

55376
1990
11

55376
1990
11

N° d'ordre : 503

THESE DE DOCTORAT

présentée à

l'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

Docteur en Mécanique

par

Michel RABERANTO



Spécialité : Mécanique des Fluides.

"PHENOMENES DE REFLEXION DANS LES ONDES PLANETAIRES
EN ATMOSPHERE NON ISOTHERME".

Soutenue le 16 Février 1990.

Membres du Jury :

Président et rapporteur : M. R. ZEYTOUNIAN, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

Rapporteur : M. H. TEITELBAUM, Directeur de Recherches au C.N.R.S.,
Ecole Polytechnique.

Membres : MM. P.A. BOIS, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

A. DYMENT, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

S. GODTS, Maître de Conférences à l'E.N.S.I.M.E.V. Valenciennes.

I

" A la mémoire de mes parents " .

Je dédie cette thèse :

" A mes frères et soeurs ",

" A Mademoiselle E. RANDRIANARISON ".

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur R. ZEYTOUNIAN qui a accepté de juger ce travail et de présider le jury de cette thèse.

Que Monsieur H. TEITELBAUM, Directeur de Recherches au C.N.R.S. qui a apporté son jugement à ce travail accepte mes sincères remerciements.

Ma profonde reconnaissance va à mon Directeur de thèse Monsieur le Professeur P.A. BOIS. Pour ses conseils, sa disponibilité et ses encouragements, qu'il reçoit ici mes modestes remerciements.

Ma gratitude va également à Messieurs A. DYMENT, Professeur, S. GODTS, Maître de Conférences qui ont participé au jury de cette thèse.

Je remercie également tous mes collègues du Laboratoire de Mécanique de Lille de leur amabilité et de leurs encouragements.

Enfin, je remercie Madame F. PETIAUX pour la rapidité, l'amabilité et l'efficacité avec lesquelles elle a assuré la frappe de ce manuscrit ainsi que toutes les personnes qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail.

PHENOMENES DE REFLEXION DANS LES ONDES
PLANETAIRES EN ATMOSPHERE NON ISOTHERME.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES NOTATIONS PRINCIPALES.....	IX
INTRODUCTION.....	1
RAPPEL DES EQUATIONS DE DEPART	4
 <u>PREMIERE PARTIE</u> :	
ETUDE DES ONDES PLANETAIRES INSTATIONNAIRES DANS UN MILIEU	
AU REPOS	12
 I.- <u>Premier chapitre</u> : Modélisation	
I.a.- Ecoulement de base	13
I.b.- Approximation de Boussinesq	15
I.c.- Linéarisation	17
I.d.- Modèle de Boussinesq résultant	18
 II.- <u>Deuxième chapitre</u> : Résolutions	
II.A.- Résolution de l'équation radiale	22
II.A.a.- Solution extérieure par la Méthode des Echelles Multiples (M.E.M.)	22
II.A.b.- Solution intérieure	26
II.A.c.- Raccords	30

VI

II.B.- Résolution de l'équation azimutale lorsque $R_0^{-1} \ll 1$	34
II.B.a.- Solution propre de l'équation d'ordre 0 en $\sqrt{R_0}$	34
II.B.b.- Solution asymptotique extérieure lorsque ν est élevé	35
II.B.c.- Solution intérieure	37
II.B.d.- Raccords	39
II.B.e.- Solution particulière de l'équation d'ordre 1 en $\sqrt{R_0}$	42
 CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE	 44
 <u>DEUXIEME PARTIE :</u>	
 ETUDE DES ONDES PLANETAIRES STATIONNAIRES DANS UN MILIEU EN MOUVEMENT ..	 45
 I.- <u>Premier chapitre</u> : Modélisation	 46
I.a.- Conditions de l'étude	46
I.b.- Ecoulement de base	47
I.c.- Linéarisation	51
I.d.- Modèle obtenu	53
 II.- <u>Deuxième chapitre</u> : Etude du cas particulier où $R_0^{-1} + 2 \Omega_\infty = 0$	 57
II.a.- Equations différentielles résultantes	57
II.b.- Etudes et conclusions	58

III.- <u>Troisième chapitre</u> : Etude du cas où $\Omega_0(\xi)$ est variable	
et que $R_0^{-1} \ll 2 \Omega_0(\xi) $	59
III.A.- <u>Etude des ondes de grande fréquence par rapport</u>	
<u>à $\varphi (m \gg 2)$</u>	60
III.A.1.- Equations différentielles résultantes	60
III.A.2.- Etude du voisinage du point critique ξ_0	
défini par $\Omega_0(\xi_0) = 0$	61
III.A.3.- Conclusion.	62
III.B.- <u>Etude des cas où $\theta \approx \pm \pi/3$ pour $m=1$ et de</u>	
<u>$\theta \approx \pm \pi/2$ pour $m=2$</u>	63
III.B.1.- Etude du cas où $\theta \approx \pm \pi/3$ pour $m=1$...	63
III.B.2.- Etude du cas où $\theta \approx \pm \pi/2$ pour $m=2$...	66
III.B.3.- Conclusion	68
III.C.- <u>Etude du cas où la perturbation relative de pression</u>	
<u>ne dépend plus de la longitude $\varphi (m=0)$</u>	68
III.C.1.- Equations régissant le problème	68
III.C.2.- Etudes des équations d'ordre 0 en M_0	71
III.C.2.a.- Solution extérieure de l'équation	
radiale	72
III.C.2.b.- Solution intérieure de l'équation	
radiale	74
III.C.2.c.- Solution extérieure de l'équation	
azimutale	75
III.C.2.d.- Solution intérieure de l'équation	
azimutale	78

III.C.3.- Solution particulière de l'équation d'ordre 1 en M_0	81
III.C.3.a.- Relation vérifiée par l'équation d'ordre 0 en M_0	82
III.C.3.b.- Détermination de la solution particulière....	82
III.C.3.c.- Détermination de $A_0(\xi)$	84
III.C.4.- Raccords des solutions de l'équation d'ordre 0 en M_0 ..	85
III.C.5.- Conclusion	86
IV.- <u>Quatrième chapitre</u> : Perspectives	87
IV.A.- Que peut-on faire lorsque $R_0^{-1} \gg 2\Omega_0(\xi) $!	87
IV.B.- Cas où la vitesse de base a pour composantes $(U_0, V_0, 0)$. ..	89
CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE	90
CONCLUSION GENERALE	91
ANNEXES	94-115
QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS DES PARAMETRES SANS DIMENSIONS	116
BIBLIOGRAPHIE	118

LISTE DES NOTATIONS PRINCIPALES

- $(\kappa, \theta, \varphi)$: coordonnées d'un point M du milieu dans un repère sphérique.
- t : désigne le temps.
- $z = \kappa - a_0$: l'altitude d'un point M mesurée à partir de la surface de la Terre.
- a_0 : rayon moyen de la Terre.
- (θ_0, φ_0) : latitude et longitude liées au point d'observation.
- (p_0, ρ_0, T_0) : pression, masse volumique et température au point d'observation.
- γ, R : constantes des gaz parfaits.
- C_p : coefficient de la chaleur spécifique à pression constante.
- g : intensité de l'accélération de la pesanteur.
- \vec{h} : vecteur rotation de la Terre.
- H_0 : longueur d'onde caractéristique verticale.
- L_0 : longueur d'onde caractéristique horizontale.
- U_0 : vitesse caractéristique.
- $\epsilon = H_0/L_0$: paramètre hydrostatique.
- $\delta = L_0/a_0$: paramètre de forme.
- $R_0 = U_0/2\Omega L_0$: nombre de Rossby.
- $M_0 = U_0/\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$: nombre de Mach.
- $F = U_0/\sqrt{gH_0}$: nombre de Froude.
- $B_0 = gH_0/RT_0$: nombre de Boussinesq.

- (p, ρ, T) : pression, masse volumique et température du milieu.
- (p_0, ρ_0, T_0) : pression, masse volumique et température de l'écoulement de base.
- (π, ω, θ) : perturbations relatives de la pression, de la masse volumique et de la température.
- (u, v, w) : composantes de la vitesse \vec{u} dans le repère sphérique.
- (u_1, v_1, w_1) : perturbations respectives de (u, v, w) .
- Ω : vitesse de l'écoulement de base.
- ζ : variable caractérisant l'évolution radiale (variable extérieure).

$$\xi = R_0 \zeta = M_0 \zeta \quad : \text{variable lente.}$$

$$\psi = \frac{1}{M_0} \varphi(\xi) \quad : \text{variable rapide.}$$

$$\hat{\zeta} = \left(\frac{M_0}{h_n} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} \right)^{1/3} (\zeta - \zeta_0) : \text{variable intérieure.}$$

$$\sin\theta = p = thv \quad : \text{variable caractérisant l'évolution azimutale.}$$

INTRODUCTION

Dans le cadre de la modélisation des écoulements atmosphériques, on étudie dans le présent mémoire les ondes planétaires. Ces ondes sont des ondes de gravité internes se propageant dans l'atmosphère, et dont l'échelle caractéristique horizontale (par exemple la longueur d'onde) est du même ordre de grandeur que le rayon de la Terre. Il n'est donc plus possible pour de telles ondes de négliger la rotondité de celle-ci.

L'influence de l'inhomogénéité du milieu apparaît dans ces phénomènes, d'une part directement dans la stratification du milieu en altitude, mais d'autre part également dans le couplage des effets de cette stratification avec ceux des forces de Coriolis : la stratification du milieu possède en effet une symétrie sphérique, tandis que la force de Coriolis, qui est perpendiculaire à l'axe de rotation Nord-Sud ne possède qu'une symétrie de révolution.

Des études concernant l'interaction de ces deux influences ont été proposées depuis plusieurs années notamment par LONGUET-HIGGINS [1], à l'aide d'une modélisation heuristique, et BLAMONT et TEITELBAUM [2], pour les marées atmosphériques, avec des équations réelles, mais uniquement dans le cas isotherme et pour un milieu au repos. LINDZEN ([4], [3]), en 1971, a étudié ces phénomènes dans le cadre de l'approximation du plan β en introduisant un écoulement de base zonal, tandis que BOYD, en 1978, a examiné les effets d'un écoulement de base méridional en se plaçant dans le cadre de l'approximation "du plan α " ([23], [24]). En 1981, HOSKINS et KAROLY [25] ont travaillé sur la réponse due à l'échauffement et à l'existence d'un relief. Quelques années plus tard, (1987), SASHEGYI et GEILER [26] ont exploré numériquement les effets dûs à la chaleur. En 1983, YANAI et LU [27] ont isolé expérimentalement des ondes planétaires piégées à une altitude déterminée. Très récemment, (1989), ZHANG et WEBSTER [28] ont utilisé les équations linéarisées des eaux peu profondes pour montrer l'existence des ondes piégées équatoriales. Le bénéfice de la formulation d'équations en eau peu profonde ne semble pas avoir été exploité à fond dans l'article de ZHANG et WEBSTER, ceux-ci se contentant d'une écriture linéarisée.

Le but du présent travail est de présenter une étude théorique de ce couplage dans le cas des équations effectives des écoulements géophysiques et dans un milieu stratifié en température.

La description la plus simple des ondes planétaires doit conserver dans le modèle : (i) la pesanteur, ces ondes sont en effet des ondes de gravité; (ii) la rotondité de la Terre : c'est cette propriété qui définit

la caractéristique "planétaire" des ondes en question. Dans ce contexte il n'est pas possible de négliger la rotation de la Terre, que l'on doit conserver comme troisième caractéristique du phénomène. Ainsi le système "minimum" doit être celui de la mécanique des fluides pesants, dans un système de coordonnées sphériques, le fluide pouvant être un fluide parfait.

Rendre adimensionnelles ces équations nécessite l'utilisation d'un système curviligne (x, y, z) , lié à la sphère terrestre et défini par :

$$x = a_0 (\varphi - \varphi_0) \cos \theta_0 ,$$

$$y = a_0 (\theta - \theta_0) ,$$

$$z = r - a_0 ,$$

où (r, θ, φ) représentent respectivement l'altitude, la latitude et la longitude; (θ_0, φ_0) sont une latitude et une longitude liées au point d'observation et a_0 est le rayon moyen de la Terre.

Dans les équations adimensionnées, apparaissent des nombres sans dimensions qui, selon leur ordre de grandeur, nous conduiront aux développements asymptotiques nécessaires pour formuler notre théorie.

Pour former ces équations on peut suivre soit la modélisation de PEDLOSKY [5] ou plus simplement celle proposée par ZEYTOUNIAN [6]. Cette modélisation introduit un paramètre ε (capital pour ce qui suit) qui est le paramètre hydrostatique du problème. Concrètement, H_0 étant une longueur d'onde caractéristique verticale et L_0 une longueur d'onde caractéristique horizontale du phénomène étudié, ε est le nombre H_0/L_0 .

Dans la description que l'on utilise par la suite, tous les développements sont arrêtés à l'ordre 0 en ε : cette description est l'approximation hydrostatique et correspond à l'étude des phénomènes dites "d'ondes longues".

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude des ondes planétaires instationnaires linéarisées dans un milieu au repos. Pour cela on se proposera une solution de base qui sera le repos. Cette solution de base définit un état de référence. On étudiera alors les perturbations de cet état de référence en linéarisant le système du départ autour de celui-ci.

En se plaçant dans le cadre asymptotique de l'approximation de Boussinesq : $n_0 \ll 1$, $B_0 \ll 1$, et $M_0 \approx B_0$ (où M_0 est le nombre de Mach et B_0 le nombre de Boussinesq) on obtiendra l'équation aux dérivées partielles, à variables séparables, régissant l'évolution des perturbations de la pression.

On étudiera alors séparément l'évolution radiale et l'évolution azimutale des perturbations. Il s'avèrera alors qu'il peut exister, théoriquement, des niveaux de réflexion d'ondes par rapport à l'altitude mais également des niveaux de réflexion azimutaux. Une conséquence de l'existence de ces derniers est la possibilité d'existence d'ondes piégées dans des bandes équatoriales de latitudes déterminées.

La deuxième partie de ce travail consistera à étudier les ondes planétaires stationnaires linéarisées dans un milieu en mouvement "circulaire". Du fait du cisaillement des écoulements par rapport à l'altitude, ces ondes ne se déduisent pas des précédentes par une simple rotation d'axe et changement d'observateur, et il convient de prendre quelques précautions. La linéarisation du système de départ, sous l'hypothèse de stationnarité, autour d'un écoulement de base qui sera l'écoulement "quasi-circulaire uniforme" par rapport à φ et sous l'approximation de Boussinesq, nous donnera l'équation aux dérivées partielles, régissant l'évolution des perturbations de pression.

Cette équation, sous certaines conditions, peut être étudiée théoriquement par la méthode de séparation de variables. De l'étude de cette équation, il est alors possible de dégager quelques propriétés de ces ondes.

Il faudrait, d'une manière ou d'une autre, préciser qu'à travers les quelques exemples traités, on met qualitativement en évidence des propriétés qui existent pour les écoulements plus généraux : ainsi il serait intéressant d'étudier par voie numérique, les solutions des équations considérées dans des cas moins académiques, de manière à voir si l'on retrouve les mêmes phénomènes.

RAPPEL DES EQUATIONS DE DEPART

L'étude qui suit concerne un modèle purement théorique. On suppose que :

- a) La Terre est une sphère de centre A , de rayon moyen a_0 , en rotation uniforme autour de l'axe des pôles.
- b) L'air est un gaz parfait sec, compressible, d'indice adiabatique γ , non visqueux et non conducteur de chaleur.
- c) L'observateur étudie le mouvement au voisinage d'un point M de la Terre. Le repère lié à l'observateur est non galiléen, et dans ce repère, suivant l'approximation classique de la Météorologie (voir [5]), les forces extérieures se réduisent à la pesanteur, à la force de Coriolis, et éventuellement à l'échauffement que l'on a négligé dans tout ce qui suit.

Le vecteur-rotation de la Terre $\vec{\Omega}$, dirigé suivant l'axe des pôles (du Sud vers le Nord), est porté par un vecteur unitaire \vec{z} de telle sorte que $\vec{\Omega} = |\Omega| \vec{z}$ et qu'un repère orthonormé direct, lui est associé (x, y, z). Ce repère est un repère absolu (voir figure 1).

L'accélération de la pesanteur, \vec{g} , est dirigée vers le centre de la Terre. Elle est portée par le vecteur unitaire \vec{k} de telle sorte que $\vec{g} = -g \vec{k}$ est qu'un repère non galiléen ($A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) lui est associé. Du fait de la sphéricité de la Terre, on choisira comme repère mobile le repère sphérique (A, r, θ, φ) où r est l'altitude mesurée à partir de A ,

θ : la latitude,

φ : la longitude.

Les autres axes des repères sont dirigés selon la figure ci-après :

Les équations du mouvement du fluide sont les équations d'Euler pour une atmosphère libre en utilisant le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ). Ces équations sont [5] :

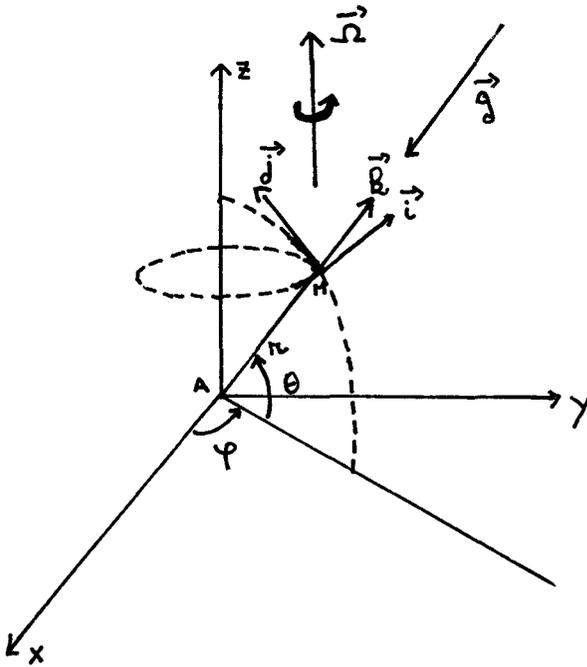


Figure 1

$$\begin{aligned}
 & \rho = \rho(r, \theta, \varphi, t) \\
 & \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\
 & \frac{du}{dt} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r} \tan \theta - 2\Omega v \sin \theta + 2\Omega w \cos \theta + \frac{1}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0 \\
 & \frac{dv}{dt} + \frac{vw}{r} + \frac{u^2}{r} \tan \theta + 2\Omega u \sin \theta + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0 \\
 & \frac{dw}{dt} - \frac{(u^2 + v^2)}{r} - 2\Omega u \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} + g = 0 \\
 & c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

où :

(u, v, w) sont les composantes de la vitesse \vec{u} dans le repère mobile.

(T, ρ, p) sont respectivement la température, la masse volumique et la pression du milieu.

R, C_p sont des constantes thermodynamiques.

(u, v, w) et (T, ρ, p) sont des fonctions de κ, θ, φ et t .

Dans ces équations, les opérateurs $\frac{d}{dt}$ et $\text{div } \vec{u}$ prennent les expressions suivantes :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{\kappa \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{v}{\kappa} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial \kappa},$$

et

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial w}{\partial \kappa} + \frac{2w}{\kappa} + \frac{1}{\kappa \cos \theta} \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\kappa \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Introduisons maintenant le système de coordonnées curvilignes lié à la sphère terrestre suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} x = a_0 \cos \theta_0 (\varphi - \varphi_0) \\ y = a_0 (\theta - \theta_0) \\ z = \kappa - a_0 \end{cases},$$

où (φ_0, θ_0) sont la longitude et la latitude liées au point d'observation.

On définit ainsi les variables adimensionnelles suivantes :

$$\bar{x} = \frac{x}{L_0} = \delta^{-1} \cos \theta_0 (\varphi - \varphi_0) ;$$

$$\bar{y} = \frac{y}{L_0} = \delta^{-1} (\theta - \theta_0) ;$$

$$\bar{z} = \frac{z}{H_0} ;$$

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\alpha_0} = 1 + \varepsilon \delta \bar{z} ;$$

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0} \text{ avec } t_0 = \frac{L_0}{U_0} ;$$

$$\bar{u} = \frac{u}{U_0} ; \quad \bar{v} = \frac{v}{U_0} ; \quad \bar{w} = \frac{w}{\varepsilon U_0} ;$$

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0} ; \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0} ; \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0} .$$

où

H_0 est une longueur d'onde caractéristique verticale.

L_0 une longueur d'onde caractéristique horizontale.

U_0 une vitesse caractéristique.

$\varepsilon = H_0/L_0$: paramètre hydrostatique.

$\delta = L_0/\alpha_0$: paramètre de forme liant la longueur caractéristique horizontale et le rayon de la Terre.

τ_0, p_0, T_0 désignent les variables thermodynamiques du point d'observation.

En portant les expressions de ces variables adimensionnées dans le système (1) et en supprimant les barres on obtient le système (3).

$$\rho = \rho T$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{\varepsilon \delta u w}{(1 + \varepsilon \delta z)} - \frac{\delta u v \tan \theta}{(1 + \varepsilon \delta z)} - \frac{1}{R_0} (v \sin \theta - \varepsilon \cos \theta w)$$

$$+ \frac{1}{\rho \pi_0^2} \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \frac{1}{\rho (1 + \varepsilon \delta z)} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\varepsilon \delta v w}{(1 + \varepsilon \delta z)} + \frac{\delta u^2 \tan \theta}{(1 + \varepsilon \delta z)} + \frac{u \sin \theta}{R_0} + \frac{1}{\rho \pi_0^2 (1 + \varepsilon \delta z)} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon^2 \frac{dw}{dt} - \frac{\varepsilon \delta (u^2 + v^2)}{(1 + \varepsilon \delta z)} - \frac{\varepsilon u \cos \theta}{R_0} + \frac{1}{\rho \pi_0^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} + F^{-2} = 0$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$$

où les expressions de $\frac{d}{dt}$ et $\operatorname{div} \vec{u}$ sont :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u \cos \theta_0}{(1 + \varepsilon \delta z) \cos \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{(1 + \varepsilon \delta z)} \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2 \varepsilon \delta w}{(1 + \varepsilon \delta z)} + \frac{1}{(1 + \varepsilon \delta z)} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\delta \tan \theta}{(1 + \varepsilon \delta z)} v + \frac{1}{(1 + \varepsilon \delta z) \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Dans ce système apparaissent les nombres caractéristiques suivants :

$R_0 = U_0 / 2\Omega_0$: nombre de Rossby qui caractérise l'effet de la force de Coriolis.

$M_0 = U_0 / \sqrt{\gamma p_0}$: nombre de Mach qui caractérise les effets de compressibilité.

$F = U_0 / \sqrt{gH_0}$: nombre de Froude caractérisant l'effet de la pesanteur.

Approximation hydrostatique. Dans le système (3) on fait $\xi = 0$, les autres paramètres étant fixés. Les équations limites ainsi obtenues sont donc :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho T \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ \frac{du}{dt} - Su \operatorname{tg} \theta - \frac{v \sin \theta}{R_0} + \frac{\cos \theta}{\alpha M_0^2} \frac{1}{\rho \cos \theta} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{dv}{dt} + Su^2 \operatorname{tg} \theta + \frac{u \sin \theta}{R_0} + \frac{1}{\alpha M_0^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\alpha M_0^2 \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + F^{-2} = 0 \\ \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Ces équations peuvent être déduites du système d'équations formé par ZEYTOUNIAN dans [6].

Dans ce système, lorsqu'on fait $\delta = 0$ c'est-à-dire $\theta \approx \theta_0$ (approximation dite du "plan tangent"), on retrouve le système d'équation, que l'on a utilisées pour étudier les ondes de Boussinesq sous l'effet de la force de Coriolis (voir, par exemple [7] ou [8]).

Afin de faciliter la suite on utilisera le système (z, θ, φ) où l'on a remplacé $\frac{\partial}{\partial x}$ par sa valeur en fonction de $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ par sa valeur en fonction de $\frac{\partial}{\partial \theta}$. Ainsi notre système de départ est :

$$\rho = \rho T$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

$$\frac{du}{dt} - suv \operatorname{tg} \theta - \frac{v \sin \theta}{R_0} + \frac{s}{\pi M_0^2 \cos \theta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0$$

$$(5) \quad \frac{dv}{dt} + su^2 \operatorname{tg} \theta + \frac{u \sin \theta}{R_0} + \frac{s}{\pi M_0^2 \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{1}{\pi M_0^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} + F^{-2} = 0$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{(\alpha-1)}{\gamma} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$$

où

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\delta u}{\cos\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \delta v \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z} ;$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\delta}{\cos\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos\theta) + \frac{\delta}{\cos\theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} .$$

PREMIERE PARTIE

De ce système (5) , nous allons étudier dans cette première partie les ondes planétaires instationnaires linéarisées dans un milieu au repos.

CHAPITRE 1

MODELISATIONI.a.- Ecoulement de base

On se propose comme écoulement de base, l'écoulement de vitesse nulle, de variables thermodynamiques p_∞ , ρ_∞ , T_∞ .

Lorsque $u = v = w = 0$, les équations de la conservation de la quantité du mouvement et celle du gaz parfait nous montrent que p_∞ , ρ_∞ , T_∞ sont des fonctions de z : $p_\infty = p_\infty(z)$; $\rho_\infty = \rho_\infty(z)$; $T_\infty = T_\infty(z)$.

En introduisant la variable :

$$\xi = B_0 z,$$

où $B_0 = \gamma M_0^2 F^{-2}$ est le nombre de Boussinesq [9]; $p_\infty(\xi)$, $\rho_\infty(\xi)$, $T_\infty(\xi)$ vérifient alors le système suivant :

$$p_\infty(\xi) = \rho_\infty(\xi) \cdot T_\infty(\xi)$$

$$\frac{d p_\infty(\xi)}{d \xi} + \rho_\infty(\xi) = 0$$

Cet écoulement de base est donc notre état de référence et on veut étudier les perturbations de cet état de référence. Afin de faciliter notre étude, on introduit les variables thermodynamiques $\pi(t, z, \theta, \varphi)$, $w(t, z, \theta, \varphi)$, $\sigma(t, z, \theta, \varphi)$ définies par :

$$\pi(t, z, \theta, \varphi) = \frac{p(t, z, \theta, \varphi) - p_\infty(\xi)}{p_\infty(\xi)} = \pi$$

$$\omega(t, z, \theta, \varphi) = \frac{p(t, z, \theta, \varphi) - p_{\infty}(\xi)}{p_{\infty}(\xi)} = \omega$$

$$\sigma(t, z, \theta, \varphi) = \frac{T(t, z, \theta, \varphi) - T_{\infty}(\xi)}{T_{\infty}(\xi)} = \sigma$$

On remarque que π , ω , σ ne sont autres que les perturbations relatives par rapport à l'état de base de la pression, de la masse volumique et de la température.

En introduisant ces nouvelles variables thermodynamiques dans le système (5) on obtient un nouveau système :

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \pi = \omega + \sigma + \omega\sigma \\ \frac{d\omega}{dt} + (\omega+1) \operatorname{div} \vec{u} = (\omega+1) B_0 \left(1 + \frac{dT_{\infty}(\xi)}{d\xi} \right) \frac{\omega}{T_{\infty}(\xi)} \\ (\omega+1) \left[\frac{du}{dt} - suv \tan \theta - \frac{v \sin \theta}{R_0} \right] + \frac{\delta T_{\infty}(\xi)}{\gamma M_0^2 \cos \theta} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = 0 \\ (\omega+1) \left[\frac{dv}{dt} + su^2 \tan \theta + \frac{u \sin \theta}{R_0} \right] + \frac{\delta T_{\infty}(\xi)}{\gamma M_0^2} \frac{\partial \pi}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial z} - \frac{B_0}{T_{\infty}(\xi)} (\omega+1) \sigma = 0 \\ \frac{1}{(\sigma+1)} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{1}{(\pi+1)} \frac{d\pi}{dt} + B_0 \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_{\infty}(\xi)}{d\xi} \right] \frac{\omega}{T_{\infty}(\xi)} = 0 \end{array} \right.$$

I.b.- Approximation de Boussinesq

Une des hypothèses fondamentales de la théorie asymptotique des écoulements atmosphériques est que le nombre de Mach M_0 est petit devant l'unité. L'écoulement limite est donc un écoulement quasi-incompressible à condition que $B_0 \ll 1$. Un cas privilégié se présente lorsque B_0 et M_0 tendent vers zéro simultanément, mais de telle sorte que le rapport

$$\hat{B} = \frac{B_0}{M_0} \approx O(1). \quad (\text{voir, par exemple [9] ou [10]})$$

Le fait que M_0 est petit devant l'unité nécessite les développements de (u, v, w) et de (π, ω, σ) sous les formes respectives :

$$\begin{aligned} u &= u^* & \pi &= f_1(M_0) \pi^* \\ v &= v^* & \omega &= f_2(M_0) \omega^* \\ w &= w^* & \sigma &= f_3(M_0) \sigma^* \end{aligned} ,$$

où les $f_i(M_0)$ sont des fonctions de jauge qui tendent vers zéro lorsque M_0 tend vers zéro.

En portant ces expressions dans le système (6) et en appliquant le principe de la moindre dégénérescence on obtient :

$$f_1(M_0) = M_0^2 \quad ; \quad f_2(M_0) = M_0 \quad ; \quad f_3(M_0) = M_0 .$$

En introduisant ces valeurs dans le système (6) celui-ci prend la forme :

$$\omega^* + \theta^* = M_0 (\pi^* - \omega^* \theta^*)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = -M_0 \left\{ \frac{d\omega^*}{dt} + \omega^* \operatorname{div} \vec{u}^* - \frac{\hat{B}}{T_0(\zeta)} \left(1 + \frac{dT_0(\zeta)}{d\zeta} \right) \omega^* \right\} + O(M_0^2)$$

$$\frac{du^*}{dt} - \sin\theta u^* v^* \operatorname{tg}\theta - \frac{v^* \sin\theta}{R_0} + \frac{\delta T_0(\zeta)}{\gamma \cos\theta} \frac{\partial \pi^*}{\partial \theta}$$

$$= -M_0 \omega^* \left\{ \frac{du^*}{dt} - \sin\theta u^* v^* \operatorname{tg}\theta - \frac{v^* \sin\theta}{R_0} \right\}$$

(7)

$$\frac{dv^*}{dt} + \delta \operatorname{tg}\theta u^{*2} + u^* \frac{\sin\theta}{R_0} + \frac{\delta T_0(\zeta)}{\gamma} \frac{\partial \pi^*}{\partial \theta}$$

$$= -M_0 \omega^* \left\{ \frac{dv^*}{dt} + \delta \operatorname{tg}\theta u^{*2} + u^* \frac{\sin\theta}{R_0} \right\}$$

$$T_0(\zeta) \frac{\partial \pi^*}{\partial \zeta} - \hat{B} \theta^* = \hat{B} M_0 \omega^* \theta^*$$

$$\frac{d\theta^*}{dt} + \frac{\hat{B}}{T_0(\zeta)} \left\{ \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_0(\zeta)}{d\zeta} \right\} \omega^* = -M_0 \left\{ \omega^* \frac{d\theta^*}{dt} - \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{d\pi^*}{dt} \right\} + O(M_0^2)$$

I.c.- Linéarisation

Le repos $u^* = v^* = w^* = \pi^* = \omega^* = \sigma^* = 0$ est de manière évidente une solution particulière de (7). On peut donc linéariser le système autour de cette solution. Si nous désignons par η le paramètre de linéarisation, nous pouvons chercher des développements des perturbations sous la forme :

$$u^* = \eta u_1 + \eta^2 u_2 + \dots$$

$$v^* = \eta v_1 + \eta^2 v_2 + \dots$$

$$w^* = \eta w_1 + \eta^2 w_2 + \dots$$

$$\pi^* = \eta \pi_1 + \eta^2 \pi_2 + \dots$$

$$\omega^* = \eta \omega_1 + \eta^2 \omega_2 + \dots$$

$$\sigma^* = \eta \sigma_1 + \eta^2 \sigma_2 + \dots$$

η est un petit paramètre caractérisant l'amplitude des perturbations.

On porte maintenant ces expressions dans le système (7) en ne conservant que les termes d'ordre 1 en η et ceux d'ordre inférieur ou égal à 1 en M_0 . On aboutit alors au système linéaire suivant :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 + \sigma_1 = M_0 \pi_1 \\ \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{s}{\cos \theta} \frac{\partial (v_1 \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{s}{\cos \theta} \frac{\partial u_1}{\partial r} \\ = -M_0 \left\{ \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\hat{\beta}}{T_0(t)} \left(1 + \frac{dT_0(t)}{ds} \right) w_1 \right\} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{u_1 \sin \theta}{R_0} + \frac{\delta T_{\infty}(\zeta)}{\gamma \cos \theta} \frac{\partial \pi_1}{\partial \varphi} = 0 \\
 & \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{u_1 \sin \theta}{R_0} + \frac{\delta T_{\infty}(\zeta)}{\gamma} \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} = 0 \\
 & T_{\infty}(\zeta) \frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta} - \hat{B} \sigma_1 = 0 \\
 & \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{\hat{B}}{T_{\infty}(\zeta)} \left\{ \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_{\infty}(\zeta)}{d\zeta} \right\} w_1 = \frac{\mu_0(\gamma-1)}{\gamma} \frac{\partial \pi_1}{\partial t}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

I.d.- Modèle de Boussinesq résultant

Cherchons maintenant des solutions périodiques en longitude φ et en temps t (c'est-à-dire des solutions transformables en série de Fourier). Pour toute fonction $g(t, z, \theta, \varphi)$, on a alors

$$g(t, z, \theta, \varphi) = g_1(z, \theta) e^{i(\sigma t + m \varphi)}$$

où σ et m sont, soit des inconnues, soit des données selon le problème envisagé ($g = u_1, v_1, w_1, \pi_1, \omega_1, \sigma_1$).

Le système (8) devient alors :

$$\begin{aligned}
 & \omega_1(z, \theta) + \theta_1(z, \theta) = M_0 \pi_1(z, \theta) \\
 & \frac{\partial \omega_1(z, \theta)}{\partial z} + \frac{s}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_1(z, \theta) \cos \theta) + \frac{i s m}{\cos \theta} u_1(z, \theta) \\
 & \quad = -M_0 \left\{ i \sigma \omega_1(z, \theta) - \frac{\hat{B}}{T_0(\xi)} \left(1 + \frac{dT_0(\xi)}{d\xi} \right) \omega_1(z, \theta) \right\} \\
 (9) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & i \sigma u_1(z, \theta) - v_1(z, \theta) \frac{\Delta \sin \theta}{R_0} + \frac{i s m}{r \cos \theta} T_0(\xi) \pi_1(z, \theta) = 0 \\
 & i \sigma v_1(z, \theta) + u_1(z, \theta) \frac{\Delta \sin \theta}{R_0} + \frac{s T_0(\xi)}{r} \frac{\partial \pi_1(z, \theta)}{\partial z} = 0 \\
 & T_0(\xi) \frac{\partial \pi_1(z, \theta)}{\partial z} - \hat{B} \theta_1(z, \theta) = 0 \\
 & i \sigma \theta_1(z, \theta) + \frac{\hat{B}}{T_0(\xi)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_0(\xi)}{d\xi} \right) \omega_1(z, \theta) = i \sigma M_0 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \pi_1(z, \theta) .
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Pour la suite on prendra $\hat{B} = 1$.

Le système (9) est un système linéaire de six équations à six inconnues. On peut donc le réduire à une équation à une inconnue. En prenant π_1 , par exemple, comme inconnue principale, celle-ci doit vérifier l'équation suivant :

$$\begin{aligned}
 (10) \quad & \frac{\sigma^2}{T(\xi)} \left\{ \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial z^2} - M_0 \left[\frac{1}{T_0(\xi)} \left(1 - \frac{dT_0(\xi)}{d\xi} \right) + \frac{1}{T(\xi)} \frac{dT(\xi)}{d\xi} \right] \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \right\} \\
 & = s^2 \rho^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1-p^2}{f^2-p^2} \frac{\partial \pi_1}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{(1-p^2)(f^2-p^2)} \pi_1 - \frac{m}{f} \frac{(f^2+p^2)}{(f^2-p^2)^2} \pi_1 \right\},
 \end{aligned}$$

[*] : Pour le calcul, voir annexe A.

où l'on a posé :

$$\Gamma(\xi) = \frac{1}{8T_\infty(\xi)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_\infty(\xi)}{d\xi} \right) : \text{ carré de la fréquence de Brunt-Vaisälä,}$$

$$f = \sigma R_0 ,$$

$$\mu = \sin \theta ,$$

π_1 est une fonction de z , qui dépend naturellement de μ .

L'équation (10) est une équation aux dérivées partielles à variables séparables. Cela nous amène à chercher $\pi_1(z, \mu, H_0, R_0)$ sous la forme d'une somme de produits de deux fonctions $R_n(z, H_0)$ et $T_n(\mu, R_0)$.

$$(11) \quad \pi_1(z, \mu, H_0, R_0) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(z, H_0) \cdot T_n(\mu, R_0) .$$

En portant alors cette expression (11) de $\pi_1(z, \mu, H_0, R_0)$ dans l'équation (10), on obtient deux équations différentielles : l'une, par rapport à z , concerne l'évolution radiale de la perturbation de pression, et l'autre, par rapport à μ , concerne son évolution azimutale.

Ces équations s'écrivent :

$$(12) \quad \frac{d^2 R_n(z, H_0)}{dz^2} + \frac{\Gamma(\xi)}{h_n} R_n(z, H_0) = H_0 \left\{ \frac{1}{T_\infty(\xi)} \left(1 - \frac{dT_\infty(\xi)}{d\xi} \right) + \frac{1}{\Gamma(\xi)} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} \right\} \frac{dR_n(z, H_0)}{dz} ,$$

$$(13) \quad f^2 \left\{ \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p^2}{f^2-p^2} \frac{dT_n(p, R_0)}{dp} \right) - \frac{m^2}{(1-p^2)(f^2-p^2)} T_n(p, R_0) \right. \\ \left. - \frac{m}{f} \frac{(f^2+p^2)}{(f^2-p^2)^2} T_n(p, R_0) \right\} + \frac{\sigma^2}{g^3 h_n} T_n(p, R_0) = 0,$$

où $-1/h_n$ est une constante de séparation qu'on peut choisir positive ou négative. Nous l'avons choisie négative. La raison est que si elle est négative, on peut obtenir un développement de $T_n(p, R_0)$ en une somme de polynômes de Legendre, et qu'une telle somme est convergente sous des conditions assez large.

Remarque

Rappelons que l'équation (13) n'est autre que l'équation de Laplace pour les marées atmosphériques (voir, par exemple, [11]).

CHAPITRE 2

RESOLUTIONSII.A.- Résolution de l'équation radiale

On se propose tout d'abord de résoudre l'équation (12).

II.A.a.- Solution extérieure par la méthode des échelles multiples
(M.E.M.)

M_0 étant un petit paramètre, on résout ici une équation différentielle à coefficients lentement variables. La méthode est classique, et peut être trouvée par exemple dans [12] ou [13].

On introduit les variables Ψ et ζ définies de la façon suivante :

$$\zeta = M_0 z \quad \text{qui pour } M_0 \text{ petit, est une variable lente,}$$

et

$$\Psi = \frac{1}{M_0} \varphi(\zeta) \quad \text{est une variable rapide.}$$

L'idée de la M.E.M. est de remplacer une fonction d'une variable $\pi(z, M_0)$ par une fonction de deux variables indépendantes $\pi(\zeta, \Psi, M_0)$. La condition à respecter est que lorsque ζ, Ψ sont tous deux fonction de z , de manière à ce que $\pi(\zeta(z), \Psi(z), M_0) \equiv \pi(z, M_0)$. Cela se produit sur la courbe d'équation $\Psi = \frac{1}{M_0} \varphi(\zeta)$. Cette condition d'une part et l'arbitraire laissé à la fonction $\varphi(\zeta)$ d'autre part, déterminent (en principe), la variation de π par rapport à ses deux arguments ainsi que la courbe elle-même. (Pour plus de précisions, voir [12] ou [13]).

On développe également $R_n(z, M_0)$ sous la forme suivante :

$$R_n(z, M_0) = R_n(\Psi, \zeta, M_0) = R_{n0}(\Psi, \zeta) + M_0 R_{n1}(\Psi, \zeta) + \dots$$

En introduisant cette expression de $R_n(z, M_0)$, ainsi que celle de $\frac{d^2}{dz^2}$ et $\frac{d}{dz}$ dans l'équation (12), on obtient les équations suivantes, selon leur ordre en M_0 [*]:

a) à l'ordre 0 en M_0 .

$$(14) \quad \psi''(\xi) \frac{\partial^2 R_{n0}(\psi, \xi)}{\partial \psi^2} + \frac{\Gamma(\xi)}{h_n} R_{n0}(\psi, \xi) = 0,$$

b) à l'ordre 1 en M_0 .

$$(15) \quad \begin{aligned} & \psi'(\xi) \frac{\partial^2 R_{n1}(\psi, \xi)}{\partial \psi^2} + \frac{\Gamma(\xi)}{h_n} R_{n1}(\psi, \xi) \\ & = \left\{ \left[\frac{1}{T_0(\xi)} \left(1 - \frac{dT_0(\xi)}{d\xi} \right) + \frac{1}{\Gamma(\xi)} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} \right] \psi'(\xi) - \psi''(\xi) \right\} \frac{\partial R_{n0}(\psi, \xi)}{\partial \psi} \\ & \quad - 2 \psi'(\xi) \frac{\partial^2 R_{n0}(\psi, \xi)}{\partial \psi \partial \xi} \end{aligned}$$

L'équation (14) est une équation à coefficients constants par rapport à la variable ψ . On peut donc en chercher la solution sous la forme :

$$(16) \quad R_{n0}(\psi, \xi) = A_0(\xi) e^{\omega \psi},$$

où ω ne dépend pas de ψ . Du fait de l'arbitraire de la fonction $\psi(\xi)$, on ne restreint pas la généralité en supposant que ω est constant, donc en fait, égal à 1. C'est cette hypothèse qui imposera par la suite le choix de $\psi(\xi)$.

* Voir annexe B.

"Les primes indiquent une dérivation par rapport à ξ ".

En portant l'expression (16) dans l'équation d'ordre 0 en M_0 (14) on obtient l'équation que doit vérifier $\Psi(\xi)$:

$$\Psi'^2(\xi) + \frac{\Gamma(\xi)}{h_n} = 0 \quad ,$$

ce qui nous donne les expressions de $\Psi(\xi)$ suivantes :

$$\Psi(\xi) = \pm i \int \left(\frac{\Gamma(\xi)}{h_n} \right)^{1/2} d\xi \quad \text{lorsque } \Gamma(\xi) > 0 \quad ,$$

et

$$\Psi(\xi) = \pm \int \left(-\frac{\Gamma(\xi)}{h_n} \right)^{1/2} d\xi \quad \text{lorsque } \Gamma(\xi) < 0 \quad .$$

Comme on a pu déterminer $\Psi(\xi)$ on connaît alors comment la variable Ψ varie en fonction de ξ et de M_0 .

En portant l'expression de $R_{n0}(\Psi, \xi)$ dans l'équation d'ordre 1 en M_0 , on a ensuite :

$$\begin{aligned} & \Psi'^2(\xi) \frac{\partial^2 R_{n1}(\Psi, \xi)}{\partial \Psi^2} + \frac{\Gamma(\xi)}{h_n} R_{n1}(\Psi, \xi) \\ (17) \quad & = \left\{ \left[\frac{1}{\Gamma_0(\xi)} \left(1 - \frac{d\Gamma_0(\xi)}{d\xi} \right) + \frac{1}{\Gamma(\xi)} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} \right] \Psi'(\xi) - \Psi''(\xi) \right\} A_0(\xi) - 2\Psi'(\xi) A_0'(\xi) \Big\} A_0(\xi) \end{aligned}$$

Une solution particulière de cette équation est de la forme :

$$R_{n1p} = A(\xi) \Psi e^{\Psi} \quad ,$$

où

$$A(\xi) = \frac{1}{2\psi'^{1/2}(\xi)} \left\{ \left[\left[\frac{1}{T_\infty(\xi)} \left(1 - \frac{dT_\infty(\xi)}{d\xi} \right) + \frac{1}{\Gamma(\xi)} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} \right] \psi'(\xi) - \psi''(\xi) \right] A_0(\xi) - 2\psi'(\xi) A_0'(\xi) \right\} .$$

Afin d'éviter la présence de termes séculaires dans la solution de l'équation d'ordre 1 en M_0 lorsque ψ tend vers l'infini, il est nécessaire d'annuler $A(\xi)$. Ceci nous donne l'équation différentielle que doit vérifier $A_0(\xi)$. Cette équation est :

$$(18) \quad \left\{ \left[\frac{1}{T_\infty(\xi)} \left(1 - \frac{dT_\infty(\xi)}{d\xi} \right) + \frac{1}{\Gamma(\xi)} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} \right] \psi'(\xi) - \psi''(\xi) \right\} A_0(\xi) = 2\psi'(\xi) A_0'(\xi) .$$

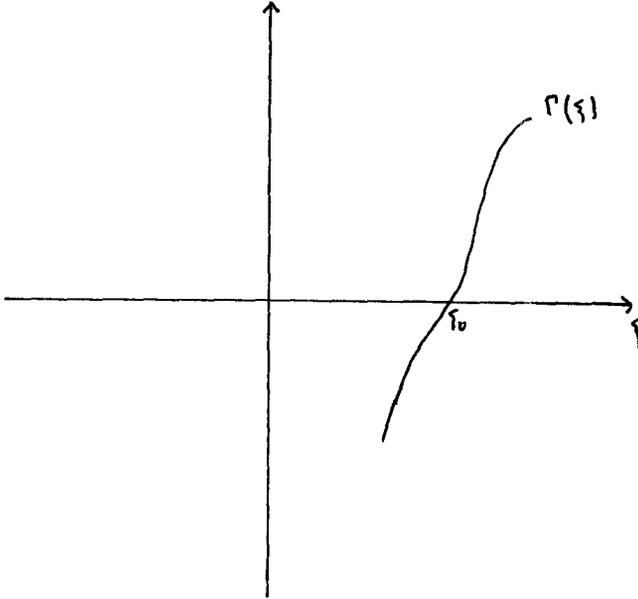
On obtient alors $A_0(\xi)$.

$$A_0(\xi) = \left| \frac{\Gamma(\xi)}{\psi'(\xi) T_\infty(\xi)} \right| e^{\frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{T_\infty(\xi)}} .$$

Connaissant $A_0(\xi)$ et $\psi(\xi)$ on connaît donc totalement $R_{n0}(\psi, \xi)$ par la relation (16).

Remarque sur la fonction $\Gamma(\xi)$.

Notons que nous avons pris $\Gamma(\xi)$ comme une fonction quelconque ayant l'allure suivante :



Ce qui nous a permis d'obtenir les expressions de $\Psi(\xi)$ et de supposer pour la suite qu'il peut exister une altitude ξ_0 telle que $\Psi'(\xi_0) = 0$. Cette altitude est définie par $\Gamma(\xi_0) = 0$.

II.A.b.- Solution intérieure

En tenant compte de cette remarque, la question qui se pose ensuite est : que se passe-t-il lors du passage à ce point ξ_0 où $\Gamma(\xi)$ s'annule et change de signe ?

Étudions alors le voisinage de ξ_0 en supposant $\Gamma(\xi)$ régulier. On développe ainsi $\Gamma(\xi)$ en série de Taylor au voisinage de ξ_0 , et on a :

$$\Gamma(\xi) = \Gamma(\xi_0) + (\xi - \xi_0) \frac{d\Gamma(\xi_0)}{d\xi} + \dots = \Gamma_0 (\xi - \xi_0) \frac{d\Gamma(\xi_0)}{d\xi} + \dots$$

Pour fixer les idées, on suppose que $\frac{d\Gamma(\xi_0)}{d\xi} < 0$.
 Portons l'expression de $\Gamma(\xi)$ dans l'équation (12), on a alors :

$$(19) \quad \frac{d^2 R_n(z, M_0)}{dz^2} - \frac{1}{(z-z_0)} \frac{dR_n(z, M_0)}{dz} + \frac{M_0}{h_n} (z-z_0) \frac{d\Gamma(\xi_0)}{d\xi} R_n(z, M_0) \\
 = M_0 \left\{ \frac{1}{T_{\infty}(\xi)} \left(1 - \frac{dT_{\infty}(\xi)}{d\xi} \right) \right\} \frac{dR_n(z, M_0)}{dz} .$$

Afin de décrire le voisinage du point ξ_0 , on introduit maintenant une variable intérieure (variable locale) définie par [*] :

$$\hat{z} = \left(\frac{M_0}{h_n} \frac{d\Gamma(\xi_0)}{d\xi} \right)^{1/3} (z - z_0) .$$

L'équation radiale devient alors :

$$(20) \quad \frac{d^2 R_n(\hat{z}, M_0)}{d\hat{z}^2} - \frac{1}{\hat{z}} \frac{dR_n(\hat{z}, M_0)}{d\hat{z}} + \hat{z} R_n(\hat{z}, M_0) = O(M_0^{2/3}) .$$

On résout cette équation, en négligeant les termes en $M_0^{2/3}$. La fonction $R_n(\hat{z}, M_0)$ est donc remplacée par une fonction $R_{n0}(\hat{z})$ et en opérant le changement de fonction suivant :

*) Un raccordement asymptotique peut justifier explicitement que si l'on pose $\hat{z} = A M_0^\alpha (z - z_0)$, alors $\alpha = 1/3$ et $A = \left(h_n^{-1} \frac{d\Gamma(\xi_0)}{d\xi} \right)^{1/3}$.

$$(21) \quad R_{n0}(\hat{\zeta}) = \sqrt{\hat{\zeta}} \widehat{R}_{n0}(\hat{\zeta}) ,$$

on a alors :

$$(22) \quad \frac{d^2 \widehat{R}_{n0}(\hat{\zeta})}{d\hat{\zeta}^2} + \left(\hat{\zeta} - \frac{3/4}{\hat{\zeta}^2} \right) \widehat{R}_{n0}(\hat{\zeta}) = 0 .$$

On est ici en présence d'un problème de point tournant autour d'une singularité. Ce problème a été étudié par NAYFEH [12] : il suffit d'effectuer un changement de fonction en posant :

$$\widehat{R}_{n0}(\hat{\zeta}) = \sqrt{\hat{\zeta}} \widetilde{R}_{n0}(\hat{\zeta}) .$$

L'équation que doit vérifier $\widetilde{R}_{n0}(\hat{\zeta})$ est alors :

$$(23) \quad \frac{d^2 \widetilde{R}_{n0}(\hat{\zeta})}{d\hat{\zeta}^2} + \frac{1}{\hat{\zeta}} \frac{d\widetilde{R}_{n0}(\hat{\zeta})}{d\hat{\zeta}} + \left(\hat{\zeta} - \frac{1}{\hat{\zeta}^2} \right) \widetilde{R}_{n0}(\hat{\zeta}) = 0 .$$

On fait ensuite le changement de variable suivant :

$$\widetilde{\zeta} = \frac{2}{3} \hat{\zeta}^{3/2} .$$

L'équation (23) devient :

$$(24) \quad \frac{d^2 \widetilde{R}_{n0}(\widetilde{\zeta})}{d\widetilde{\zeta}^2} + \frac{1}{\widetilde{\zeta}} \frac{d\widetilde{R}_{n0}(\widetilde{\zeta})}{d\widetilde{\zeta}} + \left(1 - \frac{4/9}{\widetilde{\zeta}^2} \right) \widetilde{R}_{n0}(\widetilde{\zeta}) = 0 ,$$

qui n'est autre qu'une équation de Bessel d'ordre $\nu = \pm 2/3$. On obtient alors :

$$(25) \quad \widetilde{R}_{n0}(\widetilde{\zeta}) = A_1 J_{2/3}(\widetilde{\zeta}) + A_2 J_{-2/3}(\widetilde{\zeta}) ,$$

où A_1 et A_2 sont des constantes, non déterminées à ce stade.

On sait aussi que $J_{2/3}(\tilde{z})$ et $J_{-2/3}(\tilde{z})$ peuvent se mettre sous la forme de combinaisons des dérivées des fonctions d'Airy (voir, [14]).

$$J_{2/3}(\tilde{z}) = \frac{\sqrt{3}}{2\hat{z}} \left\{ \sqrt{3} Ai'(-\hat{z}) + Bi'(-\hat{z}) \right\},$$

$$J_{-2/3}(\tilde{z}) = \frac{\sqrt{3}}{2\hat{z}} \left\{ -\sqrt{3} Ai'(-\hat{z}) + Bi'(-\hat{z}) \right\},$$

où $Ai'(-\hat{z})$ et $Bi'(-\hat{z})$ sont les dérivées respectives de $Ai(-\hat{z})$ et $Bi(-\hat{z})$.

En revenant à l'expression de $R_{no}(\tilde{z})$ déduite de la relation (21) on a

$$(26) \quad R_{no}(\tilde{z}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ a_1 \sqrt{3} Ai'(-\hat{z}) + b_1 Bi'(-\hat{z}) \right\},$$

où $a_1 = A_1 - A_2$ et $b_1 = A_1 + A_2$; a_1 et b_1 sont des constantes.

On sait aussi que lorsque \tilde{z} est grand $Ai'(-\tilde{z})$ et $Bi'(-\tilde{z})$ ont les comportements asymptotiques suivants (voir, par exemple, [14]):

$$(27) \quad \begin{cases} Ai'(-\tilde{z}) \approx -\pi^{-1/2} \tilde{z}^{1/4} \left[\cos(\tilde{z} + \frac{\pi}{4}) + \sin(\tilde{z} + \frac{\pi}{4}) \right] \\ Bi'(-\tilde{z}) \approx \pi^{-1/2} \tilde{z}^{1/4} \left[\sin(\tilde{z} + \frac{\pi}{4}) - \cos(\tilde{z} + \frac{\pi}{4}) \right] \end{cases},$$

où $\tilde{z} = \frac{2}{3} \hat{z}^{3/2}$.

Ces comportements asymptotiques nous seront utiles pour le paragraphe suivant.

Remarque

On vient de voir que le point ζ_0 où $\Gamma(\zeta_0)$ s'annule et change de signe n'a pas le comportement d'un point tournant classique.

En effet un point tournant classique est défini dans une équation de la forme :

$$w'' + \Omega(\zeta) w = \varepsilon f(\zeta) w',$$

comme un point ζ_0 où $\Omega(\zeta_0)$ s'annule et change de signe tandis que

$f(\zeta_0)$ est régulier. Dans le cas présent lorsque $\zeta = \zeta_0$ la fonction $f(\zeta)$ n'est pas régulière (voir équation (12)). Après quelques transformations (voir paragraphe II.A.b), on constate même lorsque $\hat{\zeta}$ tend vers 0 ($\hat{\zeta} = \zeta - \zeta_0$) les coefficients de $R_{n0}(\hat{\zeta})$ tendent vers l'infini (voir équation (22)).

II.A.c.- Raccordements

Le raccord des solutions extérieures avec les solutions intérieures se fait par le principe classique de VAN DYKE [13], dit des "développements asymptotiques raccordés".

Il s'agit ici de raccorder les solutions données par la relation (16) et celles données par la relation (26).

Les solutions données par la relation (16) sont :

$$R_{n0}(\psi_1, \xi) = A_0(\xi) \left\{ \kappa_1 e^{i\psi_1} + \kappa_2 e^{-i\psi_1} \right\}, \quad \xi > \zeta_0$$

et

$$R_{n0}(\psi_2, \xi) = A_0(\xi) \left\{ L_1 e^{\psi_2} + L_2 e^{-\psi_2} \right\}, \quad \xi < \zeta_0$$

où $\psi_1 = \frac{1}{M_0} \varphi_1(\xi)$ et que $\varphi_1(\xi) = \int_0^\xi \left(\frac{\Gamma(\xi)}{2u} \right)^{1/2} d\xi$

et $\Psi_2 = \frac{1}{M_0} \varphi_2(\zeta)$ et que $\varphi_2(\zeta) = \int_0^{\zeta} \left(-\frac{\Gamma(\zeta)}{h_n}\right)^{1/2} d\zeta$.

$\kappa_1, \kappa_2, L_1, L_2$ sont des constantes à déterminer.

La solution obtenue par la relation (26) est :

$$R_{n0}(\hat{\zeta}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ a_1 \sqrt{3} \operatorname{Ai}'(-\hat{\zeta}) + b_1 \operatorname{Bi}'(-\hat{\zeta}) \right\}.$$

En utilisant les comportements asymptotiques (27) de $\operatorname{Ai}'(-\hat{\zeta})$ et de $\operatorname{Bi}'(-\hat{\zeta})$ lorsque $\hat{\zeta}$ est grand on a :

$$(28) \quad R_{n0}(\hat{\zeta}) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \pi^{-1/2} \hat{\zeta}^{1/4} \left\{ (-\sqrt{3}a_1 - b_1) \cos\left(\hat{\zeta} + \frac{\pi}{4}\right) + (b_1 - \sqrt{3}a_1) \sin\left(\hat{\zeta} + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

Maintenant, cherchons un développement de $R_{n0}(\Psi, \zeta)$ au voisinage de $\zeta = \zeta_0$.

Au voisinage de ζ_0 on a :

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \left(\frac{\Gamma'(\zeta_0)}{h_n}\right)^{1/2} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - \zeta_0)^{1/2} d\zeta,$$

ou encore

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{2}{3} \left(\frac{\Gamma'(\zeta_0)}{h_n} M_0^3\right)^{1/2} (\zeta - \zeta_0).$$

On obtient alors Ψ_1 :

$$\Psi_1 = \frac{\varphi_0}{M_0} - \tilde{\zeta},$$

avec

$$\varphi_0 = \int_0^{\zeta_0} \left(\frac{\Gamma(\zeta)}{h_n}\right)^{1/2} d\zeta.$$

Le développement de $A_0(\zeta)$ au voisinage de $\zeta = \zeta_0$ nous donne :

$$A_0(\zeta) \approx \frac{M_0^{1/6} \Gamma'(\zeta_0)^{1/6} h_n^{1/3}}{T_{\infty}^{1/2}(\zeta_0)} e^{1/2 \int_0^{\zeta_0} \frac{d\zeta}{T_{\infty}(\zeta)}} \times \zeta^{1/4}.$$

Ainsi le développement de $R_{no}(\psi, \zeta)$ est ($\zeta > \zeta_0$) :

$$(29) \quad R_{no}(\psi, \zeta) = G(\zeta_0) \zeta^{1/4} \left\{ \left[(K_1 + K_2) \cos \frac{\varphi_0}{M_0} + i(K_1 - K_2) \sin \frac{\varphi_0}{M_0} \right] \cos \tilde{\zeta} \right. \\ \left. + \left[(K_1 + K_2) \sin \frac{\varphi_0}{M_0} - i(K_1 - K_2) \cos \frac{\varphi_0}{M_0} \right] \sin \tilde{\zeta} \right\},$$

où on a posé $G(\zeta_0) = \frac{M_0^{1/6} \Gamma'(\zeta_0)^{1/6} h_n^{1/3}}{T_{\infty}^{1/2}(\zeta_0)}$.

Par identification des relations (28) et (29) on obtient des relations entre (a_1, b_1) et (K_1, K_2) .

$$(30) \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \pi^{1/2} G(\zeta_0) \left\{ (K_1 + K_2) \cos \frac{\varphi_0}{M_0} + i(K_1 - K_2) \sin \frac{\varphi_0}{M_0} \right\} \\ b_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} \pi^{1/2} G(\zeta_0) \left\{ (K_1 + K_2) \sin \frac{\varphi_0}{M_0} - i(K_1 - K_2) \cos \frac{\varphi_0}{M_0} \right\} \end{cases}$$

Remarque

L'équation (23) peut aussi se mettre sous la forme d'une équation de Bessel à argument complexe en posant

$$\tilde{z} = \frac{2}{3} i \hat{z}^{3/2} ,$$

d'ordre $\nu = \pm 2/3$. Ainsi $\tilde{R}_{n0}(\tilde{z})$ s'écrira comme combinaison de $I_{2/3}(\tilde{z})$ et $I_{-2/3}(\tilde{z})$.

$$\tilde{R}_{n0}(\tilde{z}) = A_1 I_{2/3}(\tilde{z}) + A_2 I_{-2/3}(\tilde{z}) .$$

De la même façon que précédemment, on peut raccorder cette solution intérieure avec la solution extérieure obtenue lorsque $f - f_0 < 0$. On obtient ainsi des relations entre les constantes (A_1 , A_2 , L_1 , L_2) qui sont analogues aux relations (30).

II.B.- Résolution de l'équation azimutale

Rappelons que l'équation azimutale (13) n'est autre que l'équation de Laplace pour les marées atmosphériques. Il ne s'agit pas ici de chercher les solutions de cette équation (pour cela on peut consulter [15] ou [18]) mais de trouver une solution asymptotique simple. Il est possible d'obtenir de telles solutions pour une force de Coriolis faible, c'est-à-dire lorsque le nombre de Rossby R_0 est grand devant l'unité ($R_0 \gg 1$).

On suppose donc σ et δ fixés et que $f = \sigma R_0$ est aussi grand que R_0 .

Lorsque $R_0 \gg 1$ l'équation qui régit l'évolution azimutale devient

$$\frac{d}{d\rho} \left((1-\rho^2) \frac{dT_n(\rho, R_0)}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{(1-\rho^2)} T_n(\rho, R_0) - \frac{m}{\sigma R_0} T_n(\rho, R_0)$$

(31)

$$+ \frac{\sigma^2}{\delta^2 h_n} T_n(\rho, R_0) = 0 .$$

Pour cette équation R_0^{-1} étant petit on cherche un développement de $T_n(\rho, R_0)$ de la forme :

$$T_n(\rho, R_0) = T_{n0}(\rho) + \frac{1}{R_0} T_{n1}(\rho) + \dots \cdot$$

On obtient alors les équations suivantes :

a) à l'ordre 0 en $1/R_0$.

$$(32) \quad \frac{d}{d\rho} \left((1-\rho^2) \frac{dT_{n0}(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{(1-\rho^2)} T_{n0}(\rho) + \frac{\sigma^2}{s^2 h_n} T_{n0}(\rho) = 0 ,$$

b) à l'ordre 1 en $1/R_0$.

$$(33) \quad \frac{d}{d\rho} \left((1-\rho^2) \frac{dT_{n1}(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{(1-\rho^2)} T_{n1}(\rho) + \frac{\sigma^2}{s^2 h_n} T_{n1}(\rho) = \frac{m}{\sigma} T_{n0}(\rho) .$$

II.B.a.- Solution propre de l'équation d'ordre 0 en $1/R_0$

On choisit la constante h_n de telle sorte que :

$$\frac{\sigma^2}{s^2 h_n} = n(n+1) .$$

L'équation (32) devient alors l'équation de Legendre. La solution $T_{n0}(\rho)$ s'écrit alors :

$$(34) \quad T_{n0}(\rho) = P_n^m(\rho) = (1-\rho^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(\rho)}{d\rho^m} ,$$

où $P_n^m(\rho)$ sont les fonctions associées de Legendre et $P_n(\rho)$ les polynômes de Legendre de degré n (voir [17]).

La solution $T_{n0}(\rho)$ est non constante uniquement lorsque $n > m$. Lorsque cette inégalité est vérifiée, il est possible de considérer le cas où n est grand. C'est pour cela que l'on va chercher une solution "extérieure" pour n grand.

II.B.b.- Solution asymptotique extérieure lorsque n est élevé [12].

Nous posons

$$\lambda^2 = n(n+1) \quad ,$$

et nous cherchons une solution de l'équation (32) d'ordre 0 en $\sqrt{r_0}$ pour λ grand. On effectue un changement de variable

$$\rho = khv.$$

L'équation d'ordre 0 en $\sqrt{r_0}$ devient alors :

$$(35) \quad \frac{d^2 T_{n0}(v, m', \lambda)}{dv^2} - \lambda^2 \left[kh^2 v - (1 - m'^2) \right] T_{n0}(v, m', \lambda) = 0 ,$$

où $m' = \frac{m}{\lambda}$.

On cherche maintenant $T_{n0}(v, m', \lambda)$ sous la forme suivante :

$$T_{n0}(v, m', \lambda) = e^{\lambda \Phi(v, \lambda)} ,$$

où $\Phi(v, \lambda)$ se développe comme suit :

$$\Phi(v, \lambda) = \Phi_0(v) + \frac{1}{\lambda} \Phi_1(v) + \dots .$$

En posant l'expression de $T_{n0}(v, m', \lambda)$ dans l'équation (35) on obtient alors les équations suivantes, selon le r degré en λ :

a) à l'ordre λ^2 :

$$(36) \quad \Phi_0''(v) - (kh^2 v - 1 + m'^2) = 0 .$$

*) Voir annexe C. Les primes indiquent une dérivation par rapport à v .

b) à l'ordre λ :

$$(37) \quad 2 \Phi_0'(v) \Phi_1'(v) + \Phi_0''(v) = 0 .$$

L'équation (36) nous donne les expressions de $\Phi_0(v)$ qui sont :

$$\Phi_0(v) = \pm \int (th^2v - 1 + m'^2)^{1/2} dv \text{ lorsque } (th^2v - 1 + m'^2) > 0 ,$$

et

$$\Phi_0(v) = \pm i \int (-th^2v + 1 - m'^2)^{1/2} dv \text{ lorsque } (th^2v - 1 + m'^2) < 0 .$$

En utilisant l'équation (37) on obtient les expressions de $\Phi_1(v)$.
Ces expressions sont :

$$\Phi_1(v) = \text{Log} \frac{k_1}{[th^2v - 1 + m'^2]^{1/4}} \text{ lorsque } (th^2v - 1 + m'^2) > 0 ,$$

et

$$\Phi_1(v) = \text{Log} \frac{k_2}{[1 - th^2v - m'^2]^{1/4}} \text{ lorsque } (th^2v - 1 + m'^2) < 0 .$$

k_1 et k_2 sont des constantes non déterminées à ce stade.

Ainsi les expressions de $T_{no}(V, m', \lambda)$ sont :

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} T_{no}(V, m', \lambda) = \frac{\kappa_1}{[+h^2V - 1 + m'^2]^{1/4}} e^{\pm \lambda \int (+h^2V - 1 + m'^2)^{1/2} dV} \quad \text{lorsque} \\ (+h^2V - 1 + m'^2) > 0 \quad ; \\ \\ T_{no}(V, m', \lambda) = \frac{\kappa_2}{[1 - h^2V - m'^2]^{1/4}} e^{\pm i\lambda \int (1 - h^2V - m'^2)^{1/2} dV} \quad \text{lorsque} \\ (h^2V - 1 + m'^2) < 0 \quad . \end{array} \right.$$

Remarque

Cette analyse des fonctions associées de Legendre, qui peut paraître un peu technique, est, en fait, classique [17]. Elle permet de déterminer leur comportement asymptotique lorsque l'indice n est élevée.

II.B.c.- Solution intérieure

L'équation (35) montre que lorsqu'il existe un V_0 telle

$$h^2 V_0 = 1 - \frac{m^2}{\lambda^2} \quad ,$$

le coefficient de $T_{no}(V, m', \lambda)$ s'annule. V_0 est donc un point singulier et il existe lorsque $\lambda > m$.

Etudions alors le voisinage de V_0 en effectuant un développement de Taylor de $h^2 V$ au voisinage de celui-ci. On a :

$$thV \approx thV_0 + \frac{1}{ch^2V_0} (V-V_0) + \dots ,$$

donc

$$th^2V \approx th^2V_0 + 2(V-V_0) \frac{thV_0}{ch^2V_0} + \dots .$$

En remplaçant th^2V_0 et $\frac{1}{ch^2V_0}$ par leur valeur, on a :

$$th^2V \approx 1 - \frac{m^2}{\lambda^2} + 2 \frac{m^2 thV_0}{\lambda^2} (V-V_0) + \dots .$$

On porte ensuite cette expression de th^2V dans l'équation (35), il en résulte que :

$$(39) \quad \frac{d^2 T_{n0}(V, m, \lambda)}{dV^2} - 2(V-V_0) m^2 thV_0 T_{n0}(V, m, \lambda) = 0 ,$$

et lorsqu'on pose

$$\tilde{V} = (2m^2 thV_0)^{1/3} (V-V_0) ;$$

cette équation devient l'équation d'Airy :

$$(40) \quad \frac{d^2 T_{n0}(\tilde{V})}{d\tilde{V}^2} - \tilde{V} T_{n0}(\tilde{V}) = 0 .$$

La solution générale de cette équation est donc :

$$(41) \quad T_{n0}(\tilde{v}) = a A_i(\tilde{v}) + b B_i(\tilde{v}),$$

où (a, b) sont des constantes et les $A_i(\tilde{v})$ et $B_i(\tilde{v})$ sont les fonctions d'Airy de première et seconde espèce : on sait que ces fonctions ont un comportement oscillatoire lorsque \tilde{v} tend vers $-\infty$ et un comportement apériodique lorsque \tilde{v} tend vers $+\infty$ [1].

L'existence d'un point v_0 tel que $1 + h^2 v_0 = 1 - \frac{m^2}{\lambda^2}$ signifie qu'il existe une latitude θ_0 ($1 + h v_0 = \sin \theta_0$) telle que cette équation ait lieu. Le comportement de θ_0 est donc celui d'un point tournant azimutal.

II.B.d.- Raccordements

Par le même principe que celui du paragraphe II.A.c on peut raccorder les solutions données par (38) à celles données par la relation (41).

D'après (38) on a dans la région extérieure :

Lorsque $1 + h^2 v - 1 + m^2 > 0$ ($v > v_0$) :

$$T_{n0}(v, m', \lambda) = \frac{1}{[1 + h^2 v - 1 + m^2]^{1/4}} \left\{ k'_1 e^{i \lambda \Phi_1(v)} + k''_1 e^{-i \lambda \Phi_1(v)} \right\};$$

et

Lorsque $1 + h^2 v - 1 + m^2 < 0$ ($v < v_0$) :

$$T_{n0}(v, m', \lambda) = \frac{1}{[1 - h^2 v - m^2]^{1/4}} \left\{ k'_2 e^{i \lambda \Phi_2(v)} + k''_2 e^{-i \lambda \Phi_2(v)} \right\}.$$

avec

$$\begin{cases} \Phi_1(v) = \int (1 + h^2 v - 1 + m^2)^{1/2} dv \\ \Phi_2(v) = \int (1 - h^2 v - m^2)^{1/2} dv \end{cases}$$

Au voisinage de V_0 tel que $+h^2V_0 = \lambda - m'^2$ ($m' = \frac{m}{\lambda}$),

$$\Phi_1(V) \approx (2m'^2 + hV_0)^{1/2} \int (V - V_0)^{1/2} dV = \frac{2}{3\lambda} \tilde{V}^{3/2},$$

ce qui nous donne

$$\lambda \Phi_1(V) = \frac{2}{3} \tilde{V}^{3/2};$$

et

$$\Phi_2(V) \approx (2m'^2 + hV_0)^{1/2} \int (V_0 - V)^{1/2} dV = -\frac{2}{3\lambda} \tilde{V}^{3/2},$$

$$\lambda \Phi_2(V) \approx -\frac{2}{3} \tilde{V}^{3/2}.$$

Ainsi au voisinage de V_0 , les développements de $T_{n0}(\tilde{V}, \lambda)$ sont :

$$(42) \quad T_{n0}(\tilde{V}, \lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{[2m'^2 + hV_0]^{1/6}} \times \tilde{V}^{-1/4} \left\{ k'_1 e^{\frac{2}{3} \tilde{V}^{3/2}} + k''_1 e^{-\frac{2}{3} \tilde{V}^{3/2}} \right\},$$

lorsque $V > V_0$;

et

$$(43) \quad T_{n0}(\tilde{V}, \lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{[2m'^2 + hV_0]^{1/6}} (-\tilde{V})^{-1/4} \left\{ (k'_2 + k''_2) \cos\left(-\frac{2}{3} \tilde{V}^{3/2}\right) + i(k'_2 - k''_2) \sin\left(-\frac{2}{3} \tilde{V}^{3/2}\right) \right\},$$

lorsque $V < V_0$.

Les constantes $(\kappa'_1, \kappa''_1) = \kappa_1$ et $(\kappa'_2, \kappa''_2) = \kappa_2$.

On utilise pour les solutions intérieures, les développements asymptotiques des fonctions d'Airy suivants :

Lorsque \tilde{v} tend vers $-\infty$ ($v < v_0$) :

$$\begin{cases} \text{Ai}(\tilde{v}) \approx \pi^{-1/2} (-\tilde{v})^{-1/4} \sin\left(-\frac{2}{3}\tilde{v}^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{Bi}(\tilde{v}) \approx \pi^{-1/2} (-\tilde{v})^{-1/4} \cos\left(-\frac{2}{3}\tilde{v}^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} .$$

Par la relation (41) on obtient alors :

$$(44) \quad T_{no}(\tilde{v}) \approx \pi^{-1/2} (-\tilde{v})^{-1/4} \left\{ a \sin\left(-\frac{2}{3}\tilde{v}^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + b \cos\left(-\frac{2}{3}\tilde{v}^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\} .$$

Lorsque \tilde{v} tend vers $+\infty$ ($v > v_0$), on a :

$$\begin{cases} \text{Ai}(\tilde{v}) \approx \frac{1}{2} \pi^{-1/2} \tilde{v}^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}\tilde{v}^{3/2}} \\ \text{Bi}(\tilde{v}) \approx \pi^{-1/2} \tilde{v}^{-1/4} e^{\frac{2}{3}\tilde{v}^{3/2}} \end{cases} ,$$

ainsi par la même relation (41) on a :

$$(45) \quad T_{no}(\tilde{v}) \approx \pi^{-1/2} \tilde{v}^{-1/4} \left\{ \frac{a}{2} e^{-\frac{2}{3}\tilde{v}^{3/2}} + b e^{\frac{2}{3}\tilde{v}^{3/2}} \right\} .$$

On identifie maintenant les relations (42) avec (45) et (43) avec (44); on obtient alors les relations entre a , b , κ'_1 , κ''_1 , κ'_2 , κ''_2 suivantes :

$$(46) \quad \begin{cases} a = \frac{2\lambda^{1/2} \pi^{1/2}}{[2m^2 + hV_0]^{1/6}} \kappa''_1 \\ b = \frac{\lambda^{1/2} \pi^{1/2}}{[2m^2 + hV_0]^{1/6}} \kappa'_1 \end{cases}$$

et

$$(47) \left\{ \begin{array}{l} a+b = \frac{\lambda^{1/2} \pi^{1/2} \sqrt{2}}{[2m^2+hV_0]^{1/6}} (K'_2 + K''_2) \\ a-b = \frac{(2\lambda\pi)^{1/2}}{[2m^2+hV_0]^{1/6}} i (K'_2 - K''_2) \end{array} \right.$$

L'élimination de a et b entre les relations (46) et (47) nous donne les relations entre K'_1 , K''_1 , K'_2 , K''_2 suivantes :

$$(48) \left\{ \begin{array}{l} K'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ (1-i)K'_2 + (1+i)K''_2 \right\} \\ K''_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \left\{ (1+i)K'_2 + (1-i)K''_2 \right\} \end{array} \right.$$

II.B.e.- Solution particulière de l'équation d'ordre 1 en $\sqrt{R_0}$

Cette équation est une équation non homogène pour laquelle l'équation homogène associée est la même que l'équation d'ordre 0 en $\sqrt{R_0}$. C'est pour cela que la recherche d'une solution peut conduire à des singularités.

Pour obtenir cette solution particulière, on utilise la méthode de variation de la constante. On cherche alors $T_{n1}(\rho)$ sous la forme :

$$(49) \quad T_{n1}(\rho) = K(\rho) T_{n0}(\rho) ,$$

où $T_{n0}(\rho)$ est la solution de l'équation d'ordre 0 en $\sqrt{R_0}$.

L'équation que vérifie $K(\rho)$ est alors (*)

(*) Les primes indiquent une dérivation par rapport à ρ .

$$(50) \quad (1-p^2) T_{n0}(p) K''(p) + 2 \left\{ (1-p^2) \frac{dT_{n0}(p)}{dp} - p T_{n0}(p) \right\} K'(p) \\ = \frac{m}{g} T_{n0}(p) .$$

On fait maintenant un changement de fonctions en introduisant $C(p)$ par :

$$(51) \quad K'(p) = \frac{C(p)}{T_{n0}^2(p)} ,$$

en supposant $T_{n0}(p) \neq 0$.

$C(p)$ vérifie alors l'équation :

$$(52) \quad \frac{d}{dp} \left[(1-p^2) C(p) \right] = \frac{m}{g} T_{n0}^2(p) .$$

En intégrant une fois par rapport à p on a :

$$(53) \quad (1-p^2) C(p) = \frac{m}{g} \int T_{n0}^2(p) dp + A ,$$

où A est une constante. On en déduit alors $C(p)$ et $K(p)$ par :

$$K(p) = \int \frac{C(p)}{T_{n0}^2(p)} dp .$$

Ainsi on arrive à construire la solution particulière de l'équation d'ordre 1 en $\sqrt{R_0}$ par la relation (49).

CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE

On a étudié dans cette première partie les ondes planétaires stationnaires linéarisées dans un milieu au repos.

L'étude de la perturbation de pression nous a fourni une équation aux dérivées partielles à variables séparables. La première équation différentielle qui est une équation à coefficients lentement variables régit l'évolution radiale des perturbations; tandis que la deuxième, qui est également une équation à coefficients variables, régit l'évolution azimutale.

En ce qui concerne l'équation radiale, elle montre l'existence éventuelle des points tournants $\{0$ qui peuvent être interprétés comme des niveaux d'altitude de réflexion ou d'absorption [18]. D'un côté de ces points, les perturbations sont oscillatoires, de l'autre côté, elles sont apériodiques (c'est-à-dire amorties brutalement). Ce phénomène est le même que celui que l'on obtient pour les ondes de gravité en repère cartésien, galiléen ou non galiléen.

Pour la deuxième équation, elle montre l'existence des points-limites en latitude dont le comportement est qualitativement analogue à celui des points tournants radiaux.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE DES ONDES PLANETAIRES STATIONNAIRES

LINEARISEES DANS UN MILIEU EN MOUVEMENT.

CHAPITRE 1

MODELISATIONI.a.- Conditions de l'étude

Dans cette partie nous allons étudier les ondes stationnaires dans un courant dont on essaie qu'il soit la version "adaptée" à la présente description, des écoulements cisailés classiques.

Le système déduit du système (5) que l'on utilisera est maintenant :

$$\begin{aligned}
 & p = p_T \\
 & \frac{\delta u}{\cos \theta} \frac{\partial p}{\partial y} + \delta v \frac{\partial p}{\partial \theta} + w \frac{\partial p}{\partial z} + p \left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\delta}{\cos \theta} \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{\delta}{\cos \theta} \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0 \\
 & \frac{\delta u}{\cos \theta} \frac{\partial u}{\partial y} + \delta v \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \delta u v \operatorname{tg} \theta - \frac{v \sin \theta}{R_0} + \frac{\delta}{\pi h_0^2 \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\
 & \frac{\delta u}{\cos \theta} \frac{\partial v}{\partial y} + \delta v \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \delta u^2 \operatorname{tg} \theta + \frac{u \sin \theta}{R_0} + \frac{\delta}{\pi h_0^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\
 & \frac{1}{\pi h_0^2} \frac{\partial p}{\partial z} + F^{-2} = 0 \\
 & \frac{1}{T} \left[\frac{\delta u}{\cos \theta} \frac{\partial T}{\partial y} + \delta v \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p} \left[\frac{\delta u}{\cos \theta} \frac{\partial p}{\partial y} + \delta v \frac{\partial p}{\partial \theta} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

I.b.- Écoulement de base

On se propose comme écoulement de base, "l'écoulement uniforme par rapport à τ " défini par :

$$\vec{u} = (U_{\infty}(\theta, z), 0, 0) ; \tau = \tau_{\infty}(\theta, z) ; T = T_{\infty}(\theta, z) ; \rho = \rho_{\infty}(\theta, z) .$$

Cet écoulement de base vérifie le système :

$$(55) \left\{ \begin{array}{l} \rho_{\infty}(\theta, z) = \rho_{\infty}(\theta, z) \cdot T_{\infty}(\theta, z) \\ \sin \theta U_{\infty}^2(\theta, z) + U_{\infty}(\theta, z) \frac{\sin \theta}{R_0} + \frac{\delta}{r M_0^2 \rho_{\infty}(\theta, z)} \frac{\partial \rho_{\infty}(\theta, z)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{1}{r M_0^2 \rho_{\infty}(\theta, z)} \frac{\partial \rho_{\infty}(\theta, z)}{\partial z} + F^{-2} = 0 \end{array} \right.$$

Pour avoir une idée sur la vitesse $U_{\infty}(\theta, z)$ on peut utiliser l'étude que l'on a faite pour l'écoulement instationnaire au repos.

Pour cela on considère : une masse d'air S_0 attachée à un repère mobile $(M, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se déplaçant avec une vitesse $U_{\infty}(\theta, z)$; un repère fixe $(M', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. Un observateur fixé sur le repère mobile constate que le repère fixe $(M', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ s'éloigne de lui avec une vitesse $-U_{\infty}(\theta, z)$.

Comme $U_{\infty}(\theta, z)$ ne dépend pas de τ donc l'arc \widehat{MM}' a comme valeur

$$\widehat{MM} = -U_{\infty}(\theta, z)t = r \cos \theta \tau' - r \cos \theta \tau ,$$

qui, pour les variables adimensionnées, donne :

$$\tau' = \tau - \frac{\delta U_{\infty}(\theta, z) \bar{t}}{\cos \theta} .$$

La question qui se pose alors est : que peut représenter le terme

$$\frac{\delta U_{\infty}(\theta, z)}{\cos \theta} \quad ?$$

Comme M ou S_0 suit un parallèle, on est amené à considérer ce mouvement comme un mouvement circulaire presque uniforme. Si $\Omega_\infty(\theta, z)$ est sa vitesse angulaire on a :

$$L_\infty(\theta, z) = r \cos \theta \Omega_\infty(\theta, z) \quad ,$$

soit en variables adimensionnées

$$\bar{L}_\infty(\theta, z) = s^{-1} \cos \theta \bar{\Omega}_\infty(\theta, z) \quad ,$$

en prenant $\Omega_0 = \frac{U_0}{L_0}$.

On constate alors que $\frac{s \bar{L}_\infty(\theta, z)}{\cos \theta}$ représente la vitesse angulaire $\bar{\Omega}_\infty(\theta, z)$.

φ' devient alors

$$\varphi' = \varphi - \bar{\Omega}_\infty(\theta, z) \bar{t} .$$

On porte maintenant l'expression de $L_\infty(\theta, z)$ (en enlevant les barres) dans le système (56). On obtient le système suivant :

$$(56) \left\{ \begin{array}{l} \Omega_\infty^2(\theta, z) + \frac{\Omega_\infty(\theta, z)'}{R_0} + \frac{s^2}{\gamma M_0^2 \cos \theta \sin \theta \rho_\infty(\theta, z)} \frac{\partial \rho_\infty(\theta, z)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{1}{\gamma M_0^2 \rho_\infty(\theta, z)} \frac{\partial \rho_\infty(\theta, z)}{\partial z} + F^{-2} = 0 \\ \rho_\infty(\theta, z) = \rho_\infty(\theta, z) T_\infty(\theta, z) \end{array} \right.$$

On fait maintenant les changements de variables :

$$\eta = \frac{M_0^2}{2\delta R_0} \sin^2 \theta$$

$$\xi = B_0 z \quad \text{avec} \quad B_0 = \gamma M_0^2 F^{-2} .$$

Le système précédent devient :

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_\infty^2(\eta, \xi) + \frac{\Omega_\infty}{R_0}(\eta, \xi) + \frac{\delta}{\gamma R_0 \rho_\infty(\eta, \xi)} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial \xi}(\eta, \xi) = 0 \\ \frac{\partial \rho_\infty}{\partial \xi}(\eta, \xi) + \rho_\infty(\eta, \xi) = 0 \\ \rho_\infty(\eta, \xi) = \rho_\infty(\eta, \xi) \cdot T_\infty(\eta, \xi) . \end{array} \right.$$

On choisit maintenant $\eta = \frac{M_0^2}{2\delta R_0} \sin^2 \theta \ll 1$. Ce choix est judicieux car pour les écoulements atmosphériques M_0 est petit. En conséquence les termes en M_0^2 sont toujours négligeables. Ce choix nous permet de développer $\rho_\infty(\eta, \xi)$ en série de Taylor, ainsi que $\rho_\infty(\eta, \xi)$ et $T_\infty(\eta, \xi)$. On a alors :

$$\rho_\infty(\eta, \xi) = \rho_\infty(\xi) + \eta \rho_1(\xi) + \dots$$

$$\rho_\infty(\eta, \xi) = \rho_\infty(\xi) + \eta \rho_1(\xi) + \dots$$

$$T_\infty(\eta, \xi) = T_\infty(\xi) + \eta T_1(\xi) + \dots$$

En portant les expressions de $\rho_\infty(\eta, \xi)$, $\rho_\infty(\eta, \xi)$, $T_\infty(\eta, \xi)$ dans le système (57) on a :

$$(58) \left\{ \begin{array}{l} \Omega^2(\varphi, \xi) + \frac{\Omega_{\infty}(\varphi, \xi)}{R_0} + \frac{\delta}{r R_0} \left[\frac{r_1(\xi)}{p_{\infty}(\xi)} + O(\varphi) \right] = 0 \\ \frac{d p_{\infty}(\xi)}{d \xi} + p_{\infty}(\xi) + O(\varphi) = 0 \\ p_{\infty}(\xi) = p_{\infty}(\xi) \cdot T_{\infty}(\xi) + O(\varphi) \end{array} \right.$$

Lorsque l'on néglige totalement les termes en φ , ce système devient :

$$(59)^{(*)} \left\{ \begin{array}{l} \Omega^2(\varphi, \xi) + \frac{\Omega_{\infty}(\varphi, \xi)}{R_0} - \frac{\delta}{r R_0} \frac{r_1(\xi)}{p_{\infty}(\xi)} = 0 \\ \frac{d p_{\infty}(\xi)}{d \xi} + p_{\infty}(\xi) = 0 \\ p_{\infty}(\xi) = p_{\infty}(\xi) T_{\infty}(\xi) \end{array} \right.$$

La première équation est une équation du second degré à coefficients constants par rapport à φ . Cela nous montre que $\Omega_{\infty}(\varphi, \xi)$ est une fonction de ξ uniquement ($\Omega_{\infty}(\varphi, \xi) = \Omega_{\infty}(\xi)$).

Si on se donne alors $p_{\infty}(\xi)$ on en déduit ensuite $p_{\infty}(\xi)$, $T_{\infty}(\xi)$ et $\Omega_{\infty}(\xi)$.

ON CHOISIRA DONC COMME ECOULEMENT DE BASE, L'ECOULEMENT CIRCULAIRE QUASI-UNIFORME DEFINI PAR :

(*) Les primes indiquent une dérivation par rapport à ξ .

$$u_{\infty}(\theta, \zeta) = \delta^{-1} \cos \theta \Omega_{\infty}(\zeta)$$

$$r_{\infty}(\theta, \zeta) = r_{\infty}(\zeta)$$

$$T_{\infty}(\theta, \zeta) = T_{\infty}(\zeta)$$

$$p_{\infty}(\theta, \zeta) = p_{\infty}(\zeta)$$

On étudiera alors pour la suite les perturbations de cet état de base.

I.c.- Linéarisation

On se place dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et on linéarise le système (54) autour de l'écoulement de base défini précédemment.

On cherche alors les développements, supposés uniformément valables de (u, v, w) et de (r, p, T) sous la forme suivante :

$$u(z, \theta, \varphi) = \delta^{-1} \cos \theta \Omega_{\infty}(\zeta) + \eta u_1(z, \theta, \varphi) + \dots$$

$$v(z, \theta, \varphi) = \eta v_1(z, \theta, \varphi) + \dots$$

$$w(z, \theta, \varphi) = \eta w_1(z, \theta, \varphi) + \dots$$

$$r(z, \theta, \varphi) = r_{\infty}(\zeta) [1 + \eta M_0^2 \pi_1(z, \theta, \varphi) + \dots]$$

$$p(z, \theta, \varphi) = p_{\infty}(\zeta) [1 + \eta M_0 \omega_1(z, \theta, \varphi) + \dots]$$

$$T(z, \theta, \varphi) = T_{\infty}(\zeta) [1 + \eta M_0 \sigma_1(z, \theta, \varphi) + \dots],$$

où : (i) (u_1, v_1, w_1) sont des perturbations de vitesse.

(ii) $(\pi_1, \omega_1, \sigma_1)$ sont des perturbations relatives, respectives de la pression, de la masse volumique, de la température.

(iii) γ est un petit paramètre caractérisant l'amplitude des perturbations (paramètre de linéarisation).

En introduisant ces expressions dans le système (54) et en ne conservant dans les équations que les termes d'ordre 1 en γ et ceux d'ordre inférieur ou égal à 1 en M_0 , on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 & \omega_1(z, \theta, \varphi) + \sigma_1(z, \theta, \varphi) = M_0 \pi_1(z, \theta, \varphi) \\
 & \frac{\partial w_1}{\partial z}(z, \theta, \varphi) + \frac{s}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_1(z, \theta, \varphi) \cos \theta) + \frac{s}{\cos \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}(z, \theta, \varphi) \\
 & = M_0 \left\{ \left(1 + \frac{d\Omega_\infty(\xi)}{d\xi} \right) \frac{w_1(z, \theta, \varphi)}{T_\infty(\xi)} - \Omega_\infty(\xi) \frac{\partial w_1}{\partial \varphi}(z, \theta, \varphi) \right\} \\
 & \Omega_\infty(\xi) \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}(z, \theta, \varphi) - \left(\frac{1}{R_0} + 2\Omega_\infty(\xi) \right) \sin \theta v_1(z, \theta, \varphi) \\
 & + \frac{s T_\infty(\xi)}{r \cos \theta} \frac{\partial \pi_1}{\partial \varphi}(z, \theta, \varphi) = s^{-1} M_0 \cos \theta \frac{d\Omega_\infty(\xi)}{d\xi} w_1(z, \theta, \varphi) \\
 & \Omega_\infty(\xi) \frac{\partial v_1}{\partial \varphi}(z, \theta, \varphi) + \left(\frac{1}{R_0} + 2\Omega_\infty(\xi) \right) \sin \theta u_1(z, \theta, \varphi) \\
 & + \frac{s T_\infty(\xi)}{r} \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}(z, \theta, \varphi) = 0
 \end{aligned}
 \tag{60}$$

$$(60) \quad \left. \begin{aligned} & \frac{\partial \pi_1}{\partial z} (z, \theta, \varphi) - \frac{1}{T_\infty(\zeta)} \sigma_1 (z, \theta, \varphi) = 0 \\ & \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_\infty(\zeta)}{d\zeta} \right] \frac{w_1(z, \theta, \varphi)}{T_\infty(\zeta)} = \Omega_\infty(\zeta) \left\{ -\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi} (z, \theta, \varphi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma-1}{\gamma} M_0 \frac{\partial \pi_1}{\partial \varphi} (z, \theta, \varphi) \right\} \end{aligned} \right\}$$

I.d.- Modèle obtenu

On cherche maintenant des solutions périodiques en φ . Toute fonction $f_1(z, \theta, \varphi)$ aura la forme :

$$f_1(z, \theta, \varphi) = \hat{f}_1(z, \theta) e^{im\varphi},$$

et par commodité nous supprimons le \wedge dans les formules. Ainsi on a :

$$(61) \quad \left. \begin{aligned} & w_1(z, \theta) + \sigma_1(z, \theta) = M_0 \pi_1(z, \theta) \\ & \frac{\partial w_1}{\partial z} (z, \theta) + \frac{\delta}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta w_1(z, \theta)) + \frac{i \delta m}{\cos \theta} \mu_1(z, \theta) \\ & = M_0 \left\{ \left(1 + \frac{dT_\infty(\zeta)}{d\zeta} \right) \frac{w_1(z, \theta)}{T_\infty(\zeta)} - im \Omega_\infty(\zeta) w_1(z, \theta) \right\} \\ & im \Omega_\infty(\zeta) \mu_1(z, \theta) - \left(\frac{1}{R_0} + 2 \Omega_\infty(\zeta) \right) \sin \theta v_1(z, \theta) \\ & + \frac{i \delta m}{\gamma \cos \theta} T_\infty(\zeta) \pi_1(z, \theta) = M_0 \delta^{-1} \cos \theta \frac{d\Omega_\infty(\zeta)}{d\zeta} w_1(z, \theta) \\ & im \Omega_\infty(\zeta) v_1(z, \theta) + \left(\frac{1}{R_0} + 2 \Omega_\infty(\zeta) \right) \sin \theta \mu_1(z, \theta) \\ & + \frac{\delta T_\infty(\zeta)}{\gamma} \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} (z, \theta) = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \pi_1}{\partial \xi} (\xi, \theta) - \frac{1}{T_\infty(\xi)} \sigma_1(\xi, \theta) = 0 \\
 (61) \quad & \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_\infty(\xi)}{d\xi} \right] \frac{w_1(\xi, \theta)}{T_\infty(\xi)} = \text{im} \Omega_\infty(\xi) \left[-\sigma_1(\xi, \theta) + \frac{\gamma-1}{\gamma} M_0 \pi_1(\xi, \theta) \right]
 \end{aligned}$$

Afin de ne pas alourdir les notations on écrira :

$$u_1(\xi, \theta) = u_1$$

$$\pi_1(\xi, \theta) = \pi_1$$

$$v_1(\xi, \theta) = v_1$$

$$\sigma_1(\xi, \theta) = \sigma_1$$

$$w_1(\xi, \theta) = w_1$$

$$\omega_1(\xi, \theta) = \omega_1$$

Après ces changements de notations on retourne au système (61).

On est en présence de six équations à six inconnues, que l'on peut réduire à une seule équation à une inconnue. Choisissons, par exemple, comme inconnue principale π_1 . L'équation aux dérivées partielles vérifiée par π_1 est alors [*] :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\Omega_\infty(\xi)}{\Gamma(\xi)} \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \xi^2} - S^2 A(\xi, \theta) \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}) - \frac{m^2}{\cos^2 \theta} \pi_1 \right\} \\
 & + S^2 B(\xi, \theta) \left\{ \left(\frac{1}{R_0} + 2 \Omega_\infty(\xi) \right) \sin \theta \pi_1 - \Omega_\infty(\xi) \cos \theta \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} \right\} \\
 (62) \quad & + S^2 C(\xi, \theta) \pi_1 = \frac{M_0 \Omega_\infty(\xi)}{\Gamma(\xi)} \left\{ D(\xi, \theta) \frac{\partial \pi_1}{\partial \xi} + E(\xi, \theta) \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \xi \partial \theta} \right\} ,
 \end{aligned}$$

*) Pour le calcul voir annexe D.

avec

$$A(\zeta, \theta) = \frac{-\Omega_\infty(\zeta)}{-m^2 \Omega_\infty^2(\zeta) + \left(\frac{1}{R_0} + 2\Omega_\infty(\zeta)\right)^2 \sin^2 \theta}$$

$$B(\theta, \zeta) = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{-m^2 \Omega_\infty^2(\zeta) + \left(\frac{1}{R_0} + 2\Omega_\infty(\zeta)\right)^2 \sin^2 \theta} \right)$$

$$C(\zeta, \theta) = \left(\frac{1}{R_0 \Omega_\infty(\zeta)} + 2 \right) A(\zeta, \theta)$$

$$D(\zeta, \theta) = F(\zeta) + G(\zeta, \theta) + H(\zeta, \theta)$$

$$E(\zeta, \theta) = C(\zeta, \theta) \sin \theta \cos \theta \frac{d\Omega_\infty(\zeta)}{d\zeta},$$

où

$$F(\zeta) = \frac{1}{\Omega_\infty(\zeta)} \frac{d\Omega_\infty(\zeta)}{d\zeta} - \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} - \frac{1}{\Gamma_\infty(\zeta)} \left(1 - \frac{d\Gamma_\infty(\zeta)}{d\zeta} \right),$$

$$G(\zeta, \theta) = \left\{ m^2 + \left(\frac{1}{R_0 \Omega_\infty(\zeta)} + 2 \right) (1 - 3\sin^2 \theta) \right\} A(\zeta, \theta) \frac{d\Omega_\infty(\zeta)}{d\zeta},$$

$$H(\zeta, \theta) = \left(\frac{1}{R_0} + 2\Omega_\infty(\zeta) \right) \sin \theta \cos^2 \theta B(\zeta, \theta) \frac{d\Omega_\infty(\zeta)}{d\zeta}.$$

La quantité $\Gamma(\zeta)$ désigne le carré de la fréquence de Brunt-Väisälä.

On peut retrouver ce modèle d'équations aux dérivées partielles dans [19].

La résolution "analytique" de l'équation (62) est très difficile. Néanmoins si l'on veut mettre en évidence l'influence de la force de Coriolis, on peut envisager des cas simplifiés, et parmi ceux-ci les trois cas suivants :

a) le cas où Ω_∞ est constant et vérifie la relation $R_0^{-1} + 2\Omega_\infty = 0$.

Ce cas élimine une singularité dans les dénominateurs des fractions $A(\zeta, \theta)$ etc... . Concrètement, cela revient à éliminer l'étude des points de réflexion en altitude où la fréquence des ondes est la fréquence de Coriolis du milieu [7]. L'étude de ce cas fera l'objet de notre deuxième chapitre.

b) Le cas où $\Omega_\infty(\zeta)$ n'est plus constant mais vérifie la relation $R_0^{-1} \ll |2\Omega_\infty(\zeta)|$. Cette inégalité permet d'envisager des simplifications dans les équations, et l'étude de ce cas sera notre troisième chapitre.

c) Le cas où $R_0^{-1} \gg |2\Omega_\infty(\zeta)|$. Ce dernier cas n'est pas considéré dans ce qui suit, mais il faut souligner que c'est l'étude de ce cas qui pourrait permettre la généralisation aux ondes planétaires des "effets de Coriolis" mis en évidence pour le cas plan [7]. On donnera quelques indications en ce qui concerne ce cas dans le quatrième chapitre.

CHAPITRE 2

ETUDE DU CAS PARTICULIER OÙ Ω_∞ EST
CONSTANT ET VERIFIE LA RELATION

$$R_0^{-1} + 2\Omega_\infty = 0$$

Ce cas n'est pas nécessairement réaliste, mais analytiquement il simplifie les équations.

II.a.- Equations différentielles résultantes

Dans ce cas le modèle réduit associé à l'équation (62) est :

$$(63) \quad -\frac{\Omega_\infty^2}{\Gamma(\zeta)} \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial z^2} + \frac{\delta^2}{m^2} \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}) - \frac{m^2}{\cos^2 \theta} \pi_1 \right\}$$

$$= -M_0 \frac{\Omega_\infty^2}{\Gamma(\zeta)} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{\Gamma_\infty(\zeta)} \left(1 - \frac{d\Gamma_\infty(\zeta)}{d\zeta} \right) \right\} \frac{\partial \pi_1}{\partial z} .$$

C'est une équation à variables séparables. On cherche alors π_1 sous la forme :

$$(64) \quad \pi_1(z, \theta, M_0) = \pi_{1r}(z, M_0) \pi_{1t}(\theta) .$$

En portant l'expression (64) de $\pi_1(z, \theta, M_0)$ dans l'équation (63) on obtient les équations différentielles suivantes (voir, par exemple, [19]) :

$$(65) \quad \frac{d^2 \pi_{1r}(z, M_0)}{dz^2} + \frac{\mathcal{Y}(\zeta)}{m^2 h_n} \pi_{1r}(z, M_0) = M_0 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{E(\zeta)} (1 - d\Gamma(\zeta)) \right\} \frac{d\pi_{1r}(z, M_0)}{dz},$$

$$(66) \quad \frac{1}{\cos \theta} \frac{d}{d\theta} (\cos \theta \frac{d\pi_{1t}(\theta)}{d\theta}) - \frac{m^2}{\cos^2 \theta} \pi_{1t}(\theta) + \frac{1}{s^2 h_n} \pi_{1t}(\theta) = 0,$$

où $-1/h_n$ est une constante de séparation des variables et $\mathcal{Y}(\zeta) = \frac{\Gamma(\zeta)}{\Omega^2}$ est le paramètre de Scorer.

L'équation (65) gouverne l'évolution des perturbations par rapport à l'altitude tandis que l'équation (66), leur évolution azimutale.

II.b.- Etudes et conclusions

L'étude de ces deux équations revient à ce qu'on a effectué dans la première partie car l'équation (65) est analogue à l'équation (12) en remplaçant $\Gamma(\zeta)$ par $\frac{\mathcal{Y}(\zeta)}{m^2}$ et l'équation (66) est la même que (32) après avoir posé $p = \sin \theta \cdot m^2$.

Ainsi les solutions sont les mêmes que ce qu'on a eu dans la première partie. Il en est de même pour les conclusions.

CHAPITRE 3

ETUDE DU CAS OU $\Omega_\infty(\zeta)$ EST VARIABLE

ET VERIFIE L'INEGALITE $R_0^{-1} \ll |2 \Omega_\infty(\zeta)|$.

Lorsque l'on néglige R_0^{-1} devant $|2 \Omega_\infty(\zeta)|$, l'équation réduite associée à l'équation (62) s'écrit :

$$(67) \quad -\frac{1}{\mathcal{F}(\zeta)} \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \zeta^2} - \frac{\delta^2}{(-m^2 + 4 \sin^2 \theta)} \left\{ \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \theta^2} - \left(\tan \theta + \frac{8 \sin \theta \cos \theta}{(-m^2 + 4 \sin^2 \theta)} \right) \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \left(-\frac{m^2}{\cos^2 \theta} + \frac{2m^2 + 8 \sin^2 \theta}{(-m^2 + 4 \sin^2 \theta)} \right) \pi_1 = \frac{M_0}{\mathcal{F}(\zeta)} \left\{ D'(\zeta, \theta) \frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta} + E'(\zeta, \theta) \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \zeta \partial \theta} \right\} \right\}$$

où $\mathcal{F}(\zeta)$ est le paramètre de Scorer correspondant et où les expressions de $D'(\zeta, \theta)$ et de $E'(\zeta, \theta)$ sont celles de $D(\zeta, \theta)$ et de $E(\zeta, \theta)$ réduites au cas où $R_0^{-1} \ll |2 \Omega_\infty(\zeta)|$.

Le problème des points singuliers se pose lorsqu'il existe un θ_0 tel que $\sin \theta_0 = m/2$. Cela nous oblige à envisager les cas où :

(i) $m \gg |2 \sin \theta| = 2$: c'est le cas des ondes de grande fréquence par rapport à Υ .

(ii) il existe un θ_0 tel que $\sin \theta_0 = m/2$: ceci correspond à des ondes de faible fréquence. On étudiera le cas où $\theta_0 \approx \pm \pi/3$ pour $m=1$ et le cas où $\theta_0 \approx \pm \pi/2$ pour $m=2$.

(iii) Le cas où $m = 0$: la perturbation relative de la pression ne dépend pas de la longitude φ .

L'étude de ces trois cas formera la suite de notre travail.

III.A.- Etude des ondes de grande fréquence par rapport à φ ($m \gg 2$)

III.A.1.- Equations différentielles résultantes

Dans ce cas, l'équation (67) se réduit à :

$$(68) \quad s^2 \left\{ \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}) - \frac{m^2}{\cos^2 \theta} \pi_1 - 2\bar{\pi}_1 \right\} = \frac{m^2}{\zeta(\zeta)} \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \zeta^2} - \frac{M_0 m^2}{\zeta(\zeta)} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{T_0(\zeta)} (1 - \frac{dT_0(\zeta)}{d\zeta}) \right\} \frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta}$$

C'est une équation à variables séparables et si l'on pose :

$$\pi_1(\zeta, \theta, M_0) = \pi_{1r}(\zeta, M_0) \cdot \pi_{1t}(\theta),$$

on obtient alors les équations différentielles suivantes :

$$(69) \quad \frac{d^2 \pi_{1r}(\zeta, M_0)}{d\zeta^2} + \frac{\zeta(\zeta)}{m^2 h_n} \pi_{1r}(\zeta, M_0) = M_0 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{T_0(\zeta)} (1 - \frac{dT_0(\zeta)}{d\zeta}) \right\} \frac{d\pi_{1r}(\zeta, M_0)}{d\zeta},$$

$$(70) \quad \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d}{d\theta} (\cos \theta \frac{d\pi_{1t}(\theta)}{d\theta}) - \frac{m^2}{\cos^2 \theta} \pi_{1t}(\theta) + \left(\frac{1}{s^2 h_n} - 2 \right) \pi_{1t}(\theta) = 0,$$

où $-1/h_n$ est la constante de séparation supposée négative.

L'équation (69) régit l'évolution radiale tandis que l'équation (70) gouverne l'évolution azimutale.

La résolution de ces deux équations se ramène à l'étude que l'on a faite dans le chapitre 2 de la première partie. Nous n'allons donc pas le refaire. Nous avons eu soit des fonctions oscillatoire ou apériodique pour l'équation (69) tandis que pour l'équation (70) on obtient les polynômes de Legendre en posant $\delta^2 h_n = \frac{1}{[2+n(n+1)]}$.

II.A.2.- Etude du voisinage du point critique ζ_0 défini par $\Omega_\infty(\zeta_0) = 0$ (voir, par exemple, [20] ou [21]).

On constate pour l'équation radiale (69) que lorsqu'il existe une altitude ζ_0 où $\Omega_\infty(\zeta_0)$ est nul le paramètre de Scorer $S(\zeta)$ tend vers l'infini. Il est donc nécessaire d'étudier le voisinage de cette altitude.

Pour cela, on développe $\Omega_\infty(\zeta)$ au voisinage de ζ_0 en série de Taylor. On obtient :

$$\Omega_\infty(\zeta) \approx \Omega_\infty(\zeta_0) + (\zeta - \zeta_0) \frac{d\Omega_\infty(\zeta_0)}{d\zeta} + \dots \approx M_0 (\zeta - \zeta_0) \frac{d\Omega_\infty(\zeta_0)}{d\zeta} + \dots$$

On porte cette expression de $\Omega_\infty(\zeta)$ dans l'équation d'ordre 0 en M_0 de (69). On a alors :

$$(71) \quad \frac{d^2 \Pi_{1r}(\bar{\zeta})}{d\bar{\zeta}^2} + \frac{R_i}{\bar{\zeta}^2} \Pi_{1r}(\bar{\zeta}) = 0 \quad ,$$

où $R_i = \Gamma(\zeta_0) / \pi^2 M_0^2 h_n \left(\frac{d\Omega_\infty(\zeta_0)}{d\zeta} \right)^2$ est le nombre de Richardson local et où on a posé $\bar{\zeta} = \zeta - \zeta_0$.

Lorsque $R_i > 1/4$ (condition classique de Richardson pour qu'il n'y ait pas apparition d'instabilité), la solution de (71) s'écrit :

$$\pi_{1r}(\bar{z}) = \bar{z}^{-1/2} [a\bar{z}^{i\eta} + b\bar{z}^{-i\eta}] ,$$

où $\eta = \sqrt{4Ri-1}/2$ et (a,b) sont des constantes.

Lorsque \bar{z} tend vers 0, $\pi_{1r}(\bar{z})$ et w_1 tendent vers 0 tandis que u_1 et v_1 tendent vers l'infini car les expressions réduites de u_1 , v_1 , w_1 sont ($R_0^{-1} \ll |2\Omega_0(\zeta)|, m \gg 2$) :

$$u_1 \approx \frac{-\delta T_\infty(\zeta)}{\gamma \cos\theta \Omega_0(\zeta)} \pi_1 + O(M_0) ,$$

$$v_1 \approx \frac{i\delta T_\infty(\zeta)}{\gamma m \cos\theta \Omega_0(\zeta)} \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} + O(M_0) ,$$

$$w_1 \approx \frac{-im \Omega_0(\zeta) T_\infty(\zeta)}{\gamma \Gamma(\zeta)} \frac{\partial \pi_1}{\partial z} + O(M_0) .$$

Le point ζ_0 est donc un point critique [20]. Il sépare deux zones d'écoulements différentes. En ce point, l'influence de la viscosité et celle des termes non linéaires y sont importantes. En fait la vitesse de l'écoulement linéarisé non visqueux étant infinie, on peut s'attendre, à la voir soit stabilisée, soit destabilisée par les termes non linéaires cumulés. L'influence de la viscosité doit, en tout état de cause, stabiliser l'écoulement au voisinage de ce point.

II.A.3.- Conclusion

En plus des conclusions qu'on a eu dans la première partie, on vient de montrer l'existence d'un point critique ζ_0 défini par $\Omega_0(\zeta_0) = 0$ qui sépare deux zones d'écoulements différents et où les effets de la viscosité et des termes linéaires sont prépondérantes.

III.B.- Etude des cas où $\theta \approx \pm \pi/3$ pour $m=1$ et de $\theta \approx \pm \pi/2$ pour $m=2$.

Dans les deux cas on a $\sin^2 \theta = m^2/4$ et l'équation (67) est singulière au voisinage de ces points. Pour étudier les voisinages de ces points il est inutile de conserver les termes en M_0 car, rappelons-le, la théorie des écoulements atmosphériques suppose que le nombre de Mach M_0 est très petit devant l'unité. Les termes $O(M_0)$, qui sont réguliers, ne jouent aucun rôle au voisinage d'un point déterminé.

Lorsque l'on néglige totalement les termes en M_0 dans l'équation réduite déduite de l'équation (67) on peut à nouveau séparer les variables, de sorte que l'on obtient deux équations différentielles : l'une concernant l'évolution radiale des perturbations; l'autre, leur évolution azimutale.

Ce qui nous intéresse ici est le comportement de l'équation azimutale lorsque l'on est au voisinage d'une latitude θ_0 telle que $\sin \theta_0 = \pm m/2$. Cette équation azimutale s'écrit :

$$\frac{d^2 \pi_{1t}(\theta)}{d\theta^2} - \left\{ t_{g\theta} + \frac{8 \sin \theta \cos \theta}{-m^2 + 4 \sin^2 \theta} \right\} \frac{d \pi_{1t}(\theta)}{d\theta}$$

(72)

$$+ \left\{ -\frac{m^2}{\cos^2 \theta} + \frac{2m^2 + 8 \sin^2 \theta}{-m^2 + 4 \sin^2 \theta} + \frac{-m^2 + 4 \sin^2 \theta}{8^2 h_n} \right\} \pi_{1t}(\theta) = 0 ,$$

où $1/h_n$ est la constante de séparation.

III.B.1.- Etude du cas où $\theta \approx \pm \pi/3$ pour $m=1$.

Lorsque $m=1$, l'équation (72) devient :

$$(73) \quad \frac{d^2 \pi_{1t}(\theta)}{d\theta^2} - \left\{ \operatorname{tg} \theta + \frac{8 \sin \theta \cos \theta}{-1 + 4 \sin^2 \theta} \right\} \frac{d\pi_{1t}(\theta)}{d\theta} + \left\{ -\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{2(1 + 4 \sin^2 \theta)}{-1 + 4 \sin^2 \theta} + \frac{-1 + 4 \sin^2 \theta}{s^2 h_n} \right\} \pi_{1t}(\theta) = 0.$$

Afin de visualiser ce qui se passe lorsque $\theta \approx \pm \pi/3$, mettons cette équation sous la forme :

$$\frac{d^2}{dv^2} \left\{ \dots \right\} + F(v, s^2 h_n) \dots = 0.$$

Pour cela on introduit une fonction $\pi(\theta)$ définie par :

$$\pi_{1t}(\theta) = \sqrt{-1 + 4 \sin^2 \theta} \times \pi(\theta).$$

L'équation que doit vérifier $\pi(\theta)$ est donc (*) :

$$(74) \quad \frac{d^2 \pi(\theta)}{d\theta^2} - \operatorname{tg} \theta \frac{d\pi(\theta)}{d\theta} + \left\{ -\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{-1 + 4 \sin^2 \theta}{s^2 h_n} + \frac{-6(1 - 2 \sin^2 \theta) - 32 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}{(-1 + 4 \sin^2 \theta)^2} \right\} \pi(\theta) = 0.$$

On fait maintenant le changement de variable (cf. 1ère partie) :

$$\sin \theta = thv.$$

(*) Pour les calculs voir annexe E.

On aboutit ainsi à l'équation :

$$(75) \quad \frac{d^2 \pi(v)}{dv^2} - F(v, s^2 h_n) \pi(v) = 0 ,$$

où on a posé

$$F(v, s^2 h_n) = \frac{(-1 + 4th^2v)^2 - (1 + th^2v) \left\{ \frac{(-1 + 4th^2v)^3}{s^2 h_n} - 6(1 - 2th^2v) - 32th^2v(1 - th^2v) \right\}}{(-1 + 4th^2v)^2}$$

On constate ici que lorsque $\theta \approx \pm \pi/3$ (c'est-à-dire $th^2v \approx 1/4$), la fonction $F(v, s^2 h_n)$ tend vers l'infini d'où la singularité. Il s'agit de voir comment se comporte l'équation (75) lorsqu'il existe une latitude v_0 telle que $thv_0 \approx \pm 1/2$.

Pour cela on fait un développement de Taylor de thv au voisinage de v_0 . On a :

$$thv \approx thv_0 + (v - v_0)(1 - th^2v_0) + \dots$$

En portant cette expression de thv dans l'équation (75), on a :

$$(76) \quad \frac{d^2 \pi(v)}{dv^2} - \left(1 + \frac{3/4}{(v - v_0)^2} \right) \pi(v) = 0 .$$

Si l'on introduit la variable complexe v' définie par :

$$v' = i(v - v_0) ,$$

on obtient l'équation en v' suivante :

$$(77) \quad \frac{d^2 \pi(v')}{dv'^2} + \left(1 - \frac{3/4}{v'^2} \right) \pi(v') = 0 .$$

L'équation (77) peut se mettre sous la forme d'une équation de Bessel en introduisant la nouvelle fonction $\pi'(v')$.

$$(78) \quad \pi(v') = \sqrt{v'} \pi'(v') .$$

Ainsi on obtient l'équation :

$$(79) \quad \frac{d^2 \pi'(v')}{dv'^2} + \frac{1}{v'} \frac{d\pi'(v')}{dv'} + \left(1 - \frac{1}{v'^2}\right) \pi'(v') = 0 ,$$

dont la solution est :

$$\pi'(v') = A J_1(v') + B J_{-1}(v') ,$$

où $J_1(v')$ et $J_{-1}(v')$ sont les fonctions de Bessel d'ordre ± 1 et A, B sont des constantes.

III.B.2.- Etude du cas où $\theta \approx \pm \pi/2$ pour $m=2$.

Lorsque $m=2$, l'équation (72) devient :

$$(80) \quad \frac{d^2 \pi_{1t}(\theta)}{d\theta^2} + \operatorname{tg} \theta \frac{d\pi_{1t}(\theta)}{d\theta} - \left\{ \frac{2(3+\sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} - \frac{4 \cos^2 \theta}{s^2 h_m} \right\} \pi_{1t}(\theta) = 0 .$$

On y introduit la nouvelle variable v définie par :

$$v = \sin \theta ,$$

on a ainsi :

$$(81) \quad \frac{d^2 \pi_{1t}(v)}{dv^2} - \left\{ \frac{2(3+v^2)}{(1-v^2)^2} + \frac{4}{s^2 h_m} \right\} \pi_{1t}(v) = 0 .$$

On constate ici que lorsque $\theta \approx \pm \pi/2$, V prennent les valeurs ± 1 et l'expression $1/(1-V^2)$ tend vers l'infin d'où la nécessité d'étudier les voisinages des points $V = \pm 1$.

Pour cela on pose alors :

$$\hat{V} = 1 - V$$

Lorsque V tend vers 1, \hat{V} tend vers 0 et,

$$\frac{1}{(1-V^2)} = \frac{1}{2\hat{V} - \hat{V}^2} \approx \frac{1}{2\hat{V}} \left(1 + \frac{\hat{V}}{2}\right) \quad \text{lorsque } \hat{V} \text{ est voisin}$$

de 0 .

L'équation (81) devient alors :

$$(82) \quad \frac{d^2 \pi_{1t}(\hat{V})}{d\hat{V}^2} - \left\{ \frac{2}{\hat{V}^2} + \frac{4}{8^2 h_n} \right\} \pi_{1t}(\hat{V}) = 0 .$$

En y introduisant la nouvelle variable \tilde{V} définie par :

$$\tilde{V} = \frac{2i}{8\sqrt{h_n}} \hat{V} ,$$

cette équation devient :

$$(83) \quad \frac{d^2 \pi_{1t}(\tilde{V})}{d\tilde{V}^2} + \left(1 - \frac{2}{\tilde{V}^2}\right) \pi_{1t}(\tilde{V}) = 0 .$$

Cette équation peut, une fois de plus, se mettre sous forme d'une équation de Bessel en y introduisant la nouvelle fonction $\tilde{\pi}_{1t}(\tilde{V})$ définie par :

$$\pi_{1t}(\tilde{V}) = \sqrt{\tilde{V}} \tilde{\pi}_{1t}(\tilde{V}) ,$$

on obtient ainsi l'équation :

$$(83) \text{ (bis)} \quad \frac{d^2 \widetilde{\pi}_{1t}(\tilde{v})}{d\tilde{v}^2} + \frac{1}{\tilde{v}} \frac{d \widetilde{\pi}_{1t}(\tilde{v})}{d\tilde{v}} + \left(1 - \frac{9/4}{\tilde{v}^2}\right) \widetilde{\pi}_{1t}(\tilde{v}) = 0 ,$$

dont la solution est :

$$\widetilde{\pi}_{1t}(\tilde{v}) = A J_{3/2}(\tilde{v}) + B J_{-3/2}(\tilde{v}) ,$$

où $J_{3/2}(\tilde{v})$ et $J_{-3/2}(\tilde{v})$ sont les fonctions de Bessel d'ordre $\pm 3/2$ et A, B sont des constantes.

III.B.3.- Conclusion

On vient de montrer que la singularité correspondant à $\theta = \pm \pi/3$ n'est qu'apparente. Le cas des points $\theta = \pm \pi/2$, s'il apparaît comme plus singulier a été traité en posant directement $m = 2$. Ainsi on a trouvé que $\widetilde{\pi}_{1t}(\tilde{v})$ se comporte comme la combinaison des fonctions de Bessel d'ordre $\pm 3/2$. Une étude similaire a été faite par Brillouin [22] en 1932 au voisinage de θ_0 telle que $\sin \theta_0 = \pm \sigma R_0$. La conclusion est que, si analytiquement l'écriture de la solution est différente, qualitativement leur comportement n'est pas réellement singulier.

III.C.- Etude du cas où la variation relative de pression ne dépend plus de la longitude φ ($m = 0$)

III.C.1.- Equations régissant le problème

Lorsque $m = 0$, l'équation (67) se réduit à [*] :

"Les primes indiquent une dérivation par rapport à \tilde{v} "

(*) Pour les calculs, voir annexe F.

$$-\frac{1}{S(\zeta)} \frac{\partial^2 \pi_{1a}}{\partial \zeta^2} - \frac{\zeta^2}{4 \sin^2 \theta} \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \frac{\partial \pi_{1a}}{\partial \theta}) - \frac{2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \pi_{1a} \right\}$$

(84)

$$= -\frac{M_0}{S(\zeta)} \left\{ \left\{ \frac{\Gamma'(\zeta)}{\Gamma(\zeta)} + \frac{1}{T_0(\zeta)} (1 - T_0'(\zeta)) \right\} \frac{\partial \pi_{1a}}{\partial \zeta} - \frac{\Omega_0'(\zeta) \cos \theta}{\Omega_0(\zeta) 2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \pi_{1a}}{\partial \zeta \partial \theta} \right\}$$

où l'on a introduit une nouvelle fonction π_{1a} définie par :

$$\pi_{1t}(\zeta, \theta) = \sin \theta \pi_{1a}(\zeta, \theta).$$

Dans cette équation, on fait les changements de variables suivants :

Pour la variable azimutale $\sin \theta = t h V$,

Pour la variable radiale, on introduit :

(i) la variable lente $\zeta = M_0 z$,

(ii) la variable rapide $\Psi = \frac{1}{M_0} \psi(\zeta)$, où $\psi(\zeta)$ est une fonction que l'on déterminera ultérieurement.

On obtient ainsi l'équation suivante [*] :

[*] Les primes indiquent une dérivation par rapport à ζ . Pour les calculs, voir annexe G.

$$-\frac{\Upsilon'^2(\xi)}{\mathcal{J}(\xi)} \frac{\partial^2 \pi_{1a}}{\partial \Psi^2} - \frac{\xi^2}{4+h^2V} \left\{ \frac{1}{(1-h^2V)} \frac{\partial^2 \pi_{1a}}{\partial V^2} - \frac{2(1-h^2V)}{+h^2V} \pi_{1a} \right\}$$

(85)

$$= \frac{M_0}{\mathcal{J}(\xi)} \left\{ \Upsilon''(\xi) \frac{\partial \pi_{1a}}{\partial \Psi} + 2\Upsilon'(\xi) \frac{\partial^2 \pi_{1a}}{\partial \xi \partial \Psi} - \left(\frac{\Upsilon'(\xi)}{\Gamma(\xi)} + \frac{1}{\Gamma_0(\xi)} (1-\Gamma_0'(\xi)) \right) \Upsilon'(\xi) \frac{\partial \pi_{1a}}{\partial \Psi} \right. \\ \left. + \frac{\Omega_0'(\xi)}{\Omega_0(\xi)} \frac{\Upsilon'(\xi)}{+hV} \frac{\partial^2 \pi_{1a}}{\partial \Psi \partial V} \right\} .$$

On se propose maintenant le développement suivant :

$$\pi_{1a}(\Psi, \xi, V, M_0) = \pi_0(\Psi, \xi, V) + M_0 \pi_1(\Psi, \xi, V) + \dots \circ$$

En introduisant ce développement de π_{1a} dans l'équation (85), on obtient les équations suivantes :

a) à l'ordre 0 en M_0 .

$$-\frac{\Upsilon'^2(\xi)}{\mathcal{J}(\xi)} \frac{\partial^2 \pi_0(\Psi, \xi, V)}{\partial \Psi^2} - \frac{\xi^2}{4+h^2V} \left\{ \frac{1}{(1-h^2V)} \frac{\partial^2 \pi_0(\Psi, \xi, V)}{\partial V^2} \right.$$

(86)

$$\left. - \frac{2(1-h^2V)}{+h^2V} \pi_0(\Psi, \xi, V) \right\} = 0 .$$

C'est une équation aux dérivées partielles, homogène et à variables séparables;

b) à l'ordre 1 en M_0

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\varphi'^2(\xi)}{\varphi(\xi)} \frac{\partial^2 \pi_1(\psi, \xi, \nu)}{\partial \psi^2} - \frac{\delta^2}{4+h^2\nu} \left\{ \frac{1}{(1+h^2\nu)} \frac{\partial^2 \pi_1(\psi, \xi, \nu)}{\partial \nu^2} \right. \\
 & \left. - \frac{2(1+h^2\nu)}{1+h^2\nu} \pi_1(\psi, \xi, \nu) \right\} = \frac{1}{\varphi(\xi)} \left\{ \varphi''(\xi) \frac{\partial \pi_0(\psi, \xi, \nu)}{\partial \psi} \right. \\
 & \left. + 2\varphi'(\xi) \frac{\partial^2 \pi_0(\psi, \xi, \nu)}{\partial \xi \partial \psi} - \left(\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} + \frac{1}{\tau_0(\xi)} (1 - \tau_0'(\xi)) \right) \varphi'(\xi) \frac{\partial \pi_0(\psi, \xi, \nu)}{\partial \psi} \right. \\
 & \left. + \frac{-2\tau_0'(\xi)}{2\tau_0(\xi)} \frac{\varphi'(\xi)}{1+h^2\nu} \frac{\partial^2 \pi_0(\psi, \xi, \nu)}{\partial \psi \partial \nu} \right\}
 \end{aligned}$$

(87)

C'est une équation aux dérivées partielles non homogène. L'équation homogène correspondante est la même que l'équation d'ordre 0 en M_0 vérifiée par $\pi_0(\psi, \xi, \nu)$. Si on connaît alors $\pi_0(\psi, \xi, \nu)$ il nous reste pour cette équation à chercher une solution particulière. La solution générale sera donc la somme d'un terme de même forme que $\pi_0(\psi, \xi, \nu)$ et de la solution particulière.

III.C.2.- Etude des équations d'ordre 0 en M_0

Comme c'est une équation aux dérivées partielles à variables séparables, $\pi_0(\psi, \xi, \nu)$ peut être cherché sous la forme :

$$(88) \quad \Pi_0(\Psi, \xi, \nu) = \Pi_{or}(\Psi, \xi) \cdot \Pi_{ot}(\nu).$$

En portant cette expression (88) de $\Pi_0(\Psi, \xi, \nu)$ dans l'équation (86), on obtient les deux équations différentielles suivantes :

$$(89) \quad \Psi'^2(\xi) \frac{\partial^2 \Pi_{or}(\Psi, \xi)}{\partial \Psi^2} - \frac{J(\xi)}{\hbar n} \Pi_{or}(\Psi, \xi) = 0,$$

c'est l'équation radiale;

$$(90) \quad \frac{d^2 \Pi_{ot}(\nu)}{d\nu^2} + \frac{2(1 - \hbar^2 \nu)}{\hbar^2 \nu} \left(\frac{2}{8^2 \hbar n} \hbar^4 \nu + \hbar^2 \nu - 1 \right) \Pi_{ot}(\nu) = 0$$

est l'équation azimutale.

Dans cette équation $\lambda/\hbar n$ désigne la constante de séparation et elle est choisie positive pour les mêmes raisons que la constante $\lambda/\hbar n$ de la première partie (chapitre 1).

III.C.2.a.- Solution extérieure de l'équation radiale

L'équation radiale (89) se résout sans difficulté majeure par la M.E.M. (c'est pour cela d'ailleurs que l'on a introduit les variables rapide Ψ et lente ξ).

Comme l'équation (89) est une équation à coefficients constants par rapport à Ψ , on peut chercher $\Pi_{or}(\Psi, \xi)$ sous la forme :

$$(91) \quad \Pi_{or}(\Psi, \xi) = A_0(\xi) e^{\Psi}.$$

En portant cette expression de $\pi_{or}(\psi, \zeta, \nu)$ dans l'équation (89), on obtient la relation que doit vérifier $\varphi(\zeta)$, donc la variation de ψ par rapport à ζ . Cette relation est :

$$\varphi'^2(\zeta) - \frac{\mathcal{S}(\zeta)}{h_n} = 0,$$

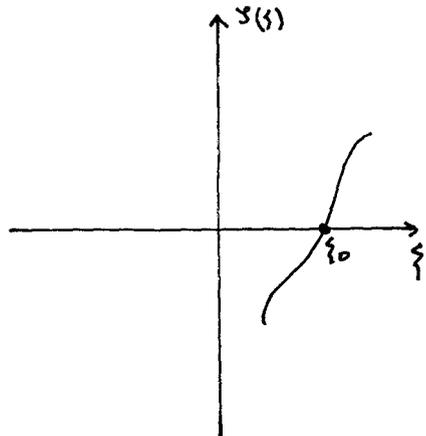
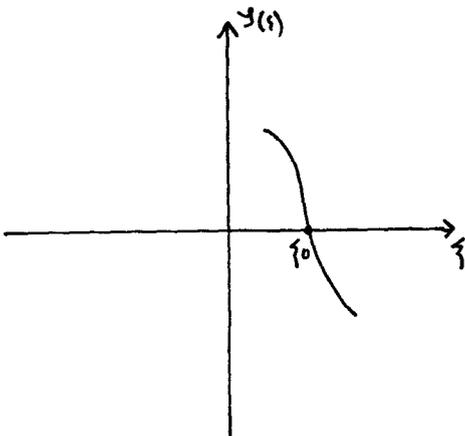
ce qui nous donne $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) = \pm \int \left(\frac{\mathcal{S}(\zeta)}{h_n} \right)^{1/2} d\zeta \quad \text{lorsque } \mathcal{S}(\zeta) > 0,$$

et

$$\varphi(\zeta) = \pm i \int \left(-\frac{\mathcal{S}(\zeta)}{h_n} \right)^{1/2} d\zeta \quad \text{lorsque } \mathcal{S}(\zeta) < 0.$$

Dans l'expression de $\pi_{or}(\psi, \zeta)$, $A_0(\zeta)$ sera à déterminer ultérieurement. Pour obtenir ces expressions de $\varphi(\zeta)$ on a supposé que $\mathcal{S}(\zeta)$ est une fonction quelconque ayant l'allure suivante :



III.C.2.b.- Solution intérieure de l'équation radiale

L'équation radiale correspondant à l'équation (89) s'écrit :

$$(92) \quad \frac{d^2 \pi_{or}(z)}{dz^2} - \frac{\mathcal{V}(z)}{h_n} \pi_{or}(z) = 0 .$$

Il s'agit ici de chercher la solution de cette équation au voisinage d'une altitude z_0 telle que $\mathcal{V}(z_0)$ est nulle. On effectue un développement de Taylor de $\mathcal{V}(z)$ au voisinage de z_0 . On a alors :

$$\mathcal{V}(z) \approx \mathcal{V}(z_0) + (z - z_0) \frac{d\mathcal{V}(z_0)}{dz} + \dots \approx M_0 (z - z_0) \frac{d\mathcal{V}(z_0)}{dz} + \dots .$$

On porte maintenant cette expression de $\mathcal{V}(z)$ dans l'équation (92). On obtient l'équation d'Airy :

$$(93) \quad \frac{d^2 \pi_{or}(\tilde{z})}{d\tilde{z}^2} - \tilde{z} \pi_{or}(\tilde{z}) = 0 ,$$

où l'on a posé :

$$\tilde{z} = \left(\frac{M_0}{h_n} \frac{d\mathcal{V}(z_0)}{dz} \right)^{1/3} (z - z_0) .$$

La solution est alors :

$$\pi_{or}(\tilde{z}) = a Ai(\tilde{z}) + b Bi(\tilde{z}) ,$$

où les $Ai(\tilde{z})$ et $Bi(\tilde{z})$ sont les fonctions d'Airy de première et seconde espèce; (a,b) sont des constantes.

II.C.2.c.- Solution extérieure de l'équation azimutale

L'équation azimutale est :

$$(94) \quad \frac{d^2 \pi_{ot}(v)}{dv^2} + \frac{4\lambda^2(1+h^2v)}{+h^2v} \left(+h^2v + \frac{(1-\Delta^{V_1})}{4\lambda^2} \right) \left(+h^2v + \frac{(1+\Delta^{V_2})}{4\lambda^2} \right) \pi_{ot}(v) = 0 ,$$

où l'on a posé $\lambda = 1/\sqrt{8V_{hh}}$ et $\Delta = 1 + 8\lambda^2$.

Comme dans la première partie on cherche maintenant une solution de cette équation lorsque λ est grand. Prenons alors $\pi_{ot}(v)$ sous la forme :

$$(95) \quad \pi_{ot}(v, \lambda) = e^{\lambda \Phi(v, \lambda)} ,$$

avec :

$$\Phi(v, \lambda) = \Phi_0(v) + \frac{1}{\lambda} \Phi_1(v) + \dots .$$

En portant l'expression de $\pi_{ot}(v, \lambda)$ puis le développement de $\Phi(v, \lambda)$ dans l'équation (94), on obtient en ordonnant les termes suivant les puissances de λ , les équations suivantes (*) :

En λ^2 on a :

$$(96) \quad \Phi_0'(v) + \frac{4(1+h^2v)}{+h^2v} \left(+h^2v + \frac{(1-\Delta^{V_2})}{4\lambda^2} \right) \left(+h^2v + \frac{(1+\Delta^{V_1})}{4\lambda^2} \right) = 0 .$$

(*) Pour les calculs voir annexe H.

En λ il en résulte que :

$$(97) \quad \Phi_0''(v) + 2\Phi_0'(v)\Phi_1'(v) = 0 .$$

Connaissant $\Phi_0(v)$ à partir de l'équation en λ^2 , on obtient alors $\Phi_1(v)$ par :

$$(98) \quad \Phi_1(v) = \text{Log} \frac{\kappa}{|\Phi_0'(v)|^{1/2}} ,$$

où κ est une constante.

De l'équation (96) en λ^2 , on obtient les expressions de $\Phi_0(v)$. Ces expressions sont :

$$\Phi_0(v) = \pm 2i \int \frac{1}{\Delta h v} \left(+h^2 v + \frac{(1 - \Delta^{1/2})}{4\lambda^2} \right)^{1/2} \left(+h^2 v + \frac{(1 + \Delta^{1/2})}{4\lambda^2} \right)^{1/2} dv , \text{ lorsque}$$

$$\left(+h^2 v + \frac{(1 - \Delta^{1/2})}{4\lambda^2} \right) > 0 ;$$

$$\bar{\Phi}_0(v) = \pm 2 \int \frac{1}{\Delta h v} \left(-h^2 v - \frac{(1 - \Delta^{1/2})}{4\lambda^2} \right)^{1/2} \left(+h^2 v + \frac{(1 + \Delta^{1/2})}{4\lambda^2} \right)^{1/2} dv , \text{ lorsque}$$

$$\left(+h^2 v + \frac{(1 - \Delta^{1/2})}{4\lambda^2} \right) < 0 .$$

Connaissant maintenant $\Phi_0(v)$ on a les expressions de $\Phi_1(v)$:

Lorsque $(th^2v + \frac{1-\Delta^{N/2}}{4\lambda^2}) > 0$:

$$\Phi_1(v) = \text{Log} \frac{\kappa_1}{\left[\frac{2}{shv}\right]^{N/2} \times \left[th^2v + \frac{(1-\Delta^{N/2})}{4\lambda^2}\right]^{N/4} \times \left[th^2v + \frac{(1+\Delta^{N/2})}{4\lambda^2}\right]^{N/4}}$$

où κ_1 est une constante.

Lorsque $(th^2v + \frac{1-\Delta^{N/2}}{4\lambda^2}) < 0$:

$$\Phi_1(v) = \text{Log} \frac{\kappa_2}{\left[\frac{2}{shv}\right]^{N/2} \times \left[th^2v - \frac{(1-\Delta^{N/2})}{4\lambda^2}\right]^{N/4} \times \left[th^2v + \frac{(1+\Delta^{N/2})}{4\lambda^2}\right]^{N/4}}$$

où κ_2 est une constante.

Connaissant $\Phi_0(v)$ et $\Phi_1(v)$ on obtient les expressions de $\Pi_{ot}(v, \lambda)$ à l'aide de la relation (95) :

Lorsque $(th^2v + \frac{1-\Delta^{N/2}}{4\lambda^2}) > 0$:

$$(99) \Pi_{ot}(v, \lambda) = \frac{\kappa'_1 e^{2i\lambda L(v)} + \kappa''_1 e^{-2i\lambda L(v)}}{\left[\frac{2}{shv}\right]^{N/2} \times \left[th^2v + \frac{(1-\Delta^{N/2})}{4\lambda^2}\right]^{N/4} \times \left[th^2v + \frac{(1+\Delta^{N/2})}{4\lambda^2}\right]^{N/4}}$$

où on a posé :

$$L(v) = \int \frac{1}{shv} \left(th^2v + \frac{1-\Delta^{N/2}}{4\lambda^2} \right)^{N/2} \left(th^2v + \frac{1+\Delta^{N/2}}{4\lambda^2} \right) dv$$

et que κ'_1 et κ''_1 sont des constantes.

Lorsque $(+h^2V + \frac{\Lambda - \Delta^{1/2}}{4\lambda^2}) < 0$, l'expression de $\pi_{ot}(V, \lambda)$ est :

$$(100) \quad \pi_{ot}(V, \lambda) = \frac{\kappa'_2 e^{2M(V)} + \kappa''_2 e^{-2M(V)}}{\left[\frac{2}{\Delta hV}\right]^{1/2} \times \left[-h^2V - \frac{(\Lambda - \Delta^{1/2})}{4\lambda^2}\right]^{1/4} \times \left[h^2V + \frac{(\Lambda + \Delta^{1/2})}{4\lambda^2}\right]^{1/4}}$$

où on a posé :

$$M(V) = \int \frac{1}{\Delta hV} \left(-h^2V - \frac{(\Lambda - \Delta^{1/2})}{4\lambda^2}\right)^{1/2} \times \left(h^2V + \frac{(\Lambda + \Delta^{1/2})}{4\lambda^2}\right) dV \quad \text{et que}$$

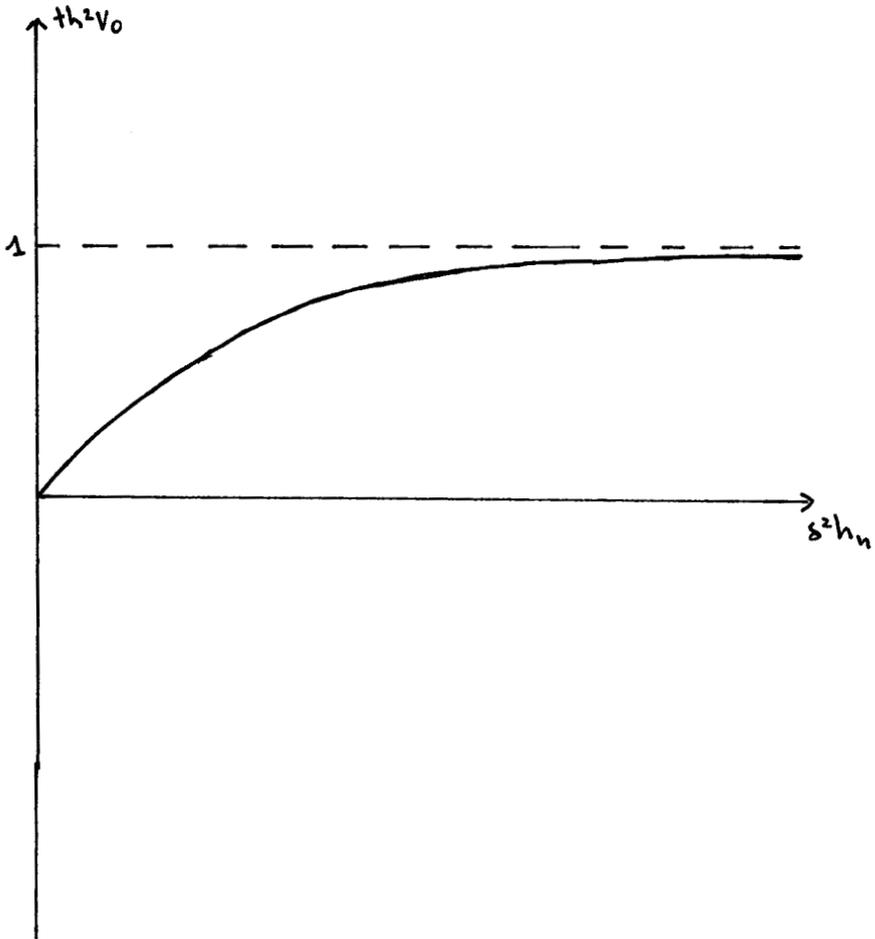
κ'_2 et κ''_2 sont des constantes.

III.C.2.d.- Solution intérieure de l'équation azimutale.

On a vu précédemment que lorsque l'expression $(+h^2V + \frac{\Lambda - \Delta^{1/2}}{4\lambda^2})$ est positive, la perturbation de pression $\pi_o(V, \lambda)$ a un comportement oscillatoire et lorsque celle-ci est négative elle a un comportement apériodique. On cherche maintenant comment se comporte l'équation (94) au voisinage d'une latitude V_0 racine de l'équation :

$$+h^2V_0 + \frac{(\Lambda - \Delta^{1/2})}{4\lambda^2} = 0 .$$

La figure suivante montre la variation et l'existence de cette latitude de V_0 .



Courbe représentant $+h^2 v_0$ en fonction de $s^2 h_n$.

$$+h^2 v_0 = \frac{-1 + (1 + 8/s^2 h_n)^{1/2}}{4/s^2 h_n}$$

La figure montre que la latitude définie par V_0 existe quelque soit $g^2 h \eta > 0$.

Etudions maintenant le voisinage de V_0 . Pour cela on effectue un développement en série de Taylor de thV .

$$thV \approx thV_0 + (V - V_0)(1 - th^2V_0) + \dots$$

Ce qui nous donne :

$$th^2V \approx th^2V_0 + 2thV_0(1 - th^2V_0)(V - V_0) + \dots$$

On porte maintenant cette expression de th^2V dans l'équation (94), ainsi on obtient l'équation d'Airy :

$$(101) \quad \frac{d^2 \pi_{0t}(\tilde{V})}{d\tilde{V}^2} + \tilde{V} \pi_{0t}(\tilde{V}) = 0,$$

avec

$$\tilde{V} = \left[\frac{4(1 - th^2V_0)\Delta^2}{thV_0} \right]^{1/3} (V - V_0).$$

Ainsi la solution $\pi_{0t}(V)$ est formée par les fonctions d'Airy.

$$\pi_{0t}(\tilde{V}) = a Ai(\tilde{V}) + b Bi(\tilde{V}),$$

où les $Ai(\tilde{V})$ et $Bi(\tilde{V})$ sont les fonctions d'Airy de première et seconde espèce, et (a,b) sont des constantes.

III.C.3.- Solution particulière de l'équation d'ordre 1 en M_0 .

On rappelle ici que l'équation d'ordre 1 en M_0 est :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\gamma''(\xi)}{\mathcal{G}(\xi)} \frac{\partial^2 \pi_1(\psi, \xi, \nu)}{\partial \psi^2} - \frac{\delta^2}{4+h^2\nu} \left\{ \frac{1}{(1+h^2\nu)} \frac{\partial^2 \pi_1(\psi, \xi, \nu)}{\partial \nu^2} \right. \\
 & \left. - \frac{2(1+h^2\nu)}{th^2\nu} \pi_1(\psi, \xi, \nu) \right\} = \frac{1}{\mathcal{G}(\xi)} \left\{ \gamma''(\xi) A_0(\xi) + 2\gamma'(\xi) A_0'(\xi) \right. \\
 (102) \quad & \left. - \left\{ \frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} + \frac{1}{T_\infty(\xi)} (1 - T_\infty'(\xi)) \right\} \gamma'(\xi) A_0(\xi) \right. \\
 & \left. + \frac{\Omega_\infty'(\xi) \gamma'(\xi) A_0(\xi)}{2 \Omega_\infty(\xi)} + \lambda \frac{\bar{\Phi}'(\nu, \lambda)}{th\nu} \right\} e^{\psi + \lambda \bar{\Phi}(\nu, \lambda)} ,
 \end{aligned}$$

où on a remplacé $\pi_0(\nu, \xi, \psi)$ par son expression $A_0(\xi) e^{\psi + \lambda \bar{\Phi}(\nu, \lambda)}$
 et où les primes désignent les dérivations des fonctions par rapport à leurs arguments respectifs.

On cherche maintenant une solution particulière $\pi_1(\psi, \xi, \nu)$
 sous la forme :

$$(103) \quad \pi_1(\psi, \xi, \nu) = \left\{ A_1(\xi) \psi + A_2(\xi) F(\nu) \right\} e^{\psi + \lambda \bar{\Phi}(\nu, \lambda)} .$$

$A_1(\xi)$ et $A_2(\xi)$ seront choisies de telle sorte que l'on puisse
 déterminer $F(\nu)$.

III.C.3.a.- Relation vérifiée par l'équation d'ordre 0 en M_0 .

Avant de poursuivre cette recherche de solution particulière, établissons une relation qui nous sera utile et qui est déduite de l'équation d'ordre 0 en M_0 . On avait :

$$\pi_0(\psi, \xi, \lambda, \nu) = A_0(\xi) e^{\psi + \lambda \bar{\Phi}(\nu, \lambda)}$$

En portant cette expression de $\pi_0(\psi, \xi, \nu, \lambda)$ dans l'équation d'ordre 0 en M_0 on obtient la relation suivante (*):

$$(104) \quad - \frac{\psi'(\xi)}{\xi(\xi)} - \frac{\xi^2}{4+h^2\nu} \left\{ \frac{\lambda \bar{\Phi}''(\nu, \lambda) + \lambda^2 \bar{\Phi}'^2(\nu, \lambda)}{(1+h^2\nu)} - \frac{2(1+h^2\nu)}{4+h^2\nu} \right\} = 0$$

C'est une équation différentielle pour $\psi(\xi)$ et $\bar{\Phi}(\nu, \lambda)$ que l'on aurait pu utiliser pour déterminer $\psi(\xi)$ et $\bar{\Phi}(\nu, \lambda)$.

III.C.3.b.- Détermination de la solution particulière

On porte donc l'expression (103) de $\pi_1(\psi, \xi, \nu, \lambda)$ dans l'équation d'ordre 1 en M_0 . On aboutit à l'équation suivante, en simplifiant

par $e^{\psi + \lambda \bar{\Phi}(\nu, \lambda)}$ et en tenant compte de la relation (104) (**):

(*) Les primes indiquent une dérivation par rapports à leurs arguments successifs.

(**) Les primes indiquent une dérivation par rapport à leurs arguments respectifs.

Pour les calculs, voir annexe I.

$$-2 \frac{\varphi'^2(\xi)}{\mathcal{S}(\xi)} A_1(\xi) - \frac{\mathcal{S}^2 \Delta_2(\xi)}{4+h^2\nu(1-h^2\nu)} \left\{ \frac{d^2 F(\nu)}{d\nu^2} + 2\lambda \Phi'(\nu, \lambda) \frac{dF(\nu)}{d\nu} \right\}$$

(105)

$$= \frac{1}{\mathcal{S}(\xi)} \left\{ \varphi''(\xi) A_0(\xi) + 2\varphi'(\xi) A_0'(\xi) - \left\{ \frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{T_{\infty}(\xi)} (1 - T_{\infty}'(\xi)) \right\} \varphi'(\xi) A_0(\xi) \right. \\ \left. + \frac{-\Omega_{\infty}'(\xi) \varphi'(\xi) A_0(\xi)}{2\Omega_{\infty}(\xi)} \lambda \frac{\Phi'(\nu, \lambda)}{1h\nu} \right\}$$

On choisit maintenant $A_1(\xi)$ et $A_2(\xi)$:

$$A_1(\xi) = -\frac{1}{2\varphi'(\xi)} \left\{ \varphi''(\xi) A_0(\xi) + 2\varphi'(\xi) A_0'(\xi) \right. \\ \left. - \left\{ \frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} + \frac{1}{T_{\infty}(\xi)} (1 - T_{\infty}'(\xi)) \right\} \varphi'(\xi) A_0(\xi) \right\},$$

ce choix nous permet d'éliminer le premier terme du premier membre avec le premier terme du second membre;

$$A_2(\xi) = \frac{-\Omega_{\infty}'(\xi) \varphi'(\xi) A_0(\xi)}{-\Omega_{\infty}(\xi) \mathcal{S}(\xi)} \quad . \text{ Ce choix nous fait simplifier}$$

les coefficients des deux deuxièmes termes.

Après ces choix, l'équation que doit vérifier $F(v)$ est de :

$$(106) \quad \frac{d^2 F(v)}{dv^2} + 2\lambda \frac{\Phi'(v, \lambda)}{\Phi(v, \lambda)} F(v) = - \frac{4\lambda}{s^2} + h^2 v (1 - h^2 v) \frac{\Phi'(v, \lambda)}{\Phi(v, \lambda)} .$$

En intégrant (*) cette équation, on obtient :

$$F(v) = - \frac{1}{s^2} \left\{ + h^2 v - \int \frac{L(v)}{e^{2\lambda \Phi(v, \lambda)}} dv \right\} ,$$

où

$$L(v) = 2 \int (1 - h^2 v) (1 - 3 + h^2 v) e^{2\lambda \Phi(v, \lambda)} .$$

Connaissant $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$ et $F(v)$ on peut donc construire la solution particulière de l'équation d'ordre 1 en M_0 par la relation (103). Remarquons que cette solution présente une sécularité lorsque Ψ tend vers l'infini.

III.C.3.c.- Détermination de $A_0(\xi)$

Afin d'avoir une solution particulière régulière, il faut éliminer les termes en $\Psi e^{\Psi + \lambda \Phi(v, \lambda)}$ ce qui nous impose d'annuler $A_1(\xi)$. On obtient ainsi l'équation que doit vérifier $A_0(\xi)$. Cette équation est :

$$\frac{A_0'(\xi)}{A_0(\xi)} = \frac{1}{2} \left\{ - \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)} + \frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} + \frac{1}{T_\infty(\xi)} (1 - T_\infty'(\xi)) \right\}$$

On a alors

$$A_0(\xi) = \left| \frac{\Gamma(\xi)}{\varphi'(\xi) T_\infty(\xi)} \right| e^{\frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{T_\infty(\xi)}} .$$

(*) Voir annexe J.

Connaissant $A_0(\xi)$ on obtient $\Pi_{0r}(\psi, \xi)$ par la relation (91).

Notons que le procédé de résolution de l'équation d'ordre 1 en M_0 est original car ceci nous a permis de trouver une solution particulière de notre équation qui est tout de même une équation aux dérivées partielles non homogène.

III.C.4.- Raccords des solutions de l'équation d'ordre 0 en M_0 .

Pour l'évolution radiale, ainsi que pour l'évolution azimutale, les raccords des solutions intérieures avec les solutions extérieures se font selon le principe de Van Dyke.

A une variable extérieure W , on fait correspondre une variable intérieure \tilde{W} ; si W_0 est le point tournant (radial ou azimutal), les raccords se font comme suit :

$$\lim_{W \rightarrow W_0 \pm} (\text{solutions extérieures}) = \lim_{\tilde{W} \rightarrow \pm \infty} (\text{solutions intérieures}).$$

CONCLUSION

Hormis les conclusions que l'on a formulé dans la première partie, et, qui sont valables aussi ici, on vient de montrer que pour étudier les ondes qui se propagent suivant la latitude et l'altitude on peut utiliser la méthode de séparation de variables à condition de développer la fonction inconnue par rapport au nombre de Mach M_0 , développement systématique en dynamique de l'atmosphère. On obtient alors deux équations aux dérivées partielles : la première, une équation homogène à variables séparables; la deuxième, une équation non homogène, L'équation homogène se traite de la même façon que ce que l'on a fait dans la Ière partie (Chapitre 2). Une solution particulière de l'équation non homogène est obtenue en utilisant simultanément la M.E.M. et la méthode d'approximation de Green-Liouville.

CHAPITRE 4

PERSPECTIVES

IV.a.- Que peut-on faire lorsque $R_0^{-1} \gg |2 \Omega_\infty(\zeta)|$?

Lorsque R_0^{-1} est très grand devant $|2 \Omega_\infty(\zeta)|$ le modèle d'équation (62) devient :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\Omega_\infty(\zeta)}{\Gamma(\zeta)} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \zeta^2} - \delta^2 A'(\zeta, \theta) \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta}) - \frac{m^2}{\cos^2 \theta} \Pi_1 \right\} \\
 (107) \quad & + \delta^2 B'(\zeta, \theta) \left\{ \frac{\sin \theta}{R_0} \Pi_1 - \Omega_\infty(\zeta) \cos \theta \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta} \right\} + \delta^2 C'(\theta, \zeta) \Pi_1 \\
 & = M_0 \frac{\Omega_\infty(\zeta)}{\Gamma(\zeta)} \left\{ D''(\zeta, \theta) \frac{\partial \Pi_1}{\partial \zeta} + E''(\zeta, \theta) \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \zeta \partial \theta} \right\} ,
 \end{aligned}$$

avec

$$A'(\zeta, \theta) = \frac{\Omega_\infty(\zeta)}{-m^2 \Omega_\infty^2(\zeta) + \frac{\sin^2 \theta}{R_0^2}} ,$$

$$B'(\xi, \theta) = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{-m^2 \Omega_0^2(\xi) + \frac{\sin^2 \theta}{R_0^2}} \right) ,$$

$$C'(\xi, \theta) = R_0^{-1} A'(\xi, \theta) ,$$

$$D''(\xi, \theta) = F(\xi) + G'(\xi, \theta) + H'(\xi, \theta) ,$$

$$E''(\xi, \theta) = C'(\xi, \theta) \sin \theta \cos \theta \frac{d\Omega_0(\xi)}{d\xi} ,$$

$$G'(\xi, \theta) = \left\{ m^2 + \frac{(1 - 3 \sin^2 \theta)}{R_0} \right\} A'(\xi, \theta) \frac{d\Omega_0(\xi)}{d\xi} ,$$

$$H'(\xi, \theta) = \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{R_0} B'(\xi, \theta) \frac{d\Omega_0(\xi)}{d\xi} .$$

En revenant au système de coordonnées curvilignes (x, y, z) et en faisant l'approximation "du plan tangent", on retrouve le modèle d'équation (*) avec lequel on a étudié les ondes de gravité avec effet de la force de Coriolis [7] :

(*) Voir annexe K.

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 \pi_1}{dz^2} - \frac{N^2 \Gamma(\zeta)}{(-k^2 U_\infty^2(\zeta) + \frac{1}{R_0'^2})} \pi_1 \\
 (108) \quad & = M_0 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{T_\infty(\zeta)} (1 - \frac{dT_\infty(\zeta)}{d\zeta}) + \frac{(1 - iPR_0' U_\infty(\zeta))}{(1 - k^2 U_\infty^2(\zeta) R_0'^2)} \frac{1}{U_\infty(\zeta)} \frac{dU_\infty(\zeta)}{d\zeta} \right\} \frac{d\pi_1}{dz}
 \end{aligned}$$

avec $R_0' = R_0 / \sin \theta_0$ et $N^2 = k^2 + l^2$ où k et l sont les nombres d'ondes respectivement suivant x et y .

On vient de voir que le modèle (107) pourrait être considéré comme un modèle assez général. L'étude de ce modèle pourrait permettre la généralisation aux ondes planétaires des "effets de Coriolis" mis en évidence dans le cas plan.

La méthode analytique actuelle ne nous permet pas de résoudre ce modèle d'équations; il serait nécessaire d'effectuer une résolution numérique. Une telle résolution serait de toute manière indispensable pour l'étude de distributions de vent et de température plus réalistes.

IV.b.- Ecoulement de base de direction quelconque

Il est clair que quand on a pris une vitesse de base de composante $(U_\infty(\theta, z); 0; 0)$ on a choisi une vitesse de direction idéale. En réalité, il faudrait considérer une vitesse de composante $(U_\infty, v_\infty, 0)$ afin d'étudier un cas plus réaliste (voir remarque précédente).

CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE

On retrouve globalement dans cette 2^{ème} partie les mêmes conclusions concernant les points tournants radiaux et azimutaux que dans la 1^{ère} partie. On a toutefois montré également l'existence d'un point critique ζ_0 défini par $\Omega_0(\zeta_0) = 0$ et des points singuliers apparents tels que les points de latitude θ_0 déterminés par $\sin \theta_0 = \pm w/2$. On a pu constater aussi l'efficacité de la méthode de développement asymptotique dans l'étude des écoulements atmosphériques.

CONCLUSION GENERALE

L'étude qui précède concerne les ondes planétaires linéarisées dans un milieu atmosphérique (gaz parfait) non isotherme. Cela nous a conduit à des équations aux dérivées partielles dont nous avons cherché systématiquement dans quelles conditions on pouvait les résoudre par la méthode de séparation de variables. On a obtenu alors deux équations différentielles : l'une concernant l'évolution radiale des perturbations; l'autre, leur évolution azimutale.

L'équation radiale qui est une équation linéaire à coefficients lentement variables se résout par la méthode des Echelles Multiples (M.E.M.); tandis que l'équation azimutale qui est une équation linéaire à coefficients variables admet des solutions asymptotiques que l'on obtient en utilisant la méthode d'approximation de Green-Liouville.

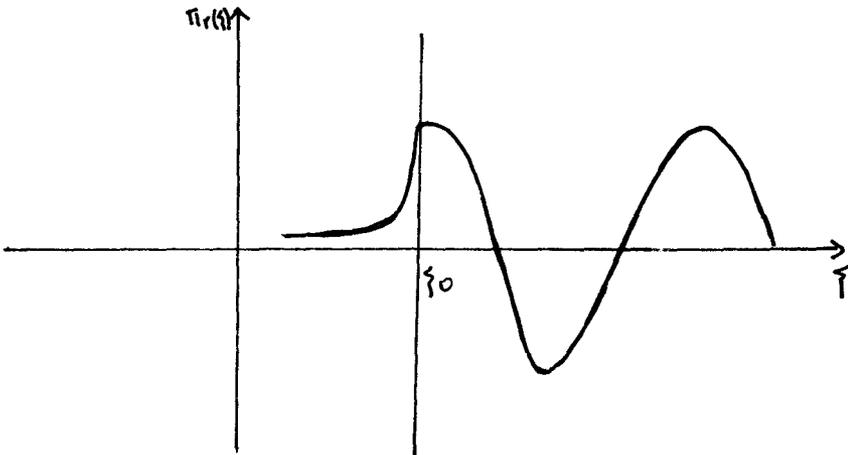
Ces solutions dites, "extérieures", se comportent soit comme des fonctions oscillatoires, soit comme des fonctions apériodiques (à amortissement rapide). La méthode utilisée a mis en évidence l'éventualité de la traversée des points tournants (azimutaux ou radiaux) lorsqu'il y a passage de l'un des deux régimes à l'autre.

En étudiant les voisinages de ces points tournants on a obtenu des solutions qui sont : soient des combinaisons des fonctions d'Airy de première et seconde espèce; soient des combinaisons des fonctions de Bessel d'ordre $\nu = \pm 2/3$. Ces solutions sont les solutions "intérieures". Cette permanence provient essentiellement de ce qu'il s'agit d'équations du second ordre. On pourrait trouver des comportements différents (fonctions de Weber) si les points tournants séparaient deux zones à même type d'écoulements (annulation des coefficients sans changement de signe, par exemple).

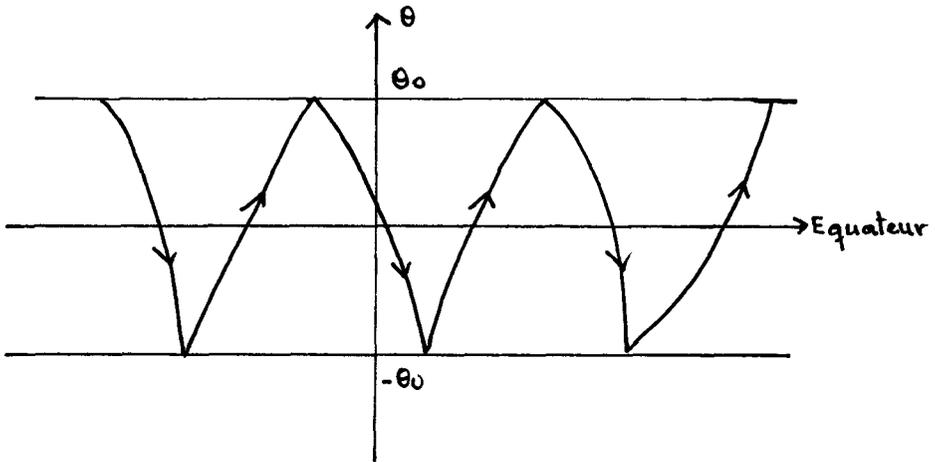
Par le principe de Van Dyke, les solutions extérieures se raccordent sans problème majeur aux solutions intérieures. Ces raccords permettent de déterminer les constantes arbitraires des développements intérieurs en fonction des caractéristiques des solutions extérieures.

On en conclut alors que ces points tournants peuvent être interprétés comme des points de réflexion ou d'absorption des ondes [12]. Les zones de solutions apériodiques étant des zones à amortissement rapide, l'onde est évanescence (et donc inexistante) en dehors du voisinage immédiat des points tournants. Pour les zones de réflexion d'ondes, tout ce passe comme si l'onde incidente de phase $iL(\dots)$ se réfléchit par une onde de phase $-iL(\dots)$.

Pour le point tournant radial ζ_0 , tout se passe comme s'il divise la région en deux zones. Dans la zone où $\zeta > \zeta_0$ on a des ondes de phase $i\psi$ et $-i\psi$ et tout se passe comme si l'onde de la forme $\kappa_1 e^{i\psi}$ se réfléchit par l'onde de la forme $\kappa_2 e^{-i\psi}$. Dans la zone $\zeta < \zeta_0$, si on choisit $L_1 = 0$, on a des ondes évanescences.



Particulièrement, les points tournants azimutaux se trouvent sur des parallèles de latitudes opposées θ_0 et $-\theta_0$. Tout se passe alors que si l'onde de phase $iL(\theta)$ se réfléchit à la rencontre du parallèle de latitude θ_0 par une onde de phase $-iL(\theta)$. Cette onde de phase $-iL(\theta)$ se réfléchira à son tour à la rencontre du parallèle de latitude $-\theta_0$. On obtient ainsi des "ondes piégées" en latitude.



Lorsqu'il existe simultanément des points tournants azimutaux et radiaux, on peut obtenir "des ondes piégées, disposées en couronne". Ces zones d'ondes lorsqu'elles existent sont toujours équatoriales. Plusieurs configurations peuvent être imaginées, suivant le nombre de zéros du paramètre de Scorer.

L'étude présentée ici a été rendue possible grâce à l'existence des outils mathématiques, théoriques actuels, à savoir : la méthode des petites perturbations; la méthode de développements asymptotiques raccordés, la méthode des échelles multiples, etc... Ces outils seront plus complets et efficaces si l'on y ajoute les outils numériques actuels. Ainsi, nous serions satisfait si l'étude théorique que l'on a effectué était justifiée numériquement.

Annexe A

Le système (9) est composé de six équations à six inconnues. On peut les réduire à une seule équation en π_1 .

De la troisième et la quatrième équations du système (9) on tire u_1 et v_1 en fonctions de π_1 et de $\frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}$. On a alors :

$$u_1 = \frac{\gamma R_0^2 \delta m T_0(\zeta) \pi_1 + \delta R_0 T_0(\zeta) \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}}{\gamma \cos \theta (\gamma^2 R_0^2 - \sin^2 \theta)}$$

$$v_1 = \frac{i \delta m R_0 T_0(\zeta) \sin \theta \pi_1 + i \delta \gamma R_0^2 T_0(\zeta) \cos \theta \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}}{\gamma \cos \theta (\gamma^2 R_0^2 - \sin^2 \theta)}$$

Des deux dernières équations, on obtient une relation entre w_1 et π_1 avec ses dérivées. Cette relation nous permettra d'avoir w_1 en fonction de π_1 et $\frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta}$:

$$w_1 = \frac{i \gamma M_0 \hat{B} (\gamma - 1) \pi_1 - i \gamma \delta T_0(\zeta) \frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta}}{\gamma \hat{B} T_0(\zeta) \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} + \frac{dT_0(\zeta)}{d\zeta} \right]}$$

De la première équation et de la cinquième on tire w_1 en fonction de π_1 et de $\frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta}$:

$$w_1 = \frac{\hat{B} M_0 \pi_1 - T_0(\zeta) \frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta}}{\hat{B}}$$

En portant les expressions de u_1 , v_1 , w_1 et ω_1 dans la deuxième équation et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en M_0 nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{i \sigma T_{\infty}(\zeta)}{\gamma \Gamma(\zeta)} \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial z^2} - \frac{i \sigma M_0}{\gamma \Gamma(\zeta)} \left\{ 1 - 2 \frac{dT_{\infty}(\zeta)}{d\zeta} + \frac{T_{\infty}(\zeta)}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_{\infty}(\zeta)}{d\zeta}\right)} \frac{d^2 T_{\infty}(\zeta)}{d\zeta^2} \right\} \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \\ &= \frac{i T_{\infty}(\zeta) \delta^2 \sigma R_0^2}{\gamma \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sigma^2 R_0^2 - \sin^2 \theta} \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} \right) - \frac{i \sigma \delta^2 m^2 R_0^2 T_{\infty}(\zeta)}{\gamma \cos^2 \theta (\sigma^2 R_0^2 - \sin^2 \theta)} \pi_1 \\ & \quad - \frac{i m R_0 \delta^2 T_{\infty}(\zeta)}{\gamma} \frac{(\sigma^2 R_0^2 + \sin^2 \theta)}{(\sigma^2 R_0^2 - \sin^2 \theta)^2} \pi_1 . \end{aligned}$$

On simplifie par $\frac{i T_{\infty}(\zeta)}{\gamma}$ et on multiplie le résultat par σ , on arrive alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2}{\Gamma(\zeta)} \left\{ \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial z^2} - M_0 \left\{ \frac{1}{T_{\infty}(\zeta)} \left(1 - \frac{dT_{\infty}(\zeta)}{d\zeta} \right) + \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \frac{dT_{\infty}(\zeta)}{d\zeta} \right\} \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \right\} \\ &= \delta^2 \sigma^2 R_0^2 \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sigma^2 R_0^2 - \sin^2 \theta} \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\cos^2 \theta (\sigma^2 R_0^2 - \sin^2 \theta)} \pi_1 \right. \\ & \quad \left. - \frac{m}{\sigma R_0} \frac{(\sigma^2 R_0^2 + \sin^2 \theta)}{(\sigma^2 R_0^2 - \sin^2 \theta)^2} \pi_1 \right\} . \end{aligned}$$

On pose enfin :

$$f = \sigma R_0 ,$$

$$\sin \theta = \rho ,$$

on obtient l'équation (10).

ANNEXE B

On veut résoudre l'équation (12) par la méthode des échelles multiples. Pour cela on introduit alors les variables :

$$\text{lente} \quad \zeta = M_0 z ,$$

$$\text{rapide} \quad \psi = \frac{1}{M_0} \varphi(\zeta) ,$$

et le développement asymptotique généralisé de $R_n(z, M_0)$ suivant :

$$R_n(z, M_0) \equiv R_n(\psi, \zeta, M_0) = R_{n0}(\psi, \zeta) + M_0 R_{n1}(\psi, \zeta) + \dots .$$

Tout d'abord, on cherche $\frac{d}{dz}$ et $\frac{d^2}{dz^2}$, en considérant ζ et ψ comme des variables indépendantes.

$$\frac{d}{dz} = \varphi'(\zeta) \frac{\partial}{\partial \psi} + M_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} ,$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \approx \varphi''(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + M_0 \left\{ \varphi''(\zeta) \frac{\partial}{\partial \psi} + 2\varphi'(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \psi} \right\} + O(M_0^2) .$$

En introduisant l'expression de $\frac{d}{dz}$, celle de $\frac{d^2}{dz^2}$, ainsi que le développement de $R_n(\psi, \zeta, M_0)$ dans l'équation (12) on a :

$$\begin{aligned}
& \varphi'^2(\zeta) \frac{\partial^2 R_{n0}(\psi, \zeta)}{\partial \psi^2} + M_0 \varphi'^2(\zeta) \frac{\partial^2 R_{n1}(\psi, \zeta)}{\partial \psi^2} + \frac{\Gamma(\zeta)}{h_n} R_{n0}(\psi, \zeta) \\
& + M_0 \frac{\Gamma(\zeta)}{h_n} R_{n1}(\psi, \zeta) + M_0 \left\{ \varphi''(\zeta) \frac{\partial R_{n0}(\psi, \zeta)}{\partial \psi} + 2\varphi'(\zeta) \frac{\partial^2 R_{n0}(\psi, \zeta)}{\partial \zeta \partial \psi} \right\} \\
= & M_0 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{T_{\infty}(\zeta)} \left(1 - \frac{dT_{\infty}(\zeta)}{d\zeta} \right) \right\} \varphi'(\zeta) \frac{\partial R_{n0}(\psi, \zeta)}{\partial \psi} \\
& + O(M_0^2)
\end{aligned}$$

Ainsi selon leur ordre en M_0 on obtient successivement :

a) à l'ordre 0 en M_0 :

$$\varphi'^2(\zeta) \frac{\partial^2 R_{n0}(\psi, \zeta)}{\partial \psi^2} + \frac{\Gamma(\zeta)}{h_n} R_{n0}(\psi, \zeta) = 0 \quad (14),$$

b) à l'ordre 1 en M_0 :

$$\begin{aligned}
\varphi'^2(\zeta) \frac{\partial^2 R_{n1}(\psi, \zeta)}{\partial \psi^2} + \frac{\Gamma(\zeta)}{h_n} R_{n1}(\psi, \zeta) = & \left\{ \left[\frac{1}{T_{\infty}(\zeta)} \left(1 - \frac{dT_{\infty}(\zeta)}{d\zeta} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} \right] \varphi'(\zeta) - \varphi''(\zeta) \right\} \frac{\partial R_{n0}(\psi, \zeta)}{\partial \psi} - 2\varphi'(\zeta) \frac{\partial^2 R_{n0}(\psi, \zeta)}{\partial \zeta \partial \psi}. \quad (15)
\end{aligned}$$



ANNEXE C

On veut résoudre l'équation (35) par la méthode d'approximation de Green-Liouville (voir [17]), on cherche alors $T_{no}(v, m, \lambda)$ sous la forme :

$$T_{no}(v, m, \lambda) = e^{\lambda \Phi(v, \lambda)}$$

Pour cela on a :

$$\frac{d^2 T_{no}(v, m, \lambda)}{dv^2} = \lambda \bar{\Phi}''(v, \lambda) e^{\lambda \Phi(v, \lambda)} + \lambda^2 \bar{\Phi}'^2(v, \lambda) e^{\lambda \Phi(v, \lambda)}$$

On porte l'expression de $\frac{d^2 T_{no}(v, m, \lambda)}{dv^2}$ et celle de $T_{no}(v, m, \lambda)$ dans l'équation (35) on a alors :

$$\lambda^2 \bar{\Phi}'^2(v, \lambda) + \lambda \bar{\Phi}''(v, \lambda) + \lambda^2 \left\{ 1 - h^2 v - m'^2 \right\} = 0,$$

où $m' = m/\lambda$.

On développe maintenant $\bar{\Phi}(v, \lambda)$ sous la forme :

$$\bar{\Phi}(v, \lambda) = \bar{\Phi}_0(v) + \frac{1}{\lambda} \bar{\Phi}_1(v) + \dots$$

ceci nous donne :

$$\bar{\Phi}'(v, \lambda) \approx \bar{\Phi}'_0(v) + \frac{1}{\lambda} \bar{\Phi}'_1(v) + \dots,$$

$$\bar{\Phi}'^2(v, \lambda) \approx \bar{\Phi}'^2_0(v) + \frac{2}{\lambda} \bar{\Phi}'_0(v) \bar{\Phi}'_1(v) + \dots,$$

$$\bar{\Phi}''(v, \lambda) \approx \bar{\Phi}''_0(v) + \frac{1}{\lambda} \bar{\Phi}''_1(v) + \dots$$

On introduit maintenant les expressions de $\Phi''(v, \lambda)$ et $\Phi'(v, \lambda)$ dans l'équation précédente on arrive à :

$$\lambda^2 \Phi_0''(v) + 2\lambda \Phi_0'(v) \Phi_1'(v) + \lambda \Phi_0''(v) + \lambda^2 [1 - h^2 v - m^2] \\ + O(\lambda^0) = 0$$

En égalant à 0, les termes de degré λ^2 et ceux de degré λ on obtient les équations suivantes :

$\alpha)$ à l'ordre λ^2

$$\Phi_0''(v) - (h^2 v - 1 + m^2) = 0 ,$$

$\beta)$ à l'ordre λ

$$2\Phi_0'(v) \Phi_1'(v) + \Phi_0''(v) = 0 .$$

ANNEXE D

On utilise le système (61). Ce système est formé de six équations à six inconnues. On peut les réduire à une équation à une inconnue. Prenons par exemple π_1 . Pour cela on cherchera w_1 , v_1 , u_1 et ω_1 en fonctions de π_1 et de ses dérivées.

De la cinquième et de la sixième équations du système (61), on élimine v_1 et on obtient w_1 en fonctions de π_1 et de $\frac{\partial \pi_1}{\partial z}$. On a alors :

$$w_1 = \frac{i m \Omega_\infty(\zeta)}{\gamma \Gamma(\zeta)} \left\{ -T_\infty(\zeta) \frac{\partial \pi_1}{\partial z} + \frac{(\gamma-1) M_0}{\gamma} \pi_1 \right\}.$$

On porte cette expression de w_1 dans la troisième équation et en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 1 en M_0 on a la nouvelle équation :

$$i m \Omega_\infty(\zeta) u_1 - \left(\frac{1}{R_0} + 2 \Omega_\infty(\zeta) \right) \sin \theta v_1 + \frac{i \delta m T_\infty(\zeta)}{\gamma \cos \theta} \pi_1$$

$$= \frac{i m M_0}{\gamma \delta} \frac{T_\infty(\zeta)}{\Gamma(\zeta)} \cos \theta \Omega_\infty(\zeta) \frac{d \Omega_\infty(\zeta)}{d \zeta} \frac{\partial \pi_1}{\partial z}.$$

De cette équation et de la quatrième équation du système (61), on obtient u_1 , v_1 en fonctions de π_1 , de $\frac{\partial \pi_1}{\partial z}$ et de $\frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}$. Ces expressions de u_1 et v_1 sont :

$$u_1 = \frac{\delta T_{00}(\zeta) \left\{ m^2 \Omega_{\infty}(\zeta) \pi_1 - \left(\frac{1}{R_0} + 2\Omega_{\infty}(\zeta) \right) \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} \right\}}{\gamma \cos \theta \left\{ -m^2 \Omega_{\infty}^2(\zeta) + \left(\frac{1}{R_0} + 2\Omega_{\infty}(\zeta) \right)^2 \sin^2 \theta \right\}}$$

$$- \frac{m^2 \Omega_{\infty}^2(\zeta) T_{00}(\zeta) M_0 \cos \theta \frac{d\Omega_{\infty}(\zeta)}{d\zeta} \frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta}}{\gamma \delta \Gamma(\zeta) \left\{ -m^2 \Omega_{\infty}^2(\zeta) + \left(\frac{1}{R_0} + 2\Omega_{\infty}(\zeta) \right)^2 \sin^2 \theta \right\}}$$

et

$$v_1 = \frac{i \delta m T_{00}(\zeta) \left\{ \left(\frac{1}{R_0} + 2\Omega_{\infty}(\zeta) \right) \sin \theta \pi_1 - \Omega_{\infty}(\zeta) \cos \theta \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} \right\}}{i m M_0 \left(\frac{1}{R_0} + 2\Omega_{\infty}(\zeta) \right) T_{00}(\zeta) \cos \theta \sin \theta \Omega_{\infty}(\zeta) \frac{d\Omega_{\infty}(\zeta)}{d\zeta} \frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta} - \gamma \delta \Gamma(\zeta) \left\{ -m^2 \Omega_{\infty}^2(\zeta) + \left(\frac{1}{R_0} + 2\Omega_{\infty}(\zeta) \right)^2 \sin^2 \theta \right\}}$$

La première et la cinquième équations du système (61) nous donnent l'expression de ω_1 en fonctions de π_1 et de $\frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta}$.

$$\omega_1 = - T_{00}(\zeta) \frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta} + M_0 \pi_1 .$$

On porte maintenant les expressions de u_1 , v_1 , w_2 et w_1 dans la deuxième équation du système (61). On obtient ainsi l'équation (62), en ne conservant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 1 en M_0 et après une simplification par $\frac{i m T_0(s)}{\gamma}$.

ANNEXE E

L'idée est de mettre l'équation azimutale réduite (73) lorsque $m=1$ sous la forme :

$$\frac{d^2}{dv^2} \dots + F(v, \delta^2 h_n) \dots = 0 .$$

Cette équation est :

$$\frac{d^2 \pi_{1t}(\theta)}{d\theta^2} - \left\{ t_g \theta + \frac{8 \sin \theta \cos \theta}{-1 + 4 \sin^2 \theta} \right\} \frac{d \pi_{1t}(\theta)}{d\theta} + \left\{ -\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{2(1 + 4 \sin^2 \theta)}{-1 + 4 \sin^2 \theta} + \frac{(1 + 4 \sin^2 \theta)}{\delta^2 h_n} \right\} \pi_{1t}(\theta) = 0$$

Il est d'abord nécessaire d'éliminer le deuxième coefficient de $\frac{d \pi_{1t}(\theta)}{d\theta}$ en introduisant la nouvelle fonction $\pi(\theta)$ définie par :

$$\pi_{1t}(\theta) = \sqrt{-1 + 4 \sin^2 \theta} \pi(\theta) .$$

Cherchons donc $\frac{d \pi_{1t}(\theta)}{d\theta}$ et $\frac{d^2 \pi_{1t}(\theta)}{d\theta^2}$. On a :

$$\frac{d \pi_{1t}(\theta)}{d\theta} = \frac{4 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{-1 + 4 \sin^2 \theta}} \pi(\theta) + \sqrt{-1 + 4 \sin^2 \theta} \frac{d \pi(\theta)}{d\theta} ,$$

$$\frac{d^2 \pi_{1t}(\theta)}{d\theta^2} = \sqrt{-1 + 4 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \pi(\theta)}{d\theta^2} + \frac{8 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{-1 + 4 \sin^2 \theta}} \frac{d \pi(\theta)}{d\theta} + \frac{-4 + 8 \sin^2 \theta - 16 \sin^4 \theta}{(-1 + 4 \sin^2 \theta)^{3/2}} \pi(\theta)$$

On porte les expressions de $\frac{d^2\pi_{1t}(\theta)}{d\theta^2}$, de $\frac{d\pi_{1t}(\theta)}{d\theta}$ et de $\pi_{1t}(\theta)$ dans l'équation précédente. Celle-ci devient alors :

$$\frac{d^2\pi(\theta)}{d\theta^2} - \operatorname{tg}\theta \frac{d\pi(\theta)}{d\theta} + \left\{ -\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{(-1 + 4\sin^2\theta)}{8^2 h_n} + c \frac{(1 - 2\sin^2\theta - 32\sin^2\theta \cos^2\theta)}{(-1 + 4\sin^2\theta)^2} \right\} \pi(\theta) = 0$$

En faisant le changement de variable :

$$\sin\theta = \operatorname{th}v ,$$

on obtient l'équation (75).

ANNEXE F

Lorsque la variation de pression ne dépend plus de la longitude φ , l'équation résultante, tirée de l'équation (67) est de :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\gamma(\zeta)} \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \zeta^2} - \frac{\delta^2}{4 \sin^2 \theta} \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}) - 2 \cot \theta \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} + 2 \pi_1 \right\} \\
 = & - \frac{M_0}{\gamma(\zeta)} \left\{ \left[\frac{1}{r(\zeta)} \frac{d r(\zeta)}{d \zeta} + \frac{1}{T_\infty(\zeta)} (1 - \frac{dT_\infty(\zeta)}{d \zeta}) \right. \right. \\
 & + \left. \frac{\cos^2 \theta}{2 \sin^2 \theta} \frac{1}{\Omega_\infty(\zeta)} \frac{d \Omega_\infty(\zeta)}{d \zeta} \right] \frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta} \\
 & \left. - \frac{1}{\Omega_\infty(\zeta)} \frac{d \Omega_\infty(\zeta)}{d \zeta} \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \zeta \partial \theta} \right\} .
 \end{aligned}$$

On introduit maintenant la nouvelle fonction $\pi_1 a$ définie par :

$$\pi_1 = \sin \theta \pi_1 a$$

On a alors : Pour cela on cherche $\frac{\partial \pi_1}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \zeta^2}$, $\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \zeta \partial \theta}$, $\frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \theta^2}$.

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial \pi_{1a}}{\partial z} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial z^2} = \sin \theta \frac{\partial^2 \pi_{1a}}{\partial z^2} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial z \partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial \pi_{1a}}{\partial z} + \sin \theta \frac{\partial^2 \pi_{1a}}{\partial z \partial \theta} \quad ,$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} = \cos \theta \pi_{1a} + \sin \theta \frac{\partial \pi_{1a}}{\partial \theta} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \theta^2} = -\sin \theta \pi_{1a} + 2 \cos \theta \frac{\partial \pi_{1a}}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 \pi_{1a}}{\partial \theta^2} .$$

On porte alors ces expressions dans l'équation précédente, et on obtient ainsi l'équation (84).

ANNEXE G

On utilise simultanément la méthode des échelles multiples et celle de l'approximation de Green-Liouville. On fait alors les changements de variables :

$$\sin \theta = thV ,$$

$$\xi = M_0 z ,$$

$$\psi = \frac{1}{M_0} \varphi(\xi) .$$

On cherche donc les expressions des opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$; $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $\frac{\partial}{\partial \theta}$; $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta}$. On a :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \varphi'(\xi) \frac{\partial}{\partial \varphi} + M_0 \frac{\partial}{\partial \xi} ;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \varphi'^2(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + M_0 \left\{ \varphi''(\xi) \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2\varphi'(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \varphi} \right\} + O(M_0^2) ;$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\cos \theta}{1-th^2V} \frac{\partial}{\partial V} ;$$

$$\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial V} ;$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{1-th^2V} \frac{\partial}{\partial V} .$$

On porte alors ces expressions dans l'équation (84) on obtient l'équation (85).

ANNEXE H

On cherche une solution de l'équation (94) sous la forme :

$$\pi_{0t}(v, \lambda) = e^{\lambda \Phi(v, \lambda)}.$$

On calcule alors $\frac{d\pi_{0t}(v, \lambda)}{dv}$ et $\frac{d^2\pi_{0t}(v, \lambda)}{dv^2}$.

$$\frac{d\pi_{0t}(v, \lambda)}{dv} = \lambda \Phi'(v, \lambda) e^{\lambda \Phi(v, \lambda)},$$

$$\frac{d^2\pi_{0t}(v, \lambda)}{dv^2} = \left(\lambda \Phi''(v, \lambda) + \lambda^2 \Phi'^2(v, \lambda) \right) e^{\lambda \Phi(v, \lambda)}.$$

On porte l'expression de $\frac{d^2\pi_{0t}(v, \lambda)}{dv^2}$ et de celle de $\pi_{0t}(v, \lambda)$ dans l'équation (94). On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \Phi'^2(v, \lambda) + \lambda \Phi''(v, \lambda) \\ & + 4 \frac{\lambda^2 (1 - h^2 v)}{h^2 v} \left(h^2 v + \frac{(1 - \Delta^{1/2})}{4 \lambda^2} \right) \left(h^2 v + \frac{(1 + \Delta^{1/2})}{4 \lambda^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

On développe maintenant $\Phi(v, \lambda)$ sous la forme :

$$\Phi(v, \lambda) = \Phi_0(v) + \frac{1}{\lambda} \Phi_1(v) + \dots,$$

ce qui entraîne :

$$\Phi'(v, \lambda) = \Phi'_0(v) + \frac{1}{\lambda} \Phi'_1(v) + \dots,$$

$$\Phi'^2(v, \lambda) = \Phi'^2_0(v) + \frac{2}{\lambda} \Phi'_0(v) \cdot \Phi'_1(v) + \dots,$$

$$\Phi''(v, \lambda) = \Phi''_0(v) + \frac{1}{\lambda} \Phi''_1(v) + \dots \bullet$$

En portant les expressions de $\Phi'^2(v, \lambda)$ et celles de $\Phi''(v, \lambda)$ dans l'équation précédente, on obtient les équations (96) et (97).

ANNEXE I

On cherche la solution particulière $\pi_1(\psi, \xi, \nu)$ sous la forme :

$$\pi_1(\psi, \xi, \nu) = [A_1(\xi)\psi + A_2(\xi)F(\nu)] e^{\psi + \lambda \Phi(\nu, \lambda)}$$

Tout d'abord on a :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \psi} = \left\{ A_1(\xi) + [A_1(\xi)\psi + A_2(\xi)F(\nu)] \right\} e^{\psi + \lambda \Phi(\nu, \lambda)},$$

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \psi^2} = \left\{ 2A_1(\xi) + [A_1(\xi)\psi + A_2(\xi)F(\nu)] \right\} e^{\psi + \lambda \Phi(\nu, \lambda)},$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \nu} = \left\{ A_2(\xi) \frac{dF(\nu)}{d\nu} + [A_1(\xi)\psi + A_2(\xi)F(\nu)] \lambda \Phi'(\nu, \lambda) \right\} e^{\psi + \lambda \Phi(\nu, \lambda)},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \nu^2} = & \left\{ A_2(\xi) \frac{d^2 F(\nu)}{d\nu^2} + [A_1(\xi)\psi + A_2(\xi)F(\nu)] \lambda \Phi''(\nu, \lambda) \right. \\ & + 2\lambda \Phi'(\nu, \lambda) A_2(\xi) \frac{dF(\nu)}{d\nu} \\ & \left. + [A_1(\xi)\psi + A_2(\xi)F(\nu)] \lambda^2 \Phi'^2(\nu, \lambda) \right\} e^{\psi + \lambda \Phi(\nu, \lambda)}. \end{aligned}$$

En portant les expressions de $\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \nu^2}$, de $\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \psi^2}$ dans l'équation (102) tout en tenant compte de la relation (104), on obtient l'équation (105).

ANNEXE J

On veut résoudre l'équation :

$$\frac{d^2 F(v)}{dv^2} + 2\lambda \Phi'(v, \lambda) \frac{dF(v)}{dv} = -\frac{4\lambda}{s^2} thv(1-th^2v) \Phi'(v, \lambda) .$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$e^{\frac{1}{2\lambda} \Phi(v, \lambda)} \frac{d}{dv} \left(e^{2\lambda \Phi(v, \lambda)} \frac{dF(v)}{dv} \right) = -\frac{1}{s^2} \left(2thv(1-th^2v) \times 2\lambda \Phi'(v, \lambda) \right),$$

ou encore

$$\frac{d}{dv} \left(e^{2\lambda \Phi(v, \lambda)} \frac{dF(v)}{dv} \right) = -\frac{1}{s^2} \left\{ 2thv(1-th^2v) \times 2\lambda \Phi'(v, \lambda) \right\} e^{2\lambda \Phi(v, \lambda)} .$$

On intègre une fois par rapport à v on a :

$$e^{2\lambda \Phi(v, \lambda)} \frac{dF(v)}{dv} = -\frac{1}{s^2} \left\{ 2thv(1-th^2v) e^{2\lambda \Phi(v, \lambda)} - L(v) \right\} ,$$

où on a posé :

$$L(v) = 2 \int (1-th^2v)(1-3th^2v) e^{2\lambda \Phi(v, \lambda)} dv .$$

En simplifiant par $e^{2\lambda\Phi(v,\lambda)}$ on obtient :

$$\frac{dF(v)}{dv} = -\frac{1}{8^2} \left[2thv(1-th^2v) - \frac{L(v)}{e^{2\lambda\Phi(v,\lambda)}} \right],$$

d'où

$$F(v) = -\frac{1}{8^2} \left[th^2v - \int \frac{L(v)}{e^{2\lambda\Phi(v,\lambda)}} dv \right].$$

ANNEXE K

Du modèle d'équation (107), on veut déduire le modèle d'équation utilisé dans l'étude des ondes de Boussinesq avec effet de la force de Coriolis [8].

Pour cela on retourne au système de coordonnées curvilignes \bar{x}, \bar{y} :

$$\bar{x} = \frac{1}{\delta} \cos \theta_0 (\varphi - \varphi_0) ,$$

$$\bar{y} = \delta^{-1} (\theta - \theta_0) .$$

Ceci nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = im = \delta^{-1} \cos \theta_0 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \delta^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} .$$

On se place maintenant au voisinage de φ_0 et θ_0 :

$$\varphi \approx \varphi_0 + \delta \cos \theta_0 \bar{x} ,$$

$$\theta \approx \theta_0 + \delta \bar{y} .$$

Lorsque $\delta \ll 1$ on peut chercher des solutions périodiques en \bar{x} et \bar{y} . Ceci revient à remplacer m par $\delta^{-1} \cos \theta_0 k$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$ par $i \delta^{-1} l$ où k et l sont les nombres d'onde respectivement suivant \bar{x} et \bar{y} .

On aboutit ainsi à l'équation (108) en prenant les précautions :

(i) de simplifier par $\Omega_\infty(\zeta)$; (ii) de remplacer $\delta^{-1} \cos \theta_0 \Omega_\infty(\zeta)$ par $\Omega_\infty(\zeta)$; avant d'effectuer le passage à la limite $\delta \rightarrow 0$.

QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS DES PARAMETRES SANS DIMENSIONS

$$c_0 \approx 350 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\gamma \approx 1,4$$

$$g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Nombre de Boussinesq $B_0 = \frac{\gamma g H_0}{c_0^2}$

$H_0 \text{ (m)}$	100	200	300	500	1000	1500	2000
B_0	0,011	0,022	0,033	0,05	0,112	0,168	0,22

Lorsque H_0 atteint la valeur 10000 m (10 km) B_0 est voisin de l'unité. La présente approximation (approximation de Boussinesq) est valable jusqu'à un H_0 de l'ordre de 1000 m à 2000 m.

Nombre de Mach $M_0 = \frac{U_0}{c_0}$

$U_0 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$	10	20	30	40	50	60	80
M_0	0,02	0,05	0,08	0,114	0,14	0,17	0,22
M_0^2	$4 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$4,8 \cdot 10^{-2}$

Ceci montre que les termes en M_0^2 sont toujours négligeables dans la théorie des écoulements atmosphériques.

Calcul du coefficient de γ :

$$\gamma = \frac{M_0^2}{2SR_0} \sin^2\theta ,$$

$$\Omega = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ rd. s}^{-1} ,$$

$$a_0 = 6,3 \cdot 10^6 \text{ m} .$$

$U_0(\text{m s}^{-1})$	10	20	30	40	50	60	80
$M_0^2 / 2SR_0$	0,036	0,07	0,108	0,144	0,188	0,216	0,28

Le choix qu'on a fait à la page 51 est bon.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LONGUET-HIGGINS M.S. "Planetary waves on a rotating sphere",
Proc. Roy. Soc. Lond., vol. A 279, 1964, p. 446-473.
- [2] BLAMONT J.E. et TEITELBAUM H. "La rotation du vecteur vitesse
horizontale dans les marées atmosphériques".
Ann. Géoph., vol. 24, 1968, p. 387-392.
- [3] LINDZEN R.S. "Equatorial planetary waves in shear"
Part I, J. Atmos. Sci., vol. 28, n° 4, 1971, p. 609-622.
- [4] LINDZEN R.S. "Equatorial planetary waves in shear"
Part II, J. Atmos. Sci., vol. 29, n° 8, 1972, p. 1452-1463.
- [5] PEDLOSKY J. "Geophysical Fluid Dynamics".
Springer, Berlin, 1979.
- [6] ZEYTOUNIAN R. "Equations modèles d'évolution pour les écoulements
troposphériques".
C.R.Ac.Sc. Paris, vol. 303, Série I, 1986, p. 265-268.
- [7] BOIS P.A., HASNAOUI M. et ZEYTOUNIAN R. "Influence de la force de
Coriolis sur les ondes de gravité atmosphériques dans l'approximation
hydrostatique".
C.R.Ac.Sc. Paris, vol. 303, Série II, 1986, p. 1165-1167.
- [8] HASNAOUI M. "Théorie asymptotique des ondes de Boussinesq dans le champ
de la force de Coriolis".
Thèse de Doctorat de 3ème cycle, Univ. de Lille I, 1986.
- [9] ZEYTOUNIAN R. "A Rigorous derivation of the equations of compressible
viscous fluid motion with gravity at low Mach number".
Arch. Mech. Stos., vol. 26, 1974, p. 499-509.

- [10] BOIS P.A. "Asymptotic theory of Boussinesq waves in the atmosphere".
Bull. Irma Lille, vol. VI, fasc. 4, N° 2, 1984, pp. 25-33.
- [11] TEITELBAUM H. "La polarisation des marées et des ondes de gravité dans la haute atmosphère".
Thèse de Doctorat-ès-Sciences Physiques; Univ. de Paris VI, 1973.
- [12] NAYFEH A.H. "Perturbation methods".
J. Wiley and Sons. New-York, 1973.
- [13] VAN DYKE M.D. "Perturbation methods in fluid mechanics".
Parabolic Press, New-York, 1976.
- [14] ABRAMOVITZ M. & STEGUN J. "Handbook of mathematical functions".
Dover, New-York, 1965.
- [15] HOUGH S.S. "On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides".
Part II - Phil. Trans. Roy. Soc. (London) vol. A, 189, p. 201-257,
1897-98.
- [16] LONGUET-HIGGINS M.S. "The eigenfunctions of Laplace's Tidal Equations over a sphere".
Phil. Trans. Roy. Soc., vol. A 262, 1967-68, p. 511-607.
- [17] MORSE P.M. and FESHBACH H. "Methods of theoretical physics".
Part II, p. 1325.
Mac Graw-Hill Book Comp. Inc., 1953.
- [18] P.A. BOIS "Techniques asymptotiques pour des problèmes de gaz pesants avec application aux ondes atmosphériques".
Thèse de Doctorat-ès-Sciences Math., Univ. de Paris VI, 1979.
- [19] RABERANTO M. et BOIS P.A. "Modèle pour la représentation des ondes planétaires en atmosphère non isotherme".
C.R.Ac.Sc. Paris, vol. 309, Série II, p. 957-962, 1989.

- [20] BOIS P.A. "Reflection of gravity waves in atmospheric shear flow with Coriolis forces".
J.M.T.A., vol. 7, suppl. N° 2, p. 13-33, 1988.
- [21] GOSSARD E.E. et HOOKE W.H. "Waves in the Atmosphere" Elsevier.
Amsterdam-Oxford New-York, 1975.
- [22] BRILLOUIN M. "Marées dynamiques - Les latitudes critiques",
C.R.Ac.Sc. Paris, vol. 194, série A, p. 801-804, 1932.
- [23] BOYD J.P. "The effects of latitudinal shear on equatorial waves.
Part I : Theory and Methods". J. Atm. Sci., vol. 35, p. 2236-2258
1978.
- [24] BOYD J.P. "The Effects of Latitudinal Shear, on Equatorial waves.
Part II : Applications to the Atmosphere".
J. Atm. Sci., vol. 35, p. 2259-2267, 1978.
- [25] HOSKINS J.B. and KAROLY D.J. "The Steady response of a Spherical
Atmosphere to thermal and Orographic Forcing".
J. Atm. Sci., vol. 38, p. 1179-1196, 1981.
- [26] SASHEGYI K.D. and GEISLER J.E. "A linear Model Study of Cross-Equatorial
Flow Forced by Summer Monsoon Heat Sources".
J. Atm. Sci., vol. 44, p. 1706-1722, 1987.
- [27] YANAI M. and LUMONG-MING "Equatorial trapped waves at the 200 mb level
and their Association with Meridional Convergence of wave Energy Flux".
J. Atm. Sci., vol. 40, p. 2785-2803, 1983.
- [28] ZHANG C. WEBSTER P.J. "Effects of zonal flow on equatorially trapped
waves".
J. Atm. Sci., vol. 46, p. 3632-3652, 1989.



MOTS CLES

ONDES PLANETAIRES
APPROXIMATION DE BOUSSINESQ
MODELISATION ASYMPTOTIQUE
PERTURBATIONS SINGULIERES
METHODE DES ECHELLES MULTIPLES
POINTS TOURNANTS.

RESUME

Dans le cadre de la modélisation asymptotique des écoulements atmosphériques, on étudie la propagation des ondes planétaires dans un milieu à température non constante. Ces ondes sont des ondes de gravité se propageant dans l'atmosphère, dont la longueur d'ondes caractéristique horizontale est du même ordre de grandeur que le rayon de la Terre. On ne peut donc plus négliger la rotondité de celle-ci.

L'influence de l'inhomogénéité du milieu apparaît dans ces ondes, d'une part, directement par la stratification du milieu; d'autre part, par le couplage des effets de celle-ci avec les effets de la force de Coriolis.

En tenant compte de ces propriétés et en se plaçant dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, on construit un modèle asymptotique pour la description de ces ondes et on montre qu'il peut exister des niveaux de réflexion suivant l'altitude et des points-limites en latitude dont le comportement est qualitativement analogue.

Une conséquence de cette dernière propriété est que l'on peut obtenir, tout au moins théoriquement, "des ondes piégées" entre deux zones de latitudes déterminées. S'il existe simultanément des niveaux de réflexion azimutaux et radiaux, on peut voir se former, une configuration d'ondes "en couronne". Une telle zone lorsqu'elle existe, est toujours équatoriale.