

55376
1990
25

N° d'ordre : 1443



55376
1990
25

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

Docteur de 3ème cycle

Spécialité : MECANIQUE

par

BEKKHOUCHA ZOUBIR

VIBRATIONS NON LINEAIRES PERIODIQUES ET PRESQUE PERIODIQUES

EXCITEES PAR DES PERCUSSIONS.

OSCILLATEUR ELECTROMECANIQUE DE BETHENOD.

OSCILLATEUR AERODYNAMIQUE.

ESSAI SUR UN CAS DU PROBLEME DES TROIS CORPS.

Soutenue le 9 juillet 1990

devant la commission d'examen

Membre du jury :

Président : M. PARSY, Professeur, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois.

Rapporteur : M. FAURE, Professeur Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois.

Examineur : M. BOIS, Professeur, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois.

A la mémoire de mon père

A ma famille

A ma femme Zohra.

Remerciements

Il m'est agréable d'exprimer ma reconnaissance envers Monsieur le Professeur PARSY pour l'honneur et le plaisir qu'il me fait en présidant le jury.

Je suis particulièrement reconnaissant à mon Professeur R. FAURE qui a accepté de diriger mes recherches en ne cessant de m'encourager, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je suis très honoré que Monsieur le Professeur BOIS ait bien voulu participer au jury et je l'en remercie très vivement.

Je remercie aussi Monsieur N. OUSSOUS, Maître de Conférences au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille qui m'a aidé dans l'élaboration des différents calculs sur MACSYMA.

Enfin je remercie Mme PÉTIAUX pour avoir mené à bien la lourde tâche de taper cette thèse, ainsi que toutes les personnes qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail.

INTRODUCTION

RAPPELS

PARTIE 1.- Vibrations non linéaires périodiques d'un oscillateur
électromécanique excité par des percussions. Phénomène
Bethenod.

Notations

Chapitre 1 : Formulation du problème

1.1.- Equations de base du phénomène Bethenod

1.2.- Position du problème

1.3.- Hypothèses

Chapitre 2 : Problème de la synchronisation et solutions périodiques

2.1.- Préliminaires

2.2.- Equations de synchronisation

2.3.- Existence des solutions périodiques

2.3.1.- Rappel

2.3.2.- Démonstration.....

2.3.1.- Rappel.....

2.3.2.- Démonstration

2.3.3.- Convergence des suites (u_p)

Chapitre 3 : Points de synchronisations et stabilité

3.1.- Equations de synchronisation

3.2.- Calcul des points de synchronisation

3.2.1.- Discussion suivant les valeurs de $A + \bar{K}$

3.2.2.- Cas particulier $A + \bar{K} = 0$

3.3.- Etude de la stabilité au voisinage des points de
synchronisation

3.3.1.- Stabilité dans le cas $A + \bar{K} \neq 0$

3.3.2.- Stabilité dans le cas $A + \bar{K} = 0$

Conclusion

PARTIE II : Sur les vibrations presque périodiques d'un oscillateur à deux degrés de liberté sous l'effet conjugué de percussions presque périodiques et de forces aérodynamiques

Notations

Chapitre 1 : Présentation du problème et équations

- 1.1.- Introduction
- 1.2.- Description de l'oscillateur
- 1.3.- Equations différentielles du mouvement
- 1.4.- Hypothèses et transformation du système d'équations

Chapitre 2 : Existence des solutions presque périodiques généralisées .

- 2.1.- Etude d'un cas linéaire
- 2.2.- Résolution du système d'équations (2.5)
- 2.3.- Convergence de la suite $(\omega_n)_n$

Chapitre 3 : Equations de synchronisation et stabilité

- 3.1.- Points de synchronisation
- 3.2.- Stabilité au voisinage de $\bar{q}=0$
- 3.3.- Stabilité au voisinage de $\bar{q}$

PARTIE III : Essai sur un cas dans le problème des trois corps

Notations

Chapitre 1 : Préliminaires

- 1.1.- Introduction
- 1.2.- Relations entre les x_i et d_{ij}

Chapitre 2 : Equations différentielles du mouvement des 3 corps

- 2.1.- Equations de Lagrange
- 2.2.- Points de Lagrange et équilibre relatif des 3 corps.....

Chapitre 3 : Equations du mouvement voisin des points et excité par des percussions	
--	--

Chapitre 4

4.1.- Hypothèses	
4.2.- Existence de la solution périodique de l'équation différentielle (3.27).	

ANNEXE I	
----------------	--

ANNEXE II	
-----------------	--

ANNEXE III	
------------------	--

ANNEXE IV	
-----------------	--

BIBLIOGRAPHIE	
---------------------	--

INTRODUCTION ET RAPPELS

INTRODUCTION

Ce travail s'inscrit dans le cadre des études consacrées aux équations différentielles non linéaires décrivant les oscillations forcées des systèmes mécaniques soumis à des percussions. Ces dernières pouvant intervenir à des instants ou des positions données de l'espace [1 - 7]. Les chocs dûs à la présence d'obstacles représentent un exemple particulier de ce dernier cas [1 - 4].

La diversité des domaines d'application des percussions a donné lieu à un nombre important de travaux. Dans ce mémoire on étudie trois systèmes différents soumis à des percussions périodiques ou presque périodiques, dans une première partie un système électromécanique puis un système aérodynamique dans la deuxième et finalement un problème de mécanique générale dans la dernière.

Il nous a semblé nécessaire de préciser avant cela quelques définitions et propriétés sur les percussions périodiques et presque périodiques.

PARTIE I

Ainsi dans la première partie on s'est intéressé à l'étude des équations différentielles du pendule de Béthenod excité par des percussions périodiques. Les équations régissant le phénomène Béthenod sont dûes à Rocard [9]. Elles sont non linéaires et s'expriment sous la forme :

$$\frac{d}{dt} [L(\theta) \dot{\theta}] + Z \dot{\theta} = v(t)$$

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \mathcal{F} \frac{d\theta}{dt} + k \theta = \frac{1}{2} L(\theta) \dot{\theta}^2$$

Ces équations ont fait l'objet de résultats contradictoires notamment sur la nature de $L(\theta)$ [8 - 9 - 10 - 11]. Dans son article J. Haag [13] traite le problème de la synchronisation du phénomène Béthenod où il suggère

de reprendre sa théorie en limitant l'amplitude des oscillations du pendule par des butées ce qui nous a conduit à étendre le problème au cas où l'oscillateur mécanique précédent est soumis à des percussions périodiques. Nous introduisons alors au second membre de la deuxième équation le terme

$-K \dot{\sum}_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$. Ce qui correspond dans le cas où $0 < K < 1$ à un choc non parfaitement élastique dû à un obstacle, mais celui-ci intervenant à des instants t_n donnés, $t_n = nT$.

Nous nous inspirons dans cette étude des travaux de R. Faure [12] sur le problème de synchronisation appliqué à ce phénomène et notamment les hypothèses permettant l'application de la méthode J. Haag [13]. Les équations régissant le problème se présentent alors sous la forme du système suivant :

$$\dot{q}_i = \lambda [\Psi_i(q, t) + I_i(q, t) e(t)] \quad i = 1, 2, 3, 4$$

où Ψ_i et I_i sont des fonctions vectorielles non linéaires en q et $e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT + \bar{t})$.

Au chapitre 2 nous traitons d'un point de vue mathématique l'existence d'une solution périodique non nulle de ce système d'équations.

Nous discutons en détail dans le Chapitre 3 le problème d'existence des points de synchronisation $\bar{q}$ ainsi que leur stabilité. Ces points étant les racines du système d'équations suivant :

$$\int_0^T [\Psi_i(\bar{q}, s) + I_i(\bar{q}, s) e(s)] ds = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

PARTIE II

Différents auteurs se sont intéressés aux problèmes des vibrations d'un oscillateur à une dimension en présence d'un écoulement [19 - 20 - 21]. Van der Beck et Van der Burgh [22] ont abordé ce problème dans le cas des vibrations périodiques d'un oscillateur à deux degrés de liberté.

Ils supposent le rapport $\Omega = \omega_1 / \omega_2$ des fréquences propres suivant les deux directions rationnel puis étudient l'existence d'une solution périodique pour différentes valeurs de Ω .

Dans cette partie on étend ce travail au cas où ce rapport Ω est irrationnel ce qui nous amène à étudier ce problème dans le cas des vibrations presque périodiques d'un tel oscillateur. Nous supposons que ce dernier est soumis à l'effet conjoint du vent et de percussions presque périodiques paramétriques et régulières.

Dans un premier chapitre, après avoir rappelé les équations régissant le phénomène nous adoptons les mêmes simplifications que les précédentes études [22] suivant un petit paramètre λ . Les équations se présentent alors sous la forme

$$\dot{q}_i = \lambda \left[f_i(q, t) + g_i(q, t) e(t) \right] \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Nous abordons alors ce problème dans le cas général.

Au chapitre 2 nous montrons donc sous certaines hypothèses l'existence d'une solution presque périodique généralisée non nulle du système d'équations différentielles ainsi obtenues. Cette solution tend vers une solution de synchronisation quand λ tend vers 0. Pour cela nous nous sommes inspirés des travaux de Wexler [27] sur les systèmes d'équations différentielles linéaires en distributions ainsi que ceux de Roseau [23] et R. Faure [25] sur les vibrations non linéaires presque périodiques.

Au chapitre 3 nous étudions dans le cas particulier où les percussions sont nulles les solutions de synchronisations ainsi que leur stabilité.

PARTIE III

Dans cette partie les deux premiers chapitres sont consacrés à la formulation des équations du mouvement de trois corps de masse m_i données, libres dans l'espace où elles constituent un système isolé, s'attirant mutuellement selon la loi de Newton. Nous supposons qu'ils évoluent dans un plan. Le problème étant alors à quatre degrés de libertés nous choisissons pour coordonnées généralisées $q = (\alpha, r_1, r_2, r_3)$ où les r_i représentent les distances GP_i des corps P_i à leur centre de gravité G et α l'angle formé par le vecteur $\overrightarrow{GP_1}$ à l'horizontale.

Au chapitre 3 nous rappelons l'existence d'un équilibre relatif des trois corps dans une configuration en triangle équilatéral (points de Lagrange L_4 et L_5) repéré par $\bar{q} = (\omega t, \bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3)$. Nous supposons alors ces trois corps soumis à des percussions $\bar{\tau}_i(t)$ intervenant sur P_i dans le plan de ces derniers. Nous considérons alors qu'ils demeurent dans un voisinage des positions d'équilibres $\bar{q}$. Nous établissons ainsi les équations différentielles en $\mu = (\varepsilon, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ de ce mouvement voisin, avec $q = \bar{q} + \mu$ et $\tau_i = \lambda m_i (K_1 + K_2 \mu_i) e(t)$.

Le système d'équations différentielles en μ obtenu à l'issue du chapitre 3 s'avérant très compliqué nous nous limitons dans le chapitre 4 à la démonstration d'un théorème d'existence d'une solution périodique pour une équation de la forme

$$\ddot{x} + 2cx + \omega_0^2 x = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \lambda (1 + q x) e(t)$$

Certains calculs assez compliqués dans le chapitre 3 ont été exécutés à l'aide du logiciel de calcul formel MACSYMA de même que certains résultats dans l'annexe I.

Nous présentons brièvement au début de l'annexe III ce logiciel ainsi qu'un programme de calcul en MACSYMA pour l'exemple.

Nous tenons à noter que chacune des trois parties principales de cette étude possède ses propres notations, donc peut être étudiée indépendamment des autres.

NOTATIONS GENERALES

λ : petit paramètre.

δ : mesure de Dirac.

$$\langle \mathcal{E}, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{E}(s) \varphi(s) ds$$

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(s) ds$$

$\mathcal{D}$: Espace des fonctions sur $\mathcal{R}^n$ C^∞ à support compact.

$\mathcal{B}$: Espace des fonctions sur $\mathcal{R}^n$ C^∞ bornées.

$\mathcal{B}_{pp}$: Espace des fonctions presque périodiques C^∞ .

$\mathcal{D}'$: Dual de $\mathcal{D}$.

$\mathcal{B}'$: Dual de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}'_{pp}$: Dual de $\mathcal{B}_{pp}$.

RAPPEL DE NOTIONS SUR LES DISTRIBUTIONS ET PERCUSSIONS PERIODIQUES ET PRESQUE PERIODIQUES

Nous rappelons dans cette partie certaines notions classiques relatives aux distributions ainsi qu'aux percussions périodiques et presque périodiques qui nous paraissent nécessaires dans la suite de notre travail.

On notera $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions complexes sur $\mathbb{R}^n$ indéfiniment dérivables, à support compact.

Convergence dans $\mathcal{D}$

On dira qu'une suite de fonctions (φ_j) , appartenant à $\mathcal{D}$ converge pour $j \rightarrow +\infty$ vers une fonction φ de $\mathcal{D}$ si

- 1 - Les supports des φ_j sont contenus dans un même ensemble borné indépendant de j .
- 2 - Les dérivées de tout ordre m des φ_j convergent uniformément pour $j \rightarrow +\infty$ vers les dérivées correspondantes de φ .

1. LES DISTRIBUTIONS

Une distribution $\mathcal{E}$ est une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}$.

La mesure de Dirac est un exemple de distribution définie par

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

De même la mesure de Dirac au point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est définie par

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$$

1.1.- Interprétation mathématique des percussions mécanique

En mécanique une percussion peut être interprétée comme le cas limite d'une force de grande amplitude agissant sur un système mécanique pendant un intervalle de temps très court entraînant des modifications instantanées de vitesses mais non des coordonnées.

Soit un système matériel (S) de masse m animé d'une vitesse $\vec{V}$; on suppose qu'entre les instants t_0 et $t_0 + \tau$ une force $\vec{F}$ constante est appliquée à (S).

On a alors

$$m [\vec{V}(t_0 + \tau) - \vec{V}(t_0)] = \vec{F} \cdot \tau$$

On convient que la force $\vec{F}$ est inversement proportionnelle à τ ; τ petit.

Soit

$$\vec{F} = \vec{A}/\tau$$

$\vec{A}$ un vecteur constant

$$\vec{V}(t_0 + \tau) - \vec{V}(t_0) = \vec{A}/m$$

Si on fait tendre τ vers 0 , on remarque que le système (S) subit un saut de vitesse de l'amplitude $|\frac{\vec{A}}{m}|$ à l'instant t_0 . Il y a donc au moment de la percussion un changement de vitesse sans changement de coordonnées.

L'équation précédente peut s'écrire sous la forme :

$$m [\vec{V}(t_0 + \tau) - \vec{V}(t_0)] = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \vec{F}(s) ds$$

En passant à la limite on a :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} [\vec{V}(t_0 + \tau) - \vec{V}(t_0)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \vec{F}(s) ds$$

Or on sait que la limite du premier nombre est différente de zéro. On a alors l'intégrale de $\vec{F}(t)$ sur un intervalle petit autour de t_0 différente de zéro, donc $\vec{F}(t)$ peut être interprétée comme étant la distribution de Dirac $\vec{A} \delta(t-t_0)$. $\vec{A}$ étant l'amplitude de la percussion.

D'une façon générale il est plus commode d'utiliser les percussions comme forces dans le cas des équations traduisant des discontinuités de vitesse intervenant à des instants ou des positions données de l'espace [6-7].

2. DISTRIBUTIONS ET PERCUSSIONS PÉRIODIQUES

La translatée $\mathcal{E}_{t-T}$ de la distribution $\mathcal{E}_t$ est définie par

$$\langle \mathcal{E}_{t-T}, \varphi(t) \rangle = \langle \mathcal{E}_t, \varphi(t+T) \rangle$$

Une distribution $\mathcal{E}$ est dite périodique de période T si $\mathcal{E}_{t-T} = \mathcal{E}_t$; autrement dit, si quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle \mathcal{E}_t, \varphi(t+T) - \varphi(t) \rangle = 0$$

Ainsi, sachant qu'une percussion est représentée par la mesure de Dirac $\delta(t-nT)$ agissant à l'instant $t=nT$ Schwartz [15] définit la distribution périodique $e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$ qui comporte une masse en chaque instant d'abscisse multiple de T . Il montre que la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\omega t}}{T}$ converge dans l'espace des distributions

$\mathcal{D}'(R)$ vers la distribution $e(t)$.

Soit μ une fonction et δ étant la distribution de Dirac alors ;
on a ,

$$\langle \mu \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mu \varphi \rangle = \mu(0) \varphi(0)$$

soit $\mu \delta = \mu(0) \delta$.

On définit le produit $\mu S(t-nT)$ par :

$$\mu S(t-nT) = \mu(nT) S(t-nT)$$

et si μ est T périodique

$$(2) \quad \mu S(t-nT) = \mu(0) S(t-nT).$$

3. PRESQUE PERIODICITE

3.1.- Suites et fonctions presque périodiques

A côté des fonctions périodiques H. Bohr a introduit une classe de fonctions plus générales. Les fonctions presque périodiques qu'il définit ainsi: une fonction continue $f(t)$, $-\infty < t < +\infty$ est presque périodique, si à tout $\epsilon > 0$, il est possible d'associer une quantité $l(f, \epsilon) > 0$ de sorte que tout intervalle de l'axe des t , de longueur l contienne au moins un nombre T tel que :

$$|f(t+T) - f(t)| < \epsilon$$

pour $-\infty < t < +\infty$.

Une définition équivalente montrée par J. Favard [28] : les fonctions presque périodiques sont des fonctions "normales" c'est-à-dire que de toute suite infinie $(f(t+\alpha_n))_n$ de fonctions résultant de $f(t)$ par translation sur l'axe des t on peut tirer une suite $(f(t+\beta_n))_n$ uniformément convergente pour tout t .

De même une fonction d'une variable entière $f(n)$ est presque périodique si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $N(\epsilon)$ tel que, pour tout interval I de $\mathbb{Z}$ d'amplitude N il existe un entier appartenant à I tel que :

$$|f(n+p) - f(n)| < \varepsilon \quad n \in \mathbb{N}$$

A partir de cette définition notons le théorème suivant reliant les suites presque périodiques aux fonctions presque périodiques :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $(u_n)_n$ soit périodique est l'existence d'une fonction $f(n)$ telle que

$$f(n) = u_n \quad n \in \mathbb{N}$$

3.2.- Distributions et percussions presque périodiques

Schwartz [29] définit l'espace des distributions presque périodiques $\mathcal{B}'_{pp}$ dual de l'espace $\mathcal{B}_{pp}$ des fonctions presque périodiques C^∞ dont les percussions sont un cas particulier.

Ainsi on dira qu'une distribution $\mathcal{G}$ est presque périodique si $\mathcal{G} \in \mathcal{B}'_{pp}$ et si l'ensemble des $\tau_h \mathcal{G}$ est relativement compact dans $\mathcal{B}'$ où $\mathcal{B}$ étant l'espace des fonctions C^∞ bornées. Cela revient à dire que l'application $h \rightarrow \tau_h \mathcal{G}$ est une fonction continue presque périodique usuelle de $h \in \mathbb{R}$, à valeur dans $\mathcal{B}'$.

R. Faure [24-25] introduit les percussions presque périodiques comme étant un cas particulier des distributions presque périodiques.

Soit une percussion définie par $e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(t - t_k)$ est presque périodique si :

$$1) \quad e(t) \in \mathcal{B}'_{pp}$$

2) pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_{pp}$ la suite $\langle e, \varphi \rangle$ est presque périodique.
Il en résulte donc si $\varphi \equiv 1$, la suite $(a_k)_k$ est presque périodique. Reste alors le problème de la suite $(t_k)_k$.

Suites régulières

Parmi ces suites on désignera par suite régulières celles qui satisfont aux conditions $b \leq t_{k+1} - t_k \leq a$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, où a et b sont deux constantes positives.

Suites irrégulières

Nous considérons maintenant un autre type de suites presque périodiques. Soient $e_1(t)$ et $e_2(t)$ deux distributions presque périodiques définies par

$$e_1(t) = \lambda_1 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_1)$$

$$e_2(t) = \lambda_2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_2 + \tau) \quad \text{et}$$

λ_1 et λ_2 étant des constantes, T_1 , T_2 et τ sont des constantes positives avec $T_1 > T_2 > \tau$ où T_1/T_2 est irrationnel.

Les percussions presque périodiques formant un espace linéaire la distribution $e_1(t) + e_2(t)$ est alors une percussion presque périodique.

On a alors

$$t_m = m T_1 \qquad t_n = n T_2 + \tau$$

En classant les t_m , t_n par ordre croissant on sait qu'il existe une suite infinie de doublets (m, n) telles que $(t_m - t_n)$ est arbitrairement petit.

Donc la propriété des suite régulières n'est pas respectée. On a un type de percussions différent du précédent, ici $t_{k+1} - t_k > 0$, $b = 0$.

Ainsi on dit que les percussions presque périodiques

$$e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k \delta(t - t_k) \quad \text{sont régulières (respectivement irrégulières)}$$

si la suite des $(t_k)_k$ l'est aussi.

PARTIE I

Notations :

	λ	: petit paramètre.
pendule	$\theta = \theta_1 \cos \omega t + \theta_2 \sin \omega t$	: élongation.
	I	: moment d'inertie.
	$\mathcal{R}$	: coefficient d'amortissement.
	$a_1 = \lambda A$	: amortissement réduit.
	k	: rigidité.
	ω_1	: pulsation propre.
circuit électrique	$\rho = \lambda \rho_1$	: coefficient d'amortissement.
	$L = L_0 + \lambda L_1$	: inductance de la bobine.
	C	: capacité.
	i	: intensité du courant.
	$q = q_1 \cos n\omega t + q_2 \sin n\omega t$	: quantité d'électricité.
	$v = \lambda v_1$	: tension du courant.
	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	: période d'excitation.
	$\mathcal{S}$	: distribution de Dirac.
	$\mathcal{K} = \lambda K = 2\pi \lambda \bar{K}$	: coefficient de proportionnalité de l'amplitude des percussions.

VIBRATIONS NON LINEAIRES PERIODIQUES
D'UN OSCILLATEUR ELECTROMECHANIQUE EXCITE
PAR DES PERCUSSIONS. PHENOMENE BETHENOD.

CHAPITRE I

1.1.- Equations de base du phénomène Béthenod

On désigne par phénomène Béthenod un pendule plan dont la masse mobile est un noyau de fer doux s'engageant dans une bobine alimentée par le secteur. On appelle θ l'élongation du pendule par rapport à la verticale, $L(\theta)$ l'inductance de la bobine, $v(t)$ la tension et $i(t)$ l'intensité du courant.

Le système d'équations différentielles régissant le système comprend une équation du second ordre du pendule et une équation du premier ordre du circuit électrique soumis à une excitation périodique de période T .

Elles s'expriment sous la forme

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt} [L(\theta) i] + \mathcal{R} i = v(t)$$

$$(1.2) \quad I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \mathcal{F} \frac{d\theta}{dt} + k \theta = \frac{1}{2} L(\theta) i^2$$

I , $\mathcal{F}$, k sont respectivement le moment d'inertie et les coefficients d'amortissement et de rappel du pendule.

1.2.- Position du problème

Etant donné la nature des équations du système (1-1) et (1-2) premier et second ordre, il ne peut y avoir résonance mais excitation asynchrone.

Dans une étude du phénomène Bethenod R. Faure [12] introduit un condensateur de capacité C constante dans le circuit électrique; il obtient ainsi deux équations du second ordre; $q = \int i dt$ étant alors la quantité d'électricité.

On se propose dans cette étude d'étendre le problème au cas où le pendule est soumis à des percussions périodiques de même période T que celle de la tension d'excitation $v(t)$. On suppose que l'amplitude de ces percussions est proportionnelle à la vitesse du pendule $\mathcal{K}$ étant le coefficient de proportionnalité.

Nous avons alors les équations différentielles suivantes :

$$(1.3) \quad \ddot{L}(\theta) + \dot{q} \dot{L}(\theta) + e \dot{q} + q/c = v_1 \sin \omega t$$

$$(1.4) \quad \ddot{\theta} + a_1 \omega_1 \dot{\theta} + \omega_1^2 \theta = \frac{L(\theta)}{2I} \dot{q}^2 - \mathcal{K} \dot{\theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT + \bar{E})$$

avec $0 < \bar{E} < T$.

e étant le coefficient propre d'amortissement du circuit électrique, ω_1 et a_1 les pulsations propres et l'amortissement réduit du pendule. Remarquons que si $\mathcal{K}$ est négatif cela correspond à des percussions qui viennent accélérer le mouvement du pendule contrairement au cas où $\mathcal{K}$ est positif; celles-ci agissent comme la présence d'un obstacle sur la trajectoire de celui-là.

1.3.- Hypothèses

Nous recherchons une solution périodique de période T pour pouvoir appliquer la méthode de centrage nous devons nous placer dans le cas des hypothèses suivantes (H_1) :

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad L &= L_0 + \lambda L_1 & \nu &= \lambda \nu_1 \\
 \rho &= \lambda \rho_1 & \mathcal{K} &= \lambda K \\
 a_1 &= \lambda A
 \end{aligned}$$

L_0, ρ_1, A, ν_1 et K des constantes positives λ étant un infiniment petit.

b) Pour $\theta = 0$ le circuit constant est synchronisé sur la période T . Soit

$$L_0 C \omega^2 = 1 \qquad \omega T = 2\pi.$$

c) $\omega_1 = n \omega$ n un entier positif.

Les équations (1.3) et (1.4) deviennent

$$(1.5) \quad \ddot{q} + \omega^2 q = \lambda \left[\frac{\nu_1 \rho_1 n \omega t - \dot{q} \dot{\theta} - \rho_1 \dot{q} + \omega^2 \theta q}{L(\theta)} \right] = \lambda F_1$$

$$(1.6) \quad \ddot{\theta} + (n\omega)^2 \theta = \lambda \left[\frac{\dot{q}^2}{2I} - A \omega_1 \dot{\theta} - K \dot{\theta} e(t) \right] = \lambda F_2 - \lambda K \dot{\theta} e(t)$$

avec
$$e(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT - \bar{t})$$

Ces équations représentent des oscillateurs linéaires $\ddot{q} + \omega^2 q$ et $\ddot{\theta} + (n\omega)^2 \theta$ perturbés par F_1 et $F_2 - K \dot{\theta} e(t)$.

CHAPITRE 2PROBLEME DE LA SYNCHRONISATION ET SOLUTIONS PERIODIQUES2.1.- Préliminaires

Dans le cadre des systèmes non linéaires excités par des percussions R. Faure [14-16] a démontré le résultat suivant :

On considère le système vectoriel

$$(\Sigma_1) \quad \frac{d}{dt} x_j = \lambda \varphi_j(x, t) \quad j = 1, \dots, m$$

où

$$\varphi_j(x, t) = \mathfrak{F}_j(x, t) + \sum_{i, n} \gamma_{ij} \delta(t - t_i - nT)$$

(H₂) Les $\mathfrak{F}_j(x, t)$ sont des fonctions de x, t deux fois continûment dérivables par rapport à x, t pour tout t et pour x appartenant à un domaine Δ de $\mathbb{R}^m$.

Les γ_{ij} sont des constantes facteurs des percussions $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i - nT)$, périodiques de période T , $0 < t_i < T$.

Théorème :

Si $\bar{a}$ est une constante de $\mathbb{R}^m$ telle que les intégrales suivantes étant de Riemann.

$$(\Sigma_2) \quad \int_0^T \mathfrak{F}_j(\bar{a}, s) ds + \sum_i \gamma_{ij} = 0$$

Les fonctions $\mathfrak{F}_j$ étant continûment dérivables au voisinage de $\bar{a}$ alors le système (Σ_1) admet en général un système de solutions périodiques de période T pour $|\lambda|$ suffisamment petit; ces solutions sont pour $|\lambda|$ petit voisines de $\bar{a}$.

En outre si on pose

$$F_j(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{F}_j(x, t) dt \quad j = 1, \dots, m$$

La stabilité du système (Σ_1) au voisinage de $\bar{a}$ étant donnée en général par la stabilité du système (Σ_3) au voisinage de $\bar{a}$ pour $|\lambda|$ assez petit.

$$(\Sigma_3) \quad \frac{dx_j}{dt} = \lambda F_j(x) \quad j = 1, \dots, m$$

Dans cette étude nous étendons ces résultats à travers notre exemple au cas où les percussions sont de la forme

$$K I_i(x, t) \sum_n \delta(t - \bar{t} - nT)$$

où $0 < \bar{t} < T$, K constantes.

avec des hypothèses supplémentaires (H_3) sur $K I_i(x, t)$ précisées plus loin.

2.2.- Equations de synchronisation

Cherchons les solutions des équations (1.5) et (1.6) sous la forme :

$$(1.7) \quad q = q_1(t) \cos \omega t + q_2(t) \sin \omega t$$

$$(1.8) \quad \theta = \theta_1(t) \cos n\omega t + \theta_2(t) \sin n\omega t$$

En appliquant la méthode de la variation des constantes.

$$q'_1 \cos \omega t + q'_2 \sin \omega t = 0$$

$$\vartheta'_1 \cos n\omega t + \vartheta'_2 \sin n\omega t = 0$$

$$-q'_1 \sin \omega t + q'_2 \cos \omega t = \frac{\lambda F_1}{\omega}$$

$$-\vartheta'_1 \sin n\omega t + \vartheta'_2 \cos n\omega t = \frac{\lambda F_2}{n\omega} - \lambda \frac{\vartheta' K}{n\omega} e(t)$$

Posons :

$$I_3(\vartheta_1, \vartheta_2, t) = (-\vartheta_1 \sin n\omega t + \vartheta_2 \cos n\omega t) \sin n\omega t$$

$$I_4(\vartheta_1, \vartheta_2, t) = (-\vartheta_1 \sin n\omega t + \vartheta_2 \cos n\omega t) \cos n\omega t$$

On est alors conduit au système suivant :

$$q'_1 = -\lambda \frac{F_1}{\omega} \sin \omega t = \lambda \Psi_1(q_1, q_2, \vartheta_1, \vartheta_2, t)$$

$$(I-1) \quad q'_2 = \lambda \frac{F_1}{\omega} \cos \omega t = \lambda \Psi_2(q_1, q_2, \vartheta_1, \vartheta_2, t)$$

$$\vartheta'_1 = -\lambda \frac{F_2}{n\omega} \sin n\omega t + \lambda \vartheta' K e(t) \sin n\omega t = \lambda \Psi_3(q_1, q_2, \vartheta_1, \vartheta_2, t) + \lambda K I_3(\vartheta_1, \vartheta_2, t) e(t)$$

$$\vartheta'_2 = \lambda \frac{F_2}{n\omega} \cos n\omega t - \lambda \vartheta' K e(t) \cos n\omega t = \lambda \Psi_4(q_1, q_2, \vartheta_1, \vartheta_2, t) - \lambda K I_4(\vartheta_1, \vartheta_2, t) e(t)$$

Les conditions (Σ_2) du théorème précédent sont compte tenu des propriétés sur les percussions :

$$\lambda \int_0^T \Psi_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, t) dt = 0$$

$$\lambda \int_0^T \Psi_2(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, t) dt = 0$$

(I-2)

$$-\lambda \int_0^T \Psi_3(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, t) dt + K I_3(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{t}) = 0$$

$$-\lambda \int_0^T \Psi_4(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, t) dt - K I_4(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{t}) = 0$$

On cherche alors les solutions constantes $\bar{a} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ du système précédent (I.2). Cette résolution est faite plus loin.

2.3.- Existence des solutions périodiques

Réexprimons le système (I.1) vectoriellement on a alors :

$$\dot{q}_i = \lambda \Psi_i(q, t) + \lambda \varepsilon_i K I_i(q, t) e(t).$$

Rappelons que :

$$\varepsilon_0 = (0, 0, 1, -1)$$

$$q = (q_1, q_2, \theta_1, \theta_2)$$

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(t - nT - \bar{t})$$

$$\bar{a} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$q_1 = \bar{q}_1 + \mu_1$$

$$\theta_1 = \bar{\theta}_1 + \mu_3$$

$$q_2 = \bar{q}_2 + \mu_2$$

$$\theta_2 = \bar{\theta}_2 + \mu_4$$

Soit $\Delta(R_1)$ défini par $\sum_{i=1}^4 \mu_i^2 \leq R_1^2$. On désigne par $\Delta(R)$ l'ensemble des points $M(\mu_i)$ $i=1,2,3,4$ défini par :

$$M(\mu_i) \in \Delta(R) \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^4 \mu_i^2 \leq R^2 \leq R_1^2$$

Dans le cas d'une étude générale on considère les hypothèses supplémentaires suivantes :

(H_3) Nous supposons que $|K|$, l'amplitude du saut de vitesse au moment des percussions est bornée par une constante K_0 (déterminée plus loin).

En utilisant les hypothèses (H_2) sur la différentiabilité de Ψ on a alors le système suivant :

$$\dot{u}_i = \lambda \left[\sum_{j=1}^m P_{ij} u_j + g_i(t) + \varepsilon_i K I_i(u + \bar{a}, t) \psi(t) + R_i(u, t) \right]$$

où

$$P_{ij} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_j}(\bar{a}, t)$$

$$g_i(t) = \Psi_i(\bar{a}, t)$$

$$R_i(t, u) = \Psi_i(a + u, t) - \Psi_i(\bar{a}, t) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_j}(\bar{a}, t) u_j$$

Nous poserons m pour dimension de l'espace (ici 4).

2.3.1.- Rappel

Les équations précédentes sont à coefficients périodiques et de période T . On utilise alors pour déterminer la solution périodique la méthode classique valable pour le cas des équations différentielles développées par R. Faure [14] qu'il étendit plus tard à des cas avec percussions [18].

$$\dot{x}_i = \lambda \left[\sum_{j=1}^m P_{ij} x_j + h_i(t) \right] \quad i = 1, \dots, m$$

Considérons les solutions canoniques $y_i(t)$ du système linéaire homogène à coefficients périodiques c'est-à-dire celles qui vérifient la relation.

$$y_{ij}(T) = S_j y_{ij}(0)$$

où les S_j sont les nombres de Floquet.

Les mineurs algébriques ainsi que les déterminant des y_{ij} sont désignés respectivement par $H_{ij}(t, \lambda)$ et $H(t, \lambda)$.

Posons

$$\frac{H_{kj}(t, \lambda)}{H(t, \lambda)} = H'_{kj}(t, \lambda)$$

Lorsque λ tend vers 0, $H_{ij}(t, \lambda)$ tend vers $H_{ij}(t, 0) = H_{ij_0}$ qui est constant. Donc pour $|\lambda|$ suffisamment petit H'_{kj} est analytique en λ . On a alors en première approximation en λ .

$$H'_{kj}(t, \lambda) = H'_{kj_0} + \lambda H'_{kj_1}(t, \lambda)$$

pour $0 \leq t \leq T$ où $H'_{kj_0} = \text{constante}$.

Dans le cas où les $h_k(t)$ sont continues on sait que si

$$z_j(t) = \sum_k \int_0^t H'_{kj}(s, \lambda) h_k(s) ds$$

Il existe une solution périodique donnée par la formule

$$x_i(t) = \lambda \sum_j [a_j + z_j(t)] y_{ij}(t)$$

avec

$$a_j = \frac{S_j}{1 - S_j} z_j(\tau)$$

Tous les S_j étant supposés distincts et différents de 1.

2.3.2.- Démonstration

Dans notre démonstration nous appliquons ces formules du cas continu au cas des systèmes à distribution $e(t)$.

Pour l'existence des solutions on définit la récurrence suivante :

$$(1.9) \quad u_{ip} = \lambda \sum_{j=1}^m [a_j + z_{j,p-1}(t)] y_{ij}(t)$$

Nous montrerons en prenant $|\lambda|$ suffisamment petit on peut choisir R de telle manière que si $M(u_{i,p-1}) \in \Delta(R)$ alors $M(u_{ip}) \in \Delta(R)$ aussi :

En initialisant avec $u_{i0} = 0$ on est sûr d'être dans $\Delta(R)$ pour toute la récurrence. Pour le même choix de R . On montre que la suite (u_{ip}) est uniformément convergente.

Nous voulons majorer les $u_{ip}(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ nous devons pour cela majorer les différents termes de a_j et $z_j(t)$ sur cet intervalle.

Les $y_{ij}(t)$ étant bornées, on a pour $|\lambda|$ suffisamment petit, soit $|\lambda| < \lambda_0$, $|H'_{kj}(t, \lambda)|$ est majoré sur $0 \leq t \leq T$.

$$(1.10) \quad \text{Désignons par } Q_0 \text{ la borne sup de } H'_{kj_0} \text{ et } Q_1 \text{ celle de } |H'_{kj}(t, \lambda)|$$

Toujours pour $|\lambda| < \lambda_0$ étant donné que les S_j sont de la forme $S_j = 1 + \alpha_j \lambda$; $\alpha_j = \alpha_{j0} + \lambda \alpha_{j1} + \dots$ désignons par α le

$$\sup_j \left(\frac{1 + \lambda_0 |\alpha_j| + \lambda_0 (o(\lambda))}{|\alpha_j|} \right) \quad \text{alors}$$

$$(1.11) \quad \left| \frac{\lambda S_j}{1 - S_j} \right| \leq \alpha$$

On peut remarquer que si $M(\mu_i) \in \Delta(R)$ on a :

$$R_i(\mu, b) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \psi_j \partial \psi_k} (\bar{a} + \theta \mu) \mu_j \mu_k$$

$0 < \theta < 1$

alors

$$(1.12) \quad |R_i(\mu, b)| \leq \frac{1}{2} P_1 \left| \sum_{j,k} \mu_j \mu_k \right| \leq \frac{1}{2} P_1 \left(\sum_{\ell} \mu_{\ell} \right)^2$$

$$\leq \frac{m P_1}{2} \sum_{\ell} \mu_{\ell}^2 \leq \frac{m P_1}{2} R^2$$

P_1 étant la borne $\sup$ de $\left| \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \psi_j \partial \psi_k} \right|$ sur $\Delta(R)$. Dans toute la suite de la démonstration nous supposons que $0 < |\lambda| < \lambda_0$.

Etudions maintenant la récurrence définie plus haut (1-9). Rappelons que d'après les équations de synchronisation (I.2) que :

$$(1.13) \quad \int_0^T \left[g_k(s) + \varepsilon_k K I_k(\bar{a}, s) e(s) \right] ds = 0$$

Soit donc P_2 la borne sup de

$$\left| \int_0^t [g_k(s) + \varepsilon_k K I_k(\bar{a}, s) e(s)] ds \right|$$

si $0 < t < T$.

Posons $Q' = Q_0 + \lambda Q_1$ on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \lambda z_{j_{p-1}}(t) \right| &= \left| \lambda \sum_k \int_0^t H'_{kj}(s, \lambda) h_k(s, u_{p-1}) ds \right| \\ &\leq \left| \lambda Q' \sum_k \int_0^t R_k(s, u_{p-1}) + g_k(s) + \varepsilon_k K I_k(\bar{a}, s) e(s) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_k K I_k(u_{p-1}, s) e(s) ds \right| \\ &\leq |\lambda| Q' m T \left[\frac{m P_1 R^2}{2} + P_2 + |K| R \right] \end{aligned}$$

Ceci d'après les inégalités (1.10, 1.11 et 1.12).

Considérons maintenant le terme.

$$\begin{aligned}
|\lambda a_{j_{p-1}}| &= \left| \lambda \frac{s_j}{1-s_j} z_{j_{p-1}}(T) \right| \\
&= \left| \frac{\lambda s_j}{1-s_j} \right| \times \left| \int_0^T \sum_k H'_{kj}(s, \lambda) h_k(u_{p-1}, s) ds \right| \\
&\leq \alpha [Q_0 + \lambda Q_1] \left[\sum_k \left| \int_0^T h_k(u_{p-1}, s) ds \right| \right] \\
&\leq \alpha [Q_0 + \lambda Q_1] \sum_k \left| \int_0^T R_k(s, u_{p-1}) + \varepsilon_k K I_k(u_{p-1}, s) e(s) ds \right|
\end{aligned}$$

d'après (1.13) on a :

$$\begin{aligned}
|\lambda a_{j_{p-1}}| &\leq \alpha [Q_0 + \lambda Q_1] mT \left[\frac{m P_1 R^2}{2} + |K|R \right] \\
&\leq \left(\alpha Q_0 m^2 \frac{T P_1}{2} \right) R^2 + \alpha Q_0 mT |K|R + |\lambda| \eta_1
\end{aligned}$$

Sachant que les $y_{ij}(t)$ sont bornées sur $[0, T]$ il est clair que :

$$\begin{aligned}
|u_i(t)| &= \left| \lambda \sum_j [a_{j_{p-1}} + z_{j_{p-1}}(t)] y_{ij}(t) \right| \\
&\leq \gamma_1 R^2 + \gamma_2 R + |\lambda| \eta_1
\end{aligned}$$

d'où la condition suivante pour que $M(u_i)_p \in \Delta(R)$.

$$\sum_i u_{ip}^2 < R^2 \quad \text{si}$$

$$(1.14) \quad 2 [\gamma_1 R^2 + \gamma_2 |K| R + |\lambda| \eta] < R$$

2.3.3.- Convergence de la suite

Considérons la différence

$$|u_{i_{p+1}} - u_{i_p}| = \left| \lambda \sum_j [a_j^i - a_{j_{p-1}}^i + \gamma_j^i - \gamma_{j_{p-1}}^i] y_{ij}^i \right|$$

dont nous devons majorer les différents termes. On a alors :

$$\begin{aligned} |\lambda (\gamma_j^i - \gamma_{j_{p-1}}^i)| &= \left| \lambda \int_0^t \sum_k H_{kj}^i(s, \lambda) [R_k(u_p, s) - R_k(u_{p-1}, s)] ds \right| \\ &\leq |\lambda| \varphi' \sum_k \left| \int_0^t R_k(u_p, s) - R_k(u_{p-1}, s) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_k K [I(u_p, s) - I(u_{p-1}, s)] \varphi(s) ds \right| \\ &\leq |\lambda| Q_m T [m P_1 R + |K|] \sum_k |u_{kp} - u_{kp-1}| \\ &\leq |\lambda| \eta'_k \sum_k |u_{kp} - u_{kp-1}| \end{aligned}$$

Majorons maintenant la différence $|\lambda(q_j - \omega_{j_{p-1}})|$.

$$\begin{aligned}
 |\lambda(q_j - q_{j_{p-1}})| &= |\lambda \frac{S_j}{1-S_j}| \left| \int_0^T H'_{u_j}(\lambda, s) [R_E(s, u_p) - R_E(s, u_{p-1})] ds \right| \\
 &\leq \alpha \frac{T}{k} \left| \int_0^T [H'_{u_j} + \lambda H'_{u_{j_1}}] [R_E(u_p, s) - R_E(u_{p-1}, s)] ds \right| \\
 &\leq \alpha (Q_0 + |\lambda| Q_1) \left| \sum_{k=1}^T R_E(u_p, s) - R_E(u_{p-1}, s) \right| \\
 &\quad + \varepsilon_k K [I_E(u_p, s) - I_E(u_{p-1}, s)] d\delta ds \Big| \\
 &\leq \left\{ \alpha Q_0 [m P_1 R + m |K|] \right. \\
 &\quad \left. + |\lambda| \alpha Q_1 [m P_1 R + m |K|] \right\} \sum_k |u_p - u_{p-1}|
 \end{aligned}$$

Ceci compte tenu des expressions et inégalités (1.10), (1.11), (1.12) et (1.13).

A partir de ces inégalités il est clair que l'on peut déduire l'inégalité suivante.

$$\max_k |u_i - u_{i_{p-1}}| \leq [\delta_1 R + \delta_2 |K| + |\lambda| \eta_2] \max_k |u_i - u_{i_{p-1}}|$$

La suite $(u_{i_p})_p$ convergera uniformément à la condition suivante (suite de Cauchy).

$$(1.15) \quad \frac{\delta_1}{2} R + \delta_2 |K| + |\lambda| \eta_2 < 1$$

Si on pose la constante K_0 évoquée dans l'hypothèse (H_3)
 (1-16) égale à $1/2\gamma_2$ il vient alors que le terme $2\gamma_2|K|-1$ est négatif.

Peut-on alors choisir R tel que les conditions (1.14 et 1.15) soient vérifiées ceci pour $|\lambda|$ assez petit.

Posons $R = \frac{2\eta}{1-2|K|\gamma_2} \lambda$ et

supposons $|\lambda| < \inf(\lambda_1, \lambda_2)$ avec

$$\lambda_1 = (1 - 2|K|\gamma_2)^2 / 16\gamma_1\eta$$

$$\lambda_2 = \frac{1 - |K|\gamma_2}{2 \left[\eta_2 + \frac{\gamma_1\eta}{1 - 2|K|\gamma_2} \right]}$$

Considérons l'inégalité (1.14)

$$\begin{aligned} & 2\gamma_1 R^2 + [2\gamma_2|K|-1]R + |\lambda|\eta \\ &= 2\gamma_1 \left[\frac{4\eta^2}{(1-2|K|\gamma_2)^2} \right] \lambda^2 + [2\gamma_2|K|-1] \frac{2\eta}{1-2|K|\gamma_2} |\lambda| + |\lambda|\eta \\ &\leq \left[\frac{8\gamma_1\eta^2}{(1-2|K|\gamma_2)^2} \lambda_1 - 2\eta + \eta \right] |\lambda| \\ &\leq \left[\frac{1}{2}\eta - \eta \right] |\lambda| = -\frac{|\lambda|}{2} \eta < 0 \end{aligned}$$

De même pour l'inégalité (1.15) on a

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta_1 R}{2} + \delta_2 |K| - 1 + |\lambda| \eta_2 \\
 &= \frac{\delta_1 \eta}{1 - 2|K|\delta_2} |\lambda| + \delta_2 |K| - 1 + |\lambda| \eta_2 \\
 &< \left[\frac{\delta_1 \eta}{1 - 2|K|\delta_2} + \eta_2 \right] \lambda_2 + \delta_2 K - 1 \\
 &\leq \frac{1 - |K|\delta_2}{2} + \delta_2 |K| - 1 = \frac{\delta_2 |K| - 1}{2} < 0
 \end{aligned}$$

d'après (1.16)

On en déduit que la suite $(u_{ip})_p$ est une suite de Cauchy donc convergente.

Il en résulte alors que le système différentiel (1.3), (1.4) satisfaisant aux hypothèses (H_1, H_2, H_3) admet des solutions périodiques de période T pour $|\lambda| < \inf(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$.

On peut noter que celles-ci tendent vers la solution de synchronisation $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ lorsque $|\lambda|$ tend vers 0.

Dans cette étude on remarque qu'il apparaît une hypothèse H_2 supplémentaire par rapport au problème précédent [17-18-31] car les excitations ici sont paramétriques.

CHAPITRE 3

POINTS DE SYNCHRONISATION ET STABILITE

Dans ce chapitre nous proposons de chercher les équations de synchronisation, les points de synchronisation et de discuter les conditions de stabilité de ces derniers.

Pour simplifier les calculs nous supposons dans la suite de cette étude que $\bar{x} = 0$ ce qui donne pour les percussions :

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)$$

Il est clair que cette supposition n'altère en rien la généralité du problème.

3.1.- Equations de synchronisation

Exprimons les fonctions associées au système (I.1) en remplaçant les ψ_i par leurs expressions respectives. La forme des percussions nous amène à choisir une intégration sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ pour tenir compte de la percussion en $\bar{x} = 0$.

$$X_1 = \frac{-1}{\omega T L_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [u_1 \sin \omega t - \dot{q} \dot{\theta} - e_1 \dot{q} + \omega^2 \theta q] \sin \omega t \, dt$$

$$X_2 = \frac{1}{\omega T L_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [u_1 \sin \omega t - \dot{q} \dot{\theta} - e_1 \dot{q} + \omega^2 \theta q] \cos \omega t \, dt$$

$$X_3 = \frac{-1}{n\omega T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{\dot{q}^2}{2I} - An\omega \dot{\theta} \right] \sin n\omega t \, dt$$

$$+ \frac{K}{n\omega T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\theta} \, e(t) \sin n\omega t \, dt$$

$$X_4 = \frac{1}{n\omega T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{\dot{q}^2}{2I} - An\omega \dot{\theta} \right] \cos n\omega t \, dt$$

$$- \frac{K}{n\omega T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\theta} \, e(t) \cos n\omega t \, dt$$

Remplaçons q et θ par leur valeur à partir de (1.7, 1.8) les X_i deviennent.

$$X_1 = \frac{-1}{\omega T L_0} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ u_1 \sin^2 t - n\omega^2 \left[q_1 \vartheta_1 \frac{\sin^2 \omega t}{2} \sin n\omega t \right. \right.$$

$$- q_1 \vartheta_1 \sin^2 \omega t \cos n\omega t - q_2 \vartheta_1 \frac{\sin^2 \omega t}{2} \sin n\omega t$$

$$+ q_2 \vartheta_2 \frac{\sin^2 \omega t}{2} \cos n\omega t \left. \right] - e_1 \omega \left[-q_1 \sin^2 \omega t + q_2 \frac{\sin^2 \omega t}{2} \right]$$

$$+ \omega^2 \left[q_1 \vartheta_1 \frac{\sin^2 \omega t}{2} \cos n\omega t + q_1 \vartheta_2 \frac{\sin^2 \omega t}{2} \sin n\omega t \right.$$

$$\left. + q_2 \vartheta_1 \sin^2 \omega t \cos n\omega t + q_2 \vartheta_2 \sin^2 \omega t \sin n\omega t \right] \Bigg\} dt$$

$$\begin{aligned}
X_2 = \frac{1}{\omega T L_0} \int_{-T/2}^{T/2} & \left\{ u_1 \frac{\sin \omega t}{2} - n \omega^2 \left[q_1 \vartheta_1 \frac{\sin \omega t}{2} \sin n \omega t \right. \right. \\
& - q_1 \vartheta_1 \frac{\sin \omega t}{2} \cos n \omega t - q_2 \vartheta_1 \cos^2 \omega t \sin n \omega t \\
& + q_2 \vartheta_2 \cos^2 \omega t \cos n \omega t \left. \right] - \rho_1 \omega \left[-q_1 \frac{\sin \omega t}{2} + q_2 \cos^2 \omega t \right] \\
& + \omega^2 \left[q_1 \vartheta_1 \cos^2 \omega t \cos n \omega t + q_1 \vartheta_2 \cos^2 \omega t \sin n \omega t \right. \\
& \left. + q_2 \vartheta_1 \frac{\sin \omega t}{2} \cos n \omega t + q_2 \vartheta_2 \frac{\sin \omega t}{2} \sin n \omega t \right] \left. \right\} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_3 = \frac{-1}{n \omega T} \int_{-T/2}^{T/2} & \left\{ \omega^2 \left[q_1^2 \sin^2 \omega t \sin n \omega t + q_2^2 \cos^2 \omega t \sin n \omega t \right. \right. \\
& \left. \left. - q_1 q_2 \frac{\sin 2 \omega t}{2} \sin n \omega t \right] / 2 I \right.
\end{aligned}$$

$$\left. - A n^2 \omega^2 \left[-\vartheta_1 \sin^2 n \omega t + \vartheta_2 \frac{\sin 2 n \omega t}{2} \right] \right\} dt$$

$$+ \frac{K n \omega}{n \omega T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[-\vartheta_1 \sin^2 n \omega t + \vartheta_2 \frac{\sin 2 n \omega t}{2} \right] \sum_m \delta(t - mT) dt$$

$$\begin{aligned}
X_4 = & \frac{1}{n\omega T} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \omega^2 \left[q_1^2 \sin^2 \omega t \cos n\omega t + q_2^2 \cos^2 \omega t \cos n\omega t \right. \right. \\
& \left. \left. - q_1 q_2 \frac{\sin 2\omega t}{2} \cos n\omega t \right] / 2 I \right. \\
& \left. - A(n\omega)^2 \left[-\theta_1 \frac{\sin 2n\omega t}{2} + \theta_2 \cos n\omega t \right] \right\} dt \\
& - \frac{K n \omega}{n \omega T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[-\theta_1 \frac{\sin 2n\omega t}{2} + \theta_2 \cos n\omega t \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} S(t-mT) dt
\end{aligned}$$

On rappelle que dans le calcul de ces intégrales q_1 , q_2 , θ_1 et θ_2 sont considérés comme constantes. On remarque que l'on doit supposer la fréquence du pendule double de celle de la tension excitatrice. C'est-à-dire $n = 2$, sinon on aurait pour seule solution de synchronisation ($q_1 = \pi$, $q_2 = 0$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$) et dans ce cas il n'y aurait pas de couplage entre le pendule et le circuit électrique :

Les excitations électrique n'aurait aucun effet sur le pendule.

On a alors le système de fonctions associées en q_1 , q_2 , θ_1 , θ_2 suivant.

$$X_1 = -\frac{1}{2\omega L_0} \left[\psi_1 + \frac{\omega^2}{2} (q_2 \vartheta_1 - q_1 \vartheta_2) + e_1 \omega q_1 \right]$$

$$X_2 = \frac{1}{2\omega L_0} \left[-\frac{\omega^2}{2} (q_2 \vartheta_2 + q_1 \vartheta_1) - e_1 \omega q_2 \right]$$

$$X_3 = \frac{\omega}{\partial I} q_1 q_2 - A \omega \vartheta_1$$

$$X_4 = \frac{\omega}{16I} (q_2^2 - q_1^2) - \left(A \omega + \frac{K}{T} \right) \vartheta_2$$

Il en résulte finalement pour les équations de synchronisation
 $X_i = 0 \quad i=1,2,3,4.$

$$(1.16) \quad \psi_1 + \frac{\omega^2}{2} (q_2 \vartheta_1 - q_1 \vartheta_2) + e_1 \omega q_1 = 0$$

$$(1.17) \quad \frac{\omega^2}{2} (q_2 \vartheta_2 + q_1 \vartheta_1) + e_1 \omega q_2 = 0$$

(E)

$$(1.18) \quad \frac{\omega}{\partial I} q_1 q_2 - A \omega \vartheta_1 = 0$$

$$(1.19) \quad \frac{\omega}{16I} (q_2^2 - q_1^2) - \omega (A + \bar{K}) \vartheta_2 = 0$$

où

$$\bar{K} = \frac{K}{2\pi}$$

3.2.- Calcul des points de synchronisation

La recherche des points de synchronisation revient à la résolution du système (E) de quatre équations à quatre inconnues $q_1, q_2, \theta_1, \theta_2$. Posons pour cela le changement de fonction suivant :

$$(1.20) \quad q_1 = R \sin \varphi$$

$$(1.21) \quad q_2 = R \cos \varphi$$

avec $R \geq 0$.

On peut déduire alors pour $A + \bar{K} \neq 0$ des équations (1.18) et (1.19) les deux relations suivantes :

$$(1.22) \quad \theta_1 = \frac{R^2 \sin 2\varphi}{16 I A}$$

$$(1.23) \quad \theta_2 = \frac{R^2 \cos 2\varphi}{16 I (A + \bar{K})}$$

En remplaçant ces valeurs de θ_1 et θ_2 dans (1.16) et (1.17) on tire les deux équations.

$$(1.24) \quad n_1 + \frac{\omega^2 R^3}{32 I} \left[\frac{\cos \varphi \sin 2\varphi}{A} - \frac{\sin \varphi \cos 2\varphi}{A + \bar{K}} \right] + p_1 \omega R \sin \varphi = 0$$

$$(1.25) \quad \frac{\omega^2 R^3}{32 I} \left[\frac{\cos \varphi \cos 2\varphi}{A + \bar{K}} + \frac{\sin \varphi \sin 2\varphi}{A} \right] + p_1 \omega R \cos \varphi = 0$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$(1.26) \quad A v_1 + \frac{\omega^2 R^3}{32 I} \left[\frac{A + 2 \bar{K} \cos^2 \varphi}{A + \bar{K}} \right] \sin \varphi + \rho \omega A R \sin \varphi = 0$$

$$(1.27) \quad \frac{\omega^2 R^3}{32 I} \left[\frac{A + 2 \bar{K} \sin^2 \varphi}{A + \bar{K}} \right] \cos \varphi + \rho \omega A R \cos \varphi = 0$$

3.2.1.- Discussion suivant les valeurs de A et $\bar{K}$

L'existence des points de synchronisation se traduit par la résolution des équations (1.26) et (1.27) en R et φ .

Introduisons les valeurs intermédiaires suivantes :

$$b_1 = \frac{32 I A \rho}{\omega}$$

$$b_2 = \frac{A + \bar{K}}{A + 2 \bar{K} \cos^2 \varphi}$$

$$b_3 = \frac{A + \bar{K}}{A + 2 \bar{K} \sin^2 \varphi}$$

(1.26) et (1.27) deviennent alors :

$$(1.28) \quad R^3 + b_1 b_2 R + \frac{b_1 b_2}{\rho \omega \sin \varphi} = 0$$

$$(1.29) \quad \cos \varphi \left[R^2 + b_1 b_3 \right] = 0$$

avec $\sin \varphi \neq 0$.

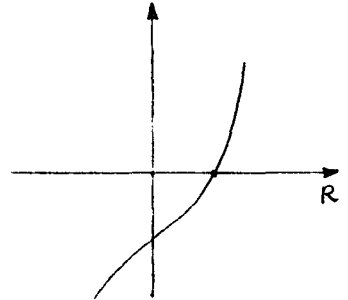
1er cas : $A + \bar{K} > 0$

b_1 et b_2 étant alors positifs, on déduit de (1.29) que :

$$\cos \Psi = 0 \quad \text{soit} \quad \sin \Psi = \pm 1$$

si $\sin \Psi = +1$ (1.28) n'a pas de racine positive. Pour $\sin \Psi = -1$ (1.28) devient :

$$(1.30) \quad R^3 + b_1 b_2 R - \frac{b_1 b_2 v_1}{c_1 \omega} = 0$$



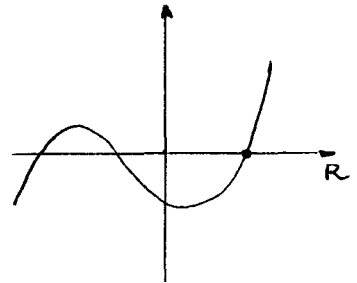
qui admet une racine positive unique.

2ème cas : $A + \bar{K} < 0$

Dans ce cas b_2 est négatif. On a alors un ou trois points de synchronisation.

a - Pour $\sin \Psi = 1$ (1.28) devient

$$(1.31) \quad R^3 + b_1 b_2 R + \frac{b_1 b_2 v_1}{c_1 \omega} = 0$$

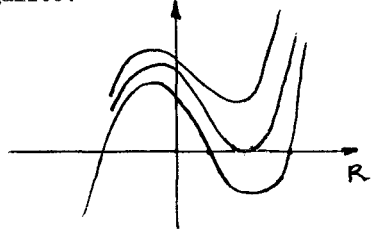


$b_2 < 0$. Elle admet une racine positive unique.

b - Pour $\sin \varphi = -1$ l'équation (1.28) est équivalente à (1.30).

b_2 étant négatif on a deux racines positives (racine double) si les différentes grandeurs du problème vérifient l'inégalité.

$$(1.32) \quad \frac{v_1^2}{4\omega} \leq -\frac{32I(A+\bar{K})}{27} e^3$$



Résumons ces différentes solutions.

Notons par M_1 le point de synchronisation défini par

$$M_1 \left\{ \begin{array}{ll} q_1 = -R & \theta_1 = 0 \\ q_2 = 0 & \theta_2 = \frac{-R^2}{16I(A+K)} \end{array} \right.$$

par M_2 le point de synchronisation défini par

$$M_2 \left\{ \begin{array}{ll} q_1 = R & \theta_1 = 0 \\ q_2 = 0 & \theta_2 = \frac{-R^2}{16I(A+K)} \end{array} \right.$$

On a alors le tableau suivant :

$A + \bar{K} > 0$	$A + \bar{K} < 0$
Un point de synchronisation de la forme M_1 où R est racine de (1.30).	Un point de synchronisation de la forme M_2 où R est racine de (1.31) et un ou deux points de synchronisation de la forme M_1 si la condition (1.32) est vérifiée avec R racine de (1.30).

3.2.2.- Cas particulier $A + \bar{K} = 0$

3e cas :

Reste le cas particulier $A + \bar{K} = 0$.

L'équation (1.18) est équivalente à

$$\vartheta_1 = \frac{R^2 \sin 2\varphi}{16IA}$$

De l'équation (1.19) on déduit que : $\cos \varphi = 0$

soit

$$\varphi = (2p+1) \frac{\pi}{4} \quad 0 \leq p \leq 3 \quad \text{mod } 2k\pi$$

Notons

$$\varepsilon_1 = \cos \varphi$$

$$\varepsilon_2 = \sin \varphi$$

$$\varepsilon_3 = \sin 2\varphi$$

Les équations (1.16) et (1.17) deviennent

$$(1.33) \quad \vartheta_1 + \frac{\omega^2}{2} \left[\varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{R^3}{16IA} - \varepsilon_2 R \vartheta_2 \right] + \rho_1 \omega R \varepsilon_2 = 0$$

$$(1.34) \quad \frac{\omega^2}{2} \left[\varepsilon_1 R \vartheta_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{R^3}{16IA} \right] + \rho_1 \omega R \varepsilon_1 = 0$$

En additionnant les équations (1.33) et (1.34) multipliées respectivement par ε_1 et ε_2 on a :

$$(1.35) \quad \varepsilon_3 \frac{\omega^2}{2} \frac{R^3}{16IA} + 2\rho_1 \omega R \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 v_1 = 0$$

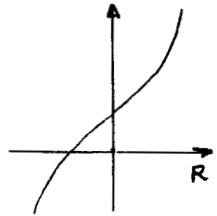
Etudions les différentes possibilités de racines positives suivant les valeurs de p .

* Pour $p=0$ et 1 soit $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ou

$$\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

(1.35) devient :

$$\frac{\omega^2 R^3}{16IA} + \rho_1 \omega R + \sqrt{2} v_1 = 0$$



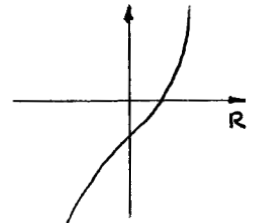
Equation qui n'a pas de racine positive.

* Pour $p=2$ et 3 soit $\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$ ou

$$\varphi = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

(1.35) s'écrit :

$$(1.36) \quad \frac{\omega^2 R^3}{16IA} + \rho_1 \omega R - \sqrt{2} v_1 = 0$$



Equation qui admet une racine positive unique.

Donc on a dans le cas où $A + \bar{K} = 0$ deux points de synchronisation.

Pour $\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} R \\ q_2 = q_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} g_1 = \frac{R^2}{16IA} \\ g_2 = -\sqrt{2} \frac{v_1}{R\omega^2} \end{array}$$

et pour $\varphi = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} R \\ q_2 = -q_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} g_1 = -\frac{R^2}{16IA} \\ g_2 = -\sqrt{2} \frac{v_1}{R\omega^2} \end{array}$$

R étant la racine de (1.36).

On tire g_2 de (1.33) et (1.34).

3.3.- ETUDE DE LA STABILITE AU VOISINAGE DES POINTS DE SYNCHRONISATION

3.3.1.- Stabilité dans le cas $A + \bar{K} \neq 0$

Dans ce paragraphe nous étudions la stabilité du système pendule circuit électrique au voisinage des points de synchronisation pour $A + \bar{K} \neq 0$.

Nous formons les équations aux variations à partir de ces valeurs moyennes.

Sachant que $q_2 = \theta_1 = 0$, on remarquera que le système d'équation aux variations se décompose en deux groupes G et G' .

$$G \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta q_1}{dt} = \lambda \left[\frac{-1}{2\omega l_0} \left(-\frac{\omega^2 g_2}{2} + \rho_1 \omega \right) \delta q_1 + \frac{\omega^2}{2} q_1 \delta \theta_2 \right] \\ \frac{d\delta g_2}{dt} = \lambda \left[\frac{-2\omega}{16I} q_1 \delta q_1 - \omega (A + \bar{K}) \delta \theta_2 \right] \end{array} \right.$$

$$G' \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta q_2}{dt} = \lambda \left[-\frac{1}{2\omega l_0} \left(\frac{\omega^2 g_2}{2} + \rho_1 \omega \right) \delta q_2 - \frac{1}{2\omega l_0} \left(\frac{\omega^2}{2} q_1 \right) \delta \theta_1 \right] \\ \frac{d\delta \theta_1}{dt} = \lambda \left[\frac{\omega}{8I} q_1 \delta q_2 - A \omega \delta \theta_1 \right] \end{array} \right.$$

Nous dirons que le système est globalement stable si les conditions de stabilité de l'un et l'autre des systèmes sont simultanément vérifiées. Si un seul des deux systèmes est instable on dira que le système est non stable.

Nous désignons par la suite :

$$a = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}$$

$$b = \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2}$$

$$c = \frac{\partial x_4}{\partial q_1}$$

$$d = \frac{\partial x_4}{\partial \theta_2}$$

$$a' = \frac{\partial x_2}{\partial q_2}$$

$$b' = \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1}$$

$$c' = \frac{\partial x_3}{\partial q_2}$$

$$d' = \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1}$$

Nous cherchons des solutions de la forme

$$\delta q_1 = \alpha e^{\lambda t}$$

$$\delta \theta_2 = \beta e^{\lambda t}$$

pour G et

$$\delta q_2 = \alpha' e^{\lambda t}$$

$$\delta \theta_1 = \beta' e^{\lambda t}$$

pour G' .

Le système donnant α et β est :

$$(r-a)\alpha - b\beta = 0$$

$$c\alpha + (r-d)\beta = 0$$

Pour avoir des solutions autre que les solutions triviales $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ nous devons poser le déterminant du système précédent identiquement nul. D'où l'équation de stabilité de G .

$$r^2 - (a+d)r + ad - bc = 0$$

On a de même pour G' .

$$r^2 - (a'+d')r + a'd' - b'c' = 0$$

que l'on appelle au ssi équations caractéristiques. Les conditions de stabilité sont alors pour G .

$$\Delta = a + d < 0$$

$$p = ad - bc > 0$$

et

$$\Delta' = a' + d' < 0$$

$$p' = a'd' - b'c' > 0$$

pour Q' .

La stabilité des points de synchronisation se traduit finalement par les quatre conditions suivantes :

$$\Delta = -\frac{1}{2\omega L_0} \left(-\frac{\omega^2 \theta_2}{2} + \rho_1 \omega \right) - \omega (A + \bar{K}) < 0$$

$$p = \frac{A + \bar{K}}{2L_0} \left(-\frac{\omega^2 \theta_2}{2} + \rho_1 \omega \right) + \frac{1}{2\omega L_0} \left(\frac{\omega^3}{16I} \rho_1^2 \right) > 0$$

$$\Delta' = -\frac{1}{2\omega L_0} \left(\frac{\omega^2 \theta_2}{2} + \rho_1 \omega \right) - A\omega < 0$$

$$p' = \frac{1}{2L_0} \left(\frac{\omega^2 \theta_2}{2} + \rho_1 \omega \right) + \frac{1}{16I L_0} \frac{\omega^2}{2} \rho_1^2 > 0$$

En remplaçant q_1 et θ_2 par leurs valeurs respectives de M_1 et M_2 dans ces conditions de stabilité, on remarque que l'on obtient les mêmes expressions mais il faut rappeler que R est égale à R_1 racine de (1.30) pour M_1 .

$$(1.37) \quad \frac{\omega^2 R_1^3}{32I(A+\bar{K})} + \rho_1 \omega R - v_1 = 0$$

ou R égale à R_2 racine de (1.31) pour M_2 .

$$(1.38) \quad \frac{\omega^2 R_2^3}{32I(A+\bar{K})} + \rho_1 \omega R_2 + v_1 = 0$$

On a alors :

$$(1.39) \quad A = -\frac{1}{2\omega L_0} \left[\frac{\omega^2 R^2}{32I(A+\bar{K})} + \rho_1 \omega \right] - 2\omega^2 L_0 (A+\bar{K}) < 0$$

$$(1.40) \quad P = \frac{3\omega^2 R^2}{32I(A+\bar{K})} - \rho_1 \omega - 2\omega^2 L_0 A > 0$$

$$(1.41) \quad A' = \frac{\omega^2 R^2}{32I(A+\bar{K})} - \rho_1 \omega - 2\omega^2 L_0 A < 0$$

$$(1.42) \quad P' = \frac{(A+2\bar{K})}{A(A+\bar{K})} \times \frac{\omega^2 R^2}{32I} + \rho_1 \omega > 0$$

1°) Stabilité du point M_1 dans le cas $A + \bar{K} > 0$.

Il est évident que les conditions (1.39) et (1.40) sont toujours vérifiées.

Si on fixe tous les paramètres du problème, R étant racine de (1.30) on peut noter que ωR^2 tend vers 0, si ω tend vers l'infini ou R tend vers 0 avec ν_1 .

On en déduit que la condition (1.41) est vérifiée pour ω assez grand ou ν_1 assez petit.

La dernière condition (1.42) est toujours vérifiée si $A + 2\bar{K}$ est positif sinon on est dans le même cas que la condition précédente c'est-à-dire ω assez grand ou ν_1 assez petit.

Donc on a stabilité du point M_1 quand $A + \bar{K} > 0$ si ω est assez grand ou ν_1 est suffisamment petit.

2°) Stabilité des points M_1 et M_2 pour $A + \bar{K} < 0$.

Remarquons que les deux conditions (1.41) et (1.42) sont toujours vérifiées pour les deux points. Reste alors les deux premières conditions (1.39) et (1.40) qui sont respectivement équivalentes à :

$$(1.43) \quad \omega R_A = \frac{-\omega^2 R^3}{321(A + \bar{K})} - 2\omega^2 L_0(A + \bar{K})R - c_1 \omega R \stackrel{?}{<} 0$$

$$(1.44) \quad \omega R_P = \frac{3\omega^2 R^3}{321(A + \bar{K})} + c_1 R \omega \stackrel{?}{>} 0$$

Considérons le cas du point M_2 . Utilisons le fait que R est racine de (1.31) dans (1.43) et (1.44) on a alors :

$$\omega R_d = \nu_1 - 2\omega^2 L_0 (A + \bar{K}) R \quad \text{positive}$$

$$\omega R_p = \frac{\omega^2 R^3}{16I(A + \bar{K})} - \nu_1 \quad \text{négative}$$

d'où on conclut que M_2 n'est jamais stable.

Pour le point M_1 , sachant que R est racine de (1.30) on a (1.43) et (1.44) qui s'écrivent :

$$\omega R_d = \nu_1 + 2\omega^2 L_0 (A + \bar{K}) R \quad \stackrel{?}{< 0}$$

$$\omega R_p = \frac{\omega^2 R^3}{16I(A + \bar{K})} + \nu_1 \quad \stackrel{?}{> 0}$$

On remarque alors qu'il est impossible de déterminer analytiquement le signe de ces expressions (même pour des valeurs limites de ω et ν_1).

3.3.2.- Stabilité des solutions dans le cas $\bar{K} = -A$

Dans ce cas on a deux solutions :

1ère solution

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} R \\ q_2 = q_1 \end{array} \right.$$

$$\vartheta_1 = R^2 / 16IA$$

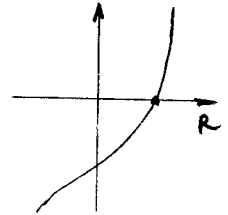
$$\vartheta_2 = \frac{-\sqrt{2}\nu_1}{R\omega^2}$$

2e solution

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} R \\ q_2 = -q_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \theta_1 = -R^2 / 16 I A \\ \theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{R \omega^2} \omega_1 \end{array}$$

R étant racine de (1.36) soit :

$$(1.45) \quad \frac{\omega^2 R^3}{32 I A} + \rho \omega R - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1 = 0$$



q_2 et θ_1 n'étant pas nuls le système d'équations aux variations n'est plus découplé en deux groupes Q et Q' .

On a alors le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta q_1 &= \frac{-\lambda}{2\omega L_0} \left[\left(-\frac{\omega^2 \theta_2}{2} + \rho \omega \right) \delta q_1 + \frac{\omega^2 \theta_1}{2} \delta q_2 + \frac{\omega^2 q_2}{2} \delta \theta_1 - \frac{\omega^2 q_1}{2} \delta \theta_2 \right] \\ (1.46) \quad \frac{d}{dt} \delta q_2 &= \frac{\lambda}{2\omega L_0} \left[-\frac{\omega^2 \theta_1}{2} \delta q_1 - \left(\frac{\omega^2 \theta_2}{2} + \rho \omega \right) \delta q_2 - \frac{\omega^2 q_1}{2} \delta \theta_1 - \frac{\omega^2 q_2}{2} \delta \theta_2 \right] \\ \frac{d}{dt} \delta \theta_1 &= \lambda \left[\frac{\omega}{8 I} q_2 \delta q_1 + \frac{\omega}{8 I} q_1 \delta q_2 - A \omega \delta \theta_1 \right] \\ \frac{d}{dt} \delta \theta_2 &= \lambda \left[-\frac{2\omega}{16 I} q_1 \delta q_1 + \frac{2\omega}{16 I} q_2 \delta q_2 \right] \end{aligned}$$

nous cherchons alors des solutions de la forme

$$\delta q_i = \alpha_i e^{\lambda t}$$

$$\delta \vartheta_i = \alpha_{i+1} e^{\lambda t}$$

$$i = 1, 2$$

On déduit du système (1.46)

$$\lambda \alpha_i = \lambda \sum_{j=1,2} \left[\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \alpha_j + \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_j} \alpha_{j+1} \right] \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

On doit poser alors pour avoir une solution en α non nulle.

$$(1.47) \quad \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \lambda \delta_{ij} \right) = 0$$

$$\text{avec } x_j = q_j \text{ si } j = 1, 2$$

$$x_j = \vartheta_j \text{ si } j = 3, 4.$$

Qui est l'équation caractéristique.

Nous dirons alors que le système est stable si les valeurs propres du Jacobien $\left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right|_{i,j=1, \dots, 4}$ sont négatives.

L'équation (1.47) en λ est équivalente à une équation de la forme.

$$(1.48) \quad \mathcal{J}_0 \lambda^4 + \mathcal{J}_1 \lambda^3 + \mathcal{J}_2 \lambda^2 + \mathcal{J}_3 \lambda + \mathcal{J}_4 = 0$$

Nous explicitons le détail des calculs de cette équation en Annexe I. On peut noter qu'on a la même équation pour les deux solutions de synchronisation.

Les conditions nécessaires et suffisantes (Liénard, Chepard) pour que les racines de l'équation (1.48) soient négatives ou nulles sont :

$$(1.49) \quad J_i > 0 \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

et

$$(1.59) \quad J = J_1 J_2 J_3 - J_4 J_1^2 - J_0 J_3^2 > 0$$

Nous obtenons après tout calcul fait (en annexe II).

$$J_0 = \frac{1}{4 I^2 L_0^2}$$

$$J_1 = \frac{1}{4 I^2 L_0^2} \left[\frac{C_1}{L_0} + A\omega \right]$$

$$J_2 = \frac{1}{16 (IL_0)^2} \left[\frac{R\omega^2}{4 IL_0} + \frac{4Aw}{L_0} C_1 + \frac{C_1^2}{L_0^2} - \frac{1}{4L_0^2} \left(\frac{2\omega^2}{R^2\omega^2} + \frac{R^4\omega^2}{(16IA)^2} \right) \right]$$

$$J_3 = \frac{1}{4^3 I^2 L_0^4} \left\{ A\omega \left[4C_1^2 - \frac{2\omega_1^2}{R^2\omega^2} - \frac{R^4\omega^4}{(16IA)^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{C_1^2 R\omega^2}{2I} + \frac{Aw^3 R L_0}{2I} \right\}$$

$$J_4 = \frac{1}{256 (IL_0)^2} \left[Aw^3 C_1 IR^2 + 3 \frac{R^4\omega^4}{32} \right]$$

l'égalité (1.50) donne finalement :

$$\begin{aligned}
 16777216 \times J = & -\frac{\rho_1 \omega^5 R^8}{A^3 L^4 L_0^5} + \left[-\frac{128 \omega^6}{I^3 L_0^3} - 256 \frac{\rho_1 \omega^5}{A I^3 L_0^4} - \frac{128 \rho_1^2 \omega^4}{A^2 I^3 L_0^5} \right] R^6 \\
 & + \left[-3192 \frac{A^2 \omega^6}{I^2 L_0^2} - 20480 \frac{A \rho_1 \omega^5}{I^2 L_0^3} - 12288 \frac{\rho_1^2 \omega^4}{I L_0^4} - 2048 \frac{\rho_1^3 \omega^3}{A I^2 L_0^5} \right] R^4 \\
 & + \left[262144 \frac{A^3 \rho_1 \omega^5}{I L_0^2} + 655360 \frac{A^2 \rho_1^2 \omega^4}{I L_0^3} + 524288 \frac{A \rho_1^3 \omega^3}{I L_0^4} \right. \\
 & \quad \left. + 131072 \frac{\rho_1^4 \omega^2}{I L_0^5} + 1024 \frac{\rho_1 \nu_1^2 \omega}{A I^2 L_0^5} \right] R^2 \\
 & + \left[4194304 \frac{A^3 \rho_1^3 \omega^3}{L_0^3} + \left(4194304 \frac{A^2 \rho_1^4}{L_0^4} - 65536 \frac{A^2 \nu_1^2}{I L_0^3} \right) \omega^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left(1048576 \frac{A \rho_1^5}{L_0^5} - 131072 \frac{A \rho_1 \nu_1^2}{I L_0^4} \right) \omega - 65536 \frac{\rho_1^2 \nu_1^2}{I L_0^5} \right] \\
 & + \left[-2097152 \frac{A^3 \rho_1 \nu_1^2 \omega}{L_0^3} - 2097152 \frac{A^2 \rho_1^2 \nu_1^2}{L_0^4} \right. \\
 & \quad \left. - 1048576 \frac{A \rho_1^3 \nu_1^2}{L_0^5 \omega} \right] \frac{1}{R^2} + \left[262144 \frac{A \rho_1 \nu_1^4}{L_0^5 \omega^3} \right] \frac{1}{R^4}
 \end{aligned}$$

le calcul de ce dernier terme J a été calculé à l'aide d'un logiciel de calcul formel Macsyma.

R étant racine de (1.45) on peut déduire d'après la formule de Cardan .

$$R = \left\{ \frac{\sqrt{2} \cdot 8 \cdot I A}{\omega^2} \nu_1 + \left[\left(-\frac{\sqrt{2} \cdot 8 \cdot I A}{\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{32 \cdot I A}{\omega^2} e_0 \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} \\ + \left\{ \frac{\sqrt{2} \cdot 8 \cdot I A}{\omega^2} \nu_1 - \left[\left(-\frac{\sqrt{2} \cdot 8 \cdot I A}{\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{32 \cdot I A}{\omega^2} e_0 \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}$$

on peut remarquer que R et $\frac{\nu_1}{R}$ tendent vers 0 avec ν_1 .

Montrons que les solutions périodiques voisines des deux points de synchronisation sont stables.

Les conditions (1.49) son toujours vérifiées

$$J_2 \quad \text{tend vers} \quad \frac{1}{16(I_0 L_0)} \left[\frac{4 A \omega}{L_0} e + \frac{e^2}{L_0^2} \right] > 0$$

$$J_3 \quad \text{tend vers} \quad \frac{1}{4^3 I_0^2 L_0^4} [4 A \omega e^2] > 0$$

$$J \quad \text{tend vers} \quad J^* > 0$$

$$J^* = \frac{A e_0^3 \omega}{4 L_0^3} \left[A^2 \omega^2 + e_0 \frac{\omega A}{L_0} + \frac{e_0^2}{4 L_0^2} \right]$$

ceci quand ν_1 tend vers 0 .

J_2 , J_3 et J étant continues en ω_1 , on en déduit que pour ω_1 assez petit ces grandeurs sont positives.

On peut conclure alors que pour ω_1 assez petit les deux points de synchronisation sont stables.

Pour l'effet de la fréquence ω sur la stabilité de ces solutions : on a J_2 et J_3 qui tendent vers J_2^* et J_3^* positives, par contre, il n'est pas aisé de prédire analytiquement le comportement de J quand ω tend vers ∞ .

Tableau récapitulatif des points de synchronisation
et de leur stabilité

Décélération	Accélération du mouvement de l'osillateur		
$A + \bar{K} > 0$	$\bar{K} < 0$ avec $ \bar{K} < A$	$\bar{K} < 0$	$\bar{K} < 0$
$A + \bar{K} > 0$		$\bar{K} = -A$	$A + \bar{K} < 0$

un seul point de synchronisation
stable pour ω suffisamment
grand ou ω_1 assez petit.

un point de synchronisation
 M_2 instable quelque soit
 ω ou ω_1 .

puis un ou deux points
de synchronisation (si la
condition (1.32) est vérifiée)
dont il est difficile
analytiquement de conclure
sur leur stabilité.

Deux points de synchronisation
stables pour ω_1 assez petit.

(L'effet de la fréquence ω sur
la stabilité est difficile à
prédire analytiquement).

CONCLUSION

Dans cette première partie nous nous sommes intéressé au problème de la synchronisation dans le cas de l'oscillateur Bethenod. On s'est placé dans le cas où ce dernier est sous l'action de percussions périodiques de période T . On a montré pour $|\lambda|$ suffisamment petit et sous certaines hypothèses que le système d'équations régissant le problème admet une solution périodique non nulle de période T . Ceci tant que le coefficient de proportionnalité reste borné. Cette solution tend vers la solution de synchronisation quand $|\lambda|$ tend vers 0.

Nous avons enfin discuté suivant les différents paramètres physiques du problème l'existence et la stabilité des solutions de synchronisation :

On constate que si le coefficient d'amplitude des percussions $-K$ est supérieur à l'amortissement A ($\bar{K} < 0$, donc amplifiant le mouvement de l'oscillateur) alors il existe un ou trois points de synchronisation, instables indépendamment des paramètres physiques du problème.

Dans les cas où $-K < A$ et $-\bar{K} = A$ on trouve respectivement un et deux points de synchronisation. Chaque fois qu'on a pu conclure sur la stabilité on retrouve les résultats des études précédentes [11-12-14] effectués sur ce problème en l'absence de percussions, c'est-à-dire :

Les différents paramètres du problème, K , I , e , A et ω étant donnés, $|\nu_1|$ doit être borné par une quantité finie sinon en se donnant K , I , A , e et ν_1 , il faut que la fréquence ω soit assez grande.

PARTIE II

Notations

ρ : densité de l'air.

V_∞ : vitesse du vent.

d : diamètre du cylindre.

m_x : masse des parties de l'oscillateur mise en mouvement suivant x .

k_x : raideur du ressort suivant x .

$\omega_1^2 = \frac{k_x}{m_x}$; $\omega_2^2 = \frac{k_y}{m_y}$; fréquences propres de l'oscillateur
suivant x et y .

$$\Omega^2 = \omega_1^2 / \omega_2^2$$

$\lambda = \frac{e d V_\infty}{2 m \omega_1^2}$: petit paramètre.

$e(t)$ = percussions presque périodiques.

η, ξ_k : amplitudes des percussions.

$$\bar{\xi} = \sup_k |\xi_k|$$

a, b : bornes supérieures et inférieures des intervalles de temps
séparant deux percussions.

$$\varphi(t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$$

$\tilde{q}$: solution de synchronisation.

$$|\varphi_i| = \sup_t |\varphi_i(t)|$$

$$\|\varphi\| = \sup_{i=1, \dots, m} |\varphi_i|$$

SUR LES VIBRATIONS PRESQUE PERIODIQUES D'UN
OSCILLATEUR A DEUX DEGRES DE LIBERTE SOUS L'EFFET
CONJUGUE DE PERCUSSIONS PRESQUE PERIODIQUES ET DE
FORCES AERODYNAMIQUES

CHAPITRE I

PRESENTATION DU PROBLEME ET EQUATIONS

1.1.- Introduction, position du problème

Dans cette partie on s'intéresse à un modèle théorique proposé par Van der Beek [22] d'un oscillateur à deux degrés de liberté représentant les vibrations d'un cable aérien de transmissions électriques sur lequel s'est déposé une couche de glace. Cette dernière peut rendre la section droite du cable instable aérodynamiquement en présence du vent. L'évolution à partir de cette position d'équilibre instable peut aboutir à des oscillations de grandes amplitudes à basse fréquence.

Dans cette étude on se propose de montrer l'existence d'une solution au problème des vibrations d'un tel oscillateur soumis à l'effet conjoint du vent et de percussions mécaniques. Nous considérons que le rapport des fréquences propres de l'oscillateur est irrationnel. Il convient alors de rechercher une solution presque périodique à ce problème. De même nous supposerons que les percussions sont paramétriques presque périodiques et régulières.

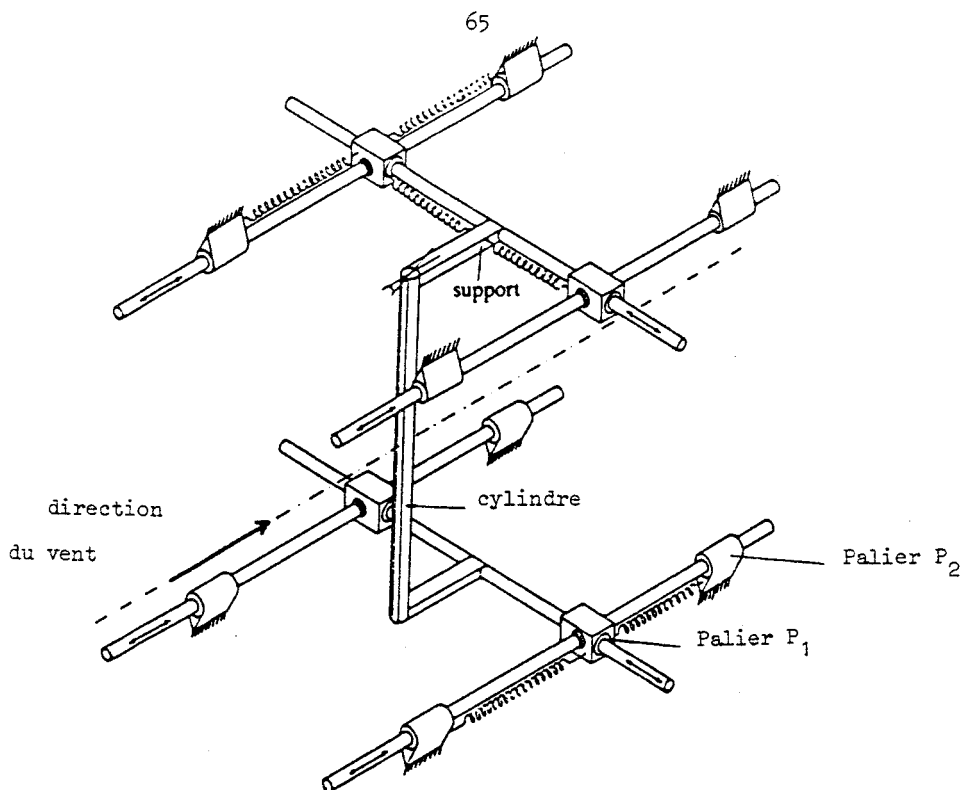


Figure 1

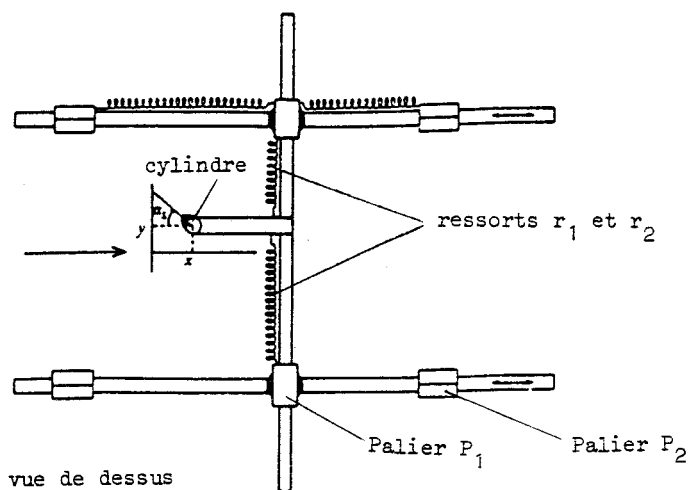


Figure 2

1.2.- Description de l'oscillateur

Le modèle théorique développé par Van der Beek et Van der Burgh consiste en un cylindre rigide de section droite circulaire et de six ressorts montés sur une structure (fig. 1). Les deux tiges solidaires du support du cylindre peuvent coulisser dans les paliers P_1 . Les quatre autres tiges solidaires des quatre paliers P_1 peuvent coulisser dans les huit paliers fixe P_2 . Il est alors clair que le système est formé de deux oscillateurs découplés.

Les ressorts r_1 et r_2 sont sollicités au cours des oscillations du cylindre dans la direction perpendiculaire au vent. Les autres ressorts le sont au cours des oscillations dans la direction du vent (fig. 2).

On considère que le cylindre demeure perpendiculaire aux plans contenant les différentes tiges de la structure. La position du cylindre est alors définie dans ce plan par ses coordonnées x et y . Le centre du repère correspond à la position d'équilibre du centre du cylindre en l'absence de toute force extérieure.

1.3.- Equations du mouvement

Nous supposons que la section droite du cylindre n'est pas parfaitement circulaire mais présente une déformation (fig. 3) due à un dépôt de matière sur sa génératrice (exemple dépôt neigeux sur un câble électrique). Si on place ce cylindre dans un écoulement uniforme il subit de la part de ce dernier une trainée $D \vec{e}_D$ et une portance $L \vec{e}_D$. L et D étant les amplitudes des forces.

$$D = \frac{1}{2} \rho d c^D(\alpha) V_s^2$$

$$L = \frac{1}{2} \rho d c^L(\alpha) V_s^2$$

où ρ désigne la densité de l'air, d le diamètre du cylindre,
 $V_S = |\vec{V}|$ et α l'angle que fait $\vec{V}_S$ avec l'axe de symétrie de la
 section du cylindre (fig. 3).

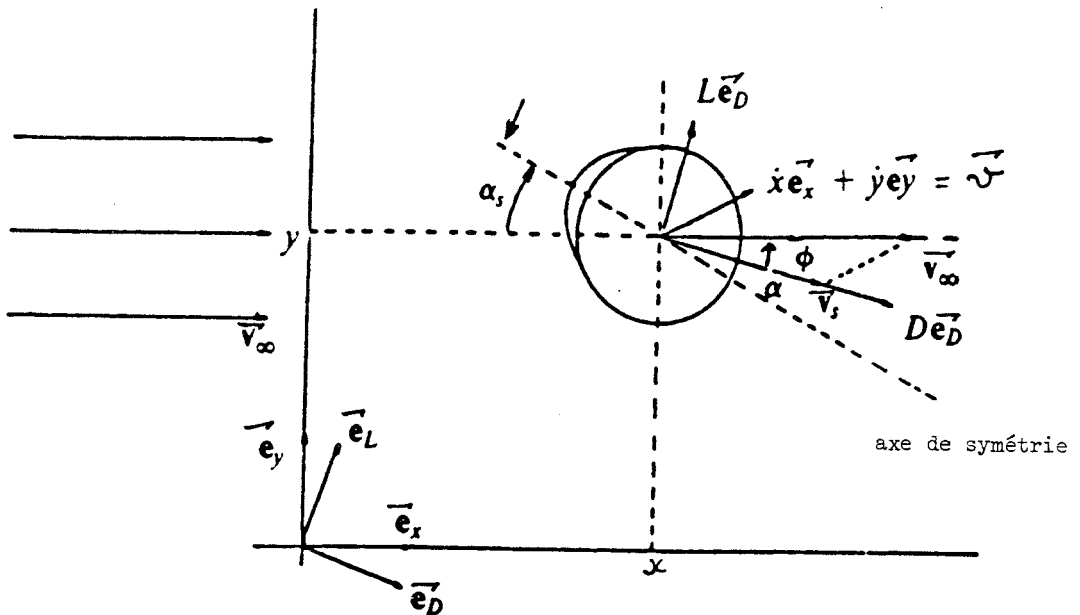


Figure 3

- $\vec{V}$ vitesse du cylindre
 $\vec{V}_\infty$ vitesse de l'écoulement
 $\vec{V}_S$ vitesse virtuelle de l'écoulement
 α_s angle d'attaque

on a :

$$\vec{V}_S = \vec{V}_\infty - \vec{V}$$

Les coefficients de traînée et de portance c^D et c^L sont fonction de α . Il est facile de voir que les équations du mouvement du cylindre s'écrivent.

$$m_x \ddot{x} + S_x x = D \cos \phi - L \sin \phi$$

$$m_y \ddot{y} + S_y y = D \sin \phi + L \cos \phi$$

m_x (respectivement m_y) représente la masse des parties de l'oscillateur mise en mouvement dans son déplacement suivant l'axe x (l'axe y) et S_x (respectivement S_y) la raideur des ressorts sollicités dans ce cas. ϕ est l'angle dirigé dans le sens trigonométrique que fait $\vec{e}_x$ avec $\vec{e}_D$ (fig. 3).

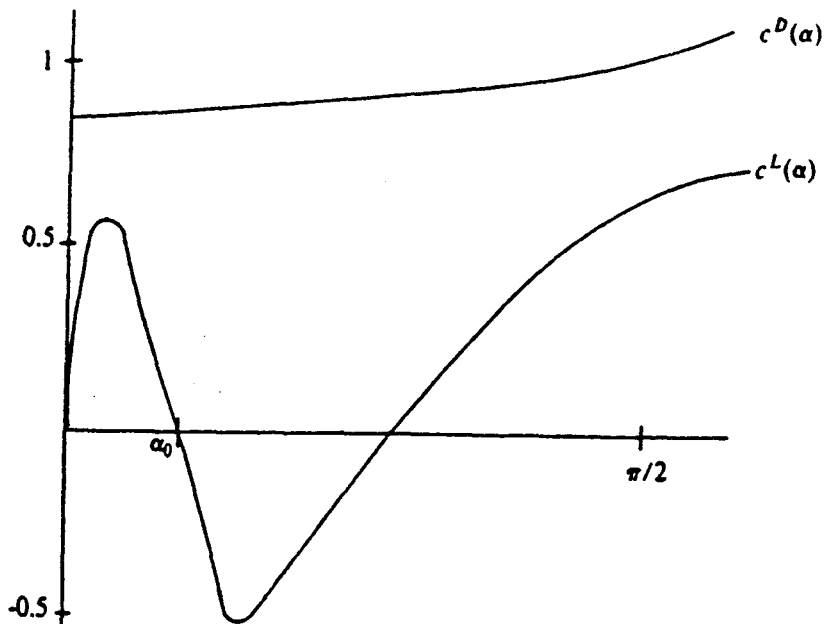


Figure 4

Les courbes expérimentales (fig. 4) des coefficients c_D , c_L de trainée et de portance obtenues par Van der Beek [22] sont approximées par les fonctions suivantes :

$$c_D^D(\alpha) = c_D^D$$

$$c_L^L(\alpha) = c_1^L(\alpha - \alpha_0) + c_3^L(\alpha - \alpha_0)^3$$

avec

$$c_D^D > 0, \quad c_1^L > 0 \quad \text{et} \quad c_3^L > 0$$

En plus des forces aérodynamiques et élastiques précédentes nous supposons donc que le cylindre est soumis à des excitations presque périodiques de la forme

$$e \frac{dV_0^2}{2} \quad \tilde{c}_i(x, y, t) \quad e(t) \quad 1 \leq i \leq 2$$

avec

$$e(t) = \eta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_k \delta(t - t_k)$$

où η et $\tilde{f}_k$ sont des constantes réelles.

Nous supposons que $\tilde{c}_i(x, y, t)$ sont des fonctions presque périodiques de B_{pp} . $e_i(t)$ appartiennent à l'espace B'_{pp} dual de B_{pp} des distributions presque périodiques. On suppose aussi que la suite $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une suite régulière, soit :

$$b < t_{k+1} - t_k < a \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

a, b deux réels positifs.

Notons que :

$$V_S^2 = (V_\infty - \dot{x})^2 + \dot{y}^2$$

$$\cos \phi = [V_\infty - \dot{x}] / V_S$$

$$\text{Soit tangente } \phi = \frac{-\dot{y}}{V_\infty - \dot{x}} \quad (\phi \text{ est négatif}).$$

$$\alpha = \phi - \alpha_A$$

Il est clair que si on suppose que la masse des différents paliers est négligeable on peut poser :

$$m_x = m_y = m$$

Remplaçons les expressions précédentes dans les équations du mouvement.

$$\ddot{x} + \frac{dx}{m} x = \frac{D}{m} \cos \phi - \frac{L}{m} \sin \phi + \rho \frac{dV_\infty^2}{2m} \xi_1(x, y, t) e(t)$$

$$\ddot{y} + \frac{dy}{m} y = \frac{D}{m} \sin \phi + \frac{L}{m} \cos \phi + \rho \frac{dV_\infty^2}{2m} \xi_2(x, y, t) e(t)$$

On obtient après avoir utilisé des développements limités en $\dot{x}$ et $\dot{y}$ jusqu'à l'ordre trois les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + \omega_1^2 x = & \rho \frac{d\omega^D}{2m} V_\infty^2 - 2\rho \frac{d\omega^D}{2m} V_\infty \dot{x} + \rho \frac{dV_\infty}{2m} [c_1^L \bar{\alpha}_s + c_3^L \bar{\alpha}_s^3] \dot{y} \\
& + \rho \frac{d\omega^D}{2m} \dot{x}^2 - \rho \frac{d}{2m} [c_1^L \bar{\alpha}_s + c_3^L \bar{\alpha}_s^3] \dot{x} \dot{y} \\
& + \rho \frac{d}{2m} \left[\frac{\omega^D}{2} - c_1^L + 3 \bar{\alpha}_s^2 c_3^L \right] \dot{y}^2 \\
& + \rho \frac{d}{2m V_\infty} \left[\frac{c_1^L}{2} \bar{\alpha}_s + 3 c_3^L \bar{\alpha}_s + \frac{c_3^L}{2} \bar{\alpha}_s^3 \right] \dot{y}^3 \\
& + \rho \frac{d}{2m} V_\infty^2 \mathcal{E}_1(x, y, t) \sum_k \mathcal{E}_k \delta(t - t_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y} + \omega_2^2 y = & \rho \frac{dV_\infty^2}{2m} [c_1^L \bar{\alpha}_s + c_3^L \bar{\alpha}_s^3] - 2\rho \frac{dV_\infty}{2m} [c_1^L \bar{\alpha}_s + c_3^L \bar{\alpha}_s^3] \dot{x} \\
& - \rho \frac{dV_\infty^2}{2m} [c_0^D + c_1^L + 3 \bar{\alpha}_s^2 c_3^L] \dot{y} + \rho \frac{d}{2m} [c_1^L \bar{\alpha}_s + c_3^L \bar{\alpha}_s^3] \dot{x}^2 \\
& + \rho \frac{d}{2m} \left[3 \bar{\alpha}_s c_3^L + \frac{c_3^L}{2} \bar{\alpha}_s^3 + \frac{c_1^L}{2} \bar{\alpha}_s \right] \dot{y}^2 \\
& + \rho \frac{d}{2m} [c_0^D + c_1^L + 3 \bar{\alpha}_s^2 c_3^L] \dot{x} \dot{y} + \rho \frac{d}{2m V_0} \left[-\frac{\omega^D}{2} - \frac{c_1^L}{6} - \left(1 + \frac{\bar{\alpha}_s^2}{2}\right) c_3^L \right] \dot{y}^3 \\
& + \rho \frac{dV_\infty^2}{2m} \mathcal{E}_2(x, y, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_k \delta(t - t_k)
\end{aligned}$$

où

$$\omega_1^2 = \frac{Ax}{m} \quad , \quad \omega_2^2 = \frac{Ay}{m} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}_A = \alpha_A - \alpha_0$$

Introduisons les nouvelles variables adimensionnelles suivantes définies par :

$$X = \omega_2 x / V_0$$

$$Y = \omega_2 y / V_0$$

$$\tau = \omega_2 t$$

Les équations précédentes deviennent alors :

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \Omega^2 X &= \lambda \left[C_0^D - 2 C_0^D \dot{X} + (C_1^L \bar{\alpha}_A + C_3^L \bar{\alpha}_A^3) \dot{Y} \right. \\ &\quad \left. + C_0^D \dot{X}^2 - (C_1^L \bar{\alpha}_A + C_3^L \bar{\alpha}_A^3) \dot{X} \dot{Y} + \left(\frac{C_0^D}{2} - C_1^L - 3 \bar{\alpha}_A^2 C_3^L \right) \dot{Y}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{C_1^L}{2} \bar{\alpha}_A + 3 C_3^L \bar{\alpha}_A + \frac{C_3^L}{2} \bar{\alpha}_A^3 \right) \dot{Y}^3 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_1 \left(\frac{V_0 X}{\omega_2}, \frac{V_0 Y}{\omega_2}, \frac{\tau}{\omega_2} \right) e(\tau/\omega) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{Y} + Y = \lambda & \left[(c_1^L \bar{\alpha}_A + c_3^L \bar{\alpha}_A^3) - 2(c_1^L \bar{\alpha}_A + c_3^L \bar{\alpha}_A^3) \dot{X} \right. \\
& - (c_0^D + c_1^L + 3 \bar{\alpha}_A^2 c_3^L) \dot{Y} + (c_1^L \bar{\alpha}_A + c_3^L \bar{\alpha}_A^3) \dot{X}^2 \\
& + (3 \bar{\alpha}_A c_3^L + \frac{c_3^L}{2} \bar{\alpha}_A^3 + \frac{c_1^L}{2} \bar{\alpha}_A) \dot{Y}^2 \\
& + (c_0^D + c_1^L + 3 \bar{\alpha}_A^2 c_3^L) \dot{X} \dot{Y} - (\frac{c_0^D}{2} + \frac{c_1^L}{6} + (1 + \frac{\bar{\alpha}_A^2}{2}) c_3^L) \dot{Y}^3 \\
& \left. + \mathcal{E}_2 \left(\frac{V_0 X}{\omega_2}, \frac{V_0 Y}{\omega_2}, \tau/\omega_2 \right) e(\tau/\omega_2) \right].
\end{aligned}$$

où

$$\Omega^2 = \omega_1^2 / \omega_2^2$$

$$\lambda = e \frac{dV_0}{2m\omega_2}$$

Nous supposerons que le paramètre λ est petit : ce qui correspond à des forces aérodynamiques petites par rapport aux forces d'inerties et de raideur de l'oscillateur, $\lambda > 0$.

Les équations qui régissent le mouvement du cylindre se réduisent finalement au système d'équations différentielles non linéaires presque périodiques généralisées.

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = \lambda \left[a_0 + a_2 \dot{X} + a_4 \dot{Y} + a_{22} \dot{X}^2 + a_{24} \dot{X} \dot{Y} + a_{44} \dot{Y}^2 + a_{444} \dot{Y}^3 + E_1(X, Y, \tau) \bar{e}(\tau) \right] = \lambda F_1$$

$$\ddot{Y} + \gamma Y = \lambda \left[b_0 + b_2 \dot{X} + b_4 \dot{Y} + b_{22} \dot{X}^2 + b_{24} \dot{X} \dot{Y} + b_{44} \dot{Y}^2 + b_{444} \dot{Y}^3 + E_2(X, Y, \tau) \bar{e}(\tau) \right] = \lambda F_2$$

où les différents coefficients sont donnés par :

$$a_0 = c_0^D > 0$$

$$b_0 = c_1^L \bar{\alpha}_A + \alpha_3^L \bar{\alpha}_A^3$$

$$a_2 = -2 c_0^D < 0$$

$$b_2 = -2 (c_1^L \bar{\alpha}_A + c_3^L \bar{\alpha}_A^3)$$

$$a_4 = c_1^L \bar{\alpha}_s + c_3^L \bar{\alpha}_s^3$$

$$b_4 = -(c_0^D + c_1^L + 3 \bar{\alpha}_s^2 c_3^L) > 0$$

$$a_{22} = c_0^D > 0$$

$$b_{22} = c_1^L \bar{\alpha}_s + c_3^L \bar{\alpha}_s^3$$

$$a_{24} = -(c_1^L \bar{\alpha}_s + c_3^L \bar{\alpha}_s^3)$$

$$b_{24} = c_0^D + c_1^L + 3 \bar{\alpha}_s^2 c_3^L < 0$$

$$a_{444} = \frac{c_1^L}{2} \bar{\alpha}_s + 3 c_3^L \bar{\alpha}_s + c_3^L \frac{\bar{\alpha}_s^3}{2}$$

$$b_{444} = -\left(\frac{c_0^D}{2} + \frac{c_1^L}{6} + \left(1 + \frac{\bar{\alpha}_s^2}{2}\right) c_3^L\right) < 0$$

Nous imposerons dans cette étude les mêmes conditions sur les signes des constantes que celles prises par Ven der Beek dans son étude de ces équations.

1.4.- Hypothèses et transformation du système d'équations différentielles

Nous nous plaçons dans le cas où le rapport des fréquences est irrationnel. Commençons par effectuer le changement de variable suivant :

$$x = q_1 \cos st + q_2 \sin st$$

$$y = q_3 \cos t + q_4 \sin t$$

(1) Nous reprenons t comme variable de temps à la place τ .

Nous obtenons alors par la méthode de la variation des constantes le nouveau système d'équations différentielles en q .

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

$$\dot{q}_1 = -\frac{\lambda F_1}{\Omega}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \cos \Omega t = \lambda \Psi_1(q, t)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\lambda F_1}{\Omega}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \sin \Omega t = \lambda \Psi_2(q, t)$$

$$\dot{q}_3 = -\lambda F_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \cos t = \lambda \Psi_3(q, t)$$

$$\dot{q}_4 = \lambda F_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \sin t = \lambda \Psi_4(q, t)$$

Les fonctions Ψ_i du second membre sont alors de la forme

$$\Psi_i(q, t) = f_i(q, t) + g_i(q, t) e(t)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

Le problème initial se résume alors à l'étude du système d'équations différentielles non linéaires à excitations presque périodiques paramétriques suivant.

$$(2.1) \quad \dot{q}_i = \lambda [f_i(q, t) + g_i(q, t) e(t)]$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

Nous donnons les expressions de la fonction vectorielle

$$f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \quad \text{presque périodique en annexe II.}$$

Dans ce qui suit nous allons traiter ce problème dans le cas général :
les f_i et g_i $i = 1, \dots, m$ étant presque périodiques par rapport à t
pour q fixé et $e(t)$ des percussions presque périodiques régulières.

$$e(t) = \eta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \delta(t - t_k)$$

où ξ_k sont des constantes réelles.

Soit $\varphi_i(t)$ une fonction presque périodique.

On désignera par $\overline{\varphi}_i$ la moyenne de $\varphi_i(t)$ définie par :

$$\overline{\varphi}_i = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi_i(s) ds$$

On notera pour $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$

$$|\varphi_i| = \sup_t |\varphi_i(t)|$$

$$\|\varphi\| = \sup_{1 \leq i \leq m} |\varphi_i|$$

$\mathcal{H}_1$

Nous supposons qu'il existe une solution constante $\tilde{q} \in \mathbb{R}^m$,
du système suivant. $\tilde{q}$ est la solution de synchronisation.

$$(2.2) \quad \overline{f_i(\tilde{q}, t) + g_i(\tilde{q}, t)z(t)} = 0$$

$$i = 1, \dots, m$$

Nous allons établir sous certaines hypothèses supplémentaires $\mathcal{H}_1$
énoncées plus loin que le système (2.1) possède une solution presque périodique
généralisée pour λ assez petit qui tend vers $\tilde{q}$ uniformément par rapport à
 t lorsque le paramètre λ tend vers 0.

Posons :

$$q_i = \tilde{q}_i + u_i \quad i = 1, \dots, m$$

Nous désignons par $\mathcal{D}(R_1)$ l'ensemble des points $M(q)$ défini par :

$$M(q) \in \mathcal{D}(R_1) \quad \text{si} \quad \|u\| < R_1 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

R_1 une constante positive.

Nous supposons que pour M appartenant à $\mathcal{D}(R_1)$:

- 1) Les fonctions $f_i(q, t)$ presque périodiques sont deux fois dérivables par rapport à q et ses dérivées sont presque périodiques uniformément par rapport à t .
- 2) Les fonctions $g_i(q, t)$ sont dérivables par rapport à q et ses dérivées partielles premières sont uniformément presque périodiques par rapport à t .

Posons :

$$Q_1 = \sup_{i,j,k} \left| \frac{\partial f_k}{\partial u_i \partial u_j} \right|$$

$$Q_2 = \sup_{i,k} \left| \frac{\partial g_i}{\partial u_k} \right| \quad 1 \leq i, j, k \leq m.$$

Pour $M \in \mathcal{D}(R_1)$.

En utilisant les différentes hypothèses précédentes nous pouvons réécrire le système (2.1) sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{u}_i = & \lambda \left[f_i(\tilde{q} + u, t) - f_i(\tilde{q}, t) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\tilde{q}, t) u_j \right] \\ & + \lambda \left[f_i(\tilde{q}, t) + g_i(\tilde{q} + u, t) e(t) \right] + \lambda \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\tilde{q}, t) u_j \end{aligned}$$

$1 \leq i \leq m$

Introduisons les notations suivantes :

$$P_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\tilde{q}, t) \quad P \text{ matrice } (m, m)$$

$$\Delta_i(t) = f_i(\tilde{q} + u, t) - f_i(\tilde{q}, t) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\tilde{q}, t) u_j$$

$1 \leq i, j \leq m$

Le système différentiel précédent devient finalement :

$$(2.3) \quad \dot{u} = \lambda P u + \lambda \left[f(\tilde{q}, t) + g(\tilde{q} + u, t) e(t) \right] \\ + \lambda \Delta(u, t)$$

où u représente un vecteur colonne $(m, 1)$.

Etant donné que la matrice Jacobienne $P_{ij}(t)$ de f est presque périodique on peut définir sa matrice moyenne.

$$S = \overline{P(t)}$$

Nous supposerons que toutes les valeurs propres de S ont leur partie réelle négative (en réalité pour l'existence des solutions, l'hypothèse partie réelle non nulle est suffisante). Notre choix d'une hypothèse plus restrictive est dans le but de simplifier l'exposé.

Considérons maintenant l'équation différentielle suivante :

$$(2.4) \quad \mathcal{R}' = \lambda S R + P - S$$

On sait d'après le théorème de O. Neugebauer, H. Bohr que l'équation (2.4) admet une solution unique $R(t)$ matrice (m, m) presque périodique comme λ est petit et étant donné que $\overline{P - S} = 0$ on a d'après un résultat de Roseau* [23] :

$$\lambda \|R\| \text{ tend vers zéro avec } \lambda .$$

*) Ce résultat fut étendu au cas des équations aux percussions presque périodiques généralisées par R. Faure [25].

Posons $K = I - \lambda R$.

I étant la matrice identité (m, m) .

K est inversible pour λ assez petit.

K et K^{-1} seront presque périodiques.

Posons le changement de variable suivant :

$$w = K u$$

De l'équation (2.3) on a :

$$\begin{aligned} w' &= \lambda K u' + \lambda K' u \\ &= \lambda K \left\{ p u + \Delta + g e(t) + f \right\} \\ &\quad + \lambda [\lambda S P + P - S] K^{-1} u \end{aligned}$$

qui devient :

$$\begin{aligned} (2.5) \quad \dot{w} &= \lambda S w + \lambda K \left[f(\tilde{q}, t) + g(\tilde{q} + u, t) e(t) \right. \\ &\quad \left. + \Delta(t, u) - \lambda R P K^{-1} w \right] \end{aligned}$$

Avant d'entamer la résolution de ce système rappelons des résultats fondamentaux [18, 25] sur les problèmes relevant de la théorie des percussions presque périodiques.

CHAPITRE 2EXISTENCE DES SOLUTIONS PRESQUE PERIODIQUES GENERALISEES2.1.- Etude d'un cas linéaire

Soit le système d'équations différentielles représenté par :

$$(2.6) \quad z' = \lambda S z + \lambda [I - \lambda R] H(t) u(t)$$

Défini à partir des mêmes hypothèses et grandeurs $u(t)$, S et $R(t)$ données précédemment $H(t)$ une fonction vectorielle $(m, 1)$ presque périodique continue de B_{pp} .

On sait que la solution de (2.6) est donnée par la formule :

$$z(t) = \lambda \int_{-\infty}^t \gamma(t-s) [I - \lambda R(s)] H(s) u(s) ds$$

avec

$$\gamma' = \lambda S \gamma \quad ; \quad \gamma(0) = I(m, m)$$

$H(t)$ étant bornée la convergence des intervalles est assurée car les parties réelles des valeurs propres de S sont non nulles.

$z(t)$ appartient à B'_{pp} dual de B_{pp} et presque périodique.

Les intervalles de continuité de z étant $]t_{k-1}, t_k[$ mais de plus la suite $[z(t_{k-0})]_k$ et $[z(t_{k+0})]_k \in \mathbb{R}^m$ forment une suite presque périodique.

On désignera par fonction presque périodiques généralisées l'ensemble de ces fonctions dont les fonctions de Bohr sont un cas particulier.

Majorons la norme des $|z_i|$. Soit :

$$\bar{H} = \|H\| = \max_i \sup_t |H_i(t)|$$

$$\bar{f} = \max_k |f_k|$$

et ρ la borne inférieure des $|\beta_i|$ parties réelles des valeurs propres de S .

La suite $(t_k)_k$ étant régulière soit $b > 0$ la borne inférieure des $t_k - t_{k-1}$.
D'où

$$|z_i| \leq \lambda Q(S) \sum_k |f_k| e^{-\rho(t-t_k)} \bar{H}$$

$$\leq \lambda Q(S) \bar{H} \bar{f} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\rho(t-t_k)}$$

$$\leq 2\lambda Q(S) \bar{H} \bar{f} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\rho k b}$$

$Q(S)$ une constante positive définie par la matrice S .

On a alors :

$$\lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\rho k b} = \frac{\lambda}{1 - e^{-\rho b}}$$

qui pour λ assez petit

$$\lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\rho k b} < \frac{1}{b\rho}$$

soit alors

$$(2.7) \quad \|z\| \leq Q_1 \bar{F} \bar{H} / b_p$$

d'où l'importance que b soit strictement positif.

Soit maintenant le système différentiel suivant

$$(2.8) \quad z' = \lambda S z + \lambda [H(t) e(t) + F(t)]$$

où $F(t)$ est ici une fonction presque périodique de Bohr.

(2.9)

D'après des résultats de travaux de Wexler [24 - 27] sur les systèmes d'équations différentielles linéaires en distributions R. Faure [25] a montré que si la valeur moyenne de la distribution $He + F$ est nulle alors la solution presque périodique généralisée de ce système (2.8) tend vers 0 uniformément avec λ .

2.2.- Résolution du système d'équations différentielles (2.5)

Le système d'équations différentielles (2.5) se présente sous la forme :

$$\dot{w} = \lambda S w + \lambda K G(w, t)$$

avec $K = I - \lambda R$

$$G(w, t) = f(\hat{q}, t) + g(\hat{q} + K^{-1}w, t) e(t) \\ + \Delta(t, K^{-1}w) - \lambda R P K^{-1}w.$$

Soit $w_0(t)$ la solution presque périodique généralisée du système d'équations différentielles.

$$(2.10) \quad \dot{w}_0 = \lambda S w_0 + \lambda K G(0, t)$$

$$G(0, t) = f(\tilde{q}, t) + g(\tilde{q}, t) e(t)$$

On peut poser w_0 comme la somme de deux solutions presque périodiques généralisées des systèmes.

$$(2.11) \quad \dot{w}_{0_1} = \lambda S w_{0_1} + \lambda G(0, t)$$

$$(2.12) \quad \dot{w}_{0_2} = \lambda S w_{0_2} - \lambda^2 R G(0, t)$$

Sachant que la valeur moyenne de $G(0, t)$ est nulle d'après (2.2) et l'hypothèse H_3 sur S on peut déduire que la solution w_{0_1} de (2.11) tend vers 0 avec λ . Ceci d'après la proposition (2.9).

Dans l'équation (2.12) en w_{0_2} la valeur moyenne de $\lambda^2 R G(w, t)$ n'est pas nulle mais la présence du terme λ^2 entraîne que w_{0_2} est du même type que w_{0_1} . D'où on peut conclure que :

$$w_0 = w_{0_1} + w_{0_2} \quad \text{tend uniformément vers } 0 \quad \text{avec } \lambda.$$

Pour l'étude de l'existence de la solution de l'équation (2.5) on utilise la méthode des approximations successives. On définit une suite $(w_n)_n$ de fonctions presque périodiques généralisées de B'_{pp} par la récurrence suivante.

$$(2.13) \quad w_{n+1} = \lambda S w_{n+1} + \lambda K G(w_n, t)$$

On initialise avec w_0 solution de (2.10).

On a alors :

$$w_{n+1} = \lambda \int_{-\infty}^t \gamma(t-s) K G(w_n, s) ds$$

La récurrence est parfaitement définie dans B'_{pp} . Montrons que cette suite $(w_n)_n$ converge dans B'_{pp} vers une limite w solution de (2.5).

2.3.- Convergence de la suite $(w_n)_n$

Soit $\mathcal{D}'(R)$ image de $\mathcal{D}(R)$ par l'application de B'_{pp} dans B'_{pp} qui à tout $u \in \mathcal{D}(R)$ lui fait correspondre $w = Ku$.

Supposons que $M(w_{n+1})$ et $M(w_n) \in \mathcal{D}'(R)$, majorons alors le terme $\|w_{n+1} - w_n\|$.

On a :

$$(2.14) \quad w_{n+1} - w_n = \lambda \int_{-\infty}^t \gamma(t-s) K [G_i(w_n, s) - G_i(w_{n-1}, s)] ds$$

a) Considérons le terme dans l'expression du second membre de (2.14) dû à

$$\Delta_i(K^{-1}w_n, t) - \Delta_i(K^{-1}w_{n-1}, t)$$

$$\Delta_i(K^{-1}w_n, t) - \Delta_i(K^{-1}w_{n-1}, t) = f_i(\tilde{q} + K^{-1}w_n, t)$$

$$-f_i(\tilde{q} + K^{-1}w_{n-1}, t) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\tilde{q}, t) [(K^{-1}w_n)_j - (K^{-1}w_{n-1})_j]$$

d'où sachant que $Q_1 = \max_{i,j,k} \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k} \right|$

$$\begin{aligned} & |\Delta_i(K^{-1}w_n, t) - \Delta_i(K^{-1}w_{n-1}, t)| \\ (2.15) \quad & \leq \frac{Q_1}{2} \sum_{j,l=1}^m |(K^{-1}w_n)_j - (K^{-1}w_{n-1})_j| \times |(K^{-1}w_n)_l - (K^{-1}w_{n-1})_l| \\ & \leq \frac{Q_1}{2} \times 2 m^2 R \overline{K^{-1}} \times m \overline{K^{-1}} \sum_{k=1}^m |w_{n_k} - w_{n-1_k}| \\ & \leq Q_1 m^3 \overline{K^{-1}}^2 R \sum_{k=1}^m |w_{n_k} - w_{n-1_k}| \end{aligned}$$

avec

$$\overline{K^{-1}} = \max_j \sup_t |K_{ij}^{-1}(t)|$$

Rappelons que $K = I - \lambda R$, R étant borné $\overline{K^{-1}}$ est de la forme $I - \lambda R$. ε un réel positif.

b) Majorons maintenant le terme provenant de $|g_i(\tilde{q} + \kappa^{-1} w_n, t) - g_i(\tilde{q} + \kappa^{-1} w_{n-1}, t)| dt$

on a

$$\begin{aligned} & |g_i(\tilde{q} + \kappa^{-1} w_n, t) - g_i(\tilde{q} + \kappa^{-1} w_{n-1}, t)| \\ & \leq Q_2 \sum_{j=1}^n |(\kappa^{-1} w_n)_j - (\kappa^{-1} w_{n-1})_j| \\ & \leq m Q_2 \bar{\kappa}^{-1} \sum_{k=1}^m |w_{n_j} - w_{n_{j-1}}| \end{aligned}$$

avec

$$Q_2 = \max_{ij} \left| \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right|$$

d'où

$$\begin{aligned} & \left| \lambda \int_{-\infty}^t \gamma(t-s) [g(\tilde{q} + \kappa^{-1} w_n, s) - g(\tilde{q} + \kappa^{-1} w_{n-1}, s)] e(s) ds \right| \\ & \leq m Q_2 \bar{\kappa}^{-1} \sum_{k=1}^m |w_{n_j} - w_{n_{j-1}}| \eta b^{-1} p^{-1} \bar{f} \end{aligned}$$

ceci pour $\lambda < \lambda_0$ d'après l'inégalité établit précédemment (2.7).

A partir des égalités (2.15 et 2.16) on peut déduire que :

$$\begin{aligned}
|w_{n+1,i} - w_{n,i}| &\leq [Q_3 m^3 \bar{K}^{-1} R + m Q_2 \bar{K}^{-1} \eta b^{-1} p^{-1} \bar{F}] \\
&\quad \times \left[\sum_{j=1}^m |w_{n,j} - w_{n-1,j}| \right] \\
&\leq m [Q_3 m^3 \bar{K}^{-1} R + m Q_2 \bar{K}^{-1} \eta b^{-1} p^{-1} \bar{F}] \|w_n - w_{n-1}\|
\end{aligned}$$

On a négligé les termes en λ^2 dûs au dernier terme de (2.14).
Soit finalement :

$$(2.17) \quad \|w_{n+1} - w_n\| \leq [A_1 R + A_2] \|w_n - w_{n-1}\|$$

avec

$$A_1 = m^4 Q_3 (1 + 2\epsilon \lambda)$$

$$A_2 = m Q_2 \frac{(1 + \lambda \epsilon)}{b_f} \eta \bar{F}$$

Rappelons que (2.17) n'est possible que si tous les $M(w_n) \in \mathcal{D}'(R)$ et pour λ assez petit.

Supposons que tous les termes de la récurrence jusqu'au rang n appartiennent à $\mathcal{D}'(R)$.

Appliquons alors les mêmes calculs au terme $w_{n+1} - w_0$ que pour (2.7). Nous obtenons :

$$\|w_{n+1} - w_0\| \leq R [A_1 R + A_2]$$

soit

$$(2.8) \quad \|w_{n+1}\| \leq A_1 R^2 + A_2 R + \|w_0\|$$

Il vient donc : si on suppose $w_{n-1}, w_n \in \mathcal{D}'(R)$ alors $w_{n+1} \in \mathcal{D}'(R)$ à la condition suivante :

$$(C 1) \quad \mathcal{L}(R) = A_1 R^2 + (A_2 - 1) R + \|w_0\| = 0$$

et $(w_n)_n$ convergera dans B'_{pp} à la condition suivante :

$$(C 2) \quad A_1 R + A_2 - 1 < 0$$

$$(C 3) \quad \text{Une condition nécessaire est : } A_2 - 1 < 0 .$$

Toute la récurrence est dans $\mathcal{D}'(R)$ si $\|w_0\| < R$ et (C-1) vérifiée. Nous notons que $\mathcal{L}(R)$ admet au moins une racine positive si

$$(A_2 - 1)^2 > 4 A_1 \|w_0\|$$

cette dernière inégalité est réalisable car $\|w_0\| \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow 0$

soit $\lambda < \lambda_1$.

En prenant $R = R_1$ la plus petite des racines de $\mathcal{L}(R)$ on a (C-1) qui est vérifiée et $\|w_0\| < R_1$, car $A_2 - 1 < 0$.

De même pour (C-2) : $R_1 < \frac{1-A_2}{A_1}$.

On peut noter que R_1 tend vers 0 avec λ .

Il résulte alors que $(w_n)_n$ converge uniformément vers une limite w solution de (2.5), tendant vers zéro avec λ .

La condition (C-3) pour S donnée :

$$mQ_2(1 + \lambda\epsilon) \frac{\eta \bar{f}}{b_p} < 1$$

est vérifiée dans le cas où :

- 1) La borne inf des $t_k - t_{k-1}$, b est assez grande.
- 2) L'amplitude $\eta \bar{f}$ des percussions est assez petite.

Nous pouvons finalement conclure sous les hypothèses $\mathcal{H}_i$ ($i=1,2,3$) et la condition (C-3) que l'équation (2.1) admet une solution presque périodique généralisée pour $\lambda < \inf(\lambda_0, \lambda_1)$ tendant vers la solution de synchronisation $\bar{q}$ de (2.2) quand λ tend vers zéro.

CHAPITRE 3

EQUATIONS DE SYNCHRONISATION ET STABILITE EN L'ABSENCE DE PERCUSSIONS

Dans ce qui suit nous nous proposons de calculer les équations de synchronisation, les solutions de synchronisation et d'étudier la stabilité au voisinage de chacun d'eux. On se limitera au cas où les excitations dûes aux percussions sont non paramétriques ou nulles. Nous utiliserons pour ceci le théorème de Kryloff N. Bougoliboff [26] qui est toujours valable dans le cas des percussions non paramétriques [18] .

Si les valeurs propres de la matrice S , valeur moyenne de la Jacobienne $P_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 4}$ sont toutes à parties réelles négatives, alors pour $|\lambda|$ assez petit la solution presque périodique du système (2.1) est asymptotiquement stable pour t tendant vers l'infini.

En effet si on considère le système (2.1) l'étude de la stabilité au voisinage d'une solution de synchronisation dépend de l'étude de l'approximation linéaire du système (2.5).

$$(2.18) \quad w' = \lambda S w$$

Nous cherchons une solution de (2.18) de la forme

$$w_i = \alpha_i e^{\lambda x t} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

d'où l'on déduit

$$(3.19) \quad \kappa \alpha_i = \sum_{j=1}^4 S_{ij} \alpha_j \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Pour avoir d'autres solutions que la solution triviale $\alpha_i = 0 \quad i=1, 2, 3, 4$ le déterminant du système précédent doit être nul. D'où l'équation de stabilité

$$(3.20) \quad |S - \kappa I| = 0$$

3.3.- POINTS DE SYNCHRONISATION

Rappelons que les fonctions $f_i(q, t) \quad i = 1, 2, 3, 4$ sont données en Annexe II.

Les équations de synchronisation (2.2) sont alors

$$\lambda a_2 \Omega q_2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos^2 \omega t \, dt = 2 \lambda a_2 \Omega q_2 = 0$$

$$\lambda a_2 \Omega q_1 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin^2 \Omega t \, dt = 2 \lambda a_2 \Omega q_1 = 0$$

$$\lambda \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left[q_4 \int_{-T}^T \cos^2 t \, dt + b_{444} q_4^3 \int_{-T}^T \cos^4 t \, dt \right]$$

$$= \lambda \left[q_4/2 + 3 q_4^3/8 \right] = 0$$

$$\lambda \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left[q_3 \int_{-T}^T \sin^2 t \, dt + b_{444} q_3^3 \int_{-T}^T \sin^4 t \, dt \right]$$

$$= \lambda \left[q_3/2 + 3 q_3^3/8 \right] = 0$$

d'où l'on tire deux points de synchronisations :

La solution nulle $\tilde{q}_{(0)} \equiv 0$

et la solution $\tilde{q}_{(1)} = (0, 0, e, e)$

avec

$$\rho = -4/3 b_{444}$$

Nous rappelons que b_{444} est négatif.

3.2.- Stabilité au voisinage de $\tilde{q}_{(0)} \equiv 0$

Nous donnons l'expression de la Jacobienne
en Annexe II.

$$P_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\hat{q}, t) \quad 1 \leq i, j \leq 4$$

Celle-ci devient en $\tilde{q}_{(0)} \equiv 0$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \sin^2 \Omega t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 \cos^2 \Omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 \sin^2 t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \cos^2 t \end{pmatrix}$$

On a alors $S = \overline{\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,t)}_{1 \leq i,j \leq 4}$

$$\begin{pmatrix} a_{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{4/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{4/2} \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit l'équation de stabilité.

$$\left(\frac{a_1}{2} - r\right)^2 \left(\frac{b_4}{2} - r\right)^2 = 0$$

soit alors :

$$r = a_1/2 < 0 \quad \text{et} \quad r = b_4/2 < 0$$

Donc la solution $\bar{q} \equiv 0$ est instable.

3.3.- Stabilité au voisinage de $\tilde{q}_{(1)}$

La matrice $P(\tilde{q}_{(1)}, t)$ se présente sous la forme

$$\begin{pmatrix} q_1 \alpha \sin^2 \Omega t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 \alpha \cos^2 \Omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$

avec p_{ij} $3 \leq i, j \leq 4$ donnés par

$$P_{33} = b_4 \sin^2 t + b_{444} \left[3\beta_1^2 \sin^4 t + \frac{3}{4} \beta_2^2 \sin^2 2t \right]$$

$$P_{34} = 2\beta_1 \beta_2 b_{444} \left[\cos^2 t \sin^2 t + \frac{\sin^2 2t}{2} \right]$$

$$P_{43} = P_{34}$$

$$P_{44} = b_4 \cos^2 t + b_{444} \left[3\beta_2^2 \cos^4 t + 3\beta_1^2 \frac{\sin^2 2t}{4} \right]$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} a_1 \Omega/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 \Omega/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} b_4 & \frac{3}{4} b_{444} \rho^2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} b_{444} \rho^2 & -\frac{3}{2} b_4 \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit l'équation caractéristique.

ce qui entraîne

$$r_1 = a_1/2 \quad \text{et} \quad r^2 + 3b_4 r + \frac{5}{4} b_4^2 = 0$$

soit alors :

$$r_2 = -5b_4/2 < 0$$

$$r_3 = -b_4/2 < 0$$

D'où le point $\tilde{q}_{(1)}$ est stable.

On peut noter que ce résultat correspond avec celui trouvé par Van der Beek et Van der Burgh [22] dans le cas où ils supposent $\Omega \neq 1$ ou $\Omega \neq \frac{1}{2}$ avec $\bar{\alpha} = O(1)$.

CONCLUSION

Dans cette partie on a étudié un système d'équations différentielles non linéaire régissant les mouvements de vibration d'un oscillateur à deux degrés de liberté placé dans un écoulement et soumis à des percussions.

Nous nous sommes placés dans le cas où le rapport ω_1/ω_2 des fréquences de l'oscillateur dans les deux directions est irrotationnel. Ceci nous a conduit à supposer les percussions presque périodiques puis à étudier le problème dans le cas des vibrations presque périodiques. Nous montrons alors l'existence d'une solution presque périodique généralisée pour $|\lambda|$ assez petit, et la borne inférieure des $t_k - t_{k-1}$ assez grande et l'amplitude des percussions assez petite. Ceci dans un cas général englobant notre problème initial. Cette solution tend vers la solution de synchronisation quand $|\lambda|$ tend vers zéro.



PARTIE III

Notations

m_i : masse du corps P_i .

r_i : distance OP_i du centre de gravité O au corps P_i .

d : côté du triangle équilatéral formé par les 3 corps.

α : angle formé par $\vec{OP}_1$ à l'horizontale.

$\beta = (\widehat{P_1 G P_2})$

$\gamma = (\widehat{P_1 G P_3})$

β_i : dérivé de β par rapport à r_i .

δ_i : dérivée de γ " " " r_i .

$q = (\alpha_1, r_1, r_2, r_3)$ coordonnées généralisées.

$\bar{q} = (\omega t, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$ valeur de q lorsque les trois corps forment un triangle équilatéral.

$q = \bar{q} + u \quad u = (\varepsilon, u_1, u_2, u_3)$.

$\vec{v} = -g \vec{\text{grad}} V \quad V$: énergie potentiel.

U : matrice (3×4) résultant du développement de $\vec{v}$.

G, M : matrices (3×4) .

$\bar{G}, \bar{M}$: matrices G, M pour $q = \bar{q}$.

ω : vitesse de rotation des 3 corps.

$T = \frac{2\pi}{\Omega}$: période des excitations.

ESSAI SUR UN CAS DANS LE PROBLEME DES TROIS CORPS

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

1.1.- Introduction

On considère trois particules matérielles de masse données, libres dans l'espace où elles constituent un système isolé s'attirant mutuellement selon la loi de Newton.

Nous n'envisagerons ici que le problème plan c'est-à-dire que les trois particules se déplacent dans le plan de leurs positions initiales. Par contre, on ne se limitera pas au cas du problème restreint où l'on considère que la masse d'une ou de deux particules est prépondérante par rapport à celles des autres.

Nous appellerons P_1 , P_2 et P_3 les trois particules, m_1 , m_2 et m_3 leurs masses. Soit O leur centre de gravité.

Posons alors :

$r_i = OP_i$ leurs distances respectives au centre de gravité O .

$d_{ij} = P_iP_j$ leurs distances respectives.

1.2.- Relation entre les r_i et d_{ij}

Exprimons dans ce paragraphe les différentes relations utilisées par la suite entre les distances r_i , d_{ij} et les masses m_i . $i = 1, 2, 3$.

Soit la fonction χ appliquée à un point N du plan telle que :

$$\chi(N) = \sum_{i=1}^3 m_i (NP_i)^2$$

On a alors la relation de Leibniz

$$\chi(N) = \left(\sum_{i=1}^3 m_i \right) NO^2 + \chi(O)$$

Appliquons cette relation respectivement à chaque point P_i .

$$(3.1) \quad m_2 P_1 P_2^2 + m_3 P_1 P_3^2 = \left(\sum_{i=1}^3 m_i \right) P_1 O^2 + \chi(O) .$$

$$(3.2) \quad m_1 P_2 P_1^2 + m_3 P_2 P_3^2 = \left(\sum_{i=1}^3 m_i \right) P_2 O^2 + \chi(O) .$$

$$(3.3) \quad m_1 P_3 P_1^2 + m_2 P_3 P_2^2 = \left(\sum_{i=1}^3 m_i \right) P_3 O^2 + \chi(O) .$$

Posons :

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

Multiplions les égalités (3.1, 3.2 et 3.3) respectivement par m_1 , m_2 et m_3 on a :

$$(3.4) \quad m_1 m_2 d_{12}^2 + m_1 m_3 d_{13}^2 = m_1 m r_1^2 + m_1 \chi(0)$$

$$(3.5) \quad m_1 m_2 d_{12}^2 + m_2 m_3 d_{23}^2 = m_2 m r_2^2 + m_2 \chi(0)$$

$$(3.6) \quad m_3 m_1 d_{13}^2 + m_3 m_2 d_{23}^2 = m_3 m r_3^2 + m_3 \chi(0)$$

En sommant ces trois égalités nous pouvons tirer :

$$\chi(0) = \frac{m_1 m_2 d_{12}^2 + m_1 m_3 d_{13}^2 + m_2 m_3 d_{23}^2}{m}$$

d'où l'on peut déduire les différents r_i et d_{ij} .

$$(3.8) \quad r_1^2 = \frac{m_2 d_{12}^2 + m_3 d_{13}^2 - \chi(0)}{m}$$

$$(3.9) \quad r_2^2 = \frac{m_1 d_{12}^2 + m_3 d_{23}^2 - \chi(0)}{m}$$

$$(3.10) \quad r_3^2 = \frac{m_1 d_{13}^2 + m_2 d_{23}^2 - \chi(0)}{m}$$

soit alors

$$r_1^2 = \frac{m_2(m_2+m_3) d_{12}^2 + m_3(m_3+m_2) d_{13}^2 - m_2 m_3 d_{23}^2}{m^2}$$

$$r_2^2 = \frac{m_1(m_1+m_3) d_{12}^2 + m_3(m_3+m_1) d_{23}^2 - m_1 m_3 d_{13}^2}{m^2}$$

$$r_3^2 = \frac{m_2(m_2+m_1) d_{23}^2 + m_1(m_1+m_2) d_{13}^2 - m_1 m_2 d_{12}^2}{m^2}$$

Dans le cas particulier où les trois particules se déplacent au sommet d'un triangle équilatéral de côté d alors les égalités précédentes deviennent :

$$(3.11) \quad r_1^2 = [m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3] (d/m)^2 = \bar{r}_1^2$$

$$(3.12) \quad r_2^2 = [m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3] (d/m)^2 = \bar{r}_2^2$$

$$(3.13) \quad r_3^2 = [m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2] (d/m)^2 = \bar{r}_3^2$$

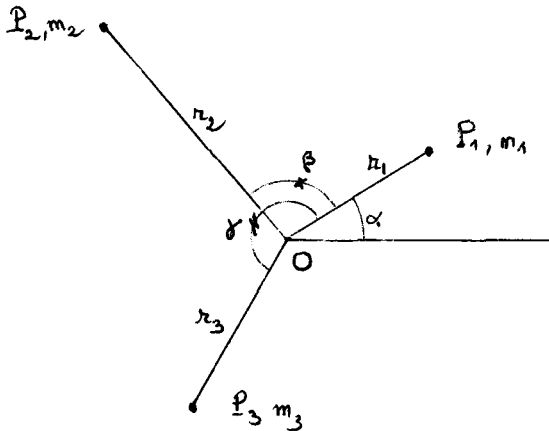
Dans ce cas on posera $r_i = \bar{r}_i$.

CHAPITRE 2

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU MOUVEMENT DES TROIS CORPS

2.1.- Equations de Lagrange

Nous supposons que le centre de gravité O est au repos par rapport à un repère absolu. Considérons le mouvement de ces trois corps par rapport à un repère centré en O .



L'énergie totale T et l'énergie potentielle U du système formé par les trois corps sont données par les formules suivantes :

$$2T = \sum_{i=1}^3 m_i (\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\alpha}_i^2)$$

$$U = -k \left[\frac{m_1 m_2}{d_{12}} + \frac{m_1 m_3}{d_{13}} + \frac{m_2 m_3}{d_{23}} \right]$$

où les r_i et α_i désignent les coordonnées polaires du point P_i , $i = 1, 2, 3$.
 k étant la constante de l'attraction universelle, qu'on posera égale à 1.

Le système étant à quatre degrés de liberté nous choisissons pour coordonnées généralisées (q_i , $i = 1, 2, 3$) α , r_1 , r_2 et r_3 .

T s'écrit :

$$2T = m_1 [\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\alpha}^2] + m_2 [\dot{r}_2^2 + r_2^2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_{12})^2] \\ + m_3 [\dot{r}_3^2 + r_3^2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_{12} + \dot{\theta}_{23})^2]$$

où θ_{12} et θ_{23} sont respectivement les angles $(P_1 \hat{O} P_2)$ et $(P_2 \hat{O} P_3)$.

on a alors

$$\theta_{12} = \arccos \left[\frac{r_1^2 + r_2^2 - d_{12}^2}{2r_1 r_2} \right] = \arccos \left[\frac{m_3^2 r_3^2 - m_2^2 r_2^2 - m_1^2 r_1^2}{2m_1 m_2 r_1 r_2} \right]$$

$$\theta_{23} = \arccos \left[\frac{r_3^2 + r_2^2 - d_{23}^2}{2r_3 r_2} \right] = \arccos \left[\frac{m_1^2 r_1^2 - m_2^2 r_2^2 - m_3^2 r_3^2}{2m_2 r_2 m_3 r_3} \right]$$

ceci d'après les égalités (3.8 et 3.10).

Les équations de Lagrange sont données par

$$(3.14) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right] = 0$$

$$(3.14i) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3$$

Posons $\beta = \theta_{12}$ et $\gamma = \theta_{12} + \theta_{23}$ et introduisons les différentes notations suivantes :

$$\beta_i = \frac{\partial \beta}{\partial x_i}$$

$$\gamma_i = \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}$$

$$\beta_{ij} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

Nous avons alors si on adopte la convention d'Einstein

$$\dot{\beta} = \beta_i \dot{x}_i$$

$$\dot{\gamma} = \gamma_i \dot{x}_i$$

(3.15)

$$\ddot{\beta} = \beta_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j + \beta_j \ddot{x}_j \quad \ddot{\gamma} = \gamma_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j + \gamma_j \ddot{x}_j$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{r}_i} &= \frac{\partial \rho}{\partial r_i} = \beta_i & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{r}_i} &= \frac{\partial \gamma}{\partial r_i} = \gamma_i \\
 \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial r_i} &= \beta_{ij} \dot{r}_j & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial r_i} &= \gamma_{ij} \dot{r}_j \\
 \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \rho}{\partial \dot{r}_i} \right] &= \beta_{ij} \dot{r}_j & \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \dot{r}_i} \right] &= \gamma_{ij} \dot{r}_j
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Ceci pour $i, j = 1, 2, 3$.

Les différentes expressions des β_i , γ_i sont données en Annexe III.

Considérons maintenant les équations de Lagrange. De la première d'entre elles on a :

$$\frac{dT}{d\alpha} = C$$

où C est une constante par rapport à t .

Après avoir développé tous les calculs en utilisant les relations (3.15) cette équation devient :

$$m_j \dot{r}_j^2 \alpha + \sum_i [m_2 r_2^2 \beta_i + m_3 r_3^2 \gamma_i] \dot{r}_i = C
 \tag{3.16.1}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

Les trois autres équations (14.i) de Lagrange en r_i s'écrivent respectivement :

$$m_1 \ddot{r}_1 + 2m_2 r_2 \dot{r}_2 [\dot{\alpha} + \beta_i \dot{r}_i] \beta_1 + m_2 r_2^2 [\ddot{\alpha} + \beta_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j +$$

$$+ \beta_j \ddot{r}_j] \beta_1 + 2m_3 r_3 \dot{r}_3 [\dot{\alpha} + \gamma_i \dot{r}_i] \gamma_1$$

(3.16.2)

$$+ m_3 r_3^2 [\ddot{\alpha} + \delta_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j + \delta_j \ddot{r}_j] \gamma_1$$

$$- m_1 r_1 \dot{\alpha}^2 = -m_1 r_1 \left[\frac{m_1 + m_2}{d_{12}^3} + \frac{m_1 + m_3}{d_{13}^3} - \frac{m_1}{d_{23}^3} \right]$$

$$m_2 \ddot{r}_2 + 2m_2 r_2 \dot{r}_2 [\dot{\alpha} + \beta_i \dot{r}_i] \beta_2 + m_2 r_2^2 [\ddot{\alpha} + \beta_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j + \beta_j \ddot{r}_j] \beta_2$$

(3.16.3)

$$+ 2m_3 r_3 \dot{r}_3 [\dot{\alpha} + \gamma_i \dot{r}_i] \gamma_2 + m_3 r_3^2 [\ddot{\alpha} + \delta_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j + \delta_j \ddot{r}_j] \gamma_2$$

$$- m_2 r_2 [\dot{\alpha} + \beta_i \dot{r}_i]^2 = -m_2 r_2 \left[\frac{m_1 + m_2}{d_{12}^3} + \frac{m_2 + m_3}{d_{23}^3} - \frac{m_2}{d_{13}^3} \right]$$

$$\begin{aligned}
& m_3 \ddot{r}_3 + 2m_2 r_2 \dot{r}_2 [\dot{\alpha} + \beta_i \dot{r}_i] \beta_3 + m_2 r_2^2 [\ddot{\alpha} + \beta_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j \\
& + \beta_j \ddot{r}_j] \beta_3 + 2m_3 r_3 \dot{r}_3 [\dot{\alpha} + \gamma_i \dot{r}_i] \gamma_3 \\
& + m_3 r_3^2 [\ddot{\alpha} + \gamma_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j + \gamma_j \ddot{r}_j] \gamma_3 - m_3 r_3 [\dot{\alpha} + \gamma_i \dot{r}_i]^2 \\
& = -m_3 r_3 \left[\frac{m_1 + m_3}{d_{13}^3} + \frac{m_2 + m_3}{d_{23}^3} - \frac{m_1}{d_{12}^3} \right]
\end{aligned}$$

Dans un but pratique nous présentons ces 3 dernières équations de Lagrange en r_i (3.16.2, 16.3 et 16.4) sous forme matricielle.

$$(3.17) \quad M \ddot{q} + 2\dot{\alpha} G \dot{q} = v(q) + f(q, \dot{q})$$

où M et G sont des matrices (3×4), v et f des fonctions vectorielles,
 $q = (\alpha, r_1, r_2, r_3)$

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

où

$$v_1 = -m_1 r_1 \left[\frac{m_1 + m_2}{d_{12}^3} + \frac{m_1 + m_3}{d_{13}^3} - \frac{m_1}{d_{23}^3} \right]$$

$$v_2 = -m_2 r_2 \left[\frac{m_1 + m_2}{d_{12}^3} + \frac{m_2 + m_3}{d_{23}^3} - \frac{m_2}{d_{13}^3} \right]$$

$$v_3 = -m_3 r_3 \left[\frac{m_1 + m_3}{d_{13}^3} + \frac{m_2 + m_3}{d_{23}^3} - \frac{m_3}{d_{12}^3} \right]$$

si on pose :

$$C_1 = - \left[2m_1 r_2 r_2^2 \beta_i \dot{r}_i + m_2 r_2^2 \beta_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j \right]$$

$$C_2 = -m_3 r_3^2 \delta_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j$$

alors

$$f_1 = C_1 \beta_1 + C_2 \delta_1$$

$$(3.18) \quad f_2 = C_1 \beta_2 + C_2 \delta_2 + m_2 r_2^2 \beta_i \dot{r}_i$$

$$f_3 = C_1 \beta_3 + C_2 \delta_3 + m_3 r_3^2 \beta_i \dot{r}_i$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \gamma_1^2 \beta_1 + m_3 \gamma_3^2 \delta_1 & m_1 + m_2 \gamma_2^2 \beta_1^2 + m_3 \gamma_3^2 \delta_1^2 & m_2 \gamma_2^2 \beta_1 \beta_2 + m_3 \gamma_3^2 \delta_1 \delta_2 & m_2 \gamma_2^2 \beta_1 \beta_3 + m_3 \gamma_3^2 \delta_1 \delta_3 \\ m_2 \gamma_2^2 \beta_2 + m_3 \gamma_3^2 \delta_2 & m_2 \gamma_2^2 \beta_1 \beta_2 + m_3 \gamma_3^2 \delta_1 \delta_2 & m_2 + m_2 \gamma_2^2 \beta_2^2 + m_3 \gamma_3^2 \delta_2^2 & m_2 \gamma_2^2 \beta_2 \beta_3 + m_3 \gamma_3^2 \delta_2 \delta_3 \\ m_2 \gamma_2^2 \beta_3 + m_3 \gamma_3^2 \delta_3 & m_2 \gamma_2^2 \beta_1 \beta_2 + m_3 \gamma_3^2 \delta_1 \delta_3 & m_2 \gamma_2^2 \beta_2 \beta_3 + m_3 \gamma_3^2 \delta_2 \delta_3 & m_3 + m_2 \gamma_2^2 \beta_3^2 + m_3 \gamma_3^2 \delta_3^2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -m_1 \gamma_1/2 & 0 & m_2 \gamma_2 \beta_1 & m_3 \gamma_3 \delta_1 \\ 0 & -m_2 \gamma_2/2 & 0 & -m_2 \gamma_2 \beta_3 + m_3 \gamma_3 \delta_3 \\ -m_2 \gamma_2/2 & -m_2 \gamma_2 \beta_1 & 0 & -m_2 \gamma_2 \beta_3 + m_3 \gamma_3 \delta_3 \\ -m_3 \gamma_3/2 & -m_3 \gamma_3 \delta_1 & m_2 \gamma_2 \beta_3 - m_3 \gamma_3 \delta_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Les expressions de G_{ij} et M_{ij} sont explicitées en détail en Annexe III.

2.2.- Equilibre relatif des trois particules et points de Lagrange

On remarque que si les trois particules forment un triangle équilatéral de côté d constant l'équation (3.16.1) devient :

$$(3.19) \quad \left[m_j \bar{r}_j^2 \right] \dot{\alpha} = C$$

d'où $\dot{\alpha}$ est une constante ω .

Les trois équations (3.16.2, 3.16.3 et 3.16.4) se réduisent respectivement aux équations suivantes pour $j = 1, 2$ puis 3.

$$-(m_j r_i) \left[\omega^2 - \frac{m_1 + m_2 + m_3}{d^3} \right] = 0$$

Ainsi on a rotation de la configuration en triangle dans son plan autour de son centre de gravité. La taille de celle-ci est fixée par la donnée de la vitesse de rotation $\omega = (m/d^3)^{1/2}$ et vis-versa. On a donc une infinité de solutions à ce problème. Dans un référentiel tournant à la vitesse ω chaque particule est au repos : les forces gravitationnelles et centrifuges se compensant mutuellement.

On montre [32-33-34] aussi qu'il existe une autre configuration dans laquelle les distances mutuelles des trois particules restent constantes : celles-ci demeurent alignées, la droite qui les joint tournant dans le plan du mouvement avec une vitesse ω constante autour du centre de gravité O fixe.

Dans le plan de rotation des particules si on fixe la position des particules P_1 et P_2 il existe deux positions possibles pour la particule P_3 dans le cas de la configuration en triangle. Ces dernières s'appellent positions de Lagrange L_4 et L_5 . Dans le cas de la configuration en ligne il existe trois positions possibles pour P_3 appelées positions de Lagrange L_1 , L_2 et L_3 .

CHAPITRE IIIEQUATIONS DIFFERENTIELLES DU MOUVEMENT VOISIN DES POINTS DE
LAGRANGE L_4 ET L_5 EXCITES PAR DES PERCUSSIONS3.1.- Equations du mouvement voisin de l'équilibre

Nous supposons maintenant que chacune des particules P_i est soumise à des forces percuSSIONNELLES $\vec{\tau}_i$ de la forme.

$$\vec{\tau}_i = \lambda m_i (K_1 + K_2 \mu_i) e(t)$$

où μ_i est définie plus loin. λ un paramètre petit.

$$e(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

K_1, K_2, T des constantes réelles. $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

Le système d'équations différentielles 3.16 s'écrit alors :

$$(3.21) \quad M\ddot{q} + 2\dot{q}G\dot{q} = v(q) + f(q, \dot{q}) + \tau(q, t)$$

Soit $\bar{q} = (\omega t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ les coordonnées généralisées de l'équilibre relatif de la configuration en triangle des trois particules. Les $\bar{x}_i$ sont donnés par les égalités (3.10, 3.11 et 3.12).

Posons :

$$(3.22) \quad q = \bar{q} + \mu$$

où

$$\mu = (\varepsilon, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

Exprimons l'équation en α (3.16.1) en tenant compte de (3.22),

posons :

$$B_i(\mu) = m_2 \mu_2^2 \beta_i + m_3 \mu_3^2 \delta_i$$

alors :

$$m_k (\bar{\mu}_k + \mu_k)^2 (\dot{\varepsilon} + \mu) + B_i(\mu + \bar{\mu}) \dot{\mu}_i = C$$

Sachant que $C = m_k \bar{\mu}_k^2 \omega$ d'après (3.19) et en développant
au premier ordre $B_i(\bar{\mu} + \mu)$ au voisinage de $\bar{\mu}$ nous obtenons :

$$(3.23) \quad m_k \bar{\mu}_k^2 \dot{\varepsilon} + 2m_k \bar{\mu}_k \omega \mu_k + B_i(\bar{\mu}) \dot{\mu}_i \\ = - \left[2m_k \bar{\mu}_k \mu_k \dot{\varepsilon} + m_k \mu_k^2 \omega + m_k \mu_k^2 \dot{\varepsilon} + \frac{\partial B_i(\bar{\mu} + \theta \mu)}{\partial \mu_k} \mu_k \dot{\mu}_i \right]$$

Considérons maintenant le système (3.21). Dans ce dernier les matrices M , G ainsi que les fonctions vectorielles v et f sont non linéaires en q et $\dot{q}$. Nous pouvons écrire alors :

$$(3.24) \quad M_{ij}(\bar{q} + \mu) = M_{ij}(\bar{q}) + \mu_k \frac{\partial M_{ij}}{\partial \mu_k}(\bar{q} + \theta \mu)$$

$$0 < \theta < 1$$

qu'on notera sous la forme :

$$M_{ij} = \bar{M}_{ij} + \mu M'_{ij}$$

de même

$$G_{ij} = \bar{G}_{ij} + \mu G'_{ij}$$

Nous n'exprimons ici que l'équation (16.2) du système (3.21).

Les deux dernières lui étant similaires.

Le terme $M\ddot{q}$

$$(3.25.1) \quad M_{ij} \ddot{q}_j = [\bar{M}_{ij} + \mu M'_{ij}] \ddot{u}_j \quad j \neq 1$$

Le terme $2\dot{\alpha} G \dot{q}$

$$2\dot{\alpha} G_{ij} q_j = 2\dot{\alpha} [G_{11}\dot{\alpha} + G_{13}\dot{u}_2 + G_{14}\dot{u}_3]$$

$$(3.25.2) \quad = 2\dot{\alpha} \left[-\frac{m_1 r_1}{2} \right] + 2\dot{\alpha} [G_{13}\dot{u}_2 + G_{14}\dot{u}_3]$$

$$= -m_1 (r_1 + \mu_1) (\omega + \dot{\epsilon})^2$$

$$+ 2(\omega + \dot{\epsilon}) \left\{ [\bar{G}_{13} + \mu G'_{13}] \dot{u}_2 + [\bar{G}_{14} + \mu G'_{14}] \dot{u}_3 \right\}$$

Le terme $N(q)$

$$\begin{aligned}
 v_i &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} = -m_i x_i \left[\frac{m_1 + m_2}{d_{12}^3} + \frac{m_1 + m_3}{d_{13}^3} - \frac{m_1}{d_{23}^3} \right] \\
 &= -\frac{\partial U}{\partial x_i}(\bar{x} + u) = - \left[\frac{\partial U}{\partial x_i}(\bar{x}) + u_j \frac{\partial U}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) + \frac{u_j u_k}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\bar{x}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{u_j u_k u_m}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_m}(\bar{x} + \theta u) \right]
 \end{aligned}$$

or

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\bar{x}) = m_i x_i \omega^2$$

et

$$u_j \frac{\partial U}{\partial x_i \partial x_j} = m_i \omega^2 u_i - u_j U_{ij}$$

il vient alors :

$$(3.25.3) \quad v_i = -m_i x_i \omega^2 - m_i \omega^2 u_i + u_j U_{ij} - \frac{u_j u_k}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} - \frac{u_j u_k u_m}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_m}(\bar{x} + \theta u)$$

Le terme du second membre f_1 donné par (3.18)

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_1(q, \dot{q}) = f_1(\bar{x} + u, \dot{u}) \\
 &= f_1(\bar{x}, 0) + u_j \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\bar{x}, 0) + \dot{u}_j \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_j}(\bar{x}, 0) \\
 &\quad + \frac{u_j u_k}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{x}, 0) + \frac{u_j \dot{u}_k}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial \dot{x}_k}(\bar{x}, 0) + \frac{\dot{u}_k \dot{u}_j}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_j}(\bar{x}, 0)
 \end{aligned}$$

or d'après (3.18) tous les termes de cette égalité sont nuls sauf $\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} f_1(\bar{x}, 0)$

posons $\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} f_1(\bar{x}, 0) = f_{ijk}$ alors

$$(3.25.4) \quad f_1(q, \dot{q}) = \frac{\dot{x}_j \dot{x}_k}{2} f_{ijk}$$

La première équation du système (3.21) s'écrit finalement en utilisant les différentes égalités (3.25.i).

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} \ddot{E} + \bar{M}_{1j+1} \ddot{u}_j - 2\omega m_1 \bar{x}_1 \dot{E} + 2\omega [\bar{G}_{13} \dot{u}_2 + \bar{G}_{14} \dot{u}_3] \\ - \mu_j U_{j+1} = - \frac{\mu_j \mu_k}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x_1 \partial x_k \partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\mu_j \mu_k \mu_m}{6} \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 \partial x_k \partial x_j \partial x_m}(\bar{x} + \theta \mu) \\ (3.26) \quad - \mu M'_{1j+1} \ddot{u}_j - \mu M'_{11} \ddot{E} + m_1 \dot{E}^2 [\bar{x}_1 + \mu_1] + 2\omega m_1 \dot{E} \mu_1 \\ - 2\omega [\mu G'_{13} \dot{u}_2 + \mu G'_{14} \dot{u}_3] - 2\dot{E} [\dot{u}_2 (\bar{G}_{13} + \mu G'_{13}) \\ + \dot{u}_3 (\bar{G}_{14} + \mu G'_{14})] + \frac{\dot{x}_j \dot{x}_k}{2} f_{ijk} + \lambda m_1 (K_1 + K_2 \mu_1) T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \end{aligned}$$

(nous rappelons que nous adoptons ici la convention d'Einstein sur $m_{ij,k} = 1, 2, 3$).

Il convient de préciser que les différentes grandeurs constantes $\bar{M}_{ij}$, M_{ij} , $\bar{G}_{ij}$, G_{ij} , U_{ij} sont explicitées en Annexe III. Devant la complexité des calculs on a été contraint de les exécuter à l'aide d'un logiciel de calcul formel MACSYMA.

CHAPITRE V

4.1.- Hypothèses

Les équations en μ obtenues à l'issue du chapitre précédent étant très compliquées nous adoptons des hypothèses simplificatrices : nous supposons les termes du second membre non linéaires en $\dot{\mu}$ et $\ddot{\mu}$ nuls. Nous considérerons alors que les 3 corps oscillent autour de la position d'équilibre tout en conservant des configurations en triangle équilatéral. Ces dernières se déduisant de la position d'équilibre par une homothétie de centre O et de coefficient $x(t)$.

Il est alors aisé de voir que :

$$E = 0 \quad \text{et} \quad r_i = \bar{r}_i (1 + x(t))$$

soit

$$\mu_i = \bar{\mu}_i x(t)$$

L'équation (3.26) se réduit à :

$$\begin{aligned} & \bar{M}_{ij+1} \bar{r}_j \ddot{x} + 2\omega [\bar{G}_{13} \bar{r}_2 + \bar{G}_{14} \bar{r}_3] \dot{x} - U_{ij+1} \bar{r}_j x \\ &= - \frac{\lambda_j \lambda_k}{2} \frac{\partial^3 U(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k} - \frac{\lambda_j \lambda_k \lambda_m}{6} \frac{\partial^4 U(\bar{x} + \theta \mu)}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k \partial x_m} + m_1 \lambda (K_1 + K_2 \mu_1) e(t) \end{aligned}$$

$$0 < \theta < 1$$

On obtient aussi deux équations similaires provenant des deux dernières équations de Lagrange en x_2 et x_3 , mais dans ce qui suit nous nous limitons à l'étude d'une équation générale de la forme :

$$(3.27) \quad \ddot{x} + 2c\dot{x} + \omega_0^2 x = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \lambda(1 + c_1 x) e(t)$$

où a_2, a_3, c, c_1 sont des constantes strictement positives.

4.2.- Existence de la solution périodique de l'équation différentielle (3.27)

Nous nous proposons de montrer qu'il existe une solution $x(t)$ périodique de période T de l'équation précédente, ceci pour $|\lambda|$ suffisamment petit.

Nous utiliserons dans ce cas une méthode de résolution des équations non linéaires excitées par des percussions développées par R. Faure [16] et Ennassef [30].

Nous nous plaçons dans l'espace de Banach $B(T)$ des séries absolument convergentes et T -périodiques.

$$B(T) = \left\{ x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{in\omega t}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n| < +\infty \text{ et } \bar{x}_n = x_{-n} \right\}$$

$$\text{On posera} \quad \|x(t)\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|.$$

Il convient de préciser que si $y(t) \in B(T)$ alors :

$$\|x, y\| \leq \|x\| \|y\|$$

D'après (1) et (2) nous pouvons représenter la distribution

$$T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \text{par sa série de Fourier soit :}$$

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\Omega t}$$

ainsi que le terme $x(t) e(t)$ par

$$x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\Omega t}$$

si l'on suppose que $x(t)$ est T -périodique.

Nous définissons la récurrence suivante :

$$(3.28) \quad \begin{cases} \ddot{x}_n + 2c \dot{x}_n + \omega_0^2 x_n = a_2 x_{n-1}^2 + a_3 x_{n-1}^3 + \lambda (1 + c_1 x_{n-1}) e(t) \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

avec

$$x_{n-1}, x_n \in B(T)$$

Nous exprimons les termes x_{n-1} , x_n et $a_2 x_{n-1}^2 + a_3 x_{n-1}^3$ par leur développement. On a :

$$x_{n-1} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{p_{n-1}} e^{ip\Omega t}$$

$$x_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{p_n} e^{ip\Omega t}$$

$$a_2 x_{n-1}^2 + a_3 x_{n-1}^3 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_{p_{n-1}} e^{ip\Omega t}$$

Remplaçons ces expressions dans l'équation (3.28). En égalisant les termes de même rang p on obtient l'égalité suivante :

$$(\omega_o^2 - p^2 \Omega^2 + 2cp\Omega i) \alpha_{pn} = P_{pn-1} + \lambda (1 + c_1 x_{n-1}(0))$$

soit alors :

$$(3.29) \quad \alpha_{pn} = e_p \left\{ P_{pn-1} + \lambda (1 + x_{n-1}(0)) \right\}$$

avec

$$(3.30) \quad e_p = (\omega_o^2 - p^2 \Omega^2 + 2cp\Omega i)^{-1}$$

Il est alors aisé de montrer que pour tout p

$$(3.31) \quad |e_p| \leq e \quad e = \frac{1}{2c\sqrt{\omega_o^2 - c^2}} \quad \text{si } c \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_o$$

$$e = \frac{1}{\omega_o} \quad \text{si } c > \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_o$$

Il résulte des égalités (3.29, 3.30, 3.31) que

$$\|x_n\| \leq \rho \left\{ a_2 \|x_{n-1}^2\| + a_3 \|x_{n-1}^3\| \right\} + |\lambda| \eta (1 + c_1 x(0))$$

où η est la norme de la série absolument convergente de terme général

$$(\omega_0^2 - n^2 \Omega^2 + 2cn\Omega i)^{-1} e^{in\Omega T}. \text{ Soit alors :}$$

$$(3.32) \quad \|x_n\| \leq \rho \left\{ a_2 \|x_{n-1}\|^2 + a_3 \|x_{n-1}\|^3 \right\} + |\lambda| \eta (1 + c_1 x(0))$$

Montrons que la suite $(x_n)_n$ définie par (3.28) converge dans $B(T)$ vers une limite x solution de (3.27) ceci pour $|\lambda|$ suffisamment petit.

Partant de $x_0 = 0$ nous posons :

$$l = 2|\lambda|\eta$$

Supposons alors que $\|x_{n-1}\| < l$. On a d'après (3.32)

$$\|x_n\| \leq \rho \left\{ a_3 l^3 + a_2 l^2 \right\} + |\lambda| \eta (1 + c_1 l)$$

choisissons $|\lambda| < \inf(\lambda_1, \lambda_2)$

avec

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{24 \rho a_3 \eta^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{6(2a_2 \rho + c_1) \eta}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \|x_n\| &\leq \rho (8a_3 \eta^2 \lambda_1^2 + 4a_2 \eta \lambda_2) \lambda \eta + \lambda \eta (1 + 2c_1 \lambda_2 \eta) \\ &\leq \left[\frac{8\rho a_3 \eta^2}{24\rho a_3 \eta^2} + \frac{4\rho a_2 \eta + 2c_1 \eta}{6(2\rho a_2 + c_1) \eta} + 1 \right] |\lambda| \eta \\ &= \frac{5}{3} \lambda \eta < 2|\lambda| \eta \end{aligned}$$

il vient donc pour tout n

$$(3.33) \quad \|x_n\| < 2|\lambda| \eta$$

Considérons maintenant le terme $x_{n+1} - x_n$. On a d'après (3.29)

$$x_{n+1} - x_n = \rho [P_n - P_{n-1}] + \lambda c_1 [x_n(0) - x_{n-1}(0)]$$

ce qui entraîne :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \rho \left[a_3 \|x_n^3 - x_{n-1}^3\| + a_2 \|x_n^2 - x_{n-1}^2\| \right. \\ \left. + |\lambda| \eta c_1 \|x_n(o) - x_{n-1}(o)\| \right]$$

d'où l'on déduit en utilisant (3.33)

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq [3\rho a_3 \lambda^2 + 2a_2 \rho \lambda + |\lambda| \eta c_1] \|x_n - x_{n-1}\|$$

or

$$12\rho a_3 \lambda^2 \eta^2 + (4\rho a_2 + 2c_1)|\lambda|\eta \\ \leq 12\rho a_3 \eta^2 \lambda_1^2 + (4\rho a_2 + 2c_1)\eta \lambda_2 \\ = \frac{12\rho a_3 \eta^2}{24\rho a_3 \eta^2} + \frac{(4\rho a_2 + 2c_1)\eta}{6(2\rho a_2 + c_1)\eta} = \frac{5}{6} < 1$$

d'où la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans le Banach $B(T)$. Donc si nous choisissons $\lambda < \inf(\lambda_1, \lambda_2)$ la suite $(x_n)_n$ converge vers la solution x de l'équation (3.27) dans $B(T)$.

CONCLUSION

Dans cette partie nous avons établi les équations d'un mouvement voisin des positions d'équilibre relatifs dans une configuration en triangle des trois corps s'attirant mutuellement selon la loi de Newton et soumis à des percussions périodiques agissant simultanément sur ces derniers. On aboutit à un système de quatre équations différentielles non linéaires.

Dans un deuxième temps on s'est limité à l'étude d'un point de vue mathématique une équation à une dimension. On montre alors l'existence d'une solution périodique de cette dernière, ceci pour $|\lambda|$ suffisamment petit.

ANNEXES

ET

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE I

Calcul de l'équation caractéristique dans le cas $A = -\bar{K}$.

Cette équation est équivalente à une équation de la forme*

$$(A \text{ I.1}) \quad \begin{vmatrix} \alpha - a & \varepsilon \delta & -\varepsilon \eta & \eta \\ \varepsilon \delta & -\alpha - a & -\eta & -\varepsilon \eta \\ \varepsilon \eta & \eta & k - d & 0 \\ -\eta & \varepsilon \eta & 0 & -d \end{vmatrix} = 0$$

où $\alpha = \frac{\omega \Theta_2}{4 L_0^2} \quad a = a_0 + a_1 = \frac{\eta}{L_0} + e/2 L_0^2$

* La signification des grandeurs intermédiaires notées par α , δ , a , η , d et k se limite à cette Annexe uniquement.

$$S = - \frac{\omega \vartheta_1}{4L_0^2}$$

A.I.2

$$\eta = \omega q_1 / 8IL_0$$

$$k = -A\omega / 2I$$

$$d = r / 2I$$

ϵ vaut = 1 pour le premier
point de synchronisation
= -1 pour le second

pour $\epsilon = 1$ l'égalité (A.I.1) est équivalente à :

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha-a}{\eta} & \frac{S}{\eta} & -1 & 1 \\ \frac{S}{\eta} & -\frac{(\alpha+a)}{\eta} & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{k-d}{\eta} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -\frac{d}{\eta} \end{vmatrix} = 0$$

après quelques transformations celle-ci devient :

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha - a + s}{\eta} & -\frac{\alpha - a + s}{\eta} & -2 & 0 \\ -\frac{(ds+1)}{\eta} & \frac{d}{\eta} \frac{(\alpha+a)}{\eta} + 1 & \frac{d}{\eta} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{k-d}{\eta} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

où $d \neq 0$

soit encore :

$$\begin{vmatrix} 2\alpha/\eta & -\frac{\alpha - a + s}{\eta} & -2 \\ -\left[\frac{ds}{\eta^2} + 1 + \frac{d(\alpha+a)}{\eta^2} + 1\right] & \frac{d(\alpha+a)}{\eta^2} + 1 & \frac{d}{\eta} \\ 0 & 1 & \frac{k-d}{\eta} \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'équation suivante :

$$2 \frac{\alpha}{\eta} \left\{ \left[\frac{d}{\eta^2} (\alpha + a) + 1 \right] \left[\frac{k-d}{\eta} \right] - \frac{d}{\eta} \right\} \\ + \left[\frac{dS}{\eta^2} + 2 + \frac{d}{\eta^2} (\alpha + a) \right] \left\{ \left(\frac{k-d}{\eta^2} \right) (-\alpha - a + S) + 2 \right\} = 0$$

qu'on peut écrire après avoir développé tous les termes :

$$\alpha^2 d^2 - k \alpha^2 d + [4\eta^2 + 2a_0(-k)] \alpha d + [\alpha_0^2 - (\alpha^2 + S^2)] d^2 \\ + 2a_0 \alpha d^2 + [-k \alpha_0^2 + 4a_0 \eta^2 + \alpha^2 k + k S^2] d \\ + [-2k \eta^2] \alpha + [2kS + 4\eta^2 - 2ka_0] \eta^2 = 0$$

Remplaçons les différents termes par leurs valeurs respectives (A.I.2). On a finalement l'équation caractéristique suivante :

$$J_0 x^4 + J_1 x^3 + J_2 x^2 + J_3 x + J_4 = 0$$

où

$$J_0 = \frac{1}{4 I_0^2 L_0^2}$$

$$J_1 = \frac{1}{4 I_0^2 L_0^2} \left[\rho / L_0 + A \omega \right]$$

$$J_2 = \frac{1}{16 (I_0 L_0)^2} \left[\frac{R \omega^2}{4 I_0 L_0} + 4 \frac{A \omega}{L_0} \rho + \rho^2 \frac{1}{L_0^2} - \frac{1}{4 L_0^2} \left(\frac{2 \omega^2}{R^2 \omega^2} + \frac{R^4 \omega^2}{(16 I A)^2} \right) \right]$$

$$J_3 = \frac{1}{4^3 I_0^2 L_0^4} \left\{ A \omega \left[4 \rho^2 - \frac{2 \omega^2}{R^2 \omega^2} - \frac{R^4 \omega^4}{(16 I A)^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{\rho R^2 \omega^2}{2 I_0} + \frac{A \omega^3 R L_0}{2 I_0} \right\}$$

$$J_4 = \frac{1}{256 (I_0 L_0)^2} \left[A \omega^3 \rho I_0 R^2 + \frac{3 R^4 \omega^4}{32} \right]$$

ANNEXE II

Expressions des $f_i(q, t)$ $1 \leq i \leq 4$.

$$\begin{aligned}
 f_1(q, t) = & - \left\{ a_0 + a_2 \Omega [-q_1 \sin \Omega t + q_2 \cos \Omega t] + [-q_3 \sin t + q_4 \cos t] \right. \\
 & + a_{22} \Omega^2 [q_1^2 \sin 2\Omega t + q_2^2 \cos^2 \Omega t - q_1 q_2 \sin 2\Omega t] \\
 & + a_{44} [q_3^2 \sin^2 t + q_4^2 \cos^2 t - q_3 q_4 \sin 2t] \\
 & + a_{24} \Omega [q_1 q_3 \sin t \sin \Omega t - q_1 q_4 \cos t \sin \Omega t - q_2 q_3 \sin t \cos \Omega t + q_2 q_4 \cos t \cos \Omega t] \\
 & + a_{444} [-q_3^3 \sin^3 t + q_4^3 \cos^3 t - q_3 q_4^2 (\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t) \\
 & \left. + q_3^2 q_4 (\sin^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t) \right\} \frac{\cos \Omega t}{\Omega}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(q, t) = & \left\{ a_0 + a_2 \Omega [-q_1 \sin \Omega t + q_2 \cos \Omega t] + [-q_3 \sin t + q_4 \cos t] \right. \\
 & + a_{22} \Omega^2 [q_1^2 \sin 2\Omega t + q_2^2 \cos^2 \Omega t - q_1 q_2 \sin 2\Omega t] \\
 & + a_{44} [q_3^2 \sin^2 t + q_4^2 \cos^2 t - q_3 q_4 \sin 2t] \\
 & + a_{24} \Omega [q_1 q_3 \sin t \sin \Omega t - q_1 q_4 \cos t \sin \Omega t - q_2 q_3 \sin t \cos \Omega t + q_2 q_4 \cos t \cos \Omega t] \\
 & + a_{444} [-q_3^3 \sin^3 t + q_4^3 \cos^3 t - q_3 q_4^2 (\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t) \\
 & \left. + q_3^2 q_4 (\sin^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t) \right\} \frac{\sin \Omega t}{\Omega}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(q, t) = & - \left\{ b_0 + b_2 \Omega [-q_1 \sin \Omega t + q_2 \cos \Omega t] + [-q_3 \sin t + q_4 \cos t] \right. \\
& + b_{22} \Omega^2 [q_1^2 \sin^2 \Omega t + q_2^2 \cos^2 \Omega t - q_1 q_2 \sin 2\Omega t] \\
& + b_{44} [q_3^2 \sin^2 t + q_4^2 \cos^2 t - q_3 q_4 \sin 2t] \\
& + b_{24} \Omega [q_1 q_3 \sin t \sin \Omega t - q_1 q_4 \cos t \sin \Omega t - q_2 q_3 \sin t \cos \Omega t + q_2 q_4 \cos t \cos \Omega t] \\
& + b_{444} [-q_3^3 \sin^3 t + q_4^3 \cos^3 t - q_3 q_4^2 (\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t) \\
& \left. + q_3^2 q_4 (\sin 2t \sin t + \sin^2 t \cos t) \right\} \cos t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4(q, t) = & \left\{ b_0 + b_2 \Omega [-q_1 \sin \Omega t + q_2 \cos \Omega t] + [-q_3 \sin t + q_4 \cos t] \right. \\
& + b_{22} \Omega^2 [q_1^2 \sin^2 \Omega t + q_2^2 \cos^2 \Omega t - q_1 q_2 \sin 2\Omega t] \\
& + b_{44} [q_3^2 \sin^2 t + q_4^2 \cos^2 t - q_3 q_4 \sin 2t] \\
& + b_{24} \Omega [q_1 q_3 \sin t \sin \Omega t - q_1 q_4 \cos t \sin \Omega t - q_2 q_3 \sin t \cos \Omega t + q_2 q_4 \cos t \cos \Omega t] \\
& + b_{444} [-q_3^3 \sin^3 t + q_4^3 \cos^3 t - q_3 q_4^2 (\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t) \\
& \left. + q_3^2 q_4 (\sin 2t \sin t + \sin^2 t \cos t) \right\} \sin t.
\end{aligned}$$

Expressions des $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(q, t)$ $1 \leq i, j \leq 4$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = - \left\{ -q_2 \Omega \sin \Omega t + a_{22} \Omega^2 [2q_1 \sin^2 \Omega t - q_2 \sin 2\Omega t] \right. \\ \left. + a_{24} \Omega [q_3 \sin t \sin \Omega t - q_4 \cos t \sin \Omega t] \right\} \sin \Omega t$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_2} = - \left\{ q_2 \Omega \cos \Omega t + a_{22} \Omega^2 [2q_2 \cos^2 \Omega t - q_1 \sin 2\Omega t] \right. \\ \left. + a_{24} \Omega [-q_3 \sin t \cos \Omega t + q_4 \cos t \cos \Omega t] \right\} \sin \Omega t$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_3} = - \left\{ -a_4 \sin t + a_{44} [2q_3 \sin^2 t - q_4 \sin 2t] \right. \\ \left. + a_{24} \Omega [q_1 \sin t \sin \Omega t - q_2 \sin t \cos \Omega t] \right. \\ \left. + a_{444} [-3q_3^2 \sin^3 t - q_4^2 (\cos^2 t \sin t + \sin 2t \cos t) \right. \\ \left. + 2q_3 q_4 (\sin 2t \sin t + \sin^2 t \cos t) \right] \right\} \sin \Omega t$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_4} = - \left\{ a_4 \cos t + a_{44} [2q_4 \cos^2 t - q_3 \sin 2t] \right. \\ \left. + a_{24} \Omega [-q_1 \cos t \sin \Omega t + q_2 \cos t \cos \Omega t] \right. \\ \left. + a_{444} [3q_4^2 \cos^3 t - 2q_3 q_4 (\cos^2 t \sin t + \sin 2t \cos t) \right. \\ \left. + q_3^2 (\sin 2t \sin t + \sin^2 t \cos t) \right] \right\} \sin \Omega t$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_1} = \left\{ -a_{12} \Omega \sin \Omega t + a_{22} \Omega^2 [2q_1 \sin^2 \Omega t - q_2 \sin 2\Omega t] \right. \\ \left. + a_{24} \Omega [q_3 \sin t \sin \Omega t - q_4 \cos t \sin \Omega t] \right\} \cos \Omega t$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_2} = \left\{ a_{22} \Omega \cos \Omega t + a_{22} \Omega^2 [2q_2 \cos^2 \Omega t - q_1 \sin 2\Omega t] \right. \\ \left. + a_{24} \Omega [-q_3 \sin t \cos \Omega t + q_4 \cos t \cos \Omega t] \right\} \cos \Omega t$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_3} = \left\{ -a_{44} \sin t + a_{44} [2q_3 \sin^2 t - q_4 \sin 2t] \right. \\ \left. + a_{24} \Omega [q_1 \sin t \sin \Omega t - q_2 \sin t \cos \Omega t] \right. \\ \left. - a_{44} [3q_3^2 \sin^3 t + q_4^2 (\cos^2 t \sin t + \sin 2t \cos t) \right. \\ \left. + 2q_3 q_4 (\sin 2t \sin t + \sin^2 t \cos t)] \right\} \cos \Omega t$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_4} = \left\{ a_{44} \cos t + a_{44} [2q_4 \cos^2 t - q_3 \sin 2t] \right. \\ \left. + a_{24} \Omega [-q_1 \cos t \sin \Omega t + q_2 \cos t \cos \Omega t] \right. \\ \left. + a_{44} [3q_4^2 \cos^3 t - 2q_3 q_4 (\cos^2 t \sin t + \sin 2t \cos t) \right. \\ \left. + q_3^2 (\sin 2t \sin t + \sin^2 t \cos t)] \right\} \cos \Omega t$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_1} = - \left\{ -b_2 \Omega \sin \Omega t + b_{22} \Omega^2 [2q_1 \sin^2 \Omega t - q_2 \sin 2\Omega t] \right. \\ \left. + b_{24} \Omega [q_3 \sin t \sin \Omega t - q_4 \cos t \sin \Omega t] \right\} \sin t$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_2} = - \left\{ b_2 \Omega \cos \Omega t + b_{22} \Omega^2 [2q_2 \cos^2 \Omega t - q_1 \sin 2\Omega t] \right. \\ \left. + b_{24} \Omega [-q_3 \sin t \cos \Omega t + q_4 \cos t \cos \Omega t] \right\} \sin t$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_3} = - \left\{ -b_4 \sin t + b_{44} [2q_3 \sin^2 t - q_4 \sin 2t] \right. \\ \left. + b_{24} \Omega [q_1 \sin t \sin \Omega t - q_2 \sin t \cos \Omega t] \right. \\ \left. + b_{444} [-3q_3^2 \sin^3 t - q_4^2 (\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t)] \right. \\ \left. + 2q_3 q_4 (\sin 2t \sin t + \sin^2 t \cos t) \right\} \sin t$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_4} = - \left\{ b_4 \cos t + b_{44} [2q_4 \cos^2 t - q_3 \sin 2t] \right. \\ \left. + b_{24} \Omega [-q_1 \cos t \sin \Omega t + q_2 \cos t \cos \Omega t] \right. \\ \left. + b_{444} [3q_4^2 \cos^3 t - 2q_3 q_4 (\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t)] \right. \\ \left. + q_3^2 (\sin 2t \sin t + \sin^2 t \cos t) \right\} \sin t$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial u_1} = \left\{ -\Omega \sin \Omega t + \Omega^2 [2q_1 \sin^2 \Omega t - q_2 \sin 2\Omega t] \right. \\ \left. + \Omega [q_3 \sin t \sin \Omega t - q_4 \cos t \sin \Omega t] \right\} \cos t$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial u_2} = \left\{ \Omega \cos \Omega t + \Omega^2 [2q_2 \cos^2 \Omega t - q_1 \sin 2\Omega t] \right. \\ \left. + \Omega [-q_3 \sin t \cos \Omega t + q_4 \cos t \cos \Omega t] \right\} \cos t$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial u_3} = \left\{ -\sin t + [2q_3 \sin^2 t - q_4 \sin 2t] \right. \\ \left. + \Omega [q_1 \sin t \sin \Omega t - q_2 \sin t \cos \Omega t] \right. \\ \left. + [-3q_3^2 \sin^3 t - q_4^2 (\cos^2 t \sin t + \sin t \cos t) \right. \\ \left. + 2q_3 q_4 (\sin 2t \sin t + \sin^2 t \cos t) \right] \right\} \cos t$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial u_4} = \left\{ \cos t + [2q_4 \cos^2 t - q_3 \sin 2t] \right. \\ \left. + \Omega [-q_1 \cos t \sin \Omega t + q_2 \cos t \cos \Omega t] \right. \\ \left. + [3q_4^2 \cos^3 t - 2q_3 q_4 (\cos^2 t \sin t + \sin 2t \cos t) \right. \\ \left. + q_3^2 (\sin 2t \sin t + \sin^2 t \cos t) \right] \right\} \cos t$$

ANNEXE III

Expressions de β_i , γ_i $i=1,2,3$.

$$\beta_1 = \frac{m_1^2 r_1^2 - m_2^2 r_2^2 - m_3^2 r_3^2}{r_1 \Pi^{1/2}}$$

$$\beta_2 = \frac{-m_1^2 r_1^2 + m_2^2 r_2^2 + m_3^2 r_3^2}{r_2 \Pi^{1/2}}$$

$$\beta_3 = \frac{-2 m_3^2 r_3}{\Pi^{1/2}}$$

$$\gamma_1 = \frac{-m_1^2 r_1^2 - m_2^2 r_2^2 + m_3^2 r_3^2}{r_1 \Pi}$$

$$\gamma_2 = \frac{2 m_2^2 r_2}{\Pi^{1/2}}$$

$$\gamma_3 = \frac{m_1^2 r_1^2 - m_2^2 r_2^2 - m_3^2 r_3^2}{r_3 \Pi^{1/2}}$$

où Π est donnée par

$$\Pi = (m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3) (m_1 r_1 + m_2 r_2 - m_3 r_3) (m_1 r_1 - m_2 r_2 + m_3 r_3) (-m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3)$$

Expressions des M_{ij} de la matrice M .

$$M_{11} = \left[(m_3 - m_2) m_2 m_3 r_2^2 r_3^2 + m_2 r_2^2 (m_1 r_1^2 - m_2 r_2^2) + m_3 r_3^2 (m_3 r_3^2 - m_1 r_1^2) \right] / r_1 \pi^{1/2}$$

$$M_{12} = m_1 + \left[(m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) (m_1 r_1^2 + m_3 r_3^2 - m_2 r_2^2)^2 + 4 m_3 r_3^2 m_1^4 r_1^4 \right] / r_1 \pi$$

$$M_{21} = M_{13} = \left[(m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) (m_3 r_3^2 - m_2 r_2^2) (m_3 r_3^2 + m_2 r_2^2 - m_1 r_1^2) \right. \\ \left. + m_4 r_1^2 m_3 r_3^2 (-3 m_1 r_1^2 + 3 m_3 r_3^2 - m_2 r_2^2) \right] / r_1 r_2 \pi$$

$$M_{32} = M_{24} = \frac{-2 (m_1 r_1^2 + m_3 r_3^2 - m_2 r_2^2) [m_1 r_1^2 m_3 r_3^2 + m_3^2 r_3^2 (m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2)]}{r_1 r_3 \pi}$$

$$M_{21} = \left[m_2 r_2^2 (m_3 r_3^2 + m_2 r_2^2 - m_1 r_1^2) + 2 m_3^3 r_3^4 \right] / r_2 \pi^{1/2}$$

$$M_{23} = m_2 + \left[m_2 r_2^2 (m_3 r_3^2 + m_2 r_2^2 - m_1 r_1^2)^2 + 4 m_3 r_3^2 m_2^4 r_2^4 \right] / r_2^2 \pi$$

$$M_{33} = M_{44} = 2 (m_2 + m_3) m_2 r_2 m_3 r_3 \left[m_1^2 r_1^2 - m_2^2 r_2^2 - m_3^2 r_3^2 \right] / \pi$$

$$M_{34} = m_3 + \frac{4 m_2 r_2^2 m_3^4 r_3^2}{\pi} + \frac{m_3}{\pi} \left[m_1^2 r_1^2 - m_2^2 r_2^2 - m_3^2 r_3^2 \right]^2$$

$$M_{13} = \left[-2 m_3 r_3 m_2 r_2^2 - m_3^3 r_3^3 + m_3 r_3 (m_1^2 r_1^2 - m_2^2 r_2^2) \right] / \pi^{1/2}$$

Expressions des $\bar{M}_{ij}$ des éléments de $\bar{M}$.

Les expressions $\bar{M}_{ij}$ sont obtenues à partir des M_{ij} après avoir remplacé les x_i $i = 1, 2, 3$ par leurs valeurs $\bar{x}_i$ données par les égalités (3.11, 3.12 et 3.13). On obtient alors $\bar{M}$ en fonction uniquement des m_i $i = 1, 2, 3$ et d .

dans ce cas

$$\pi = \frac{3(m_1 m_2 m_3)^2}{m^2} d^4$$

$$\bar{M}_{11} = \frac{(m_2 m_3^2 + 2m_1 m_3^2 + m_1^2 m_3 - m_2^2 m_3 - 2m_1 m_2^2 - m_1^2 m_2) d}{\sqrt{3} m (m_3^2 + m_2 m_3 + m_2^2)^{1/2}}$$

$$\bar{M}_{21} = \frac{(2m_2^3 m_3 + m_1 m_2^2 m_3)(m_3^2 + m_1 m_3 + m_1^2)^{1/2} d}{\sqrt{3} m_1 m_2 m_3 m}$$

$$\bar{M}_{31} = - \frac{[2(m_2^2 + m_1 m_2 + m_1^2) m_3^2 + (m_2^2 + m_1 m_2 + m_1^2) m_3] d}{\sqrt{m} m_1 (m_2^2 + m_1 m_2 + m_1^2)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{14} = \bar{M}_{32} = & - \left\{ 2(m_2^3 + 3m_1m_2^2 + 3m_1^2m_2 + 2m_1^3)m_3^5 \right. \\
& + (5m_2^2 + 9m_1m_2 + 9m_1^2 + 4m_1^3)m_1m_2m_3^4 \\
& + 2(-m_2^5 - 3m_1m_2^4 - 2m_1^2m_2^3 + m_1^3m_2^2 + 3m_1^4m_2 + 2m_1^5)m_3^3 \\
& + (-5m_2^4 - 9m_1m_2^3 - 6m_1^2m_2^2 - m_1^3m_2 + 3m_1^4)m_1m_2m_3^2 \\
& \left. + 2(m_1^3 - m_2^3)m_1^2m_2^2m_3 \right\} / \left[3m^2m_1m_2m_3(m_2^2 + m_1m_2 + m_1^2)^{1/2}(m_2^2 + m_1m_2 + m_1^2)^{1/2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{23} = m_3 + & \left\{ (4m_2^5 + 4m_1m_2^4 + m_1^2m_2^3)m_3^4 \right. \\
& + 2(2m_2^6 + 4m_1m_2^5 + m_1^2m_2^4 - m_1^3m_2^3)m_3^3 \\
& + (4m_1m_2^6 + 5m_1^2m_2^5 + 2m_1^3m_2^4 + m_1^4m_2^3)m_3^2 \\
& \left. + 4(m_2^4 + m_1m_2^3 + \frac{1}{2}m_1^2m_2^2)m_1^2m_2^2m_3 \right\} / 3[m_1m_2m_3m]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{34} = m_4 + & \left\{ 4(m_2^3 + m_1m_2^2 + m_1^2m_2)m_3^6 \right. \\
& + (4m_2^4 + 8m_1m_2^3 + 5m_1^2m_2^2 + 4m_1^3m_2)m_3^5 \\
& + 2(2m_2^3 + m_1m_2^2 + m_1^2m_2 + 2m_1^3)m_1m_2m_3^4 \\
& \left. + (m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2)m_1^2m_2^2m_3^3 \right\} / 3[m_1m_2m_3m]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{12} = m_2 + & \left\{ (m_1 m_2^2 + 4 m_1^2 m_2 + 4 m_1^3) m_3^5 \right. \\
& + (-m_1 m_2^4 + 9 m_1^3 m_2 + 4 m_1^4) m_3^4 \\
& + (-m_1 m_2^4 - 8 m_1^2 m_2^3 - 4 m_1^3 m_2^2 + 6 m_1^4 m_2 + 4 m_1^5) m_3^3 \\
& + (m_2^4 - 4 m_1^2 m_2^2 - 2 m_1^3 m_2 + 5 m_1^4 m_2) m_1 m_2 m_3^2 \\
& + (4 m_1 m_2^4 + 9 m_1^2 m_2^3 + 6 m_1^3 m_2^2 + 5 m_1^4 m_2) m_1 m_2 m_3 \\
& \left. + 4 (m_1^2 m_2^4 + m_1^3 m_2^3 + m_1^4 m_2^2) m_1 m_2 \right\} / [3 m^2 m_1 m_2 m_3 (m_3^2 + m_2 m_3 + m_2^2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{13} = \bar{M}_{22} = & \left\{ (2 m_2^3 + 5 m_1 m_2^2 + 2 m_1^2 m_2) m_3^5 \right. \\
& + 3 (2 m_1 m_2^3 + 3 m_1^2 m_2^2) m_3^4 \\
& + (-2 m_2^5 - 5 m_1 m_2^4 + 4 m_1^2 m_2^3 + 6 m_1^3 m_2^2) m_3^3 \\
& + (-6 m_2^4 - 9 m_1 m_2^3 - 2 m_1^2 m_2^2 + m_1^3 m_2 - 2 m_1^4) m_1 m_2 m_3^2 \\
& - 3 (2 m_1 m_2^4 + 3 m_1^2 m_2^3 + 2 m_1^3 m_2^2 + m_1^4 m_2) m_1 m_2 m_3 \\
& \left. - 4 (m_1^2 m_2^4 + m_1^3 m_2^3 + m_1^4 m_2^2) m_1 m_2 \right\} / 3 m^2 m_1 m_2 m_3 [(m_2^2 + m_1 m_2 + m_1^2)^{1/2} (m_3^2 + m_2 m_3 + m_2^2)^{1/2}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{24} = \bar{M}_{33} = & -2 \cdot (m_3^2 + m_1 m_3 + m_1^2)^{1/2} \left\{ (2 m_2^5 + 3 m_1 m_2^4 + 3 m_1^2 m_2^3 + 2 m_1^3 m_2^2) m_3^4 \right. \\
& + 2 (2 m_2^6 + 4 m_1 m_2^5 + 3 m_1^2 m_2^4 + m_1^3 m_2^3 - m_1^4 m_2^2) m_3^3 \\
& \left. + 2 (m_1 m_2^6 - m_1^4 m_2^3) m_3^2 \right\} / 3 m^2 (m_1 m_2 m_3)^2 (m_2^2 + m_1 m_2 + m_1^2)^{1/2}
\end{aligned}$$

Expressions des termes $\bar{G}_{ij}$ de $\bar{G}$.

$$\bar{G}_{12} = \bar{G}_{13} = \bar{G}_{44} = 0$$

$$\bar{G}_{11} = -m_1 \bar{r}_1 / 2 = -\frac{m_1}{2} [m_1^2 + m_3^2 + m_2 m_3]^{1/2}$$

$$\bar{G}_{13} = m_2 \bar{r}_2 \delta_1 = d^{3/2} m_2 \left(\frac{m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3}{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3} \right)^{1/2} \frac{[2m_1^2 m_3^2 + (m_1 + m_3 - m_2) m_1 m_2 m_3]}{\sqrt{3} m m_1 m_2 m_3}$$

$$\bar{G}_{14} = m_3 \bar{r}_3 \delta_1 = m_3 \left(\frac{m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2}{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3} \right)^{1/2} \frac{[-2m_1^2 m_2^2 + m_1 m_2 m_3 (m_3 - m_1 - m_2)]}{\sqrt{3} m m_1 m_2 m_3}$$

$$\bar{G}_{21} = -m_2 \bar{r}_2 / 2 = -\frac{m_2}{2} (m_1 + m_3 + m_1 m_3)^{1/2}$$

$$\bar{G}_{22} = -\bar{G}_{13}$$

$$\bar{G}_{24} = \frac{2(m_2 + m_3)}{3 m m_1} d^{3/2} [m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3]^{1/2} [m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2]^{1/2}$$

$$\bar{G}_{31} = -m_3 \bar{r}_3 / 2 = -\frac{m_3}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2)^{1/2}$$

$$\bar{G}_{32} = -\bar{G}_{14}$$

$$\bar{G}_{33} = -\bar{G}_{24}$$

Expression des U_{ij} de la matrice U .

$$U_{11} = 3 \frac{(m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3)}{m_3 m_1 m^2 d^3} [m_1 m_2 m_3 (m + 3m_1) + m_1^3 m]$$

$$U_{22} = 3 \frac{(m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3)}{m_1 m_3 m^2 d^3} [m_1 m_2 m_3 (m + 3m_2) + m_2^2 m]$$

$$U_{33} = 3 \frac{(m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2)}{m_1 m_2 m^2 d^3} [m_1 m_2 m_3 (m + 3m_3) + m_3^2 m]$$

$$U_{12} = 3 \frac{(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{1/2}}{m_3 m^2 d^3} (m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3)^{1/2} m_1 m_2 (2m_3 - m_2 - m_1)$$

$$U_{13} = 3 \frac{(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{1/2}}{m_2 m^2 d^3} (m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2)^{1/2} m_1 m_2 (2m_2 - m_1 - m_3)$$

$$U_{23} = 3 (m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3)^{1/2} (m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2)^{1/2} m_2 m_3 (2m_1 - m_2 - m_3)$$

ANNEXE IV

Dans cette annexe il nous a paru judicieux de présenter brièvement le langage de calcul formel MACSYMA ainsi qu'un programme de calcul dans ce langage pour l'exemple (calcul des éléments de la matrice $\mathbf{M}$ ainsi que ceux de $\bar{\mathbf{M}}$ relative à la troisième partie).

MACSYMA : Project MAC's SYmbolic MAnipulation system MACSYMA est un logiciel de calcul formel créé pour aider et assister les ingénieurs et scientifiques. L'utilisateur introduit des expressions symboliques et MACSYMA renvoie un résultat symbolique ou numérique.

Il peut différentier, intégrer, calculer des limites, résoudre des systèmes d'équations linéaires développer des fonctions en série de Laurant ou de Taylor, tracer des courbes et manipuler matrices et tenseurs.

Parmi les inconvénients de MACSYMA sa lourdeur ce qui fait qu'il est cher en temps C.P.U.

Les différents calculs en MACSYMA ont été exécutés sur le DPS 8 sous le système Multics.

LISTING ET PROGRAMME

Dans les pages qui suivent nous présentons un listing du programme de calcul en MACSYMA de la matrice M et $\bar{M}$ de la troisième partie.

Dans ce listing il faut lire x_1 pour x , x_2 pour y et x_3 pour z . Les instructions sont précédées par (Cn) MACSYMA répond sur une ligne précédées par (Dn), n étant la n^{ème} instruction.

Exemple :

(C27) f: acos (coteta 12) ;

$$(D-27) \quad \text{Acos} \left(\frac{m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2}{2 m_1 m_2 x y} \right)$$

le calcul des éléments de M sont exécutés de l'instruction (C 35) page 1 à la (C 67). Ceux de la matrice $\bar{M}$ où l'on remplace les x , y et z par leur valeurs en m_1 , m_2 et m_3 sont effectuées de l'instruction (C 74) à la fin du listing.

Nov 2 12:02 1990 oubir2res Page 1

(C24) assume(m1>0,m2>0,m3>0,x>0,y>0,z>0)\$

coteta12:(((m3^2)*z^2-(m2^2)*y^2-(m1^2)*x^2)/(2*m1*m2*x*y));

coteta23:(((m1^2)*x^2-(m2^2)*y^2-(m3^2)*z^2)/(2*m3*m2*z*y));

(C25)

$$\frac{m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2}{2 m_1 m_2 x y}$$

(D25)

(C26)

$$-m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 + m_1^2 x^2$$

(D26)

$$2 m_2 m_3 y z$$

(C27) f:acos(coteta12);

(D27)

$$\text{ACOS}\left(\frac{m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2}{2 m_1 m_2 x y}\right)$$

(C28) g:acos(coteta23);

(D28)

$$\text{ACOS}\left(\frac{-m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 + m_1^2 x^2}{2 m_2 m_3 y z}\right)$$

(C29) b1:diff(f,x);

(D29)

$$\frac{\frac{m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2}{2 m_1 m_2 x y} - \frac{m_1}{m_2 y}}{\sqrt{1 - \frac{(m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2)^2}{4 m_1^2 m_2^2 x^2 y^2}}}$$

(C30) b2:diff(f,y);

(D30)

$$\frac{\frac{m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2}{2 m_1 m_2 x y} - \frac{m_2}{m_1 x}}{\sqrt{1 - \frac{(m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2)^2}{4 m_1^2 m_2^2 x^2 y^2}}}$$

Nov 2 12:02 1990 oubir2res Page 2

(C31) b3:diff(f,z);

$$(D31) \quad - \frac{m_3^2 z}{m_1 m_2 x y \sqrt{1 - \frac{(m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2)}{4 m_1^2 m_2^2 x^2 y^2}}}$$

(C32) g1:b1+diff(g,x);

$$(D32) \quad - \frac{\frac{m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2}{2 m_1 m_2 x y} - \frac{m_1}{m_2 y}}{\sqrt{1 - \frac{(m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2)}{4 m_1^2 m_2^2 x^2 y^2}}}$$

$$- \frac{m_1^2 x}{m_2 m_3 y z \sqrt{1 - \frac{(-m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 + m_1^2 x^2)}{4 m_2^2 m_3^2 y^2 z^2}}}$$

(C33) g2:b2+diff(g,y);

$$(D33) \quad - \frac{\frac{m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2}{2 m_1 m_2 x y} - \frac{m_2}{m_1 x}}{\sqrt{1 - \frac{(m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2)}{4 m_1^2 m_2^2 x^2 y^2}}}$$

$$- \frac{\frac{-m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 + m_1^2 x^2}{2 m_2 m_3 y z} - \frac{m_2}{m_3 z}}{\sqrt{1 - \frac{(-m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 + m_1^2 x^2)}{4 m_2^2 m_3^2 y^2 z^2}}}$$

Nov 2 12:02 1990 oubir2res Page 3

(C34) g3:b3+diff(g,z);

$$\begin{aligned}
 (D34) \quad & \frac{m_3^2 z}{m_1 m_2 x y \sqrt{1 - \frac{(m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2)}{4 m_1 m_2 x y} - \frac{(-m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 + m_1^2 x^2) m_3}{2 m_2 m_3 y z}}} \\
 & \sqrt{1 - \frac{(-m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 + m_1^2 x^2)}{4 m_2 m_3 y z}}
 \end{aligned}$$

(C35) m1:m1*(x^2)*b1 + m3*(z^2)*g1;

$$\begin{aligned}
 (D35) \quad & m_3^2 z^2 \left(- \frac{m_1^2 x}{m_2 y} \sqrt{1 - \frac{(m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2)}{4 m_1 m_2 x y}} \right. \\
 & \left. - \frac{m_2 m_3 y z \sqrt{1 - \frac{(-m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 + m_1^2 x^2)}{4 m_2 m_3 y z}}}{m_1 x \left(- \frac{m_1^2 x}{m_2 y} \sqrt{1 - \frac{(m_3^2 z^2 - m_2^2 y^2 - m_1^2 x^2)}{4 m_1 m_2 x y}} \right)} \right)
 \end{aligned}$$

Nov 2 12:02 1990 oubir2res Page 4

(C36) m11:ratsimp(%);

$$(D36) \frac{(m_3^3 z^4 + (m_1 m_3^2 - m_1^2 m_3^2) x^2 - m_2^2 m_3^2 y^2) z^2 - m_1 m_2^2 x^2 y^2 + m_1^3 x^4}{(x \sqrt{-m_3^4 z^4 - (-2 m_2^2 m_3^2 y^2 - 2 m_1^2 m_3^2 x^2) z^2 - m_2^4 y^4} + 2 m_1^2 m_2^2 x^2 y^2 - m_1^4 x^4)}$$

(C38) m21:m2*(y^2)*b2 + m3*(z^2)*g2\$

(C39) m21:ratsimp(%);

$$(D39) \frac{(m_2^2 m_3^2 + 2 m_2^2 m_3^2) y z^2 + m_2^3 y^3 - m_1^2 m_2^2 x^2 y^2}{\sqrt{-m_3^4 z^4 - (-2 m_2^2 m_3^2 y^2 - 2 m_1^2 m_3^2 x^2) z^2 - m_2^4 y^4} + 2 m_1^2 m_2^2 x^2 y^2 - m_1^4 x^4}$$

(C40) m31:m2*(y^2)*b3 + m3*(z^2)*g3\$

(C41) m31:ratsimp(%);

$$(D41) \frac{(m_3^3 z^3 + ((2 m_2^2 m_3^2 + m_2^2 m_3^2) y^2 - m_1^2 m_3^2 x^2) z)}{\sqrt{-m_3^4 z^4 - (-2 m_2^2 m_3^2 y^2 - 2 m_1^2 m_3^2 x^2) z^2 - m_2^4 y^4} + 2 m_1^2 m_2^2 x^2 y^2 - m_1^4 x^4}$$

(C45) m12:m2*(y^2)*b1^2 + m3*(z^2)*g1^2\$

(C46) m12:ratsimp(%);

$$(D46) \frac{(m_3^5 z^6 + ((m_2^4 m_3^2 - 2 m_2^3 m_3^2) y^2 - 2 m_1^2 m_3^3 x^2) z^4 + ((m_2^4 m_3^2 - 2 m_2^3 m_3^2) y^2 + (2 m_1^2 m_2^2 m_3^2 + 2 m_1^2 m_2^2 m_3^2) x^2 y^2 + m_1^4 m_3^4 x^4) z^2 + m_2^5 y^6 - 2 m_1^2 m_2^3 x^2 y^4 + m_1^4 m_2^4 x^2 y^2)}{(m_3^4 x^2 z^4 + (-2 m_2^2 m_3^2 x^2 y^2 - 2 m_1^2 m_3^2 x^2) z^2 + m_2^4 x^2 y^4 - 2 m_1^2 m_2^4 x^2 y^2 + m_1^4 x^6)}$$

Nov 2 12:02 1990 oubir2res Page 5

(C47) m23:m2*(y^2)*b2^2 + m3*(z^2)*g2^2\$

(C48) m23:ratsimp(%);

$$(D48) - (m_2^4 m_3^4 z^4 + ((2 m_2^3 m_3^2 + 4 m_2^2 m_3^4) y^2 - 2 m_1^2 m_2^2 m_3^2 x) z^2 + m_2^5 y^4 - 2 m_1^2 m_2^3 x y^2 + m_1^4 m_2^4 x^4) / (m_3^4 z^4 + (-2 m_2^2 m_3^2 y^2 - 2 m_1^2 m_3^2 x^2) z^2 + m_2^4 y^4 - 2 m_1^2 m_2^2 x y^2 + m_1^4 x^4)$$

(C49) m34:m2*(y^2)*b3^2 + m3*(z^2)*g3^2\$

(C50) m34:ratsimp(%);

$$(D50) - (m_3^5 z^4 + ((4 m_2^4 m_3^3 + 2 m_2^3 m_3^2) y^2 - 2 m_1^2 m_3^3 x) z^2 + m_2^4 m_3^4 y^4 - 2 m_1^2 m_2^2 m_3^2 x y^2 + m_1^4 m_3^4 x^4) / (m_3^4 z^4 + (-2 m_2^2 m_3^2 y^2 - 2 m_1^2 m_3^2 x^2) z^2 + m_2^4 y^4 - 2 m_1^2 m_2^2 x y^2 + m_1^4 x^4)$$

(C61) m13:m2*(y^2)*b1*b2 + m3*(z^2)*g1*g2\$

(C62) m13:ratsimp(%);

$$(D62) - ((m_2^4 m_3^3 + 2 m_2^3 m_3^4) y^2 z^4 + (-2 m_2^4 m_3^3 y^3 - 2 m_1^2 m_2^2 m_3^2 x y) z^2 - m_2^5 y^5 + 2 m_1^2 m_2^3 x y^3 - m_1^4 m_2^4 x^4) / (m_3^4 x^4 z^4 + (-2 m_2^2 m_3^2 x y^2 - 2 m_1^2 m_3^2 x^3) z^2 + m_2^4 x^4 y^2 - 2 m_1^2 m_2^3 x^3 y + m_1^4 x^5)$$

(C63) m14:m2*(y^2)*b1*b3 + m3*(z^2)*g1*g3\$

(C64) m14:ratsimp(%);

$$(D64) (m_3^5 z^5 + (2 m_2^4 m_3^2 y^2 - 2 m_1^2 m_3^3 x) z^3 + ((-2 m_2^3 m_3^2 - m_2^4 m_3) y^4 + 2 m_1^2 m_2^2 m_3^2 x y^2 + m_1^4 m_3^4 x^4) z) / (m_3^4 x^4 z^4 + (-2 m_2^2 m_3^2 x y^2 - 2 m_1^2 m_3^2 x^3) z^2 + m_2^4 x^4 y^2 - 2 m_1^2 m_2^3 x^3 y + m_1^4 x^5)$$

Nov 2 12:02 1990 oubir2res Page 6

(C66) m24:m2*(y^2)*b2*b3 + m3*(z^2)*g2*g3\$

(C67) m24:ratsimp(%);

$$\begin{aligned}
 (D67) & ((2 m_2 m_3^4 + 2 m_2^2 m_3^3) y z^3 + ((2 m_2^3 m_3^2 + 2 m_2^4 m_3) y^3 \\
 & + (-2 m_1^2 m_2 m_3^2 - 2 m_1^2 m_2^2 m_3) x y^2 z) \\
 & / (m_3^4 z^4 + (-2 m_2^2 m_3^2 y^2 - 2 m_1^2 m_3^2 x^2) z^2 + m_2^4 y^4 - 2 m_1^2 m_2^2 x^2 y^2 \\
 & + m_1^4 x^4)
 \end{aligned}$$

(C73) m11:ev(m11)\$

(C74) m11:ratsimp(%);

$$\begin{aligned}
 (D74) & \text{SQRT}(m_3^2 + (2 m_2 + 2 m_1) m_3 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 + m_1^2) \\
 & ((d m_1 m_2 + 2 d m_1^2) m_3^3 + (d m_2^3 + d m_1 m_2^2 + 4 d m_1^2 m_2) m_3^2 \\
 & + (-d m_2^4 - 2 d m_1 m_2^3 + d m_1^2 m_2^2 - d m_1^3 m_2) m_3 - 3 d m_1 m_2^4 - d m_1^2 m_2^3 \\
 & - 2 d m_1^3 m_2^2) / (\text{SQRT}(m_3^2 + m_2 m_3 + m_2^2)) \\
 & (\text{SQRT}(3) m_2 m_3^3 + (3 \text{SQRT}(3) m_2^2 + 3 \text{SQRT}(3) m_1 m_2) m_3^2 \\
 & + (3 \text{SQRT}(3) m_2^3 + 6 \text{SQRT}(3) m_1 m_2^2 + 3 \text{SQRT}(3) m_1^2 m_2) m_3 + \text{SQRT}(3) m_2^4 \\
 & + 3 \text{SQRT}(3) m_1 m_2^3 + 3 \text{SQRT}(3) m_1^2 m_2^2 + \text{SQRT}(3) m_1^3 m_2))
 \end{aligned}$$

(C5) m21:ev(m21)\$

(C6) m21:ratsimp(%);

$$\begin{aligned}
 (D6) & (2 d m_2^3 + d m_1 m_2^2) m_3 \text{SQRT}(m_3^2 + m_1 m_3 + m_1^2) \\
 & \text{SQRT}(m_3^2 + (2 m_2 + 2 m_1) m_3 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 + m_1^2) \\
 & / ((\text{SQRT}(3) \text{ABS}(m_1) \text{ABS}(m_2) m_3^2 + (2 \text{SQRT}(3) \text{ABS}(m_1) m_2 + 2 \text{SQRT}(3) m_1 \text{ABS}(m_1)) \\
 & \text{ABS}(m_2) m_3 + (\text{SQRT}(3) \text{ABS}(m_1) m_2^2 + 2 \text{SQRT}(3) m_1 \text{ABS}(m_1) m_2 \\
 & + \text{SQRT}(3) m_1^2 \text{ABS}(m_1)) \text{ABS}(m_2)) \text{ABS}(m_3))
 \end{aligned}$$

Nov 2 12:02 1990 oubir2res Page 7

(C7) m31:ev(m31)\$

(C8) m31:ratsimp(%);

$$\begin{aligned}
 (D8) \quad & - \text{SQRT}(m_2^2 + m_1 m_2 + m_1^2) \text{SQRT}(m_3^2 + (2 m_2 + 2 m_1) m_3 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 \\
 & + m_1^2) (2 d m_2 m_3^3 + d m_1 m_2 m_3^2) / ((\text{SQRT}(3) \text{ABS}(m_1) \text{ABS}(m_2) m_3^2 \\
 & + (2 \text{SQRT}(3) \text{ABS}(m_1) m_2 + 2 \text{SQRT}(3) m_1 \text{ABS}(m_1)) \text{ABS}(m_2) m_3 \\
 & + (\text{SQRT}(3) \text{ABS}(m_1) m_2^2 + 2 \text{SQRT}(3) m_1 \text{ABS}(m_1) m_2 + \text{SQRT}(3) m_1^2 \text{ABS}(m_1)) \\
 & \text{ABS}(m_2)) \text{ABS}(m_3))
 \end{aligned}$$

(C9) m12:ev(m12)\$

(C10) m12:ratsimp(%);

$$\begin{aligned}
 (D10) \quad & ((m_2^2 + 4 m_1 m_2 + 4 m_1^2) m_3^5 + (- m_2^3 + 9 m_1^2 m_2 + 4 m_1^3) m_3^4 \\
 & + (- m_2^4 - 8 m_1 m_2^3 - 4 m_1^2 m_2^2 + 6 m_1^3 m_2 + 4 m_1^4) m_3^3 \\
 & + (m_2^5 - 4 m_1 m_2^4 - 2 m_1^2 m_2^3 + 5 m_1^3 m_2^2 + 5 m_1^4 m_2) m_3^2 \\
 & + (4 m_1 m_2^5 + 9 m_1^2 m_2^4 + 6 m_1^3 m_2^3 + 5 m_1^4 m_2^2) m_3 + 4 m_1^2 m_2^5 + 4 m_1^3 m_2^4 \\
 & + 4 m_1^4 m_2^3) / (3 m_2^5 m_3^5 + (9 m_2^2 + 6 m_1 m_2) m_3^4 \\
 & + (12 m_2^3 + 12 m_1 m_2^2 + 3 m_1^2 m_2) m_3^3 + (9 m_2^4 + 12 m_1 m_2^3 + 3 m_1^2 m_2^2) m_3^2 \\
 & + (3 m_2^5 + 6 m_1 m_2^4 + 3 m_1^2 m_2^3) m_3)
 \end{aligned}$$

(C11) m23:ev(m23)\$

(C12) m23:ratsimp(%);

$$\begin{aligned}
 (D12) \quad & ((4 m_2^3 + 4 m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2) m_3^3 + (4 m_2^4 + 8 m_1 m_2^3 + 2 m_1^2 m_2^2 \\
 & - 2 m_1^3 m_2) m_3^2 + (4 m_1 m_2^4 + 5 m_1^2 m_2^3 + 2 m_1^3 m_2^2 + m_1^4 m_2) m_3 + 4 m_1^2 m_2^4 \\
 & + 4 m_1^3 m_2^3 + 4 m_1^4 m_2^2) / (3 m_1^2 m_3^3 + (6 m_1 m_2 + 6 m_1^2) m_3^2 \\
 & + (3 m_1^2 m_2^2 + 6 m_1^3 m_2 + 3 m_1^4) m_3)
 \end{aligned}$$

Nov 2 12:02 1990 oubir2res Page 8

(C13) m34:ev(m34)\$

(C14) m34:ratsimp(%);

$$\begin{aligned}
 (D14) & ((4 m_2^2 + 4 m_1 m_2 + 4 m_1^2) m_3^4 + (4 m_2^3 + 8 m_1 m_2^2 + 5 m_1^2 m_2 + 4 m_1^3) m_3^3 \\
 & + (4 m_1^3 m_2 + 2 m_1^2 m_2^2 + 2 m_1^3 m_2 + 4 m_1^4) m_3^2 \\
 & + (m_1^2 m_2^3 - 2 m_1^3 m_2^2 + m_1^4 m_2) m_3) / (3 m_1^2 m_2^2 m_3^2 + (6 m_1^2 m_2^2 + 6 m_1^3 m_2) m_3 \\
 & + 3 m_1^2 m_2^3 + 6 m_1^3 m_2^2 + 3 m_1^4 m_2)
 \end{aligned}$$

(C3) m13:ev(m13)\$

(C4) m13:ratsimp(%);

$$\begin{aligned}
 (D4) & \text{SQRT}(m_3^2 + m_1 m_3 + m_1^2) ((2 m_2^2 + 5 m_1 m_2 + 2 m_1^2) m_3^3 \\
 & + (4 m_1^2 m_2 + 4 m_1^2 m_2^2 - 2 m_1^3) m_3^2 + (-2 m_2^4 - 5 m_1 m_2^3 - 2 m_1^2 m_2^2 \\
 & - 3 m_1^3 m_2) m_3 - 4 m_1^4 m_2^2 - 4 m_1^2 m_2^3 - 4 m_1^3 m_2^2) \\
 & / (\text{SQRT}(m_3^2 + m_2 m_3 + m_2^2) (3 m_1^3 m_3 + (6 m_1^2 m_2 + 6 m_1^2) m_3^2 \\
 & + (3 m_1^2 m_2^2 + 6 m_1^2 m_2 + 3 m_1^3) m_3))
 \end{aligned}$$

(C5) m14:ev(m14)\$

(C6) m14:ratsimp(%);

$$\begin{aligned}
 (D6) & - \text{SQRT}(m_2^2 + m_1 m_2 + m_1^2) ((2 m_2^4 + 4 m_1 m_2^3 + (5 m_1 m_2 + 4 m_1^2) m_3^2 \\
 & + (-2 m_2^3 - 4 m_1 m_2^2 + 2 m_1^2 m_2 + 4 m_1^3) m_3^2 \\
 & + (-5 m_1 m_2^3 - 4 m_1^2 m_2^2 + 3 m_1^3 m_2) m_3 - 2 m_1^2 m_2^3 + 2 m_1^3 m_2^2) \\
 & / (\text{SQRT}(m_3^2 + m_2 m_3 + m_2^2) (3 m_1^2 m_2 m_3^2 + (6 m_1^2 m_2 + 6 m_1^2 m_2) m_3 + 3 m_1^3 m_2^2 \\
 & + 6 m_1^2 m_2^2 + 3 m_1^3 m_2))
 \end{aligned}$$

Nov 2 12:02 1990 oubir2res Page 9

(C7) m24:ev(m24)\$

(C8) m24:ratsimp(%);

(D8) - $\sqrt{m_2^2 + m_1 m_2 + m_1^2} \sqrt{m_3^2 + m_1 m_3 + m_1^2}$

$((4 m_2 + 2 m_1) m_3^2 + (4 m_2^2 + 4 m_1 m_2 - 2 m_1^2) m_3 + 2 m_1 m_2^2 - 2 m_1^2 m_2)$

$\sqrt{(3 m_1^2 m_3^2 + (6 m_1^2 m_2 + 6 m_1^3) m_3 + 3 m_1^2 m_2^2 + 6 m_1^3 m_2 + 3 m_1^4)}$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.B. HINDMARSH and D.J. JEFFERIES
On the motions of the offset impact oscillator.
J. phys. A : Math. Gen. 17 (1984) 1791-1803.
clarendon laboratory - Oxford

- [2] D.T. NGUYEN, S.T. NOAH and C.F. KETTLEBOROUGH
Impact behaviour of an oscillator with limiting stops.
Journal of Sound and Vibration (1986) 109 (2) - 293-307.

- [3] TADASHI Kotera
Theoretical study on impact vibration, Part 1 Periodical impact motion
and its stability of un system with one degree of freedom (Japonais).
Trans. of the J.S.M.E., vol. 35, n° 274 (1969) pp. 1233-1241.

- [4] T. KOTERA
Laws of impact motion of mechanical systems with one degree of free dom.
Acta technica CSAV, n° 6, 1981, pp. 747-758.

- [5] BAZHENOV (V.A.) GULYAEV
Oscillations forcées non linéaires de systèmes vibratoire de choc (Russe).
Probl. Procn (Kiev) ISSN 0556-171 X, UKR (1982) n° 8, 121-126.

- [6] A.M. SAMOILENKO and N.A. PERESTYUK
The method of averaging in systems with an impulsive action.
Ukr. Mat. Zh. 26(3) (1974) pp. 411-418.

- [7] Yu. A. MITROPOLSKY and A.M. SAMOILENKO
Forced oscillations of systems with impulse force.
Int. J. nonlinear mechanics. Vol. 20, n° 516, pp. 419-426 (1985).
- [8] J. BETHENOD
Sur l'entretien du mouvement d'un pendule au moyen d'un courant alternatif
de fréquence élevée par rapport à sa fréquence propre.
C.R. Acad. Sciences, 207, 1938, p. 847.
- [9] Y. ROCARD
Entretien d'un pendule par le courant alternatif.
Revue scientifique. 1942. p. 20.
- [10] Edgar HIRSHI et P. MESNAGE
Sur la période d'un pendule entretenu par le courant alternatif.
C.R. acad. des Sciences, 219, 1944.
- [11] Ch. BLANC
Sur les équations différentielles linéaires à coefficients lentement
variables.
Publication de l'Ecole Polytechnique de Lausan, n° 5, 1948.
- [12] R. FAURE
Vibrations non linéaires : action asynchrone cas du phénomène Bethenod.
C. R. Acad. Sci. t. 243, 1956, p. 1824.
- [13] J. HAAG
Sur la synchronisation des systèmes à plusieurs degrés de liberté.
Ann.-Eco. Normal (3) LXIV.- Fasci. 4.

- [14] R. FAURE
 Solution périodique de certains systèmes d'équations différentielles non linéaires dépendant d'un paramètre.
 J. de Math. tome XL, Fascicule 3, 1961, p. 205.

- [15] L. SCHWARTZ
 Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.
 Paris-Hermann.

- [16] R. FAURE
 "Percussions en mécanique non linéaire sur certaines solutions périodiques de phénomènes non linéaires excités par des percussions" : Mécanique - Matériaux Electricité n° 394-395. Oct/Nov. 1982, pp. 486-492.

- [17] R. FAURE
 Application des percussions en mécanique non linéaire. Réalisation par percussions de liaisons spatiales instantanées avec synchronisation entre deux oscillateurs non linéaires" : Publication de l'U.E.R. Mathématiques Pures et Appliquées, Université des Sciences et Techniques de Lille I, Mai 1982.

- [18] R. FAURE
 Percussions en mécanique non linéaire.
 I. Cas des interactions entre systèmes.
 II. Théorie des percussions presque périodiques.
 Annali di matematica pura ed applicata. Série IV, tomo CXL 1985.

- [19] A. SIMPSOM 1982
Wind -induced vibration of overhead power transmission lines.
Sci. Progr. Oxford, 68, pp. 285-308.
- [20] M.A. WAWZONEK and PARKINSON 1979
Combined effects of galloping instability and vortex resonance
Wind eng. Proceedings of the 5th conf. Fort Collins.
Collorado, U.S.A., vol. 2 CERMAK J.E. (ed), Pergamon Press
Oxford, pp. 673-684.
- [21] G.V. PARKINSON, 1974
Mathematical models of flow -induced vibrations of bluff bodies
I.U.T.A.M. - I.A.H.R. Symp on flow induced structural vibrations.
Karlsruhe (1972) spring-Verlag Berlin.
- [22] C.G.A. Van der Beek A.H.P. Van der BURCH
On the periodique (Wind -induced vibrations of an oscillator with two
degrees of freedom.
Faculty of mathematics and Informatics. Delft University of Technology.
Julianalaan 132. 2628 BL Delft - The Netherlands.
- [23] M. ROSEAU
Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité.
- [24] D. WEXLER
Sur une équation différentielle non linéaire aux impulsions.
Journal of differential equations. 2.1.11 (1966).

- [25] R. FAURE
Théorie of percussions in non lineaires mechanics almost and generalised
almost periodical vibrations .
Publication IRMA Lille 1987, vol. 7, n° VI.

- [26] KRYLOFF N. BOUGOLIOUBOFF
Introduction to non linear mechanics.
Prinston University Press 1949.

- [27] D. WEXLER
Solutions périodiques et presque périodiques des systèmes d'équations
différentielles linéaires en distributions.
Journal of differential equations. 2, 1966, pp. 12-32.

- [28] J. FAVARD
Leçons sur les fonctions presque périodiques.
Paris Gauthier-Villars.

- [29] SCHWARTZ
Théorie des distributions Paris-Herman. Tome 1-2.

- [30] M. ENNASSEF
Vibrations des plaques excitées par des percussions périodiques.
Thèse 3ème cycle Lille I (1984).

- [31] A. GUISSO
Sur les oscillations périodiques des plaques excitées par des excitations
continues et percussions. Etude de deux cas différents.
Thèse 3e cycle. Université Lille I, 1986.

- [32] E.J. ROUTH
A. treatise on dynamics of a particule.
Cambridge University Press.
- [33] Y. THIRY
Les fondements de la mécanique céleste. Gordon et Breach.
- [34] FINLAY FREUDLY
Celestial Mechanics.
The University St Andrews. Pergamon Press.

