N° d'ordre : 554

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Yannis HARALAMBOUS

COFORMALITÉ MODÉRÉE ET FORMALITÉ DES CW-COMPLEXES DE DIMENSION FINIE

Soutenue le 4 Juillet 1990 devant la Commission d'Examen :

Président :	J.C. THOMAS, Université de Lille-Flandres-Artois
Rapporteurs :	Y. FÉLIX, Université Catholique de Louvain
	J.C. THOMAS, Université de Lille-Flandres-Artois
Examinateurs :	D. TANRÉ, Université de Lille-Flandres-Artois
	M. VIGUÉ-POIRRIER, C.N.R.S.

Ἡ πλατεία εἶναι γεμᾶτη
κι ἀπ᾽τό πρόσωπό σου κάτι
ἔχει σωθεῖ...

(Δ. Σαββόπουλος)

Waiting for the sun...

(Jim Morrison)

Table des matières

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de recherche, Daniel Tanré: son aide précieuse, sa guidance patiente et son extrême disponibilité me resteront inoubliables.

Je voudrais également remercier Yves Félix, Jean-Claude Thomas et Micheline Vigué–Poirrier pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse, pour leurs remarques fructueuses et pour les discussions que j'ai pu avoir avec eux.

Cette thèse a été soutenue par le projet de coopération PROCOPE. Je voudrais remercier la Freie Universität Berlin pour l'accueil qu'elle m'a réservée lors de mes voyages à Berlin. Plus particulièrement, je voudrais remercier Hans Scheerer, Elmar Vogt, Peter Boullay, Martin Majewski, Klaus Schuch, Manfred Stelzer et Michael Unsöld pour les discussions que j'ai eues avec eux.

Également je voudrais remercier les membres de l'équipe de topologie et géométrie de Lille pour leur soutien et leur intérêt. Plus spécialement je voudrais remercier Youssef Hantout pour son aide et encouragement, et surtout pour m'avoir appris à "ne pas avoir froid aux yeux"!

Finalement je voudrais remercier les dames du Secrétariat Scientifique et du Service de Reprographie de l'U.F.R. de Mathématiques de Lille pour avoir toujours été efficaces, disponibles et surtout, amicales.

Πρῶτα ἀπ'ὅλα θά ἤθελα νά εὐχαριστήσω τούς γονεῖς μου γιά τήν συνεχῆ ὑποστήριξη καί βοήθεια πού μοῦ προσέφεραν. Αὐτή ἡ ἐργασία τούς εἶναι ἀφιερωμένη!

Θά ἤθελα νά εὐχαριστήσω τόν φίλο μου ἀδ. Ἰγνάτιο Καπετάνιο, πού μαθαίνοντάς μου τίς πρῶτες ἀλγεβρικές δομές τόν Ἰούνιο τοῦ 1977, μοῦ ἔδωσε μιά πρώτη ὄμορφη γεύση τῶν ἀνώτερων μαθηματικῶν.

Τέλος, θά ἤθελα νά εὐχαριστήσω ὅλους τούς φίλους καί φίλες πού, εἴτε ἐδῶ εἴτε ἀπό τήν Ἑλλάδα, μοῦ συμπαραστάθηκαν ὅλα αὐτά τά χρόνια τῆς διαμονῆς μου στό ἐξωτερικό.

Introduction

Représenter les types d'homotopie d'ensembles simpliciaux (et par là-même ceux d'espaces topologiques) par des structures algébriques préhensibles est un domaine bien étudié et toujours ouvert dans sa généralité. Une étape fondamentale a été réalisée par D. Quillen dans "Rational Homotopy Theory" [**Qu2**]. Il y associe fonctoriellement à chaque espace simplicial (2-réduit) une algèbre de Lie différentielle graduée (1-réduite) et, réciproquement, construit un espace simplicial à partir d'une algèbre de Lie différentielle graduée. Après composition de ces deux foncteurs, on obtient un nouvel ensemble simplicial du même type d'homotopie rationnelle que l'ensemble simplicial de départ.

Le type d'homotopie rationnelle est une approximation du type d'homotopie: deux espaces sont dans le même type d'homotopie rationnelle s'ils sont reliés par une suite de flèches induisant des isomorphismes en homologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Cette notion ne tient évidemment pas compte de la partie de torsion des groupes d'homotopie et, par exemple, un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ y est assimilé à un point.

Le foncteur de Quillen ne s'explique pas aisément; à l'ensemble simplicial X on associe d'abord son groupe des lacets GX puis l'anneau de groupe simplicial $\mathbb{Q}GX$. Il s'agit maintenant de compléter celui-ci afin d'obtenir une algèbre de Hopf simpliciale complète; il reste à prendre le sous-espace des primitifs et à normaliser pour avoir l'algèbre de Lie différentielle graduée annoncée, $\lambda(X)$. Ce bref aperçu montre que la construction directe ne se prêtera pas facilement à la détermination d'exemples précis.

Cependant, cet article de Quillen contient un moyen d'étudier les types d'homotopie rationnelle qui pallie la complexité du foncteur λ. En effet, la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées possède tous les ingrédients nécessaires à la définition d'une homotopie: cylindre, modèles et plus généralement une structure de catégorie à modèles fermée. Partant de là, le théorème principal de Quillen s'énonce: les catégories homotopiques associées aux ensembles simpliciaux (2-réduits) et aux algèbres de Lie différentielles graduées (1-réduites) sont isomorphes.

Remarquons au passage que de chaque côté, algébrique et topologique, des notions de groupes d'homologie, d'algèbres de cohomologie, d'algèbres de Lie d'homotopie se correspondent et sont des invariants du type d'homotopie rationnelle. Bien sûr, la considération d'une de ces notions ne rend généralement pas compte du type d'homotopie rationnelle tout entier. Par exemple, nous ne pouvons pas reconstruire le type d'homotopie rationnelle de X à partir de son algèbre de Lie d'homotopie.

Dans ce travail, nous ne considérons que la présentation en algèbres de Lie différentielles mais ce rappel historique serait bien incomplet si nous ne citions pas le travail de Sullivan. Dans [**Su**], il fournit une représentation du type d'homotopie rationnelle des espaces simpliciaux (nilpotents, de type fini) par des algèbres différentielles commutatives graduées. Ici aussi existe une association fonctorielle (sous la forme d'un couple de foncteurs adjoints); ici aussi une structure de catégorie à modèles fermée permet de définir l'homotopie (cf. [**B–G**]). Un résumé se trouve dans [**D**] où apparaît pour la première fois la notion de formalité.

Dans la présentation de Sullivan, la définition d'espace formel s'exprime simplement: un espace X est formel si son représentant algébrique est du même type d'homotopie que son algèbre de cohomologie rationnelle. En termes d'informations contenues dans la cohomologie, un espace formel est un espace dont le type d'homotopie rationnelle est entièrement déterminé par son algèbre de cohomologie.

Dualement, on peut définir les espaces coformels comme ceux dont le type d'homotopie rationnelle est déterminé par l'algèbre de Lie d'homotopie. Dans la présentation de Quillen, cela équivaut à dire que le représentant algébrique de X est du même type d'homotopie que son algèbre de Lie d'homologie.

Si les espaces formels s'expriment aisément en termes de construction de Sullivan, ils se caractérisent aussi dans le contexte de Quillen. Pour cela, il nous faut d'abord expliciter la notion primordiale de modèle:
Un modèle "de Quillen" d'un espace X est une algèbre de Lie différentielle graduée, libre comme algèbre de Lie, dans le même type d'homotopie que $\lambda(X)$. Tout espace simplicial 2-réduit admet un modèle.

J.M. Lemaire [**Lem2**] montre qu'un espace est formel si, et seulement si, il admet un modèle à différentielle purement quadratique (c'est-à-dire tel que la différentielle d'un générateur d'algèbre de Lie s'exprime en fonction de crochets de longueur 2). Nous voici maintenant prêts à étudier ces notions de formalité et coformalité à travers la théorie de Quillen. En fait, nous allons nous situer dans un cadre plus général: *l'homotopie modérée.*

Cette théorie a pris naissance dans l'article "Tame Homotopy Theory" [**Dw1**] de W.G. Dwyer. En mêlant la construction de Quillen et les algèbres de Lazard, Dwyer construit un pont (que nous notons toujours λ) entre l'algèbre et la topologie, joignant les espaces simpliciaux (3-réduits) aux algèbres de Lie différentielles graduées (2-réduites) définies sur $\mathbb{Z}$. Ceci lui permet de considérer un type d'homotopie moins grossier que l'homotopie rationnelle: le type d'homotopie modérée (sa définition est rappelée en 2.1.13). Il prend en compte une partie de la torsion des groupes d'homotopie en se limitant aux rangs pour lesquels la puissance réduite de Steenrod n'intervient pas. Par exemple la 2-torsion n'apparaît que dans le premier groupe d'homotopie; la 3-torsion d'un ensemble simplicial 3-réduit est tuée dès le groupe de dimension 6.

Si la majeure partie des techniques du cadre rationnel s'adapte ici, notons cependant que certaines n'existent plus. Par exemple, la présence de torsion homologique pour un espace X se traduit au niveau des modèles par l'apparition d'une partie linéaire pour la différentielle et la notion de modèle minimal disparaît. Nous pouvons dès à présent pressentir les difficultés que nous rencontrerons pour la définition de formel dans ce cadre.

Passons maintenant à la description explicite de ce travail.

La théorie de la perturbation est déjà apparue dans l'approche des problèmes de formalité et de coformalité [**Fé**] [**H–S**] [**La**] [**Ta**]. Son principe consiste à partir d'une situation simple (en l'occurence celle des espaces formels ou coformels) et à la perturber pour retrouver le cas considéré. L'espace cherché apparaît alors comme une déviation de la situation standard, déviation que l'on mesure à l'aide d'un objet algébrique qui se trouve généralement être une classe de cohomologie particulière.

Les suites spectrales constituent un exemple générique d'approximation; rappelons en brièvement l'idée directrice: nous partons d'un objet différentiel filtré L qui fournit une suite d'objets analogues bigradués $E^r(L)$, reflétant de plus en plus fidèlement la cohomologie de L. Une fois choisi l'indice r, l'étude de L se ramène ainsi à celle de la perturbation d'un objet bigradué. Ce travail a déjà été mené à bien par Halperin et Tanré [**H–T**] dans le cadre des algèbres différentielles commutatives graduées; nous le transposons ici aux algèbres de

Lie différentielles graduées sur un anneau commutatif R. Pour cela nous partons d'un modèle (bigradué) de $E^r(L)$, et en perturbant la différentielle (et le morphisme, cf. 1.3.7) nous construisons un modèle (filtré) de L. En termes d'informations contenues dans un modèle, ce processus consiste à réintroduire, par le biais d'une perturbation, toute l'information perdue par le passage au r-ième étage de la suite spectrale. La démonstration occupe le premier chapitre.

La notion de *coformalité (modérée)* que nous proposons au deuxième chapitre est naturelle dans ce contexte: une algèbre de Lie différentielle graduée L est coformelle si elle est dans le même type d'homotopie que son algèbre de Lie d'homologie. La liaison avec le premier chapitre découle de la filtration particulière de L obtenue en considérant tous ses éléments comme étant de degré filtrant 0 et en choisissant $r = 1$. La perturbation amenée par le premier chapitre mesure alors la non-coformalité de L. En guise d'exemples remarquons que les sphères, les produits d'espaces d'Eilenberg–MacLane sont coformels modérés. Par contre, les suspensions ne le sont généralement pas; un espace de Moore dont le groupe d'homologie a de la torsion n'est pas coformel modéré.

En prenant des CW-complexes de dimension finie, on peut travailler à coefficients, non pas dans un système d'anneaux, mais dans un seul anneau $\mathfrak{R}$, notamment l'anneau du système qui correspond à la dimension maximale. C'est-ce qu'a fait Anick dans [**An3**] où il associe (non fonctoriellement) à chaque CW-complexe X une $\mathfrak{R}$-algèbre de Lie $\mathbf{L}(X)$ dont l'algèbre enveloppante est un $\mathfrak{R}$-modèle d'Adams–Hilton de X. C'est dans ce cadre que nous situons le troisième chapitre. En ne considérant que des CW-complexes à homologie sans torsion nous obtenons des résultats et des notions analogues au cas rationnel: existence et l'unicité d'un modèle minimal, une notion de $\mathfrak{R}$-formalité et une suite d'obstructions à la $\mathfrak{R}$-formalité qui est constituée de classes de cohomologie de Harrison. Comme exemples nous mentionnons les sphères ainsi que leurs bouquets et produits et les espaces projectifs complexes.

Ensuite nous nous tournons vers les algèbres tensorielles. En effet, en considérant (comme précédemment) des CW-complexes de dimension finie et sans torsion homologique, $\mathfrak{R}$-localisés, nous obtenons des résultats analogues aux précédents: l'existence et unicité d'un modèle d'Adams–Hilton minimal, une notion de $\mathfrak{R}$-AH-formalité et une suite d'obstructions à la $\mathfrak{R}$-AH-formalité qui est constituée de classes de cohomologie de Hochschild.

Le lien entre les deux approches s'établit à l'aide du théorème 3.6.8 où nous montrons que dans certains degrés, la cohomologie de Harrison s'injecte dans celle de Hochschild. Ce résultat qui généralise celui de Barr [**Bar**] dans le cas rationnel, nous permet de montrer que les notions de $\Re$-formalité et de $\Re$-AH-formalité sont équivalentes. Si $\Re = Q$, ce théorème est démontré par Merle [**Me**].

Dans le paragraphe 3.7 nous considérons une autre définition de $\Re$-formalité de CW-complexe de dimension finie, qui fait intervenir l'algèbre des cochaînes singulières cubiques et l'algèbre de cohomologie du CW-complexe. Celle-ci a l'avantage de s'étendre au cas des CW-complexes avec torsion homologique. Nous montrons qu'elle généralise la notion précédente. Ainsi, les espaces de Moore, leurs bouquets et plus généralement les suspensions sont $\Re$-formels.

En 3.7.17, nous comparons la notion de $\Re$-formalité à celle de p-AH-formalité d'Anick (existence d'un modèle d'Adams–Hilton sur Z/pZ à différentielle quadratique).

Finalement nous nous posons la question de l'existence d'une notion de formalité repérable non pas au niveau du complexe de cochaînes, mais de l'algèbre de Lie d'Anick. Nous proposons de telles notions que nous appelons "type F1", "type F2", "type F3".

1

Perturbation d'algèbres de Lie différentielles graduées

1.1. Définitions et notations.

1.1.1. Soit R un anneau commutatif unitaire dans lequel 2 et 3 sont inversibles.

Un ***R-module gradué*** (resp. ***bigradué***) M_* (resp. $M_{*,\bullet}$) est une somme directe $M = \bigoplus_{i\in \mathbf{Z}} M_i$ (resp. $M = \bigoplus_{i,j\in \mathbf{Z}} M_{i,j}$) de R-modules.

On dit qu'une flèche $f\colon M \to M'$ entre R-modules gradués (resp. bigradués) est **de degré** p (resp. **de bidegré** (p_1, p_2)) si $f\colon M_* \to M_{*+p}$ (resp. $f\colon M_{*,\bullet} \to M_{*+p_1,\bullet+p_2}$).

La ***suspension*** σM d'un R-module gradué M est le R-module gradué défini par $(\sigma M)_* = M_{*-1}$.

Un R-module gradué M est dit ***s-réduit***, si $M_{<s} = 0$.

Le ***produit tensoriel*** $M \otimes N$ de deux R-modules gradués est un R-module gradué défini par $(M\otimes N)_* = \bigoplus_{i+j=*} M_i \otimes_R N_j$. Si $f\colon M \to M'$, $g\colon N \to N'$ sont des flèches de R-modules gradués de degrés respectifs $|f|$, $|g|$ alors $f\otimes g\colon M\otimes N \to M'\otimes N'$ est définie par $(f\otimes g)(m\otimes n) = (-1)^{|g||m|} f(m)\otimes g(n)$; elle est de degré $|f| + |g|$.

Une ***R-algèbre associative graduée*** A est un R-module gradué muni d'une loi multiplicative associative et distributive par rapport à la loi de module.

L'***algèbre tensorielle*** $T(M)$ sur un R-module gradué libre M est la somme directe $\bigoplus_{i\geqslant 0} T^i(M)$ où: $T^0(M) = R$, $T^i(M) = T^{i-1}(M) \otimes M$ pour $i \geqslant 1$. $T(M)$ est une algèbre associative graduée, pour le produit $\otimes$. La graduation $T^i(M)$ est appelée graduation par longueur des mots.

1.1.2. Une ***R-algèbre de Lie graduée*** est un R-module gradué L muni d'une flèche linéaire de degré 0, notée $[\ ,\ ]: L \otimes L \to L$ telle que

$$[a,b] = (-1)^{|a||b|+1}[b,a] \text{ (antisymétrie)},$$
$$(-1)^{|a||c|}[a,[b,c]] + (-1)^{|b||a|}[b,[c,a]] + (-1)^{|c||b|}[c,[a,b]] = 0 \text{ (Jacobi)},$$

pour $a, b, c \in L$ de degrés $|a|, |b|, |c|$ respectivement. Une flèche $f: L \to L'$ de R-algèbres de Lie graduées est une flèche de R-modules gradués, compatible avec les crochets: $f[a,b] = [f(a), f(b)]$. La somme $L \sqcup L'$ de deux algèbres de Lie L, L' est communément appelée ***produit libre***. Remarquons qu'on peut munir toute R-algèbre associative d'une structure d'algèbre de Lie en posant $[a,b] = a \cdot b - (-1)^{|a||b|} b \cdot a$.

Soit M un R-module gradué. On note $\mathsf{L}(M)$ la R-algèbre de Lie libre sur M. Si M est un R-module gradué libre, l'hypothèse $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in R$ entraîne que $\mathsf{L}(M)$ n'a pas de torsion ([**Hil**]). En considérant $T(M)$ comme une R-algèbre de Lie graduée, $\mathsf{L}(M)$ est la sous-algèbre de Lie de $T(M)$ engendrée par M. Ce faisant, elle hérite de la graduation en longueur des mots de $T(M)$:

$$\mathsf{L}(M) = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathsf{L}^i(M)$$

appelée ici graduation par la longueur des crochets. Notons enfin que le produit libre de deux R-algèbres de Lie libres $\mathsf{L}(M)$ et $\mathsf{L}(M')$ est la R-algèbre de Lie libre $\mathsf{L}(M \oplus M')$.

Une ***différentielle*** ∂_0 du R-module gradué M_* est une flèche $\partial_0: M \to M$ de R-modules gradués, de degré -1, telle que $\partial_0 \circ \partial_0 = 0$. Un ***R-module différentiel gradué*** (M, ∂_0) est un R-module gradué muni d'une différentielle.

Une ***R-algèbre associative différentielle graduée*** (A, ∂) est une R-algèbre associative graduée A, munie d'une différentielle d'algèbre, c'est-à-dire d'une flèche $\partial: A \to A$ de R-modules gradués, de degré -1, telle que $\partial \circ \partial = 0$ et

$$\partial(a \cdot a') = \partial a \cdot a' + (-1)^{|a|} a \cdot \partial a'$$

Une ***R*-algèbre de Lie différentielle graduée** (L,∂) est une R-algèbre de Lie graduée L munie d'une différentielle d'algèbre de Lie, c'est-à-dire d'une flèche ∂ de R-modules gradués, de degré -1, telle que $\partial\circ\partial=0$ et

$$\partial[a,b]=[\partial a,b]+(-1)^{|a|}[a,\partial b]$$

Le produit libre de deux R-algèbres de Lie différentielles graduées (L,∂), (L',∂') est une R-algèbre de Lie différentielle graduée $(L\sqcup L',D)$ où D satisfait à $D[a,b]=[\partial a,b]+(-1)^{|a|}[a,\partial' b]$, pour $a\in L$, $b\in L'$.

Définitions 1.1.3. Un ***R*-module différentiel gradué filtré** $(M,\partial,F_\bullet)$ est un R-module différentiel gradué (M,∂) muni d'une filtration par des sous-modules gradués

$$\cdots\subset F_{n-1}M\subset F_nM\subset F_{n+1}M\subset\dots$$

telle que $\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}F_nM=M$ et $\partial F_iM\subset F_iM$.

Une ***R*-algèbre associative différentielle graduée filtrée** $(A,\partial,F_\bullet)$ est une R-algèbre associative graduée différentielle (A,∂) munie d'une filtration par des idéaux gradués

$$\cdots\subset F_{n-1}A\subset F_nA\subset F_{n+1}A\subset\dots$$

telle que $\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}F_nA=A$, $F_pA\cdot F_qA\subset F_{p+q}A$ et $\partial F_iA\subset F_iA$.

Soit r un entier positif ou nul. Une ***R*-(*r*)-algèbre associative différentielle bigraduée** $(A_{*,*},\partial)$ est une somme directe $\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}}A_{*,i}$ de R-algèbres associatives graduées, munie d'une flèche de R-modules ∂ de bidegré $(-r,r-1)$, telle que $\partial\circ\partial=0$ et

$$\partial(a\cdot b)=\partial a\cdot b+(-1)^{|a|}a\cdot\partial b$$

où $|a|=|a|_1+|a|_2$ (($|a|_1,|a|_2$) est le bidegré de a).

Une ***R*-algèbre de Lie graduée différentielle filtrée** $(L,\partial,F_\bullet)$ est une R-algèbre de Lie graduée différentielle (L,∂) munie d'une filtration par des idéaux gradués

$$\cdots\subset F_{n-1}L\subset F_nL\subset F_{n+1}L\subset\dots$$

telle que $\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}F_nL=L$, $[F_pL,F_qL]\subset F_{p+q}L$ et $\partial F_iL\subset F_iL$.

Soit r un entier positif ou nul. Une ***R*-(*r*)-algèbre de Lie bigraduée différentielle** $(L_{*,*},\partial)$ est une somme directe $\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}}L_{*,i}$ de R-algèbres de Lie graduées, munie d'une flèche de R-modules ∂ de bidegré $(-r, r-1)$, telle que $\partial\circ\partial = 0$ et

$$\partial[a,b] = [\partial a, b] + (-1)^{|a|}[a, \partial b]$$

où $|a| = |a|_1 + |a|_2$ ($(|a|_1, |a|_2)$ est le bidegré de a).

Dans 1.1.4 et 1.1.5, l'expression *"objet"*, désigne un module, une algèbre associative ou une algèbre de Lie.

Remarques 1.1.4. 1) Si $(C_{*,*}, \partial)$ est un R-(r)-*objet* bigradué différentiel, alors ***le complexe total*** $(\mathsf{Tot}_* C, \partial)$ défini par

$$\mathsf{Tot}_n C \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i+j=n} C_{i,j}$$

est un R-*objet* gradué différentiel. On dira que $\mathsf{Tot}_n C$ est la partie de $C_{*,*}$ de ***degré total*** n.

2) Si $(C_{*,*}, \partial)$ est un R-(r)-*objet* bigradué différentiel, alors $(C, \partial, F_\bullet)$ défini par

$$F_p C_* \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{i \leqslant p} C_{i,*-i}$$

est un R-*objet* gradué différentiel filtré.

Définition 1.1.5. Le R-(r)-*objet* bigradué différentiel $(C_{*,*}, \partial)$ est dit s-réduit si $\mathsf{Tot}_i C = 0$ pour $i < s$.

1.2. Un modèle bigradué.

Définitions 1.2.1. Soit R-**DGLA** la catégorie des R-algèbres de Lie graduées différentielles. Une flèche $f\colon L \to L'$ de R-**DGLA** (notée $\simeq_R$) est un ***R-quasi-isomorphisme*** si $H_*(f)$ est un isomorphisme.

Un ***objet R-cofibrant*** de R-**DGLA** est un couple formé d'une algèbre de Lie libre sur un R-module gradué libre et d'une différentielle en faisant une R-algèbre de Lie différentielle graduée.

Un ***R*-modèle** $(\mathbb{L}(V), \partial, \mu)$ d'une R-algèbre de Lie différentielle graduée (L, δ) est un R-quasi-isomorphisme $\mu: (\mathbb{L}(V), \partial) \to (L, \delta)$, de source un objet R-cofibrant.

Un ***R*-modèle** d'une flèche $f: (L, \delta) \to (L', \delta')$ de R-**DGLA** est la donnée d'un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} (L,\delta) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, hook, "j"'] & (L',\delta') \\ & (L \sqcup \mathbb{L}(V), \partial) \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

où j est l'inclusion canonique dans le produit libre (comme R-algèbres de Lie), μ est un R-quasi-isomorphisme et le quotient $(\mathbb{L}(V), \overline{\partial})$ de $(L \sqcup \mathbb{L}(V), \partial)$ par l'idéal engendré par (L, δ) est un objet R-cofibrant.

Les définitions ci-dessus s'adaptent mot pour mot aux cas bigradué et filtré. Nous parlerons alors de *R-(r)-modèle bigradué* ou de *R-modèle filtré.*

Proposition 1.2.2. *Soit $(A_{*,*}, \partial_A) \xrightarrow{\alpha} (B_{*,*}, \partial_B)$ une flèche de R-(r)-algèbres de Lie bigraduées différentielles s-réduites ($s \geqslant 1$). Alors α admet un R-(r)-modèle bigradué.*

Corollaire 1.2.3. Toute R-(r)-algèbre de Lie bigraduée différentielle s-réduite admet un R-(r)-modèle bigradué.

PREUVE DE LA PROPOSITION: Nous construisons un R-(r)-modèle de α par récurrence sur le degré total.

Supposons avoir obtenu $\psi: (A \sqcup \mathbb{L}(W), \partial) \to (B, \partial_B)$ tel que

(i)$_n$ W est un R-module libre bigradué, engendré par des éléments de degré total t, $s \leqslant t \leqslant n$

(ii)$_n$ $\mathrm{Tot}_t H(\psi)$ est un isomorphisme pour $t \leqslant n-1$

(iii)$_n$ $\mathrm{Tot}_n H(\psi)$ est surjective.

Notons $C = \bigoplus_{t_1+t_2=n+1} \operatorname{coker} H_{t_1,t_2}(\psi)$. Pour chaque (t_1, t_2) tel que $t_1 + t_2 = n+1$, prenons le premier terme $\pi': W'_{t_1,t_2} \to C_{t_1,t_2}$ d'une résolution libre de C_{t_1,t_2}. Il existe une flèche $\pi: (W'_{t_1,t_2}, 0) \to (B_{t_1,t_2}, \partial_B)$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} W'_{t_1,t_2} \arrow[r, "H(\pi)"] \arrow[dr, "\pi"'] & H_{t_1,t_2}(B_{*,*}, \partial_B) \arrow[d] \\ & C_{t_1,t_2} \end{tikzcd}$$

commute. Posons $W' = \bigoplus_{t_1+t_2=n+1} W'_{t_1,t_2}$ et étendons la différentielle ∂ au produit libre $A \sqcup \mathsf{L}(W \oplus W')$ par $\partial|_{W'} = 0$. Prolongeons ψ sur $A \sqcup \mathsf{L}(W \oplus W')$ en posant $\psi|_{W'} = \pi$. Alors

$$\mathsf{Tot}_{n+1}H(\psi)\colon \mathsf{Tot}_{n+1}H(A \sqcup \mathsf{L}(W \oplus W')) \to \mathsf{Tot}_H n + 1(B)$$

est surjective et nous obtenons $(\mathrm{iii})_{n+1}$.

Ensuite notons $K = \bigoplus_{t_1+t_2=n} \ker H_{t_1,t_2}(\psi)$. Pour chaque (t_1, t_2) tel que $t_1 + t_2 = n$, prenons le premier terme $\tilde{\pi}'\colon V_{t_1,t_2} \to K_{t_1,t_2}$ d'une résolution libre de K_{t_1,t_2} et $\tilde{\pi}\colon (V_{t_1,t_2}, 0) \to (A \sqcup \mathsf{L}(W \oplus W'), \partial)$ une flèche telle que $H(\tilde{\pi}) = \tilde{\pi}'$. Soit W''_{t_1+r,t_2-r+1} une copie de V_{t_1,t_2} en bidegré (t_1+r, t_2-r+1). Posons $W'' = \bigoplus_{t_1+t_2=n+1} W''_{t_1,t_2}$ et étendons ∂ sur $A \sqcup \mathsf{L}(W \oplus W' \oplus W'')$ par $\partial|_{W''} = \tilde{\pi}|_V$ à travers les isomorphismes $W''_{*+r,*-r+1} \cong V_{*,*}$. Il reste à remarquer que ψ se prolonge à W'', de façon compatible aux différentielles et aux bigraduations, et que

$$\mathsf{Tot}_{n+1}H(\psi)\colon \mathsf{Tot}_{n+1}H(A \sqcup \mathsf{L}(W \oplus W' \oplus W'')) \to \mathsf{Tot}_{n+1}H(B)$$

est un isomorphisme. Nous avons ainsi $(\mathrm{ii})_{n+1}$. En remplaçant dans l'énoncé de $(\mathrm{i})_n$ le R-module W par $W \oplus W' \oplus W''$ nous obtenons $(\mathrm{i})_{n+1}$. □

NOTE. Dans l'appendice de ce chapitre, on peut trouver les énoncés 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4, qui sont les analogues de 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.3.7, dans le cas des algèbres associatives différentielles graduées.

1.3. Théorème de perturbation.

Rappels 1.3.1. Soit $(M, \partial, F_\bullet)$ un R-module gradué différentiel filtré s-réduit. Alors la filtration $F_\bullet$ de (M, ∂) définit une suite spectrale $(E^r(M), \partial^r)$ de la façon suivante:

$$Z^r_{p,q}(M) = \{a \in F_pM_{p+q} | \partial a \in F_{p-r}M_{p+q-1}\}$$
$$B^r_{p,q}(M) = \{\partial b \in F_pM_{p+q} | b \in F_{p+r}M_{p+q+1}\} = \partial Z^r_{p+r,q-r+1}(M)$$
$$E^r_{p,q}(M) = Z^r_{p,q}(M) / Z^{r-1}_{p-1,q+r+1}(M) + B^{r-1}_{p,q}(M)$$

En particulier, $E^0_{p,q}(M) = (F_pM/F_{p-1}M)_{p+q}$ et $E^1_{p,q}(M) \cong H_{p+q}(F_pM/F_{p-1}M)$. On notera également

$$Z^r_p, Z^r_{p,q} \text{ pour } Z^r_{p,q}(M)$$
$$B^r_p, B^r_{p,q} \text{ pour } B^r_{p,q}(M)$$
$$E^r_p, E^r_{p,q} \text{ pour } E^r_{p,q}(M).$$

Définissons $Z^\infty_p = \bigcap_r Z^r_p, B^\infty_p = \bigcup_r B^r_p$ et $E^\infty_p = Z^\infty_p / B^\infty_p$.

Définition 1.3.2. *Avec les notations de 1.3.1, on dit que la filtration $F_\bullet$ est* ***bornée****, si pour chaque degré n il existe des entiers $\alpha(n)$ et $\omega(n)$ tels que $F_{\alpha(n)}M_n = 0$ et $F_{\omega(n)}M_n = M_n$.*

Proposition 1.3.3 ([**McC**, Th. 2.1.]). *Avec les notations de 1.3.1, si la filtration $F_\bullet$ est bornée, la suite spectrale $(E^r(M), \partial^r)$ converge vers $H(M)$, c'est-à-dire*

$$E^\infty_{p,q} \cong F_pH_{p+q}(M)/F_{p-1}H_{p+q}(M)$$

où $F_pH_{p+q}(M) = \operatorname{im}\{i_*: H_{p+q}(F_pM) \to H_{p+q}(M)\}$.

Proposition 1.3.4 ([**McC**, Th. 3.2.]). *Soit $f: (M, \partial, F_\bullet) \to (M', \partial', F'_\bullet)$ une flèche de R-modules gradués différentiels filtrés s-réduits; elle induit une flèche de suites spectrales $E^r(f): (E^r(M), \partial^r) \to (E^r(M'), \partial'^r)$. Alors si $E^{n_0}(f)$ est un isomorphisme pour un n_0 donné, $E^n(f)$ l'est aussi pour tout $n \geqslant n_0$. Si les filtrations sont bornées, f induit un isomorphisme $H(f): H(M, \partial) \to H(M', \partial')$.*

Remarque 1.3.5. La proposition 1.3.4 ainsi que le reste du chapitre peuvent se généraliser dans le cas des filtrations *complètes et exhaustives* (cf. [**McC**, § 3.1.]).

Remarque 1.3.6. Si M a une structure de R-algèbre de Lie (resp. de R-algèbre associative) nous obtenons une suite spectrale de R-algèbres de Lie (resp. R-algèbres associatives). Les énoncés 1.3.1–1.3.5 restent inchangés dans ces deux cas.

Théorème 1.3.7 (de perturbation). *Soit $(L, \partial, F_\bullet)$ une R-algèbre de Lie graduée différentielle filtrée s-réduite à filtration bornée; soit $r \geqslant 0$, $(E^r(L), \partial^r)$ est une R-(r)-algèbre de Lie bigraduée s-réduite. Soit $(\mathbb{L}(V), d, \psi)$ un R-(r)-modèle bigradué de $(E^r(L), \partial^r)$. Alors il existe un R-modèle filtré de (L, ∂) de la forme $(\mathbb{L}(V), d + \tau, \phi)$ avec $E^r(\phi) = \psi$.*

PREUVE:

Rappelons que, dans $V_p, \mathsf{L}(V)_p, Z_p(L), E_p(L)$, l'indice p désigne la première graduation; le degré total est representé par $\mathrm{Tot}_n V$, $\mathrm{Tot}_n \mathsf{L}(V)$, $\mathrm{Tot}_n E(L)$.

Définition 1.3.8. Un ***couple approximant*** (δ, ξ) est une paire de flèches: δ est une dérivation de $\mathsf{L}(V)$ de degré -1 et $\xi: \mathsf{L}(V) \to L$ un morphisme de R-algèbres de Lie graduées tels que pour tout $p \geq 0$

(1) $\delta: V_p \to \bigoplus_{j \leqslant p-r} \mathsf{L}(V)_j$
(2) $\xi: V_p \to Z_p^r(L)$
(3) δ et ξ relèvent respectivement d et ψ.

Lemme 1.3.9. *Il existe un couple approximant (δ, ξ).*

PREUVE: Posons $\delta = d$. Nous avons pour tout $p \geq 0$

$$\begin{tikzcd} V_p \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed] & E_p^r(L) \\ & Z_p^r(L). \arrow[u, "\rho_p^r"'] \end{tikzcd}$$

Comme V_p est un R-module libre, on peut relever $\psi|_{V_p}$ en ξ_p. Prenons $\xi|_{V_p} = \xi_p$ pour tout p et prolongeons ξ comme morphisme de R-algèbres de Lie.

Lemme 1.3.10. *Soit $i \geqslant 0$ et $(\delta_{(i)}, \xi_{(i)})$ un couple approximant avec les propriétés suivantes pour tout $p \geq 0$*

$$\boxed{A_i} \quad \delta_{(i)}^2: V_p \to \bigoplus_{j \leqslant p-2r-i} \mathsf{L}(V)_j,$$

$$\boxed{B_i} \quad \xi_{(i)}\delta_{(i)} - \partial\xi_{(i)}: V_p \to Z_{p-r-i}^r(L).$$

Alors il existe un couple approximant $(\delta_{(i+1)}, \xi_{(i+1)})$ satisfaisant pour tout $p \geqslant 0$ à $\boxed{A_{i+1}}$, $\boxed{B_{i+1}}$ et

$$\boxed{C_{i+1}} \quad \begin{cases} \delta_{(i+1)} - \delta_{(i)}: V_p \to \bigoplus_{j \leqslant p-r-i} \mathsf{L}(V)_j, \\ \xi_{(i+1)} - \xi_{(i)}: V_p \to Z_{p-i}^r(L). \end{cases}$$

Remarque 1.3.11. D'après le lemme 1.3.9 il existe un couple approximant $(\delta_{(0)}, \xi_{(0)})$. Le lemme 1.3.10 nous permet de construire une suite de couples approximants $(\delta_{(i)}, \xi_{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$. La filtration de L étant bornée, il existe pour chaque n des entiers $\alpha'(n)$ et $\omega'(n)$ tels que

$$E^r_{j,n-j}(L) = 0 \text{ pour } j \leqslant \alpha'(n) \text{ et } j \geqslant \omega'(n).$$

D'après la construction du modèle bigradué (cf. 1.2.2), il est de même pour $\mathsf{L}(V)$: il existe des entiers $\alpha(n)$ et $\omega(n)$ tels que

$$\mathsf{L}(V)_{j,n-j} = 0 \text{ pour } j \leqslant \alpha(n) \text{ et } j \geqslant \omega(n).$$

autrement dit

$$\bigoplus_{j\leqslant\alpha(n)} \mathsf{L}(V)_j = 0 \text{ et } \bigoplus_{j\leqslant\omega(n)} \mathsf{L}(V)_j = \mathsf{Tot}_n L(V).$$

Pour chaque degré (total) n il existe donc un indice $i(n) \geqslant 0$ tel que

$$\begin{cases} \delta_{i(n)}|_{\mathsf{Tot}_n V} = \delta_{i(n)+1}|_{\mathsf{Tot}_n V} = \dots \overset{\text{déf}}{=} \delta(n) \\ \xi_{i(n)}|_{\mathsf{Tot}_n V} = \xi_{i(n)+1}|_{\mathsf{Tot}_n V} = \dots \overset{\text{déf}}{=} \xi(n) \end{cases}$$

En posant $D|_{\mathsf{Tot}_n V} = \delta(n)$ et $\Xi|_{\mathsf{Tot}_n V} = \xi(n)$ pour tout n, nous obtenons un couple approximant (D, Ξ) avec $D^2 = 0$ et $\Xi D - \partial\Xi = 0$. Ce couple est un bon candidat pour $(d + \tau, \phi)$, il reste à vérifier que Ξ est un R-quasi-isomorphisme: considérons la filtration $F_t\mathsf{L}(V) = \bigoplus_{j\leqslant t} \mathsf{L}(V)_j$ de $(\mathsf{L}(V), D)$ et la suite spectrale associée. Comme $D: F_p\mathsf{L}(V) \to F_{p-r}\mathsf{L}(V)$, nous avons $Z^r_p(\mathsf{L}(V)) = F_p\mathsf{L}(V) = \bigoplus_{j\leqslant p} \mathsf{L}(V)_j$. D'autre part, comme $\Xi: F_p\mathsf{L}(V) \to Z^r_p(L)$, Ξ est un morphisme qui respecte les filtrations. Il induit donc un morphisme de suites spectrales. Nous avons $E^r(\Xi) = \psi$; d'après la proposition 1.3.4, Ξ est un R-quasi-isomorphisme. Ainsi en prenant $d+\tau = D$ et $\phi = \Xi$ nous avons démontré le théorème.

PREUVE DU LEMME 1.3.10: Nous allons construire une suite de couples approximants $(\delta_\alpha, \xi_\alpha)_{\alpha\geqslant s}$ avec $(\delta_s, \xi_s) = (\delta_{(i)}, \xi_{(i)})$ et $\lim_{\alpha\to\infty}(\delta_\alpha, \xi_\alpha) = (\delta_{(i+1)}, \xi_{(i+1)})$. Ces couples auront les propriétés suivantes:

$\boxed{X_\alpha}$ $(\delta_\alpha, \xi_\alpha)$ satisfait à $\boxed{A_i}$, $\boxed{B_i}$ sur tout V et $\boxed{A_{i+1}}$, $\boxed{B_{i+1}}$ sur $\mathsf{Tot}_{\leqslant\alpha} V$.

$\boxed{Y_\alpha}$ pour tout $p \geqslant 0$,

$$\begin{cases} \delta_\alpha - \delta_{(i)}: V_p \to \bigoplus_{j\leqslant p-r-i} \mathsf{L}(V)_j \\ \xi_\alpha - \xi_{(i)}: V_p \to Z^r_{p-i}(L) \end{cases}$$

$\boxed{Z_\alpha}$ pour tout $\gamma \leqslant \alpha - 1$, $(\delta_\gamma, \xi_\gamma) = (\delta_\alpha, \xi_\alpha)$ sur $\mathsf{Tot}_{\leqslant\gamma}V$ et sur $\mathsf{Tot}_{\geqslant\alpha+1}V$.

Supposons avoir construit $(\delta_s, \xi_s), \ldots, (\delta_{\alpha-1}, \xi_{\alpha-1})$ et construisons $(\delta_\alpha, \xi_\alpha)$. Pour cela nous allons utiliser deux fonctions auxiliaires f, g en posant $\delta_\alpha = \delta_{\alpha-1} - f, \xi_\alpha = \xi_{\alpha-1} + g$ avec $f, g = 0$ sur $\mathsf{Tot}_j V$ pour $j \neq \alpha$, f de degré -1 et g de degré 0. Ces fonctions auront les propriétés suivantes pour tout $p \geqslant 0$:

(1) si $i \geqslant 0$, $g\colon V_p \to Z^{r-1}_{p-1}(L)$

(2) si $i \geqslant 1$, $\begin{cases} f\colon V_p \to \bigoplus_{j \leqslant p-r-i} \mathsf{L}(V)_j \\ g\colon V_p \to Z^r_{p-i}(L) \end{cases}$

Lemme 1.3.12. *Pour avoir les propriétés* $\boxed{X_\alpha}$ $\boxed{Y_\alpha}$ $\boxed{Z_\alpha}$ *il suffit d'avoir des fonctions f, g comme ci-dessus, telles que pour tout $p \geqslant 0$,*

$\boxed{\star}$ $\delta^2_{\alpha-1} - \delta_{\alpha-1} f\colon V_{p,\alpha-p} \to \bigoplus_{j \leqslant p-2r-i-1} \mathsf{L}(V)_j$

$\boxed{\star\star}$ $\xi_{\alpha-1}(\delta_{\alpha-1} - f) - \partial'(\xi_{\alpha-1} + g)\colon V_{p,\alpha-p} \to Z^r_{p-r-i-1}(L)$.

PREUVE DU LEMME 1.3.12: Il est clair que indépendamment du choix de f, g on a déjà $\boxed{Y_\alpha}$ et $\boxed{Z_\alpha}$. Montrons qu'on a $\boxed{X_\alpha}$. Comme pour tout $p \geqslant 0$, $\delta_\alpha - \delta_{\alpha-1} = f\colon V_p \to \bigoplus_{j \leqslant p-r-i} \mathsf{L}(V)_j$, nous avons pour tout $p \geqslant 0$, $\delta^2_\alpha - \delta^2_{\alpha-1} = \delta_\alpha(\delta_\alpha - \delta_{\alpha-1}) + (\delta_\alpha - \delta_{\alpha-1})\delta_{\alpha-1}\colon V_p \to \bigoplus_{j \leqslant p-2r-i} \mathsf{L}(V)_j$ c'est-à-dire $\boxed{A_i}$ sur tout V.

Restreignons-nous maintenant à $\mathsf{Tot}_j V$ pour $j \leqslant \alpha - 1$. Là-dessus, $\delta_\alpha = \delta_{\alpha-1}$, et donc aussi $\delta^2_\alpha = \delta^2_{\alpha-1}$. Comme $\delta_{\alpha-1}$ y satisfait à $\boxed{A_{i+1}}$ par récurrence il en est de même pour δ_α.

Il nous reste donc à montrer que pour tout $p \geqslant 0$,
$\delta^2_\alpha\colon V_{p,\alpha-p} \to \bigoplus_{j \leqslant p-2r-i-1} \mathsf{L}(V)_j$. Mais δ_α baisse le degré total de 1, et en degré total $\alpha - 1$, on a $\delta_\alpha = \delta_{\alpha-1}$. Donc sur $V_{p,\alpha-p}$, pour tout $p \geqslant 0$, $\delta^2_\alpha = \delta^2_{\alpha-1} - \delta_{\alpha-1} f$ et il suffit d'appliquer $\boxed{\star}$.

Pour les mêmes raisons que précédemment et indépendamment du choix de f, g, la paire $(\delta_\alpha, \xi_\alpha)$ satisfait à $\boxed{B_i}$ sur tout V et à $\boxed{B_{i+1}}$ sur $\mathsf{Tot}_{\leqslant\alpha-1}V$. Il reste donc à montrer que pour tout $p \geqslant 0$, $\xi_\alpha\delta_\alpha - \partial\xi_\alpha\colon V_{p,\alpha-p} \to Z^r_{p-r-i-1}(L)$. Pour cela on applique $\boxed{\star\star}$. La méthode est entièrement analogue à celle utilisée pour démontrer le point $\boxed{\star}$. □

SUITE DE LA PREUVE DE 1.3.10: Il s'agit donc de trouver f, g satisfaisant à $\boxed{\star}$, $\boxed{\star\star}$.

1. Le cas $i = 0$. Posons $f = 0$, et donc $\delta_{(1)} = \delta_{(0)} = \delta_\alpha$ pour tout $\alpha \geqslant s$. Comme δ_α relève d et $d^2 = 0$, nous avons $\boxed{\star}$.

Il reste à déterminer g. Considérons le diagramme suivant:

$$
\begin{tikzcd}
V_{p,\alpha-p} \arrow[r, "\xi\delta_{(1)}-\partial\xi"] \arrow[dr, dashed, "g"'] & \partial Z_{p-1}^{r-1}(L) + Z_{p-r-1}^{r-1}(L) \arrow[r, two heads, "\mathsf{proj}"] & \dfrac{\partial Z_{p-1}^{r-1}(L) + Z_{p-r-1}^{r-1}(L)}{Z_{p-r-1}^{r-1}(L)} = \mathcal{Z} \\
& Z_{p-1}^{r-1}(L) \arrow[u, "\partial"] \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Autrement dit

$$\textit{(1)} \qquad \xi\delta_{(1)} - \partial(\xi + g)\colon V_{p,\alpha-p} \to \mathsf{ker\ proj} = Z_{p-r-1}^{r-1}(L).$$

Il reste à montrer que cette flèche va dans $Z_{p-r-1}^{r}(L)$. D'après *(1)* nous avons

$$\textit{(2)} \qquad \xi\delta_{(1)} - \partial(\xi + g)\colon V_{p,\alpha-p} \to F_{p-r-1}(L).$$

D'autre part $\partial[\xi\delta_{(1)} - \partial(\xi + g)] = \partial\xi\delta_{(1)}$, et par récurrence, pour tout $p \geqslant 0$,

$$\xi\delta_{(1)} - \partial\xi\colon V_{p,\alpha-1-p} \to Z_{p-r-1}^{r}(L).$$

Il s'ensuit:

$$\xi\delta_{(1)} - \partial\xi\colon \textstyle\bigoplus_{p\geqslant 0}\mathsf{L}(V)_{p,\alpha-1-p} \to Z_{p-r-1}^{r}(L)$$

c'est-à-dire que pour tout $p \geqslant 0$

$$\textit{(3)} \qquad (\xi\delta_{(1)} - \partial\xi)\delta_{(1)}\colon V_{p,\alpha-p} \to Z_{p-2r-1}^{r}(L).$$

D'autre part, nous savons que pour tout $p \geqslant 0$, $\delta_{(1)}^2\colon V_p \to \bigoplus_{j\leqslant p-2r-1}\mathsf{L}(V)_j$

$$\textit{(4)} \qquad \xi\delta_{(1)}^2\colon V_{p,\alpha-p} \to Z_{p-2r-1}^{r}(L).$$

La différence entre *(3)* et *(4)* est précisément $\partial\xi\delta_{(1)}$, de but $Z_{p-2r-1}^{r}(L)$. Donc, pour tout $p \geqslant 0$,

$$\partial[\xi\delta_{(1)} - \partial(\xi + g)]\colon V_{p,\alpha-p} \to F_{p-2r-1}(L)$$

et ceci combiné avec *(2)* entraîne $\boxed{\star\star}$.

2. Le cas $i > 0$.

Introduisons une nouvelle notation: pour tout $p \geqslant 0$, P et Q seront les composées

$$\begin{tikzcd} V_{p,\alpha-p} \arrow[r, "\delta^2_{\alpha-1}"] \arrow[dr, "P"'] & \displaystyle\bigoplus_{j\leqslant p-2r-i} \mathsf{L}(V)_j \arrow[d, "\mathsf{proj}_{p-2r-i}"] \\ & \mathsf{L}(V)_{p-2r-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_{p,\alpha-p} \arrow[r, "\xi_{\alpha-1}\delta_{\alpha-1}-\partial\xi_{\alpha-1}"] \arrow[dr, "Q"'] & Z^r_{p-r-i}(L) \arrow[d, "\rho^r_{p-r-i}"] \\ & E^r_{p-r-i}(L) \end{tikzcd}$$

Montrons que d'après $\boxed{X_{\alpha-1}}$, $dP = 0$. Nous avons pour $p+q \leqslant \alpha - 1$, $\delta^2_{\alpha-1}: V_{p,q} \to \bigoplus_{j\leqslant p-2r-i-1} \mathsf{L}(V)_j$. Donc, $\delta^2_{\alpha-1}: \mathsf{L}(V)_{p,\alpha-1-p} \to \bigoplus_{j\leqslant p-2r-i-1} \mathsf{L}(V)_j$. D'autre part, d'après la remarque 1.3.11, nous pouvons considérer $\delta^2_{\alpha-1}$ comme $\delta^2_{\alpha-1}: \mathsf{L}(V)_{p,\alpha-1-p} \to Z^r_{p-2r-i-1}(\mathsf{L}(V))$. En composant avec $\delta_{\alpha-1}: V_{p,\alpha-p} \to \bigoplus_{j\leqslant p-r} \mathsf{L}(V)_j$, nous obtenons, pour tout $p \geqslant 0$,

(1) $$\delta^3_{\alpha-1}: V_{p,q} \to Z^r_{p-3r-i-1}(\mathsf{L}(V)).$$

D'après $\boxed{A_i}$, $\delta^2_{\alpha-1}: V_{p,\alpha-p} \to \bigoplus_{j\leqslant p-2r-i} \mathsf{L}(V)_j$, et donc d'après *(1)*, $\delta^2_{\alpha-1}: V_{p,\alpha-p} \to Z^{r+1}_{p-2r-i}(\mathsf{L}(V))$, ce qui entraîne $d\delta^2_{\alpha-1} = 0$ et donc $dP = 0$ sur $V_{p,\alpha-p}$, pour tout $p \geqslant 0$.

D'autre part, d'après $\boxed{X_{\alpha-1}}$, nous avons pour tout $p \geqslant 0$, $\xi_{\alpha-1}\delta_{\alpha-1} - \partial\xi_{\alpha-1}: V_{p,\alpha-1-p} \to Z^r_{p-r-i-1}(L)$ et donc $\xi_{\alpha-1}\delta_{\alpha-1} - \partial\xi_{\alpha-1}: \mathsf{L}(V)_{p,\alpha-1-p} \to Z^r_{p-r-i-1}(L)$. Alors, $(\xi_{\alpha-1}\delta_{\alpha-1} - \partial\xi_{\alpha-1})\delta_{\alpha-1}: V_{p,\alpha-p} \to Z^r_{p-2r-i-1}(L)$. Nous avons $\partial^r Q = \rho^r_{p-2r-i}\partial(\xi_{\alpha-1}\delta_{\alpha-1} - \partial\xi_{\alpha-1})$ et $\psi P = \rho^r_{p-2r-i}\xi_{\alpha-1}\delta^2_{\alpha-1}$. Pour montrer que $\psi P = \partial^r Q$, il suffit de remarquer que $\rho^r_{p-2r-i}(\xi_{\alpha-1}\delta^2_{\alpha-1} - \partial\xi_{\alpha-1}\delta_{\alpha-1}) = 0$. Mais ce dernier est égal à $\rho^r_{p-2r-i}(\xi_{\alpha-1}\delta_{\alpha-1} - \partial\xi_{\alpha-1})\delta_{\alpha-1}$ et d'après $\boxed{X_{\alpha-1}}$, nous avons pour tout $p \geqslant 0$

$$V_{p,\alpha-p} \xrightarrow{\delta_{\alpha-1}} \mathsf{L}(V)_{p-r} \xrightarrow{\xi_{\alpha-1}\delta_{\alpha-1}-\partial\xi_{\alpha-1}} Z^r_{p-2r-i-1}(L) \xrightarrow{\rho^r_{p-2r-i}} 0.$$

Dans le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd} V_{p,\alpha-p} \arrow[r, "P"] \arrow[dr, dashed, "u'"'] & \mathsf{L}(V)_{p-2r-i} \arrow[r, "\psi"] & E^r_{p-2r-i}(L) \\ & \mathsf{L}(V)_{p-r-i} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\psi"] & E^r_{p-r-i}(L) \arrow[u, "\partial^r"'] \end{tikzcd}$$

nous voulons construire un relèvement de P en u'. Pour cela, comme $V_{p,\alpha-p}$ est un R-module libre, il suffit que d soit surjectif sur l'image de P. Ce qui signifie que si nous notons $[\![.]\!]$ la classe d'homologie, pour tout $y \in V_{p,\alpha-p}$, $[\![Py]\!]_d = 0$. Mais $H_*(\psi)[\![Py]\!]_d = [\![\psi Py]\!]_{\partial^r} = [\![\partial^r Qy]\!]_{\partial^r} = 0$ et $H_*(\psi)$ est un isomorphisme; il existe donc y' tel que $dy' = Py$. On obtient ainsi le relèvement $u': V_{p,\alpha-p} \to \mathsf{L}(V)_{p-r-i}$ cherché, pour tout $p \geqslant 0$.

Maintenant, à partir de u' nous allons trouver des morphismes u, v tels que

$$Q - \psi u = \partial^r v \text{ et } du = P.$$

D'abord montrons que $\partial^r(Q - \psi u') = 0$: nous avons $\partial^r Q = \psi P$ et $\partial^r \psi = \psi d \Rightarrow \psi du' = \psi P = \partial^r Q \Rightarrow \partial^r(Q - \psi u') = 0$. L'égalité $[\![(Q - \psi u')]\!]_{\partial^r} = 0$ n'est pas toujours vérifiée. Mais nous savons que $H_*(\psi)$ est surjectif et donc qu'il existe pour tout $y \in V_{p,\alpha-p}$ des éléments a_y, b_y tels que

$$\psi a_y = (Q - \psi u')y + \partial^r b_y.$$

Posons $u(y) \stackrel{\text{déf}}{=} u'(y) + a_y$ et $v(y) \stackrel{\text{déf}}{=} b_y$, pour tout $y \in V_{p,\alpha-p}$. Ainsi nous obtenons $[\![Q - \psi u]\!]_{\partial^r} = 0$. D'autre part, $duy = du'y + da_y = du'y = Py$.

Posons $f = u$ sur $\mathsf{Tot}_\alpha V$ et $f = 0$ sinon. Vérifions que pour tout $p \geqslant 0$, f satisfait à

$$\textit{(3)} \qquad \delta^2_{\alpha-1} - \delta_{\alpha-1} f: V_{p,\alpha-p} \to \textstyle\bigoplus_{j \leqslant p-2r-i-1} \mathsf{L}(V)_j.$$

Ecrivons $\delta_{\alpha-1} = d + \tau_{\alpha-1}$ avec $\tau_{\alpha-1}: V_{p,\alpha-1} \to \bigoplus_{j \leqslant p-r-1} \mathsf{L}(V)_j$. Alors $\delta^2_{\alpha-1} - \delta_{\alpha-1} f = \delta^2_{\alpha-1} - du - \tau_{\alpha-1} u = \delta^2_{\alpha-1} - P - \tau_{\alpha-1} u = (\mathsf{Id} - \mathsf{proj}_{p-2r-i})\delta^2_{\alpha-1} - \tau_{\alpha-1}$. Nous avons d'une part (par définition du couple approximant)

$$(\mathsf{Id} - \mathsf{proj}_{p-2r-i})\delta^2_{\alpha-1}: V_p \to \bigoplus_{j \leqslant p-2r-i-1} \mathsf{L}(V)_j$$

et d'autre part,

$$V_{p,\alpha-p} \xrightarrow{\ u\ } \mathsf{L}(V)_{p-r-i} \xrightarrow{\ \tau_{\alpha-1}\ } \textstyle\bigoplus_{j \leqslant p-2r-i-1} \mathsf{L}(V)_j$$

et donc nous obtenons *(3)*.

Pour obtenir g il faut maintenant relever v. Choisissons g' telle que le diagramme suivant commute pour tout $p \geqslant 0$

$$\begin{tikzcd} V_{p,\alpha-p} \arrow[r, "v"] \arrow[dr, dashed, "g'"'] & E^r_{p-i}(L) \\ & Z^r_{p-i}(L) \arrow[u, "\rho^r_{p-i}"'] \end{tikzcd}$$

Nous avons donc,

$$(4) \qquad \xi_{\alpha-1}(\delta_{\alpha-1}-f)-\partial(\xi_{\alpha-1}+g')\colon V_{p,\alpha-p}\to Z^r_{p-r-i}(L)$$

et nous allons modifier g' en g de façon que la flèche aille dans $Z^r_{p-r-i-1}(L)$. Vérifions que la composée de *(4)* avec ρ^r_{p-r-i} est nulle:
nous avons $\rho^r_{p-r-i}(\xi_{\alpha-1}(\delta_{\alpha-1}-f)-\partial(\xi_{\alpha-1}+g')) = Q-\rho^r_{p-r-i}\xi_{\alpha-1}f-\partial^r\rho^r_{p-i}g' = Q-\psi u-\partial^r v=0$ car $\partial^r v = Q-\psi u$. Donc pour tout $y\in V_{p,\alpha-p}$,

$$[\xi_{\alpha-1}(\delta_{\alpha-1}-f)-\partial(\xi_{\alpha-1}+g')]y = a'_y+\partial b'_y,$$

avec $a'_y\in Z^{r-1}_{p-r-i-1}(L)$ et $b'_y\in Z^{r-1}_{p-i+1}(L)$.

Posons $g(y)\overset{\text{déf}}{=} g'(y)+b'_y$ pour tout $y\in V_{p,\alpha-p}$, et $g=0$ sinon. Donc, pour tout $p\geqslant 0$,

$$(5) \qquad \xi_{\alpha-1}(\delta_{\alpha-1}-f)-\partial(\xi_{\alpha-1}+g)\colon V_{p,\alpha-p}\to Z^{r-1}_{p-r-i-1}(L).$$

Il reste à vérifier que cette flèche va effectivement dans $Z^r_{p-r-i-1}(L)$. Nous avons d'après *(5)*, $\xi_{\alpha-1}(\delta_{\alpha-1}-f)-\partial(\xi_{\alpha-1}+g)\colon V_{p,\alpha-p}\to F_{p-r-i-1}(L)$. Alors $\partial[\xi_{\alpha-1}(\delta_{\alpha-1}-f)-\partial(\xi_{\alpha-1}+g)] = \partial\xi_{\alpha-1}(\delta_{\alpha-1}-f)$. L'image de $V_{p,\alpha-p}$ par $(\delta_{\alpha-1}-f)$ est en degré (total) $\leqslant \alpha-1$, nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence et écrire

$$\partial\xi_{\alpha-1}-\xi_{\alpha-1}\delta_{\alpha-1}\colon \bigoplus_{p+q\leqslant\alpha-1}\mathbb{L}(V)_{p,q}\to Z^r_{p-r-i-1}(L).$$

Ainsi, pour tout $p\geqslant 0$,

$$(\partial\xi_{\alpha-1}-\xi_{\alpha-1}\delta_{\alpha-1})(\delta_{\alpha-1}-f)\colon V_{p,\alpha-p}\to Z^r_{p-2r-i-1}(L).$$

D'autre part, $\delta_{\alpha-1}(\delta_{\alpha-1}-f)\colon V_{p,\alpha-p}\to\bigoplus_{j\leqslant p-2r-i-1}\mathbb{L}(V)_j$ d'après nos calculs précédents. Donc, pour tout $p\geqslant 0$, $\partial\xi_{\alpha-1}(\delta_{\alpha-1}-f)\colon V_{p,\alpha-p}\to F_{p-2r-i-1}(L)$ et la flèche *(5)* a pour but $Z^r_{p-r-i-1}(L)$. □

1.4. Appendice.

Définitions 1.4.1. Soit R-**DGAA** la catégorie des R-algèbres associatives graduées différentielles. Une flèche $f\colon A\to A'$ de R-**DGAA** est un ***R-quasi-isomorphisme*** (noté $\simeq_R$) si $H_*(f)$ est un isomorphisme.

Un ***objet R-cofibrant*** de R-**DGAA** est un couple formé d'une algèbre tensorielle sur un R-module gradué libre et d'une différentielle en faisant une R-algèbre associative différentielle graduée.

Un ***R*-modèle** d'une R-algèbre associative différentielle graduée (A, δ) est un R-quasi-isomorphisme $\mu: (T(V), d) \to (A, \delta)$, de source un objet R-cofibrant.

Un ***R*-modèle** d'une flèche $f: (A, \delta) \to (A', \delta')$ de R-**DGAA** est la donnée d'un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(A, \delta) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j"'] & (A', \delta') \\
 & (A \otimes T(V), d) \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

où j est l'inclusion canonique dans le produit libre (comme R-algèbres associatives), μ est un R-quasi-isomorphisme et le quotient $(T(V), \overline{d})$ de $(A \otimes T(V), d)$ par l'idéal engendré par (A, δ) est un objet R-cofibrant.

Les définitions ci-dessus s'adaptent mot pour mot aux cas bigradué et filtré. Nous parlerons alors de *R-(r)-modèle bigradué* ou de *R-modèle filtré.*

Lemme 1.4.2. *Soit $(A_{*,*}, \partial_A) \xrightarrow{\alpha} (B_{*,*}, \partial_B)$ une flèche de R-(r)-algèbres associatives bigraduées différentielles s-réduites ($s \geqslant 1$). Alors α admet un R-(r)-modèle bigradué.*

Corollaire 1.4.3. Toute R-(r)-algèbre associative bigraduée différentielle s-réduite admet un R-(r)-modèle bigradué.

Théorème 1.4.4 (de perturbation). *Soit $(A, \partial, F_\bullet)$ une R-algèbre associative graduée différentielle filtrée s-réduite à filtration bornée; soit $r \geqslant 0$, $(E^r(A), \partial^r)$ est une R-(r)-algèbre associative bigraduée s-réduite. Soit $(T(V), d, \psi)$ un R-(r)-modèle bigradué de $(E^r(A), \partial^r)$. Alors il existe un R-modèle filtré de (A, ∂) de la forme $(T(V), d + \tau, \phi)$ avec $E^r(\phi) = \psi$.*

2

Coformalité modérée

2.1. Quelques résultats et définitions.

Dans [**Qu1**], Quillen définit une théorie de l'homotopie sur une catégorie $\mathcal{C}$. Ce point de vue lui permet d'unifier la présentation de théories homotopiques, comme celle des complexes de chaînes ou celle des ensembles simpliciaux. Surtout, elle lui fournit de nombreuses équivalences de catégories homotopiques. La base de cette conception est la notion de *catégorie à modèles fermée.*

Définition 2.1.1. Dans une catégorie $\mathcal{C}$, une flèche $f: A \to B$ est appelée ***retract*** de $g: X \to Y$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"'] \\ B \arrow[r] & Y \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

dans lequel le composé des flèches horizontales est l'identité.

Définitions 2.1.2. [**Qu1**] Une ***catégorie à modèles fermée*** est une catégorie $\mathcal{C}$ munie de trois classes de flèches, appelées resp. ***fibrations***, ***cofibrations*** et ***équivalences faibles***, vérifiant les propriétés suivantes:

(1) $\mathcal{C}$ est fermée pour les limites inductives finies et projectives finies.

(2) Si f, g sont des flèches de $\mathcal{C}$ telles que $f \circ g$ est définie, alors si deux quelconques de $f, g, f \circ g$ sont des équivalences faibles, la troisième l'est également.

(3) Un retract d'une fibration (resp. cofibration, équivalence faible) est une fibration (resp. cofibration, équivalence faible).

(4) Dans tout diagramme commutatif du type

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

la flèche f peut être relevée en $f' : B \to X$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite:

(a) i est une cofibration et une équivalence faible, et p est une fibration

(b) i est une cofibration, et p est une fibration et une équivalence faible.

(5) Toute flèche f peut se factoriser de deux façons:

(a) $f = p \circ i$, avec i une cofibration et une équivalence faible, et p une fibration

(b) $f = q \circ j$, avec j une cofibration, et q une fibration et une équivalence faible.

Un objet $*_i$ est appelé ***initial*** s'il existe une unique flèche $*_i \to X$ pour tout objet X de la catégorie. Un objet M est dit ***cofibrant*** si $*_i \to M$ est une cofibration.

Un objet $*_f$ est appelé ***final*** s'il existe une unique flèche $X \to *_f$ pour tout objet X de la catégorie. Un objet F est dit ***fibrant*** si $F \to *_f$ est une fibration.

Toute catégorie à modèles fermée $\mathcal{C}$ a une catégorie homotopique associée $Ho\mathcal{C}$, obtenue à partir de $\mathcal{C}$ en inversant formellement la classe des équivalences faibles. Il apparaît que $Ho\mathcal{C}$ est équivalente à une catégorie plus concrète dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$ à la fois fibrants et cofibrants et dont les morphismes sont les classes d'homotopie convenablement définies ([**Qu2**,p.234]). Quillen ([**Qu2**,p.235]) fournit un théorème permettant de construire des équivalences entre les catégories homotopiques; Dwyer utilise cette théorie pour algébriser le type d'homotopie modérée (défini ci-après) des ensembles simpliciaux 3-réduits. Cette notion requiert un système d'anneaux permettant de contrôler la torsion:

Définition 2.1.3. [**Dw1**] Soit R un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Un ***R-système modéré d'anneaux*** est une suite croissante de sous-anneaux de $\mathbb{Q}$, $(R_j)_{j\geqslant 0}$, telle que $R \subset R_0$ et tout entier k vérifiant $2k-3 \leqslant j$ soit inversible dans R_j.

Soient $(R_*), (R'_*)$ deux R-systèmes d'anneaux. On dit que (R_*) est ***plus fin*** que (R'_*), et on note $(R_*) \succ (R'_*)$ si $R_k \subset R'_k$ pour tout k.

Notations 2.1.4. Notons $\mathbb{Q}_n$ le plus petit sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $1/p$ pour tous les entiers inférieurs ou égaux à n. La condition imposée au système modéré s'écrit alors:
$R \subseteq R_j$ et $\mathbb{Q}_{\left[\frac{j+3}{2}\right]} \subseteq R_j$, pour tout j, où $\left[\frac{j+3}{2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{j+3}{2}$.
Ainsi $(\mathbb{Q}_{\left[\frac{k+3}{2}\right]})$ est le $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$-système modéré d'anneaux le plus fin possible.

Remarque 2.1.5. Comme il est déjà remarqué dans [**An3**],[**Dw1**],[**S–T2**], la théorie de l'homotopie modérée s'adapte au cadre des espaces 2-réduits à condition de modifier le système d'anneaux. Dans ce cas, la propriété demandée devient:

Tout entier k vérifiant $k-2 \leqslant j$ est inversible dans R_j, i.e. $R \subseteq R_j$ et $\mathbb{Q}_{j+2} \subseteq R_j$, pour tout $j \geqslant 2$.

Nous ne développerons les preuves que dans le cadre de 2.1.3, l'adaptation étant sans problème.

Théorème 2.1.6 [**Dw1**]. *Soit $s \geqslant 2$. Pour chaque R-système modéré d'anneaux (R_*), la catégorie des R-algèbres de Lie différentielles graduées s-réduites, notée R-$\mathbf{DGLA}_s$ est une catégorie à modèles fermée, avec comme*

(1) ***fibrations*** *les flèches f surjectives en degrés $> s$ pour lesquelles $H_{s+k}(\ker f)$ est un R_k-module et le conoyau de $H_{s+k}(f)$ sans p-torsion pour p inversible dans R_k,*
(2) ***équivalences faibles*** *les flèches g telles que $H_{s+k}(g)\otimes R_k$ soit un isomorphisme pour tout $k \geqslant 0$,*
(3) ***cofibrations*** *les flèches i ayant la propriété (4b) de 2.1.2.*

Les R-algèbres de Lie différentielles graduées libres sur des R-modules libres sont des objets cofibrants de R-$\mathbf{DGLA}_s$ [**Dw1**,th.7.1.]. *Les objets fibrants L de R-$\mathbf{DGLA}_s$ sont ceux pour lesquels $H_{s+k}(L;R)$ est un R_k-module. Les flèches qui sont à la fois des fibrations et des équivalences faibles sont les applications* *surjectives induisant un isomorphisme en homologie à coefficients dans R.*

Théorème. 2.1.7 [**Dw1**]. *Soit $s \geqslant 2$ un entier et (R_*) un R-système modéré d'anneaux. La catégorie des ensembles simpliciaux $(s+1)$-réduits, notée $\mathbf{SS}_{s+1}$ est une catégorie à modèles fermée, avec comme*

(1) ***cofibrations*** *les applications injectives,*
(2) **équivalences faibles** *les applications f telles que $\pi_{s+k+1}(|f|) \otimes R_k$ soit un isomorphisme pour tout $k \geqslant 0$ (où $|f|$ est la réalisation de f),*
(3) ***fibrations*** *les flèches p ayant la propriété (4a) de 2.1.2.*

Tout objet de $\mathbf{SS}_{s+1}$ est cofibrant; les objets fibrants sont les complexes de Kan X pour lesquels $\pi_{s+k+1}(X)$ est un R_k-module.

Remarque 2.1.8 [**Dw1**]. Une flèche f est une fibration de $\mathbf{SS}_{s+1}$ pour laquelle $R_0 \otimes \pi_{s+1}(f)$ est surjective si, et seulement si, elle est une fibration de Kan vérifiant pour tout $k \geqslant 0$: $\pi_{s+k+1}(\mathsf{ker}\, f)$ est un R_k-module et $\mathsf{coker}\, \pi_{s+k+2}(f)$ est sans p-torsion pour p inversible dans R_{k+1}, où $\mathsf{ker}\, f$ désigne la fibre de f.

Théorème 2.1.9 [**Dw1**]. *Il existe une paire de foncteurs*

$$\lambda\colon \mathbf{SS}_{s+1} \rightleftarrows R\text{-}\mathbf{DGLA}_s\colon \mu$$

qui induisent des équivalences de catégories homotopiques déterminées par les structures de catégories à modèles fermées décrites ci-dessus.

Remarques 2.1.10. 1) En prenant $s = 1, R = \mathbb{Q}$, nous retrouvons la théorie d'homotopie rationnelle de Quillen (cf. [**Qu2**]).

2) Les foncteurs λ et μ ne sont pas adjoints mais les composés de deux couples d'adjoints.

Définition 2.1.11. Soit (R_*) un système modéré d'anneaux. On appelle ***R_*-équivalences faibles*** les équivalences faibles de la catégorie R-$\mathbf{DGLA}_s$ (munie de sa structure de catégorie à modèles fermée décrite dans le 2.1.6) et on les note $\sim$ (ou $\sim_{R_*}$ en cas d'ambiguïté). On note de la même façon les équivalences faibles de la catégorie $\mathbf{SS}_{s+1}$ (cf. 2.1.7). Ainsi nous avons deux notions différentes:

(1) celle de *R-quasi-isomorphisme*, notée $\simeq$, entre algèbres de Lie différentielles graduées: f en est un ssi $H_k(f; R)$ est un isomorphisme pour tout $k \geqslant 0$ (cf. 1.2.1).

(2) celle de *R_*-équivalence faible*, notée $\sim$, dans la même catégorie: g en est une ssi $H_{s+k}(f; R_k)$ est un isomorphisme pour tout $k \geqslant 0$.

La relation entre les deux notions est donnée par:

Remarques 2.1.12. 1) Soit (R_*) un R-système modéré d'anneaux. Dans la catégorie R-$\mathbf{DGLA}_s$ un R-quasi-isomorphisme est une R_*-équivalence faible. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant:

Prenons $s = 1, R = \mathbb{Z}$ et (R_*) un système modéré, et soit $\phi: (\mathbb{L}(t_2, t_3), dt_3 = t_2) \to *$. Alors ϕ est une R_*-équivalence faible ($\mathbb{L}(t, dt)$ est acyclique dans tout système modéré d'anneaux) mais pas un R-quasi-isomorphisme (car $H(\mathbb{L}(t, dt); \mathbb{Z}) \neq 0$) (cf. aussi 3.2.1).

2) Rappelons qu'une flèche qui est une R_*-équivalence faible et une fibration, est un R-quasi-isomorphisme (cf. 2.1.6).

Définitions 2.1.13. On dit que deux ensembles simpliciaux X, X' sont dans le même ***type d'homotopie modérée***, et on note $X \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X'$, si on a une chaîne finie de flèches

$$X \xleftarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} X'$$

On dit que deux R-algèbres de Lie différentielles graduées L, L' sont dans le même type d'homotopie modérée, et on note $L \overset{\sim}{\longleftrightarrow} L'$, si on a une chaîne finie de flèches

$$L \xleftarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} L'$$

Un ***modèle cofibrant*** $M(X)$ de X, est un objet cofibrant de même type d'homotopie modérée que X. Un ***modèle fibrant*** $F(X)$ de X, est un objet fibrant de même type d'homotopie modérée que X. Dans une catégorie à modèles fermée tout objet admet des modèles cofibrants, des modèles fibrants, des modèles fibrants et cofibrants:

$$X \xleftarrow{\sim} M(X) \xrightarrow{\sim} FM(X)$$

Proposition 2.1.14 [Dwl]. *La catégorie R-$\mathbf{Ch}_s$ des R-complexes de chaînes s-réduits, possède une structure de catégorie à modèles fermée comme suit: les* ***cofibrations*** *sont les applications injectives dont le conoyau est projectif en chaque degré; les* ***équivalences faibles****, les flèches f telles que $H_{s+k}(f) \otimes R_k$ soit un isomorphisme pour tout k et les* ***fibrations****, les flèches p ayant la propriété (4a) de 2.1.2.*

Définitions. 2.1.15 [S–T]. Le foncteur *"abélianisation"* $\mathbf{ab}\colon R\text{-}\mathbf{DGLA}_s \to R\text{-}\mathbf{Ch}_s$ associe à (L, ∂) le module $(\mathbf{ab}L, \partial_0)$, où $\mathbf{ab}L \overset{\text{déf}}{=} L/[L, L]$ et ∂_0 est la différentielle induite par passage au quotient. En particulier $\mathbf{ab}\mathbb{L}(V) \cong V$.

Soit F un foncteur entre catégories à modèles fermées, envoyant des équivalences faibles *entre objets cofibrants* sur des équivalences faibles. Alors on peut définir le ***foncteur dérivé total*** $\overline{\overline{F}}$ de F comme le foncteur induit entre les catégories homotopiques. Si F envoie équivalences faibles sur équivalences faibles, on note $\overline{F}$ le foncteur induit.

Définition 2.1.16 [Ne]. Soit $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{SS}_{s+1})$, un complexe de Kan, on définit les ***groupes d'homotopie à coefficients*** de la façon suivante:

* $\pi_{s+k+1}(X; R_k) \overset{\text{déf}}{=} \pi_{s+k+1}(X) \otimes R_k$;
* si A est un R_k-module cyclique *d'ordre fini*, $\pi_{s+k+1}(X; A) \overset{\text{déf}}{=} [M(A, s+k), X]$, où $[.,.]$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie pointée et $M(A, n)$ est un complexe de Moore vérifiant $H_n(M(A, n); \mathbb{Z}) \cong A$.

Dans cette définition on suppose $k \geqslant 1$. Pour $k = 0$, on pose $\pi_{s+1}(X; A) = \pi_{s+1}(X) \otimes A$, ce qui est compatible avec les résultats de [Ne].

Théorème 2.1.17 [S–T]. *Soit (R_*) un système modéré d'anneaux, X un complexe de Kan $(s+1)$-réduit et $\lambda(X)$ la R-algèbre de Lie différentielle graduée qui lui est associée par le foncteur λ de Dwyer. Alors*

(1) *Si A est un R_k-module cyclique, $\pi_{s+k+1}(X; A) \cong \overline{\overline{H}}_{s+k}(\lambda(X); A)$.*
(2) $H_{s+k+1}(X; A) \underset{\text{mod}}{\cong} \overline{H}_{s+k+1}(\sigma\overline{\overline{\mathbf{ab}}}\lambda(X); A)$.
(3) *Si $A' = R_k$ ou A' est un anneau quotient de R_k, alors $H^{\leqslant s+k+1}(X; A') \underset{\text{alg}}{\cong} \overline{H}^{\leqslant s+k+1}(\sigma\overline{\overline{\mathbf{ab}}}\lambda(X); A')$, où la structure d'algèbre sur le terme à droite provient de la partie quadratique de la différentielle.*

Dans la pratique, un modèle cofibrant de $\lambda(X)$ fournira l'homotopie, l'homologie et la cohomologie modérées de X.

2.2. Coformalité modérée.

Définition 2.2.1. Soit (L, ∂) une R-algèbre de Lie différentielle graduée et

(R_*) un R-système modéré d'anneaux. On dit que (L, ∂) est ***coformelle modérée*** (ou ***R_*-coformelle*** en cas d'ambiguïté) si (L, ∂) et $(H(L), 0)$ ont le même type d'homotopie modérée.

Soit X un ensemble simplicial $(s + 1)$-réduit et $\lambda(X)$ la R-algèbre de Lie différentielle graduée qui lui est associée. On dit que X est ***coformel modéré*** (ou ***R_*-coformel***) si $\lambda(X)$ l'est.

Définition 2.2.2. Soit (L, ∂) une R-algèbre de Lie différentielle graduée *filtrée* s-réduite (cf. 1.1.3). Soit $(E^r(L), \partial^r)$ le r-ième étage de la suite spectrale associée à la filtration. Appliquons le théorème de perturbation 1.3.7 à (L, ∂). Nous avons la situation suivante:

$$\begin{tikzcd}
(L, \partial) & & (E^r(L), \partial^r) \\
(\mathbb{L}(W), d + \tau) \arrow[u, "\simeq", "\phi"'] & & (\mathbb{L}(W), d) \arrow[u, "\simeq", "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Notons $\natural(\mathbb{L}(W), d + \tau)$ la R-algèbre de Lie différentielle graduée obtenue en oubliant la filtration de $(\mathbb{L}(W), d + \tau)$, et $\natural(\mathbb{L}(W), d)$ le complexe total défini dans 1.1.4.

Alors on dit que τ est une ***perturbation superflue*** si $\natural(\mathbb{L}(W), d + \tau)$ et $\natural(\mathbb{L}(W), d)$ sont dans le même type d'homotopie modérée:

$$\natural(\mathbb{L}(W), d + \tau) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \natural(\mathbb{L}(W), d)$$

Lemme 2.2.3. *Soit X un ensemble simplicial $(s + 1)$-réduit. Nous pouvons filtrer $\lambda(X)$ de la manière suivante:*

$$F_{-1}\lambda(X) = 0, F_0\lambda(X) = \lambda(X)$$

Appliquons le théorème de perturbation à $(\lambda(X), F_\bullet)$, avec $r = 1$. Nous avons la situation suivante

$$\begin{tikzcd}
\lambda(X) & & E^1\lambda(X) \\
(\mathbb{L}(W), d + \tau) \arrow[u, "\simeq", "\phi"'] & & (\mathbb{L}(W), d) \arrow[u, "\simeq", "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Alors τ est une perturbation superflue, si et seulement si $\lambda(X)$ (et donc X) est coformelle modérée.

PREUVE: Avec ce choix de filtration, nous avons $E^1\lambda(X) = (H(\lambda(X)), 0)$. Donc l'existence d'une perturbation superflue entraîne celle d'une chaîne de flèches

$$\lambda(X) \xleftarrow{\cong} \natural(\mathsf{L}(W), d+\tau) \xrightarrow{\simeq} \dots \xleftarrow{\simeq} \natural(\mathsf{L}(W), d) \xrightarrow{\cong} E^1\lambda(X) = (H(\lambda(X)), 0)$$

et $\lambda(X)$ est dans le même type d'homotopie modérée que $H(\lambda(X))$. Réciproquement, si $(\mathsf{L}(W), d+\tau)$ et $(\mathsf{L}(W), d)$ ne sont pas dans le même type d'homotopie modérée, $\lambda(X)$ et $E^1\lambda(X)$ ne peuvent pas l'être non plus. □

Proposition 2.2.4. *La coformalité modérée est un invariant du type d'homotopie modérée.*

PREUVE: Soit $(L, \partial) \overset{\simeq_{R_*}}{\longleftrightarrow} (L', \partial')$ avec (L, ∂) coformelle: $(L, \partial) \overset{\simeq_{R_*}}{\longleftrightarrow} (H_*(L; R), 0)$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
(L, \partial) \overset{\simeq_{R_*}}{\longleftrightarrow} (L', \partial') &\iff H_{s+k}(L, \partial; R_k) \cong H_{s+k}(L', \partial'; R_k) \\
&\iff H_{s+k}(L, \partial) \otimes R_k \cong H_{s+k}(L', \partial') \otimes R_k \\
&\iff (H_*(L; R), 0) \overset{\simeq_{R_*}}{\longleftrightarrow} (H_*(L'; R), 0) \\
&\iff (L', \partial') \overset{\simeq_{R_*}}{\longleftrightarrow} (H_*(L'; R), 0).
\end{aligned}$$

ce qui signifie que (L', ∂') est coformelle modérée.

2.3. Exemples.

Proposition 2.3.1. *Tout H-espace, homotopiquement associatif $(s+1)$-réduit est coformel modéré.*

PREUVE: D'après [**S–T**,1.8. et 6.9.], si X est un tel H-espace, $\lambda(X)$ a dans son type d'homotopie modérée une algèbre de Lie différentielle graduée (L, ∂), abélienne comme algèbre de Lie, libre comme R-module. Dans ce cas, le R-quasi-isomorphisme de complexes de chaînes $(L, \partial) \to (H(L, \partial), 0)$ est un morphisme d'algèbres de Lie et le résultat en découle. □

Corollaire 2.3.2. *Les espaces d'Eilenberg–MacLane, ainsi que leurs produits sont coformels modérés.*

Jusqu'à présent, la situation modérée est analogue à celle du cadre rationnel. Par contre, il n'en est rien pour les suspensions en général, comme le montre la suite du paragraphe.

Proposition 2.3.3. *Toute suspension* $\Sigma X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{SS}_{s+1})$, *dont l'homologie* $H_*(X;R)$ *est un* R*-module libre, est coformelle modérée.*

PREUVE: D'après [**Dw2**], un modèle de ΣX est fourni par $(\mathbb{L}(H(X;R)),0)$, d'où le résultat. □

Corollaire 2.3.4. *Les sphères sont coformelles.*

Si on autorise de la torsion dans l'homologie, le résultat est faux, même pour le cas le plus simple (du point de vue de l'homologie) des *espaces de Moore:*

Rappels 2.3.5. Soit G un groupe abélien, $i \geqslant 2$ un entier et $R \subset \mathbb{Q}$ un anneau commutatif. Un ***espace de Moore***, noté $M(G;i)$ est un CW-complexe R-local (cf. 3.1.2) tel que $H_*(M(G;i)) = G \otimes R$ pour $* = i$ et 0 sinon. Dans le cas $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on notera $M(p;i)$ au lieu de $M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z};i)$.

Lemme 2.3.6. *Les espaces de Moore ne sont pas en général coformels modérés.*

Un modèle cofibrant de $M(p;2k+1)$ est $(\mathbb{L}(y,x),\delta)$ avec $|x| = 2k+1, |y| = 2k, \delta x = py, \delta y = 0$ (cf. [**Dw2**]).

PREUVE DU LEMME: Nous avons $H_{2k}(\mathbb{L}(y,x),\delta) = [\![y]\!]\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $H_{4k+1}(\mathbb{L}(y,x),\delta) = [\![[y,x]]\!]\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ car $\delta\frac{1}{2}[x,x] = p[y,x]$.
Un modèle $(\mathbb{L}(V),\partial)$ de $H_*(\mathbb{L}(y,x))$ commence par

$$(\mathbb{L}(b,a,c,c',e,e',\dots),\partial,\psi)$$

avec $|a| = 2k+1, |b| = 2k, |c| = 4k+1, |c'| = 4k+2, |e| = 4k+2, |e'| = 4k+3, \partial a = pb, \partial c' = pc, \partial e = [b,a], \partial e' = [a,a] - 2pe, \psi(b) = [\![y]\!]\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \psi(c) = [\![[y,x]]\!]\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et sinon $\psi = 0$ (sur les générateurs que nous mentionnons).
Pour obtenir un modèle de $(\mathbb{L}(x,y),\delta)$ suivant la procédure du premier chapitre, on déforme ∂ en $\partial + \tau$ avec $\tau(e) = -c, \tau(e') = -p(e+c')$.

Supposons $(\mathbb{L}(V),\partial+\tau)$ et $(\mathbb{L}(V),\partial)$ dans le même type d'homotopie modérée. Il suffit alors de considérer les algèbres de Lie d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour obtenir une contradiction: le crochet des deux classes de plus bas degré étant nul dans celle de la première et pas dans celle de la deuxième. Autrement dit, le modèle de $H_*(\mathbb{L}(x,y);R)$ *"ne reconnaît pas"* le crochet

$$[\![[y,x]]\!]\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Pour $M(p;2k)$, la construction est analogue;
dans ce cas le modèle de $H_*(\mathsf{L}(y',x');R)$ (avec $|x'| = 2k, |y'| = 2k-1$) ne reconnaît pas le triple crochet $[\![[y'],[y',x']]\!]_\delta$.

3

Formalité des CW-complexes de dimension finie

Dans ce chapitre R est un anneau commutatif unitaire, $R \subset \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in R$.

3.1. Rappels.

Nous avons rassemblé dans ce § les constructions (Adams–Hilton), théorèmes (Hilton–Roitberg) et théories (Anick, Scheerer–Tanré) utilisés dans la suite du chapitre.

Définition 3.1.1. Soit (L, ∂) une R-algèbre de Lie différentielle graduée. Son ***R-algèbre enveloppante universelle*** est une algèbre associative différentielle graduée $\mathcal{U}(L, \partial)$, munie d'un morphisme de R-algèbres de Lie différentielles graduées $\imath_L : (L, \partial) \to \mathcal{U}(L, \partial)$ tel que si (A, d_A) est une R-algèbre associative différentielle graduée, et $f : (L, \partial) \to (A, d_A)$ un morphisme de *R-algèbres de*

Lie différentielles graduées, alors il existe un morphisme unique de R-algèbres associatives différentielles graduées $\tilde{f}: \mathcal{U}(L, \partial) \to (A, d_A)$ tel que $\tilde{f} \circ \imath_L = f$.

En particulier, si la R-algèbre de Lie est libre sur un R-module libre, alors son algèbre enveloppante universelle est l'algèbre tensorielle sur ce même module.

Nous considérons $\mathcal{U}$ comme un foncteur de la catégorie des R-algèbres de Lie différentielles graduées dans celle des R-algèbres associatives différentielles graduées.

Un CW-complexe X est appelé ***r*-réduit** si le $(r-1)$-squelette de X est trivial.

Construction 3.1.2 (CW-complexe R-local) [And]. Soit $U(R) = \{m \in \mathbb{Z} \mid 1/m \in R\}$. Notons Σ la suspension d'espaces topologiques et $M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}; i)$ l'espace de Moore (cf. 2.3.6). Soit X un CW-complexe 1-réduit et $\kappa_R^1(X)$ le CW-complexe obtenu en attachant à X un cône sur chaque application $\Sigma^k M(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; 1) \to X$, pour tout $m \in U(R)$ et tout k. Réitérons ce procédé en posant $\kappa_R^{i+1}(X) = \kappa_R^1(\kappa_R^i(X))$ et $\kappa_R(X) \overset{\text{déf}}{=} \bigcup \kappa_R^i(X)$.

Lemme 3.1.3. [And] *Avec les notations de 3.1.2, $\kappa_R(.)$ est un foncteur et si X est 2-réduit, nous avons*

$$\begin{cases} \tilde{H}_*(\kappa_R(X); \mathbb{Z}) = \tilde{H}_*(X; R), \\ \pi_i(\kappa_R(X)) = [\kappa_R(\mathbb{S}^i), X], i \geqslant 1. \end{cases}$$

Définition 3.1.4. Un CW-complexe dans l'image de $\kappa_R(.)$ est appelé ***R*-local**.

En particulier, une ***sphère R-locale*** $\mathbb{S}_R^n, n \geqslant 2$, est un CW-complexe n-réduit tel que $H_i(\mathbb{S}_R^n) = 0$ pour $i \neq 0, n$ et $H_n(\mathbb{S}_R^n) \cong R$. Un ***CW-complexe R-local r-réduit de dimension*** m est un CW-complexe construit à partir d'un point en attachant succésivement des cônes réduits sur des sphères R-locales $\mathbb{S}_r^n$, $r - 1 \leqslant n < m$.

Notation 3.1.5. Soit X un CW-complexe 1-réduit, on note (C_*X, ∂_X) le complexe de chaînes singulières cubiques associé à X, engendré par les cubes non dégénérés dont tous les sommets sont au point de base.

Théorème 3.1.6 [A–H][1]. *Soit K un CW-complexe 2-réduit R-local. Soit V un R-module libre, tel qu'en chaque dimension n, V_n soit en bijection avec les $(n+1)$-cellules R-locales de K. Soit $T(V)$ l'algèbre tensorielle sur V (cf.*

[1] L'énoncé original d'Adams–Hilton est sur $\mathbb{Z}$; l'adaptation est sans problème.

1.2.1). Alors il existe une différentielle d de degré -1 sur $T(V)$ et un morphisme d'algèbres

$$\theta\colon (T(V), d) \to (C_*\Omega K, \partial_{\Omega K})$$

tels que $H_*(\theta)$ soit un isomorphisme.

On dit que θ est un ***R-quasi-isomorphisme*** *(par analogie avec 1.2.1) et que $(T(V), d, \theta)$ est un* ***R-modèle d'Adams–Hilton*** *de K.*

Proposition et Définition 3.1.7 [A–H],[Lem1]. *Soit K un CW-complexe R-local, 2-réduit. Si $\Omega K \to PK \to K$ est la fibration des chemins de K et $(T(V), d, \theta)$ un R-modèle d'Adams–Hilton de K, alors il existe D, θ' tels que le diagramme suivant commute:*

(1)
$$\begin{tikzcd}
(T(V), d) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & (C_*\Omega K, \partial_{\Omega K}) \arrow[d] \\
(T(V) \otimes (R \oplus \sigma V), D) \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "\pi"] & (C_*PK, \partial_{PK}) \arrow[d] \\
(R \oplus \sigma V, \overline{D}) \arrow[r, "\overline{\theta}'"] & (C_*K, \partial_K)
\end{tikzcd}$$

où π est la projection, $\overline{\theta}'$ (resp. $\overline{D}$) sont induits par θ' (resp. D) et $\theta, \theta', \overline{\theta}'$ sont des R-quasi-isomorphismes.

On appelle $(T(V), d) \to (T(V)\otimes(R\oplus\sigma V), D) \to (R\oplus\sigma V, \overline{D})$ la **construction acyclique** sur $(T(V), d)$. Remarquons que cette construction est naturelle, dans le sens que $f\colon (T(V), d) \to (T(V'), d')$ détermine un diagramme commutatif

(2)
$$\begin{tikzcd}
(T(V), d) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & (T(V'), d') \arrow[d] \\
(T(V) \otimes (R \oplus \sigma V), D) \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & (T(V') \otimes (R \oplus \sigma V'), D') \arrow[d] \\
(R \oplus \sigma V, \overline{D}) \arrow[r, "\overline{f}'"] & (R \oplus \sigma V', \overline{D}')
\end{tikzcd}$$

Théorème 3.1.8 [**Sch,** A.5,A.6]. *Soit $\alpha\colon (C, d, F) \to (\tilde{C}, \tilde{d}, \tilde{F})$ une flèche de R-complexes de chaînes filtrés, dont la filtration satisfait à*

$$\begin{cases} F_iC = \tilde{F}_i\tilde{C} = 0 \text{ pour } i < 0 \\ F_jC_n = C_n, \tilde{F}_j\tilde{C}_n = \tilde{C}_n \text{ pour } j \geqslant n. \end{cases}$$

Supposons que la suite spectrale associée à α donne naissance à un diagramme commutatif, pour[2] $p + q \leqslant M + 1$.

$$\text{(H)}\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E^2_{p,0} \otimes E^2_{0,q} & \longrightarrow & E^2_{p,q} & \longrightarrow & \mathsf{Tor}\,(E^2_{p-1,0}, E^2_{0,q}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{E}^2_{p,0} \otimes \tilde{E}^2_{0,q} & \longrightarrow & \tilde{E}^2_{p,q} & \longrightarrow & \mathsf{Tor}\,(\tilde{E}^2_{p-1,0}, \tilde{E}^2_{0,q}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes horizontales sont des suites exactes. Alors on a

(i) *Si* $E^2_{p,0}(\alpha)$ *est bijective pour* $p \leqslant M$ *et surjective pour* $p = M + 1$ *et si* $H_n(\alpha)$ *est bijective pour* $n \leqslant M - 1$ *et surjective pour* $n = M$, *alors* $E^2_{0,q}(\alpha)$ *est bijective pour* $q \leqslant M - 1$ *et surjective pour* $q = M$.

(ii) *Si* $E^2_{0,q}(\alpha)$ *est bijective pour* $q \leqslant M - 1$ *et surjective pour* $q = M$ *et si* $H_n(\alpha)$ *est bijective pour* $n \leqslant M$ *et surjective pour* $n = M + 1$, *alors* $E^2_{p,0}(\alpha)$ *est bijective pour* $p \leqslant M$ *et surjective pour* $p = M + 1$.

Corollaire 3.1.9. *Soit le diagramme commutatif de CW-complexes*

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\wp} & B \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{f}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{e}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{b}} \\ F' & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{\wp'} & B' \end{array}$$

(avec B, B' 2-réduits) où $\wp, \wp'$ sont des fibrations et $\mathbf{e}$ *induit un isomorphisme en homologie (à coefficients R). Alors*

(i) *si* $H_p(\mathbf{b})$ *est un isomorphisme pour* $p \leqslant M$ *et un épimorphisme pour* $p = M + 1$, *alors* $H_q(\mathbf{f})$ *est un isomorphisme pour* $q \leqslant M - 1$ *et un épimorphisme pour* $q = M$.

(ii) *si* $H_q(\mathbf{f})$ *est un isomorphisme pour* $q \leqslant M - 1$ *et un épimorphisme pour* $q = M$, *alors* $H_p(\mathbf{b})$ *est un isomorphisme pour* $p \leqslant M$ *et un épimorphisme pour* $p = M + 1$.

PREUVE: Posons $J^t = \wp^{-1}(B^{(t)})$ où $B^{(t)}$ est le t-squelette de B. Alors nous avons une filtration de E

$$E \supset \cdots \supset J^t \supset J^{t-1} \supset \cdots \supset J^0 \supset \varnothing.$$

[2] Les hypothèses de [**Sch**,A.5,A.6] sont moins restrictives; nous n'avons pas besoin de toute la généralité de l'énoncé dans la suite.

Soit (C_*E, ∂_E) le complexe de chaînes singulières cubiques de E. Il est filtré par $F_t C_* E = \mathrm{im}\,(C_* J^t \to C_* E)$. La suite spectrale associée à cette filtration est la suite spectrale de Leray–Serre $E^r_{p,q}$ de la fibration $F \to E \to B$. Elle satisfait à

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F))$$

(puisque B est 2-réduit). En écrivant donc la formule des coefficients universels pour C_*B à coefficients $H_q(F)$

$$0 \to H_p(B) \otimes H_q(F) \to H_p(B; H_q(F)) \to \mathrm{Tor}\,(H_{p-1}(B), H_q(F)) \to 0$$

nous obtenons exactement la ligne horizontale de (H) du théorème 3.1.8. La flèche $\mathbf{e}$ induit une flèche entre complexes de chaînes singulières $C_*(\mathbf{e})$ qui respecte les filtrations. Cette dernière donne naissance à un morphisme de suites spectrales qui nous fournit le diagramme (H) du théorème 3.1.8.

Les filtrations de C_*E et $C_*\tilde{E}$ satisfont aux conditions exigées par le théorème 3.1.8. Les assertions (i) et (ii) sont alors des conséquences directes de (i) et (ii) de 3.1.8. □

Corollaire 3.1.10. *Dans le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
(T(V), d) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & (T(V'), d') \arrow[d] \\
(T(V) \otimes (R \oplus \sigma V), D) \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & (T(V') \otimes (R \oplus \sigma V'), D') \arrow[d] \\
(R \oplus \sigma V, \overline{D}) \arrow[r, "\overline{f}'"] & (R \oplus \sigma V', \overline{D}')
\end{tikzcd}$$

nous avons

(i) *si $H_p(\overline{f}')$ est un isomorphisme pour $p \leqslant M$ et un épimorphisme pour $p = M+1$, alors $H_q(f)$ est un isomorphisme pour $q \leqslant M-1$ et un épimorphisme pour $q = M$.*

(ii) *si $H_q(f)$ est un isomorphisme pour $q \leqslant M-1$ et un épimorphisme pour $q = M$, alors $H_p(\overline{f}')$ est un isomorphisme pour $p \leqslant M$ et un épimorphisme pour $p = M+1$.*

PREUVE: En nous inspirant de 3.1.9, filtrons $T(V) \otimes (R \oplus \sigma V)$ par $F_t(T(V) \otimes (R \oplus \sigma V)) = T(V) \otimes (R \oplus \sigma V)_{\leqslant t}$. Cette filtration fournit une suite spectrale $E^r_{p,q}$. Faisons de même pour $T(V') \otimes (R \oplus \sigma V')$ et notons $\tilde{E}^r_{p,q}$ la suite spectrale obtenue. Les filtrations sont respectées par f' qui induit donc une flèche de suites spectrales $E^r_{p,q}(f')$. D'autre part, les filtrations satisfont aux conditions exigées par le théorème 3.1.8.

Montrons maintenant que $E^2_{p,q}$ et $\tilde{E}^2_{p,q}$ satisfont à la propriété (H) de 3.1.8. Pour cela montrons d'abord que

$$(*) \qquad E^1_{p,q} \cong H_q(T(V)) \otimes \sigma V_p$$

où on note $\sigma V_p = (\sigma V)_p$. Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Z^0_{p,q} = (T(V) \otimes (R \oplus \sigma V_{\leqslant p}))_{p+q} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\rho"] & (T(V) \otimes (R \oplus \sigma V_{\leqslant p}))_{p+q-1} = \tilde{Z}^0_{p,q-1} \arrow[d, "\rho"] \\
E^0_{p,q} = T(V)_q \otimes \sigma V_p \arrow[r, "D_0"] & T(V)_{q-1} \otimes \sigma V_p = \tilde{E}^0_{p,q-1}
\end{tikzcd}$$

Prenons $v \in \sigma V_p$. Alors $Dv \in T(V) \otimes (R \oplus \sigma V)$ s'écrit $Dv = w \otimes 1 + w' \otimes v'$ où $w \in (T(V))_{p-1}, v' \in V_\ell, w' \in (T(V))_{p-1-\ell}$ avec $\ell \leqslant p$. Soit maintenant $z \otimes v \in T(V)_q \otimes \sigma V_p$. Alors $D_0(z \otimes v) = \rho D(z \otimes v) = dz \otimes v$. Donc $D_0 = d \otimes 1$, ce qui prouve (*).

Pour obtenir la forme explicite de D_1, prenons pour tout s la suite exacte

$$(\mathbf{sec}_s) \quad 0 \to T(V) \otimes (R \oplus \sigma V_{\leqslant s-1}) \xrightarrow{i_s} T(V) \otimes (R \oplus \sigma V_{\leqslant s}) \xrightarrow{\wp_s} T(V) \otimes \sigma V_s \to 0.$$

En combinant dans le diagramme suivant les suites exactes longues d'homologie de $(\mathbf{sec}_p)$ (verticale) et $(\mathbf{sec}_{p-1})$ (horizontale)

$$\begin{tikzcd}
 & & \vdots \arrow[d] & \\
 & & H_{p+q}(T(V) \otimes (R \oplus \sigma V_{\leqslant p-1})) \arrow[d, "(i_p)_*"] & \\
 & & H_{p+q}(T(V) \otimes (R \oplus \sigma V_{\leqslant p})) \arrow[d, "(\wp_p)_*"] & \\
 & & H_q(T(V)) \otimes (\sigma V_p) \arrow[d, "\partial_p"] \arrow[dll, "D_1"'] & \\
\ldots & H_q(T(V)) \otimes (\sigma V_{p-1}) \arrow[l] & H_{p+q-1}(T(V) \otimes (R \oplus \sigma V_{\leqslant p-1})) \arrow[l, "(\wp_{p-1})_*"] \arrow[d] & \ldots \arrow[l] \\
 & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

nous obtenons la différentielle D_1 comme composée du connectant ∂_p et la flèche induite en homologie par $\wp_{p-1}$. Ainsi, si $v_p \in \sigma V_p$, et $Dv_p = 1 \otimes v_{p-1} + \sum_j w_j \otimes v_{p-1-j}$, nous avons $D_1 v_p = (\wp_{p-1})_* \partial_p v_p = 1 \otimes v_{p-1}$ et donc $D_1 = 1 \otimes \overline{D}$. Ceci entraîne que

$$E^2_{p,q} \cong H_p(\sigma V_* \oplus R, \overline{D}\ ; H_q(T(V)))$$

et il suffit d'appliquer la formule des coefficients universels (comme dans 3.1.9) pour démontrer le corollaire. □

Notation 3.1.11. *Soit s un nombre entier $\geqslant 1$, et p un nombre premier. Notons*

$$\Re \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{(p-1)!}\right]$$
$$N \stackrel{\text{déf}}{=} min(sp-1, s+2p-3).$$

Nous notons $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ la catégorie des $\Re$-algèbres de Lie différentielles graduées libres à la fois comme algèbres de Lie et comme modules, s-réduites et engendrées par des éléments de degrés $\{s, s+1, \ldots, N-1\}$. D'autre part nous notons $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ la catégorie des CW-complexes $(s+1)$-réduits $\Re$-locaux de dimension $\leqslant N$ (cf. 3.1.2).

Définition 3.1.12 (homotopie dans $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ et $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$). Définissons d'abord l'objet cylindre (cf. [**An2**], [**S–T2**]) de $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$. Soit $(\mathbb{L}(V), \partial)$ un objet de $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$, alors le cylindre $(\mathbb{L}(V), \partial)_I$ est

$$(\mathbb{L}(V \oplus V' \oplus \sigma V'), D)$$

où V' est une copie de V et D est donnée par $Dv' = (\partial_0 v)', D\sigma v' = v' - \sigma\partial_0 v'$ et $Dv = \partial v$ où ∂_0 est la partie linéaire de ∂, $v \in V', \sigma v' \in \sigma V'$ et $v \in V$.

Soit i la dérivation de $(\mathbb{L}(V), \partial)_I$ définie par $i(v) = \sigma v', i(v') = i(\sigma v') = 0$. D'autre part nous avons $\lambda_0, \lambda_1 : (\mathbb{L}(V), \partial) \rightrightarrows (\mathbb{L}(V), \partial)_I$ comme suit:

$$\begin{cases} \lambda_0 \text{ est l'injection canonique} \\ \lambda_1(v) = v + D\sigma v' + \sum_{n \geqslant 1} \frac{(iD)^n}{n!}(v). \end{cases}$$

Deux flèches $f_0, f_1 : (\mathbb{L}(V), \partial) \rightrightarrows (L, \delta)$ sont homotopes (à gauche) s'il existe $F : (\mathbb{L}(V), \partial)_I \to (L, \delta)$ telle que $F \circ \lambda_0 = f_0, F \circ \lambda_1 = f_1$.

On vérifie facilement que l'existence de F est équivalente à celle d'une solution $F(\sigma v')$ à

$$\text{(E)} \qquad \delta F(\sigma v') = f_1(v) - f_0(v) - F\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{(iD)^n}{n!}(v)\right).$$

On obtient ainsi la catégorie homotopique associée à $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$, que nous notons Ho-$\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$. D'autre part Ho-$\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ désigne la catégorie homotopique associée à $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$.

Remarque 3.1.13. Le choix de $\Re$ est motivé par le fait que l'expression $\lambda_1(v)$ prenne un sens. Remarquons également:

(1) $\Re = R_{N-1-s}$, où (R_*) est le système d'anneaux modéré le plus fin (cf. 2.1.4)

(2) si f est une (R_*)-équivalence faible, alors $H_{\leqslant N-1}(f;\Re)$ est un isomorphisme.

On démontrera dans 3.2.1 que cette dernière implication admet une réciproque dans $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$.

Théorème 3.1.14 [**An3**]. *Pour chaque objet X de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$, il existe un modèle $\mathbf{L}(X)$ dans $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ avec les propriétés suivantes:*

(i) *si $X = (\mathrm{pt}) \cup e_1 \cup e_2 \cup \ldots$ est la décomposition cellulaire $\Re$-locale de X, alors $\mathbf{L}(X)$ (sans différentielle) est une algèbre de Lie libre engendrée par $\{a_1, a_2, \ldots\}$ où $|a_i| = \dim(e_i) - 1$.*

(ii) *$\mathcal{U}\mathbf{L}(X)$ est un $\Re$-modèle d'Adams–Hilton de X.*

Prenons les structures de catégories homotopiques sur $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ et $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$. Alors $\mathbf{L}(.)$ induit une équivalence de catégories notée

$$Ho\,\mathbf{L}\colon\ Ho\,\Re\text{-}\mathbf{CW}_{s+1}^N \to Ho\,\Re\text{-}\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$$

Remarque 3.1.15 [**S–T2**]. Si $X \in \Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$, on note $\mathcal{E}_{s+1}(X)$ le sous-ensemble de l'ensemble simplicial singulier associé à X, formé des simplexes ayant toutes leur i-faces au point de base pour $i < s+1$. Considérons $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ comme sous-catégorie de $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s$, alors pour tout $X \in \Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$, il existe un objet de $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ qui représente le type d'homotopie de $\lambda\mathcal{E}_{s+1}(X)$ dans $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s$, et satisfait aux propriétés (i) et (ii) de 3.1.14.

Les processus de construction utilisés par Anick et Scheerer–Tanré sont différents; l'existence d'une équivalence d'homotopie entre les algèbres de Lie différentielles obtenues reste une question ouverte. Dans la suite, nous utiliserons la construction de [**S–T2**], qui est directement reliée à l'homotopie modérée de Dwyer [**Dw1**].

Proposition 3.1.16. *Soit G un groupe abélien libre gradué s-réduit ($s \geqslant 1$) et (R_*) un R-système modéré d'anneaux. La flèche*

$$\mathsf{L}(G) \otimes R_n \hookrightarrow T(G) \otimes R_n$$

admet un retract en degrés $s, \ldots, s+n+1$.

PREUVE: Rappelons que la flèche $\iota \colon \mathsf{L}(G) \hookrightarrow T(G)$ est définie par $\iota([g, g']) = g \otimes g' - (-1)^{|g||g'|} g' \otimes g$ (cf. 1.1.2). D'après [**Qu2**,p.281] en tensorisant par $\mathbb{Q}$ on obtient un retract en tout degré

$$\begin{aligned} \rho \colon T(G) \otimes \mathbb{Q} &\to \mathsf{L}(G) \otimes \mathbb{Q} \\ g_1 \otimes \cdots \otimes g_m &\mapsto \frac{1}{m}[g_1, [g_2, \ldots [g_{m-1}, g_m] \cdots]] \end{aligned}$$

On s'aperçoit qu'il suffit d'inverser chaque entier premier p seulement à partir du degré où les premiers éléments de longueur de crochet p peuvent apparaître. Comme G est s-réduit, en degré $s+n+1$, la plus grande longueur de crochet possible est $\left[\frac{s+n+1}{s}\right] = m$. Il faut donc que m soit inversible dans R_n. D'après la définition de système modéré d'anneaux (cf. 2.1.3),

- si $s \geqslant 2$, $R_n \supseteq \mathbb{Q}_{\left[\frac{n+3}{2}\right]}$; mais $m = \left[\frac{s+n+1}{s}\right] \leqslant \left[\frac{n+3}{2}\right]$
- si $s = 1$, $R_n \supseteq \mathbb{Q}_{[n+2]}$; mais $m = \left[\frac{s+n+1}{s}\right] = n+2$

dans les deux cas, m est inversible dans R_n. □

3.2. Quelques résultats.

Proposition 3.2.1. *Soit $f \colon (\mathsf{L}(V), \partial) \to (\mathsf{L}(V'), \partial')$ une flèche de $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ et (R_*) un $\Re$-système d'anneaux modéré, tel que $R_{\leqslant N-s-1} = \Re$. On a équivalence entre:*

(i) *f est une (R_*)-équivalence faible (cf. 2.1.6).*

(ii) *$H_*(\mathcal{U}f)$ est un isomorphisme.*

(iii) *$H_*(\mathbf{ab}f)$ est un isomorphisme de $\Re$-modules gradués.*

(iv) *$\mathsf{L}(\mathbf{ab}f)$ est une (R_*)-équivalence faible.*

(v) *$H_{\leqslant N-1}(f)$ est un isomorphisme de $\Re$-modules gradués.*

PREUVE: $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(iii)}}$ D'après [S–T1,3.3], le foncteur **ab** envoie une (R_*)-équivalence faible entre objets de $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ sur une équivalence faible de la catégorie $\mathfrak{R}$-**Ch** des $\mathfrak{R}$-complexes de chaînes libres. Une équivalence faible dans cette dernière catégorie est un morphisme h tel que $H_{s+k}(h) \otimes R_k$ soit un isomorphisme pour tout $k \geqslant 0$. Mais pour $k \leqslant N - s - 1, R_k = \mathfrak{R}$ et pour $k \geqslant N - s, H_{s+k}(\mathbf{ab}f) = 0$ puisque V, V' sont concentrés en degré inférieur ou égal à $N - 1$. Donc $H_*(\mathbf{ab}f)$ est un isomorphisme en tout degré.

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Prenons $\mathcal{U}f: (T(V), \partial) \to (T(V'), \partial')$ et la construction acyclique

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} (T(V),\partial) & \xrightarrow{\quad \mathcal{U}f \quad} & (T(V'),\partial') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T(V)\otimes(\mathfrak{R}\oplus\sigma V), D) & \xrightarrow{\quad f' \quad} & (T(V')\otimes(\mathfrak{R}\oplus\sigma V'), D') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathfrak{R}\oplus\sigma V, \overline{D}) & \xrightarrow{\quad \overline{f}'=\sigma\mathbf{ab}f \quad} & (\mathfrak{R}\oplus\sigma V', \overline{D}') \end{array}$$

Par hypothèse, $H(\mathbf{ab}f)$ est un isomorphisme en tout degré et $H(\mathcal{U}f')$ aussi, puisque $(T(V)\otimes(\mathfrak{R}\oplus\sigma V), D)$ et $(T(V')\otimes(\mathfrak{R}\oplus\sigma V'), D')$ sont acycliques. Donc d'après le corollaire 3.1.10.(i) $H(\mathcal{U}f)$ est un isomorphisme en tout degré.

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ D'après 3.1.16 le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{L}(V),\partial)\otimes R_{N-s+k} & \xrightarrow{f\otimes 1} & (\mathbb{L}(V'),\partial')\otimes R_{N-s+k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T(V),\partial)\otimes R_{N-s+k} & \xrightarrow{\mathcal{U}f\otimes 1} & (T(V'),\partial')\otimes R_{N-s+k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{L}(V),\partial)\otimes R_{N-s+k} & \xrightarrow{f\otimes 1} & (\mathbb{L}(V'),\partial')\otimes R_{N-s+k} \end{array}$$

existe jusqu'au degré $N + k + 1$. On en déduit donc

$$\begin{array}{ccc} H_{\leqslant N+k}(\mathbb{L}(V),\partial; R_{N-s+k}) & \xrightarrow{H_{\leqslant N+k}(f;R_{N-s+k})} & H_{\leqslant N+k}(\mathbb{L}(V'),\partial'; R_{N-s+k}) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} \\ H_{\leqslant N+k}(T(V),\partial; R_{N-s+k}) & \xrightarrow{H_{\leqslant N+k}(\mathcal{U}f;R_{N-s+k})} & H_{\leqslant N+k}(T(V'),\partial'; R_{N-s+k}) \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta'} \\ H_{\leqslant N+k}(\mathbb{L}(V),\partial; R_{N-s+k}) & \xrightarrow{H_{\leqslant N+k}(f;R_{N-s+k})} & H_{\leqslant N+k}(\mathbb{L}(V'),\partial'; R_{N-s+k}) \end{array}$$

avec $\beta\alpha = \mathrm{Id}$ et $\beta'\alpha' = \mathrm{Id}$. Par hypothèse, $H_{\leqslant N+k}(\mathcal{U}f)$ est un isomorphisme pour tout k, donc $H_{\leqslant N+k}(\mathcal{U}f) \otimes R_{N-s+k}$ en est un aussi. Il s'ensuit que $H_{N+k}(f) \otimes R_{N-s+k}$ est un isomorphisme pour tout k, c'est-à-dire f est une (R_*)-équivalence faible.

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)}}$ Comme $\mathfrak{R}$ est plat on a

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H(V)\otimes H(V) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & H(V\otimes V) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \mathsf{Tor}\,(H(V),H(V)) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H(V')\otimes H(V') \arrow[r] & H(V'\otimes V') \arrow[r] & \mathsf{Tor}\,(H(V'),H(V')) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et si $H_*(\mathbf{ab}f)$ est un isomorphisme, les flèches α et γ sont des isomorphismes, et donc par le lemme des cinq, β aussi. On montre ainsi par induction que si $H_*(\mathbf{ab}f)$ est un isomorphisme, la flèche

$$T(\mathbf{ab}f)\colon (T(V),\partial_0) \to (T(V'),\partial_0')$$

induit un isomorphisme en homologie. Mais cette flèche est $\mathcal{U}\mathsf{L}(\mathbf{ab}f)$. D'après (ii)⇒(i), $\mathsf{L}(\mathbf{ab}f)$ est une (R_*)-équivalence faible.

$\boxed{\text{(iv)} \Rightarrow \text{(iii)}}$ Appliquons (i)⇒(iii) à la flèche $\mathsf{L}(\mathbf{ab}f)$. Alors $H_*(\mathbf{ab}\,\mathsf{L}(\mathbf{ab}f))$ est un isomorphisme de $\mathfrak{R}$-modules. Mais cet isomorphisme n'est autre que $H_*(\mathbf{ab}f)$.

$\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(v)}}$ Ce cas est trivial.

$\boxed{\text{(v)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Effectuons la construction du modèle de f, dans la catégorie à modèles fermée de Dwyer [**Dw1**], à la manière de [**S–T1**, 2.2]:

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{L}(V),\partial) \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & (\mathsf{L}(V'),\partial') \\
& (\mathsf{L}(V\oplus W),\delta) \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

Avec l'hypothèse (v), on a

$$\begin{cases} W_{<N} = 0, \\ W_N \text{ est constitué de cycles.} \end{cases}$$

Le morphisme ϕ étant une (R_*)-équivalence faible, on déduit de [**S–T1**,3.3] que $H_{s+k}(\mathbf{ab}\phi)\otimes R_k$ est un isomorphisme, d'où: $H_{\leqslant N-1}(\mathbf{ab}\phi)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{R}$-modules gradués. La remarque faite ci-dessus à propos de W entraîne que $H_{\leqslant N-1}(\mathbf{ab}f)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{R}$-modules gradués et donc aussi $H_*(\mathbf{ab}f)$. En appliquant (iii)⇒(i), nous obtenons le résultat. □

Proposition 3.2.2. *Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}^N_{s+1}$, tel que $H(X)$ soit sans torsion. Alors il existe ϕ et ∂ tels que*

(i) *$\phi: (\mathsf{L}(\sigma^{-1}H(X)), \partial) \to \mathbf{L}(X)$ soit une (R_*)-équivalence faible*

(ii) *∂ soit décomposable, i.e. $\partial(\sigma^{-1}H(X)) \subset \mathsf{L}^{\geqslant 2}(\sigma^{-1}H(X))$.*

PREUVE: Ecrivons $(\mathsf{L}(V), d) = \mathbf{L}(X)$. Filtrons $\mathsf{L}(V)$ par la longueur de crochet et prenons le 0-ième étage E^0 de la suite spectrale associée à cette filtration. Alors

$$E^0(\mathsf{L}(V), d) = (\mathsf{L}(V), d_0)$$

Soit $\psi: \sigma^{-1}(H(X), 0) \to (V, d_0)$ la flèche qui consiste à choisir un cycle représentant pour chaque classe. Cette flèche est un $\Re$-quasi-isomorphisme. Comme $H(X)$ et V sont sans torsion, d'après 3.2.1 la flèche

$$\mathsf{L}(\psi): (\mathsf{L}(\sigma^{-1}H(X)), 0) \to (\mathsf{L}(V), d_0)$$

induit un isomorphisme en homologie jusqu'au degré $N-1$. Bigraduons $\mathsf{L}(\sigma^{-1}H(X))$ par le degré usuel et la longueur de crochet; $\mathsf{L}(\psi)$ devient une flèche de $\Re$-algèbres de Lie bigraduées différentielles. Appliquons 1.2.2 à ψ afin d'obtenir:[3]

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{L}(\sigma^{-1}H(X)), 0) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr] & (\mathsf{L}(V), d_0) \\
& (\mathsf{L}(\sigma^{-1}H(X)) \sqcup \mathsf{L}(W), D) \arrow[u, "\psi'", "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Remarquons que d'après la démonstration de 1.2.2, W peut être choisi tel que $\natural W_i = 0$ pour $i \leqslant N-1$, $D\natural W_N = 0$ et $D|_{\sigma^{-1}H(X)} = 0$.

Ensuite appliquons le théorème de perturbation 1.3.7 à ψ'. Nous obtenons τ et ϕ' tels que

$$\phi': (\mathsf{L}(\sigma^{-1}H(X)) \sqcup \mathsf{L}(W), D+\tau) \xrightarrow{\simeq} (\mathsf{L}(V), d)$$

et, pour des raisons de degré, $(D+\tau)\sigma^{-1}H(X) = \tau\sigma^{-1}H(X) \subset \mathsf{L}(\sigma^{-1}H(X))$.

Posons $\phi \overset{\text{déf}}{=} \phi'|_{\mathsf{L}(\sigma^{-1}H(X))}$ et $\partial = \tau$. Comme $\mathbf{ab}\,\phi = \psi$ et ψ est un $\Re$-quasi-isomorphisme, d'après 3.2.1 ϕ est une (R_*)-équivalence faible et nous obtenons (i). L'assertion (ii) découle du fait que $\tau: \sigma^{-1}H(X) \to \mathsf{L}^{\geqslant 2}(\sigma^{-1}H(X))$, d'après 1.3.7. □

[3] Rappelons que "$\sim$" dénote une (R_*)-équivalence faible, tandis que "$\simeq$", un $\Re$-quasi-isomorphisme (cf. 2.1.6).

Remarque 3.2.3 [**An3,** 3.2], [**S–T2**]. Soit $(\mathbb{L}(V), \partial)$ un objet de $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$. Alors il existe un objet X de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ tel que $\mathbf{L}(X) = (\mathbb{L}(V), \partial)$, les cellules de X étant en bijection avec un ensemble de générateurs du $\Re$-module V. On dit que X est une ***réalisation*** de $(\mathbb{L}(V), \partial)$.

Définition 3.2.4. Soit X un CW-complexe 2-réduit $\Re$-local tel que $H_*(X)$ soit sans torsion. On dit que X a une ***structure cellulaire minimale*** si en chaque degré il existe une bijection entre ses cellules et ses classes d'homologie.

Proposition 3.2.5. *Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$, tel que $H(X)$ soit sans torsion. Alors il existe dans le même type d'homotopie un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ que nous notons X_m, à structure cellulaire minimale.*

PREUVE: Soit $\mathbf{L}(X) = (\mathbb{L}(V), \partial)$ l'algèbre de Lie associée à X. D'après 3.2.2 il existe $(\mathbb{L}(W), d) \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{L}(V), \partial)$ telle que d soit décomposable. En prenant pour X_m la réalisation de $(\mathbb{L}(W), d)$ on a $H_*(X_m) \cong H_*(\sigma W, 0) = \sigma W$ et donc X_m est à structure cellulaire minimale. $\square$

Lemme 3.2.6 (de relèvement). *Soit $(\mathbb{L}(W), \delta), (\mathbb{L}(W'), \delta')$ des objets de $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$, et (L, ∂) un objet de $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s$; considérons le diagramme suivant où f est une R_*-équivalence faible:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{L}(W), \delta) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\psi"'] & (L, \partial) \\
& (\mathbb{L}(W'), \delta') \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

alors il existe ψ telle que $f \circ \psi$ et ϕ induisent la même application dans la catégorie homotopique Ho-$\Re$-$\mathbf{DGLA}_s$ (cf. 2.1.6).

PREUVE: Toute équivalence faible d'une catégorie à modèles fermée, f, est la composée de deux équivalences faibles, $f = f_2 \circ f_1$, où f_1 est une cofibration et f_2 une fibration. On décompose f en $f_2 \circ f_1$ comme suit:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{L}(W), \delta) \arrow[r, "\phi"] & (L, \partial) & \\
& (\mathcal{L}, d) \arrow[u, two heads, "f_2", "\sim"'] & \\
& (\mathbb{L}(W'), \delta') \arrow[u, tail, "f_1", "\sim"'] & *_i \arrow[l, tail]
\end{tikzcd}$$

où $*_i$ est l'objet initial de la catégorie (cf. 2.1.2). Comme f_1 est une cofibration et la composée de deux cofibrations est une cofibration, $(\mathcal{L}, d)$ est un objet cofibrant.

Relevons d'abord f_2. Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} *_i \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & (\mathcal{L}, d) \arrow[d, two heads, "\sim"', "f_2"] \\ (\mathsf{L}(W), \delta) \arrow[r, "\phi"] & (L, \partial) \end{tikzcd}$$

et d'après 2.1.2, propriété 4(b), ϕ peut être relevée en

$$\phi' : (\mathsf{L}(W), \delta) \to (\mathcal{L}, d).$$

Relevons maintenant f_1. D'après [**Dw1**] et [**S–T2,** Lemme 2], on peut construire une cofibration et équivalence faible

$$j : (\mathsf{L}(W'), \delta') \rightarrowtail (\mathsf{L}(W' \oplus Y), \delta'')$$

de but un objet fibrant, et telle que $Y_{<N-1} = 0$ et Y_{N-1} soit constitué de δ''-cycles. On obtient alors une bijection induite par j

(†) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{DGLA}_s}((\mathsf{L}(W), \delta), (\mathsf{L}(W'), \delta')) \xleftrightarrow{\text{bij}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{DGLA}_s}((\mathsf{L}(W), \delta), (\mathsf{L}(W' \oplus Y), \delta''))$

D'après [**S–T2**], cette bijection est compatible avec la relation d'homotopie. Dans le diagramme suivant, où $*_f$ est l'élément final de la catégorie,

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{L}(W), \delta) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi'"] \arrow[ddr, dashed, "\psi"'] & (L, \partial) & \\ & (\mathcal{L}, d) \arrow[u, two heads, "\sim", "f_2"'] \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "r", "\sim"'] & *_f \\ & (\mathsf{L}(W'), \delta') \arrow[u, tail, "\sim", "f_1"'] \arrow[r, tail, "j", "\sim"'] & (\mathsf{L}(W' \oplus Y), \delta'') \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

d'après la propriété 4(a) de 2.1.2, il existe une flèche r qui relève $(\mathcal{L}, d) \to *_f$. Pour des raisons de degré, le morphisme $r \circ \phi'$ est en fait une application $\psi : (\mathsf{L}(W), \delta) \to (\mathsf{L}(W'), \delta')$, c'est-à-dire $j \circ \psi = r \circ \phi'$. Nous avons donc $r \circ f \circ \psi = r \circ \phi'$. L'application r est une équivalence faible ($r \circ f_1 = j$ et j, f sont des équivalences faibles). Alors $f_1 \circ \psi$ et ϕ' induisent la même application dans *Ho*-$\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGLA}_s$; il en est de même de $f \circ \psi$ etϕ, ce qui démontre le lemme. $\square$

Proposition 3.2.7. *Soit $\phi\colon (\mathbb{L}(V),\partial) \to (\mathbb{L}(V'),\partial')$ une flèche de $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ telle que $\partial_0 = \partial'_0 = 0$. Alors si ϕ est une (R_*)-équivalence faible, ϕ est un isomorphisme.*

PREUVE: D'après 3.2.1, $\mathbf{ab}\phi\colon (V,0) \to (V',0)$ est un isomorphisme, d'où le résultat. □

Théorème 3.2.8. *Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ tel que $H(X)$ soit sans torsion. Alors X admet un modèle $\mathbf{L}(X_m)$ dans $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ à différentielle décomposable, unique à isomorphisme près.*

PREUVE: L'existence de $\mathbb{L}(X_m)$ a été établie en 3.2.2. Montrons son unicité à isomorphisme près. Soient X et X' tels que $X \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X'$. Alors $\mathbf{L}(X) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathbf{L}(X')$ et donc d'après 3.2.5,

$$\mathbf{L}(X_m) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathbf{L}(X) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathbf{L}(X') \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathbf{L}(X'_m).$$

D'après le lemme de relèvement 3.2.6 nous avons $\mathbf{L}(X_m) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathbf{L}(X'_m)$ et donc d'après 3.2.7, $\mathbf{L}(X_m) \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \mathbf{L}(X'_m)$. □

Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ tel que $H_*(X)$ soit sans torsion. Alors $H_*(X)$ admet une structure de coalgèbre induite par la diagonale topologique.

Proposition 3.2.9. *Soit $\overline{\Delta}\colon H_*(X) \to H_*(X) \otimes H_*(X)$ la diagonale réduite de $H_*(X)$ et $(\mathbb{L}(V),\partial)$ le modèle de X à différentielle décomposable défini en 3.2.8. Soit ∂_1 la partie quadratique de la différentielle ∂, alors le diagramme suivant commute:*

$$\begin{tikzcd}
H_*(X) \arrow[r, "\overline{\Delta}"] & H_*(X) \otimes H_*(X) \arrow[d, "\sigma^{-1}\otimes\sigma^{-1}"] \\
\sigma^{-1}H_*(X) \arrow[u, "\sigma"] \arrow[d, equal] & \sigma^{-1}H_*(X) \otimes \sigma^{-1}H_*(X) \arrow[d, equal] \\
V \arrow[r, "\partial_1"] & V \otimes V.
\end{tikzcd}$$

PREUVE: D'après [**S–T1, th. C**] si $(R_k)_{k\geqslant 0}$ est un système modéré d'anneaux et $(\mathbb{L}(W),\delta)$ un modèle cofibrant de $\lambda(X)$ le diagramme suivant commute pour tout $k \geqslant 0$:

$$(\dagger)\qquad \begin{tikzcd} H_{s+k+1}(\sigma W; R_k) \arrow[r, "\delta_1'"] \arrow[d, equal] & H_{s+k+1}(\sigma W \otimes \sigma W; R_k) \arrow[d, equal] \\ \tilde{H}_{s+k+1}(X; R_k) \arrow[r, "\tilde{\Delta}"] & \tilde{H}_{s+k+1}(X \wedge X; R_k) \end{tikzcd}$$

où δ_1' est la flèche induite en homologie par la partie quadratique δ_1 de δ et $\tilde{\Delta}$ la flèche induite en homologie par la diagonale réduite topologique.

Dans notre cas, prenons comme modèle cofibrant $(\mathbb{L}(V), \partial)$, avec un système d'anneaux (R_k) tel que $R_k = \Re$ pour $k \leqslant N - s - 1$ et $V \cong \sigma^{-1} H_*(X)$. Le diagramme $(\dagger)$ devient donc par Künneth

$$\begin{tikzcd} V_{s+k} \arrow[r, "\partial_1"] & (V \otimes V)_{s+k-1} \arrow[d, "\sigma\otimes\sigma"] \\ (\sigma V)_{s+k+1} \arrow[u, "\sigma^{-1}"] \arrow[d, equal] & (H_*(\sigma V) \otimes H_*(\sigma V))_{s+k+1} \arrow[d, equal] \\ H_{s+k+1}(X) \arrow[r, "\overline{\Delta}"] & (H_*(X) \otimes H_*(X))_{s+k+1} \end{tikzcd}$$

où Δ définit la structure de coalgèbre de $H_*(X)$ et ∂_1 est la partie quadratique de ∂. $\square$

Corollaire 3.2.10. *Soit X, X' des objets de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ sans torsion homologique tels que $H_*(X) \cong H_*(X')$ comme coalgèbres. Choisissons, comme modèle de $\mathbf{L}(X)$, l'objet $(\mathbb{L}(V), \partial_1 + \tau)$ où ∂_1 est quadratique et $\tau\colon V \to \mathbb{L}^{\geqslant 3}(V)$. Alors il existe un modèle de $\mathbf{L}(X')$ s'écrivant $(\mathbb{L}(V), \partial_1 + \tau')$ avec $\tau'\colon V \to \mathbb{L}^{\geqslant 3}(V)$.*

3.3. $\Re$-Formalité des CW-complexes sans torsion homologique.

Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ sans torsion homologique. Dans ce paragraphe nous définissons *l'espace $\Re$-formel* associé à X à partir du modèle $\mathbf{L}(X_m) \in \Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ construit précédemment (cf. 3.2.8). Avant cela, nous allons établir quelques propriétés concernant les dérivations et automorphismes d'objets de $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$. Pour cela, nous nous inspirons du travail de [Me], établi sur $\mathbb{Q}$.

3.3.1 $\mathfrak{R}$-algèbre de Lie des dérivations.

Soit $(\mathsf{L}(V),\partial) \in \mathfrak{R}$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ avec V fixé. Notons $\mathsf{Der}\mathsf{L}(V)$ le ***$\mathfrak{R}$-module des dérivations*** d'algèbre de Lie de $\mathsf{L}(V)$. Un élément θ de $\mathsf{Der}\mathsf{L}(V)$ est dit de bidegré (p,q) si

$$\theta(V_j) \subset (\mathsf{L}^{p+1}(V))_{j+q}, \text{ pour tout } j.$$

Ceci entraîne $\theta(\mathsf{L}^k(V)) \subset \mathsf{L}^{k+p}(V)$. Ce $\mathfrak{R}$-module admet une structure d'algèbre de Lie bigraduée $\mathsf{Der}_{*,*}\mathsf{L}(V)$ pour le crochet défini par

$$[\theta,\theta'] = \theta\circ\theta' - (-1)^{|\theta||\theta'|}\theta'\circ\theta.$$

Il vérifie

$$[\,,\,]\colon \mathsf{Der}_{p_1,q_1}\mathsf{L}(V) \times \mathsf{Der}_{p_2,q_2}\mathsf{L}(V) \to \mathsf{Der}_{p_1+p_2,q_1+q_2}\mathsf{L}(V)$$

Si ∂ est une différentielle sur $\mathsf{L}(V)$, un calcul montre que $\mathsf{ad}\,(\partial) = [.,\partial]$ est une différentielle sur $\mathsf{Der}\mathsf{L}(V)$.

On notera $(F_i\mathsf{Der}\mathsf{L}(V))_{i\geqslant 0}$ la filtration décroissante associée à la première graduation:

$$F_i\mathsf{Der}\mathsf{L}(V) = \bigoplus_{j\geqslant i}\mathsf{Der}_{j,*}\mathsf{L}(V),$$

i.e. $\theta \in F_i\mathsf{Der}\mathsf{L}(V)$ si et seulement si $\theta(V) \subset \mathsf{L}^{\geqslant i+1}(V)$.

Si $\theta \in \mathsf{Der}\mathsf{L}(V)$ est homogène pour le degré homologique, on considère sa décomposition:

$$\theta = \sum_{i\geqslant 0}\theta_i\,,\ \theta_i \in \mathsf{Der}_{i,*}\mathsf{L}(V).$$

Si θ est une différentielle et si $\theta_0 = 0$, un calcul montre que θ_1 est aussi une différentielle.

Définition 3.3.2. Un automorphisme φ d'un module gradué est ***unipotent*** si $\varphi - \mathsf{Id}$ est nilpotent en chaque degré.

Remarque 3.3.3. *Soit $\mathsf{L}(V)$ une $\mathfrak{R}$-algèbre de Lie libre, s-réduite avec V fixé et soit φ un automorphisme de $\mathsf{L}(V)$ tel que $\mathbf{ab}\,\varphi\colon V \to V$ soit l'identité. On constate alors que $(\varphi - \mathsf{Id}\,)^k$ augmente de k la filtration par la longueur de crochet et respecte le degré homologique; il s'ensuit l'unipotence de φ.*

3.3.4 Groupe d'automorphismes.

Soit $\mathsf{L}(V)$ une $\mathfrak{R}$-algèbre de Lie libre, s-réduite avec V fixé. Notons $\mathsf{AutL}(V)$ le ***groupe des automorphismes*** (de degré 0) de l'algèbre de Lie $\mathsf{L}(V)$. Tout automorphisme $\varphi \in \mathsf{AutL}(V)$ se décompose en

$$\varphi = \sum_{i \geqslant 0} \varphi_i\,, \quad \text{où } \varphi_i(\mathsf{L}^j(V)) \subset \mathsf{L}^{j+i}(V).$$

On constate que $\varphi_0 = \mathsf{L}(\mathbf{ab}\,\varphi)$ est un automorphisme; par contre, les $\varphi_i, i \geqslant 1$ ne sont pas compatibles au crochet.

Notons $\mathsf{Aut}_u\mathsf{L}(V)$ le sous-groupe des automorphismes unipotents φ tels que $\mathbf{ab}\,\varphi = \mathsf{Id}$. Un élément φ de $\mathsf{Aut}_u\mathsf{L}(V)$ se décompose en

$$\varphi = \mathsf{Id} + \sum_{i \geqslant 1} \varphi_i\,, \; \varphi_i(\mathsf{L}^j(V)) \subset \mathsf{L}^{j+i}(V).$$

Autrement dit, il existe un isomorphisme:

$$\begin{aligned} \mathsf{Aut}_u\mathsf{L}(V) &\xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_0(V, \mathsf{L}^{\geqslant 2}(V)) \\ \varphi &\rightsquigarrow \varphi - \mathsf{Id}\,. \end{aligned}$$

Proposition 3.3.5. *Soit $\mathsf{L}(V)$ une $\mathfrak{R}$-algèbre de Lie libre, s-réduite, avec V fixé.*

(1) *Si φ est un automorphisme de $\mathsf{L}(V)$, alors il existe $\tilde{\varphi} \in \mathsf{Aut}_u\mathsf{L}(V)$ tel que $\varphi = \tilde{\varphi}\circ\varphi_0$, où $\varphi_0 = \mathsf{L}(\mathbf{ab}\varphi)$.*

(2) *Avec les notations de (1), si ∂ est une différentielle décomposable ($\partial = \sum_{i \geqslant 1} \partial_i$) sur $\mathsf{L}(V)$, alors $\varphi\partial_1\varphi^{-1} = \tilde{\varphi}\partial_1\tilde{\varphi}^{-1}$.*

PREUVE: Le point (1) découle directement des remarques faites avant; il suffit de poser $\tilde{\varphi} = \varphi\circ\varphi_0^{-1}$. L'égalité du (2) est aussi immédiate: $\tilde{\varphi}\partial_1\tilde{\varphi}^{-1} = \varphi\varphi_0^{-1}\partial_1\varphi_0\varphi^{-1} = \varphi\partial_1\varphi^{-1}$.

Définitions 3.3.6. Un objet $(\mathsf{L}(V), \partial)$ de $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$, à différentielle décomposable est ***$\mathfrak{R}$-formel*** s'il existe un automorphisme φ de $\mathsf{L}(V)$ tel que $\partial = \varphi\partial_1\varphi^{-1}$, où $\partial_1 \colon V \to \mathsf{L}^2(V)$ est la partie quadratique de ∂. L'automorphisme φ est appelé ***$\mathfrak{R}$-formalisation***.

Soit H une $\mathfrak{R}$-coalgèbre graduée à module sous-jacent sans torsion, concentrée en degrés $s, \ldots, N-1$. Alors d'après 3.2.9, la diagonale de H induit une différentielle quadratique ∂_1 de $\mathsf{L}(\sigma^{-1}H)$. Nous dirons que H est ***intrinsèquement $\mathfrak{R}$-formelle*** si $(\mathsf{L}(\sigma^{-1}H), \partial_1 + \tau)$ est $\mathfrak{R}$-formelle pour tout $\tau \in F_2\mathsf{Der}_{-1}\mathsf{L}(\sigma^{-1}H)$ tel que $(\partial_1 + \tau)^2 = 0$.

Remarque 3.3.7. D'après la proposition 3.3.5 on constate que φ peut être choisi dans $\mathsf{Aut}_u\mathsf{L}(V)$.

Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ tel que $H_*(X)$ soit sans torsion. Soit X_m un objet à structure cellulaire minimale dans le même type d'homotopie que X et $\mathbf{L}(X_m) = (\mathsf{L}(V), \partial)$ l'algèbre de Lie à différentielle décomposable qui lui est associée.

Définitions 3.3.8. (1) L'***espace*** $\Re$***-formel*** X_f ***associé à*** X est la réalisation de $(\mathsf{L}(V), \partial_1)$, où ∂_1 est la partie quadratique de ∂.

(2) L'espace X est $\Re$***-formel*** si $(\mathsf{L}(V), \partial)$ est $\Re$-formelle, ce qui équivaut à dire que X est formel si X et X_f ont même type d'homotopie.
(3) L'espace X est ***intrinsèquement*** $\Re$***-formel*** si $H_*(X)$ est une coalgèbre intrinsèquement $\Re$-formelle.

Proposition 3.3.9. *L'association $X \mapsto X_f$ respecte le type d'homotopie, i.e. si $X, X' \in \Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ ont même type d'homotopie, alors X_f et X'_f ont aussi même type d'homotopie.*

PREUVE: Par hypothèse, il existe un isomorphisme

$$(\mathsf{L}(V), \partial) = \mathbf{L}(X_m) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{L}(X'_m) = (\mathsf{L}(V'), \partial').$$

Nous en déduisons un isomorphisme $\varphi_0 \colon (\mathsf{L}(V), \partial_1) \to (\mathsf{L}(V'), \partial'_1)$. □

La $\Re$-formalité d'un espace $X \in \Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$, sans torsion homologique demande la construction d'un automorphisme φ de $\mathbf{L}(X_m)$. Il n'est donc pas aisé de déterminer si un tel espace est $\Re$-formel ou non. Nous allons ramener cette question à la nullité d'une suite (finie ici) d'obstructions, comme il est d'usage en topologie algébrique. Explicitons d'abord quelques liens entre dérivations et automorphismes:

Proposition 3.3.10. *Soit $(\mathsf{L}(V), \partial) \in \Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ tel que ∂ se décompose en $\partial = \partial_1 + \sum_{j \geqslant i} \partial_j$, où $i \geqslant 2$ est fixé, alors*

(1) *La dérivation ∂_i est un cycle pour* $\mathsf{ad}\,(\partial_1)$.
(2) *Si ∂_i est un bord pour* $\mathsf{ad}\,(\partial_1)$, *alors $(\mathsf{L}(V), \partial)$ est isomorphe à $(\mathsf{L}(V), \delta)$ où δ se décompose en $\delta = \partial_1 + \sum_{j \geqslant i+1} \delta_j$.*

Pour démontrer cette proposition nous aurons besoin du lemme suivant qui nous garantit l'existence d'une "exponentielle" dans $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$.

Lemme 3.3.11. *Soit $\mathsf{L}(V)$ une $\Re$-algèbre de Lie libre, s-réduite, dont les générateurs V ont un degré $\leqslant N-1$. Pour tout $\omega \in F_1\mathsf{Der}_{*,0}\mathsf{L}(V)$, l'application exponentielle*

$$\exp(\omega) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\omega^k}{k!} \quad \text{est bien définie.}$$

Par construction, $\exp(\omega)$ est un élément de $\mathsf{Aut}_u\mathsf{L}(V)$. Si ∂ est une différentielle sur $\mathsf{L}(V)$ et si ω commute à ∂ (c'est-à-dire $[\omega,\partial]=0$) alors $\exp(\omega)$ est un automorphisme de $(\mathsf{L}(V),\partial)$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.3.10: (1) De $\partial^2=0$, on déduit $\partial_1\partial_i+\partial_i\partial_1=0$ en considérant la composante en longueur des crochets $i+1$.

(2) Soit $\omega_{i-1} \in \mathsf{Der}_{i-1,0}\mathsf{L}(V)$ tel que $\partial_i = [\omega_{i-1},\partial_1]$. Calculons $\exp(-\omega_{i-1})\circ\partial\circ\exp(\omega_{i-1})(v)=\delta(v), v\in V$ modulo $\mathsf{L}^{\geqslant i+2}(V)$; on obtient

$$\begin{aligned}\delta(v) &\equiv \partial_1(v)+\partial_1\omega_{i-1}(v)+\partial_i(v)-\omega_{i-1}\partial_1(v) \text{ modulo } \mathsf{L}^{\geqslant i+2}(V)\\ &\equiv \partial_1(v) \text{ modulo } \mathsf{L}^{\geqslant i+2}(V),\end{aligned}$$

par hypothèse sur ω_{i-1}. □

PREUVE DU LEMME 3.3.11: Il suffit de montrer que les dénominateurs sont inversibles dans $\Re$. Par définition, si $v\in V$, on a $s\leqslant |v| \leqslant N-1$. La dérivation ω augmente la longueur des crochets de 1 par hypothèse, donc ω^k l'augmente de k. En degré $\leqslant N-1$, la longueur maximale de crochet est la partie entière de $\frac{N-1}{s}$, notée $[\frac{N-1}{s}]$; d'où, $\exp(w)(v) = \sum_0^\alpha \frac{\omega^k}{k!}(v)$, avec $\alpha = [\frac{N-1}{s}]-1$. Rappelons $N=\min(s+2p-3, sp-1)$, d'où $\alpha=[\frac{N-1}{s}]-1 \leqslant [\frac{sp-2}{s}] \leqslant [p-\frac{2}{s}] \leqslant p-1$. (En fait ce résultat algébrique est valable avec la seule hypothèse $N\leqslant sp-1$).

Proposition 3.3.12. *Soit $(\mathsf{L}(V),\partial)\in \Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ tel que ∂ se décompose en $\partial=\partial_1+\sum_{j\geqslant i}\partial_j$, où $i\geqslant 2$ est fixé. Si $(\mathsf{L}(V),\partial)$ est $\Re$-formelle, alors ∂_i est un bord pour $\mathsf{ad}(\partial_1)$.*

PREUVE: Soit φ la formalisation de $(\mathsf{L}(V),\partial)$. Décomposons $\varphi = \mathsf{Id}+\varphi_1+\varphi_2+\ldots$. Si $i=2$, en développant φ et ∂ dans l'égalité $\partial\varphi=\varphi\partial_1$, on obtient $\partial_2=\varphi_1\partial_1-\partial_1\varphi_1=[\partial_1,\varphi_1]$. Si $i>2$, la même technique donne:

$$\begin{cases}\partial_1\varphi_k=\varphi_k\partial_1, \text{ pour } 1\leqslant k\leqslant i-1\\ \partial_i=\varphi_{i-1}\partial_1-\partial_1\varphi_{i-1}.\end{cases}$$

Malheureusement, on ne peut rien conclure à ce niveau car φ_{i-1} n'est pas une dérivation. Par contre, comme φ_1 commute à ∂_1, on peut composer φ par $\exp(-\varphi_1)$, automorphisme de $(\mathsf{L}(V), \partial_1)$ (cf. lemme 3.3.11), pour obtenir un nouvel automorphisme φ' se décomposant en

$$\varphi' = \mathsf{Id} + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \dots$$

De proche en proche, on obtient un automorphisme

$$\psi = \mathsf{Id} + \psi_{i-1} + \psi_i + \dots$$

pour lequel ψ_{i-1} est une dérivation. □

3.3.13 Construction des obstructions à la $\Re$-formalité. *Soit* $(\mathsf{L}(V), \partial) \in \Re$-**DGLA**$_s^{N-1}$ *où ∂ se décompose en $\partial = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3 + \dots$. D'après la proposition 3.3.12 on a que*

— la classe de ∂_2 pour $\mathsf{ad}(\partial_1)$ est une obstruction à la $\Re$-formalité, notons-la

$$\theta_2 = [\partial_2] \in H_{2,-1}(\mathsf{Der}\mathsf{L}(V), \mathsf{ad}(\partial_1))$$

— si $\theta_2 = 0$, avec la proposition 3.3.10 on se ramène au cas où $\partial = \partial_1 + \partial_3 + \partial_4 + \dots$ et avec la proposition 3.3.12, on interprète la classe de ∂_3 pour $\mathsf{ad}(\partial_1)$ comme une obstruction à la $\Re$-formalité, notons-la:

$$\theta_3 \in H_{3,-1}(\mathsf{Der}\mathsf{L}(V), \mathsf{ad}(\partial_1))$$

Nous construisons ainsi une suite d'obstructions $(\theta_n)_{n\geqslant 2}$ vérifiant

(1) θ_n est définie si et seulement si $\theta_i = 0, 2 \leqslant i \leqslant n-1$.
(2) $\theta_n \in H_{n,-1}(\mathsf{Der}\mathsf{L}(V), \mathsf{ad}(\partial_1))$
(3) $(\mathsf{L}(V), \partial)$ est $\Re$-formelle si et seulement si $\theta_n = 0$, pour tout $n \geqslant 2$.

Remarques 3.3.14. 1) La nullité des obstructions $\theta_i, i \geqslant 2$ dépend uniquement de l'existence d'un automorphisme φ et non pas du choix d'un tel automorphisme. Le résultat (3) est donc bien indépendant de la formalisation choisie.

2) Pour des raisons de degré, il n'y a qu'un nombre fini d'obstructions à considérer: rappelons que $N = \min(s + 2p - 3, sp - 1)$ et supposons que pour

$n \leqslant p-1$, les obstructions θ_n sont nulles. Vérifions que les θ_m avec $m \geqslant p$ sont alors nulles. Par définition des obstructions, $\theta_m \neq 0$ signifie qu'il existe une différentielle $\partial = \partial_1 + \partial_m + \dots$, avec $\partial_m \neq 0$ et

$$\varphi\colon (\mathsf{L}(V), \partial) \xrightarrow{\cong} (\mathsf{L}(V), \partial_1 + \partial_m + \dots)$$

où $\partial_m\colon V \to \mathsf{L}^{m+1}(V)$. Mais ∂_m est de degré -1 et donc en fait $\partial_m\colon V \to (\mathsf{L}^{m+1}(V))_{\leqslant N-2}$. Comme la longueur maximale de crochet d'un élément de $(\mathsf{L}^{m+1}(V))_{\leqslant N-2}$ est $\left[\frac{N-2}{s}\right]$, pour montrer que $\partial_m = 0$ il suffit de vérifier que $\left[\frac{N-2}{s}\right] \leqslant m$ pour tout $m \geqslant p$ et donc que $\left[\frac{N-2}{s}\right] \leqslant p$. Mais par définition $N \leqslant sp-1$ et donc $\left[\frac{N-2}{s}\right] \leqslant \left[\frac{sp-3}{s}\right] = \left[p - \frac{3}{s}\right] \leqslant p$.

3.4. Exemples.

3.4.1 Les Sphères. La sphère $\mathbb{S}^{n+1}$ (dans ce cas $\Re = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$) admet une décomposition en une $n+1$-cellule et une 0-cellule; son homologie est $H_i(\mathbb{S}^{n+1}) = \Re$ en $i = 0, n+1$. Donc $\mathbb{S}^{n+1}$ est à structure cellulaire minimale. Alors $\mathbf{L}(\mathbb{S}^{n+1}) = (\mathsf{L}(x_n), 0)$ dont la différentielle est quadratique; donc $\mathbb{S}^{n+1}$ est $\Re$-formel.

3.4.2 Les bouquets de sphères. Soit $\mathbb{S}^{n_1} \vee \dots \vee \mathbb{S}^{n_m}$ un bouquet de sphères $\Re$-locales ($n_i \geqslant 2, 1 \leqslant i \leqslant m$): dans ce cas $\Re = \mathbb{Z}[1/N!]$ avec

$$N = \left[\frac{1}{2}(\mathsf{max}(n_1, \dots, n_m) - \mathsf{min}\,(n_1, \dots, n_m) + 3)\right].$$

Une décomposition de $\mathbb{S}^{n_1} \vee \dots \vee \mathbb{S}^{n_m}$ consiste à prendre une i-cellule pour chaque sphère $\mathbb{S}^i$ et les attacher toutes à une 0-cellule. L'homologie de cet espace est

$$H_*(\mathbb{S}^{n_1} \vee \dots \vee \mathbb{S}^{n_m}; \Re) = [\![c_{n_1}]\!]\Re \oplus \dots \oplus [\![c_{n_m}]\!]\Re \oplus [\![c_0]\!]\Re$$

Donc cet espace est à structure cellulaire minimale. Alors $\mathbf{L}(\mathbb{S}^{n_1} \vee \dots \vee \mathbb{S}^{n_m})$ est égal à $(\mathsf{L}(x_{n_1-1}, \dots, x_{n_m-1}), 0)$ dont la différentielle est quadratique. Donc $\mathbb{S}^{n_1} \vee \dots \vee \mathbb{S}^{n_m}$ est $\Re$-formel.

3.4.3 Les produits de sphères. Soit $\mathbb{S}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_m}$ un produit de sphères $\mathfrak{R}$-locales ($n_i \geqslant 2, 1 \leqslant i \leqslant m$): dans ce cas $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}[1/M!]$ avec

$$M = \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i - \min(n_1, \ldots, n_m) + 3\right)\right].$$

Dans $\mathbb{S}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_m}$ chacune des sphères est à structure cellulaire minimale, et la structure cellulaire du produit est le produit des structures cellulaires. D'autre part son homologie satisfait à

$$H_*(\mathbb{S}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_m}; \mathfrak{R}) = H_*(\mathbb{S}^{n_1}; \mathfrak{R}) \otimes \cdots \otimes H_*(\mathbb{S}^{n_m}; \mathfrak{R})$$

Donc $\mathbb{S}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_m}$ est à structure cellulaire minimale. Alors $\mathbb{L}(\mathbb{S}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_m})$ est égal à

$$(\mathbb{L}(x_i, y_{jk})_{\substack{1\leqslant i\leqslant M-1 \\ 1\leqslant j<k\leqslant M-1}}, \partial) \text{ avec } \begin{cases} |x_i| = n_i - 1, |y_{jk}| = n_j + n_k - 1 \\ \partial x_i = 0, \partial y_{jk} = [x_j, x_k] \end{cases}$$

dont la différentielle est quadratique. Donc $\mathbb{S}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_m}$ est $\mathfrak{R}$-formel.

3.4.4 L'espace projectif complexe. Soit $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ l'espace projectif complexe $\mathfrak{R}$-localisé (dans ce cas $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n!}\right]$). On sait que (cf. **[Wh, p.91]** à coefficients dans $\mathbb{Z}$)

$$(1) \qquad H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}[x_2]/x_2^{n+1}, \text{ avec } |x_2| = 2$$

De (1) on déduit par dualité la structure de coalgèbre de $H_*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; \mathfrak{R})$. Nous allons montrer que la coalgèbre $H_*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; \mathfrak{R})$ est intrinsèquement $\mathfrak{R}$-formelle.

La démonstration se fait en deux temps: (i) nous montrons que $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est $\mathfrak{R}$-formel et (ii) nous montrons que tout CW-complexe $\mathfrak{R}$-local ayant $H_*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ comme coalgèbre d'homologie est $\mathfrak{R}$-formel.

(i). Soit $(\mathbb{L}(\sigma^{-1}H_*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)), \partial) = (\mathbb{L}(v_1, v_2, \ldots, v_n), \partial)$ le modèle de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ à différentielle décomposable. La partie quadratique ∂_1 de ∂ est induite par la diagonale de $H_*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. Elle s'écrit de la façon suivante:

$$(2) \qquad \partial_1 v_{2i+\epsilon} = \sum_{\substack{p+q=2i+\epsilon \\ 0\leqslant p<q}} [v_p, v_q] + \frac{\epsilon+1}{2}[v_i, v_i]$$

où $|v_k| = 2k-1, 0 \leqslant i \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$.

Montrons qu'il existe une formalisation ξ de $(\mathsf{L}(v_1,\ldots,v_n),\partial)$. Notons $\partial = \partial_1+\partial_+$ et soit k le plus petit entier tel que $\partial_+ v_k \neq 0$. Posons $\xi_1,\ldots,\xi_{k-1} = \mathsf{Id}$. Comme $\partial = \partial_1$ sur $v_1,\ldots,v_{k-1}, \partial_1\partial_+ v_k = 0$. Pour montrer que $[\![\partial_+ v_k]\!]_\partial = 0$ nous allons regarder les groupes d'homotopie de CP^n. En effet, il est connu (cf. [**Wh**,8.13]) que

$$\pi_q(\mathsf{CP}^n) = \pi_q(\mathsf{S}^{2n+1}) \oplus \pi_{q-1}(\mathsf{S}^1) \tag{3}$$

Donc en degrés $\leqslant 2n$ nous avons

$$\pi_q(\mathsf{CP}^n)\otimes\Re = \begin{cases} \Re \text{ pour } q=2 \\ 0 \text{ pour } 3\leqslant q\leqslant 2n. \end{cases}$$

Mais d'après 2.1.17 et 3.1.13, nous avons

$$H_i(\mathsf{L}(v_1,\ldots,v_n),\partial) \cong \pi_i(\mathsf{CP}^n)\otimes\Re, \quad i\leqslant 2n.$$

En particulier $[\![\partial_+ v_k]\!]_\partial = 0$ et donc il existe α tel que $\partial\alpha = \partial_+ v_k$. En faisant le changement de variable

$$\begin{cases} \xi_k(v_k) = v_k - \alpha \\ \xi_k = \mathsf{Id} \text{ sinon.} \end{cases}$$

nous nous ramenons au cas $\partial_+ v_k = 0$ et nous pouvons recommencer. Après un nombre fini d'itérations de ce processus, nous obtenons $\partial_+ = 0$ sur $v_1,\ldots,v_n$. Donc $(\mathsf{L}(v_1,\ldots,v_n),\partial)$ est $\Re$-formelle et $\xi = \xi_n\circ\ldots\circ\xi_1$ en est une formalisation.

Nous donnerons une autre démonstration de la $\Re$-formalité de CP^n en 3.6.14.

(ii) Soit X un CW-complexe $\Re$-local tel que $H_*(X) \underset{\text{coalg}}{\cong} H_*(\mathsf{CP}^n)$. Le modèle de X à différentielle décomposable s'écrit (cf. corollaire de 3.2.9)

$$(\mathsf{L}(v_1,\ldots,v_n),\partial')$$

avec $\partial' = \partial_1+\partial'_+$. Soit k' le plus petit entier tel que $\partial'_+ v_{k'} \neq 0$. Remarquons que $(\mathsf{L}(v_1,\ldots,v_{k'-1}),\partial_1)$ est le modèle de $\mathsf{CP}^{k'-1}$ et d'après (3)

$$\pi_q(\mathsf{CP}^{k'-1})\otimes\Re = \begin{cases} \Re \text{ pour } q=2 \\ 0 \text{ pour } 3\leqslant q\leqslant 2k'-2. \end{cases}$$

Nous avons $|\partial'_+ v_{k'}| = 2k'-2$ et donc la classe
$[\![\partial'_+ v_{k'}]\!]_{\partial'_1} \in H_{2k'-2}(\mathsf{L}(v_1,\ldots,v_{k'-1}),\partial_1)$ est nulle. Mais comme les éléments $v_{k'},\ldots,v_n$ sont en degrés supérieurs à $2k'-2$ nous pouvons considérer $[\![\partial'_+ v_{k'}]\!]_{\partial'_1}$ comme classe de $H_{2k'-2}(\mathsf{L}(v_1,\ldots,v_n),\partial')$ et elle y est nulle également. En appliquant alors le processus utilisé en (i) nous pouvons rendre ∂' quadratique. Comme cette dernière a été choisie arbitraire, la coalgèbre $H_*(\mathsf{CP}^n)$ est intrinsèquement $\Re$-formelle.

3.5. $\mathfrak{R}$-AH-formalité des CW-complexes sans torsion homologique.

Soit X un objet de $\mathfrak{R}$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ tel que $H_*(X)$ soit sans torsion. D'après 3.2.8 il admet un modèle en algèbre de Lie $(\mathsf{L}(V), \partial)$ avec $V = \sigma^{-1}H_*(X)$ et ∂ décomposable. D'après 3.1.14 l'image de cette algèbre de Lie par le foncteur algèbre enveloppante est un $\mathfrak{R}$-modèle d'Adams–Hilton de X.

Nous allons énoncer une série de résultats dans le contexte des algèbres associatives. Ces résultats ainsi que leurs preuves sont analogues à ceux des paragraphes 2 et 3. Par analogie avec $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGLA}_s$ et $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$, nous notons $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGAA}_s$ la catégorie des $\mathfrak{R}$-algèbres associatives graduées différentielles s-réduites et $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGAA}_s^{N-1}$ la catégorie des $\mathfrak{R}$-algèbres tensorielles sur des modules libres concentrés en degrés $\{s, \dots, N-1\}$. Le foncteur $\mathcal{U}$ envoie la catégorie $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$ dans la catégorie $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGAA}_s^{N-1}$. La structure de catégorie à modèles fermée de $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGAA}_s$ (dans le cas où $\mathfrak{R}$ est un corps) est décrite dans [**Mu**][4].

Proposition 3.5.1. *Soit X un objet de $\mathfrak{R}$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$, tel que $H(X)$ soit sans torsion. Alors il existe ϕ et ∂ tels que:*

(i) $\phi\colon (T(\sigma^{-1}H(X)), \partial) \to (C_*\Omega X, \partial_{\Omega X})$ *soit un $\mathfrak{R}$-modèle d'Adams–Hilton de X;*

(ii) ∂ *soit décomposable, i.e.* $\partial(\sigma^{-1}H(X)) \subset T^{\geqslant 2}(\sigma^{-1}H(X))$.

PREUVE: Il suffit d'appliquer le foncteur $\mathcal{U}$ au modèle construit en 3.2.2. D'après 3.1.14, $\mathcal{U}(\mathsf{L}(\sigma^{-1}H_*(X)), \partial)$ est un $\mathfrak{R}$-modèle d'Adams–Hilton de X. $\square$

Proposition 3.5.2. *Soit $\phi\colon (T(V), \delta) \to (T(V'), \delta')$ une flèche de $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGAA}_s^{N-1}$ telle que $\delta_0 = \delta'_0 = 0$. Alors si ϕ est un $\mathfrak{R}$-quasi-isomorphisme, ϕ est un isomorphisme.*

---

[4] Un cylindre de la catégorie des R-algèbres associatives différentielles (non graduées), avec R un anneau commutatif, est décrit dans [**Ba1**, p.48]. Un lemme de relèvement dans $\mathfrak{R}$-$\mathbf{DGAA}_s^{N-1}$ est donné dans [**An2**, lemme 1.7].

PREUVE: D'après 3.2.1 on a $\mathbf{ab}\phi: (V, 0) \to (V'0)$ isomorphisme, d'où le résultat. □

Théorème 3.5.3. *Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ tel que $H(X)$ soit sans torsion. Alors X admet un $\Re$-modèle d'Adams–Hilton $(T(V), \delta)$ à différentielle décomposable, unique à isomorphisme près.*

PREUVE: L'algèbre $(T(V), \delta)$ existe: il suffit de prendre $\mathcal{U}\mathbf{L}(X_m)$ (où $\mathbf{L}(X_m)$ a été défini en 3.2.8). L'unicité découle de 3.5.2. □

Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ tel que $H_*(X)$ soit sans torsion. Alors $H_*(X)$ admet une structure de coalgèbre induite par la diagonale topologique.

Proposition 3.5.4. *Soit $\overline{\Delta}: H_*(X) \to H_*(X) \otimes H_*(X)$ la diagonale réduite de $H_*(X)$ et $(T(V), \delta)$ le $\Re$-modèle d'Adams–Hilton de X à différentielle décomposable défini en 3.5.3. Soit δ_1 la partie quadratique[5] de la différentielle δ, alors le diagramme suivant commute:*

$$\begin{array}{ccc}
H_*(X) & \xrightarrow{\overline{\Delta}} & H_*(X) \otimes H_*(X) \\
\uparrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma^{-1} \otimes \sigma^{-1}} \\
\sigma^{-1} H_*(X) & & \sigma^{-1} H_*(X) \otimes \sigma^{-1} H_*(X) \\
\| & & \| \\
V & \xrightarrow{\delta_1} & V \otimes V.
\end{array}$$

La Preuve de cette proposition est une conséquence de 3.2.9 et de 3.5.3.

Corollaire 3.5.5. Soit X, X' des objets de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ sans torsion homologique tels que $H_*(X) \cong H_*(X')$ comme coalgèbres. Choisissons un $\Re$-modèle d'Adams–Hilton $(T(V), \delta_1 + \tau)$ où δ_1 est quadratique et $\tau: V \to T^{\geqslant 3}(V)$. Alors il existe un $\Re$-modèle d'Adams–Hilton de X' de la forme $(T(V), \delta_1 + \tau')$ avec $\tau': V \to T^{\geqslant 3}(V)$.

3.5.6 $\Re$-algèbre de Lie des dérivations.

Soit $(T(V), \delta) \in \Re$-$\mathbf{DGAA}_s^{N-1}$ avec V fixé. Notons $\mathsf{Der}T(V)$ le ***$\Re$-module des dérivations*** de $T(V)$. Un élément θ de $\mathsf{Der}T(V)$ est dit de bidegré (p, q) si

$$\theta(V_j) \subset (T^{p+1}(V))_{j+q}.$$

[5] En fait (cf. §7) δ_1 est la différentielle de la cobar-construction $\mathbf{\Omega}$ appliquée à $H_*(X)$.

Ceci entraîne $\theta(T^k(V)) \subset T^{k+p}(V)$. Ce $\mathfrak{R}$-module admet une structure d'algèbre de Lie bigraduée $\mathsf{Der}_{*,*}T(V)$ pour le crochet défini par

$$[\theta, \theta'] = \theta{\circ}\theta' - (-1)^{|\theta||\theta'|}\theta'{\circ}\theta.$$

Il vérifie

$$[\,,\,]\colon \mathsf{Der}_{p_1,q_1}T(V) \times \mathsf{Der}_{p_2,q_2}T(V) \to \mathsf{Der}_{p_1+p_2,q_1+q_2}T(V)$$

Si δ est une différentielle sur $T(V)$, un calcul montre que $\mathsf{ad}\,(\delta) = [.,\delta]$ est une différentielle sur $\mathsf{Der}T(V)$.

On notera $(F_i\mathsf{Der}T(V))_{i\geqslant 0}$ la filtration décroissante associée à la première graduation:

$$F_i\mathsf{Der}T(V) = \bigoplus_{j\geqslant i} \mathsf{Der}_{j,*}T(V),$$

i.e. $\theta \in F_i\mathsf{Der}T(V)$ si et seulement si $\theta(V) \subset T^{\geqslant i+1}(V)$.

Si $\theta \in \mathsf{Der}T(V)$ est homogène pour le degré homologique, on considère sa décomposition:

$$\theta = \sum_{i\geqslant 0} \theta_i\,,\ \theta_i \in \mathsf{Der}_{i,*}T(V).$$

Si θ est une différentielle et si $\theta_0 = 0$, un calcul montre que θ_1 est aussi une différentielle.

Remarque 3.5.7. Soit $T(V)$ une $\mathfrak{R}$-algèbre tensorielle, s-réduite avec V fixé et soit φ un automorphisme de $T(V)$ tel que $\mathbf{ab}\,\varphi\colon V \to V$ soit l'identité. On constate alors que $(\varphi - \mathsf{Id}\,)^k$ augmente de k la filtration par la longueur de mot et respecte le degré homologique; il s'ensuit l'unipotence de φ.

3.5.8 Groupe d'automorphismes.

Soit $T(V)$ une $\mathfrak{R}$-algèbre tensorielle, s-réduite avec V fixé. Notons $\mathsf{Aut}T(V)$ le ***groupe des automorphismes*** (de degré 0) de l'algèbre tensorielle $T(V)$. Tout automorphisme $\varphi \in \mathsf{Aut}T(V)$ se décompose en

$$\varphi = \sum_{i\geqslant 0} \varphi_i\,,\ \text{ où } \varphi_i(T^j(V)) \subset T^{j+i}(V).$$

On constate que $\varphi_0 = T(\mathbf{ab}\varphi)$ est un automorphisme; par contre, les $\varphi_i, i \geqslant 1$ ne sont pas compatibles au produit tensoriel.

Notons $\mathsf{Aut}_u T(V)$ le sous-groupe des automorphismes unipotents φ tels que $\mathbf{ab}\,\varphi = \mathsf{Id}$. Un élément φ de $\mathsf{Aut}_u T(V)$ se décompose en

$$\varphi = \mathsf{Id} + \sum_{i \geqslant 1} \varphi_i\,, \quad \text{où } \varphi_i(T^j(V)) \subset T^{j+i}(V).$$

Autrement dit, il existe un isomorphisme:

$$\begin{aligned} \mathsf{Aut}_u T(V) &\xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_0(V, T^{\geqslant 2}(V)) \\ \varphi &\rightsquigarrow \varphi - \mathsf{Id}\,. \end{aligned}$$

Proposition 3.5.9. *Soit $T(V)$ une $\Re$-algèbre tensorielle, s-réduite, avec V fixé.*

(1) *Si φ est un automorphisme de $T(V)$, alors il existe $\tilde{\varphi} \in \mathsf{Aut}_u T(V)$ tel que $\varphi = \tilde{\varphi}\circ\varphi_0$, où $\varphi_0 = T(\mathbf{ab}\varphi)$.*

(2) *Avec les notations de (1), si δ est une différentielle décomposable ($\delta = \sum_{i \geqslant 1} \delta_i$) sur $T(V)$, alors $\varphi\partial_1\varphi^{-1} = \tilde{\varphi}\partial_1\tilde{\varphi}^{-1}$.*

La Preuve de cette proposition est analogue à celle de 3.3.5.

Définitions 3.5.10. Un objet $(T(V), \delta)$ de $\Re$-$\mathbf{DGAA}_s^{N-1}$, à différentielle décomposable est ***$\Re$-AH-formel*** s'il existe un automorphisme φ de $T(V)$ tel que $\delta = \varphi\delta_1\varphi^{-1}$, où $\delta_1 \colon V \to T^2(V)$ est la partie quadratique de δ. L'automorphisme φ est appelé ***$\Re$-AH-formalisation***.

Soit H une $\Re$-coalgèbre graduée à module sous-jacent sans torsion, concentrée en degrés $s, \ldots, N-1$. Alors d'après 3.2.9, la diagonale de H induit une différentielle quadratique ∂_1 de $\mathsf{L}(\sigma^{-1}H)$ et donc une différentielle quadratique $\delta_1 = \mathcal{U}\partial_1$ de $T(\sigma^{-1}H)$. Nous dirons que H est ***intrinsèquement $\Re$-AH-formelle*** si $(T(\sigma^{-1}H), \delta_1 + \tau)$ est $\Re$-AH-formelle pour tout $\tau \in F_2\mathsf{Der}_{-1}T(\sigma^{-1}H)$ tel que $(\delta_1 + \tau)^2 = 0$.

Remarque 3.5.11. D'après la proposition 3.5.9 on constate que la $\Re$-formalisation φ peut être choisie dans $\mathsf{Aut}_u T(V)$.

Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ tel que $H_*(X)$ soit sans torsion. Soit X_m un objet à structure cellulaire minimale dans le même type d'homotopie que X et $(T(V), \delta) = \mathcal{U}\mathbf{L}(X_m)$ le modèle d'Adams–Hilton à différentielle décomposable qui lui est associé.

Définitions 3.5.12. (1) Un espace X est dit ***$\Re$-AH-formel*** si $(T(V), \delta)$ est $\Re$-AH-formelle.

(2) L'espace X est ***intrinsèquement $\Re$-AH-formel*** si $H_*(X)$ est une coalgèbre intrinsèquement $\Re$-AH-formelle.

La $\mathfrak{R}$-AH-formalité d'un espace $X \in \mathfrak{R}\text{-}\mathbf{CW}^N_{s+1}$, sans torsion homologique demande la construction d'un automorphisme φ de $T(V)$ (où $(T(V), \delta) = \mathcal{U}\mathbf{L}(X_m)$). Il n'est donc pas aisé de déterminer si un tel espace est $\mathfrak{R}$-AH-formel ou non. Nous allons ramener cette question à la nullité d'une suite (finie ici) d'obstructions, comme on l'a déjà fait en 3.3.13. Explicitons d'abord quelques liens entre dérivations et automorphismes:

Proposition 3.5.13. *Soit $(T(V), \delta) \in \mathfrak{R}\text{-}\mathbf{DGAA}^{N-1}_s$ tel que δ se décompose en $\delta = \delta_1 + \sum_{j \geqslant i} \delta_j$, où $i \geqslant 2$ est fixé. Alors:*

(1) *La dérivation δ_i est un cycle pour $\mathsf{ad}\,(\delta_1)$.*
(2) *Si δ_i est un bord pour $\mathsf{ad}\,(\delta_1)$, alors $(T(V), \delta)$ est isomorphe à $(T(V), \delta')$ où δ' se décompose en $\delta' = \delta_1 + \sum_{j \geqslant i+1} \delta'_j$.*

La Preuve de cette proposition est analogue à celle de 3.3.10.

Proposition 3.5.14. *Soit $(T(V), \delta) \in \mathfrak{R}\text{-}\mathbf{DGAA}^{N-1}_s$ tel que δ se décompose en $\delta = \delta_1 + \sum_{j \geqslant i} \delta_j$, où $i \geqslant 2$ est fixé. Si $(T(V), \delta)$ est $\mathfrak{R}$-formelle, alors δ_i est un bord pour $\mathsf{ad}\,(\delta_1)$.*

La Preuve de cette proposition est analogue à celle de 3.3.12.

3.5.15 Construction des obstructions à la $\mathfrak{R}$-AH-formalité.

Soit $(T(V), \delta) \in \mathfrak{R}\text{-}\mathbf{DGAA}^{N-1}_s$ où δ se décompose en $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots$. D'après la proposition précédente on a que

— la classe de δ_2 pour $\mathsf{ad}\,(\delta_1)$ est une obstruction à la $\mathfrak{R}$-formalité, notons-la

$$\theta'_2 = [\delta_2] \in H_{2,-1}(\mathsf{Der}T(V), \mathsf{ad}\,(\delta_1))$$

— si $\theta'_2 = 0$, avec la proposition 3.5.14 on se ramène au cas où $\delta = \delta_1 + \delta_3 + \delta_4 + \dots$ et avec la proposition précédente, on interprète la classe de δ_3 pour $\mathsf{ad}\,(\delta_1)$ comme une obstruction à la $\mathfrak{R}$-AH-formalité, notons-la:

$$\theta'_3 \in H_{3,-1}(\mathsf{Der}T(V), \mathsf{ad}\,(\delta_1))$$

Nous construisons ainsi une suite d'obstructions $(\theta'_n)_{n \geqslant 2}$ vérifiant

(1) θ'_n est définie si et seulement si $\theta'_i = 0, 2 \leqslant i \leqslant n-1$.
(2) $\theta'_n \in H_{n,-1}(\mathsf{Der}T(V), \mathsf{ad}\,(\delta_1))$
(3) $(T(V), \delta)$ est $\mathfrak{R}$-AH-formelle si et seulement si $\theta'_n = 0$, pour tout $n \geqslant 2$.

Remarques 3.5.16. 1) La nullité des obstructions $\theta'_i, i \geqslant 2$ dépend uniquement de l'existence d'un automorphisme φ et non pas du choix d'un tel automorphisme. Le résultat (3) est donc bien indépendant de la formalisation choisie.

2) Soit ι_* la flèche induite par l'inclusion $\iota : \mathsf{L}(V) \hookrightarrow T(V)$ au niveau de l'homologie de l'algèbre de Lie des dérivations:

$$\iota_* : H_{n,-1}(\mathsf{Der}\mathsf{L}(V), \mathsf{ad}(\partial_1)) \to H_{n,-1}(\mathsf{Der}T(V), \mathsf{ad}(\delta_1))$$

On constate que si $(\mathsf{L}(V), \partial)$ est $\mathfrak{R}$-formelle, de formalisation ϕ, alors $(T(V), \delta) = \mathcal{U}(\mathsf{L}(V), \partial)$ est $\mathfrak{R}$-AH-formelle, de formalisation $\mathcal{U}\phi$. De même, si θ_i existe, alors θ'_i existe et $\iota_*(\theta_i) = \theta'_i$ pour tout $i \geqslant 2$.

3) Pour des raisons de degré, il n'y a qu'un nombre fini d'obstructions à considérer (l'argument est analogue à celui de 3.3.14).

3.6. Cohomologies de Hochschild et de Harrison, obstructions.

Dans les paragraphes 3 et 5, nous avons défini des suites d'obstructions pour la $\mathfrak{R}$-formalité et pour la $\mathfrak{R}$-AH-formalité. Dans ce qui suit, nous utilisons la cohomologie de Hochschild et celle de Harrison comme réceptacles pour ces obstructions. En montrant que la seconde s'injecte dans la première nous établissons l'équivalence des deux notions de formalité.

Définition 3.6.1. Soit H une $\mathfrak{R}$-algèbre associative graduée et f une application

$$f : T(\sigma^{-1}H) \to \sigma^{-1}H.$$

On dit que f est de bidegré (p,q) si

(1) f est nulle sur $T^i(\sigma^{-1}H)$ pour $i \neq p$,

(2) f est de degré q.

Nous notons $\mathsf{Hom}^q(T^p(\sigma^{-1}H), \sigma^{-1}H)$ le $\mathfrak{R}$-module des applications de bidegré (p,q). Sur ce module considérons la différentielle

$$\nabla : \mathsf{Hom}^q(T^p(\sigma^{-1}H), \sigma^{-1}H) \to \mathsf{Hom}^{q+1}(T^{p+1}(\sigma^{-1}H), \sigma^{-1}H)$$

définie par

$$\begin{aligned}\nabla f(\sigma^{-1}a_1\otimes\cdots\otimes\sigma^{-1}a_{p+1}) &= (-1)^{|f||\sigma^{-1}a_1|}a_1\, f(\sigma^{-1}a_2\otimes\cdots\otimes\sigma^{-1}a_{p+1})\\ &+\sum_{j=1}^{p}(-1)^{\Sigma_{i=1}^{j}|\sigma^{-1}a_i|}f(\sigma^{-1}a_1\otimes\cdots\otimes\sigma^{-1}(a_ja_{j+1})\otimes\cdots\otimes\sigma^{-1}a_{p+1})\\ &+(-1)^{|f|+\Sigma_{i=1}^{p}|\sigma^{-1}a_i|}f(\sigma^{-1}a_1\otimes\cdots\otimes\sigma^{-1}a_p)a_{p+1}.\end{aligned}$$

Cette différentielle donne naissance à une cohomologie bigraduée, appelée ***cohomologie de Hochschild*** de H à coefficients dans lui-même, et notée

$$\mathsf{Hoch}^{q,p}(H;H)=\frac{\ker\{\nabla\colon \mathsf{Hom}^q(T^p(\sigma^{-1}H),\sigma^{-1}H)\to\mathsf{Hom}^{q+1}(T^{p+1}(\sigma^{-1}H),\sigma^{-1}H)\}}{\mathrm{im}\,\{\nabla\colon \mathsf{Hom}^{q-1}(T^{p-1}(\sigma^{-1}H),\sigma^{-1}H)\to\mathsf{Hom}^{q}(T^{p}(\sigma^{-1}H),\sigma^{-1}H)\}}$$

Remarque 3.6.2. Soit $\mathbf{B}(H,H)=(H\otimes T(\sigma^{-1}H)\otimes H,d)$ avec

$$\begin{aligned}d(a_0\otimes(\sigma^{-1}a_1\otimes\cdots\otimes\sigma^{-1}a_n)\otimes a_{n+1}) &= a_0a_1\otimes(\sigma^{-1}a_2\otimes\cdots\otimes\sigma^{-1}a_n)\otimes a_{n+1}\\ &+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{\Sigma_{i=1}^{j}|\sigma^{-1}a_i|}a_0\otimes(\sigma^{-1}a_1\otimes\cdots\otimes\sigma^{-1}a_ja_{j+1}\otimes\ldots\sigma^{-1}a_n)\otimes a_{n+1}\\ &+(-1)^{\Sigma_{i=1}^{n-1}|\sigma^{-1}a_i|}a_0\otimes(\sigma^{-1}a_1\otimes\cdots\otimes\sigma^{-1}a_{n-1})\otimes a_na_{n+1}\end{aligned}$$

la bar-construction normalisée sur H.

Considérons $\sigma^{-1}H$ comme $H-H$-bimodule et notons $\mathsf{Hom}_{H-H}(\mathbf{B}(H,H),\sigma^{-1}H)$ les morphismes de $H-H$-bimodule.

Alors, en posant $\nabla f=f\circ d$, la définition 3.6.1 découle de la définition classique (cf. [**Ba2, p. 37**]) de cohomologie de Hochschild

$$\mathsf{Tot}_n\mathsf{Hoch}\,(H,H)=H^n(\mathsf{Hom}_{H-H}(\mathbf{B}(H,H),\sigma^{-1}H)).$$

3.6.3. Soit C une $\Re$-coalgèbre graduée, dont le module sous-jacent est libre. Nous notons $\overline{\Delta}$ sa diagonale réduite ($\overline{\Delta}x=\Delta x-1\otimes x-x\otimes 1$). Alors la flèche d_1 définie par

$$(\dagger)\qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\overline{\Delta}} & C\otimes C\\ {\scriptstyle\sigma}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma^{-1}\otimes\sigma^{-1}}\\ \sigma^{-1}C & \xrightarrow[d_1]{} & \sigma^{-1}C\otimes\sigma^{-1}C\end{array}$$

se prolonge en un élément de $\mathsf{Der}_{1,-1}T(\sigma^{-1}C)$. Notons $\sharp C=\mathsf{Hom}(C,\Re)$. Le module $\sharp C$ est muni de la graduation $\sharp C^p=\sharp(C_p)$. On définit σ sur $\sharp C$ par

$\sigma(\psi) = (-1)^{|\psi|}\psi\circ\sigma$, pour $\psi: C \to \Re$. Ainsi, nous avons $(\sigma\sharp C)^* = (\sharp C)^{*+1}$, et d'autre part, $\sigma^{-1}(\psi) = -(-1)^{|\psi|}\psi\circ\sigma^{-1}$.

La transposée de $\overline{\Delta}$ définit une multiplication m sur $\sharp C$, et la transposée de d_1 satisfait à

$$(\ddagger)\qquad \begin{array}{ccc} \sharp C & \xleftarrow{\quad m \quad} & \sharp C \otimes \sharp C \\ {\scriptstyle \sigma^{-1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \sigma\otimes\sigma} \\ \sigma^{-1}\sharp C & \xleftarrow[{}^t d_1]{} & \sigma^{-1}\sharp C \otimes \sigma^{-1}\sharp C. \end{array}$$

Proposition 3.6.4. *Si C est de type fini, nous avons un isomorphisme de complexes de chaînes*

$$\Phi: (\mathsf{Hom}^q(T^{p+1}(\sigma^{-1}\sharp C), \sigma^{-1}\sharp C), \nabla) \xrightarrow{\cong} (\mathsf{Der}_{p,-q}T(\sigma^{-1}C), \mathsf{ad}\,(d_1)).$$

PREUVE: L'isomorphisme Φ peut être décrit de la manière suivante: soit $f \in \mathsf{Hom}^q(T^{p+1}(\sigma^{-1}\sharp C), \sigma^{-1}\sharp C)$. Alors ${}^tf: \sigma^{-1}C \to T^{p+1}(\sigma^{-1}C)$ et $\Phi(f)$ est le prolongement de ${}^tf$ comme dérivation de $T(\sigma^{-1}C)$.

Inversement, soit $\delta \in \mathsf{Der}_{p,-q}T(\sigma^{-1}C)$, alors ${}^t(\delta|_{\sigma^{-1}C}): T^{p+1}(\sigma^{-1}\sharp C) \to \sigma^{-1}\sharp C$. Posons $\Phi^{-1}(\delta) = {}^t(\delta|_{\sigma^{-1}C})$.

Vérifions maintenant que $\nabla = \Phi^{-1}\mathsf{ad}\,(d_1)\Phi$. Soit $f \in \mathsf{Hom}^q(T^{p+1}(\sigma^{-1}\sharp C), \sigma^{-1}\sharp C)$ et $\Phi(f) = \delta \in \mathsf{Der}_{p,-q}T(\sigma^{-1}C)$. Alors si $\sigma^{-1}c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+2} \in T^{p+2}(\sigma^{-1}\sharp C)$,

$$\begin{aligned} &\Phi^{-1}\mathsf{ad}\,(d_1)\Phi(f)(\sigma^{-1}c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+2}) = \\ &\Phi^{-1}(\delta d_1 + d_1\delta)(\sigma^{-1}c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+2}) = \\ &({}^td_1{}^t\delta + {}^t\delta{}^td_1)(\sigma^{-1}c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+2}) = \\ &{}^td_1(\mathsf{Id} \otimes f + f \otimes \mathsf{Id})(\sigma^{-1}c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+2}) + \\ &\quad + {}^t\delta\left(\sum_{j=0}^{p+1} \overbrace{\mathsf{Id} \otimes \cdots \otimes \mathsf{Id}}^{j \text{ fois}} \otimes {}^td_1 \otimes \overbrace{\mathsf{Id} \otimes \cdots \otimes \mathsf{Id}}^{p-j \text{ fois}}\right)(\sigma^{-1}c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+2}) = (*) \end{aligned}$$

Compte tenu du diagramme $(\ddagger)$, nous avons

$$\begin{aligned} (*) = \quad & (-1)^{|f||\sigma^{-1}c_1|}\sigma^{-1}\circ m\circ\sigma \otimes \sigma\left(\sigma^{-1}c_1 \otimes f(\sigma^{-1}c_2 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+2})\right) + \\ & + \sigma^{-1}\circ m\circ\sigma \otimes \sigma\left(f(\sigma^{-1}c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+1}) \otimes \sigma^{-1}c_{p+2}\right) + \\ & + \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{\Sigma_{i=1}^{j}|\sigma^{-1}c_i|}\sigma^{-1}c_1 \otimes \cdots \otimes (\sigma^{-1}\circ m\circ\sigma \otimes \sigma) \\ & \qquad\qquad (\sigma^{-1}c_j \otimes \sigma^{-1}c_{j+1}) \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \; & (-1)^{|f||\sigma^{-1}c_1|}c_1 f(\sigma^{-1}c_2 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+2})+ \\ & + (-1)^{|f|+\Sigma_{i=1}^{p}|\sigma^{-1}c_i|}f(\sigma^{-1}c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+1})c_{p+2}+ \\ & + \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{\Sigma_{i=1}^{j}|\sigma^{-1}c_i|}f(\sigma^{-1}c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}(c_jc_{j+1}) \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+2}).\end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de $\nabla(f)(\sigma^{-1}c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}c_{p+2})$. □

Interprétation topologique 3.6.5. *Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ tel que $H_*(X)$ soit sans torsion et de type fini comme $\Re$-module gradué. Soit $H^*(X)$ son algèbre de cohomologie. Soit $(\theta'_n)_{n\geqslant 1}$ la suite d'obstructions à la $\Re$-AH-formalité de X. Alors si $\theta'_k = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, θ'_n est une classe de la cohomologie de Hochschild $\mathsf{Hoch}^{1,n}(H^*(X); H^*(X))$.*

En particulier, si $\mathsf{Hoch}^{1,*}(H^*(X); H^*(X)) = 0$, alors $H^*(X)$ (et donc X) est intrinsèquement $\Re$-AH-formelle.

PREUVE: Appliquons la proposition 3.6.4 au cas $C = H_*(X)$. D'après 3.1.14, 3.2.2 il existe un modèle $(\mathsf{L}(\sigma^{-1}H_*(X)), \partial)$ de X à différentielle décomposable, et son image $(T(\sigma^{-1}H_*(X)), D)$ par le foncteur $\mathcal{U}$ est un $\Re$-modèle d'Adams–Hilton de X. La différentielle d_1 qui figure dans l'énoncé de la proposition 3.6.4 a été définie à partir de la diagonale de C. D'après 3.2.9 la flèche d_1 construite à partir de la diagonale de $\sigma^{-1}H_*(X)$ coïncide avec la partie quadratique D_1 de D. Alors comme d'après 3.5.15 les obstructions θ'_n à la $\Re$-AH-formalité sont des éléments de $H_{n,-1}(\mathsf{Der}T(\sigma^{-1}H_*(X)), \mathsf{ad}\,(d_1))$, elles sont des éléments de $H^{1,n}(\mathsf{Hom}(T(\sigma^{-1}H^*(X)), \sigma^{-1}H^*(X)), \nabla)$ c'est-à-dire de $\mathsf{Hoch}^{1,n}(H^*(X); H^*(X))$. □

3.6.6 Rappels sur l'algèbre du groupe symétrique. On note Σ_n le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Soit R un anneau commutatif. Nous notons $R[\Sigma_n]$ la R-algèbre du groupe Σ_n.

Le signe de Koszul. Soit M un R-module gradué, $m_1, \ldots, m_n \in M$, et $\Lambda(M)$ la R-algèbre commutative graduée sur M. Pour toute permutation $\boldsymbol{\sigma}$ de $m_1, \ldots, m_n$, le ***signe de Koszul*** $\epsilon(\boldsymbol{\sigma})$ est défini par l'égalité $m_1 \wedge \cdots \wedge m_n = \epsilon(\boldsymbol{\sigma})m_{\boldsymbol{\sigma}(1)}\wedge\cdots\wedge m_{\boldsymbol{\sigma}(n)}$ dans $\Lambda(M)$. Nous l'étendons en $\epsilon\colon R[\Sigma_n] \to R$; remarquons qu'il y a abus de notation car $\boldsymbol{\sigma}$ ne suffit pas à définir $\epsilon(\boldsymbol{\sigma})$.

Les mixages. Soit p un entier $\geqslant 1$. Alors $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_n$ est un $(p, n-p)$-***mixage*** si

$$\boldsymbol{\sigma}(1) < \cdots < \boldsymbol{\sigma}(p)$$
$$\boldsymbol{\sigma}(p+1) < \cdots < \boldsymbol{\sigma}(n).$$

On note $\star_{(p,n-p)}$ l'élément $\sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\{(p,n-p)\text{-mixages}\}} \epsilon(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}$ de $R[\Sigma_n]$. Egalement on note sh_n la somme $\sum_{p=1}^{n-1} \star_{(p,n-p)}$. Donc sh_n est la somme des $\epsilon(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}$ où $\boldsymbol{\sigma}$ est $(p,n-p)$-mixage, pour tout $p\in\{1,\dots,n-1\}$.

Définition 3.6.7. Soit A une R-algèbre commutative graduée s-réduite dont le module sous-jacent est libre et $T(A)$ l'algèbre tensorielle sur A. Alors $R[\Sigma_n]$ agit (à gauche) sur $T^n(A)$ de la manière suivante:

$$\boldsymbol{\sigma}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=\epsilon(\boldsymbol{\sigma})a_{\boldsymbol{\sigma}^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes a_{\boldsymbol{\sigma}^{-1}(n)}.$$

L'action de $\star_{(p,n-p)}$ est appelée ***produit mixé***. Nous notons

$$\begin{aligned} a_1\otimes\cdots\otimes a_p\star a_{p+1}\otimes\cdots\otimes a_n &\overset{\text{déf}}{=} \star_{(p,n-p)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)\\ &= \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\{(p,n-p)\text{-mixages}\}} \epsilon(\boldsymbol{\sigma})(a_{\boldsymbol{\sigma}^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes a_{\boldsymbol{\sigma}^{-1}(n)}).\end{aligned}$$

Soit $\mathsf{Hom}^q_{\mathsf{s}}(T^p(\sigma^{-1}H),\sigma^{-1}H)$ le $\Re$-sous-module de $\mathsf{Hom}^q(T^p(\sigma^{-1}H),\sigma^{-1}H)$ des applications f telles que $f\circ\mathsf{sh}_i=0$ pour tout $i\geqslant 1$. La différentielle ∇ laisse stable ce module:

$$\nabla\colon \mathsf{Hom}^q_{\mathsf{s}}(T^p(\sigma^{-1}H),\sigma^{-1}H)\to \mathsf{Hom}^{q+1}_{\mathsf{s}}(T^{p+1}(\sigma^{-1}H),\sigma^{-1}H).$$

Cette différentielle donne naissance à une cohomologie bigraduée, appelée ***cohomologie de Harrison*** de H à coefficients dans lui-même, et notée $\mathsf{Harr}^{q,p}(H;H)$.

Soit C une coalgèbre cocommutative graduée dont le module sous-jacent est libre. Nous notons $\overline{\Delta}$ sa diagonale réduite. Comme C est cocommutative graduée et 2 est inversible dans $\Re$ on a pour tout c, $\overline{\Delta}c=\frac{1}{2}\sum(c_1\otimes c_2-(-1)^{|c_1||c_2|}c_2\otimes c_1)=\frac{1}{2}\sum[c_1,c_2]$ et donc la flèche d_1 définie par le diagramme (‡) de 3.6.3 peut s'écrire

$$d_1\colon \sigma^{-1}C\to \mathsf{L}^2(\sigma^{-1}C)$$

et se prolonge en un élément de $\mathsf{Der}_{1,-1}\mathsf{L}(\sigma^{-1}C)$. Notons $\sharp C=\mathsf{Hom}(C,\Re)$ et m la multiplication de $\sharp C$, alors la transposée ${}^t d_1$ de d_1 satisfait à ${}^t d_1 = \sigma^{-1}\circ m\circ\sigma\otimes\sigma$.

Proposition 3.6.8. *Si C est de type fini, nous avons un isomorphisme de complexes de chaînes*

$$\Phi\colon(\mathsf{Hom}^q_{\mathsf{s}}(T^{p+1}(\sigma^{-1}\sharp C),\sigma^{-1}\sharp C),\nabla)\cong(\mathsf{Der}_{p,-q}\mathsf{L}(\sigma^{-1}C),\mathsf{ad}\,(d_1)).$$

PREUVE: L'isomorphisme Φ est la restriction de l'isomorphisme de 3.6.4 au sous-module $\mathsf{Hom}^q_{\mathsf{s}}(T^{p+1}(\sigma^{-1}\sharp C), \sigma^{-1}\sharp C)$. Il faut montrer que $(\sigma\circ f\circ\sigma^{-1})(\mathsf{sh}_i) = 0$ pour tout i, équivaut à $\mathsf{im}\,{}^{\mathsf{t}}(\sigma\circ f\circ\sigma^{-1}) \subset \mathsf{L}^{p+1}(\sigma^{-1}C)$.

Sur $T(\sigma^{-1}C)$ nous avons une structure de coalgèbre dont la diagonale réduite s'écrit

$$\overline{\Delta}(c_1\otimes\cdots\otimes c_n) = \sum_{\substack{\boldsymbol{\sigma}\in\{(p,n-p)\text{-mixages}\}\\ p\in\{1,\dots,n-1\}}} \epsilon(\boldsymbol{\sigma})\big(c_{\boldsymbol{\sigma}^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes c_{\boldsymbol{\sigma}^{-1}(p)}\big)\otimes\big(c_{\boldsymbol{\sigma}^{-1}(p+1)}\otimes\cdots\otimes c_{\boldsymbol{\sigma}^{-1}(n)}\big)$$

pour $c_1,\dots,c_n \in \sigma^{-1}C$. En fixant un p et en calculant l'application transposée de $\overline{\Delta}$ nous trouvons

$${}^{\mathsf{t}}\overline{\Delta}\big[(x_1\otimes\cdots\otimes x_p)\otimes(x_{p+1}\otimes\cdots\otimes x_n)\big] = (x_1\otimes\cdots\otimes x_p)\star(x_{p+1}\otimes\cdots\otimes x_n)$$

où $x_1,\dots,x_n \in \sigma^{-1}\sharp C$.

Nous arrivons à l'argument essentiel de la preuve. Les primitifs de $T(\sigma^{-1}C)$ pour la diagonale ci-dessus forment l'algèbre de Lie $\mathsf{L}(\sigma^{-1}C)$ (cf. [C–M–N, prop. 2.8]). Nous avons donc le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \sigma^{-1}C \arrow[dll, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "{}^{\mathsf{t}}f"] & \\
\mathsf{L}(\sigma^{-1}C) \arrow[rr, tail] & & T(\sigma^{-1}C) \arrow[r, "\overline{\Delta}"] & T(\sigma^{-1}C)\otimes T(\sigma^{-1}C) \\[-2em]
\end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow \mathsf{L}(\sigma^{-1}C) \rightarrowtail T(\sigma^{-1}C) \xrightarrow{\overline{\Delta}} T(\sigma^{-1}C)\otimes T(\sigma^{-1}C)$$

qui se dualise en

$$\begin{tikzcd}
 & & \sigma^{-1}\sharp C & \\
0 & T(\sigma^{-1}\sharp C)/\mathsf{im}\,\star \arrow[l] \arrow[urr, dashed, "{}^{\mathsf{t}}\alpha"] & T(\sigma^{-1}\sharp C) \arrow[l, two heads] \arrow[u, "f"'] & T(\sigma^{-1}\sharp C)\otimes T(\sigma^{-1}\sharp C). \arrow[l, "\star"']
\end{tikzcd}$$

Il est clair que ${}^{\mathsf{t}}f(\sigma^{-1}C) \subset \mathsf{L}(\sigma^{-1}C)$ équivaut à l'existence de α et donc à l'existence de ${}^{\mathsf{t}}\alpha$. Mais cette dernière est équivalente à $f(\mathsf{im}\,\star) = f(\mathsf{sh}_i) = 0$ pour tout i.

Ainsi on pose $\Phi(f)|_{\sigma^{-1}C} = {}^{\mathsf{t}}f$ et on prolonge $\Phi(f)$ en dérivation de $\mathsf{L}(\sigma^{-1}C)$. On vérifie comme dans 3.6.4 que Φ commute aux différentielles. $\square$

Interprétation topologique 3.6.9. *Soit X un objet de $\mathfrak{R}$-$\mathbf{CW}^N_{s+1}$ tel que $H_*(X)$ soit sans torsion et de type fini comme $\mathfrak{R}$-module gradué. Soit $H^*(X)$*

son algèbre de cohomologie. Soit $(\theta_n)_{n\geqslant 1}$ *la suite d'obstructions à la* $\Re$*-formalité de* X. *Alors si* $\theta_k = 0$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant n-1$, θ_n *est une classe de la cohomologie de Harrison* $\mathsf{Harr}^{1,n}(H^*(X); H^*(X))$.

En particulier, si $\mathsf{Harr}^{1,*}(H^*(X); H^*(X)) = 0$, *alors* $H^*(X)$ *(et donc* X*) est intrinsèquement* $\Re$*-formelle.*

La preuve de ce résultat est analogue à celle de 3.6.5.

Nous allons maintenant relier les cohomologies de Harrison et de Hochschild par une flèche, induite par l'inclusion canonique d'une $\Re$-algèbre de Lie (rappelons que 2 et 3 sont inversibles par définition) dans son algèbre enveloppante.

Théorème 3.6.10. *Soit* C *une* $\Re$*-coalgèbre graduée cocommutative de type fini, libre comme* $\Re$*-module, concentrée en degrés* $s+1, \dots, N$. *Notons* $\sharp C$ *l'algèbre graduée commutative duale de* C. *Alors si* $N = \min(sp-1, s+2p-3)$, *l'inclusion* $\mathsf{L}(\sigma^{-1}C) \hookrightarrow \mathcal{U}\mathsf{L}(\sigma^{-1}C) = T(\sigma^{-1}C)$ *induit une injection*

$$\iota_*\colon \mathsf{Harr}^{*,\leqslant p-1}(\sharp C; \sharp C) \rightarrowtail \mathsf{Hoch}^{*,\leqslant p-1}(\sharp C; \sharp C).$$

Preuve: L'algèbre tensorielle $T(\sigma^{-1}\sharp C)$ est munie d'une différentielle *combinatoire* $\mathbf{d}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(\sigma^{-1}a_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}a_{n+1}) &= a_1(\sigma^{-1}a_2 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}a_{n+1}) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\Sigma_{i=1}^{j}|\sigma^{-1}a_i|}(\sigma^{-1}a_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}a_j a_{j+1} \otimes \dots \sigma^{-1}a_{n+1}) \\ &+ (-1)^{\Sigma_{i=1}^{n}|\sigma^{-1}a_i|}(\sigma^{-1}a_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1}a_n)a_{n+1}.\end{aligned}$$

Nous étudions l'action de certains éléments de $\Re[\Sigma_n]$ sur $(T(\sigma^{-1}\sharp C), \mathbf{d})$. Nous allons construire une famille $(e_n)_{2\leqslant n\leqslant p-1}$ d'éléments de $\Re[\Sigma_n]$, idempotents (c'est-à-dire $e_n^2 = e_n$), de signature 1, dont l'action sur $T(\sigma^{-1}\sharp C)$ commute à $\mathbf{d}$ (c'est-à-dire $\mathbf{d}e_n = e_{n-1}\mathbf{d}$) et satisfaisant à

(1) $e_n\mathsf{sh}_n = \mathsf{sh}_n$,

(2) e_n est un polynôme P_n en sh_n sans terme constant.

Nous constatons que pour $n \leqslant p-1$ le complexe $T(\sigma^{-1}\sharp C)$ se scinde par l'action de la famille $(e_n)_{n\geqslant 1}$ en $T^n(\sigma^{-1}\sharp C) = e_nT^n(\sigma^{-1}\sharp C) \oplus (\mathsf{Id} - e_n)T^n(\sigma^{-1}\sharp C)$. On a $e_nT^n(\sigma^{-1}\sharp C) \subset \mathsf{sh}_nT^n(\sigma^{-1}\sharp C)$; écrivons $\mathsf{sh}_nT^n(\sigma^{-1}\sharp C) = e_nT^n(\sigma^{-1}\sharp C) \oplus$

$(\mathsf{Id} - e_n)T^n(\sigma^{-1}\sharp C) \cap \mathsf{sh}_n T^n(\sigma^{-1}\sharp C)$. Appliquons e_n des deux côtés de l'égalité. Nous obtenons

$$\mathsf{sh}_n T^n(\sigma^{-1}\sharp C) = e_n T^n(\sigma^{-1}\sharp C)$$
$$\text{et} \qquad T^n(\sigma^{-1}\sharp C)/\mathrm{im}\,\mathsf{sh}_n \cong (\mathsf{Id} - e_n)T^n(\sigma^{-1}\sharp C).$$

Ceci entraîne l'existence de la rétraction

$$\text{(R)} \qquad T^n(\sigma^{-1}\sharp C)/\mathrm{im}\,\mathsf{sh}_n \hookrightarrow T^n(\sigma^{-1}\sharp C) \xrightarrow{\mathsf{Id} - e_n} T^n(\sigma^{-1}\sharp C)/\mathrm{im}\,\mathsf{sh}_n$$

(vérifions que la composée des deux flèches est l'identité: tout élément dans l'image de l'inclusion s'écrit $\alpha - e_n(\alpha)$, avec $\alpha \in T^n(\sigma^{-1}\sharp C)$; ainsi $(\mathsf{Id} - e_n)(\alpha - e_n(\alpha)) = \alpha - 2e_n(\alpha) + e_n^2(\alpha) = \alpha - e_n(\alpha)$ par l'idempotence de e_n).

La flèche $\mathsf{Hom}_{\mathsf{s}}(T^n(\sigma^{-1}\sharp C), \sigma^{-1}\sharp C) \rightarrowtail \mathsf{Hom}(T^n(\sigma^{-1}\sharp C), \sigma^{-1}\sharp C)$ consiste à oublier qu'un morphisme a la propriété de s'annuler sur l'image de sh_n. Par les isomorphismes de 3.6.4 et 3.6.8, on déduit que cette flèche est induite par l'inclusion

$$\iota\colon \mathbb{L}(\sigma^{-1}C) \hookrightarrow T(\sigma^{-1}C).$$

La propriété (R) passe en homologie et nous obtenons que

$$\iota_*\colon \mathsf{Harr}^{*,\leqslant p-1}(\sharp C;\sharp C) \rightarrowtail \mathsf{Hoch}^{*,\leqslant p-1}(\sharp C;\sharp C).$$

Il nous reste donc à construire la famille (e_n). La construction se fait par récurrence:

Posons $e_2 = \frac{1}{2}\mathsf{sh}_2$. Supposons avoir construit $e_2, \dots, e_{n-1}$. Alors par hypothèse de récurrence, $e_{n-1} = P_{n-1}(\mathsf{sh}_{n-1})$. Posons

$$e_n = P_{n-1}(\mathsf{sh}_n) + \frac{1}{\epsilon(\mathsf{sh}_n)}(\mathsf{Id} - P_{n-1}(\mathsf{sh}_n))\mathsf{sh}_n$$

où $\epsilon(\mathsf{sh}_n) = 2^{n-1}$ (qui est inversible dans $\mathfrak{R}$). On a bien $\epsilon(e_n) = 1$. Vérifions que e_n commute à $\mathbf{d}$. On vérifie aisement que $\mathbf{d}\mathsf{sh}_n = \mathsf{sh}_n\mathbf{d}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}e_n &= \mathbf{d}P_{n-1}(\mathsf{sh}_n) + 2^{-n+1}\mathbf{d}(\mathsf{Id} - P_{n-1}(\mathsf{sh}_n))\mathsf{sh}_n \\
&= P_{n-1}(\mathsf{sh}_{n-1})\mathbf{d} + 2^{-n+1}(\mathsf{Id} - P_{n-1}(\mathsf{sh}_{n-1}))\mathsf{sh}_{n-1}\mathbf{d} \\
&= e_{n-1}\mathbf{d} + 2^{-n+1}(\mathsf{Id} - e_{n-1})\mathsf{sh}_{n-1}\mathbf{d} \\
&= e_{n-1}\mathbf{d} + 2^{-n+1}(\mathsf{sh}_{n-1} - e_{n-1}\mathsf{sh}_{n-1})\mathbf{d} \\
&= e_{n-1}\mathbf{d} \quad \text{par hyp. de récurrence.}
\end{aligned}$$

Maintenant vérifions que e_n est idempotent; pour cela nous utilisons le "lemme de Barr" à coefficients dans $\mathfrak{R}$:

Lemme 3.6.11 (Barr). *Soit $u \in \Re[\Sigma_n]$ pour $n \leqslant p-1$ tel que son action sur $T(\sigma^{-1}\sharp C)$ satisfait à $\mathbf{d}u = 0$. Alors*

$$u = \frac{1}{n!}\epsilon(u)\textstyle\sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\Sigma_n}\epsilon(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}.$$

La preuve de Barr [**Bar,** p.316] s'applique sans changement. La restriction $n \leqslant p-1$ provient uniquement du fait que n doit être inversible dans $\Re = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{(p-1)!}\right]$.

Suite de la preuve de 3.6.10: Nous avons $\mathbf{d}e_n^2 = e_{n-1}^2\mathbf{d} = e_{n-1}\mathbf{d} = \mathbf{d}e_n$ par hypothèse de récurrence. Donc $\mathbf{d}(e_n^2 - e_n) = 0$ et par le lemme de Barr, $e_n^2 - e_n = \frac{1}{n!}\epsilon(e_n^2 - e_n)\sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\Sigma_n}\epsilon(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} = 0$.

Vérifions finalement que $e_n\mathsf{sh}_n = \mathsf{sh}_n$. Nous avons $\mathbf{d}(e_n\mathsf{sh}_n - \mathsf{sh}_n) = e_{n-1}\mathbf{d}\mathsf{sh}_n - \mathbf{d}\mathsf{sh}_n = (e_{n-1}\mathsf{sh}_{n-1} - \mathsf{sh}_{n-1})\mathbf{d} = 0$. Donc par le lemme de Barr, comme $\epsilon(e_n) = 1$, $e_n\mathsf{sh}_n - \mathsf{sh}_n = \frac{1}{n!}(\epsilon(e_n)\epsilon(\mathsf{sh}_n) - \epsilon(\mathsf{sh}_n))\sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\Sigma_n}\epsilon(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} = 0$. □

Interprétation topologique 3.6.12. *Soit X un objet fini de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ sans torsion homologique. Alors on a équivalence entre*

(1) *X est $\Re$-formel*
(2) *X est $\Re$-AH-formel.*

Preuve: Nous avons vu en 3.6.5 (resp. 3.6.9) que les obstructions à la $\Re$-AH-formalité (resp. à la $\Re$-formalité) sont des éléments de $\mathsf{Hoch}^{1,*}(H^*(X); H^*(X))$ (resp. $\mathsf{Harr}^{1,*}(H^*(X); H^*(X))$). D'autre part nous avons vu en 3.5.16.(2) que les θ_i' sont les images des θ_i par le morphisme ι_* induit par l'inclusion $\iota\colon \mathsf{L}(\sigma^{-1}H_*(X)) \hookrightarrow T(\sigma^{-1}H_*(X))$.

Donc le théorème 3.6.10 entraîne que les $p-1$ premières obstructions à la $\Re$-formalité sont nulles si et seulement si les $p-1$ premières obstructions à la $\Re$-AH-formalité le sont. Mais d'après 3.5.16.(3) et 3.3.14.(2) si les $(p-1)$ premières obstructions sont nulles, elles le sont toutes. Ceci entraîne l'équivalence des deux notions de formalité. □

Proposition 3.6.13. *Dans la sous-catégorie de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ des espaces sans torsion homologique, on a le tableau suivant:*

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\Re\text{-}AH\text{-formalit\'e}} \arrow[r, Rightarrow, "(1)"] \arrow[d, equal, "(2)"'] & \boxed{\mathbb{Q}\text{-}AH\text{-formalit\'e}} \arrow[d, equal, "(3)"] \\
\boxed{\Re\text{-formalit\'e}} \arrow[r, Rightarrow, "(4)"] & \boxed{\text{formalit\'e rationnelle}}
\end{tikzcd}$$

Les réciproques de (1) et (4) sont fausses.

PREUVE: Soit X un objet de $\mathfrak{R}$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ sans torsion homologique, et X_m son CW-complexe associé à structure cellulaire minimale.

(1) Si $(T(V), d)$ est un $\mathfrak{R}$-modèle d'Adams–Hilton à différentielle quadratique de X, alors $(T(V), d) \otimes \mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}$-modèle d'Adams–Hilton à différentielle également quadratique.

(2) cf. théorème 3.6.12.

(3) Cette équivalence fait l'objet de **[Me]** (c'est évidemment aussi un cas particulier de (2) pour $\mathfrak{R} = \mathbb{Q}$).

(4) est équivalent à (1).

La réciproque à (4) est fausse: voici un contre-exemple tiré de **[ElH]**: soit $S = (\mathbb{S}_a^3 \vee \mathbb{S}_b^3) \cup_{11[a,b]} e^6 \cup_{[a,[a,b]]} e^8$. Dans ce cas $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}[\frac{1}{7}]$ et $\mathbf{L}(S) = (\mathbb{L}(a, b, c, e), \partial)$ avec $\partial a = \partial b = 0$, $\partial c = 11[a, b]$, $\partial e = [a, [a, b]]$. Comme 11 n'est pas inversible dans $\mathfrak{R}$, S n'est pas $\mathfrak{R}$-formel. Pourtant il est $\mathbb{Q}$-formel. La réciproque à (1) étant équivalente à celle de (4), elle est fausse aussi. □

Proposition 3.6.14. *L'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est $\mathfrak{R}$-formel.*

PREUVE: Soit $C_*\Omega\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ le complexe des chaînes singulières cubiques sur $\Omega\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$. D'après 3.7.2 nous avons

$$\Omega C_*\mathbb{C}\mathrm{P}^n \xrightarrow{\simeq} C_*\Omega\mathbb{C}\mathrm{P}^n.$$

D'autre part, si x est un générateur de $C_*\mathbb{S}^1$ nous avons

$$\Omega\mathbf{B}(x\mathfrak{R}, 0) \xrightarrow{\simeq} (x\mathfrak{R}, 0),$$

où $\mathbf{B}$ est la bar-construction (cf. paragraphe suivant). Nous savons que $\Omega\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \simeq \mathbb{S}^1$ et donc $C_*\Omega\mathbb{C}\mathrm{P}^n \simeq C_*\mathbb{S}^1$. Soit α l'élément de $C_*\Omega\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ qui correspond au générateur de $C_*\mathbb{S}^1$. Nous avons donc un quasi-isomorphimse d'algèbres différentielles

$$\phi\colon C_*\Omega\mathbb{C}\mathrm{P}^n \xrightarrow{\simeq} (x\mathfrak{R}, 0)$$

qui envoie α sur x.

De $\Omega\mathbf{B}(x\mathfrak{R}, 0) \xleftrightarrow{\simeq} \Omega C_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ on déduit que $(T(x_1, x_2, \dots), d)$ avec $|x_i| = 2i - 1$ et d quadratique, est un modèle d'Adams–Hilton de $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$. Comme $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est un squelette de $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$, son modèle d'Adams-Hilton est $(T(x_1, x_2, \dots, x_n), d)$ avec d quadratique; donc $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est $\mathfrak{R}$-AH-formel. D'après 3.6.12 il est $\mathfrak{R}$-formel. □

3.7. Le cas des CW-complexes avec torsion homologique.

Rappels 3.7.1. Soit (A, d) une R-algèbre différentielle graduée commutative s-réduite ($s \geqslant 1$) à différentielle de degré -1. La ***bar-construction*** $\mathrm{B}(A, d)$ sur A est définie par $\mathrm{B}(A, d) = (T(\sigma A), D = d_{\mathrm{I}} + d_{\mathrm{E}})$ avec

$$\begin{cases} d_{\mathrm{I}}(\sigma a_1 \otimes \cdots \otimes \sigma a_n) = -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\Sigma_{k=1}^{i-1}|\sigma a_k|}\sigma a_1 \otimes \cdots \otimes \sigma d a_i \otimes \cdots \otimes \sigma a_n \\ d_{\mathrm{E}}(\sigma a_1 \otimes \cdots \otimes \sigma a_n) = -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\Sigma_{k=1}^{i-1}|\sigma a_k|}\sigma a_1 \otimes \cdots \otimes \sigma(a_{i-1} a_i) \otimes \cdots \otimes \sigma a_n \end{cases}$$

Soit (C, ∂) une R-coalgèbre différentielle graduée cocommutative s-réduite ($s \geqslant 1$) à différentielle de degré -1. Notons Δ sa diagonale. La ***cobar-construction*** $\boldsymbol{\Omega}(C, \partial)$ sur C est définie par $\boldsymbol{\Omega}(C, \partial) = (T(\sigma^{-1} C), \delta = \partial_{\mathrm{I}} + \partial_{\mathrm{E}})$ avec

$$\begin{cases} \partial_{\mathrm{I}}(\sigma^{-1} c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1} c_n) = -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\Sigma_{k=1}^{i-1}|\sigma^{-1} c|}\sigma^{-1} c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1} \partial c_i \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1} c_n \\ \partial_{\mathrm{E}}(\sigma^{-1} c_1 \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1} c_n) = -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\Sigma_{k=1}^{i-1}|\sigma^{-1} c|}\sigma^{-1} c_1 \otimes \cdots \otimes \\ \qquad\qquad \otimes(\sigma^{-1} \otimes \sigma^{-1})\circ\Delta(c_i) \otimes \cdots \otimes \sigma^{-1} a_n \end{cases}$$

Remarquons qu'en tenant compte de la structure de coalgèbre de l'algèbre tensorielle, utilisée dans la preuve de 3.6.8, les deux constructions fournissent des algèbres de Hopf: $\mathbf{B}(A, d)$ est commutative et $\boldsymbol{\Omega}(C, \partial)$ cocommutative. D'autre part, aussi bien $\mathbf{B}$ que $\boldsymbol{\Omega}$ sont des foncteurs qui envoient des R-quasi-isomorphismes entre objets projectifs comme R-modules (cf. 1.4.1), sur des R-quasi-isomorphismes.

Soit X un CW-complexe s-réduit ($s \geqslant 2$) et ΩX son espace de lacets. Soit $(C_* \Omega X, \partial_{\Omega X})$ le complexe des chaînes cubiques singulières de ΩX (cf. 3.1.5); il porte une structure d'algèbre induite par la composition des lacets de ΩX à travers Eilenberg–Zilber:

$$C_k \Omega X \otimes C_\ell \Omega X \longrightarrow C_{k+\ell} \Omega X \times \Omega X.$$

D'autre part $(C_* X, \partial_X)$ porte une structure de coalgèbre pour la diagonale induite par la diagonale topologique.

Proposition 3.7.2 [**F–H–T,** th. I]. *Il existe un R-quasi-isomorphisme d'algèbres ψ_X, naturel en X*

$$\psi_X : \mathbf{\Omega}(C_*X, \partial_X) \xrightarrow{\simeq} (C_*\Omega X, \partial_{\Omega X}).$$

Théorème 3.7.3. *Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ sans torsion homologique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *X est $\Re$-formel;*

(2) *Il existe des $\Re$-quasi-isomorphismes d'algèbre*

$$(C^*X, \partial) \xleftarrow{\simeq} (T(V), d) \xrightarrow{\simeq} (H^*(X), 0)$$

où C^*X est l'algèbre des cochaînes singulières cubiques de X et $(T(V), d)$ une $\Re$-algèbre tensorielle munie d'une différentielle de degré $+1$.

Preuve: **i.** (1) $\Rightarrow$ (2) D'après 3.6.12 la $\Re$-formalité est équivalente à la $\Re$-AH-formalité. Donc par définition il existe un $\Re$-quasi-isomorphisme

$$(T(\sigma^{-1}H_*(X)), \delta_1) \xrightarrow{\simeq} (C_*\Omega X, \partial_{\Omega X})$$

et donc, en appliquant [**F–H–T,** prop. 2.14],

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{B}(T(\sigma^{-1}H_*(X)), \delta_1) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{B}(C_*\Omega X, \partial_{\Omega X}) \\
\| & & \uparrow{\scriptstyle \text{par } 3.7.2}\ \simeq \\
\mathbf{B\Omega}(H_*(X), 0) & & \mathbf{B\Omega}(C_*X, \partial_X) \\
\uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\
(H_*(X), 0) & & (C_*X, \partial_X)
\end{array}$$

Ainsi nous avons une suite de $\Re$-quasi-isomorphismes

$$(H_*(X), 0) \xleftarrow{\simeq} \dots \xrightarrow{\simeq} (C_*X, \partial_X).$$

En dualisant, et en prenant des relèvements successifs, on obtient

$$(C^*X, \partial_X) \xleftarrow{\simeq} (T(V), d) \xrightarrow{\simeq} (H^*(X), 0)$$

où $(T(V), d)$ est une $\Re$-algèbre tensorielle munie d'une différentielle de degré $+1$.

ii) (2) $\Rightarrow$ (1) En dualisant

$$(C^*X, \partial_X) \xleftarrow{\simeq} (T(V), d) \xrightarrow{\simeq} (H^*(X), 0)$$

nous obtenons (en notant $\sharp V = \mathsf{Hom}(V, \Re)$ et ${}^t d$ la transposée de d),

$$(C_*X, \partial_X) \xrightarrow{\simeq} (T(\sharp V), {}^t d) \xleftarrow{\simeq} (H_*(X), 0)$$

et donc par propriété du foncteur cobar-construction

$$\boldsymbol{\Omega}(C_*X, \partial_X) \xrightarrow{\simeq} \boldsymbol{\Omega}(T(\sharp V), {}^t d) \xleftarrow{\simeq} \boldsymbol{\Omega}(H_*(X), 0)$$

En écrivant $\boldsymbol{\Omega}(H_*(X), 0) = (T(\sigma^{-1}H_*(X)), \delta_1)$ et en relevant, nous obtenons

$$\boldsymbol{\Omega}(C_*X, \partial) \xleftarrow{\simeq} (T(\sigma^{-1}H_*(X)), \delta_1)$$

D'après 3.7.2, nous avons

$$(C_*\Omega X, \partial_{\Omega X}) \xleftarrow{\simeq} (T(\sigma^{-1}H_*(X)), \delta_1)$$

et donc par définition, un $\Re$-modèle d'Adams–Hilton de X à différentielle quadratique. □

Remarque: La condition (2) du théorème 3.7.2 garde un sens si $H_*(X)$ a de la torsion, d'où:

Définition 3.7.4. Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}^N_{s+1}$. Alors X est dit ***$\Re$-formel*** s'il existe des $\Re$-quasi-isomorphismes d'algèbre

$$(C^*X, \partial) \xleftarrow{\simeq} (T(V), d) \xrightarrow{\simeq} (H^*(X), 0)$$

où C^*X est l'algèbre des cochaînes singulières cubiques de X et $(T(V), d)$ une $\Re$-algèbre tensorielle munie d'une différentielle de degré $+1$.

Proposition 3.7.5. *Les espaces de Moore sont $\Re$-formels.*

PREUVE: Soit M un espace de Moore, avec $\tilde{H}^*(M) = [\![z]\!]\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en i et 0 sinon. Soit (C^*M, ∂_M) le complexe des cochaînes singulières cubiques (3.1.5) de M. C'est un complexe de cochaînes $\Re$-libre. Nous allons construire en même temps les deux $\Re$-quasi-isomorpismes de la définition 3.7.4 par récurrence sur le degré. Soit W la $\Re$-algèbre définie par

$$W = \begin{cases} y\Re & \text{en degré } i \\ x\Re & \text{en degré } i-1 \ \text{ et } xy = 0, dx = py. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons des flèches

$$(\mathit{Cell}^*(X), \partial_{\mathrm{cell},X}) \xleftarrow{\simeq} (W, \delta) \xrightarrow{\simeq} (H^*(X), 0)$$

où $(\mathit{Cell}^*(X), \partial_{\mathrm{cell},X})$ est le complexe des cochaînes cellulaires de X. Ces flèches sont des $\Re$-quasi-isomorphismes d'algèbres de cochaînes. Prenons un modèle (d'algèbre différentielle graduée) $(T(V), d)$ de (W, δ). Alors

$$(\mathit{Cell}^*(X), \partial_{\mathrm{cell},X}) \xleftarrow{\simeq} (T(V), d) \xrightarrow{\simeq} (H^*(X), 0)$$

D'après [**Mau**,4.4.21–22] on a un morphisme θ: $\mathit{Cell}_*(X) \xrightarrow{\simeq} C_*X$ et donc $\mathit{Cell}^*(X) \xleftarrow{\simeq} C^*X : {}^t\theta$ et d'après [*op. cit.*,8.5.6] ce morphisme commute aux produits. Après relevement, on obtient

$$(C^*X, \partial_X) \xleftarrow{\simeq} (T(V), d) \xrightarrow{\simeq} (H^*(X), 0)$$

et donc que M est $\Re$-formel.

Proposition 3.7.6. *Un bouquet de CW-complexes $\Re$-formels est $\Re$-formel.*

PREUVE: Soient X_1, X_2 deux CW-complexes $\Re$-formels. Alors

$$C^*(X_1 \vee X_2) \xrightarrow{\cong} C^*X_1 \oplus C^*X_2$$
$$\text{et } H^*(X_1 \vee X_2) \xrightarrow{\cong} H^*(X_1) \oplus H^*(X_2)$$

Puisque les espaces sont $\Re$-formels, nous avons $(T(V'), d')$ et $(T(V''), d'')$ quasi-isomorphes en même temps aux complexes singuliers et aux cohomologies. Considérons $(T(V') \oplus T(V''), d' + d'')$ comme algèbre différentielle graduée en posant $v'v'' = 0, d'v'' = d''v' = 0$ pour tout $v' \in T(V')$ et $v'' \in T(V'')$. Alors nous avons des $\Re$-quasi-isomorphismes d'algèbres

$$C^*X_1 \oplus C^*X_2 \xleftarrow{\simeq} T(V') \oplus T(V'') \xrightarrow{\simeq} H^*(X_1) \oplus H^*(X_2)$$

Soit $(T(V), d)$ un modèle de $(T(V') \oplus T(V''), d' + d'')$. Nous avons alors des $\Re$-quasi-isomorphismes

$$C^*X_1 \oplus C^*X_2 \xleftarrow{\simeq} (T(V), d) \xrightarrow{\simeq} H^*(X_1) \oplus H^*(X_2)$$

et donc $X_1 \vee X_2$ est $\Re$-formel. La preuve se poursuit par récurrence pour un bouquet de n CW-complexes. $\square$

Corollaire 3.7.7. *Les suspensions de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$ sont $\Re$-formelles.*

PREUVE: D'après [**Dw2,** p. 168] toute suspension s-réduite a le même type d'homotopie modérée qu'un bouquet d'espaces de Moore. D'après 3.7.5 et la proposition, ceci entraîne le résultat.

Définition 3.7.8. Soit X, Y des CW-complexes 1-connexes et p un nombre premier. Notons $\mathbb{Z}_{(p)}$ l'anneau des entiers, localisé en p. Une flèche $f: X \to Y$ est une ***p*-équivalence d'homotopie** (notée $\simeq$ ou $\simeq_p$) si elle induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_{(p)}$-modules

$$f_\sharp \otimes 1_{\mathbb{Z}_{(p)}} : \pi_*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{\cong} \pi_*(Y) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Remarque 3.7.9. Soit X, X' des objets de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$tels que $H_*(X), H_*(X')$ soient sans torsion et soit $f: X \to X'$ un $\Re$-quasi-isomorphisme. Alors f est une p-équivalence d'homotopie pour tout p non inversible dans $\Re$.

Définition 3.7.10 [**An1**]. Un CW-complexe 1-connexe est dit ***p*-minimal** si en chaque dimension ses cellules sont en bijection avec une base de l'homologie à coefficients $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Proposition 3.7.11 [**An1**]. *Pour tout CW-complexe 1-connexe X il existe un CW-complexe p-minimal X_m et une p-équivalence d'homotopie $m: X \to X_m$.*

Définition 3.7.12. Soit X un CW-complexe R-local 1-connexe et p un premier non inversible dans R. Un ***p*-modèle d'Adams–Hilton** de X est $(T(V) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, d \otimes 1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})$, où $(T(V), d)$ est un R-modèle d'Adams–Hilton de X.

Proposition 3.7.13 [**An1**]. *Un CW-complexe est p-minimal si et seulement s'il admet un p-modèle d'Adams–Hilton à différentielle décomposable.*

Proposition 3.7.14. *Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$, tel que $H_*(X)$ soit sans torsion. Si X est à structure cellulaire minimale, il est p-minimal pour tout p non inversible dans $\Re$.*

Corollaire 3.7.15. Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$, tel que $H_*(X)$ soit sans torsion. En combinant 3.2.8, 3.5.3 et la proposition précedente on trouve qu'il existe pour tout p non inversible dans $\Re$ un objet $X_{m,p}$ de la même catégorie qui soit p-minimal et p-équivalent homotopiquement à X, c'est-à-dire 3.7.11 dans le cas particulier des CW-complexes sans torsion homologique.

PREUVE: Si X est à structure cellulaire minimale, $\mathbf{L}(X)$ est à différentielle décomposable et donc $\mathcal{U}\mathbf{L}(X)$ aussi. Mais d'après 3.1.14.(ii), ce dernier est un $\Re$-modèle d'Adams–Hilton de X et donc $\mathcal{U}\mathbf{L}(X)\otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ un p-modèle d'Adams–Hilton de X (rappelons que p n'est pas inversible dans $\Re$). $\mathcal{U}\mathbf{L}(X)\otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est à différentielle décomposable et donc X est p-minimal.

Définition 3.7.16. Par analogie avec 3.5.12, un CW-complexe X 1-connexe est dit ***p-AH-formel*** s'il admet un p-modèle d'Adams–Hilton à différentielle quadratique.

Proposition 3.7.17. *Soit X un CW-complexe fini de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^{N}$ et q un premier tel que $1/q \notin \Re$. Supposons que $\mathrm{Tor}(H^*(X),\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = 0$. Alors si X est $\Re$-formel, il est q-AH-formel.*

PREUVE: Par définition de la $\Re$-formalité, nous avons

$$(C^*X,\partial_X) \xleftarrow{\ \simeq\ } (T(V),d) \xrightarrow{\ \simeq\ } (H^*(X),0)$$

d'où, comme $\mathrm{Tor}(H^*(X),\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = 0$,

$$(C^*(X;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}),\partial_X) \xleftarrow{\ \simeq\ } (T(V),d)\otimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \xrightarrow{\ \simeq\ } (H^*(X)\otimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}),0)$$

et enfin $H^*(X)\otimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \cong H^*(X;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. D'après [**ElH**,p.18] si $H^*(X;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est de type fini, ceci équivaut à la q-AH-formalité de X. □

Remarque: Le problème se pose maintenant de traduire cette définition de $\Re$-formalité dans $\Re$-$\mathbf{DGLA}_s^{N-1}$. Nous allons apporter des éléments de réponse.

Définition 3.7.18. *Soit X un objet de $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^{N}$. Filtrons $\mathbf{L}(X)$ par la longueur de crochet et prenons le 1er étage de la suite spectrale associée à cette filtration. En appliquant le théorème de perturbation 1.3.7 nous obtenons*

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{L}(X) & \qquad\qquad & E^1\mathbf{L}(X) \\ \simeq\Big\uparrow\phi & & \simeq\Big\uparrow\psi \\ (\mathsf{L}(W),d+\tau) & & (\mathsf{L}(W),d) \end{array}$$

où W est un module bigradué libre et ϕ,ψ des $\Re$-quasi-isomorphismes tels que $E^1\phi = \psi$. Alors on dira que X est **de type F1** *si on peut choisir τ superflue (cf. 1.2.2), autrement dit si $(\mathsf{L}(W),d+\tau)$ et $(\mathsf{L}(W),d)$ sont dans le même type d'homotopie $\Re$-modérée.*

Proposition 3.7.19. *Si X est tel que $H_*(X)$ soit sans torsion, alors la notion de "type F1" coïncide avec celle de "$\Re$-formalité".*

PREUVE: Si $H_*(X)$ est sans torsion, d'après 3.2.5, il existe dans le même type d'homotopie modérée que X un CW-complexe X_m. Reprenons le diagramme (1) pour X_m: $\mathbf{L}(X_m)$ est à différentielle décomposable. Donc si nous notons $\mathbf{L}(X_m) = (\mathsf{L}(V), \partial)$,

$$E^1\mathbf{L}(X_m) = E^1(\mathsf{L}(V), \partial) = (\mathsf{L}(V), \partial_1)$$

où ∂_1 est la partie quadratique de ∂. Mais alors on peut prendre $\psi = \mathsf{Id}$ et $\tau = \partial - \partial_1, \phi = \mathsf{Id}$. Donc si X est de type F1, c'est-à-dire si τ est superflue, $(\mathsf{L}(V), \partial)$ est dans le même type d'homotopie $\Re$-modérée que $(\mathsf{L}(V), \partial_1)$ et réciproquement. Mais ceci est équivalent à dire que X et X_f (qui est la réalisation de $(\mathsf{L}(V), \partial_1)$) sont dans le même type d'homotopie $\Re$-modérée c'est-à-dire que X est $\Re$-formel. □

Remarque 3.7.20. Si $H_*(X)$ a une partie de torsion non nulle, il est impossible de trouver $(\mathsf{L}(W), d)$ dans le type d'homotopie de $\mathbf{L}(X)$ avec d décomposable.

Proposition 3.7.21. *Les espaces de Moore ne sont (en général) pas de type F1.*

PREUVE: Si M est un espace de Moore, la différentielle de $\mathbf{L}(M)$ est linéaire. Donc le terme E^1 de la suite spectrale associée à la longueur de crochet, n'est autre que l'homologie de $\mathbf{L}(M)$. Alors la définition de type F1, coïncide avec celle de coformalité modérée. Mais on a vu dans 2.3.6 que les espaces de Moore ne sont pas (en général) coformels et donc ne sont pas de type F1 non plus. □

Commentaire 3.7.22. Le type F1 se revèle être un mauvais candidat pour une notion de formalité dans $\Re$-$\mathbf{CW}_{s+1}^N$, car il ne recouvre pas les espaces de Moore.

En calculant les premiers termes d'une déformation d'un espace de Moore ou d'un produit d'espaces de Moore on constate que celle-ci peut être choisie linéaire (sur les termes calculés).

3.7.23 Question ouverte. Soit $\mathbf{L}(M) = (\mathsf{L}(x,y), \partial y = px)$ un modèle d'espace de Moore. Notons $(\mathsf{L}(W), d)$ un modèle de $E^1(\mathsf{L}(x,y), \partial)$ et $(\mathsf{L}(W), d+\tau)$ son déformé. La déformation τ peut-elle être choisie linéaire?

Définition 3.7.24. Soit X un objet de $\mathfrak{R}$-$\mathbf{CW}^N_{s+1}$, notons $\mathbf{L}(X) = (\mathsf{L}(V), \partial)$ et soit $(\mathsf{L}(W), d)$ un modèle de $E^1(\mathsf{L}(W), d)$ et $(\mathsf{L}(W), d+\tau)$ son déformé. On dit que X est de ***type F2*** s'il existe $(\mathsf{L}(W'), d+\tau') \xleftrightarrow{\simeq} (\mathsf{L}(W), d+\tau)$, avec

$$\tau' : W' \to W'$$

Proposition 3.7.25. *Si X est de type F1, il est de type F2.*

Preuve: Si X est de type F1, alors $(\mathsf{L}(W), d+\tau)$ est dans le même type d'homotopie que $(\mathsf{L}(W), d)$ et donc on peut prendre $\tau' = 0$. □

Remarques 3.7.26. 1) Si la réponse à la question 3.7.23 est affirmative, les espaces de Moore seront de type F2.

2) En prenant $\mathfrak{R} = \mathbb{Q}$, les types F1 et F2 sont chacun équivalents à la formalité rationnelle.

3.7.27. Soit $A_H \to H_*(X)$ une $\mathfrak{R}$-résolution par des modules libres de $H_*(X)$; on remarque que le degré maximal dans A_H est $\leqslant N$ car H_N est sans torsion (il n'y a pas de cellule en degré $N+1$). Soit $(\mathsf{L}(V), d) = \mathbf{L}(X)$ un $\mathfrak{R}$-modèle cofibrant de $\lambda(X)$; on a une équivalence faible $\psi : A_H \to (V, d_0)$ qui d'après 3.2.1 induit une (R_*)-équivalence faible

$$\mathsf{L}(\psi) : \mathsf{L}(A_H) \to (\mathsf{L}(V), d_0).$$

Construisons un $\mathfrak{R}$-quasi-isomorphisme,

$$(\mathsf{L}(A_H \oplus W), D) \to (\mathsf{L}(V), d_0)$$

d'après le théorème de perturbation 1.3.7, il existe τ tel que

$$(\mathsf{L}(A_H \oplus W), D+\tau) \to (\mathsf{L}(V), d)$$

soit un $\mathfrak{R}$-quasi-isomorphisme aussi. Comme précédemment, (cf. 3.2.2) $\tau(A_H) \subset \mathsf{L}(A_H)$.

Définition 3.7.28. On dit que $(\mathsf{L}(V), d)$ est ***de type F3*** s'il existe τ tel que $\tau(A_H) \subset \mathsf{L}^2(A_H)$.

Remarque 3.7.29. Les suspensions (donc les espaces de Moore) sont de type F3. Il reste, pour cette étude, à montrer que ces notions (F1, F2, F3) sont des invariants du type de $\mathfrak{R}$-homotopie et à déterminer laquelle correspond à 3.7.4.

Bibliographie

[Ad] J. F. ADAMS : On the cobar construction, *Proc. N.A.S. USA* **42** (1956) 409–412.

[A–H] J. F. ADAMS–P.HILTON : On the chain algebras of a loop space, *Comment. Math. Helvet.* **30** (1956) 305–330.

[And] D. W. ANDERSON : Localizing CW-complexes, *Ill. Jour. Math.* **16** (1972) 519–525.

[An1] D. J. ANICK : Connections between Yoneda and Pontryagin algebras, *Proceedings of Stockholm 1983, Springer LN* **1183** (1986).

[An2] D. J. ANICK : Hopf algebras up to homotopy, *preprint.*

[An3] D. J. ANICK : Tame homotopy via Adams–Hilton models, *preprint.*

[An4] D. J. ANICK : An R-local Milnor–Moore theorem, *preprint.*

[An5] D. J. ANICK : R-local homotopy theory, preprint.

[Bar] M. BARR : Harrison homology, Hochschild homology and triples, *Jour. of Alg.* **8** (1968) 314–323.

[Ba1] H.J. BAUES : Algebraic Homotopy, Cambridge University Press 1989.

[Ba2] H.J. BAUES : On the homotopy classification problem, vol. 4, *Sonderforschungsbereich 40 Theor. Math., Univ. Bonn und Max–Planck–Institut für Mathematik, Bonn.*

[Berlin] P. BOULLAY–M. MAJEWSKI–H. SCHEERER–M. STELZER–M. UNSÖLD–E. VOGT : Tame homotopy via differential forms, *FU Berlin, Fachbereich Mathematik* **223** (1986).

[B–G] A. K. BOUSFIELD–V. K. A. M. GUGENHEIM : On PL de $\mathbb{R}$ham theory and rational homotopy type, *Mem. of the Amer. Math. Soc.* **179** (1976).

[C–M–N] F. R. COHEN–J. C. MOORE–J. NEISENDORFER : Torsion in homotopy groups, *Ann. of Math.* **109** (1979) 121–168.

[D] P. DELIGNE–P. GRIFFITHS–J. MORGAN–D. SULLIVAN : Real homotopy theory of Kähler manifolds, *Invent.Math.* **29** (1975) 245–274.

[Dw1] W. G. DWYER : Tame homotopy theory, *Topology* **18** (1979) 321–338.

[**Dw2**] W. G. DWYER : The tame homotopy groups of a suspension, *Proceedings of Evanston 1977, Springer LN* **658** (1978) 165–168.

[**El H**] M. EL HAOUARI : Théorie de la déformation et p-formalité des espaces, *Thèse, Louvain-la-Neuve* (1989).

[**Fé1**] Y. FÉLIX : Classification homotopique des espaces rationnels à cohomologie donnée, *Thèse, Louvain-la-Neuve* (1979).

[**Fé2**] Y. FÉLIX : Dénombrement des types de K-homotopie. Théorie de la déformation, *Mém. S.M.F.* **3** (1980).

[**F–H–T**] Y. FÉLIX–S. HALPERIN–J. C. THOMAS : Adams cobar equivalence and Eckmann–Hilton duality, *preprint.*

[**Ha**] S. HALPERIN : Lectures on minimal models, *Mém. Soc. Math. France* **9–10** (1983).

[**H–L**] S. HALPERIN–J. M. LEMAIRE : Notions of category in differential algebra, *Proceedings of Louvain-la-Neuve 1986, Springer LN* **1318** (1988) 138–154.

[**H–S**] S. HALPERIN–J. STASHEFF : Obstructions to homotopy equivalences, *Adv. in Math* **32** (1979) 233–279.

[**H–T**] S. HALPERIN–D. TANRÉ : Homotopie filtrée et fibrés $\mathcal{C}^\infty$, *à paraître dans Ill. Jour. Math.*

[**Hil**] P. J. HILTON : Note on quasi-Lie rings, *Fund. Math.* **43** (1956) 230–237.

[**H–R**] P. HILTON–J. ROITBERG : On the Zeeman comparison theorem for the homology of quasi-nilpotent fibrations, *Quart. J. Math. (2)* **27** (1976) 433–444.

[**H–K**] J. HÜBSCHMANN–T. KADEISHVILI : Minimal models for chain algebras over a local ring, *preprint.*

[**L–S**] L. LAMBE–J. D. STASHEFF : Applications of perturbation theory to iterated fibrations, *Manus. Math.* **58** (1987) 363–376.

[**La**] S. LANG : Algebra, *Addison–Wesley* (1971).

[**Leh**] D. LEHMANN : Théorie homotopique des formes différentielles, *S.M.F. Astérisque* **45** (1977).

[**Lem1**] J. M. LEMAIRE : Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets, *Springer LN* **422** (1974).

[**Lem2**] J. M. LEMAIRE : Modèles minimaux pour les algèbres de chaînes, *Publications de Lyon* **13** (1976) 13–26.

[**Lo**] J.L. LODAY : Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives, *Inv. math.* **96** (1989) 205–230.

[**Mau**] C. R. F. MAUNDER : Algebraic topology, *Cambridge University Press* (1970).

[**McC**] J. McCLEARY : A user's guide to spectral sequences, *Publish or Perish* (1984).

[**Me**] J. P. MERLE : Formalité des espaces et des applications continues, *Thèse de 3ème cycle, Nice* (1983).

[**Mu**] H.J. MUNKHOLM : DGA algebras as a Quillen model category, relations to shm maps, *Jour. of Pure and Appl. Alg.* **13** (1978) 221–232.

[**Ne**] J. NEISENDORFER : Primary homotopy theory, *Mem. of the Amer. Math. Soc.* **232** (1980).

[**Qu1**] D. QUILLEN : Homotopical algebra, *Springer LN* **43** (1967).

[**Qu2**] D. QUILLEN : Rational homotopy theory, *Ann. of Math.***90** (1969) 205–295.

[**S–T**] H. SCHEERER–D. TANRÉ : Exploring W.G.Dwyer's tame homotopy theory, preprint.

[**S–T2**] H. SCHEERER–D. TANRÉ : R-local homotopy theory as part of tame homotopy theory, à *paraître dans Bull. London Math. Soc.*.

[**S–T3**] H. SCHEERER–D. TANRÉ : The Milnor–Moore theorem in tame homotopy theory, *preprint.*

[**Sch**] K. SCHUCH : Zahme Homotopietheorie mit cofiltrierten Lie-Algebren und ein Milnor–Moore-Theorem, *Dissertation, Berlin* (1989).

[**Se**] J. P. SERRE : Homologie singulière des espaces fibrés (Applications), *Ann. of Math.* **54** (1951) 425–505.

[**Su**] D. SULLIVAN : Infinitesimal computations in topology, *Publ. I.H.E.S.* **47** (1977) 269–331.

[**Ta**] D. TANRÉ : Homotopie rationnelle : modèles de Chen, Quillen, Sullivan, *Springer LN* **1025** (1983).

[**V-P**] M. VIGUÉ-POIRRIER : Homologie de Hochschild et homologie cyclique des algèbres différentielles graduées, *preprint.*

[**Wh**] G. W. WHITEHEAD : Elements of homotopy theory, *Springer GTM* **61** (1978).

Index

G

M

O

P

Q

R

S

T

U

Appendice

Μετριασμένη συντυπικότητα καί τυπικότητα τῶν CW-συμπλεγμάτων πεπερασμένης διάστασης.

Εἰσαγωγή.

Ἡ ἀλγεβρική τοπολογία ἀντιστοιχεῖ ἀλγεβρικές δομές στούς τοπολογικούς χώρους. Οἱ δομές αὐτές μποροῦν νά μελετηθοῦν εὐκολότερα καί οἱ πληροφορίες πού περιέχουν μᾶς ἐπιτρέπουν μία κατάταξη τῶν τοπολογικῶν χώρων. Ὅσο πιό πολλές πληροφορίες ἀντλοῦμε ἀπό τούς τοπολογικούς χώρους, τόσο πιό πολύπλοκες καί δύσχρηστες γίνονται οἱ ἀλγεβρικές δομές. Χρειάζονται λοιπόν θεωρίες πού νά μεταφέρουν τήν πιό πολλή πληροφορία χρησιμοποιώντας τίς πιό ἁπλές δομές.

Ἕνα θεμελιῶδες βῆμα πρός αὐτή τή κατεύθυνση ἔκανε ὁ Ντ. Κουῆλεν στό "Rational Homotopy Theory" [**Qu2**]. Στή δημοσίευση αὐτή συσχετίζει τελεστικά σέ κάθε (2-ἀνηγμένο) πλεγματικό χῶρο (καί ἄρα σέ κάθε 1-συναφή τοπολογικό χῶρο) μία (1-ἀνηγμένη) διαβαθμισμένη διαφορική ἄλγεβρα Λῆ καί, ἀντίστροφα, ξεκινῶντας ἀπό μία διαβαθμισμένη διαφορική ἄλγεβρα Λῆ, κατασκευάζει ἕνα πλεγματικό χῶρο. Συνθέτοντας αὐτούς τούς δύο τελεστές, ἀποκτᾶμε ἕνα νέο πλεγματικό σύνολο στόν ἴδιο τύπο ρητῆς ὁμοτοπίας, ὅπως τό ἀρχικό πλεγματικό σύνολο.

Ὁ τύπος ρητῆς ὁμοτοπίας εἶναι προσέγγιση τοῦ τύπου ὁμοτοπίας: δύο χῶροι εἶναι τοῦ ἴδιου τύπου ρητῆς ὁμοτοπίας, ὅταν συνδέονται μέσω μιᾶς ἀκολουθίας μορφισμῶν πού παράγουν ὁμολογικούς ἰσομορφισμούς μέ ρητούς συντελεστές. Ἡ ἔννοια αὐτή προφανῶς δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό τμῆμα στρέψης τῶν ὁμάδων ὁμοτοπίας καί ἔτσι π.χ. ἕνας χῶρος Ἄϊλενμπεργκ-Μάκ Λέην $K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n)$ ταυτίζεται πρός ἕνα σημεῖο.

Ὁ τελεστής τοῦ Κουῆλεν εἶναι ἀρκετά πολύπλοκος· στό πλεγματικό σύνολο X ἀντιστοιχοῦμε πρῶτα τήν ὁμάδα βρόχων του GX καί μετά τόν πλεγματικό δακτύλιο ὁμάδας $\mathbb{Q}GX$. Συμπληρώνουμε τόν $\mathbb{Q}GX$ γιά νά ἀποκτήσουμε μιά πλήρη πλεγματική ἄλγεβρα Χόπφ· μένει μόνο νά πάρουμε τόν ὑποχῶρο τῶν ἀρχέγονων γεννητόρων καί νά κανονικοποιήσουμε γιά νά ἀποκτήσουμε τήν ζητούμενη διαβαθμισμένη διαφορική ἄλγεβρα Λῆ $\lambda(X)$. Ἡ σύντομη αὐτή περιγραφή δείχνει ὅτι μία ἄμεση κατασκευή δέν θά μᾶς βοηθοῦσε στήν ἀκριβή περιγραφή παραδειγμάτων.

Παρ'ὅλα αὐτά, ἡ δημοσίευση αὐτή τοῦ Κουῆλεν περιέχει ἕναν τρόπο μελέτης τῶν τύπων ρητῆς ὁμοτοπίας τοῦ ὁποίου ἡ χρησιμότητα ἐξισορροπεῖ τήν πολυπλοκότητα τοῦ τελεστή λ. Ἡ κατηγορία τῶν διαβαθμισμένων διαφορικῶν ἀλγεβρῶν Λῆ ἐμπεριέχει ὅλα τά συστατικά τά ἀπαραίτητα γιά τόν ὁρισμό μιᾶς ὁμοτοπίας: κύλινδρο, μοντέλα καί γενικώτερα μιά δομή κλειστῆς κατηγορίας μέ μοντέλα. Ἔτσι τό κύριο θεώρημα τοῦ Κουῆλεν διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: οἱ ὁμοτοπικές κατηγορίες πού ἀντιστοιχοῦν στίς κατηγορίες (2-ἀνηγμένων) πλεγματικῶν συνόλων καί (1-ἀνηγμένων) διαβαθμισμένων διαφορικῶν ἀλγεβρῶν Λῆ εἶναι ἰσόμορφες.

Ἄς ἐπισημάνουμε ὅτι τόσο ἀπό ἀλγεβρικῆς ὅσο καί ἀπό τοπολογικῆς πλευρᾶς ὑπάρχουν ἔννοιες ὁμάδων ὁμολογίας, ἀλγεβρῶν συνομολογίας καί ἀλγεβρῶν Λῆ ὁμοτοπίας, ἀντιστοιχοῦν μεταξύ τους, καί εἶναι ἀναλλοίωτα τύπου ρητῆς ὁμοτοπίας. Βέβαια, ἡ θεώρηση μίας τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν δέν ἀποδίδει γενικά ὁλόκληρο τόν τῦπο ρητῆς ὁμοτοπίας. Δέν μποροῦμε π.χ. νά ἀνασυστήσουμε τόν τῦπο ρητῆς ὁμοτοπίας τοῦ X ἀπ'τήν ἄλγεβρα Λῆ ὁμοτοπίας.

Στήν ἐργασία αὐτή θεωροῦμε ἀποκλειστικά τήν παρουσίαση διά μέσω διαφορικῶν ἀλγεβρῶν Λῆ ἀλλά ἡ ἱστορική αὐτή ἀναδρομή θά ἦταν πολύ ἐλλιπής ἄν δέν ἀναφέραμε τήν ἐργασία τοῦ Σάλλιβαν. Στήν δημοσίευση [**Su**] παρέχει τήν ἀναπαράσταση τοῦ τύπου ρητῆς ὁμοτοπίας τῶν πλεγματικῶν (μηδενοδύναμων, πεπερασμένου τύπου) χώρων μέσω ρητῶν διαβαθμισμένων ἀντιμεταθετικῶν διαφορικῶν ἀλγεβρῶν. Καί σ'αὐτό τό πλαίσιο ὑπάρχει τελεστική ἀντιστοιχία (ὑπό τήν μορφή ζεύγους συνημμένων τελεστῶν)· ἐπίσης ὁρίζεται δομή κλειστῆς κατηγορίας μέ μοντέλα πού ἐπιτρέπει τόν ὁρισμό ὁμοτοπίας (ὅρα [**B–G**]). Μία περίληψη βρίσκεται στό [**D**] ὅπου γιά πρώτη φορά συναντᾶμε τήν ἔννοια τῆς τυπικότητας.

Στήν παρουσίαση τοῦ Σάλλιβαν ὁ ὁρισμός τοῦ τυπικοῦ χώρου διατυπώνεται εὔκολα: ἕνας χῶρος X εἶναι τυπικός ἄν ὁ ἀλγεβρικός ἀντιπρόσωπός του εἶναι τοῦ ἴδιου τύπου ὁμοτοπίας μέ τήν ρητή ἄλγεβρα συνομολογίας του. Μέ ἄλλα λόγια, τυπικός χῶρος εἶναι αὐτός τοῦ ὁποίου ὁ τῦπος ρητῆς ὁμοτοπίας καθορίζεται πλήρως ἀπό τήν ἄλγεβρα συνομολογίας του.

Δυαδικά, ὁρίζουμε συντυπικούς χώρους σάν χώρους τῶν ὁποίων ὁ τῦπος ρητῆς ὁμοτοπίας καθορίζεται ἀπό τήν ἄλγεβρα Λῆ ὁμοτοπίας τους. Στήν παρουσίαση τοῦ Κουῆλεν, αὐτό ἰσοδυναμεῖ μέ τό γεγονός ὅτι ἡ ἄλγεβρα Λῆ $\lambda(X)$ πού ἀντιστοιχεῖ στόν χῶρο X εἶναι τοῦ ἴδιου τύπου ὁμοτοπίας μέ τήν ἄλγεβρα Λῆ ὁμολογίας της.

Εἴδαμε ὅτι μέ τήν κατασκευή τοῦ Σάλλιβαν οἱ τυπικοί χῶροι ἐκφράζονται εὔκολα· μποροῦν ὅμως νά χαρακτηρισθοῦν ἐπίσης μέσα στό πλαίσιο τοῦ Κουῆλεν. Ἄς ἀποσαφηνίσουμε πρῶτα τίς βασικές ἔννοιες τοῦ μοντέλου καί τοῦ ἐλάχιστου μοντέλου: ἕνα μοντέλο «τοῦ Κουῆλεν» ἑνός χώρου X εἶναι μία διαβαθμισμένη διαφορική ἄλγεβρα Λῆ, ἐλεύθερη σάν ἄλγεβρα Λῆ καί τοῦ ἴδιου τύπου ὁμοτοπίας μέ τήν $\lambda(X)$. Ἕνα μοντέλο λέγεται ἐλάχιστο, ἄν τό διαφορικό του δέν ἔχει γραμμικό μέρος. Κάθε πλεγματικός 2-ἀνηγμένος χῶρος δέχεται ἐλάχιστο μοντέλο. Δύο ἐλάχιστα μοντέλα τοῦ ἰδίου χώρου εἶναι ἰσόμορφα.

Ὁ Ζ. Μ. Λεμαίρ [**Lem2**] ἀποδεικνύει ὅτι ἕνας χῶρος εἶναι τυπικός, ἄν καί μόνο ἄν δέχεται ἕνα μοντέλο μέ καθαρά τετραγωνικό διαφορικό (δηλ. τέτοιο ὥστε τό διαφορικό ἑνός γεννήτορα γιά τήν δομή ἄλγεβρας Λῆ νά ἐκφράζεται σάν γραμμικός συνδιασμός ἀγκυλῶν μήκους 2). Θά μελετήσουμε λοιπόν τίς ἔννοιες τῆς τυπικότητας καί συντυπικότητας διά μέσου τῆς θεωρίας τοῦ Κουῆλεν, καί μάλιστα σ'ἕνα γενικώτερο πλαίσιο: *τῆς μετριασμένης ὁμοτοπίας*.

Ἡ θεωρία αὐτή γεννήθηκε μέ τό ἄρθρο "Tame Homotopy Theory" [**Dw1**] τοῦ Β. Τζ. Ντβάϋερ. Χρησιμοποιῶντας ταυτόχρονα τήν κατασκευή τοῦ Κουῆλεν καί τίς ἄλγεβρες Λαζάρ, ὁ Ντβάϋερ κατασκευάζει μία «γέφυρα» (πού σημειώνουμε πάντα λ) ἀνάμεσα στήν ἄλγεβρα καί τήν τοπολογία, συνδέοντας τούς (3-ἀνηγμένους) πλεγματικούς χῶρους μέ τίς (2-ἀνηγμένες) ἀκέραιες διαβαθμισμένες διαφορικές ἄλγεβρες Λῆ. Ἔτσι βρίσκει ἕναν τῦπο ὁμοτοπίας πιό πιστό στήν ἀκέραιη ὁμοτοπία ἀπό τόν ἀντίστοιχο τῆς ρητῆς ὁμοτοπίας: τόν τῦπο μετριασμένης ὁμοτοπίας (ὑπενθυμίζουμε τόν ὁρισμό του στό 2.1.13). Ὁ τῦπος αὐτός ἐξαρτᾶται ἀπό ἕνα μέρος τῆς στρέψης τῶν ὁμάδων ὁμοτοπίας, πού περιωρίζεται στίς διαστάσεις γιά τίς ὁποῖες ἡ ἀνηγμένη δύναμη Στῆνροντ εἶναι τετριμμένη. Ἡ 2-στρέψη π.χ. δέν ἐμφανίζεται παρά μόνο στήν πρώτη ὁμάδα ὁμοτοπίας· ἡ 3-στρέψη ἑνός 3-ἀνηγμένου πλεγματικοῦ χώρου σχοτώνεται στίς ὁμάδες διαστάσεων ἄνω τοῦ 6.

Ἄν τό μεγαλύτερο μέρος τῶν τεχνικῶν τῆς ρητῆς ὁμοτοπίας ἐφαρμόζεται καί στήν μετριασμένη ὁμοτοπία, ἄς ἐπισημάνουμε ὅτι ὁρισμένες δέν ὑφίστανται πιά. Ἡ παρουσία π.χ. ὁμολογικῆς στρέψης ἑνός χώρου X μεταφράζεται στό ἐπίπεδο τῶν μοντέλων μέ τήν ἐμφάνιση γραμμικοῦ μέρους τοῦ διαφορικοῦ καί ἡ ἔννοια ἐλάχιστου μοντέλου παύει νά ὑπάρχει. Μποροῦμε ἤδη νά προαισθανθοῦμε τίς δυσκολίες πού θά ἀντιμετωπίσουμε γιά τόν ὁρισμό τῆς τυπικότητας σ'αὐτό τό πλαίσιο.

Ἄς περάσουμε τώρα στήν περιγραφή τῆς ἐργασίας αὐτῆς-καθεαυτῆς.

Τό πρῶτο κεφάλαιο ἀναφέρεται στή θεωρία ταραχῆς διαβαθμισμένων διαφορικῶν ἀλγεβρῶν Λῆ. Ἡ θεωρία ταραχῆς ἐμφανίζεται ἤδη στήν προσέγγιση τῶν προβλημάτων τυπικότητας καί συντυπικότητας τῶν **[Fé]**, **[H–S]**, **[La]**, **[Ta]**. Ἡ ἀρχή της εἶναι ὡς ἑξῆς: ἐπαναβρίσκει τό ἑκάστοτε μαθηματικό ἀντικείμενο (π.χ. ἕναν τοπολογικό χῶρο) ταράζοντας ἕνα ἁπλό ἀντίστοιχο ἀντικείμενο (π.χ. ἕναν τυπικό ἤ συντυπικό χῶρο μέ τόν ἴδιο τῦπο ὁμοτοπίας). Τό ἀντικείμενο πού ἐξετάζουμε ἐμφανίζεται λοιπόν σάν παρέκκλιση τῆς κανονικῆς κατάστασης, παρρέκλιση πού μετρᾶμε μέ τήν βοήθεια ἑνός στοιχείου ἀλγεβρικῆς δομῆς, πού συχνά τυχαίνει νά εἶναι μία ἰδιαίτερη κλάση συνομολογίας.

Οἱ φασματικές ἀκολουθίες ἀποτελοῦν ἕνα χαρακτηριστικό παράδειγμα προσέγγισης· ἄς ὑπενθυμίσουμε μέ λίγα λόγια τήν κατευθυντήρια ἰδέα: ξεκινᾶμε μέ μία διϋλισμένη διαφορική δομή L. Ἡ δομή αὐτή ὁρίζει μία ἀκολουθία διπλοδιαβαθμισμένων ἀναλόγων δομῶν $E^r(L)$, πού ἀντικατοπτρίζουν μέ αὐξανόμενη πιστότητα τήν συνομολογία τῆς L. Ἀφ'ἧς στιγμῆς ἐπιλέξουμε τήν τιμή τοῦ δείκτη r, ἡ μελέτη τῆς L εἶναι πλέον μελέτη ταραχῆς διπλοδιαβαθμισμένων δομῶν. Τό ἔργο αὐτό ἔχει ἤδη συντελεσθεῖ ἀπό τούς Χάλπεριν καί Τανρέ **[H–T]** στό πλαίσιο τῶν ἀντιμεταθετικῶν διαβαθμισμένων διαφορικῶν ἀλγεβρῶν· τό μεταφέρουμε ἐδῶ στίς διαβαθμισμένες διαφορικές ἄλγεβρες Λῆ τῶν ὁποίων οἱ συντελεστές ἀνήκουν σ'ἕναν ἀντιμεταθετικό δακτύλιο R. Ξεκινᾶμε ἀπό ἕνα (διπλοδιαβαθμισμένο) μοντέλο τῆς $E^r(L)$, καί ταράζοντας τό διαφορικό (καί τόν μορφισμό, ὅρα 1.3.7) κατασκευάζουμε ἕνα (διϋλισμένο) μοντέλο τῆς L. Ἄν θέλουμε νά ἀναφερθοῦμε στήν πληροφορία πού περιέχεται στό μοντέλο, ἡ διαδικασία αὐτή ἐπαναφέρει διά μέσου τῆς ταραχῆς, τήν πληροφορία πού χάνεται ὅταν περνᾶμε στόν r-οστό ὅροφο τῆς φασματικῆς ἀκολουθίας. Τό κεφάλαιο εἶναι ἀφιερωμένο στήν ἀπόδειξη αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος.

Ἡ ἔννοια τῆς *(μετριασμένης) συντυπικότητας* πού προτείνουμε στό δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται μέ φυσικό τρόπο στό πλαίσιο τῆς μετριασμένης ὁμοτοπίας: μία διαβαθμισμένη διαφορική ἄλγεβρα Λῆ L εἶναι συντυπική ἄν εἶναι τοῦ ἴδιου τύπου ὁμοτοπίας μέ τήν ἄλγεβρα Λῆ ὁμολογίας της. Ἡ σχέση μέ τό πρῶτο κεφάλαιο φανερώνεται διά μέσου τῆς ἰδιαίτερης διΰλισης τῆς L πού ἀποκτᾶμε ἄν θεωρήσουμε ὅτι ὅλα τά στοιχεῖα εἶναι διϋλιστικοῦ βαθμοῦ 0, καί ἄν ἐπιλέξουμε $r = 1$. Ἡ ταραχή πού παρέχεται ἀπό τό πρῶτο κεφάλαιο μετράει λοιπόν τήν μή-συντυπικότητα τῆς L. Σάν παραδείγματα ἄς ἀναφέρουμε ὅτι οἱ σφαῖρες καί τά γινόμενα χώρων τῶν Ἀϊλενμπεργχ-Μάκ Λέην εἶναι μετριασμένα συντυπικά.

Ἀντίθετα, οἱ ἀναρτήσεις δέν εἶναι συνήθως· ἕνας χῶρος Μούρ τοῦ ὁποίου ἡ ὁμάδα ὁμολογίας ἔχει στρέψη δέν εἶναι μετριασμένα συντυπικός.

Παίρνοντας CW-συμπλέγματα πεπερασμένης διάστασης, μποροῦμε νά ἐργασθοῦμε μέ συντελεστές πού νά ἀνήκουν ὄχι σέ ἕνα σύστημα δακτυλίων ὅπως στήν περίπτωση τῆς μετριασμένης ὁμοτοπίας, ἀλλά σέ ἕναν μοναδικό δακτύλιο $\mathfrak{R}$: τόν δακτύλιο τοῦ συστήματος πού ἀντιστοιχεῖ στήν μεγαλύτερη διάσταση τοῦ συπλέγματος. Αὐτό ἔκανε ὁ Ἀνίκ στό [**An3**] ὅπου ἀντιστοιχεῖ (μή-τελεστικά) σέ κάθε CW-σύμπλεγμα X μία $\mathfrak{R}$-ἄλγεβρα Λῆ $\mathbf{L}(X)$ τῆς ὁποίας ἡ περιβάλλουσα ἄλγεβρα εἶναι $\mathfrak{R}$-μοντέλο τῶν Ἄνταμς–Χίλτον τοῦ X. Ἀναπτύσσουμε τό τρίτο κεφάλαιο σ'αὐτό τό πλαίσιο. Θεωρῶντας μόνο CW-συμπλέγματα μέ ὁμολογία δίχως στρέψη ἀποκτᾶμε ἀποτελέσματα καί ἔννοιες ἀνάλογες μέ τήν περίπτωση τῆς ρητῆς ὁμοτοπίας: ὕπαρξη καί μοναδικότητα ἐλάχιστου μοντέλου, μία ἔννοια $\mathfrak{R}$-τυπικότητας καί μία ἀκολουθία ἐμποδίων στήν $\mathfrak{R}$-τυπικότητα πού ἀποτελεῖται ἀπό κλάσεις συνομολογίας τοῦ Χάρρισον. Σάν παραδείγματα ἀναφέρουμε τίς σφαῖρες, τίς δέσμες καί γινόμενά τους, καθώς καί τούς μιγαδικούς προβολικούς χώρους.

Ἔπειτα στρεφόμαστε πρός τίς τανυστικές ἄλγεβρες. Πράγματι, θεωρῶντας (ὅπως προηγουμένως) $\mathfrak{R}$-ἐντοπισμένα CW-συμπλέγματα πεπερασμένης διάστασης χωρίς ὁμολογική στρέψη, ἀποκτᾶμε ἀποτελέσματα σέ ἀναλογία μέ τά προηγούμενα: τήν ὕπαρξη καί μοναδικότητα ἑνός ἐλάχιστου μοντέλου τῶν Ἄνταμς-Χίλτον, μία ἔννοια $\mathfrak{R}$-AH-τυπικότητας καί μία ἀκολουθία ἐμποδίων στήν $\mathfrak{R}$-AH-τυπικότητα πού ἀποτελεῖται ἀπό κλάσεις συνομολογίας τοῦ Χόχσιλντ.

Ἡ σύνδεση ἀνάμεσα στίς δύο προσεγγίσεις ἐπιτυγχάνεται στό θεώρημα 3.6.8 ὅπου ἀποδεικνύουμε ὅτι σέ ὁρισμένους βαθμούς ὑπάρχει ἕνας μονομορφισμός τῆς συνομολογίας τοῦ Χάρρισον στήν συνομολογία τοῦ Χόχσιλντ. Τό ἀποτέλεσμα αὐτό, πού ἐπεκτείνει τό ἀντίστοιχο στήν ρητή περίπτωση ἀποτέλεσμα τοῦ Μέρλ [**Me**], μᾶς ἐπιτρέπει νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ ἔννοιες $\mathfrak{R}$-τυπικότητας καί $\mathfrak{R}$-AH-τυπικότητας εἶναι ἰσοδύναμες.

Στήν παράγραφο 3.7 θεωροῦμε ἕναν ἄλλο ὁρισμό $\mathfrak{R}$-τυπικότητας CW-συμπλεγμάτων πεπερασμένης διάστασης, πού χρησιμοποιεῖ τήν ἄλγεβρα κυβικῶν ἰδιαιτέρων συναλυσίδων καί τήν ἄλγεβρα συνομολογίας τοῦ CW-συμπλέγματος. Αὐτός ὁ ὁρισμός ἔχει τό προσόν νά ἐπεκτείνεται στή περίπτωση τῶν CW-συμπλεγμάτων μέ ὁμολογική στρέψη. Ἀποδεικνύουμε ὅτι εἶναι γενίκευση τῆς προηγούμενης ἔννοιας. Ἔτσι, οἱ χῶροι τοῦ Μούρ, οἱ δέσμες τους καί γενικώτερα οἱ ἀναρτήσεις εἶναι $\mathfrak{R}$-συντυπικές.

Στό 3.7.17, συγκρίνουμε τήν ἔννοια τῆς $\mathfrak{R}$-τυπικότητας μέ αὐτή τῆς p-AH-τυπικότητας τοῦ Ἀνίκ (ὕπαρξη μοντέλου τῶν Ἄνταμς-Χίλτον μέ συντελεστές στό $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ καί τετραγωνικό διαφορικό).

Τέλος θέτουμε τό ἐρώτημα τῆς ὕπαρξης μίας ἔννοιας τυπικότητας πού νά μπορεῖ νά ἀνιχνευθεῖ ὄχι στό ἐπίπεδο τοῦ συμπλέγματος τῶν συναλυσίδων, ἀλλά τῆς ἄλγεβρας Λῆ τοῦ Ἀνίκ. Προτείνουμε τέτοιες ἔννοιες, πού ὀνομάζουμε «τῦπο F1», «τῦπο F2», «τῦπο F3».