USTL
FLANDRES ARTOIS

LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE
ET D'OPTIMISATION

50376
1990
350

n° d'ordre : 663

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

50376
1990
350

THESE

Nouveau régime

présentée à

l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Guy Antoine SEDOGBO

ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DE CERTAINS SOUS-ENSEMBLES DE SUITES LOGARITHMIQUES

soutenue le 20 décembre 1990 devant la commission d'examen

Membres du jury

Président :	C. BREZINSKI
Rapporteurs :	P. SABLONNIERE
	B. GERMAIN-BONNE

Laboratoire d'Analyse Numérique ... - M3, USTL Flandres-Artois, 59655 ... - FRANCE.

030 031760 3

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNOLOGIES DE LILLE

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A.DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques

M. MIGEON Michel	EUDIL
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CROSNIER Yves	Electronique
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DECLERCQ Roger	Sciences de gestion
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DESCHEPPER Joseph	Sciences de gestion
Mme DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DHAINAUT André	Biologie animale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DJAFARI Rouhani	Physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUPOUY Jean Paul	Biologie
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. FOCT Jacques Jacques	Métallurgie
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie structurale
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie-Physique
M. GRANELLE Jean Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. HENRY Jean Pierre	Génie mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques

M. LATTEUX Michel	Informatique
M. LAVEINE Jean Pierre	Paléontologie
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique atomique et moléculaire
M. LEROY Jean Marie	Spectrochimie
M. LHENAFF René	Géographie
M. LHOMME Jean	Chimie organique biologique
M. LOUAGE Françis	Electronique
M. LOUCHEUX Claude	Chimie-Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MAROUF Nadir	Sociologie
M. MICHEAU Pierre	Mécanique des fluides
M. PAQUET Jacques	Géologie générale
M. PASZKOWSKI Stéfan	Mathématiques
M. PETIT Francis	Chimie organique
M. PORCHET Maurice	Biologie animale
M. POUZET Pierre	Modélisation - calcul scientifique
M. POVY Lucien	Automatique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. RAMAN Jean Pierre	Sciences de gestion
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joël	Spectroscopie moléculaire
Mme SCHWARZBACH Yvette	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SLIWA Henri	Chimie organique
M. SOMME Jean	Géographie
Melle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. THIEBAULT François	Sciences de la Terre
M. THOMAS Jean Claude	Géométrie - Topologie
M. THUMERELLE Pierre	Démographie - Géographie humaine
M. TILLIEU Jacques	Physique théorique
M. TOULOTTE Jean Marc	Automatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail
M. TURRELL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANEECLOO Nicolas	Sciences Economiques
M. VAST Pierre	Chimie inorganique
M. VERBERT André	Biochimie
M. VERNET Philippe	Génétique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. WALLART Françis	Spectrochimie infrarouge et raman
M. WEINSTEIN Olivier	Analyse économique de la recherche et développement
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ABRAHAM Francis	
M. ALLAMANDO Etienne	Composants électroniques
M. ANDRIES Jean Claude	Biologie des organismes
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BALL Steven	Génétique
M. BART André	Biologie animale
M. BASSERY Louis	Génie des procédés et réactions chimiques
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BAUSIERE Robert	Systèmes électroniques
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique atomique et moléculaire
M. BERNAGE Pascal	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. BERTHOUD Arnaud	Sciences Economiques
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BISKUPSKI Gérard	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie végétale
M. BOHIN Jean Pierre	Biochimie métabolique et cellulaire
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie civil
M. BOIVIN Jean Claude	Spectrochimie
M. BOUCHER Daniel	Physique
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BROCARD Jacques	Chimie
Mme BROUSMICHE Claudine	Paléontologie
M. BUISINE Daniel	Mécanique
M. CAPURON Alfred	Biologie animale
M. CARRE François	Géographie humaine
M. CATTEAU Jean Pierre	Chimie organique
M. CAYATTE Jean Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie structurale
M. CHIVE Maurice	Composants électroniques optiques
M. COMYN Gérard	Informatique théorique
Mme CONSTANT Monique	Composants électroniques et optiques
M. COQUERY Jean Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique nucléaire et corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie organique
M. CRAMPON Norbert	Tectolique géodynamique
M. CURGY Jean Jacques	Biologie
M. DANGOISSE Didier	Physique théorique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DECOSTER Didier	Composants électroniques et optiques
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELAHAYE Jean Paul	Informatique
M. DELORME Pierre	Physiologie animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
Mme DEMUYNCK Claire	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DEPREZ Gilbert	Physique du solide - christallographie

M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
M. DERYCKE Alain	Informatique
M. DESCAMPS Marc	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
M. DEWAILLY Jean Michel	Géographie humaine
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie physique
M. DI PERSIO Jean	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DUBAR Claude	Sociologie démographique
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBOIS Jean Jacques	Géographie
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides
M. DUPONT Christophe	Vie de la firme
M. DUTHOIT Bruno	Génie civil
Mme DUVAL Anne	Algèbre
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FARVACQUE Jean Louis	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. FAUQUEMBERGUE Renaud	Composants électroniques
M. FELIX Yves	Mathématiques
M. FERRIERE Jacky	Tectonique - Géodynamique
M. FISCHER Jean Claude	Chimie organique, minérale et analytique
M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FORSE Michel	Sociologie
M. GADREY Jean	Sciences économiques
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie organique
M. GUELTON Michel	Chimie physique
M. GUICHAOUA André	Sociologie
M. HAIMAN Georges	Modélisation,calcul scientifique, statistiques
M. HOUDART René	Physique atomique
M. HUEBSCHMANN Johannes	Mathématiques
M. HUTTNER Marc	Algèbre
M. ISAERT Noël	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et statistiques
M. JEAN Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme
M. JOURNEL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KOENIG Gérard	Sciences de gestion
M. KOSTRUBIEC Benjamin	Géographie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
Mme KRIFA Hadjila	Sciences Economiques
M. LANGEVIN Michel	Algèbre
M. LASSALLE Bernard	Embryologie et biologie de la différenciation
M. LE MEHAUTE Alain	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. LEBFEVRE Yannic	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. LECLERCQ Lucien	Chimie physique
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEBVRE Marc	Composants électroniques et optiques
M. LEFEVRE Christian	Pétrologie
Melle LEGRAND Denise	Algèbre
M. LEGRAND Michel	Astronomie - Météorologie
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEGRAND Solange	Algèbre
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne

M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme
M. LEMOINE Yves	Biologie et physiologie végétales
M. LESCURE François	Algèbre
M. LESENNE Jacques	Systèmes électroniques
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
Mme LOPES Maria	Mathématiques
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU François	Sciences économiques
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MANSY Jean Louis	Géologie
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques
M. MERIAUX Michel	EUDIL
M. MERLIN Jean Claude	Chimie
M. MESMACQUE Gérard	Génie mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MOCHE Raymond	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORE Marcel	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NIAY Pierre	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PALAVIT Gérard	Génie chimique
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie animale
M. PETIT Daniel	Biologie des populations et écosystèmes
M. PLIHON Dominique	Sciences Economiques
M. PONSOLLE Louis	Chimie physique
M. POSTAIRE Jack	Informatique industrielle
M. RAMBOUR Serge	Biologie
M. RENARD Jean Pierre	Géographie humaine
M. RENARD Philippe	Sciences de gestion
M. RICHARD Alain	Biologie animale
M. RIETSCH François	Physique des polymères
M. ROBINET Jean Claude	EUDIL
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROLLAND Paul	Composants électroniques et optiques
M. ROLLET Philippe	Sciences Economiques
Mme ROUSSEL Isabelle	Géographie physique
M. ROUSSIGNOL Michel	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. ROY Jean Claude	Psychophysiologie
M. SALERNO Françis	Sciences de gestion
M. SANCHOLLE Michel	Biologie et physiologie végétales
Mme SANDIG Anna Margarette	
M. SAWERYSYN Jean Pierre	Chimie physique
M. STAROSWIECKI Marcel	Informatique
M. STEEN Jean Pierre	Informatique
Mme STELLMACHER Irène	Astronomie - Météorologie
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Génie alimentaire
M. TANRE Daniel	Géométrie - Topologie
M. THERY Pierre	Systèmes électroniques
Mme TJOTTA Jacqueline	Mathématiques
M. TOURSEL Bernard	Informatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail

M. TURREL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANDIJK Hendrik	
Mme VAN ISEGHEM Jeanine	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. VANDORPE Bernard	Chimie minérale
M. VASSEUR Christian	Automatique
M. VASSEUR Jacques	Biologie
Mme VIANO Marie Claude	
M. WACRENIER Jean Marie	Electronique
M. WARTEL Michel	Chimie inorganique
M. WATERLOT Michel	géologie générale
M. WEICHERT Dieter	Génie mécanique
M. WERNER Georges	Informatique théorique
M. WIGNACOURT Jean Pierre	
M. WOZNIAK Michel	Spectrochimie
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Algèbre

Je remercie le Professeur C. BREZINSKI pour ses conseils et Monsieur B. GERMAIN-BONNE, Maître de Conférences, pour son rôle de consultant.

J'ai eu l'honneur d'apprécier les qualités humaines et scientifiques du Professeur P. SABLONNIERE. Je lui témoigne ma profonde gratitude pour son aide précieuse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 Rappels. Définitions. Notations.

0 - Introduction 5

1 - Suites presque équivalentes 5

2 - Définition de A_p et $LOGF_p$ 5

3 - Développements asymptotiques des suites de $LOGF_p$. Définition des sous-classes de A_p et $LOGF_p$ 6

4 - Rappel des algorithmes 8

5 - Accélération de la convergence 11

6 - Résultats de calcul formel 11

CHAPITRE 2 Algorithmes généraux pour les suites de $LOGF_p$

0 - Introduction 16

1 -ε-algorithme modifié 16

2 - Δ^2 modifié itéré 21

3 - θ_2-algorithme itéré 23

4 - θ-algorithme 25

5 - Conclusion 28

CHAPITRE 3 Etude des sous-classes de $LOGF_p$. $p = 1, 2$ par le Δ^2 d'Aitken modifié itéré, le θ_2-algorithme itéré, l'ε-algorithme modifié et le θ-algorithme

0 - Introduction 29

1 - ε-algorithme modifié 29

2 - Δ^2 modifié itéré 34

3 - θ_2-algorithme itéré 36

4 - θ-algorithme 37

5 - Remarques 38

6 - Conclusion 38

CHAPITRE 4 Combinaison Δ^2 modifié et $theta_2$ pour les suites de $LOGF_p$, $p = 1, 2$

0 - Introduction 39

1 - Combinaison 39

2 - Résultats numériques 47

3 - Conclusion 64

CHAPITRE 5 Applicaitons à divers problèmes d'Analyse Numérique

0 - Introduction 65

1 - Etude des suites du type

$x_n = \beta_1 n^{-1/p} + \beta_2 n^{-2/p} + \beta_3 n^{-3/p} + \ldots, p \in \mathbb{R}_+ - \{0; 1\}$ 65

2 - Etude des suites du type

$x_n = \beta_2 n^{-2} + \beta_4 n^{-4} + \beta_6 n^{-6} + \ldots$ 73

3 - Etude des suites du type

$x_n = \beta_1 n^{-1/2} + \beta_3 n^{-3/2} + \beta_5 n^{-5/2} + \ldots + \beta_4 n^{-2} + \beta_6 n^{-3} + \ldots$ 84

4 - Calcul d'intégrales singulières 87

5 - Résultats numériques 87

6 - Conclusion 106

CHAPITRE 6 Détermination de la classe d'une suite

0 - Introduction 107

1 - Détermination de la classe 107

2 - Résultats numériques 110

CONCLUSION 121

REFERENCES 122

INTRODUCTION

Soit $LOG = \{(S_n)/\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ et $\lim_{n\to+\infty}(S_{n+1} - S)/(S_n - S) = 1\}$. Une suite de LOG est appelée *suite à convergence logarithmique* ou plus brièvement *suite* logarithmique.

Des suites ou des séries à convergence logarithmique apparaissent dans de nombreux problèmes d'Analyse Numérique : sommations de séries, calcul intégral, intégration d'équations différentielles, problèmes aux limites.

Parmi les premiers travaux sur les suites logarithmiques, citons : LUBKIN [23], WYNN [35], BREZINSKI [5], LEVIN [20].

SMITH et FORD [33] en 1979 comparent numériquement l'efficacité de plusieurs transformations sur diverses suites logarithmiques.

En 1980, DELAHAYE et GERMAIN-BONNE [13] démontrent qu'il ne peut exister un algorithme universel capable d'accélérer la convergence de toutes les suites logarithmiques. Par conséquent *toute étude d'accélération de la convergence logarithmique ne peut concerner que des sous-ensembles de LOG.* On est donc amené à préciser différentes familles de suites logarithmiques, avant de construire des algorithmes d'accélération adaptés.

KOWALEWSKI [19] en 1981, définit et étudie quelques sous-ensembles de LOG.

On trouvera dans [4, 30, 29, 3, 28, 9, 21, 34, 10, 26, 15] d'autres travaux relatifs à la convergence logarithmique.

En 1989, MATOS [25] étudie le choix de la suite auxiliaire du E-algorithme en fonction du développement asymptotique de la suite dont on veut accélérer la convergence.

Cette thèse développe une idée de SABLONNIERE [28] consistant à *modifier, comparer et combiner des algorithmes existants pour accélérer la convergence* de quelques sous-ensembles de LOG.

On donne également quelques applications à divers problèmes d'Analyse Numérique.

Nous considérons d'une part les suites (S_n) de la forme

$$S_{n+1} = f(S_n)$$

où f est une fonction suffisamment différentiable et d'autre part les suites dont le développement asymptotique de l'erreur s'écrit :

$$x_n = \Sigma \beta_i \bar{n}^{\alpha_i}$$

$\alpha_i > 0, \beta_i$ constant ou polynôme en $logn$. Pour ces suites nous étudions le θ-algorithme [4], le θ_2-algorithme [5] itéré, des modifications du Δ^2 d'Aitken [1] itéré et de l'ε-algorithme[36,4]
Nous étudions aussi des combinaisons du Δ^2 d'Aitken modifié et du θ_2-algorithme.

Ces différents algorithmes permettent non seulement d'accélérer la convergence des suites considérées mais aussi de donner une estimation asymptotique de l'erreur. Dans certains cas, on obtient même un encadrement de la limite.

Toutes nos démonstrations sont ramenées à des développements de calcul formel. Considérons par exemple la transformation définie par la première colonne paire de l'ε-algorithme et notons-la ε_2.

Pour toute suite (x_n), cette transformation peut s'écrire :

$$\varepsilon_2(x_n) = x_{n+1} + 1/\Delta, \Delta = N^{-1} + E^{-1}$$

avec $N = \Delta x_{n+1}$ et $E = -\Delta x_n$.

- *Si* (x_n) *est une suite de point fixe*, $x_{n+1} = f(x_n)$, on pose $x_n = x$. On a alors :

$$x_{n+1} = f(x), x_{n+2} = fof(x) = f_2(x), N = f_2(x) - f(x), E = x - f(x)$$

On définit ainsi une fonction $\varepsilon_2(x)$ dont on peut étudier le développement en série formelle de la variable x, par une technique que nous appelerons *la technique du point fixe.*

- *Si* (x_n), *de limite nulle, a un développement asymptotique* tel que $x_n = g(\frac{1}{n})$, on pose :

$$x = 1/n, x_n = g(x), x_{n+1} = gof(x), x_{n+2} = gof_2(x)$$

avec $f(x) = x/(1+x)$.

On définit aussi dans ce cas une fonction $\varepsilon_2(x)$ différente de la précédente, dont on peut étudier le développement par une technique qui sera appelée celle du *développement explicite.*

La thèse est divisée en six chapitres.

Dans le **Premier Chapitre**, nous faisons des rappels et fixons les notations. Nous définissons des sous-ensembles de LOG, notés $LOGF_p$ et contenant des suites du type :

$$S_{n+1} = S_n + \alpha_{p+1}(S_n - S)^{p+1} + O\left((S_n - S)^{p+2}\right),$$

pour lequelles nous donnons des développements asymptotiques plus précis. Nous présentons aussi le schéma général du Δ^2 d'Aitken modifié et de l'ε-algorithme modifié.

Dans le **Deuxième Chapitre**, nous nous proposons d'accélérer la convergence des suites générales de $LOGF_p$ définies précédemment. Les algorithmes étudiés sont : l'ε-algorithme modifié, le Δ^2 modifié itéré, le θ_2 itéré et le θ-algorithme. Il est évident que des renseignements plus précis sur une suite permettent une meilleure accélération de sa convergence. Nous considérons donc aux **troisième** et **quatrième chapitres**, certains sous-ensembles de $LOGF_1$ et $LOGF_2$ pour lesquels nous présentons des algorithmes appropriés.

Nous utilisons, pour les démonstrations de ces chapitres, la technique du point fixe définie plus haut.

Dans divers problèmes d'Analyse Numérique, la solution s est approchée par les termes d'une suite (s_n). Quand le développement asymptotique de l'erreur $e_n = s_n - s$ est semblable à celui d'une suite de $LOGF_p$, il suffit d'appliquer les algorithmes des chapitres précédents. Le but du **cinquième chapitre** est de considérer des développements autres que ceux apparaissant dans $LOGF_p$. Il s'agit essentiellement des suites (e_n) du type :

$$e_n = n^{-\theta} \sum_{i \geq 0} \beta_i n^{-i}, \theta > 0, \beta_0 \neq 0.$$

Tous les algorithmes proposés dans les chapitres précédents supposent connus les réels p et θ définis plus haut.

Nous étudions au **sixième chapitre** des estimations de ces réels en développant des idées de BJORSTAD, DAHLQUIST, GROSSE [8]. Les démonstrations de ces deux chapitres utilisent la technique du développement explicite.

Certains résultats de cette thèse sont publiés dans [31, 32].

CHAPITRE I

RAPPELS - DÉFINITIONS - NOTATIONS

CHAPITRE I

RAPPELS - DÉFINITIONS - NOTATIONS

0 - Introduction

Nous donnons ci-dessous des rappels, définitions et notations. A la fin du chapitre on trouvera des résultats de calcul formel utilisés dans les démonstrations ultérieures.

1. Suites presque équivalentes

On dira que deux suites (u_n) et (v_n) de limite nulle, sont presque équivalentes ssi il existe un entier n_0 et un réel A non nul tels que $u_n \sim v_n$, pour tout $n \geq n_0$. On notera alors $u_n \Longleftrightarrow v_n$.

2 - Définition de A_p et $LOGF_p$

Rappelons les définitions données par SABLONNIERE [28]. Soit A_p l'ensemble des fonctions f admettant le développement suivant au voisinage de 0 :

$$f(x) = x + \sum_{i \geq 1} \alpha_{p+i} x^{p+i}, \quad p \in \mathbb{N}^*, \alpha_{p+1} < 0.$$

Soit

$$LOGF_p = \{(x_n)/x_{n+1} = f(x_n), f \in A_p, \lim_{n \to +\infty} x_n = 0\}.$$

Rappelons maintenant quelques propriétés des suites de $LOGF_p$

Théorème 1.1. : *(i)* $\forall (x_n) \in LOGF_p, x_n \Longleftrightarrow n^{-1/p}$.

(ii) $LOGF_p \subset LOGSF$

où $LOGSF = \left\{(S_n)/\lim_{n \to +\infty} \frac{S_{n+1}-S}{S_n - S} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1\right\}$.

(iii) Toute suite de $LOGF_p$ est monotone (strictement) à partir d'un certain rang.

Démonstration.

(i) Cf. [12]

(ii), (iii) Cf. [19]

3 - Développements asymptotiques des suites de $LOGF_p$.

Définition des sous-classes de A_p et $LOGF_p$ pour $p = 1,2$ [28]

D'après DE BRUIJN [12, chap. 8] pour chaque fonction f de A_p, il existe une unique fonction :

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{p} d_i x^{-i} + c_o \log x + \sum_{i \geq 1} c_i x^i \tag{1}$$

vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\psi(f(x)) = 1 + \psi(x) \tag{2}$$

Définissons, pour toute fonction f, f_n par :

$$f_0 = Id$$

et pour tout $n \geq 1$, $f_n = fof_{n-1}$. En posant $x_0 = x$ et $x_n = f(x_{n-1}) = f_n(x)$, la relation (2) donne

$$\psi(x_n) = \psi(f_n(x)) = n + \psi(x).$$

Les coefficients de ψ sont alors calculés explicitement, ce qui permet de déterminer les développements asymptotiques des suites de $LOGF_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Nous donnons ci-dessous les résultats précis pour $p = 1,2$ [28].

Théorème 1.2. : *Soit $f \in A_1$, $f(x) = x + \sum_{i \geq 2} \alpha_i x^i$. On a :*

$$\psi(x) = d_1 x^{-1} + c_0 \log x + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

avec

$$c_0 = 1 - \alpha_3/\alpha_2^2.$$

On définit :

$$A_1' = \{f \in A_1 / c_0 \neq 0\} \text{ et } LOGF_1' = \{(x_n)/f \in A_1'\}$$
$$A_1'' = \{f \in A_1 / c_0 = 0\} \text{ et } LOGF_1'' = \{(x_n)/f \in A_1''\}$$

(i) Si $(x_n) \in LOGF_1'$, alors le développement asymptotique de (x_n) est de la forme :

$$x_n = a_1 n^{-1} + (a_2 logn + a_3)n^{-2} + (a_4(logn)^2 + a_5 logn + a_6)n^{-3} + \dots$$

(ii) Si $(x_n) \in LOGF_1''$, on a :

$$x_n = a_1 n^{-1} + a_3 n^{-2} + a_6 n^{-3} + a_{10} n^{-4} + \dots$$

Remarque. Le coefficient c_0 de ψ est important puisque de sa présence dépend l'existence de logarithmes dans le développement asymptotique de la suite.

Exemple 1. $f(x) = x - x^2$, $(f \in A_1')$

$$\psi(x) = x^{-1} + logx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{13}{36}x^3 + \dots$$

et

$$x_n = n^{-1} - n^{-2}(logn + \psi(x_0))$$
$$+n^{-3}\left[(logn)^2 + (2\psi(x_0) - 1)logn + \psi^2(x_0) - \psi(x_0) + \frac{1}{2}\right] + \dots$$

Exemple 2. $f(x) = x - x^2 + x^3, (f \in A_1'')$

$$\psi(x) = x^{-1} - x - x^2 - x^3 + \dots$$

et

$$x_n = n^{-1} - \psi(x_0)n^{-2} + (\psi^2(x_0) - 1)n^{-3} + \dots$$

Théorème 1.3. : *Soit $f \in A_2$, $f(x) = x + \sum_{i \geq 3} \alpha_i x^i$, on a alors :*

$$\psi(x) = d_2 x^{-2} + d_1 x^{-1} + c_0 logx + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

où $c_0 = 3/2 + \alpha_4^2/\alpha_3^3 - \alpha_5/\alpha_3^2$.

On définit les sous-ensembles :

$$A_2' = \{f \in A_2 / \alpha_4 \neq 0 \text{ et } c_0 \neq 0\} \text{ et } LOGF_2' = \{(x_n)/f \in A_2'\}$$
$$A_2'' = \{f \in A_2 / f \text{ impaire } c_0 \neq 0\} \text{ et } LOGF_2'' = \{(x_n)/f \in A_2''\}$$
$$A_2''' = \{f \in A_2 / f \text{ impaire et } c_0 = 0\} et LOGF_2''' = \{(x_n)/f \in A_2'''\}$$

(i) Si $(x_n) \in LOGF_2'$, on a le développement asymptotique :

$$x_n = a_1 n^{-1/2} + a_2 n^{-1} + (a_3 logn + a_4) n^{-3/2} + (a_5 logn + a_6) n^{-2} + \dots$$

(ii) Si $(x_n) \in LOGF_2''$, on a le d.a. :

$$x_n = a_1 n^{-1/2} + a_2 n^{-1} + (a_3 logn + a_4) n^{-3/2} + (a_7 (logn)^2 + a_8 logn + a_9) n^{-5/2} + \dots$$

(iii) Si $(x_n) \in LOGF_2'''$, on a le d.a. :

$$x_n = a_1 n^{-1/2} + a_4 n^{-3/2} + a_9 n^{-5/2} + \dots$$

Exemple 3 : $f(x) = x - x^3 + x^4$, $(f \in A_2')$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}x^{-2} + x^{-1} + \frac{1}{2}logx - \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$
$$x_n = (2n)^{-1/2} + (2n)^{-1} - (logn + 2 - 4\psi(x_0) - log2) n^{-3/2}/8\sqrt{2} + \dots$$

Exemple 4 : $f(x) = \sin x, (f \in A_2'')$

$$\psi(x) = 3x^{-2} + \frac{6}{5}logx + \frac{79}{1050}x^2 + \dots$$
$$x_n = (\frac{1}{3}n)^{-1/2} - (\frac{1}{3}n)^{-3/2}(\frac{1}{10}logn + \frac{1}{6}\psi(x_0) - \frac{1}{10}log3) + \dots$$

Exemple 5 : $f(x) = x - x^3 + \frac{3}{2}x^5, (f \in A_2''')$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{4}x^2 + \dots$$
$$x_n = (2n)^{-1/2} - \psi(x_0)(2n)^{-3/2} + \dots$$

4 - Rappel des algorithmes

a) Le Δ^2 d'Aitken [1, 4]

Pour toute suite (u_n) nous notons $R[u_n] = \frac{\Delta u_n . \Delta u_{n+1}}{\Delta^2 u_n}$ où $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$ et $\Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n$.

Le Δ^2 d'Aitken transforme (u_n) en

$$\delta u_n = u_{n+1} - R[u_n].$$

Il existe plusieurs autres formes de cet algorithme. En voici deux :

$$\delta u_n = u_n - \frac{(\Delta u_n)^2}{\Delta^2 u_n} \text{ et } \delta u_n = u_{n+1} + \frac{1}{\frac{1}{\Delta u_{n+1}} - \frac{1}{\Delta u_n}}$$

b) La transformation θ_2 [5]

Le θ_2 transforme une suite (u_n) en la suite (z_n) définie par :

$$z_n = \theta_2(u_n) = u_{n+1} + \frac{\delta u_n - u_{n+1}}{1 - \frac{\Delta \delta u_n}{\Delta u_{n+1}}}.$$

Afin d'éviter toute confusion avec les algorithmes θ et θ_2 itéré définis plus loin, nous noterons dorénavant

$$\hat{\theta}(u_n) = \theta_2(u_n).$$

c) ε-algorithme [36, 4]

Pour une suite (u_n) donnée, on pose :

$$\varepsilon_{-1}^{(n)} = 0 \text{ et } \varepsilon_0^{(n)} = u_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

puis pour tout $k \geq 0$: $\varepsilon_{k+1}^{(n)} = \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + [\varepsilon_k^{(n+1)} - \varepsilon_k^{(n)}]^{-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que

$$\varepsilon_{2k+2}^{(n)} = \varepsilon_{2k}^{(n+1)} + 1/\Delta$$

où $\Delta = M^{-1} + N^{-1} + E^{-1}$, avec :

$$M = \varepsilon_{2k}^{(n+1)} - \varepsilon_{2k-2}^{(n+2)}$$
$$N = \varepsilon_{2k}^{(n+2)} - \varepsilon_{2k}^{(n+1)}$$
$$E = \varepsilon_{2k}^{(n)} - \varepsilon_{2k}^{(n+1)}$$

d) E-algorithme [7, 16]

Pour une suite (u_n) vérifiant :

$$u_n = u + a_1 g_1(n) + \cdots + a_k g_k(n) + \cdots \quad ,$$
$$(u = \lim_{n \to +\infty} u_n)$$

le E-algorithme s'écrit :

$$\begin{cases} E_0^{(n)} = u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ g_{0,i}^{(n)} = g_i(n), n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}^* \\ E_k^{(n)} = \dfrac{g_{k-1,k}^{(n+1)} E_{k-1}^{(n)} - g_{k-1,k}^{(n)} E_{k-1}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,k}^{(n)}} \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \text{et } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où

$$g_{k,i}^{(n)} = \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)} g_{k-1,i}^{(n)} - g_{k-1,k}^{(n)} g_{k-1,i}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,k}^{(n)}}$$

$k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}, i = k+1, k+2, \ldots$

e) ρ-algorithme [4]

Soit (u_n) une suite.

$$\begin{cases} \rho_{-1}^{(n)} = 0, \rho_0^{(n)} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}, \\ \rho_{k+1}^{(n)} = \rho_{k-1}^{(n+1)} + \frac{x_{n+k+1} - x_n}{\rho_k^{(n+1)} - \rho_k^{(n)}}, \\ n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(x_n) étant une suite auxiliaire.

f) θ-algorithme [4]

Pour une suite (u_n), le θ-algorithme est défini de la façon suivante :

$$\theta_{-1}^{(n)} = 0, \theta_0^{(n)} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\text{et } \theta_{2k+2}^{(n)} = \theta_{2k}^{(n+1)} + \frac{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}{1 - \frac{\Delta\theta_{2k+1}^{(n)}}{\Delta\theta_{2k+1}^{(n+1)}}}$$
$$\theta_{2k+1}^{(n)} = \theta_{2k-1}^{(n+1)} + [\theta_{2k}^{(n+1)} - \theta_{2k}^{(n)}]^{-1}, \forall n, k \in \mathbb{N}$$

g) Itération d'algorithmes.

Soit $\mathcal{T}$ une transformation et soit (u_n) une suite.

Posons $u_n^{(o)} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_n^{(k)} = \mathcal{T}(u_n^{(k-1)}) \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

On dira que la suite $(u_n^{(k)})$ est la k-ième itération de la transformation $\mathcal{T}$ appliquée à (u_n).

5. Accélération de la convergence

Soient (x_n) une suite de limite nulle et T une transformation. Si (x_n) a un développement asymptotique du type $x_n = g(x) \sim \alpha x^a$, on dit que T accélère la convergence de (x_n) ssi

$$T(x) \sim \beta x^b \text{avec } b \geq a.$$

6. Résultats de calcul formel [9, 27]

Les démonstrations des théorèmes d'accélération de la convergence que nous ferons utilisent deux principes : la récurrence et les développements de fonctions composées.

Voici les résultats dont nous nous servirons :

a) Les polynômes de Bell

Ce sont des polynômes à une ou plusieurs variables définis par :

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-k+1}) = \Sigma \frac{n!}{c_1! c_2! \ldots (1!)^{c_1} (2!)^{c_2} \ldots} x_1^{c_1} x_2^{c_2} \ldots$$

n, k entiers tels que $1 \leq k \leq n$.

La sommation a lieu pour chaque groupe d'entiers naturels c_i vérifiant

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + \ldots = k \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \ldots = n \end{cases}$$

Exemples.

$$B_{n,n}(x_1) = x_1^n$$

$$B_{n,n-1}(x_1, x_2) = \binom{n}{2} x_1^{n-2} x_2$$

$$B_{n,n-2}(x_1, x_2, x_3) = \binom{n}{3} x_1^{n-3} x_3 + 3 \binom{n}{4} x_1^{n-4} x_2^2$$

$$B_{n,n-3}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \binom{n}{4} x_1^{n-4}x_4 + 10\binom{n}{5} x_1^{n-5}x_2x_3 + 15\binom{n}{6} x_1^{n-6}x_2^3$$

$$B_{n,n-4}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \binom{n}{5} x_1^{n-5}x_5 + 15\binom{n}{6} x_1^{n-6}x_2x_4 + 10\binom{n}{6} x_1^{n-6}x_3^2$$

$$+105\binom{n}{7} x_1^{n-7}x_2^2x_3 + 105\binom{n}{8} x_1^{n-8}x_2^4$$

$$B_{n,n-5}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \binom{n}{6} x_1^{n-6}x_6 + 35\binom{n}{7} x_1^{n-7}x_3x_4 + 21\binom{n}{7} x_1^{n-7}\times$$

$$x_2x_5 + 280\binom{n}{8} x_1^{n-8}x_2x_3^2 + 210\binom{n}{8} x_1^{n-8}x_2^2x_4$$

$$+1260\binom{n}{9} x_1^{n-9}x_2^3x_3 + 945\binom{n}{10} x_1^{n-10}x_2^5.$$

Les $\binom{n}{k}$ désignent les coefficients binomiaux. Par convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

b) Développement de gof

Soient $f(x) = \sum_{i\geq 1} \alpha_i x^i$ et $g(x) = \sum_{i\geq 1} \beta_i x^i$. Posons $gof(x) = \sum_{i\geq 1} \gamma_i x^i$

$$\gamma_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!\beta_k B_{n,k}(\alpha_1, 2!\alpha_2, \ldots, (n-k+1)!\alpha_{n-k+1}),$$

les $B_{n,k}$ désignant les polynômes de Bell. Plus explicitement,

$$\begin{aligned}
\gamma_n = {} & \beta_n\alpha_1^n + \beta_{n-1}(n-1)\alpha_1^{n-2}\alpha_2 \\
& +(n-2)\beta_{n-2}\left[\alpha_1^{n-3}\alpha_3 + \tfrac{1}{2}(n-3)\alpha_1^{n-4}\alpha_2^2\right] \\
& +(n-3)\beta_{n-3}\left[\alpha_1^{n-4}\alpha_4 + (n-4)\alpha_1^{n-5}\alpha_2\alpha_3 + \tfrac{1}{6}(n-4)(n-5)\alpha_1^{n-6}\alpha_2^3\right] \\
& +(n-4)\beta_{n-4}\left[\alpha_1^{n-5}\alpha_5 + (n-5)(\alpha_1^{n-6}\alpha_2\alpha_4 + \tfrac{1}{2}\alpha_1^{n-6}\alpha_3^2)\right. \\
& \qquad \left. +\tfrac{1}{2}(n-5)(n-6)\alpha_1^{n-7}\alpha_2^2\alpha_3 + \tfrac{1}{24}(n-5)(n-6)(n-7)\alpha_1^{n-8}\alpha_2^4\right] \\
& +(n-5)\beta_{n-5}\left[\alpha_1^{n-6}\alpha_6 + (n-6)(\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_5)\alpha_1^{n-7}\right. \\
& \qquad +\tfrac{1}{2}(n-6)(n-7)(\alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_4)\alpha_1^{n-8} \\
& \qquad +\tfrac{1}{6}(n-6)(n-7)(n-8)\alpha_1^{n-9}\alpha_2^3\alpha_3 \\
& \qquad \left. +\tfrac{1}{120}(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)\alpha_1^{n-10}\alpha_2^5\right] \\
& +(n-6)\beta_{n-6}\left[\alpha_1^{n-7}\alpha_7 + (n-7)(\alpha_3\alpha_5 + \alpha_2\alpha_6 + \tfrac{1}{2}\alpha_4^2)\alpha_1^{n-8}\right.
\end{aligned}$$

$$+(n-7)(n-8)(\tfrac{1}{6}\alpha_3^3+\tfrac{1}{2}\alpha_2^2\alpha_5+\alpha_2\alpha_3\alpha_4)a_1^{n-9}$$
$$+(n-7)(n-8)(n-9)(\tfrac{1}{4}\alpha_2^2\alpha_2^3+\tfrac{1}{6}\alpha_2^3\alpha_4)\alpha_1^{n-10}$$
$$+\tfrac{1}{24}(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)\alpha_1^{n-11}\alpha_2^4\alpha_3$$
$$+\tfrac{1}{720}(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)\alpha_1^{n-12}\alpha_2^6]$$

$+\dots$

Si $f_2(x) = fof(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$, on obtient a_n en remplaçant dans γ_n, β_i par α_i pour tout i. Donnons les expressions de γ_n et a_n pour $1 \leq n \leq 7$, dans le cas où $\alpha_1 = 1$; c'est le cas qui sera le plus courant puisque pour les suites de point fixe considérées, $f(x) = x + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \dots$

$$\begin{cases}
\gamma_1 &= \beta_1 \\
\gamma_2 &= \beta_1\alpha_2 + \beta_2 \\
\gamma_3 &= \beta_1\alpha_3 + 2\beta_2\alpha_2 + \beta_3 \\
\gamma_4 &= \beta_1\alpha_4 + \beta_2(2\alpha_3 + \alpha_2^2) + 3\beta_3\alpha_2 + \beta_4 \\
\gamma_5 &= \beta_1\alpha_5 + 2\beta_2(\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3) + 3\beta_3(\alpha_3 + \alpha_2^2) + 4\beta_4\alpha_2 + \beta_5 \\
\gamma_6 &= \beta_1\alpha_6 + \beta_2(2\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2) + \beta_3(3\alpha_4 + 6\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2^3) \\
&\quad +\beta_4(4\alpha_3 + 6\alpha_2^2) + 5\beta_5\alpha_2 + \beta_6 \\
\gamma_7 &= \beta_1\alpha_7 + 2\beta_2(\alpha_6 + \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4) + 3\beta_3(\alpha_5 + 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3) \\
&\quad +\beta_4(4\alpha_4 + 12\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_2^3) + 5\beta_5(\alpha_3 + 2\alpha_2^2) + 6\beta_6\alpha_2 + \beta_7 \\
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 2\alpha_2 \\
a_3 &= 2\alpha_3 + 2\alpha_2^2 \\
a_4 &= 2\alpha_4 + 5\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2^3 \\
a_5 &= 2\alpha_5 + 6\alpha_2\alpha_4 + 5\alpha_2^2\alpha_3 + 3\alpha_3^2 \\
a_6 &= 2\alpha_6 + 7\alpha_2\alpha_5 + 8\alpha_2^2\alpha_4 + 7\alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_2^3\alpha_3 + 7\alpha_3\alpha_4 \\
a_7 &= 2\alpha_7 + 8\alpha_2\alpha_6 + 12\alpha_2^2\alpha_5 + 20\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 8\alpha_3\alpha_5 + 3\alpha_3^3 + 3\alpha_2^2\alpha_3^2 \\
&\quad +4\alpha_4^2 + 4\alpha_2^3\alpha_4
\end{cases}$$

c) Développement de $[1/f(x)]^m = [f(x)]^{-m}$

Soit $f(x) = x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots (\alpha_1 = 1)$.

$$[f(x)]^{-m} = x^{-m}(1+u)^{-m}$$

avec $u = \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots = \tilde{f}(x)$.

Mais $(1+u)^{-m} = 1 + \sum_{j\geq 1}(-1)^j \binom{m-1+j}{m-1} u^j = 1 + g(u)$.

On a alors $[f(x)]^{-m} = x^{-m}(1 + g(\tilde{f}(x))$.

On peut calculer $g(\tilde{f}(x))$ en appliquant la formule du paragraphe précédent, ce qui donne

$$[f(x)]^{-m} = x^{-m}(1 + \sum_{n\geq 1} \gamma_n x^n).$$

Donnons quelques expressions de γ_n pour $m = 1$.

$$\begin{cases} \gamma_1 &= -\alpha_2 \\ \gamma_2 &= -\alpha_3 + \alpha_2^2 \\ \gamma_3 &= -\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2^3 \\ \gamma_4 &= -\alpha_5 + 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2 - 3\alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2^4 \\ \gamma_5 &= -\alpha_6 + 2(\alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4) - 3(\alpha_2^2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3^2) + 4\alpha_2^3\alpha_3 - \alpha_2^5 \\ \gamma_6 &= -\alpha_7 + 2(\alpha_2\alpha_6 + \alpha_3\alpha_5) + \alpha_4^2 - 3\alpha_2^2\alpha_5 - 6\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \alpha_3^3 \\ & \quad +4\alpha_2^3\alpha_4 + 6\alpha_2^2\alpha_3^2 - 5\alpha_2^4\alpha_3 + \alpha_2^6 \\ \gamma_7 &= -\alpha_8 + 2(\alpha_2\alpha_7 + \alpha_3\alpha_6 + \alpha_4\alpha_5) - 3(\alpha_2^2\alpha_6 + 2\alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4^2) \\ & \quad +4(\alpha_2^3\alpha_5 + 3\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3^3) - 5(\alpha_2^4\alpha_4 + 2\alpha_2^3\alpha_3^2) \\ & \quad +6\alpha_2^5\alpha_3 - \alpha_2^7 \end{cases}$$

Si $m = 2$

$$\begin{cases} \gamma_1 &= -2\alpha_2 \\ \gamma_2 &= -2\alpha_3 + 3\alpha_2^2 \\ \gamma_3 &= -2\alpha_4 + 6\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_2^3 \\ \gamma_4 &= -2\alpha_5 + 6\alpha_2\alpha_4 + 3\alpha_3^2 - 12\alpha_2^2\alpha_3 + 5\alpha_2^4 \\ \gamma_5 &= -2\alpha_6 + 6(\alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4) - 12(\alpha_2^2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3^2) + 20\alpha_2^3\alpha_3 - 6\alpha_2^5 \end{cases}$$

Si $m = 3$

$$\begin{cases} \gamma_1 &= -3\alpha_2 \\ \gamma_2 &= -3\alpha_3 + 6\alpha_2^2 \\ \gamma_3 &= -3\alpha_4 + 12\alpha_2\alpha_3 - 10\alpha_2^3 \\ \gamma_4 &= -3\alpha_5 + 12\alpha_2\alpha_4 + 6\alpha_3^2 - 30\alpha_2^2\alpha_3 + 15\alpha_2^4 \\ \gamma_5 &= -3\alpha_6 + 12(\alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4) - 30(\alpha_2^2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3^2) + 60\alpha_2^3\alpha_3 - 21\alpha_2^5 \end{cases}$$

d) Développement de $[f(x)]^m$

Un calcul analogue à celui du paragraphe précédent permet d'écrire

$$[f(x)]^m = x^m(1 + \sum_{n\geq 1} \gamma_n x^n)$$

Si $m = 2$

$$\begin{cases} \gamma_1 &= 2\alpha_2 \\ \gamma_2 &= 2\alpha_3 + \alpha_2^2 \\ \gamma_3 &= 2\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_3 \\ \gamma_4 &= 2\alpha_5 + 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2 \\ \gamma_5 &= 2\alpha_6 + 2\alpha_2\alpha_5 + 2\alpha_3\alpha_4 \\ \gamma_6 &= 2\alpha_7 + 2\alpha_2\alpha_6 + 2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_4^2 \end{cases}$$

Si $m = 3$

$$\begin{cases} \gamma_1 &= 3\alpha_2 \\ \gamma_2 &= 3\alpha_3 + 3\alpha_2^2 \\ \gamma_3 &= 3\alpha_4 + 6\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2^3 \\ \gamma_4 &= 3\alpha_5 + 6\alpha_2\alpha_4 + 3\alpha_3^2 + 3\alpha_2^2\alpha_3 \\ \gamma_5 &= 3\alpha_6 + 6\alpha_2\alpha_5 + 6\alpha_3\alpha_4 + 3\alpha_2^2\alpha_4 + 3\alpha_2\alpha_3^2 \end{cases}$$

e) Développement de $g(x/1+x)$ et $g(x/1+2x)$

Si $g(x) = \sum_{i\geq 1} \beta_i x^i$,

$$g(x/1+x) = \sum_{i\geq 1} \gamma_n x^n \text{ et } g(x/1+2x) = \sum_{n\geq 1} \delta_n x^n.$$

On obtient γ_n et δ_n en appliquant la formule de Faa Di Bruno respectivement à

$$\beta_i \text{ et } \alpha_i = (-1)^{i-1}$$

et

$$\beta_i \text{ et } \alpha_i = (-1)^{i-1}2^{i-1}.$$

Donnons les premières expressions de γ_n et δ_n :

$$\begin{cases} \gamma_1 &= \beta_1 \\ \gamma_2 &= \beta_2 - \beta_1 \\ \gamma_3 &= \beta_3 - 2\beta_2 + \beta_1 \\ \gamma_4 &= \beta_4 - 3\beta_3 + 3\beta_2 - \beta_1 \\ \gamma_5 &= \beta_5 - 4\beta_4 + 6\beta_3 - 4\beta_2 + \beta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_1 &= \beta_1 \\ \delta_2 &= \beta_2 - 2\beta_1 \\ \delta_3 &= \beta_3 - 4\beta_2 + 4\beta_1 \\ \delta_4 &= \beta_4 - 6\beta_3 + 12\beta_2 - 8\beta_1 \\ \delta_5 &= \beta_5 - 8\beta_4 + 24\beta_3 - 32\beta_2 + 16\beta_1 \end{cases}$$

CHAPITRE II

ALGORITHMES GENERAUX POUR $(x_n) \in LOGF_p$

CHAPITRE II

ALGORITHMES GENERAUX POUR $(x_n) \in LOGF_p$

0. Introduction

Notre principal objectif est maintenant de construire des algorithmes permettant d'accélérer la convergence des suites de $LOGFp$ et d'estimer les vitesses de convergence des suites obtenues.

Il existe dans la littérature [25, 29, 2, 5, 20, 23, 2] divers algorithmes accélérant les suites du type $LOGFp$. Nos algorithmes sont des modifications de l'ε-algorithme et du Δ^2 d'Aitken itéré, le θ_2-algorithme et le θ-algorithme.

Par définition, les suites de $LOGFp$ sont de limite nulle. Mais les algorithmes considérés s'adaptent à des suites de limite non nulle puisqu'ils ont la propriété de translativité.

1. ε-algorithme modifié

A partir de l'ε-algorithme, nous définissons un nouvel algorithme de la façon suivante :

pour toute suite (x_n) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{-1}^{(n)} = 0, \varepsilon_0^{(n)} = x_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ \varepsilon_{k+1}^{(n)} = \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + A'_k[\Delta\varepsilon_k^{(n)}]^{-1}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nous noterons $\varepsilon_k(x_n) = \varepsilon_k^{(n)}$.

La suite (A'_k) est une suite auxiliaire qui ne dépend que de la classe de la suite (x_n).

On en déduit que :

ALGORITHME 1

$$\varepsilon_{2k+2}^{(n)} = \varepsilon_{2k}^{(n+1)} + \frac{A_{2k+1}}{\Delta}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},$$

où $\Delta = M^{-1} + N^{-1} + E^{-1}$ avec

$$\begin{cases} M &= A_{2k-1}[\varepsilon_{2k}^{(n+1)} - \varepsilon_{2k-2}^{(n+2)}] \\ N &= A_{2k}\Delta\varepsilon_{2k}^{(n+1)} \\ E &= -A_{2k}\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}. \end{cases}$$

Remarque

Les suites (A_k) et $(A'_k$ sont liées par la relation

$$A_{2k+1}A_{2k} = \frac{A'_{2k+1}}{A'_{2k}}.$$

Nous adoptons le principe suivant pour toutes les démonstrations concernant l'ε-algorithme modifié :

appliqué au nième terme de toute suite (x_n) de $LOGF_p$, l'Algorithme 1 donne, en posant

$$x = x_n, \qquad x_{n+1} = f(x),$$
$$\varepsilon_{2k+2}(x) = \varepsilon_{2k}(f(x)) + \frac{A_{2k+1}}{\Delta}$$

où $\Delta = M^{-1} + N^{-1} + E^{-1}$ avec

$$M = A_{2k-1}[\varepsilon_{2k}(f(x)) - \varepsilon_{2k-2}(f_2(x))]$$
$$N = A_{2k}[\varepsilon_{2k}(f_2(x)) - \varepsilon_{2k}(f(x))]$$
$$E = A_{2k}[\varepsilon_{2k}(x) - \varepsilon_{2k}(f(x))]$$

et $f_2 = fof$.

Théorème 2.1 : *La convergence de toute suite (x_n) de LOGFp peut être accélérée par l'Algorithme 1 avec :*

$$\begin{cases} A_{-1} &= 0 \\ A_{2k} &= 1/(k+1) \\ A_{2k+1} &= k+p+1 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\varepsilon_{2k+2}(x_n))$ converge plus vite que $(\varepsilon_{2k}(x_n))$ et $\varepsilon_{2k}(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{k+1} \Longleftrightarrow n^{-(k+1)/p}$.

De plus, si à l'étape k, $\varepsilon_{2k-2}(x_n)$ et $\varepsilon_{2k}(x_n)$ admettent des d.a. de type : $\varepsilon_{2k-2}(x_n) = \sum_{i \geq k} \beta'_i x_n^i$ et $\varepsilon_{2k}(x_n) = \sum_{i \geq k+1} \beta_i x_n^i$, avec $\beta'_k \neq 0, \beta_{k+1} \neq 0$ et $\beta_{k+2} \neq 0$, alors $\varepsilon_{2k+2}(x_n) \sim \varepsilon x_n^{k+2}$ avec

$$\varepsilon = \frac{1-p}{(k+1)(k+p+1)}\beta_{k+2} + \frac{\beta_{k+1}}{k+p+1}\left[\frac{\alpha_{p+2}}{\alpha_{p+1}} + \frac{\beta_{k+1}}{(k+p)\beta'_k}\right],$$

si $p \neq 1$ et

$$\varepsilon = \frac{\beta_{k+1}}{k+2}\left[-\alpha_2 c_0 + \frac{\beta_{k+1}}{(k+1)\beta'_k}\right] \text{ si } p = 1.$$

Démonstration. D'après le principe défini précédemment, il s'agit de montrer que

$$\varepsilon_{2k}(x) \Longleftrightarrow x^{k+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Démontrons-le par récurrence.

On vérifie facilement que $\varepsilon_2(x) \Longleftrightarrow x^2$.

Supposons

$$\varepsilon_{2k-2}(x) =\Longleftrightarrow x^k$$
$$\varepsilon_{2k}(x) =\Longleftrightarrow x^{k+1}$$

et montrons que $\varepsilon_{2k+2}(x) \Longleftrightarrow x^{k+2}$.

Pour des raisons de commodité nous poserons :

$$f(x) = x + \sum_{i \geq 0} \alpha_{p+i} x^{p+i}$$
$$f_2(x) = fof(x) = x + \sum_{i \geq 0} a_{p+i} x^{p+i}$$

Posons $\varepsilon_{2k-2}(x) = \sum_{i\geq k} \beta'_i x^i$, $\varepsilon_{2k}(x) = \sum_{i\geq k+1} \beta_i x^i$,

$$\varepsilon_{2k}(f(x)) = \sum_{i\geq k+1} \gamma_i x^i, \varepsilon_{2k}(f_2(x)) = \sum_{i\geq k+1} \lambda_i x^i.$$

Les résultats de calcul formel (chap. 1, paragraphe 6) nous permettent d'écrire :

$$\text{si } p \neq 2 \begin{cases} a_p & = & 2\alpha_p \\ a_{p+1} & = & 2\alpha_{p+1} \\ & \vdots & \\ a_{2p-2} & = & 2\alpha_{2p-2} \\ a_{2p-1} & = & 2\alpha_{2p-1} + p\alpha_p^2 \\ a_{2p} & = & 2\alpha_{2p} + (2p+1)\alpha_p\alpha_{p+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{k+1} & = & \beta_{k+1} \\ \gamma_{k+2} & = & \beta_{k+2} \\ & \vdots & \\ \gamma_{k+p-1} & = & \beta_{k+p-1} \\ \gamma_{k+p-1} & = & \beta_{k+p-1} \\ \gamma_{k+p} & = & \beta_{k+p} + \beta_{k+1}(k+1)\alpha_p \\ \gamma_{k+p+1} & = & \beta_{k+p+1} + \beta_{k+1}(k+1)\alpha_{p+1} + \alpha_p(k+2)\beta_{k+2} \\ & \vdots & \\ \gamma_{k+2p-2} & = & \dots \\ \gamma_{k+2p-1} & = & \beta_{k+2p-1} + \beta_{k+p}\alpha_p(k+p) + \beta_{k+p-1}(k+p-1)\alpha_{p-1} + \\ & & \beta_{k+p-2}(k+p-2)\alpha_{p+2} + \dots + \beta_{k+1}\alpha_{2p-1}(k+1) \\ & & \beta_{k+1}\alpha_p^2\frac{k(k+1)}{2} \\ \gamma_{k+2p} & = & \beta_{k+2p} + \beta_{k+p+1}\alpha_p(k+p+1) + \beta_{k+p}\alpha_{p+1}(k+p) + \dots + \\ & & \beta_{k+3}(k+3)\alpha_{2p-2} + \beta_{k+1}(k+1)[\alpha_{2p} + k\alpha_p\alpha_{p+1}] + \\ & & \beta_{k+2}(k+2)[\alpha_{2p-1} + \alpha_p^2\frac{k+1}{2}] \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} M & = & -A_{2k-1}\beta'_k x^k + \dots \\ N & = & A_{2k}(\lambda_{k+p} - \gamma_{k+p})x^{k+p}(1 + \sum_{i=1}^p d_i x^i) \quad + \quad \dots \\ E & = & A_{2k}(\beta_{k+p} - \gamma_{k+p})x^{k+p}(1 + \sum_{i=1}^p t_i x^i) \quad + \quad \dots \\ & & \lambda_{k+p} - \gamma_{k+p} = \beta_{k+1}(k+1)\alpha_p \\ & & \beta_{k+p} - \gamma_{k+p} = -\beta_{k+1}(k+1)\alpha_p \end{array}$$

$$M^{-1} = -\frac{1}{A_{2k-1}\beta'_k x^k} + \dots$$

$$N^{-1} = \frac{1}{A_{2k}\beta_{k+1}(k+1)\alpha_p x^{k+p}}\left(1+\sum_{i=1}^{p} D_i x^i\right) + \dots$$

$$E^{-1} = \frac{-1}{A_{2k}\beta_{k+1}(k+1)\alpha_p x^{k+p}}\left(1+\sum_{i=1}^{p} T_i x^i\right) + \dots$$

Les D_i (resp. T_i) s'obtiennent en fonction des d_i (resp. t_i) par le calcul formel.

Par exemple,

$$D_1 = -d_1 \quad , \quad D_2 = -d_2 + d_1^2$$
$$T_1 = -t_1 \quad , \quad T_2 = -t_2 + t_1^2.$$

Mais $d_i = T_i \qquad \forall i = 1, \dots, p-2$, car

$$d_1 = \frac{\lambda_{k+p+1} - \gamma_{k+p+1}}{\lambda_{k+p} - \gamma_{k+p}}, \dots, d_{p-2} = \frac{\lambda_{k+2p-2} - \gamma_{k+2p-2}}{\lambda_{k+p} - \gamma_{k+p}}$$
$$t_1 = \frac{\beta_{k+p+1} - \gamma_{k+p+1}}{\beta_{k+p} - \gamma_{k+p}}, \dots, t_{p-2} = \frac{\beta_{k+2p-2} - \gamma_{k+2p-2}}{\beta_{k+p} - \gamma_{k+p}}.$$

$$\Delta = \frac{D_{p-1}-T_{p-1}}{A_{2k}\beta_{k+1}(k+1)\alpha_p x^{k+1}}\left(1+\frac{D_p-T_p}{D_{p-1}-T_{p-1}}x\right) - \frac{1}{A_{2k-1}\beta'_k x^k}$$

$$= \frac{D_{p-1}-T_{p-1}}{A_{2k}\beta_{k+1}(k+1)\alpha_p x^{k+1}}\left[1+\left(\frac{D_p-T_p}{D_{p-1}-T_{p-1}} - \frac{A_{2k}\beta_{k+1}(k+1)\alpha_p}{(D_{p-1}-T_{p-1})A_{2k-1}\beta'_k}\right)x\right]$$

$$D_{p-1} - T_{p-1} = -(k+p)\alpha_p$$

$$\frac{1}{\Delta} = -\frac{A_{2k}\beta_{k+1}(k+1)}{k+p}x^{k+1}\left[1+\left(\frac{D_p-Tp}{(k+p)\alpha_p} - \frac{A_{2k}\beta_{k+1}(k+1)}{(k+p)A_{2k-1}\beta'_k}\right)x\right].$$

On en déduit

$$A_{2k}A_{2k+1} = \frac{k+p}{k+1}$$

On peut prendre par exemple

$$\begin{cases} A_{2k} = \frac{1}{k+1} \\ A_{2k+1} = k+p \end{cases}.$$

On a alors $\varepsilon_{2k+2}(x) = \varepsilon x^{k+2} + \dots$ avec

$$\varepsilon = \gamma_{k+2} - \beta_{k+1}\left[\frac{D_p - T_p}{(k+p)\alpha_p} - \frac{\beta_{k+1}}{(k+p)(k+p-1)\beta'_k}\right]$$
$$D_p - T_p = t_p - d_p + 2d_1(d_{p-1} - t_{p-1})$$
$$t_p - d_p = \frac{2\gamma_{k+2p} - \lambda_{k+2p} - \beta_{k+2p}}{\beta_{k+1}(k+1)\alpha_p}.$$

Les calculs donnent :

$$\varepsilon = \frac{2-p}{(k+1)(k+p)}\beta_{k+2} + \frac{\beta_{k+1}}{k+p}\left(\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} + \frac{\beta_{k+1}}{(k+p-1)\beta'_k}\right) \text{ si } p \neq 2$$

$$\text{et } \varepsilon = \frac{\beta_{k+1}}{k+2}\left[-\alpha_2 c_0 + \frac{\beta_{k+1}}{(k+1)\beta'_k}\right] \text{ si } p = 2.$$

$$(c_0 = 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2^2})$$

En reprenant $f(x) = x + \sum_{i\geq 1} \alpha_{p+i} x^{p+i}$ (rappelons que la démonstration a été faite pour $f(x) = x + \sum_{i\geq 0} \alpha_{p+i} x^{p+i}$), on a :

$$\begin{cases} A_{2k} = \frac{1}{k+1} \\ \\ A_{2k+1} = k+p+1 \end{cases} \qquad \forall p \in \mathbb{N}^* .$$

De plus,

$$\varepsilon = \frac{1-p}{(k+1)(k+p+1)}\beta_{k+2} + \frac{\beta_{k+1}}{k+p+1}\left[\frac{\alpha_{p+2}}{\alpha_{p+1}} + \frac{\beta_{k+1}}{(k+p(\beta'_k}\right],$$

si $p \neq 1$ et

$$\varepsilon = \frac{\beta_{k+1}}{k+2}\left[-\alpha_2 c_0 + \frac{\beta_{k+1}}{(k+1)\beta'_k}\right]$$

si $p = 1$.

Remarque

Pour que la démonstration précédente soit complète, il faut démontrer que $\varepsilon \neq 0$, pour tout $p \geq 1$. Pour $p = 1$, dans [31], nous avons explicitement ε en fonction de n et des α_i, ce qui montre bien que $\varepsilon \neq 0$.

La relation de récurrence sur ε, devrait pouvoir permettre dans les autres cas, un calcul similaire. Même si ε était nul, cela ne contredirait pas le fait qu'il y a accélération de la convergence, au sens où nous l'avons défini (cf. chap . 1, paragraphe 5).

2. Δ^2 modifié itéré

Soit (x_n) une suite. On sait que le Δ^2 d'Aitken appliqué à (x_n) peut s'écrire

$$\delta(x_n) = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}.$$

Si (x_n) est une suite de point fixe telle que $x_{n+1} = f(x_n)$, alors :

$$\delta(x_n) = x_n - \frac{(f(x_n) - x_n)^2}{f_2(x_n) - 2f(x_n) + x_n}$$

(on rappelle que $f_2 = fof$).

A chaque étape, on applique cet algorithme à une suite (u_n) supposée de la forme $u_n = g(x_n)$. On a alors $u_{n+1} = g(x_{n+1}) = gof(x_n)$ et $u_{n+2} = gof_2(x_n)$.

On pose alors $x_n = x$ pour simplifier.

Au départ $g = Id$.

A l'étape k, $x_n^{(k-1)} = g(x) = r_{k-1}(x)$ et $r_k(x) = b_k\delta g(x) + b'_k r_{k-1}(f(x))$ avec

$$\delta_g(x) = g(x) - \frac{(gof(x) - g(x))^2}{gof_2(x) - 2gof(x) + g(x)}.$$

On obtient ainsi l'algorithme du Δ^2 modifié itéré qui s'écrit :

ALGORITHME 2

$$\begin{cases} x_n^{(0)} = x_n \forall k \in \mathbb{N} \\ x_n^{(k)} = x_{n+1}^{(k-1)} - B_k R[x_n^{(k-1)}] \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La suite (B_k) est une suite qui ne dépend que de la classe de la suite (x_n).

L'Algorithme 2 est dû à SABLONNIERE [28].

Théorème 2.2 : *Soit $(x_n) \in LOGFp$; l'Algorithme 2 avec*

$$B_k = \frac{k+p}{k}, k \geq 1,$$

accélère la convergence de (x_n).

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}, (x_n^{(k+1)})$ converge plus vite que $(x_n^{(k)})$ et $x_n^{(k)} \Longleftrightarrow n^{-(k+1)/p}$.

De plus, si à l'étape k, $x_n^{(k)}$ admet un d.a. du type $x_n^{(k)} = \sum_{i \geq k+1} \beta_i x_n^i$, où $\beta_{k+1} \neq 0$, alors $x_n^{(k+1)} \sim \delta x_n^{k+2}$ avec

$$\delta = \frac{1}{(k+1)(k+p+1)} \left[(k+1)\frac{\alpha_{p+2}}{\alpha_{p+1}}\beta_{k+1} + (1-p)\beta_{k+2} \right] \text{ si } p \neq 1$$

et

$$\delta = -\frac{c_0\alpha_2\beta_{k+1}}{k+2} \text{ si } p = 1.$$

Démonstration : similaire à celle du théorème 2.1.

3. θ_2-algorithme itéré

SABLONNIERE [28] a défini l'algorithme suivant :

ALGORITHME 3.

Pour toute suite (x_n),

$$\hat{\theta}_0(x_n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

et pour tout $k \geq 1$, $\hat{\theta}_k(x_n) = \hat{\theta}(\hat{\theta}_{k-1}(x_n))$ où $\hat{\theta}(u_n) = u_{n+1} + (u_{n+1} - v_n)\Delta u_{n+1}/(\Delta u_{n+1} - \Delta v_n)$ pour toute suite (u_n), avec

$$v_n = u_{n+1} - R[u_n].$$

On applique l'Algorithme 3 à une suite (u_n) supposée de la forme $u_n = g(x_n)$. Et on pose $x_n = x$ pour simplifier.

L'Algorithme 3 peut alors s'écrire :

- au départ $g = Id$
- à l'étape k,

$$g(x) = \hat{\theta}_{k-1}(x) \text{ et } \hat{\theta}_k(x) = \hat{\theta}g(x)$$

avec

$$\hat{\theta}g(x) = gof(x) - \frac{p'}{q'}$$
$$p' = gof(x) - \delta g(x)$$
$$q' = 1 - \frac{(\delta g)of(x) - \delta g(x)}{gof_2(x) - gof(x)}$$

On rappelle que δg a été défini au paragraphe précédent.

Ce principe sera utilisé pour toutes les démonstrations concernant le θ_2-algorithme itéré.

Theorème 2.3 : *Pour toute suite $(x_n) \in LOGFp$, $(\hat{\theta}_{k+1}(x_n))$ converge plus vite que $(\hat{\theta}_k(x_n))$ et*

$$\hat{\theta}_k(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{k+1} \Longleftrightarrow n^{-(k+1)/p}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

De plus, si à l'étape k, $\hat{\theta}_k(x_n)$ admet un d.a. du type $\hat{\theta}_k(x_n) = \sum_{i \geq k+1} \beta_i x_n^i$, avec $\beta_{k+1} \neq 0$, alors

$$\hat{\theta}_{k+1}(x_n) \sim \hat{\theta} x_n^{k+2},$$

avec

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{(k+1)^2(k+p+1)} \left[(k+1)\frac{\alpha_{p+2}}{\alpha_{p+1}}\beta_{k+1} + (1-p)\beta_{k+2} \right],$$

si $p \neq 1$ et $\hat{\theta} = \frac{c_0 \alpha_2 \beta_{k+1}}{(k+1)(k+2)}$ si $p = 1$.

Démonstration

D'après le principe défini précédemment, il s'agit de montrer que $\hat{\theta}_k(x) \Longleftrightarrow x^{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Raisonnons par récurrence.

On vérifie facilement que $\hat{\theta}_1(x) \Longleftrightarrow x^2$.

Supposons que $\hat{\theta}_k(x) = g(x) = \sum_{i \geq k+1} \beta_i x^i$ et montrons que $\hat{\theta}_{k+1}(x) \Longleftrightarrow x^{k+2}$.

Nous supposons que

$$f(x) = x + \sum_{i \geq 0} \alpha_{p+i} x^{p+i}.$$

La démonstration du théorème 2.1 nous permet d'écrire

$$\delta g(x) = \sum_{i \geq k+1} b_i x^i$$

avec

$$\begin{cases} b_{k+1} = \frac{p-1}{k+p}\beta_{k+1} \\ b_{k+2} = \frac{(k+1)\beta_{k+1}}{(k+p)^2}\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} + \frac{p^2+kp-k-2p+2}{(k+p)^2}\beta_{k+2} \end{cases}.$$

Les résultats de calcul formel donnent :

$$p' = gof(x) - \delta g(x) = (\beta_{k+1} - b_{k+1})x^{k+1}\left[1 + \frac{\beta_{k+2} - b_{k+2}}{\beta_{k+1} - b_{k+1}}x\right] + \dots$$

$$q' = 1 - \frac{(\delta g)of(x) - \delta g(x)}{gof_2(x) - gof(x)}$$

$$q' = \frac{\beta_{k+1} - b_{k+1}}{\beta_{k+1}}\left[1 - \frac{b_{b+1}}{\beta_{k+1} - b_{k+1}}(t'_1 + D_1)x\right] + \dots$$

avec

$$t'_1 = \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} + \frac{k+2}{k+1}\frac{b_{k+2}}{b_{k+1}}$$

et

$$D_1 = -\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} - \frac{k+2}{k+1}\frac{\beta_{k+2}}{\beta_{k+1}}$$

$$\frac{p'}{q'} = \beta_{k+1}x^{k+1}\left\{1 + \left[\frac{\beta_{k+2} - b_{k+2}}{\beta_{k+1} - b_{k+1}} + \frac{b_{k+1}(t'_1 + D_1)}{\beta_{k+1} - b_{k+1}}\right]x\right\} + \dots$$

On a ainsi $\hat{\theta}_{k+1}(x) \sim \hat{\theta}x^{k+2}$, avec

$$\hat{\theta} = \beta_{k+2} - \beta_{k+1}\left[\frac{\beta_{k+2} - b_{k+2}}{\beta_{k+1} - b_{k+1}} + \frac{b_{k+1}}{\beta_{k+1} - b_{k+1}}(t'_1 + D_1)\right].$$

Les calculs donnent :

$$\hat{\theta} = -\frac{\beta_{k+1}}{(k+1)(k+p)}\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} + \frac{p-2}{(k+1)^2(k+p)}\beta_{k+2}, \quad \text{si } p \neq 2$$

et

$$\hat{\theta} = \frac{c_0\alpha_2\beta_{k+1}}{(k+1)(k+2)} \quad \text{si } p = 2.$$

En reprenant $f(x) = x + \sum_{i\geq 1}\alpha_{p+i}x^{p+i}$, on a :

$$\hat{\theta} = \frac{-\beta_{k+1}}{(k+1)(k+p+1)}\frac{\alpha_{p+2}}{\alpha_{p+1}} + \frac{p-1}{(k+1)^2(k+p+1)}\beta_{k+2}, \quad \text{si } p \neq 1$$

et $\hat{\theta} = \frac{c_0\alpha_2\beta_{k+1}}{(k+1)(k+2)}$ si $p = 1$.

4. θ-algorithme

En posant $x = x_n$, le θ-algorithme ($P.10$) peut s'écrire :

$$\theta_{-1}(x) = 0, \theta_0(x) = x$$

$$\theta_{2k+2}(x) = \theta_{2k}(f(x)) + \frac{\theta_{2k}(f_2(x)) - \theta_{2k}(f(x))}{1 - \frac{p''}{q''}}$$

$$p'' = \theta_{2k+1}(f(x)) - \theta_{2k+1}(x)$$

$$q'' = \theta_{2k+1}(f_2(x)) - \theta_{2k+1}(f(x))$$

$$\theta_{2k+1}(x) = \theta_{2k-1}(f(x)) + [\theta_{2k}(f(x)) - \theta_{2k}(x)]^{-1}$$

Ce principe sera utilisé dans toutes les démonstrations concernant le θ-algorithme.

Théorème 2.4 : *Pour toute suite* $(x_n) \in LOGFp$, $(\theta_{2k+2}(x_n))$ *converge plus vite que* $(\theta_{2k}(x_n))$, $\forall k \in \mathbb{N}$. *De plus* $\theta_{2k}(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{k+1} \Longleftrightarrow n^{-(k+1)/p}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Démonstration

D'après le principe défini précédemment, il s'agit de démontrer, par récurrence, que $\theta_{2k}(x) \Longleftrightarrow x^{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

On vérifie aisément que $\theta_2(x) \Longleftrightarrow x^2$ et $\theta_3(x) \Longleftrightarrow x^{-1-p}$. Supposons

$$\theta_{2k}(x) \Longleftrightarrow x^{k+1}$$

et

$$\theta_{2k+1}(x) \sim \frac{A}{x^{k+p}}.$$

$$p'' = A\left(\frac{1}{(f(x))^{k+p}} - \frac{1}{x^{k+p}}\right)$$

$$q'' = A\left(\frac{1}{(f_2(x))^{k+p}} - \frac{1}{(f(x))^{k+p}}\right)$$

$$(f(x))^{k+p} = x^{k+p}\left(1 + \sum_{n \geq p-1} \mu_n x^n\right)$$

Les résultats de Calcul formel (chap. 1, paragraphe 6) donnent :

$$\begin{aligned} \mu_{p-1} &= (k+p)\alpha_p \\ \mu_p &= (k+p)\alpha_{p+1} \\ &\vdots \\ \mu_{2p-3} &= (k+p)\alpha_{2p-2} \\ \mu_{2p-2} &= (k+p)\alpha_{2p-1} + \tfrac{1}{2}\alpha_p^2(k+p)(k+p-1). \end{aligned}$$

Posons

$$\frac{1}{(f(x))^{k+p}} - \frac{1}{x^{k+p}} = \sum_{n \geq p-1} b_n x^{n-k-p}$$

et

$$\frac{1}{(f_2(x))^{k+p}} - \frac{1}{(f(x))^{k+p}} = \sum_{n \geq p-1} b'_n x^{n-k-p}$$

on a :

$$\begin{cases} b_{p-1} & = & -\mu_{p-1} \\ b_p & = & -\mu_p \\ \vdots & & \vdots \\ b_{2p-3} & = & -\mu_{2p-3} \\ b_{2p-2} & = & \mu_{p-1}^2 - \mu_{2p-2} \end{cases} \qquad \begin{cases} b'_{p-1} & = & b_{p-1} \\ b'_p & = & b_p \\ \vdots & & \vdots \\ b'_{2p-3} & = & b_{2p-3} \\ b'_{2p-2} & = & (b_{2p-2})_a - b_{2p-2} \end{cases}$$

La notation $(b_{2p-2})_a$ signifie que dans l'expression de b_{2p-2}, α_i est remplacé par $a_i(P.19)$.

$$p'' = Ab_{p-1}x^{-1-k}(1 + \frac{b_p}{b_{p-1}}x + \frac{b_{p+1}}{b_{p-1}}x^2 + \cdots + \frac{b_{2p-2}}{b_{p-1}}x^{p-1} + \ldots)$$
$$q'' = Ab'_{p-1}x^{-1-k}(1 + \frac{b'_p}{b'_{p-1}}x + \frac{b'_{p+1}}{b'_{p-1}}x^2 + \cdots + \frac{b'_{2p-2}}{b'_{p-1}}x^{p-1} + \ldots)$$

Mais comme $b_i = b'_i \quad \forall i = p-1, \ldots, 2p-3$,

$$\frac{p''}{q''} = 1 + (\frac{b_{2p-2}}{b_{p-1}} - \frac{b'_{2p-2}}{b'_{p-1}})x^{p-1} + \ldots$$

Les calculs donnent

$$1 - \frac{p''}{q''} = -(k+1)\alpha_p x^{p-1} + \ldots$$

Si on pose $\theta_{2k}(x) = \sum_{n \geq k+1} a_n x^n$,

$$\theta_{2k}(f(x)) = \sum_{n \geq k+1} \gamma_n x^n \text{ et } \theta_{2k}(f_2(x)) = \sum_{n \geq k+1} \lambda_n x^n,$$

le calcul de N dans la démonstration du thérème 2.1 donne :

$$\theta_{2k}(f_2(x)) - \theta_{2k}(f(x)) = (\lambda_{k+p} - \gamma_{k+p})x^{k+p}(1 + \sum_{i \geq 1} d_i x^i)$$

où

$$\lambda_{k+p} - \gamma_{k+p} = a_{k+1}(k+1)\alpha_p.$$

On en déduit que

$$\theta_{2k+2}(x) \Longleftrightarrow x^{k+2} \text{ et } \theta_{2k+3}(x) \Longleftrightarrow x^{-k-p-1}.$$

Remarque : La complication des calculs ne nous a pas permis de donner la partie principale pour le θ-algorithme.

5. Conclusion

Nous venons de généraliser les résultats de SABLONNIERE [28], puisque p n'est plus limité à 1 ou 2.

Nous avons aussi considéré deux nouveaux algorithmes, l'ε-algorithme modifié que nous avons défini et le θ-algorithme.

Il y a très peu de résultats théoriques sur le θ-algorithme, encore moins en ce qui concerne les suites logarithmiques. Le théorème 2.4 mérite donc d'être souligné.

Les quatre algorithmes donnent les mêmes résultats (asymptotiquement). De plus, les parties principales des suites transformées par l'ε-algorithme modifié et le Δ^2 d'Aitken modifié sont très semblables.

Nous verrons plus loin, que pour des valeurs particulières de p, il est possible d'encadrer la limite.

CHAPITRE III

ETUDE DES SOUS-CLASSES DE $LOGF_p$, $p = 1, 2$, PAR LE Δ^2 D'AITKEN MODIFIÉ ITÉRÉ, LE θ_2-ALGORITHME ITÉRÉ, L'ε-ALGORITHME MODIFIE ET LE θ-ALGORITHME.

CHAPITRE III

ETUDE DES SOUS-CLASSES DE $LOGF_p$, $p = 1, 2$, PAR LE Δ^2 D'AITKEN MODIFIÉ ITÉRÉ, LE θ_2-ALGORITHME ITÉRÉ, L'ε-ALGORITHME MODIFIE ET LE θ-ALGORITHME.

0. Introduction

Les quatre algorithmes généraux du chapitre précédent répondent à notre objectif. Mais on peut obtenir des résultats plus précis sur la vitesse de convergence en considèrant les sous-classes de $LOGFp$, $p = 1, 2$.

1. ε-algorithme modifié

Théorème 3.1 : *Pour toute suite* $(x_n) \in LOGFp, p = 1, 2$, *en appliquant l'Algorithme 1,* $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\varepsilon_{2k+2}(x_n))$ *converge plus vite que* $(\varepsilon_{2k}(x_n))$.

(i) Pour $(x_n) \in LOGF'_p (p = 1, 2)$,

$$A_{-1} = 0, A_{2k} = 1/(k+1), A_{2k+1} = k + p + 1, \forall k \in \mathbb{N}.$$

De plus $\varepsilon_{2k}(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{k+1} \Longleftrightarrow n^{-(k+1)/p}, \forall k \in \mathbb{N}$.

(ii) Pour $(x_n) \in LOGF''_1$,

$$A_{-1} = 0, A_{2k} = 1/(2k+1), A_{2k+1} = 2k + 2, \forall k \in \mathbb{N};$$

et

$$\varepsilon_{2k}(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{2k+1} \Longleftrightarrow n^{-(2k+1)}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

De plus si $\varepsilon_{2k-2}(x_n) \sim \beta'_{2k-1} x_n^{2k-1}$ *et* $\varepsilon_{2k}(x_n) = \sum_{i \geq 2k+1} \beta_i x_n^i$, *alors* $\varepsilon_{2k+2}(x_n) \sim \varepsilon x_n^{2k+3}$ *avec*

$$\varepsilon = \frac{\beta_{2k+3}}{(k+1)(2k+1)} - \frac{1}{(2k+1)^2}\frac{\beta_{2k+2}^2}{\beta_{2k+1}} + \frac{\beta_{2k+1}}{k+1}\left[\frac{\alpha_4}{\alpha_2} - \frac{1}{6}(k^2+k+6)\alpha_2^2\right] + \frac{\beta_{2k+1}^2}{4k(k+1)\beta'_{2k-1}}.$$

(iii) Pour $(x_n) \in LOGF_2''$,

$$A_{-1} = 0, A_{2k} = 1/(2k+1), A_{2k+1} = 2k+3, \forall k \in \mathbb{N}.$$

De plus, $\varepsilon_{2k}(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{2k+1} \Longleftrightarrow n^{-(2k+1)/2}, \forall k \in \mathbb{N}$.

(iv) Pour $(x_n) \in LOGF_2'''$,

$$A_{-1} = 0, A_{2k} = 1/(4k+1), A_{2k+1} = 4k+3, \forall k \in \mathbb{N};$$

$$\text{et } \varepsilon_{2k}(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{4k+1} \Longleftrightarrow n^{-(4k+1)/2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

De plus si $\varepsilon_{2k-2}(x_n) \sim \beta'_{4k-3} x_n^{4k-3}$ *et* $\varepsilon_{2k}(x_n) = \sum_{i \geq 4k+1} \beta_i x_n^i$, *alors*

$$\varepsilon_{2k+2}(x_n) \sim \varepsilon x_n^{4k+5}$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{8}{(4k+1)(4k+3)}\beta_{4k+5} - \frac{4}{(4k+1)^2}\frac{\beta_{4k+3}^2}{\beta_{4k+1}} \\ &+ \frac{\beta_{4k+1}}{4k+3}\left[4\frac{\alpha_7}{\alpha_3} - \frac{1}{6}(16k^2+8k+57)\alpha_3^2 + \frac{1}{4k-1}\frac{\beta_{4k+1}}{\beta'_{4k-3}}\right]. \end{aligned}$$

Démonstration

(i) Théorème 2.1, $p = 1$ pour $LOGF_1'$ et $p = 2$ pour $LOGF_2'$.

(ii) On vérifie facilement que $\varepsilon_2(x) \Longleftrightarrow x^3$.

Supposons

$$\varepsilon_{2k-2}(x) = \sum_{i \geq 2k-1} \beta'_i x^i$$

et

$$\varepsilon_{2k}(x) = \sum_{i \geq 2k+1} \beta_i x^i.$$

Les résultats de calcul formel donnent :

$$\begin{cases} \gamma_{2k+1} & = \beta_{2k+1} \\ \gamma_{2k+2} & = \beta_{2k+2} + (2k+1)\beta_{2k+1}\alpha_2 \\ \gamma_{2k+3} & = \beta_{2k+3} + (2k+2)\alpha_2\beta_{2k+2} + (2k+1)(k+1)\alpha_2^2\beta_{2k+1} \\ \gamma_{2k+4} & = \beta_{2k+4} + (2k+3)\alpha_2\beta_{2k+3} + (2k+3)(k+1)\alpha_2^2\beta_{2k+2} \\ & +(2k+1)\beta_{2k+1}[\alpha_4 + \frac{k}{3}(2k+5)\alpha_2^3] \\ \gamma_{2k+5} & = \beta_{2k+5} + (2k+4)\alpha_2\beta_{2k+4} + (2k+3)(k+2)\alpha_2^2\beta_{2k+3} \\ & +(2k+2)\beta_{2k+2}[\alpha_4 + \frac{(2k+1)(k+3)}{3}\alpha_2^3] + (2k+1)\beta_{2k+1}[\alpha_{5+2k}\alpha_2\alpha_4 \\ & +\frac{k\alpha_2^4}{6}(2k^2+9k+1)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{2k+1} & = \beta_{2k+1} \\ \lambda_{2k+2} & = \beta_{2k+2} + 2(2k+1)\beta_{2k+1} \\ \lambda_{2k+3} & = \beta_{2k+3} + 2(2k+2)\alpha_2\beta_{2k+2} + 4(k+1)(2k+1)\alpha_2^2\beta_{2k+1} \\ \lambda_{2k+4} & = \beta_{2k+4} + 2(2k+3)\alpha_2\beta_{2k+3} + 4(k+1)(2k+3)\alpha_2^2\beta_{2k+2} \\ & +2\beta_{2k+1}(2k+1)[\alpha_4 + \dfrac{\alpha_2^3}{3}(8k^2+20k+9)] \\ \lambda_{2k+5} & = \beta_{2k+5} + 2(2k+4)\alpha_2\beta_{2k+4} + 4(2k+3)(k+2)\alpha_2^2\beta_{2k+3} \\ & +2(2k+2)\beta_{2k+2}[\alpha_4 + \dfrac{\alpha_2^3}{3}(8k^2+28k+21)] \\ & +2(2k+1)\beta_{2k+1}[\alpha_5 + (4k+3)\alpha_2\alpha_4 + \frac{1}{3}(8k^3+36k^2+40k+12)\alpha_2^4]. \end{cases}$$

On en déduit :

$$M = -A_{2k-1}\beta'_{2k-1}x^{2k-1} + \dots$$

$$N = (2k+1)\alpha_2\beta_{2k+1}A_{2k}x^{2k+2}(1 + mx + nx^2 + rx^3) + \dots$$

$$E = -(2k+1)\alpha_2\beta_{2k+1}A_{2k}x^{2k+2}(1 + px + qx^2 + sx^3) + \dots$$

où

$$m = \frac{\lambda_{2k+3} - \gamma_{2k+3}}{(2k+1)\alpha_2\beta_{2k+1}} \qquad n = \frac{\lambda_{2k+4} - \gamma_{2k+4}}{(2k+1)\alpha_2\beta_{2k+1}}$$
$$p = \frac{\gamma_{2k+3} - \beta_{2k+3}}{(2k+1)\alpha_2\beta_{2k+1}} \qquad q = \frac{\gamma_{2k+4} - \beta_{2k+4}}{(2k+1)\alpha_2\beta_{2k+1}}$$
$$r = \frac{\lambda_{2k+5} - \gamma_{2k+5}}{(2k+1)\alpha_2\beta_{2k+1}} \qquad s = \frac{\gamma_{2k+5} - \beta_{2k+5}}{(2k+1)\alpha_2\beta_{2k+1}}.$$

On a alors :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{A_{2k}(2k+1)\alpha_2\beta_{2k+1}}{p-m} x^{2k+1}[1 - ux + (u^2 - t)x^2] + \dots$$

avec

$$u = \frac{m^2 - n - p^2 + q}{p-m}, \quad t = v - \frac{(2k+1)\alpha_2\beta_{2k+1}A_{2k}}{(p-m)A_{2k-1}\beta'_{2k-1}}$$

et

$$v = \frac{-r + 2mn - m^3 + s - 2pq + p^3}{p-m}$$

on peut alors choisir :

$$\begin{cases} A_{2k} = \frac{1}{2k+1} \\ A_{2k+1} = 2k+2 \end{cases}.$$

Par ailleurs $u = 0$, donc $\varepsilon_{2k+2}(x) \sim \varepsilon x^{2k+3}$.

Les calculs donnent :

$$\varepsilon = \frac{\beta_{2k+3}}{(k+1)(2k+1)} - \frac{1}{(2k+1)^2}\frac{\beta_{2k+2}^2}{\beta_{2k+1}} + \frac{\beta_{2k+1}}{k+1}\left[\frac{\alpha_4}{\alpha_2} - \frac{1}{6}(k^2+k+6)\alpha_2^2\right] + \frac{\beta_{2k+1}^2}{4k(k+1)\beta'_{2k-1}}.$$

(iii) Il est facile de démontrer que : si f est impaire, alors ε_{2k} est impaire, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Supposons $\varepsilon_{2k}(x) = \sum_{i \geq 2k+1} \beta_i x^i$.

Le calcul donne

$$\varepsilon_{2k+2}(x) = \beta_{2k+1}\left[1 - \frac{2k+1}{2k+3}A_{2k}A_{2k+1}\right]x^{2k+1} + \dots$$

et si on choisit

$$A_{2k} = \frac{1}{2k+1} \quad \text{et} \quad A_{2k+1} = 2k+3,$$

alors $\varepsilon_{2k+2}(x) \Longleftrightarrow x^{2k+3}$, ce qui achève la démonstration.

(iv) On sait que $\varepsilon_2(x) \Longleftrightarrow x^5$. Supposons

$$\varepsilon_{2k-2}(x) = \sum_{i \geq 4k-3} \beta'_i x^i$$

et

$$\varepsilon_{2k}(x) = \sum_{i \geq 4k+1} \beta_i x^i$$

D'après la démonstration précédente ε_{2k} est impaire. Les résultats de calcul formel donnent :

$$\begin{cases} \gamma_{4k+1} & = \beta_{4k+1} \\ \gamma_{4k+3} & = \beta_{4k+3} + (4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1} \\ \gamma_{4k+5} & = \beta_{4k+5} + (4k+3)\alpha_3\beta_{4k+3} + \frac{1}{2}(4k+1)(4k+3)\alpha_3^2\beta_{4k+1} \\ \gamma_{4k+7} & = \beta_{4k+7} + (4k+5)\alpha_3\beta_{4k+5} + \frac{1}{2}(4k+3)(4k+5)\alpha_3^2\beta_{4k+3} \\ & +(4k+1)\beta_{4k+1}[\alpha_7 + \frac{2k}{3}(4k+8)\alpha_3^3] \\ \gamma_{4k+9} & = \beta_{4k+9} + (4k+7)\alpha_3\beta_{4k+7} + \frac{1}{2}(4k+5)(4k+7)\alpha_3^2\beta_{4k+5} \\ & +(4k+3)\beta_{4k+3}[\alpha_7 + \frac{1}{3}(2k+1)(4k+10)\alpha_3^3] \\ & +(4k+1)\beta_{4k+1}[\alpha_9 + 4k\alpha_3\alpha_7 + \frac{k}{6}(16k^2+60k+11)\alpha_3^4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{4k+1} & = \beta_{4k+1} \\ \lambda_{4k+3} & = \beta_{4k+3} + 2(4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1} \\ \lambda_{4k+5} & = \beta_{4k+5} + 2(4k+3)\alpha_3\beta_{4k+3} + 2(4k+1)(4k+3)\alpha_3^2\beta_{4k+1} \\ \lambda_{4k+7} & = \beta_{4k+7} + 2(4k+5)\alpha_3\beta_{4k+5} + 2(4k+3)(4k+5)\alpha_3^2\beta_{4k+3} \\ & +(4k+1)\beta_{4k+1}[2\alpha_7 + \frac{1}{3}(64k^2+128k+45)\alpha_3^3] \\ \lambda_{4k+9} & = \beta_{4k+9} + 2(4k+7)\alpha_3\beta_{4k+7} + 2(4k+5)(4k+7)\alpha_3^2\beta_{4k+5} \\ & +(4k+3)\beta_{4k+3}[2\alpha_7 + \frac{1}{3}(64k^2+129k+125)\alpha_3^3] \\ & +(4k+1)\beta_{4k+1}[2\alpha_9 + 2(8k+5)\alpha_3\alpha_7 \\ & +\frac{1}{12}(512k^3+1920k^2+1792k+435)\alpha_3^4] \end{cases}$$

On en déduit :

$$M = -A_{2k-1}\beta'_{4k-3}x^{4k-3} + \dots$$

$$N = (4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1}A_{2k}x^{4k+3}(1 + mx^2 + nx^4 + rx^6 + \dots)$$

$$E = -(4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1}A_{2k}x^{4k+3}(1 + px^2 + qx^4 + sx^6 + \dots)$$

où

$$m = \frac{\lambda_{4k+5} - \gamma_{4k+5}}{(4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1}} \qquad n = \frac{\lambda_{4k+7} - \gamma_{4k+7}}{(4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1}}$$
$$p = \frac{\gamma_{4k+5} - \beta_{4k+5}}{(4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1}} \qquad q = \frac{\gamma_{4k+7} - \beta_{4k+7}}{(4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1}}$$
$$r = \frac{\lambda_{4k+9} - \gamma_{4k+9}}{(4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1}} \qquad s = \frac{\gamma_{4k+9} - \beta_{4k+9}}{(4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1}}.$$

On a alors :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{A_{2k}(4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1}}{p-m} x^{4k+1}[1 - ux^2 + (u^2 - t)x^4] + \dots$$

avec

$$u = \frac{m^2 - n - p^2 + q}{p-m} \quad , \quad t = v - \frac{(4k+1)\alpha_3\beta_{4k+1}A_{2k}}{(p-m)A_{2k-1}\beta'_{4k-3}}$$

et $v = \dfrac{-r + 2mn - m^3 + s - 2pq + p^3}{p-m}$.

On peut alors choisir :

$$\begin{cases} A_{2k} = 1/(4k+1) \\ A_{2k+1} = 4k+3 \end{cases}$$

Par ailleurs, $u = -\frac{\beta_{4k+3}}{\beta_{4k+1}} - (4k+1)\alpha_3$, donc

$$\varepsilon_{2k+2}(x) \sim \varepsilon x^{4k+5}.$$

Les calculs donnent :

$$\varepsilon = \frac{8}{(4k+1)(4k+3)}\beta_{4k+5} - \frac{4}{(4k+1)^2}\frac{\beta_{4k+3}^2}{\beta_{4k+1}}$$
$$+\frac{\beta_{4k+1}}{4k+3}[4\frac{\alpha_7}{\alpha_3} - \frac{1}{6}(16k^2 + 8k + 57)\alpha_3^2 + \frac{1}{4k-1}\frac{\beta_{4k+1}}{\beta'_{4k-3}}].$$

2. Δ^2 modifié itéré

Théorème 3.2 : *Pour toute suite* $(x_n) \in LOGFp(p = 1,2)$, *en appliquant l'Algorithme 2,* $(x_n^{(k)})$ *converge plus vite que* $(x_n^{(k-1)})$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Pour $(x_n) \in LOGF_p'(p = 1,2)$, $B_k = (k+p)/k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Si $(x_n) \in LOGF_1'$,

$$x_n^{(k)} \Longleftrightarrow x_n^{k+1} \Longleftrightarrow n^{-k-1}$$
$$\sim -\frac{c_0^k}{\alpha_2}\frac{1}{(k+1)!n^{k+1}}.$$

Si $(x_n) \in LOGF_2'$,

$$x_n^{(k)} \Longleftrightarrow x_n^{k+1} \Longleftrightarrow n^{-(k+1)/2}.$$

(ii) Pour $(x_n) \in LOGF_1''$, $B_k = 2k/(2k-1)\forall k \in \mathbb{N}$ *; et* $x_n^{(k)} \Longleftrightarrow x_n^{2k+1} \Longleftrightarrow n^{-2k-1}$.

De plus si $x_n^{(k)} = \sum_{i \geq 2k+1} \beta_i x_n^i$, *alors* $x_n^{(k+1)} = \delta x_n^{2k+3}$, *avec :*

$$\delta = \frac{\beta_{2k+3}}{(k+1)(2k+1)} - \frac{1}{(2k+1)^2}\frac{\beta_{2k+2}^2}{\beta_{2k+1}} + \frac{\beta_{2k+1}}{k+1}[\frac{\alpha_4}{\alpha_2} - \frac{1}{6}(k^2+k+6)\alpha_2^2].$$

(iii) Pour $(x_n) \in LOGF_2''$, $B_k = (2k+1)/(2k-1), \forall k \in \mathbb{N}$.

De plus $x_n^{(k)} \Longleftrightarrow x_n^{2k+1} \Longleftrightarrow n^{-(2k+1)/2}$.

(iv) Pour $(x_n) \in LOGF_2'''$, $B_k = (4k-1)/(4k-3), \forall k \in \mathbb{N}$ *et* $x_n^{(k)} \Longleftrightarrow x_n^{4k+1} \Longleftrightarrow \bar{n}^{(4k+1)/2}$.

De plus si $x_n^{(k)} = \sum_{i \geq 4k+1} \beta_i x_n^i$, *alors* $x_n^{(k+1)} = \delta x_n^{4k+5}$, *avec :*

$$\delta = \frac{8\beta_{4k+5}}{(4k+1)(4k+3)} - \frac{4}{(4k+1)^2}\frac{\beta_{4k+3}^2}{\beta_{4k+1}} + \frac{\beta_{4k+1}}{4k+3}\left[4\frac{\alpha_7}{\alpha_3} - \frac{1}{6}(16k^2+8k+57)\alpha_3^2\right].$$

De plus si $x_n^{(k)} = \sum_{i \geq 4k+1} \beta_i x_n^i$, alors $x_n^{(k+1)} = \delta x_n^{4k+5}$, avec :

$$\delta = \frac{8\beta_{4k+5}}{(4k+1)(4k+3)} - \frac{4}{(4k+1)^2}\frac{\beta_{4k+3}^2}{\beta_{4k+1}} + \frac{\beta_{4k+1}}{4k+3}\left[4\frac{\alpha_7}{\alpha_3} - \frac{1}{6}(16k^2+8k+57)\alpha_3^2\right].$$

Remarque

Les résultats (i) et (iii) sont énoncés sans démonstration dans [28] par SABLONNIERE.

Démonstration

(i) Il suffit d'appliquer le théorème 2.2 avec $p = 1$ (resp. $p = 2$).

(ii), (iii), (iv) : Démonstrations similaires à celle du théorème 2.2.

3. θ_2-algorithme itéré

Théorème 3.3 *Pour toute suite $(x_n) \in LOGFp(p = 1,2)$, $(\hat{\theta}_k(x_n))$ converge plus vite que $(\hat{\theta}_{k-1}(x_n))$, $\forall k \geq 1$.*

(i) Pour $(x_n) \in LOGF_1'$,

$$\hat{\theta}_k(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{k+1} \Longleftrightarrow n^{-k-1}$$
$$\sim -\frac{(-c_0)^k}{(k+1)(k!)^2\alpha_2 n^{k+1}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

(ii) Pour $(x_n) \in LOGF_2'$,

$$\hat{\theta}_k(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{k+1} \Longleftrightarrow n^{-(k+1)/2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

(iii) Pour $(x_n) \in LOGF_1''$,

$$\hat{\theta}_k(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{2k+1} \Longleftrightarrow n^{-2k-1}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

De plus si $\hat{\theta}_k(x_n) = \sum_{i \geq 2k+1} \beta_i x_n^i$, alors $\hat{\theta}_{k+1}(x_n) \sim \hat{\theta} x_n^{2k+3}$, avec :
$\hat{\theta} = \frac{-2\beta_{2k+3}}{(k+1)(2k+1)^2} + \frac{2}{(2k+1)^3}\frac{\beta_{2k+2}^2}{\beta_{2k+1}} - \frac{2\beta_{2k+1}}{(k+1)(2k+1)}\left[\frac{\alpha_4}{\alpha_2} - \frac{1}{6}(k^2+k+6)\alpha_2^2\right]$.

(iv) Pour $(x_n) \in LOGF_2''$,

$$\hat{\theta}_k(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{2k+1} \Longleftrightarrow n^{-(2k+1)/2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

(v) Pour $(x_n) \in LOGF_2'''$,

$$\hat{\theta}_k(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{4k+1} \Longleftrightarrow n^{-(4k+1)/2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

De plus si $\hat{\theta}_k(x_n) = \sum_{i \geq 4k+1} \beta_i x_n^i$, *alors* $\hat{\theta}_{k+1}(x_n) \sim \hat{\theta} x_n^{4k+5}$, *avec :*

$$\hat{\theta} = \frac{-32\beta_{4k+5}}{(4k+3)(4k+1)^2} + \frac{16}{(4k+1)^3}\frac{\beta_{4k+3}^2}{\beta_{4k+1}} - \frac{4\beta_{4k+1}}{(4k+1)(4k+3)}\left[4\frac{\alpha_7}{\alpha_3} - \frac{1}{6}(16k^2+8k+57)\alpha_3^2\right].$$

Remarque

Les résultats (i), (ii) et (iv) sont énoncés sans démonstration dans [28] par SABLONNIERE.

Démonstration.

(i) Théorème 2.3, $p = 1$.

(ii) Théorème 2.3, $p = 2$.

(ii), (iv), (v) : démonstrations similaires à celle du théorème 2.3.

4. θ-algorithme

Théorème 3.4 *Pour toute suite* $(x_n) \in LOGFp$, $p = 1, 2, (\theta_{2k+2}(x_n))$ *converge plus vite que* $(\theta_{2k}(x_n))$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

(i) Pour $(x_n) \in LOGF'_p (p = 1, 2)$,

$$\theta_{2k}(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{k+1} \Longleftrightarrow n^{-(k+1)/p}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

(ii) Pour $(x_n) \in LOGF''_p (p = 1, 2)$,

$$\theta_{2k}(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{2k+1} \Longleftrightarrow n^{-(2k+1)/p}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

(iii) Pour $(x_n) \in LOGF'''_2$,

$$\theta_{2k}(x_n) \Longleftrightarrow x_n^{4k+1} \Longleftrightarrow n^{-(4k+1)/2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

(i) Théorème 2.4, $p = 1, 2$.

(ii), (iii) : Démonstrations similaires à celle du théorème 2.4.

5. Remarques

a) On sait que la première étape (colonnes paires) de l'ε-algorithme n'est rien d'autre que le Δ^2 d'Aitken. Cette propriété se conserve avec la modification de ces deux algorithmes.

b) Pour $(x_n) \in LOGF_1'$, lorsque $c_0 < 0$, les suites données par le Δ^2 modifié itéré sont alternées par étape. On a ainsi un encadrement de la limite d'une étape à l'autre. Quand $c_0 > 0$, c'est le θ_2 itéré qui vérifie cette propriété.

Ceci est un corollaire des théorèmes 3.2 et 3.3.

c) En choisissant $x_n = n$ pour suite auxiliaire dans le ρ-algorithme, on a :

(i) pour $(S_n) \in LOGF_1''$, coïncidence entre l'ε-algorithme modifié et le ρ-algorithme ;

(ii) pour $(S_n) \in LOGF_1, \varepsilon_2 = \rho_2$.

6. Conclusion

Les quatre algorithmes donnent aussi les mêmes résultats (asymptotiquement) pour les sous-classes de $LOGFp$. A l'aide des parties principales on démontre que pour $LOGF_1'$, les suites transformées par l'ε-algorithme modifié et le Δ^2 d'Aitken modifié itéré ont le même signe. Il en est sûrement de même pour $LOGFp$ en général.

CHAPITRE IV

COMBINAISON Δ^2 MODIFIÉ ET θ_2 POUR LES SOUS-CLASSES DE $LOGF_p$, $p = 1, 2$

CHAPITRE IV

COMBINAISON Δ^2 MODIFIÉ ET θ_2 POUR LES SOUS-CLASSES DE $LOGF_p$, $p = 1, 2$

0. Introduction

Pour chacune des sous-classes étudiées au chapitre 3, le Δ^2 modifié itéré et le θ_2 itéré donnent des résultats semblables. D'où l'idée naturelle de les combiner pour accélérer encore la convergence.

1. Combinaison Δ^2 modifié et θ_2 pour $(x_n) \in LOGF_p$, $p = 1, 2$

SABLONNIERE [28] a défini l'algorithme suivant :

pour toute suite (x_n),

ALGORITHME 4

$x_n^{(0)} = x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ et pour $k \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n^{(k)} = x_{n+1}^{(k-1)} - c_k R[x_n^{(k-1)}]$$
$$z_n^{(k)} = \hat{\theta}(x_n^{(k-1)})$$
$$x_n^{(k)} = \gamma_k y_n^{(k)} + \lambda_k z_n^{(k)}.$$

Les suites (c_k), (γ_k) et (λ_k) dépendent de k et p.

Pour chaque valeur de k, $(y_n^{(k)})$ et $(z_n^{(k)})$ sont les transformées respectives de $(x_n^{(k-1)})$ par le Δ^2 modifié et le θ_2-algorithme.

Il faut remarquer qu'il ne s'agit pas d'une simple combinaison. En effet, on n'a pas utilisé *séparément* le Δ^2 modifié itéré et le θ_2 itéré pour les combiner. Dans toute la suite toute combinaison du Δ^2 modifié et du θ_2 sera celle de l'Algorithme 4.

Théorème 4.1 : *Soit $(x_n) \in LOGF_p, p = 1, 2$. En appliquant l'Algorithme 4, $(x_n^{(k)})$ converge plus vite que $(x_n^{(k-1)})$, pour tout $k \geq 1$.*

(i) Pour $(x_n) \in LOGF_p'(p = 1, 2)$,

$$c_k = (2k + p - 1)/(2k - 1), \gamma_k = 1/2k, \lambda_k = (2k - 1)/2k, \forall k \geq 1$$

et

$$x_n^{(k)} \Longleftrightarrow x_n^{2k+1} \Longleftrightarrow n^{-(2k+1)/p}.$$

(ii) Pour $(x_n) \in LOGF_1''$,

$$c_k = (3k - 1)/(3k - 2), \gamma_k = 2/3k, \lambda_k = (3k - 2)/3k, \forall k \geq 1$$

et

$$x_n^{(k)} \Longleftrightarrow x_n^{3k+1} \Longleftrightarrow n^{-3k-1}.$$

(iii) Pour $(x_n) \in LOGF_2''$,

$$c_k = (4k - 1)/(4k - 3), \gamma_k = 2/(4k - 1), \lambda_k = (4k - 3)/(4k - 1), \forall k \geq 1$$

et

$$x_n^{(k)} \Longleftrightarrow x_n^{4k+1} \Longleftrightarrow n^{-(2k+1/2)}.$$

(iv) Pour $(x_n) \in LOGF_2'''$,

$$c_k = (5k - 1)/(5k - 3), \gamma_k = 4/(5k + 1), \lambda_k = (5k - 3)/(5k + 1), \forall k \geq 1$$

et

$$x_n^{(k)} \Longleftrightarrow x_n^{5k+2} \Longleftrightarrow n^{-(5k+2)/2}.$$

Remarque

Les résultats (i) et (iii) sont énoncés sans démonstration dans [28] par SABLONNIERE.

Démonstration

(ii) Soit (x_n) une suite de point fixe telle que :

$$x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le Δ^2 d'Aitken appliqué à (x_n) peut s'écrire :

$$\delta(x_n) = x_{n+1} + \frac{1}{\Delta}$$

avec $\Delta = N^{-1} + E^{-1}$

où $N = f_2(x_n) - f(x_n)$ et $E = x_n - f(x_n)$.

Quant au Δ^2 d'Aitken modifié, il peut s'écrire :

$$\delta(x_n) = x_{n+1} + \frac{B_k}{\Delta}.$$

On définit ainsi une fonction δ' par :

$$\delta'(x) = f(x) + \frac{B_k}{\Delta}$$

avec $\Delta = N^{-1} + E^{-1}$.

Où $N = f_2(x) - f(x)$ et $E = x - f(x)$.

Notons $z_k(x_n)$ la suite issue de la combinaison à l'étape k.

On vérifie que $z_1(x) = \frac{2\delta'(x)+\hat{\theta}(x)}{3} \Longleftrightarrow x^4$.

Pour tout $k \geq 1$, supposons $z_k(x) \Longleftrightarrow x^{3k+1}$ et montrons que $z_{k+1}(x) \Longleftrightarrow x^{3k+4}$.

- Δ^2 **modifié**

Le Δ^2 modifié appliqué à $z_k(x_n)$ peut s'écrire

$$\delta' z_k(x) = z_k(f(x)) + \frac{B_k}{\Delta}$$

avec $\Delta = N^{-1} + E^{-1}$

où $N = z_k(f_2(x)) - z_k(f(x))$ et $E = z_k(x) - z_k(f(x))$.

Posons

$$z_k(x) = \beta_1 x^{3k+1} + \beta_2 x^{3k+2} + \beta_3 x^{3k+3} + \beta_4 x^{3k+4} + \dots$$
$$z_k(f(x)) = \sum_{t \geq 3k+1} \gamma_t x^t \text{ et } z_k(f_2(x)) = \sum_{t \geq 3k+1} \lambda_t x^t.$$

Les résultats de calcul formel donnent :

$$\begin{cases} \gamma_{3k+1} & = \beta_1 \\ \gamma_{3k+2} & = \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 (3k+1) \\ \gamma_{3k+3} & = \beta_3 + \beta_2 \alpha_2 (3k+2) + \beta_1 [\alpha_3 (3k+1) + \frac{3k(3k+1)}{2} \alpha_2^2] \\ \gamma_{3k+4} & = \beta_4 + \beta_3 \alpha_2 (3k+3) + \beta_2 [\alpha_3 (3k+2) + \frac{(3k+2)(3k+1)}{2} \alpha_2^2] \\ & + \beta_1 [\alpha_4 (3k+1) + 3k(3k+1) \alpha_2 \alpha_3 + \frac{(3k+1)3k(3k-1)}{6} \alpha_2^3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{3k+1} & = \beta_1 \\ \lambda_{3k+2} & = \beta_2 + 2\beta_1 \alpha_2 (3k+1) \\ \lambda_{3k+3} & = \beta_3 + 2\beta_2 \alpha_2 (3k+2) + \beta_1 [4\alpha_2^2 (3k+1) + 6k(3k+1)\alpha_2^2] \\ \lambda_{3k+4} & = \beta_4 + 2\beta_3 \alpha_2 (3k+3) + \beta_2 [4\alpha_2^2 (3k+2) + 2(3k+1)(3k+2)\alpha_2^2] \\ & + \beta_1 [(2\alpha_4 + 6\alpha_2^3)(3k+1) + 24k(3k+1)\alpha_2^3 + \frac{4}{3}(3k+1)3k(3k-1)\alpha_2^3]. \end{cases}$$

On obtient

$$\Delta = \frac{1}{\beta_1 \alpha_2 (3k+1) x^{3k+2}} [(e_1 - n_1)x + D_2 x^2 + D_3 x^3 + \dots]$$

avec

$$e_1 = \frac{\gamma_{3k+3} - \beta_3}{\beta_1\alpha_2(3k+1)} \qquad e_2 = \frac{\gamma_{3k+4} - \beta_4}{\beta_1\alpha_2(3k+1)}$$

$$n_1 = \frac{\lambda_{3k+3} - \gamma_{3k+3}}{\beta_1\alpha_2(3k+1)} \qquad n_2 = \frac{\lambda_{3k+4} - \gamma_{3k+4}}{\beta_1\alpha_2(3k+1)}$$

$$n_3 = \frac{\lambda_{3k+5} - \gamma_{3k+5}}{\beta_1\alpha_2(3k+1)} \qquad e_3 = \frac{\gamma_{3k+5} - \beta_5}{\beta_1\alpha_2(3k+1)} \qquad D_2 = n_1^2 - n_2 - e_1^2 + e_2.$$

Les simplifications donnent

$$\frac{1}{\Delta} = -\frac{\beta_1(3k+1)}{3k+2}x^{3k+1}\left\{1 + [\frac{\beta_2}{\beta_1} + (3k+1)\alpha_2]x + (D_2'^2 + D_3')x^2 + \ldots\right\}$$

avec

$$D_2' = -\frac{1}{(3k+2)\alpha_2\beta_1}[\alpha_2\beta_2(3k+2) + \beta_1\alpha_2^2(3k+1)(3k+2)]$$

et

$$D_3' = -\frac{D_3}{(3k+2)\alpha_2}.$$

On en déduit que

$$B_k = \frac{3k+2}{3k+1} \text{ et } \delta z_k'(x) \Longleftrightarrow x^{3k+3}.$$

Déterminons le coefficient de x^{3k+3} dans $\delta z_k(x)$. Soit ε ce coefficient. On déterminera plutôt le terme de ε dépendant de β_3.

$$\varepsilon = \gamma_{3k+3} - \beta_1(D_2'^2 - D_3')$$

On sait que $D_3' = \frac{-D_3}{(3k+2)\alpha_2}$ avec

$$D_3 = e_3 - n_3 + e_1^3 - n_1^3 + 2n_1n_2 - 2e_1e_2.$$

On obtient

$$D_2' = -\frac{\beta_2}{\beta_1} - (3k+1)\alpha_2,$$
$$n_1 n_2 = \frac{3}{2}\alpha_2 \frac{(3k+2)(3k+3)\beta_3}{(3k+1)\beta_1},$$
$$e_1 e_2 = \frac{(3k+3)(3k+2)\beta_3\alpha_2}{2\beta_1(3k+1)},$$
et
$$D_3 = \frac{3k(3k+3)\alpha_2\beta_3}{\beta_1(3k+1)}.$$

On a alors $\varepsilon = \frac{2}{(3k+1)(3k+2)}\beta_3$.

- Thêta$_2$ (θ_2)

Posons $\hat{\theta}(x) = \theta_2(z_k(x))$.

$$\hat{\theta}(x) = z_k(f(x)) - \frac{z_k(f(x)) - \delta z_k(x)}{1 - \frac{M}{N}}$$

avec $M = \delta z_k(f(x)) - \delta z_k(x)$.

Posons $\delta z_k(x) = y_1' x^{3k+1} + y_2' x^{3k+2} + y_3' x^{3k+3} + \ldots$.

On sait que

$$y_1' = \frac{\beta_1}{3k+2}$$
$$y_2' = \frac{\beta_2}{3k+2} + \frac{\beta_1\alpha_2(3k+1)}{3k+2}.$$

Posons $\delta z_k(f(x)) = \sum_{t \geq 3k+1} \omega_t x^t$.

Les résultats de calcul formel donnent :

$$\omega_{3k+1} = y_1',$$
$$\omega_{3k+2} = y_2' + y_1'\alpha_2(3k+1)$$
et
$$\omega_{3k+3} = y_3' + y_2'\alpha_2(3k+2) + y_1'[\alpha_3(3k+1) + \frac{3k(3k+1)}{2}\alpha_2^2].$$

Et $\hat{\theta}(x) = [\gamma_{3k+2} - \beta_1(u-p)]x^{3k+2} + [\gamma_{3k+3} - \beta_1(v - q + p^2 - pu)]x^{3k+3} + \dots$

avec

$$i = \frac{\omega_{3k+3} - y_3'}{y_1'\alpha_2(3k+1)} \quad j = \frac{\omega_{3k+4} - y_4'}{y_1'\alpha_2(3k+1)} \quad k' = \frac{\omega_{3k+5} - y_5'}{y_1'\alpha_2(3k+1)}$$
$$p = -\frac{(3k+2)y_1'(a+i)}{\beta_1(3k+1)} \qquad q = -\frac{(3k+2)y_1'(b+j)}{\beta_1(3k+1)}$$
$$r = -\frac{y_1'(3k+2)(c+bi+aj+k')}{\beta_1(3k+1)}$$

$$a = -n_1$$
$$b = n_1^2 - n_2$$
$$c = -n_3 + 2n_1n_2 - n_1^3$$
$$u = \frac{(\gamma_{3k+2} - y_2')(3k+2)}{\beta_1(3k+1)} \qquad v = \frac{(\gamma_{3k+3} - y_3')(3k+2)}{\beta_1(3k+1)}$$
et
$$t = \frac{(\gamma_{3k+4} - y_4')(3k+2)}{\beta_1(3k+1)}.$$

Les calculs donnent $\hat{\theta}(x) \Longleftrightarrow x^{3k+3}$.

Reste à déterminer le coefficient de x^{3k+3} dans $\hat{\theta}(x)$. Soit O ce coefficient. on déterminera le terme de O dépendant de β_3.

$$O = \gamma_{3k+3} - \beta_1(v - q + p^2 - pu)$$

On obtient après simplification,

$$j = \frac{(3k+3)(3k+4)\beta_3}{(3k+1)(3k+2)\beta_1} \qquad q = -\frac{2\beta_3(3k+3)}{\beta_1(3k+1)^2(3k+2)}$$
et
$$v = \frac{9k(k+1)}{\beta_1(3k+1)(3k+2)}.$$

On trouve alors que

$$O = \frac{-4}{(3k+1)^2(3k+2)}\beta_3.$$

D'où la combinaison

$$z_{k+1} = \frac{2\delta'(z_k) + (3k+1)\hat{\theta}(z_k)}{3k+3};$$

et $z_{k+1}(x) \Longleftrightarrow x^{3k+4}$.

(iv) Les notations sont les mêmes que celles utilisées pour (ii).

Avec $B_1 = 3$ on obtient $z_1(x) = \frac{4\delta'(x)+\theta(x)}{5} \Longleftrightarrow x^7$, δ' étant le Δ^2 modifié avec le coefficient B_1.

Montrons que $z_k(x) \Longleftrightarrow x^{5k+2}, \qquad \forall k \geq 1.$

Δ^2 modifié.

Posons $z_k(x) = \beta_1 x^{5k+2} + \beta_2 x^{5k+4} + \beta_3 x^{5k+6} + \beta_4 x^{5k+8} + \ldots$.

Les résultats de calcul formel donnent :

$$\begin{cases} \gamma_{5k+2} & = \beta_1 \\ \gamma_{5k+4} & = \beta_2 + \beta_1(5k+2)\alpha_3 \\ \gamma_{5k+6} & = \beta_3 + \beta_2(5k+4)\alpha_3 + \frac{\beta_1\alpha_3^2}{2}(5k+2)(5k+4) \\ \gamma_{5k+8} & = \beta_4 + \beta_3(5k+6)\alpha_3 + \frac{\beta_3\alpha_3^2}{2}(5k+4)(5k+6) \\ & +\beta_1[\alpha_7(5k+2) + \frac{\alpha_3^3}{6}(5k+2)(5k+1)(5k+9)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{5k+2} & = \beta_1 \\ \lambda_{5k+4} & = \beta_2 + \beta_1(5k+2)\alpha_3 \\ \lambda_{5k+6} & = \beta_3 + 2\beta_2(5k+4)\alpha_3 + 2\beta_1\alpha_3^2(5k+2)(5k+4) \\ \lambda_{5k+8} & = \beta_4 + \beta_3(5k+6)\alpha_3 + 2\beta_3\alpha_3^2(5k+4)(5k+6) \\ & +\beta_1\left[2\alpha_7(5k+2) + (5k+2)\alpha_3^3[15 + \frac{4}{3}(5k+1)(5k+9)]\right]. \end{cases}$$

On obtient

$$B_k = \frac{5k+4}{5k+2}$$

et

$$\delta' z_k(x) \Longleftrightarrow x^{5k+6}.$$

- thêta $_2$ (θ_2)

$$y_1' = \frac{2\beta_1}{5k+4} \qquad y_2' = \frac{2}{5k+4}[\beta_2 + \beta_1\alpha_3(5k+2)]$$
$$y_3' = \frac{2(5k+8)\beta_3}{(5k+4)^2} + \dots$$

Les calculs donnent $\hat{\theta}(x) \Longleftrightarrow x^{5k+6}$.

Et la combinaison est

$$z_{k+1}(x) = \frac{4\delta'(x) + (5k+2)\hat{\theta}(x)}{5k+6} = O(x^{5k+7}).$$

En fait $z_{k+1}(x) \Longleftrightarrow x^{5k+8}$ car z_{k+1} est impaire.

(i), (iii) Démonstrations similaires à celle de (ii).

2. Résultats numériques

Tous les essais numériques ont été faits sur l'odinateur DPS8 - MULTICS (BULL) du C.I.T.I. de l'Université de Lille Flandres-Artois.

Les réels sont en double précision avec 16 chiffres décimaux.

Nous avons expérimenté des suites appartenant ou se ramenant à chaque sous-classe de $LOGFp$, $p = 1, 2$, par les algorithmes suivants :

ε-algorithme général (chap. 2), ε-algorithme modifié pour la sous-classe, Δ^2 d'Aitken modifié itéré, θ_2 itéré, θ-algorithme (chap. 3) et combinaison Δ^2 modifié et θ_2.

Pour les suites de limite non nulle nous avons imprimé les suites d'erreur pour les transformations. Le premier terme de chaque suite a été choisi pour une convergence lente. D'autres valeurs donnent des résultats plus performants, mais très vite instables. Ceci est illustré aux pages 57 et 58.

Les deux premiers algorithmes permettent de voir pour $LOGF_1''$, $LOGF_2''$ et $LOGF_2'''$, l'utilité d'un algorithme approprié.

x_0	0.3000000000000000D+00
x_1	0.2591817793182821D+00
|	0.2283172656680804D+00
|	0.2041282829960145D+00
|	0.1846422320592680D+00
|	0.1685983204835620D+00
|	0.1551518065476530D+00
|	0.1437148220801957D+00
|	0.1338652846608856D+00
|	0.1252921067630429D+00
|	0.1177608430825550D+00
|	0.1110913841599241D+00
|	0.1051430305599915D+00
|	0.9980424212551004D-01
x_{10}	0.9498543557599223D-01

$x_0 = 0.3$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$F(x) = 1 - e^{-x}$

$(x_n) \in LOGF_1'$

	Théorème 2.1 (P=1)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	0.6043018971236010D-02	0.6043018971236010D-02	0.6043018971236010D-02	-0.6009095199646308D-02	-0.6009095199646307D-02	0.1696188579485109D-04
	0.4640321223746816D-02	0.4640321223746816D-02	0.4640321223746816D-02	-0.4608880067665226D-02	-0.4608880067665226D-02	0.1572057804079494D-04
	0.3679807456339035D-02	0.3679807456339035D-02	0.3679807456339035D-02	-0.3652917520710861D-02	-0.3652917520710861D-02	0.1344496781408705D-04
	0.2992132863774313D-02	0.2992132863774313D-02	0.2992132863774313D-02	-0.2969682483965358D-02	-0.2969682483965358D-02	0.1122518990447752D-04
	0.2482299367843646D-02	0.2482299367843646D-02	0.2482299367843646D-02	-0.2463650003663796D-02	-0.2463650003663795D-02	0.9324682089924995D-05
	0.2093517589165132D-02	0.2093517589165132D-02	0.2093517589165132D-02	-0.2077987365067439D-02	-0.2077987365067439D-02	0.7765112048846768D-05
	0.1790079950660290D-02	0.1790079950660290D-02	0.1790079950660290D-02	-0.1777074735575881D-02	-0.1777074735575881D-02	0.6502607542204370D-05
	0.1548590051006017D-02	0.1548590051006017D-02	0.1548590051006017D-02	-0.1537625022323949D-02	-0.1537625022323949D-02	0.5482514341034240D-05
	0.1353183091757027D-02	0.1353183091757027D-02	0.1353183091757027D-02	-0.1343872034576322D-02	-0.1343872034576321D-02	0.4655528590352914D-05
	0.1192784494848880D-02	0.1192784494848880D-02	0.1192784494848880D-02	-0.1184822015228920D-02	-0.1184822015228920D-02	0.3981239809979662D-05
	0.1059468590144764D-02	0.1059468590144764D-02	0.1059468590144764D-02	-0.1052613143958113D-02	-0.1052613143958113D-02	0.3427723093325776D-05
	0.9474393305459739D-03	0.9474393305459739D-03	0.9474393305459739D-03	-0.9414991155254127D-03	-0.9414991155254124D-03	0.2970107510280620D-05
	0.8523769990243146D-03	0.8523769990243146D-03	0.8523769990243146D-03			
2ème étape	0.8541476737641560D-04	0.8541476737641560D-04	0.6990294086195895D-04	0.5057643128034469D-04	-0.5079253563050267D-05	0.1658091893686682D-04
	0.5936389043069009D-04	0.5936389043069009D-04	0.4843241258902516D-04	0.3421949434652468D-04	-0.5330670921994891D-05	-0.1866245641482959D-04
	0.4300407746820145D-04	0.4300407746820145D-04	0.3500246850296226D-04	0.2420981449422715D-04	-0.4951315243764108D-05	0.2653753639040399D-05
	0.3218892857651321D-04	0.3218892857651321D-04	0.2615114610973801D-04	0.1774627901042666D-04	-0.4398080311726894D-05	0.1503813793205552D-05
	0.2474163055733176D-04	0.2474163055733176D-04	0.2007075539560689D-04	0.1338930613757367D-04	-0.3837547780773411D-05	0.7842268354865364D-06
	0.1944005812975169D-04	0.1944005812975169D-04	0.1575066358274907D-04	0.1034704608767785D-04	-0.3327147372712391D-05	0.4268079557545133D-06
	0.1556011208692790D-04	0.1556011208692790D-04	0.1259408701882154D-04	0.8159361178529944D-05	-0.2881971895144987D-05	0.2457804293748294D-06
	0.1265334065795935D-04	0.1265334065795935D-04	0.1023243680481615D-04	0.6546440703886678D-05	-0.2509219534631714D-05	0.1491147748203112D-06
	0.1043149883605426D-04	0.1043149883605426D-04	0.8429341067476140D-05	0.5331505330070039D-05	-0.2177242204738733D-05	0.9463326672977346D-07
	0.8703361944005267D-05	0.8703361944005267D-05	0.7028290874088415D-05			
	0.7338560281594412D-05	0.7338560281594412D-05	0.5922760690822203D-05			
3ème étape	0.8064342765544924D-06	0.8064342765544924D-06	0.6169823495882149D-06	0.2285777228751036D-07	-0.5288463269841701D-05	0.4091602169643488D-06
	0.5076411828264357D-06	0.5076411828264357D-06	0.3857142275790847D-06	0.2585397502493036D-07	-0.4967071015923192D-05	0.3692649818664329D-05
	0.3362205749110015D-06	0.3362205749110015D-06	0.2539607485284077D-06	0.2270696663623662D-07	-0.3902170813852178D-05	0.1684277737748317D-06
	0.2318737559120799D-06	0.2318737559120799D-06	0.1742509825637900D-06	0.1860881406681105D-07	-0.2524997968560930D-05	0.2613344937833271D-07
	0.1652750868921440D-06	0.1652750868921440D-06	0.1236510068279438D-06	0.1444212373501010D-07	-0.1474660595627077D-05	0.6257330504156507D-08
	0.1210859604640363D-06	0.1210859604640363D-06	0.9023729160422059D-07	0.1199794894326415D-07	-0.8475762621671207D-06	0.1962717329490552D-08
	0.9079870947733829D-07	0.9079870947733829D-07	0.6743264530882561D-07			
	0.6945896382068381D-07	0.6945896382068381D-07	0.5142578068927997D-07			
	0.5406308451490025D-07	0.5406308451490025D-07	0.3991682603119432D-07			
4ème étape	0.5285631256777050D-08	0.5285631256777050D-08	0.2972867776854175D-08	0.2553396767328062D-07	-0.5057923137128780D-05	
	0.3045713353459062D-08	0.3045713353459062D-08	0.1721397304320197D-08	0.2294284163531135D-07	-0.3334312437894224D-05	
	0.1859224934290642D-08	0.1859224934290642D-08	0.1057007614891790D-08	0.1453871022860535D-07	-0.6761021142598275D-06	
	0.1188496920922557D-08	0.1188496920922557D-08	0.6797256137835652D-09	0.2968084293492448D-07		
	0.7923198477890729D-09	0.7923198477890729D-09	0.4570335250444953D-09			
	0.5375110604192518D-09	0.5375110604192518D-09	0.3094823136339217D-09			
	0.3888858207240295D-09	0.3888858207240295D-09	0.2291469463411007D-09			
5ème étape	0.1921905760697107D-10	0.1921905760697107D-10				
	0.8138585130944432D-11	0.8138585130944432D-11				
	0.2733806106015738D-10	0.2733806106015738D-10				
	-0.6438235641759795D-10	-0.6438235641759795D-10				
	0.1095912950838061D-09	0.1095912950838061D-09				

x_0	0.2000000000000000D+01
x_1	0.1020702573174319D+01
	0.1083405660485715D+01
	0.1077259186427053D+01
	0.1072009526885021D+01
	0.1067449824831639D+01
	0.1063464603029652D+01
	0.1059944167242447D+01
	0.1056809627592442D+01
	0.1053999293210301D+01
	0.1051464171049000D+01
	0.1049164820717254D+01
	0.1047069108212537D+01
	0.1045150570408129D+01
x_{14}	0.1043587203687755D+01

$$x_0 = 2$$

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

$$F(x) = x - (x-1)^2 \sin x$$

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$$

$$(x_n - 1) \in LOGF_1'$$

	Théorème 2.1 ($\rho=1$)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	0.7599068814204280D-01	0.7599068814204280D-01	0.7599068814204280D-01	0.9239958957413165D-01	0.9239958957413165D-01	0.8419513885808723D-01
	0.5434905016419212D-02	0.5434905016419212D-02	0.5434905016419212D-02	-0.6188706689079257D-02	-0.6188706689079258D-02	-0.3769008363300227D-03
	0.4637486271595460D-02	0.4637486271595460D-02	0.4637486271595460D-02	-0.5210486125275327D-02	-0.5210486125275320D-02	-0.2864999268399337D-03
	0.4009771422396394D-02	0.4009771422396394D-02	0.4009771422396394D-02	-0.4456506719198829D-02	-0.4456506719198979D-02	-0.2233676484012939D-03
	0.3505652549023437D-02	0.3505652549023437D-02	0.3505652549023437D-02	-0.3361294853662604D-02	-0.3361294853662604D-02	-0.1778211523195846D-03
	0.3093950705989160D-02	0.3093950705989160D-02	0.3093950705989160D-02	-0.3382082009514071D-02	-0.3382082009514079D-02	-0.1440656517624552D-03
	0.2752894790988913D-02	0.2752894790988913D-02	0.2752894790988913D-02	-0.2989845422716701D-02	-0.2989845422716693D-02	-0.1184753158638940D-03
	0.2466867472258922D-02	0.2466867472258922D-02	0.2466867472258922D-02	-0.2664258838039973D-02	-0.2664258838039972D-02	-0.2869568289052580D-04
	0.2224405081545664D-02	0.2224405081545664D-02	0.2224405081545664D-02	-0.2390703137950308D-02	-0.2390703137950305D-02	-0.8314902820232212D-04
	0.2016923399036053D-02	0.2016923399036053D-02	0.2016923399036053D-02	-0.2158422234227536D-02	-0.2158422234227534D-02	-0.7074916759574126D-04
	0.1837884003239891D-02	0.1837884003239891D-02	0.1837884003239891D-02	-0.1959345104317558D-02	-0.1959345104317563D-02	-0.6073055053983365D-04
	0.1682225707429022D-02	0.1682225707429022D-02	0.1682225707429022D-02	-0.1787310455056211D-02	-0.1787310455056214D-02	-0.5254237381355968D-04
	0.1545980839855493D-02	0.1545980839855493D-02	0.1545980839855493D-02			
2ème étape	0.4228224266572665D-02	0.4228224266572665D-02	0.4225103772091789D-02	-0.6597026445389392D-02	-0.6552079092278969D-02	-0.3982542492311366D-03
	0.2576208355141241D-03	0.2576208355141241D-03	0.2131483507156779D-03	0.1515742539055082D-03	-0.1017056248716396D-03	-0.2921317331424937D-06
	0.2051362545054678D-03	0.2051362545054678D-03	0.1693198972238855D-03	0.1190218471996283D-03	-0.7876399507803953D-04	-0.2138836208693921D-06
	0.1663291341770176D-03	0.1663291341770176D-03	0.1370093154860665D-03	0.9525433619070778D-04	-0.6252379445723121D-04	-0.1606840875020572D-06
	0.1369419158948333D-03	0.1369419158948333D-03	0.1126037404066162D-03	0.7747163395046045D-04	-0.5065940399233508D-04	-0.1232617467490432D-06
	0.1142345180036692D-03	0.1142345180036692D-03	0.9378710381211137D-04	0.6388836751973449D-04	-0.4173296310517997D-04	-0.9620829268153610-07
	0.9638236977845146D-04	0.9638236977845146D-04	0.7902234089755930D-04	0.5332637256992329D-04	-0.3488179844020594D-04	-0.7620666317962894D-07
	0.8213492964648543D-04	0.8213492964648543D-04	0.6725902559347120D-04	0.4498526323798045D-04	-0.2951517364301796D-04	-0.6113751034998813D-07
	0.7061354164692693D-04	0.7061354164692693D-04	0.5776099246012452D-04	0.3830756096133881D-04	-0.2524062773443414D-04	-0.4959877241209054D-07
	0.6118735990261366D-04	0.6118735990261366D-04	0.5000089777107289D-04			
	0.5339477352930659D-04	0.5339477352930659D-04	0.4359365025060073D-04			
3ème étape	0.1867995538238744D-03	0.1867995538238744D-03	0.1540649584687210D-03	0.1705160486394733D-03	-0.1182448058664823D-03	-0.3345215462626124D-06
	0.7443026238793463D-05	0.7443026238793463D-05	0.5386506375560643D-05	-0.9339941969733903D-06	0.6041844877529515D-06	0.3534087503545558D-08
	0.5554959495608245D-05	0.5554959495608245D-05	0.4003595180399793D-05	-0.5983930234416826D-06	0.6754797105504740D-06	0.2401328132650357D-08
	0.4241398189260091D-05	0.4241398189260091D-05	0.3046660020799554D-05	-0.3968470667334344D-06	0.6790327008085982D-06	0.1563170157550808D-08
	0.3301501516713400D-05	0.3301501516713400D-05	0.2364978276553223D-05	-0.2707955394359330D-06	0.6457277894839643D-06	0.9338116881485254D-09
	0.2612788901205790D-05	0.2612788901205790D-05	0.1867321455841994D-05	-0.1864803751764873D-06	0.5972042643378334D-06	0.7429916083420696D-09
	0.2097713206558648D-05	0.2097713206558648D-05	0.1496293421543275D-05			
	0.1705589395980221D-05	0.1705589395980221D-05	0.1214581228690861D-05			
	0.1402371563017073D-05	0.1402371563017073D-05	0.9972373331992243D-06			
4ème étape	0.5059272164684419D-05	0.5059272164684419D-05	0.3641637737435968D-05	-0.1596716762168474D-05	0.6794286096754865D-06	
	0.1678556404442668D-06	0.1678556404442668D-06	0.1202888592103605D-06	0.6752019825412639D-08	0.6773912213627400D-06	
	0.1177351707953335D-06	0.1177351707953335D-06	0.8427521311143646D-07	0.1213082779774263D-06	0.6780521942645855D-06	
	0.8483539273070745D-07	0.8483539273070745D-07	0.6064659241445357D-07			
	0.6251955418580708D-07	0.6251955418580708D-07	0.4462539700180596D-07			
	0.4696492919933383D-07	0.4696492919933383D-07	0.3346331968983140-07			
	0.3591983819910792D-07	0.3591983819910792D-07	0.2555596484931331D-07			
5ème étape	0.1071112585833383D-06	0.1071112585833383D-06				
	0.2936843345119691D-08	0.2936843345119691D-08				
	0.1665601441708589D-08	0.1665601441708589D-08				
	0.9622233356053375D-09	0.9622233356053375D-09				
	0.1281802320318368D-08	0.1281802320318368D-08				

x_0	0.3000000000000000D+00
x_1	0.2553364891256060D+00
|	0.2229148521969890D+00
|	0.1981720495453590D+00
|	0.1786001474797286D+00
|	0.1626934912220265D+00
|	0.1494880718125438D+00
|	0.1383355217736914D+00
|	0.1287824126647018D+00
|	0.1205014122262228D+00
|	0.1132498981151394D+00
|	0.1068439794099804D+00
|	0.1011415892404690D+00
|	0.9603113743139027D-01
x_{14}	0.9142369020174071D-01

$x_0 = 0.3$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$F(x) = x + \cos x - 1$

$(x_n) \in LOGF_1'$

	Théorème 2.1 (P=1)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	0.1876092235521526D-01	0.1876092235521526D-01	0.1876092235521526D-01	-0.2219567031643613D-01	-0.2219567031643613D-01	-0.1717373980610432D-02
	0.1397632449058170D-01	0.1397632449058170D-01	0.1397632449058170D-01	-0.1603599725302749D-01	-0.1603599725302749D-01	-0.1029836381222893D-02
	0.1086861863505311D-01	0.1086861863505311D-01	0.1086861863505311D-01	-0.1221142583408038D-01	-0.1221142583408038D-01	-0.6714035995136342D-03
	0.8721490068013468D-02	0.8721490068013468D-02	0.8721490068013468D-02	-0.9650207706217891D-02	-0.9650207706217891D-02	-0.4643588191022116D-03
	0.7169130280556853D-02	0.7169130280556853D-02	0.7169130280556853D-02	-0.7840458310750889D-02	-0.7840458310750889D-02	-0.3356640150970181D-03
	0.6006851959700221D-02	0.6006851959700221D-02	0.6006851959700221D-02	-0.6509095772025902D-02	-0.6509095772025902D-02	-0.2511219061628403D-03
	0.5112061781628142D-02	0.5112061781628142D-02	0.5112061781628142D-02	-0.5498311771793318D-02	-0.5498311771793317D-02	-0.1931249950825877D-03
	0.4407345417304034D-02	0.4407345417304034D-02	0.4407345417304034D-02	-0.4711192040969978D-02	-0.4711192040969978D-02	-0.1519233118329720D-03
	0.3841695752986852D-02	0.3841695752986852D-02	0.3841695752986852D-02	-0.4085289933256996D-02	-0.4085289933256996D-02	-0.1217970901350721D-03
	0.3380309043444033D-02	0.3380309043444033D-02	0.3380309043444033D-02	-0.3578767606132120D-02	-0.3578767606132120D-02	-0.9922928134404348D-04
	0.2998730780909460D-02	0.2998730780909460D-02	0.2998730780909460D-02	-0.3162672749661845D-02	-0.3162672749661845D-02	-0.8197098437619249D-04
	0.2679343487201669D-02	0.2679343487201669D-02	0.2679343487201669D-02	-0.2816415070142678D-02	-0.2816415070142678D-02	-0.6853579147050459D-04
	0.2409178535037678D-02	0.2409178535037678D-02	0.2409178535037678D-02			
2ème étape	0.8153494917958511D-03	0.8153494917958511D-03	0.6757159365988751D-03	0.4881145791152769D-03	-0.2969868092013599D-03	-0.1817107475191165D-05
	0.5445995113648157D-03	0.5445995113648157D-03	0.4488781826347245D-03	0.3139207830338858D-03	-0.1987765429561344D-03	-0.9448160395049599D-06
	0.3841689250134300D-03	0.3841689250134300D-03	0.3154098556952440D-03	0.2147391936506407D-03	-0.1405073389901974D-03	-0.5381251842883406D-06
	0.2822684300830688D-03	0.2822684300830688D-03	0.2310636908129551D-03	0.1537880890303934D-03	-0.1034838396743718D-03	-0.3279324257874136D-06
	0.2140871103426955D-03	0.2140871103426955D-03	0.1748445208156351D-03	0.1141309664683630D-03	-0.7869402606389997D-04	-0.2105625582403654D-06
	0.1665729412520412D-03	0.1665729412520412D-03	0.1357849182618638D-03	0.8715259451639739D-04	-0.6139724692335854D-04	-0.1409539576013813D-06
	0.1323570573102981D-03	0.1323570573102981D-03	0.1077261529628568D-03	0.6812885688033142D-04	-0.4892086294612925D-04	-0.9762671470394662D-07
	0.1070411229060222D-03	0.1070411229060222D-03	0.8700784003493591D-04	0.5431154684777739D-04	-0.3967174370143544D-04	-0.6956652813422331D-07
	0.8787860690379680D-04	0.8787860690379680D-04	0.7135218016169458D-04	0.4402335145013490D-04	-0.3265586635076461D-04	-0.5078019273395959D-07
	0.7308894186902055D-04	0.7308894186902055D-04	0.5928673683735622D-04			
	0.6148063821794949D-04	0.6148063821794949D-04	0.4982860980896596D-04			
3ème étape	0.2183508408707539D-04	0.2183508408707539D-04	0.1653601278212705D-04	-0.2496573487565032D-05	0.2072025191579622D-05	-0.2493208490244404D-08
	0.1313859645301012D-04	0.1313859645301012D-04	0.9844002751073464D-05	-0.1296405344017129D-05	0.1786459831675949D-05	-0.9083417657464470D-09
	0.8450326925189373D-05	0.8450326925189373D-05	0.6279806077206122D-05	-0.7521015566072393D-06	0.1373752851081020D-05	-0.3333975982135785D-09
	0.5713425765557122D-05	0.5713425765557122D-05	0.4218740709987864D-05	-0.4726225570478878D-06	0.1030461334007176D-05	-0.1118711539105697D-09
	0.4017025785282422D-05	0.4017025785282422D-05	0.2950888033895214D-05	-0.3156220444325977D-06	0.7736311396848063D-06	-0.3336481812619738D-10
	0.2914912100115899D-05	0.2914912100115899D-05	0.2132246675234340D-05	-0.2205358681070660D-06	0.5866877201314668D-06	0.3159289991681967D-11
	0.2171106958835793D-05	0.2171106958835793D-05	0.1582574706357105D-05			
	0.1653035645375965D-05	0.1653035645375965D-05	0.1201359885619346D-05			
	0.1282460111293628D-05	0.1282460111293628D-05	0.9296714810341323D-06			
4ème étape	0.4453822189652856D-06	0.4453822189652856D-06	0.3119282750788252D-06	-0.1049657246573828D-07	0.1659609314369917D-05	
	0.2432010311526694D-06	0.2432010311526694D-06	0.1708568008127754D-06	-0.9447702479609910D-08	0.6815135627494784D-06	
	0.1431853150003410D-06	0.1431853150003410D-06	0.1007313947220604D-06	0.7550783703557200D-08	0.2544379052799586D-06	
	0.8927473482601169D-07	0.8927473482601169D-07	0.6281876762834585D-07	-0.9481910600109425D-08		
	0.5824960803568395D-07	0.5824960803568395D-07	0.4096643737237856D-07			
	0.3943450705514370D-07	0.3943450705514370D-07	0.2770523810950985D-07			
	0.2753496583299517D-07	0.2753496583299517D-07	0.1932031369739933D-07			
5ème étape	0.5917634595308852D-08	0.5917634595308852D-08				
	0.2965424570076616D-08	0.2965424570076616D-08				
	0.1638002909154538D-08	0.1638002909154538D-08				
	0.9179963729404150D-09	0.9179963729404150D-09				
	0.6081250205579574D-09	0.6081250205579574D-09				

x_0	0.3000000000000000D+00
x_1	0.2370000000000000D+00
	0.1941430530000000D+00
	0.1637690757130322D+00
	0.1413411029583552D+00
	0.1241874102328733D+00
	0.1106801793039351D+00
	0.9978592070907974D-01
	0.9082228209776498D-01
	0.8332275974319798D-01
	0.7695856090050019D-01
	0.7149173712396319D-01
	0.6674606781094173D-01
	0.6258838648234779D-01
x_{14}	0.5891625822944648D-01

$x_0 = 0.3$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$F(x) = x - x^2 + x^3$

$(x_n) \in LOGF_1''$

	Théorème 2.1 (P=1)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	-0.3108127457143661D-01	-0.3108127457143661D-01	-0.3108127457143661D-01	0.4396798510517245D-01	0.4396798510517245D-01	-0.6064854679233592D-02
	-0.1441884608203759D-01	-0.1441884608203759D-01	-0.1441884608203759D-01	0.2338273644391722D-01	0.2338273644391722D-01	-0.1818318573385983D-02
	-0.7694892693969870D-02	-0.7694892693969870D-02	-0.7694892693969870D-02	0.1341969611340743D-01	0.1341969611340743D-01	-0.6566964284410300D-03
	-0.4545179514180671D-02	-0.4545179514180671D-02	-0.4545179514180671D-02	0.8263978140940189D-02	0.8263978140940189D-02	-0.2754602958070513D-03
	-0.2894074151108959D-02	-0.2894074151108959D-02	-0.2894074151108959D-02	0.5398490393325714D-02	0.5398490393325715D-02	-0.1298859696307345D-03
	-0.1951144587930008D-02	-0.1951144587930008D-02	-0.1951144587930008D-02	0.3700883074309671D-02	0.3700883074309671D-02	-0.6713536718344834D-04
	-0.1375569190560145D-02	-0.1375569190560145D-02	-0.1375569190560145D-02	0.2639134370000099D-02	0.2639134370000099D-02	-0.3733467037339721D-04
	-0.1005136434063040D-02	-0.1005136434063040D-02	-0.1005136434063040D-02	0.1944183295390853D-02	0.1944183295390854D-02	-0.2202985757840847D-04
	-0.7562732209672377D-03	-0.7562732209672377D-03	-0.7562732209672377D-03	0.1471599150602683D-02	0.1471599150602683D-02	-0.1364909711059757D-04
	-0.5830487649403265D-03	-0.5830487649403265D-03	-0.5830487649403265D-03	0.1139671729703293D-02	0.1139671729703293D-02	-0.8808600059120052D-05
	-0.4588342128221880D-03	-0.4588342128221880D-03	-0.4588342128221880D-03	0.9000150111888343D-03	0.9000150111888345D-03	-0.5884471485180605D-05
	-0.3674828635363603D-03	-0.3674828635363603D-03	-0.3674828635363603D-03	0.7228184562359898D-03	0.7228184562359899D-03	-0.4049090278910226D-05
	-0.2988233309616320D-03	-0.2988233309616320D-03	-0.2988233309616320D-03			
2ème étape	0.2722427373881273D-02	0.7485869830616400D-03	0.6119497362226569D-03	0.1073745700395133D-02	-0.5201474623153215D-03	0.4838085128466597D-04
	0.1270545711957023D-02	0.2513032518914708D-03	0.2055368136803555D-03	0.4096242126537263D-03	-0.2847128323506166D-03	0.1420448889144365D-04
	0.6913002998422298D-03	0.1002057285678247D-03	0.8178894305378387D-04	0.1762998025521095D-03	-0.1531257292613036D-03	0.5203950929049420D-05
	0.4178970195722831D-03	0.4564387179264335D-04	0.3716798584703480D-04	0.8430861852700559D-04	-0.8493513671306304D-04	0.2247688973302070D-05
	0.2722383760434359D-03	0.2303077261436813D-04	0.1871486844564223D-04	0.4395357469795324D-04	-0.4917417575682761D-04	0.1096448298161685D-05
	0.1874483256497180D-03	0.1258815574741376D-04	0.1021116280795003D-04	0.2458135411999406D-04	-0.2972098667848209D-04	0.5862913559737051D-06
	0.1346778221508368D-03	0.7333607281826224D-05	0.5940117278912233D-05	0.1456116683986087D-04	-0.1868757679831111D-04	0.3366143601065059D-06
	0.1000808829447016D-03	0.4499951533227445D-05	0.3640459693702295D-05	0.9046848971856768D-05	-0.1217138842632499D-04	0.2045076276062635D-06
	0.7643523234934220D-04	0.2882383286476017D-05	0.2329468306645770D-05	0.5850426703724244D-05	-0.8177540881274445D-05	0.1300928448903061D-06
	0.5971522120818273D-04	0.1914138313821139D-05	0.1545622737451554D-05			
	0.4755258230204990D-04	0.1310830039905747D-05	0.1057685501756468D-05			
3ème étape	-0.2997630856266150D-04	-0.9508173693528639D-05	-0.7971294600643736D-05	0.5802970979936729D-05	-0.3606464187364931D-04	0.1582567087715315D-06
	-0.6780729462362610D-05	-0.2368749946059391D-05	-0.1951188352953723D-05	0.1610923161014405D-05	-0.8421589664140733D-05	0.6396807348047230D-07
	-0.2153975845271687D-05	-0.7287719647160288D-06	-0.5911460349988295D-06	0.5443880340216556D-06	-0.2664743849312091D-05	0.2719873054731217D-07
	-0.1069899657264822D-05	-0.2638864409991869D-06	-0.2112609223343918D-06	0.2137372090125957D-06	-0.1024500236284506D-05	0.1272638202961462D-07
	-0.7411981984943279D-06	-0.1083956779206059D-06	-0.8582670020551547D-07	0.9414596712748197D-07	-0.4500331498935679D-06	0.6550788381443783D-08
	-0.5921853334098255D-06	-0.4917604680266504D-07	-0.3857947332056803D-07	0.4536733896031688D-07	-0.2173587395894466D-06	0.3659346757763076D-08
	-0.4946429480351962D-06	-0.2416432765060878D-07	-0.1881130355086074D-07			
	-0.4183144302594927D-06	-0.1267652304210216D-07	-0.9804255538039842D-08			
	-0.3552462020428820D-06	-0.7022346135086532D-08	-0.5401266726108015D-08			
4ème étape	0.4475004262491495D-06	0.6563288820112282D-07	0.5677901252119611D-07	0.7091770909879593D-08	0.6511273941592262D-07	
	-0.3838421092331286D-06	0.1296281671808676D-07	0.1127607955993270D-07	0.1486023553266441D-08	0.1992362666479523D-07	
	-0.4801660867124070D-06	0.3188616726771531D-08	0.2760025911427310D-08	0.2965513945279040D-09	0.6931241317953983D-08	
	-0.4004337979752733D-06	0.9355097408495231D-09	0.7996057296300939D-09	0.1480743094901404D-08		
	-0.2391439602585949D-06	0.3159837109435229D-09	0.2653277431233052D-09			
	-0.5584449465173044D-07	0.1195857614092474D-09	0.9833996707522389D-10			
	0.3560910455221852D-07	0.4969738660506905D-10	0.3995985006191407D-10			
5ème étape	-0.5149014133496470D-06	-0.3749995576552867D-09				
	-0.4279727229504803D-06	-0.6529451107259916D-10				
	-0.5932182443020240D-06	-0.1401294610407116D-10				
	-0.2140392495133232D-05	-0.3550378878304610D-11				
	0.1595910482712225D-06	-0.9741543496306165D-12				

x_0	0.3000000000000000D+01
x_1	0.1431945622001443D+01
	0.1352318167095326D+01
	0.1298175898838429D+01
	0.1258750917615417D+01
	0.1228676235614369D+01
	0.1204940848174224D+01
	0.1185713171286868D+01
	0.1169810664826170D+01
	0.1156433860536698D+01
	0.1145021996765780D+01
	0.1135169680249450D+01
	0.1126576332449035D+01
	0.1119014243370238D+01
x_{14}	0.1112307677560716D+01

$$x_0 = 3$$

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

$$F(x) = 1 + \ln x - (x-1)^3/12$$

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$$

$$(x_n - 1) \in LOGF_1''$$

	Théorème 2.1 (P=1)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	0.2641709367451416D+00	0.2641709367451416D+00	0.2641709367451416D+00	0.5102745399327948D+00	0.5102745399327948D+00	0.3462054711410260D+00
	0.1398742747934981D-01	0.1398742747934981D-01	0.1398742747934981D-01	-0.2728356329621665D-01	-0.2728356329621665D-01	0.2304305541609895D-03
	0.8100981568015737D-02	0.8100981568015737D-02	0.8100981568015737D-02	-0.1549954992254532D-01	-0.1549954992254532D-01	0.2341377378287169D-03
	0.5134697421316379D-02	0.5134697421316379D-02	0.5134697421316379D-02	-0.9755584348815587D-02	-0.9755584348815584D-02	0.1712701546057236D-03
	0.3466877514287232D-02	0.3466877514287232D-02	0.3466877514287232D-02	-0.6573464998395214D-02	-0.6573464998395217D-02	0.1200966767264165D-03
	0.2453862751889915D-02	0.2453862751889915D-02	0.2453862751889915D-02	-0.4653591537873120D-02	-0.4653591537873120D-02	0.8471132196890326D-04
	0.1801842427481799D-02	0.1801842427481799D-02	0.1801842427481799D-02	-0.3421242942831182D-02	-0.3421242942881179D-02	0.6081397069413862D-04
	0.1362683064627426D-02	0.1362683064627426D-02	0.1362683064627426D-02	-0.2591751634363523D-02	-0.2591751634363522D-02	0.4453816496377593D-04
	0.1055856164344335D-02	0.1055856164344335D-02	0.1055856164344335D-02	-0.2011939211441920D-02	-0.2011939211441922D-02	0.3325770574891685D-04
	0.8349019771006607D-03	0.8349019771006607D-03	0.8349019771006605D-03	-0.1593949195081123D-02	-0.1593949195081126D-02	0.2528491970673241D-04
	0.6716877348668553D-03	0.6716877348668553D-03	0.6716877348668555D-03	-0.1284754336712841D-02	-0.1284754336712835D-02	0.1954037767362324D-04
	0.5484789346293416D-03	0.5484789346293416D-03	0.5484789346293416D-03	-0.1050980618050966D-02	-0.1050980618050968D-02	0.1532575040257239D-04
	0.4537088158778583D-03	0.4537088158778583D-03	0.4537088158778583D-03			
2ème étape	0.4985104051253617D-02	0.5973515842517298D-02	0.5949717570060348D-02	0.3909889153561011D+00	0.6066383776765126D+00	0.2332463095659372D-03
	-0.8221631602807005D-03	0.1557191244182488D-03	0.1284226964913906D-03	0.3094303549623493D-03	-0.2838975968525087D-03	0.2332192896833272D-03
	-0.5590097833768014D-03	0.6730415939419209D-04	0.5461630330610111D-04	0.1382979106532103D-03	-0.1430758229161389D-03	-0.1866190643639979D-05
	-0.3923640775927985D-03	0.3317160993941844D-04	0.2661501647072888D-04	0.6981109011389370D-04	-0.7892526280603494D-04	0.6452481862782421D-05
	-0.2844792293399946D-03	0.1795087049603992D-04	0.1428236135301111D-04	0.3847165098134933D-04	-0.4659862875913234D-04	0.2096142130618298D-05
	-0.2122764198677938D-03	0.1042462718655181D-04	0.8240769103022875D-05	0.2266709404926434D-04	-0.2901463785430885D-04	0.7703902996172591D-06
	-0.1623688613435443D-03	0.6399175898180384D-05	0.5032760570236649D-05	0.1408049458721979D-04	-0.1885798321587607D-04	0.3227072979715764D-06
	-0.1268597185224925D-03	0.4108392985218432D-05	0.3217734324025001D-05	0.9130782634326909D-05	-0.1269922084123193D-04	0.1500147103314538D-06
	-0.1009456195039652D-03	0.2737381698426173D-05	0.2136601629700724D-05	0.6136152012407555D-05	-0.8811172179736351D-05	0.7570104303676085D-07
	-0.8160950892661294D-04	0.1881770735839752D-05	0.1464553091853416D-05			
	-0.6689823187248901D-04	0.1328583180735783D-05	0.1031490064673382D-05			
3ème étape	-0.4854467751783849D-03	0.4804471314260044D-04	0.3871768260522946D-04	-0.2043634875353847D-03	0.5623715157456006D-03	0.2338432107428304D-03
	0.5228160798794357D-04	0.6267959347936499D-06	0.4736764100247461D-06	-0.3461085276450140D-06	0.9312600334162625D-06	0.4946231971806377D-05
	0.1920979995542098D-04	0.2198254136736959D-06	0.1675088938798627D-06	-0.1145479330942481D-06	0.4815118198077655D-06	-0.4434730426571974D-05
	0.9196285483443903D-05	0.9083288058232657D-07	0.7003345595308665D-07	-0.4690818010953147D-07	0.2460286916497207D-06	0.1425636051094917D-07
	0.5162069176721171D-05	0.4210480525671488D-07	0.3286783428649125D-07	-0.2228014137691404D-07	0.1310210057427208D-06	0.2564549017808684D-08
	0.3224371201039546D-05	0.2126873908307562D-07	0.1680043245537791D-07	-0.1179488987078717D-07	0.7309707378755012D-07	0.7177751095311519D-09
	0.2172640784790401D-05	0.1148972460750242D-07	0.9174917899208712D-08			
	0.1547929104783958D-05	0.6552469575607511D-08	0.5283753114725120D-08			
	0.1150424481736545D-05	0.3907974933676367D-08	0.3178935406144417D-08			
4ème étape	0.1321259619586706D-04	0.1577291062885601D-06	0.1209468535590379D-06	0.4781478630719836D-07	0.5325237367840479D-05	
	0.1217961853178674D-05	0.4026225879170259D-08	0.4075692088727559D-08	-0.8039047880072786D-09	0.5024724952003984D-07	
	0.7399114267697215D-06	0.1344394037284050D-08	0.1383456478066050D-08	-0.3133795985297422D-09	0.7115994200357703D-08	
	0.4963100289556363D-06	0.5069554938601922D-09	0.5208952134645034D-09			
	0.3465757461510854D-06	0.2099425520582510D-09	0.2134567774272900D-09			
	0.2479058328827555D-06	0.9394028784026620D-10	0.9408401336653827D-10			
	0.1808314155869999D-06	0.4458312451854907D-10	0.4388669787823429D-10			
5ème étape	0.6199804517853947D-06	0.9940298595096514D-09				
	0.1499445991481017D-06	-0.8321179249121124D-11				
	0.2879837958380533D-07	-0.4353181985890242D-11				
	0.7747403942340303D-09	-0.1523481536237700D-11				
	-0.2365593940786143D-08	-0.1506308966447989D-11				

x_0	0.3000000000000000D+00
x_1	0.2614317793182821D+00
	0.2315405971937950D+00
	0.2077239391723207D+00
	0.1883156412099986D+00
	0.1722033128008928D+00
	0.1586175373875653D+00
	0.1470099012204623D+00
	0.1369793339478298D+00
	0.1282259359605125D+00
	0.1205210786532391D+00
	0.1136874822414474D+00
	0.1075856034951728D+00
	0.1021041249984343D+00
x_{14}	0.9715317649230306D-01

$x_0 = 0.3$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$$F(x) = 1 - e^{-x} + \frac{x^3}{12}$$

$(x_n) \in LOGF_1''$

	Théorème 2.1 (P=1)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	-0.4292453900422515D-02	-0.4292453900422515D-02	-0.4292453900422515D-02	0.7933862380527566D-02	0.7933862380527566D-02	-0.2170151401058216D-03
	-0.2850789009916935D-02	-0.2850789009916935D-02	-0.2850789009916935D-02	0.5352110862920989D-02	0.5352110862920989D-02	-0.1164890523042935D-03
	-0.1987059541521314D-02	-0.1987059541521314D-02	-0.1987059541521314D-02	0.3771527558952767D-02	0.3771527558952767D-02	-0.6753050802995363D-04
	-0.1439067127978015D-02	-0.1439067127978015D-02	-0.1439067127978015D-02	0.2753316642443090D-02	0.2753316642443090D-02	-0.4160587117098028D-04
	-0.1075043534915954D-02	-0.1075043534915954D-02	-0.1075043534915954D-02	0.2069309966406270D-02	0.2069309966406270D-02	-0.2692570114187923D-04
	-0.8239562755946528D-03	-0.8239562755946528D-03	-0.8239562755946528D-03	0.1593478773886230D-02	0.1593478773886230D-02	-0.1814459243435858D-04
	-0.6452530452762121D-03	-0.6452530452762121D-03	-0.6452530452762121D-03	0.1252563511790161D-02	0.1252563511790161D-02	-0.1264752625408753D-04
	-0.5146512042572853D-03	-0.5146512042572853D-03	-0.5146512042572853D-03	0.1002086906103851D-02	0.1002086906103851D-02	-0.9071834136906582D-05
	-0.4170127197948915D-03	-0.4170127197948915D-03	-0.4170127197948915D-03	0.8140195049817823D-03	0.8140195049817824D-03	-0.6668644869333427D-05
	-0.3425697014617516D-03	-0.3425697014617516D-03	-0.3425697014617516D-03	0.6701174897879601D-03	0.6701174897879605D-03	-0.5007304378514351D-05
	-0.2848288582577190D-03	-0.2848288582577190D-03	-0.2848288582577190D-03	0.5581668921285071D-03	0.5581668921285071D-03	-0.3830274795643737D-05
	-0.2393600260934085D-03	-0.2393600260934085D-03	-0.2393600260934085D-03	0.4697854277812365D-03	0.4697854277812367D-03	-0.2978208135193467D-05
	-0.2030706560768521D-03	-0.2030706560768521D-03	-0.2030706560768521D-03			
2ème étape	0.3885260284634072D-03	0.2639308105197402D-04	0.2198512560830198D-04	0.4614654222913287D-04	-0.4658356621107657D-04	0.5032391202596538D-06
	0.2655960864491059D-03	0.1410679684026538D-04	0.1172262551941747D-04	0.2525095718856288D-04	-0.2781639995093927D-04	0.2305809801622037D-06
	0.1897487161038710D-03	0.8079066274574618D-05	0.6700814850300431D-05	0.1471163144962232D-04	-0.1732640433436775D-04	0.1149891203366653D-06
	0.1403563380574904D-03	0.4891084380958319D-05	0.4050420445404281D-05	0.9022263641702943D-05	-0.1120207353814061D-04	0.6137299746997846D-07
	0.1067827242199664D-03	0.3099061362918753D-05	0.2563145897205614D-05	0.5773966638791278D-05	-0.7482470976600485D-05	0.3462810160704992D-07
	0.8315086239846769D-04	0.2039695585189300D-05	0.1685188469799477D-05	0.3830265669310869D-05	-0.5142504131313339D-05	0.2046362895151440D-07
	0.6602729374228064D-04	0.1386383847288937D-05	0.1144400607444923D-05	0.2619958894933993D-05	-0.3623872709497901D-05	0.1257599091309473D-07
	0.5331189749828870D-04	0.9687089330258513D-06	0.7990168235839675D-06	0.1840121930040639D-05	-0.2610703198455695D-05	0.7992424597491968D-08
	0.4366969458671851D-04	0.6932643316215877D-06	0.5714456030061040D-06	0.1322535390017358D-05	-0.1917970448025583D-05	0.5229416683870389D-08
	0.3622381616914834D-04	0.5066428014066246D-06	0.4173767369102448D-06			
	0.3038179870359518D-04	0.3771658432626604D-06	0.3105556279942070D-06			
3ème étape	-0.1052791198156157D-05	-0.9718396182159377D-07	-0.7803541892024969D-07	0.7344817473271602D-07	-0.3633921942125906D-06	0.3998104645142455D-09
	-0.9058687562636232D-06	-0.4311296289267068D-07	-0.3428894435035767D-07	0.3503173316116485D-07	-0.1688296974826799D-06	0.1733941855170170D-09
	-0.7694371746909833D-06	-0.2082503140240701D-07	-0.1643211675477320D-07	0.1801111443496345D-07	-0.8541178114292909D-07	0.7913442515997066D-10
	-0.6481875065476462D-06	-0.1077802438677337D-07	-0.8443482715446997D-08	0.9837973810435583D-08	-0.4618009116478670D-07	0.3796722841492124D-10
	-0.5447192514913790D-06	-0.5905726081899925D-08	-0.4603621604619296D-08	0.5649325694162367D-08	-0.2534307494355970D-07	0.1909691974342309D-10
	-0.4584405728845790D-06	-0.3394916719321316D-08	-0.2633945401699617D-08	0.3384242079106822D-08	-0.1570739995582040D-07	0.1006976905434208D-10
	-0.3872765520440264D-06	-0.2032936496355280D-08	-0.1570893759950643D-08			
	-0.3287898178206364D-06	-0.1260987794212271D-08	-0.9709976468657270D-09			
	-0.2806896158484439D-06	-0.8065195723291574D-09	-0.6191581285578731D-09			
4ème étape	0.1483817657729290D-05	0.2260055474941517D-09	0.1947021196841067D-09	-0.2583781532308622D-10	0.8042456419166370D-09	
	0.5932581578298841D-06	0.8346056239321728D-10	0.6998355369254089D-10	-0.8988878158822928D-11	0.3502143300608153D-09	
	0.2340991739466711D-06	0.3402622696813634D-10	0.2772566009660354D-10	0.3951999443145520D-11	0.1705579216997492D-09	
	0.1046981254402927D-06	0.1506622950966836D-10	0.1192714265586550D-10	-0.9047441798688179D-11		
	0.4953348614510026D-07	0.7152868902714777D-11	0.5505982389938984D-11			
	0.2327485018208039D-07	0.3612943778343419D-11	0.2710436051040210D-11			
	0.9906782095255953D-08	0.1953993680366113D-11	0.1440159237098077D-11			
5ème étape	-0.1420183411188237D-06	-0.6325855194671208D-12				
	-0.1088409844390155D-07	-0.1486802738656381D-12				
	-0.1137794526590781D-07	-0.2555106018297391D-13				
	-0.1083958709453289D-07	0.3580024066960437D-13				
	-0.9489667963863957D-08	0.1438894074127816D-12				

X_0	0.2000000000000000D+00
X_1	0.1986025802553515D+00
|	0.1972346695466953D+00
|	0.1958952341368153D+00
|	0.1945832905691204D+00
|	0.1932979025541751D+00
|	0.1920381780893518D+00
|	0.1908032667912049D+00
|	0.1895923574222050D+00
|	0.1884046755952770D+00
|	0.1872394816411996D+00
|	0.1860960686253513D+00
|	0.1849737605015728D+00
|	0.1838719103920556D+00
X_{14}	0.1827898989831936D+00

$X_0 = 0.2$

$X_{n+1} = F(X_n)$

$F(X) = 1 - e^{-X} + \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{3}$

$(X_n) \in LOGF_2'$

	Théorème 2.1 (P=2)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1	0.4267655147412529D-02	0.4267655147412529D-02	0.4267655147412529D-02	-0.5646706610292040D-02	-0.5646706610292037D-02	-0.6895257314397557D-03
	0.4201256082691306D-02	0.4201256082691306D-02	0.4201256082691306D-02	-0.5548228376462098D-02	-0.5548228376462090D-02	-0.6734861468853963D-03
	0.4136858123857455D-02	0.4136858123857455D-02	0.4136858123857455D-02	-0.5452962557762925D-02	-0.5452962557762923D-02	-0.6580522169527344D-03
	0.4074372818475336D-02	0.4074372818475336D-02	0.4074372818475336D-02	-0.5360757956691501D-02	-0.5360757956691507D-02	-0.6431925691080832D-03
	0.4013716829426101D-02	0.4013716829426101D-02	0.4013716829426101D-02	-0.5271472596725612D-02	-0.5271472596725609D-02	-0.6288778836497552D-03
	0.3954811571393471D-02	0.3954811571393471D-02	0.3954811571393471D-02	-0.5184973034709607D-02	-0.5184973034709606D-02	-0.6150807316580678D-03
1ère étape	0.3897582877863445D-02	0.3897582877863445D-02	0.3897582877863445D-02	-0.5101133735693292D-02	-0.5101133735693289D-02	-0.6017754289149238D-03
	0.3841960695681603D-02	0.3841960695681603D-02	0.3841960695681603D-02	-0.5019836499288865D-02	-0.5019836499288862D-02	-0.5889379018036308D-03
	0.3787878804561083D-02	0.3787878804561083D-02	0.3787878804561083D-02	-0.4940969937748267D-02	-0.4940969937748260D-02	-0.5765455659359240D-03
	0.3735274559182008D-02	0.3735274559182008D-02	0.3735274559182008D-02	-0.4864428995358957D-02	-0.4864428995358958D-02	-0.5645772180884743D-03
	0.3684088651804507D-02	0.3684088651804507D-02	0.3684088651804507D-02	-0.4790114506560608D-02	-0.4790114506560609D-02	-0.5530129273780502D-03
	0.3634264893525414D-02	0.3634264893525414D-02	0.3634264893525414D-02	-0.4717932797319712D-02	-0.4717932797319705D-02	-0.5418339518971493D-03
	0.3585750012455390D-02	0.3585750012455390D-02	0.3585750012455390D-02			
	-0.6447511110563321D-04	-0.6447511110563321D-04	-0.7234509304452487D-04	-0.9230732960832334D-04	-0.2472099360840561D-03	0.1111779348141732D-05
	-0.6315163561219475D-04	-0.6315163561219475D-04	-0.7083158603287642D-04	-0.9064827385352358D-04	-0.2410757903252576D-03	0.1068279556727832D-05
	-0.6187251208072334D-04	-0.6187251208072334D-04	-0.6936977088740014D-04	-0.8891945545232104D-04	-0.2350702713625350D-03	0.1043048632021577D-05
	-0.6063570659353685D-04	-0.6063570659353685D-04	-0.6795722819177364D-04	-0.8736984793499635D-04	-0.2294280106032753D-03	0.9957244950929089D-06
	-0.5943928740256762D-04	-0.5943928740256762D-04	-0.6659166602515729D-04	-0.8571786339791424D-04	-0.2238599326579499D-03	0.9776623212660227D-06
2ème étape	-0.5828145023854150D-04	-0.5828145023854150D-04	-0.6527094343323864D-04	-0.8431282376277574D-04	-0.2187015052567770D-03	0.9241424006117340D-06
	-0.5716047444008979D-04	-0.5716047444008979D-04	-0.6399302460268719D-04	-0.8284699012736178D-04	-0.2136391517351609D-03	0.8909738811630262D-06
	-0.5607476002224725D-04	-0.5607476002224725D-04	-0.6275601442580905D-04	-0.8114873302616130D-04	-0.2084944807024481D-03	0.9100155433794309D-06
	-0.5502278290835748D-04	-0.5502278290835748D-04	-0.6155811208468524D-04	-0.8022153109236602D-04	-0.2042522652709615D-03	0.7963507734181304D-06
	-0.5400307140280483D-04	-0.5400307140280483D-04	-0.6039758608670640D-04			
	-0.5301431442986700D-04	-0.5301431442986700D-04	-0.5927288163483972D-04			
	0.5123466554495758D-05	0.5123466554495758D-06	0.5035399823594080D-06	-0.8938043632152003D-04	-0.2318931263241659D-03	0.1046021369567350D-05
	0.4814822951009001D-06	0.4814822951009001D-06	0.4757618729165678D-06	-0.8833966478109537D-04	-0.2358982252597023D-03	0.1030059116408915D-05
	0.4760936579525154D-06	0.4760936579525154D-06	0.4723568767396514D-06	-0.8616918821904955D-04	-0.2225944765065431D-03	0.9811230296132703D-06
	0.4457586098349675D-05	0.4457586098349675D-06	0.4446821218411039D-06	-0.8541270366961865D-04	-0.2253282298623716D-03	0.9734032300804535D-06
3ème étape	0.4462917184969111D-06	0.4462917184969111D-06	0.4466561514113691D-06	-0.8216931653076692D-04	-0.2166289605228837D-03	0.8795156086533530D-06
	0.4076081442222074D-06	0.4076081442222074D-06	0.4105696115627910D-06	-0.8142068731131708D-04	-0.2088178072512729D-03	0.9005539626346763D-06
	0.3902135858356851D-06	0.3902135858356851D-06	0.3949014240981776D-06			
	0.4283045908976406D-06	0.4283045908976406D-06	0.4328289285462061D-06			
	0.3228178708294636D-06	0.3228178708294636D-06	0.3316350151642661D-06			
	0.4716895774556095D-06	0.4716895774556095D-06	0.4699408465612431D-06	-0.8696656647517583D-04	-0.2287051302833369D-03	
	0.4859225482302305D-06	0.4859225482302305D-06	0.4781309417236184D-06	-0.8576019673266363D-04	-0.2243234991211092D-03	
	0.4465444619002620D-06	0.4465444619002620D-06	0.4474460185150320D-06	-0.8377998925294113D-04	-0.2265534535055070D-03	
	0.4455029257099082D-06	0.4455029257099082D-06	0.4438486830325180D-06	-0.7941434502987944D-04		
4ème étape	0.3601962182335770D-06	0.3601962182335770D-06	0.3690326652413431D-06			
	0.4081255208755212D-06	0.4081255208755212D-06	0.4115330383720993D-06			
	0.3863252736193284D-06	0.3863252736193284D-06	0.3914474576723499D-06			
	0.4707485139167058D-06	0.4707485139167058D-06				
	0.4449754980190716D-06	0.4449754980190716D-06				
5ème étape	0.4470479422180239D-06	0.4470479422180239D-06				
	0.4041061975623121D-06	0.4041061975623121D-06				
	0.3865452753323287D-06	0.3865452753323287D-06				

x_0	0.8300000000000000D+00
x_1	0.8841660346926889D+00
	0.8879287053006868D+00
	0.8913493321827041D+00
	0.8944768896366957D+00
	0.8973510376443949D+00
	0.9000042883887937D+00
	0.9024635856278879D+00
	0.9047514765413862D+00
	0.9068869950000814D+00
	0.9088863367995654D+00
	0.9107633824882342D+00
	0.9125301069070260D+00
	0.9141969033967969D+00
x_{14}	0.9157728429494739D+00

$x_0 = 0.88$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$F(x) = x - e^{x}(x-1)^3$

$\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$

$(x_n - 1) \in LOGF_2'$

	Théorème 2.1 (P=2)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	0.7511513528816781D-03	0.7511513528816781D-03	0.7511513528816781D-03	0.2766240157108227D-02	0.2766240157108235D-02	0.1758695754994952D-02
	0.8150813889762911D-03	0.8150813889762911D-03	0.8150813889762911D-03	0.2362598952752086D-02	0.2362598952752083D-02	0.1583840170864188D-02
	0.8613393638656204D-03	0.8613393638656204D-03	0.8613393638656204D-03	0.2029454076465860D-02	0.2029454076465862D-02	0.1445396720165740D-02
	0.8943475121582004D-03	0.8943475121582004D-03	0.8943475121582004D-03	0.1751379010641476D-02	0.1751379010641468D-02	0.1322863261399838D-02
	0.9173094986311876D-03	0.9173094986311876D-03	0.9173094986311874D-03	0.1516976963423710D-02	0.1516976963423718D-02	0.1217143231027449D-02
	0.9325838594995669D-03	0.9325838594995669D-03	0.9325838594995671D-03	0.1317670892188528D-02	0.1317670892188526D-02	0.1125127375844048D-02
	0.9419315236768159D-03	0.9419315236768159D-03	0.9419315236768157D-03	0.1146899959806902D-02	0.1146899959806894D-02	0.1044415741741859D-02
	0.9466835471141184D-03	0.9466835471141184D-03	0.9466835471141186D-03	0.9995726967604198D-03	0.9995726967604219D-03	0.9731281219372691D-03
	0.9478570327189873D-03	0.9478570327189873D-03	0.9478570327189875D-03	0.8716867416679076D-03	0.8716867416679107D-03	0.9097718871934476D-03
	0.9462366976988084D-03	0.9462366576988084D-03	0.9462366576988082D-03	0.7600592905701222D-03	0.7600592905701155D-03	0.8531479741344652D-03
	0.9424329212786276D-03	0.9424329212786276D-03	0.9424329212786278D-03	0.6621327085367694D-03	0.6621327085367780D-03	0.8022828149076935D-03
	0.9369243549278161D-03	0.9369243549278161D-03	0.9369243549278161D-03	0.5758321550197564D-03	0.5758321550197614D-03	0.7563782549737863D-03
	0.9300885067410345D-03	0.9300885067410345D-03	0.9300885067410345D-03			
2ème étape	0.1149682261050432D-02	0.1149682261050432D-02	0.1149764929281633D-02	-0.4582783306877083D-03	-0.3600402791309315D-03	-0.7350589429474456D-05
	0.1091775942321092D-02	0.1091775942321092D-02	0.1091816356709592D-02	-0.4360674386690314D-03	-0.3574938689939162D-03	-0.6607319797856653D-05
	0.1045219680518330D-02	0.1045219680518330D-02	0.1045237507402828D-02	-0.4169284966862105D-03	-0.3534350827045185D-03	-0.5942240059963002D-05
	0.1008548051916177D-02	0.1008548051916177D-02	0.1008554750593785D-02	-0.4002595157116148D-03	-0.3484915459173955D-03	-0.5351632968165088D-05
	0.9807637895664740D-03	0.9807637895664740D-03	0.9807657062721146D-03	-0.3856087436673631D-03	-0.3430690590883308D-03	-0.4829154965794893D-05
	0.9612627095243467D-03	0.9612627095243467D-03	0.9612630257536498D-03	-0.3726302602279597D-03	-0.3374318275281530D-03	-0.4367538643520433D-05
	0.9498001362368738D-03	0.9498001362368738D-03	0.9498001446513211D-03	-0.3610547047488741D-03	-0.3317523169199740D-03	-0.3959700599623990D-05
	0.9464958416583328D-03	0.9464958416583328D-03	0.9464958432998576D-03	-0.3506688466576007D-03	-0.3261423378678170D-03	-0.3598912725812304D-05
	0.9518824916676584D-03	0.9518824916676584D-03	0.9518825205217048D-03	-0.3413018525061104D-03	-0.3206735859067231D-03	-0.3279315851000648D-05
	0.9670132716553370D-03	0.9670132716553370D-03	0.9670138299957848D-03			
	0.9936624317661712D-03	0.9936624317661712D-03	0.9936654663940873D-03			
3ème étape	0.6587048477625522D-03	0.6587048477625522D-03	0.6961488799677562D-03	-0.1487023915947091D-03	-0.3592712204042262D-03	-0.1787962660319462D-05
	0.7269898735992103D-03	0.7269898735992103D-03	0.7574739950268544D-03	-0.1530015436901247D-03	-0.3569496897233216D-03	-0.1227534611035565D-05
	0.7951246859167140D-03	0.7951246859167140D-03	0.8175248973397904D-03	-0.1574642754826376D-03	-0.3524410559774193D-03	-0.8136730202880534D-06
	0.8578350068642457D-03	0.8578350068642457D-03	0.8717591371282952D-03	-0.1626227900475425D-03	-0.3453009373517879D-03	-0.6053865582868840D-06
	0.9086040985270619D-03	0.9086040985270619D-03	0.9149192269454394D-03	-0.1671578427600600D-03	-0.3354600415914601D-03	-0.3642803057128706D-06
	0.9409657789885856D-03	0.9409657789885856D-03	0.9420625206459350D-03	-0.1726164984524034D-03	-0.3232785322246837D-03	-0.3637382939966540D-06
	0.9503984966386515D-03	0.9503984966386515D-03	0.9499091921101415D-03			
	0.9359782043817546D-03	0.9359782043817546D-03	0.9379419431229576D-03			
	0.9008115252939180D-03	0.9008115252939180D-03	0.9086714234266540D-03			
4ème étape	-0.1128904984849082D-01	-0.1128904984849082D-01	0.5092654880050123D-02	-0.1592178823967203D-03	-0.3598994040663066D-03	
	0.2244012053276914D-02	0.2244012053276914D-02	0.1657391836983410D-02	-0.1598814782911100D-03	-0.3585522167770231D-03	
	0.1306406886485030D-02	0.1306406886485030D-02	0.1188815705780056D-02	-0.1652682028526148D-03	-0.3540275746083344D-03	
	0.1054885509381645D-02	0.1054885509381645D-02	0.1024632834977398D-02			
	0.9625629561483262D-03	0.9625629561483262D-03	0.9586186183025277D-03			
	0.9411705053135211D-03	0.9411705053135211D-03	0.9428003209988062D-03			
	0.9756955158198180D-03	0.9756955158198180D-03	0.9683079591564449D-03			
5ème étape	0.9911416064661189D-03	0.9911416064661189D-03				
	0.8125707160997651D-03	0.8125707160997651D-03				
	0.8436576320725749D-03	0.8436576320725749D-03				
	0.9218303049491913D-03	0.9218303049491913D-03				
	0.9605885806593599D-03	0.9605885806593599D-03				

x_0	0.2800000000000000D+00
x_1	0.2714254112648591D+00
	0.2636435950341111D+00
	0.2565363795742719D+00
	0.2500092252911299D+00
	0.2439854180146040D+00
	0.2384019280326895D+00
	0.2332063951420224D+00
	0.2283548930328589D+00
	0.2238102444179536D+00
	0.2195407326469728D+00
	0.2155191035361738D+00
	0.2117217828324007D+00
	0.2081282560865391D+00
x_{14}	0.2047205723708561D+00

$x_0 = 0.28$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$F(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3$

$(x_n) \in LOGF_2'$

	Théorème 2.1 (P = 2)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	0.1892217702789631D-01	0.1892217702789631D-01	0.1892217702789631D-01	-0.2862507841716789D-01	-0.2862507841716789D-01	-0.4851450694635793D-02
	0.1768903788340756D-01	0.1768903788340756D-01	0.1768903788340756D-01	-0.2614576219485739D-01	-0.2614576219485739D-01	-0.4228362155724912D-02
	0.1661396952418880D-01	0.1661396952418880D-01	0.1661396952418880D-01	-0.2405151545204450D-01	-0.2405151545204450D-01	-0.3718772963927852D-02
	0.1566799181401791D-01	0.1566799181401791D-01	0.1566799181401791D-01	-0.2226062334949808D-01	-0.2226062334949808D-01	-0.3296315767740084D-02
	0.1482884392764249D-01	0.1482884392764249D-01	0.1482884392764249D-01	-0.2071273666785992D-01	-0.2071273666785992D-01	-0.2941946370108719D-02
	0.1407913692861012D-01	0.1407913692861012D-01	0.1407913692861012D-01	-0.1936235769004614D-01	-0.1936235769004614D-01	-0.2641610380718010D-02
	0.1340508549934739D-01	0.1340508549934739D-01	0.1340508549934739D-01	-0.1817456399755504D-01	-0.1817456399755504D-01	-0.2384739249103822D-02
	0.1279561715828742D-01	0.1279561715828742D-01	0.1279561715828742D-01	-0.1712212377840379D-01	-0.1712212377840379D-01	-0.2163253310058186D-02
	0.1224173385925104D-01	0.1224173385925104D-01	0.1224173385925104D-01	-0.1618350281520075D-01	-0.1618350281520075D-01	-0.1970884477974855D-02
	0.1173604617374404D-01	0.1173604617374404D-01	0.1173604617374404D-01	-0.1534145817106418D-01	-0.1534145817106418D-01	-0.1802705998660071D-02
	0.1127242788347856D-01	0.1127242788347856D-01	0.1127242788347856D-01	-0.1458202704778538D-01	-0.1458202704778538D-01	-0.1654799582153410D-02
	0.1084575611204442D-01	0.1084575611204442D-01	0.1084575611204442D-01	-0.1389378743067828D-01	-0.1389378743067828D-01	-0.1524015659316932D-02
	0.1045171322175312D-01	0.1045171322175312D-01	0.1045171322175312D-01			
2ème étape	0.1010216105449001D-02	0.1010216105449001D-02	0.9154275734488563D-03	-0.9416872072780860D-03	-0.3819356455494393D-02	0.2088783017425971D-03
	0.9435032306288704D-03	0.9435032306288704D-03	0.8577437676075104D-03	-0.8926870706029189D-03	-0.3366024177439185D-02	0.1886410694395385D-03
	0.8848145522608552D-03	0.8848145522608552D-03	0.8066887088470244D-03	-0.8446874405352723D-03	-0.2994751620813993D-02	0.1714977631246246D-03
	0.8327166601082226D-03	0.8327166601082226D-03	0.7611157928393881D-03	-0.7984448860544538D-03	-0.2686005747038497D-02	0.1568247457036416D-03
	0.7861144041898088D-03	0.7861144041898088D-03	0.7201449663603197D-03	-0.7543551847211153D-03	-0.2425846705333188D-02	0.1441511149590990D-03
	0.7441534605714526D-03	0.7441534605714526D-03	0.6830860467296862D-03	-0.7125948087523096D-03	-0.2204095447827255D-02	0.1331154411687838D-03
	0.7061553664662999D-03	0.7061553664662999D-03	0.6493877730080497D-03	-0.6732084602564731D-03	-0.2013168789510964D-02	0.1234360600870905D-03
	0.6715729479062411D-03	0.6715729479062411D-03	0.6186029135264671D-03	-0.6361606279485649D-03	-0.1847314350032025D-02	0.1148907164485155D-03
	0.6399589553460467D-03	0.6399589553460467D-03	0.5903637213552553D-03	-0.6013702134875817D-03	-0.1702099439625242D-02	0.1073017866963252D-03
	0.6109434964464250D-03	0.6109434964464250D-03	0.5643642588716195D-03			
	0.5842174707594473D-03	0.5842174707594473D-03	0.5403473984836190D-03			
3ème étape	0.1323820419629280D-03	0.1323820419629280D-03	0.1172694716273003D-03	-0.7889330765261684D-03	0.2102304863550202D-03	0.7035283957240082D-05
	0.1136416407202828D-03	0.1136416407202828D-03	0.9932299147702845D-04	-0.6599544716067928D-03	0.2175421187079174D-03	0.6554542874646970D-05
	0.9834315389894675D-04	0.9834315389894675D-04	0.8491569492608624D-04	-0.5317926355796952D-03	0.2211036275424926D-03	0.6223677395216359D-05
	0.8576528876569169D-04	0.8576528876569169D-04	0.7325900830301867D-04	-0.4162086457196872D-03	0.2204706373943316D-03	0.5792585535313182D-05
	0.7534825320371671D-04	0.7534825320371671D-04	0.6374993726438281D-04	-0.3162561472838018D-03	0.2189898713850222D-03	0.5593207404190913D-05
	0.6665742968954618D-04	0.6665742968954618D-04	0.5592792612105195D-04	-0.2371222823156099D-03	0.2127173473709193D-03	0.5208618122253863D-05
	0.5935408618596177D-04	0.5935408618596177D-04	0.4944005963051921D-04			
	0.5317348716361112D-04	0.5317348716361112D-04	0.4401518839289366D-04			
	0.4790729681797812D-04	0.4790729681797812D-04	0.3944344730520343D-04			
4ème étape	-0.1063210655358714D-04	-0.1063210655358714D-04	-0.1026171399835546D-04	-0.5238736444388139D-03	0.2208466556487970D-03	
	-0.7239407417220503D-05	-0.7239407417220503D-05	-0.6668360274555178D-05	-0.2214676450241688D-03	0.2208654516396614D-03	
	-0.4796674453980049D-05	-0.4796674453980049D-05	-0.4160057271882385D-05	-0.2105201352148548D-03	0.2211055724847628D-03	
	-0.3013242166119736D-05	-0.3013242166119736D-05	-0.2382918925783571D-05	-0.2209669086197506D-03		
	-0.1717453512066565D-05	-0.1717453512066565D-05	-0.1129039792225746D-05			
	-0.7548392722674767D-06	-0.7548392722674767D-06	-0.2250356111419754D-06			
	-0.5728980240853637D-07	-0.5728980240853637D-07	0.4091101156899645D-06			
5ème étape	0.5007855237700937D-05	0.5007855237700937D-05				
	0.4476633206519976D-05	0.4476633206519976D-05				
	0.3634782820847982D-05	0.3634782820847982D-05				
	0.3533476399708151D-05	0.3533476399708151D-05				
	0.2796677321156308D-05	0.2796677321156308D-05				

x_0	0.6000000000000000D+00
x_1	0.5646424733950354D+00
	0.5351138189028791D+00
	0.5099389509576200D+00
	0.4881239657567917D+00
	0.4689697743007438D+00
	0.4519675286396048D+00
	0.4367363465182327D+00
	0.4229844059610657D+00
	0.4104836611964926D+00
	0.3990528570986495D+00
	0.3885457913872747D+00
	0.3788430028799203D+00
	0.3698457590789268D+00
x_{14}	0.3614716246355413D+00

$x_0 = 0.6$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$F(x) = \sin x$

$(x_n) \in LOGF_2''$

	Théorème 2.1 (P=2)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	0.2728627483253780D-01	0.2728627483253780D-01	0.2728627483253780D-01	-0.6686506021914686D-01	-0.6686506021914686D-01	-0.4097503518023755D-02
	0.2288385349196362D-01	0.2288385349196362D-01	0.2288385349196362D-01	-0.5465082750220679D-01	-0.5465082750220679D-01	-0.2961040172759848D-02
	0.1957418519105071D-01	0.1957418519105071D-01	0.1957418519105071D-01	-0.4582991978443115D-01	-0.4582991978443114D-01	-0.2227183134109912D-02
	0.1700694967782640D-01	0.1700694967782640D-01	0.1700694967782640D-01	-0.3919764996781359D-01	-0.3919764996781358D-01	-0.1727916870720261D-02
	0.1496539926490849D-01	0.1496539926490849D-01	0.1496539926490849D-01	-0.3405322816500331D-01	-0.3405322816500331D-01	-0.1374143211728780D-02
	0.1330856301398186D-01	0.1330856301398186D-01	0.1330856301398186D-01	-0.2996253137150798D-01	-0.2996253137150798D-01	-0.1115135114514752D-02
	0.1194099959791007D-01	0.1194099959791007D-01	0.1194099959791007D-01	-0.2664303139696015D-01	-0.2664303139696014D-01	-0.9203440670466674D-03
	0.1079592209557363D-01	0.1079592209557363D-01	0.1079592209557363D-01	-0.2390339000680462D-01	-0.2390339000680462D-01	-0.7705152718857876D-03
	0.9825281930387112D-02	0.9825281930387112D-02	0.9825281930387112D-02	-0.2160969767496473D-01	-0.2160969767496473D-01	-0.6530446047301674D-03
	0.8993685965508221D-02	0.8993685965508221D-02	0.8993685965508221D-02	-0.1966561345752469D-01	-0.1966561345752469D-01	-0.5594138421694150D-03
	0.8274526999628840D-02	0.8274526999628840D-02	0.8274526999628840D-02	-0.1800017394834293D-01	-0.1800017394834292D-01	-0.4837066496950841D-03
	0.7647444484662313D-02	0.7647444484662313D-02	0.7647444484662313D-02	-0.1656003516218865D-01	-0.1656003516218866D-01	-0.4217153976213427D-03
	0.7096612611268585D-02	0.7096612611268585D-02	0.7096612611268585D-02			
2ème étape	-0.3668556447461953D-02	0.7249382836091506D-03	0.6608475773522978D-03	0.1133516853722584D-02	-0.5833957207248819D-02	-0.1984492613383193D-05
	-0.3225928443655102D-02	0.5495189597962402D-03	0.5001847338313272D-03	0.8446153449431937D-03	-0.4295724912583561D-02	-0.1170579393908135D-05
	-0.2863195265017442D-02	0.4290733490760710D-03	0.3900919207589177D-03	0.6495198447339205D-03	-0.3275246967666040D-02	-0.7320172312702217D-06
	-0.2562586556098869D-02	0.3430629627417522D-03	0.3115988315831031D-03	0.5123260484255473D-03	-0.2567177607790754D-02	-0.4795840038690291D-06
	-0.2310638970841765D-02	0.2796748092312641D-03	0.2538250055671412D-03	0.4126333213206821D-03	-0.2057906622579183D-02	-0.3263756367613428D-06
	-0.2097224491273244D-02	0.2317307306410933D-03	0.2101737786407553D-03	0.3381986484606091D-03	-0.1680683841128686D-02	-0.2292516743472164D-06
	-0.1914683052048643D-02	0.1946703201667101D-03	0.1764618911343725D-03	0.2813388478614526D-03	-0.1394328722612265D-02	-0.1653967682060364D-06
	-0.1757163213438271D-02	0.1654873530275381D-03	0.1499359740573827D-03	0.2370490205596105D-03	-0.1172385998777543D-02	-0.1220959575064755D-06
	-0.1620143662234733D-02	0.1421374455159606D-03	0.1287260404931273D-03	0.2019641372600894D-03	-0.9972701580049609D-03	-0.9193997574980826D-07
	-0.1500089944890268D-02	0.1231927524929842D-03	0.1115275118230197D-03			
	-0.1394207752598320D-02	0.1076327265719153D-03	0.9740885290337650D-04			
3ème étape	0.1481712799453000D-03	0.1188020039702722D-04	0.1050826064037688D-04	-0.1235633860520787D-05	0.1222799594212732D-03	-0.1239456133750107D-08
	0.8382829964614662D-04	0.8199579478975136D-05	0.7236202419677954D-05	-0.6144715294621786D-06	0.8934425445158971D-04	-0.6527959801924227D-09
	0.5080208384112704D-04	0.5880217617773359D-05	0.5179416012361387D-05	-0.3259631525119564D-06	0.6690232328759802D-04	-0.3788865005903062D-09
	0.3247922274131455D-04	0.4349002539510237D-05	0.3824440985113811D-05	-0.1813931280225649D-06	0.5118621557268157D-04	-0.2091475151076243D-09
	0.2172225409333789D-04	0.3299326574957656D-05	0.2897292220049013D-05	-0.1105778964840463D-06	0.3989929611254031D-04	-0.1477687287005810D-09
	0.1512812626923513D-04	0.2556990748909425D-05	0.2242662457404380D-05	-0.6744647023437020D-07	0.3162099202475056D-04	-0.4795362069819334D-10
	0.1094505362138337D-04	0.2018055437356929D-05	0.1768073870963589D-05			
	0.8216334863214949D-05	0.1617917008356718D-05	0.1416151770766108D-05			
	0.6394274369608149D-05	0.1315011677210700D-05	0.1150043994430594D-05			
4ème étape	-0.1807180489679621D-04	0.1390931723596098D-06	0.1161816516537410D-06	0.9849859564145629D-08	0.2004967223391690D-05	
	-0.1098092171773407D-04	0.8828313030471966D-07	0.7384233402385312D-07	-0.4846632870244375D-07	0.7521632590739610D-06	
	-0.6618888716100932D-05	0.5861112555174232D-07	0.4908642507388860D-07	0.1637785859375500D-06	0.1213291495245535D-05	
	-0.3847312848346375D-05	0.4034053591053600D-07	0.3382082089353023D-07	-0.2642114942539342D-07		
	-0.2037736216479242D-05	0.2863169286358446D-07	0.2402845837284978D-07			
	-0.8302400182893813D-06	0.2082843850705520D-07	0.1749220999616106D-07			
	-0.1068103117913282D-07	0.1552448570688188D-07	0.1305123294912285D-07			
5ème étape	0.4985280496038950D-05	0.1123387470261442D-08				
	0.4092491695312627D-05	0.5037242010305427D-09				
	0.3501527482649081D-05	0.4983061608348296D-09				
	0.3079172886362604D-05	0.4237372369089415D-10				
	0.2767088550389031D-05	0.5906768584346461D-09				

x_0	0.3000000000000000D+00
x_1	0.2955202066613396D+00
	0.2912375456092359D+00
	0.2871378763329026D+00
	0.2832084451503047D+00
	0.2794377145161061D+00
	0.2758152173834237D+00
	0.2723314323883183D+00
	0.2689776764166440D+00
	0.2657460117575325D+00
	0.2626291655549123D+00
	0.2596204596724367D+00
	0.2567137494157698D+00
	0.2539033698159353D+00
x_{16}	0.2511840883941411D+00

$x_0 = 0.3$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$F(x) = \sin x$

$(x_n) \in LOGF_2''$

	Théorème 2.1 (P=2)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	0.3552258891933309D-02	0.3552258891933309D-02	0.3552258891933309D-02	-0.7442472848569619D-02	-0.7442472848569614D-02	-0.1126516882343340D-03
	0.3396833067586715D-02	0.3396833067586715D-02	0.3396833067586715D-02	-0.7106779812602149D-02	-0.7106779812602151D-02	-0.1043678924762394D-03
	0.3252503633003043D-02	0.3252503633003043D-02	0.3252503633003043D-02	-0.6795756441821911D-02	-0.6795756441821912D-02	-0.9691639193860838D-04
	0.3118174171974228D-02	0.3118174171974228D-02	0.3118174171974228D-02	-0.6506925271877375D-02	-0.6506925271877374D-02	-0.9019230930963992D-04
	0.2992900675862336D-02	0.2992900675862336D-02	0.2992900675862338D-02	-0.6231209187144230D-02	-0.6231209187144218D-02	-0.8410652329916110D-04
	0.2875847200873153D-02	0.2875847200873153D-02	0.2875847200873152D-02	-0.5987443206817250D-02	-0.5987443206817251D-02	-0.7358293502364880D-04
	0.2766274785677004D-02	0.2766274785677004D-02	0.2766274785677005D-02	-0.5753218414827357D-02	-0.5753218414827357D-02	-0.7355628115778225D-04
	0.2663528010138296D-02	0.2663528010138296D-02	0.2663528010138296D-02	-0.5533967055126198D-02	-0.5533967055126196D-02	-0.6897034494986850D-04
	0.2567023706130621D-02	0.2567023706130621D-02	0.2567023706130621D-02	-0.5328376946370164D-02	-0.5328376946370158D-02	-0.6477651136964068D-04
	0.2476241431715229D-02	0.2476241431715229D-02	0.2476241431715229D-02	-0.5135280598595810D-02	-0.5135280598595815D-02	-0.6093257838845059D-04
	0.2390715397784419D-02	0.2390715397784419D-02	0.2390715397784418D-02	-0.4953636131514079D-02	-0.4953636131514073D-02	-0.5740177864841412D-04
	0.2310027597061082D-02	0.2310027597061082D-02	0.2310027597061082D-02	-0.4782511103589645D-02	-0.4782511103589643D-02	-0.5415196982249337D-04
	0.2233801933123288D-02	0.2233801933123288D-02	0.2233801933123289D-02			
2ème étape	-0.6452938903889285D-03	0.2708028783623661D-04	0.2444824482380870D-04	0.3581810088714757D-04	-0.1761660776756233D-03	-0.4293853818003501D-08
	-0.6188376466827350D-03	0.2516336662936012D-04	0.2271551825241273D-04	0.3319957251115784D-04	-0.1633136814142373D-03	-0.3781738616464454D-08
	-0.5941491187815638D-03	0.2343204668619058D-04	0.2115076101863029D-04	0.3084304183519797D-04	-0.1517411630419989D-03	-0.3282795591647535D-08
	-0.5710668479474330D-03	0.2186376579003201D-04	0.1973353005879940D-04	0.2871370399060917D-04	-0.1412906610896938D-03	-0.2919857391898890D-08
	-0.5494478780857806D-03	0.2043923545207560D-04	0.1844635204296978D-04	0.2678572144021177D-04	-0.1318240927344088D-03	-0.2569987631137057D-08
	-0.5291652285201071D-03	0.1914189161299939D-04	0.1727422445626559D-04	0.2503445139387092D-04	-0.1232259928351678D-03	-0.2278599484040811D-08
	-0.5101057624540484D-03	0.1795745111358790D-04	0.1620421295776372D-04	0.2343925068942313D-04	-0.1153962952756313D-03	-0.2057721252826854D-08
	-0.4921683851360813D-03	0.1687354838282089D-04	0.1522512155570868D-04	0.2193509706417148D-04	-0.1082465159009285D-03	-0.1740959278743103D-08
	-0.4752625124863775D-03	0.1587943767027300D-04	0.1432722239166816D-04	0.2065028069076725D-04	-0.1017082680130905D-03	-0.1725410035268415D-08
	-0.4593067633137320D-03	0.1496574865297725D-04	0.1350203409727183D-04			
	-0.4442278439366704D-03	0.1412428017306650D-04	0.1274213443073936D-04			
3ème étape	0.1928082629219957D-05	0.1350026991566543D-06	0.1172567756895657D-06	-0.4660374130888731D-05	-0.1981321431423810D-05	0.9672801068320757D-09
	0.1897181097587638D-05	0.1219476231346712D-06	0.1058891071868642D-06	0.3143526511315199D-05	0.5291416661885419D-05	-0.3034066892957002D-08
	0.1868306898139145D-05	0.1105639275984925D-06	0.9599200112860699D-07	-0.1957186621658406D-05	-0.1985563574358861D-06	-0.4117693107439062D-09
	0.1840432583770624D-05	0.1004307069784064D-06	0.8717029675839328D-07	-0.9384734750207677D-06	0.5539277390153672D-06	-0.1682141509332589D-08
	0.1813749720226438D-05	0.9151645267009209D-07	0.7942171176783693D-07	0.5394400181034269D-05	0.8660945200536393D-05	-0.1975323076676085D-08
	0.1787790896692962D-05	0.8358453283210999D-07	0.7252437718311072D-07	-0.1087008808010704D-03	-0.1458051253024294D-04	-0.1966387156622147D-08
	0.1762321492826374D-05	0.7647465086745999D-07	0.6633886795928112D-07			
	0.1737911723137827D-05	0.7029814030747654D-07	0.6098906676792223D-07			
	0.1712757175845799D-05	0.6439433318617327D-07	0.5582665758264109D-07			
4ème étape	0.1236985937483836D-05	0.7633994299976258D-08	0.7524101035403792D-08	-0.8561547980994304D-06	0.7310977537495451D-06	
	0.6608105503692172D-06	-0.8030059738406647D-08	-0.8392129755969800D-08	-0.1537911936798972D-05	0.1324354890746013D-06	
	0.9940003481588596D-06	0.5161402973422390D-08	0.5272667111312336D-08	-0.2544895124551243D-05	-0.6518676479317670D-06	
	0.3786394942626455D-06	-0.1020448887207300D-08	-0.1300087239026405D-08			
	-0.2388226322266589D-06	-0.4613588035119603D-08	-0.4535403287291644D-08			
	0.8821981135651808D-06	0.1598644100491353D-07	0.1542887992489877D-07			
	0.2974449272528999D-05	-0.1015932975320373D-06	-0.1284984713951408D-06			
5ème étape	0.9013607126646557D-06	0.7286939533349454D-09				
	0.6726360398959049D-06	0.1953675832379900D-10				
	0.5748919664203987D-05	-0.1149567613283468D-07				
	0.3222706283638042D-06	-0.8726049802006326D-09				
	[illegible]	-0.5361453679862819D-08				

x_0	0.1900000000000000D+00
x_1	0.1877471708887662D+00
	0.1855727576448669D+00
	0.1834723107581513D+00
	0.1814417264779874D+00
	0.1794772130128619D+00
	0.1775752606827866D+00
	0.1757326154896006D+00
	0.1739462556520650D+00
	0.1722133707205657D+00
	0.1705313429428443D+00
	0.1688977305995383D+00
	0.1673102530680816D+00
	0.1657667774070329D+00
x_{14}	0.1642653062812372D+00

$x_0 = 0.19$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$F(x) = \operatorname{tg} x - \frac{2}{3} x^3$

$(x_n) \in LOGF_2''$

	Théorème 2.1 (P=2)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	0.3393812834999658D-03	0.3393812834999658D-03	0.3393812834999658D-03	-0.4569351288900708D-03	-0.4569351288900673D-03	0.7394247936995360D-04
	0.3301810540784418D-03	0.3301810540784418D-03	0.3301810540784418D-03	-0.4516520876024125D-03	-0.4516520876024095D-03	0.6957000685149045D-04
	0.3213531857855510D-03	0.3213531857855510D-03	0.3213531857855510D-03	-0.4460536760892580D-03	-0.4460536760892553D-03	0.6555089849397054D-04
	0.3128804902230378D-03	0.3128804902230378D-03	0.3128804902230378D-03	-0.4402130883349012D-03	-0.4402130883349033D-03	0.6184929737039134D-04
	0.3047462990047988D-03	0.3047462990047988D-03	0.3047462990047988D-03	-0.4341915235636793D-03	-0.4341915235636768D-03	0.5843369148197348D-04
	0.2969345401169385D-03	0.2969345401169385D-03	0.2969345401169385D-03	-0.4280401634243353D-03	-0.4280401634243322D-03	0.5527630560317986D-04
	0.2894297851696361D-03	0.2894297851696361D-03	0.2894297851696361D-03	-0.4218018032953275D-03	-0.4218018032953267D-03	0.5235258901464825D-04
	0.2822172748940183D-03	0.2822172748940183D-03	0.2822172748940183D-03	-0.4155122015731977D-03	-0.4155122015731986D-03	0.4964078273827963D-04
	0.2752829285007890D-03	0.2752829285007890D-03	0.2752829285007890D-03	-0.4092012004863727D-03	-0.4092012004863709D-03	0.4712155217173509D-04
	0.2686133411718946D-03	0.2686133411718946D-03	0.2686133411718946D-03	-0.4028936589241159D-03	-0.4028936589241168D-03	0.4477767447322484D-04
	0.2621957729551253D-03	0.2621957729551253D-03	0.2621957729551253D-03	-0.3966102314657305D-03	-0.3966102314657311D-03	0.4259377148150675D-04
	0.2560181315497880D-03	0.2560181315497880D-03	0.2560181315497880D-03	-0.3903680206274228D-03	-0.3903680206274220D-03	0.4055608082405112D-04
	0.2500689508786163D-03	0.2500689508786163D-03	0.2500689508786163D-03			
2ème étape	-0.1059680054429142D-03	-0.3330026796080072D-04	-0.3334782216745923D-04	-0.4643854202119509D-03	-0.4644143057943328D-03	0.3139650148574562D-07
	-0.9974620215162005D-04	-0.2958538403655335D-04	-0.2963021904251576D-04	-0.4593487574898377D-03	-0.4593926289569597D-03	0.2826170086511477D-07
	-0.9423757576499732D-04	-0.2640574820756214D-04	-0.2644812302575789D-04	-0.4530654953242223D-03	-0.4531283303825306D-03	0.2568587729171997D-07
	-0.8932519023362917D-04	-0.2366667287985702D-04	-0.2370680860799064D-04	-0.4454657190823557D-03	-0.4455515157897088D-03	0.2308685434661449D-07
	-0.8491601853102210D-04	-0.2129329904223021D-04	-0.2133138644986507D-04	-0.4365162492494265D-03	-0.4366288125520538D-03	0.2116127329250321D-07
	-0.8093522240028896D-04	-0.1922582057750685D-04	-0.1926202582443774D-04	-0.4262235626487950D-03	-0.4263662913928224D-03	0.1915111132926930D-07
	-0.7732196831326154D-04	-0.1741599264574489D-04	-0.1745046165994762D-04	-0.4146360728601915D-03	-0.4148117760845306D-03	0.1748315477308099D-07
	-0.7402634982990945D-04	-0.1582456493438271D-04	-0.1585742681707656D-04	-0.4018425666736267D-03	-0.4020533140797445D-03	0.1599690950220350D-07
	-0.7100706701772615D-04	-0.1441934789960910D-04	-0.1445071760763751D-04	-0.3879687239317966D-03	-0.3882157494822479D-03	0.1460716178885416D-07
	-0.6822967172897470D-04	-0.1317375207728955D-04	-0.1320373256394753D-04			
	-0.6566521988006238D-04	-0.1206566764531176D-04	-0.1209435158863060D-04			
3ème étape	-0.1888110153547427D-04	0.1388046493789630D-05	0.1296873951994388D-05	-0.4740032461537344D-03	-0.4739624526468929D-03	0.2495112405655280D-07
	-0.1788631683351105D-04	0.1334937271847412D-05	0.1258060701528293D-05	-0.4725861111902641D-03	-0.4720394481808819D-03	0.8773928446422876D-07
	-0.1692883207376021D-04	0.1274263466768392D-05	0.1208970215596927D-05	-0.4702653421031206D-03	-0.4687258055885264D-03	0.2121533173693758D-07
	-0.1601083945616081D-04	0.1209618407215523D-05	0.1153788525374128D-05	-0.4665082928757781D-03	-0.4633255160247850D-03	0.2997631739566125D-07
	-0.1513138127808550D-04	0.1144291066309442D-05	0.1096249670591785D-05	-0.4608670780264008D-03	-0.4552017897469181D-03	0.2045161735533283D-07
	-0.1429228014429416D-04	0.1079436994215903D-05	0.1037852575631976D-05	-0.4526440821772291D-03	-0.4435746748879268D-03	0.1658869152671397D-07
	-0.1349234657340396D-04	0.1016557661043919D-05	0.9803610943669101D-06			
	-0.1273144506076079D-04	0.9562331266725301D-06	0.9245605881875903D-06			
	-0.1200903257586232D-04	0.8988050118403798D-06	0.8709536024063241D-06			
4ème étape	0.1978766678530870D-04	0.1882450431167991D-05	0.1496427360004482D-05	-0.4760604543748779D-03	-0.4762192853146804D-03	
	0.1595078086015361D-04	0.2543090679294341D-05	0.1780756368723926D-05	-0.4746701770144630D-03	-0.4757144184637322D-03	
	0.1494508567231420D-04	0.9123329717309714D-05	0.2885640540279048D-05	-0.4759530291527527D-03	-0.4763193424932297D-03	
	0.1192120758230534D-04	-0.1046970010231354D-04	0.6129958431088180D-05	-0.4746970066036830D-03		
	0.1106885283564448D-04	-0.1581721180596580D-05	-0.3728610462122757D-05			
	0.9601377984238440D-05	-0.8958116055437498D-06	-0.1458847252148510D-05			
	0.3431627722109234D-05	-0.5840180692739597D-06	-0.8287639825389555D-05			
5ème étape	0.1404002735080317D-04	0.1639068777187151D-05				
	0.1705125875778708D-04	0.3056165657895404D-05				
	0.1025709077171250D-04	-0.2947734340234893D-05				
	0.1390807906652721D-04	-0.6701370911067889D-06				
	0.1461713148519381D-05	-0.1945444528336217D-06				

x_0	0.7000000000000000D+00
x_1	0.7270000000000000D+00
	0.7473464170000000D+00
	0.7634742636247654D+00
	0.7767065596998487D+00
	0.7878399618088980D+00
	0.7973896843717532D+00
	0.8057070282817823D+00
	0.8130415411121622D+00
	0.8195763871267344D+00
	0.8254496592758801D+00
	0.8307678278905593D+00
	0.8356145574351959D+00
	0.8400566751765888D+00
x_{14}	0.8441483240646411D+00

$x_0 = 0.7$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$F(x) = x - (x-1)^3$

$\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$

$(x_n - 1) \in LOGF_2''$

	Théorème 2.1 (P=2)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	-0.2530491946970527D-01	-0.2530491946970527D-01	-0.2530491946970527D-01	0.7849382211557040D-01	0.7849382211557040D-01	0.9291327725386619D-02
	-0.1929687903276901D-01	-0.1929687903276901D-01	-0.1929687903276901D-01	0.5457154960225477D-01	0.5457154960225477D-01	0.5325930512238919D-02
	-0.1541914065457310D-01	-0.1541914065457310D-01	-0.1541914065457310D-01	0.4111545485631601D-01	0.4111545485631601D-01	0.3425724515723271D-02
	-0.1272471875353296D-01	-0.1272471875353296D-01	-0.1272471875353296D-01	0.3256602926460359D-01	0.3256602926460359D-01	0.2372197252512553D-02
	-0.1075394897759576D-01	-0.1075394897759576D-01	-0.1075394897759576D-01	0.2669749699794349D-01	0.2669749699794348D-01	0.1729866347583986D-02
	-0.9256609074288576D-02	-0.9256609074288576D-02	-0.9256609074288576D-02	0.2244599307880719D-01	0.2244599307880720D-01	0.1310924976743347D-02
	-0.8084984752957732D-02	-0.8084984752957732D-02	-0.8084984752957732D-02	0.1924049054334926D-01	0.1924049054334926D-01	0.1023507012477932D-02
	-0.7146400949584141D-02	-0.7146400949584141D-02	-0.7146400949584141D-02	0.1674794944210501D-01	0.1674794944210500D-01	0.8183825143122433D-03
	-0.6379876706640283D-02	-0.6379876706640283D-02	-0.6379876706640283D-02	0.1476156150863034D-01	0.1476156150863034D-01	0.6672693651165911D-03
	-0.5743714556231842D-02	-0.5743714556231842D-02	-0.5743714556231842D-02	0.1314643343257392D-01	0.1314643343257393D-01	0.5530014400367460D-03
	-0.5208484301944978D-02	-0.5208484301944978D-02	-0.5208484301944978D-02	0.1181101971750589D-01	0.1181101971750589D-01	0.4646837045386449D-03
	-0.4752853067576145D-02	-0.4752853067576145D-02	-0.4752853067576145D-02	0.1069112669538985D-01	0.1069112669538984D-01	0.3951401869125191D-03
	-0.4361001794760722D-02	-0.4361001794760722D-02	-0.4361001794760722D-02			
2ème étape	0.2406188825175236D-02	-0.1164144322660296D-02	-0.1069722869261924D-02	-0.1944706368159911D-02	0.1312727163641386D-01	0.1013011902159630D-04
	0.2123390426937059D-02	-0.7680755556242321D-03	-0.7030673492749817D-03	-0.1252687748423302D-02	0.7955841235429942D-02	0.4317918947908863D-05
	0.1866331787715597D-02	-0.5420605407619904D-03	-0.4948892954496627D-03	-0.8645426872270211D-03	0.5263314729407638D-02	0.2125689436911597D-05
	0.1648182168364172D-02	-0.4011312703060189D-03	-0.3655317541903797D-03	-0.6270828194881202D-03	0.3702120736569610D-02	0.1158378913980072D-05
	0.1465707447795118D-02	-0.3075601874609511D-03	-0.2798619514911125D-03	-0.4723411306985098D-03	0.2724714556557174D-02	0.6808800432221880D-06
	0.1312888408041744D-02	-0.2424290094109490D-03	-0.2203465827446037D-03	-0.3665091306749818D-03	0.2076537934434083D-02	0.4243845783608643D-06
	0.1184082302424189D-02	-0.1953862279785416D-03	-0.1774261991795800D-03	-0.2912995837479180D-03	0.1626985277926909D-02	0.2771930591258936D-06
	0.1074640217174502D-02	-0.1603795741196866D-03	-0.1455271698058882D-03	-0.2361582496645218D-03	0.1303788278231134D-02	0.1881162131971929D-06
	0.9808773058211494D-03	-0.1336801795679060D-03	-0.1212231764891950D-03	-0.1946690719379522D-03	0.1064490650871338D-02	0.1317997710371596D-06
	0.8999024907841121D-03	-0.1128907413875570D-03	-0.1023154554064443D-03			
	0.8294453648786892D-03	-0.9641453767178184D-04	-0.8734175928488692D-04			
3ème étape	-0.2647719962917160D-02	-0.3216337443277112D-04	-0.2876652787919170D-04	0.7449686655682051D-05	-0.2464356957435988D-03	0.6060933026080448D-08
	-0.5556714847483907D-03	-0.1860928091220848D-04	-0.1657266905121664D-04	0.2873332680754280D-05	-0.1743567433593120D-03	0.2672773256840941D-08
	-0.2255674624538905D-03	-0.1171971077168076D-04	-0.1040124014427659D-04	0.1334284764914311D-05	-0.1235554590192532D-03	0.1296555278938738D-08
	-0.1130177150039513D-03	-0.7840888691263326D-05	-0.6939284909392513D-05	0.7226540811829715D-06	-0.8923143390995793D-04	0.6773584453750869D-09
	-0.6332482435591309D-04	-0.5490939767708886D-05	-0.4848262176682604D-05	0.4467171608860988D-06	-0.6588380689171022D-04	0.3858126069056916D-09
	-0.3813464437219883D-04	-0.3985741327237956D-05	-0.3512361258770514D-05	0.3049793766544441D-06	-0.4969662802186325D-04	0.2130294792564852D-09
	-0.2418831430541039D-04	-0.2978337428567886D-05	-0.2620235955330414D-05			
	-0.1597545700112325D-04	-0.2279626126154501D-05	-0.2002657273346723D-05			
	-0.1091035849520709D-04	-0.1780466187726714D-05	-0.1562190825796662D-05			
4ème étape	0.3704903980334155D-04	-0.6039630586338789D-06	-0.5069707342974681D-06	0.1362424122464991D-06	-0.4401819389054766D-04	
	0.3176976311331978D-04	-0.3130095770454778D-06	-0.2629033951623934D-06	0.1223568263126074D-06	-0.1372111747261645D-04	
	0.2082753959614615D-04	-0.1786614396791621D-06	-0.1502412936056239D-06	0.6615824021212122D-07	-0.5552669885630721D-05	
	0.1344834874578192D-04	-0.1093374628074626D-06	-0.9205838099549807D-07			
	0.8788593336519048D-05	-0.7057071089587759D-07	-0.5948399505112997D-07			
	0.5810365964274916D-05	-0.4750307379202366D-07	-0.4007665994833383D-07			
	0.3858866291234740D-05	-0.3311079576999703D-07	-0.2795768642505428D-07			
5ème étape	0.4603214587008391D-04	-0.8022458476502313D-08				
	-0.1107906297025010D-04	-0.3640373633291040D-08				
	-0.4351320699478214D-05	-0.1866402388867559D-08				
	-0.2833880698955866D-05	-0.9626500362906049D-09				
	-0.2164793317790503D-05	-0.7375973587334453D-09				

x_0	0.4000000000000000D+00
x_1	0.3513600000000000D+00
	0.3160157945596816D+00
	0.2891841067082823D+00
	0.2680340132444775D+00
	0.2508529598885148D+00
	0.2365574875427529D+00
	0.2244310171285488D+00
	0.2139806820148398D+00
	0.2048559128569444D+00
	0.1968001109586617D+00
	0.1896207973785833D+00
	0.1831705063740233D+00
	0.1773341653596996D+00
x_{14}	0.1720205249310012D+00

$x_0 = 0.4$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$F(x) = x - x^3 + \frac{3}{2}x^5$

$(x_n) \in LOGF_2'''$

	Théorème 2.1 (P=2)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
	-0.3653907851695860D-01	-0.3653907851695860D-01	-0.3653907851695860D-01	0.9596445125673069D-01	0.9596445125673069D-01	-0.1003837256222074D-01
	-0.1820190701599270D-01	-0.1820190701599270D-01	-0.1820190701599270D-01	0.5660908972640979D-01	0.5660908972640979D-01	-0.3239707667512203D-02
	-0.1046384444843360D-01	-0.1046384444843360D-01	-0.1046384444843360D-01	0.3554299179099391D-01	0.3554299179099391D-01	-0.1262477200548098D-02
	-0.6627522853824772D-02	-0.6627522853824772D-02	-0.6627522853824772D-02	0.2367051602461291D-01	0.2367051602461291D-01	-0.5679150781372340D-03
	-0.4497285611053991D-02	-0.4497285611053991D-02	-0.4497285611053991D-02	0.1656435517268845D-01	0.1656435517268845D-01	-0.2849574543055031D-03
	-0.3212177853698254D-02	-0.3212177853698254D-02	-0.3212177853698254D-02	0.1207075834160788D-01	0.1207075834160788D-01	-0.1555906146370277D-03
1ère étape	-0.2386614247893785D-02	-0.2386614247893785D-02	-0.2386614247893785D-02	0.9092354795135206D-02	0.9092354795135205D-02	-0.9082043928798648D-04
	-0.1829542554591401D-02	-0.1829542554591401D-02	-0.1829542554591401D-02	0.7038450918440736D-02	0.7038450918440736D-02	-0.5594385998497324D-04
	-0.1438523317452475D-02	-0.1438523317452475D-02	-0.1438523317452475D-02	0.5574012994476792D-02	0.5574012994476792D-02	-0.3601605506662169D-04
	-0.1155047480598233D-02	-0.1155047480598233D-02	-0.1155047480598233D-02	0.4499909623035772D-02	0.4499909623035772D-02	-0.2405605987143219D-04
	-0.9439259630600240D-03	-0.9439259630600240D-03	-0.9439259630600240D-03	0.3692826994770573D-02	0.3692826994770573D-02	-0.1657537149390601D-04
	-0.7830657878399032D-03	-0.7830657878399032D-03	-0.7830657878399032D-03	0.3073618332120169D-02	0.3073618332120170D-02	-0.1172896384788801D-04
	-0.6580834855172966D-03	-0.6580834855172966D-03	-0.6580834855172966D-03			
	0.8752779352088539D-02	0.5905926061490227D-03	0.5404093229807824D-03	0.3926428939752914D-02	-0.6010652949022684D-02	
	0.4817464518307946D-02	0.2058653795449825D-03	0.1878045020810299D-03	0.1557437114621762D-02	-0.3224190338573959D-02	
	0.2980558190857470D-02	0.8639072864068430D-04	0.7858471828206636D-04	0.7098035374459730D-03	-0.1757777111589367D-02	
	0.1994937555285421D-02	0.4150072375840329D-04	0.3766226866382178D-04	0.3605692263914717D-03	-0.1003072112445395D-02	
	0.1412594354762775D-02	0.2204354510123761D-04	0.1996745072991542D-04	0.1992680781791836D-03	-0.6009286695252143D-03	
2ème étape	0.1043490504796978D-02	0.1264491000506703D-04	0.1143698627529191D-04	0.1177003286295997D-03	-0.3764649358887508D-03	
	0.7966955716603320D-03	0.7706241237171627D-05	0.6961734543081369D-05	0.7334584084994924D-04	-0.2453088[illegible]62000140D-03	
	0.6245857711096106D-03	0.4931259622275004D-05	0.4450470366174377D-05	0.4775783311987030D-04	-0.1654081861866109D-03	
	0.5004046668725809D-03	0.3284679743421797D-05	0.2962009352822122D-05	0.3225589578916291D-04	-0.1148945313517221D-03	
	0.4082514359696621D-03	0.2262525932661209D-05	0.2038864632145723D-05			
	0.3382318723977007D-03	0.1603424919863322D-05	0.1444072926957161D-05			
	-0.1033958213616345D-02	-0.5985968454131310D-05	-0.5590727794633513D-05	0.1629988098972871D-04	-0.4044766257776134D-03	
	-0.6306792262499497D-03	-0.1511523818067767D-05	-0.1400430785264666D-05	0.4756677322956921D-05	-0.1207800971510095D-03	
	-0.4213078094862571D-03	-0.4787736158338545D-06	-0.4401869597917339D-06	0.1716026068161428D-05	-0.4639855759779453D-04	
	-0.2984828592168520D-03	-0.1792397880658594D-06	-0.1636313581382947D-06	0.7229513811320736D-06	-0.2064717556132450D-04	
3ème étape	-0.2206798276821136D-03	-0.7614666298941230D-07	-0.6907498581837077D-07	0.3415038178733737D-06	-0.1015303409497142D-04	
	-0.1686115257281945D-03	-0.3569312935265918D-07	-0.3219599953221805D-07	0.1759449112057846D-06	-0.5379246292831326D-05	
	-0.1322611939999308D-03	-0.1809626312714614D-07	-0.1624191176603331D-07			
	-0.1060092403043213D-03	-0.9780323218759857D-08	-0.8739429938837689D-08			
	-0.8651359949466658D-04	-0.5573753704627500D-08	-0.4961088959587779D-08			
	0.2644238652022758D-04	0.3785072393998652D-07	0.3692134605058546D-07	0.2603243212258564D-07	0.2507741398314099D-05	
	0.2715299099488962D-04	0.8067714167452941D-08	0.7994400178871381D-08	0.3907244637992098D-08	0.7474907307542820D-06	
	0.2188757989890927D-04	0.2159275459386074D-08	0.2156079530864616D-08	0.8779571978752740D-10	0.2761537098253812D-06	
4ème étape	0.1692430440843061D-04	0.6780687533145519D-09	0.6859204487159477D-09	0.3891098681935287D-08		
	0.1314660853503455D-04	0.2436383268235804D-09	0.2480830359394733D-09			
	0.1037487457484445D-04	0.9709766515547472D-10	0.9935404749014111D-10			
	0.8331680732393470D-05	0.4212796311716759D-10	0.4326270405138170D-10			
	0.2627640051658593D-04	-0.1962206630811002D-09				
	-0.1003072920500790D-03	-0.4016376865396063D-10				
5ème étape	-0.5265695695954050D-05	-0.1074788463456089D-10				
	-0.1453458397375344D-05	-0.3515487573937985D-11				
	-0.5276062326264684D-06	-0.1221159932366699D-11				

x_0	0.8000000000000000D+00
x_1	0.7282787575661894D+00
	0.6724151767960520D+00
	0.6274593600929255D+00
	0.5903319051118316D+00
	0.5590265772880240D+00
	0.5321810817758437D+00
	0.5088368950492203D+00
	0.4882988529010283D+00
	0.4700495825741049D+00
	0.4536953777600718D+00
	0.4389308163957804D+00
	0.4255149502717113D+00
	0.4132548666005545D+00
x_{100}	0.4019940789738600D+00

$x_0 = 0.8$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$F(x) = \sin x + \frac{x^5}{30}$

$(x_n) \in LOGF_2'''$

	Théorème 2.1 (P=2)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	-0.2970287388975494D-01	-0.2970287388975494D-01	-0.2970287388975494D-01	0.9877105166114642D-01	0.9877105166114642D-01	-0.4008088779574672D-02
	-0.1830187998682724D-01	-0.1830187998682724D-01	-0.1830187998682724D-01	0.6454902931697466D-01	0.6454902931697466D-01	-0.1731698126066862D-02
	-0.1217449436452249D-01	-0.1217449436452249D-01	-0.1217449436452249D-01	0.4448174955386719D-01	0.4448174955386719D-01	-0.8432455808445519D-03
	-0.8566290365859738D-02	-0.8566290365859738D-02	-0.8566290365859738D-02	0.3201449844534095D-01	0.3201449844534095D-01	-0.4501326036195992D-03
	-0.6290891315222208D-02	-0.6290891315222208D-02	-0.6290891315222208D-02	0.2387237780119415D-01	0.2387237780119415D-01	-0.2582374919389385D-03
	-0.4777779941950865D-02	-0.4777779941950865D-02	-0.4777779941950865D-02	0.1832638887605328D-01	0.1832638887605328D-01	-0.1569461783500338D-03
	-0.3728167982571332D-02	-0.3728167982571332D-02	-0.3728167982571332D-02	0.1441276235952069D-01	0.1441276235952069D-01	-0.9998191415292695D-04
	-0.2974606076224960D-02	-0.2974606076224960D-02	-0.2974606076224960D-02	0.1156727987419901D-01	0.1156727987419901D-01	-0.6622888614016747D-04
	-0.2417943117890456D-02	-0.2417943117890456D-02	-0.2417943117890456D-02	0.9445091802526246D-02	0.9445091802526246D-02	-0.4533613380711317D-04
	-0.1996734669662940D-02	-0.1996734669662940D-02	-0.1996734669662940D-02	0.7827359461704789D-02	0.7827359461704792D-02	-0.3191584338939870D-04
	-0.1671417681903371D-02	-0.1671417681903371D-02	-0.1671417681903371D-02	0.6570584568189844D-02	0.6570584568189842D-02	-0.2301723188472581D-04
	-0.1415673534681199D-02	-0.1415673534681199D-02	-0.1415673534681199D-02	0.5577933303848610D-02	0.5577933303836100D-02	-0.1695216697523624D-04
	-0.1211494808969788D-02	-0.1211494808969788D-02	-0.1211494808969788D-02			
2ème étape	0.8276618891208886D-02	0.2673424383300280D-03	0.2436007096540343D-03	0.2130777366902684D-02	-0.5034897080153693D-02	
	0.5418148451098477D-02	0.1234433351329949D-03	0.1121942706938726D-03	0.1047933390172488D-02	-0.2824409854880109D-02	
	0.3774903929089140D-02	0.6365399416891144D-04	0.5773639163379316D-04	0.5647745132086436D-03	-0.1664863396364440D-02	
	0.2754310182256363D-02	0.3568840097362418D-04	0.3231867264588401D-04	0.3270199618317157D-03	-0.1028173270941334D-02	
	0.2082512234313532D-02	0.2135884431583196D-04	0.1931719328155623D-04	0.2005329142816453D-03	-0.6617301317788271D-03	
	0.1619814862149014D-02	0.1346804139153693D-04	0.1216786031248716D-04	0.1288551211120365D-03	-0.4414618031803260D-03	
	0.1289341561970639D-02	0.8862538044839237D-05	0.8000006919504675D-05	0.8607017563458512D-04	-0.3058311393750349D-03	
	0.1046163045622172D-02	0.6042570016807507D-05	0.5450514059259545D-05	0.5939798775453898D-04	-0.2143488130598543D-03	
	0.8627048577072136D-03	0.4245198315073991D-05	0.3826882936249928D-05	0.4214729894554637D-04	-0.1555646548425922D-03	
	0.7213426709057256D-03	0.3059889254064262D-05	0.2756909163231369D-05			
	0.6104192756535676D-03	0.2254978032779527D-05	0.2030763690731082D-05			
3ème étape	-0.1144102750681886D-02	-0.1594937823724903D-05	-0.1470805861317324D-05	0.5424184561120859D-05	-0.1428232090027329D-03	
	-0.7973541864209219D-03	-0.5687155637154075D-06	-0.5206553699775589D-06	0.2187075784532931D-05	-0.6109444044662409D-04	
	-0.5923062730284365D-03	-0.2327986643128373D-06	-0.2117297250866113D-06	0.1000137389984649D-05	-0.2920901352777042D-04	
	-0.4406356368744034D-03	-0.1059898552941214D-06	-0.9583508384336549D-07	0.5026931848576486D-06	-0.1514496732983149D-04	
	-0.3429529709694696D-03	-0.5249363234071800D-07	-0.4721911126220172D-07	0.2717622050008607D-06	-0.8364838874711697D-05	
	-0.2731116650226810D-03	-0.2783171248461213D-07	-0.2492083114830971D-07	0.1557683732742603D-06	-0.4862688678443201D-05	
	-0.2216770128312727D-03	-0.1560935462503000D-07	-0.1392021764688278D-07			
	-0.1828493226409323D-03	-0.9176997232820850D-08	-0.8154485713353258D-08			
	-0.1529165210389324D-03	-0.5615864302775237D-08	-0.4974120373839610D-08			
4ème étape	0.5722157139134641D-04	0.7524646831955933D-08	0.7527027722543550D-08	0.1481051868939312D-08	0.7648294334369072D-06	
	0.4435344671810118D-04	0.2259624792980342D-08	0.2282289577292696D-08	-0.1451900005781905D-08	0.2607083383371391D-06	
	0.3428779362443836D-04	0.7815610562291590D-09	0.7951102153553203D-09	-0.8557329355179787D-10	0.1017773208318993D-06	
	0.2689305634182103D-04	0.3020889447292367D-09	0.3089877667131487D-09	-0.1453809615477838D-08		
	0.2146978676901830D-04	0.1280174988639809D-09	0.1314585473925842D-09			
	0.1743415319376068D-04	0.5820213790951516D-10	0.5995063484982191D-10			
	0.1437562406658277D-04	0.2944820758743862D-10	0.2935621664661086D-10			
5ème étape	-0.2051194528005555D-04	-0.3717109155417811D-10				
	-0.4803751236647514D-05	-0.1164239299756504D-10				
	-0.1638092913411799D-05	-0.3357028723390561D-11				
	-0.6510313324480009D-06	-0.2265843745259027D-11				
	-0.2823034010627039D-06	0.2487017421507102D-12				

x_0	0.5000000000000000D+00
x_1	0.4640108231771238D+00
⋮	0.4345682106289998D+00
	0.4099663427414438D+00
	0.3890412000848652D+00
	0.3709765707810788D+00
	0.3551845266834909D+00
	0.3412310096614131D+00
	0.3287884330240181D+00
	0.3176047022086769D+00
	0.3074824468252457D+00
	0.2982647634221882D+00
	0.2898252120383001D+00
	0.2820606566229235D+00
x_{10}	0.2748860476396870D+00

$X_0 = 0.5$

$X_{n+1} = F(X_n)$

$F(X) = tg\,X - \frac{2}{3}X^3 + \frac{X^5}{30}$

$(X_n) \in LOGE_2'''$

	Théorème 2.1 (P=2)	Théorème 3.1	Théorème 3.2	Théorème 3.3	Théorème 3.4	Théorème 4.1
1ère étape	-0.2156390487150301D-01	-0.2156390487150301D-01	-0.2156390487150301D-01	0.7414671258127078D-01	0.7414671258127078D-01	-0.2421781380948251D-02
	-0.1433582064980622D-01	-0.1433582064980622D-01	-0.1433582064980622D-01	0.5187475404283739D-01	0.5187475404283738D-01	-0.1093705711277497D-02
	-0.1007940135829728D-01	-0.1007940135829728D-01	-0.1007940135829728D-01	0.3765882894071554D-01	0.3765882894071554D-01	-0.5317552984947184D-03
	-0.7396325561674749D-02	-0.7396325561674749D-02	-0.7396325561674749D-02	0.2822028024239042D-01	0.2822028024239042D-01	-0.2730044008617165D-03
	-0.5613167364554648D-02	-0.5613167364554648D-02	-0.5613167364554648D-02	0.2172472168550351D-01	0.2172472168550351D-01	-0.1455895545430143D-03
	-0.4377036044043470D-02	-0.4377036044043470D-02	-0.4377036044043470D-02	0.1711103715049260D-01	0.1711103715049260D-01	-0.7942140513625787D-04
	-0.3490145458491220D-02	-0.3490145458491220D-02	-0.3490145458491220D-02	0.1374260599592229D-01	0.1374260599592229D-01	-0.4359516760851873D-04
	-0.2835405234883987D-02	-0.2835405234883987D-02	-0.2835405234883987D-02	0.1122378654556101D-01	0.1122378654556101D-01	-0.2356687879498700D-04
	-0.2340280169492234D-02	-0.2340280169492234D-02	-0.2340280169492234D-02	0.9300581767160864D-02	0.9300581767160866D-02	-0.1210778216161468D-04
	-0.1958086842859680D-02	-0.1958086842859680D-02	-0.1958086842859680D-02	0.7805069351278018D-02	0.7805069351278017D-02	-0.5455604032142630D-05
	-0.1657784952971519D-02	-0.1657784952971519D-02	-0.1657784952971519D-02	0.6623268054309905D-02	0.6623268054309905D-02	-0.1574351515228750D-05
	-0.1418146995144236D-02	-0.1418146995144236D-02	-0.1418146995144236D-02	0.5675962167641374D-02	0.5675962167641373D-02	0.6748374128783506D-06
	-0.1224296039203819D-02	-0.1224296039203819D-02	-0.1224296039203819D-02			
2ème étape	0.6450150977803802D-02	0.1807508355569464D-03	0.1584312199398571D-03	0.2059744341670509D-02	-0.5347084704765863D-02	
	0.4479761461344740D-02	0.9438099367832835D-04	0.8266043292600167D-04	0.1114474178809685D-02	-0.3243387710173548D-02	
	0.3260352301769770D-02	0.5333618658834979D-04	0.4667593539810321D-04	0.6458247433046539D-03	-0.2036498519437659D-02	
	0.2460130713693589D-02	0.3209016320565697D-04	0.2806327254094131D-04	0.3957380792218957D-03	-0.1323519151321072D-02	
	0.1910379270482350D-02	0.2031300019803160D-04	0.1775061540847645D-04	0.2539129555225347D-03	-0.8879998497963190D-03	
	0.1518556937788272D-02	0.1340094122269083D-04	0.1170614151630303D-04	0.1692975808624272D-03	-0.6131118315087610D-03	
	0.1230744092610304D-02	0.9155389531512554D-05	0.7993973020191687D-05	0.1166085365186487D-03	-0.4345552279575600D-03	
	0.1013937532385516D-02	0.6442101361513307D-05	0.5622736887578460D-05	0.8258164145763462D-04	-0.3146211141967172D-03	
	0.8470924945221605D-03	0.4649051264003463D-05	0.4056404279779987D-05	0.5990620271190215D-04	-0.2325845258846240D-03	
	0.7163177327375869D-03	0.3429441687846382D-05	0.2991407076423868D-05			
	0.6121686836776787D-03	0.2378771864017383D-05	0.2248824763226173D-05			
3ème étape	-0.9520988807111118D-03	-0.1225037554041367D-05	-0.1099048223467434D-05	0.6710691368446550D-05	-0.2345094950762977D-03	
	-0.6912976362499877D-03	-0.5017364855932658D-06	-0.4465774760989363D-06	0.3007826390983892D-05	-0.1091149406087824D-03	
	-0.5212350538825579D-03	-0.2283354430394975D-06	-0.2018500529735756D-06	0.1484108427768368D-05	-0.5558927227581074D-04	
	-0.4046950742473439D-03	-0.1129976334739240D-06	-0.9930173567491172D-07	0.7896755507292201D-06	-0.3030614075284817D-04	
	-0.3217109566471873D-03	-0.5985688168066453D-07	-0.5233200263410077D-07	0.4464904432238953D-06	-0.1743527297622107D-04	
	-0.2607708998835202D-03	-0.3354139587263367D-07	-0.2919316438513148D-07	0.2649529563562771D-06	-0.1048530667078997D-04	
	-0.2148644636776371D-03	-0.1970372682020604D-07	-0.1708176684077550D-07			
	-0.1795322325746539D-03	-0.1204895517163742D-07	-0.1040921973518556D-07			
	-0.1518338914599431D-03	-0.7622725483908433D-08	-0.6568934035941953D-08			
4ème étape	0.4645646324212181D-04	0.5459674686536990D-08	0.5283389758753985D-08	0.3621198324229398D-08	0.1824297716578007D-05	
	0.3767661874692409D-04	0.1365780218062149D-08	0.1181813966738589D-08	0.1044014550752697D-08	0.6728921859236412D-06	
	0.3032019850070106D-04	0.7106716467829524D-09	0.6952841710231221D-09	-0.4811315752844433D-08	0.2699399592109496D-06	
	0.2455748282023618D-04	0.2957562699946284D-09	0.2899790859990947D-09	0.1070665914300469D-08		
	0.2010972577348715D-04	0.1324934610627909D-09	0.1298751111614283D-09			
	0.1666554567087725D-04	0.6410774797324590-10	0.6280715566020957D-10			
	0.1397190633326694D-04	0.3074593603056839D-10	0.3004126136247858D-10			
5ème étape	-0.2602110264935128D-04	-0.3675170860673775D-10				
	-0.6996228368341650D-05	-0.1301677265931715D-10				
	-0.2782602366158034D-05	-0.5029773299850359D-11				
	-0.1299043350992200D-05	0.9704073372007412D-12				
	-0.6706024308156245D-06	-0.8697184639894248D-11				

3. Conclusion

L'algorithme de combinaison (Algorithme 4) est tout à fait efficace numériquement, mais plus vite instable.

Les résultats donnés par l'ε-algorithme modifié et le Δ^2 d'Aitken modifié itéré sont pratiquement identiques ; cela n'a rien d'étonnant puisqu'on a démontré au chapitre 2 que les parties principales des suites transformées par ces deux algorithmes sont très semblables.

De plus, ces résultats sont meilleurs que ceux du θ_2 itéré, lesquels sont meilleurs que ceux du θ-algorithme.

La propriété d'encadrement énoncée pour $LOGF_1'$, à la page 38, se vérifie numériquement.

CHAPITRE V

APPLICATION A DIVERS PROBLÉMES D'ANALYSE NUMÉRIQUE.

CHAPITRE V

APPLICATION A DIVERS PROBLÉMES D'ANALYSE NUMÉRIQUE.

0. Introduction

Dans divers problèmes d'Analyse Numérique, la solution S est approchée par les termes d'une suite (S_n).

Dans certains cas, on peut déterminer le développement asymptotique de l'erreur $e_n = S_n - S$.

Pour les suites (S_n) dont l'erreur a un développement asymptotique du type $LOGF_p$ (chap. 1. paragraphe 2), il suffit d'appliquer les algorithmes appropriés des chapitres 3 et 4.

Par exemple, pour la série $S_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i^2$, le développement asymptotique de (e_n) est du type $LOGF_1''$.

D'autres exemples sont développés dans ce chapitre. Nous proposons aussi des algorithmes pour des suites dont le développement asymptotique de l'erreur n'est pas du type $LOGF_p$. Ces suites apparaissent dans de sommations, intégrations approchées ou résolutions d'équations différentielles [24, 17].

1. Etude des suites du type :

$$x_n = \frac{\beta_1}{n^{1/p}} + \frac{\beta_2}{n^{2/p}} + \frac{\beta_3}{n^{3/p}} + \ldots, p \in \mathbb{R}_+ - \{0,1\}$$

Théorème 5.1 : *On peut accélérer la convergence des suites (S_n) telles que*

$$S_n - S = \frac{\beta_1}{n^{1/p}} + \frac{\beta_2}{n^{2/p}} + \frac{\beta_3}{n^{3/p}} + \ldots, p \in \mathbb{R}_+ - \{0,1\}, \forall i, \beta_i \in \mathbb{R}.$$

par l'Algorithme 1 avec :

$$\begin{cases} A_{2k} & = 1/(k+1) \\ A_{2k+1} = k+p+1 & \forall k \in \mathbb{N} \\ A_{-1} & = 0 \end{cases}$$

Plus précisément, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\varepsilon_{2k+2}(S_n))$ *converge plus vite que* $(\varepsilon_{2k}(S_n))$ *et*

$$\varepsilon_{2k}(S_n) - S \Longleftrightarrow n^{-(k+1)/p}.$$

Démonstration

Posons $x_n = \frac{\beta_1}{n^{1/p}} + \frac{\beta_2}{n^{2/p}} + \frac{\beta_3}{n^{3/p}} + \ldots$

Si $x = \frac{1}{n^{1/p}}$, alors $x_n = g(x)$ avec

$$g(x) = \sum_{i \geq 1} \beta_i x^i$$

et $x_{n+1} = gof(x), x_{n+2} = gof_2(x)$ où

$$f(x) = x(1+x^p)^{-1/p} = \sum_{1 \geq 1} \alpha_i x^i$$

et

$$f_2(x) = x(1+2x^p)^{-1/p} = \sum_{1 \geq 1} a_i x^i.$$

Montrons, par récurrence sur k, que

$$\varepsilon_{2k}(x) \Longleftrightarrow x^{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Les résultats de calcul formel (chap. 1, paragraphe 6) nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots \alpha_p = 0 \\ \alpha_{p+1} = -\frac{1}{p} \\ \alpha_{p+2} = \alpha_{p+3} = \ldots = \alpha_{2p} = 0 \\ \alpha_{2p+1} = \frac{1+p}{2p^2} \\ \alpha_{2p+2} = \alpha_{2p+3} = \ldots = \alpha_{3p} = 0 \\ \alpha_{3p+1} = -\frac{(1+p)(1+2p)}{6p^3} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = a_3 = \ldots = a_p = 0 \\ a_{p+1} = 2\alpha_{p+1} \\ a_{p+2} = a_{p+3} = \ldots = a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = 4\alpha_{2p+1} \\ a_{2p+2} = a_{2p+3} = \ldots = a_{3p} = 0 \\ a_{3p+1} = 8\alpha_{3p+1}. \end{cases}$$

Ainsi $f(x) = x + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \alpha_{2p+1}x^{2p+1} + \alpha_{3p+1}x^{3p+1} + \ldots$

Posons

$$gof(x) = \sum_{i \geq 1} \gamma_i x^i$$

et

$$gof_2(x) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i x^i.$$

Les résultats de calcul formel donnent :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \beta_1 \\ \gamma_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ \gamma_p = \beta_p \\ \gamma_{p+1} = \beta_{p+1} + \beta_1\alpha_{p+1} \\ \gamma_{p+2} = \beta_{p+2} + 2\beta_2\alpha_{p+1} \\ \vdots \\ \gamma_{2p} = \beta_{2p} + p\beta_p\alpha_{p+1} \\ \gamma_{2p+1} = \beta_{2p+1} + \beta_1\alpha_{2p+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \beta_1 \\ \lambda_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ \lambda_p = \beta_p \\ \lambda_{p+1} = \beta_{p+1} + 2\beta_1\alpha_{p+1} \\ \lambda_{p+2} = \beta_{p+2} + 4\beta_2\alpha_{p+1} \\ \vdots \\ \lambda_{2p} = \beta_{2p} + 2p\beta_p\alpha_{p+1} \\ \lambda_{2p+1} = \beta_{2p+1} + 4\beta_1\alpha_{2p+1}. \end{cases}$$

$$N = gof_2(x) - gof(x) = \beta_1\alpha_{p+1}x^{p+1}(1 + d_1x + \ldots + d_px^p + \ldots),$$
$$E = g(x) - gof(x) = -\beta_1\alpha_{p+1}x^{p+1}(1 + t_1x + \ldots + t_px^p + \ldots).$$

Comme $d_i = t_i \qquad \forall i = 1, \ldots, p-1$, on a :

$$\frac{1}{\Delta} = -\frac{\beta_1}{1+p}x + \ldots$$

On en déduit donc que

$$A_1 = p + 1$$

et

$$\varepsilon_2(x) \Longleftrightarrow x^2.$$

Supposons maintenant

$$\varepsilon_{2k}(x) = \sum_{i \geq k+1} \beta_i x^i$$

et montrons que $\varepsilon_{2k+2}(x) \Longleftrightarrow x^{k+2}$.

Ici $g(x) = \sum_{i \geq k+1} \beta_i x^i$.

En posant

$$gof(x) = \sum_{t \geq k+1} \gamma_t x^t$$

et

$$gof_2(x) = \sum_{t \geq k+1} \lambda_t x^t,$$

les résultats de calcul formel donnent :

$$\begin{cases} \gamma_{k+1} & = \beta_{k+1} \\ \gamma_{k+2} & = \beta_{k+2} \\ \vdots & \\ \gamma_{k+p} & = \beta_{k+p} \\ \gamma_{k+p+1} & = \beta_{k+p+1} + (k+1)\beta_{k+1}\alpha_{p+1} \\ \gamma_{k+p+2} & = \beta_{k+p+2} + (k+2)\beta_{k+2}\alpha_{p+2} \\ \vdots & \\ \gamma_{k+2p} & = \beta_{k+2p} + (k+p)\beta_{k+p}\alpha_{p+1} \\ \gamma_{k+2p+1} & = \beta_{k+2p+1} + (k+1)\beta_{k+1}\alpha_{2p+1} + \frac{k(k+1)}{2}\beta_{k+1}\alpha_{p+1}^2 \end{cases}$$

$$N = A_{2k}(k+1)\beta_{k+1}\alpha_{p+1}x^{k+p+1}(1 + d'_1 + \ldots + d'_p x^p + \ldots)$$
$$E = -A_{2k}(k+1)\beta_{k+1}\alpha_{p+1}x^{k+p+1}(1 + t'_1 + \ldots + t'_p x^p + \ldots);$$

mais $t' = d'_i$ pour $i = 1, \ldots, p-1$,

ce qui donne

$$N^{-1} + E^{-1} = \frac{(t'_p - d'_p)x^p}{A_{2k}(k+1)\beta_{k+1}\alpha_{p+1}x^{k+p+1}} + \ldots$$

Et après calcul,

$$\frac{1}{\Delta} = -A_{2k}\frac{k+1}{k+p+1}x^{k+1} + \ldots.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} A_{2k} = \frac{1}{k+1} \\ A_{2k+1} = k+p+1 \end{cases}$$

et $\varepsilon_{2k+2}(x) \Longleftrightarrow x^{k+2}$.

Théorème 5.2 : *Soit (S_n) une suite telle que :*

$$S_n - S = \frac{\beta_1}{n^{1/p}} + \frac{\beta_2}{n^{2/p}} + \frac{\beta_3}{n^{3/p}} + \ldots, p \in \mathbb{R}_+ - \{0;1\}$$

L'Algorithme 2, avec $B_k = (k+p)/k, \forall k \geq 1$, accélère la convergence de (S_n). Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(x_n^{(k+1)})$ converge plus vite que $(x_n^{(k)})$ et

$$x_n^{(k)} - S \Longleftrightarrow n^{-(k+1)/p}.$$

Démonstration

Similaire à celle du théorème 5.1.

Applications aux séries :

Pour les séries dont le terme général est une fonction de n suffisamment différentiable, la formule de sommation d'Euler-Maclaurin donne un développement asymptotique :

considérons la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{k=m}^{n} f(k), \quad m < n.$$

Si f admet dans $[m;n]$ une dérivée $(2r+1)$ ième continue par morceaux, on a :

$$S_n = \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}(f(m)+f(n)) + \sum_{h=1}^{r}(-1)^{h-1}\frac{B_h}{(2h)!}(f^{(2h-1)}(n) - f^{(2h-1)}(m)) + R_r$$

où R_r est le reste dont une majoration est :

$$|R_r| \leq \frac{(r+1/2)B_r}{(2r+1)!}\int_m^n |f^{(2r+1)}(t)|dt$$

et B_n les nombres de Bernouilli. Cf. DIEUDONNE [14]

Ainsi, pour la série $\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i^\alpha}\right)$, α réel et $\alpha > 1$, on a

$$\begin{aligned} S_n - S = \frac{a_1}{n^{\alpha-1}} + \frac{a_2}{n^\alpha} + \frac{a_3}{n^{\alpha+1}} + \frac{a_4}{n^{\alpha+3}} \\ + \frac{a^5}{n^{\alpha+5}} + \frac{a^6}{n^{\alpha+7}} + \dots \end{aligned}$$

où $S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^\alpha}$ et $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

La convergence d'une telle série est donc accélérée par les algorithmes des théorèmes 5.1 et 5.2 avec $p = 1/(\alpha-1)$. On peut encore améliorer les résultats de ces deux théorèmes en étudiant les suites de type :

$$x_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left[\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_4}{n^4} + \frac{\beta_6}{n^6} + \dots\right],$$

α réel, $\alpha > 1$.

Nous supposerons que $\beta_1 = 0$, pour avoir une régularité. On a alors le théorème suivant :

Théorème 5.3 : *Soit (S_n) une suite telle que*

$$S_n - S = \frac{1}{n^\theta}(\beta_0 + \frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_4}{n^4} + \frac{\beta_6}{n^6} + \ldots)$$

$\theta > 0$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$; $\beta_0 \neq 0$.

L'Algorithme 1 avec :

$$\begin{cases} A_{-1} & = & 0 \\ A_0 & = & 1 \\ A_1 & = & \frac{\theta+1}{\theta} \\ & & \\ A_{2k} & = & \frac{1}{2k+\theta} \\ & & & \forall k \geq 1 \\ A_{2k+1} & = & 2k+\theta+1 \end{cases}$$

accélère la convergence de (S_n). Plus précisément, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\varepsilon_{2k+2}(S_n))$ converge plus vite que $(\varepsilon_{2k}(S_n))$ et

$$\varepsilon_{2k}(S_n) - S \Longleftrightarrow n^{-2k-\theta}.$$

Démonstration

Posons $x_n = \frac{1}{n^\theta}(\beta_0 + \frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_4}{n^4} + \ldots)$. Si $x = \frac{1}{n}$, alors $x_n = g(x)$ avec

$$g(x) = x^\theta \sum_{i \geq 0} \beta_{2i} x^{2i}.$$

$x_{n+1} = gof(x)$ et $x_{n+2} = gof_2(x)$ avec

$$f(x) = \sum_{i \geq 1} (-1)^{i-1} x^i \text{ et } f_2 = fof.$$

Posons $gof(x) = \sum_{i \geq \theta} \gamma_i x^i$ et $gof_2(x) = \sum_{i \geq \theta} \lambda_i x^i$.

Les résultats de calcul formel donnent :

$$\begin{cases} \gamma_\theta & = \beta_0 \\ \gamma_{\theta+1} & = -\theta\beta_0 \\ \gamma_{\theta+2} & = \beta_2 + \frac{\theta(\theta+1)}{2}\beta_0 \\ \gamma_{\theta+3} & = -2\beta_2 - \theta\beta_2 - \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{6}\beta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_\theta & = \beta_0 \\ \lambda_{\theta+1} & = -2\theta\beta_0 \\ \lambda_{\theta+2} & = \beta_2 + 2\theta(\theta+1)\beta_0 \\ \lambda_{\theta+3} & = -4\beta_2 - 2\theta\beta_2 - \frac{4\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3}\beta_0 \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$N^{-1} = -\frac{1}{\theta\beta_0 x^{\theta+1}}\left[1 - mx + (m^2 - n)x^2 + \ldots\right]$$

et

$$E^{-1} = \frac{1}{\theta\beta_0 x^{\theta+1}}\left[1 - ux + (u^2 - v)x^2 + \ldots\right]$$

avec

$$m = \frac{\gamma_{\theta+2} - \lambda_{\theta+2}}{\theta\beta_0}, \quad n = \frac{\gamma_{\theta+3} - \lambda_{\theta+3}}{\theta\beta_0},$$
$$u = \frac{\beta_2 - \gamma_{\theta+2}}{\theta\beta_0}, \quad v = -\frac{\gamma_{\theta+3}}{\theta\beta_0}.$$

On a alors

$$\frac{1}{\Delta} = -\frac{\theta\beta_0}{\theta+1}x^\theta(1 - \theta x + \ldots).$$

On en déduit que $A_1 = \frac{\theta+1}{\theta}$ et

$$\varepsilon_2(x) \Longleftrightarrow x^{\theta+2}.$$

Supposons maintenant

$$\varepsilon_{2k}(x) = ax^{2k+\theta} + bx^{2k+\theta+1} + cx^{2k+\theta+2} + dx^{2k+\theta+3} + \dots$$

et montrons que $\varepsilon_{2k+2}(x) \Longleftrightarrow x^{2k+\theta+2}$.

Posons $g(x) = \varepsilon_{2k}(x)$, $gof(x) = \sum_{i\geq 2k+\theta} \gamma_i x^i$, $gof_2(x) = \sum_{i\geq 2k+\theta} \lambda_i x^i$.

Les résultats de calcul formel donnent :

$$\begin{cases} \gamma_{2k+\theta} & = a \\ \gamma_{2k+\theta+1} & = b - a(2k+\theta) \\ \gamma_{2k+\theta+2} & = c - b(2k+\theta+1) + a(2k+\theta)\frac{2k+\theta+1}{2} \\ \gamma_{2k+\theta+3} & = d - c(2k+\theta+2) + b(2k+\theta+1)\frac{2k+\theta+2}{2} \\ & -a(2k+\theta)[2k+\theta+\frac{(2k+\theta-1)(2k+\theta-2)}{6}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{2k+\theta} & = a \\ \lambda_{2k+\theta+1} & = b - 2a(2k+\theta) \\ \lambda_{2k+\theta+2} & = c - 2b(2k+\theta+1) + 2a(2k+\theta)\frac{2k+\theta+1}{2} \\ \lambda_{2k+\theta+3} & = d - 2c(2k+\theta+2) + 2b(2k+\theta+1)(2k+\theta+2) \\ & -4a(2k+\theta)[4k+2\theta+\frac{(2k+\theta-1)(2k+\theta-2)}{3}] \end{cases}$$

Les calculs donnent :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{-a(2k+\theta)}{2k+\theta+1} x^{2k+\theta}[1 + (\frac{b}{a} - (2k+\theta))x + \dots].$$

On en déduit que

$$A_{2k} = \frac{1}{2k+\theta}$$
$$A_{2k+1} = 2k+\theta+1$$

et $\varepsilon_{2k+2}(x) \Longleftrightarrow x^{2k+\theta+2}$ ce qui achève la démonstration.

Remarque

Nous verrons au chapitre suivant des algorithmes permettant d'estimer θ.

2. Etude des suites du type

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

où f est une fonction suffisamment dérivable sur $[a, b]$ et la suite (S_n) définie par les formules des trapèzes :

$$S_1 = \frac{h_1}{2}(f(a) + f(b))$$
$$S_n = \frac{h_n}{2}[f(a) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(b)], \text{ pour } n \geq 2;$$

avec $h_n = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih_n \forall i \geq 1$.

On démontre, voir [11], que (S_n) converge vers I. Et une généralisation de la formule d'Euler-Maclaurin donne [24] :

$$S_n - I = \frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_4}{n^4} + \frac{\beta_6}{n^6} + \ldots$$

On peut alors appliquer à (S_n) les algorithmes des théorèmes 5.1 et 5.2 avec $p = 1/2$.

Rappelons ces résultats que nous complétons.

Théorème 5.4 : *L'Algorithme 1 avec :*

$$\begin{cases} A_{-1} = 0 \\ A_{2k} = 1/(k+1) \\ A_{2k+1} = (2k+3)/2 \end{cases} \forall k \in \mathbb{N},$$

accélère la convergence de (S_n) définie par la formule des trapèzes.

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\varepsilon_{2k+2}(S_n))$ converge plus vite que $(\varepsilon_{2k}(S_n))$ et $\varepsilon_{2k}(S_n) - I \Longleftrightarrow n^{-2k-2}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\varepsilon_{2k-2}(S_n) - I \sim c'_{2k}(S_n - I)^{2k}$ et $\varepsilon_{2k}(S_n) - I = \sum_{i \geq 2k+2} c_i(S_n - I)^i$, alors

$$\varepsilon_{2k+2}(S_n) - I \sim \varepsilon(S_n - I)^{2k+4}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{c_{2k+4}}{(k+1)(2k+3)} - \frac{2k+1}{12}c_{2k+2} - \frac{c_{2k+3}^2}{4(k+1)^2 c_{2k+2}} + \frac{4c_{2k+2}^2}{(2k+1)(2k+3)c'_{2k}}.$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème 5.1 avec $p = 1/2$. Une démonstration complète s'avère nécessaire pour le résultat complémentaire.

Posons $x_n = S_n - I = \sum_{i\geq 1} \beta_{2i} n^{-2i}$.

Si $x = \frac{1}{n}$, alors $x_n = g(x)$ avec

$$g(x) = \sum_{i\geq 1} \beta_{2i} x^{2i}$$

et

$$x_{n+1} = gof(x), x_{n+2} = gof_2(x)$$

où

$$f(x) = x/(1+x) = \sum_{1\geq 1} \alpha_i x^i$$
$$f_2(x) = \sum_{i\geq 1} a_i x^i.$$

On obtient alors $\varepsilon_2(x) \Longleftrightarrow x^4$.

Supposons $\varepsilon_{2k-2}(x) = \sum_{i\geq 2k} c'_i x^i$ et $\varepsilon_{2k}(x) = \sum_{i\geq 2k+2} c_i x^i$.

Nous reprenons les notations du premier paragraphe du deuxième chapitre.

Les résultats de calcul formel nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \gamma_{2k+2} & = c_{2k+2} \\ \gamma_{2k+3} & = c_{2k+3} + (2k+2)\alpha_2 c_{2k+2} \\ \gamma_{2k+4} & = c_{2k+4} + (2k+3)a_2 c_{2k+3} + (2k+2)c_{2k+2}[\alpha_3 + \frac{2k+1}{2}\alpha_2^2] \\ \gamma_{2k+5} & = c_{2k+5} + (2k+4)c_{2k+4}\alpha_2 + (2k+3)c_{2k+3}[\alpha_3 + (k+1)\alpha_2^2] \\ & +c_{2k+2}(2k+2)[\alpha_4 + (2k+1)\alpha_2\alpha_3 + \frac{k(2k+1)}{3}\alpha_2^3] \\ \gamma_{2k+6} & = c_{2k+6} + (2k+5)\alpha_2 c_{2k+5} + c_{2k+4}(2k+4)[\alpha_3 + \frac{2k+3}{2}\alpha_2^2] \\ & +c_{2k+3}(2k+3)[\alpha_4 + (2k+2)\alpha_2\alpha_3 + \frac{(2k+1)(k+1)}{3}\alpha_2^3] \\ & +c_{2k+2}(2k+2)[\alpha_5 + \frac{2k+1}{2}\alpha_3^2 + (2k+1)\alpha_2\alpha_4 + k(2k+1)\alpha_2^2\alpha_3 \\ & \qquad + \frac{k(2k+1)(2k-1)}{12}\alpha_2^4] \end{cases}$$

$$M = -A_{2k-1}c'_{2k}x^{2k} + \dots$$

$$N = (2k+2)\alpha_2 A_{2k}c_{2k+2}x^{2k+3}(1 + \sum_{i\geq 1} d_i x^i)$$

$$E = -(2k+2)\alpha_2 A_{2k}c_{2k+2}x^{2k+3}(1 + \sum_{i\geq 1} t_i x^i)$$

$$N^{-1} = \frac{1}{(2k+2)\alpha_2 A_{2k}c_{2k+2}x^{2k+3}}(1 + \sum_{i\geq 1} D_i x^i)$$

$$E^{-1} = \frac{-1}{(2k+2)\alpha_2 A_{2k}c_{2k+2}x^{2k+3}}(1 + \sum_{i\geq 1} T_i x^i)$$

On obtient

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{(2k+2)\alpha_2 A_{2k}c_{2k+2}}{D_1 - T_1}x^{2k+2}[1 - mx + (m^2 - n)x^2] + \dots$$

avec $m = (D_2 - T_2)/(D_1 - T_1)$ et

$$n = \frac{D_3 - T_3}{D_1 - T_1} - \frac{(2k+2)\alpha_2 A_{2k}c_{2k+2}}{A_{2k-1}c'_{2k}(D_1 - T_1)}.$$

On a immédiatement $D_1 - T_1 = 2k+3$, ce qui donne

$$\begin{cases} A_{2k} = 1/(k+1) \\ A_{2k+1} = (2k+3)/2. \end{cases}$$

De plus, $m = 2(k+1) - \frac{c_{2k+3}}{c_{2k+2}}$. On en déduit que

$$\varepsilon_{2k+2}(x) \sim \varepsilon x^{2k+4},$$

avec $\varepsilon = \gamma_{2k+4} - c_{2k+2}(m^2 - n)$.

Le calcul donne alors

$$\varepsilon = \frac{c_{2k+4}}{(k+1)(2k+3)} - \frac{2k+1}{12}c_{2k+2} - \frac{c_{2k+3}^2}{4(k+1)^2 c_{2k+2}} + \frac{4c_{2k+2}^2}{(2k+1)(2k+3)c'_{2k}}.$$

Théorème 5.5 : *L'Algorithme 2 avec $B_k = (2k+1)/2k$, $\forall k \geq 1$, accélère la convergence de (S_n).*

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(x_n^{(k+1)})$ converge plus vite que $(x_n^{(k)})$ et

$$x_n^{(k)} - I \Longleftrightarrow n^{-2k-2}.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $x_n^{(k)} - I = \sum_{i \geq 2k+2} c_i (S_n - I)^i$, alors

$$x_n^{(k+1)} - I \sim \delta (S_n - I)^{2k+4}$$

avec

$$\delta = \frac{c_{2k+4}}{(k+1)(2k+3)} - \frac{2k+1}{12}c_{2k+2} - \frac{c_{2k+3}^2}{4(k+1)^2 c_{2k+2}}.$$

Démonstration

Similaire à celle du théorème 5.4.

Théorème 5.6 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\hat{\theta}_{k+1}(S_n))$ converge plus vite que $(\hat{\theta}_k(S_n))$ et*

$$\hat{\theta}_k(S_n) - I \Longleftrightarrow n^{-2k-2}.$$

De plus, pour tout entier k, si

$$\hat{\theta}_k(S_n) - I = \sum_{i \geq 2k+2} c_i (S_n - I)^i,$$

alors $\hat{\theta}_{k+1}(S_n) - I \sim \hat{\theta}(S_n - I)^{2k+4}$ avec

$$\hat{\theta} = -\frac{c_{2k+4}}{(k+1)^2(2k+3)} + \frac{2k+1}{12(k+1)}c_{2k+2} + \frac{c_{2k+3}^2}{4(k+1)^3 c_{2k+2}}.$$

Démonstration

Reprenons les notations utilisées lors des démonstrations des théorèmes 5.4 et 2.3.

Démontrons par récurrence que :

$$\hat{\theta}(x) \Longleftrightarrow x^{2k+2}.$$

On vérifie facilement que $\hat{\theta}_1(x) \Longleftrightarrow x^4$.

Supposons que $\hat{\theta}_k(x) = \sum_{i \geq 2k+2} c_i x^i = g(x)$.

La démonstration du théorème 5.4 nous permet d'écrire :

$$\delta g(x) = \sum_{i \geq 2k+2} b_i x^i$$

avec :

$$\begin{cases} b_{2k+2} & = \frac{1}{2k+3} c_{2k+2} \\ b_{2k+3} & = -\frac{2k+2}{2k+3} c_{2k+2} + \frac{1}{2k+3} c_{2k+3} \\ b_{2k+4} & = \frac{2k+5}{(2k+3)^2} c_{2k+4} - c_{2k+3} + \frac{1}{6}(k+1)(10k+17)c_{2k+2} \\ & \quad - \frac{1}{2(k+1)(2k+3)} \frac{c_{2k+3}^2}{c_{2k+2}}. \end{cases}$$

Les résultats de calcul formel donnent :

$$p' = \frac{2k+2}{2k+3} c_{2k+2} x^{2k+2}(1 + ux + vx^2) + \dots$$
$$q' = \frac{2k+2}{2k+3}(1 + m'x + n'x^2) + \dots$$

avec :

$$u = \frac{(2k+3)(\gamma_{2k+3} - b_{2k+3})}{(2k+2)c_{2k+2}}$$
$$v = \frac{(2k+3)(\gamma_{2k+4} - b_{2k+4})}{(2k+2)c_{2k+2}}$$

$$m' = -\frac{1}{2k+2}(t'_1 + D_1) \qquad n' = \frac{1}{2k+2}(t'_2 + D_2 + t'_1 D_1)$$

$$t'_1 = \frac{2k+3}{2k+2}\frac{c_{2k+3}}{c_{2k+2}} - \frac{3}{2}(2k+3)$$
$$t'_2 = \frac{(k+2)(2k+5)}{(k+1)(2k+3)}\frac{c_{2k+4}}{c_{2k+2}} - \frac{k+2}{2(k+1)^2}\frac{c_{2k+3}^2}{c_{2k+2}^2}$$
$$- \frac{3(k+2)(2k+3)}{2(k+1)}\frac{c_{2k+3}}{c_{2k+2}} + \frac{1}{6}(k+2)(2k+3)(10k+25).$$

Les calculs donnent alors

$\hat{\theta}g(x) \sim \hat{\theta}x^{2k+2}$ avec :

$$\hat{\theta} = -\frac{c_{2k+4}}{(k+1)^2(2k+3)} + \frac{2k+1}{12(k+1)}c_{2k+2} + \frac{c_{2k+3}^2}{4(k+1)^3 c_{2k+2}}.$$

Théorème 5.7 : *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\theta_{2k+2}(S_n))$ converge plus vite que $(\theta_{2k}(S_n))$ et*

$$\theta_{2k}(S_n) - I \Longleftrightarrow n^{-2k-2}.$$

Démonstration

Similaire à celle du théorème 5.4.

Les résultats des théorèmes 5.4 à 5.7 peuvent être améliorés par :

Théorème 5.8 : *L'Algorithme 4 avec*

$$c_k = 3k/(3k-1), \gamma_k = 2/(3k+1), \lambda_k = (3k-1)/(3k+1), \forall k \geq 1,$$

accélère la convergence de (S_n).

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(x_n^{(k+1)})$ converge plus vite que $(x_n^{(k)})$ et

$$x_n^{(k)} - I \Longleftrightarrow n^{-3k-2}.$$

Démonstration.

A chaque étape k, nous allons appliquer à (x_n) telle que $x_n = \frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_4}{n^4} + \frac{\beta_6}{n^6} + \ldots$, le Δ^2 d'Aitken modifié et le θ_2-algorithme, afin de les combiner.

Posons $x = \frac{1}{n}$.

A chaque étape k, on dispose de $z_k(x)$. Le Δ^2 modifié appliqué à z_k peut s'écrire

$$\delta' z_k(x) = z_k(f(x)) + \frac{B_k}{\Delta}$$

où $f(x) = \frac{x}{1+x}$ et $\Delta = N^{-1} + E^{-1}$ avec

$$N = z_k(f_2(x)) - z_k(f(x))$$
$$E = z_k(x) - z_k(f(x))$$

Le θ_2-algorithme appliqué à z_k s'écrit :

$$\hat{\theta}(x) = z_k(f(x)) - \frac{z_k(f(x)) - \delta z_k(x)}{1 - \frac{M}{N}}$$

où δz_k désigne le Δ^2 d'Aitken normal appliqué à z_k et $M = \delta z_k(f(x)) - \delta z_k(x)$.

$z_{k+1}(x)$ est alors la combinaison de $\delta' z_k(x)$ et $\hat{\theta}(x)$.

Supposons $z_k(x) \Longleftrightarrow x^{3k+2}$ et montrons que $z_{k+1}(x) \Longleftrightarrow x^{3k+5}$.

Posons

$$z_k(x) = \alpha x^{3k+2} + \beta x^{3k+3} + \gamma x^{3k+4} + \lambda x^{3k+5} + \mu x^{3k+6} + \lambda' x^{3k+7} \ldots$$
$$z_k(f(x)) = \sum_{i \geq 3k+2} \gamma_i x^i \text{ et } z_k(f_2(x)) = \sum_{i \geq 3k+2} \lambda_i x^i.$$

Les résutlats de calcul formel donnent :

$$\begin{cases} \gamma_{3k+2} & = \alpha \\ \gamma_{3k+3} & = \beta + \alpha(3k+2)\alpha_2 \\ \gamma_{3k+4} & = \gamma + \beta(3k+3)\alpha_2 + \alpha\left[\alpha_3(3k+2) + \frac{(3k+2)(3k+1)}{2}\alpha_2^2\right] \\ \gamma_{3k+5} & = \lambda + \gamma(3k+4)\alpha_2 + \beta\left[(3k+3)\alpha_3 + \frac{(3k+3)(3k+2)}{2}\alpha_2^2\right] \\ & +\alpha\left[(3k+2)\alpha_4 + (3k+2)(3k+1)\alpha_2\alpha_3 + \frac{k(3k+2)(3k+1)}{2}\alpha_2^3\right] \end{cases}$$

$$E = \alpha(3k+2)x^{3k+3}(1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots)$$

$$N = -\alpha(3k+2)x^{3k+3}(1 + mx + nx^2 + \ldots)$$

avec

$$a = \frac{\gamma - \gamma_{3k+4}}{\alpha(3k+2)} \qquad b = \frac{\lambda - \gamma_{3k+5}}{\alpha(3k+2)}$$

$$c = \frac{\mu - \gamma_{3k+6}}{\alpha(3k+2)} \qquad d = \frac{\lambda' - \gamma_{3k+7}}{\alpha(3k+2)}$$

$$m = \frac{\gamma_{3k+4} - \lambda_{3k+4}}{\alpha(3k+2)} \qquad n = \frac{\gamma_{3k+5} - \lambda_{3k+5}}{\alpha(3k+2)}.$$

On obtient alors :

$$\frac{1}{\Delta} = -\frac{\alpha(3k+2)}{3k+3}x^{3k+2}(1 + \frac{a^2 - b - m^2 + n}{3k+3}x + \ldots).$$

Si $B_k = \frac{3k+3}{3k+2}$, alors $\delta' z_k(x) \Longleftrightarrow x^{3k+4}$.

Il reste à déterminer le coefficient ε de x^{3k+4} dans $\delta' z_k(x)$.

Le calcul donne

$$\varepsilon = \frac{2}{(3k+2)(3k+3)}\gamma + \ldots$$

Posons maintenant

$$\delta z_k(x) = y_{3k+2}x^{3k+2} + y_{3k+3}x^{3k+3} + \ldots$$

et

$$\delta z_k(f(x)) = \sum_{i \geq 3k+2} \omega_i x^i.$$

Les résultats de calcul formel nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \omega_{3k+2} & = y_{3k+2} \\ \omega_{3k+3} & = y_{3k+3} - (3k+2)y_{3k+2} \\ \omega_{3k+4} & = y_{3k+4} - (3k+3)y_{3k+3} + y_{3k+2}\left[3k+2+\frac{(3k+2)(3k+1)}{2}\right]. \end{cases}$$

Les calculs donnent alors

$$\hat{\theta}(x) \Longleftrightarrow x^{3k+4}.$$

Et si on désigne par O le coefficient de x^{3k+4} dans $\hat{\theta}(x)$, on a :

$$O = \frac{-4}{(3k+2)^2(3k+3)}\gamma + \dots$$

La combinaison est donc

$$z_{k+1}(x) = \frac{2\delta' z_k(x) + (3k+2)\hat{\theta}(x)}{3k+4} \Longleftrightarrow x^{3k+5},$$

ce qui termine la démonstration.

- Etude du E-algorithme pour les suites du type :

$$x_n = \frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_4}{n^4} + \frac{\beta_6}{n^6} + \dots$$

Posons $g_i(n) = \dfrac{1}{n^{2i}}$.

On constate, avec les premiers calculs, que $(E_2^{(n)})$ ne converge pas plus vite que $(E_1^{(n)})$

.

Le E-algorithme n'est donc pas efficient pour cette suite. Nous allons plutôt étudier l'itération de la première étape du E-algorithme.

Désignons par $(T_n^{(k)})$ (chap. 1, paragraphe 4g) les suites ainsi obtenues. Rappelons que $(T_n^{(1)}) = (E_1^{(n)})$ = première étape du E-algorithme.

On a le théorème suivant :

Théorème 5.9 : *L'algorithme*

$$\begin{cases} T_n^{(0)} = S_n \text{ (suite definie par la formule des trapezes)} \\ T_n^{(1)} = \frac{1}{2n+1}\left[(n+1)^2 S_{n+1} - n^2 S_n\right] \\ T_n^{(k)} = \frac{(n+1)^{k+2} T_{n+1}^{(k-1)} - n^{k+2} T_n^{(k-1)}}{(n+1)^{k+2} - n^{k+2}}, \forall k \geq 2 \end{cases}$$

accélère la convergence de (S_n). *Plus précisément, pour tout* $k \geq 1$, $(T_n^{(k)})$ *converge plus vite que* $(T_n^{(k-1)})$ *et* $T_n^{(k)} - I \Longleftrightarrow n^{-k-3}$.

Démonstration :

L'algorithme va être appliqué à (x_n) telle que $x_n = \frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_4}{n^4} + \frac{\beta_6}{n^6} + \ldots$

En posant $x_n = g(\frac{1}{n})$ et $x = \frac{1}{n}$, on a :

$$T^{(0)}(x) = g(x).$$

Et l'application de la première étape du E-algorithme à $T^{(k-1)}$ peut s'écirre, avec $g_k(n) = \frac{1}{n^{k+2}}$:

$$T^{(k)}(x) = \frac{\frac{f^{k+2}(x)}{x^{k+2}} T^{(k-1)}(x) - T^{(k-1)}(f(x))}{\frac{f^{k+2}(x)}{x^{k+2}} - 1}.$$

Démontrons, par récurrence sur k, que

$$T^{(k)}(x) \Longleftrightarrow x^{k+3}.$$

Il est facile de vérifier que $T^{(1)}(x) \Longleftrightarrow x^4$.

Supposons $T^{(k-1)}(x) = \sum_{i \geq k+2} \beta_i x^i$.

Posons

$$f^{k+2}(x) = \sum_{i \geq k+2} \gamma_i x^i$$

et

$$f^{k+3}(x) = \sum_{i \geq k+3} \lambda_i x^i.$$

D'après les résultats de calcul formel,

$$\begin{cases} \gamma_{k+2} &= 1 \\ \gamma_{k+3} &= -(k+2) \\ \gamma_{k+4} &= k+2+\frac{1}{2}(k+1)(k+2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_{k+3} &= 1 \\ \lambda_{k+4} &= -(k+3) \end{cases}$$

et le calcul donne $T^{(k)}(x) \Longleftrightarrow x^{k+3}$.

Conclusion.

Nous disposons donc de plusieurs algorithmes pour le calcul d'intégrales de fonctions suffisamment différentiables.

Les quatre premiers donnent les mêmes résultats (asymptotiquement). Quant à l'algorithme de combinaison (théorème 5.8), c'est le plus efficace.

Nous ferons plus loin des comparaisons avec d'autres méthodes.

3. Etude des suites du type :

$$x_n = \beta_1 n^{-1/2} + \beta_3 n^{-3/2} + \beta_5 n^{-5/2} + \ldots + \beta_4 n^{-2} + \beta_6 n^{-3} + \ldots$$

Considérons l'intégrale singulière du type

$$I = \int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx, \text{ avec } g(0) \neq 0.$$

En posant $f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$, on peut définir la suite (S_n) (cf. paragraphe 2).

On a [24] :

$$S_n - I = \beta_1 n^{-1/2} + \beta_3 n^{-3/2} + \beta_5 n^{-5/2} + \ldots + \beta_4 n^{-2} + \beta_6 n^{-3} + \ldots$$

On peut alors calculer I en accélèrant la convergence de (S_n). D'où le théorème suivant :

Theorème 5.10 : *L'Algorithme 1 avec :*

$$\begin{cases} A_{-1} &= 0 \\ A_{2k} &= \frac{1}{2k+1} \\ A_{2k+1} = 2k+3 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

accélère la convergence de (S_n).

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\varepsilon_{2k+2}(S_n))$ *converge plus vite que* $(\varepsilon_{2k}(S_n))$ *et* $\varepsilon_{2k}(S_n) - I \Longleftrightarrow n^{-\frac{1}{2}(2k+1)}$.

Démonstration :

Nous allons appliquer l'ε-algorithme modifié à la suite (x_n) telle que $x_n = \beta_1 n^{-1/2} + \beta_3 n^{-3/2} + \beta_5 n^{-5/2} + \ldots + \beta_4 n^{-2} + \beta_6 n^{-3} + \ldots$

Reprenons le formalisme adopté lors de la démonstration de théorème 5.1, avec

$$x = \frac{1}{\sqrt{n}}, g(x) = \sum_{i \geq 1} \beta_{2i-1} x^{2i-1} + \sum_{i \geq 2} \beta_{2i} x^{2i},$$

et

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Démontrons, par récurrence sur k, que

$$\varepsilon_{2k}(x) \Longleftrightarrow x^{2k+1}$$
$$\varepsilon_2(x) = gof(x) + \frac{A_1}{\Delta}$$

Comme $A_{-1} = 0$ et $A_0 = 1$, $\Delta = N^{-1} + E^{-1}$

$$N = gof_2(x) - gof(x)$$
$$E = g(x) - gof(x).$$

Posons $gof(x) = \sum_{i \geq 1} \gamma_i x^i$ et $gof_2(x) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i x^i$.

Les résultats de calcul formel donnent :

$$\begin{cases} \gamma_1 & = \beta_1 \\ \gamma_2 & = 0 \\ \gamma_3 & = \beta_3 - \frac{\beta_1}{2} \\ \gamma_4 & = \beta_4 \\ \gamma_5 & = \frac{3}{8}\beta_1 - \frac{3}{2_3} + \beta_1 n^{-1/2} + \beta_3 n^{-3/2} + \beta_5 n^{-5/2} + \\ & \ldots + \beta_4 n^{-2} + \beta_6 n^{-3} + \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_6 & = -2\beta_4 + \beta_6 \\ \gamma_7 & = -\frac{5}{16}\beta_1 + \frac{3}{4}\beta_3 \\ & -\frac{5}{2}\beta_5 + \beta_7 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \lambda_1 &= \beta 1 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= \beta_3 - \beta_1 \\ \lambda_4 &= \beta_4 \\ \lambda_5 &= \frac{3}{2}\beta_1 - 3\beta_3 + \beta_5 \\ \lambda_6 &= -4\beta_4 + \beta_6 \\ \lambda_7 &= -\frac{5}{2}\beta_1 + 3\beta_3 - 5\beta_5 + \beta_7. \end{cases}$$

On obtient alors $\frac{1}{\Delta} = -\frac{\beta_1 x}{3}\left[1 + \left(\frac{4\beta_3}{\beta_1} - \frac{1}{2}\right)x^2\right] + \ldots$.

On en déduit que $A_1 = 3$ et $\varepsilon_2(x) \Longleftrightarrow x^2$.

Supposons maintenant que

$$\varepsilon_{2k-2}(x) \Longleftrightarrow x^{2k-1}$$

et

$$\varepsilon_{2k}(x) = \varepsilon_{2k-2}(f(x)) + \frac{A_{2k-1}}{\Delta}.$$

Posons

$$\varepsilon_{2k-2}(x) = ax^{2k-1} + bx^{2k} + cx^{2k+1} + dx^{2k+2} + ex^{2k+3} + \ldots,$$
$$\varepsilon_{2k-2}(f(x)) = \sum_{i \geq 2k-1} \gamma_i x^i \text{ et } \varepsilon_{2k-2}(f_2(x)) = \sum_{i \geq 2k-1} \lambda_i x^i$$

Les résultats de calcul formel donnent :

$$\begin{cases} \gamma_{2k-1} &= a \\ \gamma_{2k} &= b \\ \gamma_{2k+1} &= c - \frac{a}{2}(2k-1) \\ \gamma_{2k+2} &= d - kb \\ \gamma_{2k+3} &= e - \frac{1}{2}(2k+1)c + (2k-1)\left[\frac{3}{8} + \frac{1}{4}(k-1)\right]a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{2k-1} &= a \\ \lambda_{2k} &= b \\ \lambda_{2k+1} &= c - a(2k-1) \\ \lambda_{2k+2} &= d - 2kb \\ \lambda_{2k+3} &= e - (2k+1)c + (2k-1)\left[\frac{3}{2} + (k-1)\right]a. \end{cases}$$

Le calcul donne

$$A_{2k-1} = 2k+1 \text{ et } A_{2k-2} = \frac{1}{2k-1},$$

ce qui termine la démonstration.

4. Calcul d'intégrales singulières du type

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, f(0) = f(1) = 0.$

Soit (S_n) la suite définie au paragraphe 2. On a [24] :

$$S_n - I = a_1 n^{-1/2} + a_3 n^{-3/2} + a_5 n^{-5/2} + \dots$$

C'est à dire que $(S_n - I) \in LOGF_2'''$ et les algorithmes étudiés pour cette classe (chap. 3 et 4) permettent le calcul de telles intégrales.

5. Résultats numériques.

a) Séries

Nous avons d'abord considéré les séries suivantes :

$$(1) \quad S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - Ln(n) \qquad (2) \quad S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$$

$$(3) \quad S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\sqrt{i}} \qquad (4) \quad S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^3}$$

Le développement asymptotique de l'erreur de (1) et (2), via la formule d'Euler Maclaurin, est du type $LOGF''_1$. Celui de (3) est du type $LOGF_2'''$. Quant au développement asymptotique de l'erreur de (4), il est semblable à celui des suites étudiées au chap. 5, paragraphe 2.

Pour ces quatres séries, nous avons appliqué l'ε-algorithme modifié (ou le Δ^2 modifié itéré) et l'algorithme de combinaison.

Ensuite, pour diverses séries, dont plusieurs de Riemann, nous avons expérimenté l'algorithme du thérème 5.3.

A.C. MATOS [25] a étudié l'application du E-algorithme à diverses familles de suite dont le développement asymptotique de l'erreur (ou quelques termes de ce développement) est connu. On verra, à la page 101, une comparaison avec un de nos algorithmes. Nous n'avons imprimé que les suites d'erreur pour les transformations.

S_1	0.1000000000000000D+01
S_2	0.8068528194400547D+00
	0.7347210446652236D+00
	0.6970389722134427D+00
	0.6738954208992330D+00
	0.6582405307719450D+00
	0.6469469938018296D+00
	0.6384156011773069D+00
	0.6317436766320346D+00
	0.6263831609742083D+00
	0.6219820720789743D+00
	0.6183040284226779D+00
	0.6151843976722184D+00
	0.6125049969470679D+00
S_{15}	0.6101787921267832D+00

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n) \qquad [33]$$

$$S \simeq 0.5772156649015 32 \ldots$$

$$(S_n - S) \in LOGF_1''$$

	Théorème 3.1	Théorème 4.1
$k=1$	-0.6153300284404747D-03	-0.2751803902237770D-03
	-0.2942283505235527D-03	-0.8981013869572370D-04
	-0.1472136441318761D-03	-0.3564933619254929D-04
	-0.8246729695318071D-04	-0.1667182430743297D-04
	-0.5046742220247307D-04	-0.8775615202434280D-05
	-0.3301789297019951D-04	-0.5041272970256866D-05
	-0.2274185531029639D-04	-0.3096176193210587D-05
	-0.1631282629591634D-04	-0.2004278180509989D-05
	-0.1209085047097758D-04	-0.1353693526841477D-05
	-0.9206351649411948D-05	-0.9467902333652224D-06
	-0.7169806795598549D-05	-0.6818495788837951D-06
	-0.5691571576789747D-05	-0.5033964658175379D-06
	-0.4592918965434117D-05	
$k=2$	0.6743143799320785D-04	0.4784209701745633D-06
	0.7081325236708695D-05	0.7823155631853443D-07
	0.1902129193217237D-05	0.2029013538304772D-07
	0.7044947020626519D-06	0.6606615562889002D-08
	0.3127338702332795D-06	0.2517359633789386D-08
	0.1566403109398663D-06	0.1079232436382825D-08
	0.8564581740902813D-07	0.5075183907030448D-09
	0.5007862316052780D-07	0.2572681154482809D-09
	0.3088361116366026D-07	0.1388587165173857D-09
	0.1989099896815630D-07	
	0.1328229573907286D-07	
$k=3$	0.2703463342143683D-06	-0.2396925375194869D-09
	0.3094903448764511D-07	-0.3965709531594808D-10
	0.5447144110120108D-08	-0.7337414638548811D-11
	0.1234587419600940D-08	-0.8162798778924008D-12
	0.3292861528152863D-09	0.8159906127527816D-12
	0.9742284236280430D-10	0.1278183722058790D-11
	0.3056189947382021D-10	
	0.9811332952677776D-11	
	0.3190542214543 19D-11	
$k=4$	-0.1658983770674 90D-08	
	-0.3188391218796396D-09	
	-0.8313768467063665D-10	
	-0.2691793413601290D-10	
	-0.9950122214878732D-11	
	-0.3824722765062571D-11	
	-0.1300692734941544D-11	
$k=5$	-0.8389889260759786D-12	
	-0.1040818581495018D-11	
	0.1106232076428237D-12	
	0.7141363238608034D-12	
	0.9535666527227260D-12	

S_1	0.1000000000000000D+01
S_2	0.1250000000000000D+01
|	0.1361111111111111D+01
|	0.1423611111111111D+01
|	0.1463611111111111D+01
|	0.1491388888888889D+01
|	0.1511797052154195D+01
|	0.1527422052154195D+01
|	0.1539767731166541D+01
|	0.1549767731166541D+01
|	0.1558032193976458D+01
|	0.1564976638420902D+01
|	0.1570893798184216D+01
|	0.1575995839000543D+01
S_{15}	0.1580440283444987D+01

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \qquad [33]$$

$$S \simeq 1.64493406684822 6 \ldots$$

$$(S_n - S) \in LOGF_1''$$

	Théorème 3.1	Théorème 4.1
k = 1	0.5065933151773599D-02	0.1362229448069896D-02
	0.1891329977170425D-02	0.4032347390751862D-03
	0.8992664851069328D-03	0.1585257443661927D-03
	0.4952260810665290D-03	0.7435066019111547D-04
	0.3009758868163382D-03	0.3933276803034852D-04
	0.1963186393019423D-03	0.2270752819083293D-04
	0.1350441294980214D-03	0.1400806074954150D-04
	0.9682221305113304D-04	0.9102914805521030D-05
	0.7175955640952958D-04	0.6168581727653433D-05
	0.5464886736208344D-04	0.4326806170459841D-05
	0.4257157267609419D-04	0.3123840920638520D-05
	0.3380541006377052D-04	0.2311330950646511D-05
	0.2728939369553776D-04	
k = 2	-0.3429284145997722D-04	-0.1340048303310635D-05
	-0.1008276183822078D-04	-0.2865786059337311D-06
	-0.3760352739784869D-05	-0.8079545886995575D-07
	-0.1647479490373641D-05	-0.2762034872322815D-07
	-0.8106652012104809D-06	-0.1088275599606288D-07
	-0.4354257903194710D-06	-0.4781389632531677D-08
	-0.2504397624619389D-06	-0.2289797259788506D-08
	-0.1521719438959783D-06	-0.1175941086043256D-08
	-0.9671963036202158D-07	-0.6398363310532174D-09
	-0.6382803019282235D-07	
	-0.4348424085349675D-07	
k = 3	0.1905543917134819D-06	0.7843582200840055D-09
	0.4891231121214104D-07	0.1412747468922809D-09
	0.1559794231297852D-07	0.3254579678674263D-10
	0.5826093992010797D-08	0.9019547045005516D-11
	0.2453809871440227D-08	0.2885328477877924D-11
	0.1135585214620885D-08	0.1053502987971577D-11
	0.5669331560199248D-09	
	0.3012383153252335D-09	
	0.1686280611673530D-09	
k = 4	-0.8836965170039290D-09	
	-0.2084690621084045D-09	
	-0.5973499256003989D-10	
	-0.1987078643989060D-10	
	-0.7438913200707997D-11	
	-0.3065909722280158D-11	
	-0.1350334340871617D-11	
k = 5	0.3512419521900512D-11	
	0.7850478080106971D-12	
	0.2043495581083299D-12	
	0.5718646042818243D-13	
	0.7109720798204044D-13	

S_1	0.1000000000000000D+01
S_2	0.1353553390593274D+01
	0.1546003480323149D+01
	0.1671003480323149D+01
	0.1760446199423141D+01
	0.1828487581167118D+01
	0.1882482505882722D+01
	0.1926676679706881D+01
	0.1963713716743918D+01
	0.1995336493345602D+01
	0.2022746615579944D+01
	0.2046802876796178D+01
	0.2068137499727918D+01
	0.2087227588435948D+01
S_{15}	0.2104440847752426D+01

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\sqrt{i}}$$

$$S \simeq 2.612375342625\ldots$$

$$(S_n - S) \in LOGF_2'''$$

	Théorème 3.1	Théorème 4.1
$k=1$	0.8216917821477232D-02	0.2263007488014787D-02
	0.3586436181529980D-02	0.7770359252125777D-03
	0.1923535940975993D-02	0.3431270248787704D-03
	0.1167939008004899D-02	0.1769771881972187D-03
	0.7704443120611520D-03	0.1014452002246007D-03
	0.5392786545108004D-03	0.6277136544064442D-04
	0.3946535740548935D-03	0.4115943381100256D-04
	0.2989946454233891D-03	0.2824377249752499D-04
	0.2328905417110154D-03	0.2010377373556178D-04
	0.1855646947639157D-03	0.1474734285434893D-04
	0.1506792580164900D-03	0.1109431810166189D-04
	0.1243265225930202D-03	0.8526858363687873D-05
	0.1040001686770362D-03	
$k=2$	-0.4616531958900492D-04	
	-0.1525920672996702D-04	
	-0.6262208577311607D-05	
	-0.2974287044792221D-05	
	-0.1569282053418691D-05	
	-0.8962420502719830D-06	
	-0.5444944363012551D-06	
	-0.3476032116385593D-06	
	-0.2311061115668582D-06	
	-0.1589478185702597D-06	
	-0.1125021665132619D-06	
$k=3$	0.2527778393932208D-06	
	0.7070235161568683D-07	
	0.2431212589495274D-07	
	0.9705158215272958D-08	
	0.4336866863026423D-08	
	0.2116815553138834D-08	
	0.1109147648292036D-08	
	0.6160317863462828D-09	
	0.3591617832136851D-09	
$k=4$	-0.1125552916928646D-08	
	-0.2879273377880132D-09	
	-0.8826000650816179D-10	
	-0.3109822512351035D-10	
	-0.1224670712063336D-10	
	-0.5108396344821742D-11	
	-0.2619707402395921D-11	

S_1	0.1000000000000000D+01
S_2	0.1125000000000000D+01
	0.1162037037037037D+01
	0.1177662037037037D+01
	0.1185662037037037D+01
	0.1190291666666667D+01
	0.1193207118561710D+01
	0.1195160243561710D+01
	0.1196531985674193D+01
	0.1197531985674193D+01
	0.1198283300475095D+01
	0.1198862004178799D+01
	0.1199317170314438D+01
	0.1199681601801319D+01
S_{15}	0.1199977898097615D+01

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3}$$

$$S \simeq 1.202056903159594 \ldots$$

	Théorème 5.4	Théorème 5.8
$k=1$	0.1890465261458631D-02	0.4826246723314924D-03
	0.5206744179835775D-03	0.1071749810466400D-03
	0.1952978118692661D-03	0.3354917798948460D-04
	0.8865036095952010D-04	0.1304438257576342D-04
	0.4578712911991012D-04	0.5886868839035742D-05
	0.2595504708681256D-04	0.2961526684934273D-05
	0.1578279842976045D-04	0.1618197336541744D-05
	0.1013786515275837D-04	0.9435232093365272D-06
	0.6804568979916579D-05	0.5797232890195070D-06
	0.4734846986973558D-05	0.3718940011104323D-06
	0.3395262274896033D-05	0.2473471166978929D-06
	0.2497502193216008D-05	0.1696393613368277D-06
	0.1877722548595563D-05	
$k=2$	-0.1463432890488631D-04	-0.4769357496612562D-06
	-0.3437533960786842D-05	-0.8384804680325146D-07
	-0.1064013218764030D-05	-0.1998004103766389D-07
	-0.3977958199011516D-06	-0.5901192218693216D-08
	-0.1705612914927428D-06	-0.2044073982776159D-08
	-0.8113027339328414D-07	-0.8005838210249638D-09
	-0.4185911189826148D-07	-0.3456766116839011D-09
	-0.2305568805750086D-07	-0.1615677459442660D-09
	-0.1339892074202209D-07	-0.8063973967742388D-10
	-0.8143921216216543D-08	
	-0.5141714066667080D-08	
$k=3$	0.8359778076944338D-07	0.2599107322594219D-09
	0.1802678500592049D-07	0.4052297256432191D-10
	0.4941712502745665D-08	0.8193569087100450D-11
	0.1616046142608255D-08	0.2018959218558214D-11
	0.6047280213476031D-09	0.5779385216925226D-12
	0.2516308873507650D-09	0.1949588494115639D-12
	0.1140712342292960D-09	
	0.5549138492461081D-10	
	0.2863894538185363D-10	
$k=4$	-0.3837541393599680D-09	
	-0.7856274571865773D-10	
	-0.1983667050065030D-10	
	-0.5888749774266011D-11	
	-0.1987666975455937D-11	
	-0.7474108137950353D-12	
	-0.2996257755794041D-12	
$k=5$	0.1479600296450112D-11	
	0.2951399975109625D-12	
	0.7101545913823504D-13	
	0.1316720170396746D-13	
	0.2368439645794584D-13	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,1}}$$

$S \simeq 10.584448664950...$

S_1	0.1000000000000000D+01
S_2	0.1466516495768404D+01
⋮	0.1765169315715324D+01
⋮	0.1982906956539550D+01
⋮	0.2153374941043512D+01
⋮	0.2292401409056502D+01
⋮	0.2409997301484080D+01
⋮	0.2511528851029609D+01
⋮	0.2600722357990357D+01
⋮	0.2680155181363285D+01
⋮	0.2751691857926629D+01
⋮	0.2816679953085320D+01
⋮	0.2876199869474650D+01
⋮	0.2931063293593240D+01
S_{15}	0.2981911307312069D+01

Théorème 5.3 $\theta = 0.1$

$k=1$	0.1204287286070503D-01
	0.5968841159326627D-02
	0.3528523288368594D-02
	0.2317692891754639D-02
	0.1632266072891290D-02
	0.1209603536137970D-02
	0.9392755587710940D-03
	0.7366429074593533D-03
	0.5870912003568120D-03
	0.4733309227502501D-03
	0.4141139164763591D-03
	0.3523298063934370D-03
	0.3932482598425042D-03
$k=2$	-0.5409535211715395D-04
	-0.1967736563119986D-04
	-0.8733402522136317D-05
	-0.4422246057216507D-05
	-0.2472521636188596D-05
	-0.1483829558013866D-05
	-0.9421095329992946D-06
	-0.6258213864282491D-06
	-0.4314043774208270D-06
	-0.3067166301374408D-06
	-0.2238480459337938D-06
$k=3$	0.3139699372156635D-06
	0.8523563921584096D-07
	0.3394194268021294D-07
	0.1425930111140228D-07
	0.6572585012301724D-08
	0.3395835506379242D-08
	0.1848760663658020D-08
	0.1062335849329673D-08
	0.6417471398040275D-09
$k=4$	-0.1220554541117580D-08
	-0.3435731819267402D-09
	-0.1120406319904479D-09
	-0.4172587716196285D-10
	-0.1586351453543202D-10
	-0.9304521647235947D-11
	0.6032492354833236D-11
$k=5$	0.1002826917545121D-10
	0.1323277541580745D-11
	0.4226601784104860D-11
	-0.7159348398166658D-11
	-0.2062281375376999D-10

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,2}}$$

$S \simeq 5.591582441177...$

S_1	0.1000000000000000D+01
S_2	0.1435275281643062D+01
⋮	0.1702855902234806D+01
⋮	0.1892322373048650D+01
⋮	0.2037276305784440D+01
⋮	0.2153747422746074D+01
⋮	0.2250549031303286D+01
⋮	0.2333019295726592D+01
⋮	0.2404617630724065D+01
⋮	0.2467713345172084D+01
⋮	0.2523990095234252D+01
⋮	0.2574687113725320D+01
⋮	0.2620741179536237D+01
⋮	0.2662876505418836D+01
S_{15}	0.2701663839362349D+01

Théorème 5.3 $\theta = 0.2$

$k=1$	0.1094955349413187D-01
	0.5256239469115347D-02
	0.3032331532819328D-02
	0.1952191159358390D-02
	0.1353461537941292D-02
	0.9884553764528218D-03
	0.7509095130515039D-03
	0.5879924211711273D-03
	0.4718774462093281D-03
	0.3863422041737577D-03
	0.3216273528907694D-03
	0.2715552429784167D-03
	0.2320667435387597D-03
$k=2$	-0.5392888711198700D-04
	-0.1915421018267875D-04
	-0.8332071792610703D-05
	-0.4155677483103920D-05
	-0.2286259578612531D-05
	-0.1355356793963924D-05
	-0.8510299128788346D-06
	-0.5596942015450093D-06
	-0.3823288807032130D-06
	-0.2695695889329705D-06
	-0.1952301292148725D-06
$k=3$	0.3971967372769410D-06
	0.9000951154119335D-07
	0.3230532095912370D-07
	0.1340764983624431D-07
	0.6200634398247609D-08
	0.3123265051099833D-08
	0.1684169743769448D-08
	0.9605665349138398D-09
	0.5739176078822794D-09
$k=4$	-0.1274290923835303D-08
	-0.3469258357914315D-09
	-0.1111009255380175D-09
	-0.4017535656519330D-10
	-0.1627540116566628D-10
	-0.6118653327058521D-11
	-0.3743233581670340D-11
$k=5$	0.7944771576728904D-11
	0.2713640943896589D-11
	0.2721933175511890D-12
	0.3543168362873939D-11
	-0.2639869358633723D-11

$$S_n = \sum \frac{1}{i^{1,4}}$$

$S \simeq 3.105\,547\,277\,977\cdots$

S_1	0.100000000000000000+01
S_2	0.137822914162760000+01
⋮	0.159372714662001890+01
⋮	0.173731444399464700+01
⋮	0.184237555317079390+01
⋮	0.192376977682589500+01
⋮	0.198936256967724390+01
⋮	0.204377197988325100+01
⋮	0.208991016283197400+01
⋮	0.212972279788732400+01
	0.216455864317935000+01
⋮	0.219540093569176500+01
⋮	0.222297356402037000+01
⋮	0.224782900602397000+01
S_{45}	0.227039522332101900+01

Théorème 5.3 $\theta = 0.4$

k = 1	0.904450897319499500-02
	0.407437906498291100-02
	0.223897684490220200-02
	0.139633140574341900-02
	0.929668141955922800-03
	0.659995944240872100-03
	0.489025501113921800-03
	0.374605166290147100-03
	0.294703169805152500-03
	0.236951939319023600-03
	0.194010414061405500-03
	0.161311949597153000-03
	0.135903540531597500-03
k = 2	-0.508925932135013100-04
	-0.172103135973207500-04
	-0.719714470165172200-05
	-0.347336209160985100-05
	-0.185313723850494500-05
	-0.107423413937216700-05
	-0.659790121484847900-06
	-0.425367211768449400-06
	-0.283536665511037300-06
	-0.197833764363297700-06
	-0.141131951687614200-06
k = 3	0.234635997792517300-06
	0.539577985115917300-07
	0.231982437400074600-07
	0.114022435165627700-07
	0.515312573905539100-08
	0.254165198989299300-08
	0.134461828173515300-08
	0.753510770449849900-09
	0.443161819973549800-09
k = 4	-0.126316134391989600-09
	-0.328309116274484800-09
	-0.101590519416766400-09
	-0.359262372455482200-10
	-0.139965293257024600-10
	-0.571011129331643700-11
	-0.204056433203976700-11
k = 5	0.645255422275714400-11
	0.190442713692292900-11
	0.923133531421926900-12
	0.909621336536674500-12
	0.156063157498429600-11

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,6}}$$

$S \simeq 2.285\,765\,665\,680\cdots$

S_1	0.100000000000000000+01
S_2	0.132997627769324000+01
⋮	0.152350426368931900+01
⋮	0.161112758409583500+01
⋮	0.163776324164447000+01
⋮	0.174414037618392000+01
⋮	0.173359610350629600+01
⋮	0.182449227009954000+01
⋮	0.185422409605403600+01
⋮	0.187934209036913200+01
⋮	0.190000205647929400+01
	0.191967233864126600+01
⋮	0.193613025331149700+01
⋮	0.195094331593274000+01
S_{45}	0.196337109567779700+01

Théorème 5.3 $\theta = 0.6$

k = 1	0.744512061251353900-02
	0.315643924602589000-02
	0.165246697925245900-02
	0.983832662453398430-03
	0.639463364387227500-03
	0.443626566722100700-03
	0.313435522432263800-03
	0.235639360447834700-03
	0.184039792624665900-03
	0.145319653712524600-03
	0.117024512212063000-03
	0.953201745704712900-04
	0.785354265254260000-04
k = 2	-0.459329440255382900-04
	-0.147792539885009460-04
	-0.594631515156472600-05
	-0.277793397533436600-05
	-0.144502636065895070-05
	-0.815027773115135300-06
	-0.439735572345440000-06
	-0.320545079020000190-06
	-0.233945789562733820-06
	-0.139106549263464590-06
	-0.977057492772942320-07
k = 3	0.255374709208865900-07
	0.700570263193298590-07
	0.237291452338112000-07
	0.934440198526245700-08
	0.412561903693495100-08
	0.192206925966313950-08
	0.103366455629291950-08
	0.568986248741798950-09
	0.329034298659140190-09
k = 4	-0.116552161795598630-09
	-0.222213539372058570-09
	-0.881502710995569890-10
	-0.396671949119874400-10
	-0.118096232293223300-10
	-0.510395024555281300-11
	-0.214216572503512200-11
k = 5	0.528913336687956000-11
	0.119207725283172900-11
	0.663483273629324000-12
	-0.192683542732385900-12
	0.315129337317487800-12

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,7}}$$

$S \simeq 2.054\,288\,756\,8377\ldots$

S_1	0.1000000000000000D+01
S_2	0.1307786133336229D+01
⋮	0.1462273789926886D+01
	0.1557036074333786D+01
	0.1621933239201496D+01
	0.1669331500962877D+01
	0.1705269051219407D+01
	0.1735126332203933D+01
	0.1758992777203990D+01
	0.1778945400352779D+01
	0.1795913469887149D+01
	0.1810546441410375D+01
	0.1823321541081509D+01
	0.1834503630605277D+01
S_{15}	0.1844597540075689D+01

Théorème 5.3 $\theta = 0.7$

	0.6776733416559822D-02
	0.2777696635299136D-02
	0.1419474367789475D-02
	0.8298002316849219D-03
	0.5290493094351477D-03
	0.3600937139312979D-03
$k=1$	0.2570114556007517D-03
	0.1906457061093610D-03
	0.1454335025686930D-03
	0.1139013970213900D-03
	0.9038561409123873D-04
	0.7394219975376775D-04
	0.6099163211773029D-04
	-0.4299059455959359D-04
	-0.1353920016116230D-04
	-0.5344284051198330D-05
	-0.2456724169205920D-05
	-0.1260223519415321D-05
$k=2$	-0.7021725492839832D-06
	-0.4173031450879772D-06
	-0.2611696035465828D-06
	-0.1705312974132546D-06
	-0.1153579092327494D-06
	-0.8040952499225969D-07
	0.2390319654116228D-06
	0.6457891395435270D-07
	0.2154075534610499D-07
	0.8371757556722287D-08
$k=3$	0.3653267254249276D-08
	0.1745724175026414D-08
	0.8974554372223609D-09
	0.4892786774231751D-09
	0.2813503418956642D-09
	-0.1099665424258295D-09
	-0.2707375729202058D-09
	-0.2015182658208109D-10
$k=4$	-0.2710921201362866D-10
	-0.1000123312907521D-10
	-0.3307705155510823D-11
	-0.1372665479084302D-11
	0.5292777067317234D-11
	0.1795742273923847D-11
$k=5$	0.1047459712763145D-11
	0.8194379466622543D-12
	0.6499370475546057D-12

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,8}}$$

$S = 1.882\,229\,618\,1028\ldots$

S_1	0.1000000000000000D+01
S_2	0.1237174539749259D+01
⋮	0.1425529137595427D+01
	0.1528059733018733D+01
	0.1563247569477192D+01
	0.1602996703618994D+01
	0.1633114529243373D+01
	0.1656772703595098D+01
	0.1675956137227360D+01
	0.1691305110351998D+01
	0.1705155485698379D+01
	0.1716570428843916D+01
	0.1726453723566873D+01
	0.1735102501131529D+01
S_{15}	0.1742741797476361D+01

Théorème 5.3 $\theta = 0.8$

	0.6151305163764990D-02
	0.2444023564851259D-02
	0.1219228520214630D-02
	0.6981143000427799D-03
	0.4384002980592567D-03
	0.2941330756873320D-03
$k=1$	0.2073979246105741D-03
	0.1520115247911407D-03
	0.1149239165359791D-03
	0.8911786109368756D-04
	0.7058434510674944D-04
	0.5691546290570697D-04
	0.4663037923841292D-04
	-0.4006028161826699D-04
	-0.1233079671642533D-04
	-0.4775430044634717D-05
	-0.2160216002016369D-05
	-0.1092333351135214D-05
$k=2$	-0.6014938515059437D-06
	-0.3535837722905444D-06
	-0.2191179987926818D-06
	-0.1417929985734340D-06
	-0.9512987723123892D-07
	-0.6590403362489330D-07
	0.2222287226716414D-06
	0.5815938859642187D-07
	0.1944002581935785D-07
	0.7456203352006543D-08
$k=3$	0.3215713131323947D-08
	0.1520514441352011D-08
	0.7742681411380264D-09
	0.4191099129026381D-09
	0.2387851223174908D-09
	-0.1023999637537417D-08
	-0.2494161096431107D-09
	-0.7275523397944670D-10
$k=4$	-0.2422160952711416D-10
	-0.8759911849717805D-11
	-0.3143839572353202D-11
	-0.1096103676573312D-11
	0.4998303954142750D-11
	0.1776536039739516D-11
$k=5$	0.1049755895123099D-11
	0.1062687215096006D-11
	0.4454653534425537D-12

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,9}}$$

$S \simeq 1.749\ 7464351250\ldots$

S_1	0.1000000000000000D+01
S_2	0.1257943365634073D+01
	0.1391257051637840D+01
	0.1463750698825155D+01
	0.1510735456543676D+01
	0.1543964107961212D+01
	0.1568756224309948D+01
	0.1587992955767463D+01
	0.1603372250083704D+01
	0.1615941504231645D+01
	0.1626465484492639D+01
	0.1635369978311991D+01
	0.1643016172559215D+01
	0.1649652255530223D+01
S_{15}	0.1655485309527510D+01

Théorème 5.3 $\theta = 0.9$

$k=1$	0.5593275257549150D-02
	0.2150136968024119D-02
	0.1047141603130263D-02
	0.5890004074978946D-03
	0.3632539405278522D-03
	0.2403032422635743D-03
	0.1673576149329634D-03
	0.1213193605911198D-03
	0.9981300218296040D-04
	0.6978722698217916D-04
	0.5491716452785092D-04
	0.4336421968073924D-04
	0.3556235845088023D-04
$k=2$	-0.3714641319673519D-04
	-0.1117377279119748D-04
	-0.4246423810749800D-05
	-0.1893383568572140D-05
	-0.9431546194155044D-06
	-0.5129062559227620D-06
	-0.2981778941755510D-06
	-0.1929707398121336D-06
	-0.1173434195521400D-06
	-0.7907914752331474D-07
	-0.5360022036294644D-07
$k=3$	0.2364853620098850D-06
	0.5391531095479410D-07
	0.1745311236097438D-07
	0.6605792578521716D-08
	0.2815198535658936D-08
	0.1316749454046903D-08
	0.6637641478124401D-09
	0.3558426243007270D-09
	0.2008417438435772D-09
$k=4$	-0.9569177577065107D-09
	-0.2290075568414651D-09
	-0.5542074363810869D-10
	-0.2235539392309035D-10
	-0.9414517997309967D-11
	-0.3435697291547195D-11
	-0.1524325370783615D-11
$k=5$	0.3200491474945290D-11
	0.9333005951933235D-12
	0.2424332118198697D-12
	0.2184332905492070D-12
	0.1546440926703274D-13

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,05}}$$

$S \simeq 20.5208443020 3\ldots$

S_1	0.1000000000000000D+01
S_2	0.1432968164462439D+01
	0.1722485105342476D+01
	0.2031743353226678D+01
	0.2216279520144795D+01
	0.2368564157938433D+01
	0.2498276708322971D+01
	0.2610332016649325D+01
	0.2710433956631632D+01
	0.2799600950445006D+01
	0.2830246666613366D+01
	0.2953343595425808D+01
	0.3021537277732702D+01
	0.3034106613574699D+01
S_{15}	0.3142339200442435D+01

Théorème 5.3 $\theta = 0.05$

$k=1$	0.1262855272673735D-01
	0.5360252510438313D-02
	0.3806159732505851D-02
	0.2524913829523435D-02
	0.1793642179544239D-02
	0.1338908338624114D-02
	0.1035499377126903D-02
	0.8245109489542823D-03
	0.6716510675636306D-03
	0.5574300293031791D-03
	0.4698285526546655D-03
	0.4013199231646773D-03
	0.3466497309801704D-03
$k=2$	-0.5350550637911302D-04
	-0.1775210013197399D-04
	-0.8856735051035685D-05
	-0.4529915655047956D-05
	-0.2547112776783017D-05
	-0.1538175872610458D-05
	-0.9820803591349533D-06
	-0.6556536771111510D-06
	-0.4540325362959999D-06
	-0.3241541646006874D-06
	-0.2374862165239982D-06
$k=3$	0.3158694173617527D-06
	0.9444252941498421D-07
	0.3459122245239032D-07
	0.1462449222436284D-07
	0.6885151483978764D-08
	0.3524372223964470D-08
	0.1931149417461198D-08
	0.1117022103286347D-08
	0.6807173609513217D-09
$k=4$	-0.1165041105255504D-08
	-0.5310632913644529D-09
	-0.1046785123859362D-09
	-0.3623248576147803D-10
	-0.8054307221172508D-11
	-0.8420833474964695D-11
	0.2140837354214261D-10
$k=5$	0.1832611146168617D-10
	0.5630357291508403D-11
	0.1762032880714415D-10
	-0.8461072120713453D-11
	-0.8013777141797850D-11

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,15}}$$

$S \simeq 7.254694\,58406\ldots$

S_1	0.10000000000000000D+01
S_2	0.14506252313054150D+01
⋮	0.17333153037099760D+01
⋮	0.19363784027990350D+01
⋮	0.20934814088453880D+01
⋮	0.22208636321104380D+01
⋮	0.23275620141553000D+01
⋮	0.24190673701519020D+01
⋮	0.24989510471879950D+01
⋮	0.25697756256264110D+01
⋮	0.26332207732259910D+01
⋮	0.26906246954101720D+01
⋮	0.27422905359796840D+01
⋮	0.27910592417073940D+01
S_{15}	0.28354707018616120D+01

Théorème 5.3 $\theta = 0.15$

	0.11433590949984940D-01
	0.56013195650932960D-02
	0.32710694336897110D-02
	0.21275140757040640D-02
	0.14866634997821160D-02
	0.10934597993683550D-02
	0.83574355329330390D-03
k = 1	0.65313672125941780D-03
	0.53080722247769450D-03
	0.43656345559268600D-03
	0.36494267414828560D-03
	0.30931776022686090D-03
	0.26528195164671970D-03
	-0.54125574465034920D-04
	-0.19463664410965420D-04
	-0.85532534116021520D-05
	-0.43011740630113590D-05
	-0.23835314268078400D-05
k = 2	-0.14213311444157530D-05
	-0.89686319420056230D-06
	-0.59245182642587990D-06
	-0.40623407274349710D-06
	-0.23732775650668760D-06
	-0.20861952496362660D-06
	0.31204345817600230D-06
	0.92791803006121720D-07
	0.34173312656211870D-07
	0.14849498652826220D-07
	0.74438770763726740D-08
k = 3	0.42620002345047920D-08
	0.27675731472179280D-08
	0.20113142332189860D-08
	0.16073779193275790D-08
	-0.25471563139250470D-09
	0.65236655614925390D-09
	0.98765947803964850D-09
k = 4	0.95705148753927330D-09
	0.95556903003339410D-09
	0.99742511129429330D-09
	0.10032152374453430D-08
	0.10091130454192490D-08
	0.99816540796715540D-09
k = 5	0.10114126298629840D-08
	0.93779794326792070D-09
	0.95506376319806950D-09

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1/25}}$$

$S \simeq 4.595111825242\ldots$

S_1	0.10000000000000000D+01
S_2	0.14204482076268570D+01
⋮	0.16737267695107210D+01
⋮	0.18505034649073590D+01
⋮	0.19842515259026430D+01
⋮	0.20907420431770210D+01
⋮	0.21785692221700590D+01
⋮	0.22523943668577290D+01
⋮	0.23170443967676880D+01
⋮	0.23732785292867230D+01
⋮	0.24231967553572780D+01
⋮	0.24679275025165930D+01
⋮	0.25084813015181890D+01
⋮	0.25454079554359010D+01
S_{15}	0.25792834719725420D+01

Théorème 5.3 $\theta = 0.25$

	0.10439661182462940D-01
	0.49322452374043570D-02
	0.29102573991398010D-02
	0.17926248337134100D-02
	0.12321777471467320D-02
	0.99352902250116390D-03
k = 1	0.67450362496035950D-03
	0.52532226147089700D-03
	0.41948921986671370D-03
	0.34189759332741360D-03
	0.28344767097821930D-03
	0.23340326882516940D-03
	0.20301063376988290D-03
	-0.53465019753167790D-04
	-0.13754802216143510D-04
	-0.80773528725822490D-05
	-0.39954067579750850D-05
	-0.21831394285910890D-05
k = 2	-0.12853308326675960D-05
	-0.80291743352004650D-06
	-0.52542662500824210D-06
	-0.35729712790071730D-06
	-0.25087544358419480D-06
	-0.19099522190121590D-06
	0.30253549357131450D-06
	0.87983273741251700D-07
	0.31355621836577050D-07
	0.12925393986021330D-07
	0.59451236832791520D-08
k = 3	0.29785953842287330D-08
	0.15982538096800950D-08
	0.90725925903922810D-09
	0.53968365974071950D-09
	-0.12943475354420990D-08
	-0.34548931944489160D-09
	-0.10999263218985920D-09
k = 4	-0.40124113233341860D-10
	-0.16296458973241160D-10
	-0.62976769741120190D-11
	-0.37920578135897110D-11
	0.70162573667653660D-11
	0.14048215715711900D-11
k = 5	0.42216577456066770D-12
	0.11074136399559120D-11
	-0.16970036487151670D-11

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{3/2}+1}$$

$S \simeq 0.8095391\ldots$

[30]

S_1	0.5000000000000000D+00
S_2	0.6502211048233480D+00
⋮	0.7105039860955576D+00
⋮	0.7408070163985879D+00
⋮	0.7583911239522033D+00
⋮	0.7695942554300418D+00
⋮	0.7772497725216856D+00
⋮	0.7827426943327696D+00
⋮	0.7868410549950630D+00
⋮	0.7899833641717665D+00
⋮	0.7924789936640790D+00
⋮	0.7944796773556499D+00
⋮	0.7961181133435930D+00
⋮	0.7974793343010396D+00
S_{45}	0.7986260695591557D+00

Théorème 5.3 $\theta = 3/2$

$k=1$

0.9495871736096898D-02
0.2518325720236559D-02
0.9973651352963636D-03
0.4731510408900497D-03
0.2537654774112042D-03
0.1486905481168932D-03
0.9310099941978460D-04
0.6139202532418845D-04
0.4218759251710753D-04
0.2998051335807745D-04
0.2120549429871735D-04
0.1639193567705666D-04
0.1249462056771822D-04

$k=2$

-0.1113554293034764D-03
-0.3226442406755879D-04
-0.1232199761704652D-04
-0.5713036713455850D-05
-0.3067602438032856D-05
-0.1353401989200510D-05
-0.1235776125833019D-05
-0.8955624786325701D-06
-0.6959133862026244D-06
-0.5725754571578442D-06
-0.4930739016840047D-06

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ln}\,\frac{i+1}{i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{i+2}{i+1}$$

$S \simeq 0.684724788\ldots$

[33]

S_1	0.2810469965003776D+00
S_2	0.3976922331080497D+00
⋮	0.4618364384043719D+00
⋮	0.5025703180685103D+00
⋮	0.5306753099956259D+00
⋮	0.5512599649681320D+00
⋮	0.5669862977255539D+00
⋮	0.5793966799805460D+00
⋮	0.5894396037896740D+00
⋮	0.5977316797755819D+00
⋮	0.6046963049823470D+00
⋮	0.6106291077396137D+00
⋮	0.6157410395395740D+00
⋮	0.6201937274333763D+00
S_{45}	0.6241063508693360D+00

Théorème 5.3 $\theta = 1$

$k=1$

-0.1509760334715993D-02
-0.6674017014713795D-03
-0.3545948698054117D-03
-0.2111470379974530D-03
-0.1359794295746510D-03
-0.9274587944041723D-04
-0.6610119635197889D-04
-0.4877914470702250D-04
-0.3702757430228728D-04
-0.2877254993176341D-04
-0.2260296459736513D-04
-0.1337872542475943D-04
-0.1522995957725214D-04

$k=2$

-0.3740575334494765D-05
-0.1415603651946733D-05
-0.6265190139327714D-06
-0.3103981075916340D-06
-0.1672546737092714D-06
-0.9630583734705597D-07
-0.5845163955024019D-07
-0.3702103528695576D-07
-0.2427799076133703D-07
-0.1638989359173073D-07
-0.1131147992904525D-07

$k=3$

0.1726790520706300D-07
0.6880171925563970D-08
0.3064500418565510D-08
0.1645089472914554D-08
0.1071058040760624D-08
0.5185938399990645D-09
0.6997924624758874D-09
0.6399276992639577D-09
0.6021990992434411D-09

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{i}\right) \ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{i}}\right)$$

$S \simeq -0.852090754\ldots$

[33]

S_1	-0.5180315123095289D+00
S_2	-0.6494495722171224D+00
	-0.7073114681939552D+00
	-0.7336185262859768D+00
	-0.7601353022547134D+00
	-0.7744117298768939D+00
	-0.7849331614992637D+00
	-0.7927932944729378D+00
	-0.7990710156089415D+00
	-0.8041481690831638D+00
	-0.8083392332437409D+00
	-0.8113562658291379D+00
	-0.8149506179021117D+00
	-0.8174304239023939D+00
S_{15}	-0.8136741117769329D+00

Théorème 5.3 $\theta = 1$

k=1	-0.4115434061956912D-02
	-0.1521594259417920D-02
	-0.7136156955522380D-03
	-0.3949563306841640D-03
	-0.2394799962559280D-03
	-0.1559423146947178D-03
	-0.1071329289489039D-03
	-0.7673370376007176D-04
	-0.5632511849965539D-04
	-0.4324591317909539D-04
	-0.3367722952003127D-04
	-0.2672487795830731D-04
	-0.2156499434157446D-04
k=2	0.2834419550735027D-04
	0.2280950931932422D-05
	0.3066599630265208D-05
	0.1335420673277978D-05
	0.6537472330020184D-06
	0.3426016420812534D-06
	0.2002977346712753D-06
	0.1212703721455326D-06
	0.7631297243267454D-07
	0.5051340465278392D-07
	0.3423471535198239D-07
k=3	-0.1771405259596518D-06
	-0.4452715952223313D-07
	-0.1416335234037257D-07
	-0.5375566560351756D-08
	-0.2367245537491691D-08
	-0.1193732423044490D-08
	-0.6265657341026630D-09
	-0.4626523571233009D-09
	-0.3462022850472465D-09

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1+i^2+i^4}{i^2(1+i^4)}$$

$S \simeq 2.223411647\ldots$

[33]

S_1	0.1500000000000000D+01
S_2	0.1808823529411765D+01
	0.1932129769474095D+01
	0.1989520913057753D+01
	0.2040113257147210D+01
	0.2063567244048119D+01
	0.2089491527946972D+01
	0.2105360639981293D+01
	0.2117959682557472D+01
	0.2127953367559471D+01
	0.2136291430148179D+01
	0.2143224027476683D+01
	0.2149236267953159D+01
	0.2156364339753476D+01
S_{15}	0.2159825536593736D+01

Théorème 5.3 $\theta = 1$

k=1	-0.4051330179776151D-02
	-0.3610651649193341D-02
	-0.2115920122457146D-02
	-0.1273357709519730D-02
	-0.3113326033238953D-03
	-0.5442953110496169D-03
	-0.3812936983233677D-03
	-0.2759163041610731D-03
	-0.2070115372344924D-03
	-0.1587351668399719D-03
	-0.1242624824722204D-03
	-0.9906830115450044D-04
	-0.8072623256525367D-04
k=2	-0.4472571598361938D-02
	0.4524068450254479D-03
	0.9163129212165153D-04
	0.3105513331604235D-04
	0.1327244013300073D-04
	0.6331290058216319D-05
	0.3542364739528050D-05
	0.2064962808427513D-05
	0.1272892522118842D-05
	0.8206962535143789D-06
	0.5492335509427140D-06
k=3	0.4536851044398785D-04
	0.4038319211965367D-05
	0.8231639391063692D-06
	0.2316095278755772D-06
	0.8303469958836907D-07
	0.3435716110743170D-07
	0.1562756089567567D-07
	0.7674577153036349D-08
	0.3906641335947592D-08

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{i(i+1)(i+2)}$$

$$S = \frac{3}{4}$$

[33]

S_1	0.16666666666666670D+00
S_2	0.29166666666666670D+00
	0.37500000000000000D+00
	0.43333333333333330D+00
	0.47619047619047620D+00
	0.50392857142857140D+00
	0.53472222222222220D+00
	0.55555555555555560D+00
	0.57777777777777770D+00
	0.58712121212121210D+00
	0.59235974358974400D+00
	0.60989010989010990D+00
	0.61904761904761900D+00
	0.62703333333333330D+00
S_{15}	0.63412117647058820D+00

Théorème 5.3 $\theta = 1$

$k=1$	0.41666666666666670D-01
	0.13888888888888890D-01
	0.64102564102564110D-02
	0.35014005602240900D-02
	0.21255304213605330D-02
	0.13888888888888890D-02
	0.95785440613026580D-03
	0.65870523415977950D-03
	0.51187551187551190D-03
	0.39089292330831760D-03
	0.30525033525033500D-03
	0.24295432458697400D-03
	0.19654083050315000D-03
$k=2$	0.18355359765051430D-03
	0.47343104950196030D-04
	0.16500473893600400D-04
	0.69457101072033540D-05
	0.33306587752467740D-05
	0.17575311204610190D-05
	0.99302710001818590D-06
	0.60065185622352760D-06
	0.37895964641013710D-06
	0.24864265966329390D-06
	0.16863119701342670D-06
$k=3$	-0.43674481787985230D-06
	-0.10817161875357070D-06
	-0.31611162411857370D-07
	-0.11146200071861930D-07
	-0.45085755165071360D-08
	-0.20254937751265450D-08
	-0.98836695187401800D-09
	-0.51610495459971320D-09
	-0.28483383322246000D-09
$k=4$	0.15219623406554760D-08
	0.31399682973691320D-09
	0.81992269141536860D-10
	0.25571879165334130D-10
	0.21324206226775510D-11
	0.39274522881990510D-11
	0.15845218439680780D-11
$k=5$	-0.45323034478174350D-11
	-0.83554233523617D-12
	-0.21955759389783400D-12
	-0.64149447839363600D-13
	0.17830777906772840D-13

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(i + e^{1/i}\right)^{-\sqrt{2}}$$

$S \simeq 1.1437967355403 0\cdots$

[33]

S_1	0.15610405272510140D+00
S_2	0.31643339627935590D+00
	0.43963972244843800D+00
	0.53460690556872650D+00
	0.60993972462489710D+00
	0.67152736522996800D+00
	0.72295056611922520D+00
	0.76675100159357680D+00
	0.80464651133142470D+00
	0.83785984695142250D+00
	0.86731004562877000D+00
	0.89364630454816190D+00
	0. 17304592414656590D+00
	0.93325720917562860D+00
S_{15}	0.95365917362967290D+00

Théorème 5.3 $\theta = 1$

$k=1$	0.41933372132324000D+00
	0.14047515296205730D+00
	0.68849739261893030D-01
	0.40133486734640940D-01
	0.25934029765716060D-01
	0.17251694953239290D-01
	0.13059439481104020D-01
	0.99351541323502610D-02
	0.76758758203187660D-02
	0.61167411336767060D-02
	0.49712122750387250D-02
	0.41075197740960000D-02
	0.34419637529524500D-02
$k=2$	0.14052933670935010D-02
	0.30934770514989130D-03
	0.92695990852591010D-04
	0.33629734282388700D-04
	0.13889575309893480D-04
	0.62895023910357080D-05
	0.30436837354635290D-05
	0.15442504964604050D-05
	0.50334824281138930D-06
	0.42990130982356000D-06
	0.22816290773492050D-06
$k=3$	-0.21773133466072070D-04
	-0.63924763473264780D-05
	-0.27331477120693440D-05
	-0.12672703942344250D-05
	-0.65910478234542000D-06
	-0.37441960468328170D-06
	-0.22519268470639070D-06
	-0.14737289807192460D-06
	-0.99956293285151130D-07
$k=4$	-0.20836007563968320D-06
	-0.11187273561935430D-06
	-0.63459579713927990D-07
	-0.39057633971998320D-07
	-0.26039340147217950D-07
	-0.18678448651058720D-07
	-0.14321476228012990D-07
$k=5$	-0.32215822635441040D-08
	-0.84472555563983980D-09
	-0.73576765786316640D-08
	-0.71028394424757500D-08
	-0.67433352675022100D-08

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^4}$$

$S = 1.082323233711138$

S_1	0.1000000000000000D+01
S_2	0.1062500000000000D+01
	0.1074845679012346D+01
	0.1078751929012346D+01
	0.1080351929012346D+01
	0.1081123533950617D+01
	0.1081540027078481D+01
	0.1081784167703481D+01
	0.1081936583493757D+01
	0.1082036583493757D+01
	0.1082104834839293D+01
	0.1082153110147935D+01
	0.1082188129927600D+01
	0.1082214153748091D+01
S_{15}	0.1082233906834511D+01

	Théorème 5.3 $\theta = 3$	Nombre de chiffres exacts donnés par la méthode de MATOS cf. P 88
1ère étape	0.6895868016825128D-03	4,528
	0.1414929202552980D-03	4,779
	0.4206476823568283D-04	5,121
	0.1577925550474784D-04	5,439
	0.6936740233431547D-05	5,725
	0.3420702642575922D-05	5,982
	0.1840009922120548D-05	6,213
	0.1059388124023241D-05	6,424
	0.6441875600117410D-06	6,616
	0.4096734107271807D-06	6,793
	0.2704730057614263D-06	6,958
	0.1843299256697658D-06	7,110
	0.1290903835968454D-06	7,253
2ème étape	-0.4370087130226405D-05	5,929
	-0.9346323915500546D-06	6,503
	-0.2162526065981139D-06	6,992
	-0.6934464290723417D-07	7,428
	-0.2599449799444049D-07	7,808
	-0.1097467903477735D-07	8,147
	-0.5087583360022598D-08	8,453
	-0.2543120390740210D-08	8,731
	-0.1352559650651813D-08	8,986
	-0.7576799868937167D-09	9,222
	-0.4435574941195897D-09	9,441
3ème étape	0.2184958984034161D-07	7,963
	0.4016530730840268D-09	8,602
	0.9551859136546631D-09	9,158
	0.2751320996117329D-09	9,648
	0.9185274784696829D-10	10,086
	0.3446764119778567D-10	10,421
	0.1421944918582330D-10	10,840
	0.6343648913456623D-11	11,170
	0.3022125301746503D-11	11,474
4ème étape	-0.9390683998839200D-10	10,172
	-0.1638737799972145D-10	10,849
	-0.3680671436037675D-11	11,442
	-0.9812547824454798D-12	11,973
	-0.2998927776964359D-12	12,454
	-0.1022302511279523D-12	12,851
	-0.3892155694962263D-13	13,293
5ème étape	0.3264305358897632D-12	12,503
	0.5785931629642693D-13	13,192
	0.1373684152539134D-13	13,812
	0.2265115175756716D-14	14,373
	0.5195496810550537D-15	14,886

b) Calcul intégral

(i) Calcul d'intégrales de fonction suffisamment différentiables

Les algorithmes des théorèmes 5.4 et 5.8 ont été appliqués pour le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

On trouvera, dans [4, 29], des algorithmes plus performants. Mais ceux que nous avons proposés au chapitre 5 ont un double intérêt : ils donnent des suites aternativement croissantes et décroissantes d'une étape à la suivante, ce qui permet un encadrmeent de la valeur de l'intégrale ; de plus ces algorithmes nécessitent beaucoup moins d'évaluations de fonctions.

(ii) Calcul d'intégrales singulières.

Pour certains types d'intégrales singulières, KAHANER [18] propose l'application de l'ε-algorihtme à la suite (S_n) définie au chap. 5, paragraphe 2, avec $h_n = \frac{b-a}{2^n}$. Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)dx, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

avec $f(0) = f(1) = 0$.

Nous avons vu au chapitre 5, paragraphe 4 que l'on pouvait appliquer, pour le calcul de I, les algorithmes de $LOGF_2''$. Nous avons donc expérimenté les algorihtmes des théorèmes 3.2 et 4.1.

La méthode de KAHANER est légèrement meilleure que le Δ^2 modifié itéré avec les mêmes remarques que précédemment sur les évaluations de fonctions et l'encadrement de la valeur de l'intégrale. Nous avons aussi essayé l'algorithme du thérème 5.10 pour l'intégrale

$$I = \int_0^1 \quad dx/\sqrt{x}.$$

Dans tous les exemples, seules sont présentées les suites d'erreur pour les transformations.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0,69314718055994 5\ldots$$

Chap. 5
§ 2

S_1	0.7500000000000000D+00
S_2	0.7083333333333333D+00
⋮	0.7000000000000000D+00
	0.6970238095238095D+00
	0.6956349206349206D+00
	0.6948773448773449D+00
	0.6944194694194694D+00
	0.6941218503718504D+00
	0.6939176020058373D+00
	0.6937714031754279D+00
	0.6936631780672028D+00
	0.6935808328761620D+00
	0.6935167303120594D+00
	0.6934658552611844D+00
S_{15}	0.6934248043580645D+00

	Théorème 5.4	Théorème 5.8
k = 1	-0.4398472266119764D-03	-0.1263472266119761D-03
	-0.9162500433975377D-04	-0.2076332638521912D-04
	-0.2962103613573606D-04	-0.5503381814727966D-05
	-0.1225992502467451D-04	-0.1929346512278196D-05
	-0.5946793711543376D-05	-0.8103703058872595D-06
	-0.3221344557521312D-05	-0.3868774373481541D-06
	-0.1892638094938750D-05	-0.2031335966639402D-06
	-0.1193492379615243D-05	-0.1147857479953850D-06
	-0.7773845173656303D-06	-0.4876773731739113D-07
	-0.5314183623044474D-06	-0.4320576723812735D-07
	-0.3754615611038402D-06	-0.2723933983705932D-07
	-0.2727330929776532D-06	-0.1908255445001207D-07
	-0.2028427813424436D-06	
k = 2	0.3071965307214911D-05	0.1198645946237902D-06
	0.5819277174099580D-06	0.1665033244548069D-07
	0.1572935183711535D-06	0.3401977359705166D-08
	0.5359031303811025D-07	0.9016972298191510D-09
	0.2147799521763118D-07	0.2882661369807069D-09
	0.9206785585308639D-08	0.1061419903073805D-09
	0.4310913419701045D-08	0.4363857929526316D-10
	0.2565565358066512D-08	0.1960191579365722D-10
	0.1451918458400016D-08	0.9463869466742880D-11
	0.8631019110137347D-09	
	0.5347530827436858D-09	
k = 3	-0.1669429398805140D-07	-0.6374195572408925D-10
	-0.3024597927257962D-08	-0.8256959701838221D-11
	-0.7343714650902936D-09	-0.1461046995193671D-11
	-0.3200289609874976D-09	-0.3265244625932561D-12
	-0.7697026186987560D-10	-0.8029026662276229D-13
	-0.3037351340165912D-10	-0.4270003152073461D-13
	-0.1319322957094169D-10	
	-0.6193736738087935D-11	
	-0.3106985509340512D-11	
k = 4	0.7373236411192110D-10	
	0.1303392547270115D-10	
	0.2970207196514862D-11	
	0.9127201168994791D-12	
	0.2548081103753780D-12	
	0.9235108291614370D-13	
	0.2040262490204947D-13	
k = 5	-0.2772463248562613D-12	
	-0.4823561255279385D-13	
	-0.1539122562038697D-13	
	0.1767769958194165D-13	
	-0.7719963299987511D-13	

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi \simeq 3.141592653589793\ldots$$

S_1	0.0000000000000000D+00	0.0000000000000000D+00
S_2	0.1000000000000000D+01	0.1000000000000000D+01
	0.1654700538379252D+01	0.1414213562373095D+01
	0.2099676994702402D+01	0.1654700538379252D+01
	0.2408148844780479D+01	0.1816496580927726D+01
	0.2624127674955336D+01	0.1934867305519797D+01
	0.2776097417850416D+01	0.2026302382151028D+01
	0.2883292354171016D+01	0.2099676994702402D+01
	0.2958997568307128D+01	0.2160247381302386D+01
	0.3012496384292307D+01	0.2211350737602514D+01
	0.3050314152035599D+01	0.2255221187967909D+01
	0.3077051249474079D+01	0.2293418223266583D+01
	0.3095955782148680D+01	0.2327067872845312D+01
	0.3109322792707058D+01	0.2357006239069253D+01
S_{15}	0.3118774515261210D+01	0.2383868913375266D+01

	Méthode de Kahaner p.102	Théorème 3.2	Théorème 4.1
1ère étape	-0.2455557026306095D+00	-0.2027231003015043D-01	-0.6458555442218955D-02
	-0.9779877569157544D-01	-0.7211168983232922D-02	-0.1818512416161391D-02
	-0.3636196733830173D-01	-0.3499837629892207D-02	-0.7305497714507757D-03
	-0.1313659653050861D-01	-0.2002838538620285D-02	-0.3538145627505936D-03
	-0.4690172941774892D-02	-0.1270447964499232D-02	-0.1993357064141300D-03
	-0.1665927282217858D-02	-0.8648682336309453D-03	-0.1129696065794833D-03
	-0.5903215119072848D-03	-0.6199181531769378D-03	-0.8081182354724827D-04
	-0.2089417641027618D-03	-0.4621601768685967D-03	-0.4943956426248144D-04
	-0.7391273945038176D-04	-0.3553905853061852D-03	-0.3181901605538032D-04
	-0.2613926531401306D-04	-0.2802199775613599D-03	-0.3083682444667869D-04
	-0.9242890489678975D-05	-0.2255656979058811D-03	-0.1810035001101632D-04
	-0.3268078638037335D-05	-0.1847510924129618D-03	-0.1042657566477541D-04
	-0.1155479752542026D-05	-0.1535754186161886D-03	
2ème étape	-0.3663921951440035D-04	0.4715106958955899D-04	
	-0.3570096558394424D-03	0.1282560585773610D-04	
	-0.1030755194651473D-03	0.4650521534410416D-05	
	-0.2202761661278859D-04	0.2030869374224174D-05	
	-0.4235259728316981D-05	0.1008660396199790D-05	
	-0.7786707715346288D-06	0.5504215256982303D-06	
	-0.1403490521483322D-06	0.3227335455898046D-06	
	-0.2504551159217619D-07	0.2002522297042501D-06	
	-0.4448224723025557D-08	0.1300714109948344D-06	
	-0.7881765071333924D-09	0.8773663392027189D-07	
	-0.1394931865329740D-09	0.6108532038268805D-07	
3ème étape	-0.2159100023052521D-03	-0.2897728553245479D-06	
	0.1488965135227000D-04	-0.6107612077199676D-07	
	0.6585404168099954D-06	-0.1797077377706235D-07	
	0.4341592910401051D-07	-0.6479057674917132D-08	
	0.3299268821251727D-08	-0.2693430681613429D-08	
	0.2695951300743515D-09	-0.1245463651915885D-08	
	0.2288934970381962D-10	-0.6258889144808433D-09	
	0.1982762044827613D-11	-0.3360426958400053D-09	
	0.1735577827289726D-12	-0.1907380581603335D-09	
4ème étape	-0.2333896906396571D-06	0.2126903583810069D-09	
	-0.3124564198521418D-08	0.1088572175109159D-09	
	0.6563638955264794D-10	0.3477484749811466D-10	
	0.8309393537825338D-11	0.1216601862655264D-10	
	0.5053149738920570D-12	0.4116826671229923D-11	
	0.2620299810462967D-13	0.2535045957874349D-11	
	0.1279792244018889D-14	0.1607967231587182D-12	
5ème étape	0.1263502765955216D-09		
	0.9394421005004533D-11		
	-0.6997614293569043D-12		
	-0.4168540512772267D-14		
	-0.5767955557622884D-16		

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

chap. 5
§ 2

s_1	0.5000000000000000D+00
s_2	0.9571067811865475D+00
	0.1152265226320155D+01
	0.1267228525188087D+01
	0.1345247049013936D+01
	0.1402657349854512D+01
	0.1447188613998624D+01
	0.1483036302383880D+01
	0.1512701155536387D+01
	0.1537773948868556D+01
	0.1559342373192404D+01
	0.1578142739023099D+01
	0.1594724076356844D+01
	0.1609491322968612D+01
s_5	0.1622752953357852D+01

Théorème 5.8

	-0.2122325876797972D-01
	-0.8429914249781369D-02
	-0.4446547001999723D-02
	-0.2721925237691376D-02
	-0.1827628740210155D-02
	-0.1307169960611057D-02
$k=1$	-0.9788597024521077D-03
	-0.7590439867210638D-03
	-0.6049566516612068D-03
	-0.4929322973661499D-03
	-0.4090349648776094D-03
	-0.3446355979380823D-03
	-0.2941651836938044D-03
	0.1203405230818709D-02
	0.6201414530798603D-03
	0.3729164790443047D-03
	0.2469629150476747D-03
	0.1746815691335561D-03
$k=2$	0.1296049437418791D-03
	0.9971321887029035D-04
	0.7893169175812427D-04
	0.6393148261065774D-04
	0.5276880644256932D-04
	0.4424900470702915D-04
	0.1734634460724867D-04
	0.1224144351817799D-04
	0.8710192125142499D-05
	0.6465420001845138D-05
	0.4978173781480606D-05
$k=3$	0.3947469610382504D-05
	0.3205213708635038D-05
	0.2653445853568 41D-05
	0.2232314692616599D-05
	-0.2477307728341802D-05
	0.7922300632331146D-06
	0.8021711547568679D-06
$k=4$	0.6634646783367469D-06
	0.5393611585968738D-06
	0.4424794408596465D-06
	0.3679135184109054D-06
	-0.8044175313416148D-06
	0.7908337305386794D-06
$k=5$	-0.7724474099574021D-06
	0.3907355636961762D-09
	0.4739289588160875D-07

6 -CONCLUSION

Nous avons démontré dans la première partie de cette thèse que l'ε-algorithme modifié, le Δ^2 d'Aitken modifié itéré, le θ_2-algorithme itéré et le θ-algorithme donnent les mêmes résultats (asymptotiquement) pour les suites de point fixe.

Le deuxième paragraphe de ce chapitre nous permet d'afffirmer que cette propriété reste vraie pour les suites dont l'erreur est une fonction en $\frac{1}{n}$.

CHAPITRE VI

DETERMINATION DE LA CLASSE D'UNE SUITE.

CHAPITRE VI

DETERMINATION DE LA CLASSE D'UNE SUITE.

0. Introduction

Les suites que nous avons étudiées jusqu'ici sont de deux types :

$$S_{n+1} = S_n + \alpha_{p+1}(S_n - S)k^{p+1} + \mathbf{O}((S_n - S)^{p+2}) \tag{1}$$

ou

$$S_n - S \Longleftrightarrow n^{-1/p} \tag{2}$$

Mais nous avons montré, chapitre 1 théorème 1, qu'une suite de type (1) vérifie (2). Dans la suite de ce chapitre, on considère seulement les suites de type (2).

Le réel p est important à double titre : il détermine la classe de la suite et intervient dans les algorihtmes d'accélération que nous avons proposés.

Il est donc nécessaire de déterminer un procédé pour estimer p.

1. Détermination de la classe d'une suite

BJORSTAD, DAHLQUIST, GROSSE [8], ont démontré les théorèmes suivants :

Théorème 6.1 : *Soit (S_n) une suite convergeant vers S et telle que*

$$S_n - S = n^{-1/p}(c_0 + c_1 n^{-1} + c_2 n^{-2} + \ldots), p \in \mathbb{R}_+^*.$$

Alors la suite (T_n) telle que $T_n = 1 + \frac{1}{\Delta(\frac{\Delta S_n}{\Delta S_n - \nabla S_n})}$ où $\nabla S_n = S_n - S_{n-1}$, converge vers $-\frac{1}{p}$.

De plus, $T_n = -\frac{1}{p} + n^{-2}(c_0 + c_1 n^{-1} + c_2 n^{-2} + \ldots)$.

Théorème 6.2 : *Soit (S_n) une suite réelle telle que :*

$$S_n - S = O(n^{-1/p}), p \in \mathbb{R}_+^*.$$

Alors l'algorithme :

$$\begin{cases} x_n^{(0)} = 1 + \frac{1}{\Delta(\frac{\Delta S_n}{\Delta S_n - \nabla S_n})}, \forall \in \mathbb{N} \\ x_n^{(k)} = x_{n+1}^{(k-1)} - \frac{2k+1}{2k} R\left[x_n^{(k-1)}\right], \forall k \geq 1, \end{cases}$$

accélère la convergence de $(x_n^{(k-1)})$ vers $-\frac{1}{p}$. Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x_n^{(k)} = -\frac{1}{p} + O(n^{-2k-2}).$$

Remarques : Le théorème 6.1 donne la limite de la suite (T_n) tandis que le théorème 6.2 accélère la convergence de cette suite.

En pratique le théorème 6.2 permet donc d'estimer p. Mais les résultats, comme nous le verrons au chapitre suivant, ne sont pas toujours très bons.

Le théorème suivant propose un algorithme plus efficace.

Théorème 6.3 : *Soit (S_n) une suite réelle telle que :*

$$S_n - S \Longleftrightarrow n^{-1/p}, p \in \mathbb{R}_+^*.$$

*L'*algorithme *:*

$$\begin{cases} x_n^{(0)} = 1 + \frac{1}{\Delta(\frac{\Delta S_n}{\Delta S_n - \nabla S_n})}, \forall \in \mathbb{N} \\ \text{et pour } k \geq 1 \text{ et } n \in \mathbb{N}, \\ y_n^{(k)} = x_{n+1}^{(k-1)} - \frac{3k}{3k-1} R\left[x_n^{(k-1)}\right] \\ z_n^{(k)} = \hat{\theta}(x_n^{(k-1)}) \\ x_n^{(k)} = \frac{2y_n^{(k)} + (3k-1)z_n^{(k)}}{3k+1}, \end{cases}$$

accélère la convergence de $(x_n^{(k-1)})$ *vers* $-\frac{1}{p}$.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x_n^{(k)} = -\frac{1}{p} + O(n^{-3k-2}).$$

Démonstration.

Similaire à celle du thérème 5.8.

Signalons maintenant un résultat intéressant : A.M. LITOVSKY, dans sa thèse, [22, chapitre 2], a démontré le théorème suivant :

Théorème 6.4 : *Soit* (S_n) *une suite convergente dont les erreurs* $e_n = S_n - S$ *vérifient :*

$$e_{n+1} = e_n - a_n e_n^k, \text{ avec } \lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0.$$

Soit (T'_n) *la suite définie, pour tout* n, *par :*

$$T'_n = \frac{S_n - S_{[n/2]}}{S_{[n/2]} - S_{[n/4]}}.$$

$[m]$ *désigne la partie entièr'e de* m.

Alors $\lim_{n \to \infty} T'_n = 2^{-h}$ *où* $h = (k-1)^{-1}$.

En appliquant ce théorème à une suite

Conclusion

Nous disposons donc de quatre algorithmes pour l'estimation de p ; le plus efficace est celui de théorème 6.3.

2. Résultats numériques

Nous avons appliqué les algorihtmes des théorèmes 6.2 et 6.3 à diverses séries.

En réalité nous n'avons testé que l'efficacité théorique de ces algorithmes. Les suites imprimées sont les suites d'erreur.

$$S_n = \sum_{i \geq 1}^{n} \frac{2i-1}{i(i+1)(i+2)} \qquad [33]$$

$p = 1$ (chap. 5, § 1)

$T'_n = T_n + \vec{p}^{-1}$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.1500000000000000D+01
T'_1	-0.5000000000000000D+00
	-0.2272727272727273D+00
	-0.1271196440677966D+00
	-0.8064516129032271D-01
	-0.5555555555555523D-01
	-0.4054054054054103D-01
	-0.3086419753086393D-01
	-0.2427184466019418D-01
	-0.1958224543080940D-01
	-0.1612903225806452D-01
	-0.1351351351351429D-01
T'_{11}	-0.1148545176110035D-01

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(\mathcal{X}_n^{(1)} + \vec{p}^{-1})$	0.6249999999999999D-01	0.1720505617977529D-01
	0.1014610389610391D-01	0.2180872401544992D-02
	0.2942561205272383D-02	0.5215769101931083D-03
	0.1145527859240867D-02	0.1727639296033900D-03
	0.5341880341793359D-03	0.7008850096919348D-04
	0.2815315315440219D-03	0.3268102729910385D-04
	0.1621018777791879D-03	0.1687004120071904D-04
	0.9980199234875704D-04	0.9411494536804271D-05
	0.6475610261498120D-04	0.5582192820212340D-05
	0.4382889198587870D-04	0.3479227717792565D-05
	0.3071253081576007D-04	
$(\mathcal{X}_n^{(2)} + \vec{p}^{-1})$	-0.2949418850196905D-03	-0.1155855769691767D-04
	-0.5036028977607580D-04	-0.1414977225154242D-05
	-0.1265301967410583D-04	-0.2657843254128293D-06
	-0.4096618550455088D-05	-0.6652138690983831D-07
	-0.1582184713207050D-05	-0.2041456928449006D-07
	-0.6953345725134582D-06	-0.7292261263586175D-08
	-0.3372231244484899D-06	-0.2924483626185609D-08
	-0.1767334524112795D-06	
	-0.9860506658077486D-07	
$(\mathcal{X}_n^{(3)} + \vec{p}^{-1})$	0.1649974485048045D-05	0.6057176561323138D-08
	0.2595153379824234D-06	0.6749147549427875D-09
	0.5769974891585081D-07	0.1078631042990275D-09
	0.1624634846856925D-07	0.3691695733831768D-10
	0.5433231979341119D-08	
	0.2071739757612129D-08	
	0.8818713097055405D-09	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \qquad [33]$$

$p = 1$ (chap. 5, § 1)

$T'_n = T_n + \vec{p}^{-1}$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.1250000000000000D+00
T'_1	-0.5555555555555554D-01
	-0.3125000000000003D-01
	-0.1999999999999998D-01
	-0.1388888888888864D-01
	-0.1020408163265360D-01
	-0.7812499999999914D-02
	-0.6172839506172464D-02
	-0.4999999999999913D-02
	-0.4132231404958227D-02
	-0.3472222222221957D-02
	-0.2958579881659236D-02
T'_{12}	-0.2551020408163080D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(\mathcal{X}_n^{(1)} + \vec{p}^{-1})$	0.5341880341878970D-03	0.1159452867436381D-03
	0.1662234042555596D-03	0.2967006040253874D-04
	0.6756756756917323D-04	0.1023886005526516D-04
	0.3245067496598854D-04	0.4271622300167695D-05
	0.1747274253276220D-04	0.2032880070200645D-05
	0.1022578534034244D-04	0.1065882582851601D-05
	0.6376900308583755D-05	0.6020114171258629D-06
	0.4180602018353900D-05	0.3606520024947765D-06
	0.2853750960351339D-05	0.2266486580542251D-06
	0.2014049934355748D-05	0.1481965899783992D-06
	0.1461749102661756D-05	
$(\mathcal{X}_n^{(2)} + \vec{p}^{-1})$	-0.2272107900898172D-05	-0.6644733401071738D-07
	-0.5891840022833033D-06	-0.1288289930299240D-07
	-0.1961474268067070D-06	-0.3318551180598109D-08
	-0.7750691727065762D-07	-0.1042915857406984D-08
	-0.3470345482270605D-07	-0.3912329243523677D-09
	-0.1709054989499845D-07	-0.1565202490186324D-09
	-0.9072469733481005D-08	-0.5599365112199384D-10
	-0.5117256689354463D-08	
	-0.3031056832500205D-08	
$(\mathcal{X}_n^{(3)} + \vec{p}^{-1})$	0.9079432338561164D-08	0.2754140600476351D-10
	0.2112471676751770D-08	0.1073394628389734D-11
	0.6157390846542058D-09	0.2533055389143307D-12
	0.2120963613072568D-09	0.8157900548665109D-13
	0.8106447696269725D-10	
	0.3409222101673215D-10	
	0.3337169212844215D-10	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^4}$$

$p = \frac{1}{3}$ (chap. 5, § 1)

$T'_n = T_n + p^{-1}$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.1145833333333330D+00
T'_1	-0.5667789001122334D-01
	-0.3339573668384871D-01
	-0.2155055187638011D-01
	-0.1510674469943261D-01
	-0.1116178051983626D-01
	-0.8577156892582783D-02
	-0.6794082511717448D-02
	-0.5513117027163408D-02
	-0.4562363904280124D-02
	-0.3837535904153110D-02
	-0.3272430069116648D-02
T'_{12}	-0.2823400396958265D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + p^{-1})$	0.2998864888483999D-02	0.4881648554890501D-03
	0.8322807242327919D-03	0.1174753455954054D-03
	0.3244059667768699D-03	0.4047377290601086D-04
	0.1526693253608267D-03	0.1702772791344949D-04
	0.8126599424974218D-04	0.8182995080157946D-05
	0.4722182370307137D-04	0.4330061522883340D-05
	0.2930805672510657D-04	0.2465705180355947D-05
	0.1914982340242485D-04	0.1487815330930586D-05
	0.1304016942341423D-04	0.9409076455502998D-06
	0.9186296588697886D-05	0.6186187644595105D-06
	0.6657749814837472D-05	
$(x_n^{(2)} + p^{-1})$	0.3056658206615221D-05	-0.5607066293797196D-07
	0.5750351333478915D-07	-0.2370325769441173D-07
	-0.1035702217044312D-06	-0.6957521681394242D-08
	-0.6838081453852674D-07	-0.2282442908177300D-08
	-0.3825689050398822D-07	-0.6305450547173707D-09
	-0.2136029304661149D-07	-0.5218290726827571D-09
	-0.1223486891058787D-07	-0.2453167976916582D-09
	-0.7322771685249266D-08	
	-0.4552752932139061D-08	
$(x_n^{(3)} + p^{-1})$	-0.1410311047343626D-06	0.5799750203206756D-09
	-0.6987683071551327D-07	0.4928566044865024D-09
	0.1757650713052361D-06	-0.3527598352857410D-09
	0.6636791095317694D-08	-0.6001422170635526D-09
	0.1787686262802284D-08	
	0.1771196938573326D-09	
	0.8795978062667992D-10	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3}$$

$p = \frac{1}{2}$ (chap. 5, § 1)

$T'_n = T_n + p^{-1}$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.1145833333333330D+00
T'_1	-0.5349794238683126D-01
	-0.3059895833333337D-01
	-0.1973333333333332D-01
	-0.1376028806584368D-01
	-0.1013456611134220D-01
	-0.7771839895834843D-02
	-0.6147436374456822D-02
	-0.4983333333334516D-02
	-0.4120947847373737D-02
	-0.3464184670775658D-02
	-0.2952744418390073D-02
T'_{12}	-0.2546681938074940D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + p^{-1})$	0.1448051763847672D-02	0.2635714141813205D-03
	0.4162934139289435D-03	0.6494803732752530D-04
	0.1644118847910421D-03	0.2231791184233926D-04
	0.7786626526063009D-04	0.9334141334350638D-05
	0.4159592887338648D-04	0.4460048096683288D-05
	0.2422375877797164D-04	0.2348270045748131D-05
	0.1505640634619633D-04	0.1331503909231973D-05
	0.9347899644943180D-05	0.8005123168690689D-06
	0.6710973152630794D-05	0.5046756609908276D-06
	0.4730267339322762D-05	0.3309328506477397D-06
	0.3429734891158883D-05	
$(x_n^{(2)} + p^{-1})$	-0.2481217877637948D-06	-0.7712831519524023D-07
	-0.3983720918927032D-06	-0.1734952313239447D-07
	-0.1800066099741796D-06	-0.4565010174831675D-08
	-0.8102825879518051D-07	-0.1413809823499947D-08
	-0.3893850218514771D-07	-0.5026457335749988D-09
	-0.2002622527232318D-07	-0.2486740316161133D-09
	-0.1094059331503564D-07	0.5432709729129293D-10
	-0.6309123224996094D-08	
	-0.3768702958864209D-08	
$(x_n^{(3)} + p^{-1})$	-0.2945302916549557D-06	0.7772883823132376D-10
	0.3120299076037528D-07	0.1107690556032687D-10
	0.4407212100257171D-08	-0.1203884901382173D-09
	0.1129788228682732D-08	-0.3961893925851713D-09
	0.3742592941287370D-09	
	0.8126434659742887D-10	
	0.2554551994200446D-09	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\sqrt{i}}$$

$p = 2$ (chap. 5, § 1)

$T'_n = T_n + \vec{p}'$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.1618520757254999D+00
T'_1	-0.7048612059163560D-01
	-0.3938565051161460D-01
	-0.2513118757211485D-01
	-0.1742407453833918D-01
	-0.1278899083225046D-01
	-0.9785453194190162D-02
	-0.7728412344738996D-02
	-0.6258104001239241D-02
	-0.5170820697566399D-02
	-0.4344181360476140D-02
	-0.3701057830983785D-02
T'_{12}	-0.3190881074549623D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + \vec{p}')$	0.2390420309145314D-03	0.6862199001978235D-04
	0.8843623713669993D-04	0.1877498763395297D-04
	0.3794737730515455D-04	0.6575328833561492D-05
	0.1868631158497133D-04	0.2750692624621433D-05
	0.1020162986907708D-04	0.1307615173504889D-05
	0.6021571561367397D-05	0.6839395107092680D-06
	0.3776412121039158D-05	0.3851904514721831D-06
	0.2485569591062671D-05	0.2300899070908219D-06
	0.1701581551761828D-05	0.1442018273617798D-06
	0.1203500741503785D-05	0.9403609254688208D-07
	0.8749280679893126D-06	
$(x_n^{(2)} + \vec{p}')$	-0.6501683354691963D-05	-0.6512435082287223D-07
	-0.9790532603767051D-06	-0.1248753455545051D-07
	-0.2699556567073780D-06	-0.3330414854053193D-08
	-0.9731528003938940D-07	-0.1079356732897746D-08
	-0.4134051693788394D-07	-0.4417651485507518D-09
	-0.1968965175364740D-07	-0.9059286047025106D-10
	-0.1022832219399125D-07	-0.2273430289509437D-09
	-0.5656663038368717D-08	
	-0.3342087671930408D-08	
$(x_n^{(3)} + \vec{p}')$	-0.2990326791502303D-07	0.3161985777377918D-10
	-0.3723752262270452D-08	-0.9343152987395520D-10
	-0.6793682979459176D-09	0.3329399054195770D-08
	-0.1480589023779288D-09	-0.1635218631508562D-10
	-0.8373949840836947D-10	
	0.9199909228056890D-10	
	-0.1872052057642903D-09	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,9}}$$

$p = \frac{10}{9}$ (chap. 5, § 1)

$T'_n = T_n + \vec{p}'$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.1235089005540125D+00
T'_1	-0.5686870590954558D-01
	-0.3194311395436257D-01
	-0.2043040543094521D-01
	-0.1418286012592729D-01
	-0.1041789339037640D-01
	-0.7975126730120503D-02
	-0.6300754927455040D-02
	-0.5103276149732912D-02
	-0.4217378794252407D-02
	-0.3543638913969312D-02
	-0.3019345322[illegible]13877D-02
T'_{12}	-0.2603355847890308D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + \vec{p}')$	0.4690693202380346D-03	0.1050838400823476D-03
	0.1485399111347942D-03	0.2710205950733915D-04
	0.6074510893705368D-04	0.9367523623226735D-05
	0.2925819826093490D-04	0.3908676628446147D-05
	0.1577930835376098D-04	0.1859613548912953D-05
	0.9244018890606142D-05	0.9746208776530499D-06
	0.5768532223817497D-05	0.5502175597928670D-06
	0.3783546554577767D-05	0.3294776506200959D-06
	0.2583601622441114D-05	0.2069730320444687D-06
	0.1823862587301689D-05	0.1352791487911707D-06
	0.1323979990616557D-05	
$(x_n^{(2)} + \vec{p}')$	-0.2602287080510392D-05	-0.6542650736289513D-07
	-0.6225568537677768D-06	-0.1260745975477994D-07
	-0.2014941704179315D-06	-0.3256901102326529D-08
	-0.7853943996788230D-07	-0.1027406368748346D-08
	-0.3489257215756256D-07	-0.3342791605757068D-09
	-0.1709894946466672D-07	-0.1377893792987861D-09
	-0.9048817941692891D-08	-0.8369209622202667D-10
	-0.5087589067262824D-08	
	-0.3013071175374249D-08	
$(x_n^{(3)} + \vec{p}')$	0.1387796456312623D-08	0.2581884727716199D-10
	0.1117857435090075D-08	-0.1798059379339023D-10
	0.4063308040730407D-09	0.9331094705675669D-10
	0.1542937073679279D-09	-0.5579152070889215D-10
	0.5244940506216045D-10	
	0.4974766410446863D-10	
	-0.6128812735095579D-11	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,1}}$$

$p = 10$ (chap. 5 , § 1)

$T'_n = T_n + \vec{p}'$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.5104702973085423D+00
T'_1	-0.2192598005871431D+00
	-0.1219726369429126D+00
	-0.7767286728311726D-01
	-0.5379488637591270D-01
	-0.3945929218194973D-01
	-0.3017965098752988D-01
	-0.2382871961893237D-01
	-0.1929147866535852D-01
	-0.1593739907326966D-01
	-0.1338803104239322D-01
	-0.1140502849534361D-01
T'_{12}	-0.9832201842717983D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + \vec{p}')$	-0.1187400461314728D-03	0.5109626226809834D-04
	0.3182344516250435D-04	0.1933818120514186D-04
	0.2275480062091835D-04	0.7215714793654474D-05
	0.1319980999047420D-04	0.3066873009823640D-05
	0.7798525026513417D-05	0.1459167349554882D-05
	0.4816502906516279D-05	0.7595357138252129D-06
	0.3108839973843883D-05	0.4247523515080870D-06
	0.2086585544269423D-05	0.2517615392046840D-06
	0.1448516176019710D-05	0.1565039839737659D-06
	0.1035142669180214D-05	0.1013793542708336D-06
	0.7585119745825292D-06	
$(x_n^{(2)} + \vec{p}')$	0.2113162255158209D-04	-0.1497981285281808D-06
	0.2454635249501350D-03	-0.2254534280099474D-07
	-0.2331269775071587D-05	-0.7588983504114299D-08
	-0.5236128920310668D-06	-0.2924498259879171D-08
	-0.1784473882843890D-06	-0.1078457842126901D-08
	-0.7478334942620513D-07	-0.9977237248187665D-09
	-0.3566393824531999D-07	0.1331534686330182D-08
	-0.1880597838566089D-07	
	-0.1017553119368741D-07	
$(x_n^{(3)} + \vec{p}')$	0.1080999929763751D-03	0.1208252395704101D-08
	-0.2376099414291150D-06	0.7296991171024114D-09
	-0.2587940652228060D-07	-0.7182821490370195D-09
	-0.5592155662148546D-08	-0.1027015783180985D-08
	-0.1482817823389437D-08	
	-0.1102592885049436D-08	
	0.1824844227116262D-08	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,2}}$$

$p = 5$ (chap. 5 , § 1)

$T'_n = T_n + \vec{p}'$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.2900850805951101D+00
T'_1	-0.1250023962393072D+00
	-0.6961006421636853D-01
	-0.4434872083856881D-01
	-0.3072281294927831D-01
	-0.2253896672452063D-01
	-0.1724013763357520D-01
	-0.1361306096375004D-01
	-0.1102150714036077D-01
	-0.9105587585406821D-02
	-0.7649246896602472D-02
	-0.6516392532696289D-02
T'_{12}	-0.5617831388475021D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + \vec{p}')$	0.4481167728493871D-04	0.5068632163148651D-04
	0.5001578672951881D-04	0.1621373743477313D-04
	0.2547620359183780D-04	0.5870540434181615D-05
	0.1342500041758184D-04	0.2476284437112272D-05
	0.7590422404033653D-05	0.1177430592034026D-05
	0.4574379714329668D-05	0.6141124050517560D-06
	0.2907689810755301D-05	0.3444890815133481D-06
	0.1931604344926688D-05	0.2048829612294814D-06
	0.1331193514179756D-05	0.1273452198844732D-06
	0.9462228385548332D-06	0.8301708769985899D-07
	0.6905150113133487D-06	
$(x_n^{(2)} + \vec{p}')$	0.4464832211930449D-04	-0.7886176075534712D-07
	-0.4124463495271992D-05	-0.1629009385370472D-07
	-0.7132344083116138D-06	-0.4830254992857497D-08
	-0.2138688072559486D-06	-0.1698319343703948D-08
	-0.8230454140271959D-07	-0.7138970577895706D-09
	-0.3688978866128734D-07	-0.2226347821376873D-09
	-0.1839517157868620D-07	-0.3049751683831259D-09
	-0.9901435333095621D-08	
	-0.5713625081740781D-08	
$(x_n^{(3)} + \vec{p}')$	-0.4348480737673180D-06	0.1254181177315350D-09
	-0.3073027186190069D-07	-0.1253109777402117D-09
	-0.5472481644924754D-08	0.1240430343510401D-08
	-0.1389574092944268D-08	-0.1240804681224006D-09
	-0.4889119629980510D-09	
	-0.6980580696813732D-10	
	-0.2638997449386227D-09	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,4}}$$

$p = \frac{5}{2}$ (chap. 5, § 1)

$T'_n = T_n + \vec{p}$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.1824224699782209D+00
T'_1	-0.7915367122571005D-01
	-0.4417641470743211D-01
	-0.2817303362228944D-01
	-0.1952747259943127D-01
	-0.1433039625390493D-01
	-0.1096364089171948D-01
	-0.8658273265002116D-02
	-0.7010682948268954D-02
	-0.5792415450808673D-02
	-0.4866256643787389D-02
	-0.4145746072567085D-02
T'_{12}	-0.3574203939778688D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + \vec{p})$	0.1839556486107168D-03	0.6140599840249745D-04
	0.7556486422080491D-04	0.1731866357268042D-04
	0.3332510635268822D-04	0.6106869463248440D-05
	0.1660746085025431D-04	0.2558891553844801D-05
	0.9125235909932233D-05	0.1216359720097957D-05
	0.5407307668873259D-05	0.6357668862239270D-06
	0.3399389353607969D-05	0.3577268939659005D-06
	0.2241738820072878D-05	0.2134753729651599D-06
	0.1536641398514928D-05	0.1336537935243444D-06
	0.1087891081996261D-05	0.8708529312083380D-07
	0.7914716262697082D-06	
$(x_n^{(2)} + \vec{p})$	-0.1094929754841267D-04	-0.6703772310531764D-07
	-0.1260064734938653D-05	-0.1298704124753566D-07
	-0.3226268594129847D-06	-0.3528450764206381D-08
	-0.1123380760081893D-06	-0.1172263977295557D-08
	-0.4679488659759979D-07	-0.4496189848386678D-09
	-0.2201808664038796D-07	-0.1326197691331966D-09
	-0.1133298702668886D-07	-0.4154544677031913D-10
	-0.6250469974065920D-08	
	-0.3633674444235985D-08	
$(x_n^{(3)} + \vec{p})$	-0.4923927532807931D-07	0.1081784314904688D-10
	-0.6339432371844228D-08	0.1350062814478281D-12
	-0.1245479831691745D-08	0.3594392535347102D-10
	-0.3201083937851013D-09	0.3731285788156902D-09
	-0.9977084219556231D-10	
	-0.2420210993420158D-10	
	0.4243823868710361D-10	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,6}}$$

$p = \frac{5}{3}$ (chap. 5, § 1)

$T'_n = T_n + \vec{p}$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.1486444842850208D+00
T'_1	-0.6498103818664844D-01
	-0.3635442103385918D-01
	-0.2320993143553055D-01
	-0.1609632311830493D-01
	-0.1181692076243133D-01
	-0.9042721096925361D-02
	-0.7142376806029721D-02
	-0.5783885949717390D-02
	-0.4779192272538845D-02
	-0.4015288074342897D-02
	-0.3420933870087111D-02
T'_{12}	-0.2949432968717902D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + \vec{p})$	0.2934739997953811D-03	0.7665703610383015D-04
	0.1020288380864272D-03	0.2052972356097983D-04
	0.4299536429653705D-04	0.7155084948791066D-05
	0.2100036139908315D-04	0.2989971525657565D-05
	0.1141403435756514D-04	0.1421557376772272D-05
	0.6718860744542657D-05	0.7439713086902604D-06
	0.4206139446146775D-05	0.4193088909661743D-06
	0.2764938159328803D-05	0.2506694284545429D-06
	0.1891110799623992D-05	0.1572117124975549D-06
	0.1336636389411006D-05	0.1026017329662770D-06
	0.9712059482998650D-06	
$(x_n^{(2)} + \vec{p})$	-0.4661827911038542D-05	-0.6431029011210419D-07
	-0.8253373877406631D-06	-0.1229030243744302D-07
	-0.2399479520215353D-06	-0.3235348821966841D-08
	-0.8874060879436209D-07	-0.1049496005942410D-08
	-0.3825294932874833D-07	-0.3745968520183635D-09
	-0.1839337817536972D-07	-0.1960418509385636D-09
	-0.9601379505471894D-08	-0.3036076186464787D-10
	-0.5360294001851770D-08	
	-0.3143380287833064D-08	
$(x_n^{(3)} + \vec{p})$	-0.1241109105266584D-07	0.3087208223437332D-11
	-0.2103709016598302D-08	0.5786270117560943D-10
	-0.3124552305257267D-09	-0.1111998158484506D-09
	-0.6010497459983666D-10	-0.3368447315781758D-09
	0.1230298588700274D-10	
	-0.4237023969524967D-10	
	0.5978197494729731D-10	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,7}}$$

$$p = \frac{10}{7} \quad (\text{Chap } 5,\ \S 1)$$

$T'_n = T_n + \vec{p}$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.1396254486108204D+00
T'_1	-0.6127924286061348D-01
	-0.3432741479824889D-01
	-0.2192850871090893D-01
	-0.1521284059029592D-01
	-0.1117005367397062D-01
	-0.8548743631089079D-02
	-0.6752764732843282D-02
	-0.5468699644837537D-02
	-0.4518951574147542D-02
	-0.3796769244365771D-02
	-0.3234848419898301D-02
T'_{12}	-0.2789047916744309D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + \vec{p})$	0.3492920603684220D-03	0.8543133052634497D-04
	0.1165118854328381D-03	0.2252002560382401D-04
	0.4347135627745677D-04	0.7820804609174389D-05
	0.2353532991584105D-04	0.3265786769970913D-05
	0.1275008067611570D-04	0.1552985268697725D-05
	0.7490227357168219D-05	0.8131729432008915D-06
	0.4682778538645221D-05	0.4585978512063136D-06
	0.3075392665389740D-05	0.2743313730260016D-06
	0.2102023326470016D-05	0.1721603354058656D-06
	0.1484953987425335D-05	0.1124207962667836D-06
	0.1078549387865555D-05	
$(x_n^{(2)} + \vec{p})$	-0.3666276533802713D-05	-0.6422806880790333D-07
	-0.7305924375818496D-06	-0.1228125920535103D-07
	-0.2214271373061124D-06	-0.3206735669104149D-08
	-0.8357636462237583D-07	-0.1025010711074373D-08
	-0.3645155292148969D-07	-0.3789691227929631D-09
	-0.1765570584329711D-07	-0.1604838421442184D-09
	-0.9266882327685702D-08	-0.8542460076983727D-10
	-0.5185374227657108D-08	
	-0.3059844345780494D-08	
$(x_n^{(3)} + \vec{p})$	-0.1191957564312777D-07	0.1929967383823561D-10
	-0.8945097726767437D-09	0.4544371172768291D-11
	-0.4029356817820962D-10	-0.1133730696128987D-10
	0.2616145321210350D-10	-0.3728775881811641D-10
	0.2026239614462411D-10	
	0.7005418163966159D-11	
	-0.1084727980434899D-10	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,8}}$$

$$p = \frac{5}{4} \quad (\text{Chap } 5,\ \S 1)$$

$T'_n = T_n + \vec{p}$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.1332076019458964D+00
T'_1	-0.5870103383940945D-01
	-0.3292693490795340D-01
	-0.2104652313612267D-01
	-0.1460567922682831D-01
	-0.1072631843709734D-01
	-0.8210167377655972D-02
	-0.6485873319671632D-02
	-0.5252379292775835D-02
	-0.4340308465142948D-02
	-0.3647220507434408D-02
	-0.3107515664124959D-02
T'_{12}	-0.2679319744507617D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + \vec{p})$	0.4075960923906920D-03	0.9491136179542938D-04
	0.1319901458047281D-03	0.2471595015911244D-04
	0.5438406852342238D-04	0.8560375433598610D-05
	0.2628757611110571D-04	0.3572918559680656D-05
	0.1420542818111967D-04	0.1699426001722801D-05
	0.8332262056815918D-05	0.8902719723395333D-06
	0.5203841659082555D-05	0.5023521035731754D-06
	0.3415134489765563D-05	0.3006694320798180D-06
	0.2333009809858851D-05	0.1887902029882541D-06
	0.1647480760703403D-05	0.1233390673907944D-06
	0.1196231538101375D-05	
$(x_n^{(2)} + \vec{p})$	-0.3039592251736188D-05	-0.6465086747008651D-07
	-0.6673565504733761D-06	-0.1239887794648661D-07
	-0.2094480110717469D-06	-0.3217879249520217D-08
	-0.8042096291379155D-07	-0.1021241449261981D-08
	-0.3542229946276905D-07	-0.3799975994895315D-09
	-0.1726450320205242D-07	-0.1330751316433454D-09
	-0.9101537261271136D-08	-0.1331295739523089D-09
	-0.5101875457909702D-08	
	-0.3026535706730435D-08	
$(x_n^{(3)} + \vec{p})$	-0.5342497794877748D-08	0.2249105610953317D-10
	0.1402049314321030D-09	-0.7633389580152905D-11
	0.1913070943233278D-09	0.1036459169358184D-09
	0.9279710051594836D-10	-0.9218722812030788D-10
	0.3694621128133568D-10	
	0.4759501386759513D-10	
	-0.6940182586609445D-10	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n) \qquad [33]$$

$p = 1$ (chap. 5, § 1)

$T'_n = T_n + \vec{p}'$ (Théorème 6.1)

T'_0	0.2131120298671699D+01
T'_1	-0.8863738574308599D-02
	-0.7772574885404059D-02
	-0.5579586070752512D-02
	-0.4079823943094175D-02
	-0.3085412440951940D-02
	-0.2406096060694053D-02
	-0.1925333525052229D-02
	-0.1573972899805065D-02
	-0.1309952882747980D-02
	-0.1106793734105277D-02
	-0.9472499842792380D-03
T'_{12}	-0.8197372627152739D-03

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + \vec{p}')$	-0.7227827191337519D-02	-0.7863395692499010D-02
	-0.1103022853951620D-01	-0.9057089091612825D-02
	0.1537050372164513D-02	-0.3729150979764416D-04
	0.3469462990076347D-03	-0.4888873807514492D-04
	0.1303784482860736D-03	-0.1829079868384867D-04
	0.6116816761130169D-04	-0.7651137301892524D-05
	0.3276382378134576D-04	-0.3606555216249894D-05
	0.1220764118297535D-04	-0.1870744006320915D-05
	0.1203158660131789D-04	-0.1046371755715394D-05
	0.7930879173014081D-05	-0.6216551932370327D-06
	0.5444583424932562D-05	
$(x_n^{(2)} + \vec{p}')$	-0.7381269181833255D-02	-0.2322959964350740D-02
	0.1781100537339777D-03	-0.4606174267779406D-04
	0.1601577567561106D-04	-0.6926588453892951D-04
	0.3232607315602036D-05	-0.3150502943184870D-07
	0.9479900814320444D-06	-0.3597404768713487D-08
	0.3478173825550209D-06	-0.6784127930049711D-09
	0.1484808570776253D-06	-0.2330000721442044D-09
	0.7073231384610029D-07	
	0.3669427579952762D-07	
$(x_n^{(3)} + \vec{p}')$	-0.7030016533974919D-05	-0.6179769327747237D-04
	-0.1747465601337293D-06	-0.9978900318471091D-05
	-0.1280126106116206D-07	0.5438226409991420D-10
	-0.1695313191696010D-08	-0.7983002952259566D-10
	-0.3940310428201393D-09	
	-0.7074593211600644D-10	
	-0.7269462126442000D-10	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{i}\right) \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right)\right) \qquad [33]$$

$p = 1$ (chap 5, § 1)

$T'_n = T_n + \vec{p}'$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.1926000722614474D+00
T'_1	-0.8580955207293577D-01
	-0.4844469310408631D-01
	-0.3108062708387350D-01
	-0.2162073147794291D-01
	-0.1590467698846421D-01
	-0.1218884602915125D-01
	-0.9638124654642782D-02
	-0.7811788453282272D-02
	-0.6459396482466156D-02
	-0.5430083033132924D-02
	-0.4628565316950819D-02
T'_{12}	-0.3992263846054889D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + \vec{p}')$	0.4023612733875155D-03	0.1859410896925032D-03
	0.2138185586915288D-03	0.4425818015206268D-04
	0.9195205531954773D-04	0.1360772991056006D-04
	0.4416176924253645D-04	0.5075318014181613D-05
	0.2346197960763851D-04	0.2174814969232910D-05
	0.1350331497116655D-04	0.1033910737525002D-05
	0.8279548257708255D-05	0.5327654519762456D-06
	0.5341460590815124D-05	0.2927758231453543D-06
	0.3592319491632547D-05	0.1695814479101693D-06
	0.2500934085788000D-05	0.1026218109938422D-06
	0.1792619755905259D-05	
$(x_n^{(2)} + \vec{p}')$	-0.2169392955716379D-03	-0.5311581024017341D-06
	-0.6325692789552889D-05	-0.1454421226966410D-06
	-0.1483798313762358D-05	-0.5315283159608702D-07
	-0.5278565419356354D-06	-0.2285904590604553D-07
	-0.2302812130426960D-06	-0.1102471154700111D-07
	-0.1139555123217621D-06	-0.5786267251364080D-08
	-0.6156805522838319D-07	-0.3271456365788045D-08
	-0.3552266873490736D-07	
	-0.2158709531280018D-07	
$(x_n^{(3)} + \vec{p}')$	-0.5438954621372590D-06	-0.6308586986136788D-09
	-0.9417836907251245D-07	-0.4392387947754545D-09
	-0.2376725866766113D-07	-0.1434737336349120D-09
	-0.7467320954613298D-08	-0.2760203634665642D-09
	-0.2759533286822830D-08	
	-0.1137719809639990D-08	
	-0.5551351661345350D-09	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ln}\,\frac{i+1}{i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{i+2}{i+1} \qquad [33]$$

$p = 1$ (chap. 5, § 1)

$T'_n = T_n + p^{-1}$ (Théorème 6.1)

T'_0	0.5926479395966041D-01
T'_1	0.2656095410860201D-01
	0.1549658256365994D-01
	0.1026036555208543D-01
	0.7330283069940496D-02
	0.5512901560208019D-02
	0.4303416561810716D-02
	0.3455906259460734D-02
	0.2838091669737454D-02
	0.2373371143724004D-02
	0.2014766267011215D-02
	0.1732109733180529D-02
T'_{12}	0.1505283469750855D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + p^{-1})$	0.1478491595686339D-02	0.3776511854110909D-03
	0.5356574566696345D-03	0.1250373446027512D-03
	0.2809730605388716D-03	0.5067022170172214D-04
	0.1516997970355505D-03	0.2353937882877861D-04
	0.8904495452144987D-04	0.1208926401173095D-04
	0.5567076131920523D-04	0.6706410080432055D-05
	0.3657232580849619D-04	0.3955051321246662D-05
	0.2500622908478320D-04	0.2451422335800549D-05
	0.1767175298505205D-04	0.1583409649141580D-05
	0.1283954379557839D-04	0.1058895982453340D-05
	0.9551568703983649D-05	
$(x_n^{(2)} + p^{-1})$	0.7504031921838411D-05	-0.4156438812755832D-06
	0.2928573865619653D-06	-0.1167566733297713D-06
	-0.2776143385627931D-06	-0.3900415957618433D-07
	-0.2228231258332531D-06	-0.1493071183334381D-07
	-0.1401884713038122D-06	-0.6346357994679863D-08
	-0.8533767343102926D-07	-0.2947039634136790D-08
	-0.5250949473649923D-07	-0.1488723970922284D-08
	-0.3305433576676620D-07	
	-0.2134908506381226D-07	
$(x_n^{(3)} + p^{-1})$	-0.4298672773893689D-06	-0.2162757505638074D-10
	-0.2192927775346168D-06	0.3604735520496005D-10
	-0.4125360857339458D-06	-0.5099625149246334D-10
	0.5013810047888902D-07	-0.1911661584582671D-09
	0.1005336109824971D-07	
	0.3208936083217220D-08	
	0.1227631141057298D-08	

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(i + e^{1/i}\right)^{-\sqrt{2}} \qquad [33]$$

$p = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$ (chap. 5, § 1)

$T'_n = T_n + p^{-1}$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.3439049622051768D+01
T'_1	-0.2368112750130313D+01
	-0.1467919157109160D+01
	-0.9417104154480633D+00
	-0.6402918761270096D+00
	-0.4587678535559592D+00
	-0.3430306373461446D+00
	-0.2654089558312939D+00
	-0.2110913640316794D+00
	-0.1717148889956991D+00
	-0.1423153443141207D+00
	-0.1198128092415835D+00
T'_{12}	-0.1022215187999019D+00

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)} + p^{-1})$	0.6101185574608349D+01	0.2446803444062768D+01
	0.4319829490017972D+00	0.7604237276269978D-01
	0.1166702566520990D+00	0.1414799086490183D-01
	0.4424367084636475D-01	0.4297582059415051D-02
	0.2025870685084711D-01	0.1660053557524698D-02
	0.1051486875585680D-0	0.7453161445405551D-03
	0.5974062954895320D-02	0.3722508645261128D-03
	0.3635084936099937D-02	0.2015526767689767D-03
	0.2334201671642815D-02	0.1163099353943152D-03
	0.1565335026953947D-02	0.7068391897469396D-04
	0.1087897164328157D-02	
$(x_n^{(2)} + p^{-1})$	0.1462950000481420D-01	0.5142361763454300D-04
	-0.8592209138031139D-03	-0.2842216298770120D-04
	-0.5821676565905339D-03	-0.1972771282907158D-04
	-0.2545594033220343D-03	-0.7776105688351437D-05
	-0.1147204061832849D-03	-0.3096084601321349D-05
	-0.5549862232031438D-04	-0.1331773092914587D-05
	-0.2876336371591438D-04	-0.6197986700050111D-06
	-0.1583240978949478D-04	
	-0.9175068127629128D-05	
$(x_n^{(3)} + p^{-1})$	-0.5416722402343485D-03	-0.2528580625681121D-04
	-0.2675766229669105D-02	-0.1920204025961754D-04
	0.3008682839699415D-04	-0.1198274541839751D-06
	0.5127042629850340D-05	-0.1902937842805358D-07
	0.1361711094429070D-05	
	0.4544157741681251D-06	
	0.1764546069347311D-06	

$$S_n = \sum_{i \geq} \frac{1}{i^{5/2}+1} \qquad [30]$$

$p = \frac{2}{3}$ (Chap. 5, §1)

$T'_n = T_n + p^{-1}$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.3494996712823926D+00
T'_1	-0.1503434103109837D+00
	-0.7957975514447680D-01
	-0.4827449074372645D-01
	-0.3198271110626022D-01
	-0.2257115671341549D-01
	-0.1669205436335261D-01
	-0.1279598043034929D-01
	-0.1009215423683658D-01
	-0.8145074899952585D-02
	-0.6699869978014111D-02
	-0.5599788965679836D-02
T'_{12}	-0.4744366730328222D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)}+p^{-1})$	0.1394403785797402D-01	0.4818463755893463D-02
	0.5112720963458446D-02	0.1863519231290738D-02
	0.2506085849339258D-02	0.9547836233121196D-03
	0.1445911815812974D-02	0.5684984193718652D-03
	0.9244824379174949D-03	0.3714385344849010D-03
	0.6340432606588158D-03	0.2585501336979793D-03
	0.4575196651396184D-03	0.1884772102966037D-03
	0.3431004305421662D-03	0.1423360960455782D-03
	0.2651823994253403D-03	0.1105417050229442D-03
	0.2100069501586323D-03	0.8782692527066363D-04
	0.1696776169897659D-03	
$(x_n^{(2)}+p^{-1})$	0.4399905305437686D-03	0.8348766334230397D-04
	0.2723674441794241D-03	0.3681891119673350D-04
	0.1632869259759959D-03	0.2022169646837110D-04
	0.1049481075813783D-03	0.1287957219933689D-04
	0.7146254226124882D-04	0.8967032567377205D-05
	0.5099236198559799D-04	0.6597816806331236D-05
	0.3779126839153850D-04	0.5039358031062782D-05
	0.2828763740242588D-04	
	0.2265247125367005D-04	
$(x_n^{(3)}+p^{-1})$	0.1721504716959516D-04	0.3860758973331293D-05
	0.1697327825834409D-04	0.1115799624302094D-05
	0.1324589500574221D-04	-0.6833004154377723D-07
	0.1002001488885264D-04	-0.2240637686505738D-06
	0.7621453488629976D-05	
	0.5882374790284334D-05	
	0.4415921074925121D-05	

$$S_n = \sum_{i \geq 1} \frac{1+i^2+i^4}{i^2(1+i^4)} \qquad [33]$$

$p = 1$ (Chap. 5, §1)

$T'_n = T_n + p^{-1}$ (Théorème 6.1)

T'_0	-0.3181903334582241D+00
T'_1	0.7344427904372962D-02
	0.4606837034447368D-01
	0.4132896694652640D-01
	0.3291997359299316D-01
	0.2597956862928130D-01
	0.2075656542607561D-01
	0.1685220024362671D-01
	0.1391892870362463D-01
	0.1166194557095917D-01
	0.9829843205581767D-02
	0.8501629756167021D-02
T'_{12}	0.7375581672458583D-02

	Théorème 6.2	Théorème 6.3
$(x_n^{(1)}+p^{-1})$	0.7327284759552621D-01	0.5797347369645385D-01
	0.3973434907612736D-01	0.4223795585732260D-01
	0.5762066831195846D-01	0.4857235332533217D-01
	-0.2669350736542527D-01	-0.4287567904992950D-02
	-0.5681417695247600D-02	0.5836247142975630D-03
	-0.2260529603385174D-02	0.3328673456499980D-03
	-0.1126998538507297D-02	0.1557684838707888D-03
	-0.6377317113637086D-03	0.7578607425722168D-04
	-0.3924242290603943D-03	0.3908616227452305D-04
	-0.2565401059711303D-03	0.2125695125964602D-04
	-0.1756257643782500D-03	
$(x_n^{(2)}+p^{-1})$	0.5431583709577640D-01	0.4579512976206197D-01
	0.3917567125553235D-01	0.2552189410825849D-01
	-0.5668160388175331D-02	0.5444595528209630D-03
	-0.5737501620030899D-03	0.6190729178430481D-03
	-0.1414447404566802D-03	-0.4070958482745317D-04
	-0.5096654127143756D-04	-0.1019133039904178D-05
	-0.2276852139190724D-04	-0.1104863832481168D-05
	-0.1163953693154833D-04	
	-0.6516955674056389D-05	
$(x_n^{(3)}+p^{-1})$	0.6584242100638770D-01	0.2974577070997722D-01
	-0.3310010567489104D-03	0.5925957760071080D-03
	-0.2262612509477924D-04	0.2553164395072258D-03
	-0.7946736023578993D-05	-0.6059983317103623D-06
	-0.3174069107427131D-05	
	-0.1319278934050613D-05	
	-0.5662462837458058D-06	

3 -CONCLUSION

Nous disposons donc de quatre algorithmes pour l'estimation de p ; le plus efficace est celui du théorème 6.3

Les méthodes de contrôle d'erreur proposées par BREZINSKI [4] permettent en pratique de déterminer p.

REFERENCES

CONCLUSION

Pour une suite (x_n) de point fixe ou non, vérifiant

$$x_n \sim An^{-p}, p \in \mathbb{R}_+^*,$$

nous avons divers algorithmes capables d'en accélérer la convergence.

L'algorihtme le plus efficace est l'Algorihtme 4. Mais pour les suites de point fixe, cet algorithme exige plus que la connaissance de p. Il faudrait donc un moyen complémentaire à l'estimation de p pour le rendre opérationnel dans ces cas.

Une constante de nos travaux est le fait que les Algorithmes 1, 2 et 3 et le θ-algorithme donnent les mêmes résultats pour toutes les familles de LOG que nous avons considérées.

L'ε-algorithme modifié et le θ-algorithme n'ont pas été combinés car une telle combinaison ne peut être que linéaire, donc moins efficace que l'Algorithme 4 (p. 39).

REFERENCES

[1] A.C. AITKEN, On Bernouilli's Numerical Solution of Algebraic Equations, Proc., Roy., Soc., Edinburgh, 46 (1926), 289-305.

[2] M. BELLALIJ, A Simultaneous Process for Convergence Acceleration and Error Control,

[3] M.D. BENCHIBOUN, Etude de Certaines Généralisations du Procédés d'Accélération de la Convergence, Thèse de 3ème cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille (1987).

[4] C. BREZINSKI, Accélération de la Convergence en Analyse Numérique, Lecture Notes Math. 584, Springer-Verlag, Berlin (1977).

[5] C. BREZINSKI, Accélération de Suites à Convergence Logarithmique, C.R. Acad. Sc. Paris, 273 A (1971) 727-730.

[6] C. BREZINSKI, Error Control in Convergence Acceleration Processes, IMA J. Numer. Anal. 3 (1983) 65-80.

[7] C. BREZINSKI, A. General Extrapolation Algorithm, Numer. Math., 35 (1980),

[8] P. BJORSTAD, G. DAHLQUIST, E. GROSSE, Extrapolation of Asymptotic Expansions by a Modified AITKEN δ^2-Formula, BIT, 21 (1981), 56-65.

[9] L. COMTET, Analyse Combinatoire, Tome 1, Collection SVP, P.U.F. (1970).

[10] F. CORDELLIER, Caractérisation des Suites que la Première Etape du θ-Algorithme Transforme en Suites Constantes, C.R. Acad. Sci. Paris, 284 A (1977) 389-392.

[11] P.J. DAVIS, P ; RABINOWITZ, Numerical Integration, Blaisdell, Wattham (1967).

[12] N.G. DE BRUIJN, Asymptotic Methods in Analysis, Dover, New-York (1981).

[13] J.P. DELAHAYE, B. GERMAIN-BONNE, The Set of Logarithmically Convergent Sequences Cannot Be Accelerated, SIAM J. Numer. Anal. 19 (4) (1982) 840-844.

[14] J. DIEUDONNE, Calcul Infinitésimal, Herman, Paris (1968).

[15] J.E. DRUMMOND, Summing a Common Type of Slowly Convergent Series of Positive Terms, J. Austral. Math. Soc. Ser. B., 19 (1976), 416-421.

[16] T. HÅVIE, Generalized Neville Type Extrapolation Schemes, BIT, 19 (1979) 204-213.

[17] D.C. JOYCE, Survey of Extrapolation Processes in Nuemrical Analysis, SIAM Rev., 13 (4) (1971), 435-488.

[18] D.K. KAHANER, Numerical Quadrature by the ε-algorithm, Math. Comp., 26 (119) (1972) 689-693.

[19] C. KOWALEWSKI, Possibilités d'Accélération de la Convergence logarithmique, Thèse Université des Sciences et Techniques de Lille (1981).

[20] D. LEVIN, Development of Non-Linear Transformationss for Improving Convergence of Sequences, Intern. J. Computer Math., B3 (1973) 371-388.

[21] D. LEVIN, A. SIDI, Two New Classes of Nonlinear Transformations for Accelerating the Convergence of Infinite Integrals and Series, Appl. Math. Comput. 9 (1981) 175-215.

[22] A.M. LITOVSKY, Accélération de la Convergence des Ensembles Synchronisables, Thèse, Université des Sciences et Techniques de Lille (1989).

[23] S. LUBKIN, A Method for Summing Infinite Series, J. Res. Nat. Bur. Standards, 48 (1952), 228-254.

[24] J.N. LYNESS, B.W. NINHAM, Numerical Quadrature and Asymptotic Expansions, Math. Comput., 21 (98) (1967) 162-178.

[25] A.C. MATOS, Construction de Méthodes d'Extrapolations à Partir de Développements Asymptotiques, Thèse, Université des Sciences et Techniques de Lille (1989).

[26] N. OSADA, A Convergence Acceleration Method for some Logarithmically Convergent Sequences, SIAM J. Numer. Anal., 27 (1) (1990) 178-189.

[27] J. RIORDAN, An Introduction to Combinatorial Analysis, John Wiley, New York (1958).

[28] P. SABLONNIERE, Convergence Accélération of Logarithmic Fixed Point Sequence, J. of Comp. and Applied Math., 19 (1987) 55-60.

[29] H. SADOK, Accélération de la Convergence de Suites par Utilisation des Transformations Composites, Thèse de 3ème cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille (1986).

[30] K. SATO, On Acceleration Procedures of some Slowly Convergent Infinite Summations, J. of Information Processing, 4 (3) (1981), 152-154.

[31] G.A. SEDOGBO, Convergent Acceleration of some Logarithmic Sequences, J. of Comp. and Applied Math., (1990) 32 (1990) 253-260.

[32] G.A. SEDOGBO, Convergent Acceleration of some Logarithmic Sequences, J. of Comp. and Applied Math., ANO 221, Université de Lille 1, (1990).

[33] D.A. SMITH, W.F. FORD, Acceleration of Linear and Logarithmic Convergence, SIAM J. Numer. Anal., 16 (2) (1979) 223-240.

[34] J. WIMP, Sequence Transformation and Their Applications, Academic Press, New York (1981).

[35] P. WYNN, On a Procusteam Technique for the Numerical Transformation of Slowly Convergent Sequences and Series, Proc. Cambridge Phil. Soc. 52 (1956) 663-671.

[36] P. WYNN, On a Device for Computing the $e_m(S_n)$ Transformation, MTAC, 10 (1956), 91-96.

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE LILLE

ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DE CERTAINS SOUS-ENSEMBLE DE SUITES LOGARITHMIQUES.

Soit LOG l'ensemble des suites à convergence logarithmique. Il ne peut exister un algorithme capable d'accélérer la convergence de toutes les suites de LOG. Nous définissons des sous-ensembles de LOG et proposons divers algorithmes qui, non seulement accélèrent la convergence des suites considérées, mais surtout estiment l'erreur.

Nous présentons aussi des algorithmes permettant de déterminer la classe d'une suite appartenant à l'un de ces sous-ensembles, afin de lui appliquer des algorithmes adaptés.

Une étude numérique détaillée illustre nos algorithmes qui s'appliquent aussi à divers problèmes d'Analyse Numérique : sommations de séries, calcul intégral, intégrations d'équations différentielles, problèmes aux limites.

MOTS-CLES

Accélération de la convergence

Convergence logarithmique

Intégrales

Séries.