sont déduites à partir de la continuité des composantes tangentielles de E et H sur les interfaces de séparations.

Au point $z = 0$

$$(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)\Pi_{1z} = (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)\Pi_{2z} \quad (\text{I.6})$$

$$\frac{\partial \Pi_{1z}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z}$$

Au point $z = d$

$$(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)\Pi_{2z} = (\sigma_3 + j\omega\epsilon_3)\Pi_{3z} \quad (\text{I.7})$$

$$\frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{3z}}{\partial z}$$

Ceci conduit à résoudre un système de quatre équations à 4 inconnues :

$$\begin{aligned}
2 u_1 F_{11}(\lambda) + u_1 F_{12}(\lambda) &= u_2 \left[F_{22}(\lambda) - F_{21}(\lambda) \right] \\
\gamma_1^2 F_{12}(\lambda) &= \gamma_2^2 \left[F_{22}(\lambda) + F_{21}(\lambda) \right] \\
u_2 \left[e^{u_2 d} F_{22}(\lambda) - e^{-u_2 d} F_{21}(\lambda) \right] &= u_3 e^{-u_3 d} F_{31}(\lambda) \\
\gamma_2^2 \left[e^{u_2 d} F_{22}(\lambda) + e^{-u_2 d} F_{21}(\lambda) \right] &= \gamma_3^2 e^{-u_3 d} F_{31}(\lambda)
\end{aligned} \tag{I.8}$$

La résolution de ce système nous donne F_{12} , F_{21} , F_{22} , F_{31} (annexe 1) d'où l'expression des Π_{iz} ($i = 1,2,3$) en fonction de paramètres tous connus.

Reste à développer l'équation (I.2) qui permet d'avoir les composantes du champ électrique dans chaque demi-milieu ainsi que dans la couche intermédiaire.

$$\left[\begin{aligned} E_{ir} &= \frac{\partial^2 \Pi_{iz}}{\partial r \partial z} \\ E_{iz} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \Pi_{iz}}{\partial r} \right] \end{aligned} \right. \tag{I.9}$$

i : représente l'indice du milieu.

Les expressions développées des différentes composantes sont données en annexe 1.

Une approche analytique tout à fait similaire peut être faite pour déterminer les expressions du champ rayonné par un dipôle électrique horizontal. Celles-ci sont explicitées en annexe 1.

I.3. Etude des intégrales de Sommerfeld

L'évaluation numérique des intégrales de Sommerfeld a fait l'objet de nombreux travaux. Hormis les méthodes d'approximation valables dans certaines zones de fréquences ou de distances émetteur-récepteur, on peut citer l'intégration dans le plan complexe suivant des contours optimisés [2], la méthode de "la plus grande pente" ou méthode du "col" [3] et l'intégration le long de l'axe réel [4], ainsi que des études comparatives de ces différentes méthodes [5]. Nous avons choisi d'utiliser la méthode d'intégration sur l'axe des réels parce qu'elle donne de bonnes précisions en des temps de calculs satisfaisants.

Mais, avant de se pencher sur le traitement numérique, il est nécessaire d'étudier les variations des intégrales en fonction des différents paramètres. Pour cela, nous traiterons ces intégrants dans le cas où le demi-milieu (1) est l'air de caractéristiques : $\sigma_1=0$, $\epsilon_1=\epsilon_0$, $\mu_1=\mu_0$, la couche intermédiaire (2) est une forêt : σ_2 , $\epsilon_2=\epsilon_{2r} \cdot \epsilon_0$, $\mu_2=\mu_0$, et le demi-milieu (3) est le sol : σ_3 , $\epsilon_3=\epsilon_{3r} \cdot \epsilon_0$, $\mu_3=\mu_0$.

I.3.1 Etude des fonctions intervenant dans les intégrales de Sommerfeld

Les fonctions des intégrales de Sommerfeld dont la variable d'intégration est un réel λ , se mettent toutes sous la forme suivante :

$$F = \frac{\beta N(\lambda) e^{-(u_1 a + u_2 b)} \lambda^n J_1(\lambda r)}{D(\lambda)}$$

$$\beta = 1, u_1, u_2$$

$$n = 1, 2, 3$$

$$J_1 = J_0, J_1$$

a, b sont donnés dans le tableau suivant :

émission dans le 1er demi-milieu

réception en (1)	$a = z + z_0$ $b = 0$
(2)	$a = z_0$ $b = \pm z$
(3)	$a = z_0$ $b = z$

$$D(\lambda) = (u_3 \gamma_2^2 - u_2 \gamma_3^2)(u_2 \gamma_1^2 - u_1 \gamma_2^2) e^{-2u_2 d} + (u_3 \gamma_2^2 + u_2 \gamma_3^2)(u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2)$$

$$N(\lambda) = A (u_2 \gamma_3^2 - u_3 \gamma_2^2) e^{-2u_2 d} + B (u_3 \gamma_2^2 + u_2 \gamma_3^2)$$

	A	B
F ₁₂	1	1
F ₂₁	0	1
F ₂₂	1	0
F ₃₁	1	0

Cette fonction admet un pôle pour une valeur de λ proche de $\omega/c = |\gamma_1|$. Autour de ce point, les fonctions connaissent une zone de grande variation (figures I.2, I.7). Ceci implique un soin particulier pour le pas d'intégration au voisinage de ce point et ce, pour un intervalle de largeur : $\delta = |\gamma_1^3 / \gamma_2^2|$.

A noter que, si les trois milieux considérés sont conducteurs, le pôle sera davantage proche de la constante de propagation dont la partie réelle est la plus faible.

D'autre part, les fonctions s'annulent pour les zéros des fonctions de Bessel et pour ceux dus aux exponentiels. Les zéros des fonctions de Bessel sont de période Π/r , quant à ceux des termes exponentiels, ils sont approchés par les expressions figurant dans l'annexe 2 et sont donnés par :

$$\lambda_n = \left[\left[\frac{(z + z_o) \operatorname{Im}(\gamma_i^2)}{n \pi} \right]^2 - \left[\frac{n \pi}{2(z_o + z)} \right]^2 \cdot \operatorname{Re}(\gamma_i^2) \right]^{1/2} \quad (\text{I.10})$$

i : l'indice du milieu.

Ces différents zéros définiront les bornes des intervalles d'intégration. Il est à noter que toutes les fonctions sont exponentiellement décroissantes.

Pour mieux comprendre l'influence des différents paramètres, nous avons

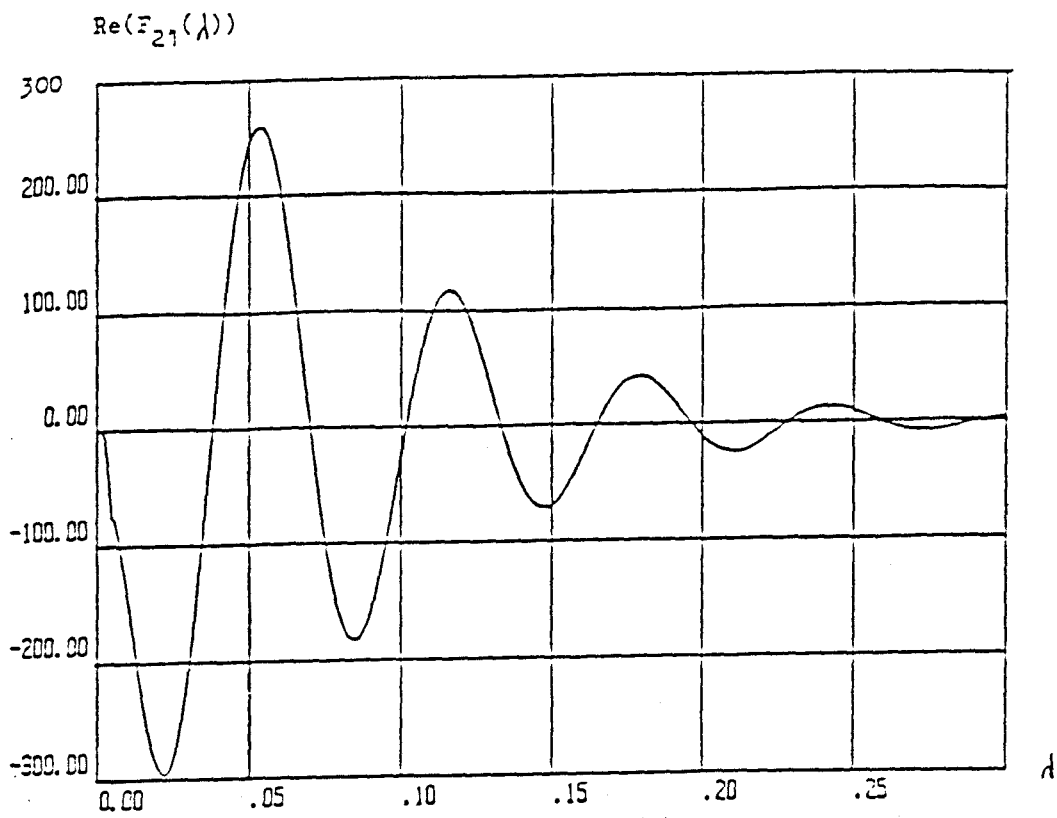


figure (I.2)

$z = 1 \text{ m}$
 $z_0 = 1 \text{ m}$
 $r = 100 \text{ m}$
 $f = 200 \text{ kHz}$
 $\omega/c = 4.2 \cdot 10^{-3}$

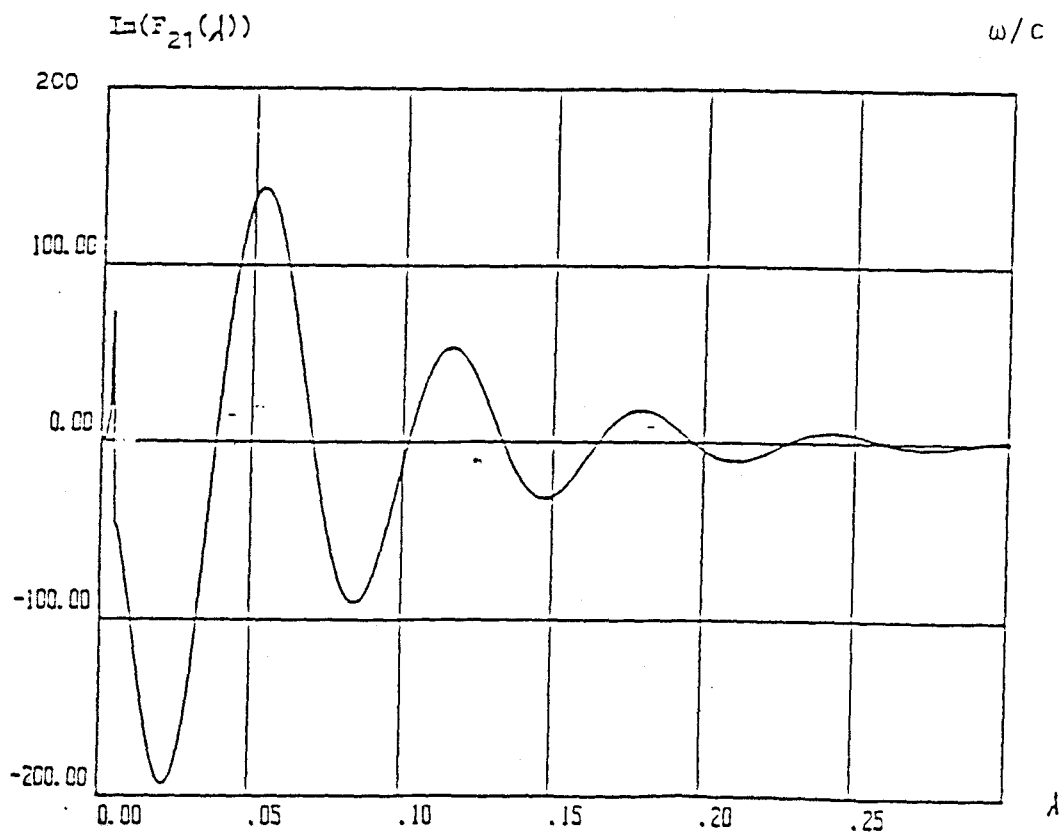


figure (I.3)

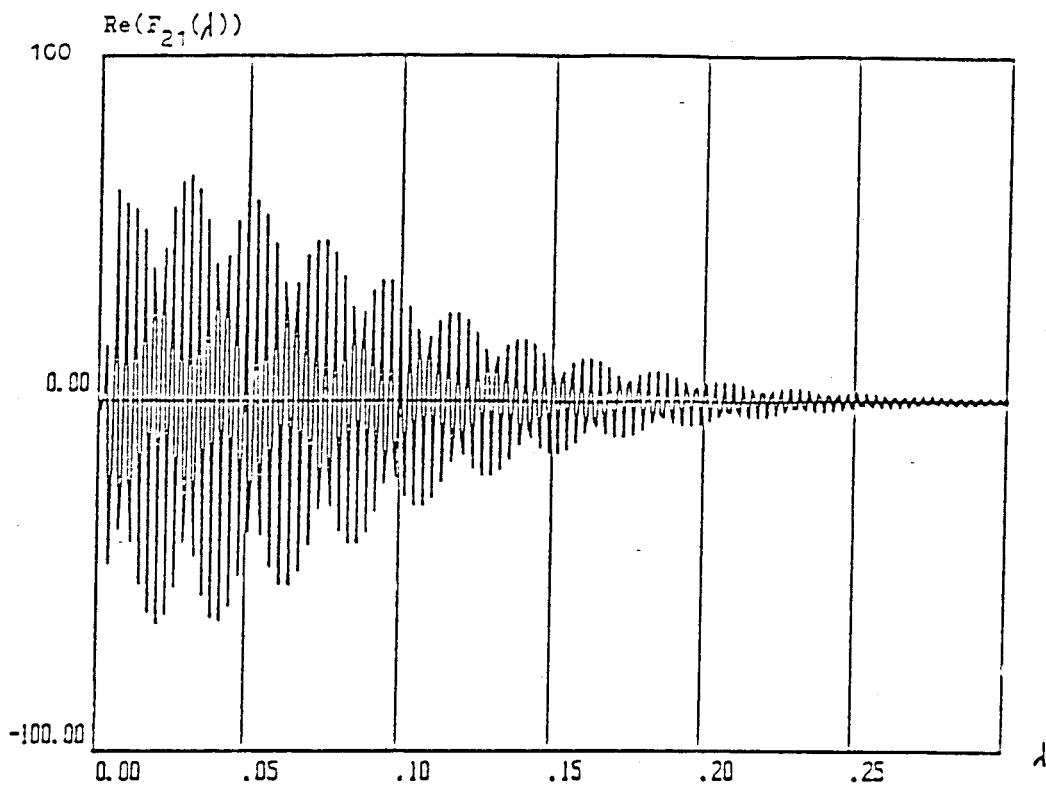


figure (I.4)

$z = 1 \text{ m}$
 $z_0 = 1 \text{ m}$
 $r = 2 \text{ km}$
 $f = 200 \text{ kHz}$

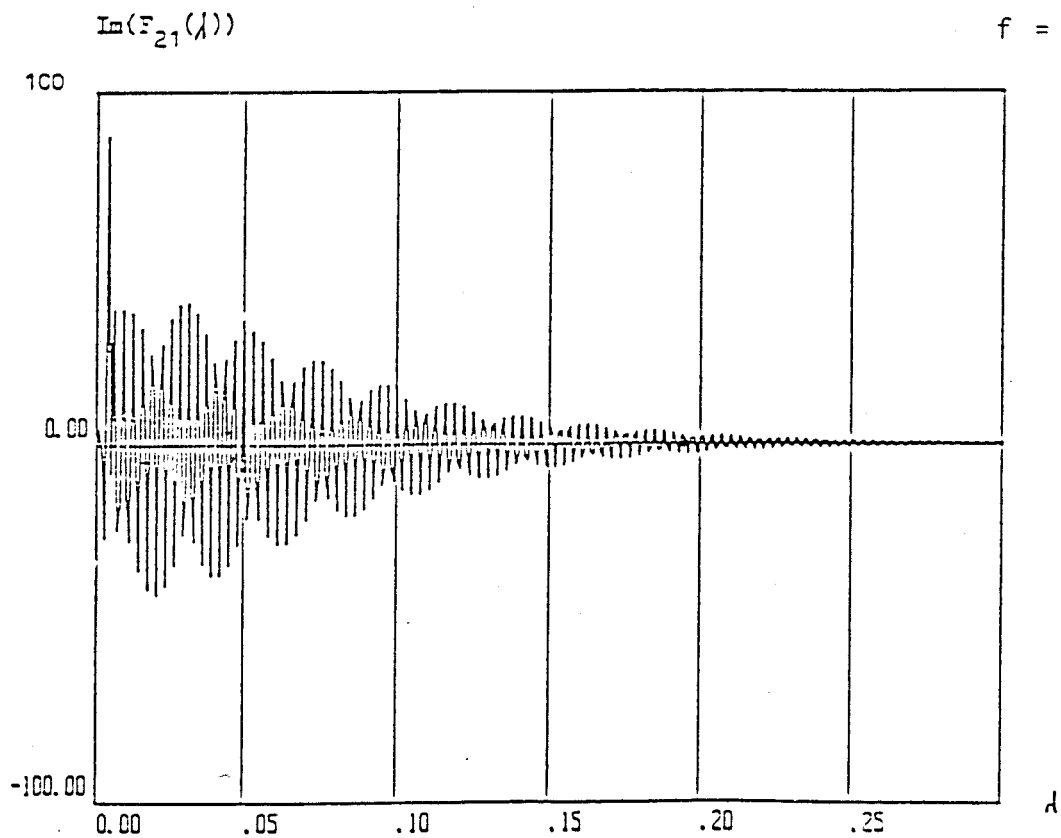


figure (I.5)

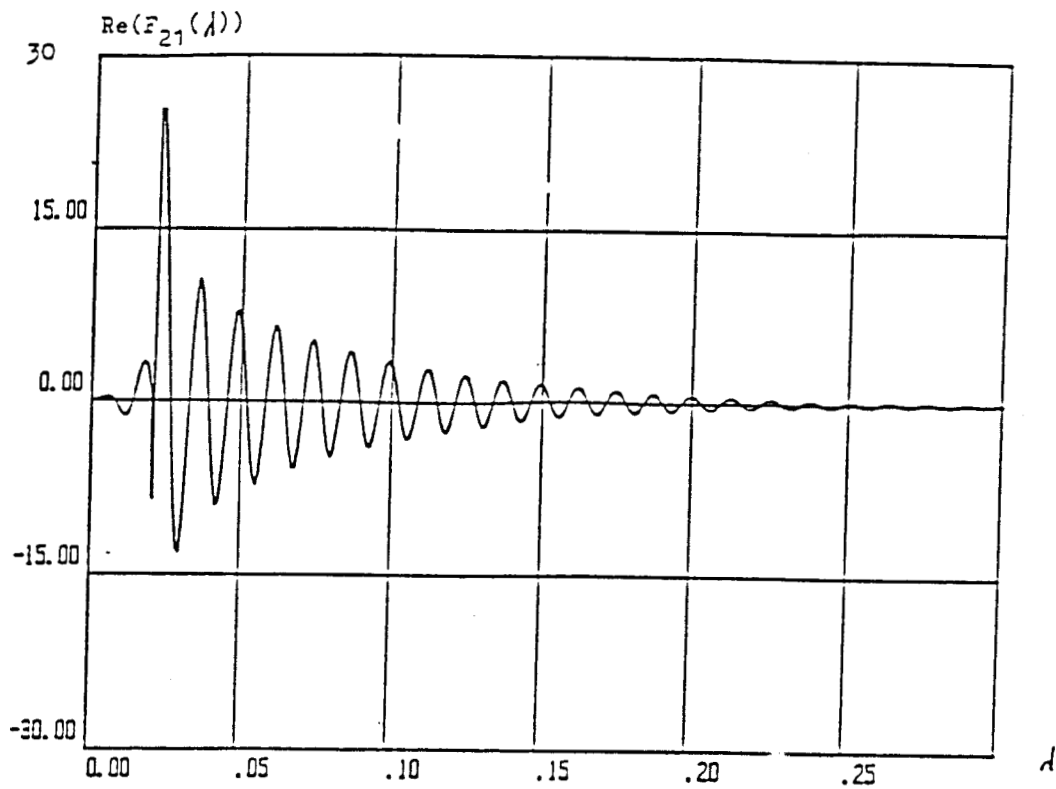


figure (I.6)

$z = 1 \text{ m}$
 $h = 1 \text{ m}$
 $r = 100 \text{ m}$
 $f = 1 \text{ Mhz}$

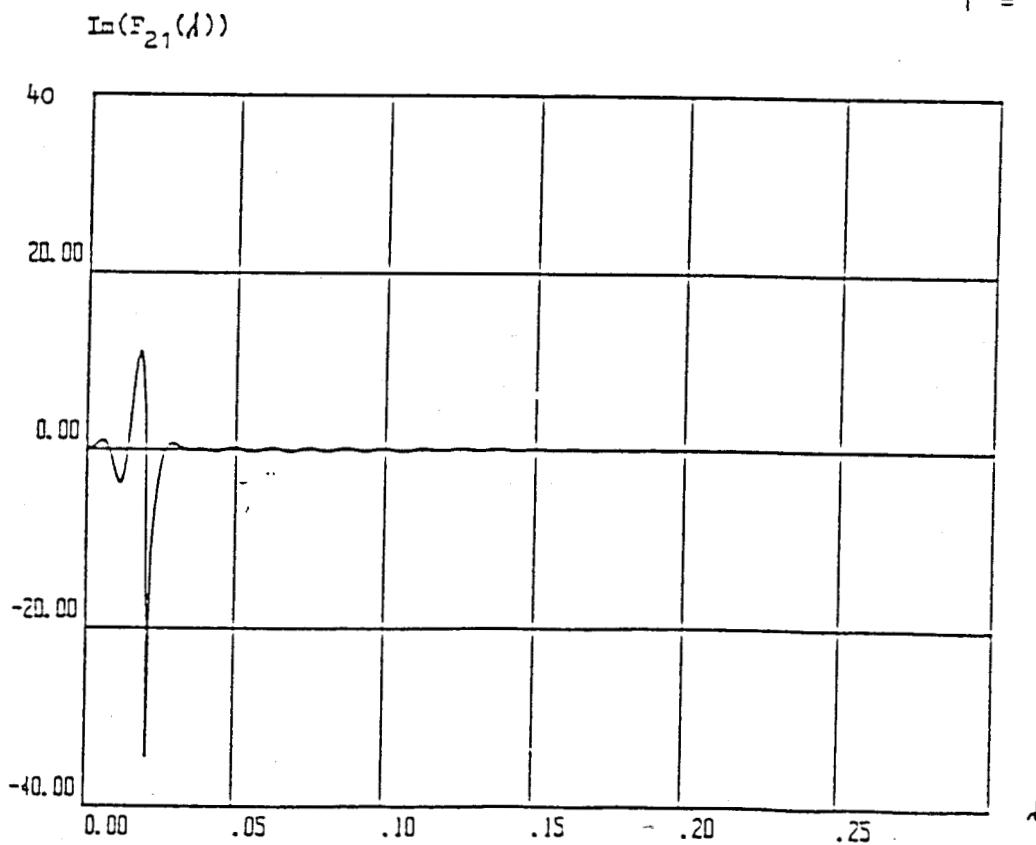


figure (I.7)

tracé sur les figures I.2, ... I.7 les variations de la fonction F :

$$F(\lambda) = F_{21}(\lambda) \exp(u_2 z) J_0(\lambda r) F_{21} \quad (\text{donnée en annexe 1})$$

pour des différentes valeurs des paramètres r, z, z_0, f et pour $\sigma_1 = 0, \epsilon_1 = \epsilon_0,$

$$\sigma_2 = 10^{-5} \text{ s/m}, \epsilon_{2r} = 1.1, \sigma_3 = 10^{-2} \text{ s/m}, \text{ et } \epsilon_{3r} = 10.$$

Ces valeurs correspondent respectivement aux caractéristiques de l'air, la forêt et le sol.

Si l'on compare tout d'abord (I.2, I.3) et (I.4, I.5), on remarque que si la distance r augmente, la fonction F devient oscillante et, cela est dû à la fonction de Bessel. De même, la comparaison de (I.2, I.3) et (I.6, I.7) correspondant respectivement à une fréquence de 200kHz et de 1MHz, montre qu'en haute fréquence, la décroissance de la fonction F est beaucoup plus rapide, et qu'elle s'accompagne de nombreuses oscillations dues au terme exponentiel. Dans tous les cas, la fonction de Bessel et le terme exponentiel jouent un rôle plus ou moins important qui se traduit par un phénomène de "modulation" sur les courbes de variations de $F(\lambda)$.

I.3.2. Procédure numérique d'intégration

L'évaluation numérique de l'intégrale :

$$I_s = \int_0^{\infty} F(a, b, r, \lambda) d\lambda$$

se limite au calcul de l'intégrale $I_s = \int_0^{\lambda_{\max}} F(a, b, r, \lambda) d\lambda$ telle que la

contribution du segment $[\lambda_{\max}, \infty]$ soit négligeable. Les constatations faites plus haut montrent que λ_{\max} deviendra de plus en plus grand si la fréquence augmente ou si $(z-z_0)$ diminue. D'autre part, comme nous l'avons vu, l'intégrand possède une zone de brusque variation au voisinage du pôle. De ce fait, le domaine d'intégration est divisé en trois intervalles [6].

Ces intervalles $[0, w/c-\delta]$, $[w/c-\delta, w/c+\delta]$, $[w/c+\delta, \lambda_{\max}]$ sont eux-mêmes subdivisés en segments d'intégration $[x_i, x_{i+1}]$ et l'intégrale devient :

$$I_s = \sum_{i=1}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(a, b, r, \lambda) d\lambda$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_m &= \lambda_{\max} \end{aligned}$$

Dans le premier intervalle $[0, w/c-\delta]$, les bornes des segments d'intégration sont les zéros des fonctions de Bessel et des termes exponentiels. L'intégrale est calculée à l'aide de l'algorithme Gauss-Legendre. Le second intervalle $[w/c-\delta, w/c+\delta]$ qui encadre la zone perturbée est découpé de manière logarithmique autour de la valeur, elle-même prise comme borne d'intégration ainsi que les différents zéros de la fonction appartenant à cet intervalle. Le choix d'un algorithme qui converge rapidement s'impose dans cette zone. Celui de Simpson répond à cette exigence et, de plus, il permet d'obtenir des résultats avec une précision préalablement fixée. Sur le dernier intervalle $[w/c-\delta, w/c+\delta]$, la méthode d'accélération de convergence Gray-Atchison [7] améliore la rapidité des calculs. De plus, nous avons choisi comme bornes d'intégration les maximums des fonctions de Bessel car les zéros de la fonction à intégrer ne conviennent pas avec la méthode d'accélération choisie.

L'algorithme d'intégration utilisé sur ces segments est celui de Simpson.

Lorsque les paramètres sont tels que les fonctions sont lentement

décroissantes, nous intégrons la fonction diminuée de sa valeur limite. L'intégrale de cette dernière est calculée analytiquement (annexe 2) et rajoutée par la suite. Ceci permet, dans certains cas, un gain appréciable en temps de calcul.

I.4 - Etude paramétrique du champ émis par un dipôle électrique.

Dans cette étude, nous nous intéressons à des liaisons entre un émetteur dans l'air ou dans la forêt, le récepteur pouvant se déplacer dans ces deux milieux. La distance qui sépare ces dipôles peut varier de quelques dizaines de mètres à quelques kilomètres. Les fréquences de travail sont voisines de 100 kHz.

I.4.1 - Influence de la fréquence.

Nous avons tracé, sur les figures I.8 et I.9, les fluctuations des composantes du champ électrique respectivement E_z et E_r . Ceci a été effectué pour un D.E.V. placé à un mètre au-dessus de la forêt et pour un récepteur séparé d'une distance $r = 100$ m de l'émetteur. Nous avons supposé que la conductivité de la forêt est $\sigma_a = 10^{-4}$ S/m, cette valeur a été choisie pour bien mettre en évidence les phénomènes mais correspond à la conductivité d'un sol granitique. Les valeurs attribuées à la forêt sont plutôt de l'ordre de 10^{-5} S/m à 10^{-6} S/m.

On note que l'atténuation de la composante E_z , au passage de l'interface air-forêt, est d'autant plus sensible que la fréquence est basse, de plus, cette composante ne varie pas beaucoup à l'intérieur de la forêt.

Sur l'interface air-forêt :

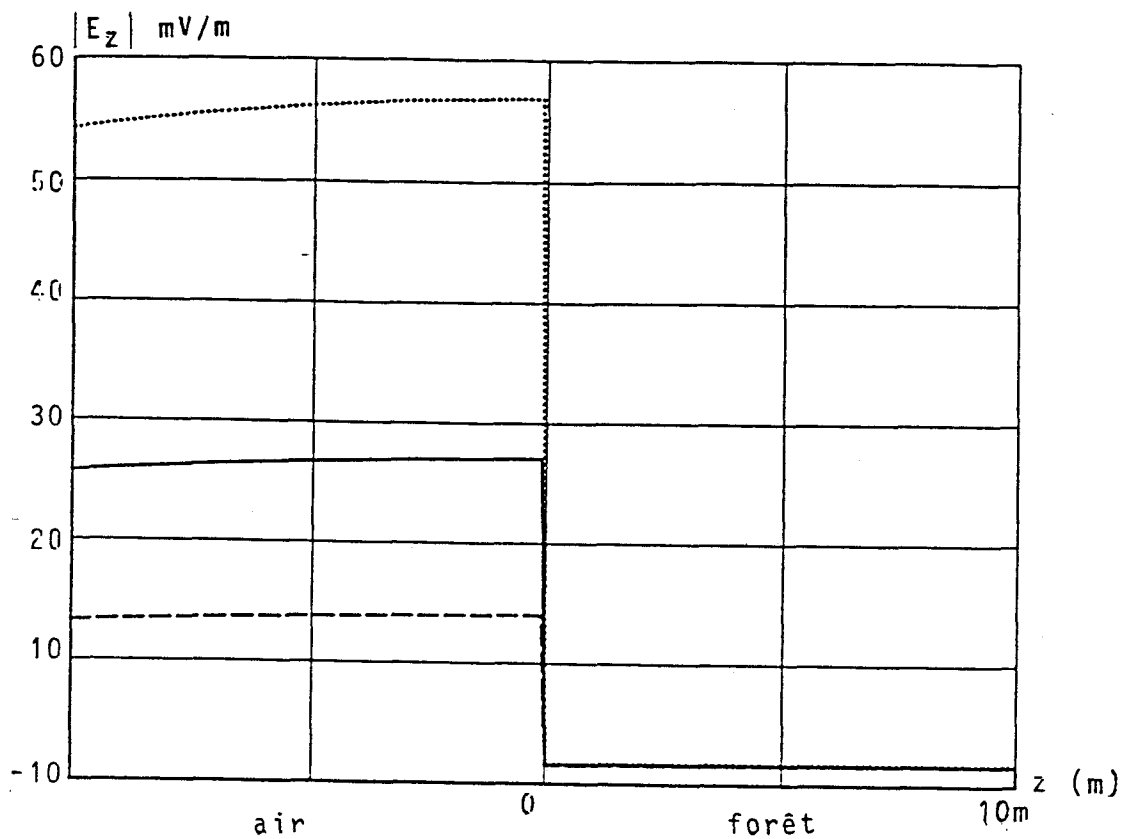
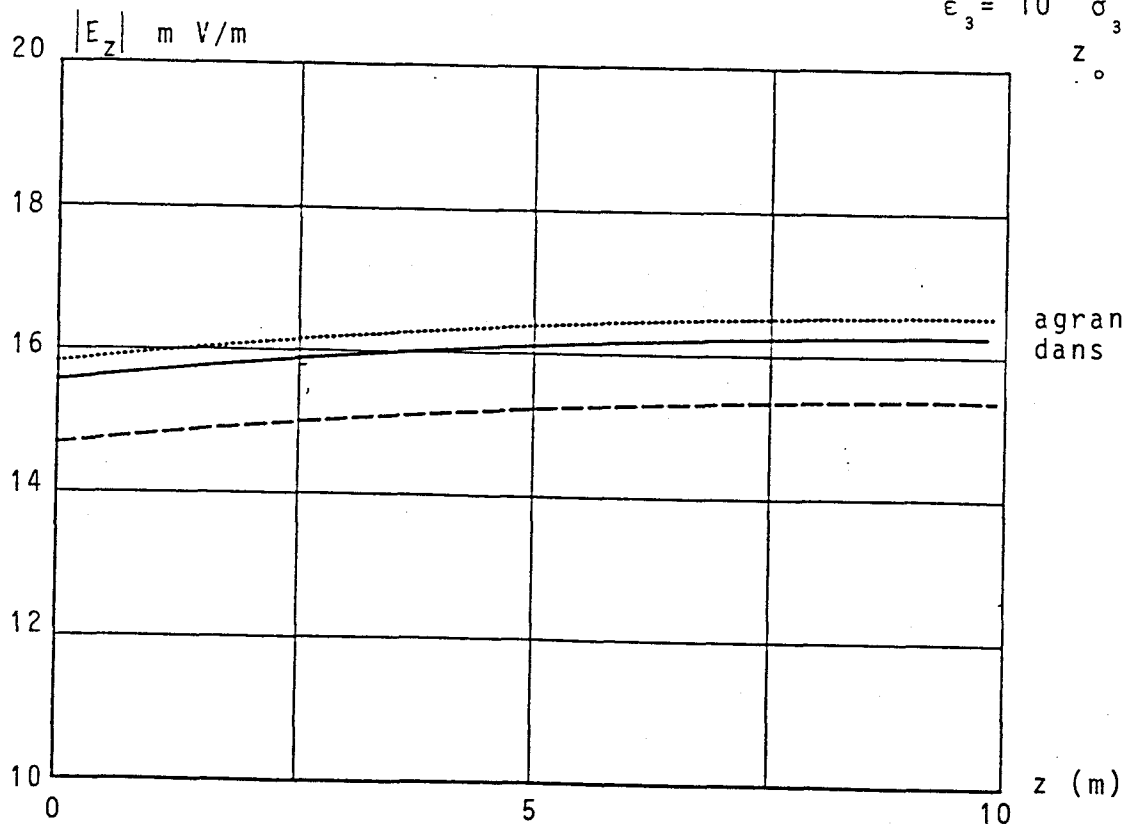


figure (I.8)

... $f = 50$ kHz
 — $f = 100$ kHz
 --- $f = 200$ kHz
 $r = 100$ m
 $\epsilon_2 = 1.1$ $\sigma_2 = 10^{-4}$ S/m
 $\epsilon_3 = 10$ $\sigma_3 = 10^{-5}$ S/m
 $z_0 = 1$ m



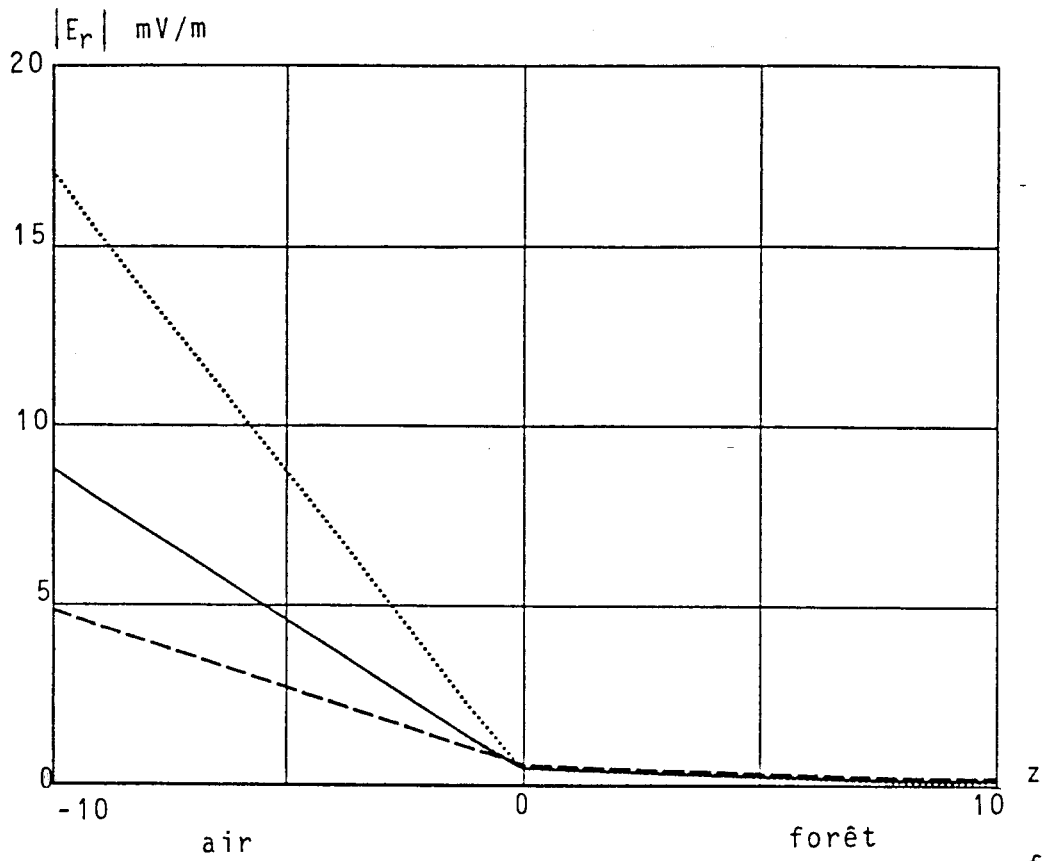
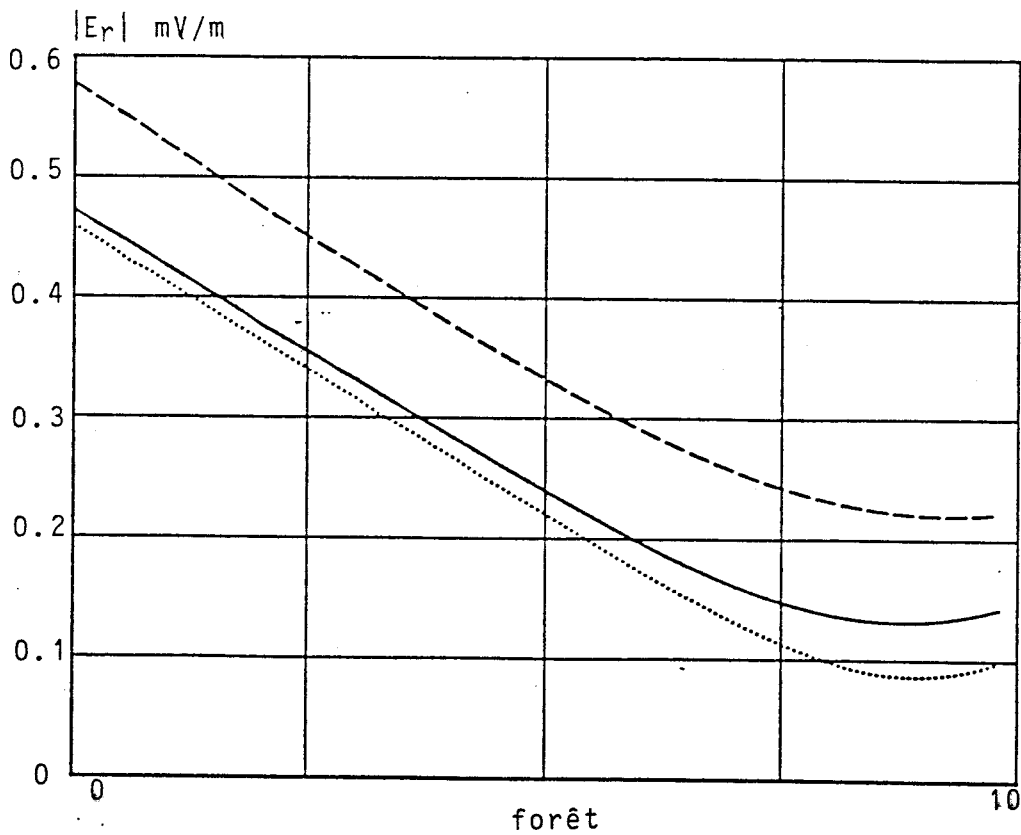


figure (I.9)

- ... $f = 50$ kHz
- $f = 100$ kHz
- $f = 200$ kHz
- $x = 100$ m
- $z = 1$ m
- $\epsilon_2 = 1.1$
- $\epsilon_3 = 10$
- $\sigma_2 = 10^{-4}$ S/m
- $\sigma_3 = 10^{-2}$ S/m



agrandissement
dans la forêt

$$\text{pour } f = 50 \text{ kHz} \quad \frac{|E_{1z}|}{|E_{2z}|} \# 34$$

$$f = 100 \text{ kHz} \quad \frac{|E_{1z}|}{|E_{2z}|} \# 17$$

$$f = 200 \text{ kHz} \quad \frac{|E_{1z}|}{|E_{2z}|} \# 8.5$$

La même chose pourrait se dire de la composante E_r où la pente d'atténuation dans l'air est plus forte si la fréquence est faible.

Sur les figures I.10 et I.11, nous avons présenté les variations de E_z et de E_r émis par une D.E.H., dans la même configuration que précédemment. Les mêmes conclusions peuvent être faites, néanmoins le champ reçu dans ce cas est beaucoup plus faible que dans le cas d'un D.E.V.

I.4.2 - Influence de la conductivité de la forêt

Pour trois valeurs de conductivité $\sigma_2 = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ S/m, les figures I.12 et I.13 montrent les variations des composantes verticale E_z et horizontale E_r du champ électrique. La distance émetteur-récepteur est faible ($r = 100$ m) par rapport à la longueur d'onde ($f = 100$ kHz, $\lambda = 3$ km).

La composante E_z subit une discontinuité importante si la conductivité de la forêt devient supérieure à 10^{-5} S/m, ceci s'explique par le fait que

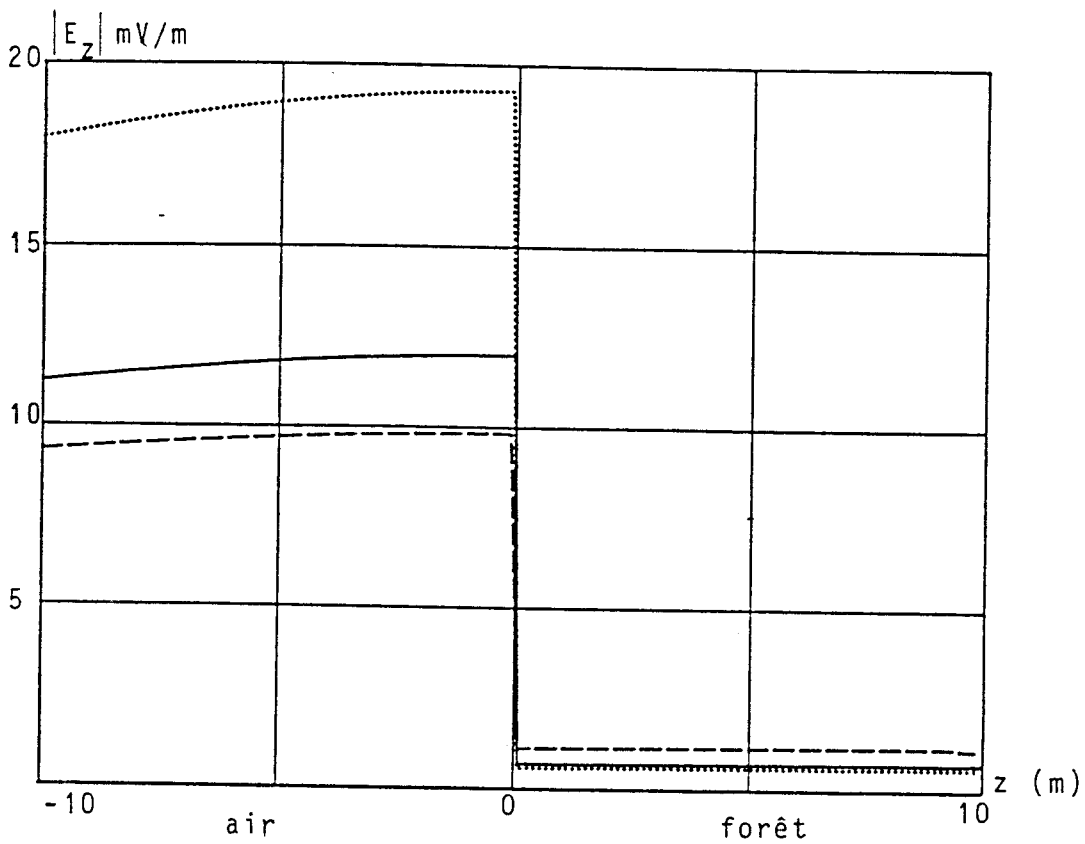


figure (I.10)

... $f = 50$ kHz
 — $f = 100$ kHz
 --- $f = 200$ kHz
 $r = 100$ m
 $z_0 = 1$ m

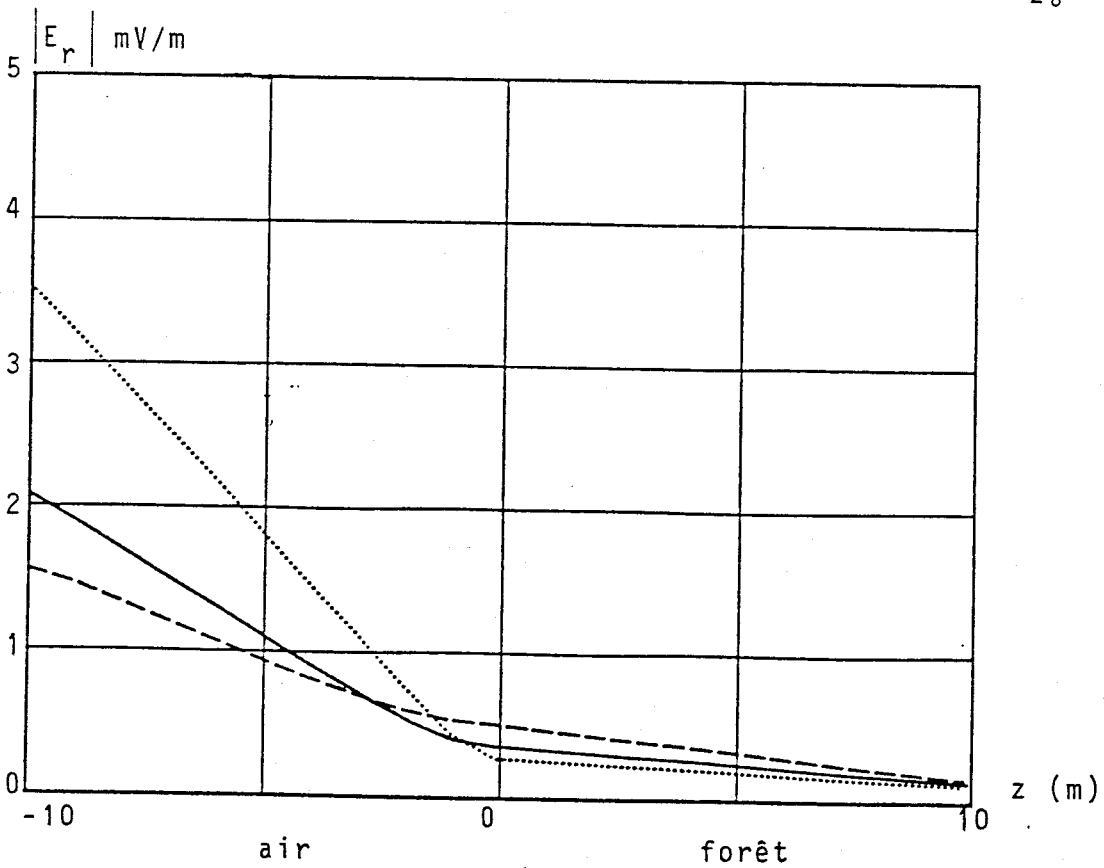


figure (I.11)

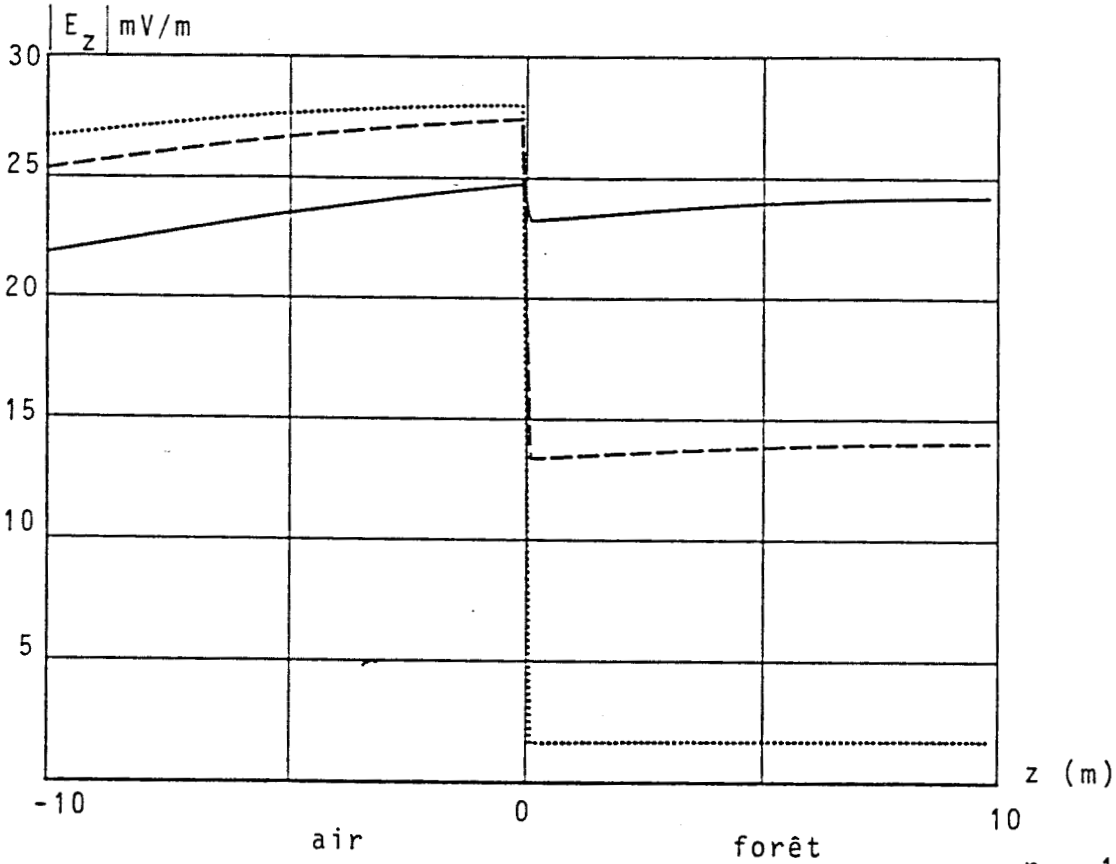


figure (I.12)

$r = 100 \text{ m}$
 $f = 100 \text{ kHz}$
 $\sigma_1 = 10^{-2} \text{ S/m}$
 $z = z_0 = 1 \text{ m}$
 — $\sigma_2 = 10^{-6} \text{ S/m}$
 - - - $\sigma_2 = 10^{-5} \text{ S/m}$
 ... $\sigma_2 = 10^{-4} \text{ S/m}$

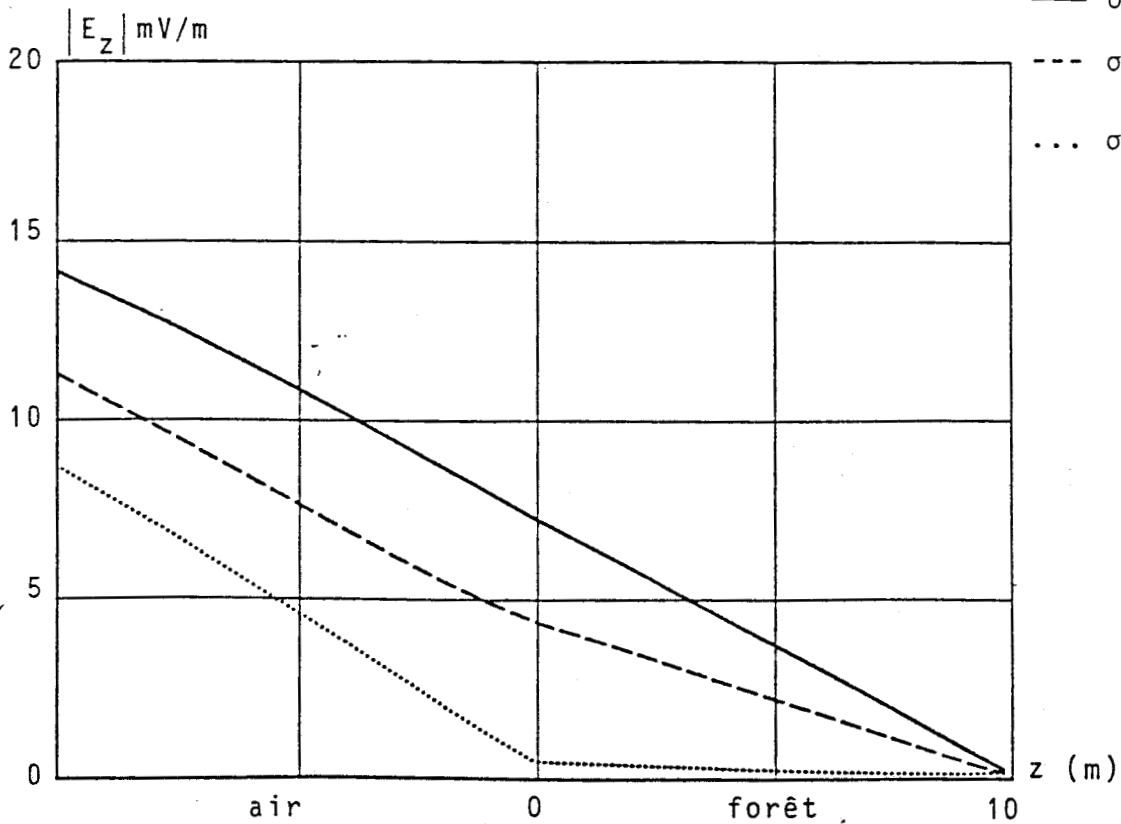


figure (I.13)

cette composante dépend des valeurs constantes de propagation de l'air et de la forêt.

En ce qui concerne E_r , il faut que $\sigma_2 \geq 10^{-4}$ S/m pour qu'il subisse un changement notable dans sa pente d'atténuation, mais E_r diminue beaucoup si σ_2 augmente.

Pour les mêmes données, on utilise maintenant un D.E.H. au lieu d'un D.E.V., comme émetteur, les figures I.14 et I.15 illustrent les variations de E_z et E_r dans ce cas. Les mêmes remarques peuvent être faites mais il faut ajouter que la composante E_z s'affaiblit considérablement dans l'air si σ_2 augmente.

I.4.3 - Influence de la distance horizontale r entre l'émetteur et le récepteur

Sur la figure I.16, nous représentons la variation de la composante E_z émise par un D.E.V. et reçue à une distance horizontale r . La fréquence d'émission est de 100 kHz ($\lambda=3$ km). La hauteur du dipôle d'émission $z_0 = 5$ m au-dessus de l'interface air-forêt. Le récepteur est placé sur l'interface même, mais dans l'air.

Pour une distance r inférieure à la longueur d'onde, E_z diminue assez rapidement en fonction de r croissante ; par contre, si r devient du même ordre de grandeur que λ , la diminution E_z est moins importante. Les autres composantes varient de la même manière.

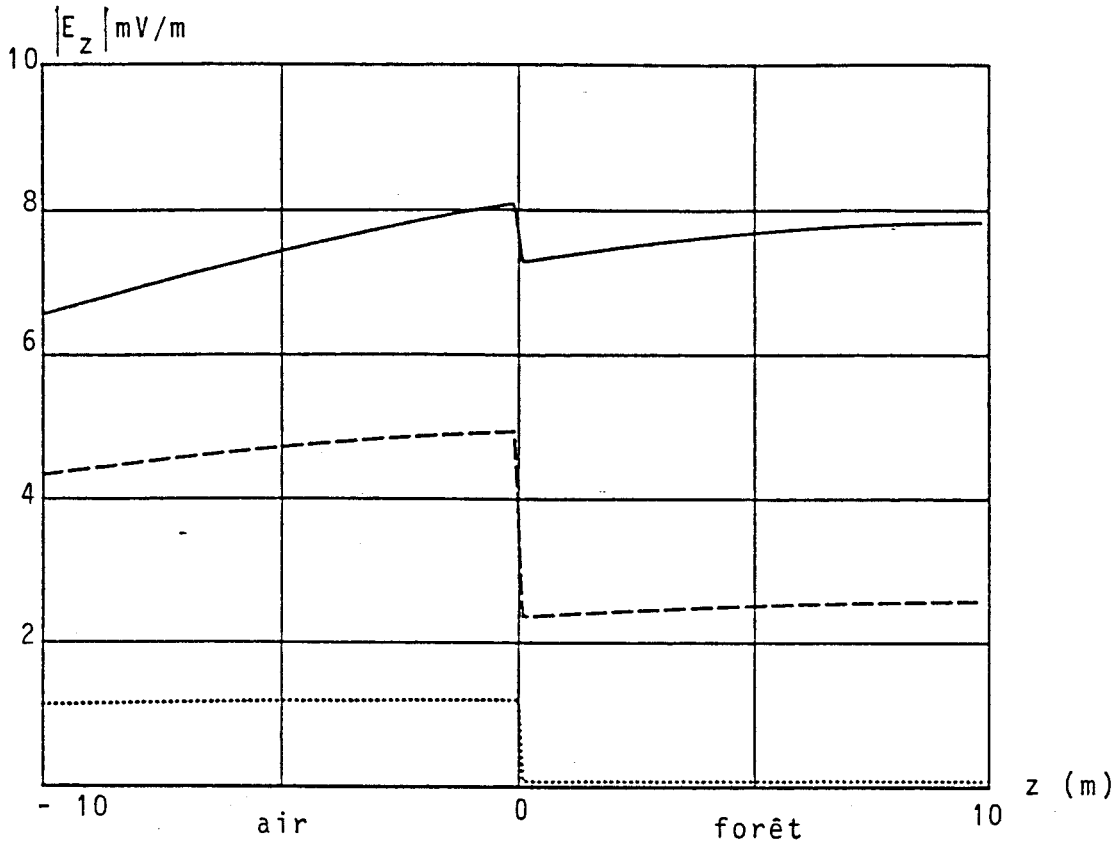


figure (I.14)

$r = 100 \text{ m}$
 $f = 100 \text{ kHz}$
 $z = z_0 = 1 \text{ m}$
 $\sigma_3 = 10^{-2} \text{ S/m}$
 — $\sigma_2 = 10^{-6} \text{ S/m}$
 --- $\sigma_2 = 10^{-5} \text{ S/m}$
 ... $\sigma_2 = 10^{-4} \text{ S/m}$

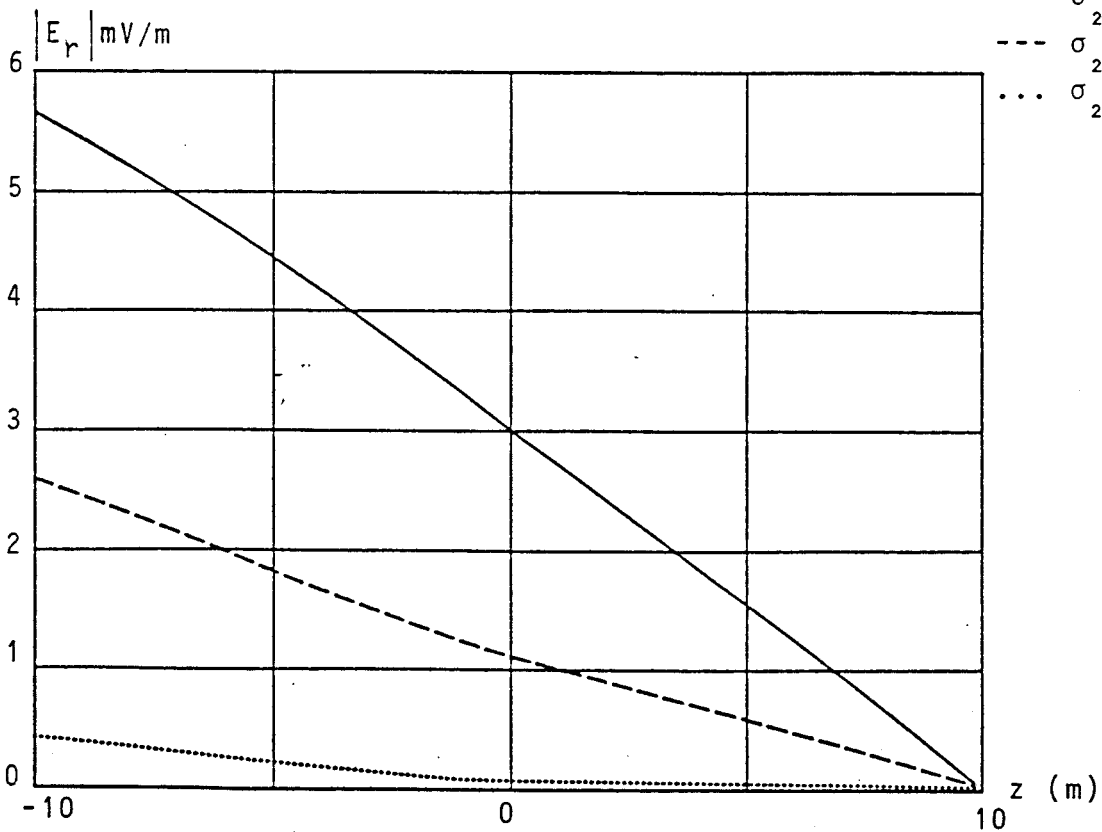
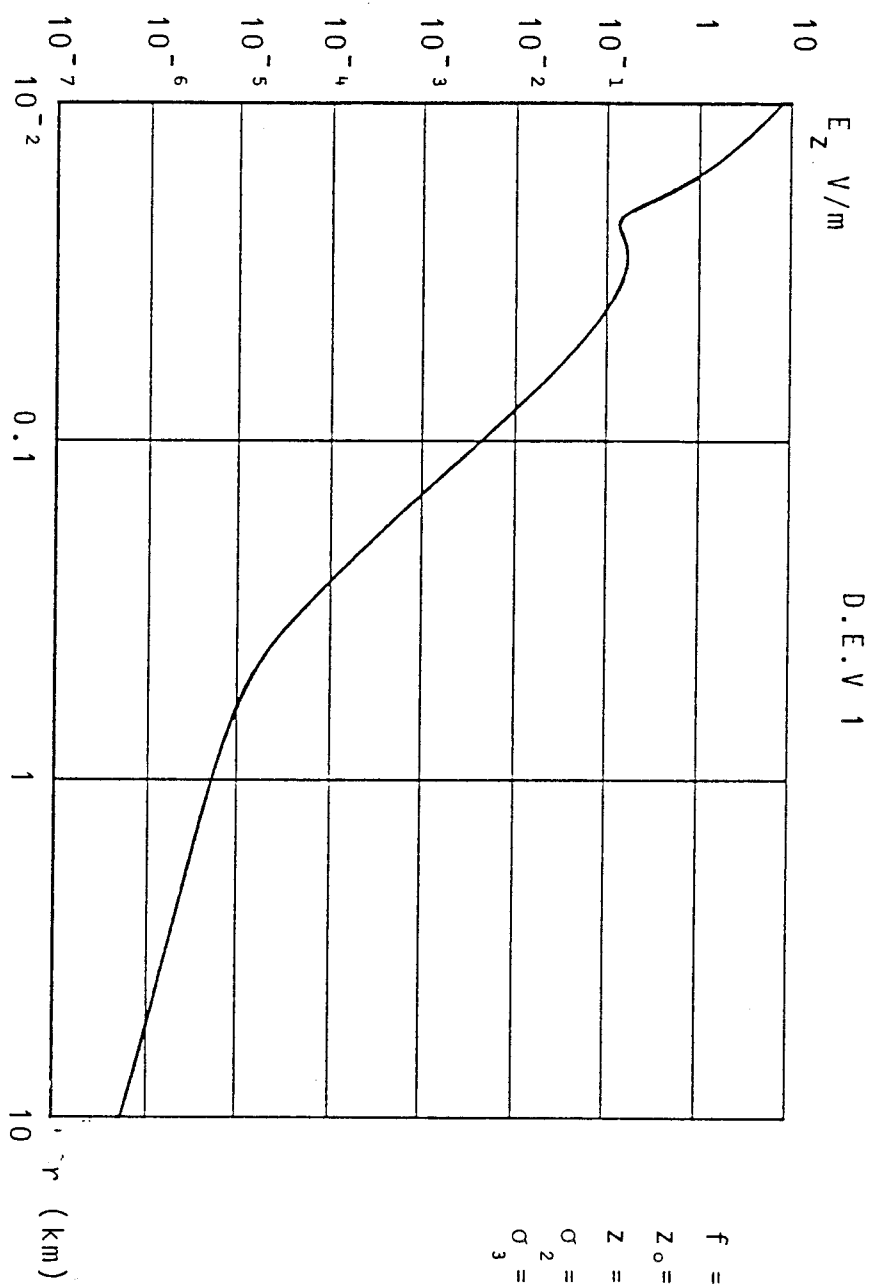


figure (I.15)



$f = 100 \text{ KHz}$
 $Z_0 = 5 \text{ m}$
 $Z = 0 \text{ m}$
 $\sigma_2 = 10^{-5}$
 $\sigma_3 = 10^{-2}$

figure (I.16)

I.4.4 - Effet du milieu d'émission

Considérons successivement deux émetteurs, l'un au-dessus de la surface air-forêt, l'autre en-dessous de celle-ci (figure I.17). Le récepteur se trouve sur l'interface même, à une hauteur $z = -10^{-3}$ m (dans l'air).

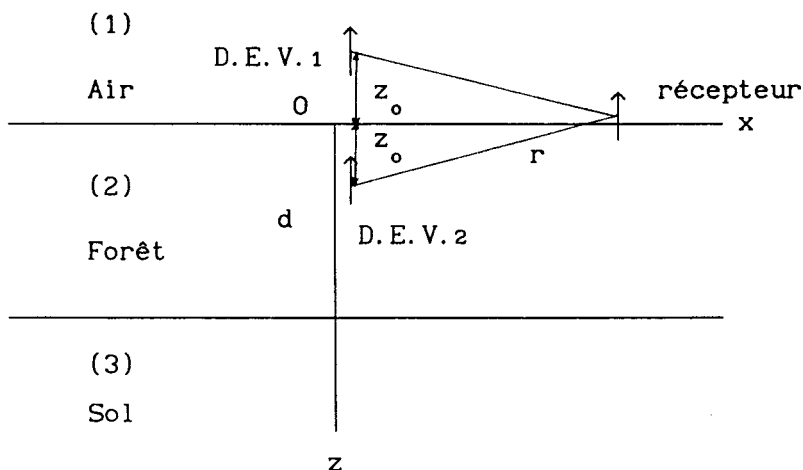


figure I.17

Les figures I.18 et I.19 montrent l'influence du milieu d'émission sur le champ électrique reçu à $r = 100$ m, $f = 100$ kHz, la hauteur de D.E.V.1 est de 5 cm et celle de D.E.V.2 = - 5 cm. on note que les composantes du champ électrique subissent une discontinuité importante si le dipôle d'émission change de milieu, ceci s'explique par le fait que toutes les composantes

dépendent du facteur $P_i = \frac{I dl j\omega\mu}{\gamma_i^2}$, i : l'indice du milieu. Ce rapport

peut être exprimé en fonction des constantes de propagation.

$$\frac{|P_1|}{|P_2|} = \frac{|\gamma_2^2|}{|\gamma_1^2|}$$

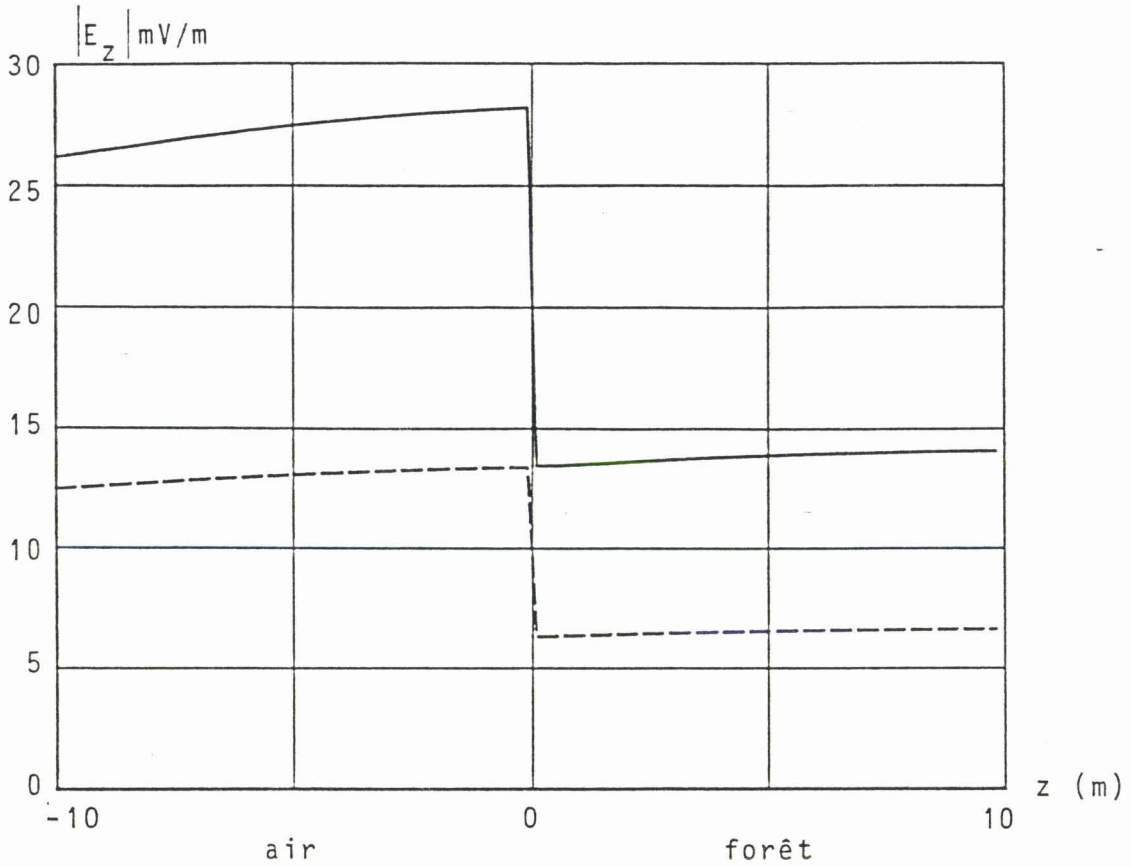


figure (I.18)

$z_0 = 5$ cm

$f = 100$ kHz

$r = 100$ m

— D.E.V. 1

- - - D.E.V. 2

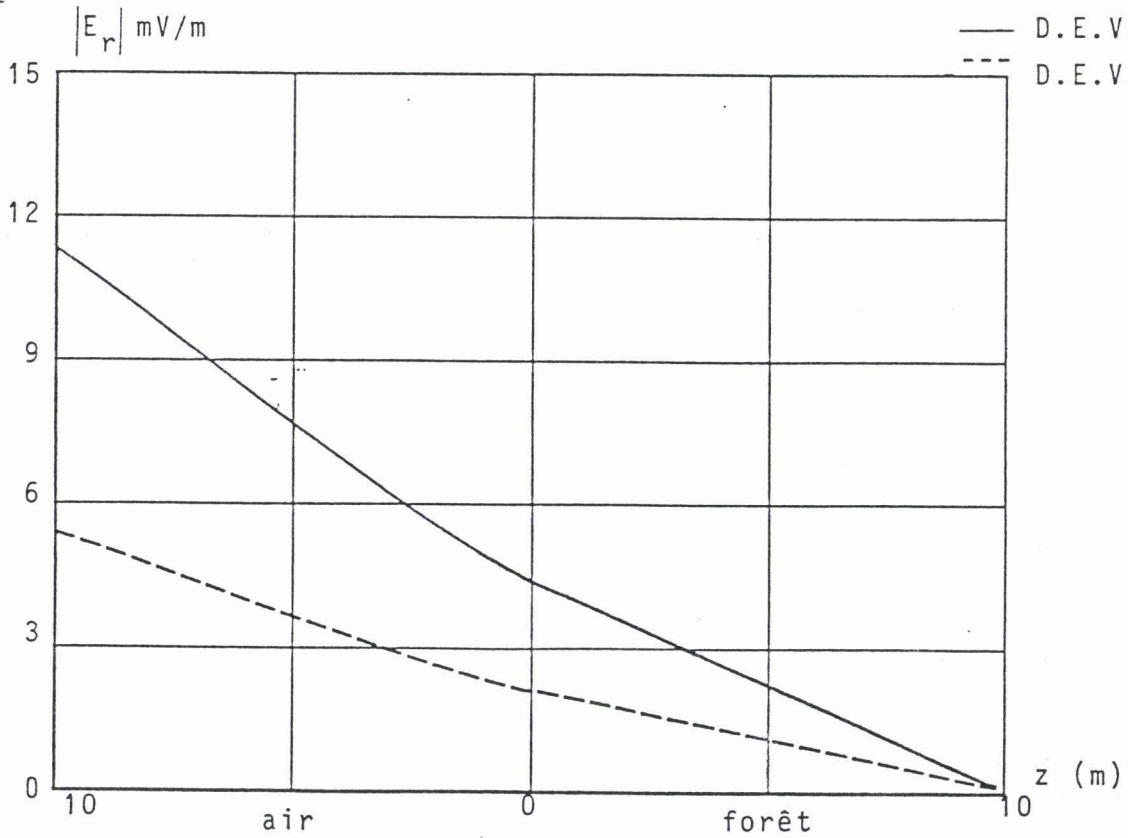


figure (I.19)

dans notre cas, ce rapport # 2.

Maintenant, nous allons utiliser des D.E.H. comme émetteurs. Pour les mêmes données que dans le cas de D.E.V., les figures I.20 et I.21 montrent que le champ reçu par le 1er dipôle et celui reçu par le 2nd sont strictement égaux, ceci est dû au fait que le rapport $|\gamma_2|^2/|\gamma_1|^2$ disparaît dans l'expression du champ pour ces données.

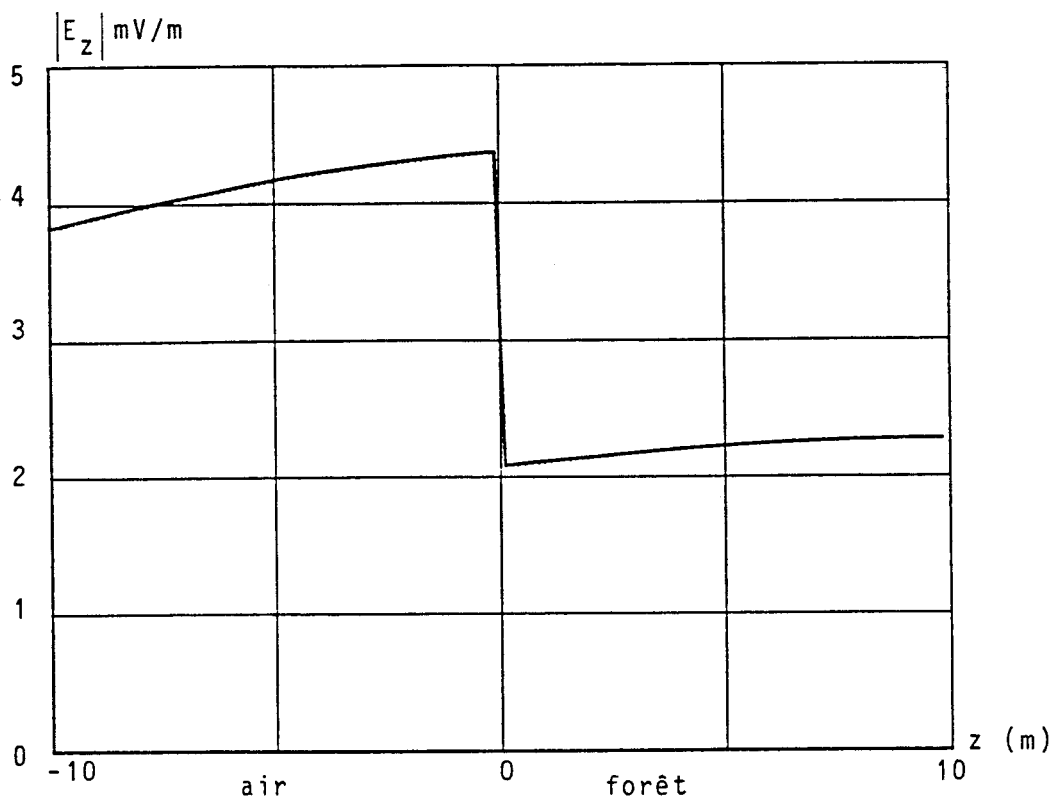


figure (I.20)

— D.E.H. 1
 --- D.E.H. 2
 mêmes données
 qu'en I.18, I.19

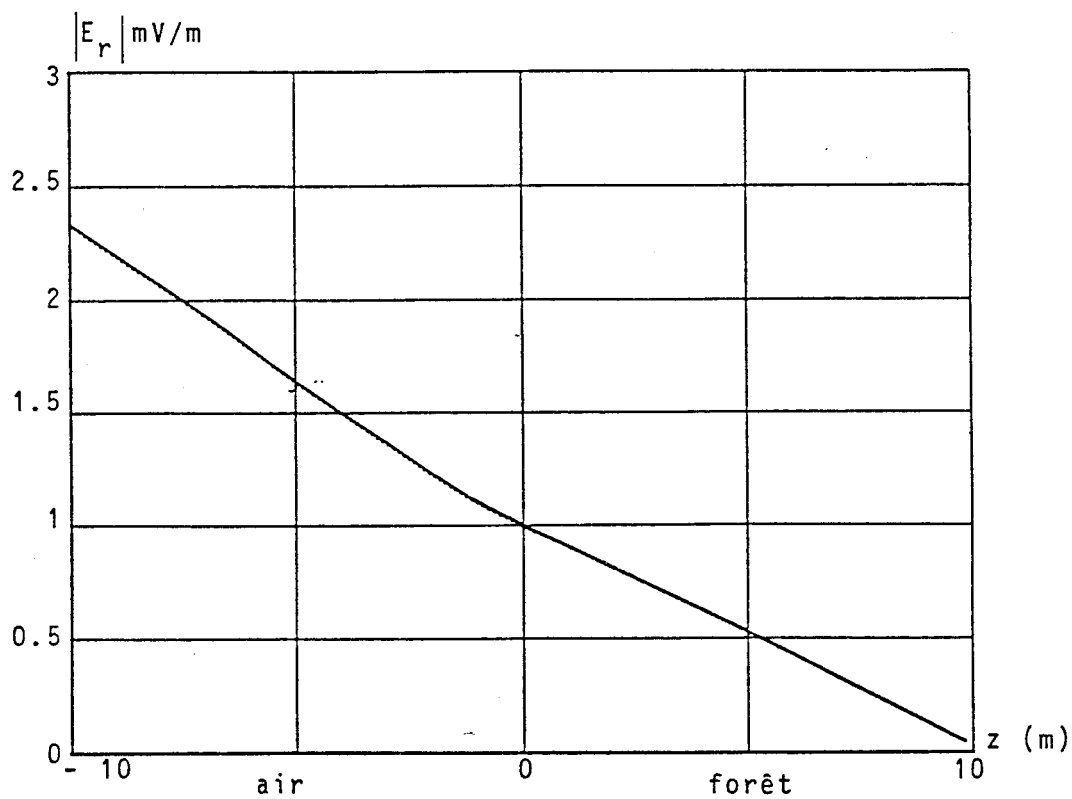


figure (I.21)

I.5 - Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons établi les expressions des composantes du champ électrique, de plus, un modèle numérique a été mis au point pour le calcul de ce champ qui nous donne une base pour le traitement numérique des intégrales que nous avons à effectuer dans les chapitres qui suivent. De plus, la forêt peut être considérée comme une anomalie à une seule dimension. Dans les chapitres suivants, nous verrons d'autres types d'anomalies, à plusieurs dimensions et de conductivité finie ou infinie, afin de déterminer leur influence sur le comportement du champ électromagnétique.

Dans l'étude paramétrique, nous avons considéré que la forêt est un milieu homogène en négligeant la distance entre les arbres ; ceci peut se justifier du fait que la distance entre les arbres est négligeable par rapport à la longueur d'onde utilisée à l'émission.

Nous constatons, dans cette étude, que les composantes du champ électrique dépendent fortement de la conductivité σ_2 de la forêt, surtout si cette dernière devient $> 10^{-5}$ S/m. De plus, si la fréquence augmente, les composantes E_z et E_r reçues dans l'air diminuent fortement.

CHAPITRE II

INTRODUCTION

Dans le premier chapitre, nous avons traité l'influence d'une anomalie à une seule dimension (la forêt) en présence du sol. Dans ce chapitre, nous menons la même étude, mais pour deux anomalies de conductivité infinie : l'une à deux dimensions, l'autre à trois dimensions. Ces géométries sont un cylindre de longueur infinie et une sphère de rayon R . Ces formes géométriques simples ont été choisies de manière à obtenir, dans cette étape préliminaire, des formules analytiques permettant de calculer facilement le champ diffracté par l'anomalie. Dans tous les cas, l'onde incidente sera une onde plane polarisée horizontalement ($E //$ axe du cylindre) ou radialement ($E \perp$ axe du cylindre) dans le cas d'anomalie cylindrique. Par contre, si l'anomalie est sphérique, une seule polarisation sera prise en compte, étant donné la symétrie parfaite présentée par la sphère par rapport à tous les axes.

L'étude numérique ne nécessite pas de développement particulier, seule la convergence des calculs doit être soigneusement examinée étant donné que le rayon des anomalies est du même ordre de grandeur que λ (longueur d'onde).

Enfin, une comparaison entre nos résultats et ceux de la littérature est nécessaire afin de s'assurer de la validité des nôtres, celle-ci sera suivie d'une comparaison entre l'anomalie cylindrique et d'autres géométries semblables pour déterminer l'influence géométrique de l'anomalie.

II.A.1 - Polarisation du champ électrique parallèle à l'axe du cylindre

Un cylindre de longueur infinie est plongé dans un milieu homogène et infini. Ce dernier est de caractéristiques électriques (σ , ϵ_r , μ_r). Le cylindre est supposé parfaitement conducteur, de rayon R , son axe est confondu avec l'axe oz figure (II.A.1).

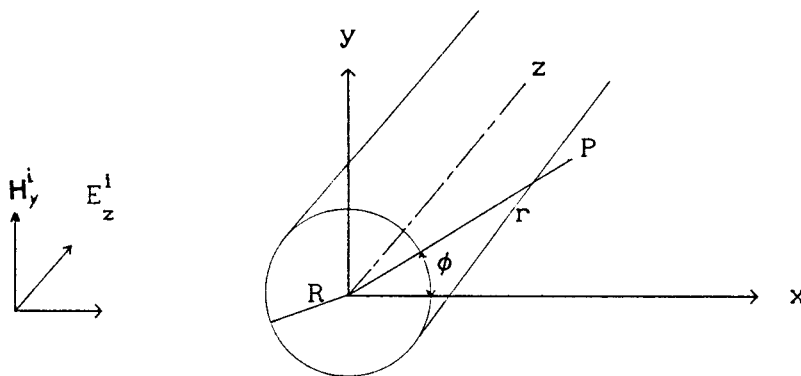


Figure (II.A.1)

Une onde plane se propageant suivant l'axe ox éclaire cette structure du côté des x négatifs, ce champ électrique incident peut se mettre sous la forme suivante :

$$E_z^i = E_0 e^{-jkx} = E_0 e^{-jkr \cos \phi} \quad (\text{II.A.1})$$

Nous nous intéressons au champ rayonné par le cylindre en un point P séparé d'une distance r du centre du cylindre, faisant un angle ϕ avec l'axe ox .

II.A.2 - Expression du champ rayonné

Le champ incident peut se décomposer en série de Fourier, tout en respectant la condition E_z^i nulle pour $r = 0$, et en normalisant E_0 à 1V/m.

$$E_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(kr) e^{jn\phi} \quad (\text{II.A.2})$$

où $k = 2\pi/\lambda$, λ étant la longueur d'onde, J_n la fonction de Bessel, première espèce d'ordre n .

Pour satisfaire la condition de propagation, le champ réfracté est une série de Fourier [8] :

$$E_z^r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} a_n^{(2)} H_n(kr) e^{jn\phi} \quad (\text{II.A.3})$$

(2)

où H_n est fonction de Hankel à l'ordre n .

L'expression du coefficient a_n peut être facilement obtenue en appliquant les conditions aux limites ($r = R$).

$$E_z^i + E_z^r = 0$$

$$\text{et } a_n = - \frac{J_n(kR)}{H_n^{(2)}(kR)} \quad (\text{II.A.4})$$

en tenant compte du fait que $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

$$\text{et } H_{-n}^{(2)}(x) = (-1)^n H_n^{(2)}(x)$$

Le champ rayonné devient :

$$E_z^r = - \frac{J_0^{(2)}(kR)}{H_0^{(2)}(kR)} H_0^{(2)}(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} 2 j^{-n} a_n H_n^{(2)}(kr) \cos(n\phi) \quad (\text{II. A. 5})$$

Si la distance r devient importante devant le rayon R , le champ rayonné se simplifie et devient :

$$E_z^r = \left[\frac{2}{\Pi k} \right]^{1/2} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \left[- \frac{J_0^{(2)}(kR)}{H_0^{(2)}(kR)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 j^{-n} a_n \cos(n\phi) \right] \quad (\text{II. A. 6})$$

De plus, dans le domaine des basses fréquences, ce champ se réduit à son premier coefficient, puisque les autres sont négligeables, alors son expression est :

$$E_z^r = - \left[\frac{2j}{\Pi k} \right]^{1/2} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \frac{j \Pi}{2 \log(kR)} \quad (\text{II. A. 7})$$

II.A.3- Convergence de la série

La convergence de cette série est très lente quand le facteur kR est grand par rapport à l'unité, pour $kR=3$, une dizaine de termes sont suffisants pour donner une bonne précision, pour $kR=100$, 100 termes sont nécessaires pour que la série converge.

II.A.4- Comparaison des résultats avec ceux de la littérature

Sur les figures (II.A.2) [8] et (II.A.3), nous avons représenté la variation du champ électrique total $|E_z|/|E_z^1|$ en fonction du paramètre kx ($\phi = 0$), ceci a été effectué pour les données suivantes : $f = 100$ kHz, le rayon du cylindre $R = 1.5$ km. On a choisi un rayon de cet ordre pour mettre en évidence l'influence d'un relief à la surface du sol, si l'on suppose que la conductivité du sol est infinie , on peut appliquer la théorie des images afin d'obtenir un ordre de grandeur du champ re-rayonné par le relief (valeurs maximales).

On note que les deux résultats coïncident parfaitement.

II.A.5- Etude paramétrique du champ électrique

II.A.5.1- Influence de la fréquence et du rayon du cylindre

Les courbes des figures (II.A.4), (II.A.5) et (II.A.6) représentent la fluctuation du champ électrique total E_z en fonction de la distance r séparant le point de réception et le centre du cylindre, ces courbes ont

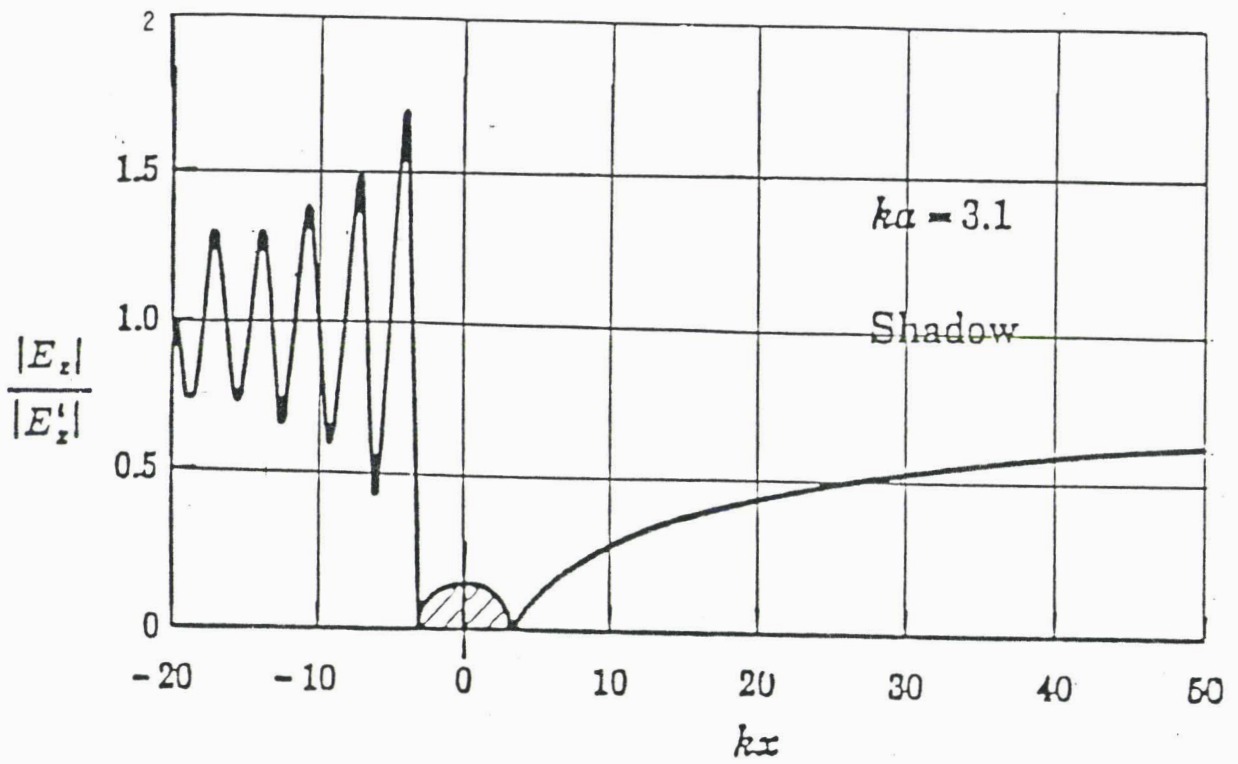


figure (II.A.2)

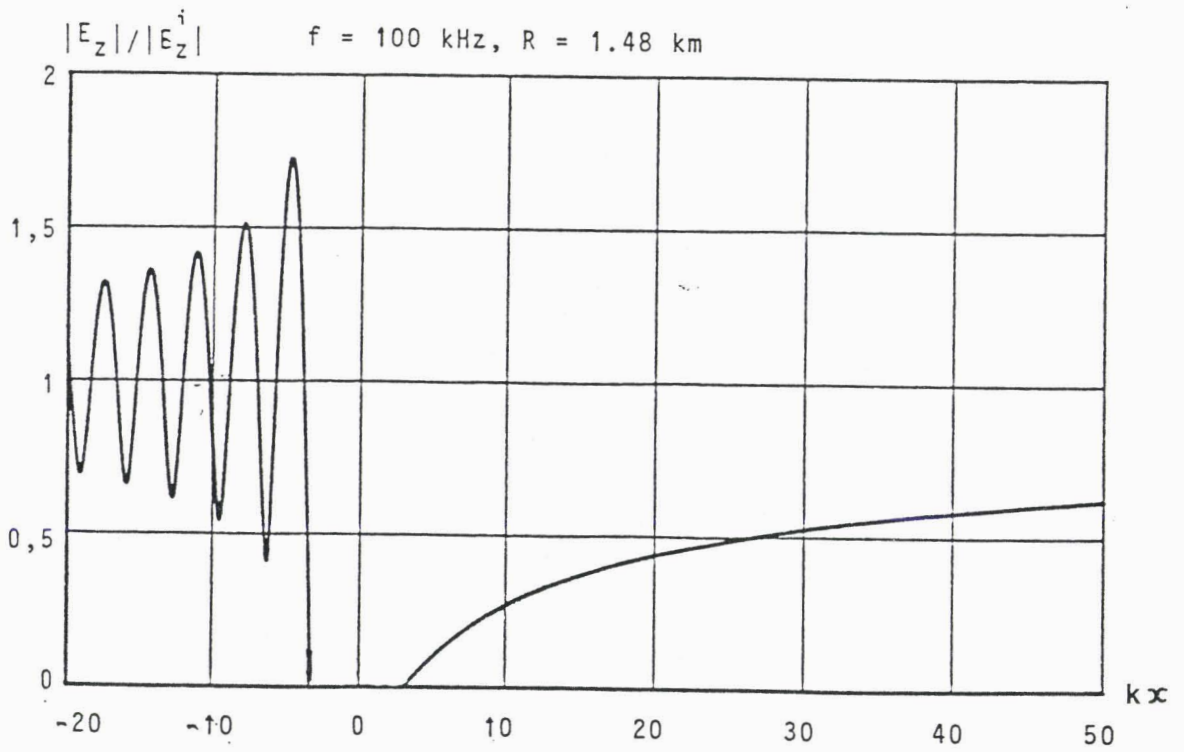


figure (II. A.3)

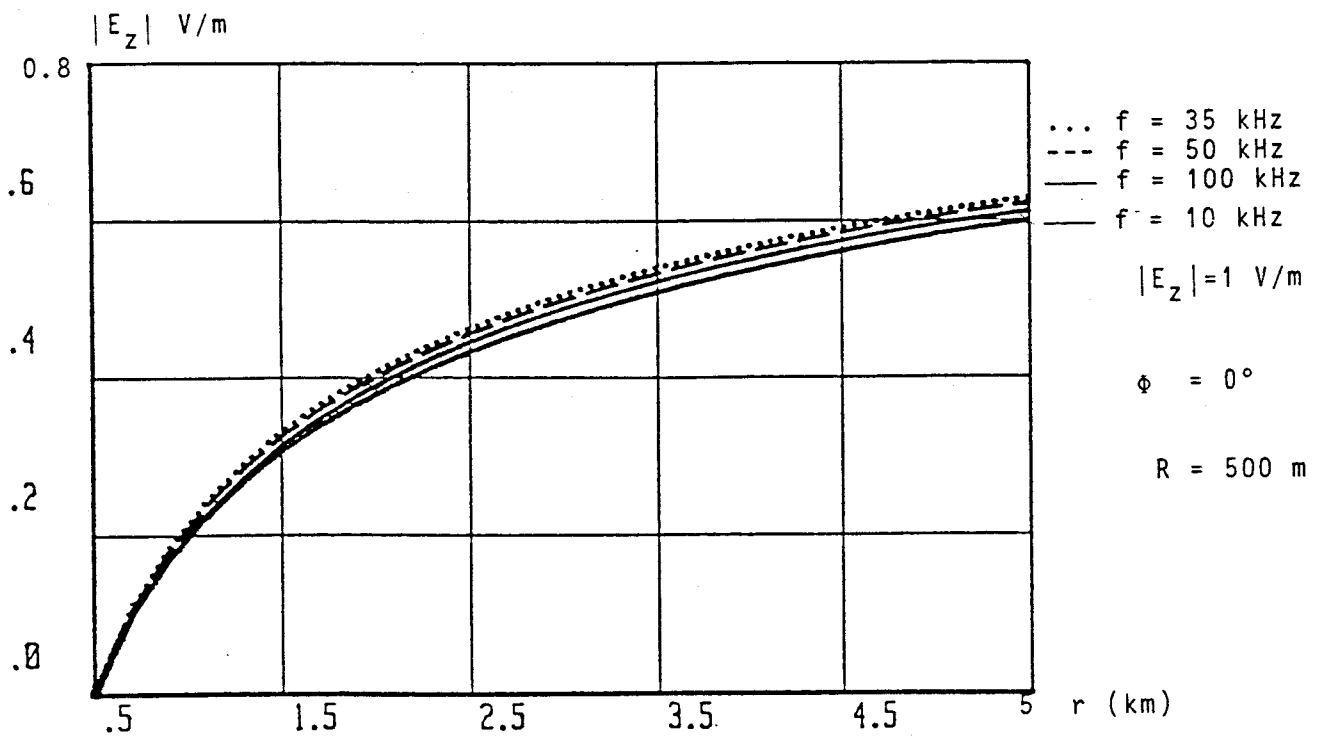


figure (II.A.4)

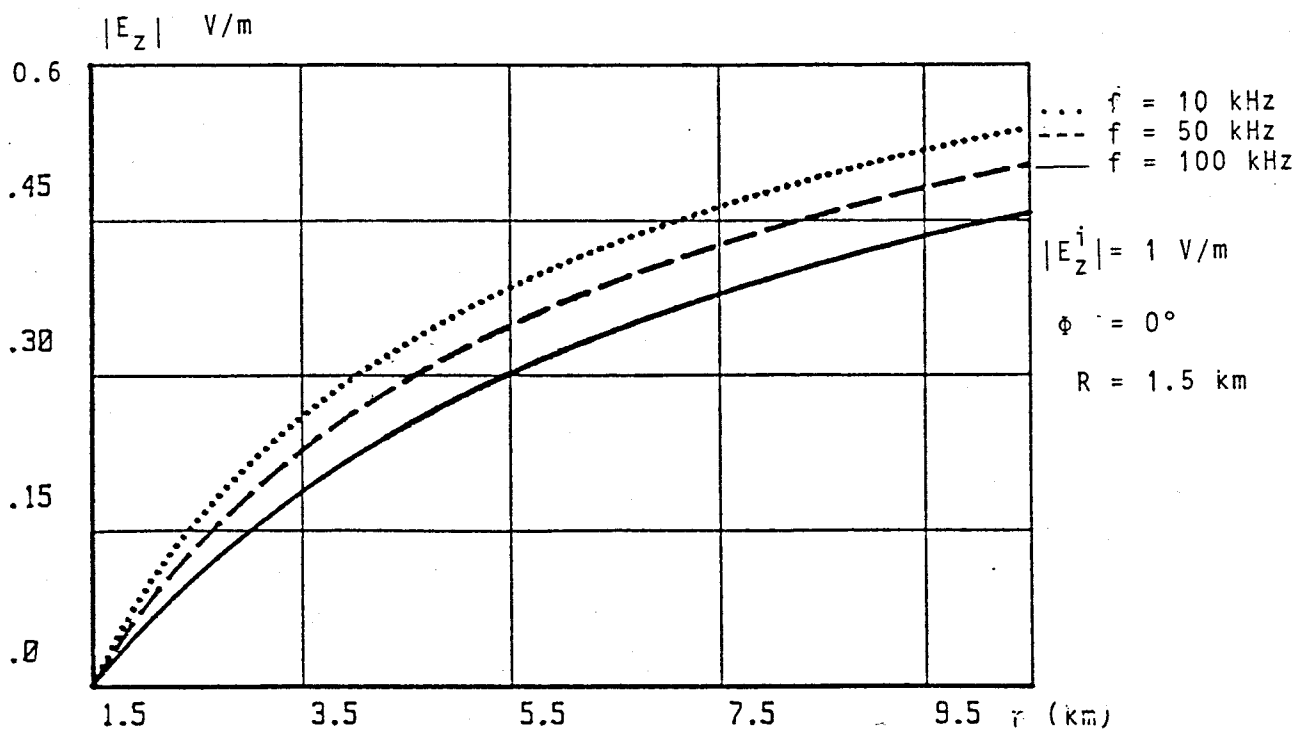


figure (II.A.5)

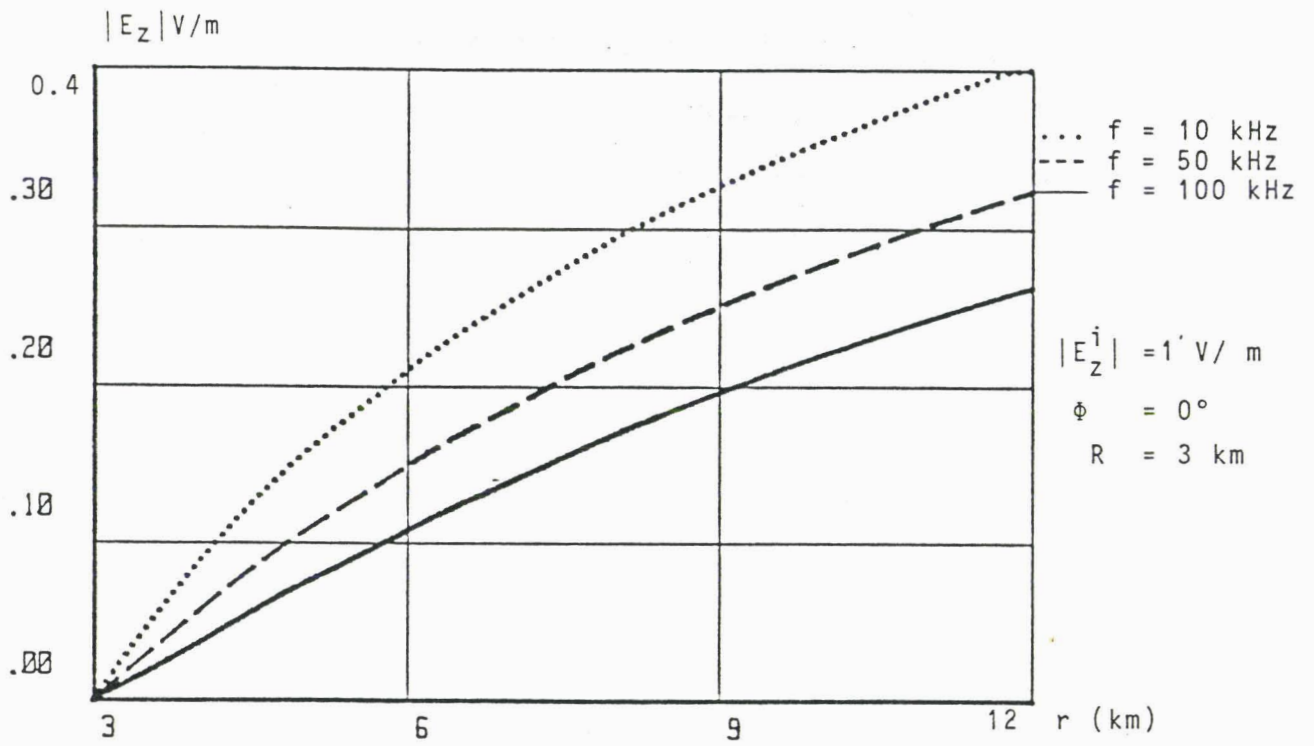


figure (II.A.6)

été tracées dans la configuration suivante :

$|E_z^1| = 1$ V/m, $\phi = 0$, $f_1 = 10$ kHz, $f_2 = 50$ kHz et $f_3 = 100$ kHz et pour trois valeurs de R qui sont respectivement 0.5, 1.5 et 3 km.

On constate que si le rayon est faible par rapport à la longueur d'onde dans l'air, le champ électrique dépend peu de la fréquence (figure II.A.4), par contre, si le rayon devient important par rapport à la longueur d'onde, la variation du champ électrique est plus sensible en fonction de la fréquence. A noter aussi que, dans le cas des rayons faibles, le champ total passe par une valeur maximum pour une fréquence particulière ($f = 35$ kHz sur la figure (II.A.4)) et ceci quelque soit la distance r , cela peut s'expliquer comme suit :

Nous avons établi, dans le paragraphe II.A.2, l'expression du champ rayonné lointain en basses fréquences :

$$E_z^r = - \left[\frac{2j}{\pi k} \right]^{1/2} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \frac{j \pi}{2 \log(kR)}$$

à une distance r_0 donnée, $|E_z| = E_0 \cdot |1 + A/x \log x|$

où $x = kR$

$$A = - \sqrt{\frac{2j}{\pi a}} \frac{j \pi}{2}$$

$$a = r_0 / R$$

Cette fonction admet un maximum pour $x = e^{-1}$.

A.N.

Dans le cas de la figure (II.A.4), $R = 500$ m :

$$x = kR = e^{-1} = 0.368, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

d'où $f = 35.1$ kHz.

En ce qui concerne l'influence du rayon du cylindre, on remarque que l'amplitude du champ électrique diminue fortement si R devient du même ordre de grandeur que la longueur d'onde.

II.A.5.2- Influence de la distance de réception r

Les figures (II.A.7) et (II.A.8) illustrent la variation de E_z pour : une fréquence de 100 kHz, deux valeurs de R respectivement 10 m et 100 m, l'angle $\phi = 0^\circ$ si la réception se situe dans la partie non éclairée du cylindre et $\phi = 180^\circ$ si l'on est du côté illuminé. On remarque que l'influence de l'hétérogénéité est très importante si la distance de réception est inférieure à $10R$, et diminue au fur et à mesure que r augmente en $1/\sqrt{kr}$ au-delà de cette limite, ceci dans la partie non illuminée, par contre, dans la partie éclairée le champ oscille autour de 1 V/m et diminue en $\sin(kr)/kr$. Ces oscillations sont dues au déphasage qui existe entre le champ électrique incident et celui réfracté par le cylindre.

II.A.6- Courant de surface

La conductivité du cylindre étant infinie, il en résulte que le courant créé par l'onde électromagnétique incidente est concentré sur la surface du cylindre, la densité de ce courant est donnée par la relation suivante :

$$J_{sz} = H_\phi \Big|_{r=R} \quad (\text{II.A.8})$$

le champ magnétique H_ϕ total est relié au champ électrique E_z par :

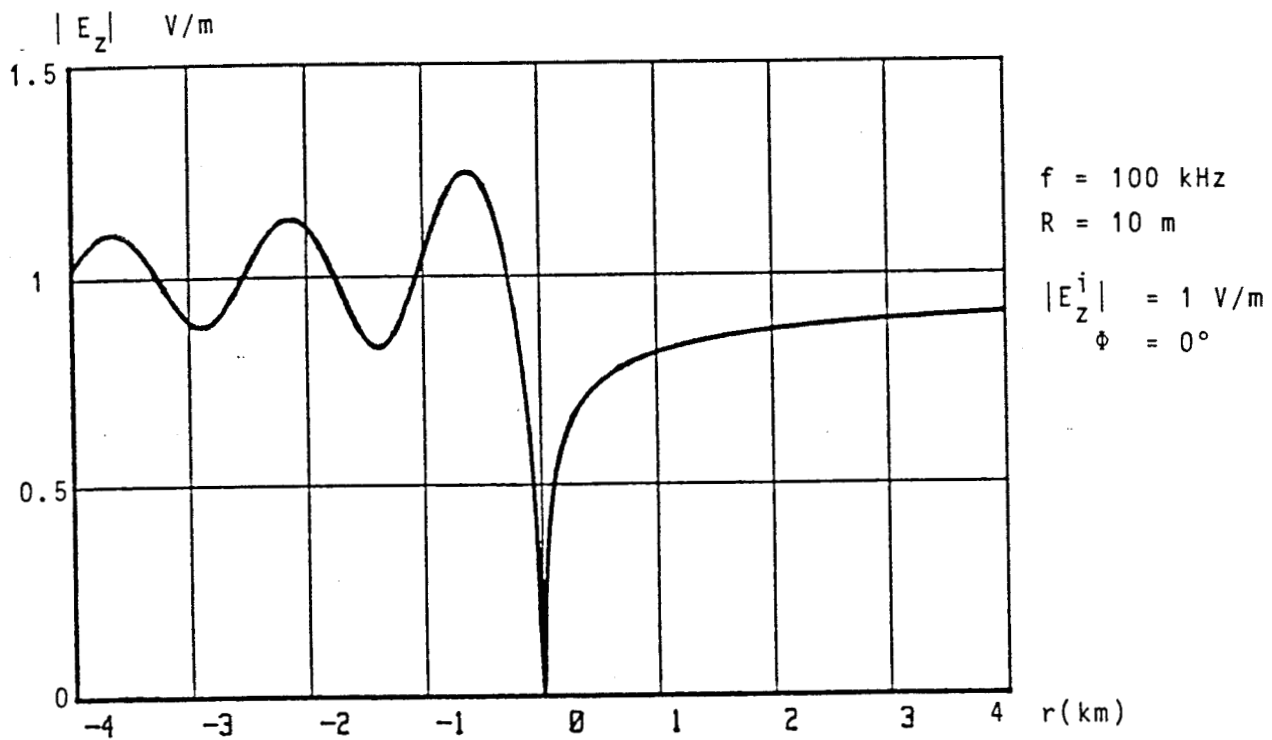


figure (II.A.7)

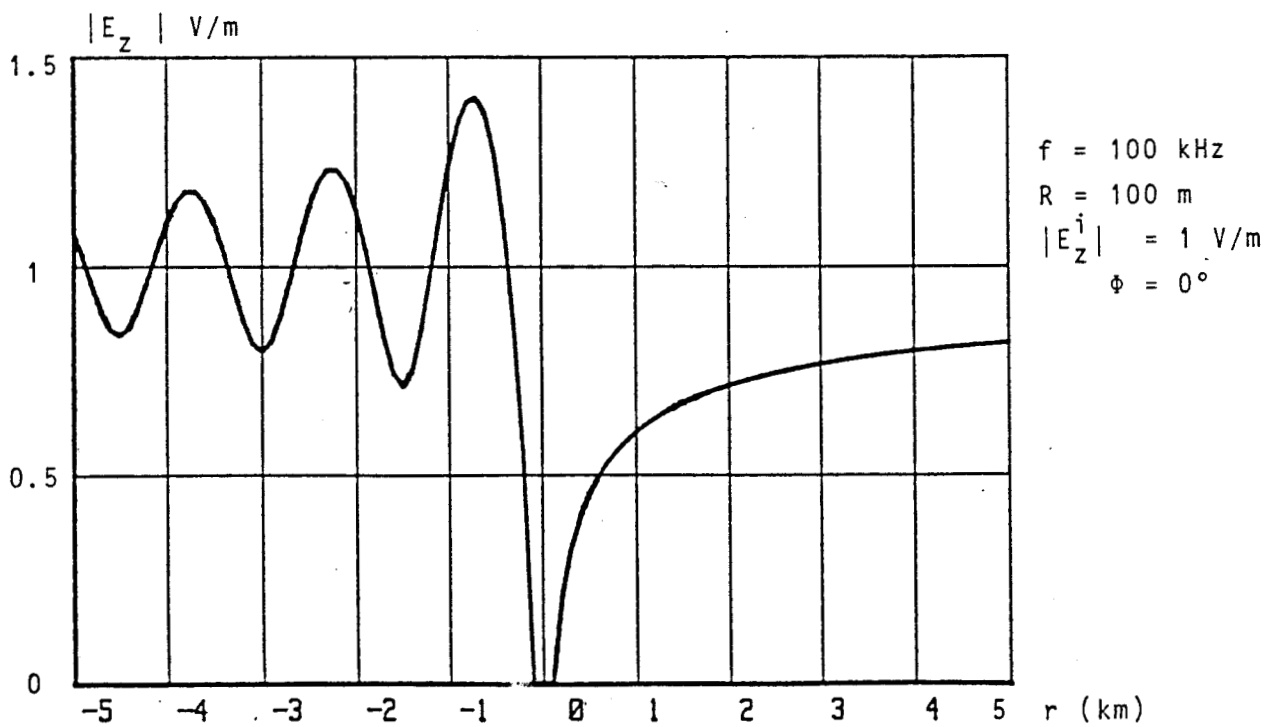


figure (II.A.8)

$$H_{\phi} = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (\text{II.A.9})$$

en développant cette dernière relation et en remplaçant r par R , nous obtenons l'expression de J_{sz} :

$$J_{sz} = \frac{-2}{\mu_0 \pi \omega R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j^{-n} e^{jn\theta}}{H_n^{(2)}(kR)} \quad (\text{II.A.10})$$

Cette série converge très rapidement puisque la fonction de Hankel croît assez vite si son ordre $n \gg 1$, il suffit de faire la somme d'une dizaine de termes pour atteindre une bonne précision.

Les figures (II.A.9) et (II.A.10) illustrent la fluctuation de la densité du courant de surface en fonction de l'angle ϕ variant de 0° à 180° . Ceci a été effectué pour un champ incident $|E_z^i| = 377 \text{ V/m}$, pour deux fréquences 100 kHz et 10 kHz et pour plusieurs valeurs du rayon R . On voit que cette densité est très faible dans la partie non éclairée et a tendance à diminuer davantage si le paramètre kR augmente.

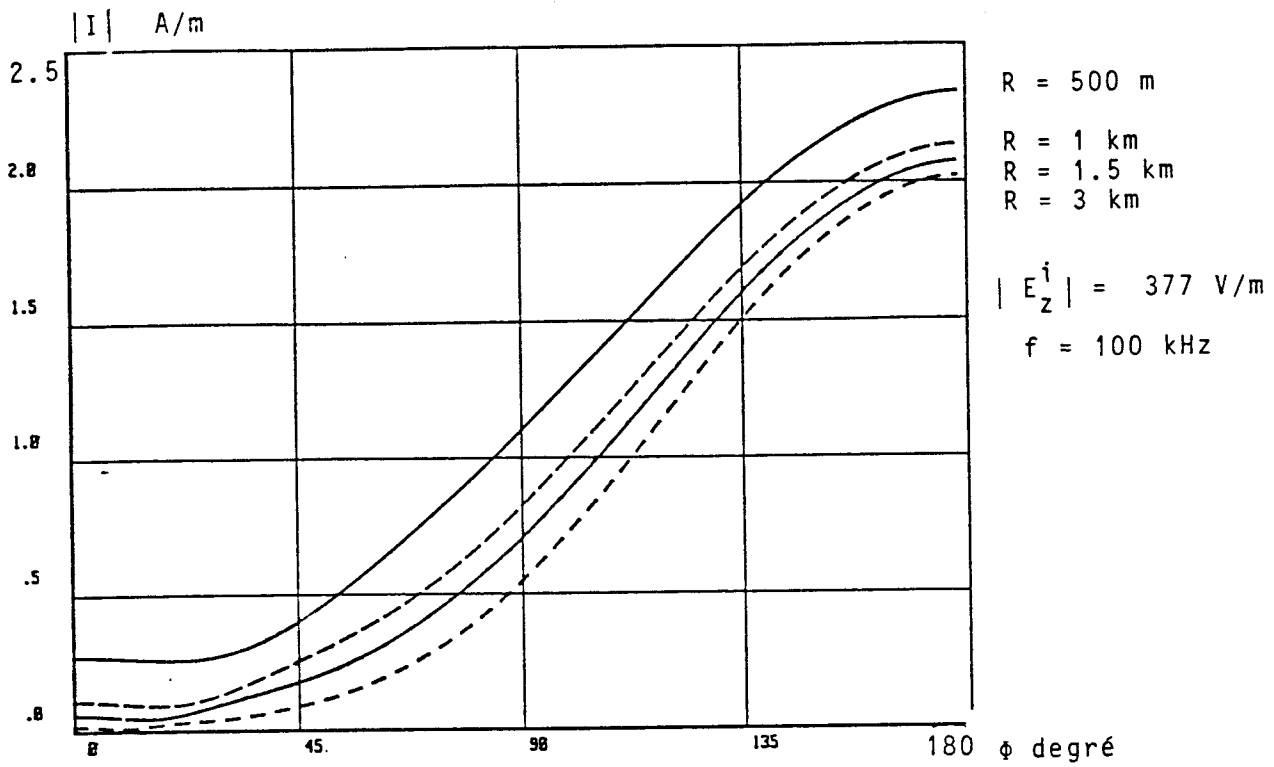


figure (II.A.9)

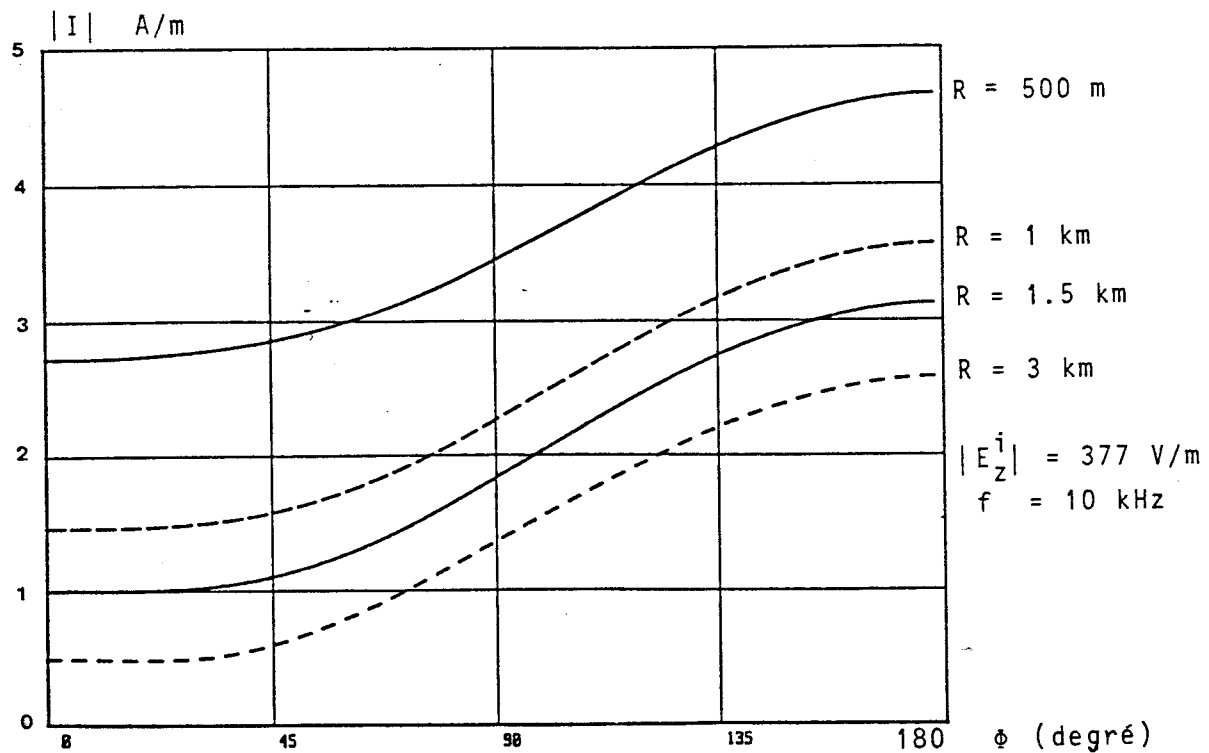


figure (II.A.10)

II.A.7- Polarisation verticale du champ électrique

Nous reprenons la même configuration qu'au II.A.1 mais ce qui diffère ici est que le champ électrique incident est dirigé suivant un axe perpendiculaire à l'axe du cylindre, figure (II.A.11) :

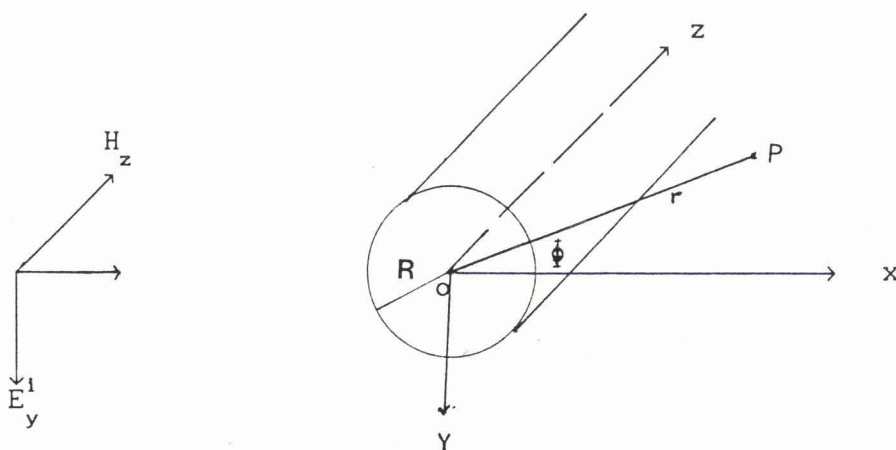


figure (II.A.11)

II.A.8- Expression du champ rayonné

Pour des raisons de commodité, nous calculons en premier lieu le champ magnétique H_z^r rayonné par le cylindre, ensuite on pourra en déduire les

composantes du champ électrique E_r et E_θ en coordonnées cylindriques. Le champ magnétique incident est de la forme : $H_z^i = H_0 e^{-jkx}$. Ce dernier peut se décomposer en série de Fourier :

$$H_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(kr) e^{jn\theta} \quad (\text{II.A.11})$$

de la même manière qu'au II.A.2 le champ réfracté par le cylindre peut s'exprimer comme suit :

$$H_z^r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} B_n H_n^{(2)}(kr) e^{jn\theta} \quad (\text{II.A.12})$$

En appliquant les conditions aux limites $E_\theta = 0$ pour $r=R$, nous obtenons les coefficients B_n .

En effet E_θ est lié à H_z par la formule :

$$E_\theta = -\frac{1}{y} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (\text{II.A.13})$$

où $y = \sigma + j\omega\epsilon$

En développant la relation (II.A.12) et en satisfaisant la condition de continuité, les coefficients B_n sont donnés par :

$$B_n = \frac{J_n'(kR)}{H_n^{(2)'}(kR)} \quad (\text{II.A.14})$$

où $J_n'(kR) = \left. \frac{\partial}{\partial r} J_n(kr) \right|_{r=R}$

et

$$E_{\theta} = \frac{jkH_0}{\epsilon W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \left[J_n'(kr) + B_n H_n^{(2)'}(kr) \right] e^{jn\theta}$$

(II.A.15)

$$E_r = \frac{H_0}{rW\epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n j^{-n} \left[J_n(kr) + B_n H_n^{(2)}(kr) \right] e^{jn\theta}$$

Il faut noter cependant que la convergence de ces deux séries n'est pas très rapide surtout si le facteur $kr \gg 1$.

II.A.9- Etude paramétrique des composantes du champ électrique

II.A.9.1- Composante transversale E_{θ}

Pour bien comprendre l'influence des différents paramètres, nous avons tracé sur les figures (II.A.12) et (II.A.13), la variation de la composante E_{θ} en fonction de la distance r entre le centre du cylindre et le point de réception, ceci a été fait pour les données suivantes :

sur la figure (II.A.12) : $R=500$ m, $\theta = 0^\circ$, $|E_y^1|=1$ V/m.

sur la figure (II.A.13) : $R=1.5$ km, $\theta = 0^\circ$, $|E_y|=1$ V/m.

et dans les deux cas, nous avons pris trois valeurs de f (10, 50, 100 kHz). On voit que, pour des petites valeurs du rayon, et dans le domaine des basses fréquences, la composante du champ électrique E_{θ} ne subit pas de variations sensibles si la fréquence de travail change, par contre, si le rayon augmente, la variation de E_{θ} est plus importante en fonction de la fréquence.

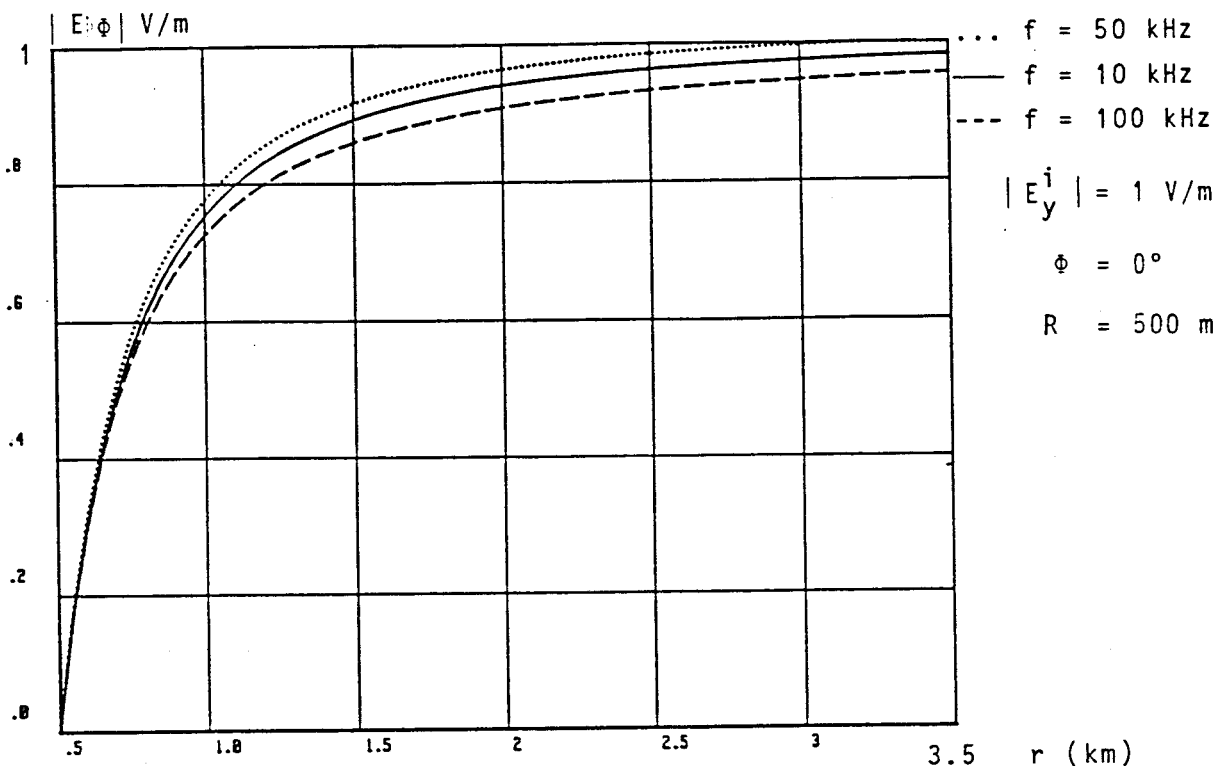


figure (II.A.12)

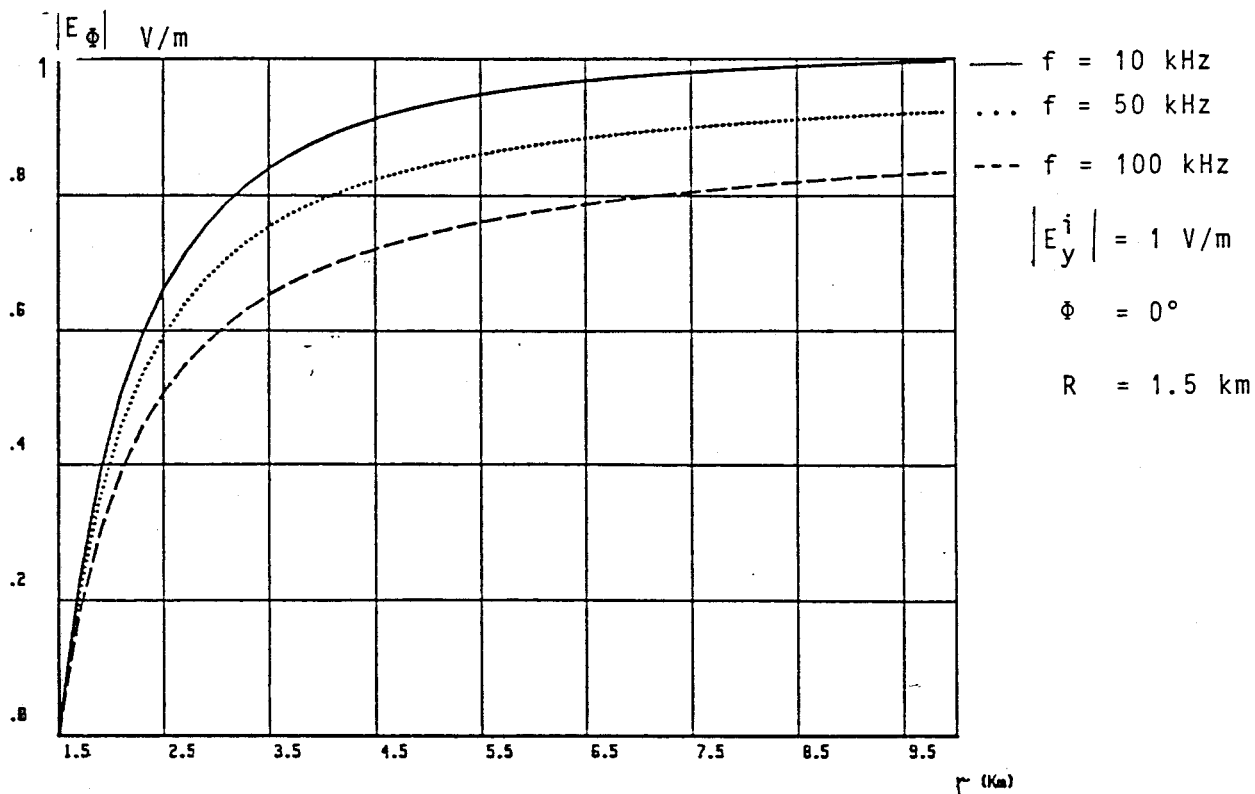


figure (II.A.13)

En ce qui concerne l'influence de la distance de réception, elle est très importante si r est faible par rapport à R , mais si $r \gg R$, la décroissance de la composante E_{θ}^r (augmentation de E_{θ}) rayonnée par le cylindre se fait en $1/\sqrt{r}$. A titre d'exemple, on note que pour une anomalie cylindrique de 1.5 km de rayon, l'effet de "masque" se fait essentiellement sentir sur une distance r inférieure à 2 fois le rayon, tout au moins pour des fréquences comprises entre 10 kHz et 100 kHz. En effet, à une distance de 7 km, l'amplitude du champ ne subit une diminution que d'environ 20 % par rapport au cas de l'espace libre.

II.A.9.2- Influence de la géométrie de l'anomalie

Dans ce paragraphe, nous comparons le comportement du champ électrique E_{ϕ} dans deux cas, le premier est celui que l'on vient de développer, le second est celui d'une anomalie bidimensionnelle, de côté a égal au rayon du cylindre R , mais de conductivité finie. Cette comparaison a pour but de déterminer le rôle que joue la géométrie de l'anomalie sur le comportement du champ électromagnétique.

Cette hétérogénéité est plongée dans un milieu homogène et infini, dans lequel une onde plane se propage suivant l'axe ox et où le champ électrique est dirigé suivant oy . En effet, on s'intéresse à la valeur du champ électrique total E_y (incident et réfracté) en tout point P de l'espace, figure (II.1.14).

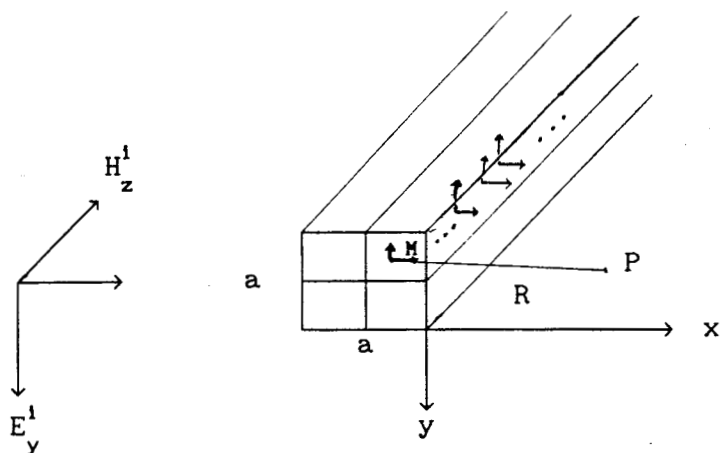


figure (II.A.14)

L'anomalie peut être considérée comme un ensemble de cellules longitudinales dans lesquelles le champ électrique est supposé constant par morceau. Chacune d'elles est assimilée à une ligne de dipôles verticaux ou horizontaux suivant le mode d'incidence. Dans notre cas de polarisation ($E//oy$), le calcul du champ diffracté se fait à partir de l'expression suivante [9] :

$$E_{xref} = A \int_S \left[E_y(M) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - E_x(M) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left[K_0(\gamma R) \right] dS$$

(II.A.16)

$$E_{yref} = A \int_S \left[-E_y(M) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_x(M) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] \left[K_0(\gamma R) \right] dS$$

$$A = \frac{\gamma_o^2 - \gamma^2}{4\pi \gamma^2}$$

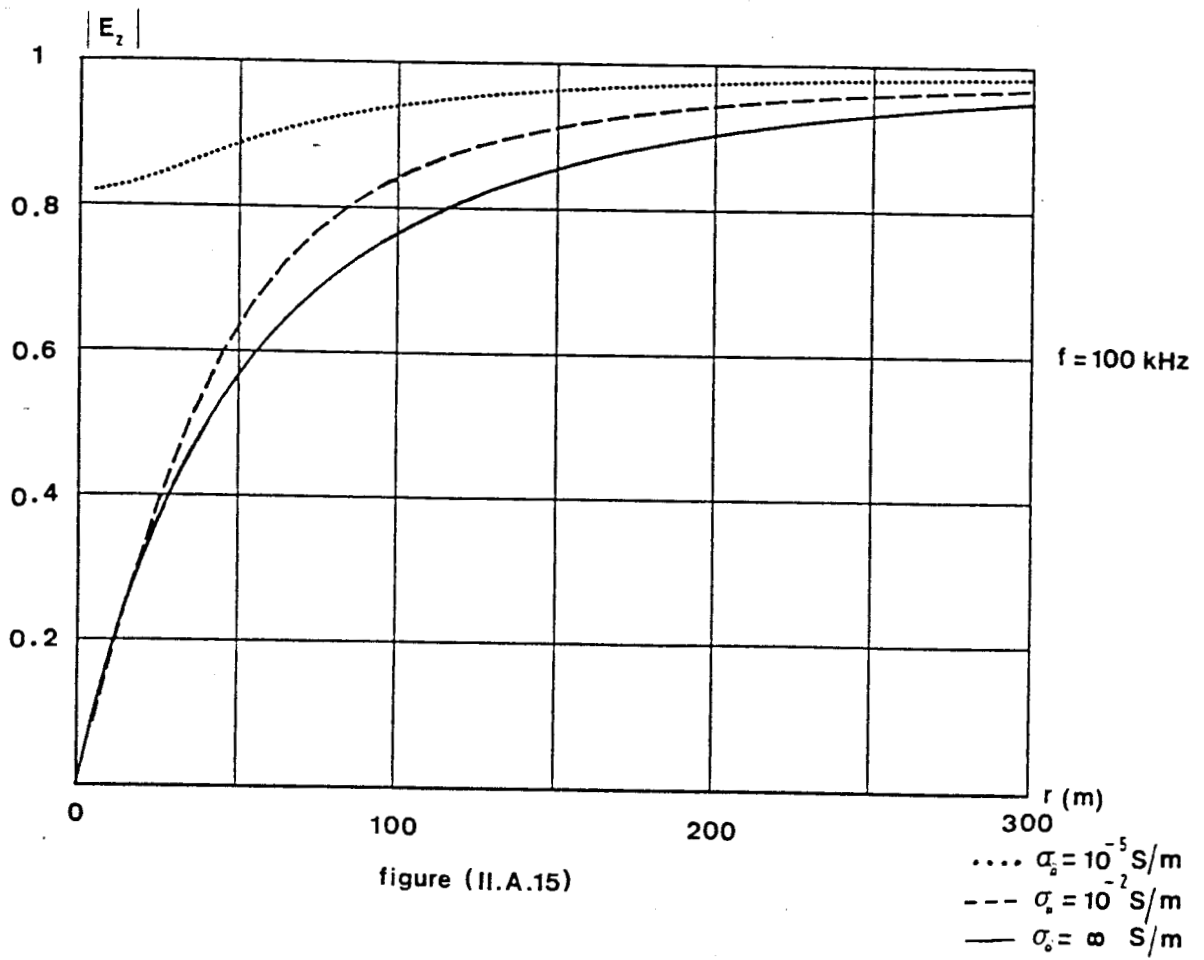


figure (II.A.15)

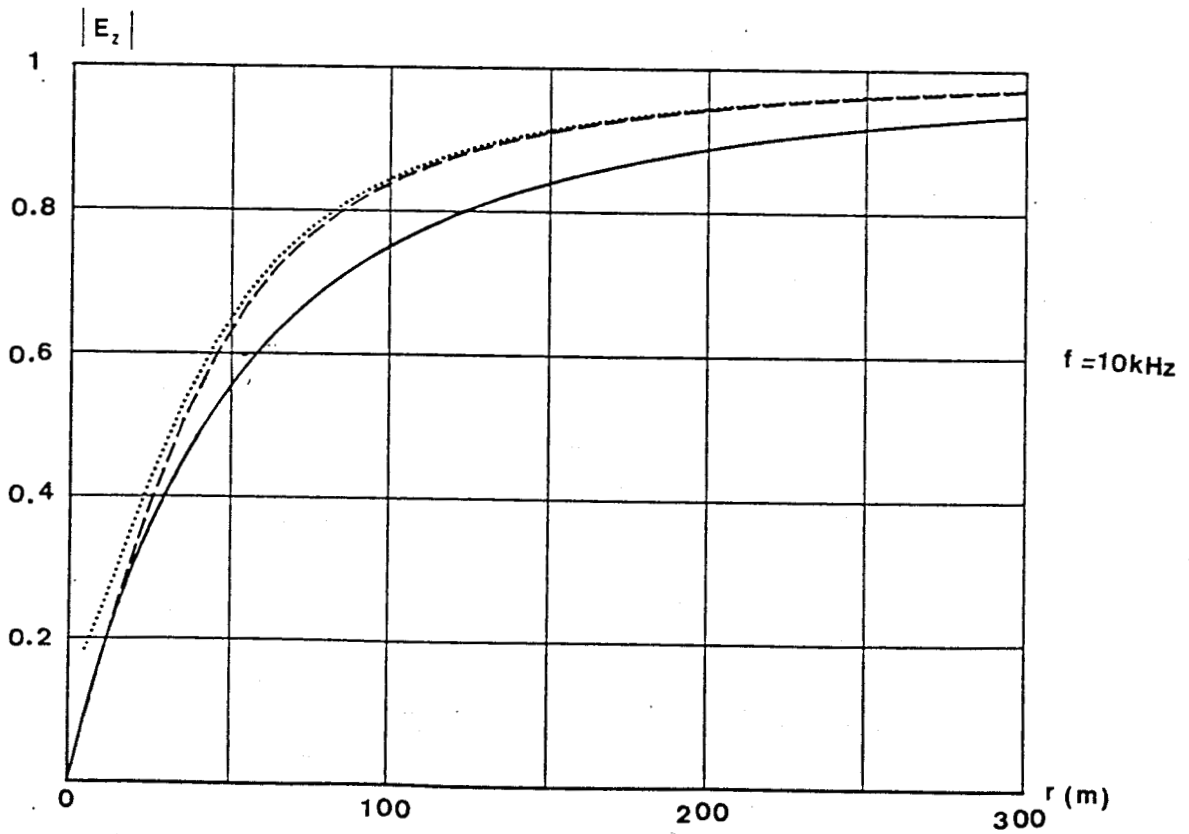


figure (II.A.16)

E_x, E_y : les composantes du champ électrique à l'intérieur de l'anomalie.

K_0 : fonction de Bessel à l'ordre 0 de troisième espèce

γ : constante de propagation propre à l'anomalie

γ_0 : constante de propagation du milieu homogène.

Pour résoudre ces équations intégrales-différentielles, on utilise la méthode des moments par la technique points-segments. Le choix de cette géométrie permet, si l'on considère que le sol est infiniment conducteur et en appliquant la théorie des images sur ce cas de figure, de donner une valeur maximale du champ re-rayonné par un relief.

Pour un angle $\theta = 0^\circ$, ($E_y = E_\theta$) nous illustrons l'influence des deux anomalies sur les figures (II.A.15) et (II.A.16), où $R = a = 100$ m, $f = 10, 100$ kHz, $|E_y^1| = 1$ V/m, ($\sigma = 10^{-2}$ S/m et $\sigma = 10^{-5}$ S/m), $\sigma_0 = \infty$.

Dans les deux configurations, on note que le champ électrique E_θ incident et rayonné par les deux géométries a le même comportement et que la différence entre les deux champs résultants n'est pas très importante.

II.A.9.3- Composante radiale du champ électrique

En ce qui concerne cette composante, nous nous intéressons à son comportement sur la surface du cylindre ; pour le comprendre, nous avons représenté la fluctuation de E_r en fonction de θ variant de 0° à 180° , figures (II.A.17) et (II.A.18), pour deux valeurs de f (10, 100 kHz), et pour quatre valeurs de R (0.5, 1, 1.5, 3 km). On observe que cette composante atteint son maximum pour un angle voisinant 90° et ceci quels que soient le rayon et la fréquence. De plus, si le rayon est faible devant la longueur d'onde, la variation de $|E_r|$ est une sinusoïde, ceci est prévisible puisque dans ce cas $E_r \approx 2 \sin \theta$ (annexe 3).

Si R est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde, la variation de E passe par plusieurs extrémums dont le nombre dépend du facteur kR .

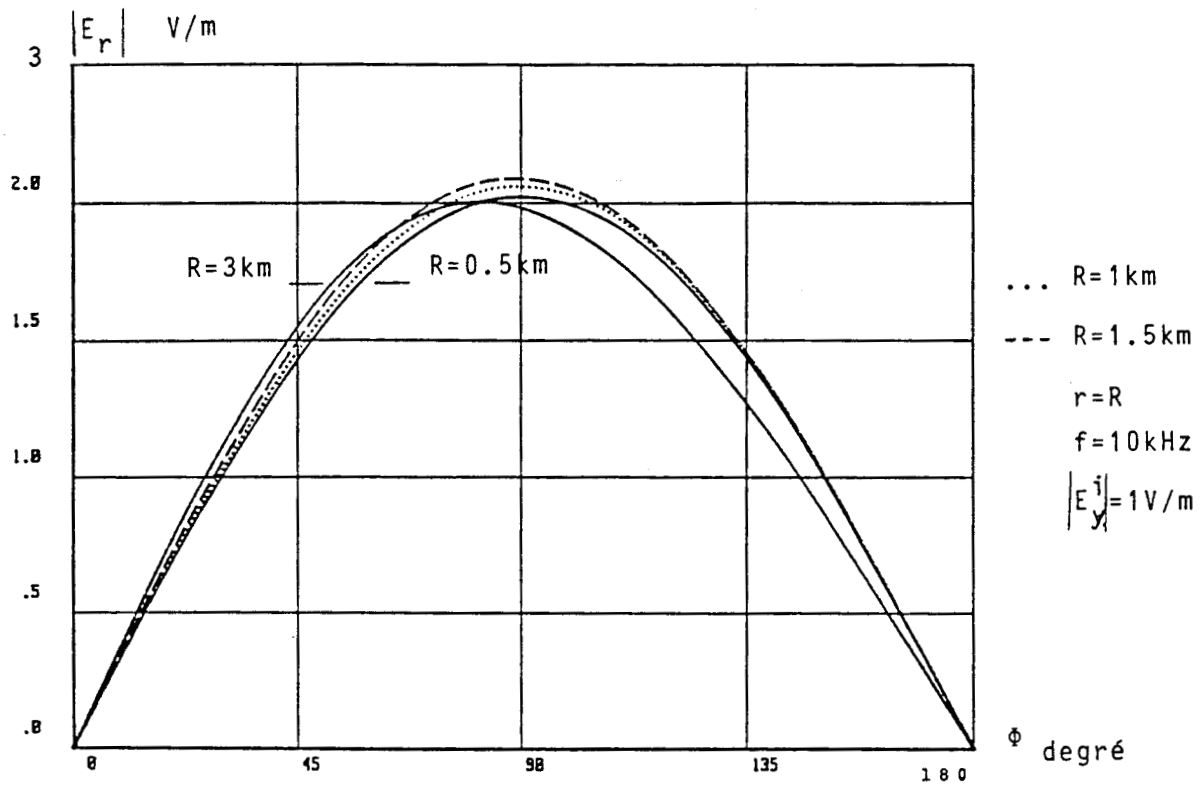


figure (II.A.17)

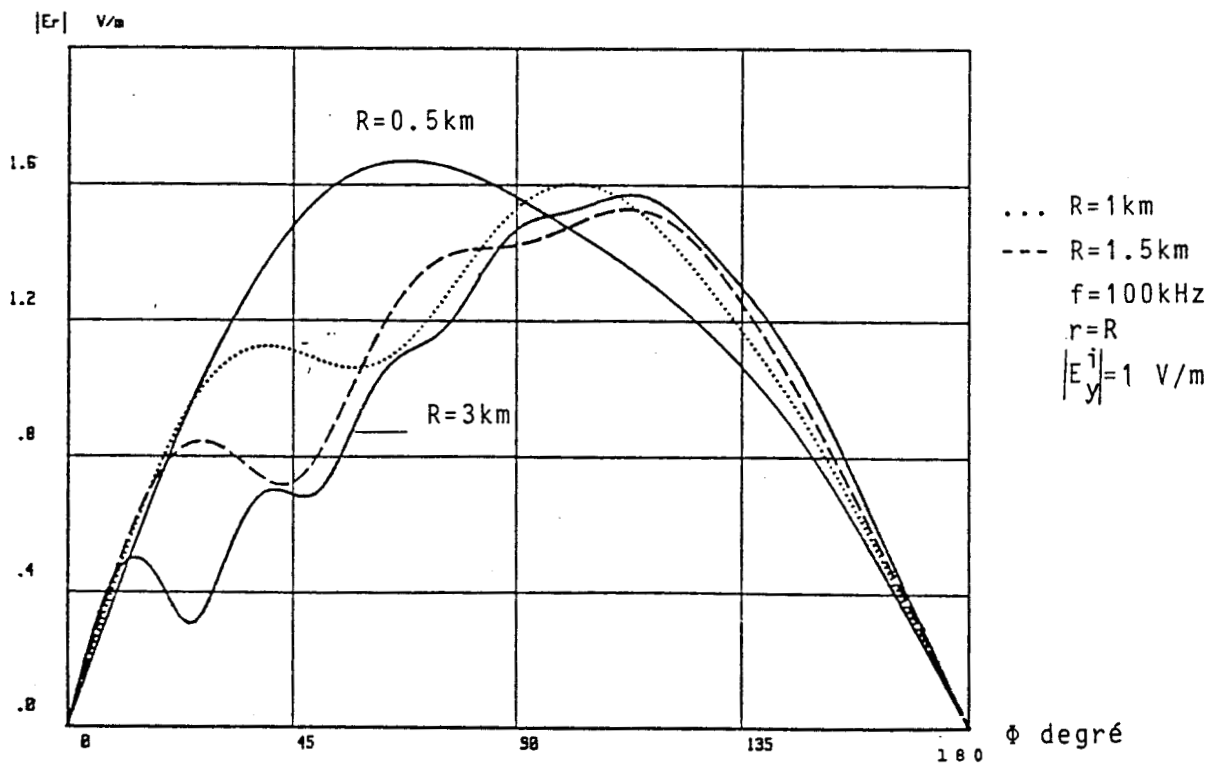


figure (II.A.18)

II.A.10- Courant de surface

Le courant résultant de l'incidence de cette onde plane sur le cylindre est donné par la relation suivante :

$$J_s = H_z|_{r=R} = H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n j^{-n} \left[J_n(kR) + B_n H_n^{(2)}(kR) \right] e^{jn\theta} \quad (\text{II.A.17})$$

en remplaçant B_n dans cette équation, nous aurons :

$$J_s = \frac{-2j H_0}{\pi k R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \frac{e^{jn\theta}}{[H_n^{(2)'}(kR)]} \quad (\text{II.A.18})$$

Pour deux fréquences de 10 et 100 kHz, nous avons représenté l'évolution de la densité du courant J_s en fonction de θ variant de 0° à 180° , figures (II.A.19) et (II.A.20), pour $R = 0.5, 1, 1.5, 3$ km.

Il est intéressant de noter que pour des petites valeurs de kR ($kR < 0,2$), la densité du courant est constante et égale à 1 A/m, ceci est dû au fait que le rayon est négligeable par rapport à la longueur d'onde et dans ce cas $J_s \approx H_0 [1 - 2jkR \cos \theta]$. Par contre, si R devient grand vis-à-vis de la longueur d'onde, la densité passe par plusieurs extrémums accompagnés d'un affaiblissement dans la partie obscure du cylindre et atteint son maximum dans la partie éclairée (2 A/m).

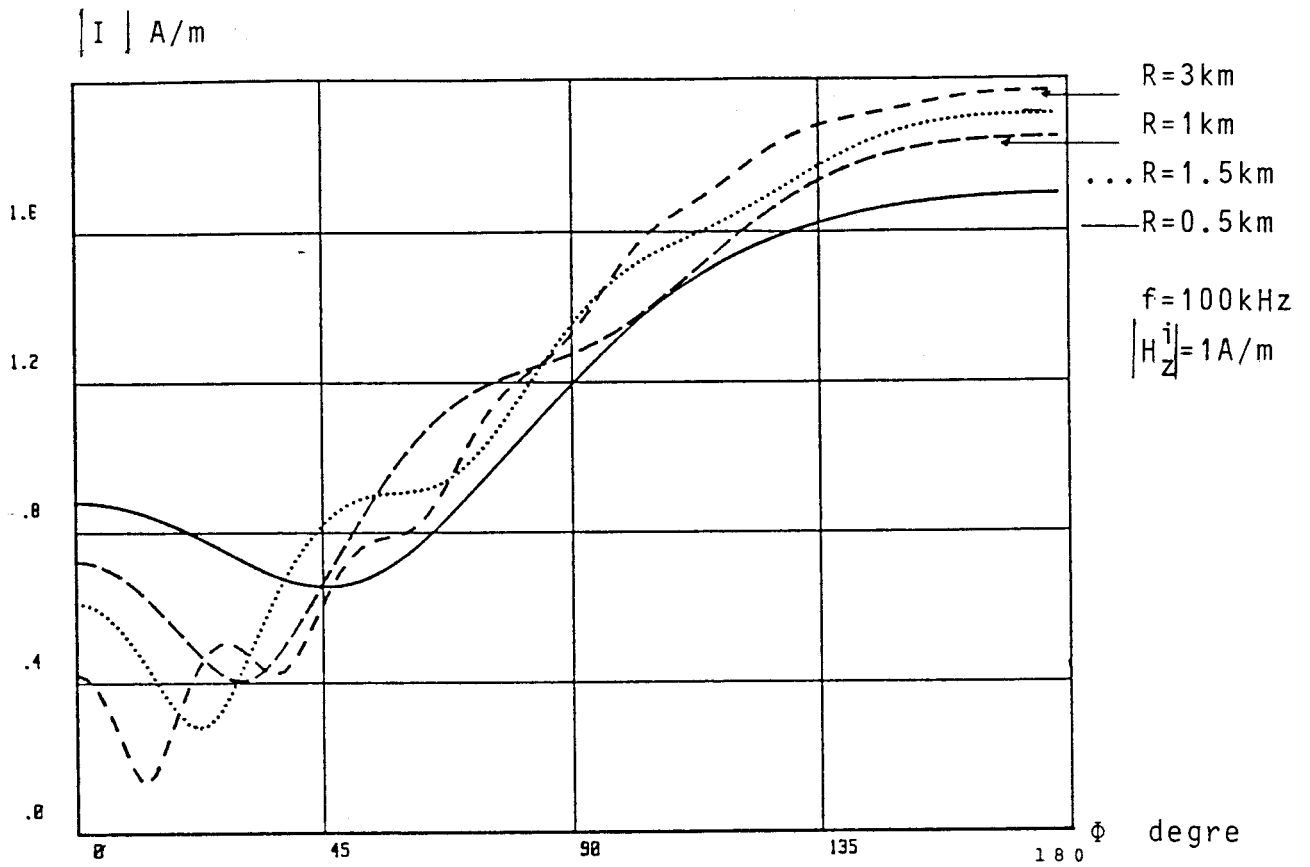


figure (II.A.20)

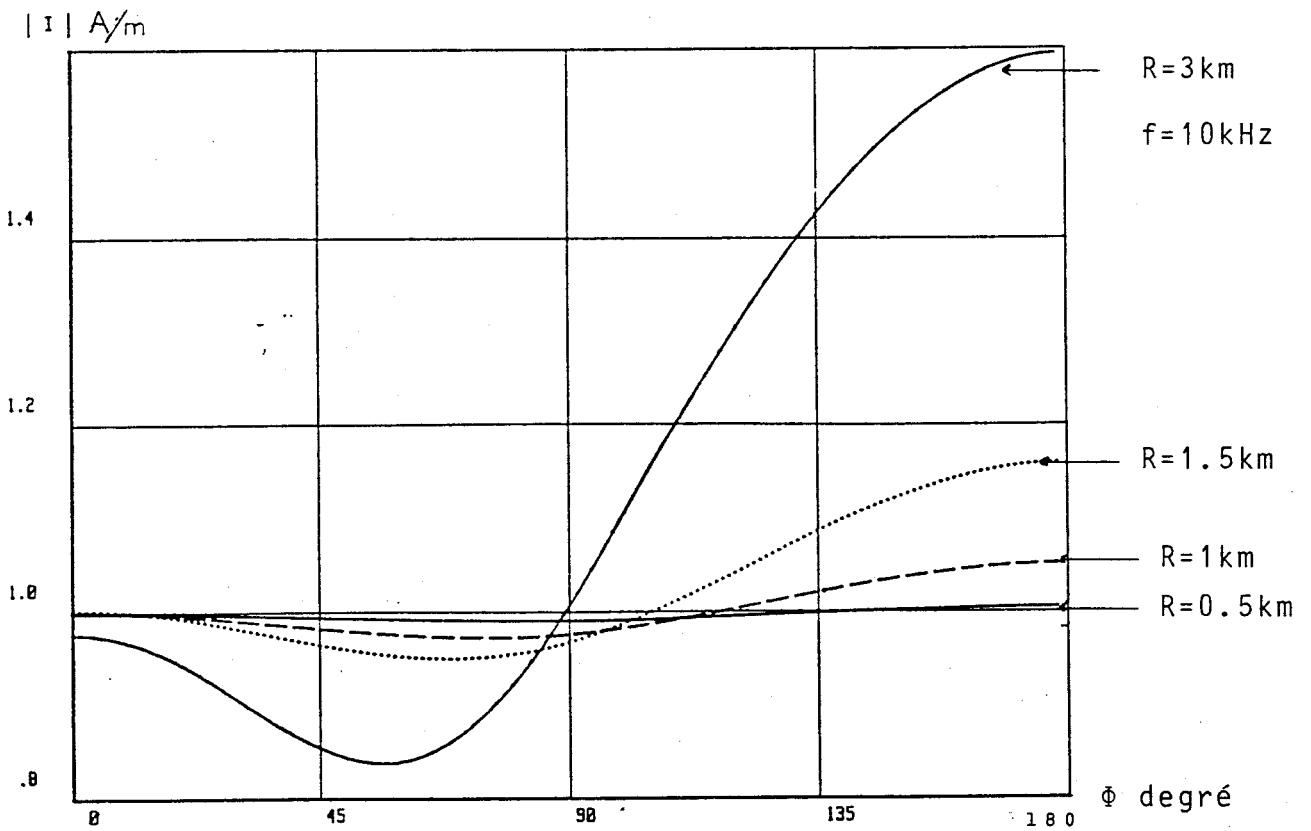


figure (II.A.19)

II.A.11- Conclusion

Nous pouvons remarquer dans tous les cas de figures que , si le facteur kR augmente, l'atténuation du champ électromagnétique total est plus importante. Cependant, pour de faibles rayons, le champ total atteint une valeur maximale pour une fréquence particulière.

Il est à noter qu'une différence importante apparaît entre les deux polarisations que l'on vient d'étudier. Dans la polarisation transversale (E incident \perp à l'axe du cylindre), l'influence du cylindre commence à disparaître à partir d'une distance de réception $r = 7R$, ce qui n'est pas le cas dans la polarisation longitudinale (E incident $//$ axe du cylindre); dans ce dernier cas, pour $r = 7R$, le champ électrique n'atteint que 50% de sa valeur maximale.

En ce qui concerne la densité de courant, nous remarquons que l'affaiblissement de J_s est important dans la zone non éclairée du cylindre dans les deux cas de polarisation surtout si R est du même ordre que λ , mais il est plus important dans la polarisation longitudinale.

II.B.1- Anomalie sphérique

Dans cette deuxième partie, nous supposons que l'anomalie est une sphère plongée dans un milieu homogène et infini. Nous étudierons le changement apporté par cette sphère sur le comportement d'une onde plane se propageant suivant l'axe oz dans ce même milieu, figure (II.B.1).

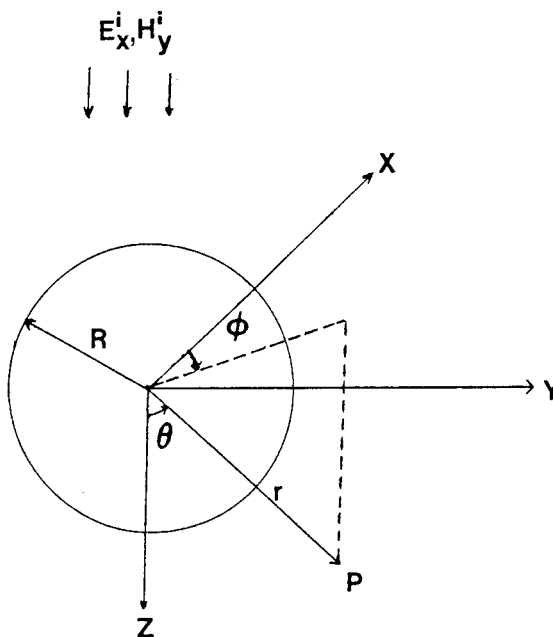


figure (II.B.1)

La sphère étant de rayon R et présentant une conductivité infinie, on déterminera le champ électrique total en un point P séparé d'une distance r du centre de la sphère. Le vecteur unitaire \vec{r} fait un angle θ avec l'axe oz, sa projection dans le plan oxy fait un angle ϕ avec ox.

II.B.2- Détermination des composantes du champ électrique

Pour faciliter l'application des conditions aux limites, on exprimera l'onde plane incidente en deux termes TM_r et TE_r définis de la manière suivante en coordonnées sphériques :

mode TM_r

$$E_r = \frac{1}{y} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right] A_r$$

$$E_\theta = \frac{1}{yr} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta}$$

$$E_\phi = \frac{1}{yr \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \phi}$$

(II.B.1)

$$H_r = 0$$

$$H_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi}$$

$$H_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}$$

mode TE_r

$$E_r = 0$$

$$E_\theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \theta}$$

$$E_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta}$$

(II.B.2)

$$H_r = \frac{1}{z} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right] F_r$$

$$H_\theta = \frac{1}{zr} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta}$$

$$H_\phi = \frac{1}{zr \sin \theta} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta}$$

où A_r représente le potentiel résultant du champ électrique dans le mode TM_r et F_r du champ magnétique dans le mode TE_r.

$$y = \sigma + j\omega\epsilon$$

$$k^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) = -zy$$

Le champ incident E_r^i est lié à E_x^i par :

$$E_r^i = \cos \theta \sin \theta E_x^i \quad (II.B.3)$$

en remplaçant E_x^i par sa valeur, nous obtenons :

$$E_r^i = E_o \cos \theta \sin \theta e^{-jrk \cos \theta} \quad (II.B.4)$$

ce champ peut se décomposer en série de Fourier [10] comme suit :

$$E_r^i = \frac{E_0 \cos \theta}{jkr} \sum_{n=0}^{\infty} j^{-n(2n+1)} j_n(kr) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta) \quad (\text{II.B.5})$$

où P_n : est le polynôme de Legendre à l'ordre n .

j_n : fonction de Bessel sphérique à l'ordre n .

Sachant que P_n est lié à P_n^m (polynôme de Legendre associé) par la relation suivante :

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (\text{II.B.6})$$

en remplaçant m par 1 et sachant que pour $m > n$, $P_n^m(x) = 0$, nous aurons le développement de E_r^i :

$$E_r^i = \frac{-E_0 j \cos \theta}{(kr)^2} \sum_{n=1}^{\infty} j^{-n(2n+1)} \mathcal{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{II.B.7})$$

où $\mathcal{J}_n(kr) = kr j_n(kr)$

A partir des formules (II.B.2), nous pourrions obtenir l'expression du potentiel A_r :

$$A_r^i = \frac{E_0 \cos \theta}{w\mu} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathcal{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{II.B.8})$$

où $A_n = \frac{-j^{-n(2n+1)}}{n(n+1)}$

de la même manière, en utilisant l'expression de H_r dans (II.B.2), F_r^i peut être obtenu et s'exprime par :

$$F_r^i = \frac{E_0 \sin \vartheta}{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathcal{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{II.B.9})$$

Or, l'onde incidente est la superposition des deux modes TM_r et TE_r , le champ rayonné par la sphère peut se décomposer en série de Fourier tout en remplaçant \mathcal{J}_n par $H_n^{(2)}$, d'où les potentiels A_r^r et F_r^r (r rayonné) :

$$A_r^r = \frac{E_0 \cos \vartheta}{w\mu} \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kr) P_n^1(\cos \theta)$$

et

(II.B.10)

$$F_r^r = \frac{E_0 \sin \vartheta}{k} \sum_{n=1}^{\infty} C_n H_n^{(2)}(kr) P_n^1(\cos \theta)$$

Les potentiels totaux étant la somme des potentiels de l'onde incidente et ceux de l'onde réfléchie.

$$A_r = A_r^i + A_r^r \quad (\text{II.B.11})$$

$$F_r = F_r^i + F_r^r$$

Le développement des formules (II.B.11) nous donne l'expression des composantes du champ électrique, ces dernières sont données en annexe 4. Pour obtenir les coefficients B_n et C_n , il suffit d'appliquer les conditions aux limites :

$$\vec{E}_\vartheta + \vec{E}_\theta = 0 \quad \text{pour } r=R$$

$$B_n = \frac{-A_n J_n'(kR)}{H_n^{(2)'}(kR)}$$

(II.B.12)

$$C_n = \frac{-A_n J_n(kR)}{H_n^{(2)}(kR)}$$

La convergence de toutes ces séries dépend du facteur kR , pour atteindre une précision satisfaisante dans la gamme des basses fréquences et pour R de l'ordre de quelques km, une quarantaine de termes est suffisante.

II.B.3- Etude paramétrique

II.B.3.1- Composante normale du champ électrique E_r

La figure (II.B.2) représente la fluctuation du champ électrique E_r en fonction de l'angle θ , ceci est effectué pour une distance de réception r égale au rayon de la sphère R ($R = 0.5, 1.5, 3$ km), et pour une fréquence $f=100$ kHz et pour $\theta=0$. Nous remarquons que si le rayon est faible par rapport à la longueur d'onde, nous obtenons une réponse ayant son maximum autour de 90° , mais si R est du même ordre de grandeur que λ , plusieurs extrêmes sont obtenus, le nombre de ces derniers augmente si le facteur kR croît.

Si l'on s'intéresse maintenant au comportement de E_r en fonction de la distance r , illustré par la figure (II.B.3), pour $f = 100$ kHz, $\theta = 0$, $R = 0.5, 1.5, 3$ km, et $\theta = 90^\circ$ dans ce cas $r = x$ et $E_x = E_r$, on remarque une diminution assez rapide de la composante E_r accompagnée par quelques oscillations autour de 1 V/m qui disparaissent si $r \gg R$ et E_r retrouve

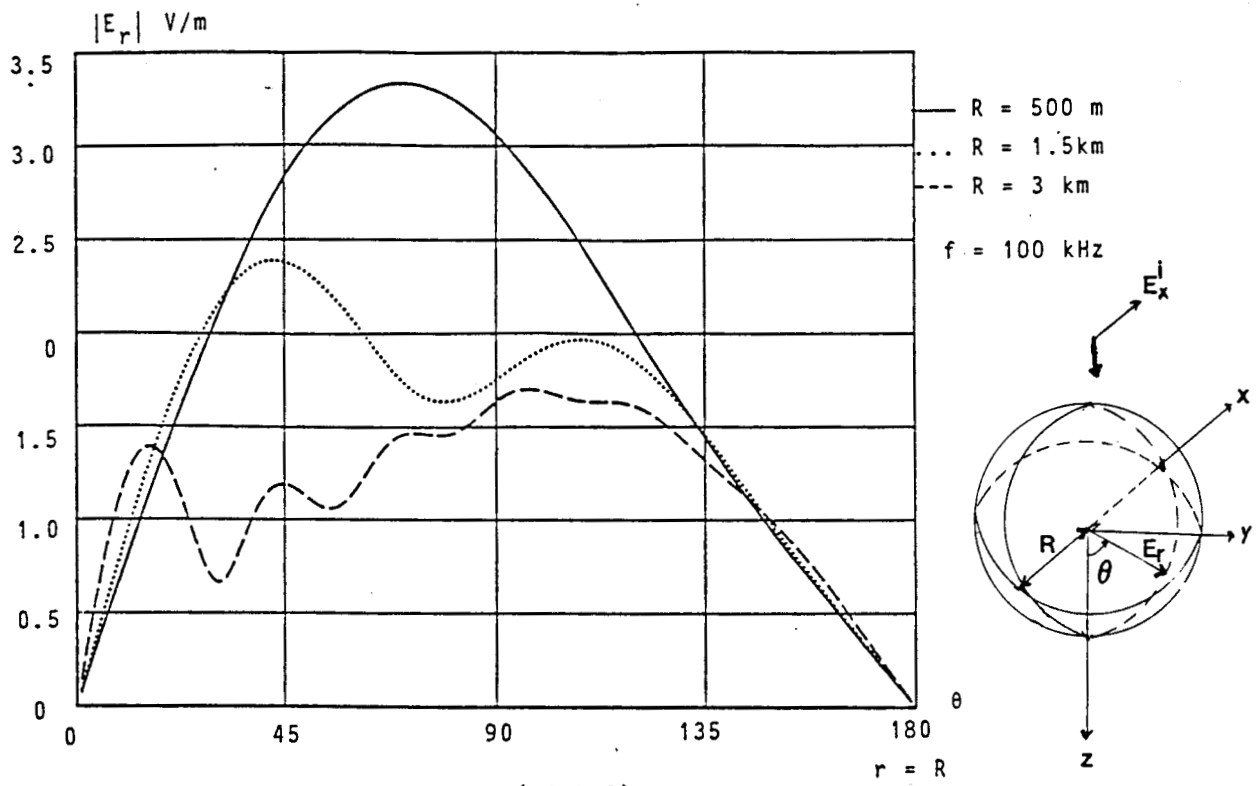


figure (II.B.2)

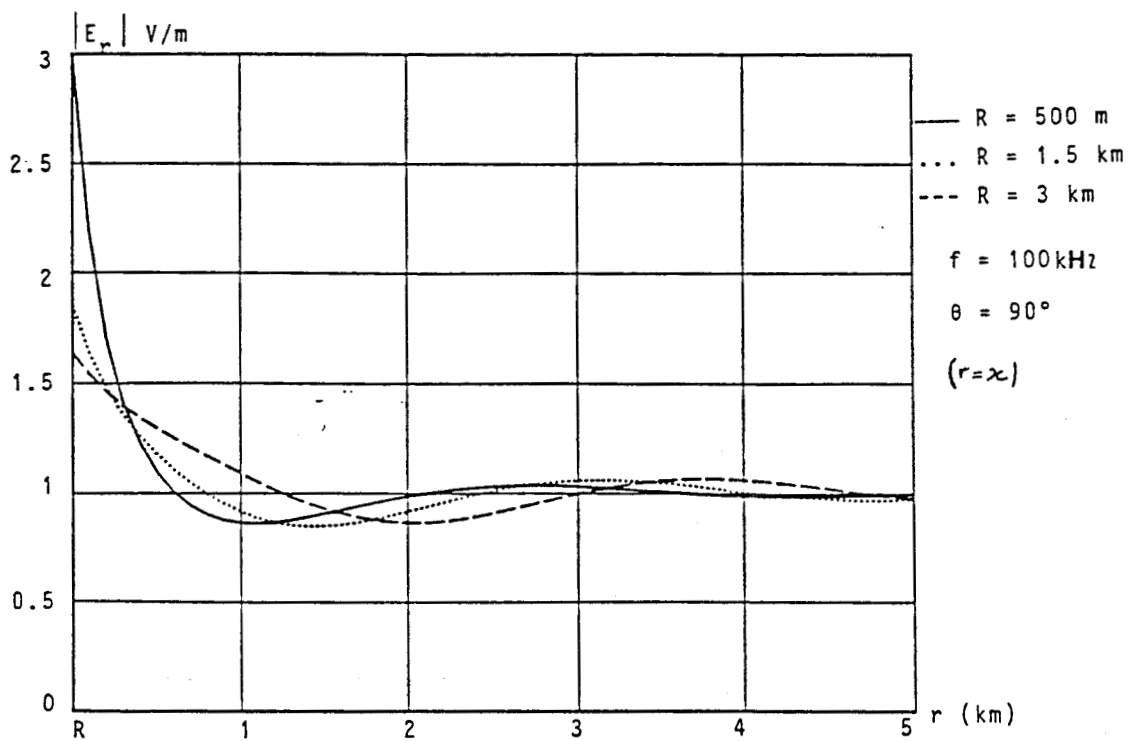
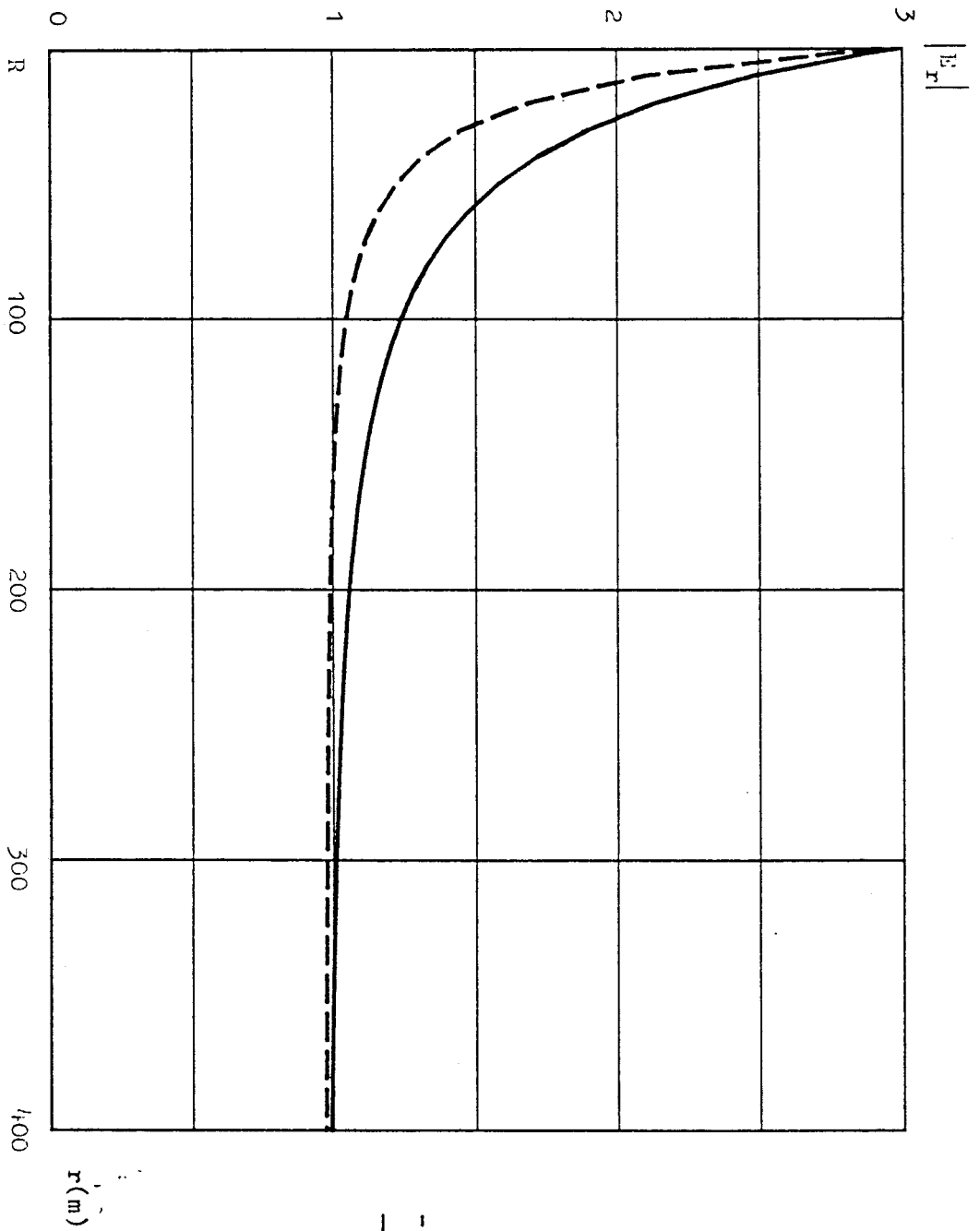
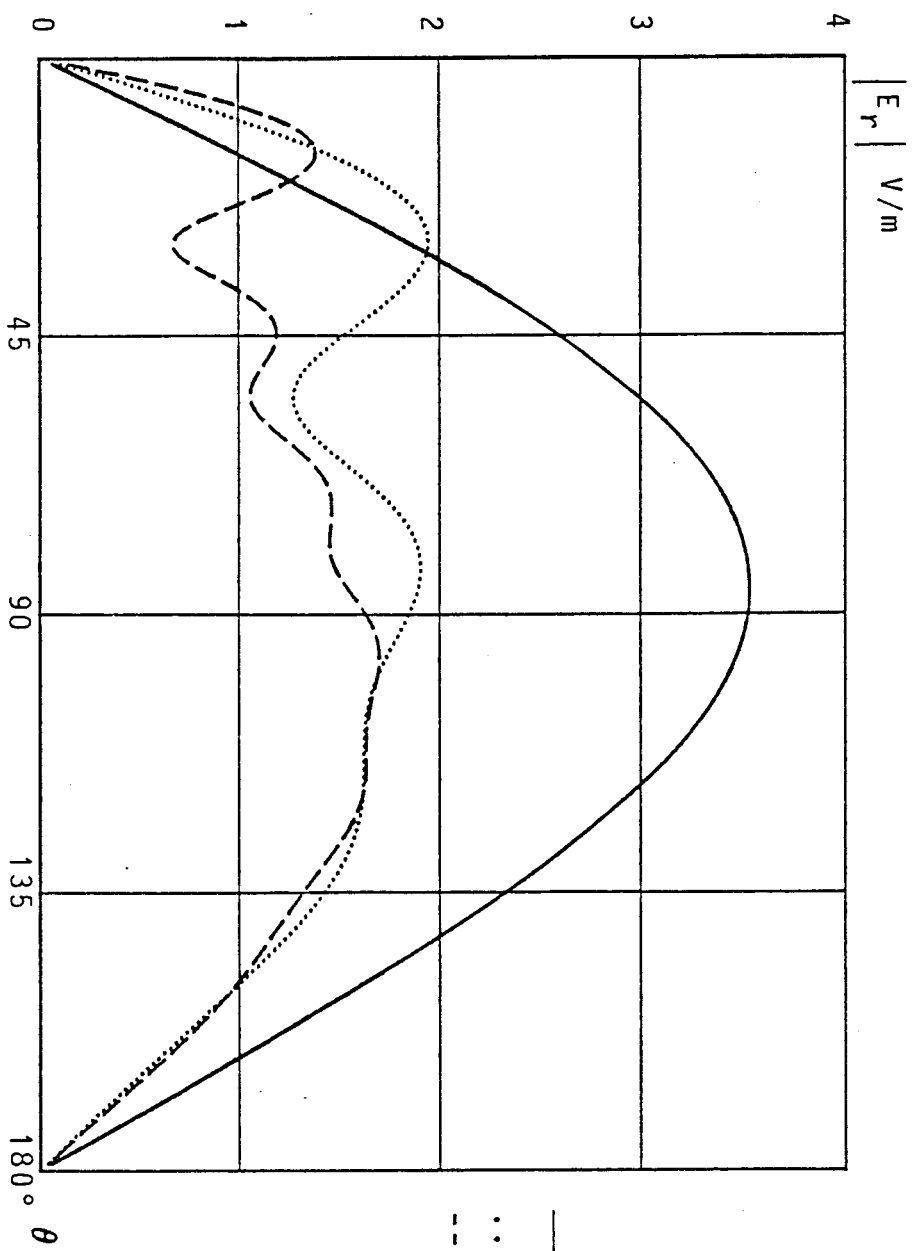


figure (II.B.3)



--- R = 50 m
 — R = 100 m
 f = 100 kHz
 $\theta = 90^\circ$
 (r = x)

figure (II.B.4)



- f = 10 KHZ
- ... f = 50 KHZ
- f = 100 KHZ

R = 3 km

Et dans le même
Plan qu'au (II.B. 2)

figure (II.B.5)

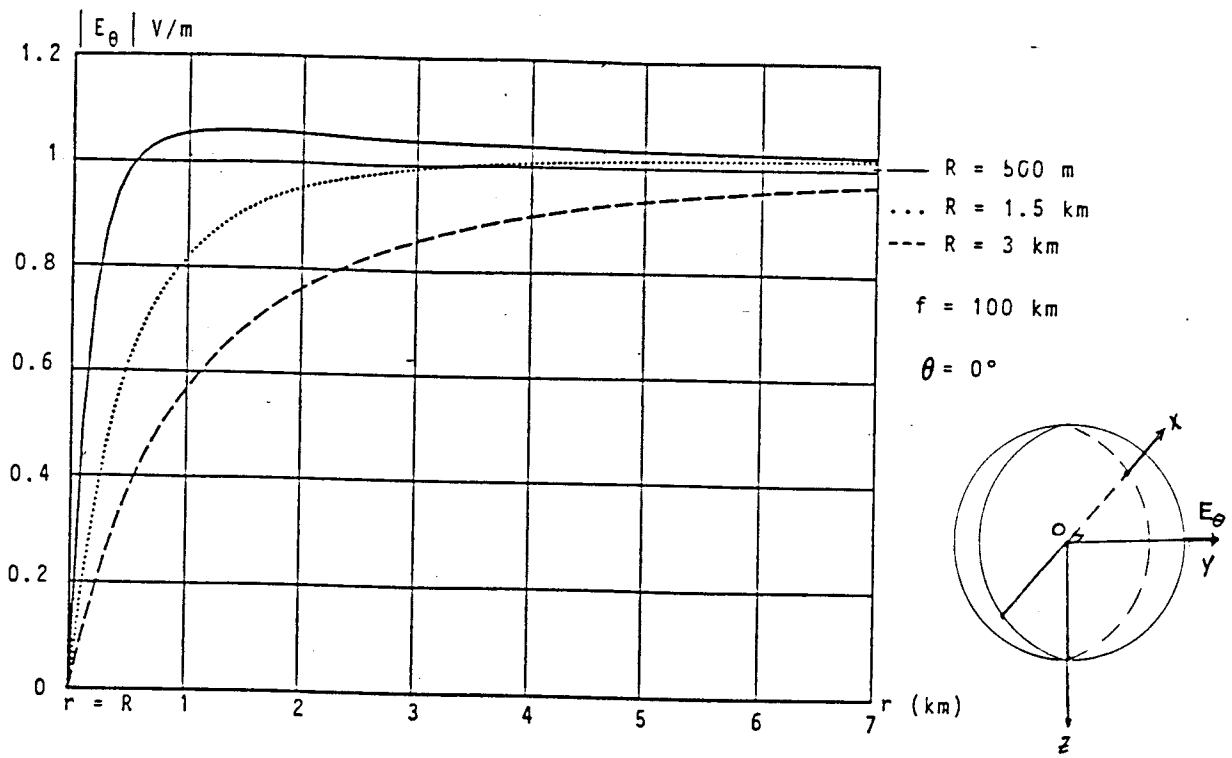


figure (II.B.6)

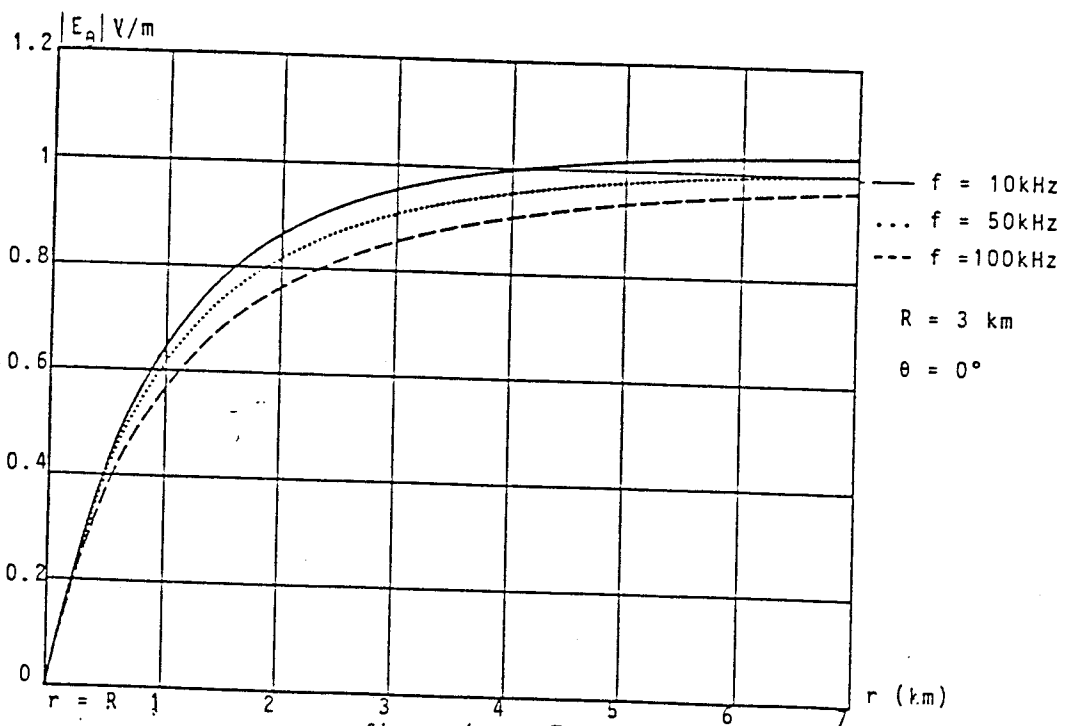


figure (II.B.7)

dans ce cas la valeur initiale de l'onde incidente.

Si le rayon de la sphère diminue, comme le montre la figure (II.B.4), la composante E_r atteint la même valeur maximale pour $r = R$, cette valeur est égale $3V/m$.

Comme le montre la figure (II.B.5), cette composante est très sensible à la variation de la fréquence, telle qu'une augmentation de f entraîne une diminution brutale de E_r .

II.B.3.2- Composante tangentielle E_θ

Les résultats donnés sur la figure (II.B.6) mettent en évidence l'influence du rayon de la sphère sur le comportement de la composante E_θ , ces résultats correspondent aux données suivantes :

$f=100\text{kHz}$, $\theta = 0$, $\phi = 0$, $R = 0.5, 1.5, 3 \text{ km}$.

On observe une nette diminution du champ E_θ si le rayon de la sphère augmente.

Sur la figure (II.B.7), nous schématisons l'influence de la fréquence sur le rayonnement de la sphère. On note un faible changement dans le champ reçu à une distance r pour des fréquences variant de 10 kHz à 100 kHz même si le rayon de la sphère n'est pas négligeable vis-à-vis de la longueur d'onde.

II.B.4- Conclusion

Nous avons établi dans ce paragraphe, l'expression du champ rayonné par une sphère de conductivité infinie, ensuite une étude du comportement des différentes composantes a été menée, qui nous a montré que E_r est très sensible au paramètre kR mais ce n'est pas le cas de la composante E_θ qui est très influencée par le changement du rayon mais pas par celui de la fréquence.

Dans ce chapitre, la conductivité est infinie et les anomalies cylindrique et sphérique sont plongées dans un milieu homogène. Dans le chapitre suivant, nous menons la même étude avec d'autres formes géométriques, mais en présence du sol ; de plus, l'anomalie sera de conductivité finie afin de mettre en évidence le rôle de cette dernière.

CHAPITRE III

INFLUENCE DU SOL

INTRODUCTION

Dans les deux chapitres précédents, nous avons vu l'influence d'une anomalie à une seule dimension (la forêt) dans un milieu stratifié et celle d'une anomalie à deux dimensions dans un milieu homogène et infini. Dans ce chapitre, nous examinons le changement apporté par une anomalie à trois dimensions en présence du sol sur le comportement du champ électrique.

Nous commencerons par établir les expressions du champ à l'intérieur de l'anomalie, cette dernière peut être représentée par une distribution de courant équivalent et donc par une distribution de dipôles électriques. Le champ électrique en tout point de l'anomalie est donné par des équations intégral-différentielles. Pour les résoudre, nous utilisons la méthode des moments par la technique points-segments, étant donné que, dans ce cas, cette technique est facile à mettre en oeuvre pour un système à trois dimensions. Le calcul des intégrales simples et doubles se fera de la même manière qu'au 1er chapitre.

Une étude paramétrique sera présentée en fin de chapitre pour déterminer le rôle de toutes les variables qui interviennent dans le calcul du champ électromagnétique.

III.1 - Anomalie dans un milieu stratifié

L'étude que nous mènerons dans ce chapitre est la modélisation d'une anomalie parallélépipédique de conductivité finie dans un milieu à deux couches, figure (III.1).

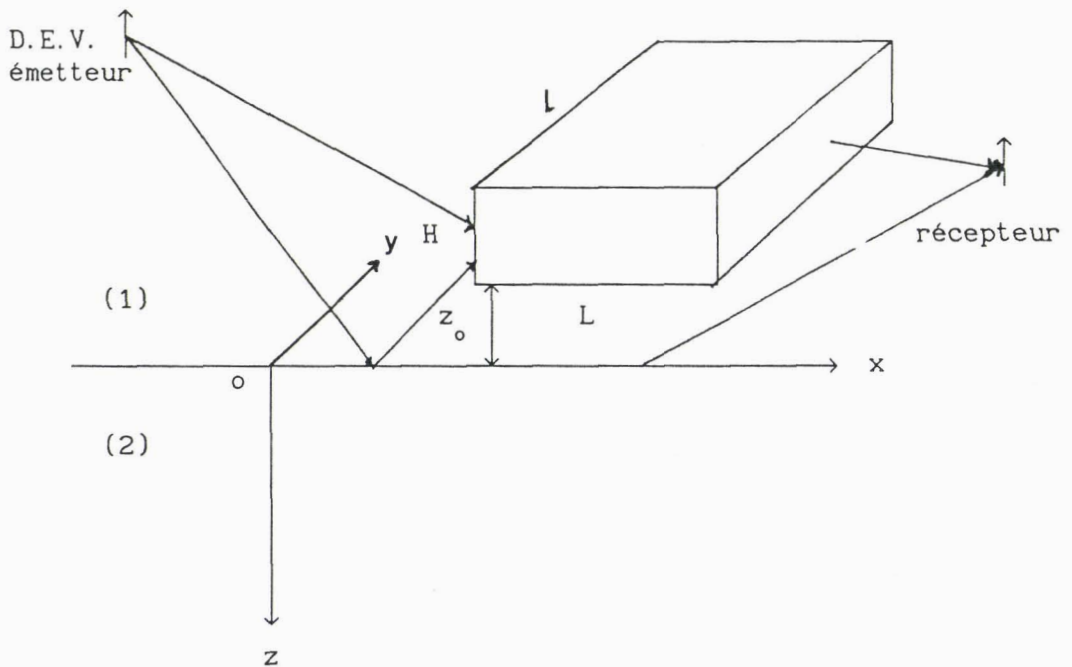


figure (III.1)

Le premier milieu est caractérisé par $(\epsilon_{1r}, \sigma_1)$, le deuxième par $(\epsilon_{2r}, \sigma_2)$. L'anomalie est de longueur L , de largeur l , de hauteur H , de permittivité ϵ_{ar} et de conductivité σ_a , placée dans le milieu (1) et se trouve à une distance z_0 de l'interface de séparation entre (1) et (2), ceci nous donne

une formulation générale permettant en particulier d'étudier la réponse de l'anomalie située dans l'air ou dans le sol. L'émetteur utilisé est : soit un dipôle électrique vertical (D.E.V.) placé en un point M de coordonnées cartésiennes (x_e, y_e, z_e) dans le même milieu où se trouve l'anomalie, soit une onde plane polarisée verticalement et se propageant suivant l'axe ox, parallèle à l'interface . Le point d'observation P est de coordonnées (x, y, z) .

Le champ rayonné en ce point P est la somme du champ émis directement par l'émetteur, le champ réfléchi par le milieu (2) et des réfractions susceptibles de se produire sur l'hétérogénéité.

III. 2 - Simulation de l'anomalie par des dipôles électriques

Ecrivons l'équation de Maxwell-Ampère dans le volume de l'hétérogénéité où règnent les champs \vec{E}_a et \vec{H}_a :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}_a = \mu_a (\sigma_a + j\omega\epsilon_a) \vec{E}_a \quad (\text{III.1})$$

En ajoutant et en retranchant respectivement dans les deux membres de (III.1) les quantités suivantes $\mu_a \vec{H}_a$ et $\mu_1 (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \vec{E}_a$ et en posant $\sigma_a^* = \sigma_a + j\omega\epsilon_a$ et $\sigma_1^* = \sigma_1 + j\omega\epsilon_1$, cette relation s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \left[\mu_1 \vec{H}_a - (\mu_1 - \mu_a) \vec{H}_a \right] = \mu_1 \sigma_1^* \vec{E}_a + (\mu_a \sigma_a^* - \mu_1 \sigma_1^*) \vec{E}_a \quad (\text{III.2})$$

Cette équation peut être considérée comme l'équation de Maxwell-Ampère

écrite dans un milieu de caractéristiques (σ_1^*, μ_1) contenant une distribution de courant $\rho_m V_e$ telle que :

$$\rho_m V_e \rightarrow = \frac{\mu_a \sigma_a^* - \mu_1 \sigma_1^*}{\mu_1} \rightarrow E_a + \frac{\mu_1 - \mu_a}{\mu_1} \rightarrow \text{rot } H_a \quad (\text{III.3})$$

L'équation (III.2) devient :

$$\rightarrow \text{rot } H_a = \sigma_1^* \rightarrow E_a + \rho_m V_e \quad (\text{III.4})$$

Le milieu (1) et l'anomalie ayant une perméabilité identique, la distribution du courant devient dans ce cas :

$$\rho_m V_e \rightarrow = (\sigma_a^* - \sigma_1^*) \rightarrow E_a \quad (\text{III.5})$$

On peut donc dire que chaque élément de volume dV de l'anomalie est équivalent à un dipôle électrique dont le moment est :

$$P \rightarrow = (\sigma_a^* - \sigma_1^*) \rightarrow E_a dV \quad (\text{III.6})$$

Compte tenu de (III.6), il est clair que le potentiel de Hertz $\Pi \rightarrow$ dans l'un quelconque des milieux s'exprime sous la forme suivante [11] :

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_1 + \frac{\sigma_a^* - \sigma_1^*}{4\pi\sigma_1^*} \int_V [G(P,M)] \vec{E}_a(M) dV \quad (\text{III.7})$$

avec

$\vec{\Pi}_1$: potentiel de Hertz créé par le D.E.V. dans le milieu considéré,

V : volume de l'anomalie,

$[G(P,M)]$: matrice des fonctions de Green correspondant au rayonnement des dipôles équivalents,

\vec{E}_a : champ électrique total au point M dans l'anomalie.

III. 3 - Expression du champ électrique

III. 3. 1 - Champ total en un point des deux milieux

Le champ électrique $E(M)$ en un point $M(x,y,z)$ de l'espace est la somme du champ rayonné directement par le dipôle émetteur et celui réfléchi par la discontinuité entre les deux milieux (1) et (2) $E_e(M)$ et le champ rayonné E_a par les dipôles équivalents à l'anomalie:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_e(M) + \vec{E}_a(M) \quad (\text{III.8})$$

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, le champ électrique est déduit du potentiel de Hertz, solution de :

$$(\Delta - \gamma_1^2) \vec{\Pi}_1 = - \frac{\rho}{\epsilon} \delta(R)$$

Le potentiel de Hertz n'admet qu'une seule composante Π_z telle que :

$$\Pi_{1z} = \frac{I dl}{4\pi(\sigma_1^* + j\omega\epsilon_1)} \left[G(R_1) - G(R_2) + \int_0^\infty f_1 e^{u_1 z} J_0(\lambda r) d\lambda \right]$$

(III.9)

$$\Pi_{2z} = \frac{I dl}{4\pi(\sigma_1^* + j\omega\epsilon_1)} \int_0^\infty f_2 e^{-u_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda$$

f_1 et f_2 peuvent être obtenus de la même manière qu'au premier chapitre. Leurs expressions se trouvent en annexe 5.

$$G(R) = \frac{e^{-\gamma_1 R}}{R}$$

$$R_1 = \left[(x-x_e)^2 + (y-y_e)^2 + (z-z_e)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_2 = \left[(x-x_e)^2 + (y-y_e)^2 + (z+z_e)^2 \right]^{1/2}$$

(x_e, y_e, z_e) coordonnées de la source.

Les composantes du champ électrique émis par celles-ci sont donc données par :

$$\begin{aligned}
E_{ex}^1 &= \frac{Idl}{4\pi(\sigma_1^* + j\omega\epsilon_1)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \Pi_{1z} \\
E_{ey}^1 &= \frac{Idl}{4\pi(\sigma_1^* + j\omega\epsilon_1)} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \Pi_{1z} \\
E_{ez}^1 &= \frac{Idl}{4\pi(\sigma_1^* + j\omega\epsilon_1)} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right] \Pi_{1z}
\end{aligned}
\tag{III.10}$$

$i = 1, 2$ l'indice du milieu.

Les expressions développées de E_{ex}^1 , E_{ey}^1 et E_{ez}^1 sont données dans l'annexe 5.

III.3.2 - Champ rayonné par les dipôles équivalents

Pour un élément de volume dV entourant un point $M'(x_o, y_o, z_o)$ de l'anomalie, le moment électrique du dipôle équivalent est :

$$\vec{P} = (\sigma_a^* - \sigma_1^*) E(M') dV$$

Ce dipôle aura en général trois composantes, une verticale et deux horizontales suivant les axes ox et oy . Le potentiel de Hertz se composera donc de :

$$\Pi_x^1 = \frac{\sigma_a^* - \sigma_1^*}{4\pi\sigma_1^*} E_x(M') dV \left[G(R_1) - G(R_2) + \int_0^\infty l_1 e^{u_1 z} J_0(\lambda r) d\lambda \right]$$

$$\Pi_y^1 = \frac{\sigma_a^* - \sigma_1^*}{4\pi\sigma_1^*} E_y(M') dV \left[G(R_1) - G(R_2) + \int_0^\infty l_1 e^{u_1 z} J_0(\lambda r) d\lambda \right]$$

(III.11)

$$\Pi_z^1 = \frac{\sigma_a^* - \sigma_1^*}{4\pi\sigma_1^*} E_z(M') dV \left[G(R_1) - G(R_2) + \int_0^\infty f_1 e^{u_1 z} J_0(\lambda r) d\lambda \right. \\ \left. - \frac{(x-x_0) + (y-y_0)}{r} \int_0^\infty g_1 e^{u_1 z} J_1(\lambda r) d\lambda \right]$$

Les coefficients f_1, l_1 et g_1 sont donnés en annexe 5.

Ceci nous donne pour le champ électrique rayonné par un élément de l'anomalie :

$$E_x^a = \mathcal{A}_0 \left[E_x(M') dV G_x^x + E_y(M') dV G_x^y + E_z(M') dV G_x^z \right]$$

$$E_y^a = \mathcal{A}_0 \left[E_x(M') dV G_y^x + E_y(M') dV G_y^y + E_z(M') dV G_y^z \right]$$

(III.12)

$$E_z^a = \mathcal{A}_0 \left[E_x(M') dV G_z^x + E_y(M') dV G_z^y + E_z(M') dV G_z^z \right]$$

$$\text{avec } \mathcal{A}_0 = \frac{\sigma_a^* - \sigma_1^*}{4\pi\sigma_1^*}$$

Les G_a^b ($a=x, y, z$ et $b=x, y, z$) sont donnés en annexe 5.

Le champ total rayonné s'obtient donc en intégrant ces composantes sur la totalité du volume V , ce qui mène à :

$$E_x^1(M) = E_{ex}^1 + \mathcal{A}_0 \int_V \left[E_x(M') dV G_x^x + E_y(M') dV G_x^y + E_z(M') dV G_x^z \right]$$

$$E_y^1(M) = E_{ey}^1 + \mathcal{A}_0 \int_V \left[E_x(M') dV G_y^x + E_y(M') dV G_y^y + E_z(M') dV G_y^z \right] \quad (\text{III.13})$$

$$E_z^1(M) = E_{ez}^1 + \mathcal{A}_0 \int_V \left[E_x(M') dV G_z^x + E_y(M') dV G_z^y + E_z(M') dV G_z^z \right]$$

Aucune restriction n'ayant été imposée à la position des points d'observation M , les expressions sont valables dans les deux milieux entiers. Ce point peut donc se trouver à l'intérieur du volume V et l'inconnue est précisément le champ total à l'intérieur de l'anomalie en fonction duquel est exprimée la distribution de courant équivalent. Dans ces conditions (III.13) constitue un système d'équations intégrales de FREDHOLM. La résolution de ce système nous permettra de connaître le champ à l'intérieur de l'anomalie, donc l'ensemble des dipôles équivalents. Dans une deuxième étape, le champ en tout point du milieu pourra être calculé.

III.3.3 - Champ total à l'intérieur de l'anomalie

Les composantes du champ électrique à l'intérieur du volume de l'anomalie sont exprimées par le système d'équations (III.13). Cependant les fonctions

de Green présentent une singularité lorsque les points M et M' sont confondus, une première solution consiste à extraire du volume V un petit volume élémentaire, sphérique par exemple, entourant le point d'observation et à essayer de trouver une solution analytique lorsque le rayon de la sphère tend vers zéro.

Une autre possibilité est d'utiliser l'équation de Helmholtz que vérifie la fonction de Green [12], si R est la distance entre le point M et M' :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right] G(R) = -4\pi \delta(R) \quad (\text{III.14})$$

D'après les formules (III.12) et (III.14), on peut écrire dans le cas de la variable z et le terme G_x^x :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma_1^2 \right] G(R) = - \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G(R) - 4\pi \delta(R)$$

et l'intégrale sur le volume V donne :

$$\begin{aligned}
\int_V E_x(M') G(R) dV &= -4\pi \int_V E_x(M') \delta(R) dV - \int_V E_x(M') \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G(R) dV \\
&= -4\pi E_x(M') - \int_V E_x(M') \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G(R) dV \quad (\text{III.15})
\end{aligned}$$

Le calcul des fonctions de Green dans les termes G_y^y et G_z^z est exactement le même que pour G_x^x .

En introduisant les résultats de ces calculs dans le système (III.13), on obtient pour le champ total dans l'anomalie :

$$\frac{\sigma_a^*}{\sigma_1^*} E_x(M) = E_{ex}^1 + \int_V \left[E_x(M') dV g_x^x + E_y(M') dV G_x^y + E_z(M') dV G_x^z \right]$$

$$\frac{\sigma_a^*}{\sigma_1^*} E_y(M) = E_{ey}^1 + \int_V \left[E_x(M') dV G_y^x + E_y(M') dV g_y^y + E_z(M') dV G_y^z \right] \quad (\text{III.16})$$

$$\frac{\sigma_a^*}{\sigma_1^*} E_z(M) = E_{ez}^1 + \int_V \left[E_x(M') dV G_z^x + E_y(M') dV G_z^y + E_z(M') dV g_z^z \right]$$

g_x^x , g_y^y , g_z^z sont donnés en annexe 5.

Comme nous le verrons dans ce chapitre, le fait de remplacer les fonctions de Green par les dérivées secondes permet de transformer les intégrales triples en intégrales doubles. Ces intégrations se font sur des domaines où les fonctions ne présentent aucune singularité.

III.4 - RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES

III.4.1 - Transformation du système intégral en système linéaire

Pour la résolution du système d'équations intégrales (III.16), nous allons appliquer la méthode des moments avec la technique point-segments. Les fonctions base et test sont respectivement des créneaux et des diracs qui ont pour domaine de définition les éléments de volume dV de l'anomalie [13].

Découpons l'anomalie en N éléments de volume $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, figure (III.2). D'autre part, l'anomalie est divisée en N_x , N_y et N_z éléments respectivement suivant les axes x , y et z d'où le nombre total de volumes élémentaires est $N = N_x \cdot N_y \cdot N_z$.

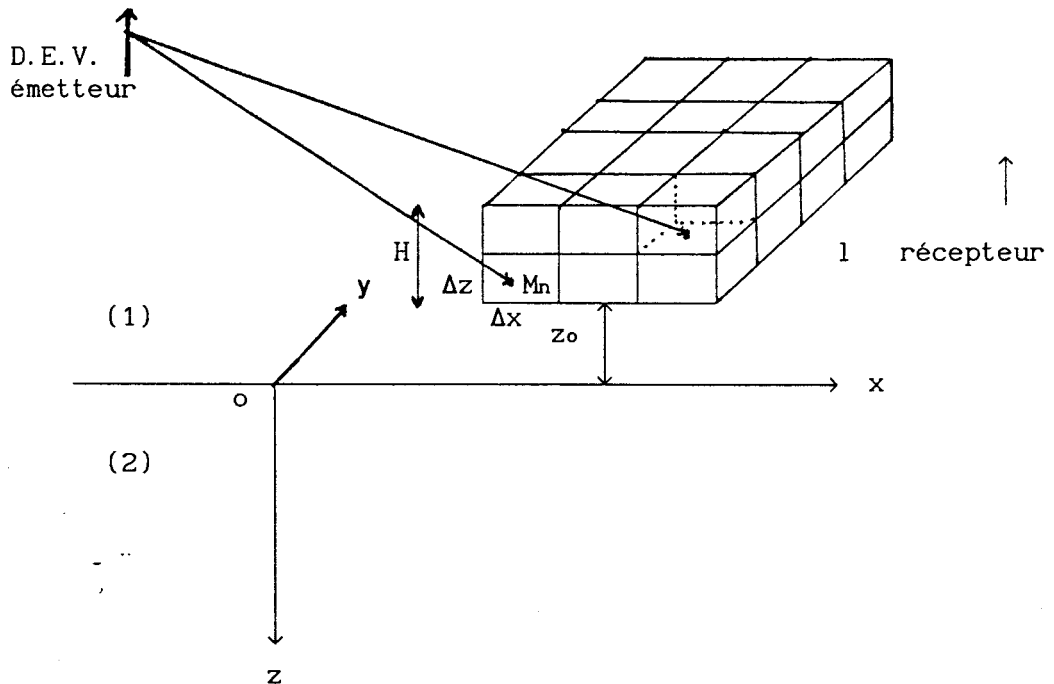


figure (III.2)

Chaque maille est identifiée par les coordonnées de son centre $M_i(x_i, y_i, z_i)$. De plus, les dimensions des mailles sont telles que l'on peut supposer le champ constant dans chacune d'elles. Avec cette approximation liée au choix de la fonction base, on obtient, après projection sur les fonctions test, le champ électrique dans la maille M_m :

$$\frac{\sigma_a^*}{\sigma_1^*} E_x(M_m) = E_{ex}^1(M_m) + \Delta_0 \sum_{n=1}^N \int_{\Delta V_n} [E_x(M_n) g_x^x + E_y(M_n) g_x^y + E_z(M_n) g_x^z] dV_n$$

$$\frac{\sigma_a^*}{\sigma_1^*} E_y(M_m) = E_{ey}^1(M_m) + \Delta_0 \sum_{n=1}^N \int_{\Delta V_n} [E_x(M_n) g_y^x + E_y(M_n) g_y^y + E_z(M_n) g_y^z] dV_n \quad (\text{III.17})$$

$$\frac{\sigma_a^*}{\sigma_1^*} E_z(M_m) = E_{ez}^1(M_m) + \Delta_0 \sum_{n=1}^N \int_{\Delta V_n} [E_x(M_n) g_z^x + E_y(M_n) g_z^y + E_z(M_n) g_z^z] dV_n$$

Le calcul du champ dans les N mailles nous donne un système linéaire de $3N$ équations à $3N$ inconnues. Le système est exprimé sous une forme matricielle par :

$$\frac{\sigma_a^*}{\sigma_1^*} \vec{E} = \vec{E}_e^1 + \Delta_0 [A] \vec{E} \quad (\text{III.18})$$

\vec{E}

: champ électrique inconnu qui se met sous la forme d'une matrice colonne de $3N$ éléments.

\vec{E}_e^1 = champ électrique rayonné par l'émetteur dans l'anomalie qui aura la même forme matricielle que \vec{E} .

[A] : matrice (3N,3N) des intégrales des fonctions de Green et de Sommerfeld sur les éléments de volume ΔV_n .

III.4.2 - Calcul des éléments de la matrice

On distingue quatre types d'intégrales dans les éléments de la matrice [A] qui sont donnés par (III.17). Les différents types d'intégrales sont :

- 1) Intégrales de dérivées secondes de fonction de Green par rapport à la même variable.
- 2) Intégrales de dérivées de fonction de Green par rapport à des variables différentes.
- 3) Intégrales de dérivées secondes de fonction de Sommerfeld par rapport à la même variable.
- 4) Intégrales de dérivées de fonction de Sommerfeld par rapport à des variables différentes.

Traisons un exemple de chaque type d'intégration :

le premier type :

$$\int_{\Delta V_n} \left[\frac{\partial^2}{\partial y_m^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \right] G(R') dV_n = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial y_m^2} G(R') dV_n + \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} G(R') dV_n$$

$$R' = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

On remarque que cette intégrale est elle-même composée de deux intégrales qui peuvent être calculées de façon similaire. Calculons donc :

$$J_1 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial y_m^2} G(R') dV_n = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \frac{\partial^2}{\partial y_m^2} G(R') dx_n dy_n dz_n \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{aligned} x_{n1} &= x_n - \Delta x/2, & y_{n1} &= y_n - \Delta y/2, & z_{n1} &= z_n - \Delta z/2 \\ x_{n2} &= x_n + \Delta x/2, & y_{n2} &= y_n + \Delta y/2, & z_{n2} &= z_n + \Delta z/2 \end{aligned}$$

Si l'on fait appel à la propriété de réciprocité entre les points d'émission M_n et de réception M_m , ceci revient à dire :

$$\frac{\partial}{\partial x_m} = - \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial}{\partial y_m} = - \frac{\partial}{\partial y_n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z_m} = - \frac{\partial}{\partial z_n} \quad (\text{III.20})$$

l'intégrale J_1 devient :

$$J_1 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[- \frac{\partial}{\partial y_m} \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right]_{y_{n1}}^{y_{n2}} dx_n dz_n$$

Après dérivation, on obtient :

$$J_1 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[\frac{y_m - y_{n2}}{R_2^3} (\gamma_1 R_2 + 1) e^{-\gamma_1 R_2} - \frac{y_m - y_{n1}}{R_1^3} (\gamma_1 R_1 + 1) e^{-\gamma_1 R_1} \right] dx_n dz_n \quad (\text{III.21})$$

$$R_1 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_2 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

L'intégrale triple est de ce fait réduite en intégrale double et ne présente aucune singularité. Le calcul de toutes les autres intégrales du même genre suit une démarche analogue à celle que nous venons d'effectuer. A noter aussi que si la fonction de Green est $G(R) = \exp(-\gamma_1 R)/R$ où $R = [(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2]^{1/2}$ (fonction due à la présence du milieu (2)), la même démarche est applicable sauf que $\frac{\partial}{\partial z_m} = \frac{\partial}{\partial z_n}$.

2ème type :

Traisons l'exemple suivant :

$$J = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial y_m \partial x_m} G(R') dV_n \quad (\text{III.22})$$

de la même manière que précédemment, nous allons nous servir de la propriété de réciprocité (III.20) :

$$J_2 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \left[\int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \left\{ \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} dx_n \right\} dy_n \right] dz_n \quad (\text{III.23})$$

Après les deux intégrations, le résultat est :

$$J_2 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \left[\left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{22}}}{R_{22}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{21}}}{R_{21}} \right\} \left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{12}}}{R_{12}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{11}}}{R_{11}} \right\} \right] dz_n \quad (\text{III.23})$$

$$R_{11} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{12} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{21} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{22} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

On remarque comme précédemment que ces intégrales ne présentent aucune singularité et que de plus, elles ont été réduites, dans ce cas, à des intégrales simples.

3ème type :

$$J_3 = \int_0^\infty \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} l_1 e^{u_1 z_n} J_0(\lambda r) dx_n dy_n dz_n d\lambda \quad (\text{III.25})$$

l_1 : est donné en annexe 5.

Dans ce type d'intégrales, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial x_m} = -\frac{\partial}{\partial x_m}, \quad \frac{\partial}{\partial y_m} = -\frac{\partial}{\partial y_m} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z_m} = \frac{\partial}{\partial z_m} \quad (\text{III.26})$$

en utilisant (III.26) et en intégrant par rapport à x_n et z_n , nous aurons :

$$J_3 = \int_0^\infty \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \left[\frac{\lambda l_1}{u_1} e^{u_1 z_n} (e^{u_1 \Delta z} - e^{-u_1 \Delta z}) * \left[\frac{x_m - x_{n2}}{r_2} J_1(\lambda r_2) - \frac{x_m - x_{n1}}{r_1} J_1(\lambda r_1) \right] d\lambda dy_n \right] \quad (\text{III.27})$$

$$r_1 = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$r_2 = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_n)^2 \right]^{1/2}$$

Ce type d'intégrales ne présente pas de singularité, le traitement numérique se fait de la même manière qu'au premier chapitre ; cependant, ici, il s'agit d'une intégrale double.

4ème type :

$$J_4 = \int_0^\infty \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial y_m} l_1 e^{u_1 z_n} J_0(\lambda r) dx_n dy_n dz_n d\lambda \quad (\text{III.28})$$

de la même manière qu'au troisième type, nous simplifions cette quadruple intégrale, mais le résultat est ici une intégrale simple :

$$J_4 = \int_0^\infty \frac{l_1}{u_1} e^{u_1 z_n} (e^{u_1 \Delta z} - e^{-u_1 \Delta z}) \left[J_0(\lambda r_{22}) + J_0(\lambda r_{11}) - J_0(\lambda r_{21}) - J_0(\lambda r_{12}) \right] d\lambda \quad (\text{III.29})$$

$$r_{11} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$r_{12} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$r_{21} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$r_{22} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

Toutes les intégrales, doubles ou simples par rapport x, y et z, sont évaluées numériquement en pratiquant un découpage automatique des domaines d'intégration.

III. 4. 3 - Optimisation du calcul de la matrice

Au vu du système (III.17), on s'aperçoit que la matrice [A] peut être décomposée en 9 sous-matrices (N.N) et représentée comme suit :

	N	N	N
N	A_x^x	A_x^y	A_x^z
N	A_y^x	A_y^y	A_y^z
N	A_z^x	A_z^y	A_z^z

Les éléments d'une matrice $[A_\alpha^\beta]$ correspondent aux effets mutuels que produisent les dipôles équivalents de direction β sur ceux de direction α . Ces éléments sont tous de la forme :

$$e_{mn} = \int \frac{G_\alpha^\beta}{\Delta V_n} dV$$

m : indice de la maille de réception

n : indice de la maille d'émission

Ces différents éléments e_{mn} peuvent être décomposés en sommes ou différences d'intégrales qui peuvent être communes à plusieurs sous-matrices. Cette décomposition permettra donc de minimiser le temps de calcul des éléments.

Posons d'abord les variables suivantes pour simplifier l'écriture des intégrales :

$$G(R_1) = \frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1}$$

$$G(R_2) = \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2}$$

$$S_{1x}^h = \int_0^{\infty} l_1 e^{u_1 z_n} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$S_{1z}^{hx} = -\frac{x_m - x_n}{r} \int_0^{\infty} g_1 e^{u_1 z_n} J_1(\lambda r) d\lambda$$

(III.30)

$$S_{1z}^{hy} = -\frac{y_m - y_n}{r} \int_0^{\infty} g_1 e^{u_1 z_n} J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$S_{1z}^v = \int_0^{\infty} f_1 e^{u_1 z_n} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$R_1 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_2 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_n)^2 \right]^{1/2}$$

- Sous-matrice $[A_x^x]$

$$e_{mn} = -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 \quad (\text{III.31})$$

$$I_1 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial y_m^2} G(R_1) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_2 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} G(R_1) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_3 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial y_m^2} G(R_2) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_4 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} G(R_2) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_5 = \int_{\Delta V_n} S_{1x}^h dx_n dy_n dz_n$$

$$I_6 = \int_{\Delta V_n} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_m^2} S_{1x}^h + \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial z_m} S_{1z}^{hx} \right] dx_n dy_n dz_n$$

- Sous-matrice $[A_y^y]$

$$e_{mn} = -I_7 - I_2 + I_8 + I_4 - I_5 + I_9 \quad (\text{III.32})$$

$$I_7 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} G(R_1) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_8 = \int_{\Delta V_n} \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} G(R_2) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_9 = \int_{\Delta V_n} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_m^2} S_{1y}^h + \frac{\partial^2}{\partial y_m \partial z_m} S_{1z}^{hy} \right] dx_n dy_n dz_n$$

- Sous-matrice $[A_z^z]$

$$e_{mn} = -I_1 + I_3 - I_7 + I_8 + I_{10} + I_{11} \quad (\text{III.33})$$

$$I_{10} = \int \frac{\partial^2}{\Delta V_n \partial x_m^2} S_{1z}^v dx_n dy_n dz_n$$

$$I_{11} = \int \frac{\partial^2}{\Delta V_n \partial y_m^2} S_{1z}^v dx_n dy_n dz_n$$

- Sous-matrice $[A_x^y]$

$$e_{mn} = I_{12} - I_{13} + I_{14} \quad (\text{III.34})$$

$$I_{12} = \int \frac{\partial^2}{\Delta V_n \partial x_m \partial y_m} G(R_1) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_{13} = \int \frac{\partial^2}{\Delta V_n \partial x_m \partial y_m} G(R_2) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_{14} = \int \left[\frac{\partial^2}{\Delta V_n \partial x_m \partial y_m} S_{1y}^h + \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial z_m} S_{1z}^{hy} \right] dx_n dy_n dz_n$$

- Sous-matrice $[A_x^z]$

$$e_{mn} = I_{15} - I_{16} + I_{17} \quad (\text{III.35})$$

$$I_{15} = \int \frac{\partial^2}{\Delta V_n \partial x_m \partial z_m} G(R_1) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_{18} = \int \frac{\partial^2}{\Delta V_n \partial x_m \partial z_m} G(R_2) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_{17} = \int \frac{\partial^2}{\Delta V_n \partial x_m \partial z_m} S_{1z}^v dx_n dy_n dz_n$$

- Sous-matrice $[A_y^x]$

$$[A_y^x] = [A_x^y] \quad (III.36)$$

- Sous-matrice $[A_y^z]$

$$e_{mn} = I_{18} - I_{19} + I_{20} \quad (III.37)$$

$$I_{18} = \int \frac{\partial^2}{\Delta V_n \partial y_m \partial z_m} G(R_1) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_{19} = \int \frac{\partial^2}{\Delta V_n \partial y_m \partial z_m} G(R_2) dx_n dy_n dz_n$$

$$I_{20} = \int \frac{\partial^2}{\Delta V_n \partial y_m \partial z_m} S_{1z}^v dx_n dy_n dz_n$$

- Sous-matrice $[A_z^x]$

$$e_{mn} = I_{15} + I_{16} - I_{17} \quad (\text{III.38})$$

- Sous-matrice $[A_z^y]$

$$e_{mn} = I_{18} + I_{19} - I_{20} \quad (\text{III.39})$$

Les expressions développées des intégrales I_1 à I_{20} sont données en annexe 5.

On remarque que les sous-matrices $[A_x^y]$ et $[A_y^x]$ sont égales et que $[A_x^z]$ et $[A_z^x]$ ne sont pas égales, mais toutes les deux sont des combinaisons linéaires de trois autres matrices. La même chose peut être observée en ce qui concerne $[A_y^z]$ et $[A_z^y]$.

A partir de ce que l'on vient de voir, on peut dire que la matrice $[A]$ est composée de blocs symétriques et d'autres antisymétriques, comme suit.

	N	N	N
N	$-A_x^x$	A_x^y	$M_x^z + N_x^z$
N	A_x^y	A_y^y	$M_y^z + N_y^z$
N	$M_x^z - N_x^z$	$M_y^z - N_y^z$	A_z^z

Cette propriété de la matrice réduit le nombre d'éléments à calculer à $6N^2$ au lieu de $9N^2$ et permet un gain de temps considérable dans le calcul des intégrales.

Ces sous-matrices peuvent être elles-mêmes décomposées en sous-matrices selon le découpage de l'anomalie. Prenons comme exemple une anomalie découpée en $N = N_x \cdot N_y \cdot N_z = 2 \cdot 3 \cdot 2$, figure (III.3). Dans ce cas, les matrices $[A_\alpha^\beta]$ se décomposent toutes sous la forme :

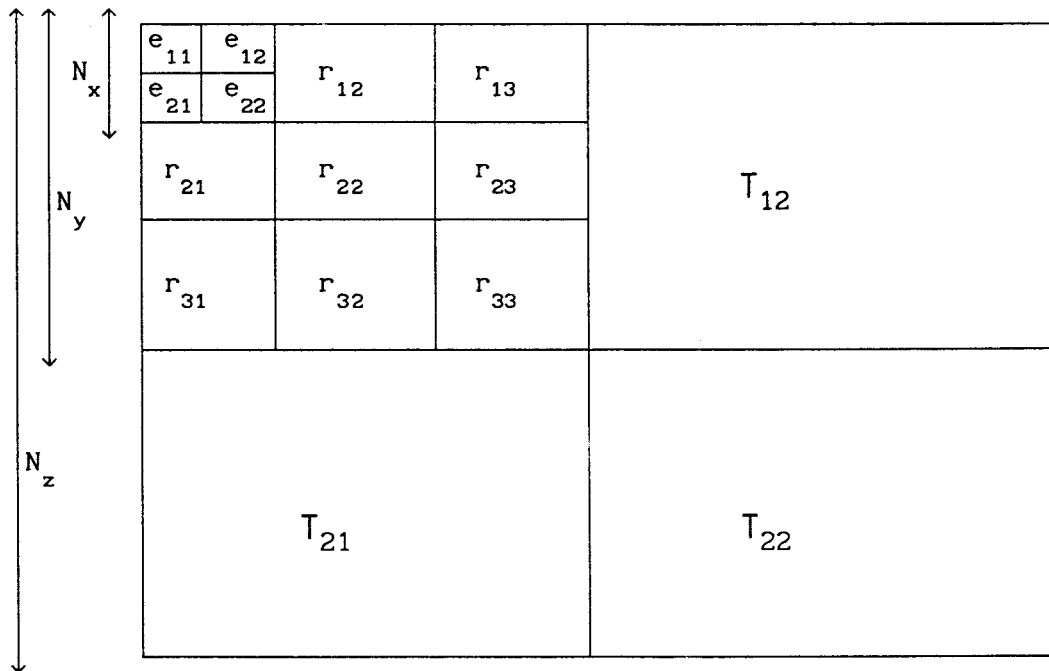


figure (III.3)

En premier lieu, la matrice est décomposée en sous-matrices $[T_{ij}]$ correspondant aux effets mutuels entre les tranches T_i et T_j de l'anomalie. En second lieu, ces matrices $[T_{ij}]$ sont elles-mêmes découpées en sous-matrices $[r_{kl}]$ correspondant aux intégrations entre la rangée k et la rangée l . Enfin, les matrices $[r_{kl}]$ comportent les éléments e_{nm} représentant l'effet de l'élément n sur l'élément m .

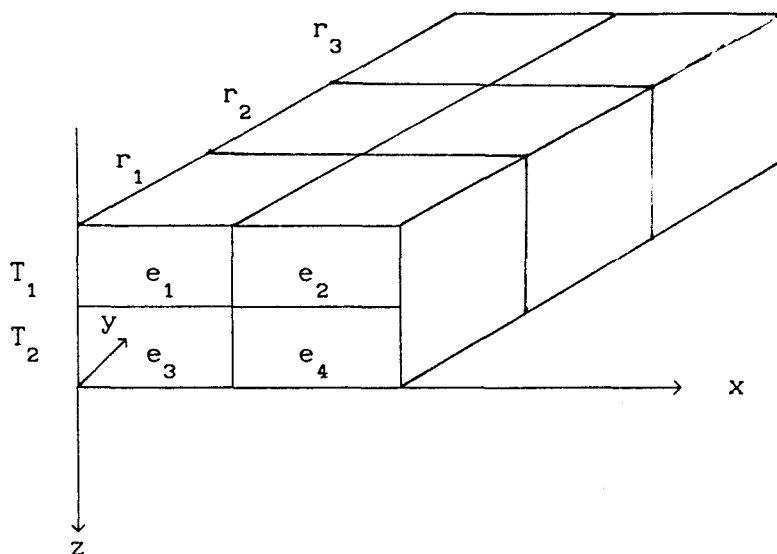


figure (III.4)

Dans l'annexe 5, nous avons montré que ces différentes matrices possèdent des propriétés de symétrie et d'antisymétrie et que certains éléments sont nuls. Tout ceci permet de réduire le nombre d'éléments à calculer.

III.5 - Convergence du calcul du champ électrique à l'intérieur de l'anomalie

Cette convergence dépend essentiellement de plusieurs paramètres : la fréquence à laquelle émet notre source, la conductivité de l'anomalie et les dimensions de l'anomalie. Pour mettre en évidence le rôle de ces facteurs, nous avons tracé sur la figure (III.5), pour différents découpages, le champ à l'intérieur de l'anomalie pour les données suivantes $f = 100_3$ kHz, l'anomalie est cubique de côté $a = 20$ m et de conductivité $\sigma_a = 10$ S/m, placée dans l'air ($\sigma_1 = 0$, $\epsilon_{1r} = 1$) et supposée en contact direct avec le sol ($z_0 = 0$ m). Le sol est de conductivité $\sigma_2 = 10^{-1}$ S/m et de permittivité $\epsilon_{2r} = 10$. On remarque que le champ commence à se stabiliser si les dimensions des mailles sont inférieures au $\delta/10$ (profondeur de pénétration de l'onde incidente dans l'anomalie).

$$\text{Dans ce cas } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}} = 50 \text{ m.}$$

donc à partir d'un découpage en x, y et z ($4 * 4 * 4$), on peut considérer que la convergence est atteinte et la précision de calcul est satisfaisante.

III.6 - Influence du sol

Pour illustrer cette influence, regardons tout d'abord la réponse d'une anomalie à une onde plane se propageant suivant l'axe ox et où \vec{E} est dirigé suivant oz dans un milieu homogène et infini. Supposons que l'anomalie est un pylône (une seule dimension), le courant dans ce cas, n'a qu'une seule composante parallèle à oz. Nous allons comparer le champ E_z , à l'intérieur de l'anomalie en présence du sol, à E_z à l'intérieur de la même anomalie qui

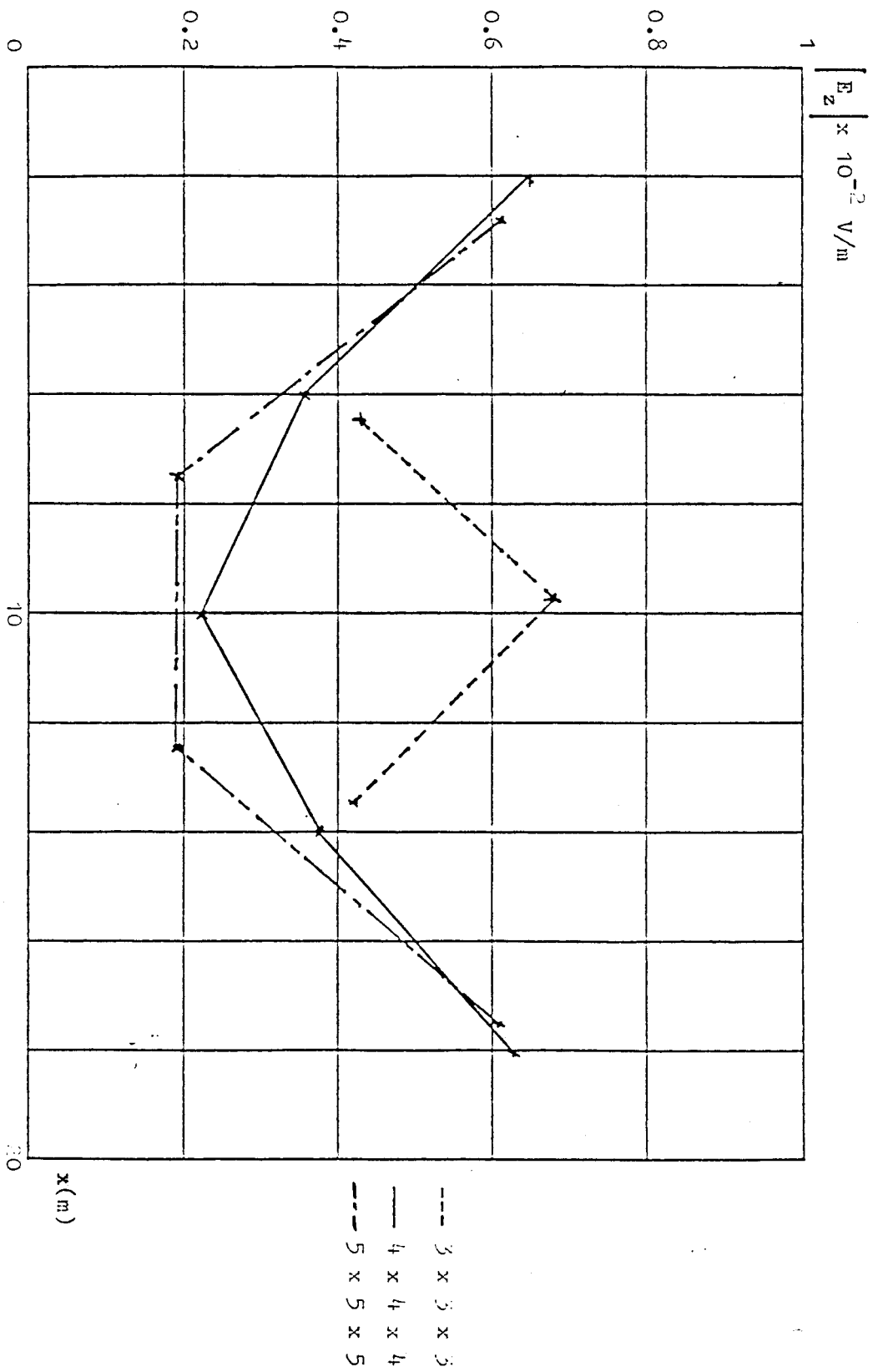


figure (III.5)

étude de la convergence

se trouve en milieu homogène, ceci pour mettre en évidence, le changement apporté par le sol.

Sur la figure (III.6), nous avons représenté le champ électrique E_z à l'intérieur d'un pylône de hauteur 10 m et de section carrée de 1 m^2 , ce pylône est de conductivité 10^{-3} S/m et supposé suspendu en l'air (très loin du sol pour négliger l'influence de ce dernier), la fréquence de travail est de 100 kHz. On note que le champ électrique a une forme sinusoïdale et atteint sa valeur maximale au milieu du pylône.

La figure (III.7) est tracée dans les mêmes conditions que précédemment sauf qu'ici l'anomalie est à une hauteur z_0 ($z_0 = 0 \text{ m}, 5 \text{ cm}, 25 \text{ cm}$) du sol. Afin d'appliquer la théorie des images, il faut que la conductivité du sol soit infinie, mais le calcul numérique ne nous permet pas de prendre une telle valeur de la conductivité, on se limite donc, à une conductivité du sol de 10 S/m . Comme le montre cette figure, le champ atteint son maximum sur les mailles les plus proches du sol (0.56 V/m) pour $z_0 = 0 \text{ m}$, ceci s'explique par le fait que le sol qui est conducteur permet au courant créé dans le pylône de circuler, autrement dit le sol augmente la longueur effective du pylône. Si l'on se réfère à la théorie des images et si le sol est un conducteur parfait, la longueur effective du pylône doit être le double de celle du même pylône mais dans un milieu homogène. Pour mettre en évidence ceci, nous avons tracé sur la figure (III.8) le champ E_z créé par la même onde à l'intérieur d'un pylône de 20m de long et de section 1 m^2 dans un milieu homogène.

Si l'on fait le rapport des valeurs maximales du champ sur les figures (III.7) et (III.8), on trouve un facteur 0.85 au lieu d'un facteur égal à l'unité, mais ceci pourrait s'expliquer en partie par la conductivité prise non infinie du sol (cela entraînera la non convergence du calcul).

Mais si la distance z_0 n'est plus nulle, le sol ne garde plus la même influence sur la distribution du courant. En effet, pour $z_0 = 5$ cm, le maximum du champ E_z (0.37 V/m) est atteint pour $z \approx 3$ m du sol.

Si la distance z_0 augmente, la distribution du courant se rapproche de celle d'un pylône dans un milieu homogène et le maximum du champ (0.28 V/m) est atteint à peu près au centre du pylône.

Afin de déterminer la hauteur z_0 à partir de laquelle le sol n'a plus beaucoup d'influence sur la distribution du courant le long du pylône, nous avons tracé, figure (III.9), la composante E_z en fonction de z dans les mêmes conditions que (III.7) excepté qu'ici $z_0 = 1$ m et 10 m. Comme le montre la courbe, si $z_0 = 1$ m existe encore mais faible, la courbe n'est pas tout à fait symétrique et la valeur maximale de E_z (0.26 V/m) est toujours supérieure à celle de E_z dans le cas où le pylône est dans un milieu homogène (0.23 V/m). Si maintenant la distance $z_0 = 10$ m, on retrouve une distribution de courant identique à celle dans un milieu homogène.

III.7 - Etude paramétrique

Nous faisons cette étude, afin de simuler l'influence d'un obstacle (bâtiment, butte), situé au voisinage de l'antenne de réception, sur le comportement du champ électrique.

III.7.1 - Influence de la conductivité de l'anomalie

La figure (III.10) représente l'évolution de la composante du champ

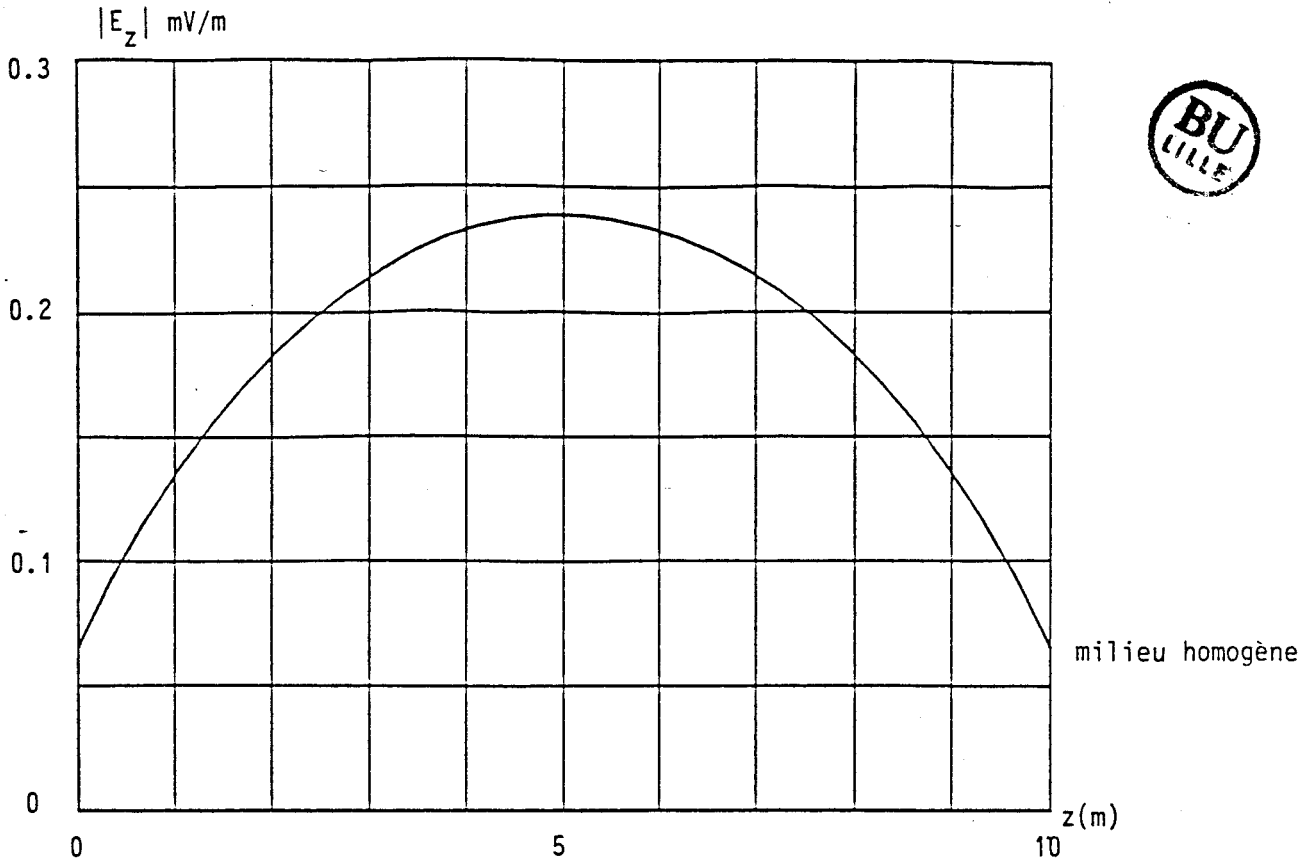


Figure III.6

$f = 100 \text{ kHz}$
 $\sigma_a = 10^{-3} \text{ S/m}$
 $\sigma_2 = 10 \text{ S/m}$

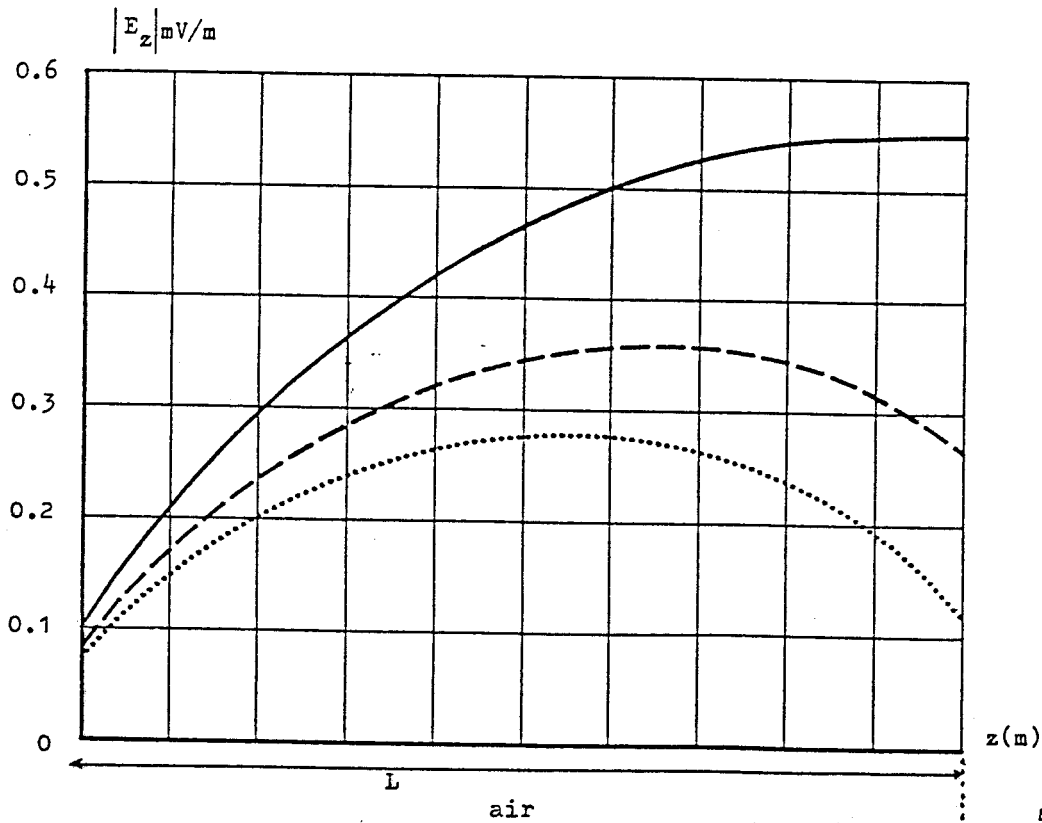


Figure (III.7)

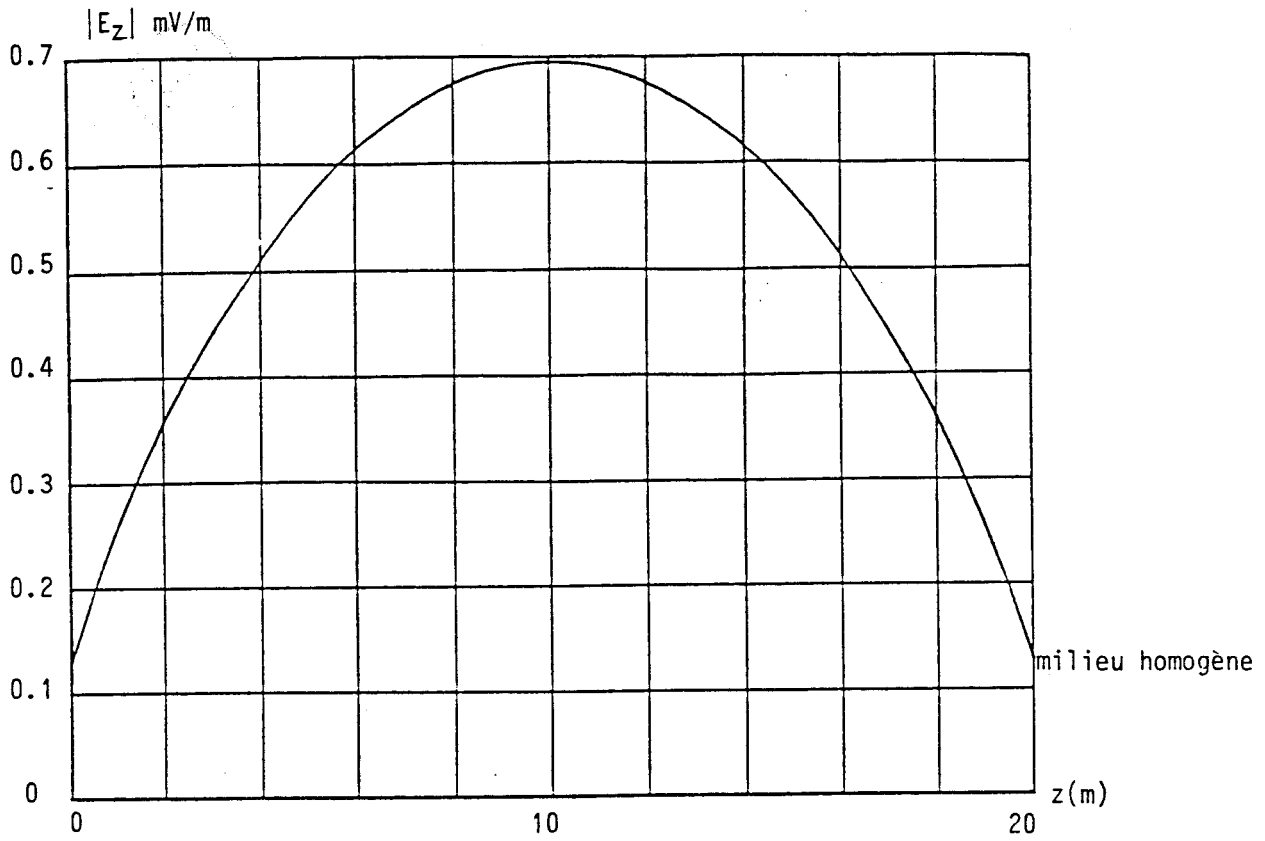


Figure III.8

$f = 100 \text{ kHz}$
 $\sigma_2 = 10 \text{ S/m}$
 $\sigma_a = 10^{-3} \text{ S/m}$

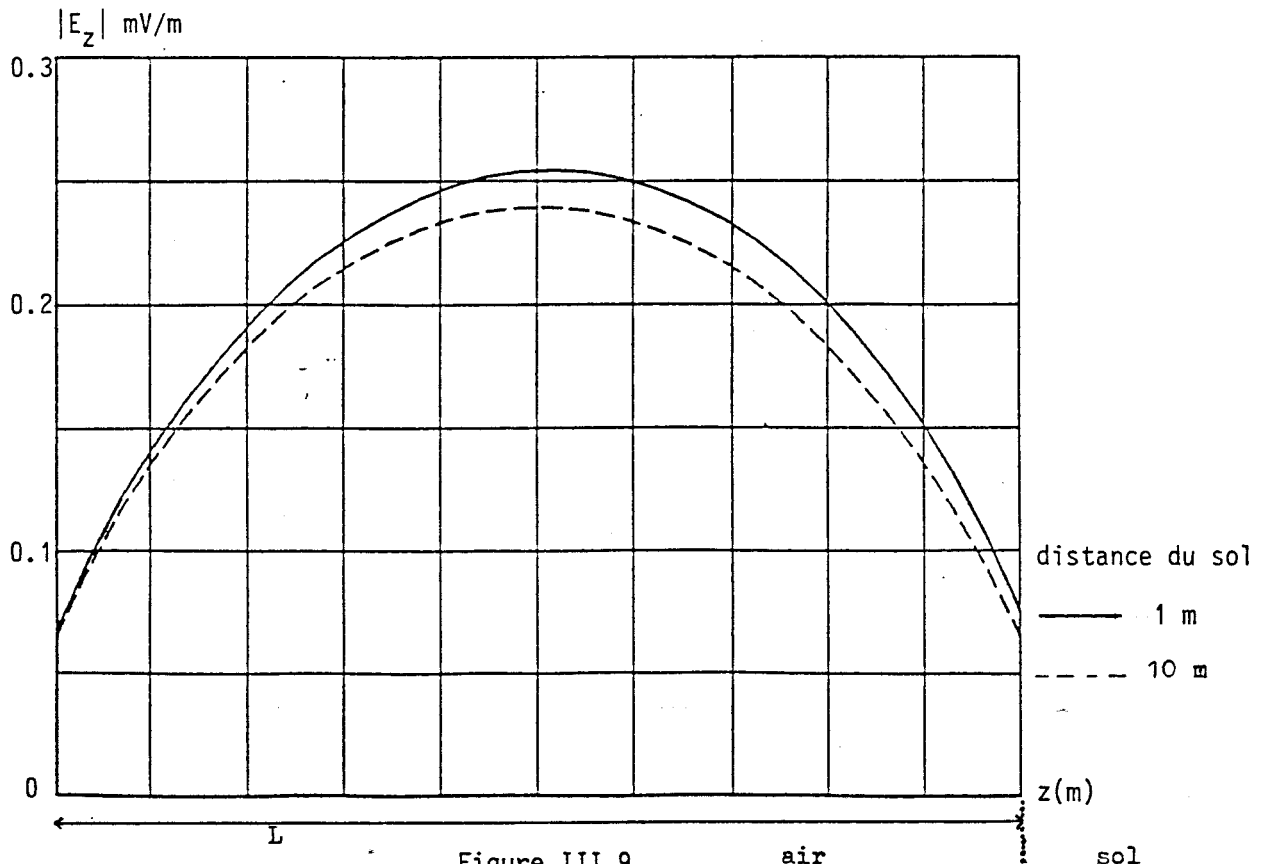


Figure III.9

électrique E_z , à l'intérieur et à l'extérieur de l'anomalie en fonction de x pour les données suivantes : les dimensions de l'anomalie sont (40 m, 40 m, 20 m), la fréquence est de 100 kHz, la conductivité du sol est de 10^{-2} S/m, la conductivité de l'hétérogénéité est de 10^{-3} S/m et 10^{-4} S/m, l'anomalie est supposée en contact direct avec le sol, la réception se fait à une hauteur $z = 2.5$ m et à $y = l/2$. Comme le montre cette courbe, on remarque une diminution de 50 % de l'amplitude du champ reçu à une distance de 7 m (si $\sigma_a = 10^{-4}$ S/m) et de 13 m (si $\sigma_a = 10^{-3}$ S/m). Cette influence devient faible (10 %) si la réception se fait à une distance égale à la longueur de l'anomalie L , ceci pour les deux valeurs de conductivité attribuées à l'anomalie.

III.7.2 - Influences des dimensions de l'anomalie

III.7.2.1 - Longueur de l'anomalie L

Nous avons tracé figure (III.11) la variation du champ électrique E_z à l'extérieur de l'anomalie pour deux longueurs ($L = 20$ m et $L = 40$ m), la fréquence reste inchangée (100 kHz), la conductivité de l'anomalie est 10^{-3} S/m, la conductivité du sol est la même (10^{-2} S/m), la réception se fait à une hauteur $z = 5$ m, et à $y = l/2$. On note une augmentation du champ re-rayonné par l'anomalie entraînant une diminution du champ total, dans le cas présent si la longueur L passe de 20 m à 40 m, le champ total reçu à une distance de 10 m passe de 0.66 V/m à 0.44 V/m. Cette atténuation de $|E_z|$ devient très faible à une distance de 60 m, pour les deux valeurs de L .

III.7.2.2 - Largeur de l'anomalie l

Comme le montre la figure (III.12) qui a été tracée dans les mêmes

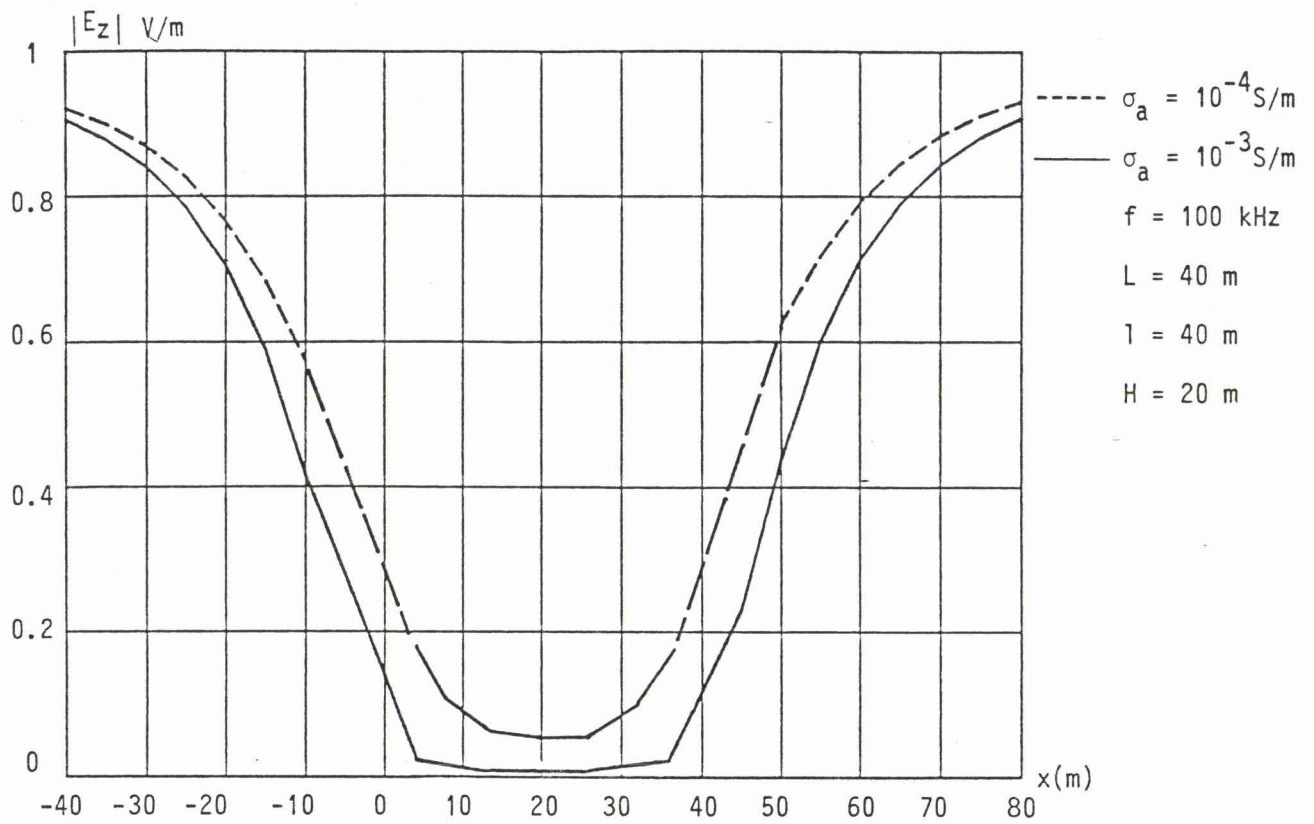


Figure III.10
Influence de la conductivité

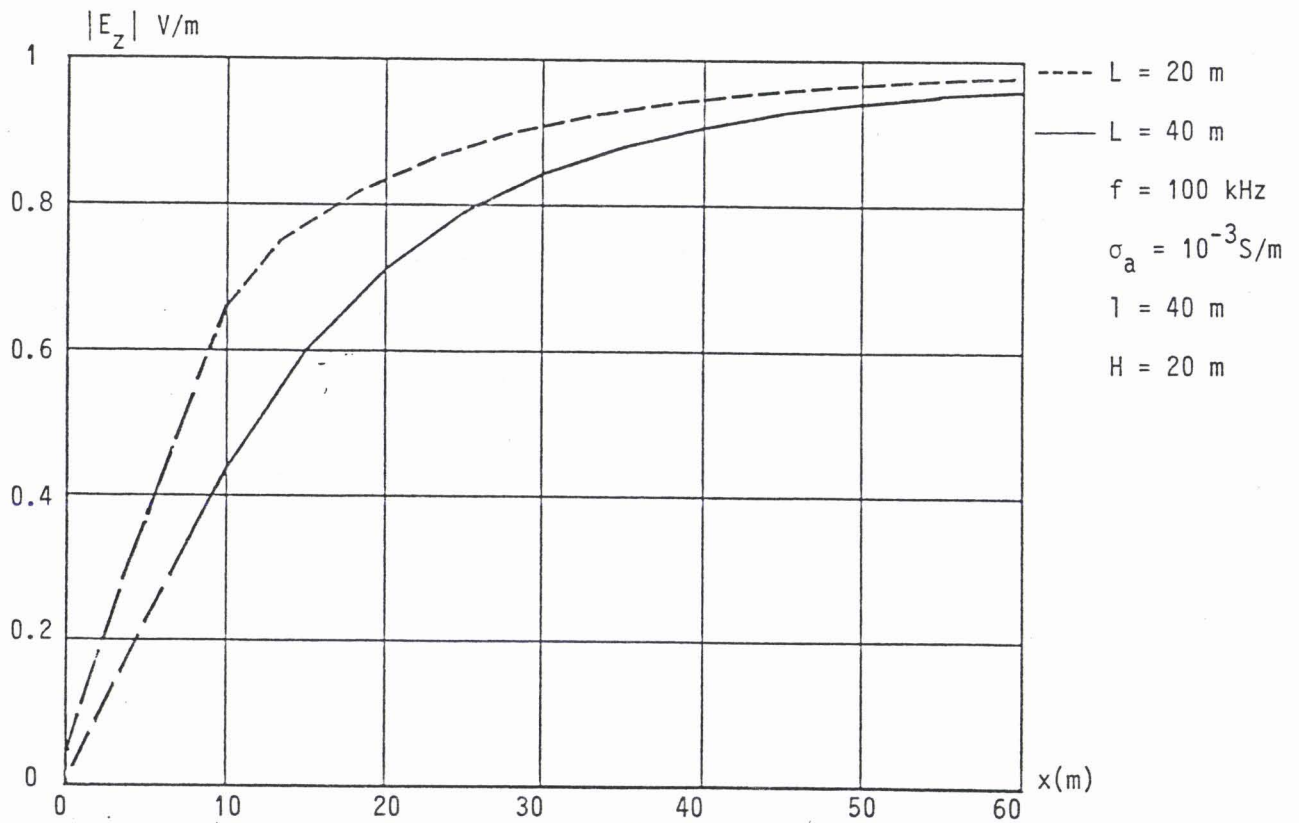
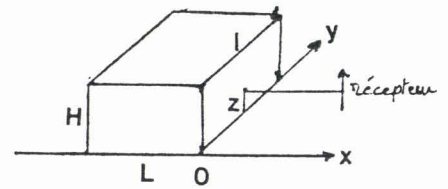


Figure III.11
Influence de la longueur L

conditions qu'au III.7.1 à ceci près qu'ici c'est la largeur l qui change de valeur ($l = 20$ m et $l = 40$ m), la longueur est de 40 m et la hauteur $H = 20$ m. Le champ E_z diminue fortement si la largeur de l'anomalie augmente surtout dans le voisinage immédiat de l'anomalie, par exemple, à $x = 10$ m, pour $l = 20$ m, $E_z = 0.68$ V/m, ce même E_z chute de 0.24 V/m ($x = 10$ m) si la largeur $l = 40$ m, cependant, si la distance x est supérieure à la longueur L de l'anomalie, l'influence de cette dernière devient très faible.

III.7.2.3 - Hauteur de l'anomalie H

Dans les mêmes conditions que les deux paragraphes précédents, nous avons tracé, figure (III.13), la variation de E_z en fonction de x pour deux hauteurs de l'anomalie ($H = 20$ m et $H = 40$ m), $L = 40$ m et $l = 40$ m. On remarque que l'atténuation de E_z est importante, si la hauteur H augmente. Comme le montre la figure, pour $x = 10$ m : le champ $|E_z| = 0.44$ V/m si $H = 20$ m et $|E_z| = 0.23$ V/m si $H = 40$ m, de plus, cette atténuation reste importante à une distance $x = 40$ m, elle est de l'ordre de 0.15 V/m.

On note que, la composante E_z du champ électrique est plus sensible à la variation de la hauteur qu'à la variation de la longueur et de la largeur. En effet, pour que le champ total reçu $|E_z|$ soit égal à 90% de $|E_z^1|$, nous devons nous placer à une distance x égale à 2 fois la hauteur.

III.8 - Champ électrique émis par un D.E.V.

Dans l'étude paramétrique précédente, nous avons seulement supposé que le récepteur est à une faible distance de l'anomalie, l'émetteur est supposé

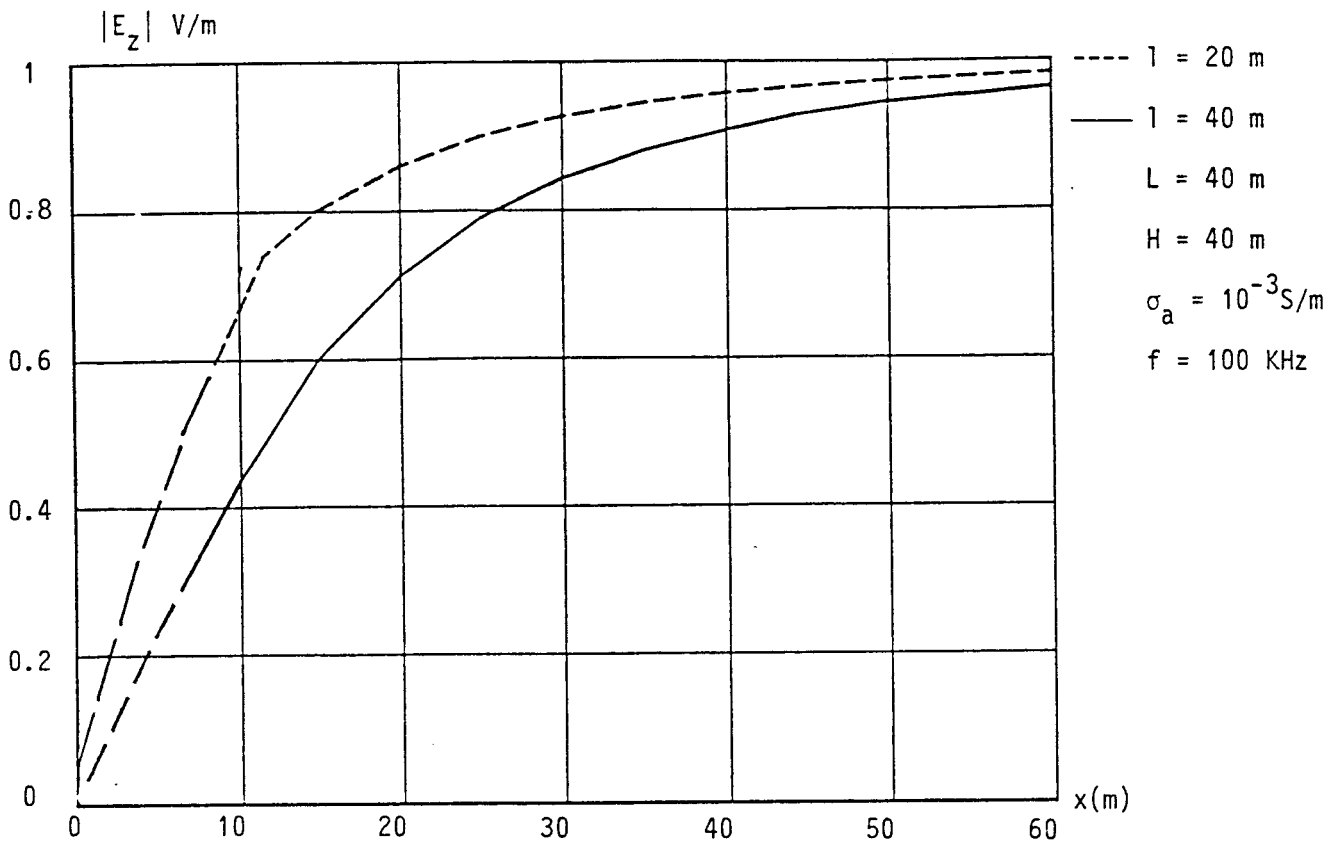


Figure III.12
Influence de la largeur l

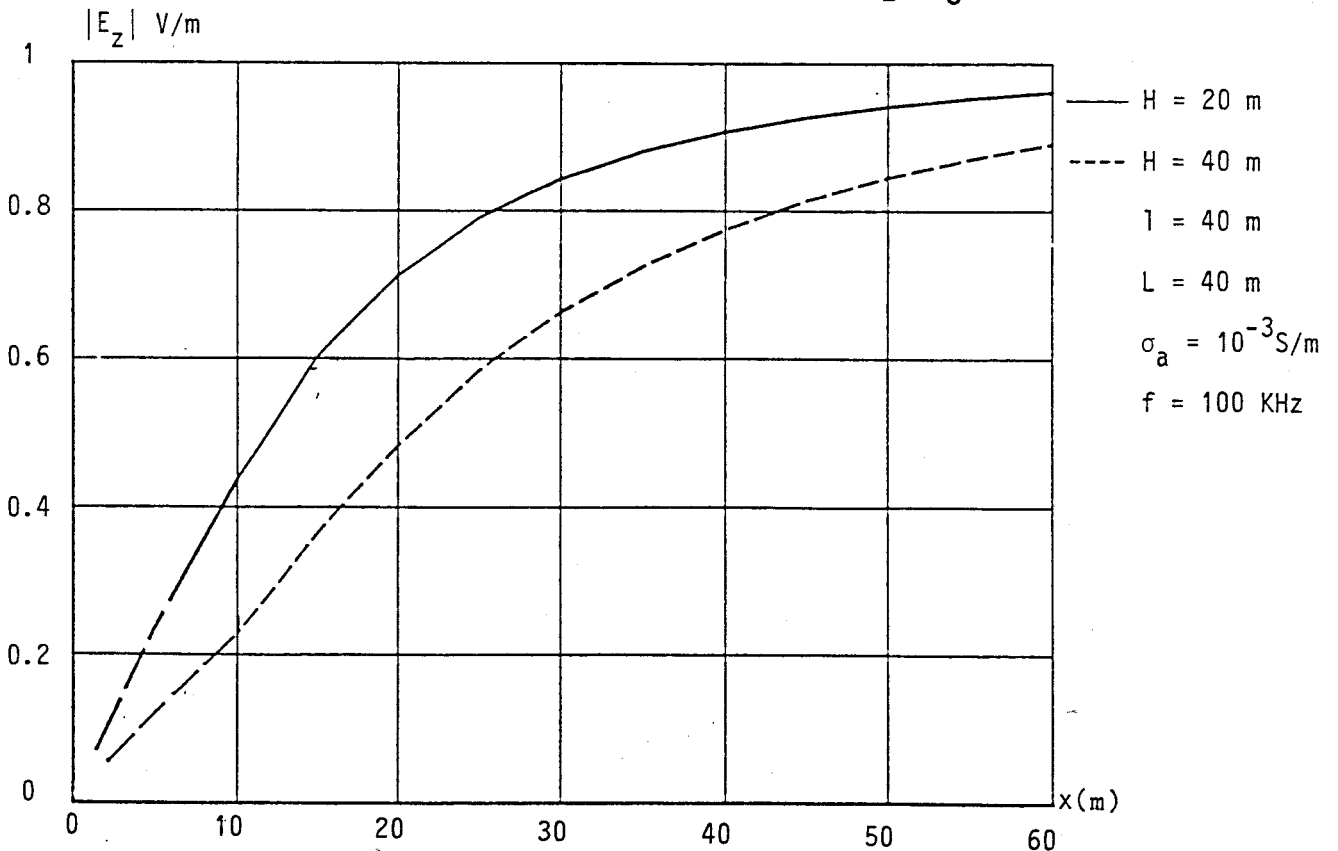
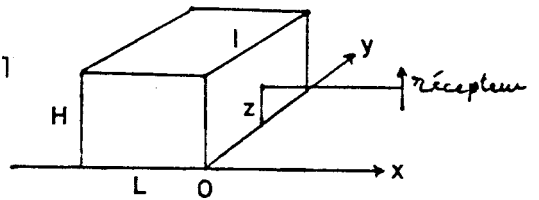


Figure III.13
Influence de la hauteur

très loin (onde plane). Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'influence de cette anomalie dans le cas où l'émetteur et le récepteur sont à des distances proches de l'anomalie (de l'ordre de grandeur des dimensions de l'anomalie). L'émetteur utilisé est un D.E.V. de hauteur égale à 1 m et il est parcouru par un courant de 1 A, ce dipôle se trouve dans l'air au point M(0 m, 10 m, -10 m) comme le montre la figure (III.14).

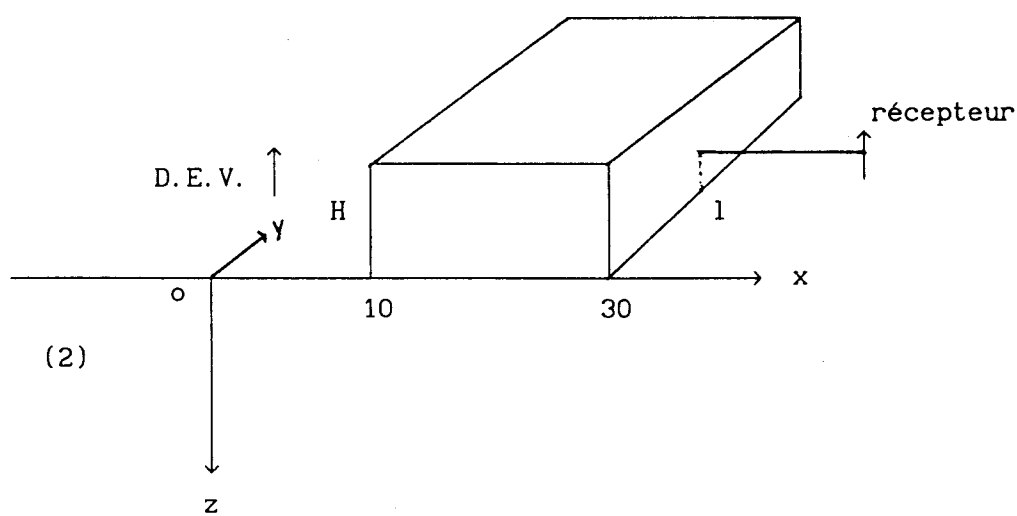


figure (II.14)

L'anomalie est supposée en contact direct avec le sol ($z_0 = 0$ m).

Les figures (III.15 à III.18) représentent les fluctuations du module et de la phase des composantes E_z et E_x en fonction de la hauteur du récepteur par rapport au sol dans deux cas, le 1er : l'émetteur et le récepteur dans un demi-milieu homogène (l'air), le second : l'émetteur et le récepteur sont dans l'air mais séparés par une anomalie de dimensions ($L = 20$ m, $l = 20$ m, $H = 20$ m), de conductivité 10 S/m. Ces courbes sont tracées pour

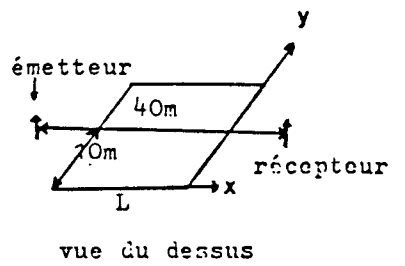
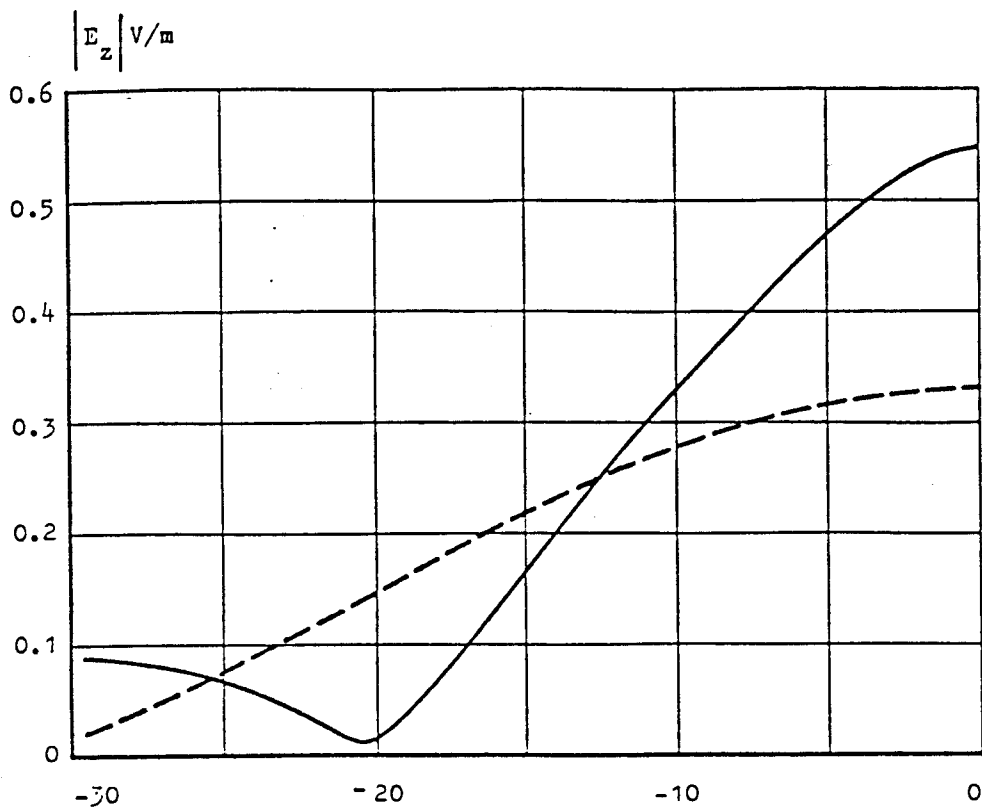
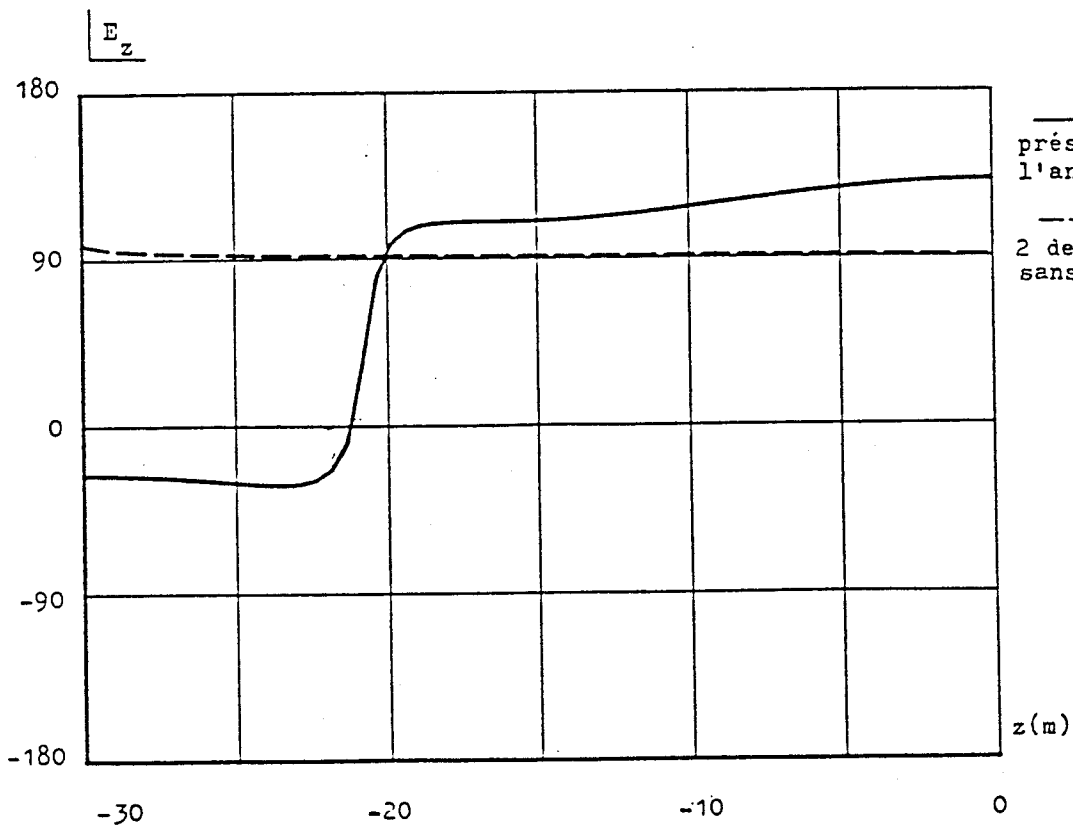


Figure (III.15)

$y = 10\text{m}$
 $x = 10\text{m}$
 $f = 100\text{kHz}$



——— présence de l'anomalie
 - - - - 2 demi-milieux sans anomalie

Figure (III.16)

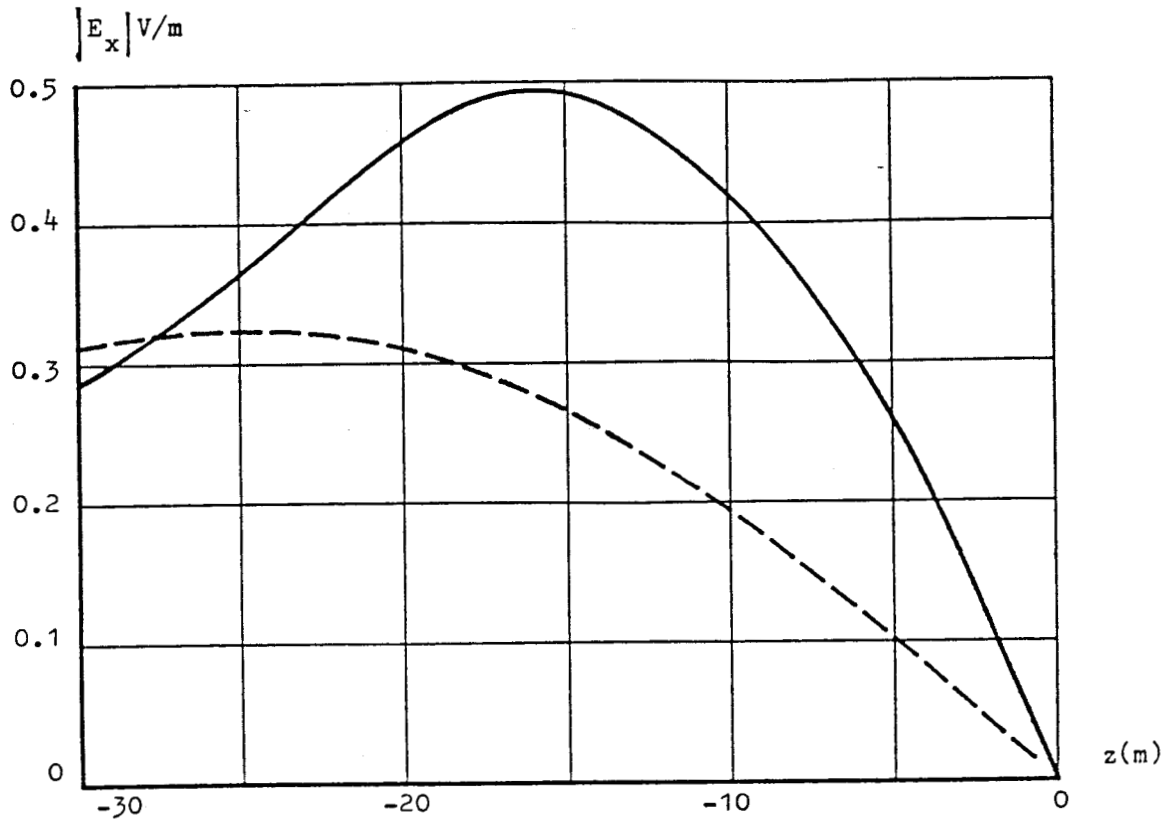


Figure (III.17)

$y = 10\text{m}$
 $x = 40\text{m}$
 $f = 100\text{kHz}$

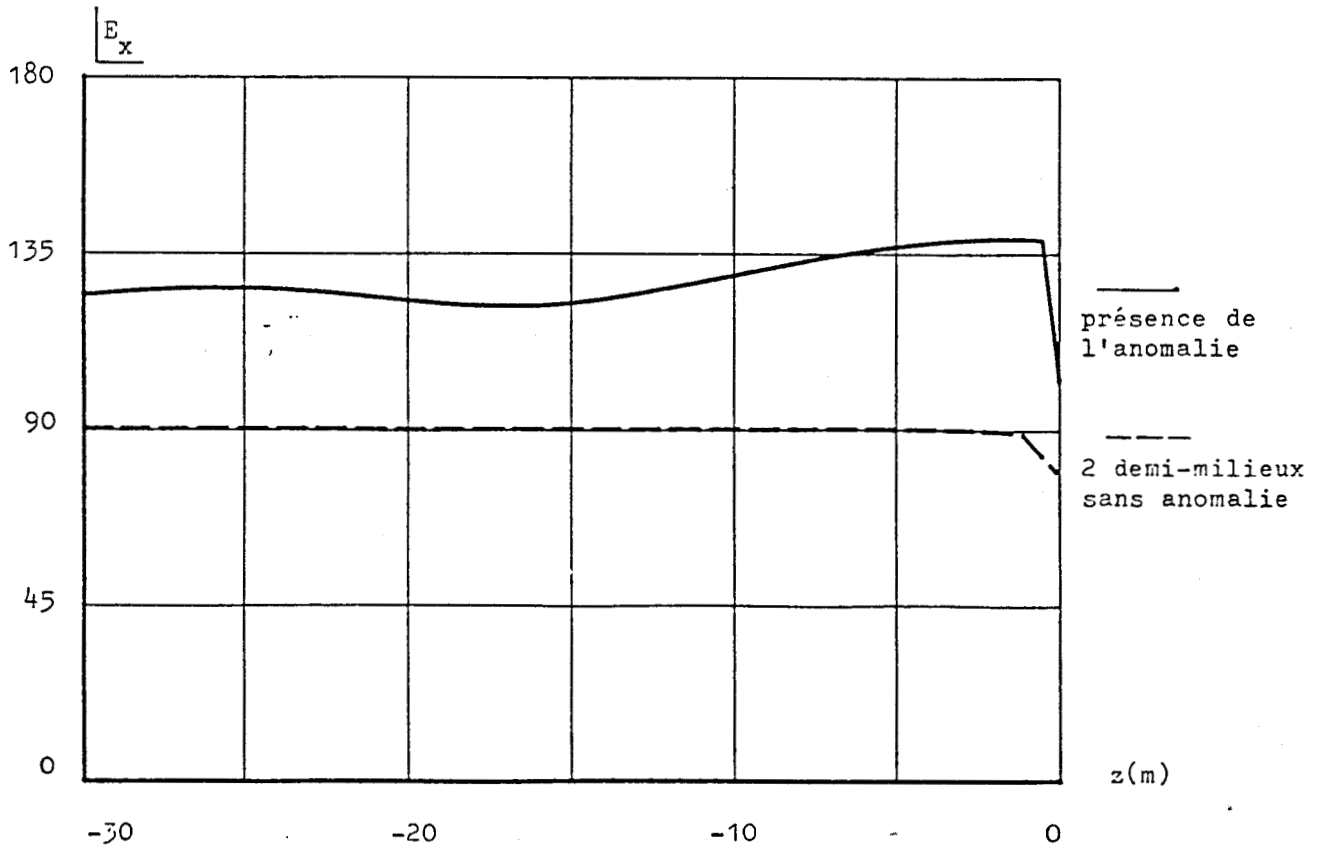


Figure (III.18)

les données suivantes : $f = 100$ kHz, la conductivité du sol est 10^{-2} S/m, la réception se fait à $y = 1/2$ et à $x = 40$ m. On note que, la composante E_z passe par un minimum pour $z = H = 20$ m en présence de l'anomalie, de plus la phase change brutalement à cette valeur de z , cette même composante atteint un maximum de 0.55 V/m près du sol, tandis que E_z émis par le D.E.V. en demi-milieu homogène, garde toujours le même sens de variation (croissant) pour atteindre sa valeur maximale de 0.34 V/m près du sol.

En ce qui concerne E_x en présence de l'anomalie, il est supérieur à E_x en demi-milieu homogène surtout si la hauteur de réception $|z| < H$, le module de ce E_x vaut 0.5 V/m pour $z = 15$ m du sol, tandis que $|E_x|$ en demi-milieu vaut seulement 0.27 V/m au même point z . La phase de E_x ne varie pas beaucoup en fonction de z dans les deux cas, cependant il existe une différence de 45° entre les deux configurations.

Les figures (II.19 à II.22) représentent le module et la phase de E_x et E_z dans les mêmes conditions que précédemment, sauf qu'ici la réception est le point $y = 0$ m. Comparons les résultats obtenus dans le cas présent et ceux obtenus sur les courbes (II.15 à II.18) :

		$ E_z $ V/m $z = -0.5$	$ E_z $ V/m $z = -20$	$ E_x $ V/m $z = -15$	$ E_x $ V/m $z = -5$
en présence de l'anomalie	$y=1/2$	0.55	0.02	0.49	0.26
	$y=0$	0.47	0.07	0.37	0.21
demi-milieu homogène	$y=1/2$	0.33	0.15	0.265	0.10
	$y=0$	0.31	0.145	0.245	0.09

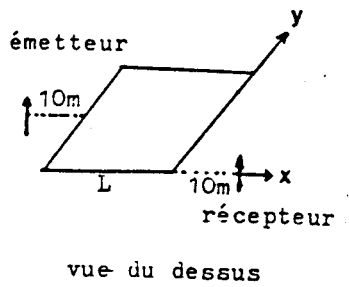
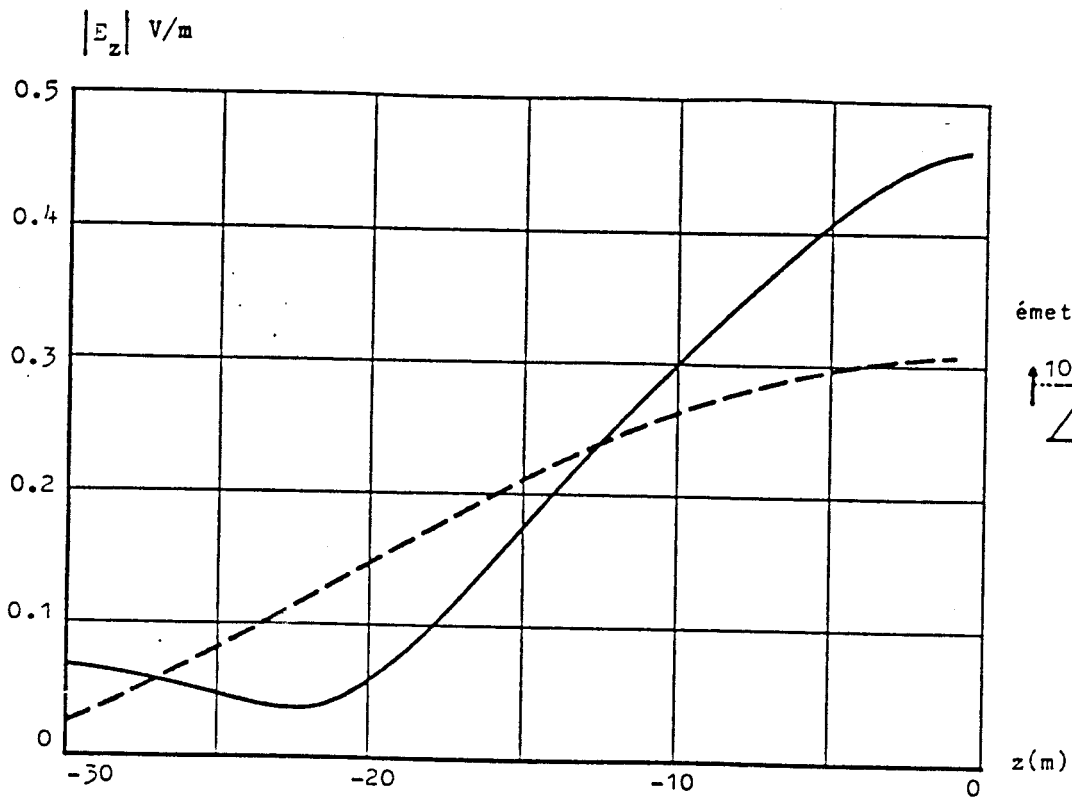


Figure (III.19)

$x = 40\text{m}$
 $y = 0\text{m}$
 $f = 100\text{ kHz}$

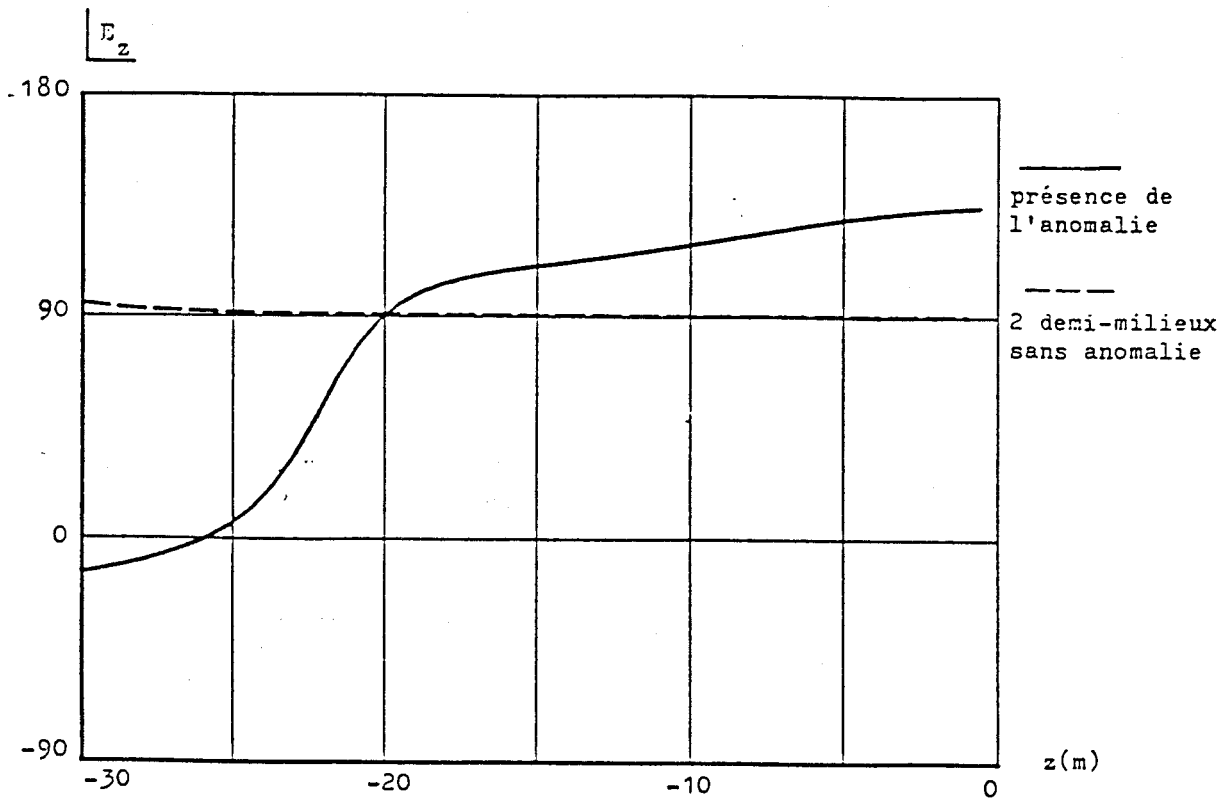


Figure (III.20)

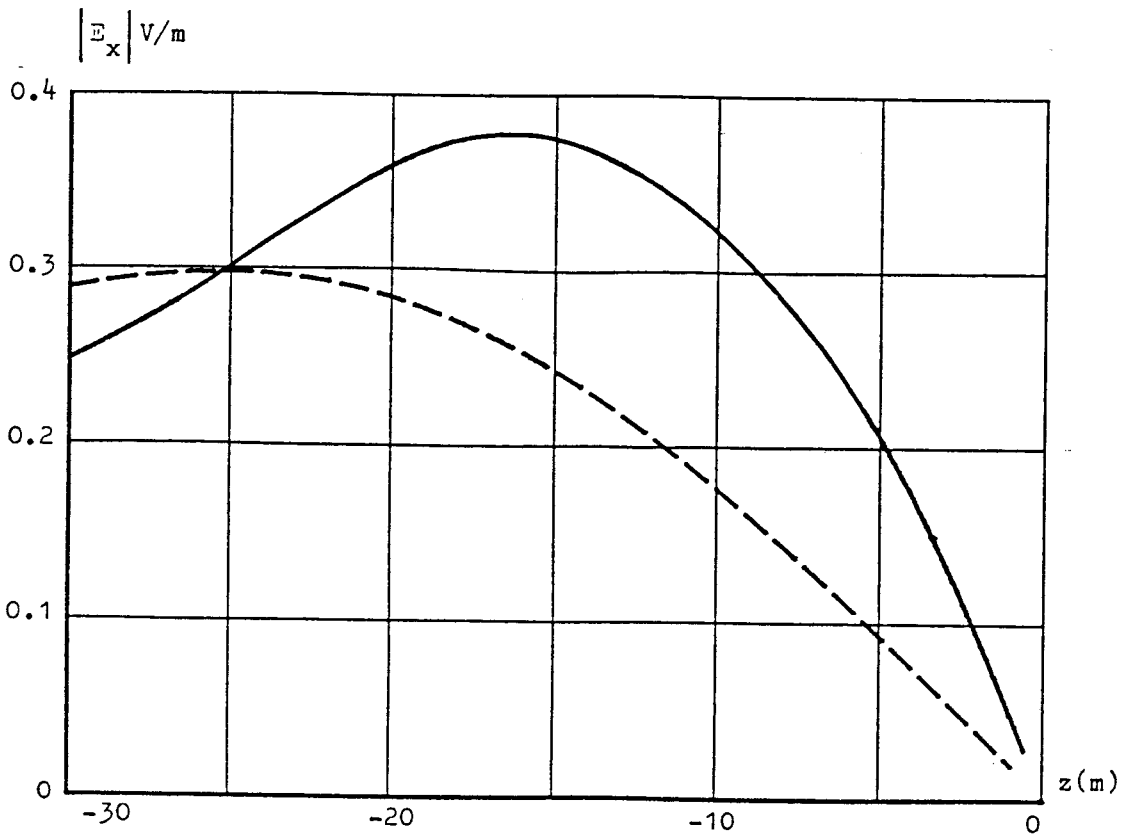


Figure (III.21)

$x = 40\text{m}$
 $y = 0\text{m}$
 $f = 100\text{kHz}$

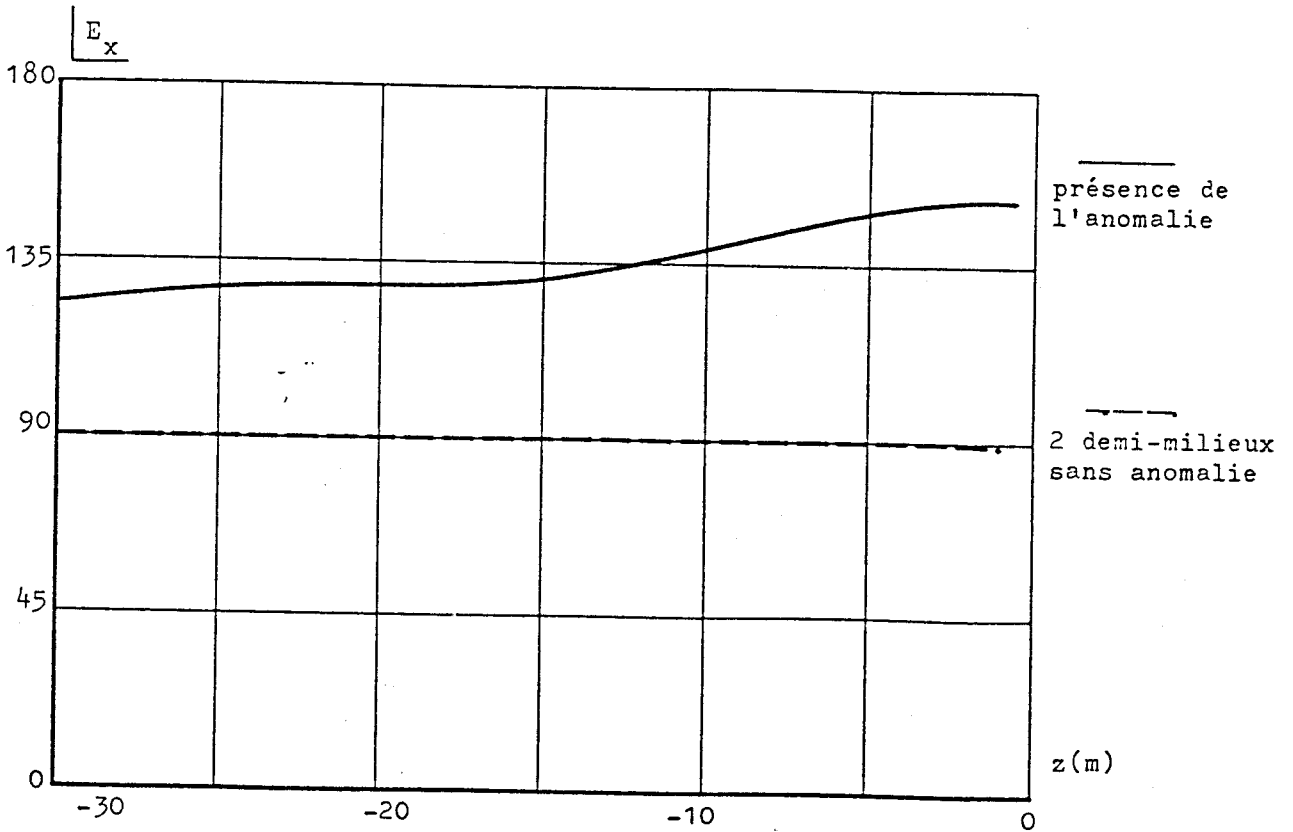


Figure (III.22)

On remarque que, les composantes du champ électrique (E_x , E_z) ne subissent pas de variations importantes quand le récepteur se décale latéralement (variation de y).

III.9 - Conclusion

La modélisation d'une anomalie par une distribution de dipôles électriques équivalents est une approche permettant l'évaluation des variations du champ électrique. Mais le découpage de l'anomalie en éléments de volume nécessite la manipulation de matrices d'ordres importants, ce qui augmente les temps de calculs et présente donc une limitation pour les grands volumes, à titre d'exemple, pour une anomalie de dimensions (30m, 30m, 30m) et de conductivité $\sigma_a = 10^{-3}$ S/m et si la fréquence est égale à 100 kHz, il faut découper l'anomalie en 216 éléments cubiques afin d'atteindre des précisions convenables dans le calcul du champ électrique, nous aurons donc, une matrice de (648.648) éléments à traiter.

On peut remarquer, en ce qui concerne la présence du sol, que celui-ci opère un changement important sur le comportement du champ électromagnétique surtout si l'anomalie est très proche du sol. En effet, pour un sol de conductivité 10 S/m, nous avons $|E_z|$, à l'intérieur d'une anomalie, égal 1.7 fois $|E_z|$ à l'intérieur de la même anomalie mais qui se trouve en milieu homogène.

Dans ce chapitre, l'anomalie traitée est de conductivité finie et ses dimensions sont de l'ordre de quelques dizaines de mètres. Dans le chapitre suivant, nous étudierons l'influence d'un pylône, de conductivité infinie, sur le champ électrique en présence du sol, ceci afin de déterminer l'influence de ce pylône sur l'amplitude et la phase d'un signal capté par une antenne située en son voisinage.

CHAPITRE IV

INFLUENCE D'UN PYLONE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous menons la même étude qu'au troisième, la seule différence est, qu'ici, l'anomalie, est un pylône de conductivité infinie; ce qui, d'ailleurs, nous oblige à prendre en considération les hypothèses des antennes filaires minces, à savoir que le rayon du pylône doit être inférieur à sa hauteur. La méthode de calcul du courant parcourant le pylône est celle des moments (triangles-segments), ce calcul a été effectué antérieurement [14], [15].

Nous utilisons ces résultats pour calculer le champ électrique re-rayonné en tout point de l'espace, ensuite nous déterminons la réponse temporelle de ce pylône à une décharge électrique provoquée par la foudre, afin de connaître la déformation apportée par le pylône sur ce signal.

Une étude paramétrique sera effectuée pour connaître l'influence du sol et la différence qu'il peut y avoir entre ce pylône et celui étudié au chapitre III (conductivité finie).

Enfin, nous présentons quelques résultats pratiques obtenus et les comparons à ceux de cette étude théorique.

IV.1 - Position du problème

Considérons un obstacle filaire de longueur L , dont une partie L_1 est enterrée dans le sol, cet obstacle est de rayon a , de conductivité infinie. Le pylône peut être considéré comme une antenne de réception, qui sera donc parcouru par un certain courant $I(z')$.

Ce courant $I(z')$ rayonnera dans l'espace et modifiera donc l'amplitude et la phase du champ électromagnétique incident en son voisinage. Comme l'indique la figure (IV.1), le champ re-rayonné par le pylône au point

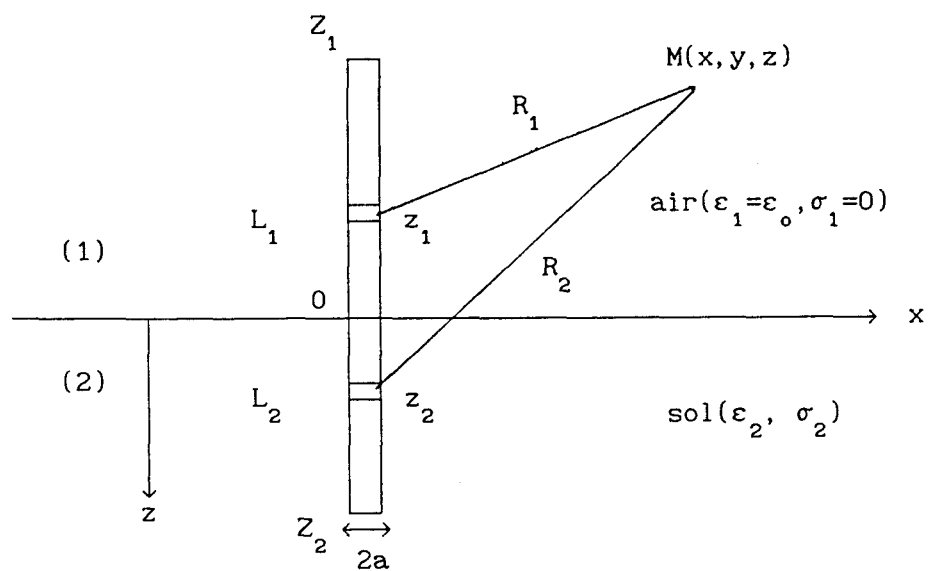


figure IV.1

$M(x,y,z)$ peut être obtenu en sommant la contribution de chaque élément d'antenne de longueur dz' .

IV.2 - Champ re-rayonné par le pylône

Nous avons établi les expressions du champ émis par les dipôles élémentaires dans les deux demi-milieux au chapitre III. Si le point d'observation M est un point du milieu 1, il reçoit la contribution de la partie de l'antenne se trouvant dans le même milieu :

$$E_{1z}^{r1} = \frac{j\omega\mu}{4\pi\gamma_1^2} \int_{Z_1}^0 \left[\frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \gamma_1^2 \right] \left[G_1 - G_2 + S_{1z}^v \right] I(z') dz' \quad (\text{IV.1})$$

et celle de la partie se trouvant dans le milieu 2 :

$$E_{1z}^{r2} = \frac{j\omega\mu}{4\pi\gamma_1^2} \int_0^{Z_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \gamma_1^2 \right] S_{2z}^v I(z') dz' \quad (\text{IV.2})$$

et le champ total en un point du milieu 1 est

$$E_{1z}^r(z) = E_{1z}^{r1} + E_{1z}^{r2} \quad (\text{IV.3})$$

Les expressions de G_1 , G_2 , S_{1z}^v et S_{2z}^v sont :

$$G_1 = \frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1}$$

$$G_2 = \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2}$$

$$S_{1z}^v = \int_0^{\infty} \frac{2 \gamma_2^2}{(u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2)} e^{u_1(z_1 + z)} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$S_{2z}^v = \int_0^{\infty} \frac{2 \gamma_1^2}{(u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2)} e^{u_1 z - u_2 z_2} J_0(\lambda r) d\lambda$$

Dans le milieu 2, le champ aura la même expression tout en intervertissant les indices 1 par 2, 2 par 1 et z par $-z$.

Le champ tangentiel à la surface de l'antenne, composé des champs rayonné E_z^r et incident E_z^i , est nul vu que l'antenne est considérée infiniment conductrice, ceci implique que pour $r = a$:

$$E_z^r + E_z^i = 0 \quad (\text{IV.4})$$

en remplaçant E_z^r par son expression, nous disposons d'une relation intégrale liant le champ incident E_z^i avec la distribution de courant recherché $I(z')$.

Il existe cependant une singularité de l'intégrand lorsque le point de réception et le point courant d'intégration coïncident. Si l'antenne a une longueur L bien plus grande que son rayon, on peut montrer qu'il est possible de faire l'approximation des antennes minces, ce qui revient, tout calcul fait, à supposer que le courant est concentré sur l'axe de l'antenne.

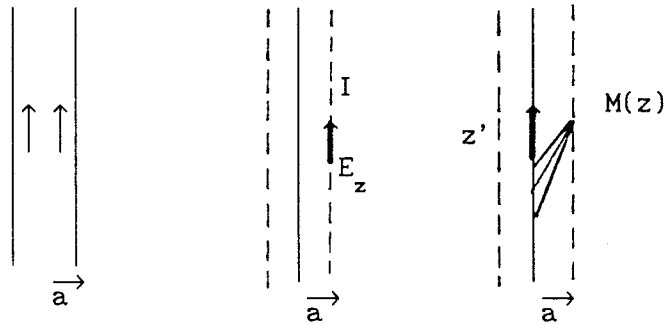


figure IV.2

Le point M d'observation se situant au minimum à la distance $R = a$ de la source, on évite ainsi la discontinuité de la fonction de Green G [14]. L'équation intégrale du courant s'obtient donc simplement en remplaçant R

par $R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$

L'équation intégrale est résolue par la méthode des moments (triangles-segments). L'avantage d'une décomposition sur des fonctions de base triangulaire est une bonne approximation de la fonction inconnue (courant) et que la condition $I(z) = 0$ en ($z=0$, $z=L$) est automatiquement assurée.

De plus, ce choix est facile à mettre en oeuvre dans ce cas précis (l'anomalie est à une seule dimension), tandis qu'au 3^e chapitre, ceci est beaucoup plus difficile à effectuer que l'utilisation de la technique points-segments.

Il faut remarquer que le courant $I(z)$ est approximé par des morceaux de droites et que la condition aux limites $E_z^t = 0$ n'est pas véritablement assurée quel que soit z mais on peut considérer que c'est la valeur "moyenne" du champ sur un élément qui est nul. Le calcul du champ rayonné E_z^r ne pourra donc être considéré comme exact en un point donné que si celui-ci se situe à une distance supérieure à la longueur de chaque élément Δ de l'antenne.

IV.3 - Expression finale du champ re-rayonné

Le découpage en petits éléments de longueur Δ nous a permis de calculer les valeurs du courant aux extrémités de chaque élément. Pour l'avoir en chaque point de Δ et compte tenu de l'hypothèse faite, le courant sur un élément peut se mettre sous la forme suivante :

$$I_{\Delta}(z') = c_1 z' + c_2$$

(c_1 et c_2 sont des constantes que l'on détermine à partir de $I(z')$ et $I(z' + \Delta)$ connus).

En remplaçant $I(z')$ dans l'équation (IV.1) et (IV.2), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
E_{1z}^{r1} = & \frac{jw\mu}{4\pi\gamma_1^2} \sum_{i=1}^m \left[\int_{z_i}^{z_i + \Delta} \left\{ \left[\frac{-r^2(\gamma_1^2 R_1^2 + 3\gamma_1 R_1 + 3)}{R_1^5} + \frac{2(\gamma_1 R_1 + 3)}{R_1^3} \right] e^{-\gamma_1 R_1} \right. \right. \\
& + \left. \left[\frac{r^2(\gamma_1^2 R_2^2 + 3\gamma_1 R_2 + 3)}{R_2^5} + \frac{2(\gamma_1 R_2 + 3)}{R_2^3} \right] e^{-\gamma_1 R_2} \right\} (c_{11} z' + c_{21}) dz' \\
& + \left. \int_0^{\infty} \frac{\lambda^3}{(u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2)} e^{u_1(z+z_i)} V_1 J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (IV.5)
\end{aligned}$$

$$V_1 = \frac{1}{u_1^2} \left[c_{11} (1 - e^{-u_1 \Delta}) + u_1 \left\{ c_{21} (1 - e^{-u_1 \Delta}) + c_{11} [z_i - (z_i + \Delta)] e^{-u_1 \Delta} \right\} \right]$$

$$m = L/\Delta$$

$$z_i = i \Delta \quad i = 0 \text{ à } m$$

$$c_{11}, c_{21} \text{ constantes}$$

$$E_{1z}^{r2} = \frac{jw\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} \frac{\lambda^3}{(u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2)} e^{u_1(z+z_i)} J_0(\lambda r) V_2 d\lambda \quad (IV.6)$$

$$V_2 = \frac{1}{u_2^2} \left[c_{11} (1 - e^{-u_2 \Delta}) - u_2 \left\{ c_{21} (1 - e^{-u_2 \Delta}) + c_{11} [z_i - (z_i + \Delta)] e^{-u_2 \Delta} \right\} \right]$$

Maintenant, il suffit d'appliquer le procédé que l'on a défini au premier chapitre pour intégrer ces fonctions.

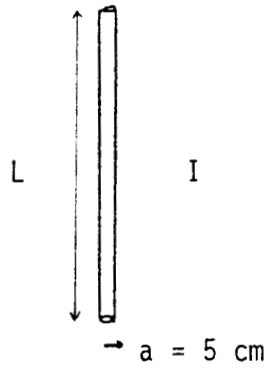
IV.4 - Distribution du courant sur l'antenne

Nous avons tracé sur la figure (IV.3) la distribution du courant sur un pylône de rayon $a = 5$ cm, de longueur $L=10, 20$ m et isolé dans l'espace. La fréquence d'émission est de 100 kHz et le champ incident \vec{E}^i , supposé uniforme, a une amplitude normalisée à 1 V/m. De plus, \vec{E}^i n'admet qu'une seule composante parallèle au fil.

On remarque que l'amplitude du courant sur un pylône est évidemment très dépendante de la longueur L (10 m ou 20 m), ces courbes ont été obtenues en divisant l'antenne en 36 éléments pour $L = 20$ m et en 20 éléments pour $L = 10$ m. On peut vérifier que la longueur d'un élément Δ reste supérieure ou égale à 10 fois le rayon du pylône, ce qui est une condition nécessaire pour pouvoir faire l'approximation des antennes minces.

Sur la figure (IV.4), nous avons représenté I en fonction de z en présence du sol, dans les conditions suivantes : $L = 12, 15$ m, où la hauteur au dessus du sol est toujours de 10 m, la longueur de la partie enterrée dans le sol est respectivement ($H = 2$ m, $H = 5$ m), $f = 100$ kHz, et $E_z^i = 1$ V/m dans la partie aérienne. On remarque que le courant aura la même distribution sur la partie qui se trouve dans l'air même si la partie enterrée change de longueur (2 ou 5 m). A noter aussi que la déformation de la densité du courant dans ce cas par rapport à celui d'une antenne dans un milieu homogène est due à la présence du sol ; de plus, si l'on compare les amplitudes maximales des courants dans les deux cas suivants : le premier, cas de la figure (IV.3) où $L = 20$ m et l'antenne est dans un milieu homogène, le second, cas de la figure (IV.4) où il y a une partie enterrée ($H = 2$ ou 5 m), nous obtenons un rapport égal à 0.86 au lieu de l'unité.

$$|E_z^i| = 1 \text{ V/m}$$



$$f = 100 \text{ kHz}$$

$$(L = 20 \text{ m} - N = 36)$$

$$\Delta_{\min} \geq 10 a$$

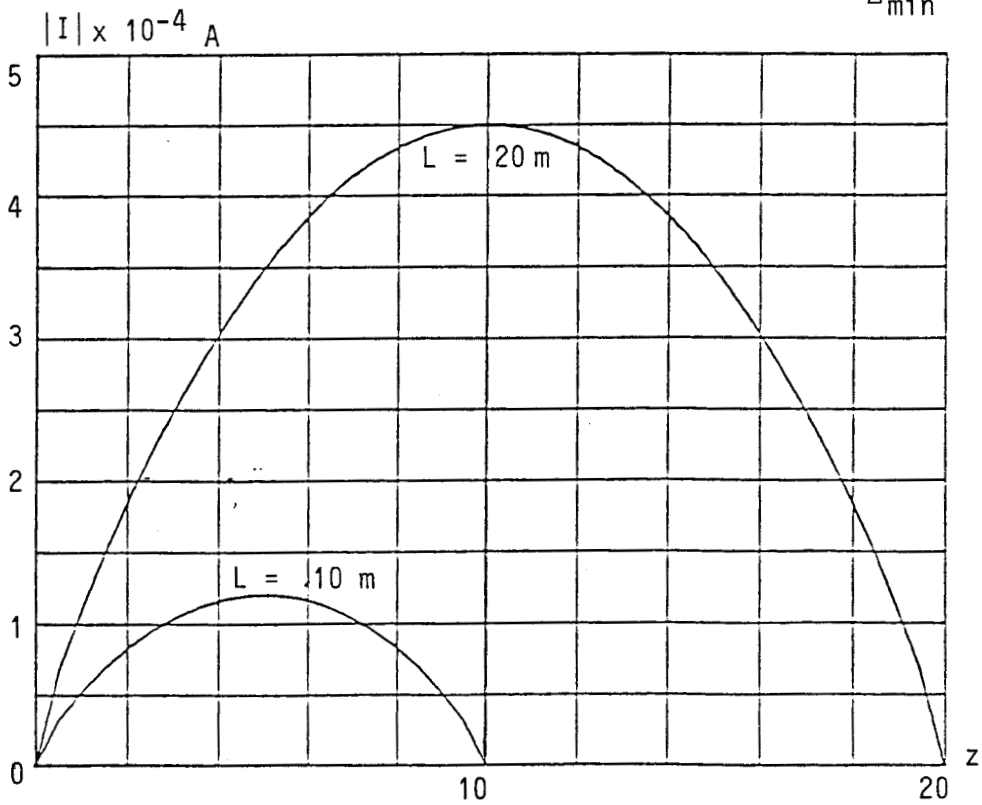
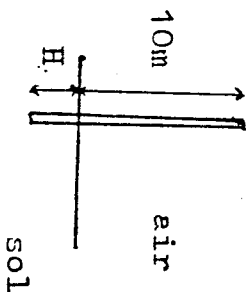
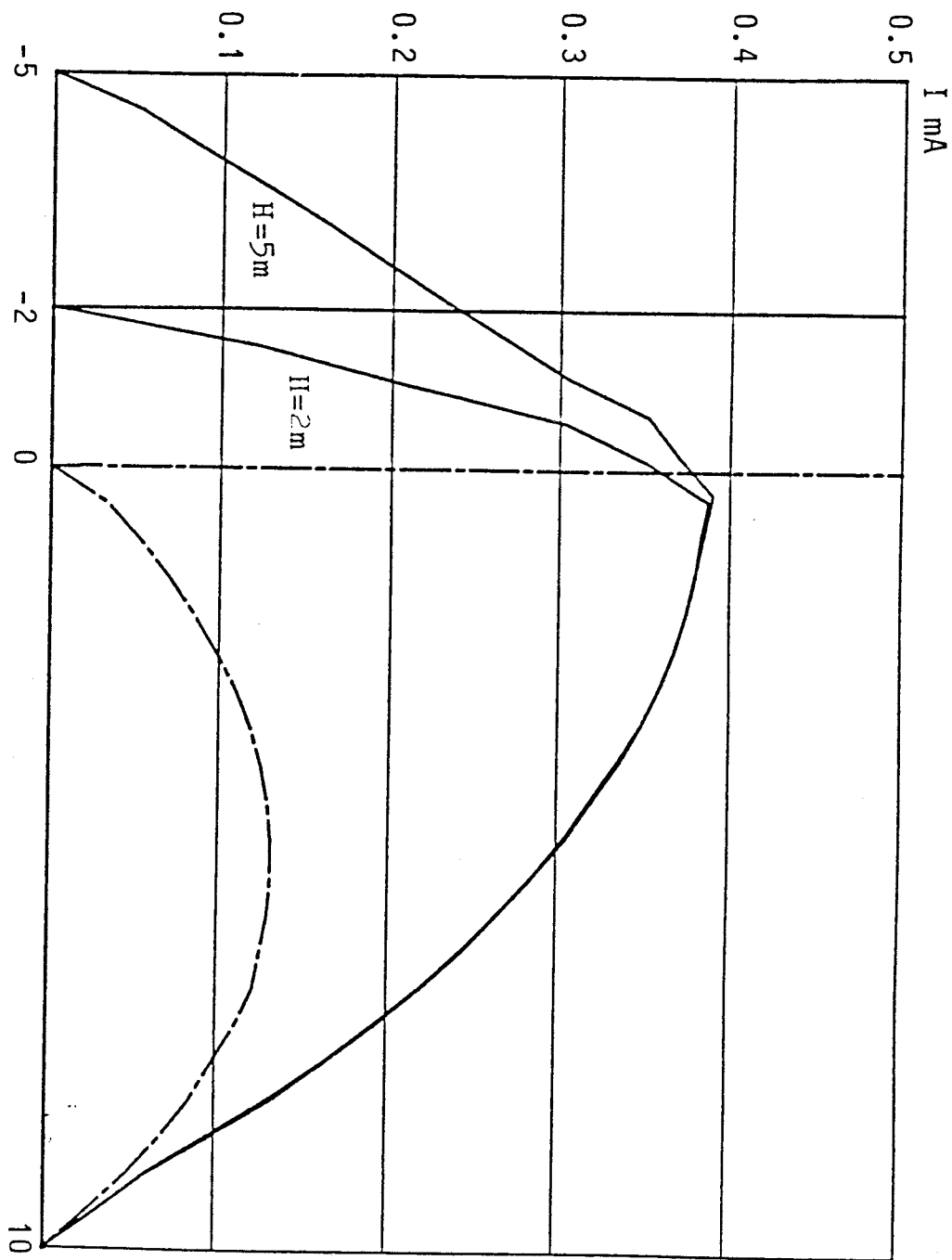


Figure (IV.3)



$a = 5 \text{ cm}$
 $f = 100 \text{ KHZ}$
 - - - milieu homogène

Figure (IV.4)

Le résultat est identique dans le cas d'un pylône à conductivité finie au chapitre III.

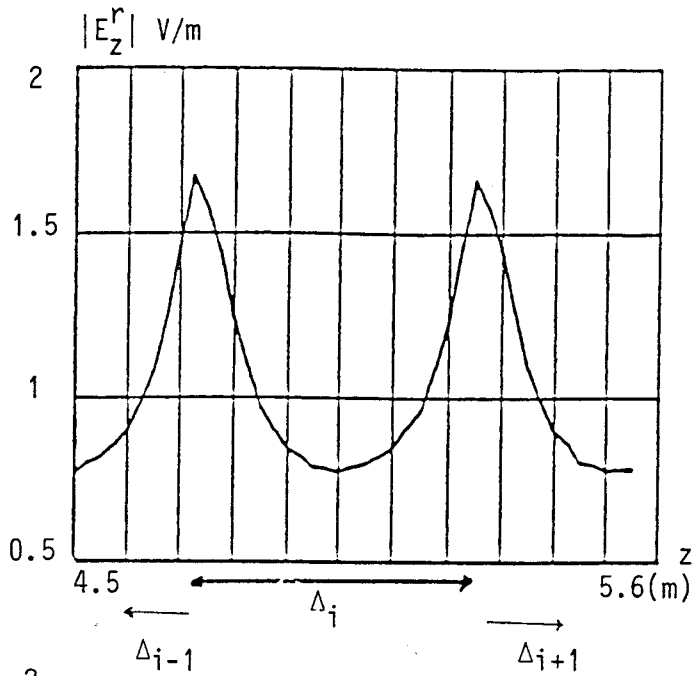
IV.5 - Etude paramétrique du champ re-rayonné

IV.5.1 - Influence de la distance r

Plaçons-nous d'abord au voisinage immédiat de la surface de l'antenne parfaitement conductrice ($r = a = 5$ cm). Les deux courbes supérieures de la figure (IV.5) montrent l'allure du champ E_z^r pour différentes valeurs de z , calculé à partir d'une approximation linéaire par morceau. Comme on se situe relativement loin des extrémités de l'antenne (z varie entre 2 et 5.6 m et la longueur de l'antenne est de 10 m telle que l'une des extrémités est au point $z = 0$ m), le champ devrait être constant et avoir une amplitude qui s'oppose strictement à celle du champ incident ($E_z^i = 1$ V/m) de manière à assurer la nullité de la composante tangentielle du champ électrique sur la surface conductrice. On voit de nombreuses oscillations de E_z^r et que seule la valeur moyenne de E_z^r sur un élément Δ_1 est égale, en valeur absolue, à celle du champ incident.

Lorsque la distance horizontale r devient de l'ordre de grandeur du pas de discrétisation Δ , ce phénomène devient négligeable et, comme on le voit sur la dernière courbe de la figure (IV.5), E_z^r ne dépend plus de l'altitude z du point de réception.

Le champ total est évidemment en tout point de l'espace la somme du champ incident E_z^i et du champ diffracté E_z^r , sommation qui s'effectue en amplitude et en phase. Cependant, compte tenu des basses fréquences envisagées et des faibles distances r entre le point d'observation et le pylône, le déphasage entre E_z^i et E_z^r pourra être supposé constant et égal à



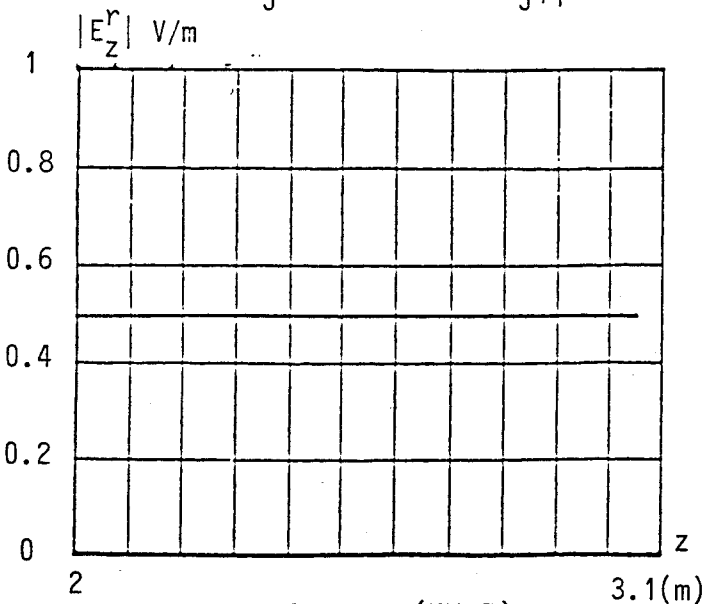
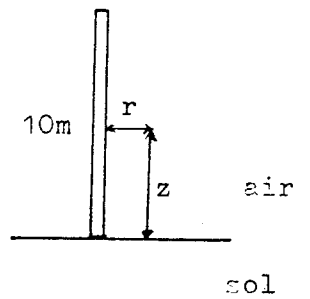
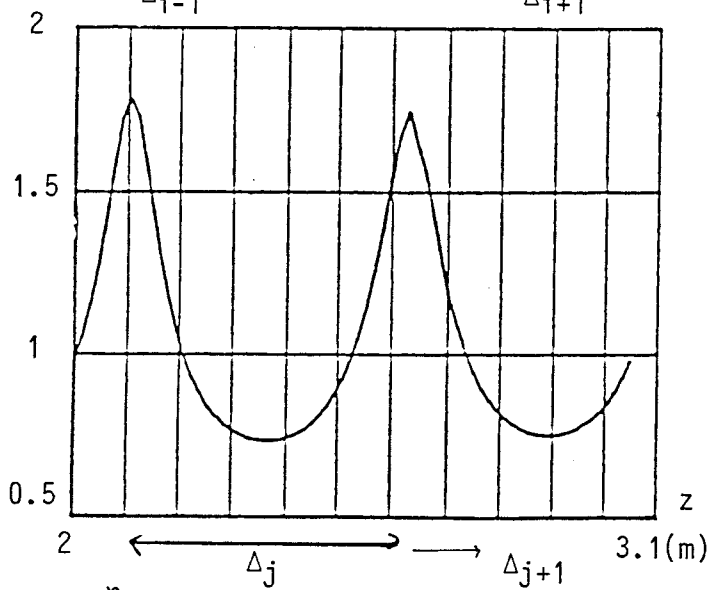
$$f = 100 \text{ kHz}$$

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$l = 10 \text{ m}$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$|E_z^r|_{\Delta_i} = 1.03$$



$$r = 50 \text{ cm}$$

$$(r = \Delta)$$

Figure (IV.5)

II. Dans les figures suivantes, nous nous contentons donc de représenter la variation de $E_z^r(r)$.

La figure (IV.6) correspond à une longueur d'antenne $L = 10$ m au-dessus du sol, la partie enterrée est de longueur ($H = 0, 2, 5$ m), le point de réception se situe à 5 m au-dessus du sol (milieu de la partie aérienne). On remarque que le champ n'est pas très influencé par la longueur de la partie enterrée ($H = 2, 5$ m), par contre, si l'antenne est entièrement au-dessus du sol, mais en contact direct avec lui ($H = 0$ m), le champ re-rayonné diminue par rapport aux cas où $H = 2$ m, 5 m. En effet, pour une distance $r = 2$ m qui sépare l'antenne du point de réception, nous avons un champ $|E_z^r| = 0.22$ V/m pour $H = 2$ m ou 5 m, un champ $|E_z^r| = 0.16$ V/m pour $H = 0$ m et ce champ est égal à 0.18 V/m si l'antenne se trouve dans un milieu homogène avec une longueur $L = 20$ m. Dans tous les cas, ce champ devient inférieur à 0.1 V/m si la distance $r > 5$ m.

La figure (IV.7) est tracé dans les mêmes conditions que (IV.6) sauf qu'ici, la hauteur de la réception change ($z = 9$ m, 5 m) et la longueur de la partie enterrée $H = 0$ m. On note que le champ E_z^r diminue si l'on s'approche de l'extrémité de l'antenne. En effet, pour $r = 1$ m, $|E_z^r|$ diminue de 0.1 V/m si z passe de 5 m à 9 m.

IV.5.2 - Comparaison avec les résultats pratiques.

Sur la figure (IV.8), nous avons représenté la variation du champ électrique en fonction de la distance r qui sépare une antenne de réception et un pylône de hauteur 10 m, ceci a été effectué pour trois fréquences $f = 16.4$ kHz, 200 kHz, 1.19 MHz et pour un émetteur suffisamment éloigné du récepteur. Si l'on néglige l'influence mutuelle qui se produit entre

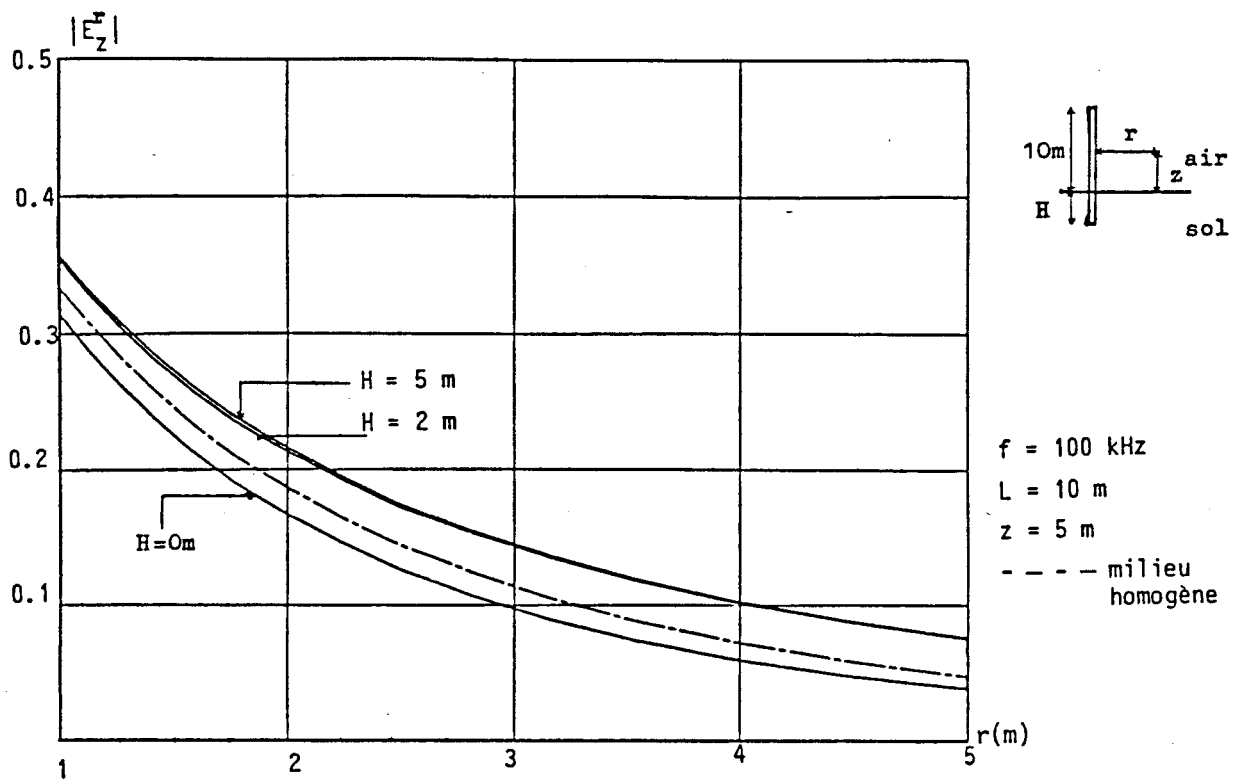


Figure (IV.6)

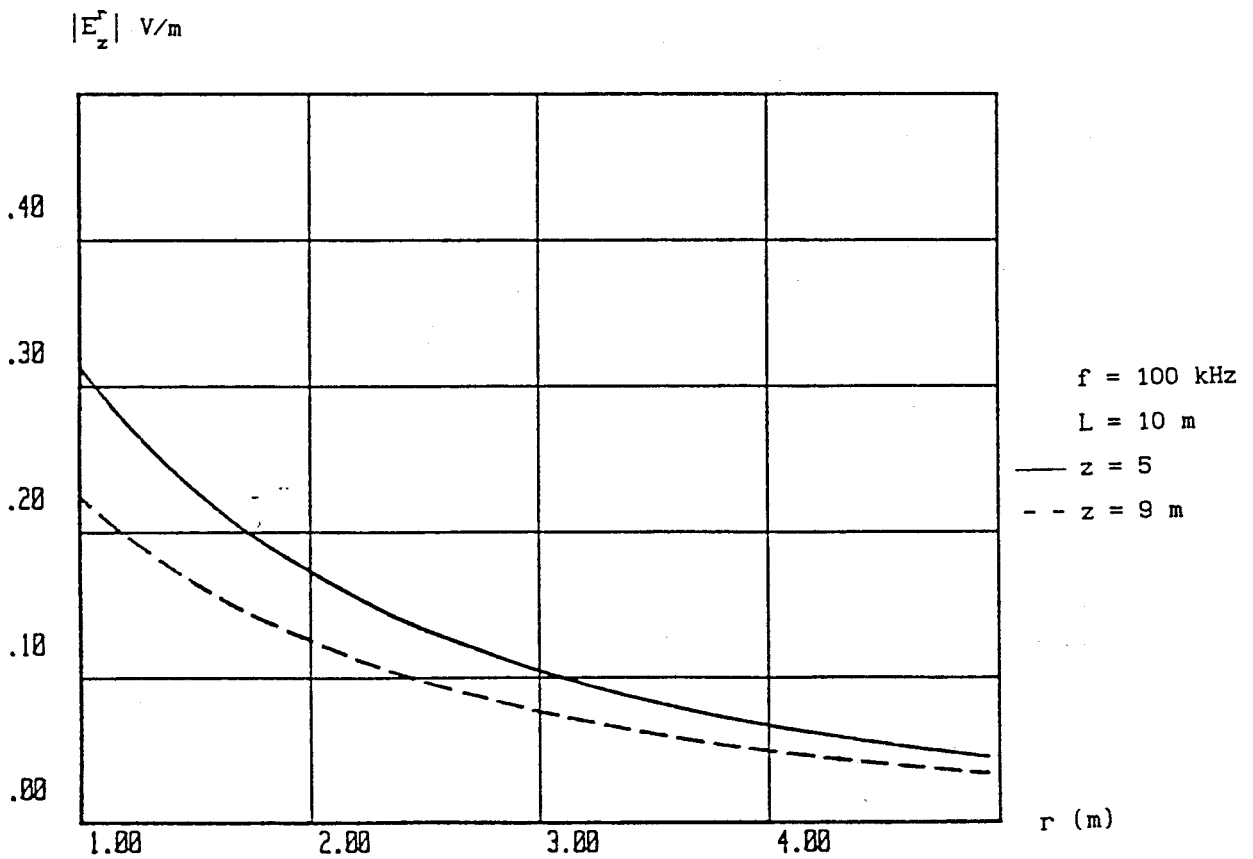


Figure (IV.7)

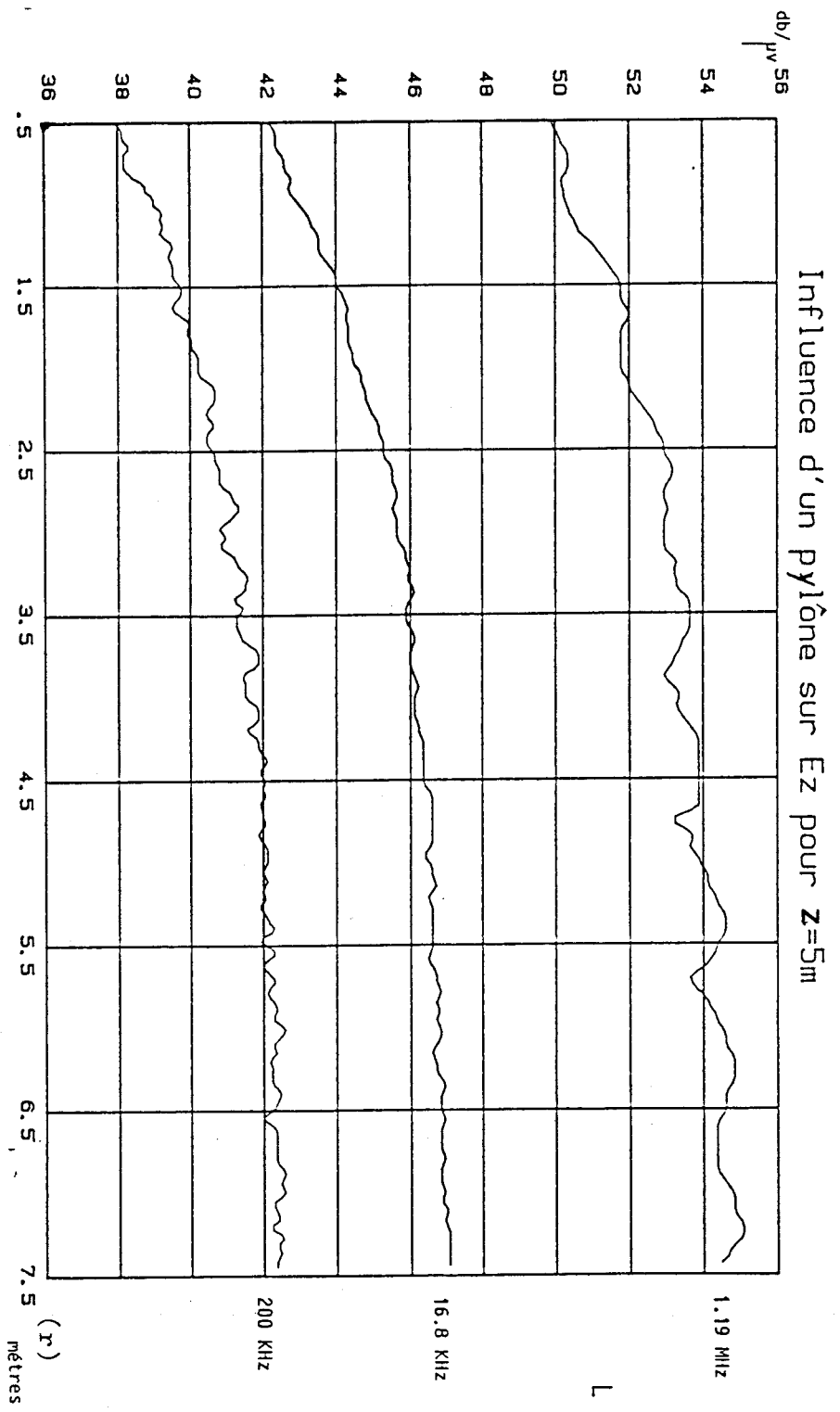
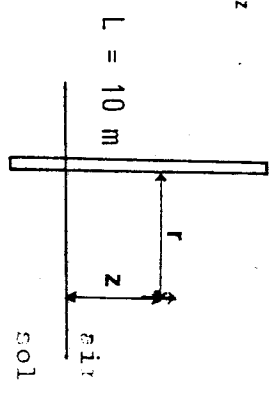


Figure IV.8



l'antenne de réception et le pylône, nous obtenons une atténuation d'à peu près 4.2 dB près du pylône, et l'influence de ce dernier est négligeable à partir d'une distance $r = 7.5$ m. Si l'on compare ceci à l'étude théorique qui donne une atténuation de 3.8 dB, nous pouvons dire que les résultats pratiques sont en accord avec la théorie.

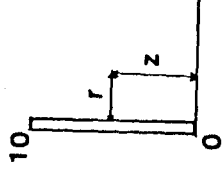
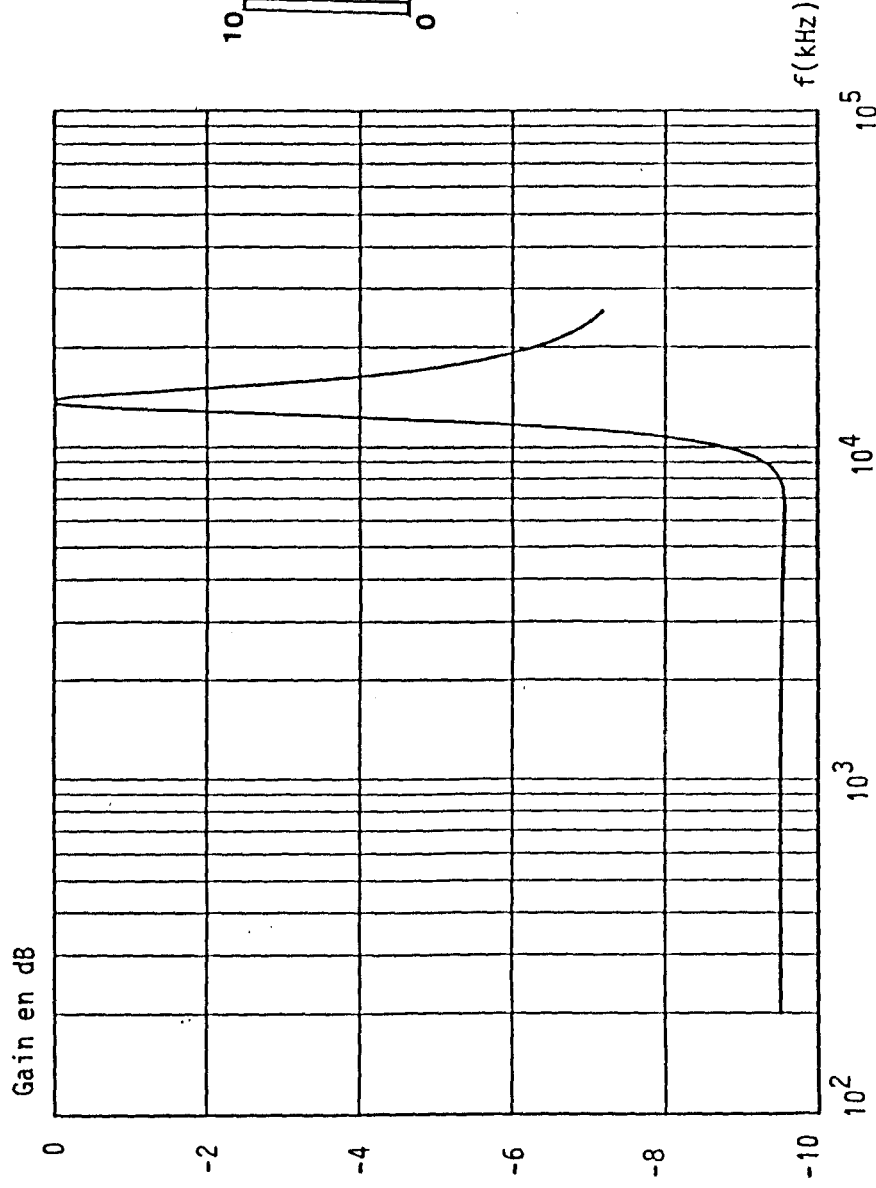
IV.5.3 - Réponse fréquentielle

Sur les figures (IV.9 et IV.10), nous avons tracé la réponse fréquentielle (gain E_z^r/E_z^i et phase de E_z^r) d'une antenne dans un milieu homogène de longueur $L = 10$ m, à une distance $r = 1$ m, et à une hauteur $z = 5$ m (milieu de l'antenne). On remarque que la phase et l'amplitude restent constantes dans le domaine des basses fréquences ($f \leq 3$ MHz) et que la résonance est obtenue pour une longueur d'onde $\lambda = 20$ m.

Les courbes (IV.11) et (IV.12) représentent la réponse fréquentielle de la même antenne, dans les mêmes conditions mais pour $r = 5$ m. On remarque que le gain et la phase sont constants en basses fréquences, mais une diminution importante du gain par rapport au cas de la figure (IV.9), cette atténuation est de l'ordre 18 db pour les fréquences inférieures à 10 MHz, tandis que la phase reste égale à $-\pi$ dans ce domaine fréquentiel.

IV.5.4 - Réponse temporelle

Nous déterminons, dans ce paragraphe, la réponse temporelle d'un pylône dans un milieu homogène à une décharge électrique telle, par exemple, celle qui pourrait être provoquée par la foudre. Afin de simplifier la présentation de l'étude paramétrique, on suppose que le champ électrique incident suit une variation trapézoïdale en fonction du temps, avec un



$r = 1 \text{ m}$
 $z = 5 \text{ m}$

Figure (IV.9)

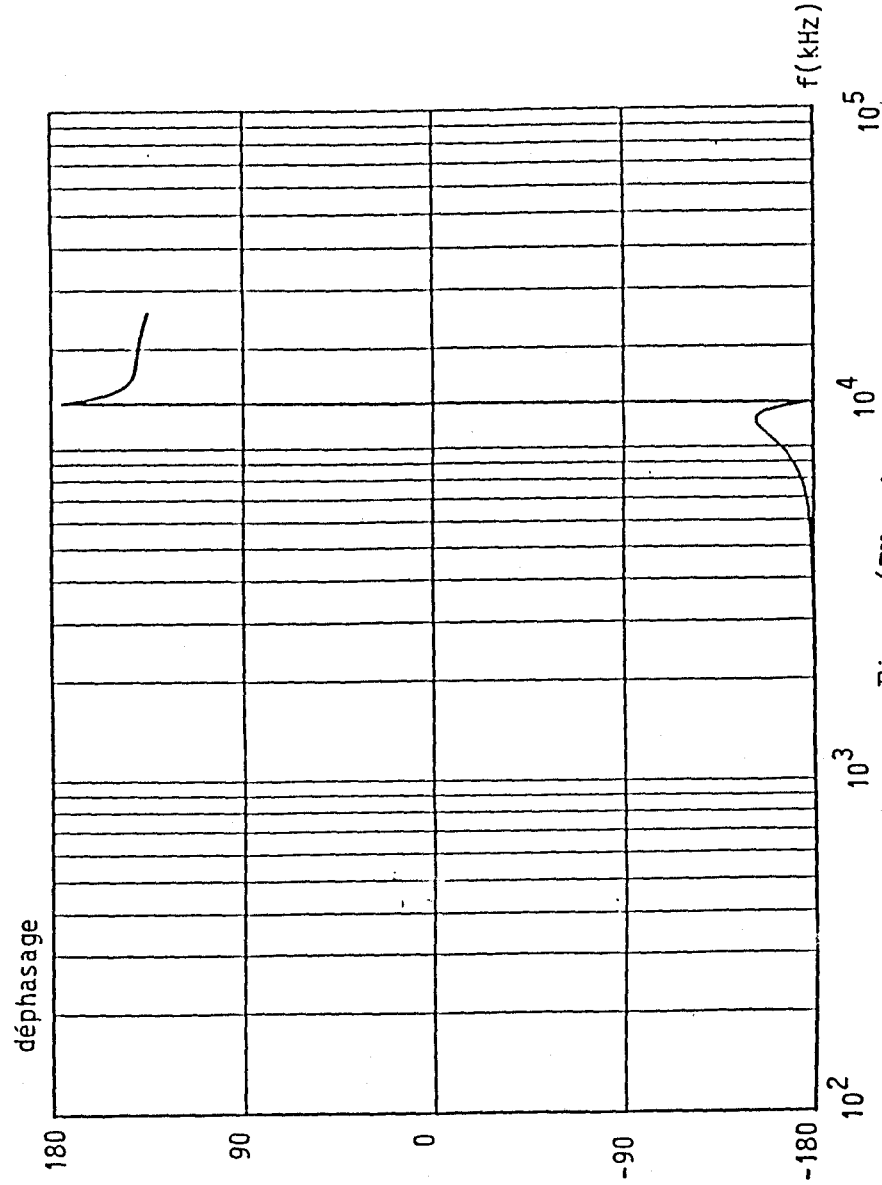


Figure (IV.10)

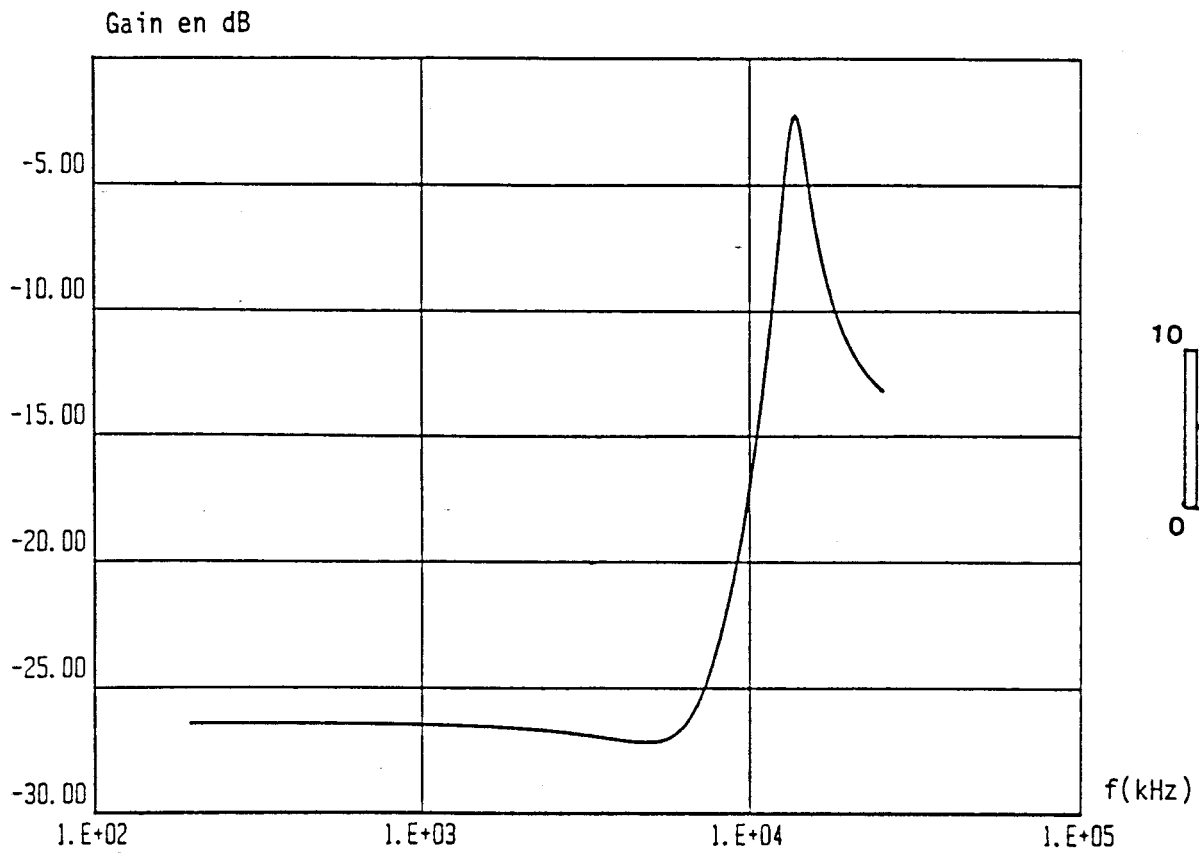


Figure (IV.11)

r = 5 m
z = 5 m

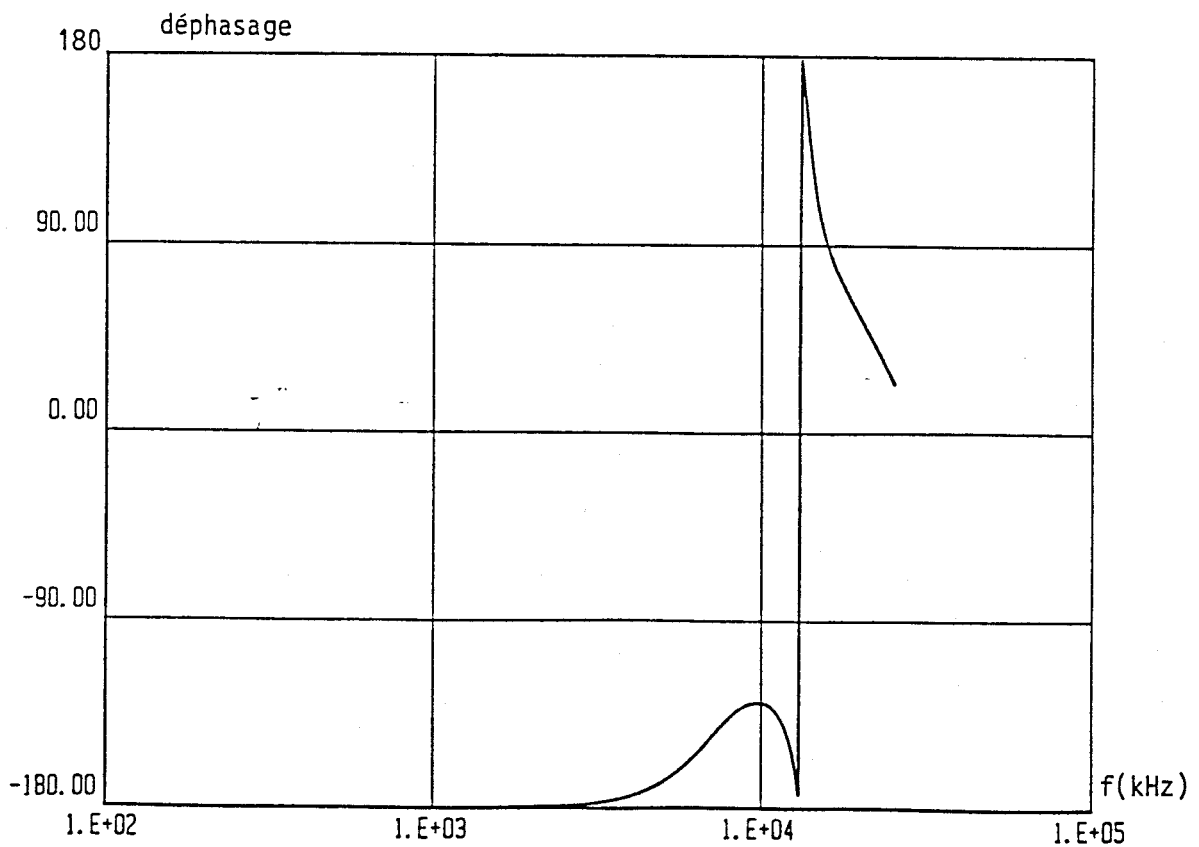
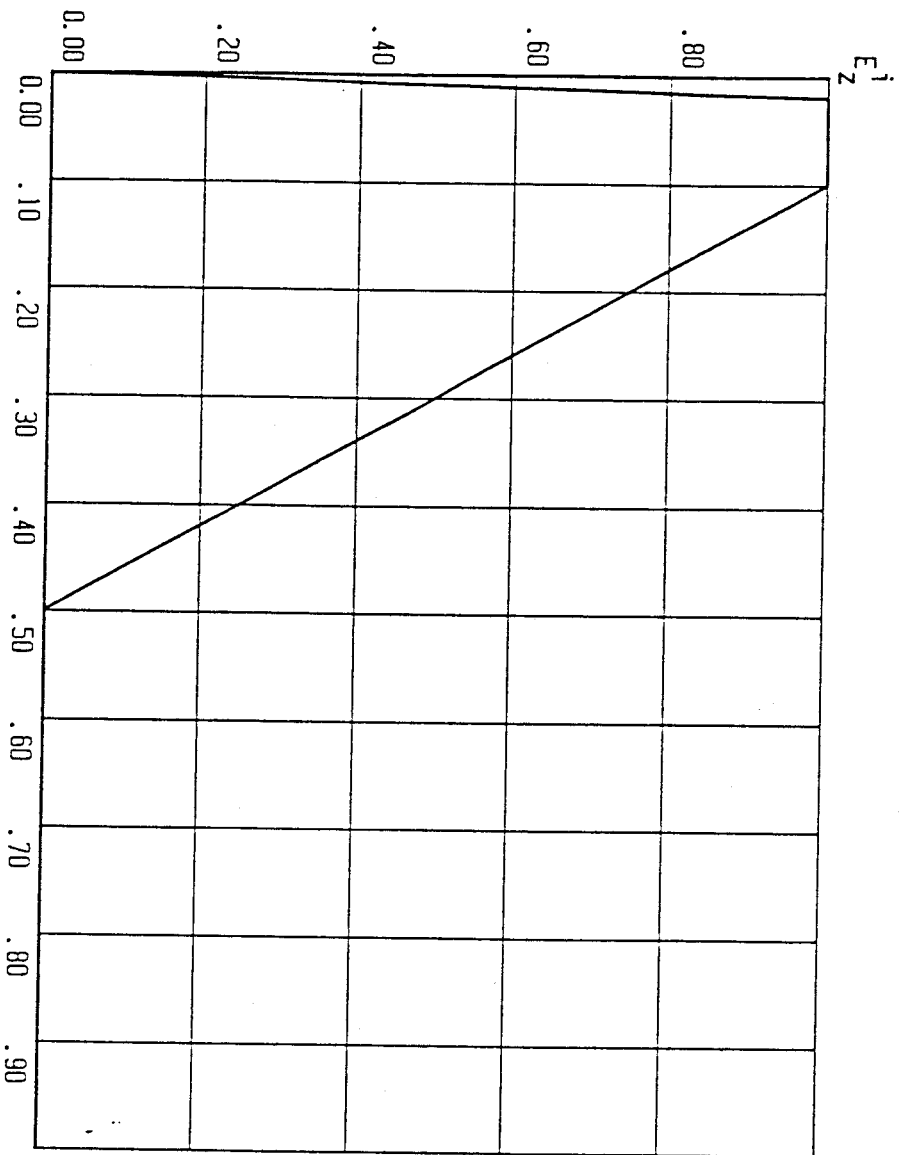


Figure (IV.12)



$$\tau_m = 200 \text{ ns}$$

$$\tau_d = 4 \mu\text{s}$$

$$10^{-5} \text{ s}$$

Figure (IV.13)

forme de l'onde incidente

temps de montée T_m très faible (100ns à 200ns) et un temps de descente beaucoup plus grand ($4 \mu s$). L'amplitude de ce signal est toujours de 1 V/m et son rapport cyclique est égal à 0.5 figure (IV.13). Ce signal est rendu périodique pour pouvoir y appliquer la transformée de Fourier.

Les figures (IV.14) et (IV.15) illustrent le champ re-rayonné par pylône de 10 m de longueur, la réception se fait à une distance horizontale $r = 1$ m, une hauteur $z = 5$ m (centre du pylône) et les temps de montée sont respectivement 200 ns et 100 ns. Dans ces mêmes conditions, nous avons tracé, figures (IV.16) et (IV.17), la variation du champ total qui est la transformée de Fourier inverse de la somme des champs incident et rayonné. On observe que, dans les deux cas, la réponse temporelle est la même, sauf que, dans le cas d'un temps de montée assez rapide (100 ns), on obtient quelques oscillations au niveau maximal du champ.

Comme le montre la courbe IV.18, ce nombre d'oscillations augmente si le point de réception est plus éloigné de l'antenne ($r = 5$ m), mais le champ total est pratiquement égal à celui incident. Ces oscillations sont dues à la résonance propre du pylône.

On note que, dans tous les cas, le signal ne subit pas de déformation dans sa forme, par contre, il subit une diminution importante dans son amplitude surtout si r est proche du pylône. Pour $r = 1$ m, l'amplitude du champ $E_z^t \approx 0.7$ V/m, cette amplitude devient 0.95 V/m pour $r = 5$ m.

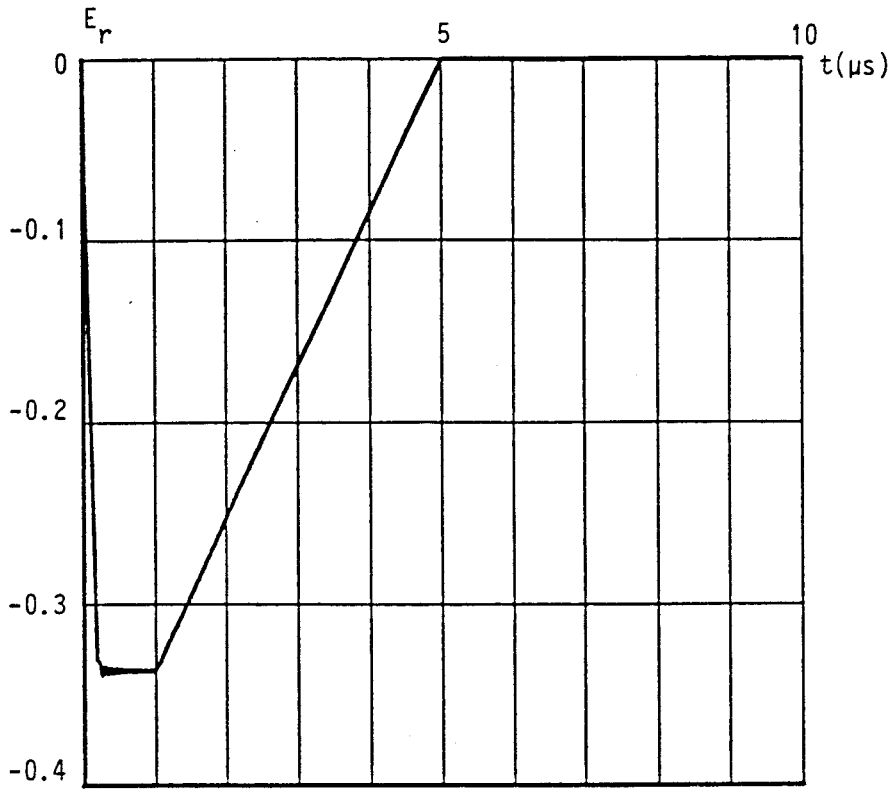


Figure (IV.14)

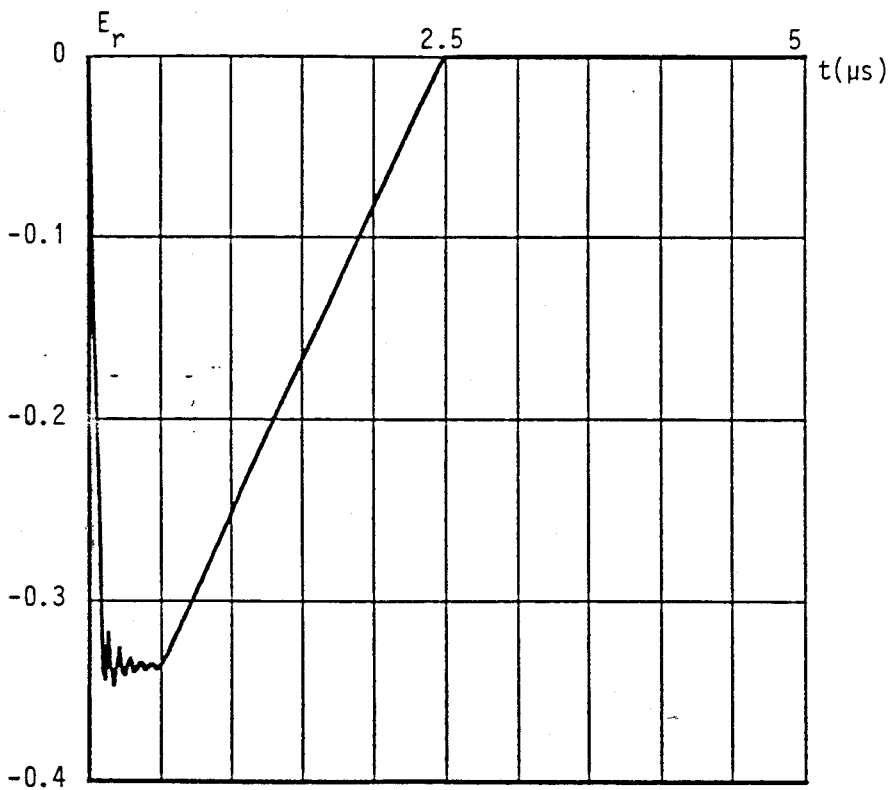
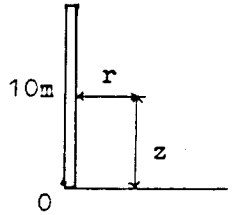
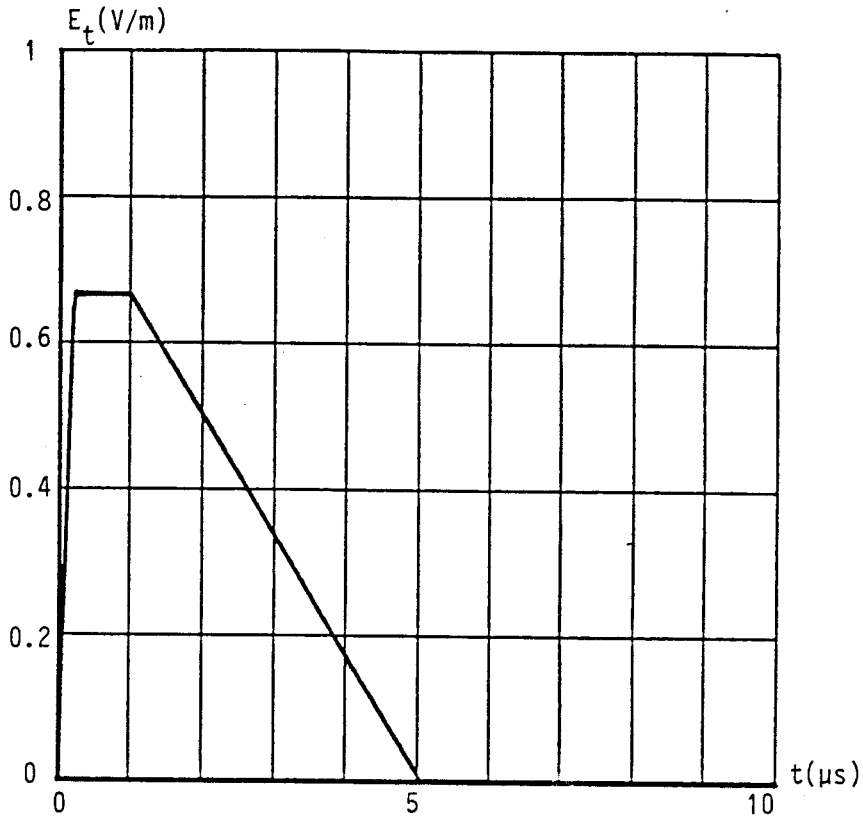


Figure (IV.15)



$$T = 200 \text{ ns}$$

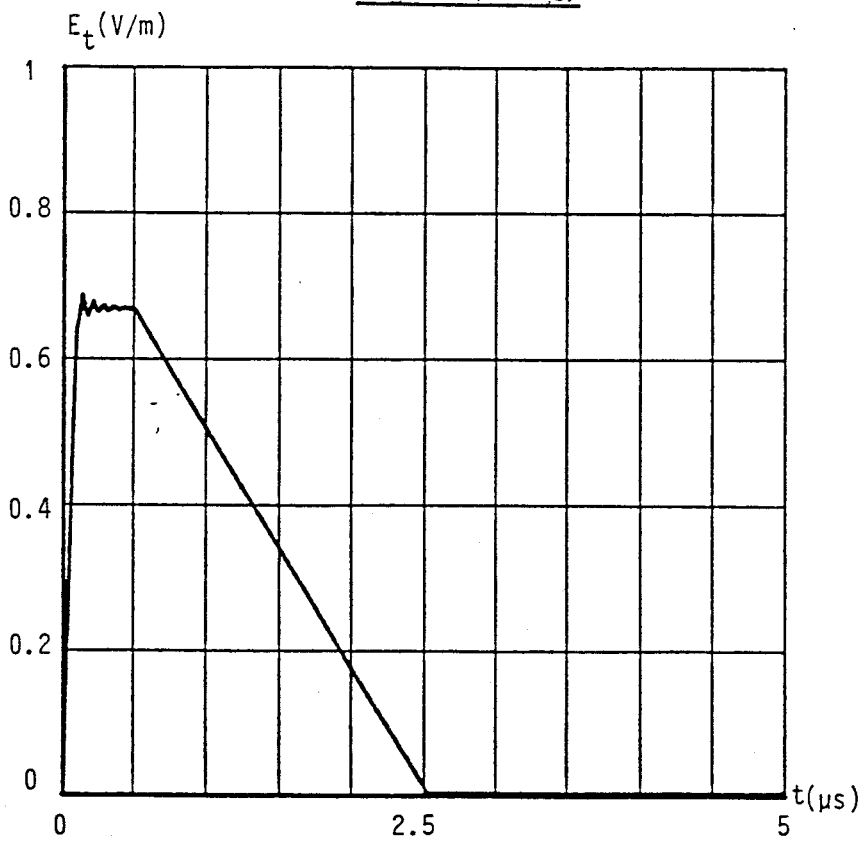
$$T_d = 4 \mu\text{s}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$r = 1 \text{ m}$$

$$z = 5 \text{ m}$$

Figure (IV.16)



$$T_m = 100 \text{ ns}$$

$$T_d = 2 \mu\text{s}$$

Figure (IV.17)

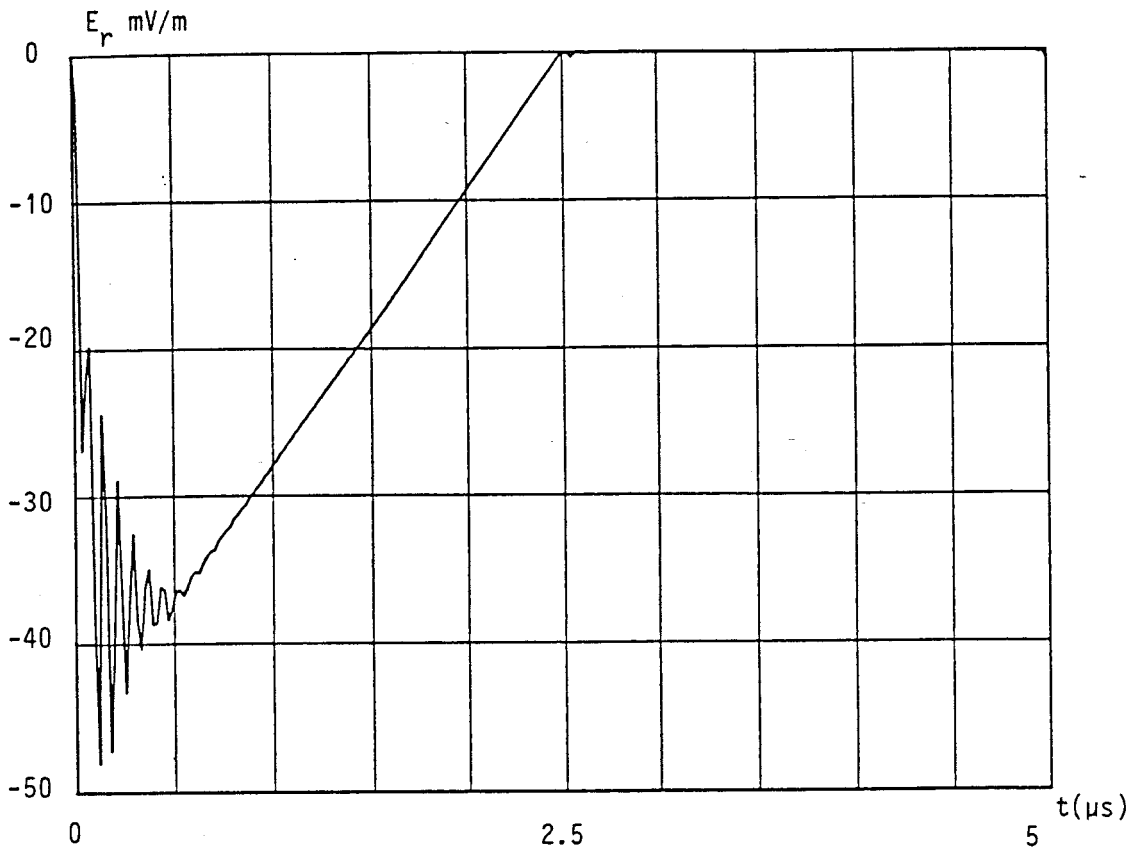


Figure IV.18

$T_m = 100 \text{ ns}$
 $r = 5 \text{ m}$
 $z = 5 \text{ m}$
 $L = 10 \text{ m}$

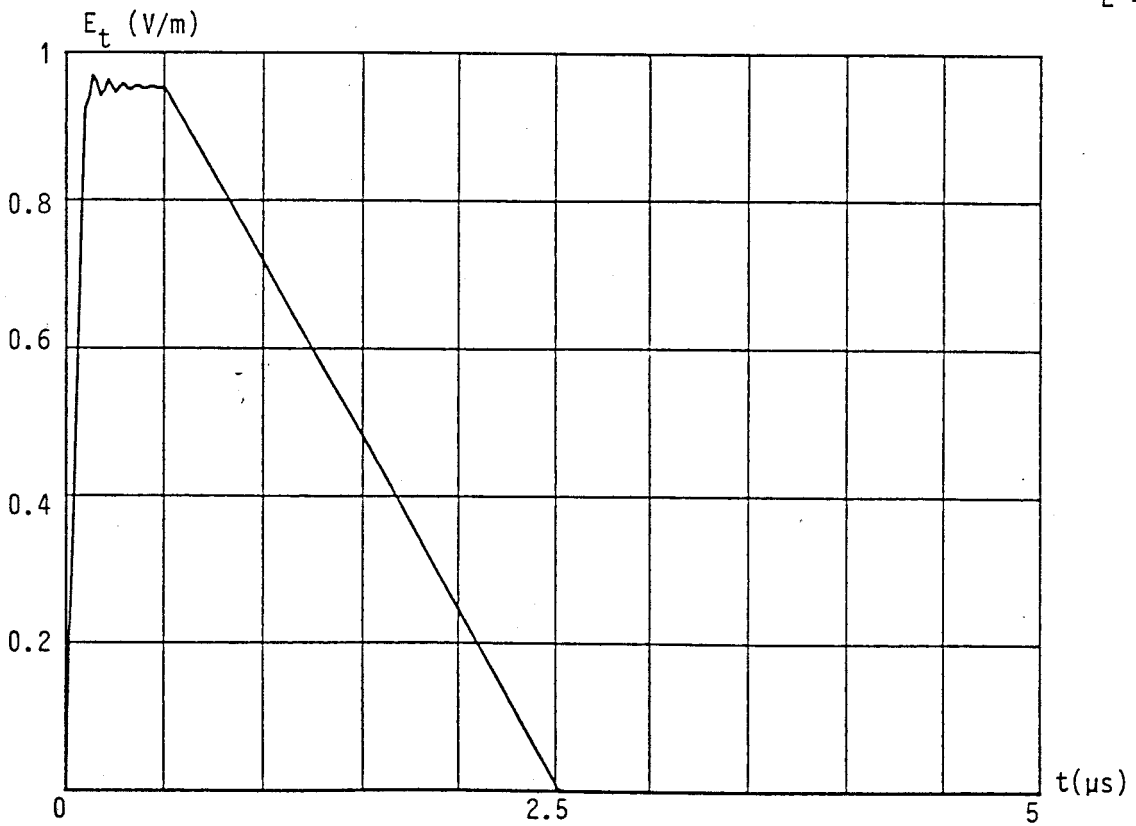


Figure IV.19

IV.6 - Conclusion

La configuration d'une antenne traversant l'interface de deux demi-milieux demande le calcul d'un nombre d'éléments assez important afin d'atteindre la convergence dans le calcul du courant. Cependant, dans les cas numériques traités, pour une longueur d'antenne L et un rayon a , le nombre maximum d'éléments qui peut être pris est limité à $L/10a$ afin de respecter les approximations sur les antennes minces.

Par contre, en ce qui concerne le calcul du champ électrique, la convergence est atteinte rapidement, néanmoins si la distance qui sépare le pylône du point de réception est de l'ordre de grandeur du rayon, on obtient un champ oscillant en fonction de z , mais seule, la valeur moyenne est égale au champ incident. Pour $L = 10\text{m}$ et $a = 5\text{cm}$ et pour un découpage maximal de 20 éléments, il faut que $r \geq 0.5\text{m}$ ($r = \Delta = 10a$) pour que les valeurs calculées du champ re-rayonné soient valables. De plus, nous pouvons considérer que le module du champ total peut être la différence des modules du champ incident et du champ rayonné à des distances proches du pylône et en basses fréquences ($f \leq 3\text{ MHz}$).

Nous pouvons dire aussi que, le pylône diminue l'amplitude du champ total si la distance de réception r est inférieure à 5m , mais n'apporte pas de changement sur la forme du signal quelle que soit la distance r , tout au moins dans la gamme de fréquences qui a fait l'objet de l'étude.

CHAPITRE V

TRANSITION SOL-MER

INTRODUCTION

Nous avons étudié, dans les chapitres précédents, le changement apporté par la présence d'une anomalie sur le comportement du champ électrique. Dans ce présent chapitre, nous établirons les équations permettant de déterminer les perturbations provoquées par la transition entre le sol et la mer. En effet, le changement brutal de conductivité entre ces deux milieux entraîne un changement local de l'amplitude et de la phase du champ électrique se propageant sur cette surface, la perturbation la plus importante est celle qui se produit près de la ligne de côte.

En premier lieu, nous introduisons le concept de l'impédance de surface et nous essayons de trouver une loi de variation de cette dernière au niveau de la transition. Ce concept nous permet de calculer le changement apporté au champ électrique par la ligne de côte. Ensuite, nous déterminerons le domaine fréquentiel dans lequel ce concept est valable.

Une étude paramétrique sera présentée afin de mettre en évidence le rôle des facteurs qui interviennent dans la perturbation au niveau de la transition.

V.1 - Transition de largeur faible

Supposons deux surfaces planes et infinies, l'une est la surface du sol caractérisée par sa conductivité σ_g et sa permittivité ϵ_g , l'autre, la surface de la mer caractérisée par (σ', ϵ') . L'intersection de ces deux surfaces est une droite confondue avec l'axe oy , le sol se trouve dans la partie des x négatifs et la mer est du côté des x positifs, figure (V.1).

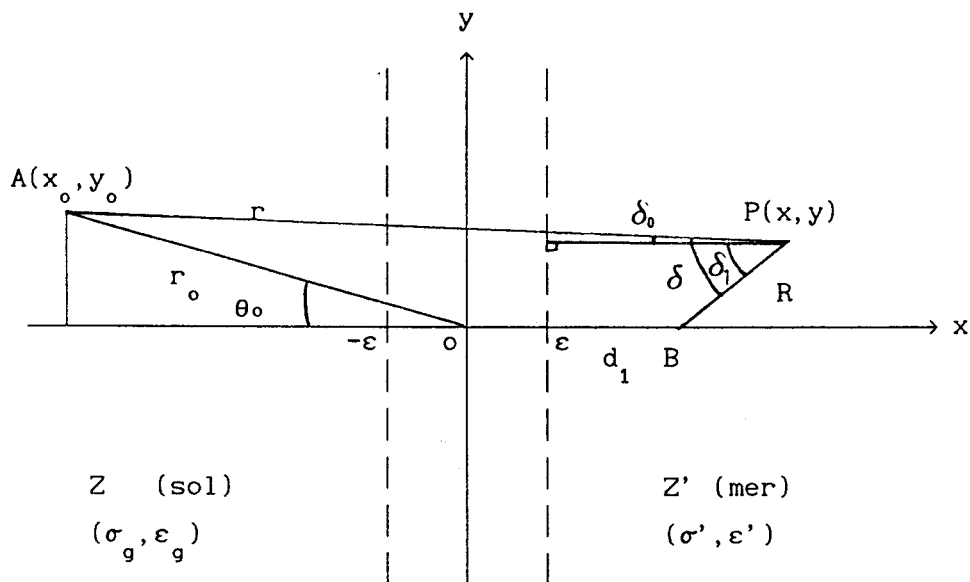


figure (V.1)

Nous nous intéressons au rayonnement d'un dipôle électrique vertical placé au point $A(x_0, y_0)$ sur la surface du sol à une hauteur $z = 0$ m et de hauteur effective h_a . La distance qui sépare cet émetteur de l'origine $(0,0)$ est r_0 faisant un angle θ_0 avec l'axe ox , le récepteur de hauteur

effective h_b peut se déplacer tout le long de l'axe ox et il est séparé de l'origine par une distance d_1 , le dipôle émetteur est parcouru par un courant I . Un point quelconque $P(x,y)$ de la surface est séparé de l'émetteur par une distance r et du récepteur par une distance R , les vecteurs unitaires de r et de R font un angle δ entre eux. Afin de simplifier le calcul de la perturbation produite par le changement de conductivité brutale entre le sol et la mer, nous supposons une zone de transition de largeur (2ε) entre le sol et la mer et nous supposons successivement que cette largeur est soit nulle (transition abrupte), soit faible. De plus, nous nous limitons au calcul du champ sur la surface du sol et de la mer ($z=0$).

V.2 - Impédance mutuelle entre deux dipôles

Avant de nous pencher sur la définition de l'impédance de surface mutuelle, définissons d'abord l'impédance de surface d'un demi-milieu homogène.

Supposons deux demi-milieux (1 et 2) homogènes et infinis, une onde plane se propageant dans le 1er demi-milieu est incidente sur la surface de séparation entre (1) et (2) avec un angle θ (figure V.2).

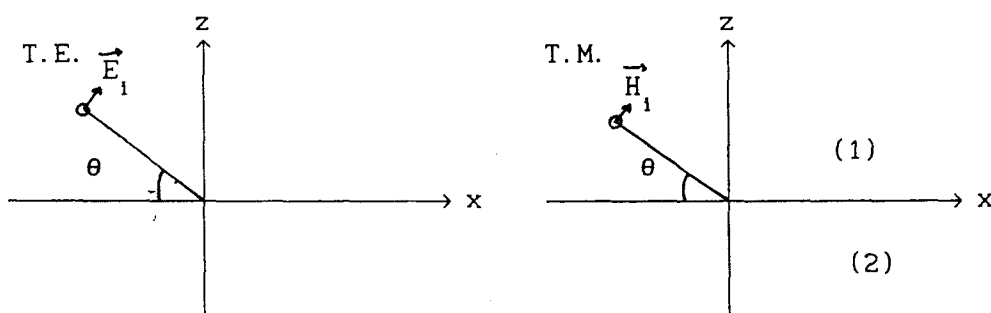


figure (V.2)

Les deux demi-milieux (1) et (2) sont caractérisés respectivement par : $(\sigma = 0, \epsilon_0)$ et (σ, ϵ) , l'impédance et l'admittance de surface peuvent être définies respectivement pour les modes T.E et T.M par les relations suivantes :

$$Z = E_x / H_y \tag{V.1}$$

$$Y = -H_x / E_y$$

Ces termes dépendent de l'angle d'incidence de l'onde mais des formules simples sont obtenues pour une incidence rasante et une incidence normale. En effet, l'impédance de surface correspond à une condition aux limites locales qui ne peut être réalisée strictement car, par définition, la surface doit être à symétrie de translation. Lorsque le champ électromagnétique est produit par un dipôle, le champ total est la superposition d'un spectre d'ondes planes et, par conséquent, au-delà d'une certaine distance associée aux termes d'induction, c'est-à-dire au-delà d'une longueur d'onde dans l'air, le concept d'impédance de surface retrouve une signification.

L'impédance de surface d'un demi-milieu homogène pour une incidence rasante est donnée par [16] :

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{j\omega\epsilon_0}{\sigma + j\omega\epsilon}} \sqrt{1 - \frac{j\omega\epsilon_0}{\sigma + j\omega\epsilon}} \tag{V.2}$$

On peut définir également une impédance de surface normalisée Δ définie par

$\Delta = Z/(120 \pi)$. Pour utiliser ce paramètre dans un cas général, il ne faut pas que Δ dépende de l'angle d'incidence θ . Ceci sera vérifié si le rapport

$$\left| \frac{j\omega\epsilon_0}{\sigma + j\omega\epsilon} \right| \ll 1, \text{ ce qui entraîne } |\Delta^2| \ll 1.$$

Cette inégalité que doit satisfaire Δ , et qui implique donc en B.F. que $\sigma \gg \omega\epsilon$ et en H.F. que $\epsilon \gg \epsilon_0$, est une autre façon d'exprimer la limitation du concept d'impédance de surface.

Afin de définir l'impédance mutuelle entre deux dipôles, supposons deux dipôles A et B où le dipôle B est entouré par une surface Σ (figure V.3).

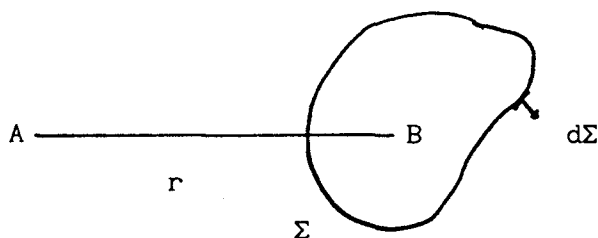


Figure (V.3)

Sur cette figure, le point B coïncide avec l'origine et peut se déplacer sur toute la surface Σ .

Soit I , le courant injecté dans le dipôle A qui crée au niveau du dipôle B un champ \vec{E}_a et \vec{H}_a et soit \vec{E}_b et \vec{H}_b les champs qui créeraient en A le dipôle B excité par le même courant I . Le théorème de réciprocité [17] permet d'exprimer l'impédance mutuelle entre les dipôles A et B, qui est définie

par, le rapport de la tension induite sur le dipôle A au courant source parcourant le dipôle d'émission B.

$$Z_{AB} = \frac{1}{I^2} \iint_{\Sigma} (\vec{E}_a \wedge \vec{H}_b - \vec{E}_b \wedge \vec{H}_a) d \vec{\Sigma} \quad (V.3)$$

Supposons maintenant que la surface sur laquelle sont implantées les antennes A et B change de caractéristiques. Le champ créé en P par le dipôle B parcouru par le même courant I deviendra \vec{E}'_b et \vec{H}'_b et l'impédance mutuelle entre les dipôles : Z'_{AB} . On peut formuler ce changement en disant que c'est une conséquence de la modification de circulation des courants dans le sol, modification qui crée en P un champ électrique $\vec{E}'_b - \vec{E}_b$ et un champ magnétique $\vec{H}'_b - \vec{H}_b$.

La différence d'impédance mutuelle se met sous la forme [18] :

$$Z'_{AB} - Z_{AB} = \frac{1}{I^2} \iint_{\Sigma} (\vec{E}'_b \wedge \vec{H}_a - \vec{E}_a \wedge \vec{H}'_b) d \vec{\Sigma} \quad (V.4)$$

en appliquant ceci à notre cas de la figure (V.1) et en utilisant la relation (V.1), nous obtenons :

$$\Delta Z_m = \frac{1}{I^2} \iint_S (Z' - Z) \vec{H}'_a \cdot \vec{H}'_b d S \quad (V.5)$$

S : la surface de la mer et zone de transition.

Le calcul approché de \vec{H}'_a et de \vec{H}'_b est donné par [17] :

$$\vec{H}_a = \frac{jk I h_a}{2\pi r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) e^{-jkr} F(r, Z) (\vec{i}_r \wedge \vec{i}_z)$$

(V.6)

$$\vec{H}'_b = \frac{jk I h_b}{2\pi R} \left(1 + \frac{1}{jkR} \right) e^{-jkR} F'(R, Z, Z') (\vec{i}_R \wedge \vec{i}_z)$$

$$r = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right]^{1/2}$$

$$R = \left[(x-d_1)^2 + y^2 \right]^{1/2}$$

\vec{i}_r , \vec{i}_R et \vec{i}_z sont les vecteurs unitaires respectivement de r , R et z .

F est la fonction d'atténuation de Sommerfeld propre au sol valable en tout point de la surface du sol homogène et plane.

$$F(r, Z) \approx 1 - j \sqrt{\pi w} e^{-w} \operatorname{erfc}(jw^{1/2}) \quad (V.7)$$

$$w = p \left[1 + (z+h)/r \cdot Z/\eta_0 \right]^2$$

$$p = \frac{-jkr}{2} (Z/\eta_0)^2$$

$$\eta_0 = 120\pi$$

erfc : la fonction d'erreur complémentaire.

z : altitude de l'émetteur.

h : altitude du récepteur.

Cette fonction F se réduit à l'unité dans le cas où $|w| \ll 1$ ($\sigma \rightarrow \infty$). Dans notre cas $z = h = 0$ m, d'où $w = p$ et F(w) se réduit à F(p) qui peut être considérée comme le facteur de correction à apporter au champ du dipôle calculé à la surface d'un plan conducteur parfait (donc pour tenir compte de la conductivité finie du sol).

F' est la fonction d'atténuation de Sommerfeld qui tient compte de l'irrégularité de la surface (changement de conductivité entre le sol et la mer). La forme générale de cette fonction est donnée par [17] :

$$F'(R, Z, Z') = F(R, Z) + \frac{kR}{2\pi j} e^{jkR} \iint_S (Z - Z') \frac{e^{-jk(r+R)}}{rR} \\ * \left(1 - \frac{j}{kR} \right) \left(1 - \frac{j}{kr} \right) F'(r, Z, Z') F(R, Z) \cos \delta \, dS$$

Si $|R k \Delta^2| \ll 1$, ce qui revient à dire, dans le cas des basses fréquences que R est inférieur ou du même ordre de grandeur que λ , cette fonction se réduit à l'unité.

A.N. si $f = 100$ kHz : dans le cas du sol, pour $\sigma_g = 0.01$ S/m et $\epsilon_{gr} = 15$, $\Delta^2 = 5.5 \cdot 10^{-4}$ et $R \ll 850$ km, et dans le cas de la mer, pour $\sigma' = 4$ S/m et $\epsilon'_r = 80$, $\Delta'^2 = 1.4 \cdot 10^{-6}$ et $R \ll 3.4 \cdot 10^6$ m.

Par contre, en haute fréquence, par exemple à $f = 5$ MHz, l'impédance de surface réduite du sol $\Delta^2 = 2.5 \cdot 10^{-2}$ et $R \ll 400$ m.

Cette formulation n'est valable que si les champs sous les surfaces sont

localement uniformes, c'est-à-dire, s'ils ne varient pas d'une façon significative sur une distance horizontale de l'ordre d'une longueur d'onde dans le sol.

En remplaçant \vec{H}_a et \vec{H}_b dans l'expression (V.5) et sachant que la surface S limite l'hétérogénéité seulement (la mer et la zone de transition qui ont des impédances de surface différentes du sol), nous aurons donc :

$$\Delta Z_m = - \frac{k^2}{4 \pi^2} \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk(r+R)}}{r R} F(r, Z) F'(R, Z, Z') (Z' - Z)^* \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \left(1 + \frac{1}{jkR} \right) \cos \delta \, dx \, dy \quad (V.8)$$

Dans cette intégrale, seule la contribution de R faible compte pour la valeur finale de ΔZ_m . Ceci limite la zone d'influence à un cercle de rayon R faible.

V.3 - Expression du champ électrique E_z

La composante du champ électrique E_z s'écrit sous la forme suivante [19] :

$$E_z = E_o \left[1 + \frac{\Delta Z_m}{Z_m} \right] \quad (V.9)$$

E_o : champ en milieu homogène identique à celui de l'émetteur.

$\Delta Z_m / Z_m$: est un terme correctif qui tient compte du changement de conductivité entre les deux surfaces (le sol et la mer).

Z_m est l'impédance mutuelle entre deux dipôles sur un sol homogène.

Etant donné que les champs électrique et magnétique créés par le dipôle émetteur en un point de la surface d'un sol homogène sont connus (fonctions de F), on peut calculer facilement l'impédance mutuelle Z_m à partir de l'équation (V.3).

V.4 - Calcul de $\Delta Z_m / Z_m$ sous forme intégrale

Nous allons faire plusieurs approximations afin de faciliter le calcul de ΔZ_m :

Supposons que $r_o \gg R$ et $r_o \gg d_1$, de ce fait la fonction d'atténuation $F(r, Z)$ peut être remplacée par $F(r_o, Z)$, et l'angle δ_o peut être confondu avec l'angle d'incidence θ_o .

La fonction $F'(R, Z, Z')$ peut être remplacée par l'unité, ceci est dû au fait que R est très faible, étant donné que, seule la contribution de R faible intervient dans la valeur finale de ΔZ_m .

Dans ce cas, nous avons :

$$\cos \delta = \cos (\delta_o + \delta_1) = \cos \delta_o \cos \delta_1 - \sin \delta_o \sin \delta_1$$

$$\sin \delta_o = S_1 = y_o / r_o$$

$$\cos \delta_o = C_1 = x_o / r_o$$

$$\sin \delta_1 = y/R \text{ et } \cos \delta_1 = \frac{x - d_1}{R}$$

$$\cos \delta \# \frac{x - d_1}{R} C_1 - y/R S_1$$

Dans le terme exponentiel $\exp(-jk(r+R))$, il est préférable de simplifier r par :

$$r^2 = (x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 \# r_0^2 + x C_1 - y S_1$$

En utilisant toutes ces simplifications, nous obtenons :

$$\Delta Z_m = - \frac{k^2 h_a h_b}{4 \pi^2} \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} F(r_0, Z) \int_{-\infty}^{\infty} \left[(Z' - Z) e^{-jkC_1 x} \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jkR}}{R} \left(1 + \frac{1}{jkR} \right) \left[\frac{x-d_1}{R} C_1 - \frac{y}{R} S_1 \right] e^{jkS_1 y} dy \right] dx \quad (V.10)$$

En intégrant par rapport à y (annexe 6), nous obtenons :

$$\frac{\Delta Z_m}{Z_m} = - \frac{j}{2} e^{j\alpha_1} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(|\alpha - \alpha_1|) e^{-j\alpha} \left[C_1 \frac{df(\alpha)}{d\alpha} - j \frac{f(\alpha)}{C_1} \right] d\alpha \quad (V.11)$$

ceci en posant $\alpha = kC_1 x$, $\alpha_1 = kC_1 d_1$ et $\alpha_0 = kC_1 \varepsilon$

$$f(\alpha) = (Z' - Z) / \eta_0$$

f peut être exprimée en fonction des caractéristiques du sol et de la mer comme suit :

$$f(\alpha) \# \sqrt{j\varepsilon_0 \omega} \left[\frac{1}{(\sigma' + j\varepsilon' \omega)^{1/2}} - \frac{1}{(\sigma_g + j\varepsilon_g \omega)^{1/2}} \right] \quad (V.12)$$

où $(\sigma_g, \varepsilon_g)$ caractéristiques électriques du sol.

(σ', ε') caractéristiques électriques de la mer.

V.5 - Transition abrupte

La fonction f représente la variation d'impédance de surface, or, s'il n'y avait que le sol comme surface de propagation, cette fonction vaudrait 0 (pas de changement d'impédance de surface mutuelle), comme la présence de la mer impose un changement d'impédance de surface, f vaut donc, $(Z - Z') / \eta_0$ à partir de $x \geq - \varepsilon$, Reste à définir la variation de f dans la zone de transition.

Supposons que ε tende vers zéro, l'impédance de surface passe donc de Z à Z' brutalement, dans ce cas, la fonction f(α) peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= -\Delta_0 e^{j\pi/4} u(\alpha) \\
u(\alpha) &= 1 \quad \text{pour } \alpha > 0 \\
&= 0 \quad \text{pour } \alpha < 0 \\
\Delta_0 &= \frac{Z-Z'}{\eta_0} e^{-j\pi/4}, \quad \Delta_0 \text{ est un réel.}
\end{aligned}$$

dans ce cas, $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = -\Delta_0 e^{j\pi/4} \delta(\alpha)$
où δ est l'impulsion de Dirac.

En intégrant par rapport à x dans ces conditions, nous aurons :

$$\frac{\Delta Z_m}{Z_m} = \Delta_0 C_1 \left[g_1(\alpha_1) + \frac{1}{C_1^2} g_2(\alpha_1) \right] \quad (V.13)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta Z_m}{Z_m} = C_1 \Delta_0 g(\alpha_1)$$

où $\alpha_1 = k C_1 d_1$

g_1, g_2 sont des fonctions de la variable α_1 , leurs expressions se trouvent en annexe 6.

En tenant compte de (V.9), le champ électrique est donc donné par la formule suivante :

$$E_z = E_0 \left[1 + C_1 \Delta_0 g(\alpha_1) \right] \quad (V.14)$$

où E_0 est le champ en milieu homogène identique à celui de l'émetteur.

$C_1 \Delta_0 g(\alpha_1)$: le terme correctif dû au changement de conductivité entre le sol et la mer.

rappelons que, ceci n'est valable que si $r_0 \gg R$ et $r_0 \gg d_1$.

V.6 - Etude paramétrique

Dans cette étude, les caractéristiques électriques du sol sont : $\sigma_g = 10^{-2} \text{ S/m}$ et $\epsilon_{gr} = 15$, et ceux de la mer sont : $\sigma' = 4 \text{ S/m}$ et $\epsilon'_r = 80$.

V.6.1 - Variation de $g(\alpha_1)$

Sur les figures (V.4) et (V.5), nous avons tracé les fluctuations des parties réelle et imaginaire de la fonction $g(\alpha_1)$, pour plusieurs angles d'incidence θ_0 . On note une singularité de la partie réelle en $\alpha_1 = 0$; ceci implique une valeur infinie du champ électrique au point de transition, ce qui n'est pas une réalité physique. En effet, nous avons considéré que la largeur de la zone de transition est nulle, et nous avons vu que le concept d'impédance de surface ne peut s'appliquer que dans des zones où le champ dans le sol ne subit pas de grandes variations sur une distance de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ_s dans le milieu conducteur. Il faudrait donc exclure une zone de largeur égale à λ_s de chaque côté de la discontinuité. Dans la suite du calcul, les distances étant souvent exprimées en nombre d'onde dans l'air, le calcul numérique de g a été fait en dehors de l'intervalle de α_1 définie par $[-0.01, 0.01]$.

De plus, cette fonction g dépend largement de l'angle θ_0 , comme le montrent les courbes, si θ_0 est supérieur à 60° et si $\alpha_1 < 0$, la partie réelle augmente beaucoup, mais en ce qui concerne la partie imaginaire, elle est très faible quel que soit θ_0 ($\text{Im}(g) < 0.5$), par contre, si $\alpha_1 > 0$, $\text{Im}(g)$

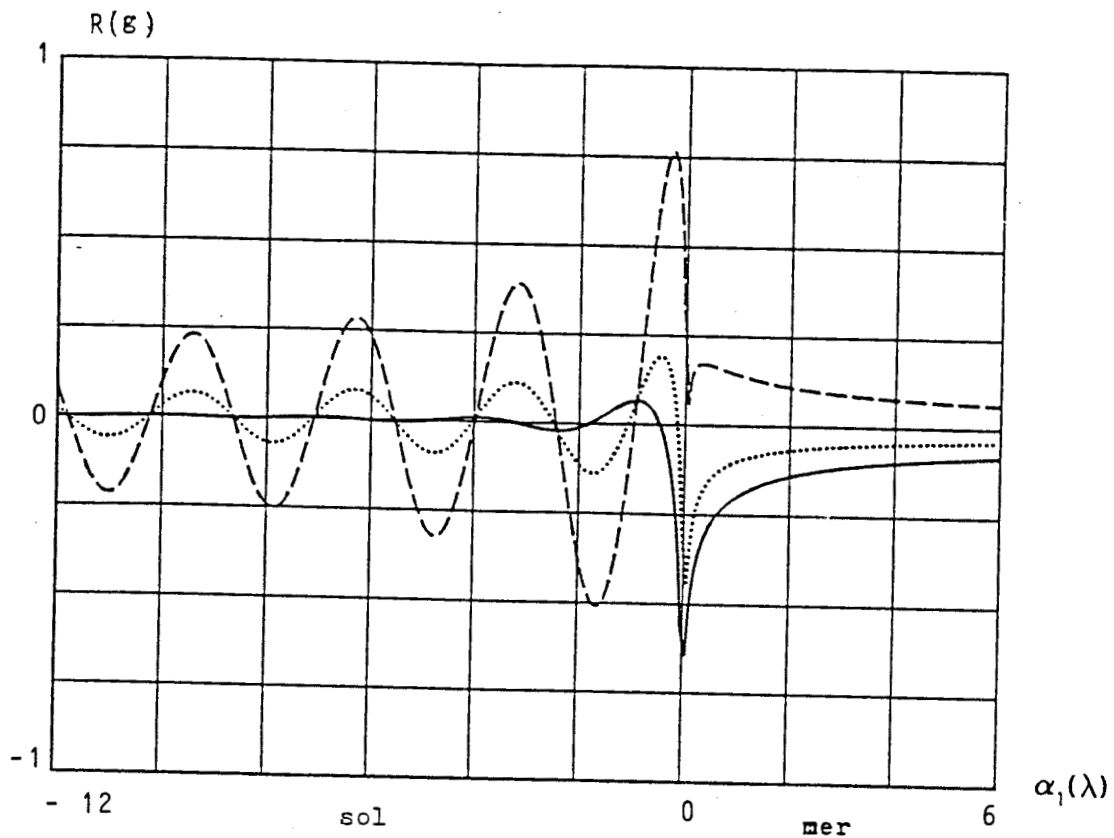


figure (V.4)

- $\theta_0 = 45^\circ$
- ... $\theta_0 = 55^\circ$
- - - $\theta_0 = 65^\circ$

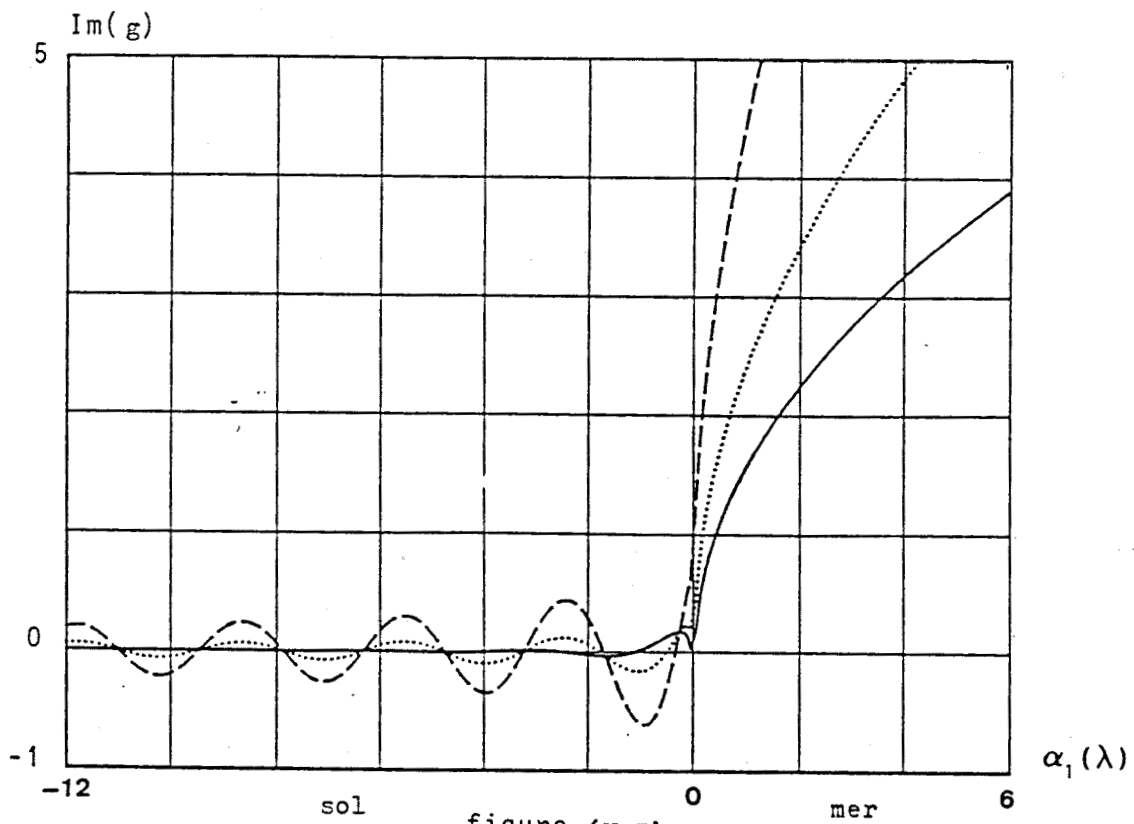


figure (V.5)

augmente beaucoup en fonction de α_1 , pour $\alpha_1 = 4$, et pour $\theta_0 = 55^\circ$, $\text{Im}(g) = 5$, et la partie imaginaire tend vers 0.

V.6.2 - Variation de E_z

La courbe (V.6) représente la variation de E_z en fonction de la distance d_1 qui sépare le récepteur de la ligne de côte, ceci a été effectué pour deux fréquences $f = 1$ MHz et 5 MHz, pour $\theta_0 = 0^\circ$ et pour un émetteur placé à une distance $r_0 = 10$ km de la transition sol-mer. Dans cette représentation, on a exclue une zone de 20 cm de largeur de chaque côté de la discontinuité.

On note qu'une augmentation de 40% de E_z pour $f = 5$ MHz, qui se manifeste progressivement sur plusieurs centaines de mètres, mais, cette perturbation est de l'ordre de 8% pour $f = 1$ MHz, ceci est illustré par la figure (V.7) qui est un agrandissement de la variation du champ autour du point de passage entre le sol et la mer. A noter aussi que, l'atténuation de E_z sur la mer est moins importante que sur le sol, ceci est dû à la grande conductivité de la mer.

V.7 - Impédance de surface variant linéairement

Dans la première partie, nous avons considéré que la transition entre les deux milieux est abrupte, ce qui entraînait une singularité au niveau du passage entre le sol et la mer. Afin d'éviter ceci, nous considérons que la fonction f , qui définit la variation de l'impédance de surface, varie linéairement dans la zone de transition de largeur d_0 , figure (V.8).

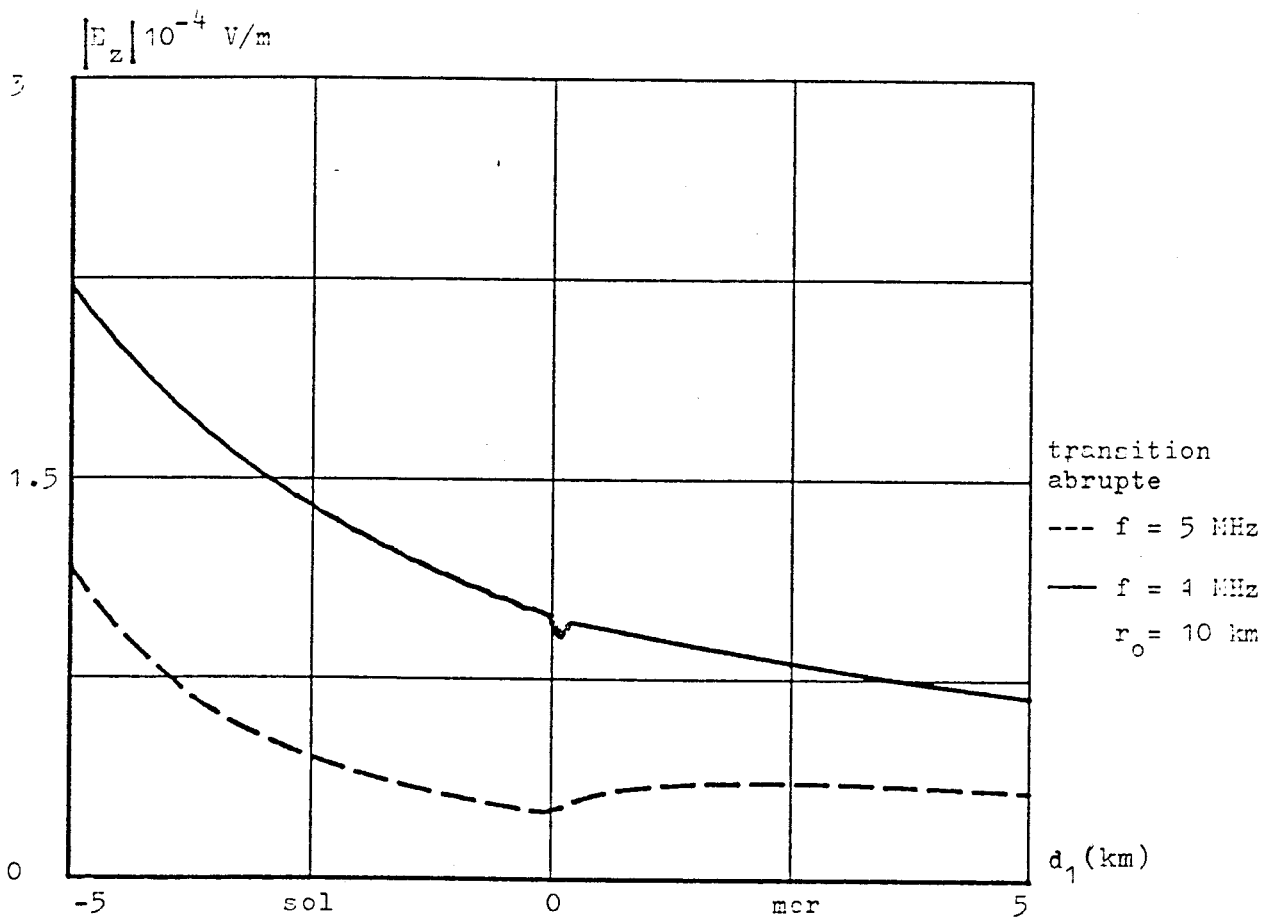


figure (V.6)

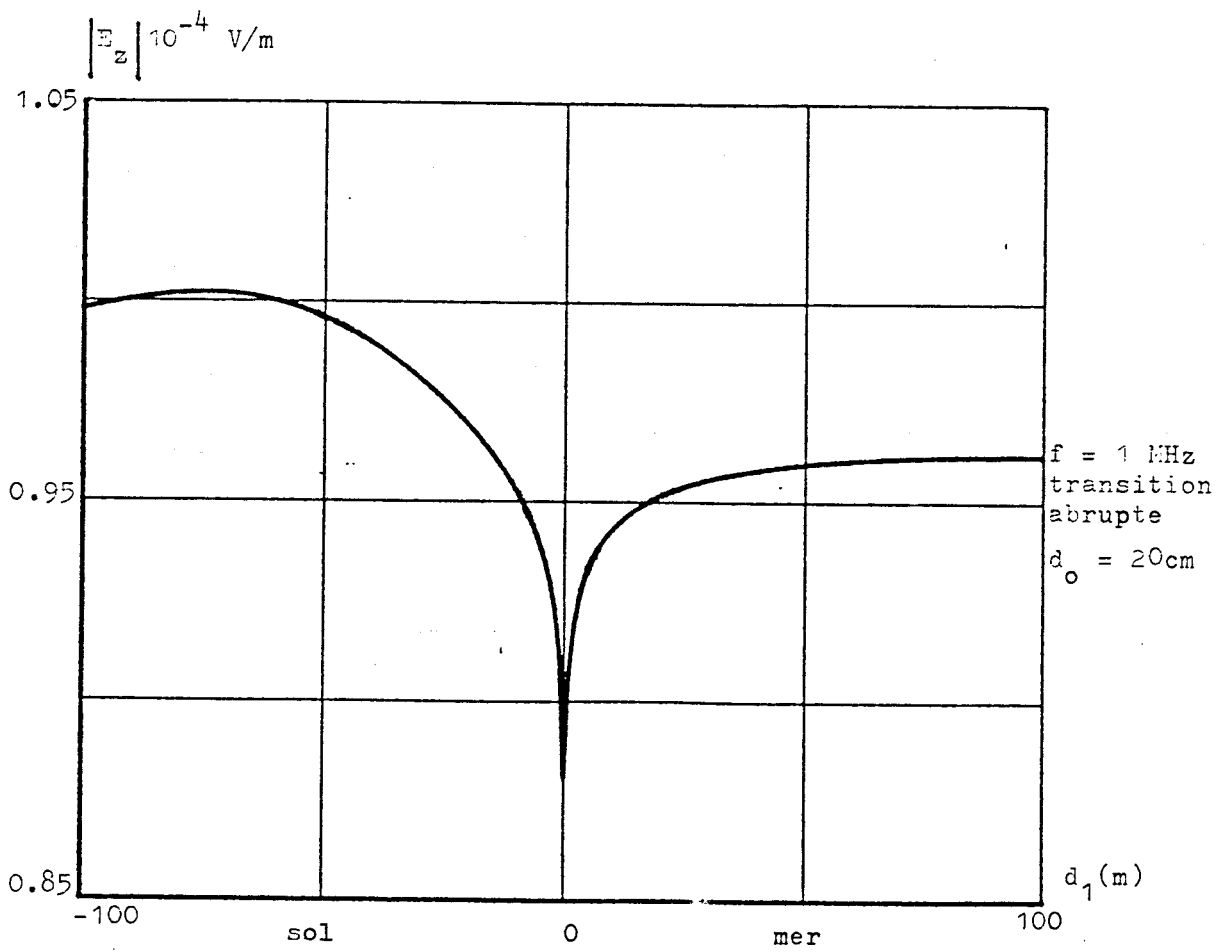


figure (V.7)

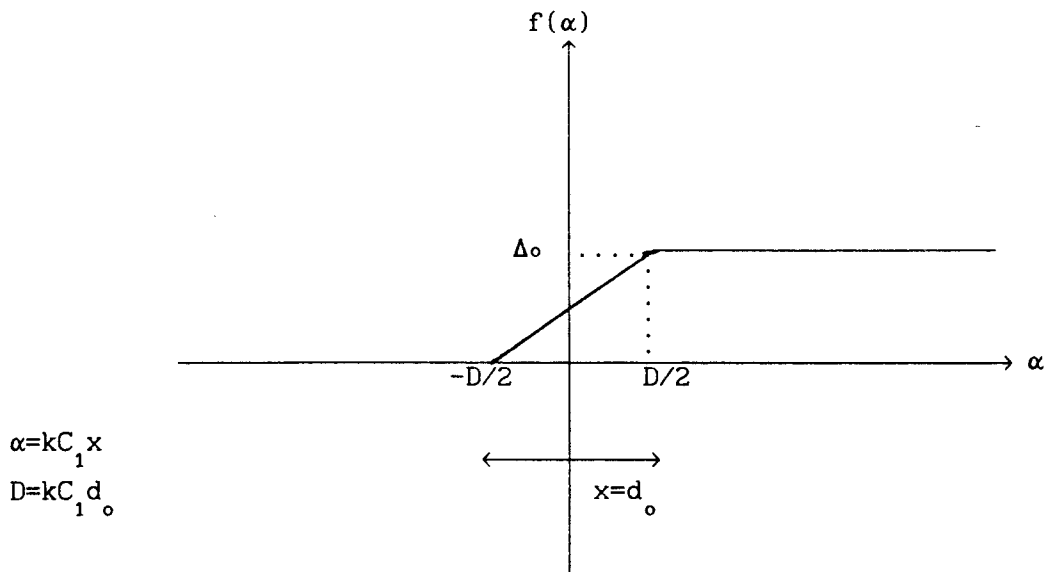


figure (V.8)

ceci se traduit par :

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= 0 \quad \text{pour} \quad \alpha < D/2 \\
 &= \frac{2\alpha + D}{2D} \Delta_0 \quad -D/2 < \alpha < D/2 \\
 &= \Delta_0 \quad \alpha > D/2
 \end{aligned}$$

Dans ces conditions, l'équation (V.11) devient :

$$\frac{\Delta Z}{Z_m} = \Delta_0 \left[C_1 Q_1 + \frac{Q_2}{C_1} \right] = \Delta_0 Q \quad (V.15)$$

où

$$Q_1 = \frac{e^{j3\pi/4}}{2D} e^{j\alpha_1} \int_{-D/2}^{D/2} H_0^{(2)}(|\alpha - \alpha_1|) e^{-j\alpha} d\alpha$$

$$Q_2 = \frac{e^{j\pi/4}}{2} e^{j\alpha_1} \left\{ \int_{-D/2}^{D/2} \frac{2\alpha+D}{2D} H_0^{(2)}(|\alpha-\alpha_1|) e^{-j\alpha} d\alpha \right. \\ \left. + \int_{D/2}^{\infty} H_0^{(2)}(|\alpha-\alpha_1|) e^{-j\alpha} d\alpha \right\}$$

Le calcul analytique de ces intégrales se fait facilement en utilisant les relations qui lient $H_0^{(2)}$ à sa dérivée.

Le champ électrique E_z est lié à la fonction Q par :

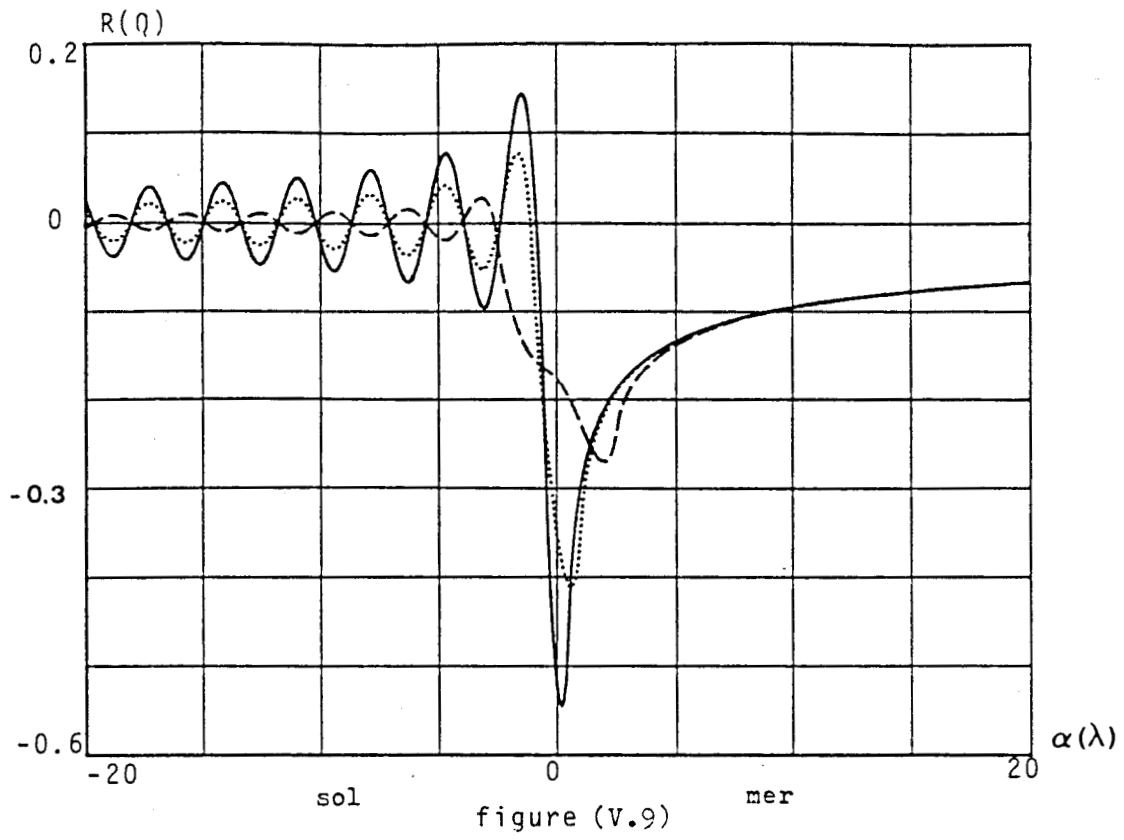
$$E_z = E_o [1 + \Delta_o Q(\alpha_1)] \quad (V. 16)$$

V.8 - Etude paramétrique

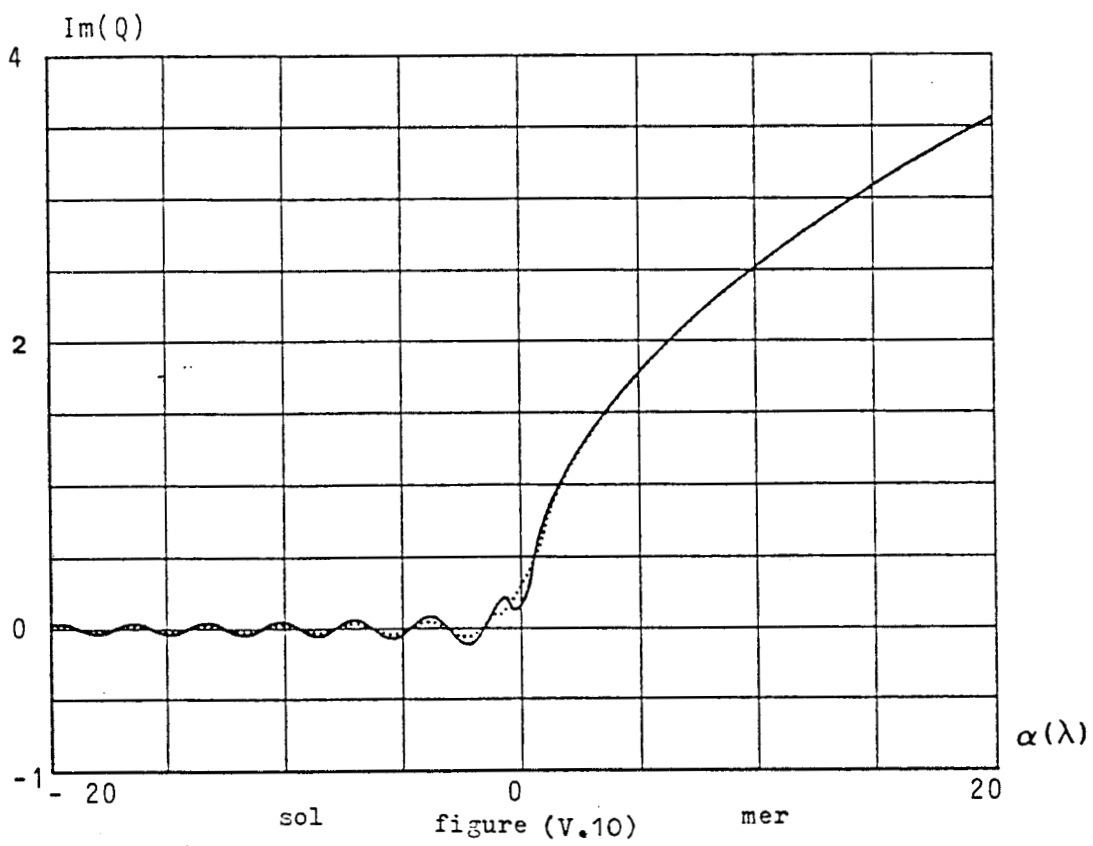
Les caractéristiques électriques du sol et de la mer restent les mêmes qu'en V.6 .

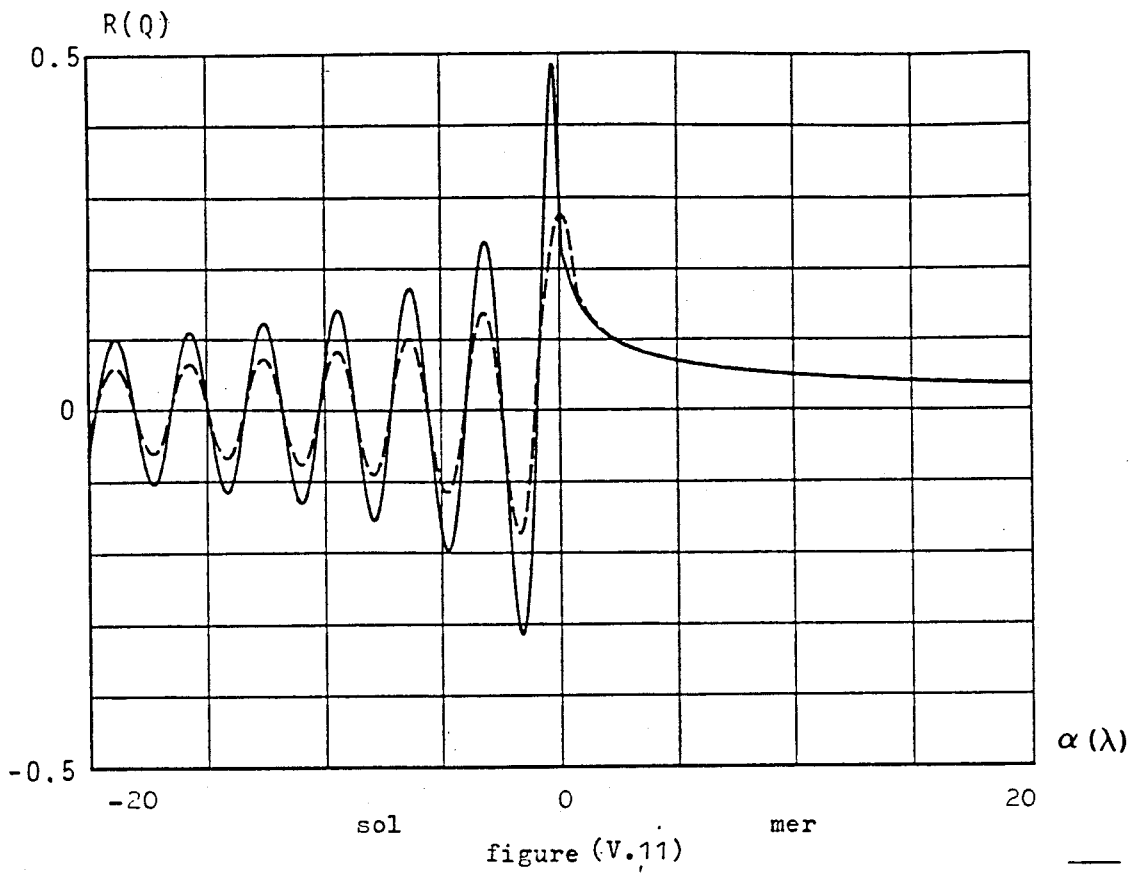
V.8.1 - Variation de $Q(\alpha)$

Sur les figures (V.9) à (V.12), nous avons représenté les variations des parties réelle et imaginaire de $Q(\alpha)$ pour plusieurs angles d'incidence et

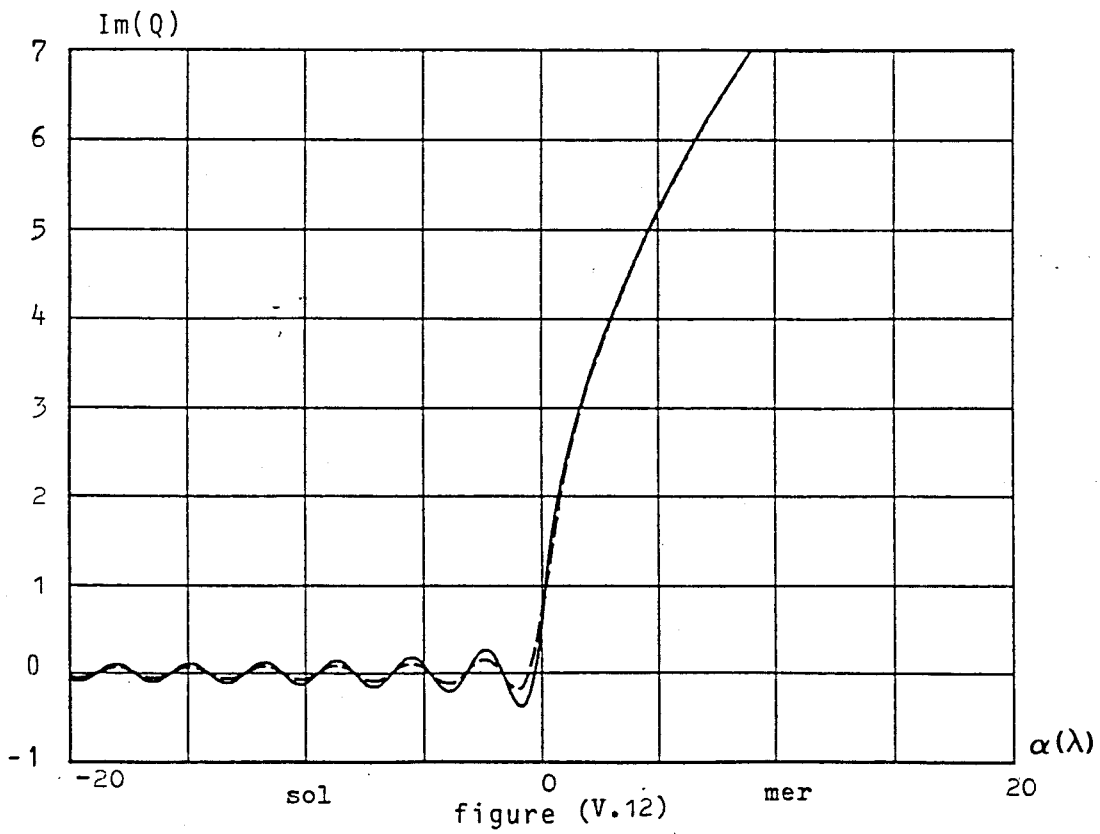


- D = 1
- ... D = 2
- - - D = 5
- $\theta_0 = 0^\circ$





— $D = 1$
 - - - $D = 5$
 $\theta_0 = 70^\circ$



pour plusieurs largeurs D exprimées en longueur d'onde dans l'air. Nous remarquons que la singularité au point $\alpha = 0$ a disparu pour une variation linéaire de l'impédance de surface dans la zone de transition. Comme le montrent les figures, la partie réelle de Q est très influencée par la largeur de la bande de transition, un changement plus brutal se produit si cette largeur diminue, pour une largeur égale à une longueur d'onde, on obtient $\text{Re}(Q) = -0.55$ au point de passage entre le sol et la mer, cette valeur est égale à -0.4 si la zone de transition est de largeur 2λ , mais si $\alpha \gg 0$, la partie réelle s'annule. En ce qui concerne la partie imaginaire, elle ne subit pas beaucoup de variation si la zone de transition change de largeur. Cependant, $\text{Im}(Q)$ prend de l'importance si α est grand, à titre d'exemple, $\text{Im}(Q) = 3.5$ pour $\alpha = 20$. De plus, si θ_0 augmente, cette partie imaginaire devient davantage importante, comme le montre la figure (V.12), $\text{Im}(Q) \approx 7$ pour $\alpha = 10$.

V.8.2 - Variation de E_z

La figure (V.13) représente la variation du champ E_z en fonction de d_1 , ceci pour une transition de largeur égale à $d_0 = 3$ m, pour trois fréquences 100 kHz, 1 MHz et 5 MHz et pour $r_0 = 10$ km. On remarque que, la variation de E_z dans ce cas est la même que celle obtenue dans le cas d'une transition abrupte, ceci est évidemment valable en dehors du point de passage entre les deux surfaces.

Afin de voir l'influence de la largeur de la zone de transition, nous avons tracé sur les figures (V.14, V.15, V.16), la variation du champ E_z dans les mêmes conditions que précédemment mais, pour deux valeurs de d_0 (3m, 30m). On note que, la perturbation apportée sur E_z , au niveau de la ligne de côte, est très dépendante de la largeur de la zone de transition. De plus, elle varie en fonction de la fréquence. Pour $f = 100$ kHz, cette diminution est de 4% si $d_0 = 3$ m, mais elle est seulement de 1.5% si $d_0 = 30$ m. Cependant, si $d_0 = 3$ m, cette perturbation est de l'ordre de 7% pour $f = 1$ MHz.

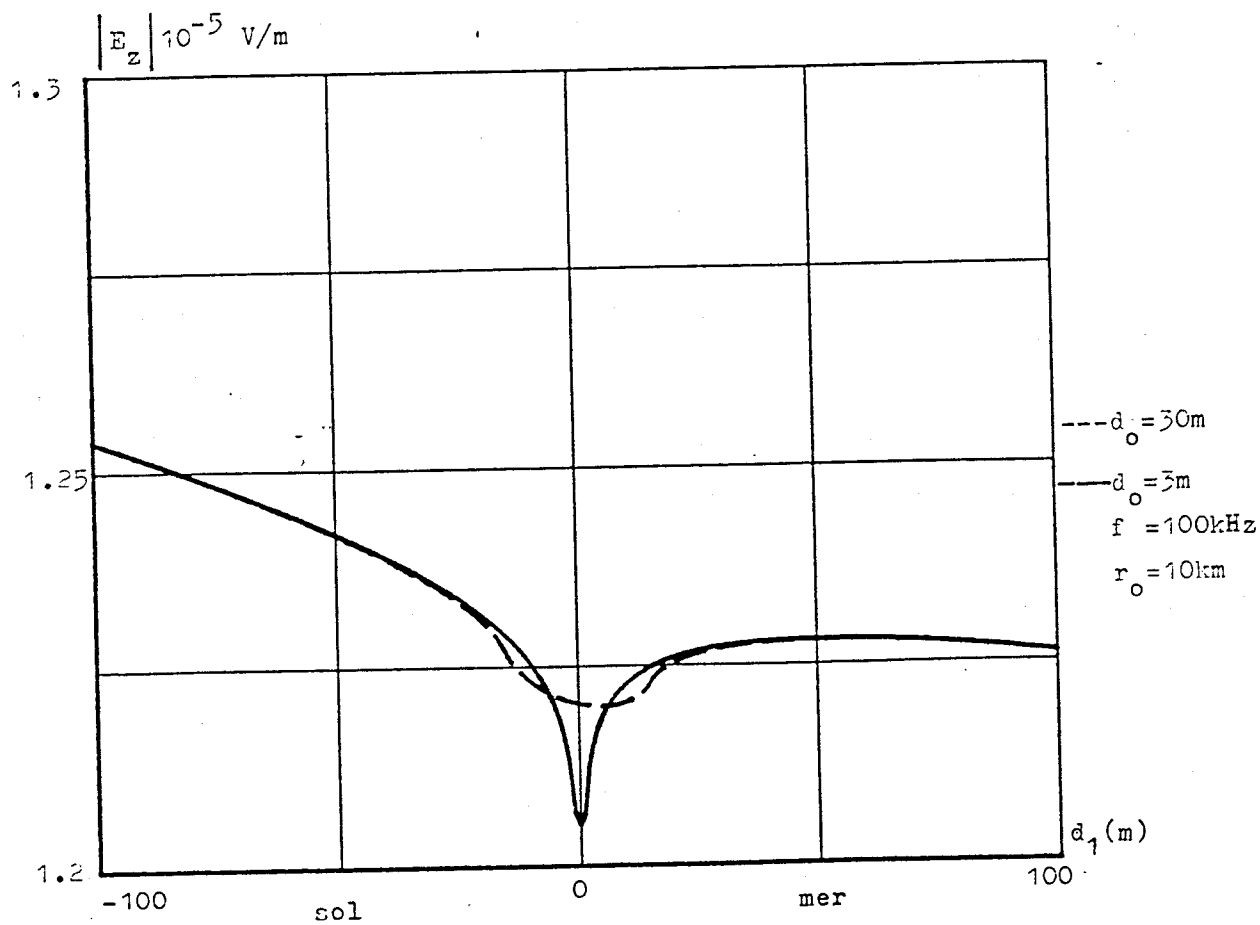
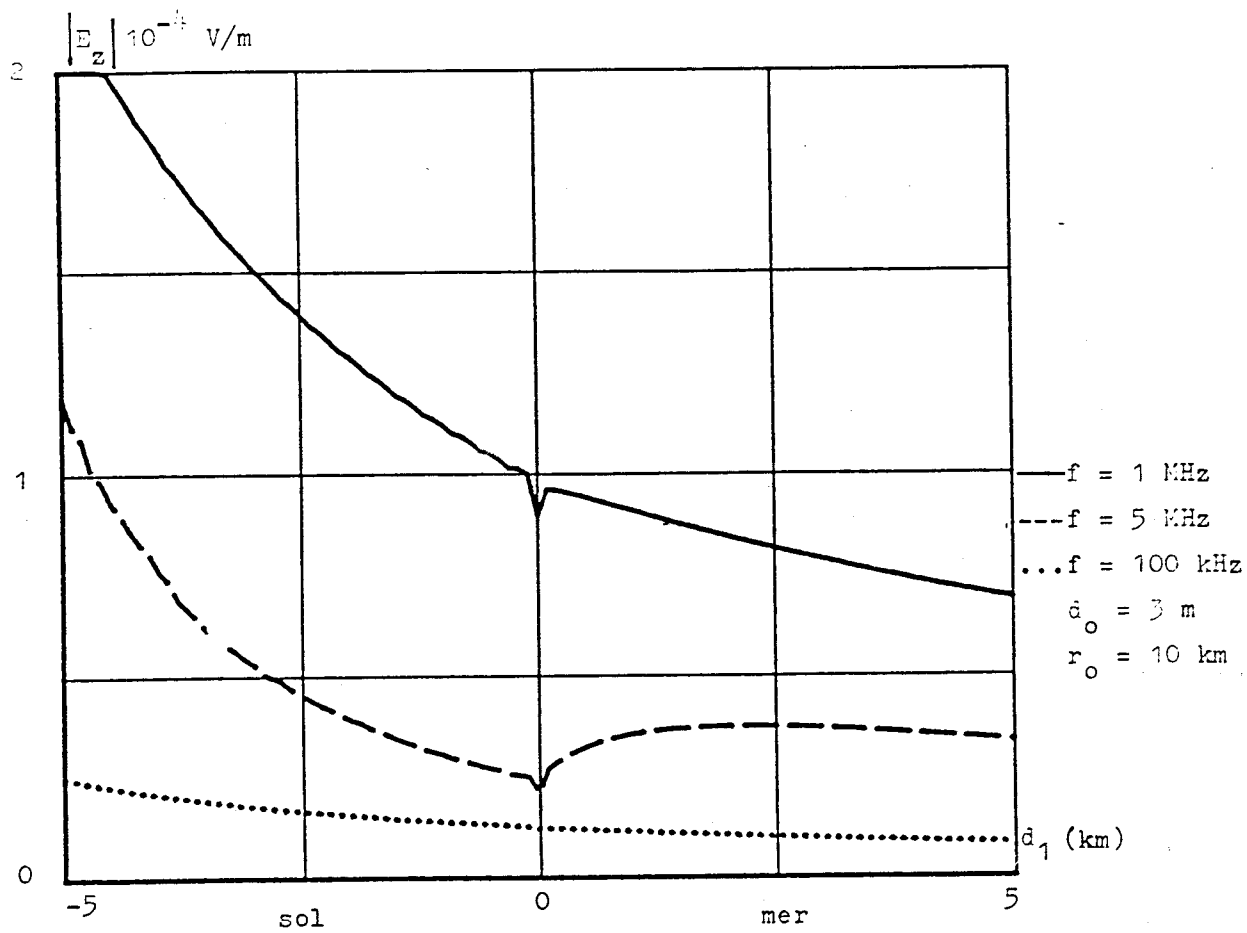


figure (V.14)

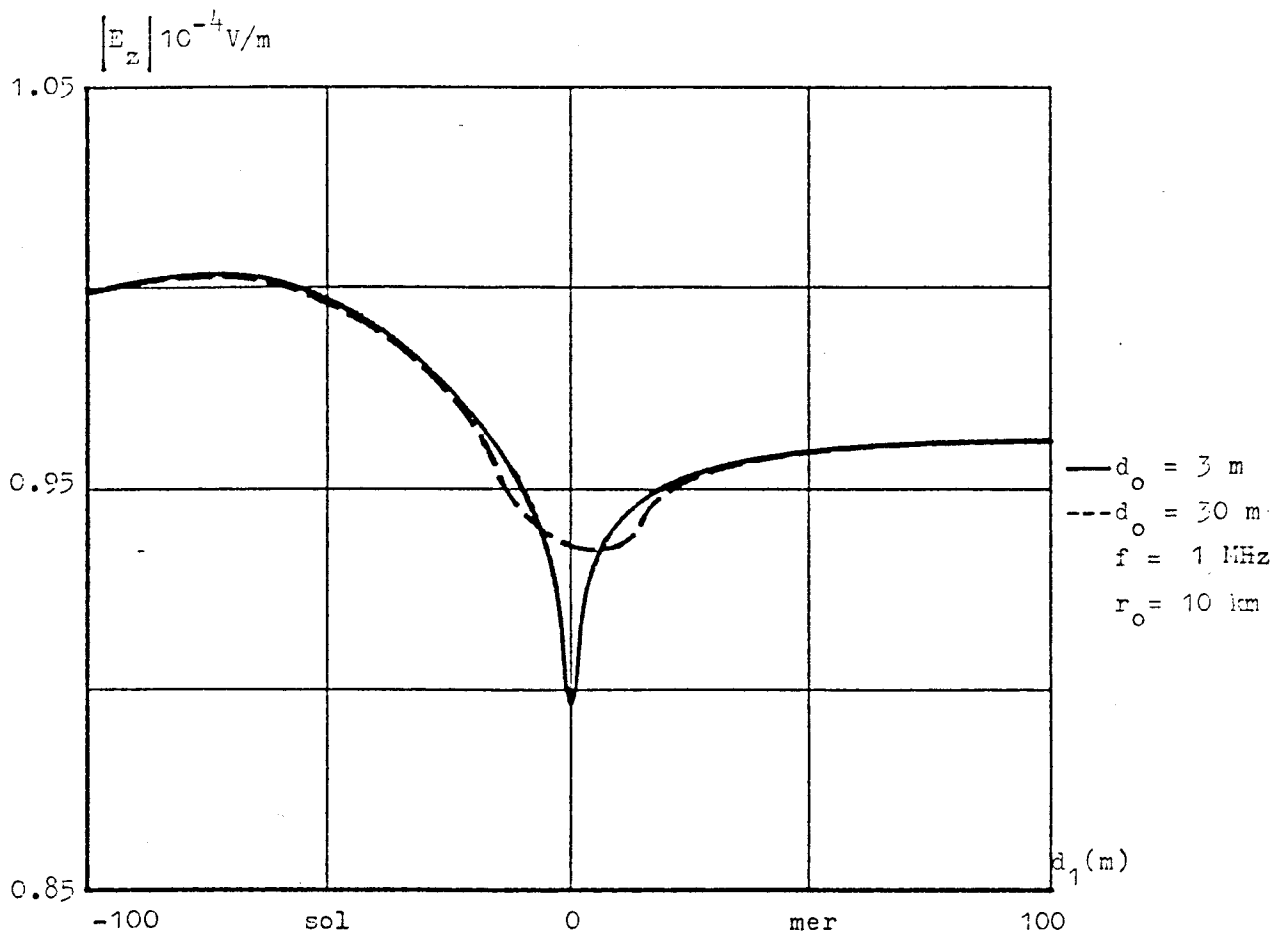


figure (V.15)

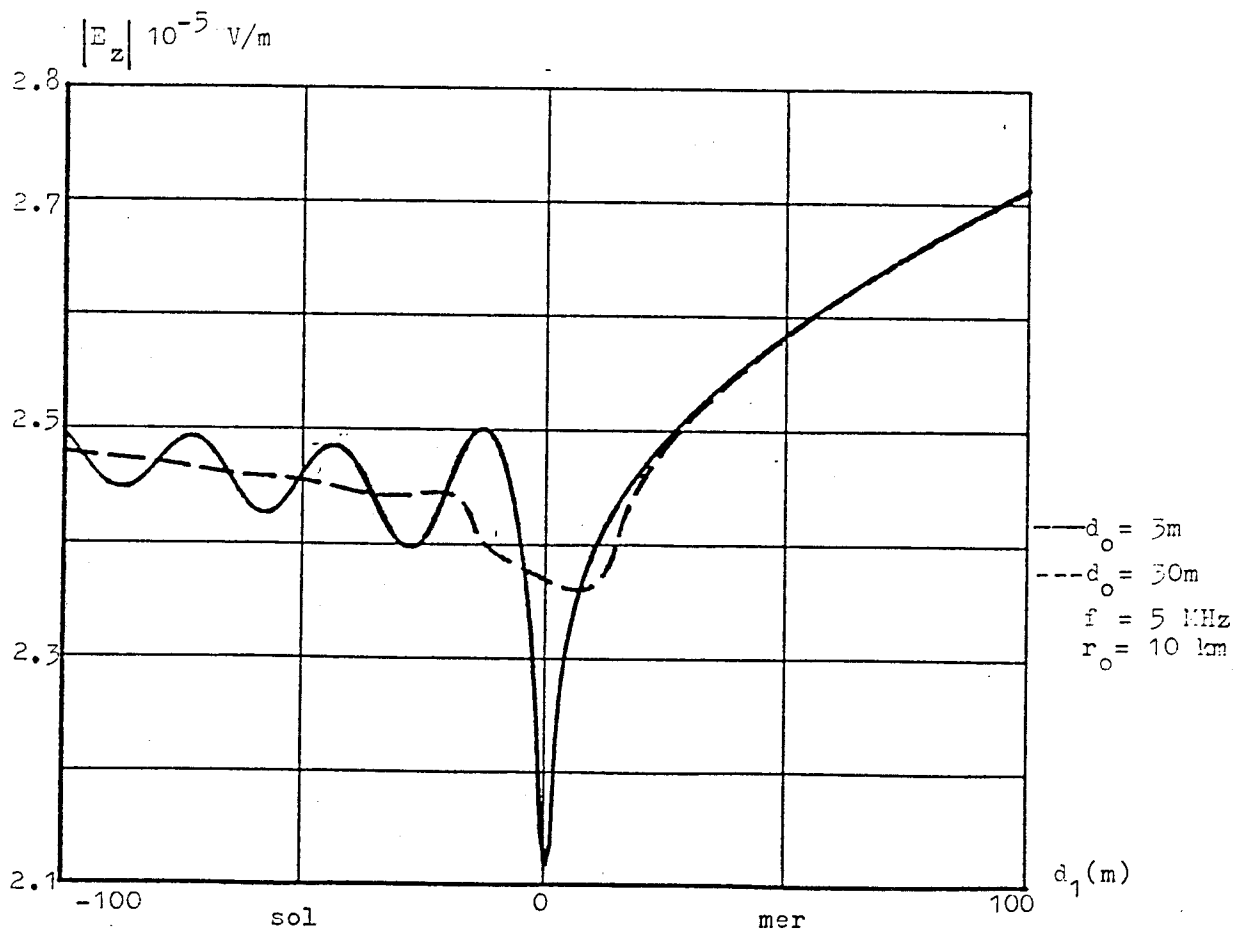


figure (V.16)

et de l'ordre de 16% pour $f = 5$ MHz sur une distance de l'ordre d'une dizaine de mètres.

V.9 - Influence de la courbure de la terre

Dans ce paragraphe, nous prenons en considération la courbure de la terre, puisque si la distance entre l'émetteur et le récepteur n'est plus négligeable par rapport au rayon de la terre, on ne peut plus considérer les surfaces de propagation comme planes comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent.

V.9.1 - Fonction d'atténuation

Considérons deux dipôles électriques verticaux, l'un est placé à une hauteur h_a de la surface du sol, l'autre est placé à une hauteur h_b et qui se trouve à une distance d_1 de la côte, l'émetteur est séparé d'une distance d du récepteur figure (V.17). les deux milieux : le sol et la mer ont des impédances de surface respectivement Z et Z' .

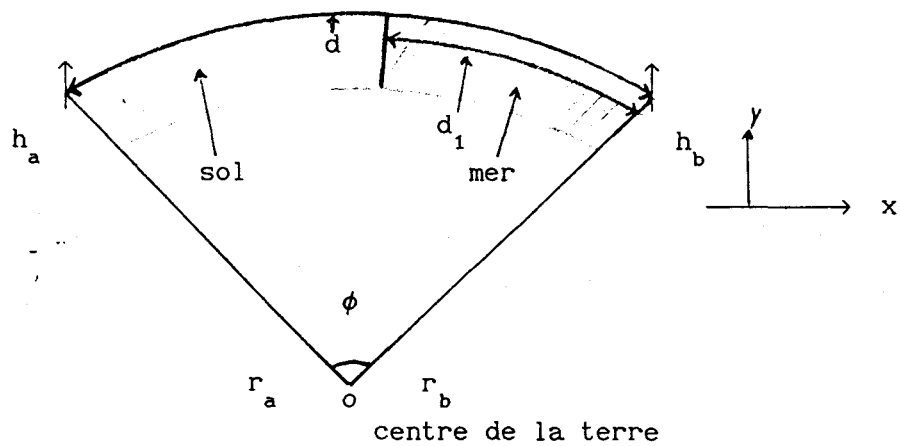


figure (V.17)

La fonction d'atténuation de Sommerfeld utilisée dans le 1er paragraphe est valable dans un domaine où la distance entre l'émetteur et le récepteur est très faible devant le rayon de la terre. Cependant, la solution du problème de la propagation sur une terre sphérique est donnée sous forme d'une série harmonique [20], mais la convergence de cette série est si lente qu'elle empêche toute évaluation numérique en basses fréquences.

Mais il est possible de transformer cette série harmonique en intégrale complexe où la solution est une série de résidus [20] dont la convergence est plus rapide, la fonction d'atténuation dans ce cas s'écrit sous la forme suivante [21] :

$$W(x, q) = \sqrt{\frac{\pi x}{j}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-jxt_s}}{t_s - q^2} \quad (\text{V.17})$$

où :

$$x = (ka/2)^{1/3} (d/a)$$

$$q = -j (ka/2)^{1/3} Z / \sqrt{\mu_o / \epsilon_o}$$

q : est une impédance de surface réduite.

a : le rayon de la terre.

Cette fonction est valable en tout point d'une surface sphérique homogène dans le cas où $h_a = h_b = 0$ m et $\phi \neq 0$ et π .

Les termes t_s intervenant dans l'équation (V.17) sont les racines de de l'équation suivante :

$$\frac{dw}{dt} \Big|_{t=t_s} - q w(t_s) = 0 \quad (\text{V.18})$$

La fonction w est une combinaison linéaire des fonctions d'Airy :

$$w(t) = \sqrt{\pi} [Bi(t) - j Ai(t)] \quad (V.19)$$

Dans le cas où h_a et h_b ne sont pas nulles, la fonction W devient :

$$W(x, q) = \sqrt{\frac{\pi x}{j}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-jxt_s}}{t_s - q^2} \frac{w(t_s - y_a)}{w(t_s)} \frac{w(t_s - y_b)}{w(t_s)} \quad (V.20)$$

$$\text{où } y_a = (2/ka)^{1/3} k h_a$$

$$\text{où } y_b = (2/ka)^{1/3} k h_b$$

V.9.2 - Expression du champ électrique

Dans le cas d'une terre sphérique homogène, le champ électrique se met sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_o W(x, q)$$

$$\text{où } E_o = j\omega\mu I ds \exp(-jkd)/2\pi d$$

En tenant compte du changement de conductivité entre le sol et la mer et en utilisant le théorème de réciprocité, et négligeant les réflexions susceptibles de se produire par la ligne de côte, on démontre [16] que le champ peut s'exprimer comme suit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 W'(x, q, q')$$

où I : le courant traversant l'émetteur.

$$k = 2\pi/\lambda$$

W' : la fonction d'atténuation sphérique en présence des deux surfaces. Dans le cas où $h_a = h_b = 0$ m, W' est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 > 0 \quad W'(x, q, q') = W(x, q) + \sqrt{\frac{x}{j\pi}} (q' - q) \int_0^{x_1} \frac{W(x-x', q) W(x', q')}{\sqrt{x'(x'-x)}} dx' \\ d_1 < 0 \quad W'(x, q, q') = W(x, q) \end{array} \right. \quad (V.21)$$

$$x = (ka/2)^{1/3} (d/a)$$

$$x' = (ka/2)^{1/3} (d_1/a)$$

$$q = -j (ka/2)^{1/3} Z / \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$$

$$q' = -j (ka/2)^{1/3} Z' / \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$$

V.9.3 - Traitement numérique

V.9.3.1 - Calcul des racines complexes t_s

Pour résoudre l'équation différentielle (V.18), nous distinguons deux cas :

1er cas, $|q| \leq 1$

Les racines t_s sont des fonctions de la variable q et satisfont l'équation différentielle suivante [22] :

$$\frac{dt_s}{dq} = \frac{1}{t_s - q^2} \quad (\text{V.22})$$

et la condition initiale est :

$$t_s|_{q=0} = t_s(0) = \alpha'_s e^{-j\pi/3}$$

où α'_s est un zéro de $A_1(-\alpha)$, tel que $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \alpha'_3 < \dots$

Pour avoir $t_s(q)$ qui est la racine recherchée, nous constituons une suite de $R+1$ éléments de la manière suivante :

la suite : $0 = q_1, q_2, \dots, q_R = q$

La relation de récurrence qui lie les éléments est :

$$t_s(q_{j+1}) = t_s(q_j) + \frac{1}{6} \Delta q (y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) \quad (\text{V.23})$$

$$\Delta q = q / R$$

$$y_1 = \Phi (q_j , t_s(q_j))$$

$$y_2 = \Phi (q_j + 1/2 \Delta q , t_s(q_j) + 1/2 y_1)$$

$$y_3 = \Phi (q_j + 1/2 \Delta q , t_s(q_j) + 1/2 y_2)$$

$$y_4 = \Phi (q_j + \Delta q , t_s(q_j) + y_3)$$

$$\Phi (q, t) = \frac{1}{t-q^2}$$

Dans la relation de récurrence (V.23), le développement jusqu'à l'ordre quatre a été retenu, puisque ceci donne une bonne précision.

2° cas, $|q| > 1$:

Supposons que $q'=1/q$, les racines t_s satisfont l'équation suivante :

$$\frac{dt_s}{dq'} = \frac{1}{1 - t_s q'^2} \quad (V.24)$$

et la condition initiale est :

$$t_s \Big|_{\substack{q'=0 \\ q=\infty}} = t_s(\infty) = \alpha_s e^{-j\pi/3}$$

où α_s est un zéro de $A_1(-\alpha)$.

Pour l'obtention des racines $t_s(q)$, la même démarche que précédemment sera suivie, tout en remplaçant q par q' et Φ par Φ' tel que :

$$\Phi'(q, t) = \frac{1}{1 - tq'^2}$$

V.9.3.2 - Calcul de la série $W(x, q)$

La convergence de cette série est très lente et dépend des deux variables x et q . En effet, pour atteindre la convergence dans certains cas, plus de 500 termes sont nécessaires, ceci exige un temps de calcul considérable, surtout si l'on prend en compte l'intégration de cette série par rapport à la variable x . De plus, si l'on doit calculer un grand nombre de termes, cela sera au détriment de la précision. Donc il faut chercher une série équivalente qui converge très rapidement et qui donne une précision convenable quant au calcul final.

Dans ce cadre de développement, nous distinguons plusieurs cas suivant les valeurs de x et de q .

1er cas :

$x \geq 0.2$, étant donné que, dans le terme général de la série W , le terme exponentiel tend vers 0 assez rapidement, nous pouvons utiliser la formule de W , afin d'obtenir sa somme.

2° cas :

$x \leq 0.2$ et $|q| < 1$

Dans ce cas de figure, nous utilisons la série suivante [22] :

$$W(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(q) \left[e^{j\pi/4} q x^{1/2} \right]^m \quad (V.25)$$

Cette série converge très rapidement, 10 termes seulement sont nécessaires pour avoir une bonne précision, ces termes sont donnés en annexe 6.

3° cas :

$x < 0.2$ et $|q| \geq 1$

Nous utilisons le développement suivant :

$$\begin{aligned} W(x, q) = & F(p) - \left[(1+2p) F(p) + j (\pi p)^{1/2} - 1 \right] * \frac{1}{4 q^3} + \\ & \left[(p^2/2-1) F(p) - j (\pi p)^{1/2} (1-p) + 1 - 2p + \frac{5p^2}{6} \right] * \frac{1}{4 q^6} - \\ & \left[\left(\frac{35}{8} - \frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{6} \right) F(p) + j (\pi p)^{1/2} \left(\frac{35}{8} - \frac{35p}{8} + \frac{31p^2}{16} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{5p^3}{16} \right) - \frac{35}{8} + \frac{35p}{4} - \frac{67p^2}{12} + \frac{5p^3}{3} \right] \frac{1}{8 q^9} + \dots \quad (V.26) \end{aligned}$$

où $F(p) = 1 - j (\pi p)^{1/2} e^{-p} \operatorname{erfc}(j p^{1/2})$

$$p = jx q^2$$

Le calcul de fonction d'erreur complémentaire erfc se fait facilement en utilisant son développement en série.

V.10. - ETUDE PARAMETRIQUE DE W'

Nous présentons quelques courbes, afin de voir la fluctuation de la fonction d'atténuation W' en fonction de $(d-d_1)$, distance entre émetteur et la côte, et d'autres pour mettre en évidence l'influence de la fréquence.

V.10.1 - Influence de la distance entre l'émetteur et la zone de transition

Les figures (V.18) et (V.19) représentent respectivement, le module et la phase de la fonction d'atténuation W' en fonction de la distance émetteur-récepteur, ceci a été effectué pour les données suivantes :

une fréquence $f = 10$ MHz, $h_a = h_b = 0$ m, $\sigma = 10^{-2}$ S/m, $\sigma' = 4$ S/m, $\epsilon/\epsilon_0 = 15$, $\epsilon'/\epsilon_0 = 80$ et pour plusieurs distances émetteur-zone de transition (1, 10, 50 km).

Nous remarquons que, si la surface de propagation est la mer, l'atténuation du champ électrique est faible en fonction de d , ceci est dû à la bonne conductivité de la mer 4 S/m. Par contre, si la surface est celle de la terre, nous obtenons une atténuation assez importante environ $1/d$. Maintenant, si le milieu de propagation est constitué des deux surfaces, celles de la terre et de la mer, on voit qu'un changement brutal se produit (augmentation du module et diminution de la phase) dans la zone de transition, cela est d'autant plus important que la distance émetteur-récepteur est grande par rapport à la longueur d'onde. En effet, pour une distance émetteur-côte $(d-d_1) = 1$ km, l'augmentation du champ dans la zone de transition est de 30 % et elle est de 400 % si $d - d_1 = 10$ km, mais le changement de phase est de l'ordre de $\pi/4$ dans les deux cas.

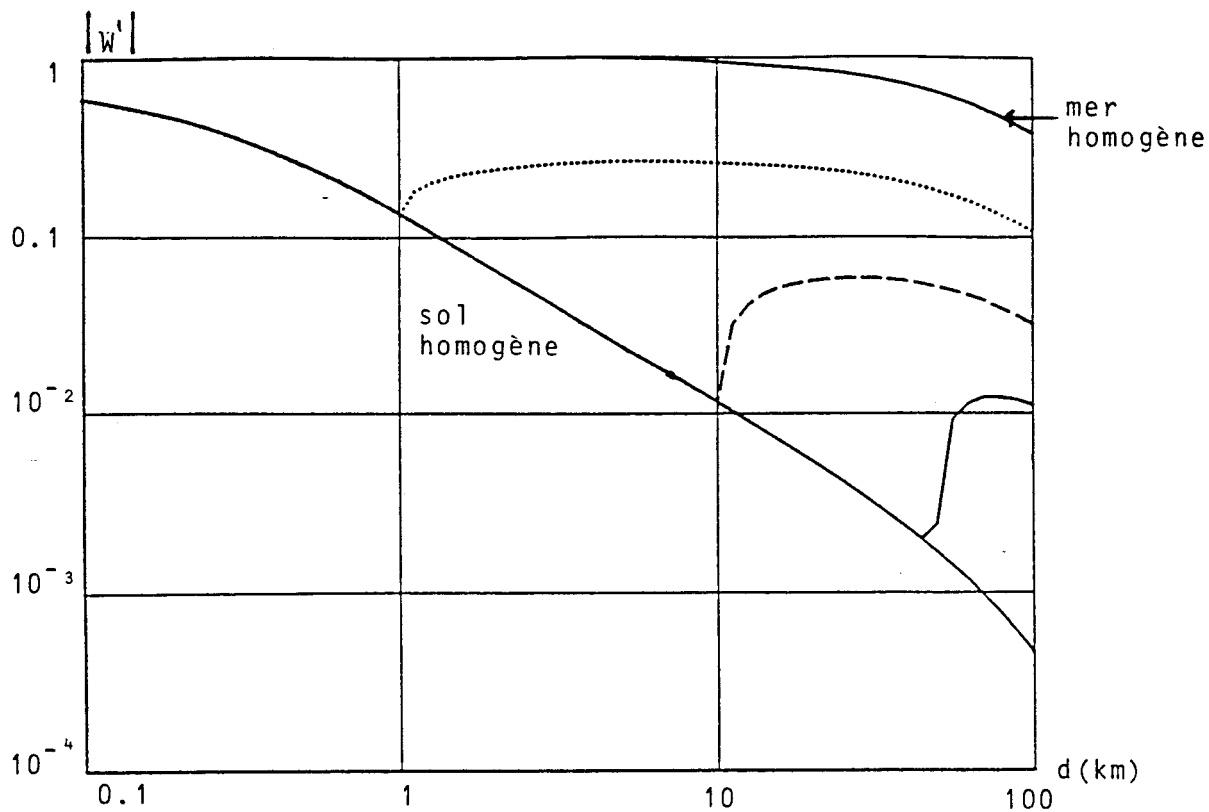


figure (V.18)

... $d - d_1 = 1$ km
 --- $d - d_1 = 10$ km
 — $d - d_1 = 50$ km
 $f = 10$ MHz

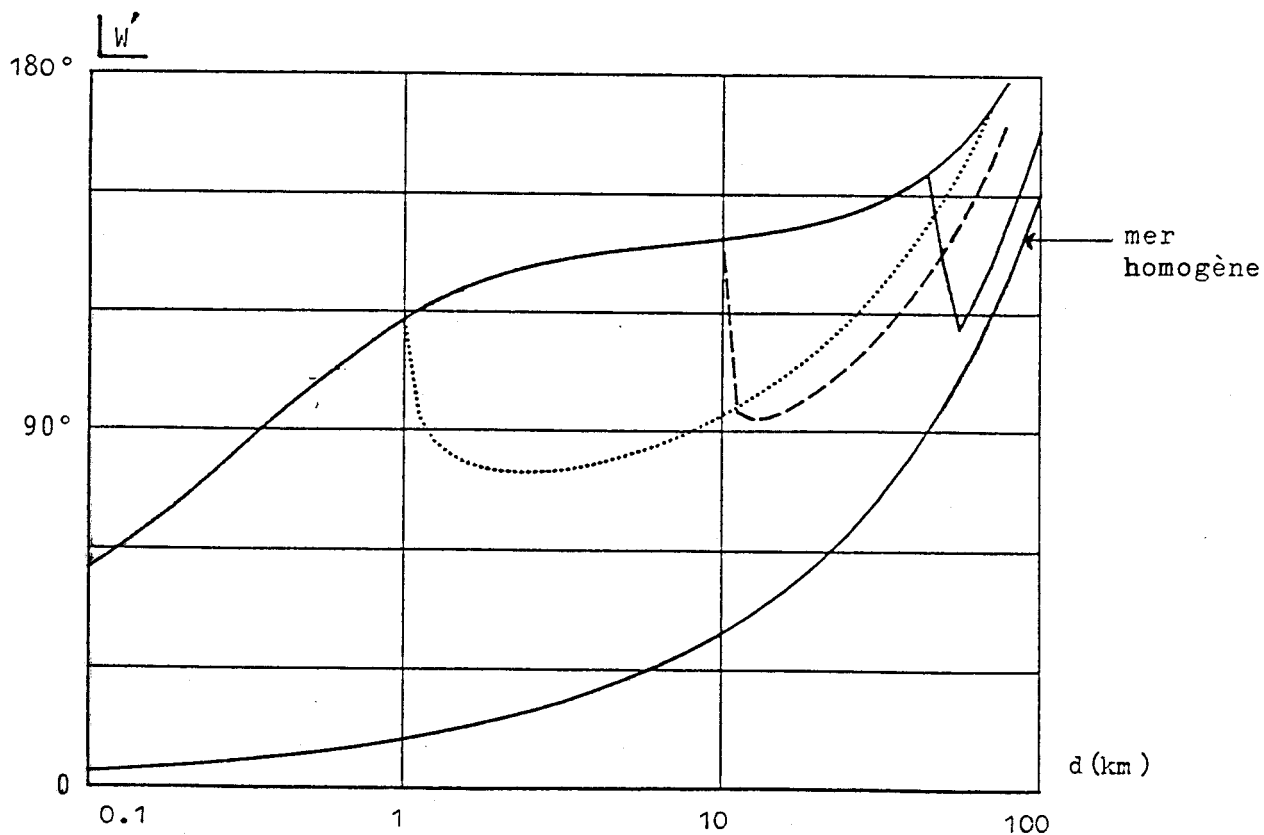


figure (V.19)

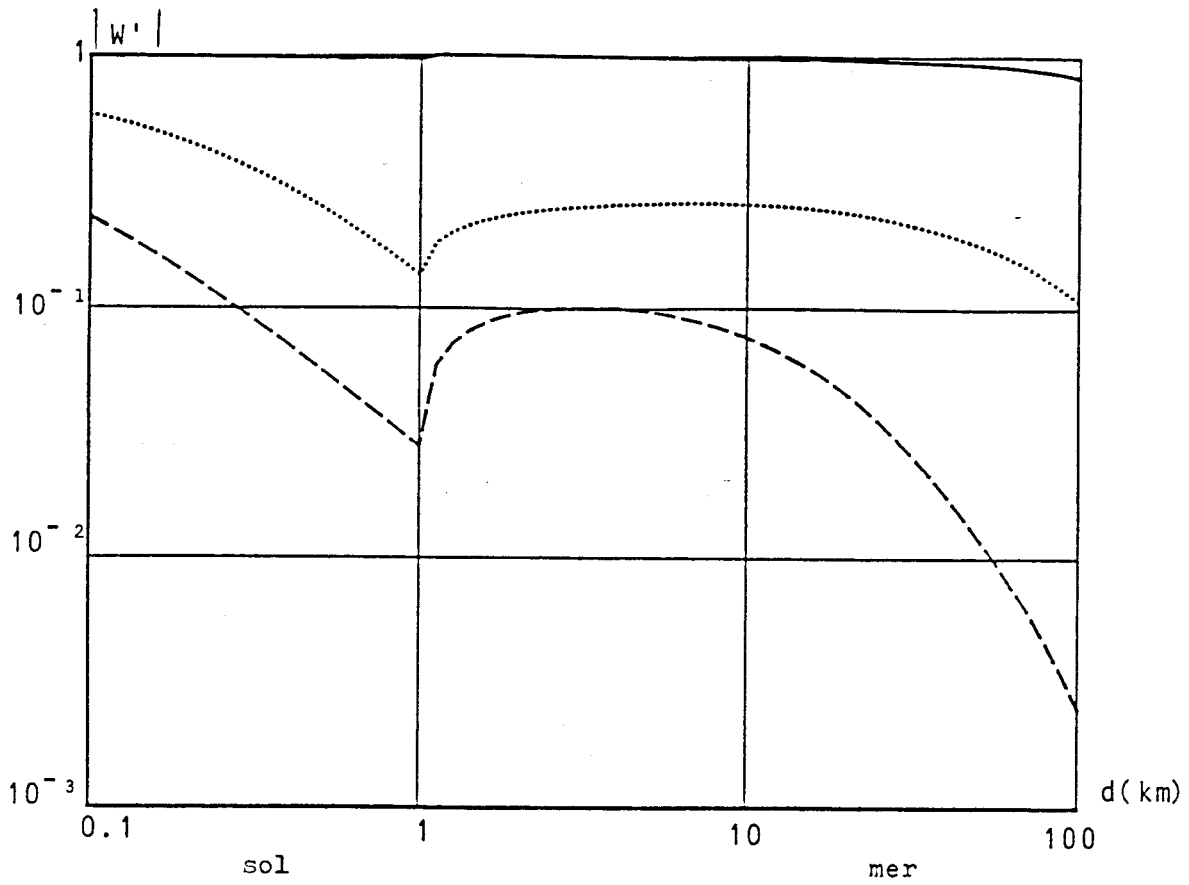
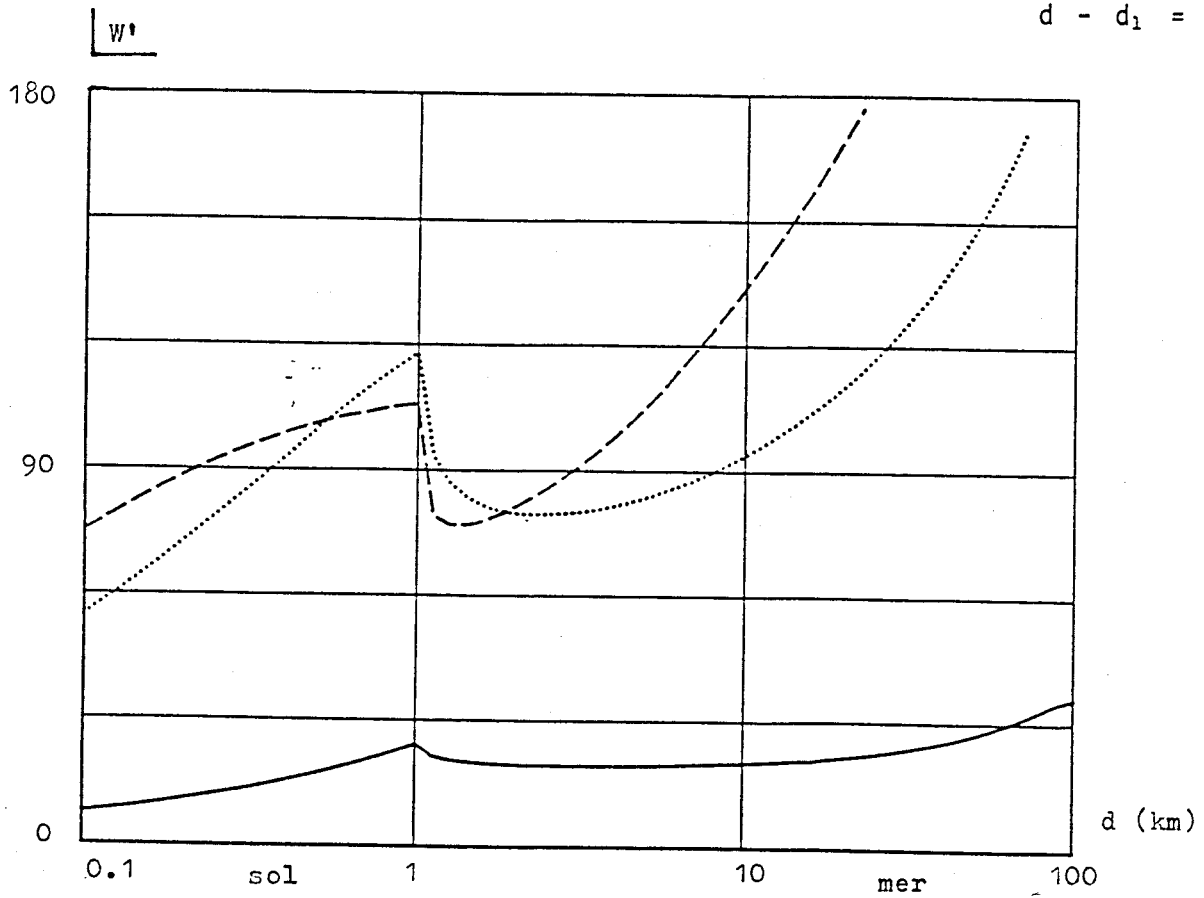


figure (V.20)

— $f = 1$ MHz
 ... $f = 10$ MHz
 --- $f = 50$ MHz
 $d - d_1 = 1$ km



figure(V.21)

V.10.2 - Influence de la fréquence

Les courbes tracées sur les figures (V.20) et (V.21) représentent le module et la phase de la fonction W' pour plusieurs fréquences et pour $d-d_1 = 1$ km. Nous notons que si la fréquence augmente, la perturbation due au changement de milieu devient très importante. Ceci résulte de la grande différence entre les deux fonctions d'atténuation d'une surface homogène, celle du sol et celle de la mer, cette perturbation est de l'ordre de 30 % pour $f = 1$ MHz et de 200 % pour $f = 30$ MHz.

V.11 - Variation de E_z

Pour illustrer la fluctuation de E_z , nous avons tracé figure (V.22), cette fluctuation en fonction de la distance d_1 qui sépare le récepteur de la ligne de côte pour les données suivantes : la distance entre l'émetteur et la transition $d-d_1 = 10$ km, $h_a = h_b = 0$ m, $f = 5, 10, 30$ MHz, $\sigma_g = 0.01$ S/m, $\epsilon_{gr} = 15$, $\sigma' = 4$ S/m et $\epsilon'_r = 80$. On note que, dans cette gamme de fréquence, une augmentation importante de l'amplitude du champ se produit au passage entre le sol et la mer, elle est davantage importante si la fréquence augmente. A titre d'exemple, entre deux points de réception $d_1 = 0$ m, et $d_1 = 2.5$ km, l'amplitude de E_z augmente de 50% pour $f = 5$ MHz, de 170% pour $f = 10$ MHz et de 400% pour $f = 30$ MHz.

Afin de comparer les deux modèles, celui que l'on vient d'étudier, et celui qui suppose une variation linéaire, entre le sol et la mer, de l'impédance de surface dans une zone de largeur déterminée $d_0 = 3$ m, nous avons tracé sur les figures (V.23 à V.25) la variation de E_z pour plusieurs fréquences : 1 MHz, 5 MHz et 10 MHz. l'émetteur est sur la surface du sol à une distance de 10 km de la ligne de côte. On note que, pour une fréquence inférieure à 5 MHz les deux modèles donnent pratiquement les mêmes

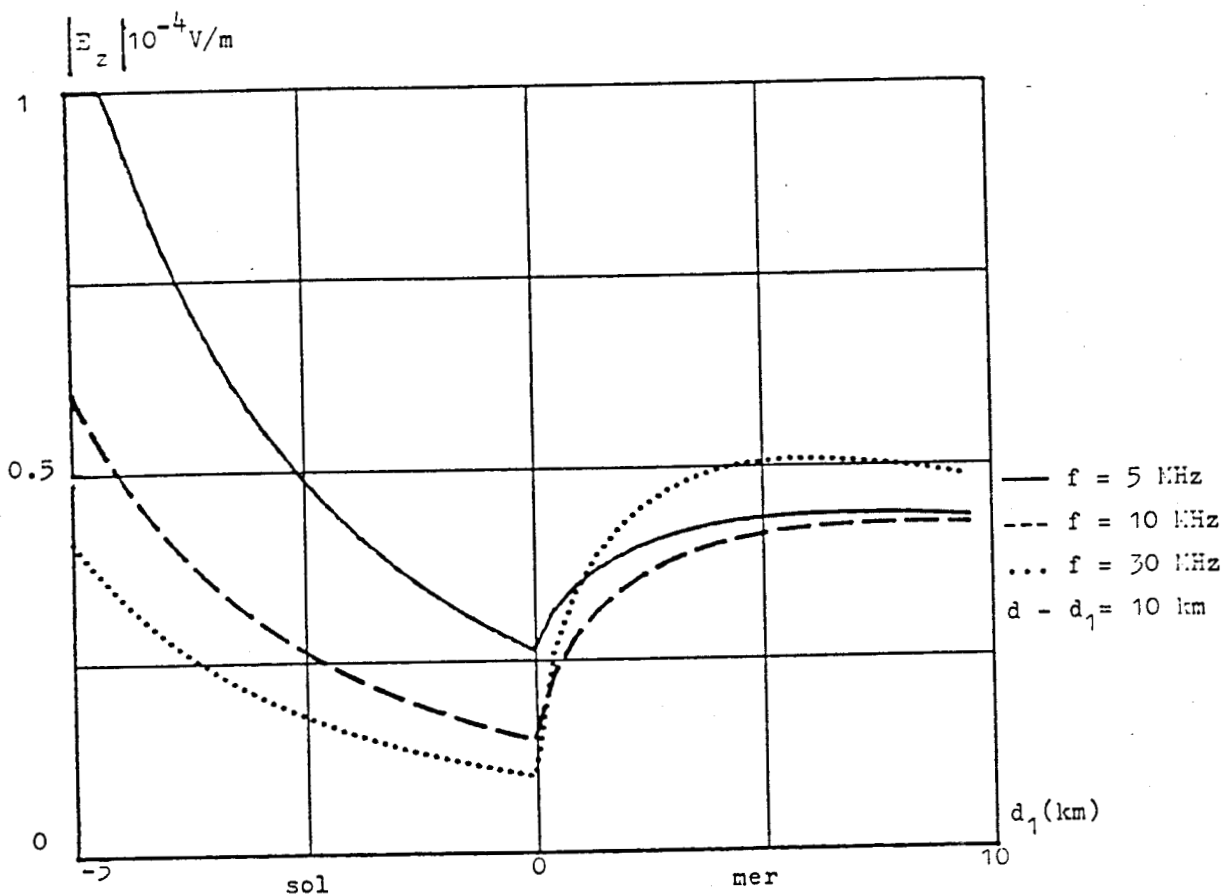


figure (V.22)

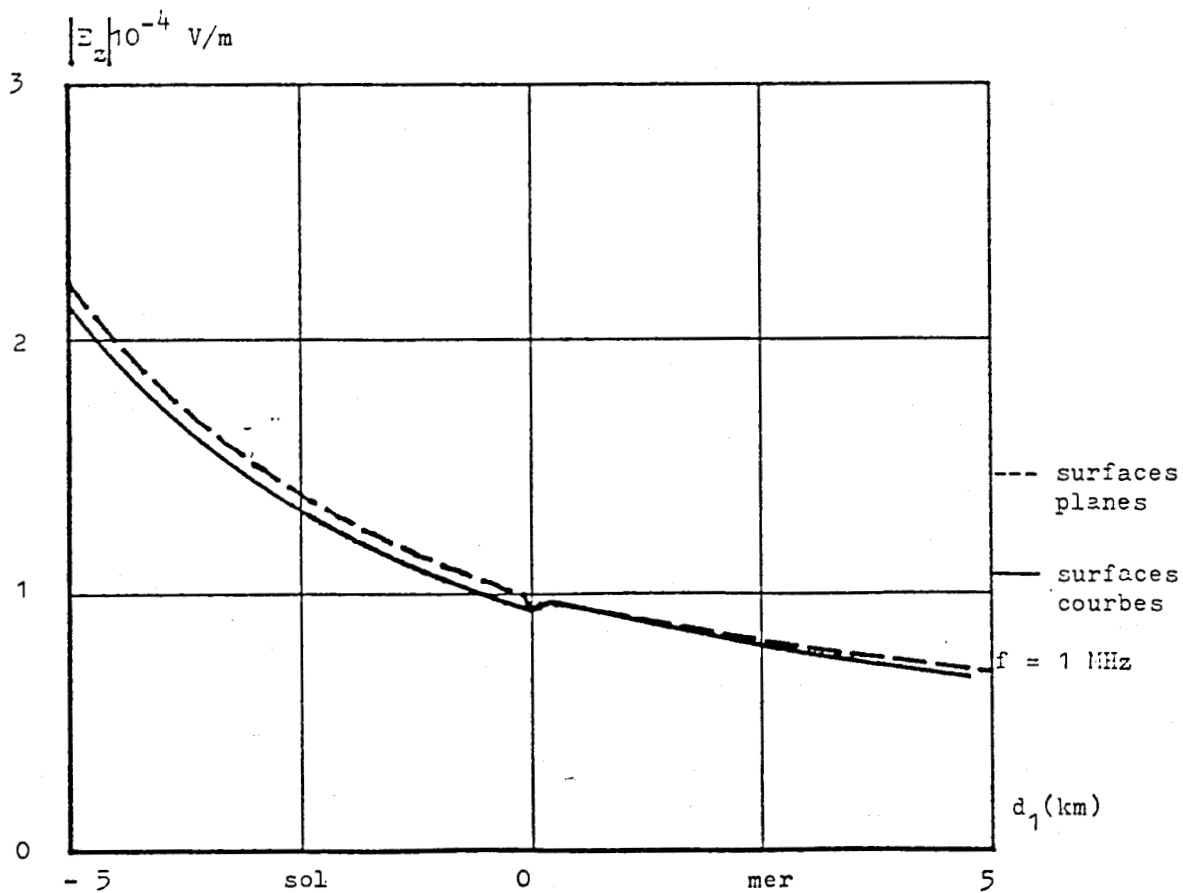


figure (V.23)

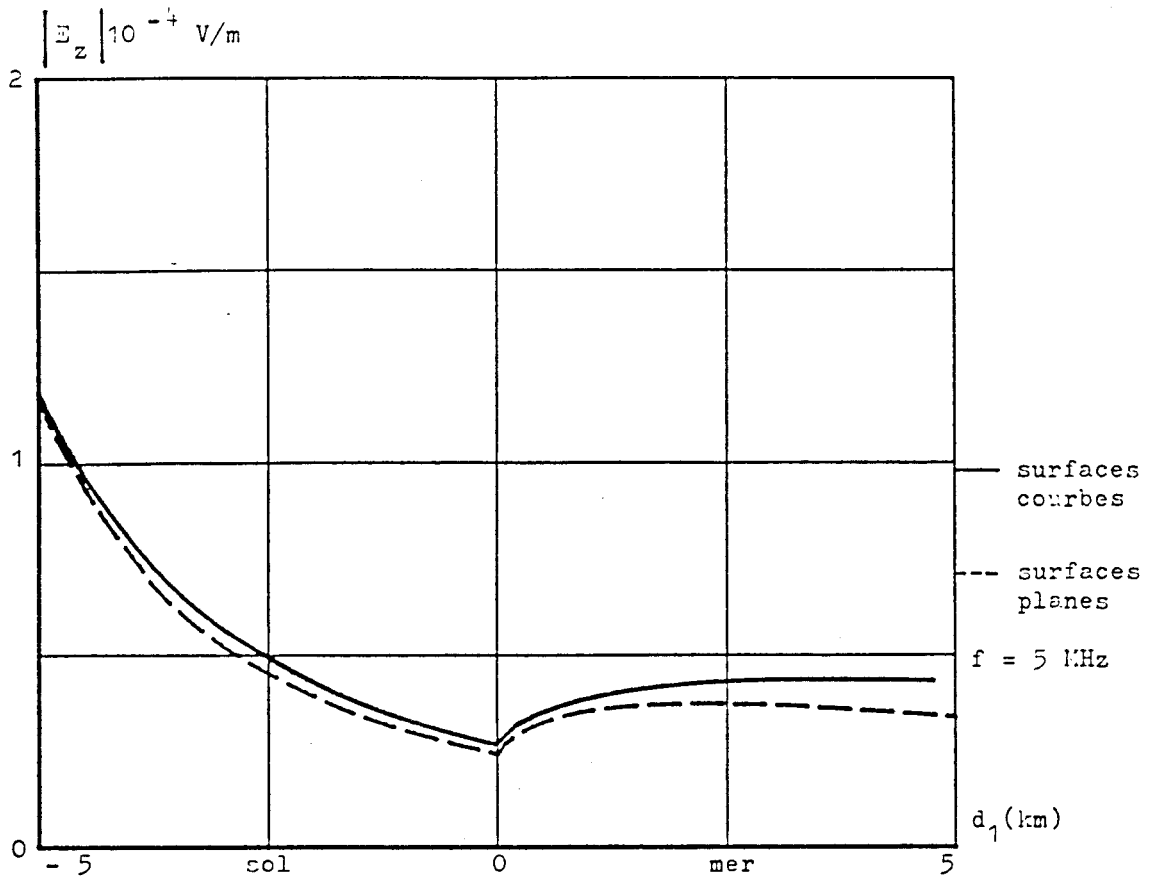


figure (V.24)

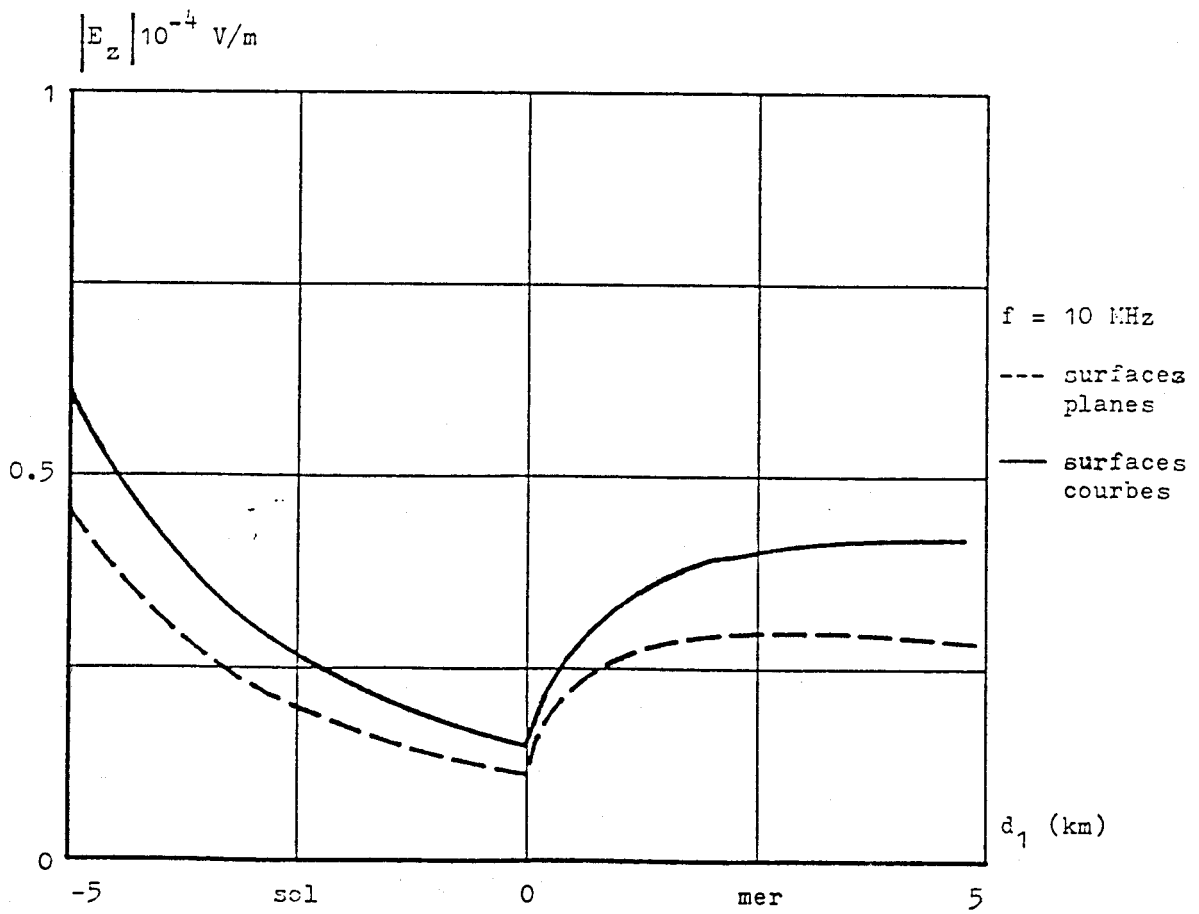


figure (V.25)

résultats, mais si la fréquence est supérieure à cette valeur les deux modèles ne donnent pas les mêmes résultats, ceci est normal, étant donné que l'hypothèse faite dans la première partie n'est plus respectée, à savoir, $|2\pi/\lambda R \Delta^2| \ll 1$.

Pour mieux connaître la variation du champ sur la ligne de côte même, Nous avons agrandi les résultats obtenus par le second modèle, à savoir, surfaces de propagation courbes, autour du point de passage entre le sol et la mer figures (V.26, V.27) pour deux fréquences : 1 MHz et 5 MHz. On note que, le champ varie de 10% sur distance de 100 m si $f = 5$ MHz, mais cette variation n'est que de 3% si $f = 1$ MHz.

Supposons maintenant que l'émetteur est placé sur la surface de la mer à une distance de 10 km de la ligne de côte. Comme le montre la figure (V.28) qui est tracée dans les conditions suivantes : $f = 5, 10, 30$ MHz, $\sigma' = 4$ S/m, $\epsilon'_r = 80$, $\sigma_g = 10^{-2}$ S/m et $\epsilon_{gr} = 15$, le champ électrique diminue de façon importante lors du passage de la mer vers le sol, et cette diminution augmente si la fréquence augmente.

Afin de connaître cette diminution, nous avons tracé sur les figures (V.29 et V.30) la variation de E_z autour du point de passage entre les deux surfaces pour $f = 1, 5$ MHz. On note que la diminution de E_z , sur une distance de 100 m, est de 2 %, mais elle est de 13 % pour $f = 5$ MHz.

On remarque que, dans les deux cas (émetteur sur la surface du sol et émetteur sur la surface de la mer), les perturbations produites par la ligne de côte sont pratiquement inchangées et dépendent seulement des caractéristiques des deux milieux et de la fréquence de travail.

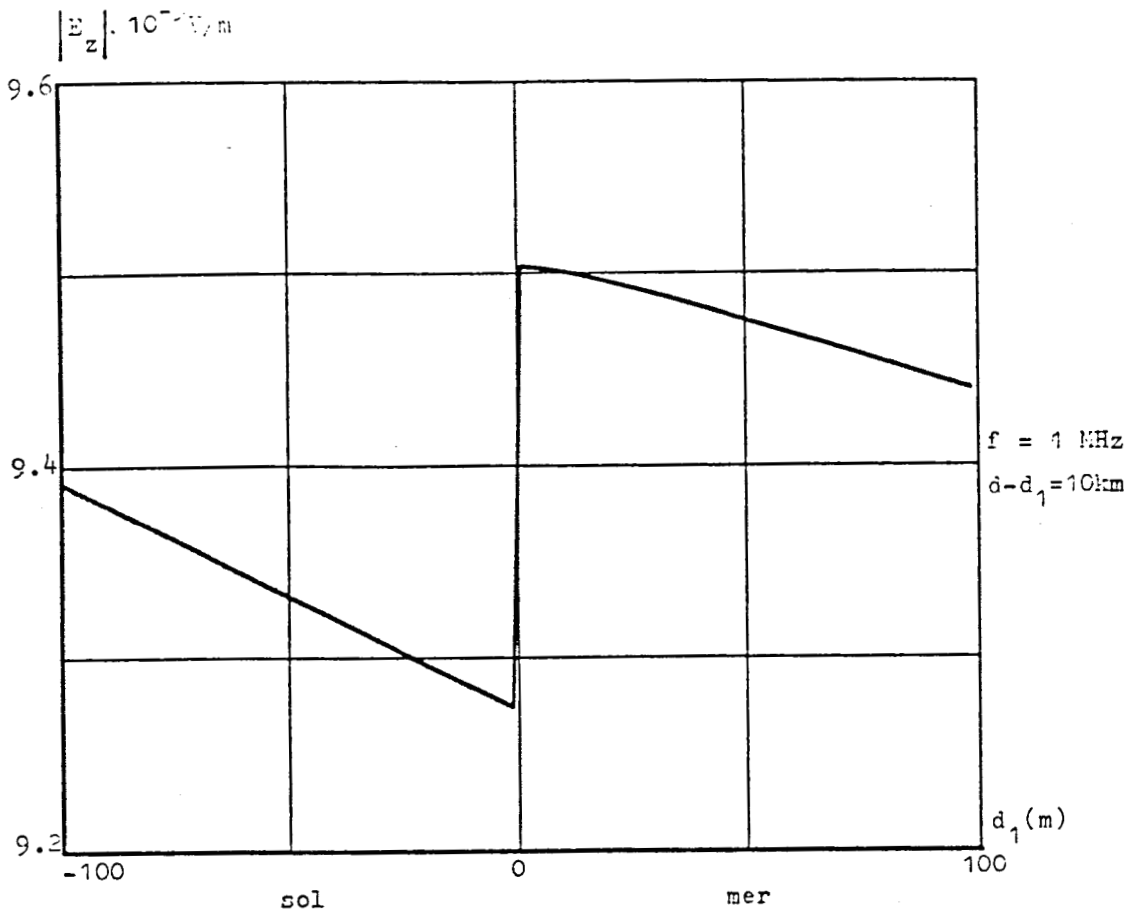


figure (V.26)

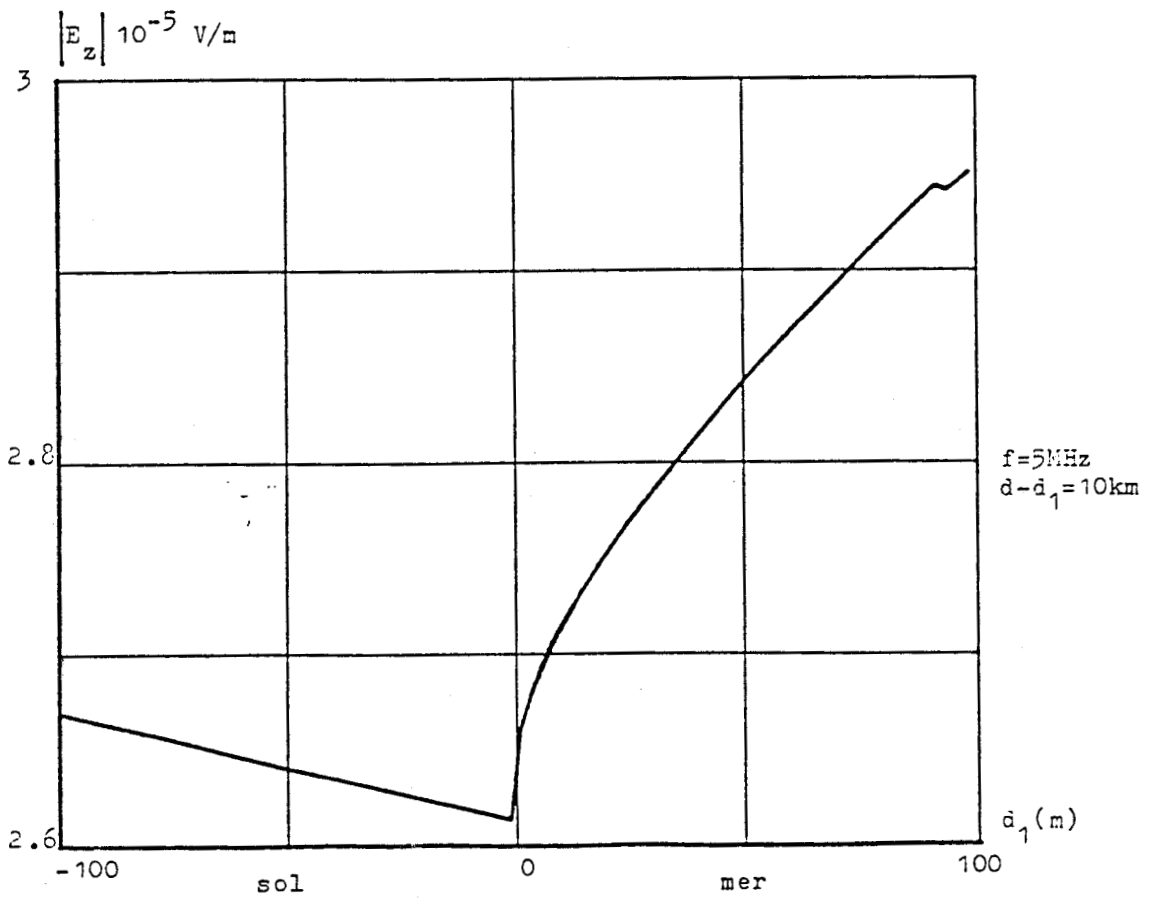


figure (V.27)

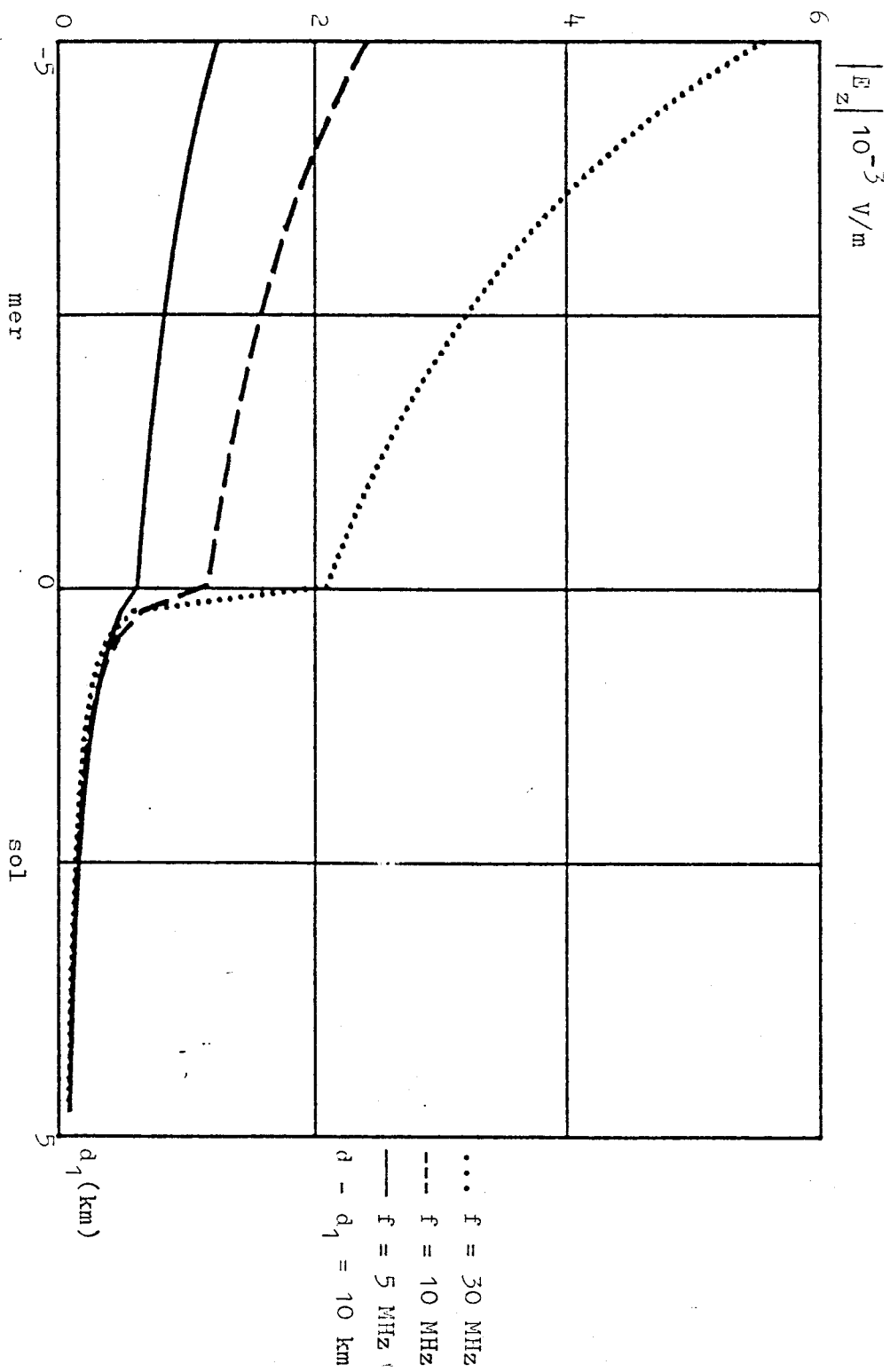


figure (V.28)

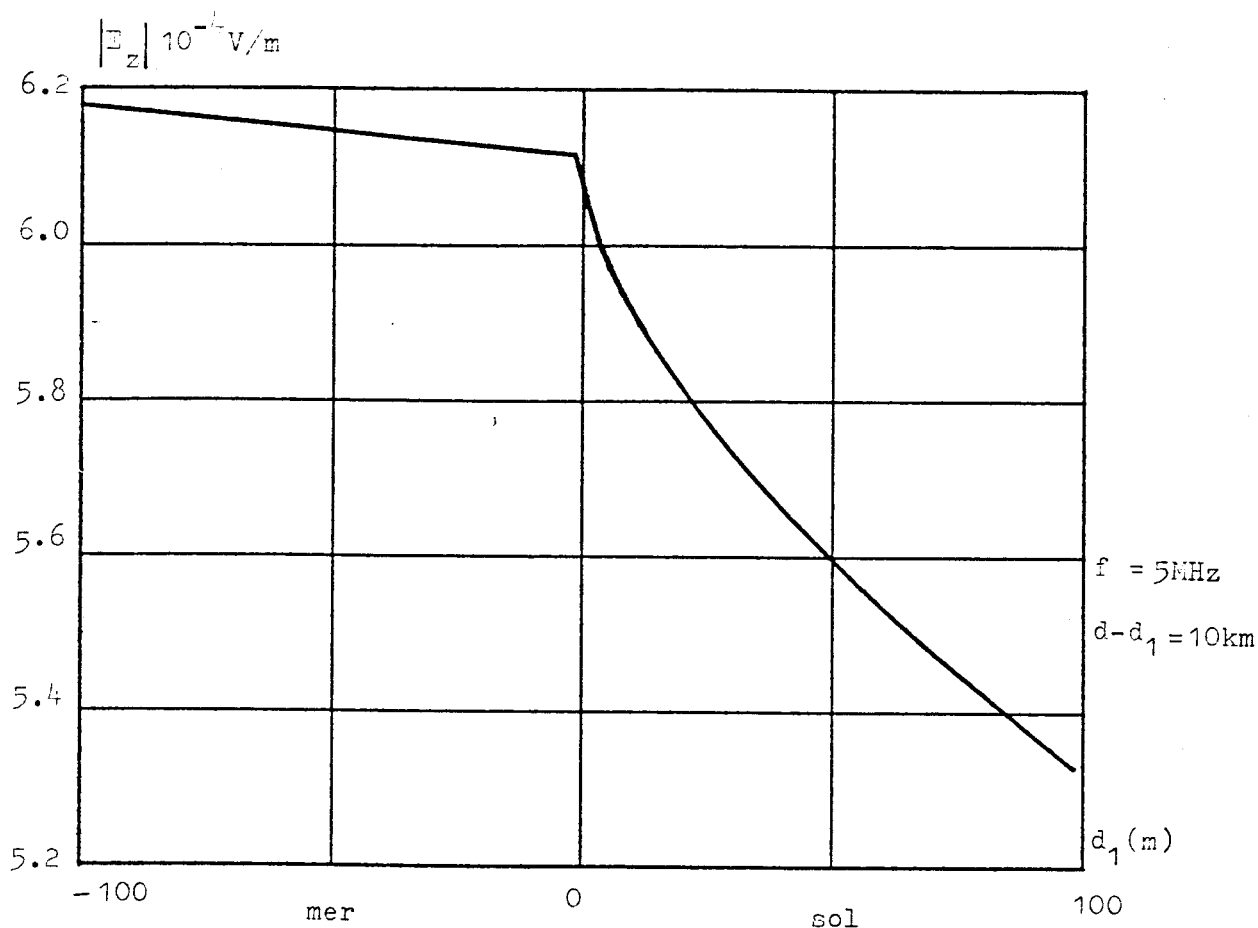


figure (V.29)

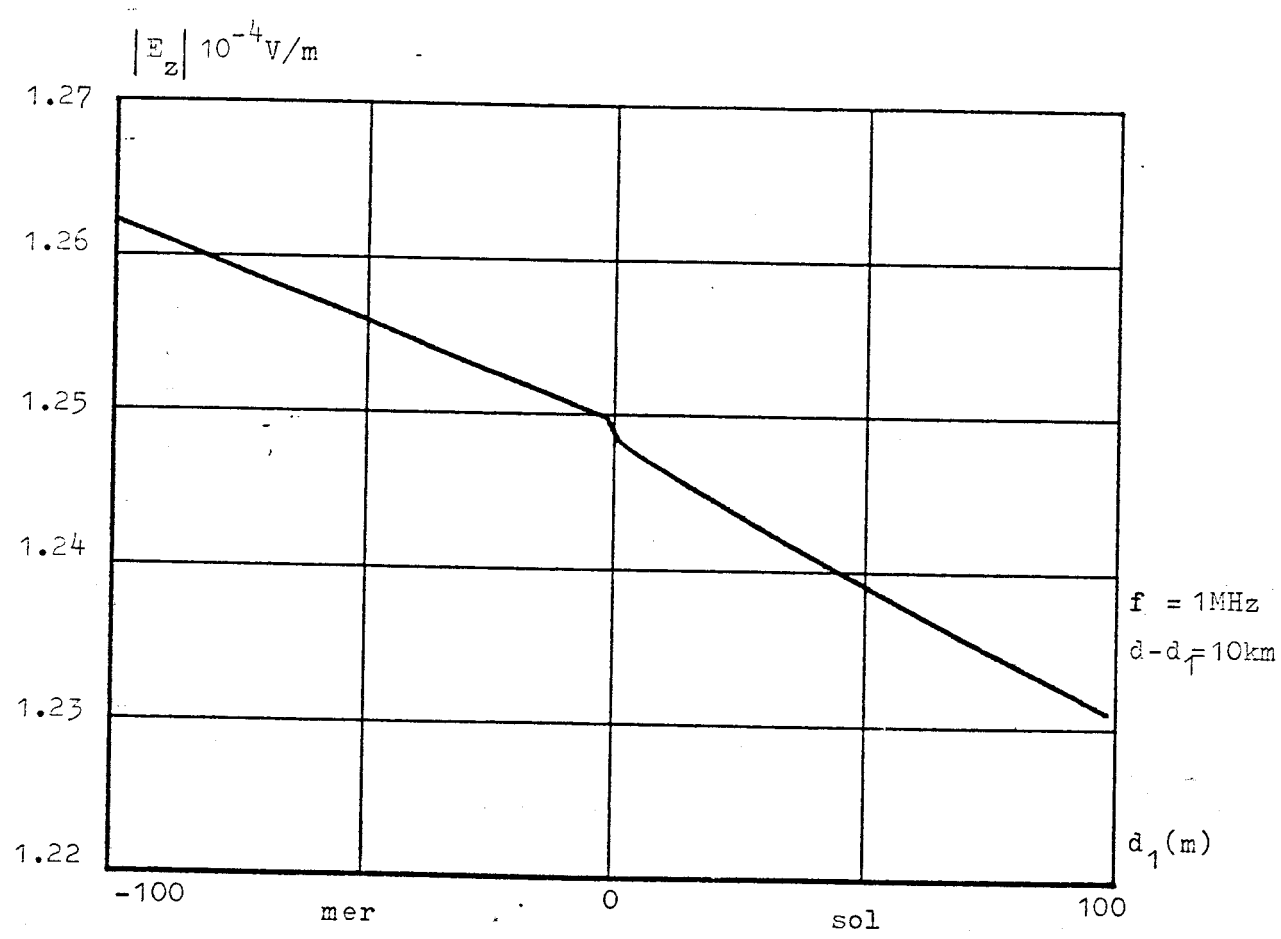


figure (V.30)

V.12 - CONCLUSION

Nous avons décrit, dans ce chapitre, le formalisme permettant de calculer la fonction d'atténuation d'une onde se propageant au dessus d'un milieu constitué de deux surfaces homogènes et ceci dans deux cas, surfaces planes et surfaces courbes. Dans le premier cas, nous avons vu que si la transition est abrupte, une singularité se présente au passage entre les surfaces. Pour la supprimer, nous avons effectué la même étude en prenant une transition à variation linéaire. En dehors du point de passage entre les deux surfaces, ces deux études donnent des résultats semblables. Ce modèle reste valable jusqu'à une fréquence de quelques MHz, étant donnée l'hypothèse faite, afin de simplifier le traitement numérique.

Nous avons vu qu'une augmentation de l'amplitude du champ se produit lors du passage entre le sol et la mer, mais, cette augmentation est fonction de la fréquence. En effet, elle est de l'ordre de 400% pour une fréquence de 30 MHz, le champ augmentant progressivement sur une zone de 2.5 km à partir de la ligne de côte, mais, elle n'est que de 50% si la fréquence est égale à 5 MHz. De plus, l'effet local de la ligne de côte est négligeable pour des fréquences inférieures à 1MHz.

CONCLUSION

CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons tout d'abord mis au point des programmes numériques pour calculer le champ rayonné par un dipôle électrique dans un milieu à trois couches, ceci avec une précision et des temps d'exécution très satisfaisants. Nous avons vu que l'influence d'une forêt sur le champ électrique devient importante si sa conductivité devient supérieure à 10^{-5} S/m.

Nous avons également évalué le champ rayonné par un cylindre de conductivité infinie dans deux cas de polarisation : le premier, une polarisation transversale (E incident \perp à l'axe du cylindre) , le second, une polarisation longitudinale (E incident $//$ à l'axe du cylindre). Dans ces deux cas, le champ est très influencé par la distance qui sépare l'anomalie du point de réception. Cependant, cette influence est plus importante dans le second cas que dans le premier. En effet, elle est négligeable à une distance de réception égale à $\approx 7R$ (R rayon du cylindre) dans le cas d'une polarisation transversale, mais, dans le cas d'une polarisation longitudinale, à cette distance, le champ électrique n'atteint que 50 % de sa valeur maximale.

Dans ce même chapitre, nous avons traité le cas d'une anomalie sphérique de conductivité infinie. Cette étude a montré que l'influence de cet obstacle est négligeable à une distance $r \# 2R$, en effet, le champ total reçu à cette distance est égal à 90 % du champ incident.

Dans l'étude d'une anomalie de dimensions réduites (une colline ou un bâtiment), le champ électrique est très influencé par la distance qui sépare l'obstacle et le point de réception. Pour que l'effet de l'anomalie soit négligeable, il faut que le récepteur soit à une distance égale à 2 fois la hauteur de l'anomalie.

Nous avons également traité l'influence d'un pylône en partie enterré dans le sol. Nous avons vu que cette anomalie apporte un changement important sur l'amplitude du champ électrique sur une distance à peu près égale à sa longueur, mais que, dans la gamme des basses fréquences envisagées, il n'y a que très peu de modifications de la forme du signal.

Dans la dernière partie, l'anomalie était une transition sol-mer. L'influence de ce changement de conductivité est d'autant plus importante que la fréquence augmente. Sur une distance de quelques kilomètres de la ligne de côte, l'influence de la transition est négligeable si la fréquence est inférieure à 1 MHz, par contre, si celle-ci est de l'ordre d'une dizaine de MHz, une augmentation de 400 % du champ électrique peut être observée sur une distance de 2.5 km de la ligne du côte.

L'ensemble de ces résultats théoriques devrait pouvoir être couplé avec des études expérimentales.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] : A. BANOS
" Dipole radiation in the presence of a conducting half-space"
- [2] : R.J. LYTLE, D.L. LAGER
"Numerical evaluation of Sommerfeld integrals"
Lawrence Livermore Laboratory, University of California,
UCLR 51688, 1974
- [3] : Y. RAHMAT-SAMII, P. PARHAMI, R. MITTRA
"An efficient approach for evaluating Sommerfeld integrals encountered
in the problem of a current element radiating over lossy ground"
IEEE Transaction on antennas and propagation, Vol.28, n°1, 1980
- [4] : J.L. FAURE
"Intégrales de Sommerfeld", Rapport interne EDF, 1977
- [5] : F. PALADIAN
"Diffraction d'une onde électromagnétique par des conducteurs filaires
en présence d'un sol imparfaitement conducteur"
Application à une ligne de télécommunication
Thèse, Université de Clermont II, 1985
- [6] : P. DEGAUQUE, M. KASSI-LAHLOU, B. DEMOULIN
"Diagraphie Hautes Fréquences entre Forages"
1er Rapport d'avancement du contrat LCPC/USTL
Université de Lille I, Avril 1985
- [7] : T.A. ATCHISON H.L. GRAY
"Non linear transformation related to the evaluation of improper
integrals"
SIAM J. Numer Anal, Vol. 5 n° 2 - june 1968
- [8] : J. VAN BLADEL
"Electromagnetic Fields", 1985

- [9] : O. BENLAMLIH
"Influence d'une anomalie sur la propagation d'une onde électromagnétique"
Thèse, Université de Lille I, (soutenance prévue en 1991)
- [10] : N. NABGHIAN
"Electromagnetic methods in applied geophysics"
Vol 1, 1987
- [11] : G.W. HOHMANN
"Three dimensional induced polarisation and electromagnetic modeling"
Geophysics, Vol. 40 n° 2 April 1975 p. 309-324
- [12] : M. CAUTERMAN
"Etude théorique de l'influence d'une anomalie de résistivité de forme quelconque sur le champ électromagnétique créé par un dipôle en milieu absorbant. Application à l'évaluation in situ de l'étendue de gisement de gaz et d'hydrocarbure"
Thèse d'Etat, Université de Lille I, 1975
- [13] : J.L. MARTIN
"Etude théorique de l'influence d'une hétérogénéité de conductivité et de forme quelconque sur le champ électromagnétique rayonné par un dipôle magnétique vertical en milieu stratifié"
Thèse 3° cycle, Université de Lille I, 1978
- [14] : M. KASSI-LAHLLOU
"Rayonnement d'une antenne verticale placée dans un forage, application à la tomographie électromagnétique"
Thèse, Université de Lille I, 1988
- [15] : O. AHERMOUCH
"Etude en haute fréquence d'une antenne filaire verticale en partie enterrée"
Thèse, Université de Clermont II, 1984.

- [16] : J.R. WAIT
"Electromagnetic Waves in Stratified Media"
Oxford : Pergamon, 1962, (1970, 2nd ed)
- [17] : RAY J. KING and J.R. WAIT
"Electromagnetic ground wave propagation theory and experiment"
Symposia Mathematica Vol 18, 1976
- [18] : G.D. MONTEATH
"Application of compensation theorem to certain radiation and propagation problems"
Monograph n° 3, Radio Section PIEEE, pp 23-30, 1951
- [19] : J.R. WAIT
"Oblique Propagation of Groundwave across a Coastline"
D. Radio-propagation, Vol 67D
No.6, November-December 1963
- [20] : A. AMRI
"Propagation par onde de sol d'une impulsion électromagnétique d'origine naturelle ou artificielle sur une terre irrégulière et/ou non homogène "
Thèse 3° cycle, Université de Clermont II, 1985
- [21] : D.A. HILL and J.R. WAIT
"Ground wave attenuation function for a spherical earth with arbitrary surface impedance"
Radio Sci., Vol. 15, pp 637-643, 1980
- [22] : J.R. WAIT
"Radiation from a vertical antenna over a curved stratified ground"
J. Res. NB556, No 4, 237-244

ANNEXES

ANNEXE 1

Résolution du système d'équations suivant :

$$2 u_1 F_{11}(\lambda) + u_1 F_{12}(\lambda) = u_2 \left[F_{22}(\lambda) - F_{21}(\lambda) \right] \dots (1)$$

$$\gamma_1^2 F_{12}(\lambda) = \gamma_2^2 \left[F_{22}(\lambda) + F_{21}(\lambda) \right] \dots (2)$$

$$u_2 \left[e^{u_2 d} F_{22}(\lambda) - e^{-u_2 d} F_{21}(\lambda) \right] = u_3 e^{-u_3 d} F_{31}(\lambda) \dots (3)$$

$$\gamma_2^2 \left[e^{u_2 d} F_{22}(\lambda) + e^{-u_2 d} F_{21}(\lambda) \right] = \gamma_3^2 e^{u_3 d} F_{31}(\lambda) \dots (4)$$

en résolvant ce système, nous obtenons les expressions de $F_1(\lambda)$:

$$F_{12}(\lambda) = \frac{2 \lambda \gamma_2^2 e^{u_1 z_0} \left[(u_3 \gamma_2^2 + u_2 \gamma_3^2) + (u_2 \gamma_3^2 - u_3 \gamma_2^2) e^{-2u_2 d} \right]}{(u_2 \gamma_1^2 - u_1 \gamma_2^2)(u_3 \gamma_2^2 - u_2 \gamma_3^2) e^{-2u_2 d} + (u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2)(u_3 \gamma_2^2 + u_2 \gamma_3^2)}$$

$$F_{21}(\lambda) = \frac{2 \lambda \gamma_1^2 e^{u_1 z_0} (u_3 \gamma_2^2 + u_2 \gamma_3^2)}{(u_2 \gamma_1^2 - u_1 \gamma_2^2)(u_3 \gamma_2^2 - u_2 \gamma_3^2) e^{-2u_2 d} + (u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2)(u_3 \gamma_2^2 + u_2 \gamma_3^2)}$$

$$F_{22}(\lambda) = \frac{2 \lambda \gamma_1^2 e^{u_1 z_0} (u_2 \gamma_3^2 - u_3 \gamma_2^2) e^{-2u_2 d}}{(u_2 \gamma_1^2 - u_1 \gamma_2^2)(u_3 \gamma_2^2 - u_2 \gamma_3^2) e^{-2u_2 d} + (u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2)(u_3 \gamma_2^2 + u_2 \gamma_3^2)}$$

$$F_{31}(\lambda) = \frac{2 \lambda \gamma_2^2 e^{u_1 z_0} (u_2 \gamma_3^2 - u_3 \gamma_2^2) e^{-2u_2 d}}{(u_2 \gamma_1^2 - u_1 \gamma_2^2)(u_3 \gamma_2^2 - u_2 \gamma_3^2) e^{-2u_2 d} + (u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2)(u_3 \gamma_2^2 + u_2 \gamma_3^2)}$$

Dans ces formules $z_0 \leq 0$ toujours.

EXPRESSION DES CHAMPS RAYONNES

1^{er} milieu :

$$E_{1r} = \frac{I dl}{4 \pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \left\{ \left[\frac{r(z_0 - z)(\gamma_1^2 R_1^2 + \gamma_1 R_1 + 3) e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1^5} + \frac{r(z_0 + z)(\gamma_2^2 R_2^2 + \gamma_2 R_2 + 3) e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2^5} \right] - \int_0^\infty \lambda u_1 F_{12}(\lambda) e^{u_1 z} J_1(\lambda r) d\lambda \right\}$$

$$E_{1z} = \frac{I dl}{4 \pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \left\{ \left[\frac{-r^2 (\gamma_1^2 R_1^2 + \gamma_1 R_1 + 3)}{R_1^5} + \frac{2(\gamma_1 R_1 + 1)}{R_1^3} \right] e^{-\gamma_1 R_1} + \left[\frac{r^2 (\gamma_2^2 R_2^2 + \gamma_2 R_2 + 3)}{R_2^5} + \frac{2(\gamma_2 R_2 + 1)}{R_2^3} \right] e^{-\gamma_1 R_2} + \int_0^\infty r^2 u_1 F_{12}(\lambda) e^{u_1 z} J_0(\lambda r) d\lambda \right\}$$

Dans la couche de séparation (2) :

$$E_{2r} = - \int_0^\infty \lambda u_2 F_{21}(\lambda) e^{-u_2 z} J_1(\lambda r) d\lambda + \int_0^\infty \lambda u_2 F_{22}(\lambda) e^{u_2 z} J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$E_{2z} = \int_0^{\infty} \lambda^2 F_{21}(\lambda) e^{-u_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda + \int_0^{\infty} \lambda^2 F_{22}(\lambda) e^{u_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda$$

Dans le sol (3) :

$$E_{3r} = - \int_0^{\infty} \lambda u_3 F_{31}(\lambda) e^{-u_3 z} J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$E_{3z} = \int_0^{\infty} \lambda^2 F_{31}(\lambda) e^{-u_3 z} J_0(\lambda r) d\lambda$$

D.E.H. dans l'air :

$$E_{1x} = \frac{I dl}{4 \pi (\sigma_1 + j\omega \epsilon_1)} \left\{ \left[\frac{(x-x_0) (\gamma_1^2 R_1^2 + \gamma_1 R_1 + 3)}{R_1^5} - \frac{(\gamma_1 R_1 + 1)}{R_1^3} - \frac{\gamma_1^2}{R_1} \right] e^{-\gamma_1 R_1} \right.$$

$$- \left[\frac{(x-x_0) (\gamma_1^2 R_2^2 + \gamma_1 R_2 + 3)}{R_2^5} - \frac{(\gamma_1 R_2 + 1)}{R_2^3} - \frac{\gamma_1^2}{R_2} \right] e^{-\gamma_1 R_2}$$

$$- \int_0^{\infty} \left[F_{12}(\lambda) \left[\gamma_1^2 + (x-x_0)^2 / r^2 \right] + u_1 \lambda g_{12}(\lambda) (x-x_0)^2 / r^2 \right] e^{u_1 z} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$- \int_0^{\infty} \left[\lambda F_{12}(\lambda) + u_1 g_{12}(\lambda) \right] \frac{r^2 - 2(x-x_0)}{r^3} e^{u_1 z} J_1(\lambda r) d\lambda \left. \right\}$$

$$\begin{aligned}
E_{1y} = \frac{I \, dl}{4 \pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} & \left\{ \left[\frac{(y-y_0)(x-x_0) (\gamma_1^2 R_1^2 + \gamma_1 R_1 + 3)}{R_1^5} \right] e^{-\gamma_1 R_1} \right. \\
& - \left[\frac{(y-y_0)(x-x_0) (\gamma_1^2 R_2^2 + \gamma_1 R_2 + 3)}{R_2^5} \right] e^{-\gamma_1 R_2} \\
& - \int_0^\infty \left[\lambda^2 F_{12}(\lambda) - u_1 \lambda g_{12}(\lambda) \right] (y-y_0)(x-x_0) / r^2 e^{u_1 z} J_0(\lambda r) \, d\lambda \\
& \left. + \int_0^\infty 2 \left[\lambda F_{12}(\lambda) + u_1 g_{12}(\lambda) \right] \frac{(y-y_0)(x-x_0)}{r^3} e^{u_1 z} J_1(\lambda r) \, d\lambda \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{1z} = \frac{I \, dl}{4 \pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} & \left\{ \left[\frac{(z-z_0)(x-x_0) (\gamma_1^2 R_1^2 + \gamma_1 R_1 + 3)}{R_1^5} \right] e^{-\gamma_1 R_1} \right. \\
& - \left[\frac{(z-z_0)(x-x_0) (\gamma_1^2 R_2^2 + \gamma_1 R_2 + 3)}{R_2^5} \right] e^{-\gamma_1 R_2} \\
& + \int_0^\infty \left[\lambda^2 g_{12}(\lambda) - u_1 \lambda F_{12}(\lambda) \right] (x-x_0) / r e^{u_1 z} J_1(\lambda r) \, d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{2x} = P_1 & \left\{ \int_0^\infty \left[F_{21}(\lambda) \left[\gamma_2^2 + \lambda^2 (x-x_0)^2 / r^2 \right] - u_2 \lambda g_{21}(\lambda) (x-x_0)^2 / r^2 \right] e^{-u_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda \right. \\
& - \int_0^\infty \left[F_{22}(\lambda) \left[\gamma_2^2 + \lambda^2 (x-x_0)^2 / r^2 \right] - u_2 \lambda g_{22}(\lambda) (x-x_0)^2 / r^2 \right] e^{u_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda \\
& - \int_0^\infty \left[\lambda F_{22}(\lambda) - u_2 g_{22}(\lambda) \right] \frac{r^2 - 2(x-x_0)}{r^3} e^{-u_2 z} J_1(\lambda r) d\lambda \\
& \left. - \int_0^\infty \left[\lambda F_{22}(\lambda) + u_2 g_{22}(\lambda) \right] \frac{r^2 - 2(x-x_0)}{r^3} e^{u_2 z} J_1(\lambda r) d\lambda \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{2y} = P_1 & \left\{ - \int_0^\infty \left[\lambda^2 F_{21}(\lambda) - u_2 \lambda g_{21}(\lambda) \right] (y-y_0)(x-x_0) / r^2 e^{-u_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda \right. \\
& - \int_0^\infty \left[\lambda^2 F_{22}(\lambda) + u_2 \lambda g_{22}(\lambda) \right] (y-y_0)(x-x_0) / r^2 e^{u_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda \\
& + \int_0^\infty 2 \left[\lambda F_{21}(\lambda) - u_2 g_{21}(\lambda) \right] \frac{(y-y_0)(x-x_0)}{r^3} e^{-u_2 z} J_1(\lambda r) d\lambda \\
& \left. + \int_0^\infty 2 \left[\lambda F_{22}(\lambda) + u_2 g_{22}(\lambda) \right] \frac{(y-y_0)(x-x_0)}{r^3} e^{u_2 z} J_1(\lambda r) d\lambda \right\}
\end{aligned}$$

$$E_{2z} = P_1 \left\{ \int_0^{\infty} \left[-\lambda^2 g_{21}(\lambda) + u_2 \lambda F_{21}(\lambda) \right] (x-x_0) / r \quad \bar{e}^{-u_2 z} J_1(\lambda r) d\lambda \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \left[-\lambda^2 g_{22}(\lambda) - u_2 \lambda F_{22}(\lambda) \right] (x-x_0) / r \quad e^{u_2 z} J_1(\lambda r) d\lambda \right\}$$

$$E_{3x} = P_1 \left\{ \int_0^{\infty} \left[F_{31}(\lambda) \left[\gamma_2^2 + \lambda^2 (x-x_0)^2 / r^2 \right] - u_3 \lambda g_{31}(\lambda) (x-x_0)^2 / r^2 \right] \bar{e}^{-u_3 z} J_0(\lambda r) d\lambda \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \left[\lambda F_{31}(\lambda) - u_3 g_{31}(\lambda) \right] \frac{r^2 - 2(x-x_0)}{r^3} \bar{e}^{-u_3 z} J_1(\lambda r) d\lambda \right\}$$

$$E_{3y} = P_1 \left\{ - \int_0^{\infty} \left[\lambda^2 F_{31}(\lambda) - u_3 \lambda g_{31}(\lambda) \right] (y-y_0)(x-x_0) / r^2 \bar{e}^{-u_3 z} J_0(\lambda r) d\lambda \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} 2 \left[\lambda F_{31}(\lambda) - u_3 g_{31}(\lambda) \right] \frac{(y-y_0)(x-x_0)}{r^3} \bar{e}^{-u_3 z} J_1(\lambda r) d\lambda \right\}$$

$$E_{3z} = P_1 \int_0^{\infty} \left[-\lambda^2 g_{31}(\lambda) + u_3 \lambda F_{31}(\lambda) \right] (x-x_0) / r \quad \bar{e}^{-u_3 z} J_1(\lambda r) d\lambda$$

où

$$P_1 = \frac{I dl}{4 \pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)}$$

$$F_{11}(\lambda) = \frac{2 \lambda e^{u_1 z_0} [(u_2 + u_3) + e^{-2u_2 d}(u_2 - u_3)]}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_2) e^{-2u_2 d} + (u_2 + u_1)(u_3 + u_2)}$$

$$F_{12}(\lambda) = \frac{2 \lambda e^{u_1 z_0} (u_2 + u_3) \gamma_1^2 / \gamma_2^2}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_2) e^{-2u_2 d} + (u_2 + u_1)(u_3 + u_2)}$$

$$F_{22}(\lambda) = \frac{2 \lambda e^{u_1 z_0} (u_2 - u_3) \gamma_1^2 / \gamma_2^2 e^{-2u_2 d}}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_2) e^{-2u_2 d} + (u_2 + u_1)(u_3 + u_2)}$$

$$F_{31}(\lambda) = \frac{2 \lambda e^{u_1 z_0} 2 u_2 \gamma_1^2 / \gamma_3^2 e^{-u_2 d + u_3 d}}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_2) e^{-2u_2 d} + (u_2 + u_1)(u_3 + u_2)}$$

$$\text{Den} = \left[(u_2 \gamma_1^2 - u_1 \gamma_2^2)(u_3 \gamma_2^2 - u_2 \gamma_3^2) e^{-2u_2 d} + (u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2)(u_3 \gamma_2^2 + u_2 \gamma_3^2) \right]^*$$

$$\left[(u_2 - u_1)(u_3 - u_2) e^{-2u_2 d} + (u_2 + u_1)(u_3 + u_2) \right]$$

$$g_1 = u_2 \gamma_1^2 - u_1 \gamma_2^2$$

$$g_2 = u_3 \gamma_2^2 - u_2 \gamma_3^2$$

$$g_3 = u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2$$

$$g_4 = u_3 \gamma_2^2 + u_2 \gamma_3^2$$

$$f_1 = u_2 - u_1$$

$$f_2 = u_3 - u_2$$

$$f_3 = u_2 + u_1$$

$$f_4 = u_3 + u_2$$

$$g_{12} = 2\lambda^2 e^{u_1 d} \left\{ \left[f_4 - f_2 e^{-2u_2 d} \right] \left[g_4 - g_2 e^{-2u_2 d} \right] (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \right. \\ \left. - 2 \gamma_1^2 u_2^2 e^{-2u_2 d} (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) \right\} / \text{Den}$$

$$g_{21} = -2\lambda^2 e^{u_1 z} \gamma_1^2 / \gamma_2^2 \left\{ \left[f_4 - f_2 e^{-2u_2 d} \right] g_4 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \right. \\ \left. + 2 f_1 u_2 e^{-2u_2 d} (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) \right\} / \text{Den}$$

$$g_{22} = 2\lambda^2 e^{u_1 z_0} \gamma_1^2 / \gamma_2^2 e^{-2u_2 d} \left\{ \begin{aligned} & \left[f_4 - f_2 e^{-2u_2 d} \right] g_2 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \\ & - 2 f_3 u_2 e^{-2u_2 d} (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) \end{aligned} \right\} / \text{Den}$$

$$g_{31} = 2\lambda^2 e^{u_1 z_0} \gamma_1^2 / \gamma_3^2 e^{-(u_2 - u_3) d} \left\{ \begin{aligned} & \left[f_4 - f_2 e^{-2u_2 d} \right] (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) 2u_3 \gamma_2^2 \\ & - 2 \left[g_3 + g_1 e^{-2u_2 d} \right] u_2 (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) \end{aligned} \right\} / \text{Den}$$

ANNEXE 2

A - Calcul des zéros des termes exponentiels :

Soit un complexe $z = a + jb$

$$e^z = e^a (\cos b + j \sin b)$$

$\operatorname{Re}(e^z)$ est nulle pour $b = (2k + 1) \frac{\pi}{2} = n \frac{\pi}{2}$, avec n impair.

$\operatorname{Im}(e^z)$ est nulle pour $b = 2k \frac{\pi}{2} = n \frac{\pi}{2}$, avec n pair.

si $z = \sqrt{c + jd} = a + jb$ avec $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ ($a \geq 0$)

$$b = \left[\frac{(c^2 + d^2)^{1/2} - c}{2} \right]^{1/2} \quad \text{et} \quad a = \left[\frac{(c^2 + d^2)^{1/2} + c}{2} \right]^{1/2}$$

dans notre cas le terme exponentiel est :

$$e^{-u_1 (z_0 \bar{z})} \quad \text{avec} \quad u_1 = \left[\lambda^2 + \gamma_1^2 \right]^{1/2} = \left[\lambda^2 + \operatorname{Re}(\gamma_1^2) + j \operatorname{Im}(\gamma_1^2) \right]^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$\text{d'où } b = -\frac{(z_0 \bar{z})}{\sqrt{2}} \left[\left[\left[\lambda^2 + \operatorname{Re}(\gamma_1^2) \right]^2 + \operatorname{Im}^2(\gamma_1^2) \right]^{1/2} - (\lambda^2 + \operatorname{Re}(\gamma_1^2)) \right]^{1/2} = n \frac{\pi}{2}$$

d'où les valeurs de λ_n de λ pour lesquelles on a des zéros :

$$\lambda_n = \left[\left[\frac{(z_0 \bar{z}) \operatorname{Im}(\gamma_1^2)}{n \pi} \right]^2 - \left[\frac{n \pi}{2 (z_0 \bar{z})} \right]^2 - \operatorname{Re}(\gamma_1^2) \right]^{1/2}$$

d'autre part il ne peut exister de zéros que si

$$\left[\frac{(z_0 \bar{z}) \operatorname{Im}(\gamma_1^2)}{n \pi} \right]^2 - \left[\frac{n \pi}{2 (z_0 \bar{z})} \right]^2 - \operatorname{Re}(\gamma_1^2) \geq 0$$

Cette équation s'annule pour

$$n_0 = \frac{(z_0 \bar{z})}{\pi} \left[2(|\gamma_1^2| - \operatorname{Re}(\gamma_1^2)) \right]^{1/2}$$

donc le nombre de zéros est : $N = E(n_0)$, $E(x)$ = partie entière de x et la fonction n'admet de zéros que si $n_0 \geq 1$.

Notons également que la décroissance du terme exponentiel se fait en

$$-\frac{(z_0 \bar{z})}{\sqrt{2}} \left[\left[\left[\lambda^2 + \operatorname{Re}(\gamma_1^2) \right]^2 + \operatorname{Im}^2(\gamma_1^2) \right]^{1/2} - (\lambda^2 + \operatorname{Re}(\gamma_1^2)) \right]^{1/2}$$

Remarque : Les valeurs λ_n ne sont que des valeurs approchées des zéros de la fonction car le terme exponentiel est multiplié par un autre terme complexe.

B - Calcul des valeurs limites et leurs intégrales pour les fonctions intervenant dans les intégrales de Sommerfeld :

Les valeurs limites de toutes ces fonctions quand λ tend vers l'infini sont :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_{12}(\lambda) = \frac{2 \gamma_2^2 P_1 e^{\lambda z_0}}{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} = \alpha_1$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_{21}(\lambda) = \frac{2 \gamma_1^2 P_1 e^{\lambda z_0}}{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} = \alpha_2$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_{1j}(\lambda) \lambda^n e^{\bar{z} u_1 z} = \alpha_1 \lambda^n e^{\bar{z} \lambda z}$$

Ces limites peuvent être rassemblées en 3 sortes de limites :

$$\text{a) } \alpha_1 e^{-\lambda\beta} \lambda^2 J_0(\lambda r)$$

$$\text{b) } \alpha_1 e^{-\lambda\beta} \lambda J_1(\lambda r)$$

$$\text{c) } \alpha_1 e^{-\lambda\beta} \lambda^2 J_1(\lambda r)$$

l'intégration de ces fonctions est :

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\beta} \lambda J_1(\lambda r) = \frac{r}{(\beta^2 + r^2)^{5/2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\beta} \lambda^2 J_0(\lambda r) = \frac{2\beta^2 - r^2}{(\beta^2 + r^2)^{5/2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\beta} \lambda^2 J_1(\lambda r) = \frac{3\beta r}{(\beta^2 + r^2)^{5/2}}$$

ANNEXE 3

Développement de E_r :

$$E_r = \frac{H_0}{r\omega\epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n j^{-n} \left[J_n(kr) + B_n H_n^{(2)}(kr) \right] e^{jn\theta}$$

où
$$B_n = \frac{-J_n'(kR)}{H_n^{(2)'}(kR)}$$

Dans le cas des basses fréquences et pour des rayons faibles, seul le terme à l'ordre 1 est significatif (les autres termes sont négligeables):

$$E_r = \frac{-H_0}{r\omega\epsilon} 2 \sin(\phi) \left[J_1(kr) + B_1 H_1^{(2)}(kr) \right]$$

or, la réception se fait sur la surface même du cylindre $r=R$,

de plus, pour $kR \ll 1$,

$$\begin{aligned} J_1(kR) &\longrightarrow kR/2 \\ J_0(kR) &\longrightarrow 1 \\ Y_0(kR) &\longrightarrow 2/\pi \text{Log}(kR) \\ Y_1(kR) &\longrightarrow -2/\pi /kR \\ J_1'(kR) &\longrightarrow k/2 \\ Y_1'(kR) &\longrightarrow -Y_1/R \end{aligned}$$

nous aurons :

$$E_r = -\frac{H_0}{R\omega\epsilon} 2 \sin(\phi) kR$$

$$H_0 = E_0 * \sqrt{\epsilon/\mu}$$

$$k = \omega * \sqrt{\epsilon \mu}$$

d'où $E_r \# 2 \sin(\phi)$

ANNEXE 4

Expression des composantes du champ électrique :

$$A_r = \frac{E_0 \cos \vartheta}{w\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \mathcal{J}_n(kr) + B_n \mathcal{H}_n^{(2)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta)$$

et

$$F_r = \frac{E_0 \sin \vartheta}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \mathcal{J}_n(kr) + C_n \mathcal{H}_n^{(2)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta)$$

$$E_r = \frac{-E_0 j \cos \vartheta}{(kr)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \mathcal{J}_n(kr) + B_n \mathcal{H}_n^{(2)}(kr) \right] n(n+1) P_n^1(\cos \theta)$$

$$E_{\theta} = \frac{E_0 \cos \vartheta}{j} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \left\{ \mathcal{J}_n(kr) (n+1) - kr \mathcal{J}_{n+1}(kr) \right\} \right. \\ \left. + B_n \left\{ \mathcal{H}_n^{(2)}(kr) (n+1) - kr \mathcal{H}_{n+1}^{(2)}(kr) \right\} \right] \frac{d P_n^1(\cos \theta)}{d \theta}$$

$$- \frac{E_0 \cos \vartheta}{kr \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \mathcal{J}_n(kr) + C_n \mathcal{H}_n^{(2)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned}
E_{\theta} = & \frac{-E_0 \sin \theta}{j \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \left\{ \mathcal{J}_n(kr) (n+1) - kr \mathcal{J}_{n+1}(kr) \right\} \right. \\
& \left. + B_n \left\{ \mathcal{H}_n^{(2)}(kr) (n+1) - kr \mathcal{H}_{n+1}^{(2)}(kr) \right\} \right] P_n^1(\cos \theta) \\
& + \frac{E_0 \sin \theta}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \mathcal{J}_n(kr) + C_n \mathcal{H}_n^{(2)}(kr) \right] \frac{d P_n^1(\cos \theta)}{d \theta}
\end{aligned}$$

ANNEXE 5

* Expression de f_1 et f_2

En appliquant les conditions aux limites en $z=0$, nous obtenons

$$f_1 = \frac{2\lambda \gamma_2^2}{u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2}$$

$$f_2 = \frac{2\lambda \gamma_1^2}{u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2}$$

* Expression de E_{ex}^1 , E_{ey}^1 et E_{ez}^1

Posons $P_1 = \frac{I dl}{4\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)}$

$$E_{ex}^1 = \left[\begin{aligned} & \frac{(x_r - x_e)(z_r - z_e)(\gamma_1^2 R_1^2 + 3\gamma_1 R_1 + 3)}{R_1^5} e^{-\gamma_1 R_1} \\ & + \frac{(x_r - x_e)(z_r + z_e)(\gamma_1^2 R_2^2 + 3\gamma_1 R_2 + 3)}{R_2^5} e^{-\gamma_1 R_2} \\ & + \frac{x_r - x_e}{r} \int_0^\infty \lambda u_1 f_1 e^{u_1(z_r + z_e)} J_1(\lambda r) \end{aligned} \right]$$

$$E_{ey}^1 = \left[\begin{aligned} & \frac{(y_r - y_e)(z_r - z_e)(\gamma_1^2 R_1^2 + 3\gamma_1 R_1 + 3)}{R_1^5} e^{-\gamma_1 R_1} \\ & + \frac{(y_r - y_e)(z_r + z_e)(\gamma_1^2 R_2^2 + 3\gamma_1 R_2 + 3)}{R_2^5} e^{-\gamma_1 R_2} \\ & + \frac{y_r - y_e}{r} \int_0^\infty \lambda u_1 f_1 e^{u_1(z_r + z_e)} J_1(\lambda r) \end{aligned} \right]$$

$$E_{ez}^1 = \left[\left[\frac{-r^2(\gamma_1^2 R_1^2 + 3\gamma_1 R_1 + 3)}{R_1^5} + \frac{2(\gamma_1 R_1 + 1)}{R_1^3} \right] e^{-\gamma_1 R_1} + \right.$$

$$\left. \left[\frac{r^2(\gamma_1^2 R_2^2 + 3\gamma_1 R_2 + 3)}{R_2^5} + \frac{2(\gamma_1 R_2 + 1)}{R_2^3} \right] e^{-\gamma_1 R_2} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \lambda^2 f_1 e^{u_1(z_r + z_e)} J_1(\lambda r) \right]$$

$$R_1 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_2 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$r = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 \right]^{1/2}$$

* Expression de l_1 et g_1

$$l_1 = \frac{2\lambda}{u_2 + u_1}$$

$$g_1 = \frac{-2\lambda (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)}{(u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2)(u_2 + u_1)}$$

* Expression de G_a^b ($a=x, y, z$ et $b=x, y, z$)

$$G(R_1) = \frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1}$$

$$G(R_2) = \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2}$$

$$S_{1x}^h = \int_0^{\infty} l_1 e^{u_1 z_n} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$S_{1z}^{hx} = - \frac{x_m - x_n}{r} \int_0^{\infty} g_1 e^{u_1 z_n} J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$S_{1z}^{hy} = - \frac{y_m - y_n}{r} \int_0^{\infty} g_1 e^{u_1 z_n} J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$S_{1z}^v = \int_0^{\infty} f_1 e^{u_1 z_n} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$R_1 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_2 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$G_x^x = \left(-\gamma_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (G_1 - G_2 + S_{1x}^h)$$

$$G_x^y = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (G_1 - G_2 + S_{1y}^h) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} S_{1z}^{hy}$$

$$G_x^z = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (G_1 - G_2 + S_{1z}^v)$$

$$G_y^x = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (G_1 - G_2 + S_{1x}^h) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} S_{1z}^{hx}$$

$$G_y^y = (-\gamma_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) (G_1 - G_2 + S_{1y}^h)$$

$$G_y^z = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (G_1 - G_2 + S_{1z}^v)$$

$$G_z^x = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (G_1 + G_2 - S_{1z}^v)$$

$$G_z^y = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (G_1 + G_2 - S_{1z}^v)$$

$$G_z^z = (-\gamma_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) (G_1 - G_2 + S_{1z}^v)$$

$$g_x^x = - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (G_1 - G_2 + S_{1x}^h)$$

$$g_y^y = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (G_1 - G_2 + S_{1y}^h)$$

$$g_z^z = - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (G_1 - G_2 + S_{1z}^v)$$

* Expression des intégrales I_1 à I_{20}

$$I_1 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[\frac{y_m - y_{n2}}{R_2^3} (\gamma_1 R_2 + 1) e^{-\gamma_1 R_2} - \frac{y_m - y_{n1}}{R_1^3} (\gamma_1 R_1 + 1) e^{-\gamma_1 R_1} \right] dx dz_n$$

$$I_2 = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[\frac{y_m - y_{n2}}{R_4^3} (\gamma_1 R_4 + 1) e^{-\gamma_1 R_4} - \frac{y_m - y_{n1}}{R_3^3} (\gamma_1 R_3 + 1) e^{-\gamma_1 R_3} \right] dx dz_n$$

$$I_3 = \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[\frac{z_m - z_{n2}}{R_6^3} (\gamma_1 R_6 + 1) e^{-\gamma_1 R_6} - \frac{z_m - z_{n1}}{R_5^3} (\gamma_1 R_5 + 1) e^{-\gamma_1 R_5} \right] dx dy_n$$

$$I_4 = \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[\frac{z_m + z_{n2}}{R_8^3} (\gamma_1 R_8 + 1) e^{-\gamma_1 R_8} - \frac{z_m + z_{n1}}{R_7^3} (\gamma_1 R_7 + 1) e^{-\gamma_1 R_7} \right] dx dy_n$$

$$R_1 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_2 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_3 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m + z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_4 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m + z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_5 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_6 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_7 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_8 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \left[\frac{2\lambda^2}{u_1} \frac{\gamma_1^2}{u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2} e^{u_1(z_n + z_m)} (e^{u_1 \Delta z} - e^{-u_1 \Delta z}) \left[\frac{x_m - x_{n2}}{r_2} J_0(\lambda r_2) - \frac{x_m - x_{n1}}{r_1} J_0(\lambda r_1) \right] \right] d\lambda dy_n$$

$$r_1 = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$r_2 = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$I_6 = \int_0^{\infty} \frac{1}{u_1} e^{u_1(z_n + z_m)} (e^{u_1 \Delta z} - e^{-u_1 \Delta z}) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$r = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$I_7 = \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \left[\frac{x_m - x_{n2}}{R_{10}^3} (\gamma_1 R_{10} + 1) e^{-\gamma_1 R_{10}} \frac{x_m - x_{n1}}{R_9^3} (\gamma_1 R_9 + 1) e^{-\gamma_1 R_9} \right] dz_n dy_n$$

$$I_8 = \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \left[\frac{x_m - x_{n2}}{R'_{10}{}^3} (\gamma_1 R'_{10} + 1) e^{-\gamma_1 R'_{10}} \frac{x_m - x_{n1}}{R'_9{}^3} (\gamma_1 R'_9 + 1) e^{-\gamma_1 R'_9} \right] dz_n dy_n$$

$$R_9 = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{10} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R'_9 = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R'_{10} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$I_9 = \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \int_0^{\infty} \frac{2\lambda^2}{u_1} \frac{\gamma_1^2}{u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2} e^{u_1(z_n + z_m)} (e^{u_1 \Delta z} - e^{-u_1 \Delta z}) \left[\frac{y_m - y_{n2}}{r'_2} J_0(\lambda r'_2) - \frac{y_m - y_{n1}}{r'_1} J_0(\lambda r'_1) \right] d\lambda dx_n$$

$$r'_1 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$r'_2 = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$I_{10} = \int_0^{\infty} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[\frac{\lambda}{u_1} f_1 e^{u_1(z_n + z_m)} (e^{u_1 \Delta z} - e^{-u_1 \Delta z}) \left[\frac{y_m - y_{n2}}{r_2} J_0(\lambda r_2') - \frac{y_m - y_{n1}}{r_1} J_0(\lambda r_1') \right] \right] d\lambda dx_n$$

$$I_{11} = \int_0^{\infty} \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \left[\frac{2\lambda^2}{u_1} f_1 e^{u_1(z_n + z_m)} (e^{u_1 \Delta z} - e^{-u_1 \Delta z}) \left[\frac{x_m - x_{n2}}{r_2} J_0(\lambda r_2) - \frac{x_m - x_{n1}}{r_1} J_0(\lambda r_1) \right] \right] d\lambda dy_n$$

$$I_{12} = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \left[\left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{22}}}{R_{22}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{21}}}{R_{21}} \right\} - \left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{12}}}{R_{12}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{11}}}{R_{11}} \right\} \right] dz_n$$

$$I_{13} = \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} \left[\left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{24}}}{R_{24}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{23}}}{R_{23}} \right\} - \left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{14}}}{R_{14}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{13}}}{R_{13}} \right\} \right] dz_n$$

$$R_{11} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{12} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{21} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{22} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{13} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m + z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{14} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m + z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{23} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m + z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{24} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m + z_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$I_{14} = \int_0^{\infty} \frac{2\lambda^2}{u_1} \frac{\gamma_1^2}{u_2 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_2^2} e^{u_1(z_n + z_m)} (e^{u_1 \Delta z} - e^{-u_1 \Delta z}) \left[J_0(\lambda r_{22}) + J_0(\lambda r_{11}) \right. \\ \left. - J_0(\lambda r_{21}) - J_0(\lambda r_{12}) \right] d\lambda$$

$$I_{15} = \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \left[\left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{22}}}{R_{22}} - \frac{\gamma_1 R_{21}}{R_{21}} \right\} \left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{12}}}{R_{12}} - \frac{\gamma_1 R_{11}}{R_{11}} \right\} \right] dy_n$$

$$I_{16} = \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \left[\left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{24}}}{R_{24}} - \frac{\gamma_1 R_{23}}{R_{23}} \right\} \left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{14}}}{R_{14}} - \frac{\gamma_1 R_{13}}{R_{13}} \right\} \right] dy_n$$

$$R_{11} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{12} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{21} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{22} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{13} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{14} = \left[(x_m - x_{n1})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{23} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{24} = \left[(x_m - x_{n2})^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$I_{17} = \int_0^\infty \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} f_1 e^{u_1(z_n + z_m)} (e^{u_1 \Delta z} - e^{-u_1 \Delta z}) [J_0(\lambda r_2) - J_0(\lambda r_1)] d\lambda dy_n$$

$$I_{18} = \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[\left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{22}}}{R_{22}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{21}}}{R_{21}} \right\} \left\{ \frac{-\gamma_1 R_{12}}{R_{12}} - \frac{-\gamma_1 R_{11}}{R_{11}} \right\} \right] dx_n$$

$$I_{19} = \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \left[\left\{ \frac{e^{-\gamma_1 R_{24}}}{R_{24}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{23}}}{R_{23}} \right\} \left\{ \frac{-\gamma_1 R_{14}}{R_{14}} - \frac{-\gamma_1 R_{13}}{R_{13}} \right\} \right] dx_n$$

$$R_{11} = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m - z_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{12} = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m - z_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{21} = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m - z_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{22} = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m - z_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{13} = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m + z_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{14} = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n1})^2 + (z_m + z_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{23} = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m + z_{n1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{24} = \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_{n2})^2 + (z_m + z_{n2})^2 \right]^{1/2}$$

$$I_{20} = \int_{0}^{x_{n1}} \int_{x_{n2}}^{\infty} f_1 e^{u_1(z_n + z_m)} (e^{u_1 \Delta z} - e^{-u_1 \Delta z}) \left[J_0(\lambda r'_2) - J_0(\lambda r'_1) \right] d\lambda dx_n$$

*** Optimisation des calculs**

La matrice [A] se décompose, comme nous l'avons vu dans le chapitre III, selon le schéma suivant :

$$[A] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_x^x & A_x^y & A_x^z \\ \hline A_y^x & A_y^y & A_y^z \\ \hline A_z^x & A_z^y & A_z^z \\ \hline \end{array}$$

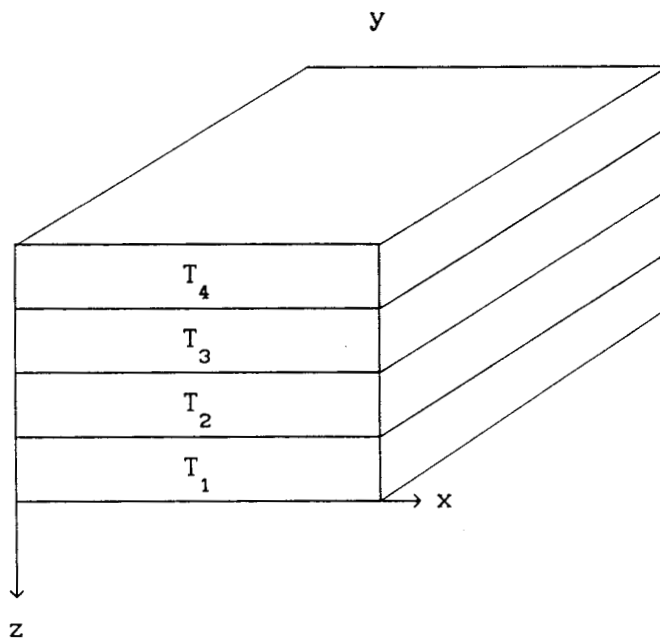
Les sous-matrices A_α^α , représentant les effets mutuels entre deux dipôles équivalents de même direction, sont composées d'intégrales doubles. Les autres, représentant les effets entre les dipôles équivalents orthogonaux, sont composées d'intégrales simples. Dans le chapitre III, nous avons vu que $[A_\alpha^\beta] = [A_\beta^\alpha]$ ($\alpha = \beta$) d'où $[A]$ est symétrique par blocs.

Ces différents blocs sont décomposés à leur tour en sous-matrices selon le schéma suivant :

1- Découpage en tranches

Du fait du découpage de l'anomalie en tranches suivant oz, toutes les matrices $[A_\alpha^\beta]$ peuvent être décomposées comme suit :

T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}
T_{21}			
			T_{44}



Découpage de l'anomalie en tranches

$[T_{ij}]$: la matrice d'influence de la tranche i sur la tranche j .

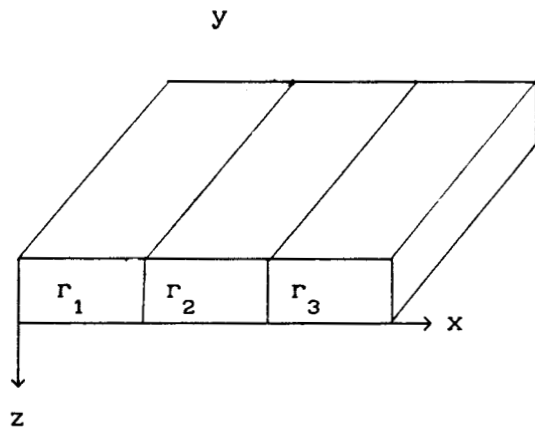
$i = 1, 2, \dots, N$

$j = 1, 2, \dots, N$

2 - Découpage en rangée

Chacune des matrices $[T_{ij}]$ est décomposée en blocs $[r_{kl}]$ représentant l'influence d'une rangée k sur une rangée l .

Γ_{11}	Γ_{12}	Γ_{13}
Γ_{21}		
		Γ_{33}



Découpage d'une tranche Tj en rangée

3 - Découpage en éléments

Enfin, chaque rangée est décomposée en éléments et les matrices $[r_{kl}]$ sont composées des éléments e_{mn} correspondant à l'effet mutuel entre m et n .

L'ensemble de ces matrices et sous-matrices possède des propriétés de symétrie ($e_{mn} = e_{nm}$) ou d'anti-symétrie ($e_{mn} = -e_{nm}$) qu'on démontre en intervertissant les coordonnées de l'élément d'émission et de réception dans les intégrales I_1 citées en cette annexe. On démontre aussi une symétrie de translation ($e_{mn} = e_{(m+k)(n+k)}$) en augmentant de la même quantité les coordonnées des points de réception et d'émission.

Dans ce qui suit, nous allons résumer les différentes étapes de découpages et les propriétés des différents blocs.

1ère étape

A_x^x	A_x^y	A_x^z
A_y^x	A_y^y	A_y^z
A_z^x	A_z^y	A_z^z

symétrie par bloc A_{α}^{β}

I) Blocs dont la diagonale coïncide avec la diagonale principale A_{α}^{α}

2ème étape

T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}
T_{21}			
			T_{44}

. symétrie de translation par blocs.

. symétrie par bloc par rapport à la diagonale principale de la matrice A_{α}^{α} ,

$T_{12} = T_{21}$. Il en résulte que les matrices $T_{\beta\beta}$ sont symétriques.

3ème étape : chaque matrice T est représentée ci-dessous :

T →

r_{11}	r_{12}	r_{13}
r_{21}		
		r_{33}

. symétrie de translation par bloc.

. symétrie par blocs par rapport à la diagonale principale de la matrice T.

4ème étape : chaque matrice r_{kl} est redivisée.

r_{kl}

e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}
e_{21}			
			e_{34}
			e_{44}

- . symétrie de translation par élément.
- . symétrie des éléments par rapport à la diagonale principale de la matrice r_{kl} .

Ces différentes étapes étant effectuées, on trouve bien que les matrices A_{α}^{α} sont symétriques.

II) Blocs hors de la diagonale

II.1) Bloc A_x^y

2ème étape : même propriété que pour les matrices A_{α}^{α} .

3ème étape : même propriété que pour les matrices A_{α}^{α} .

4ème étape : chaque matrice r_{kl} se présente sous la forme

r_{kl}

e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}
e_{21}			
			e_{34}
			e_{44}

- . symétrie de translation par élément
- . antisymétrie des éléments par rapport à la diagonale principale de cette matrice. Il en résulte donc que sa diagonale principale est nulle. De plus, les matrices r_{kl} sont nulles puisqu'elles correspondent au cas où $y_m = y_n$.

II.2) Bloc A_x^z

2ème étape : même propriété que les matrices A_α^α

3ème étape : chaque matrice T a les propriétés suivantes :

T →

r_{11}	r_{12}	r_{13}
r_{21}		
		r_{33}

- . symétrie de translation par bloc.
- . antisymétrie par bloc.

Remarque : pour certaines intégrales, les matrices $T_{\beta\beta}$ sont symétriques et dans ce cas toutes les matrices T sont antisymétriques par blocs. Il en résulte que les matrices $T_{\beta\beta}$ sont nulles.

4ème étape : la matrice r_{kl} est :

r_{kl}

e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}
e_{21}			
			e_{34}
			e_{44}

- . symétrie de translation par élément.
- . antisymétrie des éléments par rapport à la diagonale donc tous les éléments de la diagonale sont nuls.

II.3) Bloc A_y^z

2ème étape : même propriété que les matrices A_α^α .

3ème étape : la matrice T a les propriétés suivantes (semblables à celles du bloc A_x^z)

T →

r_{11}	r_{12}	r_{13}
r_{21}		
		r_{33}

- . symétrie de translation par bloc.
- . antisymétrie par bloc.
- . nullité des matrices $T_{\beta\beta}$.

4ème étape : la matrice r_{kl} a les propriétés suivantes :

r_{kl}

e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}
e_{21}			
			e_{34}
			e_{44}

- .symétrie de translation par élément.
- .symétrie des éléments par rapport à la diagonale.

Remarque : la matrice T étant antisymétrique par bloc et la matrice r_{kl} étant symétrique, il en résulte que les matrices r_{kl} seront nulles.

Calcul de $\Delta Z_m / Z_m$:

$$\Delta Z_m = - \frac{k^2 h_a h_b}{4 \pi^2} \frac{e^{-jkr_o}}{r_o} F(r_o, Z) \int_{-\epsilon}^{\infty} \left[(Z' - Z) e^{-jkC_1 x} \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jkR}}{R} \left(1 + \frac{1}{jkR} \right) \left[\frac{x-d_1}{R} C_1 - \frac{y}{R} S_1 \right] e^{jkS_1 y} dy \right] dx$$

en utilisant l'identité suivante :

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{e^{-jkR}}{R} = -jk \left(1 + \frac{1}{jkR} \right) \frac{e^{-jkR}}{R}$$

on obtient :

$$\Delta Z_m = - \frac{k^2 h_a h_b}{4 \pi^2} \frac{e^{-jkr_o}}{r_o} F(r_o, Z) \int_{-\epsilon}^{\infty} (Z' - Z) e^{-jkC_1 x} \left[C_1 \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jkR}}{R} e^{jkS_1 y} dy - S_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{jkS_1 y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-jkR}}{R} dy \right] dx$$

Sachant que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jkR}}{R} e^{jks_1 y} dy = -j\pi H_0^{(2)} \left[kC_1 |x - d_1| \right]$$

et

$$\Delta Z_m = - \frac{j k h_a h_b \eta_0}{4 \pi} \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} e^{-jkC_1 d} F(r_0, Z)$$

on obtient finalement :

$$\frac{\Delta Z_m}{Z_m} = - \frac{j}{2} e^{j\alpha_1} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} (|\alpha - \alpha_1|) e^{-j\alpha} \left[C_1 \frac{df(\alpha)}{d\alpha} - j \frac{f(\alpha)}{C_1} \right] d\alpha$$

où $\alpha = kC_1 x$, $f(\alpha) = (Z' - Z)/\eta_0$

Expression de g_1 et g_2 :

$x > 0$:

$$g_1(x) = 1/2 \left[\cos(3\pi/4 + x) J_0(x) + \sin(3\pi/4 + x) Y_0(x) \right] \\ + j/2 \left[\sin(3\pi/4 + x) J_0(x) - \cos(3\pi/4 + x) Y_0(x) \right]$$

$$g_2(x) = -x/2 \left[\cos(\pi/4 + x) (J_1 + Y_1)(x) - \sin(\pi/4 + x) (J_0 - Y_0)(x) \right] \\ - jx/2 \left[\sin(\pi/4 + x) (J_1 + Y_1)(x) + \cos(\pi/4 + x) (J_0 - Y_0)(x) \right]$$

si $x < 0$:

$$g_1(x) = 1/2 \left[\cos(3\pi/4 + x) J_0(-x) + \sin(3\pi/4 + x) Y_0(-x) \right] \\ + j/2 \left[\sin(3\pi/4 + x) J_0(x-) - \cos(3\pi/4 + x) Y_0(x-) \right]$$

$$g_2(x) = -x/2 \left[\cos(\pi/4 + x) (Y_0 - J_1)(-x) - \sin(\pi/4 + x) (J_0 + Y_1)(-x) \right]$$

$$-jx/2 \left[\sin(\pi/4 + x) (Y_0 - J_0)(-x) + \cos(\pi/4 + x) (J_0 + Y_1)(-x) \right]$$

Expression de A_m $1 \leq m \leq 10$:

$$A_0(q) = 1$$

$$A_1(q) = -j \pi^{1/2}$$

$$A_2(q) = -2$$

$$A_3(q) = -j \pi^{1/2} \left[1 + \frac{1}{4 q^3} \right]$$

$$A_4(q) = \frac{4}{3} \left[1 + \frac{1}{2 q^3} \right]$$

$$A_5(q) = -j/2 \pi^{1/2} \left[1 + \frac{3}{4 q^3} \right]$$

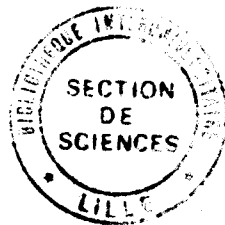
$$A_6(q) = -\frac{8}{15} \pi^{1/2} \left[1 + \frac{3}{q^3} + \frac{7}{32 q^6} \right]$$

$$A_7(q) = \frac{j}{6} \pi^{1/2} \left[1 + \frac{5}{4 q^3} + \frac{1}{2 q^6} \right]$$

$$A_8(q) = -\frac{16}{105} \pi^{1/2} \left(1 + \frac{3}{2 q^3} + \frac{27}{32 q^6} \right)$$

$$A_9(q) = -\frac{j}{24} \pi^{1/2} \left(1 + \frac{7}{4 q^3} + \frac{5}{4 q^6} + \frac{21}{32 q^9} \right)$$

$$A_{10}(q) = -\frac{32}{945} \pi^{1/2} \left(1 + \frac{2}{q^3} + \frac{55}{32 q^6} + \frac{49}{64 q^9} \right)$$



RESUME

L'irrégularité de la surface du sol crée un changement local du module et de la phase du champ électromagnétique. Ce changement dépend de plusieurs paramètres : la conductivité du terrain, la fréquence d'émission, et les dimensions de l'irrégularité (montagne, vallée, forêt, bâtiment,...).

Nous avons mis au point plusieurs programmes de calcul numérique afin de déterminer l'influence de ces anomalies topographiques sur le champ électrique dans le domaine des basses fréquences.

Dans cette étude, nous avons également déterminé l'influence d'un pylône, en partie enterré dans le sol, sur le champ électrique et sa réponse temporelle à une décharge électrique provoquée, par exemple, par la foudre.

Enfin, l'effet d'un changement brutal de conductivité entre deux milieux sur le champ électrique a été mis en évidence, et nous nous sommes attachés plus particulièrement à étudier la transition sol-mer et les fluctuations du champ au voisinage immédiat de la ligne de côte.