

55376
1990
27

55376
1990
27

N° d'ordre : 645

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES



par

JAHIDI Rachid



SUR LA DÉTECTION ET L'ESTIMATION DE CERTAINS SIGNAUX DANS UN BRUIT DE ORNSTEIN-UHLENBECK

Soutenue le 19 Décembre 1990 devant la Commission d'Examen :

Président et Rapporteur : J. GEFFROY, Université de Paris VI

Rapporteur : P. JACOB, Université de Lille

Examineurs : G. MÉLARD, Université Libre de Bruxelles

R. MOCHÉ, Université de Lille

*A la mémoire de mon père,
A ma mère,
A mes frères et sœurs,
A ma famille et mes amis.*

Monsieur le Professeur Jean GEFFRON nous fait le grand honneur de présider le jury de cette thèse et d'en être le rapporteur. Nous tenons à lui exprimer notre respectueuse gratitude.

C'est pour moi une très grande joie de remercier Monsieur le Professeur Raymond MOCHÉ. Ma reconnaissance envers lui est profonde pour l'aide efficace et les conseils qu'il n'a jamais cessés de me prodiguer.

Je tiens à remercier Messieurs les Professeurs Pierre JACOB et Guy MÉLARD qui ont accepté de juger ce travail.

Je remercie également Madame Arlette Lengaigne pour sa disponibilité et son savoir faire, ainsi que toutes les personnes qui ont participé à sa réalisation matérielle.

PLAN

INTRODUCTION.-

CHAPITRE I - BIBLIOGRAPHIE SUR LES TESTS DE DÉTECTION D'UN SIGNAL DÉTERMINISTE DANS UN BRUIT GAUSSIEN.

- 1 - Position du problème.
- 2 - Théorème de dichotomie de deux lois gaussiennes.
- 3 - Conséquences.
- 4 - Tests de détection d'un signal déterministe dans un bruit gaussien.

CHAPITRE II - TESTS DE DÉTECTION D'UN SIGNAL DANS UN BRUIT DE ORNSTEIN-UHLENBECK.

- 1 - Introduction.
- 2 - Résultats préliminaires.
- 3 - Tests de détection d'un signal dans un bruit de Ornstein-Uhlenbeck.

CHAPITRE III - ESTIMATION D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE DE PÉRIODE CONNUE DANS UN BRUIT DE ORNSTEIN-UHLENBECK.

- 1 - Introduction.
- 2 - Convergence de $(\hat{\theta}_n(t); n \geq 1)$ en un point donné t de $[0, P]$.
- 3 - Convergence uniforme de $\hat{\theta}_n$ sur certaines parties de $[0, P]$.
- 4 - Simulation.

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION

On reçoit à partir de l'instant initial $t = 0$ un signal, somme d'un signal émis $\theta = (\theta(t), t \geq 0)$ qui est le signal utile que l'on voudrait récupérer et d'un bruit aléatoire $B = (B(t), t \geq 0)$ que l'on suppose être un processus de Ornstein-Uhlenbeck, autrement dit un processus réel gaussien centré de covariance K donné par :

$$\forall t, s \geq 0, \quad K(t, s) = \beta^2 e^{-\alpha|t-s|}$$

où α et β sont deux paramètres > 0 qui sont supposés connus, dans certains cas.

La modélisation du bruit par un processus de Ornstein-Uhlenbeck est souvent utilisée. Rappelons que d'une part, c'est le processus markovien gaussien stationnaire centré le plus général ([6]; III.8.2., p. 99) et que d'autre part, il est solution de l'équation différentielle stochastique de Langevin.

A partir, de l'enregistrement d'une seule trajectoire du processus gaussien $X = \theta + B$, soit :

$$X(t, \omega_0) = \theta(t) + B(t, \omega_0), t \geq 0,$$

on se pose deux problèmes :

- 1) détecter la présence d'un signal utile θ ,
- 2) estimer le signal θ .

Dans le chapitre I, on rappelle quelques résultats connus sur les tests de détection d'un signal dans un bruit gaussien.

Dans le chapitre II, on présente trois tests convergents de l'hypothèse qu'il n'y a pas de signal, c'est-à-dire que l'on a enregistré seulement une trajectoire $B(., \omega_0)$ du bruit B contre l'hypothèse qu'il y a en plus un signal non nul appartenant à :

- 1°) L'ensemble Θ^* des signaux de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ qui vérifient : $\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) < 0$ ou $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) > 0$, dans le cas du premier test.

2°) L'ensemble Θ^{**} des signaux non nuls de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ de période connue P tels que $\theta(0) + \dot{\theta}(0) \neq 0$ en ce qui concerne le second test.

3°) L'ensemble Θ_α^* des signaux qui vérifient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ell n(n)}} \sum_{p=1}^n (e^{\alpha \theta(p)} - \theta(p-1)) &> 0 \quad \text{ou} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ell n(n)}} \sum_{p=1}^n (e^{\alpha \theta(p)} - \theta(p-1)) &< 0 \end{aligned}$$

pour le troisième test.

Les deux premiers tests (où l'on suppose de plus que $\alpha = \beta = 1$) reposent sur l'examen des distances des lois conditionnelles du modèle et un théorème de J. Geffroy, le troisième sur une statistique linéaire des observations. Pour appliquer ces tests, on utilise seulement les quantités $X(t_n, \omega_o), n \geq 1$, pour une suite d'instants d'observation $(t_n, n \geq 1)$ convenablement choisie, c'est-à-dire que l'on échantillonne convenablement le signal enregistré.

Enfin dans le chapitre III, on s'est intéressé à l'estimation du signal θ sous l'hypothèse générale que tous les signaux possibles, dont l'ensemble est noté Θ , admettent la même période connue P , sont continus par morceaux et s'annulent à l'instant $t = 0$. On propose dans ce chapitre un estimateur de type ligne polygonale noté $(\hat{\theta}_n, n \geq 1)$ de la restriction à l'intervalle $[0, P]$ du signal utile inconnu θ . On montrera que cet estimateur converge presque complètement sûrement, sous l'hypothèse θ , au sens de la convergence uniforme sur certaines parties de $[0, P]$, quel que soit le signal θ . On étudiera aussi la convergence de $(\hat{\theta}_n(t), n \geq 1)$ en tout point donné t de $[0, P]$.

CHAPITRE I : BIBLIOGRAPHIE SUR LES TESTS DE DÉTECTION D'UN SIGNAL DANS UN BRUIT GAUSSIEN

I - POSITION DU PROBLÈME

On observe sur un intervalle de temps $T, T \subset \mathbf{R}^+$, une trajectoire d'une fonction aléatoire réelle (f.a.r.) gaussienne $(X(t); t \in T)$, somme d'un signal déterministe $(\theta(t); t \in T)$ et d'une f.a.r. gaussienne centrée $(B(t); t \in T)$, de covariance connue K .

A partir de l'enregistrement de cette trajectoire

$$(1.1) \quad X(t, \omega_o) = \theta(t) + B(t, \omega_o); t \in T$$

on cherche à détecter la présence d'un signal utile θ .

Le problème consiste donc à tester si l'on a enregistré uniquement du bruit ou si en plus du bruit il y a un signal utile θ . On aura donc à tester l'hypothèse :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : X(t) = B(t); t \in T \\ \text{contre l'alternative} \\ H_1 : X(t) = \theta(t) + B(t); t \in T, \theta \in \Theta_1 \end{array} \right.$$

où Θ_1 est l'ensemble des signaux possibles correspondant à une hypothèse a priori sur le signal.

Le théorème de dichotomie de deux lois gaussiennes joue un rôle important dans la résolution de ce problème, lorsque Θ_1 est un ensemble réduit à une seule loi.

On commencera donc ce chapitre par un rappel de ce théorème.

II - THÉORÈME DE DICHOTOMIE DE DEUX LOIS GAUSSIENNES

a) La première version du théorème de dichotomie est due à J. Feldman ([5], 1958) et J. Hájek ([13], 1958). La version qui nous intéresse plus particulièrement

ici est celle de E. Parzen ([25], 1961). Elle est basée sur la notion d'espace autoreproduisant introduite par N. Aronjajn ([1], 1950). Sous la forme la plus générale, elle est due à J. Neveu ([24], 1968).

b)

Définition : Soit $(B(t); t \in T)$ une f.a.r. gaussienne centrée de covariance K . On appelle espace autoreproduisant associé à la covariance K , noté $\mathcal{H}(T, K)$, l'espace hilbertien des fonctions sur T à valeurs réelles et jouissant des propriétés suivantes :

- i) les fonctions $K(t, \cdot), t \in T$, appartiennent à $\mathcal{H}(T, K)$ et engendrent cet espace,
- ii) la valeur au point $t \in T$ de toute fonction h de $\mathcal{H}(T, K)$ est donnée par le produit scalaire :

$$h(t) = \langle h, K(t, \cdot) \rangle.$$

Si on note $L^2(B)$ l'espace gaussien centré engendré par $(B(t), t \in T)$, l'application qui à tout U appartenant à $L^2(B)$ associe la fonction réelle $i(U)$ définie sur T par :

$$(2.1) \quad \forall t \in T \quad i(U)(t) = E(U \cdot B(t)),$$

est alors une bijection linéaire de $L^2(B)$ sur $\mathcal{H}(T, K)$ qui conserve le produit scalaire (cf. [24], proposition 3.2).

c) Citons à présent la version la plus explicite du théorème de dichotomie de deux lois gaussiennes (cf. [24], corollaire 8.3).

Théorème : Soit $(B(t), t \in T)$ une f.a.r. gaussienne centrée de covariance K et deux fonctions θ_0 et θ_1 définies sur T . Les lois de probabilité associées aux f.a.r. gaussiennes $(\theta_0(t) + B(t); t \in T)$ et $(\theta_1(t) + B(t); t \in T)$ notées P_{θ_0} et P_{θ_1} , sont ou bien équivalentes ou bien orthogonales. Elles sont équivalentes si et seulement si $\theta_0 - \theta_1 \in \mathcal{H}(T, K)$.

III - CONSÉQUENCE

Soit $(B(t); t \in T)$ une f.a.r. gaussienne centrée définie sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit K la covariance de cette f.a.. Notons \mathcal{P} l'ensemble des lois de probabilités des f.a.r. $(\theta(t) + B(t); t \in T)$ où θ est élément de l'espace auto-reproduisant $\mathcal{H}(T, K)$.

D'après le théorème de dichotomie (cf. [24], proposition 8.1) toute loi Q de \mathcal{P} est équivalente à P et la dérivée de Radon-Nikodym de Q par rapport à P vaut sur (Ω, \mathcal{A}, P)

$$(3.1) \quad \frac{dQ}{dP} = \exp\left(Y - \frac{1}{2}E(Y^2)\right),$$

pour un élément unique Y de $L^2(B)$.

On pourra ainsi dominer le modèle $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ par la mesure de probabilité P .

IV - TESTS DE DÉTECTION D'UN SIGNAL DÉTERMINISTE DANS UN BRUIT GAUSSIEN

1) Cas où la contre-hypothèse Θ_1 est réduite à un signal de forme connue.

On suppose ici que T est un compact de \mathbf{R}^+ et on teste l'hypothèse :

$$(4.1) \quad \begin{cases} H_0 : X(t) = B(t); t \in T \\ \text{contre l'alternative} \\ H_1 : X(t) = \theta(t) + B(t); t \in T, \end{cases}$$

où θ est un signal défini sur T de forme connue et B un processus gaussien centré de covariance connue K .

Pour résoudre ce problème on suppose, généralement, que le signal θ est élément de l'espace $\mathcal{H}(T, K)$, c'est-à-dire que l'on considère un modèle dominé, et on propose un test de Neyman-Pearson basé sur la fonction de vraisemblance $\frac{dP_\theta}{dP_0}$ où P_θ est la loi de la f.a. X sous H_1 .

Le problème se pose ici au niveau du calcul de cette vraisemblance. Pour cela trois méthodes ont été proposées :

a) **Représentation de Karhunen-Loève**

Soit $(\varphi_k, \lambda_k)_{k \geq 1}$ la suite des fonctions propres et des valeurs propres associées à l'opérateur :

$$K(f) = \int_T K(\cdot, s)f(s)ds$$

Pour $k \geq 1$ posons :

$$\begin{cases} X_k = \int_T X(t)\varphi_k(t)dt \\ \theta_k = \int_T \theta(t)\varphi_k(t)dt \end{cases}$$

La fonction de vraisemblance s'écrit alors sous la forme :

$$(4.2) \quad \frac{dP_\theta}{dP_0} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta_k \cdot X_k}{\lambda_k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta_k^2}{\lambda_k}\right\}$$

b) Représentation sous forme intégrale

Si $\ell(\cdot)$ est solution de l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\int_T K(t, s)\ell(s)ds = \theta(t),$$

la fonction de vraisemblance prend alors la forme :

$$(4.3) \quad \frac{dP_\theta}{dP_0} = \exp\left(\int_T X(s)\ell(s)ds - \frac{1}{2} \int_T \ell(s)\theta(s)ds\right)$$

La forme explicite de ces deux représentations, dues à U. Grenander ([11], 1950), est en général assez difficile à établir et s'avère donc peu utile dans la pratique.

c) Représentation dans l'espace $\mathcal{H}(T, K)$

Partant du fait que $\|\theta\|^2 = \sum_{k \geq 1} \frac{\theta_k^2}{\lambda_k}$, la variable aléatoire $\Lambda = \sum_{k \geq 1} \frac{\theta_k \cdot X_k}{\lambda_k}$ apparaît ici comme le produit scalaire de θ et de X dans $\mathcal{H}(T, K)$, soit :

$$(4.4) \quad \Lambda = \langle \theta, X \rangle.$$

Cette écriture est formelle, puisque presque sûrement $X(\cdot, \omega) \notin \mathcal{H}(T, K)$ (cf. [16], p. 533) mais permet d'exprimer la fonction de vraisemblance sous la forme :

$$(4.5) \quad \frac{dP_\theta}{dP_0} = \exp\left\{\langle \theta, X \rangle - \frac{1}{2} \|\theta\|^2\right\}$$

Justifier une telle écriture nous permettrait alors d'avoir un outil plus maniable pour exprimer la fonction de vraisemblance puisqu'il nous suffirait de caractériser l'espace autoreproduisant associé à la covariance K et de calculer ensuite, formellement, le produit scalaire (4.4). On trouve dans M. Duc-Jacquet ([4], 1973) et

T. Kailath ([16], 1971) des exemples de constructions d'espaces autoreproduisants lorsque la covariance K est donnée.

Pour justifier l'écriture établie en (4.5), il suffit de vérifier que la variable aléatoire Λ définie par (4.4) est solution de l'équation :

$$(4.6) \quad \langle X_t, Y \rangle = \theta(t); t \in T$$

où Y est élément de $L^2(B)$. C'est la solution proposée par T. Kailath.

2) Cas où la contre-hypothèse Θ_1 est un espace de fonction de dimension infinie

Le cas où la contre-hypothèse Θ_1 est de dimension infinie est peu étudié. La difficulté provenant du fait qu'il est assez laborieux de construire une statistique libre. Pour résoudre ce problème, on ne s'intéressera qu'à des test asymptotiquement de risque nul. Plus précisément notre démarche consistera à construire l'alternative Θ_1 qui nous assure l'existence de tests convergents.

Dans le chapitre II et lorsque le bruit est un processus de Ornstein-Uhlenbeck, nous proposons trois tests de détection où l'alternative est de dimension infinie. Les deux premiers tests sont basés sur un théorème de Geffroy, le dernier sur une statistique linéaire des observations.

2.1) Orthogonalité de deux familles de lois

Soit le processus $X = (X(t, \omega) = \theta(t) + B(t, \omega); t \geq 0, \omega \in \Omega)$ à valeurs dans $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}^+}, \mathcal{B}^{\mathbf{R}^+}(\mathbf{R}))$ où le signal θ appartient à une classe donnée Θ de fonctions de \mathbf{R}^+ dans \mathbf{R} et où le bruit $B = (B(t), t \geq 0)$ est une f.a.r. gaussienne centrée de covariance K connue. On note P_θ la loi de X sur $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}^+}, \mathcal{B}^{\mathbf{R}^+}(\mathbf{R}))$ lorsque le signal inconnu est θ .

Définition : Deux hypothèses $\mathcal{P}_i = \{P_\theta; \theta \in \Theta_i\}; \Theta_i \subset \Theta, i = 0, 1;$ sont dites orthogonales ($\mathcal{P}_0 \perp \mathcal{P}_1$) si :

$$(4.6) \quad \begin{cases} \exists C \in \mathcal{B}^{\mathbf{R}^+}(\mathbf{R}) \text{ tel que :} \\ \forall \theta \in \Theta_0; P_\theta(C) = 1 \text{ et } \forall \theta \in \Theta_1, P_\theta(C) = 0 \end{cases}$$

Si $S = (t_n)_{n \geq 1}$, est une suite croissante sur \mathbf{R}^+ -suite d'instant d'observation - notons P_θ^S la loi de la restriction de $X = \theta + B$ à S . Il est clair que pour

que les hypothèses $(P_\theta; \theta \in \Theta_0)$ et $(P_\theta; \theta \in \Theta_1)$ soient orthogonales, il suffit que les familles de lois $(P_\theta^S; \theta \in \Theta_i), i = 0, 1$, soient elles-mêmes orthogonales. Cette remarque permet de discrétiser le problème et de considérer l'orthogonalité d'hypothèses liées au processus $(X(t_n), n \geq 1)$.

2.2) Séparation asymptotique uniforme (s.a.u.) de deux familles de lois

$\forall n \geq 1$, notons $P_\theta^{(n)}$ la loi du vecteur aléatoire $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ lorsque le signal est θ .

Définition : On dira que les familles de lois $(P_\theta^S, \theta \in \Theta_i), i = 0, 1$, se séparent asymptotiquement uniformément, s'il existe une suite de cylindres $(C_n, n \geq 1)$; où C_n et $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ -mesurables : telle que :

$$(4.7) \quad \begin{cases} \text{Sup}(P_\theta^{(n)}(C_n); \theta \in \Theta_1) \rightarrow 0 \\ \text{Inf}(P_\theta^{(n)}(C_n); \theta \in \Theta_0) \rightarrow 1 \end{cases}$$

En posant $C = \lim_n \text{Sup } C_n$, on établit facilement que :

$$(4.8) \quad \begin{cases} \forall \theta \in \Theta_0 \quad P_\theta^S(C) = 1 \\ \forall \theta \in \Theta_1 \quad P_\theta^S(C) = 0 \end{cases}$$

Aussi, pour que les familles de lois $(P_\theta; \theta \in \Theta_i), i = 0, 1$, soient orthogonales, il suffit que les familles $(P_\theta^S; \theta \in \Theta_i), i = 0, 1$, se s.a.u.

2.3) Tests convergents et orthogonalités d'hypothèses multiples

D'après (4.7), $(\mathbf{R}^{(n)} \setminus C_n, n \geq 1)$ est la suite des régions critiques d'un test convergent de l'hypothèse Θ_0 contre l'alternative Θ_1 . Il est donc nécessaire que ces hypothèses soient orthogonales.

Le théorème de J. Geffroy, ([8], 1976) énoncé ci-dessous donne une condition suffisante de s.a.u. de deux familles de lois, basée sur l'éloignement des lois conditionnelles au sens de la distance en variations et fournit la forme explicite des cylindres $(C_n, n \geq 1)$.

2.4) Thoérème de Geffroy

Pour tout $(n-1)$ -uple $x^{(n-1)}$ de $\mathbf{R}^{(n-1)}$; $P_\theta^{x^{(n-1)}}$ désignera la loi conditionnelle de $X(t_n)$ sachant que $(X(t_1), \dots, X(t_{n-1})) = x^{(n-1)}$. Supposons vérifiées les conditions suivantes :

Il existe deux suites $(p_n, n \geq 1)$ et $(q_n, n \geq 1)$ de nombres réels et une suite $(B_n, n \geq 1)$ dans laquelle, pour tout entier $n \geq 1$, B_n est un borélien de \mathbf{R}^n telles qu'en notant $B_n(x^{(n-1)})$ la section de B_n par le $(n-1)$ -uple quelconque $x^{(n-1)}$, on ait :

$$(4.9) \quad \begin{cases} \forall \theta \in \Theta_0 \text{ et } \forall \theta' \in \Theta_1 \\ P_\theta^{(1)}(B_1) \geq p_1 \geq q_1 \geq P_{\theta'}^{(1)}(B_1) \end{cases}$$

$$(4.10) \quad \begin{cases} \forall \theta \in \Theta_0, \forall \theta' \in \Theta_1, \forall n \geq 2 \text{ et } \forall x^{(n-1)} \in \mathbf{R}^{(n-1)} \\ P_\theta^{x^{(n-1)}}(B_n(x^{(n-1)})) \geq p_n \geq q_n \geq P_{\theta'}^{x^{(n-1)}}(B_n(x^{(n-1)})) \end{cases}$$

Théorème (Geffroy) : *Les conditions (4.9) et (4.10) étant satisfaites, les boréliens $C_n, n \geq 1$ définis par :*

$$(4.11) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1 \quad \alpha_n = p_n - q_n \\ \forall n \geq 1 \quad C_n = \{x^{(n)} \in \mathbf{R}^n : \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{B_j}(x^{(j)}) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (p_j^2 - q_j^2)\} \end{cases}$$

vérifient les inégalités suivantes :

$$(4.12) \quad \begin{cases} \forall \theta \in \Theta_0 \text{ et } \forall n \geq 1 \quad P_\theta^{(n)}(C_n) \geq 1 - \exp(-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \alpha_j^2), \\ \forall \theta \in \Theta_1 \text{ et } \forall n \geq 1 \quad P_\theta^{(n)}(C_n) \leq \exp(-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \alpha_j^2), \end{cases}$$

Du moment que les hypothèses Θ_0 et Θ_1 vérifient les conditions (4.9) et (4.10) et que $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 = +\infty$, le théorème de J. Geffroy dit qu'il existe alors un test uniformément convergent de Θ_0 contre Θ_1 . La suite des régions d'acceptations est définie ici par la suite des cylindres $(C_n, n \geq 1)$.

Ce théorème est à la base des deux premiers tests du chapitre II où on a cherché à ce que la contre hypothèse Θ_1 soit la plus riche possible sous la condition que le test reste convergent. D'après le théorème de dichotomie Θ_1 est assujettie à la contrainte :

$$\Theta_1 \cap \mathcal{H}(\mathbf{R}^+, K) = \emptyset.$$

CHAPITRE II : TESTS DE DÉTECTION D'UN SIGNAL DANS UN BRUIT DE ORNSTEIN-UHLENBECK

Ce chapitre a été rédigé à partir d'un article (cf. [14]) dans lequel on a fait diverses insertions. Le premier chapitre ayant été rédigé ultérieurement, il en résulte quelques redites.

Résumé : En se basant sur un *seul* enregistrement

$$X(t, \omega_0) = \theta(t) + B(t, \omega_0) ; t \geq 0$$

de la somme d'un signal inconnu $\theta = (\theta(t) ; t \geq 0)$ et d'un bruit aléatoire gaussien centré $B = (B(t, \omega) ; t \geq 0, \omega \in \Omega)$, qui est supposé être un processus de Ornstein-Uhlenbeck, on propose ci-dessous trois tests convergents de l'hypothèse qu'il n'y a pas de signal, c'est-à-dire que l'on a enregistré seulement une trajectoire $B(., \omega_0)$ du bruit B contre l'hypothèse qu'il y a en plus un signal non nul appartenant à l'ensemble Θ^* des signaux de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ qui vérifient : $\varliminf_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) > 0$ ou $\varlimsup_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) < 0$ dans le cas du premier test, à l'ensemble Θ^{**} des signaux non nuls de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ de période connue P tels que $\theta(0) + \dot{\theta}(0) \neq 0$ en ce qui concerne le second test ou à l'ensemble Θ_1^* des signaux qui vérifient : $\varliminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \sum_{p=1}^n (e^{\alpha \theta(p)} - \theta(p-1)) > 0$, ou $\varlimsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \sum_{p=1}^n (e^{\alpha \theta(p)} - \theta(p-1)) < 0$ pour le troisième test. Pour appliquer ces tests, on utilise seulement les quantités $X(t_n, \omega_0)$, $n \geq 1$ pour une suite d'instantants d'observation $(t_n ; n \geq 1)$ convenablement choisie (autrement dit, le signal est échantillonné). La démonstration des deux premiers tests repose sur une condition suffisante pour que deux hypothèses soient orthogonales, due à J. Geffroy, et qui porte sur l'éloignement des lois conditionnelles, au sens de la distance en variations, tandis que le troisième test est démontré de manière classique.

Classification A.M.S. : 62M02 – 60G15

Mots-clefs : signal, processus de Ornstein-Uhlenbeck, test de détection.

I INTRODUCTION

1) Position du problème

On reçoit à partir de l'instant initial $t = 0$ un signal qui est la somme d'un signal émis $\theta = (\theta(t) ; t \geq 0)$, qui est le signal *utile* que l'on voudrait récupérer, et d'un bruit aléatoire que nous supposons être, au début du chapitre (section II, paragraphes 2 et 3), un processus gaussien centré quelconque $(B(t) ; t \geq 0)$, de covariance K connue, puis (à partir du paragraphe 3 de la section II) un processus de Ornstein-Uhlenbeck, c'est-à-dire un processus gaussien centré dont la covariance est donnée par :

$$(1.1) \quad \forall t, s \geq 0, \quad K(t, s) = E(X(t) \cdot X(s)) = e^{-|t-s|}.$$

Ce que l'on enregistre est donc une trajectoire du processus gaussien $\theta + B$, soit :

$$(1.2) \quad \forall t \geq 0, \quad X(t, \omega_0) = \theta(t) + B(t, \omega_0).$$

La modélisation d'un bruit par un processus de Ornstein-Uhlenbeck est souvent utilisée. Rappelons d'une part que c'est le processus markovien gaussien *stationnaire* centré le plus général ([6]; III.8.2, p.99), à deux coefficients d'échelle sur l'amplitude du bruit et le temps près, que l'on pourrait introduire et estimer dans un modèle plus élaboré, et d'autre part qu'il est solution de l'équation différentielle stochastique de Langevin (cf. [2]; VIII.6 ou [6]; X.4.b, p.335-336).

La seule hypothèse *a priori* que l'on fait est que θ appartient à un ensemble connu Θ de signaux possibles et le problème est de déduire de l'enregistrement $(X(t, \omega_0) ; t \geq 0)$ le maximum de renseignements concernant le signal utile θ . Dans la section III, on propose trois tests convergents de l'hypothèse que le signal utile est nul, c'est-à-dire que l'on a enregistré seulement une trajectoire $B(\cdot, \omega_0)$ du bruit (qui est un processus de Ornstein-Uhlenbeck) contre l'hypothèse qu'il y a en plus du bruit un signal utile non nul, lorsque l'hypothèse alternative Θ^* , puis Θ^{**} , puis Θ_1^* est convenablement choisie (voir le résumé). On a cherché à ce que ces contre-hypothèses soient aussi riches que possible, sous la condition que les tests restent convergents. Si la première contre-hypothèse Θ^* est apparue telle quelle pour des raisons techniques, la seconde est naturelle. Dans les deux cas, on voit apparaître le fait, propre au bruit de Ornstein-Uhlenbeck, que le signal θ n'intervient que par $\theta + \dot{\theta}$, alors que dans le cas d'un bruit brownien (cf. [22]),

c'est par $\hat{\theta}$ qu'il intervient. La définition de la contre-hypothèse du troisième test repose aussi sur des considérations techniques.

2) Discrétisation du modèle

On ne se servira pas de tout l'enregistrement $(X(t, \omega_0) ; t \geq 0)$ mais seulement de la suite $(X(t_n, \omega_0) ; n \geq 1)$ des mesures du signal reçu suivant la suite des instants d'observation $T = (t_n ; n \geq 1)$:

$$(2.1) \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots$$

Cette suite devra être choisie convenablement, et n'aura pas nécessairement la forme d'une progression arithmétique; autrement dit, bien que B soit un processus gaussien stationnaire (dans le cas où c'est un processus de Ornstein-Uhlenbeck), la chaîne $(B(t_n) ; n \geq 1)$ ne sera pas nécessairement stationnaire. Par contre elle restera markovienne, comme $(B(t) ; t \geq 0)$, ce qui explique la simplicité des résultats obtenus.

3) Outil mathématique utilisé

Ce travail repose, comme on l'a indiqué dans le résumé, sur une condition suffisante d'orthogonalité de deux hypothèses multiples portant sur l'éloignement des lois conditionnelles au sens de la distance en variations, due à J. Geffroy ([8]; th. 1).

4) Notations et rappels

Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout signal θ , $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$ désignera un n -uple réel quelconque, $P_\theta^{(n)}$ la loi du vecteur aléatoire $(X(t_1), \dots, X(t_n))$, $K^{(n)}$ sa matrice de covariance.

Si B est un processus gaussien centré quelconque qui vérifie :

$$(4.1) \quad \forall n \geq 1, \text{ Det}(K^{(n)}) \neq 0,$$

la loi $P_\theta^{(n)}$ est une loi normale non dégénérée sur \mathbf{R}^n et la loi conditionnelle de $X(t_n)$ sachant que $(X(t_1), \dots, X(t_{n-1})) = x^{(n-1)}$ notée $P_\theta^{x^{(n-1)}}$ est donnée, quels que soient l'entier $n \geq 2$, le signal θ et le $(n-1)$ -uple $x^{(n-1)}$, par :

$$(4.2) \quad P_\theta^{x^{(n-1)}} = \mathcal{N}(M_\theta(x^{(n-1)}); \sigma_n^2)$$

$$(4.3) \quad M_\theta(x^{(n-1)}) = \theta(t_n) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^n (\theta(t_j) - x_j)$$

$$(4.4) \quad \sigma_n^2 = K(t_n, t_n) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^n K(t_j, t_n),$$

les coefficients a_1^n, \dots, a_{n-1}^n étant eux-mêmes donnés par :

$$(4.5) \quad (a_1^n, \dots, a_{n-1}^n) = (K(t_1, t_n), \dots, K(t_{n-1}, t_n))(K^{(n-1)})^{-1}.$$

Ces coefficients, ainsi que les variances conditionnelles σ_n^2 , $n \geq 2$ doivent donc être considérés comme des *données du modèle* puisqu'ils ne dépendent que de la covariance connue K . Il en est de même des fonctions $f_n : \Theta \rightarrow \mathbf{R}$ définies pour tout entier $n \geq 2$ par :

$$(4.6) \quad f_n(\theta) = \theta(t_n) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^n \theta(t_j).$$

Ces fonctions permettent d'exprimer simplement les différences des moyennes conditionnelles qui interviennent dans les distances en variations entre lois conditionnelles :

$$(4.7) \quad \begin{cases} \forall n \geq 2, \quad \forall x^{(n-1)} \in \mathbf{R}^{(n-1)} \quad \text{et} \quad \forall \theta_0, \theta_1 \in \Theta, \\ M_{\theta_0}(x^{(n-1)}) - M_{\theta_1}(x^{(n-1)}) = f_n(\theta_0) - f_n(\theta_1). \end{cases}$$

5) Antécédents de ce travail

Ce papier est une étude parallèle à celle qui a été faite récemment par R. Moché ([22]) dans le cas où B est le processus du mouvement brownien. Notre deuxième test, par exemple, est le pendant du test de détection d'un signal dans un bruit brownien proposé par cet auteur. On trouvera aussi dans [22] une comparaison des résultats obtenus avec le théorème de dichotomie de deux lois gaussiennes ([24]; cor. 8.3), et l'on pourra se convaincre de l'importance de la nature du bruit, notre modèle et le modèle étudié en [22] étant radicalement différents, malgré leurs analogies.

II RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1) Notre premier résultat servira de modèle aux démonstrations ultérieures.

Théorème général *B étant un bruit gaussien centré quelconque, soit θ_0 et θ_1 deux signaux vérifiant, relativement à une sous-suite $(t_{n(k)}; k \geq 1)$ de la suite T des instants d'observation, la condition :*

$$(1.1) \quad \forall k \geq 2, \quad f_{n(k)}(\theta_0) < f_{n(k)}(\theta_1).$$

Il existe alors un test uniformément convergent de l'hypothèse :

$$\Theta_0 = (\theta; \theta \in \Theta \text{ et } \forall k \geq 2, f_{n(k)}(\theta) \leq f_{n(k)}(\theta_0)) \quad \text{contre l'hypothèse :}$$

$$\Theta_1 = (\theta; \theta \in \Theta \text{ et } \forall k \geq 2, f_{n(k)}(\theta) \geq f_{n(k)}(\theta_1))$$

si l'on a :

$$(1.2) \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(f_{n(k)}(\theta_1) - f_{n(k)}(\theta_0))^2}{\sigma_{n(k)}^2} = +\infty.$$

■ La distance en variations de deux lois de probabilité μ et ν sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ définie par :

$$d_V(\mu; \nu) = \text{Sup}(|\mu(B) - \nu(B)|; B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}))$$

vérifie l'égalité suivante, lorsque μ et ν admettent respectivement des densités f et g :

$$(1.3) \quad d_V(\mu; \nu) = \mu\{f \geq g\} - \nu\{f \geq g\} = \mu\{f > g\} - \nu\{f > g\}.$$

S'il s'agit de deux lois normales de même variance $\sigma^2 > 0$, cette distance s'exprime à partir de la fonction de répartition F de $\mathcal{N}(0, 1)$ par :

$$(1.4) \quad d_V(\mathcal{N}(m, \sigma^2); \mathcal{N}(m', \sigma^2)) = 2F\left(\frac{|m - m'|}{2\sigma}\right) - 1.$$

La distance en variations des deux lois conditionnelles $P_{\theta_0}^{x^{(n(k)-1)}}$ et $P_{\theta_1}^{x^{(n(k)-1)}}$ est donc, compte-tenu de (I.4.2), égale à :

$$d_{n(k)} \stackrel{\text{déf}}{=} 2F\left(\frac{|M_{\theta_1}(x^{(n(k)-1)}) - M_{\theta_0}(x^{(n(k)-1)})|}{2\sigma_{n(k)}}\right) - 1,$$

soit, d'après (I.4.7) et (1.1) :

$$(1.5) \quad d_{n(k)} = 2F\left(\frac{f_{n(k)}(\theta_1) - f_{n(k)}(\theta_0)}{2\sigma_{n(k)}}\right) - 1.$$

De plus, le borélien $B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)})$ de la forme $\{f \geq g\}$ qui sépare le mieux, au sens de (1.3), les deux lois conditionnelles considérées est égal à :

$$\left\{ x ; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n(k)}} \exp\left(\frac{-(x - M_{\theta_0}(x^{(n(k)-1)}))^2}{2\sigma_{n(k)}^2}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n(k)}} \exp\left(\frac{-(x - M_{\theta_1}(x^{(n(k)-1)}))^2}{2\sigma_{n(k)}^2}\right) \right\},$$

soit, tous calculs faits, compte-tenu de (I.4.3), (I.4.6) et (1.1), égal à :

$$(1.6) \quad B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)}) =] - \infty ; \frac{1}{2}(f_{n(k)}(\theta_0) + f_{n(k)}(\theta_1)) + \sum_{j=1}^{n(k)-1} a_j^{n(k)} \cdot x_j].$$

Par conséquent, nous avons, d'après (1.3) :

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall k \geq 2, \\ P_{\theta_0}^{x^{(n(k)-1)}}(B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)})) = d_{n(k)} + P_{\theta_1}^{x^{(n(k)-1)}}(B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)})). \end{array} \right.$$

Il est clair que pour tout entier $k \geq 2$, nous avons :

$$P_{\theta}^{x^{(n(k)-1)}}(B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)})) = F\left(\frac{f_{n(k)}(\theta_0) + f_{n(k)}(\theta_1) - 2f_{n(k)}(\theta)}{2\sigma_{n(k)}}\right),$$

qui est une fonction décroissante de $f_{n(k)}(\theta)$. Il en résulte, par définition de Θ_0 et de Θ_1 , que la formule (1.7) s'étend comme suit, pour tout entier $n \geq 2$:

$$(1.8) \quad \text{Min}\left(P_{\theta}^{x^{(n-1)}}(B_n(x^{(n-1)})) ; \theta \in \Theta_0\right) = p_n + d_n,$$

avec :

$$(1.9) \quad p_n \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Max}\left(P_{\theta}^{x^{(n-1)}}(B_n(x^{(n-1)})) ; \theta \in \Theta_1\right),$$

à condition de poser, pour tout entier $n \geq 2$ n'appartenant pas à la suite extraite $(n(k)) ; k \geq 2$:

$$d_n = 0 \quad \text{et} \quad \forall x^{(n-1)}, \quad B_n(x^{(n-1)}) = \mathbf{R}.$$

En appliquant le théorème de J. Geffroy, ce qui est justifié par (1.8) et (1.9), et après avoir remarqué que si $d_n \neq 0$, $p_n + \frac{1}{2}d_n = \frac{1}{2}$, on obtient que la suite des boréliens $(C_n ; n \geq 1)$ définie par :

$$(1.10) \quad C_n = \left\{ x^{(n)} ; \sum_{j=2}^n d_j \cdot 1_{B_j(x^{(j-1)})(x_j)} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n d_j \right\}$$

vérifie :

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 1, \quad \text{Inf}(P_\theta^{(n)}(C_n) ; \theta \in \Theta_0) \geq 1 - \exp\left(-\frac{3}{8} \sum_{j=2}^n d_j^2\right), \\ \text{Sup}(P_\theta^{(n)}(C_n) ; \theta \in \Theta_1) \leq \exp\left(-\frac{3}{8} \sum_{j=2}^n d_j^2\right). \end{array} \right.$$

Au lieu du théorème de J. Geffroy, on peut utiliser un théorème de R. Moché (voir [20]; th. 2). Le coefficient $\frac{3}{8}$ provient d'ailleurs de l'application de ce théorème. Mais c'est la seule amélioration qu'il apporte dans ce cas particulier.

Les suites $(d_{n(k)} ; k \geq 2)$ et $\left(\frac{1}{\sigma_{n(k)}}(f_{n(k)}(\theta_1) - f_{n(k)}(\theta_0)) ; k \geq 2\right)$ convergent toutes les deux vers 0 ou ne convergent ni l'une ni l'autre vers 0, quand k tend vers $+\infty$, d'après (1.5).

Dans le premier cas, $d_{n(k)}$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n(k)}}}(f_{n(k)}(\theta_1) - f_{n(k)}(\theta_0))$ sont des infimums petits équivalents, quand k tend vers $+\infty$. Par conséquent, la série $\sum_{k \geq 2} d_{n(k)}^2$ et la série (1.2) sont toujours de même nature. Si cette dernière diverge, on a donc :

$$\sum_{j=2}^{+\infty} d_j^2 = \sum_{k=2}^{+\infty} d_{n(k)}^2 = +\infty,$$

ce qui implique, d'après (1.11), que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Inf}(P_\theta^{(n)}(C_n) ; \theta \in \Theta_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \\ \text{Sup}(P_\theta^{(n)}(C_n) ; \theta \in \Theta_1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{array} \right.$$

Autrement dit, $(C_n ; n \geq 1)$ est la suite des régions d'acceptation d'un test uniformément convergent de l'hypothèse Θ_0 contre l'hypothèse Θ_1 . ■

On remarquera que les hypothèses Θ_0 et Θ_1 jouent des rôles symétriques. Ainsi, $(\mathbf{R}^n - C_n ; n \geq 1)$ est de même la suite des régions d'acceptation d'un test uniformément convergent de Θ_1 contre Θ_0 .

2) Interprétation de la condition (1.2)

a) **Proposition 1** *Quelle que soit la suite d'instants d'observation $(t_n ; n \geq 1)$ vérifiant (I.2.1), la suite $(h_n ; n \geq 2)$ des fonctions réelles définies sur $[0, +\infty[$ par (I.4.4), (I.4.5) et par :*

$$(2.1) \quad \forall n \geq 2, \quad h_n = \frac{1}{\sigma_n} \left(K(t_n, \cdot) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n K(t_i, \cdot) \right)$$

est orthonormale dans l'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(K)$ de noyau reproduisant K .

■ Nous allons montrer successivement que :

$$(2.2) \quad \forall n \geq 2, \quad \| h_n \|^2 = 1,$$

$$(2.3) \quad n > m \geq 2 \implies (h_n, h_m) = 0.$$

1) En utilisant la propriété d'autoreproduction du noyau K (cf. [1]; Part I.1), nous avons :

$$(2.4) \quad \| \sigma_n h_n \|^2 = K(t_n, t_n) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n K(t_n, t_i) + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_i^n a_j^n K(t_i, t_j).$$

En utilisant (I.4.5), le dernier terme peut se transformer comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_i^n a_j^n K(t_i, t_j) &= (a_1^n, \dots, a_{n-1}^n) K^{(n-1)}(a_1^n, \dots, a_{n-1}^n)^t \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n K(t_i, t_n). \end{aligned}$$

Il en résulte, d'après (2.4) et (I.4.4), que :

$$\| \sigma_n h_n \|^2 = K(t_n, t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n K(t_i, t_n) = \sigma_n^2,$$

ce qui établit (2.2).

2) En utilisant encore la propriété de reproduction du noyau K , nous avons, pour tout couple d'entiers (n, m) tel que $n > m \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sigma_n \sigma_m (h_n, h_m) &= K(t_n, t_m) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n K(t_i, t_m) - \sum_{j=1}^{m-1} a_j^m K(t_n, t_j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} a_i^n a_j^m K(t_i, t_j). \end{aligned}$$

Transformons le dernier terme en posant :

$$K^{(n-1, m-1)} = E\left(\left(B(t_1), \dots, B(t_{n-1})\right)^t \cdot \left(B(t_1), \dots, B(t_{m-1})\right)\right),$$

et en utilisant (I.4.5). On obtient :

$$\begin{aligned} \alpha &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} a_i^n a_j^m K(t_i, t_j) \\ &= (a_1^n, \dots, a_{n-1}^n) K^{(n-1, m-1)} (a_1^m, \dots, a_{m-1}^m)^t \\ &= (K(t_1, t_n), \dots, K(t_{n-1}, t_n)) (K^{(n-1)})^{-1} K^{(n-1, m-1)} \\ &\quad \cdot (K^{(m-1)})^{-1} (K(t_1, t_m), \dots, K(t_{m-1}, t_m))^t. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $(K^{(n-1)})^{-1} K^{(n-1, m-1)} (K^{(m-1)})^{-1}$ est la matrice $(n-1, m-1)$ dont les $m-1$ premières lignes forment la matrice $(K^{(m-1)})^{-1}$ et dont les $n-m$ dernières lignes sont nulles.

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} \alpha &= (K(t_1, t_n), \dots, K(t_{m-1}, t_n)) (K^{(m-1)})^{-1} (K(t_1, t_m), \dots, K(t_{m-1}, t_m))^t \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} a_j^m K(t_j, t_n), \quad \text{d'après (I.4.5)}. \end{aligned}$$

Il en résulte que (2.3) est vraie, puisque :

$$\begin{aligned} \sigma_n \sigma_m(h_n, h_m) &= K(t_n, t_m) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n K(t_i, t_m) \\ &= K(t_n, t_m) - (K(t_1, t_n), \dots, K(t_{n-1}, t_n)) (K^{(n-1)})^{-1} \\ &\quad \cdot (K(t_1, t_m), \dots, K(t_{n-1}, t_m))^t \\ &= K(t_n, t_m) - (K(t_1, t_n), \dots, K(t_{n-1}, t_n)) (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t \\ &= K(t_n, t_m) - K(t_m, t_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque $(h_n ; n \geq 2)$ est une famille orthonormale dans $\mathcal{H}(K)$, on a donc, pour toute fonction φ de cet espace de Hilbert, d'après l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\varphi, h_n)^2 \leq \|\varphi\|^2 < +\infty,$$

autrement dit, en utilisant de nouveau la propriété de reproduction du noyau K :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\varphi(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n \varphi(t_i))^2}{\sigma_n^2} < \infty.$$

■

b) On en déduit que :

Proposition 2 *Si les deux signaux θ_0 et θ_1 vérifient la condition (1.2), leur différence $\theta_1 - \theta_0$ n'appartient pas à l'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(K)$.*

c) On sait que si $L^2(B)$ désigne l'espace gaussien centré engendré par le bruit $(B(t); t \geq 0)$, l'application qui à tout U appartenant à $L^2(B)$ associe la fonction réelle $i(U)$ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \geq 0, \quad i(U)(t) = \mathbb{E}(U \cdot B(t))$$

est (cf. [24], prop. 3.2) une bijection de $L^2(B)$ sur $\mathcal{H}(K)$ qui conserve le produit scalaire, et dans laquelle, pour tout $t \geq 0$, $B(t)$ et $K(t, \cdot)$ se correspondent.

Par conséquent, la suite $(i^{-1}(h_n), n \geq 2)$ est orthonormale dans $L^2(B)$, d'après la proposition 1.

Il en résulte que, pour les v.a.r. $Y_n, n \geq 2$, définies par :

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 2, \quad Y_n = \frac{1}{\sigma_n} \left(X(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n X(t_i) \right) \\ \quad \quad \quad = i^{-1}(h_n) + \frac{1}{\sigma_n} \left(\theta(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n \theta(t_i) \right), \end{array} \right.$$

nous avons :

Proposition 3 *Quelle que soit la suite d'instants $(t_n; n \geq 1)$ vérifiant (I.2.1), les v.a.r. $(Y_n; n \geq 2)$ définies par (2.5), (I.4.4) et (I.4.5) sont des v.a.r. gaussiennes indépendantes de variance 1. Sous l'hypothèse θ , leurs moyennes sont données par :*

$$(2.6) \quad \forall n \geq 2, \quad \mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{\sigma_n} \left(\theta(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n \theta(t_i) \right).$$

Bien sûr, les propositions 1 et 2 ne sont pas originales. On peut les retrouver dans l'ordre inverse en utilisant le fait bien connu que dans un espace gaussien, conditionner revient à projeter orthogonalement (cf. [18], Sec. 36.3) et que :

$$\forall n \geq 2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}^{\sigma(X(t_1), \dots, X(t_{n-1}))} (X(t_n)) \underset{p.s.}{=} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n X(t_i), \\ \text{var} \left(X(t_n) - \mathbb{E}^{\sigma(X(t_1), \dots, X(t_{n-1}))} (X(t_n)) \right) = \sigma_n^2. \end{array} \right.$$

3) Cas où le bruit B est un processus de Ornstein-Uhlenbeck

Dans ce cas particulier, on sait (cf. [6]; III.8.e, p.99) que, quel que soit l'entier $n \geq 2$, on a :

$$(3.1) \quad \begin{cases} a_1^n = \dots = a_{n-2}^n = 0, & a_{n-1}^n = e^{-(t_n - t_{n-1})} \\ \sigma_n^2 = 1 - e^{-2(t_n - t_{n-1})}. \end{cases}$$

Il en résulte que, pour tout signal θ , on a, à partir de (I.4.3) et de (I.4.6) :

$$(3.2) \quad \begin{cases} f_n(\theta) = \theta(t_n) - e^{-(t_n - t_{n-1})}\theta(t_{n-1}) \\ \forall x^{(n-1)}, M_\theta(x^{(n-1)}) = \theta(t_n) - e^{-(t_n - t_{n-1})}(\theta(t_{n-1}) - x_{n-1}). \end{cases}$$

4) On peut donc traduire comme suit le théorème précédent :

Théorème 2 *On suppose que le bruit B est un processus de Ornstein-Uhlenbeck et que la différence $\bar{\theta} = \theta_1 - \theta_0$ de deux signaux θ_0 et θ_1 vérifie les inégalités suivantes :*

$$(4.1) \quad \forall n \geq 2 \quad e^{t_{n-1}}\bar{\theta}(t_{n-1}) < e^{t_n}\bar{\theta}(t_n),$$

relativement à une suite d'instants d'observation $(t_n; n \geq 1)$. Alors, pour qu'il existe un test uniformément convergent de l'hypothèse :

$$\Theta_0 = (\theta; \theta \in \Theta \quad \text{et} \quad e^{t_n}\theta(t_n) - e^{t_{n-1}}\theta(t_{n-1}) \leq e^{t_n}\theta_0(t_n) - e^{t_{n-1}}\theta_0(t_{n-1}))$$

contre l'hypothèse :

$$\Theta_1 = (\theta; \theta \in \Theta \quad \text{et} \quad e^{t_n}\theta(t_n) - e^{t_{n-1}}\theta(t_{n-1}) \geq e^{t_n}\theta_1(t_n) - e^{t_{n-1}}\theta_1(t_{n-1}))$$

il suffit que :

$$(4.2) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(e^{t_n}\bar{\theta}(t_n) - e^{t_{n-1}}\bar{\theta}(t_{n-1}))^2}{e^{2t_n} - e^{2t_{n-1}}} = +\infty.$$

5) Remarques

Les formules (3.1) et (3.2) montrent, comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, que la chaîne $(X(t_n); n \geq 1)$ est markovienne. C'est ce qui explique la simplicité du critère (4.2) et des résultats suivants.

La condition (3.5), analogue à la condition (1.2) implique, on l'a vu, que $\bar{\theta}$ n'appartient pas à l'espace autoreproduisant associé au processus de Ornstein-Uhlenbeck, c'est à dire à l'espace $\mathcal{H}(K)$, où K est le noyau défini par (I.1.1).

Il est facile de vérifier que :

Proposition 4 L'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(K)$ du noyau :

$$(5.1) \quad \forall t, s \geq 0, \quad K(t, s) = \beta^2 e^{-\alpha|t-s|},$$

où α et β désignent deux réels > 0 , est l'ensemble des fonctions réelles $\varphi(a, f)$, $a \in \mathbf{R}$, $f \in L^2 \stackrel{\text{d\'ef}}{=} L^2_{\mathbf{R}}([1, +\infty[, \lambda)$, définies sur $[0, +\infty[$ de manière unique par :

$$(5.2) \quad \forall t \geq 0, \quad \varphi(a, f)(t) = \beta e^{-\alpha t} \left(a + \int_1^{e^{2\alpha t}} f(x) dx \right),$$

muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$(5.3) \quad \begin{cases} \forall a, b \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \forall f, g \in L^2, \\ \langle \varphi(a, f), \varphi(b, g) \rangle = ab + \int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx. \end{cases}$$

■ a) Considérons d'abord les fonctions absolument continues $\psi(a, f)$, $a \in \mathbf{R}$, $f \in L^2$ définies sur $[1, +\infty[$ par :

$$(5.4) \quad \forall t \geq 1, \quad \psi(a, f)(t) = a + \int_1^t f(x) dx.$$

On a évidemment :

$$(5.5) \quad \psi(a, f)(1) = a \quad \text{et} \quad \psi'(a, f) \stackrel{\lambda\text{-p.p.}}{=} f.$$

Par conséquent, la représentation (5.4) est unique.

Considérons le noyau K^* et l'espace fonctionnel $\mathcal{H}(K^*)$ définis comme suit :

$$(5.6) \quad \begin{cases} \forall t, s \geq 1, \quad K^*(t, s) = \text{Min}(t, s), \\ \mathcal{H}(K^*) = \{ \psi(a, f) ; a \in \mathbf{R}, f \in L^2 \}. \end{cases}$$

K^* est la covariance de la restriction du mouvement brownien à l'espace-temps $[1, +\infty[$.

A l'aide de la correspondance bijective linéaire $(a, f) \longleftrightarrow \psi(a, f)$, on fait de $\mathcal{H}(K^*)$ un espace de Hilbert identifiable au produit $\mathbf{R} \otimes L^2$ des espaces de Hilbert \mathbf{R} et L^2 , en le munissant du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$ suivant :

$$(5.7) \quad \begin{cases} \forall a, b \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \forall f, g \in L^2, \\ \langle \psi(a, f), \psi(b, g) \rangle^* = ab + \int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx. \end{cases}$$

L'égalité :

$$\forall t, s \geq 1, \quad K^*(s, t) = \text{Min}(s, t) = 1 + \int_1^t 1_{[1, s]}(x) dx$$

prouve que :

$$\forall s \geq 1, \quad K^*(s, \cdot) = \psi(1, 1_{[1, s]}),$$

et par conséquent que les fonctions $K^*(s, \cdot)$, $s \geq 1$ appartiennent à l'espace fonctionnel $\mathcal{H}(K^*)$.

De plus, K^* a la propriété de reproduction, puisque :

$$\forall a \in \mathbf{R}, \quad \forall f \in L^2 \quad \text{et} \quad \forall t \geq 1,$$

$$\begin{aligned} \psi(a, f)(t) &= a + \int_1^t f(x) dx \\ &= a + \int_1^{+\infty} f(x) 1_{[1, t]}(x) dx \\ &= \langle \psi(a, f), K^*(t, \cdot) \rangle^* . \end{aligned}$$

On peut donc conclure (cf. [24], prop. 3.3) que $(\mathcal{H}(K^*), \langle \cdot, \cdot \rangle^*)$ est l'espace autoreproduisant de noyau K^* .

b) Soit $(W(t), t \geq 1)$ la restriction à l'espace-temps $[1, +\infty[$ d'un mouvement brownien. On sait que la f.a.r. $B = (B(t), t \geq 0)$ définie par :

$$(5.9) \quad \forall t \geq 0, \quad B(t) = \beta e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t})$$

est une f.a.r. de Ornstein-Uhlenbeck dont la covariance K vérifie (5.1).

On sait aussi (cf. [24], prop. 3.2) que l'espace autoreproduisant $(\mathcal{H}(K), (\cdot, \cdot))$ est l'ensemble des fonctions $t \rightarrow \mathbf{E}(U \cdot B(t))$, $U \in L^2_{\mathbf{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où (Ω, \mathcal{A}, P) désigne l'espace de probabilité sur lequel la f.a.r. W est définie.

Or nous avons, d'après (5.9) :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{E}(U \cdot B(t)) = \beta e^{-\alpha t} \mathbf{E}(U \cdot W(e^{2\alpha t})).$$

Comme $t \rightarrow \mathbf{E}(U \cdot W(t))$ est de même l'élément générique de $\mathcal{H}(K^*)$, on déduit de (5.4) que $\mathcal{H}(K)$ est l'ensemble des fonctions définies par (5.2). On remarquera aussi que la représentation (5.2) est unique puisque :

$$(5.10) \quad \varphi(a, f)(0) = a\beta,$$

et que pour λ -presque tout t , on a :

$$(5.11) \quad \varphi'(a, f)(t) = -\alpha\varphi(a, f)(t) + 2\alpha\beta e^{\alpha t} f(e^{2\alpha t}).$$

Pour tout $s \geq 0$ et d'après (5.2), nous avons, pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(\beta e^{-\alpha s}, \beta e^{-\alpha s} 1_{[1, e^{2\alpha s}]})(t) &= \beta^2 e^{-\alpha(t+s) + \text{Min}(2\alpha s, 2\alpha t)} \\ &= \beta^2 e^{-\alpha|t-s|} \\ &= K(s, t), \end{aligned}$$

ce qui prouve que :

(5.12) les fonctions $K(s, \cdot)$, $s \geq 0$ appartiennent à $\mathcal{H}(K)$.

$(\mathcal{H}(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ a été défini comme l'espace de Hilbert autoreproduisant de noyau K . A l'aide de la correspondance bijective et linéaire $(a, f) \longleftrightarrow \varphi(a, f)$, on peut aussi munir l'ensemble fonctionnel $\mathcal{H}(K)$ du produit scalaire image du produit scalaire de $\mathbf{R} \otimes L^2$. On obtient alors le produit scalaire défini par (5.3), qui est en fait égal à (\cdot, \cdot) . En effet, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a bien la propriété de reproduction puisque :

$\forall a \in \mathbf{R}, \quad \forall f \in L^2 \quad \text{et} \quad \forall t \geq 0,$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(a, f), K(t, \cdot) \rangle &= \langle \varphi(a, f), \varphi(\beta e^{-\alpha t}, \beta e^{-\alpha t} 1_{[1, e^{2\alpha t}]}) \rangle \\ &= \varphi(a, f)(t), \end{aligned}$$

et cette propriété, jointe à (5.12) prouve que $(\mathcal{H}(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est bien l'espace de Hilbert autoreproduisant de noyau K .

Remarque : d'après (5.2), (5.3), (5.10) et (5.11), on peut exprimer la proposition 4 sous la forme plus explicite suivante :

Proposition 5 *L'espace autoreproduisant $(\mathcal{H}(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de noyau K défini par (5.1) est l'ensemble des fonctions réelles φ définies sur $[0, +\infty[$, dérivables λ -p.p., telles que les fonctions $x \rightarrow \sqrt{x}\varphi(\frac{\ln x}{2\alpha})$ soient absolument continues sur $[1, +\infty[$, et qui vérifient de plus :*

$$\int_0^{+\infty} (\alpha\varphi(x) + \varphi'(x))^2 dx < +\infty.$$

Le produit scalaire de deux de ces fonctions, φ_1 et φ_2 , est donné par :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= \frac{1}{\beta^2} \varphi_1(0)\varphi_2(0) \\ &+ \frac{1}{4\alpha^2\beta^2} \int_0^{+\infty} (\alpha\varphi_1(x) + \varphi_1'(x))(\alpha\varphi_2(x) + \varphi_2'(x)) dx. \end{aligned}$$

Ce résultat n'est évidemment pas original. L'espace autoreproduisant de la restriction du noyau K à $[0, T] \times [0, T]$ se trouve par exemple dans ([18], ex.2.2.6).

6) Les théorèmes 1 et 2 sont des conditions suffisantes d'orthogonalité (et même de séparation asymptotique uniforme) de deux hypothèses multiples, obtenues à partir du théorème de J. Geffroy. Nous allons maintenant utiliser ce résultat pour établir une minoration de la distance en variations de deux hypothèses multiples, analogue au théorème 5 de [21].

On considère toujours le modèle décrit au I.1, B étant un bruit de Ornstein-Uhlenbeck dont la covariance est donnée par (I.1.1). Pour tout signal utile θ , P_θ et P_θ^T désignent respectivement la loi, sous l'hypothèse θ , du processus X et de la restriction du processus X à l'espace-temps $T \subset [0, +\infty[$.

Il est clair que :

$$(6.1) \quad \begin{cases} \forall \theta, \theta' \in \Theta \text{ et } \forall T \subset [0, +\infty[, T \neq \emptyset, \\ d_V(P_\theta, P_{\theta'}) \geq d_V(P_\theta^T, P_{\theta'}^T). \end{cases}$$

Par conséquent, étant données deux parties non vides et disjointes Θ_0 et Θ_1 de Θ , nous avons :

$$(6.2) \quad \begin{cases} \forall T \subset [0, +\infty[, T \neq \emptyset, \\ d_V(\{P_\theta, \theta \in \Theta_0\}, \{P_\theta, \theta \in \Theta_1\}) \geq d_V(\{P_\theta^T, \theta \in \Theta_0\}, \{P_\theta^T, \theta \in \Theta_1\}). \end{cases}$$

Nous allons démontrer d'abord un résultat relatif à deux hypothèses simples, que nous transformerons ensuite en des résultats concernant des hypothèses multiples (th. 4 et 5).

a) **Proposition 6** *B étant un processus de Ornstein-Uhlenbeck, θ_0 et θ_1 étant deux signaux dont la différence $\bar{\theta} = \theta_1 - \theta_0$ est de classe C^1 dans un sous-intervalle ouvert $I =]\alpha, \beta[$ de l'espace-temps $[0, +\infty[$, nous avons :*

$$(6.3) \quad d_V(P_{\theta_0}, P_{\theta_1}) \geq d_V(P_{\theta_0}^I, P_{\theta_1}^I) \geq 1 - 2 \exp\left(-\frac{e^{-2}}{48} \int_\alpha^\beta (\bar{\theta}(x) + \bar{\theta}'(x))^2 dx\right).$$

■ Soit $(\alpha_n, n \geq 1)$ une suite strictement croissante extraite de l'intervalle $]\alpha, \beta[$, et dont la limite est notée α_∞ .

Comme la fonction $\bar{\theta} + \bar{\theta}'$ est continue sur $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$, on peut poser :

$$(6.4) \quad \forall n \geq 1, \quad M_n = \text{Max}(\{|\bar{\theta}(x) + \bar{\theta}'(x)|; \alpha_n \leq x \leq \alpha_{n+1}\}).$$

De plus, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe, pour tout entier $n \geq 1$, un réel $\omega_n > 0$ tel que :

$$(6.5) \quad \begin{cases} \forall x, y \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}] \text{ tels que } |x - y| \leq \omega_n, \\ |(\bar{\theta}(x) + \bar{\theta}'(x))^2 - (\bar{\theta}(y) + \bar{\theta}'(y))^2| \leq \frac{\varepsilon}{n^2(\alpha_{n+1} - \alpha_n)}. \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$, on peut alors choisir un entier $N_n \geq 2$ tel que :

$$(6.6) \quad \begin{cases} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{N_n} \leq \text{Min}(\omega_n, 1) \text{ et} \\ M_n(e^{\alpha_{n+1}}(1 - e^{-\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{N_n}}))^{\frac{1}{2}} \leq 2\gamma, \end{cases}$$

où γ est l'unique solution strictement positive de l'équation :

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{3}x,$$

ce qui implique, puisque F est concave, que l'on a :

$$(6.7) \quad \forall x \in [0, \gamma], \quad F(x) - F(0) \geq \frac{1}{3}x.$$

Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $r = 0, \dots, N_n$, posons :

$$(6.8) \quad \alpha_{n,r} = \alpha_n + r \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{N_n},$$

et

$$(6.9) \quad d_{n,r} = 2(F(\frac{|e^{\alpha_{n,r}} \bar{\theta}(\alpha_{n,r}) - e^{\alpha_{n,r-1}} \bar{\theta}(\alpha_{n,r-1})|}{2\sqrt{e^{2\alpha_{n,r}} - e^{2\alpha_{n,r-1}}}}) - F(0)).$$

$\forall n \geq 1$ et $\forall r \in \{1, \dots, N_n\}$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{|e^{\alpha_{n,r}} \bar{\theta}(\alpha_{n,r}) - e^{\alpha_{n,r-1}} \bar{\theta}(\alpha_{n,r-1})|}{2\sqrt{e^{2\alpha_{n,r}} - e^{2\alpha_{n,r-1}}}} = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{e^{2\alpha_{n,r}} - e^{2\alpha_{n,r-1}}}} \left| \int_{\alpha_{n,r-1}}^{\alpha_{n,r}} e^t (\bar{\theta}(t) + \bar{\theta}'(t)) dt \right| \\ & \leq \frac{M_n(e^{\alpha_{n,r}} - e^{\alpha_{n,r-1}})}{2\sqrt{e^{2\alpha_{n,r}} - e^{2\alpha_{n,r-1}}}}, \text{ d'après (6.4)} \\ & \leq \frac{M_n}{2} \sqrt{e^{\alpha_{n,r}} - e^{\alpha_{n,r-1}}} \\ & \leq \frac{M_n}{2} (e^{\alpha_{n+1}}(1 - e^{-\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{N_n}}))^{\frac{1}{2}}, \text{ d'après (6.8)} \\ & \leq \gamma, \text{ d'après (6.6)} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, d'après la définition (6.9) et compte-tenu de (6.7) que :

$$\begin{aligned}
 d_{n,r}^2 &\geq \frac{1}{9} \frac{(e^{\alpha_{n,r}} \bar{\theta}(\alpha_{n,r}) - e^{\alpha_{n,r-1}} \bar{\theta}(\alpha_{n,r-1}))^2}{e^{2\alpha_{n,r}} - e^{2\alpha_{n,r-1}}} \\
 &= \frac{1}{9} \left(\frac{e^{\alpha_{n,r}} \bar{\theta}(\alpha_{n,r}) - e^{\alpha_{n,r-1}} \bar{\theta}(\alpha_{n,r-1})}{\alpha_{n,r} - \alpha_{n,r-1}} \right)^2 \left(\frac{\alpha_{n,r} - \alpha_{n,r-1}}{e^{2\alpha_{n,r}} - e^{2\alpha_{n,r-1}}} \right) (\alpha_{n,r} - \alpha_{n,r-1}) \\
 &= \frac{1}{18} e^{2(\delta_{n,r} - \delta'_{n,r})} (\bar{\theta}(\delta_{n,r}) + \bar{\theta}'(\delta_{n,r}))^2 (\alpha_{n,r} - \alpha_{n,r-1}),
 \end{aligned}$$

où $\delta_{n,r}$ et $\delta'_{n,r}$ sont des nombres appartenant à l'intervalle $]\alpha_{n,r-1}, \alpha_{n,r}[$, obtenus en appliquant le théorème des accroissements finis aux deux taux d'accroissements précédents.

En remarquant que :

$$\begin{aligned}
 e^{2(\delta_{n,r} - \delta'_{n,r})} &\geq e^{-2(\alpha_{n,r} - \alpha_{n,r-1})} \\
 &= e^{-2 \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{N_n}} \\
 &\geq e^{-2}, \quad \text{d'après (6.6),}
 \end{aligned}$$

on obtient l'inégalité suivante :

$$(6.10) \quad d_{n,r}^2 \geq \frac{e^{-2}}{18} (\bar{\theta}(\delta_{n,r}) + \bar{\theta}'(\delta_{n,r}))^2 (\alpha_{n,r} - \alpha_{n,r-1}).$$

Comme :

$$\begin{aligned}
 |(\alpha_{n,r} - \alpha_{n,r-1}) (\bar{\theta}(\delta_{n,r}) + \bar{\theta}'(\delta_{n,r}))^2 - \int_{\alpha_{n,r-1}}^{\alpha_{n,r}} (\bar{\theta}(t) + \bar{\theta}'(t))^2 dt| &= \\
 &= \left| \int_{\alpha_{n,r-1}}^{\alpha_{n,r}} \left((\bar{\theta}(t) + \bar{\theta}'(t))^2 - (\bar{\theta}(\delta_{n,r}) + \bar{\theta}'(\delta_{n,r}))^2 \right) dt \right| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{n^2} \frac{\alpha_{n,r} - \alpha_{n,r-1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}, \quad \text{d'après (6.5),}
 \end{aligned}$$

il résulte de (6.10) que :

$$(6.11) \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{r=1}^{N_n} d_{n,r}^2 \right) \geq \frac{e^{-2}}{18} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} (\bar{\theta}(t) + \bar{\theta}'(t))^2 dt - \frac{\varepsilon}{n^2} \right) \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{e^{-2}}{18} \int_{\alpha_1}^{\alpha_\infty} (\bar{\theta}(t) + \bar{\theta}'(t))^2 dt - \frac{e^{-2} \pi^2}{108} \varepsilon. \end{cases}$$

En notant $T = (t_n, n \geq 1)$ la famille dénombrable $\bigcup_{n \geq 1} \{\alpha_{n,0}, \dots, \alpha_{n,r_n}\}$ rangée dans l'ordre strictement croissant, famille qui joue le rôle de la suite des instants d'observation des théorèmes 1 et 2 et en notant d_n la distance entre les lois

conditionnelles $P_{\theta_0}^{x^{(n-1)}}$ et $P_{\theta_1}^{x^{(n-1)}}$, suivant les notations introduites au **II.1**, on obtient :

$$(6.12) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} d_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{r=1}^{N_n} d_{n,r}^2 \right) \geq \frac{\varepsilon^{-2}}{18} \int_{\alpha_1}^{\alpha_\infty} (\bar{\theta}(t) + \bar{\theta}'(t))^2 dt - \frac{e^{-2}\pi^2}{108} \varepsilon.$$

En vue d'appliquer le théorème de Geffroy comme dans la démonstration du théorème 1, on pose, pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $x^{(n-1)} \in \mathbf{R}^{n-1}$:

$$(6.13) \quad B_n(x^{(n-1)}) =] - \infty, \left[\frac{(\theta_0 + \theta_1)(t_n)}{2} - e^{-(t_n - t_{n-1})} \left(\frac{(\theta_0 + \theta_1)(t_{n-1})}{2} - x_{n-1} \right) \right],$$

si $e^{t_n} \bar{\theta}(t_n) - e^{t_{n-1}} \bar{\theta}(t_{n-1}) > 0$,

$$(6.14) \quad B_n(x^{(n-1)}) = \left[\frac{(\theta_0 + \theta_1)(t_n)}{2} - e^{-(t_n - t_{n-1})} \left(\frac{(\theta_0 + \theta_1)(t_{n-1})}{2} - x_{n-1} \right) \right], + \infty[,$$

si $e^{t_n} \bar{\theta}(t_n) - e^{t_{n-1}} \bar{\theta}(t_{n-1}) < 0$,

$$(6.15) \quad B_n(x^{(n-1)}) = \mathbf{R}, \quad \text{si} \quad e^{t_n} \bar{\theta}(t_n) = e^{t_{n-1}} \bar{\theta}(t_{n-1}).$$

On obtient alors :

$$(6.16) \quad \begin{cases} \forall n \geq 2 & \text{et} & \forall x^{(n-1)} \in \mathbf{R}^{n-1}, \\ P_{\theta_0}^{x^{(n-1)}}(B_n(x^{(n-1)})) = d_n + P_{\theta_1}^{x^{(n-1)}}(B_n(x^{(n-1)})), \end{cases}$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de Geffroy, et de conclure que :

pour tout entier $n \geq 1$, il existe un borélien C_n de \mathbf{R}^n tel que :

$$\begin{cases} P_{\theta_0}^{(n)}(C_n) \geq 1 - \exp\left(\frac{-3}{8} \sum_{j=1}^n d_j^2\right), \\ P_{\theta_1}^{(n)}(C_n) \leq \exp\left(\frac{-3}{8} \sum_{j=1}^n d_j^2\right), \end{cases}$$

où $P_{\theta_0}^{(n)}$ désigne la loi du vecteur aléatoire $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ sous l'hypothèse θ .

On en déduit :

$$d_V(P_{\theta_0}^I, P_{\theta_1}^I) \geq d_V(P_{\theta_0}^T, P_{\theta_1}^T) \geq 1 - 2 \exp\left(\frac{-3}{8} \sum_{j=1}^n d_j^2\right),$$

soit, d'après (6.12) :

$$d_V(P_{\theta_0}^I, P_{\theta_1}^I) \geq 1 - 2 \exp\left(\frac{-e^{-2}}{48} \int_{\alpha_1}^{\alpha_\infty} (\bar{\theta}(t) + \bar{\theta}'(t))^2 dt + \frac{e^{-2}\pi^2}{288} \varepsilon\right).$$

Cette inégalité étant vraie quels que soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha_1, \alpha_\infty \in I$, nous en déduisons finalement l'inégalité (6.3) qu'il fallait démontrer. ■

b) Supposons maintenant que $\Theta = \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbf{R})$.

Pour tout signal $\theta_0 \in \Theta$, notons :

$$s(\theta_0) = \{\theta ; \theta \in \Theta \text{ et } \theta + \theta' \leq \theta_0 + \theta'_0\},$$

$$S(\theta_0) = \{\theta ; \theta \in \Theta \text{ et } \theta + \theta' \geq \theta_0 + \theta'_0\}.$$

On peut alors énoncer :

Théorème 3 *Si B est un bruit de Ornstein-Uhlenbeck, si $\Theta = \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbf{R})$ et si θ_0 et θ_1 sont deux signaux possibles qui vérifient :*

$$(6.17) \quad \forall t \geq 0, \quad \theta_0(t) + \theta'_0(t) \leq \theta_1(t) + \theta'_1(t),$$

nous avons :

$$d_V(s(\theta_0), S(\theta_1)) \geq 1 - 2 \exp\left(\frac{-e^{-2}}{48} \int_0^{+\infty} (\bar{\theta}(t) + \bar{\theta}'(t))^2 dt\right),$$

où $\bar{\theta} = \theta_1 - \theta_0$.

■ Il suffit de reprendre la démonstration précédente jusqu'à l'introduction des $B_n(x^{(n-1)})$, boréliens séparateurs des lois conditionnelles $P_{\theta_0}^{x^{(n-1)}}$ et $P_{\theta_1}^{x^{(n-1)}}$, qui seront définis par (6.13) ou (6.15), (6.14) étant exclu d'après (6.17), et vérifient, d'après la définition de $s(\theta_0)$ et de $S(\theta_1)$:

$$\begin{cases} \forall n \geq 2, \forall x^{(n-1)} \in \mathbf{R}^{n-1}, \forall \theta \in s(\theta_0) \text{ et } \forall \tau \in S(\theta_1), \\ P_{\theta}^{x^{(n-1)}}(B_n(x^{(n-1)})) \geq d_n + P_{\tau}^{x^{(n-1)}}(B_n(x^{(n-1)})) \end{cases}$$

(propriété analogue à (6.16)).

A partir de là, on applique le théorème de Geffroy et on termine comme précédemment. ■

Plus généralement, on pourrait démontrer que :

Théorème 4 *Si B est un bruit de Ornstein-Uhlenbeck et si $\Theta = \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbf{R})$, on a, quels que soient les signaux possibles θ_0 et θ_1 :*

$$d_V(s(\theta_0), S(\theta_1)) \geq 1 - 2 \exp\left(\frac{-e^{-2}}{48} \int_0^{+\infty} ((\bar{\theta}(t) + \bar{\theta}'(t))^+)^2 dt\right),$$

et

$$d_V(s(\theta_1), S(\theta_0)) \geq 1 - 2 \exp\left(\frac{-e^{-2}}{48} \int_0^{+\infty} ((\bar{\theta}(t) + \bar{\theta}'(t))^-)^2 dt\right),$$

où $\bar{\theta} = \theta_1 - \theta_0$.

Les théorèmes 3 et 4 fournissent en particulier des conditions suffisantes d'orthogonalité des hypothèses multiples concernées.

III TESTS DE DÉTECTION D'UN SIGNAL DANS UN BRUIT DE ORNSTEIN-UHLENBECK

1) Premier test de détection

Pour le premier test, nous utiliserons les notations suivantes :

- Θ^* est l'ensemble des signaux θ de classe C^1 sur $[0; +\infty[$, qui vérifient :

$$(1.1) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) < 0 \quad \text{ou} \quad \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) > 0,$$

- pour tout signal θ et pour tout couple d'entiers r et s tels que : $1 \leq r \leq s$, $P_\theta^{(r,s)}$ désigne la loi du vecteur aléatoire (X_r, \dots, X_s) ,

- pour tout entier $m \geq 1$, C_m est le borélien de \mathbf{R}^{m^3} constitué des m^3 -uples $x^{(m^3)}$ vérifiant les deux inégalités suivantes :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \text{Card}(j ; 2 \leq j \leq m^3 \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \leq \frac{e-1}{2m}) \geq \frac{m^3-1}{2} \\ \text{Card}(j ; 2 \leq j \leq m^3 \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \geq -\frac{e-1}{2m}) \geq \frac{m^3-1}{2} \end{cases}.$$

La suite $(\alpha_m ; m \geq 1)$ étant définie par :

$$(1.3) \quad \forall m \geq 1, \quad \alpha_m \stackrel{\text{déf}}{=} 2F \left(\frac{1}{2m} \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \right) - 1,$$

on utilisera le fait que :

$$(1.4) \quad (m^3 - 1)\alpha_m^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{puisque} : (m^3 - 1)\alpha_m^2 \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e-1}{e+1} \cdot \frac{m}{2\pi}.$$

2) Notre premier test est décrit dans le résultat qui suit :

Théorème 5 *Le bruit B étant un processus de Ornstein-Uhlenbeck et l'hypothèse générale Θ étant égale à $\{0\} \cup \Theta^*$, il existe un test convergent de l'hypothèse que l'on ne reçoit pas de signal contre l'hypothèse que l'on reçoit un signal appartenant à Θ^* .*

La suite des régions d'acceptation de l'hypothèse nulle de ce test est la suite $(C_m ; m \geq 1)$ définie ci-dessus, et qui vérifie :

$$(2.1) \quad \forall m \geq 1, \quad P_0^{(m+1, m+m^3)}(C_m) \geq 1 - 2e^{-\frac{3(m^3-1)}{8}} \alpha_m^2$$

(2.2) pour tout signal θ de Θ^* , dès que m est assez grand, on a :

$$P_\theta^{(m+1, m+m^3)}(C_m) \leq e^{-\frac{3(m^3-1)}{8}} \alpha_m^2$$

■ a) Pour tout entier $m \geq 1$, on considérera les hypothèses S_m^+ et S_m^- définies par :

$$\begin{cases} S_m^+ = (\theta; \theta \in \Theta \text{ et } \forall t \geq m, \theta(t) + \dot{\theta}(t) \geq \frac{1}{m}) \\ S_m^- = (\theta; \theta \in \Theta \text{ et } \forall t \geq m, \theta(t) + \dot{\theta}(t) \leq -\frac{1}{m}) \end{cases}$$

Il est clair, d'après (1.1), que :

$$(2.3) \quad S_m^+ \cup S_m^- \underset{m \rightarrow +\infty}{\uparrow} \Theta^*.$$

b) Dans cette partie de la démonstration, m désigne un entier positif quelconque fixé. Supposons que les observations se font aux instants $(t_n^m = m + n ; n \geq 1)$ et, en nous référant aux notations de la démonstration précédente, posons : $\theta_0 = 0$ et $\theta_1 = \frac{1}{m}$.

La condition (II.4.1) du théorème 2 est trivialement vérifiée par $\bar{\theta} = \frac{1}{m}$, ainsi que la condition (II.4.2) puisque l'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(e^{t_n^m} \bar{\theta}(t_n^m) - e^{t_{n-1}^m} \bar{\theta}(t_{n-1}^m))^2}{e^{2t_n^m} - e^{2t_{n-1}^m}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e-1}{(e+1)m^2} = +\infty.$$

Les deux hypothèses Θ_0 et Θ_1 se séparent donc asymptotiquement uniformément suivant la suite $(C_n^{m,+}; n \geq 1)$ des cylindres définis, conformément à (II.1.10) par :

$$(2.4) \quad C_n^{m,+} \stackrel{\text{déf}}{=} \{x^{(n)} ; \sum_{j=2}^n d_j \cdot 1_{B_j(x^{(j-1)})}(x_j) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n d_j\},$$

où, quel que soit l'entier $j \geq 2$, et d'après (II.1.5), (II.3.2) et (1.3), on a :

$$(2.5) \quad d_j = 2F\left(\frac{1}{2m} \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right) - 1 = \alpha_m.$$

On en déduit, d'après (II.1.11), que ces cylindres satisfont à :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1, & \text{Inf}(P_\theta^{(n)}(C_n^{m,+}); \theta \in \Theta_0) \geq 1 - e^{-\frac{3(n-1)}{8}\alpha_m^2} \\ & \text{Sup}(P_\theta^{(n)}(C_n^{m,+}); \theta \in \Theta_1) \leq e^{-\frac{3(n-1)}{8}\alpha_m^2} \end{cases}$$

où $P_\theta^{(n)}$ désigne la loi du vecteur $(X(t_1^m), \dots, X(t_n^m))$, soit la loi du vecteur $(X(m+1), \dots, X(m+n))$ conformément aux notations précédentes.

Les cylindres $C_n^{m,+}$, $n \geq 1$ sont en fait très simples puisque, d'après (II.1.6) et (II.3.2), on a :

$$\forall j \geq 2 \quad \text{et} \quad \forall x^{(j)}, 1_{B_j(x^{(j-1)})(x_j)} = 1 \iff e \cdot x_j - x_{j-1} \leq \frac{e-1}{2m},$$

ce qui permet d'écrire, puisque tous les d_j , $j \geq 2$ sont égaux (cf. (2.4) et (2.5)) :

$$(2.7) \quad \begin{cases} \forall n \geq 2 \\ C_n^{m,+} = \left(x^{(n)}; \text{Card}(j; 2 \leq j \leq n \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \leq \frac{e-1}{2m}) \geq \frac{n-1}{2} \right). \end{cases}$$

Par définition de S_m^+ , pour tout signal θ de S_m^+ et pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} e^{t_n^m} \theta(t_n^m) - e^{t_{n-1}^m} \theta(t_{n-1}^m) &= \int_{t_{n-1}^m}^{t_n^m} e^t (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) dt \\ &\geq \frac{1}{m} \int_{t_{n-1}^m}^{t_n^m} e^t dt \\ &= \frac{1}{m} (e^{t_n^m} - e^{t_{n-1}^m}). \end{aligned}$$

Cela signifie que $S_m^+ \subset \Theta_1$, si bien que, au lieu de (2.6), on retiendra :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1, & P_0^{(n)}(C_n^{m,+}) \geq 1 - e^{-\frac{3(n-1)}{8}\alpha_m^2} \\ & \text{Sup}(P_\theta^{(n)}(C_n^{m,+}); \theta \in S_m^+) \leq e^{-\frac{3(n-1)}{8}\alpha_m^2}. \end{cases}$$

On démontrerait de manière analogue que les cylindres $C_n^{m,-}$, $n \geq 1$ définis par :

$$C_n^{m,-} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left(x^{(n)}; \text{Card}(j; 2 \leq j \leq n \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \geq -\frac{e-1}{2m}) \geq \frac{n-1}{2} \right)$$

v\u00e9rifient :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1, & P_0^{(n)}(C_n^{m,-}) \geq 1 - e^{-\frac{3(n-1)}{8}\alpha_m^2} \\ & \text{Sup}(P_\theta^{(n)}(C_n^{m,-}); \theta \in S_m^-) \leq e^{-\frac{3(n-1)}{8}\alpha_m^2}. \end{cases}$$

La suite des cylindres $C_n^m \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} C_n^{m,+} \cap C_n^{m,-}$, $n \geq 1$ satisfait donc, d'apr\u00e8s (2.8) et (2.9), les in\u00e9galit\u00e9s :

$$(2.10) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1, & P_0^{(n)}(C_n^m) \geq 1 - 2e^{-\frac{3(n-1)}{8}\alpha_m^2} \\ & \text{Sup}(P_\theta^{(n)}(C_n^m); \theta \in S_m^+ \cup S_m^-) \leq e^{-\frac{3(n-1)}{8}\alpha_m^2}. \end{cases}$$

c) Consid\u00e9rons maintenant les cylindres C_m , $m \geq 1$ introduits ci-dessus.

Puisque l'on a, d'apr\u00e8s (1.2) : $\forall m \geq 1, C_m = C_{m^3}$, on peut \u00e9crire (2.10) sous la forme :

$$\begin{cases} \forall m \geq 1, & P_0^{(m+1, m+m^3)}(C_m) \geq 1 - 2e^{-\frac{3(m^3-1)}{8}\alpha_m^2} \\ & \text{Sup}(P_\theta^{(m+1, m+m^3)}(C_m); \theta \in S_m^+ \cup S_m^-) \leq e^{-\frac{3(m^3-1)}{8}\alpha_m^2}, \end{cases}$$

autrement dit, les in\u00e9galit\u00e9s (2.1) et (2.2) du th\u00e9or\u00e8me 5 sont prouv\u00e9es, compte-tenu de (2.3).

Si on consid\u00e8re le test de l'hypoth\u00e8se qu'il n'y a pas de signal utile contre l'hypoth\u00e8se qu'on en re\u00e7oit un appartenant \u00e0 Θ^* , ($C_m; m \geq 1$) \u00e9tant la suite des r\u00e9gions d'acceptation de l'hypoth\u00e8se nulle de ce test, (2.1) et (2.2) signifient que son niveau et sa puissance convergent respectivement vers 0 et 1. Il s'agit donc bien d'un test convergent. ■

3) Mise en \u00e9uvre de ce test

Etant donn\u00e9 α , $0 < \alpha < 1$, on choisit d'abord un entier $m \geq 1$ tel que :

$$2e^{-\frac{3(m^3-1)}{8}\alpha_m^2} \leq \alpha, \text{ ou } (m^3 - 1) \left(2F\left(\frac{1}{2m} \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right) - 1 \right)^2 \geq \frac{8}{3} \text{Log}\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

Ensuite, on mesure $X(t, \omega_0)$ aux instants $m+1, \dots, m+m^3$ et on obtient le m^3 -uple :

$$(x_1, \dots, x_{m^3}) = (X(m+1, \omega_0), \dots, X(m+m^3, \omega_0)).$$

On calcule alors les nombres :

$$\begin{cases} N_1 = \text{Card}(j; 2 \leq j \leq m^3 \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \leq \frac{e-1}{2m}) \\ N_2 = \text{Card}(j; 2 \leq j \leq m^3 \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \geq -\frac{e-1}{2m}). \end{cases}$$

Si $N_1 \geq \frac{m^3-1}{2}$ et $N_2 \geq \frac{m^3-1}{2}$, on accepte l'hypoth\u00e8se qu'il n'y a pas de signal; sinon on admet qu'il y en a un, appartenant \u00e0 Θ^* . Si, par exemple, Θ^* est un

ensemble d'alarmes, la probabilité de fausse alarme est alors majorée par α , qui est le niveau du test, tandis que l'on ne peut rien dire de la probabilité de conclure à tort qu'il n'y a pas d'alarme, puisque notre résultat est seulement un résultat asymptotique.

4) Deuxième test de détection

Pour le deuxième test, nous utiliserons les notations suivantes :

- Θ^{**} est l'ensemble des signaux θ non nuls, de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$, qui admettent une période donnée $P > 0$ et qui vérifient :

$$(4.1) \quad \theta(0) + \dot{\theta}(0) \neq 0,$$

- pour tout couple d'entiers positifs m et k , et pour tout signal θ , on notera $P_{\theta, m}^{(k)}$ la loi du vecteur aléatoire

$$(X_0, X_{\frac{P}{m+1}}, X_P, X_{P+\frac{P}{m+1}}, \dots, X_{(k-1)P}, X_{(k-1)P+\frac{P}{m+1}}),$$

- pour tout entier $m \geq 1$, C_m sera le borélien de \mathbf{R}^{2m^4} constitué des $(2m^4)$ -uples $x^{(2m^4)}$ vérifiant les deux inégalités :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \text{Card}\left(j ; 1 \leq j \leq m^4 \text{ et } e^{\frac{P}{m+1}} \cdot x_{2j} - x_{2j-1} \leq \frac{1}{2m}(e^{\frac{P}{m+1}} - 1)\right) \geq \frac{m^4}{2} \\ \text{Card}\left(j ; 1 \leq j \leq m^4 \text{ et } e^{\frac{P}{m+1}} \cdot x_{2j} - x_{2j-1} \geq -\frac{1}{2m}(e^{\frac{P}{m+1}} - 1)\right) \geq \frac{m^4}{2}. \end{cases}$$

La suite $(\beta_m ; m \geq 1)$ étant définie par :

$$(4.3) \quad \forall m \geq 1, \beta_m \stackrel{\text{déf}}{=} 2F\left(\frac{1}{2m} \sqrt{\frac{e^{\frac{P}{m+1}} - 1}{e^{\frac{P}{m+1}} + 1}}\right) - 1,$$

on utilisera le fait que :

$$(4.4) \quad m^4 \beta_m^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty \text{ puisque : } \beta_m \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{P}}{2\sqrt{\pi}m^{3/2}}.$$

5) Notre deuxième test est décrit dans l'énoncé qui suit :

Théorème 6 *Le bruit B étant un processus de Ornstein-Uhlenbeck et l'hypothèse générale Θ étant égale à $\{0\} \cup \Theta^{**}$, la suite des cylindres $C_m, m \geq 1$ définis ci-dessus est la suite des régions d'acceptation de l'hypothèse nulle d'un test convergent de l'hypothèse que l'on ne reçoit pas de signal contre l'hypothèse que l'on reçoit un signal appartenant à Θ^{**} .*

Plus précisément, les cylindres $C_m, m \geq 1$ vérifient :

$$(5.1) \quad \forall m \geq 1, P_{0,m}^{(m^4)}(C_m) \geq 1 - 2e^{-\frac{3}{8}m^4\beta_m^2}$$

(5.2) Pour tout signal θ de Θ^{**} , dès que m est assez grand, on a :

$$P_{\theta,m}^{(m^4)}(C_m) \leq e^{-\frac{3}{8}m^4\beta_m^2}.$$

■ a) Pour tout entier $m \geq 1$, on considérera les deux hypothèses T_m^+ et T_m^- définies par :

$$T_m^+ = \left\{ \theta ; \theta \in \Theta^{**} \text{ et } \forall t \in \left[0, \frac{P}{m+1}\right], \theta(t) + \dot{\theta}(t) \geq \frac{1}{m} \right\}$$

$$T_m^- = \left\{ \theta ; \theta \in \Theta^{**} \text{ et } \forall t \in \left[0, \frac{P}{m+1}\right], \theta(t) + \dot{\theta}(t) \leq -\frac{1}{m} \right\}.$$

Il est clair, d'après (4.1), que :

$$(5.3) \quad \Theta^{**} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \uparrow (T_m^+ \cup T_m^-).$$

b) Dans cette partie de la démonstration, m désigne un entier positif quelconque fixé. Supposons que les observations se font aux instants $(t_n^m ; n \geq 1)$ définis par :

$$(5.4) \quad \forall k \geq 1, t_{2k-1}^m = (k-1)P \text{ et } t_{2k}^m = (k-1)P + \frac{P}{m+1},$$

et, en nous référant directement aux notations du théorème général, posons :

$$(5.5) \quad \theta_0 = 0, \theta_1 = \bar{\theta} = \frac{1}{m} \text{ et } \forall k \geq 1, n(k) = 2k.$$

Pour tout signal θ de Θ^{**} , nous avons, d'après (II.3.2) :

$$\forall k \geq 1, f_{n(k)}(\theta) = \theta(t_{n(k)}^m) - e^{-(t_{n(k)}^m - t_{n(k)-1}^m)} \theta(t_{n(k)-1}^m),$$

soit, en utilisant (5.4) et la périodicité de θ :

$$(5.6) \quad \forall k \geq 1, f_{n(k)}(\theta) = \theta\left(\frac{P}{m+1}\right) - e^{-\frac{P}{m+1}} \cdot \theta(0).$$

On en déduit, compte-tenu de (5.5), que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k \geq 1, 0 = f_{n(k)}(\theta_0) < f_{n(k)}(\theta_1) = \frac{1}{m}(1 - e^{-\frac{P}{m+1}}) \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(f_{n(k)}(\theta_1) - f_{n(k)}(\theta_0))^2}{\sigma_{n(k)}^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-\frac{P}{m+1}})^2}{m^2(1 - e^{-\frac{2P}{m+1}})} = +\infty. \end{array} \right.$$

Les hypothèses (II.1.1) et (II.1.2) du théorème général sont donc satisfaites. Par conséquent, il existe un test uniformément convergent de l'hypothèse Θ_0 contre l'hypothèse Θ_1 . Pour décrire ce test posons, comme précédemment, et quel que soit l'entier $k \geq 1$:

$$d_{n(k)} = 2F \left(\frac{1 - e^{-\frac{P}{m+1}}}{2m\sqrt{1 - e^{-2\frac{P}{m+1}}}} \right) - 1 = \beta_m,$$

d'après (II.1.5) et (4.3).

$$(5.7) \quad B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)}) =] - \infty, \frac{1}{2m}(1 - e^{-\frac{P}{m+1}}) + e^{-\frac{P}{m+1}} \cdot x_{n(k)-1}],$$

d'après (II.1.6) et (II.3.1). Les cylindres introduits par (II.1.10) s'écrivent :

$$C_{n(k)}^{m,+} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ x^{(n(k))} ; \sum_{j=1}^k 1_{B_{n(j)}(x^{(n(j)-1)})}(x_{n(j)}) \geq \frac{1}{2}k \right\},$$

soit d'après (5.7) :

$$(5.8) \quad \left\{ C_{2k}^{m,+} = \left\{ x^{(2k)} ; \text{Card} \left(j ; 1 \leq j \leq k \text{ et } e^{\frac{P}{m+1}} \cdot x_{2j} - x_{2j-1} \leq \frac{e^{\frac{P}{m+1}} - 1}{2m} \right) \geq \frac{k}{2} \right\} \right\}.$$

Continuant à suivre la démonstration du théorème général, on applique le théorème de J. Geffroy, ce qui donne :

$$(5.9) \quad \begin{cases} \forall k \geq 1, \text{Inf}(P_{\theta,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,+}) ; \theta \in \Theta_0) \geq 1 - e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2} \\ \forall k \geq 1, \text{Sup}(P_{\theta,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,+}) ; \theta \in \Theta_1) \leq e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2}. \end{cases}$$

Par définition de T_m^+ et d'après (5.6), tout signal θ de T_m^+ vérifie :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1, f_{n(k)}(\theta) &= \theta \left(\frac{P}{m+1} \right) - e^{-\frac{P}{m+1}} \cdot \theta(0) \\ &= e^{-\frac{P}{m+1}} \int_0^{\frac{P}{m+1}} e^t(\theta(t) + \dot{\theta}(t))dt \\ &\geq e^{-\frac{P}{m+1}} \cdot \frac{1}{m} \cdot (e^{\frac{P}{m+1}} - 1) \\ &= f_{n(k)}(\theta_1). \end{aligned}$$

Cela signifie que $T_m^+ \subset \Theta_1$ et permet de ne retenir de (5.9) que :

$$(5.10) \quad \begin{cases} \forall k \geq 1, P_{0,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,+}) \geq 1 - e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2} \\ \forall k \geq 1, \text{Sup}(P_{\theta,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,+}) ; \theta \in T_m^+) \leq e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2}. \end{cases}$$

On démontre de manière analogue que :

$$(5.11) \quad \begin{cases} \forall k \geq 1, P_{0,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,-}) \geq 1 - e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2} \\ \forall k \geq 1, \text{Sup}(P_{\theta,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,-}); \theta \in T_m^-) \leq e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2} \end{cases}$$

les cylindres $C_{2k}^{m,-}$, $k \geq 1$ étant définis par :

$$C_{2k}^{m,-} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ x^{(2k)} ; \text{Card} \left(j ; 1 \leq j \leq k \text{ et } e^{\frac{p}{m+1}} \cdot x_{2j} - x_{2j-1} \geq -\frac{e^{\frac{p}{m+1}} - 1}{2m} \right) \geq \frac{k}{2} \right\}.$$

D'après (4.2), on a, quel que soit l'entier $m \geq 1$: $C_m = C_{2m^4}^{m,+} \cap C_{2m^4}^{m,-}$. Par conséquent, d'après (5.10) et (5.11), la suite des cylindres $(C_m ; m \geq 1)$ vérifie :

$$\begin{cases} \forall m \geq 1, P_{0,m}^{(m^4)}(C_m) \geq 1 - 2e^{-\frac{3}{8}m^4\beta_m^2} \\ \forall m \geq 1, \text{Sup}(P_{\theta,m}^{(m^4)}(C_m); \theta \in T_m^+ \cup T_m^-) \leq e^{-\frac{3}{8}m^4\beta_m^2} \end{cases}$$

(5.1) est donc satisfaite, ainsi que (5.2), en utilisant (5.3). On peut finalement en conclure, d'après (4.4), que le test décrit dans le théorème 6 converge. ■

6) Remarques

a) La mise en œuvre de ce test appelle en gros les mêmes remarques que le test précédent. Il s'agit d'un résultat asymptotique.

b) Comme nous l'avons déjà signalé de manière plus générale (voir II.2.b et II.5), les contre-hypothèses Θ^* et Θ^{**} ne rencontrent pas l'espace autoreproduisant du processus de Ornstein-Uhlenbeck.

7) Troisième test de détection

Nous allons maintenant donner un troisième test de détection d'un signal dans un bruit de Ornstein-Uhlenbeck basé sur une suite de v.a.r. gaussiennes indépendantes construites à partir de la suite des observations $(X(t_n) ; n \geq 1)$.

a) Pour cela, décrivons d'abord le principe général de construction d'un tel test en nous plaçant provisoirement dans le cas où B est un bruit gaussien centré quelconque.

Etant donnée une suite $(h_n ; n \geq 1)$ de réels > 0 , considérons la statistique $(T_n ; n \geq 1)$ définie par :

$$(7.1) \quad \forall n \geq 1, \quad T_n = \frac{1}{h_n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sigma_{p+1}} \left(X(t_{p+1}) - \sum_{j=1}^p a_j^{p+1} X(t_j) \right).$$

Il résulte de la proposition 3 que pour tout entier $n \geq 1$, T_n suit, sous l'hypothèse θ , la loi normale de variance $\frac{n}{h_n^2}$ et de moyenne :

$$(7.2) \quad E_{\theta}(T_n) = \frac{1}{h_n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sigma_{p+1}} (\theta(t_{p+1}) - \sum_{j=1}^p a_j^{p+1} \theta(t_j)).$$

On en déduit que, étant donnée une autre suite $(\alpha_n ; n \geq 1)$ de réels > 0 , si pour tout entier $n \geq 1$, C_n désigne le borélien de \mathbf{R}^{n+1} défini par :

$$(7.3) \quad C_n = \left\{ x^{(n+1)} ; \frac{1}{h_n} \left| \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sigma_{p+1}} (x_{p+1} - \sum_{j=1}^p a_j^{p+1} x_j) \right| \leq \alpha_n \right\},$$

et si $P_{\theta}^{(n+1)}$ désigne la loi du vecteur aléatoire $(X(t_1), \dots, X(t_{n+1}))$ sous l'hypothèse θ , on a :

$$(7.4) \quad \begin{cases} \forall \theta \in \mathcal{F}([0, +\infty[, \mathbf{R}) \text{ et } \forall n \geq 1, \\ P_{\theta}^{(n+1)}(C_n) = \text{Prob} \{ |T_n| \leq \alpha_n \} \\ = F\left(h_n \frac{\alpha_n - E_{\theta}(T_n)}{\sqrt{n}}\right) - F\left(-h_n \frac{\alpha_n + E_{\theta}(T_n)}{\sqrt{n}}\right), \end{cases}$$

d'où le résultat suivant :

Théorème 7 *Si les suites de réels > 0 $(h_n ; n \geq 1)$ et $(\alpha_n ; n \geq 1)$ vérifient :*

$$(7.5) \quad \frac{\alpha_n h_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

la suite des boréliens $(C_n ; n \geq 1)$ définis par (7.3) est la suite des régions d'acceptation d'un test convergent de l'hypothèse que l'on ne reçoit pas de signal contre l'hypothèse que l'on reçoit un signal θ vérifiant :

$$(7.6) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} (\alpha_n h_n - \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sigma_{p+1}} (\theta(t_{p+1}) - \sum_{j=1}^p a_j^{p+1} \theta(t_j))) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \\ \text{ou} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} (\alpha_n h_n + \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sigma_{p+1}} (\theta(t_{p+1}) - \sum_{j=1}^p a_j^{p+1} \theta(t_j))) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty. \end{cases}$$

b) Revenons maintenant au cas où $B = B(t ; t \geq 0)$ est un processus de Ornstein-Uhlenbeck général, c'est à dire une f.a.r. gaussienne centrée dont la covariance est donnée par (II.5.1), soit :

$$\forall t, s \geq 0, \quad K(t, s) = \beta^2 e^{-\alpha|t-s|}.$$

Nous pouvons alors énoncer un nouveau test de détection :

Théorème 8 *Le bruit B étant un processus de Ornstein-Uhlenbeck de covariance donnée par (II.5.1), où α et β sont des réels > 0 , α étant de plus supposé connu, la suite $(C_n ; n \geq 2)$ des boréliens définis par :*

$$(7.7) \quad \forall n \geq 2, \quad C_n = \left\{ x^{(n+1)} ; \left| \sum_{p=1}^n e^{\alpha} x_{p+1} - x_p \right| \leq \sqrt{n} \ln(\ln n) \right\}$$

est la suite des régions d'acceptation d'un test convergent de l'hypothèse que l'on ne reçoit pas de signal contre l'hypothèse qu'il y a un signal appartenant à Θ_{α}^ , ensemble des signaux qui vérifient l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :*

$$(7.8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \sum_{p=1}^n (e^{\alpha} \theta(p) - \theta(p-1)) > 0,$$

$$(7.9) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \sum_{p=1}^n (e^{\alpha} \theta(p) - \theta(p-1)) < 0.$$

Plus précisément, on a :

$$(7.10) \quad \forall n \geq 3, \quad P_0^{(n+1)}(C_n) = 2F\left(\frac{\ln(\ln n)}{\beta\sqrt{e^{2\alpha}-1}}\right) - 1,$$

$$(7.11) \quad \forall \theta \in \Theta_{\alpha}^*, \quad P_{\theta}^{(n+1)}(C_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

où $P_{\theta}^{(n+1)}$ désigne la loi de $(X(0), \dots, X(n))$ sous l'hypothèse θ .

■ 1) Choisissons pour instants d'observation les instants :

$$\forall n \geq 1, \quad t_n = n - 1,$$

et donnons-nous deux suites $(h_n ; n \geq 1)$ et $(\alpha_n ; n \geq 1)$ de réels > 0 .

D'après (7.1) et (II.3.1), la statistique $(T_n ; n \geq 1)$ est égale à :

$$\forall n \geq 1, \quad T_n = \frac{1}{\beta h_n \sqrt{e^{2\alpha} - 1}} \sum_{p=1}^n (e^{\alpha} X(p) - X(p-1)),$$

et pour tout entier $n \geq 1$, T_n suit sous l'hypothèse θ la loi normale de variance $\frac{n}{h_n^2}$ et de moyenne :

$$E_{\theta}(T_n) = \frac{1}{\beta h_n \sqrt{e^{2\alpha} - 1}} \sum_{p=1}^n (e^{\alpha\theta(p)} - \theta(p-1)).$$

Introduisons, conformément à (7.3), la suite des boréliens C_n^* , $n \geq 1$ définis par :

$$C_n^* = \{x^{(n+1)}; |\sum_{p=1}^n e^{\alpha} x_{p+1} - x_p| \leq \alpha_n h_n \beta \sqrt{e^{2\alpha} - 1}\}.$$

Alors on sait (cf. (7.4)) que sous l'hypothèse nulle, soit si $\theta = 0$, on a :

$$(7.12) \quad P_0^{(n+1)}(C_n^*) = 2F\left(\frac{\alpha_n h_n}{\sqrt{n}}\right) - 1,$$

et que plus généralement, quel que soit le signal θ , on a :

$$(7.13) \quad P_{\theta}^{(n+1)}(C_n^*) = F\left(\frac{\alpha_n h_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sum_{p=1}^n (e^{\alpha\theta(p)} - \theta(p-1))}{\beta \sqrt{n} \sqrt{e^{2\alpha} - 1}}\right) - F\left(\frac{-\alpha_n h_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sum_{p=1}^n (e^{\alpha\theta(p)} - \theta(p-1))}{\beta \sqrt{n} \sqrt{e^{2\alpha} - 1}}\right).$$

2) Supposons maintenant que l'on a :

$$\forall n \geq 3, \quad h_n = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \frac{\ln(\ln n)}{\beta \sqrt{e^{2\alpha} - 1}}.$$

Nous constatons alors que :

$$\forall n \geq 3, \quad C_n^* = C_n,$$

et que (7.12) donne l'égalité (7.10) qu'il fallait démontrer.

Il reste donc à établir que la propriété (7.11) est satisfaite.

Tout signal θ de Θ_{α}^* satisfaisant (7.8) ou (7.9), supposons d'abord qu'il satisfait l'inégalité (7.8). Dans ces conditions, il existe un réel $\gamma(\theta) > 0$ et un entier $N(\theta) \geq 1$ tels que :

$$\forall n \geq N(\theta), \quad \frac{\sum_{p=1}^n (e^{\alpha\theta(p)} - \theta(p-1))}{\sqrt{n} \ln n} \geq \gamma(\theta).$$

On a donc alors, lorsque $n \geq N(\theta)$ et $n \geq 3$:

$$\alpha_n(\theta) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{\alpha_n h_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sum_{p=1}^n (e^{\alpha\theta(p)} - \theta(p-1))}{\beta \sqrt{n} \sqrt{e^{2\alpha} - 1}} \leq \frac{\ln(\ln n) - \gamma(\theta) \ln n}{\beta \sqrt{e^{2\alpha} - 1}}.$$

On en déduit que :

$$\alpha_n(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty,$$

ce qui, joint à (7.13), prouve (7.11).

On démontre de manière analogue que (7.9) implique (7.11). ■

8) Remarques sur l'hypothèse générale $\Theta_\alpha = \{0\} \cup \Theta_\alpha^*$ du troisième test

a) Θ_α^* contient tous les signaux θ qui convergent vers une limite non nulle, quand $t \rightarrow +\infty$ (en particulier les signaux constants non nuls).

■ En effet, si par exemple $\theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} a > 0$, on peut trouver un entier $P(\theta) \geq 2$ tel que :

$$\forall p \geq P(\theta) + 1, \quad \frac{a}{2}(e^\alpha - 1) \leq e^\alpha \theta(p) - \theta(p-1).$$

On a donc alors, lorsque $n > P(\theta)$:

$$\frac{\sum_{p=1}^n (e^\alpha \theta(p) - \theta(p-1))}{\sqrt{n} \ln n} \geq \frac{\sum_{p=1}^{P(\theta)} (e^\alpha \theta(p) - \theta(p-1))}{\sqrt{n} \ln n} + \frac{a(e^\alpha - 1)(n - P(\theta))}{2\sqrt{n} \ln n},$$

ce qui montre que l'inégalité (7.8) est satisfaite puisque l'on a :

$$\frac{\sum_{p=1}^n (e^\alpha \theta(p) - \theta(p-1))}{\sqrt{n} \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

b) Θ_α^* contient aussi tous les signaux θ de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ tels que :

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (\alpha \theta(t) + \theta'(t)) > 0 \quad \text{ou} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (\alpha \theta(t) + \theta'(t)) < 0.$$

■ En effet, si l'on a par exemple $\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (\alpha \theta(t) + \theta'(t)) > 0$, on peut trouver des réels > 0 $P(\theta)$ et $\gamma(\theta)$ tels que :

$$\forall t \geq P(\theta), \quad \alpha \theta(t) + \theta'(t) \geq \gamma(\theta).$$

Pour tout entier $p \geq P(\theta) + 1$, on a donc :

$$\begin{aligned} e^\alpha \theta(p) - \theta(p-1) &= e^{-\alpha(p-1)} (e^{\alpha p} \theta(p) - e^{\alpha(p-1)} \theta(p-1)) \\ &= e^{-\alpha(p-1)} \int_{p-1}^p e^{\alpha x} (\alpha \theta(x) + \theta'(x)) dx \\ &\geq e^{-\alpha(p-1)} \frac{\gamma(\theta)}{\alpha} (e^{\alpha p} - e^{\alpha(p-1)}) \\ &= \frac{\gamma(\theta)}{\alpha} (e^\alpha - 1). \end{aligned}$$

Pour tout entier n assez grand, on a donc :

$$\frac{\sum_{p=1}^n (e^\alpha \theta(p) - \theta(p-1))}{\sqrt{n} \ln n} \geq \frac{\sum_{p=1}^{P(\theta)} (e^\alpha \theta(p) - \theta(p-1))}{\sqrt{n} \ln n} + \frac{\gamma(\theta)(e^\alpha - 1)(n - P(\theta))}{\alpha \sqrt{n} \ln n},$$

ce qui montre aussi que l'inégalité (7.8) est satisfaite puisque :

$$\frac{\sum_{p=1}^n (e^\alpha \theta(p) - \theta(p-1))}{\sqrt{n} \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

■

c) En supposant que $\alpha = \beta = 1$, on constate donc que la contre-hypothèse Θ_1^* du troisième test contient la contre-hypothèse Θ^* du premier test proposé. En ce sens, le troisième test est meilleur que le premier. Le fait que l'un des paramètres puisse être inconnu n'est par contre pas un avantage du dernier test dans la mesure où si on avait, dès le premier test, supposé que la covariance du bruit B est définie par (II.5.1) et non par (I.1.1), on aurait constaté que les deux premiers tests ont aussi cette propriété.

**CHAPITRE III : ESTIMATION D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE
DE PÉRIODE CONNUE DANS UN BRUIT DE
ORNSTEIN-UHLENBECK**

I - INTRODUCTION

1) Position du problème :

Soit l'enregistrement

$$X(t, \omega_0) = \theta(t) + B(t, \omega_0), t \geq 0$$

d'une trajectoire de la f.a.r.

$$(1.1) \quad X(t) = \theta(t) + B(\theta), t \geq 0$$

somme d'un signal inconnu θ et d'un bruit gaussien centré, que l'on suppose être un processus de Ornstein-Uhlenbeck stationnaire de covariance :

$$(1.2) \quad \forall t, s \geq 0 \quad K(t, s) = \beta^2 e^{-\alpha(|t-s|)}$$

où α et β sont deux réels > 0 , β pouvant être inconnu.

On suppose que tous les signaux possibles θ , dont l'ensemble est noté Θ , admettent la même période P connue, s'annulent à l'instant 0, soit

$$(1.3) \quad \forall \theta \in \Theta \quad \theta(0) = 0$$

et sont continus par morceaux sur $[0, P]$, c'est-à-dire que :

$$(1.4)$$

Pour tout $\theta \in \Theta$ il existe une subdivision $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_s = P$ de $[0, P]$ telle que, pour $i = 1, \dots, s$, θ est continu sur l'intervalle ouvert $]d_{i-1}, d_i[$, admet une limite à droite en d_{i-1} et une limite à gauche en d_i .

On notera $\mathcal{D}(\theta)$ l'ensemble des points de discontinuité de tout signal θ . On supposera que la subdivision associée à θ par (1.4) contient le moins de points

possible, c'est-à-dire ne contient que des points de discontinuité de θ auxquels il faut adjoindre éventuellement 0 et P si ces points sont des points de discontinuité de θ , respectivement à droite et à gauche.

On propose dans ce chapitre un estimateur $(\hat{\theta}_n, n \geq 1)$ de la restriction du signal inconnu θ à $[0, P]$. On montrera que cet estimateur converge presque complètement sûrement (p.c.s.), sous l'hypothèse θ , au sens de la convergence uniforme sur tout compact de $[0, P]$ ne rencontrant pas $\mathcal{D}(\theta)$, quel que soit le signal θ (théorème 2). On étudiera aussi la convergence de $(\hat{\theta}_n(t), n \geq 1)$ en tout point t de $[0, P]$ (théorème 1).

L'ensemble des résultats de ce chapitre est une adaptation au cas où le bruit est un processus de Ornstein-Uhlenbeck de résultats de R. Moché établis dans le cas où c'est un bruit blanc gaussien, autrement dit une version du mouvement brownien (communication personnelle). L'estimation d'un signal de période connue dans un bruit gaussien n'est pas un problème nouveau, dans le cas paramétrique. Par exemple, en utilisant des méthodes analogues, basées sur le théorème de J. Geffroy, et en supposant que le signal θ est une combinaison linéaire de signaux connus de même période, W. Pieczynski a estimé par une méthode de maximum de vraisemblance les coefficients inconnus de la combinaison linéaire (cf. [26]; 1988) dans le cas où le bruit est un bruit blanc gaussien.

1) Définition de l'estimateur $(\hat{\theta}_n, n \geq 1)$ de θ .

a) **Notations.** Etant donnée une suite $(r(n), n \geq 1)$ d'entiers ≥ 1 , on considérera d'abord la suite de subdivisions $\{\frac{k \cdot P}{r(n)}; k = 0, \dots, r(n)\}$ de $[0, P]$ et on posera :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1, \forall k \in \{0, \dots, r(n)\} \text{ et } \forall j \geq 1, \\ B_{n,k}^j = B((j-1) \cdot P + \frac{k \cdot P}{r(n)}) - e^{-\alpha \frac{k \cdot P}{r(n)}} B((j-1) \cdot P), \\ X_{n,k}^j = X((j-1)P + \frac{k \cdot P}{r(n)}) - e^{-\alpha \frac{k \cdot P}{r(n)}} X((j-1) \cdot P). \end{cases}$$

On sait que :

$$(2.2)$$

pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier k de $\{0, \dots, r(n)\}$ $(B_{n,k}^j, j \geq 1)$ est une suite de v.a.r. indépendantes suivant la même loi normale $\mathcal{N}(0, \beta^2(1 - e^{-2\alpha \frac{k \cdot P}{r(n)}}))$

et plus généralement que :

(2.3)

quelle que soit la suite d'instants $(a_n, n \geq 1)$ telle que $0 \leq a_1 < a_2 < \dots$; $(B(a_n) - e^{-\alpha(a_n - a_{n-1})}B(a_{n-1}), n \geq 2)$ est une suite de v.a.r. gaussiennes indépendantes et centrées dont la suite des variances est $(\beta^2(1 - e^{-2\alpha(a_n - a_{n-1})}), n \geq 2)$.

b) **Définition de $(\hat{\theta}_n, n \geq 1)$.**

Pour définir cet estimateur, on se donne, en plus de la suite $(r(n), n \geq 1)$, une nouvelle suite $(m(n), n \geq 1)$ d'entiers ≥ 1 et on définit, pour tout $n \geq 1$, $\hat{\theta}_n$ comme la fonction réelle sur $[0, P]$ dont le graphe est la ligne polygonale de sommet $(\frac{k.P}{r(n)}, \hat{\theta}_{n,k})$, $(k = 0, \dots, r(n))$ où $\hat{\theta}_{n,k}$ est l'estimateur de $\theta(\frac{k.P}{r(n)})$ défini par :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1 \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, r(n)\} \\ \hat{\theta}_{n,k} = \frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} X_{n,k}^j \end{cases}$$

II - CONVERGENCE DE $(\hat{\theta}_n(t), n \geq 1)$ EN UN POINT DONNÉ t DE $[0, P]$.

1)

Théorème 1 *Le bruit B étant un processus de Ornstein-Uhlenbeck stationnaire et étant donné un signal θ de Θ , si les suites $(r(n), n \geq 1)$ et $(m(n), n \geq 1)$ d'entier ≥ 1 satisfont à :*

$$(1.1) \quad \begin{cases} r(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ et} \\ \exists a > 0 \text{ tel que } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{m(n)}{n^a} > 0 \end{cases}$$

pour tout instant t donné de $[0, P]$, pour que la suite de v.a.r. gaussiennes $(\hat{\theta}_n(t), n \geq 1)$ définie au 2.b) converge en probabilité, il faut et il suffit que la suite des espérances $(E(\hat{\theta}_n(t)), n \geq 1)$ converge, et dans ce cas $(\hat{\theta}_n(t), n \geq 1)$ converge p.c.s. et en moyenne d'ordre p , $1 \leq p < +\infty$, vers la limite de la suite $E(\hat{\theta}(t), n \geq 1)$.

■ Un signal possible θ est donné, et toute la démonstration se fait sous l'hypothèse θ .

a) Puisque les signaux admettent P comme période, nous avons, d'après (I.1.1.); (I.1.3.); (I.2.1) et (I.2.4) :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1 \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, r(n)\} \\ \hat{\theta}_{n,k} = \theta\left(\frac{kP}{r(n)}\right) + \frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} B_{n,k}^j \end{cases}$$

On déduit alors de (I.2.2.) que :

$$(1.3) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1 \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, r(n)\} \\ \hat{\theta}_{n,k} \text{ suit la loi normale } \mathcal{N}\left(\theta\left(\frac{k \cdot P}{r(n)}\right), \frac{\beta^2(1 - e^{-2\alpha\frac{kP}{r(n)}})}{m(n)}\right) \end{cases}$$

b) Etant donné un instant t de $[0, P]$, pour tout entier $n \geq 1$, on appellera t'_n et t''_n deux instants successifs de la famille $\{\frac{kP}{r(n)}, k = 0, \dots, r(n)\}$ tels que :

$$(1.4) \quad t'_n \leq t \leq t''_n = t'_n + \frac{P}{r(n)}$$

c) D'après (I.2.b), nous avons, pour tout $t \in [0, P]$

$$(1.5) \quad \begin{cases} \hat{\theta}_n(t) = \hat{\theta}_n(t'_n) + \frac{t - t'_n}{t''_n - t'_n} (\hat{\theta}_n(t''_n) - \hat{\theta}_n(t'_n)) \\ = \frac{t''_n - t}{t''_n - t'_n} \hat{\theta}_n(t'_n) + \frac{t - t'_n}{t''_n - t'_n} \hat{\theta}_n(t''_n) \end{cases}$$

Comme la famille $(\hat{\theta}_{n,k}, n \geq 1, k \in \{0, \dots, r(n)\})$ est gaussienne, et d'après (1.3), $\hat{\theta}_n(t)$ suit donc, pour tout entier $n \geq 1$, une loi normale de moyenne :

$$(1.6) \quad \forall n \geq 1, \quad E_{\theta}(\hat{\theta}_n(t)) = \theta(t'_n) + \frac{t - t'_n}{t''_n - t'_n} (\theta(t''_n) - \theta(t'_n))$$

Calculons sa variance :

$$\begin{aligned} \text{var}_{\theta}(\hat{\theta}_n(t)) &= \left(\frac{t''_n - t}{t''_n - t'_n}\right)^2 \text{var}_{\theta}(\hat{\theta}_n(t'_n)) + \left(\frac{t - t'_n}{t''_n - t'_n}\right)^2 \text{var}_{\theta}(\hat{\theta}_n(t''_n)) \\ &\quad + 2 \frac{(t''_n - t)(t - t'_n)}{(t''_n - t'_n)^2} \text{cov}_{\theta}(\hat{\theta}_n(t'_n), \hat{\theta}_n(t''_n)) \end{aligned}$$

k désignant l'entier défini par $\frac{kP}{r(n)} = t'_n$, nous avons d'après (I.2.2.) et (I.2.4.) :

$$\begin{aligned}
 \text{cov}_\theta(\hat{\theta}_n(t'_n), \hat{\theta}_n(t''_n)) &= \frac{1}{m^2(n)} \sum_{i,j=1}^{m(n)} E(B_{n,k}^i \cdot B_{n,k+1}^j) \\
 &= \frac{1}{m^2(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} E(B_{n,k}^j \cdot B_{n,k+1}^j) \\
 &= \frac{1}{m^2(n)} e^{-\alpha(t''_n - t'_n)} \sum_{j=1}^{m(n)} \text{var}(B_{n,k}^j) \\
 &= \frac{e^{-\alpha(t''_n - t'_n)}}{m(n)} \beta^2 (1 - e^{-2\alpha t'_n})
 \end{aligned}$$

On en déduit finalement que :

$$\begin{aligned}
 \text{var}_\theta(\hat{\theta}_n(t)) &= \left(\frac{t''_n - t}{t''_n - t'_n}\right)^2 \frac{\beta^2}{m(n)} (1 - e^{-2\alpha t'_n}) + \left(\frac{t - t'_n}{t''_n - t'_n}\right)^2 \frac{\beta^2}{m(n)} (1 - e^{-2\alpha t''_n}) \\
 &\quad + \frac{2(t''_n - t)(t - t'_n)}{(t''_n - t'_n)^2} \frac{\beta^2}{m(n)} e^{-\alpha(t''_n - t'_n)} (1 - e^{-2\alpha t'_n})
 \end{aligned}$$

d'où découle l'inégalité :

$$(1.7) \quad \forall n \geq 1, \text{var}_\theta(\hat{\theta}_n(t)) \leq \frac{4\beta^2}{m(n)} (1 - e^{-2\alpha P}) \leq \frac{4\beta^2}{m(n)}.$$

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 1.

d) La condition nécessaire est bien connue (cf. [24], lemme 1.5) : pour qu'une suite de v.a.r. gaussiennes converge en probabilité, il est nécessaire, qu'elle converge en moyenne d'ordre p , $1 \leq p < +\infty$, d'où il résulte que la suite des espérances converge. Il suffit d'appliquer ce résultat à la suite $(\hat{\theta}_n(t), n \geq 1)$.

e) Réciproquement, supposons que la suite des espérances converge, et posons :

$$(1.8) \quad \ell(\theta, t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_\theta(\hat{\theta}_n(t))$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, puisque :

$$\begin{aligned}
 &\{|\hat{\theta}_n(t) - \ell(\theta, t)| \geq \varepsilon\} \\
 &\subset \{|\hat{\theta}_n(t) - E_\theta(\hat{\theta}_n(t))| \geq \varepsilon - |E_\theta(\hat{\theta}_n(t)) - \ell(\theta, t)|\}
 \end{aligned}$$

et par conséquent que :

$$\text{Prob}_\theta\{|\hat{\theta}_n(t) - \ell(\theta, t)| \geq \varepsilon\} \leq 2\left(1 - F\left(\frac{\varepsilon - |E_\theta(\hat{\theta}_n(t)) - \ell(\theta, t)|}{\sqrt{\text{var}_\theta(\hat{\theta}_n(t))}}\right)\right)$$

Dès que n est assez grand pour que l'inégalité :

$$|E_\theta(\hat{\theta}_n(t)) - \ell(\theta, t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

soit satisfaite, nous avons, d'après (1.7) :

$$(1.9) \quad \text{Prob}_\theta(\{|\hat{\theta}_n(t) - \ell(\theta, t)| > \varepsilon\}) \leq 2(1 - F(\frac{\varepsilon\sqrt{m(n)}}{4\beta}))$$

Comme on sait que :

$$1 - F(\frac{\varepsilon\sqrt{m(n)}}{4\beta}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4\beta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m(n)}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2 m(n)}{32\beta^2}}$$

on en déduit finalement, en utilisant (1.1) que :

$$\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Prob}_\theta(\{|\hat{\theta}_n(t) - \ell(\theta, t)| \geq \varepsilon\}) < +\infty$$

ce qui signifie que :

$$(1.10) \quad \hat{\theta}_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.c.s.} \ell(\theta, t)$$

et termine la démonstration, puisque ce type de convergence entraîne la convergence en probabilité. (1.9) prouve d'ailleurs directement la convergence en probabilité sous la condition :

$$\begin{cases} r(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \\ m(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \end{cases}$$

■

2)

Corollaire 1 *Sous les conditions du théorème 1, en tout point t où le signal considéré θ est continu, nous avons, sous l'hypothèse θ :*

$$(1.11) \quad \hat{\theta}_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.c.s.} \theta(t)$$

■ En effet, d'après (1.4) et puisque $t''_n - t'_n = \frac{P}{r(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, d'après (1.1), nous avons :

$$t'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t \text{ et } t''_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t$$

Comme θ est continu au point t , on en déduit d'après (1.6) et puisque $\forall n \geq 1$ $\frac{t-t'_n}{t''_n-t'_n} \leq 1$ que :

$$E_\theta(\hat{\theta}_n(t)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(t)$$

On peut donc appliquer le théorème 1.

3) Remarques.-

a) On peut être un peu plus fin en accordant plus d'attention aux suites $(t'_n, n \geq 1)$ et $(t''_n, n \geq 1)$. En effet, la condition (1.4) ne détermine pas entièrement t'_n et t''_n pour tout entier n , s'il en existe, tel que $t \in \{\frac{k.P}{r(n)}, k = 0, \dots, r(n)\}$ nous imposerons dans ce cas les choix suivants pour t'_n et t''_n :

- si $t = 0$:

$$t'_n = 0 \text{ et } t''_n = \frac{P}{r(n)}$$

$$(\implies \theta(t'_n) = \theta(0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(0) = 0 \text{ et } \theta(t''_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(0^+))$$

- si $t = P$:

$$(3.2) \quad t'_n = (r(n) - 1) \frac{P}{r(n)} \text{ et } t''_n = P$$

$$(\implies \theta(t'_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(P^-) \text{ et } \theta(t''_n) = \theta(P) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(P) = 0)$$

- si $0 < t < P$ et si $t \in \{\frac{k.P}{r(n)}, k = 0, \dots, r(n)\}$,

i) Si t est un point de continuité à gauche de θ

$$(3.3) \quad t'_n = t \text{ et } t''_n = t + \frac{P}{r(n)}$$

$$(\implies \theta(t'_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(t) \text{ et } \theta(t''_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(t^+))$$

ii) Si t est un point de discontinuité à gauche et de continuité à droite de θ :

$$(3.4) \quad t'_n = t - \frac{P}{r(n)} \text{ et } t''_n = t$$

$$(\Rightarrow \theta(t'_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(t^-) \text{ et } \theta(t''_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(t))$$

iii) Si t est un point de discontinuité à gauche et à droite de θ :

$$(3.5) \quad t'_n = t - \frac{P}{r(n)} \text{ et } t''_n = t$$

($\Rightarrow \theta(t'_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(t^-)$ tandis que la suite $(\theta(t''_n), n \geq 1)$ pourra converger vers $\theta(t^+)$, vers $\theta(t)$, ou diverger, auquel cas elle aura au plus deux valeurs d'adhérence, $\theta(t^+)$ et $\theta(t)$. Si $(r(n), n \geq 1)$ est, par exemple, la suite des nombres premiers, il existe au plus un entier $n \geq 1$ tel que $t \in \{\frac{kP}{r(n)}, k = 0, \dots, r(n)\}$ et dans ce cas on a : $\theta(t''_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta(t^+)$).

b) On déduit de cette étude que si t est un point de continuité d'un côté de θ , et de discontinuité de l'autre côté, la suite $(E(\hat{\theta}_n(t)), n \geq 1)$ converge, d'après (1.6), si et seulement si la suite $(\frac{t-t'_n}{t''_n-t'_n}, n \geq 1)$ converge. On peut faire la même remarque pour n'importe quel point t tel que $\forall n \geq 1, t \notin \{\frac{kP}{r(n)}, k = 0, \dots, r(n)\}$.

c)

Corollaire 2.- *Sous les hypothèses du théorème 1 et si de plus :*

$$(3.6) \quad \forall n \geq 1 \quad r(n) = 10^n$$

$\hat{\theta}_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.c.s.}} \theta(t)$ en tout instant décimal t , $0 < t < P$, où θ est continu au moins d'un côté.

■ Si t est un point de continuité de θ , cela résulte du corollaire 1. Supposons donc maintenant que θ est continu d'un seul côté au point t .

α) Si θ est continu à gauche, dès que n est assez grand, d'après (3.3), on a $t'_n = t$. Par conséquent, on a, d'après (1.6) :

$$E_\theta(\hat{\theta}_n(t)) = \theta(t'_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \theta(t)$$

β) Si θ est continue à droite, dès que n est assez grand, d'après (3.4), on a $t''_n = t$. Par conséquent, on déduit de (1.6) que :

$$E_\theta(\hat{\theta}_n(t)) = \theta(t''_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \theta(t)$$

On applique alors le théorème 1. ■

d) En fait, en ce qui concerne la convergence de la suite $(E_\theta(\hat{\theta}_n(t)), n \geq 1)$, on peut avoir tous les cas de figure.

Exemple 1.- On suppose que $\frac{t}{P} = 0,111\dots$ et que l'on travaille encore dans le système décimal, c'est-à-dire que la suite $(r(n), n \geq 1)$ est définie par (3.7).

Alors nous avons :

$$\forall n \geq 1, t'_n < t < t''_n \text{ et } \frac{t - t'_n}{t''_n - t'_n} = \frac{t}{P}$$

On en déduit alors d'après (1.6) que :

$$E_\theta(\hat{\theta}(t)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{P}\right)\theta(t^-) + \frac{t}{P}\theta(t^+)$$

puis en utilisant le théorème 1 que :

$$\hat{\theta}_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.c.s.} \left(1 - \frac{t}{P}\right)\theta(t^-) + \frac{t}{P}\theta(t^+)$$

Cette limite est différente de $\theta(t)$ si t est un point de continuité de θ d'un seul côté.

Exemple 2.- On suppose encore que $(r(n), n \geq 1)$ est définie par (3.7) et que $\frac{t}{P} = 0,0101\dots$

On vérifie dans ce cas que la sous-suite des termes de rang pair de la suite $(E(\hat{\theta}_n(t)), n \geq 1)$ converge vers $\theta(t^-) + (0.0101\dots)(\theta(t^+) - \theta(t^-))$ tandis que la sous-suite de rang impair converge vers $\theta(t^-) + (0.101\dots)(\theta(t^+) - \theta(t^-))$. Par conséquent, on est assuré que la suite de v.a.r. gaussiennes $(\hat{\theta}_n(P \times 0.0101\dots), n \geq 1)$ ne converge pas en probabilité d'après le théorème 1.

e) Pour terminer ces remarques, notons que l'on déduit facilement de (3.1); (3.2); (1.6) et du théorème 1 que :

Corollaire 3.- *Sous les hypothèses du théorème 1,*

$$\begin{cases} \hat{\theta}_n(0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.c.s.} \theta(0) = 0 \\ \hat{\theta}_n(P) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.c.s.} \theta(0) = 0 \end{cases}$$

III - CONVERGENCE UNIFORME DE $\hat{\theta}_n$ SUR CERTAINES PARTIES DE $[0, P]$.

1) Notations.

Pour tout signal θ de Θ et pour tout entier $n \geq 1$,

(1.1)

$C_n(\theta)$ désignera la réunion des intervalles de la forme $[\frac{(k-1)P}{r(n)}, \frac{k.P}{r(n)}]$, $k = 1, \dots, r(n)$, qui ne rencontre pas $\mathcal{D}(\theta)$.

(1.2)

$T_n(\theta)$ sera l'ensemble des bornes inférieures des intervalles du type précédent dont la réunion est $C_n(\theta)$.

On est sûr que $C_n(\theta) \neq \emptyset$ dès que n est assez grand, et il est facile de vérifier que pour tout signal θ , la suite $(C_n(\theta), n \geq 1)$ converge, c'est-à-dire que :

$$\varliminf_{n \rightarrow +\infty} C_n(\theta) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} C_n(\theta),$$

et que sa limite est :

$$(1.3) \quad \varliminf_{n \rightarrow +\infty} C_n(\theta) = [0, P] - \mathcal{D}(\theta)$$

Sur chacun des intervalle $]d_{i-1}, d_i[$, $i = 1, \dots, s$ et dans leur réunion, le signal θ est uniformément continu. On utilisera les modules d'uniforme continuité correspondants à savoir :

$$(1.4) \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall i = 1, \dots, s \\ \omega_i(\theta, \varepsilon) = \text{Max}\{|\theta(u) - \theta(v)|; d_{i-1} < u, v < d_i \text{ et } |u - v| \leq \varepsilon\} \end{cases}$$

$$(1.5) \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \\ \omega(\theta, \varepsilon) = \text{Max}\{\omega_i(\theta, \varepsilon); i = 1, \dots, s\} \end{cases}$$

Enfin, nous poserons :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \forall \theta \in \Theta; \forall n \geq 1 \text{ tels que } C_n(\theta) \neq \emptyset, \\ \|\hat{\theta}_n - \theta\|_{\infty}^{(n, \theta)} = \text{Max}\{|\hat{\theta}_n(t) - \theta(t)|; t \in C_n(\theta)\}; \end{cases}$$

et

$$(1.7) \quad \begin{cases} \forall \theta \in \Theta; \forall n \geq 1 \text{ et pour tout fermé } F \text{ de } [0, P], \\ \|\hat{\theta}_n - \theta\|_{\infty}^{(F)} = \text{Max}\{|\hat{\theta}_n(t) - \theta(t)|; t \in F\}; \end{cases}$$

2)

Théorème 2.- *Sous la condition (II.1.1) et si de plus :*

$$(2.1) \quad r(n) = O(m^b(n)), \text{ où } b \text{ est un réel } > 0$$

l'estimateur $(\hat{\theta}_n, n \geq 1)$ défini au (I.2.b) converge p.c.s. vers θ (sous l'hypothèse θ) au sens de la convergence uniforme sur tout compact de $[0, P]$ ne contenant pas de point de discontinuité de θ , quel que soit le signal θ .

■ Etant donné un signal θ et un instant t où le signal θ est continu il existe un rang $N(\theta, t) \geq 1$ tel que :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \forall n \geq N(\theta, t), \text{ l'intervalle } [t'_n, t''_n] \text{ (vérifiant (1.4))} \\ \text{est contenu dans } C_n(\theta) \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, comme le graphe de $\hat{\theta}_n$ est une ligne polygonale, nous avons :

$$\begin{aligned} |\hat{\theta}_n(t) - \theta(t)| &\leq |\theta(t) - \hat{\theta}_n(t'_n)| + |\theta(t) - \hat{\theta}_n(t''_n)| \\ &\leq |\theta(t) - \theta(t'_n)| + |\hat{\theta}_n(t'_n) - \theta(t'_n)| + |\theta(t) - \theta(t''_n)| \\ &\quad + |\hat{\theta}_n(t''_n) - \theta(t''_n)| \end{aligned}$$

En utilisant le module de continuité défini par (1.5), on en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall n \geq N(\theta, t) \\ |\hat{\theta}_n(t) - \theta(t)| &\leq 2\omega\left(\theta, \frac{P}{r(n)}\right) + \text{Max}\{|\hat{\theta}_n(\tau) - \theta(\tau)|; \tau \in T_n(\theta)\} \\ &\quad + \text{Max}\{|\hat{\theta}_n\left(\tau + \frac{P}{r(n)}\right) - \theta\left(\tau + \frac{P}{r(n)}\right)|; \tau \in T_n(\theta)\} \end{aligned}$$

puis, d'après la définition (1.6), dès que n est assez grand pour que $C_n(\theta)$ ne soit pas vide, que :

$$\begin{aligned} \|\hat{\theta}_n - \theta\|_{\infty}^{(n, \theta)} &\leq 2\omega\left(\theta, \frac{P}{r(n)}\right) + \text{Max}\{|\hat{\theta}_n(\tau) - \theta(\tau)|; \tau \in T_n(\theta)\} \\ &\quad + \text{Max}\{|\hat{\theta}_n\left(\tau + \frac{P}{r(n)}\right) - \theta\left(\tau + \frac{P}{r(n)}\right)|; \tau \in T_n(\theta)\} \end{aligned}$$

Comme le signal θ est uniformément continu sur $[0, P] - \mathcal{D}(\theta)$ et d'après (II.1.1), nous avons :

$$\omega\left(\theta, \frac{P}{r(n)}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Par conséquent, étant donné un réel $\alpha > 0$, dès que n est assez grand pour que l'on ait $C_n(\theta) \neq \emptyset$ et $\omega(\theta, \frac{P}{r(n)}) < \frac{\alpha}{6}$, nous avons l'inclusion :

$$\begin{aligned} \{ \|\hat{\theta}_n - \theta\|_\infty^{(n,\theta)} \geq \alpha \} &\subset \{ \text{Max}\{ |\hat{\theta}_n(\tau) - \theta(\tau)|; \tau \in T_n(\theta) \} \geq \frac{\alpha}{3} \} \\ &\cup \{ \text{Max}\{ |\hat{\theta}_n(\tau + \frac{P}{r(n)}) - \theta(\tau + \frac{P}{r(n)})|; \tau \in T_n(\theta) \} \geq \frac{\alpha}{3} \} \end{aligned}$$

Pour montrer que $\|\hat{\theta}_n - \theta\|_\infty^{(n,\theta)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.c.s.} 0$, sous l'hypothèse θ , autrement dit pour montrer que :

$$(2.3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Prob}_\theta \{ \|\hat{\theta}_n - \theta\|_\infty^{(n,\theta)} \geq \alpha \} < +\infty,$$

il suffit donc de montrer que, sous l'hypothèse θ , on a :

$$(2.4) \quad \text{Max}\{ |\hat{\theta}_n(\tau) - \theta(\tau)|; \tau \in T_n(\theta) \} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.c.s.} 0$$

et

$$(2.5) \quad \text{Max}\{ |\hat{\theta}_n(\tau + \frac{P}{r(n)}) - \theta(\tau + \frac{P}{r(n)})|; \tau \in T_n(\theta) \} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.c.s.} 0$$

Pour le premier problème nous avons :

$$\begin{aligned} &\text{Prob}_\theta(\{ \text{Max}\{ |\hat{\theta}_n(\tau) - \theta(\tau)|; \tau \in T_n(\theta) \} \geq \alpha \}) \\ &= \text{Prob}_\theta(\bigcup_{\tau \in T_n(\theta)} \{ |\hat{\theta}_n(\tau) - \theta(\tau)| \geq \alpha \}) \\ &\leq \sum_{\tau \in T_n(\theta)} \text{Prob}_\theta \{ |\hat{\theta}_n(\tau) - \theta(\tau)| \geq \alpha \} \\ &= \sum_{\tau \in T_n(\theta)} 2(1 - F(\frac{\alpha}{\sqrt{\text{var}(\hat{\theta}_n(\tau))}})) \\ &\leq 2r(n)(1 - F(\frac{\alpha\sqrt{m(n)}}{\beta})), \text{ d'après (II.1.3)} \\ &\sim \frac{\beta}{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \frac{r(n)}{\pi \sqrt{m(n)}} e^{-\frac{\alpha^2 m(n)}{2\beta^2}} \end{aligned}$$

De manière analogue, on montrerait que :

$$\begin{aligned} &\text{Prob}_\theta \{ \text{Max}\{ |\hat{\theta}_n(\tau + \frac{P}{r(n)}) - \theta(\tau + \frac{P}{r(n)})|; \tau \in T_n(\theta) \} \geq \alpha \} \\ &\leq 2r(n)(1 - F(\frac{\alpha\sqrt{m(n)}}{\beta})) \\ &\sim \frac{\beta}{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \frac{r(n)}{\pi \sqrt{m(n)}} e^{-\frac{\alpha^2 m(n)}{2\beta^2}} \end{aligned}$$

On en déduit, compte tenu de (2.1) et de (II.1.1) que l'on a (2.4) et (2.5), et finalement que l'on a (2.3). Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que pour tout fermé F de $[0, P]$ ne rencontrant pas $\mathcal{D}(\theta)$, il existe un rang $N(\theta, F) \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq N(\theta, F) ; F \subset C_n(\theta)$$

On a alors évidemment :

$$\forall n \geq N(\theta, F) ; \|\hat{\theta}_n - \theta\|_{\infty}^{(F)} \leq \|\hat{\theta}_n - \theta\|_{\infty}^{(n, \theta)}$$

et a fortiori :

$$\|\hat{\theta}_n - \theta\|_{\infty}^{(F)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.c.s.} 0$$

■

IV - SIMULATION.

On présente ici un exemple d'estimation d'un signal périodique présentant des discontinuités.

1) Simulation d'une trajectoire du processus de Ornstein-Uhlenbeck.

Soit $W = (W(t), t \geq 0)$ un processus de Wiener, de covariance.

$$(1.1) \quad \Gamma(t, s) = \text{Inf}(t, s), \quad t, s \geq 0$$

en posant :

$$(1.2) \quad B(t) = e^{-t} W(e^{2t}), \quad t \geq 0$$

on définit un processus de Ornstein-Uhlenbeck standard, de covariance :

$$(1.3) \quad K(t, s) = \exp(-|t - s|) \quad t, s \geq 0$$

Simuler une trajectoire du processus de Ornstein-Uhlenbeck standard, revient donc à simuler celle du processus de Wiener, vu la relation (1.2). A cet égard, on utilise la construction de Lévy-Kampé de Fériet du processus de Wiener.

2) Construction de Lévy-Kampé de Fériet

a) Elle est basée sur la notion des fonctions triangulaires définie ci-dessous :

i) Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un couple unique d'entiers (p_n, q_n) tel que :

$$(2.1) \quad \begin{cases} n = 2^{q_n-1} + p_n \\ 0 \leq p_n \leq 2^{q_n-1} - 1 \end{cases}$$

$\forall n \geq 1$, on pose $J_n = [\frac{p_n}{2^{q_n-1}}, \frac{p_n+1}{2^{q_n-1}}[$

(J_n est ouvert à droite si $\frac{p_n+1}{2^{q_n-1}} < 1$, fermé sinon).

ii) On appelle fonctions triangulaires, la suite de fonctions $(e_n, n \geq 1)$, définies sur $[0, 1]$ par :

$$(2.2) \quad e_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin J_n \\ 2^{q_n}(t - \frac{p_n}{2^{q_n-1}}) & \text{si } t \in J_n \\ 2^{q_n}(\frac{p_n}{2^{q_n-1}} - t) & \text{si } t \in J_{2n+1} \end{cases}$$

b) Considérons, maintenant, une famille de v.a.r. gaussiennes centrées $(\xi_{m,n}, m \geq 1, n \geq 0)$, définies sur le même espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}, P) indépendantes et telles que :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \forall m \geq 1, \text{var}(\xi_{m,0}) = 1 \\ \forall m \geq 1, \forall n \geq 1, \text{var}(\xi_{m,n}) = \frac{1}{2^{q_n+1}} \end{cases}$$

En posant :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \forall t \in [0, 1], \forall \omega \in \Omega \\ W_m(t, \omega) = t\xi_{m,0}(\omega) + \sum_{n=1}^{+\infty} e_n(t) \cdot \xi_{m,n}(\omega) \end{cases}$$

on définit une version W_m de la fonction aléatoire réelle du processus de Wiener d'espace temps $[0, 1]$, à trajectoires continues, nulle à l'origine.

Pour une version à trajectoires continues sur $[0, +\infty[$ il suffit de poser :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \forall t \geq 0, \forall \omega \in \Omega \\ W(t, \omega) = W_1(1, \omega) + \dots + W_{[t]}(1, \omega) + W_{[t]+1}(t - [t], \omega) \end{cases}$$

où $[t]$ désigne la partie entière de t .

En utilisant la relation (1.2), on obtient une version à trajectoires continues du processus de Ornstein-Uhlenbeck standard.

3) Estimation d'un signal périodique présentant des discontinuités

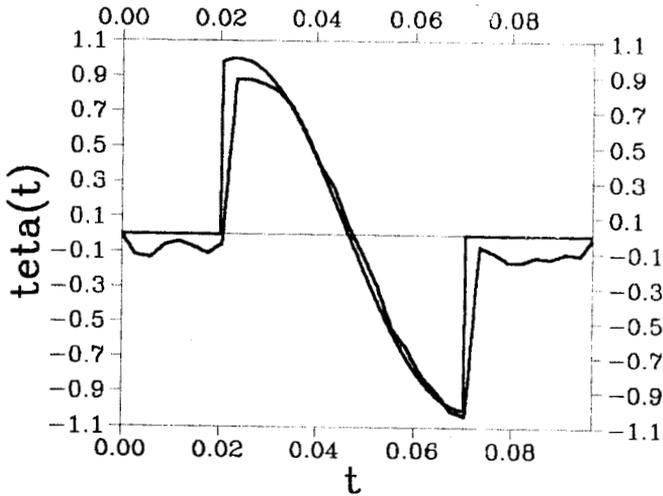
a) Le signal à estimer sera ici une fonction périodique de période $P > 0$, présentant deux points de discontinuités d_1 et d_2 et ayant la forme

$$(3.1) \quad \theta(t) \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < d_1 \\ \sin \omega_0 t & \text{si } d_1 \leq t \leq d_2 \\ 0 & \text{si } d_2 < t \leq P \end{cases}$$

b) On a simulé le bruit sur l'intervalle $[0, 3]$, en choisissant pour suite d'instantants d'observation, la suite définie par :

$$(3.2) \quad t_k = \frac{3k}{2^{10}}, k = 0, \dots, 2^{10}$$

En prenant pour période $P = t_{32}$, on pourra observer le signal θ sur 32 périodes, suivant la suite d'instantants d'observation définie par (3.2). Ceci nous permettra de construire un estimateur $\hat{\theta}_n$ avec $m(n) = n = 32$ et $r(n) = n = 32$.



RÉFÉRENCES

- [1] **N. Aronjanz** *Theory of Reproducing Kernels*. Trans. A.M.S. **68** (1950) 337-404.
- [2] **N. Bouleau** *Processus stochastiques et applications*. Hermann, Paris (1988).
- [3] **D. de Bruçq et G. Folliot** *Théorie du signal*. Masson, Paris (1988).
- [4] **M. Duc-Jacquet** *Approximation des fonctionnelles linéaires sur les espaces hilbertiens autoreproduisants*. Thèse présentée à l'Univ. Scientifique et Médicale de Grenoble (1973).
- [5] **J. Feldman** *Equivalence and Perpendicularity of Gaussian Processes*. Pacific J. Math. **8** (1958), 699-708.
- [6] **W. Feller** *An Introduction to Probability Theory and Its Applications; Vol. II*. Wiley, New-York (2nd Ed., 1966).
- [7] **R. Fortet** *Espaces à noyau reproduisant et lois de probabilité des fonctions aléatoires*. Annales de l'I.H.P., sér. B, vol. **9**, n° 1 (1973), 41-58.
- [8] **J. Geffroy** *Inégalités pour le niveau de signification et la puissance de certains tests reposant sur des données quelconques*. C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, t. 282 (1976) 1299-1301.
- [9] **J. Geffroy** *Sufficient Convergence Conditions for some Tests in the Case of not Necessarily Independent or Equidistributed Data*, in Recent Development in Statistics, J. R. Barra et al. Eds., North-Holland (1977), 429-435.
- [10] **J. Geffroy** *Asymptotic Separation of Distributions and Convergence Properties of Tests and Estimators*, in Asymptotic Theory of Statistical Tests and Estimation, I. M. Chakravarti Ed., Academic Press (1980), 159-177.
- [11] **U. Grenander** *Stochastic processes and statistical inference*. Ark. Mat. **1**, 195-276.
- [12] **J. Hájek** *A property of J-divergence of marginal probability distributions*. Czech. Math. J. **8** (1958), 460-463.
- [13] **J. Hájek** *On a property of normal distributions of an arbitrary stochastic process* (en russe). Czech. Math. J. **8** (1958), 610-618 [Selected Transl. Math. Stat. Prob. **1**, 245-252].

- [14] **R. Jahidi** *Deux tests d'existence d'un signal dans un bruit de Ornstein-Uhlenbeck*. Statistique et Analyse des Données (à paraître).
- [15] **N. Kailath** *Some Results on Singular Detection*. Information and Control **9**, (1966) 130-152.
- [16] **N. Kailath** *RKHS Approach to Detection and Estimation Problems - Part I: Deterministic Signals in Gaussian Noise*. IEEE Trans. Inf. Th., Vol. IT-17 n° 5 (1971), p.530-549.
- [17] **C. Kraft** *Some Conditions for Consistency and Uniform Consistency of Statistical Procedures*. Univ. of California Pub. in Stat., Univ. of California Press, Vol. **2**, (1955) 125-142.
- [18] **Yu. A. Kutoyants** *Parameter Estimation for Stochastic Processes*. R & E **6** (1984) Helder mann, Berlin.
- [19] **M. Loeve** *Probability Theory II*. Springer, Berlin (4th Ed., 1978).
- [20] **R. Moché** *La décantation en estimation asymptotique*. Pub. Inst. Stat. Univ. Paris. Vol. XXXIII, fasc. 2, (1988) 39-77.
- [21] **R. Moché** *Quelques tests relatifs à la détection d'un signal dans un bruit gaussien*. Actes des "Jornadas de Probabilidades e Estatística 1989" Département de Mathématiques de l'Université de Coimbra (1990).
- [22] **R. Moché** *Un test que l'hypothèse qu'un signal dans un bruit de Cauchy est constant ou non*. Pub. IRMA, Lille, Vol. 21, n° XIV (1990).
- [23] **R. M. de Almeida et R. Moché** *Sur la détection d'un signal dans un bruit de Cauchy*. Pub. IRMA, Lille, Vol. 21, n° IX (1990), soumis pour publication.
- [24] **J. Neveu** *Processus aléatoires gaussiens*. Presses de l'Université de Montréal (1968).
- [25] **E. Parzen** *An Approach to Time-Series Analysis*. Ann. Math. Stat. **32** (1961) 951-989.
- [26] **N. Piczynski** *Sur le filtrage linéaire par la méthode du maximum de vraisemblance*. Rapport Technique LSTA (Paris VI) n°70, (1988).



RÉSUMÉ

Nous étudions quelques problèmes de test de détection et d'estimation de certains signaux dans un bruit gaussien centré de covariance connue.

Plus précisément, à partir de l'enregistrement d'une seule trajectoire d'un processus gaussien somme d'un signal déterministe inconnu et d'un bruit aléatoire que l'on suppose être un processus de Ornstein-Uhlenbeck, nous proposons des tests convergents de l'hypothèse d'absence de signal contre plusieurs hypothèses alternatives. Deux de ces tests reposent sur l'examen des distances des lois conditionnelles du modèle et un théorème de J. Geffroy, un autre sur une statistique linéaire des observations.

Puis nous construisons un estimateur de type ligne polygonale du signal inconnu lorsque celui-ci est périodique de période connue, et continu par morceaux. Cet estimateur converge p.c.s. pour la convergence uniforme sur tout compact ne contenant pas de point de discontinuité du signal.

MOTS CLÉS

SIGNAL - BRUIT GAUSSIEN - PROCESSUS DE ORNSTEIN-UHLENBECK - TEST DE DÉTECTION - ESTIMATION.