

55376
1990
17

55376
1990
17

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES -ARTOIS

THESE DE DOCTORAT

présentée à

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MECANIQUE

par

Abdellatif OUAHSINE

**ONDES DE ROSSBY DANS LES COURANTS
OCEANIQUES AVEC COEFFICIENT DE MELANGE**

Soutenue le 21 Novembre 1990 devant la commission d'Examen:



MM. P. MICHEAU, Professeur à l'U.S.T.L.Flandres Artois , Président

W.P.M. DE RUIJTER, Professeur à l'Université d'Utrecht (Pays-Bas)

R.KH. ZEYTOUNIAN , Professeur à l'U.S.T.L.Flandres Artois

} Rapporteurs

P.A. BOIS , Professeur à l'U.S.T.L.Flandres Artois

S. GODTS, Maître de conférences à l'E.N.S.I.M.E.Valenciennes

D. NGUYEN, Maître de conférences à l'U.S.T.L.Flandres Artois

} Examinateurs

SCD LILLE 1



D 030 254402 1

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES -ARTOIS

THESE DE DOCTORAT

présentée à

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MECANIQUE

par

Abdellatif OUAHSINE



**ONDES DE ROSSBY DANS LES COURANTS
OCEANIQUES AVEC COEFFICIENT DE MELANGE**

Soutenu le 21 Novembre 1990 devant la commission d'Examen :

MM. P. MICHEAU, Professeur à l'U.S.T.L.Flandres Artois , Président

W.P.M. DE RUIJTER, Professeur à l'Université d'Utrecht (Pays-Bas)

R.KH. ZEYTOUNIAN , Professeur à l'U.S.T.L.Flandres Artois

} Rapporteurs

P.A. BOIS , Professeur à l'U.S.T.L.Flandres Artois

S. GODTS, Maître de conférences à l'E.N.S.I.M.E.Valenciennes

D. NGUYEN, Maître de conférences à l'U.S.T.L.Flandres Artois

} Examineurs

A mes parents
A ma femme Tine
A mes fils : Samy et Adam.

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Monsieur le Professeur P.A. BOIS qui a suivi avec attention mon travail durant ces quatre années. Sa disponibilité, ses précieux conseils et ses encouragements qu'il m'a toujours témoignés m'ont permis de préparer cette thèse dans de bonnes conditions.

Je remercie également le Professeur W.P.M. DE RUITER pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde gratitude.

Monsieur le Professeur R.Kh. ZEYTOUNIAN a bien voulu accepter de juger ce travail, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Ma reconnaissance va aussi à Monsieur P. MICHEAU qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, et à Monsieur D. NGUYEN pour avoir accepté de faire partie du jury.

J'exprime encore ma gratitude à Monsieur S. GOOTS à qui je dois de nombreuses discussions qui ont été pour moi d'une aide très précieuse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	7
CHAPITRE 1: <u>MODELISATION ASYMPTOTIQUE DES ECOULEMENTS</u> <u>GEOSTROPHIQUES</u>	12
1.1- Equations de base de NAVIER-STOKES.....	13
1.2- Adimensionnalisation et coordonnées cartésiennes.....	15
1.3- Hypothèses fondamentales.....	18
1.3.1- Approximation du plan tangent.....	18
1.3.2- Approximation des ondes longues.....	19
1.4- Modèle quasi-géostrophique.....	21
1.5- Problème d'évolution pour la perturbation de pression.....	23
1.6- Conclusion.....	25
CHAPITRE 2: <u>STRUCTURE VERTICALE D'UN ECOULEMENT GEOSTROPHIQUE</u> <u>DANS LE CAS D'UNE STRATIFICATION CONSTANTE</u>	26
2.1- Ondes libres périodiques dans un milieu illimité.....	27
2.2- Formulation du problème de STURM-LIOUVILLE.....	28
2.3- Solution explicite pour une stratification en densité exponentielle.....	31
2.3.1- Modes propres de la solution.....	31
2.3.1.1- Fréquences d'ondes de Rossby.....	34
2.3.2- Solution à l'ordre deux en ϵ	37

2.3.2.1- Détermination de λ_2 et condition de résolubilité.....	37
2.3.2.2- Interprétation des résultats.....	41
CHAPITRE 3 : <u>STRUCTURE VERTICALE DE L'ÉCOULEMENT GEOSTROPHIQUE DANS LE</u>	
<u>CAS D'UNE STRATIFICATION VARIABLE.....</u>	42
3.1- INTRODUCTION.....	43
3.2- Etude du profil de densité en tangente hyperbolique.....	44
3.3- Etude des termes d'ordres un en ϵ	45
3.3.1- Existence d'oscillations et Théorème d'oscillations de Sturm.....	45
3.3.2- Formes normales du problème de Sturm -Liouville.....	47
3.3.2.1 : cas où $\lambda = k^2 + m^2 + \frac{k\beta}{\sigma} < 0$	50
3.3.2.1.1- Condition d'existence et d'unicité des solutions.....	52
3.3.2.1.2- Expression approchée des valeurs propres.....	55
3.3.2.2 -cas où $\lambda = k^2 + m^2 + \frac{k\beta}{\sigma} > 0$	58
3.3.2.3 -Conclusion.....	59
3.4- Etudes des termes d'ordre deux en ϵ	60
3.5- Résultats.....	64
3.5.1- Solution numérique.....	64
3.5.1.1 - Présentation de la méthode numérique.....	64
3.5.1.2 - Interprétation des résultats.et conclusion.....	66
3.5.2-Solution analytique et interprétation des résultats.....	67

CHAPITRE 4 : <u>ETUDE AU VOISINAGE DE LA PYCNOCLINE</u>	77
4.1-Introduction.....	78
4.2-Formulation du problème.....	79
4.2.1- Hypothèse 1... ..	79
4.2.2- Hypothèse 2.....	80
4.3- Développement asymptotique des solutions.....	80
4.3.1- Etude des termes d'ordre un en N_m^2	80
4.3.1.1 cas où $z+h < 0 : \Rightarrow \mu \rightarrow -1$	80
4.3.1.2 cas où $z+h < 0 : \Rightarrow \mu \rightarrow +1$	83
4.3.1.3 cas où : $z+h \approx O(d)$; avec $\lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{z+h}{d} \right) \approx 0$	84
4.4- Raccord des développements extérieurs et intérieurs.....	85
4.5- Conclusion.....	87
CHAPITRE 5 : <u>STRUCTURE VERTICALE DANS LE CAS où $E_1 \geq O(1)$</u> <u>ET LA STRATIFICATION EST VARIABLE</u>	88
5.1- Introduction.....	89
5.2- Formulation de l'approximation de W.B.K.J.....	90
5.3- Problème de points tournants.....	93
5.3.1- Solutions extérieures.....	93
5.3.2- Etudes au voisinage de points tournants.....	94
5.3.3- Raccords.....	97
5.3.3.1- Raccord des solutions intérieures.....	98
5.3.3.2- Raccord des solutions extérieures avec les solutions intérieures..	100

5.3.3.2.1- Solutions intérieures... ..	100
5.3.3.2.2- Solutions extérieures.....	101
5.4 -Étude du cas où les points tournants n'existent pas.....	103
5.5- Conclusion.....	105
<u>ANNEXE</u> : Méthode de développement à variables multiples.....	106
<u>CONCLUSION</u>	114
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	116

NOTATIONS PRINCIPALES

a_0	:	rayon de la Terre
β_0	:	paramètre bêta
B_0	:	nombre de Boussinesq
d	:	paramètre de variation de la stratification
δ_E	:	épaisseur de la couche d'Ekman
δ_0	:	paramètre de fond
Δ	:	opérateur Laplacien
$\vec{\nabla}$:	opérateur nabla
E	:	nombre d'Ekman
E_{\perp}	:	nombre d'Ekman vertical
\hat{E}_{\perp}	:	paramètre de similitude
ε	:	paramètre de même grandeur que \hat{E}_{\perp}
ϕ	:	longitude
Φ	:	perturbation de pression en fonction de ξ
\vec{g}	:	vecteur accélération de la pesanteur
h	:	profondeur de la thermocline
H_0	:	échelle caractéristique de longueur verticale
J	:	paramètre de normalisation
k	:	nombre d'onde zonal
k_h^2	:	nombre d'onde horizontale
$k_D(z)$:	échelle caractéristique verticale de densité
l	:	paramètre de Coriolis
l_0	:	paramètre de Coriolis local
L_0	:	échelle caractéristique de longueur horizontale
λ	:	paramètre de séparation

m	:	<i>nombre d'onde méridional</i>
m_{1n}	:	<i>valeurs propres</i>
M	:	<i>limite supérieure</i>
μ_0	:	<i>coefficient de viscosité dynamique</i>
μ_{1n}	:	<i>valeur propres</i>
$N^2(z)$:	<i>fréquence de Brunt-Väisälä</i>
N_m^2	:	<i>fréquence de Brunt-Väisälä maximale</i>
η	:	<i>variable en fonction de ξ</i>
ν_0	:	<i>coefficient de viscosité cinématique</i>
ω_0	:	<i>paramètre de similitude</i>
$\vec{\Omega}$:	<i>vecteur rotation de la Terre</i>
p	:	<i>perturbation de pression océanique</i>
p^a	:	<i>pression atmosphérique</i>
π	:	<i>3.14159</i>
r	:	<i>composante radiale des coordonnées sphériques</i>
Re	:	<i>nombre de Reynolds</i>
Ro	:	<i>nombre de Rossby</i>
ρ	:	<i>densité volumique océanique</i>
ρ^a	:	<i>densité volumique atmosphérique</i>
ρ_{00}	:	<i>densité volumique de référence</i>
S	:	<i>nombre de Strouhal</i>
σ	:	<i>fréquence de Rossby</i>
θ	:	<i>latitude</i>
θ_0	:	<i>point de latitude central</i>
\vec{v}	:	<i>vecteur vitesse horizontale</i>
z	:	<i>variable d'espace verticale</i>
ξ	:	<i>variable d'espace</i>
w	:	<i>vitesse verticale</i>

INTRODUCTION

L'objet de la présente étude est de décrire un modèle d'évolution des courants océaniques mettant en évidence le couplage dynamique océan- atmosphère et visant à établir un modèle quasi-géostrophique en ondes longues pour la circulation des océans.

Ce modèle est essentiellement forcé par la tension exercée par le vent sur la couche de surface de l'Océan. Les approximations quasi-géostrophiques utilisent des échelles verticales comparables à la profondeur du bassin et une étendue horizontale ne dépassant pas 1000 kms.

Il est connu, (KAMENKOVICH, 1977) que la contribution de la variabilité de l'Océan provient du processus (à méso-échelle et macro-échelle) des fréquences caractéristiques de l'ordre de 1 oscillation par jour et des nombres d'ondes de 10^{-3} - 10^{-2} km^{-1} . Cependant, il n'existe dans cette gamme que les ondes longues baroclines et barotropes de Rossby et la portion d'énergie due aux ondes acoustiques gyroscopiques et gravitationnelles y est insignifiante. En effet, les ondes de surfaces possèdent une grande variété de longueurs d'ondes et de fréquences. Quand elles agissent simultanément sur les courants océaniques, ceux-ci produisent des oscillations de type complexe. Ainsi il est naturel de considérer l'approximation de Boussinesq et l'approximation quasi-statique afin de filtrer les ondes courtes et ne conserver que les ondes longues (ZEYTOUNIAN, 1990, pp 36-56).

Dans de tels modèles, on rencontre souvent deux classes d'ondes longues : la première classe est constituée d'ondes longues de gravité dont la fréquence ω est supérieure à $f_0 + \beta_0 y$, où la rotation f_0 de la Terre est un paramètre. Ces ondes sont d'une importance fondamentale dans la théorie de la propagation des marées. La seconde classe est constituée d'ondes planétaires ou ondes de Rossby dont la fréquence ω est inférieure à $f_0 + \beta_0 y$. Ces ondes n'existent que si l'Océan est en rotation.

En ce qui nous concerne nous nous intéressons à cette dernière classe et nous

nous limitons aux mouvements de grandes échelles dynamiques à moyennes latitude ($\phi \cong 45^\circ$) pour un Océan théorique où la rotation de la Terre est prédominante. Les écoulements ont lieu dans une fine couche entourant la sphère terrestre. Le paramètre caractérisant ces écoulements, c'est à dire le nombre de Rossby est supposé petit devant l'unité.

A partir de ce modèle, GODTS (1988) a obtenu un problème d'évolution pour la pression océanique, qui prend en compte les échanges océan-atmosphère. Ce modèle ne s'intéresse qu'à la structure verticale de la perturbation de pression. Les autres grandeurs se déduisent de celle-ci sans difficulté majeure.

Le problème mathématique obtenu, part de l'hypothèse que l'Océan est stratifié et que la stratification dépend du profil donné de la densité volumique, et que la variation de la densité qui résulte de l'échauffement différentiel de l'Océan est responsable des circulations des systèmes. En outre, la stabilité dépend de la stratification dans laquelle le fluide le plus lourd au dessous du fluide le plus léger, provoque des mouvements verticaux affectant la nature dynamique de l'écoulement.

La structure verticale permet de supposer que chaque particule fluide se déplace adiabatiquement du niveau z au niveau $z+\zeta$, qu'à chaque instant t , on a un état d'équilibre thermodynamique stable et que la variation de densité (c.à.d : $\frac{d\rho_0}{dz}$) est négative. Le déplacement de la particule fluide à partir de cet état d'équilibre, en l'absence de l'effet de la compressibilité, induit de petites oscillations de fréquence N (fréquence de Brunt-Väisälä), donnée par la relation :

$$N^2 = - \frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}$$

Dans le cas des ondes linéarisées, les équations sont linéaires à coefficients dépendant de z . Il résulte de cela que l'étude des ondes dans un océan à profondeur constante, peut effectuer en séparant les variables pour obtenir d'une part un système d'équation différentielle

pour la structure verticale, et d'autre part un autre système pour la structure horizontale, de sorte que : $v(x,y,z,t) = V_n(z) \cdot h_n(x,y,t)$.

Cette méthode d'analyse pour étudier les problèmes de fluides en rotation à profondeur constante, a été introduite par TAYLOR (1936) dans le cas d'une stratification continue, et par CHARNEY (1955), VERONIS et STOMMEL (1956) dans le cas d'un fluide à deux couches (stratification discontinue).

Plusieurs études ont été entreprises à ce sujet dans les dernières décennies. Citons notamment la formulation de GARRET et MUNK (1972, 1975) qui consiste à supposer que l'Océan est illimité au fond et à la surface, et que la fréquence $N(z)$, comparée aux fluctuations d'ondes, varie peu en fonction de la profondeur. LEBLOND et MYSAK (1978) donnent une interprétation peu différente de celle de GARRET et MUNK, et décrivent une structure océanique verticale à deux couches contenant une pycnocline. La pycnocline est un niveau de profondeur séparant deux couches de liquide dans lesquelles la densité varie peu, le voisinage de la pycnocline étant au contraire, une zone de fort gradient de densité. La fréquence $N(z)$ est une fonction qui varie peu dans la couche de mélange et demeure constante au dehors de la pycnocline. Ce modèle fut repris par plusieurs auteurs: citons PEDLOSKY (1979) qui le généralise en donnant un modèle multi-couches à densités uniformes mais distinctes. Dans leurs travaux, BADULIN, SHRIRA et TSIMRING (1985) étendent la propagation d'ondes internes au cas d'une stratification continue, et montrent que l'existence d'un fort gradient horizontal de densité modifie la structure dynamique et cinématique des ondes internes. Ces mouvements d'ondes se concentrent à certaines profondeurs, appelées zones de piégeage d'ondes et sont déterminées en fonction de la pycnocline. Ils concluent que ces zones deviennent des régions d'interaction intense entre les ondes internes et les mouvements à grandes échelles.

D'autres études théoriques et expérimentales plus récentes confirment ces résultats. Citons notamment les résultats de SIMPSON et LINDEN (1986, 1989) qui démontent qu'un fluide sous l'effet de la pesanteur et qui contient un gradient de densité horizontal et vertical est linéairement stable si le gradient de densité horizontal est constant, tandis qu'il y a formation d'un front d'énergie(" Frontogénèse") intense associé à la non - uniformité de celui-ci.

Dans cette étude, nous nous limitons à un océan théorique à latitudes moyennes. Nous considérons le cas d'un paramètre de variation de la stratification petit et nous supposons que la profondeur de la thermocline est fixée. Nous assimilons l'océan à un milieu fluide incompressible pesant, à masse volumique non constante, et visqueux. L'océan est limité verticalement par un fond plat et une surface libre qui le sépare de l'atmosphère. En outre le processus dissipatif (frottement, échauffement, conduction, diffusion) est négligeable.

Au cours de ce travail, il a été discuté une hypothèse sur le paramètre \hat{E}_L , en particulier son ordre de grandeur par rapport à l'unité. Toutefois la viscosité cinématique change suivant la latitude. En conséquence le nombre d'EKMAN mesurant le rapport des effets de la viscosité et de la rotation de la Terre, varie. Il s'ensuit que la profondeur de la couche d'EKMAN et le nombre \hat{E}_L varient aussi.

Dans la première partie, composée du seul chapitre I, on rappelle le modèle mathématique en ondes longues de la circulation océanique obtenu par GODTS (1985,1988) à partir des équations générales de Navier - Stokes. On précise les principales hypothèses et approximations nécessaires pour élaborer le cadre asymptotique dans lequel nous nous plaçons, afin de formuler le problème d'évolution de la pression océanique à l'ordre 1 par rapport au nombre de Rossby R_0 .

La seconde partie de ce travail prolonge celui de GODTS 1988. Elle est consacrée à l'étude du problème d'évolution de la pression P_1 , en particulier à l'examen de la structure verticale de la variation de pression, que l'on a réduit à un problème aux limites de STURM-LIOUVILLE. Tout le long de cette partie nous considérons l'hypothèse $\hat{E}_L \ll 1$. Bien que cette hypothèse mène à des simplifications mathématiques, elle correspond à des situations physiques des Océans qu'on expliquera dans les chapitres qui suivent. Cette partie est divisée en trois chapitres.

Au chapitre II on donne une description qualitative de l'évolution de cette structure verticale dans le cas d'un gradient horizontal de densité constant, et cela en supposant un profil de densité en exponentiel. On établit ainsi que les modes propres associés sont stables au cours du temps.

Au chapitre III on étudie analytiquement et numériquement le cas d'un gradient horizontal variable, en se donnant un profil de densité en tangente hyperbolique. Nous étudions dans ce chapitre le problème d'existence et d'unicité de la solution en fonction du paramètre de variation de la stratification.

Le passage du cas continu d'un fluide stratifié, au cas limite de discontinuité de deux fluides superposés partiellement est envisagé. Ce passage se manifeste par une concentration d'énergie au niveau de la pycnocline qui sépare les deux zones. Néanmoins, cette concentration d'énergie favorise une croissance excessive de l'amplitude de la solution, qui déstabilise le courant océanique. On justifie en outre numériquement l'hypothèse classique d'instabilité des écoulements d'un Océan en rotation sous l'effet d'un gradient horizontal de densité fort.

Au chapitre IV on présente un modèle mathématique dans le cas d'un gradient horizontal de densité fort, basée sur la recherche des solutions de part et de l'autre côté de la pycnocline en tenant compte des conditions aux limites au fond et à la surface. Ensuite, en recherche une solution au voisinage de la pycnocline, qu'on raccordera aux solutions précédentes, afin de déterminer la solution générale.

Dans la dernière partie de ce travail sera considéré l'hypothèse $\hat{E}_1 \geq 1$. Au contraire du cas précédent il s'est avéré que le système d'équations de départ contient des termes complexes. Ceci rend l'application de la méthode de STURM-LIOUVILLE plus difficile à résoudre par la méthode utilisée dans les chapitres II et III. Pour cela on se propose d'utiliser l'approximation de W.B.K.J mettant en évidence l'existence de points tournants, et la transformation de LANGER. Cette dernière approximation nous permet d'étudier le voisinage de ces points et nous donne une approximation uniformément valable de la solution.

CHAPITRE I

MODELISATION ASYMPTOTIQUE DES ECOULEMENTS GEOSTROPHIQUES

1.1. Equations de base de NAVIER STOKES

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible de masse volumique ρ , de viscosité cinématique μ et de viscosité dynamique ν . Les repères dans lesquels sont étudiés les mouvements de cet écoulement ne sont pas galiléen, et les forces extérieures sont celles de la pesanteur $\vec{g} = -g \vec{k}$ et de la force de Coriolis. Le vecteur $\vec{\Omega} = \Omega \vec{z}$ de rotation de la Terre par rapport au repère absolu (x, y, z) étant dirigé du Sud vers le Nord.

On se place dans un repère lié à la Terre de centre A et de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) où θ désigne la latitude $(\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$, ϕ la longitude, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant le repère naturel orthonormé associé à (r, θ, ϕ) .

Les équations de Navier-Stokes pour les mouvements océaniques sous les hypothèses décrites dans l'introduction, s'écrivent (voir par exemple PEDLOSKY pp338-359) :

1.1. 1- Equations de la quantité de mouvement

$$(1-a) \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} u - \frac{u v}{r} \operatorname{tg} \theta + \frac{u w}{r} - 2 \Omega v \sin \theta + 2 \Omega w \cos \theta \right) = \\ - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu_0 \left(\vec{\nabla}^2 u + \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{2 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{u}{r^2 \cos^2 \theta} \right);$$

$$(1-b) \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} v + \frac{u^2}{r} \operatorname{tg} \theta + \frac{v w}{r} + 2 \Omega u \sin \theta \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ + \mu_0 \left(\vec{\nabla}^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{2 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v}{r^2 \cos^2 \theta} \right);$$

$$(1-c) \quad \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} w - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2 \Omega u \cos \theta \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} - \rho g \\ + \mu_0 \left(\vec{\nabla}^2 w - \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial \theta} - \frac{2 w}{r^2} \right)$$

1.1. 2- Equation de conservation de la masse dans l'approximation de Boussinesq.

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) + 2 w \cos \theta + r \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

1.1.3- Equation de l'énergie en l'absence de dissipation

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0$$

avec $\vec{u} = \vec{v} + w \vec{k}$, $\vec{v} = u \vec{i} + v \vec{j}$

On désigne par u la vitesse relative, p la pression, ρ la densité volumique μ_0 le coefficient de viscosité dynamique constant et ∇ l'opérateur différentiel suivant :

$$(4) \quad \vec{\nabla} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial r} \vec{k}$$

Aux frontières, les composantes normales et tangentielles des vitesses sont nulles. A ces conditions aux frontières s'ajoutent les conditions initiales :

$$(5) \quad t = 0, \quad u = u^0, \quad \rho = \rho^0$$

Désignons par a_0 le rayon de la Terre et introduisons les coordonnées curvilignes suivantes :

$$(6) \quad x = a_0 \cos \theta_0 \phi \quad y = a_0 (\theta - \theta_0) \quad z = r - a_0$$

où l'axe Ox est dirigé vers l' Est, Oy vers le Nord, Oz est la verticale ascendante. L'origine locale $O(x,y,z)=0$, caractérise le point au voisinage duquel se déroulent les phénomènes que l'on étudie.

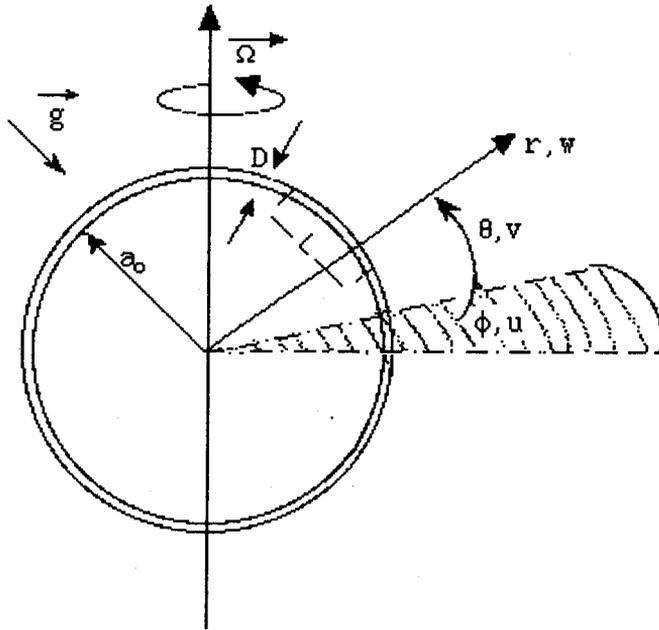


figure 1:

1.2. Adimensionnalisation et coordonnées cartésiennes

Introduisant les paramètres non dimensionnels suivants :

$$\begin{aligned}
 (x, y) &= L_0 (x', y') & z &= H_0 z' & r &= a_0 r' & t &= T t' \\
 (u, v) &= U (u', v') & w &= W w' & p &= P p' & \rho &= \rho_{00} \rho' \\
 B_0 &= \frac{g \rho_{00} H}{P} & M_0^2 &= \frac{U^2}{c^2} & c^2 &= \frac{\rho_{00}}{P_{00}} & S &= \frac{L_0}{UT} \\
 R_0 &= \frac{U}{l_0 L_0} & l_0 &= 2 \Omega \sin \theta & l &= l_0 + \beta_0 \frac{L_0}{U} y
 \end{aligned}$$

$$E = \frac{v_0}{l_0 L_0^2}$$

$$E_{\perp} = \frac{E}{\varepsilon_0^2}$$

$$v_0 = \frac{\mu_0}{\rho_{00}}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{H_0}{L_0} = \frac{W}{U}$$

$$\delta = \frac{L_0}{a_0}$$

$$\beta_0 = \frac{L_0}{U} \frac{dl}{dy} / y=0$$

où :

a_0 est le rayon de la Terre,

Ω est le module du vecteur rotation terrestre,

θ_0 est la latitude du point central.

T, P, ρ_{00} sont les échelles caractéristiques de temps, de la pression et de la densité volumique respectivement.

L_0 : l'échelle caractéristique horizontale des différents champs.

H_0 : l'échelle caractéristique verticale des différents champs.

U, W : échelles caractéristiques des vitesses horizontales verticales respectivement.

R_0 : le nombre de Rossby

B_0 : le nombre de Boussinesq

S : le nombre de Strouhal

E, E_{\perp} : nombre d'Ekman ordinaire et vertical

δ_0 : paramètre de fond

ε_0 : paramètre hydrostatique

l : paramètre local de Coriolis.

On obtient le système suivant :

$$(7-a) \quad S \frac{\partial u}{\partial t} - \delta_0 \frac{u v}{r} \operatorname{tg} \theta + \varepsilon_0 \delta_0 \frac{u w}{r} - \frac{v}{R_0} \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} + \frac{\varepsilon_0 w}{R_0} \frac{\cos \theta}{\sin \theta_0} = - \frac{M_0^{-2} \cos \theta_0}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$+ \frac{1}{\rho R_e} \left(\frac{1}{r^2 \varepsilon_0^2} \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\cos \theta \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\cos^2 \theta_0}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. + 2 \varepsilon_0 \delta_0 \frac{\cos \theta_0}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial x} - 2 \delta_0 \frac{\cos \theta_0 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\delta_0^2 u}{r^2 \cos^2 \theta} \right) ;$$

$$(7-b) \quad S \frac{\partial v}{\partial t} + \delta_0 \frac{u^2}{r} \operatorname{tg} \theta + \varepsilon_0 \delta_0 \frac{v w}{r} + \frac{u}{R_0} \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} = - \frac{M_0^{-2}}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$+ \frac{1}{\rho R_e} \left(\frac{1}{r^2 \varepsilon_0^2} \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{\cos^2 \theta_0}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. + 2 \varepsilon_0 \delta_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \delta_0 \frac{\cos \theta_0 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\delta_0^2 v}{r^2 \cos^2 \theta} \right) ;$$

$$(7-c) \quad \varepsilon_0^2 S \frac{\partial w}{\partial t} - \delta_0 \varepsilon_0 \frac{u^2 + v^2}{r} - \frac{\varepsilon_0 u \cos \theta}{R_0 \sin \theta_0} = - \frac{M_0^{-2}}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + B_0 \rho \right)$$

$$+ \frac{1}{\rho R_e} \left(\frac{\partial}{\partial z} (r^2 \frac{\partial w}{\partial z}) + \varepsilon_0^2 \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\cos \theta \frac{\partial w}{\partial y}) + \varepsilon_0^2 \frac{\cos^2 \theta_0}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. - 2 \varepsilon_0^2 \delta_0^2 \frac{w}{r^2} - 2 \delta_0 \varepsilon_0 \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (v \cos \theta) - 2 \delta_0 \varepsilon_0 \frac{\cos \theta_0}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial x} \right) ;$$

$$(7-d) \quad \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} (r^2 w) + \varepsilon_0 \frac{r}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (v \cos \theta) + \varepsilon_0 \frac{r \cos \theta_0}{\cos \theta} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ;$$

$$(7-e) \quad S \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\cos \theta_0}{r \cos \theta} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$

1. 3 -Hypothèses fondamentales

1. 3.1-Approximation du plan tangent

Dans l'étude des écoulements océaniques où l'on ne s'intéresse qu'aux ondes de grandes longueurs d'ondes, comme c'est le cas des ondes de ROSSBY dont les périodes des oscillations sont supérieures à une oscillation par jour. Il est souvent usuelle d'utiliser l'approximation du plan tangent, et cela de manière à suivre l'évolution de ces ondes sur des altitudes considérables en comparaison avec la longueur d'onde.

On admet dans tout ce qui suit que :

$$(8) \quad \delta_0 = \frac{L_0}{a_0} \ll 1$$

cela signifie que les longueurs envisagées sont petites devant le rayon de la Terre.

Nous effectuons le passage à la limite suivant:

$$(9) \quad \delta_0 \rightarrow 0 \quad \text{avec } \beta_0 = O(1)$$

$$(10) \quad \text{où : } \beta_0 = 2\Omega \cos\theta_0 \frac{L_0^2}{a_0 U}$$

On obtient le système suivant :

$$(11-a) \quad \rho \left(R_0 S \frac{D\vec{v}}{Dt} + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \vec{v} + \varepsilon_0 w \cotg\theta_0 \vec{i} \right) =$$

$$- \frac{R_0}{M^2_0} \vec{D} p + \varepsilon_0 \vec{D}^2 \vec{v} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}$$

$$(11-b) \quad \rho \left(\varepsilon_0^2 R_0 S \frac{Dw}{Dt} - \varepsilon_0 u \cotg\theta_0 \right) = - \frac{R_0}{M^2_0} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + B_0 \rho \right) + \varepsilon_0^2 \varepsilon_0 \vec{D}^2 w + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

$$(11-c) \quad \vec{D} \vec{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$(11-d) \quad S \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

$$\text{avec :} \quad S \frac{D}{Dt} = S \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \vec{D} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

1.3.2. L'approximation des ondes longues

Avec l'approche précédemment décrite dans le paragraphe précédent, et afin de mettre en évidence les ondes longues de ROSSBY il est donc nécessaire d'éliminer les ondes courtes internes. On tient compte de l'équation de l'interface océan-atmosphère qui s'écrit:

$S(x,y,z,t) = z - \alpha \eta(x,y,t) = 0$ où α désigne un petit paramètre sans dimension qui caractérise l'amplitude réduite des déplacements verticaux de l'interface en comparaison avec la profondeur. Ainsi la modélisation de l'écoulement océanique étudié consiste à traiter le système (I,11) et à considérer le passage à la limite suivant, dit filtrage des ondes courtes.

On fait tendre ε_0 et α simultanément vers zéro, telquel $\frac{\alpha}{\varepsilon_0}$ est constant et les autres paramètres restant constants.

Nous supposons ensuite vérifiées les conditions suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(ii)} \quad \vec{D} \bar{\eta} = \frac{1}{\varepsilon_0} D \bar{\eta}, \quad || \vec{D} \bar{\eta} || = O(1) \\ \text{(i)} \quad \text{Lim}_{OL}(s) = S \end{array} \right.$$

et nous obtenons le système suivant :

$$(13-a) \quad \rho \left(R_0 \left(S \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} \vec{v} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \vec{v} \right) + \frac{R_0}{M_0^2} \vec{D} p = E_{\perp} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$(13-b) \quad \frac{\partial p}{\partial z} + B_0 \rho = 0$$

$$(13-c) \quad \vec{D} \vec{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$(13-d) \quad S \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

Nous associons à ce système d'équations aux dérivées partielles les conditions aux limites suivantes:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\mu_0 \frac{U}{L_0} \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right]_s = 0 \\ \left[-p + 2 \mu_0 \frac{U}{L_0} \frac{\partial w}{\partial z} \right]_s = 0 \end{array} \right. \quad \text{en } z=0$$

où l'on convient de noter $[f]_s$ le saut de la grandeur "f" au travers de s.

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{0} \\ w = 0 \end{array} \right. \quad \text{en } z=-1$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}^0 \\ p = p^0 \end{array} \right. \quad \text{en } t=0$$

Les deux premières équations caractérisent les conditions de transmission à l'interface océan - atmosphère (voir GODTS, 1988)

1.4. Modèle quasi-géostrophique

Afin d'éviter la dégénérescence des équations du système (I,13), lorsque R_0 et E_{\perp} tendent simultanément vers zéro, une première étape de l'approximation quasi-géostrophique consiste à introduire les paramètres de similitude suivants :

$$(17) \quad \omega_0 = \frac{M_0^2}{R_0^2}$$

$$(18) \quad \hat{E}_{\perp} = \frac{E_{\perp}}{R_0^2}$$

Nous effectuons ensuite le passage à la limite principale suivant :

$$(19) \quad R_0 \rightarrow 0 \text{ avec } \omega_0 \text{ et } \hat{E}_{\perp} \text{ sont fixés}$$

Une seconde étape consiste à effectuer des passages aux limites locaux; tenant compte des conditions sur les frontières verticales.

En admettant que les mouvements envisagés aient une faible amplitude, on peut écrire les développements suivants:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + R_0 v_1 + \dots \dots \\ w &= R_0 w_1 + \dots \dots \\ (20) \quad p &= p_0 + R_0 p_1 + \dots \dots \\ \rho &= \rho_0 + R_0 \rho_1 + \dots \dots \end{aligned}$$

et se limiter au calcul des petites quantités d'ordre un en R_0 , on obtient donc le système suivant :

$$(21-a) \quad \rho_0 \left(S \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \vec{v}_0 + \beta y \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_0 + \vec{k} \wedge \vec{v}_1 \right) + \rho_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_0 + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} p_2 = \vec{0}$$

$$(21-b) \quad \vec{D} \vec{v}_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

$$(21-c) \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} + B_0 \rho_1 = 0$$

$$(21-d) \quad S \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \rho_1 + w_1 \frac{d\rho_0}{dz} = 0$$

où p_0, ρ_0 et v_0 vérifient :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_0}{\partial z} + B_0 \rho_0 = 0 \\ \vec{v}_0 = (\omega_0 \rho_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} p_1 \end{array} \right.$$

1.5. Problème d'évolution pour la perturbation de pression

A partir de ce dernier système d'équations, nous obtenons par élimination une équation d'évolution pour P_1 :

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & S\omega_0^{-1} \left(\frac{\partial^3 p_1}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 p_1}{\partial y^2 \partial t} \right) + SB_0^{-1} \left(k_0(z) \frac{\partial^3 p_1}{\partial z^2 \partial t} + (1+k_0'(z)) \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial t} \right) \\
 & + (\omega_0 \rho_0)^{-1} \left[-\frac{\partial p_1}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 p_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 p_1}{\partial x \partial y^2} \right) \omega_0^{-1} - B_0^{-1} \frac{\partial p_1}{\partial y} \left(k_0(z) \frac{\partial^3 p_1}{\partial z^2 \partial x} \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1+k_0'(z)) \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial x} \right) \right] + (\omega_0 \rho_0)^{-1} \left[\frac{\partial p_1}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 p_1}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 p_1}{\partial y^3} \right) \omega_0^{-1} \right. \\
 & \left. + B_0^{-1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \left(k_0(z) \frac{\partial^3 p_1}{\partial z^2 \partial y} + (1+k_0'(z)) \frac{\partial p_1}{\partial z \partial y} \right) \right] + \omega_0^{-1} \beta \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0
 \end{aligned}$$

Nous associons à cette équation les conditions aux limites et initiales:

$$(24) \quad S \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} \right) = \begin{cases} B_0 \Gamma(z) \chi(z) \vec{D}^2 \left[(\omega_0 \rho_0)^{-1} P_1 - (\omega_0 \rho_0)^a p_1^a \right] & \text{en } z=0 \\ B_0 \chi(z) \vec{D}^2 \left[(\omega_0 \rho_0)^{-1} P_1 = 0 \right] & \text{en } z=-1 \end{cases}$$

$$(25) \quad \Lambda P_1 = \rho_0 \vec{k} \vec{D} \Lambda \vec{v}^0(x,y,z) + B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_0 k_0(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_1^0}{\rho_0} \right) \right] \quad \text{en } t=0$$

$$(26) \quad \text{où: } S \frac{D_0}{Dt} = S \frac{\partial}{\partial t} + \left((\omega_0 \rho_0)^{-1} \vec{k} \Lambda \vec{D} P_1 \right) \vec{D}$$

$$(27) \quad \Lambda = \omega_0^{-1} \vec{D}^2 + B_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(k_0(z) \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(28) \quad k_0(z) = \left(-\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz} \right)^{-1}$$

$$(29) \quad \chi(z) = \left(\frac{\hat{E}_1}{2\rho_0(z)} \right)^{1/2} \frac{d\rho_0(z)}{dz}$$

Les grandeurs P_1^a , ρ_0^a , ω^a , caractérisent respectivement, la pression, la densité et un paramètre de similitude, de l'atmosphère.

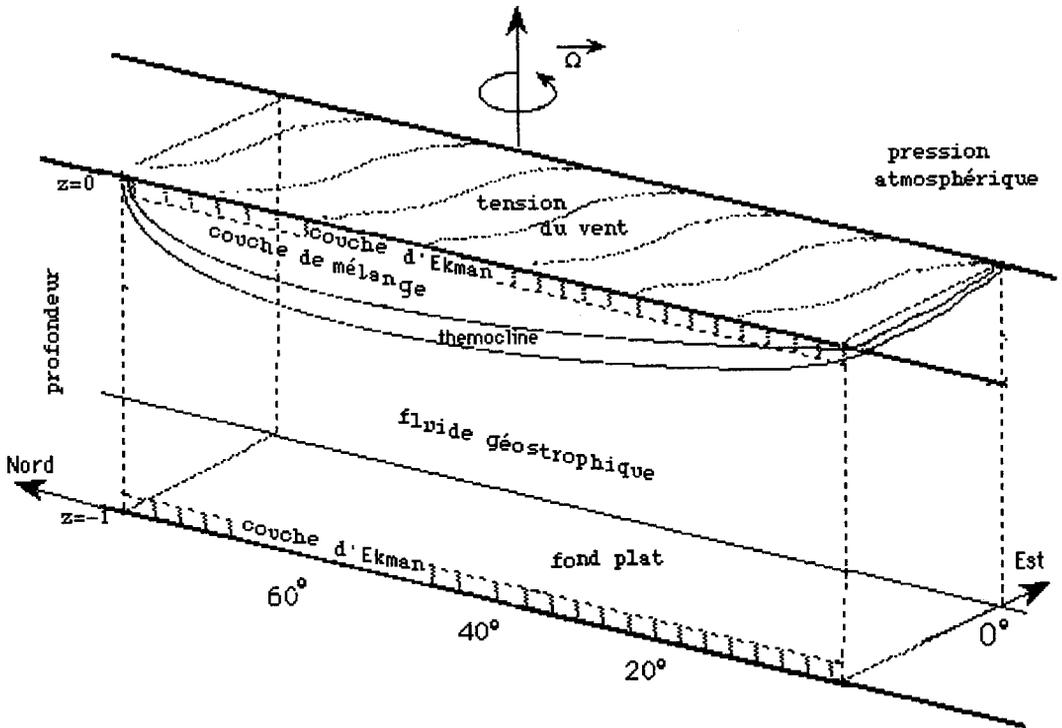


figure 2: Illustration du milieu étudié

1.6. Conclusion

En résumé de cette première partie, notons que la théorie de GODTS développée ici, établit qu'à l'ordre ϵ le système (1) est réduit à l'équation (23) avec les conditions aux limites (24) et (25). Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles non linéaire vérifiée par la perturbation de pression P_1 .

Comme le laisse penser l'existence d'une circulation océanique induite par le vent, il s'établit une étroite interaction entre l'océan et l'atmosphère; de même les échanges d'énergie mécanique et thermique s'effectuant à travers la surface de l'océan entraînent des répartitions inégales de densité tant dans la mer que dans l'air. Ainsi dans la condition à la limite de l'interface dans (25) figurent les grandeurs P^a, ρ^a, ω^a relatives à l'atmosphère .

Cette modélisation océanique est fondée sur un modèle quasi-géostrophique (figure 2), où le transfert de quantité de mouvement à l'interface air-mer se traduit par un apport d'énergie de la surface vers les couches profondes du bassin océanique. Cette propagation d'énergie est difficilement paramétrisable dans la région représentant la thermocline où la stratification est figée. C'est la raison pour laquelle nous nous intéressons à la structure verticale du modèle en question.

Il est donc nécessaire pour étudier cette structure de faire de nouvelles hypothèses; c'est ce que l'on envisage aux chapitres suivants.

CHAPITRE II

STRUCTURE VERTICALE
D'UN ECOULEMENT GEOSTROPHIQUE
à
STRATIFICATION CONSTANTE

INTRODUCTION :

2.1. Ondes libres périodiques dans un milieu illimité

L'objet de ce chapitre est de donner une description qualitative de l'évolution de la perturbation de pression pour une stratification constante appuyée par l'hypothèse $\hat{E}_1 < 1$, qui bien qu'elle mène à des simplifications mathématiques, traduit des situations physiques qu'on expliquera au cours de ce travail. En outre dans ce chapitre on retrouve quelques propriétés des ondes de ROSSBY habituelles mais avec un léger amortissement.

Nous supposons que le milieu est illimité suivant Ox, Oy et limité verticalement par un fond plat et une surface libre. Nous supposons en outre que la perturbation de pression atmosphérique est négligeable devant la pression océanique.

On propose de chercher des solutions périodiques en x, y et t respectivement en direction de l'Est, en direction du Nord et le temps, en supposant que la perturbation ait la forme d'onde plane suivante :

$$(1) \quad p_1(x, y, z, t) = P(z) \exp[i(kx + my - \sigma t)]$$

où k désigne le nombre d'onde zonal, m le nombre d'onde méridional et σ la fréquence des oscillations.

L'avantage de la forme de solution (1) est que les termes non linéaires de l'équation (23) du chapitre 2 s'éliminent identiquement .

2.2. Formulation du problème de STURM-LIOUVILLE

L'examen direct de l'équation d'évolution de la perturbation de pression, en utilisant l'équation (1), conduit pour la forme verticale $P(z)$, au problème aux limites de Sturm-Liouville suivant :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_0(z) \frac{d^2 P}{dz^2} + (1 + k_0(z)') \frac{dP(z)}{dz} - \lambda P(z) = 0 \quad (a) \\ -i \sigma \frac{dP(z)}{dz} + \alpha_1 P(z) = 0 \quad \text{en} \quad z=0 \quad (b) \\ -i \sigma \frac{dP(z)}{dz} + \alpha_2 P(z) = 0 \quad \text{en} \quad z=-1 \quad (c) \end{array} \right.$$

où :

$$(3) \quad k_0(z) = \left(- \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz} \right)^{-1}$$

désigne l'échelle caractéristique verticale de densité,

$$(4) \quad \lambda = \omega_0^{-1} B_0 \left(k_h^2 + \frac{k\beta}{\sigma} \right), \quad \text{est un paramètre de séparation des variables,}$$

$$(5) \quad k_h^2 = k^2 + m^2 \quad \text{désigne le nombre d'onde horizontal,}$$

α_1 et α_2 sont deux paramètres donnés du problème, qui s'écrivent :

$$(6) \quad \alpha_1 = - \left(\omega_0^{-1} B_0 k_h^2 \Gamma(z) \left(\frac{\hat{E}_1}{2\rho_0(z)} \right)^{1/2} \frac{1}{k_0(z)} \right) \quad z=0$$

$$(7) \quad \alpha_2 = - \left(\omega_0^{-1} B_0 k_h^2 \left(\frac{\hat{E}_1}{2\rho_0(z)} \right)^{1/2} \frac{1}{k_0(z)} \right) \quad z=-1$$

et :

$$(8) \quad \Gamma(z) = -1 + \frac{\mu \rho_0(z)^{1/2}}{(\mu^a \rho_0^a(z)^{1/2} + \mu \rho_0(z)^{1/2})}$$

μ^a , ρ_0^a désignent respectivement le coefficient de viscosité dynamique et la densité volumique atmosphérique.

Les effets de frottements et de viscosité se font sentir dans des couches minces de largeur négligeable devant les échelles des phénomènes géophysiques étudiés. Nous faisons alors l'hypothèse suivante :

$$(9) \quad \left(\frac{\hat{E}_1}{2} \right)^{1/2} = \varepsilon \ll 1$$

Comme il a été noté dans l'introduction, le choix de cette hypothèse n'est pas fortuit mais peut correspondre à des situations réelles de l'océan. En fait, pour une profondeur moyenne de l'Océan $H \approx 5 \cdot 10^3$ m, une étendue horizontale $L \approx 10^6$ m, et une vitesse du vent de 1 m/s^{-1} , si la viscosité cinématique varie entre 50 et $500 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ à différentes latitudes, alors le paramètre \hat{E}_1 peut être inférieur à 1, et l'épaisseur de la couche d'EKMAN δ_E est assez mince (voir tableau 1). Plusieurs études ont été faites à ce sujet, on cite les mesures de la viscosité cinématique de BOWDEN, HOWE, et TAIT (1970) en l'Atlantique Nord, et de HOEBER (1972) en Atlantique tropicale (voir E.B.KRAUS 1975, pp 102-117).

$v \text{ m}^2\text{s}^{-1}$	R_0	E_V	\hat{E}_1	$\delta_E \text{ (m)}$
$5 \cdot 10^{-1}$	0.0076	$1.58 \cdot 10^{-4}$	2.669	62.88
$5 \cdot 10^{-2}$	0.0076	$1.58 \cdot 10^{-5}$	0.2669	19.885
$5 \cdot 10^{-3}$	0.0076	$1.58 \cdot 10^{-6}$	0.02669	6.288

Tableau 1: valeurs du paramètre \hat{E}_1 et de la couche d'EKMAN pour différentes valeurs de la viscosité à la latitude de 60° .

Nous supposons ensuite que les mouvements ont des petites amplitudes.

On écrit alors les développements suivants :

$$\begin{aligned}
 P(z, \varepsilon) &= P_1(z) + \varepsilon P_2(z) + O(\varepsilon^2), \\
 (10) \quad \sigma(\varepsilon) &= \sigma_1 + \varepsilon \sigma_2 + O(\varepsilon^2), \\
 \lambda(\varepsilon) &= \lambda_1 + \varepsilon \lambda_2 + O(\varepsilon^2), \\
 \alpha_1 &= \varepsilon \hat{a}_1 \\
 \alpha_2 &= \varepsilon \hat{a}_2
 \end{aligned}$$

Nous identifions ensuite entre elles les différentes puissances en ε ; au premier ordre nous obtenons le problème aux limites :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{dP_1(z)}{dz} \right) + \frac{\lambda_1}{\rho_0(z)} P_1(z) = 0 \quad (a) \\ \frac{dP_1(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = -1 \quad (b) \\ \frac{dP_1(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (c) \end{array} \right.$$

Le problème à résoudre est le suivant :

Existe-il des valeurs propres λ_1 (et donc les valeurs σ_1) auxquelles on associe des fonctions propres, tel que le problème aux limites (11), ait des solutions non nulles ?

Pour étudier ce problème, nous examinons la structure verticale de $P_1(z)$ en considérant les solutions en modes normaux pour un profil de la densité volumique donné, et nous montrerons comment cette structure verticale dépend de la stratification à travers la fréquence de Brunt -Väisälä, dans la forme et la nature de propagation de ces modes propres.

2.3. Solution explicite pour une stratification en densité exponentielle.

Ce modèle à stratification constante montre une description qualitative simple de l'évolution verticale des modes propres. Il consiste à supposer un profil de densité volumique en exponentielle :

$$(12) \quad \rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-N_m^2 z)$$

où : $N_m^2 \ll 1$, et désigne la fréquence maximale de Brunt-Väisälä du milieu et ρ_{00} est une constante.

2.3.1. Modes propres de la solution.

L'équation (11,a) étant linéaire, sa solution est une combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes.

On discutera alors deux cas :

$$1^{\circ} : \text{ si } \lambda_1 < -\frac{N_m^2}{4}$$

la solution s'écrit :

$$(13) \quad P_{1n}(z) = \exp\left(\frac{-N_m^2 z}{2}\right) (A_n \cos(\gamma_n z) + B_n \sin(\gamma_n z))$$

où :

$$(14) \quad \gamma_n = \frac{N_m^2}{2} \left(\left| 1 + \frac{4\lambda_{1n}}{N_m^2} \right| \right)^{1/2}$$

Nous utilisons ensuite les conditions aux limites pour déterminer les constantes A_n et B_n .

Pour qu'il n'y ait pas de solutions triviales il est nécessaire que soit satisfaite l'équation caractéristique :

$$(15) \quad \left(\gamma_n^2 + \frac{N_m^2}{4} \right) \sin \gamma_n = 0$$

dont les racines déterminent les valeurs propres du problème.

$$a) \quad \gamma_0 = 0$$

Si nous utilisons (14), nous déduisons que :

$$(16) \quad \lambda_{10} = - \frac{N_m^2}{4}$$

Cette dernière expression correspond à la valeur propre barotrope, à laquelle on associe la fonction propre verticale suivante:

$$(17) \quad P_{10}(z) \cong A \left(1 - O \left(\frac{N_m^2 z}{2} \right) \right) \quad ; \quad N_m^2 \ll 1$$

$$b) \quad \gamma_n = n \Pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Comme précédemment, de (14) nous déduisons que :

$$(18) \quad \lambda_{1n} = - \frac{N_m^2}{4} \left(1 + \frac{4 n^2 \Pi^2}{N_m} \right)$$

correspondant aux valeurs propres baroclines. Les fonctions propres baroclines associées s'écrivent :

$$P_{1n}(z) = A_n \exp \left(- \frac{N_m^2 z}{2} \right) \left(\cos(n \Pi z) + \frac{N_m^2}{2n\Pi} \sin(n \Pi z) \right) \quad , \quad (n=1,2,\dots)$$

$$c) \quad \left(\gamma_n^2 + \frac{N_m^4}{4} \right) = 0$$

Ce cas ne convient pas pour notre analyse, car il suppose que γ_n est complexe, cas impossible d'après (14).

$$2^\circ: \text{ si } \lambda_1 > -\frac{N_m^2}{4}$$

La solution s'écrit :

$$(20) \quad P_1(z) = \exp\left(\frac{-N_m z}{2}\right) (A \operatorname{ch}(\Lambda z) + B \operatorname{sh}(\Lambda z))$$

où l'on a posé :

$$(21) \quad \Lambda = \frac{N_m^2}{2} \left(1 + \frac{4\lambda_1}{N_m^2} \right)^{1/2}$$

Comme dans le cas précédent, nous utilisons les conditions aux limites pour déterminer les constantes A et B.

On en déduit alors, pour qu'il n'y ait pas de solution triviale, la condition suivante :

$$(22) \quad \left(\Lambda^2 - \frac{N_m^4}{4} \right) \operatorname{sh} \Lambda = 0$$

On envisage donc plusieurs cas :

$$a) \quad \Lambda = \pm \frac{N_m^2}{2}$$

Nous déduisons de (21) que : $\lambda_1 = 0$.

Ce cas, est similaire au cas barotrope discuté précédemment. La fonction propre associée s'écrit :

$$(23) \quad P_{10}(z) \equiv A_0 \exp\left(\frac{-N_m^2 z}{2}\right)$$

qui est la même expression que (17).

$$\mathbf{b) \text{ sh } \Lambda = 0 : \Rightarrow \Lambda = 0}$$

Nous déduisons de (21) que :

$$\lambda = -\frac{N_m^2}{4}$$

ce cas ne correspond pas à nos hypothèses, qui sont que : $\lambda > -\frac{N_m^2}{4}$

Fréquences d'ondes de ROSSBY.

A chaque mode propre on doit associer une relation de dispersion qui s'écrit, d'après l'équation (4) :

$$(24) \quad \sigma_{1n} = \frac{-\beta k}{(k^2 + m^2 + \omega_0 B_0^{-1} |\lambda_{1n}|)} \quad (\text{avec } k > 0)$$

Cette relation détermine la loi de dispersion des ondes de Rossby qui se propagent dans la direction Est- Ouest avec la vitesse de phase :

$$(25) \quad \frac{\sigma_{1n}}{k} = \frac{-\beta}{(k^2 + m^2 + \omega_0 B_0^{-1} |\lambda_{1n}|)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Ainsi, la relation de dispersion des modes barotropes s'écrit :

$$(26) \quad \sigma_{10} = \frac{-\beta k}{(k^2+m^2 + \omega_0 B_0^{-1} |\lambda_{10}|)} \quad (n=0)$$

tandis que la relation pour les modes baroclines s'écrit :

$$(27) \quad \sigma_{1n} = \frac{-\beta k}{(k^2+m^2 + \omega_0 B_0^{-1} |\lambda_{1n}|)} \quad (n=1,2,\dots)$$

où β , désigne le paramètre de rotondité de la Terre.

Par ailleurs, l'équation de dispersion (4), peut se présenter graphiquement sous la forme de l'équation d'un cercle dans le plan des nombres d'ondes (k,m) :

$$(28) \quad \left(k + \frac{\beta}{2\sigma}\right)^2 + m^2 = \frac{\beta^2}{4\sigma^2} - \omega_0 B_0^{-1} |\lambda_{1n}|$$

dont le rayon est : $\left(\frac{\beta^2}{4\sigma^2} - \omega_0 B_0^{-1} |\lambda_{1n}| \right)^{1/2}$ et le centre est au point : $C\left(-\frac{\beta}{2\sigma}, 0\right)$

Le cercle existe si la condition suivante, vérifiée par σ_{1n} est satisfaite:

$$(29) \quad \sigma_{1n} < \frac{\beta}{2 \omega_0 B_0^{-1} |\lambda_{1n}|}$$

et la distance qui le sépare de l'origine du plan (k,m) est donnée par le minimum du nombre d'onde longitudinal :

$$(30) \quad k_{\max} = -\frac{\beta}{2\sigma} - \left(\frac{\beta^2}{4\sigma^2} - \omega_0 B_0^{-1} |\lambda_{1n}| \right)^{1/2}$$

Nous concluons cette étude des termes d'ordre ϵ en faisant remarquer que jusqu'ici, nous n'avons fait que retrouver les propriétés classiques des ondes de ROSSBY dont les solutions sont stables. Mais il est intéressant d'étudier la solution d'ordre deux en ϵ et d'analyser la nature de la solution à cet ordre.

2.3.2. Solution d'ordre deux en ϵ

Le système (2) développé à l'ordre 2 en ϵ s'écrit :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 P_2}{dz^2} + N_m^2 \frac{dP_2}{dz} - \lambda_1 N_m^2 P_2 = \lambda_2 A_n N_m^2 \exp\left(\frac{-N_m^2 z}{2}\right) \cos(n\Pi z) \\ \frac{dP_2}{dz} = \frac{A_n}{\sigma_{1n}} \left(\sigma_{2n} \frac{N_m^2}{2} - i\hat{a}_1 \right) \quad \text{en } z = 0 \\ \frac{dP_2}{dz} = \frac{A_n}{\sigma_{1n}} (-1)^n \left(\sigma_{2n} \frac{N_m^2}{2} - i\hat{a}_2 \right) \quad \text{en } z = -1 \end{array} \right.$$

La solution du système (31) s'écrit :

$$(32) \quad P_2(z) = P_{2h}(z) + P_{2p}(z)$$

où : $P_{2h}(z)$ et $P_{2p}(z)$ désignent respectivement, la solution homogène et la solution particulière, alors:

$$(33) \quad P_2(z) = \exp\left(\frac{-N_m^2 z}{2}\right) \left\{ K_n \cos(n\Pi z) + L_n \sin(n\Pi z) \right\} \\ + \frac{\lambda_2 A_n N_m^2}{2 n \pi} \exp\left(\frac{-N_m^2 z}{2}\right) z \sin(n\Pi z) + O(N_m^4)$$

2.3.2.1. Détermination de λ_2 et condition de résolubilité

Nous proposons donc le procédé de résolution suivant, où nous utilisons la notation suivante du système (31) :

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}(P_2) - \lambda_1 N_m^2 P_2 = \lambda_2 A_n N_m^2 \exp\left(-\frac{N_m^2 z}{2}\right) \cos(n\Pi z) + O(N_m^4) \\ \\ U_1(P_2) = \frac{A_n}{\sigma_{1n}} \left(\sigma_{2n} \frac{N_m^2}{2} - i\hat{a}_1 \right) \quad \text{en } z=0 \\ \\ U_2(P_2) = \frac{A_n}{\sigma_{1n}} (-1)^n \left(\sigma_{2n} \frac{N_m^2}{2} - i\hat{a}_2 \right) \quad \text{en } z=-1 \end{array} \right.$$

où :

$\mathfrak{S}(P_2)$ est donc un opérateur différentiel linéaire et $U_1(P_2), U_2(P_2)$ sont les conditions aux frontières.

En utilisant le fait que les conditions aux limites sont linéaires et en utilisant (32), on obtient les relations suivantes:

$$(35) \quad U_1(P_{2h}) = U_1(P_2) - U_1(P_{2p}) \quad \text{en } z=0$$

$$(36) \quad U_2(P_{2h}) = U_2(P_2) - U_2(P_{2p}) \quad \text{en } z=-1$$

Ensuite nous utilisons (33) et (34). On obtient :

$$37) \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{-N_m^2}{2} & n\Pi \\ \frac{-N_m^2}{2} \exp\left(\frac{N_m^2}{2}\right) & n\Pi \exp\left(\frac{N_m^2}{2}\right) \end{array} \right] \begin{array}{l} K_n \\ (-1)^n L_n \end{array} = \left(\begin{array}{l} \frac{A_n}{\sigma_{1n}} \left[\sigma_{2n} \frac{N_m^2}{2} - i\hat{a}_1 \right] \\ A_n (-1)^n \exp\left(\frac{N_m^2}{2}\right) \left\{ \frac{\sigma_{2n} N_m^2}{2\sigma_{1n}} - \frac{i\hat{a}_2}{\sigma_{1n}} \right\} + \lambda_2 A_n \frac{N_m^2}{2} \end{array} \right)$$

Pour alléger l'écriture dans (37), on utilise la notation matricielle suivante:

$$(38) \quad A(\lambda_2) x = b(\lambda_2)$$

où b et x désignent les vecteurs colonnes figurant dans (37)

En utilisant la relation suivante :

$$(40) \quad A^t(\lambda_2) \omega = 0$$

La condition de résolubilité de (38) s'écrit :

$$(41) \quad \omega \cdot b(\lambda_2) = 0$$

où ω est solution propre de l'adjoint de A .

on sait que :

$$\det(A(\lambda_2)) = 0 \Rightarrow \det(A^t(\lambda_2)) = 0$$

par conséquent le rang de la matrice $A^t(\lambda_2)$ se réduit à 1 et les composantes du vecteur ω sont liées, d'où :

$$(42) \quad \omega_1 = -(-1)^n \exp\left(\frac{-N_m^2}{2}\right) \omega_2$$

Utilisons ensuite les relations (41) et (42). On obtient alors l'équation suivante:

$$(43) \quad \lambda_{2n} = \frac{2i}{\sigma_{1n} N_m} \left\{ \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \right\} + O(N_m^2)$$

qui caractérise la valeur propre à l'ordre deux en ε .

La relation de dépendance entre λ_2 et σ_2 , en utilisant (4) et (10), s'écrit :

$$(44) \quad \lambda_{2n} = - B_0 \omega_0^{-1} \frac{k \beta \sigma_2}{\sigma_{1n}^2}$$

Nous identifions ensuite (43) à (44). On obtient :

$$(45) \quad \sigma_{2n} = \frac{2i\omega_0 B_0^{-1}}{N_m^2 (k^2 + l^2 + \omega_0 B_0^{-1} |\lambda_{1n}|)} \{ \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \} + O(N_m^2)$$

qui caractérise la fréquence des oscillations à l'ordre deux en ε du problème (11), où \hat{a}_1 et \hat{a}_2 sont deux constantes données par les équations suivantes.

$$(46) \quad \hat{a}_1 = - \left(\omega_0^{-1} B_0 k h^2 \Gamma(z) \left(\frac{1}{\rho_0(z)} \right)^{1/2} \frac{1}{k_0(z)} \right)_{z=0}$$

$$(47) \quad \hat{a}_2 = - \left(\omega_0^{-1} B_0 k h^2 \left(\frac{1}{\rho_0(z)} \right)^{1/2} \frac{1}{k_0(z)} \right)_{z=-1}$$

2.3.2.2. Interprétation des résultats.

Il est nécessaire d'après (1), d'examiner la nature et le signe de σ_{2n} . Cependant après avoir simplifié les expressions de (46) et (47) en utilisant (12) on obtient:

$$\hat{a}_1 = - N_m^2 \omega_0^{-1} B_0 k_h^2 \Gamma(0) \rho_{00}^{-1/2}$$

$$\hat{a}_2 = - N_m^2 \omega_0^{-1} B_0 k_h^2 \rho_{00}^{-1/2}$$

il s'ensuit que la relation (45) s'écrit on ne retenant que les termes d'ordre un en N_m^2 .

$$(48) \quad \sigma_{2n} = \frac{2i K_h^2 \rho_{00}^{-1/2}}{(k^2 + l^2 + \omega_0 B_0^{-1} |\lambda_{1n}|)} \left\{ \Gamma(0) - 1 \right\} + O(N_m^2)$$

avec: $\Gamma(0) < 0$

Un simple examen de (48) montre que le signe de (45) est négatif et il en résulte que le signe de $-i \sigma_{2n}$ est négatif également. Ainsi, l'amplitude de la solution (II,1) s'amortit au cours du temps.

Ce résultat est plus ou moins attendu. En fait le système d'ordre 1 en ϵ ne contient pas de termes de viscosité, de sorte que l'on a obtenu des ondes de ROSSBY périodiques qui se propagent avec des fréquences σ_{1n} . Dans le système d'ordre deux, des termes de viscosité apparaissent, ce qui fait que les amplitudes de ces ondes subissent un amortissement par frottement moléculaire. Ainsi on a obtenu des solutions qui s'atténuent au cours du temps.

CHAPITRE III

STRUCTURE VERTICALE

D'UN ECOULEMENT GEOSTROPHIQUE

à

STRATIFICATION VARIABLE

3.1-INTRODUCTION :

Dans le chapitre II, nous avons donné une illustration simple de la structure verticale océanique dans le cas d'une stratification exponentielle, les équations se trouvent alors à coefficients constants. Néanmoins pour des raisons bien évidentes ce modèle ne décrit pas d'une façon satisfaisante la nature de la propagation verticale de la perturbation de pression.

On sait en effet, que dans l'océan la stratification est variable en fonction de la profondeur, et que la région où le gradient horizontal de densité est maximal, est d'une grande importance dans les échanges thermiques, énergétiques, etc, dans le milieu.

Ainsi dans les océans, il existe une différence fondamentale entre les échanges dans le sens horizontal et vertical. Dans le premier cas, les gradients de densité étant généralement très faibles, les échanges se font aisément, les tourbillons peuvent être de grandes dimensions et le coefficient de mélange 'horizontal' est très grand : $10^8 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

Par contre dans le sens vertical intervient la stratification des eaux qui fait qu'un tourbillon ascendant est soumis à la force de gravité, tandis qu'un tourbillon descendant est contraint par la poussée d'ARCHIMEDE. En définitive, si le coefficient de mélange est en général de l'ordre de $10^3 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$, il peut tomber à $1 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ en présence d'une stratification particulièrement stable et même peut être nul au niveau d'une pycnocline suffisamment accentuée. Cette pycnocline constitue ainsi une véritable barrière vis à vis de tout échange vertical.

Nous serons donc amenés dans ce qui suit, à tenir compte de ces considérations pour l'étude du problème aux limites de Sturm-Liouville. On étudie en particulier l'existence et l'unicité de la solution, et l'on étudie la stabilité de celle-ci au cours du temps. Nous donnons ensuite des valeurs asymptotiques des valeurs propres et des vecteurs propres de la solution, en tenant compte du critère d'existence et d'unicité.

A la fin de ce chapitre, nous présentons quelques résultats numériques que nous comparons à ceux qui résultent de nos hypothèses théoriques.

3.2. Modèle du profil de densité en tangente hyperbolique

Le modèle de profil de densité volumique en forme de tangente hyperbolique approche qualitativement les profils réalistes de densité ⁽¹⁾ dans l'océan (*figure4*). On suppose ainsi que la densité a la forme analytique suivante:

$$(1) \quad \rho_0(z) = \rho_{00} \left(1 - N_m^2 \operatorname{th} \left(\frac{z+h}{d} \right) \right)$$

il en résulte que le carré de la fréquence de Brunt-Väisälä s'écrit :

$$(2) \quad N^2(z) = \frac{N_m^2}{d \operatorname{ch}^2 \left(\frac{z+h}{d} \right)} + O(N_m^4)$$

où ρ_{00} et d désignent respectivement, la densité volumique de référence, l'échelle caractéristique de variation de la stratification. N_m^2 est donc le carré de la fréquence de Brunt Väisälä. Ces grandeurs sont supposées constantes.

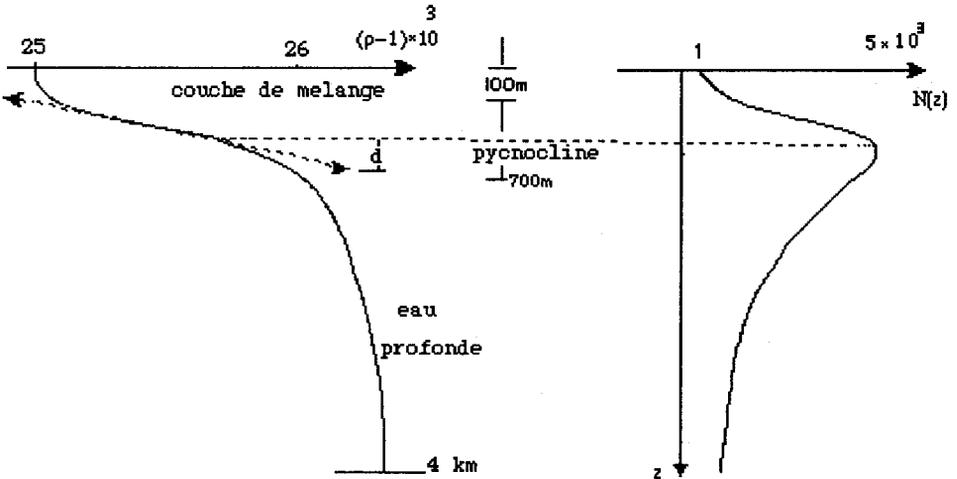


figure 4 : distribution typique de densité dans l'Océan et la fréquence de Brunt-Väisälä correspondante

(1) les variations de la densité sont dictées par celles de la température, exception faite de certaines eaux côtières pour lesquelles existent de forts gradients de salinité, et des régions polaires. C'est notamment la température qui commande en général la répartition des densités suivant la verticale; ce qui fait que les thermoclines constituent des pycnoclines, zone où la densité augmente rapidement avec la profondeur.

3.3. Etude des termes d'ordre 1 en ϵ

Considérons le système (II,2) d'ordre 1 en ϵ , du chapitre précédent:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{dP_1(z)}{dz} \right) + \frac{\lambda_1}{\rho_0(z)} P_1(z) = 0 \quad (a) \\ \frac{dP_1(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = -1 \quad (b) \\ \frac{dP_1(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (c) \end{array} \right.$$

La première question qui se pose, est : pour quelles valeurs de λ , ce système est compatible, c'est à dire a des solutions non identiquement nulles: en effet, il est clair que si λ est quelconque, la solution de l'équation linéaire du 2^è ordre (3) avec deux conditions limites homogènes est identiquement nulle. Ce problème est un problème de Sturm - Liouville.

3.3.1. Existence d'oscillations

Nous rappelons dans ce paragraphe un théorème d'analyse que nous utilisons dans la suite de ce paragraphe (Voir , par exemple, INCE, 1944, pp 223-278).

Théorème d'oscillations de Sturm

Considérons le système différentiel suivant:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} (k u') + (\lambda g - q) u = 0 \\ \alpha u(a) - \beta u'(a) = 0 \\ \gamma u(b) + \nu u'(b) = 0 \end{array} \right.$$

où : k , g et q sont des fonctions de x indépendantes de λ , satisfaisant aux inégalités : $k < 0$, $g > 0$ dans $[a, b]$.

Si $G = (q - \lambda g)$ diminue et λ croît de Λ_1 à Λ_2 . En outre si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$(5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \Lambda_2} \left(\frac{-\max G}{k} \right) = -\infty$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \Lambda_1} \left(\frac{-\min G}{k} \right) = +\infty$$

alors, il y a une infinité de valeurs caractéristiques, $\lambda_0, \lambda_1, \dots$, dans l'intervalle (Λ_1, Λ_2) auxquelles correspondent des fonctions caractéristiques u_0, u_1, \dots ayant entre a et b un nombre de zéros égal à leurs indices respectifs.

Remarque :

λ_0 ne peut être égale à Λ_1 que si l'on a: $G(z, \Lambda_1) = 0$, $\alpha(\Lambda_1) = 0$ et $\gamma(\Lambda_1) = 0$

Dans le système (3), nous constatons que $\frac{1}{\rho'(z)}$ est négatif et invariant avec λ , que $\rho(z)$ est positif et $\alpha(\Lambda_1) = \gamma(\Lambda_1) = 0$, $G(z) = -\lambda \rho(z)$ diminue si λ croît de $\Lambda_1 = -\infty$ à $\Lambda_2 = +\infty$; en particulier, on a : $-\frac{\max G}{\rho'(z)}$ décroît indéfiniment quand λ croît jusqu'à $+\infty$. Nous sommes en présence d'un cas particulier, où : $q = 0$ et $k < 0$ et si $\lambda_0 = 0$ alors :

$$(6) \quad \frac{-G}{k} = \frac{\min(q)}{k} \leq 0,$$

Par conséquent toutes les valeurs propres sont négatives.

En définitive, le théorème d'oscillations de Sturm est applicable et le système (3) admet une infinité de valeurs propres décroissantes: $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tendant vers $-\infty$; les fonctions propres correspondantes possèdent exactement n zéros dans $[a, b]$.

3.3.2. Formes normales du problème de STURM-LIOUVILLE

Pour obtenir une forme convenable du problème aux limites de Sturm-Liouville (3), nous introduisons la variable suivante:

$$(7) \quad \eta = \int_{-1}^z \rho'(t) dt$$

tel que:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_1}{dz} = \rho'(z) \frac{dP_1}{d\eta} \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho'(z)} \frac{dP_1}{dz} \right) = \rho'(z) \frac{dP_1}{d\eta} \end{array} \right.$$

nous obtenons alors le système suivant :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 P_1}{d\eta^2} + \frac{\lambda_1}{\rho(z) \rho'(z)} P_1 = 0 \\ \frac{dP_1}{d\eta} = 0 \quad \text{en } \eta = \eta_1 \\ \frac{dP_1}{d\eta} = 0 \quad \text{en } \eta = 0 \end{array} \right.$$

Nous introduisons ensuite une nouvelle variable

$$(10) \quad \xi = \frac{1}{J} \int_0^\eta \frac{dt}{\phi^2(t)}$$

où : J est un paramètre de normalisation qui s'écrit:

$$(11) \quad J = \int_0^{\eta_1} \frac{dt}{\phi^2(t)}$$

$\phi(\eta)$ est une fonction inconnue que l'on déterminera en supposant que $P_1(\eta)$ est à variables séparables. On écrit alors:

$$(12) \quad P_1(\eta) = \phi(\eta) \Phi_1(\xi)$$

Nous injectons ensuite la relation (12) dans (9), et on obtient l'équation différentielle suivante:

$$(13) \quad \frac{d^2 \Phi_1(\xi)}{d\xi^2} + J^2 \left[\phi^3(\eta) \frac{d^2 \phi(\eta)}{d\eta^2} + \lambda_1 \frac{\phi^4(\eta)}{\rho(z)\rho'(z)} \right] \Phi_1(\xi) = 0$$

Dans cette expression, on choisit $\phi(\eta)$ tel que :

$$(14) \quad \frac{\phi^4(\eta)}{\rho(z)\rho'(z)} = -1$$

alors:

$$(15) \quad \phi(\eta) = \left(\frac{-1}{\rho(z)\rho'(z)} \right)^{-1/4}$$

$$(16) \quad \frac{d^2 \phi(\eta)}{d\eta^2} = -\frac{1}{J} v(\xi, d) \left(\frac{-1}{\rho(z)\rho'(z)} \right)^{3/4}$$

où:

$$(17) \quad v(\xi, d) = \frac{1}{16} \left(\frac{5 \overline{\rho}'^2(\xi)}{\rho^2(\xi)} - \frac{2 \overline{\rho}''(\xi)}{\rho(\xi)} + \frac{5 \overline{\rho}''^2(\xi)}{\rho'^2(\xi)} - \frac{4 \overline{\rho}'''(\xi)}{\rho'(\xi)} \right)$$

Nous obtenons ainsi la forme modifiée du problème de Sturm-Liouville suivante:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\Phi_1(\xi)}{d\xi^2} - (m^2_1 + v(\xi, d)) \Phi_1(\xi) = 0 \quad (a) \\ \frac{d\Phi_1(\xi)}{d\xi} - a \Phi_1(\xi) = 0 \quad \text{en } \xi=1 \quad (b) \\ \frac{d\Phi_1(\xi)}{d\xi} - b \Phi_1(\xi) = 0 \quad \text{en } \xi=0 \quad (c) \end{array} \right.$$

où :

$$(19) \quad a = -\frac{1}{4} \left(\frac{\overline{\rho}'(\xi)}{\overline{\rho}(\xi)} + \frac{\overline{\rho}''(\xi)}{\overline{\rho}'(\xi)} \right)_{\xi=1}$$

$$(20) \quad b = -\frac{1}{4} \left(\frac{\overline{\rho}'(\xi)}{\overline{\rho}(\xi)} + \frac{\overline{\rho}''(\xi)}{\overline{\rho}'(\xi)} \right)_{\xi=0}$$

$$(21) \quad m^2_1 = \lambda_1 J^2$$

D'après le théorème d'oscillation de Sturm énoncé précédemment, ce problème aux limites n'a en général d'autre solution que la solution triviale: $\Phi_1(\xi) = 0$. Il convient donc de chercher des valeurs propres $m^2_1 \neq 0$, correspondant à des fonctions propres $\Phi_{1n}(\xi)$ non identiquement nulles.

Il est donc nécessaire de résoudre l'équation différentielle du système (18). Pour cela nous envisageons d'utiliser la méthode de variation des constantes:

On pose:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \Phi_1(\xi) \\ X_2 = \Phi_1'(\xi) \end{array} \right.$$

tel que:

$$(23) \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

D'après la première équation (18-a) on a:

$$(24) \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m^2_1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ v(\xi, d) \Phi_1(\xi) \end{pmatrix}$$

La discussion fait apparaître deux types de solutions:

3.3.2.1- cas où $\lambda_1 = k^2 + m^2 + \frac{k\beta}{\sigma_1} < 0$

Dans ce cas on pose :

$$(25) \quad m^2_1 = -\mu^2_1$$

La solution homogène de (18-a) s'écrit :

$$(26) \quad \Phi_1(\xi) = c_1 \cos(\mu_1 \xi) + c_2 \sin(\mu_1 \xi)$$

Nous introduisons ensuite la variable indépendante Y, qui est liée à X par la relation :

$$(27) \quad X = M Y$$

où la matrice M, s'écrit :

$$(28) \quad M = \begin{pmatrix} \cos(\mu_1 \xi) & \sin(\mu_1 \xi) \\ -\mu_1 \sin(\mu_1 \xi) & \mu_1 \cos(\mu_1 \xi) \end{pmatrix}$$

cette matrice satisfait la condition suivante:

$$(29) \quad M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m^2_1 & 0 \end{pmatrix} M$$

si on dérive (27) on obtient en identifiant cette dérivée à (24) :

$$(30) \quad Y' = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ v(\xi, d) \Phi_1(\xi) \end{pmatrix}$$

d'où:

$$(31) \quad Y = \int_0^\xi M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ v(t, d) \Phi_1(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

avec c_1 et c_2 étant deux constantes d'intégration

Des relations (27), (28) et (31), on déduit :

$$(32) \quad X = M \int_0^\xi \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1}{\mu} \sin(\mu_1 \xi) v(t, d) \Phi_1(t) \\ \frac{1}{\mu_1} \cos(\mu_1 \xi) v(t, d) \Phi_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\} dt$$

Finalement $\Phi_1(t)$ vérifie la relation :

$$(33) \quad \Phi_1(\mu_1 \xi) = c_1 \cos(\mu_1 \xi) + c_2 \sin(\mu_1 \xi) + \frac{1}{\mu_1} \int_0^\xi v(t, d) \sin(\mu_1 (\xi - t)) \Phi_1(t) dt$$

C'est une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce. Les constantes c_1 et c_2 seront déterminées par les conditions aux limites et $v(t, d)$ est une fonction bornée dans $[0, 1]$.

La seconde condition aux limites (18-c) nous permet d'écrire :

$$(34) \quad c_2 = \frac{b}{\mu_1} c_1$$

on obtient :

$$(35) \quad \Phi_1(\xi) = c_1 \left(\cos(\mu_1 \xi) + \frac{b}{\mu_1} \sin(\mu_1 \xi) \right) + \frac{1}{\mu_1} \int_0^\xi v(t, d) \sin \mu_1(\xi - t) \Phi_1(t) dt$$

Par ailleurs, l'opérateur différentiel du système de Sturm-Liouville (18) est auto-adjoint. Il est donc aisé de déterminer la constante c_1 , en normalisant $\Phi_1(\mu_1)$.

A ce stade de l'analyse il est nécessaire d'étudier l'existence et l'unicité de la solution.

3.3.2.1.1- Condition d'existence et d'unicité de la solution

Le théorème fondamental d'existence montre que si les coefficients sont bornés et continus, alors la solution $\Phi_1(\xi)$ est bornée dans $[0, 1]$. Il existe alors une constante M , limite supérieure telle que :

$$(36) \quad \left| \Phi_1(\xi) \right| < M$$

On discute ainsi différents cas :

1° cas : si $|\mu| \neq 0$

il résulte de l'équation (33) que :

$$(37) \quad \left| \Phi_1(\xi) \right| \leq |c_1| \left(1 + \frac{b^2}{\mu^2} \right)^{1/2} + \frac{M}{\mu_1} \int_0^1 |v(t, d)| dt$$

de (36) on a:

$$(38) \quad M \leq |c_1| \left(1 + \frac{b^2}{\mu^2} \right)^{1/2} + \frac{M}{\mu_1} \int_0^1 |v(t, d)| dt.$$

finalement, on obtient :

$$(39) \quad M \leq |c_1| \left(1 + \frac{b^2}{\mu^2} \right)^{1/2} / \left(1 - \frac{1}{\mu_1} \int_0^1 |v(t,d)| dt \right)$$

Alors, pour toutes valeurs μ_1 supérieures à un nombre fixé, la solution existe et est unique si et seulement si la condition suivante déduite de (39), est vérifiée:

$$(40) \quad \mu_1 > \int_0^1 |v(t,d)| dt$$

où :

$$(41) \quad v(t,d) = \frac{1}{4d^2} \operatorname{th}^2 \left(\frac{t+h}{d} \right) + \frac{N_m^2}{4d^2} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{t+h}{d} \right)}{\operatorname{ch}^3 \left(\frac{t+h}{d} \right)} - \frac{1}{2d^2}$$

2° cas : si $\mu \equiv 0$

Dans ce cas, la solution $\Phi_1(\xi)$ s'écrit :

$$(42) \quad \Phi_1(\xi) = c_1 (1 + b \xi) + \int_0^1 v(t,d) (\xi-t) \Phi_1(\xi) dt$$

nous utilisons (36) et nous déduisons de (42) que :

$$(43) \quad M \leq |c_1| (1+b^2)^{1/2} + M \int_0^1 |v(t,d) (\xi-t)| dt$$

$$M \leq |c_1| (1+b^2)^{1/2} / \left\{ 1 - \int_0^1 |v(t,d) (\xi-t)| dt \right\}$$

Pour que la solution existe et soit unique il est nécessaire que la valeur maximale M reste bornée et positive. Il en résulte alors la condition suivante :

$$(44) \quad \int_0^1 |v(t,d) (\xi-t)| dt < 1$$

L'étape suivante consiste à déterminer les valeurs caractéristiques. Pour cela, on part de la seconde condition aux limites suivante :

$$(18-b) \quad \frac{d\Phi_1(\xi)}{d\xi} - a \Phi_1(\xi) = 0 \quad \text{en } \xi=1$$

Après simplification dans les calculs intermédiaires nous obtenons l'équation des caractéristiques suivante:

$$(45) \quad \text{th}(\mu_1) = \frac{c_1 (b-a) + \int_0^1 v(t,d) \left\{ \cos(\mu_1 t) + \frac{a}{\mu_1} \sin(\mu_1 t) \right\} \Phi_1(t) dt}{c_1 \left(\mu_1 + \frac{a}{\mu_1} \right) - \int_0^1 v(t,d) \left\{ \sin(\mu_1 t) - \frac{a}{\mu_1} \cos(\mu_1 t) \right\} \Phi_1(t) dt}$$

La résolution directe de cette équation transcendante n'est pas facile; nous envisageons donc d'utiliser le développement asymptotique des valeurs caractéristiques μ_1 .

3.3.2.1.2.- Expression approchée des valeurs propres

Pour de petites valeurs de μ_1 , $\mu_1 \equiv 0$: c'est une solution évidente de (45).

Nous admettons l'hypothèse suivante: pour de grandes valeurs de μ_1 , nous supposons que $\Phi_1(t)$ peut s'écrire:

$$(46) \quad \Phi_1(t) = c_1 \cos(\mu_1 t) + \frac{\alpha(\mu_1 t)}{\mu_1}$$

où $\alpha(\mu_1 t)$ est une fonction bornée et continue.

Nous introduisons ensuite (46) dans (45). On obtient:

$$(47) \quad \text{th}(\mu_1) = \frac{(b-a) + \frac{1}{2} \int_0^1 v(t,d) dt + O(n^{-1})}{\mu_1 + O(n^{-1})}$$

Quand $|\mu_1|$ est suffisamment grande, nous approchons la solution μ_1 . En utilisant la méthode du point fixe, on a:

$$(48) \quad \mu_{1n} = n\pi + \frac{(b-a) + \frac{1}{2} \int_0^1 v(t,d) dt}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n=1,2,\dots)$$

En portant ensuite l'équation (48) dans (43), nous obtenons alors la condition d'existence de la solution:

$$(49) \quad \int_0^1 |v(t,d)| dt > \frac{n^2\pi^2 + b-a}{n\pi - \frac{1}{2}} \quad (n=1,2,\dots)$$

où l'expression de $v(t,d)$ est donnée dans (41), a et b sont respectivement données dans (19) et (20).

A partir de cette condition d'existence, nous envisageons de déterminer une valeur critique engendrée par la variabilité de la stratification de la masse volumique afin que la condition (49) soit vérifiée.

Nous résolvons ainsi, numériquement cette équation et nous dressons le tableau de valeurs critiques de 'd' en fonction de 'h', suivant :

h	0.07	0.1	0.15	0.2	0.3
d critique	0.166	0.170	0.178	0.183	0.188

Tableau 2 : variation du paramètre 'd' avec la profondeur de la thermocline 'h'

On rappelle que la relation de dépendance, entre les valeurs propres μ_{1n}^2 et les fréquences propres σ_{1n} , décrite par (II,4), s'écrit en utilisant (21) :

$$(50) \quad \mu_{1n}^2 = -J^2 \omega_0^{-1} B_0 \left(k_h^2 + \frac{k\beta}{\sigma_{1n}} \right)$$

d'où l'on déduit la relation de dispersion suivante :

$$(51) \quad \sigma_{1n} = \frac{-\beta k}{(k^2 + m^2 + J^{-2} \omega_0 B_0^{-1} \mu_{1n}^2)} \quad (n=1,2, \dots)$$

Ainsi, pour $\mu_{10} = 0$, on a la fréquence suivante:

$$(52) \quad \sigma_{10} = \frac{-\beta k}{k^2 + m^2}$$

qui détermine la fréquence en modes barotropes des ondes de Rossby. IL lui est associé la fonction propre suivante :

$$(53) \quad \Phi_{10}(\xi) = c \left(1 + (b-\gamma) \xi \right) + \int_0^\xi \{ v(t,d) (\xi-t) \Phi_{10}(t) \} dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

pour $\mu_{1n} \neq 0$, en vertu de (48), on a la relation de dispersion approchée suivante:

$$(54) \quad \sigma_{1n} = \frac{-\beta k}{\left(k^2 + m^2 + \frac{n^2 \pi^2 + 2\gamma}{j^2} \omega_0 B_0^{-1} \right)} \quad (n=1,2,\dots)$$

qui correspond aux modes baroclines des oscillations des ondes de Rossby. Les fonctions propres approchées associées s'écrivent :

$$(55) \quad \Phi_{1n}(\xi) = c_{1n} \left(\cos(n\pi\xi) + \frac{b-\gamma}{n\pi} \xi \sin(n\pi\xi) \right) + \frac{1}{n\pi} \int_0^\xi v(t,d) \sin(n\pi(\xi-t)) \Phi_{1n}(t) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad (n=1,2,\dots)$$

où

$$(56) \quad \gamma = (b-a) + \frac{1}{2} \int_0^1 |v(t,d)| dt.$$

où les termes $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ tendent uniformément vers zéro quand n devient grand

En définitive, nous déduisons de (12) et (15), que la perturbation de pression s'écrit :

$$p_{1n}(z) = \left(-\frac{1}{\rho'(z) \rho(z)} \right)^{-1/4} \Phi_{1n}(\xi)$$

où la variable ξ est donnée par les relations suivante:

$$\xi = \frac{1}{J} \int_{-1}^z \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \right)^{1/2} dt$$

et :

$$J = \int_{-1}^0 \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \right)^{1/2} dt$$

3.3.2.2.-. Cas où $\lambda = k^2 + m^2 + \frac{k \beta}{\sigma} > 0$

La méthode de variation des constantes, décrite dans le cas précédent, permet de déduire directement la solution de (18-a), qui s'écrit:

$$(57) \quad \Phi_1(\xi) = c_1 \operatorname{ch}(m_1 \xi) + c_2 \operatorname{sh}(m_1 \xi) + \frac{1}{m_1} \int_0^\xi v(t, d) \operatorname{sh}(m_1(\xi+t)) \Phi_1(t) dt$$

Nous déduisons la constante c_2 , à partir de la condition aux limites (18-b):

$$(58) \quad c_2 = \frac{b}{m_1} c_1.$$

La constante c_1 demeure arbitraire borné dans $[0,1]$.

Sous les mêmes conditions que précédemment, nous discutons l'existence et l'unicité de la solution (57). En effet, d'après le théorème fondamental d'existence, la solution est bornée dans $[0,1]$, telle que :

$$(59) \quad |\Phi_1(\xi)| < M$$

alors, on a :

$$(60) \quad |\Phi_1(\xi)| \leq |c_1| \left(\text{ch}^2 m_1 + \frac{b^2 \text{sh}^2 m_1}{m_1} \right)^{1/2} + \frac{M}{m_1} \int_0^1 |v(t,d) \text{sh}(m_1(\zeta+t))| dt$$

donc:

$$(61) \quad M < \frac{|c_1| \left(\text{ch}^2 m_1 + \frac{b^2 \text{sh}^2 m_1}{m_1} \right)^{1/2}}{1 - \frac{1}{m_1} \int_0^1 |v(t,d) \text{sh}(m_1(\zeta+t))| dt}$$

D'après l'équation (61) on constate que: quand m_1 tend vers de grandes valeurs, la limite supérieure M croît indéfiniment, et par conséquent la solution $\Phi_1(\xi)$ donnée par (57) n'existe pas dans ce cas .

3.3.2.3 - CONCLUSION :

Nous concluons cette étude des termes d'ordre un en ϵ , en remarquant que les fréquences des modes propres sont imaginaires purs. Il en résulte d'après (II,1), que les fonctions propres ont un régime périodique. Cela ne montre pas que la solution est stable : il est nécessaire pour cela de considérer les termes d'ordre deux en ϵ .

En effet la variabilité verticale de la stratification induit une concentration de mouvement d'ondes au niveau de la pycnocline due à la non uniformité de la densité verticale dans l'océan . ceci à pour cause de déstabiliser les courants marins. Alors nous nous proposons dans ce qui suit d'analyser le comportement asymptotique des termes d'ordre deux en ϵ afin de mettre les effets visqueux et de voir si les ondes considérées évoluent vers un état stationnaire formé d'ondes qui s'amortissent sous l'effet de la viscosité.

3.4.- Etude des termes d'ordre deux en ε :

Nous envisageons maintenant de traiter le problème d'ordre deux en ε et d'analyser le signe et la nature de σ_2 .

Ordre deux en ε :

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_0(z) \frac{d^2 P_2(z)}{dz^2} + (1 + k_0(z))' \frac{dP_2(z)}{dz} - \lambda_{1n} P_2(z) = \lambda_2 P_{1n}(z) \quad (a) \\ \\ \frac{dP_2(z)}{dz} = \frac{-i\hat{a}_1}{\sigma_{1n}} P_{1n}(z) \quad \text{en } z=0 \quad (b) \\ \\ \frac{dP_2(z)}{dz} = \frac{-i\hat{a}_2}{\sigma_{1n}} P_{1n}(z) \quad \text{en } z=-1 \quad (c) \end{array} \right.$$

Nous effectuons le même changement de variable et de fonction que précédemment. On obtient :

$$(63) \quad \xi = \frac{1}{J} \int_{-1}^z \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \right)^{1/2} dt$$

$$(64) \quad P_{2n}(z) = \left(\frac{-1}{\rho(z) \rho'(z)} \right)^{1/4} \Phi_{2n}(\xi)$$

Le problème (62) prend alors la forme classique de Sturm -Liouville suivante:

$$(65) \quad \begin{cases} \frac{d^2\Phi_2(\xi)}{d\xi^2} + \mu_1^2 \Phi_2(\xi) = -2\mu_1\mu_2 \Phi_1(\xi) + v(\xi, d)\Phi_2(\xi) & (a) \\ \frac{d\Phi_2(\xi)}{d\xi} - a \Phi_2(\xi) = r_1 & \text{en } \xi=1 & (b) \\ \frac{d\Phi_2(\xi)}{d\xi} - b \Phi_2(\xi) = r_2 & \text{en } \xi=0 & (c) \end{cases}$$

avec:

$$(66) \quad r_1 = \frac{-i \hat{a}_1 + \sigma_2 a}{\sigma_{1n}} \Phi_{1n}(1) - \frac{\sigma_2}{\sigma_{1n}} \frac{d\Phi_{1n}(1)}{dz}$$

$$(67) \quad r_2 = \frac{-i \hat{a}_2 + \sigma_2 a}{\sigma_{1n}} \Phi_{1n}(0) - \frac{\sigma_2}{\sigma_{1n}} \frac{d\Phi_{1n}(0)}{dz}$$

La solution du système (65) s'écrit :

$$(68) \quad \Phi_{1n}(\mu_1) = c_{3n} \cos(\mu_{1n} \xi) + c_{4n} \sin(\mu_{1n} \xi) + \frac{1}{\mu_{1n}} \int_0^\xi \sin \mu_1(\xi-t) f(t, d) dt$$

(n=1,2,...)

où :

$$(69) \quad f(t, d) = -2\mu_{1n}\mu_2 \Phi_1(\xi) + v(\xi, d) \Phi_2(\xi)$$

et c_{3n}, c_{4n} sont deux constantes d'intégration.

Nous déduisons de (65-b), que:

$$(70) \quad c_{4n} = \frac{r_2 + b}{n\pi} \frac{c_{3n}}{1 + \frac{\gamma}{n\pi}} \quad (n=1,2,\dots \dots)$$

tandis que de (65-a), nous déduisons la relation caractéristique suivante:

$$(71) \quad -c_{1n}\mu_{1n}\mu_{2n} - \frac{1}{\sigma_{1n}} \left\{ i c_{1n} (\hat{a}_2 - \hat{a}_1) - (c_{1n}\sigma_{2n} + c_{3n}\sigma_{1n}) (a-b + \gamma) \right. \\ \left. - \frac{a c_{4n} \sigma_{1n}}{n\pi} \right\} - \frac{i \hat{a}_1}{n\pi} \int_0^1 \left\{ \sin(n\pi t) v(t,d) \Phi_{1n}(t) \right\} dt + \\ \int_0^1 \left\{ v(t,d) \left(\cos(n\pi t) + \frac{a}{n\pi} \sin(n\pi t) \right) (\sigma_2 \Phi_{1n}(t) - \sigma_1 \Phi_{2n}(t)) \right\} dt = 0$$

On a par ailleurs supposé; que pour de grandes valeurs des caractéristiques, on peut utiliser l'approximation suivante:

$$(72) \quad \Phi_{1n}(t) = c_{1n} \cos(n\pi t) + \frac{\alpha_{1n}(t)}{n\pi}$$

$$(73) \quad \Phi_{2n}(t) = c_{3n} \cos(n\pi t) + c_{4n} \sin(n\pi t) + \frac{\alpha_{2n}(t)}{n\pi}$$

où les coefficients $\alpha_{1n}(t)$, $\alpha_{2n}(t)$ sont bornés et continus; alors, la relation (71) devient :

$$(74) \quad \mu_{1n}\mu_{2n} = \frac{1}{\sigma_{1n}} \left\{ i (\hat{a}_1 - \hat{a}_2) \right\} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

où les termes $O\left(\frac{1}{n}\right)$ tendent uniformément vers zéro quand n est grand.

Les relations (II,4), (II,10), et (III,21), nous permettent d'écrire la relation de dépendance entre μ_2 et σ_2 suivante:

$$(75) \quad 2 \mu_{1n} \mu_2 = J^2 \omega_0^{-1} B_0 k \beta \frac{\sigma_2}{\sigma_{1n}^2}$$

$$(76) \quad \text{avec : } \sigma_2 = \sigma_{2r} + i \sigma_{2i}$$

En identifie ensuite (75) à (74), en utilisant (54), on en déduit alors:

$$(77) \quad \sigma_{2in} = \frac{2 (\hat{a}_2 - \hat{a}_1)}{J^2 k \beta \omega_0^{-1} B_0 + n^2 \pi^2 + 2\gamma}$$

\hat{a}_1 et \hat{a}_2 sont données par les relations suivantes:

$$(78) \quad \hat{a}_1 = - \left(\omega_0^{-1} B_0 k h^2 \Gamma(z) \left(\frac{1}{\rho_0(z)} \right)^{1/2} \frac{1}{k_0(z)} \right)_{z=0}$$

$$(79) \quad \hat{a}_2 = - \left(\omega_0^{-1} B_0 k h^2 \left(\frac{1}{\rho_0(z)} \right)^{1/2} \frac{1}{k_0(z)} \right)_{z=-1}$$

Tous les paramètres présents dans (77), sont réels. Il en résulte que σ_{2in} est également réel ; en outre le signe de \hat{a}_1 est positif et celui de \hat{a}_2 est négatif , il s'en suit que le signe de σ_{2in} est négatif. Alors d'après (II, 1) la solution à l'ordre deux en ϵ s'amortit au cours du temps.

En définitive, les fonctions propres associées, sous l'hypothèse du développement asymptotique des valeurs propres, s'écrivent:

$$(80) \quad \begin{aligned} \Phi_{2n}(\xi) = & \left\{ c_{3n} + \left(\frac{-i c_{1n} \hat{a}_2 + b c_{3n}}{n\pi} \right) \gamma \xi \right\} \cos(n\pi \xi) + \\ & \left\{ \left(\frac{-i c_{1n} \hat{a}_2 + b c_{3n}}{n\pi} \right) + \frac{c_{3n} \gamma \xi}{n\pi} \right\} \sin(n\pi \xi) + \\ & + \frac{1}{n\pi} \int_0^\xi \sin(\pi(\zeta-t)) \Phi_{2n}(t) dt - \frac{\mu_1 \mu_2 c_{1n}}{n\pi} \xi \sin(n\pi \xi) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

où c_{1n} et c_{3n} sont respectivement les constantes du premier et second ordre.

3.5 - Résultats

3.5.1- Solution numérique

Dans un premier temps, nous avons résolu directement le problème aux limites de Sturm-Liouville défini par l'équation inhomogène du second ordre:

$$(81) \quad (f(z) p_1'(z))' + G(z, \lambda_1) p_1(z) = 0 \quad -1 < z < 0$$

et les conditions aux limites associées:

$$(82) \quad \alpha_1 p_1(a) + \alpha_2 p_1'(a) = 0 \quad z = a$$

$$(83) \quad \alpha_3 p_1(b) + \alpha_4 p_1'(b) = 0 \quad z = b$$

3.5.1.1- Présentation de la méthode numérique

La méthode numérique utilisée est basée sur la méthode de tir et la transformation de Prüfer, dont les variables β , ϕ , et ρ , sont liées aux fonctions $p_1(z)$ et $f(z) p_1'(z)$ par les relations suivantes:

$$(84) \quad f(z) p_1'(z) = \beta^{1/2} \exp(\rho/2) \cos(\phi/2)$$

$$(85) \quad p_1(z) = \beta^{-1/2} \exp(\rho/2) \sin(\phi/2)$$

Nous ne détaillons pas ici la méthode, mais nous nous contentons de donner une description générale de l'algorithme utilisé.

Cependant, il est nécessaire de noter que l'hypothèse de base pour que cet algorithme numérique soit valable est :

1° : $f(z)$ doit être différente de zéro et monotone dans $[a, b]$

2° : si $G(z, \lambda_1) = \lambda_1 w(z) + r(z)$, alors $\frac{\partial G(z, \lambda_1)}{\partial \lambda_1}$ doit être également monotone non

nulle quand z varie pour toute valeur de λ_1

La méthode de tir utilisée, consiste à déterminer une fonction $q(\lambda_1)$ basée sur la rotation dans le plan de phase autour de l'origine du point:

$$(86) \quad Y(z) = (f(z) p'_1(z), p_1(z))$$

quand la solution évolue de a à b .

A cela s'ajoutent les conditions aux limites qui définissent les rayons au bout desquels $Y(z)$ sera prolongée jusqu'à un point de raccord donné C .

En effet $q(\lambda_{1k})$ définit l'angle entre les points $Y_a(c)$, $Y_b(c)$ et l'origine; l'indice k désigne le nombre de demi-arcs parcourus quand $q(\lambda_{1k})$ tend vers zéro.

Une fois trouvée la valeur estimée finale $\lambda_1 = \overline{\lambda_1}$, le programme intègre une fois de plus l'équation différentielle en choisissant des conditions initiales, telle que l'intégrale suivante:

$$(87) \quad S = \int_a^b p_1^2(z) \frac{\partial G(z, \lambda_1)}{\partial \lambda_1} dz$$

soit approximativement égale à un; où S représente la racine carré de la norme de $p_1(z)$ induite par le produit intérieur:

$$(88) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(z) g(z) w(z) dz$$

en respectant le fait que les fonctions propres sont mutuellement orthogonales.

Cette routine mesure $q(\lambda_1)$ en unité de demi-arc, cela signifie que: quand λ_1 augmente, alors $q(\lambda_1)$ augmente de un à chaque valeur propre simulée (figure 5).

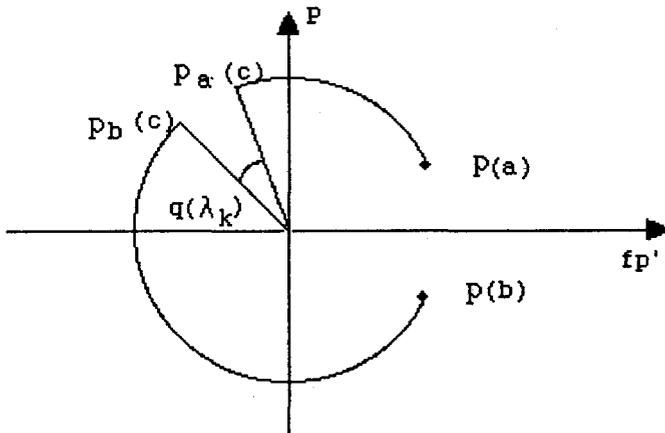


figure 5.

Finalemnt ce processus itératif s'arrête quand le test d'erreur relatif est satisfait :

$$(89) \quad \Delta \lambda_1 = \left| \lambda_1 - \overline{\lambda_1} \right| \leq \text{tol} \max(1.0, \lambda_1), \quad \text{où } \text{tol} \approx 10^{-6}.$$

3.5.1.2- Interprétation des résultats et conclusion

La courbe 2 illustre la variation des trois premières valeurs propres, en fonction de la profondeur de la pycnocline, en fixant le paramètre de la variation de la stratification 'd'.

On constate qu'il y a une forte variation des valeurs des modes quand $h \leq 0.2$, tandis qu'elles varient peu jusqu'à devenir pratiquement constantes au delà de $h \geq 0.2$.

Les courbes 3-4 et 7a illustrent la variation verticale des modes propres pour h fixé, et 'd' variant de 0,1 à 1.

Sur la courbe 7a, on constate qu'au niveau de la pycnocline, l'amplitude de la solution augmente au fur et à mesure que 'd' devient petit et l'écart des variations des amplitudes devient beaucoup plus important pour $0.1 < d < 1$. Bien entendu ce phénomène traduit bien des situations naturelles, ainsi si la densité des eaux de surface devient, par diminution de la température ou par augmentation de la salinité, supérieure à celle des eaux sous-adjacentes, des mouvements de convection dite *thermohaline* prennent naissance, et les eaux de surface coulent jusqu'aux surfaces isopycne(2) correspondant à leur densité. Ces mouvements descendants de l'eau s'accompagnent ailleurs de mouvements inverses, ascendants. En fait au printemps, la température superficielle, augmente par absorption d'énergie solaire, et une thermocline dite saisonnière apparaît en surface (*figure 4*). La pente de cette thermocline est d'autant plus forte que l'échauffement en surface est plus important et que la mer est plus calme. Les eaux superficielles deviennent moins denses et une stratification stable s'établit. Toutefois c'est en automne, lorsque les eaux de surface deviennent plus denses par suite de refroidissement de l'atmosphère, que prennent naissance dans les couches superficielles des mouvements de convection de thermohaline.

(2) des lignes à densité constante

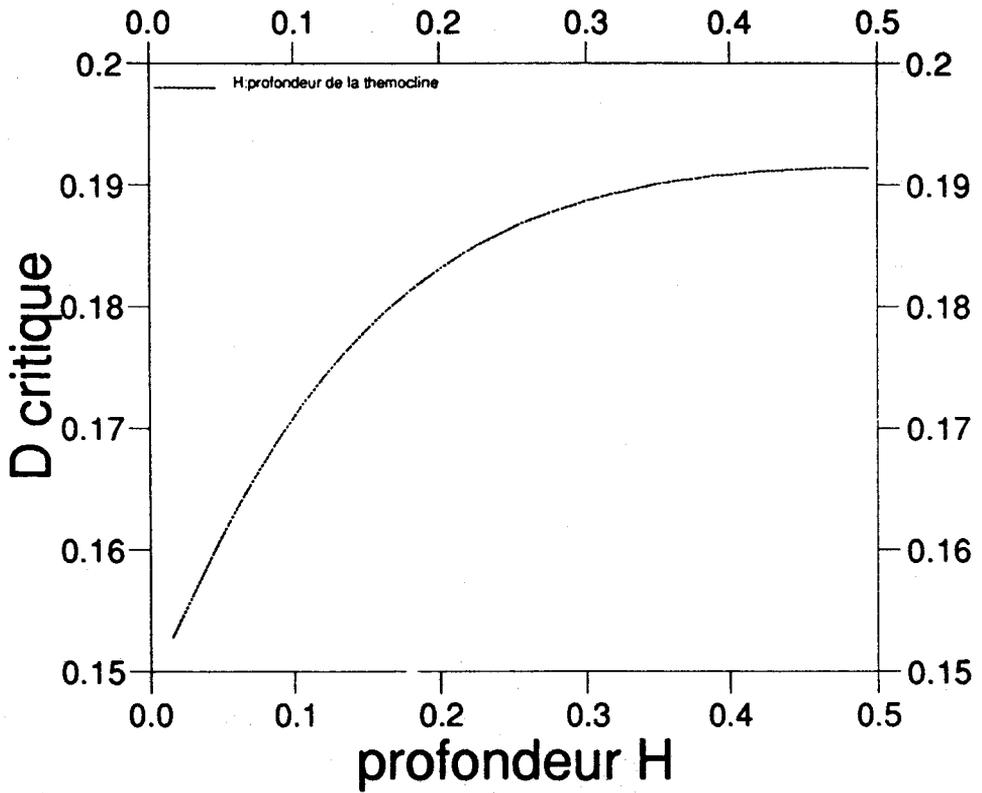
Sur la courbe 8, on représente l'allure des fréquences de Rossby pour 'd' variant de 0.2 à 1, k et h étant fixés.

3.5.2-Solution analytiques et interprétation des résultats

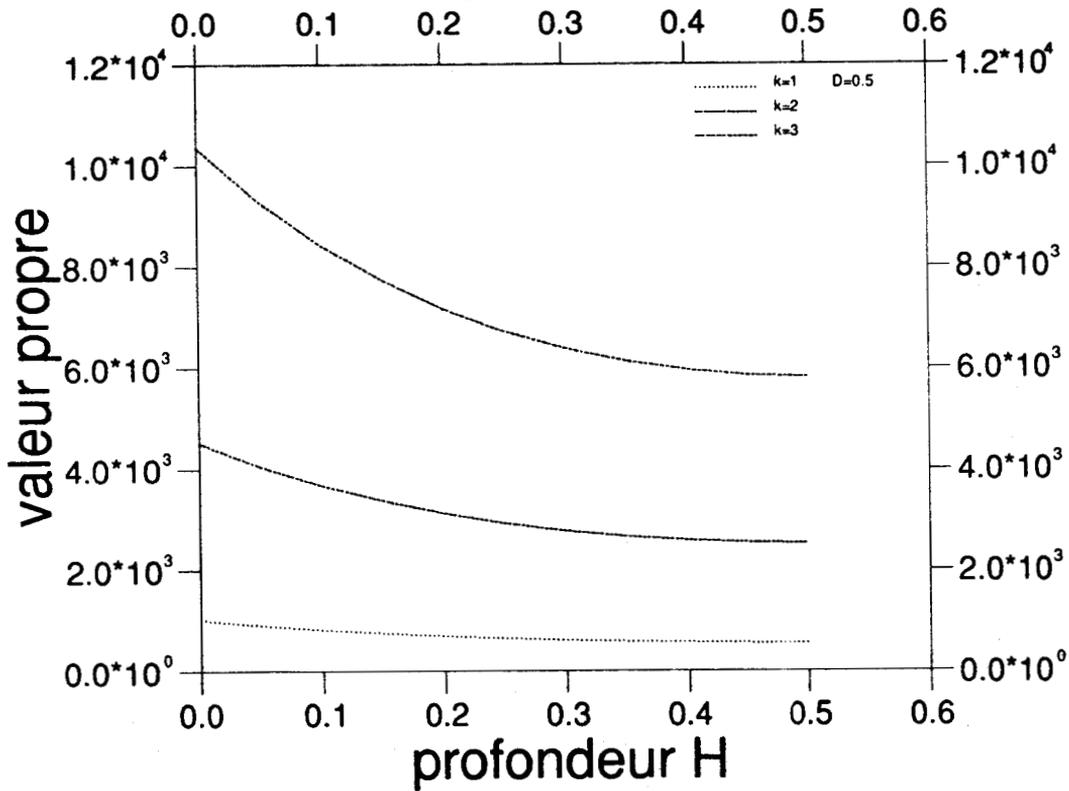
Dans un second temps, nous avons directement tracé les solutions calculées analytiquement afin de les comparer avec les solutions numériques

Les courbes 5-6 et 7b représentent les variations des trois premiers modes propres. Comme dans le cas théorique on constate que sur la courbe (7b) il y a une forte variation des écarts des amplitudes pour $0.18 < d < 0.2$ (voir discussion ci-dessus).

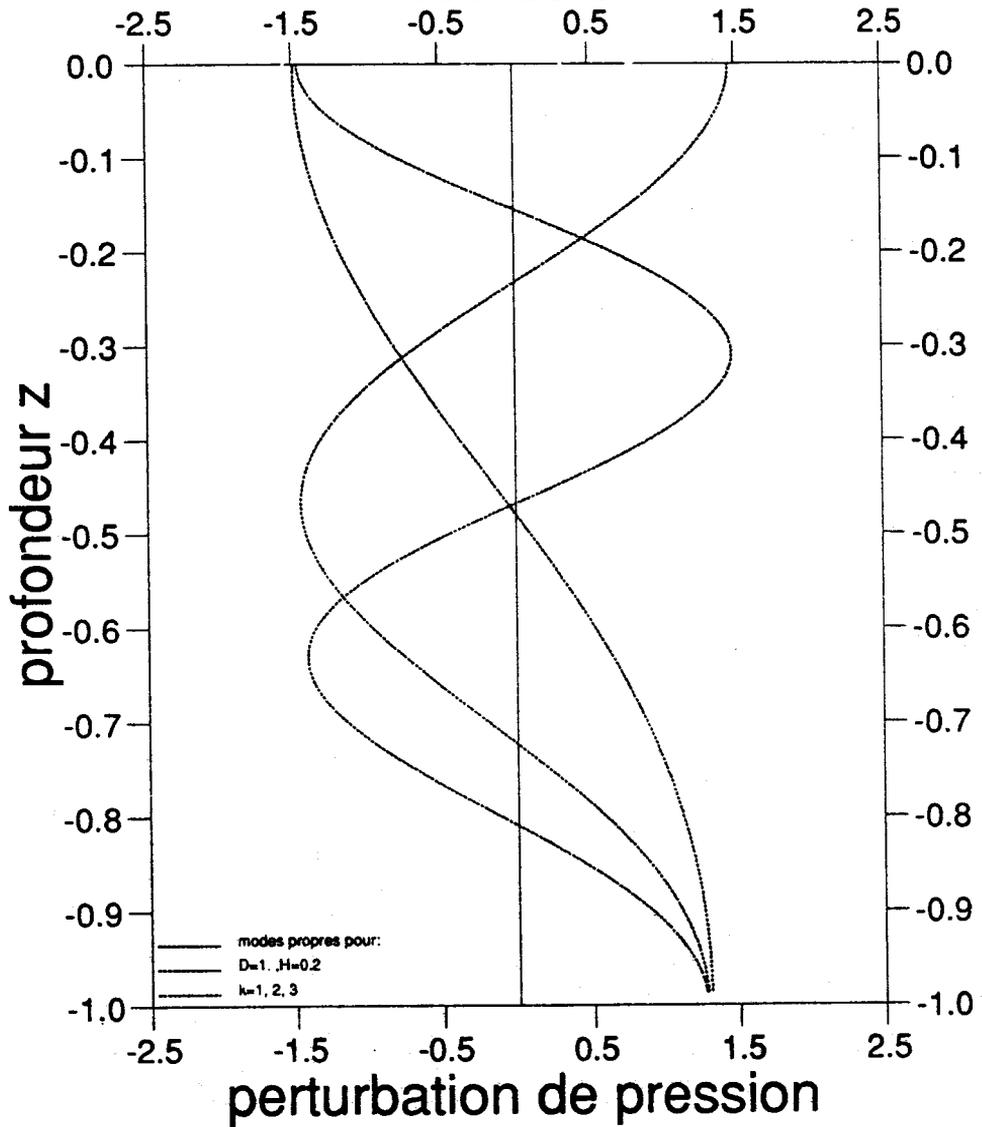
courbe 1



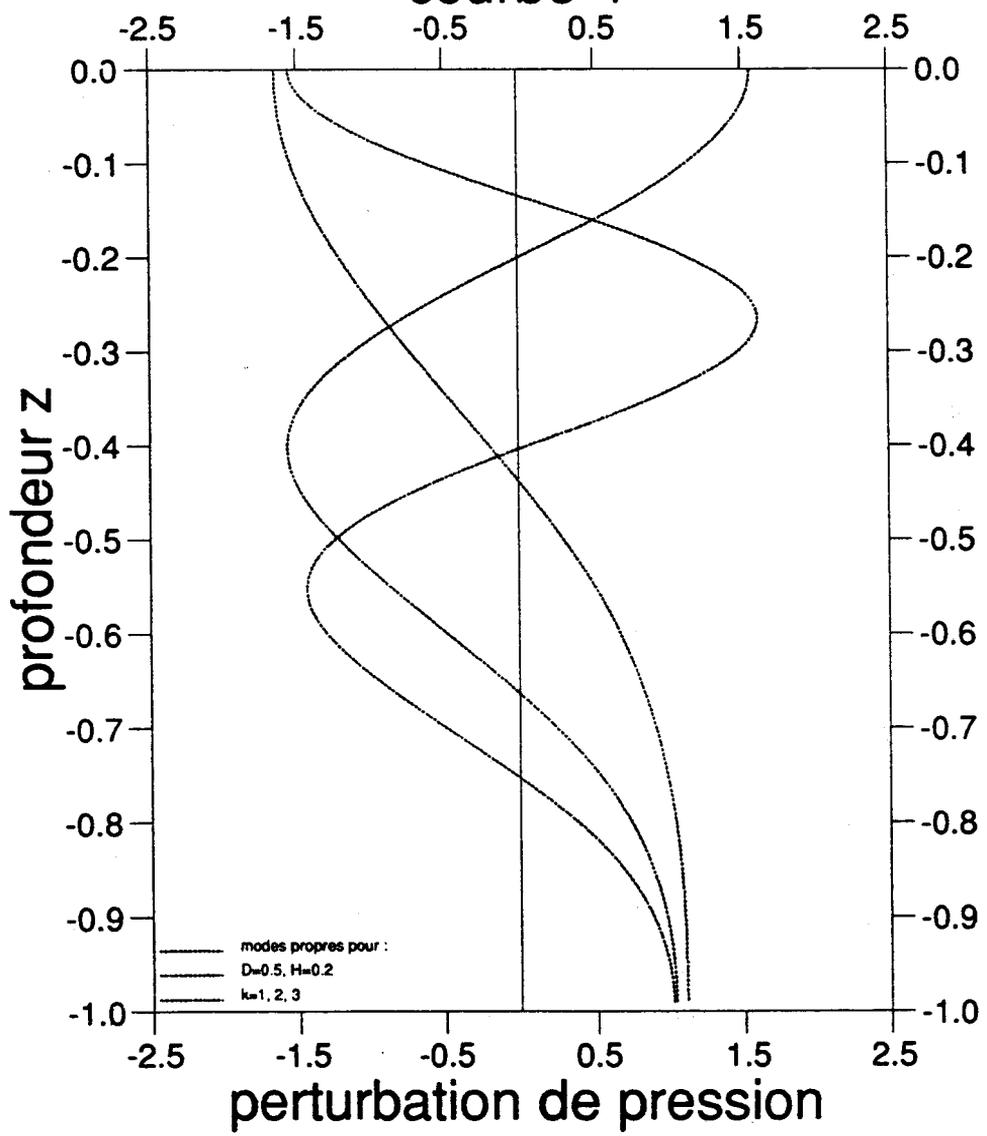
courbe 2



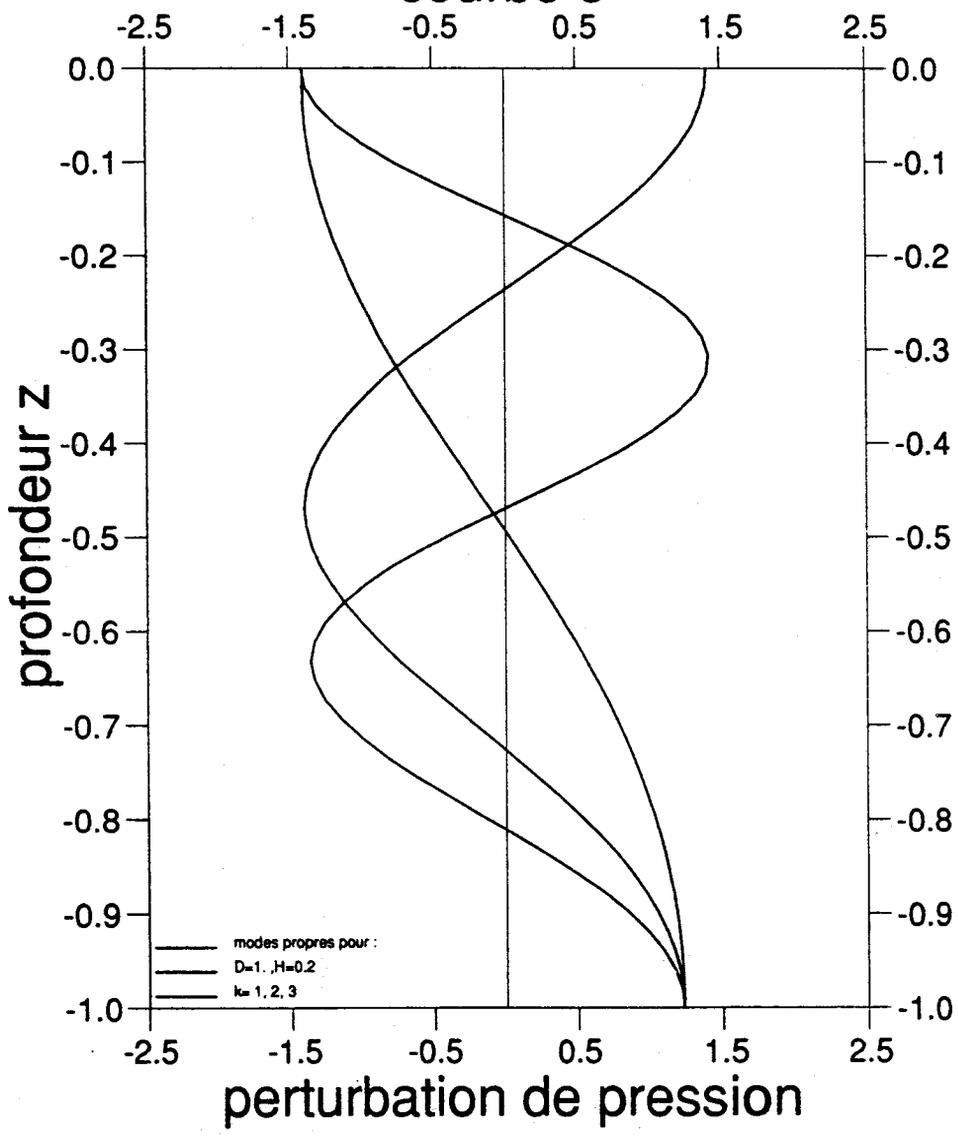
courbe 3



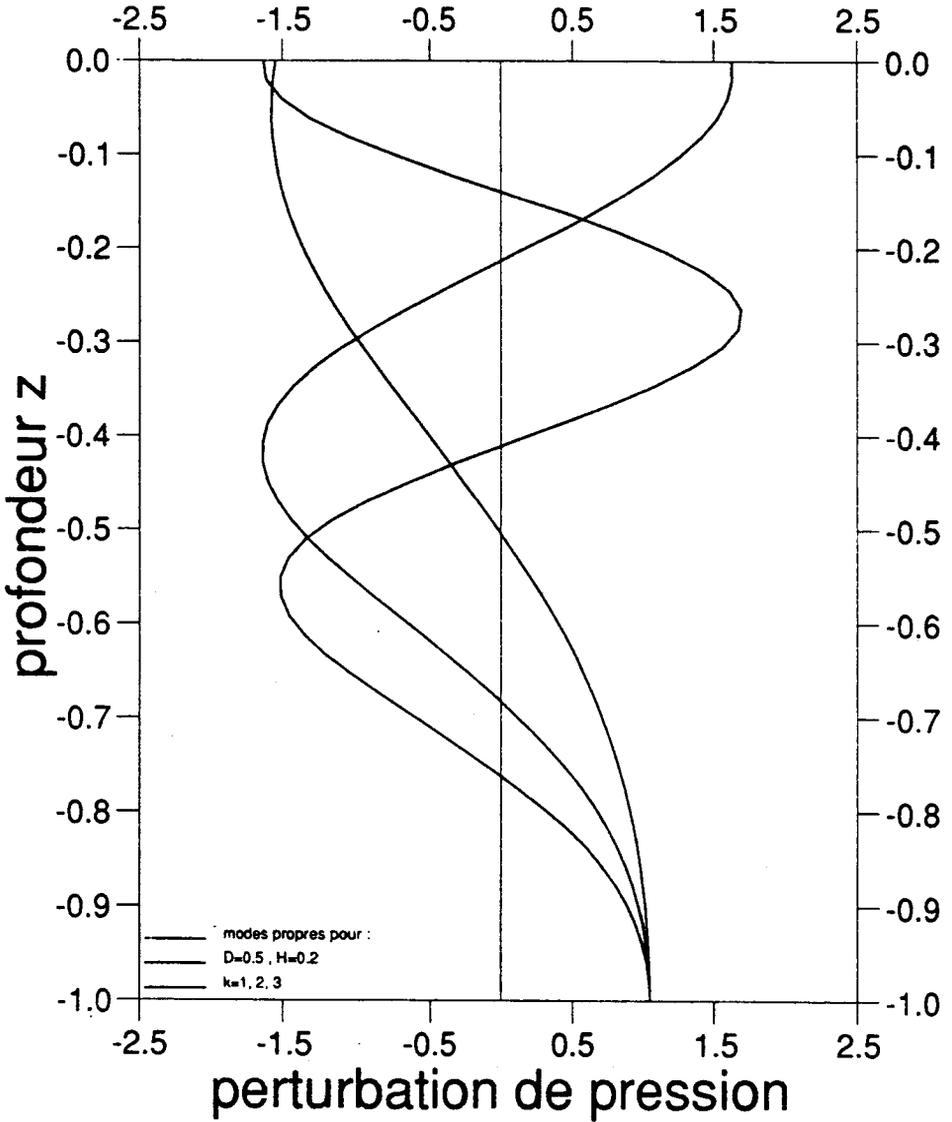
courbe 4



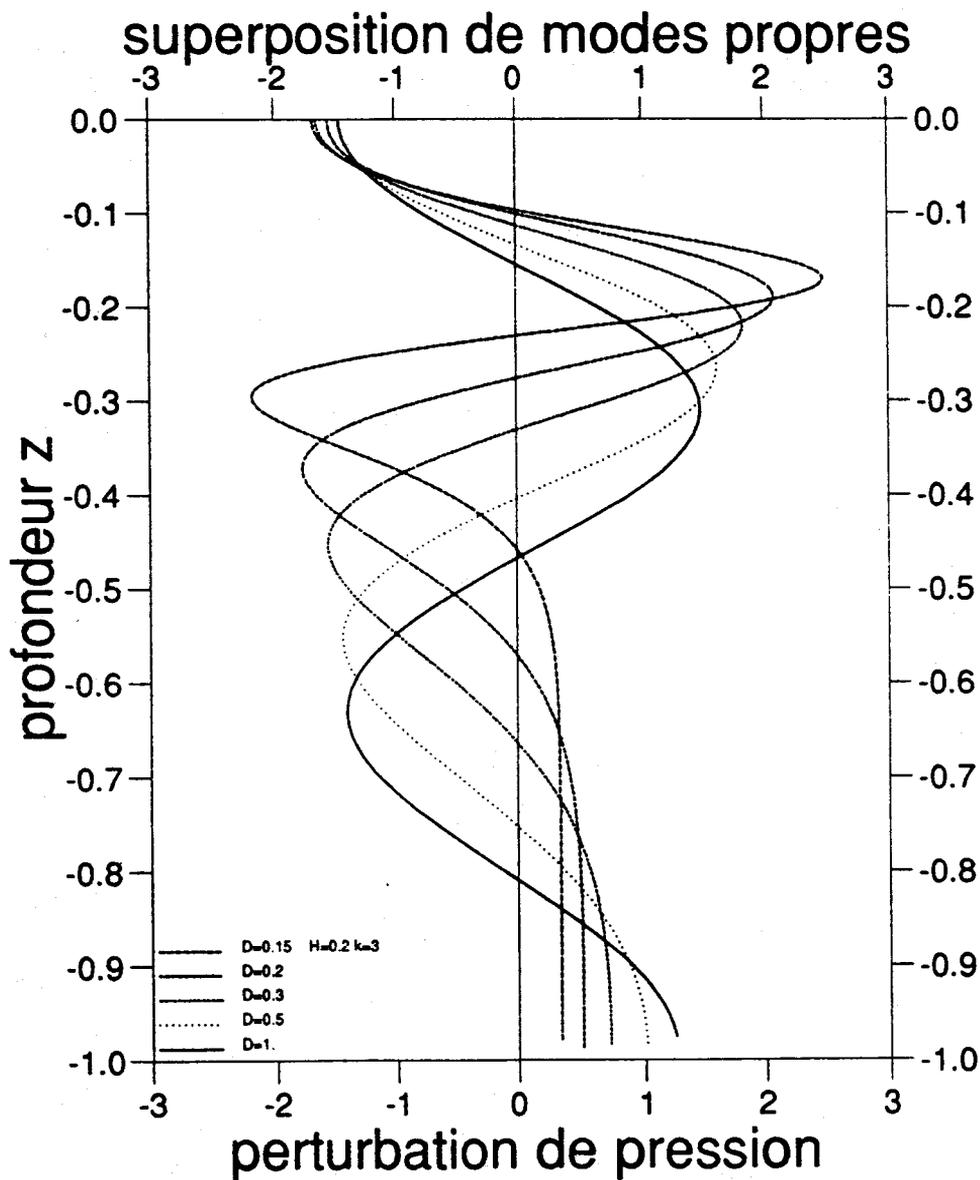
courbe 5



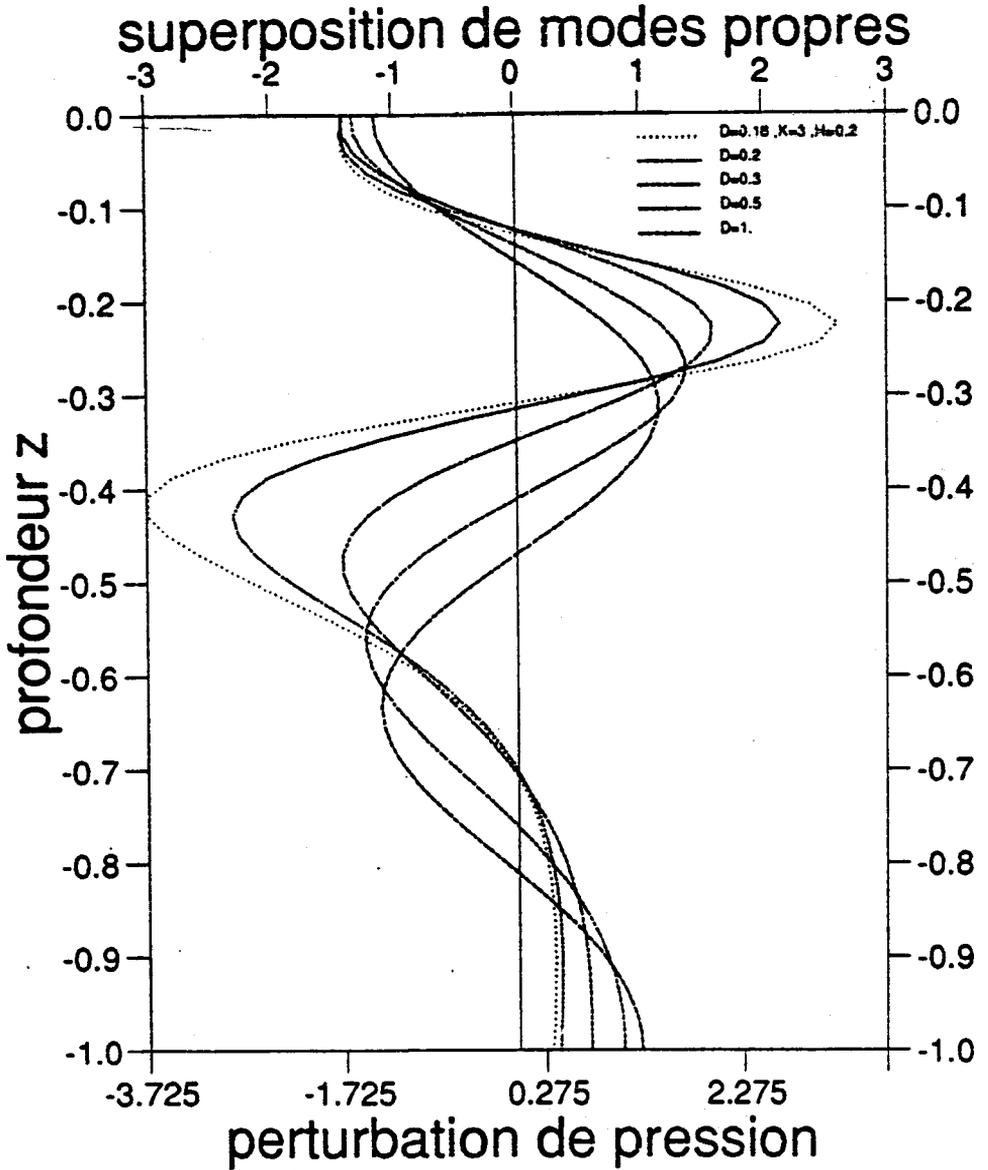
courbe 6



courbe 7(a)

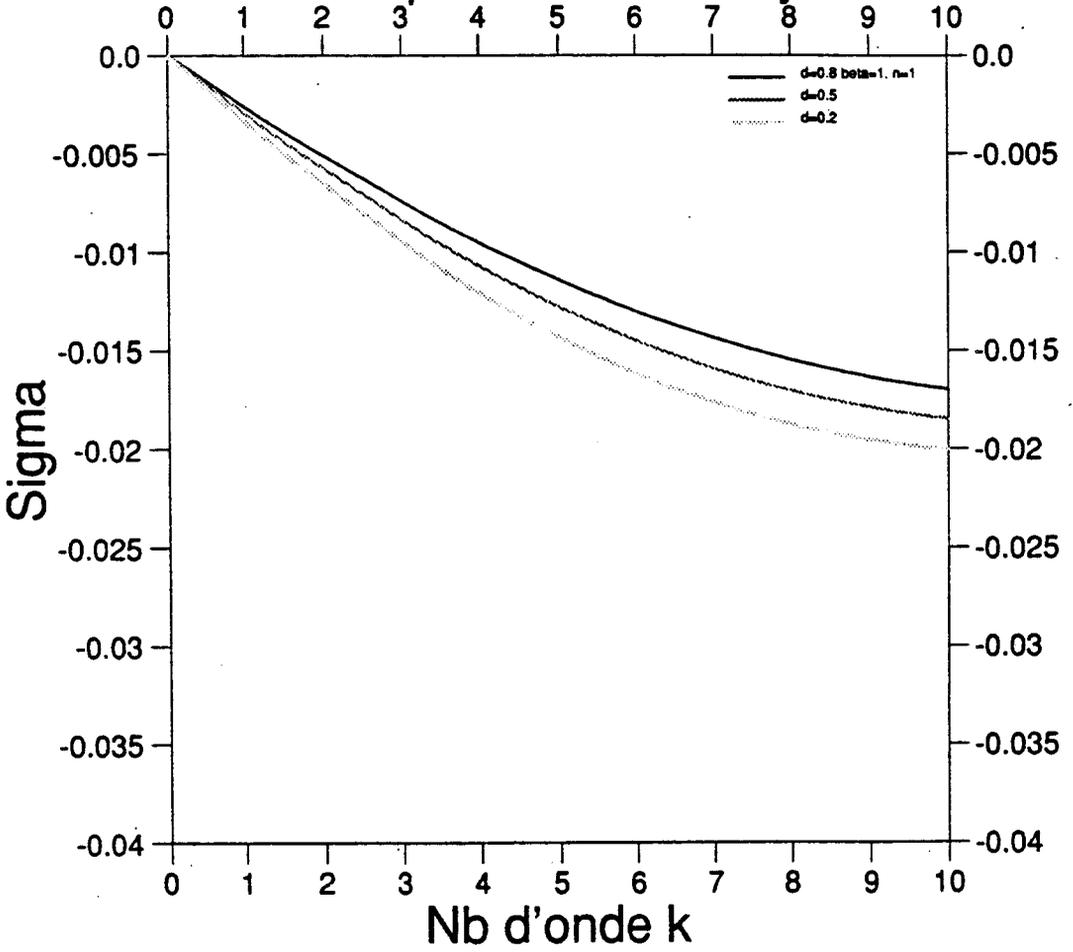


courbe 7(b)



courbe 8

Frequences de Rosby



CHAPITRE IV
ETUDE DU VOISINAGE
DE LA PYCNOCLINE

4.1-INTRODUCTION

Conformément à des observations faites au chapitre précédent, on se propose dans ce chapitre, d'examiner le comportement de la solution dans la région où le gradient horizontal de densité est maximal.

Ainsi il est connu que les eaux de surfaces s'écoulent non seulement dans les zones de convergence des courants de surface, mais également dans les régions où la densité est particulièrement grande. Là ces eaux plongent d'autant plus profondément qu'elles sont plus denses et forment une zone de température et de salinité uniformes; (donc de densité uniforme), appelée couche d'eaux profondes et constitue la majeure partie de la masse totale des océans. Le même phénomène se produit dans la couche superficielle, où se développe une couche d'eaux homogènes, surtout en hiver, qui peut atteindre à la fin de la saison une épaisseur de plusieurs dizaines de mètres, lorsque les eaux superficielles deviennent plus denses par suite de refroidissement de l'atmosphère. Le mélange de ces deux masses d'eaux homogènes se fait généralement dans des couches très minces appelées couches de transition, dans lesquelles la température décroît rapidement de plus de 20°C parfois, à environ 5°C .

En ce qui nous concerne nous nous intéressons à la région où le gradient horizontal de densité est grand et où l'amplitude des ondes modulées par un facteur qui croît indéfiniment lorsque le paramètre caractéristique de variation de la stratification ' d ' tend vers zéro. Comme aux chapitres précédents, nous supposons que la répartition verticale de densité est en tangente hyperbolique.

Nous examinons ici, si nous pouvons chercher des solutions extérieures de part et d'autre de cette région de concentration d'énergie, et les raccorder avec une solution intérieure, au voisinage immédiat de cette région.

4. 2- Formulation du problème

Le système différentiel de départ, est le système (II,11), il fournit après substitution de l'expression de $\rho_0 = \rho_{00} (1 - N_m^2 \operatorname{th}(\frac{z+h}{d}))$, le système suivant :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 P_1(z)}{dz^2} + \frac{2}{d} \operatorname{th}\left(\frac{z+h}{d}\right) \frac{dP_1(z)}{dz} - \frac{\lambda_{1n} N_m^2}{d \operatorname{ch}^2\left(\frac{z+h}{d}\right)} \left(1 + N_m^2 \operatorname{th}\left(\frac{z+h}{d}\right)\right) P_1(z) = 0 \quad (a) \\ \\ \frac{dP_1(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z=0 \quad (b) \\ \\ \frac{dP_1(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z=d \quad (c) \end{array} \right.$$

4. 2. 1. Hypothèse 1

Nous considérons dans ce qui suit, que le paramètre λ_1 est très grand. Nous supposons en fait que :

$$(H_1) \quad \lambda_{1n} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

ε étant un petit paramètre.

Introduisant dans (1-a) le changement de variable suivant :

$$(2) \quad \mu = \operatorname{th}\left(\frac{z+h}{d}\right) \quad \text{et} \quad P_1(z) = \phi(\mu)$$

Nous supposons ensuite 'd' très petit, ce qui transforme l'équation différentielle (1-a), en une équation différentielle hypergéométrique :

$$(3) \quad (1-\mu^2) \frac{d^2\phi}{d\mu^2} - \frac{N_m^2 d}{\varepsilon} (1+N_m^2\mu) \phi(\mu) = 0$$

4. 2. 2. Hypothèse 2

En vertu de (H₁), nous faisons ensuite l'hypothèse suivante :

$$(H_2) \quad \frac{N_m^2 d}{\varepsilon} = O(1)$$

4. 3. Développement asymptotique des solutions

Nous nous proposons d'étudier les formes limites du système (1) lorsque $d \rightarrow 0$, et nous supposons que $\phi(\mu, N_m^2)$ admet le développement de la forme:

$$(4) \quad \phi(\mu, N_m^2) = \phi_0(\mu) + N_m^2 \phi_1(\mu) + \dots \quad \text{où } N_m^2 \ll 1$$

On est donc amené à considérer trois cas différents, suivant qu'on est de part ou de l'autre côté de la pycnocline, où nous retenons que les termes d'ordre un en N_m^2

4. 3. 1. Etude des termes d'ordre 1 en N_m^2

4. 3. 1. 1. cas où $z+h < 0$: $\Rightarrow \mu \rightarrow -1$

On obtient le système suivant :

$$(5) \quad \begin{cases} (1-\mu^2) \frac{d^2\phi_0}{d\mu^2} - \phi_0(\mu) = 0 & -1 < \mu < -h \\ \frac{d\phi_0}{d\mu} = 0 & \text{en } \mu = -1 \end{cases}$$

L'équation différentielle de ce système contient une singularité en $\mu=-1$. Nous envisageons alors d'utiliser le changement de variable suivant :

$$(6) \quad \mu = 2x - 1$$

et on est amené à chercher une solution de $x=0$ quand $\mu=-1$.

On obtient à partir de (5) et (6), l'équation hypergéométrique suivante:

$$(7) \quad x(1-x) \frac{d^2\phi_{01}}{dx^2} - \phi_{01}(x) = 0$$

dont la forme générale s'écrit :

$$(8) \quad x(1-x) \frac{d^2\phi_0}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\} \frac{d\phi_0}{dx} - a b \phi_0(x) = 0$$

Il s'agit donc d'étudier l'équation: $E(a, b, c, x)$, où l'on déduit de l'équation (7) :

$$(9) \quad a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad b = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad c = 0$$

l'équation (7) admet deux solutions linéairement indépendantes, dont la première solution s'écrit:

$$(10) \quad \phi_{01}^{(1)}(x) = x F(1+a, 1+b, 2-c, x)$$

Cherchons le développement de la fonction $\phi_{01}^{(1)}(x)$ suivant le développement des puissances de x pour $k > 0$ on obtient la série hypergéométrique de Gauss suivante :

$$(11) \quad \phi_{01}^{(1)}(x) = \sum_{\kappa \geq 0} \frac{(1+a)_\kappa (1+b)_\kappa}{(2)_\kappa} \frac{x^{\kappa+1}}{\kappa!}$$

où on a défini $(a)_\kappa$ comme étant le produit factoriel:

$$(12) \quad (a)_\kappa = (a)(a+1)(a+2)\dots(a+p-1), \quad (p=1,2,\dots)$$

Après simplification des produits factoriels, on obtient :

$$(13) \quad \phi_{01}^{(1)}(x) = \frac{x}{1!} + \frac{3}{2!}x^2 + \sum_{\kappa \geq 2} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (n^2+n+1)}{(\kappa+1)!} \frac{x^{\kappa+1}}{\kappa!}$$

La deuxième solution linéairement indépendante à $\phi_{01}^{(1)}(x)$ présente une singularité, car la différence entre les coefficients a et b est un entier. En outre C est nul. Pour surmonter cette singularité, la solution $\phi_{01}^{(2)}(x)$ doit comporter un terme logarithmique Néperien (voir ABRAMOVITZ AND STEGUN, 1965) :

$$(14) \quad \phi_{01}^{(2)}(x) = -\sum_{\kappa=1}^{\gamma-1} \frac{(-1)^\kappa (\kappa-1)!}{(\gamma-1-\kappa)! (1+a-\kappa)_\kappa (1+b-\kappa)_\kappa} x^{\kappa+1} \\ + \sum_{\kappa \geq 0} \frac{(1+a)_\kappa (1+b)_\kappa}{(\kappa)! (n-1+\kappa)_\kappa} x^{\kappa+1} (L_n(x) + \theta_\kappa)$$

où:

$$(15) \quad \theta_\kappa = \psi(1+a+\kappa) - \psi(a) + \psi(1+b+\kappa) + \psi(b) - \psi(\gamma+\kappa) + \psi(1+\kappa), \\ (\kappa=0,1,2,\dots)$$

$\psi(\alpha)$ désigne la dérivée logarithmique de la fonction gamma et $\gamma=2$.

Les mêmes conditions de calcul et de simplification que précédemment fournissent la solution $\phi_{01}^{(2)}(x)$:

$$(16) \quad \phi_{01}^{(2)}(x) = 1+x(\theta_0 + L_n x) + \frac{3}{2}x^2(\theta_1 + L_n x) + \sum_{\kappa \geq 2} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (n^2+n+1)}{(k+1)!} \frac{x^{\kappa+1}}{k!} (\theta_\kappa + L_n(x))$$

Toute solution de l'équation hypergéométrique (7) peut s'écrire suivant les fonctions $\phi_{01}^{(1)}(x)$ et $\phi_{01}^{(2)}(x)$:

$$(17) \quad \phi_{01}(x) = c_1 \phi_{01}^{(1)}(x) + c_2 \phi_{01}^{(2)}(x)$$

Où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration.

Cependant, nous déduisons de la condition aux limites en $\mu = -1$, que la seconde constante c_2 est nulle. Alors en utilisant (6), $\phi_{01}(x)$ s'écrit:

$$(18) \quad \phi_{01}(\mu) = C_1 \left\{ \frac{\mu+1}{2} + \frac{3}{2!} \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2 + \sum_{\kappa \geq 2} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (n^2+n+1)}{(\kappa+1)!} \frac{\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^{\kappa+1}}{\kappa!} \right\}$$

4. 3. 1. 2. cas où $z+h > 0$: $\Rightarrow \mu \rightarrow +1$

Dans ce cas on a le système suivant :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-\mu^2) \frac{d^2 \phi_{02}}{d\mu^2} - \phi_{02}(\mu) = 0 \quad -h < \mu < 0 \\ \frac{d \phi_{02}}{d\mu} = 0 \quad \text{en } \mu = +1 \end{array} \right.$$

et l'équation différentielle présente une singularité en $\mu = +1$, donc il convient d'utiliser le changement de variable suivant :

$$(20) \quad \mu = 1 - 2x$$

Le même processus de calcul que précédemment, en utilisant la condition à la limite $\mu = +1$ et (20), fournit la solution en forme de série hypergéométrique suivante :

$$(21) \quad \phi_{02}(\mu) = c_3 \left\{ \frac{1-\mu}{2} + \frac{3}{2!} \left(\frac{1-\mu}{2} \right)^2 + \sum_{\kappa \geq 2}^{\infty} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (n^2 + n + 1)}{(\kappa+1)!} \frac{\left(\frac{1-\mu}{2} \right)^{\kappa+1}}{\kappa!} \right\}$$

où c_3 est une constante

4.3.1.3 cas où : $z+h \approx 0(d)$; avec $\lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{z+h}{d} \right) \approx 0$

Dans ce cas on a l'équation différentielle suivante:

$$(22) \quad (1-\mu^2) \frac{d^2 \phi_{03}}{d\mu^2} - \phi_{03}(\mu) = 0$$

Le passage à la limite annoncé en haut, suppose qu'on se place au voisinage de $\mu=0$. Il en résulte que $\mu=0$ est un point régulier. Cela conduit à chercher la solution sous forme d'une série qui converge dans un rayon inférieur à 1.

$$(23) \quad \phi_{03}(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n$$

où les coefficients a_n sont constants et liés par les relation suivantes:

$$(24) \quad \text{si } n=2p \quad a_{2p} = \frac{4p^2 - 2p + 1}{2(p+1)(2p+1)} a_{2p-2}$$

$$(25) \quad \text{si } n=2p+1 \quad a_{2p+1} = \frac{4p^2 + 2p + 1}{2(p+1)(2p+1)} a_{2p-1}$$

La solution de (22) est:

$$(26) \quad \phi_{03}(\mu) = K \phi_{03}^{(1)}(\mu) + H \phi_{03}^{(2)}(\mu)$$

où $\phi_{03}^{(1)}(\mu)$ et $\phi_{03}^{(2)}(\mu)$ sont deux fonctions qui s'écrivent en fonction des a_k comme suit :

$$(27) \quad \phi_{03}^{(1)}(\mu) = 1 + \frac{3}{2} \mu^2 + \sum_{\kappa \geq 2}^{\infty} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (4n^2 - 2n + 1)}{(2\kappa - 1)! \kappa!} \mu^{2\kappa}$$

$$(28) \quad \phi_{03}^{(2)}(\mu) = \mu + \frac{7}{6} \mu^3 + \sum_{\kappa \geq 2}^{\infty} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (4n^2 + 2n + 1)}{(2\kappa + 1)! \kappa!} \mu^{2\kappa+1}$$

En définitive; dans les régions extérieures :

si $z < -h$ on a : $\phi_{01}(\mu)$ définie dans (18)

si $z > -h$ on a : $\phi_{02}(\mu)$ définie dans (21)

Tandis que dans la région intérieure on a:

$$(29) \quad \phi_{03}(\mu) = K \phi_{03}^{(1)}(\mu) + H \phi_{03}^{(2)}(\mu) \text{ définie par les relations (27) et (28)}$$

4. 4-Raccords des développements extérieurs et intérieurs de $\phi_{01}(\mu)$

à la traversée du point : $z \approx -h$.

Il s'agit de former une relation entre les constantes C_1 , C_3 , K et H en raccordant les différentes régions extérieures avec la région intérieure.

En effet l'identification de $\phi_{01}(\mu)$ et $\phi_{03}(\mu)$ au voisinage de $\mu \approx 0$ pour $z < h$ fournit les relations suivantes :

$$(30) \quad K = C_1 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \sum_{\kappa \geq 2}^{\infty} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (n^2 + n + 1)}{(\kappa + 1)! \kappa!} \frac{1}{2^{\kappa+1}} \right\}$$

$$(31) \quad H = -C_1 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \sum_{\kappa \geq 2} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (n^2+n+1)}{(k+1)! \kappa!} \frac{(\kappa+1)}{2^{\kappa+1}} \right\}$$

L'identification de $\phi_{02}(\mu)$ à $\phi_{03}(\mu)$ au voisinage de $\mu \approx 0$ pour $z \geq h$;
fournit les relations suivantes :

$$(32) \quad K = C_3 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \sum_{\kappa \geq 2} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (n^2 + n+1)}{(k+1)! \kappa!} \frac{1}{2^{\kappa+1}} \right\}$$

$$(33) \quad H = -C_1 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \sum_{\kappa \geq 2} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (n^2+ n+1)}{(k+1)! \kappa!} \frac{(\kappa+1)}{2^{\kappa+1}} \right\}$$

Nous déduisons des expressions (30) , (31) , (32) et (33) que :

$$(34) \quad C_1 = C_3$$

Il résulte de ce qui précède, que les solutions dans les différentes régions s'écrivent :

$$(35) \quad \phi_{01}(\mu) = C_1 \left\{ \frac{\mu+1}{2} + \frac{3}{2!} \left(\frac{\mu+1}{2} \right)^2 + \sum_{\kappa \geq 2} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (n^2+n+1)}{(k+1)! \kappa!} \left(\frac{\mu+1}{2} \right)^{\kappa+1} \right\}$$

$$(36) \quad \phi_{02}(\mu) = C_1 \left\{ \frac{1-\mu}{2} + \frac{3}{2!} \left(\frac{1-\mu}{2} \right)^2 + \sum_{\kappa \geq 2} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (n^2 + n+1)}{(k+1)! \kappa!} \left(\frac{1-\mu}{2} \right)^{\kappa+1} \right\}$$

$$(37) \quad \phi_{03}(\mu) = K \left\{ 1 + \frac{3}{2} \mu^2 + \sum_{\kappa \geq 2} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (4n^2 - 2n+1)}{(2 \kappa-1)! \kappa!} \mu^{2\kappa} \right\} +$$

$$H \left\{ \mu + \frac{7}{6} \mu^3 + \sum_{\kappa \geq 2} \frac{\prod_{n=0}^{\kappa-1} (4 n^2 + 2n+1)}{(2 \kappa+1)! \kappa!} \mu^{2\kappa+1} \right\}$$

où les constantes k et H sont définies dans (32) et (33).

4.5- CONCLUSION :

Le chapitre IV nous a ainsi permis, à l'issue des chapitre précédents, de retrouver quelques éléments de synthèses. Le premier élément offre un intérêt essentiellement pratique et montre que la considération de l'ordre de grandeur du paramètre de variation de la stratification "d", du paramètre de séparation " λ ", et de la fréquence de Brunt-Väisälä " N_m^2 ", permet de tenir compte de la dégénérescence du système (II,11). Le second élément de synthèse est l'importance de rendre compte d'une circulation océanique réelle . Cependant il arrive dans certaines régions marines que l'on puisse parfois considérer les eaux présentes comme formées de la superposition de deux eaux nettement tranchées de densités différentes. Ces eaux se raccordent suivant une surface de discontinuité assez mince . C'est le cas par exemple de la zone équatoriale des océans.

Le modèle qui a été exposé dans ce chapitre, malgré toutes ses insuffisances pour décrire d'une manière générale ce phénomène, et devant l'image complexe que nous offre la nature, garde un intérêt mathématique majeur. Aussi les calculs mathématiques font-ils partie de toute exploitation dynamique et physique .

CHAPITRE V

ETUDE DE LA STRUCTURE VERTICALE

DANS LE CAS où $\hat{E}_\perp \geq O(1)$

et

LA STRATIFICATION EST VARIABLE

5.1-INTRODUCTION :

L'objet de ce chapitre, est de déterminer la nature de la solution du système (I,1) lorsque la paramètre $\hat{E}_L \geq O(1)$. Ce choix n'est pas sans intérêt, car dans la modélisation de la circulation océanique à grandes échelles, où la profondeur moyenne de l'Océan $H \approx 5 \cdot 10^3$ m et l'étendue horizontale $L \approx 10^6$ m, la vitesse du vent de $1m/s^{-1}$, si la viscosité cinématique à moyenne latitude est de l'ordre de $0.5 m^2s^{-1}$, alors le paramètre $\hat{E}_L \approx 2.18$ et l'épaisseur de la couche d'EKMAN $\delta_E \approx 69.6$ m. Cela correspond bien à ce qui se passe dans un Océan réel, par exemple en Atlantique tropicale (KRAUS, 1975, pp 102-117).

La méthode utilisée pour résoudre ce problème, consiste en une application de l'approximation de W. B. K. J. Elle permet de décrire l'apparition d'un seuil critique d'existence de la solution relatif à une valeur critique du paramètre de variation de la stratification, "d".

Dans ce chapitre on étudie le problème de points tournants que l'on a traité par la méthode classique utilisant la transformation de LANGER (NAYFEH, 1973, pp 335-360).

A la fin de ce chapitre, on donne une solution approchée du problème dans le cas de non existence de points tournants.

5. 2. Formulation de l'approximation de W. B. K. J.

Les équations de départ sont les équations du système (II,2). Elles fournissent après y avoir introduit les changements (III,10), (III,11) et (III,12), le système :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Phi_1(\xi, \mu, d)}{d\xi^2} + (\mu^2 - v(\xi, d)) \Phi_1(\xi, \mu, d) = 0 \quad (a) \\ \frac{d\Phi_1(\xi, \mu, d)}{d\xi} + p \Phi_1(\xi, \mu, d) = 0 \quad \text{en } \xi = 1 \quad (b) \\ \frac{d\Phi_1(\xi, \mu, d)}{d\xi} + q \Phi_1(\xi, \mu, d) = 0 \quad \text{en } \xi = 0 \quad (c) \end{array} \right.$$

où l'on a posé:

$$(2) \quad v(\xi, d) \equiv \frac{1}{4} \frac{1}{d^2} \left(2 - \text{th}^2\left(\frac{\xi-1+h}{d}\right) \right) + O(N_m^2) \quad \text{où } N_m^2 \ll 1$$

$$(3) \quad p = \left\{ \frac{i J \alpha_1}{\sigma} \left(- \frac{\overline{\rho_0}'(\xi)}{\overline{\rho_0}(\xi)} \right)^{1/2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\overline{\rho_0}'(\xi)}{\overline{\rho_0}(\xi)} + \frac{\overline{\rho_0}''(\xi)}{\overline{\rho_0}'(\xi)} \right) \right\}_{\xi=1}$$

$$(4) \quad q = \left\{ \frac{i J \alpha_2}{\sigma} \left(- \frac{\overline{\rho_0}'(\xi)}{\overline{\rho_0}(\xi)} \right)^{1/2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\overline{\rho_0}'(\xi)}{\overline{\rho_0}(\xi)} + \frac{\overline{\rho_0}''(\xi)}{\overline{\rho_0}'(\xi)} \right) \right\}_{\xi=0}$$

les constantes α_1 et α_2 sont données par les relations (II,6) et (II,7).

Dans la suite de ce travail on pose :

$$(5) \quad f(\xi) = \mu_1 n^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{d^2} \left(2 - \text{th}^2\left(\frac{\xi-1+h}{d}\right) \right)$$

et on cherche une solution approchée de (1) sous la forme:

$$(6) \quad \Phi(\xi) \approx e^{\pm i\varphi(\xi)}$$

On obtient pour $\varphi(\xi)$ l'équation de dispersion :

$$(7) \quad \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)^2} - 1 + \frac{\varphi(\xi)''}{\varphi(\xi)^2} = 0$$

d'où l'on choisit $\varphi(\xi)$ tel que les deux conditions soient vérifiées :

$$(8) \quad \frac{\varphi(\xi)''}{\varphi(\xi)^2} \ll 1 \quad \text{donc} \quad \frac{f(\xi)'}{2\sqrt{f(\xi)}} \ll f(\xi)$$

$$(9) \quad \frac{f(\eta)}{\varphi(\xi)^2} - 1 = 0 \quad \text{donc} \quad \varphi(\xi) = \pm \int \sqrt{f(\xi)} \, d\xi$$

En première approximation, l'équation (8) est vérifiée si $d \ll 1$, tandis qu'en seconde approximation, en dérivant deux fois l'équation (9) nous obtenons:

$$(10) \quad \varphi(\xi)'' \approx \pm \frac{f(\xi)'}{2\sqrt{f(\xi)}}$$

En portant l'équation (10) dans (7) nous obtenons :

$$(11) \quad \varphi(\xi) \approx \pm \int \sqrt{f(\xi)} \, d\xi + \frac{i}{4} \text{Ln } f(\xi)$$

En vertu de (6), on a alors la solution approchée suivante :

$$(12) \quad \Phi(\xi, \mu, d) \approx \frac{1}{\sqrt{f(\xi)}} \left\{ K \exp \left[i\lambda \int \sqrt{f(\xi)} d\xi \right] + L \exp \left[-i\lambda \int \sqrt{f(\xi)} d\xi \right] \right\}$$

où $\lambda = \frac{1}{2d^2}$

cette solution n'est pas uniformément valable si $f(\xi)$ change de signe en un point $\xi_0 \in [0, 1]$ appelé point tournant.

Cependant l'équation (12) montre que la solution est oscillatoire si $f(\xi) > 0$ et amortie si $f(\xi) < 0$ (figure 6). On se propose ici d'étudier le comportement asymptotique de la solution (6) lorsque le paramètre $d \ll 1$.

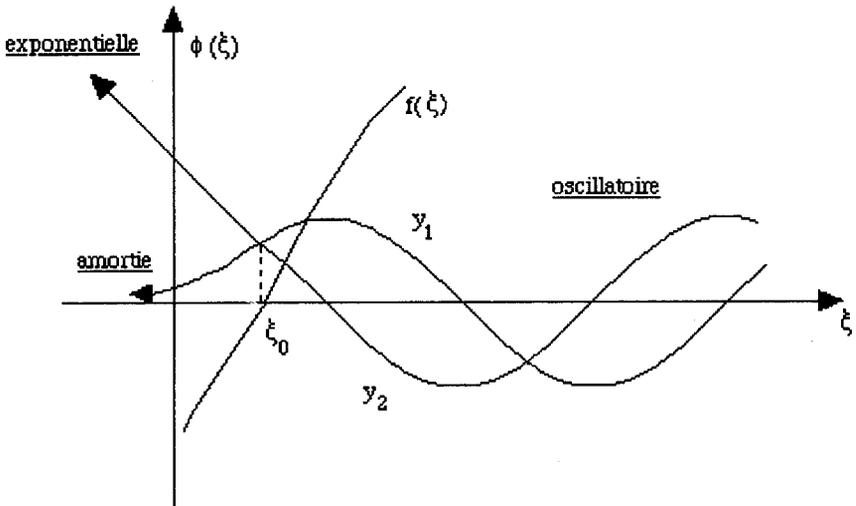


figure 6 :

Nous effectuons le changement de variable suivant :

$$(13) \quad \eta = \frac{\xi - 1 + h}{d}$$

où η tend vers $\pm\infty$ quand $d \rightarrow 0$.

Ainsi de l'équation (1-a) on obtient :

$$(14) \quad \frac{d^2\Phi(\eta, \mu_1, d)}{d\eta^2} + \lambda^2 f(\eta) \Phi(\eta, \mu_1, d) = 0$$

où l'on a posé :

$$(15) \quad f(\eta) = \text{th}^2(\eta) - 2 + 4 d^2 \mu_1^2$$

A ce stade d'analyse, il est nécessaire d'examiner la variation de la fonction $f(\eta)$.

5. 3- Problème de points tournants.

On se propose dans ce paragraphe de rechercher les solutions de l'équation (14) dans le cas où $f(\eta)$ change de signe. Ceci est possible si la valeur propre μ_1 vérifie l'hypothèse suivante:

$$\mu_1 \in] -\frac{\sqrt{2}}{2d}, -\frac{1}{2d} [\cup] \frac{\sqrt{2}}{2d}, \frac{1}{2d} [$$

Cela montre que les zones dans lesquelles il est intéressant d'étudier le comportement de l'équation (14), sont celles où $f(\eta)$ s'annule puis change de signe.

5. 3. 1- Solutions extérieures.

Si $f(\eta) > 0$, alors la structure en η des solutions de (12) est oscillatoire. Ainsi la solution de l'équation (14) s'écrit :

$$(16) \quad \Phi(\eta, \mu, d) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{\text{th}^2(\eta) - 2 + 4d^2\mu_1^2}} \left\{ a_1 \cos \left[\lambda \int \sqrt{f(\eta)} d\eta \right] + b_1 \sin \left[\lambda \int \sqrt{f(\eta)} d\eta \right] \right\}$$

Si $f(\eta) < 0$, la solution de l'équation (14) est apériodique. En utilisant (12) elle s'écrit :

$$(17) \quad \Phi(\eta, \mu, d) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{2-4d^2\mu_1^2-t^2(\eta)}} \left\{ a_2 \exp\left[\lambda \int \sqrt{-f(\eta)} d\eta\right] + b_2 \exp\left[-\lambda \int \sqrt{-f(\eta)} d\eta\right] \right\}$$

5. 3. 2- Etude au voisinage des points tournants.

L'analyse décrite ci-dessus montre que les solutions (13) et (14) sont valables de part et d'autre des points tournants η_1 et η_2 , où $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$. En outre la nature des équations (13) et (14) montre qu'il s'agit d'un problème de points tournants autour desquels on essaie de déterminer le comportement asymptotique de l'équation (14).

La fonction $f(\eta)$ s'écrit au voisinage de η_1 et η_2 sous la forme:

$$(18-a) \quad f(\eta) = -(\eta - \eta_1)(\eta_2 - \eta) \frac{1}{ch^4(\eta_1)}$$

où:

$$(18-b) \quad \begin{cases} \eta_1 = -\operatorname{argth}(\sqrt{2-4\mu_1^2 d^2}) \\ \eta_2 = \operatorname{argth}(\sqrt{2-4\mu_1^2 d^2}) \end{cases}$$

On substitue (18-a) dans (14), on obtient:

$$(19) \quad \frac{d^2\Phi(\eta, \mu, d)}{d\eta^2} - \lambda^2(\eta - \eta_1)(\eta_2 - \eta) \frac{1}{ch^4(\eta_1)} \Phi(\eta, \mu, d) = 0$$

Nous résolvons l'équation (19) en utilisant la transformation de LANGER (NAYFEH, 1973). Ainsi nous introduisons la variable suivante :

$$(20) \quad x = \psi(\eta)$$

et nous effectuons le changement suivant :

$$(21) \quad \vartheta = \Phi_1(\eta) \varphi(\eta)$$

Si l'on introduit (20) et (21) dans (19), on obtient :

$$(22) \quad \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{1}{\psi'^2} \left(\psi'' - \frac{2\psi'\varphi'}{\varphi} \right) \frac{d\vartheta}{dx} - \frac{1}{\psi'^2} \left(\lambda^2 f(\eta) + \varphi \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 \right) \vartheta = 0$$

Dans cette dernière équation on choisit φ tel que :

$$(23) \quad \psi'' - \frac{2\psi'\varphi'}{\varphi} = 0$$

En intégrant (23), on obtient une relation entre les fonctions φ et ψ :

$$(24) \quad \varphi = \sqrt{\psi'}$$

et l'équation (22) devient :

$$(25) \quad \frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \left(\frac{\lambda^2 f(\eta)}{\psi'^2} - \frac{3}{4} \frac{\psi''^2}{\psi'^4} + \frac{1}{2} \frac{\psi'''}{\psi'^3} \right) \vartheta = 0$$

Afin d'obtenir un développement uniformément valable quand $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ nous posons :

$$(26) \quad \frac{f(\eta)}{\psi'^2} = \psi, \quad \text{alors} \quad \frac{2}{3} \psi^{2/3} = \pm \int \sqrt{f(\eta)} d\eta$$

En première approximation, l'équation (25) s'écrit :

$$(27) \quad \frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \lambda^2 x \vartheta = 0$$

dont la solution s'écrit:

$$(28) \quad \vartheta = c_1 A_i(\lambda^{2/3} x) + c_2 B_i(\lambda^{2/3} x)$$

où A_i et B_i sont les fonctions d'Airy de première et seconde espèce, et (c_1, c_2) sont des constantes.

Ainsi en utilisant les équations (20) et (21), on obtient :

$$(29) \quad \Phi(\eta, \mu, d) \approx \frac{1}{\sqrt{\psi_1'}} \left\{ c_1 A_i(\lambda^{2/3} \psi_1(\eta)) + c_2 B_i(\lambda^{2/3} \psi_1(\eta)) \right\}$$

où l'on a défini :

$$(30) \quad \frac{2}{3} (\psi_1(\eta))^{2/3} = \frac{-1}{\text{ch}^2(\eta_1)} \int_{\eta_1}^{\eta} \sqrt{(t-\eta_1)(\eta_2-t)} dt \quad \text{si} \quad \eta > \eta_1$$

$$(31) \quad \frac{2}{3} (-\psi_1(\eta))^{2/3} = \frac{-1}{\text{ch}^2(\eta_1)} \int_{\eta}^{\eta_1} \sqrt{(\eta_1-t)(\eta_2-t)} dt \quad \text{si} \quad \eta < \eta_1$$

Par le même principe de calcul que précédemment on a au voisinage de $\eta = \eta_2$, la solution suivante :

$$(32) \quad \Phi(\eta, \mu, d) \approx \frac{1}{\sqrt{\psi_2'}} \left\{ c_3 A_i(\lambda^{2/3} \psi_2(\eta)) + c_4 B_i(\lambda^{2/3} \psi_2(\eta)) \right\}$$

où c_3 et c_4 sont des constantes, et où l'on a défini :

$$(33) \quad \frac{2}{3} (\psi_2(\eta))^{3/2} = \frac{-1}{\text{ch}^2(\eta_2)} \int_{\eta_2}^{\eta} \sqrt{(t-\eta_1)(\eta_2-t)} dt \quad \text{si} \quad \eta < \eta_2$$

$$(34) \quad \frac{2}{3} (-\psi_2(\eta))^{2/3} = \frac{-1}{\text{ch}^2(\eta_2)} \int_{\eta}^{\eta_2} \sqrt{(t-\eta_1)(t-\eta_2)} dt \quad \text{si} \quad \eta > \eta_2$$

A ce stade d'analyse reste à déterminer les constantes (a1,b1), (a2,b2), (c1,c2), et (c3,c4) en raccordant les solutions (16) et (17) aux solutions (29) et (32).

5. 3. 3- Raccords

Les solutions (16) et (17) peuvent être considérées comme des solutions extérieures écrites à l'aide de la variable extérieure y tandis que (29) et (32) sont des solutions intérieures écrites à l'aide de la variable intérieure ψ . Ces deux solutions peuvent être raccordées au sens des développements asymptotiques raccordés (Voir par exemple BOIS, 1976).

La première étape du processus consiste à exprimer toutes les expressions ci-dessus à l'aide d'une même variable. Ainsi pour de grandes valeurs négatives de ψ , on a les formes asymptotiques des fonctions d'AIRY suivantes:

$$(35) \quad A_i(\psi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \psi^{-1/4} \sin \left(\frac{2}{3} \lambda \psi^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(36) \quad B_i(\psi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \psi^{-1/4} \cos \left(\frac{2}{3} \lambda \psi^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Alors, quand $\eta > \eta_1$ l'équation (29) s'écrit :

$$(37) \quad \Phi(\eta, \mu, d) \approx \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{f(\eta)}} \left\{ c_1 \sin \left(\frac{2}{3} \lambda \psi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + c_2 \cos \left(\frac{2}{3} \lambda \psi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

et quand $\eta < \eta_2$ l'équation (32) s'écrit :

$$(38) \quad \Phi(\eta, \mu, d) \approx \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{f(\eta)}} \left\{ c_3 \sin\left(\frac{2}{3} \lambda \psi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + c_4 \cos\left(\frac{2}{3} \lambda \psi_2^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

5. 3. 3. 1- Raccord des solutions intérieures.

Il s'agit de raccorder les solutions (37) à (38) pour déterminer les constantes c_1, c_2, c_3 et c_4 . On obtient alors la relation suivante:

$$(39) \quad c_1 \sin\left(\frac{2}{3} \lambda \psi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + c_2 \cos\left(\frac{2}{3} \lambda \psi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) = c_3 \sin\left(\frac{2}{3} \lambda \psi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + c_4 \cos\left(\frac{2}{3} \lambda \psi_1^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

On pose :

$$(40) \quad \Gamma = \left(\psi_1^{3/2} + \psi_2^{3/2} \right) = \lambda \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{f(\eta)} \, d\eta + \frac{\pi}{2}$$

d'où l'on déduit de (39):

$$(41) \quad c_1 = c_4 \sin \Gamma - c_3 \cos \Gamma$$

$$(42) \quad c_2 = c_3 \sin \Gamma + c_4 \cos \Gamma$$

Si on veut chercher des solutions bornées lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, il convient de poser ⁽³⁾ :

$$(43) \quad c_2 = c_4 = 0$$

En vertu de (42) et en utilisant l'équation (41) on a :

$$(44) \quad \sin \Gamma = 0 \Rightarrow \Gamma = n \pi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

d'où l'on déduit de l'équation (40) :

$$(45) \quad \lambda = \frac{\pi \left(n - \frac{1}{2} \right)}{\frac{-1}{\operatorname{ch}^2(\eta_1)} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{(t - \eta_1)(\eta_2 - t)} dt}$$

sachant que η_1 et η_2 sont égales en grandeur et de signe opposé, le dénominateur de cette dernière relation s'écrit:

$$(46) \quad \frac{-1}{\operatorname{ch}^2(\eta_1)} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{(t - \eta_1)(\eta_2 - t)} dt = -2 \eta_1^2 \arcsin \frac{1}{\eta_1}$$

d'où l'on déduit de (45), l'équation des caractéristiques suivante:

$$(47) \quad \lambda \arcsin \frac{1}{\eta_1} = -\frac{\operatorname{ch}^2 \eta_1}{2 \eta_1^2} \pi \left(n - \frac{1}{2} \right) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{2d^2}$$

Il serait intéressant de trouver une racine minimale de η_1 qui soit solution de (47), auquel cas l'étude de la variation de celle-ci en utilisant la méthode de point fixe (figure 7), nous permet de déduire que, quand $n=1$ et $\lambda \gg 1$, on a au moins une racine négative inférieure ou égale à un , telle que:

$$(48) \quad \eta_1 = -\operatorname{argth}(\sqrt{2-4\mu_1^2 d^2}) \ll -1$$

Alors, à cette valeur minimale correspond une valeur de 'd' critique:

$$(49) \quad d_{\text{critique}} = \frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{ch}(1)} \approx 0,4582$$

au delà de laquelle il n'existe pas de solution.

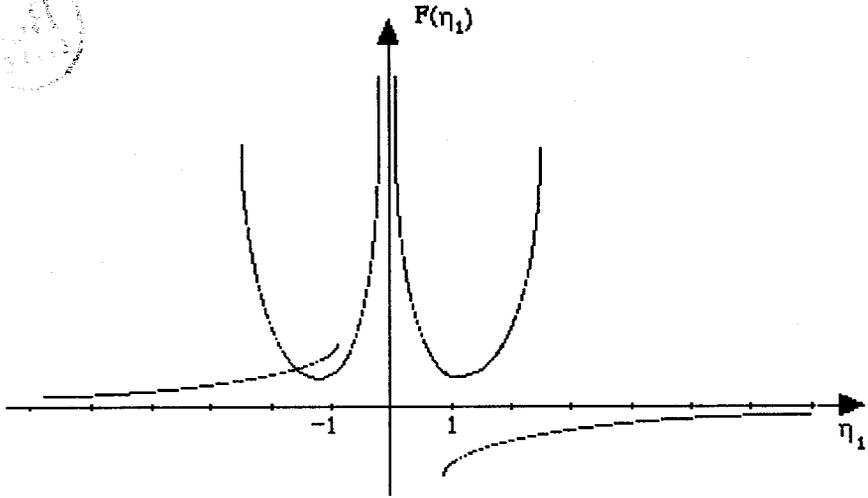


figure 7 : Etude de variation de la relation (47) pour $n=1$ et λ quelconque $\gg 1$

Nous déduisons alors, que les valeurs propres forment un spectre discret de valeurs comprises dans l'intervalle suivant :

$$(50) \quad \mu_1 \in] -\frac{\sqrt{2 - \text{th}^2(1)}}{2d}, -\frac{1}{2d} [\cup] \frac{\sqrt{2 - \text{th}^2(1)}}{2d}, \frac{1}{2d} [.$$

avec : $d \ll d_{\text{critique}}$

5. 3. 3. 2-Raccord des solution extérieures avec les solutions intérieures

5. 3. 3. 2. 1-Solutions intérieures

De la même manière qu'auparavant on exprime les différentes solutions en termes de ψ . Alors pour de grandes valeurs positives de ψ on a les développements asymptotiques des fonctions d'AIRY :

$$(51) \quad A_i(\psi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \psi^{-1/4} \exp(-\frac{2}{3} \lambda (-\psi)^{3/2})$$

$$(52) \quad B_i(\psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \psi^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} \lambda (-\psi)^{3/2}\right)$$

Les équations (29) et (32) s'écrivent respectivement :

si $\eta < \eta_1$:

$$(53) \quad \Phi(\eta, \mu, d) \approx \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{-f(\eta)}} \left\{ \frac{c_1}{2} \exp\left(-\frac{2}{3} \lambda (-\psi_1)^{3/2}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{2}{3} \lambda (-\psi_1)^{3/2}\right) \right\}$$

si $\eta > \eta_2$:

$$(54) \quad \Phi(\eta, \mu, d) \approx \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{-f(\eta)}} \left\{ \frac{c_3}{2} \exp\left(-\frac{2}{3} \lambda (-\psi_2)^{3/2}\right) + c_4 \exp\left(-\frac{2}{3} \lambda (-\psi_2)^{3/2}\right) \right\}$$

avec $f(\eta)$ est donnée par (18-a), $\frac{2}{3} (-\psi_2)^{3/2}$ et $\frac{2}{3} (-\psi_2)^{3/2}$ sont données par (31) et (34).

5. 3. 3. 2. Solutions extérieures

Il est intéressant de signaler que la solution de (14) est apériodique quand $\eta < \eta_1$ et $\eta > \eta_2$ avec $\eta_1 < \eta_2$. Ainsi à partir de l'équation (17) on a :

Si $\eta < \eta_1$:

$$(55) \quad \Phi^{(1)}(\eta, \mu, d) \approx \frac{1}{4 \sqrt{-f(\eta)}} \left\{ a_2^{(1)} \exp\left[\lambda \int \sqrt{-f(\eta)} d\eta\right] + b_2^{(1)} \exp\left[-\lambda \int \sqrt{-f(\eta)} d\eta\right] \right\}$$

Si $\eta > \eta_2$:

$$(56) \quad \Phi^{(2)}(\eta, \mu, d) \approx \frac{1}{4\sqrt{-f(\eta)}} \left\{ a_2^{(2)} \exp[\lambda \int \sqrt{-f(\eta)} d\eta] + b_2^{(2)} \exp[-\lambda \int \sqrt{-f(\eta)} d\eta] \right\}$$

où $f(\eta)$ est donnée par (18-a)

Pour pouvoir raccorder les solutions intérieures (53) et (54) avec les solutions extérieures (55) et (56), nous exprimons ces dernières relations en termes de $\psi(\eta)$, alors on a :

$$(57) \quad \int_{\eta}^{\eta_1} \sqrt{-f(\eta)} dt = - \frac{2}{3} (-\psi_2(\eta))^{3/2} \quad \text{si } \eta < \eta_1$$

$$(58) \quad \int_{\eta_2}^{\eta} \sqrt{-f(\eta)} dt = - \frac{2}{3} (-\psi_2(\eta))^{3/2} \quad \text{si } \eta > \eta_2$$

Ensuite l'identification en termes à termes des différentes solutions ci-dessus, nous permet de trouver les relations entre les différentes constantes :

$$(59) \quad (a_2^{(1)}, b_2^{(1)}) = (c_2, \frac{c_3}{2}) \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi}} \quad \text{si } \eta < \eta_1$$

$$(60) \quad (a_2^{(2)}, b_2^{(2)}) = (c_4, \frac{c_1}{2}) \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi}} \quad \text{si } \eta > \eta_2$$

si nous utilisons la relation (43) on obtient :

$$(61) \quad b_2^{(1)} = \frac{\lambda^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}} c_1$$

$$(62) \quad b_2^{(2)} = \frac{\lambda^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}} c_1 (-1)^n \quad (n=1,2,\dots)$$

5. 4-Etude du cas où les points tournants n'existent pas

Il s'agit ici de donner une description qualitative de la solution du problème (IV,1) dans le cas où la fonction $f(\eta)$ ne change pas de signe quand η passe de $-\infty$ à $+\infty$. Ainsi quand la valeur propre μ_1 appartient à l'intervalle I_2 tel que :

$$(63) \quad I_2 =]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2d}] \cup [-\frac{1}{2d}, \frac{1}{2d}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2d}, +\infty [$$

alors $f(\eta)$ est monotone.

Dans l'équation (14) on pose :

$$(64) \quad \text{th}^2(\eta) = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2(\eta)}$$

on obtient :

$$(65) \quad \frac{d^2\Phi(\eta, \mu_1, d)}{d\eta^2} + \lambda^2 \left(\varepsilon - \frac{1}{\text{ch}^2(\eta)} \right) \Phi(\eta, \mu_1, d) = 0$$

ou l'on a posé :

$$(66) \quad \begin{cases} \varepsilon = 4\mu_1^2 d^2 - 1 \\ \lambda^2 = \frac{1}{4d^2} \end{cases}$$

ensuite on cherche $\Phi(\eta, \mu_1, d)$ sous la forme:

$$(67) \quad \Phi(\eta, \mu_1, d) = \exp(i a \eta) F(\eta)$$

$$(68) \text{ où: } a = \lambda \sqrt{\varepsilon + 1}$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$(69) \quad u = \frac{1}{2} (1 - \text{th}(\eta))$$

ainsi on obtient l'équation hypergéométrique suivante:

$$(70) \quad u(u-1) F'' + (1 - i a - 2u) F' + F = 0$$

Une simple constatation de (69) montre que u tend vers zéro quand η est grand, il s'en suit que l'équation (70) est singulière en $u=0$. Alors une solution de (70) qui ne soit pas singulière en ce point, s'écrit :

$$(71) \quad \Phi(\eta, \mu_1, d) = N \exp [i \lambda z \sqrt{\epsilon+1}] F\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{4\lambda^2-1}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{4\lambda^2-1}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i\lambda\sqrt{\epsilon+1}}{2}, \frac{e^{-\eta}}{e^\eta + e^{-\eta}}\right)$$

où N est un paramètre de normalisation . (voir MORSE et FESHBACH 1953 , pp 1638-1660)

Si on assimile l'équation (65) à l'équation de Schroedinger, alors la quantité $(\epsilon+1)$ serait l'énergie cinétique d'une particule se déplaçant de $-\infty$ à $+\infty$. Cependant la solution donnée par (71) est réelle si :

$$(72) \quad \epsilon \geq -1$$

Il en résulte d'après (66), que quelque soit μ_1 appartenant à l_2 , la solution existe pour tout : $d \ll 1$.

5.5 CONCLUSION :

L'hypothèse de $\hat{E}_1 \geq 0(1)$ permet moyennant l'approximation de W.B.K.J de mettre en évidence l'existence de deux points tournants. En étudiant le voisinage de ces points on a obtenu des solutions intérieures qui sont des fonctions d'AIRY de première et seconde espèce . Le raccord de ces solutions intérieures avec les solutions extérieures qui ont des comportements aussi bien ascillatoires qu' apériodiques, fournit un seuil critique d'existence de la solution et permet de relier entre elles les constantes des développements.

Dans le cas de non existence de points tournants les solutions existent et sont inconditionnellement stables.

ANNEXE :

Méthode de développement à variables multiples.

Nous avons montré dans le chapitre (III) que les termes de droite dans l'équation différentielle suivante :

$$(1) \quad \frac{d^2\Phi_1(\xi)}{d\xi^2} - (m^2_1 + v(\xi, d)) \Phi_1(\xi) = 0$$

ont une contribution mineure dans le comportement de la solution quand μ_1 devient grand.

Cependant, la solution de (1) a la forme d'oscillations lentement variables dans l'intervalle $[0, 1]$; Alors nous considérons le système suivant:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{dP_1(z)}{dz} \right) + \frac{\lambda_1}{\rho_0(z)} P_1(z) = 0 \\ \frac{dP_1(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = -1 \\ \frac{dP_1(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = 1 \end{array} \right.$$

où nous introduisons la variable rapide \tilde{z} telle que :

$$(3) \quad \tilde{z} = \frac{1}{\delta} z$$

z est donc la variable lente avec $\delta = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \ll 1$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$(4) \quad \frac{d^2 P_1(z)}{dz^2} - d \frac{\rho_0''(z)}{\rho_0'(z)} \frac{dP_1(z)}{dz} - \frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} P_1(z) = 0$$

Afin d'obtenir une forme convenable de (4), nous introduisons une nouvelle variable rapide :

$$(5) \quad z^+ = \Psi(z)$$

où $\Psi(\tilde{z})$ est une fonction à déterminer, on a :

$$(6) \quad \frac{dP_1(\tilde{z})}{d\tilde{z}} = \Psi'(\tilde{z}) \frac{dP_1(\tilde{z})}{dz^+}$$

$$(7) \quad \frac{d^2 P_1(\tilde{z})}{d\tilde{z}^2} = \Psi''(\tilde{z}) \frac{dP_1(\tilde{z})}{dz^+} + \Psi'^2(\tilde{z}) \frac{d^2 P_1(\tilde{z})}{dz^{+2}}$$

nous introduisons (6) et (7) dans (4), on obtient :

$$(8) \quad \Psi'^2(\tilde{z}) \frac{d^2 P_1(\tilde{z})}{dz^{+2}} + \left[\Psi''(\tilde{z}) - \delta \frac{\rho_0''(z)}{\rho_0'(z)} \Psi'(\tilde{z}) \right] \frac{dP_1(\tilde{z})}{dz^+} - \frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} P_1(\tilde{z}) = 0$$

où l'on choisit $\Psi'(\tilde{z})$ tel que :

$$(9) \quad \Psi'^2(\tilde{z}) = -\frac{1}{J^2} \frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} = O(1)$$

Donc :

$$(10) \quad \Psi'(\tilde{z}) = \frac{1}{J} \left(-\frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} \right)^{1/2}$$

La relation entre la nouvelle variable rapide z^+ et la variable lente z s'écrit :

$$(11) \quad z^+ = \frac{1}{\delta J} \int_{-1}^z \left(-\frac{\rho_0'(t)}{\rho_0(t)} \right)^{1/2} dt$$

$$(12) \quad \text{où } J = \int_{-1}^0 \left(-\frac{\rho_0'(t)}{\rho_0(t)} \right)^{1/2} dt$$

l'équation (8) devient :

$$(13) \quad \frac{d^2 P_1(\bar{z})}{d\bar{z}^2} + \delta g(z) \frac{dP_1(\bar{z})}{d\bar{z}} + J^2 P_1(\bar{z}) = 0$$

$$\text{avec } g(z) = \frac{J}{2} \left(\left(-\frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} \right)^{1/2} - \frac{\rho_0''(z)}{\rho_0'(z)} \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{1/2} \right)$$

Nous développerons ensuite $P_1(z^+, \delta)$ en puissance de δ on a :

$$(15) \quad P_1(z^+, \delta) = \phi_1(z^+, \delta) + \delta \phi_2(z^+, \delta) + O(\delta^2)$$

tel que :

$$(16) \quad \frac{dP_1}{dz^+} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z^+} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{dz}{dz^+} + \epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial z^+} + \epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{dz}{dz^+} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z^+} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \frac{dz}{dz^+}$$

et on identifie à zéro les différentes puissances de δ , on obtient :

Termes d'ordre δ^0

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_1(z^+; z)}{\partial z^{+2}} + J^2 \phi_1(z^+; z) = 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z^+} = 0 & \text{en } z^+ = \frac{1}{\delta} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z^+} = 0 & \text{en } z^+ = 0 \end{cases}$$

La solution de (17) s'écrit :

$$(18) \quad \phi_1(z^+, z) = A_1(z) \cos(J z^+) + B_1(z) \sin(J z^+)$$

où nous déterminons les coefficients à partir du système d'ordre supérieur en δ .

Termes d'ordre δ^1

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_2(z^+, z)}{\partial z^{+2}} + J^2 \phi_2(z^+, z) = J \sin(J z^+) \left\{ 2 \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{1/2} J \frac{dA_1}{dz} + g(z) A_1(z) \right\} \\ - J \cos(J z^+) \left\{ 2 \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{1/2} J \frac{dB_1}{dz} + g(z) B_1(z) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_2}{\partial z^+} = - J \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{1/2} \frac{d\phi_1}{dz} & \text{en } z^+ = \frac{1}{\delta} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial z^+} = - J \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{1/2} \frac{d\phi_1}{dz} & \text{en } z^+ = 0 \end{cases}$$

Pour qu'il n'y ait pas de termes séculaires, quand z^+ est grand, il est nécessaire que les 2 conditions suivantes soient vérifiées :

$$(20) \quad 2 \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{\frac{1}{2}} J \frac{dA_1}{dz} + g(z) A_1(z) = 0$$

$$(21) \quad 2 \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{\frac{1}{2}} J \frac{dB_1}{dz} + g(z) B_1(z) = 0$$

$$(22) \text{ d'où : } A_1(z) = C_1 \left(-\frac{1}{\rho_0(z) \rho_0'(z)} \right)^{\frac{-1}{4}}$$

$$(23) \quad B_1(z) = C_2 \left(-\frac{1}{\rho_0(z) \rho_0'(z)} \right)^{\frac{-1}{4}}$$

Nous obtenons de (22), (23) et (18) :

$$(24) \quad \phi_1(z^+, z) = \left(-\frac{1}{\rho_0(z) \rho_0'(z)} \right)^{\frac{-1}{4}} \left\{ C_1 \cos(J z^+) + C_2 \sin(J z^+) \right\}$$

A partir des conditions aux limites en $z^+ = 0$ et $z^+ = 1/\delta$, nous déduisons que :

$$(25) \quad C_2 = 0 \text{ et } \delta = \frac{J}{n \pi}$$

donc (23) s'écrit

$$(26) \quad \phi_1(z^+, z) = \left(-\frac{C_1}{\rho_0(z) \rho_0'(z)} \right)^{\frac{-1}{4}} \left\{ \cos(\delta n \pi z^+) \right\}$$

La solution à l'ordre deux en δ s'écrit :

$$(27) \quad \phi_2(z^+, z) = A_2(z) \cos(J z^+) + B_2(z) \sin(J z^+)$$

où nous déterminons les coefficients à partir du système d'ordre δ^2 :

Termes d'ordre δ^2

$$(28) \quad \frac{\partial^2 \phi_3(z^+; z)}{\partial z^{+2}} + J^2 \phi_3(z^+; z) = J \sin(J z^+) \left\{ 2 \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{1/2} J \frac{dA_2}{dz} + g(z) A_2(z) \right\}$$

$$-J \cos(J z^+) \left\{ 2 \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{1/2} J \frac{dB_2}{dz} + g(z) B_2(z) \right.$$

$$\left. + \frac{C_1}{16} \left(-\rho_0(z) \rho_0'(z) \right)^{1/4} \left(3 \frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} + 7 \frac{\rho_0''(z) \rho_0(z)}{\rho_0'^3(z)} - 2 \frac{\rho_0''(z)}{\rho_0'(z)} - 4 \frac{\rho_0''(z) \rho_0(z)}{\rho_0'^2(z)} \right) \right\}$$

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi_3}{\partial z^+} = -J \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{1/2} \frac{d\phi_2}{dz} & \text{en } z^+ = \frac{1}{\delta} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial z^+} = -J \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{1/2} \frac{d\phi_2}{dz} & \text{en } z^+ = 0 \end{cases}$$

Pour éliminer les termes séculaires dans (28) quand z^+ est grand et rapide, il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$(30) \quad 2 \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{1/2} J \frac{dA_2}{dz} + g(z) A_2(z) = 0$$

$$(31) \quad 2 \left(-\frac{\rho_0(z)}{\rho_0'(z)} \right)^{1/2} J \frac{dB_2}{dz} + g(z) B_2(z) = -C_1 (-\rho_0(z) \rho_0'(z))^{1/2} \frac{d^2}{dz^2} (-\rho_0(z) \rho_0'(z))^{-1/4}$$

de (30) on déduit que :

$$(32) \quad A_2(z) = C_3 \left(-\frac{1}{\rho_0(z) \rho_0'(z)} \right)^{-1/4}$$

de (31) on déduit que :

$$(33) \quad B_2(z) = C_1 \left(-\frac{1}{\rho_0(z) \rho_0'(z)} \right)^{-1/4} \left\{ b - \frac{1}{2} \int_{-1}^z V(t) \left(\frac{\rho_0'(t)}{\rho_0(t)} \right)^{1/2} dt \right\}$$

$$(34) \text{ où: } b = \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_0'(-1)}{\rho_0(-1)} + \frac{\rho_0''(-1)}{\rho_0'(-1)} \right) \left(-\frac{\rho_0(-1)}{\rho_0'(-1)} \right)^{1/2}$$

$$(35) \quad -v(z) = \left(3 \frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} + 7 \frac{\rho_0''(z) \rho_0(z)}{\rho_0'^3(z)} - 2 \frac{\rho_0''(z)}{\rho_0'(z)} - 4 \frac{\rho_0'''(z) \rho_0(z)}{\rho_0'^2(z)} \right)$$

$$(36) \text{ avec } v(z^+) = v(z) + \frac{1}{8} \left[\frac{\rho_0''(z) \rho_0(z)}{\rho_0'^3(z)} - \frac{\rho_0'(-1)}{\rho_0(-1)} \right]$$

d'où:

$$(37) \quad \phi_2(z^+, z) = \frac{(C_3 \cos(\delta. n. \pi z^+) + C_1 \left\{ b - \frac{1}{2} \int_{-1}^z V(t) \left(\frac{\rho_0'(t)}{\rho_0(t)} \right)^{1/2} dt \right\} \sin(\delta n \pi z^+))}{\left(-\frac{1}{\rho_0(z) \rho_0'(z)} \right)^{-1/4}}$$

En vertu de (7) on a:

$$P_{1n}(z^+, z) = \frac{C_1 \left(\cos(\delta n \pi z^+) + \left\{ b \frac{1}{2} \int_{-1}^z V(t) \left(\frac{\rho_0'(t)}{\rho_0(t)} \right)^{1/2} dt \right\} \sin(\delta n \pi z^+) \right) + \delta C_3 \cos(\delta n \pi z^+)}{\left(\frac{1}{\rho_0(z) \rho_0'(z)} \right)^{1/4}}$$

où C_1, C_3 sont des constantes d'intégration d'ordre un et deux en δ respectivement.

CONCLUSION GENERALE

La connaissance de la répartition des densités est une donnée fondamentale pour l'étude de la circulation océanique. Cela conduit à un ensemble de méthodes de mesures et de relations. Cependant, la densité des eaux de la mer dépend de sa température, de sa salinité et de la pression (c'est à dire de la profondeur). C'est principalement la température qui commande en général la répartition des densités suivant la verticale.

L'augmentation du gradient de densité dans les couches superficielles aux moyennes et faibles latitudes dû à une diminution de température ou à une augmentation de la salinité, provoque des mouvements de convection thermohaline. Ces mouvements se caractérisent par des courants ascendants. Au cours du présent travail, nous avons étudié l'évolution et la stabilité de la répartition verticale de la perturbation de pression dans un modèle qui étend le modèle quasi-géostrophique classique. Cette stabilité est d'autant plus faible que le gradient horizontal " suivant la verticale" de la densité est élevé.

Tenant compte de cet effet de la stabilité on a obtenu, pour un profil de densité réaliste, une valeur critique du paramètre de variation de la stratification "d". Cela signifie en fait, que des mouvements de convection apparaissent dès qu'on dépasse cette valeur critique.

Toutefois, le cas d'un gradient horizontal de densité variable est susceptible de provoquer un front " la frontogenèse(*) " qui pourrait déstabiliser la solution. L'impossibilité de faire une étude globale oblige à considérer des cas simples.

(*) Une surface de discontinuité séparant verticalement deux masses d'eaux

Le cas $\hat{E}_1 \ll O(1)$ en est un, et, qui en outre correspond à une situation réaliste; c'est à dire qu'il traduit des situations où la couche d'EKMAN est de quelques dizaines de metres. Ce cas se rencontre surtout aux grandes latitudes (exemple de l'Atlantique Nord). Ainsi l'analyse du cas d'une densité en tangente hyperbolique, montre que la solution cesse d'exister dès que le paramètre de variation de stratification dépasse un seuil critique de stabilité " d_{cr} ".

Dans la même ligne d'étude, nous avons considéré le cas $\hat{E}_1 \geq O(1)$. Cette situation n'est toutefois pas sans intérêt car il lui correspond des couches d'EKMAN assez épaisses, qu'on rencontre dans les régions tropicales des océans. Pour ce cas nous avons obtenu un problème à deux points tournants, et l'étude des voisinages de ces points permet de raccorder les solutions intérieures et extérieures entre elles et de déterminer un seuil critique de stabilité de la solution.

BIBLIOGRAPHIE

ABRAMOVITZ M. , STEGUN I. (1965).

Handbook of Mathematical Functions.
Dover, New York

BADULIN S. I. , SHRIRA V. I. , TSIMRING C. SH. (1985).

" The Trapping and Vertical Focusing of Internal Waves in
Pycnocline due to Horizontal Inhomogenities of Density and Currents ".
J. Fluid Mech. Vol 158, pp. 199 -218.

BECKMAN A. (1988)

" Vertical Structure of Midlatitude Mesoscale Instabilities".
J. Phys. Oceanography, Vol. 18, pp. 1353 -1371.

BENJAMIN T. B. (1967)

"Internal Waves of Permanent Form in Fluids of Great Depth".
J. Fluid Mech. ,Vol. 29, part 3, pp. 559 -592.

B&CHER M. (1917).

Leçons sur les Méthodes de Sturm dans la Théorie des
Equations Différentielles Linéaires et leurs Développements Modernes.
Gauthiers -Villars, Paris.

BOIS P. A. (1976)

"Propagation linéaire et non linéaire d'ondes atmosphériques".
Journal de Mécanique, vol. 15, n° 5, pp. 781 - 811

CHARNEY J. G. (1970).

Planetary Fluid Dynamics. (Dynamic Meteorology).
D Reidel Publishing Company. Dordrecht, Holland.

COLE J. D. , KEVORKIAN J. (1981)

Perturbation Methods in Applied Mathematics.
Springer -Verlag, New York.

- DE RUIJTER W. P. M. (1980).
 On the Asymptotic Analysis of Large- scale Ocean Circulation.
 Mathematical - Centre Tracts, Amsterdam, pp.7-55 .
- ERDELYI A. (1953)
 Higher Transcendental Functions I.
 MacGraw -Hill, New York.
- GODTS S. (1988).
 "Un Modèle Asymptotique de l'Interaction Océan-Atmosphère" .
 Journal de Mécanique théorique et appliquée.
 Special issue , supplément n°2 Volume 7, 1988 .
- GOSSARD E. E. , HOOKE W. H. (1975).
 Waves in the Atmosphere.
 Elsevier, Amsterdam.
- INCE E. L (1944).
 Ordinary Differential Equations.
 Dover Publications.
- IVANOFF. A (1975).
 Introduction à l'Océanographie
 Vuibert , Paris.
- KAMENKOVICH V. M. (1977).
 Fundamentals of Ocean Dynamics.
 Elsevier Oceanography Series.
- KRAUS E. B. (1975)
 Modelling and Prediction of the Upper Layers of the Ocean.
 Pergamon Press, Oxford.
- LEBLOND P. H. , MYSAK L. A. (1978).
 Waves in the Ocean.
 Elsevier Oceanography Series.
- LUKERS R. , FIRING E. (1985).
 "The Annual Rossby Wave in the Central Equatorial Pacific Ocean".
 J. Phys. Oceanography, Vol. 15, pp. 55 -67.

- MEI CHIANG C. (1983).
The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves.
Wiley -Interscience.
- MORSE P. M and FESHBACH H. (1954).
Methods of Theoretical Physics.
MacGraw -Hill Book Company.
- NAFYEH A. H. (1973).
Perturbation Methods.
Wiley, New York.
- PEDLOSKY J. (1984).
"The Equations of Geostrophic Motion in the Ocean".
J. Phys. Oceanography, Vol. 14, pp. 449 -455.
- PEDLOSKY J. (1987).
Geophysical Fluid Dynamics.
Springer -Verlag, New York, second edition.
- SIMPSON J.E and LINDEN P.F (1988).
" Frontogenesis in a Fluid with horizontal density gradient ".
J. Fluid. Mech, Vol. 202, pp. 1-16 .
- TAYLOR. G.I (1931 a)
Effet of Variation of Density on the Stability of Superposed Streams of Fluid.
Proc R.Soc.Lond, A 132: pp. 499-523 .
- TURNER J. S. (1973).
Buonancy Effects in Fluids.
Cambridge University Press.
- VERONIS. G and STOMMEL. H (1956)
The action of variable Wind Stress on a Stratified Fluid Ocean.
J.Mar.Res. 15: pp.43-75
- ZEYTOUNIAN R. KH. (1990).
Asymptotic modeling of atmospheric flow.
Springer-Verlag, Heidelberg .



036M 3092

MOTS CLES

STRATIFICATION EN DENSITE.
ONDES DE ROSSBY.
ONDES LONGUES OCEANIQUES.
INTERACTION OCEAN-ATMOSPHERE.
VALEURS PROPRES.

RESUME

Cette étude de la modélisation océanique est construite à l'aide d'un modèle quasi-géostrophique, aux moyennes latitudes et tenant compte de l'interaction océan-atmosphère. Il s'agit d'un modèle essentiellement forcé par la tension exercée par le vent sur la couche de surface de l'océan. On ne s'intéresse qu'aux mouvements à grande échelle pour lesquels la rotation de la terre est prédominante. L'étude mathématique du problème part de l'hypothèse que l'océan est stratifié en densité volumique, et que la variation de densité qui résulte de l'échauffement différentiel de l'océan est responsable de la circulation de ce système. Les recherches présentées ici sont axées sur l'étude de la structure verticale de la perturbation de la pression. Après un calcul explicite de l'écoulement pour une répartition de densité exponentielle, on établit un théorème d'existence basé sur l'analyse de Sturm-Liouville, pour une répartition de densité en tangente hyperbolique. Nous déterminons ainsi un seuil critique du paramètre de variation de la stratification. Des solutions sont calculées numériquement pour aider à la détermination de ce seuil critique et montrent l'existence des mouvements de convection thermohaline liées à un fort gradient horizontal de densité. La présence de ce fort gradient horizontal de densité provoque une concentration d'énergie au niveau de la pycnocline qui peut être à l'origine d'une croissance excessive de l'amplitude du mouvement. Ceci est susceptible de provoquer une frontogénèse qui pourrait déstabiliser la structure verticale de l'océan. On présente pour terminer une étude au voisinage de la pycnocline où le gradient horizontal de densité est grand.