55376
1990
15

N° d'ordre : 583

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Christine SACRÉ

Enveloppes d'holomorphie des domaines tubes. Enveloppes polynomiales de compacts de C^n invariants sous l'action de certains groupes compacts.

Soutenue le 18 décembre 1990 devant la Commission d'Examen :

Président :	G. CŒURÉ, Université de Lille Flandres Artois
Rapporteurs :	A. DEBIARD, Université de Paris Nord
	B. GAVEAU, Université de Paris VI
	M. RAÏS, Université de Poitiers
Examinateur :	J.J. LŒB, Université d'Angers

Je remercie en premier lieu Gérard Cœuré d'avoir accepté la présidence du jury. Son influence a été déterminante sur tout mon 3ème cycle et sa présence constante a été un encouragement précieux durant la préparation de ce travail.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Jean-Jacques Lœb qui a dirigé ma thèse. Malgré les difficultés liées à l'éloignement (Angers-Lille), je l'ai toujours trouvé très disponible. Avec une grande sûreté, il a orienté mes recherches. Je lui dois beaucoup.

La seconde partie de cette thèse est basée sur un article d'Amédée Debiard et Bernard Gaveau. En acceptant de participer à ce jury, ils montrent l'intérêt qu'ils portent à mes résultats et je les en remercie.

Ma gratitude va également à Mustapha Raïs qui, s'intéressant à ce sujet, a bien voulu être rapporteur de ce travail.

J'ai eu l'honneur d'exposer différentes parties de ma thèse lors du séminaire Lelong-Dolbeaut-Skoda, du séminaire d'Analyse Complexe de l'U.F.R. et des Journées Complexes du Sud. J'en remercie les organisateurs.

Venir à bout de ce travail de longue haleine aurait été impossible sans le soutien des personnes que j'ai cotoyées à l'U.F.R. Il me serait difficile de les citer toutes. Dans l'équipe d'Analyse, je pense particulièrement à François Berteloot, Mostafa Mbekhta, Karl Oeljeklaus et Raymonde Bérat. Les premiers ont consacré beaucoup de temps à répondre à mes angoisses mathématiques et administratives ; quant à la dernière, elle a dactylographié cette thèse avec le plus grand soin et m'a toujours accueillie avec beaucoup de gentillesse.

Je remercie également le personnel de reprographie de l'U.F.R. de Mathématiques.

PLAN

PREMIÈRE PARTIE

ENVELOPPE D'HOLOMORPHIE D'UN DOMAINE TUBE DE $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n$ À FIBRES CONNEXES

1. Présentation du résultat.

Soit V une variété analytique complexe. Un domaine (X, π) étalé au-dessus de $V \times \mathbf{C}^n$ est dit *étalé en tubes* s'il existe τ dans $\mathcal{C}(X \times \mathbf{R}^n, X)$ tel que :

$$\forall Z \in X \quad \tau(Z, 0) = Z$$

et
$$\forall y_0 \in \mathbf{R}^n,\ \forall Z \in X \quad \pi(\tau(Z, y_0)) = (\pi_1(Z), \pi_2(Z) + y_0)$$

où π_1 et π_2 désignent respectivement les projections de X sur V et $\mathbf{C}^n$.

Dans le cas particulier d'un domaine étalé en tubes au-dessus de $\mathbf{C}^n$, on parle de *tube étalé* ; pour un domaine de $V \times \mathbf{C}^n$ stable par les translations réelles de la seconde coordonnée, on parle de *domaine tube*.

Nous établissons le résultat suivant :

Théorème.- *Soient Ω un domaine tube de $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n$, p_1 la projection de Ω sur $\mathbf{C}^m$ et $\omega = p_1(\Omega)$. On suppose que pour tout x de ω, la fibre $p_1^{-1}(x)$ est connexe. Désignons par $\hat{\Omega}$ (resp. $\hat{\omega}$) l'enveloppe d'holomorphie de Ω (resp. ω). Alors $\hat{\Omega}$ est un domaine tube de $\hat{\omega} \times \mathbf{C}^n$ qui se projette surjectivement sur $\hat{\omega}$ avec des fibres convexes dans $\mathbf{C}^n$.*

Ce théorème étend aux enveloppes d'holomorphie le résultat de Kiselman sur la projection d'un domaine tube pseudoconvexe de $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n$ à fibres connexes ([3]). Il étend également au cas de plusieurs variables un résultat de Mokri sur l'enveloppe d'holomorphie d'un domaine de type

$$\{(x, t) \in \omega \times \mathbf{C} \mid r_-(x) < \operatorname{Im} t < r_+(x)\}$$

où ω est un domaine de $\mathbf{C}^m$ ([5]).

On utilisera la notion d'enveloppe d'holomorphie dans la catégorie (S) des variétés étalées au-dessus d'une variété de Stein donnée S dont la construction est développée dans [4] par exemple. Etant donné X dans (S), on notera $\hat{X}$ son enveloppe d'holomorphie dans (S).

Etant donnés X et Y dans (S) et f dans $\mathcal{O}(X, Y)$, c'est-à-dire f holomorphe de X dans Y, il existe un unique $\hat{f}$ dans $\mathcal{O}(\hat{X}, \hat{Y})$ tel que : $v \circ f = \hat{f} \circ u$ où u et v sont les injections canoniques de X et Y dans $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ respectivement. De plus, l'application $f \mapsto \hat{f}$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

D'après [6], si (X,π) est une variété étalée au-dessus de $\hat{Y}$ variété de Stein, alors $(\hat{X},\hat{\pi})$ est une variété étalée au-dessus de $\hat{Y}$. On en déduit en prenant $\pi = v\circ f$ que si f est localement biholomorphe, $\hat{f}$ a aussi cette propriété.

2. Quotient par composantes connexes des fibres.

Nous commençons par établir le résultat suivant qui intervient dans la démonstration du théorème, et qui a un intérêt propre. Il s'agit d'ailleurs d'une généralisation aux variétés de Stein étalées en tubes d'un corollaire du principe du minimum de Kiselman ([3]).

Proposition.- *Soit (X,π) une variété de Stein étalée en tube au-dessus de $S\times \mathbf{C}^n$ où (S,k) est une variété de Stein étalée au-dessus de $\mathbf{C}^m$. Soient π_1 et π_2 les projections de X sur S et $\mathbf{C}^n$ respectivement et R la relation d'équivalence sur X définie par : ZRZ' si $\pi_1(Z)=\pi_1(Z')=x$ et Z et Z' sont dans la même composante connexe de $\pi_1^{-1}(x)$. Alors, si on note $X \xrightarrow{p} X/R$ l'application quotient, $(X/R,\dot{\pi}_1)$ est une variété de Stein étalée au-dessus de S avec $\pi_1=\dot{\pi}_1\circ p$.*

■ a) Commençons par montrer que p *est ouverte*. Soit U un ouvert de X et $Z_0\in p^{-1}(p(U))$, c'est-à-dire qu'il existe $Z_1\in U$ tel que Z_0RZ_1. Montrons que $p^{-1}(p(U))$ contient un voisinage de Z_0. Pour cela, il suffit de trouver un voisinage U' de Z_0 et Z_1 à fibres connexes. En effet, $U'\cap\pi_1^{-1}\big(\pi_1(U\cap U')\big)$ sera alors le voisinage de Z_0 cherché.

Notons T_{Z_0} la classe d'équivalence de Z_0. T_{Z_0} est une variété de Stein connexe étalée par π_2 au-dessus de $\mathbf{C}^n$; d'après [1], π_2 est, par conséquent, injective sur T_{Z_0} et $\pi_2(T_{Z_0})$ est convexe. On note π_0^{-1} la réciproque de la restriction de π à T_{Z_0} et on définit la courbe f continue de $[0,1]$ dans T_{Z_0} par :

$$f(t)=\pi_0^{-1}[\big(\pi_1(Z_0),t\pi_2(Z_0)+(1-t)\pi_2(Z_1)\big)]\,. \tag{1}$$

Pour tout t de $[0,1]$, il existe un voisinage $U(t)$ de $f(t)$ homéomorphe par π à $\pi_1\big(U(t)\big)\times\pi_2\big(U(t)\big)$ et une section f_t de π au-dessus de $\pi(U(t))$ telle que : $f_t\circ\pi\circ f(t)=f(t)$.

On peut supposer $\pi_2\big(U(t)\big)$ convexe ; d'après (1), f_t coïncidera alors avec π_0^{-1} sur

$$\{\pi_1(Z_0)\}\times\{\pi_2(U(t))\cap[\pi_2(Z_0),\pi_2(Z_1)]\}\ . \tag{2}$$

Par compacité, on peut supposer que $\pi_1(U(t))$ est un voisinage V connexe de $\pi_1(Z_0)$ indépendant de t dans $[0,1]$. Soit $W = \bigcup_{t\in[0,1]} \pi_2(U(t))$. Alors $V \times W$ est un ouvert connexe de $S \times \mathbf{C}^n$. De plus, si t et t' sont tels que $W(t,t') = \pi_2(U(t)) \cap \pi_2(U(t')) \neq \emptyset$, alors $W(t,t')$ est convexe et $W(t,t') \cap [\pi_2(Z_0), \pi_2(Z_1)]$ est convexe non vide donc f_t et $f_{t'}$ coïncident toutes deux avec π_0^{-1} sur $\{\pi_1(Z_0)\} \times W(t,t') \cap [\pi_2(Z_0), \pi_2(Z_1)]$ d'après (2). On en déduit que les sections f_t se recollent en une section f de π. L'image par f de $V \times W$ est un voisinage connexe de Z_0 et Z_1 dont les fibres $\{f(v,z), z \in W\}$ sont connexes pour tout v dans V.

b) Montrons maintenant que X/R *est un espace séparé.*

Soient $\dot{Z}$ et $\dot{Z}' \in X/R$, $\dot{Z} \neq \dot{Z}'$, $x = \dot{\pi}_1(\dot{Z})$ et $x' = \dot{\pi}_1(\dot{Z}')$

— Si $x \neq x'$, soient V_x et $V_{x'}$ des ouverts disjoints de S contenant respectivement x et x'. Alors $\dot{\pi}_1^{-1}(V_x)$ et $\dot{\pi}_1^{-1}(V_{x'})$ sont disjoints et, d'après a), ce sont des voisinages de $\dot{Z}$ et $\dot{Z}'$.

— Si $x = x'$, soient Z et Z' des représentants de $\dot{Z}$ et $\dot{Z}'$ tels que $\pi_2(Z) = y \in i\mathbf{R}^n$ et $\pi_2(Z') = y' \in i\mathbf{R}^n$. Pour V_x voisinage de x assez petit, il existe des voisinages V_Z, $V_{Z'}$, V_y et $V_{y'}$ de Z, Z', y, y' respectivement, V_y et $V_{y'}$ étant connexes, tels que π soit un homéomorphisme de V_Z sur $V_x \times V_y$ et de $V_{Z'}$ sur $V_x \times V_{y'}$. Pour V_x assez petit, les saturés par R de V_Z et $V_{Z'}$ sont disjoints, ce qui montre que $p(V_Z)$ et $p(V_{Z'})$ sont disjoints et, d'après a), ce sont des voisinages de $\dot{Z}$ et $\dot{Z}'$.

En effet, dans le cas contraire, il existerait une suite (x_k) de S tendant vers x et des suites (Z_k) de V_Z et (Z'_k) de $V_{Z'}$ telles que : $\pi_1(Z_k) = \pi_1(Z'_k) = x_k$ et $Z_k R Z'_k$. Par connexité des fibres $(\pi_{|V_Z})^{-1}(\{x_k\} \times V_y)$ et $(\pi_{|V_{Z'}})^{-1}(\{x_k\} \times V_{y'})$, on peut prendre Z_k et Z'_k tels que : $\pi(Z_k) = (x_k, y)$ et $\pi(Z_{k'}) = (x_k, y')$. (Z_k) tend alors vers Z et (Z'_k) vers Z'.

Soit Γ_k la composante connexe de $\pi_1^{-1}(x_k)$ contenant Z_k et Z'_k. D'après [1], (Γ_k, π_2) est univalente et $\pi_2(\Gamma_k)$ est un ouvert convexe de $\mathbf{C}^n$. On définit alors j_k au voisinage de $[0,1]$ à valeurs dans Γ_k par :

$$\pi_2(j_k(z)) = z\pi_2(Z_k) + (1-z)\pi_2(Z'_k) = zy + (1-z)y' .$$

Soit d la fonction distance sur X. X est de Stein et j_k est holomorphe, donc $-\log d \circ j_k$ est sousharmonique au voisinage de $[0,1]$.

De plus, $-\log d \circ j_k$ est indépendante de $\operatorname{Im} z$ puisque Γ_k est un tube étalé au-dessus de $\mathbf{C}^n$.

Par conséquent, $-\log d \circ j_k$ est convexe sur $[0,1]$ donc majorée par $\max(-\log d(Z_k)), -\log d(Z'_k))$. Comme (Z_k) tend vers Z et (Z'_k) tend vers Z', $-\log d \circ j_k$ est majorée indépendamment de k sur $[0,1]$, il existe α tel que $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall t \in [0,1], d \circ j_k(t) > \alpha > 0$. Comme α est indépendant de t, on peut refaire la construction du a) à partir de Z_k, Z'_k et de la courbe j_k de $[0,1]$ de T_{Z_k} et obtenir ainsi un voisinage de Z_k et $Z_{k'}$ à fibres connexes dont la taille ne dépend que de α et non de k. Pour k assez grand, Z et Z' seront dans ce voisinage, ce qui contredit $\dot{Z} \neq \dot{Z}'$.

c) $(X/R, \dot{\pi}_1)$ *est alors une variété étalée au-dessus de* S. En effet, $\dot{\pi}_1 \circ p = \pi_1$ donc $\dot{\pi}_1$ est continue et ouverte. De plus, si $Z_0 \in X$ et si V est un voisinage de Z_0 homéomorphe par π à un rectangle $U_1 \times U_2$ de $S \times \mathbf{C}^n$ avec U_2 connexe alors $\dot{\pi}_1$ est injective sur $p(V)$ qui est donc une carte locale pour $\dot{\pi}_1$ et $\dot{Z}_0$.

d) Montrons enfin que X/R *est une variété de Stein.*

Pour cela, il suffit de montrer que pour tout x_0 de S, il existe un voisinage ω_0 de x_0 tel que $\dot{\pi}_1^{-1}(\omega_0)$ soit de Stein ([2]). Soit x_0 dans S et ω_0 un voisinage de x_0 tel que $\pi_1^{-1}(\omega_0)$ soit de Stein (ce qui est possible car X est de Stein). Soit ψ une fonction plurisousharmonique d'exhaustion sur $Y = \pi_1^{-1}(\omega_0)$ et soit $\dot{Y} = \dot{\pi}_1^{-1}(\omega_0) = p(Y)$.

Pour $\dot{Z}$ dans $\dot{Y}$, on pose : $\varphi(\dot{Z}) = \inf\{\psi(Z) \mid p(Z) = \dot{Z}\}$. Il est clair que φ est d'exhaustion dans $\dot{Y}$. Soit $\dot{Z}$ dans $\dot{Y}$, $\dot{V}$ un voisinage de $\dot{Z}$ inclus dans $\dot{Y}$ et biholomorphe par $\dot{\pi}_1$ à ω, lui-même biholomorphe par k à un ouvert connexe de $\mathbf{C}^m$ et tel que $\pi_1^{-1}(\omega)$ soit de Stein.

D'après [3], pour tout $\dot{Z}$ de X/R, π_2 est injective sur $p^{-1}(\dot{Z})$. De plus, si Z et Z' dans $\pi_1^{-1}(\omega) = p^{-1}(\dot{V})$ sont tels que $p(Z) \neq p(Z')$ alors $\dot{\pi}_1(p(Z)) \neq \dot{\pi}_1(p(Z'))$ donc $\pi_1(Z) \neq \pi_1(Z')$. $(p^{-1}(\dot{V}), \pi)$ est donc univalente au-dessus de $\omega \times \mathbf{C}^n$ donc s'identifie à un ouvert de $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n$. Supposons un instant démontré que $p^{-1}(\dot{V})$ est une composante connexe de $\pi_1^{-1}(\omega)$. C'est alors une variété de Stein à fibres connexes, ce qui permet d'appliquer le principe du minimum de Kiselman ([3]). φ est plurisousharmonique sur $\dot{V}$. Elle l'est donc sur $\dot{Y}$. Comme φ est d'exhaustion sur $\dot{Y}$, variété étalée au-dessus de $\mathbf{C}^m$, $\dot{Y}$ est une variété de Stein, ce qui suffit d'après [2] pour conclure que $(X/R, \dot{\pi}_1)$ est une variété de Stein.

Il reste donc à montrer que $p^{-1}(\dot V)$ est une composante connexe de $\pi_1^{-1}(\omega)$.

$\dot V$ est une composante connexe de $\dot\pi_1^{-1}(\omega)$. En effet, sinon, il existerait W connexe tel que $\dot V \subsetneq W \subset \dot\pi_1^{-1}(\omega)$. Soit U un ouvert connexe tel que $U \subset W$, $U \not\subset \dot V$, $U \cap \dot V \neq \emptyset$ et $\dot\pi_{1|U}$ est un homéomorphisme de U sur $\dot\pi_1(U)$. Alors, $(\dot\pi_{1|U})^{-1}$ et $(\dot\pi_{1|\dot V})^{-1}$ coïncident sur $\dot\pi_1(U \cap \dot V)$ donc sur le connexe $\omega \cap \dot\pi_1(U) = \dot\pi_1(U)$. Or $U = (\dot\pi_{1|U})^{-1}\big(\dot\pi_1(U)\big) = (\dot\pi_{1|V})^{-1}\big(\dot\pi_1(U)\big) \subset \dot V$ d'où la contradiction.

Revenons maintenant à $p^{-1}(\dot V)$. Comme ses fibres sont connexes ainsi que son quotient $\dot V$, $p^{-1}(\dot V)$ est connexe. Soit Γ la composante connexe de $\pi_1^{-1}(\omega)$ contenant $p^{-1}(\dot V)$. Comme $p(\Gamma)$ est un connexe de $\pi_1^{-1}(\omega)$ contenant $\dot V$, d'après ce qui précède : $p(\Gamma) = \dot V$. Donc : $\Gamma \subset p^{-1}\big(p(\Gamma)\big) = p^{-1}(\dot V)$, ce qui montre que $\Gamma = p^{-1}(\dot V)$. ∎

3. Démonstration du résultat.

Nous développons maintenant la démonstration du théorème énoncé dans l'introduction et faisant l'objet de cette première partie.

On note v et u les injections canoniques de Ω et $\omega \times \mathbf{C}^n$ dans leurs enveloppes d'holomorphie respectives $\hat\Omega$ et $\hat\omega \times \mathbf{C}^n$. L'injection canonique i de Ω dans $\omega \times \mathbf{C}^n$ se prolonge en une application holomorphe $\hat\imath$ de $\hat\Omega$ dans $\hat\omega \times \mathbf{C}^n$ vérifiant :

$$\hat\imath \circ v = u \circ i\ . \tag{3}$$

De plus, i est localement biholomorphe donc $\hat\imath$ l'est aussi. Ainsi, $\hat\imath$ est un étalement de $\hat\Omega$ sur $\hat\omega \times \mathbf{C}^n$.

Montrons que $(\hat\Omega, \hat\imath)$ est étalé en tubes. Notons p_1 et p_2 les projections de Ω sur ω et $\mathbf{C}^n$ respectivement, $\hat p_1$ et $\hat p_2$ les projections de $\hat\Omega$ sur $\hat\omega$ et $\mathbf{C}^n$ respectivement : $i = (p_1, p_2)$ et $\hat\imath = (\hat p_1, \hat p_2)$.

De (3), on déduit :

$$u' \circ p_1 = \hat p_1 \circ v \quad \text{et} \quad p_2 = \hat p_2 \circ v\ \text{, en notant } u = u' \times \mathrm{Id}_{\mathbf{C}^n} \tag{4}$$

Pour tout y de $\mathbf{R}^n$, la translation τ_y par rapport à la seconde variable est dans $\mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ donc : $\hat\tau_y \circ v = v \circ \tau_y$ avec $\hat\tau_y \in \mathcal{O}(\hat\Omega, \hat\Omega)$.

On montre aisément que $y \mapsto \tau_y$ est continue donc $y \mapsto \hat\tau_y$ est continue si on munit $\mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ et $\mathcal{O}(\hat\Omega, \hat\Omega)$ de la convergence uniforme sur tout compact. On en déduit que $(Z,y) \mapsto \hat{\tau}_y(Z)$ est continue de $\hat{\Omega} \times \mathbf{R}^n$ dans $\hat{\Omega}$. On notera $\hat{\tau}$ cette application.

Pour tout Z de Ω et tout y de $\mathbf{R}^n$, $\hat{\tau}_0(v(Z)) = v \circ \tau_0(Z) = v(Z)$

et
$$\begin{aligned} \hat{\imath} \circ \hat{\tau}_y(v(Z)) &= \hat{\imath} \circ v \circ \tau_y(Z) \\ &= u \circ i \circ \tau_y(Z) \\ &= u(p_1(Z), p_2(Z) + y) \\ &= (\hat{p}_1 \circ v(Z), \hat{p}_2 \circ v(Z) + y) \quad \text{d'après (4)} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\hat{\tau}_0$ et $\mathrm{Id}_{\hat{\Omega}}$ d'une part, $\hat{\imath} \circ \hat{\tau}_y$ et $(\hat{p}_1, \hat{p}_2 + y)$ d'autre part, sont des fonctions de $\mathcal{O}(\hat{\Omega}, \hat{\Omega})$ qui coïncident sur $v(\Omega)$. Elles sont donc égales : $\hat{\tau}$ fait de $(\hat{\Omega}, \hat{\imath})$ une variété étalée en tubes au-dessus de $\hat{\omega} \times \mathbf{C}^n$.

Utilisons maintenant la relation d'équivalence introduite dans la proposition : Soit p l'application canonique de $\hat{\Omega}$ dans $\hat{\Omega}/R$; $\hat{\Omega}/R$ peut être muni d'un étalement q sur $\hat{\omega}$ tel que $q \circ p = \hat{p}_1$ et tel que $(\hat{\Omega}/R, q)$ est une variété de Stein.

Montrons que q est en fait bijective sur $\hat{\omega}$. Comme les fibres de Ω sont connexes, il existe une application j de ω dans $\hat{\Omega}/R$ telle que : $j \circ p_1 = p \circ v$.

On a : $q \circ j \circ p_1 = \hat{p}_1 \circ v = u' \circ p_1$ et par conséquent : $q \circ j = u'$; ainsi, j est dans $\mathcal{O}(\omega, \hat{\Omega}/R)$ et l'on peut considérer son prolongement $\hat{\jmath}$ dans $\mathcal{O}(\hat{\omega}, \hat{\Omega}/R)$.

D'une part : $q \circ \hat{\jmath} \circ u' = q \circ j = u'$ et, par conséquent, $q \circ \hat{\jmath} = \mathrm{Id}_{\hat{\omega}}$.

D'autre part : $\hat{\jmath} \circ q \circ j = \hat{\jmath} \circ u' = j$ et, par conséquent, $\hat{\jmath} \circ q = \mathrm{Id}_{\hat{\Omega}/R}$. q est donc une bijection de $\hat{\Omega}/R$ sur $\hat{\omega}$: cela signifie qu'il existe une composante connexe et une seule au-dessus de chaque point de $\hat{\omega}$ ou encore $\hat{p}_1(\hat{\Omega}) = \hat{\omega}$ et les fibres de $\hat{\Omega}$ sont connexes.

De plus, pour tout x de $\hat{\omega}$, $(\hat{p}_1^{-1}(x), \hat{p}_2)$ est un tube de Stein étalé sur $\mathbf{C}^n$. D'après [1], $\hat{p}_2$ est injective sur la fibre $\hat{p}_1^{-1}(x)$, par conséquent l'étalement $\hat{\imath}$ est injectif de $\hat{\Omega}$ dans $\hat{\omega} \times \mathbf{C}^n$. $\hat{\Omega}$ est donc un domaine de $\hat{\omega} \times \mathbf{C}^n$. Mais [1] montre aussi que $\hat{p}_2(\hat{p}_1^{-1}(x))$ est un tube à base convexe, c'est-à-dire que les fibres de $\hat{\Omega}$ sont convexes, ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

[1] G. CŒURÉ ET J.J. LŒB, Univalence de certaines enveloppes d'holomorphie, *C.R. Acad. Sc. Paris, t. 302, Série I (1986), n°2.*

[2] F. DOCQUIER ET H. GRAUERT, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, *Math. Annalen 140 (1960), pp. 94-123.*

[3] CH. O. KISELMAN, The Partial Legendre Transformation of Plurisubharmonic Functions, *Inventiones Math., 49 (1978), pp. 137-148.*

[4] B. MALGRANGE, Lectures on the theory of functions of several complex variables, *Tata Institue of Fundamental Research, Bombay (1958).*

[5] T. MOKRI, Variétés tubulaires de type H^∞, *Thèse de* 3$^{\text{ème}}$ *cycle, Université de Lille Flandres Artois (mai 1986).*

[6] H. ROSSI, On envelopes of holomorphy, *Communications on Pure and Applied Mathematics 16 (1963), pp. 9 - 19.*

DEUXIÈME PARTIE

ENVELOPPES POLYNOMIALES DE COMPACTS

Soit V un compact de $\mathbf{C}^N$; on appelle enveloppe polynomiale de V :

$$\hat{V} = \{Z \in \mathbf{C}^N \mid \forall P \text{ polynôme holomorphe de } \mathbf{C}^N,\ |P(Z)| \leq \max_V |P|\} .$$

On se propose dans cet article de décrire les enveloppes polynomiales de compacts invariants par des actions de groupes.

1. Introduction.

Dans un article paru en 1986, Gaveau et Debiard [3] se sont intéressés, entre autres choses, à l'action de $K = U(2)$, groupe unitaire, sur S_2 espace des matrices symétriques complexes 2×2 par conjugaison :

$$\text{pour } k \in U(2),\ g \in S_2,\ k \cdot g = kg{}^tk .$$

Ils ont donné des résultats partiels sur l'enveloppe polynomiale $\hat{\mathcal{O}}$ des $U(2)$-orbites $\mathcal{O}$.

En 1988, Anderson [1] démontre le résultat suivant :

Soit V un compact de S_2 $SU(2)$-invariant ($SU(2)$ agissant sur S_2 par conjugaison), soit $X = \det V$, $\hat{X}$ et $\hat{V}$ les enveloppes polynomiales respectives de X et V. Alors $\det \hat{V} = \hat{X}$ et :

$$\hat{V} = \{g \in S_2 \mid \det g = \zeta \in \hat{X} \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(g\bar{g}) \leq t(\zeta)\}$$

où $\operatorname{tr}(g\bar{g})$ désigne la trace de la matrice hermitienne positive $g\bar{g}$ et

$$t(\zeta) = \sup\{\operatorname{tr}(g\bar{g}) \mid g \in \hat{V},\ \det g = \zeta\} .$$

Dans le cas où X est une courbe fermée simple de $\mathbf{C}$ ne contenant pas 0, il donne une expression de $t(\zeta)$ dépendant de la fonction harmonique solution de Perron du problème de Dirichlet dans la composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus X$. Pour V $U(2)$-orbite d'un élément Z de S_2, on obtient :

$$\hat{V} = \left\{g \in S_2 \;\middle|\; |\det g| \leq |A|, \operatorname{tr}(g\bar{g}) \leq M^2 + |\det g|^2/M^2\right\}$$

où $A = \det Z,\ B = \operatorname{tr}(Z\bar{Z}),\ M = \left[\frac{B+(B^2-4|A|^2)^{1/2}}{2}\right]^{1/2}$.

Ce résultat a le mérite d'être explicite mais, sous cette forme, il apparaît malaisé à généraliser à des dimensions supérieures à 2.

Donnons-en une interprétation : notons $x_1(g) \geq x_2(g) \geq 0$ les racines carrées des valeurs propres de la matrice hermitienne positive $g\bar{g}$ pour g dans S_2. Alors $|A| = x_1(Z)x_2(Z)$, $B = x_1(Z)^2 + x_2(Z)^2$, $M = x_1(Z)$ et l'on peut énoncer le résultat d'Anderson sous la forme suivante :

Théorème. *Soit V la $U(2)$-orbite de Z. Alors*

$$\hat{V} = \{g \in S_2 \mid x_1(g) \cdot x_2(g) \leq x_1(Z) \cdot x_2(Z), x_1(g) \leq x_1(Z)\} .$$

On peut imaginer le même type de résultat en dimension supérieure ; ce sera démontré dans le paragraphe 4. Il s'agit en fait d'un cas particulier d'un résultat donné au paragraphe 3 pour des compacts plus généraux que des orbites.

2. Enveloppe polynomiale de compacts de $\mathbf{C}^n$.

Ce paragraphe, intéressant par lui-même, est avant tout une étude préalable, utilisée au paragraphe 3 pour déterminer l'enveloppe polynomiale de compacts matriciels.

On note S^1 le groupe des complexes de module 1. Soit V un compact de $\mathbf{C}^n$ invariant par l'action naturelle de $K' = (S^1)^n$ sur $\mathbf{C}^n$.

On dira qu'un ensemble E de $\mathbf{C}^n$ est *complet* si :

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in E, \forall (z'_1, \ldots, z'_n) \in \mathbf{C}^n ,$$
$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}, |z'_i| \leq |z_i|) \Rightarrow ((z'_1, \ldots, z'_n) \in E) .$$

On dira qu'un ensemble E de $\mathbf{C}^n$ est *logarithmiquement convexe* si :

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in E, \forall (z'_1, \ldots, z'_n) \in E, \forall \lambda \in [0, 1],$$
$$(|z_1|^\lambda |z'_1|^{1-\lambda}, \ldots, |z_n|^\lambda |z'_n|^{1-\lambda}) \in E .$$

Théorème 1. *$\hat{V}$ est le plus petit fermé complet logarithmiquement convexe de $\mathbf{C}^n$ contenant V.*

■ a) Pour P polynôme holomorphe sur $\mathbf{C}^n$, on définit $P_{K'}$ sur $\mathbf{C}^n$ par :

$$P_{K'}(Z) = \max_{k \in K'} |P(k \cdot Z)| .$$

$P_{K'}$ est K'-invariante par construction et on a :

$$\hat{V} = \{\mathbf{Z} \in \mathbf{C}^n \mid \forall P \text{ polynôme holomorphe, } P_{K'}(Z) \leq \max_V P_{K'}\} .$$

Par conséquent, $\hat{V}$ est K'-invariant.

L'application $(k, Z) \longmapsto |P(k \cdot Z)|$ est continue sur $K' \times \mathbf{C}^n$ et K' est compact donc $P_{K'}$ est continue sur $\mathbf{C}^n$. D'autre part, pour tout k de K', l'application $Z \longmapsto |P(k \cdot Z)|$ est plurisousharmonique (psh en abrégé) comme module d'une fonction holomorphe. On en déduit que $P_{K'}$ est psh sur $\mathbf{C}^n$.

$P_{K'}$ étant K'-invariante, elle ne dépend que de $(|z_1|, \ldots, |z_n|)$.

D'après [10], $P_{K'}$ est une fonction croissante sur $\mathbf{R}_+$ du module de chaque variable, ce qui montre que $\hat{V}$ est complet.

De plus, soient $(z_1, \ldots, z_n) \in \hat{V}$, $(z'_1, \ldots, z'_n) \in \hat{V}$, $\lambda \in]0,1[$. On a : $|z_i|^\lambda |z'_i|^{1-\lambda} = 0$ sauf si $|z_i| \neq 0$ et $|z'_i| \neq 0$. Notons I :

$$\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid z_i z'_i \neq 0\} .$$

Définissons les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x'_1, \ldots, x'_n)$ de $\mathbf{R}_+^n$ par :

$$\begin{cases} x_i = |z_i|, \ x'_i = |z_i| & \text{si } i \in I, \\ x_i = 0, \ x'_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $\hat{V}$ est complet et K'-invariant, les deux n-uplets sont dans $\hat{V}$ et on a :

$$(x_1^\lambda {x'}_1^{1-\lambda}, \ldots, x_n^\lambda {x'}_n^{1-\lambda}) = (|z_1|^\lambda |z'_1|^{1-\lambda}, \ldots, |z_n|^\lambda |z'_n|^{1-\lambda}) .$$

Or, d'après [10], toute fonction $P_{K'}$ est convexe par rapport à $(\ln y_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P_{K'}(x_1^\lambda {x'}_1^{1-\lambda}, \ldots, x_n^\lambda {x'}_n^{1-\lambda}) &\leq P_{K'}(x_1, \ldots, x_n)^\lambda \, P_{K'}(x'_1, \ldots, x'_n)^{1-\lambda} \\ &\leq \max_V P_{K'} \end{aligned}$$

$\hat{V}$ est donc logarithmiquement convexe au sens défini. Il est de plus évident que $\hat{V}$ est fermé et contient V.

b) Soit V' l'intersection des fermés complets logarithmiquement convexes de $\mathbf{C}^n$ contenant V. Alors V' est encore un fermé complet logarithmiquement convexe contenant V et V' est K'-invariant. Notons

$$E_k = \left\{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \;\middle|\; \exists (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in V', \forall i \in \{1, \ldots, n\} \; |z_i| < |\zeta_i| + \frac{1}{k} \right\} .$$

On a : $V' = \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} E_k$.

E_k est un domaine de Reinhardt complet.

Soit $\operatorname{Log} E_k = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n \mid (e^{x_1},\dots,e^{x_n}) \in E_k\}$, $\widetilde{\operatorname{Log} E_k}$ son enveloppe convexe et

$$\tilde{E}_k = \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbf{C}^n \mid \exists (x_1,\dots,x_n) \in \widetilde{\operatorname{Log} E_k},\ \forall i \in \{1,\dots,n\},\ |z_i| \le e^{x_i}\}\ .$$

$\tilde{E}_k$ est l'enveloppe d'holomorphie de E_k. C'est donc un domaine de Reinhardt logarithmiquement convexe ; par conséquent, c'est un domaine de Runge, ce qui montre que $\tilde{E}_k$ contient l'enveloppe polynomiale de chacun des compacts inclus dans $\tilde{E}_k$ [5].

Il reste alors à montrer $V' = \cap_{k\in\mathbf{N}^*} \tilde{E}_k$ pour conclure $V' = \hat{V}$.

Soit $(z_1,\dots,z_n) \in \cap_{k\in\mathbf{N}^*} \tilde{E}_k$. D'après [9], il existe pour chaque k de $\mathbf{N}^*$:

$$\left((x_{ij}^{(k)})_{1\le i\le n}\right)_{1\le j\le n+1} \in (\operatorname{Log} E_k)^{n+1}, (\lambda_1^{(k)},\dots,\lambda_{n+1}^{(k)}) \in [0,1]^{n+1}$$

tels que :

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j^{(k)} = 1$$

$$\text{et} \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}, |z_i| \le \prod_{j=1}^{n+1} \left(e^{x_{ij}^{(k)}}\right)^{\lambda_j^{(k)}}\ .$$

La suite $\left((e^{x_{ij}^{(k)}})_{1\le i\le n},\dots,\left(e^{x_{in+1}^{(k)}}\right)_{1\le i\le n}, \lambda_1^{(k)},\dots,\lambda_{n+1}^{(k)}\right)$ du borné $E_k^{n+1} \times [0,1]^{n+1}$ admet une sous-suite convergeant vers

$$((y_{i1})_{1\le i\le n},\dots,(y_{i,n+1})_{1\le i\le n}, \lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}) \in V'^{n+1} \times [0,1]^{n+1}$$

tel que :

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1,\dots,n\},\ |z_i| \le \prod_{j=1}^{n+1} (y_{ij})^{\lambda_j}$$

comme V' est complet et logarithmiquement convexe, on a : $(z_1,\dots,z_n) \in V'$.

□

3. Enveloppes polynomiales de compacts de S_n.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit S_n l'espace des matrices carrées $n\times n$ complexes symétriques identifié à $\mathbf{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$:

$$S_n = \{g \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mid {}^t g = g\}\ .$$

Soit $K = U(n)$. K agit sur S_n par conjugaison :

$$k \cdot g = kg{}^tk \ .$$

Soit D le sous-espace de S_n formé des matrices diagonales complexes identifié à $\mathbf{C}^n$ et soit $L = (S^1)^n \times \mathfrak{S}_n$ où $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des permutations de n éléments. L agit sur D. Les ensembles L-invariants de D correspondent aux ensembles K-invariants de S_n de la manière suivante : si E est K-invariant, il est immédiat que $E \cap D$ est L-invariant et que $K \cdot (E \cap D) \subset E$. De plus, d'après [6], toute matrice g de S_n s'écrit $ka{}^tk$ avec $k \in K$ et a matrice diagonale réelle positive. Donc $E = K \cdot (E \cap D)$.

Les fonctions continues L-invariantes dans D correspondent par restriction aux fonctions continues K-invariantes dans S_n. En effet, il est évident que la restriction à D d'une fonction continue K-invariante dans S_n est continue et L-invariante dans D ; et réciproquement, pour f continue L-invariante sur D, on pose :

$$\forall g \in S_n, \tilde{f}(g) = f\left(\Delta(x_1(g), \dots, x_n(g))\right)$$

où $x_1(g) \geq \cdots \geq x_n(g) \geq 0$ sont les racines carrées des valeurs propres de $g\bar{g}$. $\tilde{f}$ est alors K-invariante et comme f est L-invariante, la restriction de $\tilde{f}$ à D est bien f.

D'après [7], l'application qui à une matrice hermitienne associe ses valeurs propres classées est continue donc $\tilde{f}$ est continue.

Soit V un compact K-invariant de S_n. Pour P polynôme holomorphe sur S_n, on définit P_K sur S_n par :

$$P_K(g) = \max_{k \in K} |P(kg{}^tk)| \ .$$

P_K est K-invariante par construction et on a :

$$\hat{V} = \{g \in S_n \mid \forall P \text{ polynôme holomorphe, } \ P_K(g) \leq \max_V P_K\} \ .$$

Par conséquent, $\hat{V}$ est K-invariant et d'après la première remarque : $\hat{V} = K \cdot (\hat{V} \cap D)$ avec $\hat{V} \cap D$ L-invariant. Enonçons alors :

Théorème 2. *$\hat{V} \cap D = \widehat{V \cap D}$ où $\widehat{V \cap D}$ est l'enveloppe polynomiale dans D identifié à $\mathbf{C}^n$.*

En utilisant le paragraphe précédent, l'égalité précédente donne une description précise de $\hat{V}$.

■ Le théorème 2 découle du théorème suivant, démontré à la fin de ce paragraphe :

Théorème 3. *Soit R l'application qui à toute fonction psh continue K-invariante sur S_n associe sa restriction à D. Alors R est une bijection de son ensemble de définition sur l'ensemble des fonctions psh continues dans D L-invariantes.*

On utilise aussi le résultat suivant [5] ; si X est un compact de $\mathbf{C}^p$ et φ est psh sur $\mathbf{C}^p$ alors $\sup_X \varphi = \sup_{\hat{X}} \varphi$.

— $\widehat{V \cap D} \subset \hat{V} \cap D$:

Soit $x \in \widehat{V \cap D}$. Alors pour toute fonction φ psh sur D, on a : $\varphi(x) \leq \sup_{V \cap D} \varphi$.

C'est, en particulier, vrai pour la restriction à D d'une fonction P_K définie plus haut. Or, par K-invariance de P_K : $\sup_{V \cap D} P_K = \sup_V P_K$. Donc $x \in \hat{V}$.

— $\hat{V} \cap D \subset \widehat{V \cap D}$:

V est K-invariant donc $V \cap D$ est L-invariant. Pour Q polynôme holomorphe sur D, on définit Q_L sur D par :

$$Q_L(x) = \max_{l \in L} |Q(l \cdot x)|$$

Q_L est L-invariante, psh continue sur D et :

$$\widehat{V \cap D} = \{x \in D \mid \forall Q \text{ polynôme holomorphe}, \ Q_L(x) \leq \max_{V \cap D} Q_L\} .$$

D'après le théorème 3, Q_L se prolonge en une fonction $\tilde{Q}_L$, K-invariante sur S_n, psh et continue.

Soit $y \in \hat{V} \cap D$. Pour toute fonction φ psh et K-invariante sur S_n, on a :

$$\varphi(y) \leq \sup_V \varphi = \sup_{V \cap D} \varphi .$$

D'où $\tilde{Q}_L(y) \leq \sup_{V \cap D} \tilde{Q}_L$, c'est-à-dire $Q_L(y) \leq \max_{V \cap D} Q_L$. Par conséquent, $y \in \widehat{V \cap D}$. ■

Démonstration du théorème 3 : D'après la remarque précédant le théorème 2, il suffit de vérifier que si f est une fonction psh continue L-invariante dans D, la fonction $\tilde{f}$ continue K-invariante correspondante est psh dans S_n.

D'après [8], toute fonction continue dans S_n psh sauf peut-être aux zéros d'une fonction holomorphe sur S_n est psh dans S_n. Le problème se ramène donc à $\{g \in S_n \mid \det g \neq 0\}$. Cet ensemble correspond à $(\mathbf{C}^*)^n$ par intersection avec D.

f est psh sur D identifié à $\mathbf{C}^n$ et ne dépend que des modules donc d'après [9], $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ défini par $f(\Delta(e^{t_1}, \ldots, e^{t_n}))$ est convexe sur $\mathbf{R}^n$ et croissant en chaque variable sur $\mathbf{R}$. On peut alors écrire : $\varphi = \sup \psi_i$ où les ψ_i sont des fonctions affines à coefficients positifs ou nuls.

Si on note $\hat{\psi}_i(t_1, \ldots, t_n) = \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \psi_i(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)})$, puisque φ est L-invariante, on a : $\varphi = \sup \hat{\psi}_i$.

Pour $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n$, on a :

$$\hat{\psi}_i(t_1, \ldots, t_n) = \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_n t_n + b$$

avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$, $b \in \mathbf{R}$. Pour $g \in S_n$ tel que $\det g \neq 0$, c'est-à-dire $x_1(g) \geq \cdots \geq x_n(g) > 0$, posons :

$$\tilde{\psi}_i(g) = \hat{\psi}_i(\ln x_1(g), \ldots, \ln x_n(g)) \ .$$

Alors
$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_i(g) = {} & (\alpha_1 - \alpha_2) \ln x_1(g) + (\alpha_2 - \alpha_3) \ln(x_1(g) x_2(g)) \\ & + \cdots + \alpha_n \ln(x_1(g) \times \cdots \times x_n(g)) + b \ . \end{aligned}$$

Le lemme suivant montre que $\ln(x_1(g) \times \ldots \times x_i(g))$ est une fonction psh sur son ensemble de définition ; par conséquent, $\tilde{f} = \sup \tilde{\psi}_i$ continue est aussi psh sur $\{g \in S_n \mid \det g \neq 0\}$, ce qui termine la démonstration du théorème 3. ∎

Lemme 1. *Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et P_i le polynôme holomorphe sur S_n défini par :*

$$\forall g = (g_{jl})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq l \leq n}} \in S_n,\ P_i(g) = \det\big((g_{jl})_{\substack{1 \leq j \leq i \\ 1 \leq l \leq i}}\big) \ .$$

Alors, la fonction $(P_i)_K$ définie sur S_n par :

$$(P_i)_K(g) = \max_{k \in K} |P_i(kg\,{}^t k)|$$

vérifie : $(P_i)_K(g) = x_1(g) \times \cdots \times x_i(g)$.

∎ Puisque $(P_i)_K$ est K-invariant, il suffit de montrer que si $x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$,

$$(P_i)_K(\Delta(x_1, \ldots, x_n)) = x_1 \times \ldots \times x_i \ .$$

Soit i dans $\{1,\ldots,n\}$ et $\Delta(x_1,\ldots,x_n)$ matrice diagonale réelle positive. On a :

$$P_i(\Delta(x_1,\ldots,x_n)) = x_1 \times \cdots \times x_i \; .$$

Par conséquent, il reste à montrer que :

$$\forall k \in K,\; |P_i(k\Delta(x_1,\ldots,x_n)^t k)| \leq x_1 \times \cdots \times x_i \; .$$

Pour cela, on travaille sur l'espace $\bigwedge^i(\mathbf{C}^n)$ des i-vecteurs de $\mathbf{C}^n$. On vérifie facilement que l'on définit une forme bilinéaire $[\ ,\ ]$ et une forme sesquilinéaire $(\ ,\ )$ sur $\bigwedge^i(\mathbf{C}^n)$ en posant :

$$\begin{aligned}
&\forall x_p = (x_{p,l})_{1\leq l\leq n} \in \mathbf{C}^n \quad \text{pour } p \text{ de } 1 \text{ à } i\;,\\
&\forall y_q = (y_{q,l})_{1\leq l\leq n} \in \mathbf{C}^n \quad \text{pour } q \text{ de } 1 \text{ à } i\;,\\
&[\wedge_{p=1}^i x_p, \wedge_{q=1}^i y_q] = \det\big(([x_p,y_q])_{\substack{1\leq p\leq i\\ 1\leq q\leq i}}\big)\\
&\text{et } (\wedge_{p=1}^i x_p, \wedge_{q=1}^i y_q) = \det\big(((x_p,y_q))_{\substack{1\leq p\leq i\\ 1\leq q\leq i}}\big)
\end{aligned}$$

où $[x_p,y_q] = \sum_{l=1}^n x_{p,l}\, y_{q,l}$ et $(x_p,y_q) = \sum_{l=1}^n x_{p,l}\overline{y_{q,l}}$ (résultat indépendant du choix des représentants des i-vecteurs).

Pour g dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on vérifie que l'on définit une application linéaire de $\bigwedge^i(\mathbf{C}^n)$ dans lui-même en posant :

$$\forall (x_1,\ldots,x_i) \in (\mathbf{C}^n)^i,\; g(\wedge_{p=1}^i x_p) = \wedge_{p=1}^i g(x_p) \; .$$

On a alors :

$$\forall v, v' \in \bigwedge^i(\mathbf{C}^n),\; [g(v),v'] = [v, {}^t g(v')]$$

et, en notant $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$,

$$[g(e_1\wedge\cdots\wedge e_i), e_1\wedge\cdots\wedge e_i] = P_i(g) \; .$$

Soit $k \in U(n)$

$$\begin{aligned}
P_i(k\Delta(x_1,\ldots,x_n)^t k) &= [k\Delta(x_1,\ldots,x_n)^t k(e_1\wedge\cdots\wedge e_i), e_1\wedge\cdots\wedge e_i]\\
&= [\Delta(x_1,\ldots,x_n)^t k(e_1\wedge\cdots\wedge e_i), {}^t k(e_1\wedge\cdots\wedge e_i)]\\
&= [\Delta(x_1,\ldots,x_n)(v), v]\\
&= \sum_{p_1<p_2<\cdots<p_i} x_{p_1}\times\cdots\times x_{p_i}(v_{p_1,\ldots,p_i})^2
\end{aligned}$$

en notant $v = {}^t\!k(e_1 \wedge \cdots \wedge e_i) = \sum_{p_1<p_2<\cdots<p_i} v_{p_1,\ldots,p_i}(e_{p_1} \wedge \cdots \wedge e_{p_i})$.

Par conséquent :

$$|P_i(k\Delta(x_1,\ldots,x_n){}^t\!k)| \leq x_1 \times \cdots \times x_i \sum_{p_1<p_2<\cdots<p_i} |v_{p_1,\ldots,p_i}|^2$$

or
$$\begin{aligned}\sum_{p_1<p_2<\cdots<p_i} |v_{p_1,\ldots,p_i}|^2 &= (v,v) \\ &= \det\big((({}^t\!ke_p, {}^t\!ke_q))_{\substack{1\leq p\leq i\\ 1\leq q\leq i}}\big) \\ &= \det\big(((e_p,e_q))_{\substack{1\leq p\leq i\\ 1\leq q\leq i}}\big) \quad \text{puisque } {}^t\!k \in U(n) \\ &= 1\end{aligned}$$

d'où : $|P_i(k\Delta(x_1,\ldots,x_n){}^t\!k)| \leq x_1 \times \cdots \times x_i$, ce qui termine la démonstration du lemme 1. ■

4. Application aux orbites.

Soit $\mathcal{O}$ une K-orbite. $\mathcal{O} \cap D$ étant L-invariant, on peut choisir $a = \Delta(a_1,\ldots,a_m,0,\ldots,0) \in \mathcal{O} \cap D$ avec $a_1 \geq \cdots \geq a_m > 0$.

Théorème 4.

$$\hat{\mathcal{O}} \cap D = \big\{\Delta(z_1,\ldots,z_n) \in D \;\big|\; \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \max_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\big(|z_{\sigma(1)} \times \cdots \times z_{\sigma(i)}|\big) \leq a_1 \times \ldots \times a_i\big\}$$

ou encore

$$\hat{\mathcal{O}} = \{g \in S_n \mid \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ x_1(g) \times \cdots \times x_i(g) \leq a_1 \times \cdots \times a_i\}\ .$$

C'est la généralisation à la dimension n annoncée au paragraphe 1.

■ L'équivalence des deux écritures est évidente.

D'après les théorèmes 1 et 2, $\hat{\mathcal{O}} \cap D$ est complet, stable par permutations et contient a donc il contient les permutés de :

$$\{\Delta(z_1,\ldots,z_n) \in D \mid \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ |z_i| \leq a_i\}\ .$$

Par conséquent, $\hat{\mathcal{O}} \cap D$ contient :

$$\{\Delta(z_1,\ldots,z_m,0,\ldots,0) \in D \mid \exists\sigma \in \mathfrak{S}_m, \forall i \in \{1,\ldots,m\},\ |z_{\sigma(i)}| \leq a_i\}\ .$$

De plus, $\hat{O} \cap D$ est logarithmiquement convexe au sens défini au paragraphe 2. Par conséquent : $\mathrm{Log}(\hat{O} \cap D)$ défini par

$$\{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m \mid \Delta(e^{y_1}, \ldots, e^{y_m}, 0, \ldots, 0) \in \hat{O} \cap D\}$$

contient l'enveloppe convexe de :

$$A = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m \mid \exists \sigma \in \mathfrak{S}_m,\ \forall i \in \{1, \ldots, m\},\ y_{\sigma(i)} \leq \ln a_i\}\ .$$

Lemme 2. *L'enveloppe convexe de A est :*

$$B = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m \mid \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \left(y_{\sigma(1)} + \cdots + y_{\sigma(i)}\right) \leq b_1 + \cdots + b_i\}$$

en notant $b_i = \ln a_i$.

$\hat{O} \cap D$ contient donc :

$$\Big\{\Delta(z_1, \ldots, z_m, 0, \ldots, 0) \in D \;\Big|\; \forall i \in \{1, \ldots, m\},\ \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \left(|z_{\sigma(1)} \times \cdots \times z_{\sigma(i)}|\right) \leq a_1 \times \cdots \times a_i\Big\}\ .$$

Finalement, $\hat{O} \cap D$ contient :

$$\Big\{\Delta(z_1, \ldots, z_n,) \in D \;\Big|\; \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(|z_{\sigma(1)} \times \cdots \times z_{\sigma(i)}|\right) \leq a_1 \times \cdots \times a_i\Big\}\ .$$

Ce dernier ensemble étant fermé, complet, logarithmiquement convexe contenant $O \cap D$, il est égal à $\hat{O} \cap D$ d'après les théorèmes 1 et 2. ∎

Démonstration du lemme 2 : Il est immédiat que le convexe B contient l'enveloppe convexe de A. Pour montrer la réciproque, on utilise un résultat donné dans Bourbaki ([2]) : B est un convexe fermé ne contenant aucune droite (car inclus dans $(]-\infty, b_1])^m$) donc B est l'enveloppe convexe de la réunion de ses points extrêmaux et de ses rayons extrêmaux. On montre aisément que pour tout σ de $\mathfrak{S}_m$, $\left(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(m)}\right)$ est un point extrêmal de B et que la demi-droite :

$$y_{\sigma^{-1}(m)} \leq b_m \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \ldots, m-1\},\ y_{\sigma^{-1}(i)} = b_i$$

d'origine ce point est un rayon extrêmal de B. Ce sont des points et des demi-droites de A donc il reste à montrer que ce sont les seuls points et rayons extrêmaux de B pour conclure que B est l'enveloppe convexe de A.

Soit $(y_1, \ldots, y_m)$ un point extrêmal de B. Il suffit d'étudier le cas où $y_1 \geq \cdots \geq y_m$.

— Si $m = 1$, on a $y_1 = b_1$.

— Si $m = 2$, on remarque aisément que $y_1 = b_1$ et $y_2 = b_2$.

— Si $m \geq 3$, supposons $y_1 > b_1$.

1$^{\text{er}}$ **cas :** $y_2 > y_3$.

Soit $\varepsilon > 0$, tel que $y_1 + \varepsilon \leq b_1$ et $y_3 \leq y_2 - \varepsilon$ alors $(y_1 + \varepsilon, y_2 - \varepsilon, y_3, \ldots, y_m)$ et $(y_1 - \varepsilon, y_2 + \varepsilon, y_3, \ldots, y_m)$ sont dans B, ce qui contredit $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ extrêmal.

2$^{\text{ème}}$ **cas :** $y_2 = y_3$.

Soit $i_0 = \max\{i \in \{2, \ldots, m\} \mid y_i = y_2\}$. On a $i_0 \geq 3$.

Si $j \in \{2, \ldots, i_0 - 1\}$,

$$\begin{aligned} y_1 + \cdots + y_j = b_1 + \cdots + b_j &\Rightarrow y_2 + \cdots + y_j > b_2 + \cdots + b_j \\ &\Rightarrow (j-1)y_j > (j-1)b_j \\ &\Rightarrow y_{j+1} = y_j > b_{j+1} \\ &\Rightarrow y_1 + \cdots + y_{j+1} > b_1 + \cdots + b_{j+1} \quad \text{impossible} \end{aligned}$$

donc $\forall j \in \{2, \ldots, i_0 - 1\}$, $y_1 + \cdots + y_j < b_1 + \cdots + b_j$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, tel que :

$$\forall j \in \{1, \ldots, i_0 - 1\},\ y_1 + \cdots + y_j + \varepsilon \leq b_1 + \cdots b_j \text{ et si } i_0 < m,\ y_{i_0+1} \leq y_2 - \varepsilon\ ;$$

alors $(y_1 + \varepsilon, y_2 - \varepsilon, y_3, \ldots, y_m)$ et $(y_1 - \varepsilon, y_2 + \varepsilon, y_3, \ldots, y_m)$ sont dans B ce qui contredit $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ extrêmal.

Ainsi, on a nécessairement $y_1 = b_1$. En suivant le même raisonnement, on montre $y_2 = b_2$ et ainsi de suite.

Soit Δ un rayon extrêmal de B. Son origine est nécessairement un point extrêmal et il suffit d'étudier le cas où cette origine est $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Δ a une équation paramétrique du type : $y = b + \lambda v$, $\lambda \geq 0$ avec $v = (v_1, \ldots, v_m)$ vecteur directeur.

Soit $i \in \{1, \ldots, m\}$. Si $v_i > 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda v_i = +\infty$, ce qui contredit $y_i \leq b_1$. Donc $v_i \leq 0$. Si $m = 1$, c'est terminé.

Sinon, supposons $v_1 < 0$. Soit $\varepsilon = \frac{|v_1|}{2}$, $v' = (v_1 + \varepsilon, v_2, \ldots, v_m)$ et $v'' = (v_1 - \varepsilon, v_2, \ldots, v_m)$ alors $b + v' \in B$ et $b + v'' \in B$, ce qui contredit Δ rayon extrêmal. Donc $v_1 = 0$ et c'est terminé si $m = 2$. Sinon, on raisonne de la même façon sur v_2 et ainsi de suite. On obtient ainsi $v = (0, 0, \ldots, 0, v_m)$ avec $v_m < 0$, ce qui termine la démonstration du lemme 2. ■

5. Enveloppes polynomiales de compacts de $S_n \cap SL(n, \mathbf{C})$.

Soit $S'_n = S_n \cap SL(n, \mathbf{C})$. $SU(n)$ agit sur S'_n : pour k dans $SU(n)$, g dans S'_n, $k \cdot g = kg^tk$. Comme on est dans S_n, tout g de S'_n s'écrit :

$$g = k\Delta(x_1(g), \ldots, x_n(g))^tk \quad \text{avec } k \text{ dans } U(n)\,.$$

Mais alors, on a : $x_1(g) \times \cdots \times x_n(g) = 1$ et $\det^2 k = 1$. Quitte à multiplier la dernière colonne de k par -1, on obtient la décomposition :

$$g = k\Delta(x_1(g), \ldots, x_n(g))^tk \quad \text{avec } k \text{ dans } SU(n)\,.$$

Si on pose $\tilde{k} = k\Delta\big(\sqrt{x_1(g)}, \ldots, \sqrt{x_n(g)}\big)$, on a :

$$\tilde{k} \in SL(n, \mathbf{C}) \text{ et } g = \tilde{k}^t\tilde{k}\,.$$

Par conséquent, S'_n est l'orbite de l'identité par l'action de $SL(n, \mathbf{C})$ sur S_n : $\tilde{k} \cdot g = \tilde{k}g^t\tilde{k}$. Comme S'_n est fermé dans S_n, c'est une sous-variété de Stein de S_n et S'_n est de dimension $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.

Soit D' l'espace des matrices $n \times n$ diagonales complexes de déterminant 1 et $L' = \mathfrak{S}_n \times (S^1)^{n-1}$.

L' agit sur D' : pour σ dans $\mathfrak{S}_n, (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ dans $\mathbf{R}^{n-1}$, $\Delta(z_1, \ldots, z_n)$ dans D',

$$\sigma \cdot \Delta(z_1, \ldots, z_n) = \Delta\big(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}\big)$$
$$(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_{n-1}}) \cdot \Delta(z_1, \ldots, z_n) = \Delta\big(z_1e^{i\theta_1}, \ldots, z_{n-1}e^{i\theta_{n-1}}, z_ne^{-i(\theta_1 + \ldots + \theta_{n-1})}\big)$$

De même que dans S_n, les ensembles $SU(n)$-invariants de S'_n et L'-invariants de D' se correspondent et on a :

Théorème 5. *Soit R' l'application qui à toute fonction psh continue $SU(n)$-invariante sur S'_n associe sa restriction à D'. Alors R' est une bijection de son ensemble de définition sur l'ensemble des fonctions psh continues dans D' L'-invariantes.*

Les fonctions sur S'_n et D' sont localement des fonctions à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ et à $n-1$ variables respectivement. La démonstration est alors analogue à celle du théorème 3.

Soit V un compact $SU(n)$-invariant de S'_n. L'enveloppe $\hat{V}$ désigne indifféremment :

$$\{g \in S_n \mid \forall P \text{ polynôme holomorphe sur } S_n,\ |P(g)| \leq \max_V |P|\}$$

ou
$$\{g \in S'_n \mid \forall f \text{ analytique sur } S'_n,\ |f(g)| \leq \max_V |f|\}$$

ou
$$\{g \in S'_n \mid \forall f \text{ psh continue sur } S'_n,\ f(g) \leq \max_V f\}\ .$$

L'enveloppe polynomiale est contenue dans S'_n puisque cette variété a une équation polynomiale. La démonstration de l'égalité des deux premiers ensembles utilise une conséquence du théorème B de Cartan : si f est analytique sur le sous-espace analytique fermé S'_n de S_n, f se prolonge en une fonction analytique sur S_n [4], elle-même limite uniforme de polynômes sur tout compact. En ce qui concerne l'inclusion non triviale de la seconde égalité, puisque S'_n est une variété de Stein, on peut prendre un voisinage relativement compact, pseudoconvexe U_0 de l'enveloppe analytique. On écrit alors l'enveloppe psh continue comme intersection d'ensembles $\{g \in U_0 \mid f(g) \leq \max_V f\}$ où f est psh continue sur S'_n. Or, d'après [4], de tels ensembles sont holomorphiquement convexes.

On a de même l'égalité entre les enveloppes polynomiales (dans $\mathbf{C}^n$), psh continue et analytique (dans D') de tout compact de D'.

Une démonstration calquée sur celle du théorème 2 permet alors d'obtenir :

Théorème 6. $\quad \widehat{V \cap D'} = \hat{V} \cap D'$.

On étudie ensuite $\widehat{V \cap D'}$. On dira qu'un sous-ensemble E de D' est D'-complet si :

$$\forall \Delta(z_1, \ldots, z_n) \in E, \forall \Delta(z'_1, \ldots, z'_n) \in D'$$
$$(\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, |z'_i| \leq |z_i|) \Rightarrow (\Delta(z'_1, \ldots, z'_n) \in E)\ .$$

Par une démonstration analogue à celle du théorème 1 mais en travaillant sur $(n-1)$ variables, on obtient :

Théorème 7. $\widehat{V \cap D'}$ *est le plus petit fermé* D'*- complet logarithmiquement convexe de* $\mathbf{C}^n$ *contenant* $V \cap D'$.

On applique ce résultat à la $SU(n)$-orbite $\mathcal{O}$ de $\Delta(a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_1 \times \ldots \times a_n = 1$ et $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$:

Théorème 8.

$$\hat{\mathcal{O}} \cap D' = \{\Delta(z_1, \ldots, z_n) \in D' \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$
$$\max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (|z_{\sigma(1)} \times \cdots \times z_{\sigma(i)}|) \leq a_1 \times \ldots \times a_i\}$$

ou encore

$$\hat{\mathcal{O}} = \{g \in S'_n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_1(g) \times \cdots \times x_i(g) \leq a_1 \times \cdots \times a_i\}\ .$$

Si l'on note $\mathcal{O}_K$ la $U(n)$-orbite de $\Delta(a_1, \ldots, a_n)$, on a ainsi en utilisant les théorèmes 4 et 8 :

$$\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{O}}_K \cap S'_n = \hat{\mathcal{O}}_K \cap SL(n, \mathbf{C})$$

et

$$\hat{\mathcal{O}}_K = S^1 \cdot \hat{\mathcal{O}}\ .$$

Bibliographie

[1] J.T. Anderson, Polynomial Hulls, *Can. J. Math. Vol. XL, N°5 (1988), pp. 1256-1271.*

[2] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, *Masson Paris (1981), p. 96, ch. 2, Ex. 22.*

[3] A. Debiard et B. Gaveau, Equations de Cauchy-Riemann sur $SU(2)$ et leurs enveloppes d'holomorphie, *Can. J. Math., 38 (1986), pp. 1009-1024.*

[4] R.C. Gunning et H. Rossi, Analytic Functions of Several Complex Variables, *Prentice-Hall, Inc. (1965), p. 245 et p. 279.*

[5] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, *Van Nostrand (1966), p. 53 et p. 91.*

[6] L.K. Hua, On the theory of automorphic functions of a matrix variable I, *Geometrical basis, Amer. J. Math. 66 (1944), pp. 470-480.*

[7] T. Kato, A Short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators, *Springer-Verlag (1982), p. 143.*

[8] P. Lelong, Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, *Gordon et Breach (1968), p. 35.*

[9] Rudin, Functional Analysis, *Mc Graw-Hill Book Company (1973), p. 73.*

[10] V.S. Vladimirov, Les fonctions de plusieurs variables complexes, *Dunod (1967), p. 82.*

Résumé

Ce travail se compose de deux parties indépendantes.

Dans la première, on étudie l'enveloppe d'holomorphie d'un domaine Ω de $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n$, tubulaire pour la seconde coordonnée, à fibres connexes, de première projection ω. On montre que c'est un domaine $\hat{\Omega}$ de $\hat{\omega} \times \mathbf{C}^n$, tubulaire pour la seconde coordonnée, à fibres convexes, de première projection l'enveloppe d'holomorphie $\hat{\omega}$ de ω.

Dans la seconde partie, on fait agir le groupe unitaire $U(n)$ par conjugaison sur l'espace S_n des matrices symétriques complexes $n \times n$. On donne une description des fonctions plurisousharmoniques $U(n)$-invariantes de S_n et de l'enveloppe polynomiale des compacts $U(n)$-invariants de S_n, en utilisant les matrices diagonales. On obtient des résultats analogues dans le cas où $SU(n)$ agit sur $S_n \cap SL(n, \mathbf{C})$.

Mots clés : Enveloppe d'holomorphie, variété étalée, domaine tube, variété de Stein, enveloppe polynomiale, fonction psh, groupe de matrices.