

N° d'ordre : 638

50376  
1990  
343

50376  
1990  
343

# THESE

*présentée à*

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

*pour obtenir le grade de*

**Docteur en Productique**  
*Automatique et Informatique Industrielle*

*par*

**Jing-Yun ZHAO**



**METHODE ITERATIVE DE DETERMINATION DE  
LA COMMANDE QUASI-OPTIMALE D'UN  
PROCESSUS NON-LINEAIRE A TEMPS DISCRET**



030 030555 6

*Soutenue le 18 Décembre 1990 devant le Jury d'Examen*

Mr J.C. GENTINA	Président
Mme G. DAUPHIN-TANGUY	Rapporteur
Mr M.G. SINGH	Rapporteur
Mr P. BORNE	Examineur
Mr G.Q. LI	Examineur
Mr F. ROTELLA	Examineur
Mr M. STAROSWIECKI	Examineur

*Directeur de Thèse : P. BORNE, Professeur à l'I. D. N.*

## **AVANT-PROPOS**

*Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'I.D.N., sous la direction de Monsieur le Professeur P. BORNE.*

*Nous sommes grandement honoré de l'attention que Monsieur le Professeur J.C. GENTINA, Directeur de l'Institut Industriel du Nord, a bien voulu porter à nos travaux, en acceptant de présider notre Jury de Thèse. Qu'il reçoive ici nos très sincères remerciements.*

*Nous sommes particulièrement reconnaissant envers Monsieur le Professeur P. BORNE, Directeur du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'I.D.N., Directeur Scientifique de ce même Etablissement. Que ce soit sur le plan de l'enseignement ou de la recherche, il a su nous faire profiter de sa grande expérience ; ses nombreux conseils et remarques ont largement contribué à la réalisation de ce travail. Le temps et l'intérêt qu'il a bien voulu consacrer à cette recherche, ainsi que l'amitié qu'il nous a témoignée depuis toujours, nous ont permis de surmonter les périodes de difficulté et d'achever, dans les meilleures conditions, les travaux entrepris.*

*Qu'il nous soit ensuite permis de remercier très vivement Madame le Professeur G. DAUPHIN-TANGUY de l'I.D.N., qui nous a apporté, par ses encouragements et sa connaissance de l'automatique et des problèmes de modélisation, une aide inappréciable et amicale. Ses conseils éclairés nous ont été très précieux dans la réalisation de ce travail. Nous tenons à l'en remercier et à lui exprimer toute notre reconnaissance pour avoir bien voulu juger ce travail en tant que Rapporteur.*

*Monsieur le Professeur M.G. SINGH de l'Université de Manchester, Créateur et Editeur de "Systems Control Encyclopedia", la première Encyclopédie Mondiale d'Automatique, Editeur de la Revue "Large Scale Systems", nous a fait un très grand honneur en acceptant d'être Rapporteur de ce mémoire. Qu'il trouve ici le témoignage de notre profonde reconnaissance.*

*La participation à la commission d'examen de notre travail, comme Examineur, de Monsieur G.Q. LI, Professeur à l'Université de Tian Jin et Vice-Président de ce même Etablissement, nous a beaucoup honoré. Son aide nous a été très précieuse dans la réalisation de nos travaux. Qu'il soit ici remercié très vivement.*

*Tous nos remerciements vont également à Monsieur F. ROTELLA, Maître de Conférence à l'I.D.N. pour les discussions très fructueuses qui furent, pour une part, à l'origine de ce travail et pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce mémoire en acceptant de participer, comme Examineur, à ce Jury de Thèse.*

*Nous adressons à Monsieur M. STAROSWIECKI, Professeur à l'Ecole Universitaire Des Ingénieurs de Lille, l'expression de notre gratitude pour l'attention qu'il a portée à notre travail, ainsi que pour sa présence, comme Examineur, à notre Jury de Thèse.*

*Nous tenons également à remercier tous les membres du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'I.D.N. pour l'aide précieuse et l'esprit d'équipe qu'ils savent entretenir au sein de ce Laboratoire, et tout particulièrement Monsieur le Professeur J.P. RICHARD et Madame I. ZAMBETTAKIS, Maître de Conférence à l'I.D.N.*

*Nous tenons enfin à rendre hommage à Madame M.F. TRICOT et Monsieur M. VANGREVENINGE qui se sont aimablement chargés de la réalisation et de l'impression de ce mémoire.*

## **SOMMAIRE**

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	p. 1
<b>CHAPITRE I - Introduction à l'analyse matricielle et quelques résultats nouveaux</b>	p. 4
<b>CHAPITRE II - Algorithme itératif de détermination de la commande optimale des systèmes non - linéaires scalaires et la stabilité du système bouclé</b>	p. 21
<b>CHAPITRE III - Commande quasi - optimale des systèmes bilinéaires vectoriels à temps discret</b>	p. 52
<b>CHAPITRE IV - Commande quasi - optimale des systèmes non - linéaires vectoriels</b>	p. 87
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	p. 105
<b>ANNEXE I</b>	p. 107
<b>ANNEXE II</b>	p. 115
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	p. 132

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION A L'ANALYSE MATRICIELLE ET QUELQUES RESULTATS NOUVEAUX

I.1 - Introduction	p. 6
I.2 - Notions essentielles	p. 7
I.3 - Propriétés principales	p. 13
I.4 - Propriétés spéciales	p. 15
I.5 - Conclusion	p. 20

## CHAPITRE II

### ALGORITHME ITERATIF DE DETERMINATION DE LA COMMANDE OPTIMALE DES SYSTEMES NON - LINEAIRES SCALAIRES ET LA STABILITE DU SYSTEME BOUCLE

II.1 - Introduction	p. 23
II.2 - Point de départ	p. 24
II.3 - Détermination itérative des coefficients $P_s(k)$	p. 26
II.4 - Cas horizon infini	p. 30
II.5 - Stabilité des systèmes bouclés et détermination du domaine de stabilité	p. 37
II.6 - Exemple d'application	p. 41
II.6.1 - Calcul de $P_s$	p. 41
II.6.2 - Détermination de la zone stable du système fermé	p. 47
II.7 - Conclusion	p. 51

## CHAPITRE III

### COMMANDE QUASI - OPTIMALE DES SYSTEMES BILINEAIRES VECTORIELS A TEMPS DISCRET

III.1 - Position du problème	p. 54
III.2 - Différence fondamentale entre systèmes continus et systèmes discrets	p. 54
III.2.1 - Rappel de résultats essentiels sur les systèmes continus	p. 54
III.2.2 - Cas des systèmes discrets	p. 56
III.3 - Equations récurrentes définissant la loi de commande	p. 59
III.4 - Cas horizon infini	p. 66
III.5 - Système en boucle fermée	p. 70
III.6 - Exemple d'application	p. 75
III.6.1 - Calcul de $P_s$	p. 75
III.6.2 - Détermination de la loi de commande	p. 79
III.6.3 - Stabilité du système en boucle fermée	p. 82
III.7 - Conclusion	p. 86

## CHAPITRE IV

### COMMANDE QUASI - OPTIMALE DES SYSTEMES NON - LINEAIRES VECTORIELS

IV.1 - Position du problème	p. 89
IV.2 - Loi de la commande optimale	p. 90
IV.3 - Compatibilité des résultats entre les systèmes bilinéaires et non linéaires	p. 93
IV.4 - Calcul de $P_s(k)$	p. 96
IV.5 - Cas horizon infini	p. 98
IV.6 - Détermination de la commande.	p. 100
IV.7 - Système en boucle fermée	p. 101
IV.8 - Conclusion	p. 104



## **INTRODUCTION GENERALE**

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent l'étude de la commande optimale ou quasi-optimale des systèmes non linéaires discrets.

Bien que ce type d'étude ait déjà fait l'objet de nombreux travaux et publications, les problèmes de la synthèse des systèmes non linéaires sont loin d'être complètement résolus.

La dénomination "*système non linéaire*" rassemble en fait des systèmes extrêmement divers, et véritablement hétérogènes, ayant peu de points communs dans leur comportement. Il en résulte qu'il n'existe pas, jusqu'à présent, de théorie d'ensemble des systèmes non linéaires si tant est qu'il soit possible d'en élaborer une.

Nous nous sommes efforcé, de notre part, de trouver une méthode facilement utilisable de détermination de la loi de commande des systèmes non linéaires affines en la commande.

L'idée de base de nos travaux vient du principe de la représentation d'un élément non linéaire par une série infinie.

L'étude utilise la théorie de l'analyse matricielle dont nous avons rappelé les notations et propriétés essentielles dans le début du premier chapitre, la fin de ce chapitre étant consacrée à la présentation de certains résultats nouveaux indispensables à la compréhension des chapitres suivants.

L'utilisation du développement en série infinie d'une fonction analytique, en vue de la résolution des problèmes de synthèse des systèmes non linéaires, permet de générer une suite d'équations itératives avec lesquelles nous pouvons déterminer une loi de commande quasi-optimale, c'est-à-dire approchant la commande optimale avec une précision satisfaisante, décrite sous forme d'une expression analytique du vecteur d'état.

Les travaux présentés comportent trois parties concernant :

- *le cas non linéaire scalaire,*
- *le cas bilinéaire vectoriel,*
- *le cas non linéaire vectoriel.*

(le critère à minimiser étant de type quadratique).

L'étude nécessite un raisonnement délicat et des calculs complexes, mais les résultats obtenus s'expriment simplement. En effet, mise à part la première équation qui est de type Riccati, les autres relations mises en œuvre sont des équations aux différences du premier ordre. La résolution de ces équations est donc très facile, et lorsque les solutions convergent, elles le font généralement après le deuxième ou le troisième pas de calcul ; une condition de convergence est proposée dans ce mémoire.

Une étude de la stabilité du système bouclé est présentée dans le cas scalaire, dans le chapitre II, et nous avons proposé une méthode de détermination d'une estimation du domaine de stabilité. Nous avons constaté que, pour le système scalaire, la condition de stabilité du système bouclé obtenu est identique à la condition de convergence des récurrences servant à déterminer les solutions du problème.

Divers exemples sont présentés afin d'illustrer la mise en œuvre de ces méthodes et de mettre en évidence leurs principales caractéristiques.

Au début du chapitre II, nous avons montré pourquoi nous avons choisi pour le calcul, la méthode des multiplicateurs de Lagrange plutôt que la programmation dynamique, alors que celle-ci donne une condition nécessaire et suffisante d'optimum global.

Dans le début du chapitre III, nous avons proposé un contre-exemple mettant en évidence une différence de propriété caractéristique fondamentale de l'Hamiltonien pour les processus continus et pour les systèmes discrets. Cela nous a obligé à développer nos travaux à partir des équations adjointes.

Le quatrième chapitre généralise au cas non linéaire vectoriel, les travaux qui viennent d'être présentés dans le cas scalaire.

Deux annexes sont consacrées aux démonstrations des formules des deux derniers chapitres.

## CHAPITRE I

**INTRODUCTION A L'ANALYSE MATRICIELLE**  
**ET QUELQUES RESULTATS NOUVEAUX**

## I.1 - INTRODUCTION

Les fonctions à valeur matricielle telles que les puissances de matrices, les polynômes de matrices, les séries infinies de matrices, ..., sont de plus en plus largement étudiées [ BEL 60 ] [ PEA 65 ] [ FRA 64 ] [ BRE 78 ] [ VET 73 ] et sont appliquées parfaitement dans les domaines suivants :

- analyse des systèmes,
- recherche de conditions nécessaires et suffisantes d'optimisation,
- calcul numérique d'optimisation des systèmes,
- analyse de sensibilité, et
- commande automatique par retour d'état [ ATH 68 ] [ BAR 73 ] [ BRE 78 ] [ DUG 67 ] [ HAR 76 ] [ MUL 72 ].

Avec le développement et l'approfondissement de l'étude des systèmes complexes, les fonctions à valeur matricielle deviennent des outils de plus en plus utilisés. Pourtant, les notions de base concernant ces fonctions et la théorie d'analyse matricielle ne se trouvent généralement pas dans les cours de mathématiques.

Le travail présenté dans ce mémoire, est fondé sur l'application des méthodes d'analyse matricielle à la recherche de la commande optimale ou quasi-optimale des systèmes non linéaires.

Les notions utilisées sont :

- le produit de Kronecker,
- les puissances de matrices,
- les dérivées d'ordre multiple de matrice, et
- les séries infinies de puissances de Kronecker de matrices et leurs propriétés.

A partir de ces notions, nous avons établi diverses formules utilisées dans les différents chapitres.

Nous allons, dans un premier temps, présenter dans ce chapitre, les notions et les propriétés fondamentales des fonctions à valeur matricielle.

## I.2 - NOTIONS ESSENTIELLES

Dans ce chapitre, nous désignons, suivant les conventions usuelles, les matrices par des lettres majuscules, les vecteurs et les scalaires par des lettres minuscules.

Lorsque l'étude le nécessitera, les dimensions des matrices seront indiquées par des indices.

### Exemple :

Une matrice  $A$ , de dimension  $p \times q$ , peut être désignée par ses éléments, par ses colonnes ou par ses lignes, respectivement comme suit :

$$A = \left\{ a_{ij} \right\}_{p \times q} \begin{pmatrix} i \downarrow = 1, \dots, p \\ j \rightarrow = 1, \dots, q \end{pmatrix}$$

$$= [ A_{.1} \vdots A_{.2} \vdots \dots \vdots A_{.q} ]$$

$$= \begin{bmatrix} A_{1.} \\ \vdots \\ A_{2.} \\ \vdots \\ A_{p.} \end{bmatrix}$$

où : les  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, p ; j = 1, \dots, q$ ) sont des éléments de  $A$ ,  
les  $A_{.j}$  ( $j = 1, \dots, q$ ) sont des colonnes de  $A$ , et  
les  $A_{i.}$  ( $i = 1, \dots, p$ ) des lignes de  $A$ .

D'abord, nous introduisons quelques notions utilisées :

$I_q$  - matrice unité de dimension  $q$ ,

$e_p^k$  - vecteur de dimension  $p$ , dont tous les éléments sont nuls sauf le  $k^{\text{ième}}$  égal à 1,

$E_{p \times q}^{kl}$  - matrice de dimension  $p \times q$ , dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément de la  $k^{\text{ième}}$  ligne et de la  $l^{\text{ième}}$  colonne qui est égal à 1,

$$E_{p \times q}^{kl} = e_p^k (e_q^l)^T$$

$T$  désigne la transposition d'une matrice,

$E_{q \times p}^{p \times q}$  - matrice de permutation de dimension  $pq \times pq$  qui consiste en  $q \times p$  sous-matrices de dimension  $p \times q$ ,

$$E_{q \times p}^{p \times q} \triangleq \left\{ \left( \begin{matrix} E_{ij} \\ p \times q \end{matrix} \right)_{ji} : \left( \begin{matrix} j \downarrow = 1, \dots, q \\ i \rightarrow = 1, \dots, p \end{matrix} \right) \right\}$$

$$= \left[ \begin{array}{cccc} E_{11}^{p \times q} & E_{21}^{p \times q} & \dots & E_{p \times 1}^{p \times q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{12}^{p \times q} & \dots & \dots & E_{p \times 2}^{p \times q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{1q}^{p \times q} & \dots & \dots & E_{p \times q}^{p \times q} \end{array} \right]$$



$$E_{p \times q}^{p \times q} \equiv E_{p \times q}^{p \times q} \triangleq \left\{ \left( E_{ij} \right)_{p \times q} : \left( \begin{array}{l} i \downarrow = 1, \dots, p \\ j \rightarrow = 1, \dots, q \end{array} \right) \right\}$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} E_{p \times q}^{11} & E_{p \times q}^{12} & \dots & E_{p \times q}^{1q} & & \\ \hline E_{p \times q}^{21} & \dots & \dots & E_{p \times q}^{2q} & & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \hline E_{p \times q}^{p1} & \dots & \dots & E_{p \times q}^{pq} & & \end{array} \right]$$

$E_{p \times q}^{p \times q}$  est une matrice de dimension  $p^2 \times q^2$ .

**Exemple :**

$$E_{2 \times 3}^{3 \times 2} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} E_{3 \times 2}^{11} & E_{3 \times 2}^{21} & E_{3 \times 2}^{31} & & & \\ \hline E_{3 \times 2}^{12} & E_{3 \times 2}^{22} & E_{3 \times 2}^{32} & & & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

tandis que :

$$E_{3 \times 2}^{3 \times 2} = \left[ \begin{array}{cc|cc} E_{3 \times 2}^{11} & E_{3 \times 2}^{12} & & \\ \hline E_{3 \times 2}^{21} & E_{3 \times 2}^{22} & & \\ \hline E_{3 \times 2}^{31} & E_{3 \times 2}^{32} & & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Dans la suite, nous utiliserons les définitions suivantes :

**Définition 1.1 :**

Le produit de Kronecker de  $A$  et  $B$  noté par  $A \otimes B$  est défini par :

$$(1.1) \quad A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix}$$

où  $a_{ij}$  ( $i=1, \dots, p ; j=1, \dots, q$ ) sont des éléments de  $A$ .

$A \otimes B$  est une matrice de dimension  $ps \times qt$ .

Ainsi, nous pouvons introduire la notion de la puissance de Kronecker d'une matrice.

La  $k^{\text{ième}}$  puissance de matrice  $A$  est :

$$(1.2) \quad A^{[k]} \triangleq A \otimes A \otimes \dots \otimes A \quad (k \text{ facteurs})$$

et :

$$A^{[0]} \triangleq 1 \quad A^{[1]} \triangleq A$$

**Définition 1.2 :**

La représentation en colonne de la matrice  $A$  notée par  $csA$  est un vecteur de dimension  $p \times q$ .

$$(1.3) \quad csA \triangleq \begin{bmatrix} A_{.1} \\ \vdots \\ A_{.2} \\ \vdots \\ A_{.q} \end{bmatrix}$$

où les vecteurs  $A_{.j}$  ( $j=1, \dots, q$ ) sont des colonnes de  $A$ .

**Définition 1.3 :**

La représentation en ligne de la matrice  $A$  notée par  $rsA$  est un vecteur de dimension  $1 \times pq$ .

$$(1.4) \quad rsA \triangleq [ A_{1.} \quad \vdots \quad A_{2.} \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad A_{p.} ]$$

dans laquelle les  $A_{i.}$  ( $i=1, \dots, p$ ) sont des lignes de  $A$ .

**Exemple :**

Soit :

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

on a, d'après (1.3) et (1.4) :

$$csA = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \quad rsA = [ a_{11} \ a_{12} \ a_{21} \ a_{22} \ a_{31} \ a_{32} ]$$

**Définition 1.4 :**

La dérivée de la matrice  $A$  par rapport à un scalaire  $b$  notée  $\mathcal{D}_b A$  est définie comme :

$$(1.5) \quad \mathcal{D}_b A \triangleq \left\{ \frac{da_{ij}}{db} \right\} \begin{pmatrix} i \downarrow = 1, \dots, p \\ j \rightarrow = 1, \dots, q \end{pmatrix}$$

$\mathcal{D}_b A$  est une matrice de la même dimension que  $A$ .

**Définition 1.5 :**

La dérivée de la fonction à valeur matricielle  $A$  de la matrice  $B$  par rapport à  $B$  notée  $\mathcal{D}_B A(B)$  est définie par :

$$(1.6) \quad \mathcal{D}_B A(B) \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{b_{11}} A & \mathcal{D}_{b_{12}} A & \dots & \mathcal{D}_{b_{1t}} A \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{b_{21}} A & \dots & \dots & \mathcal{D}_{b_{2t}} A \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{b_{s1}} A & \dots & \dots & \mathcal{D}_{b_{st}} A \end{bmatrix}$$

où  $b_{ij}$  ( $i = 1, \dots, s ; j = 1, \dots, t$ ) sont les éléments de  $B$ .

$\mathcal{D}_B A(B)$  est une matrice de dimension  $sp \times tq$ .

### I.3 - PROPRIETES PRINCIPALES

$$(1.7) \quad \begin{pmatrix} E_{p \times q} \\ E_{q \times p} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E_{p \times q} \\ E_{q \times p} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_{q \times p} \\ E_{p \times q} \end{pmatrix}$$

$$(1.8a) \quad \begin{pmatrix} rs A \\ p \times q \end{pmatrix}^T = cs A^T = \begin{pmatrix} E_{q \times p} \\ p \times q \end{pmatrix} cs A$$

$$(1.8b) \quad rs A = \sum_{j=1}^p e^{jT} A \begin{pmatrix} e^{jT} \otimes I \\ p \quad q \end{pmatrix}$$

$$(1.9a) \quad \begin{pmatrix} cs A \\ p \times q \end{pmatrix}^T = rs A^T = rs A \begin{pmatrix} E_{q \times p} \\ p \times q \end{pmatrix}$$

$$(1.9b) \quad cs A = \sum_{j=1}^q \begin{pmatrix} e^j \otimes I \\ p \quad p \end{pmatrix} A e^j$$

$$(1.10) \quad cs \left\{ \begin{array}{cc} A & X \\ p \times s & s \times t \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} I \otimes A \\ t \end{pmatrix} cs X$$

$$(1.11) \quad cs \left\{ \begin{array}{cc} X & B \\ s \times t & t \times q \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} B^T \otimes I \\ s \end{pmatrix} cs X$$

$$(1.12) \quad \begin{pmatrix} I \otimes A \\ q \quad p \times q \end{pmatrix} cs I_q = cs \begin{pmatrix} A \cdot I \\ q \end{pmatrix} = cs A$$

(1.12) est un cas particulier de (1.11)

$$(1.13) \quad cs \left\{ \begin{array}{ccc} A & X & B \\ p \times s & s \times t & t \times q \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} B^T \otimes A \\ s \end{pmatrix} cs X$$

$$(1.14) \quad (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

$$(1.15) \quad (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad (\text{si } A^{-1} \text{ et } B^{-1} \text{ existent})$$

Le produit de Kronecker n'est généralement pas commutatif.

$$(1.16) \quad \begin{matrix} B \otimes A \\ s \times t & p \times q \end{matrix} = \begin{pmatrix} E_{s \times p}^{p \times s} \\ E_{q \times t}^{t \times q} \end{pmatrix} (A \otimes B)$$

$$(1.17) \quad \begin{pmatrix} A & B \\ p \times q & q \times u \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} C & D \\ s \times t & t \times v \end{pmatrix} = (A \otimes C) \cdot (B \otimes D)$$

Cette propriété importante est appelée la règle du produit mixté.

Deux cas particuliers sont à noter :

$$(1.18) \quad \begin{matrix} A \otimes (C \cdot D) \\ p \times q & s \times t & t \times v \end{matrix} = \begin{matrix} (A \cdot I) \otimes (C \cdot D) \\ p \times q & q & s \times t & t \times v \end{matrix} = (A \otimes C) \cdot \begin{matrix} (I \otimes D) \\ q \end{matrix}$$

$$(1.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} (I \otimes z) \cdot A = (I \otimes z) \cdot (A \otimes 1) \\ = (I \cdot A) \otimes (z \cdot 1) = A \otimes z \end{array} \right.$$

$$(1.20) \quad (A + H) \otimes (B + R) = A \otimes B + A \otimes R + H \otimes B + H \otimes R$$

$$(1.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y^{[n+1]}_{s \times 1} = (y^{[v]} \otimes_s I \otimes y^{[n-v]}) \cdot y \\ = (I \otimes_s y^{[n]}) \cdot y = (y^{[n]} \otimes_s I) \cdot y \end{array} \right.$$

$$(1.22) \quad (\mathcal{D}_B A)^T = \mathcal{D}_{B^T} A^T$$

$$(1.23) \quad \mathcal{D}_B \left\{ \begin{matrix} F & G \\ p \times u & u \times q \end{matrix} \right\} = (\mathcal{D}_B F) \begin{matrix} (I \otimes G) \\ t \end{matrix} + \begin{matrix} (I \otimes F) \\ s \end{matrix} (\mathcal{D}_B G)$$

$$(1.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_B \left\{ \begin{array}{cc} F & \otimes & G \\ s \times t & p \times q & u \times v \end{array} \right\} = (\mathcal{D}_B F) \otimes G + \\ (I \otimes E_{p \times u}^{u \times p}) ((\mathcal{D}_B G) \otimes F) (I \otimes E_{q \times v}^{v \times q}) \end{array} \right.$$

Si A est une matrice constante :

$$(1.25a) \quad \mathcal{D}_X \left( \begin{array}{cc} A & \cdot & Y \\ n \times 1 & p \times q & q \times 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} I \\ n \end{array} \otimes A \right) \mathcal{D}_X Y$$

**Cas particulier :**

$$(1.25b) \quad \mathcal{D}_X X = cs I_n$$

$$(1.25c) \quad \mathcal{D}_X \left( \begin{array}{cc} A & \cdot & X \\ n \times 1 & n \times 1 & n \times 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} I \\ n \end{array} \otimes A \right) cs I_n = cs A$$

Si Q est une matrice constante :

$$(1.26) \quad \mathcal{D}_X \left( \begin{array}{cc} X^T & Q & X \\ n \times 1 & n \times n & n \times 1 \end{array} \right) = (Q + Q^T) X$$

La démonstration des propriétés précédentes s'effectue par simple développement des deux membres des égalités concernées.

#### **I.4 - PROPRIETES SPECIALES**

Soit une matrice de structure suivante :

$$G(X) \triangleq \left[ \begin{array}{ccc} G_1 \cdot X & \vdots & G_2 X & \vdots & \dots & \vdots & G_m X \end{array} \right]_{q \times m}$$

avec :

$$G_t = \left\{ g_{ij}^t \right\} \begin{pmatrix} i \downarrow = 1, \dots, q \\ j \rightarrow = 1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (t = 1, \dots, m)$$

nous avons :

$$(1.27) \quad G(X) = [G_1 \vdots \dots \vdots G_m] \begin{pmatrix} I \\ \otimes \\ X \end{pmatrix}_m$$

$$(1.28) \quad G^T(X) = \begin{bmatrix} rsG_1 \\ \vdots \\ rsG_m \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ \otimes \\ X \end{pmatrix}_q$$

\* *Démonstration de (1.27) :*

$$\begin{aligned}
 & [G_1 \vdots \dots \vdots G_m] \begin{pmatrix} I \\ \otimes \\ X \end{pmatrix}_m \\
 & \quad \leftarrow \text{m blocs} \rightarrow \\
 & = [G_1 \vdots \dots \vdots G_m] \left[ \begin{array}{cccc} X & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{bmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X \end{bmatrix}} \right\} \text{m blocs} \\
 & = [G_1 X \vdots \dots \vdots G_m X]
 \end{aligned}$$



où 0 est un vecteur nul de même dimension que X, ce qui corrobore (1.27).

\* *Démonstration de (1.28) :*

En posant :

$$rsG_t = \begin{bmatrix} G_{1.}^t & G_{2.}^t & \dots & G_{q.}^t \end{bmatrix} \quad (t = 1, \dots, m)$$

$\begin{matrix} 1 \times n & 1 \times n & & 1 \times n \end{matrix}$

où  $G_{i.}^t$  est la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la sous-matrice  $G_t$ . Il vient :

$$\begin{bmatrix} rsG_1 \\ \vdots \\ rsG_m \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} (I \otimes X) \\ q \end{matrix} =$$

$\leftarrow q \text{ blocs} \rightarrow$

$$\left[ \begin{array}{cccc} G_{1.}^1 & G_{2.}^1 & \dots & G_{q.}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{1.}^m & G_{2.}^m & \dots & G_{q.}^m \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cccc} X & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & X & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{bmatrix} G_{1.}^1 \\ \dots \\ G_{1.}^m \end{bmatrix}} \right\} q \text{ blocs}$$

$$= \left[ \begin{array}{cccc} G_{1.}^1 X & \dots & G_{q.}^1 X \\ \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ G_{1.}^m X & \dots & G_{q.}^m X \end{array} \right] = \begin{bmatrix} (G_1 X)^T \\ \vdots \\ (G_m X)^T \end{bmatrix} = G^T(X)$$

(1.28) est donc vérifiée.

$$(1.29) \quad \frac{d X_{q \times 1}^{[i]}}{d X_{q \times 1}} = \sum_{v=0}^{i-1} \left( I_q \otimes E_{q^v \times q}^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right) \left( cs I_q \otimes X_{q}^{[i-1]} \right)$$

(Remarque :  $E_{1 \times q}^{q \times 1} = E_{q \times 1}^{1 \times q} = I_q$  ;  $I_q = 1$ )

Nous démontrerons (1.29) par itération : il est facile de montrer que pour  $i = 1$ , l'équation (1.29) est satisfaite. Nous commençons donc par  $i = 2$ . Lorsque  $i = 2$ , selon (1.24), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d X_{q \times 1}^{[2]}}{d X_{q \times 1}} &= \frac{d X_{q \times 1}}{d X_{q \times 1}} \otimes X_{q \times 1} + \left( I_q \otimes E_{q \times q}^{q \times q} \right) \left( cs I_q \otimes X_{q \times 1} \right) \\ &= \left( cs I_q \otimes X_{q \times 1} \right) + \left( I_q \otimes E_{q \times q}^{q \times q} \right) \left( cs I_q \otimes X_{q \times 1} \right) \\ &= I_q \cdot \left( cs I_q \otimes X_{q \times 1} \right) + \left( I_q \otimes E_{q \times q}^{q \times q} \right) \left( cs I_q \otimes X_{q \times 1} \right) \\ &= \left[ \left( I_q \otimes E_{1 \times q}^{q \times 1} \otimes I_q \right) + \left( I_q \otimes E_{q \times q}^{q \times q} \otimes I_{q^0} \right) \right] \left( cs I_q \otimes X_{q \times 1} \right) \\ &= \sum_{v=0}^1 \left( I_q \otimes E_{q^v \times q}^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(2-1-v)}} \right) \cdot \left( cs I_q \otimes X_{q \times 1}^{[2-1]} \right) \end{aligned}$$

(1.29) est vérifiée pour  $i = 2$ .

Supposons que la (1.29) soit vérifiée pour  $i = n-1$  ; autrement dit que l'égalité suivante soit satisfaite :

$$\frac{d X_{q \times 1}^{[n-1]}}{d X_{q \times 1}} = \sum_{v=0}^{n-2} \left( I_q \otimes E_{q^v \times q}^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(n-2-v)}} \right) \cdot \left( cs I_q \otimes X_{q \times 1}^{[n-2]} \right)$$

Il en résulte donc, pour  $i = n$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{dX^{[n]}}{dX} &= \frac{d[X^{[n-1]} \otimes X]}{dX} \\
 &= \frac{dX^{[n-1]}}{dX} \otimes X + \left( I \otimes E_{q^{(n-1) \times q}}^{q \times q(n-1)} \right) (cs I \otimes X_q^{[n-1]}) \\
 &= \sum_{v=0}^{n-2} \left[ \left( I \otimes E_{q^{v \times q}}^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(n-2-v)}} \right) \cdot \left( cs I \otimes X_K^{[n-2]} \right) \right] \otimes X_K \\
 &\quad + \left( I \otimes E_{q^{(n-1) \times q}}^{q \times q(n-1)} \right) (cs I \otimes X_K^{[n-1]}) \\
 &= \sum_{v=0}^{n-2} \left\{ \left[ \left( I \otimes E_{q^{v \times q}}^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(n-2-v)}} \right) \otimes I \right] (cs I \otimes X_K^{[n-1]}) \right\} \\
 &\quad + \left( I \otimes E_{q^{(n-1) \times q}}^{q \times q(n-1)} \otimes I_{q^0} \right) (cs I \otimes X_K^{[n-1]}) \\
 &= \sum_{v=0}^{n-2} \left( I \otimes E_{q^{v \times q}}^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(n-1-v)}} \right) (cs I \otimes X_q^{[n-1]}) \\
 &\quad + \left( I \otimes E_{q^{(n-1) \times q}}^{q \times q(n-1)} \otimes I_{q^0} \right) (cs I \otimes X_q^{[n-1]}) \\
 &= \left\{ \sum_{v=0}^{n-2} \left( I \otimes E_{q^{v \times q}}^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(n-2-v)}} \right) + \left( I \otimes E_{q^{(n-1) \times q}}^{q \times q(n-1)} \otimes I_{q^0} \right) \right\} (cs I \otimes X_q^{[n-1]}) \\
 &= \sum_{v=0}^{n-1} \left( I \otimes E_{q^{v \times q}}^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(n-1-v)}} \right) (cs I \otimes X_q^{[n-1]})
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire (1.29) est vérifiée pour  $i = n$ .

La démonstration est complète.

## I.5 - CONCLUSION

Nous avons rappelé, au cours de ce chapitre, un certain nombre de notations concernant les fonctions à valeurs matricielles comme :

- le produit de Kronecker,
- les puissances de Kronecker,
- les dérivées d'ordre multiple de matrice,
- les série infinies de puissance de Kronecker de matrices,

en indiquant leurs propriétés, ces notations étant mises en œuvre dans toute la suite du travail présenté.

Trois formules, qui sont constamment utilisées dans le suite du mémoire, ont été établies dans leur forme la plus générale.

## CHAPITRE II

**ALGORITHME ITERATIF DE DETERMINATION**  
**DE LA COMMANDE OPTIMALE**  
**DES SYSTEMES NON LINEAIRES SCALAIRES**  
**ET LA STABILITE DU SYSTEME BOUCLE**

## II.1 - INTRODUCTION

A l'égard des systèmes non linéaires, il n'existe pas encore de méthode ayant la généralité et la puissance de celle mise en œuvre pour les systèmes linéaires, concernant la détermination de la commande optimale.

Les systèmes linéaires forment un ensemble relativement homogène, tandis que la dénomination de systèmes non linéaires s'applique à des systèmes extrêmement divers et qui n'ont à peu près rien de commun.

Cela entraîne la conséquence suivante : alors que les méthodes applicables aux systèmes linéaires possèdent une unité remarquable, on ne saurait parler de méthode générale applicable aux systèmes non linéaires. Au point de vue technique, il y a des méthodes d'approche de classes particulières de problèmes non linéaires, mais il n'y a pas de théorie d'ensemble des systèmes non linéaires.

Depuis environ 20 ans, l'étude des méthodes de linéarisation des systèmes non linéaires a connu des progrès rapides [KRE 73] [BAU 86] [LEJ 85] [HUM 83] [FLI 85] [REB 85] [REB 84] [MON 83] [MEY 84]. La linéarisation conduit généralement à un système soit représenté par un modèle linéaire avec une précision acceptable tant que les variables varient dans certains intervalles [ART 73] [BAU 86] [LEJ 85], soit possédant, souvent localement, le même comportement qu'un système linéaire [HUN 83] [MON 83].

L'étude approfondie des travaux précédents [VET 73] [ROT 88], nous a conduit à introduire les "séries de puissances" dans la recherche de commandes optimales des systèmes non linéaires. Cette idée, sans aucun doute classique, nous a permis d'obtenir une expression analytique de la commande optimale. Cette expression s'exprime en série de puissances des variables d'état. Les coefficients de cette série sont donnés par un ensemble d'équations récursives et itératives, de résolution aisée en temps réel. Avec ces équations de récurrence, nous pouvons avoir une commande quasi-optimale qui peut approcher la commande optimale avec une précision satisfaisante.

Dans la suite, nous avons étudié la stabilité des systèmes bouclés, déterminé une condition suffisante de stabilité des systèmes en boucle fermée et nous donnons une méthode pour déterminer le domaine de la stabilité. Pour clarifier la présentation et éviter que la complexité du formalisme ne masque les raisonnements utilisés, nous exposons notre travail en trois parties qui concernent respectivement les systèmes non linéaires scalaires, les systèmes bilinéaires vectoriels et les systèmes non linéaires vectoriels.

## II.2 - POINT DE DEPART

Nous savons que la programmation dynamique conduit à résoudre les problèmes de commande optimale à partir d'une équation de récurrence de la forme :

$$g_k(X_k) = \min_{U_k} \{ \Gamma_k(X_k, U_k) + g_{k+1}(X_{k+1}) \} \quad (k = N-1, \dots, 0)$$

Avec la condition finale  $g_N(X_N)$ , cette équation de récurrence constitue une condition nécessaire et suffisante d'optimalité globale. Ceci, par opposition aux résultats obtenus par la théorie des multiplicateurs de Lagrange qui ne fournit qu'une condition nécessaire d'optimalité locale. La programmation dynamique s'avère particulièrement bien adaptée à la recherche numérique de la commande optimale ; mais, par contre, sa mise en œuvre rend difficile l'obtention d'une solution analytique.

Considérons le système suivant :

$$(2.1) \quad X_{k+1} = F(X_k) + G(X_k) \cdot U_k$$

où :  $X_k \in \mathfrak{R}^q$  est le vecteur d'état,

$U_k \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur de commande,

$F(\cdot)$  et  $G(\cdot)$  sont deux fonctions analytiques du vecteur d'état.

Le problème consiste à trouver une séquence de commande  $u_k^*$  qui minimise le critère quadratique :



$$(2.2) \quad J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k)$$

avec :  $Q \geq 0, R > 0, Q$  et  $R$  : matrices symétriques.

D'après le principe d'optimalité, nous avons l'équation de récurrence :

$$(2.3) \quad g_k(X_k) = \min_{U_k} \left\{ \frac{1}{2} (X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k) + g_{k+1}(X_{k+1}) \right\}$$

avec :  $g_N(X_N) = 0$  ;  $g_k(X_k)$  est le revenu optimal associé à  $X_k$ .

A l'instant  $N-1$ , on a :

$$(2.4) \quad g_{N-1}(X_{N-1}) = \min_{U_{N-1}} \left\{ \frac{1}{2} (X_{N-1}^T Q X_{N-1} + U_{N-1}^T R U_{N-1}) + g_N(X_N) \right\}$$

Quand il n'y a pas de contrainte sur  $U_k$ , l'optimisation du membre droit de (2.4), par rapport à  $U_{N-1}$ , conduit à :

$$R U_{N-1} = 0 \quad \text{donc} \quad U_{N-1}^* = 0$$

En portant cette valeur dans (2.4), nous avons :

$$g_{N-1}(X_{N-1}) = \frac{1}{2} X_{N-1}^T Q X_{N-1}$$

A l'instant  $N-2$ , il vient :

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{N-2}(X_{N-2}) = \\ = \min_{U_{N-2}} \left\{ \frac{1}{2} (X_{N-2}^T Q X_{N-2} + U_{N-2}^T R U_{N-2}) + g_{N-1}(X_{N-1}) \right\} \\ = \min \left\{ \frac{1}{2} (X_{N-2}^T Q X_{N-2} + U_{N-2}^T R U_{N-2}) + \frac{1}{2} Z^T Q Z \right\} \end{array} \right.$$

où :  $Z = F(X_{N-2}) + G(X_{N-2})U_{N-2}$

Avec la méthode précédente, nous obtenons :

$$(2.6) \quad U_{N-2}^* = - (R + G^T Q G)^{-1} G^T Q F$$

En remplaçant (2.6) dans (2.5), nous pouvons obtenir le revenu optimal  $G_{N-2}(X_{N-2})$ . Nous constatons que la complexité de  $G_{N-k}(X_{N-k})$  augmente très vite avec l'indice  $k$ , ce qui rend difficile l'obtention d'une solution analytique définissant  $U_K$ .

Pour cette raison, nous avons choisi une méthode de détermination de la commande utilisant le principe du maximum.

### II.3 - DETERMINATION ITERATIVE DES COEFFICIENTS $P_s(k)$

Pour pouvoir déterminer de façon itérative les coefficients  $P_s(k)$ , nous transformons le modèle (2.1) non linéaire affine en la commande en :

$$X_{k+1} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i X_k^{[i]} + \sum_{j=0}^{\infty} G_j X_k^{[j]} u_k$$

où  $F_i$  et  $G_j$  sont obtenus à partir du développement en série de Taylor des fonctions  $F(\cdot)$ , et  $G(\cdot)$ , au voisinage de zéro. La seule condition pour que cette forme existe est que les fonctions  $F(\cdot)$ , et  $G(\cdot)$ , soient  $C^\infty$ .

Pour simplifier la présentation de la méthode, nous nous limiterons dans ce chapitre, aux systèmes scalaires.

Considérons le système suivant :

$$(2.7) \quad X_{k+1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X_k^i + \sum_{j=0}^{\infty} (b_j X_k^j) u_k$$

où  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $X_K \in \mathfrak{R}$  est la variable d'état, et  $u_K \in \mathfrak{R}$  la commande,  
 $a_i, b_j$  ( $i = 1, \dots, \infty; j = 0, \dots, \infty$ ) sont des coefficients constants.

Le problème de commande optimale discret consiste alors à déterminer la séquence  $[u_K]$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) qui minimise :

$$(2.8) \quad J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (q X_K^2 + r u_K^2), \quad q \geq 0, \quad r > 0$$

Sans perte de généralité, nous pouvons poser  $r = 1$  qui conduit au Hamiltonien suivant :

$$(2.9) \quad H \triangleq \frac{1}{2} (q X_K^2 + u_K^2) + \lambda_{K+1} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} a_i X_K^i + \sum_{j=0}^{\infty} (b_j X_K^j) u_K \right]$$

où  $\lambda_{K+1} \in \mathfrak{R}$  est le vecteur adjoint.

En annulant la dérivée de H par rapport à  $u_K$ , nous avons :

$$(2.10) \quad u_K^* = - \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j X_K^j \right) \cdot \lambda_{K+1}$$

Les équations adjointes sont les suivantes :

$$(2.11) \quad X_{K+1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X_K^i + \sum_{j=0}^{\infty} (b_j X_K^j) u_K$$

$$(2.12) \quad \lambda_K = \lambda_{K+1} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i X_K^{i-1} + \sum_{j=0}^{\infty} (j \cdot b_j X_K^{j-1}) u_K \right] + q X_K$$

Avec les conditions terminales, les équations (2.10), (2.11) et (2.12) déterminent

théoriquement  $\lambda_{K+1}$  comme une fonction de  $X_K$  ; mais l'extraction de cette fonction est très difficile et généralement impossible. Aussi, nous allons chercher une solution en développant  $\lambda_{K+1}$  en série infinie de puissance  $X_K$  :

$$(2.13) \quad \lambda_{K+1} = \sum_{s=1}^{\infty} P_s(k) X_K^s$$

En remplaçant (2.10) dans (2.11) et (2.12), nous avons :

$$(2.14) \quad X_{K+1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X_K^i - \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j X_K^j \right)^2 \lambda_{K+1}$$

$$(2.15) \quad \lambda_K = \lambda_{K+1} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i X_K^{i-1} - \left( \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot b_j X_K^{j-1} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j X_K^j \right) \lambda_{K+1} \right] + q X_K$$

En remplaçant (2.13) dans (2.14) et (2.15), il vient :

$$(2.16) \quad X_{K+1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X_K^i - \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j X_K^j \right)^2 \left( \sum_{s=1}^{\infty} P_s(k) X_K^s \right)$$

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=1}^{\infty} P_s(k-1) X_{K-1}^s = \left( \sum_{s=1}^{\infty} P_s(k) X_K^s \right) \left[ \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i X_K^{i-1} \right. \\ \left. - \left( \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot b_j X_K^{j-1} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j X_K^j \right) \left( \sum_{s=1}^{\infty} P_s(k) X_K^s \right) \right] + q X_K \end{array} \right.$$

En portant l'expression de  $X_K$  définie en (2.16) dans (2.17), et égalisant les coefficients des mêmes puissances de  $X_{K-1}$  des deux membres de l'identité précédente, nous obtenons un groupe d'équations récurrentes permettant une détermination itérative des

coefficients  $P_s(k)$  ( $s=1, 2, \dots$ ):

$$(2.18) \left\{ \begin{array}{l} P_1(k) = (a_1 P_1(k+1) + q) (a_1 - b_0^2 P_1(k)) = \beta_1 \alpha_1 \\ P_2(k) = (a_1 P_2(k+1) + 2 a_2 P_1(k+1) - b_0 b_1 P_1^2(k+1)) \cdot \\ \cdot (a_1 - b_0^2 P_1(k))^2 + (a_1 P_1(k+1) + q) \cdot \\ \cdot (a_2 - b_0^2 P_2(k) - 2 b_0 b_1 P_1(k)) = \beta_2 \alpha_1^2 + \beta_1 \alpha_2 \\ \vdots \\ P_s(k) = \alpha_s \beta_1 + \beta_2 \left( \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=s}} \alpha_i \alpha_j \right) + \\ + \beta_3 \left( \sum_{\substack{i,j,g=1 \\ i+j+g=s}} \alpha_i \alpha_j \alpha_g \right) + \dots + \beta_s \alpha_1^s \\ \vdots \end{array} \right.$$

où :

$$(2.19) \quad \alpha_s = a_s - \sum_{t=0}^{s-1} \left( \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=t}}^{s-1} b_i b_j \right) \cdot P_{s-t}(k-1)$$

$$(2.20) \left\{ \begin{array}{l} \beta_s = \sum_{i=1}^s i \cdot a_i P_{s-i+1}(k) - \left[ \sum_{t=1}^{s-1} t b_0 b_t \left( \sum_{\substack{i,j=1 \\ t+i+j=s+1}}^{s-1} P_i(k) P_j(k) \right) + \right. \\ \left. \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{s-1} w b_i b_j \left( \sum_{\substack{l,t=1 \\ i+j+l+t=s+1}}^{s-1} P_l(k) P_t(k) \right) \right] \end{array} \right.$$

et :

$$w = \begin{cases} i+j & \text{si } i < j \\ j & \text{si } i = j \end{cases}$$

La résolution des équations (2.18) est un problème complexe mais classique. Avec les conditions finales  $P_s(N)$ , nous avons une détermination itérative des coefficients  $P_s(N-1), \dots, P_s(0)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ).

En fait, la première équation de (2.18) est l'équation de Riccati correspondant au système linéarisé. Il est facile de trouver la solution  $P_1(k)$  avec  $P_1(k+1)$  donné ( $k = N-1, \dots, 0$ ). En remplaçant les  $P_1(k), P_1(k+1)$  dans la seconde équation de (2.18), on obtient une équation aux différences d'ordre 1 en  $P_2(k)$  et  $P_2(k+1)$ . Si  $P_2(N)$  est donné, on peut trouver facilement de proche en proche,  $P_2(N-1), \dots, P_2(0)$ .

Nous pouvons ainsi déterminer facilement les coefficients  $P_s(k)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ;  $k = N-1, N-2, \dots, 0$ ), ainsi que la séquence de commande  $u(k)$ .

#### **II.4 - CAS HORIZON INFINI**

Nous étudions maintenant le cas important pour la commande optimale avec critère quadratique correspondant à l'horizon infini.

Il convient de réécrire (2.18) sous la forme suivante :

$$(2.21) \left\{ \begin{aligned} P_1(k) &= (a_1 P_1(k+1) + q) (a_1 - b_0^2 P_1(k)) \\ P_2(k) &= a_1 \alpha_1^2 (1 + b_0^2 \beta_1)^{-1} P_2(k+1) + \\ &\quad + (1 + b_0^2 \beta_1)^{-1} [ \beta_1 (\alpha_2 - b_0^2 P_2(k)) + \\ &\quad + \alpha_1^2 (\beta_2 - a_1 P_2(k+1)) ] = \alpha'_2 P_2(k+1) + \beta'_2 \\ &\quad \vdots \\ P_s(k) &= \alpha'_s P_s(k+1) + \beta'_s \\ &\quad \vdots \end{aligned} \right.$$

où :

$$(2.22a) \quad \alpha'_s = a_1 \alpha_1^s (1 + b_0^2 \beta_1)^{-1}$$

$$(2.22b) \left\{ \begin{aligned} \beta'_s &= (1 + b_0^2 \beta_1)^{-1} [ \beta_1 (\alpha_s + b_0^2 P_s(k)) + \\ &\quad + \beta_2 \left( \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=s}} \alpha_i \alpha_j \right) + \dots + (\beta_s - a_1 P_s(k+1)) \alpha_1^s ] \end{aligned} \right.$$

$\alpha'_s$  et  $\beta'_s$  sont indépendants respectivement de  $P_s(k)$  et  $P_s(k+1)$ , ce qui donne une forme algébrique pour  $P_s(k)$  et facilite l'étude de convergence.

Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe précédent, la première équation de (2.21) correspond à l'équation de Riccati associée au système linéaire décrit ici par :

$$X_{K+1} = a_1 X_K + b_0 u_K$$

En vertu de la théorie concernant la solution de l'équation de Riccati, si la paire  $(a_1, b_0)$  est commandable et si la paire  $(c, a_1)$  est observable ( $q = c^2$ ), les solutions de la première équation de (2.21) convergent vers une constante notée  $P_1$  lorsque  $K$  tend vers  $-\infty$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} P_1(k) = P_1$$

Substituant  $P_1$  aux  $P_1(k)$  et  $P_1(k+1)$ , la première équation de (2.21) devient une équation algébrique du second degré à une inconnue. Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$(2.23a) \quad P_1 = (a_1 P_1 + q)(a_1 - b_0^2 P_1)$$

ou

$$(2.23b) \quad a_1 b_0^2 P_1^2 + (b_0^2 q - a_1^2 + 1) P_1 - a_1 q = 0$$

Avec la condition  $q \geq 0$ , il existe toujours deux racines réelles et nous choisissons pour valeur de  $P_1$ , celle qui est positive.

Remplaçant  $P_1(k)$  et  $P_1(k+1)$  par  $P_1$  dans la seconde équation de (2.21), celle-ci devient une équation aux différences du premier degré en  $P_2(k)$  et  $P_2(k+1)$ . Si  $|\alpha'_2| < 1$ , il existe une constante  $P_2$  satisfaisant à :

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} P_2(k) = P_2$$

qui est définie par :

$$P_2 = \frac{\beta'_2}{1 - \alpha'_2}$$

De la même manière, on peut définir successivement  $P_3, P_4, \dots, P_{s-1}$  en



remplaçant respectivement :

$$P_1(k), P_1(k+1); P_2(k), P_2(k+1); \dots; P_{s-1}(k), P_{s-1}(k+1)$$

apparaissant dans l'équation générale (2.21) par les valeurs ci-dessus, cette équation devient :

$$(2.24) \quad P_s(k) = \alpha'_s P_s(k+1) + \beta'_s$$

avec les  $\alpha'_s, \beta'_s$  constants.

De même, si  $|\alpha'_s| < 1$ ,  $P_s(k)$  converge vers une limite notée  $P_s$  :

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} P_s(k) = P_s$$

qui est définie par :

$$P_s = \frac{\beta'_s}{1 - \alpha'_s}$$

En effet, sous les hypothèses  $a_1 \neq 0, b_0 \neq 0$  et  $q > 0$ ,  $|\alpha'_s| < 1$  est toujours vérifié et  $P_s(k)$  converge vers une constante finie. On en déduit la proposition suivante :

**Théorème 2.1 :**

Si le triplet  $(a_1, b_0, c)$  ( $c^2 = q$ ) est stabilisable/défectable, la solution  $P_s(k)$  de (2.21) converge vers une constante finie  $P_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) si l'horizon tend vers l'infini.

**Preuve :**

La supposition  $(a_1, b_0, c)$  stabilisable/défectable implique :  $b_0 \neq 0$  et  $q > 0$ .

Deux cas sont à envisager :

**1er Cas :  $a_1 \neq 0$**

D'après (2.19), (2.20) et (2.23a), on a :

$$\begin{aligned}\alpha'_s &= a_1 \alpha_1^s (1 + b_0^2 \beta_1)^{-1} = \frac{a_1 (a_1 - b_0^2 P_1)^s}{1 + b_0^2 (a_1 P_1 + q)} \\ &= \frac{a_1 (a_1 - b_0^2 P_1)^s}{1 + b_0^2 \frac{P_1}{a_1 - b_0^2 P_1}} = (a_1 - b_0^2 P_1)^{s+1}\end{aligned}$$

Pour satisfaire  $|\alpha'_s| < 1$ , il est nécessaire et suffisant d'avoir :

$$|a_1 - b_0^2 P_1| < 1$$

Selon (2.23a), on a :

$$(2.25) \quad a_1 - b_0^2 P_1 = \frac{P_1}{a_1 P_1 + q} = \frac{1}{a_1 + \frac{q}{P_1}}$$

où  $P_1$  est la racine de l'équation (2.23b) donnée par :

$$P_1 = \frac{(a_1^2 - b_0^2 q - 1) + \sqrt{(a_1^2 - b_0^2 q - 1)^2 + 4 a_1^2 b_0^2 q}}{2 a_1 b_0^2} \quad (a_1 \neq 0 ; b_0 \neq 0)$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 a_1 + \frac{q}{P_1} &= a_1 + \frac{2 a_1 b_0^2 q}{(a_1^2 - b_0^2 q - 1) + \sqrt{(a_1^2 - b_0^2 q - 1)^2 + 4 a_1^2 b_0^2 q}} \\
 &= a_1 + \frac{2 a_1 b_0^2 q \left[ (a_1^2 - b_0^2 q - 1)^2 - \sqrt{(a_1^2 - b_0^2 q - 1)^2 + 4 a_1^2 b_0^2 q} \right]}{(a_1^2 - b_0^2 q - 1)^2 - \left[ (a_1^2 - b_0^2 q - 1)^2 + 4 a_1^2 b_0^2 q \right]} \\
 &= \frac{(a_1^2 + b_0^2 + 1) + \sqrt{(a_1^2 + b_0^2 + 1)^2 - 4 a_1^2}}{2 a_1}
 \end{aligned}$$

(2.25) devient donc :

$$\begin{aligned}
 a_1 - b_0^2 P_1 &= \frac{2 a_1}{(a_1^2 + b_0^2 + 1) + \sqrt{(a_1^2 + b_0^2 + 1)^2 - 4 a_1^2}} \\
 &= \frac{1}{\left( \frac{a_1^2 + b_0^2 + 1}{2 a_1} \right) + \frac{\sqrt{(a_1^2 + b_0^2 + 1)^2 - 4 a_1^2}}{2 a_1}}
 \end{aligned}$$

En remarquant :

$$(a_1^2 + b_0^2 + 1)^2 - 4 a_1^2 = (a_1^2 - b_0^2 - 1)^2 + 4 a_1^2 b_0^2 > 0$$

il vient :

$$\left( \frac{a_1^2 + b_0^2 + 1}{2 a_1} \right)^2 > 1 \quad \text{soit} \quad \left| \frac{a_1^2 + b_0^2 + 1}{2 a_1} \right| > 1$$

Étudions maintenant la valeur de  $a_1 - b_0^2 P_1$  :

$$|a_1 - b_0^2 P_1| = \frac{|2 a_1|}{(a_1^2 + b_0^2 q + 1) + \sqrt{(a_1^2 + b_0^2 q + 1)^2 - 4 a_1^2}}$$

$$|a_1 - b_0^2 P_1| < \frac{1}{\left| \frac{a_1^2 + b_0^2 q + 1}{2 a_1} \right|} < 1$$

**2ème Cas :  $a_1 = 0$**

On a immédiatement, selon (2.23a),  $P_1 = 0$  ; donc :

$$|a_1 - b_0^2 P_1| = 0 < 1$$

d'où le Théorème 1.

En reportant les  $P_s (s = 1, 2, \dots)$  dans les équations (2.21), on obtient un ensemble d'équations algébriques itératives :

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 = (a_1 P_1 + q) (a_1 - b_0^2 P_1) \\ P_2 = \frac{\beta_2^*}{1 - \alpha_2^*} \\ \vdots \\ P_s = \frac{\beta_s^*}{1 - \alpha_s^*} \end{array} \right.$$

où les  $\alpha_s^*, \beta_s^* (s = 2, 3, \dots)$  sont définies par le remplacement de  $P_1(k), P_2(k), \dots, P_{s-1}(k)$  par leurs limites  $P_1, P_2, \dots, P_{s-1}$ .

**II.5 - STABILITE DES SYSTEMES BOUCLES  
ET DETERMINATION DU DOMAINE DE STABILITE**

Au début de ce chapitre, nous avons donné l'équation (2.7) comme modèle de système non linéaire. En pratique, nous effectuons une troncature des sommations, ce qui conduit au modèle approché :

$$(2.27) \quad X_{k+1} = \sum_{i=1}^n a_i X_k^i + \sum_{j=0}^m b_j X_k^j u_k$$

Nous prenons également la commande sous la forme :

$$U_{k,s}^* = - \left( \sum_{j=0}^m b_j X_k^j \right) \left( \sum_{i=1}^s P_i X_k^i \right)$$

Pour des raisons de généralité, nous avons choisi des ordres de troncature différents.

En la reportant dans (2.27), le système bouclé devient un système polynomial régi par la récurrence :

$$(2.28) \quad X_{k+1} = f(X_k) = (C_1 + C_2 X_k + \dots + C_v X_k^{v-1}) X_k$$

où :

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = a_1 - b_0^2 P_1 \\ C_2 = a_2 - 2 b_0 b_1 P_1 - b_0^2 P_2 \\ C_3 = a_3 - (2 b_0 b_2 + b_1^2) P_1 - (2 b_0 b_1) P_2 - b_0^2 P_3 \\ \vdots \\ C_v = a_v - \sum_{j=0}^v \sum_{i=0}^{v-j} (b_i b_{v-j-i}) P_j \end{array} \right.$$

Nous savons que la stabilité d'un système non linéaire n'est souvent valable que dans un domaine donné des valeurs initiales de l'état. Dans ce paragraphe, nous donnerons une condition suffisante pour la stabilité du système bouclé (2.28) et une méthode de détermination du domaine de stabilité.

Considérons le polynôme de coefficients  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, v$ ) de (2.28) :

$$(2.30) \quad P = C_1 + C_2 X + \dots + C_v x^{v-1}$$

Il vient le théorème :

**Theorem 2.2 :**

S'il existe une constante positive  $A$ , qui définit un ensemble noté  $\Omega_a$  :

$$(2.31) \quad \Omega_a = \{ X \mid |X| \leq A \}$$

tel que  $\forall x \in \Omega_a$ , la condition suivante est vérifiée :

$$(2.32) \quad |P| = |C_1 + C_2 X + \dots + C_v x^{v-1}| \leq C < 1$$

Le système (2.28) est asymptotiquement stable quel que soit  $X_0 \in \Omega_a$ , et l'ensemble  $\Omega_a$  est appelé le domaine de stabilité du système (2.28).

**Preuve :**

La démonstration de ce théorème est évidente. En effet, si  $X_k \in \Omega_a$ , on a :

$$X_{k+1} = |P(X_k) \cdot X_k| < |X_k|$$

et la suite  $X_k$  converge vers zéro.

La détermination du domaine de stabilité vis à vis des conditions initiales du système (2.28), conduit à rechercher la constante A du Théorème 2.2.

Pour cela, nous réécrivons (2.32) comme suit :

$$(2.33a) \quad P_- = C_1 - 1 + C_2 X + \dots + C_v x^{v-1} < 0$$

$$(2.33b) \quad P_+ = C_1 + 1 + C_2 X + \dots + C_v x^{v-1} > 0$$

Il est évident que si l'inégalité :

$$(2.34) \quad |C_1| = |a_1 - b_0^2 P_1| < 1$$

est vérifiée, il existe indubitablement une constante A et un ensemble  $\Omega_a$  défini par (2.31) et pour tous les  $X \in \Omega_a$ , les inégalités (2.33) seront satisfaites. Autrement dit, selon le Théorème 2.1, si le triplet  $(a_1, b_0, c)$  est stabilisable/délectable, le système (2.28) est asymptotiquement stable. Cela implique que la convergence de  $P_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) assure la stabilité du système bouclé.

La détermination du domaine de stabilité, ou de la constante A, s'effectue en deux étapes :

- 1) Si l'inégalité (2.34) est satisfaite, trouver les racines des polynômes  $P_-$  et  $P_+$ .
- 2) Choisir comme A la racine dont le module est le plus petit.

Cette méthode est illustrée sur les figures suivantes :

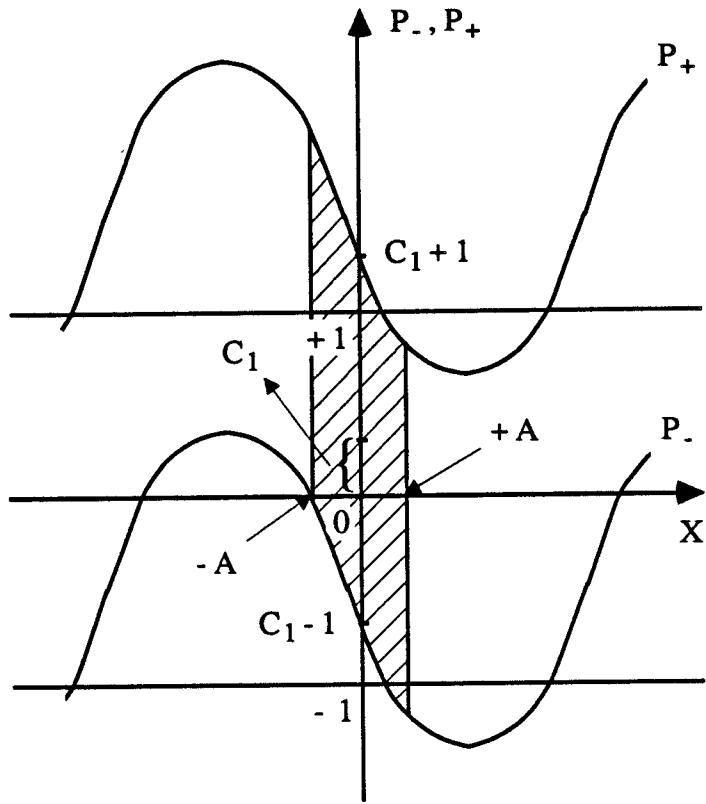


Figure 2.1

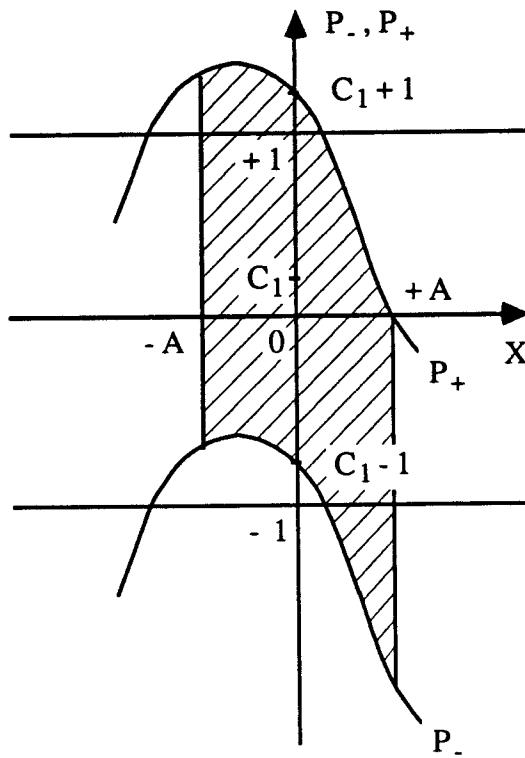
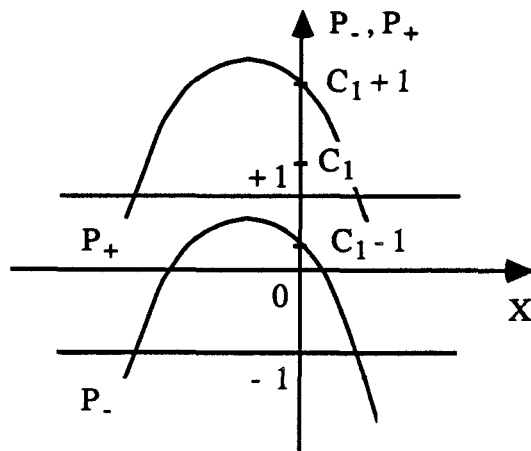


Figure 2.2





*Figure 2.3*

Dans les figures 2.1 et 2.2, le module de  $C_1$  est inférieur à 1. Il existe donc une constante  $A$  qui définit une zone ombrée, dans laquelle (2.33a) et (2.33b) sont satisfaites simultanément pour tout  $X$ . Dans la figure 2.1, la racine de  $P_-$  détermine la valeur de  $A$ , tandis que dans la figure 2.2, la valeur de  $A$  est définie par la racine de  $P_+$ .

Par contre, dans le cas de la figure 2.3, le module de  $C_1$  est supérieur à 1, donc il n'existe pas de voisinage de l'origine dans lequel on puisse trouver une valeur initiale de variable d'état  $X_0$ , vérifiant en même temps les inégalités (2.33a) et (2.33b). Dans ce cas là, le système (2.28) est instable, mais le théorème 2.2 ne donne qu'une condition suffisante et ne permet pas de conclure lorsque  $|C_1| = 1$ .

## II.6 - EXEMPLE D'APPLICATION

### II.6.1 - Calcul de $P_s$

Nous avons maintenant deux méthodes pour calculer  $P_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ). C'est-à-dire la méthode itérative et la méthode directe qui s'appliquent respectivement aux équations (2.21) et (2.26).

→ **Méthode itérative :**

Les équations (2.21) sont des équations de récurrence, quand  $P_s(k+1)$  sont données comme les valeurs initiales, on peut calculer  $P_s(k)$  progressivement. Puisque nous avons pris la solution d'équation (2.23) comme  $P_1$ , les solutions  $P_s(k)$  ( $s=2, 3, \dots$ ) convergent donc rapidement comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 2.1 :**

Soit le système :

$$(2.35) \quad X_{k+1} = \sum_{i=1}^3 a_i X_k^i + \sum_{j=0}^2 b_j X_k^j u_k$$

et le critère de performance :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (q X_k^2 + r U_k^2) \quad q = 0,5 \quad r = 1$$

Nous avons fixé les ordres de troncature à  $n = 3, m = 2, s = 5$ , avec :

$$\begin{array}{lllll} a_1 = 1,4 & a_2 = 0,8 & a_3 = -0,5 & a_i = 0 & \text{pour } i > 3 \\ b_0 = 2 & b_1 = -1,2 & b_2 = 0,6 & b_j = 0 & \text{pour } j > 2 \end{array}$$

La commande quasi-optimale  $u_{k,s}^*$  sera donc ici :

$$u_{k,5}^* = - (b_0 + b_1 X_k + b_2 X_k^2) (P_1 X_k + P_2 X_k^2 + P_3 X_k^3 + P_4 X_k^4 + P_5 X_k^5)$$

D'après (2.23), nous avons obtenu  $P_1 = 0,2727$ . Pour le calcul des termes  $P_s$ ,  $s=2, \dots, 5$ . Prenons les valeurs initiales pour l'algorithme (2.21) :

$$P_2(0) = -3 \quad P_3(0) = 2 \quad P_4(0) = -4 \quad P_5(0) = 3$$

Nous pouvons calculer  $P_s(k)$  ( $s=2, \dots, 5$ ) ( $k = -1, -2, \dots$ ) avec les équations (2.21). Les résultats sont présentés dans le tableau 2.1 ci-après. Les valeurs de  $P_s$  sont les limites de  $P_s(k)$ , quand  $k \rightarrow -\infty$ .

<b>k</b>	<b>P<sub>2</sub>(k)</b>	<b>P<sub>3</sub>(k)</b>	<b>P<sub>4</sub>(k)</b>	<b>P<sub>5</sub>(k)</b>
<b>0</b>	-3	2	-4	3
<b>-1</b>	0,3350226	0,1903408	-0,0676053	0,1395434
<b>-2</b>	0,4336591	0,1737888	-0,0564823	0,1370413
<b>-3</b>	0,4365764	0,1736374	-0,0564509	0,1370391
<b>-4</b>	0,4366627	0,1736360	-0,0564508	0,1370391
<b>-5</b>	0,4366652	0,1736360	-0,0564508	0,1370391
<b>-6</b>	0,4366653	0,1736360	-0,0564508	0,1370391
<b>-7</b>	0,4366653	0,1736360	-0,0564508	0,1370391
<b>-8</b>	0,4366653	0,1736360	-0,0564508	0,1370391
<b>-9</b>	0,4366653	0,1736360	-0,0564508	0,1370391
<b>-10</b>	0,4366653	0,1736360	-0,0564508	0,1370391

**Tableau 2.1**

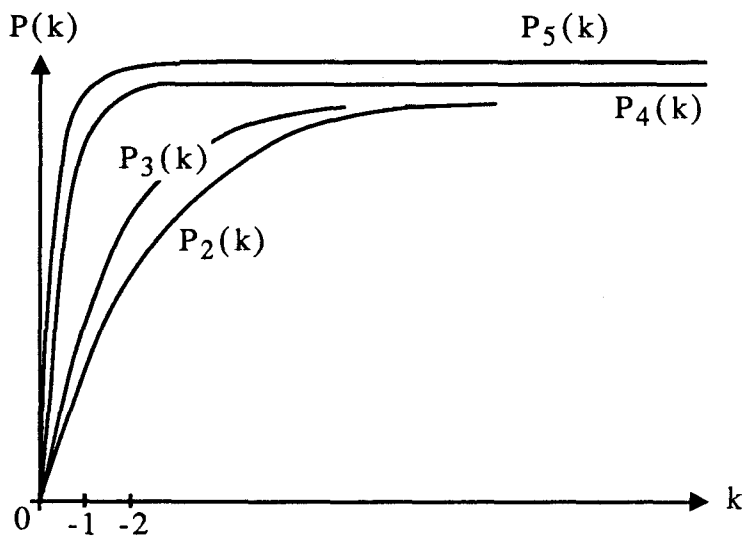
Nous constatons, dans cet exemple, que  $P_2(k)$  converge vers sa valeur limite dès le 6<sup>ème</sup> pas ;  $P_3(k)$  et  $P_4(k)$  sont convergents après la 4<sup>ème</sup> pas et  $P_5(k)$  prend sa limite après le 3<sup>ème</sup> pas.

Le tableau 2.2 montre que les valeurs initiales n'exercent pas une grande influence sur la convergence de  $P_s(k)$ .

<b>k</b>	<b>P<sub>2</sub>(k)</b>	<b>P<sub>3</sub>(k)</b>	<b>P<sub>4</sub>(k)</b>	<b>P<sub>5</sub>(k)</b>
<b>0</b>	10	-15	20	-25
<b>-1</b>	0,7195103	0,0348512	0,0002801	0,1150508
<b>-2</b>	0,4450307	0,1723666	-0,0562903	0,1370199
<b>-3</b>	0,4369127	0,1736244	-0,0564503	0,1370391
<b>-4</b>	0,4366726	0,1736359	-0,0564508	0,1370391
<b>-5</b>	0,4366655	0,1736360	-0,0564508	0,1370391
<b>-6</b>	0,4366653	0,1736360	-0,0564508	0,1370391
<b>-7</b>	0,4366653	0,1736360	-0,0564508	0,1370391
<b>-8</b>	0,4366653	0,1736360	-0,0564508	0,1370391
<b>-9</b>	0,4366653	0,1736360	-0,0564508	0,1370391
<b>-10</b>	0,4366653	0,1736360	-0,0564508	0,1370391

**Tableau 2.2**

La simulation montre également que plus  $s$  est grand, plus  $P_s(k)$  converge rapidement. Cette conclusion est illustrée dans la figure 2.4.



**Figure 2.4**

Aussi est-elle compréhensible par simple analyse. En fait, (2.22a) nous a donné le coefficient de  $P_s(k-1)$  comme suit :

$$\alpha'_s = a_1 \alpha_1^s (1 + b_0^2 \beta_1)^{-1}$$

dans lequel les facteurs  $a_1$  et  $(1 + b_0^2 \beta_1)^{-1}$  sont des constantes.

Or, nous avons déjà démontré dans la preuve du théorème 2.1 que :

$$|\alpha_1| < 1$$

Il en résulte donc :

$$|\alpha'_{s+u}| < |\alpha'_s| \quad (s = 2, 3, \dots ; u \text{ est un entier positif})$$

Cela confirme à nouveau la conclusion précédente.

**Exemple 2.2 :**

Considérons encore le système de l'exemple 2.1, mais prenons cette fois,  $b_0 = 0$ . Cela conduit  $P_s(k)$  à être divergent (voir tableau 2.3).

<b>k</b>	<b>P<sub>2</sub>(k)</b>	<b>P<sub>3</sub>(k)</b>	<b>P<sub>4</sub>(k)</b> <b>x (1 E+13)</b>	<b>P<sub>5</sub>(k)</b>
<b>0</b>	10	-15	0	0
<b>-1</b>	27,84	678976,13	0,0554383	410234,5
<b>-2</b>	76,79296	3287388,5	0,353599	3499109,9
<b>-3</b>	211,11988	13307865	1,9571785	26756909
<b>-4</b>	579,71296	51802529	10,581614	0,202 E+09
<b>-5</b>	1591,1324	0,200 E+09	56,965898	0,152 E+10
<b>-6</b>	4366,4672	0,768 E+09	306,43171	0,114 E+11
<b>-7</b>	11981,986	0,295 E+10	1648,1187	0,862 E+11
<b>-8</b>	32878,969	0,113 E+11	8864,0335	0,649 E+12
<b>-9</b>	90220,292	0,435 E+11	47672,955	0,489 E+13
<b>-10</b>	247564,88	0,167 E+12	256396,65	0,368 E+14

**Tableau 2.3**

Ce résultat confirme la conclusion du théorème 2.1, par la simulation.

→ **Méthode directe :**

Les équations (2.26) sont des équations algébriques avec lesquelles on peut obtenir  $P_s(k)$  directement. Nous présentons ci-après, les étapes du calcul de  $P_s(k)$  avec (2.26).

1. Calculer  $P_1$  avec (2.23b).
2. Reporter  $P_1$  dans (2.22) pour calculer  $\alpha_2^*$  et  $\beta_2^*$ .
3. Calculer  $P_2$  d'après (2.26).
4. Reporter  $P_1$  et  $P_2$  dans (2.22) pour trouver  $\alpha_3^*$  et  $\beta_3^*$ .
5. Revenir aux (2.26) afin de calculer  $P_3$ .
6. Et ainsi de suite, entre (2.22) et (2.26) pour obtenir tous les  $P_s$ .

**Exemple 2.3 :**

Prenons à nouveau le système de l'exemple 2.1. Cette fois, nous calculons  $P_s$  avec la méthode directe comme indiquée ci-dessus. Nous obtenons les limites de  $P_s(k)$  suivantes :

$$P_1 = 0,2726869 \quad P_2 = 0,4366726 \quad P_3 = 0,1736386 \quad P_4 = -0,0564565 \quad P_5 = 0,1370388$$

Elles sont identiques avec les solutions convergentes du problème de l'exemple 2.1.

**II.6.2 - Détermination de la zone stable du système fermé**

**Exemple 2.4 :**

Etant donné un système dynamique discret décrit par équation aux différences :

$$(2.36) \quad X_{k+1} = \sum_{i=1}^5 a_i X_k^i + \sum_{j=0}^5 b_j X_k^j u_k$$

Le critère est de :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (q X_k^2 + r U_k^2)$$

où :

	$a_1 = 2,5$	$a_2 = 3$	$a_3 = 1,6$	$a_4 = 0,6$	$a_5 = 0,5$
$b_0 = 2,5$	$b_1 = 1,4$	$b_2 = 1,8$	$b_3 = 1,2$	$b_4 = 0,8$	$b_5 = 0,5$
	$q = 0,5$			$r = 1$	

Nous avons immédiatement, avec la méthode directe précédente :

$$P_1 = 0,3589020 \quad P_2 = 0,0829601 \quad P_3 = -0,4218355 \quad P_4 = -0,2186004 \quad P_5 = 0,1317776$$

A partir de ces valeurs, on obtient la commande quasi-optimale suivante :

$$U_{k,5}^* = - \left( \sum_{j=0}^5 b_j X_k^j \right) \left( \sum_{i=1}^5 P_i X_k^i \right)$$

En la reportant dans le système (2.36), nous obtenons un système en boucle fermée :

$$(2.37) \quad X_{k+1} = (C_1 + C_2 X_k + \dots + C_5 X_k^4) X_k$$

où :

$$c_1 = 0,2568622 \quad c_2 = -0,0308151 \quad c_3 = -0,2778157 \quad c_4 = 0,047579 \quad c_5 = 1,1096681$$

Ces  $C_s$  ( $s = 1, 2, \dots, 5$ ) nous permettent d'obtenir, en fonction de (2.33), deux polynômes :

$$P_- = -0,7431378 - 0,0308151 X - 0,2778157 X^2 + 0,047579 X^3 + 1,1096681 X^4$$

$$P_+ = 1,2568622 - 0,0308151 X - 0,2778157 X^2 + 0,047579 X^3 + 1,1096681 X^4$$

Prenons ici l'intervalle  $[-5, +5]$ . Lorsque  $X$  varie dans cet intervalle, nous obtenons les trajectoires de  $P_-$  et de  $P_+$ , comme le montre la figure 2.5.



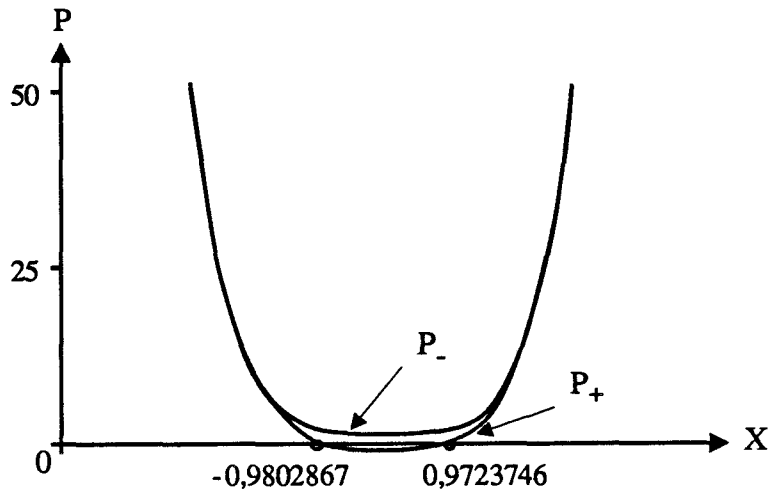


Figure 2.5

Nous donnons de plus, dans le tableau 2.4, les racines des polynômes  $P_-$  et  $P_+$ .

Racines de $P_-$	Racines de $P_+$
$0,9723746$	$0,7606219 + 0,679842 i$
$-0,0174823 + 0,8380121 i$	$0,7606219 - 0,679842 i$
$-0,0174823 - 0,8380121 i$	$-0,7820603 + 0,6904350 i$
$-0,9802867$	$-0,7820603 - 0,6904350 i$

Tableau 2.4

Le polynôme  $P_+$  ne possède pas de racine réelle ; cela correspond à la trajectoire de  $P_+$  qui se trouve toujours au-dessus de l'axe des abscisses, alors que la trajectoire de  $P_-$  se croise avec l'axe des abscisses, et les deux points d'intersection sont respectivement :

$$X_1 = -0,9802867 \quad X_2 = 0,9723746$$

D'après la méthode présentée dans le paragraphe II.5, nous savons qu'il existe,

pour le système (2.37), une zone stable définie par l'ensemble suivant :

$$A = \{ X_0 \mid |X_0| = 0,9723746 \}$$

Etant donné l'état initial  $X_0$  des valeurs différentes, les trajectoires d'état sont présentées dans le tableau 2.5 et dans la figure 2.6.

k	$X_1(k)$	$X_2(k)$	$X_3(k)$	$X_4(k)$	$X_5(k)$	$X_6(k)$
0	0,8	0,95	0,97	0,9723745	0,9723746	0,9723747
1	0,4266309	0,8754096	0,9616386	0,9723743	0,9723746	0,972375
2	0,0996636	0,6133028	0,924687	0,9723734	0,9723746	0,9723767
3	0,0250343	0,1848734	0,7764816	0,9723692	0,9723746	0,9723842
4	0,0064067	0,0449736	0,381323	0,97235	0,9723746	0,9724182
5	0,0016443	0,0114648	0,0880152	0,972263	0,9723746	0,972573
6	0,0004223	0,0029404	0,0221884	0,9718677	0,9723746	0,9732766
7	0,0001085	0,000755	0,0056812	0,9700738	0,9723746	0,9764813
8	0,0000279	0,0001939	0,0014582	0,9619706	0,9723746	0,9911991
9	0,0000072	0,0000498	0,0003745	0,9261291	0,9723746	1,0613973
10	0,0000018	0,0000128	0,0000962	0,7818257	0,9723746	1,4609088
11	0,472 E-06	0,0000033	0,0000247	0,3911443	0,9723746	7,0442815
12	0,121 E-06	0,844 E-06	0,0000063	0,0904037	0,9723746	19267,926
13	0,312 E-07	0,217 E-06	0,0000016	0,0227741	0,9723746	
14	0,800 E-08	0,557 E-07	0,419 E-06	0,0058306	0,9723746	
15	0,206 E-08	0,143 E-07	0,108 E-06	0,0014965	0,9723746	
16	0,528 E-09	0,367 E-08	0,276 E-07	0,0003843	0,9723746	
17	0,136 E-09	0,944 E-09	0,710 E-08	0,0000987	0,9723746	
18	0,348 E-10	0,242 E-09	0,182 E-08	0,0000254	0,9723746	
19	0,895 E-11	0,623 E-10	0,468 E-09	0,0000065	0,9723746	
20	0,230 E-11	0,160 E-10	0,120 E-09	0,0000017	0,9723746	

Tableau 2.5

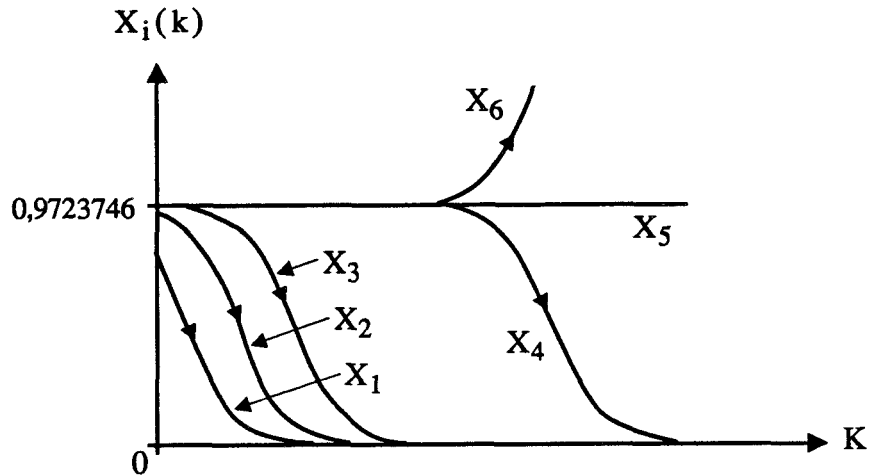


Figure 2.6

## II.7 - CONCLUSION

S'il est vrai que la programmation dynamique offre une condition nécessaire et suffisante d'optimalité globale, nous avons démontré dans la première partie de ce chapitre, qu'avec cette méthode, il n'est généralement pas possible de définir simplement une approche de la commande optimale des systèmes non linéaires sous forme d'une expression analytique de l'état. Ceci nous a conduit à utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Dans le cas des systèmes non linéaires scalaires, nous avons obtenu des équations récurrentes avec lesquelles nous pouvons déterminer une loi de commande quasi-optimale d'un processus dans le cas d'un critère quadratique.

Nous avons proposé une condition suffisante de convergence des solutions de ces équations. Et enfin, nous avons étudié la stabilité des systèmes bouclés selon la loi obtenue, et nous avons indiqué comment déterminer le domaine de stabilité. Il s'avère que la condition de stabilité des systèmes bouclés s'identifie à la condition de convergence des solutions des équations définie précédemment.

## CHAPITRE III

**COMMANDE QUASI-OPTIMALE DES SYSTEMES  
BILINEAIRES VECTORIELS A TEMPS DISCRET**

### **III.1 - POSITION DU PROBLEME**

Pour les systèmes non linéaires discrets, la détermination précise de la commande optimale est encore un problème.

Dans le cas continu, F. Rotella et G. Dauphin-Tanguy [ ROT 88 ] ont proposé une expression analytique du retour d'état pour la commande optimale avec critère quadratique en utilisant le produit de Kronecker ; leur travail s'appuyant sur l'équation de Hamilton-Jacobi.

Dans ce chapitre, nous montrerons d'abord une différence théorique fondamentale entre les systèmes continus et les systèmes discrets. La méthode d'analyse matricielle est ensuite utilisée afin de déterminer la commande optimale des systèmes bilinéaires et nous conduit à un algorithme avec lequel la loi de commande s'exprime par une série vectorielle infinie en fonction du vecteur d'état. Cet algorithme peut facilement être utilisé en temps réel.

### **III.2 - DIFFERENCE FONDAMENTALE ENTRE SYSTEMES CONTINUS ET SYSTEMES DISCRETS**

Il est connu, pour les systèmes à temps continu et stationnaires, que le Hamiltonien reste constant le long d'une trajectoire optimale. De plus, dans le cas où l'un au moins des instants terminaux est libre, le Hamiltonien s'annule. Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer, avec un contre-exemple, que cette conclusion n'est plus valable pour les systèmes discrets.

#### **III.2.1 - Rappel de résultats essentiels sur les systèmes continus**

Etant donné le système suivant :

$$(3.1) \quad \dot{X}(t) = f(X, U, t)$$

où :  $X \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état,  
 $U \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  
 $f$  est une fonction vectorielle de dimension  $n$ ,  
 $t$  est le temps dans l'intervalle  $[t_0, t_1]$ .

et le critère de performance :

$$(3.2) \quad J = \min \left[ \int_{t_0}^{t_1} f_0(X, U, t) dt + g(X(t_1), t_1) \right]$$

On a le Hamiltonien :

$$H(X, U, \lambda, t) = -f_0(X, U, t) + \lambda^T f(X, U, t)$$

où :  $\lambda \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur adjoint.

En vertu du principe du minimum, s'il existe la commande optimale  $U^*(t)$  et la trajectoire optimale  $X^*(t)$ , il existe une variable adjointe  $\lambda^*(t)$  correspondante qui satisfait aux équations adjointes :

$$(3.3) \quad \dot{X}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

$$(3.4) \quad \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial X}$$

Reportant  $U^* = g$  dans l'Hamiltonien, il vient :

$$H = H(X, \lambda, t) \quad \text{soit}$$

$$(3.5) \quad \frac{dH}{dt} = \left( \frac{\partial H}{\partial X} \right)^T \dot{X} + \left( \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^T \dot{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Il vient pour la solution optimale, d'après (3.3) et (3.4) :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^T \dot{X} + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T \dot{\lambda} = \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} - \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T \frac{\partial H}{\partial X} = 0$$

On a donc, le long de la trajectoire optimale :

$$(3.6) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Soit, pour le système stationnaire :

$$(3.7) \quad \frac{dH}{dt} = 0$$

Autrement dit, pour le système stationnaire, l'Hamiltonien est une constante. Dans le cas où l'instant final est libre, la condition de transversalité à l'instant final s'écrit :

$$(3.8) \quad H(t_1) = \frac{\partial g}{\partial t_1} = 0$$

Des relations (3.7) et (3.8), il résulte bien  $H \equiv 0$  pour la solution optimale.

### III.2.2 - Cas des systèmes discrets

Dans ce paragraphe, nous donnons un contre-exemple qui montre que l'égalité (3.7) n'est plus vérifiée pour les systèmes discrets.



Considérons le système suivant :

$$(3.9) \quad X_{k+1} = 0,5 X_k + U_k \quad X_0 = 3$$

et le critère de performance :

$$(3.10) \quad J = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^3 (U_k^2 + X_k^2) \right]$$

L'Hamiltonien s'écrit donc :

$$H_k = -\frac{1}{2} (U_k^2 + X_k^2) + \lambda_{k+1} X_{k+1}$$

Dans le cas sans contrainte, l'annulation de la dérivée de  $H_k$  par rapport à  $U_k$  impliquerait :

$$(3.11) \quad U_k = \lambda_{k+1}$$

Les équations adjointes s'écrivent donc :

$$(3.12) \quad \lambda_k = -X_k + 0,5 \lambda_{k+1}$$

$$(3.13) \quad X_{k+1} = 0,5 X_k + U_k$$

D'où, en reportant (3.11) dans (3.13) :

$$(3.14) \quad X_{k+1} = 0,5 X_k + \lambda_{k+1}$$

Combinant (3.12) et (3.14), on a :

$$(3.15a) \quad X_{k+1} = -0,5 \lambda_k + 1,25 \lambda_{k+1}$$

ou

$$(3.15b) \quad X_k = -0,5 \lambda_{k-1} + 1,25 \lambda_k$$

Remplaçant (3.15) dans les deux membres de (3.14), nous obtenons :

$$(3.16) \quad \lambda_{k+1} - 4,5 \lambda_k + \lambda_{k-1} = 0$$

L'équation (3.16) fournit, avec la connaissance de  $X_0 = 3$  et  $\lambda_4 = 0 = U_3$ , les résultats présentés dans le tableau 3.1.

<b>k</b>	<b>X<sub>k</sub></b>	<b>U<sub>k</sub></b>	<b>H<sub>k</sub></b>
<b>0</b>	3	-0,7966	-5,3776
<b>1</b>	0,7035	-0,1862	-0,2956
<b>2</b>	0,1655	-0,0414	-0,0163
<b>3</b>	0,0414	0	

**Tableau 3.1**

Ceci indique que la propriété fondamentale d'avoir un Hamiltonien pour le cas continu stationnaire à horizon non fixé vérifiant (3.7) n'est plus valable dans le cas discret.

Ce fait nous a obligé à utiliser le principe du minimum au lieu de l'équation de Hamilton-Jacobi, méthode qui rend le calcul plus difficile.

### **III.3 - EQUATIONS RECURRENTEES** **DEFINISSANT LA LOI DE LA COMMANDE**

Considérons le système suivant :

$$(3.17a) \quad X_{k+1} = F X_k + G(X_k) U_k$$

où :  $X_k \in \mathfrak{R}^q$  est le vecteur d'état,  
 $U_k \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur de commande,  
 $F \in \mathfrak{R}^{q \times q}$  est une matrice constante.

et :

$$(3.17b) \quad G(X_k) = G_0 + G_1(X_k)$$

avec :  $G_0 \in \mathfrak{R}^{q \times m}$  une matrice constante, et  
 $G_1(X_k)$  une fonction matricielle de  $X_k$  définie par :

$$(3.17c) \quad G_1(X_k) = \begin{bmatrix} G_{11} X_k & \vdots & \dots & \vdots & G_{1m} X_k \end{bmatrix}$$

expression dans laquelle les  $G_{1i} \in \mathfrak{R}^{q \times q}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont des matrices constantes.

Le problème consiste à déterminer la séquence de commande  $\{ U_k \}$  qui minimise le critère :

$$(3.18) \quad J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k)$$

où :  $Q \in \mathfrak{R}^{q \times q}$  est une matrice symétrique et non négative,  
 $R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  est une matrice symétrique positive.

L'Hamiltonien de ce problème de commande optimale est donc :

$$H^k = \frac{1}{2} (X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k) + P_{k+1}^T (F X_k + G(X_k) U_k)$$

où :  $P_{k+1} \in \mathcal{R}^{q \times 1}$  est le vecteur adjoint.

Selon (1.24a), (1.25) nous avons des équations adjointes :

$$(3.19) \quad P_k = H_{X_k}^k = Q X_k + F^T P_{k+1} + (I \otimes P_{k+1}^T) \frac{\partial G_1(X_k)}{\partial X_k} U_k$$

$$(3.20) \quad X_{k+1} = H_{P_{k+1}}^k = F X_k + G(X_k) U_k$$

En l'absence de contrainte et en annulant :

$$H_{U_k}^k = R U_k + G^T(X_k) P_{k+1}$$

nous obtenons la commande :

$$(3.21) \quad U_k^* = -R^{-1} G^T(X_k) P_{k+1}$$

Considérons maintenant l'équation (3.19) dans laquelle :

$$\frac{\partial G_1(X_k)}{\partial X_k} = \left[ \frac{\partial(G_{11} X_k)}{\partial X_k} \vdots \dots \vdots \frac{\partial(G_{1m} X_k)}{\partial X_k} \right]$$

D'après (1.24c), il vient :

$$(3.22) \quad \frac{\partial G_1(X_k)}{\partial X_k} = \left[ cs G_{11} \vdots \dots \vdots cs G_{1m} \right]$$

En reportant (3.22) dans (3.19), on a :

$$\begin{aligned}
 P_k &= QX_k + F^T P_{k+1} + \left( I \otimes P_{k+1}^T \right)_q \left[ \text{cs } G_{11} \vdots \dots \vdots \text{cs } G_{1m} \right] U_k \\
 &= QX_k + F^T P_{k+1} + \left[ \left( I \otimes P_{k+1}^T \right)_q \text{cs } G_{11} \vdots \dots \vdots \left( I \otimes P_{k+1}^T \right)_q \text{cs } G_{1m} \right] U_k
 \end{aligned}$$

Il vient, d'après (1.10) :

$$P_k = QX_k + F^T P_{k+1} + \left[ \text{cs} \left( P_{k+1}^T G_{11} \right) \vdots \dots \vdots \text{cs} \left( P_{k+1}^T G_{1m} \right) \right] U_k$$

où les  $P_{k+1}^T G_{1i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont des vecteurs lignes.

On a donc :

$$P_k = QX_k + F^T P_{k+1} + \left[ G_{11}^T P_{k+1} \vdots \dots \vdots G_{1m}^T P_{k+1} \right] U_k$$

Selon (1.26), il vient :

$$P_k = QX_k + F^T P_{k+1} + \left[ G_{11}^T \vdots \dots \vdots G_{1m}^T \right] \left( I \otimes P_{k+1} \right)_m U_k$$

En reportant (3.21) dans la relation ci-dessus, nous obtenons :

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_k = QX_k + F^T P_{k+1} - \left[ G_{11}^T \vdots \dots \vdots G_{1m}^T \right] \left( I \otimes P_{k+1} \right)_m R^{-1} G_0^T P_{k+1} \\ \quad - \left[ G_{11}^T \vdots \dots \vdots G_{1m}^T \right] \left( I \otimes P_{k+1} \right)_m R^{-1} G_1^T P_{k+1} \end{array} \right.$$

En fait, les équations (3.19) et (3.20) définissent une fonction  $P_{k+1}$  de  $X_k$ , mais malheureusement, il n'est pas toujours possible de trouver cette solution sous forme analytique. Supposons que  $P_{k+1}$  soit une fonction analytique, nous pouvons donc la développer en série infinie de puissance de Kronecker comme suit :

$$(3.24) \quad P_{k+1} = \sum_{t=1}^{\infty} P_t(k) X_k^{[t]}$$

où les  $P_t(k)$  ( $t = 1, 2, \dots$ ) sont des matrices constantes de dimension convenable.

Etudions les termes de (3.24) :

$$\left( I_m \otimes P_{k+1} \right) R^{-1} G_0^T P_{k+1} \quad \text{et} \quad \left( I_m \otimes P_{k+1} \right) R^{-1} G_1^T(X_k) P_{k+1}$$

Nous nous proposons d'établir les résultats suivants :

$$(3.25a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( I_m \otimes P_{k+1} \right) R^{-1} G_0^T P_{k+1} = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left[ \left( R^{-1} G_0^T \right) \otimes I_q \right] \left( P_i(k) \otimes P_j(k) \right) X_k^{[i+j]} \right\} \end{array} \right.$$

et :

$$(3.25b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( I_m \otimes P_{k+1} \right) R^{-1} G_1^T(X_k) P_{k+1} = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left( P_i(k) \otimes I_q \otimes P_j(k) \right) X_k^{[i+j+1]} \right\} \end{array} \right.$$

Les démonstrations de (3.25a) et de (3.25b) sont présentées dans l'Annexe I.

En reportant (3.27a), (3.27a) et (3.27a) dans (3.27a), après un certain rangement (cf Annexe I), nous avons :

$$(3.26) \quad P_k = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i X_k^{[i]}$$

où :

$$(3.27a) \quad \beta_1 = Q + F^T P_1(k)$$

$$(3.27b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_i = F^T P_i(k) - [G_{11}^T \vdots \dots \vdots G_{1m}^T] \left\{ ((R^{-1} G_0^T) \otimes I)_q \right. \\ \cdot \left( \sum_{j=1}^{i-1} P_j(k) \otimes P_{i-j}(k) \right) + \left[ (R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix}) \otimes I_q \right] \cdot \\ \left. \cdot \left[ \sum_{j=1}^{i-2} (P_j(k) \otimes I_q \otimes P_{i-j-1}(k)) \right] \right\} \end{array} \right.$$

(i = 2, 3, ... et en supposant de plus P<sub>0</sub>(k) = 0).

Considérons maintenant l'équation (3.20). D'après (3.21), nous avons :

$$X_{k+1} = F X_k - G(X_k) R^{-1} G^T(X_k) P_{k+1}$$

En reportant (3.24) dans la relation précédente et en remplaçant k par k-1, nous obtenons :

$$X_k = F X_{k-1} - \sum_{t=1}^{\infty} G(X_{k-1}) R^{-1} G^T(X_{k-1}) P_t(k-1) X_{k-1}^{[t]}$$

Des relations (3.27b),  $G(X_{k-1}) = G_0 + G_1(X_{k-1})$ , (1.26) et (1.27), il vient :

$$\left\{ \begin{aligned}
 X_k &= F X_{k-1} - \sum_{t=1}^{\infty} \left\{ G_0 R^{-1} G_0^T P_t(k-1) X_{k-1}^{[t]} + \right. \\
 &+ G_1 \left( I \otimes X_{k-1} \right) R^{-1} G_0^T P_t(k-1) X_{k-1}^{[t]} + \\
 &+ G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \left( I \otimes X_{k-1} \right) P_t(k-1) X_{k-1}^{[t]} + \\
 &\left. + G_1 \left( I \otimes X_{k-1} \right) R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \left( I \otimes X_{k-1} \right) P_t(k-1) X_{k-1}^{[t]} \right\}
 \end{aligned} \right.$$

De la même façon, nous obtenons l'expression suivante (cf le raisonnement de (3.28) dans l'Annexe I) :

$$(3.28) \quad X_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_{k-1}^{[i]}$$

où :

$$(3.29a) \quad \alpha_1 = F - G_0 R^{-1} G_0^T P_1(k-1)$$

$$(3.29b) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \alpha_i &= - \left\{ G_0 R^{-1} G_0^T P_i(k-1) + \left[ G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} + \right. \right. \\
 &+ G_1 \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I \right) \left. \right] \cdot \left( P_{i-1}(k-1) \otimes I \right) + \\
 &\left. + G_1 \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes I \right] \cdot \left( P_{i-2}(k-1) \otimes I \right) \right\}
 \end{aligned} \right.$$



( $i = 2, 3, \dots ; P_0(k-1) = 0$ ).

En reportant (3.24), (3.28) dans les deux membres de (3.26), on obtient une identité de la variable d'état  $X_{k-1}$ . En égalisant les coefficients de même puissance de  $X_{k-1}$ , nous obtenons une suite d'équations aux différences permettant une détermination de  $P_s(k)$  suivant les relations :

$$(3.30) \left\{ \begin{array}{l} P_1(k-1) = (Q + F^T P_1(k)) \cdot (F - G_0 R^{-1} G_0^T P_1(k-1)) = \beta_1 \alpha_1 \\ \\ P_2(k-1) = \beta_2 \alpha_1^{[2]} + \beta_1 \alpha_2 \\ \vdots \\ P_s(k-1) = \beta_1 \alpha_s + \beta_2 \left[ \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1+i_2=s}} \alpha_{i_1} \otimes \alpha_{i_2} \right] + \\ + \beta_3 \left[ \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1+i_2+i_3=s}} \alpha_{i_1} \otimes \alpha_{i_2} \otimes \alpha_{i_3} \right] + \dots + \beta_s \alpha_1^{[s]} \end{array} \right.$$

Nous constatons que (3.30) a à peu près la même forme que (2.18), mais les produits des nombres scalaires intervenant dans (2.18) sont remplacés par des produits de Kronecker, puisque maintenant, les  $\alpha_i$  sont des matrices de dimension  $q \times q^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Il s'agit ici d'un problème à temps inverse. Avec la connaissance des valeurs aux limites  $P_i(0)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), nous pouvons calculer  $P_i(-1)$ ,  $P_i(-2)$ , ..., successivement.

### III.4 - CAS HORIZON INFINI

La suite d'équations (3.30) peut s'écrire sous une forme explicite :

$$\begin{aligned}
 (3.31) \quad & \left. \begin{aligned}
 P_1(k-1) &= \left( I + \beta_1 G_0 R^{-1} G_0^T \right)_q^{-1} F^T P_1(k) F + \\
 &+ \left( I + \beta_1 G_0 R^{-1} G_0^T \right)_q^{-1} Q F = \beta F^T P_1(k) F + \gamma_1 \\
 P_2(k-1) &= \left( I + \beta_1 G_0 R^{-1} G_0^T \right)_q^{-1} F^T P_2(k) \alpha_1^{[2]} + \\
 &+ \left( I + \beta_1 G_0 R^{-1} G_0^T \right)_q^{-1} \left( \beta_2^* \alpha_1^{[2]} + \beta_1 \alpha_2^* \right) = \\
 &= \beta F^T P_2(k) \alpha_1^{[2]} + \gamma_2 \\
 P_3(k-1) &= \beta F^T P_3(k) \alpha_1^{[3]} + \beta \left[ \beta_3^* \alpha_1^{[3]} + \right. \\
 &+ \left. \beta_2 (\alpha_1 \otimes \alpha_2 + \alpha_2 \otimes \alpha_1) + \beta_1 \alpha_3^* \right] = \beta F^T P_3(k) \alpha_1^{[3]} + \gamma_3 \\
 &\vdots \\
 P_s(k-1) &= \beta F^T P_s(k) \alpha_1^{[s]} + \beta \left\{ \beta_1 \alpha_s^* + \beta_2 \left[ \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1+i_2=s}} \alpha_{i_1} \otimes \alpha_{i_2} \right] + \right. \\
 &+ \left. \beta_3 \left[ \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1+i_2+i_3=s}} \alpha_{i_1} \otimes \alpha_{i_2} \otimes \alpha_{i_3} \right] + \dots + \beta_s^* \alpha_1^{[s]} \right\} = \\
 &= \beta F^T P_s(k) \alpha_1^{[s]} + \gamma_s
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

où :

$$(3.32a) \quad \beta = \left( I + \beta_1 G_0 R^{-1} G_0^T \right)_q^{-1}$$

$$(3.32b) \left\{ \begin{aligned} \alpha_s^* &= \alpha_s + G_0 R^{-1} G_0^T P_s(k-1) = - \left\{ \left[ G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \right] + \right. \\ &+ G_1 \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I \right)_q \cdot (P_{s-1}(k-1) \otimes I)_q + \\ &\left. + G_1 \left[ (R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix}) \otimes I \right]_q \cdot (P_{s-2}(k-1) \otimes I)_{q^2} \right\} \end{aligned} \right.$$

( $\alpha_s^*$  ne contient pas  $P_s(k-1)$ ),

$$(3.32c) \left\{ \begin{aligned} \beta_s^* &= \beta_s - F^T P_s(k) = - \left[ G_{11}^T \vdots \dots \vdots G_{1m}^T \right] \left\{ \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I \right)_q \cdot \right. \\ &\cdot \left( \sum_{j=1}^{s-1} P_j(k) \otimes P_{s-j}(k) \right) + \left[ (R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix}) \otimes I \right]_q \cdot \\ &\left. \cdot \left[ \sum_{j=1}^{s-2} (P_j(k) \otimes I \otimes P_{s-j-1}(k)) \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

( $\beta_s^*$  ne comprend plus  $P_s(k)$ ), et :

$$(3.32d) \quad \gamma_1 = \beta Q F$$

$$(3.32e) \left\{ \begin{aligned} \gamma_s &= \beta \left\{ \beta_1 \alpha_s^* + \beta_2 \left[ \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1+i_2=s}} \alpha_{i_1} \otimes \alpha_{i_2} \right] + \right. \\ &\left. + \beta_3 \left[ \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1+i_2+i_3=s}} \alpha_{i_1} \otimes \alpha_{i_2} \otimes \alpha_{i_3} \right] + \dots + \beta_s^* \alpha_1^{[s]} \right\} \end{aligned} \right.$$

$\gamma_s$  est donc une constante par rapport à  $P_s(k-1)$  et  $P_s(k)$ . De fait, la première équation de (3.31) est une équation de Riccati. Nous savons que si la paire  $(F, G_0)$  est commandable et si la paire  $(C, F)$  est observable ( $Q = C^T C$ ), la solution de cette équation converge vers une constante notée  $P_1$  qui est une matrice définie positive. Si les hypothèses de commandabilité et d'observabilité sur  $(F, G_0)$  et  $(C, F)$  sont respectivement remplacées par des hypothèses de stabilité et de détectabilité, on peut montrer que la matrice  $P_1$  devient définie non négative [LAR 77].

En reportant  $P_1$  dans la deuxième équation de (3.31), nous obtenons une équation aux différences de premier ordre de  $P_2(k-1)$  et de  $P_2(k)$ . Nous constatons dans cette équation, qu'en plus du même coefficient de  $P_1(k)$  soit  $(I + \beta_1 G_0 R^{-1} G_0^T)^{-1} F^T$ , qui permet à  $P_2(k)$  d'avoir la même tendance de convergence que  $P_1(k)$ ,  $P_2(k)$  possède un postmultiplicateur  $\alpha_1^{[2]}$ . Dans le paragraphe II.4, nous avons montré la relation  $|\alpha_1| < 1$ , il en résulte que la postmultiplicateur  $\alpha_1^{[2]}$  accélère la convergence de  $P_2(k)$ . C'est-à-dire que si  $P_2(k)$  est convergent quand  $k$  tend vers  $-\infty$ ,  $P_2(k)$  convergera plus rapidement.

Il en est de même pour la variable  $P_s(k)$ ; son postmultiplicateur  $\alpha_1^{[s]}$  lui permet de converger plus vite que les variables précédentes.

Un simple exemple peut être utilisé pour mieux comprendre.

**Exemple 3.1 :**

Soit l'équation de récurrence :

$$P_s(k) = A \cdot P_s(k-1) \cdot C^{s-1} + C$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,6 & 0,45 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,12 \end{bmatrix}$$

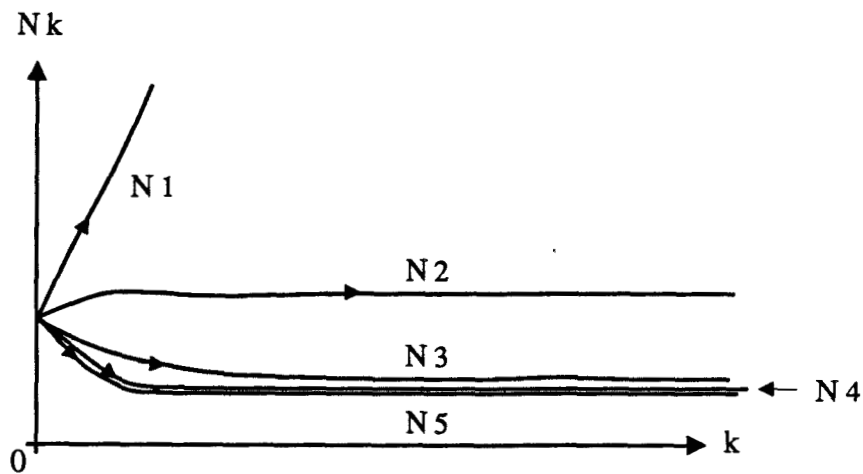
$P_s(k)$  est une matrice carrée de dimension 2

$$\|A\| = 1,4$$

$$\|C\| = 0,5$$

$\|\cdot\|$  signifie la norme scalaire d'une matrice

Si la valeur  $P_s(0)$  est donnée, on peut calculer  $P_s(-1)$ ,  $P_s(-2)$ , ... L'évolution des normes de  $P_s(k)$  est présentée dans la figure 3.1.



*Figure 3.1*

Ainsi, nous remarquons que :

- $P_1(k)$  diverge en raison de  $\|A\| > 1$
- $P_s(k)$  converge pour  $s > 1$
- $P_{s+1}(k)$  converge plus rapidement que  $P_s(k)$

Nous pouvons maintenant résumer l'analyse ci-dessus par le théorème suivant :

**Théorème 3.1 :**

Si la paire  $(F, G_0)$  est commandable et si la paire  $(C, F)$  est observable ( $Q = C^T C$ ), les solutions des équations (3.31) sont convergentes. Plus l'indice  $s$  est grand,

plus  $P_s(k)$  converge rapidement.

Soit  $P_s$  la solution convergente de  $P_s(k)$ . Elle s'écrit :

$$P_s = \lim_{k \rightarrow -\infty} P_s(k) \quad (s = 1, 2, \dots)$$

### III.5 - SYSTEME EN BOUCLE FERMEE

A partir de ces  $P_s$ , selon (3.31), nous obtenons la commande optimale en série infinie de vecteur d'état :

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{aligned} U_k^*(X_k) &= -R^{-1} (G_0 + G_1(X_k))^T \left[ \sum_{i=1}^{\infty} P_i X_k^{[i]} \right] = \\ &= -R^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (G_0^T P_i X_k^{[i]} + G_1^T(X_k) P_i X_k^{[i]}) \right] \end{aligned} \right.$$

Selon (1.27), nous obtenons :

$$(3.34) \quad \left\{ \begin{aligned} U_k^*(X_k) &= -R^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \left( G_0^T P_i X_k^{[i]} + \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \vdots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} (I \otimes X_k)_q P_i X_k^{[i]} \right) = \\ &= -R^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \left( G_0^T P_i X_k^{[i]} + \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \vdots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} (P_i \otimes I)_q X_k^{[i+1]} \right) = \\ &= -R^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} (\nabla_{1,i} X_k^{[i]} + \nabla_{2,i} X_k^{[i+1]}) \end{aligned} \right.$$

où :

$$\nabla_{1,i} = G_0^T P_i \quad \nabla_{2,i} = \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} (P_i \otimes I_q)$$

En reportant (3.34) dans (3.17a), il vient :

$$X_{k+1} = F X_k - \sum_{s=1}^{\infty} (G_0 + G_1(X_k)) R^{-1} (\nabla_{1,s} X_k^{[s]} + \nabla_{2,s} X_k^{[s+1]})$$

D'après (1.27), on a :

$$\left\{ \begin{aligned} X_{k+1} &= F X_k - \sum_{s=1}^{\infty} (G_0 + G_1(I \otimes X_k)) R^{-1} \cdot (\nabla_{1,s} X_k^{[s]} + \nabla_{2,s} X_k^{[s+1]}) \\ &= F X_k - \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ G_0 R^{-1} G_0^T P_s X_k^{[s]} + \right. \\ &\quad + G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} (P_s \otimes I_q) X_k^{[s+1]} + \\ &\quad + G_1(I \otimes X_k) R^{-1} G_0^T P_s X_k^{[s]} + \\ &\quad \left. + G_1(I \otimes X_k) R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} (P_s \otimes I_q) X_k^{[s+1]} \right\} \end{aligned} \right.$$

Compte tenu de la relation (3.35), on a respectivement :

$$\left\{ \begin{aligned} G_1 (I_m \otimes X_k) R^{-1} G_0^T P_s X_k^{[s]} = \\ = G_1 \left\{ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right\} (P_s \otimes I_q) X_k^{[s+1]} \end{aligned} \right.$$

et :

$$\left\{ \begin{aligned} G_1 (I_m \otimes X_k) R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} (P_s \otimes I_q) X_k^{[s+1]} = \\ = G_1 \left\{ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right\} (P_s \otimes I_{q^2}) X_k^{[s+2]} \end{aligned} \right.$$

D'où la relation :

$$\left\{ \begin{aligned} X_{k+1} = F X_k - \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ G_0 R^{-1} G_0^T P_s X_k^{[s]} + \right. \\ \left. + \left[ G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} + G_1 \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) \right] \cdot (P_s \otimes I_q) X_k^{[s+1]} + \right. \\ \left. + G_1 \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right] (P_s \otimes I_{q^2}) X_k^{[s+2]} \right\} \end{aligned} \right.$$



$$\begin{aligned}
 (3.35) \quad X_{k+1} = & \left\{ F - G_0 R^{-1} G_0^T P_1 \right\} X_k \\
 & - \left\{ G_0 R^{-1} G_0^T P_2 + \left[ G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \right] + \right. \\
 & \left. + G_1 \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) \right\} (P_1 \otimes I_q) \left. \right\} X_k^{[2]} \\
 & - \left\{ G_0 R^{-1} G_0^T P_3 + \left[ G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \right] + \right. \\
 & \left. + G_1 \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) \right\} (P_2 \otimes I_q) + \\
 & + G_1 \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right] (P_1 \otimes I_{q^2}) \left. \right\} X_k^{[3]} \\
 & - \dots \\
 & = \sum_{s=1}^{\infty} C_s X_k^{[s]}
 \end{aligned}$$

où :

$$(3.36a) \quad C_1 = F - G_0 R^{-1} G_0^T P_1$$

et :

$$(3.36b) \left\{ \begin{aligned} C_s = & - \left\{ G_0 R^{-1} G_0^T P_s + \left[ G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \right] + \right. \\ & + G_1 \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) \left( P_{s-1} \otimes I_q \right) + \\ & \left. + G_1 \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right] \left( P_{s-2} \otimes I_{q^2} \right) \right\} \end{aligned} \right.$$

(s = 2, 3, ..., et en supposant P<sub>0</sub> = 0).

En effet, il est suffisant, en pratique, de tronquer U<sub>k</sub><sup>\*</sup> (X<sub>k</sub>).

Il en résulte une commande quasi-optimale définie par la relation suivante :

$$(3.37) \quad U_k^s(X_k) = -R^{-1} \sum_{t=1}^s \left( \nabla_{1,t} X_k^{[t]} + \nabla_{2,t} X_k^{[t+1]} \right)$$

qui donne (3.35) sous la forme :

$$X_{k+1} = \sum_{t=1}^{s+2} C_t X_k^{[t]}$$

Soit, tout simplement :

$$(3.38) \quad X_{k+1} = \sum_{t=1}^s C_t X_k^{[t]}$$

En apparence, la relation (3.38) prend la même forme que la relation (2.30),

mais (3.38) est un polynôme de  $X_k$  en puissance de Kronecker. A l'aide de la formule (1.21), la relation (3.38) peut se réécrire comme suit :

$$(3.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{k+1} = C_1 X_k + C_2 (X_k \otimes I_q) X_k + \dots + \\ + C_s (X_k^{[s-1]} \otimes I_q) X_k = A(X_k, s) X_k \end{array} \right.$$

où :

$$A(X_k, s) = C_1 + C_2 (X_k \otimes I_q) + \dots + C_s (X_k^{[s-1]} \otimes I_q)$$

qui est une matrice carrée d'ordre  $q$  dont les éléments sont des polynômes de  $X_k$ .

Généralement, comme une condition suffisante, si  $\|A(X_k, s)\| < 1$ , le système en boucle fermée (3.39) converge. Mais pour le système vectoriel, il est difficile de déterminer le domaine de stabilité. Pour cela, nous conseillons d'utiliser la méthode présentée dans [BOR 72] [BOR 76].

### III.6 - EXEMPLE D'APPLICATION

#### III.6.1 - Calcul de $P_s$

##### Exemple 3.2 :

Envisageons maintenant le système bilinéaire décrit par l'équation suivante :

$$(3.40) \quad X_{k+1} = F X_k + G(X_k) U_k$$

où :  $X_k$  est le vecteur d'état d'ordre 2,  
 $U_k$  est le vecteur de commande d'ordre 2.

$$F = \begin{bmatrix} 1,2 & 2,3 \\ 3,2 & -4,2 \end{bmatrix} \quad G(X_k) = G_0 + G_1(X_k)$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} 8,4 & 5,76 \\ -11,04 & 3,6 \end{bmatrix} \quad G_1(X_k) = [G_{11}X_k \quad \vdots \quad G_{12}X_k]$$

et :

$$G_1 = [G_{11} \quad \vdots \quad G_{12}] = \begin{bmatrix} -2,0 & 4,5 & 3,2 & 2,1 \\ 2,4 & -1,6 & -2,4 & 3,4 \end{bmatrix}$$

Le problème consiste à trouver la séquence de commande  $\{U_k\}$  qui minimise le critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k)$$

avec :

$$Q = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix}$$

Comme il est indispensable d'avoir des  $P_s$  pour obtenir  $\{U_k\}$ , dans cet exemple, nous nous concentrons donc sur le calcul de  $P_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ). En vertu de la première équation de (3.31), nous avons la solution convergée :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,0564926 & -0,0080094 \\ 0,0497952 & -0,0217486 \end{bmatrix}$$

En la reportant dans la deuxième équation de (3.31), nous obtenons  $P_2(k)$  présenté dans le tableau 3.2.

<b>k</b>	<b><math>P_2(k)</math></b>			
<b>-1</b>	<i>-0,0199191</i>	<i>-0,0623309</i>	<i>0,0036110</i>	<i>-0,0020865</i>
	<i>-0,0079180</i>	<i>-0,0359203</i>	<i>-0,0052916</i>	<i>0,0031339</i>
<b>-2</b>	<i>-0,0200247</i>	<i>-0,0623076</i>	<i>0,0036375</i>	<i>-0,0020923</i>
	<i>-0,0079869</i>	<i>-0,0359085</i>	<i>-0,0052743</i>	<i>0,0031310</i>
<b>-3</b>	<i>-0,0200248</i>	<i>-0,0623076</i>	<i>0,0036375</i>	<i>-0,0020923</i>
	<i>-0,0079869</i>	<i>-0,0359085</i>	<i>-0,0052743</i>	<i>0,0031310</i>
<b>-4</b>	<i>-0,0200248</i>	<i>-0,0623076</i>	<i>0,0036375</i>	<i>-0,0020923</i>
	<i>-0,0079869</i>	<i>-0,0359085</i>	<i>-0,0052743</i>	<i>0,0031310</i>
<b>-5</b>	<i>-0,0200248</i>	<i>-0,0623076</i>	<i>0,0036375</i>	<i>-0,0020923</i>
	<i>-0,0079869</i>	<i>-0,0359085</i>	<i>-0,0052743</i>	<i>0,0031310</i>

**Tableau 3.2**

Nous constatons sur ce tableau, qu'il n'y a pas de différence entre les valeurs de  $P_2(k)$  lorsque  $k = 2$  et  $k = 3$ . Prenons  $P_2(5)$  comme la solution convergée de  $P_2(k)$  et remplaçons  $P_1, P_2$  dans la troisième équation de (3.31), nous avons  $P_3(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Ainsi de suite, nous avons progressivement les  $P_4(k), P_5(k), \dots$ . Au lieu d'exposer toutes les valeurs numériques de  $P_s(k)$ , nous donnons dans le tableau 3.3, les normes de  $P_s(k)$  ( $s = 1, 2, \dots, 5$ ), avec lesquelles nous voyons l'évolution de  $P_s(k)$ .

k	Normes de $P_s(k)$ ( $s = 1, 2, \dots, 5$ )				
-1	0,0780714	0,0750101	0,0607543	0,0478703	0,0362508
-2	0,0780714	0,0750212	0,0608022	0,0479295	0,0362987
-3	0,0780714	0,0750212	0,0608022	0,0479295	0,0362987
-4	0,0780714	0,0750212	0,0608022	0,0479295	0,0362987
-5	0,0780714	0,0750212	0,0608022	0,0479295	0,0362987

*Tableau 3.3*

Le résultat montre qu'après  $k = 2$ ,  $P_s(k)$  converge vers sa limite. La simulation montre aussi que  $G_0$  exerce une influence importante sur la convergence de  $P_s(k)$ . Généralement, plus la norme de  $G_0$  est grande, plus les  $P_s(k)$  convergent rapidement.

Prenons par exemple :

$$G_0 = \begin{bmatrix} 3,1 & 2,1 \\ -4,1 & 1,3 \end{bmatrix}$$

dont la norme (= 5,64) est plus petite que celle de  $G_0$  précédente ; les normes de  $P_s(k)$  présentées dans le tableau 3.4 montrent que  $P_s(k)$  converge après le troisième pas.

Lorsque les normes de  $F$  et de  $G_1$  augmentent, la convergence de  $P_s(k)$  se détériore.

<b>k</b>	<b>Normes de <math>P_s(k)</math> (<math>s = 1, 2, \dots, 5</math>)</b>				
<b>-1</b>	0,2814784	0,6363171	0,6623152	0,689583	0,357189
<b>-2</b>	0,2814784	0,6394005	0,7526214	0,246439	0,33332
<b>-3</b>	0,2814784	0,6394227	0,7529214	0,247902	0,337738
<b>-4</b>	0,2814784	0,6394227	0,7529223	0,247907	0,337753
<b>-5</b>	0,2814784	0,6394227	0,7529223	0,247907	0,337753

*Tableau 3.4*

### III.6.2 - Détermination de la loi de commande

**Exemple 3.3 :**

Considérons encore le système (3.40) mais avec :

$$G_0 = \begin{bmatrix} 5,6 & 3,84 \\ -7,36 & 2,4 \end{bmatrix}$$

A partir des solutions convergées des équations (3.31)  $P_s$ , essayons à présent de trouver la loi de commande  $\{U_k\}$ . Prenons dans la relation (3.34) :

$$s = 5 \quad X_0 = \begin{bmatrix} -0,3 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

nous avons :

$$U(X_k) = -R^{-1} \sum_{t=1}^5 \left( \nabla_{1,t} X_k^{[t]} + \nabla_{2,t} X_k^{[t+1]} \right)$$

où :

$$\nabla_{1,t} = G_0^T P_t \quad \nabla_{2,t} = \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \dots \\ rsG_{1m} \end{bmatrix} (P_t \otimes I_q)$$

En reportant ce  $U(X_k)$  dans le système (3.17a), nous obtenons le vecteur d'état  $X_{k+1}$  et ainsi le critère de performance  $J$ . Les résultats sont donnés respectivement dans les tableaux 3.5, 3.6 et 3.7. Au point de vue du critère  $J$ , nous conseillons de prendre  $s = 3$ .

k	La commande $U_s(k)$ ( $s = 1, 2, \dots, 5$ )				
1	-0,1538752 0,2680717	-0,1276505 0,2178513	-0,1372175 0,2139852	-0,1311708 0,2181163	-0,1336351 0,2171993
2	-0,1856436 0,0759305	0,0390901 -0,0226426	-0,0141439 0,0391014	0,0159310 -0,0026865	0,0021222 0,0130905
3	-0,1384326 0,1679996	-0,0007791 -0,0012194	0,0007517 0,0025817	-0,0002594 0,0000020	0,0001575 0,0009573
4	-0,0984118 0,0142038	-0,0000065 -0,0000943	0,0000264 0,0001897	0,0000036 -0,0000030	0,0000114 0,0000686
5	-0,0479924 0,0635996	-0,0000013 -0,0000066	0,0000023 0,0000135	-0,925 E-07 -0,168 E-06	0,818 E-06 0,0000049
6	-0,0121625 0,0091212	-0,771 E-07 -0,477 E-06	0,160 E-06 0,969 E-06	-0,111 E-08 -0,128 E-07	0,586 E-07 0,352 E-06
7	-0,0002336 0,0006041	-0,572 E-08 -0,341 E-07	0,116 E-07 0,693 E-07	-0,167 E-09 -0,903 E-09	0,419 E-08 0,252 E-07
8	0,0000102 0,0000411	-0,406 E-09 -0,244 E-08	0,827 E-09 0,496 E-08	-0,105 E-10 -0,648 E-10	0,300 E-09 0,180 E-08

Tableau 3.5



<b>k</b>	<b>La variable d'état <math>X_s(k)</math> (<math>s = 1, 2, \dots, 5</math>)</b>				
<b>1</b>	0,0006483 0,3591065	0,0217438 -0,0626545	-0,0614986 0,0031258	-0,0031401 -0,0317497	-0,0243136 -0,0144932
<b>2</b>	-0,1636453 0,2413638	0,0026267 0,0026476	-0,0050424 -0,0036361	0,0001349 0,0005597	-0,0018110 -0,0010900
<b>3</b>	0,0301712 0,1963480	0,0001738 0,0000880	-0,0003567 -0,0002059	0,0000036 -0,0000054	-0,0001301 -0,0000786
<b>4</b>	-0,0825448 0,0625305	0,0000127 0,0000079	-0,0000257 -0,0000157	0,352 E-06 0,332 E-06	-0,0000093 -0,0000056
<b>5</b>	-0,0096440 0,0195221	0,902 E-06 0,541 E-06	-0,0000018 -0,0000011	0,237 E-07 0,124 E-07	-0,667 E-06 -0,403 E-06
<b>6</b>	-0,0009672 0,0000310	0,646 E-07 0,391 E-07	-0,131 E-06 -0,794 E-07	0,172 E-08 0,107 E-08	-0,477 E-07 -0,288 E-07
<b>7</b>	-0,0000797 -0,0000544	0,463 E-08 0,279 E-08	-0,941 E-08 -0,568 E-08	0,123 E-09 0,737 E-10	-0,342 E-08 -0,206 E-08
<b>8</b>	-567,11916 -328,98313	0,0331120 0,0200069	-0,0673429 -0,0406875	0,0008794 0,0005321	-0,0244464 -0,0147697
	x 1,0 E-08				

**Tableau 3.6**

k	Le critère de performance $J_s(k)$ ( $s = 1, 2, \dots, 5$ )				
1	0,1779946	0,0367584	0,0344600	0,0338602	0,0333346
2	0,2643941	0,0374592	0,0354558	0,0339283	0,0334417
3	0,3252180	0,0374603	0,0354601	0,0339284	0,0334423
4	0,3357586	0,0374603	0,0354601	0,0339284	0,0334423
5	0,3391982	0,0374603	0,0354601	0,0339284	0,0334423
6	0,3392857	0,0374603	0,0354601	0,0339284	0,0334423
7	0,3392859	0,0374603	0,0354601	0,0339284	0,0334423
8	0,3392859	0,0374603	0,0354601	0,0339284	0,0334423

**Tableau 3.7**

**III.6.3 - Stabilité du système en boucle fermée**

**Exemple 3.4 :**

Prenons à nouveau le système (3.40). Au lieu de chercher la séquence de la commande  $\{ U_k \}$ , nous calculons directement dans cet exemple, la variable d'état du système en boucle fermée  $X_{k+1}$  selon la relation (3.39) et étudions l'évolution de  $X_{k+1}$  en fonction de la valeur initiale  $X_0$ .

Les résultats illustrés dans les figures 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5 confirment que, lorsque la norme de  $A(X_{k,s})$  de (3.39) est inférieure à 1,  $X_{k+1}$  converge.

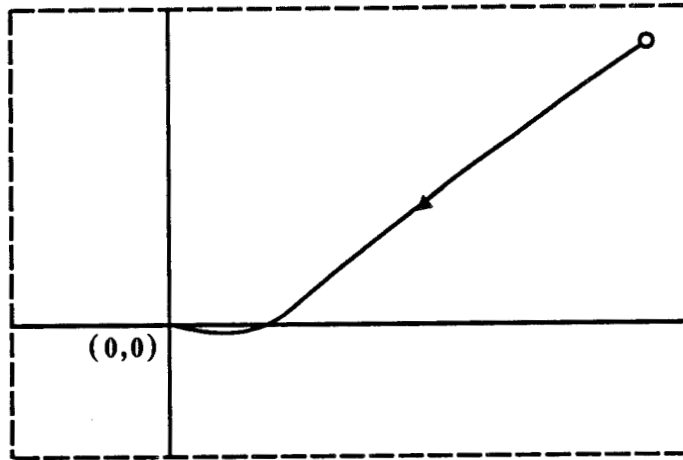


Figure 3.2

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1,278 \\ -0,32 \end{bmatrix} \quad A(X_{k,s}) = \begin{bmatrix} 0,0502542 & -0,0260436 \\ 0,1073542 & -0,0852119 \end{bmatrix}$$

$$\text{Norme de } A(X_{k,s}) = 0,1479487$$

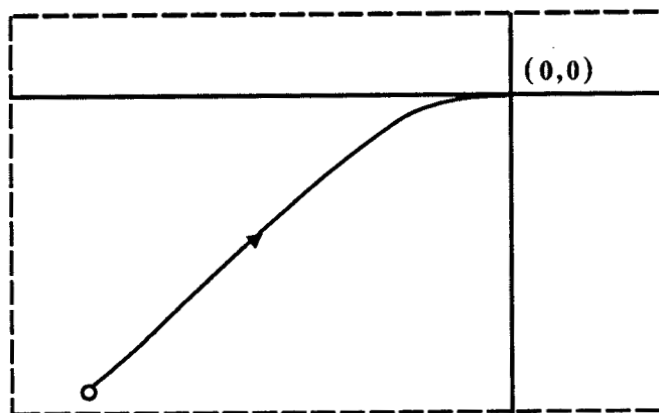
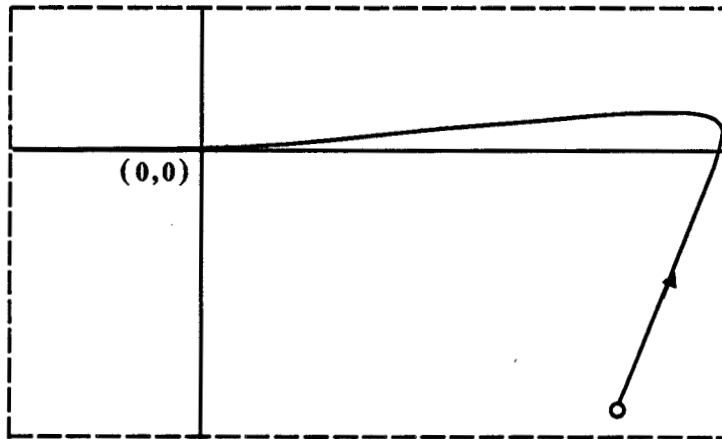


Figure 3.3

$$X_0 = \begin{bmatrix} -1,2 \\ 0,4 \end{bmatrix} \quad A(X_{k,s}) = \begin{bmatrix} 0,1195602 & 0,1965498 \\ 0,0838878 & 0,0688567 \end{bmatrix}$$

$$\text{Norme de } A(X_{k,s}) = 0,2522574$$



*Figure 3.4*

$$X_0 = \begin{bmatrix} -0,6 \\ 0,9 \end{bmatrix} \quad A(X_{k,s}) = \begin{bmatrix} 0,1036110 & 0,0692926 \\ 0,0674473 & 0,0252919 \end{bmatrix}$$

$$\text{Norme de } A(X_{k,s}) = 0,1432484$$

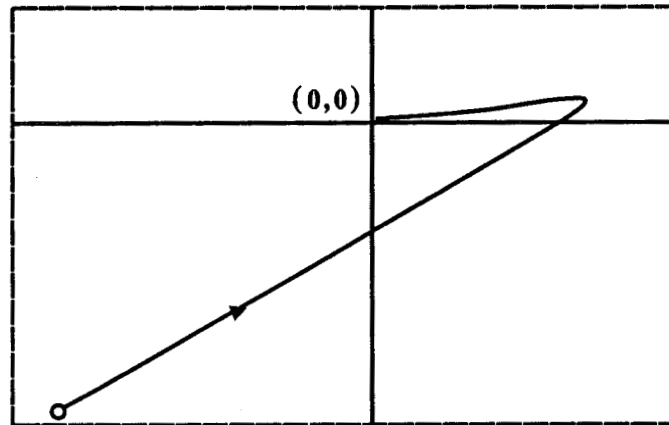


Figure 3.5

$$X_0 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,88 \end{bmatrix} \quad A(X_{k,s}) = \begin{bmatrix} 0,1004543 & 0,0566974 \\ 0,0645319 & 0,0181066 \end{bmatrix}$$

$$\text{Norme de } A(X_{k,s}) = 0,1326861$$

En revanche, si  $\|A(X_{k,s})\| > 1$ ,  $X_{k+1}$  diverge comme le montre le résultat suivant :

$$X_0 = \begin{bmatrix} -0,95 \\ -0,85 \end{bmatrix} \quad A(X_{k,s}) = \begin{bmatrix} 0,5863829 & 0,9810934 \\ 0,2650311 & 0,3304890 \end{bmatrix}$$

$$\text{Norme de } A(X_{k,s}) = 1,2177421 \quad X(5) = \begin{bmatrix} -22997052 \\ -7749022,2 \end{bmatrix}$$

### **III.7 - CONCLUSION**

Au début de ce chapitre, nous avons montré un exemple mettant en évidence une différence entre processus continus et processus discrets concernant une propriété fondamentale du Hamiltonien.

En effet si, pour les systèmes stationnaires à temps continu, le Hamiltonien reste constant, il n'en est pas de même dans le cas discret. Cette différence nous a forcé à développer notre étude à partir des équations adjointes, compliquant nettement la résolution du problème posé comparativement au cas continu. Cependant, pour les systèmes bilinéaires vectoriels, nous avons établi les équations itératives permettant de déterminer la loi de commande. La commande obtenue est en fait quasi-optimale, mais elle peut approcher la commande optimale effective avec la précision désirée.

Des exemples, présentés à la fin de ce chapitre, montrent la convergence rapide des solutions des équations itératives et la stabilité des systèmes bouclés.

## CHAPITRE IV

**COMMANDE QUASI-OPTIMALE DES SYSTEMES**  
**NON-LINEAIRES VECTORIELS**



#### IV.1 - POSITION DU PROBLEME

Les modèles de processus étudiés se présentent sous la forme non linéaire suivante :

$$(4.1) \quad X_{k+1} = F(X_k) + G(X_k) \cdot U_k$$

où :  $X_k \in \mathfrak{R}^{q \times 1}$  est le vecteur d'état,  
 $U_k \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$  est le vecteur de commande.

$$(4.2) \quad F(X_k) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i X_k^{[i]}$$

$F_i$  : matrice constante de dimension  $q \times q^i$ .

$$(4.3a) \quad G(X_k) = \left[ G_1(X_k) \begin{array}{c} \vdots \\ G_2(X_k) \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ G_m(X_k) \end{array} \right]$$

et

$$(4.3b) \quad G_{\tau}(X_k) = \sum_{j=0}^{\infty} G_{\tau j} X_k^{[j]}$$

$(\tau = 1, 2, \dots, m)$ ,

$G_{\tau j}$  : matrice constante de dimension  $q \times q^j$ .

Comme précédemment, le critère de performance s'écrit sous la forme quadratique :

$$(4.4) \quad J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k)$$

Dans laquelle  $Q$  est une matrice constante symétrique non négative d'ordre  $q \times q$  et  $R$  est une matrice constante symétrique positive de dimension  $m \times m$ . De même que dans les chapitres II et III, le problème consiste à déterminer la séquence des commandes optimales  $\{U_k\}$  qui minimise le critère (4.4) compte-tenu des contraintes égalités (4.1), pour  $k = 1, 2, \dots, N-1$ .

#### IV.2 - LOI DE LA COMMANDE OPTIMALE

Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{1}{2} (X_k^T Q X_k + Q_k^T R Q_k) + P_{k+1}^T (F(X_k) + G(X_k) U_k)$$

où :  $P_{k+1} \in \mathfrak{R}^{q \times 1}$  est le vecteur adjoint.

Le minimum a lieu lorsque la dérivée du Hamiltonien par rapport à  $U_k$  s'annule :

$$R U_k + G^T(X_k) P_{k+1} = 0$$

ce qui donne :

$$(4.5) \quad U_k = -R^{-1} G^T(X_k) P_{k+1}$$

soit les équations adjointes :

$$(4.6) \quad X_{k+1} = F(X_k) + G(X_k) U_k$$

et

$$(4.7) \quad P_k = Q X_k + \left( I_q \otimes P_{k+1}^T \right) \left[ \frac{\partial F(X_k)}{\partial X_k} + \frac{\partial G(X_k)}{\partial X_k} U_k \right]$$

Afin de ne pas alourdir l'exposé, la démonstration des résultats est reportée dans l'annexe II.

Nous donnons donc les résultats de (4.6) et de (4.7) comme suit :

$$(4.8) \quad X_k = \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\mu} X_{k-1}^{[\mu]}$$

où :

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\mu} = F_{\mu} - \sum_{t=1}^{\mu} \left\{ \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=\mu-t}}^{\mu} [G_{1i} \cdots G_{mi}] \right. \\ \left. \cdot \left[ (R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \cdots \\ \vdots \\ rsG_{mj} \end{bmatrix}) \otimes I_{q^i} \right] \right\} (P_t(k-1) \otimes I_{q^{i+j}}) \end{array} \right.$$

( $\mu = 1, 2, \dots ; P_0(k-1) = 0$ ).

$$(4.10) \quad P_k = \sum_{\mu=1}^{\infty} \beta_{\mu} X_k^{[\mu]}$$

avec :

$$(4.11) \quad \beta_1 = Q + F_1^T P_1(k)$$

$$(4.12) \quad \beta_{\mu} = \sum_{i=1}^q e^i (\beta_{\mu,1} - \beta_{\mu,2}) \left( e^i \otimes I_{q^{\mu}} \right)$$

où :

$$(4.13) \quad \beta_{\mu,1} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{t=1}^{\mu-1} \sum_{v=0}^{i-1} rs (E F_i^T P_t(k))$$

$$(4.14) \quad \beta_{\mu,2} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=0}^{\mu} \sum_{s=1}^{\mu} \sum_{t=1}^{\mu} \sum_{v=0}^{i-1} rs (E \cdot G)$$

avec :

$$(4.15) \quad E = E^{q^v \times q} \otimes I_{q^{(i-1-v)}}$$

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = I_{q^i} \otimes \left\{ \left[ G_{1i}^T \vdots \dots \vdots G_{mi}^T \right] \right. \\ \left. \cdot \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{1j} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{mj} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right] \right\} \left( I_{q^j} \otimes P_s \otimes P_t \right) \end{array} \right.$$

En reportant l'expression de  $X_k$  définie par l'équation (4.8) dans la relation (4.10) définissant  $P_k$ , on obtient, en identifiant les termes de même puissance de  $X_{k-1}$ , un ensemble d'équations de récurrence relatif aux valeurs des  $P_s(k)$  :

$$(4.17) \left\{ \begin{array}{l} P_1(k-1) = (Q + F_1^T P_1(k)) \left\{ F_1 - \begin{bmatrix} G_{10} \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ G_{m0} \end{bmatrix} \right. \\ \left. \cdot R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{10} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{m0} \end{bmatrix} P_s(k-1) \right\} = \beta_1 \alpha_1 \\ P_2(k-1) = \beta_2 \alpha_1^{[2]} + \beta_1 \alpha_2 \\ \vdots \\ P_s(k-1) = \beta_s \alpha_1^{[s]} + \beta_2 \left[ \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1+i_2=s}}^{s-1} \alpha_{i_1} \otimes \alpha_{i_2} \right] + \\ + \beta_3 \left[ \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1+i_2+i_3=s}}^{s-1} \alpha_{i_1} \otimes \alpha_{i_2} \otimes \alpha_{i_3} \right] + \dots + \beta_1 \alpha_s \end{array} \right.$$

#### IV.3 - COMPATIBILITE DES RESULTATS ENTRE LES SYSTEMES BILINEAIRES ET NON LINEAIRES

Le modèle bilinéaire (3.17a) est un cas particulier du modèle non linéaire (4.1) avec  $i = 1, j = 0, 1$ . Par conséquent, le résultat (4.17) doit être compatible avec la relation (3.30).

Au lieu de montrer la compatibilité de (4.17) avec (3.30), nous pouvons indiquer également la compatibilité des  $\beta_\mu$  de (4.12), des  $\alpha_\mu$  de (4.9) avec respectivement les  $\beta_j$  de (3.27) et les  $\alpha_i$  de (3.29). Etudions d'abord les relations (4.11) et (4.12).

$\beta_1$  de (4.11) est évidemment identique à  $\beta_1$  de (3.27a). Prenons maintenant, pour  $\beta_\mu$  et  $\beta_{\mu,1}, \beta_{\mu,2}$  de (4.13) et de (4.14),  $i = 1, j = 0, 1$ . Dans ce cas, selon la relation

$i + t = \mu + 1$ , nous avons tout de suite  $t = \mu$ , il vient ainsi :

$$\beta_{\mu,1} = 0$$

Le même raisonnement conduit à :

$$(4.18) \left\{ \begin{aligned} \beta_{\mu,2} = & rs \left\{ \left[ \begin{array}{c} G_{11}^T \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ G_{m1}^T \end{array} \right] \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left[ \sum_{s=1}^{\mu-1} P_s(k-1) \otimes P_{\mu-s}(k-1) \right] + \\ & + \left[ \begin{array}{c} G_{11}^T \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ G_{m1}^T \end{array} \right] \cdot \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{m1} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right] \cdot \\ & \cdot \left. \left[ \sum_{s=1}^{\mu-2} I_q \otimes P_s(k-1) \otimes P_{\mu-s}(k-1) \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

En reportant  $\beta_{\mu,1}$ ,  $\beta_{\mu,2}$  ci-dessus dans  $\beta_{\mu}$ , il vient :

$$(4.19) \left\{ \begin{aligned} \beta_{\mu} = & F_1^T P_{\mu}(k) - \sum_{\omega=1}^q e^{\omega} \cdot \\ & \cdot \left\{ rs \left[ \begin{array}{c} G_{11}^T \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ G_{m1}^T \end{array} \right] \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left[ \sum_{s=1}^{\mu-1} P_s(k) \otimes P_{\mu-s}(k) \right] + \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{m1} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right] \cdot \\ & \cdot \left. \left[ \sum_{s=1}^{\mu-2} P_s(k) \otimes I_q \otimes P_{\mu-s-1}(k) \right] \right\} \cdot \left( e^{\omega} \otimes I_{q^{\mu-1}} \right) \end{aligned} \right.$$

En utilisant la formule [ VET 73 ] :

$$rs^{-1} \left\{ \begin{matrix} rs & A \\ 1 \times pq & \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} A \\ p \times q \end{matrix} = \sum_{k=1}^p e^k \begin{matrix} (rs A) \\ p \end{matrix} \left( \begin{matrix} e^k & \\ & I \\ p & q \end{matrix} \right)$$

on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{\mu} &= F_1^T P_{\mu}(k) - [ G_{11}^T \vdots \dots \vdots G_{m1}^T ] \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) \\ &\cdot \left[ \sum_{s=1}^{\mu-1} P_s(k) \otimes P_{\mu-s}(k) \right] + \left[ (R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \dots \\ rsG_{m1} \end{bmatrix}) \otimes I_q \right] \\ &\cdot \left[ \sum_{s=1}^{\mu-2} P_s(k) \otimes I_q \otimes P_{\mu-s-1}(k) \right] \end{aligned} \right.$$

Nous retrouvons ainsi la correspondance de  $\beta_{\mu}$  avec (3.27b) en remplaçant  $F_1$  par  $F$ .

Examinons maintenant le paramètre  $\alpha_{\mu}$  de (4.9) aux conditions :  $i = 1, j = 0, 1$ , il vient d'après (4.9) :

$$\alpha_1 = F_1 - G_0 R^{-1} G_0^T P_1(k-1)$$

et :

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{\mu} = & - \left\{ G_0 R^{-1} G_0^T P_{\mu}(k-1) + \right. \\ & + \left[ G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \dots \\ rsG_{m1} \end{bmatrix} \right] + \\ & + G_1 \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) \cdot \left[ P_{\mu-1}(k-1) \otimes I_q \right] + \\ & \left. + G_1 \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \dots \\ \dots \\ rsG_{m1} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right] \cdot \left[ P_{\mu-2}(k-1) \otimes I_{q^2} \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

(avec :  $\mu = 2, 3, \dots ; P_0(k-1) = 0$ )

Ces résultats s'ajustent évidemment à (3.29). Ainsi, nous pouvons conclure, en fonction du résultat ci-dessus, que les équations (4.17) sont compatibles avec les équations (3.30).

#### IV.4 - CALCUL DE $P_s(k)$

Afin de mettre en pratique le calcul de  $P_s(k)$ , les équations (4.17) peuvent se modifier en forme plus explicite. Nous constatons tout d'abord, d'après (4.3b), que  $G_{\tau 0}$  ( $\tau = 1, 2, \dots, m$ ) est un vecteur colonne de dimension  $q$  ; ainsi :

$$\left[ G_{10} \begin{array}{c} \vdots \\ \dots \\ \vdots \end{array} \dots \begin{array}{c} \vdots \\ \dots \\ \vdots \end{array} G_{m0} \right] \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} rsG_{10} \\ \dots \\ \dots \\ rsG_{m0} \end{bmatrix}$$



peuvent s'écrire respectivement  $G_0$  et  $G_0^T$ .  $G_0$  est une matrice de dimension  $q \times m$ ,  $G_0^T$  signifie la transposée de  $G_0$ , d'où :

$$\alpha_1 = F_1 - G_0 R^{-1} G_0^T P_1(k-1)$$

Nous obtenons donc les équations de récurrence de  $P_s(k)$ , telle que :

$$(4.20) \left\{ \begin{array}{l} P_1(k-1) = \left[ I_q + \beta_1 G_0 R^{-1} G_0^T \right]^{-1} F_1^T P_1(k) F_1 + \\ \quad + \left[ I_q + \beta_1 G_0 R^{-1} G_0^T \right]^{-1} Q F_1 \\ \quad = \beta F_1^T P_1(k) F_1 + \beta Q F_1 \\ P_2(k-1) = \beta F_1^T P_2(k) \alpha_1^{[2]} + \beta \left[ \beta_1 \alpha_1^* + \beta_2 \alpha_1^{[2]} \right] \\ \quad \vdots \\ P_s(k-1) = \beta F_1^T P_s(k) \alpha_1^{[s]} + \\ \quad + \beta \left\{ \beta_1 \alpha_s^* + \beta_2 \left[ \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1+i_2=s}} \alpha_{i_1} \otimes \alpha_{i_2} \right] + \beta_s \alpha_1^{[s]} \right\} \end{array} \right.$$

où :

$$(4.21) \quad \beta = \left[ I_q + \beta_1 G_0 R^{-1} G_0^T \right]^{-1}$$

$$(4.22) \left\{ \begin{aligned} \alpha_s^* &= F_s - \sum_{t=1}^{s-1} \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=s-1-t}}^{s-1} [G_{1i} \vdots \dots \vdots G_{mi}] \cdot \\ &\cdot \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{1j} \\ \dots \\ \dots \\ rsG_{mj} \end{bmatrix} \right) \otimes I_{q^i} \right] \cdot \left[ P_t(k-1) \otimes I_{q^{i+j}} \right] = \\ &= \alpha_s + G_0 R^{-1} G_0^T P_s(k-1) \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons constater que si nous remplaçons dans l'équation (4.20), la valeur  $\alpha_s^*$  par la relation (4.22) définie en fonction de  $\alpha_s$ , nous retrouvons l'équation (4.17).

(4.20) est une série d'équations itératives. Prenons comme exemple, la S<sup>ième</sup> équation ; pour calculer  $P_s(k-1)$  à partir de  $P_s(k)$ , nous avons besoin également des :

$$P_1(k-1), P_1(k), P_2(k-1), P_2(k), \dots, P_{s-1}(k-1), P_{s-1}(k)$$

compris dans  $\alpha_\tau, \beta_\tau$  ( $\tau = 1, 2, \dots, s-1$ ).

D'ailleurs, nous remarquons que dans le calcul de  $P_s(k)$ , nous utilisons  $\alpha_s^*$ . Après avoir déterminé  $P_s(k-1)$ , calculons tout de suite  $\alpha_s$  d'après (4.22) qui sert à calculer les  $P_{s+1}(k-1), P_{s+2}(k-1), \dots$

#### IV.5 - CAS HORIZON INFINI

La première équation de (4.20) et première équation de (3.31) sont similaires. Ce sont des équations de Riccati qui correspondent respectivement aux systèmes linéarisés de (3.17a) et (4.1).

La même théorie indiquée dans les chapitres II et III nous confirme que si la paire  $(F_1, G_0)$  est commandable et si la paire  $(C, F)$  est observable ( $C^T C = Q$ ) alors la solution de la première équation de (4.20) converge vers une constante appelée  $P_1$  quand  $k$  tend vers  $-\infty$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} P_1(k) = P_1$$

En remplaçant  $P_1(k-1), P_1(k)$  par  $P_1$  dans la première équation de (4.20), celle-ci devient une équation de Riccati algèbre comme suit :

$$(4.23) \quad P_1 = (Q + F_1^T P_1) (F_1 - G_0 R^{-1} G_0^T P_1)$$

Il n'est pas évident de résoudre l'équation (4.23). En vue de trouver la solution  $P_1$ , nous préférons utiliser la première équation de récurrence de (4.20), mais sa solution doit vérifier en même temps l'équation (4.23). Ainsi, nous pouvons utiliser (4.23) pour savoir à quel instant la valeur de  $P_1(k-1)$  sera acceptable comme solution  $P_1$ .

En remplaçant  $P_1(k-1), P_1(k)$  par  $P_1$  dans la deuxième équation de (4.20), celle-ci devient une équation aux différences de  $P_2(k-1), P_2(k)$  du premier ordre. A présent, nous pouvons répéter le raisonnement sur la convergence de  $P_s(k)$  et généraliser la conclusion du § III.4 à la convergence de  $P_s(k)$  de (4.20).

**Théorème 4.1 :**

Si la paire  $(F_1, G_0)$  est commandable et si la paire  $(C, F_1)$  est observable ( $C^T C = Q$ ), les solutions de (4.20) convergent vers des matrices constantes :

$$(4.24) \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} P_s(k) = P_s \quad (s = 1, 2, \dots)$$

Plus l'indice  $s$  est grand, plus  $P_s(k)$  converge rapidement.

Cela confirme encore une fois, tant pour le système bilinéaire que pour le système non linéaire, que la convergence de  $P_s(k)$  ne dépend que du système linéarisé défini par  $(F_1, G_0)$ .

#### IV.6 - DETERMINATION DE LA COMMANDE

A partir de  $P_s$  de (4.24), (cf (II.5), Annexe II), nous avons :

$$P_{k+1} = \sum_{t=1}^{\infty} P_t X_k^{[t]}$$

En la reportant dans (4.5), on obtient :

$$U_k^* = -R^{-1} \sum_{t=1}^{\infty} G^T(X_k) P_t X_k^{[t]}$$

Compte-tenu (1.27), il vient :

$$U_k^* = -R^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \begin{bmatrix} rsG_{1j} \\ \dots \\ \dots \\ rsG_{mj} \end{bmatrix} \left( I_q \otimes X_k^{[j]} \right) P_t X_k^{[t]}$$

A l'aide de la formule (1.17), on a :

$$(4.25) \left\{ \begin{aligned} U_k^* &= -R^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \begin{bmatrix} rsG_{1j} \\ \dots \\ \dots \\ rsG_{mj} \end{bmatrix} \left( I_q \otimes X_k^{[j]} \right) \left[ \left( P_t X_k^{[t]} \right) \otimes 1 \right] \\ &= -R^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \begin{bmatrix} rsG_{1j} \\ \dots \\ \dots \\ rsG_{mj} \end{bmatrix} \left[ \left( P_t X_k^{[t]} \right) \otimes X_k^{[j]} \right] \\ &= -R^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \begin{bmatrix} rsG_{1j} \\ \dots \\ \dots \\ rsG_{mj} \end{bmatrix} \left[ \left( P_t X_k^{[t]} \right) \otimes \left( I_q X_k^{[j]} \right) \right] \\ &= -R^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \begin{bmatrix} rsG_{1j} \\ \dots \\ \dots \\ rsG_{mj} \end{bmatrix} \left( P_t \otimes I_q \right) X_k^{[j+t]} \end{aligned} \right.$$

En tronquant  $U_k^*$ , nous obtenons la commande quasi-optimale comme suit :

$$(4.26) \quad U_k^s = -R^{-1} \sum_{j=0}^s \sum_{t=1}^s \begin{bmatrix} rsG_{1j} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{mj} \end{bmatrix} (P_t \otimes I_q) X_k^{[j+t]}$$

En pratique, c'est plutôt l'équation (4.26) qui sert à calculer la commande. De toute façon, quand  $s$  tend vers l'infini,  $U_k^s$  s'approche de la commande optimale  $U_k^*$  avec toute la précision désirée.

#### IV.7 - SYSTEME EN BOUCLE FERMEE

On tronque la relation (4.1) en forme suivante :

$$X_{k+1} = \sum_{i=1}^n F_i X_k^{[i]} + \sum_{j=0}^n [G_{1j} X_k^{[j]} \vdots \dots \vdots G_{mj} X_k^{[j]}] U_k$$

Compte-tenu la relation (1.26), il vient :

$$X_{k+1} = \sum_{i=1}^n F_i X_k^{[i]} + \sum_{j=0}^n [G_{1j} \vdots \dots \vdots G_{mj}] (I_m \otimes X_k^{[j]}) U_k$$

En reportant (4.26) dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{k+1} = \sum_{i=1}^n F_i X_k^{[i]} - \sum_{j=0}^n \sum_{s=0}^n \sum_{t=1}^n [G_{1j} \vdots \dots \vdots G_{mj}] \cdot \\ \cdot [ (I_m \otimes X_k^{[j]}) R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{1s} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{ms} \end{bmatrix} \otimes I_q ] (P_t \otimes I_q) X_k^{[s+t]} \end{array} \right.$$

Soit, en tenant compte de l'équation (1.17) :

$$\begin{aligned}
 & X_{k+1} = \sum_{i=1}^n F_i X_k^{[i]} - \sum_{j=0}^n \sum_{s=0}^n \sum_{t=1}^n [G_{1j} \vdots \dots \vdots G_{mj}] \cdot \\
 & \cdot \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{1s} \\ \vdots \\ rsG_{ms} \end{bmatrix} \right) \otimes I_{q^j} \right] \left( P_t \otimes I_{q^{s+j}} \right) X_k^{[j+s+t]} \\
 & = \{ F_1 - G_0 R^{-1} G_0^T \} X_k \\
 & + \left\{ F_2 - G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{11} \\ \vdots \\ rsG_{m1} \end{bmatrix} + [G_{11} \vdots \dots \vdots G_{m1}] \right\} \cdot \\
 & \cdot \left[ \left( R^{-1} G_0^T \right) \otimes I_q \right] \left( P_1 \otimes I_q \right) \} X_k^{[2]} \\
 & \vdots \\
 & + \left\{ F_\tau - \sum_{j=0}^n \sum_{s=0}^n \sum_{t=1}^n [G_{1t} \vdots \dots \vdots G_{mt}] \right. \\
 & \quad \left. j+s+t=\tau \right\} \cdot \\
 & \cdot \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{1s} \\ \vdots \\ rsG_{ms} \end{bmatrix} \right) \otimes I_{q^j} \right] \left( P_t \otimes I_{q^{s+j}} \right) \} X_k^{[j+s+t]} \\
 \\
 (4.27) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 C_\tau &= F_\tau - \sum_{j=0}^n \sum_{s=0}^n \sum_{t=1}^n [G_{1t} \vdots \dots \vdots G_{mt}] \cdot \\
 & \cdot \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{1s} \\ \vdots \\ rsG_{ms} \end{bmatrix} \right) \otimes I_{q^j} \right] \left( P_t \otimes I_{q^{s+j}} \right) = \sum_{\tau=1}^n C_\tau X_k^{[\tau]}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

où :

$$(4.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{\tau} = F_{\tau} - \sum_{j=0}^n \sum_{s=0}^n \sum_{t=1}^n \substack{[ G_{1t} \vdots \\ \dots \vdots \\ G_{mt} ] \\ j+s+t=\tau} \\ \cdot \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rsG_{1s} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rsG_{ms} \end{bmatrix} \right) \otimes I_{q^j} \right] \left( P_t \otimes I_{q^{s+j}} \right) \end{array} \right.$$

Selon la formule (1.20), nous avons :

$$(4.29) \quad X_{k+1} = \sum_{\tau=1}^n C_{\tau} \left( X_k^{[\tau-1]} \otimes I_q \right) X_k = A(X_{k,n}) X_k$$

avec :

$$(4.30) \quad A(X_{k,n}) = \sum_{\tau=1}^n C_{\tau} \left( X_k^{[\tau-1]} \otimes I_q \right)$$

Avec la méthode présentée dans [BOR 72] et [BOR 76], nous pouvons étudier la stabilité et déterminer le domaine de stabilité des systèmes bouclés (4.30).

#### **IV.8 - CONCLUSION**

Nous avons généralisé dans ce dernier chapitre, la méthode présentée dans le chapitre précédent, en l'étendant aux systèmes non linéaires vectoriels.

Ainsi, nous avons complètement défini une méthode itérative de détermination de la commande optimale ou quasi-optimale des systèmes non linéaires. Cette méthode est fondée sur la détermination d'une suite d'équations itératives.

La résolution de ces équations est facile et il apparaît, sur les exemples étudiés, que les solutions convergent, en général, rapidement.

Les résultats obtenus ont été validés dans le cas de modèles bilinéaires.



## **CONCLUSION GENERALE**

Notre recherche de commandes optimales ou quasi-optimales de systèmes non linéaires à temps discret a été fondée sur la mise en œuvre de séries infinies de puissances de Kronecker.

L'utilisation de cette notation a permis l'élaboration d'un ensemble de relations de récurrence permettant la détermination, dans le cas d'un critère quadratique, d'une commande quasi-optimale en structure bouclée par retour d'état exprimé sous forme d'une expression analytique.

Seule la première des relations obtenues est de Riccati, les relations suivantes étant des équations aux différences du premier ordre de résolution simple.

La commande quasi-optimale obtenue peut approcher la commande optimale avec la précision souhaitée puisqu'il suffit de continuer le développement définissant le retour d'état.

L'étude de la stabilité du système bouclé a été entièrement effectuée dans le cas scalaire. La résolution des problèmes de stabilité et la définition a priori de l'ordre de troncature à adopter dans le cas vectoriel sont en cours, et nous envisageons l'approche à partir des techniques de majoration développées par P. Borne et J.C. Gentina.

Nous avons également l'intention de développer une méthode itérative de modélisation des systèmes non linéaires fondée sur les travaux présentés dans ce mémoire, en vue de permettre une mise en œuvre simplifiée de la commande en temps réel des processus non linéaires.

**ANNEXE I**

## I.1 - Démonstration de la relation (3.25a)

D'après (1.16), nous avons :

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{matrix} I \\ m \end{matrix} \otimes P_{k+1} \right) R^{-1} G_0^T P_{k+1} &= \left( \begin{matrix} I \\ m \end{matrix} \otimes P_{k+1} \right) (R^{-1} G_0^T P_{k+1} \otimes 1) \\
 &= (R^{-1} G_0^T P_{k+1}) \otimes P_{k+1} \\
 &= (R^{-1} G_0^T P_{k+1}) \otimes \left( \begin{matrix} I \\ q \end{matrix} \cdot P_{k+1} \right) \\
 &= \left[ (R^{-1} G_0^T) \otimes \begin{matrix} I \\ q \end{matrix} \right] (P_{k+1} \otimes P_{k+1})
 \end{aligned}$$

d'où, selon (3.24) :

$$\begin{aligned}
 &= \left[ (R^{-1} G_0^T) \otimes \begin{matrix} I \\ q \end{matrix} \right] \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (P_i(k) X_k^{[i]}) \otimes (P_j(k) X_k^{[j]}) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ (R^{-1} G_0^T) \otimes \begin{matrix} I \\ q \end{matrix} \right] (P_i(k) \otimes P_j(k)) X_k^{[i+j]}
 \end{aligned}$$

(3.25a) est donc démontrée.

## I.2 - Démonstration de la relation (3.25b)

D'après (1.27), nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{matrix} I \\ m \end{matrix} \otimes P_{k+1} \right) R^{-1} G_1^T (X_k) P_{k+1} \\
 &= \left( \begin{matrix} I \\ m \end{matrix} \otimes P_{k+1} \right) R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} \left( \begin{matrix} I \\ q \end{matrix} \otimes X_k \right) P_{k+1} \\
 &= \left( \begin{matrix} I \\ m \end{matrix} \otimes P_{k+1} \right) R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} \left( \begin{matrix} I \\ q \end{matrix} \otimes X_k \right) (P_{k+1} \otimes 1)
 \end{aligned}$$

d'où, d'après (1.16) :

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{matrix} I \\ m \end{matrix} \otimes P_{k+1} \right) R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} (P_{k+1} \otimes X_k) \\
 &= \left( \begin{matrix} I \\ m \end{matrix} \otimes P_{k+1} \right) \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} (P_{k+1} \otimes X_k) \right) \otimes 1 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} (P_{k+1} \otimes X_k) \right] \otimes P_{k+1} \\
 &= \left[ R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} (P_{k+1} \otimes X_k) \right] \otimes \left( \underset{q}{I} \cdot P_{k+1} \right) \\
 &= \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes \underset{q}{I} \right] (P_{k+1} \otimes X_k \otimes P_{k+1})
 \end{aligned}$$

En remplaçant (3.24) dans la relation précédente, il vient :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes \underset{q}{I} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ (P_i(k) X_k^{[i]}) \otimes \left( \underset{q}{I} X_k \right) \otimes (P_j(k) X_k^{[j]}) \right]
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right] \cdot \left[ \left( P_i(k) \otimes I_q \right) X_k^{[i+1]} \right] \otimes \left( P_j(k) X_k^{[j]} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right] \cdot \left[ \left( P_i(k) \otimes I_q \otimes P_j(k) \right) X_k^{[i+j+1]} \right] \right\}$$

D'où la relation (3.25b).

### I.3 - Démonstration de la relation (3.26)

En reportant (3.24) (3.25a) et (3.25b) dans (3.23), nous avons :

$$P_k = QX_k + \sum_{t=1}^{\infty} F^T P_t(k) X_k^{[t]}$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [G_{11}^T \dots G_{1m}^T] ((R^{-1}G_0^T) \otimes I_q) (P_i(k) \otimes P_j(k)) X_k^{[i+j]} -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [G_{11}^T \dots G_{1m}^T] \left( (R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix}) \otimes I_q \right).$$

$$\cdot (P_i(k) \otimes I_q \otimes P_j(k)) X_k^{[i+j+1]}$$

$$= \{Q + F^T P_1(k)\} X_k^{[1]}$$

$$+ \left\{ F^T P_2(k) - [G_{11}^T \dots G_{1m}^T] ((R^{-1}G_0^T) \otimes I_q) P_1^{[2]}(k) \right\} X_k^{[2]} +$$

$$+ \left\{ F^T P_3(k) - [G_{11}^T \dots G_{1m}^T] ((R^{-1}G_0^T) \otimes I_q) \right.$$

$$\cdot (P_1(k) \otimes P_2(k) + P_2(k) \otimes P_1(k)) + \left( (R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix}) \otimes I_q \right).$$

$$\left. \cdot (P_1(k) \otimes I_q \otimes P_1(k)) \right\} X_k^{[3]}$$

+ . . . . .



$$= \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i X_k^{[i]}$$

C'est donc la relation (3.26).

#### I.4 - Démonstration de la relation (3.28)

$$\begin{aligned} X_k = F X_{k-1} - \sum_{t=1}^{\infty} \left\{ G_0 R^{-1} G_0^T P_t(k-1) X_{k-1}^{[t]} + \left[ G_1 \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} \right] (P_t(k-1) \otimes I_q) X_{k-1}^{[t+1]} + \right. \\ \left. + G_1 \left( \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right) (P_t(k-1) \otimes I_q^2) X_{k-1}^{[t+2]} \right\} \\ = \left\{ F - G_0 R^{-1} G_0^T P_1(k-1) \right\} X_{k-1}^{[1]} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ G_0 R^{-1} G_0^T P_2(k-1) + G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \dots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} (P_1(k-1) \otimes I_q) \right. \\
 & \quad \left. + G_1 \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) (P_1(k-1) \otimes I_q) \right\} X_{k-1}^{[2]} \\
 & - \left\{ G_0 R^{-1} G_0^T P_3(k-1) + G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \dots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix} (P_2(k-1) \otimes I_q) \right. \\
 & \quad + G_1 \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) (P_2(k-1) \otimes I_q) + \\
 & \quad \left. + G_1 \left( (R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \dots \\ rs G_{1m} \end{bmatrix}) \otimes I_q \right) (P_1(k-1) \otimes I_q^2) \right\} X_{k-1}^{[3]} \\
 & = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_k^{[i]}
 \end{aligned}$$

D'où la relation (3.28).

**ANNEXE II**

## Démonstration de la relation (4.10)

Reprenons la relation (4.7) :

$$(II.1) \quad P_k = QX_k + (I_q \otimes P_k^T) \left( \frac{\delta F(X_k)}{\delta X_k} + \frac{\delta G(X_k)}{\delta X_k} U_k \right)$$

D'après (1.24a), nous avons tout d'abord :

$$\frac{\delta F(X_k)}{\delta X_k} = \frac{\delta \left( \sum_{i=1}^{\infty} F_i X_k^{[i]} \right)}{\delta X_k} = \sum_{i=1}^{\infty} (I_q \otimes F_i) \frac{dX_k^{[i]}}{dX_k}$$

D'où, selon (1.28) :

$$\frac{\delta F(X_k)}{\delta X_k} = \sum_{i=1}^{\infty} (I_q \otimes F_i) \left[ \sum_{v=0}^{i-1} (I_q \otimes E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}}) (cs I_q \otimes X_k^{[i-1]}) \right]$$

$$(II.2) \quad = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{i-1} (I_q \otimes F_i) (I_q \otimes E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}}) (cs I_q \otimes X_k^{[i-1]})$$

pour le terme  $\frac{\delta G(X_k)}{\delta X_k}$  de (II.1), il vient, compte tenu de (4.3) :

$$\begin{aligned}
 G(X_k) &= [G_1(X_k) \vdots G_2(X_k) \vdots \dots \vdots G_m(X_k)] \\
 &= \left[ \sum_{j=0}^{\infty} G_{1j}(X_k^{[j]}) \vdots \sum_{j=0}^{\infty} G_{2j}(X_k^{[j]}) \vdots \dots \vdots \sum_{j=0}^{\infty} G_{mj}(X_k^{[j]}) \right] \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} [G_{1j}(X_k^{[j]}) \vdots G_{2j}(X_k^{[j]}) \vdots \dots \vdots G_{mj}(X_k^{[j]})]
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi :

$$\frac{\partial G(x_k)}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left( I_q \otimes G_{1j} \right) \frac{dX_k^{[j]}}{dX_k} \vdots \dots \vdots \left( I_q \otimes G_{mj} \right) \frac{dX_k^{[j]}}{dX_k} \right]$$

Il vient d'après (1.26) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G(x_k)}{\partial x_k} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left( I_q \otimes G_{1j} \right) \vdots \dots \vdots \left( I_q \otimes G_{mj} \right) \right] \left( I_m \otimes \frac{dX_k^{[j]}}{dX_k} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left( I_q \otimes G_{1j} \right) \vdots \dots \vdots \left( I_q \otimes G_{mj} \right) \right] \sum_{v=0}^{j-1} \left\{ I_m \otimes \left[ \left( I_q \otimes E^{q \times q^v} \otimes I_{(j-1-v)} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot \left( cs I_q \otimes X_k^{[j-1]} \right) \right] \right\} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{j-1} \left[ \left( I_q \otimes G_{1j} \right) \vdots \dots \vdots \left( I_q \otimes G_{mj} \right) \right] \left\{ I_m \otimes \left[ \left( I_q \otimes E^{q \times q^v} \otimes I_{(j-1-v)} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot \left( cs I_q \otimes X_k^{[j-1]} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

En reportant (4.5), (II.2) et (II.3) dans (II.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 P_k &= QX_k + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{j-1} \left( I_q \otimes P_{k+1}^T \right) \left( I_q \otimes F_i \right) \left( I_q \otimes E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(j-1-v)}} \right) \cdot \\
 &\cdot \left( cs I_q \otimes X_k^{[j-1]} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{j-1} \left( I_q \otimes P_{k+1}^T \right) \left[ \left( I_q \otimes G_{1j} \right) \vdots \dots \vdots \left( I_q \otimes G_{mj} \right) \right] \cdot \\
 &\cdot \left\{ I_m \otimes \left[ \left( I_q \otimes E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(j-1-v)}} \right) \left( cs I_q \otimes X_k^{[j-1]} \right) \right] \right\} R^{-1} G^T(X_k) P_{k+1}
 \end{aligned}$$

En remarquant (1.17), nous avons :

$$\begin{aligned}
 P_k &= QX_k + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{j-1} \left\{ I_q \otimes \left[ \left( P_{k+1}^T F_i \right) \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(j-1-v)}} \right) \right] \right\} \cdot \\
 &\cdot \left( cs I_q \otimes X_k^{[j-1]} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{j-1} \left[ I_q \otimes \left( P_{k+1}^T G_{1j} \right) \vdots \dots \vdots I_q \otimes \left( P_{k+1}^T G_{mj} \right) \right] \cdot \\
 &\cdot \left\{ I_m \otimes \left[ \left( I_q \otimes E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(j-1-v)}} \right) \left( cs I_q \otimes X_k^{[j-1]} \right) \right] \right\} R^{-1} G^T(X_k) P_{k+1} \\
 \text{(II.4)} \quad &= QX_k + P_{k,1} - P_{k,2}
 \end{aligned}$$

où :

$$P_{k,1} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{j-1} \left\{ I_q \otimes \left[ \left( P_{k+1}^T F_i \right) \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(j-1-v)}} \right) \right] \right\} \left( cs I_q \otimes X_k^{[j-1]} \right)$$

$$\begin{aligned}
 P_{k,2} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{j-1} \left[ I_q \otimes \left( P_{k+1}^T G_{1j} \right) \vdots \dots \vdots I_q \otimes \left( P_{k+1}^T G_{mj} \right) \right] \cdot \\
 &\cdot \left\{ I_m \otimes \left[ \left( I_q \otimes E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(j-1-v)}} \right) \left( cs I_q \otimes X_k^{[j-1]} \right) \right] \right\} R^{-1} G^T(X_k) P_{k+1}
 \end{aligned}$$

En tenant compte de (1.27), on obtient :

$$G^T(X_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \dots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix} (I_q \otimes X_k^{[j]})$$

Il vient la relation :

$$P_{k,2} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{i-1} [ I_q \otimes (P_{k+1}^T G_{1i}) ; \dots ; I_q \otimes (P_{k+1}^T G_{mi}) ] \cdot \left\{ I_m \otimes \left[ \left( I_q \otimes E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right) (cs I_q \otimes X_k^{[i-1]}) \right] \right\} \cdot R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \dots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix} (I_q \otimes X_k^{[j]}) P_{k+1}$$

(II.5)

De l'égalité :

$$(cs I_q \otimes X_k^{[i-1]}) = cs (I_q \otimes X_k^{[i-1]})$$

il résulte alors :

$$P_{k,1} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{i-1} \left\{ I_q \otimes \left[ (P_{k+1}^T F_i) (E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}}) \right] \right\} cs (I_q \otimes X_k^{[i-1]})$$

D'après (1.10), il résulte de cette relation :

$$P_{k,1} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{i-1} \text{cs} \left[ (P_{k+1}^T F_i) \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{(i-1-v)} \right) \right] \left( I_q \otimes X_k^{[i-1]} \right)$$

Il découle alors des relations (1.13) et (1.14), la valeur suivante de  $P_{k,1}$  :

$$P_{k,1} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{i-1} \left[ \left( I_q \otimes X_k^{T[i-1]} \right) \otimes (P_{k+1}^T F_i) \right] \text{cs} \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{(i-1-v)} \right)$$

En posant :

$$(II.6) \quad P_{k+1} = \sum_{t=1}^{\infty} P_t(k) X_k^{[t]}$$

où  $P_t(k)$  est une matrice constante de dimension  $q \times q^t$  et en reportant cette expression dans  $P_{k,1}$ , il vient :

$$P_{k,1} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{i-1} \left[ \left( I_q \otimes X_k^{T[i-1]} \right) \otimes \left( X_k^{T[t]} P_t^T(k) F_i \right) \right] \text{cs} \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{(i-1-v)} \right)$$

Soit, d'après (1.17) :

(II.7)

$$\begin{aligned} P_{k,1} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{i-1} \left\{ \left( I_q \otimes X_k^{T[i+t-1]} \right) \left[ I_i \otimes (P_t^T(k) F_i) \right] \right\} \text{cs} \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{(i-1-v)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{i-1} \left\{ \left[ I_i \otimes (P_t^T(k) F_i) \right] \left( I_q \otimes X_k^{T[i+t-1]} \right) \right\}^T \text{cs} \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{(i-1-v)} \right) \end{aligned}$$



Un raisonnement semblable à partir de  $P_{k,2}$ , nous permet d'obtenir la relation :

(II.8)

$$P_{k,2} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{i-1} \left\{ I_q^i \otimes [ [G_{1i}^T \dots G_{mi}^T] ((R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \vdots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix})) \otimes I_q \right\} \cdot (I_q^j \otimes P_s \otimes P_t) \left( I_q \otimes X_k^{[i+j+s+t-1]} \right) \left\{ \right\}^T \text{cs} \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right)$$

Il convient maintenant d'éliminer le terme transposé des expressions définissant  $P_{k,1}$  et  $P_{k,2}$ . Dans le raisonnement qui suit sur  $P_{k,1}$  et  $P_{k,2}$ , nous adopterons une notation simplifiée qui consiste simplement à omettre les symboles de sommation  $\hat{A}$ , Il vient l'écriture :

$$P_{k,1} = \left[ \left( I_q^i \otimes F_i^T P_t(k) \right) \otimes \left( I_q \otimes X_k^{T[i+t-1]} \right) \right] \text{cs} \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right) \\ = \left( I_q \otimes X_k^{[i+t-1]} \right)^T \left[ I_q^i \otimes \left( P_t^T(k) F_i \right) \right] \text{cs} \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right)$$

En réécrivant  $P_{k,1}$  encore une fois à l'aide de (1.10), on obtient :

$$P_{k,1} = \left( I_q \otimes X_k^{[i+t-1]} \right)^T \text{cs} \left[ \left( P_t^T(k) F_i \right) \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right) \right]$$

Soit, en notant :  ${}_{cs} A = ({}_{rs} A^T)^T$  et  $(E_{q \times p}^{p \times q})^T = E_{p \times q}^{q \times p}$

l'écriture :

$$P_{k,1} = \left( I_q \otimes X_k^{[i+t-1]} \right)^T \left( {}_{rs} \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right) (F_i^T P_t(k)) \right)^T$$

$$= \left( {}_{rs} \left[ \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right) F_i^T P_t(k) \right] (I_q \otimes X_k^{[i+t-1]}) \right)^T$$

Nous remarquons, en effet, que le terme :

$${}_{rs} \left[ \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right) F_i^T P_t(k) \right] (I_q \otimes X_k^{[i+t-1]})$$

est un vecteur de ligne d'ordre  $q$ , d'où :

$$P_{k,1} = {}_{cs} \left\{ {}_{rs} \left[ \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right) F_i^T P_t(k) \right] (I_q \otimes X_k^{[i+t-1]}) \right\}$$

Selon la formule :

$${}_{cs} A_{p \times q} = \sum_{j=1}^q \left( e_j^j \otimes I_q \right) A_{q \times q} e_j^j \quad [Vet 73]$$

On a :

$$P_{k,1} = \sum_{s=1}^q e_q^s \left\{ rs \left[ \left( E^{q \times q^v} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right) F_i^T P_t(k) \right] \left( I_q \otimes X_k^{[i+t-1]} \right) e_q^s \right\}$$

où :

$$\begin{aligned} \left( I_q \otimes X_k^{[i+t-1]} \right) e_q^s &= \left( I_q \cdot e_q^s \right) \otimes X_k^{[i+t-1]} \\ &= e_q^s \otimes X_k^{[i+t-1]} \\ &= \left( e_q^s \otimes I_{q^{(i+t-1)}} \right) X_k^{[i+t-1]} \end{aligned}$$

En insérant cette expression dans  $P_{k,1}$ , il vient :

$$P_{k,1} = \sum_{s=1}^q e_q^s \left\{ rs \left[ \left( E^{q^v \times q} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right) F_i^T P_t(k) \right] \left( e_q^s \otimes I_q \right) X_k^{[i+t-1]} \right\}$$

Le même raisonnement conduit à la définition suivante de  $P_{k,2}$ , à partir de (II.8) :

$$P_{k,2} = \sum_{\omega=1}^q e_q^\omega rs (E.G) \left( e_q^\omega \otimes I_{q^{(i+j+s+t-1)}} \right) X_k^{[i+j+s+t-1]}$$

où :

$$(II.9) \quad E = \left( E^{q^v \times q} \otimes I_{q^{(i-1-v)}} \right)$$

$$(II.10) \quad G = I_q \otimes \left\{ [G_{11}^T \dots G_{m1}^T] \left( (R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \vdots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix}) \otimes I_q \right) (I_q^j \otimes P_s \otimes P_t) \right\}$$

En reportant les expressions obtenues pour  $P_{k,1}$ ,  $P_{k,2}$  dans la relation (II.4), on obtient pour  $P_k$  :

$$P_k = QX_k + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j=1}^q \sum_{v=0}^{i-1} e_q^j rs (E F_i^T P_t(k)) (e_q^j \otimes I_{(i+t-1)}) x_k^{[i+t-1]} \\ - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{i-1} \sum_{\omega=1}^q e_q^\omega rs (E.G) (e_q^\omega \otimes I_{(i+j+s+t-1)}) x_k^{[i+j+s+t-1]}$$

$P_k$  peut être réécrit sous forme d'une série infinie de puissances de Kronecker de  $X_k$  :

$$P_k = \left\{ Q + F_1^T P_1(k) \right\} x_k \\ + \left\{ \sum_{\omega=1}^q e_q^\omega \left( rs (F_2^T P_1(k)) + rs (E^{q \times q} F_2^T P_1(k)) + rs (F_1^T P_2(k)) - \right. \right. \\ \left. \left. - rs \left( [G_{11}^T \dots G_{m1}^T] \left[ ((R^{-1} G_0^T) \otimes I_q) P_1^{[2]}(k) \right] \right) (e_q^\omega \otimes I_{q(2)}) \right\} x_k^{[2]} \\ + \dots$$

Soit, en utilisant la formule :

$$A_{p \times q} = \sum_{\omega=1}^p e_q^\omega (rs A) (e_q^\omega \otimes I) \quad [Vet 73]$$

Il vient pour le deuxième terme ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \sum_{\omega=1}^q e_q^\omega \left( rs (F_2^T P_1(k)) + rs (E^{q \times q} F_2^T P_1(k)) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - rs \left[ [G_{11}^T \vdots \dots \vdots G_{m1}^T] ((R^{-1} G_0^T) \otimes_q I) P_1^{[2]}(k) \right] \left( e_q^\omega \otimes I_{q(2)} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{\omega=1}^q e_q^\omega \left( rs (F_1^T P_2(k)) \right) \left( e_q^\omega \otimes I_{q(2)} \right) \right\} x_k^{[2]} \\
 & = \left\{ F_1^T P_2(k) + \sum_{\omega=1}^q e_q^\omega \left( rs (F_2^T P_1(k)) + rs (E^{q \times q} F_2^T P_1(k)) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - rs \left( [G_{11}^T \vdots \dots \vdots G_{m1}^T] ((R^{-1} G_0^T) \otimes_q I) P_1^{[2]}(k) \right) \left( e_q^\omega \otimes I_{q(2)} \right) \right\} x_k^{[2]}
 \end{aligned}$$

Il en résulte donc l'expression de  $P_k$  :

$$\begin{aligned}
 P_k & = \left\{ Q + F_1^T P_1(k) \right\} x_k \\
 & \quad + \left\{ F_1^T P_2(k) + \sum_{\omega=1}^q e_q^\omega \left[ rs (F_2^T P_1(k)) + rs (E^{q \times q} F_2^T P_1(k)) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - rs \left( [G_{11}^T \vdots \dots \vdots G_{m1}^T] ((R^{-1} G_0^T) \otimes_q I) P_1^{[2]}(k) \right) \right] \left( e_q^\omega \otimes I_{q(2)} \right) \right\} x_k^{[2]} \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

$$(II.11) \quad = \sum_{\mu=1}^{\infty} \beta_\mu x_k^{[\mu]}$$

où :

$$(II.12) \quad \beta_1 = Q + F_1^T P_1(k)$$

$$(II.13) \quad \beta_\mu = \sum_{i=1}^q e_q^i (\beta_{\mu,1} - \beta_{\mu,2}) (e_q^i \otimes I_\mu)$$

et :

$$(II.14) \quad \beta_{\mu,1} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{t=1}^{\mu-1} \sum_{v=1}^{i-1} r_s \left[ (E^{q^v \times q} \otimes I_{(i-1-v)}) F_i^T P_t(k) \right]$$

$$i+t = \mu+1$$

$$(II.15) \quad \beta_{\mu,2} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=0}^{\mu} \sum_{s=1}^{\mu} \sum_{t=1}^{\mu} \sum_{v=0}^{i-1} r_s (E.G)$$

$$i+j+s+t = \mu+1$$

où E et G sont présentés respectivement dans les relations (II.9) et (I.10).

## II.2 - Démonstration de la relation (4.8)

Revenons maintenant à l'équation (4.6), en utilisant la relation (1.27), nous obtenons :

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^q F_i x_k^{[i]} + \sum_{i=0}^{\infty} [G_{1i} \dots G_{mi}] (I_m \otimes x_k^{[i]}) U_k$$

L'application des (4.5) et (II.6) à l'équation précédente, conduit alors à l'expression :

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i x_k^{[i]} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} [G_{1i} \dots G_{mi}] (I_m \otimes x_k^{[i]}) \cdot R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \vdots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix} \left( I_q \otimes x_k^{[j]} \right) P_t(k) x_k^{[t]}$$

En posant :

$$y = [G_{1i} \dots G_{mi}] (I_m \otimes x_k^{[i]}) R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \vdots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix} \left( I_q \otimes x_k^{[j]} \right) P_t(k) x_k^{[t]}$$

il vient donc pour la dernière partie de l'expression définissant y :

$$\begin{aligned} \left( I_q \otimes x_k^{[j]} \right) P_t(k) x_k^{[t]} &= (P_t(k) x_k^{[t]}) \otimes x_k^{[j]} \\ &= (P_t(k) x_k^{[t]}) \otimes \left( I_{q^j} x_k^{[j]} \right) \\ &= \left( P_t(k) \otimes I_{q^j} \right) x_k^{[j+t]} \end{aligned}$$

d'où :

$$y = [G_{1i} \vdots \dots \vdots G_{mi}] \left( I_m \otimes x_k^{[i]} \right) R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \vdots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix} \left( P_t(k) \otimes I_j \right) x_k^{[j+t]}$$

Il résulte alors de l'équation (1.17) l'expression :

$$y = [G_{1i} \vdots \dots \vdots G_{mi}] \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \vdots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix} \left( P_t(k) \otimes I_j \right) x_k^{[j+t]} \right) \otimes x_k^{[i]} \right]$$

$$= [G_{1i} \vdots \dots \vdots G_{mi}] \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \vdots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix} \left( P_t(k) \otimes I_j \right) x_k^{[j+t]} \right) \otimes \left( I_i x_k^{[i]} \right) \right]$$

$$= [G_{1i} \vdots \dots \vdots G_{mi}] \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \vdots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix} \left( P_t(k) \otimes I_j \right) x_k^{[j+t]} \right) \otimes I_i \right] x_k^{[i]}$$

$$= [G_{1i} \vdots \dots \vdots G_{mi}] \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \vdots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix} \right) \otimes I_i \right] \left( P_t(k) \otimes I_{i+j} \right) x_k^{[i+j+t]}$$

Il vient donc :



$$X_{k+1} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i X_k^{[i]} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} [G_{1i} \vdots \dots \vdots G_{mi}].$$

$$\cdot \left[ \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix} \right) \otimes I_q \right] \left( P_t(k) \otimes I_{i+j} \right) X_k^{[i+j+t]}$$

Soit notant  $[G_{10} \vdots \dots \vdots G_{m0}] = G_0$  et compte-tenu de  $\begin{bmatrix} rs G_{10} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rs G_{m0} \end{bmatrix} = G_0^T$  on a :

$$X_{k+1} = \{ F_1 - G_0 R^{-1} G_0^T \} X_k^{[1]}$$

$$+ \left\{ F_2 - \left( G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ rs G_{m1} \end{bmatrix} + [G_{11} \vdots \dots \vdots G_{m1}] \left[ (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right] \right) \cdot \left( P_1(k) \otimes I_q \right) - G_0 R^{-1} G_0^T P_2(k) \right\} X_k^{[2]}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ F_3 - \left[ [G_{11} \vdots \dots \vdots G_{m1}] \left( (R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{m1} \end{bmatrix}) \otimes I_q \right) + [G_{12} \vdots \dots \vdots G_{m2}] \right. \right. \\
 & \quad \left. \cdot \left[ (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right] + G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{12} \\ \vdots \\ rs G_{m2} \end{bmatrix} \right] (P_1(k) \otimes I_q) - \\
 & \quad - \left[ G_0 R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{11} \\ \vdots \\ rs G_{m1} \end{bmatrix} + [G_{11} \vdots \dots \vdots G_{m1}] \left( (R^{-1} G_0^T) \otimes I_q \right) \right] (P_2(k) \otimes I_q) - \\
 & \quad \left. - G_0 R^{-1} G_0^T P_3(k) \right\} X_k^{[3]}
 \end{aligned}$$

+ ...

$$(II.14) \quad = \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\mu} X_k^{[\mu]}$$

Expression dans laquelle :

(II.15)

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\mu} = F_{\mu} - \sum_{t=1}^{\infty} \left[ \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=\mu-t}}^{\mu} [G_{1i} \vdots \dots \vdots G_{mi}] \right. \\
 \left. \cdot \left( (R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \vdots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix}) \otimes I_q \right) \right] (P_t(k) \otimes I_{i+j})
 \end{aligned}$$

$$(\mu = 1, 2, \dots) \quad P_0(k-1) = 0$$

En prenant  $k-1$  au lieu de  $k$  dans (II.14) et (II.15) il vient :

$$(II.16) \quad X_k = \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\mu} X_{k-1}^{[\mu]}$$

et

(II.17)

$$\alpha_{\mu} = F_{\mu} - \sum_{t=1}^{\infty} \left[ \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=\mu-t}}^{\mu} [G_{1i} \dots G_{mi}] \cdot \left( \left( R^{-1} \begin{bmatrix} rs G_{1j} \\ \vdots \\ rs G_{mj} \end{bmatrix} \right) \otimes I_i \right) \right] (P_t^{(k-1)} \otimes I_{i+j})$$

$$(\mu = 1, 2, \dots \quad P_0^{(k-1)} = 0)$$

En reportant l'expression de  $X_k$ , définie par l'équation (II.16), dans la relation (II.9) définissant  $P_k$  et en égalant l'expression de  $P_k$  à celle définie par (II.6), on obtient, en identifiant les termes de même puissance de  $X_k$ , un ensemble d'équations de récurrence relatif aux valeurs des  $P_s(k)$  comme (4.17).

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [AND 71] **B.D.O. Anderson, J.B. Moore**  
*"Linear Optimal Control"*  
Prentice-Hall, 1971
- [ATH 68] **M. Athans**  
*"The Matrix Minimum Principle"*  
Inf. Cont., Vol. 11, pp. 592-606, 1968
- [BAR 73] **S. Barnett**  
*"Matrix Differential Equations and Kronecker Products"*  
SIAM J. Appl. Math., Vol. 24, n° 1, Jan. 1973
- [BAU 86] **W.T. Baumann, W.J. Rugh**  
*"Feedback Control of Non-Linear Systems by Extended Linearization"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-31, n° 1, Jan. 1986
- [BEL 60] **R. Bellman**  
*"Introduction to Matrix Analysis"*  
Mc Graw-Hill, New-York, 1960
- [BEL 65] **R.E. Bellman, R.E. Kalaba**  
*"Quasi-Linearization and Nonlinear Boundary Value Problems"*  
Elsevier, New-York, 1965
- [BIT 83] **G. Bitsoris**  
*"Stability Analysis of Non-Linear Dynamical Systems"*  
Int. J. Cont., Vol. 38, n° 3, pp. 699-711, 1983
- [BOR 72] **P. Borne, J.C. Gentina, F. Laurent**  
*"Sur la Stabilité des Systèmes Echantillonnés Non Linéaires"*  
RAIRO Revue Jaune, AFCET, n° J2, pp. 96-105, 1972
- [BOR 76] **P. Borne**  
*"Contribution à l'Etude des Systèmes Discrets Non-Linéaires de Grandes Dimensions. Application aux Systèmes Interconnectés"*  
Thèse d'Etat, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1976
- [BRE 63] **J.V. Breakwell, J.L. Speyer, A.E. Bryson**  
*"Optimization and Control of Non linear Systems using the Second Variation"*  
SIAM. J. Cont., Vol. 1, n° 2, pp. 163-223, 1963
- [BRE 78] **J.W. Brewer**  
*"Matrix Calculus and the Sensivity Analysis of Linear Dynamic Systems"*  
IEEE. Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-23, Aug. 1978
- [BRE 78] **J.W. Brewer**  
*"Kronecker Product and Matrix Calculus in System Theory"*  
IEEE. Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-25, n° 9, 1978

- [DUG 67] **P.S. Duger**  
*"Some Applications of Matrix Derivatives in Multivariate Analysis"*  
J. Am. Stat. Ass., Vol. 62, June 1967
- [FLI 85] **M. Fliess, F. Lamnabhi-Lagarrigue**  
*"Séries de Volterra et Commande Optimale"*  
Conf. on "The Algebraic and Geometric Methods in Non-Linear Control Theory", Paris (France), 3-7 June 1985
- [FRA 64] **J.S. Frame**  
*"Matrix Function and Applications"* (Parts I & V)  
IEEE Spectrum, March / July 1964
- [GIL 88] **J.C. Gille, P. Decaulne, M. Pélegrin**  
*"Systèmes Asservis Nonlinéaires"*  
5<sup>ème</sup> Edition, Dunod, Paris, 1988
- [GOL 70] **H.A. Goldstein, J.S. Meditch**  
*"Non Linear Optimal Control"*  
J. Comp. and Syst. Sc., Vol. 4, pp. 29-37, 1970
- [HAR 76] **T.R. Harper, W.J. Rugh**  
*"Structural Features of Factorable Volterra Systems"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-21, pp. 822-832, Dec. 1976
- [HUN 83] **L.R. Hunt, R. Su, G. Meyer**  
*"Global Transformations of Non-Linear Systems"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-28, n° 1, Jan. 1983
- [KAS 84] **E. Kaszkurewicz, L. Hsu**  
*"A Note on the Absolute Stability of Non-linear Discrete-Time Systems"*  
Int. J. Control, Vol. 40, pp. 867-869, 1984
- [KEL 62] **H.J. Kelley**  
*"Guidance Theory and Extremal Fields"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-7, n° 4, pp. 75-82, Oct. 1962
- [KRE 73] **A.J. Krener**  
*"On the Equivalence of Control Systems and the Linearization of Non-Linear Systems"*  
SIAM J. Control, Vol. 11, n° 4, Nov. 1973
- [KUC 72] **V. Kucera**  
*"A Contribution to Matrix Quadratic Equations"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., June 1972
- [LAR 77] **P. Larminat, Y. Thomas**  
*"Automatique des Systèmes Linéaires"*  
Tome 3, Flam. Sc., 1977

- [ LEJ 85 ] **R. Lejeune, W.J. Rugh**  
*"Linearization of Nonlinear Systems about Constant Operating Points"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-30, n° 8, Aug. 1985
- [ MEY 84 ] **G. Meyer, R. Su, L.R. Hunt**  
*"Application of Non-Linear Transformations to Automatic Flight Control"*  
Automatica, Vol. 20, n° 1, pp. 103-107, 1984
- [ MON 83 ] **S. Monaco, D. Normand-Cyrot**  
*"The Immersion under Feedback of a Multidimensional Discrete-Time Non-Linear System into a Linear System"*  
Int. J. Contr., Vol. 38, n° 1, pp. 245-261, 1983
- [ MUL 72 ] **P.C. Muller, H.I. Weber**  
*"Analysis and Optimization of Certain Qualities of Controllability and Observability for Linear Dynamical Systems"*  
Automatica, Vol. 8, pp. 237-246, 1972
- [ NAH 84 ] **Z. Nahorski, H.F. Ravn, R.V.V. Vidal**  
*"The Discrete-Time Maximum Principle : a Survey and Some New Results"*  
Int. J. Contr., Vol. 40, n° 3, pp. 533-554, 1984
- [ PAR 76 ] **P.N. Paraskevopoulos, R.E. King**  
*"A Kronecker Product Approach to Pole Assignments by Output Feedback"*  
Int. J. Contr., Vol. 24, n° 3, pp. 325-334, 1976
- [ PEA 65 ] **M.C. Pease**  
*"Methods of Matrix Algebra"*  
Academic Press, New-York, 1965
- [ PON 62 ] **L.S. Pontryagin et al**  
*"The Mathematical Theory of Optimal Processes"*  
John Wiley & Sons Inc., 1962
- [ QUI 80 ] **J.P. Quiun**  
*"Stabilization of Bilinear Systems by Quadratic Feedback Controls"*  
J. Math. Anal. and Appl., Vol. 75, pp. 66-80, 1980
- [ REB 84 ] **C. Reboulet, C. Champetier**  
*"A New Method for Linearizing Non-Linear Systems"*  
Int. J. Control, Vol. 40, n° 4, pp. 635-638, 1984
- [ REB 85 ] **C. Reboulet, P. Mouyon, C. Champetier**  
*"Résultats Récents sur la Linéarisation Locale des Systèmes Non Linéaires"*  
Conference on "The Algebraic and Geometric Methods in Non-Linear Control Theory", Paris, France, 3-7 Juin 1985

- [ ROT 88 ] **F. Rotella, G. Dauphin-Tanguy**  
*"Non-Linear Systems : Identification and Optimal Control"*  
Int. J. Control, Vol. 48, n° 2, pp. 525-544, 1988
- [ RYA 83 ] **E.P. Ryan**  
*"Global Asymptotic Stabilization of a Class of Bilinear Control Systems"*  
Int. J. Control, Vol. 38, n° 2, pp. 359-367, 1983
- [ RYA 83 ] **E.P. Ryan, N.J. Buckingham**  
*"On Asymptotically Stabilizing Feedback Control of Bilinear Systems"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-28, n° 8, Aug. 1983
- [ SAG 68 ] **A.P. Sage**  
*"Optimum Systems Control"*  
Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs., New-York, 1968
- [ SAG 77 ] **A.P. Sage, C.C. White**  
*"Optimum Systems Control"*  
2<sup>nd</sup> Ed. Prentice-Hall Inc., 1977
- [ VET 70 ] **W.J. Vetter**  
*"Derivative Operations on Matrices"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-15, April 1970
- [ VET 71 ] **W.J. Vetter**  
*"An Extension to Gradient Matrices"*  
IEEE Trans. on Syst. Man. Cyb., Vol. SMC-1, pp. 184-186, 1971
- [ VET 71 ] **W.J. Vetter**  
*"On Linear Estimates, Minimum Variance and Least Squares Weighting Matrices"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-16, pp. 265-266, June 1971
- [ VET 73 ] **W.J. Vetter**  
*"Matrix Calculus Operations and Taylor Expansions"*  
SIAM . Review, Vol. 15, n° 2, April 1973
- [ ZHA 89 ] **J.Y. Zhao, F. Rotella, P. Borne**  
*"Simulation of Suboptimal Control for Non-Linear Discrete-Time Systems"*  
Int. Conf. on "System Simulation and Scientific Computing", Beijing, Chine, 1989
- [ ZHA 91 ] **J.Y. Zhao, P. Borne, F. Rotella**  
*"Analytic Suboptimal Control for Discrete Bilinear Systems"*  
European Control Conference, Grenoble, France, 1991





## RESUME

*Les notations et propriétés essentielles relatives à l'analyse matricielle et à l'application des séries infinies de Kronecker sont présentées en début de mémoire, permettant l'établissement d'un ensemble de relations vectorielles qui sont utilisées dans la suite du mémoire.*

*Une synthèse, avec recherche de la commande quasi-optimale en structure bouclée sous forme analytique explicite du vecteur état, est alors proposée pour les systèmes non linéaires à temps discret. La méthode conduit à définir la solution du problème par résolution d'un ensemble d'équations récurrentes qui sont explicitées dans le cas d'un critère quadratique.*

*L'estimation du domaine de stabilité du système initial bouclé par la commande quasi-optimale obtenue est présentée dans le cas scalaire.*

## MOTS - CLES

- *Systèmes non linéaires*
- *Systèmes discrets*
- *Commande optimale*
- *Série infinie de Kronecker*
- *Critère quadratique*
- *Stabilité*