

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE 50376

LILLE FLANDRES-ARTOIS 1990

MECANIQUE 361

THESE DE DOCTORAT
PRESENTEE A

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE
LILLE FLANDRES-ARTOIS

Rece le 15.10.90
" " le 6.12.90
PAR

Mustapha ERRAFIY

Conectious non faites

Transition vers Le chaos dans

Le problème de Bénard profond.

7 JUIN 1990

Membres du Jury :

Président : A. DYMENT, PROFESSEUR, Université de Lille I

Rapporteurs :

P. Huerre, Professeur, Ecole Polytechnique

D. Buisine, Professeur, Université de Lille I.

Membres : P.A. Bois, Professeur, Université de Lille I.

R.Kh. Zeytounian, Professeur, Université de Lille I

S. Godts, Maître de Conférences, Université
de Valenciennes.

SCD LILLE 1



D 030 319620 5

Je tiens à remercier Monsieur R. Zeytounian qui
a dirigé, et suivi ce travail dans son évolution, avec
une attention toute particulière.

Je remercie vivement Monsieur A. Dymont qui
me fait l'honneur de présider le Jury de cette Thèse.

Je remercie Messieurs P. Huerre et D. Buisine qui
m'ont fait l'honneur de s'intéresser à mon travail et
qui ont accepté de le juger.

Je tiens à remercier Messieurs P.A. Bois, S. Godts,
de me faire l'honneur d'être membres de ce Jury.



SOMMAIRE

CHAPITRE I INTRODUCTION

CHAPITRE II DERIVATION DES EQUATIONS DE LA CONVECTION PROFONDE

- 1- Les equations de Navier_Stokes pour un liquide dilatable
- 2- Ecriture adimensionnelle des equations de Navier_Stokes
- 3- Les equations adimensionnelles dominantes
- 4- Les equations limites pour la convection profonde
- 5- Les conditions aux limites sur des surfaces libres
- 6- Le cas bidimensionnel instationnaire de la convection profonde

CHAPITRE III THEORIE LINEAIRE DE L'INSTABILITE DE LA CONVECTION PROFONDE

- 1- Obtention d'un systeme dynamique lineaire (cas L-L)
- 2- Critère de Routh-Hurwitz
- 3- Determination du seuil critique
 - 3.a La forme générale de la matrice D
 - 3.b $(Rac, q_0 c)$ résultant de la 1ère approximation
 - 3.c $(Rac, q_0 c)$ résultant de la 2nde approximation
 - 3.d $(Rac, q_0 c)$ résultant de la 3ème approximation
 - 3.e Conclusion (pour le cas L-L)
- 4- Détermination du seuil critique dans le cas R-L
- 5- Analogie avec le probleme de Couette-Taylor
- 6- La technique des perturbations

CHAPITRE IV ANALYSES NON LINEAIRE : DERIVATIONS DES SYSTEMES DYNAMIQUES ASSOCIES

- 1- Obtention d'un système dynamique non lineaire
- 2- Description de la méthode de troncature
- 3- Présentation des modes étudiés
- 4- les scénarios de transition vers le chaos

CHAPITRE V ANALYSES NON LINEAIRE :RESULTATS NUMERIQUES

- 1- Mise en évidence de l'influence de δ (M=3, 6, 8, Pr=10)
- 2- Les scénarios de transition vers le chaos (M=15)
 - 2.a Transition vers le chaos a partir d'un tore T^2
 - 2.b Intermittence
 - 2.c Dédouplements de périodes

CHAPITRE VI CONCLUSION

APPENDICE

REFERENCES

- I -

INTRODUCTION

Quand on chauffe localement un fluide, sa densité en ce point diminue par rapport à celle du reste du fluide et la partie chauffée tend à monter. Ce phénomène est à la base du mécanisme d'instabilité purement thermique.

Lorsque la différence de température ΔT entre le haut et le bas d'une couche de fluide est assez grande, la partie en contact avec la source chaude (la moins dense) est située au dessous du fluide le plus froid (le plus dense), créant ainsi une situation potentiellement instable. Cela ne peut se produire que lorsque l'on excède un certain seuil critique ΔT_c , pour que l'état de repos se brise et qu'il apparaissent des mouvements caractéristiques de l'instabilité dite de "Rayleigh-Bénard".

De ce fait, la stabilité de la couche de fluide est déterminée par la valeur du nombre de Rayleigh Ra , nombre sans dimension proportionnel à ΔT .

Depuis les travaux de Lord Rayleigh et jusqu'à nos jours, l'intérêt porté au problème des instabilités thermoconvectives n'a pas cessé de croître. En 1928, Jeffreys[1] a publié une étude mathématique de la

stabilité, qui constitue une extension des premiers travaux de Rayleigh pour une couche horizontale chauffée par le bas, avec différentes conditions aux limites. C'est ainsi que cet auteur a déterminé le nombre de Rayleigh critique R_{ac} , et le nombre d'onde critique q_{oc} caractérisant le passage du régime de conduction au régime de convection. On peut aussi retrouver les valeurs critiques calculées, précises, de ces deux nombres dans [2] et [3] pour différents types de parois.

Les études que nous venons de mentionner sont relatives à des perturbations infinitésimales et font parties de la théorie de la stabilité linéaire. Les résultats fournis par cette théorie sont souvent en bon accord avec ceux fournis par l'expérience, en ce qui concerne les valeurs critiques (R_{ac}) des nombres de Rayleigh et les valeurs des nombres d'onde correspondants (q_{oc}) [10]. Cependant, la théorie linéaire a mis en évidence la croissance exponentielle en temps de la solution du problème linéarisé une fois franchi le seuil critique. Il est donc nécessaire, dans ce cas, de tenir compte des termes non linéaires dans le système d'équations aux dérivées partielles régissant la convection (peu profonde) de Rayleigh-Bénard [4].*)

*) Convection dite "peu profonde" en opposition avec celle que nous analysons ("dite "profonde") et qui correspond à une valeur du paramètre de profondeur $S_0 \neq 0$ (voir la formule (2,26) au chapitre II).

En particulier, il y a eu ces dernières années plusieurs études numériques basées sur des systèmes dynamiques non linéaire à très grand nombre de modes résultant d'une application directe de la méthode de Galerkin [4], [5] et [6]. La première de ces études et surtout la plus célèbre a été faite par Edward Lorenz [7]. L'intégration numérique de ce système, constitué de trois équations différentielles ordinaires non linéaire de premier ordre, a montré un comportement non périodique de la solution pour certaines valeurs du nombre de Rayleigh [8]. Ce modèle à faible nombre de degré de liberté reste, malgré son caractère irréaliste, un modèle témoin du comportement chaotique de systèmes dissipatifs.

Curry [9] a généralisé le modèle de Lorenz en analysant un système dynamique de 14 modes. Il a enregistré une succession de différents régimes d'écoulements convectifs précédant l'apparition du régime non périodique. De nombreuses études ont succédé en vue d'illustrer les divers types de scénario de transition vers le régime chaotique. On sait maintenant que ces scénarios sont principalement ceux de :

a) Ruelle-Takens - Newhouse [28], [29] : bifurcation vers le chaos à partir d'un régime quasi-périodique à deux ou trois fréquences ;

b) Feigenbaum[30]: dédoublement de période ;

c) Pomeau-Mannervill[33]: intermittence .

Les prévisions théoriques et numériques de ces scénarios ont été confirmées par des essais expérimentaux [10] et [11].

Dans ce travail de Thèse, nous reprenons le phénomène convective de Rayleigh-Bénard dans une couche horizontale d'épaisseur importante, d'un liquide dilatable chauffé par le bas. L'analyse asymptotique des équations de départ montre alors qu'un nouveau paramètre (dit "de profondeur" d'après Zeytounian [12]) apparaît et que les équations classiques de Boussinesq pour la convection "peu profonde" s'obtiennent à la limite lorsque ce paramètre tend vers zéro. Ainsi dans le système d'équations aux dérivées partielles gouvernant la convection profonde, apparaissent de nouveaux termes couplés avec ce paramètre de profondeur.

Le but que nous nous sommes fixés dans ce mémoire de Thèse consiste à élucider les éventuelles modifications dynamiques que peut engendrer ce paramètre. Dans la troisième partie, nous avons effectué une analyse linéaire de la convection profonde bidimensionnelle.

En particulier, par application de la méthode de Galerkin, nous avons déterminé le nombre de Rayleigh critique R_{ac} , et le nombre d'onde horizontale correspondant q_{oc} en fonction du paramètre de profondeur S_0 . Quand ce dernier croît, R_{ac} décroît indiquant que la couche de fluide devient moins stable, quant à la valeur de q_{oc} elle reste en fait inchangée [13]. Ayant déterminé les nombres caractérisants le passage de l'état de repos à l'état convectif, nous avons considéré dans le chapitre IV le système non linéaire d'équations aux dérivées partielles. Par l'application de la méthode de Galerkin, nous avons obtenu divers systèmes dynamiques (d'équations différentielles ordinaires) que nous avons étudié numériquement pour diverses valeurs du paramètre de profondeur. Il en résulte différents scénarios de transition vers le chaos qui sont analysés au chapitre V. On constate alors que malgré les faibles valeurs de ce paramètre, les changements qui interviennent au niveau des scénarios de transitions vers le chaos, et sur la forme des attracteurs étranges, qui en résultent sont relativement importants.

- II -

DERIVATION DES EQUATIONS

DE LA

CONVECTION PROFONDE

II-1 Les équations des Navier-Stokes pour un liquide dilatable:

Pour une couche horizontale d'un liquide dilatable chauffée par le bas, on doit tenir compte d'une part de l'équation d'état du liquide et des équations exprimant les lois de conservation (masse, quantité de mouvement et de l'énergie), et d'autre part des relations exprimant les conditions aux limites et initiales. Nous exprimons ces équations dans un repère cartésien $\{\vec{Ox}_i\}$, $i = 1, 2, 3$ où la force de gravité est dirigée dans le sens opposé à $\vec{Ox}_3$.

On doit donc écrire pour les composantes u_i de la vitesse, la pression p' , la masse volumique ρ' et la température T' les équations "exactes" de Navier-Stokes suivantes (avec dimensions):

$$(2.1a) \quad \frac{D \ln p'}{Dt'} + \frac{\partial u'_i}{\partial x'_i} = 0 \quad ;$$

$$(2.1b) \quad \rho' \frac{Du'_i}{Dt'} + \frac{\partial \rho'}{\partial x'_i} + \rho' g' \delta_{i3} = \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x'_i} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\lambda' \frac{\partial u'_k}{\partial x'_k} \right] ;$$

$$(2.1c) \quad \rho' c' \frac{DT'}{Dt'} + \rho' \frac{\partial u'_k}{\partial x'_k} = \frac{\partial}{\partial x'_k} \left[k' \frac{\partial T'}{\partial x'_k} \right] + \lambda' \left[\frac{\partial u'_k}{\partial x'_k} \right]^2 \\ + \frac{\mu'}{2} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x'_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x'_i} \right]^2 ;$$

$$(2.1d) \quad \rho' = \rho'(T') ,$$

avec :

$$\frac{D}{Dt'} = \frac{\partial}{\partial t'} + u'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} ,$$

g' : l'accélération de la pesanteur ,

t' : le temps ,

$$\delta_{i3} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 3 ; \\ 1 & \text{si } i = 3 . \end{cases}$$

Comme conséquence de (2.1d), les coefficients de viscosités dynamiques μ' et λ' , de la conductivité thermique k' et de la chaleur spécifique c' sont aussi uniquement fonctions de la température T' :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \lambda' = \lambda'(T') , \mu' = \mu'(T') , \\ k' = k'(T') \text{ et } c' = c'(T') . \end{cases}$$

Pour ce qui concerne les conditions thermiques sur les deux frontières, la paroi inférieure est à la température $T' = T_0' + \Delta T_0'$, T_0' est une température constante de référence qui peut être la température ambiante, $\Delta T_0'$ est un accroissement positif de la température. Quant à la paroi supérieure, elle est maintenue à la température $T' = T_0'$. Dans le cas de deux parois rigides, nous avons en particulier:

$$(2.3) \quad \begin{cases} T' = T_0' + \Delta T_0' & \text{sur } x'_3 = 0 ; \\ T' = T_0' & \text{sur } x'_3 = d' ; \\ u'_i = 0, i = 1, 2, 3, & \text{sur } x'_3 = 0 \text{ et } x'_3 = d', \end{cases}$$

où d' est la distance qui sépare les deux parois.

II-2 Ecriture adimensionnelle des équations de Navier-Stokes:

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles (2.1) avec les conditions aux limites (2.3) et désignons respectivement par:

$$(2.4) \quad \begin{cases} d', \nu'_0/d' (\nu'_0 = \mu'_0/\rho'_0), \Delta T'_0, \\ d'^2/\nu'_0 \text{ et } \rho'_0 g' d' \end{cases}$$

les échelles caractéristiques pour: la longueur, la vitesse, la température, le temps et la pression.

Toutes les grandeurs physiques qui interviennent dans l'écriture de ce système peuvent être adimensionnées à partir des grandeurs caractéristiques suivantes:

$$(2.5) \quad \lambda'_0, \mu'_0, \rho'_0, c'_0 \text{ et } k'_0.$$

qui sont les valeurs de λ' , μ' , ρ' , c' et k' à la température $T' = T'_0$.

On introduit à cet effet les variables et les fonctions sans dimensions ci-dessous :

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i = x'_i / d' , \quad u_i = u'_i / (v'_0 / d') , \\ T = T' / \Delta T'_0 , \quad t = t' / (d'^2 / \nu'_0) , \\ p = p' / \rho'_0 g' d' , \quad c = c' / c_0 , \\ \rho = \rho' / \rho'_0 , \quad \lambda = \lambda' / \lambda'_0 , \quad k = k' / k'_0 , \\ \mu = \mu' / \mu'_0 . \end{array} \right.$$

Il vient alors à la place du système (2.1), avec les conditions (2.3), pour u_i , T , ρ et p , le système réduit suivant :

$$(2.7a) \quad \frac{D \ln p}{Dt} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 , \quad k=1,2,3 ;$$

$$(2.7b) \quad \rho \frac{Du_i}{Dt} + F^{-1} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \delta_{i3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ + \frac{\lambda'_0}{\mu'_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] ;$$

$$(2.7c) \quad \rho c \frac{DT}{Dt} + B_0 \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right] + \frac{\lambda'_0}{\mu'_0} M \lambda \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]^2 \\ + \frac{M \mu}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right]^2 ;$$

$$(2.7d) \quad \rho = \rho(T) ,$$

où $\lambda = \lambda(T)$, $\mu = \mu(T)$, $k = k(T)$ et $c = c(T)$.

Dans le système (2.7) apparaissent quatre paramètres sans dimension suivants:

$Fr = (v'_0/d')^2 / g'd'$: qui joue le rôle d'un
nombre de Froude au carré,

$M = v_0'^2/d'^2 / c'_0 \Delta T'_0$: qui joue le rôle d'un
nombre de Mach au carré,

$B_0 = M/Pr$: le nombre de Boussinesq,

$Pr = \mu'_0 c'_0 / k'_0$: le nombre de Prandtl.

Les conditions aux limites sans dimensions

associées sont :

$$(2.8) \quad \begin{cases} u_i = 0 & \text{sur } x_3 = 0 \text{ et } x_3 = 1 ; \\ T = T_0 + 1 & \text{sur } x_3 = 0 ; \\ T = T_0 & \text{sur } x_3 = 1 , \\ \text{où } T_0 = T'_0 / \Delta T'_0 . \end{cases}$$

II.3 Les équations adimensionnelles dominantes :

Le système d'équations aux dérivées partielles (2.7), au repos ($u_i = 0$), conduit à deux équations que vérifient respectivement la pression et la température :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_0}{\partial x_3} = -P(T) , \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right] = 0 . \end{cases}$$

Si l'on suppose que la seule solution de la seconde équation du système (2.9) est :

$$(2.10) \quad T \equiv T_0 ,$$

alors dans ce cas l'expression de la masse volumique correspondante est :

$$(2.11) \quad \rho \equiv \rho_0 = 1.$$

Sous ces conditions il vient, de la première équation du système (2.9), pour la pression :

$$(2.12) \quad p \equiv 1 - x_3.$$

On constate ainsi que le système (2.7) admet au repos la solution de base suivante :

$$(2.13) \quad \begin{cases} u_i = 0, & p = 1, \\ T = T_0 & \text{et } p = p_0 = 1 - x_3. \end{cases}$$

Quand il y a apparition du mouvement, il vient à la place de (2.13) les champs perturbés suivants :

$$(2.14) \quad \begin{cases} u_i = u_i & ; \\ T = T_0 + \theta & ; \\ p = p_0 + A_0 F_r \pi, \end{cases}$$

avec :

$$A_0 = \Delta p'_0 / (\rho' g' d' / F_r) ,$$

où $\Delta p'_0$ est la fluctuation caractéristique de la pression qui correspond à $\Delta T'_0$.

Par simplification, on fera le choix suivant :

$$(2.15) \quad A_0 \equiv 1 \text{ c'est à dire } \Delta p'_0 = \rho'_0 \left(\frac{1}{2} g'_0 \right)^2 .$$

Les fonctions Θ et Π sont des écarts, respectivement de la température et de la pression qui sont maintenant avec u_i les inconnues de notre problème.

Avant d'introduire ces nouvelles fonctions dans le système d'équations (2.7), avec les conditions aux limites (2.8), on remarque que les grandeurs physiques ρ, λ, μ, k et c présentes dans ce système peuvent grâce à un développement limité au voisinage de T'_0 , s'écrire sous la forme suivante :

$$(2.16) \quad \rho = 1 - \varepsilon_0 [\Theta + \tau_0 \Theta^2 + \dots] ,$$

$$\text{avec } \varepsilon_0 = \beta'_0 \Delta T'_0 , \quad \beta'_0 = \left[\frac{1}{\rho'} \frac{d\rho'}{dT'} \right]_{T'=T'_0} ,$$

$$\tau_0 = \frac{\Delta T'_0}{2} \left[\frac{d}{dT'} \ln \rho' \right]_{T'=T'_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\beta'^2} \frac{d\beta'}{dT'} \right]_{T'=T'_0} - 1 ;$$

$$(2.17) \quad \lambda = 1 - \varepsilon_0 \frac{\Lambda_0}{\beta_0'} \left\{ \theta + \tau_0^1 \theta^2 + \dots \right\} ;$$

$$(2.18) \quad \mu = 1 - \varepsilon_0 \frac{M_0}{\beta_0'} \left\{ \theta + \tau_0^2 \theta^2 + \dots \right\} ;$$

$$(2.19) \quad c = 1 - \varepsilon_0 \frac{\Gamma_0}{\beta_0'} \left\{ \theta + \tau_0^3 \theta^2 + \dots \right\} ;$$

$$(2.20) \quad k = 1 - \varepsilon_0 \frac{K_0}{\beta_0'} \left\{ \theta + \tau_0^4 \theta^2 + \dots \right\} ,$$

où les quantités Λ_0, M_0, Γ_0 et K_0 sont des expressions similaires à β_0' et restent bornées lorsque ε_0 tend vers zéro. De même $\tau_0^1, \tau_0^2, \tau_0^3$ et τ_0^4 sont des expressions similaires à τ_0 et elles sont proportionnelles à ε_0 .

Avec les variables réduites x_i et t , nous obtenons, pour les nouvelles fonctions réduites u_i, π et θ , le système d'équations réduit suivant :

$$(2.21a) \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \varepsilon \frac{D\theta}{Dt} + O(\varepsilon_0^2) ;$$

$$(2.21b) \quad (1 - \varepsilon\theta) \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial \pi}{\partial x_i} - Gr\theta \delta_{i3} = \Delta u_i + \varepsilon_0 \left\{ \left(1 + \frac{\lambda_0'}{\mu_0'}\right) \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{D\theta}{Dt} - \frac{M_0}{\beta_0'} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\theta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} + O(\varepsilon_0^2) ;$$

$$(2.21c) \quad \left[1 - \left(1 + \frac{\Gamma_0}{\beta_0} \right) \varepsilon_0 \theta \right] \frac{D\theta}{Dt} + \varepsilon_0 \left[B_0 (1 - x_3) + M\pi \right] \frac{D\theta}{Dt} = \frac{\Delta\theta}{Pr} +$$

$$\frac{M}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \varepsilon_0 \left[\frac{k'_0}{\beta'_0 Pr} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) + \frac{MM_0}{\beta'_0} \theta \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] + O(\varepsilon_0^2) \quad ;$$

$$(2.21d) \quad \rho = 1 - \varepsilon_0 \left\{ \theta + \tau_0^0 \theta^2 + \dots \right\} .$$

Au niveau du ce système, il apparaît le nombre sans dimensions de Grashof défini par:

$$(2.22) \quad Gr = \varepsilon_0 / Fr .$$

II.4 Les équations limites pour la convection profonde [12]:

Il s'agit maintenant de trouver un système d'équations limites significatives lorsque le paramètre fondamental $\varepsilon_0 = \beta'_0 \Delta T_0$ tend vers zéro. Et pour que les équations résultantes de ce passage à la limite soient significatives, il faut qu'elles contiennent le plus grand nombre de termes, de façon à garder la plus grande information possible.

Au niveau des équations adimensionnelles (2.21) et afin d'assurer une dégénérescence minimale lorsque le paramètre ε_0 tend vers zéro ($\hat{x}$ et t fixés) il faut supposer que:

$$(2.23) \quad Gr = \varepsilon_0 / Fr \sim O(1) \text{ (de l'ordre de l'unité).}$$

De ce fait :

$$(2.24) \quad Fr \ll 1.$$

L'expression du nombre de Boussinesq ($B_0 = M / Fr$) nous conduit à considérer deux cas pour M :

(i) $M \ll 1$, de façon à avoir B_0 de l'ordre de l'unité; cela conduit au problème de la convection peu profonde de Rayleigh-Bénard. La distance d' , entre les deux parois est alors:

$$(2.25) \quad d' = d^* \simeq \frac{C_0 \Delta T_0}{g'}.$$

(ii) $M = O(1)$, dans ce cas le nombre de Boussinesq est "très grand" devant l'unité. Si l'on admet alors que:

$$(2.26) \quad \varepsilon B_0 = \delta_0 \sim O(1),$$

qui est le cas le plus significatif, la distance entre les deux parois doit satisfaire à la contrainte :

$$(2.27) \quad d' = d^{**} \sim \delta_0 \frac{d^*}{\varepsilon_0} \quad \text{qui, lorsque } \varepsilon_0 \text{ tend vers zéro, devient "infini" pour } d^* \text{ fixé.}$$

Ainsi, si nous effectuons le passage à la limite :

$$(2.28) \quad \varepsilon_0 \rightarrow 0 \quad \text{à } x_i \text{ et } t \text{ fixés}$$

de telle façon que l'hypothèse (ii), avec (2.26), soit satisfaite, tous les autres paramètres restent fixés et de l'ordre de l'unité, nous obtenons le système d'équations limites pour la convection dite profonde :

$$(2.29a) \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 ;$$

$$(2.29b) \quad \frac{Du_\alpha}{Dt} + \frac{\partial \pi}{\partial x_\alpha} = \Delta u_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 ;$$

$$(2.29c) \quad \frac{Du_3}{Dt} + \frac{\partial \pi}{\partial x_3} = \Delta u_3 + Gr \theta ;$$

$$(2.29d) \quad [1 + \delta_0(1-x_3)] \frac{D\theta}{Dt} = \frac{\Delta \theta}{Pr} + \frac{M}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2,$$

avec les conditions aux limites, sur les deux parois rigides :

$$(2.30) \quad \begin{cases} \theta = 1 & \text{sur } x_3 = 0 & ; \\ \theta = 0 & \text{sur } x_3 = 1 & ; \\ u_i = 0 & \text{sur } x_3 = 0, 1 . \end{cases}$$

Dans l'étude de l'instabilité hydrodynamique, il est judicieux de travailler avec des conditions aux limites homogènes. De ce fait, nous introduisons la nouvelle perturbation de température, notée Θ :

$$(2.31) \quad \Theta = Ra[\theta + x_3 - 1] .$$

Dans ce cas, il apparaît une nouvelle perturbation de pression, notée Π , suivante :

$$(2.32) \quad \Pi = Pr \pi + Ra x_3 \left(\frac{x_3}{2} - 1 \right) ,$$

où l'on a introduit le nombre sans dimension de Rayleigh Ra , défini par :

$$(2.33) \quad Ra = Pr Gr .$$

Si l'on tient compte des deux expressions (2.31) et (2.32), on obtient le système d'équations aux dérivées partielles que vérifient u_i , Θ et Π dans le cas de la convection profonde :

$$(2.34a) \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad k=1,2,3;$$

$$(2.34b) \quad Pr \frac{Du_\alpha}{Dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} = Pr \Delta u_\alpha, \quad \alpha=1,2;$$

$$(2.34c) \quad Pr \frac{Du_3}{Dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} = \Theta + Pr \Delta u_3;$$

$$(2.34d) \quad Pr [1 + \underline{S_0}(1-x_3)] \left[\frac{D\Theta}{Dt} - Ra u_3 \right] = \Delta \Theta + \frac{\underline{S_0} Pr^2}{2} \Phi,$$

$$\text{avec } \Phi = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2.$$

A ce système d'équations (2.34), nous pouvons associer les conditions aux limites homogènes suivantes (cas de deux parois rigides):

$$(2.35) \quad u_i = \Theta = 0 \quad \text{sur } x_3 = 0, 1.$$

Mais, grâce à l'équation de continuité (2.34a), on a aussi une condition complémentaire sur la composante verticale de la vitesse:

$$(2.36) \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad \text{sur } x_3 = 0, 1.$$

Lorsque S_0 tend vers zéro, on retrouve les équations classiques de Boussinesq de la convection "peu profonde" habituellement utilisées lors de l'analyse

mathématique de Rayleigh-Bénard [2], [3] qui sont identiques à celle obtenues en considérant l'hypothèse (i). De ce fait, on dira que le système d'équations (2.34) est celui de la convection profonde, où intervient en plus de Pr et Ra , un troisième paramètre S_0 lié à la profondeur de la couche de fluide [12]. En réalité S_0 est un "petit" paramètre (devant un) mais on verra que l'analyse non linéaire fait jouer à ce ^{petit} paramètre un rôle important et qu'il modifie sensiblement les routes vers le chaos (voir le chapitre V).

II.5 Les conditions aux limites sur des surfaces libres:

Sur une surface d'équation:

$$(2.37) \quad x_3 = d' + h'(x_1, x_2, t'),$$

la condition de température ^{donnée} ϑ restent inchangée, mais il reste à préciser les conditions à imposer sur cette surface, dite libre, aux composantes de la vitesse. On supposera qu'il n'est pas tenu compte de la tension superficielle sur cette surface. Ceci nous mène à écrire deux conditions:

a) l'une cinématique qui traduit, en fait, que la surface libre est une surface matérielle:

$$(2.38) \quad u'_3 = \frac{\partial h'}{\partial t'} + u'_1 \frac{\partial h'}{\partial x'_1} + u'_2 \frac{\partial h'}{\partial x'_2}, \text{ sur } x'_3 = d' + h'(x'_1, x'_2, t')$$

b) l'autre, dynamique qui traduit la continuité de la contrainte à travers l'interface entre le liquide et l'air atmosphérique. Si dans l'air on suppose que la contrainte se réduit à une pression constante sur toute la surface libre, notée p_a' , alors on obtient trois relations scalaires :

$$(2.39a) \quad \left\{ \mu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) + \lambda' \frac{\partial u'_k}{\partial x'_k} \delta_{ij} \right\} n'_j = (p' - p_a') n'_i ;$$

$$(2.39b) \quad \frac{\partial u'_1}{\partial x'_3} + \frac{\partial u'_3}{\partial x'_1} = 0 ;$$

$$(2.39c) \quad \frac{\partial u'_2}{\partial x'_3} + \frac{\partial u'_3}{\partial x'_2} = 0, \text{ sur } x'_3 = d' + h'(x'_1, x'_2, t'),$$

$$\text{ou} \quad n'_1 = -\frac{1}{\|h'\|} \frac{\partial h'}{\partial x'_1}, \quad n'_2 = -\frac{1}{\|h'\|} \frac{\partial h'}{\partial x'_2},$$

$$n'_3 = \frac{1}{\|h'\|} \text{ et } \|h'\| = \left(1 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_2} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

On suppose que la direction de la normale $\vec{n}' = (n'_1, n'_2, n'_3)$ est dirigée vers l'atmosphère.

Sous une forme adimensionnelle, il vient à la place de l'expression (2.38) :

$$(2.40) \quad u_3 = \frac{h'_0}{d'} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \right],$$

avec $h'_0 = \max |h'(x'_1, x'_2, t')|$ lorsque t', x'_1, x'_2 varient sur la surface libre d'équation adimensionnelle:

$$(2.41) \quad x_3 = 1 + \frac{h'_0}{d'} h(x_1, x_2, t).$$

Ainsi sous forme adimensionnelle, il vient à la place de (2.39) les relations:

$$(2.42a) \quad (p - p_a) n_i = F_r \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda_0}{\mu_0} \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] n_j;$$

$$(2.42b) \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 ;$$

$$(2.42c) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0, \quad \text{sur } x_3 = 1 + \frac{h'_0}{d'} h(x_1, x_2, t).$$

mais de (2.14) et (2.32) nous avons aussi que:

$$(2.43) \quad p = p_0 + \frac{F_r}{P_r} \Pi - \epsilon x_3 \left(\frac{x_3}{2} - 1 \right),$$

et au repos ($u_i = 0$), on aura sur la surface non perturbée d'équation $x_3 = 1$, l'expression de la pression suivante:

$$(2.44) \quad p = p_a = \epsilon/2.$$

Par contre, quand $u_i \neq 0$, d'après (2.43) sur la surface libre il vient pour la pression p la

relation :

$$(2.45) \quad p = p_a + \frac{h'_0}{d'} h(x_1, x_2, t) + \frac{Fr}{Pr} \Pi - \varepsilon_0 \frac{h_0^2}{2d'^2} h^2(x_1, x_2, t),$$

$$\text{sur } x_3 = 1 + \frac{h'_0}{d'} h(x_1, x_2, t).$$

De (2.42a) et (2.34a), on en déduit l'expression de l'élévation $h(x_1, x_2, t)$ suivante :

$$(2.46) \quad -\frac{h'_0}{d'} h(x_1, x_2, t) - \frac{\varepsilon_0 h_0^2}{2d'^2} h^2(x_1, x_2, t) \\ = Fr \left[\frac{\Pi}{Pr} + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right].$$

Lorsque l'on fait tendre $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, Fr tend aussi vers zéro et de ce fait, de (2.46) nous obtenons :

$$(2.47) \quad h(x_1, x_2, t) = 0.$$

On constate que la surface libre peut être simulée, à la limite, par la paroi fixe $x_3 = 1$. Dans ce cas, de (2.40) il vient :

$$(2.48) \quad u_3 = 0 \quad \text{sur } x_3 = 1.$$

Ainsi dans le cas d'une surface libre, on doit imposer les conditions aux limites, sur les composantes

ui de la vitesse, suivantes (d'après (2.39b) et (2.39c)):

$$(2.49) \quad u_3 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0, \text{ sur } x_3 = 1.$$

De l'équation de continuité (2.34a) on trouve que l'on a aussi :

$$(2.50) \quad u_3 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0, \text{ sur } x_3 = 1.$$

Naturellement, de façon analogue, on aura sur une surface inférieure libre(!) les conditions:

$$(2.51) \quad u_3 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0, \text{ sur } x_3 = 0.$$

II.6 Le cas bidimensionnel instationnaire de la convection profonde:

Nous revenons au système complet (2.34) mais nous considérons le cas bidimensionnel:

$$(2.52) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_2} = 0, & u_2 = 0, & x_1 = x, & x_3 = z, \\ u_1 = u, & u_3 = w. \end{cases}$$

Il vient alors pour u, w, π et θ les équations adimensionnelles suivantes:

$$(2.53a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ;$$

$$(2.53b) \quad Pr \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = Pr \Delta u \quad ;$$

$$(2.53c) \quad Pr \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} = Pr \Delta w + \Theta \quad ;$$

$$(2.53d) \quad Pr [1 + \delta_0(1-\beta)] \left[\frac{D\Theta}{Dt} - Ra w \right] = \Delta \Theta + \frac{\delta_0 Pr^2}{2} \Phi \quad ;$$

$$\text{avec } \Phi = 2 \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 + 4 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] ,$$

et les conditions aux limites associées :

$$(2.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = u = w = 0 \quad \text{sur } z = 0, 1 \quad ; \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{si la paroi est rigide ,} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{si la paroi est libre .} \end{array} \right.$$

D'après (2.53a), on peut introduire la fonction de courant $\Psi = \Psi(x, z, t)$ telle que :

$$(2.55) \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad , \quad w = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad ,$$

et en éliminant Π des équations (2.53b) et (2.53c), nous obtenons le système d'équations suivant :

$$(2.56a) \quad Pr \left[\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(x, \beta)} \right] = -\frac{\partial \Theta}{\partial x} + Pr \Delta \Delta \Psi ;$$

$$(2.56b) \quad Pr \left[1 + \tilde{\delta} \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \right] \left[\frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\Theta, \Psi)}{\partial(x, \beta)} + Ra \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] = \frac{\Delta \Theta}{1 + \delta_0/2} + \frac{\tilde{\delta} Pr^2}{2} \phi^* ;$$

$$(2.56c) \quad \phi^* = \delta \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial \beta} \right)^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right]^2 ,$$

$$(2.56d) \quad \tilde{\delta} = 2 \delta_0 / (2 + \delta_0) ,$$

$$(2.56e) \quad \frac{\partial(A, B)}{\partial(x, \beta)} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial B}{\partial x} .$$

A ces équations il faut associer les conditions aux limites suivantes :

- Cas de deux parois libres (L-L) :

$$(2.57a) \quad \Theta = \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta^2} = 0 \quad ;$$

- Cas de deux parois rigides (R-R) :

$$(2.57b) \quad \Theta = \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad \text{sur } z = 0, 1 ;$$

- Cas rigide - Libre (R-L) :

$$(2.57c) \quad \Theta = \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad \text{sur } z = 0 ;$$

$$(2.57d) \quad \Theta = \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{sur } z = 1 .$$

Les équations (2.56) avec les conditions aux frontières (2.57) seront utilisées dans les chapitres qui suivent.

-III-

THEORIE LINEAIRE
DE
L'INSTABILITÉ
DE
LA CONVECTION PROFONDE

III.1 Obtention d'un système dynamique linéaire (cas L-L) :

Nous revenons au système d'équations aux dérivées partielles (2.56) associé aux conditions (2.57a) (cas peu réaliste mais simple pour l'analyse qui va suivre). Les perturbations Ψ et Θ , respectivement, de la fonction de courant et de la température, sont considérées petites près du seuil critique. De ce fait la contribution des termes non linéaire est négligeable. Il vient à la place de (2.56) le système linéaire suivant :

$$(3.1a) \quad \Pr \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} = \Pr \Delta \Delta \Psi - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad ;$$

$$(3.1b) \quad \Pr [1 + \tilde{\delta} (\frac{1}{2} - \beta)] \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t} + Ra \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] = \frac{\Delta \Theta}{1 + \delta_0/2} ,$$

$$\text{où } \tilde{\delta} = 2\delta_0/2 + \delta_0 .$$

A ces équations il faut associer les conditions aux limites suivantes (cas L-L) :

$$(3.2) \quad \Theta = \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{sur } z = 0, 1.$$

La technique mathématique de résolution du système d'équations (3.1) avec les conditions (3.2) consiste à décomposer la perturbation de la fonction de courant $\Psi(x, z, t)$ et de la température $\Theta(x, z, t)$ en une double série de Fourier de la forme :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \Psi(x, z, t) = \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} A_{kn}(t) \sin k\pi z \sin nq_0 x ; \\ \Theta(x, z, t) = \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 0} B_{kn}(t) \sin k\pi z \cos nq_0 x , \end{cases}$$

où $q_0 = \text{cte}$, joue le rôle d'un nombre d'onde horizontale, qui est inversement proportionnel à une dimension linéaire d'une cellule convective de Bénard dans le plan horizontal. Les amplitudes A_{kn} et B_{kn} dépendent uniquement de la variable temps t et restent à déterminer.

Grâce à la procédure de Galerkin qui permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles ordinaires, on aboutit aux

équations que vérifient les coefficients de la décomposition de Fourier A_{kn} et B_{kn} . La résolution de ces équations pour des valeurs particulières de Ra , nous permet de conclure à la stabilité ou à l'instabilité de l'écoulement convectif, suivant que les solutions de A_{kn} et B_{kn} tendent vers zéro ou vers l'infini quand le temps tend vers l'infini et de définir le seuil critique d'apparition des mouvements convectifs. Après calculs et simplifications, nous aboutissons au système suivant pour les amplitudes (petites) $A_{kn}(t)$ et $B_{kn}(t)$:

$$(3.4a) \quad -dk_n Pr \frac{dA_{kn}}{dt} = nq_0 B_{kn} + dk_n Pr A_{kn} ;$$

$$(3.4b) \quad -Pr \left[\frac{dB_{kn}}{dt} + 2\tilde{\delta} \sum_m I_{0mk}^{css} \frac{dB_{mn}}{dt} \right] = \frac{dk_n B_{kn}}{1 + \delta_0/2} \\ + nq_0 Ra Pr \left[A_{kn} + 2\tilde{\delta} \sum_m I_{0mk}^{css} A_{mh} \right] ;$$

$$(3.4c) \quad -Pr \left[\frac{dB_{k0}}{dt} + 2\tilde{\delta} \sum_m I_{0mk}^{css} \frac{dB_{m0}}{dt} \right] = + \frac{dk_0 B_{k0}}{1 + \delta_0/2} ,$$

$$\text{ou} \quad dk_n = k^2 \pi^2 + q_0^2 \pi^2 ;$$

$$I_{0mk}^{css} = I_{0km}^{css} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - z \right) \sin m\pi z \sin k\pi z dz$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } m=k \\ -\frac{(-1)^{m+k} - 1}{2\pi^2} \left[\frac{1}{(m-k)^2} - \frac{1}{(m+k)^2} \right] & \text{si } m \neq k. \end{cases} ;$$

La dernière équation du système (3.4) évolue indépendamment des deux autres équations et ne dépend pas du paramètre déterminant Ra . Cela nous mène à considérer, dans l'étude linéaire qui va suivre, seulement les deux premières équations. Comme nous pouvons le remarquer, les coefficients de Fourier dans (3.4) qui correspondent à des valeurs de n distincts ne sont pas en interactions. Par conséquent, on est conduit à résoudre n systèmes d'équations différentielles du premier ordre à $2k$ inconnues.

Intéressons-nous au cas $n=1$, nous obtenons à la place de (3.4) le système couplé (du fait de la présence de $\tilde{\delta} \neq 0$):

$$(3.5a) \quad -dk_1 Pr \frac{dA_{k1}}{dt} = q_0 B_{k1} + \alpha_{k1}^2 Pr A_{k1} ;$$

$$(3.5b) \quad -Pr \left[\frac{dB_{k1}}{dt} + 2\tilde{\delta} \sum_m I_{omk}^{css} \frac{dB_{m1}}{dt} \right] = \frac{dk_1 B_{k1}}{1 + \delta_0/2} \\ + q_0 Ra Pr \left[A_{k1} + 2\tilde{\delta} \sum_m I_{omk}^{css} A_{m1} \right],$$

ou encore sous une forme matricielle [14]:

$$(3.6) \quad \bar{B} \frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{F} \bar{A} ,$$

où

$\bar{B}$: est une matrice régulière qui, dans le cas de la convection peu profonde ($\tilde{S} = S_0 = 0$) de Rayleigh-Bénard est réduite à une matrice diagonale ;

$\bar{F}$: est une matrice à coefficients constants, et

$\bar{A}$: est un vecteur composé des amplitudes dépendantes du temps.

L'équation (3.6) s'écrit encore :

$$(3.7) \quad \frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{B}^{-1} \bar{F} \bar{A} = \bar{D} \bar{A} ,$$

où $\bar{D} = \bar{B}^{-1} \bar{F}$ avec $\bar{B}^{-1}$ l'inverse de $\bar{B}$.*)

Les conditions initiales associées à (3.7) sont :

$$(3.8) \quad \bar{A}(t=0) = \bar{A}^0 ,$$

où $\bar{A}^0$ est un vecteur arbitraire mais non nul.

*) On peut se convaincre aisément que l'inverse de $\bar{B}$ existe toujours (et qu'il est différent de zéro).

La forme linéaire (3.7) avec les conditions (3.8) admet une solution dont le comportement est exponentielle en fonction du temps : elle décroît si toutes les valeurs propres de la matrice $\bar{D}$ admettent des parties réelles négatives (la solution est stable) et croît s'il en existe au moins une dont la partie réelle est positive (la solution est instable).

Par conséquent, il est bien connu que (3.7) avec les conditions (3.8) peut admettre une solution de la forme :

$$(3.9) \quad \bar{A} = \bar{a} e^{\lambda t} ,$$

où $\bar{a}$ est un vecteur constant si toutes les valeurs propres λ sont distincts.

L'expression (3.9) est effectivement solution de (3.7) avec (3.8) si le système algébrique :

$$(3.10) \quad [\bar{D} - \lambda \bar{I}] \bar{a} = 0 ,$$

où $\bar{I}$ est la matrice unité,

admet une solution $\bar{a}$, non triviale. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que soit vérifiée l'équation caractéristique suivante :

$$(3.11) \quad P(\lambda) = \det[\bar{D} - \lambda \bar{I}] = 0 \quad .$$

L'analyse qui va suivre nous conduit à un critère d'apparition du mouvement convectif. Pour cela on doit chercher la valeur critique du nombre de Rayleigh R_{ac} , et la valeur critique du nombre d'onde q_{oc} correspondante, caractérisant le passage de la solution stable vers une solution instable.

III.2 Critère de stabilité de Routh-Hurwitz:

Pour étudier la stabilité du système (3.1), nous sommes conduit à rechercher toutes les racines de la forme caractéristique (3.11) et à étudier le signe de leur partie réelle. L'expression (3.11) peut être réécrite sous la forme polynômiale suivante:

$$(3.12) \quad P_m(\lambda) = \lambda^m + p_1 \lambda^{m-1} + \dots + p_{m-1} \lambda + p_m = 0 \quad ,$$

où les p_m sont des coefficients réels.

Le critère de Routh-Hurwitz donne une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les parties réelles des racines du polynôme P_m (pour m quelconques) soient négatives (voir à ce sujet [16]).

Formons pour cela avec ces coefficients p_m la matrice D_m d'ordre m suivante [15]:

$$D_m = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & p_m \end{bmatrix}.$$

les indices des lignes vont en décroissant (de un en un), les indices de la première colonne en croissant (de deux en deux), et on remplace par 0 les termes qui auraient des indices négatifs ou supérieurs à m .

les conditions de stabilité s'expriment en écrivant que les mineurs principaux^{*)} de D_m (soient $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$) sont tous positifs. On remarque que la condition :

$$\Delta_m = p_m \Delta_{m-1} > 0 ,$$

compte tenu de la condition

$$\Delta_{m-1} > 0 ,$$

s'écrit :

$$p_m = (-1)^m \det \bar{D} > 0 .$$

Pour des valeurs de P_r et $\tilde{S}(s)$ fixées, nous étudions le changement de signe des parties réelles des racines λ du polynôme (3.12) en fonction du nombre de Rayleigh R_a . La trajectoire de λ dans le plan complexe dépend de ce paramètre. la condition critique que nous cherchons correspond à une racine, qui dans le plan complexe, passe du demi-plan de gauche (la partie réelle est négative) au demi-plan de droite (la partie réelle est positive). Il y aura donc deux manières de traverser l'axe imaginaire :

*) Rappelons que le mineur principal Δ_p est celui formé par les p premières lignes et les p premières colonnes.

- Soit par l'origine : état neutre de stabilité caractérisé par une valeur propre nulle. Dans ce cas nous avons :

$$(3.13) \quad \Delta_m = p_m = (-1)^m \det \bar{D} = 0 ;$$

- Soit par une paire de complexes conjuguées : l'état neutre oscillatoire caractérisée par deux valeurs propres imaginaires pures conjuguées. Dans ce cas nous avons :

$$(3.14) \quad \Delta_{m-1} = 0 .$$

Par conséquent, l'étude de la stabilité de (3.12) nous conduit à chercher la valeur de R_a vérifiant [14] :

$$- \text{ Soit } \Delta_m = 0 ;$$

$$- \text{ Soit } \Delta_{m-1} = 0 .$$

La première de ces deux conditions satisfaite détermine le type d'instabilité et la valeur de R_a correspondante est le paramètre critique de stabilité (noté R_{ac}).

III.3 Détermination du seuil critique :

Dans cette section, nous allons donner une preuve de l'existence du principe d'échange des stabilités pour la convection profonde de Bénard. Ceci nous permettra de définir le seuil critique d'apparition des mouvements convectifs.

III.3.a La forme générale de la matrice $\bar{D}$:

Nous revenons aux deux équations (3.5). Nous écrivons ce système linéaire sous la forme particulière suivante :

$$(3.15a) \quad -Pr \frac{dX_{k1}}{d\tau} = \frac{1}{\alpha_{11}} \left[\frac{q_0^{Pr^{1/2}} Ra^{1/2}}{\alpha_{k1}^{1/2}} Y_{k1} + \alpha_{k1} Pr X_{k1} \right] ;$$

$$(3.15b) \quad -Pr \frac{dY_{k1}}{d\tau} = \frac{1}{\alpha_{11}} \left[\frac{q_0^{Pr^{1/2}} Ra^{1/2}}{\alpha_{k1}^{1/2}} X_{k1} + \sum_{j \geq 1}^N \sqrt{c_{kj} c_{jk}} Y_{j1} \right] ,$$

où

$$\tau = \alpha_{11} t ,$$

$$A_{k1} = \Gamma_{k1} X_{k1} ,$$

$$B_{k1} = \chi_{k1} Y_{k1} ,$$

avec

-40-

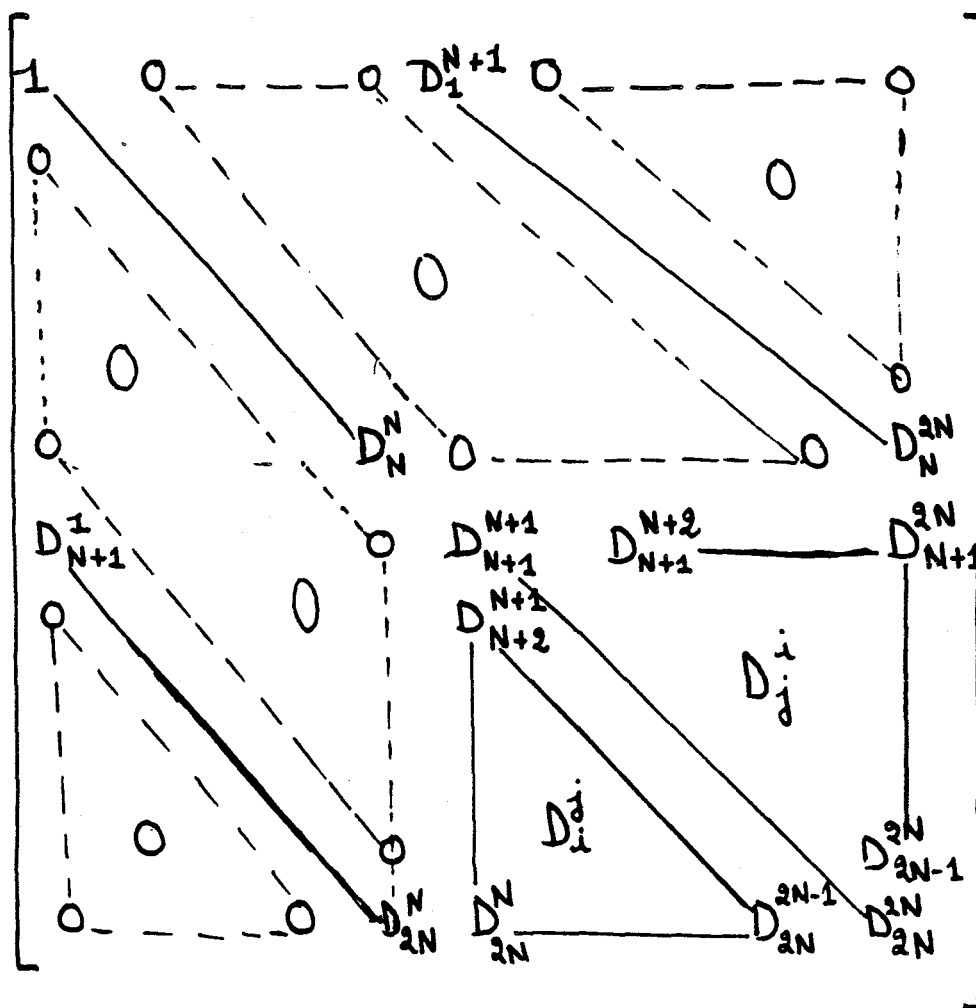
$$\left(\frac{\gamma_{k1}}{\gamma_{k1}}\right)^2 = (Pr Rad_{k1})^{-1},$$

$$\left(\frac{\gamma_{j1}}{\gamma_{k1}}\right)^2 = c_{jk}/c_{kj},$$

$$c_{kj} = (\bar{B}^{-1} \bar{F})_{N+k, N+j}.$$

Pour chaque $k=1,2,3,4,\dots,N$, on peut mettre le système (3.15) sous la forme (3.7) et obtenir la matrice $\bar{D}$ correspondante ; cette dernière possède la structure particulière suivante :

(3.16) $\bar{D} = -$



III.3.b (Ra, q_r) résultant de la première approximation :

La première approximation, qui consiste à considérer un système d'équations différentielles ordinaires dont les inconnues sont x_{11} et y_{11} résultants du choix du doublets $(1,1)$ dans les développements de Fourier (3.3), donne la matrice $\bar{D}$ suivante :

$$(3.17) \quad \bar{D} = \frac{-1}{d_{11} P_r} \begin{bmatrix} d_{11} P_r & \frac{q_0 P_r^{1/2} Ra^{1/2}}{\alpha_{11}^{1/2}} \\ \frac{q_0 P_r^{1/2} Ra^{1/2}}{\alpha_{11}^{1/2}} & \frac{d_{11}}{1 + \delta_{0/2}} \end{bmatrix}.$$

On constate que la matrice $\bar{D}$ associée à la première approximation est bien symétrique et réelle. Par conséquent, elle admet uniquement des valeurs propres réelles. Parmi ces dernières, il en existe au moins une qui croît en fonction de Ra , et traverse l'origine de gauche vers la droite (état neutre de stabilité). En conséquence, ceci nous conduit à chercher la valeur de Ra qui satisfait la condition suivante (l'état neutre de stabilité oscillatoire n'existe pas dans ce cas) :

$$(3.18) \quad p_k = \det \bar{D} = 0.$$

L'équation caractéristique résultante de (3.18) admet la racine suivante:

$$(3.19) \quad Ra = \alpha_{11}^3 / q_0^2 (1 + \delta_{0/2}) \quad .$$

L'état conductif est donc linéairement instable pour:

$$(3.20) \quad Ra \geq \alpha_{11}^3 / q_0^2 (1 + \delta_{0/2}) \quad .$$

Le seuil critique correspond à la valeur minimale de l'expression (3.19), ce qui conduit aux valeurs suivantes pour q_{oc} et Rac :

$$(3.21) \quad \begin{cases} q_{oc} = \pi / \sqrt{2} & ; \\ Rac = \frac{27\pi^4}{4(1+\delta_{0/2})} = \frac{Ra_c^s}{(1+\delta_{0/2})} \end{cases} ,$$

où Ra_c^s est le nombre de Rayleigh critique pour la convection peu profonde (lorsque $\delta_0 \equiv 0$).

III.3.5 (R_a, q_r) résultant de la seconde approximation :

On considère maintenant le système d'équations résultant du choix de deux doublets (1,1) et (2,1) dans les développements de Fourier (3,3). On obtient alors la matrice $\bar{D}$, associée suivante :

$$(3.22) \quad \bar{D} = -\frac{1}{d_{11} P_r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{q_0 P_r^{1/2} R_a^{1/2}}{d_{11}^{1/2}} & 0 \\ 0 & \frac{d_{21}}{d_{11}} & 0 & \frac{q_0 P_r^{1/2} R_a^{1/2}}{d_{21}^{1/2}} \\ \frac{q_0 P_r^{1/2} R_a^{1/2}}{d_{11}^{1/2}} & 0 & \frac{d_{12}}{\beta_{11} (1 + \delta_0/2)} & -\frac{2 \tilde{\delta} a_{12} \sqrt{d_{21} d_{11}}}{\beta_{11} (1 + \delta_0/2)} \\ 0 & \frac{q_0 R_a^{1/2} P_r^{1/2}}{d_{21}^{1/2}} & -\frac{2 \tilde{\delta} a_{12} \sqrt{d_{21} d_{11}}}{\beta_{11} (1 + \delta_0/2)} & \frac{d_{21}}{\beta_{11} (1 + \delta_0/2)} \end{bmatrix},$$

où $\beta_{11} = 1 - 4 \tilde{\delta}^2 a_{12}^2$, $a_{12} = a_{21} = 8/9\pi^2$.

Même remarque que pour la première approximation, la matrice $\bar{D}$ associée à la seconde approximation est symétrique et réelle. Dans ce cas, la trajectoire des valeurs propres dans le plan complexe passe par l'origine:

$$(3.23) \quad \tau_4 = \det \bar{D} = 0,$$

Il en résulte l'équation caractéristique suivante:

$$(3.24) \quad \beta_{11} \mu^2 - \mu (d_{11}^3 + d_{21}^3) + d_{11}^3 d_{21}^3 = 0,$$

où

$$\mu = q_0^2 Ra (1 + \delta_0/2),$$

qui admet les racines suivantes:

$$(3.25) \quad R_a^{\pm} = \frac{d_{11}^3/2}{q_0^2 \beta_{11} (1 + \delta_0/2)} \left[1 + \frac{d_{21}^3}{d_{11}^3} \pm \sqrt{\left(1 + \left(\frac{d_{21}}{d_{11}}\right)^3\right)^2 - 4 \beta_{11} \left(\frac{d_{21}}{d_{11}}\right)^3} \right]$$

Des essais numériques ont montré que le nombre d'onde q_0 correspondant à l'état critique reste inchangé quand on fait varier la valeur du paramètre de profondeur δ_0 . Les valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra en fonction de δ_0 figurent dans la deuxième colonne du tableau II, situé à la fin de ~~ce~~ chapitre III.

III.3.d (R_{ac}, q_{ac}) résultant de la troisième approximation:

Si nous considérons maintenant les doublets (1,1), (2,1) et (3,1) dans les développements de Fourier (3.3), nous obtenons encore une matrice symétrique et réelle. Il en résulte de (3.5) l'équation caractéristique suivante:

$$(3.26) \quad -\beta' \mu^3 + [\beta_1 \alpha_{11}^3 + \alpha_{21}^3 + \beta_0 \alpha_{31}^3] \mu^2 - [\alpha_{11}^3 \alpha_{21}^3 + \alpha_{21}^3 \alpha_{31}^3 + \alpha_{11}^3 \alpha_{31}^3] \mu + \alpha_{11}^3 \alpha_{21}^3 \alpha_{31}^3 = 0,$$

avec

$$\mu = q^2 Ra (1 + \delta_0/2),$$

$$\beta' = 1 - 4 \tilde{\delta}^2 a_{21}^2 - 4 \tilde{\delta}^2 a_{32}^2,$$

$$\beta_0 = 1 - 4 \tilde{\delta}^2 a_{12}^2,$$

$$\beta_1 = 1 - 4 \tilde{\delta}^2 a_{32}^2,$$

$$a_{12} = a_{21} = 8/9\pi^2,$$

$$a_{32} = a_{23} = 24/25\pi^2.$$

Nous avons résolu numériquement l'équation (3.26) et les résultats figurent dans la troisième colonne du tableau II. Une fois de plus le nombre d'onde reste invariant quand δ_0 croît. Précisons que tout ce qui a été dit dans ce chapitre est relatif au cas de deux parois libres (cas dit "L-L").

III-3.e Conclusion (pour le cas L-L)

Ainsi, pas à pas, pour chaque k on peut se convaincre que la matrice $\bar{B}$ est bien réelle et symétrique ce qui implique la validité du principe d'échange des stabilités. Cela veut dire aussi que: pour tout $S \neq 0$ le problème de la convection profonde de Bénard (3.1), avec (3.2), n'admet pas d'instabilité oscillatoire. Par conséquent, l'association de la méthode de Galerkin et le critère de Routh-Hurwitz donne une preuve de l'existence de ce principe: la transition de l'état de repos (conductif) vers l'état convectif passe via un état stationnaire. Précisons encore que l'on trouvera dans la note [26] une autre preuve de la validité de ce principe basée sur une extension d'un théorème de Naimark, démontré par Di Prima et Habetler [27].

III.4 Détermination du seuil critique dans le cas R-L:

Dans le cas rigide-libre, il est nécessaire de résoudre les équations (3.1) avec les conditions aux limites:

$$(3.27) \quad \begin{cases} \Theta = \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 & \text{sur } z=0, \text{ (paroi rigide),} \\ \Theta = \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 & \text{sur } z=1, \text{ (paroi libre).} \end{cases}$$

Dans ce cas, à la place de (3.3), nous écrivons les représentations suivantes :

$$(3.28a) \quad \Psi = \sum_{n \geq 1} A_{n1}(t) \Psi_n(t) \sin q_n x;$$

$$(3.28b) \quad \Theta = \sum_{n \geq 1} B_{n1} \sin n\pi z \cos q_n x, \quad n=1, 2, \dots, N,$$

où

$$\Psi_n(z) = [a_n + b_n(z - \frac{1}{2})] \operatorname{ch}(q_n(z - \frac{1}{2})) +$$

$$[c_n + d_n(z - \frac{1}{2})] \operatorname{sh}(q_n(z - \frac{1}{2})) + \sin(n\pi z),$$

où ^{des} a_n, b_n, c_n et d_n sont des constantes d'intégrations qui sont déterminées par les conditions (3.27):

$$(3.29) \quad \begin{cases} a_n = -n\pi \frac{\operatorname{sh}^3(q_0/2)}{\operatorname{sh} q_0 \operatorname{ch} q_0 - q_0} ; \\ b_n = 2 a_n \coth^2(q_0/2) ; \\ c_n = -a_n \coth^3(q_0/2) , \\ d_n = -2 a_n \coth(q_0/2) . \end{cases}$$

En substituant Ψ et E dans le système d'équations (3.1) par leurs expressions respectives (3.28a) et (3.28b) et en appliquant la technique de Galerkin, nous obtenons un système d'équations différentielles ordinaires de la forme suivante :

$$(3.30) \quad \frac{d\bar{A}}{d\tau} = \bar{D} \bar{A} ,$$

où

$$\bar{A}^T = (X_{11}, X_{21}, \dots, X_{N1}, Y_{11}, Y_{21}, \dots, Y_{N1}) ,$$

avec

$$A_{k1} = \Gamma'_{k1} X_{k1} ,$$

$$B_{k1} = \gamma'_{k1} Y_{k1} ,$$

$$\tau = \alpha_{11} t ,$$

$$\left(\frac{\Gamma'_{i1}}{\Gamma'_{j1}}\right)^2 = \frac{C'_{ji}}{C'_{ij}} ;$$

$$\left(\frac{\Gamma'_{i1}}{\delta'_{j1}}\right)^2 = \frac{C''_{ji}}{C'_{ij}} ;$$

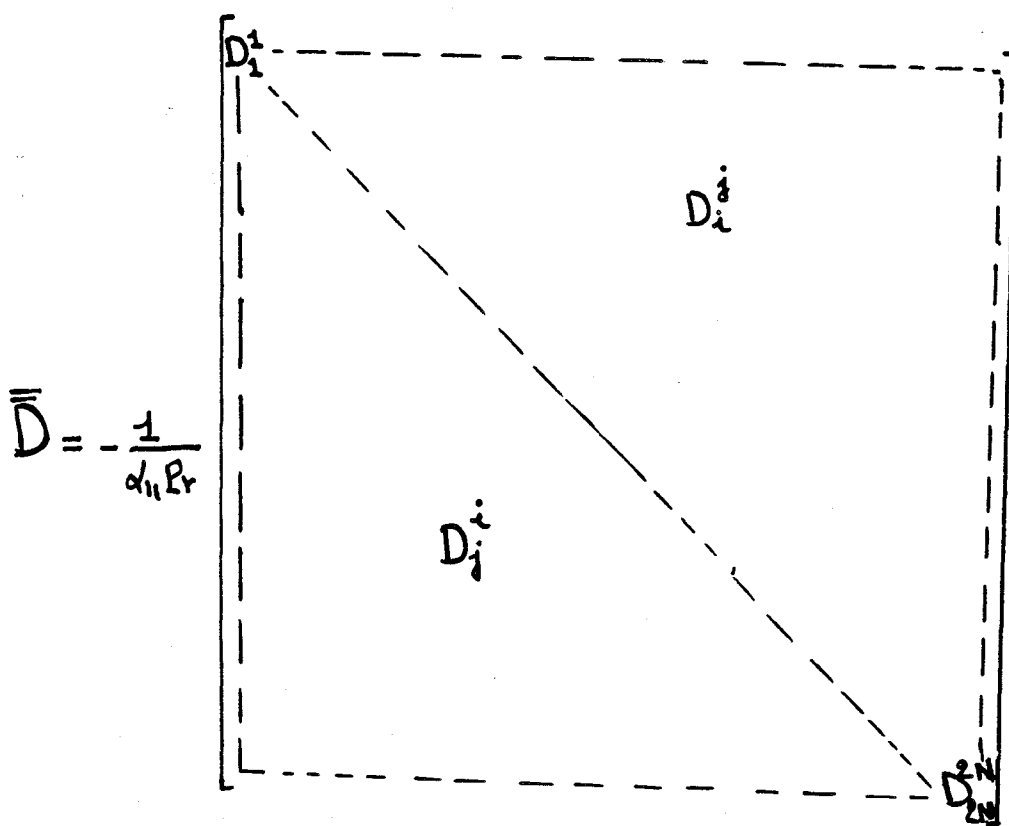
$$\left(\frac{\delta'_{i1}}{\delta'_{j1}}\right)^2 = \frac{C''_{ji}}{C''_{ij}} ,$$

où

$$C'_{ij} = (\bar{B}^{-1} \bar{F})_{ij} ;$$

$$C''_{ij} = (\bar{B}^{-1} \bar{F})_{i+N, j+N} ,$$

et une matrice $\bar{D}$ pleine $2N \times 2N$:



Pour $n \geq 2$, La matrice $\bar{D}$ est symétrique mais complexe.
 Dans ce cas, l'instabilité oscillatoire est possible.

Pour se convaincre de la validité du principe d'échange des stabilités, nous devons alors comparer le nombre de Rayleigh critique pour l'instabilité stationnaire^{*)}, R_{st} , avec celui de l'instabilité oscillatoire^{**)}, R_{osc} . Le plus petit des deux détermine le type d'instabilité présente dans ce cas. Des essais numériques ont montré que pour tout S_0 ($\forall n$) nous avons :

$$(3.31) \quad R_{st} < R_{osc} ,$$

ce qui prouve la validité du principe d'échange des stabilités.

Pour $n=2$, les deux valeurs de R_{st} et R_{osc} en fonction de S_0 sont données dans le tableau (I) ci-après :

*) R_{st} est la racine de l'équation (3.13).

**) R_{osc} est la racine de l'équation (3.14).

S_0	Raosci		Rast	
	(1)'	(2)'	(-1)	(2)
0.00	3591.339	505822.458	-1101.359	21209.228
0.10	3420.059	505414.325	-1053.076	20191.957
0.20	3265.982	505021.889	-1008.823	19277.145
0.30	3125.473	504645.297	968.119	18449.159
0.40	2999.428	504284.357	930.555	17695.492
0.50	2883.145	503938.665	895.783	17006.007
0.60	2776.232	503607.688	863.505	16372.390
0.70	2677.534	503290.821	833.462	15787.752
0.80	2586.088	502987.424	805.432	15246.330
0.90	2501.080	502696.845	779.218	14743.260
1.0	2421.820	502418.438	754.652	14274.407

Tabl I. Les deux valeurs de Raosci et Rast en fonction de S_0 , pour $n = 2$:

- (1)' est la valeur de Raosci pour le premier mode pair.

- (2)' est la valeur de Raosci pour le premier mode impair.

- (1) est la valeur Rast pour le premier mode pair.

- (2) " " " " " " " " impair.

III. 5 Analogie avec le problème de Couette-Taylor [2]:

Nous revenons au système linéaire d'équations aux dérivées partielles (3.1). Nous supposons que l'état de stabilité marginale est stationnaire [2]. Par conséquent, nous aurons le système suivant:

$$(3.32a) \quad \Delta \Delta \Psi = T ;$$

$$(3.32b) \quad \Delta T = Ra(1 + \delta/2)(1 + \tilde{\delta}(\frac{1}{2} - z)) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} ,$$

$$\text{avec } T = Pr^{-1} \frac{\partial \Theta}{\partial x} .$$

Nous associons à ce système les conditions aux limites suivantes :

- cas L-L :

$$(3.33a) \quad T = \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 , \text{ sur } z = 0, 1 ;$$

- cas R-R :

$$(3.33b) \quad T = \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 , \text{ sur } z = 0, 1 ;$$

- cas R-L :

$$(3.33c) \quad \begin{cases} T = \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \text{ sur } z=0; \\ T = \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \text{ sur } z=1. \end{cases}$$

Nous cherchons la solution de (3.32) sous la forme:

$$(3.34) \quad \begin{cases} \Psi = W(z) \varphi(x); \\ T = \Theta^*(z) \varphi(x), \end{cases}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui vérifie l'équation de Helmholtz :

$$(3.35) \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + q_0^2 \varphi = 0,$$

où q_0 est le nombre d'onde horizontale.

Il vient donc à la place du système (3.32):

$$(3.36a) \quad (D^2 - q_0^2)^2 W = \Theta^* ;$$

$$(3.36b) \quad (D^2 - q_0^2) \Theta^* = -\mu (1 + \tilde{\delta}(\frac{1}{2} - z)) W ,$$

avec

$$D = \frac{d}{dz} \quad ;$$

$$\mu = q_0^2 Ra (1 + \delta_0/2) \quad ; \quad \tilde{\delta} = \frac{2\delta_0}{2 + \delta_0} .$$

Dans ce cas les conditions sur les frontières sont :

- cas L-L :

$$(3.37a) \quad \Theta^* = W = D^2 W = 0 \quad , \quad \text{sur } z = 0, 1 \quad ;$$

- cas R-R :

$$(3.37b) \quad \Theta^* = W = DW = 0 \quad , \quad \text{sur } z = 0, 1 \quad ;$$

- cas R-L :

$$(3.37c) \quad \begin{cases} \Theta^* = W = DW = 0 \quad , \quad \text{sur } z = 0 \quad ; \\ \Theta^* = W = D^2 W = 0 \quad , \quad \text{sur } z = 1 . \end{cases}$$

Supposons que la perturbation de la température Θ^* est de la forme :

$$(3.38) \quad \Theta^* = \sum_{m \geq 1} E_m d_m^2 \sin(m\pi z) \quad ,$$

avec

$$d_{m1} = m^2 \pi^2 + q_0^2 ,$$

qui vérifie les conditions aux limites pour chaque valeur de m . En substituant cette expression de Θ^* dans (3.36a), nous déduisons l'expression de la perturbation de la fonction de courant W suivante :

$$(3.39) \quad W = \sum_{m \geq 1} E_m W_m ,$$

avec

$$W_m = [A_m + B_m(z - 1/2)] \cosh q_0(z - 1/2) + [C_m + D_m(z - 1/2)] \sinh q_0(z - 1/2) + \sin(m\pi z) .$$

Les constantes d'intégrations A_m, B_m, C_m et D_m sont complètement déterminées par les conditions aux frontières considérées. Cela conduit à tenir compte de trois types de solutions pour A_m, B_m, C_m et D_m :

- cas L-L :

$$(3.40 a) \quad A_m = B_m = C_m = D_m = 0 ,$$

- cas R-R :

$$(3.40b) \quad \begin{cases} 2A_m = m\pi \frac{(-1)^m - 1}{\operatorname{sh} q_0 + q_0} \operatorname{sh}(q_0/2) ; \\ D_m = -m\pi \frac{(-1)^m - 1}{\operatorname{sh} q_0 + q_0} \operatorname{ch}(q_0/2) ; \\ 2C_m = m\pi \frac{(-1)^m + 1}{\operatorname{sh} q_0 - q_0} \operatorname{ch}(q_0/2) ; \\ B_m = -m\pi \frac{(-1)^m + 1}{\operatorname{sh} q_0 - q_0} \operatorname{sh}(q_0/2) , \end{cases}$$

--cas R-L :

$$(3.40c) \quad \begin{cases} A_m = -m\pi \operatorname{sh}^3(q_0/2) / (\operatorname{sh} q_0 \operatorname{ch} q_0 - q_0) ; \\ B_m = 2A_m \coth^2(q_0/2) ; \\ C_m = -A_m \coth^3(q_0/2) ; \\ D_m = -2A_m \coth^2(q_0/2) . \end{cases}$$

Il reste maintenant à écrire les conditions d'existence d'une solution non nulle. Pour cela, il faut substituer les expressions (3.38) et (3.39), pour Ξ^* et W respectivement, dans l'équation (3.36b). Nous obtenons alors la condition :

$$(3.41) \quad \sum_{m \geq 1} E_m \left[\frac{d_{m1}^3}{\mu} \sin m\pi z - (1 + \tilde{\delta}(\frac{1}{2} - z)) W_m \right] = 0,$$

où

$$\mu = q_0^2 Ra (1 + \delta_0/2) \text{ et } \tilde{\delta} = \frac{2\delta_0}{2 + \delta_0}.$$

Multiplions maintenant cette expression (3.41) par $\sin(n\pi z)$ et intégrons en z de 0 à 1. Nous obtenons alors un système linéaire et homogène pour les constantes E_m . Pour éviter la solution triviale, il faut que le déterminant de ce système soit nul. Après calculs et simplifications, nous aboutissons à l'équation séculaire suivante :

$$(3.42) \quad \det \left[\frac{d_{m1}^3}{\mu} \delta_{mn} + 2(m/n) \right] = 0,$$

$$\text{où } 2(m/n) = -2 \int_0^1 [1 + \tilde{\delta}(\frac{1}{2} - z)] W_m \sin(n\pi z) dz$$

$$\begin{aligned} &= - \left[\delta_{mn} + \frac{4n\pi q_0}{d_{n1}^2} \left\{ B_m \operatorname{sh}(q_0/2) ((-1)^n + 1) \right. \right. \\ &+ D_m \operatorname{ch}(q_0/2) [(-1)^n + 1] \left. \right\} - \frac{4n\pi q_0 \tilde{\delta}}{d_{n1}^2} \left\{ A_m \operatorname{sh}(q_0/2) ((-1)^n + 1) + \right. \\ &C_m \operatorname{ch}(q_0/2) ((-1)^n - 1) + B_m \operatorname{sh}(q_0/2) ((-1)^n - 1) + D_m \operatorname{ch}(q_0/2) ((-1)^n + 1) \\ &\left. \left. - \frac{3q_0^2 - n^2\pi^2}{q_0 \alpha_{n1}} \left[B_m \operatorname{ch}(q_0/2) ((-1)^n - 1) + D_m \operatorname{sh}(q_0/2) ((-1)^n + 1) \right] \right\} + 2\tilde{\delta} I_{mn} \right], \end{aligned}$$

avec

$$S_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n ; \\ 1 & \text{si } m = n , \end{cases}$$

et

$$I_{mn} = I_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n , \\ -\frac{(-1)^{m+n}}{2\pi^2} \left[\frac{1}{(m-n)^2} - \frac{1}{(m+n)^2} \right] & \text{si } m \neq n . \end{cases}$$

La méthode de résolution d'une équation caractéristique d'ordre infini du type (3.42), fournissant la valeur critique du nombre de Rayleigh R_{ac} et la valeur du nombre d'onde associé q_{oc} , consiste à annuler le déterminant associé (formé par les m premières lignes et les m premières colonnes de la matrice séculaire). Il apparaît alors, qu'à partir d'une certaine valeur m , la plus petite valeur de R_a tend vers une valeur limite. Les valeurs critiques de R_a données par (3.42) avec (3.40a) coïncident avec les valeurs calculées dans III.3 (voir le tableau II placé à la fin de ce chapitre III).

Nous représentons aussi les résultats numériques de (3.42) avec (3.40b) et (3.40c) respectivement pour différentes valeurs de m dans les tableaux III et IV respectivement, placés aussi à la fin de ce chapitre III. Nous avons constaté par des essais numériques que la valeur du nombre d'onde correspondant à l'état critique ne varie pas en fonction du paramètre de profondeur S_0 . La valeur de R_{ac} décroît quand S_0 croît indiquant que la couche de fluide devient de moins en moins stable lorsque son épaisseur croît, du moins en théorie linéaire.

Sur la figure 1, placé aussi à la fin de ce chapitre^{III}, nous traçons l'allure du rapport R_{ac}/R_{ac}^* en fonction de S_0 pour les trois conditions aux limites considérées. Il en résulte le rôle important joué par les conditions aux limites et le paramètre de profondeur sur la valeur du nombre de Rayleigh à laquelle l'écoulement devient instationnaire (voir figure 1, page 70).

* R_{ac} est le nombre de Rayleigh critique pour la convection profonde ($S_0 \neq 0$),

R_{ac}^* est le nombre de Rayleigh critique pour la convection peu profonde ($S_0 = 0$).

III.6 La technique des perturbations [2]:

On considère maintenant le paramètre $\tilde{\delta} = \frac{2\delta_0}{2+\delta_0}$ comme étant petit devant l'unité^{*)}, afin de construire une solution asymptotique de (3.36). De l'équation (3.36a) on peut éliminer la fonction Θ^* ; il vient donc pour W le problème suivant :

$$(3.43a) \quad (D^2 - q_0^2)^3 W = -q_0^2 \tilde{R}_a F(u) W ;$$

$$(3.43b) \quad \tilde{R}_a = R_a (1 + \delta_0/2) ,$$

$$(3.43c) \quad \tilde{\delta} = 2\delta_0 / (2 + \delta_0) ,$$

$$(3.43d) \quad F = 1 - \tilde{\delta} u ,$$

$$(3.43e) \quad u = z - 1/2$$

$$(3.43f) \quad D = \frac{d}{du} ,$$

avec les conditions aux limites suivantes:

a) Cas Libre-libre:

^{*)} On notera que lorsque $\delta_0 \rightarrow \infty$ (!) on a que $\tilde{\delta} \rightarrow 2$!. Ce qui montre que le fait que $\tilde{\delta}$ soit petit devant un impose sur δ_0 une contrainte relativement faible; on verra d'ailleurs que cette technique des perturbations marche très bien pour $\delta_0 \rightarrow 1$.

$$(3.44a) \quad W = D^2 W = D^4 W = 0 \quad , \quad \text{sur } u = \pm 1/2 ;$$

b) Cas Rigide-Rigide :

$$(3.44b) \quad W = DW = (D^2 - q_0^2)^2 W = 0 \quad , \quad \text{sur } u = \pm 1/2 .$$

Pour $\tilde{S} = S_0 = 0$, l'équation (3.43a) est réduite à celle du problème classique de Rayleigh-Bénard de la théorie linéaire [2] et [3]. Quand $\tilde{S}$ est supposé petit devant l'unité, nous cherchons la solution du problème sous la forme d'un développement en série entière en $\tilde{S}$:

$$(3.45a) \quad W = W_0 + \tilde{S} W^{(1)} + \tilde{S}^2 W^{(2)} + \dots ;$$

$$(3.45b) \quad \tilde{R}_a = R_{a0} + \tilde{S} \tilde{R}_a^{(1)} + \tilde{S}^2 \tilde{R}_a^{(2)} + \dots ,$$

avec R_{a0} le nombre de Rayleigh critique pour la convection peu profonde.

Après substitutions dans l'équation (3.43a), nous obtenons :

— à l'ordre 0 en $\tilde{S}$:

$$(3.46a) \quad (D^2 - q_0^2)^3 W_0 = -q_0^2 R_{a0} W_0 ;$$

— à l'ordre 1 en $\tilde{S}$:

$$(3.46b) \quad (D^2 - q_0^2)^3 W^{(1)} = -q_0^2 [Ra_0 W^{(1)} - Ra_0 u W_0 + \tilde{Ra}^{(1)} W_0] ;$$

- à l'ordre 2 en $\tilde{\delta}$:

$$(3.46c) \quad (D^2 - q_0^2)^3 W^{(2)} = -q_0^2 [Ra_0 W^{(2)} - Ra_0 u W^{(1)} + \tilde{Ra}^{(1)} W^{(1)} - \tilde{Ra}^{(1)} u W_0 + \tilde{Ra}^{(2)} W_0] .$$

L'équation (3.46a) a été traitée dans plusieurs ouvrages [2], [3], [18] etc Pour résoudre l'équation (3.46b), pour $W^{(1)}$, nous supposons que :

$$(3.47) \quad W^{(1)} = \sum_{j \geq 0} A_j^{(1)} W_j ,$$

où les W_j sont les fonctions propres associées à la valeur propre Ra_j ($(D^2 - q_0^2) W_j = -q_0^2 Ra_j W_j$).

Comme conséquence, il faut que la relation suivante soit satisfaite :

$$(3.48) \quad \sum_{j \geq 0} A_j^{(1)} Ra_j W_j = Ra_0 \sum_{j \geq 0} A_j^{(1)} W_j + \tilde{Ra}^{(1)} W_0$$

$$- Ra_0 u W_0 ;$$

multiplions la relation (3.48) par Θ_k^* ($\Theta_k^* = (D^2 - q^2)^* W_k$) et intégrons en u de $-1/2$ à $+1/2$. Si nous tirons profit de la condition d'orthogonalité :

$$(3.49) \quad \int_{-1/2}^{+1/2} \Theta_k^* W_j du = \delta_{kj} ,$$

nous obtenons :

$$(3.50) \quad A_k^{(1)} R_{a_k} = R_{a_0} A_k^{(1)} - R_{a_0} \int_{-1/2}^{+1/2} u W_0 \Theta_k^* du + \tilde{R}_a^{(1)} \delta_{0k} .$$

Pour $k=0$, il vient, de (3.50), en particulier :

$$(3.51) \quad \tilde{R}_a^{(1)} = R_{a_0} \int_{-1/2}^{+1/2} W_0 u \Theta_0^* du ,$$

Comme les fonctions propres W_0 et Θ_0^* correspondants à R_{a_0} sont paires et $u W_0 \Theta_0^*$ est impaire alors [2] :

$$(3.52) \quad \int_{-1/2}^{+1/2} W_0 \Theta_0^* u du = 0 ,$$

et

$$(3.53) \quad \tilde{R}_a^{(1)} = 0 .$$

Pour $k \neq 0$, cette même équation (3.50) donne :

$$(3.54) \quad A_k^{(1)} = - \frac{R_{a_0}}{R_{a_k} - R_{a_0}} \int_{-1/2}^{+1/2} W_0 u \Theta_k^* du , (k \neq 0) .$$

Le coefficient $A_0^{(1)}$ reste indéterminé, mais cela n'a pas d'importance pour la suite de nos calculs.

Comme $\tilde{R}_a^{(1)} = 0$, l'équation (3.46c) devient :

$$(3.55) \quad (D^2 - q_0^2)^3 W^{(2)} = -q_0^2 [Ra_0 W^{(2)} - Ra_0 u W^{(1)} + \tilde{R}_a^{(2)} W_0],$$

et on cherche sa solution sous la forme :

$$(3.56) \quad W^{(2)} = \sum_{j \geq 0} A_j^{(2)} W_j, \quad ,$$

Ce qui conduit à la relation :

$$(3.57) \quad \sum_{j \geq 1} A_j^{(2)} Ra_j W_j = Ra_0 \sum_{j \geq 0} A_j^{(2)} W_j - Ra_0 u W^{(1)} + \tilde{R}_a^{(2)} W_0.$$

Multiplions cette équation (3.57) par Θ_0^* et intégrons en u de $-1/2$ à $+1/2$, il vient :

$$(3.58) \quad A_0^{(2)} Ra_0 = A_0^{(2)} Ra_0 - Ra_0 \int_{-1/2}^{+1/2} \Theta_0^* u W^{(1)} du + \tilde{R}_a^{(2)},$$

et de ce fait :

$$(3.59) \quad \tilde{R}_a^{(2)} = Ra_0 \int_{-1/2}^{+1/2} \Theta_0^* u W^{(1)} du \neq 0.$$

On remplace $W^{(1)}$ par son expression (3.47); on obtient:

$$(3.60) \quad \tilde{Ra}^{(2)} = Ra_0 \sum_{k \geq 0} A_k^{(1)} \int_{-1/2}^{+1/2} u W_k \Theta_0^* du.$$

Comme $\int_{-1/2}^{+1/2} u W_0 \Theta_0^* du = 0$, le terme en $k=0$ dans (3.60) est nul, donc la sommation dans cette expression part de $k=1$. Si nous remplaçons maintenant $A_k^{(1)}$ ($k \neq 0$) par son expression (3.54), nous obtenons $\tilde{Ra}^{(2)}$ sous la forme suivante:

$$(3.61) \quad \tilde{Ra}^{(2)} = -Ra_0^2 \sum_{k \geq 1} \frac{\int_{-1/2}^{+1/2} \Theta_k^* u W_0 du \int_{-1/2}^{+1/2} u \Theta_0^* W_k du}{Ra_k - Ra_0}.$$

Ainsi, si l'on ne tient compte que d'un seul terme dans la somme figurant dans la relation (3.61) nous obtenons l'expression approchée du nombre de Rayleigh $\tilde{Ra}$ [2]:

$$(3.62) \quad \tilde{Ra} \simeq Ra_0 \left[1 - \tilde{S}^2 \frac{Ra_0}{Ra_1 - Ra_0} \int_{-1/2}^{+1/2} \Theta_0^* u W_1 du \int_{-1/2}^{+1/2} \Theta_1^* u W_0 du \right],$$

et en vertu de la relation (3.43b) nous obtenons:

$$(3.63) \quad Ra = \frac{Ra_0}{1 + S_0/2} \left[1 - \tilde{S}^2 \frac{Ra_0}{Ra_1 - Ra_0} \int_{-1/2}^{+1/2} \Theta_0 u W_1 du \int_{-1/2}^{+1/2} \Theta_1 u W_0 du \right]$$

avec

Ra_0 : le nombre de Rayleigh pour le premier mode pair
et Ra_1 : le nombre de Rayleigh pour le premier mode-impair.

Pour obtenir Ra_c , on doit minimiser le second membre de (3.63) en fonction du nombre d'onde q_0 . Nous obtenons alors pour le cas de deux parois rigides:

$$(3.64) \quad Ra_c = \frac{1707.9}{1 + \delta_0/2} \left[1 - 7.61 \times 10^{-3} \left(\frac{\delta_0}{2 + \delta_0} \right)^2 \right]$$

$$(\text{pour } q_{0c} = 3.117)$$

et pour le cas deux parois libres:

$$(3.65) \quad Ra_c = \frac{657.5}{1 + \delta_0/2} \left[1 - 4.99 \times 10^{-3} \left(\frac{\delta_0}{2 + \delta_0} \right)^2 \right].$$

$$(\text{pour } q_{0c} = \pi/\sqrt{2})$$

S_0	q_{0c}	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	la méthode des perturbations
0.00	$\pi/\sqrt{2}$	657.511	657.511	657.511	657.511	657.511
0.10	"	626.201	626.194	626.194	626.194	626.18
0.20	"	597.737	597.713	597.713	597.713	597.70
0.30	"	571.749	571.700	571.700	571.700	571.69
0.40	"	547.926	547.850	547.850	547.850	547.83
0.50	"	526.009	525.904	525.904	525.904	525.89
0.60	"	505.778	505.644	505.644	505.644	505.634
0.70	"	487.045	486.882	486.882	486.882	486.87
0.80	"	469.651	469.460	469.460	469.460	469.45
0.90	"	453.456	453.238	453.238	453.238	453.23
1.00	"	438.341	438.098	438.098	438.098	438.089

TABL II : Ra critique et le nombre d'onde associé
pour différentes valeurs du paramètre
de profondeur S_0 .
 - cas libre-libre.

δ_0	q_{oc}	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	la méthode de perturbations
0.00	3.117	1715.080	1715.08	1707.937	1707.937	1707.94
0.10	"	1633.498	1633.38	1626.579	1626.577	1626.82
0.20	"	1559.163	1559.063	1552.573	1552.567	1552.56
0.30	"	1491.374	1491.176	1484.97	1484.960	1484.96
0.40	"	1429.233	1428.923	1422.9835	1422.965	1422.98
0.50	"	1372.064	1371.635	1365.938	1365.913	1365.928
0.60	"	1319.292	1318.743	1313.271	1313.239	1313.26
0.70	"	1270.429	1269.763	1264.498	1264.459	1264.49
0.80	"	1225.057	1224.276	1219.205	1219.160	1219.19
0.90	"	1182.814	1181.925	1177.034	1176.982	1177.02
1.00	"	1143.38	1142.395	1137.673	1137.61	1137.65

TABL III : Ra critique et le nombre d'onde associé pour différentes valeurs du paramètre de profondeur δ_0 .
- cas Rigide - Rigide.

S_0	q_{lc}	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
0.00	2.682	1112.70257	1101,3589	1100.74005	1100.6458
0.10	"	1062.7375	1053.0761	1052.43605	1052.3505
0.20	"	1017.067	1008.8233	1008.16737	1008.0889
0.30	"	975.16008	968,11901	967.45153	967.3787
0.40	"	936.5699	930.55506	929.879604	929.8115
0.50	"	900.91774	895.7833	895.1027	895.0385
0.60	"	867.8803	863.5050	862.8217	862.7606
0.70	"	837.1802	833.4623	832.7782	832.7198
0.80	"	808.5779	805.4318	804.7484	804.6923
0.90	"	781.8654	779.2184	778.5371	778.4829
1.00	"	756.8614	754.6518	753.9735	753.92095

TABL IV : Ra critique et le nombre d'onde
associé pour différentes valeurs du paramètre
de profondeur S_0 .
 - cas : Rigue-libre.

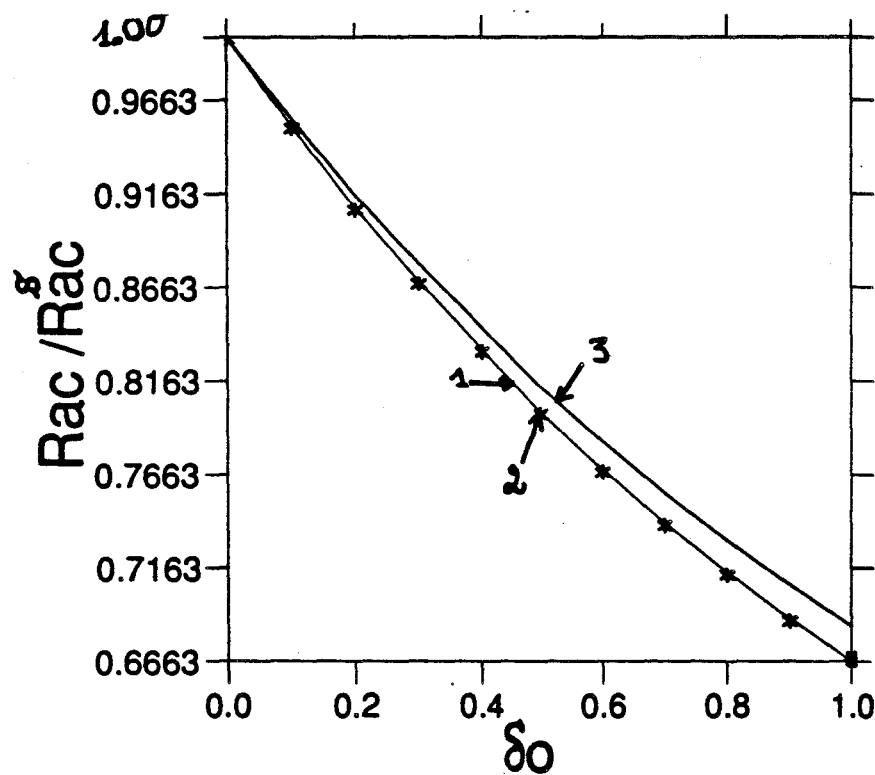


figure 1 : l'allure de $\frac{R_{ac}}{R_{ac}^s}$ en fonction du paramètre de profondeur δ_0 :

- 1) cas libre-libre,
- 2) cas Rigide-Rigide,
- 3) cas Rigide-libre.

-IV-

**ANALYSES NON LINEAIRE :
DERIVATIONS DES SYSTEMES DYNAMIQUES
ASSOCIES.**

La résolution numérique directe du système d'équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes régissant la convection "profonde" de Bénard demande un temps de calcul assez grand, à coût très élevé. Dans ce chapitre, nous décrivons une méthode souvent utilisée pour la résolution des systèmes de même type que (2.56) avec les conditions (2.57). Cette méthode consiste à développer les fonctions inconnues en une double série de Fourier. Chaque terme de cette série doit satisfaire les conditions aux limites considérées. Puis grâce à la procédure de Galerkin, nous obtenons un système d'équations différentielles ordinaires que vérifient les coefficients de la série de Fourier (fonctions inconnues du temps).

Dans la section IV-2, nous décrivons la méthode de troncature généralement utilisée pour des fins numériques. Ensuite, dans la section IV-3, nous présentons les systèmes que nous avons intégrés numériquement. Enfin, en appendice, on trouvera l'écriture détaillée des quatre systèmes dynamiques analysés numériquement. Les résultats de ces calculs numériques et les graphes correspondants étant présentés au chapitre suivant V.

IV-1 Obtention d'un système dynamique non linéaire.

Selon la théorie linéaire, les perturbations de la fonction de courant et de la température sont amplifiées pour des valeurs de Ra surcritiques. Il est évident que la théorie linéaire ne peut plus décrire le comportement de ce système instable. De ce fait, il faut tenir compte des termes non linéaires c'est-à-dire étudier le système complet qui régit la convection profonde de Rayleigh-Bénard suivant (cas bidimensionnel):

$$(4.1a) \quad Pr \left[\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} - \frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(x, z)} \right] + \frac{\partial \Theta}{\partial x} = Pr \Delta \Delta \Psi ;$$

$$(4.1b) \quad Pr \left[1 + \tilde{\delta} \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \right] \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial(\Theta, \Psi)}{\partial(x, z)} + Ra \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] =$$

$$\frac{\Delta \Theta}{1 + \delta_0/2} + \frac{\tilde{\delta} Pr^2}{2} \Phi^* ,$$

$$(4.1c) \quad \text{où} \quad \Phi^* = 8 \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right]^2 ;$$

$$(4.1d) \quad \tilde{\delta} = 2\delta_0/(2 + \delta_0) ;$$

$$(4.1e) \quad \frac{\partial(A, B)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial x} .$$

Les conditions aux limites associées à ce système sont (cas de deux parois libres):

$$(4.2) \quad \Theta = \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{sur } z = 0, 1.$$

On décrit en réalité le comportement convectif dans une cellule rectangulaire située entre deux parois verticales $x=0$ et $x=L$, L est la longueur horizontale (adimensionnelle) de cette cellule. Ni fluide, ni flux de chaleur ne traversent ces deux parois. De ce fait, il vient les conditions suivantes:

$$(4.3) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } x = 0, L.$$

Les perturbations Θ et Ψ peuvent être représentées par une double série de fonctions propres vérifiant les conditions aux limites, les coefficients étant des fonctions inconnues en temps:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \Psi(x, z, t) = \sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq 1} A_{pq} \sin p\pi z \sin q q_0 x; \\ \Theta(x, z, t) = \sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq 0} B_{pq} \sin p\pi z \cos q q_0 x, \end{cases}$$

avec $q_0 = \text{constante} = \text{nombre d'onde horizontal}$.

En remplaçant Θ et Ψ du système (4.1) par leurs expressions respectives (4.4), puis grâce à la procédure de Galerkin, on se ramène à un système d'équations différentielles du premier ordre que vérifient les coefficients de la décomposition de Fourier $A_{pq}(t)$ et $B_{pq}(t)$ suivant:

$$(4.5a) \quad -dpq \Pr \frac{dA_{pq}}{dt} = qq_0 B_{pq} + dpq^2 \Pr A_{pq}$$

$$-4\pi q_0 \Pr \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} d_{rs} A_{rs} A_{ke} \left[r\ell I_{rkp}^{css} I_{\ell sq}^{css} - k s I_{krp}^{css} I_{s\ell q}^{css} \right];$$

$$(4.5b) \quad \Pr \left[\frac{dB_{pq}}{dt} + qq_0 R_a A_{pq} - 4\pi q_0 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{rs} B_{ke} \right.$$

$$\left. \left[s k I_{krp}^{css} I_{s\ell q}^{ccc} + r\ell I_{q\ell s}^{css} I_{rkp}^{css} \right] \right] = -\frac{dpq B_{pq}}{1 + \delta_0/2}$$

$$-2\tilde{\delta} \Pr \left[\sum_m^{\infty} K_{omp}^{css} \left\{ \frac{dB_{mq}}{dt} + qq_0 R_a A_{mq} \right\} - 2\pi q_0 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{rs} B_{ke} \right.$$

$$\left. \left\{ s k I_{s\ell q}^{ccc} K_{krp}^{css} + r\ell I_{q\ell s}^{css} K_{rkp}^{css} \right\} - 2\Pr \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} A_{rs} A_{ke} \left\{ \right.$$

$$\left. 4\pi q_0^2 r k s \ell I_{s\ell q}^{ccc} I_{rkp}^{css} + \bar{d}_{rs} \bar{d}_{ke} I_{q\ell s}^{css} I_{rkp}^{sss} \right\} \right],$$

$$(4.5c) \quad \Pr \left[\frac{dB_{p0}}{dt} - 2\pi q_0 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{rs} B_{ke} \left\{ s k I_{krp}^{css} I_{s\ell 0}^{ccc} \right. \right.$$

$$\left. \left. + r\ell I_{0\ell s}^{css} I_{rkp}^{css} \right\} \right] = -\frac{dp_0 B_{p0}}{1 + \delta_0/2} - 2\tilde{\delta} \Pr \left[\sum_m^{\infty} K_{omp}^{css} \frac{dB_{m0}}{dt} \right.$$

$$- \pi q_0 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{rs} B_{ke} \left\{ s k I_{s\ell 0}^{ccc} K_{krp}^{css} + r\ell I_{0\ell s}^{css} K_{rkp}^{css} \right\}$$

$$- \Pr \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ke} A_{rs} \left\{ 4\pi q_0^2 r k \ell s I_{s\ell 0}^{ccc} I_{rkp}^{css} + \bar{d}_{rs} \bar{d}_{ke} I_{0\ell s}^{css} I_{rkp}^{sss} \right\}$$

avec

$$dpq = p^2 \pi^2 + q^2 q_0^2 ;$$

$$\bar{d}rs = r^2 \pi^2 - s^2 q_0^2 ;$$

$$I_{ijk}^{sss} = \int_0^1 \sin i\pi z \sin j\pi z \sin k\pi z dz ;$$

$$I_{ijk}^{css} = \int_0^1 \cos i\pi z \sin j\pi z \sin k\pi z dz ;$$

$$I_{ijk}^{ccc} = \int_0^1 \cos i\pi z \cos j\pi z \cos k\pi z dz ;$$

$$K_{ijk}^{ess} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - z\right) \cos i\pi z \sin j\pi z \sin k\pi z dz ,$$

$$K_{ojk}^{css} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - z\right) \sin j\pi z \sin k\pi z dz .$$

Pour $\tilde{S} = S_0 = 0$, le système dynamique (4.5) se réduit au système dynamique classique régissant la convection "peu profonde" de Rayleigh-Bénard [4]. La résolution du système (4.5) pour un nombre de doublet (p, q) très grand donnera une solution approchée du système d'équations aux dérivées partielles (4.1) et son comportement au cours du temps.

Les conditions initiales associées à (4.5) sont :

$$(4.6) \quad A_{pq}(t=0) = A_{pq}^0 \text{ et } B_{pq}(t=0) = B_{pq}^0 ,$$

où A_{pq}^0 et B_{pq}^0 sont des constantes arbitraires qui seront spécifiées lors des essais numériques.

IV-2 Description de la méthode de troncature :

Afin d'intégrer ce système infini d'équations différentielles ordinaires par des méthodes numériques, nous devons le rendre fini en choisissant un nombre limité de modes de façon à obtenir une solution suffisamment représentative du problème que l'on approche. Il est évident que si l'on tient compte d'un très grand nombre de modes dans le système (4.5), on obtiendra une bonne approximation de la solution exacte du problème physique régi par le système d'équations aux dérivées partielles (4.1) avec les conditions (4.2) et (4.3). Dans ce but, nous disposons de deux types de troncatures :

$$(4.7) \quad a) \quad p+q \leq K \quad ;$$

$$(4.8) \quad b) \quad p \leq P \text{ et } q \leq Q \quad ,$$

où

p est l'indice suivant z (variable verticale) ;

q est l'indice suivant x (variable horizontale),

K , P et Q sont des paramètres de troncature.

Dans le cas classique de Rayleigh-Bénard, pour des raisons de symétrie, on ne peut prendre en considération que les modes appartenant au sous-espace des fonctions avec $(p+q)$ pair [4], [5] et [6]^(*). Cette restriction est mathématiquement consistante puisque la solution du système d'équations aux dérivées partielles (4.1), pour $\tilde{\delta} = \delta_0 = 0$, appartient à ce sous-espace quand les conditions initiales sont du même sous-espace [21]. Des essais numériques et expérimentaux ont indiqué que seule les modes avec $(p+q)$ pair peuvent bifurquer [10], [22]. Dans le cas de la convection profonde de Rayleigh-Bénard, nous devons tenir compte aussi des modes appartenants au sous-espace des fonctions avec $(p+q)$ impair puisque la présence du paramètre de profondeur δ_0 , couple ces deux types de modes. De ce fait, l'instabilité des modes pairs génèrent l'instabilité des modes impairs. Par conséquent le paramètre K , qui ne prend que des valeurs

^(*) Les modes du sous-espace $(p+q)$ impair s'atténuent au cours du temps. [5]

paires dans le cas de la convection "peu profonde", prendra
aussi des valeurs impaires dans le cas "profond".

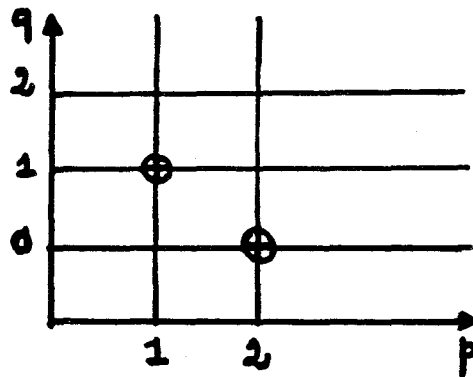
IV-3 Présentation des modes étudiés:

L'espace des modes que nous avons étudiés regroupe donc deux sous-espaces:

- Le sous-espace des fonctions avec $(p+q)$ pair.
- Le sous-espace des fonctions avec $(p+q)$ impair.

Sur les croquis ci-dessous, nous indiquons les modes présents dans les systèmes dynamiques que nous avons considérés dans la présente étude.

a) $p+q \leq 2$: Le système résultant est analogue à celui de Lorenz [7]^(*):

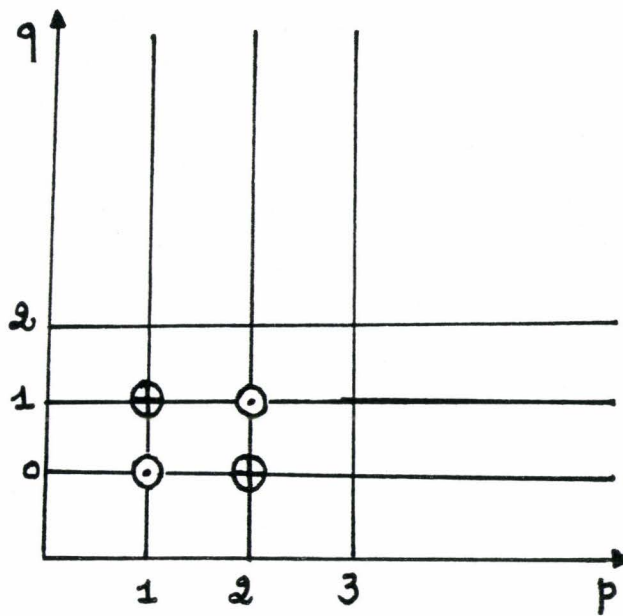


⊕ sont des modes du sous-espace pair.

b) $p \leq 2$ et $q \leq 1$: La troncature génère un système de six équations à six inconnues (3 modes pairs et 3 impairs):

(*)

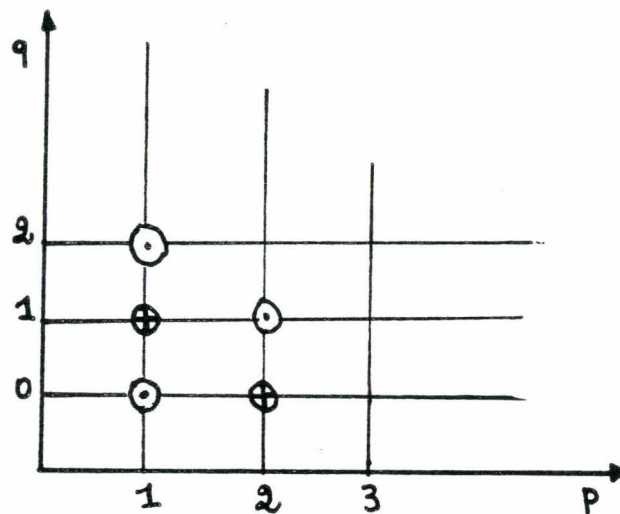
^{Dependait} On note la présence du paramètre δ_0 dans ce système dynamique composé de trois équations du premier ordre.



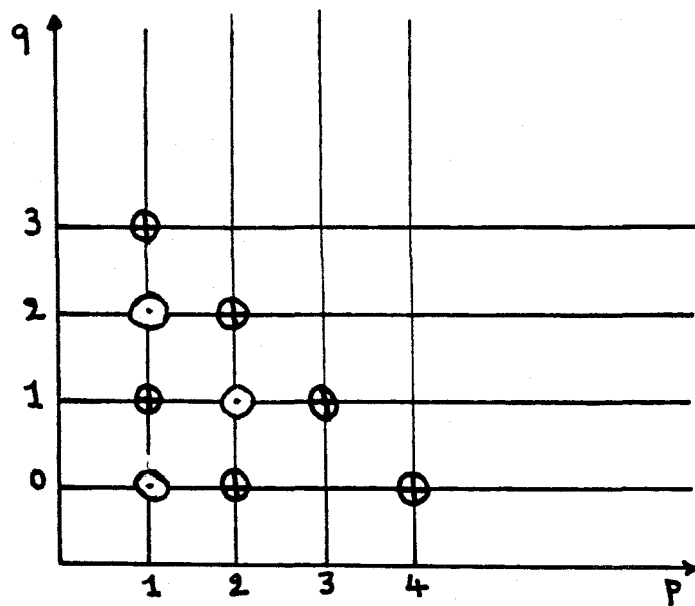
⊕ modes du sous-espace pair .

⊖ modes du sous-espace impair .

c) $p+q \leq 3$: Il en résulte un système de huit équations à huit inconnues (3 modes pairs et 5 impairs) :



d) $p+q \leq 4$: Il en résulte un système de quinze équations à quinze inconnues (10 modes pairs et 5 impairs) :



IV-4 les scénarios de Transition vers le chaos:

La théorie linéaire fournit le premier point de bifurcation: le fluide primitivement au repos se met en mouvement stationnaire. Quand on augmente la valeur du paramètre de bifurcation Ra , il peut encore arriver un autre point de bifurcation où le régime stationnaire perd sa stabilité au profit d'un état instationnaire. En effet, un régime périodique de fréquence F_1 succède au régime stationnaire. C'est à ce moment là, que le scénario de transition vers le chaos peut prendre des routes très différentes selon le chemin parcouru dans l'espace des paramètres^(*). D'après [23] les régimes qui peuvent succéder à l'écoulement périodique sont:

- Option 1: nous obtenons dans ce cas une cascade de bifurcations sous-harmoniques: chaque étape s'accompagne de la division par deux de la fréquence F_1 , c'est à dire d'un dédoublement de période. On a pu observer la suite de dédoublements suivante [24], [11], [31]:

$$F_1 \longrightarrow F_1/2 \longrightarrow F_1/4 \longrightarrow F_1/8 \longrightarrow F_1/16 \dots$$

Après ces régimes le chaos s'installe.

(*) Les paramètres de notre problème sont: Pr et So .

Option 2: Cette bifurcation est caractérisée par l'apparition d'un écoulement quasi-périodique à deux fréquences fondamentales F_1 et F_2 : Toutes les grandeurs caractéristiques oscillent ^{plus} non avec une seule fréquence F_1 mais avec la coexistence de deux fréquences F_1, F_2 incommensurables (le rapport de ces deux fréquences est irrationnel).

Option 2a: Par augmentation de la valeur de Ra , le rapport des deux fréquences précédentes devient rationnel (commensurables)

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (n_1, n_2 \text{ entiers}).$$

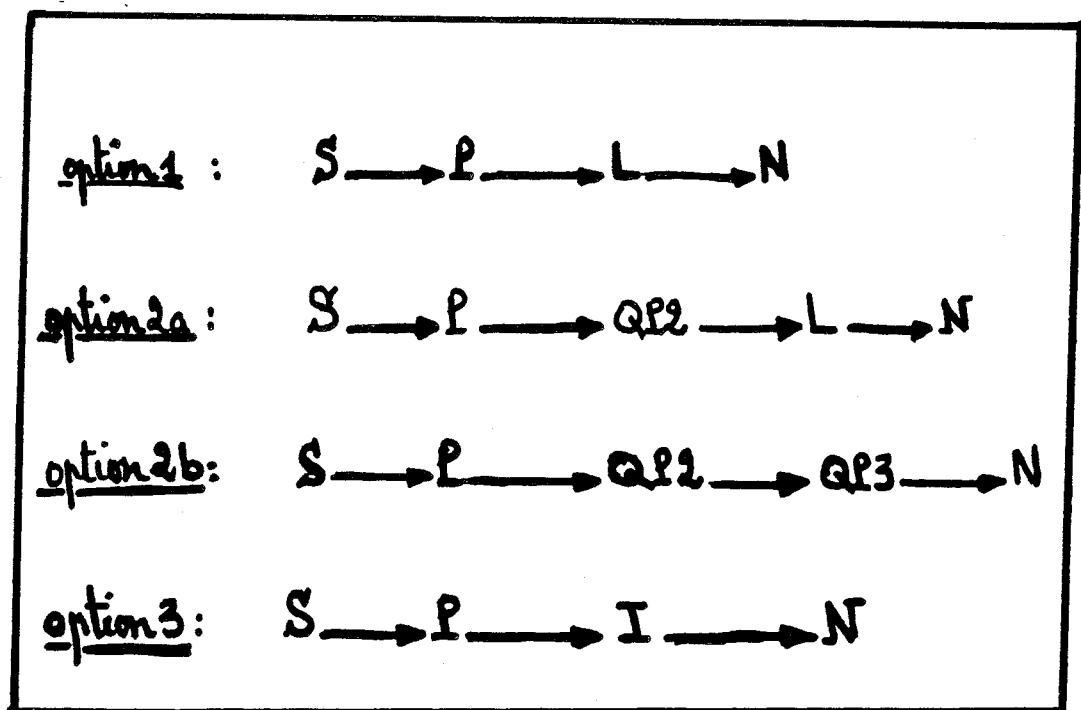
Le signal quasi-périodique est alors périodique de période $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$. Dans ce cas on dit qu'il y a accrochage des deux fréquences F_1, F_2 l'une sur l'autre. Lors d'un dernier accrochage se produit alors le phénomène de dédoubléments successifs de périodes décrit à l'option 1.

Option 2b: Pour des valeurs croissantes de Ra , une troisième fréquence F_3 apparaît [11]. L'écoulement à 3 fréquences, pour des valeurs de Ra très rapprochées peut être instable et remplacé par un état complètement chaotique.

Option 3: L'écoulement périodique laisse la place à un état intermittent: l'écoulement semble périodique sur un grand nombre de périodes, puis intervient une "bouffée de chaos", elle-même à nouveau suivie par un comportement périodique régulier, etc... La

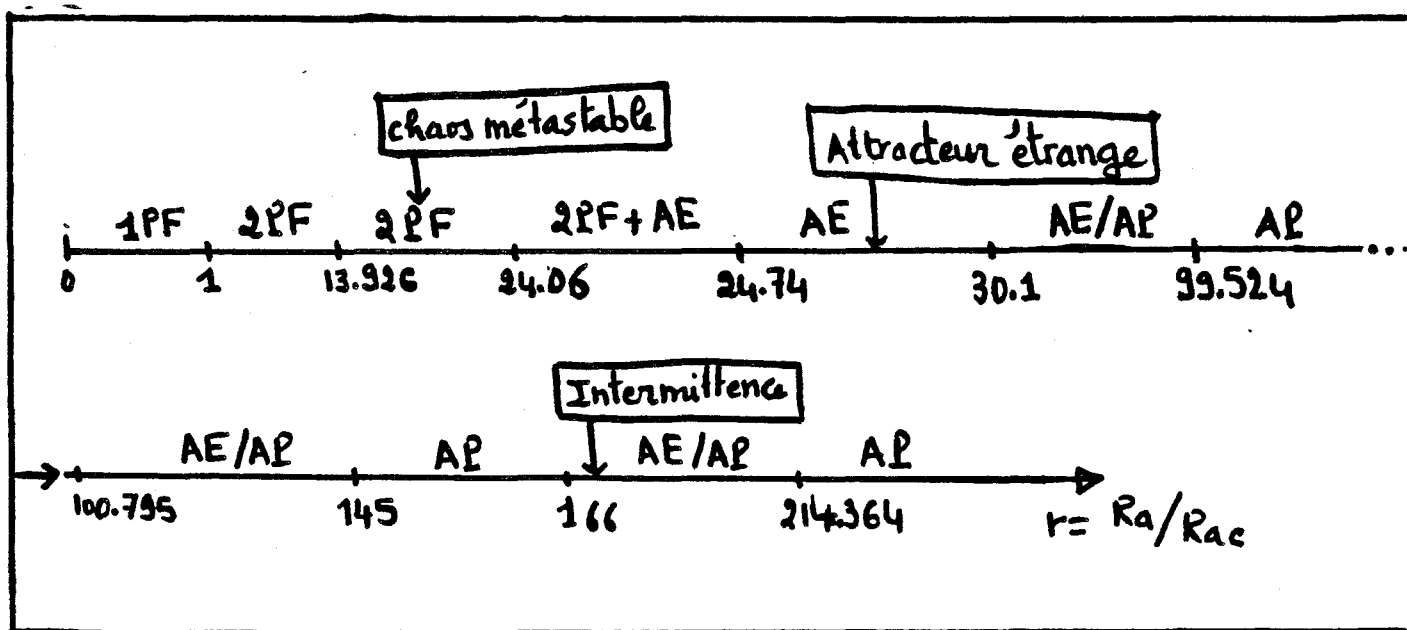
durée relative du comportement chaotique devient de plus en plus importante lorsque Ra croît [32]. L'intermittence peut aussi se rencontrer après la deuxième fréquence. L'écoulement est quasi-périodique quelques temps avant et après des moments où il est chaotique.

Nous résumons sommairement les principaux scénarios de transition vers l'état chaotique, sur le croquis ci-dessous :



- a) S : stationnaire ; P : périodique ; N : chaotique ;
 $QP2$: quasi-périodique à deux fréquences ;
 $QP3$: " " " trois " " ;
 L : accrochage de fréquence,
 I : intermittence .

Les scénarios de transition vers le chaos décrits ci-dessus présentent un nombre fini de bifurcations (Théorie de Ruelle-Takens et Newhouse). Cela est historiquement très important dans la mesure où, pour la première fois, elle remet fondamentalement en cause le mécanisme imaginé par Landau ^{et Hopf} et d'après lequel une infinité de bifurcations de Hopf, successives serait nécessaire pour engendrer le chaos. Celui-ci peut encore arriver de façon brutale lorsqu'on augmente la contrainte R_a , comme l'on peut remarquer sur le diagramme des bifurcations résultant de l'intégration numérique du système de Lorenz [8], [25]:



b) Succession des attracteurs du modèle de Lorenz le long de l'axe r ($P_r = 10$, $q_0 = \pi/\sqrt{2}$).

PF : point fixe ; AE : Attracteur étrange ;

AP : attracteur périodique

+ coexistence
/ alternance } d'attracteurs différents.

-V-

ANALYSES NON LINEAIRE :

RESULTATS NUMERIQUES.

lorsque $M \leq 10$ nous élucidons les comportements dynamiques que peuvent engendrer les modes du sous-espace impair, quand les conditions initiales appartiennent au sous-espace pair.

Tandis que pour $M > 10$, on s'intéresse à la description des scénarios de transition vers le chaos que génère la variation du paramètre de profondeur δ .

M est le nombre de modes étudiés.

V.1 Les résultats numériques: la mise en évidence de l'influence de S_0 ($M=3, M=6, M=8, Pr=10$).

Nous avons constaté par des essais numériques que, pour $S_0=0$, les modes impairs n'ont aucune contribution. De ce fait, la séquence des bifurcations obtenue est identique à celle indiquée sur le diagramme des bifurcations (b) du chapitre IV précédent. Pour des valeurs petites de S_0 , les modes impairs sont excités. Par conséquent, le comportement dynamique du système change.

Nous avons tout d'abord étudié numériquement l'évolution temporelle de la solution des systèmes dynamiques à 3, 6 et 8 modes pour diverses valeurs du paramètre de profondeur S_0 .

Pour des valeurs de Ra subcritiques, seul l'état de repos, $\psi = \theta = 0$, est stable. Quand Ra dépasse sa valeur critique^{*)}, l'état de repos perd sa stabilité et bifurque vers un état stationnaire. En augmentant davantage Ra , une valeur critique apparaît qui correspond à l'instabilité de l'état stationnaire. Cette perte de stabilité est due à une bifurcation de Hopf qui se produit pour:

^{*)} Les valeurs critiques sont données dans le tableau II du chapitre III.

$$\varepsilon = \frac{Ra}{Ra_c} - 1 = \frac{[1 + Pr(1 + \delta_0/2)][Pr(1 + \delta_0/2) + 11/3]}{(Pr(1 + \delta_0/2) - 11/3)} = \varepsilon^*,$$

où

$$Pr(1 + \delta_0/2) \neq 11/3.$$

En particulier pour $Pr=10$, $\delta_0=0$, nous obtenons:

$$\varepsilon^* = 23.74.$$

Sur la figure 1 on a représenté les attracteurs étranges pour:

$$\varepsilon^* < \varepsilon = 27 \text{ et } Pr=10,$$

en fonction de deux valeurs de δ_0 ($\delta_0=0.1$ et $\delta_0=1$). Les figures 1(A), 1(B) et 1(C) correspondent à $\delta_0=0.1$, pour $M=3, 6$ et 8 , tandis que les figures 1(A'), 1(B') et 1(C') elles correspondent à $\delta_0=1$, toujours pour $M=3, 6$ et 8 . On constate que si la forme géométrique de l'attracteur "à la Lorenz" reste globalement la même, dans les détails, l'influence de δ_0 se fait déjà sentir en ce qui concerne le nombre de tours que

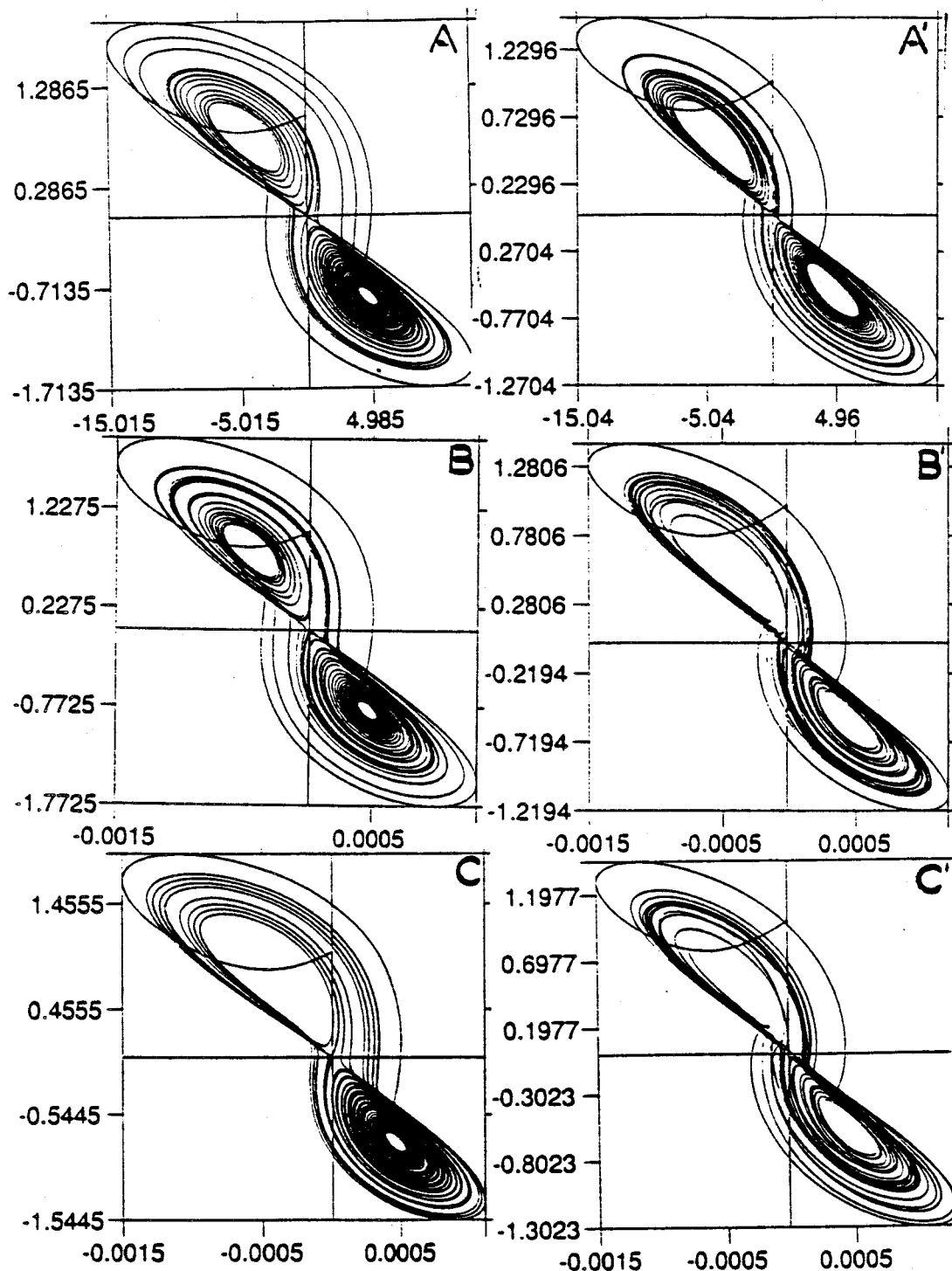


FIGURE 1 Forme de l'attracteur "à Lorenz" pour $Pr=10$ et $\varepsilon=17$

A) $M=3, \delta_0=0.1$ A') $M=3, \delta_0=1$ B) $M=6, \delta_0=0.1$

B') $M=6, \delta_0=1$ C) $M=8, \delta_0=0.1$ C') $M=8, \delta_0=1$

font les trajectoires (chaotiques) lors de l'enroulement d'un côté puis de l'autre.

L'intégration numérique des modèles à 6 et à 8 modes, pour $\varepsilon = 45$, illustrent clairement les modifications que génèrent les modes impairs:

Pour $S_0 = 0$, le comportement temporel du coefficient de Fourier $X_{11}(t')^{*)}$ reste invariant quand on augmente M ($M = 6, 8$) (figure 2' **). Pour des valeurs de S_0 non nulle, le comportement qualitatif de l'évolution de ce même coefficient change nettement. De ce fait, la structure des attracteurs est fondamentalement différente du cas précédent. Sur les figures 2 et 3A, nous traçons le comportement du mode X_{11} , en fonction du temps, et la projection de l'attracteur correspondant sur le plan (X_{11}, Y_{11}) de l'espace des phases, respectivement pour $M=8$ et $M=6$. Tandis que sur la figure 3B, pour $M=6$, nous traçons le comportement du mode X_{21} , en fonction du temps, et la projection de l'attracteur sur le plan (X_{21}, Y_{21}) .

$$*) \quad X_{ki} = \frac{\pi q_0}{\sqrt{2} \, d_{11}} A_{ki} \quad ; \quad Y_{ki} = \frac{\pi q_0^2}{\sqrt{2} \, d_{11}^3} B_{ki} \quad , \quad t' = d_{11} t$$

$$\text{avec } q_0 = \pi/\sqrt{2} \quad \text{et} \quad d_{11} = \frac{3\pi^2}{2} .$$

**) Le résultat indiqué sur la figure 2' coïncide avec celui mentionné sur le diagramme des bifurcations (b) du chapitre V.

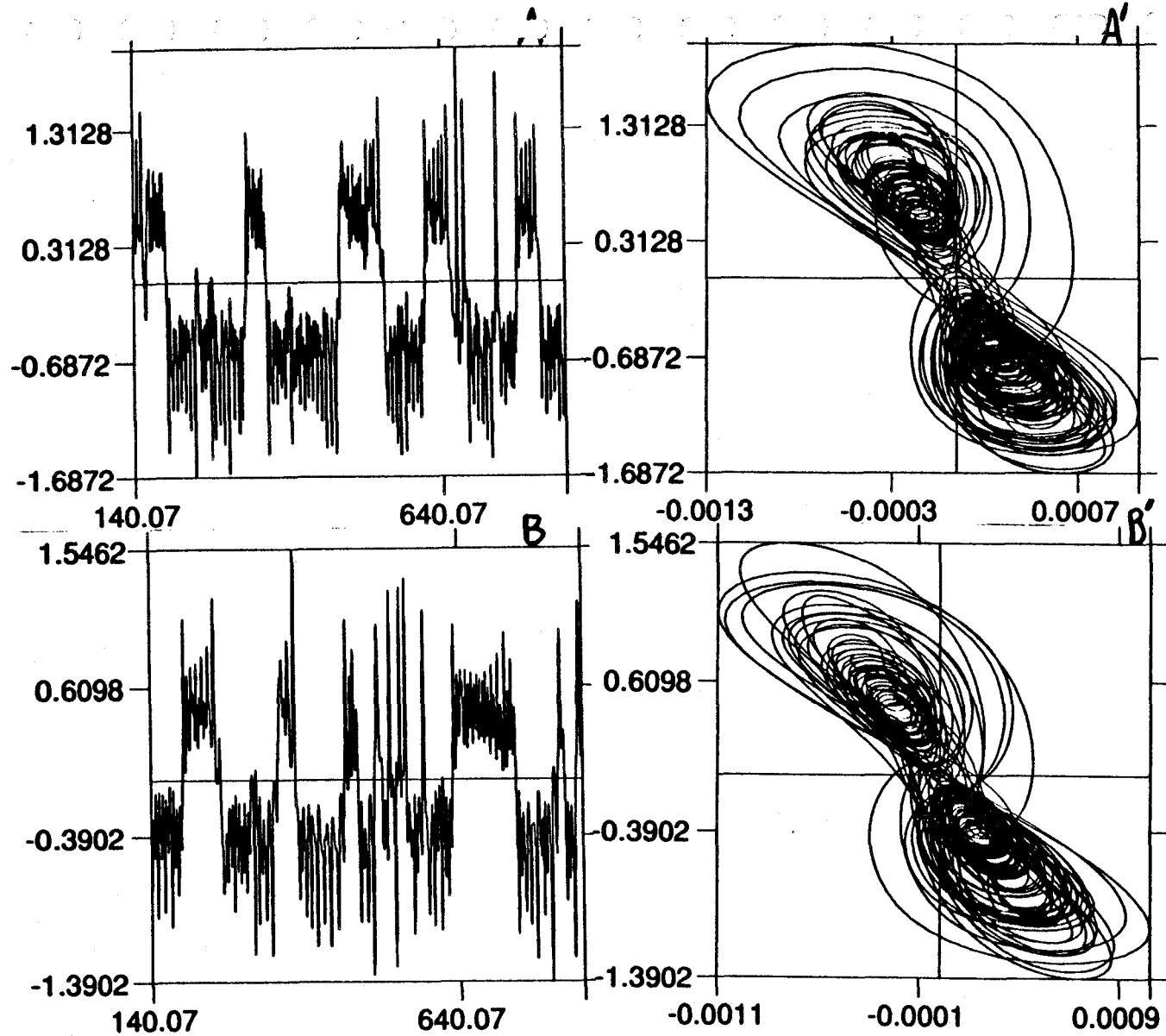


FIGURE 2 $P=10, \varepsilon=45, M=8$. Evolution temporelle de x_{11} en fonction du paramètre δ_0 :

A) $\delta_0=0.1$. B) $\delta_0=1$. A' et B' sont des projections sur le plan (x_{11}, y_{11}) respectivement pour $\delta_0=0.1$ et $\delta_0=1$.

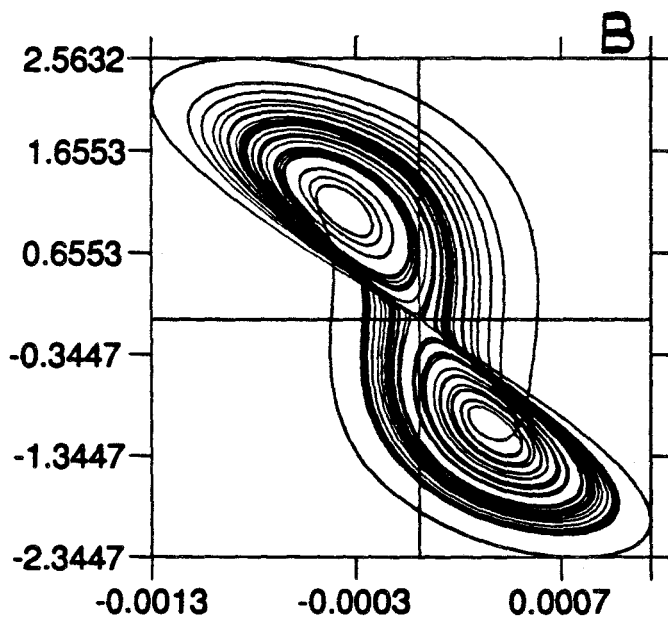
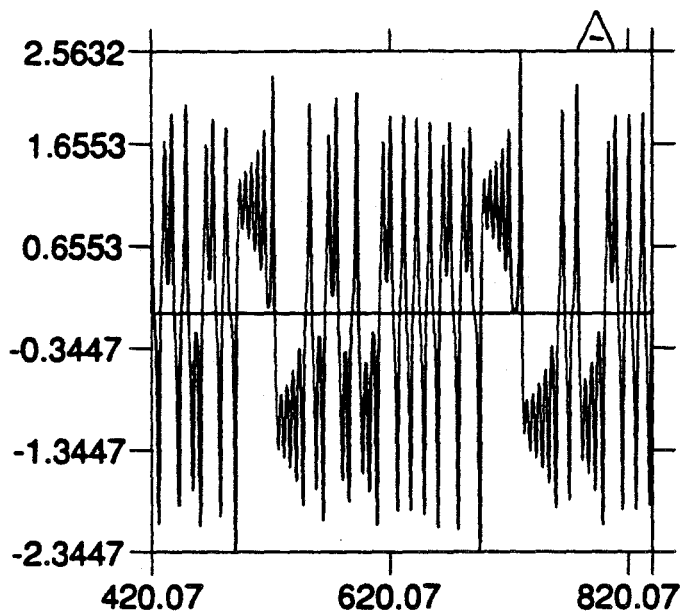


FIGURE 2' $Pr=10$, $So=0$, $\epsilon=45$

A) Evolution temporelle de Fourier

$x_{11}(t')$.

B) Projection de l'attracteur de Lorenz

associe sur le plan (x_{11}, y_{11}) de l'espace des phases.

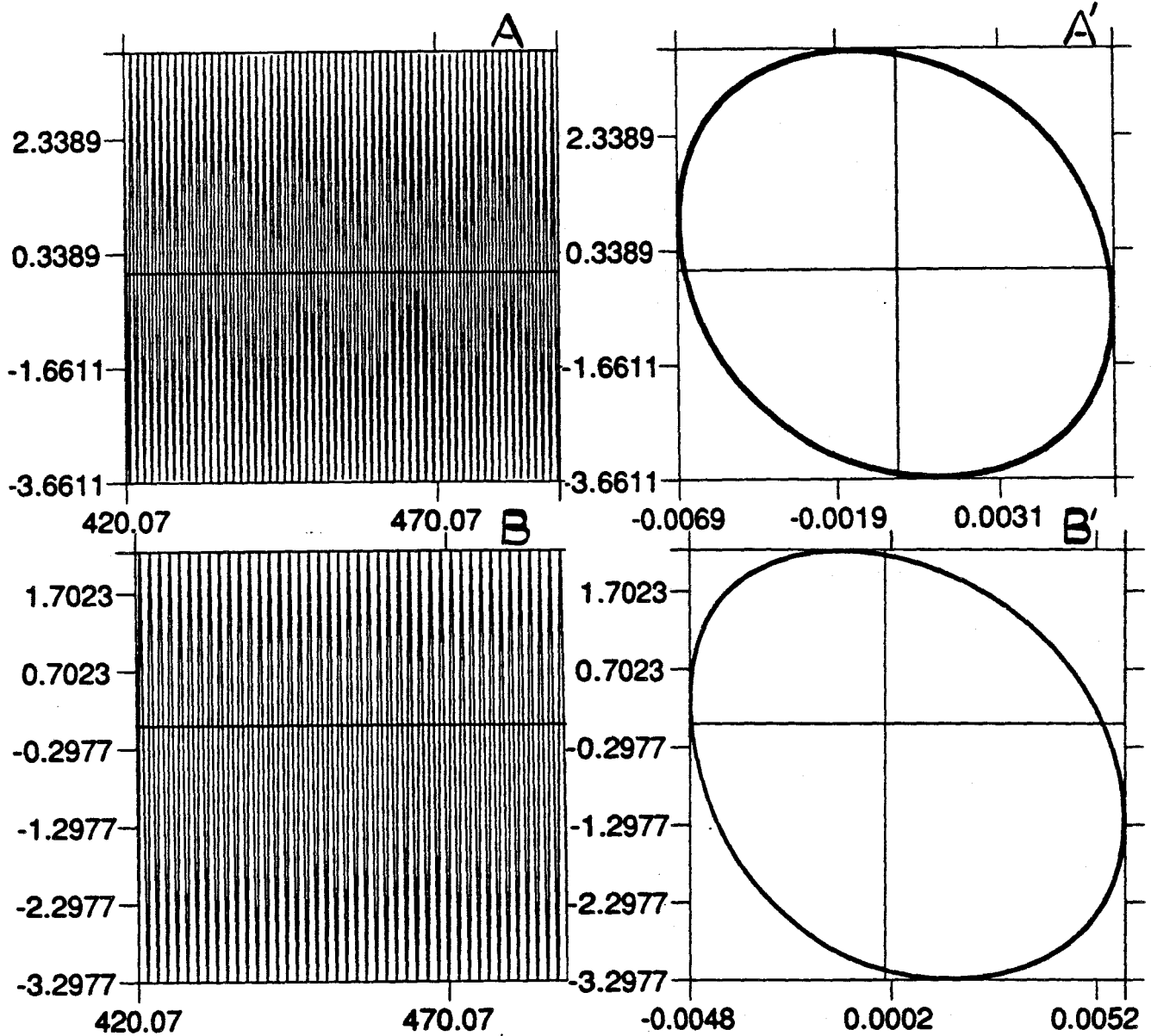


FIGURE 3A $R=10$, $\varepsilon=45$, $M=6$. Evolution temporelle de x_{11} en fonction du paramètre de profondeur S_0 :
A) $S_0=0.1$. B) $S_0=1$. A' et B' sont des projections sur le plan (x_{11}, y_{11}) respectivement pour $S_0=0.1$ et $S_0=1$.

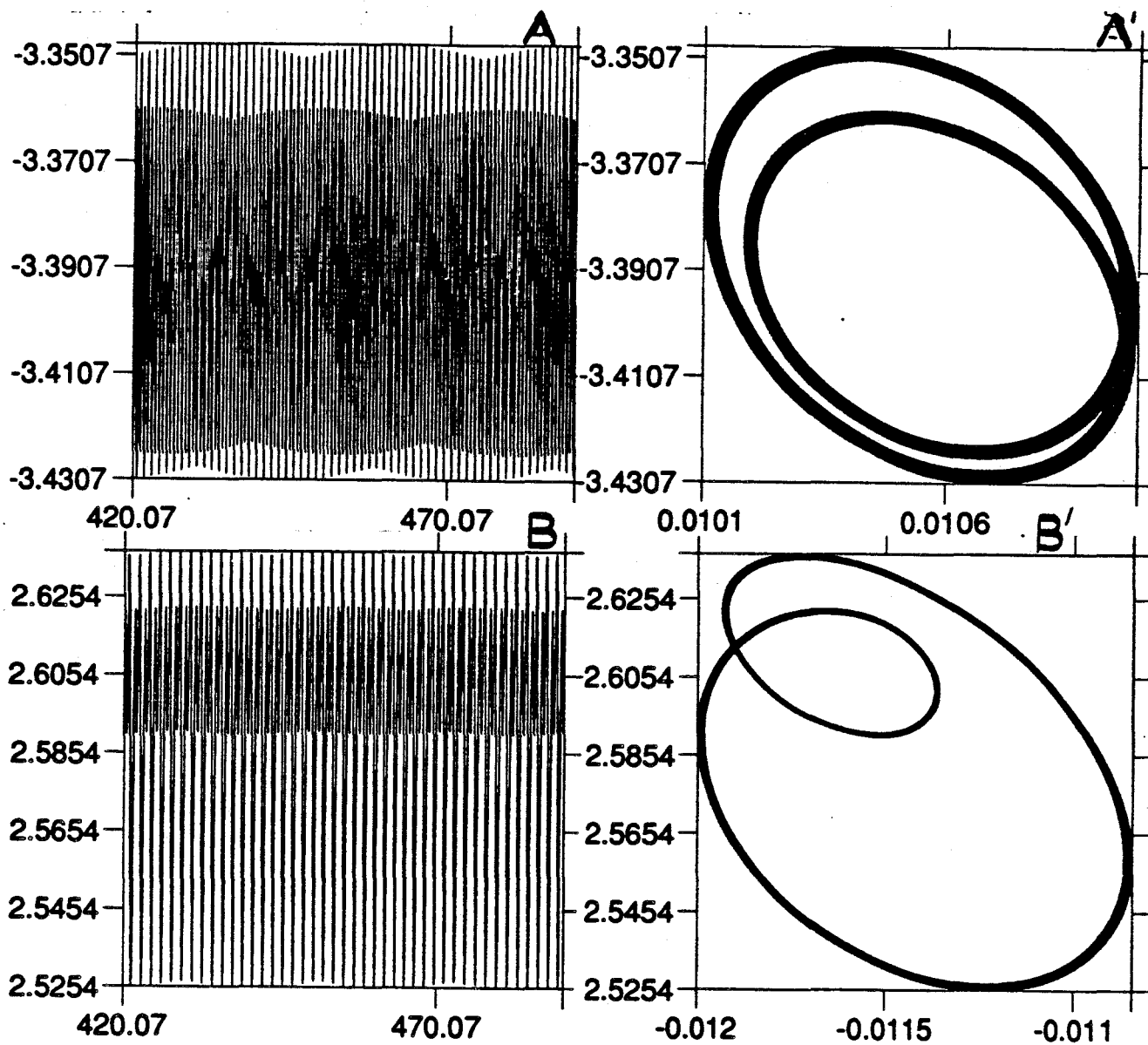


FIGURE 3-B $Pr=10, \varepsilon=45, M=6$. Evolution temporelle de x_{21} en fonction du paramètre de profondeur S_0 : A) $S_0=0.1$
 B) $S_0=1$. A' et B' sont des projections sur le plan (x_{21}, y_{21}) respectivement pour $S_0=0.1$ et $S_0=1$.

V.2 Les résultats numériques : les scénarios de transition vers le chaos ($M=15$)

Les différents comportements dynamiques obtenus dans le paragraphe ci-dessus montrent bien que le paramètre de profondeur S_0 destabilise les modes du sous-espace impair. Ceci n'est pas surprenant d'un point de vue mathématique, puisque l'analyse linéaire montre que l'instabilité des modes du sous-espace pair génère l'instabilité des modes impairs. De ce fait, le but recherché de l'étude d'une projection dans un espace à 15 dimensions de la convection bidimensionnelle "profonde" est de deux ordres :

— d'une part, une confirmation de l'influence des modes du sous-espace impair sur le comportement dynamique du système, quand le nombre de modes pairs augmente*).

— d'autre part, la détermination des séquences d'instabilités précédents l'apparition du phénomène chaotique qu'engendre le paramètre de profondeur S_0 .

*) Le présent système comporte 10 modes pairs et 5 ^{modes} impairs

Sous les conditions physiques que nous avons considérées, nous avons enregistré une succession de différents régimes d'écoulements^{*)} qui sont très sensibles à la moindre variation du paramètre de profondeur S_0 . Nous avons aussi constaté que l'amplitude des fluctuations, pendant une assez longue durée initiale, évolue d'une façon erratique avant d'atteindre un type de comportement classique.

Nous allons maintenant exposer les différents scénarios de transition vers le chaos que nous avons retrouvés dans le cadre de notre étude. Nous fixons sur les figures ci-jointes :

l'évolution temporelle du coefficient de Fourier de la fonction de courant X_{11} , la projection d'une portion de trajectoire sur le plan (X_{11}, Y_{11}) de l'espace des phases et le spectre de puissance du signal X_{11} , pour diverses valeurs de Pr , S_0 et ε .

A l'issue de nos essais numériques, nous avons mis en évidence les différents scénarios suivants :

^{*)} La détermination des plages de stabilité de chaque régime n'entre pas dans le cadre de ce travail de Thèse.

V.2.a Transition vers le chaos à partir d'un tore T^2 :

Les résultats indiqués ci-dessous sont obtenus pour un fluide de nombre de Prandtl égal à 20 et un paramètre de profondeur égal à 0,1.

Pour $\varepsilon = 80$ (figure 4A), le comportement temporel de l'amplitude $X_{11}(t')$ est périodique : le spectre de puissance met en évidence une seule fréquence fondamentale. L'attracteur correspondant est un cycle limite (tore T^1).

Pour $\varepsilon = 117$ (figure 4B), le comportement de la solution devient quasi-périodique : dans le spectre de puissance apparaissent deux fréquences fondamentales ainsi que leurs combinaisons linéaires. L'attracteur est un tore (T^2).

Les figures 4C, 4D, 4E obtenues respectivement pour $\varepsilon = 125, 128, 139$ correspondent encore à des régimes quasi-périodiques à deux fréquences. On peut remarquer qu'il y a des changements dans le sens de rotation des tourbillons convectifs.

Pour $\varepsilon = 144$ (figure 4F), l'accrochage de fréquences s'est produit : on a donc un régime périodique qui disparaît pour laisser la place à un régime quasi-périodique à deux fréquences fondamentales (les figures 4G, 4H sont obtenues pour $\varepsilon = 152, 154$).

Pour $\varepsilon = 160$ (figure 4I), le comportement temporel de l'amplitude $X_{11}(t')$ devient complètement erratique : le spectre de puissance comporte une partie continue.

On voit apparaître un attracteur étrange qui a une certaine similitude avec celui de Lorenz.

Le même type de scénario de transition vers le chaos a été mis en évidence pour le même fluide mais un paramètre de profondeur égal à 0.2. Les figures 5A, 5B, 5C, 5D, 5E, 5F sont obtenues respectivement pour $\varepsilon = 119, 128, 144, 146, 152, 154$. On note une différence fondamentale dans la structure des attracteurs par rapport au cas précédent ; en particulier le chaos apparaît pour $\varepsilon = 154$ et non ^{plus} pour $\varepsilon = 160$.

Pour ce même nombre de Prandtl mais $S_0 = 0.6$, nous obtenons un régime chaotique par "perte brusque" de stabilité d'un régime périodique*¹) (figure 6A, 6B sont obtenues respectivement pour $\varepsilon = 139.38$ et 139.4). Ceci justifie qualitativement l'influence cruciale du paramètre de profondeur S_0 .

Ainsi, lorsque S_0 croît le chaos (l'attracteur étrange) apparaît plus vite et la séquence des bifurcations ainsi que la structure des attracteurs changent sensiblement.

*¹) $\varepsilon = 139,3955$, la solution est périodique.
 $\varepsilon = 139,3960$, la solution est chaotique.

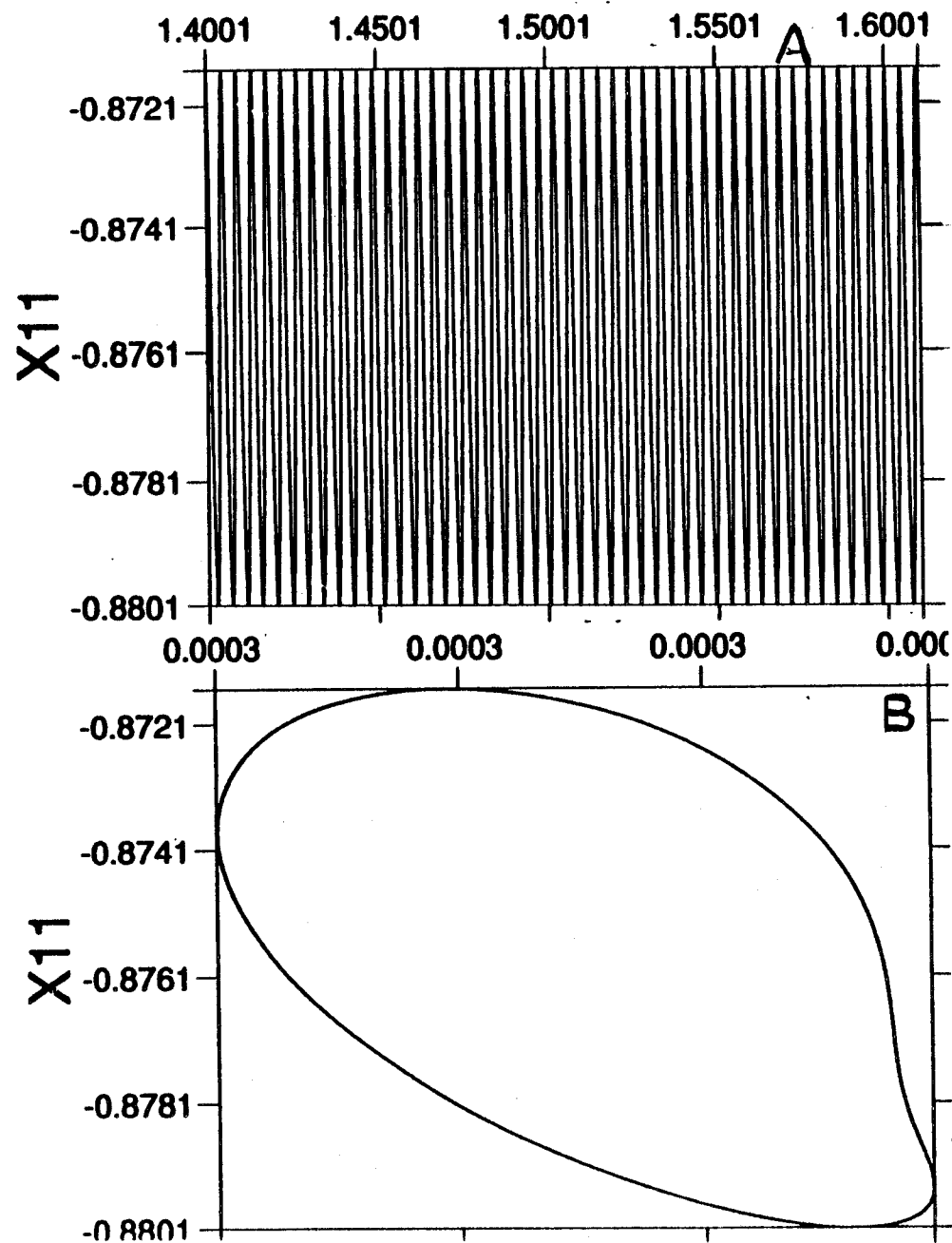


FIGURE 4A A) Evolution temporelle du coefficient de Fourier X_{11} pour: $\varepsilon=80$, $Pr=20$, $So=0.1$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

FIGURE 4B

A) Evolution temporelle du coefficient

de Fourier X_{11} pour : $\varepsilon = 117, Pr = 20, S_o = 0.1$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A

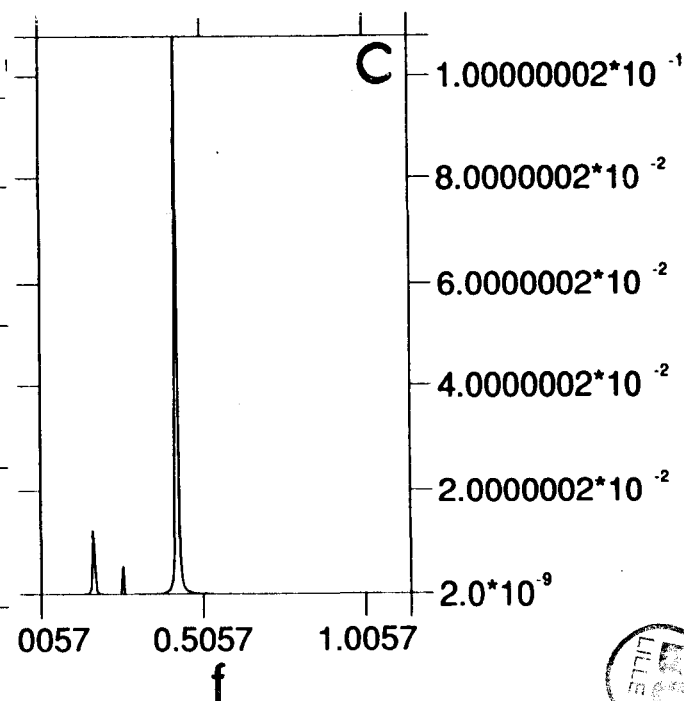
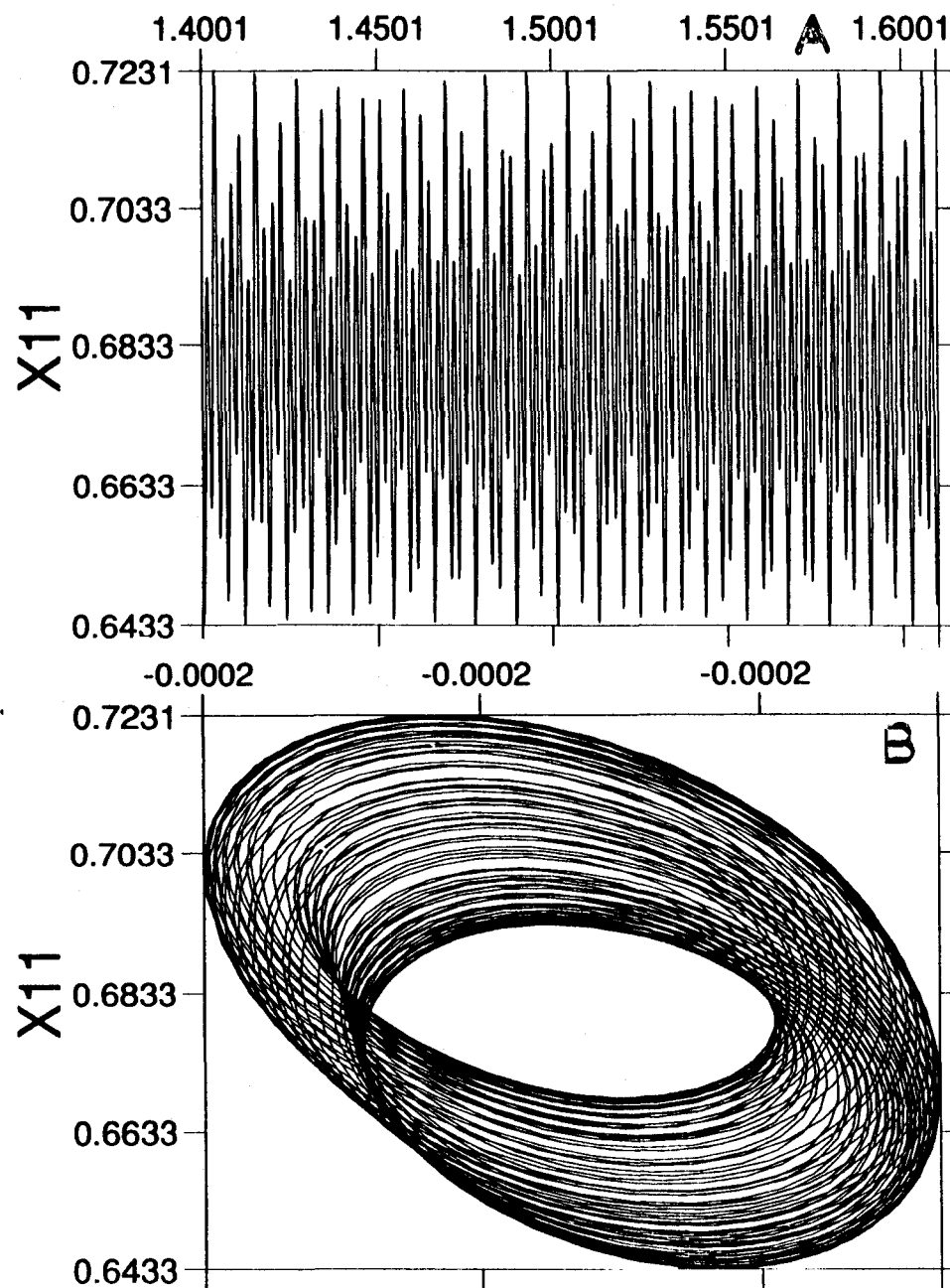
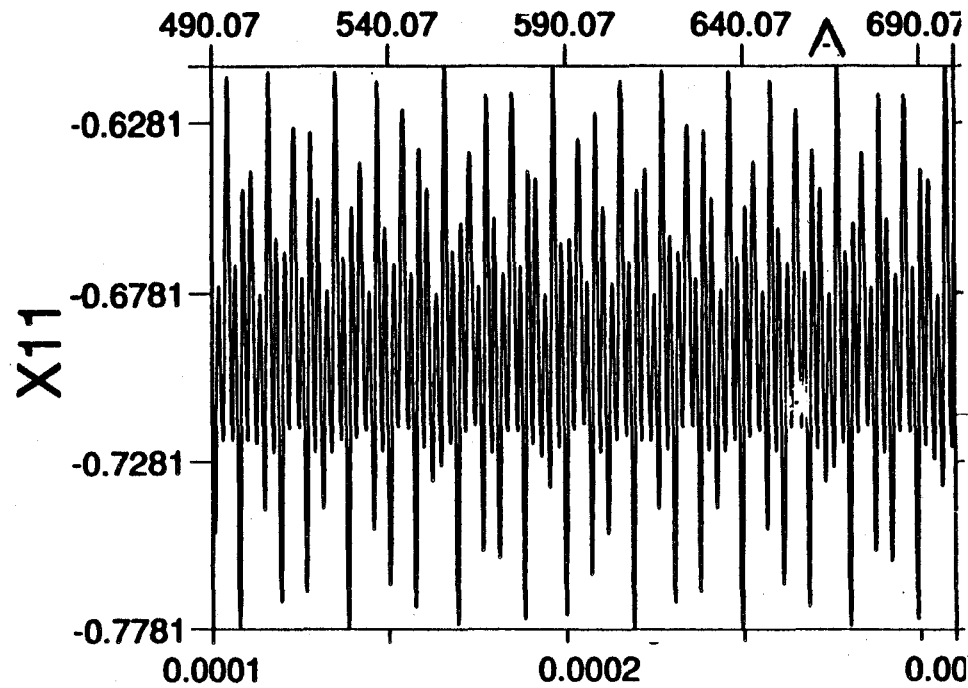


FIGURE 4C A) Evolution temporelle du



coefficient de Fourier X_{11} pour : $\epsilon = 125$, $Pr = 20$,
 $So = 0.1$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

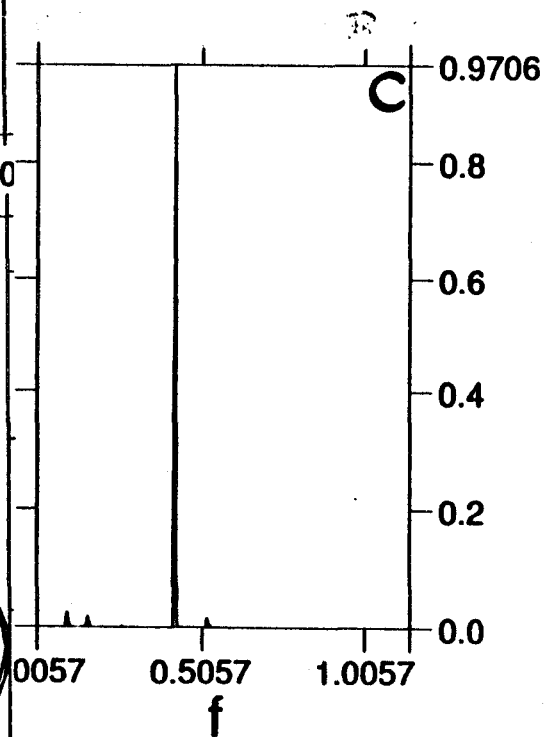
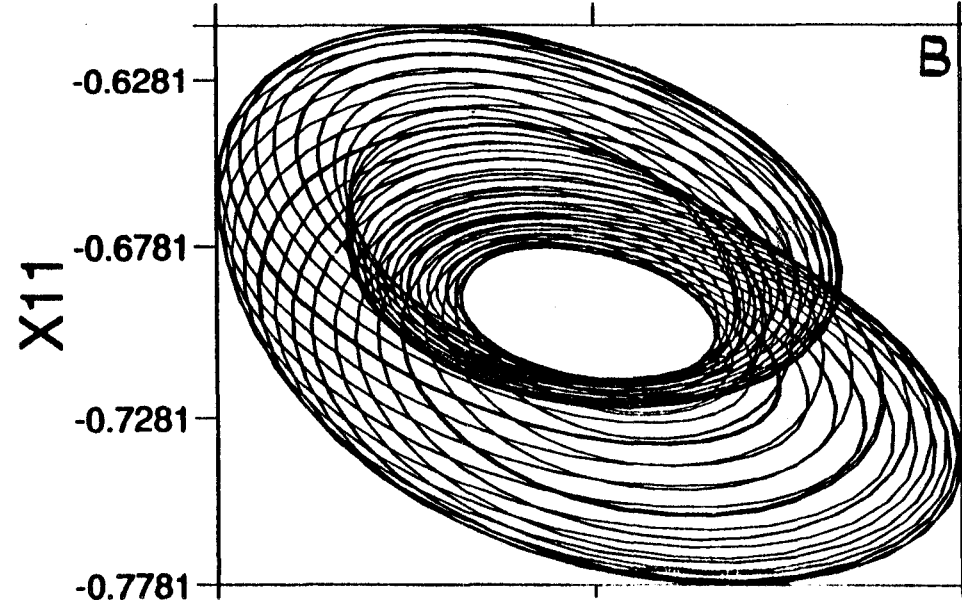


FIGURE 4D A) Evolution temporelle du

coefficient de Fourier X_{11} pour: $\epsilon=128, P=20, \delta_0=0.1$

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

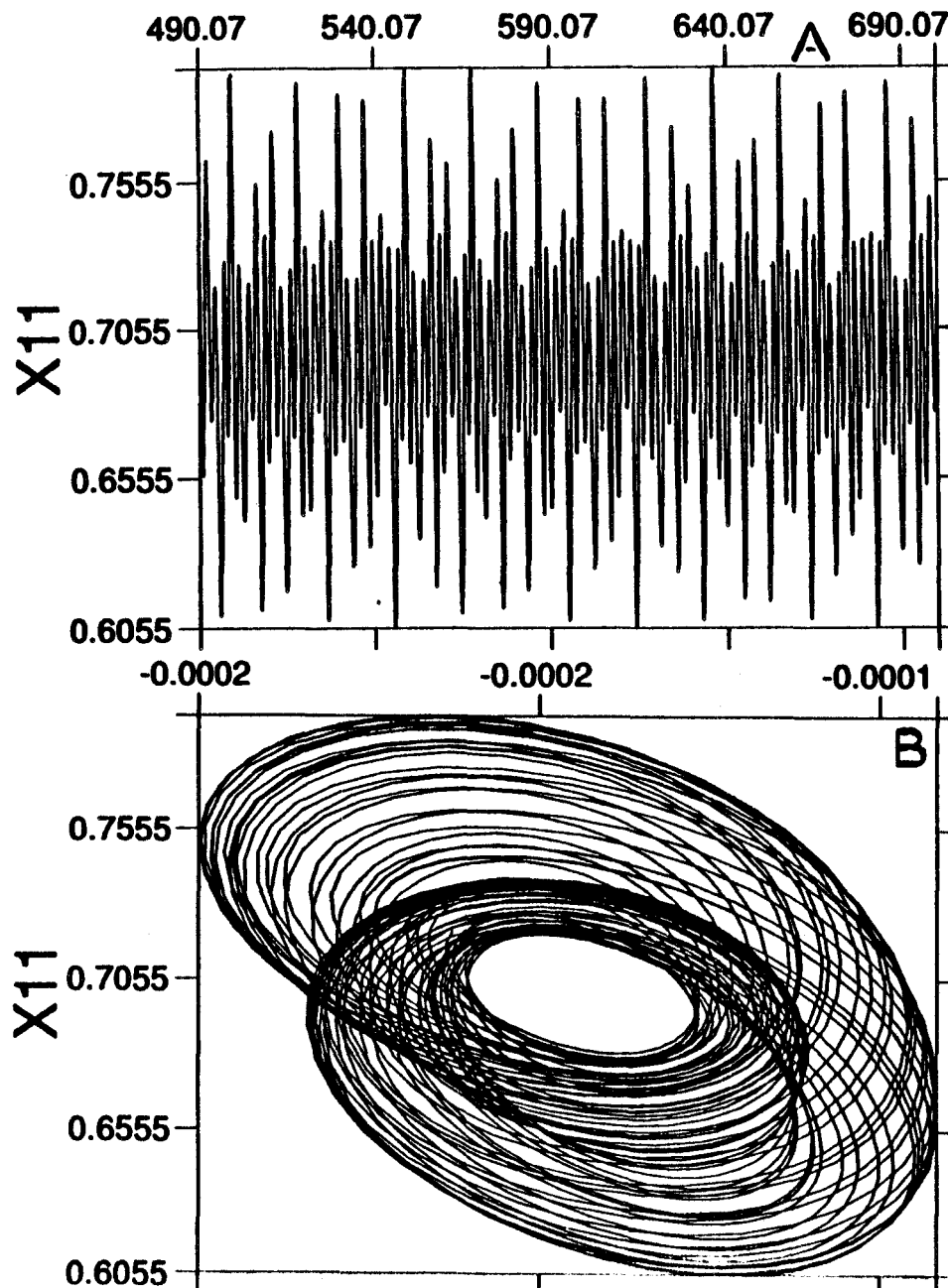


FIGURE 4E A) Evolution temporelle du coefficient

de Fourier X_{11} pour : $E=139$, $Pr=20$, $So=a1$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

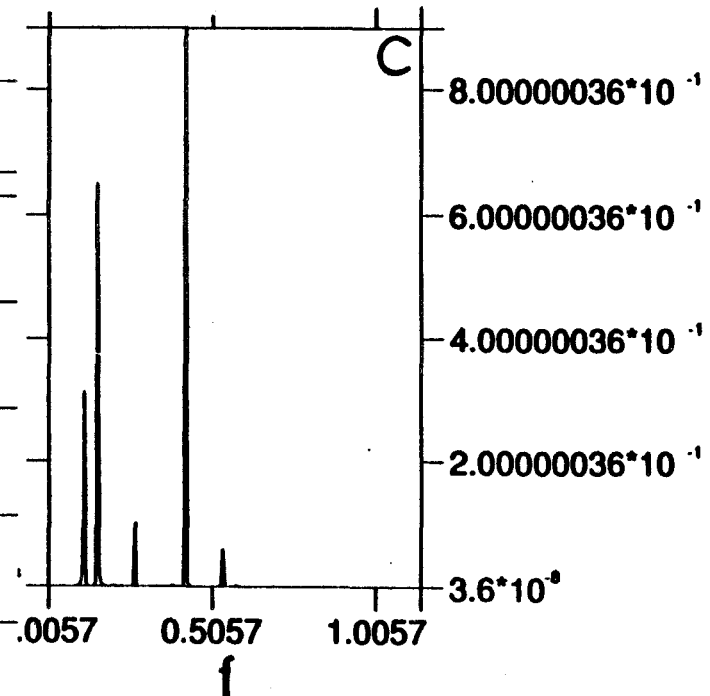
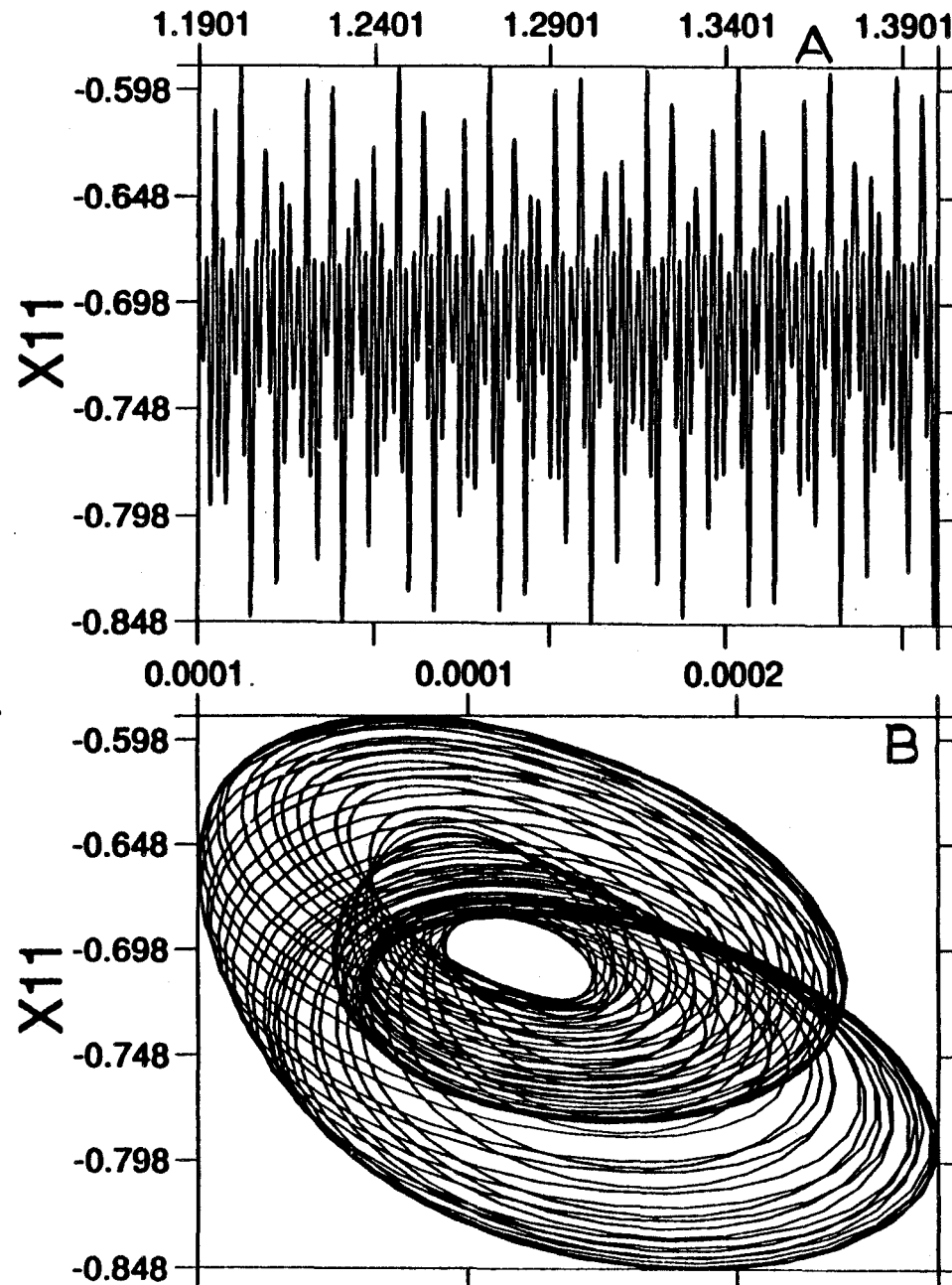


FIGURE 4F A) Evolution temporelle du coefficient

de Fourier X_{11} pour: $\varepsilon=144$, $P_r=20$, $S_o=0.1$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

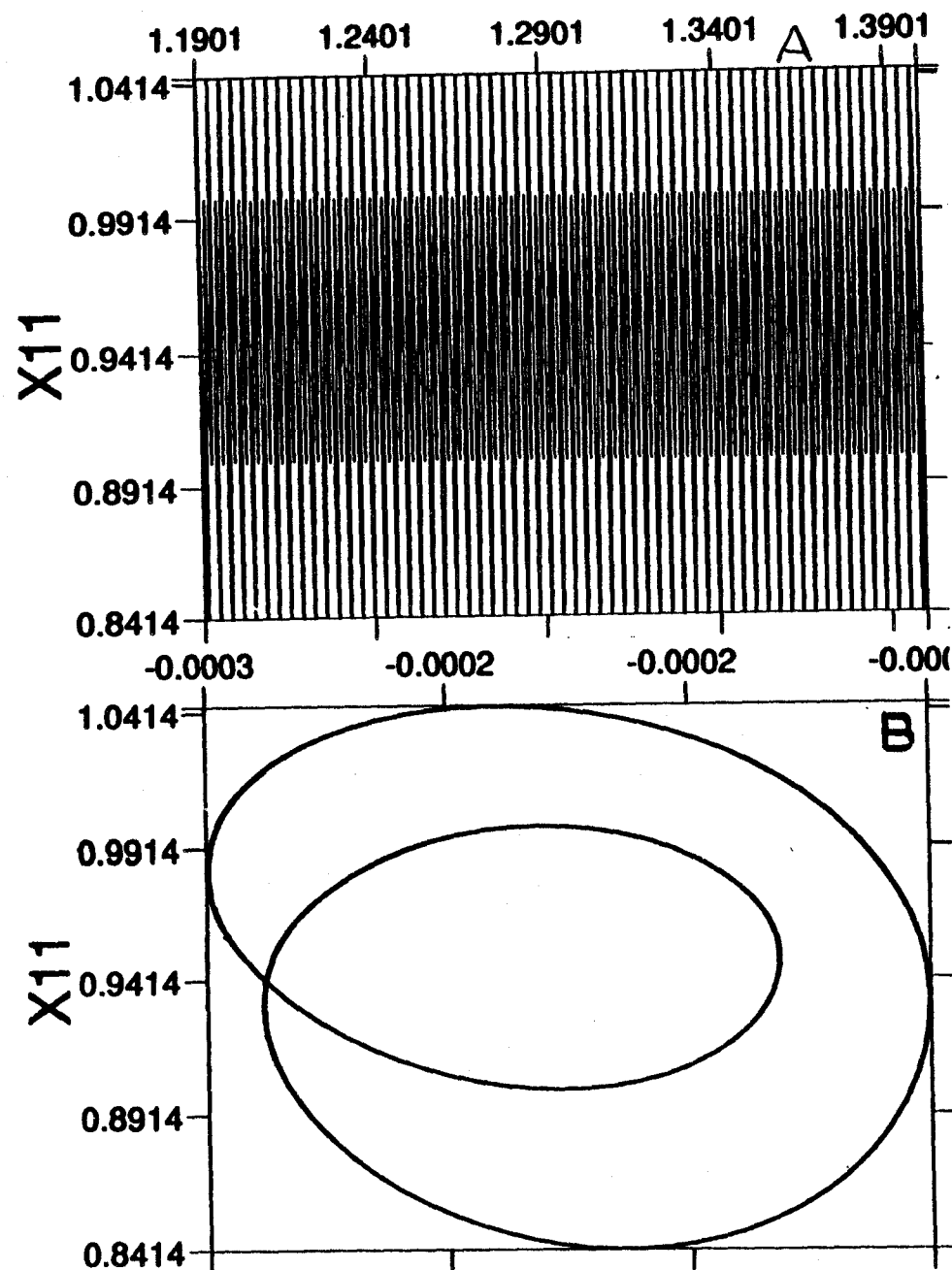
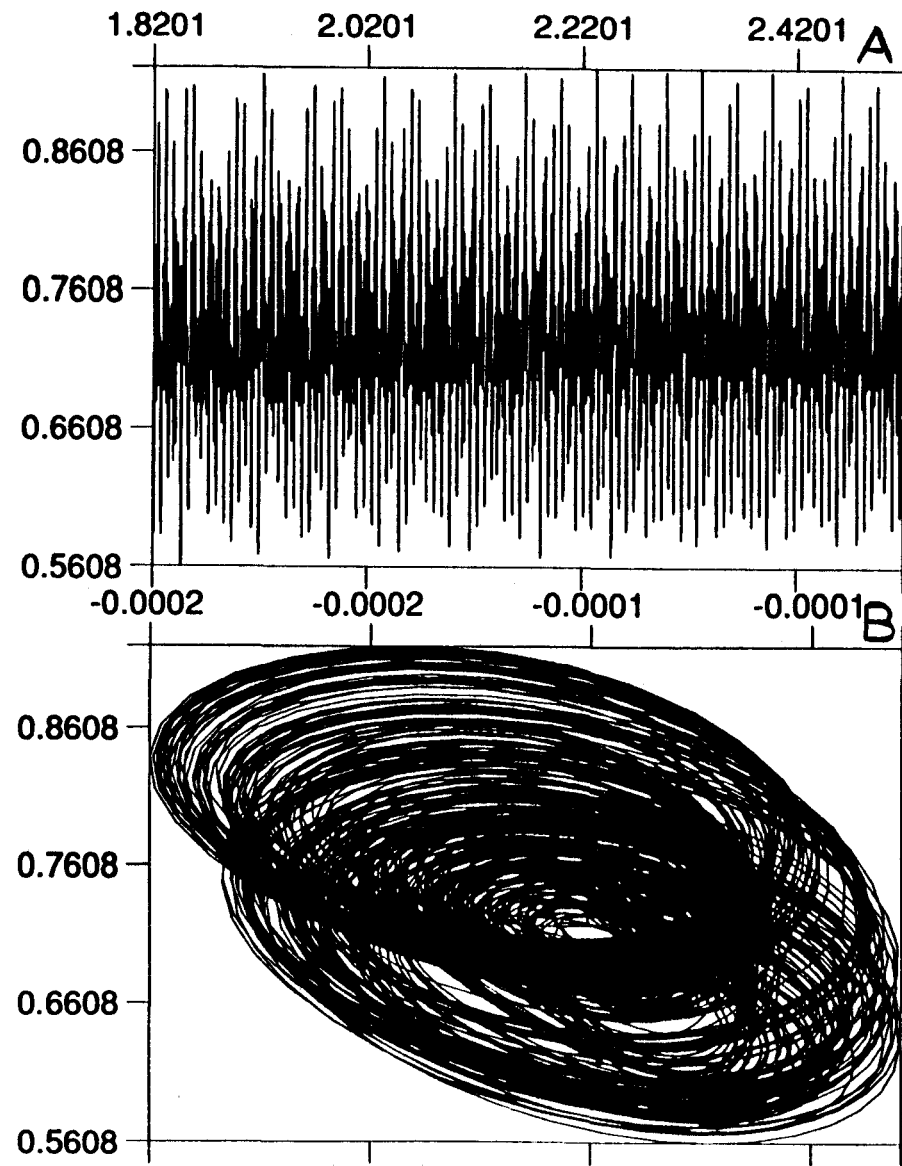
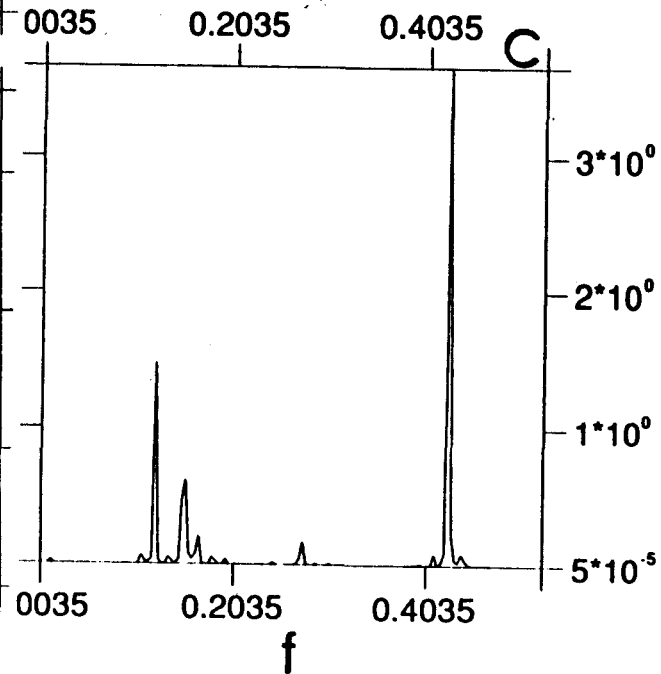


FIGURE 4G



A) Evolution temporelle du coefficient de Fourier $x_{11}(t)$ pour : $\varepsilon = 152$, $Pr = 20$, $So = 0.1$.
B) Projection sur le plan (x_{11}, y_{11}) .
C) Spectre de puissance du signal A.



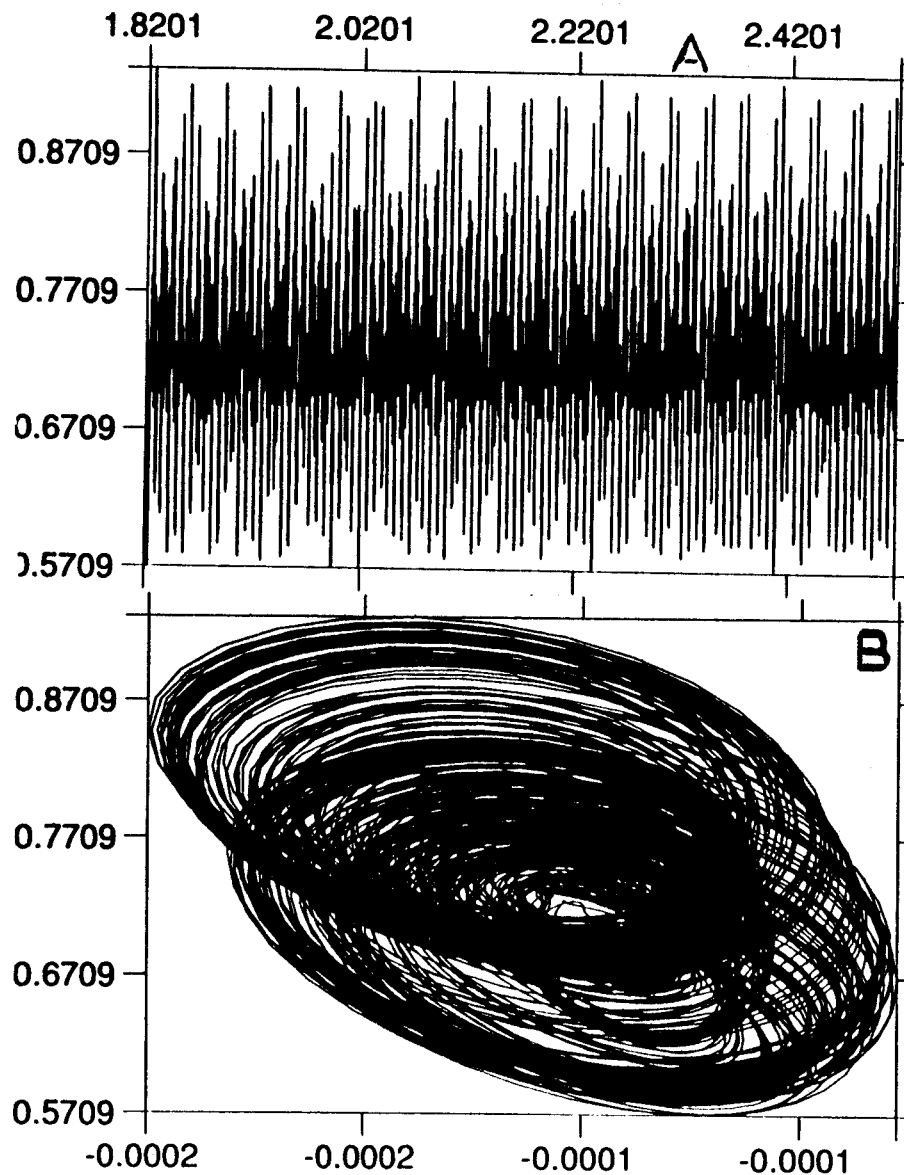
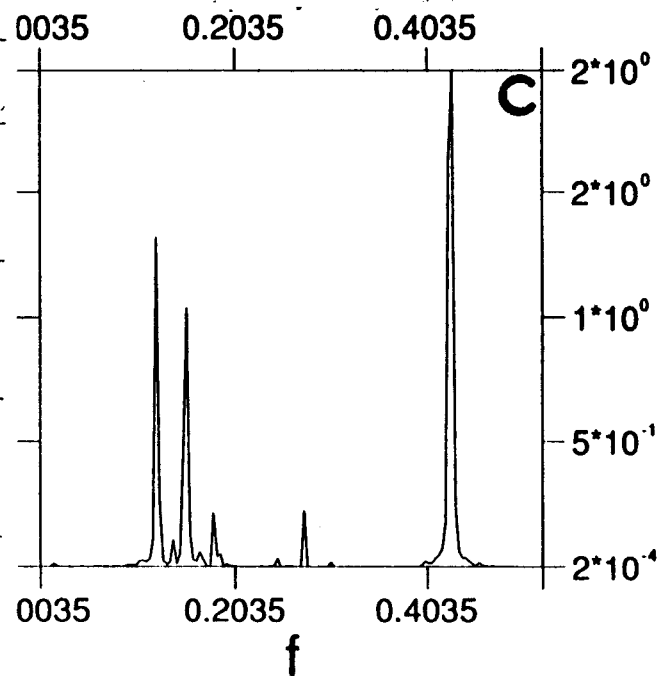


FIGURE 4H

- A) Evolution temporelle du coefficient de Fourier $x_{11}(t)$ pour : $\varepsilon = 154$, $Pr = 20$, $S_o = 0.1$.
- B) Projection sur le plan (x_{11}, y_{11}) .
- C) Spectre de puissance du signal A.



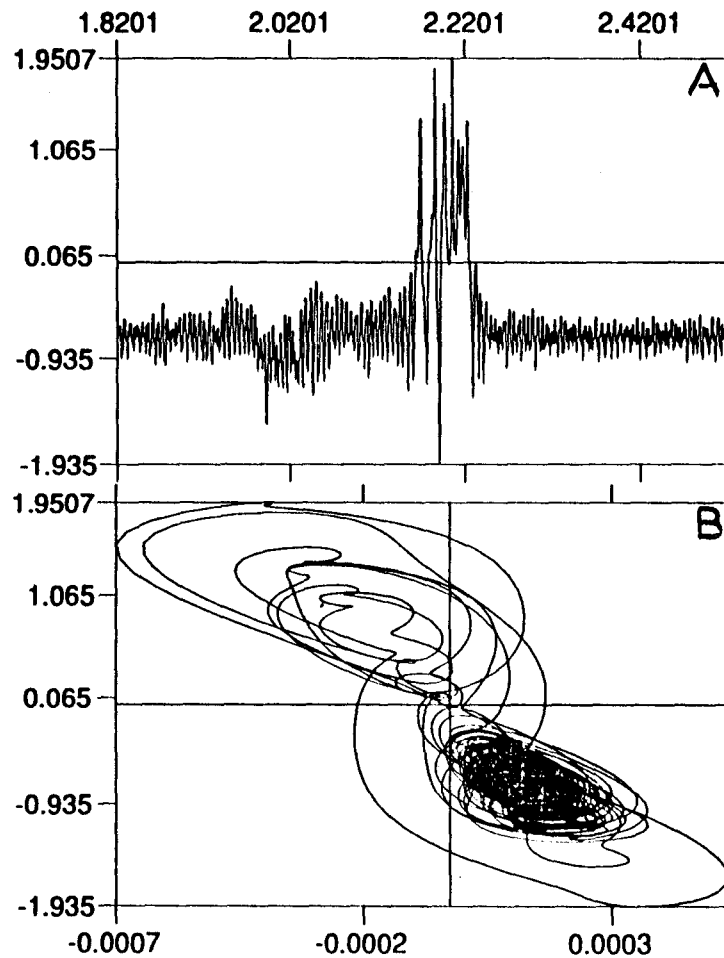


FIGURE 4: A) Evolution temporelle du coefficient de Fourier X_{11} pour : $\varepsilon = 160$, $P_r = 20$, $S_0 = 0.1$.
 B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .
 C) Spectre de puissance du signal A.

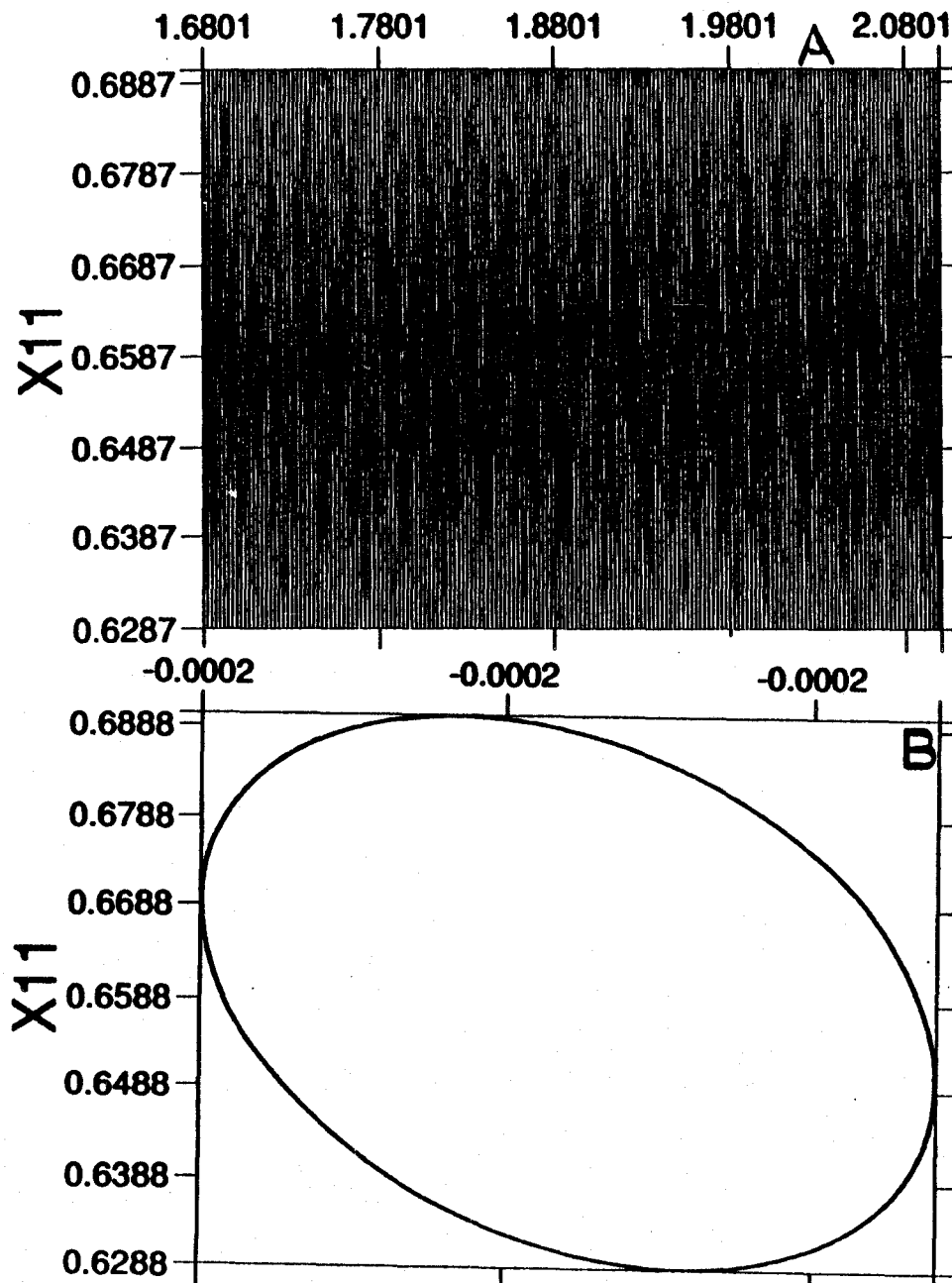


FIGURE 5A

A) Evolution temporelle

du coefficient de Fourier X_{11} pour: $\varepsilon=119$, $Pr=20$, $S_c=0.2$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

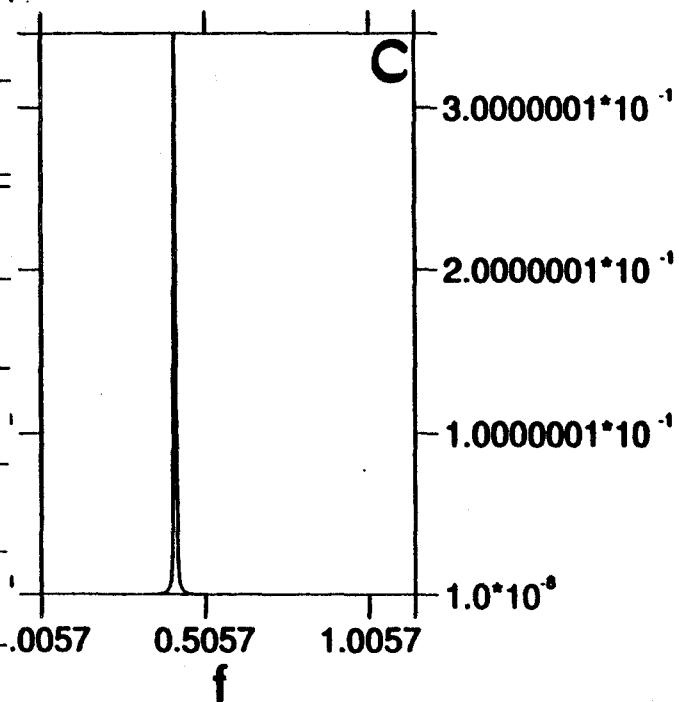


FIGURE 5-B

A) Evolution temporelle

du coefficient du Fourier X_{11} : $\varepsilon=128, Pr=20, S_0=0.2$

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

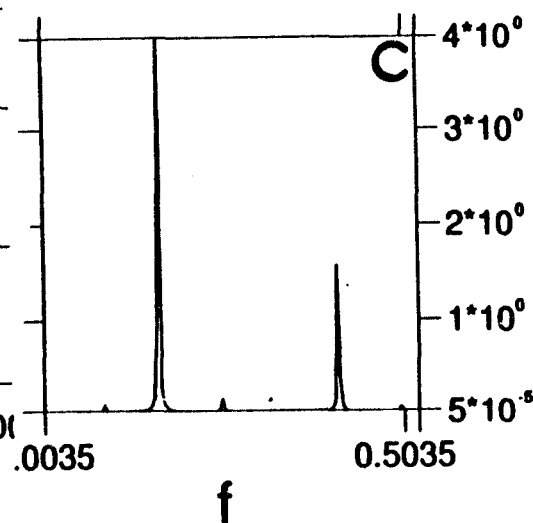
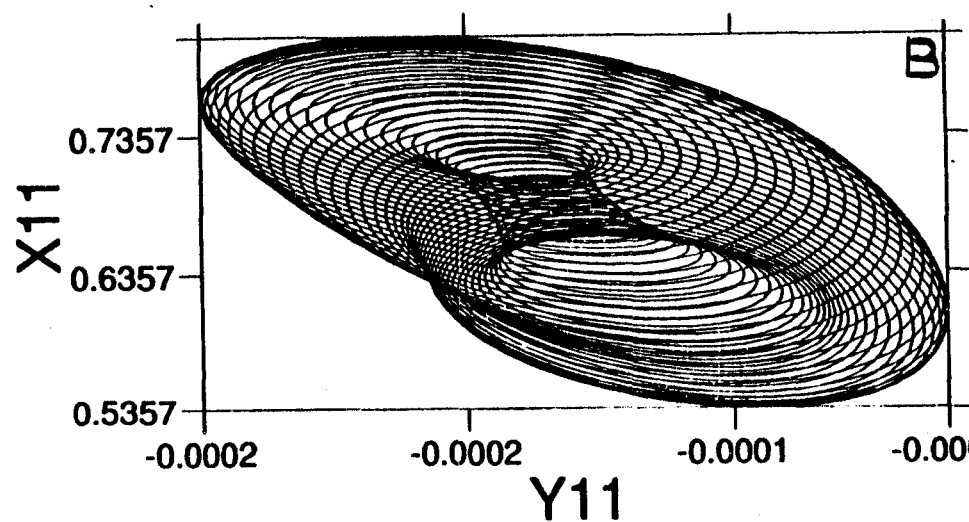
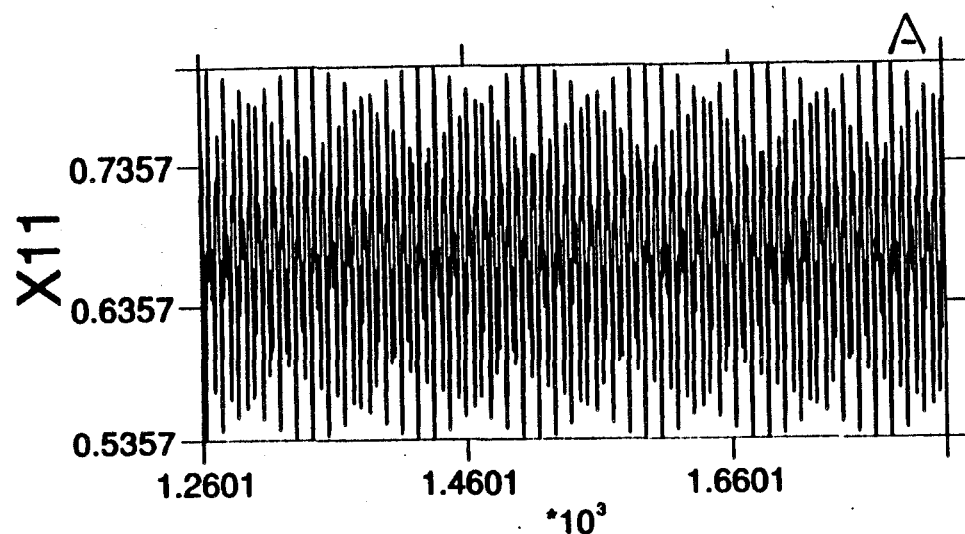


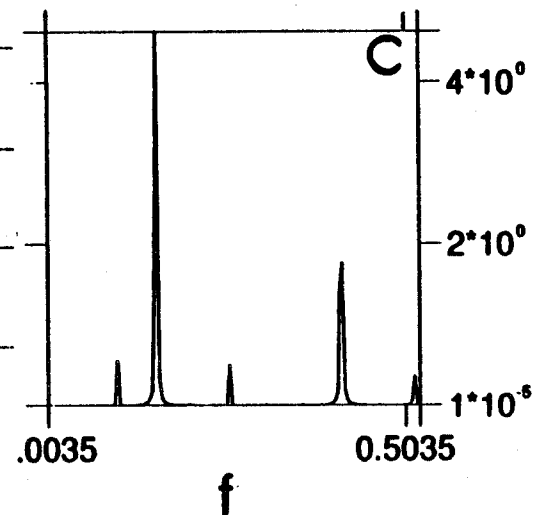
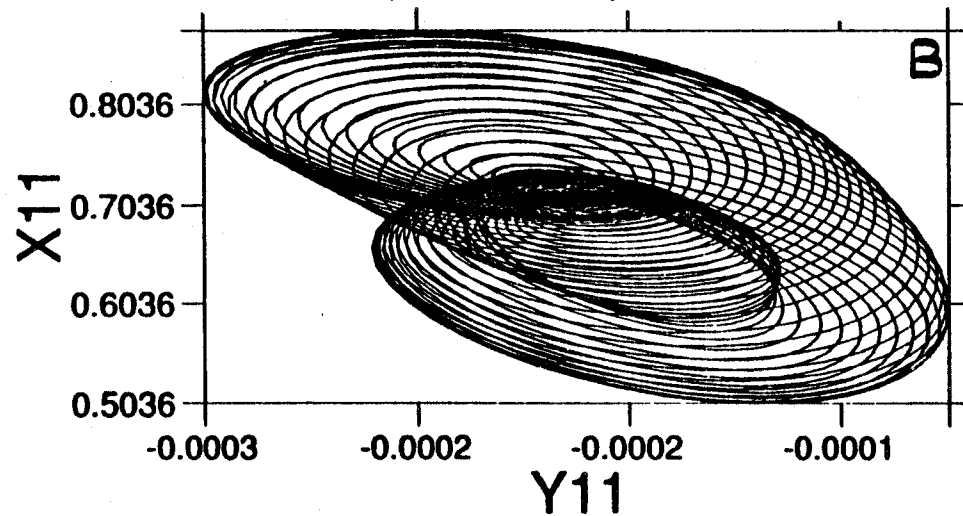
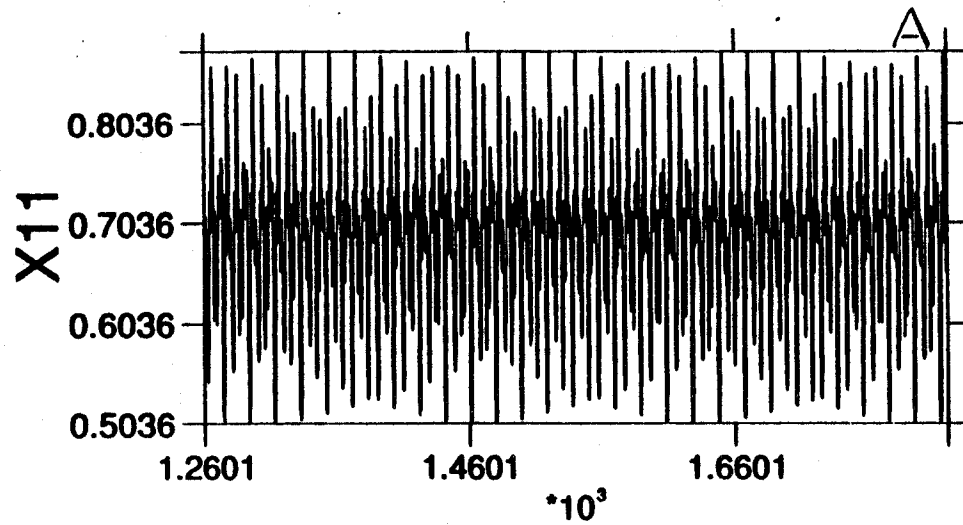
FIGURE 5C

A) Evolution temporelle du

coefficient de Fourier X_{11} : $\varepsilon = 14$, $Pr = 20$, $S_o = 0.2$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.



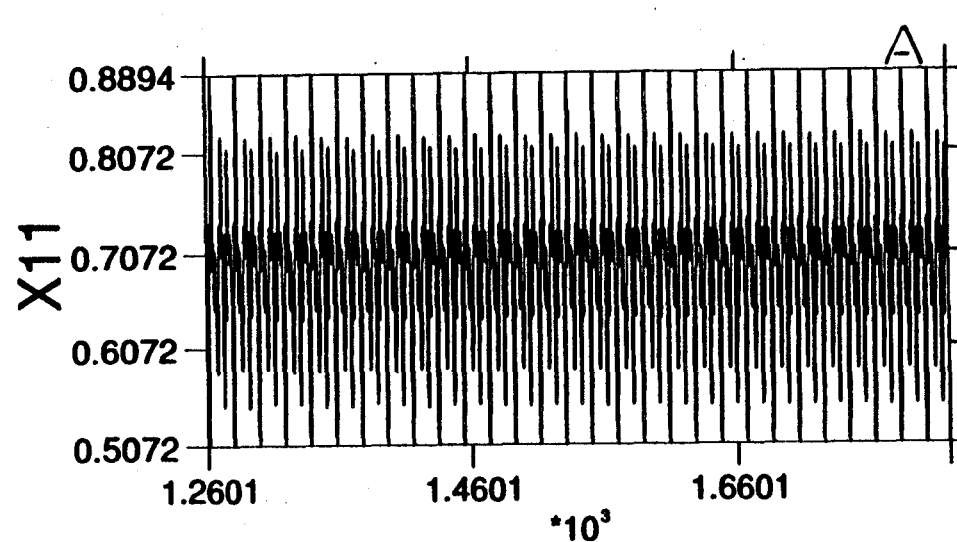
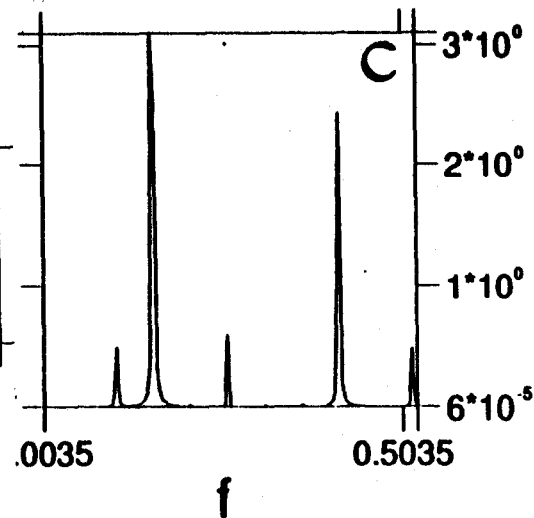
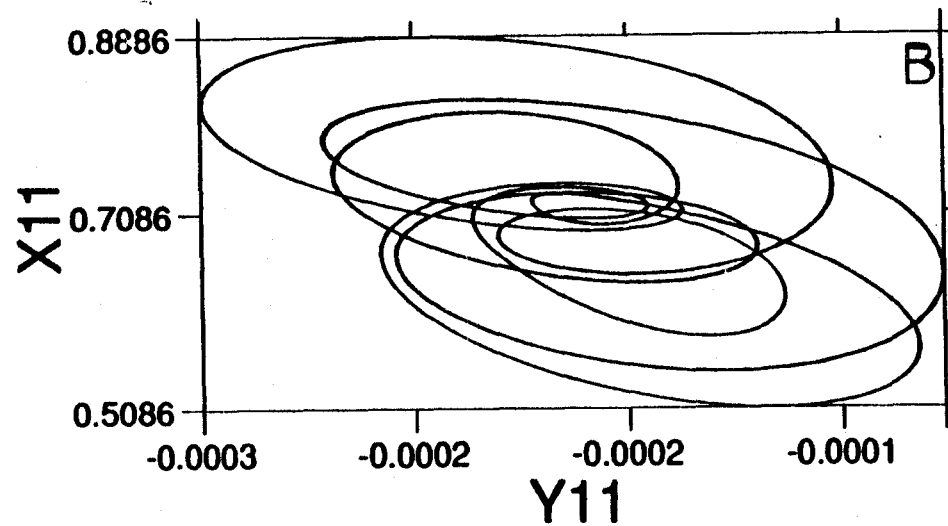


FIGURE 5D A) Evolution temporelle du coefficient de Fourier X_{11} : $\varepsilon = 146$, $Pr = 20$, $S_o = 0.2$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.



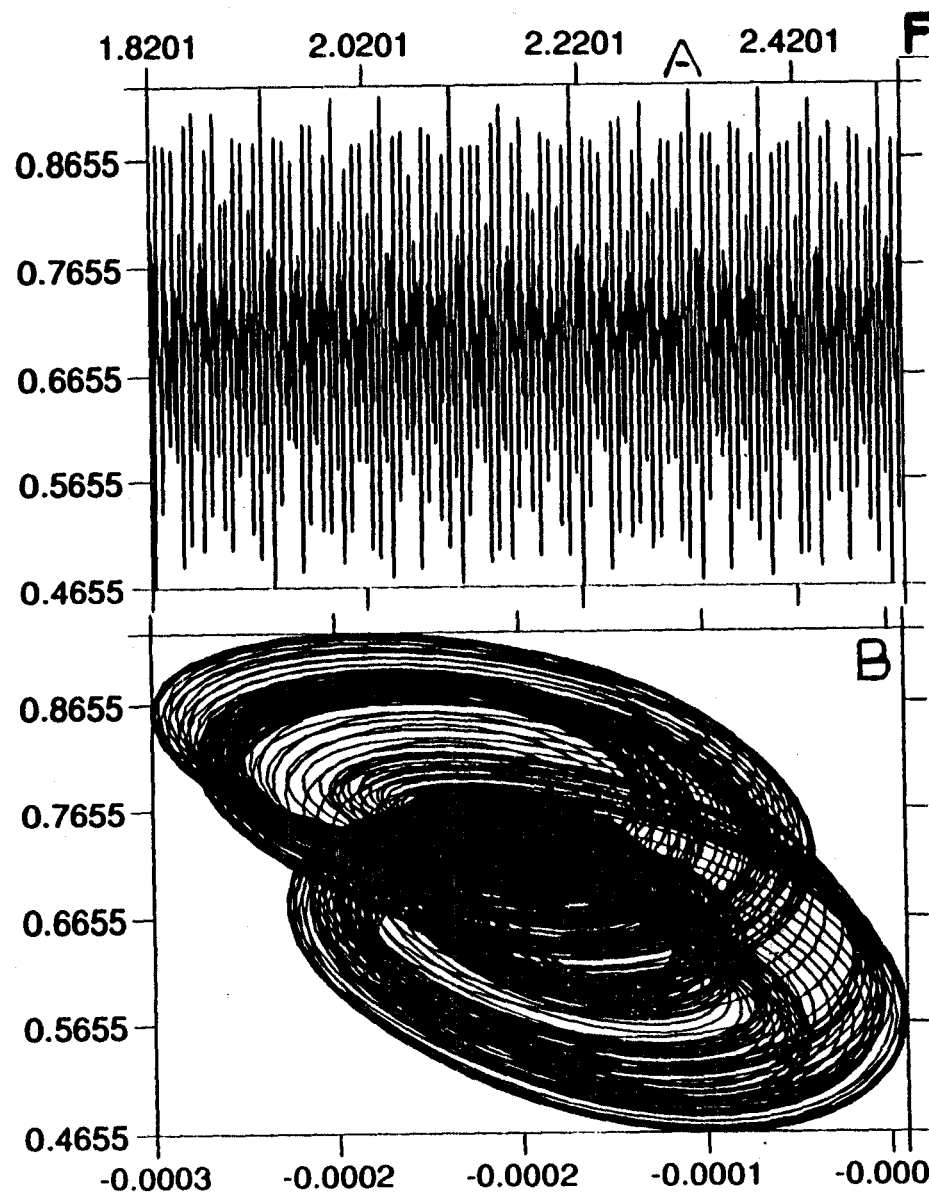


FIGURE 5E

- A) Evolution temporelle du coefficient de Fourier $x_{11}(t')$ pour: $\varepsilon=152$, $Pr=20$, $So=0.2$.
- B) Projection sur le plan (x_{11}, y_{11}) .
- C) Spectre de puissance du signal A.

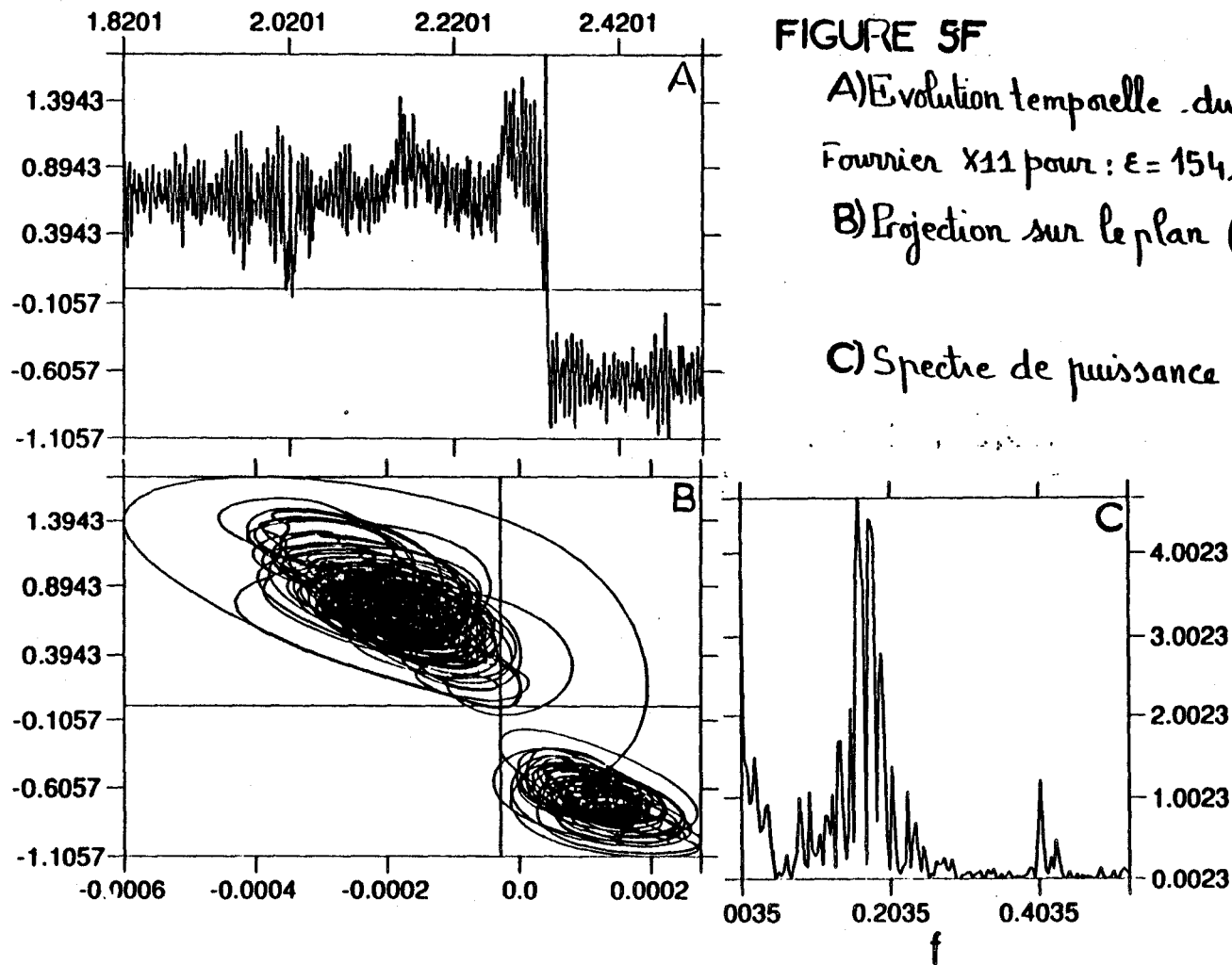


FIGURE 5F

A) Evolution temporelle du coefficients de Fourier X_{11} pour : $\varepsilon = 154$, $Pr = 20$, $\delta_0 = 0.2$

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

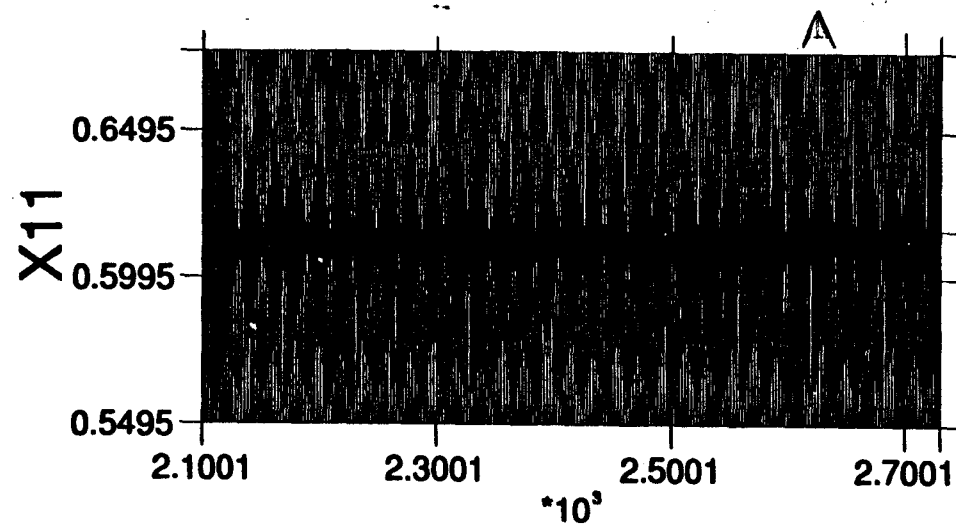
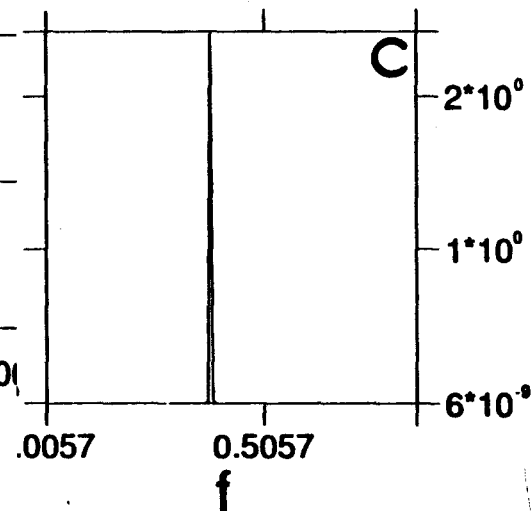
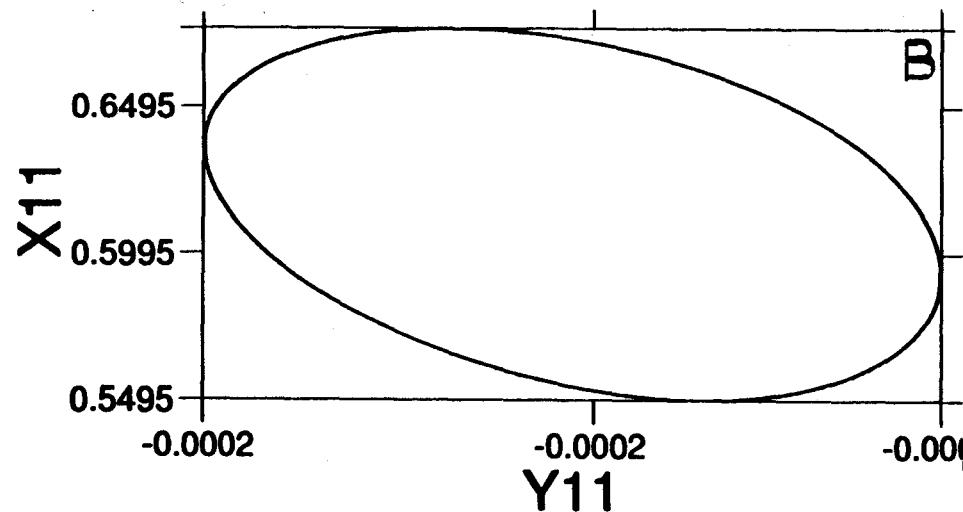


FIGURE 6A

A) Evolution temporelle du coefficient de Fourier X_{11} pour : $\varepsilon = 139.38$, $P_r = 20$, $S_0 = 0.6$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.



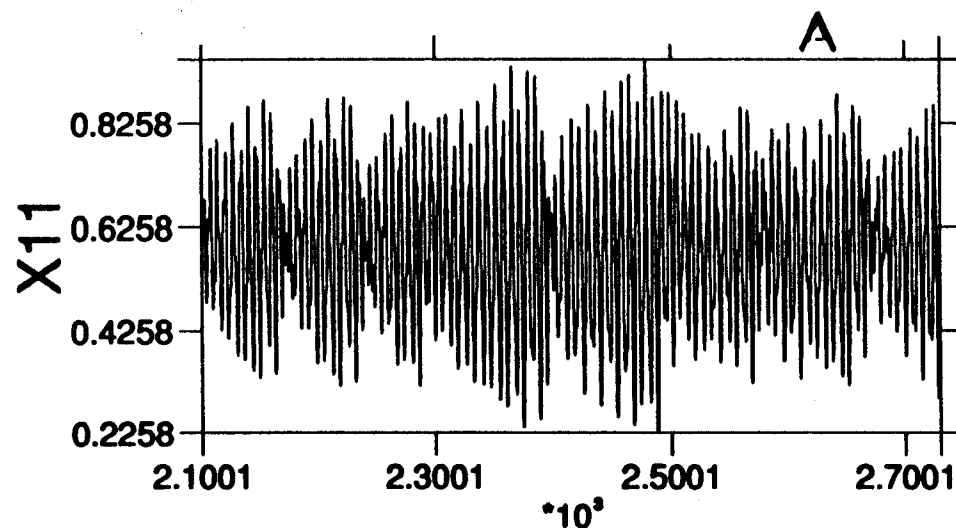
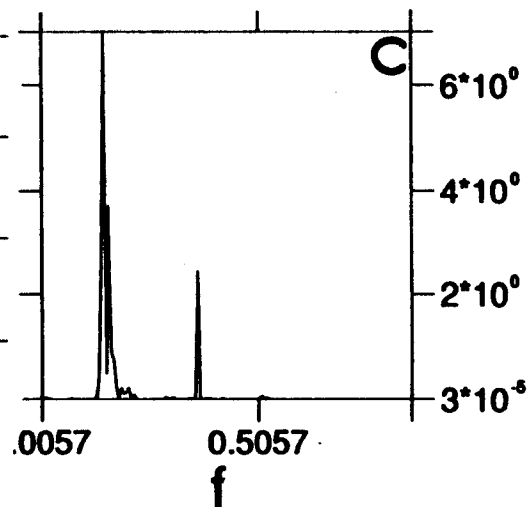
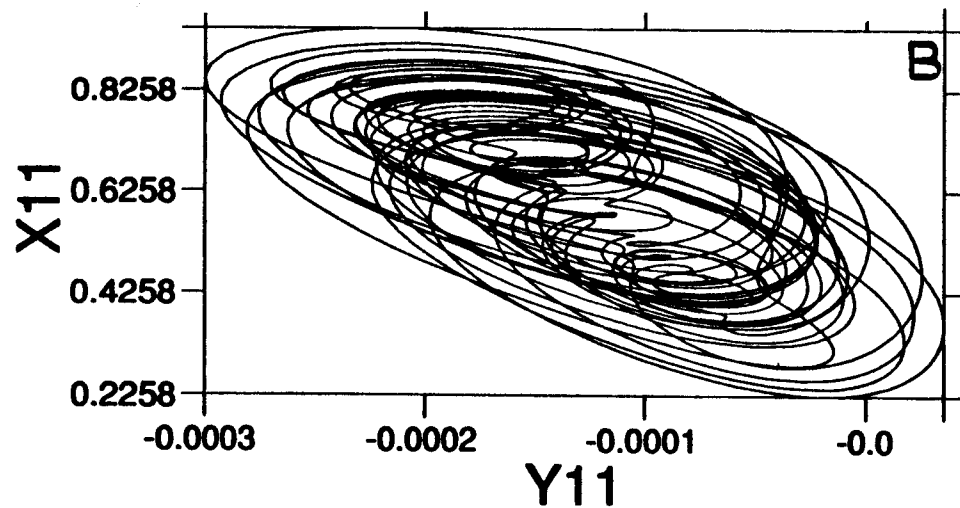


FIGURE 6-B A) Evolution temporelle du coefficient de Fourier X_{11} pour : $\varepsilon = 139.4$, $Pr = 20$, $S_0 = 0.6$.
B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .
C) Spectre de puissance du signal A.



V2b Intermittence :

Rappelons^{tout} d'abord que ce type de séquence de bifurcations a été décrit dans le paragraphe IV-4. du chapitre V. Les résultats indiqués ci-dessous sont obtenus pour un fluide de nombre de Prandtl égal à 10 et un paramètre de profondeur S_0 égal à 0,1. Par augmentation de la contrainte ε , la convection stationnaire perd sa stabilité pour devenir périodique (figure 7A). Cette dernière, lorsque ε croît, perd sa stabilité au profit d'un régime intermittent (figure 7B et 7C). Le spectre de puissance de ce dernier régime comporte une partie continue, traduisant le fait que l'évolution temporelle est désordonnée, erratique.

Pour ce même nombre de Prandtl, la séquence de bifurcations mentionnée ci-dessus disparaît par une augmentation du paramètre de profondeur ($S_0=1$). Ainsi, nous avons observé numériquement l'arrivée d'un régime chaotique succédant brusquement à un régime périodique^{*)}. Ceci donne, une fois de plus, une justification qualitative du rôle influent du paramètre de profondeur sur la détermination des séquences de bifurcations (les figures 8A et 8B sont obtenues respectivement pour $\varepsilon = 114.5$ ^(et 115)).

*) pour $\varepsilon = 114.66$, l'écoulement est périodique.
pour $\varepsilon = 114.80$, l'écoulement est chaotique.

FIGURE 7A A) Evolution temporelle du

coefficient de Fourier X_{11} pour: $E=120$, $Pr=10$,
 $\delta_0=0.1$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

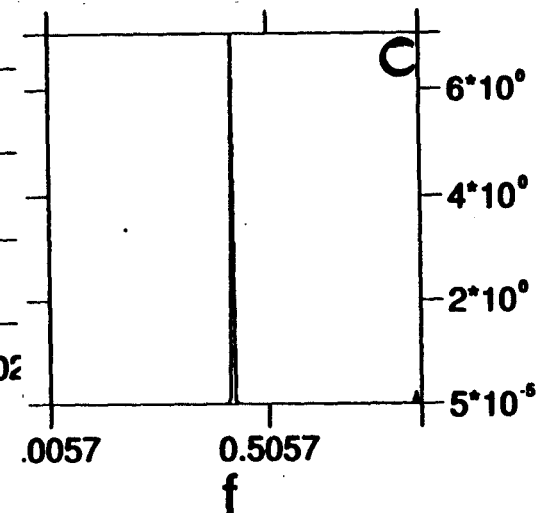
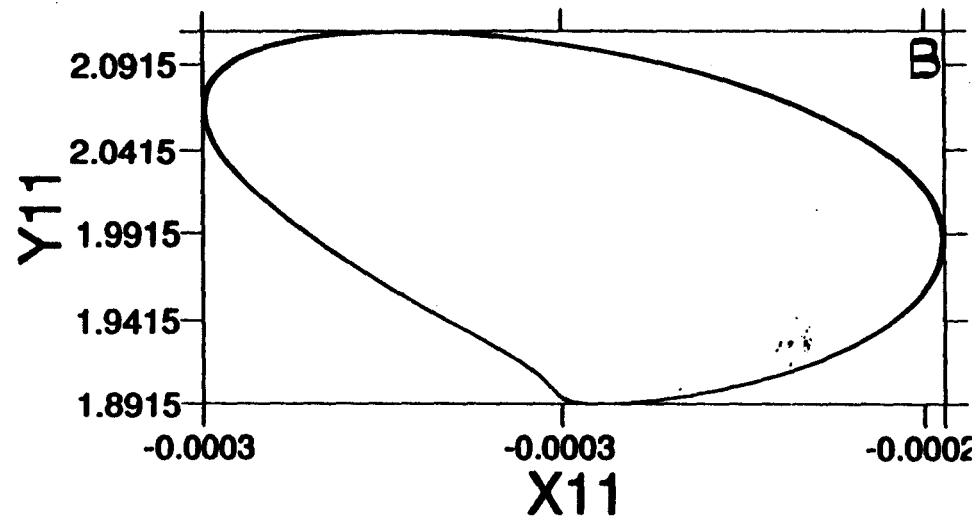
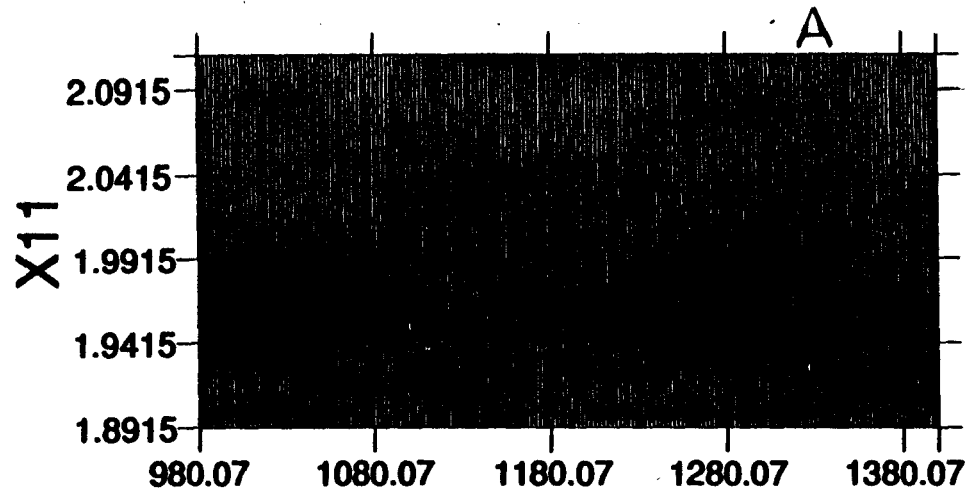
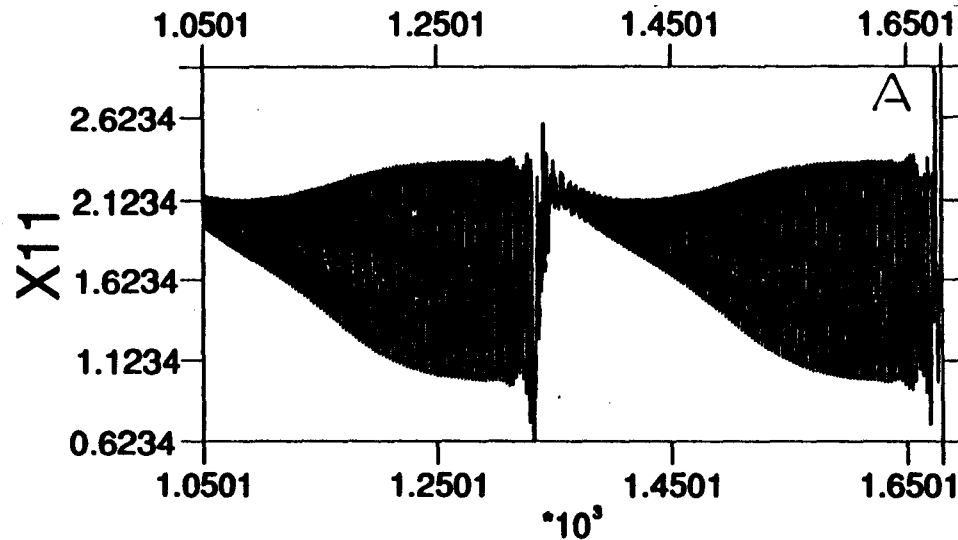
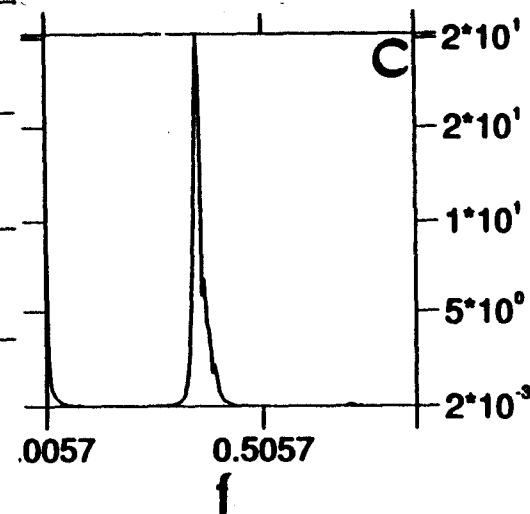
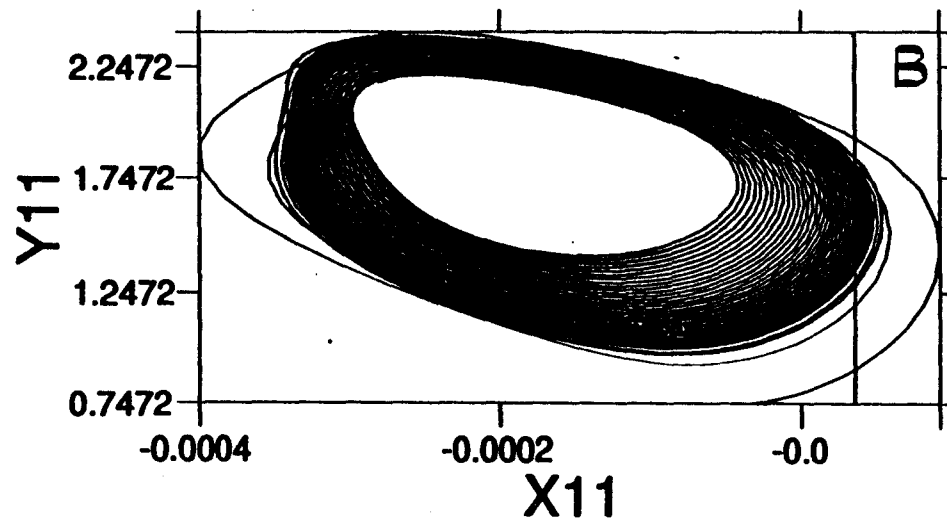


FIGURE 7-B A) Evolution temporelle du coefficient



du Fourier X_{11} pour : $\varepsilon = 125$, $\rho = 10$,
 B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .
 C) Spectre de puissance du signal A.



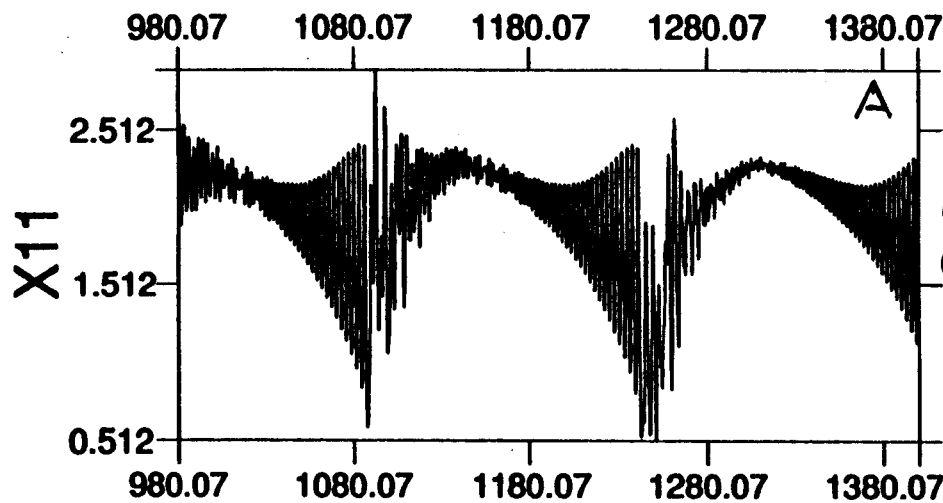


FIGURE 7C A) Evolution temporelle du coefficient

de Fourier X_{11} pour: $\varepsilon = 130$, $Pr = 10$, $So = 0.1$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

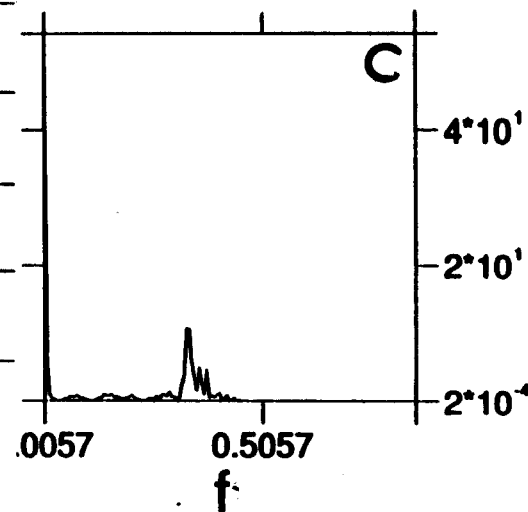
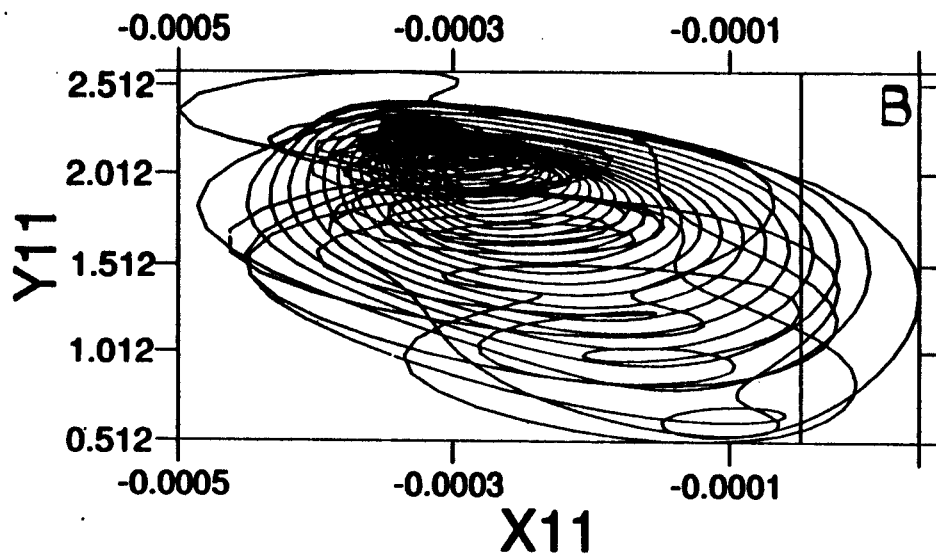
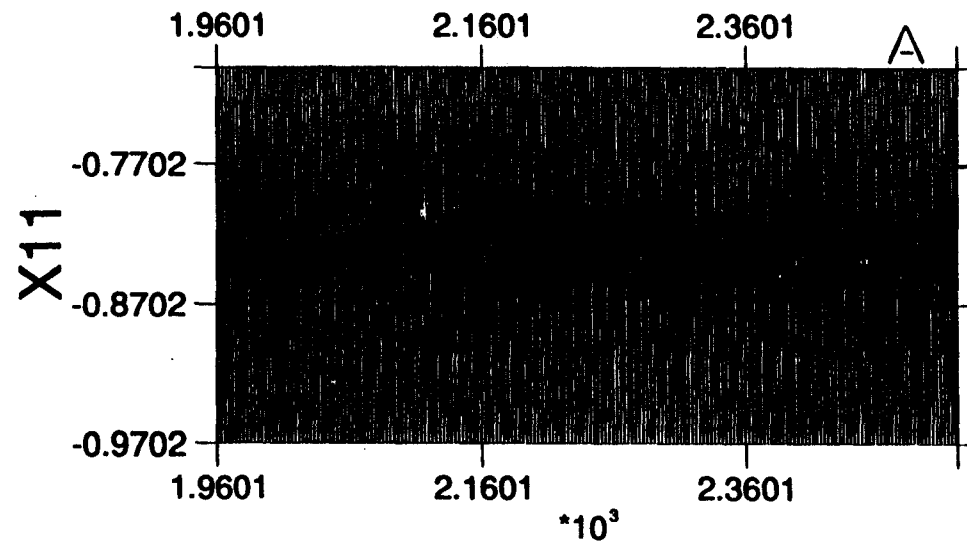


FIGURE 8A

A) Evolution temporelle du

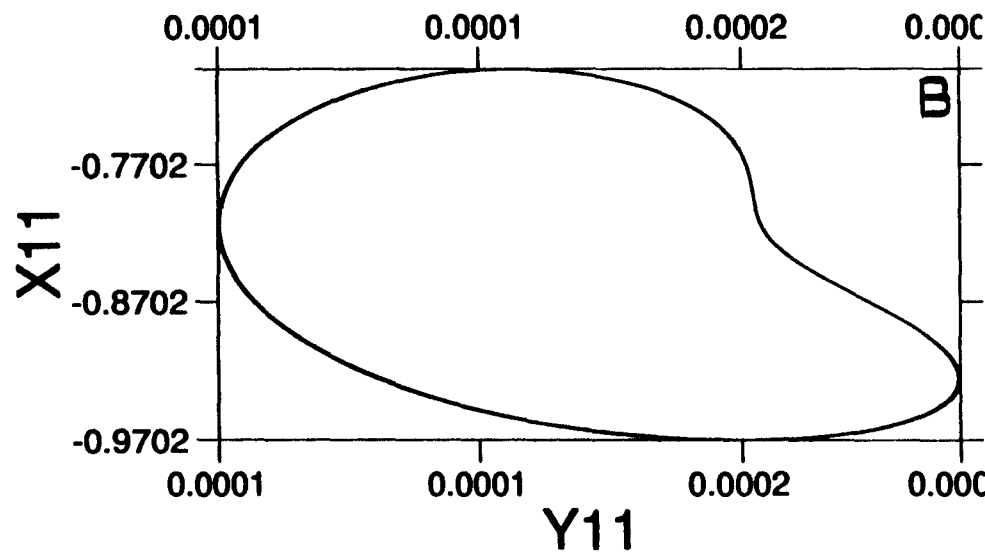


A

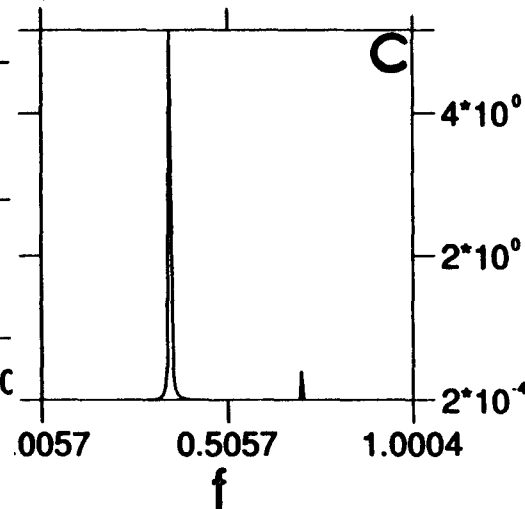
coefficient de Fourier X_{11} pour: $\varepsilon=114.5$, $P_r=10$, $S_o=1$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.



B



C

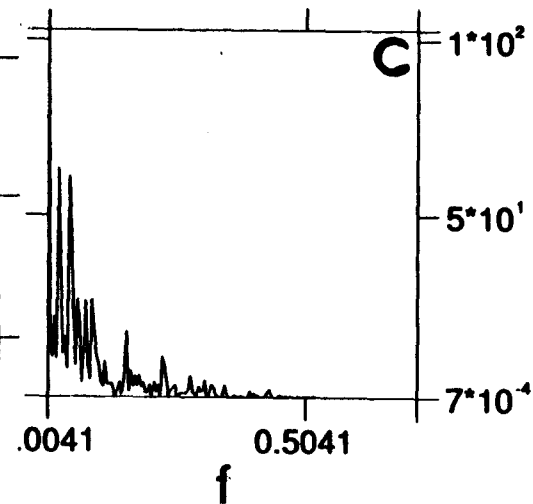
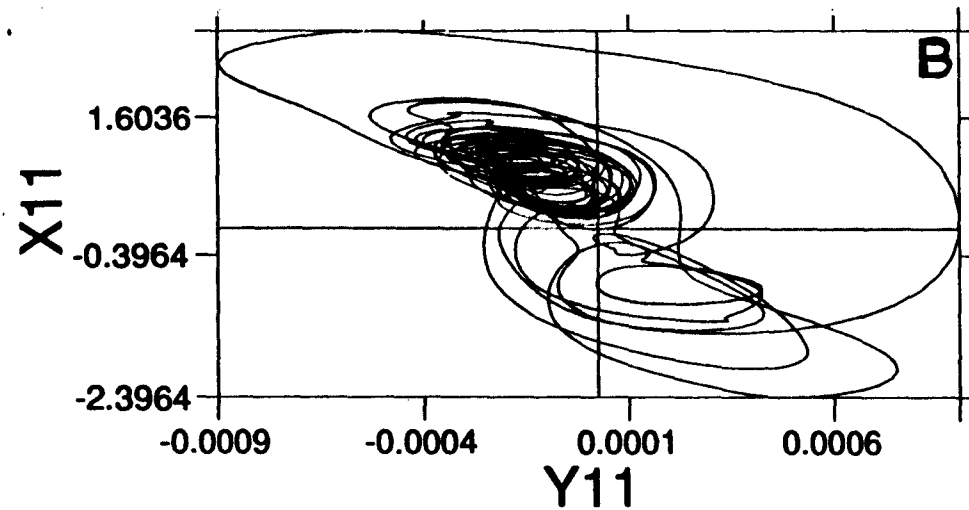
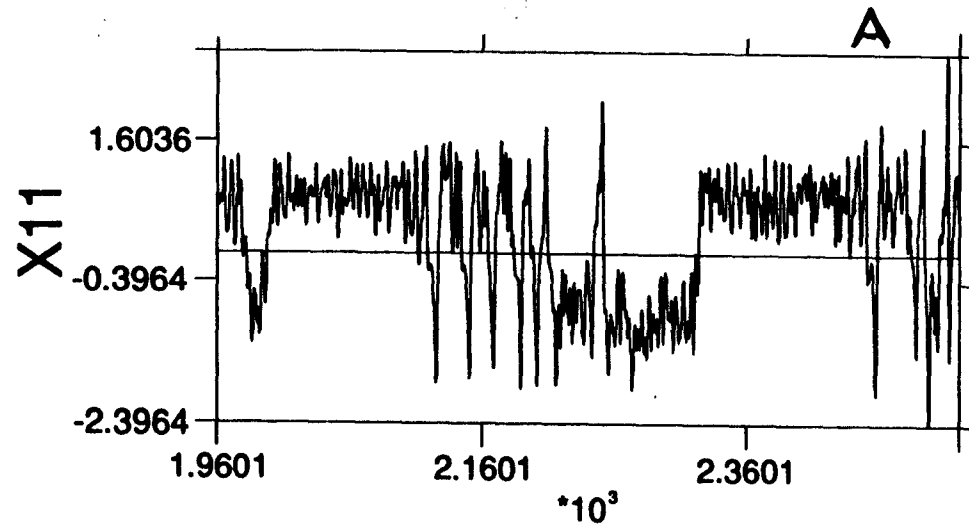
FIGURE 8-B

A) Evolution temporelle du

coefficient de Fourier X_{11} pour : $\varepsilon = 115$, $Pr = 10$, $S_o = 1$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

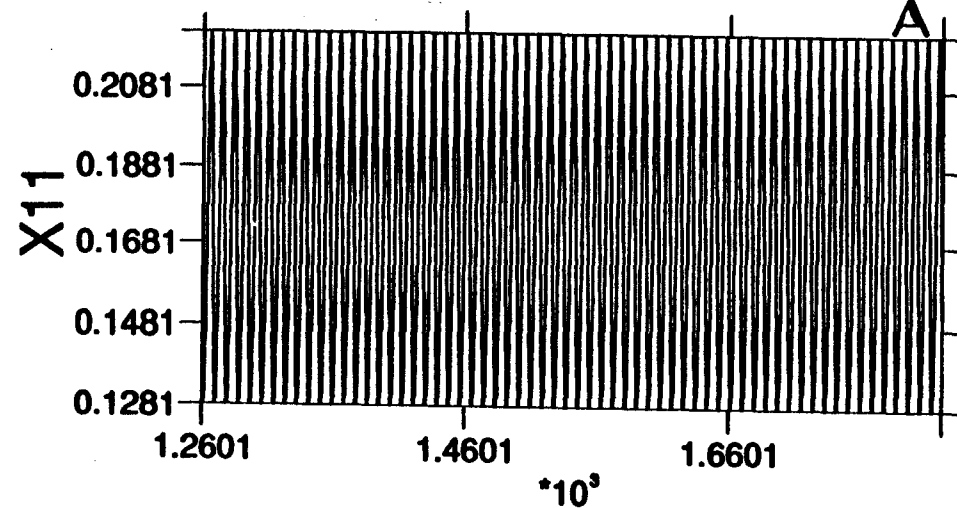


V.2.C Dédoubléments de périodes:

Cette séquence de bifurcations a été mise en évidence dans un fluide de nombre de Prandtl égal à 100 et un paramètre de profondeur égal à 0.1.

Par augmentation de la contrainte ε , nous avons rencontré une succession de régimes périodiques précédents l'apparition du régime chaotique. Les figures 9A, 9B, 9C et 9D illustrent les différents régimes d'écoulements convectifs rencontrés. L'analyse du spectre de puissance de chaque signal nous montre qu'il s'agit d'un phénomène de dédoubléments de périodes. Les orbites de la projection sur le plan (x_{11}, y_{11}) de l'espace des phases (figure 9E est obtenue pour $\varepsilon = 270$) ont un comportement analogue à celui de Lorenz.

Pour ce même nombre de Prandtl mais pour une valeur du paramètre de profondeur $S_0 = 1$, nous avons observé, numériquement au cours du temps t' , qu'une oscillation régulière est suivie par une "bouffée de chaos", elle-même à nouveau suivie par une oscillation régulière (figure 10).



A FIGURE A: A) Evolution temporelle du coefficient de Fourier X_{11} pour: $\varepsilon=200$, $P=100$, $\delta_0=0.1$
B Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) de l'espace des phases
C Le spectre de puissance du signal A

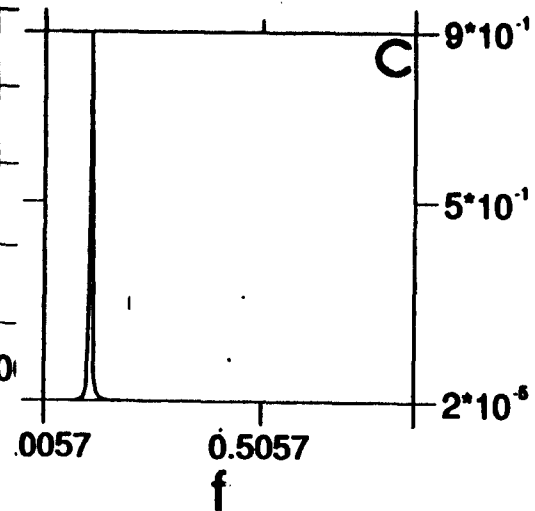
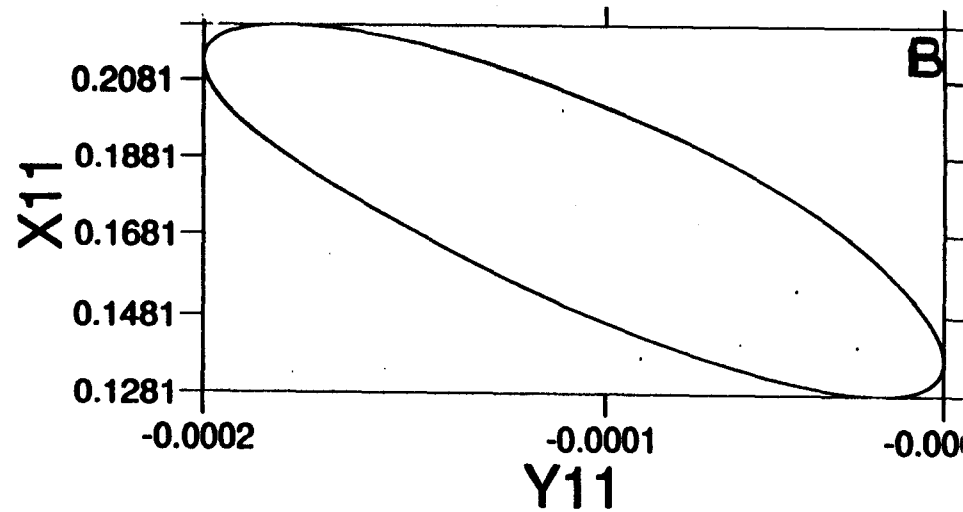


FIGURE 9-B

A) Evolution temporelle du

coefficient de Fourier X_{11} pour: $\varepsilon = 215$, $P_r = 100$, $\delta = 0.1$

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A

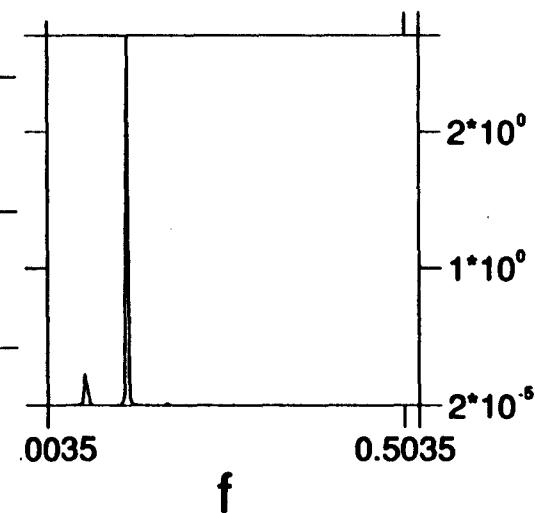
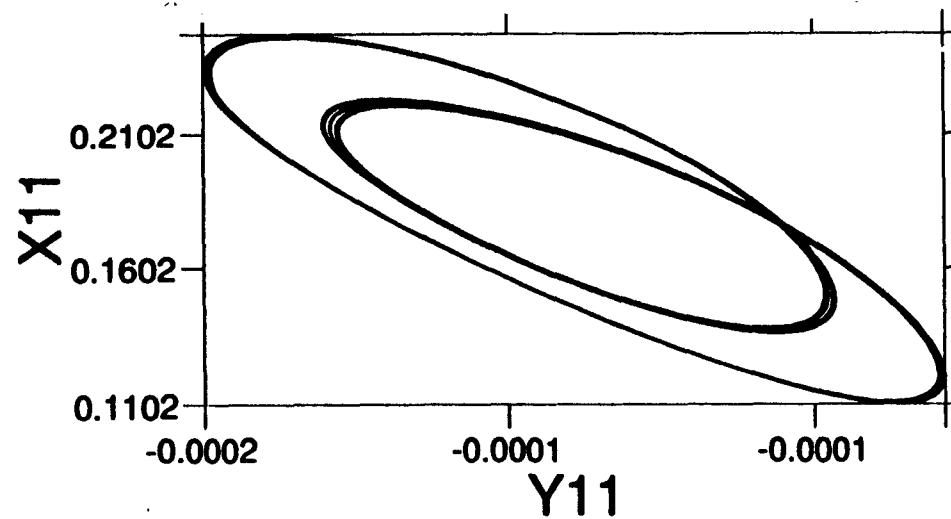
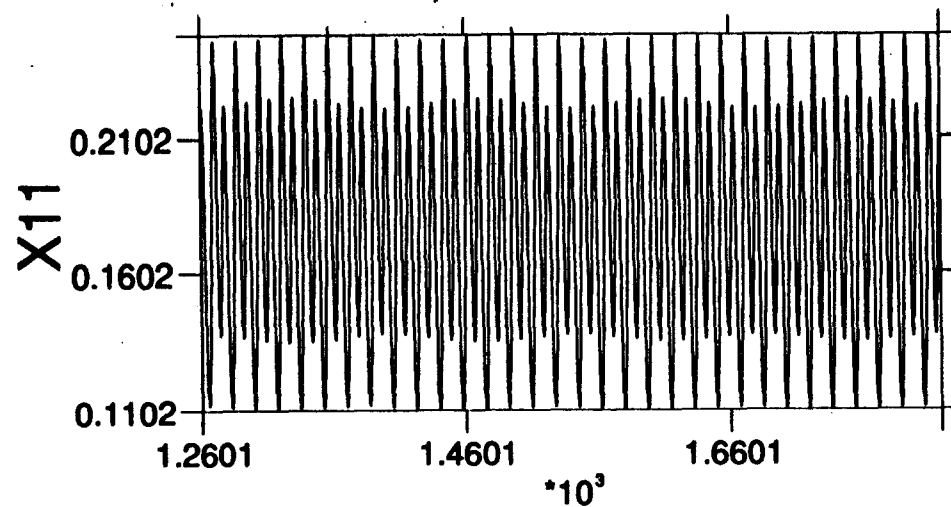
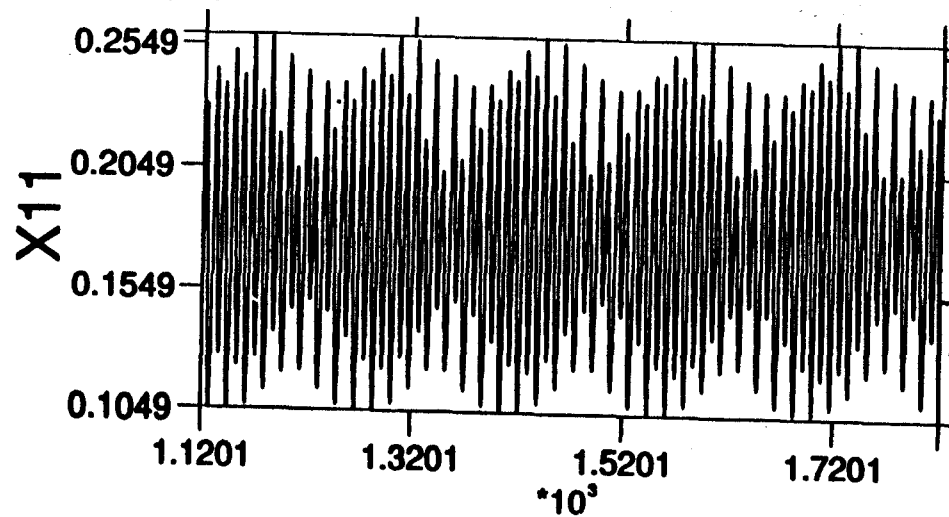


FIGURE 9C

A) Evolution temporelle du



coefficient de Fourier X_{11} pour: $\varepsilon = 220, Pr = 100, \delta_0 = 0.1$.

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

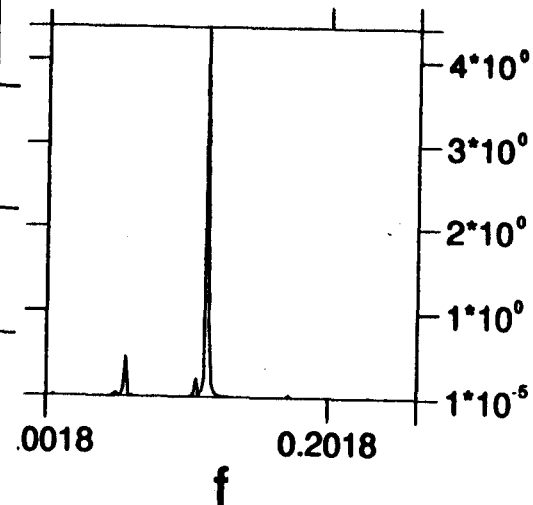
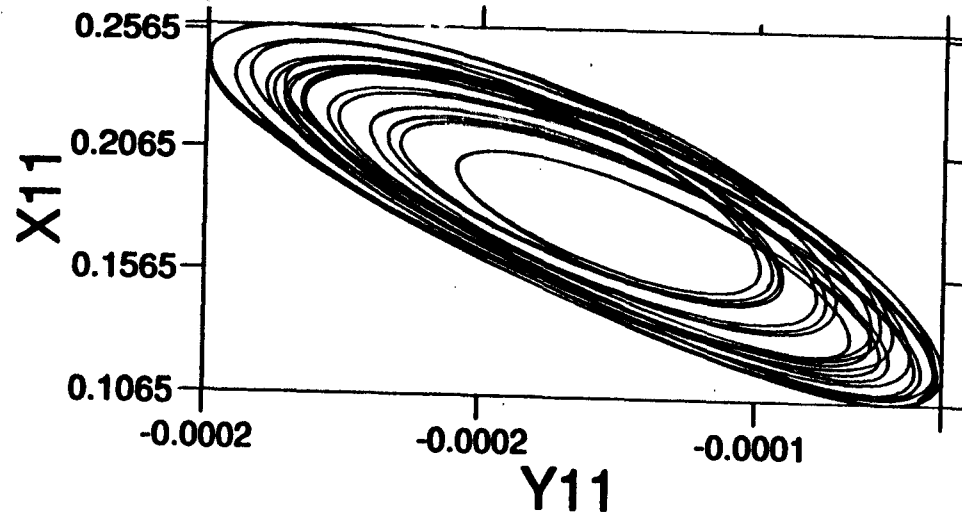
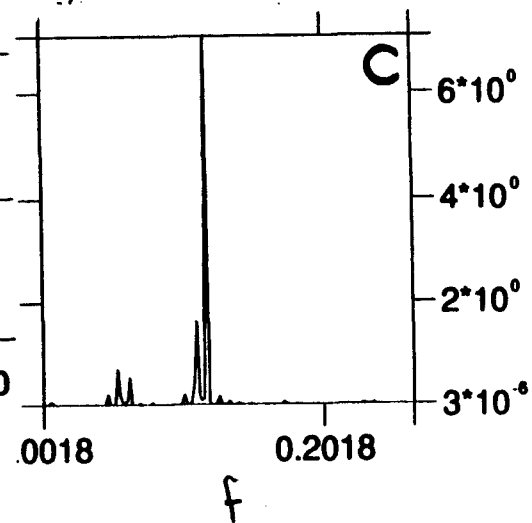
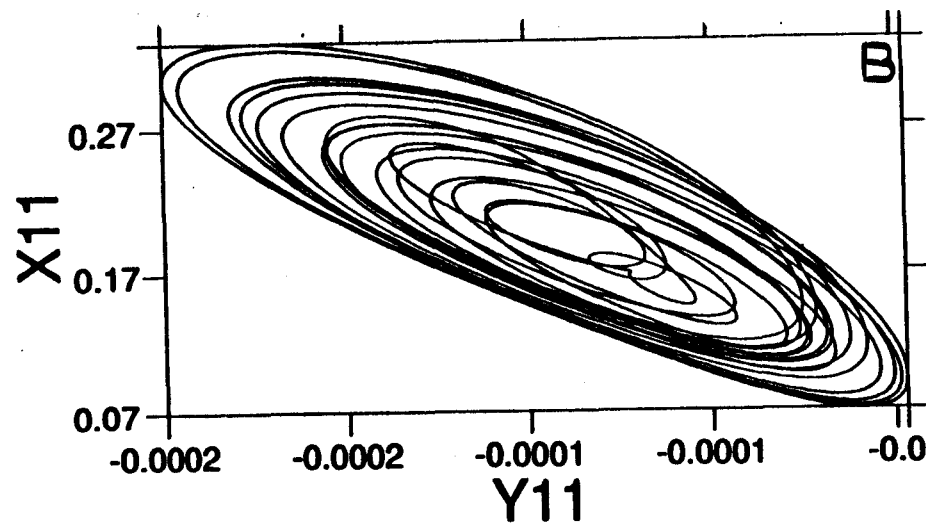
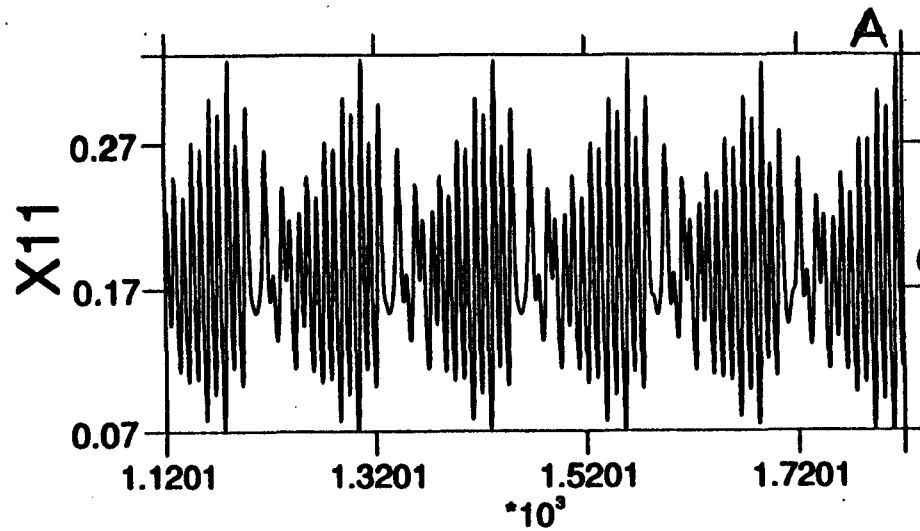


FIGURE 9-D: A) Evolution temporelle du

coefficient de Fournier X_{11} pour: $\varepsilon=250, Pr=100, \delta_0=0.1$

B) Projection sur le plan (X_{11}, Y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.



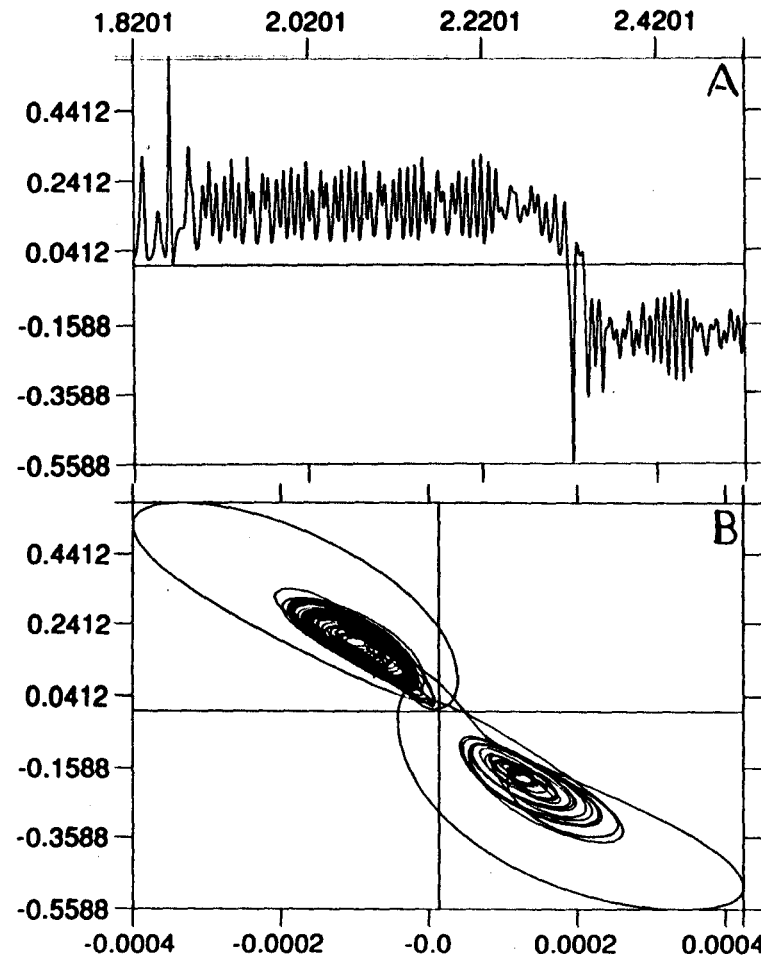


FIGURE 9.E

A) Evolution temporelle du coefficient de Fourier x_{11} pour : $\varepsilon = 270$, $Pr = 100$, $\delta_0 = 0.1$.

B) Projection sur le plan (x_{11}, y_{11}) .

C) Spectre de puissance du signal A.

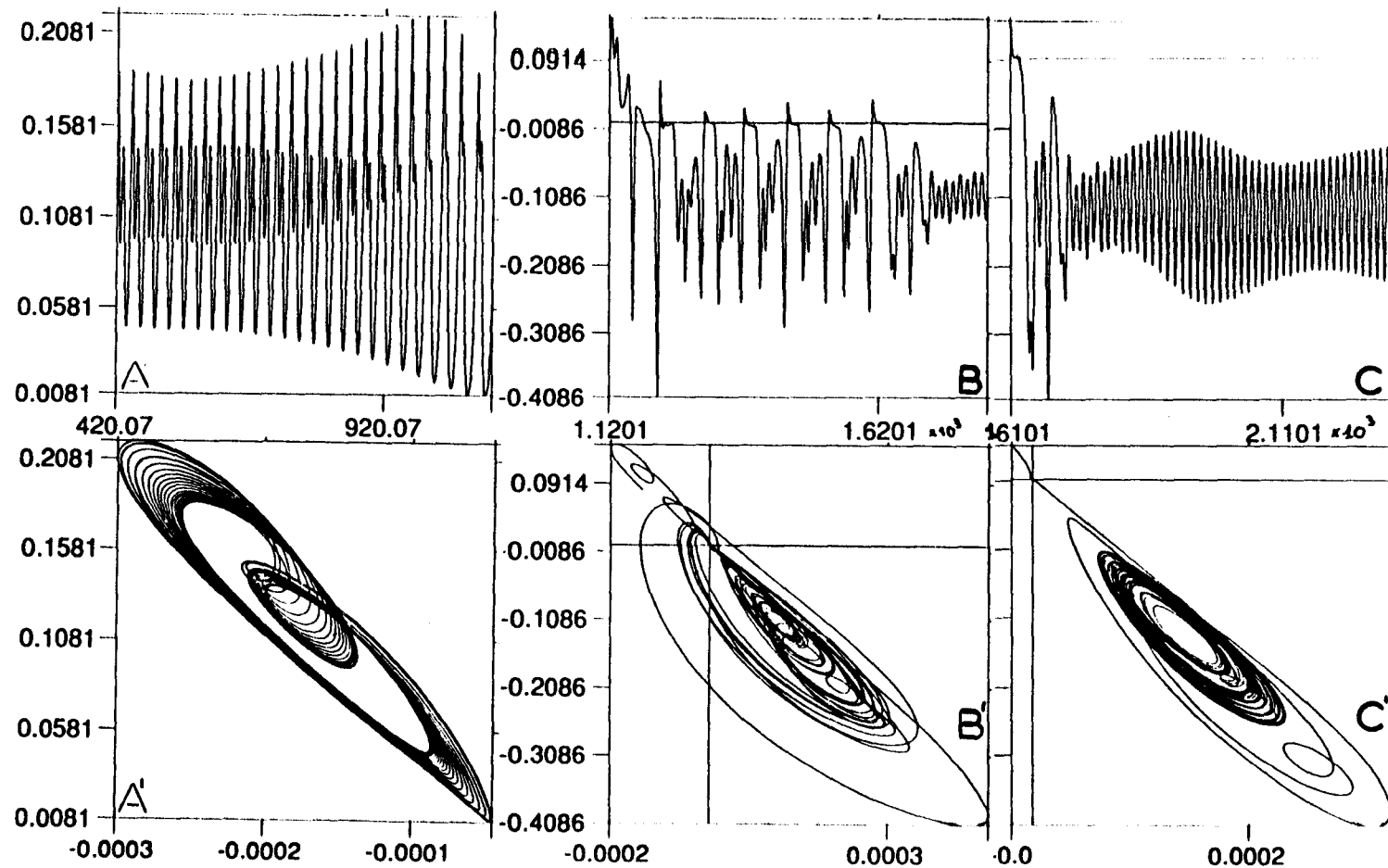


FIGURE 10 $\varepsilon=99.57$, $Pr=100$, $So=1$. Evolution temporelle de $X_{11}(t)$ dans trois intervalles successifs de temps A, B et C. A', B' et C' sont les trois attracteurs correspondants.

- VI -

CONCLUSION

L'analyse asymptotique des équations régissant le phénomène convectif dans une couche horizontale d'épaisseur importante, d'un liquide dilatable, chauffée par le bas, a montré qu'un ^{nouveau} paramètre (dit de "profondeur" d'après Zeytounian [12]) apparaît et que les équations classiques de Boussinesq pour la convection "peu profonde" s'obtiennent à la limite lorsque ce paramètre tend vers zéro (chapitre II). En considérant la théorie linéaire, nous avons donné une preuve de l'existence du principe d'échange des stabilités : la transition de l'état conductif vers l'état convectif passe via un état neutre stationnaire. Pour déterminer le nombre de Rayleigh critique, caractérisant le seuil d'apparition des instabilités convectives, nous avons mené une étude analogue à celle utilisée pour le problème de stabilité de l'écoulement de Couette-Taylor [2]. Dans ce cas, nous avons trouvé que R_{ac} décroît quand le paramètre de profondeur croît, montrant que la couche de fluide devient de moins en moins stable. Quant à la valeur du nombre d'onde, elle reste insensible à ces variations de δ .

La théorie linéaire a montré aussi que les modes du sous-espace des fonctions avec $(p+q)$ pair (les plus instables) sont couplés linéairement aux modes du sous-espace des fonctions avec $(p+q)$ impair, quand δ_0 est non nul. Pour ces raisons, nous avons tenu compte de ces derniers modes

pour dériver les systèmes dynamiques associés à la convection profonde de Rayleigh-Bénard (chapitre IV). Dans le but d'illustrer les modifications dynamiques introduites par le paramètre de profondeur S_0 , nous avons exploré ces systèmes d'équations différentielles ordinaires issus des diverses troncatures dans la méthode de Galerkin. Les principaux résultats de l'intégration numérique de ces systèmes sont exposés au chapitre V. Nous avons montré, en particulier, que pour S_0 non nul, les modes du sous-espace des fonctions avec $(p+q)$ impair bifurquent, même si les conditions initiales appartiennent au sous-espace des fonctions avec $(p+q)$ pair (ceci n'est pas le cas pour la convection "peu profonde"). Il est bon de préciser que l'étude du système dynamique à 15 modes a montré, d'une manière évidente, la grande sensibilité des scénarios de transition vers le chaos et des plages de stabilité de chaque comportement temporel, aux variations de S_0 .

Il est évident que les systèmes d'équations différentielles ordinaires pour les amplitudes que nous avons étudiés ne décrivent pas correctement les caractéristiques de la solution exacte du système d'équations aux dérivées partielles (4.1) avec (4.2) et (4.3) [21]: le comportement asymptotique de la solution des équations de Navier-Stokes est décrit par la projection sur un sous-espace de dimension finie si un nombre "suffisamment grand" de modes est inclus. Mais l'influence de S_0 ,

mise en évidence dans ces systèmes à faible nombre de modes, se reproduira dans les systèmes de dimension suffisamment élevée.

Compte tenu des résultats que nous avons obtenus, on pourrait poursuivre l'étude de la solution de ce problème en choisissant des troncatures de plus en plus élevées, et, en mettant en évidence l'influence du paramètre de profondeur S_0 .

APPENDICE : Méthode d'intégrations.

On représente les systèmes dynamiques issus des diverses troncatures dans la méthode de Galerkin sous la forme compacte suivante :

$$\frac{dX}{dt} = G_{\mu^*}(X(t)) ,$$

$$\text{où } \mu^* = (Pr, Ra, \delta_0) ,$$

$$X^T = (X_{11}, \dots, Y_n, \dots) .$$

Nous résolvons numériquement ces systèmes différentiels non linéaire à coefficients constants pour μ^* fixé, de dimension égale au nombre de modes pour la troncature considérée, par la méthode de Runge-Kutta classique, d'ordre 4. On a donc [34] :

$$X_{n,1} = X_n ;$$

$$X_{n,2} = X_n + \frac{\Delta t}{2} G_{\mu^*}(X_{n,1}) ;$$

$$X_{n,3} = X_n + \frac{\Delta t}{2} G_{\mu}^*(X_{n,2}) ;$$

$$X_{n,4} = X_n + \Delta t G_{\mu}^*(X_{n,3}) ,$$

$$X_{n+1} = X_n + \frac{\Delta t}{6} \left[G_{\mu}^*(X_n) + 2(G_{\mu}^*(X_{n,2}) + G_{\mu}^*(X_{n,3})) + G_{\mu}^*(X_{n,4}) \right] ,$$

avec

le pas de temps $\Delta t = 0.07$.

A) Le système d'équations différentielles ordinaires résultant de la troncature à 3 modes (système de Lorenz):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{dX_{11}}{dt'} = X_{11} + \frac{Ra Y_{11}}{Pr} \quad ; \\ -\frac{dY_{11}}{dt'} = r X_{11} + X_{11} Y_{20} + \frac{Y_{11}}{(1+\delta_0/2)Pr} \quad ; \\ -\frac{dY_{20}}{dt'} = -X_{11} Y_{11} + 8 Y_{20} / (3(1+\delta_0/2)Pr), \end{array} \right.$$

avec

$r = 1/R_{ac}^s$; où R_{ac}^s est le nombre de Rayleigh critique de la convection peu profonde (= 657.5) .

B) Système d'équations différentielles ordinaires résultant de la troncature à 6 modes :

$$-\frac{dX_{11}}{dt'} = X_{11} + \frac{Ra}{Pr} Y_{11} ;$$

$$-\frac{dX_{21}}{dt'} = 3X_{21} + \frac{Ra}{3Pr} Y_{21} ;$$

$$\begin{aligned} -\frac{dY_{11}}{dt'} = & rX_{11} + \frac{1}{cr} \left\{ X_{11}Y_{10} - \frac{1}{2} X_{21}Y_{10} - 2\tilde{S} \left\{ \frac{A_2}{2} X_{11}Y_{10} + \right. \right. \\ & A_4 X_{21}Y_{20} \left. \right\} + \frac{EO}{Pr} Y_{11} \left. \right\} - \frac{2\tilde{S}A_2}{cr} \left\{ -\frac{X_{11}Y_{10}}{2} - 2\tilde{S} \left\{ C_1 X_{11}Y_{20} + \frac{C_2 X_{21}Y_{10}}{2} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{3EO}{Pr} Y_{21} \right\} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{dY_{21}}{dt'} = & rX_{21} + \frac{1}{cr} \left\{ -\frac{X_{21}Y_{10}}{2} - 2\tilde{S} \left\{ C_1 X_{11}Y_{20} + \frac{C_2}{2} X_{21}Y_{10} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{3EO}{Pr} Y_{21} \right\} - \frac{2\tilde{S}A_2}{cr} \left\{ X_{11}Y_{20} - \frac{1}{2} X_{21}Y_{10} - 2\tilde{S} \left\{ \frac{A_2}{2} X_{11}Y_{10} + A_4 X_{21}Y_{20} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{EO}{Pr} Y_{11} \right\} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{dY_{20}}{dt'} = & \frac{1}{cr} \left\{ -X_{11}Y_{11} - \tilde{S}C_3 (X_{11}Y_{21} + X_{21}Y_{11}) - \frac{\tilde{S}PrD_{11}}{Ra} X_{11}X_{21} \right. \\ & \left. + \frac{8EO}{3Pr} Y_{20} \right\} - \frac{2\tilde{S}A_2}{cr} \left\{ \frac{X_{11}Y_{21} + X_{21}Y_{11}}{2} - 2\tilde{S} (A_2 X_{11}Y_{11} + 2A_4 X_{21}Y_{21}) \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{S}Pr}{Ra} (D_{12} X_{11}^2 + D_{13} X_{21}^2) + \frac{2EO}{3Pr} Y_{10} \right\} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{10}}{dt'} &= \frac{1}{cr} \left\{ \frac{X_{11}Y_{21} + X_{21}Y_{11}}{2} - 2\tilde{\delta}(A_2X_{11}Y_{11} + 2A_4X_{21}Y_{21}) \right. \\
 &- \frac{\tilde{\delta}Pr}{Ra}(D_{12}X_{11}^2 + D_{13}X_{21}^2) + \frac{2E0}{3Pr}Y_{10} \left. \right\} - \frac{2\tilde{\delta}A_2}{cr} \left\{ -X_{11}Y_{11} - \tilde{\delta}C_3(X_{11}Y_{21} + \right. \\
 &X_{21}Y_{11}) - \frac{\tilde{\delta}PrD_{11}}{Ra}X_{11}X_{21} + \frac{8E0}{3Pr}Y_{20} \left. \right\} ,
 \end{aligned}$$

avec :

$$E0 = \frac{2}{2 + \delta_0} ;$$

$$r = \frac{1}{Ra_c} ;$$

$$A_2 = \frac{8}{9\pi^2} ;$$

$$A_4 = \frac{16}{225\pi^2} = C_1 ;$$

$$\tilde{\delta} = E0\delta_0 ;$$

$$C_3 = \frac{448}{225\pi^2} ;$$

$$D_{11} = \frac{704}{135\pi^2} ;$$

$$D_{12} = \frac{40}{27\pi^2} ;$$

$$D_{13} = \frac{2464}{135\pi^2} ,$$

$$cr = 1 - 4\tilde{\delta}A_2^2 .$$

c) Système d'équations différentielles ordinaires résultant de la
troncature à 8 modes :

$$-\frac{dX_{11}}{dt'} = -3AX_{21}X_{12} + \frac{Ra}{Pr} Y_{11} + X_{11} \quad ;$$

$$-\frac{dX_{21}}{dt'} = -AX_{11}X_{12} + \frac{Ra}{3Pr} Y_{21} + 3X_{21} \quad ;$$

$$-\frac{dX_{12}}{dt'} = 3AX_{11}X_{21} + \frac{Ra}{Pr} Y_{12} + 2X_{12} \quad ;$$

$$-\frac{dY_{11}}{dt'} = rX_{11} + \frac{1}{cr} \left\{ 3A(X_{21}Y_{12} + X_{12}Y_{21}) + X_{11}Y_{20} - \frac{X_{21}Y_{10}}{2} \right.$$

$$\left. - 4\tilde{\delta} \left[3AD_{111} (X_{12}Y_{11} + X_{11}Y_{12}) + D_{221} X_{21}Y_{20} + D_{111} \frac{X_{11}Y_{10}}{2} \right] + \frac{EOY_{11}}{Pr} \right.$$

$$\left. - \frac{64\tilde{\delta}PrA}{9Ra\pi^2} X_{11}X_{12} \right\} - \frac{2\tilde{\delta}DO}{cr} \left\{ -3A(X_{12}Y_{11} + X_{11}Y_{12}) - \frac{X_{11}Y_{10}}{2} - \right.$$

$$\left. 4\tilde{\delta} \left[B(X_{21}Y_{12} + X_{12}Y_{21}) + D_{212} X_{11}Y_{20} + \frac{D_{122}}{2} X_{21}Y_{10} \right] + \frac{3EOY_{21}}{Pr} \right.$$

$$\left. + \frac{64\tilde{\delta}Pr\sqrt{2}}{45Ra\pi^2} X_{12}X_{21} \right\} \quad ;$$

$$-\frac{dY_{21}}{dt'} = rX_{21} + \frac{1}{cr} \left\{ -3A(X_{12}Y_{11} + X_{11}Y_{12}) - \frac{X_{11}Y_{10}}{2} - \right.$$

$$\left. 4\tilde{\delta} \left[B(X_{21}Y_{12} + X_{12}Y_{21}) + D_{212} X_{11}Y_{20} + \frac{D_{122}}{2} X_{21}Y_{10} \right] + \frac{3EOY_{21}}{Pr} \right.$$

$$\left. + \frac{64\tilde{\delta}Pr\sqrt{2}}{45Ra\pi^2} X_{12}X_{21} \right\} - \frac{2\tilde{\delta}DO}{cr} \left\{ 3A(X_{21}Y_{12} + X_{12}Y_{21}) + X_{11}Y_{20} - \frac{X_{21}Y_{10}}{2} \right.$$

$$\left. - 4\tilde{\delta} \left[3AD_{111} (X_{12}Y_{11} + X_{11}Y_{12}) + D_{221} X_{21}Y_{20} + \frac{D_{111}}{2} X_{11}Y_{10} \right] + \frac{EOY_{11}}{Pr} \right.$$

$$\left. - \frac{64\tilde{\delta}PrA}{9Ra\pi^2} X_{11}X_{12} \right\} \quad ;$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{11}}{dt'} &= rX_{11} + \left\{ 3A(X_{21}Y_{12} + X_{12}Y_{21}) + X_{11}Y_{20} - \frac{1}{2}X_{21}Y_{10} \right. \\
 &+ 4\tilde{S}(3AD_{111}(X_{12}Y_{11} + X_{11}Y_{12}) + D_{221}X_{21}Y_{20} + X_{11}Y_{10}\frac{D_{111}}{2}) + \frac{EOY_{11}}{Pr} \\
 &\left. - \frac{64\tilde{S}Pr}{9Ra\pi^2}X_{11}X_{12} \right\} + 2\tilde{S}D_0 \left\{ \frac{dY_{21}}{dt'} + rX_{21} \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{12}}{dt'} &= 2rX_{12} + \left\{ 3A(X_{21}Y_{11} - X_{11}Y_{21}) - 2X_{12}Y_{20} - 4\tilde{S}(D_{111}X_{12}Y_{10}) \right. \\
 &\left. - \frac{Pr\tilde{S}A}{\pi^2Ra} \left(\frac{16X_{11}^2}{9} - \frac{448}{45}X_{21}^2 \right) + \frac{2EO}{Pr}Y_{12} \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{20}}{dt'} &= \frac{1}{cr} \left\{ \frac{1}{2}(X_{21}Y_{11} + X_{11}Y_{21}) - 4\tilde{S}(D_{111}X_{11}Y_{11} + 2X_{21}Y_{21}D_{221} \right. \\
 &+ 2D_{111}X_{12}Y_{12}) + \frac{2EO}{3Pr}Y_{10} - \frac{\tilde{S}Pr}{\pi^2Ra} \left(\frac{40}{27}X_{11}^2 + \frac{2464}{135}X_{21}^2 + \frac{160}{27}X_{12}^2 \right) \left. \right\} \\
 &- \frac{2\tilde{S}D_0}{cr} \left\{ -(X_{11}Y_{11} + 2X_{12}Y_{12}) - \tilde{S}D(X_{21}Y_{11} + X_{11}Y_{21}) + \frac{8EO}{3Pr}Y_{20} \right. \\
 &\left. - \frac{\tilde{S}Pr}{\pi^2Ra} \left(\frac{704}{135}X_{11}X_{21} \right) \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{20}}{dt'} &= \left\{ -(X_{11}Y_{11} + 2X_{12}Y_{12}) - \tilde{S}D(X_{21}Y_{11} + X_{11}Y_{21}) \right. \\
 &\left. + \frac{8EO}{3Pr}Y_{20} - \frac{\tilde{S}Pr}{\pi^2Ra} \left(\frac{704}{135}X_{11}X_{21} \right) \right\} + 2\tilde{S}D_0 \frac{dY_{10}}{dt'},
 \end{aligned}$$

avec

$$E_0 = \frac{2}{2+\delta_0} ;$$

$$\tilde{\delta} = E_0 \delta_0 ;$$

$$r = \frac{1}{R_{ac}^5} ;$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4} ;$$

$$D_{111} = \frac{4}{9\pi^2} ;$$

$$D_{122} = \frac{208}{225\pi^2} ;$$

$$B = \frac{60\sqrt{2}}{225\pi^2} ;$$

$$D = \frac{448}{225\pi^2} ;$$

$$D_0 = \frac{8}{9\pi^2} ,$$

$$cr = 1 - 4(\tilde{\delta} D_0)^2 .$$

D) Le système d'équations différentielles ordinaires résultant de la troncature à 15 modes:

$$-\frac{dX_{11}}{dt'} = -\frac{\sqrt{2}}{12} \left\{ 9X_{12}X_{21} + 28X_{22}X_{31} + 4X_{22}X_{13} \right\}$$

$$+ \frac{Ra}{Pr} Y_{11} + X_{11} ;$$

$$-\frac{dX_{21}}{dt'} = -\frac{\sqrt{2}}{36} \left\{ 9X_{11}X_{12} + 25X_{12}X_{13} + 65X_{12}X_{31} \right\}$$

$$+ \frac{Ra}{3Pr} Y_{21} + 3X_{21} ;$$

$$-\frac{dX_{12}}{dt'} = \frac{\sqrt{2}}{12} \left\{ 9X_{21}X_{11} + 5X_{21}X_{13} + 25X_{21}X_{31} \right\}$$

$$+ \frac{Ra}{Pr} Y_{12} + 2X_{12} ;$$

$$-\frac{dX_{22}}{dt'} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left\{ X_{11}X_{13} - 2X_{11}X_{31} + 2X_{31}X_{13} \right\}$$

$$+ \frac{Ra}{2Pr} Y_{22} + 4X_{22} ;$$

$$-\frac{dX_{13}}{dt'} = \frac{\sqrt{2}}{44} \left\{ 36X_{11}X_{22} + 15X_{12}X_{21} + 56X_{22}X_{31} \right\}$$

$$+ \frac{9Ra}{11Pr} Y_{13} + \frac{11}{3} X_{13} ;$$

$$-\frac{dX_{31}}{dt'} = -\frac{\sqrt{2}}{76} \left\{ 36X_{11}X_{22} - 15X_{12}X_{21} - 8X_{13}X_{22} \right\}$$

$$+ \frac{3Ra}{19Pr} Y_{31} + \frac{19}{3} X_{31} ;$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{21}}{dt'} &= rX_{21} - \frac{1}{cr_1} \left\{ \frac{1}{2} X_{11}Y_{10} + \frac{5\sqrt{2}}{4} (X_{12}Y_{13} + X_{13}Y_{12}) + \frac{3\sqrt{2}}{4} (X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{11}) \right. \\
 &- \frac{5\sqrt{2}}{4} (X_{12}Y_{31} + X_{32}Y_{12}) + \frac{X_{31}Y_{10}}{2} + 2(-X_{21}Y_{40} + 4\tilde{S}(D_{412}X_{11}Y_{40} + D_{431}X_{31}Y_{40})) \\
 &+ \tilde{S}\sqrt{2}(2A_{122}(X_{11}Y_{22} + X_{22}Y_{11}) + A_{422}(X_{12}Y_{21} + X_{21}Y_{12}) + 2A_{323}(X_{22}Y_{31} + X_{31}Y_{22}) \\
 &+ 2A_{322}(X_{22}Y_{13} + X_{13}Y_{22}) + 4D_{223}X_{31}Y_{20} + 2D_{122}X_{21}Y_{10} + 4D_{221}X_{11}Y_{20}) + \\
 &\left. \frac{4\tilde{S}P_r\sqrt{2}A}{Ra} \left[\frac{32}{45} X_{11}X_{22} - \frac{16}{45} X_{12}X_{21} - \frac{32}{135} X_{22}X_{13} + \frac{1120}{189} X_{22}X_{31} \right] - \frac{3E_0}{P_r} Y_{21} \right\} \\
 &+ \frac{2\tilde{S}A_{32}}{cr_1} \left\{ \sqrt{2}(X_{11}Y_{22} + X_{22}Y_{11}) + \frac{5\sqrt{2}}{4}(X_{21}Y_{12} + X_{12}Y_{21}) + 2\sqrt{2}(X_{22}Y_{13} + X_{13}Y_{22}) \right. \\
 &+ \frac{X_{21}Y_{10}}{2} + X_{11}Y_{20} + 2(-X_{11}Y_{40} + 4\tilde{S}D_{423}X_{21}Y_{40}) + \frac{4\tilde{S}P_r\sqrt{2}A}{Ra} \left(\frac{116}{135} X_{11}X_{12} \right. \\
 &+ \frac{52}{35} X_{12}X_{31} + \frac{160}{189} X_{21}X_{22} \left. \right) + \tilde{S}\sqrt{2}(3D_{113}(X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{11}) + 5D_{113}(X_{13}Y_{12} + \\
 &X_{12}Y_{13}) + 6D_{223}(X_{22}Y_{21} + X_{21}Y_{22}) + A_{631}(X_{12}Y_{31} + X_{31}Y_{12}) + 2D_{133}X_{31}Y_{10} \\
 &+ 2D_{113}X_{11}Y_{10} + 4D_{223}X_{21}Y_{20}) - \frac{19E_0}{3P_r} Y_{31} \left. \right\} + \frac{2\tilde{S}A_{21}}{cr_1} \left\{ -X_{11}Y_{20} + X_{31}Y_{20} \right. \\
 &- \frac{3\sqrt{2}}{4}(X_{12}Y_{21} + X_{21}Y_{12}) - \sqrt{2}(X_{22}Y_{13} + X_{13}Y_{22}) - \sqrt{2}(X_{31}Y_{22} + X_{22}Y_{31}) + \frac{X_{21}Y_{10}}{2} \\
 &+ 2(-X_{31}Y_{40} + 4\tilde{S}D_{421}X_{21}Y_{40}) + \tilde{S}(2D_{111}X_{11}Y_{10} + 3\sqrt{2}D_{111}(X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{11}) \\
 &+ 5\sqrt{2}D_{111}(X_{12}Y_{13} + X_{13}Y_{12}) + 6\sqrt{2}D_{221}(X_{21}Y_{22} + X_{22}Y_{21}) + \sqrt{2}A_{613}(X_{31}Y_{12} + X_{12}Y_{31}) \\
 &+ 2D_{131}X_{31}Y_{10} + 4D_{221}X_{21}Y_{20}) + \frac{4P_r\sqrt{2}\tilde{S}A}{Ra} \left(\frac{4}{9} X_{11}X_{12} + \frac{76}{27} X_{12}X_{13} - \frac{76}{135} X_{12}X_{31} + \frac{224}{45} X_{21}X_{22} \right. \\
 &\left. \left. - \frac{E_0}{P_r} Y_{11} \right\} :
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{11}}{dt'} = rX_{11} - & \left\{ X_{11}Y_{20} + X_{31}Y_{20} - \frac{3\sqrt{2}}{4} (X_{12}Y_{21} + X_{21}Y_{12}) \right. \\
 & - \sqrt{2} (X_{22}Y_{13} + X_{13}Y_{22}) - \sqrt{2} (X_{31}Y_{22} + X_{22}Y_{31}) + \frac{X_{21}Y_{10}}{2} + \\
 & 2(-X_{31}Y_{40} + 4\tilde{S}D_{421}X_{21}Y_{40}) + \tilde{S}(2D_{111}X_{11}Y_{40} + 3\sqrt{2}D_{111}(X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{11}) \\
 & + 5\sqrt{2}D_{111}(X_{12}Y_{13} + X_{13}Y_{12}) + 6\sqrt{2}D_{221}(X_{21}Y_{22} + X_{22}Y_{21}) + \\
 & \sqrt{2}A_{613}(X_{31}Y_{12} + X_{12}Y_{31}) + 2D_{131}X_{31}Y_{10} + 4D_{221}X_{21}Y_{20}) + \\
 & \frac{4Pr\sqrt{2}\tilde{S}A}{Ra} \left(\frac{4}{9}X_{11}X_{12} + \frac{76}{27}X_{12}X_{13} - \frac{76}{135}X_{12}X_{31} + \frac{924}{45}X_{21}X_{22} \right) \\
 & \left. - \frac{E_0}{Pr}Y_{11} \right\} + 2\tilde{S}A_{12} \left\{ \frac{dY_{21}}{dt'} + rX_{21} \right\} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{31}}{dt'} = rX_{31} - & \left\{ \sqrt{2} (X_{11}Y_{22} + X_{22}Y_{11}) + \frac{5\sqrt{2}}{4} (X_{21}Y_{12} + X_{12}Y_{21}) \right. \\
 & + 2\sqrt{2} (X_{22}Y_{13} + X_{13}Y_{22}) + \frac{X_{21}Y_{10}}{2} + X_{11}Y_{20} + 2(-X_{11}Y_{40} + 4\tilde{S}D_{423}X_{21}Y_{40}) \\
 & + \frac{4\tilde{S}Pr\sqrt{2}A}{Ra} \left(\frac{116}{135}X_{11}X_{12} - \frac{52}{35}X_{12}X_{31} + \frac{160}{189}X_{21}X_{22} \right) + \\
 & \tilde{S}(3\sqrt{2}D_{113}(X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{11}) + 5\sqrt{2}D_{113}(X_{13}Y_{12} + X_{12}Y_{13}) + \\
 & 6\sqrt{2}D_{223}(X_{22}Y_{21} + X_{21}Y_{22}) + \sqrt{2}A_{631}(X_{12}Y_{31} + X_{31}Y_{12}) + 2D_{133}X_{31}Y_{10} \\
 & \left. + 2D_{113}X_{11}Y_{10} + 4X_{21}Y_{20}D_{223}) - \frac{19E_0}{3Pr}Y_{31} \right\} + 2\tilde{S}A_{32} \left\{ \frac{dY_{21}}{dt'} + rX_{21} \right\} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{12}}{dt'} &= 2rX_{12} - \frac{1}{Cr_2} \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{4} (X_{21}Y_{11} - X_{11}Y_{21}) - 2X_{12}Y_{20} + X_{22}Y_{10} \right. \\
 &+ \frac{5\sqrt{2}}{4} (X_{31}Y_{21} - X_{21}Y_{31}) + \frac{5\sqrt{2}}{4} (X_{13}Y_{21} + X_{21}Y_{13}) + 16\tilde{S}D_{421}X_{22}Y_{40} + \\
 &\tilde{S}\sqrt{2} (4D_{111}(X_{11}Y_{13} + X_{13}Y_{11}) + A_{313}(X_{11}Y_{31} - X_{31}Y_{11}) + A_{913}(X_{13}Y_{31} + X_{31}Y_{13}) \\
 &+ 4D_{111}X_{12}Y_{10} + 8D_{221}X_{22}Y_{20}) + 4\frac{\tilde{S}\sqrt{2}A}{Ra} \left(\frac{X_{11}^2}{9} + \frac{10}{27}X_{11}Y_{13} - \frac{106}{135}X_{11}X_{31} \right. \\
 &+ \frac{22}{135}X_{13}X_{31} - \frac{28}{45}X_{21}^2) - \frac{2E_0}{Pr}Y_{12} \left. \right\} + \frac{2\tilde{S}A_{12}}{Cr_2} \left\{ \sqrt{2} (X_{11}Y_{13} + X_{13}Y_{11}) \right. \\
 &- 2\sqrt{2} (X_{13}Y_{31} + X_{31}Y_{13}) - \sqrt{2} (X_{31}Y_{11} - X_{11}Y_{31}) + X_{12}Y_{10} + 4(-X_{22}Y_{40} \\
 &+ 4\tilde{S}D_{412}X_{12}Y_{40}) + \tilde{S}\sqrt{2} (A_{222}(X_{11}Y_{21} - X_{21}Y_{11}) + A_{332}(X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21}) \\
 &+ A_{622}(X_{13}Y_{21} + X_{21}Y_{13}) + 4\sqrt{2}D_{212}X_{12}Y_{20} + 4D_{122}X_{22}Y_{10} + \\
 &\left. \frac{4\tilde{S}Pr\sqrt{2}A}{Ra} \left(-\frac{8}{45}X_{11}X_{12} - \frac{296}{135}X_{21}X_{13} - \frac{664}{189}X_{21}X_{31} \right) - \frac{4E_0}{Pr}Y_{22} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{22}}{dt'} &= + 2rX_{22} - \left\{ \sqrt{2} (X_{11}Y_{13} + X_{13}Y_{11}) - 2\sqrt{2} (X_{13}Y_{31} + X_{31}Y_{13}) \right. \\
 &- \sqrt{2} (X_{31}Y_{11} - X_{11}Y_{31}) + X_{12}Y_{10} + 4(-X_{22}Y_{40} + 4\tilde{S}D_{412}X_{12}Y_{40}) + \\
 &\tilde{S}\sqrt{2} (A_{222}(X_{11}Y_{21} - X_{21}Y_{11}) + A_{332}(X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21}) + A_{622}(X_{13}Y_{21} + \\
 &X_{21}Y_{13}) + 4\sqrt{2}D_{212}X_{12}Y_{20} + 4D_{122}X_{22}Y_{10} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{4\tilde{S}_R \sqrt{2} A}{R_a} \left(-\frac{8}{45} X_{11} X_{12} - \frac{296}{135} X_{21} X_{13} - \frac{664}{189} X_{21} X_{31} \right) - \frac{4E_0}{P_r} Y_{22} \Big\} \\ + 2\tilde{S} A_{12} \left(\frac{dY_{12}}{dt'} + 2r X_{12} \right) \quad ;$$

$$-\frac{dY_{13}}{dt'} = 3rX_{13} + \frac{5\sqrt{2}}{4} (X_{21}Y_{12} - X_{12}Y_{21}) + 2\sqrt{2} (X_{31}Y_{22} - X_{22}Y_{31}) + \sqrt{2} (X_{22}Y_{11} - X_{11}Y_{12}) - 3X_{13}Y_{20} + \tilde{\delta}\sqrt{2} (D_{111} (X_{12}Y_{11} - X_{11}Y_{12}) + A_{611} (X_{12}Y_{31} - X_{31}Y_{12}) - 2D_{221} (-X_{22}Y_{21} + X_{21}Y_{22}) + 3\sqrt{2} D_{111} X_{13}Y_{10}) + \frac{4\tilde{\delta}P_r\sqrt{2}A}{Ra} \left(\frac{20}{27} X_{11}X_{12} - \frac{212}{135} X_{12}X_{31} + \frac{224}{135} X_{21}X_{22} \right) - \frac{11E0}{3P_r} Y_{13} ;$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{dY_{10}}{dt'} = \frac{1}{a_3} \left\{ \frac{1}{2} (-X_{11}Y_{21} - 2X_{12}Y_{22} - X_{21}Y_{11} - 2X_{22}Y_{12} - X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21}) \right. \\
 & + \tilde{S} (2(2D_{111}X_{11}Y_{11} + 4D_{111}X_{12}Y_{12} + 4D_{221}X_{21}Y_{21} + 8X_{22}Y_{22}D_{221} \\
 & + 6D_{111}X_{13}Y_{13} + 6D_{331}X_{31}Y_{31} + A_{333}(X_{11}Y_{31} + X_{31}Y_{11}))) + \frac{2\tilde{S}PrA}{Ra} \left(\right. \\
 & \frac{20}{27} X_{11}^2 - \frac{424}{135} X_{11}X_{31} + \frac{80}{27} X_{12}^2 + \frac{1232}{135} X_{21}^2 + \frac{2048}{135} X_{22}^2 + \frac{1428}{35} X_{31}^2 \\
 & \left. + \frac{360}{27} X_{13}^2 \right) - \frac{2E0}{3Pr} Y_{10} \left. \right\} - \frac{2\tilde{S}A_{41}}{Cr3} \left\{ 2(X_{11}Y_{31} + X_{31}Y_{11} + 2X_{22}Y_{22} + X_{21}Y_{21}) \right. \\
 & \left. + 2\tilde{S}(A_{214}(X_{21}Y_{11} + X_{11}Y_{21}) + A_{234}(X_{21}Y_{31} + X_{31}Y_{21}) + 2A_{214}(X_{12}Y_{12} + X_{12}Y_{22})) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{16Pr\tilde{S}A}{Ra} \left(\frac{296}{105} X_{11}X_{21} + \frac{1472}{105} X_{12}X_{22} + \frac{280}{45} X_{21}X_{31} \right) - \frac{32E0}{3Pr} Y_{40} \Big\} \\
 & - \frac{2\tilde{S}A_{12}}{Cr3} \left\{ X_{11}Y_{11} - X_{11}Y_{31} + 2X_{12}Y_{12} + 3X_{13}Y_{13} - X_{31}Y_{11} + \tilde{S} \left(2A_{221}(X_{11}Y_{21} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. X_{21}Y_{11}) + 2A_{221}(X_{12}Y_{22} + X_{22}Y_{12}) + A_{311}(X_{21}Y_{31} + X_{31}Y_{21}) \right) + \frac{2\tilde{S}PrA}{Ra} \left[\right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{352}{135} X_{11}X_{21} + \frac{128}{135} X_{12}X_{22} + \frac{4960}{189} X_{21}X_{31} \right] - \frac{8E0}{3Pr} Y_{20} \right\} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{20}}{dt'} &= \left\{ X_{11}Y_{11} - X_{11}Y_{31} + 2X_{12}Y_{12} + 3X_{12}Y_{13} - X_{31}Y_{11} + \right. \\
 & \quad \tilde{S} \left(2A_{221}(X_{11}Y_{21} + X_{21}Y_{11}) + 2A_{221}(X_{12}Y_{22} + X_{22}Y_{12}) + A_{311}(X_{21}Y_{31} + X_{31}Y_{21}) \right) \\
 & \quad \left. + \frac{2\tilde{S}PrA}{Ra} \left(\frac{352}{135} X_{11}X_{21} + \frac{128}{135} X_{12}X_{22} + \frac{4960}{189} X_{21}X_{31} \right) - \frac{8E0}{3Pr} Y_{20} \right\} \\
 & \quad - 2\tilde{S}A_{21} \frac{dY_{40}}{dt'} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{dY_{40}}{dt'} &= \left\{ 2(X_{11}Y_{31} + X_{31}Y_{11} + 2X_{22}Y_{22} + X_{21}Y_{21}) + 2\tilde{S}((X_{21}Y_{11} + X_{11}Y_{21}) \right. \\
 & \quad \left. A_{214} + A_{234}(X_{21}Y_{31} + X_{31}Y_{21}) + 2A_{214}(X_{22}Y_{12} + X_{12}Y_{22})) + \frac{16Pr\tilde{S}A}{Ra} \left(\right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{296}{105} X_{11}X_{21} + \frac{1472}{105} X_{12}X_{22} + \frac{280}{45} X_{21}X_{31} \right) - \frac{32E0}{3Pr} Y_{40} \right\} - 2\tilde{S}A_{14} \frac{dY_{10}}{dt'} ;
 \end{aligned}$$

$$r = 1/R_{ac}^s ;$$

$$A = 1/\pi^2 ;$$

$$D_{111} = 4A/9 ;$$

$$D_{221} = 8A/225 ;$$

$$D_{122} = 208A/225 ;$$

$$D_{133} = 1188A/1225 ;$$

$$D_{131} = 12A/25 ;$$

$$D_{113} = D_{131} ;$$

$$D_{311} = -92A/225 ;$$

$$D_{223} = 24A/49 ;$$

$$D_{322} = -352A/441 ;$$

$$D_{313} = 12A/1225 = D_{331} ;$$

$$D_{212} = D_{221} ;$$

$$A_{613} = -444A/225 ;$$

$$A_{313} = -384A/225 ;$$

$$A_{913} = -720A/225 ;$$

$$A_{122} = 216A/225 ;$$

$$A_{422} = 240A/225 ;$$

$$A_{323} = -240A/441 ;$$

$$A_{322} = 232A/225 ;$$

$$A_{222} = -192A/225 ;$$

$$A_{332} = -1488A/441 ;$$

$$A_{611} = 660A/225 ;$$

$$D_{421} = D_{412} = -4792A/11025 ;$$

$$D_{432} = -936A/2025 ;$$

$$A_{214} = 15808A/1225 ;$$

$$D_{423} = D_{432} ;$$

$$A_{234} = 4919A/2025 ;$$

$$A_{224} = \frac{15808A}{1225} ;$$

$$A_{631} = \frac{1248A}{1225} ;$$

$$A_{221} = \frac{224A}{225} ;$$

$$A_{333} = -\frac{168A}{225} ;$$

$$A_{622} = \frac{256A}{225} ;$$

$$A_{311} = -\frac{624A}{441} ;$$

$$E_0 = \frac{2}{2 + \delta_0} ;$$

$$\tilde{\delta} = \frac{\frac{2}{2 + \delta_0}}{2 + \delta_0} ;$$

$$A_{21} = A_{12} = \frac{8A}{9} ;$$

$$A_{14} = A_{41} = \frac{16A}{225} ;$$

$$A_{23} = A_{32} = \frac{24A}{25}$$

$$cr_1 = 1 - 4(\tilde{\delta}A_{12})^2 - 4(\tilde{\delta}A_{23})^2$$

$$cr_2 = 1 - 4(\tilde{\delta}A_{12})^2 ,$$

$$cr_3 = 1 - 4(\tilde{\delta}A_{12})^2 - 4(\tilde{\delta}A_{14})^2 .$$

program lorz3

```
C
* INTEGRATION NUMERIQUE DU MODELE DE LORENZ POUR LA
* CONVECTION PROFONDE DE RAYLEIGH-BENARD PAR LA METHODE DE
* RUNGE_KUTTA D'ORDRE 4.
```

```
C
parameter(nd=16000)
dimension x11(nd),y11(nd),y20(nd)
dimension fx11(4),fy11(4),fy20(4)
dimension u11(nd),v11(nd),v20(nd)
dimension full(4),fv11(4),fv20(4)
b=8./3
Rac=657.5
r=1./Rac
```

```
C
* ENTREE DES CONDITIONS PHYSIQUES DU PROBLEME:
* _Pr=LE NOMBRES DE PRANDTL ;
* _E=Ra/Rac-1 ,
* _al=LE PARAMETRE DE PROFONDEUR DE LA COUCHE DE FLUIDE.
* ET LES DES FICHIERS DE SORTIE:
* -ke=evolution temporelle de la composante X11,
* -kp=projection d'une portion de trajectoire sur le plan
* (X11,Y11) de l'espace des phases.
```

```
C
read(1,*)Pr
read(1,*)E
read(1,*)al
read(1,*)ke
read(1,*)kp
t=7.
npas=100
w=t/npas
eo=2./(2+al)
el=al*eo
Ra=Rac*eo*(1+E)
```

```
C
* INITIALISATION DU PROBLEME .
```

```
C
x11(1)=1.
y11(1)=0.
y20(1)=0.
v20(1)=0.
do 1 i=1,nd-1
do 2 k=1,4
if(k.eq.1)then
dx11=x11(i)
dy11=y11(i)
dy20=y20(i)
endif
if(k.eq.2)then
p=2.
else
if(k.eq.3)then
p=2.
else
p=1.
endif
endif
if(k.ge.2)then
dx11=x11(i)+w*fx11(k-1)/p
dy11=y11(i)+w*fy11(k-1)/p
dy20=y20(i)+w*fy20(k-1)/p
endif
fx11(k)=-(dx11+Ra*dy11/Pr)
fy11(k)=-(r*dx11+dx11*dy20+eo*dy11/Pr)
fy20(k)=-(dx11*dy11+b*eo*dy20/Pr)
```

```
2 continue
```

```
x11(i+1)=x11(i)+w*(fx11(1)+2*(fx11(2)+fx11(3))+fx11(4))/6
y11(i+1)=y11(i)+w*(fy11(1)+2*(fy11(2)+fy11(3))+fy11(4))/6
y20(i+1)=y20(i)+w*(fy20(1)+2*(fy20(2)+fy20(3))+fy20(4))/6
```

```
1 continue
```

C

```
* CALCUL DES EXPONENTS DE LYAPOUNOV
```

C

```
* INITIALISATIONS DU SYSTEME D'EQUATIONS TANGENT
```

C

```
u11(1)=x11(6000)
v11(1)=y11(6000)
v20(1)=y20(6000)
do 3 it=1,2000
do 4 kt=1,4
if(kt.eq.1)then
dull=u11(it)
dv11=v11(it)
dv20=v20(it)
endif
if(kt.eq.2)then
p=2.
else
if(kt.eq.3)then
p=2.
else
p=1.
endif
endif
if(kt.ge.2)then
dull=u11(it)+w1*full(kt-1)/p
dv11=v11(it)+w1*fv11(kt-1)/p
dv20=v20(it)+w1*fv20(kt-1)/p
endif
full(kt)=- (dull+Ra*dv11/Pr)
fv11(kt)=- (r*dull+(dull*y20(it+nc)+dv20*x11(it+nc))+eo*dv11/Pr)
fv20(kt)=dull*y11(it+nc)+x11(it+nc)*dv11-b*eo*dv20/Pr
4 continue
u11(it+1)=u11(it)+w1*(full(1)+2*(full(2)+full(3))+full(4))/6
v11(it+1)=v11(it)+w1*(fv11(1)+2*(fv11(2)+fv11(3))+fv11(4))/6
v20(it+1)=v20(it)+w1*(fv20(1)+2*(fv20(2)+fv20(3))+fv20(4))/6
3 continue
do 5 if=1,10000
write(kp,89)y11(6000+if),x11(6000+if)
5 continue
do 6 ix=1,10000
6 write(ke,89)w*(6000+ix),x11(6000+ix)
89 format(1x,2(1x,F16.7))
stop
end
```

program lorz6

```

C
* INTEGRATION NUMERIQUE D'UNE PROJECTION DANS UN ESPACE A 6
* DIMENSIONS DU PROBLEME DE LA CONVECTION PROFONDE DE
* RAYLEIGH_BENARD PAR LA METHODE DE RUNGE_KUTTA.
C
  parameter (max=16001)
  dimension x11(max),x21(max),y11(max),y21(max)
  dimension y20(max),y10(max),fx11(4),fx21(4),fy11(4),fy21(4)
  dimension fy10(4),fy20(4)
  pi=3.1415927
  q=657.5
C
* ENTREE DES CONDITIONS PHYSIQUES DU PROBLEME:
*   Pr=LE NOMBRE DE PRANDTL;
*   E=Ra/Rac-1;
*   al=parametre de profondeur,
*   ET LES NOMS DES FICHIERS DE SORTIE:
*   kel=evolution de la composante X11,
*   kpl=projection d'une portion de trajectoire sur le plan (X11,Y11)
*   de l'espace des phases.
C
  read(1,*)Pr
  read(1,*)E
  read(1,*)al
  read(1,*)kel
  read(1,*)kpl
  Rac=657.5
  t=7.
  npas=100
  w=t/npas
C
* INITIALISATIONS DU PROBLEME:
*   LES CONDITIONS INITILES APPARTIENNENT AU SOUS_ESPACE DES
*   FONCTIONS AVEC (p+q) pair .
C
  x11(1)=1.
  x21(1)=0.
  y20(1)=0.
  y10(1)=0.
  y21(1)=0.
  y11(1)=0.
C
* LES CONSTANTES D'INTEGRATIONS:
*   LE NOMBRE D'ONDE EGAL A  $\pi/\sqrt{2}$ .
C
  a4=16./(225*(pi**2))
  a2=8./(9*(pi**2))
  eo=2./(2+al)
  e1=2*al*eo
  p=1.-((e1*a2)**2)
  c2=416./(225*(pi**2))
  c1=16./(225*(pi**2))
  c3=448./(225*(pi**2))
  b20=8./3
  b10=2./3
  d11=704./(135*(pi**2))
  d12=40./(27*(pi**2))
  d13=2464./(135*(pi**2))
  pc=1./p
  Ra=Rac*eo*(1+E)
  do 1 i=1,16000
  do 2 k=1,4
    if(k.ge.2)then
    if(k.eq.2)then
      p2=2.
    else

```

```

if(k.eq.3)then
p2=2.
else
p2=1.
endif
endif
dx11=x11(i)+w*fx11(k-1)/p2
dx21=x21(i)+w*fx21(k-1)/p2
dy11=y11(i)+w*fy11(k-1)/p2
dy21=y21(i)+w*fy21(k-1)/p2
dy20=y20(i)+w*fy20(k-1)/p2
dy10=y10(i)+w*fy10(k-1)/p2
endif
if(k.eq.1)then
dx11=x11(i)
dx21=x21(i)
dy11=y11(i)
dy21=y21(i)
dy20=y20(i)
dy10=y10(i)
endif
fx11(k)=-dx11-Ra*dy11/Pr
fx21(k)=-3*dx21-Ra*dy21/(3*Pr)
R=Pr*(dx11*dy20-dx21*dy10/2-e1*(dx11*(dy10*a2/2)+a4*dx21*dy20))
&+eo*dy11
S=Pr*(-dx11*dy10/2-e1*(c1*dx11*dy20+dx21*dy10*c2/2))+3*dy21*eo
fy11(k)=-((dx11/q)+(R/(Pr*p)))-e1*a2*S/(Pr*p)
fy21(k)=-((dx21/q)+(S/(p*Pr)))-e1*a2*R/(Pr*p)
v11=dx11*dy11
v21=dx11*dy21
v13=dx21*dy11
v14=dx11*dx21
v15=dx21*dy21
T2=Pr*(-v11-e1*c3*((v21+v13)/2))-e1*(Pr**2)*d11*v14/(2*Ra)
T=T2+b20*eo*dy20
z12=dx11*dy21
z21=dx21*dy11
z11=dx11*dx11
z22=dx21*dx21
P1=Pr*((z12+z21)/2-e1*(a2*v11+2*a4*v15))+b10*eo*dy10-((e1*(Pr**2)*
&(d12*z11+d13*z22))/(2*Ra))
fy20(k)=-((T/(Pr*p))-e1*a2*P1/(Pr*p))
fy10(k)=-((P1/(p*Pr))-e1*a2*T/(Pr*p))
2 continue
x11(i+1)=x11(i)+w*(fx11(1)+2*(fx11(2)+fx11(3))+fx11(4))/6
x21(i+1)=x21(i)+w*(fx21(1)+2*(fx21(2)+fx21(3))+fx21(4))/6
y11(i+1)=y11(i)+w*(fy11(1)+2*(fy11(2)+fy11(3))+fy11(4))/6
y21(i+1)=y21(i)+w*(fy21(1)+2*(fy21(2)+fy21(3))+fy21(4))/6
y20(i+1)=y20(i)+w*(fy20(1)+2*(fy20(2)+fy20(3))+fy20(4))/6
y10(i+1)=y10(i)+w*(fy10(1)+2*(fy10(2)+fy10(3))+fy10(4))/6
1 continue
do 3 il=1,10000
write(kp1,100)y11(6000+il),x11(6000+il)
3 continue
do 5 ix=1,10000
write(kel,100)w*(6000-ix),x11(6000+ix)
5
100 format(1x,2(F20.10))
stop
end

```

```
program lorz8
```

```

C
*   INTEGRATION NUMERIQUE      D'UN MODELE DYNAMIQUE RESULTANT
*   D'UNE PROJECTION DANS UN ESPACE A 8 DIMENSIONS
*   DU PROBLEME DE LA CONVECTION "PROFONDE" DE
*   RAYLEIGH-BENARD PAR LA METHODE DE RUNGE-KUTTA D'ORDRE 4 .
C
parameter (m=16001)
external sqrt
dimension x11(m),x21(m),x12(m),y11(m),y12(m),y21(m),y10(m),y20(m)
&,fx11(4),fx12(4),fx21(4),fy11(4),fy21(4),fy12(4),fy10(4),fy20(4)
pi=3.14159
q=657.5

C
*   ENTREE DES PARAMETRES PHYSIQUES:
*   _pr=le nombre de Prandtl;
*   _er=ra/rac-1 ,
*   _alp=parametre de profondeur de la couche de fluide .
C
read(1,*)pr
read(1,*)er
read(1,*)alp
read(1,*)kpl
read(1,*)kp2
n=100
t=7.
rac=657.5

C
*   ENTREE DES CONDITIONS INITIALES :
*   -LES CONDITIONS INITIALES APPARTIENNENT AU SOUS_ESPACE DES
*   FONCTIONS AVEC (p+q) PAIR POUR QUE LORSQUE LE PARAMETRE DE
*   PROFONDEUR EST NUL SEUL LES MODES DU MEME SOUS_ESPACE BIFURQUENT.
C
x11(1)=1.
x21(1)=0.
x12(1)=0.
y11(1)=0.
y21(1)=0.
y12(1)=0.
y10(1)=0.
y20(1)=0.
w=t/n

C
*   ENTREE DES CONSTANTES D'INTEGRATIONS:
*   LE NOMBRE D'ONDES CONSIDERE. EST EGAL A  $\sqrt{q}$  .
C
c=8./3
a=sqrt(2.)/4
d111=4./(9*(pi**2))
d221=8./(225*(pi**2))
d122=208./(225*(pi**2))
b=60*sqrt(2.)/(225*(pi**2))
d212=d221
eo=2./(2+alp)
el=alp*eo
d=448./(225*(pi**2))
ra=rac*eo*(1+er)
d0=8./(9*(pi**2))
r=1./rac
e=2./3
cr=1.-4*((el*d0)**2)
crc=1./cr
do 1 i=1,16000
do 2 k=1,4
if(k.eq.1)then
dx11=x11(i)

```

```

dx12=x12(i)
dx21=x21(i)
dy11=y11(i)
dy12=y12(i)
dy21=y21(i)
dy20=y20(i)
dy10=y10(i)
endif
if(k.ge.2)then
if(k.eq.2)then
pp=2.
else
if(k.eq.3)then
pp=2.
else
pp=1.
endif
endif
dx11=x11(i)+w*fx11(k-1)/pp
dx21=x21(i)+w*fx21(k-1)/pp
dx12=x12(i)+w*fx12(k-1)/pp
dy11=y11(i)+w*fy11(k-1)/pp
dy21=y21(i)+w*fy21(k-1)/pp
dy12=y12(i)+w*fy12(k-1)/pp
dy10=y10(i)+w*fy10(k-1)/pp
dy20=y20(i)+w*fy20(k-1)/pp
endif
v11=-3*a*pr*dx12*dx21+ra*dy11+pr*dx11
fx11(k)=-v11/pr
v21=-a*pr*dx11*dx12+ra*dy21/3+3*pr*dx21
fx21(k)=-v21/pr
v12=3*a*pr*dx11*dx21+ra*dy12+2*pr*dx12
fx12(k)=-v12/pr
q11=-(3*a*(dx21*dy12+dx12*dy21)+dy20*dx11-dy10*dx21/2)
qd1=(3*a*d111*(dx12*dy11+dx11*dy12)+dy20*dx21*d221+dy10*dx11*d111
&/2)
q21=3*a*(dx12*dy11+dy12*dx11)+dy10*dx11/2
qd2=b*(dx21*dy12+dx12*dy21)+d212*dy20*dx11+dy10*dx21*d122/2
qf1=64*a*dx11*dx12/(9*(pi**2))
qf2=-64*sqrt(2.)*dx12*dx21/(45*(pi**2))
qs1=pr*q11+4*pr*e1*qd1-eo*dy11+e1*(pr**2)*qf1/ra
qs2=pr*q21+4*pr*e1*qd2-3*eo*dy21+e1*(pr**2)*qf2/ra
qr1=qs1-2*e1*d0*qs2
qr2=qs2-2*e1*d0*qs1
fy11(k)=-(r*dx11-qr1/(cr*pr))
fy21(k)=-(r*dx21-qr2/(cr*pr))
q12=3*a*(dy11*dx21-dy21*dx11)-2*dy20*dx12
qd12=dy10*dx12*d111
qf3=16*a*((dx11/(3*pi))**2)-448*a*((dx21/pi)**2)/45
qs3=pr*q12-2*eo*dy12+4*e1*qd12*pr+e1*(pr**2)*qf3/ra
fy12(k)=-(2*r*dx12-qs3/pr)
q20=dx11*dy11+2*dy12*dx12
qd0=(dx21*dy11+dx11*dy21)*d
qf0=704*dx11*dx21/(135*(pi**2))
q10=-(dy11*dx21+dx11*dy21)/2
qd10=4*(dx11*dy11*d111+2*dx21*dy21*d221+2*dx12*dy12*d111)
qf10=40*((dx11/pi)**2)/27+2464*((dx21/pi)**2)/135+160*((dx12/pi)
&**2)/27
qs10=q10*pr+e1*qd10*pr-e*eo*dy10+e1*(pr**2)*qf10/ra
qs0=pr*q20+pr*e1*qd0-c*eo*dy20+e1*qf0*(pr**2)/ra
qt1=qs0-2*e1*d0*qs10
qt2=qs10-2*e1*d0*qs0
fy20(k)=qt1/(pr*cr)
fy10(k)=qt2/(pr*cr)
2 continue
x11(i+1)=x11(i)+w*(fx11(1)+2*(fx11(2)+fx11(3))+fx11(4))/6
x21(i+1)=x21(i)+w*(fx21(1)+2*(fx21(2)+fx21(3))+fx21(4))/6

```

```
x12(i+1)=x12(i)+w*(fx12(1)+2*(fx12(2)+fx12(3))+fx12(4))/6
y11(i+1)=y11(i)+w*(fy11(1)+2*(fy11(2)+fy11(3))+fy11(4))/6
y21(i+1)=y21(i)+w*(fy21(1)+2*(fy21(2)+fy21(3))+fy21(4))/6
y12(i+1)=y12(i)+w*(fy12(1)+2*(fy12(2)+fy12(3))+fy12(4))/6
y10(i+1)=y10(i)+w*(fy10(1)+2*(fy10(2)+fy10(3))+fy10(4))/6
y20(i+1)=y20(i)+w*(fy20(1)+2*(fy20(2)+fy20(3))+fy20(4))/6
1  continue
   do 5 ih=1,6000
5  write(kp2,100)w*(10000+ih),x11(10000+ih)
   do 3 il=1,6000
       write(kp1,100)y11(10000+il),x11(10000+il)
3  continue
100 format(1x,2(1x,F20.10))
    stop
    end
```

program rk4

C
 * INTEGRATION NUMERIQUE D'UNE PROJECTION DANS UN ESPACE A 15
 * DIMENSIONS DE LA CONVECTION BIDIMENSIONNELLE "PROFONDE" PAR
 * LA METHODE DE RUNGE_KUTTA.

C
 parameter (naz=10001)
 dimension X11(naz), X22(naz), X12(naz), X21(naz), X31(naz)
 &, X13(naz), Y11(naz), Y12(naz), Y21(naz), Y22(naz), Y31(naz)
 &, Y13(naz), Y20(naz), Y10(naz), Y40(naz)
 dimension FX11(4), FX12(4), FX21(4), FX22(4)
 &, FX13(4), FX31(4), FL11(4), FL21(4), FL12(4)
 &, FL22(4), FL13(4), FL31(4), FL20(4), FL10(4)
 &, FL40(4)
 PI=3.115927
 Q=657.5

C
 * ENTREE DES CONDITIONS PHYSIQUES DU PROBLEME :
 * Pr=LE NOMBRE DE PRANDTL;
 * E=Ra/Rac-1, Rac est le nombre de Rayleigh pour
 * la convection "peu profonde";
 * Alp=le parametre de profondeur,
 * ET LES NOMS DES FICHIERS DE SORTIE:
 * ke=evolution temporelle du coefficient X11,
 * kp=projection sur le plan (X11,Y11).

C
 read(1,*)Pr
 read(1,*)E
 read(1,*)Alp
 read(1,*)ke
 read(1,*)kp
 t=7.
 n1=100
 Rac=657.5
 N2=10000
 W=t/n1
 C=8./3

C
 * INITIALISATIONS DU PROBLEME:
 * LES CONDITIONS INITIALES APPARTIENNENT AU SOUS_ESPACE DES
 * FONCTIONS AVEC (p+q) PAIR.

C
 X11(1)=1.
 Y11(1)=0.
 Y20(1)=0.
 X21(1)=0.
 X12(1)=0.
 X22(1)=0.
 X13(1)=0.
 X31(1)=0.
 Y12(1)=0.
 Y21(1)=0.
 Y22(1)=0.
 Y13(1)=0.
 Y31(1)=0.
 Y10(1)=0.
 Y40(1)=0.

C
 * ENTREE DES CONSTANTES D'INTEGRATIONS
 * LE NOMBRE D'ONDE EST EGAL A $\sqrt{2}$.

C
 A=1./(PI**2)
 D111=4.*A/9.
 D221=8*A/225
 D122=208.*A/225.
 D133=1188.*A/1225.
 D113=12.*A/25.

```

D131=D113
D311=-92.*A/225.
D223=24.*A/49.
D322=-352.*A/441.
D313=12.*A/1225.
D212=D221
A613=-444.*A/225
D331=D313
A313=-384.*A/225.
A913=-720.*A/225.
A122=216.*A/225.
A422=240.*A/225
A323=-240.*A/441
A322=232.*A/225
A222=-192.*A/225
A332=-1488.*A/441
A611=660.*A/225
D421=-4792.*A/11025.
D412=D421
D432=-936*A/2025
A214=15808.*A/1225
D423=D432
A234=4919*A/2025.
A224=15808*A/1225
A631=1248.*A/1225.
A221=224*A/225.
A333=-168.*A/225.
A622=256.*A/225.
A311=-624.*A/441.
E0=2./(2.+Alp)
E1=E0*Alp
D0=8*A/9
D1=24*A/25
D4=16*A/225
CR3=1-((2*E1*D0)**2)-((2*E1*D4)**2)
CR1=1-((2*E1*D0)**2)-((2*E1*D1)**2)
CR0=1-((2*E1*D0)**2)
D=sqrt(2.)
X=1./Pr
S=1./135.
Ra=Rac*(1+E)*E0
do 1 I=1,N2
do 2 k=1,4
if(k.ge.2)then
if(k.eq.2)then
P=2.
else
if(k.eq.3)then
P=2.
else
P=1.
endif
endif
DX11=X11(I)+W*FX11(k-1)/P
DX12=X12(I)+W*FX12(k-1)/P
DX21=X21(I)+W*FX21(k-1)/P
DX22=X22(I)+W*FX22(k-1)/P
DX13=X13(I)+W*FX13(k-1)/P
DX31=X31(I)+W*FX31(k-1)/P
DY11=Y11(I)+W*FL11(k-1)/P
DY12=Y12(I)+W*FL12(k-1)/P
DY21=Y21(I)+W*FL21(k-1)/P
DY22=Y22(I)+W*FL22(k-1)/P
DY13=Y13(I)+W*FL13(k-1)/P
DY31=Y31(I)+W*FL31(k-1)/P
DY20=Y20(I)+W*FL20(k-1)/P
DY10=Y10(I)+W*FL10(k-1)/P

```

```

DY40=Y40(I)+W*FL40(k-1)/P
endif
if(k.eq.1)then
DX11=X11(I)
DX12=X12(I)
DX21=X21(I)
DX22=X22(I)
DX13=X13(I)
DX31=X31(I)
DY11=Y11(I)
DY12=Y12(I)
DY21=Y21(I)
DY31=Y31(I)
DY13=Y13(I)
DY22=Y22(I)
DY20=Y20(I)
DY10=Y10(I)
DY40=Y40(I)
endif
FW11=-D*(9*DX12*DX21+28*DX22*DX31+4*DX22*DX13)/12
PW11=Ra*X*DY11+DX11
FW12=D*(9*DX21*DX11+5*DX21*DX13+25*DX21*DX31)/12
PW12=Ra*X*DY12+2*DX12
FW21=-D*(9*DX11*DX12+25*DX12*DX13+65*DX12*DX31)/36
PW21=Ra*X*DY21/3+3*DX21
FW22=-2*D*(DX11*DX13-2*DX11*DX31+2*DX31*DX13)/3
PW22=Ra*X*DY22/2+4*DX22
FW13=D*(36*DX11*DX22+15*DX12*DX21+56*DX22*DX31)/44
PW13=9*X*Ra*DY13/11+(11*DX13/3)
FW31=-D*(36*DX11*DX22-15*DX12*DX21-8*DX13*DX22)/76
PW31=3*Ra*X*DY31/19+19*DX31/3
FV11=DX31*DY20-DX11*DY20-3*D*(DX12*DY21+DX21*DY12
&)/4-D*(DX22*DY13+DX13*DY22)-D*(DX31*DY22+DX22
&*DY31)+(DX21*DY10/2)
FA11=2*DX11*DY10*D111+3*D*D111*(DX11*DY12+DX12*DY11)
&+5*D*D111*(DX12*DY13+DX13*DY12)+6*D*D221*(DX21*DY2
&2+DX22*DY21)+D*A613*(DX31*DY12+DX12*DY31)+2*DX3
&1*DY10*D131+4*D221*DX21*DY20
FDY11=4*D*A*DX11*DX12/9+76*D*A*DX12*DX13/27-76*D*A*DX12
&*DX31/135+224*D*A*DX21*DX22/45
FV21=DX11*DY10/2+5*D*(DX12*DY13+DX13*DY12)/4+3*D*
&(DX11*DY12+DX12*DY11)/4-5*D*(DX12*DY31+DX31*DY12
&)/4+DX31*DY10/2
FA21=2*D*A122*(DX11*DY22+DX22*DY11)+D*A422*(DX12*DY21
&+DX21*DY12)+2*D*A323*(DX22*DY31+DX31*DY22)+2*D*A322
&* (DX22*DY13+DX13*DY22)-4*D223*DX31*DY20+2*D122*DX21
&*DY10+4*D221*DX11*DY20
FDY21=32*D*A*DX11*DX22/45-16*D*A*DX12*DX21/45-32*S*D*A*
&DX22*DX13+1120*D*A*DX22*DX31/189
FV31=D*(DX11*DY22+DX22*DY11)+5*D*(DX21*DY12+DX12
&*DY21)/4+2*D*(DX22*DY13+DX13*DY22)+DX21*DY10/2
&+DX11*DY20
FA31=3*D*D113*(DX11*DY12+DX12*DY11)+5*D*D113*(DX13
&*DY12+DX12*DY13)+6*D*D223*(DX22*DY21+DX21*DY22)
&+D*A631*(DX12*DY31+DX31*DY12)+2*D133*DX31*DY10+2
&*D113*DX11*DY10+4*DX21*DY20*D223
FDY31=116*D*A*DX11*DX12/135-52*D*A*DX12*DX31/35+160*D
&*A*DX21*DX22/189
FS11=2*(-DX31*DY40+4*E1*DX21*DY40*D421)
FS21=2*(-DX21*DY40+4*E1*(D412*DX11*DY40
&+DX31*DY40*D432))
FS31=2*(-DX11*DY40+4*E1*DX21*DY40*D423)
FV12=3*D*(DX21*DY11-DX11*DY21)/4-2*DX12*DY20
&+DX22*DY10+5*D*(DX31*DY21-DX21*DY31)/4-5*D*
&(DX13*DY21+DX21*DY13)/4
FA12=4*D*D111*(DX11*DY13+DX13*DY11)+D*A313*(DX11*DY31
&-DX31*DY11)+D*A913*(DX13*DY31+DX31*DY13)+4*D111*

```

$\&DX12*DY10+8*D221*DX22*DY20$
 $FDY12=D*A*DX11*DX11/9+10*D*A*DX11*DX13/27-106*D*A*DX11$
 $\&*DX31/135+22*D*A*DX13*DX31/135-28*D*A*DX21*DX21/45$
 $FV22=D*(DX11*DY13+DX13*DY11)-2*D*(DX13*DY31+DX31$
 $\&*DY13)+D*(DX31*DY11-DX11*DY31)+DX12*DY10$
 $FA22=D*A222*(DX11*DY21-DX21*DY11)+D*A332*(DX21*DY31$
 $\&-DX31*DY21)+D*A622*(DX13*DY21+DX21*DY13)+8*D212*DX1$
 $\&2*DY20+4*D122*DX22*DY10$
 $FDY22=-8*D*A*DX11*DX12/45-296*A*D*DX21*DX13/135-664*D*A*$
 $\&DX21*DX31/189$
 $FS12=16*E1*DX22*DY40*D421$
 $FS22=4*(-DX22*DY40+4*E1*D412*DX12*DY40)$
 $FV13=D*(5*(DX21*DY12-DX12*DY21)/4)+2*D*(DX31*DY22$
 $\&-DX22*DY31)+D*(DX22*DY11-DX11*DY22)-3*DX13*DY20$
 $FA13=D*D111*(DY11*DX12-DX11*DY12)+D*A611*(DX12*DY31$
 $\&-DX31*DY12)-2*D*D221*(-DX22*DY21+DX21*DY22)$
 $\&+6*D111*DX13*DY10$
 $FDY13=20*D*A*DX11*DX12/27-212*D*A*DX12*DX31/135+224*$
 $\&D*A*DX21*DX22/135$
 $FV20=DX11*DY11-DX11*DY31+2*DX12*DY12+3*DX13$
 $\&*DY13-DX31*DY11$
 $FV10=(-DX11*DY21-2*DX12*DY22-DX21*DY11-2*DX22$
 $\&*DY12-DX21*DY31-DX31*DY21)/2$
 $FA20=2*(A221*(DX11*DY21+DX21*DY11)+2*A221*(DX12$
 $\&*DY22+DX22*DY12)+A311*(DX21*DY31+DX31*DY21))$
 $FA10=2*(2*D111*DX11*DY11+4*D111*DX12*DY12+4*D221*DX21$
 $\&*DY21+8*DX22*DY22*D221-6*D111*DX13*DY13+6*D331$
 $\&*DX31*DY31+A333*(DX11*DY31+DX31*DY11))$
 $FDY20=352*A*DX11*DX21/135+128*DX12*DX22*A/135+4960*A*$
 $\&DX21*DX31/189$
 $FDY10=20*A*DX11*DX11/27-424*A*DX11*DX31/135+80*A*DX12*$
 $\&DX12/27+1232*A*DX21*DX21/135+2048*A*DX22*DX22/135$
 $\&+1428*A*DX31*DX31/35+340*A*DX13*DX13/27$
 $FV40=2*(DX11*DY31+DX31*DY11+2*DX22*DY22+DX21*DY21)$
 $FA40=2*E1*((DX21*DY11+DX11*DY21)*A214+(DX21*DY31+DX31$
 $\&*DY21)*A234+2*(DX22*DY12+DX12*DY22)*A214)$
 $ZXC=16*A/9$
 $FDY40=E1*ZXC*(296*DX11*DX21/105+1472*DX12*DX22/105+280*DX2$
 $\&1*DX31/45)$
 $FF11=FV11+FS11+E1*FA11+4*E1*Pr*FDY11/Ra-E0*X*DY11$
 $FF21=FV21+FS21+E1*FA21+4*E1*Pr*FDY21/Ra-E0*X*3*DY21$
 $FF31=FV31+FS31+E1*FA31+4*E1*Pr*FDY31/Ra-E0*X*19*DY31/3$
 $FF12=FV12+FS12+E1*FA12+4*E1*Pr*FDY12/Ra-2*E0*DY12*X$
 $FF22=FV22+FS22+E1*FA22+4*E1*Pr*FDY22/Ra-4*E0*DY22*X$
 $FF13=FV13+E1*FA13+4*E1*Pr*FDY13/Ra-11*E0*X*DY13/3$
 $FF20=FV20+E1*FA20+2*Pr*E1*FDY20/Ra-C*E0*X*DY20$
 $FF10=FV10+E1*FA10+2*Pr*E1*FDY10/Ra-2*E0*X*DY10/3$
 $FF40=FV40+FA40+FDY40*Pr/Ra-32*E0*X*DY40/3$
 $FX11(k)=- (FW11+PW11)$
 $FX21(k)=- (FW21+PW21)$
 $FX12(k)=- (FW12+PW12)$
 $FX22(k)=- (FW22+PW22)$
 $FX13(k)=- (FW13+PW13)$
 $FX31(k)=- (FW31+PW31)$
 $TC20=FF20$
 $TC10=FF10$
 $TC40=FF40$
 $FL21(k)=FF21/CR1-DX21/Q-2*E1*(FF11*D0+D1*FF31)/CR1$
 $FL11(k)=FF11-2*E1*D0*(FL21(k)+DX21/Q)-DX11/Q$
 $FL31(k)=FF31-2*E1*D1*(FL21(k)+DX21/Q)-DX31/Q$
 $FL22(k)=FF22/CR0-2*E1*D0*FF12/CR0-2*DX22/Q$
 $FL12(k)=FF12/CR0-2*E1*D0*FF22/CR0-2*DX12/Q$
 $FL13(k)=FF13-3*DX13/Q$
 $FL10(k)=TC10/CR3-2*E1*(D0*TC20+D4*TC40)/CR3$
 $FL20(k)=TC20-2*E1*D0*FL10(k)$
 $FL40(k)=TC40-2*E1*D4*FL10(k)$
 continue

```
X11(I+1)=X11(I)+W*(FX11(1)+2*(FX11(2)+FX11(3))+FX11(4))/6
X12(I+1)=X12(I)+W*(FX12(1)+2*(FX12(2)+FX12(3))+FX12(4))/6
X21(I+1)=X21(I)+W*(FX21(1)+2*(FX21(2)+FX21(3))+FX21(4))/6
X22(I+1)=X22(I)+W*(FX22(1)+2*(FX22(2)+FX22(3))+FX22(4))/6
X13(I+1)=X13(I)+W*(FX13(1)+2*(FX13(2)+FX13(3))+FX13(4))/6
X31(I+1)=X31(I)+W*(FX31(1)+2*(FX31(2)+FX31(3))+FX31(4))/6
Y11(I+1)=Y11(I)+W*(FL11(1)+2*(FL11(2)+FL11(3))+FL11(4))/6
Y12(I+1)=Y12(I)+W*(FL12(1)+2*(FL12(2)+FL12(3))+FL12(4))/6
Y21(I+1)=Y21(I)+W*(FL21(1)+2*(FL21(2)+FL21(3))+FL21(4))/6
Y22(I+1)=Y22(I)+W*(FL22(1)+2*(FL22(2)+FL22(3))+FL22(4))/6
Y13(I+1)=Y13(I)+W*(FL13(1)+2*(FL13(2)+FL13(3))+FL13(4))/6
Y31(I+1)=Y31(I)+W*(FL31(1)+2*(FL31(2)+FL31(3))+FL31(4))/6
Y20(I+1)=Y20(I)+W*(FL20(1)+2*(FL20(2)+FL20(3))+FL20(4))/6
Y10(I+1)=Y10(I)+W*(FL10(1)+2*(FL10(2)+FL10(3))+FL10(4))/6
Y40(I+1)=Y40(I)+W*(FL40(1)+2*(FL40(2)+FL40(3))+FL40(4))/6
1  continue
   do 40 ns=1,10000
40  write(ke,77)w*ns,X11(ns)
77  format(1x,F19.11,1x,F19.11)
   do 41 nc=1,10000
41  write(kp,78)X11(nc),Y11(nc)
78  format(1x,1x,F16.10,1x,F19.11)
   stop
end
```

REFERENCES

- [1] JEFFREYS H. , 1928 , Some cases of instability in fluid motion ,
Proceeding of the Royal Soc of London A
1, 195-201 .
- [2] CHANDRASEKHAR S . , 1961 , Hydrodynamic and Hydromagnetic stability ,
OXFORD Univ. Press (clarendon) London ,
New York .
- [3] P.G DRAZIN & W.H. REID. , 1982 , Hydrodynamic Stability ,
Cambridge Univ. Press .
- [4] J.K. PLATTEN & J.C. LEGRAS , 1984 , Convection in Liquids ,
Springer-Verlag , HEIDELBERG .
- [5] E.K. MASCHKE & SARAMITO , 1982 , On the transition to turbulence in
magneto-Hydrodynamic model in confined
plasmas ,
PHYSICA Scripta Vol T2/2 , 410-417 .
- [6] J.H. CURRY, J.R. HERRING, JOSIP LONCARIC & S. ORZAG , 1984 ,
Order and disorder in two and three
dimensional Bénard-Convection ,
JFM , 1984, vol 147, pp 1-38 .
- [7] Edward N. LORENZ , 1963 , Deterministic Nonperiodic FLOW ,
J. Atm. Sci 20, 130 ,

- [8] P. BERGE, Y. POMEAU, Ch. VIDAL, 1984, L'ordre dans le chaos,
Edition HERMANN - PARIS.
- [9] J.H. CURRY, 1978, A generalized LORENZ-System,
Com - MATH-PHY, 60, 193-204.
- [10] M. DUBOIS, 1976, Ph.D. Thesis, University Paris VI.
- [11] J.P. GOLLUB & S.V. BENSON, 1980, Many routes to turbulent convection,
J.F.M vol 100, part 3 pp 449-470.
- [12] R.Kh. ZEYTOUNIAN, 1989, The Bénard Problem for deep convection:
Rigorous Derivation of approximate equation
Int. J. Engng Sci vol. 27. No 11 pp 1361-1366
- [13] M. ERRAFIY & R.Kh. ZEYTOUNIAN, 1990, The Bénard Problem for deep
convection: Linear theory
Int. J. Engng Sci (à paraître).
- [14] Bruce A. FINLAYSON, 1968, The Galerkin method applied to convective
instability problem.
JFM 33, pp 201-210.
- [15] Paul GERMAIN, 1986, MECANIQUE, Tome 2,
Ecole Polytechnique, ellipses.
- [16] GANTMACHER, F.R., 1959, Applications of theory of matrices.
New York: Interscience

- [17] R.K.R. ZEYTOUNIAN, 1990, 'Stabilité', tome 2, Cours de l'université de Lille I.
- [18] MALKUS, W. & VERONIS, G. 1958, Finite amplitude cellular convection
J.F.M. 4, 225.
- [19] CODDINGTON, E.A. & LEVINSON, N. 1955, Theory of ordinary Differential equations. Mc Graw Hill.
- [20] ZAITSEV, V. & SHLIDMIS, N. 1971, Sov. Phys., J. Exp. Theor. Phys. 32, 866
- [21] C. FOIAS, G. PRODI, Rend. Sem. Math., Univ. PADOVA 39, 1, 1967
- [22] G. CHAVEPEYER, 1974, Bull. classe Sci., Acad. Roy. Belg., 60, 1433.
- [23] Gérard IOU, 1983, Modélisation de la transition vers la turbulence,
Séminaire BOURBAKI, 35^e année, 1982/83, n° 607
- [24] D.R. MOORE, J. TOOMRE, E. KNOBLOCH & N.O. WEISS, 1983,
Period doubling and chaos in partial
differential equations for thermosolutal convection,
Nature Vol. 303, 23 June 1983.

- [25] Collin Sparrow, 1982, The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and Strange attractors, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin.
- [26] Z. Charki, M. Errafiy & R. Kh. Zeytounian, 1990, Le principe de l'échange des stabilités pour le problème de la convection profonde de Bénard, C.R. Acad. Sc, Paris (à paraître).
- [27] R.C. DiPrima & G.J. Habetler, 1969, A completeness theorem for non-self adjoint eigenvalues Problems in hydrodynamic stability, ARMA, vol. 34, 218-227.
- [28] D. Ruelle & F. Takens, 1971, On the nature of turbulence, Comm. Math. Phys, 20, 167-92.
- [29] S. Newhouse, D. Ruelle & F. Takens, 1978, Occurrence of strange axiom-A attractors near quasi-periodic flows on T^m , $m \geq 3$, Comm. Math. Physics, 64, p35.

- [30] FEIGENBAUM, 1978, Quantitative universality for a class of non-linear transformations, Journal of Statistical Physics, 19, p.25.
- [31] LIBCHABER, S. FAUVE, C. LAROCHE, 1983, Two parameters study of the routes to chaos, Physica, 7D, p.73.
- [32] M. DUBOIS, M.A. RUBIO, P. BERGE, 1983, Experimental evidence of intermittencies associated with a subharmonic bifurcation, Physical Review Letters, 51, p.1446.
- [33] Y. POMEAU, P. MANNEVILLE, 1980, Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, Comm. Math. Phys, 74, p.189.
- [34] M. CROUZEIX, A.L. MIGNOT, 1984, Analyse numérique des équations différentielles, Masson, Paris.

