

1990
360

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE
LILLE FLANDRE-ARTOIS

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Génie Civil

présentée par

BELKACEMI Yacine
Ingénieur de l' Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

**METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT
EN CHAMP COMPLEXE**

**Développements analytiques et numériques
Application aux milieux fissurés**

réel ex le 29.11.90
le 2.4.91

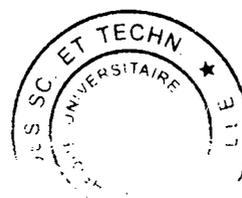
Tirage provisoire

Conexions non faites



SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1	
INTRODUCTION AUX METHODES INTEGRALES DE FRONTIERE	4
1.1 Méthode directe	5
1.1.1 Equations de base de l'élastostatique (coordonnées cartésiennes)	5
1.1.2 Solution fondamentale	6
1.1.3 Identité de Somigliana	9
1.1.4 Ecriture des conditions aux limites	10
1.2 Méthode indirecte	11
1.3 Problème plan. Passage en champ complexe	13
1.3.1 Contraintes et déplacements en champ complexe	
1.3.2 Conditions aux limites sur un segment placé sur l'axe réel	15
1.3.3 Méthode des discontinuités	16
1.3.4 Différents types de solutions. Equations de Plemelj	18
1.4 Conclusion	20
CHAPITRE 2	
SOLUTION FONDAMENTALE POUR UN ELEMENT CIRCULAIRE A DEUX NOEUDS	21
2.1 Conditions aux limites. Equations de Plemelj	22
2.2 Equations de Plemelj	24
2.3 Solution générale	26
2.4 Détermination des coefficients	27
2.5 Solution pour un élément circulaire à deux noeuds	28
2.5.1 Détermination des potentiels	30
2.5.2 Calcul des contraintes et des déplacements	32
2.5.3 Construction du système d'équations	34
2.6 Conclusion	35



CHAPITRE 3	
MISE EN OEUVRE NUMERIQUE DE LA METHODE. ETUDE COMPARATIVE ENTRE ELEMENTS DROITS ET CIRCULAIRES A DEUX NOEUDS	36
3.1	Eléments circulaires 37
3.1.1	Changement de repère 37
3.1.2	Influence de l'élément sur lui-même (problèmes de multiformité) 41
3.1.3	Résolution de problèmes possédant des symétries 43
3.2	Eléments linéaires 45
3.3	Organigramme général 47
3.4	Exemples 49
3.4.1	Tunnel sous pression uniforme 50
3.4.2	Cavité circulaire chargée sur un secteur 51
3.4.3	Disque circulaire chargé sur un secteur (essai brésilien) 55
3.4.4	Plaque percée d'un trou circulaire sous compression uni ou biaxiale 58
3.4.5	Trou hypotrochoïdal à 4 côtés 62
3.5	Conclusion 65
CHAPITRE 4	
DEVELOPPEMENT D'ELEMENTS CIRCULAIRES DEGENERES (ELEMENTS BOUT DE FISSURE CIRCULAIRES)	66
4.1	Solution pour un élément circulaire dégénéré 67
4.2	Détermination des potentiels complexes 68
4.3	Influence de l'élément sur lui-même (problème de multiformité) 71
4.4	Exemples 74
4.4.1	Fissure circulaire en milieu infini sous traction uniaxiale 75
4.4.2	Fissure circulaire en milieu infini sous traction biaxiale 78
4.5	Conclusion 80

CHAPITRE 5	
APPLICATION DE LA METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT A LA PROPAGATION DES FISSURES	81
5.1 Critères de rupture	82
5.1.1 Modes de rupture. Facteurs d'intensité des contraintes K_i	82
5.1.2 Critère de Griffith	85
5.1.3 Critère de branchement. Relation entre G et K_i	86
5.2 Application à la propagation des fissures	87
5.2.1 Conditions sur les lèvres de la fissure	88
5.2.2 Calcul numérique de l'énergie G	89
5.3 Résolution	90
5.4 Optimisation quadratique avec des contraintes linéaires	90
5.4.1 Introduction à l'optimisation : les con- ditions d'optimalité	90
5.4.2 La recherche de l'optimum avec con- traintes linéaires d'inégalité dans le cas d'une fonction quadratique	95
5.5 Application de l'optimisation quadratique avec con- traintes linéaires d'inégalité à la propagation des fis- sures	103
5.6 Exemples numériques	107
5.6.1 Fissure en traction	107
5.6.2 Fissure en mode II pur	108
5.6.3 Propagation sous compression	110
5.7 Discussions. Conclusions	112
CONCLUSION	115
BIBLIOGRAPHIE	117
ANNEXE A : Calcul des contraintes déplacements. Eléments circulaires à deux noeuds	A-1
ANNEXE B : Calcul des contraintes et déplacements. Eléments circulaires dégénérés.	B-1

NOTATIONS

E	:	Module d'Young
ν	:	Coefficient de Poisson
F	:	Force de volume
σ	:	Tenseur de contrainte
ϵ	:	Tenseur de déformation
δ_{ij}	:	Symbole de Kroeneker
u	:	Vecteur déplacement
T	:	Tenseur surfacique
n	:	normale à une surface Γ
$F_i = \delta(M-P) e_i$:	charge concentrée dans la direction i
$\delta(M-P)$:	Distribution de Dirac
$\mathcal{U}_{ij}^*(M,P)$:	Déplacement au point M dans la direction j dû à une charge unitaire dans la direction i
$\mathcal{T}_{ij}^*(M,P)$:	Tension au point M dans la direction j due à une charge unitaire au point P dirigée dans la direction i
C_{ij}	:	terme libre dépendant de la régularité du contour Γ
\mathcal{A}	:	fonction d'Airy
i	:	nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$
$z = x + iy$:	variable complexe du plan (x, y)
$\bar{z} = x - iy$:	conjugué de z
$\phi(z), \psi(z)$:	fonctions analytiques de la variable z
T	:	Discontinuité de contrainte

D	:	Discontinuité de déplacement
D_n	:	Discontinuité normale
D_t	:	Discontinuité tangentielle
"G"	:	Partie gauche d'un domaine
"D"	:	Partie droite d'un domaine
2α	:	Angle ouverture d'une discontinuité fissure circulaire
δ_i, β_i	:	Coefficients de linéarisation d'une série de Fourier
λ	:	Coefficient de position des noeuds des éléments circulaires
z^+	:	Coordonnée du noeud plus
z^-	:	Coordonnée du noeud moins
G	:	Energie d'avancement de fissure
G_c	:	Energie d'avancement critique de fissure
$K_{i=(1,2,3)}$:	Facteurs d'intensité de contraintes
K_{1c}	:	Facteur d'intensité de contrainte critique en mode 1
γ	:	Energie spécifique de surface du matériau
μ	:	Coefficient de frottement entre lèvres de fissure
θ	:	Angle de branchement de la fissure
β	:	Angle fait entre la fissure principale et l'axe x
S_T	:	Surface du domaine où les contraintes sont imposées
S_u	:	Surface du domaine où les déplacements sont imposés
T^d	:	Tension surfacique imposée sur S_T
u^d	:	Déplacement imposé sur la partie δ_u
F	:	Fonction quadratique
x^*	:	Une solution du problème d'optimisation
x, x	:	Points admissibles
P	:	La direction admissible
λ^*	:	Vecteur des Multiplicateurs de Lagrange

INTRODUCTION

Pour la résolution des problèmes en Génie-Civil et en Mécanique, trois principaux types de méthodes numériques se sont développées: éléments finis, différences finies et intégrales de frontière. Il est souvent opposé la méthode des éléments finis à la méthode des intégrales de frontière : vitesse de résolution, précision, facilité d'utilisation ... Il nous semble cependant que ces deux techniques numériques ont chacune leur domaine d'application privilégié : la méthode des intégrales de frontière est particulièrement performante pour résoudre les problèmes linéaires avec discontinuités de matière, alors que la méthode des éléments finis (ou différences finies) est bien adaptée pour résoudre les problèmes non linéaires.

Dans le cas des roches et des travaux en massif rocheux, les calculs d'avant-projet peuvent être réalisés en supposant un comportement linéaire. De même, le développement des fractures s'effectue en première approximation en considérant un comportement élastique. Une approche importante adoptée par plusieurs auteurs est de considérer un contact avec frottement du type Coulomb sur les lèvres des discontinuités. Ce type de problème peut être modélisé en utilisant les méthodes intégrales de frontière. Une application importante concerne le problème de simulation de la propagation de fissures avec frottement. Ce type de problème a été traité surtout en mode de traction (ouverture des fissures). Les études en mode mixte avec prise en compte du frottement sont plus rares.

La formulation de la méthode des équations intégrales en coordonnées cartésiennes a été étendue aux problèmes tridimensionnels (Cruse (1969), Bui (1978), Lachat (1975)). Mais cette formulation n'a pas été appliquée à la propagation des fissures au mode mixte. Parmi les méthodes intégrales de frontière, la méthode des discontinuités de déplacement s'est avérée très adéquate pour étudier le problème de la fissuration (champ de contraintes en bout de fissure, propagation) dans les matériaux. Cette méthode a été introduite en premier par Crouch (1976) pour les problèmes élastiques plans. Depuis, elle a bénéficié de nombreux développements et a été étendue aux problèmes tridimensionnels par Wiles et al (1984). Dans le travail original de Crouch, la discontinuité de déplacement a été supposée constante. Crawford et al (1982) ont pu développer des éléments d'ordre supérieur, mais les formules obtenues ont abouti à des intégrales difficiles à calculer.

Une voie très intéressante s'est dégagée en considérant la formulation de la méthode en champ complexe. L'école soviétique est l'une des premières à faire cette formulation (Parton (1984) et Panasyuk et al (1977)) grâce aux travaux de Muskhelishvili. Un effort important a été consacré au développement de la méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe (Bouhaddane (1987)). Notre travail s'inscrit dans ce cadre. Notre but est de développer des éléments de discontinuité plus performants et d'appliquer la méthode pour traiter le problème de la propagation des fissures.

Dans le premier chapitre, un rappel de la méthode des équations intégrales de frontière est fait. Le premier chapitre s'achève sur une présentation de la méthode des discontinuités (discontinuité de déplacement, discontinuité de contrainte) en champ complexe.

Dans le deuxième chapitre, nous faisons une formulation de la méthode des discontinuités de déplacement spécialement en coordonnées polaires. Ceci facilitera le travail de développement d'éléments circulaires. La fin du chapitre est consacrée au développement d'éléments circulaires à deux noeuds.

Le chapitre trois est consacré à la mise en oeuvre numérique de la méthode des discontinuités, en particulier pour le cas de l'élément circulaire à deux noeuds. Nous faisons ensuite une étude comparative des résultats obtenus avec des éléments circulaires à deux noeuds et des éléments droits à deux noeuds.

Dans le cas des éléments développés auparavant, des incompatibilités de déplacement apparaissent en bout d'élément. Le chapitre quatre traite de la résolution de ce problème. La solution proposée consiste à la mise en oeuvre d'un élément spécial en bout de fissure, que nous appelons "élément dégénéré circulaire". Cela nous permet d'assurer la continuité du déplacement en bout d'élément. Nous terminons ce chapitre avec des exemples de cas de fissures circulaires en milieu infini.

Nous terminons le mémoire par un chapitre d'application de la méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe à l'étude de la propagation des fissures en mode mixte avec prise en compte des conditions de contact. Un algorithme d'optimisation quadratique développé par Miguez (1990) et un algorithme de surrelaxation ont été introduit dans notre code de calcul de propagation utilisant les éléments droits à un et deux noeuds. Une étude comparative est faite entre ces deux algorithmes.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION AUX METHODES INTEGRALES DE FRONTIERE

Le comportement linéaire élastique est généralement supposé, dans une première approche, pour l'analyse des contraintes en Génie Civil ou en Génie Mécanique. Dans ce cadre, une méthode performante pour résoudre les problèmes est la méthode de frontière (B.E.M. : Boundary Element Method).

L'existence de solution à une équation intégrale, expression d'un problème aux limites dans le cadre de la théorie des potentiels a été tout d'abord démontrée par Fredholm (1903). La discrétisation de la frontière pour résoudre l'équation intégrale, pour des problèmes à potentiels, a été utilisée en premier par Jawsone (1963) et Sym (1963) avec l'avènement des ordinateurs. La formulation de la méthode directe dans sa forme actuelle a été présentée en premier par Rizzo (1967). La méthode a été exploitée numériquement en 3-D surtout par Cruse (1969, 1971) et Lachat (1975, 1976). De même, la méthode a été étendue aux phénomènes thermoélastiques par Rizzo (1977) et permet d'étudier les problèmes d'interfaces (Marchina (1989), Selvadurai (1989)). Les domaines d'application de cette méthode sont donc assez larges pour intéresser les chercheurs. Cette formulation semble bénéficier d'un plus grand intérêt par rapport à la méthode des discontinuités de déplacement.

Dans ce qui suit, nous effectuerons un rappel des formulations directe et indirecte pour la résolution des problèmes d'élastostatique. Ensuite, nous restreindrons l'étude aux problèmes plans, et une approche indirecte sera établie en champ complexe. La méthode dite des discontinuités de déplacement sera alors introduite.

1.1 METHODE DIRECTE

1.1.1 EQUATIONS DE BASE DE L'ELASTOSTATIQUE (COORDONNEES CARTESIENNES)

Rappelons tout d'abord les équations d'équilibre qui doivent être satisfaites en tout point du domaine :

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0$$

avec σ_{ij} composantes du tenseur des contraintes, et F_j composantes des forces de volume.

Les relations contraintes-déformations sont :

$$(1.2) \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

avec ε_{ij} composantes du tenseur linéarisé des déformations ε , et λ et μ les coefficients de Lamé.

Les composantes du tenseur de déformation s'expriment à l'aide des composantes u_i du déplacement par :

$$(1.3) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

Rappelons enfin que le vecteur contrainte \vec{T} appliqué en M sur une surface Γ , de normale \vec{n} s'écrit :

$$(1.4 a) \quad \vec{T}(M, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}$$

ou en composantes :

$$(1.4 b) \quad T_i = \sigma_{ij} n_j$$

Remplaçons les relations 1.2 et 1.3 dans l'équation d'équilibre 1.1 ; on obtient l'équation de Lamé-Navier :

$$(1.5) \quad (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u} + \vec{F} = \vec{0}$$

1.1.2 SOLUTION FONDAMENTALE

La formulation intégrale requiert la solution d'un problème correspondant à un domaine infini chargé par une force unitaire concentrée. Cette solution due à Kelvin est connue sous le nom de solution fondamentale, car correspond à la solution fondamentale au sens des distributions.

La solution fondamentale de l'équation (1.5) est obtenue en recherchant une solution particulière de l'équation (1.5) en posant une distribution de charges concentrées unitaires \vec{F}^* égale à :

$$(1.6) \quad F_i^* = \delta(M - P) e_i$$

appliquée au point P , dans la direction e_i .

Pour un champ de déplacement virtuel u^* , il est possible d'écrire à partir des équations d'équilibre :

$$\int_V \sigma_{ij,j} u_i^* dV + \int F_i u_i^* dV = 0$$

Nous déduisons le théorème des travaux virtuels qui s'écrit :

$$\int_{\partial V} \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{u} d\Gamma + \int_V \vec{F} \cdot \vec{u} dV = \int_V \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^* dV$$

En utilisant les symétries des tenseurs de contraintes, nous avons donc :

$$\int \vec{T}(\vec{M}, \vec{n}) \cdot \vec{u}^* \, d\Gamma + \int \vec{F} \cdot \vec{u}^* \, dV = \int \vec{T}^*(\vec{M}, \vec{n}) \cdot \vec{u} \, d\Gamma + \int \vec{F}^* \cdot \vec{u} \, dV$$

relation qui correspond au théorème de Maxwell-Betti.

Utilisons cette relation pour les deux champs suivants :

$$\begin{aligned} \text{1er champ} & \begin{cases} \vec{u} & \text{déplacement} \\ \vec{T}(\vec{M}, \vec{n}) & \text{vecteur tension au point } \vec{M} \text{ de normale } \vec{n} \\ \vec{F} & \text{force de volume} \end{cases} \\ \text{2e champ} & \begin{cases} \mathcal{U}_{ij}^* & \text{déplacement du point } \vec{M} \text{ dans la direction } j \\ & \text{dû à une force unitaire selon } i \\ \tau_{ij}^* & \text{tension au point } \vec{M} \text{ dans la direction } j \\ & \text{due à une force unitaire selon } i \\ F_i^* = \delta(\vec{M}-\vec{P}) & \text{force volumique (problème de Kelvin)} \end{cases} \end{aligned}$$

où

$\delta(\vec{M}-\vec{P})$ est la distribution de Dirac.

En prenant successivement les forces dans les trois directions de l'espace, le déplacement en un point \vec{M} quelconque du domaine s'écrira :

$$(1.7) \quad \vec{u}_j^* = \mathcal{U}_{ij}^*(\vec{M}, \vec{P}) \, \vec{e}_i$$

Dans cette expression $\mathcal{U}_{ij}^*(\vec{M}, \vec{P})$ représente le déplacement en \vec{M} dans la direction j lorsqu'une charge unitaire est appliquée au point \vec{P} dans la direction i . Les expressions explicites des solutions fondamentales pour un problème de Kelvin sont données comme suit (Cruse (1969), Dominguez (1987)) :

$$(1.8) \quad \mathcal{U}_{ij}^*(\vec{P}, \vec{M}) = \frac{1}{16\pi \mu (1-\nu) r} \left[(3-4\nu) \delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right]$$

pour un problème 3-D et par :

$$(1.9) \quad \mathcal{U}_{ij}^*(\vec{P}, \vec{M}) = \frac{1}{8\pi \mu (1-\nu) r} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right]$$

pour des problèmes en déformation plane. Dans les deux équations précédentes $r = r(P,M)$ représente la distance entre P et M (figure 1.1) et ν le coefficient de Poisson.

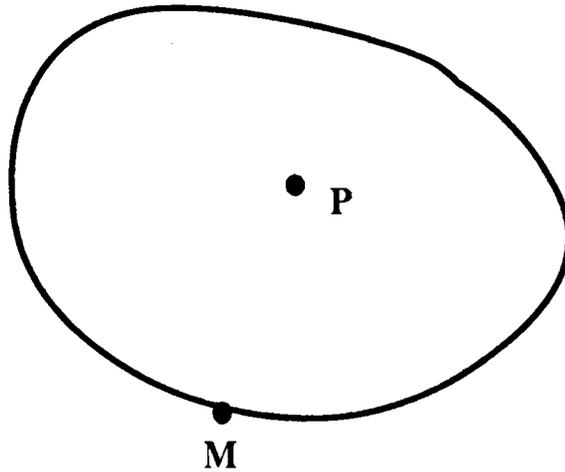


Figure 1.1
Domaine V avec P intérieur

A partir de ces relations, les contraintes peuvent être calculées au point P , et s'exprimeront par :

$$(1.10) \quad \sigma_{jk} = S_{ijk} (P, M) e_i$$

Le noyau S_{ijk} peut être calculé à partir des relations 1.2 et 1.3. Ainsi le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ pourra prendre la forme :

$$(1.11) \quad T_j^* = \tau_{ij}^*(P, M) e_i$$

avec :

$$(1.12) \quad \tau_{ij}^* = - \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] + [1-2\nu] \left[n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} - n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} \right] \right\}$$

pour les problèmes 3-D et :

$$(1.13) \quad \tau_{ij}^* = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] + [1-2\nu] \left[n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} - n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} \right] \right\}$$

pour les problèmes en déformation plane.

Pour un champ de déplacement virtuel u^* , il est possible d'écrire à partir des équations d'équilibre :

$$\int_V \sigma_{ij,j} u_i^* dV + \int_V F_i u_i^* dV = 0$$

1.1.3 IDENTITE DE SOMIGLIANA

Reprenons le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti. Soit donc deux états élastostatiques $[\sigma, \varepsilon, u, F]$ et $[\sigma^*, \varepsilon^*, u^*, F^*]$ définis dans un domaine V borné par une frontière Γ ; Nous rappelons le théorème de Maxwell-Betti vu précédemment et valable pour les milieux élastiques **linéaires** qui s'écrit :

$$(1.14) \quad \int_{\Gamma} \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{u}^* d\Gamma + \int_V \vec{F} \cdot \vec{u}^* dV = \int_{\Gamma} \vec{T}^*(M, \vec{n}) \cdot \vec{u} d\Gamma + \int_V \vec{F}^* \cdot \vec{u} dV$$

Nous allons préciser maintenant l'état " $*$ ". Supposons que le domaine V soit une partie du domaine infini dans lequel une force unitaire est appliquée au point P intérieur à V (solution fondamentale). Les contraintes et déplacement ainsi obtenus définissent l'état " $*$ ".

Supposons que la force unitaire soit appliquée dans la direction i , c'est-à-dire $F_i^* = \delta(M-P) e_i$. Alors :

$$(1.15) \quad \int_V \vec{F}^* \cdot \vec{u} dV = \int_V F_i^*(M) u_j(M) dV(M) = \int_V \delta(M-P) \delta_{ij} u_j dV = \int_V \delta(M-P) \delta_{ij} u_j(M) dV(M) = u_i(P)$$

et l'expression (1.14) devient pour un point P intérieur de V :

$$(1.16) \quad u_i(P) + \int_{\Gamma} \tau_{ij}(M,P) u_j(M) d\Gamma(M) = \int_{\Gamma} \tau_{ij}(M,P) T_j(M) d\Gamma(M) + \int_{\Gamma} F_j(M) \tau_{ij}(M,P) d\Omega(M)$$

expression qui s'appelle identité de Somigliana. Lorsque les forces de volume sont nulles, ce que nous supposons tout au long de ce travail, l'identité précédente devient :

$$(1.17) \quad u_i(P) = \int_{\Gamma} \mathcal{U}_{ij}(M,P) T_j(M) d\Gamma(M) - \int_{\Gamma} \tau_{ij}(M,P) u_j(M) d\Gamma(M)$$

1.1.4 ECRITURE DES CONDITIONS AUX LIMITES

L'expression 1.17 ne peut être utilisée que dans la mesure où les fonctions \mathcal{U}_{ij} et τ_{ij} sont parfaitement définies. Pour arriver à la connaissance de celles-ci, il reste à appliquer les conditions aux limites, c'est-à-dire lorsque P appartient à la frontière. Dans ce cas, les intégrales sont singulières, et il est nécessaire de passer à la limite. Celles-ci sont intégrées au sens des valeurs principales de Cauchy (figure 1.2).

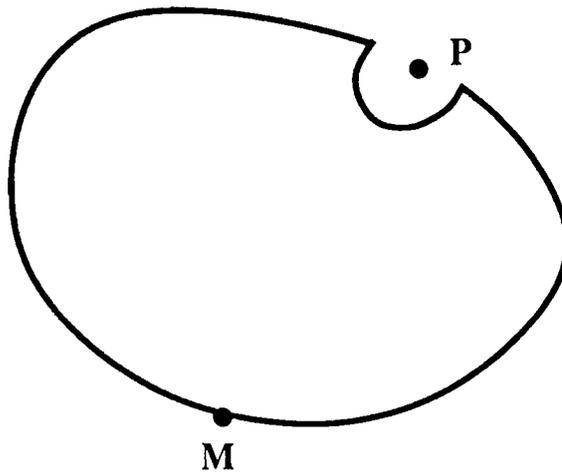


Figure 1.2
Domaine V avec P sur le contour

Dans le cas plan, il est montré (Dominguez (1982)) que pour P appartenant à Γ :

$$C_{ij}(P) u_j(P) = \int_{\Gamma} \mathcal{U}_{ij}(M,P) T_j(M) d\Gamma(M) - \int_{\Gamma} \tau_{ij}(M,P) u_j(M) d\Gamma(M)$$

où C_{ij} est un terme libre qui dépend de la régularité du contour.

$$\begin{aligned} C_{ij} &= 1/2 \text{ pour } P \text{ appartenant à un contour régulier} \\ &= 0 \text{ pour } P \text{ extérieur au domaine } V \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 2(1-\nu)(\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{2}(\sin 2\phi_1 - \sin 2\phi_2) & \sin^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_2 \\ \sin^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_2 & 2(1-\nu)(\phi_1 - \phi_2) - \frac{1}{2}(\sin^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_2) \end{bmatrix}$$

pour un coin défini par la figure (1.3).

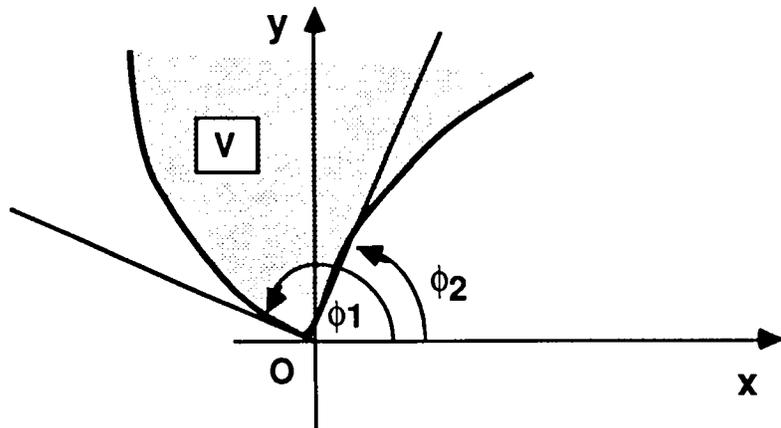


Figure 1.3
Domaine V présentant un coin

Pour le cas 3-D, on trouvera dans le livre de Hartman des résultats pour différentes configurations géométriques.

1.2 METHODE INDIRECTE

L'identité de Somigliana, connue comme une représentation intégrale directe, donne les déplacements à l'intérieur du domaine à partir des conditions appliquées en contraintes ou en déplacements. Il y a une autre représentation où les déplacements (ou contraintes) sont écrits en fonction d'une certaine quantité qui n'est, ni les déplacements appliqués, ni les contraintes appliquées. Ces méthodes sont appelées "méthodes indirectes".

Supposons que le problème à résoudre soit un problème intérieur (figure 1.4 a).

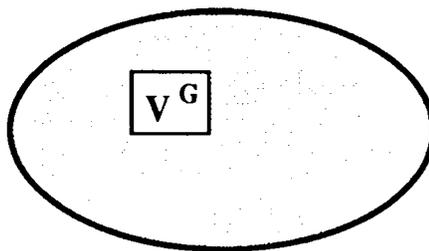


Figure 1.4
Domaine fini V^G : problème intérieur

Le domaine V^G sera le domaine réel occupé par la structure. L'état élastique sera alors défini

par $[\bar{\sigma}^G, \vec{u}^G]$. Soit \vec{n} la normale extérieure au domaine V^G . Définissons le domaine V^D comme étant le complémentaire de V^G . Pour ce domaine, la solution élastique est :

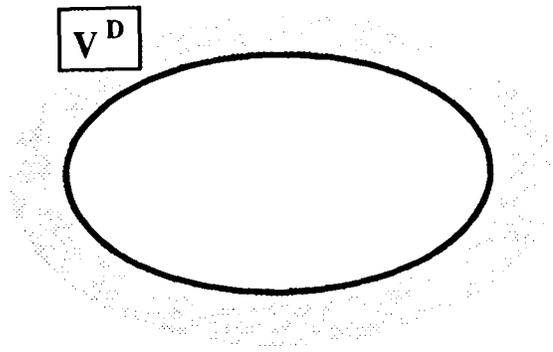


Figure 1.5
 Domaine infini V^D : Problème extérieur

Appliquons maintenant le théorème de réciprocité entre l'état "D" et la solution fondamentale, lorsque la charge concentrée est à l'intérieur de V^G :

$$(1.20) \quad 0 = \int_{\Gamma} \tau_{ij}(M,P) T_j^D(M) d\Gamma(M) - \int_{\Gamma} \tau_{ij}(M,P) U_j^D(M) d\Gamma(M)$$

En soustrayant (1.20) de (1.17), on obtient :

$$(1.21) \quad u_i^G(D) = \int_{\Gamma} \tau_{ij}(M,P) [T_j^G(M) - T_j^D(M)] d\Gamma(M) \\ + \int_{\Gamma} \tau_{ij}(M,P) [u_j^D(M) - u_j^G(M)] d\Gamma(M)$$

La solution dans le domaine "D" peut être choisie arbitrairement. Supposons par exemple qu'à la frontière les déplacements soient les mêmes dans les domaines "G" et "D" (continuité des déplacements).

$$\vec{u}^G(M) = \vec{u}^D(M) \quad M \in \Gamma$$

En notant $\hat{T} = \vec{T}^G(M) - \vec{T}^D(M)$, l'équation (1.24) devient :

$$(1.22) \quad u_i(P) = \int_{\Gamma} \tau_{ij}(M,P) \hat{T}_j(M) d\Gamma(M)$$

Ceci peut être interprété de la façon suivante : le déplacement en un point intérieur de V^G peut être obtenu par la somme de ceux dus aux charges $Td\Gamma$ appliquées sur Γ , lorsque V^G est considéré comme une partie du domaine infini. La représentation (1.22) est connue sous le nom de potentiel de simple couche de densité T . Cette méthode est connue sous le nom de méthode des charges fictives (Crouch et Starfield, 1983).

Supposons maintenant que sur le frontière Γ les contraintes soient les mêmes :

$$\vec{T}^G(M,n) = \vec{T}^D(M,n) \quad M \in \Gamma$$

alors, en posant $\hat{u} = \vec{u}^D - \vec{u}^G$, l'équation (1.21) devient :

$$(1.23) \quad u_i(P) = \int_{\Gamma} \tau_{ij}(M,P) \hat{u}_j(M) d\Gamma(M)$$

Cette représentation est connue sous le nom de potentiel de double couche avec la densité \hat{u} . Cette méthode a été introduite en premier par Crouch (1976) sous le nom de méthode des discontinuités de déplacement.

1.3 PROBLEME PLAN EN ELASTICITE. PASSAGE EN CHAMP COMPLEXE

Dans ce qui suit, nous allons formuler la méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe. L'intérêt de la formulation en champ complexe réside dans la facilité à obtenir des solutions analytiques. Cet intérêt se trouve aussi dans son application à l'étude de problèmes de propagation de fissures. L'utilisation de potentiels de déplacement en équations intégrales peut amener à définir des discontinuités de déplacement (Bui (1977); Bui et Amestoy (1983)). Mais cette formulation n'a pas été menée jusqu'à l'étude de la propagation de fissures en mode mixte. Cela est peut être dû à la difficulté à adapter cette méthode à ce type de problème. Mais il faut souligner tout de même que cette méthode a l'avantage d'être étendue aux problèmes tridimensionnels, ce qui n'est pas le cas de la formulation en champ complexe. En champ complexe, les relations fondamentales de l'élasticité plane sont exprimées au moyen des potentiels complexes $\phi(z)$ et $\psi(z)$ qui sont des fonctions analytiques dont les valeurs en tout point du domaine étudié sont définies par une intégrale de Cauchy dans le plan complexe le long du contour sur lequel les conditions aux limites sont connues. Nous allons maintenant développer la méthode indirecte en recherchant des solutions élémentaires correspondant, soit, à des déplacements discontinus, soit, à des contraintes discontinues appliquées sur un arc de longueur finie dans un plan infini. Ce travail est dû à Bouhaddane (1987).

1.3.1 CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS EN CHAMP COMPLEXE

Une méthode classique de résolution de problème de l'élasticité plane est basée sur l'utilisation des fonctions d'Airy A .

$$\nabla^4 \mathcal{A} = \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial y^4} = 0$$

Une première solution générale de l'équation biharmonique ci-dessus fut donnée par Goursat en 1898 sous la forme suivante :

$$\mathcal{A}(x,y) = \text{Re} [\bar{z} \phi(z) + h(z)]$$

$$\mathcal{A}(x,y) = \frac{1}{2} \left(\bar{z} \phi(z) + z \overline{\phi(z)} + h(z) + \overline{h(z)} \right)$$

Cette solution de base a été développée et appliquée à de nombreux problèmes plan par Kolosov et surtout Muskhelishvili (1963).

Cette solution ramène donc la résolution de l'équation biharmonique à la recherche de deux fonctions analytiques dans une région V du plan $(0, x, y)$ avec des conditions imposées.

Les contraintes s'expriment par les dérivées de la fonction d'Airy par :

$$\sigma_{xx} = \mathcal{A}_{,yy} \quad \sigma_{xy} = -\mathcal{A}_{,xy} \quad \sigma_{yy} = \mathcal{A}_{,xx}$$

ou

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + i \sigma_{xy} &= \mathcal{A}_{,yy} + i \mathcal{A}_{,xy} = -i \frac{\partial}{\partial y} (\mathcal{A}_{,x} + i \mathcal{A}_{,y}) \\ \sigma_{yy} - i \sigma_{xy} &= \mathcal{A}_{,xx} + i \mathcal{A}_{,xy} = \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{A}_{,x} + i \mathcal{A}_{,y}) \end{aligned}$$

Par l'équation (), on a :

$$\mathcal{A}_{,x} + i \mathcal{A}_{,y} = \phi(z) + z \overline{\phi'(z)} + \psi(z)$$

où

$$\psi(z) = h'(z)$$

Par deux dérivations, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + i \sigma_{yy} &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} - z \overline{\phi''(z)} - \overline{\psi'(z)} \\ \sigma_{yy} - i \sigma_{xy} &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} + z \overline{\phi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \end{aligned}$$

Dans ces calculs, nous avons utilisé les relations :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Pour calculer les déplacements, on utilise les relations contraintes déformations.

Si nous posons le vecteur déplacement $D(z, \bar{z})$ sous la forme :

$$D(z, \bar{z}) = u_x(x, y) + i u_y(x, y)$$

Nous avons à un déplacement rigide près :

$$2\mu D(z, \bar{z}) = 2\mu (u_x + i u_y) = (3 - 4\nu) \phi(z) - \overline{\phi(z)} - \psi(z)$$

Donc, en élasticité plane, l'état de contraintes et déplacement peut être défini à l'aide des potentiels complexes $\phi(z)$ et $\psi(z)$. Les relations ci-dessus peuvent être écrites sous forme compacte et sont connues comme étant les relations de Kolosov-Mukhelishvili et que nous écrivons sous la forme :

$$(1.24) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 \left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right] = 4 \operatorname{Re} [\phi'(z)] \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2i \sigma_{xy} &= -2 \left[\bar{z} \phi''(z) + \psi'(z) \right] \\ 2\mu (u_x + i u_y) &= k \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu D \end{aligned}$$

où $k = 3 - 4\nu$ en déformation planes

$$k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{en contraintes planes}$$

Nous pouvons donc déduire les contraintes et déplacements en explicitant les parties réelles et imaginaires des relations ci-dessus.

1.3.2 CONDITIONS AUX LIMITES SUR UN SEGMENT PLACE SUR L'AXE REEL

En coordonnées cartésiennes, les solutions élémentaires sont recherchées en appliquant des conditions aux limites sur un segment placé sur l'axe réel (figure 1.5). Le parcours de ce segment et de l'axe x , dans le sens de l'axe x , définit une partie "G" et une partie "D" du plan z . Il est classiquement utilisé le changement de fonction pour les problèmes de domaine infini (Milne-Tomson (1968), Muskhelishvili (1963)) :

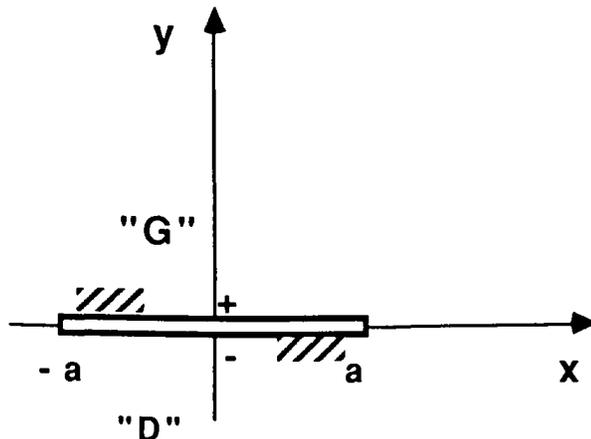


Figure 1.6

Discontinuité de déplacement centrée sur l'axe x

$$(1.25) \quad \Omega(\bar{z}) = -\bar{z} \bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})$$

Passons maintenant aux conditions aux limites. Si z tend vers x , ($x \in]-a, a[$) du côté G précédemment défini, z tend vers le même point mais du côté D .

Ainsi, les conditions en contraintes s'écrivent :

$$(1.26) \quad (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^G(x) = \phi'^G(x) - \Omega'^D(x)$$

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^D(x) = \phi'^D(x) - \Omega'^G(x)$$

et en déplacement :

$$(1.27) \quad 2\mu D^G(x) = k \phi^G(x) + \Omega^D(x)$$

$$2\mu D^D(x) = k \phi^D(x) + \Omega^G(x)$$

En combinant ces relations, nous obtenons les formules de Plemelj du problème. Pour le problème uniquement en contrainte, nous aurons :

$$(1.28 a) \quad (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^G - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^D = (\phi' + \Omega')^G(x) - (\phi' + \Omega')^D(x)$$

$$(1.28 b) \quad (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^G + (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^D = (\phi' - \Omega')^G(x) + (\phi' - \Omega')^D(x)$$

Pour le problème uniquement en déplacement, les formules de Plemelj sont :

$$(1.29a) \quad 2\mu [D^G - D^D] = (k\phi - \Omega)^G(x) - (k\phi - \Omega)^D(x)$$

$$(1.29b) \quad 2\mu [D^G + D^D] = (k\phi + \Omega)^G(x) + (k\phi + \Omega)^D(x)$$

1.3.3 METHODE DES DISCONTINUITES

La théorie des potentiels complexes permet, à partir des conditions aux limites en contraintes, ou en déplacement ou mixtes de déterminer les potentiels complexes en résolvant les équations de Plemelj. Pour construire la méthode intégrale, il est nécessaire de rechercher des solutions singulières ou élémentaires correspondant à des conditions aux limites **discontinues** dans le sens "G" par rapport à "D". Il peut y avoir deux types de discontinuité :

- 1°) une discontinuité de contrainte notée T
- 2°) une discontinuité de déplacement notée D

Selon ce que nous venons de dire :

$$\hat{T} = (T^G + T^D)(x) = (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^G(x) - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^D(x) \quad (1.30)$$

$$\hat{D} = (D^G - D^D)(x)$$

Par la suite on aura recours au changement de repère pour traduire l'influence d'une discontinuité qui a une orientation quelconque. Connaissant les potentiels ϕ et ψ , solutions du problème dans le repère $(0, x, y)$, on pourra calculer les contraintes et déplacements dans un repère $(0', x', y')$ défini par la rotation $\theta = (x, x')$ (figure 1.4) à l'aide des relations suivantes :

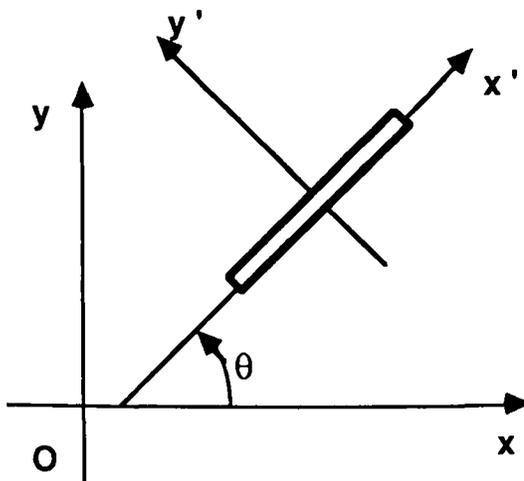


Figure 1.7

Discontinuité disposée arbitrairement dans le plan

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \\ \sigma_{x'x'} - \sigma_{y'y'} - 2i\sigma_{x'y'} &= e^{2i\theta} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2i\sigma_{xy}) \\ u_{x'} + iu_{y'} &= e^{-i\theta} (u_x + iu_y) \end{aligned}$$

Dans les valeurs de \hat{T} ou \hat{D} interviendront un certain nombre de paramètres qui serviront de paramètres de linéarisation du problème.

Pour résoudre un problème réel, intérieur ou extérieur, borné par un contour C ou plusieurs contours, on procèdera de la manière suivante. (On supposera que la structure occupe la partie gauche, ce qui définit le sens de parcours du contour).

1ère étape

Discretisation du contour en un certain nombre de segments. Chaque segment est alors considéré comme une fissure en milieu infini (figure 1.8)

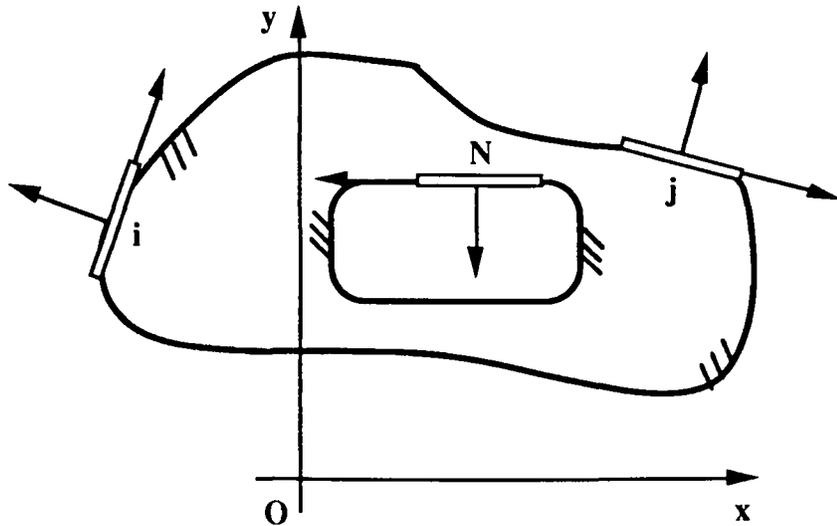


Figure 1.8
Discretisation des contours du domaine

2ème étape

Application sur chaque élément de la solution élémentaire et sommation.

3ème étape

Calcul des paramètres de linéarisation par fixation à la frontière en un certain nombre de points appelés points nodaux.

La solution générale est donc une superposition des solutions élémentaires. Les paramètres de linéarisation étant déterminés, il est possible de connaître l'état de contrainte ou de déplacement en tout point du domaine par les relations (1.26).

1.3.4 DIFFERENTS TYPES DE SOLUTIONS. EQUATIONS DE PLEMELJ

Pour construire la solution élémentaire, il est nécessaire de faire intervenir une discontinuité ; A partir de (1.33) et des équations de Plemelj (1.31) et (1.32), on peut s'apercevoir qu'il est possible de construire cinq solutions.

Solution 1 - Problème mixte avec discontinuité de déplacement et continuité de contrainte.

Dans cette solution :

$$\hat{D}(x) \neq 0 \quad \hat{T}(x) \neq 0 \quad x \in]-a, a[$$

ce qui utilise les équations de Plemelj (1.31 a) et (1.32a) qui deviennent :

$$0 = (\phi' + \Omega')^G(x) - (\phi' + \Omega')^D(x)$$

(1.34) $\bar{x} \in]-a, a[$

$$2\mu \hat{D}(x) = (k\phi - \Omega)^G(x) - (k\phi - \Omega)^D(x)$$

Solution 2 - Problème mixte avec discontinuité de contrainte et continuité de déplacement.

Dans ce cas :

$$\hat{D}(x) = 0 \quad \hat{T}(x) \neq 0$$

Les équations de Plemelj sont alors :

$$\hat{T}(x) = (\phi' + \Omega')^G(x) - (\phi' + \Omega')^D(x)$$

(1.35) $\bar{x} \in]-a, a[$

$$0 = (k\phi - \Omega)^G(x) - (k\phi - \Omega)^D(x)$$

Cette méthode s'apparente à la méthode dite "des charges fictives".

Solution 3 - Problème en déplacement avec discontinuité de déplacement.

Dans ce cas $D(x) \neq 0$, mais nous devons utiliser la deuxième relation en déplacement de Plemelj (1.32 b). Il reste donc à faire une hypothèse sur $D^G + D^D$. Toutes les hypothèses peuvent être valables ; cependant, il est nécessaire de trouver les solutions élémentaires les moins lourdes possibles afin que le calcul numérique qui s'en suivra prenne le moins de temps machine possible. L'hypothèse par Bouhaddane est :

$$(D^G + D^D)(x) = 0$$

Ainsi :

$$2\mu \hat{D}(x) = (k\phi - \Omega)^G(x) - (k\phi - \Omega)^D(x)$$

(1.36) $\bar{x} \in]-a, a[$

$$0 = (k\phi + \Omega)^G(x) + (k\phi + \Omega)^D(x)$$

Solution 4 - Problème en contrainte avec discontinuité de contrainte

Cette solution est la solution duale de la solution 3 en déplacement avec les mêmes remarques. On peut adopter les équations de Plemelj suivantes :

$$\begin{aligned}
 \hat{T}(x) &= (\phi' + \Omega')^G(x) - (\phi' + \Omega')^D(x) \\
 (1.37) \quad 0 &= (\phi' - \Omega')^G(x) + (\phi' - \Omega')^D(x)
 \end{aligned}
 \quad x \in]-a, a[$$

Solution 5 - Problème mixte avec discontinuité de contrainte et de déplacement

Dans ce dernier cas, nous aurons $\hat{T}(x) \neq 0$ et $\hat{D}(x) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}
 \hat{T}(x) &= (\phi' + \Omega')^G(x) - (\phi' + \Omega')^D(x) \\
 (1.38) \quad 2\mu \hat{D}(x) &= (k\phi - \Omega)^G(x) - (k\phi - \Omega)^D(x)
 \end{aligned}$$

Cette dernière solution généralise en fait les solutions 1 et 2.

1.4 CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à une étude bibliographique sur les méthodes intégrales de frontière. La première partie a été consacrée à la méthode obtenue à partir des identités de Somigliana. Cette formulation peut exprimer des discontinuités de déplacement. Mais cela reste difficile de l'appliquer à la propagation des fissures en mode mixte.

La deuxième partie est consacrée à l'écriture en champ complexe de la méthode des équations intégrales grâce à l'intégrale de Cauchy. Cette écriture est très souple pour exprimer les discontinuités de déplacement de différentes formes et de plusieurs ordres. Par conséquent, elle peut être étendue à l'étude de la propagation. Nous adopterons donc cette formulation pour les développements d'éléments de discontinuité et l'application à la propagation de fissures.

CHAPITRE 2

SOLUTION FONDAMENTALE POUR UN ELEMENT CIRCULAIRE A DEUX NOEUDS

Pour traiter le cas de corps élastiques présentant des coupures ou non, le problème de la discrétisation du contour se pose de deux manières essentielles. On se heurte, d'une part, à la difficulté pour définir la forme de l'élément de discrétisation qui épouse le mieux la frontière du domaine à étudier et, d'autre part, à trouver l'ordre adéquat de l'élément, c'est-à-dire le nombre de noeuds. Il faut donc trouver des éléments de discrétisation qui ne compliquent pas trop les calculs et avec lesquels on peut escompter une bonne précision des résultats. Dans ce qui a précédé, nous avons présenté la formulation de la méthode des discontinuités en champ complexe. Dans le présent chapitre, nous allons travailler sur des contours circulaires et présenter les avantages de cette formulation. Pour cela, les équations de Kolosov-Muskhelishvili seront réécrites en coordonnées polaires. Nous allons développer en détail les calculs pour un élément circulaire à deux noeuds. On remarquera la simplicité des solutions obtenues par l'intermédiaire des intégrales de Cauchy par rapport à celles obtenues en coordonnées cartésiennes pour un élément linéaire du même ordre (Crawford (1982)).

II.1 CONDITIONS AUX LIMITES - EQUATIONS DE PLEMELJ

Nous allons chercher les solutions élémentaires pour un contour circulaire. Pour cela, considérons une coupure en arc de cercles d'extrémités a_1 et a_2 et de rayons a dans un milieu infini. Nous définissons ainsi deux domaines appelés "G" et "D". La coupure est placée symétriquement (Fig. 2.1) par rapport à l'axe y pour deux raisons :

- lorsque α tend vers zéro, on doit retrouver la solution antérieure développée pour un arc rectiligne (Bouhaddane (1987)).
- tout autre position dans le plan crée des difficultés numériques liées à l'écriture des fonctions multiformes (Bouhaddane (1987)).

Pour le contour ci-après, il est utile de travailler en coordonnées polaires. Les équations de Kolosov-Muskhelishvili deviennent alors :

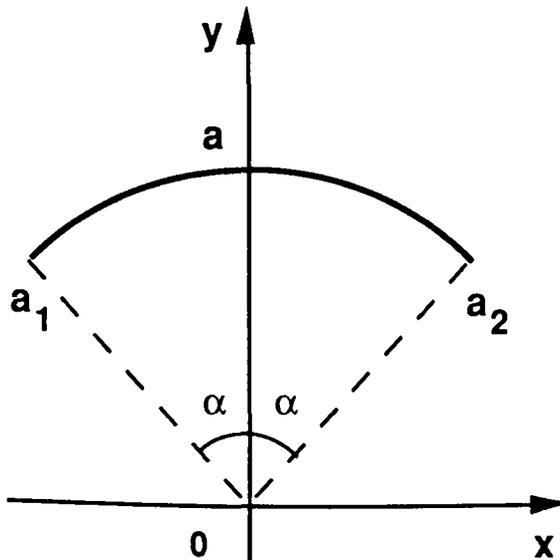


Figure 2.1

Arc circulaire d'ouverture 2α

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2 [\phi(z) + \overline{\phi'(z)}] \\
 & \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - 2i\sigma_{r\theta} = -2e^{2i\theta} [\bar{z} \phi''(z) + \psi'(z)] \\
 & 2\mu (u_r + iu_\theta) = 2\mu D = e^{-i\theta} [k \phi(z) - \overline{z \phi'(z)} - \overline{\psi(z)}]
 \end{aligned}$$

Le vecteur contrainte $\sigma_{rr} + i \sigma_{r\theta}$ intervenant en condition de contrainte sur la coupure s'écrira en fonction de $\phi(z)$ et $\psi(z)$:

$$(2.2) \quad \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \phi(z) + \overline{\phi'(z)} - \bar{z} \phi''(z) - \frac{\bar{z}}{z} \overline{\psi'(z)}$$

En supposant une continuité de contrainte et une discontinuité du déplacement lors du passage du bord "G" au bord "D" de la coupure, nous pouvons écrire les conditions aux limites de la manière suivante :

$$(2.3) \quad (\sigma_{rr} + i \sigma_{r\theta})^G - (\sigma_{rr} + i \sigma_{r\theta})^D = 0 \quad \text{continuité de contraintes}$$

$$2\mu(u_r + i u_\theta)^G(t) - 2\mu(u_r + i u_\theta)^D(t) = 2\mu(D^G - D^D)(t) = 2\mu D(t) \quad \text{discontinuité de déplacement}$$

avec t un point courant du contour, tel que :

$$t = a e^{i\theta} \quad \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha$$

Nous pouvons donc définir le vecteur discontinuité de déplacement par :

$$(2.4) \quad D(t) = (u_r + i u_\theta)^G - (u_r + i u_\theta)^D = D_r + i D_\theta$$

où

$$D_r = u_r^G - u_r^D \quad \text{Discontinuité radiale (ou normale)}$$

$$D_\theta = u_\theta^G - u_\theta^D \quad \text{Discontinuité tangentielle (ou tangente)}$$

Nous allons construire les équations homogènes ou non de Plemelj que nous saurons résoudre. Pour cela, reprenons les équations (2.1) d'où l'on peut déduire les relations suivantes :

$$(2.5) \quad \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} - \bar{z} \phi''(z) - \frac{\bar{z}}{z} \overline{\psi'(z)}$$

$$2\mu (u_r + i u_\theta) = \frac{\bar{z}}{r} [k \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi'(z)}]$$

car
$$e^{2i\theta} = \frac{z}{\bar{z}} \quad \text{et} \quad e^{-i\theta} = \frac{\bar{z}}{r}$$

$$(2.6) \quad X + iY = -i [\phi(z) + z \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_{a_1}^{a_2}$$

L'expression de la résultante sur l'arc $a_1 a_2$ est donc :

$$(2.6) \quad X + iY = -i [\phi(z) + z \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_{a_1}^{a_2}$$

Les fonctions $\phi(z)$ et $\psi(z)$ sont analytiques dans tout le plan sauf sur la coupure. Remarquons que si nous prenons un point z ($z \in "G"$) que nous faisons tendre vers un point de la frontière $t = a e^{i\theta}$, le point z ne tend pas vers le même point, ni du côté "G", ni du côté "D" alors que le point a^2/z y tend puisque $z \bar{z} = a^2$. En conséquence, nous allons faire un prolongement analytique à travers la frontière. Dans l'équation précédente (2.5), si nous supposons que les fonctions ϕ' et ψ' sont définies pour z , nous allons remplacer z par a^2/z , et en posant $X + i Y = 0$, nous obtenons une fonction Ω (Bouhaddane (1987)) définie par :

$$(2.7) \quad \Omega \left(\frac{a^2}{z} \right) = - \left[\frac{a^2}{z} \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right]$$

Ainsi, si Ω et ϕ sont connues, nous pouvons calculer ψ par :

$$(2.8) \quad \psi(z) = - \left[\Omega \left(\frac{a^2}{z} \right) + \frac{a^2}{z} \phi'(z) \right]$$

En dérivant (2.8), nous aurons :

$$(2.9) \quad \psi'(z) = \frac{a^2}{z^2} \overline{\Omega'} \left(\frac{a^2}{z} \right) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z} \phi''(z)$$

Les équations (2.5) exprimées en fonction de ϕ et Ω deviennent :

$$(2.10) \quad \sigma_{rr} + i \sigma_{r\theta} = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \left(1 - \frac{a^2}{z\bar{z}} \right) - z' \phi''(z) \left(1 - \frac{a^2}{z\bar{z}} \right) - \frac{a^2}{z\bar{z}} \overline{\Omega'} \left(\frac{a^2}{z} \right)$$

$$2\mu (u_r + i u_\theta) = \frac{z}{r} \left[k \phi(z) + \overline{\phi'(z)} \left(z - \frac{a^2}{\bar{z}} \right) + \Omega \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) \right]$$

Si nous passons à la limite, z tendra vers $t = a e^{i\theta}$ et pour $z \in "G"$, il vient que $a^2/z \in "D"$ (Fig. 2.2) et par suite :

$$(\sigma_{rr} + i \sigma_{r\theta})^G = \phi^G - \Omega^D$$

$$(\sigma_{rr} + i \sigma_{r\theta})^D = \phi^D - \Omega^G$$

$$2\mu (u_r + i u_\theta)^G = e^{-i\theta} [k \phi^G + \Omega^G]$$

$$2\mu (u_r + i u_\theta)^D = e^{-i\theta} [k \phi^D + \Omega^G]$$

D'après les équations ci-dessus, nous pouvons écrire les deux équations de Plemelj suivantes correspondant aux conditions aux limites définies auparavant :

$$(2.11) \quad (\phi' + \Omega')^G - (\phi' + \Omega')^D = 0$$

$$(k \phi - \Omega)^G - (k \phi - \Omega)^D = 2\mu D(t) e^{-i\theta}$$

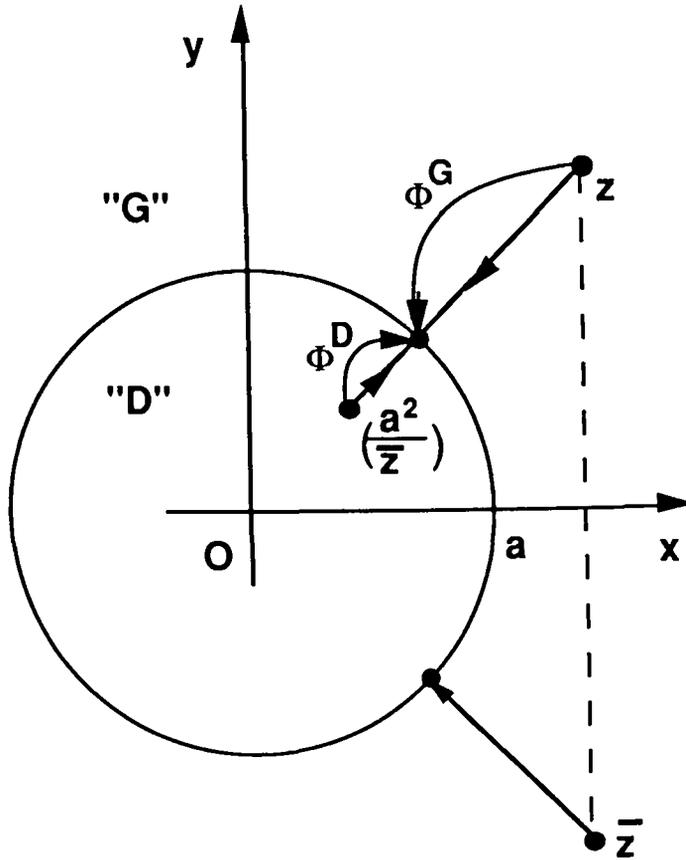


Figure 2.2

Passage à la limite sur le contour circulaire

II.3 SOLUTION GENERALE

Pour avoir la forme de la solution, nous devons considérer le comportement de $\phi(z)$ et $\psi(z)$ pour $z = 0$ où $\phi(z)$ est holomorphe mais où l'on sait que $\Omega(z)$ peut avoir un pôle du second ordre alors qu'à l'infini les deux fonctions sont holomorphes. Pour déterminer la forme générale des potentiels complexes, nous supposons que les contraintes, les rotations ainsi que les résultantes à l'infini sont nulles. L'intégration de l'équation homogène donne donc :

$$(2.12) \quad \phi'(z) + \Omega'(z) = A$$

Soit en intégrant et en supposant la constante d'intégration nulle pour que les déplacements soient nuls à l'infini :

$$(2.13) \quad \phi(z) + \Omega(z) = Az$$

De la même façon, avec les hypothèses citées ci-dessus, l'intégration de l'équation non homogène conduit à :

$$(2.14) \quad k \phi(z) - \Omega(z) = B z + \frac{\mu}{i \pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i\theta} D(t)}{t - z} dt$$

Donc à partir des relations (2.13) et (2.14), nous pouvons déterminer les potentiels complexes $\phi(z)$ et $\Omega(z)$ par :

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{(k+1)} (A + B) z + I(z) \\ \Omega(z) &= A z - \phi(z) \end{aligned}$$

$$I(z) = \frac{\mu}{i \pi (k+1)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i\theta} D(t)}{(t-z)} dt$$

2.4 DETERMINATION DES COEFFICIENTS

Nous avons supposé plus haut que les contraintes à l'infini sont nulles, ce qui implique que $\phi'(z)$ tend vers zéro ; ceci impose donc que :

$$A + B = 0$$

Donc :

$$\phi(z) = I(z)$$

De même $\phi'(z)$ étant holomorphe à l'origine, nous avons :

$$(2.16) \quad \phi'(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + 0(z^2)$$

En utilisant la première équation de (2.15), nous avons :

$$(2.17) \quad \phi'(0) = \alpha_0 = I'(0)$$

Avec l'hypothèse des contraintes nulles à l'infini, $\Omega'(z)$ à la forme suivante :

$$(2.18) \quad \Omega'(z) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + 0\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

De l'équation (2.9), nous déduisons pour $\psi'(z)$, le développement suivant :

$$\psi'(z) = \frac{a^2}{z^2} (\alpha_o + \beta_o) \frac{\beta_1}{z} \dots$$

$\psi'(z)$ étant holomorphe à l'origine, il s'ensuit les conditions :

$$\alpha_o + \beta_o = 0 \quad \text{et} \quad \beta_1 = 0$$

Par conséquent, nous avons :

$$\Omega'(z) = -\alpha_o + 0 \left(\frac{1}{z^2} \right)$$

Nous pouvons donc déduire de la deuxième équation de (2.15) et de (2.17), les résultats suivants :

$$A = \Omega'(\infty) = -\alpha_o = -I'(0) = A$$

Et par conséquent, les potentiels complexes ont la forme suivante :

$$(2.20) \quad \phi(z) = I(z)$$

$$\Omega(z) = -[z I'(0) + I(z)]$$

avec :

$$I(z) = \frac{\mu}{i \pi(k+1)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i\theta} D(t)}{(t-z)} dt$$

2.5 SOLUTION POUR UN ELEMENT CIRCULAIRE A DEUX NOEUDS

Nous allons développer les fonctions potentielles ϕ et Ω pour un élément circulaire à deux noeuds. Pour cela, nous considérons un milieu infini affaibli par une coupure, qu'on appellera désormais fissure circulaire, centrée sur l'axe $x = 0$ de rayon a et d'ouverture 2α dont les extrémités sont désignées par a_1 et a_2 (Fig. 2.3). Sur la fissure a_1 et a_2 sont imposés un champ de contrainte continu et un champ de déplacement discontinu. Avec ces conditions, on retrouve les conditions aux limites explicitées par les équations de Plemelj suivantes :

$$(2.21) \quad (\phi' + \Omega')^G - (\phi' + \Omega')^D = 0$$

$$(k\phi - \Omega)^G - (k\phi - \Omega)^D = 2\mu D(t) e^{i\theta}$$

où la discontinuité est telle que :

$$D(t) = \begin{cases} (D^G - D^D) & \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad t = a e^{i\theta}$$

La détermination des potentiels ϕ et Ω , donc de la solution du problème dépendra du choix de la forme qu'on donnera à la discontinuité $D(t)$. Puisque nous travaillons sur des contours circulaires, ce choix sera de telle manière à faciliter l'intégration et à satisfaire automatiquement à l'équilibre du problème intérieur et obtenir une solution vérifiant l'équilibre élastique. Dans ces conditions, nous proposons pour la discontinuité le développement suivant :

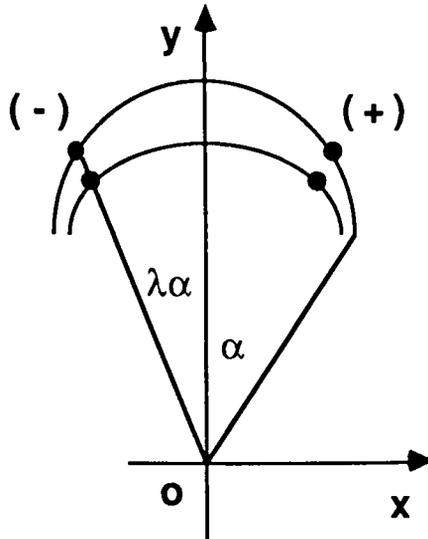


Figure 2.3
Elément circulaire à deux noeuds

$$(2.22) \quad D(t) = \delta_0 + \sum_{n=1}^N \delta_n \sin(2n\theta) + \sum_{n=1}^N \beta_n \cos(2n\theta)$$

Les coefficients complexes δ_n et β_n sont des paramètres de linéarisation comme pour les éléments linéaires (Bouhaddane (1987)) ; nous nous limiterons à un terme constant et un terme antisymétrique en θ pour les éléments à deux noeuds donc nous proposons :

$$(2.23) \quad D(t) = \delta_0 + \delta_1 \sin(2\theta)$$

Bouhaddane [1987] a utilisé les termes en β_1 pour définir la discontinuité, mais dans ce cas on aboutit à un système sous-déterminé puisque si :

$$(2.24) \quad D(t) = \delta_0 + \beta_1 \cos(2\theta)$$

Nous avons au noeud (-) :

$$D^-(t) = D(a e^{i(\frac{\pi}{2} + \alpha)}) = \delta_0 + \beta_1 \cos 2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \delta_0 - \beta_1 \cos(2\lambda\alpha)$$

alors qu'au noeud (+) :

$$D^+(t) = D(a e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)}) = \delta_0 + \beta_1 \cos 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \delta_0 - \beta_1 \cos(2\lambda\alpha)$$

En conséquence:

$$D^+(t) = D^-(t) = \delta_0 - \beta_1 \cos(2\lambda\alpha) \in \mathbb{C}$$

On voit bien qu'on tombe sur un système sous-déterminé qu'on ne peut résoudre. Nous retiendrons donc pour la suite l'équation (2.23) afin de définir la discontinuité, et nous développerons les calculs pour cet élément.

II.3.1 DETERMINATION DES POTENTIELS

Pour faciliter l'intégration, réécrivons la discontinuité (2.23) sous la forme suivante:

$$D(t) = \delta_0 + \delta_1 \sin(2\theta) = \delta_0 + \delta_1 \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i}$$

Dans ces conditions, $\phi(z)$ est défini par (voir 2.20) :

$$\phi(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i\theta} D(t)}{(t-z)} dt = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i\theta}}{(t-z)} \left(\delta_0 + \delta_1 \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i} \right) dt$$

L'intégrale ci-dessus est ramenée par rapport à $t = e^{i\theta}/a$. L'intégrale devient :

$$\phi(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \left[\delta_0 \int_{a_1}^{a_2} \frac{t}{a(t-z)} dt + \delta_1 \int_{a_1}^{a_2} \frac{t^3}{2i a^3 (t-z)} dt - \delta_1 \int_{a_1}^{a_2} \frac{t}{2i a (t-z)} dt \right]$$

Le calcul de ces intégrales ne pose aucun problème d'où l'intérêt de la méthode. Nous aboutissons à l'expression finale de $\phi(z)$ en fonction des paramètres de linéarisation, inconnus du problème δ_0, δ_1 :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} [(a_2 - a_1) + z \operatorname{Log} \frac{z-a_2}{z-a_1}] \delta_0 + \\ &\frac{\mu}{i\pi(k+1)a^3} \left[\frac{a_2^3 - a_1^3}{3i} + z \frac{a_2^2 - a_1^2}{2a^2 i} + z^2 \frac{a_2 - a_1}{i} + z^2 \frac{a_2 - a_1}{i} + z^3 \frac{1}{i} \operatorname{Log} \frac{z-a_2}{z-a_1} \right] \delta_1 \\ &- \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \left[-\frac{a}{z_i} \operatorname{Log} \frac{a_2}{a_1} + \frac{a}{z_i} \operatorname{Log} \frac{z-a_2}{z-a_1} \right] \delta_1 \end{aligned}$$

Pour le calcul de $\phi'(0)$, nous nous heurtons à un problème puisque le dernier terme en δ_1 présente une indétermination en $z = 0$. Un développement limité au voisinage de zéro du dernier terme en δ_1 que nous appellerons par $f(z)$ donne :

$$f(z) = -\frac{\mu}{2i(k+1)} \left\{ \frac{a}{2i} \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) \right\}$$

Donc :

$$\phi'(0) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \operatorname{Log} \frac{a_2}{a_1} \delta_0 + \frac{\mu}{2i\pi(k+1)} \left[\frac{a_2^2 - a_1^2}{2a^3 i} - \frac{a}{2i} \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) \right] \delta_1$$

Ayant $\phi(z)$ et $\phi'(z)$, $\Omega(z)$ est parfaitement défini.

II.5.2 CALCUL DES CONTRAINTES ET DES DEPLACEMENTS

Pour le calcul des contraintes et des déplacements, nous reprenons les équations de Kolosov-Muskhelishvili où on injectera les potentiels complexes qui ont été trouvés auparavant. Nous aurons donc :

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2 [\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}]$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - 2i \sigma_{r\theta} = + e^{2i\theta} [\bar{z} \phi''(z) + \psi'(z)]$$

$$2\mu (u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} [k \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}]$$

Rappelons les équations donnant $\psi(z)$ en fonction de ϕ et Ω :

$$\psi(z) = - \left[\bar{\Omega} \left(\frac{a^2}{z} \right) + \frac{a^2}{z} \phi'(z) \right]$$

et la dérivée :

$$\psi'(z) = \frac{a^2}{z^2} \bar{\Omega}' \left(\frac{a^2}{z} \right) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z} \phi''(z)$$

comme :

$$\Omega(z) = - z \overline{\phi'(0)} - \phi(z)$$

Nous avons donc pour $\psi(z)$ et $\psi'(z)$ les expressions suivantes :

$$\psi(z) = - \left[- \frac{a^2}{z} \phi'(0) - \bar{\phi} \left(\frac{a^2}{z} \right) + \frac{a^2}{z} \phi'(z) \right]$$

et

$$\psi'(z) = - \frac{a^2}{z^2} \phi'(0) - \frac{a^2}{z^2} \bar{\phi}(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z} \phi''(z)$$

Les relations de Kolosov-Muskhelishvili deviennent :

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2 [\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}]$$

$$(2.25) \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta} = -2e^{2i\theta} \left[\left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{a^2}{z} \right) \phi''(z) + \frac{a^2}{z} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi'(z)} - \frac{a^2}{z^2} \phi'(0) \right]$$

$$2\mu (u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left[k \phi(z) - \left(z - \frac{a^2}{\bar{z}} \right) \overline{\phi'(z)} - \phi \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) - \frac{a^2}{z} \phi'(0) \right]$$

Le calcul des contraintes est complet en dérivant $\phi'(z)$, ce qui nous donne pour $\phi''(z)$:

$$\phi''(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left[2 \left(\frac{1}{z-a_2} - \frac{1}{z-a_1} \right) + z \left(\frac{1}{(z-a_2)^2} + \frac{1}{(z-a_1)^2} \right) \right] \delta_0$$

$$+ \frac{\mu}{2i\pi(k+1)} \left[\frac{2(a_2-a_1)}{a^3 i} + \left(\frac{6z}{a^3 i} - \frac{2a}{z^3 i} \right) \text{Log} \frac{z-a_2}{z-a_1} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{6z^2}{a^3 i} + \frac{2a}{z^2 i} \right) \left(\frac{1}{z-a_2} - \frac{1}{z-a_1} \right) + \left(\frac{z^3}{a^3 i} - \frac{a}{z i} \right) \left(-\frac{1}{(z-a_2)^2} + \frac{1}{(z-a_1)^2} \right) + \frac{2a}{z^3 i} \text{Log} \frac{a_2}{a_1} \right] \delta_1$$

Les contraintes et les déplacements sont donc bien définis par ce système d'équations. En identifiant les parties réelles et imaginaires, nous avons :

$$(a) \quad \sigma_{rr} = 2 \text{Re} [\phi'(z)] - \text{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{a^2}{z} \right) \phi''(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi'(z)} - \frac{a^2}{z^2} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$(b) \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\text{Re} [\phi'(z)] + \text{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{a^2}{z} \right) \phi''(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi'(z)} - \frac{a^2}{z^2} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$(c) \quad \sigma_{r\theta} = \text{Im} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{a^2}{z} \right) \phi''(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi'(z)} - \frac{a^2}{z^2} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$(2.26)$$

$$(d) \quad u_r = \frac{1}{2\mu} \text{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left[k \phi(z) - \left(z - \frac{a^2}{\bar{z}} \right) \overline{\phi'(z)} - \phi \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) - \frac{a^2}{z} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$(e) \quad u_\theta = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\theta} \left[k \phi(z) - \left(z - \frac{a^2}{z} \right) \overline{\phi'(z)} - \phi\left(\frac{a^2}{z}\right) - \frac{a^2}{z} \overline{\phi'(0)} \right] \right\}$$

Im désigne la partie imaginaire de la quantité entre crochets

et Re désigne la partie réelle de la quantité entre crochets

2.5.3 CONSTRUCTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

Nous avons développé jusqu'à présent la discontinuité de déplacement par rapport aux deux termes de linéarisation δ_0 et δ_1 qui constituent jusqu'à maintenant les inconnues de notre problème. Les potentiels complexes $\phi'(z)$ etc. ... s'expriment en fonction des paramètres δ_0 et δ_1 . Nous pouvons donc avec les équations (2.26 a et c) construire un système d'équations à résoudre par rapport à δ_0 et δ_1 en prenant comme conditions aux limites $(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})$ (2.2). Mais plutôt que de construire ce système en δ_0 et δ_1 qui ne présente pas d'intérêt particulier, nous allons faire intervenir les discontinuités de déplacement normales et tangentielles (Pour les détails des calculs, voir Annexe 1). Pour cela, nous considérons de nouveau la discontinuité de déplacement sous la forme :

$$D(t) = \delta_0 + \delta_1 \sin 2\theta$$

et faisons intervenir les discontinuités normales D_r et tangentielles D_θ en chaque noeud (voir figures 2.3).

Au noeud (-) :

$$D^-(t) = \delta_0 + \delta_1 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \delta_0 - \delta_1 \sin (2\lambda\alpha) = D_r^- + i D_\theta^-$$

Au noeud (+) :

$$D^+(t) = \delta_0 + \delta_1 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \delta_0 + \delta_1 \sin (2\lambda\alpha) = D_r^+ + i D_\theta^+$$

Donc :

$$\delta_0 = \frac{(D_r^- + D_r^+) + i (D_\theta^- + D_\theta^+)}{2}$$

$$\delta_1 = \frac{(D_r^+ - D_r^-) + i (D_\theta^+ - D_\theta^-)}{2 \sin (2 \lambda \alpha)}$$

Nous pouvons donc traiter notre problème en travaillant directement sur les discontinuités de déplacement en injectant celles-ci dans les équations citées ci-dessus. Nous obtenons alors un système d'équations où nous faisons intervenir les discontinuités de déplacement comme inconnues du problème.

2.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, la méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe a été exprimée en coordonnées polaires. Cela nous a facilité la tâche pour la formulation de cette méthode sur des contours circulaires. Nous avons pu remarquer la souplesse de cette méthode pour développer des éléments circulaires de plusieurs ordres. En application, nous avons développé les solutions qui nous ont permis de construire des éléments circulaires à deux noeuds. Ces éléments sont caractérisés par les discontinuités de déplacement normale et tangentielle sur chaque noeud et constituent les inconnues du problème à discrétiser.

CHAPITRE 3

MISE EN OEUVRE NUMERIQUE DE LA METHODE

ETUDE COMPARATIVE ENTRE ELEMENTS DROITS ET CIRCULAIRES A DEUX NOEUDS

Dans ce chapitre, nous allons aborder la mise en oeuvre de la méthode des discontinuités de déplacement pour les éléments circulaires et droits à deux noeuds en vue de les introduire dans un programme de calcul. Nous verrons comment exprimer des changements de repère en champ complexe pour des discontinuités disposées arbitrairement dans le milieu et résoudre le problème des symétries qui se poseront. Par la suite, à travers des exemples, nous nous proposons de faire une étude comparative entre les éléments droits et circulaires à deux noeuds. En couplant les deux types d'éléments sur une même discrétisation, nous verrons l'avantage que nous pourrions avoir avec cette opération.

3.1 ELEMENTS CIRCULAIRES

3.1.1 CHANGEMENT DE REPERE

Pour rendre opérationnelle la méthode, il est maintenant nécessaire de construire la matrice d'influence. Cette construction impose de calculer en chaque point nodal, l'influence de toutes les discontinuités de déplacement. Rappelons que le calcul des contraintes et déplacements s'effectue dans les repères locaux $(0_i, x_i, y_i)$, $i = 1, N$, dans lesquels sont appliquées les discontinuités D_j .

Prenons l'exemple de la figure 3.1 ; Calculons les contraintes et les déplacements aux points nodaux sur l'arc dans le repère $(0_k/x_k, y_k)$ (repère "influé") dus à la discontinuité de déplacement placée sur l'arc du repère $(0_j, x_j, y_j)$ (repère "influent"). Il faut donc exprimer, d'une part, des rotations de repère, d'autre part, des translations sachant que l'origine du repère est au centre de l'arc de cercle.

En champ complexe, le changement de repère en coordonnées polaires s'obtient d'une manière très simple :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \\
 \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - 2i\sigma_{r\theta} &= e^{2i\theta} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2i\sigma_{xy}) \\
 u_r + iu_\theta &= e^{-i\theta} (u_x + iu_y)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

avec θ l'angle entre $(0, x)$ et $(0, x_j)$.

Notons z_{kj}^+ et z_{kj}^- les coordonnées dans le repère $(0_j, x_j, y_j)$ des noeuds k^+ et k^- sur l'arc dans le repère $(0_k/x_k, y_k)$.

Notons z_k et z_j respectivement les coordonnées ds entres des repères 0_k et 0_j par rapport à un repère absolu $(0/X, Y)$.

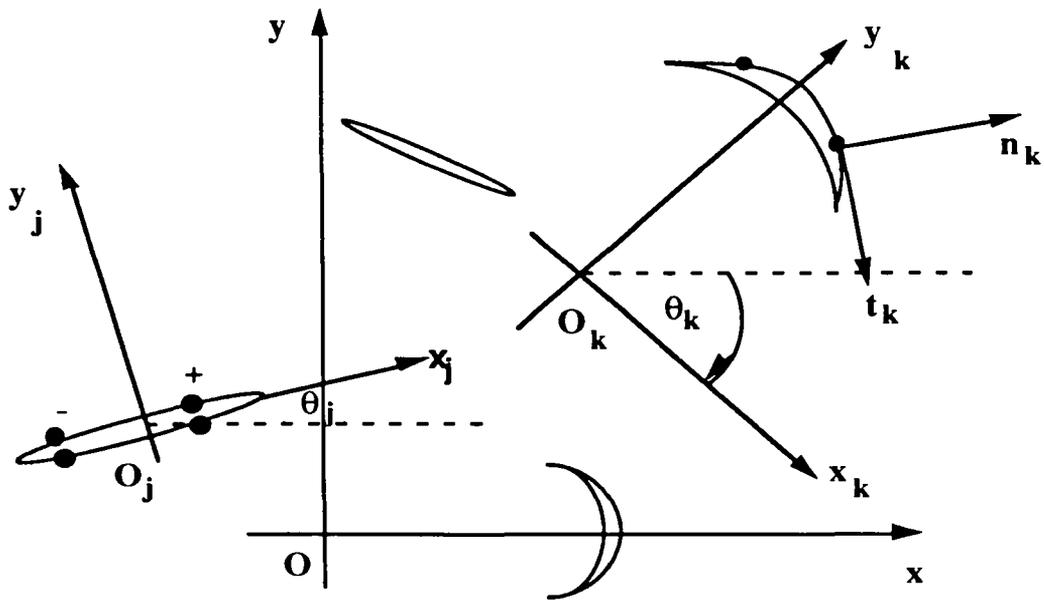


Figure 3.1

Changement de repères pour des discontinuités disposées arbitrairement

$$(3.2) \quad z_j^+ = (z_k - z_j) e^{-i\theta_j} + z_k^+ e^{i(\theta_k - \theta_j)}$$

avec z_k^+ les coordonnées dans le repère $(O_k/x_k, y_k)$ du noeud + (z_k^- , respectivement du noeud -). Paramétrons maintenant la position des points nodaux dans le repère $(O_k/x_k, y_k)$ par l'angle $\lambda_k \alpha_k$ (λ_k position des points nodaux, α_k demi-arc). Ainsi :

$$(3.3) \quad z_k^+ = i a_k e^{i \lambda_k \alpha_k}$$

avec a_k rayon de l'arc "k".

Donc, les coordonnées dans le repère O_j des points nodaux k^+ et k^- sont exprimées par les relations suivantes :

$$z_{kj}^+ = (z_k - z_j) e^{-i\theta_j} + i a_k e^{i \lambda_k \alpha_k} e^{i(\theta_k - \theta_j)}$$

et par suite :

$$z_{kj}^- = (z_k - z_j) e^{-i\theta_j} + i a_k e^{-i \lambda_k \alpha_k} e^{i(\theta_k - \theta_j)}$$

Ces relations introduites dans (3.1) permettent de calculer les contraintes ou déplacement aux points nodaux k^+ et k^- dans le repère $(0_j, x_j, y_j)$. Pour appliquer les conditions aux limites aux points nodaux, il faut se replacer dans le repère local (t_k, n_k) aux points nodaux k^+ et k^- . En appliquant (3.1), nous aurons au point k^+ :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} (\sigma_{nn}^+)_k^j + (\sigma_{tt}^+)_k^j &= 2 \left[\Phi'(z_{kj}^+) + \overline{\Phi'(z_{kj}^+)} \right] \\ (\sigma_{nn}^+)_k^j - (\sigma_{tt}^+)_k^j - 2i (\sigma_{nt}^+)_k^j &= -2e^{2i(\theta_k - \theta_j + \lambda_k \alpha_k)} \times \left[\bar{z}_{kj}^+ \Phi''(z_{kj}^+) + \Psi'(z_{kj}^+) \right] \\ 2\mu \left[(u_n^+)_k^j + i(u_t^+)_k^j \right] &= -i e^{-i(\theta_k - \theta_j + \lambda_k \alpha_k)} \left[k \phi(z_{kj}^+) - z_{kj}^+ \overline{\phi'(z_{kj}^+)} - \overline{\psi(z_{kj}^+)} \right] \end{aligned}$$

et au point k^- :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (\sigma_{nn}^-)_k^j + (\sigma_{tt}^-)_k^j &= 2 \left[\phi'(z_{kj}^-) + \overline{\phi'(z_{kj}^-)} \right] \\ (\sigma_{nn}^-)_k^j - (\sigma_{tt}^-)_k^j - 2i (\sigma_{nt}^-)_k^j &= -2e^{2i(\theta_k - \theta_j - \lambda_k \alpha_k)} \times \left[\bar{z}_{kj}^- \phi''(z_{kj}^-) + \Psi'(z_{kj}^-) \right] \\ 2\mu \left[(u_n^-)_k^j + i(u_t^-)_k^j \right] &= -i e^{-i(\theta_k - \theta_j - \lambda_k \alpha_k)} \left[k \phi(z_{kj}^-) - z_{kj}^- \overline{\phi'(z_{kj}^-)} - \overline{\psi(z_{kj}^-)} \right] \end{aligned}$$

avec $(\sigma_{nn}^j)_k$, $(\sigma_{tt}^j)_k$, $(\sigma_{nt}^j)_k$, $(u_n^j)_k$, $(u_t^j)_k$ respectivement les composantes du tenseur de contrainte et du vecteur déplacement dans le repère local de l'arc k dues à la discontinuité placée sur l'arc j .

Les conditions aux limites peuvent se mettre sous la forme du système d'équations suivant :

$$(\sigma_{nn}^+)_k^j + i(\sigma_{nt}^+)_k^j = 2 \operatorname{Re}[\phi'(z_{kj}^+)] + \left[\bar{z}_{kj}^+ \phi''(z_{kj}^+) + \Psi'(z_{kj}^+) \right]$$

et :

$$(\sigma_{nn}^-)_k^j + i(\sigma_{nt}^-)_k^j = 2 \operatorname{Re}[\phi'(z_{kj}^-)] + \left[\bar{z}_{kj}^- \phi''(z_{kj}^-) + \Psi'(z_{kj}^-) \right]$$

Pour simplifier l'écriture, nous ne faisons pas apparaître les signes (+) et (-) dans les équations qui suivront. En faisant la somme sur toutes les discontinuités $j = 1, N$; où N est le nombre total des discontinuités, nous obtenons le système d'équations algébriques suivant :

$$(\sigma_{nn})_k + i(\sigma_{nt})_k = \sum_{j=1}^N 2R[\phi'(z_{kj})] + \sum_{j=1}^N [z_{kj} \phi''(z_{kj}) + \Psi'(z_{kj})]$$

soit :

$$(\sigma_{nn})_k = \sum_{j=1}^N 2\text{Re} [\phi'(z_{kj})] + \sum_{j=1}^N \text{Re} [z_{kj} \phi''(z_{kj}) + \psi'(z_{kj})]$$

et :

$$(\sigma_{nt})_k = \sum_{j=1}^N \text{Im} [z_{kj} \phi''(z_{kj}) + \psi'(z_{kj})]$$

En explicitant les fonctions ϕ et ψ par rapport aux discontinuités de déplacement (expressions développées au chapitre 2), nous pouvons ramener le système d'équations précédent sous la forme :

$$(\sigma_{nn})_{k^-} = \sum_{j=1}^N [A_{k^-j^-}^{nt} (D_t^-)_j + A_{k^-j^-}^{nn} (D_n^-)_j + A_{k^-j^+}^{nt} (D_t^+)_j + A_{k^-j^+}^{nn} (D_n^+)_j]$$

$$(\sigma_{nn})_{k^+} = \sum_{j=1}^N [A_{k^+j^-}^{nt} (D_t^-)_j + A_{k^+j^-}^{nn} (D_n^-)_j + A_{k^+j^+}^{nt} (D_t^+)_j + A_{k^+j^+}^{nn} (D_n^+)_j]$$

$$(\sigma_{nt})_{k^-} = \sum_{j=1}^N [A_{k^-j^-}^{tt} (D_t^-)_j + A_{k^-j^-}^{tn} (D_n^-)_j + A_{k^-j^+}^{tt} (D_t^+)_j + A_{k^-j^+}^{tn} (D_n^+)_j]$$

$$(\sigma_{nt})_{k^+} = \sum_{j=1}^N [A_{k^+j^-}^{tt} (D_t^-)_j + A_{k^+j^-}^{tn} (D_n^-)_j + A_{k^+j^+}^{tt} (D_t^+)_j + A_{k^+j^+}^{tn} (D_n^+)_j]$$

où A_{kj}, \dots seront appelés les coefficients d'influence. L'écriture matricielle du système ci-dessus est mise sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{nt}^- \\ \cdot \\ \sigma_{nn}^- \\ + \\ \sigma_{nt}^+ \\ + \\ \sigma_{nn}^+ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dots A^{tt} & A^{tn} & A^{tt} & A^{tn} \dots \\ & A^{nt} & A^{nn} & A^{nt} \\ & A^{tt} & A^{tn} & A^{tt} \\ \dots A^{nt} & A^{nn} & A^{nt} & A^{nn} \dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_t^- \\ D_n^- \\ D_t^+ \\ D_n^+ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

3.1.2 INFLUENCE DE L'ELEMENT SUR LUI-MEME (PROBLEMES DE MULTIFORMITE)

Il reste à calculer les éléments diagonaux de la matrice d'influence, c'est-à-dire l'influence de l'élément sur lui-même. Ceci est possible en faisant le calcul des coefficients d'influence pour $z = z_{kk}^+$ et $z = z_{kk}^-$. Ces coefficients méritent une attention particulière car le problème réside dans l'étude de la multiformité des fonctions logarithmiques. Nous rappelons que nous avons dans les fonctions ϕ et ψ à définir les logarithmes L_1 et L_2 suivant :

$$L_1 = \text{Log} \frac{z - a_2}{z - a_1}$$

et

$$\text{Log} \left(\frac{\frac{a^2}{z} - a_2}{\frac{a^2}{z} - a_1} \right)$$

Si nous considérons l'arc $a_1 a_2$ centré sur l'axe y (figure 3.2), il nous faudra calculer les fonctions L_1 et L_2 pour $z \in "G"$. Nous rappelons que si $z \in "G"$, alors

$$\frac{a^2}{z} \in "D".$$

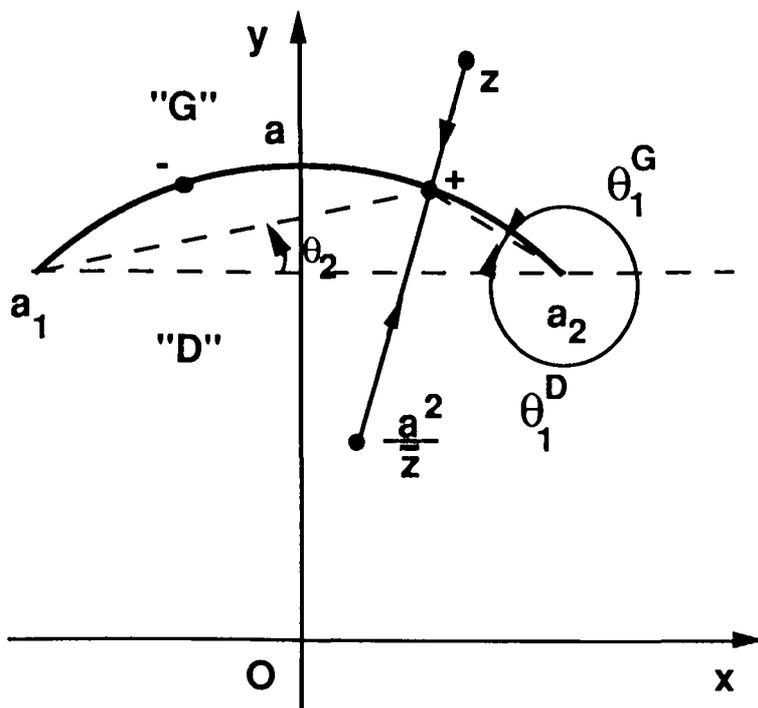


Figure 3.2

Multiformité sur la coupure circulaire $a_1 a_2$

Du fait que l'ordinateur travaille dans le domaine $]-\pi, \pi[$, nous aurons comme résultat :

$$\begin{aligned} L_1 &= \text{Log}^G = \text{Log} \left| \frac{z - a_2}{z - a_1} \right| + i [\text{Arg}(z - a_2) - \text{Arg}(z - a_1)] \\ &= \text{Log} \left(\frac{R_1}{R_2} \right) + i (\theta_1^G - \theta_2) \quad ; \quad 0 < \theta_1^G < \pi \end{aligned}$$

Le résultat de l'ordinateur sera donc pour L_2 :

$$L_2 = \text{Log}^D = \text{Log} \left(\frac{R_1}{R_2} \right) + i (\theta_1^G - \theta_2) = \text{Log}^G$$

or, nous voulons :

$$\begin{aligned} L_2 = \text{Log}^D &= \text{Log} \left(\frac{\frac{a^2}{\bar{z}} - a_2}{\frac{a^2}{\bar{z}} - a_1} \right) + i \left(\text{Arg} \left(\frac{a^2}{\bar{z}} - a_2 \right) - \text{Arg} \left(\frac{a^2}{\bar{z}} - a_1 \right) \right) \\ &= \text{Log} \frac{R_1}{R_2} + i \text{Arg} (\theta_1^D - \theta_2) \end{aligned}$$

avec :

$$\theta_1^D = \theta_1^G - 2\pi$$

Donc :

$$L_2 = \text{Log}^D = \text{Log} \frac{R_1}{R_2} + i (\theta_1 - \theta_2 - 2\pi)$$

Nous devons donc imposer chaque fois que l'on se trouve sur l'arc k :

$$L_1 = \text{Log}^G = \text{Log} \left(\frac{R_1}{R_2} \right) - i (\theta_1 - \theta_2)$$

$$L_2 = \text{Log}^D = \text{Log}^G - 2\pi$$

Donc pour l'influence de l'élément sur lui-même, il suffit de transformer les fonctions comme ci-dessus et cela à chaque noeud de l'élément k .

3.1.2 RESOLUTION DE PROBLEMES POSSEDANT DES SYMETRIES

Dans le cas de structures possédant des symétries de chargement par rapport à 1 ou 2 axes, il est possible de réduire considérablement (par 2^2 ou 4^2) la taille de la matrice d'influence.

Nous allons montrer le principe de calcul dans le cas de la double symétrie par rapport aux axes X et Y (figure 3.3). La structure de l'équation de résolution du problème est alors :

$$\begin{bmatrix} [D]_1 \\ [D]_2 \\ [D]_3 \\ [D]_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D]_1 \\ [D]_2 \\ [D]_3 \\ [D]_4 \end{bmatrix}$$

avec la notation $[D]_i$ indiquant le calcul dans le quadrant i . Du fait de la double symétrie, les conditions aux limites sont les mêmes dans les 4 quadrants, c'est-à-dire que les sous-colonnes $[D]_i$ du membre de gauche de l'équation (3.4) sont toutes identiques. De la même façon $[D]_i$ correspondant à toutes les discontinuités de déplacement du quadrant i garde une valeur semblable dans chaque quadrant en rangeant les $[D]_i$ de façon à garder les symétries.

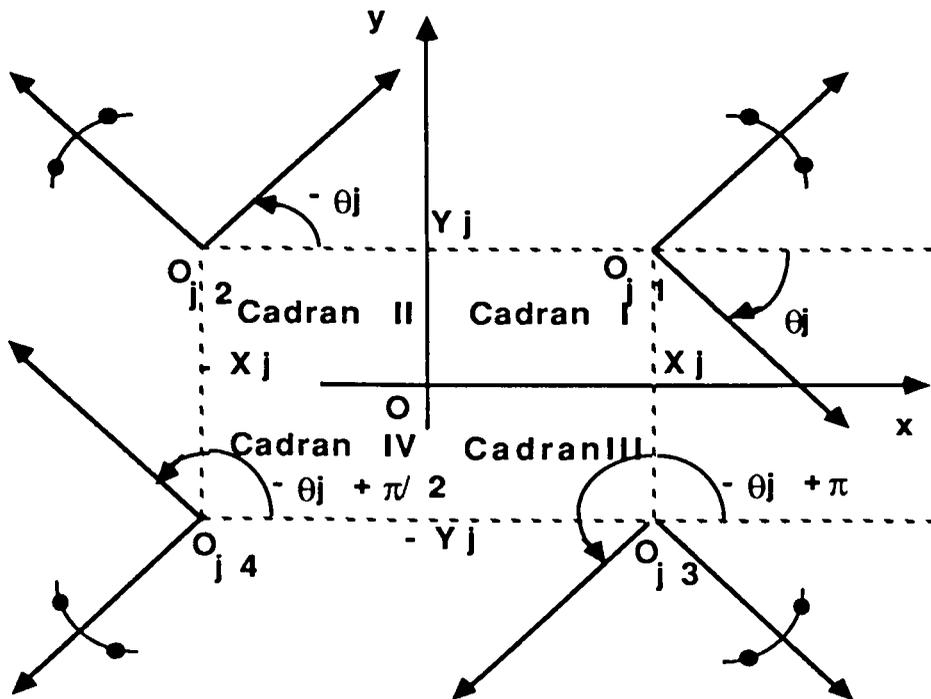


Figure 3.3

Problème de double symétrie pour les éléments circulaires à 2 noeuds

Ces constatations conduisent au fait que le système se réduit à l'unique équation :

$$(3.7) \quad [\]_1 = (A_{14}) [D]_1 + (A_{12}) [D]_2 + (A_{13}) [D]_3 + (A_{14}) [D]_4$$

$[D]_2$ $[D]_3$ et $[D]_4$ peuvent s'exprimer en fonction de $[D]_1$ à l'aide des symétries ; (A_{11}) correspond à l'influence des discontinuités du quadrant 1 sur lui-même, il reste à exprimer les matrices d'influence des discontinuités des quadrants 2, 3 et 4 sur le quadrant 1 pour réduire le système (3.6) à :

$$(3.9) \quad [\]_1 = (A) [D]_1$$

Expression de $[D]_2$, $[D]_3$, $[D]_4$ en fonction de $[D]_1$

$$(3.10a) \quad \begin{aligned} (D_n)_{j2}^+ &= (D_n)_{j1}^+ & (D_t)_{j2}^+ &= - (D_t)_{j1}^- \\ (D_n)_{j2}^- &= (D_n)_{j1}^- & (D_t)_{j2}^- &= - (D_t)_{j1}^+ \end{aligned}$$

pour les discontinuités du quadrant 2 et par :

$$(3.10b) \quad \begin{aligned} (D_n)_{j3}^+ &= (D_n)_{j1}^- & (D_t)_{j3}^+ &= - (D_t)_{j1}^+ \\ (D_n)_{j3}^- &= (D_n)_{j1}^+ & (D_t)_{j3}^- &= - (D_t)_{j1}^- \end{aligned}$$

pour les discontinuités du quadrant 3, et enfin par :

$$(3.10c) \quad \begin{aligned} (D_n)_{j4}^+ &= (D_n)_{j1}^- & (D_t)_{j4}^+ &= - (D_t)_{j1}^- \\ (D_n)_{j4}^- &= (D_n)_{j1}^+ & (D_t)_{j4}^- &= - (D_t)_{j1}^+ \end{aligned}$$

pour les discontinuités du quadrant 4.

Matrice d'influence A

Pour construire les éléments de cette matrice, reprenons l'exposé effectué au paragraphe précédent. Calculons l'effet de toutes les discontinuités sur un point nodal K_1^+ (ou K_1^-). Celui-ci est donné par les relations (3.5).

L'influence de tous les éléments du quadrant 1 sur ce point nodal sera donc égale à :

$$\begin{aligned}
(3.11) \quad & (\sigma_{nn}^-)_{k_1}^{j_1} + (\sigma_{tt}^-)_{k_1}^{j_1} = 2 \left[\phi'(z_{kj}) + \overline{\phi'(z_{kj})} \right] \\
& (\sigma_{nn}^-)_{k_1}^{j_1} - (\sigma_{tt}^-)_{k_1}^{j_1} - 2i (\sigma_{nt}^-)_{k_1}^{j_1} = -2e^{2i(\theta_k - \theta_j - \lambda_k \alpha_k)} \times [\bar{z}_{kj} \phi''(\bar{z}_{kj}) + \psi'(\bar{z}_{kj})] \\
& 2\mu \left[(u_n^-)_{k_1}^{j_1} + i(u_t^-)_{k_1}^{j_1} \right] = -i e^{-i(\theta_k - \theta_j - \lambda_k \alpha_k)} \left[k \phi(\bar{z}_{kj}) - z_{kj} \overline{\phi'(\bar{z}_{kj})} - \overline{\psi(\bar{z}_{kj})} \right]
\end{aligned}$$

L'influence de tous les éléments du quadrant 2 sur K_1 sera obtenue en substituant dans (3.11) X_{j_1} par $-X_{j_1} = X_{j_2}$, Y_{j_1} gardant la même valeur, c'est-à-dire Z_{j_1} par $-Z_{j_1}$ et θ_{j_1} par $-\theta_{j_1} = \theta_{j_2}$.

De la même façon, l'influence de tous les éléments du quadrant 3 sur K_1 sera calculée en substituant dans (3.11) X_{j_1} par $-X_{j_1} = X_{j_3}$, Y_{j_1} par $-Y_{j_1} = Y_{j_3}$, c'est-à-dire Z_{j_1} par $-Z_{j_1}$ et θ_{j_1} par $\theta_{j_1} + \pi = \theta_{j_3}$.

Enfin, l'influence de tous les éléments du quadrant 4 sur K_1 sera calculée en substituant dans (3.11) Y_{j_1} par $-X_{j_1} = Y_{j_4}$, Y_{j_1} gardant la même valeur, c'est-à-dire Z_{j_1} par $-Z_{j_1}$ et θ_{j_1} par $\pi - \theta_{j_1} = \theta_{j_4}$.

Enfin, pour construire la matrice A , il suffira de tenir compte des relations (3.10).

Cas des simples symétries

Les simples symétries sont un cas particulier de ce que nous venons de traiter. Par exemple, la symétrie par rapport à X sera obtenue en ne tenant compte que des relations entre les indices 1 et 4.

3.2 ELEMENTS LINEAIRES

Les solutions pour les éléments linéaires d'ordre deux ont été développés par Bouhaddane (1987). Pour une discontinuité rectiligne, le choix proposé pour la discontinuité $D(t)$ est sous forme d'un polynôme du premier degré donné par :

$$D(t) = \alpha t + \beta$$

avec α et β des coefficients de linéarisation complexe et :

$$-a < t < a$$

où a est la demi-longueur de l'élément.

Les relations de changement de repères et la symétrie se traitent de la même manière que précédemment, sauf que dans le cas présent, le repère de l'élément se trouve confondu avec le centre de l'élément. Nous apportons dans ce qui suit la résolution du problème de symétrie. Suivant la figure 3.4, nous avons :

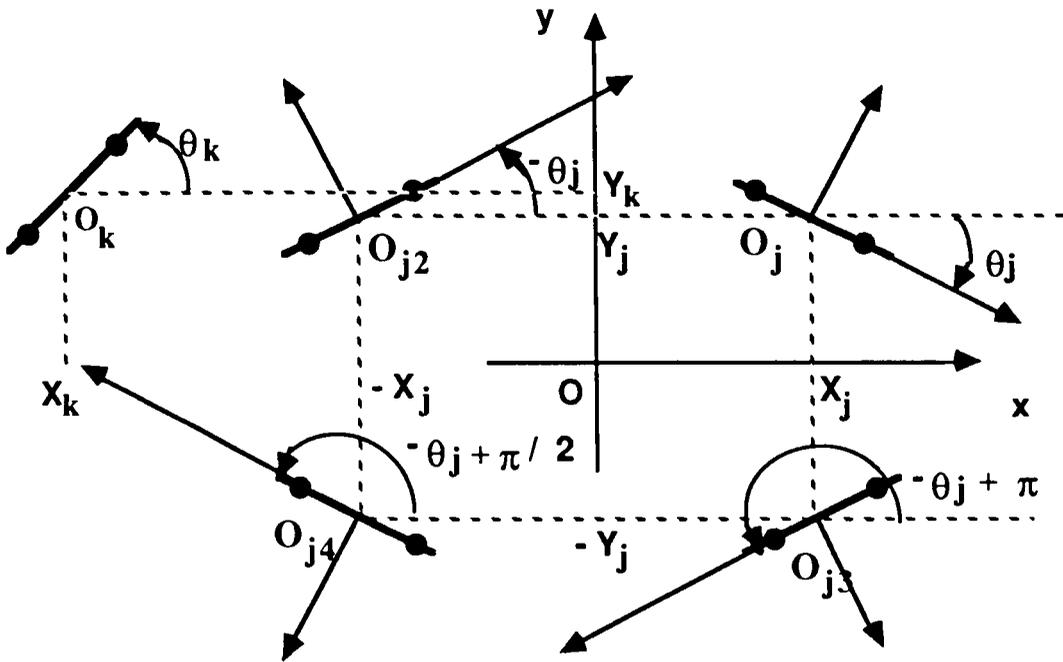


Figure 3.4

Changement de repère et problème de symétrie pour les éléments droits à 2 noeuds

repère influent (o_j, x_j, y_j)
 repère influé (o_k, x_k, y_k).

Les centres des éléments sont définis par :

$$z_k = (x_k, y_k)$$

$$z_j = (x_j, y_j)$$

Il nous faut trouver les coordonnées $z^+ = z_{kj}^+$ et $z^- = z_{kj}^-$ des noeuds (+) et (-) dans le repère - influent soit :

$$z_{kj}^+ = (z_k - z_j) e^{-i\theta_j} + z_{/x_k y_k}^+ e^{i(\theta_k - \theta_j)}$$

où $z_{/x_k y_k}^+$ sont les coordonnées du noeud (+) dans (o_k, x_k, y_k) définis par :

- λ : paramètres de position du noeud
 a^k : demi longueur de l'élément k

Donc $z_{kj}^+ = (z_k - z_j) e^{-i\theta_j} + \lambda a^{(k)} e^{i(\theta_k - \theta_j)}$ et par suite

$$z_{kj}^- = (z_k - z_j) e^{-i\theta_j} - \lambda a^{(k)} e^{i(\theta_k - \theta_j)}$$

Le problème de symétrie ne présente aucune difficulté et s'obtient de la même manière que précédemment puisque les éléments en question présentent les mêmes similitudes.

3.3 ORGANIGRAMME GENERAL

Nous avons les éléments nécessaires pour définir le problème qu'on se propose de résoudre. Nous pouvons donc discrétiser le milieu à étudier avec ses conditions aux limites, remplir la matrice des coefficients d'influence et résoudre le système d'équations. L'organigramme suivant présente les étapes à suivre pour construire le programme de calcul qui nous permettra de résoudre nos problèmes. Le programme mis au point permet de discrétiser le domaine avec des éléments circulaires, des éléments droits à deux noeuds. Nous pouvons de même combiner les deux types d'éléments pour une meilleure approche de la géométrie du domaine afin d'améliorer les résultats. La première phase de l'algorithme ci-dessous (figure 3.5) concerne l'introduction des données. L'étape suivante fait intervenir la discrétisation par éléments droits et par la discrétisation avec des éléments circulaires avec les conditions aux limites. Une fois la discrétisation terminée, la matrice des coefficients d'influence est remplie. On peut alors procéder à la résolution du système d'équation dont les inconnues du problème sont les discontinuités de déplacement. Une fois le système d'équations résolu, on peut calculer les contraintes et déplacements sur le contour. A la fin, nous pouvons calculer les contraintes et déplacements en des points choisis du domaine à étudier.

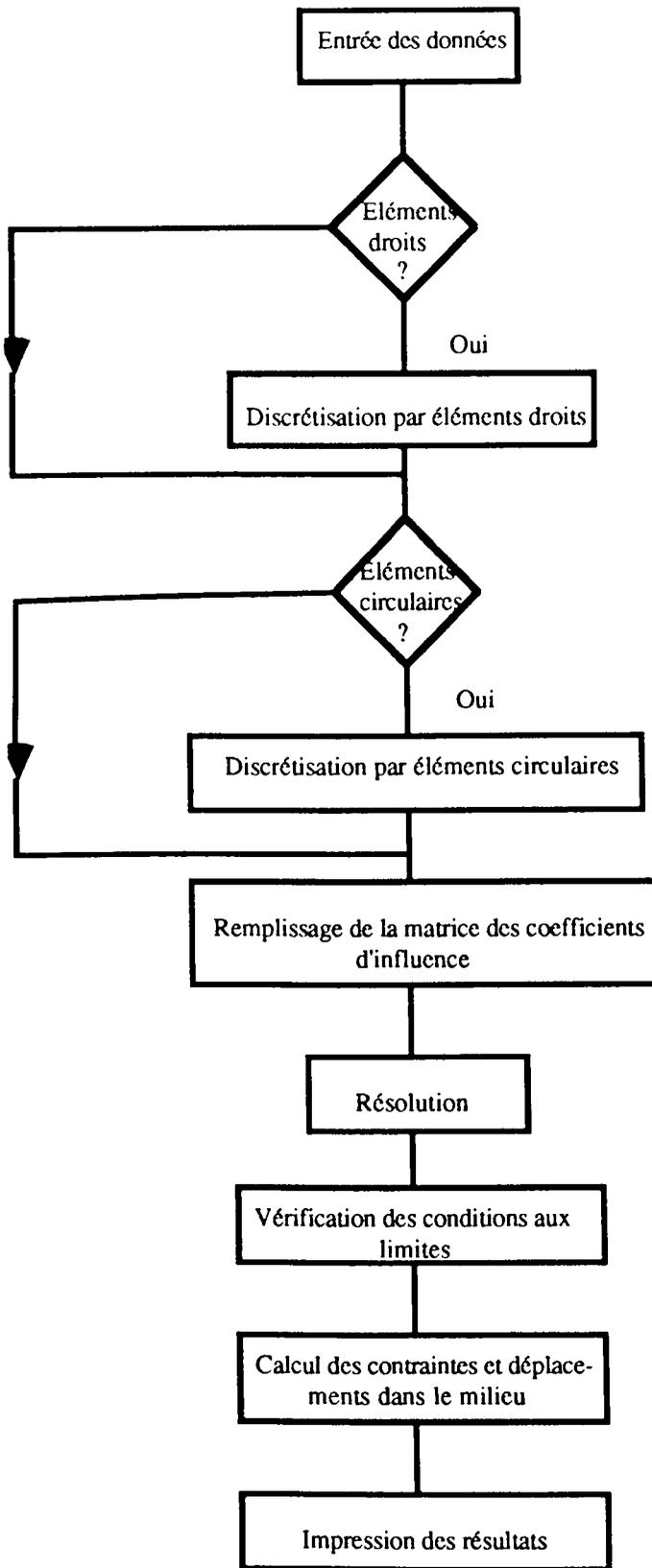


Figure 3.5

Organigramme général de discrétisation et résolution avec éléments circulaires et droits à deux noeuds

3.4 EXEMPLES

Dans ce paragraphe, à travers une série d'exemples, nous nous proposons de faire une étude comparative entre les éléments droits et les éléments circulaires à deux noeuds. Pour l'élément droit à deux noeuds, Bouhaddane (1987) trouve que la position optimale des noeuds de l'élément se trouve à $\lambda a = \pm \sqrt{2}/2 a$ de part et d'autre du centre de l'élément de longueur $2a$ (figure 3.6). Pour notre part, nous trouvons pour l'élément circulaire que la position du point nodal a pour coefficient $\lambda = 0,65$, c'est-à-dire que les coordonnées des noeuds dans le repère de l'élément sont :

$$z^+ = a e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 0,65 \alpha\right)} \quad \text{et} \quad z^- = a e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 0,65 \alpha\right)}$$

où a et α sont respectivement le rayon et la demi-ouverture de l'élément arc de cercle (figure 3.7).

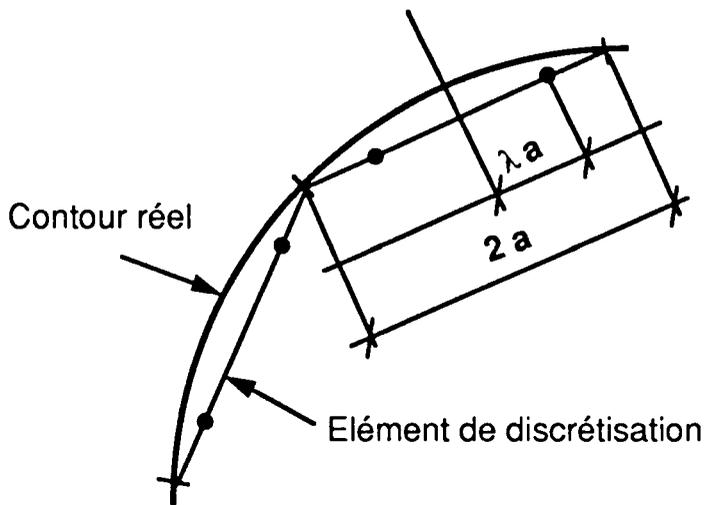


Figure 3.6
Discretisation par élément droit

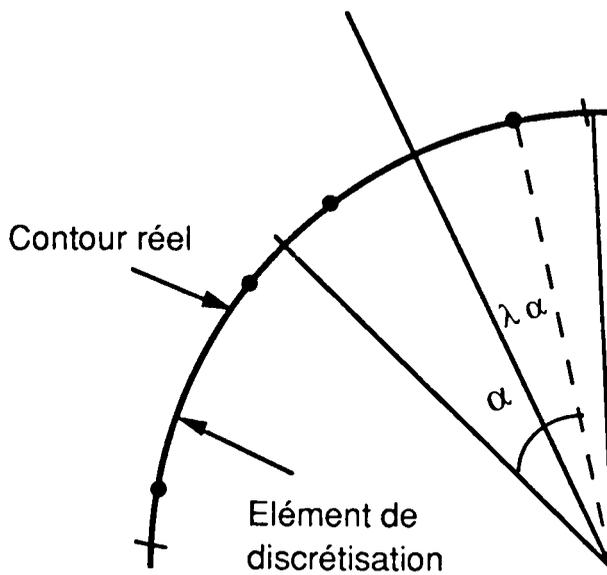


Figure 3.7
Discretisation par élément circulaire

3.4.1 TUNNEL SOUS PRESSION UNIFORME.

Le premier exemple concerne une cavité circulaire de rayon R dans un milieu infini et soumise à une pression intérieure uniforme P . Vu la configuration de la géométrie et du chargement, le problème a été traité en double symétrie (symétrie par rapport aux axes x et y). Le quart de cercle a été discrétisé avec 5 éléments de discrétisation circulaires ou droits à deux noeuds (figure 38 a). La comparaison des deux discrétisations est faite sur les erreurs relatives $E(\%)$ obtenues sur les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ calculées sur l'axe x aux points r/R , où l'origine de r est prise en 0. Les figures (3.8 b, c) représentent donc $E(\%)$ en fonction de r/R . Pour ce type de problème, les éléments circulaires donnent exactement la solution analytique, alors que les éléments droits présentent des perturbations principalement près du contour. Remarquons que ce type de chargement privilégie la discrétisation en éléments circulaires puisque la pression p ne provoque que de l'expansion radiale sans distorsion. Ceci explique en partie, pour cet exemple les résultats obtenus à l'avantage des éléments circulaires.

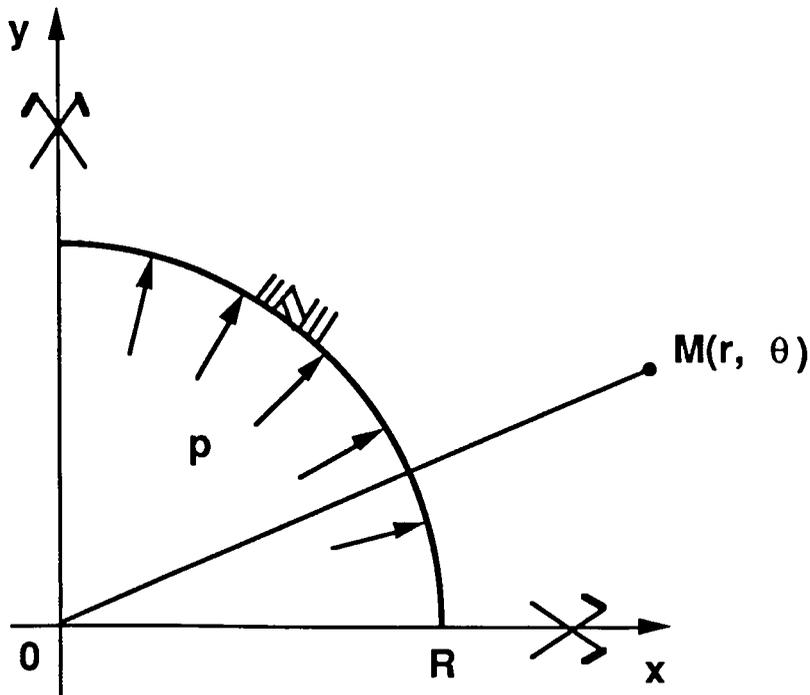


Figure 3.8 a
Cavité circulaire sous pression uniforme

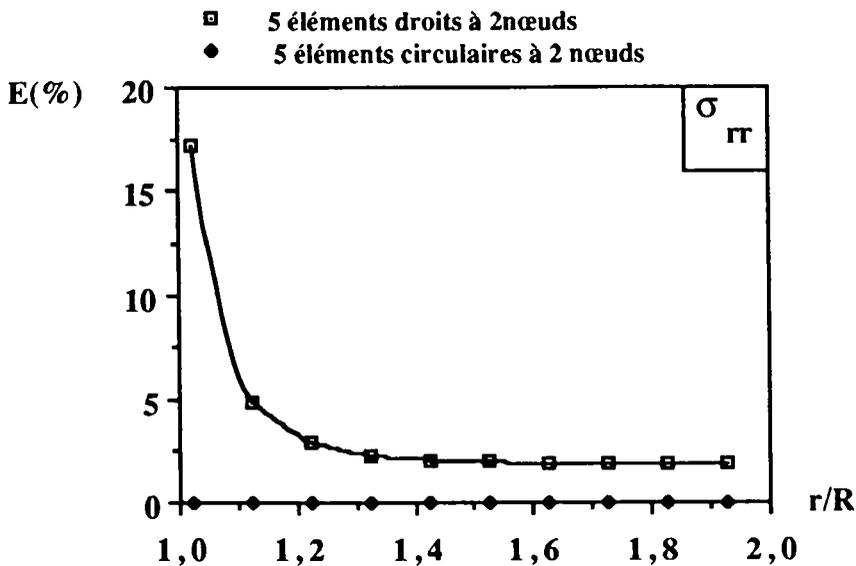


Figure 3.8 b
 Erreur relative sur les contraintes σ_{rr} en fonction de r/R

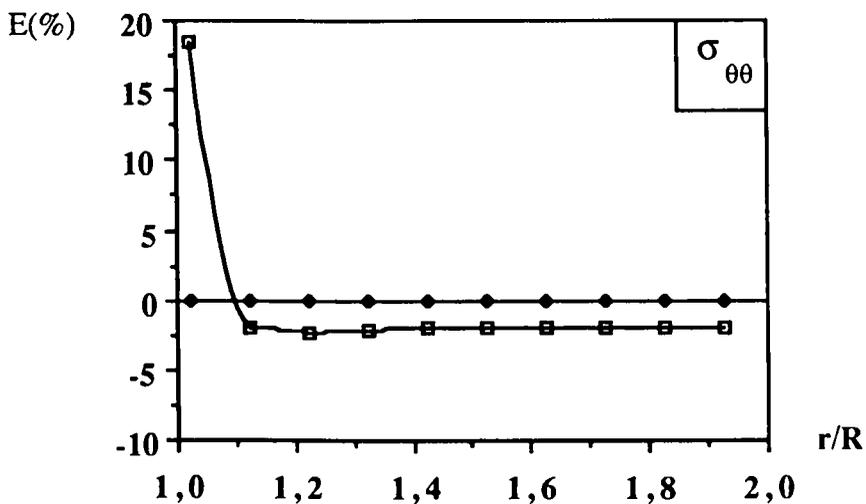


Figure 3.8 c
 Erreurs relatives sur les contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de r/R

3.4.2 CAVITE CIRCULAIRE CHARGEE SUR UN SECTEUR

L'exemple précédent nous a montré l'efficacité des éléments circulaires. Mais du fait du chargement radial uniforme sur le contour, nous ne pouvons conclure définitivement. Nous avons donc procédé, dans les exemples suivants, au chargement de la cavité circulaire de rayon R avec une pression p sur un secteur d'ouverture $\alpha < \pi/2$ pour un quart de cercle discrétisé afin de faire intervenir de la distorsion (figure 3.9 a). Le quart de cercle est discrétisé avec 6 éléments. Trois éléments sont disposés sur l'arc

d'ouverture α où agit la pression p et le reste des éléments sur la partie non chargée d'ouverture $\pi/2 - \alpha$. Le premier cas correspond à $\alpha = 60^\circ$. Le calcul d'erreurs relatives sur les contraintes $E(\%)$ est effectué sur les points se trouvant sur l'axe x (figures 3.9 b, c). Le deuxième cas de chargement correspond à une ouverture $\alpha = 45^\circ$ (figure 3.10 a). Le calcul d'erreurs relatives sur les contraintes est effectué sur l'axe x et sur des points se trouvant sur l'axe orienté à 45° par rapport à l'axe x (figures 3.10 b, c). Globalement les précisions sont équivalentes pour ces exemples avec un avantage pour le calcul sur l'axe incliné à 45° pour les éléments circulaires. Il faut souligner que les contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ présentent beaucoup de perturbations sur l'axe x , ce qui explique que le calcul d'erreurs sur cet axe reste très délicat et dans certains cas n'a pas beaucoup de sens.

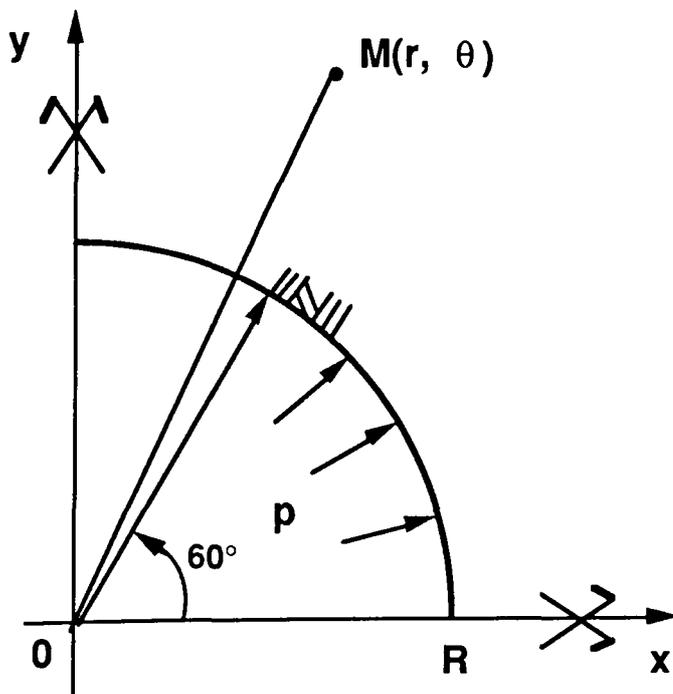


Figure 3.9a

Cavité circulaire chargée sur un secteur d'ouverture $\alpha = 60^\circ$

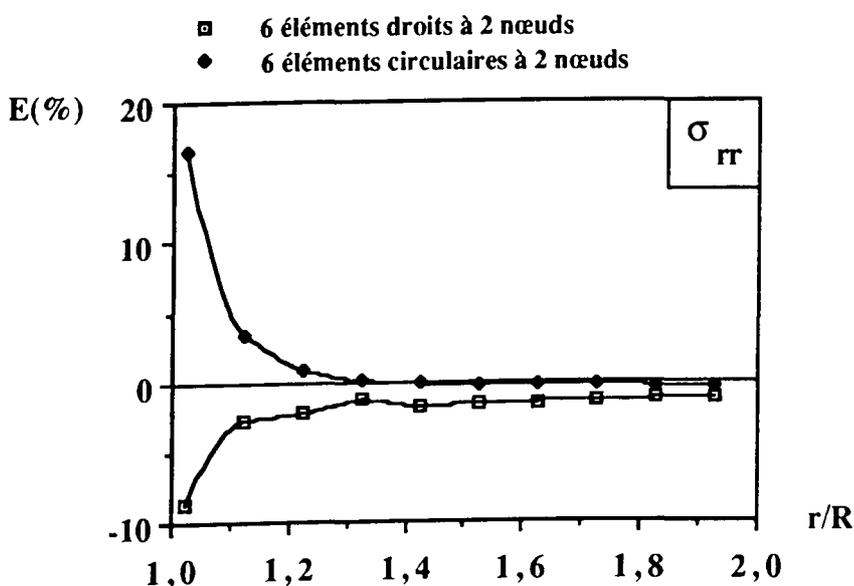


Figure 3.9 b

Erreurs relatives $E(\%)$ sur les contraintes σ_{rr} calculées sur l'axe x en fonction de r/R

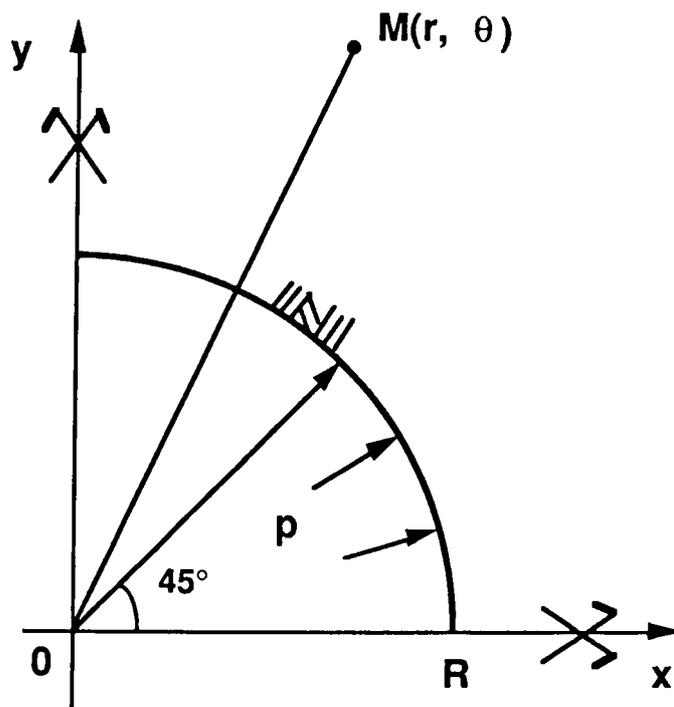


Figure 3.10 a
Cavité circulaire chargée sur un secteur d'ouverture $\alpha = 45^\circ$

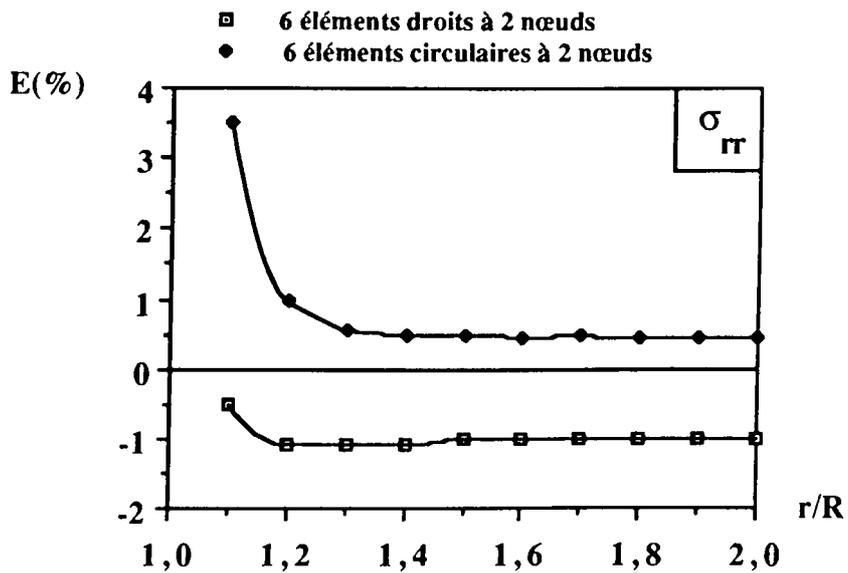


Figure 3.10 b
Erreurs relatives $E(\%)$ sur les contraintes s_{rr} calculées sur l'axe x en fonction de r/R

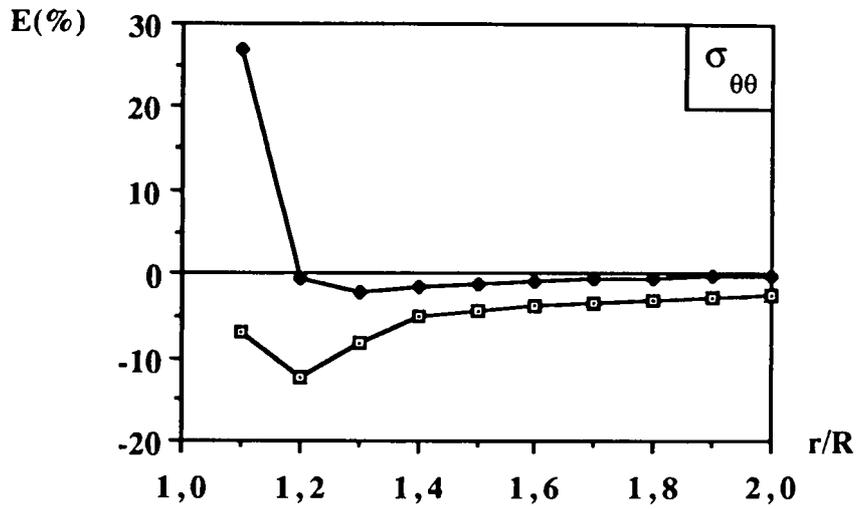


Figure 3.10 c

Erreurs relatives E(%) sur les contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ calculées sur l'axe x en fonction de r/R

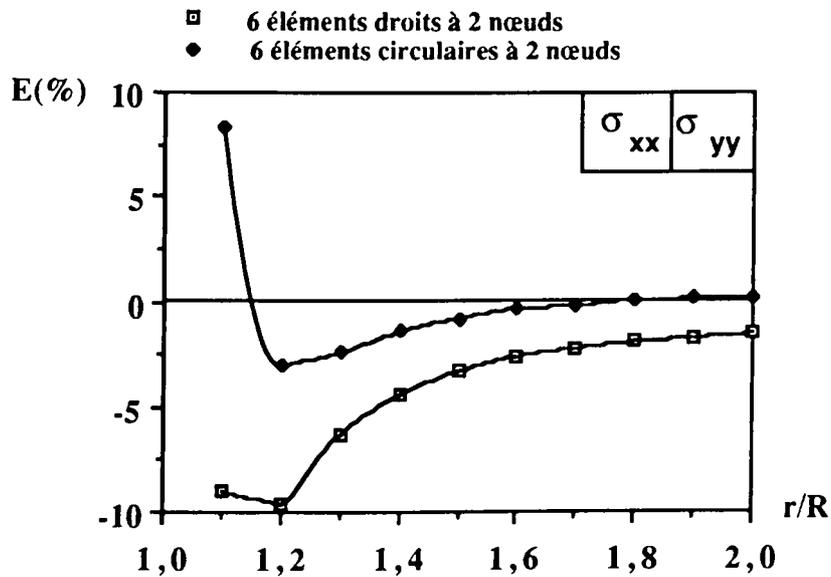


Figure 3.10 d

Erreurs relatives E(%) sur σ_{xx} et σ_{yy} calculées sur l'axe orienté à 45° en fonction de r/R

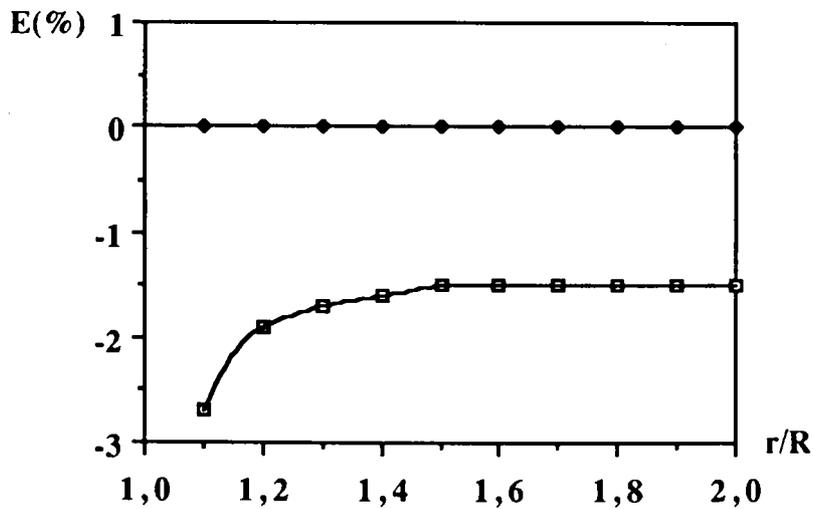


Figure 3.10 e

Erreurs relatives $E(\%)$ sur σ_{xy} calculées sur l'axe orienté à 45° en fonction de r/R

3.4.3 DISQUE CIRCULAIRE CHARGÉ SUR UN SECTEUR (ESSAI BRÉSILIEN)

Cet exemple correspond au problème intérieur des exemples précédents. Il concerne un disque circulaire plein de rayon R chargé sur un secteur. En double symétrie, le quart de cercle est discrétisé avec 8 éléments circulaires ou droits. La pression de chargement p agit sur un secteur d'ouverture $\alpha = 10^\circ$ à partir de l'axe vertical. La partie restante n'est pas chargée (figure 3.11 a). Le calcul des contraintes et des erreurs relatives correspondantes est menée sur l'axe y . Les figures 3.11 b, c nous montrent les courbes des contraintes théoriques et calculées numériquement par des discrétisations d'éléments circulaires et droits. En première remarque, nous pouvons dire que globalement, les résultats sont équivalents et semblent proches des valeurs analytiques (Henry (1988)). Mais les figures 3.11 d, e qui représentent les erreurs relatives sur les courbes précédentes permettent de montrer certaines différences. Il est nécessaire de remarquer que les contraintes tangentielles s'annulent en un certain point comme le montre la figure (3.11 b). Il est donc normal que le calcul d'erreur proche de ce point soit perturbé (ce qui est équivalent à un point très proche du contour).

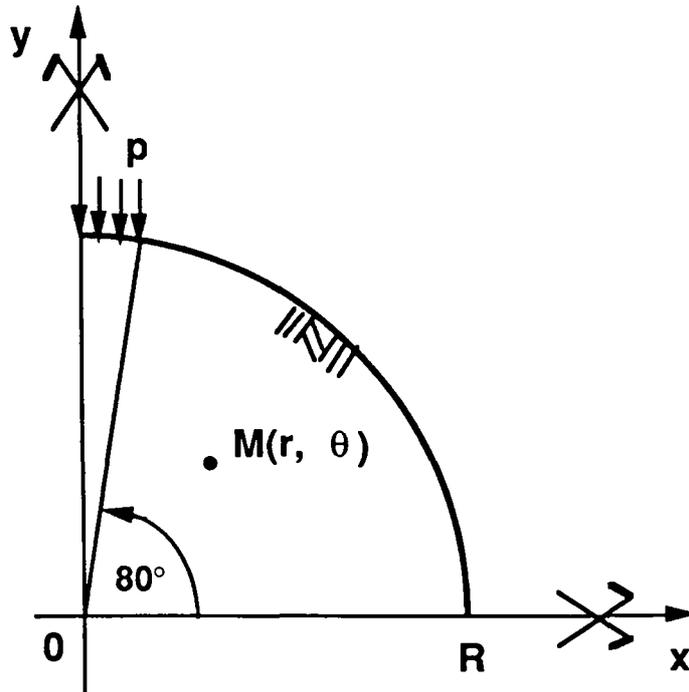


Figure 3.11 a

Disque plein chargé sur un secteur d'ouverture $\alpha = 10^\circ$

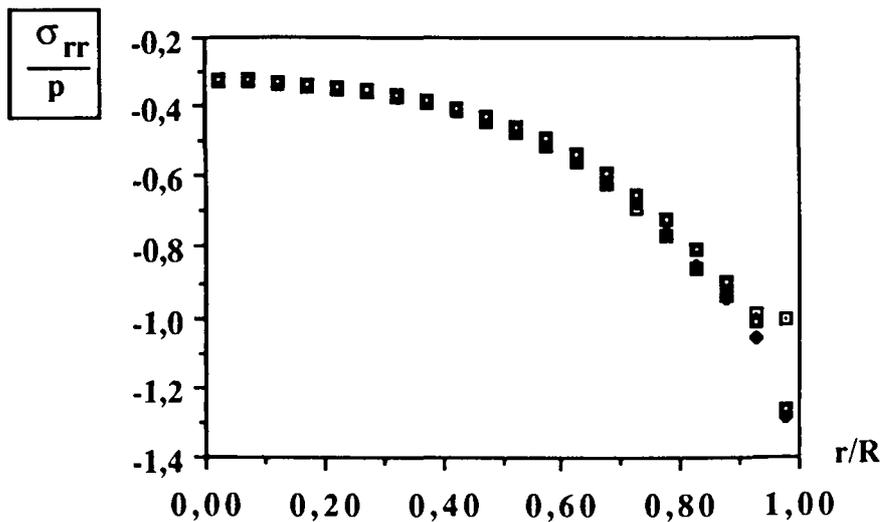


Figure 3.11 b

Comparaison des contraintes σ_{rr} calculées sur l'axe y par rapport à la solution analytique

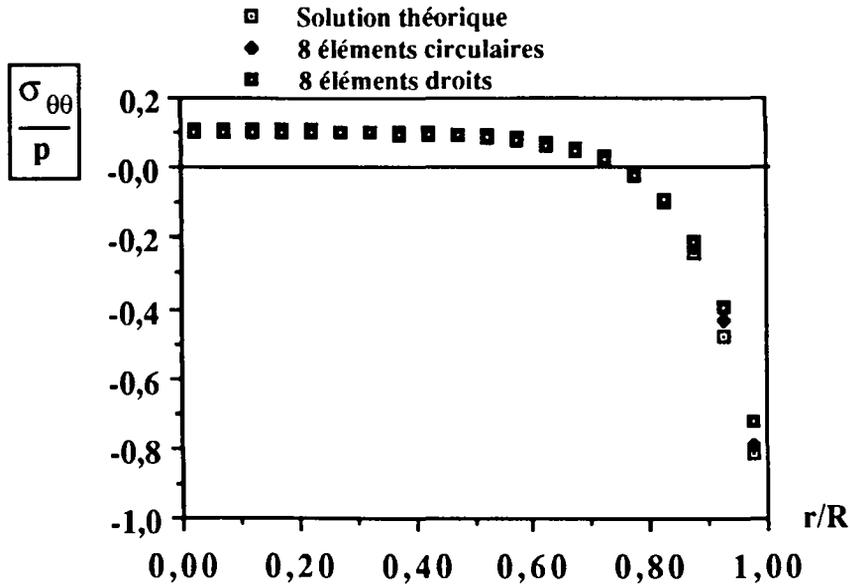


Figure 3.11 c
 Comparaison des contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ calculées sur l'axe y par rapport à la solution analytique

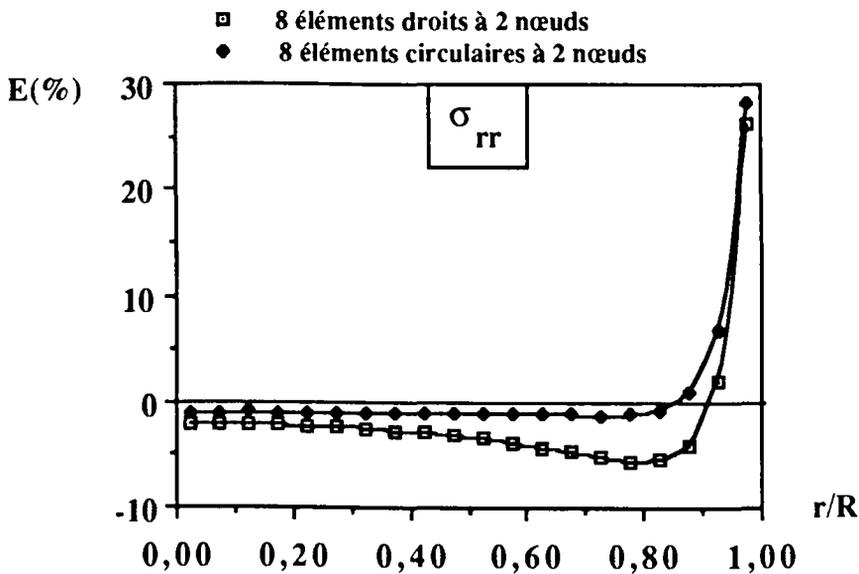


Figure 3.11 d
 Erreurs relatives sur les contraintes σ_{rr} calculées sur l'axe y

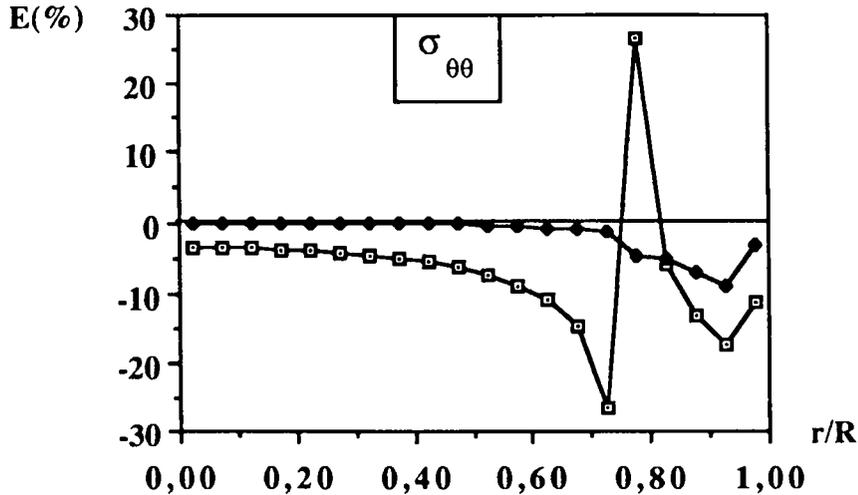


Figure 3.11 e

Erreurs relatives sur les contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ calculées sur l'axe y

3.4.4 PLAQUE PERCEE D'UN TROU CIRCULAIRE SOUS COMPRESSION UNI OU BIAXIALE

Les exemples précédents ont mis en évidence le problème de l'influence du type de chargement. Pour les exemples traités dans ce paragraphe, nous considérons une plaque infinie percée d'un trou circulaire de rayon R et soumise à une compression uni ou biaxiale à l'infini. Pour des raisons de symétrie, nous discrétisons uniquement un quart du cercle avec 5 éléments circulaires ou droits. La plaque est chargée selon l'axe x par $P_x = P$ et selon l'axe y par $P_y = k P$ (figure 3.12 a). Le premier cas de chargement correspond à $k = 0$, c'est-à-dire à une compression uniaxiale selon x . Sur cet axe, les contraintes tangentes s'annulent en un certain point. Le calcul d'erreurs relatives sera donc perturbé au voisinage de ce point. Pour ce cas, nous présentons les résultats sous forme de rapports σ_{rr}/p et $\sigma_{\theta\theta}/p$ (figures 3.12 b, c). Sur ces figures, les résultats semblent équivalents et ne présentent pas de différence.

Le deuxième cas de chargement correspond à $k = 1$, c'est-à-dire à une compression isotrope. Nous retrouvons la même réaction des éléments circulaires que pour le cas du tunnel sous pression uniforme, puisque les chargements sont équivalents. Les éléments circulaires donnent donc la solution analytique pour ce cas. Par contre, les erreurs relatives sur les contraintes obtenues avec les éléments droits s'accroissent, et ce d'autant plus que les points de calculs sont près du contour ; ce que nous pouvons remarquer sur les figures 3.12 d, e. Le troisième cas de chargement correspond à $k = 2$. Donc sur l'axe x , nous avons un chargement $P_x = P$, et selon l'axe y , nous avons un chargement $P_y = 2P$. Nous présentons ci-dessous le calcul d'erreurs relatives obtenues sur les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ calculées sur l'axe x (figure 3.12 f, g). Nous avons toujours une perturbation des valeurs des erreurs du moment que le contour n'est pas chargé. En comparant les résultats, nous pouvons remarquer un certain avantage pour les éléments circulaires.

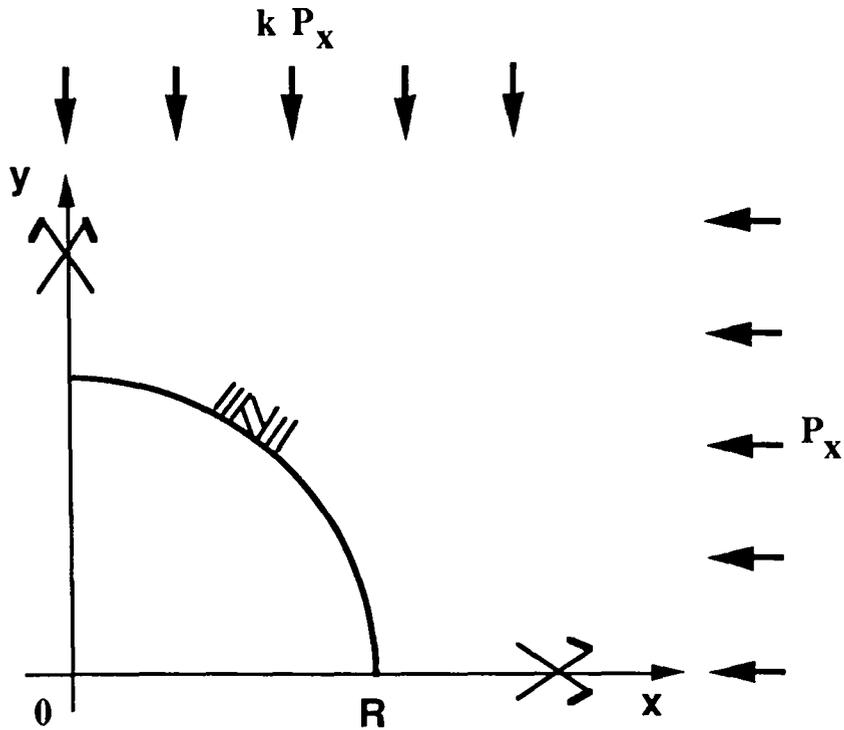


Figure 3.12 a

Plaque infinie percée d'un trou de rayon R sous chargement biaxial P_x et P_y

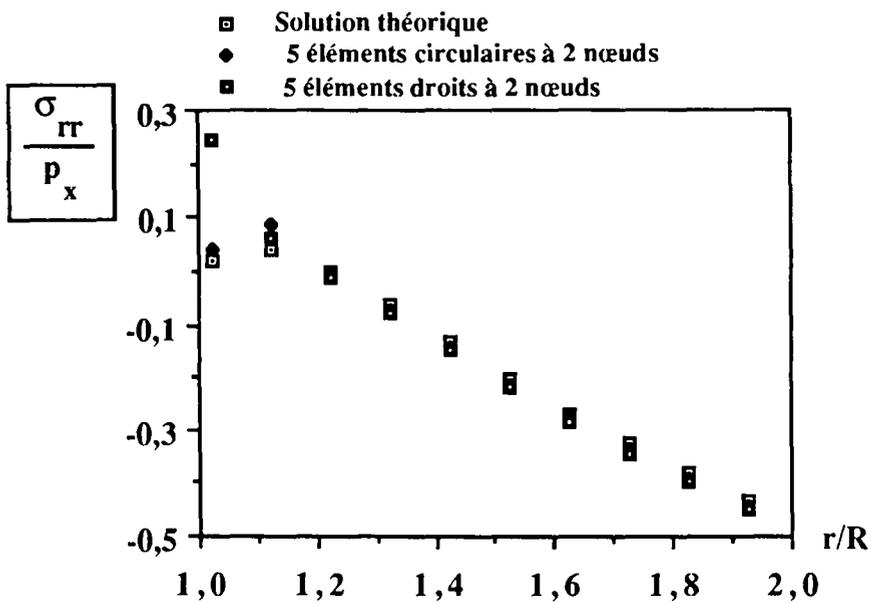


Figure 3.12 b

Variation de σ_{rr}/p calculée sur l'axe x en fonction de r/R pour $P_x = P$ et $P_y = 0$

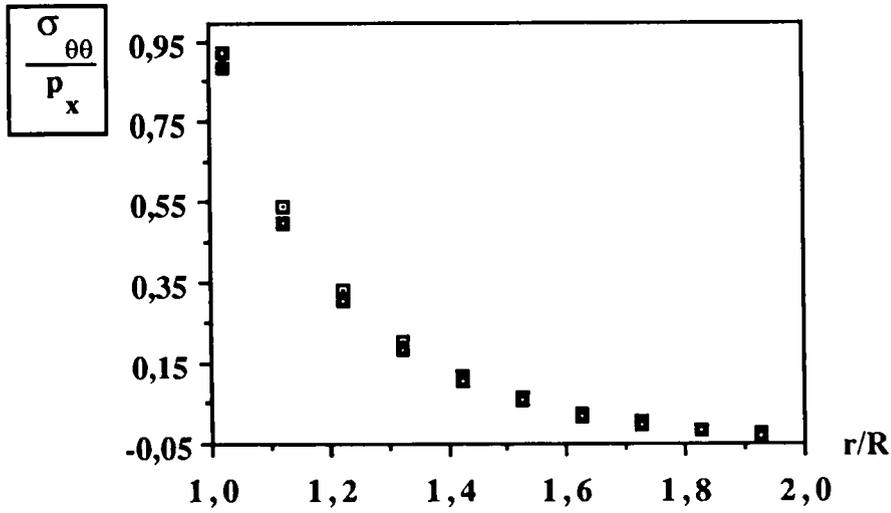


Figure 3.12 c

Variation de $\sigma_{\theta\theta}/p$ calculée sur l'axe x en fonction de r/R pour $P_x = P$ et $P_y = 0$

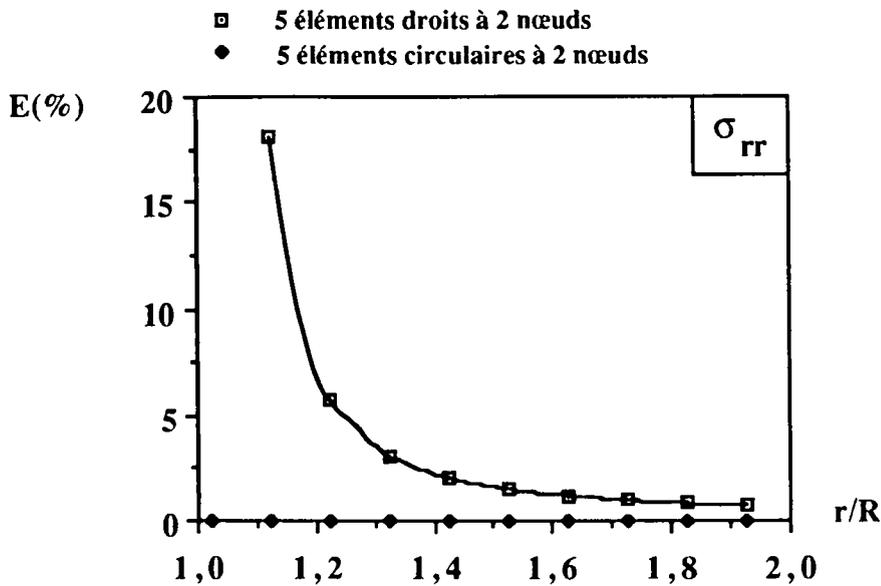


Figure 3.12 d

Erreurs relatives sur σ_{rr}/p calculées sur l'axe x en fonction de r/R pour $P_x = P_y = P$

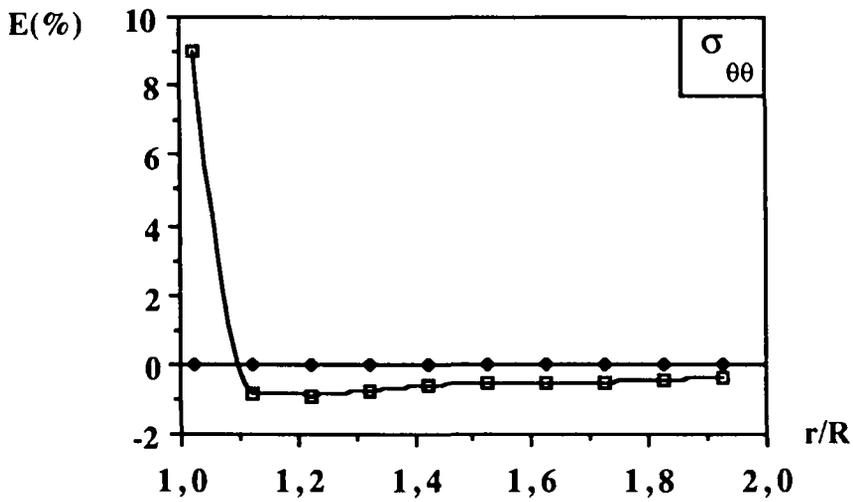


Figure 3.12 e

Erreurs relatives sur $\sigma_{\theta\theta}/p$ calculées sur l'axe x en fonction de r/R pour $P_x = P_y = P$

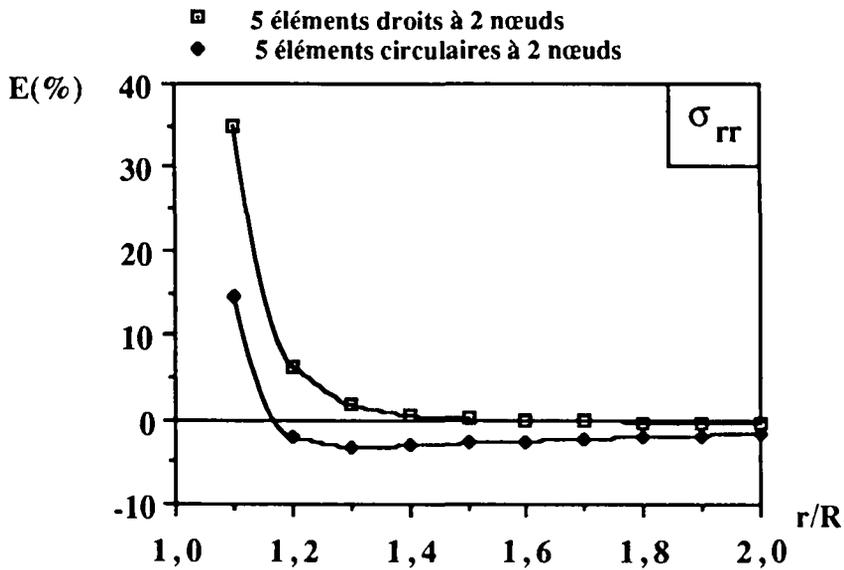


Figure 3.12 f

Erreurs relatives sur σ_{rr} calculées sur l'axe x en fonction de r/R pour $P_x = P$ et $P_y = 2P$

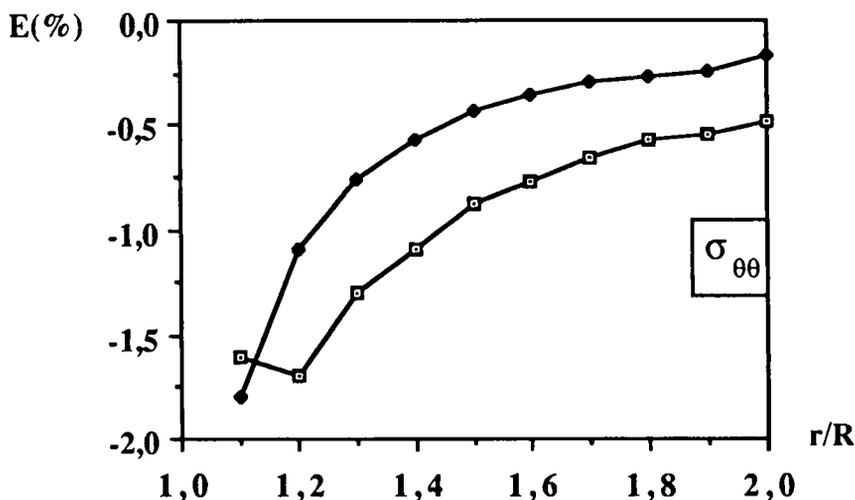


Figure 3.12 g

Erreurs relatives sur $\sigma_{\theta\theta}$ calculée sur l'axe x en fonction de r/R pour $P_x = P$ et $P_y = 2P$

3.4.5 TROU HYPOTROCHOIDAL A 4 COTES

Jusqu'à présent, nous avons traité des configurations circulaires. Dans le cas où il y a présence de contours droits dans la structure, nous sommes obligés d'utiliser des éléments droits. L'exemple ci-dessous représente un trou hypotrochoïdal à quatre côtés et quatre coins circulaires. Nous avons donc des contours rectilignes et circulaires à discrétiser. Il nous semble intéressant de coupler donc des éléments de discrétisation droits à des éléments circulaires à deux noeuds. La figure 3.13 a représente donc un trou hypotrochoïdal formé de quatre côtés de dimension $2R$ et de 4 quarts de cercles de rayon R et soumis à une pression uniforme p . Vu la double symétrie du problème, le quart du contour est discrétisé.

Chaque contour rectiligne est discrétisé par un élément droit à deux noeuds. La comparaison se fera donc en variant le type d'éléments sur la partie circulaire. Pour garder une géométrie discrétisée cohérente avec le problème, nous avons placé un minimum de deux éléments droits sur le contour circulaire que nous comparons à une discrétisation obtenue avec un, puis deux éléments circulaires à deux noeuds. Ne disposant pas de solution analytique pour ce problème, la comparaison se fera sur une solution approximée obtenue en faisant un calcul avec une discrétisation de 100 éléments droits. Nous ferons les comparaisons en nous basant sur les résultats obtenus avec cette discrétisation, mais nous éviterons de faire un calcul d'erreur. Les calculs des contraintes sont menés sur les points se trouvant sur la droite d'inclinaison $\theta = 45^\circ$ par rapport à l'axe x. Les résultats des contraintes illustrés par les figures 3.10 b, e nous montrent la variation de $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})/p$ en fonction de r/R , où l'origine de r est prise à partir du contour circulaire. Nous remarquons déjà qu'avec un seul élément circulaire sur le quart de cercle, nous avons une meilleure solution par rapport à la discrétisation avec deux éléments droits (figures 3.13 b, c). Avec deux éléments circulaires, nous pouvons affirmer que les résultats sont nettement satisfaisants (figures 3.13 d, e). Cet exemple nous montre l'intérêt du couplage des éléments pour obtenir la meilleure solution à moindre prix.

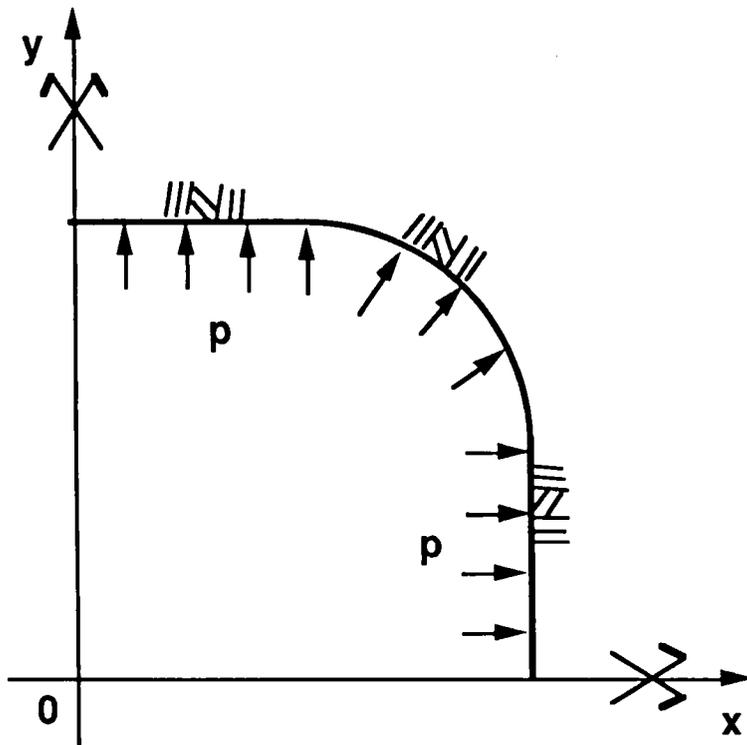


Figure 3.13 a

Trou hypocycloïdal à 4 côtés et 4 quarts de cercles soumis à une pression uniforme p

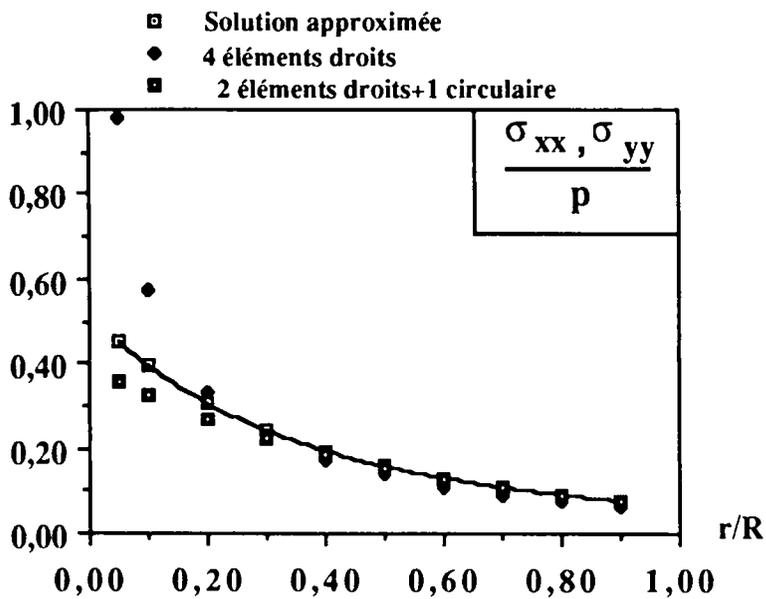


Figure 3.13 b

Variation de $(\sigma_{xx}/P, \sigma_{yy}/P)$ dans la direction $\theta = 45^\circ$

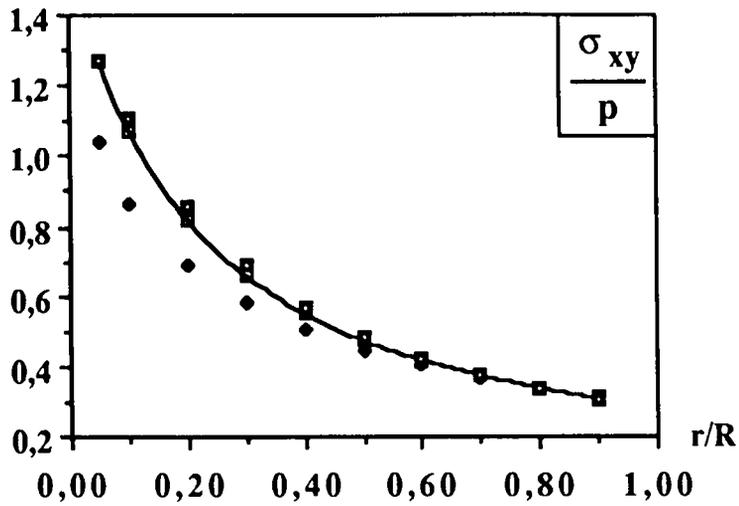


Figure 3.13 c
Variation de (σ_{xy}/P) dans la direction $\theta = 45^\circ$

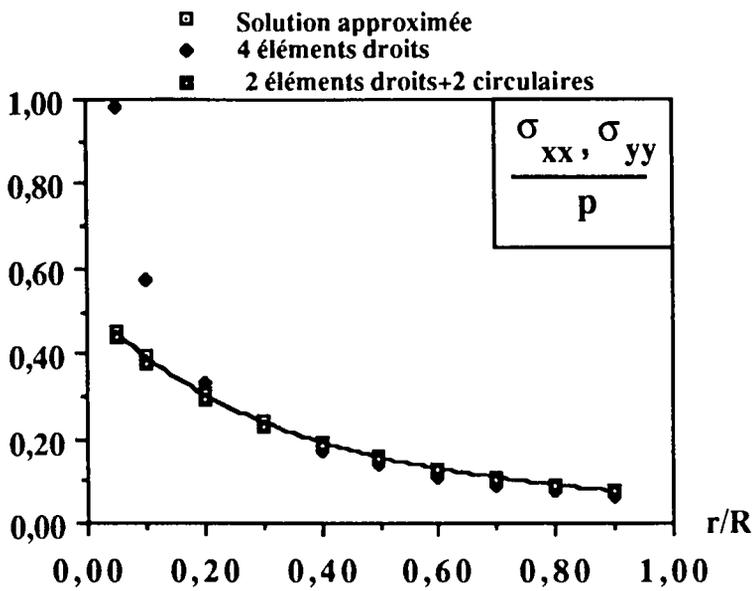


Figure 3.13 d
Variation de $(\sigma_{xx}/P, \sigma_{yy}/P)$ dans la direction $\theta = 45^\circ$

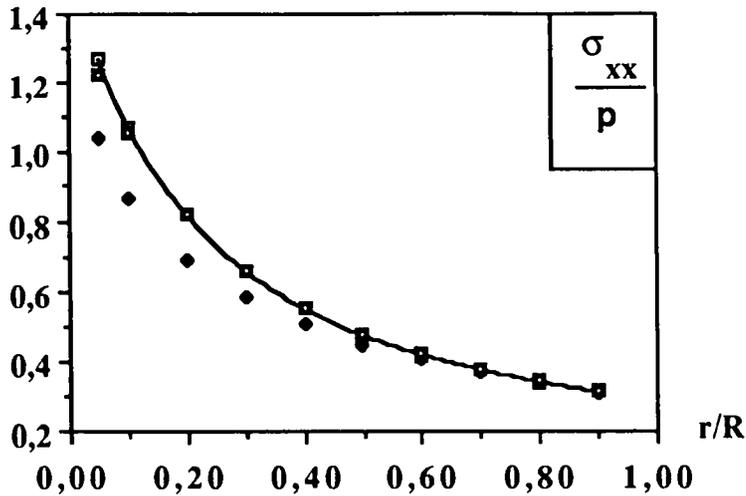


Figure 3.13 e
Variation de (σ_{xy}/P) dans la direction $\theta = 45^\circ$

3.5 CONCLUSION

Nous avons développé dans ce chapitre les solutions fondamentales pour un élément circulaire à deux noeuds et construit un programme de calcul prenant en compte des éléments de discrétisation droits et circulaires. Nous avons vu que les expressions analytiques correspondantes à l'élément circulaire ont nécessité de nombreux développements analytiques, ce qui a posé des difficultés à leur programmation. De l'étude comparative des deux éléments, il s'est dégagé dans certains cas une amélioration des résultats, mais dans l'ensemble, les résultats sont assez semblables. Dans le cas de contours quelconques, nous avons montré que le couplage des éléments droits et circulaires améliore nettement les résultats. Nous pensons que les discrétisations obtenues avec ces types d'éléments constituent un bon outil pour traiter des problèmes élastiques plans.

CHAPITRE 4

DEVELOPPEMENT D'ELEMENTS CIRCULAIRES DEGENERES (ELEMENTS BOUT DE FISSURE CIRCULAIRES)

En mécanique de la rupture, une bonne précision dans le calcul des contraintes au voisinage de la tête de fissure est nécessaire pour bien calculer les coefficients d'intensité de contrainte. Or, dans les discontinuités de déplacement définies précédemment, on remarque qu'en bout d'élément les déplacements ne sont pas continus. Dans ce cas, on peut s'attendre à une forte concentration de contraintes en tête de fissure. Pour respecter la continuité des déplacements et tenir compte de la singularité des contraintes, on se propose de définir un élément circulaire dont la discontinuité de déplacement sera nulle en bout d'élément. Une première approche a été déjà proposée (Belkacemi (1988)). Dans la suite de ce chapitre, on reprendra le même schéma de raisonnement concernant l'élément circulaire à deux noeuds.

4.1 SOLUTION POUR UN ELEMENT CIRCULAIRE DEGENERERE

Nous allons considérer deux éléments qui prennent en compte la singularité des contraintes au voisinage de la tête de la fissure. Ce cas a été traité par Crouch (1983) en coordonnées cartésiennes et par Bouhaddane (1987) en champ complexe dans le cas d'éléments linéaires.

Nous allons étendre les résultats précédents au cas des contours circulaires. Considérons un arc de cercle $a_1 a_2$ centré à l'origine. Nous allons développer les solutions fondamentales correspondant à une discontinuité de déplacement nulle en a_2 (fig. 4.1) et à une discontinuité de déplacement nulle en a_1 (fig. 4.2).

Choisissons la discontinuité de déplacement sous la forme :

$$(4.1) \quad \hat{D}(t) = \delta_o \sqrt{a_2 - t}$$

dans le premier cas :

$$(4.2) \quad \hat{D}(t) = \delta'_o \sqrt{t - a_1}$$

dans le deuxième cas, avec δ_o, δ'_o paramètres complexes de linéarisation, $t = a e^{i\theta}$, $\pi/2 - \alpha \leq \theta \leq \pi/2 + \alpha$ et a rayon de l'arc.

Avec ces deux formes de discontinuité de déplacement, il est facile de déduire les expressions des potentiels complexes par simple intégration. Les conditions aux limites, les équations de Plemelj, ainsi que le changement de fonctions suivent exactement les mêmes formes que les éléments circulaires à deux noeuds.

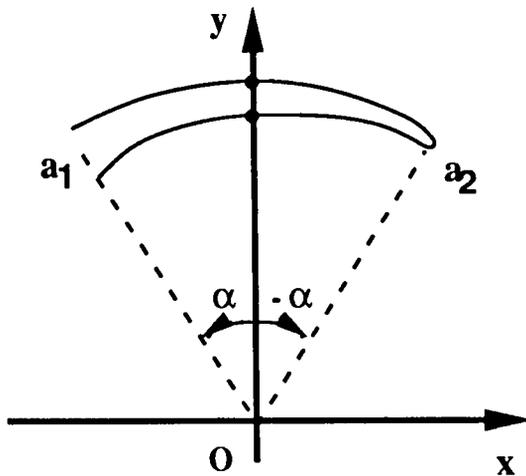


Figure 4.1
 Élément circulaire dégénéré 1
 (Déplacement continu en a_2)

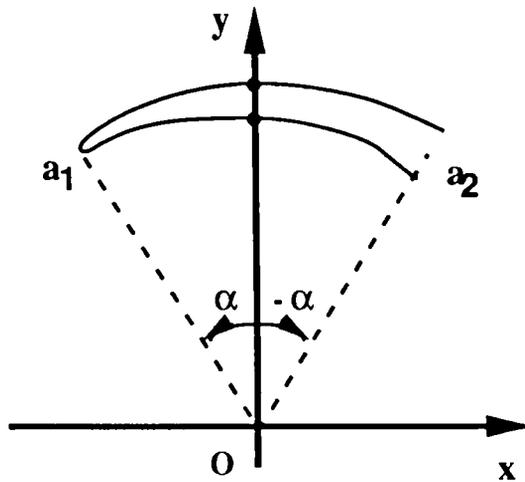


Figure 4.2
 Élément circulaire dégénéré 2
 (Déplacement continu en a_1)

4.2 DETERMINATION DES POTENTIELS COMPLEXES

D'après le deuxième chapitre, nous pouvons déduire les potentiels complexes dans le cas de la discontinuité fermée en a_2 par :

$$(4.3) \quad \phi_1(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i\theta} \hat{D}(t)}{t-z} dt = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i\theta} \delta_o \sqrt{a_2-t}}{t-z} dt$$

L'intégrale se calcule aisément en opérant le changement de variable $u = \sqrt{a_2-t}$ et nous obtenons :

$$(4.4) \quad \phi_1(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \left\{ -2 \sqrt{a_2-a_1} - \sqrt{a_2-z} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2-z} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{a_2-z} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{2(\sqrt{a_2-a_1})^3}{3} \right. \\ \left. + 2(a_2-z) \sqrt{a_2-a_1} + (\sqrt{a_2-z})^3 \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2-z} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{a_2-z} + \sqrt{a_2-a_1}} \right\} \delta_o$$

Dans le cas de la discontinuité fermée en a_1 , nous avons :

$$(4.5) \quad \phi_2(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i\theta} \delta'_o \sqrt{t-a_1}}{t-z} dt$$

Le changement de variable opéré est cette fois $u = \sqrt{t-a_1}$ et nous obtenons :

$$(4.6) \quad \phi_2(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1) a} \left\{ 2a_1 \sqrt{a_2-a_1} + a_1 \sqrt{z-a_1} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{2}{3} (\sqrt{a_2-a_1})^3 \right. \\ \left. + 2(z-a_1) \sqrt{a_2-a_1} + (z-a_1)^3 \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} \right\} \delta'_o$$

Pour pouvoir exprimer les potentiels complexes $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ en fonction des discontinuités de déplacement qui seront les inconnues de notre problème, nous devons éliminer les paramètres de linéarisation δ_o et δ'_o des équations (4.4) et (4.6). Pour la discontinuité s'annulant au point a_2 , nous avons au point nodal :

$$\hat{D}(t) = D(a e^{i(\frac{\pi}{2} + \lambda \alpha)}) = \hat{D}_r + i \hat{D}_\theta = \delta_o \sqrt{a_2-a} e^{i(\frac{\pi}{2} + \lambda \alpha)} = \delta_o \sqrt{a_2-ia} e^{i\lambda \alpha}$$

d'où :

$$\delta_o = \frac{\hat{D}_r + i \hat{D}_\theta}{\sqrt{a_2 - ia e^{i\lambda\alpha}}}$$

où λ est le paramètre de position du point nodal. Pour la discontinuité nulle en a_1 , nous avons également au point nodal :

$$\hat{D}(t) = \hat{D}(a e^{i(\frac{\pi}{2} + \lambda'\alpha)}) = \hat{D}_r + i \hat{D}_\theta = \delta_o \sqrt{a e^{i(\frac{\pi}{2} + \lambda'\alpha)} - a_1} = \delta_o \sqrt{ia e^{i\lambda'\alpha} - a_1}$$

D'où :

$$\delta'_o = \frac{\hat{D}_r + i \hat{D}_\theta}{\sqrt{ia e^{i\lambda'\alpha} - a_1}}$$

Pour assurer la symétrie de la position des noeuds, nous devons avoir :

$$\lambda' = -\lambda \quad ; \quad \lambda \geq 0$$

Pour définir complètement les différentes équations précédentes, il suffit d'avoir les dérivées de $\phi(z)$.

• pour la discontinuité s'annulant en a_2 les dérivées sont :

$$\phi'_1(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left[\frac{a_2}{2\sqrt{a_2-z}} \text{Log} \frac{\sqrt{a_2-z} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{a_2-z} + \sqrt{a_2-a_1}} - \frac{a_2 \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_1)} - 2\sqrt{a_2-a_1} \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \sqrt{a_2-z} \text{Log} \frac{\sqrt{a_2-z} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{a_2-z} + \sqrt{a_2-a_1}} - \frac{(a_2-z) \sqrt{a_2-a_1}}{(a_1-z)} \right] \frac{\hat{D}_r + i \hat{D}_\theta}{\sqrt{a_2 - ia e^{i\lambda\alpha}}}$$

$$\phi''_1(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left[\frac{a_2}{4(a_2-z)\sqrt{a_2-z}} \text{Log} \frac{\sqrt{a_2-z} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{a_2-z} + \sqrt{a_2-a_1}} - \frac{a_2 \sqrt{a_2-a_1}}{2(z-a_1)(z-a_2)} + \frac{a_2 \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_1)^2} \right. \\ \left. + \frac{3}{4\sqrt{a_2-z}} \text{Log} \frac{\sqrt{a_2-z} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{a_2-z} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{3\sqrt{a_2-a_1}}{2(a_1-z)} - \frac{\sqrt{a_2-a_1}(a_2-a_1)}{(z-a_1)^2} \right] \frac{\hat{D}_r + i \hat{D}_\theta}{\sqrt{a_2 - ia e^{i\lambda\alpha}}}$$

$$\phi'_1(0) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left[\sqrt{a_2} \text{Log} \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_2-a_1}} + 2\sqrt{a_2-a_1} \right] \frac{\hat{D}_r + i \hat{D}_\theta}{\sqrt{a_1 - ia e^{i\lambda\alpha}}}$$

• pour la discontinuité qui s'annule en a_1 nous avons :

$$\phi'_2(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left[\frac{a_1}{2\sqrt{z-a_1}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{a_1 \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_2)} + 2\sqrt{a_2-a_1} \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \sqrt{z-a_1} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{(z-a_1) \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_2)} \right] \frac{\hat{D}_r + i \hat{D}_\theta}{\sqrt{ia e^{-i\lambda\alpha} - a_1}}$$

$$\phi''_2(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left[-\frac{a_1}{4(z-a_1)\sqrt{z-a_1}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{a_1 \sqrt{a_2-a_1}}{2(z-a_1)(z-a_2)} - \frac{a_1 \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_2)^2} \right. \\ \left. + \frac{3}{4\sqrt{z-a_1}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{3\sqrt{a_2-a_1}}{2(z-a_2)} - \frac{(a_2-a_1) \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_2)^2} \right] \frac{\hat{D}_r + i \hat{D}_\theta}{\sqrt{ia e^{-i\lambda\alpha} - a_1}}$$

$$\phi'_2(0) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left[\sqrt{\bar{a}_2} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{\bar{a}_2} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{\bar{a}_2} + \sqrt{a_2-a_1}} + 2\sqrt{a_2-a_1} \right] \frac{\hat{D}_r + i \hat{D}_\theta}{\sqrt{ia e^{-i\lambda\alpha} - a_1}}$$

4.3 INFLUENCE DE L'ELEMENT SUR LUI-MEME (PROBLEMES DE MULTIFORMITE)

Il s'agit dans ce paragraphe de trouver l'influence de l'élément sur lui-même. Cela pose le problème de multiformité. Vu la similitude des fonctions multiformes, nous nous proposons d'étudier ce problème en nous inspirant du cas de figure d'une coupure droite.

Etudions la fonction :

$$H(z) = \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z+a} - \sqrt{2a}}{\sqrt{z+a} + \sqrt{2a}}$$

Pour cela, considérons une coupure droite représentée sur la figure 4.3. Elle partage le plan xy en domaine "G" pour $y > 0$, et en domaine "D" pour $y < 0$.

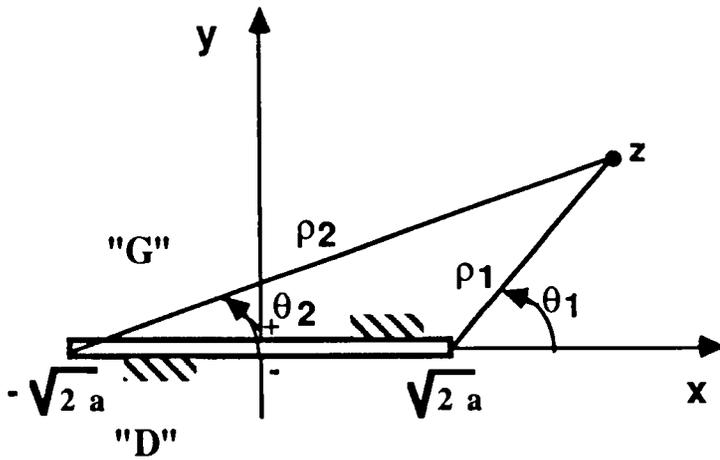


Figure 4.3

Coupure comprise entre $-\sqrt{2a}$ et $\sqrt{2a}$

Nous pouvons remarquer que pour $z \in "G"$, alors $\bar{z} \in "D"$.

Posons $Z = \sqrt{z+a}$.

D'après la figure ci-dessus, nous avons :

$$(I) \equiv \begin{cases} \sqrt{z+a} - \sqrt{2a} = \rho_1 e^{i\theta_1} \\ \sqrt{z+a} + \sqrt{2a} = \rho_2 e^{i\theta_2} \end{cases}$$

Donc :

$$H(z) = \text{Log} \frac{\sqrt{z+a} - \sqrt{2a}}{\sqrt{z+a} + \sqrt{2a}} = \text{Log} \frac{\rho_1}{\rho_2} + i(\theta_1 - \theta_2)$$

a) pour $z \in "G" \rightarrow x \in]-a, a[; (x = \text{Re}(z))$

Nous avons :

$$0 < \sqrt{z+a} < \sqrt{2a}$$

et

$$\theta_1 = \pi, \quad \theta_2 = 0$$

D'où :

$$(I) \equiv \begin{cases} \sqrt{z+a} - \sqrt{2a} = \rho_1 e^{i\pi} = -\rho_1 \\ \sqrt{z+a} - \sqrt{2a} = \rho_1 e^{i0} = \rho_2 \end{cases}$$

et donc :

$$H^G(z) = \text{Log} \frac{\rho_1}{\rho_2} + i(\theta_1 - \theta_2) = \text{Log} \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{z+a}}{\sqrt{2a} + \sqrt{z+a}} + i\pi$$

a) pour $z \in "D" \rightarrow x \in]-a, a[$

Nous avons :

$$0 < \sqrt{z+a} < \sqrt{2a}$$

et

$$\theta_1 = \pi, \quad \theta_2 = 2\pi$$

$$(I) \equiv \begin{cases} \sqrt{z+a} - \sqrt{2a} = \rho_1 e^{i\pi} = -\rho_1 \\ \sqrt{z+a} - \sqrt{2a} = \rho_2 e^{2i\pi} = \rho_2 \end{cases}$$

Donc :

$$H^D(z) = \text{Log} \frac{\rho_1}{\rho_2} - i(\theta_1 - \theta_2) = \text{Log} \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{z+a}}{\sqrt{2a} + \sqrt{z+a}} - i\pi$$

Finalement :

$$H^D(z) = H^G(z) - 2i\pi$$

Dans le cas concernant l'élément circulaire dégénéré, nous avons :

$$H(z) = \text{Log} \left(\frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} \right)$$

Par analogie aux calculs précédents, nous pouvons déduire que :

$$H^D(z) = H^G(z) - 2i\pi$$

Pour le contour circulaire, nous avons remarqué que si $z \in "G"$, alors

$$\frac{a^2}{z} \in "D" . \text{ De ce fait, nous avons :}$$

$$\theta^D = \theta^G + 2\pi$$

Donc :

$$\sqrt{e^{i\theta^G}} = - \sqrt{e^{i\theta^D}}$$

Donc au niveau de la programmation, il faut faire intervenir la correction suivante en posant :

$$\sqrt{\frac{a^2}{z} - a_1} = - \sqrt{z - a_1}$$

4.4 EXEMPLES NUMERIQUES

Dans le but d'illustrer les résultats des éléments circulaires dégénérés, nous considérons deux exemples de fissures circulaires disposées dans un milieu infini rapporté au repère $(0, x, y)$. La fissure est définie par un arc circulaire de rayon R et d'ouverture 2α centré sur l'axe y et d'origine 0 . Nous allons comparer une discrétisation obtenue avec 6 éléments circulaires avec une autre obtenue avec quatre éléments circulaires et deux éléments circulaires dégénérés en chaque bout de fissure (fig. 4.4).

Les résultats des discrétisations ci-dessus sont à comparer à ceux obtenus avec une discrétisation de 60 éléments circulaires. Cela nous semble suffisant pour avoir un élément de comparaison.

Les comparaisons se feront sur les résultats des discontinuités normales D_n et tangentielles D_s et les déplacements normaux u_n et tangentiels u_s sur les lèvres des fissures.

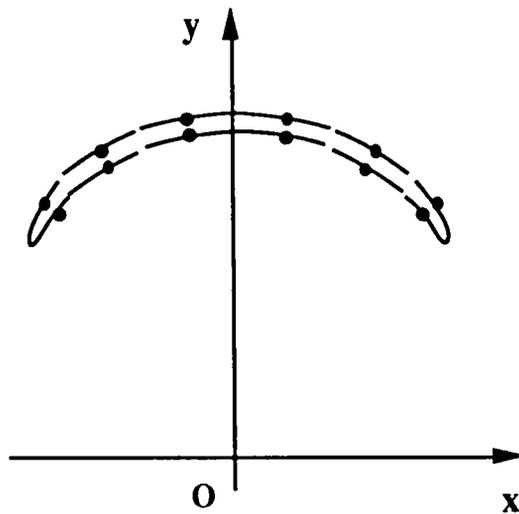


Figure 4.4
Fissure circulaire discrétisée en milieu infini

4.4.1 FISSURE EN MILIEU INFINI SOUS TRACTION UNIAXIALE

Le premier exemple concerne une fissure circulaire en milieu infini de rayon $R = 100$ mm et d'ouverture $2\alpha = 30^\circ$. La fissure est soumise à une traction uniaxiale $P_y = 100$ MPa selon l'axe y (fig. 4.5). Le module d'Young E est pris égal à 25 000 MPa et le coefficient de Poisson ν égal à 0,25. Les deux discrétisations décrites

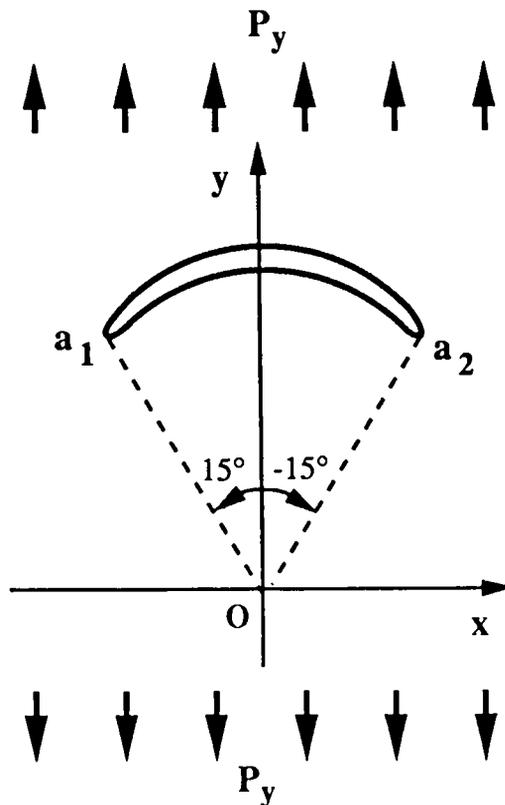


Figure 4.5
Fissure circulaire soumise à une traction uniaxiale

auparavant sont comparées. Sur la figure (4.5 a) sont tracées les discontinuités normales D_n en fonction de l'ouverture angulaire de la fissure centrée par rapport à l'axe y . Nous

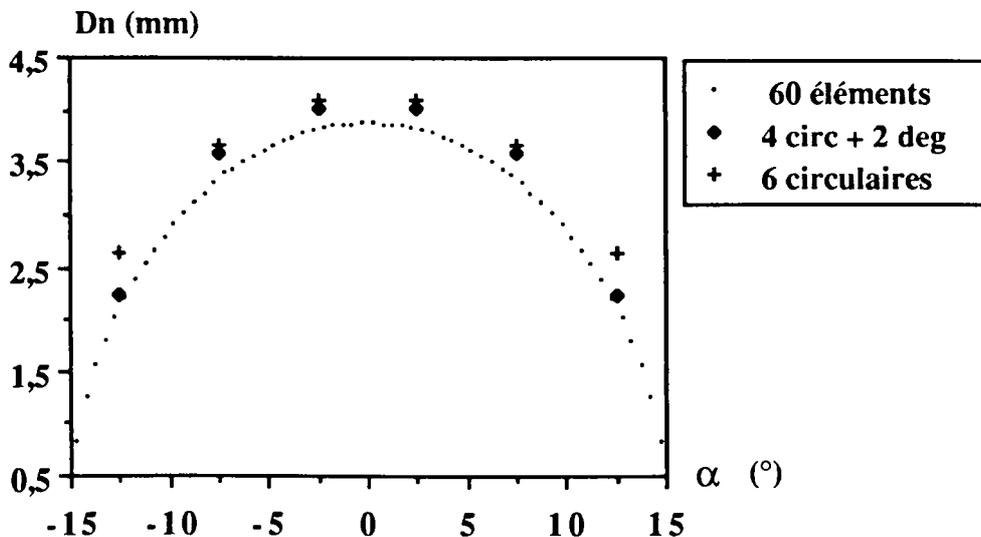


Figure 4.5 a

Discontinuité normale D_n en fonction de l'abscisse curviligne α

nous intéressons particulièrement aux bouts des fissures. Dans la zone centrale, les résultats sont équivalents. Aux bouts des fissures par contre, les résultats des discontinuités normales donnés par les éléments dégénérés sont satisfaisants. Ceci montre que ces éléments peuvent bien simuler le comportement des fissures en mode 1 (mode de traction). Nous pouvons faire les mêmes remarques en ce qui concerne les déplacements normaux u_n (figure 4.5 b).

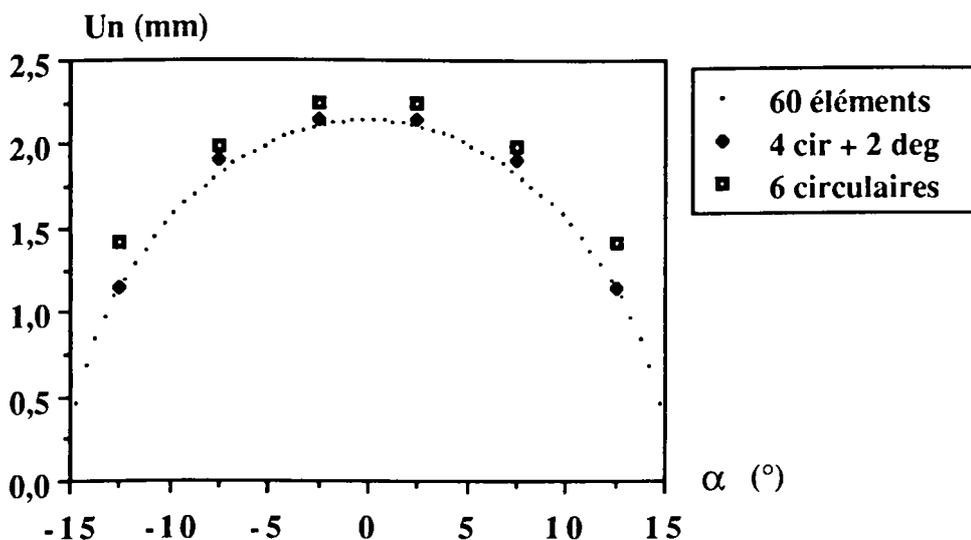


Figure 4.5 b

Déplacement normal U_n en fonction de l'abscisse curviligne α

La figure (4.5 c) représente les discontinuités tangentielles D_s en fonction de l'angle d'ouverture α par rapport à l'axe y . Dans ce cas, les résultats sont moins performants. Ceci peut être dû à la dissymétrie inhérente à l'élément dégénéré.

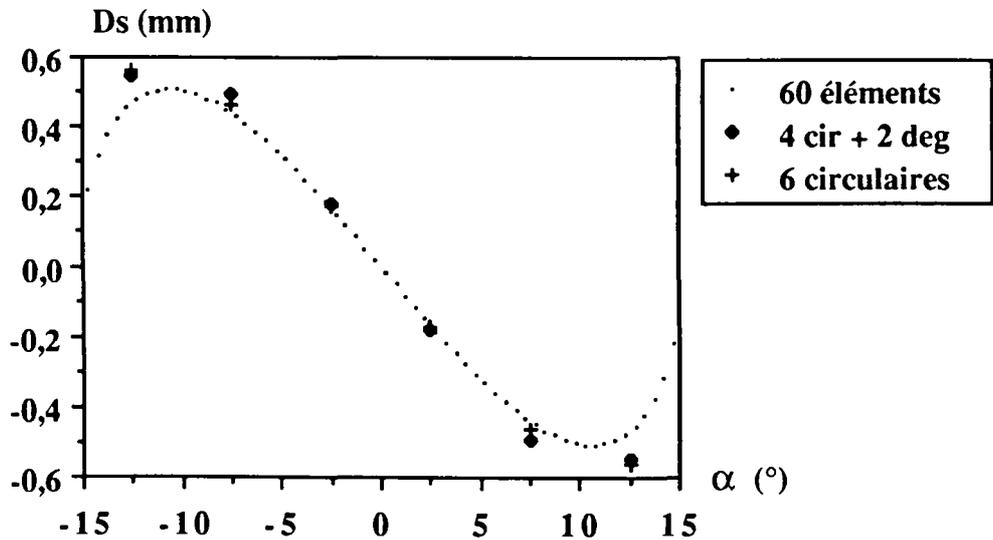


Figure 4.5 c

Discontinuité tangentielle D_s en fonction de l'abscisse curviligne α

Les déplacements tangentiels étant liés aux discontinuités, les mêmes remarques peuvent être faites sur U_s comme le montre la figure 4.5 d.

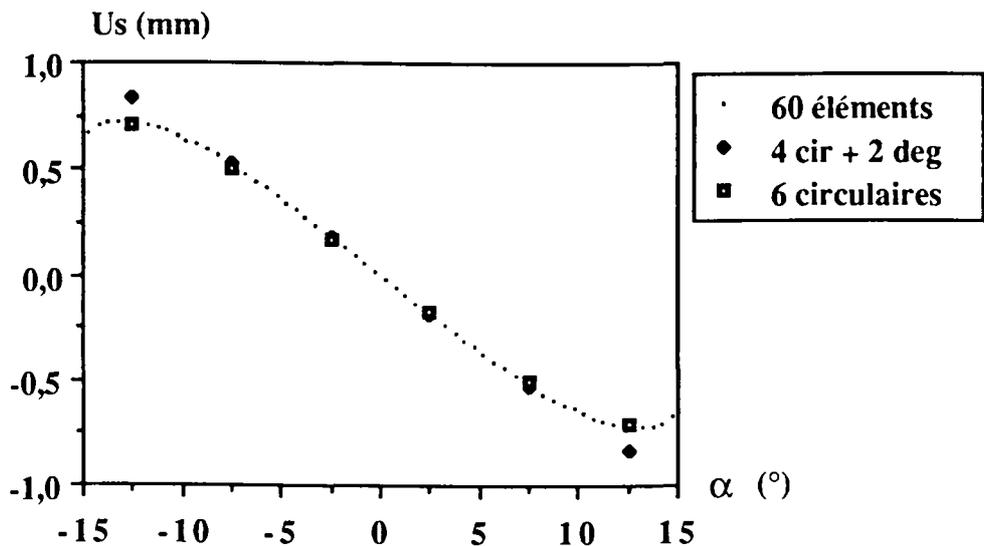


Figure 4.5 d

Déplacement normal U_s en fonction de l'abscisse curviligne α

4.4.2 FISSURE CIRCULAIRE EN MILIEU INFINI SOUS TRACTION BIAXIALE

Le deuxième exemple est consacré à la même configuration de fissure mais soumis à une traction biaxiale à l'infini $P_x = P_y = 100$ MPa (fig. 4.6). Sur les figures

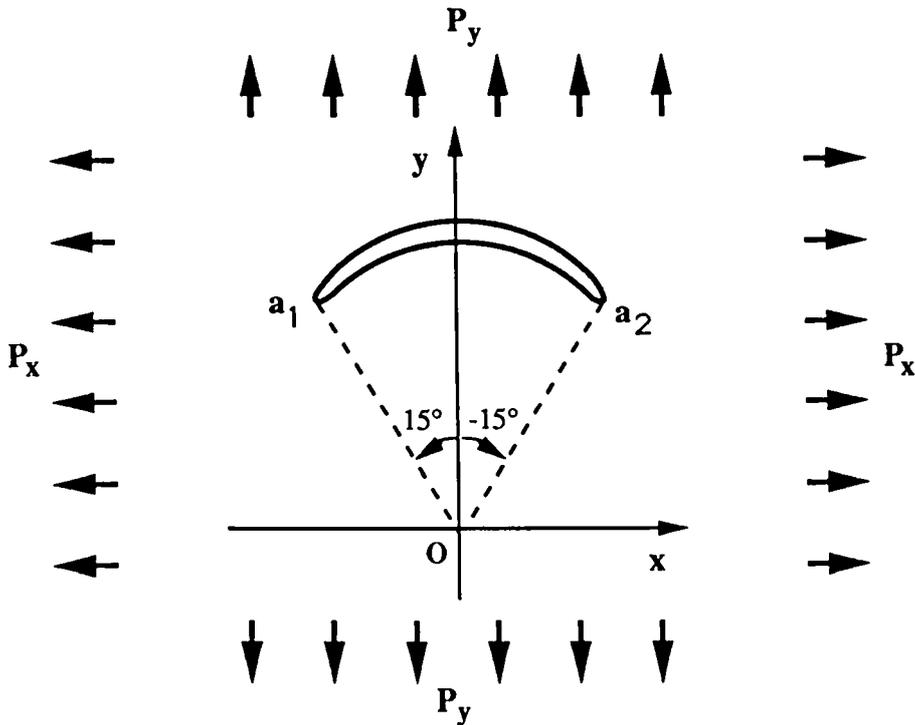


Figure 4.6

Fissure circulaire en double traction en milieu infini

Sur les figures (4.6 a, b, c, d) sont tracées respectivement les discontinuités normales D_n , les déplacements normaux U_n , les discontinuités tangentielles D_s et les déplacements tangentiels U_s en fonction de l'angle d'ouverture α de la fissure circulaire. Les résultats que nous obtenons sont similaires à ceux précédemment obtenus.

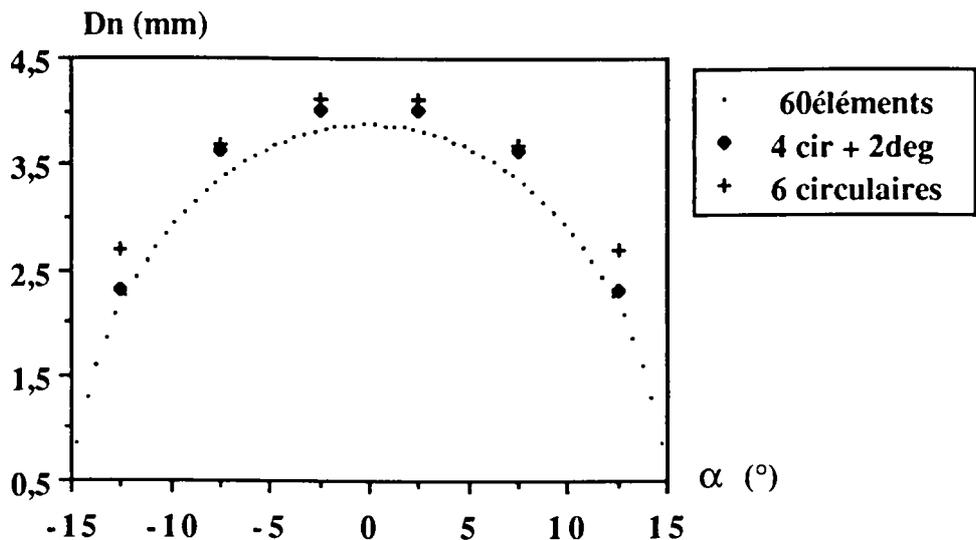


Figure 4.6 a

Discontinuité normale D_n en fonction de l'abscisse curviligne α

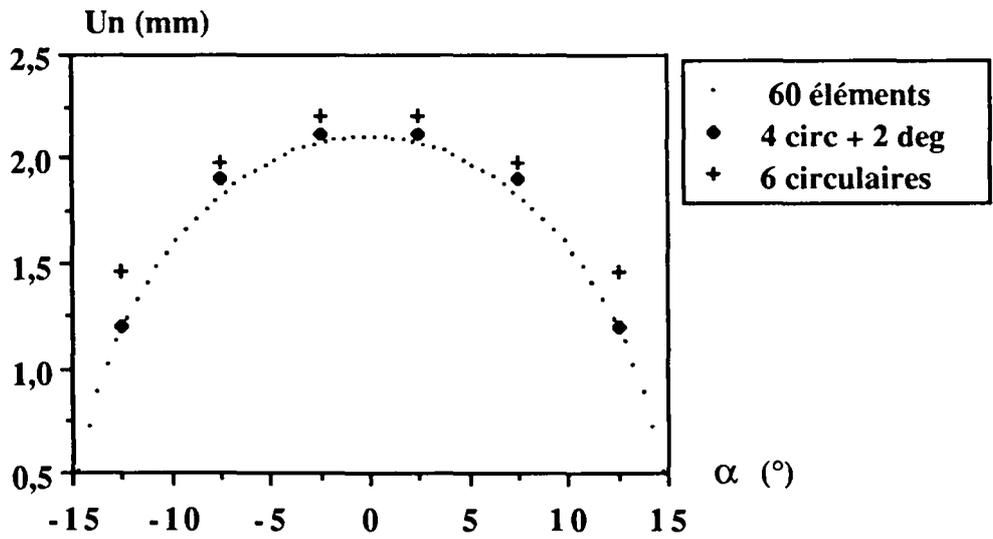


Figure 4.6 b
Déplacement normal U_n en fonction de l'abscisse curviligne α

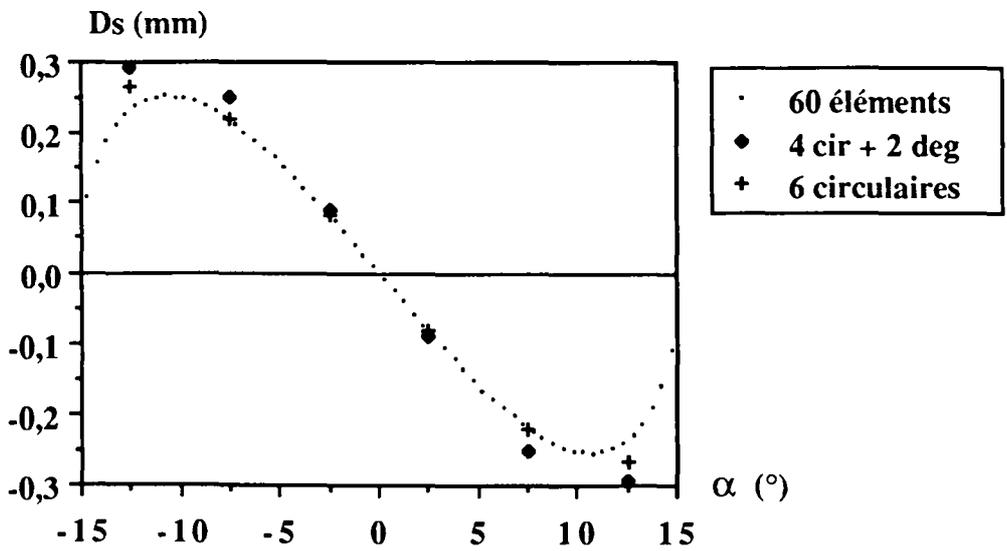


Figure 4.6 c
Discontinuité tangentielle D_s en fonction de l'abscisse curviligne α

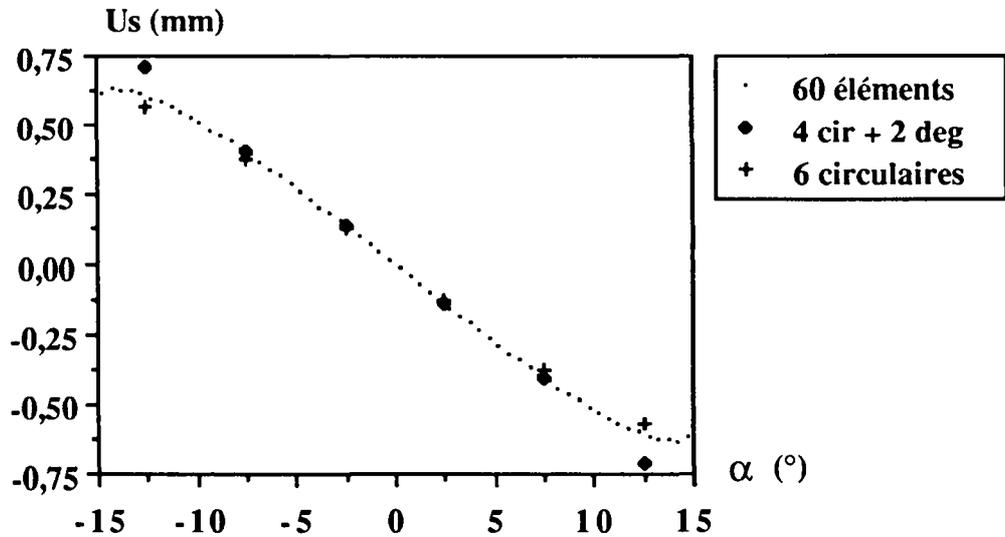


Figure 4.6 d

Déplacement tangentiel U_s en fonction de l'abscisse curviligne α

4.5 CONCLUSION

Sur les éléments circulaires vus aux chapitres 2 et 3, les déplacements sont discontinus en bout d'éléments. Deux éléments circulaires dégénérés (bouts de fissure circulaires) ont été développés afin de respecter la continuité du déplacement en ces points. De tels éléments ont nécessité des développements analytiques assez importants. Une étude comparative a été effectuée entre les éléments circulaires à un noeud et les éléments dégénérés sur des cas de fissures circulaires. Nous nous sommes intéressés particulièrement au point en bout de fissures.

Les cas testés ont montré que les éléments dégénérés améliorent nettement les résultats des discontinuités normales, et par conséquent les déplacements normaux en bout de fissure. Cela signifie que ces éléments peuvent permettre de bien simuler des problèmes en mode 1 (mode de traction). Par contre, en ce qui concerne les discontinuités et les déplacements tangentiels, les résultats sont moins performants. Ceci peut être dû à la forme dissymétrique de l'élément dégénéré.

CHAPITRE 5

APPLICATION DE LA METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT A LA PROPAGATION DES FISSURES

L'étude menée à la fin de ce mémoire a pour but l'application de la méthode des discontinuités de déplacement pour la simulation de la propagation des fissures. Nous nous bornerons à l'étude des problèmes d'élasticité plane.

Pour la prise en compte de défauts évolutifs dans les matériaux, la mécanique de la rupture est un outil adéquat. L'outil de la mécanique de la rupture est illustré par l'utilisation du critère de Griffith. Le but est d'arriver à une analyse numérique du processus de propagation de fissure. Pour cela, nous allons modéliser les fissures avec des éléments de discontinuité droits à un ou deux noeuds. Nous avons choisi deux algorithmes de résolution numériques pour traiter le problème de propagation avec frottement. Le premier est un algorithme classique de surrelaxation et le second est un algorithme d'optimisation quadratique avec contraintes linéaires.

5.1 CRITERES DE RUPTURE

En mécanique de la rupture, le but de la formulation d'un critère est de pouvoir définir les conditions d'initialisation et de propagation de fissures. On admet pour cela que la rupture est obtenue par propagation d'un défaut majeur.

Deux approches sont essentiellement utilisées en mécanique de la rupture pour étudier les défauts évolutifs. La première analyse le champ de contrainte qui peut être intense et qui se concentre en tête de fissure. C'est l'approche par les facteurs d'intensité de contrainte (dite théorie locale), qui renseigne sur les gradients de contrainte en tête des fissures. La deuxième approche fait un bilan de l'énergie dissipée au cours de la rupture. Elle est due à Griffith (1924) qui a bâti la théorie de la rupture fragile en traction.

5.1.1 MODES DE RUPTURE - FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES

En mécanique de la rupture, on distingue différents modes. Le critère qui en découle caractérise la rupture localement puisqu'on s'intéresse au champ de contrainte en tête de fissure. Cette approche est très répandue en métallurgie. La modélisation de la fissure caractérisant la rupture consiste à prendre en compte une discontinuité de matière. La méthode des équations intégrales a été appliquée à l'analyse du champ de contrainte en 3-D au voisinage d'une fissure (Cruse et al (1971)), mais sans considérer la propagation. Les sollicitations extérieures sont décomposées en 3 modes de ruptures selon Irwin (1957) et sont définies par rapport au plan de la discontinuité :

- 1) Le mode I est associé à une sollicitation de traction perpendiculaire au plan de la fissure. C'est le mode d'ouverture considéré comme étant le plus important en mécanique de la rupture fragile.
- 2) Le mode II correspond à une sollicitation de cisaillement dans le plan de la fissure et dont la direction de glissement est perpendiculaire au front de la fissure (Mode de cisaillement - plan).
- 3) Le mode III correspond à une sollicitation de cisaillement parallèle au plan de la fissure et dont l'action est parallèle au front de la fissure (Mode de torsion - antiplan).

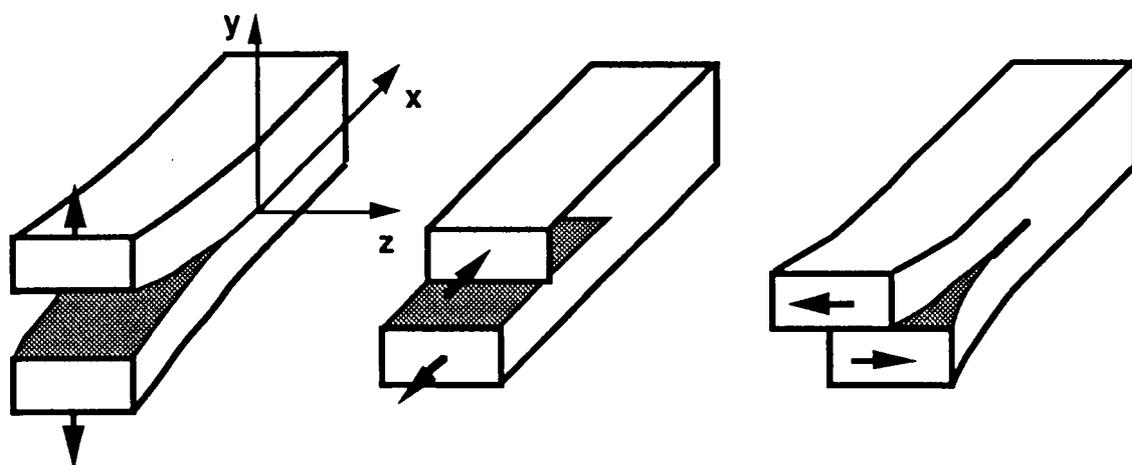


Figure 5.1

Définition des modes fondamentaux de propagation de fissure

a) Mode I
Traction

b) Mode II
Cisaillement

c) Mode III
Torsion

En mécanique de la rupture où l'on suppose la préexistence de fissures dans le matériau, la connaissance de la distribution des contraintes en bout est une base nécessaire pour étudier leur comportement. On s'intéresse au champ de contrainte en bout de fissure. Soit le repère orthonormé (M, x, y, z) où M est un point du front de la fissure et tel que le plan (x, z) contienne le plan de la fissure (figure 5.2). Dans ce repère, pour un point du plan xy situé à une distance r du point M tel que $(Mx, MP) = \theta$, Irwin montre que quelque soit la sollicitation extérieure les composantes du tenseur élastique des contraintes s'écrivent :

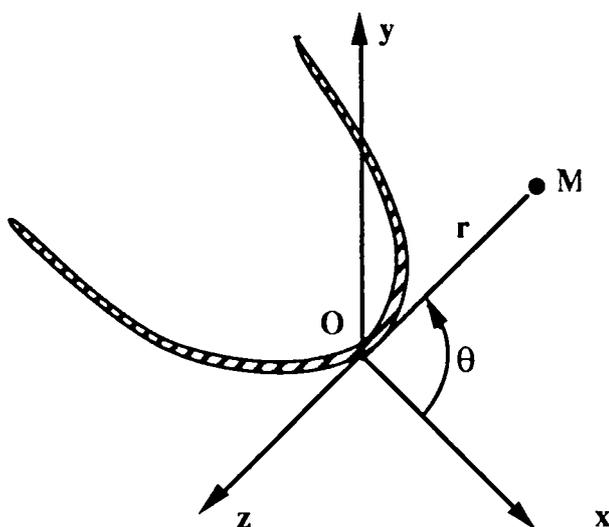


Figure 5.2

Définition du repère (M, r, θ) en bout de fissure

$$\sigma_{xx} \cong \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_{yy} \cong \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\sigma_{xy} \cong \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_{xz} \cong \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_{yz} \cong \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

et pour les déplacements :

$$u_z \cong \frac{K_1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[\cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \right] + \frac{K_2}{2\mu} \left[\sin \frac{\theta}{2} (k + \cos \theta + 2) \right] \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

$$u_y \cong \frac{K_1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[\sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \right] - \frac{K_2}{2\mu} \left[\cos \frac{\theta}{2} (k + \cos \theta - 2) \right] \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

avec :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \text{module de cisaillement du matériau}$$

$$k = 3 - 4\nu \text{ en contrainte plane}$$

$$k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \text{ en déformation plane}$$

Les facteurs d'intensité de contrainte caractérisent l'intensité de la singularité du champ de contrainte à la pointe de la fissure. D'après les expressions des déplacements ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$D_n = u_y(r, \pi) - u_y(r) - \pi = K_1 \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{k+1}{\mu}$$

$$D_1 = u_x(r, \pi) - u_x(r, -\pi) = K_2 \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{k+1}{\mu}$$

On voit bien que le facteur d'intensité de contrainte K_1 est proportionnel à la discontinuité normale D_n alors que K_2 est proportionnel à la discontinuité tangentielle D_t . La méthode des discontinuités de déplacement peut être ainsi mise à profit pour obtenir les facteurs d'intensité de contrainte. Le critère d'initiation de la propagation est établi en considérant un facteur d'intensité critique, K_{1c} pour le mode 1. En mode 1, il y a amorçage de la propagation dès que K_1 atteint K_{1c} . Le critère s'écrit donc :

$$K_1 \geq K_{1c}$$

L'approche par facteur d'intensité de contrainte est inadéquate dès qu'on est en mode mixte. L'approche énergétique que nous allons présenter est de ce point de vue plus réaliste.

5.1.2 CRITERE DE GRIFFITH

Griffith (1924) a émis l'hypothèse que la propagation d'une fissure absorbe de l'énergie. Cette énergie est analogue, selon Griffith, à l'énergie de surface de fluide et appelée énergie de surface γ . Pour déterminer la contrainte de traction nécessaire pour propager de façon stable la fissure, c'est-à-dire sans formation d'énergie cinétique, Griffith écrit que la variation d'énergie de déformation élastique et la variation d'énergie potentielle des forces appliquées dans un accroissement infinitésimal de la fissure d'aire dA est égal à l'énergie absorbée $2\gamma dA$ par la création de nouvelles surfaces. Griffith n'a traité que le problème de la rupture fragile en traction. D'autres modèles ont été développés pour tenir compte de phénomènes tels que la dissipation par déformation plastique (Irwin et Orowan, 1948-1950) ou les forces de cohésion atomique (Baremlatt, 1962). Pour notre cas, nous utiliserons le critère de Griffith ; En compression, nous ferons intervenir le frottement entre les lèvres des fissures.

Nous donnons ci-dessous un bref rappel pour établir ce critère, et pour cela, considérons un solide fissuré S . Pour un accroissement de la surface de fissure d'aire dA , la conservation de l'énergie totale est (voir figure 5.4)

$$dW_{\text{total}} = dW_{\text{élas}} + dW_{\text{ext}} + dW_s + dW_{\text{cin}} = 0$$

- $dW_{\text{élas}}$: variation de l'énergie de déformation élastique
- dW_{ext} : variation du travail des forces extérieures
- dW_s : variation de l'énergie dissipée dans la séparation = $2\gamma dA$
- dW_{cin} : variation de l'énergie cinétique.

L'amorçage de la propagation s'obtient par augmentation de la surface de la fissure. En négligeant le terme dû à l'énergie cinétique, la définition du taux de restitution d'énergie est donnée par :

$$G = - \frac{\partial}{\partial A} (W_{\text{elast}} + W_{\text{ext}}) = - \frac{\partial V}{\partial A}$$

et le début de propagation se traduit par :

$$G = 2\gamma$$

La propagation sera donc physiquement réalisable lorsque G sera supérieure à 2γ ce qui constitue le critère de Griffith pour la propagation de la fissure :

$$G > 2\gamma = G_c$$

G_c : énergie critique d'avancement de la fissure.

Dès que G est supérieure à 2γ , une partie de l'énergie disponible sert à rompre les liaisons et l'excès ($G - 2\gamma$) est transformé en énergie cinétique ou se dissipe dans la séparation de nouvelles surfaces de discontinuité.

Le comportement ultérieur de la fissure telle que :

$$G > 2\gamma$$

dépendra du signe de $\partial G / \partial A$.

A charge constante si G est telle que :

$$\frac{\partial G}{\partial A} < 0$$

alors, il n'y a pas d'accroissement d'énergie cinétique. La rupture est dite stable ou contrôlée. Par contre, si G est telle que :

$$\frac{\partial G}{\partial A} > 0$$

la rupture sera instable. L'excès d'énergie est transformé totalement en énergie cinétique s'il n'y a pas d'autres facteurs de dissipation. On parlera de rupture non contrôlée. Il faut signaler que le phénomène de stabilité-instabilité n'est pas une caractéristique intrinsèque du matériau, mais dépend de la géométrie et des conditions aux limites du problème traité.

5.1.3 CRITERE DE BRANCHEMENT - RELATION ENTRE G et K_I

Au critère de Griffith, on associe un critère de branchement. Ce critère consiste à rechercher pour une configuration de fissure donnée, l'orientation de branchement α pour laquelle l'énergie G est maximale (figure 5.3).

La condition de branchement est :

$$\alpha = \alpha_{\text{branch}}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \alpha} \right) = 0 \Leftrightarrow G = G_{\text{max}}$$

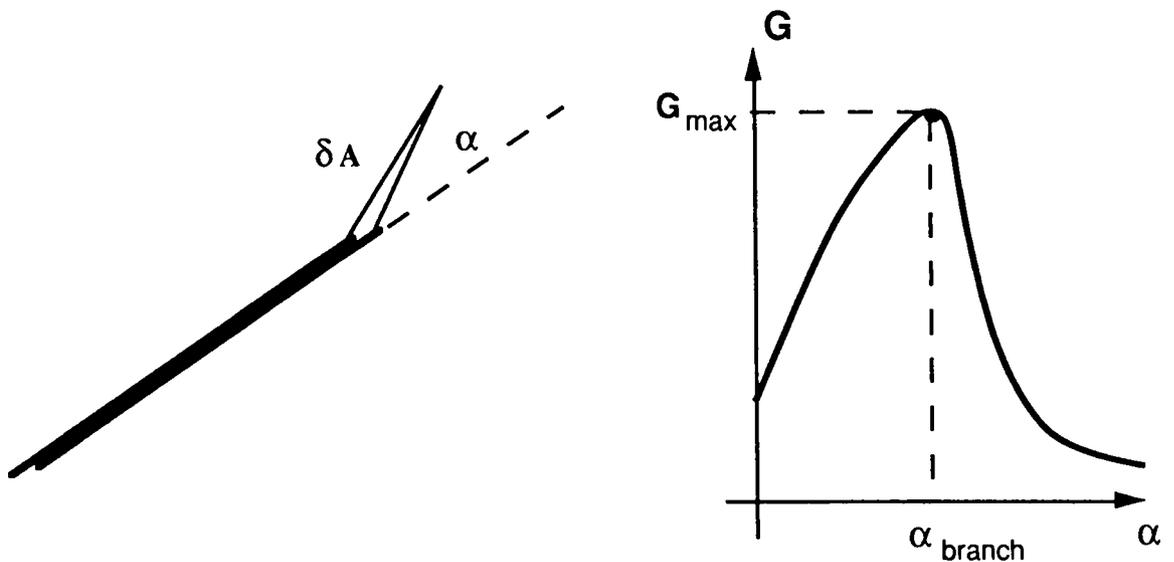


Figure 5.3

Définition de l'angle et critère de branchement de la fissure

Irwin (1959) a pu relier G au facteur d'intensité de contraintes K_i par la relation:

$$G = \frac{\alpha}{2E} (K_1^2 + K_2^2) \quad \alpha = 1 - \nu^2 \quad \text{en déformation plane}$$

$$\alpha = 1 \quad \text{en contrainte plane}$$

On ne peut utiliser ces relations que dans le seul cas où la fissure se propage dans sa propre direction. Dès que la fissure se branche, ces relations ne sont plus valables car les valeurs de K_1 et K_2 dépendent alors de la configuration à venir.

5.2 APPLICATION A LA PROPAGATION DE FISSURES

Au cours du processus de fissuration, nous devons connaître à tout moment le type de conditions aux limites à imposer sur les lèvres des fissures pour poursuivre le calcul. Selon les cas de sollicitation, les lèvres des fissures peuvent s'écarter, venir en contact ou glisser.

5.2.1 CONDITIONS SUR LES LEVRES DE LA FISSURE

Lorsque la fissure est sollicitée en traction, celle-ci s'ouvre et, en absence de pression, les contraintes normales et tangentielles s'annulent :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} \sigma_n &= 0 \\ \sigma_t &= 0 \end{aligned}$$

Le problème devient plus délicat lorsqu'on a une sollicitation de compression. Dans ce cas, nous formulons les deux hypothèses H1 et H2 suivantes :

- H1 : La contrainte normale de compression sur une fissure fermée correspond à celle du cas d'un milieu élastique continu.
- H2 : Dans le cas d'une fissure en compression, on ne peut avoir d'interpénétration de la matière.

La seconde hypothèse revient à dire que la discontinuité normale ne peut être négative :

$$D_n \geq 0$$

Lorsque les lèvres des fissures viennent en contact l'une contre l'autre, le frottement est mobilisé. Dans ce cas, en supposant un frottement lisse de type Coulomb, nous avons les conditions de liaisons suivantes :

avec $\sigma_n < 0$ pour la compression.

μ : coefficient de frottement entre les deux lèvres de la fissure.

Le cas du glissement se produit lorsque nous avons les conditions suivantes :

$$\text{si : } |\sigma_t| > \mu |\sigma_n| \quad \text{alors} \quad |\sigma_t| = \mu |\sigma_n|$$

$$D_n = 0 \quad ; \quad D_t \text{ quelconque (fermeture avec glissement)}$$

et $\sigma_t \cdot D_t \geq 0$ (glissement dans le même sens que σ_t)

Les conditions ci-dessus sont couramment utilisées en mécanique des roches (Bui (1978), Sanchez-Palancia (1982)).

5.2.2 CALCUL NUMERIQUE DE L'ENERGIE G

Le calcul numérique du taux de restitution d'énergie s'obtient en appliquant le théorème des travaux virtuels. Considérons deux états d'équilibre très proches où la fissure de longueur A subit un accroissement virtuel dA pas nécessairement dans la même direction que la fissure initiale (figure 5.4).

Sur la partie S_T , le solide est soumis à une force surfacique T^d . Sur la partie complémentaire S_u , le déplacement u_d est imposé. Par application du théorème des travaux virtuels, on démontre (Bui (1978)) que :

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_T} T_d \frac{du}{dA} ds - \frac{1}{2} \int_{S_u} u_d \frac{dT}{dA} ds$$

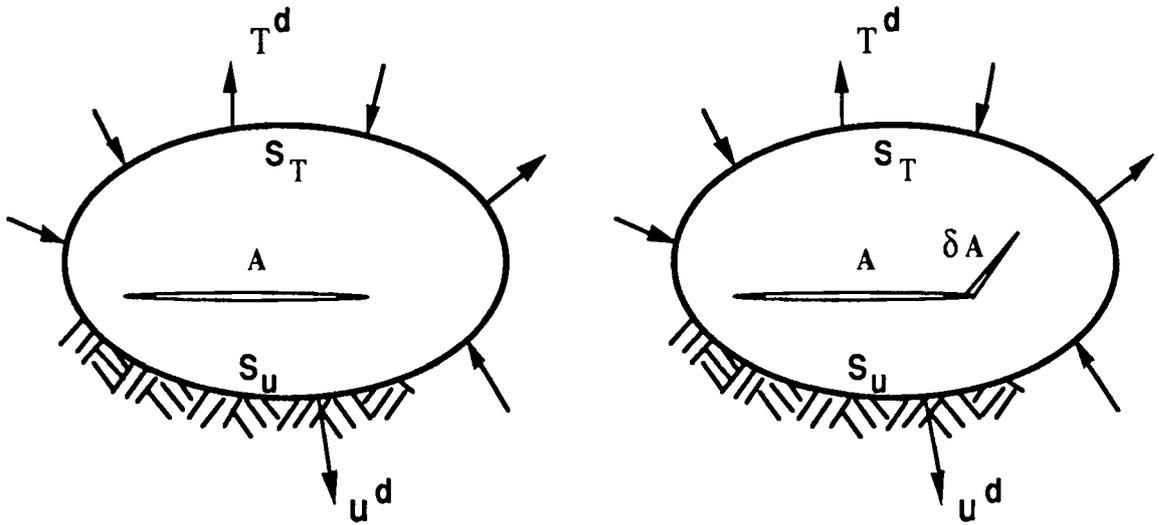


Figure 5.4
Croissance virtuelle de la fissure

Pour notre cas particulier, nous continuerons à travailler en contrainte imposée, ce qui nous ramène à définir G par :

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_T} T_d \frac{du}{dA} ds$$

Le calcul numérique de G se fera donc en discrétisant l'intégrale ci-dessus en faisant la somme des produits $\vec{T} \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$ sur chaque segment de discrétisation et en prenant $dA \equiv \Delta l$ (pour une unité d'épaisseur). Sur les segments de la fissure, on fera intervenir les discontinuités normale et tangentielle D_n et D_t pour tenir compte du travail correspondant aux deux lèvres de la fissure.

L'avantage de la méthode des discontinuités de déplacement pour le calcul de G réside dans le fait que la matrice pour le calcul à l'étape 2 est obtenue en ajoutant des lignes et des colonnes à celle obtenue à l'étape 1. Ces lignes et ces colonnes correspondent aux coefficients d'influence des éléments propagés.

5.3 RESOLUTION

Du fait de l'introduction des conditions de Coulomb et de non interpénétration entre les surfaces en contact des fissures, notre problème devient non linéaire. Pour le résoudre, nous avons adopté deux algorithmes de résolution. Le premier qui est un algorithme classique itératif de Gauss-Seidel et que nous avons introduit dans un code utilisant les éléments droits à un noeud. Le deuxième, développé au Laboratoire par Miguez (1990) est un algorithme d'optimisation quadratique que nous avons introduit dans notre code de propagation utilisant des éléments linéaires à deux noeuds pour étudier la propagation.

5.4 OPTIMISATION QUADRATIQUE AVEC DES CONTRAINTES LINEAIRES

5.4.1 INTRODUCTION A L'OPTIMISATION : LES CONDITIONS D'OPTIMALITE

Le problème le plus simple de minimisation (ou maximisation) est celui d'une fonction f d'une variable réelle :

$$(5.1) \quad \min_{x \in \mathcal{R}} f(x)$$

Si f est deux fois continuellement différentiable, et si un minimum local x^* existe, les conditions suivantes sont vérifiées sur x^* :

$$(5.2) \quad \begin{aligned} f'(x^*) &= 0 \\ \text{et} \quad f''(x^*) &\geq 0 \end{aligned}$$

Ces deux conditions sont nécessaires. Les conditions suffisantes sont :

$$(5.3) \quad \begin{cases} f'(x^*) = 0 \\ f''(x^*) > 0 \end{cases} \quad \text{et}$$

Dans le cas d'une fonction $F(x)$ avec $x \in \mathcal{R}^n$ le problème se transforme en :

$$\min_{x \in \mathcal{R}^n} F(x)$$

Les conditions suffisantes pour que le minimum x^* existe sont :

$$(5.4) \quad \begin{cases} \| \| F'(x^*) \| \| = 0 \\ E''(x^*) \text{ est définie positive} \end{cases}$$

Dans le cas d'une fonction quadratique F définie par :

$$(5.5) \quad F(x) = H^T x + \frac{1}{2} x^T G x$$

$$\text{avec } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ g_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{nn} \end{bmatrix}$$

ou C est un vecteur constant et G est constante et symétrique. Les conditions suffisantes s'écrivent :

$$(5.6) \quad \begin{cases} G x^* = -H \\ G \text{ définie positive} \end{cases}$$

x^* est solution du système d'équations donné par la première relation.

Dans le cas où l'on impose à la fonction $F(x)$ des contraintes linéaires de la forme :

$$a^T x - \beta = 0 \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

le problème devient un problème d'optimisation avec contraintes linéaires d'égalité. De façon plus générale, on peut écrire :

$$(5.7) \quad \begin{cases} \min F(x) & (a) \\ x \in \mathcal{R}^n \\ \text{assujetti à} \\ \hat{A} x = \hat{b} & (b) \end{cases}$$

la i -ème ligne de la matrice $m \times n$ A sera noté \hat{a}_i^T et contient les coefficients de la i -ème contrainte linéaire :

$$\hat{a}_i^T x = \hat{a}_{i1} x_1 + \dots + \hat{a}_{in} x_n = \hat{b}_i$$

Une solution x^* du problème d'optimisation doit vérifier $A x^* = b$. Si t lignes de A sont linéairement indépendantes, les contraintes enlèvent t degrés de liberté pour le choix de x^* .

Considérons deux points admissibles \bar{x} et \hat{x} , c'est-à-dire qui vérifient les conditions $\hat{A} \bar{x} = \hat{b}$ et $\hat{A} \hat{x} = \hat{b}$. Le déplacement du point \bar{x} au point \hat{x} représenté par P .

$$(5.8) \quad \hat{A} (\bar{x} - \hat{x}) = \hat{A} P = 0$$

Tout vecteur vérifiant la relation précédente est appelé une direction admissible par rapport aux contraintes d'égalité (5.7 b). Un pas quelconque dans la direction P ne viole pas les contraintes puisque :

$$(5.9) \quad \hat{A} (\bar{x} + \alpha P) = \hat{A} \bar{x} = \hat{b} \quad \forall \alpha$$

Il existe aussi une base de vecteurs pour le sous espace de dimension $n - t$ qui vérifient (5.8).

Soit Z la matrice dont les colonnes forment une telle base. Nous avons :

$$\hat{A} Z = 0$$

Les coefficients des lignes de A forment une base d'un espace de dimension t .

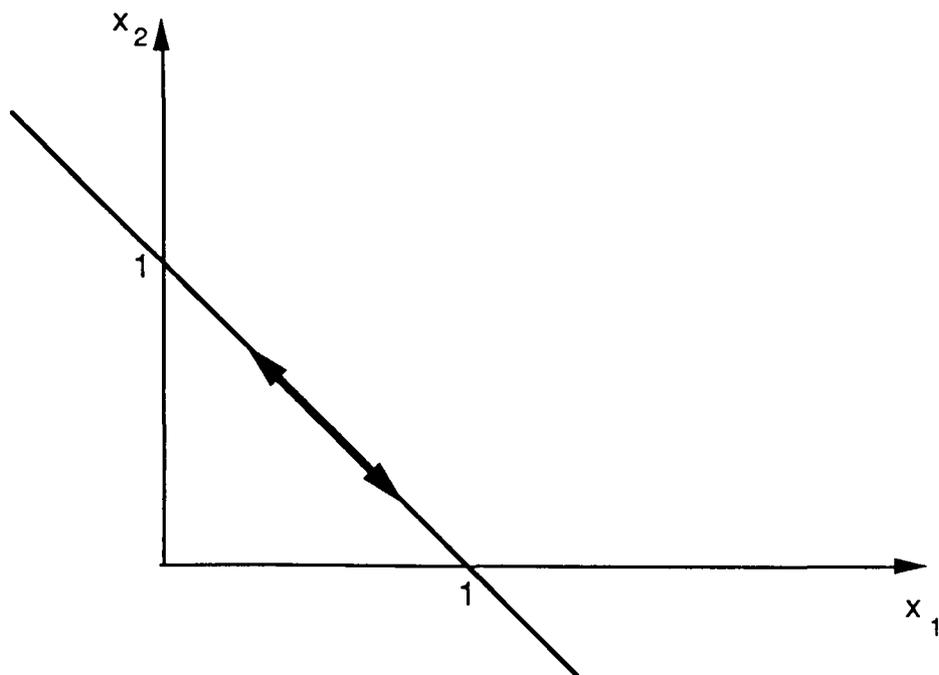


Figure 5.5

Conditions d'égalité : $x_1 + x_2 = 1$

Les conditions suffisantes pour que le problème d'optimisation (5.7) ait une solution x^* sont :

$$(5.10) \quad \begin{cases} a : \hat{A} x^* = \hat{b} \\ b : Z^T F'(x^*) = 0 \\ c : Z^T F''(x^*) \cdot Z \text{ est définie positive} \end{cases}$$

Le vecteur $Z^T F'(x^*)$ est appelé le gradient projeté. La condition (5.10 b) équivaut à dire que le gradient $F'(x^*)$ est une combinaison linéaire des lignes de \hat{A} . C'est-à-dire :

$$(5.11) \quad F'(x^*) = \hat{A}^T \cdot \lambda^*$$

pour un vecteur λ^* appelé vecteur **des multiplicateurs de Lagrange**. Les multiplicateurs de Lagrange sont uniques si, et seulement si, les lignes de \hat{A} sont linéairement indépendantes.

Dans le cas où les contraintes linéaires correspondent à la condition :

$$a^T x - \beta \geq 0 \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{11} \end{bmatrix}$$

On est en présence d'une contrainte linéaire d'inégalité.

Le problème d'optimisation est donc :

$$(5.12) \quad \begin{cases} \min F(x) & (a) \\ x \in \mathcal{R}^n \\ \text{assujetti à} \\ \hat{A} x \geq \hat{b} & (b) \end{cases}$$

avec \hat{A} et \hat{b} définis de la même façon que dans le cas des contraintes d'égalité. Si une contrainte i vérifie :

$$\hat{a}_i^T x = \hat{b}_i$$

elle est appelée une contrainte saturée. Une contrainte est dite satisfaite si elle est saturée ou

$$\hat{a}_i^T x > \hat{b}_i$$

Soit A' les t contraintes saturées au point x^* . Les conditions suffisantes pour que x^* soit minimum avec des contraintes linéaires d'inégalité sont :

$$(5.13) \quad \begin{cases} \hat{A} x^* \geq \hat{b} & \text{avec } \hat{A}' x^* = \hat{b}' \\ Z^T F'(x^*) = 0 & \text{ou équivalent } F'(x^*) = \hat{A}'^T \lambda^* \\ \lambda_i^* > 0 & i = 1, \dots, t \\ Z^T F''(x^*) Z & \text{définie positive} \end{cases}$$

où Z est la matrice dont les vecteurs colonne sont orthogonaux aux lignes de \hat{A}' , c'est-à-dire :

$$(5.14) \quad \hat{A}' Z = 0$$

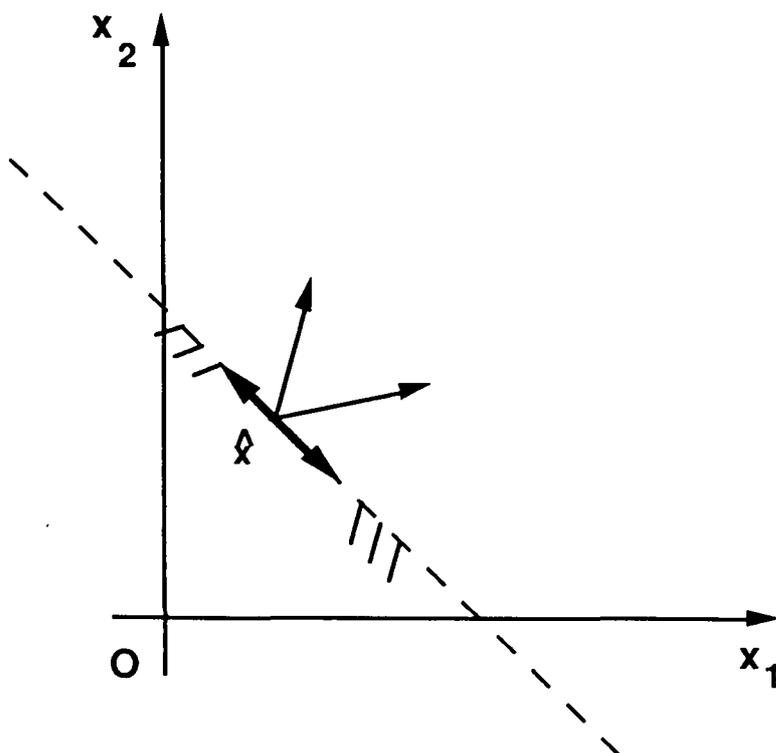


Figure 5.6

Conditions d'inégalité : $x_1 + x_2 \geq 1$

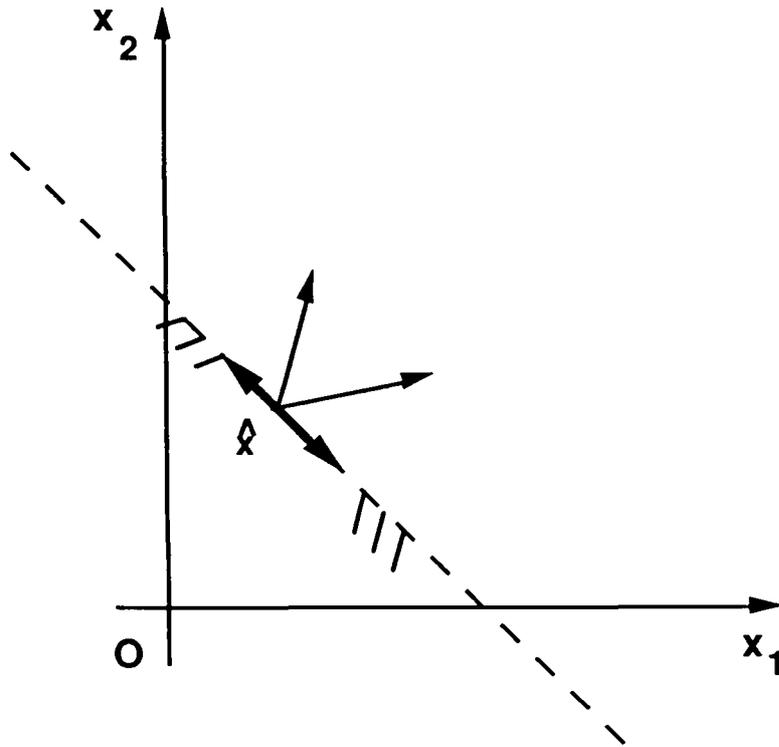


Figure 5.6
Conditions d'inégalité : $x_1 + x_2 \geq 1$

5.4.2 LA RECHERCHE DE L'OPTIMUM AVEC CONTRAINTES LINEAIRES D'INEGALITE DANS LE CAS D'UNE FONCTION QUADRATIQUE

Sur la figure 5.7, nous allons donner l'interprétation géométrique des conditions d'optimalité pour les contraintes linéaires d'inégalité. Soit a_I et a_{II} les vecteurs lignes associés aux contraintes I et II respectivement. Les vecteurs a_I et a_{II} sont perpendiculaires aux droites des contraintes.

Sur le point 1, le gradient g_1 n'est pas collinéaire à a_I ($g_1 \neq a_I \lambda$). Donc le point 1 n'est pas un minimum. Au point 2 le gradient g_2 est collinéaire à a_I ($g_2 = a_I \lambda$) mais il existe une direction admissible où la valeur de F est inférieure à celle de F sur le point 2. Donc F n'est pas minimum sur 2. En conséquence λ est négatif sur ce point et pour trouver le minimum, nous devons quitter la contrainte I dans une direction admissible. L'inverse est aussi vrai, si λ est négatif sur le point 2 donc ce point n'est pas minimum.

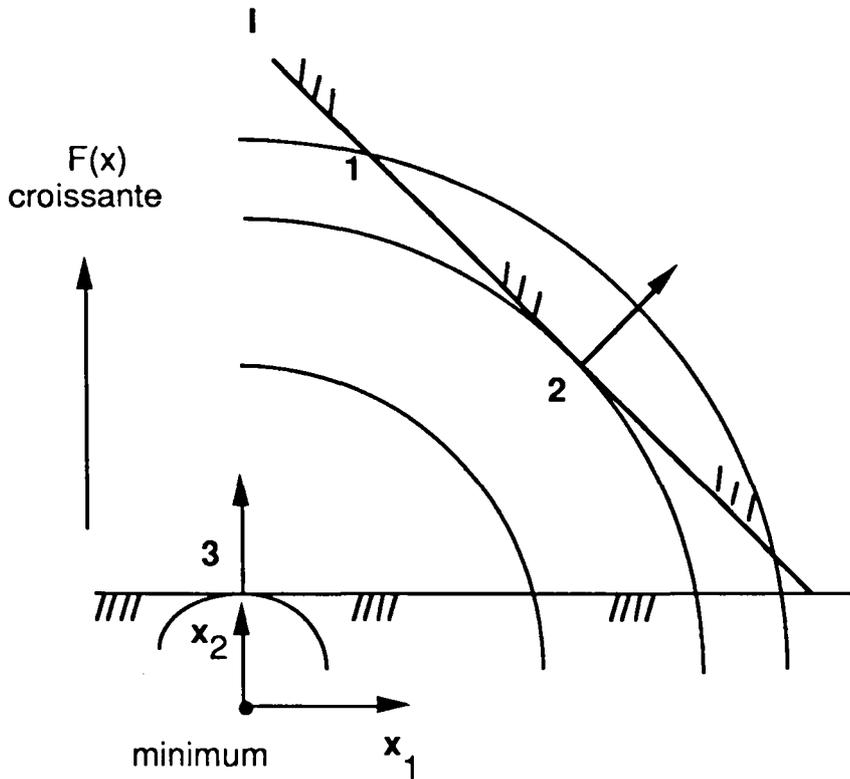


Figure 5.7
Conditions d'optimalité

Sur le point 3, le gradient est colinéaire à a_{II} , et il n'y a pas dans les directions admissibles où F soit inférieur à sa valeur en 3. Donc 3 est le minimum. En conséquence λ est positif. Inversement, si sur le point 1 λ est positif, il est le minimum.

Soit la fonction quadratique :

$$F(x) = H^T x + \frac{1}{2} x^T G x \quad (5.15)$$

$$g(x) = F'(x) = H^T + G x$$

Nous allons résoudre le problème d'optimisation :

$$(5.16) \quad \begin{cases} \min F(x) \\ x \in \mathcal{R}^n \\ \hat{A} x \geq \hat{b} \end{cases} \quad \hat{A} \in M(t \times n)$$

Avant d'aborder la résolution du problème ci-dessus, nous allons le résoudre dans le cas des contraintes d'égalité. C'est-à-dire :

$$(5.17) \quad \begin{cases} \min F(x) \\ x \in \mathcal{R}^n \\ \hat{A} x = \hat{b} \end{cases}$$

Les conditions suffisantes d'optimalité sont :

$$(5.18) \quad \begin{cases} a : Z g(x^*) = 0 \Leftrightarrow a' : g(x^*) = \hat{A}^T \lambda^* \\ b : \hat{A} x^* = \hat{b} \end{cases}$$

avec :

Soit un point \bar{X} vérifiant les contraintes d'égalité. Nous avons :

$$(5.19) \quad \begin{aligned} g(\bar{x}) &= C^T + G \bar{x} \\ \text{et} \quad g(x^*) &= C^T + G x^* \\ (x^*) - g(\bar{x}) &= G(x^* - \bar{x}) = G P \end{aligned}$$

où P est le déplacement de X à l'optimum x^* . Pour que ce déplacement soit admissible vis-à-vis des contraintes, nous avons vu que P doit vérifier :

$$(5.20) \quad \hat{A} P = 0$$

en remplaçant 5.18 a par 5.19, nous avons :

$$(5.21) \quad \hat{A}^T \lambda^* - g(\bar{x}) = G P$$

Nous déduisons le système d'équations :

$$\begin{aligned} G P - \hat{A}^T \lambda^* &= -g(\bar{x}) \\ \hat{A} P &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} G & -\hat{A}^T \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g(\bar{x}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

où les inconnues sont les composantes du déplacement P et les multiplicateurs de Lagrange λ^* . La solution de 5.17 est donnée par :

$$x^* = \bar{x} + P$$

x^* vérifie la relation 5.18 b car \bar{x} la vérifie et P est une direction admissible.

Pour le cas des contraintes du problème avec contraintes d'inégalité 5.16, nous considérons un point de départ x qui sature un nombre $t' \leq t$ de contraintes linéaires. C'est-à-dire :

$$\hat{A}' x_0 = \hat{b}'$$

où A' est une matrice $t' \times n$ extraite de \hat{A} . Nous allons supposer que les lignes de \hat{A}' sont linéairement indépendantes, ce qui n'enlève pas sa généralité à la suite de la résolution.

On appelle I^1 l'ensemble des indices de \hat{A} dont les contraintes ont été saturées par x_0 . L'ensemble I_1 représentera celui des indices non saturés par x_0 .

Nous allons chercher le minimum pour les contraintes \hat{A}' . C'est-à-dire résoudre :

$$\begin{bmatrix} G & -\hat{A}'^T \\ \hat{A}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g(x_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

mais la solution ne sera pas comme dans le cas des contraintes d'égalité :

$$x_1 = x_0 + P_0$$

parce qu'il faut que le déplacement de x_0 à x_1 soit aussi admissible par rapport à l'ensemble des contraintes dont l'indice appartient à I_1 . Autrement dit, il faut que le déplacement ne viole pas les contraintes non saturées. La distance du point x_0 à la contrainte non saturée la plus proche dans la direction P_0 est une borne supérieure du déplacement. Pour cela, il est nécessaire d'introduire un coefficient α nous permettant de rester dans la zone admissible. Le déplacement se fera dans la direction P_0 admissible par rapport aux contraintes saturées. On peut exprimer ce déplacement par :

$$x_1 = x_0 + \alpha P_0$$

On doit réactualiser l'ensemble des contraintes saturées par x_1 . L'estimation des multiplicateurs de Lagrange pour x_1 va nous permettre d'éliminer certaines contraintes (celles pour lesquelles les multiplicateurs sont négatifs). Cela va nous donner une nouvelle

matrice de contraintes \hat{A}^2 , et ainsi de suite, jusqu'à avoir les conditions d'optimalité. A la fin, nous aurons un ensemble I^* des contraintes saturées pour lesquelles les multiplicateurs de Lagrange sont positifs :

$$\lambda_i^* > 0 \quad i \in I^*$$

Exemple : Sur l'exemple suivant, on verra le schéma de résolution du problème avec les contraintes linéaires I, II et III :

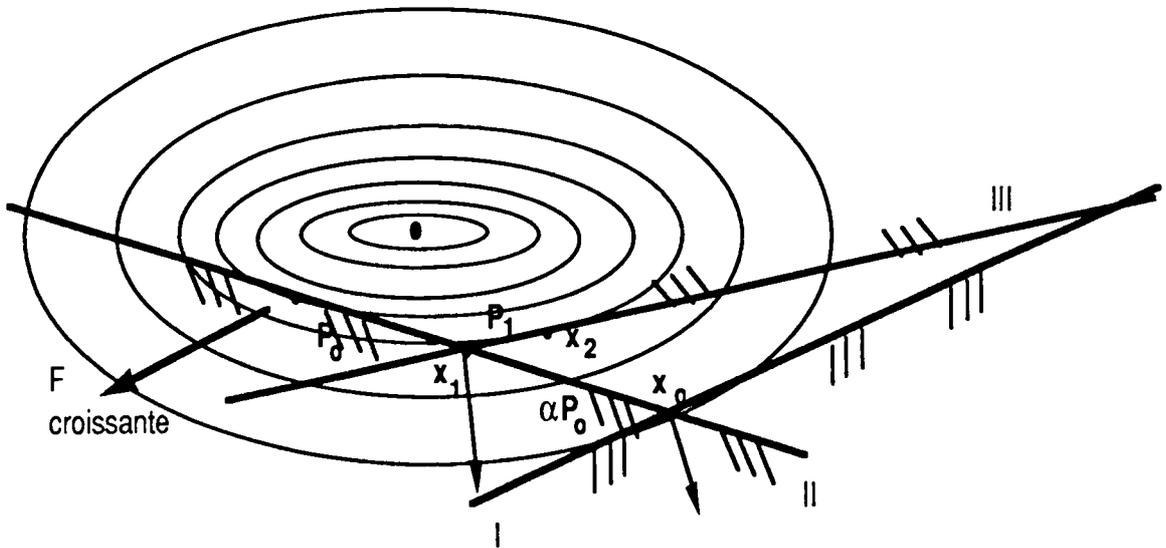


Figure 5.8

Schéma de résolution avec contraintes linéaires



Prenons comme point initial x_0 , l'intersection des contraintes I et II. Sur x_0 , la matrice des contraintes est :

$$\hat{A}' = \begin{bmatrix} a_I \\ a_{II} \end{bmatrix}$$

où a_I et a_{II} sont les vecteurs lignes associés aux contraintes I et II. On va calculer les

$$\lambda_0 = \begin{Bmatrix} \lambda_{10} \\ \lambda_{20} \end{Bmatrix}$$

où λ_{10} et λ_{20} sont associés à I et II respectivement. $\lambda_{10} < 0$, donc on élimine I, car il existe un minimum pour F dans une direction admissible.

A' devient $A'' = [a_{II}]$. Sur a_{II} , on va chercher le minimum, c'est-à-dire qu'on va résoudre :

$$\begin{bmatrix} G \\ \hat{A}^T \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{A}''^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où $g_0 = g(x_0) = F'(x_0)$.

On ne peut pas franchir la contrainte III. Donc le point admissible dans la direction P_0 est le point x_1 , intersection des deux contraintes II et III :

$$x_1 = x_0 + \alpha P_0$$

Sur x_1 les contraintes saturées sont II et III.

$$\hat{A}'' \text{ devient } \hat{A}''' = \begin{bmatrix} a_{II} \\ a_{III} \end{bmatrix}$$

On va calculer en x_1 les multiplicateurs de Lagrange associés à ces contraintes.

Sur x_1 , le multiplicateur de Lagrange $\lambda =$ associé à la contrainte II est négatif puisqu'il existe des valeurs inférieures dans des directions admissibles. En conséquence, on doit éliminer la contrainte II. La matrice de contrainte \hat{A}''' devient :

$$\hat{A}''' - \hat{A}^{IV} = [a_{III}]$$

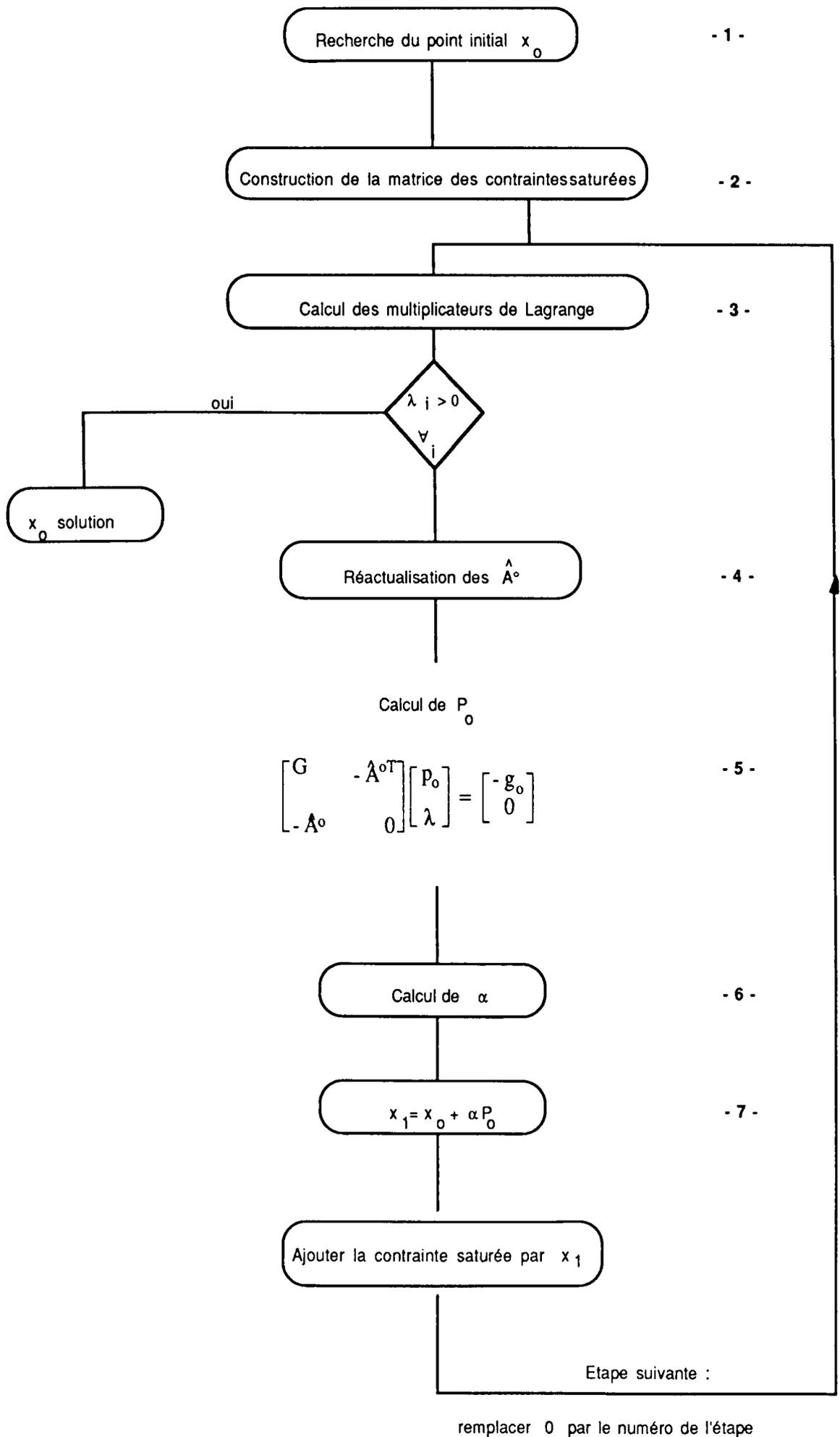
On résout le système :

$$\begin{bmatrix} G & -\hat{A}^{IVT} \\ \hat{A}^{IV} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g(x_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

et la solution du problème est donnée par :

$$x_{\min} = x_2 = x_1 + p_1$$

L'algorithme général de résolution est le suivant :



Dans cet algorithme, plusieurs points restent encore à développer. Les procédures 1 et 2 seront détaillées au paragraphe 5.3 pour le cas des milieux fissurés modélisés avec les discontinuités de déplacement. Nous allons décrire la méthode utilisée pour le calcul des multiplicateurs de Lagrange (procédure 3).

A l'étape k , nous avons une matrice des contraintes linéaires \hat{A}_k , le point x_k et le gradient $g_k = g(x_k) = F'(x_k)$. On démontre (Pchenitchny et Daniline (1977)) que les multiplicateurs de Lagrange sont donnés par la résolution du système d'équations suivant :

$$\hat{A}_k^T \hat{A}_k \lambda = \hat{A}_k^T g_k$$

Pour le calcul de α (procédure 6), la méthode utilisée est la suivante (Gill et al (1982)) : Pour simplifier la notation, enlevons momentanément les indices k des quantités associées à l'itération courante. Considérons un pas de longueur $\alpha > 0$ dans la direction P . Par définition un pas quelconque sur P ne changera rien aux contraintes saturées. En revanche, nous devons rester dans la zone admissible vis-à-vis des contraintes non saturées. C'est-à-dire que pour une contrainte non saturée i ($i \in I$), nous devons vérifier que :

$$\text{Soit} \quad a_i^T x + \alpha a_i^T P \geq b_i \quad i \in I$$

si $a_i^T P \geq 0$ la contrainte ne sera jamais saturée quelque soit la valeur de $\alpha (> 0)$. Mais si $a_i^T P < 0$, il existe une valeur critique γ_i de α tel que la contrainte i soit saturée :

$$a_i^T x + \gamma_i a_i^T P = b_i$$

$$\text{d'où} \quad \gamma_i = \frac{b_i - a_i^T x}{a_i^T P} \quad i \in I$$

Donc, nous allons calculer l'ensemble des valeurs γ_i :

$$\gamma_i = \left\{ \frac{b_i - a_i^T x}{a_i^T P} \quad i \in I \quad \text{et} \quad a_i^T P < 0 \right\}$$

et la longueur α du pas dans la direction P sera :

$$\alpha = \min (\gamma_i, 1)$$

Nous allons appliquer l'ensemble de ces procédures à la modélisation avec les discontinuités de déplacement d'un milieu fissuré.

5.5 APPLICATION DE L'OPTIMISATION QUADRATIQUE AVEC CONTRAINTES LINEAIRES D'INEGALITE A LA PROPAGATION DES FISSURES.

On utilisera la méthode des discontinuités des déplacements en champ complexe avec des éléments droits à deux noeuds pour la résolution de ce problème. La formulation de la résolution du système d'équations sera tout de même modifiée. En effet, il y a équivalence entre la résolution du système :

$$C.D = B$$

et la recherche du minimum de la fonction quadratique suivante :

$$F(D) = \frac{1}{2} || C D - B ||^2$$

On peut présenter F sous la forme :

$$F(D) = \frac{1}{2} [C D - B]^T \cdot [C D - B]$$

$$\begin{aligned} F(D) &= \frac{1}{2} [D^T C^T - B^T] [C.D - B] \\ &= \frac{1}{2} [D^T C^T C.D - B^T C.D - D^T C^T B + B^T B] \\ &= \frac{1}{2} [D^T C^T C.D - B^T C.D - (C.D)^T \cdot B + B^T B] \\ &= \frac{1}{2} [D^T C^T C.D - B^T C.D - [B^T C.D]^T + B^T B] \end{aligned}$$

mais $B^T C D$ est un scalaire donc $[B^T C D]^T = [B^T C D]$ d'où :

$$F(D) = \frac{1}{2} D^T C^T C D - B^T C D + \frac{1}{2} B^T B$$

La quantité $B^T B$ étant indépendante de D, donc le problème à résoudre est :

$$\min F(D) = \frac{1}{2} D^T C^T C D - B^T C D$$

$$D \in \mathfrak{R}^n$$

Donc, dans le cas de l'optimisation quadratique, développée au paragraphe 5.2, $G = C^T C$ et $H^T = -B^T C$.

La fissure décrite au paragraphe 5.3 sera représentée par des discontinuités de déplacements. Les lèvres de la fissure correspondent à la limite "G" et "D" des discontinuités. Physiquement, on doit donc imposer des restrictions aux valeurs des discontinuités normales D_n et tangentielles D_t sur la fissure. Ces restrictions sont données par les conditions aux limites imposées sur les lèvres de la fissure et exprimées au paragraphe 5.3. Nous allons de cette façon construire la matrice des contraintes linéaires A.

On notera D le vecteur colonne des discontinuités normales et tangentielles. Nous allons considérer que les discontinuités sur la fissure sont indicées par i .

- a. Les discontinuités normales sur la fissure doivent être positives ou nulles :

$$\forall i \in \text{Fissure} \Rightarrow D_n(i) \geq 0 \text{ (pas d'interpénétration)}$$

la contrainte linéaire a_i correspondant à cette condition s'exprime par :

$$a_i^T D \geq 0$$

où $a_i^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]$ le terme unité correspondant à la discontinuité normale de l'élément i de la fissure. C'est une contrainte linéaire d'inégalité.

- b. Si la fissure est ouverte (c'est-à-dire $D_n > 0$) alors les contraintes sur l'élément i de la fissure sont nulles. Ceci s'exprime sous la forme suivante :

$$\sum_{j=1}^{NDD} C(i,j) D(j) = 0$$

où NDD représente le nombre total de discontinuités de déplacement du problème modélisé. $(C(i, j))$ représente l'élément de la ligne i et la colonne j de la matrice du coefficient d'influence. La contrainte linéaire s'exprime dans ce cas par :

$$a_i^T D = 0$$

où :

$$a_i^T = [C_{i1} \ C_{i2} \ \dots \ C_{iNDD}]$$

est une contrainte d'égalité.

- c. Dans le cas où il n'y a pas de glissement, les discontinuités tangentielles D_t de la fissure doivent être nulles (conditions de Coulomb). Ceci s'exprime par

$$\forall i \in \text{Fissure} \quad D_t(i) = 0$$

la contrainte linéaire est :

$$a_i^T D = 0$$

où :

$$a_i^T = [0 \dots 1 \dots 0]$$

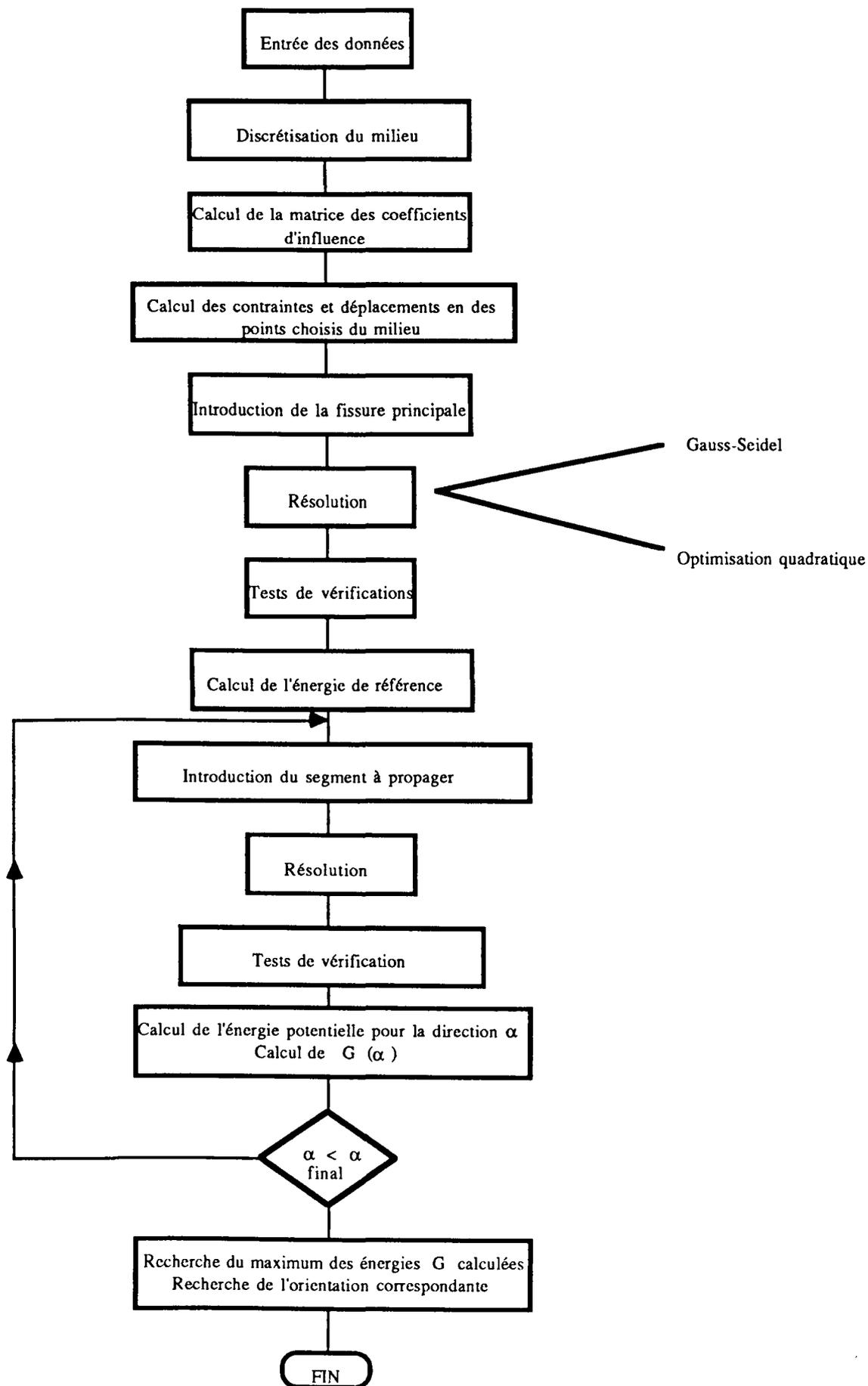
le terme unité correspondant à la discontinuité tangentielle de l'élément i de la fissure.

Nous sommes maintenant en mesure de construire la matrice des contraintes linéaires A . Le problème à résoudre est donc un problème d'optimisation quadratique avec des contraintes linéaires d'égalité et inégalité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} D^T C^T C D - B^T C D \\ D \in \mathcal{R}^{\text{NDD}} \\ \text{avec les contraintes sur la fissure} \\ \hat{A} D \geq \hat{b} \end{array} \right.$$

Nous appliquons l'algorithme développé en 5.2 pour trouver la solution de ce problème.

Cet algorithme a été introduit dans le code de calcul utilisant des éléments linéaires à deux noeuds pour étudier la propagation. La structure générale du programme de propagation est résumée sur la figure ci-dessous :



Pour la discrétisation des fissures, nous avons adopté des éléments linéaires à un ou deux noeuds que nous avons décidé de comparer. Nous avons considéré trois exemples. Le premier concerne une fissure en milieu infini sous traction uniaxiale. Le deuxième porte sur une fissure sous compression en ne considérant que le mode II pur. Le troisième exemple est consacré à l'étude de la propagation en mode mixte sous chargement de compression.

5.6.1 FISSURE EN TRACTION

Le premier exemple concerne la recherche de la direction de propagation de fissure en traction. La propagation en traction a été étudiée en milieu anisotrope par Morel (1987). Nous avons choisi de commencer par ce cas pour montrer qu'aucun problème ne se pose dès qu'il s'agit de traction puisque les conditions à imposer sont très simples. En ouverture, il suffit juste d'annuler les contraintes sur les lèvres de la fissure. Cet exemple constitue donc un test de validation préliminaire, d'autant plus que nous avons à notre disposition des résultats analytiques donnés par Sih (1968), ce qui n'est pas le cas en compression. La figure ci-dessous donne les directions de propagation pour différentes orientations d'une fissure en traction uniaxiale en milieu infini. La fissure a été discrétisée avec 50 éléments à un noeud ou 25 éléments à deux noeuds. Les résultats sont équivalents pour ces deux discrétisations en ce qui concerne cet exemple.

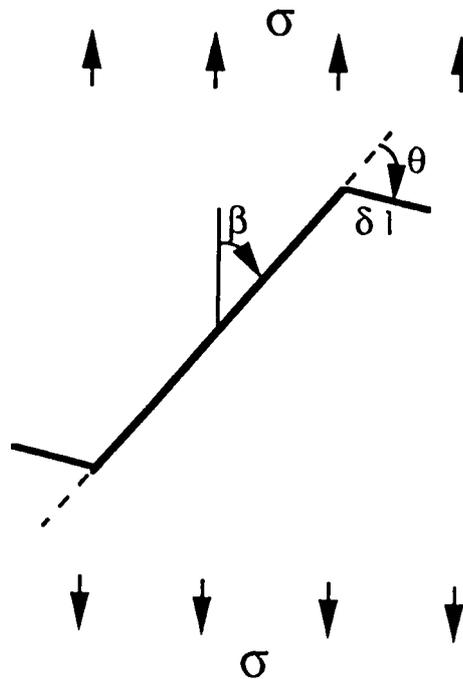


Figure 5.10 a

Fissure en traction uniaxiale en milieu infini

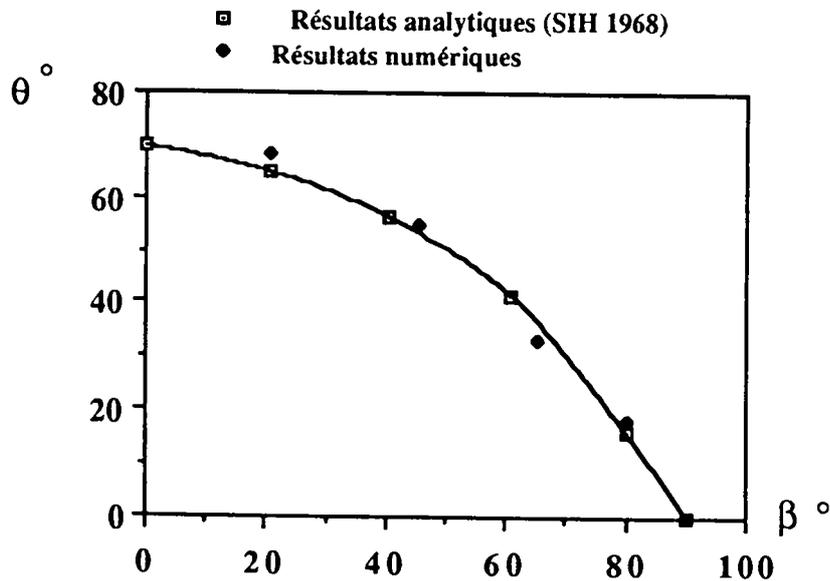


Figure 5.10 b

Direction de propagation en fonction de l'inclinaison de la fissure principale

5.6.2 FISSURE EN MODE II PUR

Nous abordons maintenant le problème de fissure en compression. Peu d'études numériques ont été menées pour le cas de propagation de fissure en mode mixte. Nous pouvons citer les travaux de Cornet (1977) et la thèse de Kondo (1989) qui ont utilisé la méthode de discontinuités de déplacement en compression. Mais, en l'absence de résultats analytiques en mode mixte, des questions subsistent quant à la validité de certains résultats numériques. Nous pouvons citer les relations analytiques de Steiff (1984) dans le cas du mode mixte. Nous verrons dans le paragraphe suivant la comparaison obtenue avec les résultats numériques. Nous avons introduit les éléments d'ordre supérieur (éléments à deux noeuds), et changé l'algorithme de résolution (optimisation quadratique) pour traiter la propagation, pour voir les différences au niveau de la quantité et de la qualité des résultats par rapport aux éléments à un noeud. Nous verrons ce qu'on peut en conclure.

Dans le cas où nous supposons un prolongement virtuel de la fissure dans sa propre direction, c'est-à-dire en mode II pur, il nous est possible de déduire le taux d'énergie G analytiquement grâce aux formules d'Irwin en facteur d'intensité de contrainte et aux formules de Lino (1980). C'est le seul cas où nous pouvons déduire des résultats analytiques. Dans la figure 5.11 a ci-dessous, nous avons donc traité une fissure en compression pour différentes orientations en utilisant les deux algorithmes et les deux discrétisations. La fissure a été discrétisée avec 40 éléments droits à deux noeuds comparée à une discrétisation équivalente avec 80 éléments droits à un noeud.

Kondo (1989) a traité ce cas avec un algorithme itératif et a abouti aux mêmes résultats. A partir des courbes de la figure 5.11b, nous pouvons conclure que les résultats restent équivalents pour les deux algorithmes et les deux discrétisations (un ou deux noeuds). Toutefois, il faut souligner que ce cas de figure correspond au cas particulier du mode II pur, ce qui peut expliquer les similitudes des résultats.

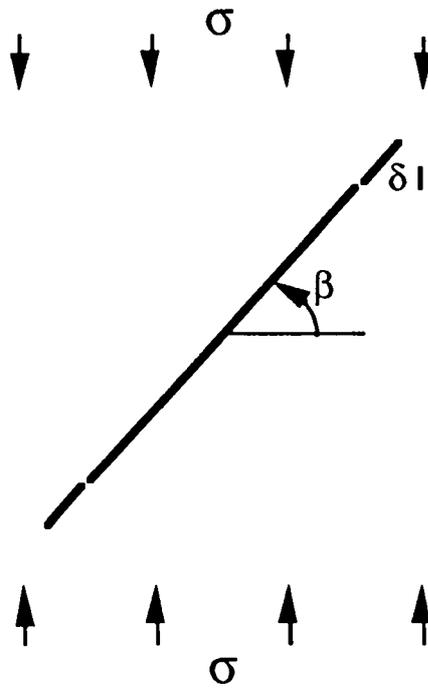


Figure 5.11 a

Fissure en compression uniaxiale en milieu infini

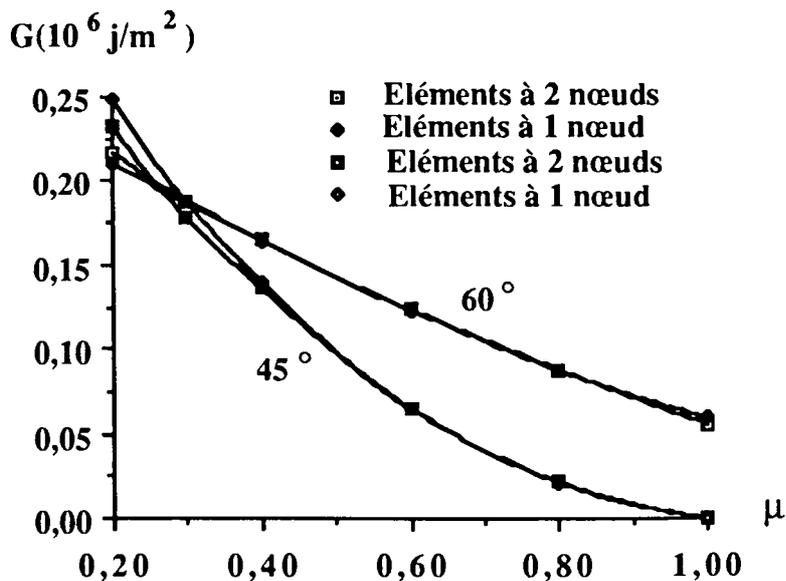


Figure 5.11 b

Variation de G pour différentes valeurs de μ

Pour le cas des fissures ci-dessus, nous avons fait une étude de l'orientation la plus défavorable pour $\mu = 0,7$. La figure 5.11 c montre la variation de l'énergie G pour différents angles β . L'inclinaison β_{\max} la plus défavorable est obtenue pour l'énergie G maximum. Pour $\mu = 0,7$, nous trouvons pour $\beta_{\max} \cong 62,5^\circ$. Nous allons donc adopter, pour l'exemple suivant, l'inclinaison $\beta = 60^\circ$.

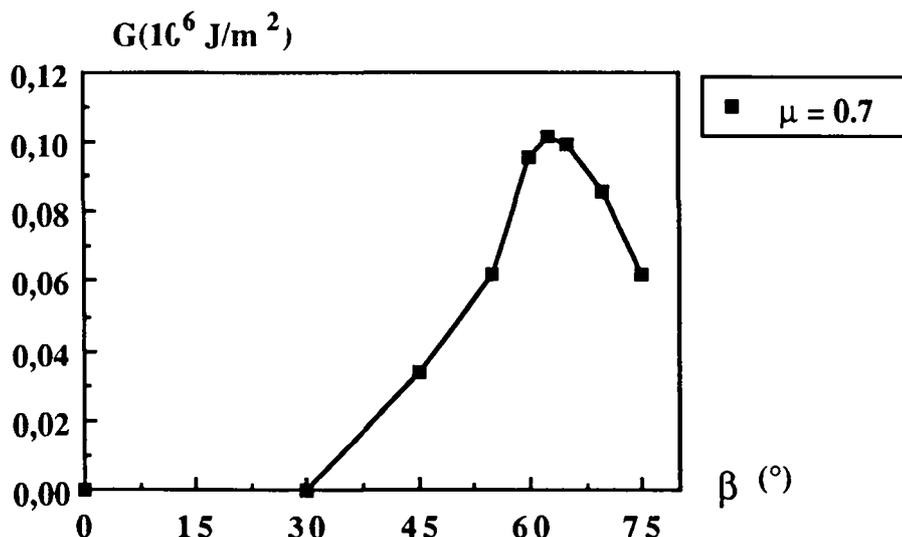


Figure 5.11 c

Recherche de l'inclinaison la plus défavorable de la fissure principale pour $\mu = 0.7$

5.6.3 PROPAGATION SOUS COMPRESSION

Le problème devient très délicat dès que la fissure se branche. Dans ce cas, plusieurs mécanismes peuvent être simultanément mis en jeu puisqu'on peut avoir sur la fissure des éléments qui s'ouvrent ou des éléments en contact avec frottement. Le deuxième exemple du paragraphe précédent a montré que l'inclinaison la plus défavorable de la fissure est de 60° . Nous présentons donc dans ce qui suit la recherche de la direction de la propagation pour cette configuration de fissure. Pour ce cas, les énergies subissent un écart important, allant du simple au double, c'est un point important à noter, mais s'agissant du maximum, c'est-à-dire de la direction de propagation, nous constatons que les deux courbes donnent approximativement le même angle de branchement. La partie principale de la fissure a été discrétisée de la même façon que l'exemple précédent. L'élément propagé est obtenu avec un seul élément de discontinuité.

Les études analytiques qui ont été menées en mode mixte sont dues à Steiff. D'après les travaux de Cotterel et Rice (1980) et Hussain M.A. et al (1974), il a été établi des formules de facteurs d'intensité de contrainte en mode mixte. L'étude comparative (Figure 5.12 c) faite par Kondo (1989) illustre la différence entre l'étude numérique et les résultats des formules de Steiff. On observe qu'au-delà de 30° , les deux courbes ne concordent plus. Le figure ci-dessous représente l'énergie réduite $G_r = GE/(\pi \sigma^2 l_0)$ pour une fissure sous compression uniaxiale. Ceci traduit encore le fait qu'en mode mixte, il reste encore des résultats à confirmer.

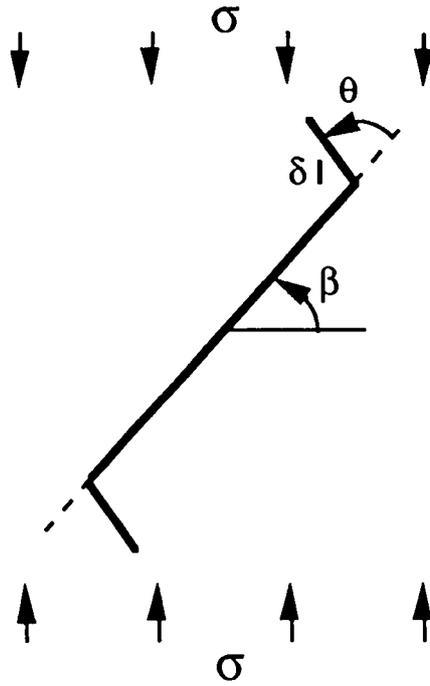


Figure 5.12 a
Branchement de fissure en compression uniaxiale

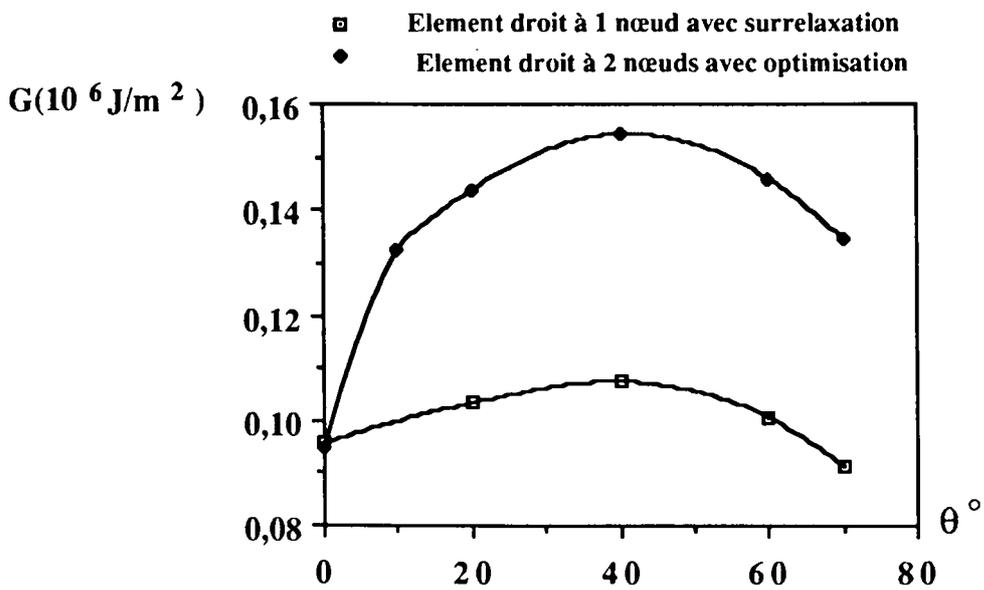


Figure 5.12 b
Variation de G en fonction de l'angle θ pour $\beta = 60^\circ$ et $\mu = 0.7$

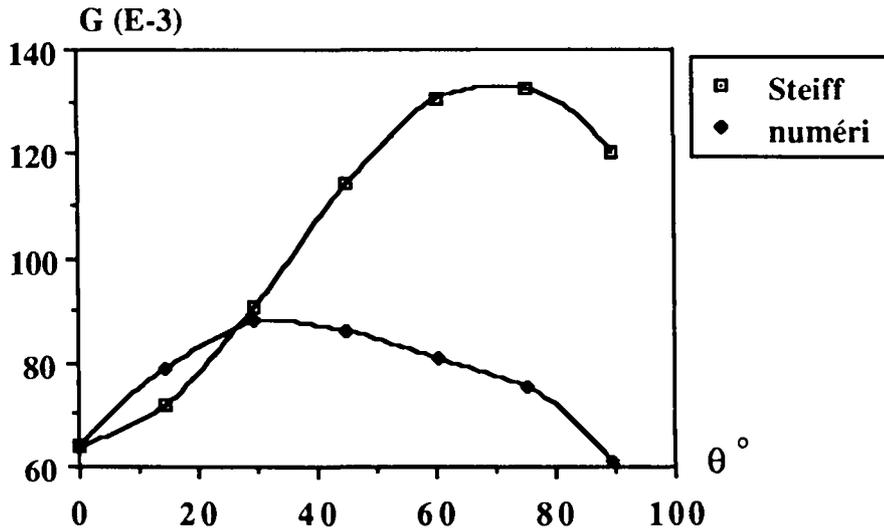


Figure 5.12 c

Comparaison entre les calculs numériques et analytiques (Kondo - Steiff)
Milieu infini - Variation de G_r en fonction de l'angle α

5.7 DISCUSSIONS - CONCLUSIONS

Ce chapitre a permis d'utiliser la méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe à la propagation des fissures. Les éléments droits à un et deux noeuds ont été utilisés pour discrétiser ces fissures. L'algorithme de surrelaxation et d'optimisation quadratique ont été utilisés pour la résolution du système d'équation. Les cas de propagation en traction et en mode mixte sous compression ont été étudiés. Si le cas de la propagation en traction n'a pas posé de problèmes vu la simplicité de la sollicitation et des conditions imposées sur les éléments, il n'en est pas de même pour le cas de la propagation en compression. Pour le cas de la compression avec mode II pur et fermeture totale des discontinuités, la méthode est optimale. Il n'y a pas de différence entre les résultats obtenus avec une discrétisation à un ou deux noeuds. De même, les différents algorithmes n'influent pas. Ce cas de sollicitation est analogue au problème de contact entre solides. C'est un des intérêts de la méthode pour traiter ce type de problèmes. Il y a par contre certains problèmes qui apparaissent lorsque la fissure se branche sous compression. Ce problème est illustré par la différence des énergies G obtenues avec les discrétisations à un et deux noeuds. Si, au niveau de la qualité des résultats il y a concordance, au niveau de la quantité la différence atteinte n'est pas négligeable. Cette différence peut être expliquée par la complexité du mécanisme de propagation qui se traduit sur les éléments de discrétisation. C'est l'un des problèmes de la méthode des discontinuités de déplacements, et ceci concerne encore plus les éléments à deux noeuds. En effet, dans le cas du mode mixte, des éléments de discrétisation sont fermés alors que d'autres sont ouverts. Dans la zone de branchement se pose un problème de continuité des déplacements. Prenons l'exemple de l'élément à deux noeuds. Lorsque l'élément propagé est ouvert du fait de configuration de l'élément, les deux noeuds qui se trouvent sur cet élément se séparent. Ceci explique en partie la différence d'énergie. Avec cette ouverture, du fait que la résolution se fait par discontinuité de déplacement, nous n'avons pas de condition de continuité de déplacement entre les points A-A' et B-B' (voir figure 5.13 a). Il nous faut avoir la configuration de la propagation comme indiqué sur la figure 5.13 b. Le problème majeur en ce qui concerne cette méthode dans le cas particulier de la

propagation en mode mixte est d'obtenir la compatibilité du déplacement au niveau de la zone de branchement.

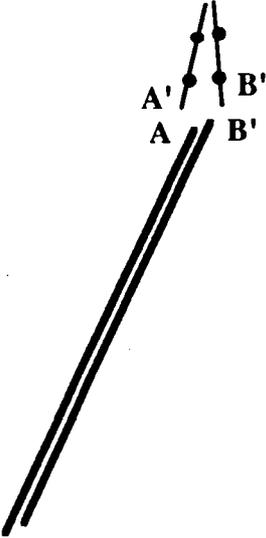


Figure 5.13 a
Incompatibilité des déplacements entre A-A' et B-B' lors de la propagation

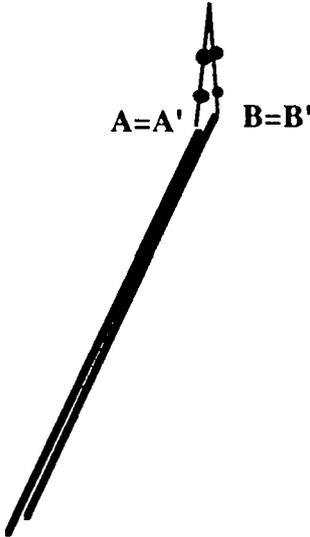


Figure 5.13 b
Continuité des déplacements nécessaire entre A-A' et B-B' lors de la propagation

CONCLUSION

L'objectif du présent travail, en premier lieu, est d'obtenir des développements numériques et analytiques dans le cadre de la méthode des discontinuités de déplacement. Cette méthode, bien adaptée à la modélisation des fissures a été appliquée par la suite à la propagation des fissures en mode mixte avec frottement.

Une étude bibliographique a été consacrée aux méthodes intégrales de frontière. Elle a montré notamment la possibilité d'exprimer les discontinuités de déplacement aussi bien en coordonnées cartésiennes qu'en champ complexe. Dans ce travail, notre choix s'est porté sur l'écriture en champ complexe vu la souplesse qu'offre cette formulation.

Des solutions analytiques ont été abordées et ont notamment permis le développement d'éléments circulaires à deux noeuds. Ces solutions ont nécessité d'importants développements analytiques. Un code de calcul a été mis au point et permet d'utiliser ces éléments pour traiter des contours circulaires. Une étude comparative entre les éléments circulaires et droits a été menée sur des domaines à contours circulaires. Elle a montré que les résultats dans ces cas sont équivalents. Afin de traiter des configurations plus générales, nous avons effectué un couplage entre les deux types d'éléments. Cette procédure a permis d'améliorer sensiblement les résultats.

Nous avons remarqué que les éléments circulaires présentent des discontinuités de déplacement en bout d'élément. Nous avons donc traité ce problème en faisant respecter la continuité du déplacement en ces points. Nous avons développé deux éléments circulaires dégénérés (bout de fissure circulaire). Ils ont nécessité des développements analytiques importants. Ces éléments ont été comparés aux éléments circulaires à un noeud sur des fissures en milieu infini. Les exemples traités montrent que les éléments dégénérés améliorent sensiblement la discontinuité normale, et par conséquent, la précision des déplacements normaux des lèvres de fissures. Cela signifie que ces éléments sont bien adaptés pour traiter le problème des fissures en mode 1 (mode de traction). Par contre, en ce qui concerne les discontinuités et déplacements tangentiels, les résultats sont moins performants. Ceci peut être dû à la forme dissymétrique de l'élément dégénéré.

Le dernier chapitre a été consacré à l'application de la méthode des discontinuités de déplacement à la propagation des fissures en mode mixte avec frottement. Le code de calcul mis au point pour étudier la propagation utilise les algorithmes d'optimisation quadratique, et de surrelaxation comme techniques de résolution. Il utilise les éléments de discontinuités droits à un et deux noeuds pour la discrétisation des fissures. Dans le cas de la traction (mode 1), les résultats sont satisfaisants pour les deux algorithmes. C'est aussi le cas sous sollicitation de compression lorsque la fissure se propage dans son propre plan (mode 2 pur). Par contre, nous avons remarqué une différence numérique au niveau de l'énergie G entre les deux algorithmes lorsque la fissure se branche sous compression, mais qualitativement les résultats restent concordants.

La méthode des discontinuités de déplacement offre encore des domaines d'étude. Elle peut être étendue par exemple au milieu stratifiés et traiter le comportement d'une fissure au voisinage d'une interface. Elle peut être appliquée aussi pour traiter le problème de contact. Au niveau de la propagation, le branchement peut être étudié en faisant intervenir un élément coin à chaque étape de propagation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BELKACEMI Y., MIGUEZ R., HENRY J.P. - "Displacement Discontinuity Method in Complex Variable : Application to the Description of Crack Path with or Without Friction" - 12 th IMACS World Congress, Paris, 1988
- [2] BELKACEMI Y., BOUHADDANE A., HENRY J.P. - "Development of High order Elements for Circular Discretization in the Displacement Discontinuity Method" - Proceeding of the 1st European Boundary Element Meeting Brussels, pp. 175-184, 1988
- [3] BELKACEMI Y., MIGUEZ R., MOREL E., HENRY J.P. - "Crack path Propagation with or without Friction by Displacement Discontinuity Method" - European Mechanics Colloquium 248, Grenoble, France, pp. 90-93, 1989
- [4] BOUHADDANE A. - "Application de l'intégrale de Cauchy à la méthode des discontinuités de déplacement et autres méthodes de collocation" - Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1987
- [5] BREBBIA C.A. (1978) - "The Boundary Element Method for Engineers" - Pentech Press, London
- [6] BUI H.D. (1978) - "Mécanique de la rupture fragile" - Ed. Masson, Paris
- [7] BUI H.D. (1977) - "An Integral Equations Method for Solving the Problem of a Plane Crack of Arbitrary Shape" - J. Mech. Phys. Solids, Vol. 25, pp 29-39
- [8] CORNET F.H. (1977) - "Comparative Analysis by the Displacement Discontinuity Method of two Energy Criteria of Fracture" - Journal of Applied Mechanics, n° 79 - APM-25, pp. 1-6
- [9] COTTERELL B., RICE J.R. (1980) - "Slightly Curved or Kinked Cracks" - Int. J. of Fracture, Vol. 16, n° 2
- [10] CROUCH S.L. (1976) - "Solution of Plane Elasticity Problems by the Displacement Discontinuity Method" - Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 10, pp. 301-343
- [11] CROUCH S.L., STARFIELD A.M. (1983) - "Boundary Element Methods in Geomechanics" - Ed. George Allen and Unwin
- [12] CRAWFORD A.M., CURRAN J.H. (1982) - "Higher Order Functional Variation Displacement Discontinuity Elements" - Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. Abst., Vol. 19, pp. 143-148
- [13] CRAWFORD A.M., CURRAN J.H. (1983) - "A Displacement Discontinuity Approach to Modelling the Creep Behaviour of Rock and the Discontinuities" - Int. J. of Num. and Anal. Meth. in Geomech., Vol. 7, pp 245-267
- [14] CRUSE T.A., VANBUREN W. (1971) - "Three Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack" - Int. J. of Fracture, Vol. 7, n° 1
- [15] CRUSE T.A. (1974) - "An Improved Boundary Integral Equation Method for three Dimensional Elastic Stress Analysis" - Computers and Structures, Vol. 4, pp 741-754, Pergamon Press
- [16] DOMINGUEZ J. (1987) - "Elastostatics in Boundary Element Methods in Structural Analysis" - Beskos Ed., ASCE
- [17] FREDHOLM L. (1903) - "Sur une classe d'équations fonctionnelles" - Acta Mathematica, 27, pp. 365-390
- [18] GILL P.E., NURRY W., WRIGHT M.H. (1982) - "Practical Optimization" - Academic Press, London
- [19] GRIFFITH A.A. (1924) - "Theory of Rupture" - Proc. 1st Int. Cong. Appl. Mech. Delft, pp. 55-63
- [20] HENRY J.P., CAIGNAERT G. (1988) - "Exercices d'élasticité" - Dunod, Paris

- [21] HARTMANN C. (1981) - "Elastostatics - Progress in Boundary Element Method" - C.A. Brebbia Ed., Pentech Press. London
- [22] HUSSAIN M.A., PU S.L., Underwood J. (1974) - Strain Energy Release Rate for A crack Under Combined Mode I and Mode II" - Fracture Analysis, ASTM STP 560, pp. 2-28
- [23] IRWIN G.R. (1957) - "Analysis of Stresses and Strain Near the end of a Crack Traversing a Plane". J. Appl. Mech., pp. 361-364
- [24] JAWSON M.A. (1963) - "Integral Equation in Potential Theory I" - Proceedings of the Royal Society, 275, p. 23-32
- [25] KONDO D. (1989) - "Modélisation du comportement des roches par la mécanique linéaire de la rupture : Application à l'étude de la stabilité des ouvrages souterrains" - Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille
- [26] LACHAT J.C., WATSON J.O. (1976) - "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations : A formulation for three Dimensional Elastostatics" - Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, pp. 991-1005
- [27] LACHAT J.C. (1975) - "A further Development of the Boundary Integral Technique of Elastostatics" - PhD Thesis, University of Southampton
- [28] LINO M. (1980) - "Un modèle de matériau microfissuré" - Revue Française de Géotechnique, n° 11
- [29] MARCHINA P., BOULON M. (1989) - "Numerical Simulation of Contact with Friction in Geomechanics by the Boundary Element Method" - European Mechanics Colloquium 248, Grenoble, France, pp. 94-97
- [30] MIGUEZ R., BELKACEMI Y., HENRY J.P. (1989) - "Higher Order Displacement Discontinuities in Complex Variable - Application to the Description of Crack Path with Friction" - 3rd Int. Conf. on Num. Mod. in Geomech. Numog III, Niagara Falls, Canada, Elsevier Applied Sciences, pp. 447-454
- [31] MIGUEZ R. (1990) - "Etude du discage : Application à la détermination des contraintes in-situ lorsque le forage n'est pas chargé" - Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille
- [32] MILNE THOMPSON L.M. (1968) - "Systèmes Elastiques Plans" - Dunod, Paris
- [33] MOREL E. (1987) - "Contribution à l'étude de la propagation des discontinuités dans les roches anisotropes : Mise au point d'une étude de calcul utilisant l'intégrale de Cauchy et étude expérimentale d'un schiste". Thèse de Doctorat de Mécanique, Université de Lille
- [34] MUSKHELISHVILI N.I. (1963) - "Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity" - Noordhoof Ed. Groningen
- [35] PANASYUK Y.V., SAVRUK H.P., DATSYSHYN A.D. (1977) - "A General Method of Solution of two Dimensional Problems in the Theory of Cracks" - Eng. Fracture Mech., Vol. 9, pp. 489-497
- [36] PARTON V., PERLINE P. (1984) - "Méthodes de la théorie Mathématique de l'Elasticité" - Edition Mir, Moscou, Tome 2
- [37] PCHENITCHNY B., DANILINE Y. (1977) - "Méthodes numériques dans les problèmes d'extrémum" - Ed. Mir, Moscou
- [38] RIZZO F.J. (1967) - "An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics" - Quaterly of Applied Mathematics, 25, pp. 83-95
- [39] RIZZO F.J. and SHIPPY D.J. (1977) - "An Advanced Boundary Integral Equation Method For Three Dimensional Thermoelasticity" - Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 11, pp. 1753-1768

- [40] SELVADURAI A.P.S. (1989) - "Some Aspects of Non-Linear Interfaces in Geomechanics : Boundary Element Modelling" - 3rd Int. Conf. on Num. Mod. in Geom. Numog III, Niagara Falls, Canada, Elsevier Applied Sciences, pp. 463-471
- [41] SIH G.C., LIEBOWITZ H. (1968) - "Mathematical Theories of Brittle Fracture" - Fracture : An advanced Treatise, Vol. 2, Chapter 2, pp. 67-190, Academic Press
- [42] STEIFF P.S. (1984) - "Crack Extension Under Compressive Loading" - Engineering Fracture Mechanics, Vol. 20, n° 3, pp. 463-473
- [43] SYM G.T. (1963) - "Integral equation methods in potential theory II". Proceedings of the Royal Society, 275, p. 33-46
- [44] WILES T.D., CURRAN J.H. (1983) - "A General 3-D Displacement Discontinuity Method" - Proceeding of the 4 th Int. Conf. Num. Meth. in Geomechanics, Edmonton, Canada, Vol. 1, pp. 103-111

ANNEXE A

CALCUL DES CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS ELEMENT CIRCULAIRE A DEUX NOEUDS

Nous donnons dans ce qui suit les détails des calculs pour aboutir aux expressions des contraintes et des déplacements et qui nous permettent de calculer les coefficients d'influences pour obtenir la matrice d'influence. Les contraintes et les déplacements sont donnés aux moyens de potentiels complexes par les équations suivantes:

$$\sigma_{rr} = 2 \operatorname{Re} [\phi'(z)] - \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\bar{z} - \frac{a^2}{z} \right) \phi''(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi'(z)} - \frac{a^2}{z^2} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \operatorname{Re} \phi'(z) + \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\bar{z} - \frac{a^2}{z} \right) \phi''(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi'(z)} - \frac{a^2}{z^2} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$\sigma_{r\theta} = \operatorname{Im} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\bar{z} - \frac{a^2}{z} \right) \phi''(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi'(z)} - \frac{a^2}{z^2} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$2\mu u_r = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left[k \phi(z) - \left(z - \frac{a^2}{z} \right) \phi'(z) - \phi' \left(\frac{a^2}{z} \right) - \frac{a^2}{z} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$2\mu u_\theta = \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\theta} \left[k \phi(z) - \left(z - \frac{a^2}{z} \right) \phi'(z) - \phi' \left(\frac{a^2}{z} \right) - \frac{a^2}{z} \phi'(0) \right] \right\}$$

où Re et Im représentent les parties réelles et imaginaires.

Introduisons les notations suivantes :

$$A_0 = \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left[\operatorname{Log} \frac{z-a_2}{z-a_1} + z \left(\frac{1}{z-a_2} - \frac{1}{z-a_1} \right) \right]$$

$$A_1 = \frac{\mu}{2\pi(k+1)a^3} \left[\frac{a_2^2 - a_1^2}{2} + 2z(a_2 - a_1) + 2z^2 \operatorname{Log} \frac{(z-a_2)}{z-a_1} + z^3 \left(\frac{1}{z-a_2} - \frac{1}{z-a_1} \right) \right]$$

$$+ \frac{\mu}{2\pi(k+1)} \left[\frac{a}{z^2} \operatorname{Log} \frac{a_2}{a_1} - \frac{a}{z} \operatorname{Log} \frac{z-a_2}{z-a_1} + \frac{a}{z} \left(\frac{1}{z-a_2} - \frac{1}{z-a_1} \right) \right]$$

$$B_0 = \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left\{ \left(\bar{z} - \frac{a^2}{z} \right) \left[\frac{2}{z-a_2} - \frac{2}{z-a_1} - \frac{z}{(z-a_2)^2} + \frac{z}{(z-a_1)^2} \right] \right\}$$

$$+ \frac{a^2}{z^2} \text{Log} \frac{z - a_2}{z - a_1} + \frac{a^2}{z(z - a_2)} - \frac{z}{z(z - a_1)} - \text{Log} \frac{a_2}{a_1} \Big\}$$

$$B_1 = - \frac{\mu}{2\pi(k+1)} \left\{ \left(\bar{z} - \frac{a^2}{z} \right) \left[\frac{2(a_2 - a_1)}{a^3} + \frac{6z}{a^3} \text{Log} \frac{(z - a_2)}{(z - a_1)} + \frac{6z^2}{a^3} \left(\frac{1}{z - a_2} - \frac{1}{z - a_1} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{z^3}{a^3} \left(- \frac{1}{(z - a_2)^2} + \frac{1}{(z - a_1)^2} \right) - \frac{2a}{z^3} \text{Log} \frac{a_2}{a_1} + \frac{2a}{z^3} \text{Log} \frac{z - a_2}{z - a_1} - \frac{a}{z^2} \left(\frac{1}{z - a_2} - \frac{1}{z - a_1} \right) \right] + \right. \\ \left. \frac{a_2^2 - a_1^2}{2a z^2} + \frac{2(a_2 - a_1)}{a z} + \frac{3z}{a} \text{Log} \frac{z - a_2}{z - a_1} + \frac{z}{a} \left(\frac{1}{z - a_2} - \frac{1}{z - a_1} \right) + \frac{a_2 - a_1}{2a z^2} - \frac{1}{a z^2} \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) \right\}$$

$$C_0 = - \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \left[\text{Log} \frac{a^2 - a_2 \bar{z}}{a^2 - a_1 \bar{z}} + \frac{a^2 (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) z}{(a^2 - \bar{a}_2 z)(a^2 - \bar{a}_1 z)} \right]$$

$$C_1 = \frac{\mu a^2}{2\pi(k+1) z^2} \left[\frac{\bar{a}_2 - \bar{a}_1}{2a^3} - \frac{2(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)}{a z} - \left(\frac{3a}{z^2} + \frac{z^2}{a^3} \right) \text{Log} \frac{a^2 - a_2 \bar{z}}{a^2 - a_1 \bar{z}} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a^3}{z^3} - \frac{z}{a} \right) \left(\frac{(\bar{a}_2 - \bar{a}_1) z^2}{(a^2 - \bar{a}_1 z)(a^2 - \bar{a}_1 z)} \right) + \frac{z^2}{a^3} \text{Log} \frac{a_2}{a_1} \right]$$

$$D_0 = \frac{1}{2i\pi(k+1)a} \left[k(a_2 - a_1) + z \text{Log} \frac{z - a_2}{z - a_1} - \text{Log} \frac{a^2 - a_2 \bar{z}}{a^2 - a_1 \bar{z}} - \frac{a^2}{a^2 - a_2 \bar{z}} + \frac{a^2}{a^2 - a_1 \bar{z}} \right]$$

$$D_1 = \frac{1}{4\pi(k+1)} \left[\frac{k(a_2^2 - a_1^2)}{3a^3} + \frac{kz(a_2^2 - a_1^2)}{2a^2} + \frac{kz^2(a_2 - a_1)}{a^3} + \frac{kz^3}{a^3} \text{Log} \frac{z - a_2}{z - a_1} \right. \\ \left. + \frac{ka}{z} \text{Log} \frac{a_2}{a_1} - \frac{ka}{z} \text{Log} \frac{z - a_2}{z - a_1} - \frac{a_2^2 - a_1^2}{2a^3} + \frac{2(a_2 - a_1)}{za} - \left(\frac{a^3}{z^3} - \frac{z}{a} \right) \frac{(a_2 - a_1) \bar{z}^2}{(a^2 - a_2 \bar{z})(a^2 - a_1 \bar{z})} \right]$$

$$-\frac{\bar{z}}{a^3} \operatorname{Log} \frac{a_2}{a_1} - \left(\frac{3a}{z^2} + \frac{z^2}{a^3} \right) \operatorname{Log} \frac{a^2 - a_2 \bar{z}}{a^2 - a_1 \bar{z}}$$

$$E_0 = -\frac{1}{2i\pi(k+1)a} \left\{ \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{a^2}{z} \right) \left[\operatorname{Log} \frac{z - a_2}{z - a_1} + \frac{\bar{z}}{\bar{z} - a_1} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - a_1} \right] + \frac{a^2}{z} \operatorname{Log} \frac{a_2}{a_1} \right\}$$

$$E_1 = -\frac{1}{4\pi(k+1)} \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{a^2}{z} \right) \left[\frac{\bar{a}_2 - \bar{a}_1}{2a^3} + 2 \frac{\bar{z}(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)}{a^3} + \frac{3z^2}{a^3} \operatorname{Log} \frac{z - a_2}{z - a_1} \right. \\ \left. + \frac{z^3}{a^3} \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{a}_2} - \frac{1}{\bar{z} - \bar{a}_1} \right) - \frac{a}{z} \operatorname{Log} \frac{a^2}{a_1} + \frac{a^2}{z} \operatorname{Log} \frac{z - a_2}{z - a_1} - \frac{a}{z} \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{a}_2} - \frac{1}{\bar{z} - \bar{a}_1} \right) \right] \\ - \frac{a^2}{4\pi(k+1)z} \left[\frac{\bar{a}_2 - \bar{a}_1}{2a^3} - \frac{1}{2\bar{a}_1} + \frac{1}{2\bar{a}_2} + \left[\frac{a^2}{z} \operatorname{Log} \frac{z - a_2}{z - a_1} - \frac{a}{z} \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{a}_2} - \frac{1}{\bar{z} - \bar{a}_1} \right) \right] \right]$$

Avec les notations précédentes et en faisant intervenir les paramètres de linéarisation δ_0 et δ_1 (chapitre 2), nous aurons :

$$\sigma_{rr} = 2 \operatorname{Re} [A_0 \delta_0 + A_1 \delta_1] - \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[B_0 \delta_0 + B_1 \delta_1 - C_0 \bar{\delta}_0 - C_1 \bar{\delta}_1 \right] \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \operatorname{Re} [A_0 \delta_0 + A_1 \delta_1] + \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[B_0 \delta_0 + B_1 \delta_1 - C_0 \bar{\delta}_0 - C_1 \bar{\delta}_1 \right] \right\}$$

$$\sigma_{r\theta} = \operatorname{Im} \left\{ e^{2i\theta} \left[B_0 \delta_0 + B_1 \delta_1 - C_0 \bar{\delta}_0 - C_1 \bar{\delta}_1 \right] \right\}$$

$$u_r = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left[D_0 \delta_0 + D_1 \delta_1 - E_0 \bar{\delta}_0 - E_1 \bar{\delta}_1 \right] \right\}$$

$$u_\theta = \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\theta} \left[D_0 \delta_0 + D_1 \delta_1 - E_0 \bar{\delta}_0 - E_1 \bar{\delta}_1 \right] \right\}$$

Nous pouvons ramener le système d'équations par rapport aux discontinuités de déplacement en se rappelant (chapitre 2) que :

$$\delta_o = \frac{(D_r^- + D_r^+) + i(D_\theta^- + D_\theta^+)}{2} \quad \text{et}$$

$$\delta_1 = \frac{(D_r^+ - D_r^-) + i(D_\theta^+ - D_\theta^-)}{2 \sin(2\lambda\alpha)}$$

En posant $S = 2 \sin(2\lambda\alpha)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & 2 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{A_o}{2} + \frac{A_1}{S} \right) D_r^- + \left(\frac{A_o}{2} - \frac{A_1}{S} \right) D_r^+ + i \left(\frac{A_o}{2} + \frac{A_1}{S} \right) D_\theta^- + i \left(\frac{A_o}{2} - \frac{A_1}{S} \right) D_\theta^+ \right] \\ & - \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) D_r^- + \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) D_r^+ \right] \right\} \\ & \left\{ \left[+i \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) D_\theta^- + i \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) D_\theta^+ \right] \right\} \\ \sigma_{\theta\theta} = & 2 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{A_o}{2} + \frac{A_1}{S} \right) D_r^- + \left(\frac{A_o}{2} - \frac{A_1}{S} \right) D_r^+ + i \left(\frac{A_o}{2} + \frac{A_1}{S} \right) D_\theta^- + i \left(\frac{A_o}{2} - \frac{A_1}{S} \right) D_\theta^+ \right] \\ & - \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) D_r^- + \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) D_r^+ \right] \right\} \\ & \left\{ \left[+i \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_o}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) D_\theta^- + i \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) D_\theta^+ \right] \right\} \\ \sigma_{r\theta} = & \operatorname{Im} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) D_r^- + \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) D_r^+ \right] \right\} \\ & \left\{ \left[+i \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) D_\theta^- + i \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) D_\theta^+ \right] \right\} \end{aligned}$$

$$u_r = \text{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left[\left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) D_r^- + \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) D_r^+ \right] \right\}$$

$$\left\{ +i \left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) D_\theta^- + i \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) D_\theta^+ \right\}$$

$$u_\theta = \text{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left[\left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) D_r^- + \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) D_r^+ \right] \right\}$$

$$\left\{ +i \left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) D_\theta^- + i \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) D_\theta^+ \right\}$$

En faisant les développements nécessaires, nous aboutissons, tous calculs effectués aux contraintes et déplacements sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \text{Re} \left[2 \left(\frac{A_o}{2} + \frac{A_1}{S} \right) - \cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_r^- \\ & + \text{Re} \left[2 \left(\frac{A_o}{2} - \frac{A_1}{S} \right) - \cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^+ \\ & + \text{Im} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_r^- + \text{Im} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) \right] D_r^+ \\ & + \text{Im} \left[-2 \left(\frac{A_o}{2} + \frac{A_1}{S} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^- \\ & + \text{Im} \left[-2 \left(\frac{A_o}{2} - \frac{A_1}{S} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^+ \\ & + \text{Re} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^- + \text{Re} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^+ \\ \sigma_{\theta\theta} = & \text{Re} \left[2 \left(\frac{A_o}{2} + \frac{A_1}{S} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_r^- \\ & + \text{Re} \left[2 \left(\frac{A_o}{2} - \frac{A_1}{S} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) \right] D_r^+ \end{aligned}$$

$$- \operatorname{Im} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_r^- - \operatorname{Im} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) \right] D_r^+$$

$$- \operatorname{Im} \left[2 \left(\frac{A_o}{2} + \frac{A_1}{S} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^-$$

$$- \operatorname{Im} \left[2 \left(\frac{A_o}{2} - \frac{A_1}{S} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^+$$

$$- \operatorname{Re} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^- - \operatorname{Re} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^+$$

$$\sigma_{r\theta} = \operatorname{Im} \left[\cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_r^+ + \operatorname{Im} \left[\cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^+$$

$$+ \operatorname{Re} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_o}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_r^- + \operatorname{Re} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) \right] D_r^+$$

$$+ \operatorname{Re} \left[\cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} + \frac{C_o}{2} + \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^- + \operatorname{Re} \left[\cos 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^+$$

$$- \operatorname{Im} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} + \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^- - \operatorname{Im} \left[\sin 2\theta \left(\frac{B_o}{2} - \frac{B_1}{S} - \frac{C_o}{2} - \frac{C_1}{S} \right) \right] D_\theta^+$$

$$u_r = \operatorname{Re} \left[\cos \theta \left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) \right] D_r^- + \operatorname{Re} \left[\cos \theta \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) \right] D_r^+$$

$$+ \operatorname{Im} \left[\sin \theta \left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) \right] D_r^- + \operatorname{Im} \left[\sin \theta \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) \right] D_r^+$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{Im} \left[\cos \theta \left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) \right] D_{\theta}^{-} - \operatorname{Im} \left[\cos \theta \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) \right] D_{\theta}^{+} \\
& + \operatorname{Re} \left[\sin \theta \left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) \right] D_{\theta}^{-} + \operatorname{Re} \left[\sin \theta \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) \right] D_{\theta}^{+} \\
u_{\theta} = & \operatorname{Im} \left[\cos \theta \left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) \right] D_r^{-} + \operatorname{Im} \left[\cos \theta \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) \right] D_r^{+} \\
& - \operatorname{Re} \left[\sin \theta \left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) \right] D_r^{-} - \operatorname{Re} \left[\sin \theta \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) \right] D_r^{+} \\
& + \operatorname{Re} \left[\cos \theta \left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) \right] D_{\theta}^{-} + \operatorname{Re} \left[\cos \theta \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) \right] D_{\theta}^{+} \\
& + \operatorname{Im} \left[\sin \theta \left(\frac{D_o}{2} + \frac{D_1}{S} + \frac{E_o}{2} + \frac{E_1}{S} \right) \right] D_{\theta}^{-} + \operatorname{Im} \left[\sin \theta \left(\frac{D_o}{2} - \frac{D_1}{S} - \frac{E_o}{2} - \frac{E_1}{S} \right) \right] D_{\theta}^{+}
\end{aligned}$$

ANNEXE B

CALCUL DES CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS ELEMENTS CIRCULAIRES DEGENERES

Nous donnons dans cette annexe les détails des calculs des contraintes et déplacements pour les éléments circulaires dégénérés. Les relations de Kolosov-Muskhelishvili obtenues pour une rotation des axes d'angles θ sont exprimées comme suit :

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2 [\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}]$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - 2i \sigma_{r\theta} = -2 e^{2i\theta} \left[\left(\frac{\bar{z} - a^2}{z} \right) \phi''(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi' \left(\frac{a^2}{z} \right)} - \frac{a^2}{z} \phi'(0) \right]$$

$$u_r + i u_\theta = e^{-i\theta} \left[k \phi(z) - \left(z - \frac{a^2}{\bar{z}} \right) \overline{\phi'(z)} - \phi \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) + \frac{a^2}{\bar{z}} \phi'(0) \right]$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des expressions ci-dessus, les contraintes et les déplacements sont :

$$\sigma_{rr} = 2 \operatorname{Re} [\phi'(z)] - \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{\bar{z} - a^2}{z} \right) \phi''(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi' \left(\frac{a^2}{z} \right)} - \frac{a^2}{z} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \operatorname{Re} [\phi'(z)] + \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{\bar{z} - a^2}{z} \right) \phi''(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi' \left(\frac{a^2}{z} \right)} - \frac{a^2}{z} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$\sigma_{r\theta} = \operatorname{Im} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{\bar{z} - a^2}{z} \right) \phi''(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi' \left(\frac{a^2}{z} \right)} - \frac{a^2}{z} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$u_r = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left[k \phi(z) - \left(z - \frac{a^2}{\bar{z}} \right) \overline{\phi'(z)} - \phi \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) + \frac{a^2}{\bar{z}} \phi'(0) \right] \right\}$$

$$u_\theta = \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\theta} \left[k \phi(z) - \left(z - \frac{a^2}{\bar{z}} \right) \overline{\phi'(z)} - \phi \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) + \frac{a^2}{\bar{z}} \phi'(0) \right] \right\}$$

Les potentiels complexes s'expriment en fonction des coefficients de linéarisation δ_0 ou δ'_0 , posons pour plus de facilité d'écriture les notations suivantes :

$$A = \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left[\frac{a_2}{2\sqrt{a_2-z}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2-z} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{a_2-z} + \sqrt{a_2-a_1}} - \frac{a_2 \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_1)} - 2\sqrt{a_2-a_1} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{3}{2} \sqrt{a_2 - z} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2 - z} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - z} + \sqrt{a_2 - a_1}} - \frac{(a_2 - z) \sqrt{a_2 - a_1}}{(a_1 - z)} \right] \\
B = & \frac{\mu a}{i \pi (k+1) z^2} \left[\frac{a_2}{2 \sqrt{a_2 - z}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2 - z} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - z} + \sqrt{a_2 - a_1}} - \frac{a_2 \sqrt{a_2 - a_1}}{(z - a_1)} - 2 \sqrt{a_2 - a_1} \right] \\
& \left[-\frac{3}{2} \sqrt{a_2 - z} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2 - z} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - z} + \sqrt{a_2 - a_1}} - \frac{(a_2 - z) \sqrt{a_2 - a_1}}{(a_1 - z)} \right] \\
& + \left(\bar{z} - \frac{a^2}{z} \right) \frac{\mu}{i \pi (k+1) a} \left[\frac{a_2}{4 (a_2 - z) \sqrt{a_2 - z}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2 - z} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - z} + \sqrt{a_2 - a_1}} - \frac{a_2 \sqrt{a_2 - a_1}}{2 (z - a_1) (z - a_2)} \right. \\
& \left. \left[+ \frac{a_2 \sqrt{a_2 - a_1}}{(z - a_1)^2} + \frac{3}{4 \sqrt{a_2 - z}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2 - z} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - z} + \sqrt{a_2 - a_1}} + \frac{3 \sqrt{a_2 - a_1}}{2 (a_1 - z)} - \frac{(a_2 - a_1) \sqrt{a_2 - a_1}}{(z - a_1)^2} \right] \right. \\
& \left. - \frac{\mu a}{i \pi (k+1) z^2} \left[\sqrt{a_2} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_2 - a_1}} + 2 \sqrt{a_2 - a_1} \right] \right] \\
C = & -\frac{\mu a}{i \pi (k+1) z^2} \left[\frac{\bar{a}_2}{2 \sqrt{a_2 - a^2/\bar{z}}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2 - a^2/\bar{z}} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - a^2/\bar{z}} + \sqrt{a_2 - a_1}} - \frac{\bar{a}_2 \sqrt{a_2 - a_1}}{(a^2/\bar{z} - \bar{a}_1)} \right] \\
& \left[-2 \sqrt{a_2 - a_1} - \frac{3}{2} \sqrt{a_2 - a^2/\bar{z}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2 - a^2/\bar{z}} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - a^2/\bar{z}} + \sqrt{a_2 - a_1}} - \frac{(\bar{a}_2 - a^2/\bar{z}) \sqrt{a_2 - a_1}}{(\bar{a}_1 - a^2/\bar{z})} \right] \\
D = & \frac{k \mu}{i \pi (k+1)} \left\{ -2 a_2 \sqrt{a_2 - a_1} - a_2 \sqrt{a_2 - z} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2 - z} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - z} + \sqrt{a_2 - a_1}} + \frac{2 (\sqrt{a_2 - a_1})^3}{3} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ + 2 (a_2 - z) \sqrt{a_2 - a_1} + (\sqrt{a_2 - z})^3 \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2 - z} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - z} + \sqrt{a_2 - a_1}} \right\} \\
& - \frac{\mu}{i\pi (k + 1)} \left\{ -2 a_2 \sqrt{a_2 - a_1} - a_2 \sqrt{a_2 - a^2/\bar{z}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2 - a^2/\bar{z}} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - a^2/\bar{z}} + \sqrt{a_2 - a_1}} + \frac{2(\sqrt{a_2 - a_1})^3}{3} \right\} \\
& \left\{ + 2 \left(a_2 - \frac{a^2}{\bar{z}} \right) \sqrt{a_2 - a_1} + \left(\sqrt{a_2 - \frac{a^2}{\bar{z}}} \right)^3 \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2 - a^2/\bar{z}} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - a^2/\bar{z}} + \sqrt{a_2 - a_1}} \right\} \\
& + \frac{a^2}{\bar{z}} \frac{\mu}{i\pi (k + 1) a} \left\{ \sqrt{a_2} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_2 - a_1}} + 2 \sqrt{a_2 - a_1} \right\} \\
E = & \left(z - \frac{a^2}{\bar{z}} \right) \bar{A}
\end{aligned}$$

Avec les notations ci-dessus, nous pouvons mettre en évidence les coefficients de linéarisation δ_o comme suit :

$$\sigma_{rr} = 2 \operatorname{Re} [A \delta_o] - \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[B \delta_o - C \bar{\delta}_o \right] \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \operatorname{Re} [A \delta_o] + \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[B \delta_o - C \bar{\delta}_o \right] \right\}$$

$$\sigma_{r\theta} = \operatorname{Im} \left\{ e^{2i\theta} \left[B \delta_o - C \bar{\delta}_o \right] \right\}$$

$$u_r = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left[D \delta_o - E \bar{\delta}_o \right] \right\}$$

$$u_\theta = \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\theta} \left[D \delta_o - E \bar{\delta}_o \right] \right\}$$

Les inconnues du problème étant les discontinuités de déplacement, nous les faisons intervenir par la relation :

$$\delta_o = \frac{D_r + i D_\theta}{\sqrt{a_2 - i a e^{i\lambda\alpha}}} = \frac{1}{H} D_r + i \frac{1}{\bar{H}} D_\theta$$

avec :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{\sqrt{a_2 - i a e^{i\lambda\alpha}}}$$

Donc :

$$\sigma_{rr} = 2 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{A}{H} \right) D_r + i \left(\frac{A}{\bar{H}} \right) D_\theta \right] - \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{B}{H} \right) D_r + i \left(\frac{B}{\bar{H}} \right) D_\theta - \left(\frac{C}{\bar{H}} \right) D_r + i \left(\frac{C}{H} \right) D_\theta \right] \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{A}{H} \right) D_r + i \left(\frac{A}{\bar{H}} \right) D_\theta \right] - \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{B}{H} \right) D_r + i \left(\frac{B}{\bar{H}} \right) D_\theta - \frac{C}{\bar{H}} D_r + i \left(\frac{C}{H} \right) D_\theta \right] \right\}$$

$$\sigma_{r\theta} = \operatorname{Im} \left\{ e^{2i\theta} \left[\left(\frac{B}{H} \right) D_r + i \left(\frac{B}{\bar{H}} \right) D_\theta - \left(\frac{C}{\bar{H}} \right) D_r + i \left(\frac{C}{H} \right) D_\theta \right] \right\}$$

$$u_r = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left[\left(\frac{D}{H} \right) D_r + i \left(\frac{D}{\bar{H}} \right) D_\theta - \left(\frac{E}{\bar{H}} \right) D_r + i \left(\frac{E}{H} \right) D_\theta \right] \right\}$$

$$u_\theta = \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\theta} \left[\left(\frac{D}{H} \right) D_r + i \left(\frac{D}{\bar{H}} \right) D_\theta - \left(\frac{E}{\bar{H}} \right) D_r + i \left(\frac{E}{H} \right) D_\theta \right] \right\}$$

$$\sigma_{rr} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{A}{H} D_r + i \frac{A}{\bar{H}} D_\theta \right] - \operatorname{Re} \left\{ \cos 2\theta \left(\frac{B}{H} - \frac{C}{\bar{H}} \right) D_r - \sin 2\theta \left(\frac{B}{H} + \frac{C}{\bar{H}} \right) D_\theta \right\}$$

$$\left\{ + i \cos 2\theta \left(\frac{B}{H} + \frac{C}{\bar{H}} \right) D_\theta + i \sin 2\theta \left(\frac{B}{H} - \frac{C}{\bar{H}} \right) D_r \right\}$$

$$\sigma_{rr} = \operatorname{Re} \left\{ \left(2 \frac{A}{H} - \cos 2\theta \frac{B}{H} + \cos 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right) D_r + \left(\sin 2\theta \frac{B}{H} + \sin 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right) D_\theta \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ +i \left(2 \frac{A}{\bar{H}} - \cos 2\theta \frac{B}{H} - \cos 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right) D_\theta + i \left(-\sin 2\theta \frac{B}{H} + \sin 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right) D_r \right\} \\
\sigma_{rr} = & \operatorname{Re} \left[2 \frac{A}{\bar{H}} - \cos 2\theta \frac{B}{H} + \cos 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_r + \operatorname{Re} \left[\sin 2\theta \frac{B}{H} + \sin 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_\theta \\
& - \operatorname{Im} \left[2 \frac{A}{\bar{H}} - \cos 2\theta \frac{B}{H} - \cos 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_\theta - \operatorname{Im} \left[-\sin 2\theta \frac{B}{H} + \sin 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_r \\
\sigma_{\theta\theta} = & \operatorname{Re} \left[2 \frac{A}{\bar{H}} + \cos 2\theta \frac{B}{H} - \cos 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_r - \operatorname{Re} \left[\sin 2\theta \frac{B}{H} + \sin 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_\theta \\
& - \operatorname{Im} \left[2 \frac{A}{\bar{H}} + \cos 2\theta \frac{B}{H} + \cos 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_\theta - \operatorname{Im} \left[\sin 2\theta \frac{B}{H} - \sin 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_r \\
\sigma_{r\theta} = & \operatorname{Im} \left[\cos 2\theta \frac{B}{H} - \cos 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_r + \operatorname{Re} \left[\sin 2\theta \frac{B}{H} - \sin 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_r \\
& + \operatorname{Im} \left[-\sin 2\theta \frac{B}{H} - \sin 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_\theta + \operatorname{Re} \left[\cos 2\theta \frac{B}{H} + \cos 2\theta \frac{C}{\bar{H}} \right] D_\theta \\
u_r = & \operatorname{Re} \left[\cos \theta \frac{D}{\bar{H}} - \cos \theta \frac{E}{\bar{H}} \right] D_r + \operatorname{Re} \left[\sin \theta \frac{D}{\bar{H}} + \sin \theta \frac{E}{\bar{H}} \right] D_\theta \\
& - \operatorname{Im} \left[\cos \theta \frac{D}{\bar{H}} + \cos \theta \frac{E}{\bar{H}} \right] D_\theta + \operatorname{Im} \left[\sin \theta \frac{D}{\bar{H}} + \sin \theta \frac{E}{\bar{H}} \right] D_r \\
u_\theta = & \operatorname{Im} \left[\cos \theta \frac{D}{\bar{H}} - \cos \theta \frac{E}{\bar{H}} \right] D_r + \operatorname{Im} \left[\sin \theta \frac{D}{\bar{H}} + \sin \theta \frac{E}{\bar{H}} \right] D_\theta \\
& + \operatorname{Re} \left[\cos \theta \frac{D}{\bar{H}} + \cos \theta \frac{E}{\bar{H}} \right] D_\theta - \operatorname{Re} \left[\sin \theta \frac{D}{\bar{H}} + \sin \theta \frac{E}{\bar{H}} \right] D_r
\end{aligned}$$

Pour la discontinuité s'annulant en a1, il suffit de remplacer dans les expressions précédentes les fonctions notées comme suit :

$$\begin{aligned}
 A' &= \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left\{ \frac{a_1}{2\sqrt{z-a_1}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{a_1 \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_2)} + 2\sqrt{a_2-a_1} \right\} \\
 &\quad \left\{ + \frac{3}{2} \sqrt{z-a_1} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{(z-a_1) \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_2)} \right\} \\
 B' &= \frac{\mu a}{i\pi(k+1)z^2} \left[\frac{a_1}{2\sqrt{z-a_1}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{a_1 \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_2)} + 2\sqrt{a_2-a_1} \right] \\
 &\quad \left[+ \frac{3}{2} \sqrt{z-a_1} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{(z-a_1) \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_2)} \right] \\
 &+ \left(\bar{z} - \frac{a_2}{z} \right) \frac{\mu}{i\pi(k+1)a} \left[- \frac{a_1}{4(z-a_1)\sqrt{z-a_1}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{a_1 \sqrt{a_2-a_1}}{2(z-a_1)(z-a_2)} \right] \\
 &\quad - \frac{a_1 \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_2)^2} + \frac{3}{4\sqrt{z-a_1}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{z-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{3\sqrt{a_2-a_1}}{2(z-a_2)} - \frac{(a_2-a_1) \sqrt{a_2-a_1}}{(z-a_2)^2} \\
 &\quad - \frac{\mu a}{i\pi(k+1)z^2} \left[\sqrt{\bar{a}_2} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{\bar{a}_2} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{\bar{a}_2} + \sqrt{a_2-a_1}} + 2\sqrt{a_2-a_1} \right] \\
 C' &= - \frac{\mu a}{i\pi(k+1)z^2} \left[\frac{\bar{a}_1}{2\sqrt{a^2/\bar{z}-a_1}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a^2/\bar{z}-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{a^2/\bar{z}-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{\bar{a}_1 \sqrt{a_2-a_1}}{(a^2/\bar{z}-\bar{a}_2)} + 2\sqrt{a_2-a_1} \right] \\
 &\quad \left[\frac{3}{2} \sqrt{a^2/\bar{z}-a_1} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a^2/\bar{z}-a_1} - \sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{a^2/\bar{z}-a_1} + \sqrt{a_2-a_1}} + \frac{(a^2/\bar{z}-\bar{a}_1) \sqrt{a_2-a_1}}{(a^2/\bar{z}-\bar{a}_2)} \right]
 \end{aligned}$$

$$D' = \frac{k \mu}{i \pi (k+1) a} \left[2a_1 \sqrt{a_2 - a_1} + a_1 \sqrt{z - a_1} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z - a_1} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{z - a_1} + \sqrt{a_2 - a_1}} + \frac{2}{3} (\sqrt{a_2 - a_1})^3 \right]$$

$$\left[+ 2(z - a_1) \sqrt{a_2 - a_1} + (\sqrt{z - a_1})^3 \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z - a_1} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{z - a_1} + \sqrt{a_2 - a_1}} \right]$$

$$- \frac{\mu}{i \pi (k+1) a} \left[2 a_1 \sqrt{a_2 - a_1} + a_1 \sqrt{a^2/\bar{z} - a_1} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a^2/\bar{z} - a_1} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a^2/\bar{z} - a_1} + \sqrt{a_2 - a_1}} + \frac{2}{3} (\sqrt{a_2 - a_1})^3 \right]$$

$$+ 2 \left(\frac{a^2}{\bar{z}} - a_1 \right) \sqrt{a_2 - a_1} + \left(\sqrt{a^2/\bar{z} - a_1} \right)^3 \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a^2/\bar{z} - a_1} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a^2/\bar{z} - a_1} + \sqrt{a_2 - a_1}}$$

$$+ \frac{\mu a}{i \pi (k+1) \bar{z}} \left[\sqrt{\bar{a}_2} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{\bar{a}_2} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{\bar{a}_2} + \sqrt{a_2 - a_1}} + 2\sqrt{a_2 - a_1} \right]$$

$$E' = \left(z - \frac{a^2}{z} \right) \bar{A}'$$

$$\frac{1}{\bar{H}'} = \frac{1}{\sqrt{i a e^{i\lambda\alpha} - a_1}}$$

