

N° d'ordre : 597

55376  
1990  
13-1

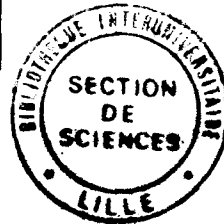
55376  
1990  
13-1

Thèse  
présentée à  
l'Université des Sciences et Techniques  
de Lille Flandres Artois  
pour obtenir  
le grade de Docteur en Mécanique  
par

Drouot ANDRIAMANALINA

Explosion violente d'un fil  
rectiligne dans un écoulement.  
Application à l'hypersonique

Texte et figures



Jury:

Président:

Monsieur ALZIARY de ROQUEFORT, Professeur à l'Université de Poitiers

Rapporteurs:

Monsieur GUIRAUD, Professeur à l'Université de Paris VI

Monsieur DYMENT, Professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois

Membres:

Monsieur BOIS, Professeur à l'université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois

Monsieur VEUILLOT, Chef de Division à l'O.N.E.R.A Chatillon

Monsieur MERLEN, Docteur d'Etat et Ingénieur à l'I.M.F.L

soutenue le 12 Novembre 1990



030 054163 3

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Aspect théorique</b>	<b>11</b>
2.1	Ecoulement de base . . . . .	11
2.2	Modélisation de l'effet d'un écoulement uniforme . . . . .	15
2.3	Equations régissant le phénomène . . . . .	22
2.3.1	Equations générales . . . . .	22
2.3.2	Conditions sur le choc . . . . .	27
2.3.3	Conditions à la frontière $\Sigma'$ . . . . .	29
2.3.4	Equation globale de l'énergie . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Résolution et traitement numérique</b>	<b>38</b>
3.1	Calcul de l'écoulement de base . . . . .	38
3.2	Fonctions de répartition . . . . .	40
3.3	Résolution des équations d'ordre 1 . . . . .	42
3.4	Résolution de l'effet de $\bar{p}$ . . . . .	47
3.5	Résolution de l'ordre 2 propre à l'effet isotrope de $\bar{U}$ . . . . .	49
3.6	Résolution de l'ordre 2 propre à l'effet anisotrope de $\bar{U}$ . . . . .	51
3.7	Explosion instantanée ( $\alpha = 0$ ) . . . . .	53
3.8	Cas $\alpha = 2$ . . . . .	58
3.9	Résultats . . . . .	61
3.9.1	Variation des coefficients $\xi_j$ et $\xi'_j$ en fonction de $\alpha$ et $\gamma$ . . . . .	62
3.9.2	Valeurs sur le choc . . . . .	63
3.9.3	Courbes des répartitions . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Application aux écoulements hypersoniques</b>	<b>66</b>
4.1	Problème du piston indéformable . . . . .	66
4.2	Analogie instationnaire . . . . .	69
4.2.1	Rappel sur les écoulements hypersoniques forts . . . . .	69
4.2.2	Analogie . . . . .	72
4.3	Écoulements hypersoniques autour de corps en puissance . . . . .	73
4.3.1	Écoulements hypersoniques de base . . . . .	73

4.3.2	Écoulements hypersoniques autour de corps en puissance en incidence . . . . .	74
4.3.3	Effet de la contre-pression . . . . .	75
4.3.4	Forme définitive et mise en équations . . . . .	76
4.4	Fonctions de répartition . . . . .	79
4.5	Domaine de validité du modèle . . . . .	79
4.5.1	Calculs des efforts aérodynamiques . . . . .	80
4.5.2	Correction d'entropie et lignes de courant . . . . .	82
4.5.3	Résultats . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Formulation généralisée des équations</b>	<b>87</b>
5.1	Equations générales . . . . .	87
5.2	Forme conservative des équations . . . . .	88
5.3	Conditions sur le choc $\Sigma$ ramenées en $\xi = 1$ . . . . .	98
5.4	Conditions sur $\Sigma'$ ramenées en $\xi = \xi'_0$ . . . . .	100
5.5	Equation de conservation globale de l'énergie . . . . .	101
5.6	Solution analytique pour le cas $\alpha = 0$ . . . . .	104
5.7	Comportement de $u_{0\xi}, p_{0\xi}, \rho_{0\xi}$ au voisinage de $\xi = \xi'_0$ . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>108</b>

## Avant propos

Le travail d'une recherche scientifique n'est jamais l'œuvre absolue de celui qui le présente. Si cette thèse a pu voir le jour c'est grâce aux aides, aux soutiens et aux conseils de très nombreuses personnes.

Ainsi, je sais gré à Monsieur Alziary de Roquefort, Professeur à l'Université de Poitiers, qui m'a fait honneur de présider le jury et à Monsieur Guiraud, Professeur à l'Université de Paris VI, qui a consacré son temps à l'examen de mon travail.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à Monsieur Dymont, Professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille pour l'aide et l'attention qu'il m'a réservées tout au long de ces trois années d'étude. Qu'il soit assuré de mon estime sans limite.

Je dois témoigner une reconnaissance particulière à Monsieur Merlen, Docteur d'Etat, Ingénieur à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille. Il n'a ménagé ni son temps ni sa peine pour m'éclairer dans de nombreux points de ce travail. Les conseils et l'aide inestimable qu'il m'a constamment prodigués font de cette thèse le fruit d'une inoubliable collaboration. C'est dans cet état d'esprit que je compte enrichir les connaissances scientifiques que j'ai pu acquérir durant la préparation de cette thèse. Que Monsieur Merlen veuille bien agréer l'expression de ma profonde gratitude.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Monsieur Veillot, Chef de Division à l'O.N.E.R.A ainsi qu'à Monsieur Bois, Professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille pour avoir bien voulu participer au jury.

Je remercie également le Ministère de la Recherche et de la Technologie qui m'a octroyé une allocation de recherche. Sans cette aide financière, je n'aurais pas pu mener à terme ce travail.

La partie numérique qui constitue la majeure partie de mon travail a été effectuée à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille. Je me permets ainsi d'exprimer ma reconnaissance à Monsieur Bahurel, Directeur de cet institut qui a bien voulu me donner l'autorisation d'accéder au centre de calcul de son établissement. Je profite de l'occasion pour remercier les membres du groupe informatique et en particulier Monsieur Masek, pour l'aide qu'ils m'ont apportée, ainsi que Monsieur Pruvost, technicien à l'I.M.F.L dans le groupe de Mécanique des Fluides Fondamentale, qui s'est occupé minutieusement de certaines figures de cette thèse.

Je n'oublie pas enfin toute ma famille et Mademoiselle Daï qui n'ont pas cessé de me soutenir moralement et de m'encourager. Afin de leur prouver mes remerciements et mon affection, je leur dédie cette thèse.

## Principales notations

Les principales notations sont données ci-après par ordre alphabétique. Les symboles surlignés correspondent aux grandeurs du milieu ambiant non perturbé par l'explosion: ( $\bar{p}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{c}$ )

Les symboles accentués correspondent aux grandeurs sur la frontière ( $\Sigma'$ ).

Les grandeurs sur le choc sont indicées "c".

Toutes les grandeurs indicées " $\infty$ " sont caractéristiques de l'écoulement infini amont (en hypersonique).

Les grandeurs sans dimensions correspondant aux grandeurs physiques ( $p$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ) dans le milieu perturbé sont affectées de:

- l'indice 0 pour l'écoulement de base
- l'indice 1 pour l'écoulement relatif à l'effet d'ordre 1 de  $\bar{U}$
- l'indice 21 pour l'écoulement relatif à l'effet anisotrope d'ordre 2 de  $\bar{U}$
- l'indice 22 pour l'écoulement relatif à l'effet de la contre-pression  $\bar{p}$
- l'indice 23 pour l'écoulement relatif à l'effet isotrope d'ordre 2 de  $\bar{U}$

$$A = \frac{(\gamma+1)(2-\alpha)}{2(2+\alpha)}$$

$$\bar{c} : \text{vitesse du son: } \bar{c}^2 = \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}}$$

$C_p$  : coefficient de pression

$D$  : déterminant de la matrice  $[M_4]$

$D'$  : déterminant de  $[M_3]$

$\mathcal{D}_0$  : domaine perturbé par l'explosion, compris entre  $\Sigma'_0$  et  $\Sigma_0$ .

$$e, \bar{e} : \text{énergies interne telles que: } e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho} \text{ et } \bar{e} = \frac{\bar{p}}{(\gamma-1)\bar{\rho}}$$

$E$  : intensité de l'apport d'énergie

$$\hat{E} = \left( \frac{Et^{2+\alpha}}{\bar{p}} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$\mathcal{E}_0$  : énergie isotrope par unité de longueur telle que  $\mathcal{E}_0 = Et^\alpha$

$f_x, f_{xx}$  : dérivées première et seconde de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $x$  quelconque

$F_x, F_z$  : traînée et portance

$G_i, i = 1, 2, 3$  : fonctions dépendant de  $u_0$  et de  $z_0$ . Elles sont déterminées à partir des fonctions simples  $f_i(u_0, z_0)$ .

$h$  : enthalpie d'arrêt

$l$  : coordonnée sans dimension du choc (Sedov):  $l = \frac{R}{R_0^*}$

$m$  : paramètre déterminant la nature de l'explosion:

- $m = 1$  pour le cas cylindrique
- $m = 2$  pour le cas sphérique

$\overline{M}$  : nombre de Mach du milieu ambiant:  $\overline{M} = \frac{\overline{U}}{c}$

$M_c$  : nombre de Mach du choc cylindrique:  $M_c = \frac{\omega_0}{c}$

$M_R$  : nombre de Mach par rapport à l'écoulement extérieur:  $M_R = \frac{\omega - U_0}{c}$

$M_3, F_{20}$  : matrices carrées d'ordre 3 dont les coefficients dépendent de  $u_0$  et de  $z_0$

$M_4, F_1$  : matrices carrées d'ordre 4 dont les coefficients dépendent de  $u_0$  et de  $z_0$

$M_\infty$  : nombre de Mach amont défini par:  $M_\infty = \frac{V_\infty}{c}$

$\hat{n}$  : exposant caractérisant la forme du corps tel que  $\hat{n} = \frac{2+\alpha}{4}$

$\varphi$  : puissance de l'apport de l'énergie

$p_c$  : pression sur le choc du côté du fluide en mouvement

$P_1$  : matrice définie par  $[P_1] = [M_4]^{-1}[F_1]$

$P_{20}$  : matrice définie par  $[P_{20}] = [M_3]^{-1}[F_{20}]$

$q$  : variable de perturbation de Sedov relative à  $\overline{p}$

$\overline{q}$  : vecteurs vitesse telles que:  $\overline{q} = \overline{U} \overline{z}$

$q_n, q_r$  : composantes normale et orthoradiale de la vitesse en aval du choc

$r, \theta$  : coordonnées polaires associées au repère mobile

$\hat{r}, \hat{\theta}$  : coordonnées polaires dans le repère fixe lié au fil

$r = R_0(t) = \hat{E}\xi_0$  : équation de l'onde de choc

$r = R(t, \theta)$  : position de l'onde de choc dans le repère mobile

$r = \hat{R}(t, \theta)$  : position de l'onde de choc dans le repère fixe

$r = R'(t, \theta)$  : position de la frontière ( $\Sigma'$ ) dans le repère mobile

$R_0^+$  : longueur caractéristique de Sedov:  $R_0^+ = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

$\mathfrak{R}(\hat{O}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  : repère fixe lié au fil dont l'axe est  $\hat{O}\vec{X}$

$\mathfrak{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  : repère en translation uniforme de vitesse  $\beta\bar{U}$  suivant  $\hat{O}\vec{Z}$  avec  $\vec{z} = \vec{Z}$

$s_0$  : entropie de l'écoulement de base:  $s_0 = \log\left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)$

$t$  : temps

$t^+$  : temps caractéristique:  $t^+ = \left(\frac{\gamma E}{\rho c^2}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}$

$\bar{U}$  : vitesse de l'écoulement uniforme suivant  $\hat{O}\vec{Z}$

$u, v$  : composantes radiale et orthoradiale de la vitesse  $\vec{q}$  telle que:  $\vec{q} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta$

$U_n, U_\tau$  : composantes normale et orthoradiale de la vitesse en amont du choc

$V_c$  : vitesse en aval du choc

$V_\infty, \rho_\infty, p_\infty$  : vitesse amont, masse volumique et pression de l'écoulement hypersonique

$w$  : vitesse de perturbation longitudinale

$x$  : abscisse du corps suivant  $O\vec{x}$

$\{\vec{X}_1\}$  : vecteur de composantes  $x_1 = \rho_1 u_0, y_1 = \rho_0 u_1, z_1 = \rho_0 v_1$  et  $p_1$

$\{\vec{X}_{21}\}$  : vecteur de composantes  $x_{21} = \rho_{21} u_0, y_{21} = \rho_0 u_{21}, z_{21} = \rho_0 v_{21}$  et  $p_{21}$

$\{\vec{X}_{22}\}$  : vecteur de composantes  $x_{22} = \rho_{22} u_0, y_{22} = \rho_0 u_{22}$  et  $p_{22}$

$\{\vec{X}_{23}\}$  : vecteur de composantes  $x_{23} = \rho_{23} u_0, y_{23} = \rho_0 u_{23}$  et  $p_{23}$

$z_0$  : variable auxiliaire définie par:  $z_0 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$

$\alpha$  : constante positive  $\leq 2$

$\alpha_i$  : incidence

$\beta$  : scalaire caractérisant la vitesse du repère mobile

$\gamma$  : chaleur spécifique du milieu ambiant

$\delta$  : coefficient sans dimension caractérisant la minceur du corps:  $\delta = \frac{R(L)}{L}$

$\varepsilon$  : fonction définie par  $\varepsilon = u_0 - \frac{\gamma+1}{2}$

$\eta$  : variable adimensionnée caractérisant l'effet de  $\bar{U}$ :  $\eta = \frac{\bar{U}}{\xi_0} \left( \frac{\bar{\rho} t^{2-\alpha}}{E} \right)^{\frac{1}{4}}$

$\tilde{\eta}$  : variable adimensionnée pour le cas du piston rigide:  $\tilde{\eta} = (1 - \beta)\eta$

$\zeta$  : variable adimensionnée caractérisant l'effet de  $\bar{p}$ :  $\zeta = \frac{\bar{p}}{\xi_0^2} \left( \frac{t^{2-\alpha}}{\bar{\rho} E} \right)^{\frac{1}{2}}$

$\lambda$  : angle de la tangente au choc avec le rayon polaire

$\lambda'$  : angle de la tangente à  $\Sigma'$  au rayon polaire

$\lambda_s$  : coordonnée adimensionnée variant de  $\xi_0'$  à 1.

$\mu$  : variable définie par  $\mu = \log \xi$

$\rho, p$  : masse volumique et pression du domaine  $\mathcal{D}_0$

$\rho_0, p_0, u_0$  : fonctions sans dimension, normalisées relatives à  $\rho, p, u$

$\tilde{\rho}_i, \tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{p}_i$  : fonctions de répartition normées relatives à la masse volumique, vitesses et pression

$\psi$  : angle de déviation des trajectoires

$\tau$  : épaisseur relative du corps

$\xi$  : coordonnée adimensionnée relative à  $r$

$\xi_0$  : constante de normalisation

$\omega$  : vitesse de propagation de l'onde de choc:  $\omega = R_t \sin \lambda$

$\omega'$  : vitesse de propagation de la frontière ( $\Sigma'$ ):  $\omega' = R_t' \sin \lambda'$

$\omega_0$  : vitesse de propagation du choc telle que  $\omega_0 = R_{O_t}$

$\left\{ \vec{\Lambda}_1 \right\}$  : vecteur de composantes  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$

$\left\{ \vec{\Lambda}'_1 \right\}$  : vecteur de composantes  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$  et  $\lambda'_4$

$\Pi$  : fonction définie par  $\Pi = \frac{p}{\rho^\gamma}$



$\Pi_0$  : plan perpendiculaire au fil auquel on associe le repère polaire  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

$\Pi_1$  : plan formé par  $V_\infty$  et  $V_c$

$\Sigma$  : frontière formée par l'onde de choc

$\Sigma_0$  : surface formée par l'onde de choc cylindrique de l'écoulement de base

$\Sigma'_0$  : frontière matérielle où la masse volumique s'annule.

# Chapitre 1

## Introduction

Au cours des années 1945 à 1965, l'étude des explosions violentes dans un fluide a été menée avec succès grâce aux travaux de Taylor [1], Sedov [2], Sakurai [8], Von Neumann [11].

A cette époque, la possibilité d'une résolution numérique des équations d'Euler n'était pas envisagée et ce thème de recherche n'a pu être creusé que grâce à une approche théorique et analytique. La résolution de ce problème fut l'un des grands succès de l'analyse dimensionnelle couplée à la théorie des groupes de transformations et aux développements asymptotiques.

La découverte de solutions asymptotiques dans le cas des explosions instantanées a, non seulement été un résultat élégant sur le plan théorique mais également une base indispensable pour le développement des techniques numériques à titre d'initialisation du calcul (Von Neumann [11], Goldstine [12]) où de comparaison des résultats (Chuskin [6], Korobeinikov [7], Godounov [19], Goldstine [12]).

Depuis les années 1970, l'attention s'est naturellement portée sur les techniques de résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la mécanique des fluides et peu de travaux ont cherché à s'appuyer sur la physique du phénomène. Il faut dire que les méthodes numériques et surtout leur mise en oeuvre technique sont parfois plus tributaires des langages et des architectures informatiques que des propriétés des systèmes d'équations à résoudre; l'exemple de la méthode des caractéristiques, très adaptée aux équations hyperboliques mais peu maniable "informatiquement" a sans doute contribué à éloigner les numériciens de la physique. De ce fait, ils ont réduit leurs travaux à l'expérimentation numérique et à la comparaison a posteriori de leurs résultats avec une expérience dont la fiabilité est régulièrement mise en doute pour expliquer les différences avec le calcul. De plus, lorsque la sensibilité du phénomène est très grande, la seule ressource est de multiplier les points de maillage et parfois sans succès: citons à ce propos les écoulements turbulents et, plus récemment, le problème de la localisation des chocs en écoulement hypersonique. Dans ce dernier cas, des points de repères théoriques peuvent être de précieux auxiliaires. Nous verrons dans ce document que certaines propriétés des solutions de l'explosion apportent un éclairage nouveau sur ce problème.

Evidemment, aujourd'hui, une étude théorique ne se limite pas généralement à la recherche de solutions analytiques; le calcul numérique permet de calculer l'ensemble des solutions, mais la modélisation ramène le problème à des systèmes mathématiques dont l'existence et le comportement des solutions sont établis analytiquement. Le calcul ne consiste donc pas en la simple résolution d'un problème numérique, il est une approximation d'un problème analytique qui a une solution. Le lien entre les résultats numériques et le problème mathématique est établi, ce qui n'est pas le cas pour la plupart des schémas numériques traitant de problèmes non linéaires. La contre partie est, bien entendu, le cadre restreint dans lequel il faut limiter les hypothèses de travail pour pouvoir bénéficier de simplifications mathématiques suffisantes offrant des possibilités de développements théoriques. C'est en ce sens qu'il faut considérer nos résultats comme des points de repère qui, nous l'espérons, enrichiront la culture et les débats scientifiques tant sur l'explosion que sur son analogie avec certains écoulements hypersoniques.

Cette étude est structurée de la manière suivante:

- Le chapitre 2 présente l'aspect analytique de l'écoulement consécutif à l'explosion non instantanée d'un fil rectiligne infini dans un écoulement initialement uniforme. Nous abordons la mise en équation et la modélisation du problème par l'analyse dimensionnelle et la méthode des petites perturbations. Les conditions sur le choc ainsi que celles sur la frontière  $\Sigma'$  où la masse volumique s'annule sont déterminées analytiquement. La conservation globale de l'énergie est donnée sous forme finie. Nous obtenons alors un modèle qui permet une approche séquentielle du problème: la résolution successive des différents systèmes différentiels aboutit à la détermination complète du champ aérodynamique.
- La résolution et le traitement numérique du problème fait l'objet du chapitre 3. Nous exposons:
  - Les moyens numériques utilisés pour résoudre les systèmes: nous faisons souvent appel aux méthodes de Runge-Kutta [21] et d'Adams-Bashforth [20].
  - Les cas particuliers: celui de l'explosion instantanée et celui de l'explosion où la frontière  $\Sigma'$  se dilate à vitesse constante.
  - Les résultats de calcul suivis d'un commentaire détaillé des courbes tracées.
- L'aspect pratique de l'étude, traité dans le chapitre 4, est marqué par deux importantes sections:
  - Le problème du piston indéformable
  - L'analogie instationnaire avec les écoulements hypersoniques

On montre le lien mathématique entre l'explosion linéique et l'écoulement hypersonique autour d'obstacles de formes particulières, nommés "corps en puissance". Des conclusions physiques intéressantes sont mises en évidence.

- Dans le chapitre 5, nous donnons une formulation généralisée des équations. Cette généralisation permet d'établir un code de calcul valable aussi bien pour l'explosion ponctuelle que pour l'explosion linéique. Une confrontation des résultats obtenus avec ceux acquis dans la littérature met en évidence la validité et la fiabilité de notre modèle.
- Les formules utiles, les relations entre les divers paramètres et grandeurs ainsi que les expressions et comportements asymptotiques des fonctions sont donnés, par ordre d'apparition dans le texte, en Annexe. Un résumé des méthodes de Runge-Kutta et d'Adams-Bashforth s'y trouve également.
- Les résultats de calcul des fonctions de répartition du champ aérodynamique ( $\rho^*$ ,  $p^*$ ,  $u^*$  et  $v^*$ ), des fonctions de courant ( $\psi_0$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ ) suivant les valeurs croissantes de  $\alpha$  (ou  $\hat{n}$ ) et de  $\gamma$  sont exposés et classés sous forme de tableaux numérotés dans le fascicule des résultats numériques.

# Chapitre 2

## Aspect théorique

### 2.1 Ecoulement de base

Considérons un milieu ambiant au repos assimilable à un gaz parfait de chaleur spécifique  $\gamma$ , de masse volumique  $\bar{\rho}$  et de pression  $\bar{p}$  constantes, au sein duquel un fil rectiligne infini libre de manière isotrope, à partir de l'instant  $t = 0$ , une énergie très intense dont la répartition par unité de longueur est notée  $\mathcal{E}_0$ . Cette grandeur  $\mathcal{E}_0$  suit une loi puissance du temps  $t$ :

$$(2.1) \quad \mathcal{E}_0 = Et^\alpha$$

où

- $\alpha$  est une constante arbitraire qui vérifie l'inégalité  $0 \leq \alpha \leq 2$  (le choix de la limite supérieure sera justifié par la suite),
- $E$  est une constante dont la valeur est suffisamment grande pour que l'on puisse considérer l'explosion comme violente.

Physiquement, le phénomène se traduit par l'expansion d'une onde de choc cylindrique  $\Sigma_0$  de très forte intensité qui sépare le milieu au repos et le milieu  $\mathcal{D}_0$  perturbé par l'explosion. Celui-ci est le siège d'un écoulement instationnaire dont nous allons calculer les caractéristiques.

Soit  $(\mathcal{R} : \vec{O}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  un repère fixe avec  $\vec{O}\vec{X}$  pris le long du fil et  $\Pi_0$  un plan perpendiculaire au fil (fig 1, fig 2). Le phénomène est supposé adiabatique et l'écoulement consécutif à l'explosion est plan et à symétrie cylindrique. On associe à  $\Pi_0$ , le repère  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  dans lequel  $r$  et  $\theta$  représentent les coordonnées polaires (fig 3).

On note respectivement par  $\rho$  et  $p$  la masse volumique et la pression et par  $u, v$  les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse d'une particule.

Compte tenu de la symétrie, la composante tangentielle  $v$  est nulle et les inconnues  $\rho, p, u$  ainsi que la position du choc ( $\Sigma_0$ ) sont indépendantes de  $\theta$ . L'écoulement à l'intérieur du milieu ( $\mathcal{D}_0$ ) est régi par les équations suivantes:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} r\rho_t + (r\rho u)_r &= 0 \\ \rho[r u_t + r u u_r] + r p_r &= 0 \\ r\Pi_t + r u \Pi_r &= 0 \\ \text{où } \Pi &= \frac{p}{\rho^\gamma} \end{aligned}$$

Le choc  $\Sigma_0$  d'équation  $r = R_0(t)$  est supposé suffisamment intense pour qu'il soit possible de négliger, en première approximation, la pression  $\bar{p}$  devant  $p$ . Ainsi les conditions sur le choc s'écrivent:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \rho &= \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \bar{\rho} \\ u &= \frac{2\omega_0}{\gamma + 1} \\ p &= \frac{2\bar{\rho}\omega_0^2}{\gamma + 1} \end{aligned}$$

dans lesquelles  $\omega_0$  désigne la vitesse de propagation du choc définie par:

$$(2.4) \quad \omega_0 = R_{0,t}$$

L'intensité du choc décroît à mesure qu'il se déplace; cela signifie qu'il arrive un moment où il n'est plus possible de négliger la pression  $\bar{p}$ . Appellons  $M_c$  le nombre de Mach du choc tel que :

$$(2.5) \quad M_c = \frac{\omega_0}{\bar{c}}$$

où  $\bar{c}$  est la vitesse du son définie par:

$$(2.6) \quad \bar{c}^2 = \gamma \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$$

En désignant par  $p_c$  la pression sur le choc du côté du fluide en mouvement, nous pouvons distinguer schématiquement trois phases :

- $M_c \rightarrow \infty \Rightarrow p_c \gg \bar{p}$  : choc violent, la pression  $\bar{p}$  peut être négligée

- $M_c > 1 \Rightarrow p_c \sim \bar{p}$  : choc atténué , l'effet de  $\bar{p}$  ne peut plus être négligé puisque  $p$  et  $\bar{p}$  sont de même ordre de grandeurs .
- $M_c \rightarrow 1 \Rightarrow p_c \simeq \bar{p}$  : choc dégénéré en onde acoustique dont nous n'aborderons pas l'étude ici.

Dans cette section, nous étudierons la première phase qui vérifie l'hypothèse de choc fort ( $p \gg \bar{p}$ ) . L'inventaire des grandeurs intervenant dans le phénomène est:

- données constantes :  $E, \bar{p}, \alpha, \gamma$  dont seules  $E$  et  $\bar{p}$  sont dimensionnées.
- inconnues :  $\rho, p, u, R_0$
- variables :  $r, t$

L'analyse dimensionnelle des équations (2.1), (2.2), (2.3) fournit les relations suivantes, le symbole  $\sqcup$  signifiant "a même dimension que":

- $\rho \sqcup \bar{p}$
- $u \sqcup \frac{r}{t}$
- $R_0 \sqcup r$
- $E \sqcup \frac{\bar{p} r^4}{t^{(2+\alpha)}}$
- $p \sqcup \frac{\bar{p} r^2}{t^2}$

Comme il n'y a que deux données dimensionnées  $E$  et  $\bar{p}$ , il n'est possible de construire un système de grandeurs primaires qu'en utilisant conjointement avec  $E$  et  $\bar{p}$  une des variables  $r$  ou  $t$ . Il y a similitude interne. Nous choisissons  $t$  pour troisième grandeur primaire .

On note par  $\xi$  la variable sans dimension relative à  $r$ ; nous pouvons lui donner la forme :

$$(2.7) \quad \xi = \frac{r}{R_0(t)}$$

car  $R_0(t)$  peut s'exprimer, en fonction de  $E, \bar{p}, t$  à l'aide de :

$$(2.8) \quad R_0(t) = \hat{E} \xi_0$$

où

$$(2.9) \quad \hat{E} = \left( \frac{Et^{(2+\alpha)}}{\bar{p}} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$\xi_0$  est une constante adimensionnée qui permet de normaliser à 1 la valeur de  $\xi$  sur le choc

Pour le cas d'une explosion instantanée ( $\alpha = 0$ ), la variable  $\xi$  varie de 0 à 1 [2]; pour les autres cas ( $\alpha \neq 0$ ), elle reste supérieure à une valeur positive  $\xi'_0$  avec  $\xi'_0 < 1$  [3],[4]. Cela se traduit physiquement par la présence d'une frontière matérielle  $\Sigma'$  dont la position est inconnue puisque la valeur de  $\xi'_0$  est à déterminer. Le milieu  $\mathcal{D}_0$  se trouve ainsi compris entre cette frontière  $\Sigma'$  et le choc  $\Sigma$  (fig 3). L'existence de  $\Sigma'$  est confirmée expérimentalement dans certains phénomènes de forte décharge électrique [3]. L'équation de  $\Sigma'$  dans le plan  $\Pi_0$  s'écrit :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} r &= R'_0(t) \\ \text{où} \\ R'_0(t) &= \hat{E} \xi_0 \xi'_0 \end{aligned}$$

Compte tenu des relations dimensionnelles et des conditions sur le choc, Landau [5] propose une forme de solution voisine de celle donnée par Sedov [2], telle que:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \rho(r, t) &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \bar{\rho} \rho_0(\xi) \\ p(r, t) &= \frac{(2 + \alpha)^2}{8(\gamma + 1)} \bar{p} \frac{r^2}{t^2} p_0(\xi) \\ u(r, t) &= \frac{2 + \alpha}{2(\gamma + 1)} \frac{r}{t} u_0(\xi) \end{aligned}$$

Sous cette forme les fonctions  $\rho_0, p_0, u_0$  sont normalisées à 1 sur le choc. En substituant (2.11) dans (2.2), on obtient le système d'équations de base suivant:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \xi [\rho_0 \varepsilon]_\xi &= -2\rho_0 u_0 \\ \xi \left[ \rho_0 u_0 \varepsilon + \frac{\gamma - 1}{2} p_0 \right]_\xi &= \frac{2(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} \rho_0 u_0 - 3\rho_0 u_0^2 - (\gamma - 1) p_0 \\ \xi [\rho_0 s_0 \varepsilon]_\xi &= \frac{4(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} \rho_0 - 2\rho_0 u_0 (s_0 + 1) \end{aligned}$$

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \text{où} \\ \varepsilon &= u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} \\ s_0 &= \log \left( \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \end{aligned}$$

L'intégration de ce système permet de déterminer la solution de base  $\rho_0, p_0, u_0$  et  $\xi_0$ . La valeur de  $\xi'_0$  est la valeur constante atteinte par  $\xi$  quand  $\rho_0 \rightarrow 0$  au voisinage de  $\Sigma'$ .



## 2.2 Modélisation de l'effet d'un écoulement uniforme

Supposons maintenant que le milieu ambiant n'est plus au repos mais est animé d'un mouvement uniforme de vitesse  $\bar{U}$  suivant  $\vec{OZ}$ . L'existence de  $\bar{U}$  entraîne une dissymétrie de la forme de l'onde de choc et donc de l'écoulement engendré. De plus, le phénomène perd sa similitude interne car il y a une troisième donnée dimensionnée. La similitude interne disparaît également dès que l'on tient compte de l'effet de la contre-pression  $\bar{p}$  (mais la symétrie de l'écoulement demeure).

Cette anisotropie sous l'effet de  $\bar{U}$  entraîne que les grandeurs physiques  $\rho$ ,  $p$ ,  $u$  de l'écoulement qui prend naissance dans le domaine  $\mathcal{D}$  compris entre  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  dépendent de trois variables :  $r, \theta, t$ . De plus, la composante tangentielle  $v$  de la vitesse n'est plus nulle. La connaissance de la solution de base permet de surmonter ces difficultés en construisant une solution par la méthode de petites perturbations, compte tenu du fait que la vitesse  $\bar{U}$  du milieu ambiant est faible devant celle de la propagation du choc. Cette idée a été déjà utilisée par Sedov [2], Freeman [3], Sakurai [8], Kobuta [9] pour considérer l'effet de  $\bar{p}$  et par Merlen et Dymont pour l'effet de  $\bar{U}$  [10]. Ainsi nous gardons  $\bar{p}, E, t$  comme grandeurs primaires et il en découle que la prise en compte de  $\bar{U}$  fait apparaître une variable adimensionnée  $\eta$  qui a pour expression:

$$(2.14) \quad \eta = \frac{\bar{U}}{\xi_0} \left( \frac{\bar{p} t^{(2-\alpha)}}{E} \right)^{1/4} = \frac{2 + \alpha}{4} \frac{\bar{U}}{R_0}$$

On voit que la variable  $\eta$  est significative du rapport entre la vitesse de l'écoulement uniforme et celle du choc. L'hypothèse  $\eta \ll 1$  signifie que nous nous bornons à la phase de l'écoulement pour laquelle la vitesse de l'écoulement extérieur est très inférieure à celle du choc. Cette hypothèse est vraie au début de l'explosion et reste vérifiée d'autant plus longtemps que l'apport d'énergie par unité de longueur  $E$  est grand. Elle peut être traduite par la relation:

$$(2.15) \quad t \ll \left( \frac{E \xi_0^4}{\bar{p} \bar{U}^4} \right)^{\frac{1}{(2-\alpha)}}$$

Cela impose  $\alpha \leq 2$ , faute de quoi  $\eta$  deviendrait infini au début de l'explosion ce qui rend impossible le traitement en petites perturbations. La variable  $\eta$  augmente au fur et à mesure que le choc diminue d'intensité; (2.15) définit donc la condition temporelle pour laquelle l'approche proposée ici est valable.

On a vu que l'hypothèse de l'explosion violente est fondée sur le fait que  $\bar{p}$  influe peu (en première approximation) sur l'écoulement de base, mais on peut pousser le niveau d'approximation jusqu'à introduire l'effet de  $\bar{p}$ . De plus, il convient de s'assurer que la prise en compte de  $\bar{U}$  n'implique pas nécessairement celle de  $\bar{p}$ . Nous pouvons adimensionner  $\bar{p}$  avec notre système de grandeurs primaires, ce qui

fait apparaître la variable adimensionnée  $\zeta$  définie par:

$$(2.16) \quad \zeta = \frac{\bar{p}}{\xi_0^2} \left( \frac{t^{2(2-\alpha)}}{\bar{\rho}^2 E^2} \right)^{1/4} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{2+\alpha}{4} \right)^2 \left( \frac{\bar{c}}{R_{0t}} \right)^2$$

En première approximation, la variable  $\zeta$  est proportionnelle à l'inverse du carré du nombre de Mach du choc, elle est donc significative du degré d'atténuation du choc. L'hypothèse  $\zeta \ll 1$  signifie que le choc doit être suffisamment intense.

On vérifie facilement que  $\zeta$  et  $\eta$  sont liés par la relation:

$$(2.17) \quad \zeta = \frac{1}{\gamma} \frac{\eta^2}{\bar{M}^2}$$

où  $\bar{M}$  est le nombre de Mach du milieu ambiant:

$$(2.18) \quad \bar{M} = \frac{\bar{U}}{\bar{c}}$$

Il a été montré dans [4] que la résolution du problème de l'explosion ponctuelle non instantanée dans un écoulement uniforme ne pouvait se faire, en général, que dans un repère mobile ( $\mathcal{R}' : O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ) en translation uniforme de vitesse  $\beta\bar{U}$  suivant  $\vec{O}\vec{Z}$  par rapport à  $\vec{O}$ . En effet  $\Sigma'$  est déformée sous l'effet de  $\bar{U}$  et de  $\bar{p}$  mais reste une surface matérielle qui sépare le domaine  $\mathcal{D}$  d'un domaine non régi par nos équations. Nous verrons que cette modification de la géométrie de  $\Sigma'$  peut se traduire par une translation uniforme parallèle à  $O\vec{x}$  à laquelle se superpose une petite déformation. L'objectif du repère mobile est donc d'accompagner la translation de  $\Sigma'$  afin d'éliminer son effet sur l'expression des grandeurs locales et de n'en tenir compte que d'une façon globale par la détermination de sa vitesse  $\beta\bar{U}$ .

Toutes les équations qui vont suivre sont donc exprimées dans un repère en translation uniforme suivant  $\vec{O}\vec{Z}$  et coïncidant avec le repère  $\mathcal{R}$  à l'instant  $t = 0$ . Cette approche sera justifiée par la géométrie que les conditions sur le choc imposent pour  $\Sigma$  et suggèrent pour  $\Sigma'$ .

La relation (2.17) donne la condition pour laquelle l'effet de  $\bar{p}$  peut être négligé ou non devant celui de  $\bar{U}$ ; ainsi pour  $\bar{M}$  non voisin de zéro, l'effet de  $\bar{p}$  est traduit par un terme en  $\eta^2$ .

Par suite, il faut donc effectuer des développements au moins jusqu'à l'ordre 2 en  $\eta$  si l'on désire tenir compte des effets simultanés de  $\bar{U}$  et de  $\bar{p}$ .

En effet:

- lorsque  $\bar{M}$  est de l'ordre de 1, l'influence de  $\bar{p}$  est de l'ordre de  $\eta^2$  donc l'effet d'ordre 1 en  $\eta$  est prépondérant
- lorsque  $\eta$  devient de l'ordre de  $\bar{M}^2$ , les effets de  $\bar{U}$  et de  $\bar{p}$  sont du même ordre.

- lorsque  $\overline{M}$  est petit devant 1 et dès que  $\overline{M}^2 \ll \eta$ , c'est l'effet de  $\overline{p}$  qui l'emporte; il en est de même pour le cas limite  $\overline{M} = 0$  pour lequel  $\zeta$  reste non nul alors que  $\eta = 0$ .

Ainsi, un développement à l'ordre 2 en  $\eta$  contient des termes de deux natures différentes :

- la première contient des termes en  $\frac{\eta^2}{\overline{M}^2}$  et correspond à l'effet de  $\overline{p}$
- la seconde contient des termes en  $\eta^2$  uniquement : c'est l'effet d'ordre deux de  $\overline{U}$

En posant  $r = R(\theta, t)$  pour l'équation du choc  $\Sigma$  et  $r = R'(\theta, t)$  pour l'équation de la frontière  $\Sigma'$ , nous cherchons la solution du problème sous la forme:

$$(2.19) \quad R(\theta, t) = \hat{E}\xi_0 R^*(\theta, \eta)$$

$$(2.20) \quad R'(\theta, t) = \hat{E}\xi_0 R'^*(\theta, \eta)$$

$$(2.21) \quad \rho(r, \theta, t) = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \overline{p} \rho^*(\xi, \theta, \eta)$$

$$(2.22) \quad p(r, \theta, t) = \frac{(2 + \alpha)^2}{8(\gamma + 1)} \overline{p} \frac{r^2}{t^2} p^*(\xi, \theta, \eta)$$

$$(2.23) \quad u(r, \theta, t) = \frac{(2 + \alpha)}{2(\gamma + 1)} \frac{r}{t} u^*(\xi, \theta, \eta)$$

$$(2.24) \quad v(r, \theta, t) = \frac{(2 + \alpha)}{2(\gamma + 1)} \frac{r}{t} v^*(\xi, \theta, \eta)$$

Si on néglige l'effet de  $\overline{p}$  et si  $\overline{U} \rightarrow 0$ , les fonctions sans dimension  $R^*$ ,  $R'^*$ ,  $\rho^*$ ,  $p^*$ ,  $u^*$  et  $v^*$  vérifient les relations suivantes :

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} R^* &= 1 \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} R'^* &= \xi'_0 \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho^* &= \rho_0(\xi) \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} p^* &= p_0(\xi) \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} u^* &= u_0(\xi) \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} v^* &= 0 \end{aligned}$$

En l'absence du courant  $\bar{U}$ , nous savons que l'écoulement est à symétrie cylindrique puisque l'effet de  $\bar{p}$  est isotrope [2], [5]. Par conséquent, les termes dimensionnés représentatifs de l'effet de  $\bar{p}$  ne dépendent que de  $r$  et  $t$ , nous pouvons ainsi chercher  $R^*$ ,  $R'^*$ ,  $\rho^*$ ,  $p^*$ ,  $u^*$ ,  $v^*$  sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 R'^* &= \xi'_0 + \eta \mathfrak{R}'_1(\theta) + \frac{\eta^2}{M^2} \xi'_{22} + \eta^2 \mathfrak{R}'_2(\theta) + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\
 R^* &= 1 + \eta \mathfrak{R}_1(\theta) + \frac{\eta^2}{M^2} \xi_{22} + \eta^2 \mathfrak{R}_2(\theta) + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\
 &\text{où } \xi_{22} \text{ et } \xi'_{22} \text{ sont des constantes} \\
 \rho^* &= \rho_0(\xi) + \eta \varrho_1(\xi, \theta) + \frac{\eta^2}{M^2} \rho_{22}(\xi) + \eta^2 \varrho_2(\xi, \theta) + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\
 (2.26) \quad p^* &= p_0(\xi) + \eta \mathcal{P}_1(\xi, \theta) + \frac{\eta^2}{M^2} p_{22}(\xi) + \eta^2 \mathcal{P}_2(\xi, \theta) + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\
 u^* &= u_0(\xi) + \eta \mathcal{U}_1(\xi, \theta) + \frac{\eta^2}{M^2} u_{22}(\xi) + \eta^2 \mathcal{U}_2(\xi, \theta) + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\
 v^* &= \eta \mathcal{V}_1(\xi, \theta) + \eta^2 \mathcal{V}_2(\xi, \theta) + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)
 \end{aligned}$$

Le terme en  $\frac{\eta^2}{M^2}$  n'existe pas pour  $v^*$  puisque l'effet de  $\bar{p}$  ne détruit pas la symétrie cylindrique.

Les fonctions  $R^*$ ,  $\rho^*$ ,  $p^*$ ,  $u^*$  et  $v^*$  prennent des formes particulières sur le choc. Les conditions sur  $\Sigma$  peuvent s'écrire dans le repère  $\mathfrak{R}$  comme suit:

$$\begin{aligned}
 (2.27) \quad \frac{p}{\bar{p}} \left( \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right) &= \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \frac{\rho}{\bar{\rho}} - 1 \\
 \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left( \frac{p}{\bar{p}} - 1 \right) &= \left( \frac{\omega - U_n}{\bar{c}} \right)^2 - 1 \\
 \bar{U}_\tau &= \bar{q}_\tau \\
 (\omega - q_n) \frac{\rho}{\bar{\rho}} &= \omega - U_n
 \end{aligned}$$

Dans ces relations,

- $\omega$  désigne la vitesse normale de propagation du choc  $\Sigma$ ,
- $q_n$  et  $q_\tau$  sont les composantes normale et tangentielle de la vitesse des particules fluides sur la surface interne du choc (c'est à dire en aval du choc),
- $U_n$  et  $U_\tau$  sont les composantes normale et tangentielle de la vitesse des particules fluides en amont du choc (côté milieu ambiant).

La vitesse  $\omega$  est donnée par la relation :

$$(2.28) \quad \omega = R_t \sin \lambda$$

où  $\lambda = (\vec{\tau}, \widehat{\vec{e}_r})$  (fig 3) avec:

$$(2.29) \quad \cot g \lambda = \frac{R_\theta}{R} \equiv \frac{R_\theta^*}{R^*}$$

Dans le plan polaire  $\Pi_0$ , les composantes  $q_n$  et  $q_r$  vérifient les relations :

$$(2.30) \quad \begin{aligned} q_n &= u \sin \lambda - v \cos \lambda \\ q_r &= u \cos \lambda + v \sin \lambda \end{aligned}$$

Dans le repère  $Oxyz$ , les composantes  $U_n$  et  $U_r$  vérifient :

$$(2.31) \quad \begin{aligned} U_n &= (1 - \beta) \bar{U} \sin(\lambda + \theta) \\ U_r &= (1 - \beta) \bar{U} \cos(\lambda + \theta) \\ \sqrt{U_n^2 + U_r^2} &= (1 - \beta) \bar{U} \end{aligned}$$

En substituant (2.26) dans (2.27), on constate que les fonctions  $\mathfrak{R}_j(\theta)$ ,  $\varrho_j(1, \theta)$ ,  $\mathcal{P}_j(1, \theta)$ ,  $\mathcal{U}_j(1, \theta)$ ,  $\mathcal{V}_j(1, \theta)$  avec  $j = 1, 2$  prennent des formes simples en  $\theta$  [4]. Ceci suggère de chercher la solution sous la forme:

- $\mathcal{U}_1(\xi, \theta) = u_1(\xi) \cos \theta$
- $\mathcal{U}_2(\xi, \theta) = u_{23}(\xi) + u_{21}(\xi) \cos 2\theta$
- $\mathcal{V}_1(\xi, \theta) = v_1(\xi) \sin \theta$
- $\mathcal{V}_2(\xi, \theta) = v_2(\xi) \sin 2\theta$

Ainsi, les fonctions inconnues  $R^*$ ,  $\rho^*$ ,  $p^*$ ,  $u^*$ ,  $v^*$  et  $R'^*$ , par analogie avec  $R^*$ , seront déterminées sous la forme définitive suivante:

$$\begin{aligned} R^* &= 1 + \eta \xi_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \xi_{22} + \eta^2 (\xi_{23} + \xi_{21} \cos 2\theta) + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\ R'^* &= \xi'_0 + \eta \xi'_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \xi'_{22} + \eta^2 (\xi'_{23} + \xi'_{21} \cos 2\theta) \\ &\quad + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^* &= \rho_0(\xi) + \eta \rho_1(\xi) \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \rho_{22}(\xi) + \eta^2 \{ \rho_{23}(\xi) + \rho_{21}(\xi) \cos 2\theta \} \\
&\quad + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\
(2.32) \quad p^* &= p_0(\xi) + \eta p_1(\xi) \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} p_{22}(\xi) + \eta^2 \{ p_{23}(\xi) + p_{21}(\xi) \cos 2\theta \} \\
&\quad + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\
u^* &= u_0(\xi) + \eta u_1(\xi) \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} u_{22}(\xi) + \eta^2 \{ u_{23}(\xi) + u_{21}(\xi) \cos 2\theta \} \\
&\quad + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\
v^* &= \eta v_1(\xi) \sin \theta + \eta^2 v_2(\xi) \sin 2\theta + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)
\end{aligned}$$

avec:

$$(2.33) \quad R'^* \leq \xi \leq R^*$$

Les quantités  $\xi_j, \xi'_j, j = 1, 21, 22, 23$  sont des constantes. Les grandeurs sans dimensions indicées par:

- 0 sont représentatives de l'écoulement de base,
- 1 sont représentatives de l'effet anisotrope d'ordre 1 du courant  $\bar{U}$ ,
- 21 caractérisent l'effet anisotrope d'ordre 2 de  $\bar{U}$ ,
- 22 sont caractéristiques de l'effet de la contre-pression  $\bar{p}$  seule,
- 23 caractérisent l'effet isotrope d'ordre 2 de  $\bar{U}$ .

Notre modèle suscite plusieurs observations. Un calcul rapide et limité à l'ordre 1 en  $\eta$ , montre que les équations de  $R'^*$  et  $R^*$  coïncident respectivement, à cet ordre d'approximation, avec celles de deux cylindres en translation uniforme suivant  $O\bar{x}'$  de vitesses respectives  $\xi'_1 \bar{U}$  et  $\xi_1 \bar{U}$ . L'effet d'ordre 1 du courant sur la géométrie de ces deux surfaces est bien une translation qui, au moins pour  $\Sigma$ , est imposée par les conditions sur le choc.

Le repère mobile évoqué précédemment est donc celui qui restera centré sur  $\Sigma'$  et il sera déterminé par la condition  $\xi'_1 = 0$ . un premier avantage évident de ce repère est de reporter à l'ordre 2 en  $\eta$  la déformation de  $\Sigma'$ .

Le deuxième point important qu'il convient d'évoquer est celui du domaine de définition de  $\xi$ . Compte tenu de la déformation de  $\Sigma'$  et de  $\Sigma$ , notre variable  $\xi$  évolue entre des bornes inconnues et qui ne peuvent être déterminées qu'après résolution complète du problème.

Pour remédier à cela, deux possibilités s'offrent à nous.

La première est la méthode de Sedov qui consiste à adimensionner  $r$  par  $R$  et non par  $R_0$ . On obtient alors une variable  $\lambda_s = \frac{r}{R}$  avec  $\frac{R^*}{R} \leq \lambda_s \leq 1$ . Dans le cas de l'explosion instantanée ( $\alpha = 0$ ),  $R^* = 0$  et les bornes de  $\lambda_s$  sont parfaitement déterminées; le procédé semble donc correct. Malheureusement dans le cas général,  $R^* \neq 0$  et cela introduit les inconnues  $\xi_1, \xi_{21}, \xi_{22}$  et  $\xi_{23}$  dans toutes les conditions qui seront écrites sur  $\Sigma'$ . Il y a alors couplage des conditions sur  $\Sigma'$  et sur  $\Sigma$  au niveau de la résolution numérique. De plus, et même dans le cas de l'explosion instantanée, le choix de  $\lambda_s$  fait intervenir également les inconnues  $\xi_1, \xi_{21}, \xi_{22}$  et  $\xi_{23}$  dans les systèmes différentiels. De ce fait, les conditions sur  $\Sigma$  ne jouent plus le rôle de conditions initiales pour intégrer les systèmes différentiels mais elles déterminent les systèmes d'équations. Le traitement numérique se complique donc.

Sedov et Sakurai [2], [8] ont évité ce couplage en linéarisant leurs solutions pour l'effet de  $\bar{p}$  sous la forme  $f + \xi_{22}g$  et en séparant le système d'indice 22 en deux systèmes indépendants. Ce procédé devrait être étendu aux conditions sur  $\Sigma'$  dans le cas général, multipliant par deux le nombre de systèmes et le nombre d'équations à établir. Ceci peut sembler tolérable lorsque l'on traite un seul développement mais nous en avons quatre.

La deuxième méthode pour laquelle nous avons opté consiste à trouver une variable dont les bornes soient connues dès l'ordre 0 et qui soit liée linéairement à  $\xi$ . Il est naturel de choisir  $[\xi'_0, 1]$  comme domaine de variation de cette variable et de poser, à chaque instant:

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \xi = \lambda_s + \eta \Delta_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \Delta_{22} + \eta^2 (\Delta_{23} + \Delta_{21} \cos 2\theta) \\ + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \end{aligned}$$

Dans cette formule,  $\eta$  doit être considéré comme un paramètre car le changement de variable se fait à  $t$  fixé.

(Les  $\Delta_i$  sont des fonctions linéaires de  $\xi_j, \xi'_j$   $j = 1, 21, 22, 23$  et de  $\lambda_s$  dont les expressions sont données en Annexe 3).

$\lambda_s$  est donc l'approximation d'ordre 0 de  $\xi$ . On remarque, dans la relation (2.34), que  $\xi$  et  $\lambda_s$  sont liées par une relation biunivoque et que  $\xi$  est connu pour  $\lambda_s$  donné si les coefficients  $\xi_j$  et  $\xi'_j$  ( $j = 1, 21, 22, 23$ ) sont déterminées. La dérivée

$$(2.35) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\lambda_s} = 1 + \eta \delta_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \delta_{22} + \eta^2 (\delta_{23} + \delta_{21} \cos 2\theta) \\ + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \end{aligned}$$

montre que si l'on écrit les équations en fonction de  $\lambda_s$ , les termes  $\xi_j$  et  $\xi'_j$  apparaîtront dans les systèmes différentiels et que l'on retombe dans les difficultés mentionnées précédemment (les coefficients  $\delta_i$  sont donnés en Annexe 3). Nous

traitons donc directement le problème pour les fonctions de  $\xi$ . Afin de discuter toutes les conséquences de ce choix et de montrer la validité de la transformation (2.34), établissons tout d'abord les équations générales du problème.

## 2.3 Equations régissant le phénomène

### 2.3.1 Equations générales

Dans le repère  $\mathcal{X}$ , les équations d'Euler ainsi que celle de la conservation d'entropie s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 (2.36) \quad & r\rho_t + (ru\rho)_r + (v\rho)_\theta = 0 \\
 (2.37) \quad & \rho \{ru_t + ruu_r + v(u_\theta - v)\} + rp_r = 0 \\
 (2.38) \quad & \rho \{rv_t + ruv_r + v(v_\theta + u)\} + p_\theta = 0 \\
 (2.39) \quad & r\Pi_t + ru\Pi_r + v\Pi_\theta = 0 \\
 & \text{avec} \quad \Pi = \frac{p}{\rho^\gamma}
 \end{aligned}$$

Grâce à l'équation de la conservation de la masse (2.36), on peut écrire (2.37), (2.38), (2.39) sous la forme dite conservative dont l'avantage sera justifié par la suite:

$$\begin{aligned}
 (2.40) \quad & r\rho_t + (r\rho u)_r + (\rho v)_\theta = 0 \\
 (2.41) \quad & r(\rho u)_t + (\rho r u^2)_r + (\rho uv)_\theta - \rho v^2 + rp_r = 0 \\
 (2.42) \quad & r(\rho v)_t + (r\rho uv)_r + (\rho v^2)_\theta + \rho uv + p_\theta = 0 \\
 (2.43) \quad & r(\rho\Pi)_t + (r\rho\Pi)_r + (\rho v\Pi)_\theta = 0
 \end{aligned}$$

On définit la fonction  $s$  par:

$$(2.44) \quad s = \log \Pi$$

Le système d'équations (2.40), (2.41), (2.42), (2.43), une fois adimensionné, permet d'écrire à l'aide des règles de dérivation (Annexe 1):

$$(2.45) \quad \xi \left[ \rho^* \left( u^* - \frac{(\gamma+1)}{2} \right) \right]_{\xi} + A\eta\rho_n^* + (\rho^*v^*)_\theta + 2\rho^*u^* = 0$$

$$\begin{aligned}
 (2.46) \quad & \xi \left[ \rho^*u^* \left( u^* - \frac{(\gamma+1)}{2} \right) + \frac{(\gamma-1)}{2}p^* \right]_{\xi} + A\eta(\rho^*u^*)_n + (\rho^*u^*v^*)_\theta \\
 & - \frac{2(\gamma+1)}{(2+\alpha)}\rho^*u^* + 3\rho^*u^* - \rho^*v^{*2} + (\gamma-1)p^* = 0
 \end{aligned}$$



$$(2.47) \quad \xi \left[ \rho^* v^* \left( u^* - \frac{(\gamma+1)}{2} \right) \right]_{\xi} + A \eta (\rho^* v^*)_{\eta} + \left[ \rho^* v^{*2} + \frac{(\gamma-1)}{2} p^* \right]_{\theta} \\ + 4 \rho^* u^* v^* - \frac{2(\gamma+1)}{(2+\alpha)} \rho^* v^* = 0$$

$$(2.48) \quad \xi s_{\xi}^* \left( u^* - \frac{(\gamma+1)}{2} \right) + A \eta s_{\eta}^* + v^* s_{\theta}^* + 2u^* - \frac{4(\gamma+1)}{(2+\alpha)} = 0$$

où

$$(2.49) \quad A = \frac{(\gamma+1)(2-\alpha)}{2(2+\alpha)}$$

A l'instar des inconnues, la fonction  $s^*$  sera approximée par:

$$(2.50) \quad s^* = s_0 + \eta s_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} s_{22} + \eta^2 \{s_{23} + s_{21} \cos 2\theta\} + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)$$

Les fonctions  $s_i$ ,  $i = 0, 1, 22, 23, 21$  dépendent de  $\xi$ ; leurs expressions sont données en Annexe 2. On développe chaque terme des équations (2.45), (2.46), (2.47), (2.48) à l'aide de (2.32) et on regroupe les termes de même ordre.

Comme la solution doit être vraie  $\forall \eta$  et  $\forall \xi$ , on obtient 5 systèmes différentiels spécifiques.

Ces systèmes s'écrivent:

- Ordre 0 (système différentiel déterminant l'écoulement de base):

$$(2.51) \quad \xi (\rho_0 \varepsilon)_{\xi} = -2\rho_0 u_0$$

$$(2.52) \quad \xi \left[ \rho_0 u_0 \varepsilon + \frac{(\gamma-1)}{2} p_0 \right]_{\xi} = \frac{2(\gamma+1)}{(2+\alpha)} \rho_0 u_0 - 3\rho_0 u_0^2 - (\gamma-1)p_0$$

$$(2.53) \quad \xi [\rho_0 s_0 \varepsilon]_{\xi} = \frac{4(\gamma+1)}{(2+\alpha)} \rho_0 - 2\rho_0 u_0 (s_0 + 1)$$

Les équations (2.51), (2.52), (2.53) sont évidemment celles du système (2.12). La résolution dy système (2.12) fournit l'approximation d'ordre 0 de  $\xi$  c'est à dire  $\lambda_s$ .

- Ordre 1 (système différentiel déterminant l'effet anisotrope d'ordre 1 de  $\bar{U}$ ):

$$(2.54) \quad \xi [\rho_0 u_1 + \varepsilon \rho_1]_{\xi} + 2\rho_0 u_1 + \rho_0 v_1 + \left(2 + \frac{A}{u_0}\right) \rho_1 u_0 = 0$$

$$(2.55) \quad \xi \left[ \rho_0 u_0 u_1 + \varepsilon(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) + \frac{(\gamma - 1)}{2} p_1 \right]_{\xi} - \frac{(\gamma + 1)}{2} (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0)$$

$$+ \rho_0 u_0 v_1 + 3(2\rho_0 u_0 u_1 + \rho_1 u_0^2) + (\gamma - 1)p_1 = 0$$

$$(2.56) \quad \xi [\rho_0 v_1 \varepsilon]_{\xi} + \left( 4u_0 - \frac{(\gamma + 1)}{2} \right) \rho_0 v_1 - \frac{(\gamma - 1)}{2} p_1 = 0$$

$$(2.57) \quad \xi [\rho_0 u_1 s_0 + \varepsilon(\rho_0 s_1 + \rho_1 s_0)]_{\xi} + (A + 2u_0)(\rho_0 s_1 + \rho_1 s_0) \\ + \rho_0 s_0(v_1 + 2u_1) + 2(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) - \frac{4(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} \rho_1 = 0$$

- Ordre 22 (système différentiel déterminant l'effet isotrope de la pression  $\bar{p}$  seule):

$$(2.58) \quad \xi [\rho_0 u_{22} + \varepsilon \rho_{22}]_{\xi} + 2[\rho_0 u_{22} + (A + u_0)\rho_{22}] = 0$$

$$(2.59) \quad \xi \left[ \rho_0 u_0 u_{22} + \varepsilon(\rho_0 u_{22} + u_0 \rho_{22}) + \frac{(\gamma - 1)}{2} p_{22} \right]_{\xi} \\ - \frac{\alpha(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} (\rho_0 u_{22} + u_0 \rho_{22}) + (\gamma + 1)p_{22} + 3(2\rho_0 u_0 u_{22} + \rho_{22} u_0^2) = 0$$

$$(2.60) \quad \xi [\rho_0 s_0 u_{22} + \varepsilon(\rho_0 s_{22} + \rho_{22} s_0)]_{\xi} + 2\rho_0 s_0 u_{22} \\ + 2(u_0 + A)(\rho_0 s_{22} + s_0 \rho_{22}) + 2(\rho_0 u_{22} + \rho_{22} u_0) - \frac{4(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} \rho_{22} = 0$$

- Ordre 23 (système différentiel déterminant l'effet isotrope de la vitesse  $\bar{U}$ ):

$$(2.61) \quad \xi [\rho_0 u_{23} + \varepsilon \rho_{23}]_{\xi} + 2[\rho_0 u_{23} + (A + u_0)\rho_{23}] = -\rho_1 u_1 - \frac{1}{2} \xi_1 [\rho_1 u_1]_{\xi}$$

$$(2.62) \quad \xi \left[ \rho_0 u_0 u_{23} + \varepsilon(\rho_0 u_{23} + u_0 \rho_{23}) + \frac{(\gamma - 1)}{2} p_{23} \right]_{\xi} \\ - \frac{\alpha(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} (\rho_0 u_{23} + u_0 \rho_{23}) + 3(2\rho_0 u_0 u_{23} + \rho_{23} u_0^2) + (\gamma - 1)p_{23} = \\ \frac{\alpha(\gamma + 1)}{2(2 + \alpha)} \rho_1 u_1 - 3(\rho_1 u_0 u_1 + \frac{1}{2} \rho_0 u_1^2) + \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2 \\ - \frac{1}{2} \xi [\rho_0 u_1^2 + \rho_1 u_1(u_0 + \varepsilon)]_{\xi}$$

$$(2.63) \quad \xi [\rho_0 s_0 u_{23} + \varepsilon(\rho_0 s_{23} + s_0 \rho_{23})]_{\xi} + 2A(\rho_0 s_{23} + s_0 \rho_{23})$$

$$\begin{aligned}
& +2\rho_0 u_0 s_{23} + 2(s_0 + 1)(\rho_0 u_{23} + u_0 \rho_{23}) - \frac{4(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} \rho_{23} = \\
& -\xi \left[ \frac{1}{2} u_1 (\rho_0 s_1 + \rho_1 s_0) + \frac{1}{2} \varepsilon \rho_1 s_1 \right]_{\xi} - A \rho_1 s_1 \\
& -(s_0 + 1) \rho_1 u_1 - s_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0)
\end{aligned}$$

- Ordre 21 (système différentiel déterminant l'effet anisotrope d'ordre 2 de la vitesse  $\bar{U}$ ):

$$\begin{aligned}
(2.64) \quad & \xi [\rho_0 u_{21} + \varepsilon \rho_{21}]_{\xi} + \frac{1}{2} \xi [\rho_1 u_1]_{\xi} + 2(A + u_0) \rho_{21} \\
& + 2 \left[ \rho_0 u_{21} + \rho_0 v_2 + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \frac{1}{2} \rho_0 v_1 \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.65) \quad & \xi \left[ \rho_0 u_0 u_{21} + \varepsilon (\rho_0 u_{21} + \rho_{21} u_0) + \frac{(\gamma - 1)}{2} p_{21} \right]_{\xi} \\
& - \frac{\alpha(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} (\rho_0 u_{21} + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \rho_{21} u_0) \\
& + \frac{1}{2} \xi [u_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) + \varepsilon \rho_1 u_1]_{\xi} + \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2 + (\gamma - 1) p_{21} \\
& + 3 \left( 2\rho_0 u_0 u_{21} + \rho_{21} u_0^2 + \rho_1 u_0 u_1 + \frac{1}{2} \rho_0 u_1^2 \right) \\
& + 2\rho_0 u_0 v_2 + v_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.66) \quad & \xi \left[ \rho_0 v_2 \varepsilon + \frac{1}{2} \{ \rho_0 u_1 v_1 + \varepsilon \rho_1 v_1 \} \right]_{\xi} - \frac{\alpha(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} \left( \rho_0 v_2 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1 \right) \\
& + \rho_0 v_1^2 - (\gamma - 1) p_{21} + 4\rho_0 u_0 v_2 + 2v_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.67) \quad & \xi \left[ \rho_0 s_0 u_{21} + \varepsilon (\rho_0 s_{21} + \rho_{21} s_0) + \frac{1}{2} \{ u_1 (\rho_0 s_1 + \rho_1 s_0) + \varepsilon \rho_1 s_1 \} \right]_{\xi} \\
& + 2(A + u_0) \rho_0 s_{21} + s_1 [(A + u_0) \rho_1 + \rho_0 u_1] + 2A s_0 \rho_{21} \\
& - \frac{4(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} \rho_{21} + 2(s_0 + 1) \left( \rho_0 u_{21} + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \rho_{21} u_0 \right) + \\
& 2\rho_0 s_0 v_2 + v_1 (\rho_0 s_1 + \rho_1 s_0) = 0
\end{aligned}$$

La résolution de ces systèmes donnent les solutions du problème mais en des points non parfaitement identiques suivant l'ordre d'approximation. En effet, la relation  $\xi = 1$ , par exemple, n'a pas la même signification aux ordres 0, 1 ou 2. A l'ordre 0, elle signifie  $\xi = 1 + 0(\eta)$  alors qu'à l'ordre 2,  $\xi = 1 + 0(\eta^2)$ . Ainsi à l'ordre 2, la grandeur  $\xi$  doit être considérée comme exacte dans les équations,

alors qu'à l'ordre 0 elle n'est connue que par sa valeur approchée  $\lambda_s$ . Les solutions des systèmes d'ordres successifs correspondant à une même valeur numérique  $\xi = \hat{\xi}$  ne correspondent pas au même point physique. Remarquons par exemple, qu'à l'ordre 0,  $\xi = 1$  désigne le choc, mais qu'à l'ordre 1, il n'en est rien puisque celui-ci est à  $\xi = 1 + \eta \xi_1 \cos \theta$ .

Pour illustrer cette question, sans calculs superflus, limitons nous à l'ordre 1 et étudions la grandeur  $\rho^*$ . On a  $\rho^*(\xi) = \rho_0(\xi) + \eta \cos \theta \rho_1(\xi)$ . Soit  $\hat{\xi}$  la valeur numérique de  $\xi$  considérée, le calcul donne  $\rho_0(\hat{\lambda}_s)$  où  $\hat{\lambda}_s$  est la valeur de l'approximation d'ordre 0 correspondant à  $\hat{\xi}$ . On a :

$$\hat{\lambda}_s = \hat{\xi} - \eta \left[ \xi_1 \left( \frac{\hat{\xi} - \xi'_0}{1 - \xi'_0} \right) + \xi'_1 \left( \frac{1 - \hat{\xi}}{1 - \xi'_0} \right) \right] \cos \theta$$

et

$$\rho(\hat{\lambda}_s) = \rho_0(\hat{\xi} - \eta \Delta_1 \cos \theta)$$

On en déduit donc :

$$(2.68) \quad \begin{aligned} \rho_0(\hat{\xi}) &= \rho_0(\hat{\lambda}_s) + \eta \Delta_1 \rho_{0\xi}(\hat{\lambda}_s) \cos \theta + o(\eta) \\ \rho_1(\hat{\xi}) &= \rho_1(\hat{\lambda}_s) + O(\eta) \end{aligned}$$

Ainsi en règle générale, les fonctions  $f_0(\xi)$  sont obtenues à partir des fonctions  $f_0(\lambda_s)$  calculées à l'ordre 0 par une approximation compatible avec la précision requise.

On peut se convaincre rapidement que les termes d'ordre  $\eta$  contenus dans notre solution  $\rho_0(\xi)$ ,  $u_0(\xi)$ ,  $p_0(\xi)$  à cause de la définition de  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  c'est à dire  $\eta \rho_{0\xi}(\lambda_s) \Delta_1 \cos \theta$ ,  $\eta u_{0\xi}(\lambda_s) \Delta_1 \cos \theta$  et  $\eta p_{0\xi}(\lambda_s) \Delta_1 \cos \theta$  constituent une partie de la solution d'ordre 1. En effet, substituons les expressions en  $\lambda_s$  de  $u_0(\xi)$  et  $\rho_0(\xi)$  dans l'équation (2.51) par exemple et compte tenu de l'expression de la dérivée  $\frac{d\lambda_s}{d\xi} = 1 - \eta \delta_1 \cos \theta$ , on trouve, à l'ordre 0 :

$$(2.69) \quad \lambda_s [\rho_0(\lambda_s) \varepsilon(\lambda_s)]_{\lambda_s} = -2\rho_0(\lambda_s) u_0(\lambda_s)$$

à l'ordre 1 :

$$(2.70) \quad \begin{aligned} &\lambda_s \left[ \Delta_1 \left\{ \rho_0(\lambda_s) u_{0\xi}(\lambda_s) + \rho_{0\xi}(\lambda_s) \varepsilon(\lambda_s) \right\} \right]_{\lambda_s} \\ &+ (\Delta_1 - \delta_1 \lambda_s) [\rho(\lambda_s) \varepsilon(\lambda_s)]_{\lambda_s} = -2\Delta_1 [\rho_0(\lambda_s) u_0(\lambda_s)]_{\lambda_s} \end{aligned}$$

A l'aide de (2.69), on montre très facilement que (2.70) est vérifiée. On généralisera ce procédé à l'ordre 1 en § 3.2.

Pour pouvoir résoudre ces systèmes différentiels, nous devons adjoindre les conditions aux limites qui sont ici les conditions sur le choc. Les remarques précédentes doivent être soigneusement prises en compte car à chaque ordre d'approximation l'équation du choc n'a pas la même précision en  $\eta$ .

### 2.3.2 Conditions sur le choc

Les relations qui déterminent les conditions sur le choc  $\Sigma$  sont données par le système d'équations (2.27)

La relation (2.29) peut être développée en  $\eta$  en utilisant (2.32). On obtient :

$$(2.71) \quad \cot g \lambda = -\eta \xi_1 \sin \theta + \eta^2 \left( \frac{1}{2} \xi_1^2 - 2\xi_{21} \right) \sin 2\theta + o(\eta^2)$$

Les développements de  $\cos \lambda$  et  $\sin \lambda$  donnent:

$$(2.72) \quad \begin{aligned} \cos \lambda &\equiv \cot g \lambda + o(\eta^2) \\ \sin \lambda &= 1 - \frac{1}{2} \eta^2 \xi_1^2 \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) + o(\eta^2) \end{aligned}$$

A l'aide de (2.19), de (2.72), et des règles de dérivation [Annexe 1].  $\omega$  peut s'écrire :

$$(2.73) \quad \begin{aligned} \omega &= \left( \frac{2 + \alpha}{4} \right) \xi_0 \frac{\hat{E}}{t} \omega^*(\theta, \eta) \\ \text{où} \\ \omega^* &= 1 + \left( \frac{4}{2 + \alpha} \right) \eta \xi_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \left( \frac{6 - \alpha}{2 + \alpha} \right) \xi_{22} \\ &+ \eta^2 \left[ \left( \frac{6 - \alpha}{2 + \alpha} \right) \xi_{23} - \frac{1}{4} \xi_1^2 \right] + \eta^2 \cos 2\theta \left[ \left( \frac{6 - \alpha}{2 + \alpha} \right) \xi_{21} + \frac{1}{4} \xi_1^2 \right] \\ &+ o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \end{aligned}$$

On peut adimensionner (2.27) à l'aide de (2.19), (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), puis développer en utilisant (2.32).

A l'ordre 0,  $\xi = R^*$  s'approche par  $\xi = 1 + 0(\eta)$ , la condition sur le choc s'écrit donc comme pour la solution en  $\lambda_s$  à des termes d'ordre  $\eta$  près. Mais à l'ordre 1, ces termes négligés à l'ordre 0 vont intervenir car  $\xi = R^* = 1 + \eta \xi_1 \cos \theta$ .

Par exemple:

$$\begin{aligned} \rho^*(R^*) &= \rho_0(R^*) + \eta \rho_1(R^*) \cos \theta \\ &= \rho_0(1) + \eta \cos \theta [\rho_1(R^*) + \xi_1 \rho_{0\xi}(1)] + 0(\eta) \end{aligned}$$

Si on se limite à l'ordre 1, on a:

$$\rho^*(R^*) = \rho_0(1) + \eta \cos \theta [\rho_1(1) + \xi_1 \rho_{0\xi}(1)] + 0(\eta)$$

La condition d'ordre 1 s'écrit donc au point  $\xi = 1 + 0(\eta^2)$  intérieur à l'écoulement. En poussant le raisonnement jusqu'à l'ordre 2, on obtient les conditions adimensionnées sur le choc:

- Ordre 0:

$$(2.74) \quad \begin{aligned} p_0(1) &= 1 \\ \rho_0(1) &= 1 \\ u_0(1) &= 1 \end{aligned}$$

- Ordre 1, en tenant compte de (2.74):

$$(2.75) \quad \begin{aligned} p_1(1) &= \left[ \frac{2(2-\alpha)}{2+\alpha} - p_{0\xi}(1) \right] \xi_1 - \frac{8(1-\beta)}{2+\alpha} \\ \rho_1(1) &= -\xi_1 \rho_{0\xi}(1) \\ u_1(1) &= \left[ \frac{2-\alpha}{2+\alpha} - u_{0\xi}(1) \right] \xi_1 + \frac{2(\gamma-1)(1-\beta)}{2+\alpha} \\ v_1(1) &= \xi_1 - \frac{2(\gamma+1)(1-\beta)}{2+\alpha} \end{aligned}$$

- Ordre 2:
- effet de la pression:

$$(2.76) \quad \begin{aligned} p_{22}(1) &= \left[ \frac{4(2-\alpha)}{2+\alpha} - p_{0\xi}(1) \right] \xi_{22} - \frac{8(\gamma-1)}{\gamma(2+\alpha)^2} \\ \rho_{22}(1) &= -\xi_{22} \rho_{0\xi}(1) - \frac{32}{(\gamma-1)(2+\alpha)^2} \\ u_{22}(1) &= \left[ \frac{2(2-\alpha)}{2+\alpha} - u_{0\xi}(1) \right] \xi_{22} - \frac{16}{(2+\alpha)^2} \end{aligned}$$

- effet isotrope de la vitesse:

$$\begin{aligned} p_{23}(1) &= \left[ \frac{4(2-\alpha)}{2+\alpha} - p_{0\xi}(1) \right] \xi_{23} + \left[ \frac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{(2+\alpha)^2} - \frac{1}{4} p_{0\xi\xi}(1) \right] \xi_1^2 \\ &+ \left[ \frac{4(3\alpha+2)(1-\beta)}{(2+\alpha)^2} - \frac{1}{2} p_{1\xi}(1) \right] \xi_1 + \frac{8(1-\beta)^2}{(2+\alpha)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.77) \quad \rho_{23}(1) &= -\xi_{23}\rho_{0\xi}(1) - \frac{1}{2}\xi_1\rho_{1\xi}(1) - \frac{1}{4}\xi_1^2\rho_{0\xi\xi}(1) \\
u_{23}(1) &= \left[ \frac{2(2-\alpha)}{2+\alpha} - u_{0\xi}(1) \right] \xi_{23} - \left[ \frac{2}{2+\alpha} + \frac{1}{4}u_{0\xi\xi}(1) \right] \xi_1^2 \\
&\quad - \left[ \frac{(\gamma-3)(1-\beta)}{2+\alpha} + \frac{1}{2}u_{1\xi}(1) \right] \xi_1
\end{aligned}$$

- effet anisotrope de la vitesse:

$$\begin{aligned}
(2.78) \quad p_{21}(1) &= \left[ \frac{4(2-\alpha)}{2+\alpha} - p_{0\xi}(1) \right] \xi_{21} + \left[ \frac{2\alpha^2}{(2+\alpha)^2} - \frac{1}{4}p_{0\xi\xi}(1) \right] \xi_1^2 \\
&\quad - \left[ \frac{4(2-\alpha)(1-\beta)}{(2+\alpha)^2} + \frac{1}{2}p_{1\xi}(1) \right] \xi_1 + \frac{8(1-\beta)^2}{(2+\alpha)^2} \\
\rho_{21}(1) &= -\xi_{21}\rho_{0\xi}(1) - \frac{1}{4}\xi_1^2\rho_{0\xi\xi}(1) - \frac{1}{2}\xi_1\rho_{1\xi}(1) \\
u_{21}(1) &= \left[ \frac{2(2-\alpha)}{2+\alpha} - u_{0\xi}(1) \right] \xi_{21} + \left[ \frac{\alpha}{2+\alpha} - \frac{1}{4}u_{0\xi\xi}(1) \right] \xi_1^2 \\
&\quad - \left[ \frac{(\gamma+1)(1-\beta)}{2+\alpha} + \frac{1}{2}u_{1\xi}(1) \right] \xi_1 \\
v_2(1) &= 2\xi_{21} - \frac{\alpha}{2+\alpha}\xi_1^2 + \left[ \frac{(\gamma-1)(1-\beta)}{2+\alpha} - \frac{1}{2}v_{1\xi}(1) \right] \xi_1
\end{aligned}$$

Les valeurs en  $\xi = 1$  des fonctions dérivées premières et secondes de la solution de base (indice 0) sont données en Annexe 4.

Les valeurs des fonctions  $p_{1\xi}$ ,  $\rho_{1\xi}$ ,  $u_{1\xi}$ ,  $v_{1\xi}$  en  $\xi = 1$  sont données en Annexe 5. Dans toutes ces conditions, les constantes  $\xi_1$ ,  $\xi_{21}$ ,  $\xi_{22}$  et  $\xi_{23}$  sont à déterminer.

### 2.3.3 Conditions à la frontière $\Sigma'$

Les coefficients  $\xi'_0$ ,  $\xi'_{21}$ ,  $\xi'_{22}$ ,  $\xi'_{23}$  et  $\beta$  se déterminent en écrivant les conditions sur  $\Sigma'$ . L'écriture de ces conditions fait intervenir des développements des inconnues au voisinage de  $\xi = \xi'_0$ . Le calcul montre, cependant, que les quantités  $v_1$  et  $v_2$  tendent vers l'infini quand  $\xi$  tend vers  $\xi'_0$ ; il en résulte que leur développement au voisinage de  $\xi = \xi'_0$  n'est pas légitime. La forme conservative des équations permet d'éviter cette difficulté puisqu'elle ne fait apparaître  $v_1$  et  $v_2$  que sous la forme  $\rho_0 v_1$ ,  $\rho_0 v_2$  et  $\rho_1 v_1$ . Le calcul montrera que ces dernières quantités sont bornées. En effet, pour que le développement en petites perturbations ait un sens, il faut que les fonctions développées restent bornées, c'est à dire que si  $f = f_0(\xi) + \eta f_1(\xi) \cos \theta$  alors  $|f_1|$  doit rester finie (en particulier quand  $\xi \rightarrow \xi'_0$ ) faute de quoi  $f_0$  deviendrait le terme

négligeable devant  $\eta f_1$  ce qui serait contraire à la notion de petites perturbations . La mise en forme conservative montre que c'est en fait la quantité de mouvement qui est développée et non la vitesse elle même.

La frontière  $\Sigma'$  est une surface matérielle ( dite de contact ) et joue le rôle d'un piston:

- Si on laisse le piston se déformer, les coefficients  $\beta, \xi'_{22}, \xi'_{23}, \xi'_{21}$  intervenant dans l'équation de  $\Sigma'$  ne sont pas tous nuls. Ce problème fait l'objet de ce chapitre et du chapitre 3.
- Si le piston est rigide, les coefficients  $\beta, \xi'_{21}, \xi'_{22}, \xi'_{23}$  sont tous nuls, mais cela exige que l'on fournisse une énergie par unité de longueur du fil qui compense la déformation. Ce cas correspond à l'analogie hypersonique que nous traiterons dans le chapitre 4.

Soit  $\omega'$  la vitesse de propagation de  $\Sigma'$ . A l'ordre 1, l'écriture de la condition de glissement  $\omega' = q'_n$  sur  $\Sigma'$  n'est pas valable puisque la vitesse  $v_1$  y tend vers l'infini; il en résulte que l'on n'obtient pas de conditions supplémentaires pour le calcul de  $v_1$ , ni pour  $u_1$ : le problème n'est donc pas surdéterminé. La seule expression utile de la condition de glissement sur  $\Sigma'$  est celle qui, à l'ordre 0, donne  $\xi'_0$  c'est à dire  $u = \omega'$ , soit  $u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \rightarrow 0$  qui équivaut à  $\rho_0 \rightarrow 0$  en général sauf pour  $\alpha = 2$ .

Dans le plan  $\Pi_0$ , l'équation de  $\Sigma'$  est donnée par (2.20) et  $\omega'$  peut s'exprimer de façon analogue à  $\omega$  par :

$$(2.79) \quad \omega' = R'_t \sin \lambda' = \left( \frac{2 + \alpha}{4} \right) \hat{E} \frac{\xi_0}{t} \omega'^*$$

où  $\lambda'$  désigne l'angle entre la tangente à  $\Sigma'$  et le rayon vecteur (fig 3) qui vérifie:

$$(2.80) \quad \cotg \lambda' = \frac{R'_\theta}{R'} = \frac{R'_\theta^*}{R'^*}$$

Des développements à l'ordre 2 en  $\eta$  de (2.80), de  $\cos \lambda'$ , de  $\sin \lambda'$  et de  $\omega'^*$  donnent les expressions suivantes :

$$(2.81) \quad \begin{aligned} \cotg \lambda' &= -\eta \frac{\xi'_1}{\xi'_0} \sin \theta + \frac{\eta^2}{\xi'_0} \left( \frac{\xi'^2_1}{2\xi'_0} - 2\xi'_{21} \right) \sin 2\theta + o(\eta^2) \\ \cos \lambda' &= \cotg \lambda' + o(\eta^2) \\ \sin \lambda' &= 1 - \eta^2 \left( \frac{\xi'^2_1}{4\xi'^2_0} \right) (1 - \cos 2\theta) + o(\eta^2) \\ \omega'^* &= \xi'_0 + \left( \frac{4}{2 + \alpha} \right) \xi'_1 \eta \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \left( \frac{6 - \alpha}{2 + \alpha} \right) \xi'_{22} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +\eta^2 \left[ \left( \frac{6-\alpha}{2+\alpha} \right) \xi'_{23} - \frac{\xi_1'^2}{4\xi_0'} \right] + \eta^2 \cos 2\theta \left[ \left( \frac{6-\alpha}{2+\alpha} \right) \xi'_{21} + \frac{\xi_1'^2}{4\xi_0'} \right] \\
& + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)
\end{aligned}$$

On exprime la conservation de l'énergie à l'intérieur du volume diédrique  $\mathcal{V}_0$  de sommet  $\tilde{O}$  et limité par la portion de  $\Sigma'$  que délimite un angle  $\theta$  constant centré sur l'origine  $O$  du repère mobile (fig 3).

L'énergie émise en  $\tilde{O}$  est transmise intégralement et instantanément au mouvement de dilatation de  $\Sigma'$ , ce qui signifie qu'il n'y a pas de consommation d'énergie dans  $\mathcal{V}_0$  et que l'apport d'énergie est égal au travail des forces de pression sur la surface  $\Sigma'$ . Dans le repère fixe, on voit  $\Sigma'$  sous l'angle  $\tilde{\theta}$ . Cet angle dépend du temps et diminue au fur et à mesure que l'origine  $O$  du repère mobile se déplace. Cette diminution de l'angle  $\tilde{\theta}$  compense le flux d'énergie à travers la surface mobile  $S_0$  de façon à garder une répartition isotrope de l'énergie.

L'égalité entre le travail des forces de pression sur  $\Sigma'$  et l'apport d'énergie en  $\tilde{O}$  s'écrit en tenant compte du déplacement du repère mobile  $Oxyz$ :

$$(2.82) \quad \mathcal{P} - \iint_{\Sigma'} p' \left( \vec{\omega}' + \beta \vec{U} \vec{z} \right) \vec{n}' dS = 0$$

où  $p'$  désigne la pression qui règne sur  $\Sigma'$  et où  $\mathcal{P}$  est la puissance de l'apport de l'énergie  $\mathcal{E}_0$  telle que:

$$(2.83) \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tilde{\theta}(t)} \frac{d}{dt} \{Et^\alpha\} d\theta = \frac{\alpha}{2\pi} \tilde{\theta}(t) Et^{\alpha-1}$$

L'angle  $\tilde{\theta}$  (Annexe 3) s'exprime en fonction de  $\theta$  par la relation suivante:

$$(2.84) \quad \tilde{\theta}(t) = \theta - \eta \frac{\beta}{\xi_0'} \sin \theta + \left\{ \frac{\beta(\beta + \xi_1')}{2\xi_0'^2} \right\} \eta^2 \sin 2\theta + o(\eta^2)$$

On sait que sur  $\Sigma'$ ,  $\xi = R'^*$  et  $dS = \frac{rd\theta}{\sin \lambda'}$  par unité de longueur et on développe en  $\eta$  jusqu'à l'ordre 2 les équations (2.82) et (2.83) respectivement à l'aide de (2.22), (2.79) et de (2.84). De leur égalité et d'une identification terme à terme, on obtient une succession de relations liant la déformation de  $\Sigma'$  aux termes de pression sur cette même surface:

• Ordre 0:

$$(2.85) \quad p'_0 = p_0(\xi_0') = \frac{16\alpha(\gamma + 1)}{\pi(2 + \alpha)^3 \xi_0'^4 \xi_0'^4}$$

Cette équation permet de calculer la valeur de  $\xi_0$  après intégration du système formé par les équations (2.51), (2.52), (2.53).

Le cas  $\alpha = 0$  est particulier puisque l'équation (2.85) reste indéterminée car  $\xi'_0 = 0$ ; dans ce cas, le calcul de  $\xi_0$  fait appel à la conservation globale de l'énergie dans le domaine compris entre  $\Sigma$  et le fil [§2.3.4].

• Ordre 1:

Compte tenu de la valeur de  $p_{0\xi}(\xi'_0)$  donnée en Annexe 6, on a:

$$(2.86) \quad p'_1 = p_1(\xi'_0) = - \left( \frac{6 + \alpha}{2 + \alpha} \right) \left( \frac{\beta + \xi'_1}{\xi'_0} \right) p'_0$$

A l'ordre 0, la masse volumique  $\rho_0(\xi)$  s'annule sur  $\Sigma'$ , avec une pente  $\rho_{0\xi}$  infinie pour  $\alpha > \frac{4-2\gamma}{2+\gamma}$  (Annexe 6), sauf pour le cas particulier  $\alpha = 2$  où elle tend vers une valeur finie.

Le développement de  $\rho(\xi)$ , à l'ordre 1, au voisinage de  $\xi = \xi'_0$  donne, pour  $\alpha \neq 2$ :

$$(2.87) \quad \rho(\xi) = \rho_0(\xi'_0) + \eta \cos \theta \left[ \rho_1(\xi'_0) + \xi'_1 \rho_{0\xi}(\xi'_0) \right] + o(\eta^2)$$

Or

$$\rho_0(\xi'_0) = 0$$

et comme  $\rho_{0\xi}(\xi'_0) \rightarrow +\infty$ , la masse volumique n'est positive ou nulle,  $\forall \alpha$  que si:

$$(2.88) \quad \xi'_1 = 0$$

et

$$(2.89) \quad \rho_1 \rightarrow 0 \text{ quand } \xi \rightarrow \xi'_0$$

La condition (2.88) détermine le repère mobile (donc de la valeur de  $\beta$ ). Ce repère est celui dans lequel la frontière  $\Sigma'$  est vue comme un cylindre en translation uniforme qui ne subit pas de déformations sous l'effet d'ordre 1 de  $\bar{U}$ .

L'équation (2.89) fournit une équation de fermeture sur laquelle nous reviendrons au § 3.3 du chapitre 3.

Notons que la formule (2.87) correspond à (2.68) dans le cas particulier où  $\hat{\xi} = \xi'_0$ . On perçoit ici l'un des inconvénients de notre méthode de calcul. En effet, si nous simplifions fortement la mise en oeuvre du calcul en évitant d'introduire les  $\xi_j$  et  $\xi'_j$  dans les systèmes différentiels, nous nous heurtons à un problème de précision au voisinage de  $\xi'_0$  puisque  $\rho_{0\xi}$  tend vers l'infini pour  $\alpha > \frac{4-2\gamma}{2+\gamma}$ . Dans le cas de Sedov ou de Sakurai [2], [8], le terme  $\rho_{0\xi}$  apparaît explicitement dans les systèmes différentiels qui sont donc beaucoup plus difficiles à traiter que dans notre cas.

Le choix du repère défini par la condition (2.88) permet d'éviter cet écueil pour l'ordre 1, mais celui-ci persiste à l'ordre 2. C'est pourquoi la condition sur la pression sur  $\Sigma'$  est plus pratique pour nous, quoique nous ayons pu mettre en oeuvre également le critère de masse volumique nulle à la frontière  $\Sigma'$

Compte tenu de (2.88), les conditions sur  $\Sigma'$ , à l'ordre 2, s'écrivent:

- Ordre 2 effet de la pression:

$$(2.90) \quad \xi'_{22} = -\frac{2 + \alpha}{8} \xi'_0 \frac{p'_{22}}{p'_0}$$

$$\text{où } p'_{22} = p_{22}(\xi'_0)$$

- Ordre 2 effet isotrope de la vitesse:

$$(2.91) \quad \xi'_{23} = -\frac{2 + \alpha}{8} \xi'_0 \left[ \frac{p'_{23}}{p'_0} - \frac{2(6 + \alpha)\beta^2}{(2 + \alpha)^2 \xi'^2_0} \right]$$

$$\text{où } p'_{23} = p_{23}(\xi'_0)$$

- Ordre 2 effet anisotrope de la vitesse:

$$(2.92) \quad \xi'_{21} = \frac{2 + \alpha}{8} \xi'_0 \left[ -\frac{p'_{21}}{p'_0} + \frac{(\alpha^2 + 6\alpha + 16)\beta^2}{(2 + \alpha)^2 \xi'^2_0} \right]$$

$$\text{où } p'_{21} = p_{21}(\xi'_0)$$

### 2.3.4 Equation globale de l'énergie

Les conditions sur  $\Sigma'$  ne fournissent que les coefficients déterminant sa déformation. La détermination de  $\xi_1$ ,  $\xi_{21}$ ,  $\xi_{22}$  et de  $\xi_{23}$  qui interviennent dans les équations sur le choc, ainsi que celle de  $\xi_0$  pour  $\alpha = 0$ , nécessite d'autres équations. Elles sont obtenues en exprimant le principe de la conservation de l'énergie dans un domaine fluide occupant, à l'instant  $t$ , le volume  $\mathcal{V} + \mathcal{V}'$  inscrit dans un dièdre de sommet  $O$  et d'angle  $\theta$ .

Le volume  $\mathcal{V}$  est délimité par le choc  $\Sigma$ , la frontière  $\Sigma'$  et la surface latérale conique  $\mathcal{S}$  (fig 5).

Le volume  $\mathcal{V}'$  contient des particules fluides non perturbées par l'explosion (particules situées en amont du choc).

L'expression de la conservation de l'énergie s'écrit:

$$(2.93) \quad \frac{d}{dt} \left[ \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left( \epsilon + \frac{1}{2} \vec{q}^2 \right) d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}'} \bar{\rho} \left( \bar{\epsilon} + \frac{1}{2} \bar{\vec{q}}^2 \right) d\mathcal{V}' \right] = \\ - \iint_{\Sigma + \mathcal{S}_1} p \vec{q} \cdot \vec{n} d\mathcal{S} - \iint_{\Sigma'} p \vec{q} \cdot \vec{n} d\mathcal{S} - \iint_{\bar{\mathcal{S}}_2 + \bar{\mathcal{S}}_1 + \Sigma} \bar{p} \bar{\vec{q}} \cdot \bar{\vec{n}} d\mathcal{S}$$

où

- $\vec{q}$  et  $\vec{q}$  et  $e$  et  $\bar{e}$  sont les vitesses et les énergies internes spécifiques des milieux perturbé et ambiant respectivement.  
 $e$  et  $\bar{e}$  sont définies par les relations:

$$(2.94) \quad e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad \bar{e} = \frac{\bar{p}}{(\gamma - 1)\bar{\rho}}$$

- $-\iint_{\Sigma+\mathcal{S}_1} p \vec{q} \vec{n} d\mathcal{S}$  et  $-\iint_{\bar{\Sigma}_2+\bar{\mathcal{S}}_1+\Sigma} \bar{p} \vec{q} \vec{n} d\mathcal{S}$  correspondent aux travaux des forces de pression sur les surfaces indiquées.
- L'énergie émise en  $\tilde{O}$  est transmise intégralement au milieu continu  $\mathcal{D}$  par le mouvement de  $\Sigma'$ . Elle est égale à  $-\iint_{\Sigma'} p \vec{q} \vec{n} d\mathcal{S}$ .
- En appelant  $\Sigma_{ext}$  et  $\Sigma_{int}$  les faces externe et interne du choc  $\Sigma$ , l'équation de conservation de l'énergie à travers le choc donne:

$$(2.95) \quad \iint_{\Sigma_{ext}} \left[ \bar{\rho} \left( \bar{e} + \frac{1}{2} \vec{q}^2 \right) (\vec{q} - \vec{\omega}') \vec{n} + \bar{p} \vec{q} \vec{n} \right] d\mathcal{S} = \\ \iint_{\Sigma_{int}} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} \vec{q}^2 \right) (\vec{q} - \vec{\omega}') \vec{n} + p \vec{q} \vec{n} \right] d\mathcal{S}$$

Compte tenu du fait que  $\iiint_{\mathcal{V}} \left[ \bar{\rho} \left( \bar{e} + \frac{1}{2} \vec{q}^2 \right) \right]_t d\mathcal{V} \equiv 0$  et à l'aide de (2.94), (2.95), l'équation globale de l'énergie (2.93) devient:

$$(2.96) \quad \iiint_{\mathcal{V}} \left[ \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \vec{q}^2 \right]_t d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_1} \left( \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \vec{q}^2 \right) \vec{q} \vec{n} d\mathcal{S} \\ - \iint_{\bar{\mathcal{S}}_1+\bar{\mathcal{S}}_2} \left( \frac{\gamma \bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \vec{q}^2 \right) \vec{q} \vec{n} d\mathcal{S} + \iint_{\Sigma'} \left( \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \vec{q}^2 \right) \vec{q} \vec{n} d\mathcal{S} \\ + \iint_{\Sigma} \vec{\omega}' \vec{n} \left[ \left( \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \vec{q}^2 \right) - \left( \frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \vec{q}^2 \right) \right] d\mathcal{S} = \\ - \iint_{\Sigma'} p \vec{q} \vec{n} d\mathcal{S}$$

- Sur  $\mathcal{S}_1$ ,  $\vec{q} \cdot \vec{n} = v$  et  $d\mathcal{S} = dr$  pour un fil de longueur unité
- Sur  $\Sigma_{ext}$ ,  $\vec{q} = (1 - \beta) \vec{U} \vec{z}$  avec  $\vec{z} = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$
- Le calcul montre que les intégrales sur  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont d'ordre supérieur à 2. Elles peuvent donc être négligées.
- La condition de glissement sur  $\Sigma'$  permet d'identifier  $\vec{q}' \vec{n}'$  à  $\omega'$ .

Compte tenu de toutes ces remarques, l'équation (2.96) prend la forme définitive suivante:

$$(2.97) \quad \begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{V}} \left[ \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \right] d\mathcal{V} + \iint_{S_1} v \left[ \frac{\gamma p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \right] dS \\ & + \iint_{\Sigma} \omega \left\{ \left[ \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \right] - \left[ \frac{\bar{p}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \bar{p}(1-\beta)^2 \bar{U}^2 \right] \right\} dS \\ & - \iint_{\Sigma'} \omega' \left[ \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \right] dS - \iint_{\Sigma'} p \omega' dS = 0 \end{aligned}$$

On peut adimensionner (2.97) à l'aide de (2.19), (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), puis développer en  $\eta$  et  $\zeta$  à l'aide de (2.32) et enfin, ramèner les bornes d'intégration  $\xi = R^*$  et  $\xi = R^*$  aux bornes  $\xi = \xi'_0$  et  $\xi = 1$  en faisant des développements de Taylor des fonctions inconnues aux ordres 0 et 1 au voisinage de  $\xi = \xi'_0$  d'une part et au voisinage de  $\xi = 1$  d'autre part.

Une identification à chaque ordre en  $\eta$  donne après un long calcul:

- Ordre 0:

$$(2.98) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\xi'_0}^1 \mathcal{H}_0(\xi) \xi^3 d\xi = \left( \frac{2+\alpha}{4} \right) (\gamma-1) p'_0 \xi_0'^4 \\ & \alpha \neq 0 \\ & \text{où} \\ & \mathcal{H}_0(\xi) = p_0 + \rho_0 u_0^2 \\ & \mathcal{H}_0(1) \equiv 2 \end{aligned}$$

- Ordre 1:

$$(2.99) \quad \begin{aligned} & \int_{\xi'_0}^1 \left[ (3\alpha+2) \mathcal{H}_1(\xi) + \frac{2(2+\alpha)}{\gamma+1} \tilde{\mathcal{H}}_0(\xi) v_1(\xi) \right] \xi^3 d\xi \\ & + (3\alpha+2) \left\{ 2\xi_1 - \xi_1' \xi_0'^3 \mathcal{H}_0(\xi_0') \right\} = (\gamma-1) \left[ (2+\alpha) p'_1 \xi_0'^4 + (\alpha+6) p'_0 \xi_1' \xi_0'^3 \right] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_1(\xi) = p_1 + u_0 (\rho_1 u_0 + 2\rho_0 u_1) \\ & \tilde{\mathcal{H}}_0(\xi) = \gamma p_0 + \rho_0 u_0^2 \\ & \mathcal{H}_0(\xi_0') = p'_0 \text{ car } \lim_{\xi \rightarrow \xi_0'} \rho_0 \rightarrow 0 \text{ pour } \alpha \neq 2 \end{aligned}$$

Compte tenu des expressions de  $p'_0$  et de  $p'_1$ , le second membre de l'équation (2.99) est équivalent à  $-W_{(\Sigma')}$  avec

$$(2.100) \quad W_{(\Sigma')} = \frac{16\alpha\beta(\gamma^2 - 1)(\alpha + 6)}{\pi(2 + \alpha)^3\xi_0^4\xi_0^4}$$

Dans le repère défini par (2.88), les équations de l'énergie à l'ordre 2 sont:

– Ordre 2, effet de la pression:

$$(2.101) \quad \int_{\xi'_0}^1 \mathcal{H}_{22}(\xi)\xi^3 d\xi + 2\xi_{22} - \frac{4(\gamma + 1)}{\gamma(2 + \alpha)^2} - \xi'_{22}\xi_0{}^3\mathcal{H}_0(\xi'_0) =$$

$$(\gamma - 1) \left[ \frac{1}{2}\xi_0{}^4 p'_{22} + \frac{4}{2 + \alpha}\xi'_{22}\xi_0{}^3 p'_0 \right]$$

où

$$\mathcal{H}_{22}(\xi) = p_{22} + u_0(\rho_{22}u_0 + 2\rho_0u_{22})$$

– Ordre 2, effet isotrope de la vitesse:

$$(2.102) \quad \int_{\xi'_0}^1 \mathcal{H}_{23}(\xi)\xi^3 d\xi + 2(\xi_{23} + \frac{3}{4}\xi_1^2) - \frac{2(\gamma^2 - 1)(1 - \beta)^2}{(2 + \alpha)^2}$$

$$+ \frac{1}{2}\xi_1\mathcal{H}_1(1) + \frac{1}{4}\xi_1^2\mathcal{H}_{0\xi}(1) - \xi'_{23}\xi_0{}^3\mathcal{H}_0(\xi'_0)$$

$$= (\gamma - 1) \left[ \frac{1}{2}\xi_0{}^4 p'_{23} + \frac{4}{2 + \alpha}\xi'_{23}\xi_0{}^3 p'_0 \right]$$

avec

$$\mathcal{H}_{23}(\xi) = p_{23} + u_0(\rho_{23}u_0 + 2\rho_0u_{23}) + \rho_1u_0u_1 + \frac{1}{2}\rho_0(u_1^2 + v_1^2)$$

$$\mathcal{H}_1(1) = \left[ \frac{8(\gamma^2 - 3\gamma - 2) + 4\alpha(4\gamma^2 + \gamma - 1)}{(2 + \alpha)(\gamma^2 - 1)} \right] \xi_1 + \frac{4(\gamma - 3)(1 - \beta)}{2 + \alpha}$$

la valeur de  $\mathcal{H}_{0\xi}(1)$  est donnée en [annexe 4]

– Ordre 2, effet anisotrope de la vitesse:

$$(2.103) \quad \int_{\xi'_0}^1 \left[ \mathcal{H}_{21}(\xi) + \frac{2}{\gamma + 1} \left\{ \tilde{\mathcal{H}}_0(\xi)v_2(\xi) + \frac{1}{2}v_1(\xi)\tilde{\mathcal{H}}_1(\xi) \right\} \right] \xi^3 d\xi$$

$$+ 2(\xi_{21} + \frac{3}{4}\xi_1^2) + \frac{1}{2}\xi_1\mathcal{H}_1(1) + \frac{1}{4}\xi_1^2\mathcal{H}_{0\xi}(1) - \xi'_{21}\xi_0{}^3\mathcal{H}_0(\xi'_0)$$

$$+ \xi_1v_1(1) = (\gamma - 1) \left[ \frac{1}{2}\xi_0{}^4 p'_{21} + \frac{4}{2 + \alpha}\xi'_{21}\xi_0{}^3 p'_0 \right]$$

avec

$$\mathcal{H}_{21}(\xi) = p_{21} + u_0(\rho_{21}u_0 + 2\rho_0u_{21}) + \rho_1u_0u_1 + \frac{1}{2}\rho_0(u_1^2 - v_1^2)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(\xi) = \gamma p_1 + u_0(\rho_1u_0 + 2\rho_0u_1)$$

Les systèmes sont maintenant fermés et leur intégration donne les solutions propres à chaque ordre d'approximation.

Il n'y a pas de solution analytique sauf pour le cas  $\alpha = 0$  où la solution d'ordre 0 est explicite ainsi que la solution d'ordre 1 dans le repère mobile de vitesse  $\bar{U}$ . L'accès aux solutions se fait par voie numérique et il est très important d'avoir une bonne précision pour la solution de base puisque la résolution des ordres supérieurs en dépend. Les méthodes numériques utilisées sont diverses, mais certaines s'adaptent bien à nos problèmes: nous les exposons dans le chapitre suivant.

# Chapitre 3

## Résolution et traitement numérique

### 3.1 Calcul de l'écoulement de base

Cet écoulement est régi par le système fermé suivant :

$$(3.104) \quad \begin{aligned} \xi (\rho_0 \varepsilon)_\xi &= -2\rho_0 u_0 \\ \xi \left[ \rho_0 u_0 \varepsilon + \frac{(\gamma - 1)}{2} p_0 \right]_\xi &= \frac{2(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} \rho_0 u_0 - 3\rho_0 u_0^2 - (\gamma - 1)p_0 \\ \xi [\rho_0 s_0 \varepsilon]_\xi &= \frac{4(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)} \rho_0 - 2\rho_0 u_0 (s_0 + 1) \\ \rho_0(1) &= 1 \\ p_0(1) &= 1 \\ u_0(1) &= 1 \end{aligned}$$

Sedov a montré l'intérêt d'introduire une variable auxiliaire  $z_0$  afin de pouvoir ramener (3.104) à une succession d'équations différentielles [2].

Cette variable  $z_0$  est définie par:

$$(3.105) \quad z_0 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$$

La substitution de  $z_0$  dans les trois premières équations du système (3.104) donne les deux équations différentielles suivantes:

$$(3.106) \quad \xi u_{0\xi} \left[ \varepsilon - \left( \frac{(\gamma - 1)z_0}{2\gamma\varepsilon} \right) \right] + \left( \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right) \xi z_{0\xi} = \left( \frac{(\gamma^2 - 1)z_0}{2\gamma\varepsilon} \right) - u_0^2 + \frac{2(\gamma + 1)u_0}{2 + \alpha}$$

$$(3.107) \quad \frac{\varepsilon}{z_0} [\xi z_{0\xi}] + (\gamma - 1)\xi u_{0\xi} = \frac{4(\gamma + 1)}{2 + \alpha} - 2\gamma u_0$$



L'élimination de  $\xi z_{0\xi}$  permet ensuite d'aboutir aux équations différentielles ordinaires:

$$(3.108) \quad \frac{dz_0}{du_0} = G_1(u_0, z_0)$$

avec

$$z_0(1) = \gamma \text{ et } z_0 \in [\gamma, +\infty[$$

$$u_0(1) = 1 \text{ et } u_0 \in [1, \frac{\gamma+1}{2}];$$

$$(3.109) \quad \frac{d \log \xi}{du_0} = G_2(u_0, z_0)$$

avec

$$\xi = 1 \text{ sur le choc;}$$

$$(3.110) \quad \frac{d \log \rho_0}{d \log \xi} = G_3(u_0, z_0)$$

avec

$$\rho_0(1) = 1.$$

Les fonctions  $G_i(u_0, z_0)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont données en Annexe 7.

La recherche de la solution du système (3.104) revient donc à intégrer successivement les équations (3.108), (3.109) et (3.110).

Nous déterminons la constante  $\xi_0$  à partir de (2.85) soit:

$$(3.111) \quad \xi_0 = \frac{2}{\xi'_0} \left[ \frac{\alpha(\gamma+1)}{\pi(2+\alpha)^3 p'_0} \right]^{\frac{1}{4}}$$

La masse volumique  $\rho_0(\xi)$  peut-être calculée éventuellement à partir d'une formule simple dite "intégrale d'adiabaticité", déduite par des considérations dimensionnelles [2] (voir chapitre 4).

En effet, l'écoulement au sein du milieu  $\mathcal{D}_0$  est adiabatique et l'entropie de chaque particule fluide se conserve.

Ainsi,  $\rho_0$  s'exprime en fonction de  $z_0$ , de  $u_0$  et de  $\xi$  par la formule suivante:

$$(3.112) \quad \rho_0 = \left[ \left( \frac{z_0}{\gamma} \right)^{(2+\alpha)} \left\{ \frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{\gamma+1}{2} - u_0 \right) \right\}^{(2-\alpha)} \xi^8 \right]^\nu$$

avec

$$\nu = \frac{1}{\gamma(2+\alpha) - 4}$$

L'utilisation de cette formule reste délicate car  $\rho_0$  décroît lentement vers zéro à la frontière  $\Sigma'$  [11]; ceci est très coûteux du point de vue numérique puisqu'il faut un maillage serré. La vitesse de convergence est plus rapide en intégrant directement

l'équation (3.110). Le coefficient  $\nu$  tend vers l'infini quand  $\gamma(2 + \alpha) = 4$  mais, grâce aux relations dimensionnelles, nous trouvons dans ce cas une relation simple qui lie  $z_0$  et  $\xi$ :

$$(3.113) \quad z_0 = \gamma \xi^{-2\gamma} \left[ \frac{\gamma - 1}{2 \left( \frac{\gamma+1}{2} - u_0 \right)} \right]^{\gamma-1}$$

La résolution de ce cas revient à intégrer successivement les équations différentielles suivantes:

$$(3.114) \quad \frac{d \log \xi}{du_0} = G_4(u_0, \xi)$$

$$(3.115) \quad \frac{d \log p_0}{du_0} = G_5(u_0, \xi)$$

avec

$$u_0(1) = 1 \text{ et } p_0(1) = 1$$

(les fonctions  $G_j, j = 4, 5$  sont données en Annexe 7).

Pour déterminer  $\xi$ , on partage régulièrement l'intervalle  $[1, \frac{\gamma+1}{2}]$  et on intègre (3.114).

A l'aide de (3.113) et de (3.105), nous déduisons  $z_0$  et  $\rho_0$  une fois  $p_0$  calculée.

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (Annexe 8) est l'une des méthodes numériques utilisées pour intégrer les différentes équations différentielles. Le pas d'intégration est arbitraire, mais peut être choisi en fonction de l'exposant  $\alpha$ .

En voici quelques ordres de grandeurs:

pour

$$0 < \alpha < 1, \text{ pas } \sim 10^{-1}$$

$$1 < \alpha < 1.4, \text{ pas } \sim 10^{-2}$$

$$1.4 < \alpha < 2, \text{ pas } \sim 10^{-4} \text{ à } 10^{-3}$$

La méthode d'Adams Bashforth d'ordre 4 [20] (Annexe 9) peut-être utilisée conjointement avec la méthode de Runge-Kutta pour intégrer (3.110) et (3.109).

Pour éviter les erreurs dues à la discrétisation, nous gardons le même pas d'intégration, donc la même variable d'intégration utilisée dans la résolution de (3.108).

Nous arrêtons les itérations lorsque la masse volumique  $\rho_0$  est suffisamment petite (voisine de  $10^{-3}$ );  $\xi$  tend alors vers une constante qui est  $\xi_0^*$ . On détermine ainsi le premier terme de  $R^*$ .

## 3.2 Fonctions de répartition

Conformément aux explications du chapitre 2), §2.3.1, nous allons expliciter toutes les fonctions de  $\xi$  grâce à la variable  $\lambda_s$  par les développements de (2.21), (2.22), (2.23) et de (2.24) suivants:

$$(3.116) \quad \rho = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \bar{\rho} \rho^*(\xi, \theta, \eta)$$

$$(3.117) \quad p = \frac{(2 + \alpha)^2 \bar{p} \hat{E}^2 \xi_0^2}{8(\gamma + 1) t^2} \xi^2 p^*(\xi, \theta, \eta)$$

$$(3.118) \quad u = \frac{(2 + \alpha) \hat{E} \xi_0}{2(\gamma + 1) t} \xi u^*(\xi, \theta, \eta)$$

$$(3.119) \quad v = \frac{(2 + \alpha) \hat{E} \xi_0}{2(\gamma + 1) t} \xi v^*(\xi, \theta, \eta)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho^* &= \rho_0^*(\lambda_s) + \eta p_1^*(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 \left\{ \frac{1}{M^2} \rho_{22}^*(\lambda_s) + \rho_{23}^*(\lambda_s) \right\} \\ &\quad + \eta^2 \rho_{21}^*(\lambda_s) \cos 2\theta + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\ \xi^2 p^* &= p_0^*(\lambda_s) + \eta p_1^*(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 \left\{ \frac{1}{M^2} p_{22}^*(\lambda_s) + p_{23}^*(\lambda_s) \right\} \\ &\quad + \eta^2 p_{21}^*(\lambda_s) \cos 2\theta + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\ \xi u^* &= u_0^*(\lambda_s) + \eta u_1^*(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 \left\{ \frac{1}{M^2} u_{22}^*(\lambda_s) + u_{23}^*(\lambda_s) \right\} \\ &\quad + \eta^2 u_{21}^*(\lambda_s) \cos 2\theta + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\ \xi v^* &= \eta v_1^*(\lambda_s) \sin \theta + \eta^2 v_2^*(\lambda_s) \sin 2\theta + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \end{aligned}$$

Les expressions de toutes les fonctions de  $\lambda_s$  sont données en Annexe 10.

Les fonctions "étoilées" constituent ainsi les fonctions de répartition de l'écoulement compris entre le choc et  $\Sigma'$ , c'est à dire pour  $\xi \in [R'^*, R^*]$ .

En appelant  $\rho_c, p_c, u_c, v_c$  les valeurs des fonctions (3.116), (3.117), (3.118), (3.119) sur le choc, on peut obtenir les fonctions de répartition normées suivantes:

$$(3.120) \quad \frac{\rho}{\rho_c} = \tilde{\rho}_0(\lambda_s) + \eta \tilde{\rho}_1(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 \left\{ \frac{1}{M^2} \tilde{\rho}_{22}(\lambda_s) + \tilde{\rho}_{23}(\lambda_s) \right\} \\ + \eta^2 \tilde{\rho}_{21}(\lambda_s) \cos 2\theta + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)$$

$$(3.121) \quad \frac{p}{p_c} = \tilde{p}_0(\lambda_s) + \eta \tilde{p}_1(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 \left\{ \frac{1}{M^2} \tilde{p}_{22}(\lambda_s) + \tilde{p}_{23}(\lambda_s) \right\} \\ + \eta^2 \tilde{p}_{21}(\lambda_s) \cos 2\theta + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)$$

$$(3.122) \quad \frac{u}{u_c} = \tilde{u}_0(\lambda_s) + \eta \tilde{u}_1(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 \left\{ \frac{1}{M^2} \tilde{u}_{22}(\lambda_s) + \tilde{u}_{23}(\lambda_s) \right\} \\ + \eta^2 \tilde{u}_{21}(\lambda_s) \cos 2\theta + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)$$

$$(3.123) \quad \frac{v}{v_c} = \tilde{v}_0(\lambda_s) + \eta \tilde{v}_1(\lambda_s) \cos \theta + \eta^2 \{ \tilde{v}_{20}(\lambda_s) + \tilde{v}_{21}(\lambda_s) \cos 2\theta \} \\ + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)$$

Les fonctions "tilde" sont données en Annexe 10

### 3.3 Résolution des équations d'ordre 1

Un des principaux soucis pour résoudre les systèmes différentiels est de savoir si les solutions trouvées sont bornées, en d'autres termes si les solutions sont physiquement acceptables. Dans le cas de l'explosion ponctuelle [4], on a constaté que  $u_1$  et  $v_1$  présentaient un comportement singulier sur  $\Sigma'$ . Afin d'éviter cette difficulté, nous introduisons comme en [4] les inconnues auxiliaires  $\rho_0 u_1$  et  $\rho_0 v_1$  qui représentent la quantité de mouvement radiale et orthoradiale de la vitesse de chaque particule fluide

Grâce aux équations sous forme conservative (2.51), (2.52), (2.53), nous pouvons écrire (2.54), (2.55), (2.56), (2.57) sous la forme matricielle suivante:

$$(3.124) \quad [M_4] \left\{ \vec{X}_1 \right\}_\mu = [F_1] \left\{ \vec{X}_1 \right\} \\ \text{où } \left\{ \vec{X}_1 \right\} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

avec

$$x_1 = \rho_1 u_0$$

$$y_1 = \rho_0 u_1$$

$$z_1 = \rho_0 v_1$$

$$\mu = \log \xi$$

$$\left\{ \vec{X}_1 \right\}_\mu = \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \vec{X}_1 \right\}$$

$[M_4]$  et  $[F_1]$  sont des matrices carrées  $4 \times 4$  dont les coefficients dépendent uniquement de  $z_0$  et de  $u_0$ ; leurs expressions sont données en Annexe 11.

En inversant la matrice  $[M_4]$ , nous obtenons une forme simplifiée de (3.124) qui s'écrit:

$$(3.125) \quad \left\{ \overrightarrow{X}_1 \right\}_\mu = \frac{1}{D} [P_1] \left\{ \overrightarrow{X}_1 \right\}$$

où  $D$  représente le déterminant de  $[M_4]$  dont l'expression est donnée en Annexe 11,

$[P_1]$  étant une matrice  $4 \times 4$  dont les coefficients sont donnés également en Annexe 11

La résolution du système d'ordre 1 revient donc à déterminer :

- La position du repère mobile par rapport au repère fixe lié au fil ; cela consiste à calculer le coefficient  $\beta$
- La déformation que subit le choc  $\Sigma$  sous l'effet d'ordre 1 de  $\overline{U}$  ; cela implique le calcul du coefficient  $\xi_1$
- Les inconnues auxiliaires  $x_1, y_1, z_1$ , puis les vraies inconnues  $\rho_1, u_1, v_1$  et  $p_1$  caractérisant l'écoulement d'ordre 1.

Ainsi, les inconnues  $\beta, \xi_1, x_1, y_1, z_1, p_1$  satisfont les équations regroupés ci-dessous qui sont respectivement les équations du mouvement (3.125), la condition sur le choc (2.75), la condition qui détermine le scalaire  $\beta$  donc du repère mobile (2.88), les conditions sur  $\Sigma'$  (2.86) et l'équation de l'énergie (2.99):

$$(3.126) \quad \left\{ \overrightarrow{X}_1 \right\}_\mu = \frac{1}{D} [P_1] \left\{ \overrightarrow{X}_1 \right\}$$

$$(3.127) \quad \left\{ \overrightarrow{X}_1(\xi = 1) \right\} = \xi_1 \left\{ \overrightarrow{X}_{11} \right\} + \left\{ \overrightarrow{X}_{12} \right\}$$

$$(3.128) \quad \xi'_1 = 0$$

$$(3.129) \quad \xi'_1 + \beta + \left( \frac{2 + \alpha}{6 + \alpha} \right) \frac{p'_1}{p'_0} \xi'_0 = 0$$

$$(3.130) \quad \int_{\xi'_0}^1 \left[ (3\alpha + 2) \mathcal{H}_1 + \frac{2(2 + \alpha)}{\gamma + 1} \tilde{\mathcal{H}}_0 v_1 \right] \xi^3 d\xi + 2(3\alpha + 2) \xi_1 - (3\alpha + 2) \xi'_1 \xi_0'^3 \mathcal{H}_0(\xi'_0) = (\gamma - 1) \left[ (2 + \alpha) p'_1 \xi_0'^4 + (6 + \alpha) \xi'_1 \xi_0'^3 p'_0 \right]$$

Les expressions des vecteurs  $\left\{ \overrightarrow{X}_{11} \right\}$  et  $\left\{ \overrightarrow{X}_{12} \right\}$  donnés en Annexe 5 contiennent les termes  $p_{0\xi}(1), \rho_{0\xi}(1)$  et  $u_{0\xi}(1)$  explicités en Annexe 4.

Il est commode d'utiliser comme à l'ordre 0, la variable  $z_0$  plutôt que  $\xi$  pour intégrer les équations (3.126) et (3.130). En effet la discrétisation sur  $z_0$  a été choisie régulière alors que celle sur  $\xi$  ne l'est pas puisque c'est une conséquence du calcul d'ordre

0. Les méthodes numériques sont moins commodes à mettre en oeuvre et leurs performances que nous avons testées en sont affectées. Il est donc nécessaire de reformuler les équations (3.126) et (3.130) en prenant  $z_0$  comme variable:

- A l'aide de (3.108) et (3.109), le système différentiel (3.126) devient :

$$(3.131) \quad \frac{\partial}{\partial z_0} \left\{ \vec{X}_1 \right\} = -\frac{2u_0}{\gamma \varepsilon f_1} [P_1] \left\{ \vec{X}_1 \right\}$$

- L'évaluation de l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_{\xi'_0}^1 \left[ (3\alpha + 2)\mathcal{H}_1 + \frac{2(2 + \alpha)}{\gamma + 1} \tilde{\mathcal{H}}_0 v_1 \right] \xi^3 d\xi,$$

où les expressions  $\mathcal{H}_1$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_0$  sont données en (2.99), revient à chercher la solution de l'équation différentielle:

$$(3.132) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathcal{I}}{d\xi} &= \left[ (3\alpha + 2)\mathcal{H}_1 + \frac{2(2 + \alpha)}{\gamma + 1} \tilde{\mathcal{H}}_0 v_1 \right] \xi^3 d\xi \\ \lim_{\xi \rightarrow 1} \mathcal{I} &= 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \mathcal{I} &= W_1 \end{aligned}$$

$W_1$  vérifie l'équation:

$$(3.133) \quad \begin{aligned} W_1 &= (3\alpha + 2) \left[ 2\xi_1 - \xi'_1 \xi_0'^3 \mathcal{H}_0(\xi'_0) \right] \\ &\quad - (\gamma - 1) \left[ (2 + \alpha) p'_1 \xi_0'^4 + (\alpha + 6) \xi'_1 \xi_0'^3 p'_0 \right] \end{aligned}$$

A l'aide de (3.108) et (3.109), cette équation différentielle peut s'écrire en prenant  $z_0$  comme variable:

$$(3.134) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathcal{I}}{dz_0} &= D_1 \left[ (3\alpha + 2)\mathcal{H}_1 + \frac{2(2 + \alpha)}{\gamma + 1} \tilde{\mathcal{H}}_0 v_1 \right] \xi^3 d\xi \\ \lim_{z_0 \rightarrow \gamma} \mathcal{I} &= 0 \\ \lim_{z_0 \rightarrow +\infty} \mathcal{I} &= W_1 \\ D_1 &= \frac{\varepsilon \xi^4 f_2}{z_0 f_1} \end{aligned}$$

Cette reformulation sous forme différentielle permet de procéder au calcul de  $\mathcal{I}$  simultanément, à chaque pas de calcul, avec celui de (3.125).

Nous intégrons alors (3.131) avec les conditions (3.127) à l'aide d'une méthode numérique simple (Runge-Kutta ou Adams-Bashforth). Nous déterminons  $\beta$  et  $\xi_1$  grâce à deux critères alternatifs, physiquement équivalents, ce qui permet de vérifier la validité des résultats :

- Le premier critère est celui de la conservation globale de l'énergie;  $\beta$  et  $\xi_1$  sont définies comme étant les solutions des équations (3.128) et (3.133)
- Le second critère repose sur le fait que la masse volumique  $\rho$  tend vers zéro au voisinage de  $\Sigma'$  à l'exception du cas  $\alpha = 2$ . Le développement de  $\rho^*(R'^*)$  à l'ordre 1 donne:

$$(3.135) \quad \rho^*(R'^*) = \rho(\xi'_0) + \eta[\rho_1(\xi'_0) + \xi'_1 \rho_{0\xi}(\xi'_0)] \cos \theta$$

On sait que  $\rho_0(\xi'_0) = 0$  alors pour que  $\rho^*(R'^*)$  tende vers zéro, il faut que le terme d'ordre 1 en  $\eta$  s'annule également, soit:

$$(3.136) \quad \begin{aligned} \rho_1(\xi'_0) + \xi'_1 \rho_{0\xi}(\xi'_0) &= 0 \\ \text{avec } \xi'_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\beta$  et  $\xi_1$  sont définies comme étant les solutions des équations (3.128) et de (3.136). Le calcul numérique montre que ce critère de masse volumique nulle à la frontière  $\Sigma'$  représente bien la solution physique puisque la solution qui vérifie

$$\rho_1(R'^*) = 0$$

est aussi celle qui vérifie (2.99).

On sait que le calcul est correct car les valeurs de  $\beta$  et de  $\xi_1$  trouvées pour chacun des deux critères sont les mêmes. Nous avons récapitulé dans un tableau [Tab1] toutes les constantes caractérisant le repère mobile et les déformations respectives du choc et de la frontière  $\Sigma'$ . Les valeurs de  $\beta$  calculées sont voisines de 0.5: plus l'exposant  $\alpha$  est grand, plus  $\beta$  est voisin de 0.5 et plus le choc s'aplatit à contre courant car le coefficient  $\xi_1$  passe d'une valeur positive à une valeur négative.

Nous avons déterminé les solutions de l'écoulement d'ordre 1 dans le repère mobile.

Pour terminer considérons la solution de base translatée à la vitesse  $\beta\bar{U}$  par rapport à  $\tilde{O}$ .

Pour donner l'expression de la solution dans le repère fixe lié à  $\tilde{O}$ , on peut exprimer la translation à la vitesse  $\beta\bar{U}$  sous la forme d'une perturbation.

Avec les notations de la figure 3 et de l'annexe 3, on a:

$$\tilde{\xi} = \xi + \beta\eta \cos \theta + \frac{\beta^2 \eta^2 (1 - \cos 2\theta)}{4\xi} + o(\eta^3)$$

$$\begin{aligned}
(3.137) \quad & \tilde{\xi} \left[ u_0(\tilde{\xi}) + \eta \cos \tilde{\theta} u_1(\tilde{\xi}) \right] = \xi \cos(\theta - \tilde{\theta}) u_0(\xi) + \frac{2(\gamma + 1)}{2 + \alpha} \beta \eta \cos \tilde{\theta} \\
& \tilde{\xi} \eta \sin \tilde{\theta} v_1(\tilde{\xi}) = \xi u_0(\xi) \sin(\theta - \tilde{\theta}) - \frac{2(\gamma + 1)}{2 + \alpha} \beta \eta \sin \tilde{\theta} \\
& \rho_0(\tilde{\xi}) + \eta \cos \tilde{\theta} \rho_1(\tilde{\xi}) = \rho_0(\xi) \\
& \tilde{\xi}^2 \left[ p_0(\tilde{\xi}) + \eta \cos \tilde{\theta} p_1(\tilde{\xi}) \right] = \xi^2 p_0(\xi)
\end{aligned}$$

Nous effectuons des développements au voisinage de  $\tilde{\xi} = \xi$  des inconnues  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_1$ ,  $p_0$ ,  $p_1$  et par identification, nous déduisons les expressions suivantes, pour les fonctions de perturbation:

$$\begin{aligned}
(3.138) \quad & \rho_1(\tilde{\xi}) = -\beta \rho_{0\xi}(\xi) \\
& p_1(\tilde{\xi}) = -\beta \left[ \frac{2p_0(\xi)}{\xi} + p_{0\xi}(\xi) \right] \\
& u_1(\tilde{\xi}) = \beta \left[ \frac{1}{\xi} \left\{ -u_0(\xi) + \frac{2(\gamma + 1)}{2 + \alpha} \right\} - u_{0\xi}(\xi) \right] \\
& v_1(\tilde{\xi}) = \frac{\beta}{\xi} \left[ u_0(\xi) - \frac{2(\gamma + 1)}{2 + \alpha} \right]
\end{aligned}$$

Les fonctions définies par les formules (3.138) vérifient le système d'équations (2.54), (2.55), (2.56), (2.57) et constituent les formules de transport de la solution de base vue depuis le repère fixe lié au fil.

Cependant, l'équation de conservation globale de l'énergie (2.99) n'est pas vérifiée par ces fonctions. En effet, la translation de la solution de base correspond à une dépense d'énergie égale au travail des forces de pression sur la frontière  $\Sigma'$ . Une forme finie de ce travail lors d'une translation pure de vitesse  $\beta \bar{U}$  exprimée dans le repère fixe (donc telle que  $\xi_1 = \xi'_1 = \beta$ ) de la solution de base est donnée par la relation (2.100) [4].

Cela signifie qu'une partie de l'énergie est dépensée en translation pure de la solution de base et qu'une autre partie correspond à dans une distorsion pure de l'écoulement autour de  $\Sigma'$ .

Les expressions (3.138) ne sont pas bornées en  $\xi = \xi'_0$  pour  $\alpha > \frac{4-2\gamma}{2+\gamma}$  et en  $\xi = 0$  pour  $\alpha = 0$  (Annexe 6), ce qui prouve bien qu'une solution bornée ne peut être obtenue,  $\forall \alpha$ , que dans un repère où cette translation n'existe pas c'est à dire  $\xi'_1 = 0$ . Ainsi, nous avons la certitude que l'introduction du repère mobile est le seul moyen de déterminer une solution bornée à l'ordre 1 quel que soit  $0 \leq \alpha \leq 2$ .



### 3.4 Résolution de l'ordre 2 propre à l'effet de $\bar{p}$

Nous avons montré dans le chapitre 2 que l'on ne peut plus négliger l'effet isolé de  $\bar{p}$  dès que le choc s'affaiblit. De là l'importance d'étudier l'écoulement relatif à l'effet de  $\bar{p}$ .

Nous adoptons la même démarche que pour la résolution de l'écoulement d'ordre 1. Grâce aux équations (2.51), (2.52) et (2.53), les équations (2.58), (2.59) et (2.60) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante :

$$(3.139) \quad [M_3] \left\{ \vec{X}_{22} \right\}_\mu = [F_{20}] \left\{ \vec{X}_{22} \right\}$$

où

$$\left\{ \vec{X}_{22} \right\} = \begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ p_{22} \end{pmatrix} \text{ est le vecteur inconnu tel que :}$$

$$x_{22} = \rho_{22} u_0$$

$$y_{22} = \rho_0 u_{22}$$

$[M_3]$  et  $[F_{20}]$  sont des matrices carrées  $3 \times 3$  dont les coefficients sont donnés en [Annexe 11].

L'écoulement et les déformations respectives  $\xi'_{22}$  et  $\xi_{22}$  du choc  $\Sigma$  et de la frontière  $\Sigma'$  sont entièrement définis par les équations regroupées ci-dessous qui sont respectivement les équations du mouvement (3.139), la condition sur le choc (2.76), la condition sur  $\Sigma'$  (2.90) et l'intégrale de l'énergie (2.101):

$$(3.140) \quad \left\{ \vec{X}_{22} \right\}_\mu = \frac{1}{D'} [P_{20}] \left\{ \vec{X}_{22} \right\}$$

où  $D'$  désigne le déterminant de  $[M_3]$

$[P_{20}]$  une matrice  $3 \times 3$ , dont les coefficients sont donnés en Annexe 12;

$$(3.141) \quad \left\{ \vec{X}_{22}(\xi = 1) \right\} = \xi_{22} \left\{ \vec{X}_{221} \right\} - \left\{ \vec{X}_{222} \right\}$$

$$(3.142) \quad \xi'_{22} = - \left( \frac{2 + \alpha}{8} \right) \xi'_0 \frac{p'_{22}}{p'_0}$$

$$(3.143) \quad \int_{\xi'_0}^1 [p_{22} + u_0(x_{22} + 2y_{22})] \xi^3 d\xi + 2\xi_{22} - \frac{4(\gamma + 1)}{\gamma(2 + \alpha)^2} - \xi_0'^3 \xi'_{22} p'_0 \\ = (\gamma - 1) \left[ \frac{1}{2} p'_{22} \xi_0'^4 + \left( \frac{4}{2 + \alpha} \right) p'_0 \xi_0'^3 \xi'_{22} \right]$$

Les expressions des vecteurs  $\left\{ \vec{X}_{221} \right\}$  et  $\left\{ \vec{X}_{222} \right\}$  se trouvent en Annexe 5.

La résolution de l'écoulement propre à l'effet de la pression  $\bar{p}$  s'avère plus délicate. En effet numériquement deux problèmes se posent:

- Le premier est celui de l'intégration du système (3.140). Certains coefficients de la matrice  $[P_{20}]$  tendent vers l'infini quand  $u_0 \rightarrow \frac{\gamma+1}{2}$ , ce qui signifie que la matrice  $[P_{20}]$  peut avoir des valeurs propres très grandes. Il s'ensuit que les solutions du système (3.140) peuvent tendre vers l'infini.
- Le second est celui de la recherche des racines d'une équation dégénérée du type  $[\infty - \infty] = 0$ .  
C'est le cas de l'équation:

$$\rho_{22}(\xi'_0) + \xi'_{22}\rho_{0\xi}(\xi'_0) = 0$$

puisqu'il est évident que le produit  $\xi'_{22}\rho_{0\xi}(\xi'_0)$  peut tendre vers l'infini du fait que  $\xi'_{22} \neq 0$ .

Il est donc préférable de travailler avec une variable bornée ( $\xi$  par exemple).  
L'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_{\xi'_0}^1 [p_{22} + u_0(x_{22} + 2y_{22})] \xi^3 d\xi$$

peut être évaluée en intégrant l'équation différentielle suivant [20]:

$$(3.144) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathcal{I}}{d\xi} &= \xi^3 [p_{22} + u_0(x_{22} + 2y_{22})] \\ \lim_{\xi \rightarrow 1} \mathcal{I} &= 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \mathcal{I} &= W_{22} \end{aligned}$$

où  $W_{22}$  vérifie l'équation suivante:

$$(3.145) \quad W_{22} - 2\xi_{22} + \frac{4(\gamma+1)}{\gamma(2+\alpha)^2} + p'_0 \xi_0'^3 \xi'_{22} = 0$$

Le coefficient  $\xi_{22}$  apparaît comme une inconnue, le coefficient  $\xi'_{22}$  étant déterminé à partir de (3.142).

Les composantes du vecteur  $\left\{ \vec{X}_{22} \right\}$  sont les solutions du système (3.140).

Cette reformulation permet d'intégrer simultanément, à chaque pas de calcul, les équations (3.139) et (3.144).

Les méthodes numériques utilisées pour intégrer les diverses équations sont les mêmes que pour l'ordre 1 ([21],[22]). Nous pouvons vérifier la validité des calculs en utilisant le critère de masse volumique nulle à la frontière  $\Sigma'$ . Le développement de  $\rho^*(R^*)$  jusqu'à l'approximation d'ordre 2 qui tient compte de l'effet de  $\bar{p}$  donne:

$$(3.146) \quad \begin{aligned} \rho^*(R^*) &= \rho_0(\xi'_0) + \eta \cos \theta [\rho_1(\xi'_0 + \xi'_1 \rho_{0\xi}(\xi'_0)) \\ &\quad + \frac{\eta^2}{M^2} [\rho_{22}(\xi'_0) + \xi'_{22} \rho_{0\xi}(\xi'_0)]] \end{aligned}$$

Puisque les termes d'ordre 0 et d'ordre 1 en  $\eta$  sont nuls à la suite des intégrations, alors le développement (3.146) s'annule si le facteur de  $\frac{\eta^2}{M}$  l'est également, soit:

$$(3.147) \quad \rho_{22}(\xi'_0) + \xi'_{22}\rho_{0\xi}(\xi'_0) = 0$$

Lorsque les calculs sont corrects, les valeurs de  $\xi_{22}$  calculées pour chacune de ces deux équations sont identiques. Le tableau 1 donne les valeurs de  $\xi_{22}$  et de  $\xi'_{22}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  et pour trois valeurs de  $\gamma$ .

### 3.5 Résolution de l'ordre 2 propre à l'effet isotrope de $\bar{U}$

Contrairement au cas de l'explosion ponctuelle [4], l'écoulement propre à l'effet isotrope de  $\bar{U}$  est découpé de l'écoulement anisotrope d'ordre 2 puisque les équations qui le régissent ne contiennent pas de termes en  $\rho_0 v_2$ . Par conséquent, leur résolution ne dépend que des résultats d'ordre 0 et d'ordre 1. Comme dans les paragraphes précédents, nous pouvons mettre sous forme matricielle les équations (2.61), (2.62), (2.63). Cette forme s'écrit :

$$(3.148) \quad [M_3] \left\{ \vec{X}_{23} \right\}_\mu = [F_{20}] \left\{ \vec{X}_{23} \right\} - \left\{ \vec{\Lambda}_1 \right\}$$

où

$$\left\{ \vec{X}_{23} \right\} = \begin{pmatrix} x_{23} \\ y_{23} \\ p_{23} \end{pmatrix} \text{ désigne le vecteur inconnu tel que :}$$

$$x_{23} = \rho_{23}u_0$$

$$y_{23} = \rho_0 u_{23}$$

$$\text{et où } \left\{ \vec{\Lambda}_1 \right\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur dont les composantes sont}$$

données en Annexe 12

Les inconnues  $x_{23}, y_{23}, p_{23}, \xi_{23}$  et  $\xi'_{23}$  sont entièrement définies par les équations du mouvement (3.148), la condition sur le choc (2.77), la condition sur la frontière  $\Sigma'$  (2.91) et l'équation de l'énergie (2.102) regroupées ci-dessous:

$$(3.149) \quad \left\{ \vec{X}_{23} \right\}_\mu = \frac{1}{D'} [P_{20}] \left\{ \vec{X}_{23} \right\} - [M_3]^{-1} \left\{ \vec{\Lambda}_1 \right\}$$

$$(3.150) \quad \left\{ \vec{X}_{23} \right\}_{\xi=1} = \xi_{23} \left\{ \vec{X}_{231} \right\} - \xi_1 \left\{ \vec{X}_{232} \right\} - \xi_1^2 \left\{ \vec{X}_{233} \right\} + \left\{ \vec{X}_{234} \right\}$$

$$(3.151) \quad \xi'_{23} = -\left(\frac{2+\alpha}{8}\right) \xi'_0 \left[ \frac{p'_{23}}{p'_0} - \left(\frac{2(6+\alpha)}{(2+\alpha)^2}\right) \frac{\beta^2}{\xi'^2_0} \right]$$

$$(3.152) \quad \int_{\xi'_0}^1 [p_{23} + u_0(x_{23} + 2y_{23})] \xi^3 d\xi + 2(\xi_{23} + \frac{3}{4}\xi_1^2) - \frac{2(\gamma^2 - 1)(1 - \beta)^2}{(2 + \alpha)^2} \\ + \frac{1}{2}\xi_1 \mathcal{H}_1(1) + \frac{1}{4}\xi_1^2 \mathcal{H}_{0\xi}(1) - p'_0 \xi'^3_0 \xi'_{23} = (\gamma - 1) \left[ \frac{1}{2} p'_{23} \xi'^4_0 + \left(\frac{4}{2 + \alpha}\right) p'_0 \xi'^3_0 \xi'_{23} \right]$$

Les expressions des vecteurs  $\{\vec{X}_{231}\}$ ,  $\{\vec{X}_{232}\}$ ,  $\{\vec{X}_{233}\}$  et  $\{\vec{X}_{234}\}$  sont données en Annexe 5.

Nous procédons de la même façon que pour la recherche de la solution de l'écoulement propre à l'effet de  $\bar{p}$  :

- Le calcul de l'intégrale  $\mathcal{I} = \int_{\xi'_0}^1 [p_{23} + u_0(x_{23} + 2y_{23})] \xi^3 d\xi$  peut se ramener à l'intégration du problème différentiel suivant:

$$(3.153) \quad \frac{d\mathcal{I}}{d\xi} = \xi^3 [p_{23} + u_0(x_{23} + 2y_{23})] \\ \text{avec} \\ \lim_{\xi \rightarrow 1} \mathcal{I} = 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \mathcal{I} = W_{23}$$

$W_{23}$  vérifie l'équation:

$$(3.154) \quad W_{23} - 2(\xi_{23} + \frac{3}{4}\xi_1^2) + \frac{2(\gamma^2 - 1)(1 - \beta)^2}{(2 + \alpha)^2} - \frac{1}{2}\xi_1 \mathcal{H}_1(1) \\ - \frac{1}{4}\xi_1^2 \mathcal{H}_{0\xi}(1) + p'_0 \xi'^3_0 \xi'_{23} + \frac{(\gamma - 1)(6 + \alpha)}{(2 + \alpha)^2} p'_0 \xi'^2_0 \beta^2 = 0$$

- Le coefficient  $\xi_{23}$  est défini comme racine de (3.154)
- Le coefficient  $\xi'_{23}$  est déduit de (3.151)
- Les composantes du vecteur  $\{\vec{X}_{23}\}$  sont déterminés comme étant les solutions du système (3.149)
- Il est également possible de déterminer  $\xi_{23}$  en utilisant le critère de masse volumique nulle à la frontière  $\Sigma'$ .  
Le développement de  $\rho^*(R^{**})$  à l'ordre 2 s'écrit:

$$(3.155) \quad \rho^*(R^{**}) = \rho_0(\xi'_0) + \eta \cos \theta [\rho_1(\xi'_0) + \xi'_1 \rho_{0\xi}(\xi'_0) + \frac{\eta^2}{M^2} [\rho_{22}(\xi'_0) + \xi'_{22} \rho_{0\xi}(\xi'_0)] \\ + \eta^2 [\rho_{23}(\xi'_0) + \xi'_{23} \rho_{0\xi}(\xi'_0)]$$

Le critère impose:

$$(3.156) \quad \rho_{23}(\xi'_0) + \xi'_{23}\rho_{0\xi}(\xi'_0) = 0$$

$\xi_{23}$  est déterminé comme étant le zéro de l'équation (3.156).

Les mêmes difficultés numériques rencontrées pour la détermination de  $\xi_{22}$  se posent pour la détermination de  $\xi_{23}$  à partir de (3.156) puisque  $\xi'_{23}$  n'est pas nul et  $\lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \rho_{0\xi} \rightarrow \infty$  pour  $\alpha > \frac{4-2\gamma}{2+\gamma}$ .

La méthode d'Adams (Annexe 9) s'applique bien au système avec second membre et les résultats obtenus sont satisfaisants puisque les valeurs de  $\xi_{23}$  calculées à partir de (3.156) d'une part et (3.154) d'autre part sont les mêmes.

### 3.6 Résolution de l'ordre 2 propre à l'effet anisotrope de $\bar{U}$

Les équations (2.64), (2.65), (2.66) et (2.67) peuvent être écrites sous la forme matricielle:

$$(3.157) \quad [M_4] \left\{ \bar{X}_{21} \right\}_\mu = [F_{21}] \left\{ \bar{X}_{21} \right\} - \left\{ \bar{\Lambda}'_1 \right\}$$

où

$$\left\{ \bar{X}_{21} \right\} = \begin{pmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_2 \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

est le vecteur inconnu tel que :

$$x_{21} = \rho_{21}u_0$$

$$y_{21} = u_{21}\rho_0$$

$$z_2 = \rho_0v_2$$

$[F_{21}]$  est une matrice carrée  $4 \times 4$  dont les coefficients sont donnés en Annexe 11.

$$\left\{ \bar{\Lambda}'_1 \right\} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \lambda'_3 \\ \lambda'_4 \end{pmatrix}$$

est un vecteur dont les composantes  $\lambda'_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sont données en Annexe 13.

Les inconnues  $x_{21}, y_{21}, z_2, p_{21}, \xi_{21}$  et  $\xi'_{21}$  sont entièrement définies par le système fermé suivant :

$$(3.158) \quad \left\{ \bar{X}_{21} \right\}_\mu = \frac{1}{D} [P_{21}] \left\{ \bar{X}_{21} \right\} - [M_4]^{-1} \left\{ \bar{\Lambda}'_1 \right\}$$

$$(3.159) \quad \left\{ \vec{X}_{21}(\xi = 1) \right\} = \xi_{21} \left\{ \vec{X}_{211} \right\} - \xi_1 \left\{ \vec{X}_{212} \right\} - \xi_1^2 \left\{ \vec{X}_{213} \right\} + \left\{ \vec{X}_{214} \right\}$$

$$(3.160) \quad \xi'_{21} = - \left( \frac{2 + \alpha}{8} \right) \xi'_0 \left[ \frac{p'_{21}}{p'_0} - \left\{ \frac{\alpha^2 + 6\alpha + 16}{(2 + \alpha)^2} \right\} \frac{\beta^2}{\xi_0'^2} \right]$$

$$(3.161) \quad \int_{\xi'_0}^1 \left[ \mathcal{H}_{21} + \frac{2}{\gamma + 1} \left( \tilde{\mathcal{H}}_0 v_2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{H}}_1 v_1 \right) \right] \xi^3 d\xi + 2(\xi_{21} + \frac{3}{4} \xi_1^2) + \frac{1}{2} \xi_1 \mathcal{H}_1(1) \\ + \frac{1}{4} \xi_1^2 \mathcal{H}_{0\xi}(1) - p'_0 \xi_0'^3 \xi'_{21} + \xi_1 v_1(1) = (\gamma - 1) \left[ \frac{1}{2} p'_{21} \xi_0'^4 + \left( \frac{4}{2 + \alpha} \right) p'_0 \xi_0'^3 \xi'_{21} \right]$$

avec

$$\mathcal{H}_{21} = p_{21} + u_0 \left[ x_{21} + 2y_{21} + \frac{1}{\rho_0} (x_1 y_1 + \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} z_1^2) \right]$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 v_2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{H}}_1 v_1 = z_2 (z_0 + u_0^2) + \frac{z_1}{2\rho_0} \{ \gamma p_1 + u_0 (x_1 + 2y_1) \}$$

Les vecteurs  $\left\{ \vec{X}_{211} \right\}$ ,  $\left\{ \vec{X}_{212} \right\}$ ,  $\left\{ \vec{X}_{213} \right\}$  et  $\left\{ \vec{X}_{214} \right\}$  sont donné analytiquement en Annexe 5.

La substitution de (3.160) dans (3.161) fournit l'équation ci-dessous:

$$(3.162) \quad W_{21} - 2(\xi_{21} + \frac{3}{4} \xi_1^2) - \frac{1}{2} \xi_1 \mathcal{H}_1(1) - \frac{1}{4} \xi_1^2 \mathcal{H}_{0\xi}(1) + p'_0 \xi_0'^3 \xi'_{21} \\ - \xi_1 v_1(1) + \left\{ \frac{\alpha^2 + 6\alpha + 16}{2(2 + \alpha)^2} \right\} p'_0 \xi_0'^2 \beta^2 = 0$$

dans laquelle  $W_{21}$  est un résultat de calcul issue de l'intégration du système différentiel suivant:

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\xi} = \left[ \mathcal{H}_{21} + \frac{2}{\gamma + 1} \left( \tilde{\mathcal{H}}_0 v_2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{H}}_1 v_1 \right) \right] \xi^3 \\ \lim_{\xi \rightarrow 1} \mathcal{I} = 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \mathcal{I} = W_{21}$$

Le coefficient  $\xi_{21}$  peut être déterminé soit par la résolution du système fermé (3.157) à (3.162), soit par la résolution du système constitué par (3.157) et l'équation ci-dessous:

$$(3.163) \quad \rho_{21}(\xi'_0) + \xi'_{21} \rho_{0\xi}(\xi'_0) = 0$$

Cette équation est écrite selon le critère de masse volumique nulle à la frontière  $\Sigma'$ . On annule ainsi les termes d'ordre 2 relatifs à l'effet anisotrope du courant dans le développement de  $\rho^*(R^*)$ .

### 3.7 Explosion instantanée ( $\alpha = 0$ )

L'énergie  $\mathcal{E}_0$  ne dépend plus du temps, elle est constante et coïncide avec l'apport d'énergie  $E$ .

Sedov [2] a mis en évidence une intégrale première de l'énergie (voir chapitre 4), d'où l'existence d'une solution analytique qui s'écrit:

$$\begin{aligned}
 (3.164) \quad z_0 &= \frac{\varepsilon u_0^2}{\frac{\gamma+1}{2\gamma} - u_0} \text{ avec } u_0 \in \left] \frac{\gamma+1}{2\gamma}, 1 \right] \\
 \xi &= [u_0(\gamma+1 - \gamma u_0)]^{\frac{-1}{2}} \varepsilon^{\nu_1} \\
 \rho_0 &= \varepsilon^{\nu_1} \left[ \frac{(\gamma-1)(\gamma+1 - \gamma u_0)}{\gamma+1 - 2u_0} \right]^{\nu_2} \\
 p_0 &= \frac{1}{\gamma} z_0 \rho_0 \\
 &\text{où} \\
 \varepsilon' &= \left( \frac{2\gamma}{\gamma-1} \right) u_0 - \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \\
 \nu_1 &= \frac{\gamma-1}{2\gamma} \text{ et } \nu_2 = \frac{2}{2-\gamma}
 \end{aligned}$$

Si on substitue la valeur  $\alpha = 0$  dans (2.98), l'égalité n'a de sens que si  $\xi'_0 = 0$  puisque  $p'_0 \neq 0$ .

Cela signifie physiquement que la frontière matérielle  $\Sigma'$  n'existe pas dans ce cas. Dans ce cas, l'équation globale de l'énergie (2.98) s'écrit compte tenu de (2.85):

$$(3.165) \quad \int_0^1 [p_0 + \rho_0 u_0^2] \xi^3 d\xi = \frac{\gamma^2 - 1}{\pi \xi_0^4}$$

La valeur de  $\xi_0$  peut être déterminée à partir de (3.165) en évaluant l'intégrale par une méthode numérique simple telle que la méthode des trapèzes.

La détermination de l'écoulement propre à l'effet de  $\bar{p}$  seule peut se faire en prenant dans toutes les équations la valeur  $\alpha = 0$ .

La substitution de  $\xi'_0 = 0$  dans (2.90) donne:

$$\xi'_{22} = 0$$

Cela montre que l'effet de  $\bar{p}$  n'entraîne pas l'apparition de la frontière  $\Sigma'$ .

La solution relative à l'effet de la contre-pression peut être calculée en intégrant (3.139) et (3.144) pour  $\alpha = 0$ . Les calculs effectués par nos soins donnent  $\xi_{22} = 0.9919$ .

La comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature, en particulier ceux de Sakurai est satisfaisante.

La variable  $x$  utilisée par Sakurai est identique à celle de Sedov ( notée  $\lambda_s$  dans notre cas ). Elle est reliée à  $\xi$  par:

$$(3.166) \quad \xi = \lambda_s + \eta \Delta_1 \cos \theta + \eta^2 \Delta_{22} + o(\eta^3)$$

Nous avons pu établir une correspondance entre les fonctions  $f, g, h$  de Sakurai et les fonctions  $u^*, p^*, \rho^*$  utilisées ici. On obtient:

- Ordre 0:

$$(3.167) \quad \begin{aligned} f_0(\lambda_s) &= \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right) \lambda_s u_0(\lambda_s) \\ g_0(\lambda_s) &= \left( \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \lambda_s^2 p_0(\lambda_s) \\ h_0(\lambda_s) &= \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \rho_0(\lambda_s) \end{aligned}$$

Ces fonctions  $f_0, g_0, h_0$  vérifient le système d'équations (2.12)

- Ordre 2 ( effet de  $\bar{p}$  ):

$$(3.168) \quad \begin{aligned} f_2(\lambda_s) &= \frac{2\hat{n}}{\gamma + 1} \left[ \lambda_s u_{22}(\lambda_s) + \lambda_s \Delta_{22} u_{0\xi}(\lambda_s) + \tilde{\Delta}_{22} u_0(\lambda_s) \right] \\ g_2(\lambda_s) &= \frac{2\gamma\hat{n}}{\gamma + 1} \left[ \lambda_s^2 p_{22}(\lambda_s) + \lambda_s^2 \Delta_{22} p_{0\xi}(\lambda_s) + 2\lambda_s \tilde{\Delta}_{22} p_0(\lambda_s) \right] \\ h_2(\lambda_s) &= \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \hat{n}^2 \left[ \rho_{22}(\lambda_s) + \Delta_{22} \rho_{0\xi}(\lambda_s) \right] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \frac{2 + \alpha}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ si } \alpha = 0 \\ \tilde{\Delta}_{22} &= \Delta_{22} - \sigma \lambda_s \xi_{22} \\ \sigma &= \frac{2 - \hat{n}}{\hat{n}} \end{aligned}$$

Ces fonctions  $f_2, g_2, h_2$  verifient les équations (2.58) ,(2.59), (2.60). La substitution de nos resultats (  $\xi_j, u_j, p_j, \rho_j$  avec  $j = 22$ ) dans les relations (3.168) a permis de tracer les courbes définies par :



$$(3.169) \quad \begin{aligned} \varphi_2(\lambda_s) &= \frac{f_2(\lambda_s)}{\lambda_s - f_0(\lambda_s)} \\ \psi_2(\lambda_s) &= \frac{g_2(\lambda_s)}{g_0(\lambda_s)} \\ \chi_2(\lambda_s) &= \frac{h_2(\lambda_s)}{h_0(\lambda_s)} \end{aligned}$$

L'identité des courbes obtenues (fig 7) avec celles tracées par Sakurai [8] est manifeste. L'équivalent de  $\xi_{22}$  est noté  $\lambda_1$  par Sakurai et ces deux coefficients sont liés par la relation :

$$(3.170) \quad \lambda_1(\text{Sakurai}) = 2\hat{n}(2\hat{n} - 3)\xi_{22}$$

Ainsi,  
pour  $\gamma = 1.4$

$$\begin{aligned} -\lambda_1(\text{Sakurai}) &= 1.9836 \\ -\lambda_1(\text{calculé par (3.170)}) &= 1.9838 \end{aligned}$$

pour  $\gamma = 1.67$

$$\begin{aligned} -\lambda_1(\text{Sakurai}) &= 1.9374 \\ -\lambda_1(\text{calculé par (3.170)}) &= 1.9392 \end{aligned}$$

Une autre vérification de la validité de nos calculs s'obtient en comparant ceux-ci avec ceux de Sedov [2] avec contre-pression seule. Sedov utilise une variable de perturbation appelée  $q$ , égale à l'inverse du carré du nombre de Mach  $M_c$  du choc défini par:

$$(3.171) \quad M_c = \frac{\omega}{\bar{c}} = \left( \frac{2 + \alpha}{4} \right) \frac{\omega^*}{\sqrt{\gamma\zeta}}$$

Dans le cas présent,  $q$  et  $\zeta$  sont liés par la relation:

$$(3.172) \quad q = 4\gamma\zeta(1 - 6\gamma\zeta\xi_{22})$$

Comme Sedov exprime sa solution sous forme d'un développement du premier ordre en  $q$ , une identification montre que:

-les termes d'ordre 0 du développement de Sedov sont liés aux termes d'indice 0 de nos répartitions (3.120), (3.121), (3.122) par les relations:

$$f_0(\text{Sedov}) = \tilde{u}_0 \quad g_0(\text{Sedov}) = \tilde{p}_0 \quad h_0(\text{Sedov}) = \tilde{p}_0$$

-les termes d'ordre 1 du développement coïncident avec les termes d'indice 22 de nos répartitions tels que:

$$f_1(\text{Sedov}) = \frac{1}{4}\tilde{u}_{22} \quad g_1(\text{Sedov}) = \frac{1}{4}\tilde{\rho}_{22} \quad h_1(\text{Sedov}) = \frac{1}{4}\tilde{p}_{22}$$

Sedov note  $l$  la coordonnée sans dimension du choc; avec nos notations, on obtient:

$$(3.173) \quad l^2 = \left( \frac{R}{R_0^+} \right)^2 = \frac{1}{4} \xi_0^4 \frac{q}{\gamma} e^{\tilde{A}q}$$

où

$\tilde{A}$  est une constante positive voisine de 2

et  $R_0^+$  est une longueur caractéristique définie par:

$$(3.174) \quad R_0^+ = \sqrt{\frac{E}{p}}$$

Compte tenu de (3.172), nous pouvons développer (3.173) au premier ordre en  $q$ . Le développement ainsi obtenu coïncide avec celui de Sedov si:

$$(3.175) \quad \xi_{22} = \frac{1}{2} \tilde{A}$$

La constante  $\tilde{A}$  est celle  $-\lambda_1$  de Sakurai et vaut 1.9836 pour  $\gamma = 1.4$  dans le cas d'une explosion cylindrique [8]. Cela conduit à  $\xi_{22} = 0.9918$ , cette valeur est à comparer à  $\xi_{22} = 0.9919$  obtenue par nos calculs.

Quant à l'effet de première approximation de la vitesse ( ordre 1 en  $\eta$  ), nous constatons que si l'on choisit  $\xi_1 = 0$  ( ce qui, physiquement, signifie que le choc ne se déforme pas sous l'effet d'ordre 1 de  $\bar{U}$  ), la solution triviale dans le repère mobile  $\mathfrak{R}'$ ,

$$(3.176) \quad \begin{aligned} \rho_1 &= 0 \\ p_1 &= 0 \\ u_1 &= 0 \\ v_1 &= 0 \end{aligned}$$

vérifie les équations (2.54), (2.55), (2.56), (2.57) et (2.99).

Cette solution impose  $\beta = 1$  pour que les conditions sur le choc (2.75) soient satisfaites.

Physiquement, cela signifie que l'écoulement consécutif à l'explosion instantanée du fil est entraîné à la vitesse  $\bar{U}$  du milieu ambiant.

Pour démontrer l'unicité de la solution bornée et de son indépendance vis-à-vis

des repères , exprimons la translation à la vitesse  $\beta\bar{U}$  de l'écoulement de base par rapport à  $\tilde{O}$ .

Les fonctions définies par (3.138) s'écrivent pour  $\alpha = 0$ :

$$(3.177) \quad \begin{aligned} \rho_1(\tilde{\xi}) &= -\beta\rho_{0\epsilon}(\tilde{\xi}) \\ p_1(\tilde{\xi}) &= -\beta \left[ \frac{2p_0(\tilde{\xi})}{\tilde{\xi}} + p_{0\epsilon}(\tilde{\xi}) \right] \\ u_1(\tilde{\xi}) &= \beta \left[ \frac{1}{\tilde{\xi}} \{ \gamma + 1 - u_0(\tilde{\xi}) \} - u_{0\epsilon}(\tilde{\xi}) \right] \\ v_1(\tilde{\xi}) &= \frac{\beta}{\tilde{\xi}} [u_0(\tilde{\xi}) - (\gamma + 1)] \end{aligned}$$

Ces fonctions ne vérifient les conditions sur le choc exprimées dans le repère fixe (obtenu en faisant formellement  $\beta = 0$  dans (2.75)) que si  $\xi_1 = \beta = 1$  et ne restent pas finies en  $\xi = 0$  ( $\xi$  varie de 0 à 1 puisque la frontière  $\Sigma'$  n'existe pas); par contre, elles vérifient bien l'équation globale de l'énergie (2.99).

Pour le montrer, écrivons les équation locale et globale de l'énergie dans le repère  $\mathfrak{R}$ .

La forme conservative de l'équation locale s'écrit:

$$(3.178) \quad r\rho W_t + r\rho u W_r + \rho v W_\theta - r p_t = 0$$

avec

$$W = \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2)$$

On remplacera  $\tilde{\xi}$  par  $\xi$  dans la suite pour simplifier les notations.

Le développement à l'ordre 0 de ces équations pour  $\alpha = 0$  permet d'aboutir aux formes adimensionnées suivantes:

On obtient pour la première:

$$(3.179) \quad \begin{aligned} & \left[ \xi^3 \left\{ \varepsilon(\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2) + \left( \frac{\gamma^2 - 1}{2} \right) p_0 \right\} \right]_\xi \\ & + \xi^2 \left[ \varepsilon(\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2) + \left( \frac{\gamma^2 - 1}{2} \right) p_0 \right] = 0 \end{aligned}$$

La seconde est formellement identique à (2.98).

La substitution de (3.138) et de (3.179) dans (2.99) pour  $\alpha = 0$  donne l'équation suivante:

$$- \int_0^1 \left[ \xi^3 (p_0 + \rho_0 u_0^2) \right]_\xi d\xi$$

$$(3.180) \quad +\frac{2}{\gamma+1} \int_0^1 \left[ \xi^3 \left\{ \varepsilon(\gamma p_0 + \rho_0 u_0^2) + \left( \frac{\gamma^2 - 1}{2} \right) p_0 \right\} \right]_\xi d\xi \\ -4 \int_0^1 \left[ \xi^2 \left\{ \varepsilon \rho_0 u_0 + \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) p_0 \right\} \right]_\xi d\xi + 2 = 0$$

Nous voyons que les conditions sur le choc (2.74) vérifient bien cette équation intégrale.

Ainsi, on peut conclure que tout se passe comme si l'écoulement de première approximation reste à symétrie cylindrique, mais translaté à la vitesse  $\bar{U}$ . On peut vérifier que les écoulements issus des effets isotrope et anisotrope d'ordre 2 de  $\bar{U}$  admettent également dans  $\mathfrak{R}$  les solutions triviales :

$$(3.181) \quad \begin{aligned} \rho_j &= 0 \\ p_j &= 0 \\ u_j &= 0 \\ &\text{avec } j = 23, 21 \\ v_2 &= 0 \end{aligned}$$

à la condition que  $\beta = 1$ ,  $\xi'_j = 0$  et  $\xi_j = 0$  ( $j = 23, 21$ ) La vitesse  $\bar{U}$  n'a donc pour effet que de translater globalement l'écoulement de base. Cela est vrai du fait que  $E$  ne dépend pas du temps et que le repère mobile est galiléen, tout se passe comme si  $E$  avait été apporté à  $t = 0$  en  $O$ , fixe par rapport au milieu extérieur. La seule solution bornée est donc la solution triviale exprimée dans  $\mathfrak{R}$ .

### 3.8 Cas $\alpha = 2$

Dans ce cas l'énergie émise par le fil prend la forme:

$$(3.182) \quad \mathcal{E}_0 = Et^2$$

et, avec les grandeurs primaires  $E$ ,  $\bar{p}$  et  $t$ , les variables correspondant à  $\bar{U}$  et à  $\bar{p}$  se réduisent à des constantes:

- A  $\bar{U}$  correspond la constante  $\eta = \frac{\bar{U}}{\xi_0} \left( \frac{\bar{p}}{E} \right)^{\frac{1}{4}}$  qui reste  $\ll 1$  tant que  $E \gg \bar{p} \left( \frac{\bar{U}}{\xi_0} \right)^4$
- A la pression  $\bar{p}$  correspond la constante  $\zeta = \frac{\bar{p}}{\xi_0^2 \sqrt{\rho E}}$

– Ces constantes sont toujours liées par la relation (2.17)

Nous substituons  $\alpha = 2$  dans toutes les équations et dans tous les développements en  $\eta$  et nous obtenons :

### Écoulement de base (ordre 0)

L'écoulement de base est entièrement défini en intégrant successivement les équations différentielles suivantes :

$$(3.183) \quad \frac{dz_0}{du_0} = \frac{z_0 [\varepsilon(\gamma + 1)(u_0 - 1) - (\gamma - 1)z_0]}{u_0 [\varepsilon^2 - (\gamma - 1)z_0]}$$

avec

$$u_0 \in \left[1, \frac{\gamma + 1}{2}\right]$$

$$z_0 = \gamma \text{ quand } u_0 = 1$$

$$(3.184) \quad \frac{d \log \xi}{du_0} = \frac{(\gamma - 1)z_0 - 2\varepsilon^2}{2u_0 [\varepsilon^2 - (\gamma - 1)z_0]}$$

$$\xi = 1 \text{ quand } u_0 = 1$$

$$\xi \rightarrow \xi'_0 \text{ quand } u_0 \rightarrow \frac{\gamma + 1}{2}$$

Nous avons intégré (3.183) en prenant  $u_0$  comme variable. L'intervalle  $\left[1, \frac{\gamma+1}{2}\right]$  a été subdivisé en  $N$  parties égales et on a utilisé la méthode de Runge-Kutta. Le calcul montre que  $z_0$  prend une valeur finie quand  $u_0 \rightarrow \frac{\gamma+1}{2}$ , cela signifie qu'au voisinage de  $\Sigma'$  la température reste finie contrairement aux autres cas où elle croît indéfiniment. Ce résultat n'a rien d'étonnant puisque (2.53) fournit la relation simple:

$$(3.185) \quad \xi s_{0\xi} = -2$$

L'égalité (3.185) montre que l'entropie est constante et vaut

$$s_0(\xi'_0) = -2 \log \xi'_0$$

sur  $\Sigma'$ . Cette quantité est bien positive puisque  $\xi'_0 < 1$ .

Nous gardons dans la suite de nos calculs la variable d'intégration  $u_0$  et nous intégrons les systèmes avec un pas constant.

La masse volumique  $\rho_0$  peut-être déterminée:

– soit en intégrant

$$(3.186) \quad \frac{d \log \rho_0}{du_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - (\gamma - 1)z_0}$$

– soit en utilisant la relation déduite de (3.185)

$$(3.187) \quad \rho_0 = \left[ \frac{z_0 \varepsilon^2}{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

La pression  $p_0$  est calculée à partir de la formule suivante :

$$(3.188) \quad p_0 = \left[ \xi^2 \left( \frac{z_0}{\gamma} \right)^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

La pression et l'entropie restent constantes à l'ordre 0 sur la frontière  $\Sigma'$  et, comme l'écoulement est adiabatique, la masse volumique tend vers une constante non nulle donnée analytiquement par:

$$(3.189) \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \rho_0 = \rho_0(\xi'_0) = \left[ p'_0 \xi'^2_0 \right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

Ceci est vérifié par le calcul et la valeur obtenue pour  $\rho_0$  est positive.

Nous voyons ainsi que la nature de la solution du cas  $\alpha = 2$  est très différente de celle des cas étudiés précédemment puisque la masse volumique ne s'annule plus sur la frontière  $\Sigma'$ . Ce cas n'est autre que celui du piston cylindrique à vitesse de dilatation constante.

Nous pouvons calculer  $\xi_0$  à partir de (2.85) en y posant  $\alpha = 2$ , soit:

$$(3.190) \quad \xi_0 = \frac{1}{\xi'_0} \left( \frac{\gamma + 1}{2p'_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Rappelons que l'intégrale de l'énergie s'écrit :

$$(3.191) \quad \int_{\xi'_0}^1 \mathcal{H}_0 \xi^3 d\xi = \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) p'_0 \xi'^4_0$$

## Écoulements d'ordre 1 et d'ordre 2

Ces écoulements sont entièrement déterminés en intégrant les systèmes différentiels suivants pour  $\alpha = 2$  :

- (3.126) à (3.130) pour l'ordre 1
- (3.140) à (3.143) pour l'effet de  $\bar{p}$  seul
- (3.149) à (3.152) pour l'effet isotrope d'ordre 2 de  $\bar{U}$
- (3.158) à (3.161) pour l'effet anisotrope d'ordre 2 de  $\bar{U}$

Nous avons intégré tous ces systèmes par rapport à la variable  $u_0$ .  
Pour cela il faut:

- Transformer les intégrales de type

$$\int_{\xi'_0}^1 F(\xi) \xi^3 d\xi$$

en d'autres intégrales de type

$$- \int_1^{\frac{\gamma+1}{2}} \mathcal{F}(u_0) \xi^4 \frac{f_2(u_0, z_0)}{f_4(u_0, z_0)} du_0$$

- Transformer les matrices  $[P_{20}]$  et  $[P_{21}]$  en multipliant leurs coefficients respectivement par  $\frac{-2z_0 u_0}{\gamma \epsilon^2 f_4}$  et  $\frac{-2z_0 u_0}{\gamma \epsilon^2 f_4}$ . Cependant, nous remarquons les identités de certains coefficients tels que (Annexe 11):

$$\begin{array}{llll} k_{11} = k'_{11} & k_{21} = k'_{21} & k_{41} = k'_{31} & k_{12} = k'_{12} \\ k_{22} = k'_{22} & k_{42} = k'_{32} & k_{33} = k''_{33} & k_{14} = k'_{13} = k''_{14} \\ k_{24} = k'_{23} = k''_{24} & k_{44} = k'_{33} & & \end{array}$$

### 3.9 Résultats

Les solutions du problème de l'écoulement consécutif à l'explosion isotrope et non instantanée du fil rectiligne infini dans un courant sont désormais connues numériquement malgré la singularité rencontrée à la frontière matérielle  $\Sigma'$ .

Les calculs ont été faits pour différentes valeurs de l'exposant  $\alpha$  et pour trois valeurs de  $\gamma$ :

- \*  $\gamma = 1.33$  pour les gaz monoatomiques
- \*  $\gamma = 1.4$  pour les gaz diatomiques
- \*  $\gamma = 1.67$  pour les gaz triatomiques

Les résultats numériques sont repertoriés dans des tableaux numérotés de 1 à 27.

### 3.9.1 Variation des coefficients $\xi_j$ en fonction de $\alpha$ et $\gamma$

La figure 8 montre l'évolution de  $\xi'_0$  en fonction de  $\alpha$  et de  $\gamma$ .

Pour les trois valeurs de  $\gamma$  choisies, la valeur de  $\xi'_0$  est comprise entre 0.75 et 0.95 et on constate que plus le gaz est compressible, plus les deux surfaces constituées par la frontière  $\Sigma'$  et l'onde de choc  $\Sigma$  se rapprochent et donc plus l'écoulement consécutif à l'explosion est comprimé. Cette compression est d'autant plus forte que  $\alpha$  est élevé.

Quant à l'évolution de  $\xi_0$ , représentée sur la figure 9, elle est contraire à celle de  $\xi'_0$ . La plus faible valeur de  $\xi_0$  est obtenue pour  $\alpha = 2$ . La figure 10 montre la variation de  $p'_0$  en fonction de  $\alpha$  et de  $\gamma$ :  $p'_0$  varie dans le même sens que les deux paramètres.

La variation de  $\xi_1$  est donnée par la figure 11. Toutes les courbes se coupent en un point pour  $\alpha = \alpha^*$ , valeur voisine de 1. Il existe donc une valeur de  $\alpha$  pour laquelle la déformation du choc est insensible à la compressibilité du milieu extérieur. Nous avons ainsi deux configurations pour les effets d'ordre 1 du courant:

- La première correspond à  $\alpha < \alpha^*$ ;  $\xi_1$  est alors positif. Cela signifie que le choc est freiné dans le sens du courant
- La seconde correspond aux valeurs de  $\alpha$  supérieures à  $\alpha^*$ ;  $\xi_1$  est négatif, le choc est donc peu ralenti dans le sens du courant (figure 6).

Au point où  $\alpha = \alpha^*$ , les courbes représentatives de la variation de  $\beta$  (figure 12) présentent une forte inflexion. Cette inflexion est significative d'un changement brusque de la position du repère mobile. Il semble que plus le milieu extérieur est compressible, plus l'inflexion tend à disparaître et les courbes deviennent de plus en plus rectilignes.

Les courbes de la figure 13 montrent que la variation de  $\xi_{22}$  dépend peu de  $\gamma$ . Pour  $\alpha < \alpha^*$ , les courbes sont confondues et leur écart reste faible pour  $\alpha > \alpha^*$ . Nous pouvons estimer que l'effet de la contre-pression sur la déformation du choc est presque indépendant de la compressibilité du milieu extérieur. Cependant  $\xi_{22}$  reste positif et tend à compenser l'effet de compression du courant; ce qui provoque un élargissement de la couche comprise entre  $\Sigma'$  et  $\Sigma$ .

Ce résultat est confirmé puisque le coefficient  $\xi'_{22}$  est constamment négatif, comme le montre la figure 14, et il varie dans le même sens que  $\alpha$ . Il est d'autant plus faible que le milieu est compressible. Cela se traduit par une nette déformation de la frontière  $\Sigma'$  par rapport au choc sous l'effet de la contre-pression.

Compte tenu de l'accumulation des erreurs d'arrondis à l'ordre 0 et 1, l'intégration des équations qui déterminent les effets isotrope et anisotrope



d'ordre 2 du courant ne permet d'obtenir les valeurs de  $\xi_{21}$ ,  $\xi'_{21}$ ,  $\xi_{23}$  et  $\xi'_{23}$  qu'avec une précision de l'ordre de 10%. C'est pourquoi, les courbes des figures 15 et 16 sont moins précises.

### 3.9.2 Valeurs sur le choc

Bien que les conditions sur le choc soient déterminées analytiquement à chaque ordre en  $\eta$ , on peut cependant évaluer les sauts des grandeurs physiques au passage du choc d'une autre façon grâce au nombre de Mach relatif  $M_R$  du choc par rapport à l'écoulement extérieur.

On procède ainsi car le développement analytique de  $\rho$  n'est valable que pour  $\zeta$  très petit ( $\zeta \sim 0.05$ ), alors que celui de  $M_R$  issu de celui de  $R$  reste valable pour  $\zeta \sim 0.3$ . Ceci montre la particularité du comportement de  $\rho$  [4], [14], [15]. Pour  $p$ ,  $u$  et  $v$ , les développements de ces variables sur le choc donnent des valeurs très proches de celles issues de celui de  $M_R$ . L'expression de  $M_R$  est donné par:

$$M_R = \frac{\omega - U_n}{\bar{c}}$$

soit

$$(3.192) \quad M_R = \left(\frac{2 + \alpha}{4}\right) \frac{\xi_0}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{t}{t^+}\right)^{\frac{\alpha-2}{4}} \omega^* - (1 - \beta)\overline{M} \sin(\lambda + \theta)$$

$t^+$  désigne un temps caractéristique construit à partir du système primaire ( $E, \bar{p}, \bar{c}$ ). Il est défini par:

$$(3.193) \quad t^+ = \left(\frac{\gamma E}{\bar{p}\bar{c}^2}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}$$

La formule (3.192) montre que toutes les valeurs sur le choc peuvent être calculées à partir du développement de  $\omega^*$ . Grâce aux équations (2.27), ces valeurs sont données par les expressions suivantes:

$$(3.194) \quad \frac{p_c}{\bar{p}} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right) M_R^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

$$(3.195) \quad \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \frac{(\gamma + 1)M_R^2}{2 + (\gamma - 1)M_R^2}$$

et

$$\frac{c_c}{\bar{c}} = \sqrt{\frac{p_c \bar{p}}{\rho_c \bar{\rho}}}$$

Dans le repère mobile, nous pouvons écrire la progression du choc sous la

forme adimensionnée suivante:

$$(3.196) \quad \frac{R}{R^+} = \xi_0 R^* \left( \frac{t}{t^+} \right)^{\frac{2+\alpha}{4}}$$

$R^+$  est une longueur caractéristique définie par:

$$(3.197) \quad R^+ = \left( \frac{E\gamma^{\frac{\alpha}{2}}}{\bar{p}c^\alpha} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}}$$

Si l'on s'intéresse à la progression du choc sur l'axe de symétrie par rapport au repère fixe lié au fil, la formule (3.196) peut être écrite:

$$(3.198) \quad \frac{\tilde{R}}{R^+} = \frac{R}{R^+} + \iota \beta \overline{M} \left( \frac{t}{t^+} \right)$$

avec

$\iota = 1$  dans le sens du courant

$\iota = -1$  à contre-courant

$\tilde{R}$  désigne la position du choc par rapport au repère fixe lié au fil.

La figure 17 montre la valeur de cette fonction pour trois valeurs de  $\alpha$  et pour  $\gamma = 1.4$ . On voit que la progression du choc est d'autant plus lente que l'exposant  $\alpha$  est élevé. Cette progression est une fonction linéaire du rapport  $\frac{t}{t^+}$  pour  $\alpha = 2$ .

Pour  $\theta = 0$  et pour  $\frac{t}{t^+}$  suffisamment grand (fig 18), l'effet du courant seul se distingue nettement de celui de la contre-pression seule. Plus le nombre de Mach de l'écoulement extérieur est grand, plus le choc est freiné à contre-courant, la compressibilité du milieu extérieur ne joue pas un rôle prépondérant dans la progression du choc (figures 18 et 19).

Les figures 21 et 22 montrent respectivement les évolutions de  $\frac{\rho_c}{\bar{p}}$  et de  $\frac{\rho_c}{\bar{p}}$  en fonction de la progression du choc sur l'axe de symétrie et par rapport au repère fixe. Dans le sens du courant ( $\theta = 0$ ), la pression et la masse volumique sur le choc sous les effets simultanés de  $\overline{U}$  et  $\bar{p}$  sont moins importantes que celles sur le choc cylindrique de base. On constate le cas contraire se produit à contre-courant. Dès que  $\frac{t}{t^+}$  est supérieur à 0.5, les courbes n'ont plus de significations physiques puisque la pression sur le choc reste inférieure à la pression  $\bar{p}$  du milieu extérieur.

La pression et la masse volumique sur le choc varient dans le même sens que le nombre de Mach pour  $\theta = \pi$  et inversement pour  $\theta = 0$ . Cela signifie que la pression et le saut d'entropie sur le choc sont plus grandes à contre-courant que dans le sens du courant.

### 3.9.3 Courbes des répartitions

Les figures 24 à 29 représentent les évolutions des répartitions  $\rho^*$ ,  $p^*$ ,  $u^*$  et  $v^*$  en fonction de  $\xi$  qui vaut respectivement 1 sur le choc  $\Sigma$  et  $\xi'_0$  sur la

frontière  $\Sigma'$ .

Etant donné que  $0.7 < \xi'_0 < 1$  pour  $\alpha \neq 0$ , nous avons choisi de tracer les courbes pour  $\xi \in ]0.7, 1]$ .

Les couleurs représentent les évolutions pour quatre valeurs de  $\eta$  et  $\zeta$  (nous nous sommes fixés la valeur maximale  $\eta_{max} = 0.3$  pour  $\eta$  et nous avons choisi quatre valeurs de  $\eta$  auxquelles correspondent quatre valeurs de  $\zeta$  et du temps. La valeur maximale  $\eta_{max}$  a été choisie de façon à satisfaire l'hypothèse de petites perturbations. Les figures à droite de chaque quadrant sont représentatives des effets de  $\bar{U}$  à contre-courant et celles à gauche dans le sens du courant.

Ainsi, pour  $\eta = 0$  et  $\zeta = 0$ , l'écoulement intérieur au choc reste bien symétrique. Cette symétrie est détruite dès que l'on tient compte de l'effet de  $\bar{U}$  ( $\eta \neq 0$ ), d'où une répartition pour  $v^*$  pour  $\theta \neq 0$  qui devient infinie sur  $\Sigma'$ . Nous remarquons alors:

- Une nette dissymétrie des répartitions: d'un côté, le choc est plus freiné que la frontière  $\Sigma'$  à contre-courant ce qui entraîne une compression; d'un autre côté c'est  $\Sigma'$  qui *progresses moins vite*, d'où une détente.
- Des effets plus importants de  $\bar{U}$  suivant la compressibilité du milieu.
- Une variation considérable de "l'épaisseur" du domaine D entre le choc et la frontière  $\Sigma'$  en fonction de  $\eta$ , de  $\zeta$ , de  $\gamma$  et de  $\alpha$ . Cette "épaisseur" est d'autant plus grande que  $\eta$  est proche de  $\eta_{max}$ .

Le cas  $\alpha = 2$  est bien particulier puisque les figures 28 et 29 illustrent parfaitement des répartitions qui demeurent finies sur  $\Sigma'$ ; les répartitions correspondent à différentes conditions physiques initiales.

Ces résultats ne sont pas dépourvus d'applications et nous verrons dans le chapitre suivant comment traiter le problème des écoulements hyper-soniques par le biais de l'étude de l'explosion non instantanée du fil.

# Chapitre 4

## Application aux écoulements hypersoniques

### 4.1 Problème du piston indéformable

Nous avons vu précédemment que le repère  $(\mathcal{R}' : O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  dans lequel sont déterminées les solutions du problème du piston déformable  $\Sigma'$  (chapitres 2 et 3) est en translation de vitesse  $\beta\vec{U}\vec{z}$  par rapport au repère fixe  $(\mathcal{R} : O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  lié au fil.

Le coefficient  $\beta$  est défini par la condition qu'à l'ordre 1,  $\Sigma'$  reste circulaire et qu'elle est simplement traduite avec le repère mobile.

Plaçons-nous dans ce repère. Puisque le piston  $\Sigma'$  n'y est pas déformée et reste centré sur  $O\vec{x}$ , et on peut considérer que c'est le fil qui se déplace à contre-courant à la vitesse  $-\beta\vec{U}\vec{z}$  par rapport à  $O$  (figure 30).

Mais alors, dans le repère  $(\mathcal{R})$ , l'écoulement extérieur est vu en translation de vitesse  $(1 - \beta)\vec{U}\vec{z}$ .

Cela revient à traiter le problème comme celle de l'explosion d'un fil, initialement en  $O$ , animé d'une vitesse  $\frac{\beta\vec{U}}{1-\beta}$  dans un milieu extérieur en mouvement uniforme de vitesse  $\vec{U} = (1 - \beta)\vec{U}$  par rapport à  $O$  où le piston  $\Sigma'$  reste cylindrique et centré.

Nous devons écrire alors la solution sous forme d'un développement par rapport à une variable sans dimension  $\tilde{\eta}$  qui caractérise l'effet du courant extérieur  $\vec{U}$ .

La variable  $\tilde{\eta}$  s'écrit:

$$(4.199) \quad \tilde{\eta} = \frac{\vec{U}}{\xi_0} \left( \frac{\rho t^{(2-\alpha)}}{E} \right)^{1/4}$$

Les variables  $\eta$  et  $\tilde{\eta}$  sont ainsi liées par la relation:

$$(4.200) \quad \tilde{\eta} = (1 - \beta)\eta$$

L'expression de la coordonnée adimensionnée  $\xi$  relative à  $r$  reste inchangée:

$$\xi = \frac{r}{\hat{E}\xi_0}$$

La solution s'écrit sous la forme de développements par rapport à  $\hat{\eta}$  tels que:

-Equation du choc  $\Sigma$ :

(4.201)

$$r = \hat{R}(\theta, t)$$

avec

$$\hat{R}(\theta, t) = \hat{E}\xi_0\hat{R}^*(\hat{\eta}, \theta)$$

$$\hat{R}^* = 1 + \hat{\eta}\hat{\xi}_1 \cos \theta + o(\hat{\eta}^2)$$

où  $\hat{\xi}_1$  est une constante inconnue

-Equation du piston  $\Sigma'$ :

(4.202)

$$r = \hat{R}'(\theta, t)$$

avec

$$\hat{R}'(\theta, t) = \hat{E}\xi_0\xi'_0$$

-Composantes de la vitesse:

(4.203)

$$\hat{u}(r, \theta, t) = \frac{2 + \alpha}{2(\gamma + 1)} \frac{r}{t} \hat{u}^*(\xi, \hat{\eta}, \theta)$$

(4.204)

$$\hat{v}(r, \theta, t) = \frac{2 + \alpha}{2(\gamma + 1)} \frac{r}{t} \hat{\eta} \hat{v}_1(\xi) \sin \theta$$

avec

$$\hat{u}^* = u_0(\xi) + \hat{\eta} \hat{u}_1(\xi) \cos \theta + o(\hat{\eta}^2)$$

-Masse volumique:

(4.205)

$$\hat{\rho}(r, \theta, t) = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \bar{\rho} \hat{\rho}^*(\xi, \hat{\eta}, \theta)$$

avec

$$\hat{\rho}^* = \rho_0(\xi) + \hat{\eta} \hat{\rho}_1(\xi) \cos \theta + o(\hat{\eta}^2)$$

-Pression:

(4.206)

$$\hat{p}(r, \theta, t) = \frac{(2 + \alpha)^2}{8(\gamma + 1)} \frac{r^2}{t^2} \bar{p} \hat{p}^*(\xi, \hat{\eta}, \theta)$$

avec

$$\hat{p}^* = p_0(\xi) + \hat{\eta} \hat{p}_1(\xi) \cos \theta + o(\hat{\eta}^2)$$

Substituons les formes (4.203) à (4.206) dans les équations (2.40) à (2.43).  
En identifiant les équations à chaque ordre en  $\hat{\eta}$ , nous obtenons:

-à l'ordre 0, les mêmes équations que (2.12).

-à l'ordre 1, des équations identiques aux équations (2.54) à (2.57) dans lesquelles on remplace respectivement les termes  $\eta\rho_1$ ,  $\eta u_1$ ,  $\eta v_1$  et  $\eta p_1$  par  $\tilde{\eta}\hat{\rho}_1$ ,  $\tilde{\eta}\hat{u}_1$ ,  $\tilde{\eta}\hat{v}_1$  et  $\tilde{\eta}\hat{p}_1$ .

L'identité des solutions à l'ordre 1 pour les deux problèmes (pistons déformable et indéformable) se traduit par l'égalité:

$$\tilde{\eta}\hat{f}_1 = \eta f_1$$

soit, compte tenu de (1.2):

$$(4.207) \quad \begin{aligned} \hat{f}_1 &= \frac{f_1}{1-\beta} \\ \forall \hat{f}_1 &\in [\tilde{\xi}_1, \hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{\rho}_1, \hat{p}_1] \\ \forall f_1 &\in [\xi_1, u_1, v_1, \rho_1, p_1] \end{aligned}$$

Il en résulte que les solutions d'ordre 1 du problème du piston rigide se déduisent de celles d'ordre 1 du piston déformable à l'aide d'une division par  $(1-\beta)$  de toutes les fonctions indicées 1.

Compte tenu de ce résultat, les conditions sur le choc ( $\xi = \tilde{R}^*$ ) à l'ordre 1, ramenées en  $\xi = 1$ , peuvent être déduites de (2.75) en divisant également par  $(1-\beta)$  toutes les grandeurs d'indice 1; de là:

$$(4.208) \quad \begin{aligned} \hat{p}_1(1) &= \left[ \frac{2(2-\alpha)}{2+\alpha} - p_{0\xi}(1) \right] \tilde{\xi}_1 - \frac{8}{2+\alpha} \\ \hat{\rho}_1(1) &= -\tilde{\xi}_1 p_{0\xi}(1) \\ \hat{u}_1(1) &= \left[ \frac{2-\alpha}{2+\alpha} - u_{0\xi}(1) \right] \tilde{\xi}_1 + \frac{2(\gamma-1)}{2+\alpha} \\ \hat{v}_1(1) &= \tilde{\xi}_1 - \frac{2(\gamma+1)}{2+\alpha} \end{aligned}$$

Ces expressions sont évidemment celles des conditions sur le choc vu d'un repère fixe dans l'écoulement de vitesse  $\tilde{U}$ .

Quant aux conditions sur  $\Sigma'$ , elles s'écrivent:

-à l'ordre 0

$$(4.209) \quad p'_0 = \frac{16\alpha(\gamma+1)}{\pi(2+\alpha)^3 \xi_0^4 \xi_0'^4}$$

-à l'ordre 1

$$(4.210) \quad \hat{p}_1(\xi_0') = -\left( \frac{6+\alpha}{2+\alpha} \right) \frac{\beta}{\xi_0'(1-\beta)} p'_0$$

Cependant à l'ordre 2, l'indéformabilité de  $\Sigma'$  conduit aux relations suivantes:

$$(4.211) \quad \xi'_{21} = \xi'_{22} = \xi'_{23} = 0$$

Celles-ci ne sont plus déductibles des équations (2.90) à (2.92) puisqu'elles sont de simples conditions géométriques alors que ces dernières étaient des conditions dynamiques. Ainsi, à l'ordre 2, les solutions ne sont plus les mêmes que dans celle du piston déformable.

À l'ordre 0, l'équation de conservation globale de l'énergie est identique à (2.98).

À l'ordre 1, elle s'écrit:

$$(4.212) \quad \int_{\xi'_0}^1 \left[ (3\alpha + 2)\hat{\mathcal{H}}_1(\xi) + \frac{2(2 + \alpha)}{\gamma + 1} \tilde{\mathcal{H}}_0(\xi)v_1(\xi) \right] \xi^3 d\xi \\ + 2(3\alpha + 2)\tilde{\xi}_1 = (\gamma - 1)(2 + \alpha)\hat{p}'_1\xi_0'^4$$

avec

$$\hat{\mathcal{H}}_1(\xi) = \hat{p}_1 + u_0(\hat{p}_1 u_0 + 2\rho_0 \hat{u}_1) \\ \tilde{\mathcal{H}}_0(\xi) = \gamma p_0 + \rho_0 u_0^2$$

À l'ordre 2, les équations de conservation globale de l'énergie sont différentes de (2.101), (2.102) et (2.103) puisque  $\xi'_{21}$ ,  $\xi'_{22}$ ,  $\xi'_{23}$  sont nuls et qu'il faut les reformuler avec les expressions de  $\hat{p}_1$ ,  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{v}_1$ ,  $\hat{p}_1$ . Cependant, nous omettrons ici ces équations qui ne seront pas toutes utilisées dans la suite puisque seule l'équation correspondant à l'effet de  $\bar{p}$  servira dans le calcul de la solution.

## 4.2 Analogie instationnaire

### 4.2.1 Rappel sur les écoulements hypersoniques forts

Un écoulement hypersonique fort [13], [14], dans un gaz parfait non visqueux (masse volumique  $\rho_\infty$ , pression  $p_\infty$ , de vitesse amont  $V_\infty$  est caractérisé par la présence d'une onde de choc très oblique et très intense suivie par un écoulement davantage dévié que freiné par le passage à travers le choc.

La forte obliquité du choc se traduit par:

$$(4.213) \quad \sigma^2 \ll 1$$

$\sigma$  étant l'angle de la vitesse au loin  $\vec{V}_\infty$  avec la tangente au choc contenue dans le plan  $(\Pi_1)$ ; ce plan est formé par la vitesse amont  $\vec{V}_\infty$  et la vitesse  $\vec{V}_c$  de l'écoulement en aval du choc (fig31).

La forte intensité du choc signifie que:

$$(4.214) \quad M_\infty^2 \sigma^2 \gg \frac{2}{\gamma - 1}$$

de sorte que la polaire de choc devient une droite, soit:

$$(4.215) \quad \psi \approx \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right) \sigma$$

où  $\psi$  désigne l'angle de la déviation des trajectoires par rapport à  $0\vec{x}$  (figure 31),  $M_\infty = \frac{V_\infty}{c_\infty}$  est le nombre de Mach de l'écoulement infini amont et  $c_\infty = \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}$  est la vitesse de son.

Rappelons que les conditions sur un choc oblique peuvent s'écrire:

$$(4.216) \quad \begin{aligned} \frac{\rho_c}{\rho_\infty} &= \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}{1 + \frac{2}{\gamma-1} M_\infty^2 \sin^2 \sigma} \\ \frac{p_c}{p_\infty} &= \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 \sin^2 \sigma - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \\ M_c^2 \sin^2(\sigma - \psi_c) &= \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \sin^2 \sigma}{\gamma M_\infty^2 \sin^2 \sigma - \frac{\gamma-1}{2}} \\ \frac{tg(\sigma - \psi_c)}{tg \sigma} &= \frac{\rho_\infty}{\rho} \end{aligned}$$

Soit un obstacle mince de longueur  $L$ , caractérisé par une épaisseur de référence  $\delta$  telle que:

$$(4.217) \quad \delta \sim \frac{R(L)}{L} \ll 1$$

( $R(L)$  est la position du choc en  $x = L$ )

En tenant compte de (4.215), nous avons les ordres de grandeur suivants:

$$(4.218) \quad \begin{aligned} \psi &\sim R_x \\ \sigma &\sim R_x \end{aligned}$$

On suppose que  $R_x^2 \ll 1$ . Nous voyons que  $R_x^2$  et  $\frac{1}{M_\infty^2 \sigma^2}$  constituent les deux petits paramètres qui caractérisent l'écoulement hypersonique fort autour d'un obstacle mince.

Ainsi, les conditions sur le choc (4.216) peuvent s'écrire en première approximation:

$$(4.219) \quad \begin{aligned} \frac{\rho_c}{\rho_\infty} &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[ 1 + 0\left(\frac{1}{M_\infty^2 \sigma^2}\right) \right] \\ \frac{p_c}{p_\infty} &= \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 \sigma^2 \left[ 1 + 0(R_x^2) + 0\left(\frac{1}{M_\infty^2 \sigma^2}\right) \right] \\ M_c^2 \sigma^2 &= \frac{(\gamma+1)^2}{2\gamma(\gamma-1)} \left[ 1 + 0(R_x^2) + 0\left(\frac{1}{M_\infty^2 \sigma^2}\right) \right] \\ \psi_c &= \frac{2\sigma}{\gamma+1} \left[ 1 + 0(R_x^2) + 0\left(\frac{1}{M_\infty^2 \sigma^2}\right) \right] \end{aligned}$$

La vitesse en aval du choc s'exprime:

$$(4.220) \quad V_c^2 = V_\infty^2 \left[ 1 + 0(R_x^2) + 0\left(\frac{1}{M_\infty^2 \sigma^2}\right) \right]$$



En exprimant la vitesse  $\vec{V}$  des particules fluides sous la forme suivante:

$$\vec{V} = (V_\infty + w) \vec{x} + u \vec{e}_r + v \vec{e}_\theta$$

on peut écrire les équations de l'écoulement stationnaire comme suit:

- Equation de la conservation de la masse:

$$(4.221) \quad [\rho(V_\infty + w)]_x + \frac{1}{r} [r\rho u]_r + \frac{1}{r} [\rho v]_\theta = 0$$

- Equations de la quantité de mouvement:

$$(4.222) \quad (V_\infty + w)w_x + uw_r + \frac{v}{r}w_\theta + \frac{1}{\rho}p_x = 0$$

$$(4.223) \quad (V_\infty + w)u_x + uu_r + \frac{v}{r}u_\theta - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho}p_r = 0$$

$$(4.224) \quad (V_\infty + w)v_x + uv_r + \frac{v}{r}v_\theta + \frac{uv}{r} + \frac{1}{r\rho}p_\theta = 0$$

- Equation de la conservation de l'entropie:

$$(4.225) \quad r(V_\infty + w)\Pi_x + ru\Pi_r + v\Pi_\theta = 0$$

avec

$$\Pi = \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right)$$

- Equation de l'énergie:

$$(4.226) \quad r\rho(V_\infty + w)h_x + r\rho uh_r + \rho v h_\theta = 0$$

avec  $h$  enthalpie d'arrêt définie par:

$$h = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}(V_\infty + w)^2$$

Les ordres de grandeur des inconnues sont:

$$(4.227) \quad \begin{aligned} \rho &\sim \rho_\infty \\ p &\sim \rho_\infty V_\infty^2 R_x^2 \\ u &\sim V_\infty R_x \\ v &\sim V_\infty R_x \\ w &\sim V_\infty R_x^2 \end{aligned}$$

En développant les équations (4.221) à (4.226) et en retenant les termes d'ordre inférieur à  $R_x^2$ , on obtient le système suivant:

- Equation de la conservation de la masse:

$$(4.228) \quad rV_\infty \rho_x + [r\rho u]_r + [\rho v]_\theta = 0$$

- Equations de la quantité de mouvement:

$$(4.229) \quad r\rho V_\infty u_x + r\rho u u_r + \rho v u_\theta - \rho v^2 + r p_r = 0$$

$$(4.230) \quad r\rho V_\infty v_x + r\rho u v_r + \rho v v_\theta + \rho u v + p_\theta = 0$$

- Equation de la conservation de l'entropie:

$$(4.231) \quad rV_\infty \Pi_x + r u \Pi_r + v \Pi_\theta = 0$$

- Equation de l'énergie:

$$(4.232) \quad r\rho V_\infty H_x + r\rho u H_r + \rho v H_\theta = rV_\infty p_x = 0$$

avec

$$H = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

L'équation (4.222) est découplée des équations (4.229) et (4.230) et s'écrit:

$$(4.233) \quad V_\infty w_x + u w_r + \frac{v}{r} w_\theta + \frac{1}{\rho} p_x = 0$$

La conservation de l'enthalpie d'arrêt  $h$  sur une trajectoire fournit une intégrale première de (4.233) et permet d'expliciter la vitesse de perturbation longitudinale  $w$ :

$$(4.234) \quad w = -\frac{c^2}{(\gamma - 1)V_\infty} - \frac{u^2 + v^2}{2V_\infty}$$

Ces équations régissent l'écoulement hypersonique en petites perturbations autour d'un obstacle mince.

## 4.2.2 Analogie

L'analogie qui existe entre les écoulements instationnaires à deux dimensions et les écoulements hypersoniques à trois dimensions autour de corps minces découle de l'identité formelle des équations qui déterminent les deux phénomènes. En effet, si nous appliquons aux équations (2.36) à (2.44) le changement de variable:

$$(4.235) \quad t = \frac{x}{V_\infty}$$

nous retrouvons les équations (4.228) à (4.231).

Les conditions sur le choc (4.219) sont celles d'une onde de choc violente (chapitre

2).

La correspondance entre écoulement hypersonique et explosion non instantanée consiste à considérer l'obstacle comme un piston indéformable qui reste centré sur l'axe  $O\vec{x}$  (fig 32). L'énergie de dilatation représente la traînée de l'obstacle [16], [13], [14], [15]. L'intensité de l'apport d'énergie  $E$  est ainsi liée à  $V_\infty$ ,  $\rho_\infty$  et  $L$  par la relation:

$$(4.236) \quad E = \rho_\infty \left( \delta V_\infty^{\hat{n}} L^{1-\hat{n}} \right)^4$$

Pour que cette analogie soit complète avec les solutions de la théorie de l'explosion non instantanée, les formes du choc et de l'obstacle doivent être des lois en puissance de  $x$  c'est à dire en  $x^{\hat{n}}$  où l'exposant  $\hat{n}$  est défini par:

$$(4.237) \quad \hat{n} = \frac{2 + \alpha}{4}$$

Comme  $\alpha$  varie entre 0 et 2, l'exposant  $\hat{n}$  varie de 0.5 à 1.  
Le cas  $\hat{n} = 1$  correspond au cône parfait.

## 4.3 Ecoulements hypersoniques autour de corps en puissance

### 4.3.1 Ecoulements hypersoniques de base

Nous appellerons "écoulements hypersoniques de base" les écoulements hypersoniques sans incidence et dont les solutions sont analogues de celles de l'explosion non instantanée d'un fil rectiligne dans un milieu ambiant au repos à pression  $\bar{p} = p_\infty$  négligeable.

Plaçons l'obstacle  $\Sigma'$  dans un écoulement hypersonique de gaz parfait non visqueux, de vitesse amont  $V_\infty$  suivant  $O\vec{x}$  ( incidence nulle ). L'écoulement qui règne entre l'obstacle et le choc est alors axisymétrique.

Compte tenu des hypothèses faites sur l'hypersonique fort (choc très oblique et très intense), l'inventaire des grandeurs intervenant est:

- données constantes:  $V_\infty$ ,  $L$ ,  $\rho_\infty$ ,  $\hat{n}$  et  $\gamma$  dont seules  $V_\infty$ ,  $L$  et  $\rho_\infty$  sont dimensionnées; la pression  $p_\infty$  peut être négligée puisque le choc est intense;
- inconnues:  $\rho$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $R_0$  et  $R'_0$  où  $R_0$  et  $R'_0$  désignent respectivement la position du choc et celle de l'obstacle
- variables:  $x, r$

Etant donné que  $x$  n'apparaît qu'à travers la variable  $t = \frac{x}{V_\infty}$ , nous sommes ramenés à un problème à similitude interne et l'analogie avec le problème de l'explosion suggère de chercher les solutions sous la forme suivante:

- Equation de l'obstacle:

$$(4.238) \quad R'_0 = \delta L^{1-\hat{n}} x^{\hat{n}} \xi_0 \xi'_0$$

- Equation du choc:

$$(4.239) \quad R_0 = \delta L^{1-\hat{n}} x^{\hat{n}} \xi_0$$

- Expressions des inconnues:

$$(4.240) \quad \rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_\infty \rho_0(\xi)$$

$$(4.241) \quad u = \left( \frac{2\hat{n}}{\gamma + 1} \right) \frac{r V_\infty}{x} u_0(\xi)$$

$$(4.242) \quad p = \left( \frac{2\hat{n}^2}{\gamma + 1} \right) \rho_\infty \left( \frac{r V_\infty}{x} \right)^2 p_0(\xi)$$

Les fonctions  $\rho_0$ ,  $u_0$  et  $p_0$  vérifient le système d'équations (2.12).

De cette manière, la solution des écoulements hypersoniques de base autour des obstacles en puissance définis par (4.238) est donc analogue à celle de l'écoulement de base de l'explosion d'un fil.

### 4.3.2 Ecoulements hypersoniques autour de corps en puissance en incidence

Le fait de mettre l'obstacle en incidence  $\alpha_i$  revient à considérer que la vitesse au loin a deux composantes: l'une  $V_\infty$  suivant  $O\vec{x}$  et l'autre  $U_\infty = V_\infty \tan \alpha_i$  suivant  $O\vec{z}$  (voir fig 32), soit:

$$(4.243) \quad \vec{V}_\infty = V_\infty \vec{x} + U_\infty \vec{z}$$

Nous allons voir que la présence d'une incidence en hypersonique est équivalente à un effet de courant uniforme pour l'explosion.

La vitesse de ce courant n'est autre que la vitesse de l'écoulement extérieur dans le cas du piston indéformable. Pour revenir au problème initial de l'explosion dans un écoulement, posons

$$(4.244) \quad U_\infty = (1 - \beta) \bar{U}$$

Nous pouvons par conséquent traiter le cas du corps mis en incidence en s'inspirant de la formulation du problème de l'explosion du fil avec effet de courant de vitesse  $\bar{U}$ .

L'effet de l'incidence fait disparaître l'axisymétrie de l'écoulement autour de l'obstacle et entraîne une dépendance en  $\theta$  de toutes les inconnues.

Selon la théorie de la similitude hypersonique des obstacles élancés et dans le cadre des écoulements à faible incidence défini par:

$$(4.245) \quad \alpha_i^2 \ll 1$$

l'effet de l'incidence est déterminé par un paramètre unique caractéristique du rapport  $\alpha_i$  à une grandeur relative à l'élanement de l'obstacle (pente de l'obstacle) [14],[15], [16]. Ainsi, l'effet de l'incidence peut être introduite par l'intermédiaire du rapport  $\frac{\alpha_i}{R_x}$ .

Pour que la méthode des petites perturbations puisse être appliquée, il faut que:

$$(4.246) \quad \frac{\alpha_i}{R_x} \ll 1$$

Nous pouvons alors chercher la solution sous la forme suivante:

$$(4.247) \quad f = f_0 + \frac{\alpha_i}{R_x} f_1 + 0\left(\frac{\alpha_i^2}{R_x^2}\right)$$

où  $f$  représente une grandeur quelconque ( $\rho$ ,  $p$ , etc...),  $f_0$  désigne la solution de base correspondant à l'incidence nulle et  $f_1$  le terme représentatif de l'effet de l'incidence. Cependant, par analogie avec l'explosion, le petit paramètre  $\frac{\alpha_i}{R_x}$  est lié à la variable  $\tilde{\eta}$  par la relation:

$$(4.248) \quad \frac{\alpha_i}{R_x} = \frac{\tilde{\eta}}{\hat{n}} \left(1 - \tilde{\eta} \frac{\tilde{\xi}_1}{\xi_0} \cos \theta\right)$$

La forme de solution écrite en (4.247) prend donc, à l'ordre 1 en  $\tilde{\eta}$ , une forme identique à celle de l'explosion, soit:

$$R = \delta L^{1-\hat{n}} x^{\hat{n}} \xi_0 \left(1 + \tilde{\eta} \frac{\tilde{\xi}_1}{\xi_0} \cos \theta\right)$$

$$R' = \delta L^{1-\hat{n}} x^{\hat{n}} \xi_0 \xi_0'$$

$$(4.249) \quad \rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_\infty [\rho_0(\xi) + \tilde{\eta} \hat{\rho}_1(\xi) \cos \theta]$$

$$(4.250) \quad u = \left(\frac{2\hat{n}}{\gamma + 1}\right) \frac{r V_\infty}{x} [u_0(\xi) + \tilde{\eta} \hat{u}_1(\xi) \cos \theta]$$

$$(4.251) \quad v = \left(\frac{2\hat{n}}{\gamma + 1}\right) \frac{r V_\infty}{x} \tilde{\eta} \hat{v}_1(\xi) \sin \theta$$

$$(4.252) \quad p = \left(\frac{2\hat{n}^2}{\gamma + 1}\right) \rho_\infty \left(\frac{r V_\infty}{x}\right)^2 [p_0(\xi) + \tilde{\eta} \hat{p}_1(\xi) \cos \theta]$$

### 4.3.3 Effet de la contre-pression

L'effet de la contre-pression  $p_\infty$  ne détruit pas la symétrie de l'écoulement autour de l'obstacle. En hypersonique classique, la forme la plus générale des conditions sur le choc est donnée par les équations (4.216): nous voyons que l'effet de  $p_\infty$  est marqué par la présence du rapport  $\frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \sigma}$  soit  $\frac{1}{M_\infty^2 \sigma^2}$  pour un choc très oblique.

La dégénérescence du choc, obtenue pour des valeurs de  $M_\infty$  telles que  $\frac{1}{M_\infty^2 \sigma^2} \ll 1$ , peut être appréhendée en effectuant des développements de la solution hypersonique

de base. Pour que ces développements soient valables, il faut que les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 restent négligeables c'est à dire:

$$(4.253) \quad \left( \frac{1}{M_\infty^2 \sigma^2} \right)^2 \ll 1$$

Contrairement au problème de l'explosion dans lequel apparaissent les paramètres  $\eta$  et  $\zeta$  qui sont liés par la relation (2.17), le problème de l'hyperpersonique de faibles incidences se distingue par l'indépendance des paramètres  $\frac{\alpha_i}{R_x}$  et  $\frac{1}{M_\infty^2 \sigma^2}$ . Cela signifie physiquement que l'effet de faibles incidences ne dépend pas de  $M_\infty$ . Si nous nous intéressons uniquement aux effets d'ordre 1 de l'incidence et de la contre-pression, les développements que l'on peut formuler à partir de deux paramètres  $\frac{\alpha_i}{R_x}$  et  $\frac{1}{M_\infty^2 \sigma^2}$  sont entièrement découplés.

### 4.3.4 Forme définitive et mise en équations

En posant

$$\zeta = \frac{\hat{n}^2}{M_\infty^2 \sigma^2}$$

nous pouvons chercher la solution du problème sous la forme:

$$r = R(x, \theta) = \delta L^{1-\hat{n}} x^{\hat{n}} \xi_0 (1 + \tilde{\eta} \tilde{\xi}_1 \cos \theta + \zeta \xi_2)$$

$$r = R'(x, \theta) = \delta L^{1-\hat{n}} x^{\hat{n}} \xi_0 \xi'_0$$

où  $\xi_0, \xi'_0, \xi_1, \xi'_2$  sont des constantes

$$(4.254) \quad \rho(x, \theta) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_\infty \{ \rho_0(\xi) + \tilde{\eta} \hat{\rho}_1(\xi) \cos \theta + \zeta \rho_2(\xi) \}$$

$$(4.255) \quad u(r, x, \theta) = \left( \frac{2\hat{n}}{\gamma+1} \right) \frac{r V_\infty}{x} \{ u_0(\xi) + \tilde{\eta} \hat{u}_1(\xi) \cos \theta + \zeta u_2(\xi) \}$$

$$(4.256) \quad v(r, x, \theta) = \left( \frac{2\hat{n}}{\gamma+1} \right) \frac{r V_\infty}{x} \{ \tilde{\eta} \hat{v}_1(\xi) \sin \theta + \zeta v_2(\xi) \}$$

$$(4.257) \quad p(r, x, \theta) = \left( \frac{2\hat{n}^2}{\gamma+1} \right) \rho_\infty \left( \frac{r V_\infty}{x} \right)^2 \{ p_0(\xi) + \tilde{\eta} \hat{p}_1(\xi) \cos \theta + \zeta p_2(\xi) \}$$

Le développement de la masse volumique  $\rho$  ne s'avère valable que pour des valeurs de  $\zeta$  très petites devant 1. Pour  $\zeta$  de l'ordre de  $10^{-1}$ , le comportement de  $\rho$  n'est plus conforme à la réalité physique: il faut donc trouver une autre formulation pour l'évolution de  $\rho$  lorsque  $x \in [0, \hat{x}]$  et pour des grandes valeurs de  $\zeta$ . Par conséquent, pour que les expressions (4.254) à (4.257) aient un sens  $\forall x \in [0, L]$ , il faut que:

$$(4.258) \quad \tilde{\eta}^2 \ll 1 \text{ et } \zeta^2 \ll 1$$

La substitution des développements (4.254) à (4.257) dans les équations (4.228) à (4.231) permet d'obtenir les systèmes d'équations suivants:

**Ordre 0:**

$$(4.259) \quad \xi(\rho_0 \varepsilon)_\xi = -2\rho_0 u_0$$

$$(4.260) \quad \xi \left[ \rho_0 u_0 \varepsilon + \frac{(\gamma-1)}{2} p_0 \right]_\xi = \frac{2(\gamma+1)}{(2+\alpha)} \rho_0 u_0 - 3\rho_0 u_0^2 - (\gamma-1) p_0$$

$$(4.261) \quad \xi[\rho_0 s_0 \varepsilon]_\xi = \frac{4(\gamma+1)}{(2+\alpha)} \rho_0 - 2\rho_0 u_0 (s_0 + 1)$$

**Ordre 1 en  $\tilde{\eta}$ :**

$$(4.262) \quad \xi[\rho_0 \hat{u}_1 + \varepsilon \hat{p}_1]_\xi + 2\rho_0 \hat{u}_1 + \rho_0 \hat{v}_1 + \left(2 + \frac{A}{u_0}\right) \hat{p}_1 u_0 = 0$$

$$(4.263) \quad \xi \left[ \rho_0 u_0 \hat{u}_1 + \varepsilon(\rho_0 \hat{u}_1 + \hat{p}_1 u_0) + \frac{(\gamma-1)}{2} \hat{p}_1 \right]_\xi - \frac{(\gamma+1)}{2} (\rho_0 \hat{u}_1 + \hat{p}_1 u_0) + \rho_0 u_0 \hat{v}_1 + 3(2\rho_0 u_0 \hat{u}_1 + \hat{p}_1 u_0^2) + (\gamma-1) \hat{p}_1 = 0$$

$$(4.264) \quad \xi[\rho_0 \hat{v}_1 \varepsilon]_\xi + \left(4u_0 - \frac{(\gamma+1)}{2}\right) \rho_0 \hat{v}_1 - \frac{(\gamma-1)}{2} \hat{p}_1 = 0$$

$$(4.265) \quad \xi[\rho_0 \hat{u}_1 s_0 + \varepsilon(\rho_0 \hat{s}_1 + \hat{p}_1 s_0)]_\xi + (A + 2u_0)(\rho_0 \hat{s}_1 + \hat{p}_1 s_0) + \rho_0 s_0 (\hat{v}_1 + 2\hat{u}_1) + 2(\rho_0 \hat{u}_1 + \hat{p}_1 u_0) - \frac{4(\gamma+1)}{(2+\alpha)} \hat{p}_1 = 0$$

avec

$$\hat{s}_1 = \frac{\hat{p}_1}{p_0} - \gamma \frac{\hat{p}_1}{\rho_0}$$

**Ordre 1 en  $\zeta$ :**

$$(4.266) \quad \xi[\rho_0 u_2 + \varepsilon \rho_2]_\xi + 2[\rho_0 u_2 + (A + u_0) \rho_2] = 0$$

$$(4.267) \quad \xi \left[ \rho_0 u_0 u_2 + \varepsilon(\rho_0 u_2 + u_0 \rho_2) + \frac{(\gamma-1)}{2} p_2 \right]_\xi - \frac{\alpha(\gamma+1)}{(2+\alpha)} (\rho_0 u_2 + u_0 \rho_2) + (\gamma+1) p_2 + 3(2\rho_0 u_0 u_2 + \rho_2 u_0^2) = 0$$

$$(4.268) \quad \xi[\rho_0 s_0 u_2 + \varepsilon(\rho_0 s_2 + \rho_2 s_0)]_\xi + 2\rho_0 s_0 u_2 + 2(u_0 + A)(\rho_0 s_2 + s_0 \rho_2) + 2(\rho_0 u_2 + \rho_2 u_0) - \frac{4(\gamma+1)}{(2+\alpha)} \rho_2 = 0$$

avec

$$s_2 = \frac{p_2}{p_0} - \gamma \frac{\rho_2}{\rho_0}$$

Nous associons à ces équations les conditions sur le choc ramenées en  $\xi = 1$ :**Ordre 0:**

$$(4.269) \quad u_0(1) = \rho_0(1) = p_0(1) = 1$$

Ordre 1 en  $\tilde{\eta}$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{p}_1(1) &= \left[ \frac{2(2-\alpha)}{2+\alpha} - p_{0\xi}(1) \right] \dot{\xi}_1 - \frac{8}{2+\alpha} \\
 \hat{\rho}_1(1) &= -\dot{\xi}_1 \rho_{0\xi}(1) \\
 \hat{u}_1(1) &= \left[ \frac{2-\alpha}{2+\alpha} - u_{0\xi}(1) \right] \dot{\xi}_1 + \frac{2(\gamma-1)}{2+\alpha} \\
 \hat{v}_1(1) &= \dot{\xi}_1 - \frac{2(\gamma+1)}{2+\alpha}
 \end{aligned}
 \tag{4.270}$$

Ordre 1 en  $\zeta$ :

$$\begin{aligned}
 p_2(1) &= \left[ \frac{4(2-\alpha)}{2+\alpha} - p_{0\xi}(1) \right] \xi_2 - \frac{8(\gamma-1)}{\gamma(2+\alpha)^2} \\
 \rho_2(1) &= -\xi_2 \rho_{0\xi}(1) - \frac{32}{(\gamma-1)(2+\alpha)^2} \\
 u_2(1) &= \left[ \frac{2(2-\alpha)}{2+\alpha} - u_{0\xi}(1) \right] \xi_2 - \frac{16}{(2+\alpha)^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.271}$$

Ces systèmes différentiels ne sont pas fermés puisque les constantes  $\xi_0, \xi_1$  et  $\xi_2$  restent indéterminés tandis que la constante  $\xi'_0$  est déterminée par application de la condition de glissement sur l'obstacle c'est à dire  $u_0(\xi'_0) = \frac{\gamma+1}{2}$ .

Il faut donc trois relations supplémentaires et nous pouvons les obtenir soit en écrivant le théorème global d'Euler sur un domaine diédrique que l'on projete sur l'axe  $O\vec{X}$ , soit en appliquant le principe de la conservation globale de l'énergie.

L'application de ce principe fournit des équations identiques aux équations (2.98) pour l'écoulement sans effet d'incidence et (4.212) pour l'écoulement avec effet d'ordre 1 de l'incidence.

L'équation de conservation globale de l'énergie pour l'écoulement avec effet de la contre-pression s'écrit:

$$\tag{4.272} \quad \int_{\xi'_0}^1 [p_2 + u_0(\rho_2 u_0 + 2\rho_0 u_2)] \xi^3 d\xi + 2\xi_2 - \frac{4(\gamma+1)}{\gamma(2+\alpha)^2} = \frac{\gamma-1}{2} \xi_0'^4 p_2'$$

La recherche des solutions du problème de l'écoulement hypersonique ne nécessite pas un nouveau programme de calcul car le programme qui détermine les solutions de l'écoulement consécutif à l'explosion du fil infini est utilisable.

La solution d'ordre 0 de l'écoulement hypersonique est identique à celle d'ordre 0 de l'explosion à piston  $\Sigma'$  déformable.

Celle d'ordre 1 est obtenue en divisant par  $(1-\beta)$  la solution d'ordre 1 de l'explosion. Quant à la solution d'ordre 2, une modification doit être apportée au programme



établi pour l'explosion, à savoir qu'il faudra substituer dans toutes les équations contenant des termes d'indice 22 l'équation  $\xi'_{22} = 0$  et poser  $\rho_2(\xi'_0) = 0$ . Le calcul de l'intégrale  $\mathcal{I} = \int_{\xi'_0}^1 [p_2 + u_0(\rho_2 u_0 + 2\rho_0 u_2)] \xi^3 d\xi$  revient à intégrer l'équation différentielle suivante:

$$(4.273) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathcal{I}}{d\xi} &= [p_2 + u_0(\rho_2 u_0 + 2\rho_0 u_2)] \xi^3 \\ \lim_{\xi \rightarrow 1} \mathcal{I} &= 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \mathcal{I} &= W_2 \end{aligned}$$

$W_2$  vérifie l'équation:

$$(4.274) \quad W_2 - 2\xi_2 + \frac{4(\gamma + 1)}{\gamma(2 + \alpha)^2} = \frac{\gamma - 1}{2} \xi_0'^4 p_2'$$

Le scalaire  $\xi_2$  est déterminé à partir de l'équation (4.272).

## 4.4 Fonctions de répartition

Les fonctions de répartition du champ aérodynamique relatif à l'écoulement entre le choc  $\Sigma$  et l'obstacle  $\Sigma'$  sont déterminées comme dans le chapitre 3. Les solutions (4.254) à (4.257) s'écrivent sous la forme:

$$(4.275) \quad \rho(r, x, \theta) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_\infty \rho^*(\xi, \eta, \theta)$$

$$(4.276) \quad u(r, x, \theta) = \left( \frac{2\hat{n}}{\gamma + 1} \right) \left( \frac{x}{L} \right)^{\hat{n}-1} \delta \xi_0 V_\infty \xi u^*(\xi, \eta, \theta)$$

$$(4.277) \quad v(r, x, \theta) = \left( \frac{2\hat{n}}{\gamma + 1} \right) \left( \frac{x}{L} \right)^{\hat{n}-1} \delta \xi_0 V_\infty \xi v^*(\xi, \eta, \theta)$$

$$(4.278) \quad p(r, x, \theta) = \left( \frac{2\hat{n}^2}{\gamma + 1} \right) \rho_\infty \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^{\hat{n}-1} \delta \xi_0 V_\infty \right]^2 \xi^2 p^*(\xi, \eta, \theta)$$

avec

$$\rho^* = \rho_0^*(\lambda_s) + \hat{\eta} \hat{\rho}_1^*(\lambda_s) \cos \theta + \zeta \rho_2^*(\lambda_s)$$

$$\xi u^* = u_0^*(\lambda_s) + \hat{\eta} \hat{u}_1^*(\lambda_s) \cos \theta + \zeta u_2^*(\lambda_s)$$

$$\xi v^* = \hat{\eta} \hat{v}_1^*(\lambda_s) \sin \theta$$

$$\xi^2 p^* = p_0^*(\lambda_s) + \hat{\eta} \hat{p}_1^*(\lambda_s) \cos \theta + \zeta p_2^*(\lambda_s)$$

Les expressions des fonctions "étoilées" sont données en fin d'annexe 10.

## 4.5 Domaine de validité du modèle

Il faut noter cependant que l'analogie reste limitée puisque dans le domaine de l'ypersonique fort, on doit distinguer trois zones d'écoulements entre le choc  $\Sigma$

et l'obstacle  $\Sigma'$  (figure 33):

-zone I: **nez de l'obstacle**

Cette zone correspond à l'éroussement ( $0 < x < \tilde{x}$ ). L'angle  $\sigma$  y est voisin de 90degrés, donc l'hypothèse (4.213) n'est pas vérifiée. De plus, dans cette zone, les conditions sur le choc y sont mal déterminées. Il en résulte que l'analogie ne peut pas être appliquée.

-zone II et zone III:

- La zone II est une zone où le choc est très oblique et très intense ( $\sigma$  est inférieur à 20degrés). Nous pouvons donc y calculer la solution par analogie car les lignes de courant y traversent le choc dans la limite de validité des hypothèses de petites perturbations.
- La zone III est la zone qui contient les lignes de courant provenant de l'éroussement. Cette zone est mince pour les corps à éroussement faible ( $\frac{2}{\gamma+2} < \hat{n} < 1$ ). La masse volumique y tend vers zéro dans le modèle de petites perturbations car celui-ci confond  $\sigma$ ,  $\sin \sigma$  et  $tg\sigma$ , ce qui induit une erreur infinie sur le saut d'entropie à l'éroussement.

Les lignes de courant traversant le choc en zone I sont donc affectées d'une entropie tendant vers l'infini; la ligne correspondant à l'obstacle se trouve ainsi dotée d'une entropie éronnée et infinie. En [14], [15], on montre que la pression est par contre bien calculée, cela explique pourquoi la masse volumique y tend vers zéro.

Sans tenir compte des effets aval de la zone I, nous pouvons évaluer les efforts aérodynamiques.

## 4.5.1 Calculs des efforts aérodynamiques

**Trainée**

Le coefficient de pression sur l'obstacle est donné par:

$$(4.279) \quad C_p = \frac{p(\Sigma') - \bar{p}}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$$

où  $p(\Sigma')$ , pression sur l'obstacle, est égale à:

$$(4.280) \quad p(\Sigma') = \left(\frac{2\hat{n}^2}{\gamma+1}\right) \rho_\infty \left[\left(\frac{x}{L}\right)^{\hat{n}-1} \delta \xi_0 \xi'_0 V_\infty\right]^2 [p'_0 + \tilde{\eta} \hat{p}'_1 \cos \theta + \zeta p'_2]$$

En substituant (4.280) dans (4.279), nous obtenons:

$$(4.281) \quad C_p = C_{p_0}(x) + \tilde{\eta} C_{p_1}(x) \cos \theta + \frac{C_{p_2}}{M_\infty^2}$$

avec

$$C_{p_0}(x) = \frac{\tau^2 \hat{n}^2}{\gamma + 1} \left( \frac{x}{L} \right)^{2(\hat{n}-1)} p_0(\xi'_0)$$

$$C_{p_1}(x) = \frac{2\tau \alpha_i \xi'_0 \hat{n}^2}{\gamma + 1} \left( \frac{x}{L} \right)^{\hat{n}-1} \hat{p}_1(\xi'_0)$$

$$C_{p_2} = \frac{4\hat{n}^2 \xi_0'^2 p_2(\xi'_0)}{\gamma + 1} - \frac{2}{\gamma}$$

où

$$\tau = 2\delta \xi_0 \xi'_0$$

définit l'épaisseur relative du corps. La valeur de  $p_0(\xi'_0)$  est donnée par la formule (2.85).

La traînée définie par:

$$(4.282) \quad F_x = \int_0^{2\pi} \int_0^L \{p(\Sigma') - \bar{p}\} R' R'_x dx d\theta$$

Le calcul donne:

$$(4.283) \quad F_x = \frac{\pi}{8} L^2 \tau^2 \bar{\rho} V_\infty^2 C_x$$

où  $C_x$  est le coefficient de traînée et vaut:

$$C_x = \frac{\tau^2}{2\pi \xi_0^4 \xi_0'^4} + \frac{C_{p_2}}{M_\infty^2}$$

### Portance

La portance est donnée par:

$$(4.284) \quad F_z = - \int_0^{2\pi} \int_0^L p(\Sigma') R' \cos \theta dx d\theta$$

Le calcul montre que seul le terme d'indice 1 subsiste:

$$(4.285) \quad F_z = \frac{\pi}{8} L^2 \tau^2 \bar{\rho} V_\infty^2 C_z$$

avec  $C_z$ , coefficient de portance,

$$C_z = - \frac{2\hat{n} \xi_0' \hat{p}_1(\xi'_0)}{\gamma + 1} \alpha_i$$

Le calcul numérique montre que le terme  $\hat{p}_1(\xi'_0)$  est négatif ce qui montre que la portance est bien positive.

### 4.5.2 Correction d'entropie et lignes de courant

Nous avons montré que la seule valeur de  $\hat{n}$  pour laquelle la masse volumique ne s'annule pas est 1. Cette exception est réservée aux corps coniques pour lesquels l'onde de choc est droite et toutes les grandeurs physiques restent linies.

Pour les autres valeurs de  $\hat{n} \neq 1$ , la validité des résultats obtenus pour  $\rho$  est compromise du fait de la valeur de l'entropie  $s$ . En effet, l'hypothèse  $\sigma \ll 1$  n'est plus valable au voisinage du nez car  $\sigma \rightarrow \frac{\pi}{2}$  et l'expression:

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{2(\gamma - 1)^\gamma V_\infty^2 R_x^2(x_i)}{\hat{n}(\gamma + 1)^{\gamma+1} \rho_\infty^{\gamma-1}} = \frac{2(\gamma - 1)^\gamma V_\infty^2 t g^2 \sigma_i}{\hat{n}(\gamma + 1)^{\gamma+1} \rho_\infty^{\gamma-1}}$$

montre que l'entropie  $s$  tend bien vers l'infini dans ce modèle.

Cela conduit à une surestimation de la valeur de  $s$  dans la zone qui contient les lignes de courant issues du domaine d'invalidité (voir figure 33). Cette zone constitue ce que l'on appelle "couche d'entropie" est très mince dans le cas des corps à faible écoulement. la pression qui y règne peut être considérée comme égale à celle sur l'obstacle: ce qui se traduit par une masse volumique tendant vers zéro. Par conséquent, c'est la masse volumique qui mérite d'être corrigée dans cette zone.

Ces considérations nous suggèrent une correction de la forme [15]:

$$(4.286) \quad \begin{aligned} \hat{\rho} &= \rho C_\sigma \\ C_\sigma &= \left( \frac{\cos \sigma}{\cos \sigma_i} \right)^{2/\gamma} \end{aligned}$$

Voici le principe de cette correction: Prenons un point de coordonnées  $(x, r, \theta)$  de l'écoulement entre le choc et l'obstacle (couche de choc) et "remontons" l'écoulement afin de trouver les coordonnées  $(x_i, R_i, \theta_i)$  d'un point où la ligne de courant passant par  $(x, r, \theta)$  a traversé le choc.

On affecte alors à la ligne de courant son véritable saut d'entropie en appliquant (4.286) à  $\rho$ . Ceci est discutable puisque les lignes de courant sont connues par la théorie des petites perturbations qui n'est pas applicable au voisinage du nez.

Cependant dans le cadre de la théorie des écoulements faibles [13], [14], [15], l'erreur ainsi commise est très petite. Le calcul de  $\sigma_i$  nécessite une connaissance préalable de la fonction de courant. On trouvera dans [15] le calcul des fonctions de courant généralisées. Rappelons que pour un écoulement sans incidence avec contre-pression, la fonction de courant s'écrit:

$$(4.287) \quad \begin{aligned} \psi &= \left( \frac{x}{L} \right)^{2\hat{n}} [\psi_0 + \zeta \psi_2] \\ \text{avec} \\ v_0 &= \rho_0 \left( u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} \right) \xi^2 \\ v_2 &= \hat{n} \xi^2 \left[ \rho_2 \left( u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} \right) + \rho_0 u_2 \right] \end{aligned}$$

La connaissance d'une unique fonction de courant permet de déterminer les lignes de courant. Ce raisonnement reste vrai même si l'écoulement cesse d'être axisymétrique mais que l'on se place dans le plan de symétrie du corps ( $\theta = \pi$  ou  $\theta = 0$ ); dans ce cas une forme adimensionnée de la fonction de courant s'écrit:

$$(4.288) \quad \psi = \left(\frac{x}{L}\right)^{2\hat{n}} [\psi_0 + \hat{\eta}\psi_1 \cos \theta + \zeta\psi_2]$$

avec

$$\psi_1 = \left(\frac{2\hat{n}}{1+\hat{n}}\right) \xi^2 \left[ \rho_1 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2}\right) + \rho_0 u_1 \right]$$

Dès que le corps est en incidence, la détermination des lignes de courant qui entrent dans le choc en un point situé hors du plan de symétrie nécessite la connaissance de deux fonctions de courant  $\psi$  et  $\varphi$ , cette dernière tient compte uniquement de l'effet de l'incidence et prend la valeur nulle sur le choc; ainsi, les lignes de courant sont formées par l'intersection des surfaces  $d\varphi = 0$  et  $d\psi = 0$ .

Pour  $\theta \neq \pi$  ou  $0$ , les expressions de  $\psi$  et de  $\varphi$  sont:

$$(4.289) \quad \psi = \left(\frac{x}{L}\right)^{2\hat{n}} |\sin \theta|^{1+\frac{2\hat{n}}{1+\hat{n}}} [\psi_0 + \hat{\eta}\psi_1 \cos \theta + \zeta\psi_2]$$

$$(4.290) \quad \varphi = \theta_i = \theta + \hat{\eta}\varphi_1 \sin \theta$$

avec

$$\varphi_1 = \frac{2}{1-\gamma} \left[ \frac{2}{1-\gamma} \xi^2 \psi_0 \right]^{\frac{1-\hat{n}}{2\hat{n}}} \int_{\xi}^1 \frac{\rho_0 v_1 \xi'}{\left[ \frac{2}{1-\gamma} \xi'^2 \psi_0 \right]^{\frac{1-\hat{n}}{2\hat{n}}}} d\xi'$$

et l'équation des lignes de courant est obtenue par l'intégration de:

$$(4.291) \quad \frac{dx}{V_{\infty}} = \frac{dr}{u} = \frac{rd\theta}{v}$$

L'expression de la correction (4.286) n'est utilisable que si celle de  $\cos \sigma$  est connue. On peut l'obtenir à partir de l'équation du choc et de l'expression des vecteurs du repère local. En un point de coordonnées ( $r = R, x, \theta$ ), on a, sans aucune hypothèse de petites perturbations,

$$(4.292) \quad \cos^2 \sigma = \frac{1 + 2\alpha_i \hat{n} \delta \xi_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{\hat{n}-1} \cos \theta}{1 + \left[ \hat{n} \delta \xi_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{\hat{n}-1} \right]^2 + 2\alpha_i \hat{n} \delta \xi_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{\hat{n}-1} \xi_1 \cos \theta + \frac{2\alpha_i (2-\hat{n}) \xi_2}{M_{\infty}^2}}$$

Nous savons que sur une ligne de courant, la fonction  $\psi$  est constante et vaut:

$$(4.293) \quad \psi_i = \frac{1-\gamma}{2} \left(\frac{x_i}{L}\right)^{2\hat{n}} |\sin \theta_i|^{1+\frac{2\hat{n}}{1+\hat{n}}} \left[ 1 + 2\hat{\eta}_i \left(\xi_1 - \frac{1}{1+\hat{n}}\right) \cos \theta_i + 2\zeta_i \xi_2 \right]$$

sur le choc (l'indice  $i$  désigne les valeurs initiales des variables sur chaque ligne de courant et l'angle  $\theta_i$  est définie par (4.290). La détermination de  $\cos \sigma_i$  revient à calculer  $\left(\frac{r}{L}\right)^{n-1}$  à partir de (4.293) pour  $x$ ,  $\theta$  et  $\xi$  donnés, soit, après calculs:

$$(4.294) \quad \left(\frac{r}{L}\right)^{n-1} = \left[ \sin \theta_i \left| \frac{2(1-n)}{1+n} \left( \frac{2\psi_i}{1-\gamma} \right)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{2(1-n)\xi_2}{\tilde{n}\delta^2\xi_0^2 M_\infty^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{n}-1)\alpha_i}{\tilde{n}\delta\xi_0} \left( \xi_1 - \frac{1}{1+\tilde{n}} \right) \cos \theta_i$$

L'introduction de cette valeur dans (4.292) fournit l'expression de la masse volumique corrigée par (4.286).

Il faut noter cependant que la formule (4.234) montre que la vitesse de perturbation longitudinale  $w$  tend vers l'infini pour deux cas:  $\rho$  tendant vers  $zr_0$  ou  $v$  tendant vers l'infini. La pression est bien prédite dans la couche d'entropie et l'erreur est due à  $r/\theta$  puisqu'elle doit rester finie. Les quantités de mouvement  $\rho\theta u_1$ ,  $\rho\theta v_1$  et  $\rho\theta u_2$  sont des quantités finies et sont correctement calculées; ainsi, il faut également appliquer une correction inverse à  $u_1$ ,  $v_1$  et  $u_2$ . On écrit:

$$(4.295) \quad \tilde{u}_1 = C_\sigma^{-1} u_1$$

$$(4.296) \quad \tilde{v}_1 = C_\sigma^{-1} v_1$$

$$(4.297) \quad \tilde{u}_2 = C_\sigma^{-1} u_2$$

Ces corrections entraînent des modifications sur les fonctions de courant, donc des lignes de courant; l'équation (4.291) prend la forme adimensionnée:

$$(4.298) \quad \frac{d\xi}{\xi} = \frac{2\tilde{n}}{\gamma+1} \left[ u_0 - \frac{\gamma+1}{2} + \tilde{\eta}\tilde{u}_1 \cos \theta + \zeta\tilde{u}_2 \right] \frac{dx}{x}$$

$$d\theta = \frac{2\tilde{n}}{\gamma+1} \tilde{\eta}\tilde{v}_1 \sin \theta \frac{dx}{x}$$

Les deux fonctions de courant  $\psi$  et  $\varphi$  prennent la forme corrigée:

$$(4.299) \quad \tilde{\psi} = \left(\frac{r}{L}\right)^{2\tilde{n}} |\sin \theta| \left| \frac{2\tilde{n}}{1+\tilde{n}} \right| \left[ \psi_0 + \frac{1}{C'_0} \{ \tilde{\eta}\tilde{v}_1 \cos \theta + \zeta\psi_2 \} \right]$$

$$(4.300) \quad \tilde{\varphi} = \tilde{\theta}_i = \theta + \tilde{\eta}\tilde{\varphi}_1 \sin \theta$$

avec:

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{\varphi_1}{C'_0}$$

$C'_0$  étant le coefficient de correction [15] à l'ordre 0,

$$C'_0 = \left[ \frac{R_x^2 \left[ \left( \frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^{\frac{2}{n}} \rho_0 \left( u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \xi^2 \right) \right]^{\frac{n-1}{n}} + 1}{R_x^2 + 1} \right]^{1/2}$$

( $R$  désignant ici le rayon du choc) Les corrections effectuées sur les fonctions de courant fournissent dans toute la couche de choc:

- une forme finie des équations des lignes de courant
- une masse volumique qui ne s'annule pas à la paroi de l'obstacle
- une conservation du saut d'entropie sur chaque ligne de courant même pour celles issues du nez de l'obstacle.

### 4.5.3 Résultats

Les résultats de calculs sont donnés sous forme de tableaux. Nous n'avons pris que deux valeurs de  $\gamma$  ( $\gamma = 1.2$  et  $\gamma = 1.4$ ) pour plusieurs valeurs de  $\hat{n}$  allant de  $\frac{2}{3}$  à 1 c'est à dire pour des corps à émoussement faible et des corps pointus. La perturbation due à l'incidence est petite c'est à dire  $0 \leq \alpha \leq 0.1$

#### Variation des coefficients $\xi_j$ en fonction de $\gamma$ et $\hat{n}$

Les résultats obtenus à l'ordre 0 sont identiques à ceux d'ordre 0 de l'explosion du fil.

À l'ordre 1, les variations de  $\hat{\xi}_1$  (fig 34) sont également les mêmes que pour l'explosion du fil. Les courbes se coupent en un point où  $\hat{n} = \hat{n}^*$  ( $\alpha = \alpha^*$  pour le cas de l'explosion). Cela signifie qu'il existe, en écoulement hypersonique, un obstacle en loi de puissance pour lequel la déformation du choc demeure insensible à la compressibilité du milieu ambiant extérieur.

Pour  $\hat{n} = \hat{n}^*$ , l'effet de la variation de  $\gamma$  affecte peu la portance puisqu'elle est directement liée à  $\hat{\xi}_1$ .

Pour  $\hat{n}^* < \hat{n} \leq 1$  c'est à dire pour les corps forts pointus, le choc a tendance à se rapprocher de l'extrados [15], le phénomène s'inverse si l'émoussement s'accroît, soit pour  $\frac{2}{3} < \hat{n} < \hat{n}^*$  (fig 34).

Les courbes de la figure 35 montrent les variations de  $\xi_{22}$  en fonction des paramètres  $\gamma$  et  $\hat{n}$ . Contrairement au cas de l'explosion non instantanée du fil, le coefficient  $\xi_{22}$  est sensible à la compressibilité: plus le milieu extérieur est compressible, plus la valeur de  $\xi_{22}$  est importante puisqu'elle varie entre 0.4 et 1.05. Ce résultat montre que la rigidité de l'obstacle  $\Sigma'$  ( $\xi'_{22} = 0$ ) se traduit par une plus forte déformation du choc sous l'effet de la contre-pression.

Le fait que  $\xi_{22}$  soit positif confirme l'épaississement de la couche de choc vers l'aval.

#### Allure des champs de pression et des lignes de courant

L'exploitation de nos résultats de calcul ne se limite pas uniquement à des tracés de courbes et à des interprétations mais aussi à des représentations tridimensionnelles de l'allure des champs de pression et des lignes de courant [24].

Les figures 36, 37 et 38 montrent une vue en perspective et une vue de face de la répartition du champ de pression pour des corps en puissance de même épaisseur relative ( $\tau = 0.47$ ) placés en incidence dans un écoulement hypersonique à nombre

de Mach  $M_\infty$  de l'ordre de 8.

Le coefficient de pression  $C_p$  décroît lorsque  $x$  augmente. Ce résultat, en accord avec les résultats expérimentaux [15], indique une évanescence des phénomènes lorsque l'on progresse vers l'arrière du corps et du voisinage proche de l'onde de choc.

L'effet de l'incidence  $\alpha_i$  tend à augmenter la valeur du  $C_p$  à l'intrados. Cela est d'autant plus perceptible quand le nombre de Mach  $M_\infty$  croît. Cette sensibilité se remarque plutôt au voisinage de l'épaississement que vers l'arrière du corps.

L'influence du paramètre  $\hat{n}$  intervient dans l'épaississement de la couche de choc: pour  $x$  fixé,  $C_p$  varie dans le même sens que  $\hat{n}$ . Un commentaire plus détaillé de ces résultats se trouve dans les rapports [15] et [24].

Les déviations des lignes de courant sont représentées par les figures 39 et 40. L'absence de déviation angulaire est évidente pour un écoulement axisymétrique ( $\alpha_i = 0$  et la fonction de courant se réduit à  $\varphi = 0$ ).

La déviation est d'autant plus importante que l'incidence  $\alpha_i$  est grande tout en restant dans le domaine des faibles incidences [24]. Cette déviation dépend de l'angle d'entrée des lignes de courant dans la couche de choc:

- Pour une entrée à 0 ou à  $\pi$ , il n'y a pas de déviation puisque l'on se trouve dans le plan de symétrie du corps.
- Pour une entrée s'effectuant loin du nez du corps, les déviations des lignes de courant sont faibles.
- Pour une entrée comprise entre 30 et 120 degrés, les déviations sont maximales et atteignent les 15 et 30 degrés selon les valeurs de  $\alpha_i$ .
- Un léger tassement des lignes de courant correspond à un amincissement de la couche de choc.



# Chapitre 5

## Formulation généralisée des équations

### 5.1 Equations générales

Nous nous sommes intéressés à une formulation plus générale des équations valable aussi bien pour le cas d'une explosion ponctuelle [4] que pour celui d'une explosion linéique. Le milieu dans lequel s'effectue l'explosion est animé d'un mouvement uniforme de vitesse  $\bar{U}$  et la pression qui y règne est  $\bar{p}$ . Nous supposons que l'énergie libérée suit une loi en puissance du temps  $t$  telle que:

$$\mathcal{E}_0 = Et^\alpha$$

où

$$E > 0 \text{ et } 0 \leq \alpha \leq m + 1.$$

$m$  dépend de la nature de l'explosion, avec:

$m = 1$  pour l'explosion linéique

et  $m = 2$  pour l'explosion ponctuelle

Les équations qui régissent le phénomène s'écrivent alors:

$$\rho_t + \frac{1}{r^m} [r^m \rho u]_r + \frac{1}{r \hat{\theta}(m)} [\rho v \hat{\theta}(m)]_\theta = 0$$

$$\rho [r u_t + r u u_r + v u_\theta - v^2] + r p_r = 0$$

$$\rho [r v_t + r v v_r + v v_\theta + v u] + p_\theta = 0$$

$$r \Pi_t + r u \Pi_r + v \Pi_\theta = 0$$

avec

$$\hat{\theta}(m) = (\sin \theta)^{m-1}$$

$$\Pi = \frac{p}{\rho^\gamma}$$

## 5.2 Forme conservative des équations

Les équations écrites ci-dessus se mettent aisément sous la forme conservative suivante:

$$(5.301) \quad \rho_t + \frac{1}{r^m} [r^m \rho u]_r + \frac{1}{r \hat{\theta}(m)} [\rho v \hat{\theta}(m)]_\theta = 0$$

$$(5.302) \quad \hat{\theta}(m) [r^m \{\rho u\}_t + \{r^m \rho u^2\}_r] + r^{m-1} [\hat{\theta}(m) \rho u v]_\theta + r^{m-1} \hat{\theta}(m) [-\rho v^2 + r p_r] = 0$$

$$(5.303) \quad \hat{\theta}(m) [r^m \{\rho v\}_t + \{r^m \rho u v\}_r] + r^{m-1} [\hat{\theta}(m) \rho v^2]_\theta + r^{m-1} \hat{\theta}(m) [\rho u v + p_\theta] = 0$$

$$(5.304) \quad \hat{\theta}(m) [r^m \{\rho \Pi\}_t + \{r^m \rho u \Pi\}_r] + r^{m-1} [\hat{\theta}(m) \rho v \Pi]_\theta = 0$$

Nous avons montré dans les chapitres précédents que l'écoulement consécutif à l'explosion se trouve confiné entre deux surfaces mobiles: l'onde de choc  $\Sigma$  d'équation  $r = R(\theta, t)$  et une surface matérielle  $\Sigma'$  d'équation  $r = R'(\theta, t)$  avec  $R' < R$ . On va tirer profit de l'existence d'une similitude interne pour les équations de première approximation. Nous représentons l'une des variables d'espace par:

$$\xi = \frac{r}{R}$$

Nous associons à  $\xi$  les variables adimensionnées  $\eta$  et  $\zeta$  qui correspondent respectivement à  $\bar{U}$  et à  $\bar{p}$ :

$$\eta = \frac{\bar{U}}{\xi_0^\alpha} \left[ \frac{\bar{\rho} t^{m+1-\alpha}}{E} \right]^{\frac{1}{m+3}}$$

$$\text{tel que } \eta \ll 1 \text{ si } t \ll \left[ \left( \frac{\xi_0}{\bar{U}} \right)^{m+3} \frac{E}{\bar{\rho}} \right]^{\frac{1}{m+1-\alpha}}, \text{ d'où } \alpha \leq m+1;$$

$$\zeta = \frac{\bar{p}}{\xi_0^2} \left[ \frac{t^{2(m+1-\alpha)}}{E^2 \bar{\rho}^{m+1}} \right]^{\frac{1}{m+3}}$$

Ces deux variables sont liées par la relation

$$\zeta = \frac{\eta^2}{\gamma \bar{M}^2}$$

avec

$$\bar{M}^2 = \frac{\bar{\rho} \bar{U}^2}{\gamma \bar{p}}$$

La variable  $\zeta$  reste finie même si  $\overline{M} \rightarrow 0$ .

En se référant au chapitre 2, les inconnues du problème peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned} r &= R(\theta, t) = \hat{E}\xi_0 R^* & r &= R'(\theta, t) = \hat{E}\xi_0 R'^* \\ \rho &= \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \bar{\rho} \rho^* & p &= \left(\frac{2\hat{n}^2}{\gamma+1}\right) \bar{\rho} \frac{r^2}{t^2} p^* \\ u &= \left(\frac{2\hat{n}}{\gamma+1}\right) \frac{r}{t} u^* & v &= \left(\frac{2\hat{n}}{\gamma+1}\right) \frac{r}{t} v^* \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \left[ \frac{E}{\bar{\rho}} t^{2+\alpha} \right]^{\frac{1}{m+3}} \\ \hat{n} &= \frac{2+\alpha}{m+3} \end{aligned}$$

La recherche de la solution se fait par la méthode des petites perturbations en posant:

$$\begin{aligned} R^* &= 1 + \eta \xi_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \xi_{22} + \eta^2 (\xi_{23} + \xi_{21} \cos 2\theta) + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\ R'^* &= \xi'_0 + \eta \xi'_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \xi'_{22} + \eta^2 (\xi'_{23} + \xi'_{21} \cos 2\theta) + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\ \rho^* &= \rho_0(\xi) + \eta \rho_1(\xi) \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \rho_{22}(\xi) + \eta^2 \{ \rho_{23}(\xi) + \rho_{21}(\xi) \cos 2\theta \} + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\ p^* &= p_0(\xi) + \eta p_1(\xi) \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} p_{22}(\xi) + \eta^2 \{ p_{23}(\xi) + p_{21}(\xi) \cos 2\theta \} + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\ u^* &= u_0(\xi) + \eta u_1(\xi) \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} u_{22}(\xi) + \eta^2 \{ u_{23}(\xi) + u_{21}(\xi) \cos 2\theta \} + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\ v^* &= \eta v_1(\xi) \sin \theta + \eta^2 v_2(\xi) \sin 2\theta + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \end{aligned}$$

avec:  $R'^* \leq \xi \leq R^*$

Avec les règles de dérivation suivantes valables  $\forall \hat{f}(r, \theta, t)$  et  $f(\xi, \theta, \eta)$

$$\begin{aligned} \eta_t &= \left( \frac{m+1-\alpha}{m+3} \right) \frac{\eta}{t} \\ \hat{f}_r &\Rightarrow \frac{1}{r} \xi f_\xi \\ \hat{f}_t &\Rightarrow \frac{1}{t} \left[ -\hat{n} \xi f_\xi + \left( \frac{m+1-\alpha}{m+3} \right) \eta f_\eta \right], \end{aligned}$$

les équations (5.301) à (5.304) deviennent:

$$\begin{aligned} (5.305) \quad \xi \left[ \rho^* \left( u^* - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right]_\xi &+ A \eta \rho_\eta^* + \rho^* [(m+1)u^* + (m-1)v^* \cot g \theta] \\ &+ (\rho^* v^*)_\theta = 0 \end{aligned}$$

$$(5.306) \quad \xi \left[ \rho^* u^* \left( u^* - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \frac{\gamma+1}{2} p^* \right]_{\xi} + A\eta(\rho^* u^*)_n + (\rho^* u^* v^*)_{\theta} \\ + (\gamma-1)\rho^* + \rho^* u^* \left[ (m+2)u^* - \frac{(\gamma+1)(m+3)}{2(2+\alpha)} \right] \\ + \rho^* v^* [(m-1)u^* \cot g\theta - v^*] = 0$$

$$(5.307) \quad \xi \left[ \rho^* v^* \left( u^* - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right]_{\xi} + A\eta(\rho^* v^*)_n + \left[ \rho^* v^{*2} + \frac{\gamma-1}{2} p^* \right]_{\theta} \\ + \rho^* v^* \left[ (m+3) \left\{ u^* - \frac{\gamma+1}{2(2+\alpha)} \right\} + (m-1)v^* \cot g\theta \right] = 0$$

$$(5.308) \quad \xi \left[ \rho^* s^* \left( u^* - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right]_{\xi} + A\eta(\rho^* s^*)_n + \rho^* u^* [(m+1)s^* + 2] \\ + (\rho^* v^* s^*)_{\theta} - \frac{(\gamma+1)(m+3)}{2+\alpha} \rho^* + (m-1)\rho^* v^* s^* \cot g\theta = 0$$

où

$$A = \frac{(\gamma+1)(m+1-\alpha)}{2(2+\alpha)}$$

En tenant compte des formes développées des fonctions "étoilées" et en identifiant, les équations (5.305) à (5.308) donnent les systèmes d'équations suivants, avec  $\varepsilon = u_0 - \frac{\gamma+1}{2}$ :

**Ordre 0**

$$(5.309) \quad \xi [\rho_0 \varepsilon]_{\xi} + (m+1)\rho_0 u_0 = 0 \\ \xi \left[ \rho_0 u_0 \varepsilon + \frac{\gamma-1}{2} \rho_0 \right]_{\xi} + (\gamma-1)\rho_0 \\ + \rho_0 u_0 \left[ (m+2)u_0 - \frac{(\gamma+1)(m+3)}{2(2+\alpha)} \right] = 0 \\ \xi [\rho_0 s_0 \varepsilon]_{\xi} + \rho_0 u_0 [(m+1)s_0 + 2] - \frac{(\gamma+1)(m+3)}{2+\alpha} \rho_0 = 0$$

A partir du système (5.309), nous déduisons les équations différentielles déterminant l'écoulement de base:

$$(5.310) \quad \frac{dz_0}{du_0} = G_1(u_0, z_0)$$

$$(5.311) \quad \frac{du_0}{d \log \xi} = \frac{1}{G_2(u_0, z_0)}$$

$$(5.312) \quad \frac{d \log \rho_0}{d \log \xi} = G_3(u_0, z_0)$$

avec

$$G_1(u_0, z_0) = \frac{z_0 f_1}{\varepsilon f_4} \quad G_2(u_0, z_0) = \frac{f_2}{f_4} \quad G_3(u_0, z_0) = \frac{f_3}{\varepsilon f_2}$$

Les expressions des fonctions  $f_i$  ( $i = 1, 4$ ) sont données sous leurs formes généralisées en Annexe 7.

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation (5.310) dépendent de la continuité des fonctions  $G_1$  et  $\frac{\partial G_1}{\partial z_0}$  au point  $I(1, \gamma)$  du plan  $(u_0, z_0)$ .

Le lieu des points singuliers est défini par:

$$(5.313) \quad u_0 = \frac{\gamma + 1}{2}$$

$$(5.314) \quad z_0 = \left( \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{u_0 \varepsilon \left[ \frac{(\gamma+1)(m+3)}{2(2+\alpha)} - u_0 \right]}{\left[ \frac{(\gamma+1)(m+1-\alpha)}{2+\alpha} - \gamma(m+1)u_0 \right]}$$

$$z_0 = 0 \text{ si } \quad u_0 = 0 \quad u_0 = \frac{\gamma+1}{2} \quad u_0 = \frac{(\gamma+1)(m+3)}{2(2+\alpha)}$$

$$z_0 \rightarrow \infty \text{ si } u_0 = \frac{(\gamma+1)(m+1-\alpha)}{\gamma(2+\alpha)(m+1)}$$

On montre facilement que  $I$  est un point régulier puisqu'il n'appartient ni à la droite d'équation (5.313) ni à la courbe définie par (5.314).

La masse volumique  $\rho_0(\xi)$  peut être calculée à partir d'une formule déduite des considérations dimensionnelles. En effet, l'écoulement est adiabatique, ce qui entraîne la relation:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = c^{tc} \text{ pour une particule}$$

On écrit, en prenant comme grandeurs primaires  $\tilde{\mathcal{M}}$ ,  $E$  et  $\bar{p}$ :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = f(\alpha, \gamma) \tilde{\mathcal{M}}^a E^b \bar{p}^c$$

avec

$$\tilde{\mathcal{M}} = \rho r^{m+1} \varepsilon \text{ qui est une coordonnée lagrangienne}$$

Les constantes  $a, b, c$  sont déterminées par identification dimensionnelle. On remplace  $p, \bar{p}$ , et  $\tilde{\mathcal{M}}$  par leurs expressions à l'ordre 0 et on calcule la fonction  $f(\alpha, \gamma)$  à partir des conditions initiales  $p_0 = \rho_0 = u_0 = 1$  en  $\xi = 1$ . En introduisant  $z_0, \rho_0$  s'écrit :

$$\rho_0 = \left[ \left( \frac{z_0}{\gamma} \right)^{\tau_1} \left\{ \frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{\gamma+1}{2} - u_0 \right) \right\}^{\tau_2} \xi^{\tau_3} \right]^{\tau_4}$$

avec

$$\tau_1 = (m+1)(2+\alpha)$$

$$\tau_2 = 2(m+1-\alpha)$$

$$\tau_3 = 2(m+3)(m+1)$$

$$\tau_4 = \frac{1}{(2+\alpha) \{(1-m) + \gamma(m+1)\} - 2(m+3)}$$

On peut remarquer que les équations qui régissent l'écoulement de base (Ordre 0) d'une explosion plane peuvent être obtenues en substituant  $m = 0$  dans le système d'équations (5.309). Cette remarque n'est plus valable pour les autres ordres d'approximation.

### Ordre 1

$$(5.315) \quad \xi [\rho_0 u_1 + \rho_1 \varepsilon]_\xi + A \rho_1 + m \rho_0 v_1 + (m+1)(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) = 0$$

$$(5.316) \quad \xi \left[ \rho_0 u_0 u_1 + \varepsilon(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) + \frac{\gamma-1}{2} p_1 \right]_\xi + m \rho_0 u_0 v_1 \\ + (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) \left[ (m+2)u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right] + (m+2)\rho_0 u_0 u_1 + (\gamma-1)p_1 = 0$$

$$(5.317) \quad \xi [\rho_0 v_1 \varepsilon]_\xi + \rho_0 v_1 \left[ (m+3)u_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right] - \frac{\gamma-1}{2} p_1 = 0$$

$$(5.318) \quad \xi [\rho_0 s_0 u_1 + \varepsilon(\rho_0 s_1 + s_0 \rho_1)]_\xi + A(\rho_0 s_1 + \rho_1 s_0) + m \rho_0 s_0 v_1 \\ + (m+1)\rho_0 u_0 s_1 + (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) [(m+1)s_0 + 2] - \frac{(\gamma+1)(m+3)}{2+\alpha} \rho_1 = 0$$

Les équations (5.315) à (5.318) peuvent se mettre sous une forme matricielle:

$$[M_4] \left\{ \vec{X}_1 \right\}_\mu = [F_1] \left\{ \vec{X}_1 \right\} \iff \left\{ \vec{X}_1 \right\}_\mu = \frac{1}{D} [P_1] \left\{ \vec{X}_1 \right\}$$

où

$$\left\{ \vec{X}_1 \right\} = \begin{pmatrix} x_1 = \rho_1 u_0 \\ y_1 = u_1 \rho_0 \\ z_1 = v_1 \rho_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{-\gamma \varepsilon^2 f_2}{2z_0 u_0} \text{ désigne le déterminant de } [M_4]$$

La matrice  $[M_4]$  est définie en Annexe 11

La matrice  $[F_1]$  est définie par:

$$[F_1] = \begin{bmatrix} -e_{11} & -(m+1) & -m & 0 \\ -e_{21} & -e_{22} & -m u_0 & (1-\gamma) \\ 0 & 0 & -e_{33} & \frac{\gamma-1}{2} \\ -e_{11}(s_0 - \gamma) & -\left[ \frac{2A}{\varepsilon} + (m+1)s_0 \right] & -m s_0 & -e_{44} \end{bmatrix}$$

avec

$$e_{11} = (m+1) - \frac{(\gamma+1)\{(m+1) + \alpha(m+2)\}}{2(2+\alpha)u_0} - \left( \frac{\gamma+1}{2u_0^2} \right) \varepsilon G_3$$

$$e_{21} = \varepsilon(1 - G_3)$$

$$e_{22} = 2(m+2)u_0 - \frac{\gamma+1}{2} - 2\varepsilon G_3$$

$$e_{33} = 2u_0 - \frac{\gamma+1}{2} - \varepsilon G_3$$

$$e_{44} = \frac{\gamma}{z_0} \left[ A - \left( \frac{f_1 + f_3}{f_2} \right) \right]$$

La matrice  $[P_1]$  est définie par :

$$[P_1] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $k_{ij}$  sont:

$$k_{11} = \frac{\gamma\varepsilon}{z_0} \left[ \varepsilon e_{21} - e_{11}(\varepsilon u_0 - \frac{1}{2}f_2) \right]$$

$$k_{21} = \frac{\gamma\varepsilon^3}{z_0} \left[ m - \frac{(\gamma+1)\{(m-1) + \alpha(m+1)\}}{(2+\alpha)u_0} + \frac{\varepsilon^2 G_3}{u_0^2} \right]$$

$$k_{41} = -\gamma\varepsilon^2 \left[ m - \frac{(\gamma+1)\{(m-1) + \alpha(m+1)\}}{(2+\alpha)u_0} + \frac{\varepsilon^2 G_3}{u_0^2} \right]$$

$$k_{12} = \frac{-\gamma\varepsilon^2}{z_0} \left[ m(2u_0 - \frac{\gamma+1}{2}) + 2\varepsilon G_3 \right] - (\gamma-1)A$$

$$k_{22} = \frac{\gamma\varepsilon^3}{z_0 u_0} \left[ 2\varepsilon G_3 + \frac{\gamma+1}{2} + (m-1)u_0 \right] + \varepsilon \left[ \frac{\gamma\varepsilon(m+1)}{2} + A \right] \left( \frac{\gamma-1}{u_0} \right)$$

$$k_{42} = \frac{-\gamma\varepsilon^2}{u_0} \left[ m(2u_0 - \frac{\gamma+1}{2}) + 2\varepsilon G_3 + \frac{2A}{\gamma} \right]$$

$$k_{13} = \frac{-m\gamma\varepsilon^3}{z_0}$$

$$k_{23} = \frac{m\gamma(\gamma-1)\varepsilon^2}{2u_0}$$

$$k_{33} = -\frac{D\varepsilon_{33}}{\varepsilon}$$

$$k_{43} = \frac{-m\gamma\varepsilon^3}{u_0}$$

$$k_{14} = \frac{\gamma(\gamma-1)\varepsilon}{2z_0} \left[ 2u_0 - \frac{(\gamma+1)(\alpha+5+m)}{2(2+\alpha)} + \left( \frac{f_1 + f_3}{f_2} \right) \right]$$

$$k_{24} = \frac{-\gamma(\gamma-1)\varepsilon^2}{2z_0 u_0} \left[ 2u_0 - \frac{(\gamma+1)(\alpha+5+m)}{2(2+\alpha)} + \left( \frac{f_1 + f_3}{f_2} \right) \right]$$

$$k_{34} = \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) \frac{D}{\varepsilon}$$

$$k_{44} = \frac{\gamma\varepsilon^2}{z_0 u_0} \left[ (\gamma-1)z_0 - \varepsilon \left\{ A - \left( \frac{f_1 + f_3}{f_2} \right) \right\} \right]$$

## Ordre 2

Effet de la pression:

$$(5.319) \quad \xi [\rho_0 u_{22} + \rho_{22} \varepsilon]_\xi + 2A\rho_{22} + (m+1)(\rho_0 u_{22} + \rho_{22} u_0) = 0$$

$$(5.320) \quad \xi \left[ \rho_0 u_0 u_{22} + \varepsilon(\rho_0 u_{22} + \rho_{22} u_0) + \frac{\gamma-1}{2} p_{22} \right]_\xi \\ + (m+2) [\rho_0 u_0 u_{22} + u_0(\rho_0 u_{22} + \rho_{22} u_0)] \\ + \frac{(\gamma+1)(m-1-2\alpha)}{2(2+\alpha)} [\rho_0 u_{22} + \rho_{22} u_0] + (\gamma-1)p_{22} = 0$$

$$(5.321) \quad \xi [\varepsilon(\rho_0 s_{22} + s_0 \rho_{22}) + \rho_0 s_0 u_{22}]_\xi + 2A(\rho_0 s_{22} + \rho_{22} s_0) \\ + (m+1)\rho_0 u_0 s_{22} + (\rho_{22} u_0 + \rho_0 u_{22}) [(m+1)s_0 + 2] \\ - \frac{(\gamma+1)(m+3)}{2+\alpha} \rho_{22} = 0$$

Ce système d'équations peut être mis sous forme matricielle:

$$[M_3] \left\{ \vec{X}_{22} \right\}_\mu = [F_{20}] \left\{ \vec{X}_{22} \right\} \iff \left\{ \vec{X}_{22} \right\}_\mu = \frac{1}{D'} [P_{20}] \left\{ \vec{X}_{22} \right\} \\ \left\{ \vec{X}_{22} \right\} = \begin{pmatrix} x_{22} = \rho_{22} u_0 \\ y_{22} = u_{22} \rho_0 \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

$$D' = \frac{-\gamma \varepsilon f_2}{2z_0 u_0} \text{ désigne le déterminant de } [M_3]$$

Les coefficients de la matrice  $[M_3]$  sont donnés en Annexe 11

La matrice  $[F_{20}]$  est définie par :

$$[F_{20}] = \begin{bmatrix} -e'_{11} & -(m+1) & 0 \\ -e'_{21} & -e'_{22} & (1-\gamma) \\ -e'_{11}(s_0 - \gamma) & -\left[\frac{2A}{\varepsilon} + (m+1)s_0\right] & -e'_{33} \end{bmatrix}$$

avec

$$e'_{11} = (m+1) - \frac{\alpha(\gamma+1)(m+3)}{2(2+\alpha)u_0} - \left(\frac{\gamma+1}{2u_0^2}\right) \varepsilon G_3$$

$$e'_{21} = u_0 + \frac{(\gamma+1)(m-1-2\alpha)}{2(2+\alpha)} - \varepsilon G_3$$

$$e'_{22} = 2u_0 + \frac{(\gamma+1)(m-1-2\alpha)}{2(2+\alpha)} - 2\varepsilon G_3$$

$$e'_{33} = \frac{\gamma}{z_0} \left[ 2A - \left(\frac{f_1 + f_3}{f_2}\right) \right]$$

La matrice  $[P_{20}]$  est définie par :

$$[P_{20}] = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} \\ k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} \\ k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $k'_{ij}$  sont:

$$k'_{11} = \frac{\gamma}{z_0} \left[ \varepsilon e'_{21} - e'_{11} \left( \varepsilon u_0 - \frac{1}{2} f_2 \right) \right]$$



$$\begin{aligned}
k'_{21} &= \frac{\gamma \varepsilon^2}{z_0} \left[ m - \frac{(\gamma + 1) \{(m - 1) + \alpha(m + 1)\}}{2(2 + \alpha)u_0} + \frac{\varepsilon^2 G_3}{u_0^2} \right] \\
k'_{31} &= -\gamma \varepsilon \left[ m - \frac{(\gamma + 1) \{(m - 1) + \alpha(m + 1)\}}{2(2 + \alpha)u_0} + \frac{\varepsilon^2 G_3}{u_0^2} \right] \\
k'_{12} &= -\frac{\gamma \varepsilon}{z_0} \left[ 2mu_0 - \frac{(\gamma + 1) \{(3m + 1) + \alpha(m - 1)\}}{2(2 + \alpha)} + 2\varepsilon G_3 \right] - (\gamma - 1) \frac{A}{\varepsilon} \\
k'_{22} &= \frac{\gamma \varepsilon^2}{z_0 u_0} \left[ 2\varepsilon G_3 - \frac{(\gamma + 1)(m - 1 - 2\alpha)}{2(2 + \alpha)} + (m - 1)u_0 \right] + \frac{\gamma - 1}{u_0} \left[ A + \frac{\gamma \varepsilon(m + 1)}{2} \right] \\
k'_{32} &= \frac{-\gamma \varepsilon}{u_0} \left[ 2mu_0 - \frac{(\gamma + 1) \{(3m + 1) + \alpha(m - 1)\}}{2(2 + \alpha)} + 2\varepsilon G_3 + \frac{2A}{\gamma} \right] \\
k'_{13} &= \frac{\gamma(\gamma - 1)}{z_0} \left[ u_0 - \frac{(\gamma + 1)(m + 3)}{2(2 + \alpha)} + \left( \frac{f_1 + f_3}{2f_2} \right) \right] \\
k'_{23} &= \frac{-\gamma(\gamma - 1)\varepsilon}{z_0 u_0} \left[ u_0 - \frac{(\gamma + 1)(m + 3)}{2(2 + \alpha)} + \left( \frac{f_1 + f_3}{2f_2} \right) \right] \\
k'_{33} &= \frac{\gamma \varepsilon}{z_0 u_0} \left[ (\gamma - 1)z_0 - \varepsilon \left\{ 2A - \left( \frac{f_1 + f_3}{f_2} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

### Effet isotrope de la vitesse:

$$\begin{aligned}
(5.322) \quad \xi \left[ \rho_0 u_{23} + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \rho_{23} \varepsilon \right]_{\xi} + 2A \rho_{23} + (m - 1)(\rho_0 v_2 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1) \\
+ (m + 1)(\rho_0 u_{23} + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \rho_{23} u_0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5.323) \quad \xi \left[ \rho_0 u_0 u_{23} + \frac{1}{2} u_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) + \varepsilon (\rho_0 u_{23} + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \rho_{23} u_0) + \frac{\gamma - 1}{2} p_{23} \right]_{\xi} \\
+ (m + 2) \left[ \rho_0 u_0 u_{23} + \frac{1}{2} u_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) \right] \\
+ (\rho_0 u_{23} + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \rho_{23} u_0) \left[ (m + 2)u_0 + \frac{(\gamma + 1)(m - 1 - 2\alpha)}{2(2 + \alpha)} \right] \\
+ (m - 1) \left[ \rho_0 u_0 v_2 + \frac{1}{2} v_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) \right] + (\gamma - 1) p_{23} - \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5.324) \quad \xi \left[ \varepsilon (\rho_0 s_{23} + \frac{1}{2} \rho_1 s_1 + s_0 \rho_{23}) \right]_{\xi} + \xi \left[ \frac{1}{2} u_1 (\rho_0 s_1 + \rho_1 s_0) + \rho_0 s_0 u_{23} \right]_{\xi} \\
+ 2A (\rho_0 s_{23} + \frac{1}{2} \rho_1 s_1 + s_0 \rho_{23}) + \frac{1}{2} (m + 1) s_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) \\
- \frac{(\gamma + 1)(m + 3)}{2 + \alpha} \rho_{23} + (\rho_0 u_{23} + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \rho_{23} u_0) [(m + 1)s_0 + 2] \\
+ (m + 1) \rho_0 u_0 s_{23} + (m - 1) \left[ \rho_0 s_0 v_2 + \frac{1}{2} v_1 (\rho_0 s_1 + \rho_1 s_0) \right] = 0
\end{aligned}$$

La forme matricielle est donnée par:

$$[M_3] \left\{ \vec{X}_{23} \right\}_\mu = [F_{20}] \left\{ \vec{X}_{23} \right\} - \left\{ \vec{\Lambda}_1 \right\}$$

soit

$$\left\{ \vec{X}_{23} \right\}_\mu = \frac{1}{D'} [P_{20}] \left\{ \vec{X}_{23} \right\} - [M_3]^{-1} \left\{ \vec{\Lambda}_1 \right\}$$

$$\left\{ \vec{X}_{23} \right\} = \begin{pmatrix} x_{23} = \rho_{23} u_0 \\ y_{23} = u_{23} \rho_0 \\ p_{23} \end{pmatrix}$$

où

$$\left\{ \vec{\Lambda}_1 \right\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Les expressions des composantes  $\lambda$ , sont données en Annexe 12.

### Effet anisotrope de la vitesse:

$$(5.325) \quad \xi \left[ \rho_0 u_{21} + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \rho_{21} \varepsilon \right]_\xi + 2A \rho_{21}$$

$$+ (m+1) \left\{ \rho_0 u_{21} + \rho_{21} u_0 + \rho_0 v_2 + \frac{1}{2} \rho_1 (u_1 + v_1) \right\} = 0$$

$$(5.326) \quad \xi \left[ \rho_0 u_0 u_{21} + \frac{1}{2} u_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) + \varepsilon (\rho_0 u_{21} + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \rho_{21} u_0) + \frac{\gamma-1}{2} p_{21} \right]_\xi$$

$$+ (\rho_0 u_{21} + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \rho_{21} u_0) \left[ (m+2) u_0 + \frac{(\gamma+1)(m-1-2\alpha)}{2(2+\alpha)} \right]$$

$$+ (m+1) \left[ \rho_0 u_0 v_2 + \frac{1}{2} v_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) \right] + \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2$$

$$+ (m+2) \left[ \rho_0 u_0 u_{21} + \frac{1}{2} u_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) \right] + (\gamma-1) p_{21} = 0$$

$$(5.327) \quad \xi \left[ \rho_0 v_2 \varepsilon + \frac{1}{2} v_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 \varepsilon) \right]_\xi + \frac{1}{2} \rho_0 v_1 [(m+1) v_1 + (m+3) u_1]$$

$$+ \left[ (m+3) u_0 + \frac{(\gamma+1)(m-1-2\alpha)}{2(2+\alpha)} \right] (\rho_0 v_2 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1) - (\gamma-1) p_{21} = 0$$

$$(5.328) \quad \xi \left[ \varepsilon (\rho_0 s_{21} + \frac{1}{2} \rho_1 s_1 + s_0 \rho_{21}) \right]_\xi + \xi \left[ \frac{1}{2} u_1 (\rho_0 s_1 + \rho_1 s_0) + \rho_0 s_0 u_{21} \right]_\xi$$

$$+ (m+1) \rho_0 u_0 s_{21} + 2A (\rho_0 s_{21} + \frac{1}{2} \rho_1 s_1 + s_0 \rho_{21})$$

$$- \frac{(\gamma+1)(m+3)}{2+\alpha} \rho_{21} + (\rho_0 u_{21} + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 + \rho_{21} u_0) [(m+1) s_0 + 2]$$

$$+ \frac{1}{2} (m+1) s_1 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) + (m+1) \left[ \rho_0 s_0 v_2 + \frac{1}{2} v_1 (\rho_0 s_1 + \rho_1 s_0) \right] = 0$$

La forme matricielle de ce système s'écrit:

$$[M_4] \left\{ \vec{X}_{21} \right\}_\mu = [F_{21}] \left\{ \vec{X}_{21} \right\} - \left\{ \vec{\Lambda}'_1 \right\}$$

soit

$$\left\{ \vec{X}_{21} \right\}_\mu = \frac{1}{D} [P_{21}] \left\{ \vec{X}_{21} \right\} - [M_4]^{-1} \left\{ \vec{\Lambda}'_1 \right\}$$

$$\left\{ \vec{X}_{21} \right\} = \begin{pmatrix} x_{21} = \rho_{21} u_0 \\ y_{21} = u_{21} \rho_0 \\ z_2 = v_2 \rho_0 \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \left\{ \vec{\Lambda}'_1 \right\} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \lambda'_3 \\ \lambda'_4 \end{pmatrix}$$

Les expressions des composantes  $\lambda'_i$  sont données en Annexe 13

La matrice  $[F_{21}]$  est définie par :

$$[F_{21}] = \begin{bmatrix} -e'_{11} & -(m+1) & -(m+1) & 0 \\ -e'_{21} & -e'_{22} & -(m+1)u_0 & (1-\gamma) \\ 0 & 0 & -e'_{44} & (\gamma-1) \\ -e'_{11}(s_0 - \gamma) & -\left[\frac{2A}{\varepsilon} + (m+1)s_0\right] & -(m+1)s_0 & -e'_{33} \end{bmatrix}$$

avec

$$e'_{44} = 2u_0 + \frac{(\gamma+1)(m-1-2\alpha)}{2(2+\alpha)} - \varepsilon G_3$$

La matrice  $[P_{21}]$  est définie par :

$$[P_{21}] = \begin{bmatrix} \varepsilon k'_{11} & \varepsilon k'_{12} & k''_{13} & k''_{14} \\ \varepsilon k'_{21} & \varepsilon k'_{22} & k''_{23} & k''_{24} \\ 0 & 0 & k''_{33} & k''_{34} \\ \varepsilon k'_{31} & \varepsilon k'_{32} & k''_{43} & \varepsilon k'_{33} \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $k''_{ij}$  sont:

$$k''_{13} = \frac{-\gamma(m+1)\varepsilon^3}{z_0}$$

$$k''_{23} = \frac{\gamma(\gamma-1)(m+1)\varepsilon^2}{2u_0}$$

$$k''_{33} = -\frac{De'_{44}}{\varepsilon}$$

$$k''_{43} = \frac{-\gamma(m+1)\varepsilon^3}{u_0}$$

$$k''_{14} = \frac{\gamma(\gamma-1)\varepsilon}{z_0} \left[ u_0 - \frac{(\gamma+1)(m+3)}{2(2+\alpha)} + \frac{1}{2} \left( \frac{f_1 + f_3}{f_2} \right) \right]$$



$$k_{24}'' = \frac{-\gamma(\gamma-1)\varepsilon^2}{z_0 u_0} \left[ u_0 - \frac{(\gamma+1)(m+3)}{2(2+\alpha)} + \frac{1}{2} \left( \frac{f_1 + f_3}{f_2} \right) \right]$$

$$k_{34}'' = \frac{-\gamma(\gamma-1)\varepsilon f_2}{2z_0 u_0}$$

Les autres coefficients  $k'_{ij}$  sont les mêmes que pour la matrice  $[P_{20}]$

Les équations (5.322) à (5.324) ainsi que les équations (5.325) à (5.328) montrent bien que pour le cas de l'explosion ponctuelle ( $m = 2$ ), il y a couplage entre les effets isotrope et anisotrope d'ordre 2 de la vitesse. Par conséquent, ces sept équations doivent être intégrées simultanément [4].

### 5.3 Conditions sur le choc $\Sigma$ ramenées en $\xi = 1$

Sur le choc  $\xi$  vaut  $R^*$  et les conditions sont définies par les équations (2.27). La vitesse de propagation  $\omega$  du choc est donnée par l'expression suivante:

$$\omega = \frac{\hat{n}\hat{E}}{t} \xi_0 \omega^*$$

avec

$$\begin{aligned} \omega^* = & 1 + \eta \left( \frac{\xi_1}{\hat{n}} \right) \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \left[ \frac{2(m+2) - \alpha}{2 + \alpha} \right] \xi_{22} \\ & + \eta^2 \left[ \left\{ \left( \frac{2(m+2) - \alpha}{2 + \alpha} \right) \xi_{23} - \frac{1}{4} \xi_1^2 \right\} + \left\{ \left( \frac{2(m+2) - \alpha}{2 + \alpha} \right) \xi_{21} + \frac{1}{4} \xi_1^2 \right\} \cos 2\theta \right] + o(\eta^3) \end{aligned}$$

Nous ramenons, comme dans le chapitre 2, les conditions valables en  $\xi = R^*$  en  $\xi = 1$ . On obtient:

#### Ordre 0

$$p_0(1) = 1$$

$$\rho_0(1) = 1$$

$$u_0(1) = 1$$

#### Ordre 1

$$p_1(1) = \left[ 2 \left( \frac{m+1-\alpha}{2+\alpha} \right) - p_{0\xi}(1) \right] \xi_1 - \frac{2(1-\beta)(m+3)}{2+\alpha}$$

$$\rho_1(1) = -\xi_1 \rho_{0\xi}(1)$$

$$u_1(1) = \left[ \frac{m+1-\alpha}{2+\alpha} - u_{0\xi}(1) \right] \xi_1 + \frac{(\gamma-1)(1-\beta)(m+3)}{2(2+\alpha)}$$

$$v_1(1) = \xi_1 - \frac{(\gamma+1)(1-\beta)(m+3)}{2(2+\alpha)}$$

## Ordre 2

### Effet de la pression:

$$p_{22}(1) = \left[ 4 \left( \frac{m+1-\alpha}{2+\alpha} \right) - p_{0\xi}(1) \right] \xi_{22} - \frac{(\gamma-1)(m+3)^2}{2\gamma(2+\alpha)^2}$$

$$\rho_{22}(1) = -\xi_{22}\rho_{0\xi} - \frac{2(m+3)^2}{(\gamma-1)(2+\alpha)^2}$$

$$u_{22}(1) = \left[ 2 \left( \frac{m+1-\alpha}{2+\alpha} \right) - u_{0\xi}(1) \right] \xi_{22} - \frac{(m+3)^2}{(2+\alpha)^2}$$

### Effet isotrope de la vitesse:

$$p_{23}(1) = \left[ 4 \left( \frac{m+1-\alpha}{2+\alpha} \right) - p_{0\xi}(1) \right] \xi_{23} + \left[ \frac{2\alpha^2 - 4\alpha(m+1) + m^2 - 2m - 7}{2(2+\alpha)^2} - \frac{1}{4}p_{0\xi\xi}(1) \right] \xi_1^2$$

$$+ \left[ \frac{(3\alpha+3-m)(m+3)(1-\beta)}{(2+\alpha)^2} - \frac{1}{2}p_{1\xi}(1) \right] \xi_1 + \frac{(m+3)^2(1-\beta)^2}{2(2+\alpha)^2}$$

$$\rho_{23}(1) = -\xi_{23}\rho_{0\xi} - \frac{1}{4}\rho_{0\xi\xi}(1) - \frac{1}{2}\xi_1\rho_{1\xi}(1)$$

$$u_{23}(1) = \left[ 2 \left( \frac{m+1-\alpha}{2+\alpha} \right) - u_{0\xi}(1) \right] \xi_{23} - \left[ \frac{(m+3)}{2(2+\alpha)} + \frac{1}{4}u_{0\xi\xi}(1) \right] \xi_1^2$$

$$+ \left[ \frac{(3-\gamma)(m+3)(1-\beta)}{4(2+\alpha)} - \frac{1}{2}u_{1\xi}(1) \right] \xi_1$$

### Effet anisotrope de la vitesse:

$$p_{21}(1) = \left[ 4 \left( \frac{m+1-\alpha}{2+\alpha} \right) - p_{0\xi}(1) \right] \xi_{21} + \left[ \frac{(2\alpha-m+1)^2}{2(2+\alpha)^2} - \frac{1}{4}p_{0\xi\xi}(1) \right] \xi_1^2$$

$$- \left[ \frac{(m+1-\alpha)(m+3)(1-\beta)}{(2+\alpha)^2} + \frac{1}{2}p_{1\xi}(1) \right] \xi_1 + \frac{(m+3)^2(1-\beta)^2}{2(2+\alpha)^2}$$

$$\rho_{21}(1) = -\xi_{21}\rho_{0\xi} - \frac{1}{4}\rho_{0\xi\xi}(1) - \frac{1}{2}\xi_1\rho_{1\xi}(1)$$

$$u_{21}(1) = \left[ 2 \left( \frac{m+1-\alpha}{2+\alpha} \right) - u_{0\xi}(1) \right] \xi_{21} + \left[ \frac{2\alpha-m+1}{2(2+\alpha)} - \frac{1}{4}u_{0\xi\xi}(1) \right] \xi_1^2$$

$$- \left[ \frac{(\gamma+1)(1-\beta)(m+3)}{4(2+\alpha)} + \frac{1}{2}u_{1\xi}(1) \right] \xi_1$$

$$v_2(1) = 2\xi_{21} - \left( \frac{2\alpha-m+1}{2(2+\alpha)} \right) \xi_1^2 + \left[ \frac{(\gamma-1)(1-\beta)(m+3)}{4(2+\alpha)} - \frac{1}{2}v_{1\xi}(1) \right] \xi_1$$

Ces conditions dépendent des valeurs en  $\xi = 1$  des fonctions d'ordre 0 et d'ordre 1. Ces valeurs sont données analytiquement en Annexes 4 et 5.

## 5.4 Conditions sur $\Sigma'$ ramenées en $\xi = \xi'_0$

La vitesse de propagation de  $\Sigma'$  est définie par:

$$\omega' = \frac{\hat{n}\hat{E}}{t}\xi_0\omega'^*$$

avec

$$\omega'^* = \xi'_0 + \eta\left(\frac{\xi'_1}{\hat{n}}\right)\cos\theta + \frac{\eta^2}{M^2}\left[\frac{2(m+2)-\alpha}{2+\alpha}\right]\xi'_{22}$$

$$+ \eta^2\left[\left\{\left(\frac{2(m+2)-\alpha}{2+\alpha}\right)\xi'_{23} - \frac{\xi'^2_1}{4\xi'_0}\right\} + \left\{\left(\frac{2(m+2)-\alpha}{2+\alpha}\right)\xi'_{21} + \frac{\xi'^2_1}{4\xi'_0}\right\}\cos 2\theta\right] + o(\eta^3)$$

L'énergie libérée par l'explosion sert intégralement à la dilatation de la frontière matérielle  $\Sigma'$ , ce qui est traduit par l'équation:

$$(5.329) \quad \mathcal{P} - \int \int_{\Sigma'} p'(\vec{\omega}' + \beta\vec{U}\vec{x})\vec{n}' dS = 0$$

avec

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2^m\pi} \int_0^{\hat{\theta}(t)} \left[ \frac{d}{dt} E t^\alpha \right] \hat{\theta}(m) d\theta$$

L'angle  $\hat{\theta}(t)$  est défini par:

$$\hat{\theta} = \theta - \eta \frac{\beta}{\xi'_0} \sin\theta + \frac{\beta(\xi_1 + \beta)}{2\xi'_0} \eta^2 \sin 2\theta + o(\eta^3) \text{ pour } m = 1;$$

$$\cos \hat{\theta} = \cos\theta + \eta \frac{\beta}{\xi'_0} \sin^2\theta - \frac{\beta(3\beta + 2\xi'_1)}{2\xi'_0} \eta^2 \cos\theta \sin^2\theta + o(\eta^3) \text{ pour } m = 2.$$

En développant (5.329) jusqu'à l'ordre 2 en  $\eta$  et en identifiant terme à terme, on obtient:

### Ordre 0

$$(5.330) \quad p'_0 = \frac{\alpha(\gamma + 1)}{\pi 2^{m+1} \hat{n}^3 (\xi_0 \xi'_0)^{m+3}}$$

Cette équation donne donc la valeur à l'ordre 0 de la pression sur la frontière  $\Sigma'$ . Pour  $\alpha = m + 1$ , nous obtenons:

$$p'_0 = \frac{(m+1)(\gamma+1)}{2^{m+1}\pi(\xi_0\xi'_0)^{m+3}}$$

### Ordre 1

$$\text{Si } m = 1 \text{ alors } p'_1 = -\frac{(6+\alpha)(\beta+\xi'_1)}{(2+\alpha)\xi'_0} p'_0$$

$$\text{Si } m = 2 \text{ alors } p'_1 = -\frac{(2\alpha+9)(\beta+\xi'_1)}{(2+\alpha)\xi'_0} p'_0$$

Le coefficient  $\beta$  sera déterminé, comme dans le chapitre 2, grâce à l'équation

$$\xi'_1 = 0$$

## Ordre 2

Dans le repère défini par  $\xi'_1 = 0$ , on a:

Pour  $m = 1$

$$\xi'_{22} = -\left(\frac{2+\alpha}{8}\right) \xi'_0 \frac{p'_{22}}{p'_0}$$

$$\xi'_{23} = \left(\frac{2+\alpha}{8}\right) \xi'_0 \left[ -\frac{p'_{23}}{p'_0} + \frac{2(6+\alpha)\beta^2}{(2+\alpha)^2 \xi'^2_0} \right]$$

$$\xi'_{21} = \left(\frac{2+\alpha}{8}\right) \xi'_0 \left[ -\frac{p'_{21}}{p'_0} + \frac{(\alpha^2 + 6\alpha + 16)\beta^2}{(2+\alpha)^2 \xi'^2_0} \right]$$

Pour  $m = 2$

$$\xi'_{22} = -\left(\frac{2+\alpha}{12+\alpha}\right) \xi'_0 \frac{p'_{22}}{p'_0}$$

$$\xi'_{23} = \left(\frac{2+\alpha}{12+\alpha}\right) \xi'_0 \left[ -\frac{p'_{23}}{p'_0} + \frac{\beta^2}{\xi'^2_0} \left( \frac{3}{4} + \frac{5(2\alpha+9)}{2(2+\alpha)^2} \right) \right]$$

$$\xi'_{21} = \left(\frac{2+\alpha}{12+\alpha}\right) \xi'_0 \left[ -\frac{p'_{21}}{p'_0} + \frac{\beta^2}{\xi'^2_0} \left( \frac{9}{4} + \frac{5(2\alpha+9)}{2(2+\alpha)^2} \right) \right]$$

Pour le cas du piston rigide, on posera:

$$\xi'_j = 0$$

## 5.5 Equation de conservation globale de l'énergie

La conservation globale de l'énergie s'exprime par l'équation (2.97). Elle s'applique à un domaine diédrique pour l'explosion linéique et à un domaine conique pour l'explosion ponctuelle. On substitue dans l'équation (2.97) les développements des inconnues  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  et  $p$  ainsi que ceux de  $\omega$  et de  $\omega'$ . On exprime suivant le type de domaine les éléments de surface et de volume et on ramène enfin les bornes d'intégration  $\xi = R'^*$  et  $\xi = R^*$  respectivement en  $\xi = \xi'_0$  et  $\xi = 1$ . Une identification à chaque ordre en  $\eta$  donne les équations suivantes:

### Ordre 0

$$(5.331) \quad \alpha \int_{\xi'_0}^1 \mathcal{H}_0(\xi) \xi^{m+2} d\xi = \left( \frac{2+\alpha}{m+3} \right) (\gamma-1) p'_0 \xi'_0{}^{(m+3)}$$

$$\alpha \neq 0$$

où

$$\mathcal{H}_0(\xi) = p_0 + \rho_0 u_0^2$$

$$\mathcal{H}_0(1) = 2$$

Compte tenu de (5.330), nous pouvons écrire l'équation (5.331) sous la forme plus générale:

$$(5.332) \quad \int_{\xi'_0}^1 \mathcal{H}_0(\xi) \xi^{m+2} d\xi = \frac{(\gamma^2-1)(m+3)^2}{2^{(m+1)}\pi(2+\alpha)^2 \xi_0^{(m+3)}}$$

valable quel que soit  $\alpha$ . Le second membre de l'égalité prend, pour  $\alpha = m+1$ , la forme simple suivante:

$$\frac{\gamma^2-1}{\pi 2^{m+1} \xi_0^{m+3}}$$

## Ordre 1

$$(5.333) \quad \int_{\xi'_0}^1 \left[ \{\alpha(m+2) + (m+1)\} \mathcal{H}_1(\xi) + \frac{2m(2+\alpha)}{\gamma+1} \tilde{\mathcal{H}}_0(\xi) v_1(\xi) \right] \xi^{m+2} d\xi \\ + \{\alpha(m+2) + (m+1)\} \{2\xi_1 - \xi'_1 \xi_0{}^{(m+2)} \mathcal{H}_0(\xi'_0)\} = \\ (\gamma-1) \left[ (2+\alpha) p'_1 \xi_0{}^{(m+3)} + \{m\alpha + 3(m+1)\} p'_0 \xi'_1 \xi_0{}^{(m+2)} \right]$$

avec

$$\mathcal{H}_1(\xi) = p_1 + u_0 (\rho_1 u_0 + 2\rho_0 u_1)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_0(\xi) = \gamma p_0 + \rho_0 u_0^2$$

$$\mathcal{H}_0(\xi'_0) = p'_0 \text{ car } \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \rho_0 \rightarrow 0 \text{ pour } \alpha \neq 2$$

Pour le cas  $\alpha = m+1$ , l'équation (5.333) s'écrit:

$$(5.334) \quad \int_{\xi'_0}^1 \left[ (m+1) \mathcal{H}_1(\xi) + \frac{2m}{\gamma+1} \tilde{\mathcal{H}}_0(\xi) v_1(\xi) \right] \xi^{m+2} d\xi \\ + (m+1) \{2\xi_1 - \xi'_1 \xi_0{}^{(m+2)} \mathcal{H}_0(\xi'_0)\} = \\ (\gamma-1) \left[ p'_1 \xi_0{}^{(m+3)} + (m+1) p'_0 \xi'_1 \xi_0{}^{(m+2)} \right]$$

Dans le repère défini par [2.88], les équations de l'énergie à l'ordre 2 sont:



**Ordre 2:  
-Effet de la pression**

$$(5.335) \quad \int_{\xi'_0}^1 \mathcal{H}_{22}(\xi) \xi^{m+2} d\xi + 2\xi_{22} - \frac{(m+3)^2(\gamma+1)}{2\gamma(m+1)(2+\alpha)^2} - \xi'_{22} \xi_0'^{(m+2)} \mathcal{H}_0(\xi'_0) = \\ \frac{(\gamma-1)}{m+1} \left[ \xi_0'^{(m+3)} p'_{22} + \frac{4(m+1) + \alpha(m-1)}{2+\alpha} \xi'_{22} \xi_0'^{(m+2)} p'_0 \right]$$

où

$$\mathcal{H}_{22}(\xi) = p_{22} + u_0(\rho_{22}u_0 + 2\rho_0u_{22})$$

Cette équation s'écrit pour  $\alpha = m + 1$ :

$$(5.336) \quad \int_{\xi'_0}^1 \mathcal{H}_{22}(\xi) \xi^{m+2} d\xi + 2\xi_{22} - \frac{(\gamma+1)}{2\gamma(m+1)} - \xi'_{22} \xi_0'^{(m+2)} \mathcal{H}_0(\xi'_0) = \\ \frac{(\gamma-1)}{m+1} \left[ \xi_0'^{(m+3)} p'_{22} + (m+1) \xi'_{22} \xi_0'^{(m+2)} p'_0 \right]$$

**-Effets isotrope et anisotrope de la vitesse**

$$(5.337) \quad \int_{\xi'_0}^1 [(m+1)\mathcal{H}_{23}(\xi) - (m-1)\mathcal{H}_{21}(\xi)] \xi^{m+2} d\xi \\ + 2 \left[ (m+1)\xi_{23} - (m-1)\xi_{21} + \left(\frac{m+2}{2}\right) \xi_1^2 \right] - \frac{(\gamma^2-1)(1-\beta)^2(m+3)^2}{4(2+\alpha)^2} \\ + \xi_1 \mathcal{H}_1(1) + \frac{1}{2} \xi_1^2 \mathcal{H}_{0\xi}(1) - [(m+1)\xi'_{23} - (m-1)\xi'_{21}] \xi_0'^{(m+2)} \mathcal{H}_0(\xi'_0) \\ = \left(\frac{\gamma-1}{m+1}\right) \xi_0'^{(m+3)} \{(m+1)p'_{23} - (m-1)p'_{21}\} \\ + \frac{\gamma-1}{m+1} \left[ \frac{4(m+1) + \alpha(m-1)}{2+\alpha} \{(m+1)\xi'_{23} - (m-1)\xi'_{21}\} \xi_0'^{(m+2)} p'_0 \right]$$

avec

$$\mathcal{H}_{23}(\xi) = p_{23} + u_0(\rho_{23}u_0 + 2\rho_0u_{23}) + \rho_1u_0u_1 + \frac{1}{2}\rho_0(u_1^2 + v_1^2)$$

$$\mathcal{H}_1(1) = 2 \left[ \frac{\hbar_1 + \alpha\hbar_2}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)} \right] \xi_1 - \frac{(m+3)(3-\gamma)(1-\beta)}{2+\alpha}$$

où

$$\hbar_1 = m(3\gamma^2 - 8\gamma - 3) + (\gamma+1)(\gamma-5)$$

$$\hbar_2 = m(\gamma-1)(3\gamma+1) + (\gamma+1)(5\gamma-1)$$

$$\mathcal{H}_{0\xi}(1) = \frac{2(\kappa_1 - \alpha\kappa_2)}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)}$$

$$\kappa_1 = m(-\gamma^2 + 8\gamma + 1) + (\gamma^2 + 4\gamma + 3)$$

$$\kappa_2 = m(3\gamma^2 - 2\gamma - 1) + (7\gamma^2 + 4\gamma - 3)$$

Pour  $m = 2$ , l'équation (5.337) est couplée à l'équation suivante:

$$(5.338) \quad \int_{\xi'_0}^1 \left[ \mathcal{H}_{21}(\xi) + \frac{2}{\gamma+1} \left\{ \tilde{\mathcal{H}}_0(\xi) v_2(\xi) + \frac{1}{2} v_1(\xi) \tilde{\mathcal{H}}_1(\xi) \right\} \right] \xi^{m+2} d\xi \\ + 2 \left( \xi_{21} + \frac{m+2}{4} \xi_1^2 \right) + \frac{1}{2} \xi_1 \mathcal{H}_1(1) + \frac{1}{4} \xi_1^2 \mathcal{H}_{0\xi}(1) - \xi'_{21} \xi_0'^{(m+2)} \mathcal{H}_0(\xi'_0) \\ + \xi_1 v_1(1) = \frac{(\gamma-1)}{m+1} \left[ \xi_0'^{(m+3)} p'_{21} + \left\{ \frac{4(m+1) + \alpha(m-1)}{2+\alpha} \right\} \xi'_{21} \xi_0'^{(m+2)} p'_0 \right]$$

avec

$$\mathcal{H}_{21}(\xi) = p_{21} + u_0(\rho_{21} u_0 + 2\rho_0 u_{21}) + \rho_1 u_0 u_1 + \frac{1}{2} \rho_0 (u_1^2 - v_1^2) \\ \tilde{\mathcal{H}}_1(\xi) = \gamma p_1 + u_0(\rho_1 u_0 + 2\rho_0 u_1)$$

Les équations (5.337) et (5.338) s'écrivent sous la forme simplifiée suivante pour  $\alpha = m + 1$ :

$$(5.339) \quad \int_{\xi'_0}^1 [(m+1)\mathcal{H}_{23}(\xi) - (m-1)\mathcal{H}_{21}(\xi)] \xi^{m+2} d\xi \\ + 2[(m+1)\xi_{23} - (m-1)\xi_{21}] - \frac{(\gamma^2-1)(1-\beta)^2}{4} - (3-\gamma)(1-\beta)\xi_1 \\ + 2\xi_1^2 \left[ \left( \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \right) m + 2 \right] - [(m+1)\xi'_{23} - (m-1)\xi'_{21}] \xi_0'^{(m+2)} \mathcal{H}_0(\xi'_0) \\ = \left( \frac{\gamma-1}{m+1} \right) \xi_0'^{(m+3)} \{(m+1)p'_{23} - (m-1)p'_{21}\} \\ + \frac{\gamma-1}{m+1} [(m+1)\{(m+1)\xi'_{23} - (m-1)\xi'_{21}\} \xi_0'^{(m+2)} p'_0]$$

$$(5.340) \quad \int_{\xi'_0}^1 \left[ \mathcal{H}_{21}(\xi) + \frac{2}{\gamma+1} \left\{ \tilde{\mathcal{H}}_0(\xi) v_2(\xi) + \frac{1}{2} v_1(\xi) \tilde{\mathcal{H}}_1(\xi) \right\} \right] \xi^{m+2} d\xi \\ + 2 \left( \xi_{21} + \frac{m+2}{4} \xi_1^2 \right) + \frac{1}{2} \xi_1 \mathcal{H}_1(1) + \frac{1}{4} \xi_1^2 \mathcal{H}_{0\xi}(1) - \xi'_{21} \xi_0'^{(m+2)} \mathcal{H}_0(\xi'_0) \\ + \xi_1 v_1(1) = \frac{(\gamma-1)}{m+1} \left[ \xi_0'^{(m+3)} p'_{21} + (m+1)\xi'_{21} \xi_0'^{(m+2)} p'_0 \right]$$

## 5.6 Solution analytique pour le cas $\alpha = 0$

La solution analytique est obtenue grâce à l'existence d'une intégrale première de l'énergie [2]. En effet, l'énergie du fluide situé entre deux surfaces mobiles  $R'(r, t)$  et  $R''(r, t)$  vaut:

$$(5.341) \quad \tilde{\mathcal{E}} = \int_{R'}^{R''} \left( \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \pi 2^m r^m dr$$

où

$$r = \hat{E}\xi_0\xi$$

La variation de cette énergie est égale au travail des forces de pression sur ces surfaces. Cette égalité peut s'écrire:

$$(5.342) \quad \frac{d}{dt} \int_{R'}^{R''} \left( \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \pi 2^m r^m dr = -\pi [2^m r^m p u]_{R'}^{R''}$$

Le premier membre de (5.342) est égal à:

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \int_{R'}^{R''} \left( \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \pi 2^m r^m dr + \left[ \left( \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \left( \frac{dr}{dt} - u \right) \right]_{R'}^{R''}$$

où  $\frac{\tilde{d}}{dt}$  désigne la dérivation par rapport au temps effectué sur un volume d'intégration mobile constitué des mêmes particules.

Or, par des considérations dimensionnelles,

$$(5.343) \quad \tilde{\mathcal{E}} = Et^\alpha f(\xi', \xi'', \alpha, \gamma) d' \text{ où } \frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{dt} = \alpha \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{t}$$

où  $f(\xi', \xi'', \alpha, \gamma)$  est une fonction inconnue dans laquelle  $\xi'$  et  $\xi''$  sont des constantes prises par  $\xi$  respectivement sur  $R'$  et  $R''$ , à un instant donné.

Compte tenu de (5.342), (5.343) et des expressions de  $u, p, \rho$  à l'ordre 0, nous obtenons:

$$\alpha f(\xi', \xi'', \alpha, \gamma) = C^{te} \left[ \xi^{m+3} \left\{ (\gamma-1) p_0 u_0 + \varepsilon (p_0 + \rho_0 u_0^2) \right\} \right]_{\xi'}$$

où

$$C^{te} = -\frac{4\hat{n}^3 \xi_0^{m+3}}{(\gamma+1)^2 (\gamma-1)}$$

Le premier membre de l'égalité précédente est nul puisque  $\alpha = 0$  dans le cas d'une explosion instantanée, ce qui entraîne:

$$(5.344) \quad \xi^{m+3} \left\{ (\gamma-1) p_0 u_0 + \varepsilon (p_0 + \rho_0 u_0^2) \right\} = C_1$$

La constante  $C_1$  peut être calculée sur le choc et l'on trouve  $C_1 = 0$ .

En substituant  $z_0 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$  dans l'équation (5.344), la solution analytique est donnée par:

$$z_0 = \frac{\varepsilon u_0^2}{\frac{\gamma+1}{2\gamma} - u_0}$$

$$\xi = u_0^{\nu_1} \Gamma_1^{\nu_2} \Gamma_2^{\nu_3}$$

$$\rho_0 = \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \left( \frac{2}{\gamma-1} \right) u_0 \right]^{\nu_4} \Gamma_1^{\nu_5} \Gamma_2^{\nu_6}$$

$$p_0 = \frac{z_0 \rho_0}{\gamma}$$

avec

$$\Gamma_1 = \left[ \left( \frac{2\gamma}{\gamma-1} \right) u_0 - \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \right]$$

$$\Gamma_2 = \left[ \frac{2 \{ \gamma(m+1) + (1-m) \} u_0 - (m+3)(\gamma+1)}{\gamma(m-1) - (3m+1)} \right]$$

$$\nu_1 = -\frac{2}{m+3}$$

$$\nu_2 = \frac{\gamma-1}{2\gamma+m-1}$$

$$\nu_3 = \frac{m^2(\gamma^2 - 3\gamma + 4) + (\gamma+1)(2m\gamma + 5\gamma - 4)}{(m+3)(1-m-2\gamma) \{ \gamma(m+1) + (1-m) \}}$$

$$\nu_4 = -\frac{2}{2-\gamma}$$

$$\nu_5 = \frac{m+1}{2\gamma+m-1}$$

$$\nu_6 = -\frac{(m+3)\nu_3}{2-\gamma}$$

## 5.7 Comportement de $u_{0\xi}, p_{0\xi}, \rho_{0\xi}$ au voisinage de $\xi = \xi'_0$

On sait que, pour  $\xi'_0 \leq \xi \leq 1$ ,  $u_0$  varie de 1 à  $\frac{\gamma+1}{2}$  pour  $\alpha \neq 0$  et de  $\frac{\gamma+1}{2\gamma}$  à 1 pour  $\alpha = 0$ .

La fonction  $z_0$ , représentative de la température, reste supérieure à  $\gamma$  pour toute valeur de  $\alpha$  différente de 2.

On montre aisément que:

-les pentes des fonctions  $u_0$  et  $p_0$  restent finies quand  $\xi \rightarrow \xi'_0$ , c'est à dire:

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} u_{0\xi} = \left( \frac{\gamma+1}{\xi'_0} \right) \left[ \frac{m+1-\alpha}{\gamma(2+\alpha)} - \frac{m+1}{2} \right]$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} p_{0\xi} = \frac{-2p_0(\xi'_0)}{\xi'_0} \text{ pour les 2 valeurs de } m \text{ et } \forall \alpha$$

-la fonction  $\rho_{0\xi}$  se comporte comme  $|\varepsilon|^\nu$  où:

$$\nu = \frac{4(m+1-\alpha) - \gamma(m+1)(2+\alpha)}{\gamma(m+1)(2+\alpha) - 2(m+1-\alpha)}$$

On distingue ainsi deux cas suivant que  $\nu$  soit positif ou négatif:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \rho_{0\xi} &\rightarrow 0 \text{ si} \\ \alpha &< \frac{2(m+1)(2-\gamma)}{\gamma(m+1)+4} \text{ ou } \gamma < \frac{4(m+1-\alpha)}{(m+1)(2+\alpha)} \\ \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \rho_{0\xi} &\rightarrow \infty \text{ si} \\ \alpha &> \frac{2(m+1)(2-\gamma)}{\gamma(m+1)+4} \text{ ou } \gamma > \frac{4(m+1-\alpha)}{(m+1)(2+\alpha)} \end{aligned}$$

Le cas  $\alpha = m + 1$  est particulier puisque nous obtenons,  $\forall m$ :

$$\begin{aligned} \xi s_{0\xi} &= -2 \\ u_{0\xi}(\xi'_0) &= -\frac{(\gamma+1)(m+1)}{2\xi'_0} \end{aligned}$$

L'ensemble de ces résultats confirme celui de la référence [4] et permet de concevoir une généralisation du programme de calcul traitant à la fois le problème sphérique [4] et le problème cylindrique exposé dans les chapitres 2 et 3.

# Chapitre 6

## Conclusion

L'analyse dimensionnelle des équations qui régissent l'explosion en loi de puissance dans un gaz au repos a mis en évidence l'existence d'une similitude interne. L'étude se trouve ainsi simplifiée puisque le nombre de variables passe de deux à un. La solution du problème, qualifiée de solution de base, est alors déterminée par la résolution de simples équations différentielles.

Le problème de l'explosion dans un gaz en mouvement uniforme a pu être traité grâce à la méthode des petites perturbations en effectuant des développements asymptotiques par rapport à la variable caractérisant l'effet du courant et en procédant à une séparation des variables suggérée par les conditions sur le choc. Le nombre de variables passe alors de trois à un. Cela a permis d'obtenir des modèles mathématiques simples constitués de plusieurs systèmes différentiels.

Les solutions sont déterminées dans un repère mobile afin qu'elles soient bornées et physiquement acceptables [4],[15].

Les fonctions de répartition du champ dynamique sont évaluées à chaque ordre du développement puisque la "couche de choc" n'est connue qu'à l'issue de chaque intégration, d'où l'idée de dilater la solution de base et de linéariser seulement après calculs.

Les calculs sont effectués pour différentes valeurs de  $\alpha$  et de  $\gamma$ . Les difficultés numériques proviennent notamment des points suivants:

- La détermination de la solution de base pour des valeurs de  $\alpha$  tendant vers zéro nécessite un maillage serré puisqu'à la frontière du vide  $\Sigma'$ , la dérivée  $\rho_{0\xi}$  peut être soit nulle soit infinie.
- L'accumulation des erreurs d'arrondis à l'ordre 0 et 1 rend difficile le calcul des solutions d'ordre 2 surtout si la dérivée  $\rho_{0\xi}$  tend vers l'infini à la frontière  $\Sigma'$ , c'est à dire pour des valeurs de  $\alpha$  supérieures à 2/3.

Les résultats obtenus sont universels. Ils sont regroupés sous forme de tableaux dans un fascicule séparé. Nous avons montré que:

-Les effets du courant ne se limitent pas uniquement à des déformations du choc  $\Sigma$

et de la frontière  $\Sigma'$  mais aussi à des translations.

Le choc est traduit dans la plupart des cas à une vitesse voisine de  $0.5\bar{U}$ . Le cas de l'explosion instantanée ( $\alpha = 0$ ) fait exception puisque le choc est entraîné à la même vitesse que le courant.

Le piston  $\Sigma'$  est également traduit à peu près à la même vitesse que le choc, mais cette translation est légèrement plus lente pour  $0 < \alpha < 1$ , ce qui se traduit par un amincissement de la couche de choc à contre-courant. On obtient un effet contraire pour  $1 < \alpha < 2$ . La valeur  $\alpha \simeq 1$  correspond à une situation pour laquelle la déformation du choc est insensible à la compressibilité du gaz.

-La contre-pression  $\bar{p}$  ne détruit pas l'isotropie de l'écoulement mais entraîne un épaissement de la couche de choc. On remarque également cet épaissement avec les effets d'ordre 2 du courant. L'anisotropie du choc ainsi que celle de la frontière  $\Sigma'$  deviennent plus importantes sous l'effet anisotrope d'ordre 2 du courant.

-La compressibilité  $\gamma$  et l'exposant  $\alpha$  jouent un rôle important sur la répartition du champ dynamique (masse volumique, pression et vitesse).

Nous avons évoqué également le fait que la frontière  $\Sigma'$  joue le rôle d'un piston qui peut être déformable (cas de l'explosion) ou rigide (cas de l'hypersonique). La solution d'ordre 1 du problème du piston rigide se déduit de celle du piston déformable par une simple considération physique de repérage; la solution relative à l'effet de la contre-pression se calcule à l'aide de la condition géométrique de rigidité. L'analogie entre les équations de l'explosion non instantanée et celles des écoulements hypersoniques montre qu'en hypersonique les effets d'incidence et de contre-pression sont découplés. Les solutions d'ordre 0, d'ordre 1 ainsi que celle relative à l'effet de la contre-pression du piston rigide constituent la solution aux écoulements d'ogives élancées en puissance placées en incidence en hypersonique. Les résultats de calcul qui ne dépendent que du degré d'émoussement  $\hat{n}$  de l'ogive et de  $\gamma$  sont également universels et sont regroupés dans le fascicule des résultats numériques.

# Annexe 1

## Règles de dérivation

La variable  $\xi$  est définie par:

$$\xi = \frac{r}{\hat{E}\xi_0}$$

avec

$$\hat{E} = \left[ \frac{Et^{2+\alpha}}{\bar{p}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Les fonctions  $\hat{f}(r, \theta, t, \bar{U}, \bar{p})$  s'écrivent toutes sous la forme:

$$\phi(r, t)f(\xi, \eta, \theta)$$

Les fonctions  $\hat{f}$  se dérivent de la façon suivante par rapport à  $r$  et  $t$ :

$$\hat{f}_r = \frac{1}{r}\xi f_\xi$$
$$\hat{f}_t = \frac{1}{t} \left[ -\left(\frac{2+\alpha}{4}\right)\xi f_\xi + \left(\frac{2-\alpha}{4}\right)\eta f_\eta \right]$$

On rappelle que:

$$\eta_t = \left(\frac{2-\alpha}{4}\right)\frac{\eta}{t}$$

( $\eta$  vient de  $\bar{U}$ )



## Annexe 2

Expressions des fonctions  $s_j, j = 0, 1, 22, 23, 21$

$$s_0 = \log \left( \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right)$$

$$s_1 = \frac{p_1}{p_0} - \frac{\gamma \rho_1}{\rho_0}$$

$$s_{22} = \frac{p_{22}}{p_0} - \frac{\gamma \rho_{22}}{\rho_0}$$

$$s_{2j} = \left[ \frac{p_{2j}}{p_0} - \left\{ \frac{p_1}{2p_0} \right\}^2 \right] - \gamma \left[ \frac{\rho_{2j}}{\rho_0} - \left\{ \frac{\rho_1}{2\rho_0} \right\}^2 \right]$$

avec  $j = 3, 1$

## Annexe 3

### Expression de la relation entre $\lambda_s$ et $\xi$

• **Relation**

On sait que :

$$\begin{aligned}\xi'_0 &\leq \lambda_s \leq 1 \\ R'^* &\leq \lambda \leq R^*\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}R'^* &= \xi'_0 + \eta \xi'_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \xi'_{22} + \eta^2 (\xi'_{23} + \xi'_{21} \cos 2\theta) + o(\eta^3) \\ R^* &= 1 + \eta \xi_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \xi_{22} + \eta^2 (\xi_{23} + \xi_{21} \cos 2\theta) + o(\eta^3)\end{aligned}$$

La relation qui lie  $\lambda_s$  et  $\xi$  est donnée par:

$$\begin{aligned}\xi &= \lambda_s + \eta \Delta_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \Delta_{22} + \eta^2 (\Delta_{23} + \Delta_{21} \cos 2\theta) \\ &\quad + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\{\Delta_i\}_{i=1,22,23,21} &= \xi_i \Delta(\lambda_s) + \xi'_i \Delta'(\lambda_s) \\ \Delta(\lambda_s) &= \frac{\lambda_s - \xi'_0}{1 - \xi'_0} \\ \Delta'(\lambda_s) &= \frac{1 - \lambda_s}{1 - \xi'_0}\end{aligned}$$

La dérivée s'écrit:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\lambda_s} &= 1 + \eta \delta_1 \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} \delta_{22} + \eta^2 (\delta_{23} + \delta_{21} \cos 2\theta) \\ &\quad + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)\end{aligned}$$

avec

$$\delta_i = \frac{\xi_i - \xi'_i}{1 - \xi'_0}$$

• **Développement au voisinage de  $\xi = \lambda_s$   
des fonctions du type  $F^*(\xi, \theta, \eta)$  et  $G^*(\xi, \theta, \eta)$**

Soient :

$$F^* = F_0(\xi) + \eta F_1(\xi) \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} F_{22}(\xi) + \eta^2 \{F_{23}(\xi) + F_{21}(\xi) \cos 2\theta\} + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)$$

$$G^* = \eta G_1(\xi) \sin \theta + \eta^2 G_2(\xi) \sin 2\theta + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right)$$

En utilisant les expressions ci-dessus, on obtient les développements suivants:

$$\begin{aligned} F^* &= F_0(\lambda_s) + \eta \cos \theta \left[ F_1(\lambda_s) + \Delta_1 F_{0\xi}(\lambda_s) \right] + \frac{\eta^2}{M^2} \left[ F_{22}(\lambda_s) + \Delta_{22} F_{0\xi}(\lambda_s) \right] \\ &+ \eta^2 \left[ F_{23}(\lambda_s) + \Delta_{23} F_{0\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{4} \Delta_1^2 F_{0\xi\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{2} \Delta_1 F_{1\xi}(\lambda_s) \right] \\ &+ \eta^2 \left[ F_{21}(\lambda_s) + \Delta_{21} F_{0\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{4} \Delta_1^2 F_{0\xi\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{2} \Delta_1 F_{1\xi}(\lambda_s) \right] \cos 2\theta + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \\ G^* &= \eta \sin \theta G_1(\lambda_s) + \eta^2 \sin 2\theta \left[ G_2(\lambda_s) + \frac{1}{2} \Delta_1 G_{1\xi}(\lambda_s) \right] + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \end{aligned}$$

On rappelle que , pour un entier  $k$  , on a :

$$\begin{aligned} \xi^k &= \lambda_s^k + k \lambda_s^{k-1} \Delta_1 \eta \cos \theta + \frac{\eta^2}{M^2} k \lambda_s^{k-1} \Delta_{22} + \eta^2 \left[ k \lambda_s^{k-1} \Delta_{23} + \frac{k(k-1)}{4} \lambda_s^{k-2} \Delta_1^2 \right] \\ &+ \eta^2 \cos 2\theta \left[ k \lambda_s^{k-1} \Delta_{21} + \frac{k(k-1)}{4} \lambda_s^{k-2} \Delta_1^2 \right] + o(\eta^2) + o\left(\frac{\eta^2}{M^2}\right) \end{aligned}$$

## Expression de la relation entre $\tilde{\xi}$ et $\xi$

La variable  $\tilde{\xi}$  est définie par:

$$\tilde{\xi} = \frac{\tilde{r}}{R_0}$$

En tenant compte de la translation uniforme du repère  $Oxyz$  (fig 3), les deux variables  $\tilde{\xi}$  et  $\xi$  sont liées par la relation:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} \cos \tilde{\theta} &= \xi \cos \theta + \beta \eta \\ \tilde{\xi} \sin \tilde{\theta} &= \xi \sin \theta \end{aligned}$$

De cette relation, on obtient pour  $\xi = R'^*$ :

$$\cot g \tilde{\theta} = \cot g \theta \left[ 1 + \eta \frac{\beta}{\xi_0 \cos \theta} - \eta^2 \beta \frac{\xi'_1}{\xi_0'^2} \right]$$

## Annexe 4

### Fonctions dérivées :

$$\begin{aligned} & \xi p_{0\xi}, \xi \rho_{0\xi}, \xi u_{0\xi}, \xi s_{0\xi} \\ & \xi^2 p_{0\xi\xi}, \xi^2 \rho_{0\xi\xi}, \xi^2 u_{0\xi\xi} \end{aligned}$$

#### • Dérivées premières

$$\begin{aligned} \xi p_{0\xi} &= p_0 \left[ \frac{G_1}{z_0 G_2} + G_3 \right] \\ \xi p_{0\xi} &= \frac{2p_0}{f_2} \left[ 2\varepsilon \left\{ \gamma u_0 - \frac{2(\gamma+1)}{2+\alpha} \right\} - (\gamma-1)z_0 \right] + \frac{2p_0 u_0}{f_2} \left[ (2-\gamma)u_0 + \frac{(\gamma+1)(2\gamma-\alpha-2)}{2+\alpha} \right] \\ \xi \rho_{0\xi} &= \rho_0 G_3 \\ \xi u_{0\xi} &= \frac{1}{G_2} \\ \xi s_{0\xi} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{4(\gamma+1)}{2+\alpha} - 2u_0 \right] \end{aligned}$$

#### • Dérivées secondes

$$\begin{aligned} \xi^2 p_{0\xi\xi} &= p_0 \left[ G_3(G_3-1) + \xi G_{3\xi} \right] + \frac{p_0}{z_0 G_2} \left\{ G_1(2G_3-1) + \xi G_{1\xi} - \left( \frac{G_1}{G_2} \right) \xi G_{2\xi} \right\} \\ \xi^2 \rho_{0\xi\xi} &= \rho_0 \left[ G_3(G_3-1) + \xi G_{3\xi} \right] \\ \xi^2 u_{0\xi\xi} &= -\frac{1}{G_2} \left[ 1 + \frac{1}{G_2} (\xi G_{2\xi}) \right] \end{aligned}$$

avec

$$\xi G_{j\xi} = \frac{1}{G_2} \left[ \frac{\partial G_j}{\partial u_0} + G_1 \frac{\partial G_j}{\partial z_0} \right]_{j=1,2,3}$$

#### • Valeurs en $\xi = 1$ des fonctions $p_{0\xi}$ , $\rho_{0\xi}$ et $u_{0\xi}$

Pour le cas cylindrique ( $m = 1$ ):

$$\begin{aligned} p_{0\xi}(1) &= \frac{4[2\gamma - \alpha(2\gamma^2 - 1)]}{(2+\alpha)(\gamma^2 - 1)} \\ \rho_{0\xi}(1) &= \frac{4[2\gamma + 4 - \alpha(2\gamma + 1)]}{(2+\alpha)(\gamma^2 - 1)} \\ u_{0\xi}(1) &= \frac{2[2 - \alpha(3\gamma + 2)]}{(2+\alpha)(\gamma + 1)} \\ s_{0\xi}(1) &= \frac{4(\alpha - 2\gamma)}{(2+\alpha)(\gamma - 1)} \end{aligned}$$

Pour le cas général ( $m = 0, 1, 2$ ):

$$p_{0\xi}(1) = 2 \left[ \frac{m(3\gamma - 1) + \gamma + 1 - \alpha \{m\gamma(\gamma - 1) + (\gamma + 1)(3\gamma - 2)\}}{(2 + \alpha)(\gamma^2 - 1)} \right]$$

$$\rho_{0\xi}(1) = 2 \left[ \frac{m(\gamma + 5) + 3(\gamma + 1) - \alpha \{m(\gamma - 1) + 3(\gamma + 1)\}}{(2 + \alpha)(\gamma^2 - 1)} \right]$$

$$u_{0\xi}(1) = \frac{m(3 - \gamma) + \gamma + 1 - 2\alpha \{m\gamma + 2(\gamma + 1)\}}{(2 + \alpha)(\gamma + 1)}$$

La fonction  $\mathcal{H}_0(\xi)$  est définie par:

$$\mathcal{H}_0(\xi) = p_0 + \rho_0 u_0^2 \Rightarrow \mathcal{H}_{0\xi} = p_{0\xi} + u_0^2 \rho_{0\xi} + 2u_0 \rho_0 u_{0\xi}$$

d'où :

$$\mathcal{H}_{0\xi}(1) = \frac{8(3\gamma + 1) - 4\alpha(5\alpha^2 + \gamma - 2)}{(2 + \alpha)(\gamma^2 - 1)}$$

• **Valeurs en  $\xi = 1$  des fonctions  $p_{0\xi\xi}$ ,  $\rho_{0\xi\xi}$  et  $u_{0\xi\xi}$**

Les valeurs en  $\xi = 1$  sont obtenues en substituant  $\xi = 1$ ,  $u_0 = 1$  et  $z_0 = \gamma$  dans les expressions des dérivées secondes. En tenant compte des valeurs en  $\xi = 1$  des dérivées premières, on obtient après de longs calculs:

Pour le cas cylindrique ( $m = 1$ ):

$$p_{0\xi\xi}(1) = \frac{4(\pi_1 + \alpha\pi_2 + \alpha^2\pi_3 + \alpha^3\pi_4)}{(2 + \alpha)^2(\gamma^2 - 1)^2 [2 - \alpha(3\gamma - 2)]}$$

avec

$$\pi_1 = -8\gamma^3 + 80\gamma^2 + 40\gamma - 16$$

$$\pi_2 = 52\gamma^4 - 164\gamma^3 - 240\gamma^2 - 28\gamma + 44$$

$$\pi_3 = -60\gamma^5 + 38\gamma^4 + 198\gamma^3 + 132\gamma^2 - 18\gamma - 26$$

$$\pi_4 = 6\gamma^4 - 17\gamma^3 - 32\gamma^2 - 15\gamma - 2$$

$$\rho_{0\xi\xi}(1) = \frac{4\alpha^2\phi_1 + 8\alpha\phi_2 + 16\phi_3}{(2 + \alpha)^2(\gamma^2 - 1)^2}$$

avec

$$\phi_1 = -16\gamma^3 + 21\gamma^2 + 56\gamma + 23$$

$$\phi_2 = 9\gamma^3 - 19\gamma^2 - 81\gamma - 45$$

$$\phi_3 = -\gamma^3 + 2\gamma^2 + 25\gamma + 26$$

$$u_{0\xi\xi}(1) = \frac{-2(\alpha^2\mu_1 - \alpha\mu_2 + \mu_3)}{(2 + \alpha)^2(\gamma^2 - 1)(\gamma + 1)}$$

avec

$$\mu_1 = 9\gamma^3 + 14\gamma^2 - 5\gamma - 6$$

$$\mu_2 = 34\gamma^3 + 26\gamma^2 - 18\gamma - 26$$

$$\mu_3 = 12\gamma^2 - 16\gamma - 12$$

Pour le cas généralisé:

$$u_{0_{\xi\xi}}(1) = \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_2 - \alpha^2\sigma_3}{(2 + \alpha)^2(\gamma + 1)^2(\gamma - 1)}$$

$$\rho_{0_{\xi\xi}}(1) = \frac{2(\tau_1 - \alpha\tau_2 + \alpha^2\tau_3)}{(2 + \alpha)^2(\gamma^2 - 1)^2}$$

$$p_{0_{\xi\xi}}(1) = \frac{2(\pi_1 + \alpha\pi_2 + \alpha^2\pi_3 - \alpha^3\pi_4)}{(2 + \alpha)^2(\gamma^2 - 1)^2 [m(3 - \gamma) + (\gamma + 1) - 2\alpha \{ \gamma m + 2(\gamma + 1) \}]}$$

Les expressions des fonctions  $\sigma_i$ ,  $\tau_i$  et  $\pi_i$  sont données en Annexe 14.

## Annexe 5

### Valeurs en $\xi = 1$ des dérivées $p_{1\xi}, \rho_{1\xi}, u_{1\xi}, v_{1\xi}$

Le calcul des dérivées  $\rho_{1\xi}, u_{1\xi}, v_{1\xi}$  et  $p_{1\xi}$  peut se faire à partir de la formulation matricielle

$$\{X_1\}_\mu = \frac{1}{D}[P_1]\{X_1\}$$

Les valeurs en  $\xi = 1$  s'obtiennent en utilisant les conditions sur le choc à l'ordre 1 et en prenant  $\xi = 1, u_0 = 1$  et  $z_0 = \gamma$  dans cette équation. Les calculs donnent:

Pour le cas cylindrique ( $m = 1$ ),

$$x_1 = \rho_1 u_0 \longrightarrow \rho_{1\xi}(1) = x_{1\xi}(1) - x_1(1)u_{0\xi}(1)$$

$$x_{1\xi}(1) = \frac{-2\xi_1(\alpha^2 X_1 - \alpha X_2 + X_3)}{(\gamma - 1)^2(\gamma + 1)(2 + \alpha)^2} + \frac{48(1 - \beta)(2 - \alpha)}{(\gamma - 1)(2 + \alpha)^2}$$

$$X_1 = -8\gamma^2 + 54\gamma + 38$$

$$X_2 = 12\gamma^2 + 144\gamma + 116$$

$$X_3 = 40\gamma^2 + 40\gamma + 128$$

$$\rho_{1\xi}(1) = \frac{-2\xi_1(\alpha^2 \mathfrak{R}_1 + \alpha \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)}{(\gamma^2 - 1)^2(2 + \alpha)^2} + \frac{48(1 - \beta)(2 - \alpha)}{(\gamma - 1)(2 + \alpha)^2}$$

$$\mathfrak{R}_1 = -32\gamma^3 + 42\gamma^2 + 112\gamma + 46$$

$$\mathfrak{R}_2 = 12\gamma^3 - 100\gamma^2 - 300\gamma - 156$$

$$\mathfrak{R}_3 = 40\gamma^3 + 64\gamma^2 + 152\gamma + 160$$

$$y_1 = \rho_0 u_1 \longrightarrow u_{1\xi}(1) = y_{1\xi}(1) - y_1(1)\rho_{0\xi}(1)$$

$$y_{1\xi}(1) = \frac{-\xi_1(\alpha^2 Y_1 + \alpha Y_2 + Y_3)}{(\gamma^2 - 1)(2 + \alpha)^2} - \frac{2(1 - \beta)\{\alpha(\gamma + 9) + 2(\gamma - 15)\}}{(2 + \alpha)^2}$$

$$Y_1 = -25\gamma^2 + 32\gamma + 29$$

$$Y_2 = (52\gamma - 92)(\gamma + 1)$$

$$Y_3 = 44\gamma^2 - 48\gamma + 20$$

$$u_{1\xi}(1) = \frac{-\xi_1(\alpha^2 U_1 + \alpha U_2 + U_3)}{(\gamma + 1)^2(\gamma - 1)(2 + \alpha)^2} - \frac{2(1 - \beta)(\alpha U_4 + U_5)}{(\gamma + 1)(2 + \alpha)^2}$$

$$U_1 = -25\gamma^3 - 33\gamma^2 + 17\gamma + 17$$

$$U_2 = 52\gamma^3 + 36\gamma^2 - 20\gamma - 36$$

$$U_3 = 44\gamma^3 + 12\gamma^2 - 12\gamma - 12$$

$$U_4 = \gamma^2 + 2\gamma + 5$$

$$U_5 = 2\gamma^2 - 20\gamma - 14$$

$$z_1 = \rho_0 v_1 \longrightarrow v_{1\xi}(1) = z_{1\xi}(1) - z_1(1)\rho_{0\xi}(1)$$

$$z_{1\xi}(1) = \frac{2(1-\beta)(\alpha Z_1 + Z_2)}{(\gamma-1)(2+\alpha)^2} - \frac{\xi_1 \{\alpha(7\gamma-1) + 6\gamma - 26\}}{(\gamma-1)(2+\alpha)}$$

$$Z_1 = \gamma^2 + 10\gamma - 3$$

$$Z_2 = 2\gamma^2 - 4\gamma - 30$$

$$v_{1\xi}(1) = \frac{-\xi_1(\alpha \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)} + \frac{2(1-\beta)\mathcal{V}_3}{(\gamma-1)(2+\alpha)}$$

$$\mathcal{V}_1 = 7\gamma^2 - 2\gamma - 5$$

$$\mathcal{V}_2 = 6\gamma^2 - 12\gamma - 10$$

$$\mathcal{V}_3 = \gamma^2 + 2\gamma - 7$$

$$p_{1\xi}(1)$$

$$p_{1\xi}(1) = \frac{16(2\gamma+1)(1-\beta)}{(\gamma+1)(2+\alpha)} - \frac{\xi_1(\alpha^2 \mathcal{P}_1 + \alpha \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3)}{(\gamma^2-1)^2(2+\alpha)^2}$$

$$\mathcal{P}_1 = -18\gamma^4 - 8\gamma^3 + 56\gamma^2 + 24\gamma - 6$$

$$\mathcal{P}_2 = 72\gamma^4 - 104\gamma^3 - 184\gamma^2 - 24\gamma + 48$$

$$\mathcal{P}_3 = 56\gamma^4 - 16\gamma^3 + 80\gamma^2 + 80\gamma - 8$$

Pour le cas où  $m = 1$  ou  $2$ ,

$$p_{1\xi}(1) = \frac{2\xi_1(\alpha^2 a_1 - \alpha a_2 - a_3)}{(\gamma^2-1)^2(2+\alpha)^2} + \frac{12(m+3)(1-\beta)(m+1-\alpha)}{(\gamma-1)(2+\alpha)^2}$$

$$u_{1\xi}(1) = \frac{-\xi_1(-\alpha^2 a_4 + \alpha a_5 + a_6)}{(\gamma+1)^2(\gamma-1)(2+\alpha)^2} - \frac{(m+3)(1-\beta)(\alpha a_7 + 2a_8)}{2(\gamma+1)(2+\alpha)^2}$$

$$v_{1\xi}(1) = \frac{-\xi_1(\alpha a_9 + a_{10})}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)} + \frac{(m+3)(1-\beta)a_{11}}{2(\gamma-1)(2+\alpha)}$$

$$p_{1\xi}(1) = \frac{4(1-\beta)(m+3)(m\gamma+\gamma+1)}{(\gamma+1)(2+\alpha)} - \frac{2\xi_1(\alpha^2 a_{12} + \alpha a_{13} + a_{14})}{(\gamma^2-1)^2(2+\alpha)^2}$$

Les expressions des fonctions  $a_i$ ,  $i = 1$  à  $14$  sont données en Annexe 14.

## Vecteurs associés aux conditions sur le choc (en $\xi = 1$ )

### 1) Ordre 1:

$$\left\{ \overrightarrow{X_{11}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{4\alpha(2\gamma+1) - 4(2\gamma+4)}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)} \\ \frac{2(\gamma-1) + \alpha(5\gamma+3)}{(2+\alpha)(\gamma+1)} \\ 1 \\ \frac{4(\gamma^2-2\gamma-1) + 2\alpha(3\gamma^2-1)}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)} \end{array} \right\}$$



$$\left\{ \overrightarrow{X}_{12} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{2(\gamma-1)(1-\beta)}{2+\alpha} \\ -\frac{2(\gamma+1)(1-\beta)}{(2+\alpha)(\gamma+1)} \\ -\frac{8(1-\beta)^2}{2+\alpha} \end{array} \right\}$$

## 2) Ordre 2:

### 2.1) isotrope pression:

$$\left\{ \overrightarrow{X}_{221} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{4\alpha(2\gamma+1)-4(2\gamma+4)}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)} \\ \frac{4\gamma+2\alpha(2\gamma+1)}{(2+\alpha)(\gamma+1)} \\ \frac{8(\gamma^2-\gamma-1)+4\alpha\gamma^2}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \overrightarrow{X}_{222} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{32}{(2+\alpha)^2(\gamma-1)} \\ \frac{16}{(2+\alpha)^2} \\ \frac{8(\gamma-1)}{\gamma(2+\alpha)^2} \end{array} \right\}$$

### 2.2) isotrope vitesse:

$$\left\{ \overrightarrow{X}_{231} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{4\alpha(2\gamma+1)-4(2\gamma+4)}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)} \\ \frac{4\gamma+2\alpha(2\gamma+1)}{(2+\alpha)(\gamma+1)} \\ \frac{8(\gamma^2-\gamma-1)+4\alpha\gamma^2}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \overrightarrow{X}_{232} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}x_{1\xi}(1) \\ \frac{1}{2}y_{1\xi}(1) + \frac{(\gamma-3)(1-\beta)}{2+\alpha} - \frac{1}{2}y_1(1)\rho_{0\xi}(1) \\ \frac{1}{2}p_{1\xi}(1) - \frac{4(3\alpha+2)(1-\beta)}{(2+\alpha)^2} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \overrightarrow{X}_{233} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{4}\rho_{0\xi\xi}(1) + \frac{1}{2}\rho_{0\xi}(1)u_{0\xi}(1) \\ \frac{1}{4}u_{0\xi\xi}(1) + \frac{2}{2+\alpha} \\ \frac{1}{4}p_{0\xi\xi}(1) - \frac{\alpha^2-4\alpha-4}{(2+\alpha)^2} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \overrightarrow{X}_{234} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{8(1-\beta)^2}{(2+\alpha)^2} \end{array} \right\}$$

### 2.3) anisotrope vitesse:

$$\left\{ \overrightarrow{X}_{211} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{4\alpha(2\gamma+1)-4(2\gamma+4)}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)} \\ \frac{4\gamma+2\alpha(2\gamma+1)}{(2+\alpha)(\gamma+1)} \\ \frac{8(\gamma^2-\gamma-1)+4\alpha\gamma^2}{(2+\alpha)(\gamma^2-1)} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \overrightarrow{X}_{212} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}x_{1\xi}(1) \\ \frac{1}{2}y_{1\xi}(1) - \frac{(\gamma+1)(1-\beta)}{2+\alpha} - \frac{1}{2}y_1(1)\rho_{0\xi}(1) \\ \frac{1}{2}z_{1\xi}(1) - \frac{(\gamma-1)(1-\beta)}{2+\alpha} - \frac{1}{2}z_1(1)\rho_{0\xi}(1) \\ \frac{1}{2}p_{1\xi}(1) + \frac{4(2-\alpha)(1-\beta)}{(2+\alpha)^2} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \vec{X}_{213} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}\rho_{0_{\xi\xi}}(1) + \frac{1}{2}\rho_{0_{\xi}}(1)u_{0_{\xi}}(1) \\ \frac{1}{4}u_{0_{\xi\xi}}(1) - \frac{\alpha}{2+\alpha} \\ \frac{\alpha}{2+\alpha} \\ \frac{1}{4}p_{0_{\xi\xi}}(1) - \frac{2\alpha^2}{(2+\alpha)^2} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \vec{X}_{214} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{8(1-\beta)^2}{(2+\alpha)^2} \end{array} \right\}$$

## Annexe 6

### Comportement asymptotique des fonctions

$$p_0, \rho_0, u_0$$

à la frontière matérielle  $\Sigma'$

(pour  $\xi \rightarrow \xi'_0$ )

$$\begin{aligned} \xi'_0 &\leq \xi \leq 1 \\ z_0 &\in [\gamma, +\infty[ \\ u_0 &\in [1, \frac{\gamma+1}{2}[ \text{ si } \alpha \neq 0 \\ u_0 &\in [\frac{\gamma+1}{2\gamma}, 1] \text{ si } \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} u_{0\xi} &= u_{0\xi}(\xi'_0) = \frac{\gamma+1}{\xi'_0} \left[ \frac{2-\alpha}{\gamma(2+\alpha)} - 1 \right] \\ \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \xi \rho_{0\xi} &= \xi'_0 \rho_{0\xi}(\xi'_0) = -2p_0(\xi'_0), \forall \alpha \end{aligned}$$

On rappelle que  $\xi \rho_{0\xi} = \rho_0 G_3$  et que  $\rho_{0\xi}$  a la même dimension que  $(\frac{\gamma+1}{2} - u_0)^{\nu_0}$  où

$$\nu_0 = \frac{2(2-\alpha) - \gamma(2+\alpha)}{(\gamma+1)(2+\alpha) - 4}$$

Il vient:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \rho_{0\xi} &\rightarrow 0 \text{ si } \nu_0 > 0 \text{ c.à.d si } \alpha \in [0, \frac{4-2\gamma}{2+\gamma}[ \\ \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \rho_{0\xi} &\rightarrow \infty \text{ si } \nu_0 < 0 \text{ c.à.d si } \alpha \in ]\frac{4-2\gamma}{2+\gamma}, +\infty[ \\ \text{si } \alpha &= \frac{4-2\gamma}{2+\gamma}, \text{ on a: } \lim_{\xi \rightarrow \xi'_0} \rho_{0\xi} \rightarrow \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \left[ \xi_0'^{(4+\gamma)} p_0^2(\xi'_0) \right]^{\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

Pour

$$\gamma = 1.33 \text{ on a: } \alpha = 0.179$$

$$\gamma = 1.4 \text{ on a: } \alpha = 0.353$$

$$\gamma = 1.67 \text{ on a: } \alpha = 0.353$$

## Annexe 7

### Fonctions $G_j, j = 1, 2, 3, 4, 5$

Les fonctions  $G_1, G_2, G_3$  sont des fonctions dépendant de  $u_0$  et de  $z_0$  et sont définies à partir des fonctions élémentaires  $f_1, f_2, f_3, f_4$  telles que:

-Pour le cas cylindrique ( $m = 1$ )

$$\varepsilon = u_0 - \frac{1}{2}(\gamma + 1)$$

$$f_1 = (\gamma - 1)z_0 \left[ \frac{(\gamma + 1)(2 - \alpha)}{\gamma(2 + \alpha)} - 2\varepsilon \right] + 4\varepsilon^2 \left[ \gamma u_0 - \frac{2(\gamma + 1)}{2 + \alpha} \right]$$

$$-2(\gamma - 1)u_0\varepsilon \left[ u_0 - \frac{2(\gamma + 1)}{2 + \alpha} \right]$$

$$f_2 = (\gamma - 1)z_0 - 2\varepsilon^2$$

$$f_3 = 2u_0\varepsilon \left[ u_0 - \frac{\alpha(\gamma + 1)}{2 + \alpha} \right] - \frac{(\gamma^2 - 1)(2 - \alpha)}{\gamma(2 + \alpha)} z_0$$

$$f_4 = 2u_0\varepsilon \left[ u_0 - \frac{2(\gamma + 1)}{2 + \alpha} \right] + \frac{\gamma - 1}{\gamma} z_0 \left[ \frac{(\gamma + 1)(2 - \alpha)}{2 + \alpha} - 2\gamma u_0 \right]$$

-Pour le cas général ( $m = 0, 1, 2$ ), les expressions sont les suivantes:

$$f_1 = (\gamma - 1)z_0 \left[ \frac{\gamma + 1}{\gamma} \left( \gamma + \frac{m + 1 - \alpha}{2 + \alpha} \right) - 2u_0 \right] + \frac{(\gamma^2 - 1)(m + 3)}{2 + \alpha} u_0\varepsilon$$

$$-2(\gamma - 1)u_0^2\varepsilon - 2\varepsilon^2 \left[ \frac{(\gamma + 1)(m + 3)}{2 + \alpha} + u_0 \{ (m - 1) - \gamma(m + 1) \} \right]$$

$$f_2 = (\gamma - 1)z_0 - 2\varepsilon^2$$

$$f_3 = 2\varepsilon u_0 \left[ m u_0 - \frac{(\gamma + 1) \{ m - 1 + \alpha(m + 1) \}}{2(2 + \alpha)} \right] - \frac{(\gamma^2 - 1)(m + 1 - \alpha)z_0}{\gamma(2 + \alpha)}$$

$$f_4 = 2u_0\varepsilon \left[ u_0 - \frac{(\gamma + 1)(m + 3)}{2(2 + \alpha)} \right] + \frac{(\gamma^2 - 1)(m + 1 - \alpha)}{\gamma(2 + \alpha)} z_0 \\ + (\gamma - 1)(m + 1)z_0 u_0$$

Ainsi, les fonctions  $G_1, G_2, G_3$  s'écrivent :

$$G_1 = \frac{z_0 f_1}{\varepsilon f_4} \quad G_2 = \frac{f_2}{f_4} \quad G_3 = \frac{f_3}{\varepsilon f_2}$$

Les fonctions  $G_4, G_5$  sont des fonctions de  $u_0$  et de  $\xi$  et sont définies à partir des

fonctions élémentaires suivantes:

$$f_5 = \gamma K_0 - 2\xi^{2\gamma} \left( \frac{\gamma+1}{2} - u_0 \right)^{\gamma+1}$$

$$f_6 = 2u_0 \xi^{2\gamma} \left[ \gamma \left( \frac{\gamma+1}{2} - u_0 \right) \right] \left( \frac{\gamma+1}{2} - u_0 \right)^\gamma + K_0 (\gamma^2 - 1 - 2\gamma u_0)$$

$$f_7 = -2\gamma K_0 + 4\gamma \left( \frac{\gamma+1}{2} - u_0 \right)^{\gamma+1} \xi^{2\gamma} + 2u_0 \left( \frac{\gamma+1}{2} - u_0 \right)^{\gamma-1} \left[ \frac{(\gamma+1)(\gamma^2-2)}{2} - (2-\gamma)u_0 \right]$$

avec  $K_0 = 2 \left( \frac{\gamma-1}{2} \right)^\gamma$  D'où :

$$G_4 = \frac{f_5}{f_6} \quad G_5 = \frac{f_7}{f_5}$$

## Annexe 8

### Rappel de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour un système différentiel

Considérons le système différentiel défini par :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \{ \vec{Y}(x) \} &= \{ \vec{F}(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \} \\ \{ \vec{Y}(x_1) \} &= \{ \vec{Y}_1 \}\end{aligned}$$

dans lequel

$$\begin{aligned}\{ \vec{Y}(x) \} \text{ est le vecteur inconnu de composantes } &\left\{ \begin{array}{c} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{array} \right\} \\ \{ \vec{F}(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \} &= \left\{ \begin{array}{c} f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \end{array} \right\}\end{aligned}$$

Notons par :

$m$  le nombre de points

$h = x_{i+1} - x_i$  le pas

$x_i = x_1 + (i - 1)h$  les points nodaux où  $i = 1, \dots, m$

$y_{j,i}$  avec  $j = 1, \dots, n$  la valeur itérée de chaque composante au point  $x_i$

Connaissant  $y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}$  correspondant à  $x_i$ , on calcule  $y_{1,i+1}, y_{2,i+1}, \dots, y_{n,i+1}$  correspondant à  $x_{i+1}$  par les formules de Runge-Kutta d'ordre 4 suivantes:

$$y_{j,i+1} = y_{j,i} + \frac{1}{6} \{ T_{1,j} + 2T_{2,j} + 2T_{3,j} + T_{4,j} \}_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, m}$$

avec

$$T_{k,j} = hf_j(x_i + \alpha h; y_{1,i} + \alpha T_{k-1,1}; \dots; y_{j,i} + \alpha T_{k-1,j}; \dots; y_{n,i} + \alpha T_{k-1,n})$$

et

$$\alpha = 0 \text{ si } k = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ si } k = 2 \text{ et } k = 3$$

$$\alpha = 1 \text{ si } k = 4$$

$$T_{0,j} \equiv 0$$

Pour une équation différentielle ordinaire de type Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

la formule d'ordre 4 de Runge-Kutta s'écrit:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4)_{j=0,n-1}$$

$$T_1 = hf(x_j, y_j)$$

$$T_2 = hf(x_j + 0.5h, y_j + 0.5T_1)$$

$$T_3 = hf(x_j + 0.5h, y_j + 0.5T_2)$$

$$T_4 = hf(x_j + h, y_j + T_3)$$

## Annexe 9

### Rappel de la méthode explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 4 appliquée à un système différentiel avec second membre

Considérons le système différentiel défini par:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \{ \vec{Y}(x) \} &= [P(x)] \{ \vec{Y}(x) \} + \{ \vec{S}(x) \} \equiv \{ \vec{F}(x) \} \\ \{ \vec{Y}(x_1) \} &= \{ \vec{Y}_1 \}\end{aligned}$$

dans lequel :

$\{ \vec{Y}(x) \}$  désigne le vecteur inconnu

$[P(x)]$  est une matrice carrée d'ordre fini quelconque et dont les coefficients dépendent de  $x$

$\{ \vec{S}(x) \}$  est le vecteur second membre

Notons par:

$n$  le nombre de points

$h = x_{j+1} - x_j$  le pas

$x_j = x_1 + (j-1)h$  les points nodaux où  $j = 1, \dots, n$

$\{ \vec{F}_j \} = \{ \vec{F}(x_j) \}$  la valeur au point  $x_j$  du second membre de l'équation

$\{ \vec{Y}_j \} = \{ \vec{Y}(x_j) \}$  la valeur itérée du vecteur inconnu

Connaissant  $\{ \vec{Y}_j \}$ , on détermine  $\{ \vec{Y}_{j+1} \}$  par la formule explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 4 suivante:

$$\{ \vec{Y}_{j+1} \} = \{ \vec{Y}_j \} + \frac{h}{24} \left[ 55 \{ \vec{F}_j \} - 59 \{ \vec{F}_{j-1} \} + 37 \{ \vec{F}_{j-2} \} - 9 \{ \vec{F}_{j-3} \} \right]_{j=4, \dots, n-1}$$

Les 3 premières valeurs ( $j = 1, 2, 3$ ) seront déterminées par une méthode de Runge-Kutta de même ordre (ordre 4).



# Annexe 10

## Fonctions de répartition pour l'explosion

- Fonctions de répartition simples

- ordre 0

$$\begin{aligned}\rho_0^*(\lambda_s) &= \rho_0(\lambda_s) \\ p_0^*(\lambda_s) &= \lambda_s^2 p_0(\lambda_s) \\ u_0^*(\lambda_s) &= \lambda_s u_0(\lambda_s)\end{aligned}$$

Les valeurs en  $\xi = \lambda_s = 1$ :

$$\begin{aligned}\rho_0^*(1) &= 1 \\ p_0^*(1) &= 1 \\ u_0^*(1) &= 1\end{aligned}$$

- ordre 1

$$\begin{aligned}\rho_1^*(\lambda_s) &= \rho_1(\lambda_s) + \Delta_1 \rho_{0\xi}(\lambda_s) \\ p_1^*(\lambda_s) &= \lambda_s^2 p_1(\lambda_s) + \lambda_s \Delta_1 [\lambda_s p_{0\xi}(\lambda_s) + 2p_0(\lambda_s)] \\ u_1^*(\lambda_s) &= \lambda_s u_1(\lambda_s) + \Delta_1 [\lambda_s u_{0\xi}(\lambda_s) + u_0(\lambda_s)] \\ v_1^*(\lambda_s) &= \lambda_s v_1(\lambda_s)\end{aligned}$$

Les valeurs en  $\xi = \lambda_s = 1$ :

$$\begin{aligned}\rho_1^*(1) &= 0 \\ p_1^*(1) &= \frac{8}{2 + \alpha} [\xi_1 - (1 - \beta)] \\ u_1^*(1) &= \frac{2}{2 + \alpha} [2\xi_1 + (\gamma - 1)(1 - \beta)] \\ v_1^*(1) &= \xi_1 - \frac{2(\gamma + 1)(1 - \beta)}{2 + \alpha}\end{aligned}$$

- ordre 2

**\* isotrope pression**

$$\begin{aligned}\rho_{22}^*(\lambda_s) &= \rho_{22}(\lambda_s) + \Delta_{22}\rho_{0\xi}(\lambda_s) \\ p_{22}^*(\lambda_s) &= \lambda_s^2 p_{22}(\lambda_s) + \lambda_s \Delta_{22} \left[ \lambda_s p_{0\xi}(\lambda_s) + 2p_0(\lambda_s) \right] \\ u_{22}^*(\lambda_s) &= \lambda_s u_{22}(\lambda_s) + \Delta_{22} \left[ \lambda_s u_{0\xi}(\lambda_s) + u_0(\lambda_s) \right]\end{aligned}$$

Les valeurs en  $\xi = \lambda_s = 1$ :

$$\begin{aligned}\rho_{22}^*(1) &= \frac{-32}{(\gamma - 1)(2 + \alpha)} \\ p_{22}^*(1) &= \frac{2(6 - \alpha)}{2 + \alpha} \xi_{22} - \frac{8(\gamma - 1)}{\gamma(2 + \alpha)^2} \\ u_{22}^*(1) &= \frac{6 - \alpha}{2 + \alpha} \xi_{22} - \frac{16}{(2 + \alpha)^2}\end{aligned}$$

**\* isotrope vitesse**

$$\begin{aligned}\rho_{23}^*(\lambda_s) &= \rho_{23}(\lambda_s) + \Delta_{23}\rho_{0\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{4}\Delta_1^2\rho_{0\xi\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{2}\Delta_1\rho_{1\xi}(\lambda_s) \\ p_{23}^*(\lambda_s) &= \lambda_s^2 \left[ p_{23}(\lambda_s) + \Delta_{23}p_{0\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{4}\Delta_1^2p_{0\xi\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{2}\Delta_1p_{1\xi}(\lambda_s) \right] \\ &\quad + \lambda_s \Delta_1 \left[ p_1(\lambda_s) + \Delta_1 p_{0\xi}(\lambda_s) \right] + p_0(\lambda_s) \left[ 2\lambda_s \Delta_{23} + \frac{1}{2}\Delta_1^2 \right] \\ u_{23}^*(\lambda_s) &= \lambda_s \left[ u_{23}(\lambda_s) + \Delta_{23}u_{0\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{4}\Delta_1^2u_{0\xi\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{2}\Delta_1u_{1\xi}(\lambda_s) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta_1 \left[ u_1(\lambda_s) + \Delta_1 u_{0\xi}(\lambda_s) \right] + \Delta_{23}u_0(\lambda_s)\end{aligned}$$

Les valeurs en  $\xi = \lambda_s = 1$ :

$$\begin{aligned}\rho_{23}^*(1) &= 0 \\ p_{23}^*(1) &= \left[ \frac{2(6 - \alpha)}{2 + \alpha} \right] \xi_{23} + \left[ \frac{(6 + \alpha)(2 - \alpha)}{2(2 + \alpha)^2} \right] \xi_1^2 + \frac{4(1 - \beta)}{(2 + \alpha)^2} [2(1 - \beta) - (2 - \alpha)\xi_1] \\ u_{23}^*(1) &= \left( \frac{6 - \alpha}{2 + \alpha} \right) \xi_{23} - \frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{2(1 - \beta)}{2 + \alpha} \xi_1\end{aligned}$$

**\* anisotrope vitesse**

$$\begin{aligned}\rho_{21}^*(\lambda_s) &= \rho_{21}(\lambda_s) + \Delta_{21}\rho_{0\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{4}\Delta_1^2\rho_{0\xi\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{2}\Delta_1\rho_{1\xi}(\lambda_s) \\ p_{21}^*(\lambda_s) &= \lambda_s^2 \left[ p_{21}(\lambda_s) + \Delta_{21}p_{0\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{4}\Delta_1^2p_{0\xi\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{2}\Delta_1p_{1\xi}(\lambda_s) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda_s\Delta_1 [p_1(\lambda_s) + \Delta_1 p_{0\xi}(\lambda_s)] + p_0(\lambda_s) \left[ 2\lambda_s\Delta_{21} + \frac{1}{2}\Delta_1^2 \right] \\
u_{21}^*(\lambda_s) &= \lambda_s \left[ u_{21}(\lambda_s) + \Delta_{21}u_{0\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{4}\Delta_1^2 u_{0\xi\xi}(\lambda_s) + \frac{1}{2}\Delta_1 u_{1\xi}(\lambda_s) \right] \\
& + \frac{1}{2}\Delta_1 [u_1(\lambda_s) + \Delta_1 u_{0\xi}(\lambda_s)] + \Delta_{21}u_0(\lambda_s) \\
v_2^*(\lambda_s) &= \lambda_s v_2(\lambda_s) + \frac{1}{2}\Delta_1 [\lambda_s v_{1\xi}(\lambda_s) + v_1(\lambda_s)]
\end{aligned}$$

Les valeurs en  $\xi = \lambda_s = 1$ :

$$\begin{aligned}
\rho_{21}^*(1) &= 0 \\
p_{21}^*(1) &= \left[ \frac{2(6-\alpha)}{2+\alpha} \right] \xi_{21} + \left[ \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 20}{2(2+\alpha)^2} \right] \xi_1^2 + \frac{4(1-\beta)}{(2+\alpha)^2} [2(1-\beta) - (6+\alpha)\xi_1] \\
u_{21}^*(1) &= \left( \frac{6-\alpha}{2+\alpha} \right) \xi_{21} + \frac{1}{2}\xi_1^2 - \frac{2(1-\beta)}{2+\alpha}\xi_1 \\
v_2^*(1) &= 2\xi_{21} + \left[ \frac{2-\alpha}{2(2+\alpha)} \right] \xi_1^2 - \frac{2(1-\beta)}{2+\alpha}\xi_1
\end{aligned}$$

## • Fonctions de repartition normées

– ordre 0

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_0(\lambda_s) &= \rho_0^*(\lambda_s) \\
\tilde{p}_0(\lambda_s) &= p_0^*(\lambda_s) \\
\tilde{u}_0(\lambda_s) &= u_0^*(\lambda_s) \\
\tilde{v}_0(\lambda_s) &= \frac{v_1^*(\lambda_s)}{v_1^*(1)}
\end{aligned}$$

– ordre 1

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_1(\lambda_s) &= \rho_1^*(\lambda_s) \\
\tilde{p}_1(\lambda_s) &= p_1^*(\lambda_s) - p_1^*(1)p_0^*(\lambda_s) \\
\tilde{u}_1(\lambda_s) &= u_1^*(\lambda_s) - u_1^*(1)u_0^*(\lambda_s) \\
\tilde{v}_1(\lambda_s) &= \frac{2}{v_1^*(1)} [v_2^*(\lambda_s) - \kappa v_1^*(\lambda_s)]
\end{aligned}$$

avec

$$\kappa = \frac{v_2^*(1)}{v_1^*(1)}$$

– ordre 2

\* isotrope pression

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{22}(\lambda_s) &= \rho_{22}^*(\lambda_s) - \rho_{22}^*(1)\rho_0^*(\lambda_s) \\ \tilde{p}_{22}(\lambda_s) &= p_{22}^*(\lambda_s) - p_{22}^*(1)p_0^*(\lambda_s) \\ \tilde{u}_{22}(\lambda_s) &= u_{22}^*(\lambda_s) - u_{22}^*(1)u_0^*(\lambda_s) \\ \tilde{v}_{22}(\lambda_s) &= -\kappa\tilde{v}_1(\lambda_s)\end{aligned}$$

\* isotrope vitesse

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{23}(\lambda_s) &= \rho_{23}^*(\lambda_s) \\ \tilde{p}_{23}(\lambda_s) &= p_{23}^*(\lambda_s) - \frac{1}{2}p_1^*(1)p_1^*(\lambda_s) + p_0^*(\lambda_s) \left[ \frac{1}{2}p_1^{*2}(1) - p_{23}^*(1) \right] \\ \tilde{u}_{23}(\lambda_s) &= u_{23}^*(\lambda_s) - \frac{1}{2}u_1^*(1)u_1^*(\lambda_s) + u_0^*(\lambda_s) \left[ \frac{1}{2}u_1^{*2}(1) - u_{23}^*(1) \right] \\ \tilde{v}_{23}(\lambda_s) &= -\kappa\tilde{v}_1(\lambda_s)\end{aligned}$$

\* anisotrope vitesse

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{21}(\lambda_s) &= \rho_{21}^*(\lambda_s) \\ \tilde{p}_{21}(\lambda_s) &= p_{21}^*(\lambda_s) - \frac{1}{2}p_1^*(1)p_1^*(\lambda_s) + p_0^*(\lambda_s) \left[ \frac{1}{2}p_1^{*2}(1) - p_{21}^*(1) \right] \\ \tilde{u}_{21}(\lambda_s) &= u_{21}^*(\lambda_s) - \frac{1}{2}u_1^*(1)u_1^*(\lambda_s) + u_0^*(\lambda_s) \left[ \frac{1}{2}u_1^{*2}(1) - u_{21}^*(1) \right] \\ \tilde{v}_{21}(\lambda_s) &= -\kappa \left[ \frac{v_2^*(\lambda_s) - v_1^*(\lambda_s)v_2^*(1)}{v_1^*(1)} \right]\end{aligned}$$

## Fonctions de répartition pour l'hypersonique

• ordre 0

$$\begin{aligned}\rho_0^*(\lambda_s) &= \rho_0(\lambda_s) \\ p_0^*(\lambda_s) &= \lambda_s^2 p_0(\lambda_s) \\ u_0^*(\lambda_s) &= \lambda_s u_0(\lambda_s)\end{aligned}$$

• ordre 1 en  $\tilde{\eta}$

$$\hat{\rho}_1^*(\lambda_s) = \hat{\rho}_1(\lambda_s) + \Delta \rho_{0\xi}(\lambda_s)$$

$$\hat{p}_1^*(\lambda_s) = \lambda_s^2 \hat{p}_1(\lambda_s) + \lambda_s \Delta \left[ \lambda_s p_{0\xi}(\lambda_s) + 2p_0(\lambda_s) \right]$$

$$\hat{u}_1^*(\lambda_s) = \lambda_s \hat{u}_1(\lambda_s) + \Delta \left[ \lambda_s u_{0\xi}(\lambda_s) + u_0(\lambda_s) \right]$$

$$\hat{v}_1^*(\lambda_s) = \lambda_s \hat{v}_1(\lambda_s)$$

• ordre 1 en  $\zeta$

$$\rho_2^*(\lambda_s) = \rho_2(\lambda_s) + \Delta \rho_{0\xi}(\lambda_s)$$

$$p_2^*(\lambda_s) = \lambda_s^2 p_2(\lambda_s) + \lambda_s \Delta \left[ \lambda_s p_{0\xi}(\lambda_s) + 2p_0(\lambda_s) \right]$$

$$u_2^*(\lambda_s) = \lambda_s u_2(\lambda_s) + \Delta \left[ \lambda_s u_{0\xi}(\lambda_s) + u_0(\lambda_s) \right]$$

avec

$$\Delta = \frac{\lambda_s - \xi'_0}{1 - \xi'_0}$$

# Annexe 11

## Matrices et coefficients

### 1) Matrices intervenant pour l'ordre 1:

#### Matrice $[M_4]$

$$[M_4] = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{u_0} & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & (\varepsilon + u_0) & 0 & \frac{\gamma-1}{2} \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ \frac{\varepsilon}{u_0}(s_0 - \gamma) & s_0 & 0 & \frac{\varepsilon\gamma}{z_0} \end{bmatrix}$$

On note par  $D$  le déterminant de la matrice  $[M_4]$  tel que:

$$D = \det[M_4] = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\gamma\varepsilon^2 f_2}{z_0 u_0} \right]$$

On note par  $[M_4]^{-1}$  la matrice inverse de  $[M_4]$

$$[M_4]^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \varepsilon m_{11} & \frac{-\gamma\varepsilon^2}{z_0} & 0 & \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\varepsilon \\ \varepsilon^2 m_{21} & \frac{\gamma\varepsilon^3}{z_0 u_0} & 0 & -\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\frac{\varepsilon^2}{u_0} \\ 0 & 0 & \frac{D}{\varepsilon} & 0 \\ \varepsilon^2 m_{41} & \frac{-\gamma\varepsilon^2}{u_0} & 0 & \frac{\varepsilon^3}{u_0} \end{bmatrix}$$

avec

$$m_{11} = (\varepsilon + u_0) \frac{\gamma\varepsilon}{z_0} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) s_0$$

$$m_{21} = \frac{(\gamma-1)(s_0 - \gamma)}{2u_0} - \frac{\gamma\varepsilon}{z_0}$$

$$m_{41} = \gamma - \frac{\varepsilon}{u_0}(s_0 - \gamma)$$

#### Matrice $[F_1]$

$$[F_1] = \begin{bmatrix} -e_{11} & -2 & -1 & 0 \\ -e_{21} & -e_{22} & -u_0 & (1 - \gamma) \\ 0 & 0 & -e_{33} & \frac{\gamma-1}{2} \\ -e_{11}(s_0 - \gamma) & -2\left(\frac{A}{\varepsilon} + s_0\right) & -s_0 & -e_{44} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
e_{11} &= 2 - \frac{(\gamma + 1)(3\alpha + 2)}{2(2 + \alpha)u_0} - \left(\frac{\gamma + 1}{2u_0^2}\right) \varepsilon G_3 \\
e_{21} &= \varepsilon(1 - G_3) \\
e_{22} &= 2u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} - 2\varepsilon G_3 \\
e_{33} &= 2u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} - \varepsilon G_3 \\
e_{44} &= \frac{\gamma}{z_0} \left[ A - \left(\frac{f_1 + f_3}{f_2}\right) \right]
\end{aligned}$$

**Matrice**  $[P_1] = [M_4]^{-1}[F_1]$  avec

$$[P_1] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $k_{ij}$ , fonctions de  $u_0$  et de  $z_0$ , sont donnés par leurs expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{\gamma \varepsilon^2}{z_0} \left( \varepsilon - \frac{f_3}{f_2} \right) \\
&\quad - \frac{\gamma \varepsilon}{z_0} \left( \varepsilon u_0 - \frac{1}{2} f_2 \right) \left[ 2 - \frac{(\gamma + 1)(3\alpha + 2)}{2(2 + \alpha)u_0} - \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) \frac{f_3}{f_2 u_0^2} \right] \\
k_{21} &= \frac{\gamma \varepsilon^3}{z_0} \left[ 1 - \frac{\alpha(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)u_0} + \frac{\varepsilon^2 G_3}{u_0^2} \right] \\
k_{41} &= -\gamma \varepsilon^2 \left[ 1 - \frac{\alpha(\gamma + 1)}{(2 + \alpha)u_0} + \frac{\varepsilon^2 G_3}{u_0^2} \right] \\
k_{12} &= \frac{-\gamma \varepsilon^2}{z_0} \left( 2u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} + 2\varepsilon G_3 \right) - (\gamma - 1)A \\
k_{22} &= \frac{\gamma \varepsilon^3}{z_0 u_0} \left( 2\varepsilon G_3 + \frac{\gamma + 1}{2} \right) + \varepsilon(\gamma \varepsilon + A) \left( \frac{\gamma - 1}{u_0} \right) \\
k_{42} &= \frac{-\gamma \varepsilon^2}{u_0} \left( 2u_0 - \frac{\gamma + 1}{2} + 2\varepsilon G_3 + \frac{2A}{\gamma} \right) \\
k_{13} &= \frac{-\gamma \varepsilon^3}{z_0} \\
k_{23} &= \frac{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon^2}{2u_0} \\
k_{33} &= -\frac{De_{33}}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{43} &= \frac{-\gamma\varepsilon^3}{u_0} \\
k_{14} &= \frac{\gamma(\gamma-1)\varepsilon}{2z_0} \left[ 2u_0 - \frac{(\gamma+1)(\alpha+6)}{2(2+\alpha)} + \left( \frac{f_1+f_3}{f_2} \right) \right] \\
k_{24} &= \frac{-\gamma(\gamma-1)\varepsilon^2}{2z_0u_0} \left[ 2u_0 - \frac{(\gamma+1)(\alpha+6)}{2(2+\alpha)} + \left( \frac{f_1+f_3}{f_2} \right) \right] \\
k_{34} &= \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) \frac{D}{\varepsilon} \\
k_{44} &= \frac{\gamma\varepsilon^2}{z_0u_0} \left[ (\gamma-1)z_0 - \varepsilon \left\{ A - \left( \frac{f_1+f_3}{f_2} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

## 2) Matrices intervenant pour l'ordre 2:

### 2.1) isotropes pression et vitesse:

#### Matrice $[M_3]$

$$[M_3] = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{u_0} & 1 & 0 \\ \varepsilon & (\varepsilon + u_0) & \frac{\gamma-1}{2} \\ \frac{\varepsilon}{u_0}(s_0 - \gamma) & s_0 & \frac{\varepsilon\gamma}{z_0} \end{bmatrix}$$

On note par  $D'$  le déterminant de la matrice  $[M_3]$  tel que:

$$D' = \det[M_3] = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\gamma\varepsilon f_2}{z_0u_0} \right]$$

On note par  $[M_3]^{-1}$  la matrice inverse de  $[M_3]$

$$[M_3]^{-1} = \frac{1}{D'} \begin{bmatrix} m_{11} & \frac{-\gamma\varepsilon}{z_0} & -\left( \frac{\gamma-1}{2} \right) \\ \varepsilon m_{21} & \frac{\gamma\varepsilon^2}{z_0u_0} & \frac{\varepsilon}{u_0} \\ \varepsilon m_{41} & \frac{-\gamma\varepsilon}{u_0} & \frac{\varepsilon^2}{u_0} \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $m_{11}, m_{21}, m_{41}$  sont identiques à ceux de  $[M_4]^{-1}$

#### Matrice $[F_{20}]$

$$[F_{20}] = \begin{bmatrix} -e'_{11} & -2 & 0 \\ -e'_{21} & -e'_{22} & (1-\gamma) \\ -e'_{11}(s_0 - \gamma) & -2\left(\frac{A}{\varepsilon} + s_0\right) & -e'_{33} \end{bmatrix}$$

avec



$$\begin{aligned}
e'_{11} &= 2 - \frac{2\alpha(\gamma+1)}{(2+\alpha)u_0} - \left(\frac{\gamma+1}{2u_0^2}\right)\varepsilon G_3 \\
e'_{21} &= u_0 - \frac{\alpha(\gamma+1)}{(2+\alpha)} - \varepsilon G_3 \\
e'_{22} &= 2u_0 - \frac{\alpha(\gamma+1)}{(2+\alpha)} - 2\varepsilon G_3 \\
e'_{33} &= \frac{\gamma}{z_0} \left[ 2A - \left(\frac{f_1+f_3}{f_2}\right) \right]
\end{aligned}$$

Matrice  $[P_{20}] = [M_3]^{-1}[F_{20}]$  avec

$$[P_{20}] = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} \\ k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} \\ k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $k'_{ij}$ , fonctions de  $u_0$  et de  $z_0$ , sont donnés par leurs expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
k'_{11} &= \frac{\gamma\varepsilon}{z_0} \left[ u_0 - \frac{\alpha(\gamma+1)}{2+\alpha} - \frac{f_3}{f_2} \right] \\
&\quad - \frac{\gamma}{z_0} \left( \varepsilon u_0 - \frac{1}{2}f_2 \right) \left[ 2 - \frac{2\alpha(\gamma+1)}{(2+\alpha)u_0} - \left(\frac{\gamma+1}{2u_0^2}\right) \frac{f_3}{f_2} \right] \\
k'_{21} &= \frac{\gamma\varepsilon^2}{z_0} \left[ 1 - \frac{\alpha(\gamma+1)}{(2+\alpha)u_0} + \frac{\varepsilon^2 G_3}{u_0^2} \right] \\
k'_{31} &= -\gamma\varepsilon \left[ 1 - \frac{\alpha(\gamma+1)}{(2+\alpha)u_0} + \frac{\varepsilon^2 G_3}{u_0^2} \right] \\
k'_{12} &= -\frac{2\gamma\varepsilon}{z_0} \left( u_0 - \frac{\gamma+1}{2+\alpha} + \varepsilon G_3 \right) - (\gamma-1) \frac{A}{\varepsilon} \\
k'_{22} &= \frac{\gamma\varepsilon^2}{z_0 u_0} \left( 2\varepsilon G_3 + \frac{\alpha(\gamma+1)}{(2+\alpha)} \right) + \frac{\gamma-1}{u_0} \left( A + \gamma\varepsilon \right) \\
k'_{32} &= \frac{-2\gamma\varepsilon}{u_0} \left( u_0 - \frac{\gamma+1}{2+\alpha} + \varepsilon G_3 + \frac{A}{\gamma} \right) \\
k'_{13} &= \frac{\gamma(\gamma-1)}{z_0} \left[ u_0 - \frac{2(\gamma+1)}{2+\alpha} + \left(\frac{f_1+f_3}{2f_2}\right) \right] \\
k'_{23} &= \frac{-\gamma(\gamma-1)\varepsilon}{z_0 u_0} \left[ u_0 - \frac{2(\gamma+1)}{2+\alpha} + \left(\frac{f_1+f_3}{2f_2}\right) \right] \\
k'_{33} &= \frac{\gamma\varepsilon}{z_0 u_0} \left[ (\gamma-1)z_0 - \varepsilon \left\{ 2A - \left(\frac{f_1+f_3}{f_2}\right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

## 2.2) anisotrope d'ordre 2:

Matrice  $[F_{21}]$

$$[F_{21}] = \begin{bmatrix} -e'_{11} & -2 & -2 & 0 \\ -e'_{21} & -e'_{22} & -2u_0 & (1-\gamma) \\ 0 & 0 & -e'_{44} & (\gamma-1) \\ -e'_{11}(s_0-\gamma) & -2\left(\frac{A}{\varepsilon} + s_0\right) & -2s_0 & -e'_{33} \end{bmatrix}$$

avec

$$e'_{44} = 2u_0 - \frac{\alpha(\gamma+1)}{2+\alpha} - \varepsilon G_3$$

Matrice  $[P_{21}] = [M_4]^{-1}[F_{21}]$

avec

$$[P_{21}] = \begin{bmatrix} \varepsilon k'_{11} & \varepsilon k'_{12} & k''_{13} & k''_{14} \\ \varepsilon k'_{21} & \varepsilon k'_{22} & k''_{23} & k''_{24} \\ 0 & 0 & k''_{33} & k''_{34} \\ \varepsilon k'_{31} & \varepsilon k'_{32} & k''_{43} & \varepsilon k'_{33} \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $k''_{ij}$ , fonctions de  $u_0$  et de  $z_0$ , sont donnés par leurs expressions suivantes :

$$k''_{13} = \frac{-2\gamma\varepsilon^3}{z_0} = 2k_{13}$$

$$k''_{23} = \frac{\gamma(\gamma-1)\varepsilon^2}{u_0} = 2k_{23}$$

$$k''_{33} = \frac{\gamma\varepsilon f_2}{2z_0 u_0} \left[ 2u_0 - \frac{\alpha(\gamma+1)}{2+\alpha} - \varepsilon G_3 \right]$$

$$k''_{43} = \frac{-2\gamma\varepsilon^3}{u_0} = 2k_{43}$$

$$k''_{14} = \frac{\gamma(\gamma-1)\varepsilon}{z_0} \left[ u_0 - \frac{2(\gamma+1)}{2+\alpha} + \frac{1}{2} \left( \frac{f_1 + f_3}{f_2} \right) \right]$$

$$k''_{24} = \frac{-\gamma(\gamma-1)\varepsilon^2}{z_0 u_0} \left[ u_0 - \frac{2(\gamma+1)}{2+\alpha} + \frac{1}{2} \left( \frac{f_1 + f_3}{f_2} \right) \right]$$

$$k''_{34} = \frac{-\gamma(\gamma-1)\varepsilon f_2}{2z_0 u_0} = 2k_{34}$$

Les autres coefficients  $k'_{ij}$  sont les mêmes que pour la matrice  $[P_{20}]$ .

## Annexe 12

### Composantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du vecteur $\left\{ \overrightarrow{\Lambda}_1 \right\}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{x_1 y_1}{\rho_0 u_0} \left( 2 - \frac{\gamma + 1}{4u_0} G_3 \right) + \frac{1}{2\rho_0 u_0} (y_1 x_{1\mu} + x_1 y_{1\mu}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\rho_0} \left[ y_{1\mu} \left\{ y_1 + x_1 \left( 1 - \frac{\gamma + 1}{4u_0} \right) \right\} + y_1 \left( 1 - \frac{\gamma + 1}{4u_0} \right) x_{1\mu} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{1}{2} y_1^2 (3 - G_3) - \frac{1}{2} z_1^2 \right] \\ &\quad + \frac{x_1 y_1}{\rho_0} \left[ 3 - \frac{(\gamma + 1)(\alpha + 1)}{(2 + \alpha)u_0} - G_3 \left\{ 1 - \frac{(\gamma + 1)^2}{8u_0^2} \right\} \right] \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} x_{1\mu} \left[ \frac{(s_0 - \gamma)y_1}{\rho_0 u_0} - \frac{\gamma \varepsilon x_1}{\rho_0 u_0^2} + \frac{\varepsilon p_1}{\rho_0 u_0} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} y_{1\mu} \left[ \frac{p_1}{p_0} + \frac{(s_0 - \gamma)x_1}{\rho_0 u_0} \right] + \frac{1}{2} p_{1\mu} \left[ \frac{\varepsilon x_1}{\rho_0 u_0} + \frac{y_1}{p_0} - \frac{\varepsilon p_1 \rho_0}{p_0^2} \right] \\ &\quad + \frac{y_1 p_1}{p_0} \left[ 1 - \left( \frac{f_1 + f_3}{2\varepsilon f_2} \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{\rho_0 p_1^2}{p_0^2} \left[ A - \left( \frac{f_1 + f_3}{f_2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{x_1 p_1}{\rho_0 u_0} \left[ u_0 - \frac{\alpha(\gamma + 1)}{2 + \alpha} - \left( \frac{\gamma + 1}{4u_0} \right) \varepsilon G_3 - \left( \frac{f_1 + f_3}{2f_2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\gamma x_1^2}{2\rho_0 u_0^2} \left[ 2u_0 - \frac{(\gamma + 1)(3\alpha + 2)}{2(2 + \alpha)} - \left( \frac{\gamma + 1}{2u_0} \right) \varepsilon G_3 \right] \\ &\quad + \frac{x_1 y_1}{\rho_0 u_0} \left[ (s_0 - \gamma) \left( 2 - \left( \frac{\gamma + 1}{4u_0} \right) G_3 \right) + \frac{A}{\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

Expressions généralisées:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \xi \left[ \frac{1}{2} \rho_1 u_1 \right]_{\xi} + \left( \frac{m + 1}{2} \right) \rho_1 u_1 + (m - 1)(\rho_0 v_2 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \xi [u_1(x_1 + y_1) + \varepsilon \rho_1 u_1]_{\xi} + \left( \frac{m + 2}{2} \right) [u_1(2x_1 + y_1)] \\ &\quad + \frac{(\gamma + 1)(m - 1 - 2\alpha)}{4(2 + \alpha)} \rho_1 u_1 + (m - 1) \left[ z_2 u_0 + \frac{1}{2} v_1(x_1 + y_1) \right] - \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2 \\ \lambda_3 &= \xi \left[ -\frac{\varepsilon \rho_0 p_1^2}{4p_0^2} - \frac{\gamma \varepsilon x_1^2}{4\rho_0 u_0^2} + \frac{\varepsilon x_1 p_1}{2\rho_0 u_0} + \frac{y_1 p_1}{2p_0} + \frac{x_1 y_1 (s_0 - \gamma)}{2\rho_0 u_0} \right]_{\xi} \\ &\quad + 2A \left[ -\frac{\rho_0 p_1^2}{4p_0^2} - \frac{\gamma x_1^2}{4\rho_0 u_0^2} + \frac{x_1 p_1}{2\rho_0 u_0} \right] + (m - 1) \left[ z_2 s_0 + \frac{p_1 z_1}{2p_0} + \frac{x_1 z_1 (s_0 - \gamma)}{2\rho_0 u_0} \right] \\ &\quad + (m + 1) \left[ \frac{p_1(x_1 + y_1)}{2p_0} - \frac{\rho_0 u_0 p_1^2}{4p_0^2} - \frac{\gamma x_1^2}{4\rho_0 u_0^2} \right] + \frac{x_1 y_1}{2\rho_0 u_0} [(m + 1)(s_0 - \gamma) + 2] \end{aligned}$$

## Annexe 13

**Composantes  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4$  du vecteur  $\left\{ \begin{matrix} \vec{\Lambda}' \\ \Lambda_1 \end{matrix} \right\}$**

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \lambda_1 + \frac{x_1 z_1}{\rho_0 u_0} \\ \lambda'_2 &= \lambda_2 + \frac{z_1}{\rho_0} (x_1 + y_1 + z_1) \\ \lambda'_3 &= \frac{1}{2\rho_0} \left[ \frac{\varepsilon z_1}{u_0} x_{1\mu} + z_1 y_{1\mu} + z_{1\mu} \left( y_1 + \frac{\varepsilon x_1}{u_0} \right) \right] \\ &\quad + \frac{z_1}{2\rho_0} [2z_1 + y_1(4 - G_3)] \\ &\quad + \frac{x_1 z_1}{2\rho_0} \left[ 4 - \frac{2(\gamma + 1)(\alpha + 1)}{(2 + \alpha)u_0} - G_3 \left( 1 - \frac{(\gamma + 1)^2}{4u_0^2} \right) \right] \\ \lambda'_4 &= \lambda_3 + z_1 \left[ \frac{p_1}{\rho_0} + \frac{(s_0 - \gamma)x_1}{\rho_0 u_0} \right] \end{aligned}$$

Expression généralisée:

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \lambda_1 - (m - 1)z_2 + \rho_1 v_1 \\ \lambda'_2 &= \lambda_2 - (m - 1)\varepsilon_2 u_0 + \frac{z_1}{\rho_0} (x_1 + y_1 + z_1) \\ \lambda'_3 &= \frac{1}{2\rho_0} \left[ \frac{\varepsilon z_1}{u_0} x_{1\mu} + z_1 y_{1\mu} + \left( y_1 + \frac{\varepsilon x_1}{u_0} \right) z_{1\mu} + z_1 \{ (m + 1)z_1 + y_1(m + 3 - G_3) \} \right] \\ &\quad + \frac{x_1 z_1}{2\rho_0} \left[ m + 3 - \frac{(\gamma + 1)(m + 3)(\alpha + 1)}{2(2 + \alpha)u_0} - \left( 1 - \frac{(\gamma + 1)^2}{4u_0^2} \right) G_3 \right] \\ \lambda'_4 &= \lambda_3 - (m - 1)z_2 s_0 + z_1 \left[ \frac{p_1}{\rho_0} + \frac{x_1(s_0 - \gamma)}{\rho_0 u_0} \right] \end{aligned}$$

(la fonction  $G_3$  doit être utilisée également sous sa forme généralisée).

# Annexe 14

## Expressions des fonctions

### $\sigma_i, \tau_i, \pi_i, a_i$ du chapitre 5

Expression des fonctions  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$ :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= m^2(-3\gamma^3 + 15\gamma^2 - 17\gamma - 3) + 8m(\gamma^2 - \gamma - 2) \\ &\quad + (3\gamma^3 + \gamma^2 - 7\gamma - 5) \\ \sigma_2 &= 4m^2(-2\gamma^3 + 2\gamma^2 - 3\gamma + 1) + m(-27\gamma^3 - 25\gamma^2 + 19\gamma + 17) \\ &\quad + (-33\gamma^3 - 35\gamma^2 + 29\gamma + 31) \\ \sigma_3 &= 4\gamma m^2(-\gamma + 1) + m(-6\gamma^3 - 8\gamma^2 + 2\gamma + 4) \\ &\quad + (-12\gamma^3 - 16\gamma^2 + 4\gamma + 8)\end{aligned}$$

Expression des fonctions  $\tau_1, \tau_2$  et  $\tau_3$ :

$$\begin{aligned}\tau_1 &= m^2(\gamma^3 - 9\gamma^2 + 35\gamma + 77) + 4m(-\gamma^3 + \gamma^2 + 27\gamma + 25) \\ &\quad + (-5\gamma^3 + 21\gamma^2 + 57\gamma + 31) \\ \tau_2 &= m^2(-3\gamma^3 + 11\gamma^2 + 27\gamma - 19) + m(-11\gamma^3 + 23\gamma^2 + 147\gamma + 113) \\ &\quad + (-22\gamma^3 + 42\gamma^2 + 150\gamma + 86) \\ \tau_3 &= 2m^2(-\gamma^3 + \gamma^2 - \gamma + 1) + m(-13\gamma^3 + 19\gamma^2 + 21\gamma - 11)\end{aligned}$$

Expression des fonctions  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  et  $\pi_4$ :

$$\begin{aligned}\pi_1 &= m^3(-\gamma^5 + 12\gamma^4 - 58\gamma^3 + 88\gamma^2 + 19\gamma - 12) + m^2(3\gamma^5 - 10\gamma^4 - 30\gamma^3 \\ &\quad + 128\gamma^2 + 99\gamma - 46) + m(-3\gamma^5 - 8\gamma^4 + 42\gamma^3 + 88\gamma^2 \\ &\quad + 33\gamma - 8) + (\gamma^5 + 6\gamma^4 + 14\gamma^3 + 16\gamma^2 + 9\gamma + 2) \\ \pi_2 &= m^3(-5\gamma^5 + 42\gamma^4 - 120\gamma^3 + 30\gamma^2 + 5\gamma) + m^2(-9\gamma^5 + 91\gamma^4 \\ &\quad - 210\gamma^3 - 314\gamma^2 + 27\gamma + 31) + m(-7\gamma^5 + 84\gamma^4 - 188\gamma^3 \\ &\quad - 526\gamma^2 - 117\gamma + 130) + (21\gamma^5 - 9\gamma^4 - 138\gamma^3 - 150\gamma^2 - 27\gamma + 15) \\ \pi_3 &= m^3(-6\gamma^5 + 34\gamma^4 - 42\gamma^3 + 14\gamma^2) + m^2(-35\gamma^5 + 100\gamma^4 + 74\gamma^3 \\ &\quad - 52\gamma^2 + 9\gamma) + m(-100\gamma^5 + 72\gamma^4 + 418\gamma^3 + 206\gamma^2 \\ &\quad - 54\gamma - 14) + (-99\gamma^5 - 54\gamma^4 + 342\gamma^3 + 360\gamma^2 - 27\gamma - 90) \\ \pi_4 &= 8\gamma^3 m^3(1 - \gamma) + m^2(-2\gamma^5 - 26\gamma^4 + 2\gamma^3 + 26\gamma^2) \\ &\quad + m(-2\gamma^5 - 14\gamma^4 + 2\gamma^3 + 38\gamma^2 + 24\gamma) + (4\gamma^5 + 24\gamma^4 + 56\gamma^3 + 64\gamma^2 \\ &\quad + 36\gamma + 8)\end{aligned}$$

Expression des fonctions  $a_i$

$$a_1 = 2m^2(\gamma^3 - \gamma^2 + \gamma - 1) + m(13\gamma^3 - 19\gamma^2 - 21\gamma + 11) \\ + (17\gamma^3 - 21\gamma^2 - 93\gamma - 55)$$

$$a_2 = m^2(3\gamma^3 - 11\gamma^2 - 27\gamma + 19) + m(5\gamma^3 - 29\gamma^2 - 141\gamma - 107) \\ + (4\gamma^3 - 60\gamma^2 - 132\gamma - 68)$$

$$a_3 = m^2(7\gamma^3 - 3\gamma^2 + 29\gamma + 71) + 2m(10\gamma^3 + 14\gamma^2 + 42\gamma + 38)$$

$$a_4 = 4\gamma(\gamma - 1)m^2 + m(8\gamma^3 + 8\gamma^2 - 4\gamma - 4) + (17\gamma^3 + 21\gamma^2 - 9\gamma - 13)$$

$$a_5 = m^2(10\gamma^3 - 8\gamma^2 + 10\gamma - 4) + m(26\gamma^3 + 26\gamma^2 - 18\gamma - 18) \\ + (16\gamma^3 + 18\gamma^2 - 12\gamma - 14)$$

$$a_6 = m^2(10\gamma^3 - 12\gamma^2 + 10\gamma) + 4m(6\gamma^3 + 3\gamma^2 - 4\gamma - 1) \\ + (10\gamma^3 + 12\gamma^2 - 6\gamma - 8)$$

$$a_7 = (\gamma^2 + 6\gamma + 5) - 4m\gamma$$

$$a_8 = (\gamma^2 - 3\gamma - 4) - m(7\gamma + 3)$$

$$a_9 = 5(\gamma^2 - 1) + 2m\gamma(\gamma - 1)$$

$$a_{10} = 2m\gamma(\gamma - 3) + 2(2\gamma^2 - 3\gamma - 5)$$

$$a_{11} = \gamma^2 + 2\gamma - 7$$

$$a_{12} = -4m^2\gamma^2(\gamma - 1) - 3m\gamma(\gamma + 1)^2(\gamma - 1) - 3(\gamma + 1)^2(2\gamma^2 - 5\gamma + 1)$$

$$a_{13} = m^2\gamma(\gamma - 1)(5\gamma^2 - 12\gamma - 1) + m(\gamma + 1)(16\gamma^3 - 39\gamma^2 - 10\gamma + 9) \\ + (\gamma + 1)^2(15\gamma^2 - 42\gamma + 15)$$

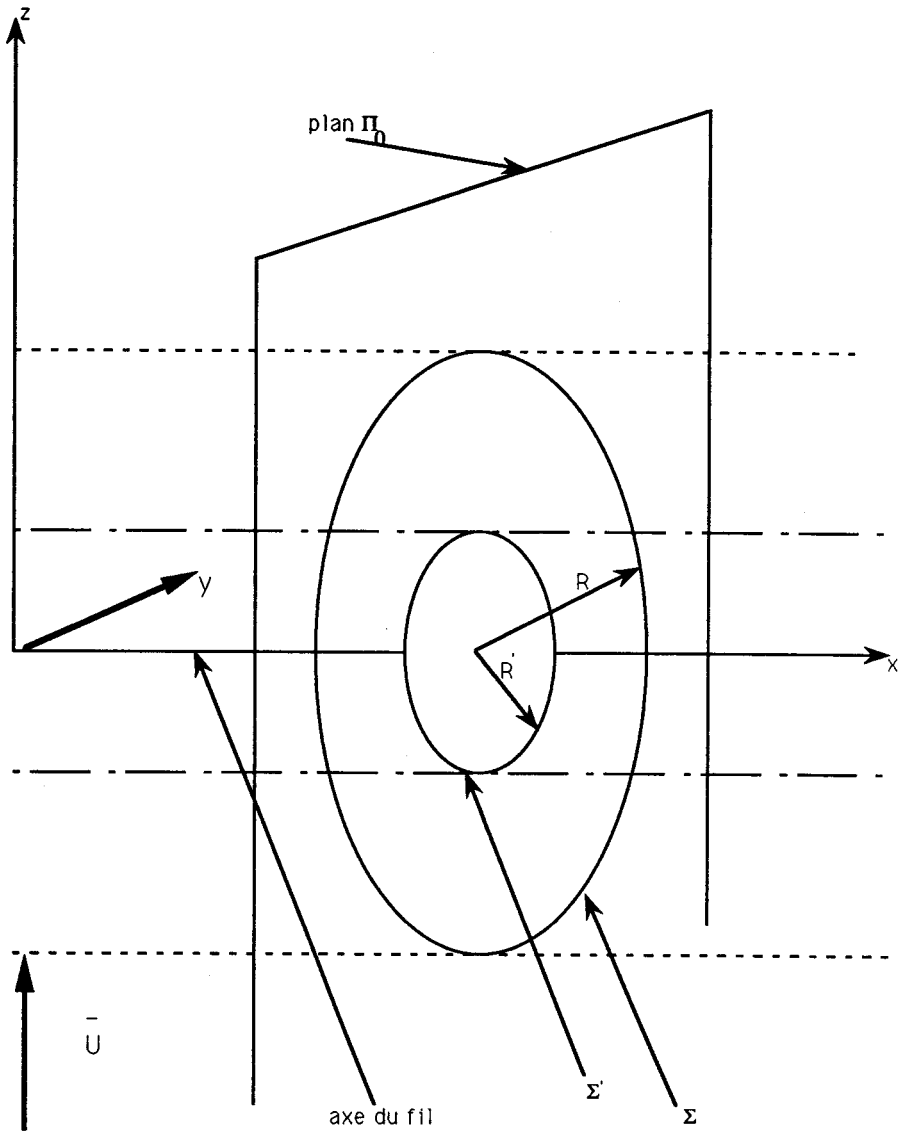
$$a_{14} = m^2(5\gamma^4 - 13\gamma^3 + 27\gamma^2 + 9\gamma - 4) + m(\gamma + 1)(14\gamma^3 - 18\gamma^2 + 34\gamma - 6) \\ + 3(\gamma + 1)^2(3\gamma^2 - 3\gamma + 2)$$

# Bibliographie

- [1] G. I. Taylor. *The formation of a blast wave by a very intense explosion* Proc. Roy. Soc. A, 201, 159-66, 1950
- [2] L. Sedov. -*Similitude et dimensions en mécanique* Editions de Moscou, 1972
- [3] R. A. Freeman. -*Variable-energy blast waves* Brit. J. Appl. Phys. Ser2, vol. 1, 1968
- [4] A. Merlen. -*Similitude physique et modélisation par explosion équivalente des phénomènes aérodynamiques de balistique intermédiaire*. Thèse de Doctorat d'Etat présentée à l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, 1988.
- [5] L. Landau et E. Lifchitz -*Mécaniques des fluides* Editions de Moscou, 1971
- [6] O.M. Belotserkovskii and P.I. Chuskin -*The numerical solution of problems in gas dynamics*. Basic Developments in fluid dynamics Volume I. Academic Press 1965
- [7] V.P. Korobeynikov, N.S. Melnikova and Ye.V. Ryazanov. -*The theory of point explosion* Jprs scientific and technical series, 2 July 1962
- [8] A. Sakurai. -*Blast wave theory* Basic developments in fluid dynamics. Vol. 1. Academic press New York-London, 1965
- [9] Toshi Kobuta. -*Investigation of flow around simple bodies in hypersonic flow*. Memorandum No. 40 Guggenheim Aeronautical laboratory, California Institute of Technology. Army ordnance contract No DA-04-495-ord-19, 1957.
- [10] A. Dymont et A. Merlen -*Ecoulement consécutif à une explosion violente ponctuelle dans un gaz animé initialement d'un mouvement uniforme* C. R. Acad. Sc. Paris, t.294, 22 février 1982
- [11] J. Von Neumann. -*The point source solution* Collected works. Vol. VI, Pergamon Press 1976.
- [12] H. Goldstine and J. Von Neumann. -*Blast wave calculation* Collected works. Volume VI, Pergamon Press 1976

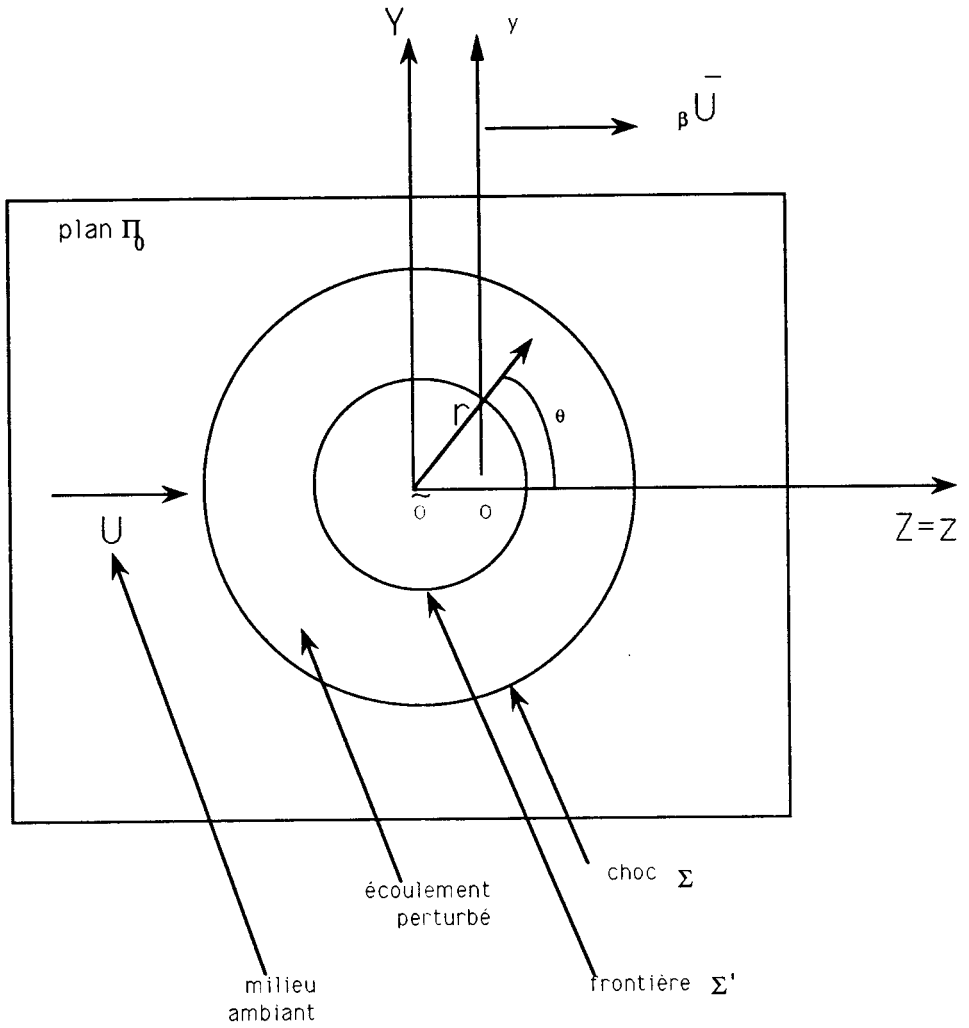


- [13] A. Merlen. -*Perspectives offertes par l'analogie entre les explosions intenses et une classe d'écoulements hypersoniques*. Rapport IMFL 89/06, 1989.
- [14] A. Merlen. -*Théorie des faibles incidences en hypersonique pour les corps axisymétriques en loi de puissance et à émoussement faible*. Rapport IMFL 89/23, 1989.
- [15] A. Merlen. -*Un modèle analytique d'écoulement autour d'ogives élancées peu émoussées à Mach hypersonique modéré et à faible incidence*. Rapport IMFL 90/10, 1990.
- [16] G. G. Chernyi. -*Introduction to Hypersonic flow*. Academic press. New york - London, 1961.
- [17] J. P. Guiraud, D. Vallée and R. Zolver. -*Bluntness effects in hypersonic small disturbance theory*. Basic development in Fluid Dynamics, edited by Maurice Holt, volume 1. Academic Press. New York - London, 1965.
- [18] A. Merlen -*Théorie des faibles incidences en hypersonique pour les corps axisymétriques en loi de puissance et à émoussement faible* C. R. Acad. Sc. Paris II-630. janvier 1990
- [19] S. Godounov et Coll -*Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*. Editions de Moscou 1979
- [20] W. Press, S. Teukolsky -*Numerical Recipes-The art of scientific computation* Cambridge University Press 1985
- [21] J.P Pelletier -*Techniques numériques appliquées au calcul scientifique* Masson 1982
- [22] A. Gourdin, M. Boumahrat -*Méthodes numériques appliquées* Techniques et Documentation Lavoisier 1989
- [23] Wallace D. Hayes, Ronald F. Probstein. -*Hypersonic Flow Theory, volume 1, Inviscid flows*. Academic press. New york - London, 1966.
- [24] P.Lévy. -*Rapport de D.E.A.* I.M.F.L, Août 1990



$R$  : rayon du choc  $\Sigma$

$R'$  : rayon de la frontière  $\Sigma'$  où  $\rho$  s'annule sauf pour  $\alpha=2$



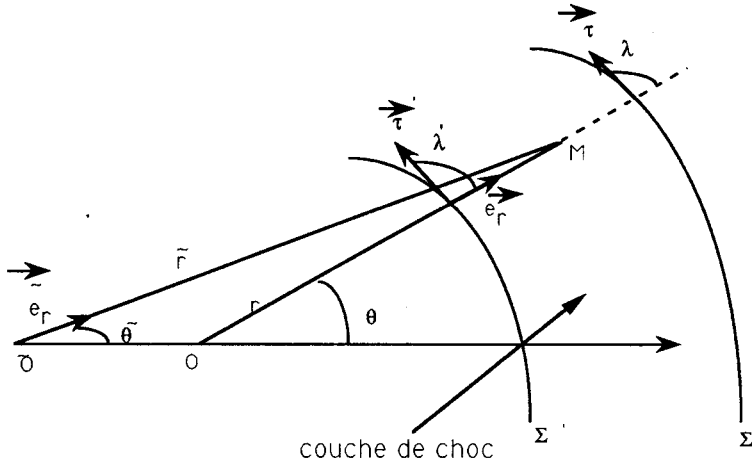
$O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ : repère fixe lié au fil

$Oxyz$ : repère en translation de vitesse  $\beta\bar{U}$

$r, \theta$ : coordonnées polaires

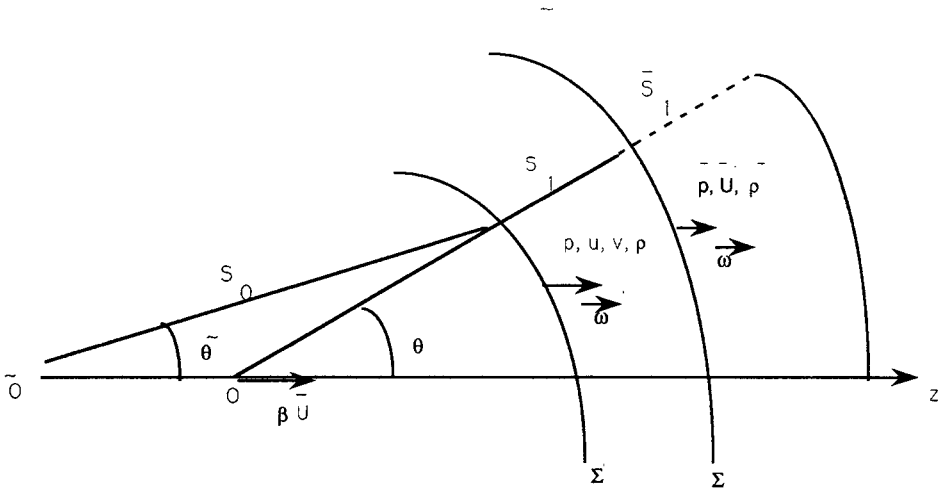
### Représentation des angles $\lambda$ et $\lambda'$

fig 3



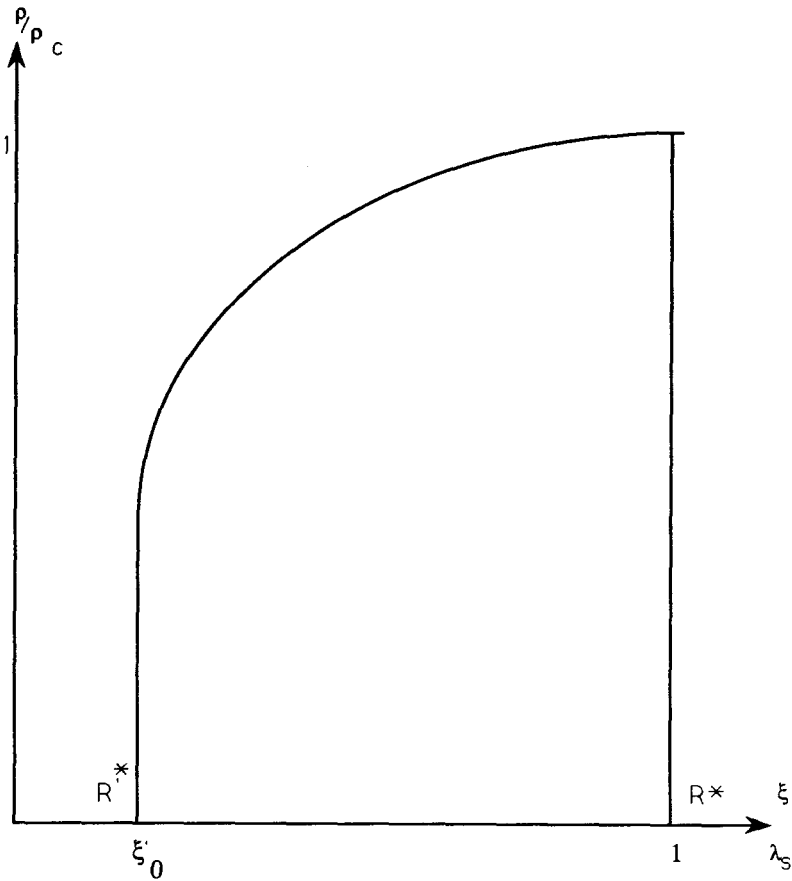
couche de choc: écoulement entre  $\Sigma'$  et  $\Sigma$   
 $\vec{r}, \vec{q}$ : coordonnées dans le repère fixe OXYZ lié au fil

### Représentation du domaine diédrique $\mathcal{V}$



$\mathcal{V}$  volume diédrique de sommet  $\tilde{O}$  et limité par  $S$  (surface mobile) et  $\Sigma'$   
 $\theta$  angle sous lequel on voit  $\Sigma'$  de  $\tilde{O}$

$$\xi'_0 < \lambda_S < 1 \text{ à } R'^* < \xi < R^*$$



—— solution

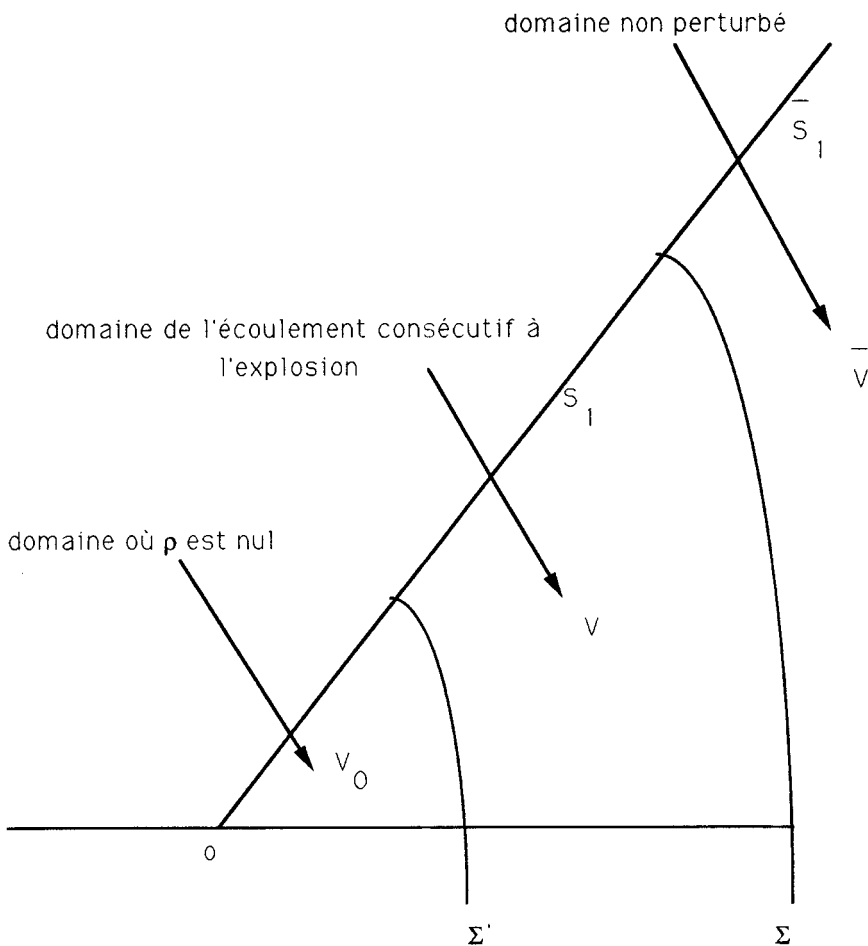
$\rho_c$  : masse volumique sur le choc

$\lambda_S$  : variable adimensionnée de Sedov telle que  $\xi'_0 < \lambda_S < 1$

$\xi$  : variable adimensionnée telle que  $R'^* < \xi < R^*$

$$R'^* = \xi'_0 + \zeta \xi_{22}' + \eta^2 \xi_{23}' + \eta^2 \xi_{21}' \cos 2\theta + O(\eta^3) \text{ dans le repère } \xi'_1 = 0$$

$$R^* = 1 + \eta \xi \cos \theta + \zeta \xi_{22} + \eta^2 \xi_{23} + \eta^2 \xi_{21} \cos 2\theta + O(\eta^3)$$



$S_1, \bar{S}_1$ : surfaces latérales

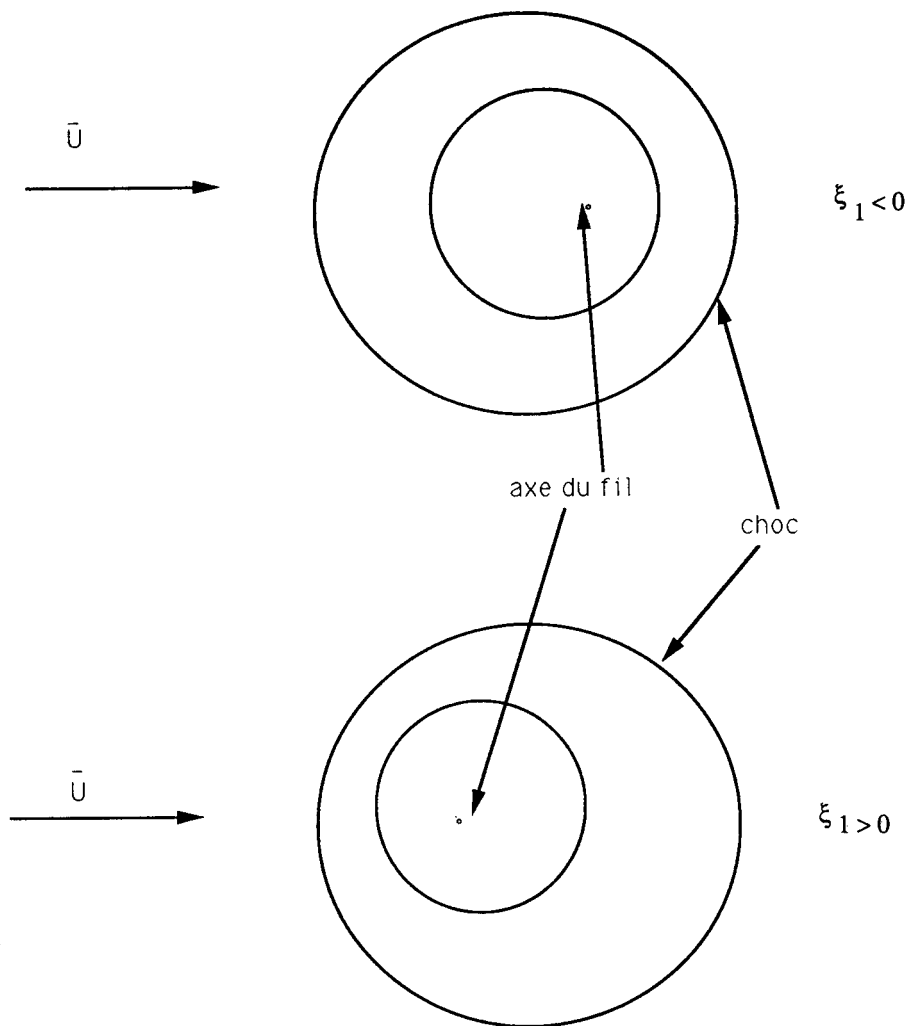


fig 7

### Fonctions de Sakurai

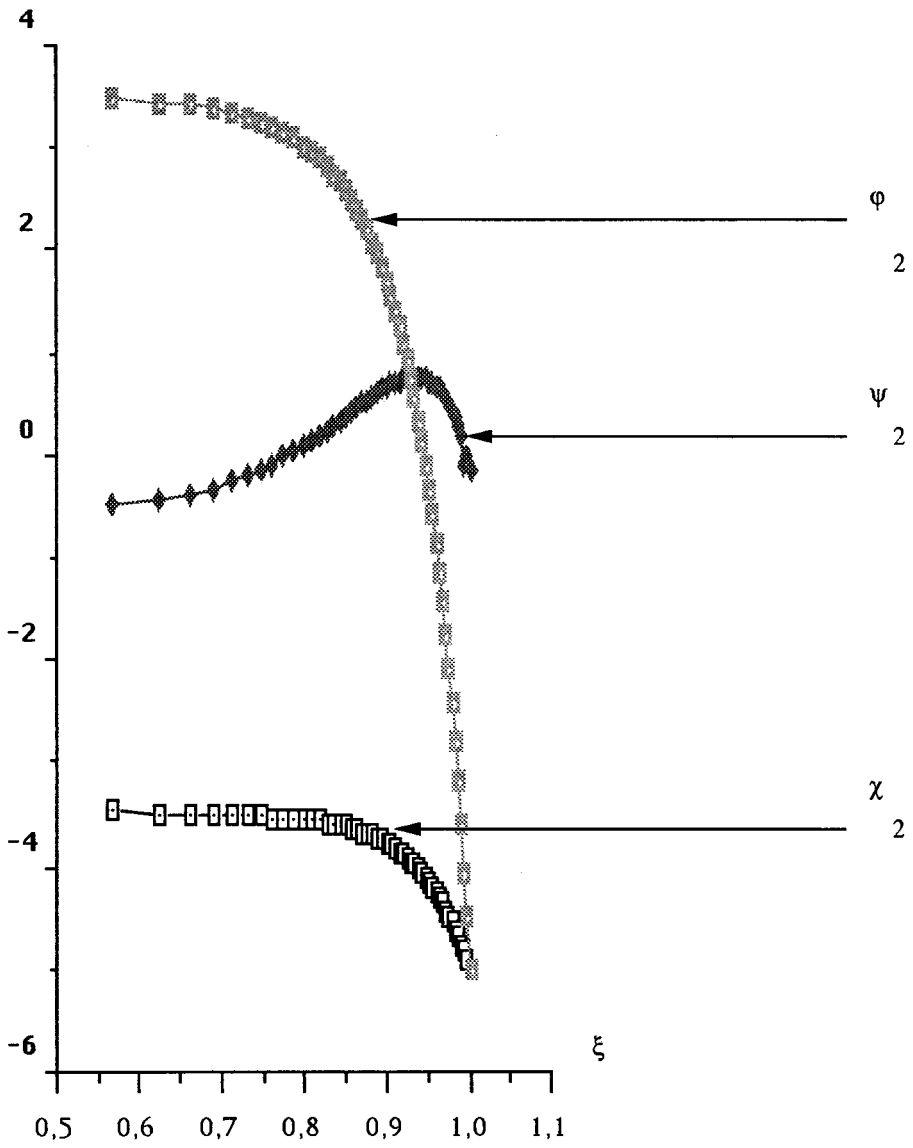




fig 8

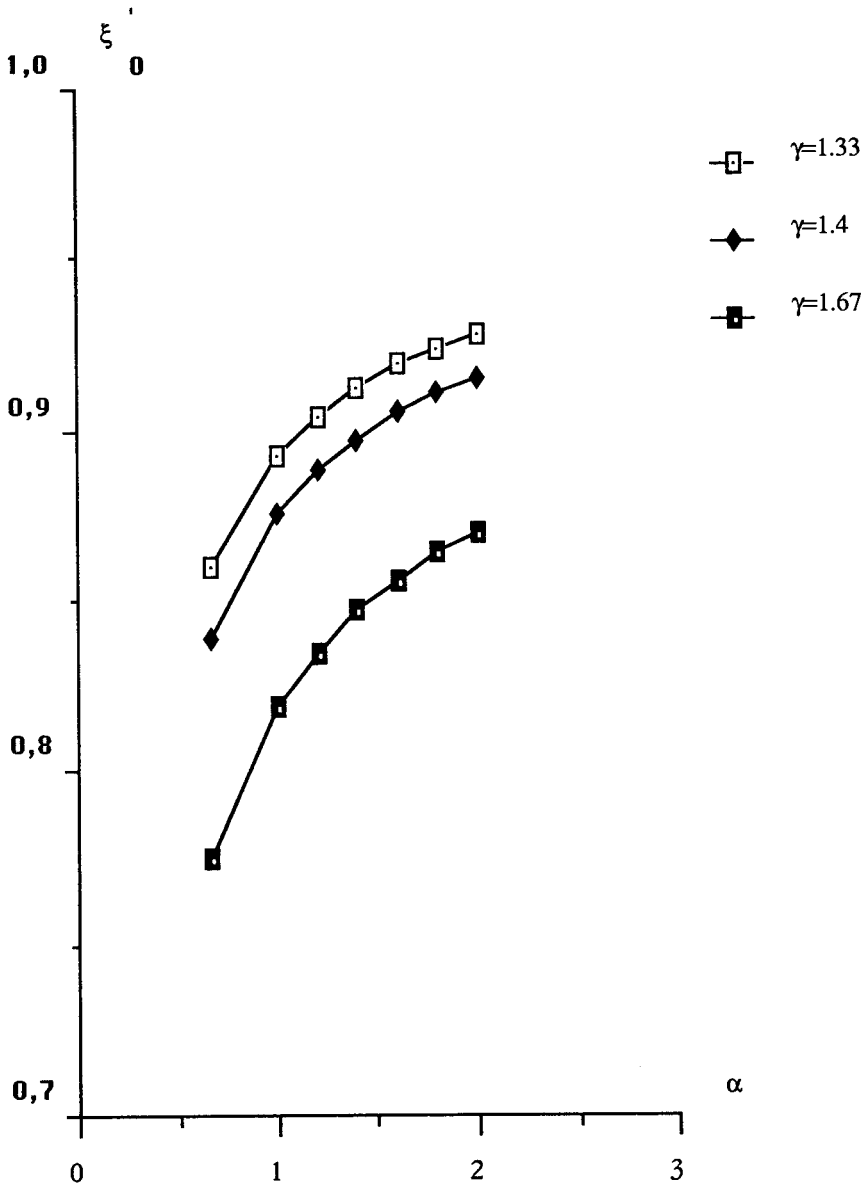


fig9

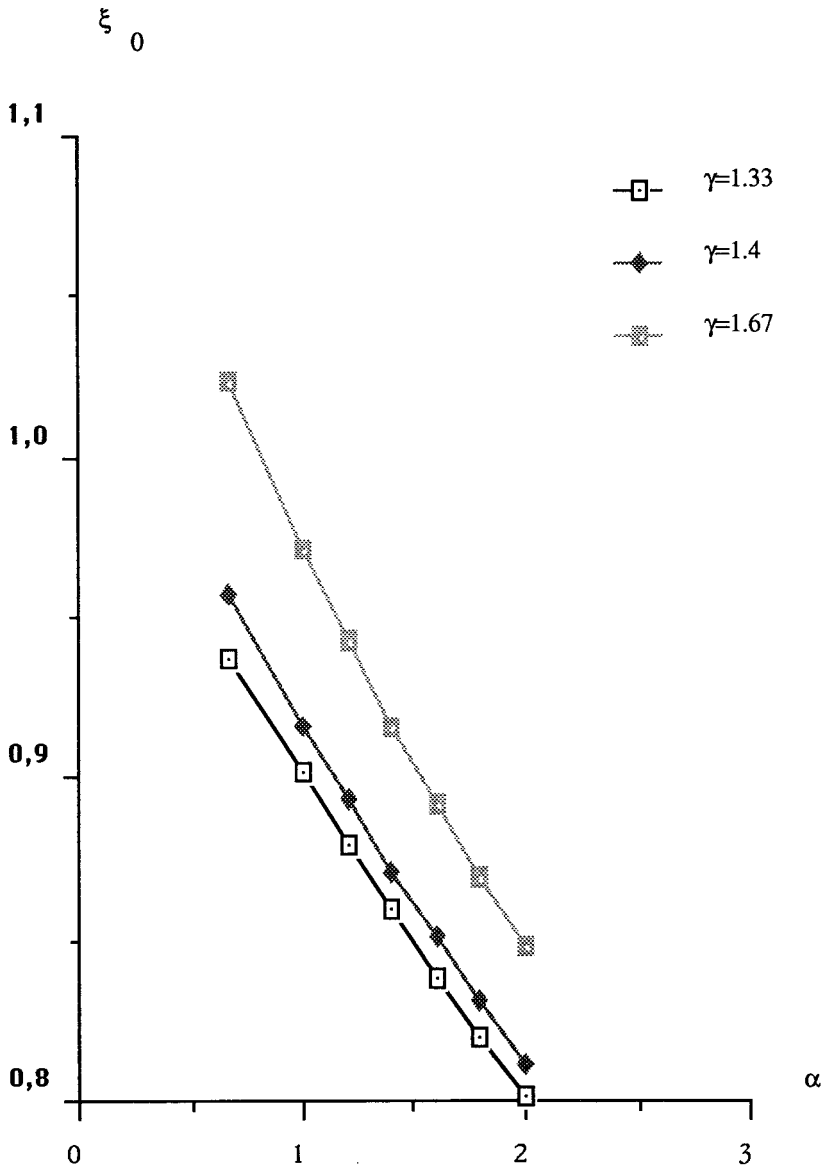


fig 10

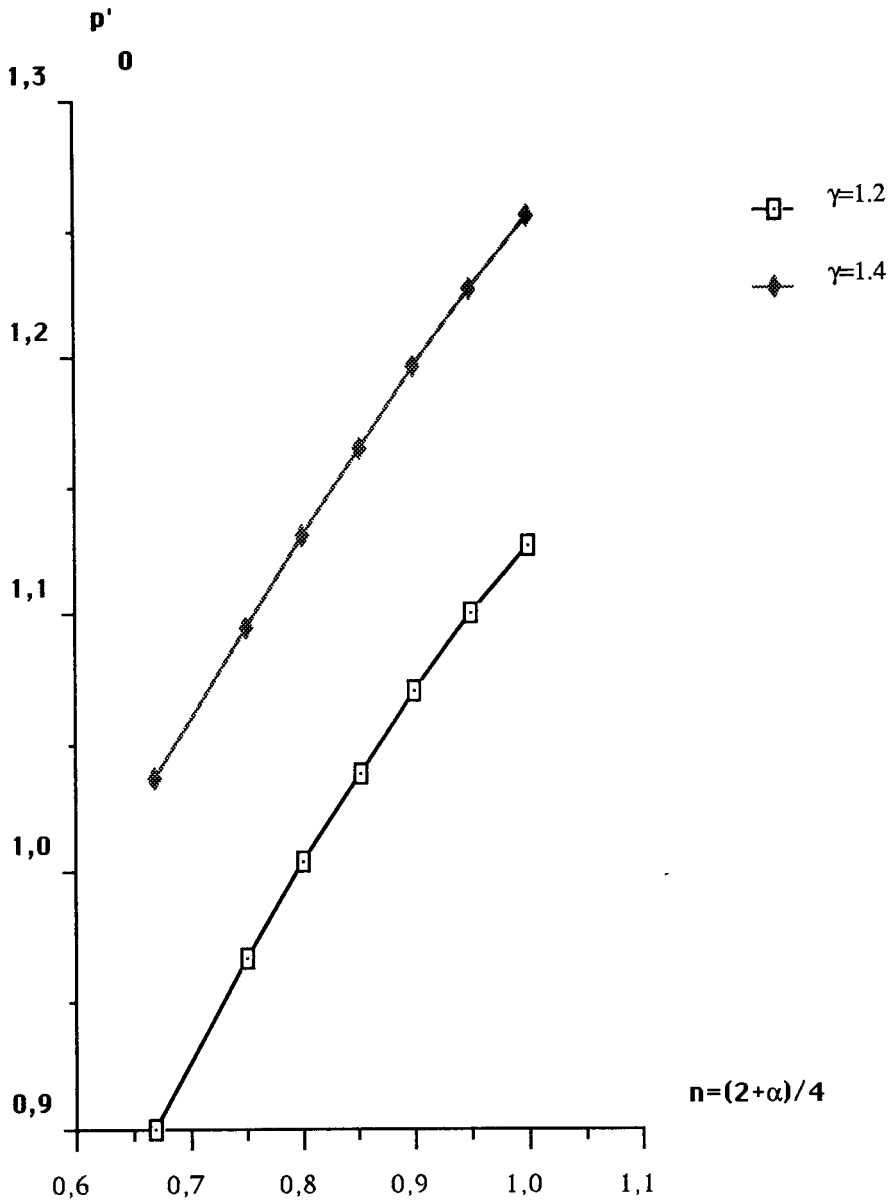


fig 11

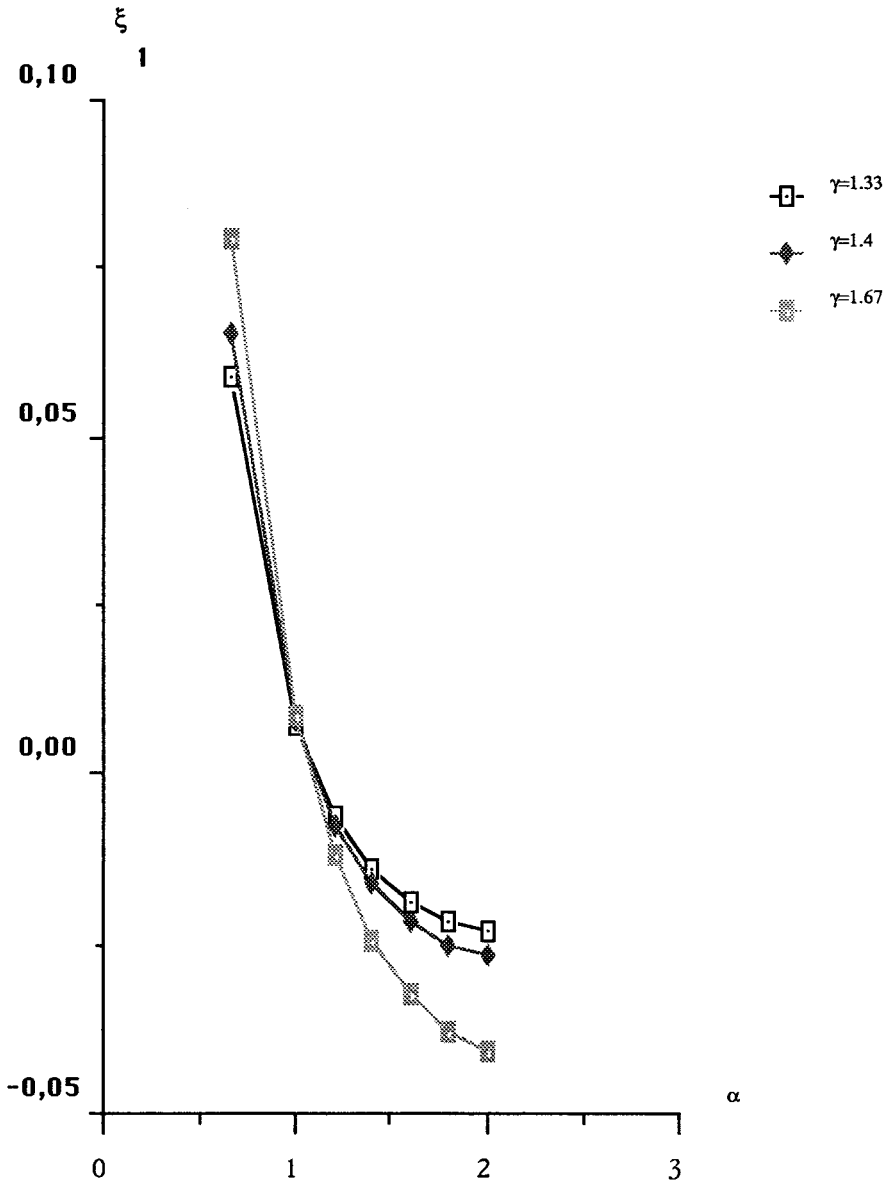


fig12

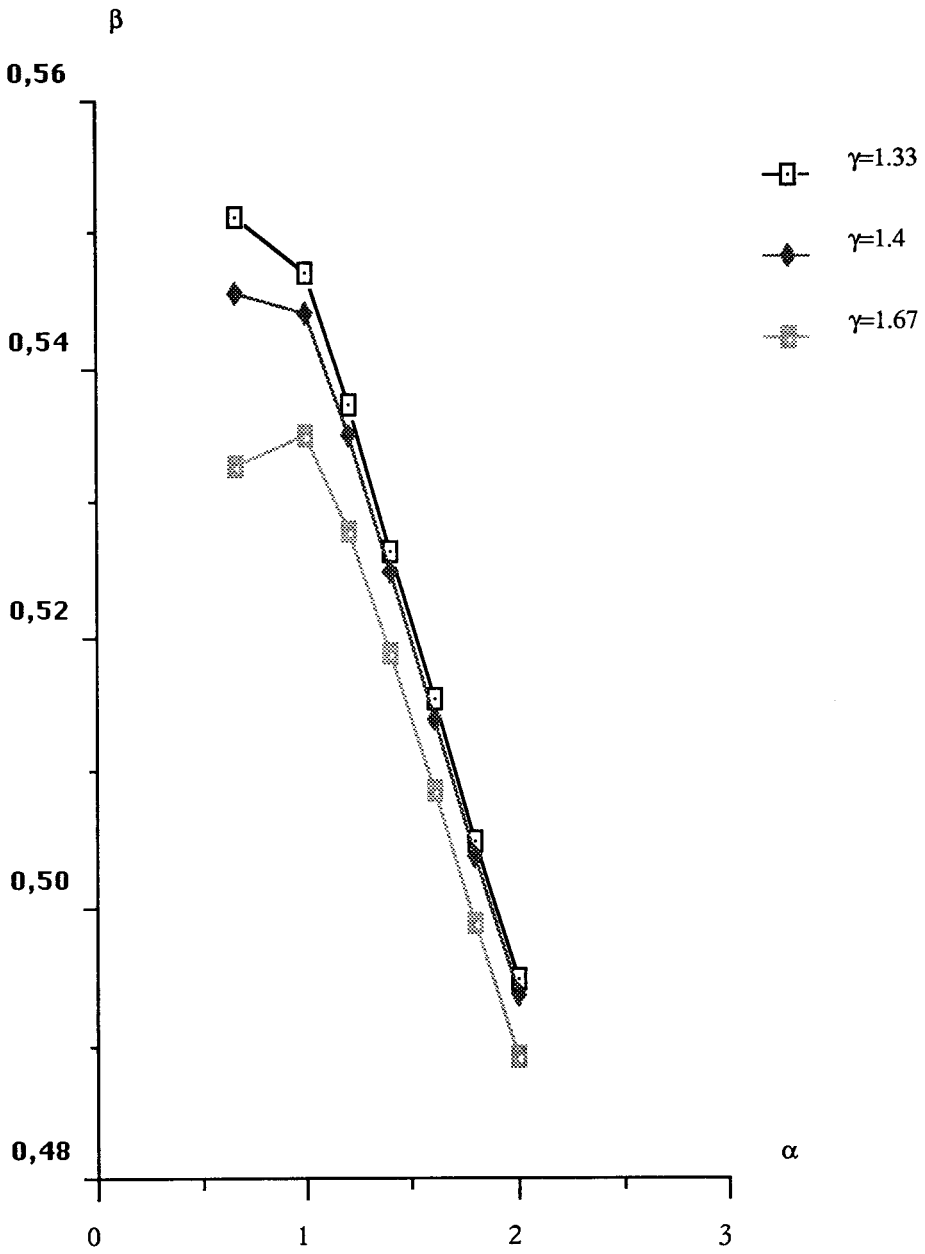


fig 13

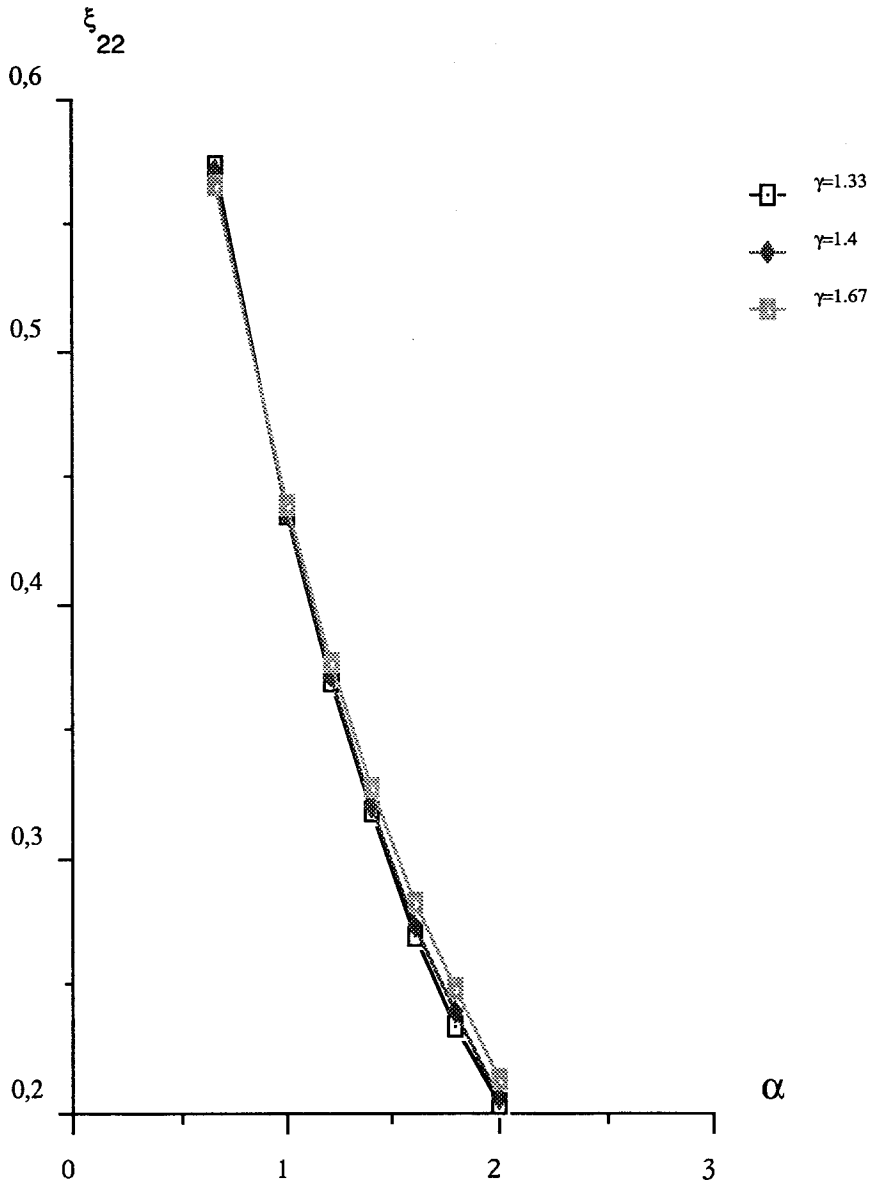


fig 14

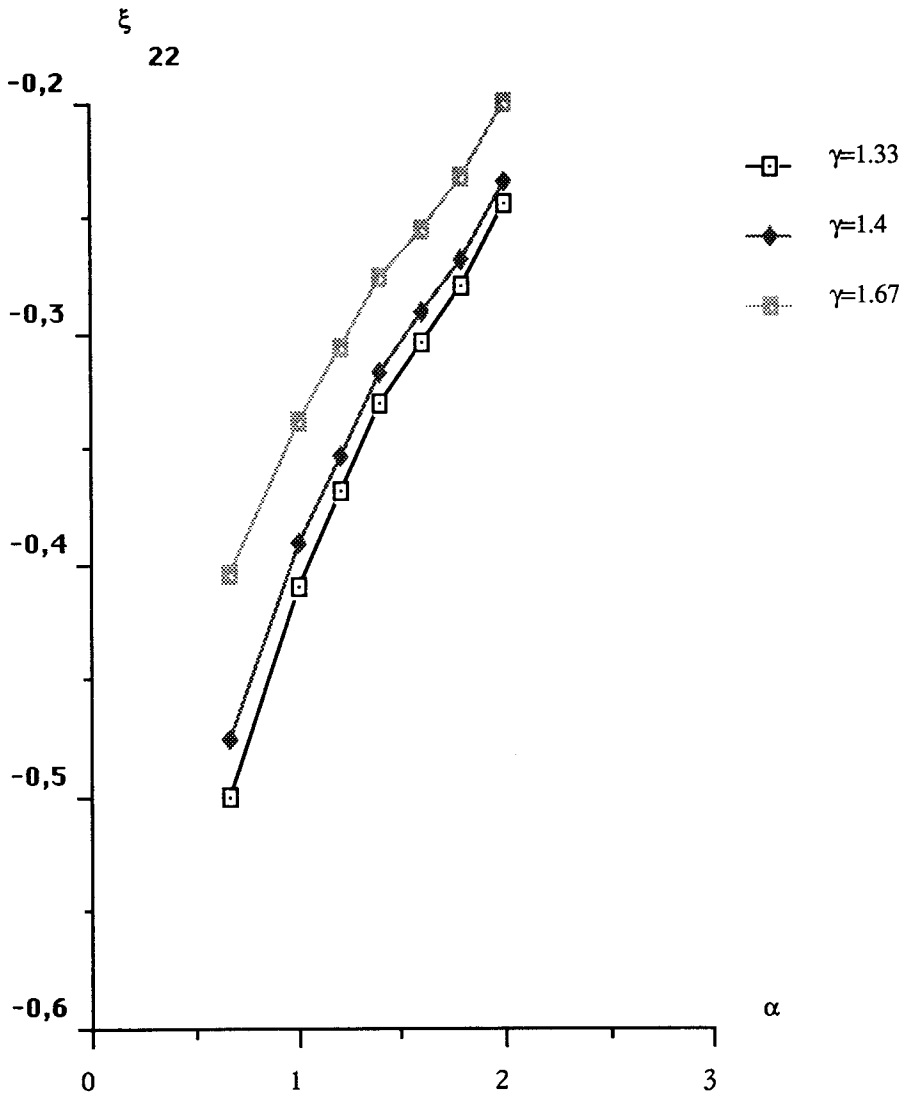


fig 15

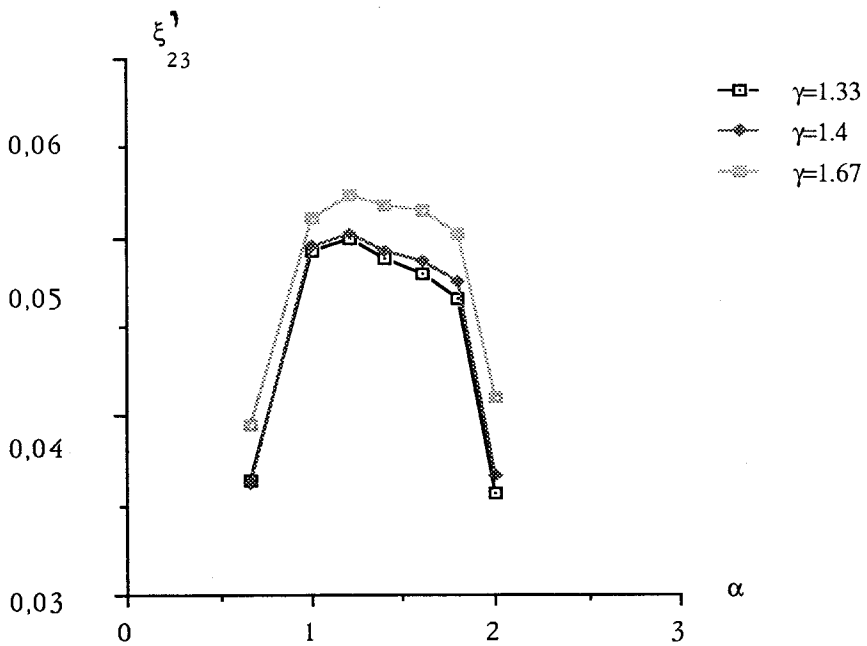
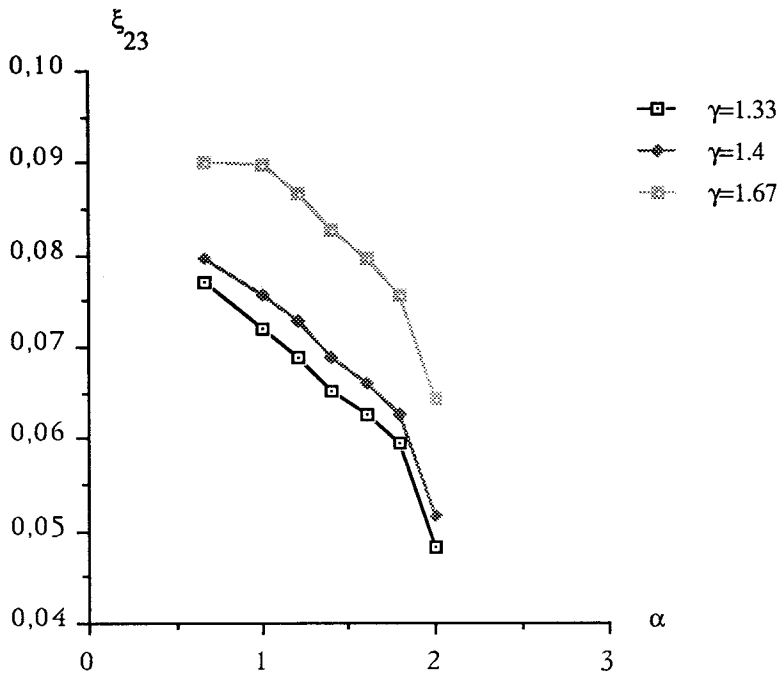
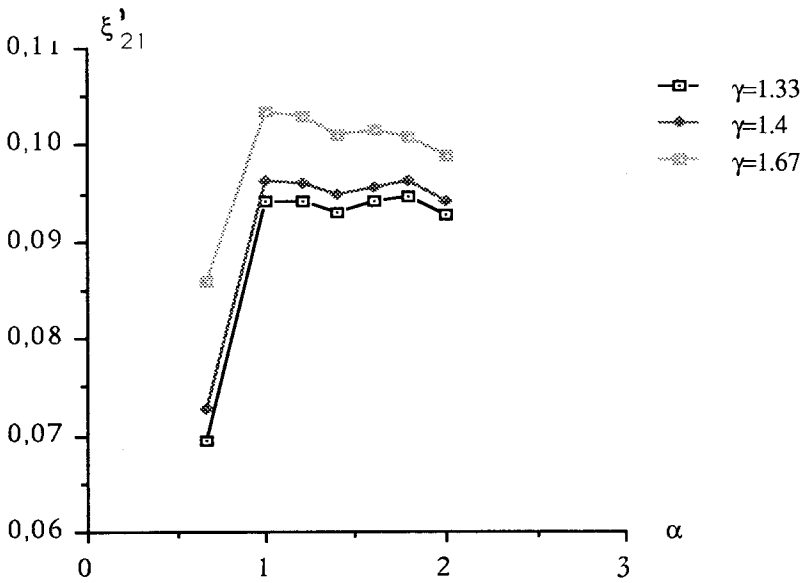
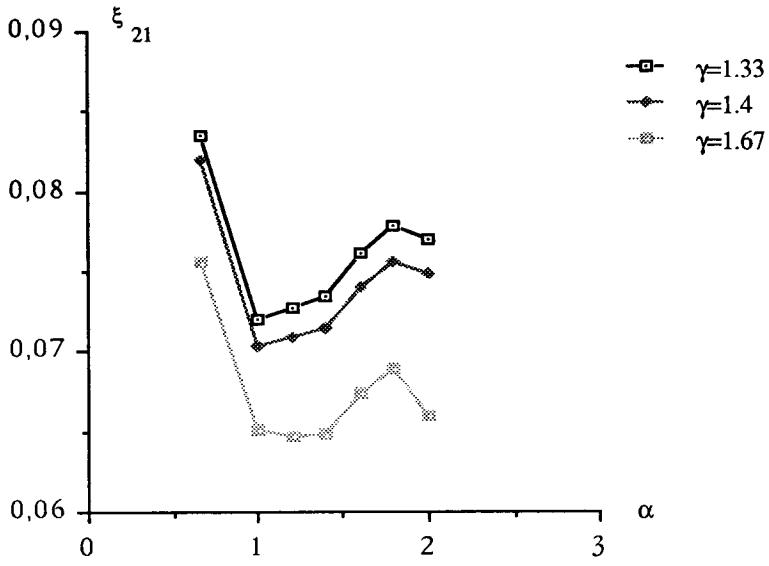


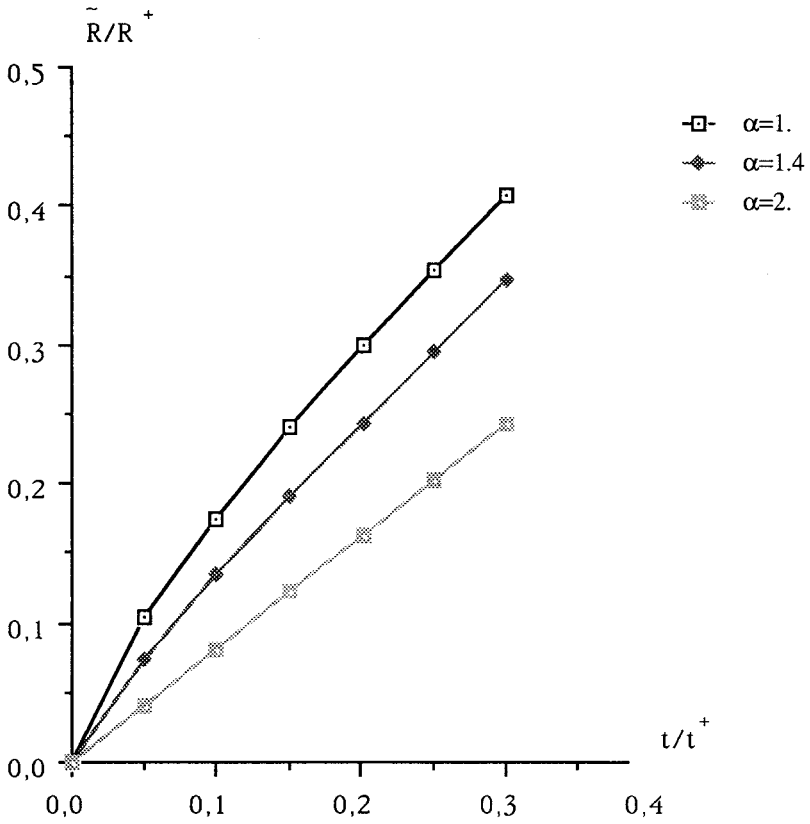


fig 16

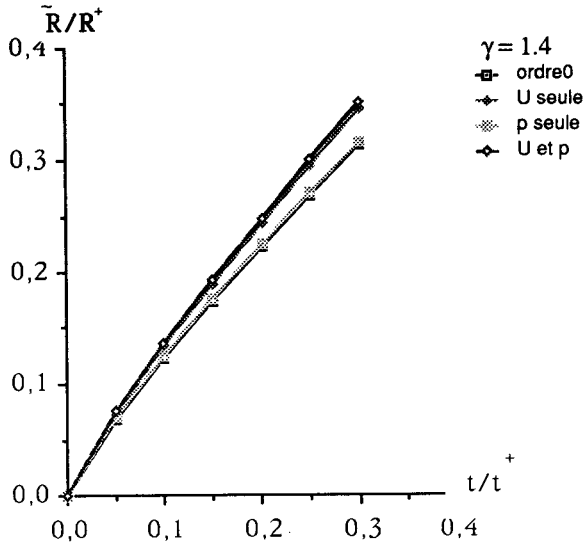


progression du choc par rapport au repère fixe  
en fonction de  $\alpha$

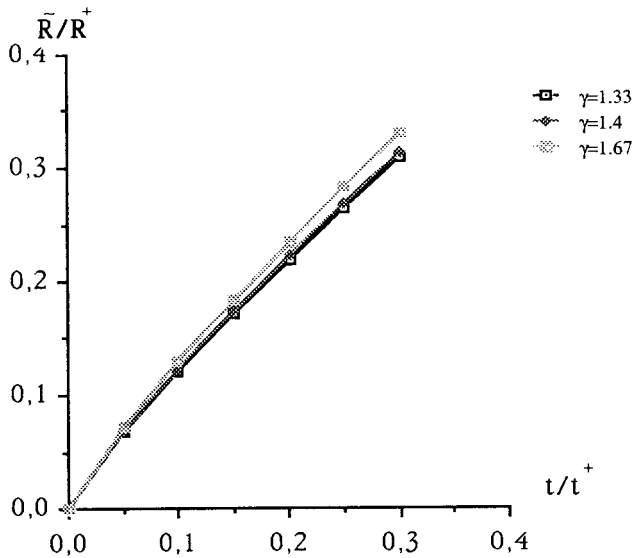
fig 17



en fonction des effets

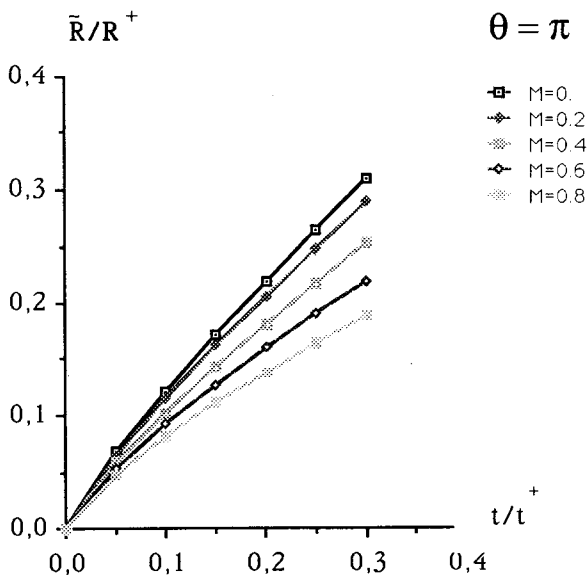
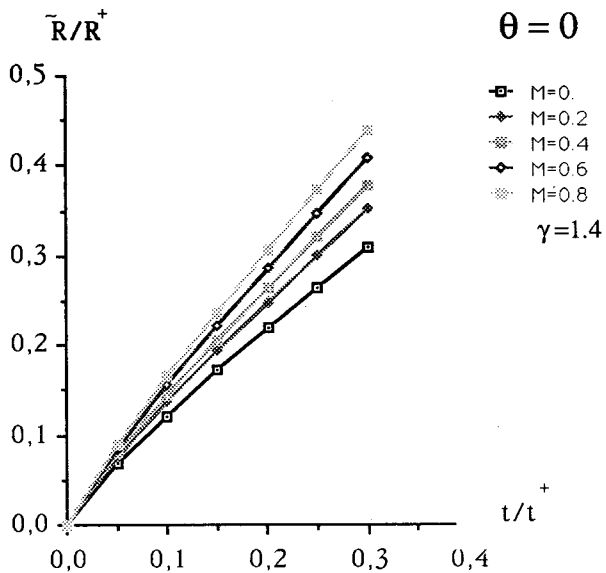


en fonction de  $\gamma$



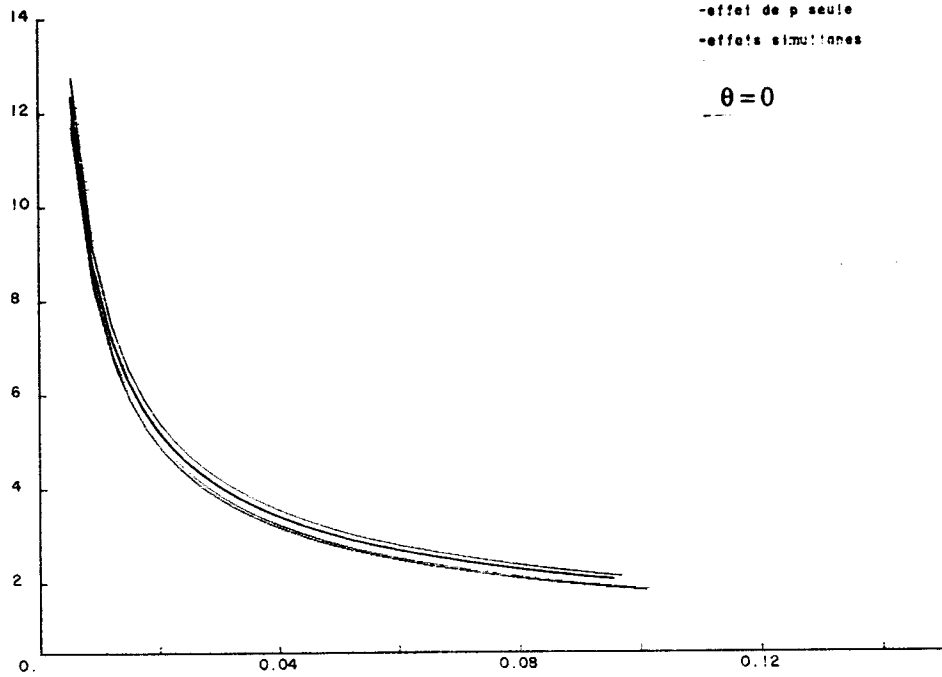
progression du choc par rapport au repère fixe  
 en fonction du nombre de Mach et de  $\theta$   
 $\alpha = 1.4$

fig 19



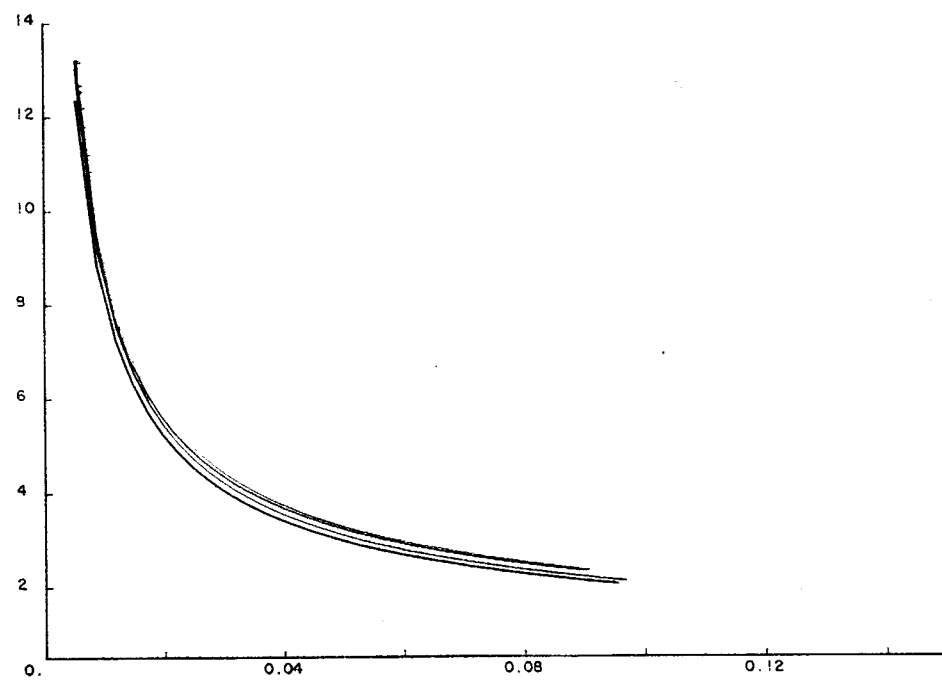
alpha= 1.0

$\rho c / \bar{p}$



$\theta = \pi$

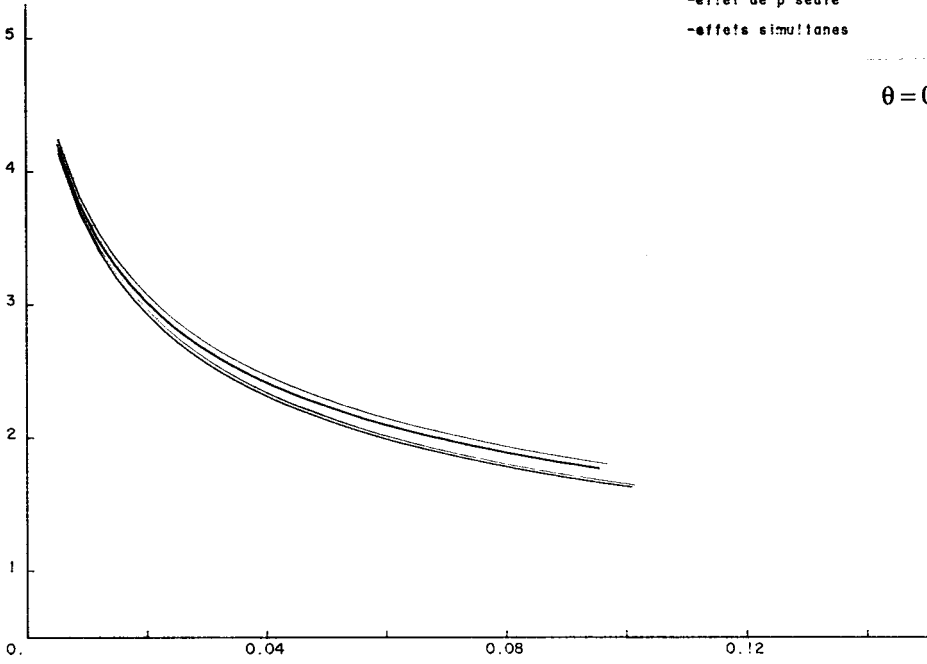
$\rho c / \bar{p}$



alpha= 1.0

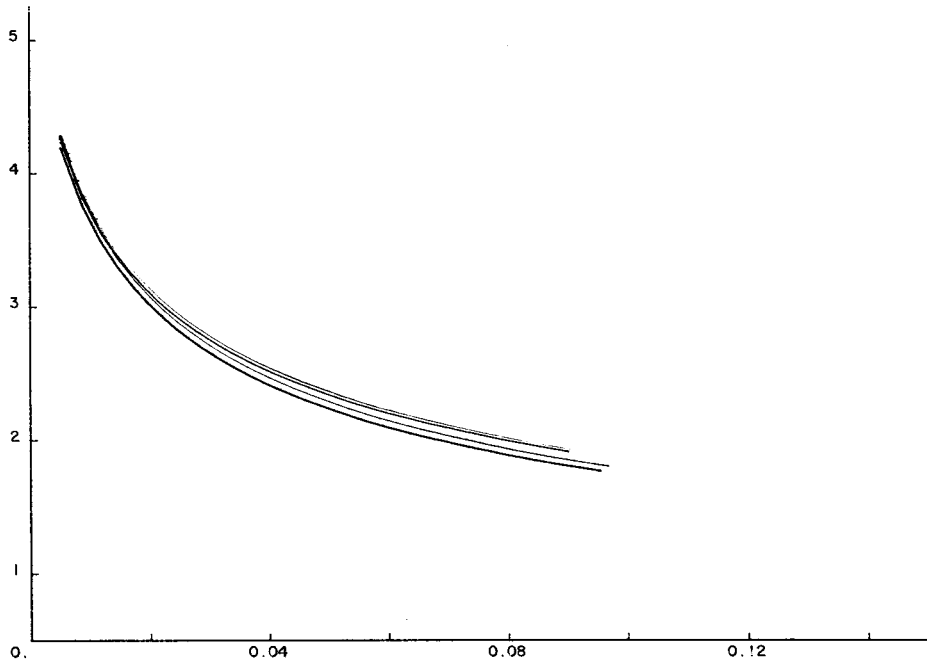
- base
- effet de U seule
- effet de p seule
- effets simultanes

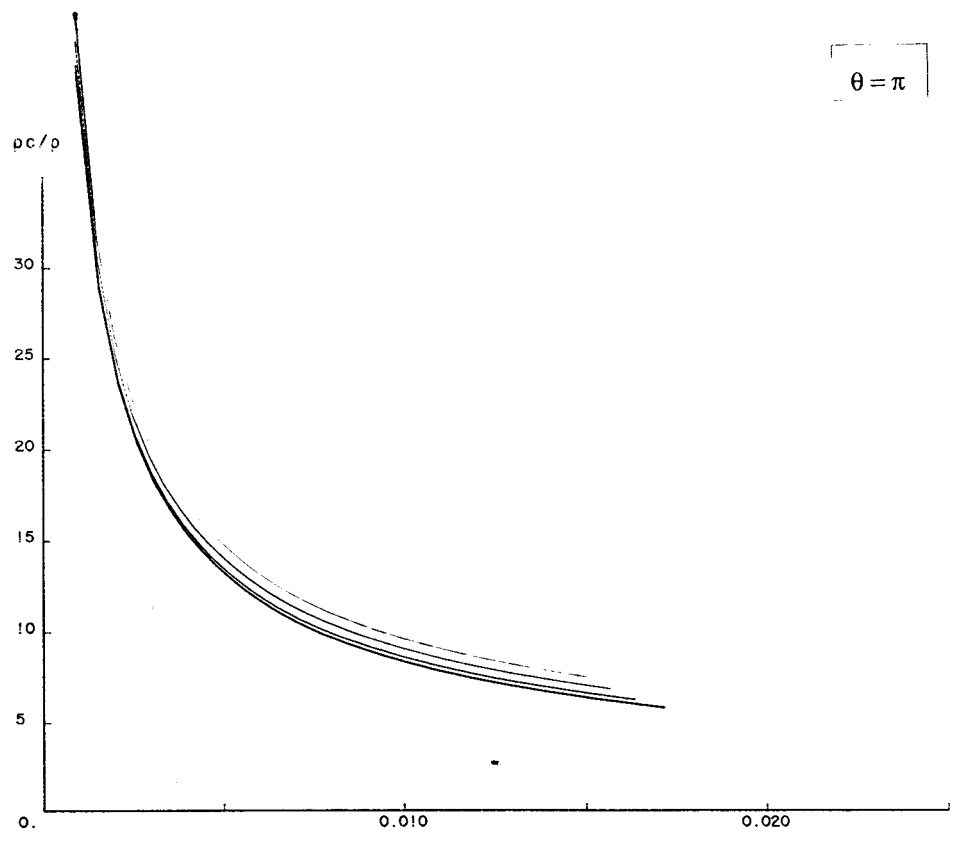
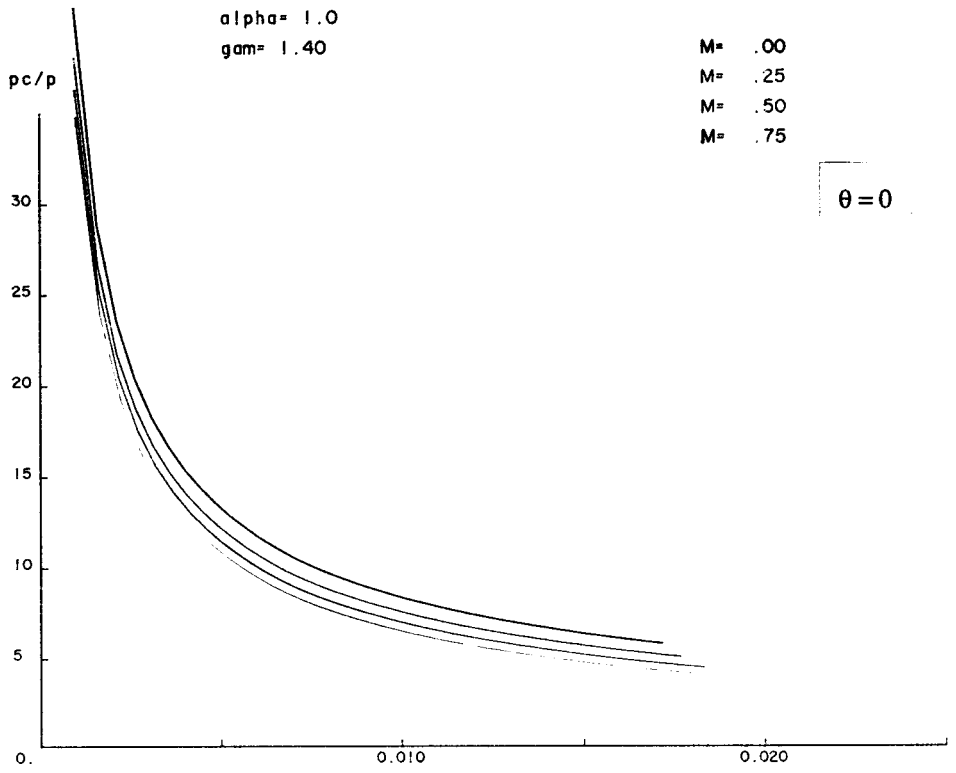
$\rho_c / \bar{p}$



$\theta = \pi$

$\rho_c / \bar{p}$

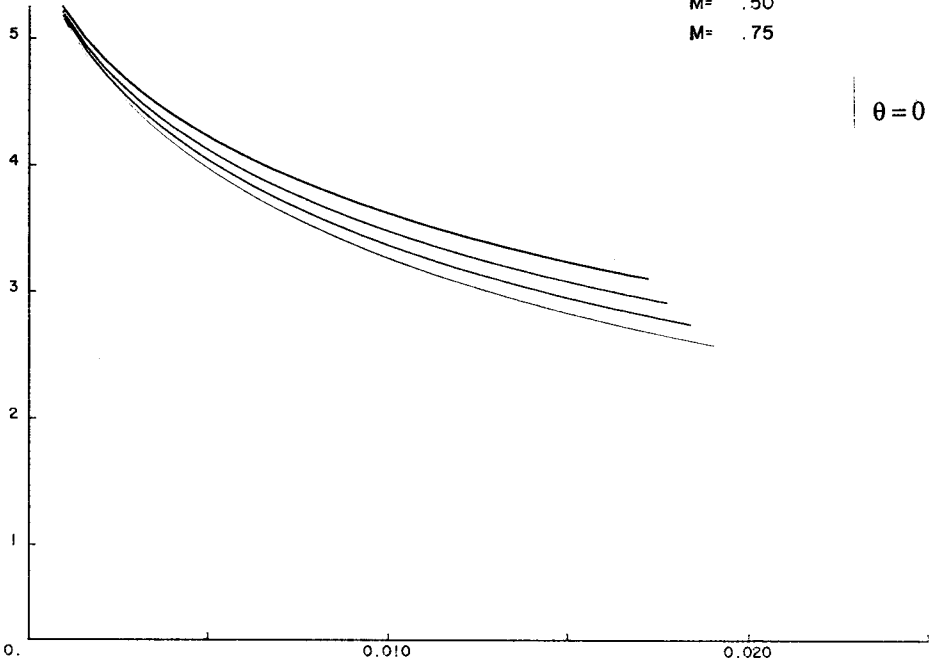




alpha= 1.0  
gam= 1.40

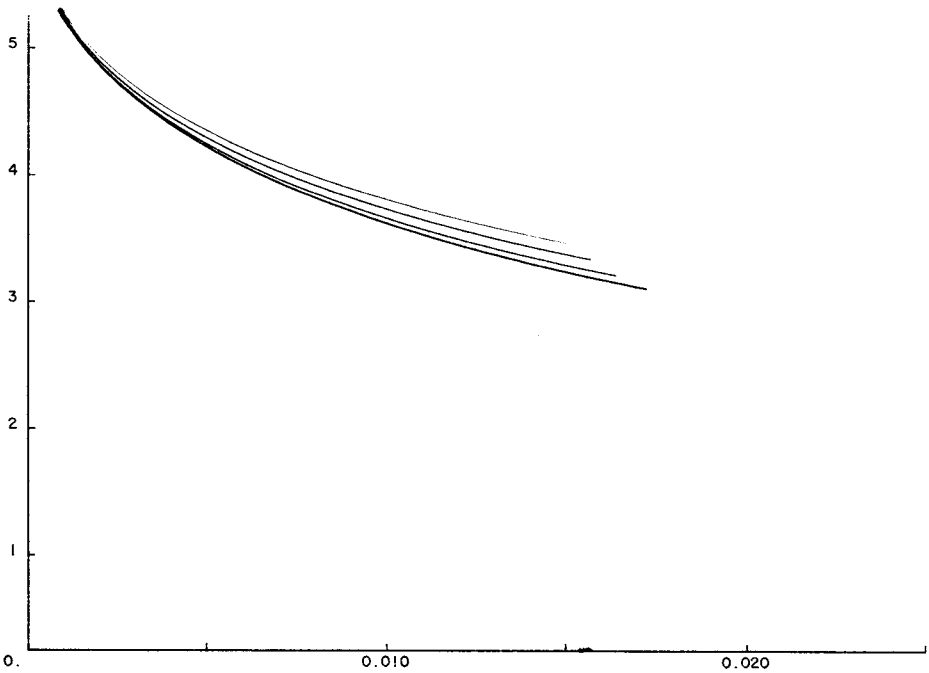
M= .00  
M= .25  
M= .50  
M= .75

$\rho_c / \rho$



$\theta = \pi$

$\rho_c / \rho$

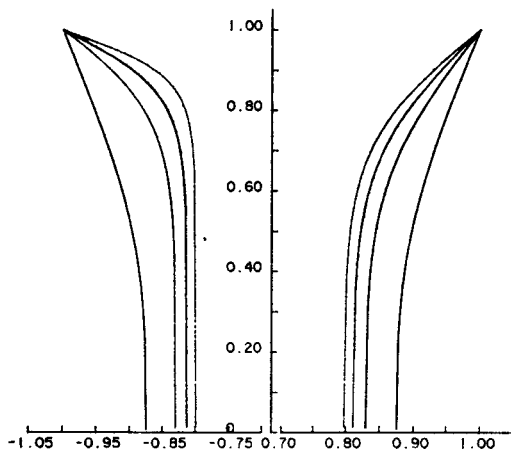




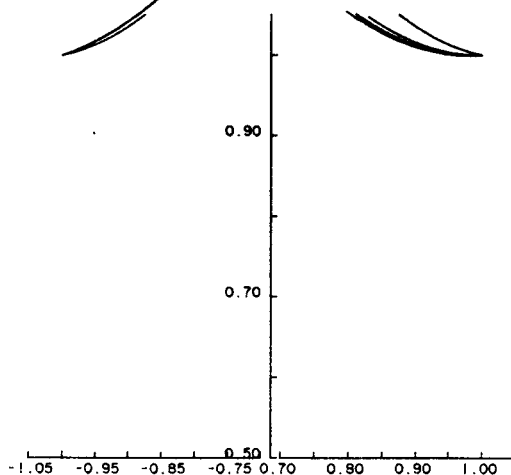
courbes des répartitions en fonction de  $\xi$

eta= .27E+00      dzeta= .74E-01  
 eta= .25E+00      dzeta= .60E-01  
 eta= .21E+00      dzeta= .42E-01  
 eta= .00E+00      dzeta= .00E+00

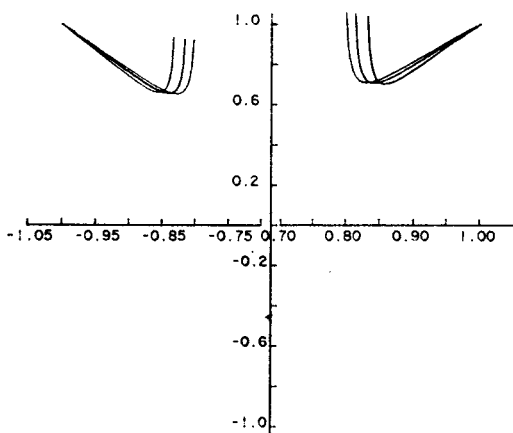
masse volumique



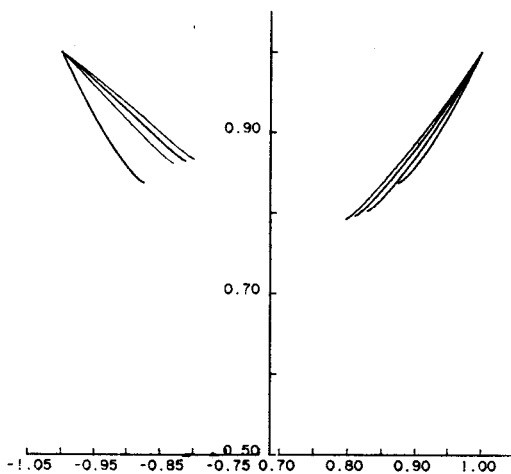
vitesse radiale



vitesse orthoradiale



pression



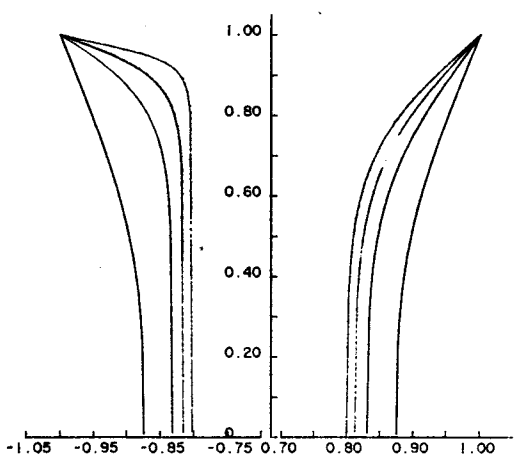
masse vol. ext.  $R_0 = 1.3 \text{ kg/m}^3$   
 $\gamma = 1.4$   
 $\alpha = 1.0$

angle (courant)  $\theta = 45.0 \text{ deg}$   
 energie (explosion)  $E = .10 \text{ E}+10$   
 vitesse (courant)  $U = 280.00 \text{ m/s}$   
 pression ext.  $P = .102 \text{ E}+06 \text{ Pa}$

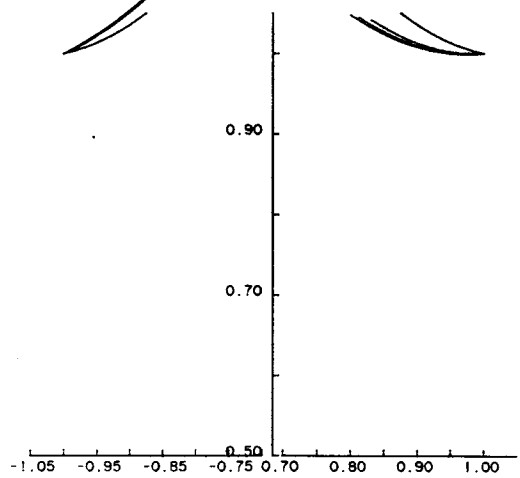
courbes des répartition en fonction de  $\xi$

eta= .27E+00	dzeta= .74E-01
eta= .25E+00	dzeta= .60E-01
eta= .21E+00	dzeta= .42E-01
eta= .00E+00	dzeta= .00E+00

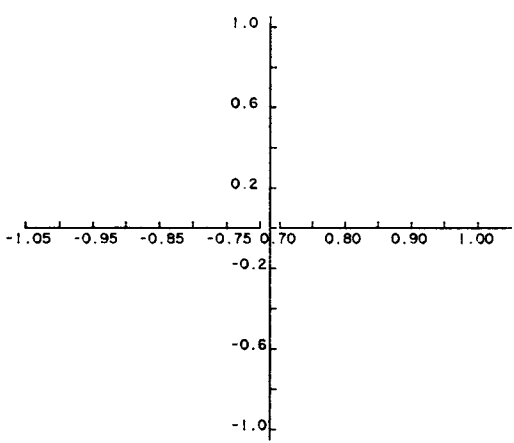
masse volumique



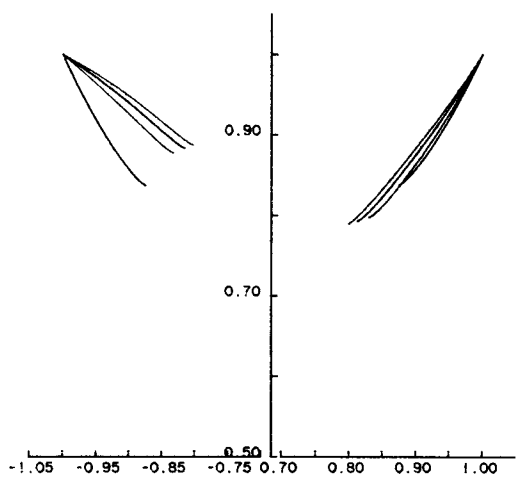
vitesse radiale



vitesse orthoradiale



pression



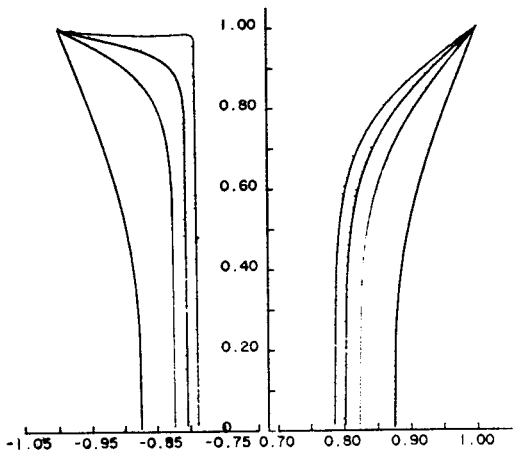
masse vol. ext.  $R_0 = 1.3 \text{ kg/m}^3$   
 $m = 1.4$   
 $\text{pha} = 1.0$

angle (courant)  $\text{teta} = .0 \text{ deg}$   
 energie (explosion)  $E = .10 \text{E}+10$   
 vitesse (courant)  $U = 280.00 \text{ m/s}$   
 pression ext.  $P = .102 \text{E}+06 \text{ Pa}$

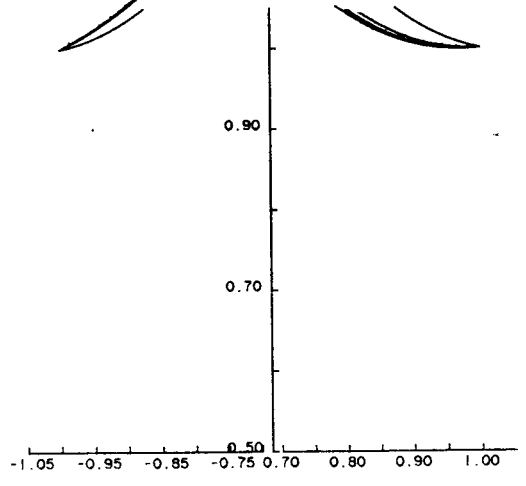
courbes des répartitions en fonction de  $\xi$

$\eta_1 = .30E+00$        $d\eta_1 = .88E-01$   
 $\eta_2 = .27E+00$        $d\eta_2 = .72E-01$   
 $\eta_3 = .23E+00$        $d\eta_3 = .51E-01$   
 $\eta_4 = .00E+00$        $d\eta_4 = .00E+00$

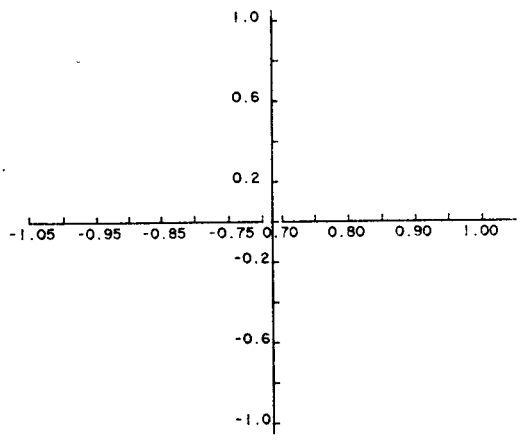
masse volumique



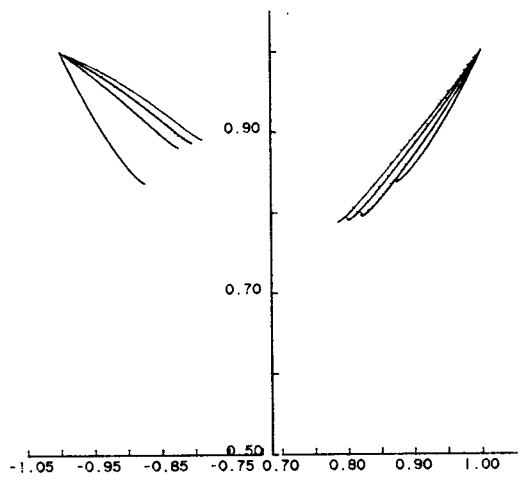
vitesse radiale



vitesse orthoradiale



pression



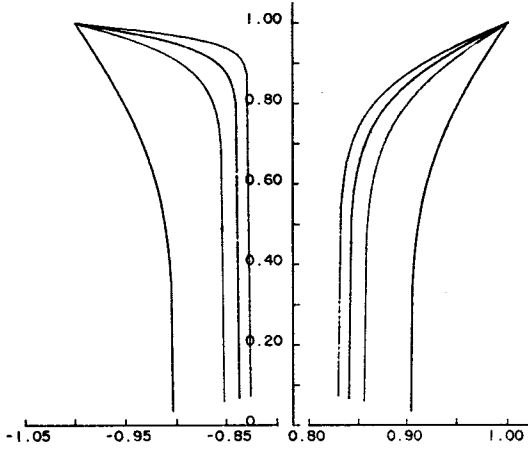
masse vol. ext.  $R_0 = 1.3 \text{ kg/m}^3$   
 $\gamma = 1.4$   
 $\alpha = 1.0$

angle (courant)  $\theta = .0 \text{ deg}$   
 energie (explosion)  $E = .10E+11$   
 vitesse (courant)  $U = 280.00 \text{ m/s}$   
 pression ext.  $P = .102E+06 \text{ Pa}$

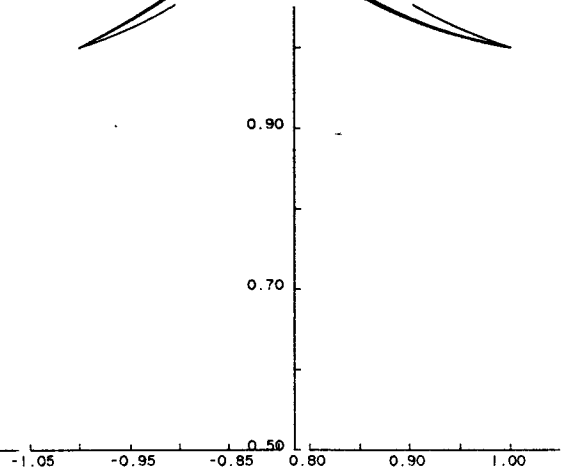
courbes des répartition en fonction de  $\xi$

eta= .30E+00      dzeta= .88E-01  
 eta= .27E+00      dzeta= .75E-01  
 eta= .24E+00      dzeta= .57E-01  
 eta= .00E+00      dzeta= .00E+00

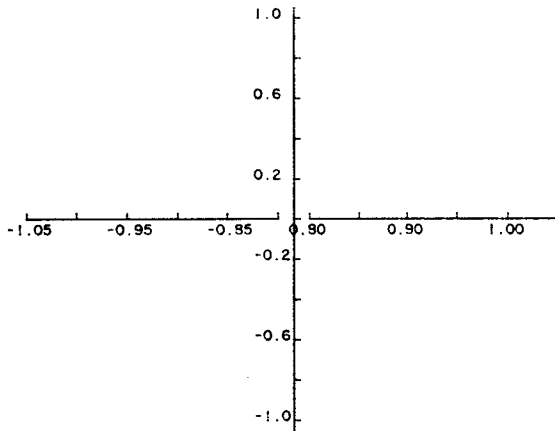
masse volumique



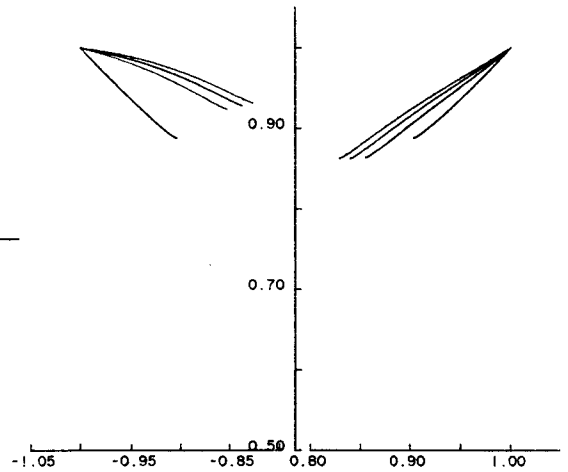
vitesse radiale



vitesse orthoradiale



pression



masse vol. ext.  $R_0 = 1.3 \text{ kg/m}^3$   
 $\gamma = 1.33$   
 $\alpha = 1.2$

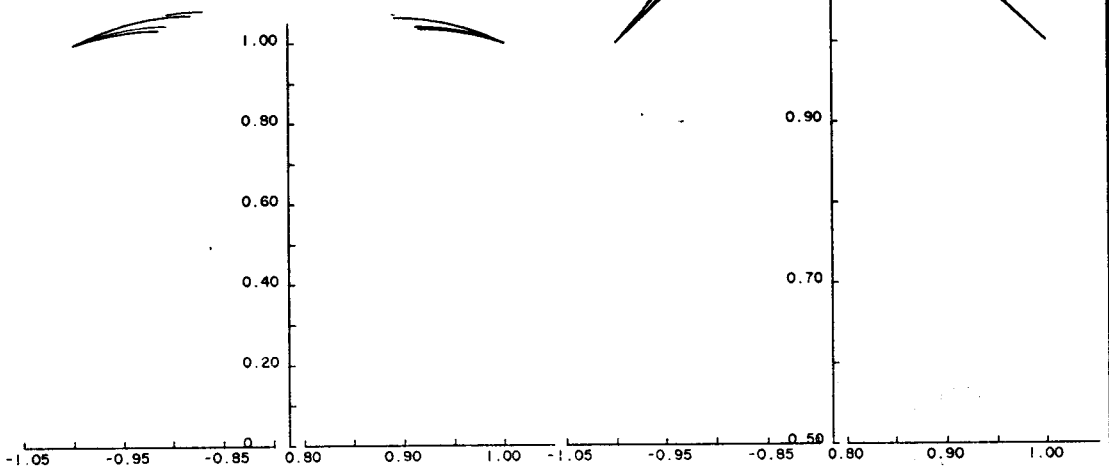
angle (courant)  $\theta = .0 \text{ deg}$   
 energie (explosion)  $E = .10 \text{E}+10$   
 vitesse (courant)  $U = 280.00 \text{ m/s}$   
 pression ext.  $P = .102 \text{E}+06 \text{ Pa}$

courbes des répartitions en fonction de  $\xi$

$\eta = .25E+00$        $d\zeta = .70E-01$   
 $\eta = .20E+00$        $d\zeta = .50E-01$   
 $\eta = .10E+00$        $d\zeta = .10E-01$   
 $\eta = .00E+00$        $d\zeta = .00E+00$

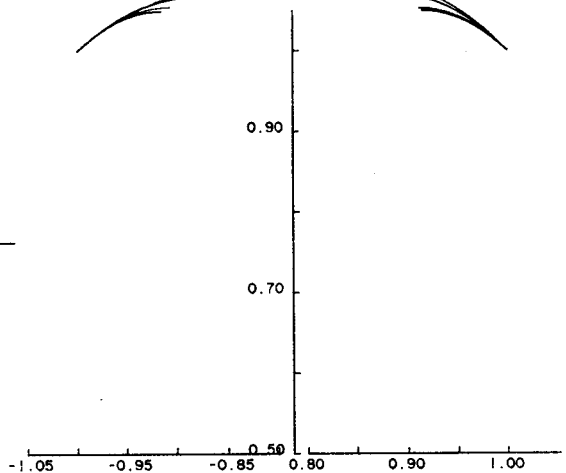
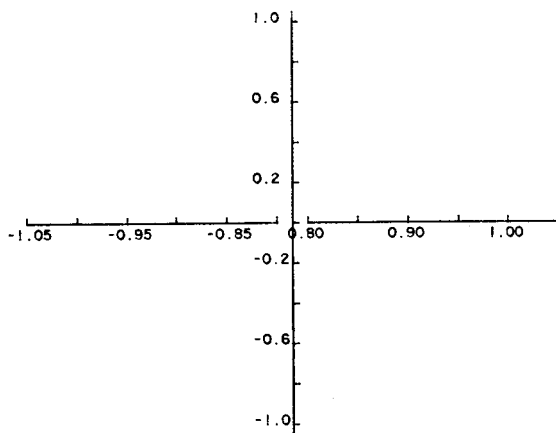
masse volumique

vitesse radiale



vitesse orthoradiale

pression



masse vol. ext.  $R_0 = 1.3 \text{ kg/m}^3$   
 $\gamma = 1.4$   
 $\alpha = 2.0$

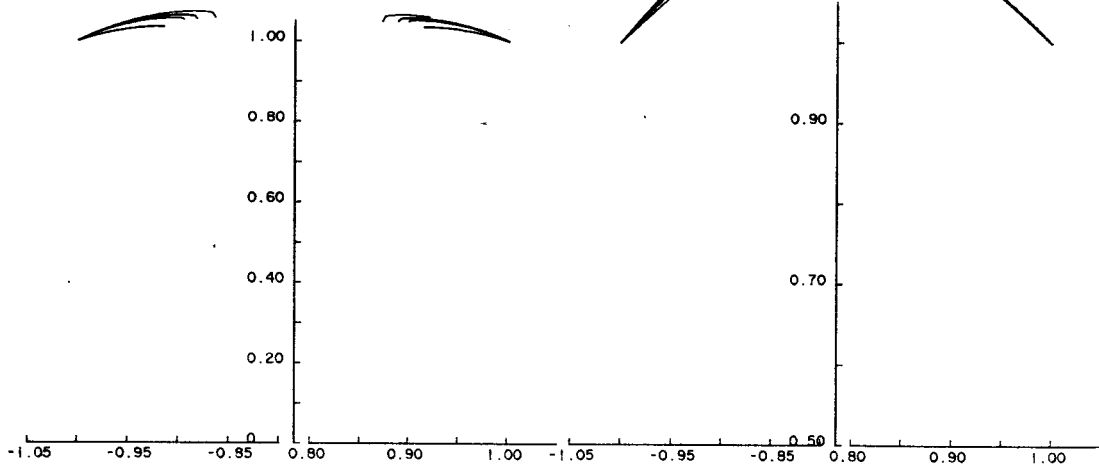
angle (courant)  $\theta = .0 \text{ deg}$   
 energie (explosion)  $E = .10E+10$   
 vitesse (courant)  $U = 280.00 \text{ m/s}$   
 pression ext.  $P = .102E+06 \text{ Pa}$

courbes des répartitions en fonction de  $\xi$

eta= .28E+00 dzeta= .80E-01  
 eta= .20E+00 dzeta= .50E-01  
 eta= .12E+00 dzeta= .30E-01  
 eta= .00E+00 dzeta= .00E+00

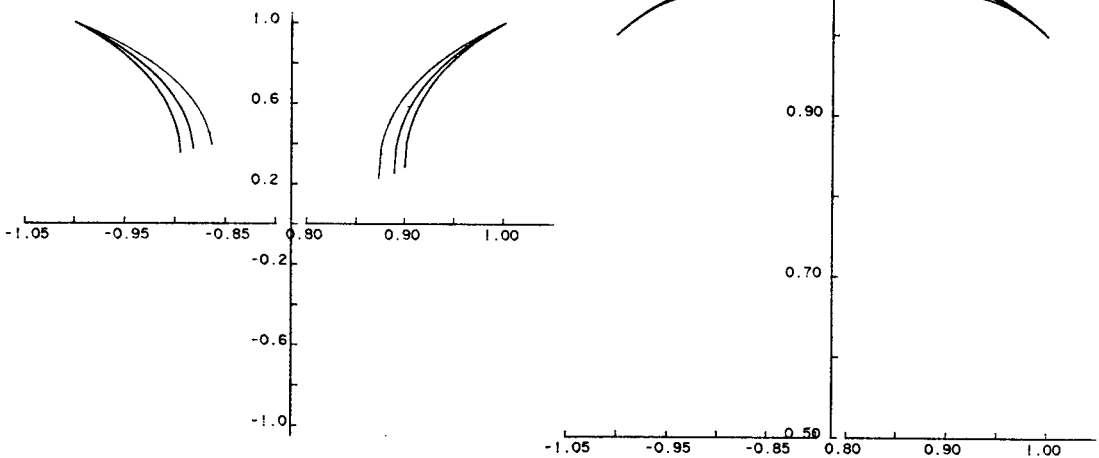
masse volumique

vitesse radiale



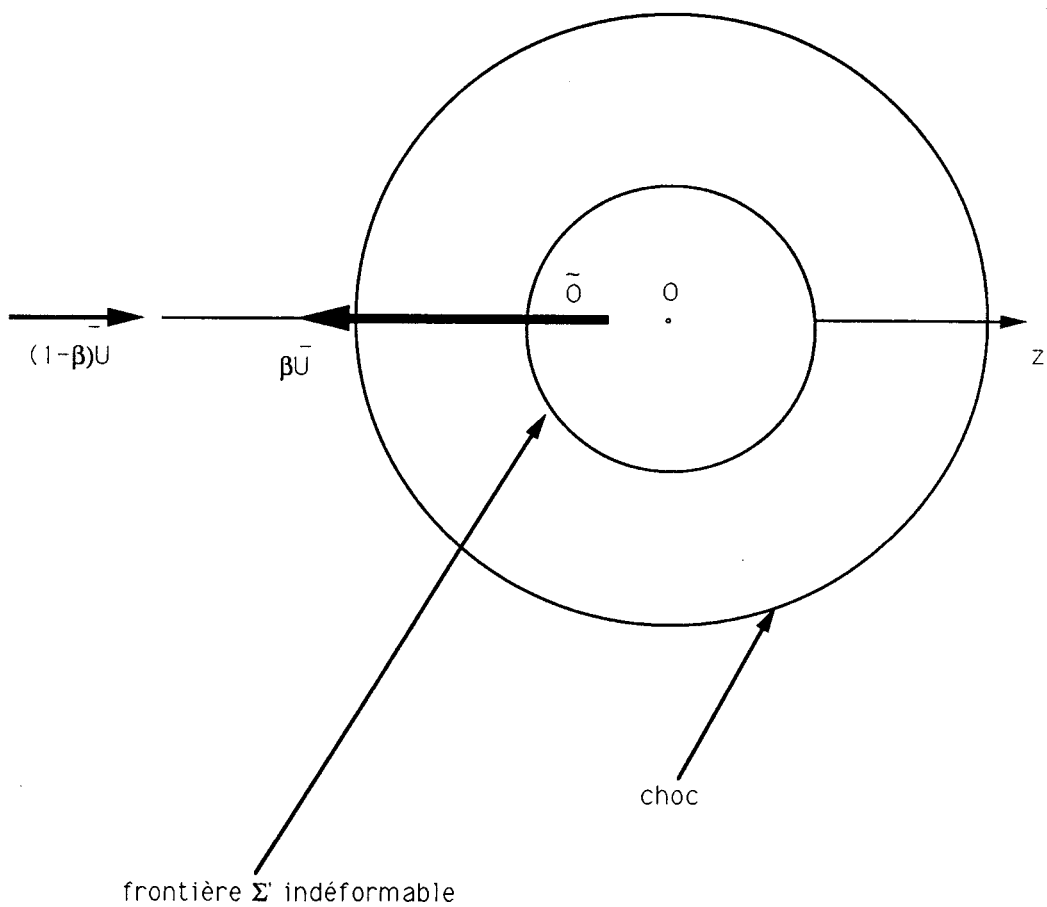
vitesse orthoradiale

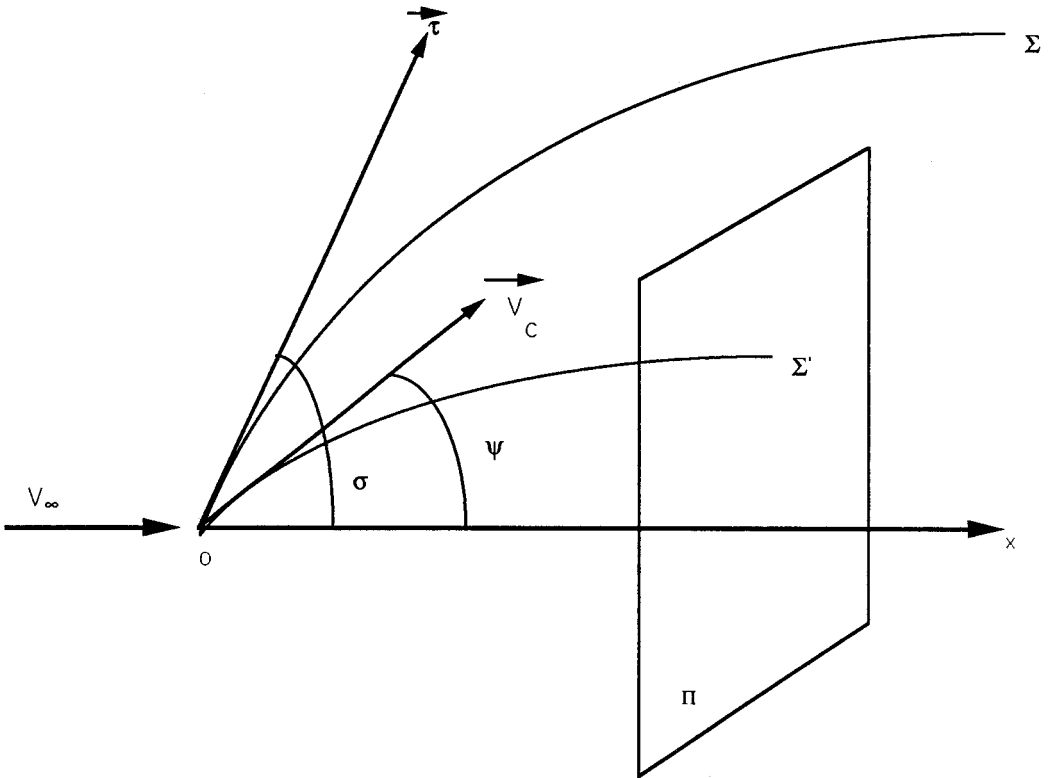
pression



masse vol. ext.  $R_0 = 1.3 \text{ kg/m}^3$   
 $\gamma = 1.4$   
 $\alpha = 2.0$

angle (courant)  $\theta = 45.0 \text{ deg}$   
 energie (explosion)  $E = .10 \text{ E}+10$   
 vitesse (courant)  $U = 280.00 \text{ m/s}$   
 pression ext.  $P = .102 \text{ E}+06 \text{ Pa}$





$\Pi$  : plan orthogonal à  $(Ox)$

$Ox$  : axe de l'obstacle  $\Sigma'$

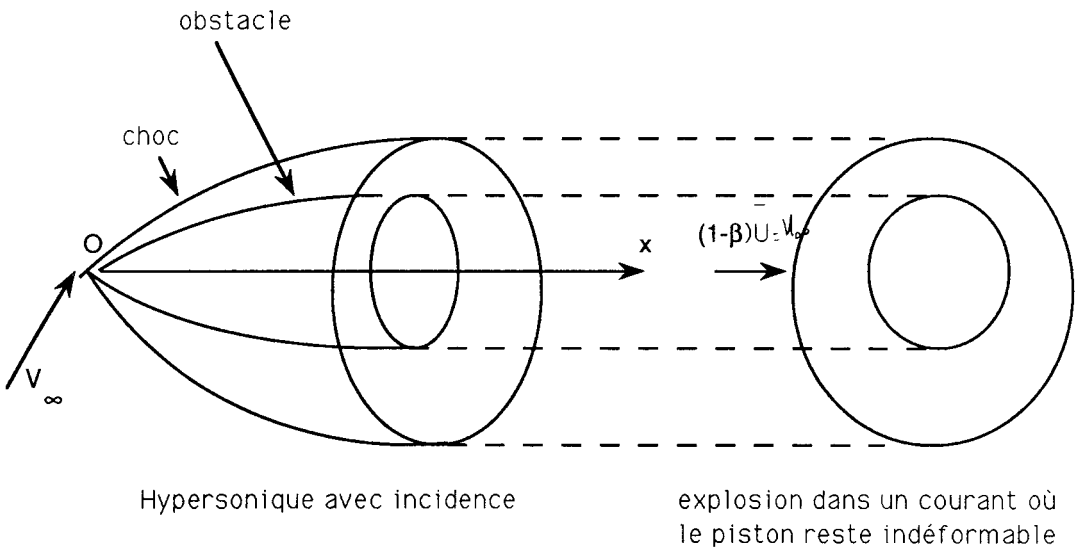
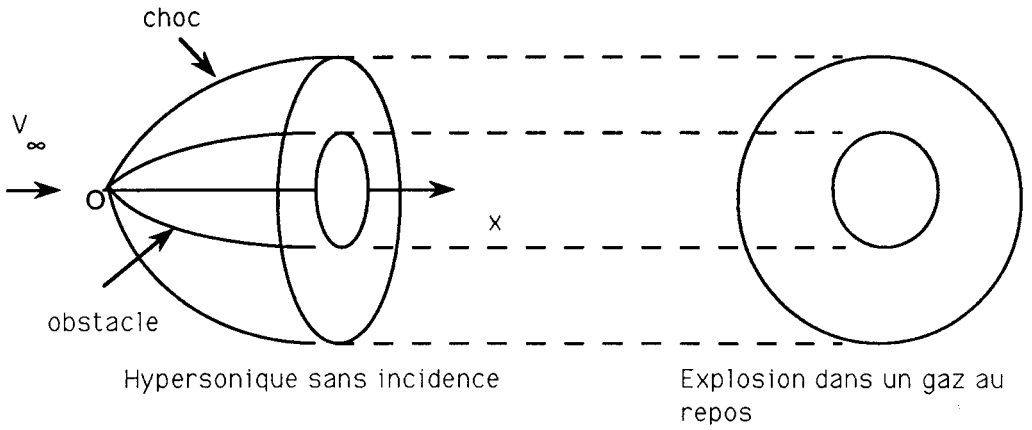
$V_\infty$  : vitesse amont

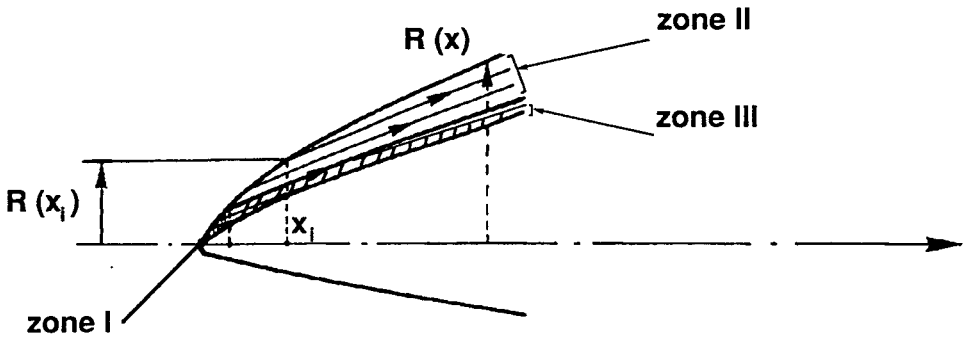
$V_c$  : vitesse aval

$\sigma$  : angle formé dans le plan  $\Pi_1$  par la vitesse amont et la tangente au choc

$\Pi_1$  : plan formé par  $V_c$  et  $V_\infty$



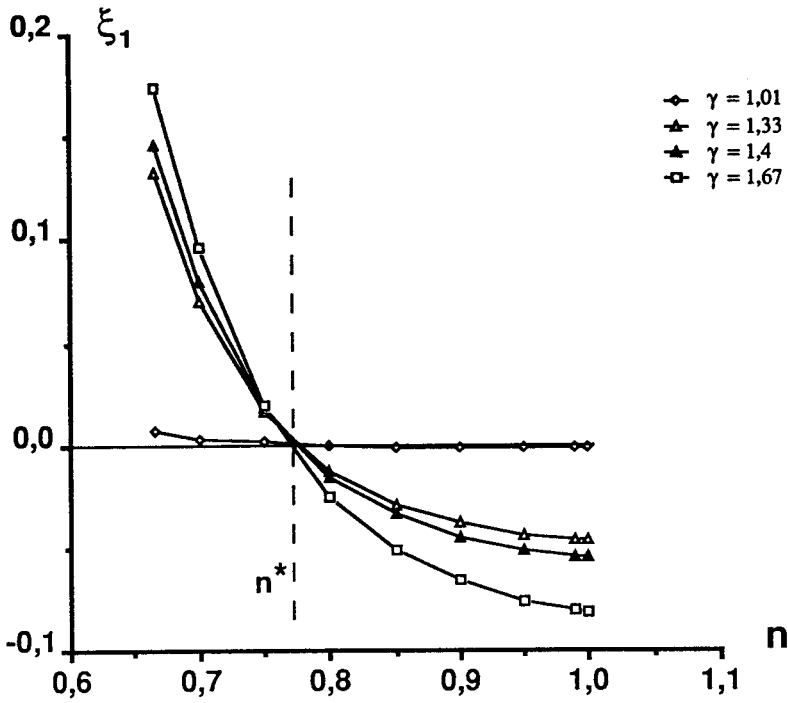




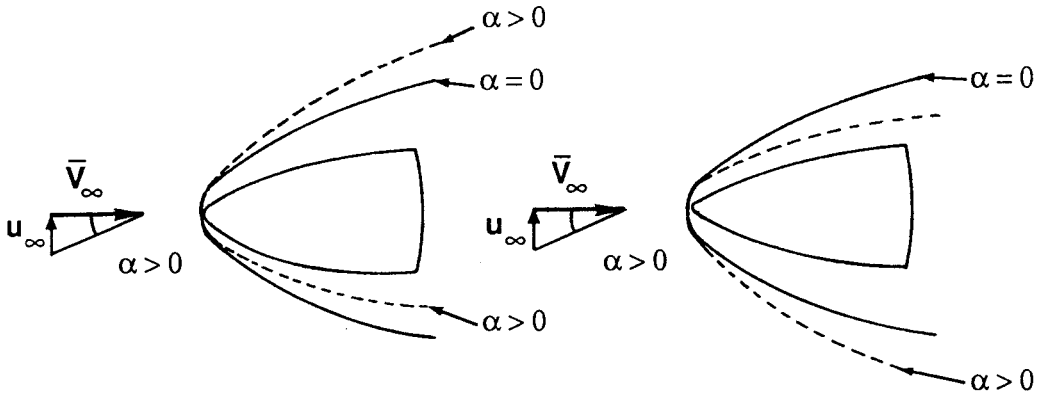
corps à émoussement faible

$$2 / (\gamma + 2) < n < 1$$

Structure de la couche de choc



Variation de  $\xi_1$  avec  $n$

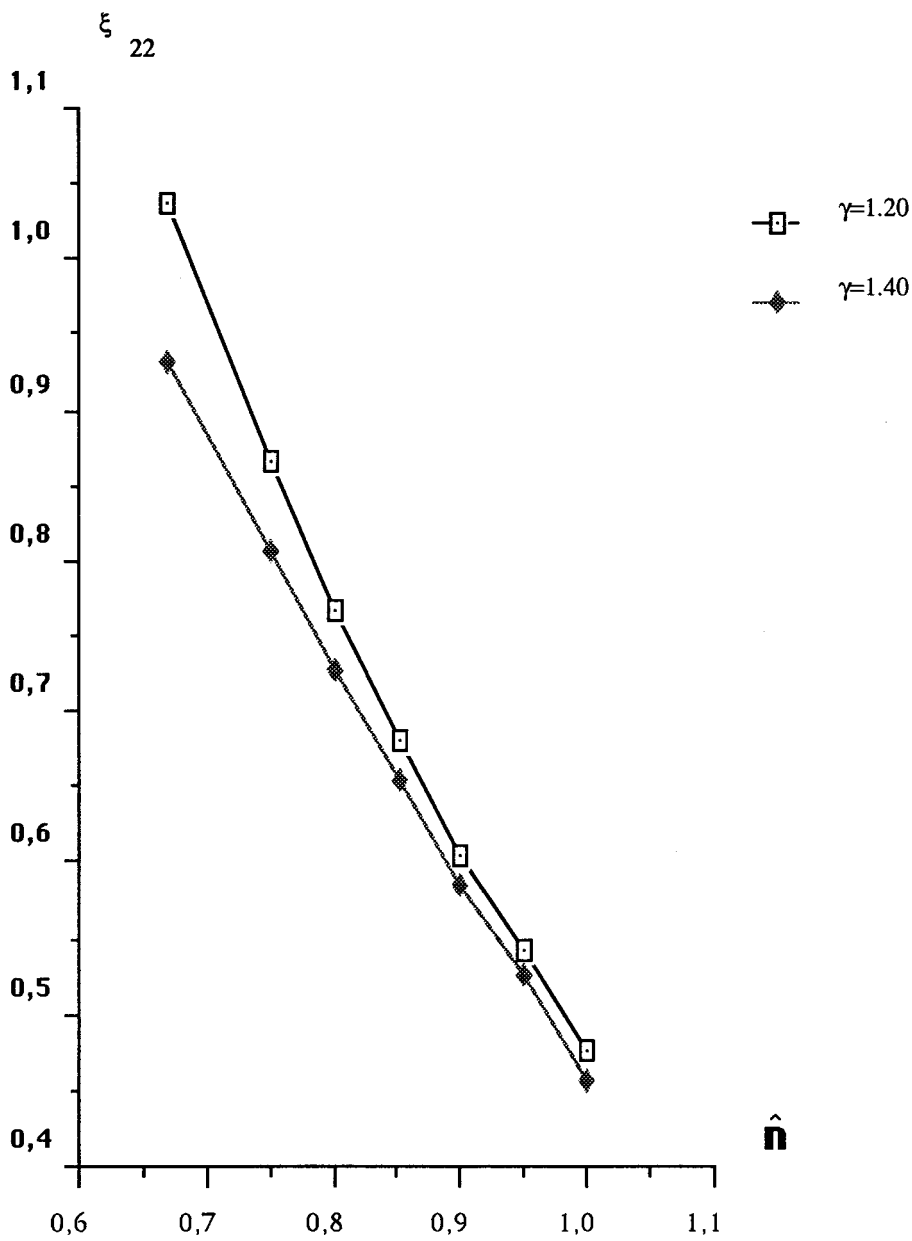


cas  $\xi_1 > 0$

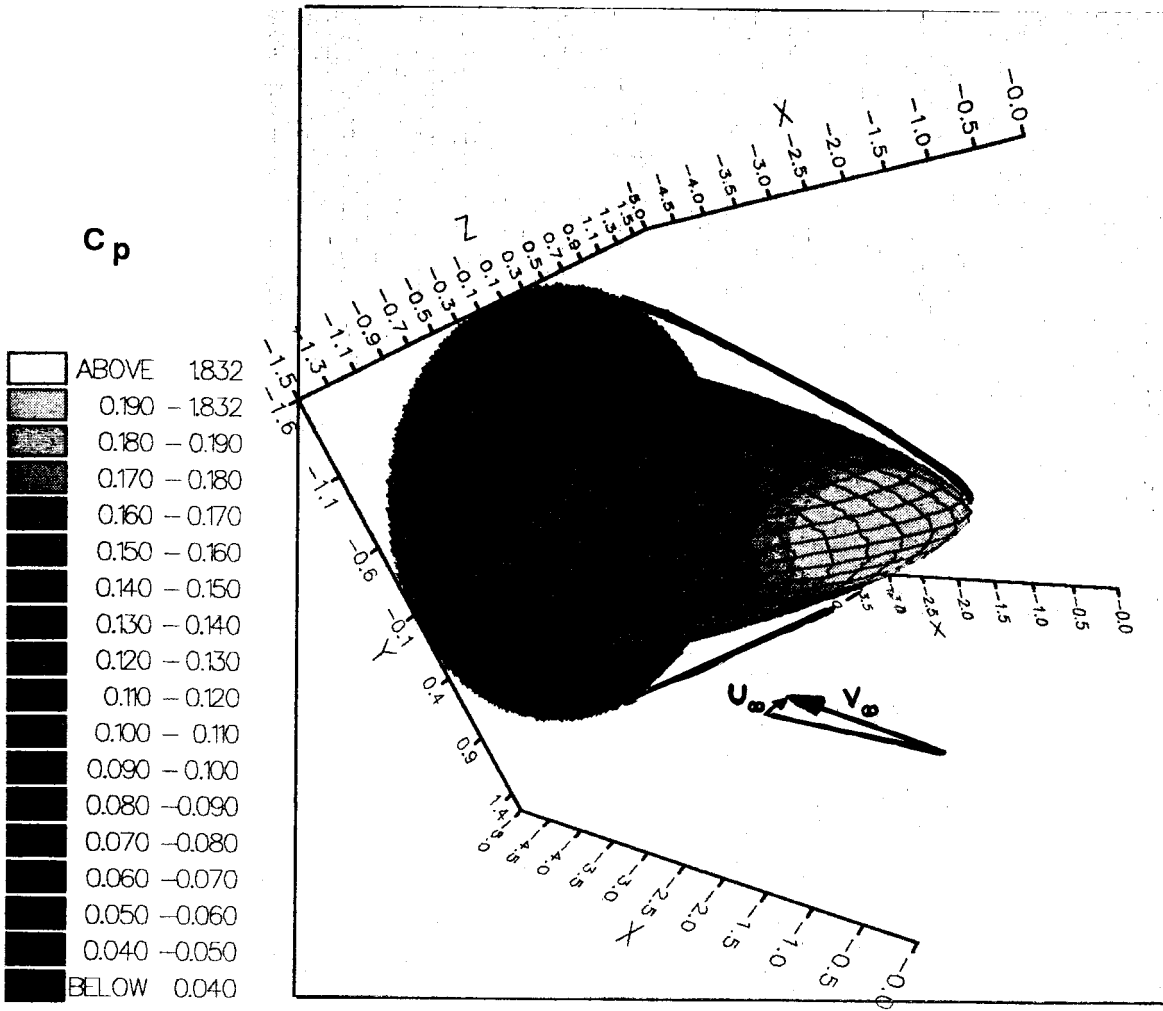
cas  $\xi_1 < 0$

$2/3 \leq n < n^*$

$n^* < n \leq 1$



# Vue 3D ogive hypersonique champ de pressions



vue en perspective

Alpha = .100

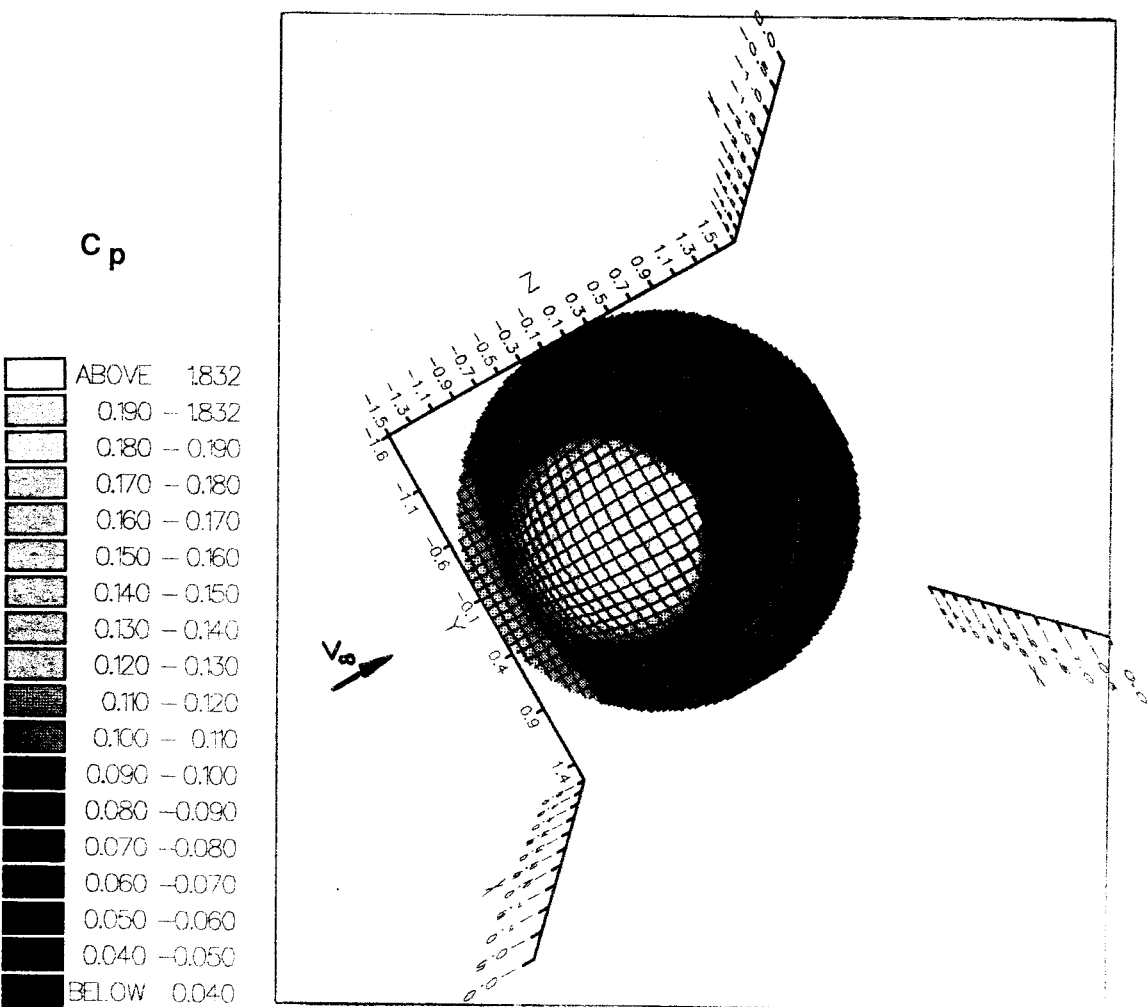
Minf = 8.00

n = **.667**

Gamma = 1.40

Tau = .47

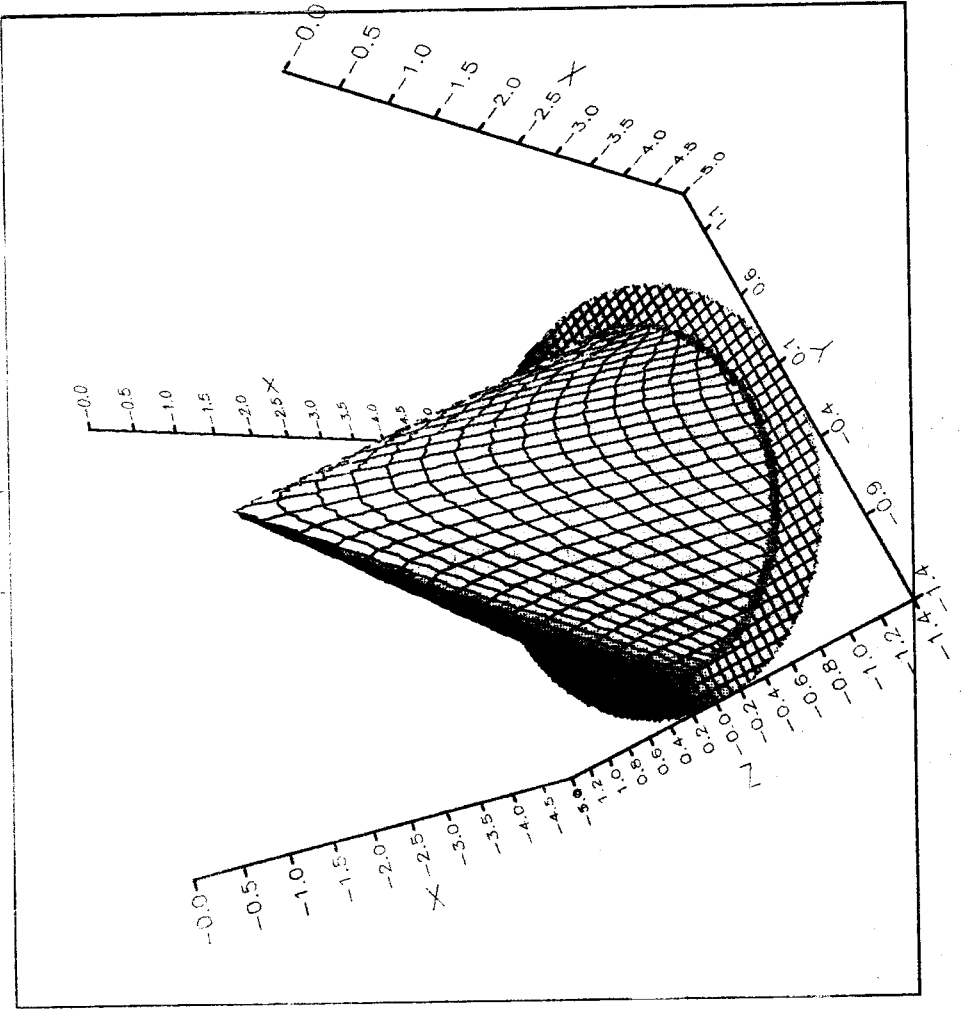
# Vue 3D ogive hypersonique champ de pressions



vue de face

 $\alpha = .100$  $M_{inf} = 8.00$  $n = .700$  $\gamma = 1.40$  $\tau = .47$

Vue 3D Ogive hypersonique  
 Champ de pressions



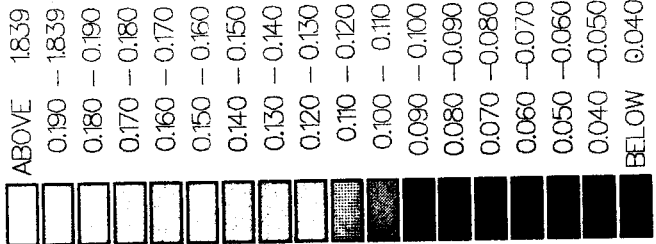
Alpha=.100

Minf=25.00

n=1.000

Gamma=1.40

Tau=.47



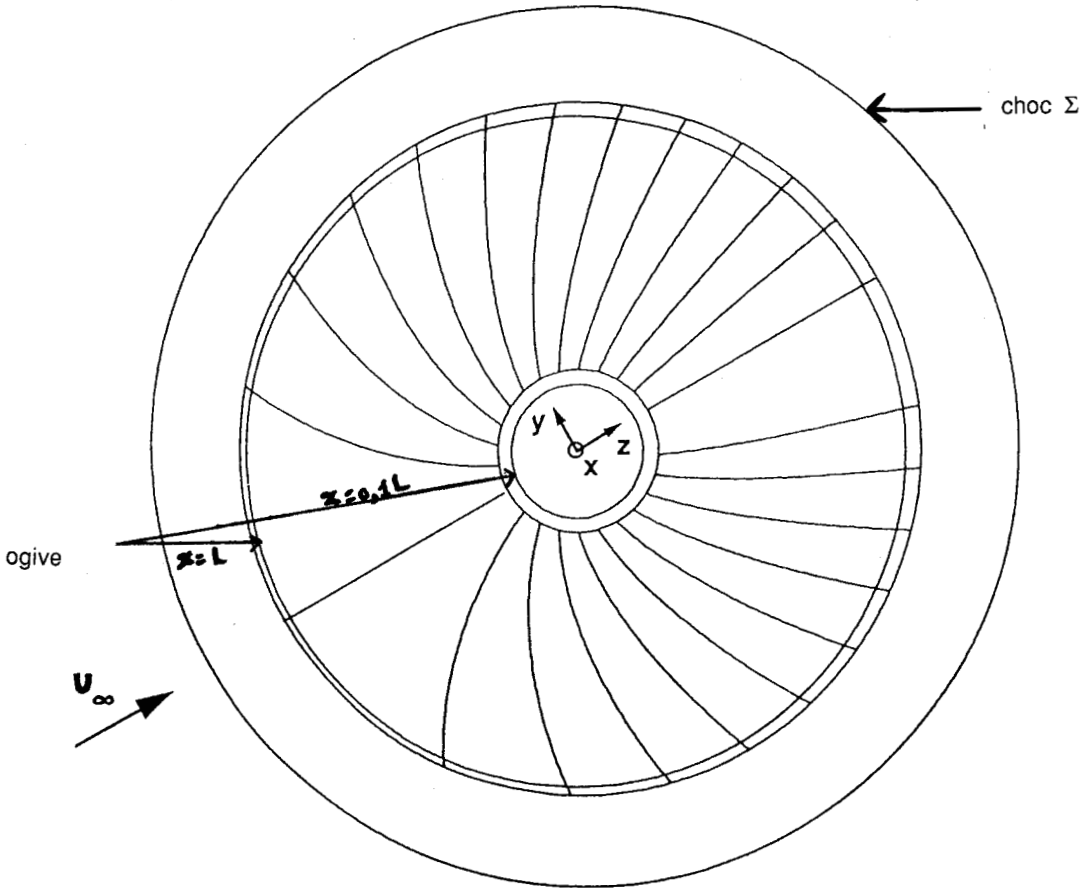
$\text{Alpha} = .100$

$\text{Minf} = 8.00$

$n = .700$

$\text{Gamma} = 1.40$

$x_i = 0.10L$



**Déviation des lignes de courant**

vue de face



DEVIATION DES LIGNES DE COURANT  
PLAN DE SYMETRIE

