

50376
1990
313

50376
1990
313

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE-FLANDRE-ARTOIS

N° d'ordre 601

Thèse de Doctorat, spécialité Mécanique
présentée par Alain FEIDT

QUELQUES RESULTATS SUR UNE METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION
DU TYPE EULER-LAGRANGE, POUR LES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES.



Soutenue le 15 Octobre 1990 devant le jury composé de :

Rapporteurs : Mr J.P.BARRAND, Professeur, ENSAM

Mr J.CHAUVIN, Professeur, Université de Paris VI

Examineurs : Mme S.GUINOTTE, Chargée d'étude, P.S.A. Etudes et Recherches

Mr M.FEIDT, Professeur, ENSEM

Mr P.MICHEAU, Professeur, Université de Lille

Mr H.NAJI, Maître de conférences, Université de Lille



031 0 1990 2

NOTATIONS GENERALES	p. 1
I. INTRODUCTION	p. 2
II. LES EQUATIONS TRAITÉES ET L'ÉCRITURE DU CODE	
1. Introduction	p. 4
2. Formulation A.L.E. et discrétisation temporelle	p. 4
3. Discrétisation spatiale	p. 9
4. Correction a posteriori sur les vitesses	p.14
5. Conditions aux limites - Pas de temps	p.15
III. TESTS LAMINAIRES	
1. Canal bidimensionnel	p.19
2. Marche descendante	p.28
IV. TESTS TURBULENTS	
1. Les écoulements turbulents	p.35
2. Fermeture des équations moyennées	p.39
3. Tests turbulents	p.44
V. MODELISATION D'UNE CONFIGURATION INDUSTRIELLE	
1. Dispositif expérimental	p.56
2. Conditions des calculs	p.56
3. Résultats	p.61
VI. CONCLUSION	p.69
REFERENCES	p.71
ANNEXES	
1. Ecriture des équations en formulation A.L.E.	p.74
2. Discrétisation spatiale de l'équation de conservation de la masse	p.76
3. Discrétisation spatiale des flux convectifs	p.79
4. Correction des vitesses	p.80

NOTATIONS GENERALES

\vec{x} / x_i : vecteur position.

\vec{u} / u_i : vecteur vitesse du fluide.

\vec{w} : vitesse de grille.

\vec{n} : normale extérieure.

$\vec{\sigma} / \sigma_{ij}$: tenseur des contraintes.

$\vec{\tau} / \tau_{ij}$: tenseur des contraintes visqueuses.

$\vec{\epsilon} / \epsilon_{ij}$: tenseur de déformations.

δ_{ij} : symbole de Kronecker.

ρ : masse volumique.

t : temps.

$\frac{\partial}{\partial t}$: dérivée temporelle.

$\frac{\partial}{\partial x_i}$: dérivée spatiale.

$\frac{d}{dt}$: dérivée en suivant le mouvement (formalisme lagrangien).

$\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{w}}$: dérivée en suivant l'élément de volume (formalisme A.L.E.).

p : pression.

μ : viscosité dynamique.

ν : viscosité cinématique.

μ_t / ν_t : viscosités turbulentes.

Δt : pas de temps.

I. INTRODUCTION

Divers programmes de résolution numérique des équations de la mécanique des fluides existent actuellement et certains sont même disponibles commercialement. Malheureusement, si les algorithmes utilisés sont généralement connus dans leur globalité, il est assez difficile de les connaître finement, les programmes sources n'étant pas accessibles soit parce qu'ils ne sont pas disponibles, soit parce qu'ils sont d'une lisibilité médiocre. Il en résulte que l'extension de leur champ d'application est quasi-impossible. Par ailleurs leurs performances sont rarement homogènes.

Dans la perspective de pouvoir modéliser des écoulements de fluides quelconques dans des machines ou des éléments de machines, on s'est fixé comme objectif de travail de réaliser un programme de résolution des équations de la mécanique des fluides pour des écoulements :

- bidimensionnels, les configurations géométriques pouvant être compliquées et les conditions aux limites diverses,
- avec ou sans surface libre,
- isothermes, laminaires ou turbulents,
- de fluides monophasiques, incompressibles, newtoniens ou à lois rhéologiques quelconques.

De plus les algorithmes doivent pouvoir être aisément transposables au cas où les écoulements seraient tridimensionnels et compressibles.

Le respect de ces contraintes nous suggère les réflexions suivantes :

- Pouvoir prendre en compte des géométries compliquées est à la fois facilité par la mise en oeuvre de techniques d'éléments finis pour la discrétisation spatiale des équations à traiter, et peu compatible avec l'utilisation de décompositions spatiales d'opérateurs pour résoudre les équations discrétisées.
- Pouvoir suivre l'évolution de surfaces libres est facilité par une écriture lagrangienne des équations.
- Pouvoir intégrer dans la modélisation des lois de comportement diverses interdit que l'algorithme mis en oeuvre utilise la structure des termes "visqueux" pour faciliter la résolution des équations.
- Pouvoir généraliser l'écriture au cas des écoulements tridimensionnels est facilité par l'utilisation des variables naturelles vitesse, pression, masse spécifique.
- Pouvoir transposer un programme traitant le cas des écoulements incompressibles en une version apte à prendre en compte la compressibilité est facilité si la pression est une variable que l'on calcule.

Compte tenu de ces différentes remarques, on a choisi parmi les méthodes existantes d'utiliser la formulation A.L.E (Arbitrary Lagrangian Eulerian) développée par le "Los Alamos National Laboratory" dans les années 1970, largement utilisée par d'autres auteurs sans que l'algorithme initial soit remis en question ni utilisé dans toutes ses possibilités. Notamment, la discrétisation spatiale est très fréquemment du type différences ou volumes finis, même dans les applications les plus récentes [1-1].

La discrétisation temporelle est du type différences finies. L'algorithme peut être considéré comme une méthode à pas fractionnaires avec une décomposition d'opérateurs suivant leur nature :

- évolution des vitesses sous l'effet des contraintes "visqueuses" et des pressions, l'évolution des pressions étant telle que la conservation de la masse soit respectée,
- évolution des vitesses sous l'effet des apports convectifs.

L'algorithme permet la détermination des différentes grandeurs caractérisant l'écoulement en des points, ou plus précisément sur des éléments de volume évoluant dans le temps au choix de l'opérateur pourvu que la continuité du domaine soit respectée.

Après avoir présenté les équations traitées, on les discrétise temporellement et spatialement. La discrétisation spatiale mise en oeuvre est du type éléments finis avec deux types de conditions aux limites principales : vitesse imposée, pression imposée. On effectue ensuite un certain nombre de tests n'ayant pour but que de mettre en évidence la précision et la facilité de mise en oeuvre du code.

Les tests effectués avec un canal plan, que ce soit en écoulement laminaire ou turbulent, permettent de fixer une taille de maille "adéquate" pour un nombre de Reynolds donné, notamment au voisinage des parois.

Les tests effectués sur une marche descendante, en laminaire et en turbulent, permettent une évaluation de la diffusion numérique.

Pour les tests turbulents, deux modèles, "longueur de mélange" et " $k-\epsilon$ ", ont été utilisés et ce dans le but, non pas de tester les mérites respectifs de ces modèles, mais de montrer l'aptitude du code à prendre en compte des modèles "rhéologiques" divers.

Finalement, en dernière partie, on présente le cas d'un écoulement turbulent industriel dans une géométrie en "té" avec paroi défilante, et la comparaison des résultats calculés avec des résultats expérimentaux.

II. LES EQUATIONS TRAITÉES ET L'ÉCRITURE DU CODE

1. INTRODUCTION

Un des points importants dans le choix d'une formulation pour les problèmes de dynamique des fluides est la relation entre les variables caractérisant l'écoulement et le repère lié à l'observateur.

Les deux points de vue traditionnels sont, d'une part la description lagrangienne dans laquelle le repère suit le fluide dans son déplacement, et d'autre part la description eulérienne où le repère est fixe.

En eulérien, on s'intéresse à une région de l'espace traversée par le fluide, alors qu'en lagrangien on suit un ensemble de particules fluides dans leur déplacement à travers l'espace.

L'utilisation habituelle de ces deux descriptions apparaît clairement : en mécanique des solides, dans le cas de petits déplacements, la formulation lagrangienne, en mécanique des fluides, la formulation eulérienne. Des difficultés apparaissent lors de la résolution de problèmes à interface tels les interactions fluide-structure, les écoulements à surface libre, etc.

La résolution numérique des équations de la mécanique des fluides nécessite une double discrétisation en temps et en espace. La discrétisation spatiale est réalisée ici par une méthode d'éléments finis associés à la vitesse et à la pression.

Les éléments correspondants à la discrétisation de la vitesse peuvent être considérés comme des éléments fluides. Si on utilise la formulation d'Euler, les éléments restent fixes dans l'espace. Si on utilise la formulation lagrangienne, les éléments se déplacent à la vitesse du fluide, la structure des équations est simplifiée, mais le maillage se déforme fortement.

Il est possible d'envisager une formulation mixte dans laquelle les éléments se déplacent à une vitesse arbitraire dite "vitesse de grille" : la formulation A.L.E. (Arbitrary Lagrangian-Eulerian).

2. FORMULATION A.L.E. ET DISCRETISATION TEMPORELLE

2.1. Formulation A.L.E.

Avec les hypothèses classiques d'un milieu continu, homogène, isotrope, dans le cas d'un fluide incompressible et pour un écoulement isotherme, les équations qui régissent l'écoulement du fluide sont :

- l'équation de continuité qui traduit la conservation de la masse,
- l'équation de conservation de la quantité de mouvement exprimant l'égalité entre la

somme des forces appliquées sur la particule et la variation de la quantité de mouvement de cette dernière.

En repère fixe cartésien, les équations locales s'écrivent, avec la convention de notation d'Einstein :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II.2})$$

Sous forme intégrale, sur un volume de contrôle V quelconque limité par une surface S dont la vitesse en chaque point est \vec{w} , on obtient (Annexe 1) [2-1][2-2] :

$$\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{w}} \int_V \rho dV - \int_S \rho (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{w}} \int_V \rho \vec{u} dV - \int_S \rho \vec{u} (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div } \vec{\sigma} dV \quad (\text{II.4})$$

en notant \vec{w} la vitesse arbitraire de déplacement de l'élément, "vitesse de grille" du maillage.

Le fluide étant considéré comme incompressible, les équations peuvent s'écrire :

$$\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{w}} \int_V dV - \int_S (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{w}} \int_V \vec{u} dV - \int_S \vec{u} (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\rho} \int_V \text{div } \vec{\sigma} dV \quad (\text{II.6})$$

Dans le cas où le fluide a un comportement newtonien et, dans le cadre des équations de Navier-Stokes, le tenseur des contraintes $\vec{\sigma}$, traduisant l'action des forces de pression et de celles liées aux frottements visqueux, si on ne tient pas compte des forces de gravité, s'écrit :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.7})$$

soit :

$$\text{div } \vec{\sigma} = -\vec{\nabla} p + \text{div } \vec{\tau} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u} \quad (\text{II.8})$$

La technique A.L.E. consiste à décomposer suivant une méthode à deux demi-pas fractionnaires l'opérateur $\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{w}}$ en deux opérateurs :

• 1er demi-pas

$$\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{u}} \int_V dV = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{u}} \int_V \vec{u} dV = \frac{1}{\rho} \int_V \text{div } \vec{\sigma} dV \quad (\text{II.10})$$

• 2ème demi-pas

$$\left[\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{w}} - \left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{u}} \right] \int_V dV - \int_S (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{II.11})$$

$$\left[\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{w}} - \left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{u}} \right] \int_V \vec{u} dV - \int_S \vec{u} (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{II.12})$$

Le premier demi-pas correspond au suivi d'une particule dans son mouvement, les équations (II.9)(II.10) se déduisant effectivement des équations (II.5)(II.6) lorsque $\vec{w} = \vec{u}$.

Le deuxième demi-pas correspond évidemment à la prise en compte des termes de convection.

Dans la suite de ce travail, compte tenu que nous n'aurons pas à traiter de problèmes à frontières mobiles, on ne s'intéresse plus qu'au cas où les éléments de volume sont fixes ($\vec{w} = 0$).

En reprenant les notations classiques pour les dérivées temporelles, soit en fait ici $\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{u}} \equiv \frac{d}{dt}$ et $\left[\left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{w}} - \left[\frac{D}{Dt} \right]_{\vec{u}} \right] \equiv \frac{D}{Dt}$, la décomposition devient :

• 1er demi-pas :

$$\frac{d}{dt} \int_V dV = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{u} dV = \frac{1}{\rho} \int_V \text{div } \vec{\sigma} dV \quad (\text{II.14})$$

• 2ème demi-pas :

$$\frac{D}{Dt} \int_V dV + \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \vec{u} dV + \int_S \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (\text{II.16})$$

2.2. Discrétisation temporelle

Elle est du type différences finies. Les dérivées temporelles $\frac{D}{Dt}$ sont approximées au premier ordre soit, pour une variable A :

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$

On notera par un indice inférieur la valeur au n -ième cycle de calcul correspondant à un instant t (A_n) incrémenté de un pour le cycle suivant à l'instant $t+\Delta t$ (A_{n+1}).

Chaque cycle de calcul est divisé en deux phases distinctes déduites des deux demi-pas de la décomposition.

• 1ère phase semi-implicite. Les équations (II.13)(II.14) s'écrivent entre les instants n et l :

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_l} dV_l - \int_{V_n} dV_n \right] = 0 \quad (\text{II.17})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_l} \vec{u}_l dV_l - \int_{V_n} \vec{u}_n dV_n \right] = \frac{1}{\rho} \int_{V_l} -\vec{\nabla} p_l dV_l + \frac{1}{\rho} \int_{V_n} \text{div} \vec{\tau}_n dV_n \quad (\text{II.18})$$

tout point du volume V_l étant lié au point du volume V_n par la transformation $\vec{x}_l = \vec{x}_n + \vec{u}_l \Delta t$.

• 2ème phase explicite prenant en compte les termes convectifs. Les équations (II.15)(II.16) s'écrivent entre les instants l et $n+1$:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_{n+1}} dV_{n+1} - \int_{V_l} dV_l \right] + \int_{S_l} \vec{u}_l \cdot \vec{n} dS_l = 0 \quad (\text{II.19})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_{n+1}} \vec{u}_{n+1} dV_{n+1} - \int_{V_l} \vec{u}_l dV_l \right] + \int_{S_l} \vec{u}_l (\vec{u}_l \cdot \vec{n}) dS_l = 0 \quad (\text{II.20})$$

tout point du volume V_{n+1} étant lié au point du volume V_l par la transformation $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_l - \vec{u}_l \Delta t$.

Comme on s'intéresse à des configurations purement eulériennes, $V_{n+1} = V_n$ et $S_{n+1} = S_n$.

Les deux équations précédentes peuvent donc s'écrire :

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_n} dV_n - \int_{V_l} dV_l \right] + \int_{S_l} \vec{u}_l \cdot \vec{n} dS_l = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_n} \vec{u}_{n+1} dV_n - \int_{V_l} \vec{u}_l dV_l \right] + \int_{S_l} \vec{u}_l (\vec{u}_l \cdot \vec{n}) dS_l = 0 \quad (\text{II.22})$$

On remarque que l'équation (II.17) s'écrit :

$$\int_{V_l} dV_l - \int_{V_n} dV_n = 0$$

soit au premier ordre en Δt :

$$\int_{V_n} (1 + \text{div} \vec{u}_l \cdot \Delta t) dV_n - \int_{V_n} dV_n = 0$$

et finalement :

$$\int_{V_n} \text{div} \vec{u}_l dV_n = 0 \quad (\text{II.23})$$

Il en résulte que l'équation (II.21) est identiquement vérifiée.

Il reste donc en définitive trois équations à résoudre :

$$\int_{V_n} \text{div} \vec{u}_l dV_n = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_n} \vec{u}_l dV_n - \int_{V_n} \vec{u}_n dV_n \right] = \frac{1}{\rho} \int_{V_n} -\nabla p_l dV_n + \frac{1}{\rho} \int_{V_n} \text{div} \vec{\tau}_n dV_n \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_n} \vec{u}_{n+1} dV_n - \int_{V_n} \vec{u}_l dV_n \right] + \int_{S_n} \vec{u}_l (\vec{u}_l \cdot \vec{n}) dS_n = 0 \quad (\text{II.25})$$

• A chaque cycle n , connaissant \vec{u}_n , on élimine \vec{u}_l entre (II.23) et (II.24), et on calcule la contribution du tenseur de contraintes $\vec{\tau}_n$. On résout alors le système pour obtenir p_l et en déduire \vec{u}_l par (II.24) : 1ère phase ou phase lagrangienne.

• On calcule directement \vec{u}_{n+1} à partir de (II.25) : 2ème phase

3. DISCRETISATION SPATIALE

3.1. Discrétisation spatiale

On écrit les équations discrétisées pour des écoulements bidimensionnels. Le domaine de calcul est constitué par un recouvrement régulier de quadrilatères (mailles) repérés par leurs indices topologiques (I, J) dans le maillage, et de surface $S(I, J)$ (fig. 2.1). Chaque maille est définie par 4 noeuds d'indices respectifs (I, J) , $(I+1, J)$, $(I+1, J+1)$, $(I, J+1)$.

La maille (I, J) est la transformée du carré de côté unité par la transformation :

$$\vec{x} = \vec{x}_1 (1-\eta)(1-\xi) + \vec{x}_2 \xi(1-\eta) + \vec{x}_3 \eta\xi + \vec{x}_4 \eta(1-\xi)$$

avec les indices 1 à 4 correspondants respectivement à (I, J) , $(I+1, J)$, $(I+1, J+1)$, $(I, J+1)$ (fig. 2.2).

Le champ de vitesse \vec{u} est représenté par des éléments isoparamétriques bilinéaires sur $S(I, J)$ et s'exprime en fonction des vitesses aux noeuds $\vec{u}(I, J)$ avec les mêmes indices que précédemment :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 (1-\eta)(1-\xi) + \vec{u}_2 \xi(1-\eta) + \vec{u}_3 \eta\xi + \vec{u}_4 \eta(1-\xi)$$

La pression p , la masse volumique ρ et le tenseur des contraintes $\vec{\tau}$ sont représentés par des éléments constants sur chaque maille.

3.2. Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation (II.23) s'écrit, en bidimensionnel, pour des surfaces $S(I, J)$ qui sont les mailles de contour $\gamma(I, J)$ (fig. 2.3) :

$$\int_{\gamma(I, J)} \vec{u}_i \cdot \vec{n} d\gamma = 0$$

L'évaluation de cette intégrale sur chaque maille (I, J) conduit à des relations linéaires faisant intervenir des coefficients géométriques qui correspondent aux 4 noeuds de la maille et que l'on notera $CX(I, J, k)$, $CY(I, J, k)$ (pour $k=1$ à 4) (Annexe 2).

On peut symboliser ces relations par :

$$f_{IJ}(CX, CY, \vec{u}_i) = 0 \tag{II.26}$$

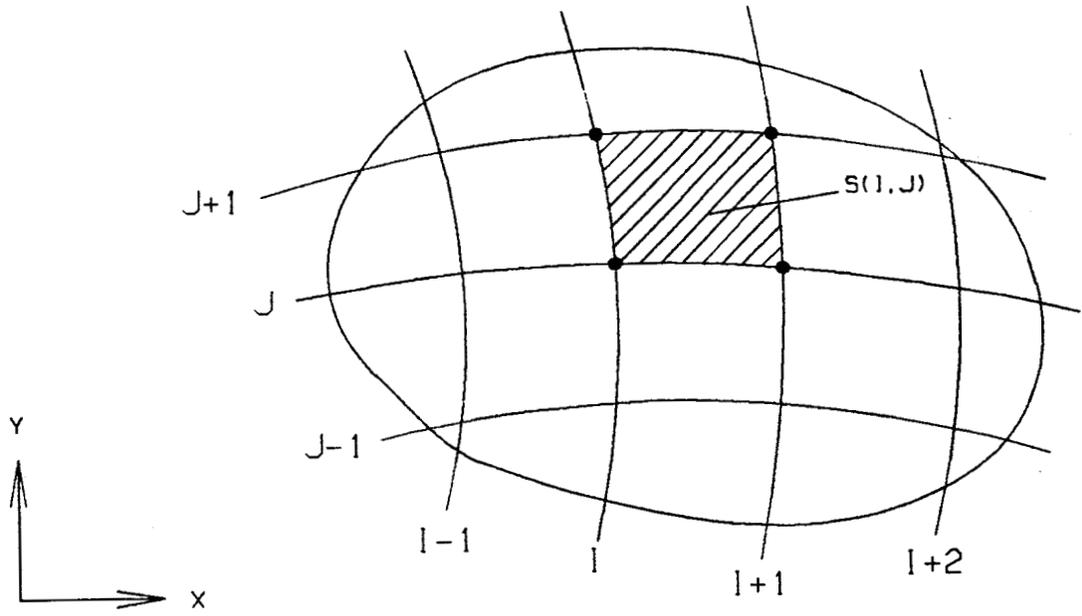


fig.2.1 : Maillage

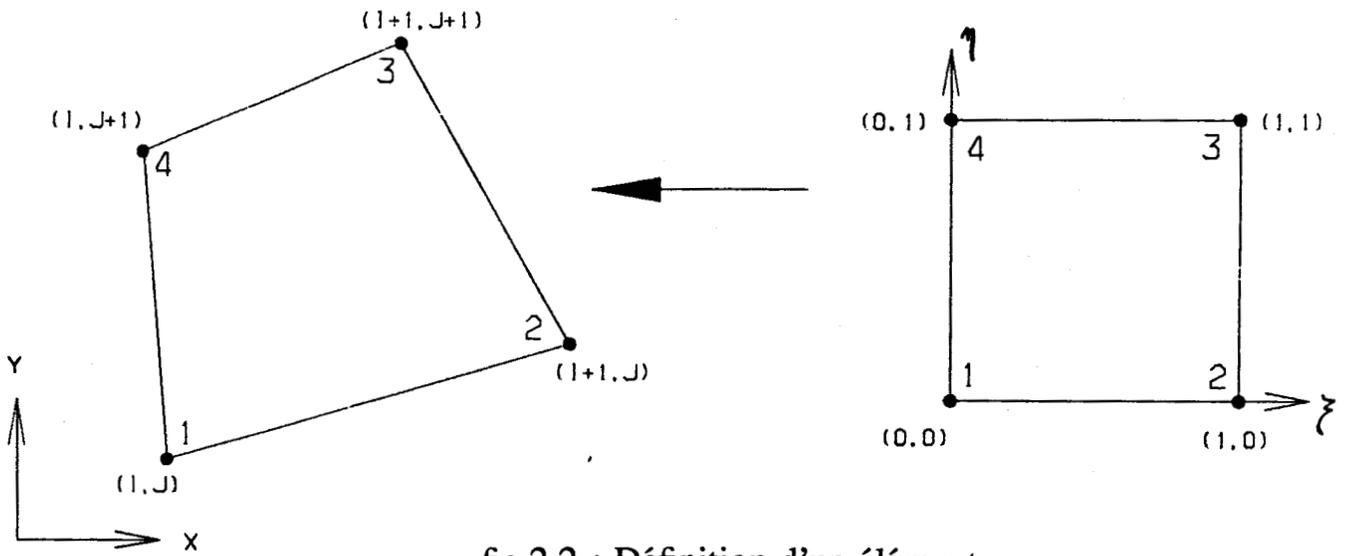


fig.2.2 : Définition d'un élément

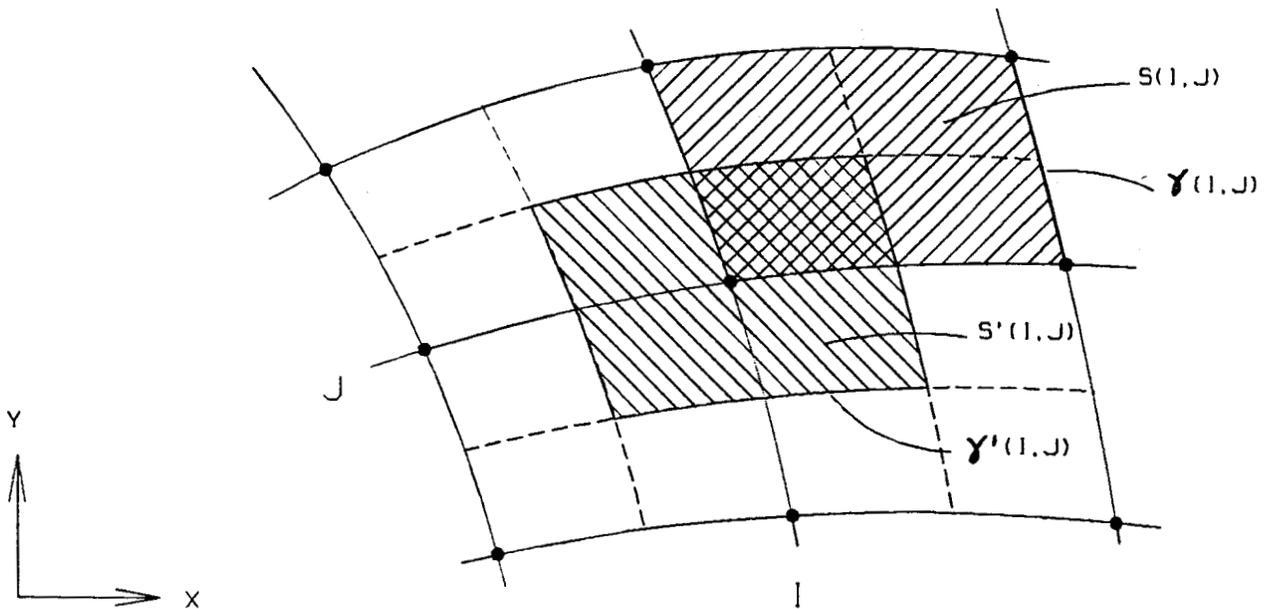


fig.2.3 : Définition des surfaces et contours

3.3. Discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en lagrangien

L'équation (II.24) devient, en bidimensionnel, pour les surfaces $S'(I, J)$ entourant les noeuds, et de contour $\gamma(I, J)$ (fig. 2.3) :

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S'(I, J)} \vec{u}_i dS - \int_{S'(I, J)} \vec{u}_n dS \right] = \frac{1}{\rho} \int_{S'(I, J)} -\nabla p_l dS + \frac{1}{\rho} \int_{S'(I, J)} \text{div} \vec{\tau}_n dS$$

ou

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S'(I, J)} \vec{u}_i dS - \int_{S'(I, J)} \vec{u}_n dS \right] = \frac{1}{\rho} \int_{\gamma(I, J)} -p_l \cdot \vec{n} d\gamma + \frac{1}{\rho} \int_{\gamma(I, J)} \vec{\tau}_n \cdot \vec{n} d\gamma$$

Les intégrales des termes de pression et des termes visqueux font intervenir les mêmes coefficients géométriques $CX(I, J, k)$, $CY(I, J, k)$ que précédemment pour les 4 mailles environnant chaque noeud.

Elles font intervenir également les valeurs de la pression p constante sur chaque maille, ainsi que le tenseur des contraintes visqueuses $\vec{\tau}$ déterminé sur chaque maille en calculant la moyenne surfacique du tenseur de déformations $\vec{\epsilon}$ ($\tau_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij}$ lorsque le fluide est newtonien).

Afin de calculer les intégrales de vitesses (premiers termes de l'équation précédente) en évitant la résolution d'un système matriciel faisant intervenir les vitesses de tous les noeuds environnant la surface S' , on introduit une approximation supplémentaire : la vitesse \vec{u} est admise constante sur $S'(I, J)$ et égale à la vitesse au noeud "central" $\vec{u}(I, J)$.

Pour réduire a posteriori les éventuelles conséquences de cette approximation, également effectuée pour l'équation (II.25), on ajoutera en fin de cycle de calcul une correction des vitesses (paragraphe 4).

On aboutit finalement à une relation de la forme :

$$\vec{u}_i = g_{IJ}(CX, CY, p_l, \vec{\tau}_n, \vec{u}_n, \Delta t, M) \quad (\text{II.27})$$

3.4. Calcul de la pression et de la vitesse lagrangienne

En remplaçant dans (II.26) \vec{u}_i par l'expression déduite de (II.27), on obtient un système linéaire de la forme $[CP].[p_l] = [SM]$ où $[CP]$ représente un tableau de coefficients géométriques $CP(I, J, k)$, combinaisons des coefficients CX, CY des mailles voisines à chaque surface $S(I, J)$ (fig. 2.4), et où $[SM]$ la matrice des seconds membres $SM(I, J)$ représente la contribution des tenseurs de contraintes et des divergences de vitesse du cycle de calcul précédent.

Sachant que l'on définira dans les conditions aux limites des mailles à pression fixée, et pour réduire la résolution, on remplace le système matriciel par $[CP].[p_l - p_n] = [SM]$, en faisant intervenir dans les seconds membres $SM(I, J)$ la contribution des pressions du cycle de calcul antérieur.

La résolution utilise une méthode directe du type Gauss.

Ayant obtenu p_l , l'écriture directe de la relation (II.27) donne les valeurs de la vitesse lagrangienne \vec{u}_l .

3.5. Prise en compte des flux convectifs

L'équation (II.25) devient, de la même manière que précédemment :

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S'(I, J)} \vec{u}_{n+1} dS - \int_{S'(I, J)} \vec{u}_l dS \right] + \int_{\gamma(I, J)} \vec{u}_l (\vec{u}_l \cdot \vec{n}) d\gamma = 0$$

Pour les intégrales de vitesse, on reprend l'approximation de la vitesse constante sur $S'(I, J)$. En ce qui concerne l'intégrale des termes convectifs, on décompose le contour γ en la somme de 8 segments de droites sur lesquels on fait l'approximation \vec{u}_l constant, ce qui revient à l'écrire pour chaque segment : $\vec{u}_l \int_{S_{gt}} \vec{u}_l \cdot \vec{n} d\gamma$. Les intégrales

de flux se calculent simplement sur chaque segment avec le choix de la vitesse bilinéaire sur chaque maille vu précédemment (Parag. 3.1). La valeur moyenne sur un segment de droite de la vitesse \vec{u}_l est alors obtenue par une technique de type différence-amont qui tient compte du sens du flux, technique qui, si elle est moins précise qu'un schéma centré, a l'avantage de conserver la monotonie des solutions (Annexe3).

On obtient en définitive une relation de la forme :

$$\vec{u}_{n+1} = h_{IJ}(CX, CY, \vec{u}_l, \Delta t, M) \quad (\text{II.28})$$

dont l'écriture est immédiate.

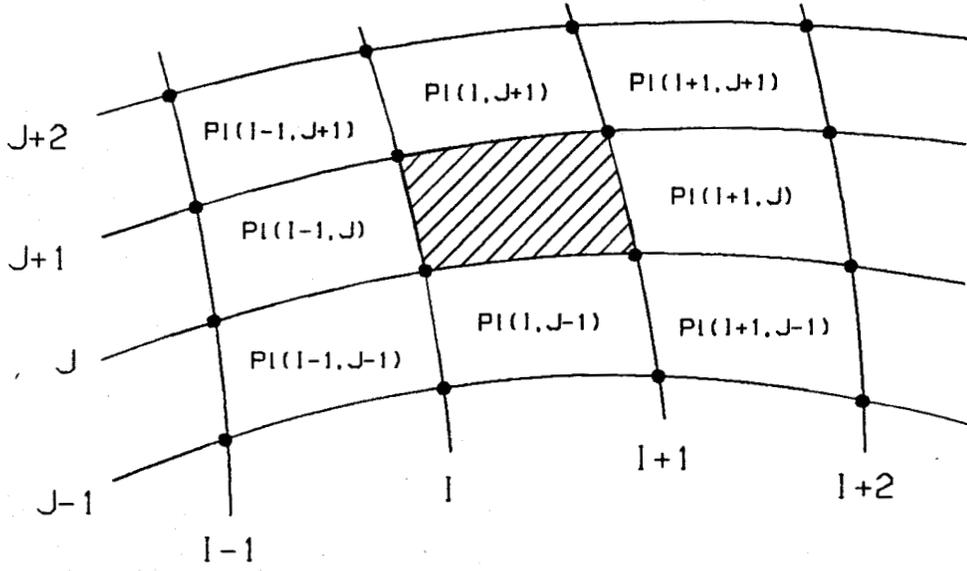
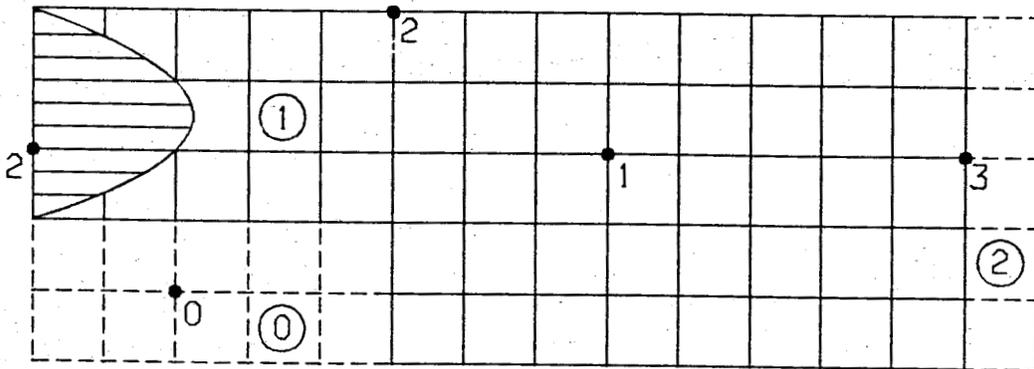
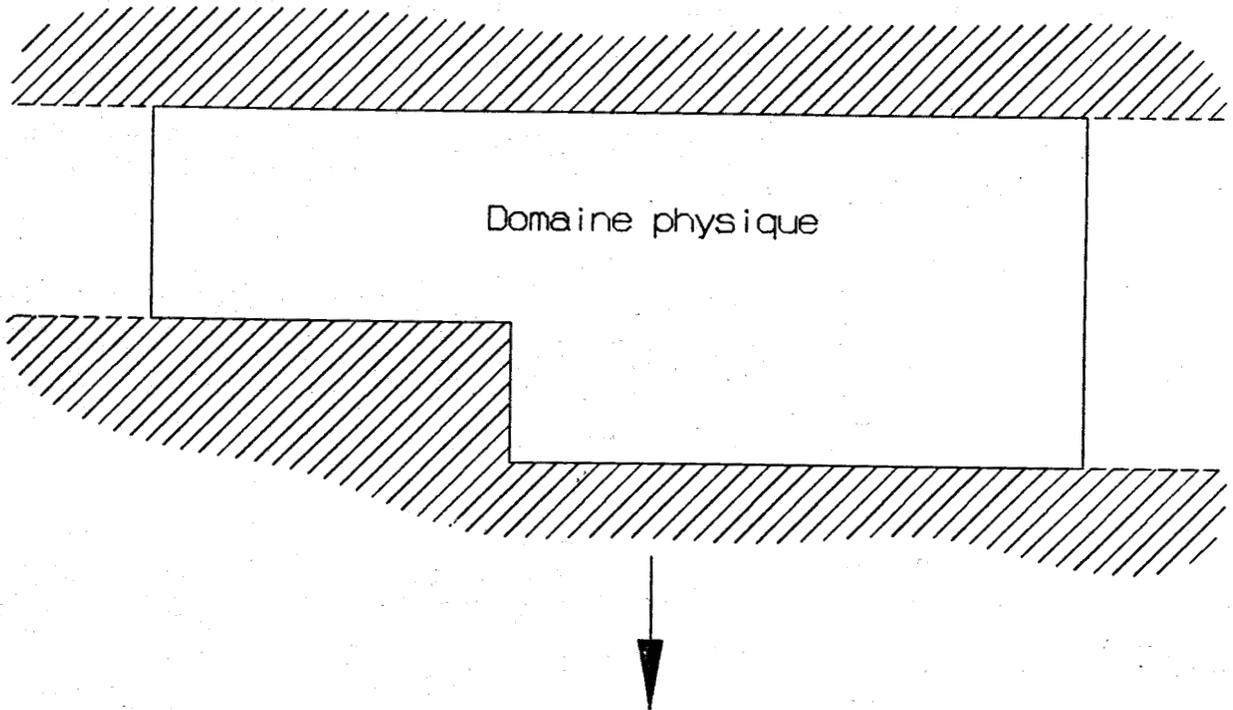


fig.2.4 : Voisinage d'une maille



Maillage

fig.2.5 : Conventions pour les conditions aux limites

4. CORRECTION A POSTERIORI SUR LES VITESSES

On a calculé les intégrales de vitesse de la forme $\int_{S'(I,J)} \vec{u} dS$ en faisant l'hypothèse de la vitesse constante sur les surfaces $S'(I,J)$ entourant les noeuds (fig. 2.3). Cette hypothèse relativement grossière permet d'éviter une résolution de système matriciel mais a, par contre, l'inconvénient de découpler la vitesse d'un noeud par rapport à ses noeuds voisins.

Ce découplage, s'il n'est pas rédhibitoire dans le cas de configurations simples, peut entraîner des instabilités de vitesse lorsque le facteur de forme ou la dimension des mailles est trop important par rapport aux gradients de vitesse.

Pour pallier cet inconvénient, on introduit en fin de cycle un couplage artificiel des vitesses.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement entre les cycles n et $n+1$ s'écrit :

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S'(I,J)} \vec{u}_{n+1} dS - \int_{S'(I,J)} \vec{u}_n dS \right] = f(\rho, p_l, \vec{\tau}_n, \vec{u}_l) \quad (\text{II.29})$$

Les intégrales de vitesse évaluées sur des surfaces $S'(I,J)$ s'écrivent comme fonctions linéaires des vitesses des 9 noeuds entourant $S'(I,J)$ (fig. 2.3). L'équation (II.29) peut alors se représenter par la relation :

$$\sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k) \cdot (\vec{u}_{n+1}(k) - \vec{u}_n(k)) = f(\Delta t, \rho, p_l, \vec{\tau}_n, \vec{u}_l)$$

avec $CV_{IJ}(k)$, coefficients géométriques traduisant la contribution de la vitesse du k -ième noeud entourant le noeud (I,J) .

On peut ajouter dans cette relation, sans la modifier, les vitesses aux cycles de calcul n et $n+1$ du noeud (I,J) et leurs opposées. Si on note \vec{u}_{n+1}^* les vitesses effectivement calculées dans l'algorithme, on peut obtenir pour chaque noeud une correction de vitesses qui réduit les effets néfastes du découplage tout en évitant la résolution d'un système matriciel. Elle prend la forme suivante (Annexe 4) :

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \frac{1}{\sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k)} \cdot \sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k) \cdot (\vec{u}_{n+1}^*(k) - \vec{u}_n(k)) \quad (\text{II.30})$$

5. CONDITIONS AUX LIMITES - PAS DE TEMPS

5.1. Conditions aux limites et initialisation

Pour pouvoir résoudre le système d'équations discrétisées, il faut bien sûr définir la géométrie du problème à modéliser par le maillage du domaine fluide et les conditions physiques du calcul par des données telles que masse volumique, viscosité et conditions aux limites du domaine.

On peut noter que ce dernier point est, d'une manière générale en modélisation numérique, un des paramètres les plus difficiles à obtenir expérimentalement lorsque l'on veut corréler le calcul par des mesures sur maquette, ou a fortiori sur sites industriels par exemple.

Le choix se résume ici à deux types de conditions. On peut soit se donner une condition de débit en imposant un champ de vitesse aux frontières du domaine, soit imposer la valeur des contraintes. Dans ce cas, d'une façon générale dans les problèmes industriels, seule la pression est connue. On a donc fait l'hypothèse que $\frac{\partial \tau}{\partial \vec{n}} = 0$, \vec{n} étant la normale à la frontière.

La prise en compte des conditions aux limites nécessite dans les équations discrétisées un traitement particulier qui est effectué après avoir testé des indicateurs (flags) affectés à chaque noeud et chaque maille.

Sur les frontières solides, les noeuds sont repérés **2** et, en imposant une condition de non-glissement, on fixe leur vitesse égale à celle de la paroi, nulle si elle est fixe.

Aux frontières fluides, on peut imposer une valeur de pression fixée sur les mailles repérées **2**, les indicateurs des noeuds frontières étant alors égaux à **3**, ou un profil de vitesse sur les noeuds, dans les mêmes conditions que pour les parois solides. Dans le cas d'une frontière-pression, on fait l'hypothèse d'un gradient longitudinal nul et on extrapole les valeurs en sortie par leur valeur sur les noeuds-calculs voisins.

Les noeuds et mailles de calcul intérieurs au domaine fluide sont repérés **1**.

Dans le cas de configurations avec variations importantes des dimensions géométriques et à cause du repérage topologique en (I, J) des éléments, on définit des noeuds et mailles "virtuels" repérés **0** (fig. 2.5).

Au démarrage du calcul, les valeurs initiales des variables dans le domaine sont tout simplement considérées nulles.

5.2. Calcul du pas de temps

Les équations à résoudre à chaque pas de temps fractionnaire sont du type :

$$\frac{d\vec{\Psi}}{dt} = \vec{F}(\vec{\Psi}),$$

$\vec{\psi}$ étant le vecteur des inconnues et \vec{F} une fonction de ce vecteur.

L'utilisation d'un schéma explicite en temps (II.24)(II.25) lors de la prise en compte des termes diffusifs et de convection impose un pas de temps limite pour chaque terme afin de vérifier une condition de stabilité.

Cette condition a été obtenue soit par extension d'un critère de stabilité monodimensionnel du type "Von-Neuman" ($v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 2$, $V \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$), soit en écrivant que :

$$\left\| \frac{d\vec{F}}{d\vec{\psi}} \right\| \cdot \Delta t \leq 2,$$

ce qui garantit la stabilité des erreurs étant supposé que par la nature du problème (existence de solution stationnaire pour des conditions aux limites stationnaires) et par construction de la discrétisation :

$$\left(\left[\frac{d\vec{F}}{d\vec{\psi}} \right]_n \cdot \vec{\psi}, \vec{\psi} \right) \leq 0$$

En effet, étant donné le schéma explicite :

$$\psi_{n+1} - \psi_n = F(\psi_n) \cdot \Delta t$$

avec $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, et soit ϵ_n l'erreur à t_n due, entre autres, aux approximations numériques, et ϵ_{n+1} l'erreur induite à t_{n+1} ,

$$(\psi_{n+1} + \epsilon_{n+1}) - (\psi_n + \epsilon_n) \approx F(\psi_n + \epsilon_n) \cdot \Delta t \approx \left[F(\psi_n) + \left[\frac{dF}{d\psi} \right]_n \cdot \epsilon_n \right] \cdot \Delta t$$

d'où

$$\epsilon_{n+1} \approx \epsilon_n + \left[\frac{dF}{d\psi} \right]_n \cdot \epsilon_n \cdot \Delta t$$

Pour que $\|\epsilon_{n+1}\| \leq \|\epsilon_n\|$, il est nécessaire que :

$$\left(\left[\frac{dF}{d\psi} \right]_n \cdot \epsilon_n, \epsilon_n \right) \leq 0$$

et alors il suffit que :

$$\left\| \left[\frac{dF}{d\psi} \right]_n \cdot \epsilon_n \right\| \cdot \Delta t \leq 2 \cdot \|\epsilon_n\|$$

$$\left\| \frac{dF}{d\psi} \right\|_n \cdot \|\epsilon_n\| \cdot \Delta t \leq 2 \cdot \|\epsilon_n\|$$

$$\left\| \frac{dF}{d\psi} \right\|_h \cdot \Delta t \leq 2$$

Une approximation de $\left\| \frac{d\vec{F}}{d\vec{\Psi}} \right\|$ a été obtenue en prenant : $\frac{\left\| \vec{F}_n - \vec{F}_{n-1} \right\|}{\left\| \vec{\Psi}_n - \vec{\Psi}_{n-1} \right\|}$

Ce dernier critère a donné toute satisfaction à condition de borner les valeurs de Δt , pour des valeurs trop petites de $\left\| \vec{\Psi}_n - \vec{\Psi}_{n-1} \right\|$.

Bien sûr les pas de temps liés à la prise en compte des termes diffusifs et de convection étant respectivement Δt_{vn} et Δt_{cn} au temps t_n , on a pris pour pas de temps unique des différents pas fractionnaires au temps t_n : Δt_n minimum de Δt_{vn} et Δt_{cn} .

5.3. Organigramme

Le programme se décompose simplement en trois parties (fig. 2.6) :

- une étape d'initialisation qui définit la géométrie et les conditions du calcul avec possibilité de relancer un calcul effectué précédemment, et également d'utiliser un modèle de turbulence;
- la boucle de calcul proprement dite qui reprend les deux phases définies plus haut ainsi que le calcul du pas de temps et le stockage des variables à chaque cycle, qui est stoppée par un test sur le temps (durée pendant laquelle on veut étudier le phénomène) ou le nombre de boucles total;
- enfin l'arrêt du programme précédé de l'écriture des résultats et d'un fichier de sauvegarde pour une éventuelle relance ultérieure.

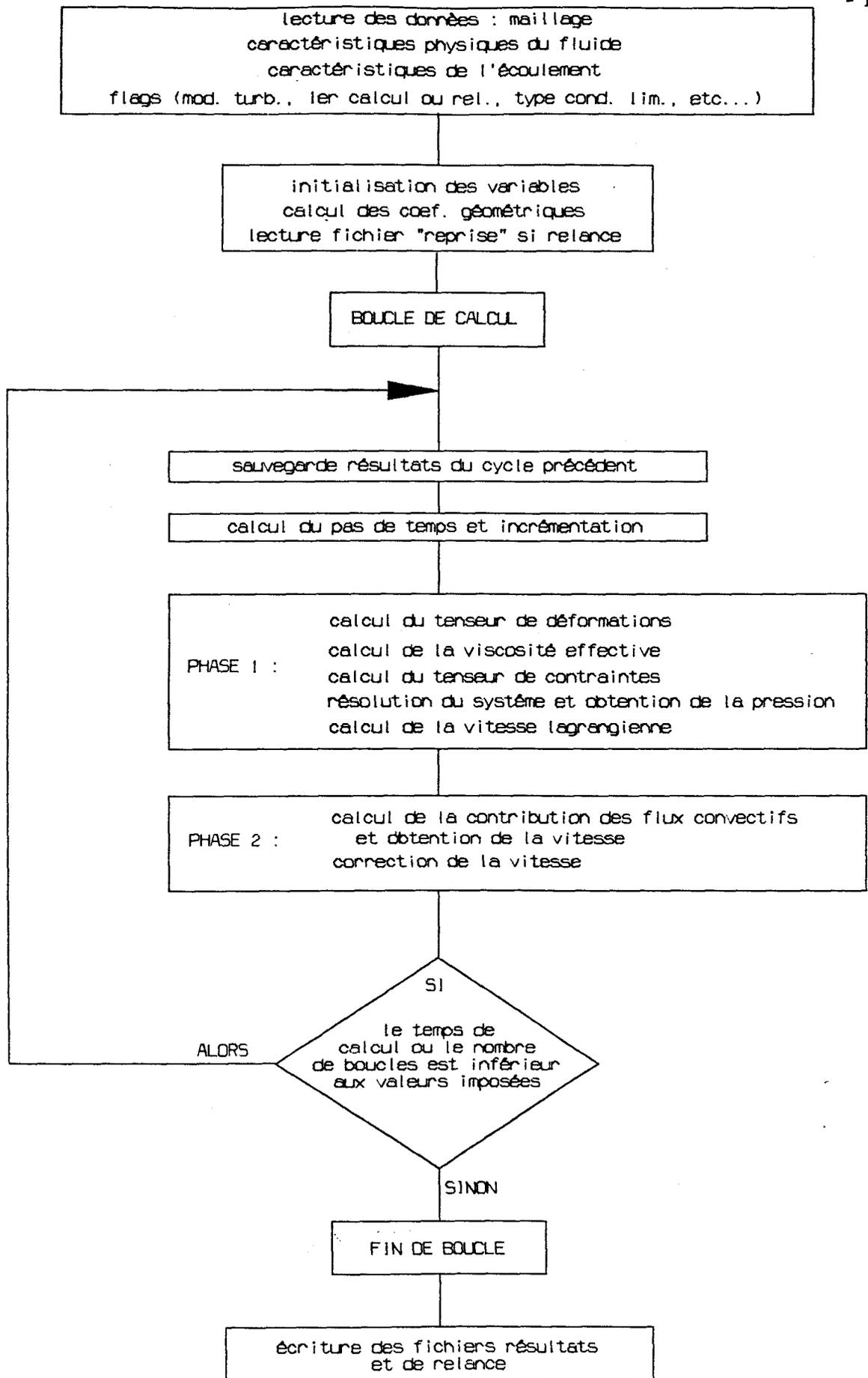


fig.2.6 : Organigramme

III. TESTS LAMINAIRES

La mise au point du programme et les premiers tests ont été effectués sans utiliser de modèle de turbulence, soit pour des nombres de Reynolds de canal $Re \ll 2000$, et pour des géométries bidimensionnelles comme précisé précédemment.

1. CANAL BIDIMENSIONNEL

La première géométrie testée, et la plus simple, est le canal de largeur infinie. On considère l'écoulement établi d'un fluide incompressible entre deux plaques planes de largeur infinie (fig. 3.1).

On peut donc écrire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0$, avec de plus les composantes longitudinale et transversale de la vitesse u et v nulles à la paroi. Les équations de Navier-Stokes se réduisent alors à :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \rightarrow v = cste = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{aligned}$$

qui donnent le profil de vitesse parabolique bien connu :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} (y^2 - hy) \quad (\text{III.1})$$

avec h la hauteur du canal, $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ le gradient de pression longitudinal.

Le programme a été testé avec des maillages et des conditions aux limites différentes.

En imposant un gradient de pression (Δp pour une longueur de canal donnée), on doit vérifier la création du profil parabolique respectant la relation (III.1). Inversement, en imposant un profil de vitesse parabolique en entrée du canal, on doit obtenir le gradient de pression correspondant.

Enfin on a testé le développement d'un profil de vitesse uniforme en entrée (fig. 3.2).

On a dessiné des maillages variés pour mettre en évidence l'importance éventuelle du raffinement, l'influence de l'existence ou non de mailles "déformées" (non rectangulaires), ainsi que le bénéfice apporté par la correction a posteriori des vitesses (fig. 3.3).

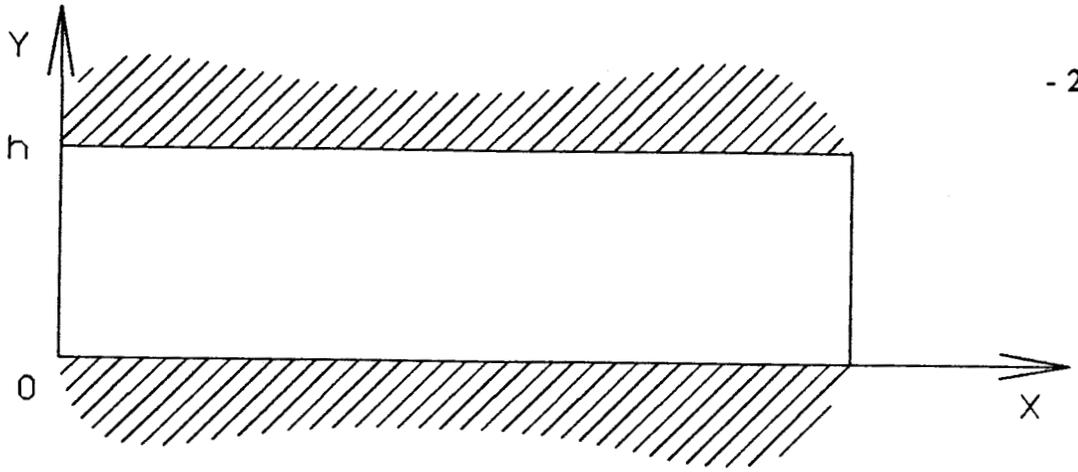


fig.3.1 : Géométrie du canal bidimensionnel

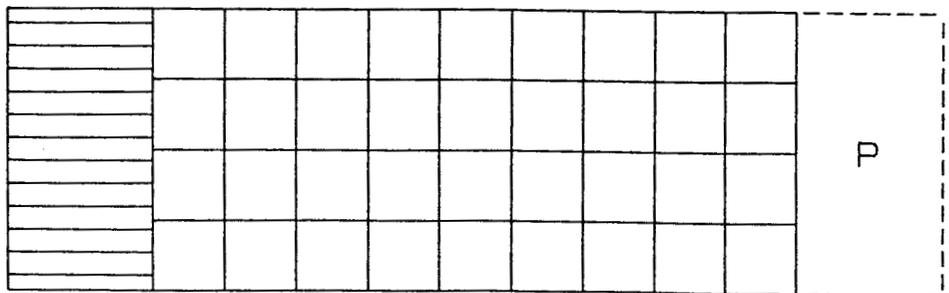
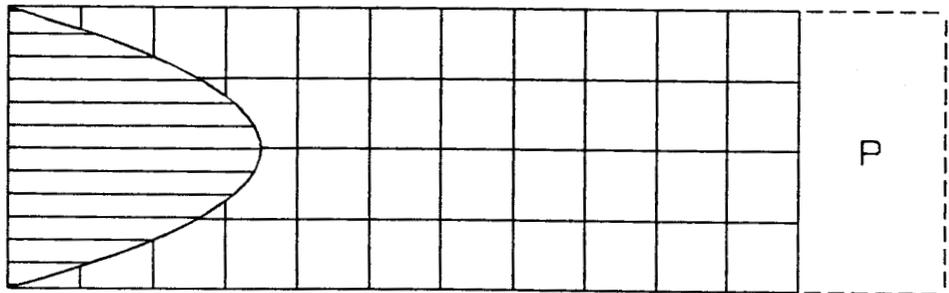
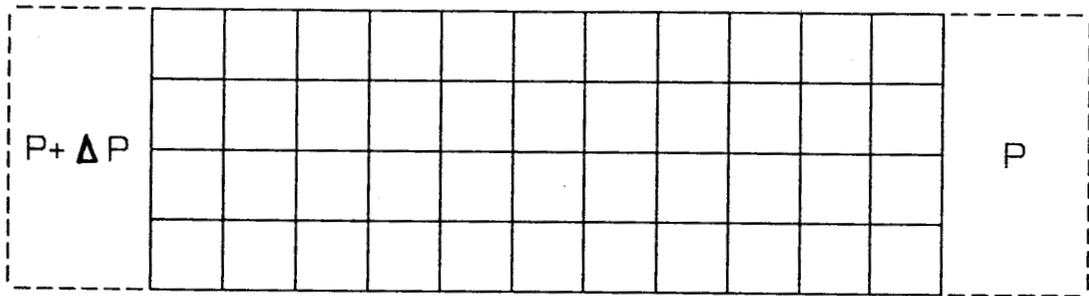
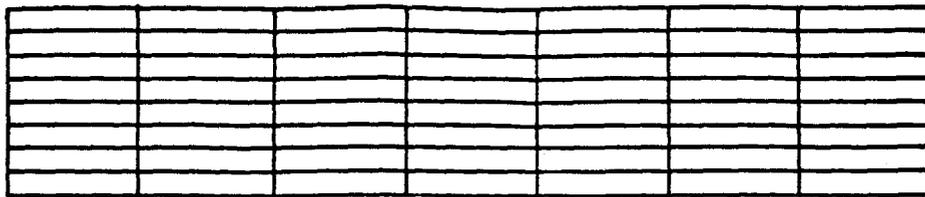
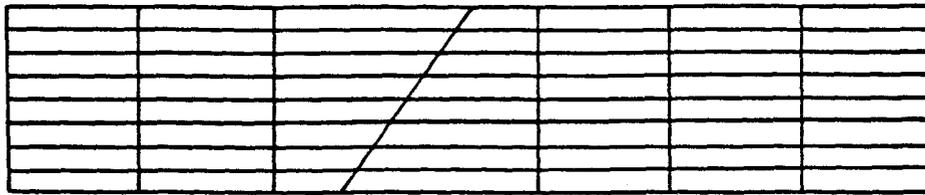


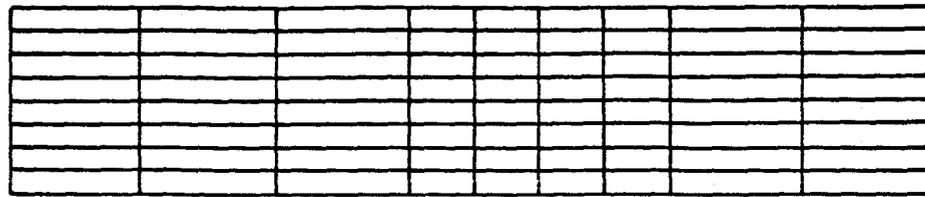
fig.3.2 : Conditions aux limites



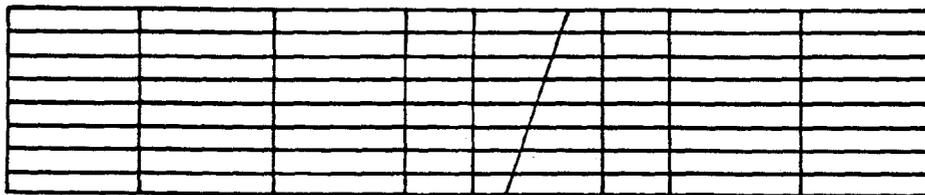
C1



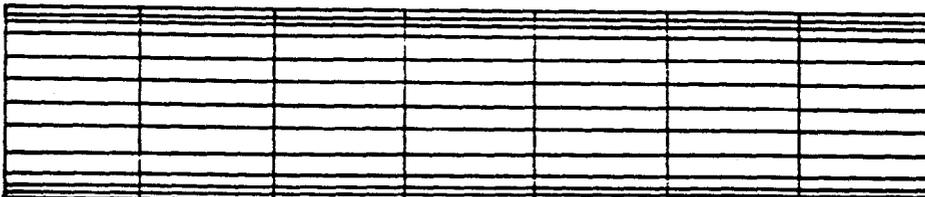
C2



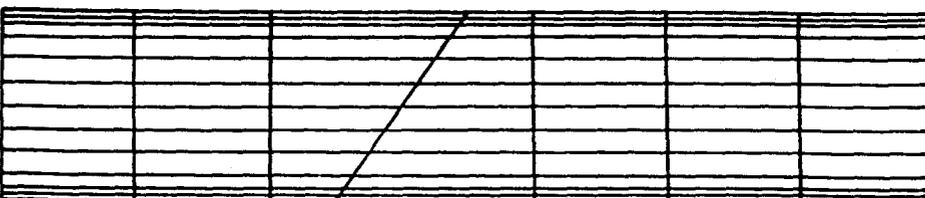
C3



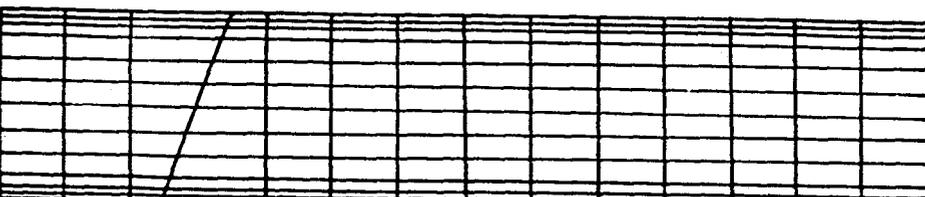
C4



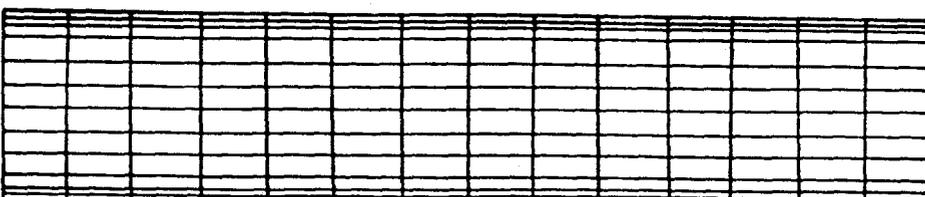
C5



C6



C7



C8

fig.3.3 : Maillages pour le canal bidimensionnel

- Condition limite : gradient de pression (fig. 3.4).

Pour les maillages ne contenant pas de mailles "déformées", on obtient le profil parabolique décrit par la relation analytique (fig. 3.5), et ceci pour tous les maillages, du plus grossier au plus fin (maillages C1-C3-C5). La seule influence, non négligeable, de la correction de vitesses est d'accélérer le calcul puisque le temps physique de simulation a augmenté pour un même nombre de boucles.

Lorsque le maillage contient des mailles non rectangulaires, la correction de vitesses rapproche le profil obtenu du profil parabolique en réduisant les erreurs de troncature, et d'autant mieux que le facteur de forme des mailles (rapport hauteur/largeur) diminue (fig. 3.6).

- Condition limite : profil de vitesse en entrée (fig. 3.7).

Comme précédemment, la correction de vitesses accélère le calcul et améliore l'exactitude du résultat pour les maillages à mailles "déformées". Alors, dans tous ces cas (maillages C1-C4-C8), lorsque l'on impose un profil de vitesse parabolique en entrée, le profil s'établit dans tout le domaine de calcul avec le gradient de pression correct.

En imposant un profil de vitesse "uniforme" en entrée respectant la condition de non-glissement pour la paroi, on obtient son évolution jusqu'au profil parabolique en sortie (fig. 3.8-3.9).

- Ecoulement de Couette pur (fig. 3.10).

On a également testé cette configuration en imposant aux limites un gradient de pression nul et une vitesse constante non nulle sur une des parois. Le profil obtenu est linéaire, constant dans tout le domaine ainsi que la pression (fig. 3.11).

En conclusion, on note que, dès la finesse transversale de maillage de $h/8$, maillage le plus grossier utilisé ici, les résultats sont quantitativement satisfaisants. Pour la suite des calculs, on conservera la correction a posteriori des vitesses. On évitera, dans la mesure du possible, de générer des mailles non rectangulaires et des facteurs de forme importants.

CALCUL	MAILLAGE	CORRECT. VIT.	NBRE DE BOUCLES	Re	TEMPS	COND. AUX LIMITES	PROFIL RESULTANT
1	C1	Oui	200	43	0.03	ΔP	parabolique
2	C1	Non	200	42	0.02	ΔP	parabolique
3	C2	Non	200	42	0.02	ΔP	voir fig. 3.6
4	C2	Non	300	42	0.028	ΔP	
5	C2	Oui	200	42	0.03	ΔP	
6	C3	Non	200	43	0.016	ΔP	parabolique
7	C3	Oui	200	43	0.02	ΔP	parabolique
8	C4	Non	200	43	0.016	ΔP	parabolique
9	C4	Oui	200	43	0.02	ΔP	parabolique
10	C5	Non	200	43	0.005	ΔP	parabolique
11	C5	Oui	200	43	0.006	ΔP	parabolique
12	C6	Non	200	42	0.003	ΔP	voir fig. 3.6
13	C6	Oui	200	42	0.003	ΔP	
14	C7	Non	200	42	0.003	ΔP	
15	C7	Oui	200	42	0.004	ΔP	
16	C8	Oui	3000	144	205.	ΔP	parabolique

fig.3.4 : Résultats pour les C.L. en " ΔP "

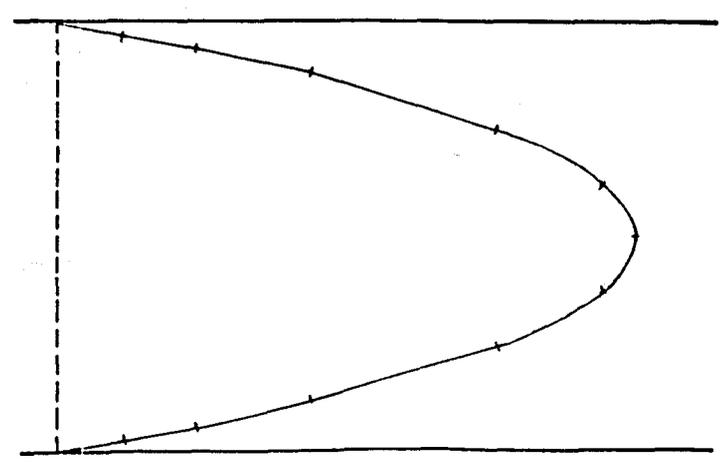


fig.3.5 : Profil de vitesse obtenu (Calcul N.16)

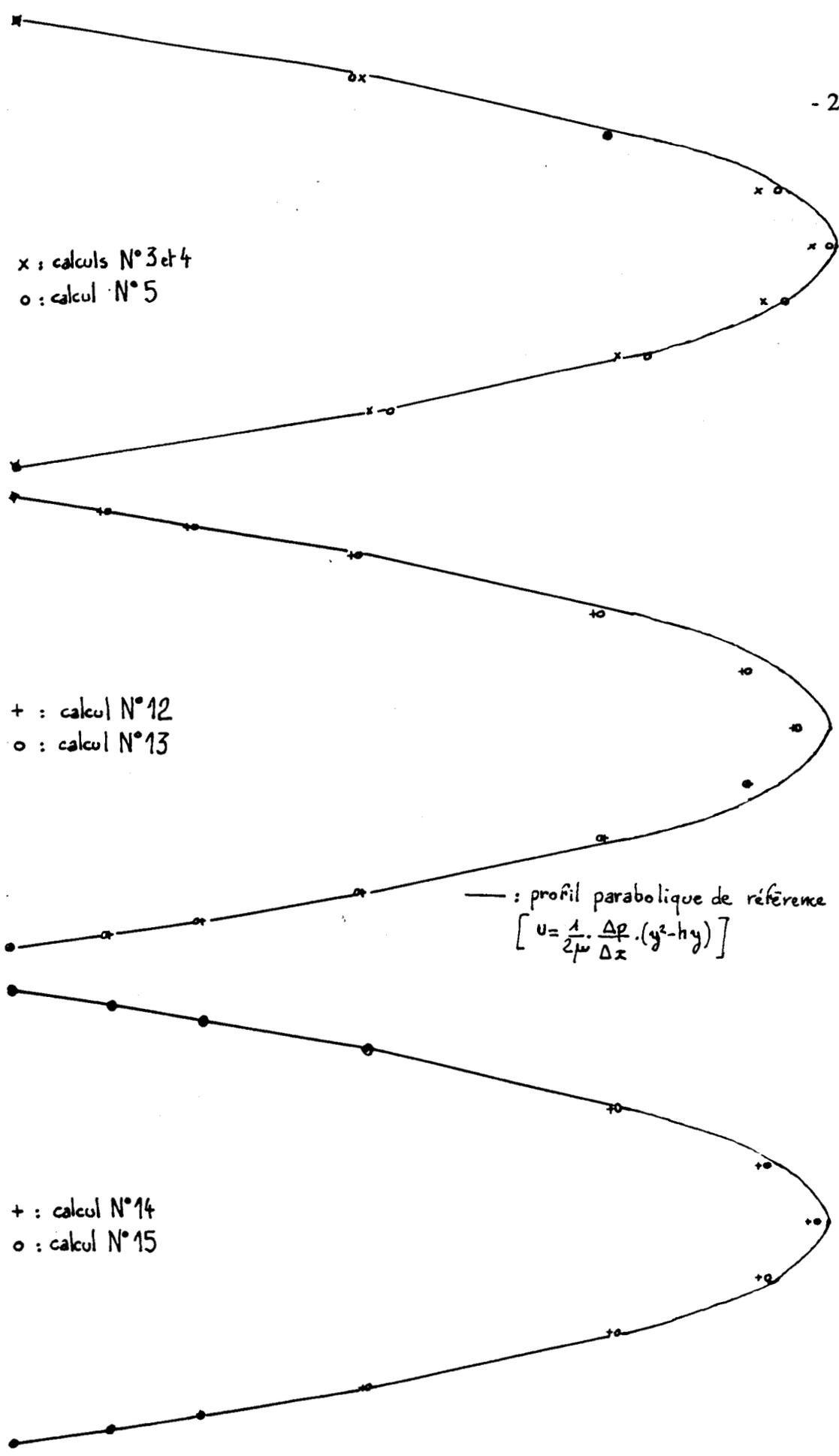


fig.3.6 : Profils de vitesse obtenus (Calculs N.3/4/5/12/13/14/15)

CALCUL	MAILLAGE	CORRECT. VIT.	NBRE DE BOUCLES	Re	TEMPS	CONDITION AUX LIMITES	PROFIL RESULTANT
17	C1	Non	200	42	0.022	profil parab.	parabolique
18	C1	Oui	200	42	0.029	profil parab.	parabolique
19	C4	Non	200	42	0.017	profil parab.	parabolique
20	C4	Oui	200	42	0.019	profil parab.	parabolique
21	C1	Oui	200	37	0.01	profil unif.	voir fig.3.8
22	C4	Oui	200	37	0.005	profil unif.	idem ci-dessus
23	C8	Oui	3000	144	135.	profil unif.	voir fig.3.9

fig.3.7 : Résultats pour les C.L. en "Débit"

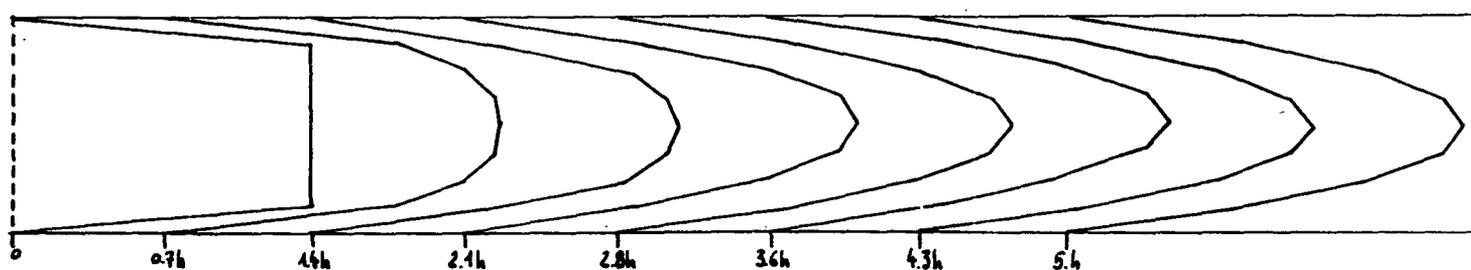


fig.3.8 : Evolution du profil (Calcul N.21)

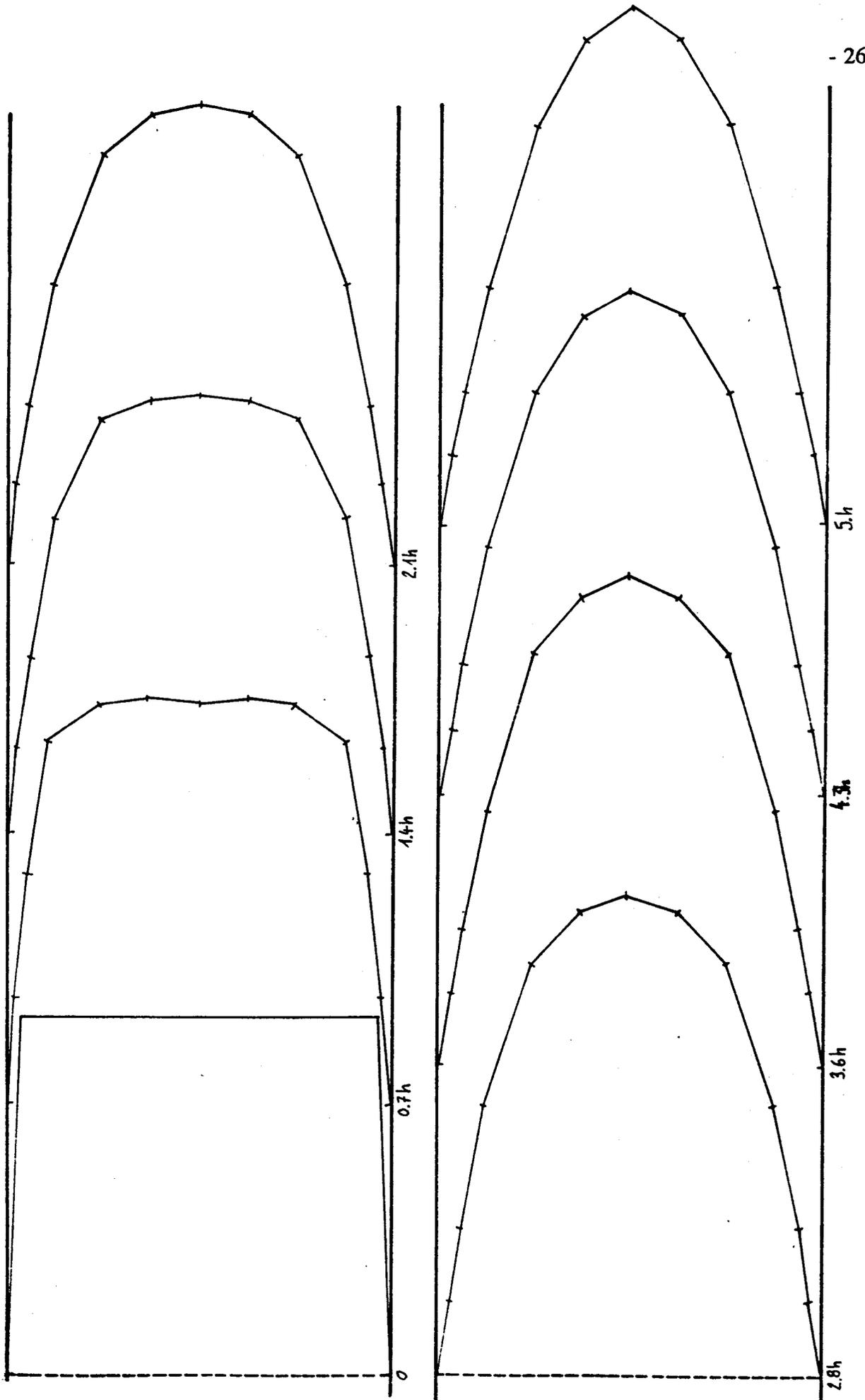


fig.3.9 : Evolution du profil (Calcul N.23)

CALCUL	MAILLAGE	CORRECT. VIT.	NBRE DE BOUCLES	Re	TEMPS	CONDITION AUX LIMITES	PROFIL RESULTANT
24	C1	Non	200	33	0.016	vitesse à la paroi	linéaire
25	C1	Oui	200	33	0.029	vitesse à la paroi	linéaire
26	C2	Non	200	33	0.016	vitesse à la paroi	linéaire
27	C2	Oui	200	33	0.028	vitesse à la paroi	linéaire
28	C4	Non	200	33	0.018	vitesse à la paroi	linéaire
29	C4	Oui	200	33	0.018	vitesse à la paroi	linéaire
30	C8	Oui	3000	100	175.	vitesse à la paroi	voir fig. 3.11

fig.3.10 : Résultats pour l'écoulement de Couette

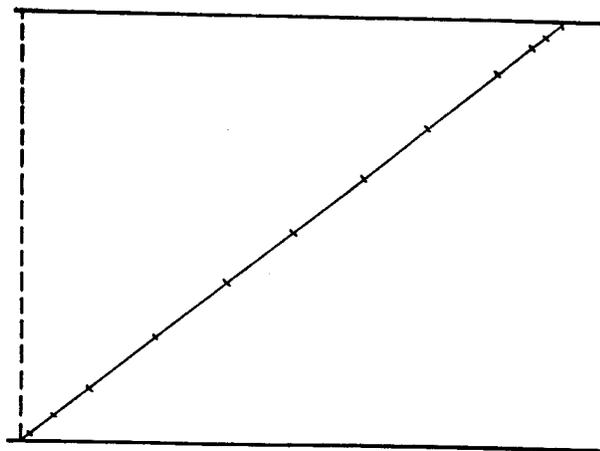


fig.3.11 : Profil de vitesse obtenu (Calcul N.30)

2. MARCHE DESCENDANTE

L'autre configuration testée est la marche descendante. C'est un écoulement qui a souvent été étudié et qui permet de tester la capacité du code à simuler correctement une recirculation (fig. 3.12). Le calcul a été effectué avec trois types de maillage (fig. 3.13).

La hauteur de la marche testée est notée h . La zone amont a une dimension transversale de $2h$, et la zone aval de $3h$. La longueur de la zone amont est de $12h$ et celle de la zone aval de $16h$. Le nombre de Reynolds (cf. chap.IV) associé à cette géométrie est noté $Re_h = \frac{\rho U h}{\mu}$ avec U la vitesse débitante dans la zone amont.

Derrière la marche, du fait de l'élargissement brusque, il se produit un décollement de l'écoulement et une recirculation. Le test classiquement effectué sur cet écoulement est la mesure de la distance que vont parcourir les filets fluides après la marche avant de "recoller" à la paroi. Cette longueur de recollement notée ici X_r peut, entre autres en ce qui concerne la simulation numérique, être déterminée par l'emplacement où la composante longitudinale de la vitesse à la paroi change de signe.

Le premier maillage représente uniquement la partie aval de la marche. On impose en entrée le profil de vitesse parabolique déterminé analytiquement pour l'écoulement en canal bidimensionnel. Le deuxième maillage ajoute la représentation de la zone amont avec toujours en entrée le profil de vitesse parabolique. Un troisième type de maillage a été testé, maillage constitué d'un même nombre de noeuds transversalement dans tout le champ de l'écoulement qui conduit à des mailles très éloignées du rectangle. On a vu dans le cas du canal que ce type de maille peut générer des erreurs importantes. En effet, les résultats obtenus dans ce cas, en ce qui concerne la longueur de recollement, sont inférieurs à ceux des deux autres maillages jusqu'à un ordre de 50%.

Les calculs ont été réalisés pour différents nombre de Reynolds Re_h compris entre 50 et 229, Denham et Patrick [3-1] ayant montré expérimentalement qu'au-dessus de cette valeur il apparaît des structures tridimensionnelles qui ne peuvent évidemment pas être représentées ici. Ghoniem et Cagnon [3-2] ont montré l'importance du choix d'un profil de vitesse correct en entrée afin de pouvoir obtenir les bonnes longueurs de recollement, ce qui a motivé ici d'imposer le profil parabolique obtenu analytiquement. La condition de sortie est simplement une pression imposée. Un calcul a également été réalisé en imposant un gradient de pression entre entrée et sortie, calcul qui a donné le même type de résultat qu'avec la condition de débit en entrée (fig. 3.14).

La comparaison avec les longueurs de recollement obtenus expérimentalement par Denham et Patrick, et par les calculs de Ghoniem et Cagnon ou Atkins, Maskell et Patrick [3-3], permet de vérifier la validité des valeurs de X_r obtenues (fig. 3.15). On peut noter à ce propos l'importance du choix de la condition d'entrée détaillé par Atkins, Maskell et Patrick. Ils ont en effet montré que le profil de vitesse uniforme se

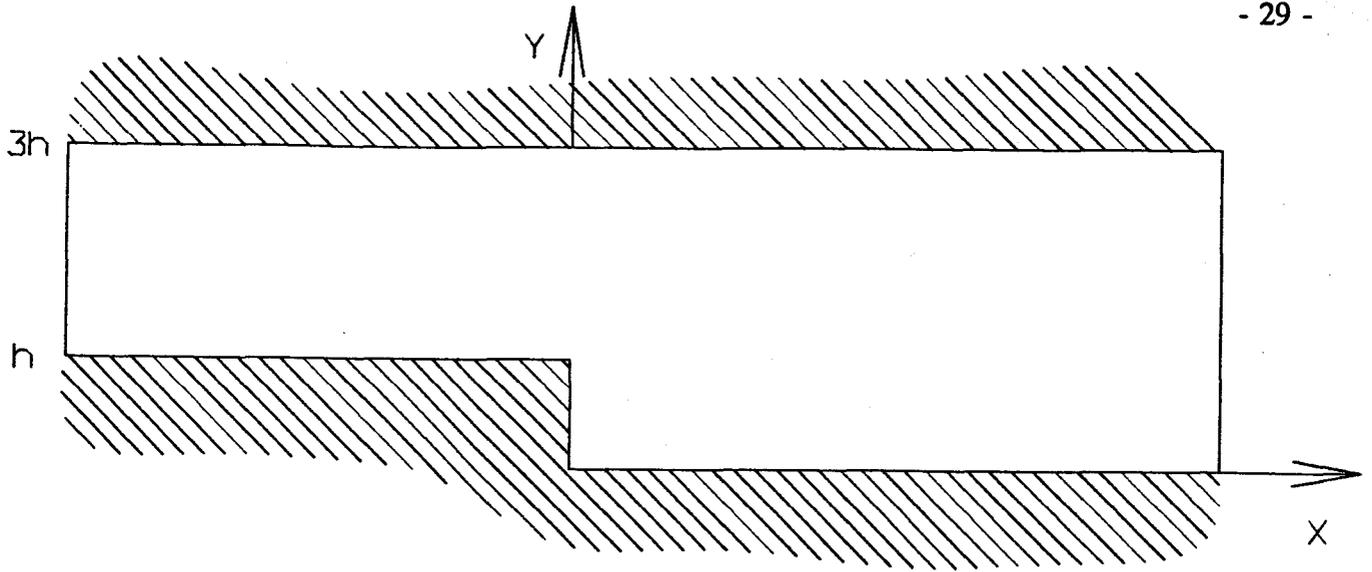


fig.3.12 : Géométrie de la marche

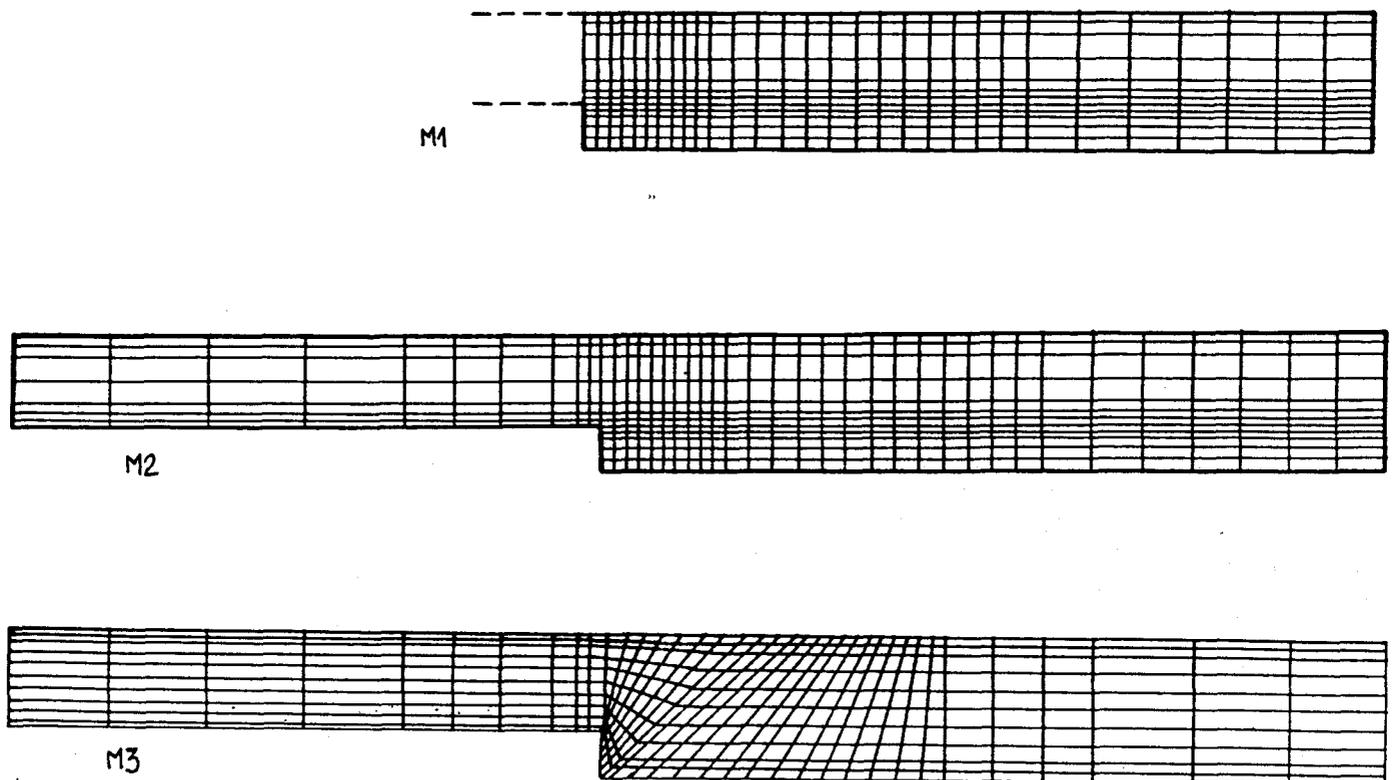
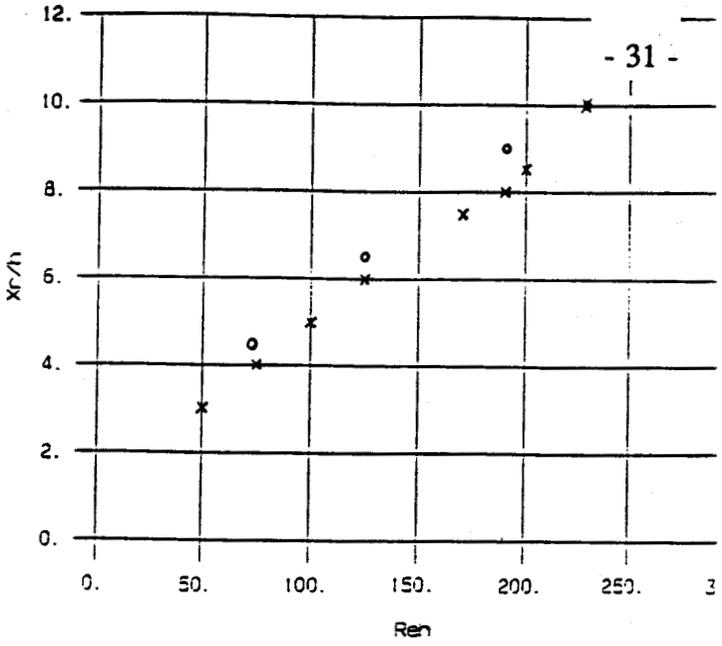
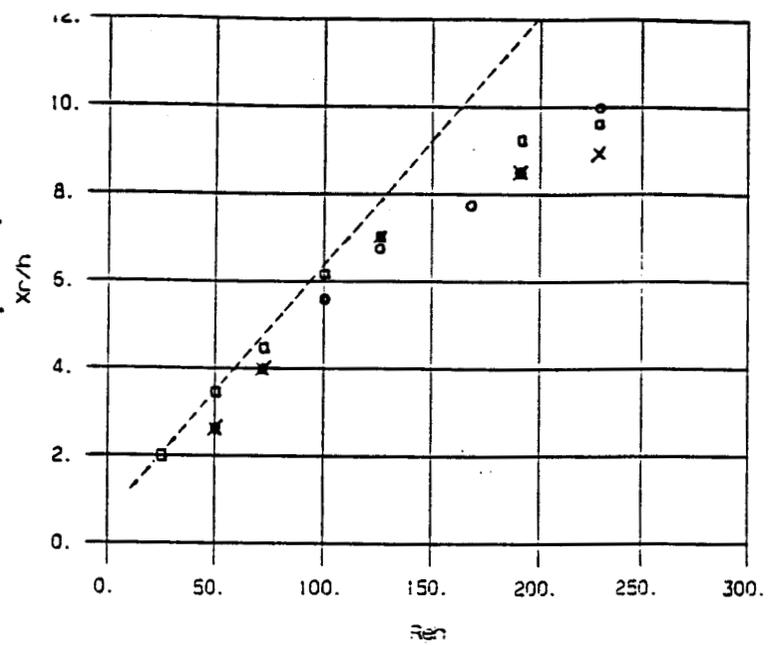


fig.3.13 : Maillages pour la marche

CALCUL	MAILLAGE	Reh	Xr/h	NBRE DE BOUCLES	TEMPS	COND. AUX LIMITES	PROFILS RESULTANTS
1	M1	73	4.5	1000	0.00225	parabolique	voir fig.3.16
2	M1	125	6.5	1000	0.00131	parabolique	
3	M1	191	9.	1000	0.00086	parabolique	voir fig.3.16
4	M1	229	10.	1000	0.00072	parabolique	
5	M2	50	3.	1500	0.0175	parabolique	
6	M2	75	4.	2000	0.0156	parabolique	
7	M2	100	5.	2000	0.0117	parabolique	
8	M2	125	6.	2000	0.0094	parabolique	
9	M2	170	7.5	2000	0.0069	parabolique	
10	M2	191	8.	2000	0.0062	parabolique	
11	M2	200	8.5	2000	0.0059	parabolique	
12	M2	229	10.	2000	0.0052	parabolique	
13	M2	50	3.	2000	0.030	ΔP	

fig.3.14 : Résultats pour la marche



o : mesures Denham - Patrick

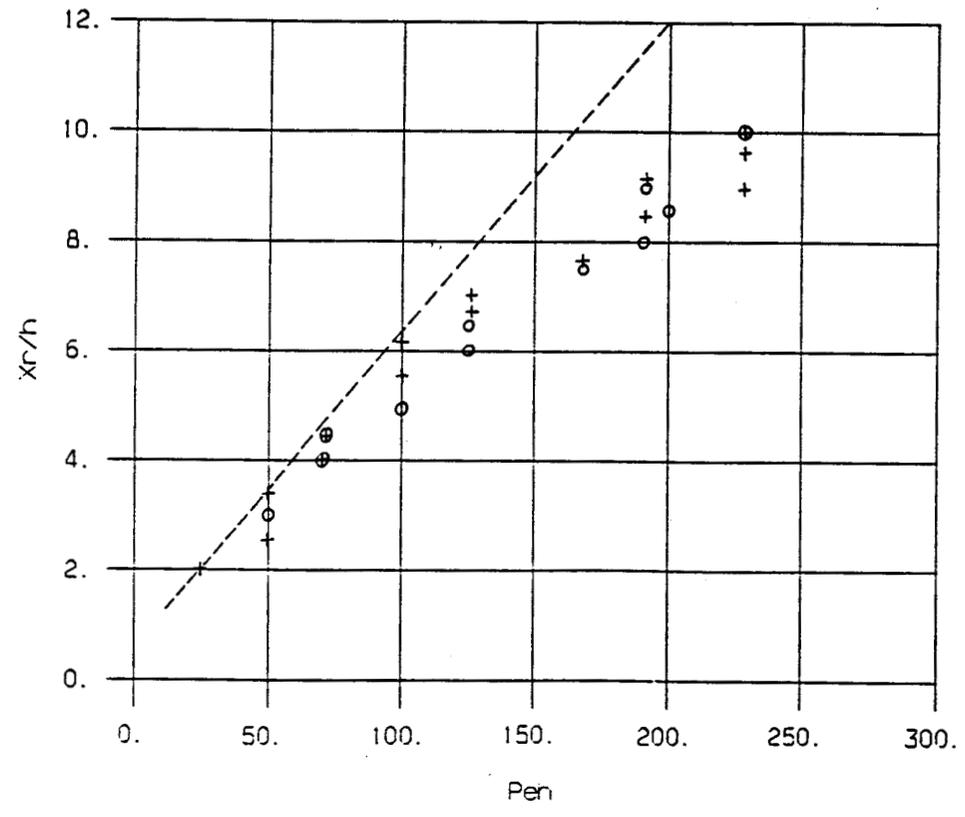
x : calculs Ghoniem - Cagnon

□ : calculs Atkins (profil entrée parab.)

-- : calculs Atkins (profil entrée unif.)

o : calculs N°1 à N°4

x : calculs N°5 à N°13



Récapitulation

o : calculs N°1 à N°13

+ : autres Auteurs

fig.3.15 : Evolution de la longueur de recollement

développant dans la zone amont de la marche induit une variation linéaire de la longueur de recollement avec le nombre de Reynolds, alors que le profil parabolique correspond beaucoup mieux à l'évolution de Xr constatée expérimentalement.

L'accord est également constaté en traçant les profils de la composante longitudinale de la vitesse derrière la marche (fig. 3.16-3.17).

En conclusion, pour les maillages rectangulaires le code de calcul est apte à simuler de façon très satisfaisante les recirculations, ce qui prouve que les erreurs de troncature liées à la formulation sont tout à fait admissibles.

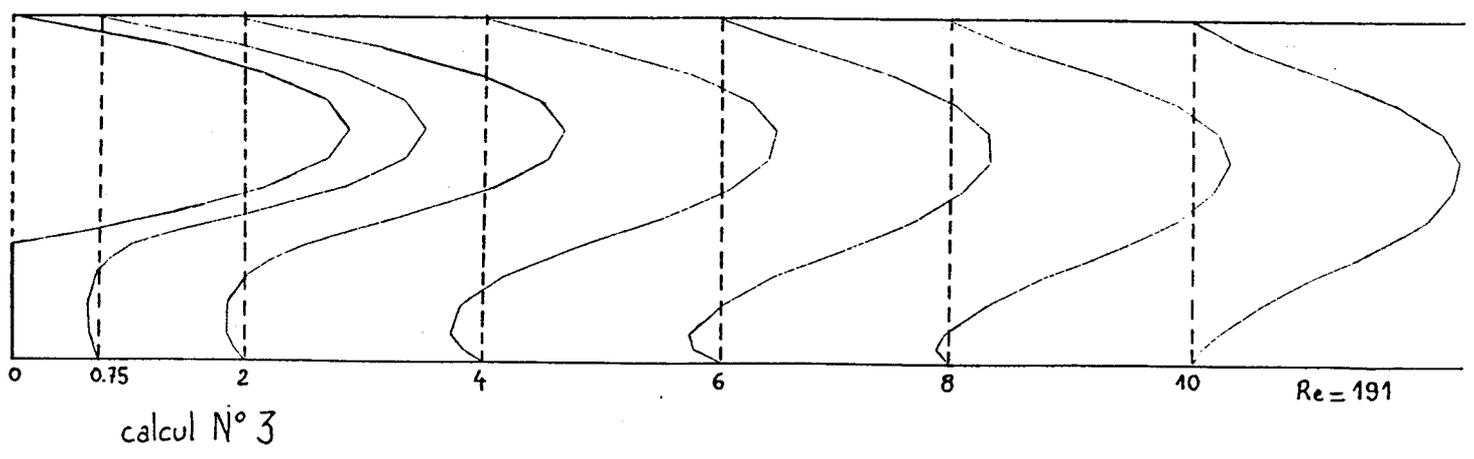
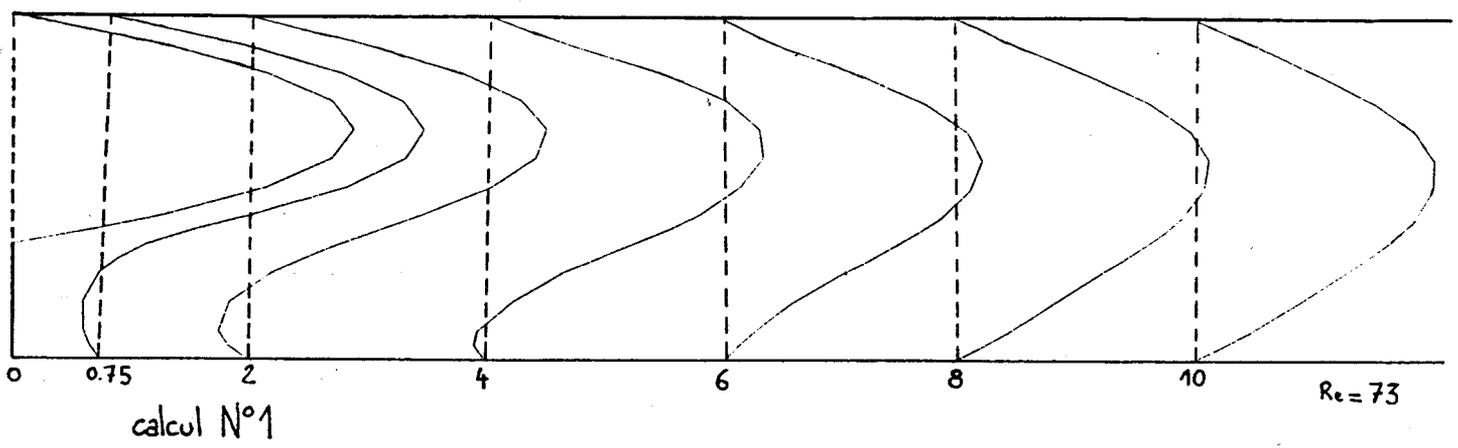
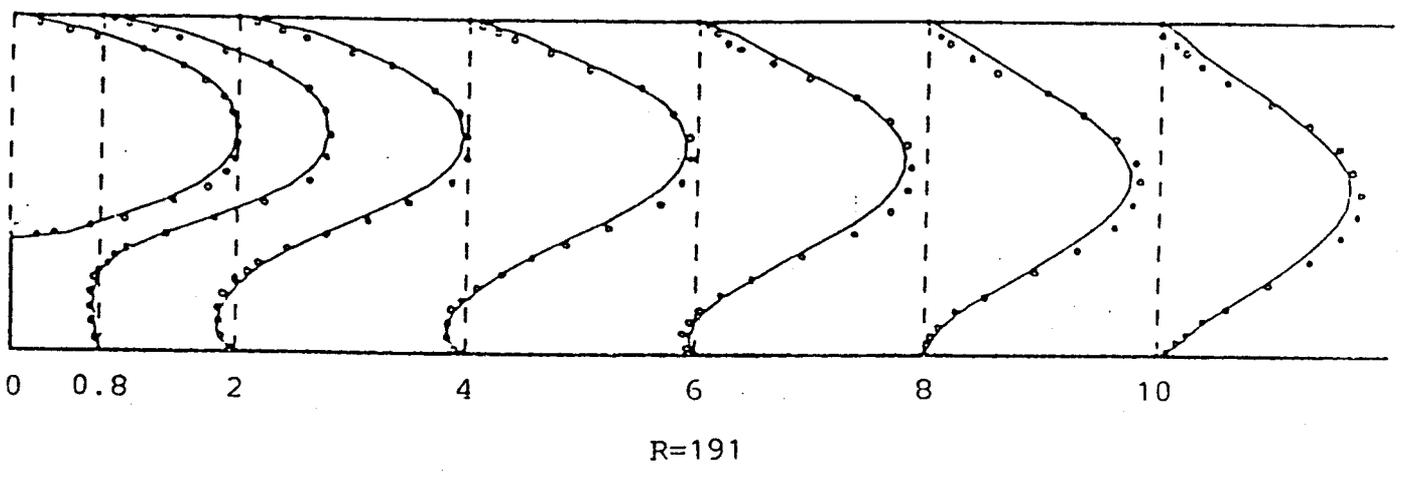
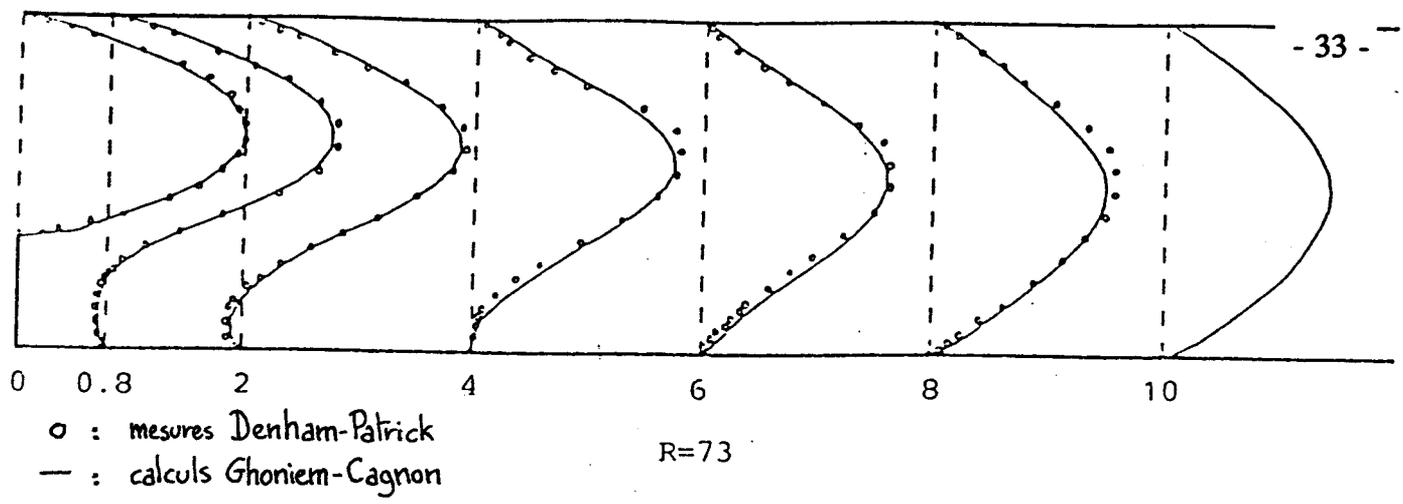
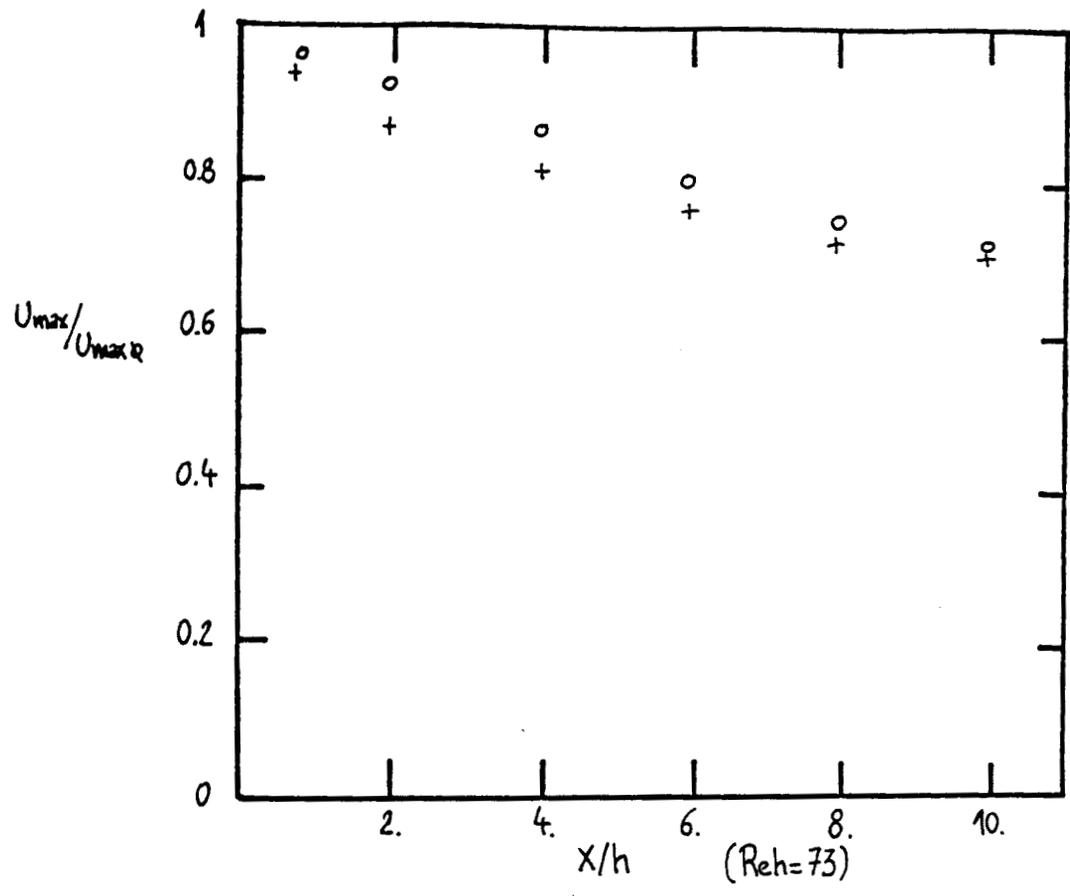


fig.3.16 : Profil de vitesse en aval de la marche



o : calculs Ghoniem-Cagnon
+ : calculs N°1 et N°3

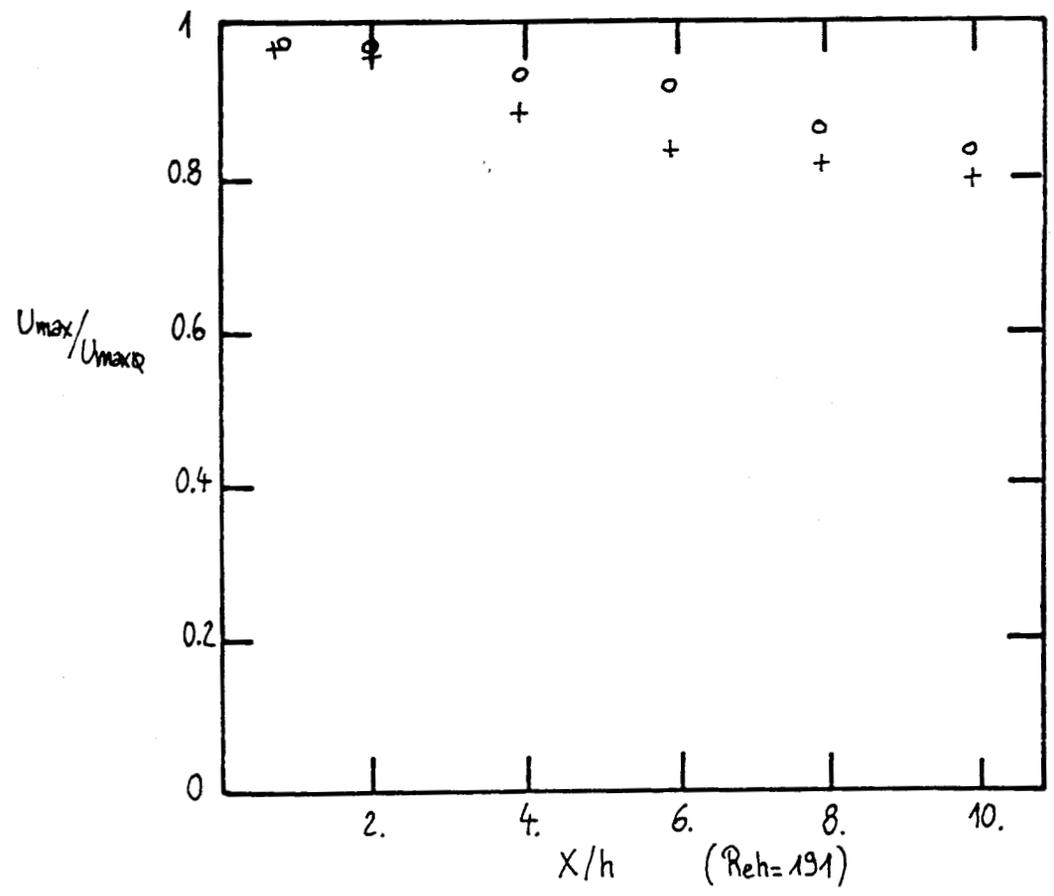


fig.3.17 : Evolution du maximum de vitesse en aval de la marche

IV. TESTS TURBULENTS

1. LES ECOULEMENTS TURBULENTS

1.1. La turbulence

O.Reynolds a mis en évidence dans son expérience célèbre de 1883 l'existence des écoulements turbulents en injectant des filaments d'eau colorée dans un tube où il faisait varier le débit. A faible débit le filament coloré est parfaitement rectiligne, alors qu'il se brise et diffuse dans tout l'écoulement lorsque le débit augmente [4-1].

Ce phénomène s'explique par le fait que, quel que soit le soin pris pour réaliser cette expérience, il apparaît toujours à l'entrée du tube des petites fluctuations de vitesse qui tendent à être amorties par la viscosité du fluide sauf si le débit, en fait un nombre sans dimension défini plus loin, dépasse une valeur critique [4-2]. Ce même type de problème apparaît en météorologie où des variations de l'ordre du centimètre peuvent être transformées sur la durée d'une journée en changements sur des distances voisines de la dizaine de kilomètres [4-3].

En fait, et plus généralement, la connaissance approximative de la situation initiale ou une faible incertitude sur les données peut produire une erreur énorme sur les phénomènes finaux [4-4]. On peut imaginer les conséquences d'une telle constatation pour les prédictions des phénomènes physiques, constatation qui fait l'objet de nombreux travaux fondamentaux dépassant très largement le cadre de cet exposé.

En ce qui concerne le calcul numérique des écoulements turbulents pour effectuer des simulations de problèmes "industriels", le but recherché est uniquement de modéliser le mieux possible l'influence des petites fluctuations sur les valeurs globales caractérisant l'écoulement.

1.2. Principaux caractères des écoulements turbulents

On peut caractériser un écoulement turbulent comme un comportement irrégulier des grandeurs physiques (vitesse, pression, masse volumique, température) qui sont des fonctions aléatoires de l'espace et du temps. L'ordre de grandeur des fluctuations est inférieur à l'ordre de grandeur des valeurs moyennes, ce qui différencie l'écoulement turbulent d'un simple mouvement périodique.

Le caractère turbulent est une propriété de l'écoulement et non uniquement du fluide, qui apparaît au-delà d'une valeur critique du nombre de Reynolds Re , sans dimension, représentant le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité :

$$Re = \frac{\rho \cdot U \cdot L}{\mu} \quad (IV.1)$$

Avec ρ la masse volumique du fluide, μ sa viscosité dynamique, U et L les vitesses et longueurs caractéristiques, dans le cas de l'écoulement dans un tube, le nombre de Reynolds critique formé avec le diamètre du tube est habituellement, pour des expériences sans précautions particulières, égal à environ 2000.

On note également l'importance du caractère diffusif des propriétés transportables telles que le transport de masse, la chaleur, la quantité de mouvement ou l'énergie cinétique, plus élevée que pour la diffusion moléculaire, ainsi que de la forte dissipation d'énergie cinétique en chaleur par les effets de la viscosité [4-5].

La turbulence correspond à un transfert d'énergie des fluctuations de vitesse à grandes échelles liées aux dimensions caractéristiques de l'écoulement vers les petites échelles liées aux processus dissipatifs.

1.3. Simulation numérique

Les équations de Navier-Stokes sont le point de départ de toute simulation d'écoulement de fluides et leur validité est assurée pour les nombres de Knudsen, nombre défini comme le rapport du libre parcours moyen des molécules sur l'échelle de longueur de l'écoulement, inférieurs à 10^{-2} , soit la quasi-totalité des applications macroscopiques.

Elles s'écrivent ici, pour un fluide incompressible non pesant dans le cas d'un écoulement isotherme :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{IV.3})$$

La deuxième étape de la simulation numérique est la discrétisation spatiale du domaine étudié en approximant de façon plus ou moins juste les processus internodaux. Plus prosaïquement, le calcul est "aveugle" pour tout ce qui se passe entre les noeuds du maillage. Or, on vient de voir l'importance que peuvent avoir les petites échelles de l'écoulement et donc la nécessité de prendre en compte d'une manière ou d'une autre l'influence qu'elles ont sur la globalité de l'écoulement.

L'approche qui semble la plus naturelle est la simulation numérique directe en discrétisant jusqu'aux plus petites échelles. En raison des tailles et des coûts de calcul prohibitifs, elle est pour l'instant réservée à une démarche de recherche fondamentale dans des configurations simples [4-6]. Pour des écoulements plus complexes ou des dimensions géométriques importantes, il n'est pas possible de mailler aussi finement et l'on doit faire alors appel à une autre méthode.

La macrosimulation (Large Eddy Simulation) avec modèles de sous-maillages (Sub Grid Scale Modelling) consiste à simuler les grosses structures de l'écoulement par le calcul direct et à modéliser l'action des petites structures sur celles-ci. On applique en tout point du champ de vitesses un filtre en général de type gaussien et de largeur directement liée à la taille des mailles, filtre qui définit un champ filtré \bar{u}_i de large échelle. Le champ de vitesse se décompose alors en ce champ filtré et un champ d'échelles de sous-maillages u'_i qui sont la représentation des fluctuations du champ réel par rapport aux valeurs filtrées [4-7]. L'application du filtre conduit à :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{IV.4})$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{IV.5})$$

La résolution de ces équations filtrées nécessite alors la modélisation des termes supplémentaires de sous-maille apparaissant dans l'équation (IV.5) :

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{u'_i u'_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + R_{ij}$$

Avec le développement en série de Taylor proposé par Léonard [4-8], le terme $\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j}$ peut s'approximer en :

$$\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \frac{\Delta^2}{24} \nabla^2 \bar{u}_i \bar{u}_j ,$$

avec Δ la largeur du filtre, et noté généralement $\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + L_{ij}$.

De la même manière $\overline{\bar{u}_i u'_j}$ peut s'écrire : $\frac{\Delta^2}{24} \bar{u}_i \nabla^2 \bar{u}_j$.

En modélisant le terme $\overline{u'_i u'_j}$, les termes de sous-maillages se réduisent à :

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + L_{ij} + R_{ij}$$

Si la discrétisation spatiale est assez fine, la modélisation des échelles de sous-maille peut être considérée comme indépendante de la structure de l'écoulement et donc pratiquement universelle. Cette méthode est pour l'instant limitée dans son développement par son coût, bien que des modélisations, néanmoins plus simplifiées, aient fait leur apparition dans des applications concrètes [4-9].

Les techniques les plus courantes actuellement consistent à traiter statistiquement l'écoulement, c'est-à-dire à s'intéresser aux propriétés moyennes, puisque c'est bien celles qui sont d'abord recherchées lorsque l'on s'intéresse à des écoulements de type "industriels". Il ne s'agit pas alors de réaliser la moyenne d'ensemble de plusieurs simulations directes pour des raisons évidentes de coût, mais de contourner la difficulté

en moyennant les équations avant leur résolution [4-10].

On décompose la variable aléatoire A en une valeur moyenne \bar{A} et une composante fluctuante A' . L'écoulement étant supposé ergodique, \bar{A} est la moyenne temporelle définie par :

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t+\tau) d\tau$$

qui est indépendante du temps si la borne supérieure d'intégration T est grande par rapport à la plus grande échelle de temps de la turbulence.

En moyennant les équations de Navier-Stokes on obtient :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (\text{IV.7})$$

en utilisant les propriétés de la moyenne (somme, dérivation, ...).

On remarque que les équations moyennées ont exactement la même structure que les équations instantanées à l'exception d'un nouveau terme supplémentaire dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement $\overline{u'_i u'_j}$ qui a la dimension d'une contrainte et qui est appelé tenseur des contraintes de Reynolds. Il représente, non pas la turbulence elle-même, mais l'influence des fluctuations de vitesse sur le mouvement moyen. Le système d'équations n'est alors plus fermé : il faut modéliser les tensions de Reynolds [4-11].

2. FERMETURE DES EQUATIONS MOYENNEES

2.1. Viscosité turbulente

Afin de fermer le système d'équations, Boussinesq (1877) a introduit le concept de viscosité turbulente en supposant que l'effet de la turbulence sur le mouvement moyen (accroissement de la diffusion et de la dissipation) peut être représenté comme un accroissement de viscosité ou une "viscosité turbulente".

En effectuant l'analogie avec la loi de Newton qui définit le tenseur des contraintes visqueuses en incompressible par :

$$\tau_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

on pose :

$$\overline{u'_i u'_j} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{IV.8})$$

Le problème de la fermeture s'est déplacé vers la détermination de ν_t à partir du champ moyen en n'oubliant pas que la viscosité turbulente est une propriété de l'état local de la turbulence et non une caractéristique physique du fluide.

2.2. Modèle algébrique

Il est proposé par Prandtl (1925) en remarquant que, en écoulement bidimensionnel par filets parallèles, le terme de cisaillement $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ a la dimension de T^{-1} et la viscosité turbulente ν_t la dimension de $L^2 T^{-1}$, et en posant :

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (\text{IV.9})$$

Pour Prandtl, la longueur de mélange, terme l de (IV.9), représente une longueur statistique de parcours des nuages turbulents dans la direction transversale de la couche de cisaillement et l est supposée proportionnelle à la distance à la paroi dans le cas d'une couche limite pariétale et en excluant la sous-couche visqueuse.

Escudier (1966) affine cette formulation en affectant une valeur constante à la longueur de mélange dans la zone où la variation de vitesse est faible.

La formule de Nikuradsee donne une relation entre longueur de mélange, distance à la paroi et rayon pour l'écoulement dans un tube circulaire.

Pour prendre en compte la sous-couche visqueuse attenante à la paroi, la formule la plus utilisée est celle de Van-Driest (1956) :

$$l = k y \left[1 - e^{-\frac{y^+}{A}} \right] \quad y^+ = y \frac{\sqrt{\tau_s \rho}}{\mu} \quad (\text{IV.10})$$

avec y la distance à la paroi, τ_s la contrainte pariétale, et les constantes $k \approx 0.41$ et $A \approx 26.0$.

On peut noter qu'il existe de nombreuses formulations pour tenir compte des particularités des écoulements [4-12].

Le modèle de longueur de mélange est un modèle simple, sans équation différentielle à résoudre, valable dans de nombreux cas d'écoulements pas trop complexes. Avec un choix approprié de l'expression de l , il donne des prédictions réalistes du comportement général.

Par contre, si son expression est correcte pour des écoulements supposés quasi parallèles, il ne faut l'utiliser qu'avec prudence pour des écoulements comportant séparations et recollements.

La viscosité turbulente s'annule lorsque le gradient de vitesse est nul et, par exemple, on ne peut modéliser des écoulements comportant des régions de couche limite et de cisaillement libre avec le même modèle sans déconnecter les deux zones et les simuler différemment.

2.3. Modèle à une équation de transport

Prandtl (1945) et Kolmogorov (1942) ont proposé une nouvelle relation pour la viscosité turbulente en fonction de l'énergie cinétique turbulente $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$:

$$v_t = l \sqrt{k} \quad (\text{IV.11})$$

A partir des équations de Navier-Stokes instantanées et moyennées on obtient, après diverses manipulations, l'équation pour l'énergie cinétique turbulente :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\overline{u'_i u'_i u'_k}}{2} + \frac{p' u'_k}{\rho} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] \quad (\text{IV.12})$$

Les termes apparaissant dans le membre gauche de l'équation sont le taux de variation temporelle et la convection par le champ moyen. A droite on a, dans l'ordre, le taux de production par le mouvement moyen, la dissipation visqueuse et les termes de diffusion turbulente.

Le problème de fermeture des équations consiste donc maintenant à modéliser ces termes.

Les termes de production sont modélisés en utilisant l'hypothèse de Boussinesq :

$$\left[-v_t \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right] + \frac{2}{3} k \delta_{ik} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \quad (\text{IV.13})$$

Pour les termes de diffusion, dans le cas de Re grand, on peut négliger la diffusion moléculaire devant la diffusion turbulente. En faisant une analogie avec les mécanismes de diffusion moléculaire et en définissant un nombre de Prandtl turbulent σ_k [4-13], on les écrit :

$$\frac{-v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \quad (\text{IV.14})$$

La dissipation d'énergie turbulente ϵ apparaît principalement dans les petites échelles de la turbulence. Ce terme représente le taux de variation de l'énergie cinétique turbulente par l'action des forces de viscosité et est donc proportionnel au rapport k sur le temps caractéristique des fluctuations turbulentes qui peut être pris égal à $l/k^{1/2}$. Le terme de dissipation s'écrit alors :

$$\epsilon \approx C_\mu \frac{k^{3/2}}{l} \quad (\text{IV.15})$$

L'équation modélisée pour l'énergie cinétique turbulente devient, en incompressible :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = v_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right] - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] \quad (\text{IV.16})$$

en complétant avec une formule algébrique pour la détermination de l .

Le principal progrès obtenu par le modèle à une équation de transport de l'énergie cinétique turbulente est la prise en compte du champ turbulent lui-même par l'intermédiaire du terme \sqrt{k} qui donne une meilleure mesure, pour déterminer une échelle de vitesse, que l'expression en $l \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$ du modèle de Prandtl. La faiblesse de l'hypothèse de longueur de mélange étant due autant à l'imperfection sur l'échelle de longueur qu'aux suppositions sur l'échelle de vitesse, la difficulté de trouver une loi algébrique correcte pour l rend les modèles à une équation, en général, guère plus performants que les modèles algébriques.

2.4. Modèle à deux équations

On cherche à établir une équation de transport pour déterminer l'échelle de longueur. A partir des équations de Navier-Stokes on peut obtenir, comme pour

l'énergie cinétique k , une équation de bilan pour une variable $Z = k^m l^n$. Les exposants m et n sont arbitraires et diffèrent suivant le choix des divers auteurs. Le choix le plus courant est celui du taux de dissipation de l'énergie turbulente qui apparaît d'ailleurs directement dans l'équation pour k : $Z = k^{3/2} l^{-1} = \varepsilon$. Sa forme modélisée est similaire à celle de k [4-14] et, pour un écoulement incompressible, a la forme :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = C_{\varepsilon 1} v_t \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right] - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] \quad (\text{IV.17})$$

avec $v_t \approx l \sqrt{k} \approx C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ et les ordres de grandeur des constantes obtenus expérimentalement. Classiquement $\sigma_\varepsilon \approx 1.3$, $C_{\varepsilon 1} \approx 1.44$, $C_{\varepsilon 2} \approx 1.92$ et pour l'équation de k (IV.16) $\sigma_k \approx 1.0$, $C_\mu \approx 0.09$.

La résolution du système d'équations k - ε permet alors d'obtenir v_t .

Un des points importants ayant permis l'obtention des équations modélisées pour k et ε est l'hypothèse du nombre de Reynolds local grand permettant de considérer les processus dissipatifs isotropes. Il est bien évident que cette hypothèse n'est pas vérifiée près des parois où la viscosité moléculaire est prépondérante. Pour modéliser correctement les effets pariétaux, il faut alors soit raffiner le maillage dans ces zones en prenant en compte l'influence de la viscosité dans les équations pour k et ε , soit utiliser des lois de paroi obtenues en faisant l'hypothèse de sous-couche visqueuse.

Ce modèle k - ε est sûrement le plus utilisé et fournit des résultats satisfaisants dans la plupart des cas. La détermination non locale de l'échelle de longueur caractéristique permet, contrairement au modèle de longueur de mélange, de prendre en compte "l'histoire" de la turbulence.

Néanmoins, il subsiste toujours les défauts inhérents à l'hypothèse de Boussinesq : le caractère supposé linéaire de la corrélation $\overline{u'_i u'_j}$, corrélation qui ne s'annule pas toujours au même endroit que le gradient de vitesse quelle que soit la finesse de détermination de la viscosité turbulente. Evidemment, la mise en place de ce modèle est plus complexe que pour le modèle algébrique.

2.5. Modèle de transport des contraintes de Reynolds

Afin d'éliminer les approximations liées à l'hypothèse de Boussinesq, on peut essayer d'évaluer directement les composantes du tenseur de Reynolds.

On déduit l'équation gouvernant les tensions de Reynolds à partir des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{u'_i u'_j}}{dt} = & \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_k u'_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \overline{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} - 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{1}{\rho} (\delta_{jk} u'_i + \delta_{ik} u'_j) \overline{p'} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

Il apparaît alors de nouveaux termes inconnus: les corrélations triples des fluctuations turbulentes qu'il faut modéliser pour fermer le système, ainsi que des corrélations pression-déformation. On pourrait alors de la même manière développer l'équation de transport pour les corrélations triples où apparaîtraient évidemment des corrélations d'ordre quatre, etc. Il est évident que, plus on avance dans l'ordre des corrélations, plus les équations se compliquent et plus il est difficile d'effectuer une modélisation physique des termes, sans parler bien sûr de l'augmentation du temps de calcul.

En ce qui concerne le modèle de transport des contraintes de Reynolds, il peut sembler indispensable dans certains cas et trouver sa raison d'être dans les écoulements complexes de par sa plus grande universalité. Mais la difficulté de modélisation ainsi que la complexité numérique de résolution, en augmentant la lourdeur de mise en oeuvre et les coûts de calcul, empêchent actuellement son utilisation hors des cas d'écoulements simples.

3. TESTS TURBULENTS

3.1. Implantation d'un modèle algébrique dans le code

Le modèle utilisé vérifiant l'hypothèse de Boussinesq exploite le concept de viscosité turbulente. Les équations de Navier-Stokes pour les variables moyennées (IV.6, IV.7) s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{IV.20})$$

La seule différence par rapport à l'écriture pour les variables instantanées vient du dernier terme de l'équation (IV.20). On peut le réécrire en :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

ou, avec la notation de l'équation (II.8), $\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{\tau}$.

Le tenseur des contraintes visqueuses $\vec{\tau}$ se définit donc exactement de la même manière que pour les équations instantanées, la seule différence provenant du remplacement de la viscosité dynamique μ par la somme $(\mu + \mu_t)$.

Cette constatation permet donc l'implantation simple du modèle de turbulence dans le code. En effet, il suffit d'insérer un test, permettant d'appeler ou non un sous-programme de calcul de la viscosité effective (la somme $\mu + \mu_t$) suivant le type de calcul souhaité, avant le calcul du tenseur des contraintes visqueuses. Cette remarque est correcte quel que soit le type de modèle utilisé à la seule restriction qu'il vérifie l'hypothèse de Boussinesq.

En raison de sa simplicité d'écriture et malgré ses limitations importantes, mais ne souhaitant dans un premier temps que vérifier les valeurs moyennes des écoulements testés, nous avons choisi le modèle algébrique.

Il s'écrit pour un écoulement cisailé par filets parallèles (IV.9) :

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

En remarquant que la composante de cisaillement du tenseur de déformation s'écrit en bidimensionnel $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)$, on peut noter $\nu_t = l^2 2 |\epsilon_{xy}|$.

On généralise cette notation en :

$$v_t = l^2 |\mathcal{E}| \quad |\mathcal{E}| = \sqrt{2\varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{yy}^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} \quad (\text{IV.21})$$

On reprend la formulation de Van-Driest (IV.10) et on la discrétise de la même manière que les équations de Navier-Stokes présentées au chapitre II. La détermination de l et $|\mathcal{E}|$ se fait de manière totalement explicite en temps, et les variables sont considérées constantes par maille.

3.2. Canal bidimensionnel

On effectue les tests du modèle de turbulence avec la même géométrie que celle des tests laminaires. On utilise trois types de maillage ne différant que par leur finesse à la paroi, soit des mailles pariétales de hauteur égales respectivement au 1/32, 1/64 et 1/128 de la hauteur totale du canal (fig.4.1).

Pour vérifier la validité des résultats obtenus, on utilise la formule proposée par Constantinescu [4-15] qui donne la relation entre le gradient de pression longitudinal et le nombre de Reynolds de l'écoulement :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-\mu^2}{6.8h^3\rho} \text{Re}^{1.681} \quad (\text{IV.22})$$

On a testé les résultats obtenus en comparant les nombres de Reynolds calculés et ceux déterminés par la relation analytique, pour un gradient de pression imposé. On a également vérifié les gradients de pression obtenus lorsque l'on impose une condition de débit (fig. 4.2).

La finesse du maillage est un critère prépondérant de résultat correct et croît avec le nombre de Reynolds (fig.4.3). Le profil de vitesse obtenu est similaire aux valeurs expérimentales de Telbany-Reynolds [4-16] et Laufer [4-17] (fig. 4.4).

On obtient également un bon accord pour un écoulement de type Couette pur (fig. 4.5).

3.3. Marche descendante

La deuxième configuration géométrique utilisée est la marche déjà employée pour les tests laminaires. Les maillages ont les mêmes dimensions que pour le cas laminaire, sauf en ce qui concerne la zone aval qui a une longueur de $16h$ ou $21h$. La différence essentielle provient du raffinement à la paroi dont on vient de voir l'importance pour le canal bidimensionnel (fig. 4.6).

Celenligil et Mellor [4-18] ainsi que Rodi [4-19], citant les expériences de Kim [4-20], rappellent que, pour un nombre de Reynolds suffisamment grand, la longueur de recouvrement dépend essentiellement du rapport des hauteurs de part et d'autre de la marche. Pour le cas présent, rapport de 2/3, cette longueur est de 7 fois la hauteur de la marche.

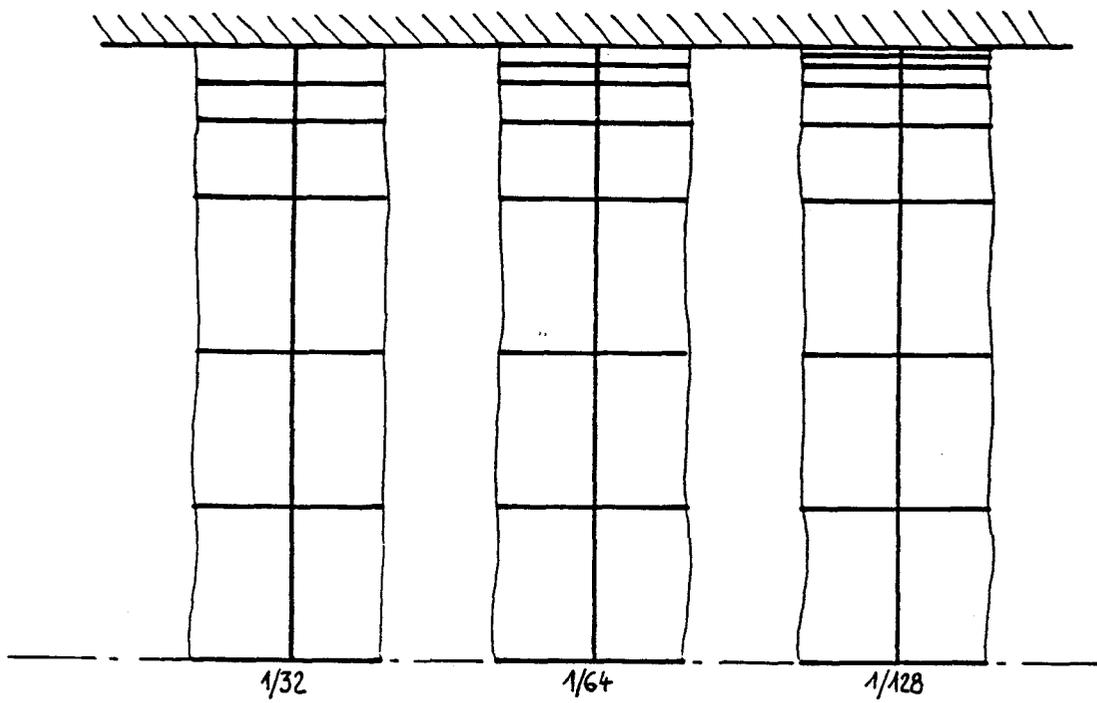
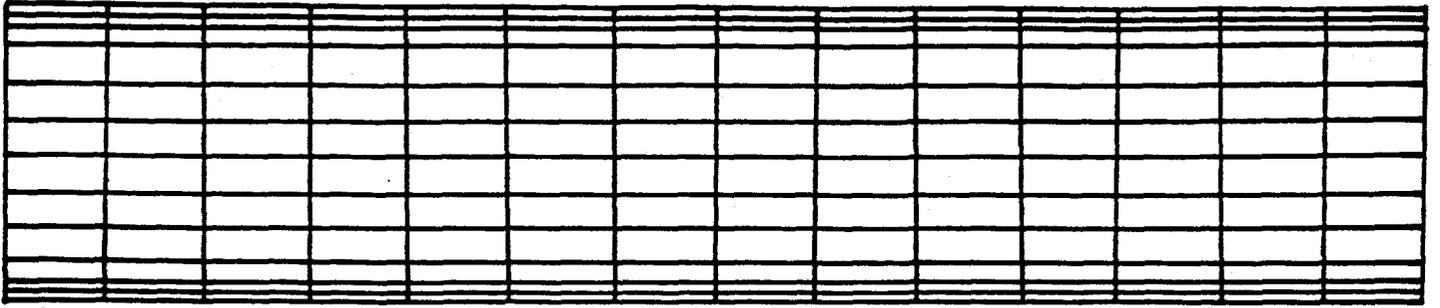


fig.4.1 : Finesses du maillage pour le canal

CALCUL	FINESSE DE MAILLAGE	COND. AUX LIMITES	RE (Const.)	ECART Re	PROFIL RESULTANT
1	1/32	ΔP	4114	13%	
2	1/32	ΔP	16185	23%	voir. fig.4.3
3	1/64	ΔP	16185	2%	voir fig. 4.3-4.4
4	1/64	ΔP	42163	27%	voir. fig.4.3
5	1/128	ΔP	42163	6%	voir. fig.4.3

CALCUL	FINESSE DE MAILLAGE	COND. AUX LIMITES	Re (imposé)	ECART Re
6	1/32	prof. unif.	4998	1%
7	1/64	prof. unif.	11374	5%

CALCUL	FINESSE DE MAILLAGE	COND. AUX LIMITES	Re (calcul)	PROFIL RESULTANT
8	1/128	vit. à la paroi	28200	voir fig.4.5

fig.4.2 : Résultats pour le canal

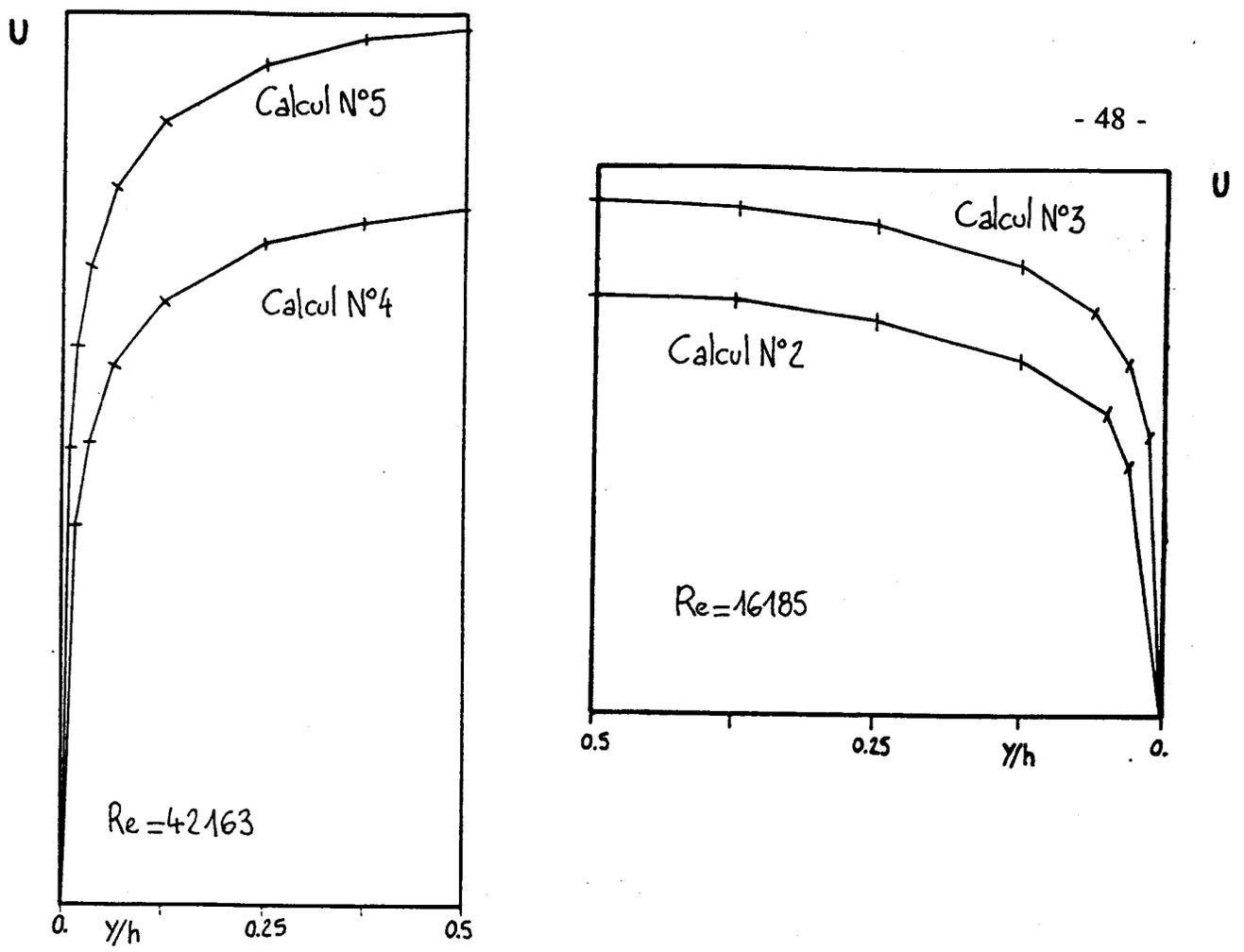


fig.4.3 : Evolution du profil en fonction de la finesse du maillage

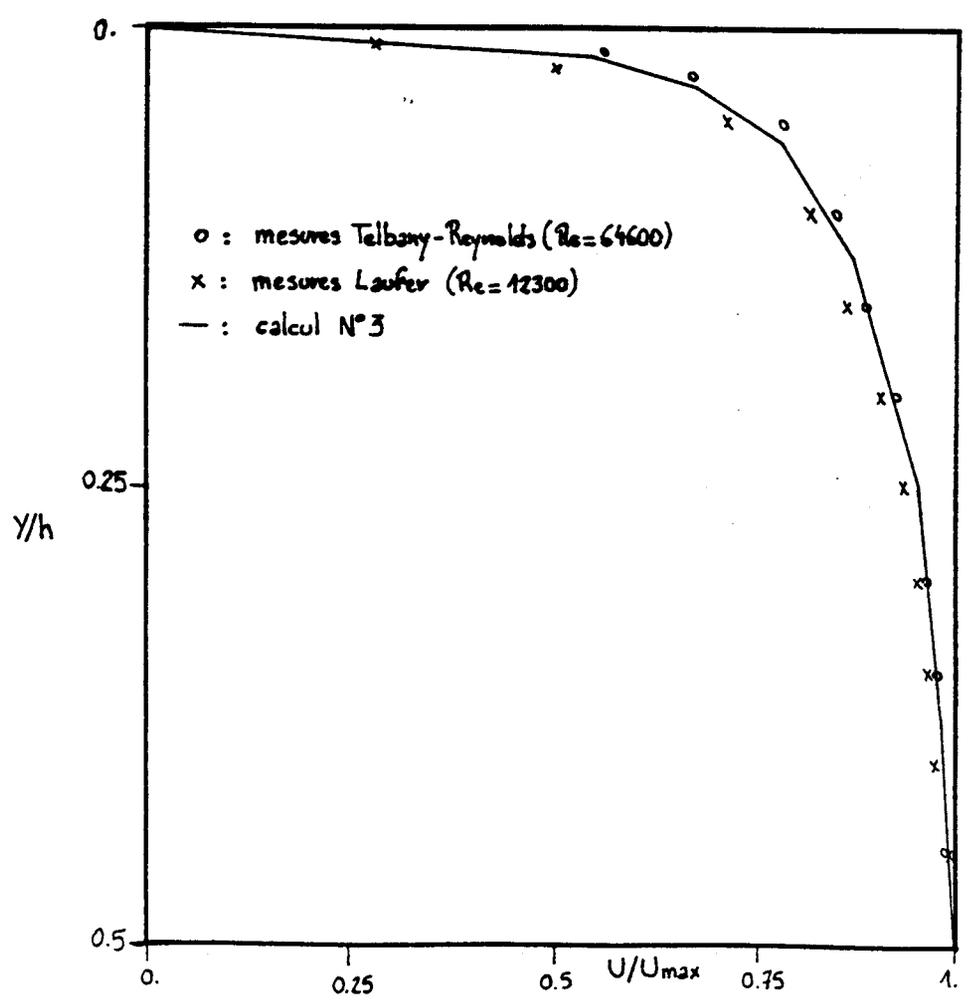


fig.4.4 : Profil de vitesse pour l'écoulement de Poiseuille

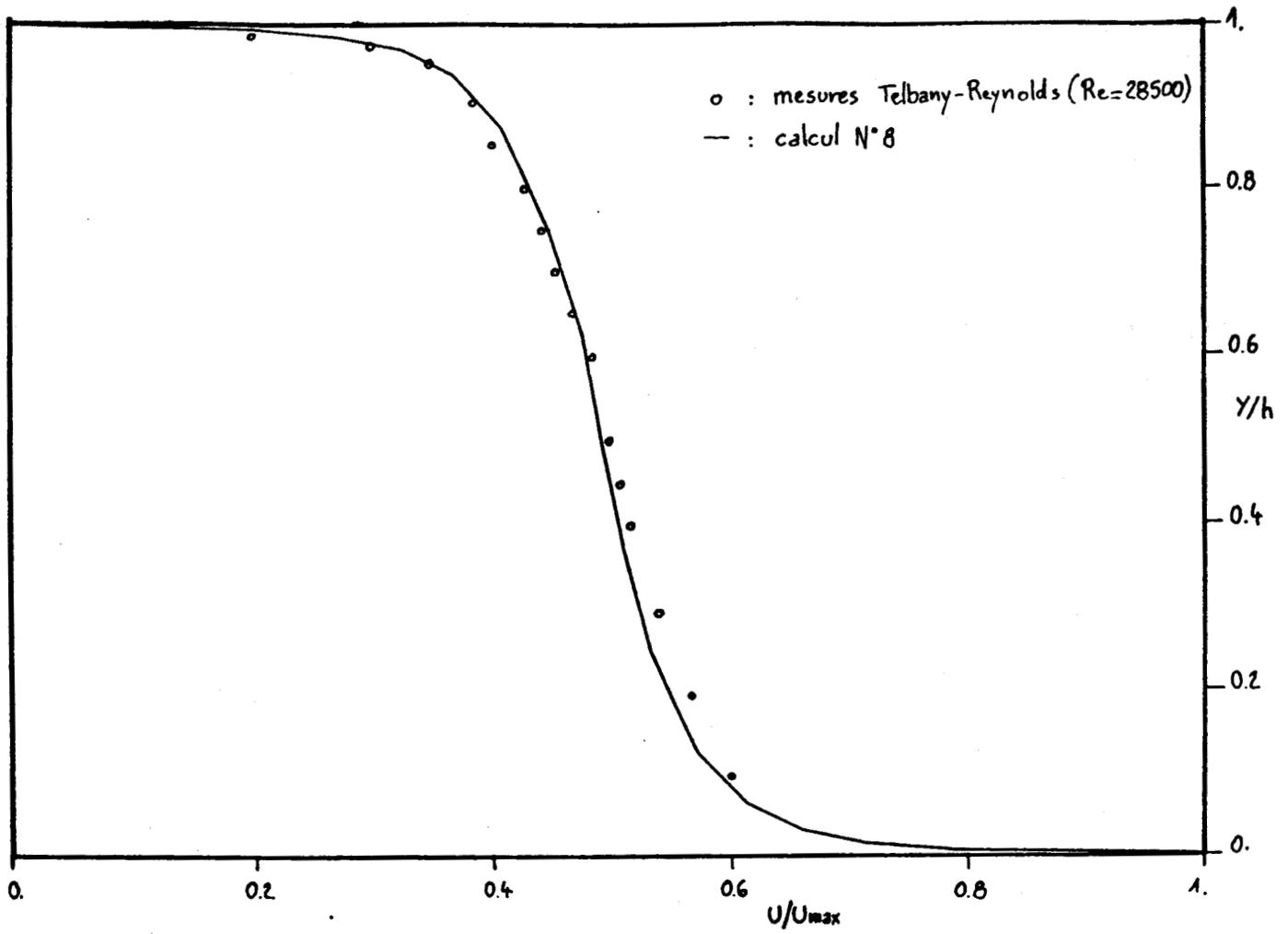


fig.4.5 : Profil de vitesse pour l'écoulement de Couette

Le mode opératoire pour établir la condition d'entrée est le suivant : on détermine le profil développé en effectuant le calcul pour le canal bidimensionnel, profil que l'on reporte ensuite à l'entrée de la marche. La condition de sortie est une pression imposée. Pour les calculs effectués on mesure la longueur de recollement et on vérifie dans la zone en amont de la marche, qui a une géométrie de canal bidimensionnel, l'écart entre le nombre de Reynolds du calcul et celui obtenu par la relation (IV.22). Comme on pouvait s'y attendre, en raison des conclusions du calcul pour le canal, le meilleur résultat est obtenu avec le maillage le plus fin au voisinage de la paroi (fig. 4.7). Pour ce cas de calcul, on a tracé la carte des pressions dans la zone en aval de la marche (fig. 4.8).

La valeur de la longueur de recollement obtenue, qui est inférieure d'environ 20% par rapport à la valeur expérimentale de $7h$, peut sembler à première vue médiocre. En fait, elle correspond aux résultats obtenus avec les modèles du type $k-\epsilon$ standards [4-19][4-21]

On peut donc considérer ce résultat correct tout en n'oubliant pas que les limitations du modèle algébrique ne permettent sûrement pas d'affiner cette valeur.

3.4. Implantation d'un modèle à deux équations

Dans le seul but de vérifier la capacité du code à traiter le cas de modèles de turbulence plus complexes de mise en oeuvre, nous avons choisi d'implanter un modèle à deux équations de transport pour k et ϵ .

La viscosité turbulente s'écrit alors (cf. paragraphe 2.4) :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (\text{IV.23})$$

avec, classiquement, $C_\mu \approx 0.09$.

L'obtention de k et ϵ s'effectue par la résolution des équations couplées pour $k-\epsilon$ notées précédemment (IV.16) et (IV.17).

De la même manière que pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement (II.2), ces équations peuvent être vues sous la forme suivante :

VARIATION TEMPORELLE + TERMES CONVECTIFS = SECOND MEMBRE

et être ainsi discrétisées de la même façon.

En reprenant les mêmes notations qu'au chapitre II, et avec une écriture sous forme intégrale, on a à résoudre :

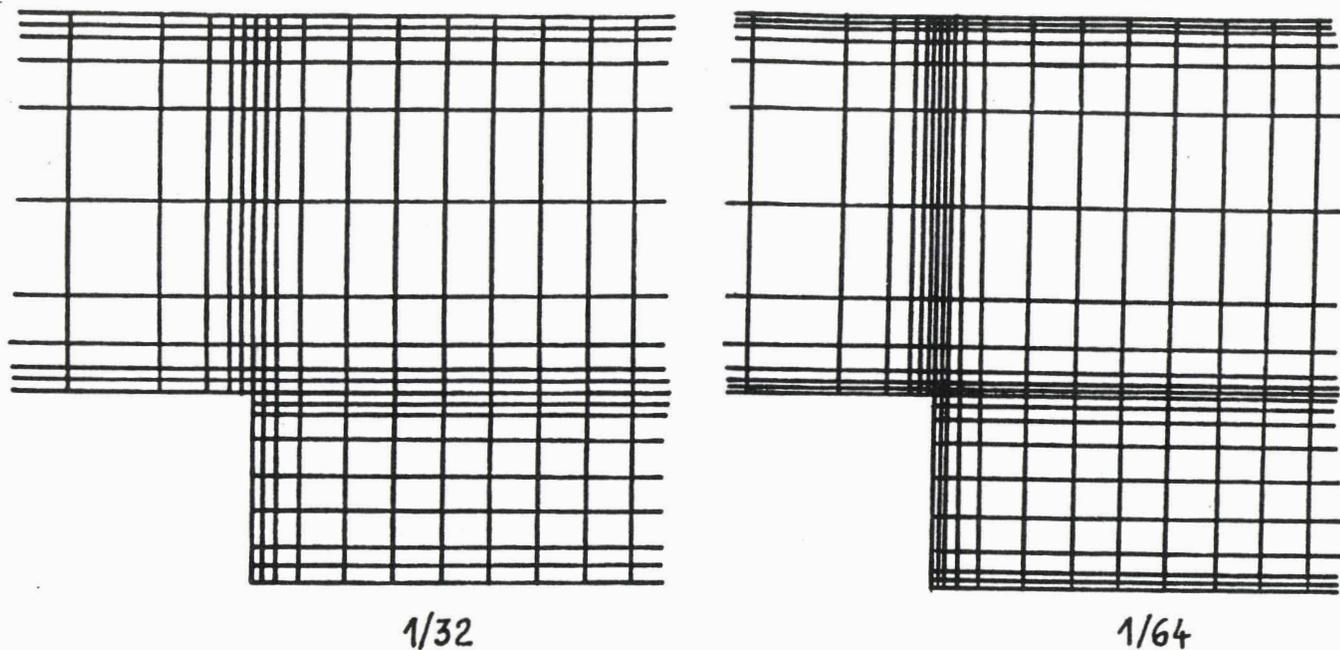


fig.4.6 : Finesses du maillage pour la marche

CALCUL	FINESSE DE MAILLAGE	LONGUEUR ZONE AVAL	Reh	ECART Re ZONE AMONT	Xr/h
1	1/32	16 h	2495	8%	5.
2	1/32	21 h	2495	8%	5.
3	1/64	21 h	5690	2%	5.5

fig.4.7 : Résultats pour la marche

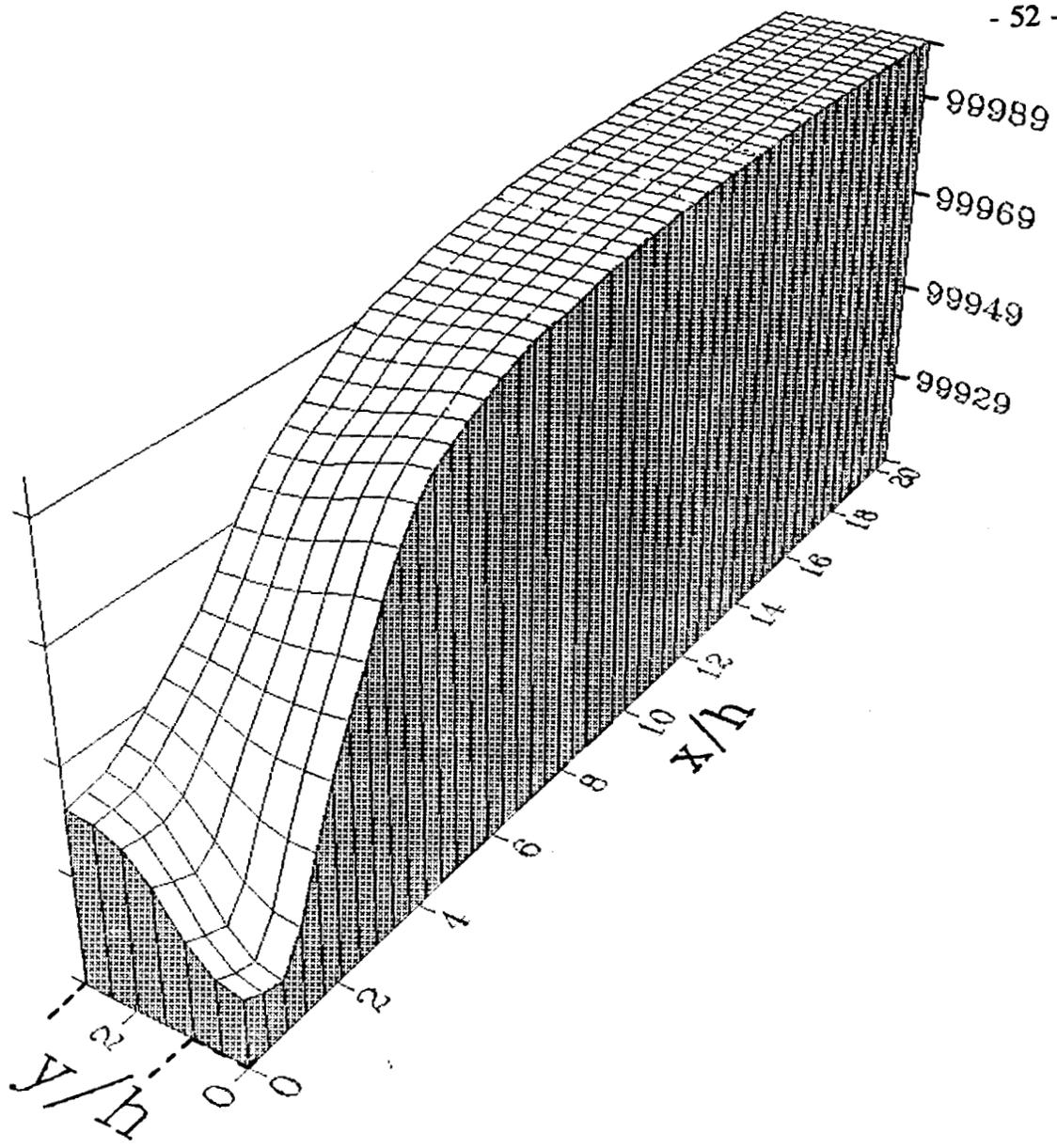


fig.4.8 : Profil de pression en aval de la marche (Calcul N.3)

- 1er demi-pas.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S'(I,J)} k_i dS - \int_{S'(I,J)} k_n dS \right] &= \int_{S'(I,J)} v_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right] dS \\ &- \int_{S'(I,J)} \epsilon_n dS + \int_{S'(I,J)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k_n}{\partial x_k} \right] dS \end{aligned} \quad (IV.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S'(I,J)} \epsilon_i dS - \int_{S'(I,J)} \epsilon_n dS \right] &= \int_{S'(I,J)} C_{\epsilon 1} v_t \frac{\epsilon_n}{k_n} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right] dS \\ &- \int_{S'(I,J)} C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon_n^2}{k_n} dS + \int_{S'(I,J)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon_n}{\partial x_k} \right] dS \end{aligned} \quad (IV.25)$$

- 2ème demi-pas.

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S'(I,J)} k_{n+1} dS - \int_{S'(I,J)} k_i dS \right] + \int_{\gamma(I,J)} k_i (\vec{n}_i \cdot \vec{n}) d\gamma = 0 \quad (IV.26)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S'(I,J)} \epsilon_{n+1} dS - \int_{S'(I,J)} \epsilon_i dS \right] + \int_{\gamma(I,J)} \epsilon_i (\vec{n}_i \cdot \vec{n}) d\gamma = 0 \quad (IV.27)$$

L'énergie cinétique turbulente k et la dissipation ϵ sont représentés comme la vitesse par des éléments bilinéaires par maille et s'expriment de la même manière. La discrétisation spatiale des seconds membres des équations (IV.24) et (IV.25) s'écrit de façon similaire à celle de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. La détermination de la viscosité turbulente, constante par maille, s'obtient alors en écrivant la relation (IV.23) pour les valeurs moyennes de k et ϵ par maille.

La prise en compte des termes convectifs pour (IV.26) et (IV.27) est effectuée de la même manière que pour les vitesses, la détermination des flux étant déjà obtenue par ailleurs (voir chapitre II).

La valeur initiale de k est imposée constante dans tout le domaine et égale à 10% de l'énergie cinétique moyenne débitante. La dissipation turbulente est initialisée par une relation du type longueur de mélange :

$$\epsilon \approx \frac{k^{3/2}}{l}$$

avec l distance à la paroi la plus proche.

Les conditions à la paroi, pendant le calcul, sont obtenues en reprenant la formulation algébrique du type Van-Driest (IV.10) et en faisant l'hypothèse d'équilibre de l'énergie cinétique turbulente (*production = dissipation*). On peut alors en déduire, à partir de (IV.16) :

$$\varepsilon = \nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right)$$

et

$$k = \sqrt{\nu_t \frac{\varepsilon}{C_\mu}}$$

Pour les frontières à pression imposée, on considère un gradient nul.

On introduit dans le calcul du pas de temps un critère supplémentaire pour garantir la conservation du signe de k et de ε , qui doivent rester positifs. Ce problème n'intervient que dans la première phase de calcul (phase lagrangienne), la technique de "différence-amont" utilisée dans la deuxième phase de calcul, où l'on prend en compte les termes de convection, ayant toutes les propriétés de monotonie nécessaires.

Partant de valeurs initiales positives, ceci est simplement obtenu en écrivant que pendant un pas de temps les variations de k et ε sont une fraction des valeurs de départ. Dans la mesure où le pas de temps ainsi obtenu est très inférieur au pas de temps Δt_n correspondant aux critères de stabilité généraux (chapitre II, paragraphe 5.2), on effectue autant de sous-cycles que nécessaire pour ce calcul de k et ε .

La comparaison modèle algébrique + modèle $k-\varepsilon$ est réalisée en reprenant la géométrie de la marche vue précédemment. Le maillage utilisé a un raffinement à la paroi égal au 1/32 de la hauteur totale. La longueur de la zone aval est de $16h$. La condition d'entrée est un profil de vitesse turbulent et la condition de sortie une pression imposée. Le calcul est effectué pour un nombre de Reynolds relatif à la hauteur de la marche de : $Re_h = 2495$. On obtient, pour le modèle algébrique du type longueur de mélange, une longueur de recollement égale à $5h$ et, pour le modèle $k-\varepsilon$, à $5.2h$ qui correspond à la valeur obtenue classiquement par ce modèle (fig. 4.9). En traçant l'évolution d'un coefficient de pression à la paroi (fig. 4.10), on constate une meilleure correspondance du profil obtenu par le modèle $k-\varepsilon$ avec les résultats obtenus par Atkins, Maskell et Patrick [3-3].

Sans entrer plus en détail dans le dépouillement des résultats obtenus, on peut donc admettre la bonne aptitude du code à traiter également les modèles avec équations de transport, en l'occurrence ici pour k et ε .

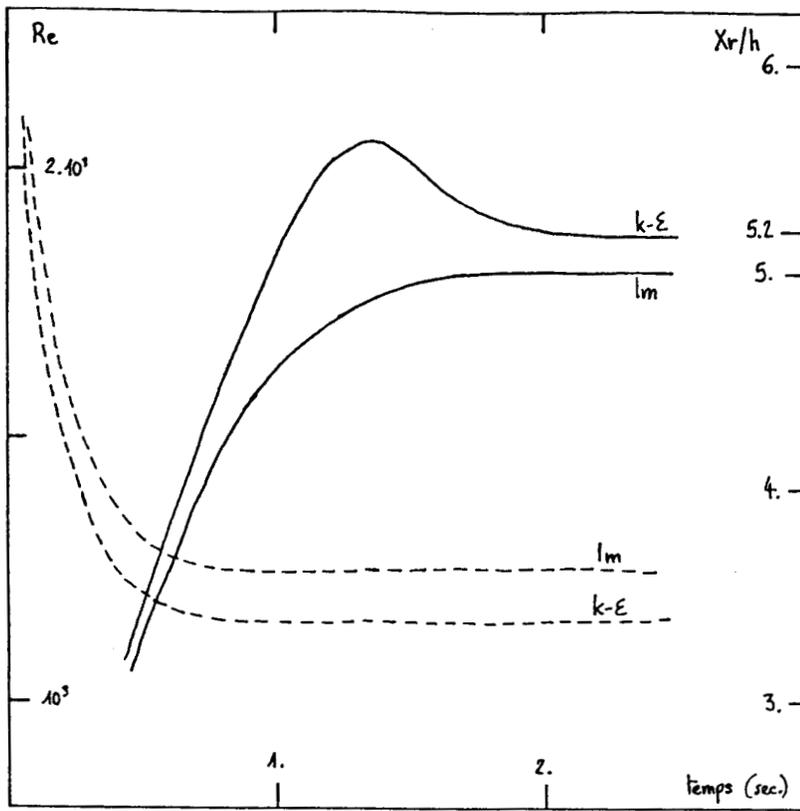


fig.4.9 : Longueur de recollement, Nbre de Reynolds (derrière la marche)

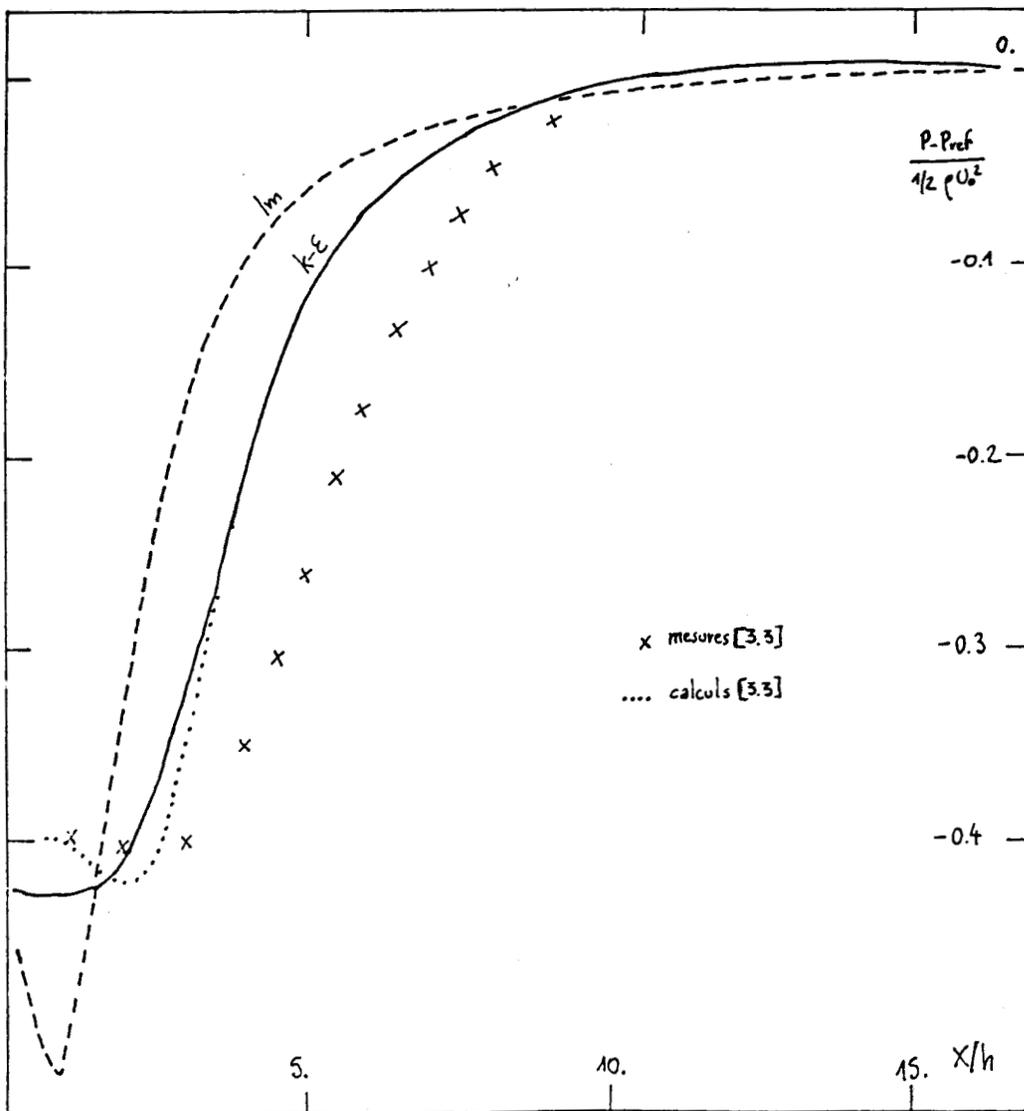


fig.4.10 : Coefficient de pression à la paroi

V. MODELISATION D'UNE CONFIGURATION INDUSTRIELLE

La dernière série de calculs effectuée est relative à un dispositif expérimental mis en place par J.C. Monnier au Laboratoire de Mécanique de Lille afin d'étudier un problème industriel [5-1][5-2].

1. DISPOSITIF EXPERIMENTAL

La maquette mise en oeuvre a été utilisée pour étudier l'écoulement dans une cellule d'électro-zingage qui consiste essentiellement en un tambour en rotation dans un cylindre et à l'interface desquels est injecté le fluide électrolytique. La maquette d'essai correspond à la géométrie développée du cylindre et du tambour, le fluide étant de l'eau (fig.5.1).

Les mesures effectuées sont la mesure de la vitesse de déplacement de la bande avec une précision estimée de 1% , la mesure des débits amont et aval avec une erreur de mesure de $\pm 0,5\%$, et la mesure des différences de pressions à l'injection et dans les zones amont et aval à moins de 1% près.

La maquette testée en écoulement symétrique (vitesse de bande nulle) a montré une différence de répartition des débits inférieure à 1%. Les mesures de pression à la sortie de la zone d'injection et dans les zones amont et aval indiquent une uniformité dans la direction transversale au défilement y compris lorsque la bande est en mouvement.

En première approche, l'écoulement peut donc être considéré comme bidimensionnel. De plus, la pression varie linéairement dans la direction longitudinale et dès les premières mesures après la zone d'injection : à une distance d'environ 7 fois la hauteur entre paroi fixe et paroi mobile.

Les mesures ont été réalisées pour des débits d'injection Q_0 variant de 5 à 80 m^3/h et des vitesses de bande U_b de 20 à 180 m/mn (fig.5.2).

Pour chaque vitesse de bande on dispose des mesures de pression dans chaque zone amont et aval, et dans la zone d'injection, ainsi que de la répartition du débit pour des débits d'injection différents (fig.5.3-5.4).

2. CONDITIONS DES CALCULS

En raison de la dimension longitudinale très importante des zones amont et aval, le maillage ne peut représenter l'ensemble de la géométrie. On choisit de modéliser la zone d'injection où l'écoulement est fortement bidimensionnel (fig.5.5).

Les conditions aux limites sont le débit Q_0 dans la zone d'injection et les pressions imposées à l'amont (P_1) et à l'aval (P_2) du maillage.

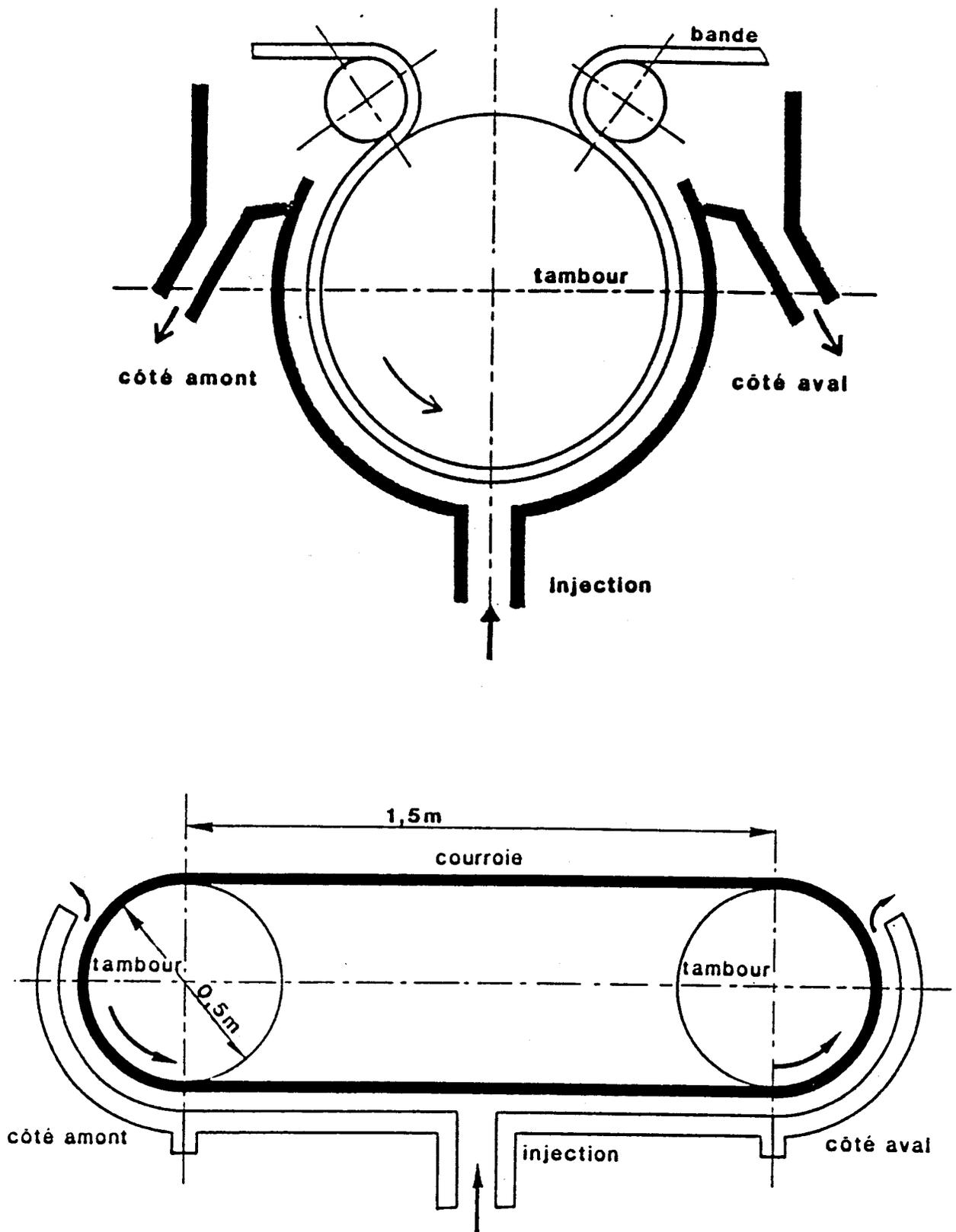


fig.5.1 : Schéma de la cellule d'électro-zingage et de la maquette [5-1]

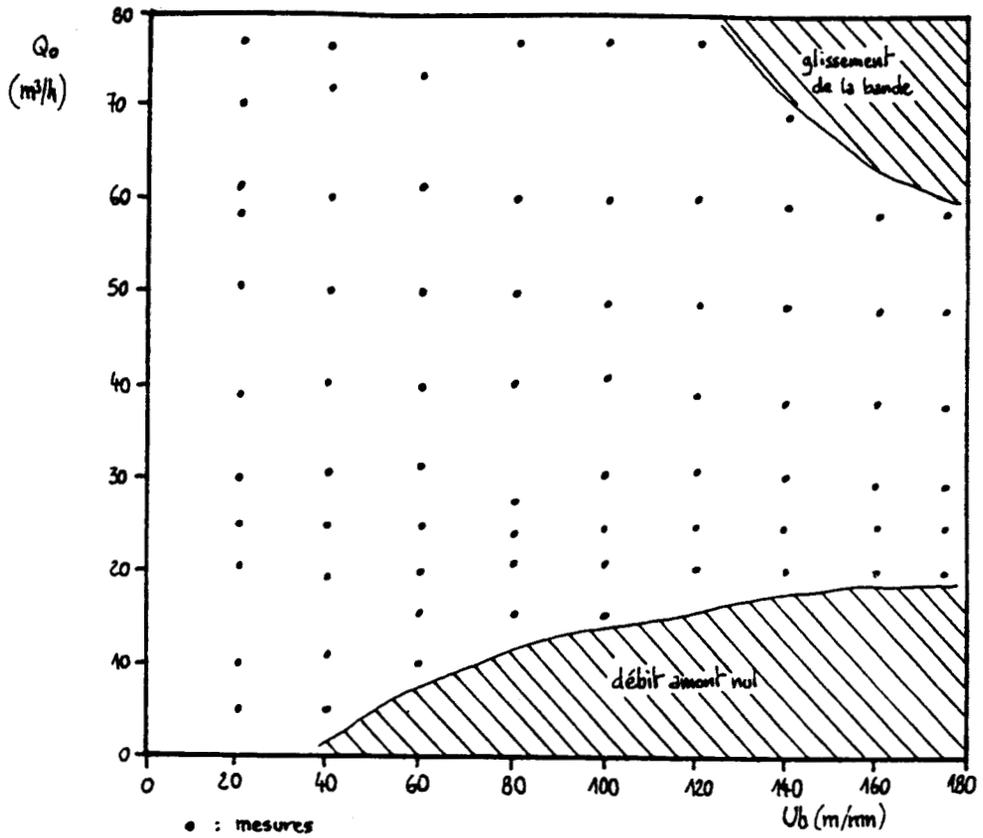
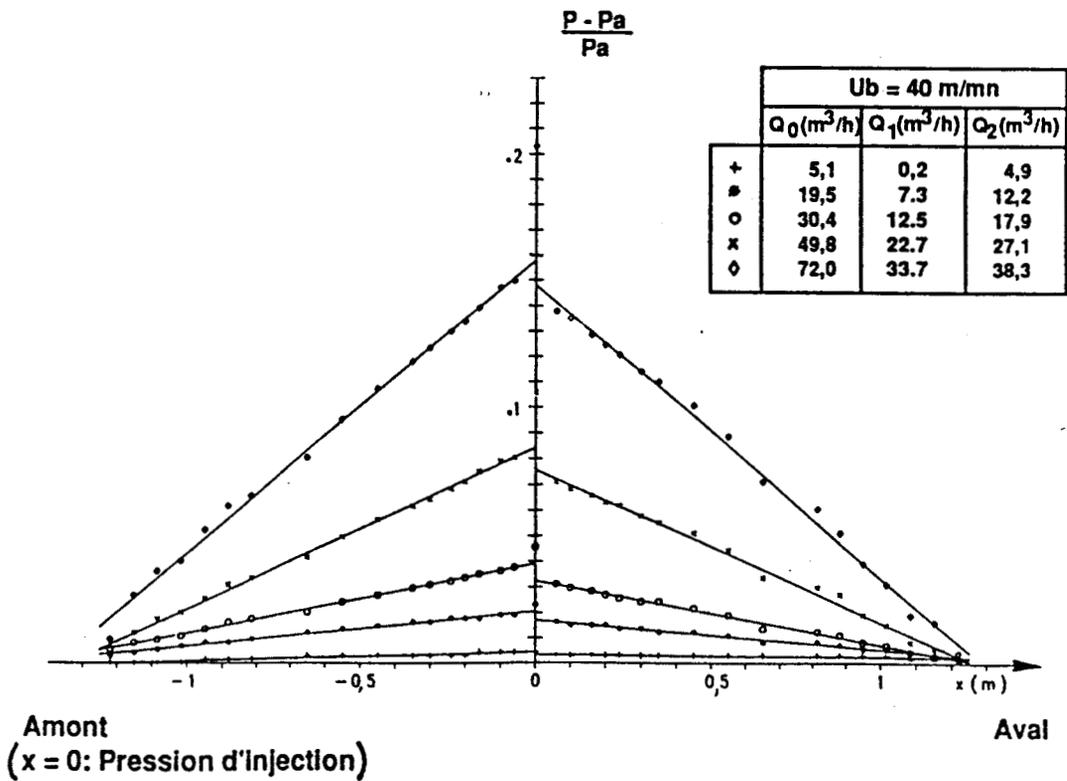


fig.5.2 : Répartition des mesures [5-2]



Répartition de la pression dans la maquette en fonction du débit injecté pour une vitesse de bande de 40 m/mn

fig.5.3 : Exemple de mesures de pression [5-2]

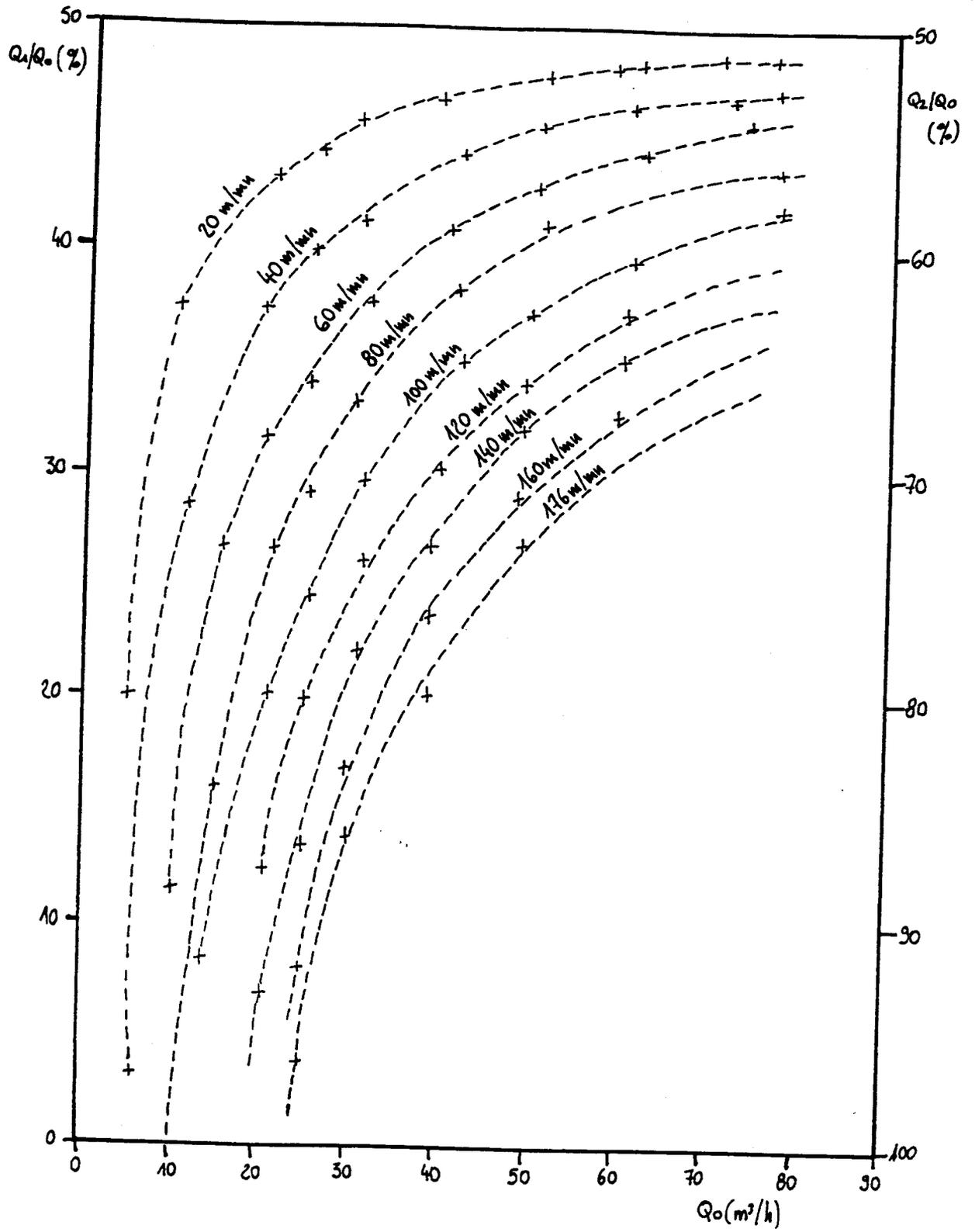


fig.5.4 : Répartition des débits [5-2]

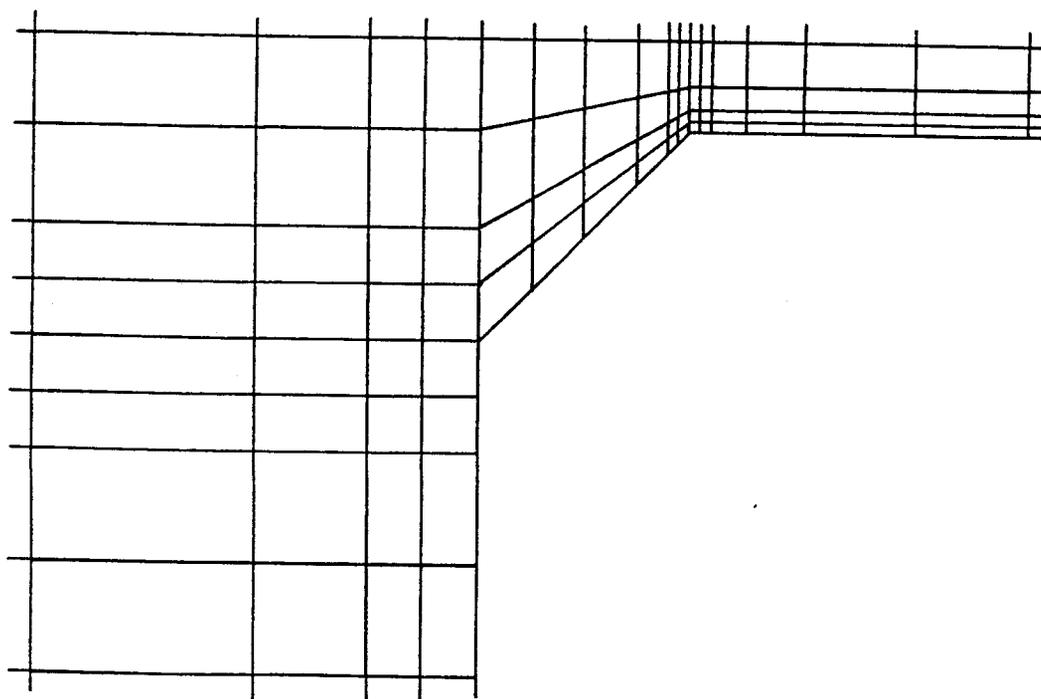
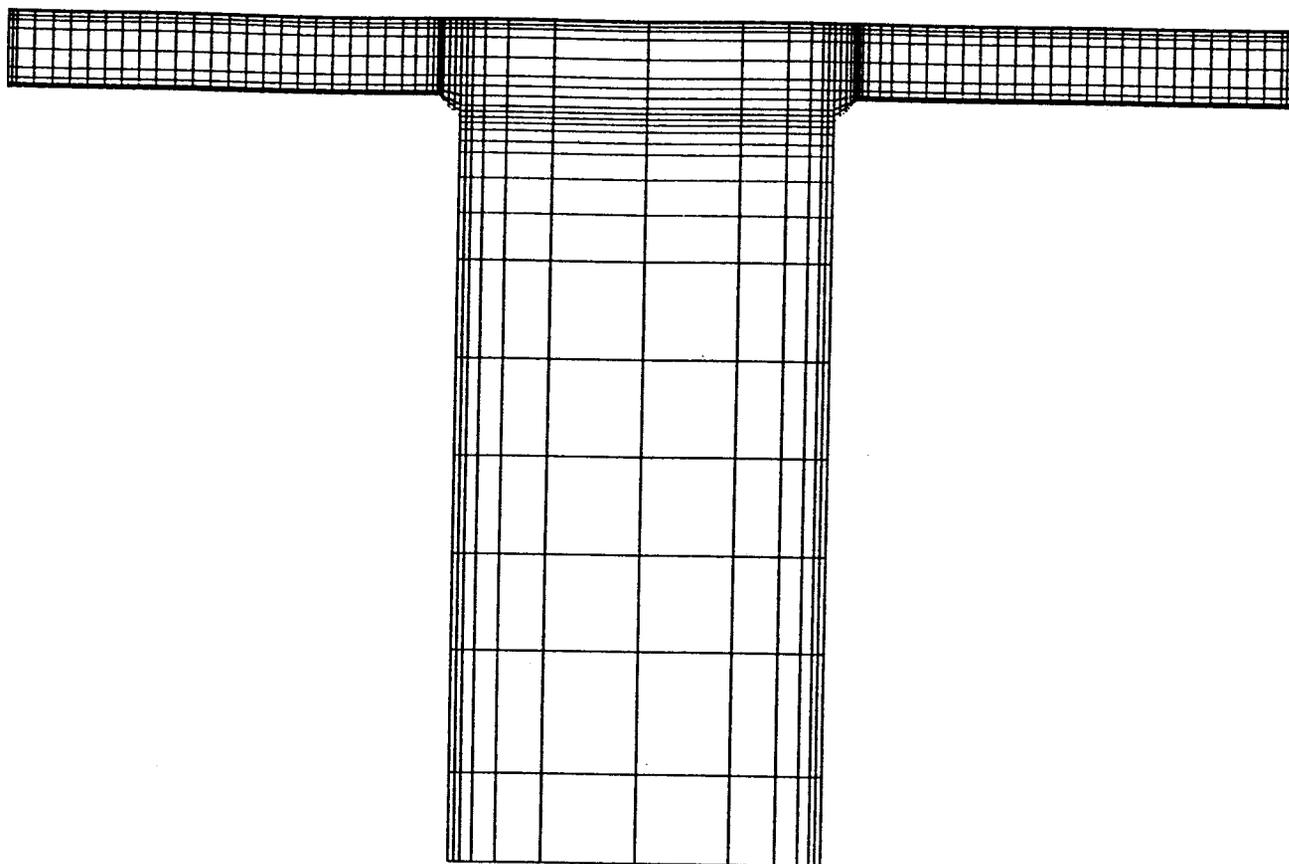


fig.5.5 : Maillage partiel de la maquette

Le profil de vitesse en entrée est obtenu par le développement du profil uniforme dans un canal bidimensionnel (voir chap.IV). Les pressions de sortie sont celles mesurées aux abscisses correspondantes sur la maquette (fig.5.6).

Le calcul étant bidimensionnel, afin de conserver les nombres de Reynolds des résultats expérimentaux pour la zone d'injection et les zones amont et aval, toutes choses égales par ailleurs (dimensions géométriques, ρ , μ), le débit imposé est le débit expérimental Q_0 divisé par la largeur transversale de la maquette. Cette largeur transversale étant constante pour l'ensemble de l'écoulement, la répartition des débits calculés et celle des débits mesurés sont équivalentes. La comparaison calculs-mesures s'effectue sur la valeur de la répartition du débit ainsi que sur la valeur de la pression à l'injection.

En ce qui concerne le modèle de turbulence, modèle algébrique, et en raison de la géométrie particulière de l'écoulement, on introduit une modification dans sa détermination. On donne à l'échelle de longueur l une valeur constante ($0.09 h$) dans les zones loin des parois où la variation de vitesse est faible.

3. RESULTATS

On vérifie la convergence du calcul en suivant l'évolution du nombre de Reynolds dans la zone aval (fig.5.7). On simule par le calcul quelques exemples de mesures réalisées sur la maquette (fig.5.8). On compare la répartition des débits mesurée et calculée : rapports Q_2/Q_0 et Re_2/Re_0 (l'indice 0 correspondant à la zone d'injection et l'indice 2 à la zone aval). On contrôle également l'écart entre les valeurs calculées et mesurées de la pression à l'injection (fig.5.9).

Le premier calcul sert à vérifier la symétrie des résultats puisque c'est un cas où la vitesse de bande est nulle. Le débit dans les zones amont et aval est à 0.1% près la moitié du débit d'injection.

Dans tous les autres cas, correspondant à des mesures réellement effectuées, l'écart de répartition des débits avec les valeurs obtenues sur la maquette est tout à fait satisfaisant puisque dans tous les cas inférieur à 6% et le plus souvent même à 2%. La valeur de la pression obtenue dans la zone d'injection où la condition imposée est un profil de vitesse montre un écart avec l'expérience de l'ordre de 1%.

En traçant un coefficient de pression ($C_p = \frac{P - P_0}{1/2\rho U_0^2}$) calculé pour les abscisses

positives, c'est à dire la zone aval, on peut vérifier que son évolution est linéaire en sortie. On a également tracé pour deux cas de calcul les profils de vitesse aux deux extrémités du maillage (fig.5.10), ainsi qu'un exemple de visualisation des vitesses dans la région du changement de section (fig.5.11).

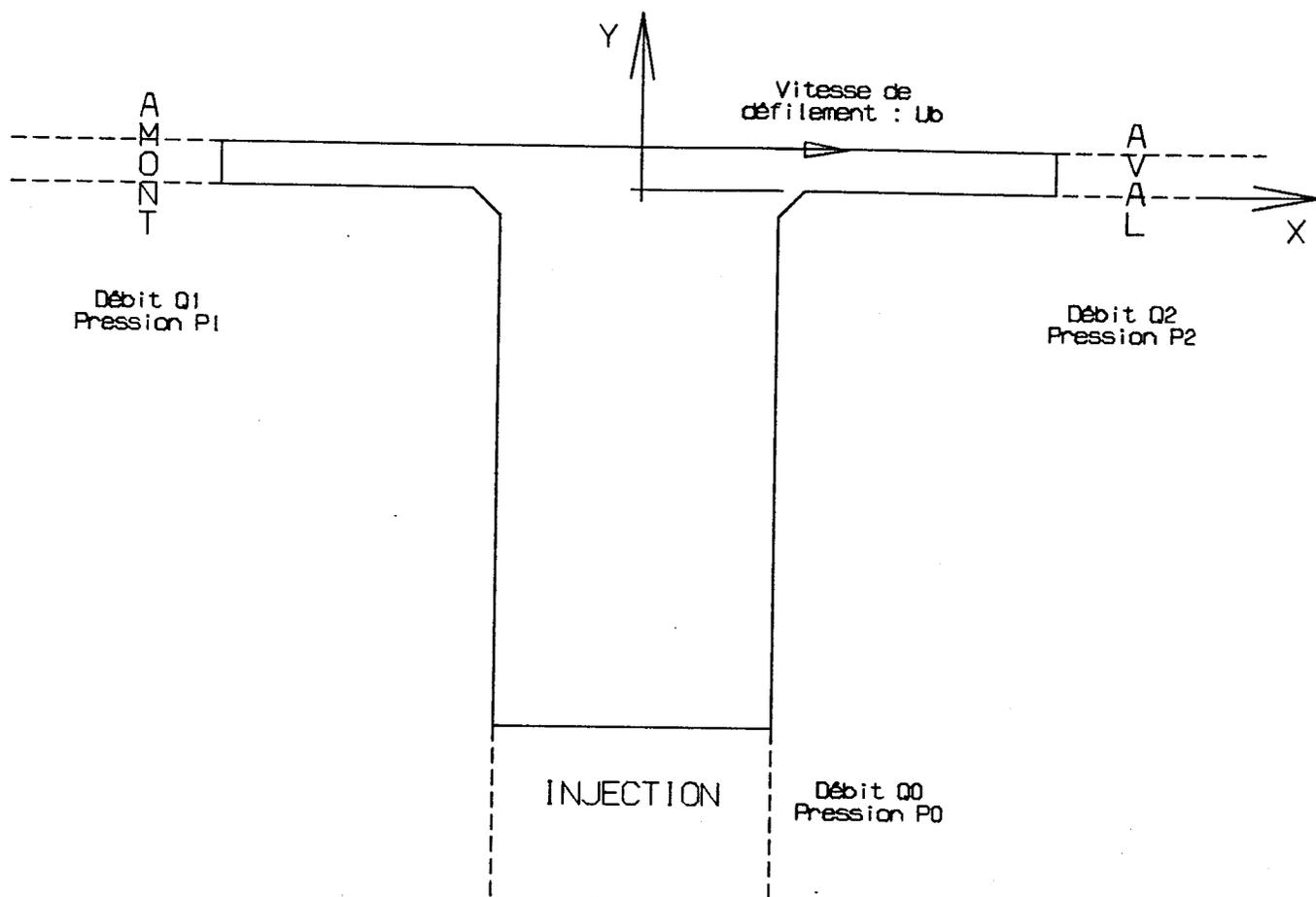


fig.5.6 : Domaine de calcul pour la maquette

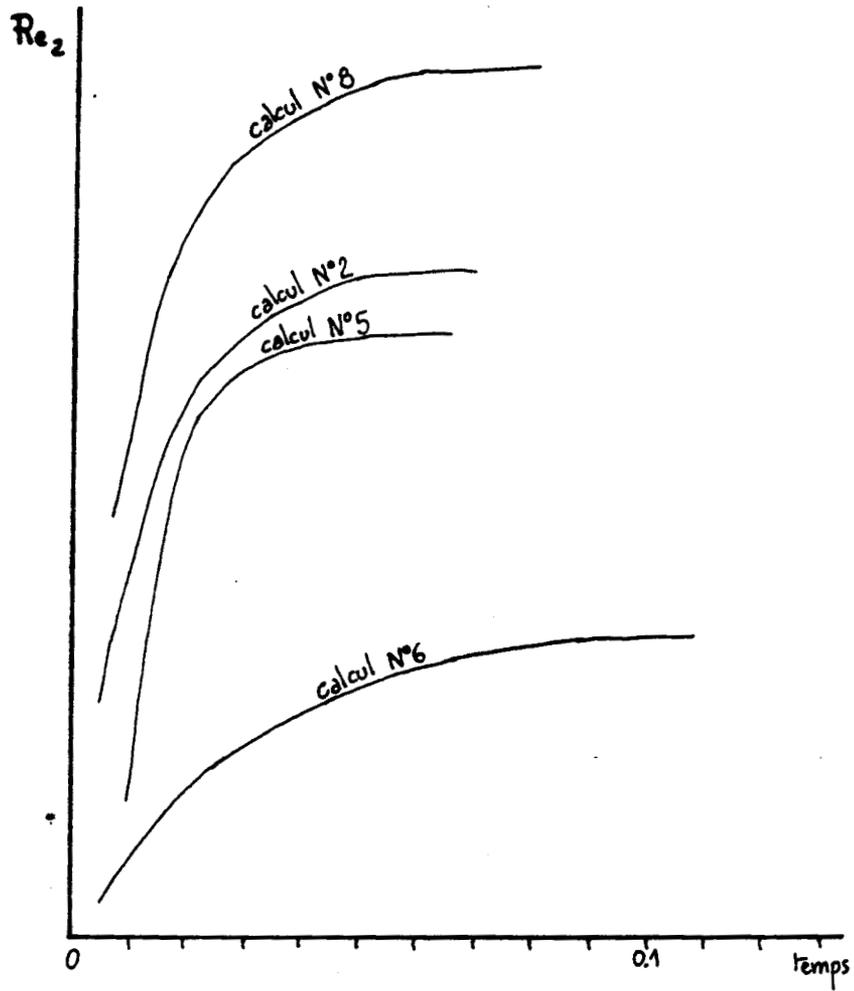


fig.5.7 : Evolution du nombre de Reynolds Re_2

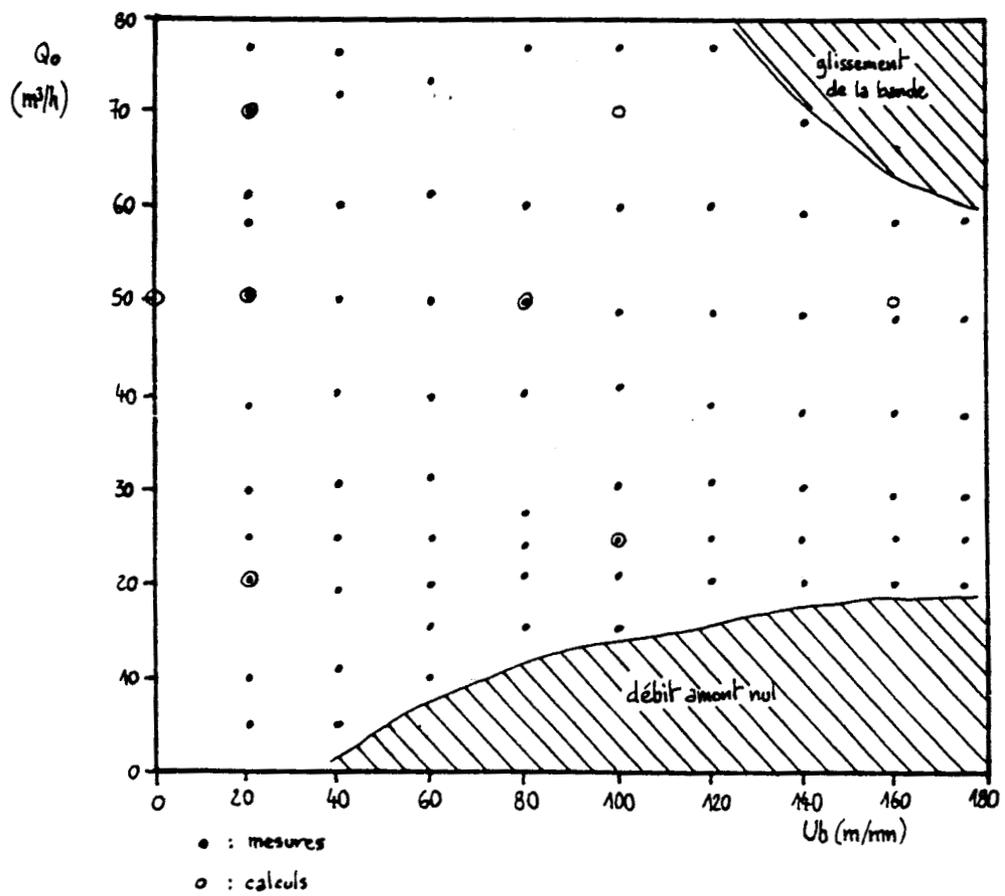


fig.5.8 : Répartition des calculs

CALCUL	DEBIT MESURE (m ³ /h)	VITESSE DE BANDE (m/mn)	$\frac{P1-Pa}{Pa}$	$\frac{P2-Pa}{Pa}$	$\frac{P0-Pa}{Pa}$	$\frac{Q2}{Q0}$
			MESURE	MESURE	MESURE	MESURE
1	50	0	/	/	/	/
2	50	160	0.106	0.061	0.1173	71%
3	25	100	0.035	0.020	0.0372	75.6%
4	70	100	0.145	0.104	0.185	59%
5	50	20	0.078	0.075	0.108	52.2%
6	20	20	0.018	0.0174	0.0243	58.2%
7	70	20	0.137	0.133	0.188	51.3%
8	50	80	0.088	0.065	0.109	59.6%

(Pa : Pression atmosphérique aux extrémités de la maquette)

CALCUL	Re0 IMPOSE	Re2 CALCULE	$\frac{Re2}{Re0}$	ECART AVEC LES MESURES	$\frac{P0-Pa}{Pa}$	ECART AVEC LES MESURES
					CALCULE	
1	30315	15154	49.99%	/	0.1427	/
2	30315	20488	67.6%	4.8%	0.1263	<1%
3	15157	11007	72.6%	3.9%	0.0389	<1%
4	42441	24719	58.2%	1.3%	0.1999	1.2%
5	30315	15544	51.3%	1.7%	0.1133	<1%
6	12126	6295	61.5%	5.6%	0.0238	<1%
7	42441	21639	51.%	0.6%	0.2076	1.6%
8	30315	17810	58.7%	1.5%	0.1148	<1%

fig.5.9 : Résultats pour la maquette

On constate que, bien que la répartition des pressions soit linéaire, ce qui correspond aux constatations faites sur la maquette, dès que l'on est sorti de la proximité immédiate de la zone d'injection, ce n'est pas pour autant que l'écoulement est établi. En effet on remarque, pour la configuration à vitesse de défilement de la bande nulle, que le profil de vitesse obtenu est différent du profil établi.

On donne pour chaque calcul réalisé (fig.5.12) les valeurs du nombre de cycles pour atteindre la convergence du débit de sortie aval ainsi que le temps physique correspondant. De même on donne la valeur du pas de temps. Le maillage étant identique pour chaque calcul (1150 mailles environ), on a une tendance globale de diminution du pas de temps avec l'augmentation du débit d'entrée.

En conclusion, on ne peut que constater l'excellente concordance entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux en ce qui concerne la détermination de l'écoulement dans la zone d'injection.

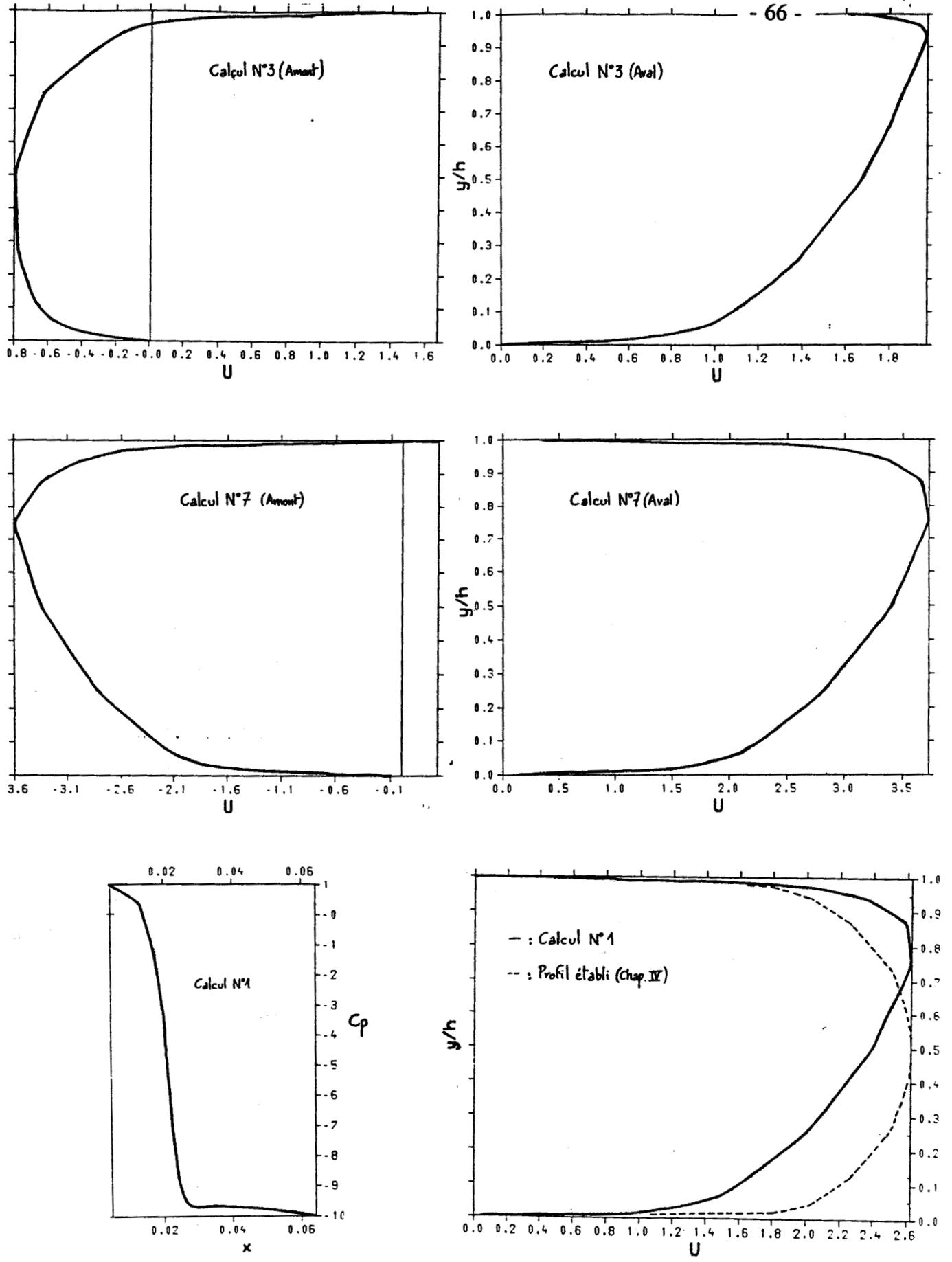


fig.5.10 : Profil de vitesse dans les zones amont et aval
Coefficient C_p dans la zone aval

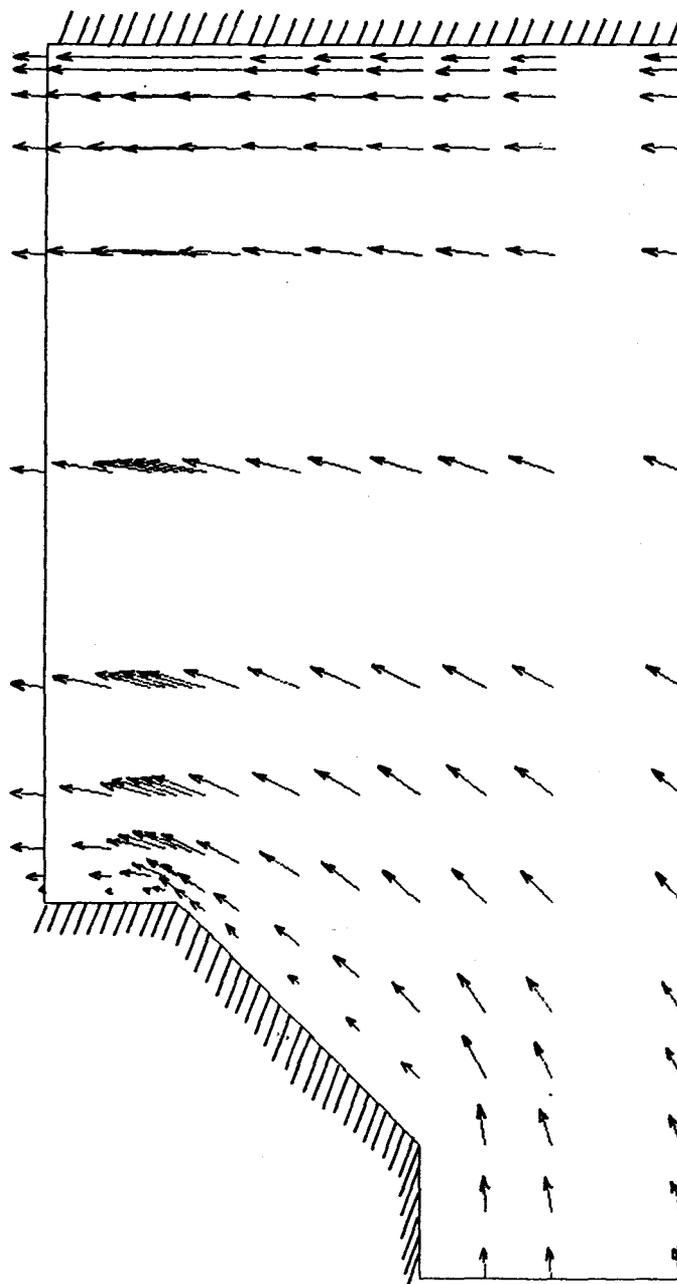


fig.5.11 : Allure de l'écoulement à la frontière "injection / amont"

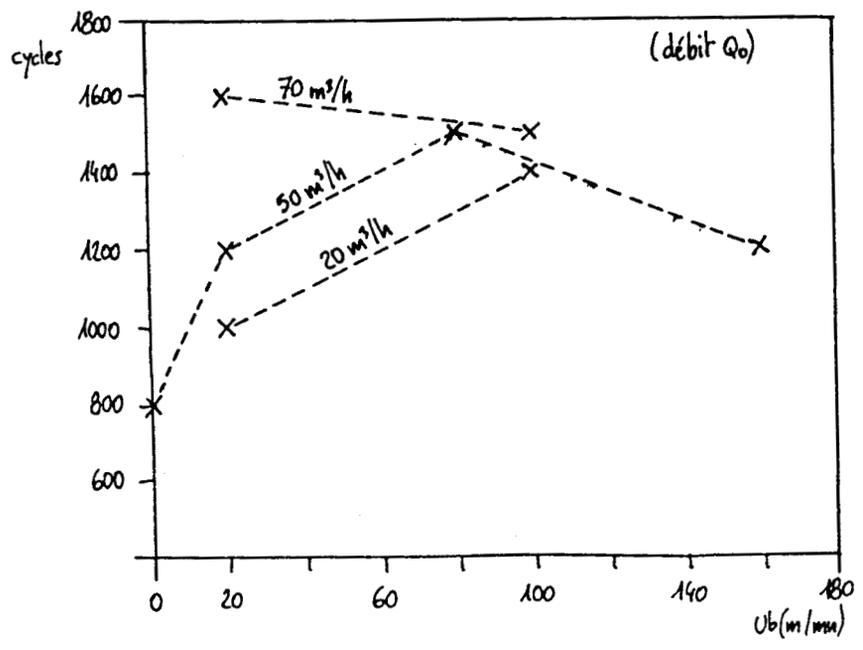
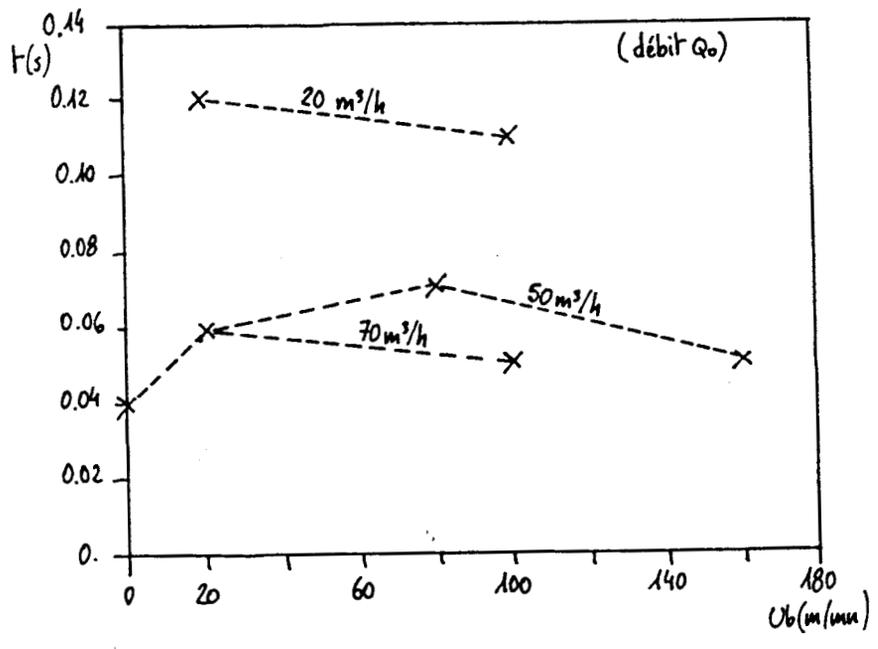
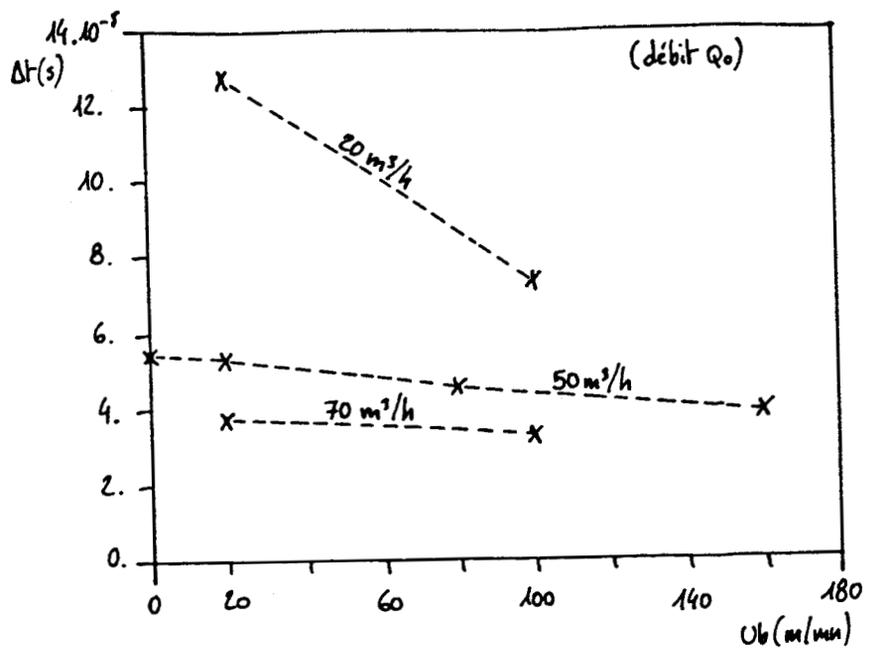


fig.5.12 : Pas de temps, temps, nombre de cycles à la convergence

VI. CONCLUSION

En première partie de ce travail, nous avons présenté l'écriture d'un code de résolution des équations de la mécanique des fluides pour un fluide incompressible visqueux en écoulement isotherme bidimensionnel.

Les équations écrites sous forme intégrale sont discrétisées en temps en utilisant une formulation Lagrange-Euler et une discrétisation du type différence finies : méthode à deux demi-pas fractionnaires principaux.

La discrétisation spatiale est de type éléments finis.

Pour garder la souplesse d'une discrétisation explicite en temps tout en conservant la cohérence liée à la discrétisation spatiale du type éléments finis, une "correction" de vitesse est effectuée.

Les premiers tests ont été réalisés pour des écoulements en régime laminaire.

Une série de calculs concernant un canal bidimensionnel a permis de confirmer le choix de la correction des vitesses et de préciser quelques précautions concernant la définition du maillage. Les résultats obtenus sont alors tout à fait corrects.

Une validation sur un écoulement avec recirculation a été effectuée dans le cas de la marche descendante et a permis de contrôler que les erreurs dues à la discrétisation spatiale étaient tout à fait admissibles, la finesse du maillage étant conforme à celle définie à partir des essais effectués sur le canal bidimensionnel.

Après avoir rappelé les principales caractéristiques des écoulements turbulents ainsi que les méthodes de modélisation des contraintes turbulentes les plus classiques, nous avons effectué, dans une première étape, deux séries de calcul avec un modèle de turbulence algébrique.

La première, pour une géométrie de canal, a permis de mettre en évidence l'importance de la finesse du maillage au voisinage de la paroi. La deuxième, pour une marche descendante, a montré que les résultats obtenus sont conformes aux résultats obtenus par d'autres auteurs, la finesse du maillage ayant été là encore déterminée à partir des essais faits sur le canal.

Dans une seconde étape, nous avons implanté dans le code un modèle de turbulence du type " $k-\epsilon$ " classique et effectué un calcul sur la même configuration de "marche descendante" avec une finesse de maillage identique à celle utilisée pour le modèle de turbulence algébrique.

Les résultats, comme constatés par d'autres auteurs, sont très légèrement meilleurs que ceux obtenus avec le modèle "longueur de mélange" : légère augmentation de la longueur de recollement, profils de pression sur la marche plus proches des résultats expérimentaux.

Enfin une modélisation d'une configuration industrielle à géométrie complexe, "té" avec paroi défilante et écoulement turbulent, a été réalisée en utilisant le modèle

de turbulence algébrique. Les résultats de calcul et les résultats expérimentaux (répartition de débit, pertes de pression) sont en très bon accord.

Par ailleurs, bien que les calculs soient effectués en instationnaire, on ne peut rien dire sur la précision dans le temps des solutions obtenues, les pas de temps ayant été choisis en fonction de critères de stabilité et non de précision, et seuls les résultats de solutions établies ayant été comparés à ceux d'autres auteurs ou à des résultats expérimentaux.

On constate que, dès que la finesse de maillage est "bien choisie", les pas de temps imposés par les deux critères de stabilité utilisés sont du même ordre de grandeur et que les durées de calcul sont à peu près proportionnelles au nombre de mailles. La durée d'un pas de calcul est sur DPS8 de 5ms par maille.

En résumé, le code de calcul écrit et mis en oeuvre permet, comme cela avait été initialement souhaité, de modéliser des écoulements dans des situations très diverses, et les erreurs liées à la discrétisation spatiale sont parfaitement maîtrisables.

REFERENCES

Avertissement : Les références ne sont citées qu'une seule fois. Ceci ne restreint évidemment pas leur contribution dans le texte.

- [1-1] A.AMSDEN et al. / *Kiva-II : A Computer Program for Chemically Reactive Flows with Sprays* / Los Alamos National Laboratory Report LA11560 May 1989.
- [2-1] J.DONEA / *Arbitrary Lagrangian Eulerian Finite Element Methods / Computational Method For Transient Analysis* Edited by T.Belytscko and T.J.R.Hughes 1983.
- [2-2] A.AMSDEN C.W.HIRT / *Yaqui : An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computer Program for Fluid Flow at All Speeds* / Los Alamos Scientific Laboratory Report LA5100 March 1973.
- [3-1] M.K.DENHAM M.A.PATRICK / *Laminar Flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow channel* / Trans. Inst. Chem. Engrs Vol.52 1974.
- [3-2] A.F.GHONIEM Y.CAGNON / *Vortex Simulation of Laminar Recirculating Flow* / Journal of Computational Physics Vol.68 1987.
- [3-3] D.J.ATKINS S.J.MASKELL M.A.PATRICK / *Numerical Prediction of Separated Flows* / Int. Jour. for Numerical Methods in Engineering Vol.15 1980.
- [4-1] O.REYNOLDS / *Phil. Trans. Roy. Society* / 1883.
- [4-2] P.LESIEUR / *La turbulence développée* / La Recherche N.139 Décembre 1982.
- [4-3] D.RUELLE / *Déterminisme et prédictibilité* / Pour la Science Août 1984.
- [4-4] H.POINCARÉ / *Science et Méthode* / 1908.
- [4-5] A.FAVRE et al. / *La turbulence en mécanique des fluides* / Gauthier-Villars 1976.
- [4-6] HA MINH HIEU / *Modélisation et simulation des écoulements en situations industrielles* / Séminaire Société Hydrotechnique de France Mars 1987.

- [4-7] A.CLARK et al. / *Evaluation of Subgrid-Scale Models Using an Accurately Simulated Turbulent Flow* / J. Fluid Mech. Vol.91 1979.
- [4-8] J.H.FERZIGER / *Large Eddy Numerical Simulations of Turbulent Flow* / AIAA Paper N.76-347 1976.
- [4-9] A.AMSDEN et al. / *Kiva : A Computer Program for Two and Three Dimensional Fluid Flows with Chemical Reactions and Fuel Sprays* / Los Alamos National Laboratory Report LA10245 February 1985.
- [4-10] J.H.FERZIGER / *Simulation of Incompressible Turbulent Flows* / Journal of Computational Physics Vol.69 March 1987.
- [4-11] D.VANDROMME / *Modélisation de la turbulence* / Cours DEA Mécanique des fluides Université de Lille 1983-1984.
- [4-12] B.E.LAUNDER D.B.SPALDING / *Mathematical Models of Turbulence* / Academic Press 1972.
- [4-13] R.B.BIRD et al. / *Transport Phenomena* / John Wiley & Sons.
- [4-14] D.VANDROMME / *Contribution à la modélisation et la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable* / Thèse de Docteur ès sciences Université de Lille 1983.
- [4-15] S.AJANA BOUTALEB / *Paliers hydrostatiques en régime turbulent. Limites de validité d'un modèle classique. Modélisation de l'écoulement à la jonction des chambres et des portées* / Thèse de doctorat en Mécanique Université de Lille 1987.
- [4-16] M.M.EL TELBANY A.J.REYNOLDS / *Velocity distributions in plane turbulent channel flows* / J. Fluid Mech. Vol.100 1980.
- [4-17] J.LAUFER / *Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel* / Rep.1053 N.A.C.A. 1951.
- [4-18] M.C.CELENLIGIL G.L.MELLOR / *Numerical Solution of Two-Dimensional Turbulent Separated Flows Using a Reynold Stress Closure Model* / J. of Fluids Engineering Trans. of the ASME Vol.107 1985.
- [4-19] W.RODI / *Examples of Turbulence-Model Applications* / Turbulence Models and Their Applications Vol.2 Ed. Eyrolles.

- [4-20] KIM et al. / *Investigations of Separation and Reattachement of a Turbulent Shear Layer : Flow Over a Backward Facing Step* / Report MD-37, Thermal Sci. Div., Dept. of Mech. Eng., Stanford University, 1978.
- [4-21] M.NALLASAMY / *Turbulence Models and Their Applications to the Prediction of Internal Flows : A Review* / Computers & Fluids Vol.15 1987.
- [5-1] J.C.MONNIER et al. / *Etude du fonctionnement hydrodynamique d'une cellule d'électro-zingage* / Colloque "Recherche et transfert technologique en mécanique" Laboratoire de Mécanique de Lille Décembre 1987.
- [5-2] J.C.MONNIER / *Hydrodynamique des écoulements turbulents dans les cellules d'électrodéposition* / Thèse de doctorat en Mécanique Université de Lille 1989.

ANNEXES

1. ECRITURE DES EQUATIONS EN FORMULATION A.L.E.

En formulation lagrangienne, point de vue particulière, on suit un petit élément de volume dans son déplacement. Sa position en $t = 0$ est repéré par \vec{a} , et à un instant t non nul par $\vec{x} = f(\vec{a}, t)$. La vitesse du fluide est $\vec{u} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$.

Il existe une application, localement inversible, entre (\vec{a}, t) et (\vec{x}, t) dont le déterminant est le jacobien $J = \det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{a}}\right)$, soit en bidimensionnel par exemple

$$J = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a}.$$

On montre facilement que (formule d'Euler) $\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \vec{u}$ en définissant, pour une variable $Q(\vec{x}, t)$, la dérivée matérielle en suivant le mouvement :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla Q \quad (\text{A.1})$$

En formulation A.L.E., on fait le choix, non plus de la vitesse du fluide, mais d'une vitesse arbitraire de grille notée ici $\vec{w} = \frac{\partial \vec{x}_g}{\partial t}$.

La dérivée en suivant le déplacement de la grille s'écrit :

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla Q \quad (\text{A.2})$$

La formule d'Euler s'écrit alors $\frac{DJ_g}{Dt} = J_g \operatorname{div} \vec{w}$ avec $J_g = \det\left(\frac{\partial \vec{x}_g}{\partial \vec{a}}\right)$.

La forme générale des équations de transport pour Q est :

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u} Q) = R$$

avec R second membre contenant les termes de diffusion et les termes sources.

On peut écrire successivement avec les définitions précédentes :

$$\frac{d(\rho Q)}{dt} + \rho Q \operatorname{div} \vec{u} = R$$

$$\frac{D(\rho Q)}{Dt} + (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla(\rho Q) + \rho Q \operatorname{div}(\vec{u} - \vec{w}) + \rho Q \operatorname{div} \vec{w} = R$$

$$\frac{D(\rho Q)}{Dt} + \operatorname{div}[\rho Q(\vec{u} - \vec{w})] + \rho Q \frac{1}{J_g} \frac{D(J_g)}{Dt} = R$$

$$\frac{D(\rho Q J_g)}{Dt} + J_g \operatorname{div}[\rho Q(\vec{u} - \vec{w})] = J_g R \quad (\text{A.3})$$

En intégrant sur un volume de contrôle $V(t)$ se déplaçant à la vitesse de grille \vec{w} , on peut écrire :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho Q dV = \frac{D}{Dt} \int_{V(0)} \rho Q J_g dV_0$$

avec $V(0)$ volume initial à $t=0$, et donc :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(0)} \rho Q J_g dV_0 = \int_{V(0)} \frac{D}{Dt} (\rho Q J_g) dV_0$$

A partir de l'écriture précédente (A.3) sur $V(0)$:

$$\int_{V(0)} \frac{D(\rho Q J_g)}{Dt} dV_0 = - \int_{V(0)} J_g \operatorname{div} [\rho Q (\vec{u} - \vec{w})] dV_0 + \int_{V(0)} J_g R dV_0$$

soit

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho Q dV = - \int_{V(t)} \operatorname{div} [\rho Q (\vec{u} - \vec{w})] dV + \int_{V(t)} R dV$$

ou finalement :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho Q dV = - \int_{S(t)} \rho Q (\vec{u} - \vec{w}) \vec{n} dS + \int_{V(t)} R dV$$

2. DISCRETISATION SPATIALE DE L'EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE

Pour chaque maille $S(I,J)$ de contour $\gamma(I,J)$ l'équation de conservation de la masse se discrétise ici en :

$$\int_{\gamma(I,J)} \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\gamma = 0$$

ou

$$\int_{S(I,J)} \text{div } \vec{u} \, dS = 0$$

En notant (x, y) les coordonnées cartésiennes et (u, v) les composantes de la vitesse, l'intégrale devient :

$$\int_{S(I,J)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_{S(I,J)} \frac{\partial u}{\partial x} J \, d\eta \, d\xi + \int_{S(I,J)} \frac{\partial v}{\partial y} J \, d\eta \, d\xi$$

avec $J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$ le jacobien de la transformation qui s'écrit (fig. A.1):

$$\vec{x} = \vec{x}_1 (1-\eta)(1-\xi) + \vec{x}_2 \xi(1-\eta) + \vec{x}_3 \eta\xi + \vec{x}_4 \eta(1-\xi)$$

On peut écrire successivement :

$$\begin{aligned} & \int_{S(I,J)} \frac{\partial u}{\partial x} J \, d\eta \, d\xi + \int_{S(I,J)} \frac{\partial v}{\partial y} J \, d\eta \, d\xi \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\eta \, d\xi + \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\eta \, d\xi \end{aligned}$$

Les vitesses sont représentées par des éléments isoparamétriques bilinéaires par maille. La composante u , par exemple, s'exprime par :

$$u = u_1 (1-\eta)(1-\xi) + u_2 \xi(1-\eta) + u_3 \eta\xi + u_4 \eta(1-\xi)$$

avec les indices 1 à 4 correspondant aux noeuds de la maille.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ &= [-u_1(1-\eta) + u_2(1-\eta) + u_3\eta - u_4\eta] \cdot [-y_1(1-\xi) - y_2\xi + y_3\xi + y_4(1-\xi)] \\ & \quad - [-u_1(1-\xi) - u_2\xi + u_3\xi + u_4(1-\xi)] \cdot [-y_1(1-\eta) + y_2(1-\eta) + y_3\eta - y_4\eta] \end{aligned}$$

et en intégrant :

$$\frac{1}{2} [(u_1 - u_3)(y_2 - y_4) + (u_2 - u_4)(y_3 - y_1)]$$

De la même manière :

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\eta d\xi = \frac{1}{2} [(x_1 - x_3)(v_2 - v_4) + (x_2 - x_4)(v_3 - v_1)]$$

Dans le code, l'équation de conservation de la masse discrétisée devient :

$$\begin{aligned} & CX(I,J,1).u_1 + CX(I,J,2).u_2 + CX(I,J,3).u_3 + CX(I,J,4).u_4 \\ & + CY(I,J,1).v_1 + CY(I,J,2).v_2 + CY(I,J,3).v_3 + CY(I,J,4).v_4 = 0 \end{aligned}$$

avec la notation suivante :

$$\begin{aligned} CX(I,J,1) &= \frac{1}{2} (y_4 - y_2) & CY(I,J,1) &= \frac{1}{2} (x_2 - x_4) \\ CX(I,J,2) &= \frac{1}{2} (y_1 - y_3) & CY(I,J,2) &= \frac{1}{2} (x_3 - x_1) \\ CX(I,J,3) &= \frac{1}{2} (y_2 - y_4) & CY(I,J,3) &= \frac{1}{2} (x_4 - x_2) \\ CX(I,J,4) &= \frac{1}{2} (y_3 - y_1) & CY(I,J,4) &= \frac{1}{2} (x_1 - x_3) \end{aligned}$$

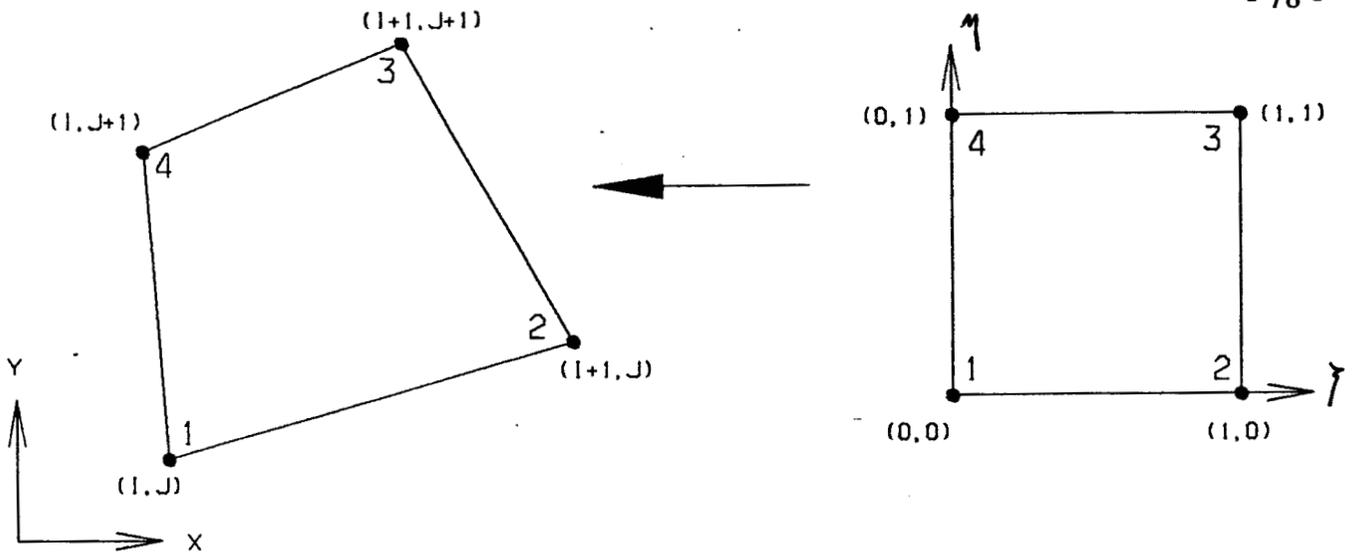


fig.A.1 : Correspondance entre variables locales et variables globales

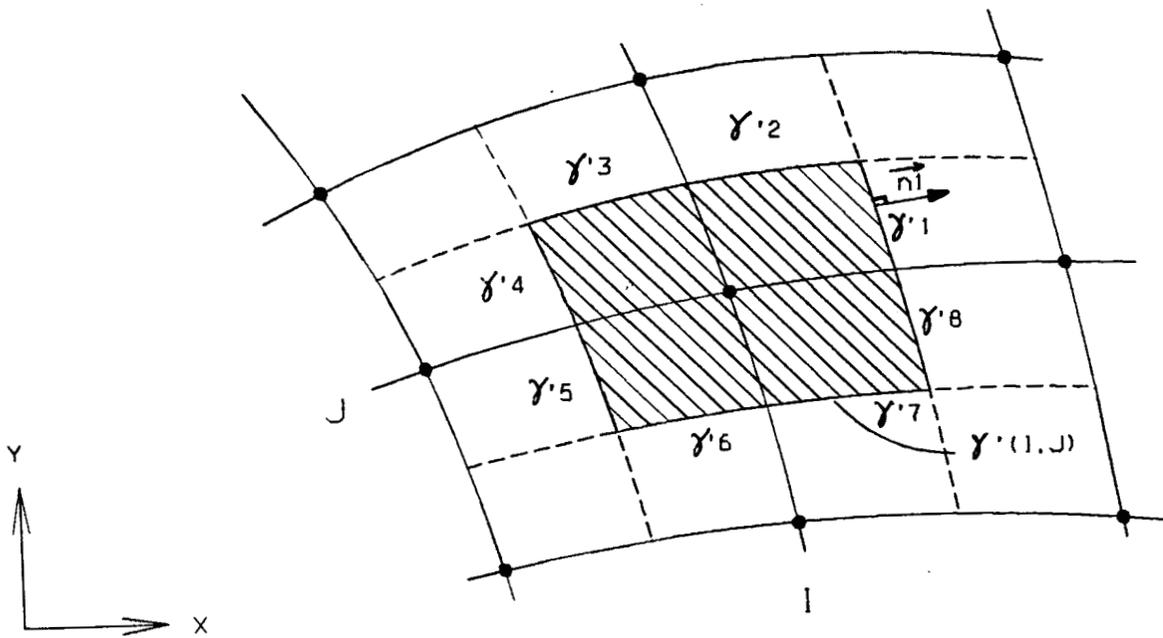


fig.A.2 : Décomposition du contour $\gamma'(I, J)$

3. DISCRETISATION SPATIALE DES FLUX CONVECTIFS

L'intégrale à discrétiser a la forme suivante :

$$\int_{\gamma(I,J)} \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) d\gamma$$

On décompose le contour $\gamma(I,J)$ en 8 segments de droite γ_i de normale \vec{n}_i sur lesquels on fait l'approximation $\vec{u} = \vec{u}_i$ constant (fig. A.2).

On peut alors écrire :

$$\int_{\gamma(I,J)} \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) d\gamma = \sum_{i=1}^8 \vec{u}_i \int_{\gamma_i} (\vec{u} \cdot \vec{n}_i) d\gamma$$

D'autre part, dans chaque maille, la vitesse s'exprime comme combinaison linéaire des vitesses aux 4 noeuds. Si on note $\vec{u} = \sum_{k=1}^4 a_k \vec{u}_k$, on obtient finalement :

$$\int_{\gamma(I,J)} \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) d\gamma = \sum_{i=1}^8 \vec{u}_i \sum_{k=1}^4 \vec{u}_k \cdot \vec{n}_i \int_{\gamma_i} a_k d\gamma$$

Pour déterminer la valeur de la vitesse sur le segment, on teste le sens du flux et on affecte arbitrairement à \vec{u}_i la valeur amont.

4. CORRECTION DES VITESSES

Avec la notation du chapitre II, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k).(\vec{u}_{n+1}(k) - \vec{u}_n(k)) = f(\Delta t, \rho, p_l, \vec{r}_n, \vec{u}_l)$$

Sans la modifier on peut écrire en rappelant que, ici, $\vec{u}(k)$ représente la vitesse du noeud k entourant le noeud (I, J) de vitesse notée \vec{u} :

$$\sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k).[\vec{u}_{n+1}(k) - \vec{u}_{n+1} + \vec{u}_{n+1} - (\vec{u}_n(k) - \vec{u}_n + \vec{u}_n)] = f(\Delta t, \rho, \dots)$$

En utilisant les valeurs des vitesses effectivement calculées dans le code, en faisant l'hypothèse de la vitesse constante autour d'un noeud, et notées par convention $\vec{u}_{n+1}^*(k)$ et \vec{u}_{n+1}^* , on approxime la relation précédente par :

$$\sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k).[\vec{u}_{n+1}^*(k) - \vec{u}_{n+1} + \vec{u}_{n+1}^* - (\vec{u}_n(k) - \vec{u}_n + \vec{u}_n)] = f(\Delta t, \rho, \dots)$$

ou :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k).(\vec{u}_{n+1}^* - \vec{u}_n) - \sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k).(\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n) \\ & + \sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k).(\vec{u}_{n+1}^*(k) - \vec{u}_n(k)) = f(\Delta t, \rho, \dots) \end{aligned}$$

Le calcul effectué dans la phase lagrangienne est en fait :

$$\sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k).(\vec{u}_{n+1}^* - \vec{u}_n) = f(\Delta t, \rho, \dots)$$

d'où la simplification de l'expression précédente en :

$$\sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k).(\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n) = \sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k).(\vec{u}_{n+1}^*(k) - \vec{u}_n(k))$$

soit en définitive :

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \frac{1}{\sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k)} \cdot \sum_{k=1}^9 CV_{IJ}(k).(\vec{u}_{n+1}^*(k) - \vec{u}_n(k))$$

